

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 200

**СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА
I**

ТАЛЛИН 1963

Er.6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 200 1963

УДК 624

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА
I

ТАЛЛИН 1963

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
1. И. И. Ааре. О влиянии жесткости контурных ребер на сжатие на напряженное состояние упругих пластин при поперечной нагрузке	3
2. И. И. Ааре. Изгиб гибких пластин, шарнирно опертых по ребрам, жесткость которых на сжатие и изгиб имеет конечное значение	15
3. Л. А. Алликас. О расчете предварительно напряженных балок-стенки	33
4. В. Р. Кульбах. Температурные напряжения в тонкой упругой пластине при наличии источника тепла на контуре пластины	49
5. В. Р. Кульбах. Упрощенный расчет предварительно напряженных висячих покрытий отрицательной кривизны	63
6. Э. Ю. Соонурм. Расчет тонкостенных стержней замкнутого сечения на кручение	81
7. А. А. Сумбак. Расчет цилиндрических оболочек с предварительно напряженными стрингерами	135
8. А. О. Юргенсон. Гидравлические динамометры новой конструкции	145
9. Х. А. Орувез. Исследование акустико-статистических характеристик исполнения крупного вокального ансамбля	163
10. Х. А. Орувез. Теория и практика применения акустических экранов для массовых ансамблей	187
11. Х. А. Орувез. Исследование эффекта акустических экранов на акустический баланс помещений	205
12. Х. А. Орувез. Исследование акустики залов с точки зрения геометрической акустики	225
13. Х. Х. Лауль, М. Х. Лейбур. Практический метод расчета квадратных в плане железобетонных оболочек вида гиперболического параболоида	243
14. М. Х. Лейбур. Экспериментальное исследование квадратных в плане железобетонных оболочек вида гиперболического параболоида	257

Статьи 1—10 поступили в редакцию
13 августа 1962 г., статьи 11—14
26 июня 1963 г.

Ep. 5531



УДК 624.041.6

И. И. Ааре

**О ВЛИЯНИИ ЖЕСТКОСТИ КОНТУРНЫХ РЕБЕР НА
 СЖАТИЕ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГИХ
 ПЛАСТИН ПРИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКЕ**

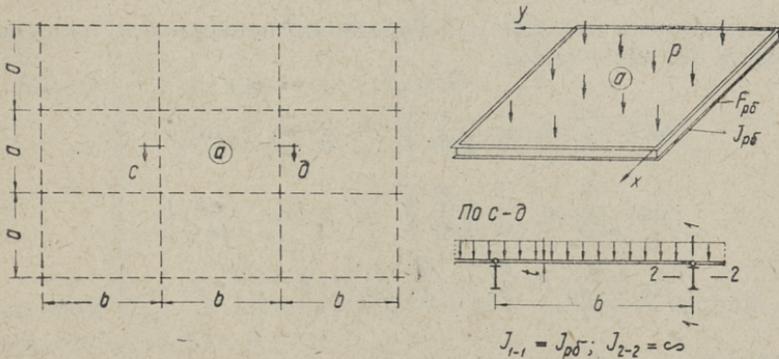
А. Постановка задачи

Как известно, работа пластины, опертой прямоугольным контуром (поясами или ребрами), в значительной мере зависит от жесткости контура. Поэтому вопрос о поведении гибких пластин при больших нагрузках и реальных краевых условиях (т. е. с учетом фактической жесткости контура) представляет большой практический, а также теоретический интерес.

В связи с этим в настоящей статье рассматривается влияние жесткости ребер на сжатие на напряженное состояние пластин, нагруженных поперечной нагрузкой p , перпендикулярной к ее срединной поверхности.

Б. Решение задачи

Рассмотрим плоские перекрытия, подкрепленные некоторым количеством поперечных и продольных ребер (фиг. 1).



Фиг. 1

При расчете средних полей (u) можно предполагать, что при поперечном изгибе контур пластины в своей плоскости не искривляется.

Состояние равновесия пластины определим решением уравнения Кармана

$$\nabla^2 \nabla^2 F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (1)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 W = p + t \left(\tau_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tau_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (2)$$

где

$F(x, y)$ — функция напряжений,

$W(x, y)$ — прогиб пластины.

Функция напряжений $F(x, y)$ определяет ценные напряжения

$$\tau_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \tau_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Изгибные напряжения находим из выражений

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \pm \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma'_y &= \pm \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= \pm \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Компоненты деформаций срединной поверхности пластины находим из выражений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = 2 \frac{1+\mu}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из уравнений (1), (2) можно получить исходные дифференциальные уравнения для различных частных случаев.

Выбирая форму изогнутой поверхности пластины в виде

$$\omega = \sum_m \sum_n \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (6)$$

($m+n$ — четное число),

выражаем функцию напряжения в виде

$$\begin{aligned} F = & \sum_m \sum_n F_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum \cos \frac{\rho\pi x}{a} \left[A_p \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + B_p \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + C_p y \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + \right. \\ & \left. + D_p y \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} \right] + \sum \cos \frac{\rho\pi y}{b} \left[\bar{A}_p \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} + \bar{B}_p \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} + \bar{C}_p x \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} + \bar{D}_p x \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} \right] + \\ & + F_1 \frac{x^2}{2} + F_2 \frac{y^2}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где F_{mn} — определяются из уравнения совместности деформации (1) через $\omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{31}, \omega_{33}, \dots$,

$A_p, B_p, \dots, F_1, F_2$ — постоянные интегрирования.

Задаваясь определенными численными значениями жесткости ребер на сжатие $\beta_1 = \frac{F_{p\beta_1}}{at}$, $\beta_2 = \frac{F_{p\beta_2}}{bt}$ (где $F_{p\beta}$ — площадь поперечного сечения ребер, t — толщина пластинки), определяем неизвестные постоянные $A_p, B_p, \dots, F_1, F_2$ из условий сопряжений ребра и пластинки.

Неизвестные параметры функции прогиба (6) $\omega_{11}, \omega_{13}, \dots$ определяются вариационным методом Б. Г. Галеркина.

Для упрощения дальнейших выкладок рассмотрим в настоящей статье только квадратные пластинки.

В таком случае

$$A_p = \bar{A}_p, \quad B_p = \bar{B}_p, \dots \text{ и т. д.}$$

Выбирая выражение для прогиба

$$\begin{aligned} \omega = & \omega_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + \omega_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} + \\ & + \omega_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + \omega_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a}, \end{aligned} \quad (8)$$

получаем F_{mn} в виде алгебраических полином второй степени относительно $\omega_{11}, \omega_{13}, \dots$

При $a = \frac{a}{b}$:

$$\begin{aligned}
F_{02} &= \frac{E}{32\alpha^2} (W_{11}^2 + 9W_{31}^2 - 2W_{11}W_{13} - 18W_{31}W_{33}), \\
F_{20} &= \frac{E}{32} \alpha^2 (W_{11}^2 + 9W_{31}^2 - 2W_{11}W_{13} - 18W_{31}W_{33}), \\
F_{22} &= \frac{E\alpha^2}{32(1+\alpha^2)^2} (-32W_{13}W_{31} + 8W_{11}W_{31} + 8W_{11}W_{13}), \\
F_{04} &= \frac{E}{32\alpha^2} \left(\frac{1}{2} W_{11}W_{13} + \frac{9}{2} W_{31}W_{33} \right), \\
F_{40} &= \frac{E}{32} \alpha^2 \left(\frac{1}{2} W_{11}W_{13} + \frac{9}{2} W_{31}W_{33} \right), \\
F_{06} &= \frac{E}{32\alpha^2} \left(\frac{1}{9} W_{13}^2 + W_{33}^2 \right), \\
F_{60} &= \frac{E}{32} \alpha^2 \left(\frac{1}{9} W_{13}^2 + W_{33}^2 \right), \\
F_{24} &= \frac{E\alpha^2}{64(1+4\alpha^2)^2} (36W_{11}W_{33} + 100W_{13}W_{31} - 4W_{11}W_{13}), \\
F_{42} &= \frac{E\alpha^2}{64(4+\alpha^2)^2} (36W_{11}W_{33} + 100W_{13}W_{31} - 4W_{11}W_{13}), \\
F_{26} &= \frac{144E\alpha^2}{64(1+9\alpha^2)^2} W_{13}W_{33}, \\
F_{62} &= \frac{144E\alpha^2}{64(9+\alpha^2)^2} W_{31}W_{33}, \\
F_{44} &= -\frac{16E\alpha^2}{256(1+\alpha^2)^2} W_{13}W_{31}, \\
F_{46} &= -\frac{36E\alpha^2}{64(4+9\alpha^2)^2} W_{13}W_{33}, \\
F_{64} &= -\frac{36E\alpha^2}{64(9+4\alpha^2)^2} W_{31}W_{33}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Как известно, решение задачи получается тем более точным, чем больше членов ряда (8) учитывается. Численный анализ показывает, что в данном случае получаем достаточную точность при сохранении только первого члена ряда (8)

$$\omega = \omega_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}. \tag{10}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
F_{C2} &= \frac{E}{32} \omega_{11}^2, \\
F_{20} &= \frac{E}{32} \omega_{11}^2.
\end{aligned} \tag{9a}$$

Граничные условия для определения A_p, B_p, C_p, D_p следующие:

1) Относительные удлинения ребер и пластины должны быть одинаковыми:

$$\left. \begin{aligned} x = 0, a & \quad \varepsilon_y^{p\delta} = \varepsilon_y^{n\lambda}, \\ y = 0, a & \quad \varepsilon_x^{p\delta} = \varepsilon_x^{n\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

2) При прогибе пластины ее края остаются прямолинейными:

$$\left. \begin{aligned} x = 0, a & \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ y = 0, a & \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Используя граничные условия согласно фиг. 2 находим выражения продольных удлинений пластинки:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y_{x=0}}^{n\lambda} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = \frac{1}{E} \left\{ - \sum_m \sum_n (m^2 - \mu n^2) \frac{\pi^2}{a^2} F_{mn} \cos \frac{n\pi y}{a} + (1 - \mu) F_1 - \right. \\ \left. - \sum_p \sum_{n=1} \frac{\rho^2 \pi^2}{a^2} D_{pn} \cos \frac{n\pi y}{a} + \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \left[(1 + \mu) A'_n + \frac{2}{n\pi} D_n \right] \cos \frac{n\pi y}{a} - \right. \\ \left. - \mu \sum_p \sum_{n=1} C_{pn} \cos \frac{n\pi y}{a} - \sum_p \frac{\rho^2 \pi^2}{a^2} D_{p0} - \mu \sum_p C_{p0} \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\text{где 1) } A_n = \sigma A'_n; \quad B_n = \sigma B'_n, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad A_p ch \frac{\rho \pi y}{a} + B_p sh \frac{\rho \pi y}{a} + C_p y ch \frac{\rho \pi y}{a} + D_p y sh \frac{\rho \pi y}{a} = \\ = D_{p0} + \sum_n D_{pn} \cos \frac{n\pi y}{a}; \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{\rho^2 \pi^2}{a^2} \left[A'_p ch \frac{\rho \pi y}{a} + B'_p sh \frac{\rho \pi y}{a} + C_p \left(\frac{y}{a} ch \frac{\rho \pi y}{a} + \frac{2}{\rho \pi} sh \frac{\rho \pi y}{a} \right) + \right. \\ \left. + D_p \left(\frac{y}{a} sh \frac{\rho \pi y}{a} + \frac{2}{\rho \pi} ch \frac{\rho \pi y}{a} \right) \right] = C_{p0} + \sum_n C_{pn} \cos \frac{n\pi y}{a}. \quad (16) \end{aligned}$$

Берем конкретное значение $\rho = 2$, тогда:

$$\begin{aligned} D_{20} = \frac{a}{\pi} (133,872445 A_2' + 133,373380 B_2' + 112,645497 C_2 + \\ + 112,567045 D_2); \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{22} = \frac{a}{\pi} (133,87244 A_2' + 133,37338 B_2' + 133,87244 C_2 + \\ + 133,87340 D_2); \quad (18) \end{aligned}$$

$$C_{20} = \frac{\pi}{a} (535,48973A_2' + 533,49352B_2' + 790,21426C_2 + 791,171148D_2); \quad (19)$$

$$C_{22} = \frac{\pi}{a} (535,48973A_2' + 533,49360B_2' + 705,30608C_2 + 705,94520D_2). \quad (20)$$

Относительные удлинения ребер при $x = 0$:

$$\varepsilon_y^{p\delta} = -\frac{p_1}{E} - \frac{t}{EF_{p\delta}} \int_0^y \tau_{x=0} dy = -\frac{p_1}{E} + \frac{t}{EF_{p\delta}} \sum_n (n\pi B_n' + C_n) \cos \frac{n\pi y}{a} - \frac{t}{EF_{p\delta}} \sum_n (n\pi B_n' + C_n). \quad (21)$$

Приравнявая $\varepsilon_y^{p\delta} = \varepsilon_y^{n,l}$ по (13) и (21) и сравнивая коэффициенты при косинусах одинаковой кратности, получаем:

$$a) \quad n^2 \pi^2 \left[(1+\mu) A_n' + \frac{2}{n\pi} D_n \right] - \sum_p \frac{\rho^2 \pi^2}{a} D_{pn} - \mu a \sum_p C_{pn} = \sum_m \frac{\pi^2}{a} (m^2 - \mu n^2) F_{mn} + \frac{at}{F_{p\delta}} (n\pi B_n' + C_n), \quad (22)$$

$$b) \quad (1-\mu) F_1 + p_1 = \sum_m \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_{m0} - \frac{t}{F_{p\delta}} \sum_n (n\pi B_n' + C_n) + \sum_p \frac{\rho^2 \pi^2}{\eta^2} D_{p0} + \mu \sum_p C_{p0} \quad (23)$$

Аналогично при $x = a$, получим из условия $E_{y|_{x=a}}^{\pi\lambda} = E_{y|_{x=0}}^{p\delta}$

$$\begin{aligned} & n^2 \pi^2 \left\{ (1+\mu) \operatorname{ch} n\pi A_n' + (1+\mu) \operatorname{sh} n\pi B_n' + \left[(1+\mu) \operatorname{ch} n\pi + \frac{2}{n\pi} \operatorname{sh} n\pi \right] C_n + \right. \\ & \left. + \left[(1+\mu) \operatorname{sh} n\pi + \frac{2}{n\pi} \operatorname{ch} n\pi \right] D_n - \sum_p \frac{\rho^2 \pi^2}{a} (-1)^n D_{pn} - \mu a \sum_p (-1)^n C_{pn} = \right. \\ & = \sum_m \frac{\pi^2}{a^2} (-1)^m (m^2 - \mu n^2) F_{mn} - \frac{at}{F_{p\delta}} \left[n\pi \operatorname{sh} n\pi A_n' + n\pi \operatorname{ch} n\pi B_n' + \right. \\ & \left. + (n\pi \operatorname{sh} n\pi + \operatorname{ch} n\pi) C_n + (n\pi \operatorname{ch} n\pi + \operatorname{sh} n\pi) D_n \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Граничное условие при $x = 0, a$ — дает контактное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{E} \left[(2+\mu) \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right] = 0 \quad (25)$$

Откуда получаем:

а) $\chi = 0$

$$(1+\mu)\pi\pi B'_n - (1-\mu)C_n = 0, \quad (26)$$

б) $\chi = a$

$$(1+\mu)\operatorname{sh}n\pi A'_n + (1+\mu)\operatorname{ch}n\pi B'_n + [(1+\mu)\operatorname{sh}n\pi - (1-\mu)\frac{\operatorname{ch}n\pi}{\pi}]C_n + \\ + [(1+\mu)\operatorname{ch}n\pi - (1-\mu)\frac{\operatorname{sh}n\pi}{\pi}]D_n = 0 \quad (27)$$

Решая уравнения (22), (24), (26) и (27), находим при $n = 2, \mu = 0,3$:

$\frac{F_{p6}}{at}$	$\frac{1}{N_2} A_2'$	$\frac{1}{N_2} B_2'$	$\frac{1}{N_2} C_2$	$\frac{1}{N_2} D_2$
0,25	0,029889	-0,030465	-0,355495	0,356122
0,50	0,022265	-0,023020	-0,268821	0,269413
1,0	0,020122	-0,020819	-0,242926	0,243686
2,0	0,018918	-0,019523	-0,227807	0,223466
∞	0,018156	-0,018913	-0,220697	+0,221523

где $N_n = \sum_m F_{mn} \frac{\pi}{a} (m^2 - \mu n^2)$;

при $n = 2, N_2 = -0,0375 \frac{\pi E}{a} \omega_{11}^2$.

Дополнительные уравнения для определения p_1 и F_1 получаем из условия равновесия ребер, а именно (см. фиг. 2)

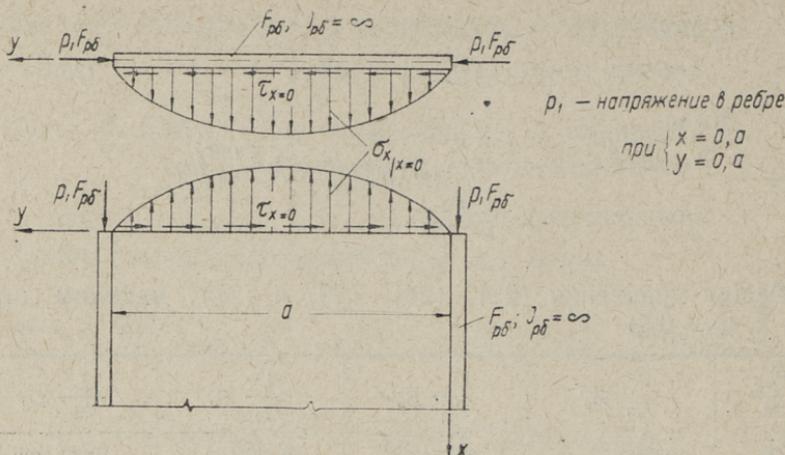
$$\Sigma X = 0:$$

$$2p_1 = F_1 \frac{at}{F_{p6}} + \sum_p C_{po} \frac{at}{F_{p6}}. \quad (28)$$

Решая уравнения (23) и (28) при $n = 2, \mu = 0,3$ находим:

$$\frac{F_{p6}}{at} = 0, F_1 = 0; \quad (29)$$

$$\frac{F_{p6}}{at} = 0,5, F_1 = 0,0685 E\pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a}\right)^2; \quad (30)$$



Фиг. 2

$$\frac{F_{p\delta}}{at} = 1,0, \quad F_1 = 0,10038 \quad E\pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2; \quad (31)$$

$$\frac{F_{p\delta}}{at} = 2,0, \quad F_1 = 0,1310 \quad E\pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2; \quad (32)$$

$$\frac{F_{p\delta}}{at} = 5,0, \quad F_1 = 0,15625 \quad E\pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2; \quad (33)$$

$$\frac{F_{p\delta}}{at} = \infty, \quad F_1 = 0,1895 \quad E\pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2. \quad (34)$$

Неизвестные параметры функции прогиба ω_{mn} определяем, интегрируя уравнение (2) методом Галеркина. Для квадратной пластинки имеем следующие зависимости функции прогиба от нагрузки (при $\mu = 0,3$):

$$1) \quad \frac{F_{p\delta}}{at} = \infty;$$

$$22,0 \frac{\omega_{11}}{t} + 28,97 \left(\frac{\omega_{11}}{t} \right)^3 = p^*; \quad (35)$$

$$2) \quad \frac{F_{p\delta}}{at} = 5,0$$

$$22,0 \frac{\omega_{11}}{t} + 26,8 \left(\frac{\omega_{11}}{t} \right)^3 = p^*; \quad (36)$$

$$3) \quad \frac{F_{p\delta}}{at} = 1,0$$

$$22,0 \frac{w_{11}}{t} + 19,8 \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^3 = p^*; \quad (37)$$

$$4) \frac{F_{p\delta}}{at} = 0,5$$

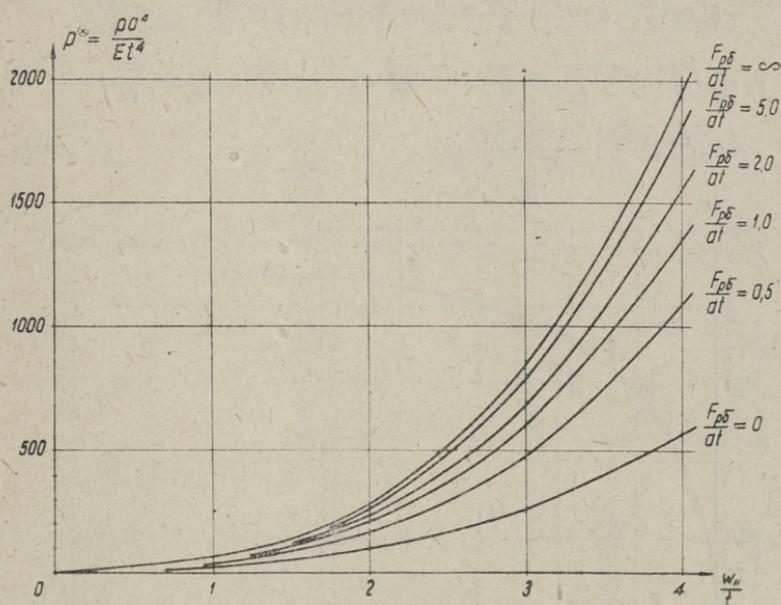
$$22,0 \frac{w_{11}}{t} + 15,6 \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^3 = p^*; \quad (38)$$

$$5) \frac{F_{p\delta}}{at} = 0$$

$$22,0 \frac{w_{11}}{t} + 7,5 \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^3 = p^*; \quad (39)$$

где $p^* = \frac{\rho a^4}{Et^4}$.

Зависимости (35) — (39) представлены графически на фиг. 3.



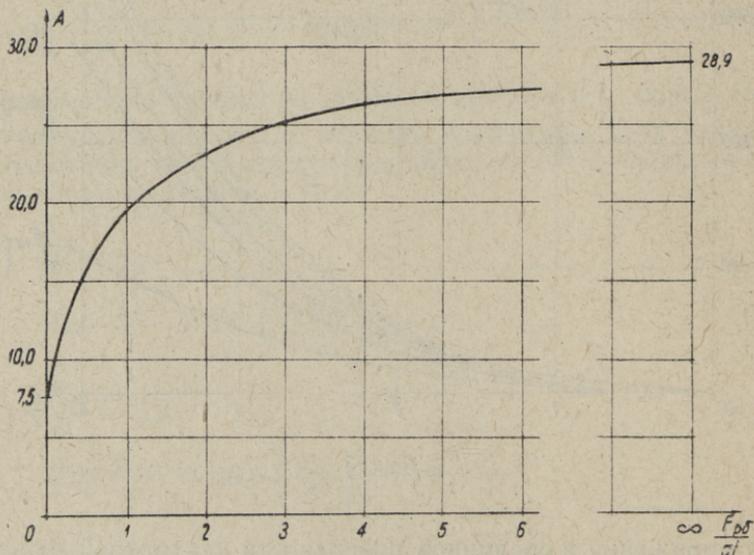
Фиг. 3

Напряжения в срединной поверхности квадратной пластинки находим из выражений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sum_m \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{a^2} F_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} + \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \left[A'_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B'_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C_n \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{2}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) + D_n \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{2}{n\pi} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \right) \right] - \sum \frac{n^2 \pi^2}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \left[A'_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + B'_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} + C_n \frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + D_n \frac{x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} \right] + F_1, \quad (40)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sum_m \sum_n \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} - \sum \frac{n^2 \pi^2}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \left[A'_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B'_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C_n \frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] + \sum \frac{n^2 \pi^2}{a} \left[A'_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + B'_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} + C_n \left(\frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + \frac{2}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} \right) + D_n \left(\frac{x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} + \frac{2}{n\pi} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} \right) \right] \cdot \cos \frac{n\pi y}{a} + F_1, \quad (41)$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\sum_m \sum_n \frac{mn\pi^2}{a^2} F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} + \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \left[A'_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + B'_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + C_n \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{1}{n\pi} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \right) + D_n \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{1}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \right] + \sum \frac{n^2 \pi^2}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \left[A'_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} + B'_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + C_n \left(\frac{x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} + \frac{1}{n\pi} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} \right) + D_n \left(\frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + \frac{1}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} \right) \right] \quad (42)$$



Фиг. 4

Как видим из (35)—(39), прогиб квадратной пластинки можно определить из кубического уравнения

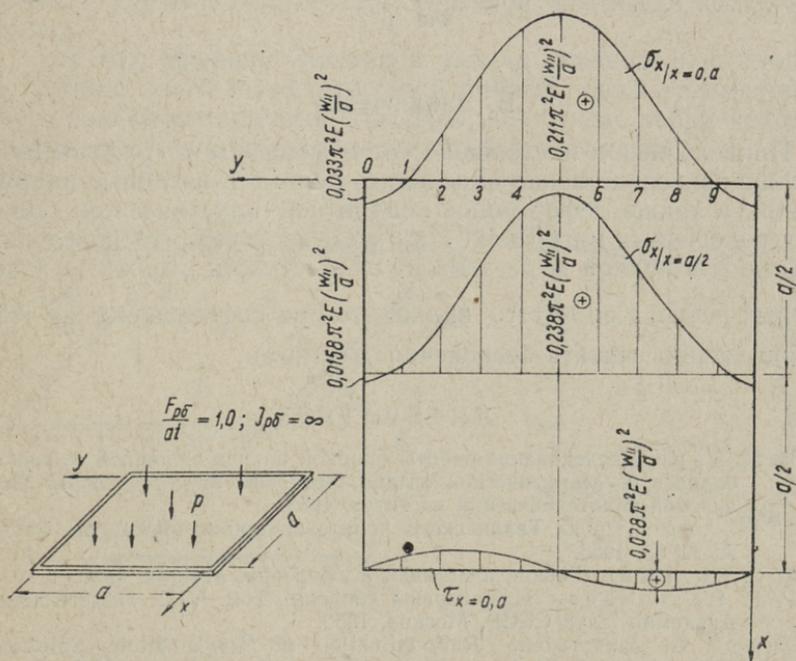
$$22,0 \frac{\omega_{11}}{t} + A \left(\frac{\omega_{11}}{t} \right)^3 = p^* \quad (43)$$

Численные значения коэффициента A в зависимости от жесткости ребер на сжатие находим из графика фиг. 4.

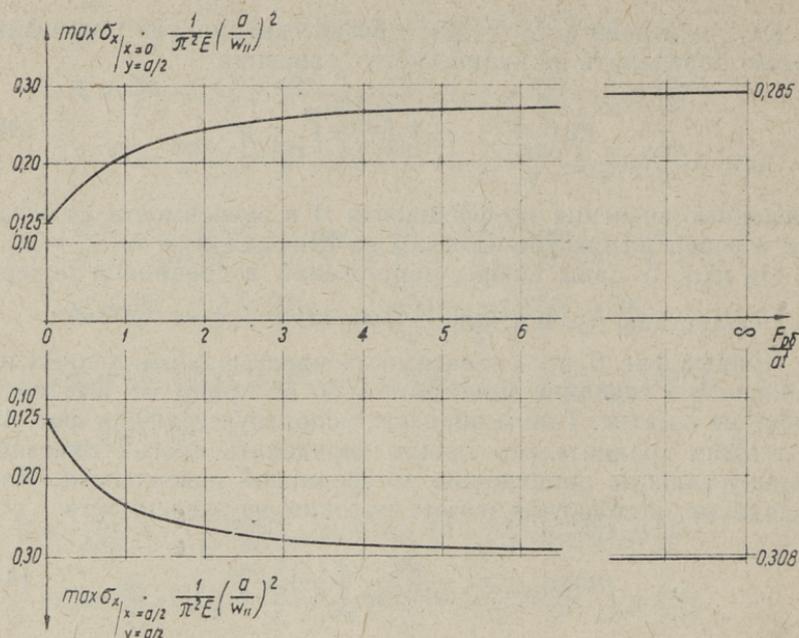
На фиг. 5 даны эпюры напряжений в срединной поверхности пластины σ_x и τ при $\frac{F_{p\delta}}{at} = 1,0$.

Кривые фиг. 6 дают зависимость максимальных цепных напряжений в середине пластины и по ее краям от жесткости ребер на сжатие. Таким образом, используя графики фиг. 4 и 6, сможем сравнительно просто определить прогиб пластины и максимальные напряжения ее срединной поверхности. Максимальные напряжения изгиба находим из зависимости

$$\max \sigma_{\text{хизг}} = \frac{\pi^2 E}{2(1-\mu)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \frac{\omega_{11}}{t} \quad (44)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

В. Заключение

Приведенные в настоящей статье формулы и графики позволяют непосредственно определить цепные и изгибные напряжения, а также деформации квадратной пластины при больших поперечных нагрузках. При этом явствует, что поведение пластины в полной мере зависит от жесткости на сжатие контурных ребер. Кроме того видно, что при соотношении $\frac{F_{pb}}{at} > 5$, ребра можно считать бесконечно жесткими.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Ааре. Исследование работы опорной панели сплошной стальной балки в послекритической стадии. Автореферат диссертации. Таллинский политехнический институт, 1953.
2. И. И. Ааре. Труды Таллинского политехнического института. Серия А, № 65, 1955.
3. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. Москва, 1956.
4. Г. Г. Ростовцев. Инженерный сборник. Том. VIII. Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1950.
5. Bengt Å. Åkesson. Rationalization of Levy's Plate Solution. Transaction of Chalmers University of Technology. Göthenburg, Sweden, № 252, 1961.

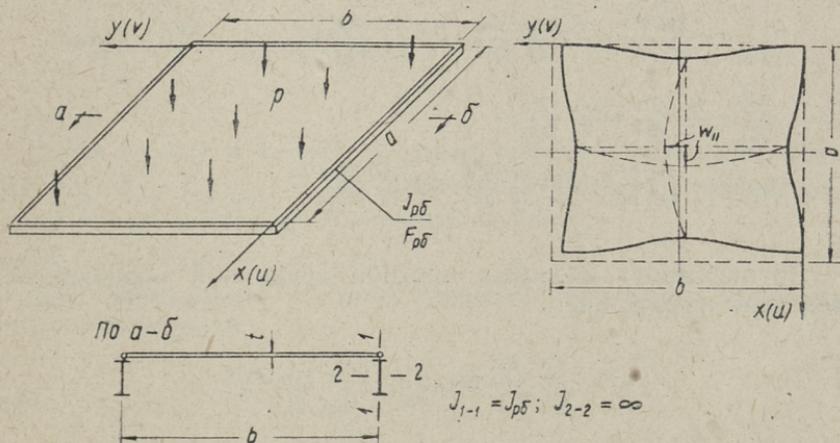
И. И. Ааре

ИЗГИБ ГИБКИХ ПЛАСТИН, ШАРНИРНО ОПЕРТЫХ ПО РЕБРАМ, ЖЕСТКОСТЬ КОТОРЫХ НА СЖАТИЕ И ИЗГИБ ИМЕЕТ КОНЕЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ

А. Постановка задачи

При проектировании металлических конструкций часто встречается необходимость расчета упругих плит, нагруженных поперечной нагрузкой, с учетом податливости контурных ребер. В связи с этим в настоящей статье рассматривается задача определения напряженного и деформированного состояния упругих пластин при конечной жесткости контурных ребер.

Так как решение указанной задачи сравнительно сложно и требует много вычислительной работы, здесь рассматриваются только квадратные пластины, контурные ребра которых имеют конечную жесткость на изгиб и на сжатие.



Фиг. 1

Б. Решение задачи

При исследовании напряженного состояния пластины при общих краевых условиях оказывается целесообразным решить задачу в перемещениях (фиг. 1).

При отсутствии объемных сил основные уравнения теории упругости принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Подставляя в уравнения равновесия значения напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \tau &= \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \\ = - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \\ = - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Аппроксимируя функцию прогиба срединной поверхности пластины выражением

$$\omega = \sum_m \sum_n \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (4)$$

можем решение уравнения (3), (4) написать в форме:

$$\begin{aligned}
u = & U(x, y) + \sum_m \sin \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{a}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \right. \\
& + D_m \left(y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{a}{m\pi} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \left. \right) - \sum_m \cos \frac{m\pi y}{b} \left(E_m \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} + F_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} + \right. \\
& + G_m \left(x \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{b}{m\pi} \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} \right) + H_m \left(x \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{b}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} \right) \left. \right) + \\
& + \sum_p \cos \frac{p\pi x}{a} \left(\bar{A}_p \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} + \bar{B}_p \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{a} + \bar{C}_p \left(y \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} + \frac{a}{p\pi} \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{a} \right) + \right. \\
& + \bar{D}_p \left(y \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{a} + \frac{a}{p\pi} \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} \right) \left. \right) + \sum_p \sin \frac{p\pi y}{a} \left(\bar{E}_p \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{b} + \bar{F}_p \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{b} + \right. \\
& + \bar{G}_p \left(x \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{b} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{b}{p\pi} \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{b} \right) + \bar{H}_p \left(x \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{b} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{b}{p\pi} \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{b} \right) \left. \right) + \alpha x, \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & V(x, y) - \sum_m \cos \frac{m\pi x}{a} \left(A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \right. \right. \\
& - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{m\pi} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \left. \right) + D_m \left(y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \left. \right) + \\
& + \sum_m \sin \frac{m\pi y}{b} \left(E_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} + F_m \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} + G_m \left(x \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} + \frac{b}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} \right) + \right. \\
& + H_m \left(x \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} + \frac{b}{m\pi} \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} \right) \left. \right) + \sum_m \sin \frac{p\pi x}{b} \left(\bar{A}_p \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{a} + \bar{B}_p \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} + \right. \\
& + \bar{C}_p \left(y \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{a} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{p\pi} \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} \right) + \bar{D}_p \left(y \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{p\pi} \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{a} \right) + \\
& + \sum_m \cos \frac{p\pi y}{b} \left(\bar{E}_p \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{b} + \bar{F}_p \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{b} + \bar{G}_p \left(x \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{b} + \frac{b}{p\pi} \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{b} \right) + \right. \\
& + \bar{H}_p \left(x \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{b} + \frac{b}{p\pi} \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{b} \right) \left. \right) + \beta y. \quad (6)
\end{aligned}$$

Здесь $U(x, y)$ и $V(x, y)$ частные решения уравнения (3), (4), A_m, B_m, C_m, \dots — 16 постоянных интегрирования, которые определяются из граничных условий; α и β — постоянные.

Для определения частных решений подставим функцию прогиба пластинки

$$\omega = \sum_m \sum_n \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

в уравнения (3), (4). Тогда получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \equiv \sum_m \sum_n D_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \sum_m \sum_n C_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (8)$$

Не трудно видеть, что функции перемещения должны иметь вид

$$u = \sum \sum u_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (9)$$

$$v = \sum \sum v_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в уравнение (7), (8), получим (при $\mu = 0,3$) систему уравнений:

$$\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 0,35 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) u_{mn} + 0,65 \frac{mn \pi^2}{ab} v_{mn} = -D_{mn}, \quad (11)$$

$$0,65 \frac{mn \pi^2}{ab} u_{mn} + \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 0,35 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) v_{mn} = -C_{mn}, \quad (12)$$

откуда и находим параметры U_{mn} и V_{mn} .

Принимая например

$$\omega = \omega_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} u_{20} &= -0,04375 \frac{\pi}{a} \omega_{11}^2, \\ u_{22} &= +0,06250 \frac{\pi}{a} \omega_{11}^2, \\ V_{20} &= -0,04375 \frac{\pi}{a} \omega_{11}^2, \\ V_{22} &= +0,06250 \frac{\pi}{a} \omega_{11}^2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Здесь следует отметить, что при частных решениях

$$u = \sum_m \sum_n u_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b},$$

$$v = \sum_m \sum_n v_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (14)$$

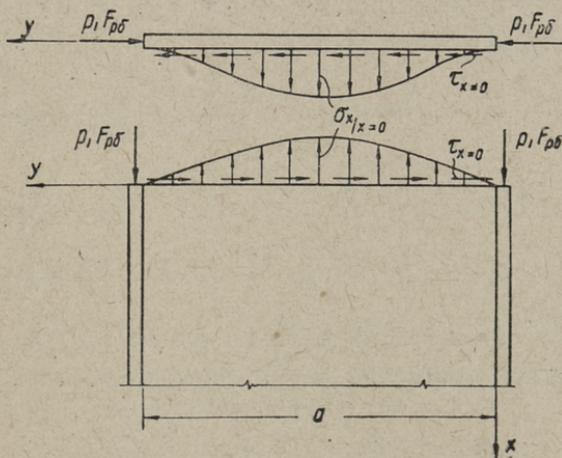
мы приходим к свободно опертой прямоугольной пластине с ребрами, имеющими бесконечно большую жесткость на изгиб и на сжатие. Для исследования работы гибкой пластины со свободно смещающимися краями ($I_{p\delta} = \infty$, $F_{p\delta} = 0$), частные решения уравнений (3) и (4) должны иметь вид

$$u = \sum_m \sum_n u_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \alpha,$$

$$v = \sum_m \sum_n v_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \beta, \quad (15)$$

где α и β определяются из условий, что сумма нормальных напряжений в любом вертикальном и горизонтальном сечении должна быть равна нулю.

Как было сказано выше, неизвестные коэффициенты A'_m , B'_m , C_m , ... находим из условий сопряжения ребра и пластины (фиг. 2).



Фиг. 2

$$1) \quad x = 0, a \quad \varepsilon_y^{p\delta} = \varepsilon_y^{n\lambda}, \quad (16)$$

$$EI_{p\delta} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \pm t \sigma_x; \quad (17)$$

$$2) \quad y = 0, b \quad \varepsilon_x^{p\delta} = \varepsilon_x^{n\lambda}, \quad (18)$$

$$EI_{p\delta} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \pm t \sigma_y. \quad (19)$$

Таким образом мы получим 8 контактных уравнений для определения коэффициентов:

$$A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n; \\ \bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{C}_n, \bar{D}_n, \bar{E}_n, \bar{F}_n, \bar{G}_n, \bar{H}_n.$$

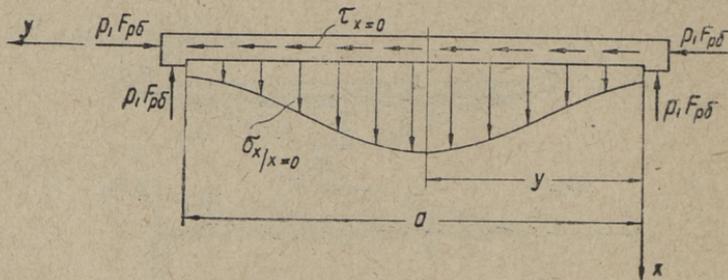
При исследовании работы квадратной пластины, задача значительно упрощается. В таком случае

$$A_n = E_n; \quad B_n = F_n; \dots$$

и в системе (16) — (19) имеем только 8 неизвестных.

Для упрощения выкладок в дальнейшем рассматриваются только квадратные пластины.

Контактные уравнения для определения коэффициентов A_n, B_n, \dots, α и β , получаем из следующих условий:



Фиг. 3

$$1. \quad x = 0, \varepsilon_y^{p\delta} = \varepsilon_y^{n\lambda}.$$

Деформация удлинения ребра определяется из формулы

$$\varepsilon_y^{p\delta} = -\frac{p_1}{E} - \frac{t}{F_{p\delta}} \int_0^y \tau_{x=0} \cdot dy. \quad (20)$$

Подставляя в формулу (20)

$$\begin{aligned} \tau_{x=0} = & \frac{E(1-\mu)}{1-\mu^2} \left\{ \sum_m (m\pi B'_m + \frac{2\mu}{1+\mu} C_m) \sin \frac{m\pi y}{a} + \sum_m m\pi \left[\bar{A}'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \right. \right. \\ & + \bar{B}'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + 2 \frac{\mu}{1+\mu} \frac{1}{m\pi} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) + \bar{D}_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \right\} + \sum_m (m\pi \bar{B}'_m + \frac{2\mu}{1+\mu} \bar{C}_m) \cos \frac{m\pi y}{a} \quad (21) \end{aligned}$$

и разлагая в ряд Фурье член:

$$\begin{aligned} m\pi \left[\bar{A}'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \bar{B}'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \bar{C}_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{m\pi} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) + \right. \\ \left. + D_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] = \sum_n \bar{L}_{mn} \cos \frac{n\pi y}{a} \quad (22) \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} E_{y^{\rho\delta}} = & -\frac{\rho}{E} + \frac{at}{F_{\rho\delta}} \frac{1-\mu}{1-\mu^2} \sum_n (B'_n + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} C_n) \cos \frac{n\pi y}{a} - \frac{at}{F_{\rho\delta}} \frac{1-\mu}{1-\mu^2} \cdot \\ & \cdot \sum_n (B'_n + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} C_n) - \frac{at}{F_{\rho\delta}} \frac{1-\mu}{1-\mu^2} \sum_n \left(\frac{1}{n\pi} \sum_m \bar{L}_{mn} + \bar{B}'_n + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} \bar{C}_n \right) \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (24) \end{aligned}$$

Подставляя в ряд Фурье (22) $m = 1$, находим:

$$\begin{aligned} \bar{L}_{11} = & -12,59195 \bar{A}'_1 - 11,54874 \bar{B}'_1 - 13,28846 \bar{C}_1 - \\ & -13,39899 \bar{D}_1. \end{aligned}$$

Выражение продольных удлинений для пластинки имеет вид:

$$\begin{aligned} E_{y_{ix=0}} = & \frac{\partial v}{\partial u} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \sum_m \sum_n v_{mn} \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} - \sum_m m\pi \left[A'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ & + B'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left[\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{m\pi} \left(1 - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] + \\ & + D_m \left[\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{m\pi} \left(1 - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \left. \right\} + \sum_m \cos \frac{m\pi y}{a} \cdot \\ & \cdot (m\pi A'_m + D_m) - \sum_p (\rho\pi \bar{A}'_p + D_p) \sin \frac{p\pi y}{a} + \alpha. \quad (25) \end{aligned}$$

Используя разложение в ряд Фурье:

$$\begin{aligned}
 & -m\pi \left\{ A'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left[\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{m\pi} \left(1 - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] + D_m \left[\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{m\pi} \left(1 - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \right\} = \\
 & = S_{m0} + \sum_n S_{mn} \cos \frac{n\pi y}{a} \quad (26)
 \end{aligned}$$

При $m = 2$ находим:

$$\begin{aligned}
 S_{20} = & -267,74489 A_2' - 266,74676 B_2' - 222,025115 C_2 - \\
 & -221,85591 D_2; \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{22} = & -267,74489 A_2' - 266,74676 B_2' - 264,47920 C_2 - \\
 & -264,46880 D_2. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Приравнявая $\varepsilon_y^{p\delta} = \varepsilon_y^{nA}$ и сравнивая коэффициенты при косинусах и синусах одинаковой кратности, получим следующие уравнения:

$$\alpha) \sum_m V_{mn} \frac{n\pi}{a} + \sum_m S_{mn} + (n\pi A'_n + D_n) = \frac{\sigma t}{F_{p\delta}} \frac{1-\mu}{1-\mu^2} \left(B'_n + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} C_n \right), \quad (29)$$

$$\delta) \frac{\sigma t}{F_{p\delta}} \frac{1-\mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{n\pi} \sum_m \bar{L}_{mn} + \bar{B}'_n + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} \bar{C}'_n \right) - (n\pi \bar{A}'_n + \bar{D}_n) = 0, \quad (30)$$

$$\beta) \sum_m S_{m0} + \alpha = -\frac{P_1}{E} - \frac{\sigma t}{F_{p\delta}} \frac{1-\mu}{1-\mu^2} \left(B'_n + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} C_n \right). \quad (31)$$

Используем теперь граничные условия (17):

$$x = 0 \quad EI_{p\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial x} = t \sigma_{x|_{x=0}}. \quad (32)$$

Внося $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и σ_x в уравнение (32), получим:

$$\begin{aligned}
 & \sum_n \sum_m (u_{mn} m + \mu v_{mn} n) \frac{\pi}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} + (1+\mu)\alpha + \sum_m \pi \left\{ \left[(1-\mu) A'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (1-\mu) B'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left[(1-\mu) \frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{m\pi} \left[1 - \mu \frac{3\mu-1}{1+\mu} \right] \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \right\} + \right. \\
 & \quad \left. + D_m \left[(1-\mu) \frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{m\pi} \left[1 - \mu \frac{3\mu-1}{1+\mu} \right] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \right\} - \sum_n \left[(1-\mu) n\pi A'_n - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} D_n \right] \cos \frac{n\pi y}{a} + \sum_m \sum_n \frac{1}{4} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} W_{mn}^2 - \frac{1}{4} \sum_m \sum_n W_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos \frac{2n\pi y}{a} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q W_{mn} W_{pq} \frac{m\rho\pi^2}{\sigma^2} \cos(n-q) \frac{\pi y}{\sigma} - \frac{1}{4} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q W_{mn} W_{pq} \frac{m\rho\pi^2}{\sigma^2} \\
& \cdot \cos(n+q) \frac{\pi y}{\sigma} + \sum_p \rho\pi \left[(1-\mu) \bar{A}'_p - \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \bar{D}'_p \right] \sin \frac{\rho\pi y}{\sigma} = - \frac{1-\mu^2}{\sigma^2} \rho \delta \pi^4 \\
& \cdot \left\{ \sum_n n^4 (B'_n - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} C_n) - \sum_p \rho^4 (\bar{B}'_p - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \bar{C}'_p) \sin \frac{\rho\pi y}{\sigma} - \right. \\
& - \sum_p \rho^4 \left[\bar{A}'_p \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \bar{B}'_p \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \bar{C}'_p \left(\frac{y}{\sigma} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \frac{5}{\rho\pi} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{\sigma} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \bar{D}'_p \left(\frac{y}{\sigma} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \frac{5}{\rho\pi} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{\sigma} \right) \right] \right\} \quad (33)
\end{aligned}$$

($W_{mn} \neq W_{pq}$)

Далее используем разложения в ряд Фурье:

$$1) \sum_m U_{m0} \frac{m\pi}{\sigma} + (1+\mu)\alpha + \frac{1}{4} \sum_m \sum_n W_{mn}^2 \frac{m^2\pi^2}{\sigma^2} + \sum K_{m0} = \sum R_n \sin \frac{n\pi x}{\sigma}$$

При $n=1$ имеем:

$$R_1 = \frac{4}{3} \left[\sum_m U_{m0} \frac{m\pi}{\sigma} + (1+\mu)\alpha + \sum_m K_{m0} + \frac{1}{4} \sum_m \sum_n W_{mn}^2 \frac{m^2\pi^2}{\sigma^2} \right]; \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
2) \rho^4 \left[\bar{A}'_p \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \bar{B}'_p \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \bar{C}'_p \left(\frac{y}{\sigma} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \frac{5}{\rho\pi} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{\sigma} \right) + \right. \\
\left. + \bar{D}'_p \left(\frac{y}{\sigma} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \frac{5}{\rho\pi} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{\sigma} \right) \right] = \sum_n \rho_n \sin \frac{n\pi y}{\sigma} \quad (35)
\end{aligned}$$

При $n=1$, $\rho=1$ имеем:

$$\rho_n = 4,00810 \bar{A}'_1 + 3,67607 \bar{B}'_1 + 8,68867 \bar{C}'_1 + 8,77940 \bar{D}'_1;$$

$$\begin{aligned}
3) m\pi \left\{ (1-\mu) A'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{\sigma} + (1-\mu) B'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{\sigma} + C_m \left[(1-\mu) \frac{y}{\sigma} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{\sigma} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{m\pi} \left(1 - \frac{3\mu^2-\mu}{1+\mu} \right) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{\sigma} \right] + D_m \left[(1-\mu) \frac{y}{\sigma} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{\sigma} + \frac{1}{m\pi} \left(1 - \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. - \frac{3\mu^2-\mu}{1+\mu} \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{\sigma} \right] \right\} = K_{m0} + \sum_n K_{mn} \cos \frac{n\pi y}{\sigma} \quad (36)
\end{aligned}$$

При $m=2$ имеем:

$$\begin{aligned}
K_{20} = 178,4214 A'_2 + 186,72273 B'_2 + 201,13812 C_2 + \\
+ 201,19075 D_2;
\end{aligned}$$

$$K_{22} = 187,4214 A_2' + 186,72276 B_2' + 230,85594 C_2 + \\ + 231,01979 D_2.$$

Приравнявая в уравнениях (33) коэффициенты при $\cos \frac{n\pi x}{a}$ и $\sin \frac{n\pi y}{a}$ найдем:

$$\sum_m (U_{mn} m + \mu V_{mn} n) \frac{\pi}{\sigma} + \sum_m K_{mn} - n\pi(1-\mu)A_n' + \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} D_n - \sum_{\substack{p \\ q}} \sum_{\substack{r \\ q}} w_{pq}^2 \frac{\rho^2 \pi}{\sigma^2} + \\ + \frac{1}{4} \sum_k \sum_r \sum_p \sum_q w_{ik} w_{pq} \frac{\rho \pi^2}{\sigma^2} - \frac{1}{4} \sum_k \sum_r \sum_p \sum_q w_{ik} w_{pq} \frac{\rho \pi^2}{\sigma^2} = \\ \Rightarrow = -(1-\mu^2) \frac{J_{\rho\delta}}{\sigma^3 t} \pi^4 (B_n' - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} C_n) \quad (37)$$

($w_{ik} \neq w_{pq}$)

$$R_n + n\pi(1-\mu)\bar{A}_n' - \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \bar{D}_n = (1-\mu^2) \frac{\sigma^3 t}{J_{\rho\delta}} \pi^4 (n^4 B_n' - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} \bar{C}_n + \sum_m P_{mn}) \quad (38)$$

Остальные уравнения для определения A_n, B_n, \dots получим из граничных условий:

$$x = a \quad \varepsilon_y^{\rho\delta} = \varepsilon_y^{n\lambda},$$

$$x = a \quad EI_{\rho\delta} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = -t\sigma_x$$

или из условий

$$U_{y=0} = U_{y=a}, \quad (39)$$

$$U_{x=0} = -U_{x=a}. \quad (40)$$

Из условий (39) (40) находим:

$$a) (chn\pi - 1)A_n' + shn\pi B_n' + (chn\pi + \frac{1}{n\pi} shn\pi)C_n + [shn\pi + \frac{1}{n\pi}(chn\pi - 1)]D_n = 0, \quad (41)$$

$$b) (chn\pi - 1)\bar{A}_n' + shn\pi \bar{B}_n' + (chn\pi + \frac{1}{n\pi} shn\pi)\bar{C}_n + [shn\pi + \frac{1}{n\pi}(chn\pi - 1)]\bar{D}_n = 0, \quad (42)$$

$$b) shn\pi A_n' + (chn\pi + 1)B_n' + [shn\pi - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} (chn\pi + 1)]C_n + \\ + [chn\pi - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} shn\pi]D_n = 0, \quad (43)$$

$$2) shn\pi \bar{A}_n' + (chn\pi + 1)\bar{B}_n' + [shn\pi - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} (chn\pi + 1)]\bar{C}_n + \\ + [chn\pi - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{n\pi} shn\pi]\bar{D}_n = 0. \quad (44)$$

Далее из условия равновесия ребер (см. фиг. 3)

$$\Sigma X = 0 \quad 2p_1 F_{p\delta} = t \int_0^a \sigma_{x|x=0} dy$$

получим

$$2(1-\mu^2) \frac{p_1}{E} = \frac{at}{F_{p\delta}} \left\{ \sum_m U_{m0} \frac{m\pi}{\sigma} + (1+\mu)\alpha + \sum_m K_{m0} + \frac{1}{4} \sum_m \sum_n \frac{m^2\pi^2}{\sigma^2} W_{mn}^2 + \right. \\ \left. + [1 - (-1)^n] \left[(1-\mu) \bar{A}'_n - \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \frac{t}{n\pi} \bar{D}'_n \right] \right\} \quad (45)$$

В результате имеем достаточное количество уравнений для определения неизвестных констант решений дифференциальных уравнений (5) и (6). Как видим, постоянные A'_n , B'_n , ... зависят от жесткости ребер на изгиб и на сжатие.

Наконец, применяя метод Галеркина, определим неизвестные параметры функции прогиба $\frac{w_{m'n}}{t}$ и параметры нагрузки p^* из уравнения равновесия пластины.

Напряжения в срединной поверхности квадратной пластинки находим из выражений:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \sum_m \frac{m\pi}{\sigma} U_{m0} \cos \frac{m\pi x}{\sigma} + (1+\mu)\alpha + \sum_m K_{m0} \cos \frac{m\pi x}{\sigma} + \sum_{m=1, n=1} \sum (mU_{mn} + nV_{mn}) \cdot \frac{\pi}{\sigma} \cos \frac{m\pi x}{\sigma} \cos \frac{n\pi y}{\sigma} + \mu \sum_n \frac{n\pi}{\sigma} V_{0n} \cos \frac{n\pi y}{\sigma} + \sum_{m=1, n=1} \sum K_{mn} \cos \frac{m\pi x}{\sigma} \cos \frac{n\pi y}{\sigma} - \right. \\ \left. - \sum_m m\pi \cos \frac{m\pi y}{\sigma} \left[(1-\mu) A'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{\sigma} + (1-\mu) B'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{\sigma} + C_m \left[(1-\mu) \frac{x}{\sigma} \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{\sigma} - \frac{1}{m\pi} \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{\sigma} \right] + D_m \left[(1-\mu) \frac{x}{\sigma} \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{\sigma} - \frac{1}{m\pi} \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{\sigma} \right] \right\} + \frac{1}{4} \sum_m \sum_n \frac{m^2\pi^2}{\sigma^2} W_{mn}^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{\sigma} - \frac{1}{4} \sum_m \sum_n \frac{m^2\pi^2}{\sigma^2} W_{mn}^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{\sigma} \cdot \cos \frac{2n\pi y}{\sigma} + \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \frac{m\rho\pi^2}{\sigma^2} W_{mn} W_{\rho q} \cos \frac{m\pi x}{\sigma} \cos \frac{\rho\pi x}{\sigma} \sin \frac{n\pi y}{\sigma} \sin \frac{q\pi y}{\sigma} + \\ + \frac{\mu}{4} \sum_m \sum_n \frac{n^2\pi^2}{\sigma^2} W_{mn}^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{\sigma} + \frac{\mu}{4} \sum_m \sum_n \frac{n^2\pi^2}{\sigma^2} W_{mn}^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{\sigma} \cos \frac{2n\pi y}{\sigma} + \\ + \frac{\mu}{2} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \frac{nq\pi^2}{\sigma^2} W_{mn} W_{\rho q} \sin \frac{m\pi x}{\sigma} \sin \frac{\rho\pi x}{\sigma} \cos \frac{n\pi y}{\sigma} \cos \frac{q\pi y}{\sigma} - \sum_p p\pi \cdot \sin \frac{\rho\pi x}{\sigma} \left[(1-\mu) \bar{A}'_p \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + (1-\mu) \bar{B}'_p \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \bar{C}'_p \left[(1-\mu) \frac{y}{\sigma} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\rho\pi} \frac{1+2\mu-3\mu^2}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{\sigma} \right] + \bar{D}'_p \left[(1-\mu) \frac{y}{\sigma} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{\sigma} + \frac{1}{\rho\pi} \frac{1+2\mu-3\mu^2}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{\sigma} \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_p \rho \pi \sin \frac{\rho \pi y}{a} \left\{ (1-\mu) \bar{A}'_p \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{a} + (1-\mu) \bar{B}'_p \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{a} + \bar{C}'_p \left[(1-\mu) \frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{a} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{\rho \pi} \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{a} \right] + \bar{D}'_p \left[(1-\mu) \frac{x}{a} \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{a} - \frac{1}{\rho \pi} \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{a} \right] \right\} \\
 & (w_{mn} + w_{pq}) \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau = \frac{E}{2(1+\mu)} & \left\{ - \sum_m \sum_n \frac{n \pi}{a} u_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{a} - \sum_m \sum_n \frac{m \pi}{a} v_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{a} + \right. \\
 & + \sum_m 2 m \pi \sin \frac{m \pi x}{a} \left[A'_m \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{a} + B'_m \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a} + C_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{a} + 2 \frac{\mu}{1+\mu} \frac{1}{m \pi} \right. \right. \\
 & \cdot \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a} \left. \left. + D_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a} + 2 \frac{\mu}{1+\mu} \frac{1}{m \pi} \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{a} \right) \right] + \sum_m 2 m \pi \sin \frac{m \pi y}{a} \left[A'_m \operatorname{sh} \frac{m \pi x}{a} + \right. \\
 & + B_m \operatorname{ch} \frac{m \pi x}{a} + C_m \left(\frac{x}{a} \operatorname{sh} \frac{m \pi x}{a} + \frac{2 \mu}{1+\mu} \frac{1}{m \pi} \operatorname{ch} \frac{m \pi x}{a} \right) + D_m \left(\frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{m \pi x}{a} + 2 \frac{\mu}{1+\mu} \right. \\
 & \cdot \frac{1}{m \pi} \operatorname{sh} \frac{m \pi x}{a} \left. \right] + \sum_p 2 \rho \pi \cos \frac{\rho \pi x}{a} \left[\bar{A}'_p \operatorname{sh} \frac{\rho \pi y}{a} + \bar{B}'_p \operatorname{ch} \frac{\rho \pi y}{a} + \bar{C}'_p \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\rho \pi y}{a} + 2 \frac{\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho \pi} \right. \right. \\
 & \cdot \operatorname{ch} \frac{\rho \pi y}{a} \left. \left. + \bar{D}'_p \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{\rho \pi y}{a} + \frac{2 \mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho \pi} \operatorname{sh} \frac{\rho \pi y}{a} \right) \right] + \sum_p 2 \rho \pi \cos \frac{\rho \pi y}{a} \left[\bar{A}'_p \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{a} + \bar{B}'_p \right. \\
 & \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{a} + \bar{C}'_p \left(\frac{x}{a} \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{a} + 2 \frac{\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho \pi} \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{a} \right) + \bar{D}'_p \left(\frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{a} + \frac{2 \mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho \pi} \right. \\
 & \left. \left. \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{a} \right] \right\} + \sum_{\pi} \sum_{\tau} \sum_{\zeta} \sum_{\varrho} m \varrho \frac{\pi^2}{a^2} w_{mn} w_{pq} \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{\rho \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{a} \cos \frac{q \pi y}{a} \quad (47)
 \end{aligned}$$

Максимальные напряжения изгиба находим из зависимостей

$$\max \sigma_{x_{изг}} = \frac{\pi^2 E}{2(1-\mu)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \frac{w_{11}}{t} \quad (48)$$

С тем, чтобы выяснить влияние жесткости ребра на напряженное состояние пластины, произведено расчет ряда квадратных пластин при разных краевых условиях. Результаты расчета следующие:

$$1. \quad J_{\rho \sigma} = 0; \quad F_{\rho \sigma} = 0.$$

$$A'_2 = -0,009356148 \pi^2 \left(-\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$B'_2 = +0,008870198 \pi^2 \left(-\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$C_2 = -0,12075690 \pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$D_2 = +0,12120882 \pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\alpha = -0,125\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2; \quad \rho_1 = 0;$$

$$22,01 \frac{w_{11}}{t} + 4,94 \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^3 = p^*;$$

$$\max_{\substack{\sigma_{x/y} \\ x=a/2 \\ y=a/2}} = 0,122E\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2.$$

$$2. \quad I_{\rho\delta} = \infty, \quad F_{\rho\delta} = \infty.$$

$$A'_2 = -0,0040185\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$B'_2 = +0,0040001\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$C_2 = +0,02333802 \pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$D_2 = -0,02334711\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\alpha = -0,00700769\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$22,01 \frac{w_{11}}{t} + 28,2 \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^3 = p^*;$$

$$\max_{\substack{\sigma_{x/y} \\ x=0 \\ y=\frac{a}{2}}} = 0,287\pi^2 E \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2; \quad \max_{\substack{\sigma_{x/y} \\ x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{a}{2}}} = 0,296\pi^2 E \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2.$$

$$3. \quad I_{\rho\delta} = \infty, \quad F_{\rho\delta} = 0$$

$$\alpha = -0,125\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$22,01 \frac{w_{11}}{t} + 7,51 \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^3 = p^*;$$

$$\max_{\substack{\sigma_x / \\ y = \frac{a}{2}}} = \max_{\substack{\sigma_x / \\ x = \frac{a}{2}}} = 0,125\pi^2 E \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2.$$

4. $J_{p\sigma} = 0,$

$F = \infty,$

$$A'_2 = -0,02336095\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$B'_2 = +0,02304433\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$C_2 = -0,06145392\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$D_2 = +0,06168387\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\bar{A}'_1 = -0,0186124\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\bar{B}'_1 = +0,0125384\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\bar{C}_1 = -0,0537128\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\bar{D}_1 = +0,0584720\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\alpha = -0,06715\pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2.$$

$$22,01 \frac{w_{11}}{t} + 9,45 \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^3 = p^*,$$

$$\max_{\substack{\sigma_x / \\ x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2}}} = 0,162\pi^2 E \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

5. $J_{p\sigma} = \infty,$

$F_{p\sigma} = 1,0 \text{ at.}$

$$A'_2 = -0,00328584 \pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$B'_2 = +0,00326947 \pi^2 \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$C_2 = +0,01907541 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$D_2 = -0,0190754 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\frac{P_1}{E} = 0,04847 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\alpha = -0,052246 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$22,01 \frac{\omega_{11}}{t} + 20,03 \left(\frac{\omega_{11}}{t} \right)^3 = \rho^*.$$

$$\max_{\substack{\sigma_x/x=0 \\ y=\frac{a}{2}}} \sigma_x = 0,21 \pi^2 E \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2; \quad \max_{\substack{\sigma_x/x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{a}{2}}} \sigma_x = 0,236 \pi^2 E \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2.$$

$$6. \quad \frac{a^3 t}{F_{p6}} = 1000, \quad F_{p6} = 1,0 \text{ at.}$$

$$A'_2 = -0,0108878 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$B'_2 = +0,0106531 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$C_2 = -0,0108266 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$D_2 = +0,0110008 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\bar{A}'_1 = -0,0255559 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\bar{B}'_1 = +0,01632155 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$C_1 = -0,0821948 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\bar{D}_1 = +0,0896196 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

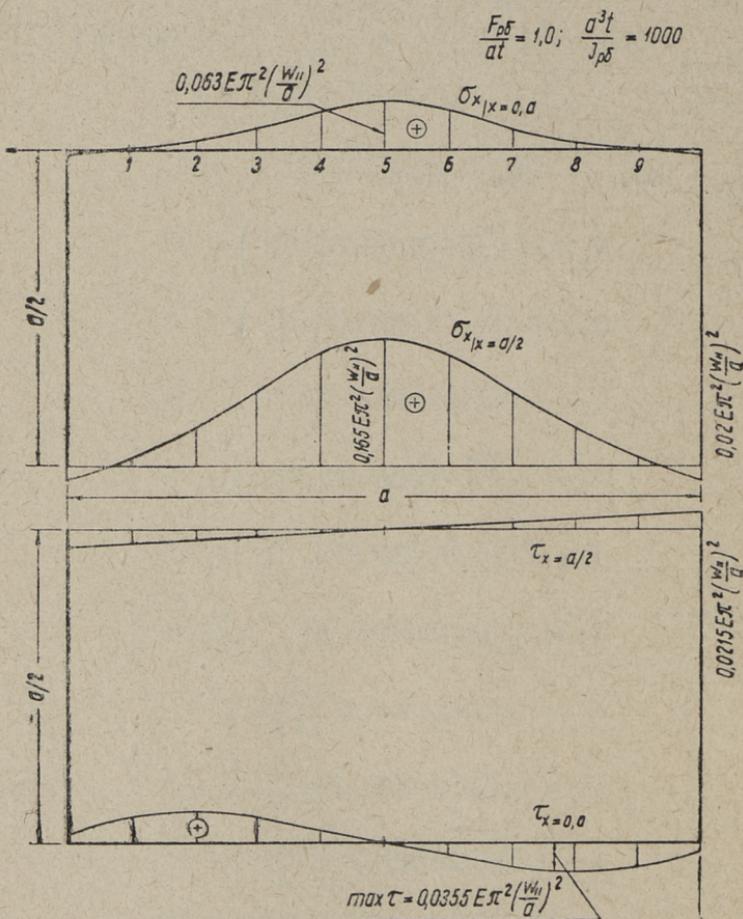
$$\alpha = -0,0544545 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\frac{P_1}{E} = 0,01023 \pi^2 \left(\frac{\omega_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\max_{\substack{x/x=0 \\ y=\frac{a}{2}}} \sigma_x = 0,0626 \pi^2 E \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$\max_{\substack{x/x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{a}{2}}} \sigma_x = 0,165 \pi^2 E \left(\frac{w_{11}}{a} \right)^2,$$

$$22,01 \frac{w_{11}}{t} + 10,46 \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^3 = p^*.$$



Фиг. 4

На фиг. 4 даны эпюры напряжений в срединной поверхности пластины σ_x и τ при $\frac{F_{p6}}{at} = 1,0$, $\frac{a^3 t}{F_{p6}} = 1000$.

В. Заключение

Полученные результаты дают картину работы о поведении упругой пластины при больших поперечных нагрузках. При этом оказывается (это подтверждается опытом), что напряженное состояние пластины существенным образом зависит от жесткости контурных ребер на изгиб и на сжатие. Особенно относится это к цепным напряжениям между пластиной и ребрами. Полученные результаты, конечно, полностью не охватывают проблемы создания практического метода расчета для проектировщиков, но представляют собой решение первого этапа указанной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Ааре. Труды Таллинского политехнического института. Серия А № 65, 1955.
2. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. 1948.
3. И. Н. Огибалов. Изгиб, устойчивость и колебания пластнок. 1958.
4. G. Sonntag. Einfluss einer Nachgiebigkeit der Randeinspannung bei Membranen oder bei Platten Grosser Durchbiegung unter Gleichmässiger Belastung. München, 1956.

УДК 624.04.001.24

Л. А. Алликас

О РАСЧЕТЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ БАЛОК-СТЕНОК

В работе представляется приближенный расчет упругой однопролетной предварительно напряженной балки-стенки. При предварительном напряжении плита балки-стенки сжимается или непосредственно через опорные ребра (фиг. 1а) или через стрингер (фиг. 1б).

При решении задачи используется метод Кастильяно-Ритца. Для упрощения расчетной схемы предполагается, что 1) коэффициент Пуассона $\mu = 0$; 2) силы сдвига, нагружающие опорные ребра или стрингер, приложены к их осям; 3) жесткость стрингера при изгибе равна нулю; 4) напряжения в ребрах и стрингере по поперечному сечению распределены равномерно.

Балка-стенка без стрингера

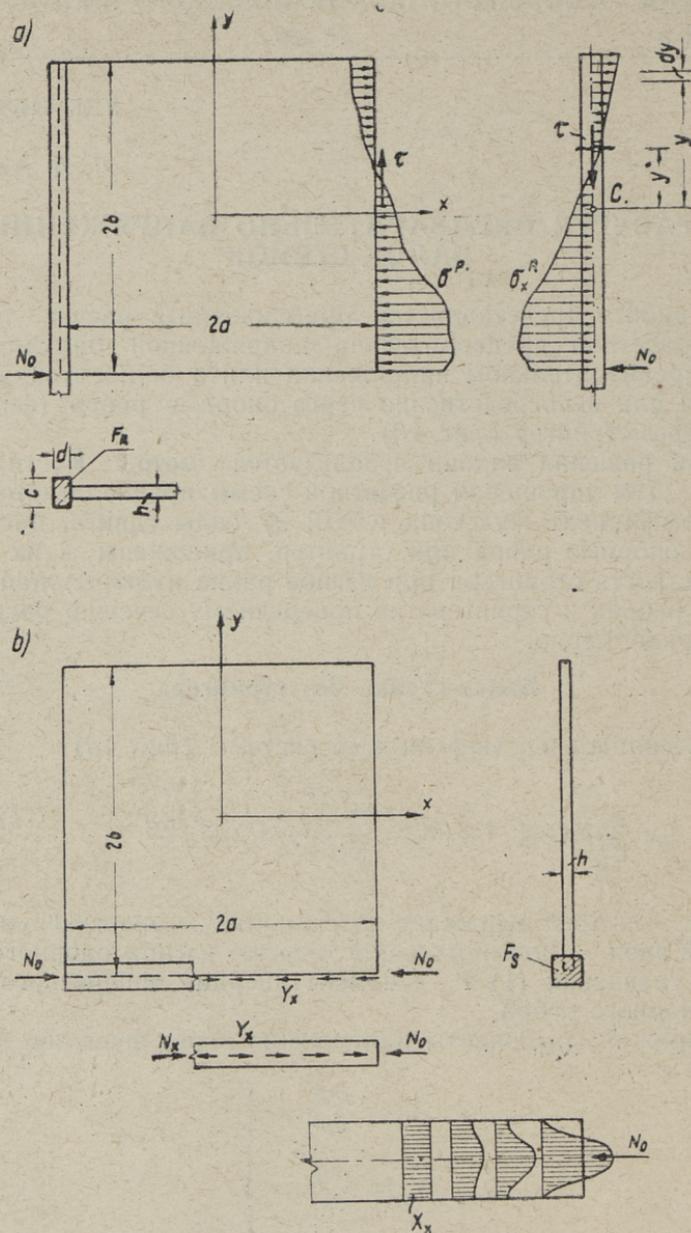
Потенциальная энергия всей системы (рис. 1а):

$$U = \frac{h}{2E} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} (X_x^2 + Y_y^2 - 2X_y^2) dx dy + \frac{h^2}{EJ} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} X_x (y-y') dy' dy, \quad (1)$$

где первый член выражает потенциальную энергию плиты, а второй член — потенциальную энергию изгиба опорного ребра. В уравнении (1) J — момент инерции поперечного сечения опорного ребра.

Выражая компоненты напряжения через функцию напряжения φ

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ X_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Фиг. 1

получаем вариационное уравнение Кастильяно в виде:

$$\delta U = \frac{1}{2} \delta \iint_{-a-b}^{+a+b} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy +$$

$$+ \frac{h}{J} \delta \iint_{-b}^{+b} \int_{y^*}^{+b} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (y-y^*) \right]^2 dy = 0. \quad (1')$$

Функция напряжения φ выбирается в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_1^i a_i \varphi_i,$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$ и $a_i = (a_i + \xi^2 A_i)$.

Нулевой член φ_0 функции напряжения берется в виде

$$\varphi_0 = - \frac{N_0}{2bh} \left(1 - 3 \frac{y}{b} \right).$$

Применяя безразмерные координаты $x = a\xi$ и $y = b\eta$, получаем

$$\varphi_0 = - \frac{N_0}{2bh} (1 - 3\eta). \quad (3)$$

Из приведенного видно, что нулевой член φ_0 дает линейное распределение напряжения. Контурные условия при $\xi = \pm 1$ удовлетворены.

Члены φ_i выбираются с учетом, чтобы непрерывность напряжения на контактной линии ребра и плиты ($x = \pm a$) была удовлетворена. Из названного условия

$$\frac{h}{F_R} \int_y^b \left| \varphi_{ixy} \right|_{x=\pm a} dy = \left| \varphi_{ixx} \right|_{x=\pm a} \quad (4)$$

определяются коэффициенты A_i .

Коэффициенты a_i определяются из условия минимума потенциальной энергии:

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0.$$

Таким путем получаем канонические уравнения Кастильяно-Ритца

$$\left. \begin{aligned} a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{21} + a_3 \delta_{31} + \dots &= -\Delta p_1 \\ a_1 \delta_{12} + a_2 \delta_{22} + a_3 \delta_{32} + \dots &= -\Delta p_2 \\ a_1 \delta_{13} + a_2 \delta_{23} + a_3 \delta_{33} + \dots &= -\Delta p_3 \\ \dots & \\ \dots & \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где множители при коэффициентах δ_{ik} и свободные члены Δp_k определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \iint_{-a}^{+a} \iint_{-b}^{+b} (\varphi_{ikx} \varphi_{kxx} + \varphi_{iyy} \varphi_{kyy} + 2\varphi_{ixy} \varphi_{kxy}) dx dy + \\ &+ \frac{2h}{J} \iint_{-b}^{+b} \iint_{y'}^{+b} \varphi_{iyy} / (y-y') dy \cdot \int_{y'}^{-b} \varphi_{kyy} / (y-y') dy \cdot dy, \\ \Delta p_k &= \iint_{-a}^{+a} \iint_{-b}^{+b} (\varphi_{0kx} \varphi_{kxx} + \varphi_{0yy} \varphi_{kyy} + 2\varphi_{0xy} \varphi_{kxy}) dx dy + \\ &+ \frac{2h}{J} \iint_{-b}^{+b} \iint_{y'}^{+b} \varphi_{0yy} / (y-y') dy \cdot \int_{y'}^{-b} \varphi_{kyy} / (y-y') dy \cdot dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Приводим численный пример, где в качестве исходных данных взяты: $h = \frac{1}{20} a$, $d = \frac{1}{10} a$ и $c = \frac{1}{10} a$, согласно которым $h : F_R = 5 : a$ и $2h : I = 12000 : a^3$.

Функция напряжения, удовлетворяющая уравнение (4), избирается в виде:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0 + \sum a_i \varphi_i &= -\frac{N_0}{2bh} (1-3\eta) + \\ &+ (2+8\xi^2-3\xi^4) \sigma^4 (1-\eta^2)^2 b^4 a_1 + \\ &+ (1-8\xi^2+3\xi^4) \sigma^4 (1-\eta^2)^2 \eta b^5 a_2 + \\ &+ (5\xi^2-\xi^6) \sigma^6 (1-\eta^2)^2 \eta^2 b^6 a_3 + \\ &+ (3\xi^2-\xi^6) \sigma^6 (1-\eta^2)^2 \eta^3 b^7 a_4 + \\ &+ (4-7,5\xi^4+4\xi^6) \sigma^6 (1-\eta^2)^2 \eta^4 b^8 a_5 + \\ &+ (1+8\xi^2-\xi^8) \sigma^8 (1-\eta^2)^2 \eta^5 b^9 a_6. \end{aligned} \quad (7)$$

Принимая $a \doteq b$ и вычисляя множители и свободные члены системы уравнения (5) по уравнению (6) и решая систему, получаем для множителей ряда (7) следующие значения:

$$a_1 = -0,03457 \frac{1}{a^7} \frac{1}{h}; \quad a_2 = -0,07808 \frac{1}{a^8} \frac{1}{h};$$

$$a_3 = -0,10581 \frac{1}{a^{11}} \frac{1}{h}; \quad a_4 = -0,00802 \frac{1}{a^{12}} \frac{1}{h};$$

$$a_5 = +0,00841 \frac{1}{a^{13}} \frac{1}{h}; \quad a_6 = +0,04863 \frac{1}{a^{17}} \frac{1}{h}.$$

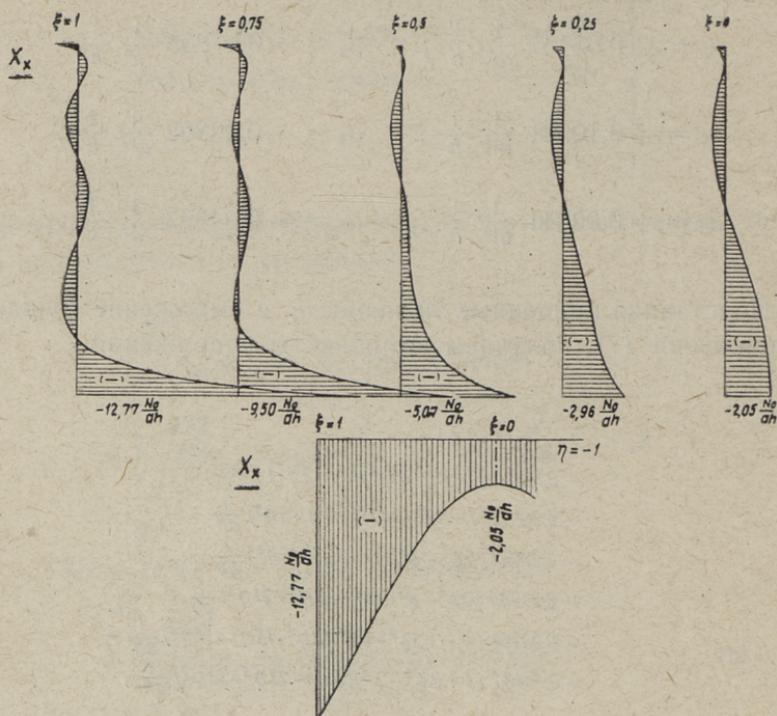
Подставляя найденные значения a_i в выражение функции напряжения (7), получаем компоненты напряжения:

$$\begin{aligned} X_x = & -\frac{N_0}{2ah}(1-3\eta) - \\ & -0,13828(2+8\xi^2-3\xi^4)(-1+3\eta^2)\frac{1}{ah} - \\ & -0,31232(1-8\xi^2+3\xi^4)(-3\eta+5\eta^3)\frac{1}{ah} - \\ & -0,21162(5\xi^2-\xi^6)(1-12\eta^2+15\eta^4)\frac{1}{ah} - \\ & -0,01604(3\xi^2-\xi^6)(3\eta-20\eta^3+21\eta^5)\frac{1}{ah} + \\ & +0,03364(4-7,5\xi^4+4\xi^6)(3\eta^2-15\eta^4+14\eta^6)\frac{1}{ah} + \\ & +0,19452(1+8\xi^2-\xi^6)(5\eta^3-21\eta^5+18\eta^7)\frac{1}{ah}, \end{aligned}$$

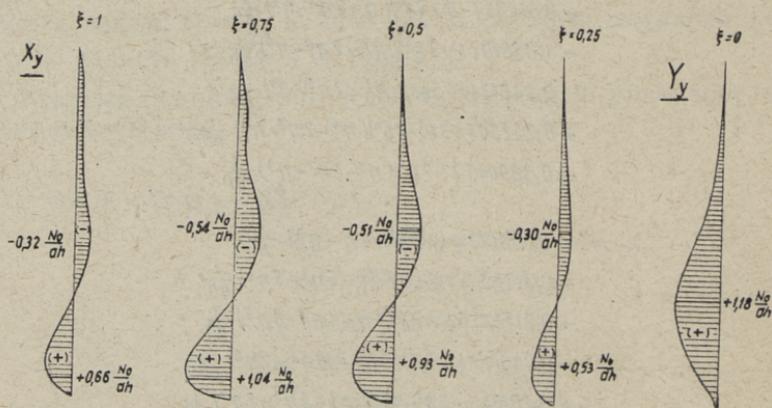
$$\begin{aligned} Y_y = & -0,13828(4-9\xi^2)(1-2\eta^2+\eta^4)\frac{1}{ah} - \\ & -0,31232(-4+9\xi^2)(\eta-2\eta^3+\eta^5)\frac{1}{ah} - \\ & -1,05810(1-3\xi^4)(\eta^2-2\eta^4+\eta^6)\frac{1}{ah} - \\ & -0,04812(1-5\xi^4)(\eta^3-2\eta^5+\eta^7)\frac{1}{ah} + \\ & +0,25230(-3\xi^2+4\xi^4)(\eta^4-2\eta^6+\eta^8)\frac{1}{ah} + \\ & +0,38904(2-7\xi^6)(\eta^5-2\eta^7+\eta^9)\frac{1}{ah}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_y = & +0,55312(4\xi-3\xi^3)(-\eta+\eta^3)\frac{1}{ah} + \\ & +0,31232(-4\xi+3\xi^3)(1-6\eta^2+5\eta^4)\frac{1}{ah} + \\ & +0,21162(5\xi-3\xi^5)(\eta-4\eta^3+3\eta^5)\frac{1}{ah} + \\ & +0,04812(\xi-\xi^5)(3\eta^2-10\eta^4+7\eta^6)\frac{1}{ah} - \\ & -0,20184(-5\xi^3+4\xi^5)(\eta^3-3\eta^5+2\eta^7)\frac{1}{ah} - \\ & -0,38904(2\xi-\xi^7)(5\eta^4-14\eta^6+9\eta^8)\frac{1}{ah}. \end{aligned}$$

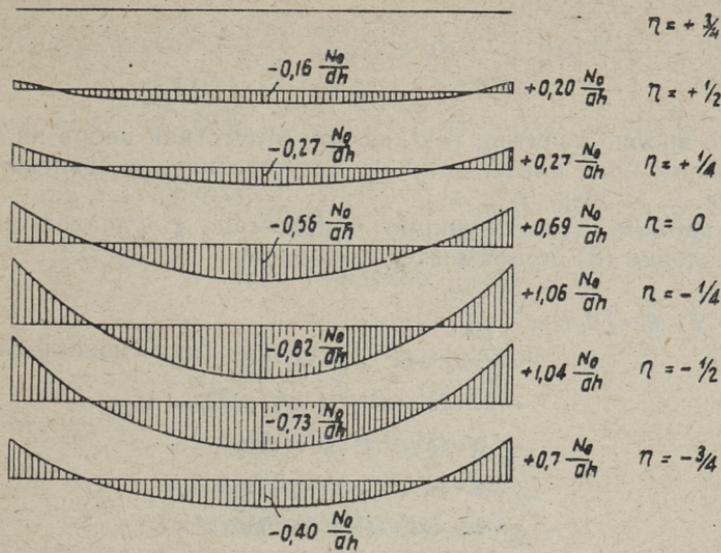
Компоненты напряжений в сечениях, наиболее характеризующих балку-стенку, приведены на фигурах 2, 3 и 4. На фигуре 5 приведена траектория главных напряжений.



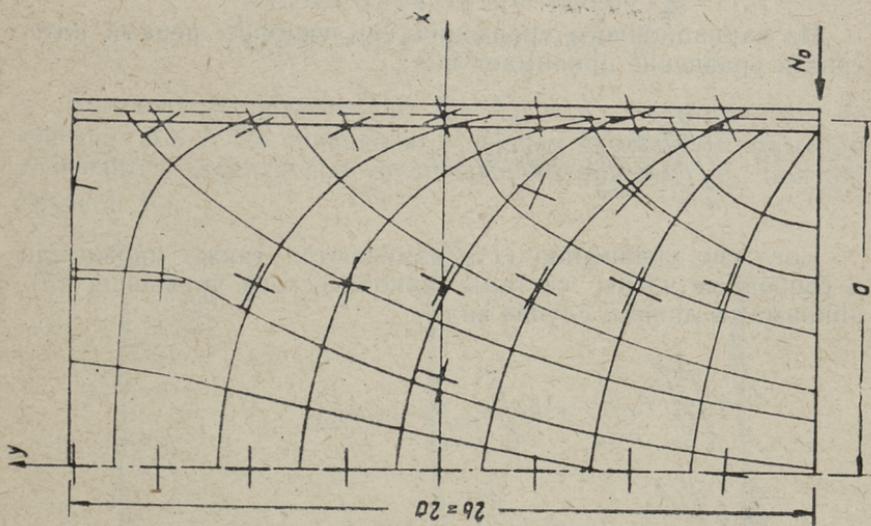
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Во втором численном примере рассматривается балка-стенка без опорных ребер, т. е. $F = I = 0$. В таком случае условие непрерывности (4) принимает вид:

$$h \int_{-b}^{+b} \left| \varphi_{ixy} \right|_{x=\pm a} dy = 0 \text{ или } \left| \varphi_{ixy} \right|_{x=\pm a} = 0. \quad (8)$$

Это вполне понятно, так как при отсутствии ребра на вертикальном крае плиты должны отсутствовать и сдвигающие усилия.

В данном случае функция напряжения φ , удовлетворяющая условию (8), принимается следующей:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0 + \sum a_i \varphi_i = & -\frac{N_c}{2bh} (1-3\eta) + \\ & + (1+4\xi^2-2\xi^4) a^4 (1-\eta^2)^2 b^4 a_1 + \\ & + (0,5-8\xi^2+4\xi^4) a^4 (1-\eta^2)^2 \eta b^5 a_2 + \\ & + (3\xi^2-6\xi^6) a^6 (1-\eta^2)^2 \eta^2 b^6 a_3 + \\ & + (3\xi^2-6\xi^6) a^6 (1-\eta^2)^2 \eta^3 b^7 a_4 + \\ & + (-0,5-7,5\xi^4+5\xi^6) a^6 (1-\eta^2)^2 \eta^4 b^8 a_5 + \\ & + (-0,5-8\xi^2-4\xi^6) a^6 (1-\eta^2)^2 \eta^5 b^9 a_6 + \\ & + (0,5+4\xi^6-3\xi^8) a^6 (1-\eta^2)^2 \eta^6 b^{10} a_7. \end{aligned} \quad (9)$$

Из вариационного уравнения (1) исчезает первый интеграл и уравнение принимает вид:

$$\delta U = \delta \int_{-b}^{+b} \left\{ \int_{y^*}^{+b} \int_{x=\pm a}^{+b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (y-y^*) dy \right\}^2 dy = 0. \quad (1'')$$

Согласно уравнению (1'') изменяются также множители и свободные члены системы канонического уравнения (5), принимая в данном случае вид:

$$\begin{aligned} \delta_{i,x} = & \int_{-b}^{+b} \left\{ \int_{y^*}^{+b} \int_{x=\pm a}^{+b} \varphi_{iyy} (y-y^*) dy \int_{y^*}^{+b} \int_{x=\pm a}^{+b} \varphi_{kyy} (y-y^*) dy \right\} dy, \\ \Delta p_x = & \int_{-b}^{+b} \left\{ \int_{y^*}^{+b} \int_{x=\pm a}^{+b} \varphi_{0yy} (y-y^*) dy \int_{y^*}^{+b} \int_{x=\pm a}^{+b} \varphi_{kyy} (y-y^*) dy \right\} dy. \end{aligned} \quad (6')$$

Вычисляя множители системы уравнений (5) по формулам (6) при $a = b$, и решая систему уравнений, получаем для множителя a_i значения:

$$a_1 = -0,08255 \frac{1}{a^7} \frac{1}{h}; \quad a_2 = -0,07020 \frac{1}{a^8} \frac{1}{h};$$

$$a_3 = -0,14970 \frac{1}{a^{11}} \frac{1}{h}; \quad a_4 = +0,05732 \frac{1}{a^{12}} \frac{1}{h};$$

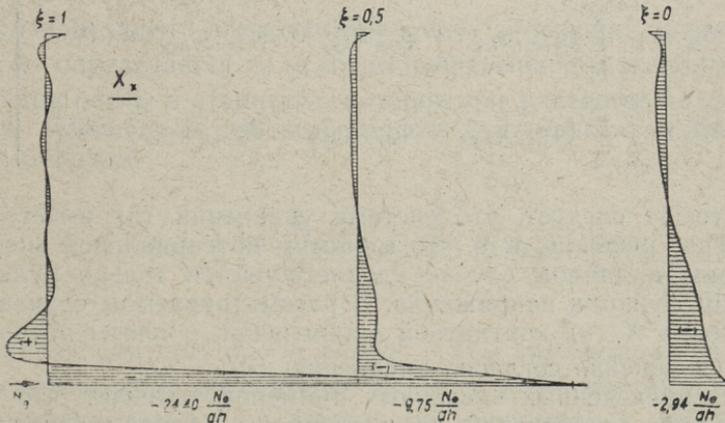
$$a_5 = -0,01655 \frac{1}{a^{13}} \frac{1}{h}; \quad a_6 = +0,16604 \frac{1}{a^{16}} \frac{1}{h};$$

$$a_7 = -0,34286 \frac{1}{a^{17}} \frac{1}{h}.$$

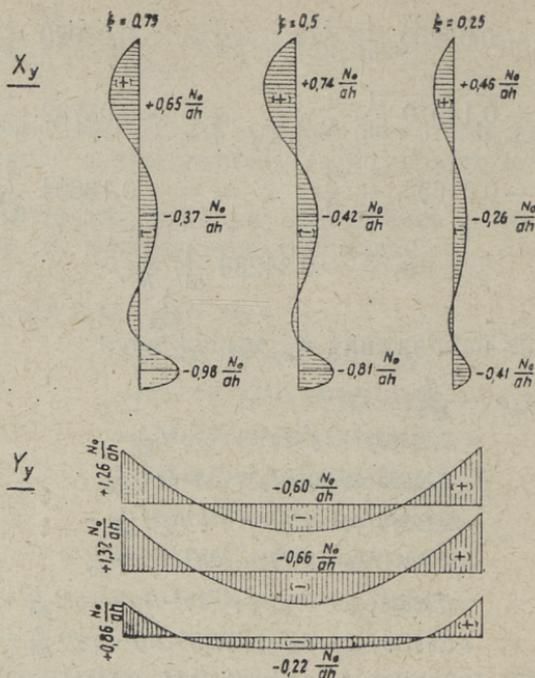
Компонент напряжения X_x выражается:

$$\begin{aligned} X_x = & -\frac{N_0}{2ah} (1-3\eta) - \\ & -0,33020 (1+4\xi^2-2\xi^4)(-1+3\eta^2) \frac{1}{ah} - \\ & -0,28080 (0,5-8\xi^2+4\xi^4)(-3\eta+5\eta^3) \frac{1}{ah} - \\ & -0,29940 (3\xi^2-\xi^6)(1-12\eta^2+15\eta^4) \frac{1}{ah} + \\ & -0,11464 (3\xi^2-\xi^6)(3\eta-20\eta^3+21\eta^5) \frac{1}{ah} - \\ & -0,06626 (-0,5-7,5\xi^4+5\xi^6)(3\eta^2-15\eta^4+14\eta^6) \frac{1}{ah} + \\ & +0,66216 (-0,5+8\xi^2-2\xi^6)(5\eta^3-21\eta^5+18\eta^7) \frac{1}{ah} - \\ & -0,68572 (4\xi^2-\xi^6)(15\eta^4-56\eta^6+45\eta^8) \frac{1}{ah}. \end{aligned}$$

Компоненты напряжений X_x , Y_y и X_y представлены на фигурах 6 и 7. По сравнению с первым численным примером отмечается характерное увеличение напряжений X_x под нагрузкой N_0 .



Фиг. 6



Фиг. 7

В следующем примере при $F_R = I = \infty$ множители и свободные члены системы канонических уравнений принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ik} &= \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} (\varphi_{ixx} \varphi_{kxx} + \varphi_{iy y} \varphi_{ky y} + 2\varphi_{ixy} \varphi_{kxy}) dx dy, \\ \Delta p_k &= \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} (\varphi_{oxx} \varphi_{kxx} + \varphi_{o y y} \varphi_{ky y} + 2\varphi_{oxy} \varphi_{kxy}) dx dy. \end{aligned} \right\} (6'')$$

Отсюда следует, что система уравнений (5) имеет тривиальное решение, т. е. что минимум потенциальной энергии системы в данном случае удовлетворяется только нулевым членом функции напряжения. В рассматриваемом случае напряжения X_x на контактной линии ребра и плиты распределяются линейно согласно уравнению (3).

Из приведенных численных примеров вытекает, что концентрация напряжений на квадратных балках-стенках тем больше, чем меньшей является жесткость ребра при изгибе.

Предлагаемый метод расчета применим при любой высоте приложения предварительно напряженной арматуры в стенке-балке.

Балка-стенка со стрингером

В случае схемы балки-стенки, представленном на фигуре 1б, потенциальная энергия системы состоит из потенциальных энергий плиты и стрингера. В данном случае вариационное уравнение Кастильяно принимает вид:

$$\delta U = \frac{h}{2E} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{EF_s} \int_0^{+a} \left(N_0 + h \int_x^{+a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx \right)^2 dx, \quad (10)$$

где

$$N_0 + h \int_x^{+a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = N_x. \quad (11)$$

является усилием, действующим в любом сечении x стрингера. Уравнение (11) получено из условия равновесия одной части стрингера (фиг. 1б).

Нулевой член аппроксимирующей функции $\varphi = \varphi_0 + \sum a_i \varphi_i$ определяется из условия непрерывности на контактной линии плиты и стрингера, которое при равенстве коэффициента Пуассона нулю выражается в напряжениях следующим образом:

$$- |a_i \varphi_{iyy}|_{y=-b} = \frac{N_0}{F_s} + \frac{h}{F_s} \int_x^{+a} |a_i \varphi_{ixy}|_{y=-b} dx. \quad (12)$$

В уравнении (12) $a_i = a_i + \eta^2 A_i$. Тем самым при определении неизвестных множителей A_i из условия контакта (12) получается нулевой член. Остальные множители a_i находим из условия минимума потенциальной энергии системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \bar{\sigma}_k} = & \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[(\varphi_{0xx} + \sum \sigma_i \varphi_{ixx}) \varphi_{kxx} + (\varphi_{0yy} + \sum \sigma_i \varphi_{iyy}) \varphi_{kyy} + \right. \\ & \left. + 2(\varphi_{0xy} + \sum \sigma_i \varphi_{ixy}) \varphi_{kxy} \right] dx dy + \\ & + \frac{2}{F_s} \int_0^a \left\{ \frac{N_0}{h} + \int_x^a (\varphi_{0xy} + \sum \sigma_i \varphi_{ixy}) dx \right\} \varphi_{kxy} dx \Big| dx = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

согласно чему множители и свободные члены системы уравнений (5) выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} = & \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\varphi_{ixx} \varphi_{kxx} + \varphi_{iyy} \varphi_{kyy} + 2\varphi_{ixy} \varphi_{kxy}) dx dy + \\ & + \frac{2}{F_s} \int_0^a \left\{ \int_x^a \varphi_{ixy} dx \int_{y=-b}^a \varphi_{kxy} dx \right\} dx, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta \rho_k = & \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\varphi_{0xx} \varphi_{kxx} + \varphi_{0yy} \varphi_{kyy} + 2\varphi_{0xy} \varphi_{kxy}) dx dy + \\ & + \frac{2}{F_s} \frac{N_0}{h} \int_0^a \int_{y=-b}^a \varphi_{kxy} dx dx + \frac{2}{F_s} \int_0^a \left\{ \int_x^a \varphi_{0xy} dx \int_{y=-b}^a \varphi_{kxy} dx \right\} dx. \end{aligned}$$

В нижеприведенном численном примере принимается: $h = a : 20$; $F_s = 10 h^2 = a^2 : 40$; $a = b$, согласно которым величины $(2N_0) : (F_s h) = (1600 N_0) : a^3$ и $2 : F_s = 80 : a^2$.

Выбирается следующая функция напряжения

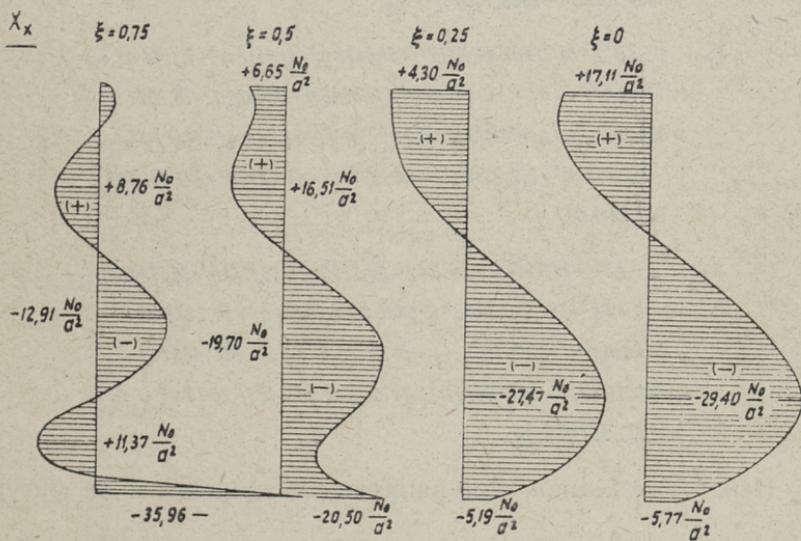
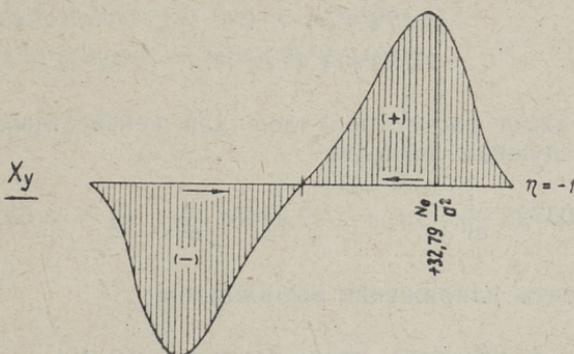
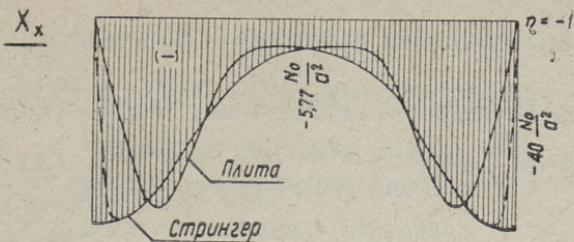
$$\begin{aligned} \varphi = \sum \bar{a}_i \varphi_i = & -(1 - \xi^2)^2 a^4 (-1 + \eta + \eta^2 - \eta^3) [(a_1 + \eta^2 A_1) + \\ & + (a_2 + \eta^2 A_2) \xi^2 \eta + (a_3 + \eta^2 A_3) \xi^4 \eta^2]. \end{aligned} \quad (15)$$

При использовании условия непрерывности (12) в отдельных дискретных точках $x = 0$; $x = \pm 0,5a$; $x = \pm 0,75a$ для неизвестных A_i получаются выражения:

$$A_1 = +1,25 N_0 - 0,5 a_1$$

$$A_2 = 0,4229 N_0 - 0,6a_2 \text{ и}$$

$$A_3 = 11,7651 N_0 - 0,6666 a_3.$$



Фиг. 8

Тем самым функция напряжения выражается:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0 + \sum \sigma_i \varphi_i = & \left[-1,2500(1-\xi^2)^2 \sigma^4 (-\eta^2 + \eta^3 + \eta^4 - \eta^5) b^5 - \right. \\ & - 0,42229(1-\xi^2)^2 \xi^2 \sigma^6 (-\eta^3 + \eta^4 + \eta^5 - \eta^6) b^6 - \\ & - 11,7651(1-\xi^2)^2 \xi^4 \sigma^8 (-\eta^4 + \eta^5 + \eta^6 - \eta^7) b^7 \Big] N_0 + \\ & + 0,5(1-\xi^2)^2 \sigma^4 (-2 + 2\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3 - \eta^4 + \eta^5) b^5 \sigma, + \\ & - (1-\xi^2)^2 \xi^2 \sigma^6 (-\eta + \eta^2 + 1,6\eta^3 - 1,6\eta^4 - 0,6\eta^5 + 0,6\eta^6) b^6 \sigma^2, + \\ & - 0,3333(1-\xi^2)^2 \xi^4 \sigma^8 (-3\eta^2 + 3\eta^3 - 5\eta^4 - 5\eta^5 - 2\eta^6 + 2\eta^7) b^7 \sigma^3. \quad (16) \end{aligned}$$

Продолжая расчет получаем для неизвестных множителей a_i следующие значения:

$$a_1 = + 6,05722 \frac{1}{a_{11}}; \quad a_2 = - 7,94481 \frac{1}{a_{13}}; \quad a_3 = - 65,55798 \frac{1}{a_{16}}.$$

И компоненты напряжения выражаются:

$$\begin{aligned} X_x = & -(1-\xi^2)^2 (+15,6716 - 47,0148\eta - 21,3432\eta^2 + 35,5720\eta^3) \frac{1}{\sigma z} + \\ & - (1-\xi^2)^2 \xi^2 (-15,8896 - 78,8075\eta + 157,6150\eta^2 + 103,7956\eta^3 - 155,6936\eta^4) \frac{1}{\sigma z} + \\ & - (1-\xi^2)^2 \xi^4 (131,1160 - 393,3480\eta - 1452,3412\eta^2 + 2420,5684\eta^3 + \\ & + 1664,1130\eta^4 - 2329,7582\eta^5) \frac{1}{\sigma z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_y = & (1-3\xi^2)(-24,2288 + 24,2288\eta + 31,3432\eta^2 - 31,3432\eta^3 - 7,1144\eta^4 + \\ & + 7,1144\eta^5) \frac{1}{\sigma z} + (-1 + 12\xi^2 - 15\xi^4)(15,8896\eta - 15,8896\eta^2 - 26,2692\eta^3 + \\ & + 26,2692\eta^4 + 10,3796\eta^5 - 10,3796\eta^6) \frac{1}{\sigma z} + (-3\xi^2 + 15\xi^4 - 14\xi^6) \\ & \cdot (+262,2314\eta^2 - 262,2314\eta^3 - 484,1127\eta^4 + 484,1127\eta^5 + 221,8813\eta^6 - \\ & - 221,8813\eta^7) \frac{1}{\sigma z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_y = & (\xi - \xi^3)(+24,2288 + 62,6864\eta - 94,0296\eta^2 - 28,4176\eta^3 + 35,5720\eta^4) \frac{1}{\sigma z} + \\ & + (-\xi + 4\xi^3 - 3\xi^5)(+7,9448 - 15,8896\eta - 40,6724\eta^2 + 54,2299\eta^3 + \\ & + 28,0634\eta^4 - 28,6761\eta^5) \frac{1}{\sigma z} + (-\xi^3 + 3\xi^5 - 2\xi^7)(+524,4637\eta - \\ & - 786,6940\eta^2 - 1937,0625\eta^3 + 2420,5632\eta^4 + 1331,2878\eta^5 - \\ & - 1553,1691\eta^6) \frac{1}{\sigma z}. \end{aligned}$$

Некоторые компоненты напряжений приведены на фигуре 8.

Из приведенного выясняется, что в случае балки-стенки со стрингером достигается более приемлемое распределение напряжений X_x в плите.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Аллик а с. Расчет балок-стенок, опирающихся на торцевые ребра. Труды Таллинского политехнического института. Серия А, № 147, 1958.
2. Л. А. Аллик а с. О расчете упругой армированной балки-стенки, опирающейся на торцевые ребра. Труды Таллинского политехнического института. Серия А, № 171, 1960.

В. Р. Кульбах

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА НА КОНТУРЕ ПЛАСТИНЫ

Быстрое развитие тонкостенных сварных металлических конструкций ставит в повестку дня вопросы прочности и устойчивости тонких металлических пластин при воздействии температурных напряжений. Это требует изучения напряженного состояния таких пластин при их неравномерном нагреве. Само собой разумеется, что сварочные напряжения связаны с местными пластическими деформациями пластины, поэтому изучение температурных напряжений упругих пластин представляет собой только первое приближенное решение задачи.

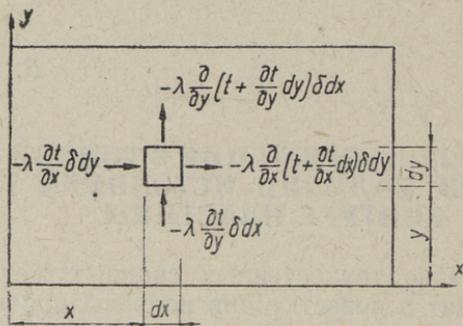
Вопросам изучения напряженного состояния и устойчивости пластин при их неравномерном нагреве в литературе уделено весьма мало внимания. Имеются лишь некоторые приближенные решения для круглых пластин [1] и наиболее общие решения для изучения напряженного состояния прямоугольных пластин [5].

В настоящей статье рассматривается напряженное состояние тонкой упругой прямоугольной пластины, на контуре которой действует источник тепла, а на боковых поверхностях происходит теплоотдача в окружающую среду. В I части работы решается соответствующая температурная задача и во II части — задача определения температурных напряжений. В III части работы производится анализ полученных решений и рассматривается пример определения температурных напряжений.

1. Температурная задача пластины

Рассмотрим установившийся тепловой процесс в тонкой прямоугольной пластине, градиентом температуры по толщине которой можно пренебречь. Далее принимаем, что на

всем контуре пластины или на его части действует интенсивный источник тепла, а на боковых поверхностях происходит конвективный теплообмен с окружающей средой. Для вывода дифференциального уравнения теплопроводности выделим в пластине элементарный параллелепипед (см. фиг. 1), объем которого равен $\delta dx dy$.



Фиг. 1

В рассматриваемый элемент за единицу времени поступает по закону теплопроводности количество тепла

$$q_1 = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} dy + \frac{\partial t}{\partial y} dx \right) \delta,$$

а через противоположные грани выходит количество тепла

$$q_2 = -\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(t + \frac{\partial t}{\partial x} dx \right) dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(t + \frac{\partial t}{\partial y} dx \right) dx \right] \delta,$$

где δ — толщина пластины,

t — температура рассматриваемого элемента,

λ — теплопроводность материала пластины
(ккал/м. час. град).

На боковых поверхностях пластины по закону конвективного теплообмена выделяется тепловой поток

$$q_3 = 2\kappa (t - t_c) dx dy.$$

Уравнение теплового баланса дает

$$q_1 - q_2 - q_3 = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \delta dx dy - 2\kappa (t - t_c) dx dy = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \omega^2 (t - t_c), \quad (1)$$

где t_c — температура окружающей среды,
 κ — коэффициент теплоотдачи (ккал/м². час. град.),
 $\omega^2 = \frac{2\kappa}{\delta\lambda}$ — безразмерный коэффициент остывания.

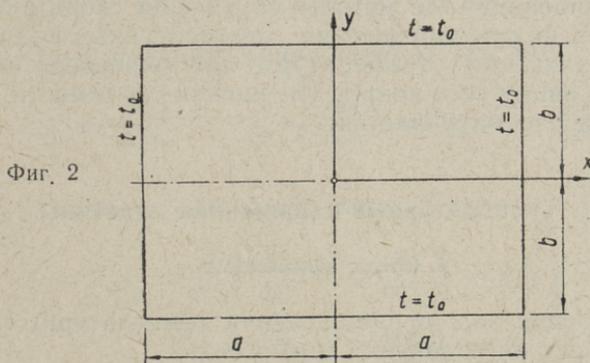
Дифференциальное уравнение (1) не теряет общности, если принимать $t_c = 0$, а под t понимать разность температур пластины и окружающей среды. В таком случае уравнение (1) превращается в эллиптическое уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \omega^2 t, \quad (2)$$

которое при заданных краевых условиях может быть решено с помощью рядов Фурье.

Для определенности задачи предполагаем, что контур пластины имеет постоянную температуру t_0 , т. е. для уравнения (2) имеем краевые условия (см. фиг. 2)

$$\left. \begin{aligned} t = t_0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \\ t = t_0 \quad \text{при} \quad y = \pm b \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Задавая функцию температуры пластины в виде

$$t = t_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i,k}}{ik} \cos \frac{i\pi x}{2a} \cos \frac{k\pi y}{2b} \right), \quad (4)$$

и разложив свободный член в двойной тригонометрический ряд

$$\omega^2 t_0 = \omega^2 t_0 \frac{16}{\pi^2} \sum_{i=1,3}^{\infty} \sum_{k=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{i+k}{2}} \frac{\cos \frac{i\pi x}{2a} \cos \frac{k\pi y}{2b}}{ik}, \quad (5)$$

получаем из уравнения (2)

$$a_{i,k} = \frac{(-1)^{\frac{i+k}{2}} \cdot 16t_0}{\pi^2 \left(1 + \frac{i^2\pi^2}{4\omega^2 a^2} + \frac{k^2\pi^2}{4\omega^2 b^2} \right)} \quad (6)$$

В результате получаем решение дифференциального уравнения (2) в виде

$$t = t_0 \left[1 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{i=1,3} \sum_{k=1,3} \frac{(-1)^{\frac{i+k}{2}} \cos \frac{i\pi x}{2a} \cos \frac{k\pi y}{2b}}{ik \left(1 + \frac{i^2\pi^2}{4\omega^2 a^2} + \frac{k^2\pi^2}{4\omega^2 b^2} \right)} \right] \quad (7)$$

В качестве примера найдено распределение температуры в стальной пластине с размерами $a = 0,8 \text{ м}$, $b = 0,6 \text{ м}$, $\delta = 3 \text{ мм}$ при $\omega^2 = \frac{2\kappa}{\delta\lambda} = 100$ (см. фиг. 3). Сравнение результатов с решением полученных методов конечных разностей показывает, что удовлетворительное совпадение получается при сохранении в формуле (7) 8 членов ряда. Конечно, возможны и общепринятые методы улучшения сходимости указанного ряда, но при определении температурных напряжений численные значения температуры нас непосредственно не интересуют, ввиду чего вопрос улучшения сходимости указанного ряда не рассматривается.

II. Температурные напряжения пластины

1. Общие зависимости

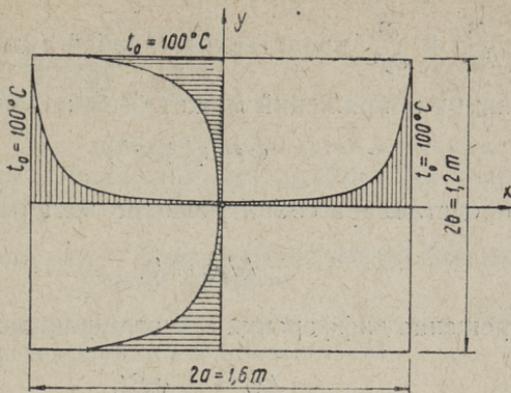
Для решения задачи определения температурных напряжений исходим из уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

условия непрерывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (9)$$

и соотношений между напряжениями и деформациями



Фиг. 3

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) + \psi t, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) + \psi t, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Используя функцию напряжений φ так, что

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (11)$$

можем уравнения (10) представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \psi t, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \psi t, \\ \gamma_{xy} &= -\frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (12)$$

Подставляя значения деформаций из (12) в условие совместности деформаций (9), получим уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \psi E \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) = 0$$

или $\Delta \Delta \varphi + \psi E \Delta t = 0, \quad (13)$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ представляет собой оператор Лапласа.

Функция напряжений может быть задана в виде

$$\varphi = \varphi' + \varphi'', \quad (14)$$

где φ' представляет собой решение бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad (15)$$

а φ'' — решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\Delta\varphi = -\psi Et. \quad (16)$$

Краевые условия для уравнения (15) получим из решения уравнения (16). Когда решение уравнения (16) удовлетворяет заданным краевым условиям, то это решение является и решением уравнения (13).

2. Решение уравнения $\Delta\varphi = -\psi Et$ при заданном распределении температуры

Исходим из основного температурного уравнения (2)

$$\Delta t = \omega^2 t$$

и подставляем значение $\psi Et = \frac{\psi E}{\omega^2} \Delta t$ в уравнение (16). Тогда имеем

$$\Delta\varphi = -\frac{\psi E}{\omega^2} \Delta t, \quad (17)$$

или с точностью до постоянных интегрирования

$$\varphi' = -\frac{\psi E}{\omega^2} t. \quad (18)$$

Соответствующие напряжения получим из уравнений (18), (11) и (7) в виде

$$\sigma_x = -\frac{4\psi E t_0}{\omega^2 a b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+k}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \cos \frac{k\pi y}{2b}}{\frac{kb}{ka} \left(1 + \frac{c^2 \pi^2}{4\omega^2 a^2} + \frac{k^2 \pi^2}{4\omega^2 b^2}\right)},$$

$$\sigma_y = -\frac{4\psi E t_0}{\omega^2 a b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+k}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \cos \frac{k\pi y}{2b}}{\frac{ka}{kb} \left(1 + \frac{c^2 \pi^2}{4\omega^2 a^2} + \frac{k^2 \pi^2}{4\omega^2 b^2}\right)},$$

$$\tau_{xy}'' = -\frac{4\psi E t_0}{\omega^2 \sigma b} \sum_{l=1,3}^{\infty} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{l+k}{2}} \sin \frac{l\pi x}{2a} \sin \frac{k\pi y}{2b}}{1 + \frac{l^2 \pi^2}{4\omega^2 \sigma^2} + \frac{k^2 \pi^2}{4\omega^2 b^2}}. \quad (19)$$

Из уравнений (19) явствует, что грани пластины свободны от нормальных напряжений, но касательные напряжения предполагают наличие специальных связей.

3. Решение уравнения $\Delta \Phi = 0$ для свободно опертой прямоугольной упругой пластинки

Для решения уравнения (15) при отсутствии граничных напряжений задаемся функцией напряжений

$$\varphi'' = \frac{16\psi E t_0}{\omega^2 \sigma b} \left[\sum_{l=1,3}^{\infty} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{l+k}{2}} \cos \frac{l\pi x}{2a} \cos \frac{k\pi y}{2b}}{\frac{l^2 \pi^2}{\sigma b} \left(1 + \frac{l^2 \pi^2}{4\omega^2 \sigma^2} + \frac{k^2 \pi^2}{4\omega^2 b^2} \right)} + \frac{(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)^2}{\sigma^3 b^3} (C_1 + C_2 \frac{x^2}{\sigma^2} + C_3 \frac{y^2}{b^2}) \right]. \quad (20)$$

Соответствующие напряжения определяются зависимостями

$$\sigma_x'' = \frac{16\psi E t_0}{\omega^2 \sigma b} \frac{2}{\sigma^3 b^3} (x^2 - a^2)^2 \left[2(C_1 + C_2 \frac{x^2}{\sigma^2}) / (3y^2 - b^2) + C_3 \frac{1}{b^2} (15y^4 - 12y^2 b^2 + b^4) \right] - \sigma_x',$$

$$\sigma_y'' = \frac{16\psi E t_0}{\omega^2 \sigma b} \frac{2}{\sigma^3 b^3} (y^2 - b^2)^2 \left[2(C_1 + C_3 \frac{y^2}{b^2}) / (3x^2 - a^2) + C_2 \frac{1}{\sigma^2} (15x^4 - 12x^2 a^2 + a^4) \right] - \sigma_y',$$

$$\tau_{xy}'' = -\frac{16\psi E t_0}{\omega^2 \sigma b} \frac{8xy}{\sigma^3 b^3} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \left[2C_2 \frac{3x^2 - a^2}{\sigma^2} + C_3 \frac{3y^2 - b^2}{b^2} \right] - \tau_{xy}'. \quad (21)$$

и удовлетворяют граничным условиям.

Коэффициенты c_1 , c_2 и c_3 определяем из условия минимума потенциальной энергии. Потенциальная энергия для рассматриваемой пластины может быть представлена в виде

$$U = \frac{1}{2E} \int_{-a}^a \int_{-b}^b [(\sigma_x'')^2 + (\sigma_y'')^2 + 2(\tau_{xy}'')^2] dx dy, \quad (22)$$

а условия ее минимума — в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_1} (X + Y + 2Z) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial c_2} (X + Y + 2Z) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial c_3} (X + Y + 2Z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\sigma_x^2 - 2\sigma_x \sigma'_x + \sigma'^2_x) dx dy, \\ Y &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\sigma_y^2 - 2\sigma_y \sigma'_y + \sigma'^2_y) dx dy, \\ Z &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy} \tau'_{xy} + \tau'^2_{xy}) dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

а напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{32\psi E t_0}{\omega^2 a b} \frac{(x^2 - a^2)^2}{a^3 b^3} \left[2(c_1 + c_2 \frac{x^2}{a^2}) / (3y^2 - b^2) + c_3 \frac{1}{b^2} (15y^4 - 12y^2 b^2 + b^4) \right], \\ \sigma_y &= \frac{32\psi E t_0}{\omega^2 a b} \frac{(y^2 - b^2)^2}{a^3 b^3} \left[2(c_1 + c_2 \frac{y^2}{b^2}) / (3x^2 - a^2) + c_3 \frac{1}{a^2} (15x^4 - 12x^2 a^2 + a^4) \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{128\psi E t_0}{\omega^2 a b} \frac{xy}{a^3 b^3} (x^2 - a^2) / (y^2 - b^2) / (2c_1 + c_2 \frac{3x^2 - a^2}{a^2} + c_3 \frac{3y^2 - b^2}{b^2}). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

представляют собой решение уравнения (13).

Подставляя значения напряжений по формулам (25) и (19) в (24), а затем в (23), получим для определения неизвестных c_1 , c_2 и c_3 следующую систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} (4 + 7\alpha^2 + 7\beta^2)c_1 + (\frac{7}{11}\alpha^2 + \beta^2)c_2 + (\alpha^2 + \frac{7}{11}\beta^2)c_3 &= -\frac{11025}{64\pi^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{(\frac{\kappa a}{a} + \frac{\lambda b}{b})^2 / (1 - \frac{12}{\kappa^2 \pi^2}) / (1 - \frac{12}{\lambda^2 \pi^2})}{\kappa^2 \lambda^2 (1 + \frac{\kappa^2 \pi^2}{4\omega^2 a^2} + \frac{\lambda^2 \pi^2}{4\omega^2 b^2})}, \\ (\frac{7}{11}\alpha^2 + \beta^2)c_1 + (\frac{4}{11} - \frac{21}{143}\alpha^2 + 3\beta^2)c_2 + (\frac{4}{11}\alpha^2 + \frac{4}{11}\beta^2)c_3 &= -\frac{11025}{64\pi^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{(\frac{\kappa a}{a} + \frac{\lambda b}{b})^2 / (1 - \frac{156}{\kappa^2 \pi^2} + \frac{1440}{\kappa^2 \pi^4}) / (1 - \frac{12}{\lambda^2 \pi^2})}{\kappa^2 \lambda^2 (1 + \frac{\kappa^2 \pi^2}{4\omega^2 a^2} + \frac{\lambda^2 \pi^2}{4\omega^2 b^2})}, \\ (\alpha^2 + \frac{7}{11}\beta^2)c_1 + (\frac{4}{11}\alpha^2 + \frac{4}{11}\beta^2)c_2 + (\frac{4}{11} + 3\alpha^2 + \frac{21}{143}\beta^2)c_3 &= -\frac{11025}{64\pi^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{(\frac{\kappa a}{a} + \frac{\lambda b}{b})^2 / (1 - \frac{12}{\kappa^2 \pi^2}) / (1 - \frac{156}{\lambda^2 \pi^2} + \frac{1440}{\lambda^2 \pi^4})}{\kappa^2 \lambda^2 (1 + \frac{\kappa^2 \pi^2}{4\omega^2 a^2} + \frac{\lambda^2 \pi^2}{4\omega^2 b^2})}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где $\alpha = \frac{a}{b}$ и $\beta = \frac{b}{a}$ — соотношения размеров пластины.

Итак, решение поставленной в данном пункте задачи дается формулами (21) при использовании формул (19) и (26). По существу указанное напряженное состояние соот-

ветствует нагружению пластины сдвигающими силами распределенными по третьей формуле из группы (19).

4. Температурные напряжения в тонкой прямоугольной свободно опертой упругой пластине

Выше было указано, что температурные напряжения в тонкой прямоугольной пластине должны удовлетворять дифференциальному уравнению (13) и заданным граничным условиям. Для пластины, грани которой свободны от напряжений, а распределение температуры дается уравнением (7), напряженное состояние характеризуется формулами (25), параметры которых определяются системой (26).

III. Прикладные вопросы

1. Преобразование двойных рядов формул (26).

Для вычисления параметров c_1 , c_2 и c_3 в зависимостях (25) для определения компонентов напряжений имеем систему уравнений (26). Правые части этих уравнений представляют собой двойные степенные ряды, которые могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{l=1,3}^{\infty} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{(\alpha k^2 + \beta l^2)^2 (l^2 - \frac{12}{\pi^2}) (k^2 - \frac{12}{\pi^2})}{i^6 k^6 (1 + \gamma \beta l^2 + \gamma \alpha k^2)} \\
 S_2 &= \sum_{l=1,3}^{\infty} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{(\alpha k^2 + \beta l^2)^2 (l^4 - \frac{156}{\pi^2} l^2 + \frac{1440}{\pi^4}) (1 - \frac{12}{\pi^2})}{i^6 k^6 (1 + \gamma \beta l^2 + \gamma \alpha k^2)} \\
 S_3 &= \sum_{l=1,3}^{\infty} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{(\alpha k^2 + \beta l^2)^2 (l^2 - \frac{12}{\pi^2}) (k^4 - \frac{156}{\pi^2} k^2 + \frac{1440}{\pi^4})}{i^6 k^6 (1 + \gamma \beta l^2 + \gamma \alpha k^2)} \quad (27)
 \end{aligned}$$

где $\gamma = \frac{\pi^2}{4\alpha^2 ab}$.

При малых значениях γ эти ряды сходятся сравнительно медленно. Анализ показывает, что подавляющую часть сумм этих рядов образуют члены с индексами $i=1$ и $k=1$, а остальные (причем несущественные) части рядов сходятся достаточно быстро. Учитывая это, преобразуем ряды (27) следующим образом

$$S_1 = \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{\gamma \alpha} \sum_{l=1,3}^{\infty} \frac{(l^2 + \alpha^2)^2 (l^2 - \frac{12}{\pi^2})}{i^6 (l^2 + \frac{1 + \gamma \alpha}{\gamma \beta})} + \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{\gamma \beta} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{(k^2 + \beta^2)^2 (k^2 - \frac{12}{\pi^2})}{k^6 (k^2 + \frac{1 + \gamma \beta}{\gamma \alpha})} - \frac{(\alpha + \beta)^2 (1 - \frac{12}{\pi^2})}{1 + \gamma(\alpha + \beta)}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=3,5}^{\infty} \sum_{k=3,5}^{\infty} \frac{(\alpha k^2 + \beta i^2)^2 (i^2 - \frac{12}{\pi^2}) (k^2 - \frac{12}{\pi^2})}{i^6 k^6 (1 + \gamma \beta i^2 + \gamma \alpha k^2)} \\
S_2 = & \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{\gamma \alpha} \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{(i^2 + \alpha^2)^2 (i^4 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4})}{i^8 (i^2 + \frac{1 + \gamma \alpha}{\gamma \beta})} + \frac{1 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4}}{\gamma \beta} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{(k^2 + \beta^2)^2 (k^2 - \frac{12}{\pi^2})}{k^8 (k^2 + \frac{1 + \gamma \beta}{\gamma \alpha})} \\
& - \frac{(\alpha + \beta)^2 (1 - \frac{12}{\pi^2}) (1 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4})}{1 + \gamma(\alpha + \beta)} + \sum_{i=3,5}^{\infty} \sum_{k=3,5}^{\infty} \frac{(\alpha k^2 + \beta i^2)^2 (i^4 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4}) (k^2 - \frac{12}{\pi^2})}{i^6 k^6 (1 + \gamma \beta i^2 + \gamma \alpha k^2)} \\
S_3 = & \frac{1 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4}}{\gamma \alpha} \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{(i^2 + \alpha^2)^2 (i^2 - \frac{12}{\pi^2})}{i^8 (i^2 + \frac{1 + \gamma \alpha}{\gamma \beta})} + \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{\gamma \beta} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{(k^2 + \beta^2)^2 (k^4 - \frac{156}{\pi^2} k^2 + \frac{1440}{\pi^4})}{k^8 (k^2 + \frac{1 + \gamma \beta}{\gamma \alpha})} \\
& - \frac{(\alpha + \beta)^2 (1 - \frac{12}{\pi^2}) (1 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4})}{1 + \gamma(\alpha + \beta)} + \sum_{i=3,5}^{\infty} \sum_{k=3,5}^{\infty} \frac{(\alpha k^2 + \beta i^2)^2 (i^2 - \frac{12}{\pi^2}) (k^4 - \frac{156}{\pi^2} k^2 + \frac{1440}{\pi^4})}{i^6 k^6 (1 + \gamma \beta i^2 + \gamma \alpha k^2)} \quad (28)
\end{aligned}$$

В первом приближении двойными рядами в формулах (28) можно пренебречь и соответствующие суммы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
S_1 = & K_1' \sum_{i=1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2 + m^2} + \frac{A_1'}{i^2(i^2 + m^2)} + \frac{B_1'}{i^4} + \frac{C_1'}{i^6} \right) + \\
& + K_1'' \sum_{i=1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2 + n^2} + \frac{A_1''}{i^2(i^2 + n^2)} + \frac{B_1''}{i^4} + \frac{C_1''}{i^6} \right) - \frac{(\alpha + \beta)^2 (1 - \frac{12}{\pi^2})^2}{1 + \gamma(\alpha + \beta)}, \\
S_2 = & K_2' \sum_{i=1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2 + m^2} - \frac{A_2'}{i^2(i^2 + m^2)} + \frac{B_2'}{i^4} + \frac{C_2'}{i^6} + \frac{D_2'}{i^8} \right) + \\
& + K_2'' \sum_{i=1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2 + n^2} + \frac{A_2''}{i^2(i^2 + n^2)} + \frac{B_2''}{i^4} + \frac{C_2''}{i^6} \right) - \frac{(\alpha + \beta)^2 (1 - \frac{12}{\pi^2}) (1 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4})}{1 + \gamma(\alpha + \beta)}, \\
S_3 = & K_2' \sum_{i=1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2 + m^2} + \frac{A_1'}{i^2(i^2 + m^2)} + \frac{B_1'}{i^4} + \frac{C_1'}{i^6} \right) + \\
& + K_2'' \sum_{i=1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2 + n^2} + \frac{A_2''}{i^2(i^2 + n^2)} + \frac{B_2''}{i^4} + \frac{C_2''}{i^6} + \frac{D_2''}{i^8} \right) - \frac{(\alpha + \beta)^2 (1 - \frac{12}{\pi^2}) (1 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4})}{1 + \gamma(\alpha + \beta)}, \quad (29)
\end{aligned}$$

где $K_1' = \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{\gamma \alpha}$, $K_1'' = \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{\gamma \beta}$, $K_2' = \frac{1 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4}}{\gamma \alpha}$, $K_2'' = \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{\gamma \beta}$,
 $m^2 = \frac{1 + \gamma \alpha}{\gamma \beta}$, $n^2 = \frac{1 + \gamma \beta}{\gamma \alpha}$.

$$C_1' = -\frac{12}{\pi^2} \frac{\alpha^2}{m^2}, \quad B_1' = \frac{1}{m^2} \left(\alpha^4 - \frac{24}{\pi^2} \alpha^2 - C_1' \right), \quad A_1' = 2\alpha^2 - \frac{12}{\pi^2} - B_1',$$

$$C_1'' = -\frac{12}{\pi^2} \frac{\beta^4}{n^2}, \quad B_1'' = \frac{1}{n^2} \left(\beta^4 - \frac{24}{\pi^2} \beta^2 - C_1'' \right), \quad A_1'' = 2\beta^2 - \frac{12}{\pi^2} - B_1'',$$

$$D_2' = \frac{1440\alpha^4}{\pi^4 m^2}, \quad C_2' = \frac{1}{m^2} \left(\frac{2880\alpha^2}{\pi^4} - \frac{156\alpha^4}{\pi^2} - D_2' \right), \quad B_2' = \frac{1}{m^2} \left(\alpha^4 - \frac{312\alpha^2}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4} - C_2' \right),$$

$$D_2'' = \frac{1440\beta^4}{\pi^4 n^2}, \quad C_2'' = \frac{1}{n^2} \left(\frac{2880\beta^2}{\pi^4} - \frac{156\beta^4}{\pi^2} - D_2'' \right), \quad B_2'' = \frac{1}{n^2} \left(\beta^4 - \frac{312\beta^2}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4} - C_2'' \right),$$

$$A_2' = 2\alpha^2 - \frac{156}{\pi^2} - B_2', \quad A_2'' = 2\beta^2 - \frac{156}{\pi^2} - B_2''$$

Бесконечные ряды $\sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{1}{i^8}$, $\sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{1}{i^6}$, $\sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{1}{i^4}$ и $\sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{1}{i^2(i^2+m^2)}$

быстро сходятся и имеют конечные суммы, ряды же $\sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{1}{i^2+m^2}$ сходятся медленнее, но для определения их сумм можно пользоваться готовыми таблицами [3].

2. Пример определения температурных напряжений в прямоугольной тонкой пластине

Пусть имеем пластину с размерами (см. фиг. 3) $a = 0,8$ м, $b = 0,6$ м. $\delta = 3$ мм, на контуре которой сохраняется постоянная температура $t_0 = 100^\circ$, а теплоотдача в окружающую среду характеризуется коэффициентом остывания $\omega^2 = 100^1/\text{м}^2$.

Распределение температуры в такой плите было рассмотрено в I главе.

Вычисление параметров пластины дает $\alpha = 4/3$,

$$\beta = 3,4, \quad \gamma = \frac{\pi^2}{4\omega^2 ab} = 0,0514,$$

$m^2 = 27,72,$	$n^2 = 15,15,$	
$K_1' = -3,150,$	$K_1'' = -5,599,$	$K_2' = -0,3385,$
$A_1' = 2,3766,$	$B_1' = -0,03694,$	$C_1' = -0,13863,$
$A_1'' = -0,02315,$	$B_1'' = -0,06770,$	$C_1'' = -0,02539,$
$A_2' = -10,8690,$	$B_2' = -1,3814,$	$C_2' = 0,03322,$
$A_2'' = -14,4546,$	$B_2'' = -0,22640,$	$C_2'' = 0,74729,$
$K_2'' = -0,6018,$	$D_2' = 1,6856,$	$D_2'' = 0,30876,$

$$\frac{(\alpha+\beta)^2 \left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)^2}{1 - \nu(\alpha+\beta)} = 0,2265,$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^2 \left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{156}{\pi^2} + \frac{1440}{\pi^4}\right)}{1 - \nu(\alpha+\beta)} = 0,0243.$$

Значения основных сум приводим в таблице 1.

Таблица 1

$\sum_{i=1,3}$	$\frac{1}{i^2+m^2}$	$\frac{1}{i^2+n^2}$	$\frac{1}{i^2(i^2+m^2)}$	$\frac{1}{i^2(i^2+n^2)}$	$\frac{1}{i^4}$	$\frac{1}{i^6}$	$\frac{1}{i^8}$
	0,153	0,185	0,0391	0,0681	1,0147	1,0014	1,00016

При учете соответствующих множителей получим из уравнений (29)

$$S_1 = -0,946, \quad S_2 = -0,221, \quad S_3 = -0,205.$$

Система уравнений (26) в рассматриваемом случае принимает вид

$$20,38 c_1 + 1,694 c_2 + 2,136 c_3 = 1,673,$$

$$1,694 c_1 + 2,312 c_2 + 0,2127 c_3 = 0,391,$$

$$2,136 c_1 + 0,2127 c_2 + 5,780 c_3 = 0,362.$$

Отсюда находим

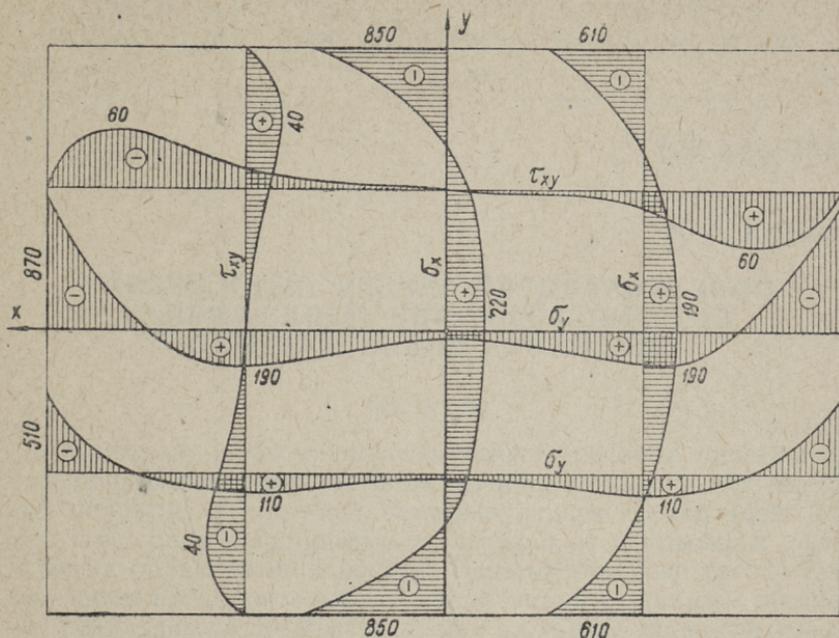
$$c_1 = 0,06904, \quad c_2 = 0,11550, \quad c_3 = 0,03294.$$

Формулы (25) для определения температурных напряжений можем представить в виде

$$\bar{\sigma}_x = \frac{32 \psi E t_0}{\omega^2 a b} \alpha c_3 (1 - \xi^2)^2 \left[2 \frac{c_1}{c_3} + 2 \frac{c_2}{c_3} \xi^2 / (3 \eta^2 - 1) + (15 \eta^4 - 12 \eta^2 + 1) \right],$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{32 \psi E t_0}{\omega^2 a b} \beta c_2 (1 - \eta^2)^2 \left[2 \frac{c_1}{c_2} + 2 \frac{c_3}{c_2} \eta^2 / (3 \xi^2 - 1) + (15 \xi^4 - 12 \xi^2 + 1) \right],$$

$$\tau_{xy} = -\frac{128 \psi E t_0}{\omega^2 a b} \xi \eta \left[(2 c_1 - c_2 - c_3) + 3 c_2 \xi^2 + 3 c_3 \eta^2 \right]. \quad (30)$$



Фиг. 4

где $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$ — безразмерные координаты.

После подстановки значений параметров c_1 , c_2 и c_3 формулы (30) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -68,95(1-\xi^2)^2 \left[(4,192 + 7,012\xi^2)(3\eta^2 - 1) + (15\xi^4 - 12\xi^2 + 1) \right], \\ \sigma_y &= -136,0(1-\eta^2)^2 \left[(1,195 + 0,5704\xi^2)(3\xi^2 - 1) + (15\xi^4 - 12\xi^2 + 1) \right], \\ \tau_{xy} &= -65,06\xi\eta(1-\xi^2)(1-\eta^2)(33,45\xi^2 + 9,442\xi^2 - 1) \end{aligned} \quad (31)$$

Соответствующее распределение напряжений представлено на фиг. 4.

ЛИТЕРАТУРА

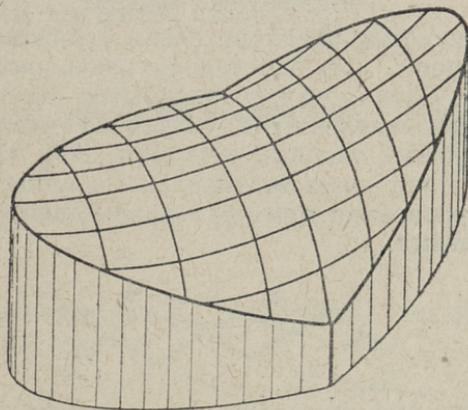
1. Э. И. Григолюк. Некоторые задачи устойчивости круглых пластин при неравномерном нагреве. Инженерный сборник Института механики АН СССР. Том VI, 1950.
2. С. П. Тимошенко. Теория упругости. 1937.
3. Ю. А. Шиманский. Изгиб пластин. 1934.
4. В. Е. Gatewood. Thermal stresses. 1957.
5. E. Melan, H. Parkus. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. 1953.

В. Р. Кульбах

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Введение

Одним из наиболее перспективных способов перекрытия большепролетных зданий является применение легких вантовых покрытий с системой пересекающихся тросов (фиг. 1). Несущие тросы воспринимают нагрузки от покрытия и передают на обрамляющий контур. Вспомогательные тросы подвергаются предварительному натяжению и тем самым обеспечивают необходимую жесткость покрытия. Сетка предварительно напряженных тросов представляет собой статически неопределимую систему с количеством статически неопределимых величин, равным суммарному количеству тросов (не считая статической неопределимости контура).



Фиг. 1

Вопросам расчета предварительно напряженных висячих покрытий с системой пересекающихся тросов с современной

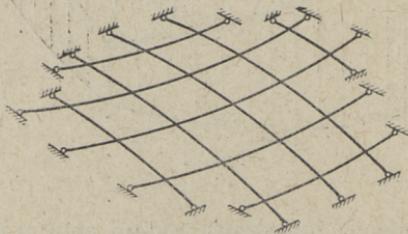
литературе посвящено весьма мало внимания. Имеющиеся работы, как правило, исходят из теории мембран, работающих только на растяжение и мало удобны для получения простых численных результатов. Некоторые данные для практического расчета висячих покрытий приводятся в инструкциях, разработанных институтами НИИЖБ и ЦНИИСК [1], но без учета изменения предварительного напряжения системы при приложении внешней нагрузки.

В настоящей работе рассматривается конкретная задача приближенного расчета системы пересекающихся тросов на базе изучения геометрических и статических характеристик рассматриваемой системы. Расчет может быть распространен на конструкции, в которых покрытие не участвует в работе системы тросов. Поверхность покрытия принята в виде гиперболического параболоида, обрамленного двумя наклонными плоскими кривыми. Кроме того, предполагается, что соотношение стрел провисания f тросов и их пролетов l находится в таких пределах, чтобы, с одной стороны, можно было пренебречь горизонтальными составляющими нагрузок, а с другой стороны, смещения узлов были малыми по сравнению со стрелами провисания. Практически это означает, что схема расчета может быть распространена на системы с соотношением

$$\frac{1}{40} < \frac{f}{l} < \frac{1}{4}$$

1. Общая схема расчета сетки предварительно напряженных тросов.

Рассмотрим сетку предварительно напряженных тросов, геометрия которой, а также усилия предварительного натяжения заданы. Ставим задачу раскрытия статической и геометрической неопределенности указанной схемы при воздействии вертикальных узловых нагрузок. При этом предполагаем, что смещения узлов вертикальны и малы по сравнению со стрелами провисания тросов, а провисания малы по сравнению с пролетами.



Фиг. 2

Пусть сетка (см. фиг. 2) состоит из m основных и n вспомогательных тросов, каждый из которых имеет соответственно α_i или λ_k прямолинейных участков. Тогда общее количество узлов сетки составляет

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i - 1) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1).$$

Предварительное натяжение тросов обуславливает взаимное воздействие между несущими и вспомогательными тросами в виде контактных узловых нагрузок $P_{i,k}^0$. При приложении в узлах сетки системы внешних сосредоточенных нагрузок $Q_{i,k}$ усилия несущих тросов, а также стрелы их провисания увеличиваются. Тем самым уменьшаются стрелы выгиба, а соответственно и усилия вспомогательных тросов. В результате такого воздействия контактные узловые нагрузки уменьшаются от начального их значения $P_{i,k}^0$ до $P_{i,k} = P_{i,k}^0 - \Delta P_{i,k}$.

Для определения неизвестных смещений узлов $\Delta f_{i,k}$ и разностей контактных нагрузок $\Delta P_{i,k}$ рассмотрим деформации системы при приложении внешних нагрузок. В исходной схеме имеем следующее количество неизвестных:

а) $\sum_{i=1}^m (\alpha_i - 1)$ смещений узлов $\Delta f_{i,k}$,

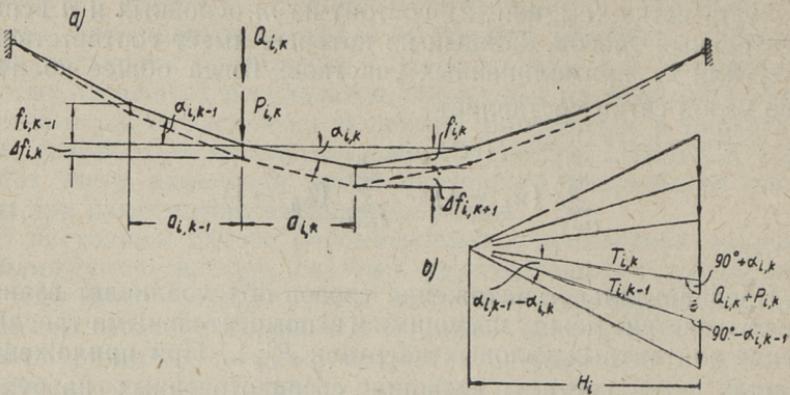
б) $\sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1)$ разностей контактных нагрузок $\Delta P_{i,k}$,

в) $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ удлинений $\Delta s_{i,k}$ отдельных участков несущих тросов,

г) $\sum_{k=1}^n \lambda_k$ удлинений $\Delta s_{k,i}$ отдельных участков вспомогательных тросов,

д) $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ разностей усилий $\Delta T_{i,k}$ отдельных участков несущих тросов,

е) $\sum_{k=1}^n \lambda_k$ разностей усилий $\Delta T_{k,i}$ отдельных участков вспомогательных тросов.



Фиг. 3

Для решения задачи имеем (см. фиг. 3).

- а) $\sum_{i=1}^m (\chi_i - 1)$ уравнений равновесия узлов несущих тросов вида

$$\Delta T_{i,k} = \frac{(Q_{i,k} - \Delta P_{i,k}) \cos \alpha_{i,k-1}}{\sin (\alpha_{i,k-1} - \alpha_{i,k})}, \quad (1)$$

- б) $\sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1)$ уравнений равновесия узлов вспомогательных тросов вида

$$\Delta T_{k,i} = \frac{-\Delta P_{i,k} \cos \alpha_{k,i-1}}{\sin (\alpha_{k,i-1} - \alpha_{k,i})}, \quad (2)$$

- в) $\sum_{i=1}^m \chi_i$ зависимостей между упругими удлинениями и разностями усилий отдельных участков основных тросов вида

$$\Delta S_{i,k} = \frac{\Delta T_{i,k} a_{i,k}}{\cos \alpha_{i,k} E F_i}, \quad (3)$$

- г) $\sum_{k=1}^n \lambda_k$ зависимостей между упругими удлинениями и разностями усилий отдельных участков вспомогательных тросов вида

$$\Delta S_{k,i} = \frac{\Delta T_{k,i} a_{k,i}}{\cos \alpha_{k,i} E F_k}, \quad (4)$$

д) $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ геометрических зависимостей удлинений основных тросов от смещений узлов вида

$$\Delta s_{i,k} = \sqrt{a_{i,k}^2 + (f_{i,k} + \Delta f_{i,k+1} - \Delta f_{i,k})^2} - \sqrt{a_{i,k}^2 + f_{i,k}^2} \approx \frac{\Delta f_{i,k+1} - \Delta f_{i,k}}{\sqrt{a_{i,k}^2 + f_{i,k}^2}}, \quad (5)$$

е) $\sum_{k=1}^n \lambda_k$ геометрических зависимостей удлинений вспомогательных тросов от смещений узлов вида

$$\Delta s_{k,i} \approx \frac{\Delta f_{k,i+1} - \Delta f_{k,i}}{\sqrt{a_{k,i}^2 + f_{k,i}^2}}. \quad (6)$$

Поставленную задачу целесообразно решить в следующем порядке:

1) Разности усилий из формул (1) и (2) подставить в формулы (3) и (4).

2) Приравнять удлинения по (3) и (5), а затем по (4) и (6). Тогда получим систему алгебраических уравнений относительно первых степеней неизвестных $\Delta f_{i,k}$ и $\Delta P_{i,k}$. Количество уравнений составляет

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i - 1) + \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1).$$

3) Подбирать начальные контактные нагрузки так, чтобы контактные нагрузки

$$P_{i,k} = P_{i,k}^0 - \Delta P_{i,k}$$

при заданных максимальных внешних нагрузках были положительными. Тем самым обеспечивается необходимая жесткость покрытия.

4) Определить усилия тросов по формулам

$$T_{i,k} = \frac{(Q_{i,k} + P_{i,k}^0 - \Delta P_{i,k}) \cos \alpha_{i,k-1}}{\sin (\alpha_{i,k-1} - \alpha_{i,k})} \quad (7)$$

$$\text{и } T_{k,i} = \frac{(P_{i,k}^0 - \Delta P_{i,k}) \cos \alpha_{k,i-1}}{\sin (\alpha_{k,i-1} - \alpha_{k,i})} \quad (8)$$

и проверять максимальные напряжения в тросах

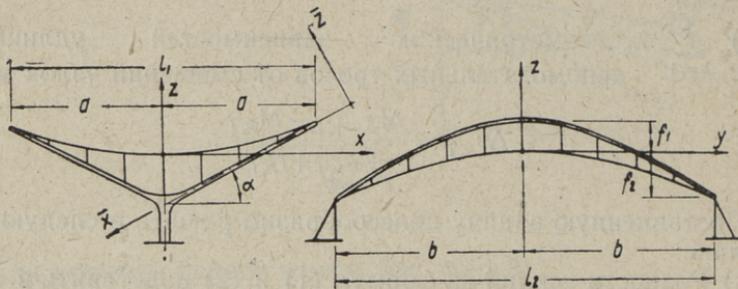
$$\sigma = \frac{\max T_i}{F_i} \leq R.$$

II. Расчет покрытия имеющего форму гиперболического параболоида

1. Геометрическая характеристика покрытия

Поверхность покрытия пусть будет задана уравнением (см. фиг. 4)

$$z = f_1 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - f_2 \left(\frac{y}{b} \right)^2. \quad (9)$$



Фиг. 4

Считая, что все несущие и вспомогательные тросы расположены в вертикальных плоскостях, получим уравнения несущих тросов в виде

$$z' = f_1 \left(\frac{x}{a} \right)^2, \quad (10)$$

а вспомогательных тросов — в виде

$$z'' = -f_2 \left(\frac{y}{b} \right)^2, \quad (11)$$

где $z' = z + f_2 \left(\frac{y_i}{b} \right)^2,$

$$z'' = z - f_1 \left(\frac{x_k}{a} \right)^2,$$

x_k — расстояние плоскости k -того вспомогательного троса от плоскости симметрии покрытия,

y_i — расстояние плоскости i -того основного троса от плоскости симметрии покрытия.

Обрамляющие арки, определяемые уравнением

$$\frac{\bar{x}^2}{u^2} - \frac{y^2}{b^2} \frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{4} \frac{(f_2 - f_1)^2}{f_1^2} \quad (12)$$

представляют собой дуги гипербол с пролетом

$$l = 2b \quad (13)$$

и стрелой

$$u = \sqrt{a^2 + (f_1 + f_2)^2}. \quad (14)$$

Пролет несущего троса, плоскость которого определяется координатой $y = y_i$, составляет

$$l_i = 2a \left(\frac{f_1 + f_2}{2f_1} \right) - \sqrt{\frac{f_2}{f_1} \left(\frac{y_i}{b} \right)^2 + \left(\frac{f_2 - f_1}{2f_1} \right)^2}, \quad (15)$$

а стрела провисания

$$f_i = \frac{f_1^2 + f_2^2}{2f_1} + f_2 \left(\frac{y_i}{b} \right)^2 - (f_1 + f_2) \sqrt{\frac{f_2}{f_1} \left(\frac{y_i}{b} \right)^2 + \left(\frac{f_2 - f_1}{2f_1} \right)^2}. \quad (16)$$

Для вспомогательных тросов имеем соответственно

$$l_k = 2b \sqrt{\left(1 - \frac{x_k}{a} \right) \left(1 - \frac{x_k}{a} \frac{f_1}{f_2} \right)} \quad (17)$$

$$\text{и } f_k = f_2 \left(1 - \frac{x_k}{a} \right) \left(1 - \frac{x_k}{a} \frac{f_1}{f_2} \right). \quad (18)$$

Углы наклона тросов относительно горизонтали при входе в обрамляющий контур составляют

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{f_1 + f_2}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{4f_1 f_2 \left(\frac{y_i}{b} \right)^2 + (f_2 - f_1)^2}, \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_k = -\frac{2f_2}{b} \sqrt{\left(1 - \frac{x_k}{a} \right) \left(1 - \frac{x_k}{a} \frac{f_1}{f_2} \right)}. \quad (20)$$

2. Определение усилий, передаваемых на контур покрытия

При определении усилий натяжения тросов предполагаем, что все действующие на тросы нагрузки (включая контактное давление между несущими и вспомогательными тросами) вертикальны и равномерно распределены по горизонтальной проекции покрытия. Из теории гибких нитей известно, что заданной комбинации нагрузки соответствует одна, определенная форма провисания нити. И наоборот, каждой форме провисания соответствует одна комбинация внешней нагрузки.

Так например, параболической форме нити соответствует вертикальная равномерно распределенная нагрузка.

Поскольку в рассматриваемом случае согласно формулам (10) и (11) имеем параболические тросы, то в стадии предварительного напряжения контактное давление между двумя системами тросов должна распределяться равномерно. Предполагая, что смещения покрытия малы по сравнению с провисаниями, можем считать, что параболическая форма тросов сохраняется и после приложения равномерно распределенной внешней нагрузки. Тогда распор каждого троса как до, так и после приложения единичной внешней нагрузки соответственно составляет

$$H_i = \frac{l_i^2}{8f_i} \quad (21)$$

$$\text{или } H_k = \frac{l_k^2}{8f_k} \quad (22)$$

Подставляя значения l_i , l_k , f_i и f_k из (15), (16), (17) и (18) в формулы (21) и (22), находим

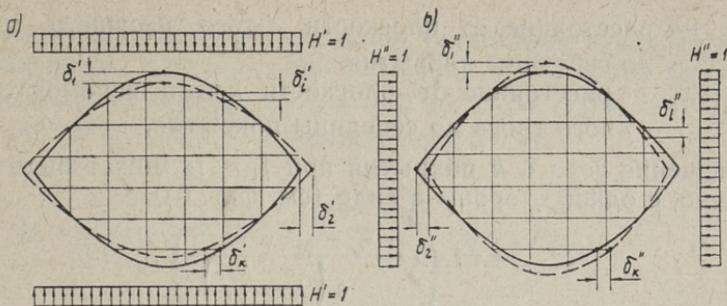
$$H_i = \frac{a^2}{2f_1} = \frac{l_1^2}{8f_1} \quad (23)$$

$$\text{и } H_k = \frac{b^2}{2f_2} = \frac{l_2^2}{8f_2} \quad (24)$$

Из формул (23) и (24) видно, что распоры тросов распределяются равномерно по пролету обрамляющего контура. Усилия, передаваемые на контур экрана в стадии предварительного напряжения и после приложения внешней нагрузки, приводятся в таблице 1 и на фиг. 5.

Таблица 1

Тросы	До приложения внешней нагрузки		После приложения внешней нагрузки	
	Нагрузка	Распор Н	Нагрузка	Распор Н
Несущие	p_0	$\frac{p_0 l_1^2}{8f_1}$	$q + p$	$\frac{(q + p) l_1^2}{8f_1}$
Вспомогательные	p_0	$\frac{p_0 l_2^2}{8f_2}$	p	$\frac{p l_2^2}{8f_2}$



Фиг. 5

В таблице 1 приняты следующие обозначения:

- q — внешняя нагрузка (вес покрытия, снега и т. д.),
- p — контактная нагрузка, приведенная на 1 м^2 покрытия,
- p_0 — начальная контактная нагрузка,
- l_1, f_1 — пролет и стрела провисания среднего несущего троса,
- l_2, f_2 — пролет и стрела выгиба среднего вспомогательного троса.

Когда вертикальные нагрузки от контура передаются на стены здания, то в плоскости контура действуют нагрузки, получаемые разделением усилий таблицы 1 на $\cos \alpha$, где α — угол наклона контура.

3. Деформации покрытия при воздействии равномерно распределенной нагрузки

Поверхность покрытия до приложения внешней нагрузки определяется уравнением (9). Пусть равномерно распределенная нагрузка вызывает в середине покрытия смещение Δf . Это смещение представляет собой увеличение стрелы провисания наиболее длинного несущего троса и одновременно уменьшение стрелы выгиба наиболее длинного вспомогательного троса.

Учитывая параболическое распределение смещений, получим изменение стрелы провисания i -того несущего и k -того вспомогательного троса в виде

$$\Delta f_i = \Delta f_1 \left(1 - \frac{y_i}{b} \right)^2, \quad (25)$$

$$\Delta f_k = \Delta f_2 \left(1 - \frac{x_k}{a} \right)^2, \quad (26)$$

где y_i — расстояние от плоскости i -того несущего троса до середины покрытия,

x_k — расстояние от плоскости k -того вспомогательного троса до середины покрытия.

Смещение узла i, k покрытия при $f_1 = f_2$ может быть определено, с одной стороны в виде (см. фиг. 6)

$$\Delta f_{i,k} = \Delta f_i \left(1 - \frac{x}{a \left(1 - \frac{y_i}{b} \right)} \right)^2, \quad (27)$$

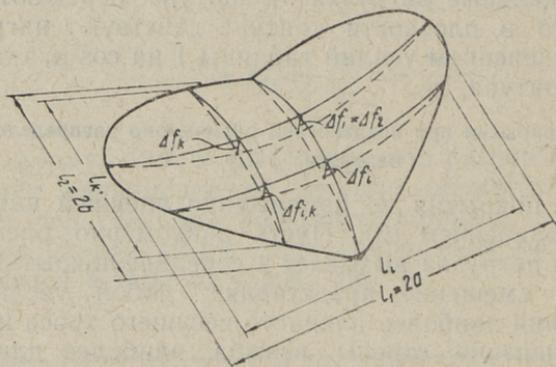
а с другой стороны — в виде

$$\Delta f_{k,i} = \Delta f_k \left(1 - \frac{y}{b \left(1 - \frac{x_k}{a} \right)} \right)^2. \quad (28)$$

Подставляя Δf_i и Δf_k из (25) и (26) в формулы (27) и (28), имеем

$$\Delta f_{i,k} = \Delta f_1 \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 \quad (29)$$

$$\Delta f_{k,i} = \Delta f_2 \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2. \quad (30)$$



Фиг. 6

Начальная длина троса определяется зависимостями

$$s_i = \int_0^{l_i/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2} dx \approx l_i \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{f_i^2}{l_i^2}},$$

$$s_k = \int_0^{l_k/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_k}{\partial y} \right)^2} dy \approx l_k \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{f_k^2}{l_k^2}},$$

Удлинения тросов вследствие увеличения стрел их провисания на Δf_i или Δl_k при смещении опор троса (в связи с деформацией контура покрытия) на $\Delta l_i = 2(H'\delta'_i + H''\delta''_i)$ или $\Delta l_k = 2(H'\delta'_k + H''\delta''_k)$ соответственно будут

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= l_i \left[\sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{(f_i + \Delta f_i)^2}{l_i^2}} - \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{f_i^2}{l_i^2}} \right] - 2(H'\delta'_i + H''\delta''_i) \approx \\ &\approx \frac{16}{3} \frac{f_i \Delta f_i}{l_i \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{f_i^2}{l_i^2}}} - \frac{2(q - 4p)l_i^2}{8f_i} (\delta'_i + \frac{4p}{q - 4p} \delta''_i), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\Delta S_k \approx -\frac{16}{3} \frac{f_k \Delta f_k}{l_k \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{f_k^2}{l_k^2}}} - \frac{2\Delta p l_k^2}{8f_k} (\delta'_k + \frac{q - 4p}{4p} \delta''_k). \quad (32)$$

где δ'_i — горизонтальное смещение опоры i -того несущего троса под воздействием равномерно распределенной единичной нагрузки $H' = 1$ (фиг. 5, а),

δ''_i — то же, под воздействием нагрузки $H'' = 1$,

δ'_k — смещение опоры k -того вспомогательного троса под воздействием равномерно распределенной единичной нагрузки, $H' = 1$ (фиг. 5, б),

δ''_k — то же, под воздействием нагрузки $H'' = 1$.

Упругие удлинения тросов можем представить в виде:

$$\Delta S_i = 2 \int_0^{l_i/2} \frac{\Delta H'}{EF_i} \left[1 + \left(\frac{\partial f_i x}{l_i^2} \right)^2 \right] dx = \frac{(q - 4p)l_i^3 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_i^2}{l_i^2} \right)}{8EF_i f_i}, \quad (33)$$

$$\Delta S_k = \frac{-\Delta p l_k^3 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_k^2}{l_k^2} \right)}{8EF_k f_k} \quad (34)$$

Приравнявая удлинения ΔS_i по (31) и (33), а затем ΔS_k по (32) и (34), имеем для наиболее длинных тросов

$$\Delta f_i = \frac{3(q - 4p)l_i^4 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_i^2}{l_i^2} + \frac{2EF_i \delta'_i}{l_i} + \frac{2EF_i \delta''_i}{l_i} \frac{4p}{q - 4p} \right) \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{f_i^2}{l_i^2}}}{128EF_i f_i^2}, \quad (35)$$

$$\Delta f_2^0 = \frac{-3\Delta\rho l_2^4 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_2^2}{l_2^2} + \frac{2EF_2\delta_2'}{l_2} + \frac{2EF_2\delta_2''}{l_2} \frac{q-4\rho}{\Delta\rho} \sqrt{1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f_2}{l_2}\right)^2}\right)}{128EF_k f_k^2} \quad (36)$$

4. Определение контактной нагрузки между несущими и вспомогательными тросами

Контактные нагрузки определяем из условий совместности деформаций несущих и вспомогательных тросов. Для узлов i, k это условие имеет вид

$$\Delta f_{i, k} = \Delta f_{k, i}. \quad (37)$$

Для всего покрытия сможем написать $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ уравнений типа (37). Согласно формулам (29) и (30) эта система превращается в одно уравнение

$$\Delta f_1 = \Delta f_2, \quad (38)$$

где Δf_1 — изменение провисания наиболее длинного несущего троса,

Δf_2 — изменение стрелы выгиба наиболее длинного вспомогательного троса.

Это значит, что при соблюдении условия совместности деформаций наиболее длинных тросов, условия совместности деформаций всех остальных тросов соблюдаются автоматически. При $f_2 \neq f_1$ указанное положение действительно лишь приближенно.

Подставляя значения Δf_1 и Δf_2 из (35) и (36) в уравнение (38), получим формулу для определения контактного давления в виде

$$\Delta\rho = \frac{q}{1 + \frac{F_1 f_1^2 l_2^4 \sqrt{1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f_2}{l_2}\right)^2} \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_2^2}{l_2^2} + \frac{2EF_2\delta_2'}{l_2}\right) + F_2 f_2^2 l_1^4 \sqrt{1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f_1}{l_1}\right)^2} \frac{2EF_1\delta_1'}{l_1}}{F_2 f_2^2 l_1^4 \sqrt{1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f_1}{l_1}\right)^2} \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{2EF_1\delta_1'}{l_1}\right) + F_1 f_1^2 l_2^4 \sqrt{1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f_2}{l_2}\right)^2} \frac{2EF_2\delta_2'}{l_2}} \quad (39)$$

где δ_1' и δ_2'' — смещение замка арки соответственно под воздействием единичных нагрузок $H' = 1$ и $H'' = 1$ (см. фиг. 5),

δ_1' и δ_2'' — смещение опоры арки под воздействием нагрузок $H' = 1$ и $H'' = 1$.

Положительное значение δ соответствует уменьшению пролета соответствующего троса.

Полученное уравнение предполагает, что смещения арки распределяются в пределах ее пролета так же, как соответствующие пролеты тросов (см. формулы (15) и (17)). Это хорошо соответствует действительности, когда распор арок передается не на фундаменты, а на вспомогательные тросы. В случае заземленных арок под δ следует понимать величину

$$\delta = 1,5 \int_0^l \frac{\delta dy}{l},$$

которая в большинстве случаев незначительна и может не учитываться.

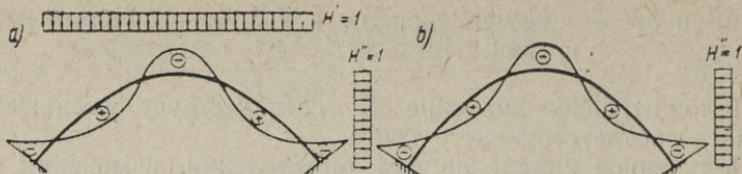
Для предварительного подбора размеров обрамляющих арок изменение контактной нагрузки может определяться по упрощенной формуле

$$\Delta p = \frac{q}{1 + \frac{F_1 f_1^2 l_2^4}{F_2 f_2^2 l_1^4}}, \quad (40)$$

полученной из формулы (39) для пологих тросов без учета деформации обрамляющего контура.

5. О выборе конструкции обрамляющего контура покрытия и влиянии его жесткости на работу системы тросов

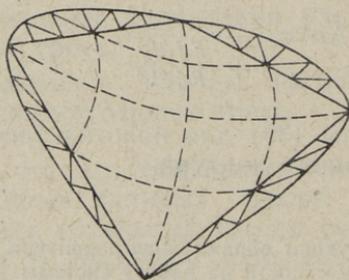
При рассмотрении работы системы тросов контур покрытия был принят в виде двух наклонных гиперболических арок, заданных уравнением (12). Эта форма контура была получена совместным решением уравнения покрытия (9) и уравнения наклонной плоскости $z = 0$ (см. фиг. 4). Анализ статической работы указанных арок показывает, что ввиду их пологости (кроме области замка) эксцентриситеты нормальных сил существенны. Тем не менее, действующие изгибающие моменты легко могут быть восприняты арками нормальных размеров. Сконструирование заземленных в фундаментах арок облегчается еще тем, что единичные усилия несущих и вспомогательных тросов вызывают в арках одинаковые изгибающие моменты (см. фиг. 7).



Фиг. 7

Арки, которые могут быть изготовлены как железобетонными, так и стальными, целесообразно анкеровать в стенах здания. В таком случае они должны воспринимать только нагрузки, действующие в их плоскостях, и отсутствуют трудно воспринимаемые крутящие моменты.

При $f_1 = f_2$ (фиг. 4) контур покрытия (формула (12)) превращается в ломаную прямую. В таком случае контур можно сконструировать в виде четырех сегментных ферм (см. фиг. 8), образующих две трехшарнирные арки. Растянутые пояса таких ферм целесообразно анкеровать в стенах, а сжатые пояса могут быть оперты на кронштейны, выступающие за плоскости стен здания.



Фиг. 8

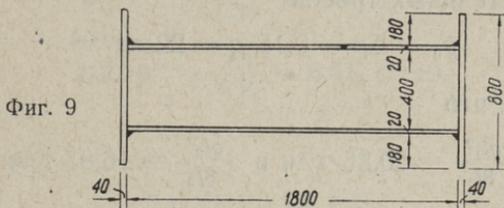
Влияние деформаций контура на контактные нагрузки тросов зависит в первую очередь от жесткости и статической схемы контура. Опытный расчет покрытий с металлическими арками показывает, что деформации контура существенны, когда контур имеет подвижные опоры. В случае же защемленных арок смещение оказывает на контактные нагрузки ограниченное влияние. При этом деформации изгиба и сжатия играют примерно одинаковую роль.

6. Пример расчета покрытия

Пусть имеем покрытие с максимальными размерами в плане (см. фиг. 4) $l_1 = 46,5$ м, $l_2 = 60,0$ м. Максимальные стрелы провисания тросов $f_1 = 2,0$ м, $f_2 = 4,0$ м. Расчетная нагрузка на покрытие $q = 150$ кг/м².

Несущие тросы $\varnothing 38,5$ мм (ГОСТ 7675-55) расположены шагом 3,0 м, а вспомогательные тросы $\varnothing 30,5$ мм (ГОСТ 3090-55) — шагом 4,0 м. Соответствующие площади поперечного сечения $F_1 = 3,33$ см²/м, $F_2 = 1,49$ см²/м.

Обрамляющие арки пролетом $l = 60,0$ м и стрелой $i = 24,0$ м имеют размеры поперечного сечения $h = 1840$ мм и $b = 800$ мм (см. фиг. 9). Площадь поперечного сечения арки $F = 1360$ см², $J_x = 7,36 \cdot 10^6$ см⁴, $W_x = 78\,300$ см³. Арки имеют неподвижные опоры и жестко защемлены в них.



Поверхность покрытия согласно формул (9) определяется уравнением

$$z = \frac{x^2}{270} - \frac{y^2}{225}. \quad (41)$$

Обрамляющие арки образуют дуги гипербол (см. фиг. 4)

$$\bar{x} = \sqrt{1,28 y^2 + 144}. \quad (42)$$

Длина дуги составляет $s = 78,24$ м.

Смещения от единичных нагрузок $H' = 1$ и $H'' = 1$ соответственно будут

$$\begin{aligned} \delta_1' &= 4,5 \text{ см}^2/\text{т}, & \delta_1'' &= 5,8 \text{ см}^2/\text{т}, \\ \delta_2' &= 5,6 \text{ см}^2/\text{т}, & \delta_2'' &= 7,2 \text{ см}^2/\text{т}. \end{aligned}$$

По формуле (39) находим изменение контактного давления

$$\Delta p = 0,40 q.$$

По упрощенной формуле (40) имеем

$$\Delta p = 0,39 q.$$

Из условия необходимости обеспечения жесткости покрытия принимаем

$$p_0 = 0,55 q.$$

Тогда до приложения внешней нагрузки на основные и вспомогательные тросы действует контактная нагрузка

$$p_0 = 0,55 q = 82 \text{ кг/м}^2.$$

Нагрузка после приложения внешней нагрузки $q = 150 \text{ кг/м}^2$ составляет для основных тросов

$$q + p_0 - \Delta p = 1,15 q = 172 \text{ кг/м}^2,$$

для вспомогательных тросов

$$p_0 - \Delta p = 0,15 q = 22 \text{ кг/м}^2.$$

Учитывая, что

$$\frac{q l_1^2}{8 f_1} = 20,25 \text{ т/м} \text{ и } \frac{q l_2^2}{8 f_2} = 16,87 \text{ т/м.}$$

получим распор в стадии эксплуатации покрытия

$$H' = 23,3 \text{ т/м,}$$

$$H'' = 2,5 \text{ т/м,}$$

до приложения внешней нагрузки

$$H_0' = 11,1 \text{ т/м,}$$

$$H_0'' = 9,3 \text{ т/м.}$$

В плоскости арки действует равномерно распределенная нагрузка

$$\frac{H'}{\cos \alpha} = 24,1 \text{ т/м} \text{ и } H'' = 2,5 \text{ т/м}$$

или соответственно

$$\frac{H_0'}{\cos \alpha} = 11,5 \text{ т/м} \text{ и } H_0'' = 9,3 \text{ т/м}$$

Максимальные усилия арки

$$\max M = 43,0 \cdot 24,1 + 54,0 \cdot 2,5 = 1036 + 135 = 1171 \text{ тм,}$$

$$N = 34,26 \cdot 24,1 - 8,74 \cdot 2,5 = 826 - 22 = 804 \text{ т.}$$

Соответствующие напряжения

$$\max \sigma = \frac{804}{1360} + \frac{117100}{78300} = 0,59 + 1,50 = 2,09 \text{ т/см}^2.$$

Максимальные усилия тросов

$$\max T' = \frac{\max H'}{\cos \alpha'} = 24,1 \text{ т/м},$$

$$\max T'' = \frac{\max H''}{\cos \alpha''} = 9,9 \text{ т/м}.$$

Соответствующие напряжения

$$\max \sigma' = \frac{24,1}{3,33} = 7,24 \text{ т/см}^2,$$

$$\max \sigma'' = \frac{9,9}{1,49} = 6,65 \text{ т/см}^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Инструкция по проектированию железобетонных тонкостенных пространственных покрытий и перекрытий. 1961.
2. Х. Х. Лауль, В. Р. Кульбах, А. А. Сумбак. «О вопросах статического расчета и испытания конструкций покрытия Таллинской певческой эстрады». Труды ТПИ. Серия А № 184, 1961.

УДК 624. 04. 001. 24

Э. Ю. Соонурм

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗАМКНУТОГО СЕЧЕНИЯ НА КРУЧЕНИЕ

1. Напряженное и деформированное состояние тонкостенного стержня

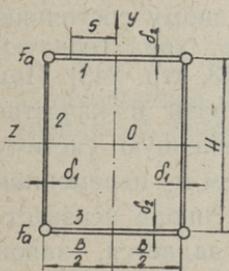
1. Постановка задачи. Схема решения

Рассмотрим снабженный стрингерами однопролетный призматический стержень, имеющий в поперечном сечении замкнутый прямоугольный контур с двумя осями симметрии. Предположим, что стрингеры жестко соединены пластинками с постоянной вдоль стержня толщиной (фиг. 1).

Наличие ребер у стержня будем учитывать приближенно: различную жесткость в продольном и поперечном направлениях оценим различной толщиной стенки. Приведенную толщину для сечений, в которых действуют продольные усилия, определим из условия жесткости при растяжении-сжатии, а для сечений, в которых действуют поперечные изгибающие моменты — из условия жесткости при изгибе. Так полученный ортотропный стержень будем рассматривать как тонкостенную конструкцию.

Предположим, что к стержню приложена распределенная нагрузка, действующая перпендикулярно оси стержня и изменяющаяся вдоль образующей по произвольному закону. При этом однако полагаем, что равнодействующие нагрузки для каждого поперечного сечения лежат все в одной продольной плоскости. При необходимости снятия такого ограничения нагрузку следует представлять несколькими слагаемыми, каждое из которых отвечало бы сделанному ограничению.

Цель данной задачи — определить все усилия (кроме крутящих моментов) и соответствующие им напряжения, а так-



Фиг. 1

же перемещения точек контура стержня и угол поворота образующей.

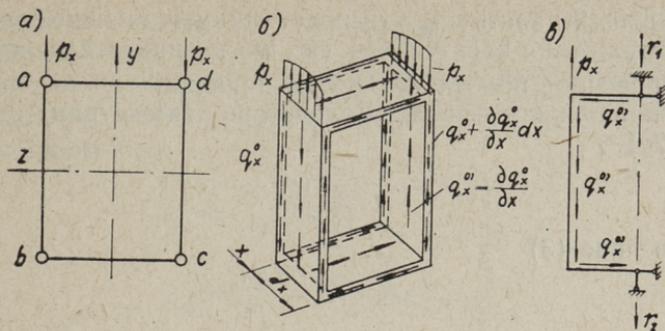
Исходя из гипотез полубезмоментной теории тонкостенных призматических оболочек В. З. Власова [1], пренебрегаем влиянием крутящих и продольных изгибающих моментов и растяжения-сжатия в поперечном направлении на распределение усилий в стержне. Существенными будут деформации растяжения-сжатия в продольном направлении и изгиба — в поперечном направлении. Некоторое значение имеют деформации сдвига. Но, как показали проведенные в Институте механики АН СССР в 1952 г. экспериментальные исследования [2, стр. 297], деформации сдвига играют второстепенную роль и ими можно при расчете пренебречь.

Приложенную к поперечному сечению стержня внешнюю нагрузку представим в виде суммы симметричной и обратносимметричной нагрузок. Так как возникающие в тонкостенном стержне нормальные напряжения при симметричной нагрузке и пренебрежении влиянием деформаций сдвига вычисляются по элементарной теории изгиба балок, то этот случай в дальнейшем не затрагивается.

Обусловленное обратносимметричной нагрузкой (крутящим моментом) напряженное состояние определяем в два этапа. За исходное состояние примем состояние стержня, рассматриваемого как обычная балка. К исходному состоянию прилагает т. н. самонапряженное состояние, характеризующее статическую неопределимость стержня [3, стр. 243]. При рассматриваемой задаче целесообразно выбрать в качестве самонапряженного состояния самоуравновешенную систему продольных напряжений $\bar{\sigma}_x$ в стержне, причем $\bar{\sigma}_x$ переменная вдоль стержня и по поперечному сечению. Эпюра неизвестных напряжений $\bar{\sigma}_x$ в поперечном сечении задается, закон изменения их вдоль стержня получается решением дифференциального уравнения.

2. Исходное состояние

Хотя относительно расположения внешней нагрузки в поперечном сечении стержня принципиально никакого ограничения не делается, рассмотрим для ясности дальнейших выкладок наиболее часто встречающуюся конкретную задачу: изменяющаяся в продольном направлении обратносимметричная нагрузка приложена в плоскостях вертикальных граней стержня (фиг. 2а).



Фиг. 2

Итак

$$m_x = m(x) = B\rho(x). \quad (1)$$

В дальнейшем считаем как внешнюю нагрузку m_x и крутящий момент M_{kx} , так и погонные касательные силы q_x положительными, если, смотря от начала координат по оси x , они действуют по ходу часовой стрелки.

Если исходным состоянием выбрать состояние чистого кручения, то при любой нагрузке m_x продольные напряжения

$$\sigma_x^0 = 0 \quad (2)$$

и приращение касательных сил (независимо от условий закрепления концов стержня)

$$q_x^{0'} = \frac{d}{dx} \left(\frac{M_{kx}}{2BH} \right) = \frac{p_x}{2H}. \quad (3)$$

Например, нагрузка, изменяющаяся по закону квадратной параболы

$$m_x = B\rho_x = \frac{4x}{L^2} (L - x) B\rho$$

вызывает в стержне с жестко заделанными концами крутящий момент

$$M_{kx} = \frac{L}{3} B\rho \left(-1 + 6 \frac{x^2}{L^2} - 4 \frac{x^3}{L^3} \right),$$

откуда следует:

$$q_x^{0'} = \frac{2\rho}{H} \cdot \frac{x}{L^2} (L - x) = \frac{p_x}{2H}.$$

Из фиг. 2б явствует, что под влиянием внешней нагрузки p_x и приращения касательных сил q_x^0 возникают в элементарной поперечной полоске $dx = l$ изгибающий момент, поперечная и продольная силы. Вследствие симметрии очевидно (фиг. 2в).

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2} (p_x - Hq_x^0).$$

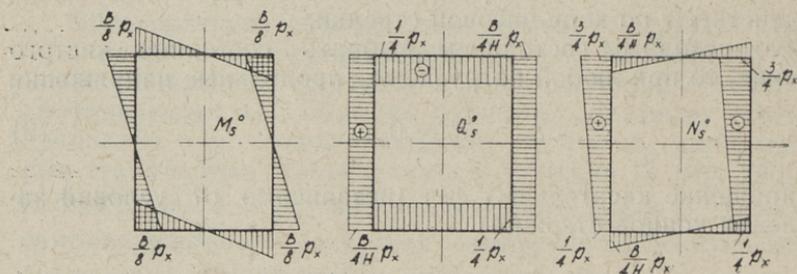
На основе (3)

$$r_1 = r_2 = \frac{p_x}{4}$$

и поперечный изгибающий момент в углу элементарной рамки

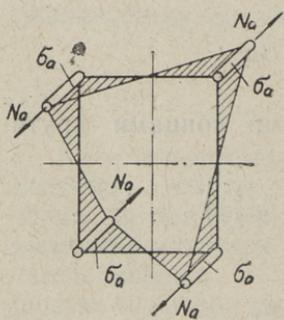
$$M_s^0 = \frac{B}{2} r_1 = \frac{B}{8} p_x. \quad (4)$$

Эпюры, возникающие в исходном состоянии усилий M_s^0 , Q_s^0 и N_s^0 , представлены на фиг. 3.



Фиг. 3

3. Самонапряженное состояние



Фиг. 4

Предположим, что в деформированном состоянии прямолинейные элементы контурной линии поперечного сечения, выходя из плоскости $x = const.$, будут оставаться прямыми [1]. Теперь задаем самоуравновешенную систему продольных напряжений $\bar{\sigma}_x$ в виде, представленном на фиг. 4 [4]. Вследствие симметрии рассмотрим в дальнейшем только половину поперечного сечения. Необходимые обозначения приведены на фиг. 1,

Координату s отчитываем от начала каждой грани против движения часовой стрелки.

Продольные напряжения в пластинках выражаются через максимальное напряжение $\max \bar{\sigma}_x = \sigma_a$, возникающее в узловой точке контура:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{x1} &= \frac{2}{B} s \sigma_a; \\ \bar{\sigma}_{x2} &= \left(1 - \frac{2}{H} s\right) \sigma_a; \\ \bar{\sigma}_{x3} &= \left(\frac{s}{B} s - 1\right) \sigma_a; \\ N_a &= F_a \sigma_a. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Добавление эпюры продольных напряжений $\bar{\sigma}_x$ является причиной появления в стержне и соответствующих касательных напряжений $\bar{\tau}$. Из условия равновесия элемента $dx ds$ получим

$$\bar{\tau} = \int_0^s \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} ds + \bar{\tau}_0, \quad (6)$$

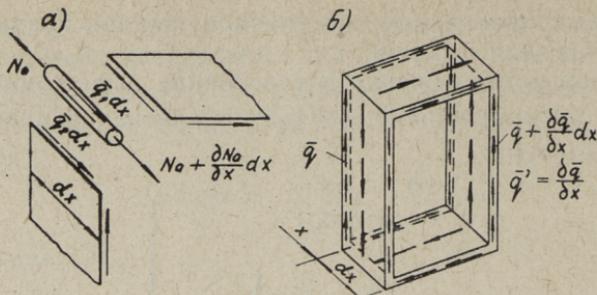
где $\bar{\tau}_0$ -- касательное напряжение в месте $s = 0$.

Имея касательные напряжения, можно получить и погонные касательные усилия $\bar{q} = \tau \delta$, приходящиеся на единицу контура. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_1 &= \frac{s^2}{B} \delta_2 \sigma'_a + \delta_2 \bar{\tau}_{01}; \\ \bar{q}_2 &= \left(s - \frac{s^2}{H}\right) \delta_1 \sigma'_a + \delta_1 \bar{\tau}_{02}; \\ \bar{q}_3 &= \left(\frac{s^2}{B} - s\right) \delta_2 \sigma'_a + \delta_2 \bar{\tau}_{03}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для определения постоянных интегрирования можно использовать два условия непрерывности деформаций и одно условие равновесия.

1) В месте соединения верхнего стрингера пластинками 1 и 2 (фиг. 5а).



Фиг. 5

$$\frac{\partial N_a}{\partial x} dx + \bar{q}_1 dx - \bar{q}_2 dx = 0,$$

откуда следует при $\delta_2 = \alpha \delta_1$:

$$\bar{\tau}_{02} - \alpha \bar{\tau}_{01} = \left(\frac{\alpha B}{4} + \frac{F_a}{\delta_1} \right) \sigma'_a.$$

2) Аналогично в месте соединения нижнего стрингера пластинками 2 и 3

$$\bar{\tau}_{02} - \alpha \bar{\tau}_{03} = \frac{F_a}{\delta_1} \sigma'_a.$$

3) Из условия равновесия $\Sigma M_x = 0$ следует, что

$$\alpha \bar{\tau}_{01} + 2\bar{\tau}_{02} + \alpha \bar{\tau}_{03} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha B}{4} - H \right) \sigma'_a.$$

Решая эти уравнения, получим при помощи выражений (7):

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_1' &= \left[\frac{\alpha}{B} s^2 - \frac{1}{12} \left(2\alpha B + H + \frac{6F_a}{\delta_1} \right) \right] \delta_1 \sigma_a''; \\ \bar{q}_2' &= \left[-\frac{s^2}{H} + s + \frac{1}{12} \left(\alpha B - H + \frac{6F_a}{\delta_1} \right) \right] \delta_1 \sigma_a''; \\ \bar{q}_3' &= \left[\frac{\alpha}{B} s^2 - \alpha s + \frac{1}{12} \left(\alpha B - H - \frac{6F_a}{\delta_1} \right) \right] \delta_1 \sigma_a''. \end{aligned} \right\} (8)$$

Из фиг. 5б видно, что на вырезанную из стержня элементарную рамку единичной длины действуют погонные касательные силы

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \bar{q}'.$$

Эти касательные силы вызывают в элементарной рамке изгибающие моменты \bar{M}_s , поперечные силы \bar{Q}_s и нормальные усилия \bar{N}_s .

Для определения усилий в элементарной рамке найдем (аналогично исходному состоянию)

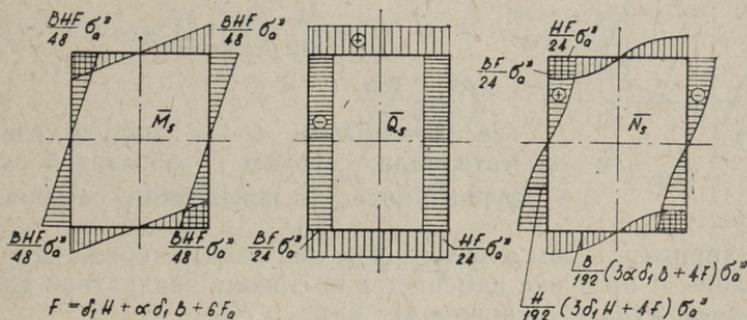
$$\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \frac{1}{2} \int_0^H \bar{q}_2' ds = \frac{HF}{24} \sigma_a'', \quad (9)$$

где $F = \delta_1 H + \alpha \delta_1 B + 6F_a$. (10)

Максимальные изгибающие моменты возникают в узловых точках рамки:

$$\max \bar{M}_s = \frac{BHF}{48} \sigma_a''. \quad (11)$$

Соответствующие самонапряженному состоянию эпюры \bar{M}_s , \bar{Q}_s и \bar{N}_s представлены на фиг. 6.



Фиг. 6

4. Деформации стержня

Введем для перемещений контура поперечного сечения следующие обозначения: v — перемещение в направлении оси y , w — то же в направлении оси z . Перемещение контура складывается из трех слагаемых, например, в рассматриваемой точке

$$v = v^* + v^0 + \bar{v};$$

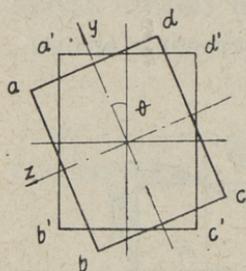
где: v^* — перемещение элементарной рамки, вычисляемое из задачи обычной балки;

v^0 — искривление контура в исходном состоянии, вызываемое изгибающими моментами M_s^0 ;

\bar{v} — искривление контура в самонапряженном состоянии за счет \bar{M}_s .

Так как стержень нагружен только крутящими моментами, то его поперечные сечения трансляторных перемещений не получают. Возникающие перемещения можем по фиг. 7 выразить через угол закручивания Θ :

$$\left. \begin{aligned} v^* &= \frac{1}{2} (H \cos \Theta - B \sin \Theta - H) + s \cdot \sin \Theta; \\ w^* &= \frac{1}{2} (B \cos \Theta - H \sin \Theta - B) + s \cdot \sin \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



Фиг. 7

Пренебрегая эффектом стесненного кручения¹⁾, вычисляем по формуле свободного кручения [6, стр. 43]

$$\Theta_x = \frac{1}{G\Omega} \int_s \int_0^x \frac{q_x}{\delta} dx ds, \quad (13)$$

где $\Omega = 2BH$ и G — модуль сдвига материала; знаком \int_s обозначен контурный интеграл поперечного сечения.

Например, в том случае, когда оба конца стержня жестко заделаны и нагрузка изменяется по закону квадратной параболы, формула (13) принимает вид:

$$\Theta_x = \frac{LBpx}{3G\Omega^2} \left(-1 + 2 \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \right) \int_s \frac{ds}{\delta}.$$

v^0 найдем при помощи эпюры изгибающих моментов M_s^0 . Например, для определения искривленной формы пластинки $d - a$ получим уравнение

$$EI_s \frac{d^2 v^0}{ds^2} = M_s^0,$$

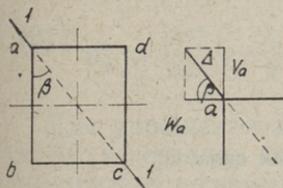
¹ Учитывая влияние стесненного кручения, следует при определении Θ_x прежде всего решить дифференциальное уравнение угла закручивания стержня с недеформируемым замкнутым контуром [5, стр. 67].

где

$$M_s^0 = \frac{B}{8} \left(1 - \frac{2}{B} s \right) p.$$

Отсюда вытекает, что

$$EI_s v^0 = \frac{B}{8} \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3B} \right) p + Cs + D.$$



Фиг. 8

Постоянные интегрирования C и D определяются при помощи перемещения узловой точки a (фиг. 8)

$$EI_s \Delta_a^0 = \frac{BH}{9b\alpha^3} (\alpha^3 H + B) p \cos \beta,$$

где $EI_s = \frac{1}{12} \delta_1^3 E$.

Теперь перемещения контура в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} v^0 &= \frac{Bp}{48\alpha^3 EI_s} \left(-\frac{2}{B} s^3 + 3s^2 + \frac{\alpha^3 H^3 - B^3}{H^2 + B^2} s - \right. \\ &\quad \left. - \frac{BH^2}{2} \cdot \frac{\alpha^3 H + B}{H^2 + B^2} \right); \\ \omega^0 &= \frac{Bp}{48\alpha^3 EI_s} \left(\frac{2}{H} \alpha^3 s^3 - 3\alpha^3 s^2 + \frac{\alpha^3 H^3 - B^3}{H^2 + B^2} s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^2 H}{2} \cdot \frac{\alpha^3 H + B}{H^2 + B^2} \right). \end{aligned} \right\} (14)$$

Перемещения \bar{v} и $\bar{\omega}$ вызываются изгибными моментами \bar{M}_s . Исходным уравнением будет

$$EI_s \frac{d^2 \bar{v}}{ds^2} = \bar{M}_s.$$

Аналогично нахождению v^0 и ω^0 определим уравнения искривленного контура при помощи перемещения Δ узловой точки a поперечного сечения

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \frac{BHF}{288\alpha^3 EI_s} \left(\frac{2}{B} s^3 - 3s^2 - \frac{\alpha^3 H^3 - B^3}{H^2 + B^2} s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{BH^2}{2} \cdot \frac{\alpha^3 H + B}{H^2 + B^2} \right) \sigma_a''; \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\bar{\omega} = \frac{BHF}{288\alpha^3 EI_s} \left(-\frac{2}{H} \alpha^3 s^3 + 3\alpha^3 s^2 - \frac{\alpha^3 H^3 - B^3}{H^2 + B^2} s - \frac{BH^2}{2} \cdot \frac{\alpha^3 H + B}{H^2 + B^2} \right) \sigma_a'' \quad (15)$$

Путем суммирования выражений (12), (14) и (15) получаются полные перемещения

$$\left. \begin{aligned} v &= v^* + v^0 + \bar{v}; \\ \omega &= \omega^* + \omega^0 + \bar{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

5. Изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_x

Через деформацию контура можно выразить и угол поворота образующей относительно продольной оси φ_x и кривизну κ_x . Для этого следует взять соответственно первую и вторую производные выражения (16) по продольной оси x . Например, на горизонтальных гранях стержня (фиг. 1)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x^*}{\partial x} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} = \varphi_x^* + \varphi_x^0 + \bar{\varphi}_x; \\ \kappa_x &= \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \kappa_x^* + \kappa_x^0 + \bar{\kappa}_x. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Выражение (17) позволяет определить изгибающий момент M_x и поперечную силу Q_x вдоль образующей:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -EI_x \kappa_x; \\ Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Рассмотрим порядок величины отдельных слагаемых κ_x в выражении (17).

При постоянной и изменяющейся по линейному закону нагрузках $\kappa_x^0 = 0$. Как показывают сравнительные вычисления, в этом случае величина κ_x^* ничтожна по сравнению со слагаемым $\bar{\kappa}_x$ и поэтому достаточно взять в выражении (18) $\kappa_x = \bar{\kappa}_x$.

Если интенсивность внешней нагрузки изменяется по закону параболы второго порядка, то $\kappa_x^0 \neq 0$. Чтобы достигнуть

конкретных результатов, рассмотрим более подробно стержень со свободно опёртыми торцевыми диафрагмами.

5. 1. Слагаемое κ_x^*

На основе (12) возникает максимальное перемещение контура v^* в узловой точке поперечного сечения ($s=0$ или $s=B$) и поэтому

$$\kappa_x^* = \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(H \frac{d^2}{dx^2} \cos \Theta_x - B \frac{d^2}{dx^2} \sin \Theta_x \right).$$

Для упрощения вычислений перенесем начало координат ($x=0$) в середину стержня. Тогда, при $\delta = \delta_1 = \text{const.}$ и $B=H$ (квадратное поперечное сечение)

$$\Theta_x = - \frac{P}{48GB^2L^2\delta_1} (5L^4 - 24L^2x^2 + 16x^4)$$

и в узловой точке контура

$$\kappa_x^* = \frac{2p}{GB\delta_1} \left(\sin \frac{5L^2p}{12GB^2\delta_1} + \cos \frac{5L^2p}{12GB^2\delta_1} \right).$$

При встречающихся в практике стержнях

$$\sin \frac{5L^2p}{12GB^2\delta_1} \approx 0 \text{ и } \cos \frac{5L^2p}{12GB^2\delta_1} \approx 1.$$

Итак

$$\kappa_x^* = \frac{2p}{GB\delta_1}. \quad (\text{a})$$

5. 2. Слагаемое $\bar{\kappa}_x$

На основе выражений (15) в узловой точке контура

$$\bar{v}_x = \left(\frac{B^2H^3F}{576\alpha^3EJ_s} \cdot \frac{\alpha^2H+B}{H^2+B^2} \right) \sigma_a''.$$

Из-за $\delta_1 = \text{const.}$ и $B=H$ следует, что $\alpha=1$ и $F=2B\delta_1$, вследствие чего

$$\bar{v}_x = \frac{B^5}{24E\delta_1^2} \sigma_a''.$$

Теперь получим

$$\bar{\kappa}_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = -\frac{B^5}{24E\delta_1^2} \sigma_a^{IV}.$$

Формулы возникающего в самонапряженном состоянии продольного напряжения σ_a и его производных представлены в табл. 8. Из этой таблицы видно, что при шарнирно опертом по концам стержне

$$\sigma_a^{IV} = -\frac{48p}{HFL^2} (1+n_0) = -\frac{24p}{B^2L^2\delta_1} (1+n_0).$$

Следовательно

$$\bar{\kappa}_x = -\frac{B^3p}{El^2\delta_1^3} (1+n_0), \quad (6)$$

где $(1+n_0)$ зависит от коэффициента kL , характеризующего геометрические размеры стержня.

В данном случае

$$k = \frac{1}{B} \sqrt[3]{2 \sqrt{3} \frac{\delta_1}{B}}.$$

В табл. 1 приведены коэффициенты kL для различных толщин стенок и длины стержня.

Таблица 1

Величина коэффициента kL

$\frac{L}{B}$	$\frac{\delta_1}{B}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}$
	3	0,558	0,930	1,316
5	1,860	2,63	5,88	11,77
20	3,72	5,26		

Соответствующие величины $(1+n_0)$ приводятся в табл. 2.

Величина $1+n_0$

kL	0,558	0,789	0,930	1,316	1,764	1,860
$1+n_0$	0,9950	0,9801	0,9623	0,8611	0,6396	0,5829
kL	2,63	2,94	3,72	5,26	5,88	11,77
$1+n_0$	0,1656	0,0548	-0,0947	-0,1257	-0,1033	0,0051

5. 3. Слагаемое χ_x^0

На основе (14) в узловой точке контура

$$v_x^0 = \frac{B^2 H^2}{96 \alpha^3 E J_s} \cdot \frac{\alpha^3 H + B}{H^2 + B^2} p_x.$$

При $\delta_1 = const.$ и $B = H$ это выражение упрощается:

$$v_x^0 = \frac{B^3}{8 E \delta_1^3} p_x.$$

Теперь, для нагрузки, интенсивность которой изменяется по закону квадратной параболы, получим

$$\chi_x^0 = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial x^2} = \frac{B^3}{8 E \delta_1^3} p_x'' = - \frac{B^3 p}{E L^2 \delta_1^3}. \quad (в)$$

При сопоставлении выражений (а), (б) и (в) выясняется, что

$$\frac{\bar{\chi}_x}{\chi_x^0} = 1 + n_0 \text{ и } \frac{\chi_x^*}{\chi_x^0} = \frac{2 E L^2 \delta_1^2}{G B^4}.$$

Применяя для стали $E = 2,5 G$, получим

$$\frac{\chi_x^*}{\chi_x^0} = 5 \cdot \frac{L^2}{B^2} \cdot \frac{\delta_1^2}{B^2}.$$

Результаты сравнительных вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 3

$\frac{L}{B}$	$B=10\delta_1$		$B=50\delta_1$		$B=100\delta_1$	
	$\frac{\kappa^*}{\kappa^0}$	$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa^0}$	$\frac{\kappa^*}{\kappa^0}$	$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa^0}$	$\frac{\kappa^*}{\kappa^0}$	$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa^0}$
3	0,450	0,640	0,018	0,980	0,0045	0,995
5	1,25	0,055	0,050	0,861	0,0125	0,962
10	5,00	0,103	0,200	0,166	0,050	0,583
20	20,0	0,005	0,800	0,126	0,200	0,095

Как видно из этой таблицы, при вычислении кривизны κ_x по (17) следует учесть влияние всех трех слагаемых.

II. Ход решения задачи

б. Вывод вариационного уравнения Эйлера

Из предыдущей главы вытекает, что для вычисления полных усилий и деформаций стержня надо прежде всего определить величину продольного напряжения $\max \bar{\sigma}_x = \sigma_a$, возникающего в самонапряженном состоянии. Воспользуемся для этого т. н. энергетическим методом.

Поскольку эпюры продольных напряжений и поперечных изгибающих моментов при рассмотренной внешней нагрузке прямолинейные (фиг. 3 и 6), то выполняем дальнейшие вычисления при помощи наибольших ординат эпюр

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_x &= \max \sigma_x^0 + \max \bar{\sigma}_x = 0 + \sigma_a = \sigma_a; \\ \max M_s &= \max M_s^0 + \max \bar{M}_s = -\frac{B}{8} p_x + \frac{BHF}{48} \sigma_a'' \end{aligned} \right\} (19)$$

Всю потенциальную энергию можем представить в виде суммы трех слагаемых.

а) Потенциальная энергия растяжения-сжатия стенок и стрингеров

$$U_1 = \int_0^x \left(\int_s \frac{\sigma_x^0}{2E} dF + \sum \frac{N_a^0}{2EF_a} \right) dx = \frac{F}{3E} \int_0^x \sigma_a^2 dx. \quad (20)$$

б) Потенциальная энергия изгиба стенки и поперечных ребер

$$U_2 = \int_0^x \int_s \frac{M_s^2}{2EJ_s} ds dx = \frac{1}{2EJ_s} \int_0^x \int_s (M_s^0 + \bar{M}_s)^2 ds dx. \quad (21)$$

При рассматриваемой внешней нагрузке

$$U_2 = \frac{B^2}{128EJ_s} \int_0^x \int_s \left(-p_x + \frac{HF}{6} \sigma_a'' \right)^2 ds dx = \\ + \frac{(\alpha^3 H + B) B^2}{16E\alpha^3 \delta_1^3} \int_0^x \left(-p_x + \frac{HF}{6} \sigma_a'' \right)^2 dx. \quad (21')$$

в) Если концы стержня снабжены диафрагмами в виде рамы или поперечного ребра, то потенциальная энергия изгиба диафрагмы, например, в месте $x=0$

$$U_{\partial 0} = \int_s \frac{M_{s0}^2}{2EJ_{\partial 0}} ds, \quad (22)$$

причем $M_{s0} = M_{s0}^0 + \bar{M}_{s0}$ определяется как M_s . Потенциальная энергия изгиба диафрагмы другого конца стержня ($x=L$) определяется таким же образом:

$$U_{\partial L} = \int_s \frac{M_{sL}^2}{2EJ_{\partial L}} ds. \quad (22')$$

Итак, полная потенциальная энергия системы

$$U = U_1 + U_2 + (U_{\partial 0} + U_{\partial L}) = \int_0^x \left[\frac{F}{3E} \sigma_a^2 + \right. \\ \left. + \frac{(\alpha^3 H + B) B^2}{16E\alpha^3 \delta_1^3} \left(-p_x + \frac{HF}{6} \sigma_a'' \right)^2 \right] dx + U_{\partial 0} + U_{\partial L}. \quad (23)$$

Если $\sigma_a(x)$ является минимизирующей для U , то она удовлетворяет уравнению Эйлера, которое в данном случае имеет вид [7, стр. 211]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_a} + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_a''} \right) = 0. \quad (24)$$

При помощи выражения (23) уравнение (24) примет вид:

$$\sigma_a + \frac{B^2 H^2 F}{192 \alpha^3 \delta_1^3} (\alpha^3 H + B) \sigma_a^{IV} = \frac{B^2 H}{32 \alpha^3 \delta_1^3} (\alpha^3 H + B) p_x''$$

или

$$\sigma_a^{IV} + 4k^4 \sigma_a = Q p_x'' \quad (25)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{48 \alpha^3 \delta_1^3}{B^2 H^2 F (\alpha^3 H + B)}} \quad (26)$$

и

$$Q = \frac{6}{HF} \quad (27)$$

Выражение (27) получено в предположении, что внешняя нагрузка действует в вертикальных гранях стержня. Очевидно, что при какой-либо другой комбинации нагрузок общий вид уравнения (25) сохраняется, но изменяется только величина множителя Q .

Уравнение (25) впервые получено В. З. Власовым исходя из общих восьмичленных дифференциальных уравнений своей теории складчатых систем. В. З. Власовым дано решение однородного уравнения в случае шарнирного опирания торцевых диафрагм стержня [8, стр. 147].

7. Решение дифференциального уравнения

При нагрузке $p_x = p = const.$ уравнение (25) становится однородным:

$$\sigma_a^{IV} + 4k^4 \sigma_a = 0. \quad (28)$$

Так как естественные граничные условия вариационной задачи строительной механики соответствуют из возможных граничных условий лишь одному частному случаю, то для интегрирования уравнения (28) применяем метод начальных параметров [9, стр. 340].

Искомая функция σ_a и её производные будут выражаться следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_a &= A_x \sigma_{a0} + \frac{B_x}{k} \sigma'_{a0} + \frac{C_x}{k^2} \sigma''_{a0} + \frac{D_x}{k^3} \sigma'''_{a0}; \\
 \sigma'_a &= A_x \sigma'_{a0} + \frac{B_x}{k} \sigma''_{a0} + \frac{C_x}{k^2} \sigma'''_{a0} - 4kD_x \sigma_{a0}; \\
 \sigma''_a &= A_x \sigma''_{a0} + \frac{B_x}{k} \sigma'''_{a0} - 4k^2 C_x \sigma_{a0} - 4kD_x \sigma'_{a0}; \\
 \sigma'''_a &= A_x \sigma'''_{a0} - 4k^3 B_x \sigma_{a0} - 4k^2 C_x \sigma'_{a0} - 4kD_x \sigma''_{a0}; \\
 \sigma_a^{IV} &= -4k^4 \sigma_a,
 \end{aligned} \right\} (29)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 A_x &= \operatorname{ch} kx \cos kx; \\
 B_x &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx \sin kx + \operatorname{sh} kx \cos kx); \\
 C_x &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} kx \sin kx; \\
 D_x &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} kx \sin kx - \operatorname{sh} kx \cos kx).
 \end{aligned} \right\} (30)$$

При внешней нагрузке, изменяющейся вдоль образующей линейно или ступенями (а также при ступенчато переменной толщине стенки стержня), могут быть использованы выражения (29) при условии, чтобы они были связаны с внешней нагрузкой. С этой целью введём понятие обобщенных деформаций. Обобщенные смещения \tilde{v}_x , угол поворота $\tilde{\varphi}_x$ и кривизну образующей $\tilde{\kappa}_x$ получим через потенциальную энергию системы:

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{v}_x &= \frac{\partial U}{\partial \sigma_a''} = \frac{B^2 HF}{48 E \alpha^3 \partial_1^3} (\alpha^3 H + B) \left(-p_x + \frac{HF}{6} \sigma_a'' \right); \\
 \tilde{\varphi}_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial \sigma_a''} \right) = \frac{B^2 HF}{48 E \alpha^3 \partial_1^3} (\alpha^3 H + B) \left(-p'_x + \frac{HF}{6} \sigma_a''' \right); \\
 \tilde{\kappa}_x &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \sigma_a''} \right) = \frac{B^2 HF}{48 E \alpha^3 \partial_1^3} (\alpha^3 H + B) \left(-p''_x + \frac{HF}{6} \sigma_a^{IV} \right).
 \end{aligned} \right\} (31)$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a'' &= \zeta \widetilde{v}_x + \rho p_x; \\ \sigma_a''' &= \zeta \widetilde{\varphi}_x + \rho p'_x; \\ \sigma_a^{IV} &= -4k^4 \sigma_a = \zeta \widetilde{x}_x + \rho p''_x, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где

$$\zeta = \frac{288Ea^3\delta_1^3}{B^2H^2F^2(\alpha^3H+B)}. \quad (33)$$

Подставляя выражения (32) в формулы (29), получаем решение однородного уравнения (28) через обобщенные деформации.

Если интенсивность нагрузки меняется вдоль образующей непрерывно по какому-либо закону, при котором второе производное грузового члена отличается от нуля, то самонапряженное состояние стержня описывается неоднородным уравнением (25).

При нагрузке, изменяющейся по закону квадратной параболы, получаем решение уравнения (25) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= A_x \sigma_{a0} + \frac{B_x}{k} \sigma'_{a0} + \frac{C_x}{k^2} \zeta \widetilde{v}_o + \frac{D_x}{k^3} \zeta \widetilde{\varphi}_o + \\ &+ \frac{C_x}{k^2} \rho p_o + \frac{D_x}{k^3} \rho p'_o + \frac{2\rho}{k^4 L^2} (A_x - 1) p; \\ \sigma_a' &= A_x \sigma'_{a0} + \frac{B_x}{k} \zeta \widetilde{v}_o + \frac{C_x}{k^2} \zeta \widetilde{\varphi}_o - 4k D_x \sigma'_{a0} + \\ &+ \frac{B_x}{k} \rho p_o + \frac{C_x}{k^2} \rho p'_o - \frac{8\rho}{k^3 L^2} D_x p; \\ \sigma_a'' &= A_x \zeta \widetilde{v}_o + \frac{B_x}{k} \zeta \widetilde{\varphi}_o - 4k^2 C_x \sigma_{a0} - 4k D_x \sigma'_{a0} + \\ &+ A_x \rho p_o + \frac{B_x}{k} \rho p'_o - \frac{8\rho}{k^2 L^2} C_x p; \\ \sigma_a''' &= A_x \zeta \widetilde{\varphi}_o - 4k^3 B_x \sigma_{a0} - 4k^2 C_x \sigma'_{a0} - 4k D_x \zeta \widetilde{v}_o - \\ &- 4k D_x \rho p_o + A_x \rho p'_o - \frac{8\rho}{k L^2} B_x p; \\ \sigma_a^{IV} &= -4k^4 \sigma_a. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Для возможности постановки граничных условий дадим и выражения для обобщенных деформаций:

$$\left. \begin{aligned}
 \zeta \tilde{v}_x &= A_x \zeta \tilde{v}_0 + \frac{B_x}{k} \zeta \tilde{\varphi}_0 - 4k^2 C_x \sigma_{a0} - 4k D_x \sigma'_{a0} + \\
 &+ A_x \rho p_0 + \frac{B_x}{k} \rho p'_0 - \rho p_x - \frac{8\rho}{k^2 L^2} C_x p; \\
 \zeta \tilde{\varphi}_x &= A_x \zeta \tilde{\varphi}_0 - 4k^3 B_x \sigma_{a0} - 4k^2 C_x \sigma'_{a0} - 4k D_x \zeta \tilde{v}_0 - \\
 &- 4k D_x \rho p_0 + A_x \rho p'_0 - \rho p'_x - \frac{8\rho}{k L^2} B_x p; \\
 -\frac{\zeta}{4k^4} \tilde{\chi}_x &= A_x \sigma_{a0} + \frac{B_x}{k} \sigma'_{a0} + \frac{C_x}{k^2} \zeta \tilde{v}_0 + \frac{D_x}{k^3} \zeta \tilde{\varphi}_0 + \\
 &+ \frac{C_x}{k^2} \rho p_0 + \frac{D_x}{k^3} \rho p'_0 + \frac{\rho}{4k^4} p''_x + \frac{2\rho}{k^4 L^2} (A_x - 1) p.
 \end{aligned} \right\} (35)$$

7. 1. Граничные условия

В табл. 4 приведены граничные условия для четырех важных комбинаций закрепления концов стержня. При симметричной нагрузке и закреплении концов стержня начальное сечение принято в середине пролета (в этом случае $L=2l$).

Таблица 4

	Нагрузка постоянная или изменяется по закону параболы	Нагрузка изменяется по линейному закону
Оба конца связаны с жесткими диафрагмами	$\sigma'_{a0} = \sigma_{aL} = 0$ $\tilde{\varphi}_0 = \tilde{v}_L = 0$	$\sigma_{a0} = \sigma_{aL} = 0$ $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_L = 0$
Оба конца жестко закреплены	$\sigma'_{a0} = 0$ $\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}_L = \tilde{v}_L = 0$	$\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}_L = 0$ $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_L = 0$
Один конец свободный, другой — жестко закреплён (консоль)	$\sigma_{a0} = \sigma'_{a0} = 0$ $\tilde{\varphi}_L = \tilde{v}_L = 0$	$\sigma_{a0} = \sigma'_{a0} = 0$ $\tilde{\varphi}_L = \tilde{v}_L = 0$
Один конец связан с жесткой диафрагмой, другой — жестко закреплён	$\sigma_{a0} = 0$ $\tilde{\varphi}_L = \tilde{v}_0 = \tilde{v}_L = 0$	$\sigma_{a0} = 0$ $\tilde{\varphi}_L = \tilde{v}_0 = \tilde{v}_L = 0$

7. 2 Номограммы

Формулы для вычисления продольного напряжения σ_a и его производных представлены в табл. 5—8. При помощи этих величин определяются усилия и деформации в самонапряженном состоянии. Окончательные расчетные усилия и перемещения получаются суммированием соответствующих величин исходного и самонапряженного состояний. Для упрощения вычислений продольных напряжений и поперечных изгибающих моментов, как наиболее важных усилий, составлены соответствующие номограммы (фиг. 9—32). На номограммах графически показано изменение σ_a и M_{sa} в зависимости от величины kL . На основе (26) k зависит только от размеров поперечного сечения. При постоянной k графики на фиг. 9—32 показывают влияние длины стержня на распределение внутренних сил: чем больше kL , тем больше сосредотачиваются продольные напряжения к жестко закрепленным концам стержня и тем больше приближается эпюра M_s к эпюре M_s^0 , возникающей в исходном состоянии.

При применении номограмм следует иметь в виду, что коэффициент

$$F_0 = \sqrt{\frac{F_1}{F} + \frac{F_2}{\alpha^4 F}}, \quad (36)$$

где $F_1 = \delta_1 H$ и $F_2 = \delta_2 B = \alpha \delta_1 B$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Расчет тонкостенных призматических оболочек. «Прикладная математика и механика», т. VIII. 1944.
2. В. З. Власов. Тонкостенные упругие стержни. 1959.
3. А. А. Уманский. Пространственные системы. 1948.
4. Э. Ю. Соонурм. Расчет тонкостенных стержней многозамкнутого сечения на кручение. Труды ТПИ. серия А № 171, 1960.
5. И. В. Урбан. Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций. 1955.
6. С. Н. Кан, Я. Г. Пановко. Элементы строительной механики тонкостенных конструкций. 1952.
7. В. Смирнов. Курс высшей математики, том IV. 1951.
8. В. З. Власов. Тонкостенные упругие стержни. 1940.
9. А. Г. Иммерман. Расчет ортотропной круговой цилиндрической оболочки на поперечную нагрузку, «Расчет пространственных конструкций», вып. III. 1955.

ТАБЛИЦЫ И НОМОГРАММЫ

$$\sigma_a = \frac{6p}{HFk^2} \cdot n_0$$

$$p_x = p = \text{const.}$$

$$\sigma_a' = \frac{6p}{HFk} \cdot n_1$$

$$A_x = chkx \cos kx$$

$$\sigma_a'' = \frac{6p}{HF} \cdot n_2$$

$$B_x = \frac{1}{2}(chkx \sin kx + shkx \cos kx)$$

$$\sigma_a''' = \frac{24kp}{HF} \cdot n_3$$

$$C_x = \frac{1}{2} shkx \sin kx$$

$$\sigma_a'''' = -\frac{24k^2p}{HF} \cdot n_0$$

$$D_x = \frac{1}{4}(chkx \sin kx - shkx \cos kx)$$

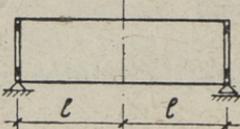
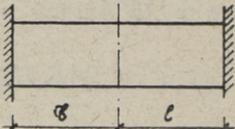
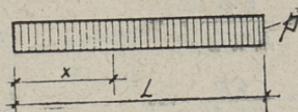
Схема		
n_0	$\frac{A_c C_x - C_c A_x}{A_c^2 + 4C_c^2}$	$\frac{B_c C_x - D_c A_x}{A_c B_c + 4C_c D_c}$
n_1	$\frac{A_c B_x + 4C_c D_x}{A_c^2 + 4C_c^2}$	$\frac{B_c B_x + 4D_c D_x}{A_c B_c + 4C_c D_c}$
n_2	$\frac{A_c A_x + 4C_c C_x}{A_c^2 + 4C_c^2}$	$\frac{B_c A_x + 4D_c C_x}{A_c B_c + 4C_c D_c}$
n_3	$\frac{C_c B_x - A_c D_x}{A_c^2 + 4C_c^2}$	$\frac{D_c B_x - B_c D_x}{A_c B_c + 4C_c D_c}$

Таблица 5



$$a = \frac{1}{4} \cdot \frac{A_L(A_L - 1) + 4B_L D_L}{B_L C_L - A_L D_L}$$

$$b = \frac{C_L(A_L - 1) + 4D_L^2}{B_L C_L - A_L D_L}$$

$\frac{A_L C_x + 4D_L D_x}{A_L^2 + 4B_L D_L}$	$-a b_x + C_x - b D_x$
$\frac{A_L B_x + 4D_L C_x}{A_L^2 + 4B_L D_L}$	$-a A_x + B_x - b C_x$
$\frac{A_L A_x + 4D_L B_x}{A_L^2 + 4B_L D_L}$	$-A_x - b B_x + 4a D_x$
$\frac{D_L A_x - A_L D_x}{A_L^2 + 4B_L D_L}$	$-\frac{b}{4} A_x + a C_x - D_x$

$$\bar{b}_a = \frac{6p}{HFK^3L} \cdot \eta_0$$

$$\bar{b}_a' = \frac{6p}{HFK^2L} \cdot \eta_1$$

$$\bar{b}_a'' = \frac{6p}{HFKL} \cdot \eta_2$$

$$\bar{b}_a''' = \frac{6p}{HFL} \cdot \eta_3$$

$$\bar{b}_a^{iv} = -\frac{24\kappa p}{HFL} \cdot \eta_0$$

$$a = \frac{B_L C_L - A_L D_L + D_L - \kappa L C_L}{C_L^2 - B_L D_L}$$

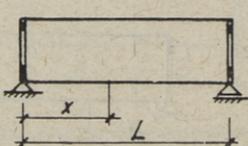
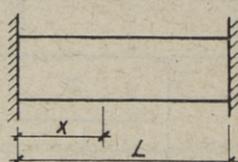
$$b = \frac{A_L C_L - B_L^2 - C_L + \kappa L B_L}{C_L^2 - B_L D_L}$$

$$c = \frac{\kappa L A_L - B_L}{A_L^2 + 4 B_L D_L}$$

$$d = \frac{A_L + 4\kappa L D_L}{A_L^2 + 4 B_L D_L}$$

$$g = \frac{1}{4} \cdot \frac{B_L - \kappa L A_L}{A_L D_L - B_L C_L}$$

$$h = \frac{D_L - \kappa L C_L}{A_L D_L - B_L C_L}$$

Схема		
η_0	$\kappa L \cdot \frac{B_L D_x - D_L B_x}{B_L^2 + 4 D_L^2}$	$\frac{a}{4} A_x + \frac{b}{4} B_x + D_x$
η_1	$\kappa L \cdot \frac{B_L C_x - D_L A_x}{B_L^2 + 4 D_L^2}$	$\frac{b}{4} A_x + C_x - a D_x$
η_2	$\kappa L \cdot \frac{B_L B_x + 4 D_L D_x}{B_L^2 + 4 D_L^2}$	$B_x - a C_x - b D_x$
η_3	$\kappa L \cdot \frac{B_L A_x + 4 D_L C_x}{B_L^2 + 4 D_L^2}$	$A_x - a B_x - b C_x$

задана \Rightarrow Таблица 6

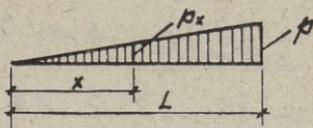
$$p_x = \frac{x}{L} p$$

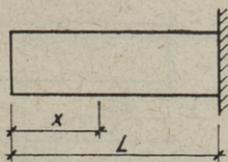
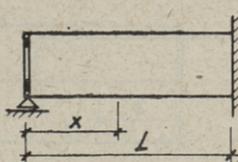
$$A_x = \text{шккх} \cos kx$$

$$B_x = \frac{1}{2} (\text{шккх} \sin kx + \text{шккх} \cos kx)$$

$$C_x = \frac{1}{2} \text{шккх} \sin kx$$

$$D_x = \frac{1}{4} (\text{шккх} \sin kx - \text{шккх} \cos kx)$$



	
$cC_x + dD_x$	$gB_x + hD_x$
$cB_x + dC_x$	$gA_x + hC_x$
$cA_x + dB_x$	$hB_x - 4gD_x$
$dA_x - 4cD_x$	$hA_x - 4gC_x$

$$a = \frac{A_1 D_1 - B_1 C_1}{B_1^2 + 4 D_1^2}$$

$$b = \frac{A_1 B_1 + 4 C_1 D_1}{B_1^2 + 4 D_1^2}$$

$$c = \frac{A_1 D_1 - B_1 C_1 - D_1 + \kappa L A_1 C_1 + 4 \kappa L D_1^2}{C_1^2 - B_1 D_1}$$

$$d = \frac{B_1^2 - A_1 C_1 + C_1 - \kappa L A_1 B_1 - 4 \kappa L C_1 D_1}{C_1^2 - B_1 D_1}$$

$$g = \frac{1}{4} \cdot \frac{\kappa L A_1^2 + 4 \kappa L B_1 D_1 - B_1}{A_1 D_1 - B_1 C_1}$$

$$h = \frac{4 \kappa L D_1^2 + \kappa L A_1 C_1 - D_1}{A_1 D_1 - B_1 C_1}$$

$$\bar{\sigma}_a = \frac{6p}{HF\kappa^2 L} \cdot m_0$$

$$\bar{\sigma}_a' = \frac{6p}{HF\kappa^2 L} \cdot m_1$$

$$\bar{\sigma}_a'' = \frac{6p}{HF\kappa L} \cdot m_2$$

$$\bar{\sigma}_a''' = \frac{6p}{HF L} \cdot m_3$$

$$\bar{\sigma}_a^{IV} = -\frac{24\kappa p}{HF L} \cdot m_0$$

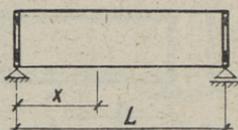
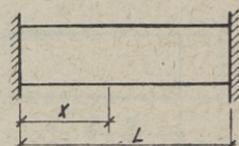
Crema	Diagram	
		
n		
n_0	$\kappa L(aB_x + C_x - bD_x)$	$\frac{c}{4} A_x + \frac{d}{4} B_x + \kappa L C_x - D_x$
n_1	$\kappa L(aA_x + B_x - bC_x)$	$\frac{d}{4} A_x + \kappa L B_x - C_x - cD_x$
n_2	$\kappa L(A_x - bB_x - 4aD_x)$	$\kappa L A_x - B_x - cC_x - dD_x$
n_3	$\kappa L(bA_x + 4aC_x + 4D_x)$	$-A_x - cB_x - dC_x - 4\kappa L D_x$

Таблица 7

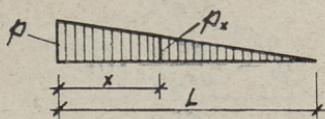
$$p_x = \left(1 - \frac{x}{L}\right) p$$

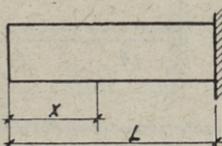
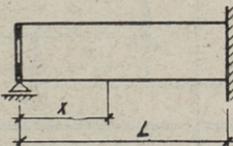
$$A_x = chkx \cos kx$$

$$B_x = \frac{1}{2}(chkx \sin kx + shkx \cos kx)$$

$$C_x = \frac{1}{2} shkx \sin kx$$

$$D_x = \frac{1}{4}(chkx \sin kx - shkx \cos kx)$$



	
$\frac{B_L C_x - A_L D_x}{A_L^2 + 4B_L D_L}$	$gB_x + \kappa L C_x + hD_x$
$\frac{B_L B_x - A_L C_x}{A_L^2 + 4B_L D_L}$	$gA_x + \kappa L B_x + hC_x$
$\frac{B_L A_x - A_L B_x}{A_L^2 + 4B_L D_L}$	$\kappa L A_x + hB_x - 4gD_x$
$\frac{4B_L D_x + A_L A_x}{A_L^2 + 4B_L D_L}$	$hA_x - 4gC_x - 4\kappa L D_x$

$$\sigma_a = \frac{12 p}{H F K^4 L^2} \cdot \pi_0$$

$$\sigma_a' = \frac{48 p}{H F K^3 L^2} \cdot \pi_1$$

$$\sigma_a'' = \frac{48 p}{H F K^2 L^2} \cdot \pi_2$$

$$\sigma_a''' = -\frac{48 p}{H F K L^2} \cdot \pi_3$$

$$\sigma_a^{iv} = -\frac{48 p}{H F L^2} (1 + \pi_0)$$

$$a = \frac{A_L C_L - B_L^2}{A_L^2 + 4 B_L D_L}$$

$$b = \frac{A_L B_L + 4 C_L D_L}{A_L^2 + 4 B_L D_L}$$

$$c = \frac{B_L^2 - A_L C_L}{A_L D_L - B_L C_L}$$

$$d = \frac{C_L^2 - B_L D_L}{A_L D_L - B_L C_L}$$

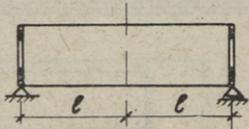
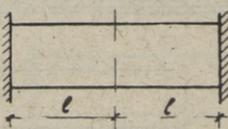
Схема π		
π ₀	$\frac{A_e A_x + 4 C_e C_x}{A_e^2 + 4 C_e^2} - 1$	$\frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{A_e A_x + 4 C_e C_x}{A_e B_e + 4 C_e D_e} - 1$
π ₁	$\frac{C_e B_x - A_e D_x}{A_e^2 + 4 C_e^2}$	$\frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{C_e B_x - A_e D_x}{A_e B_e + 4 C_e D_e}$
π ₂	$\frac{C_e A_x - A_e C_x}{A_e^2 + 4 C_e^2}$	$\frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{C_e A_x - A_e C_x}{A_e B_e + 4 C_e D_e}$
π ₃	$\frac{A_e B_x + 4 C_e D_x}{A_e^2 + 4 C_e^2}$	$\frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{A_e B_x + 4 C_e D_x}{A_e B_e + 4 C_e D_e}$

Таблица 8

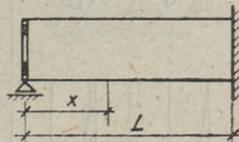
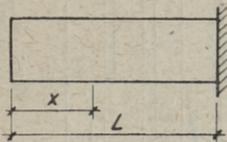
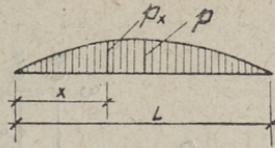
$$p_x = \frac{4x}{L}(L-x)p$$

$$A_x = chkx \cos kx$$

$$B_x = \frac{1}{2}(chkx \sin kx + shkx \cos kx)$$

$$C_x = \frac{1}{2} shkx \sin kx$$

$$D_x = \frac{1}{4}(chkx \sin kx - shkx \cos kx)$$

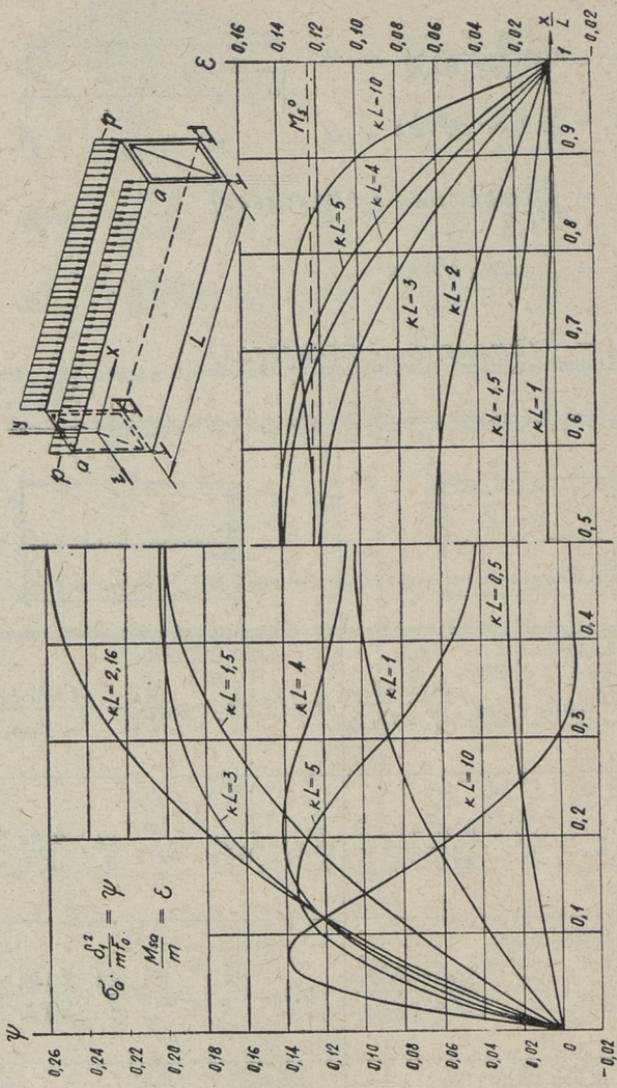


$$A_x - 1 + 4aC_x + 4bD_x + 2\kappa L \cdot \frac{B_L C_x - A_L D_x}{A_L^2 + 4B_L D_L} \quad A_x - 1 + cB_x - 4dD_x - \frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{B_L B_x + 4D_L D_x}{A_L D_L - B_L C_L}$$

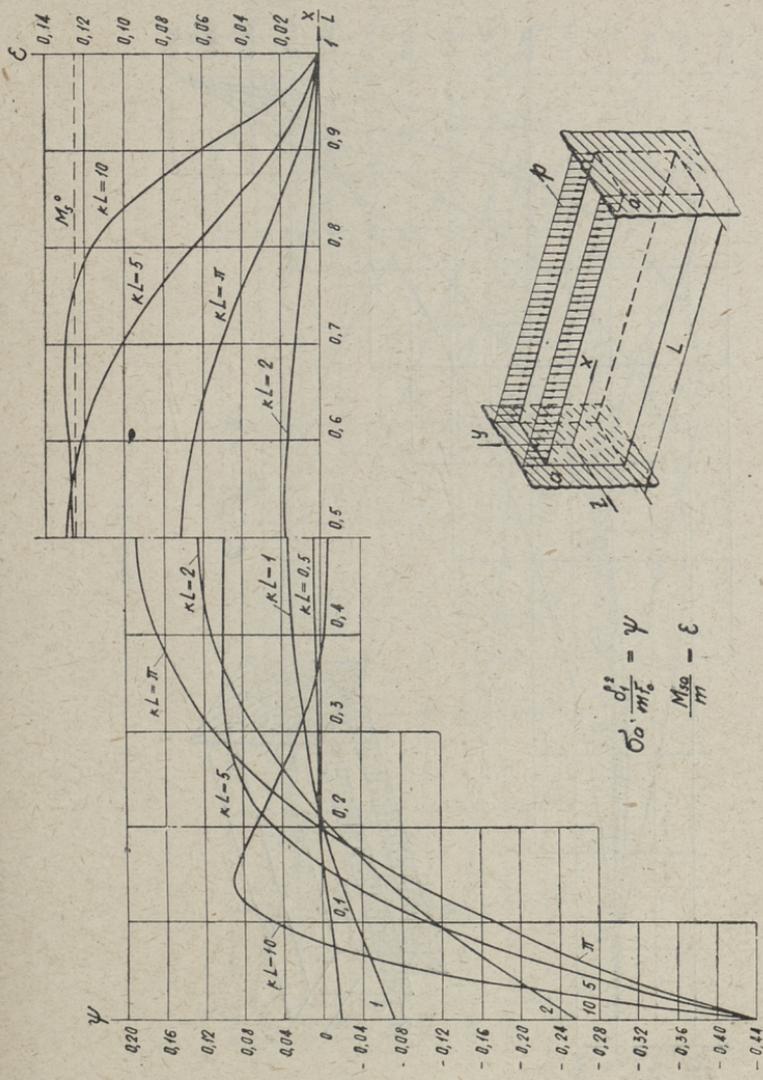
$$aB_x + bC_x - D_x + \frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{B_L B_x - A_L C_x}{A_L^2 + 4B_L D_L} \quad \frac{c}{4} A_x - dC_x - D_x - \frac{\kappa L}{8} \cdot \frac{B_L A_x + 4D_L C_x}{A_L D_L - B_L C_L}$$

$$aA_x + bB_x - C_x + \frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{B_L A_x - A_L B_x}{A_L^2 + 4B_L D_L} \quad -dB_x - C_x - cD_x + \frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{B_L D_x - D_L B_x}{A_L D_L - B_L C_L}$$

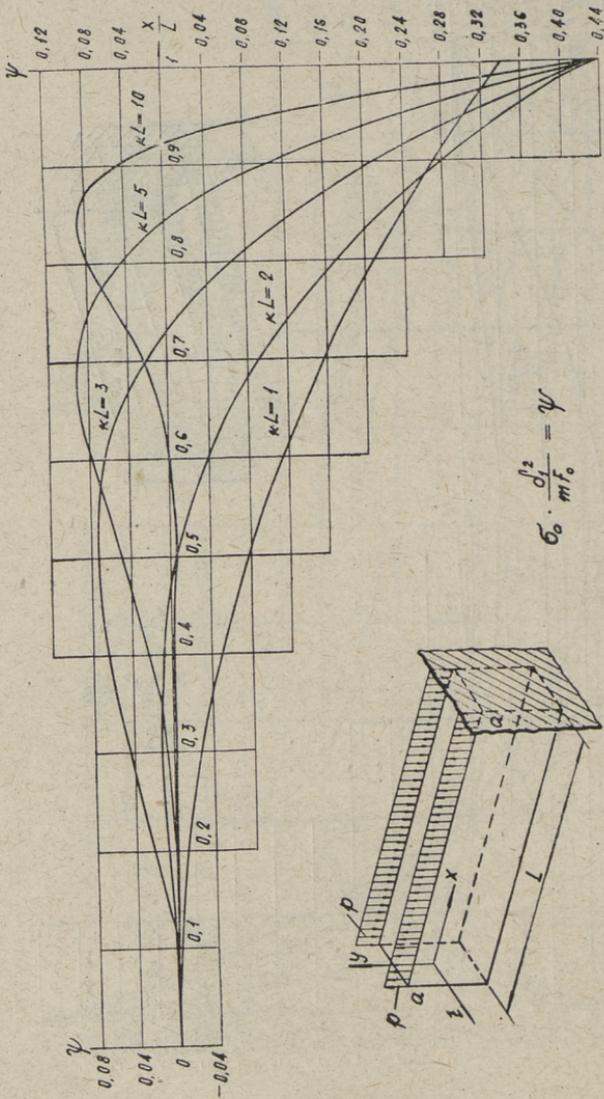
$$-bA_x + B_x + 4aD_x + \frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{A_L A_x + 4B_L D_x}{A_L^2 + 4B_L D_L} \quad dA_x + B_x + cC_x + \frac{\kappa L}{2} \cdot \frac{D_L A_x - B_L C_x}{A_L D_L - B_L C_L}$$



Фиг. 9

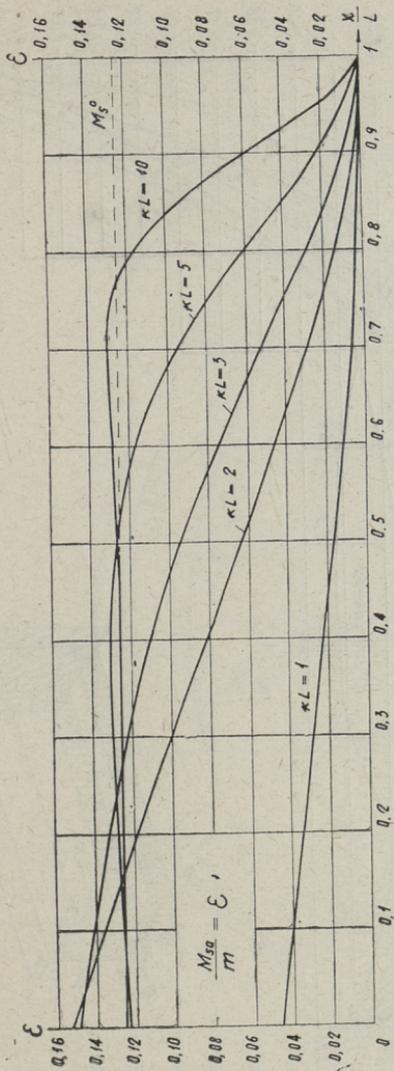


Фиг. 10

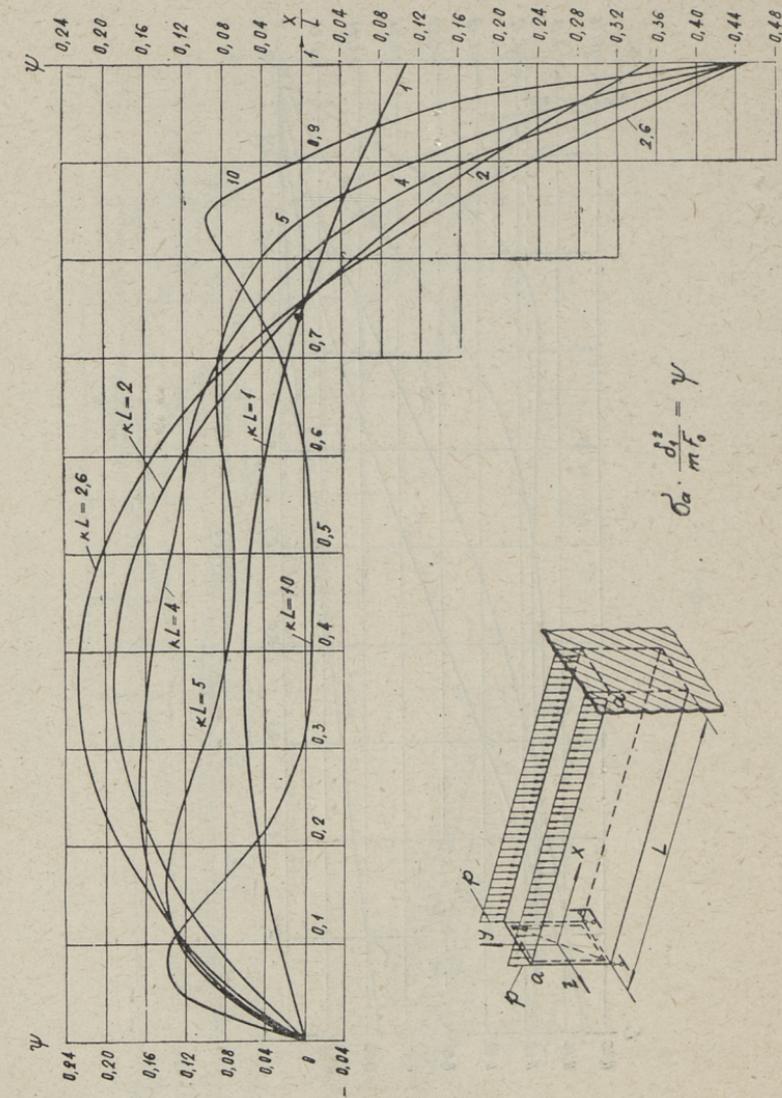


$$\sigma_0 \cdot \frac{d^2}{m f_0} = \psi$$

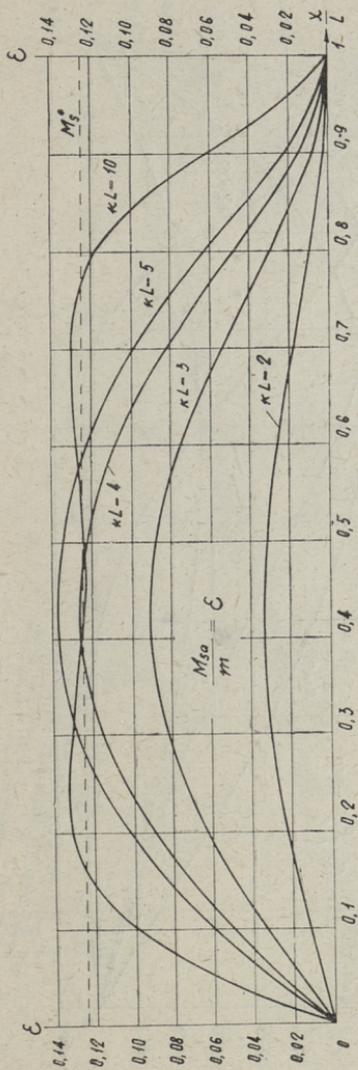
Фиг. 11



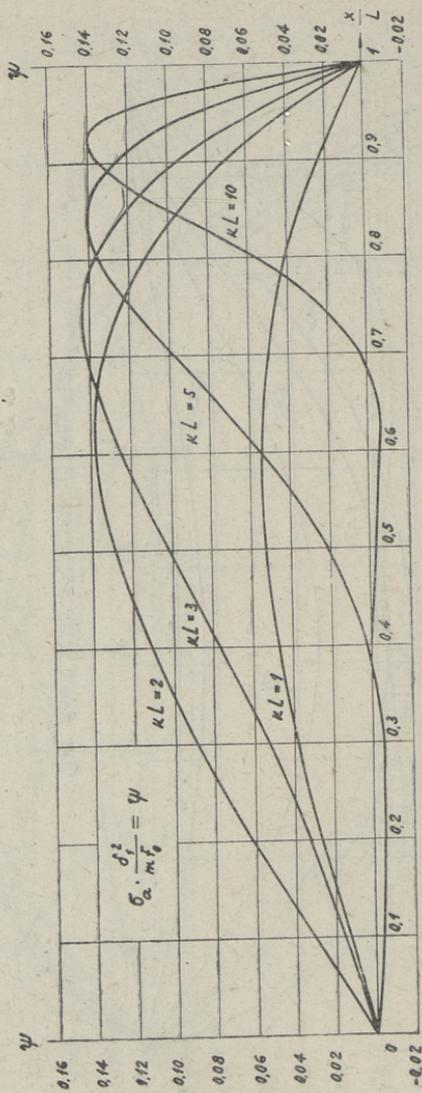
Фиг. 12. Схема нагрузки на фиг. 11



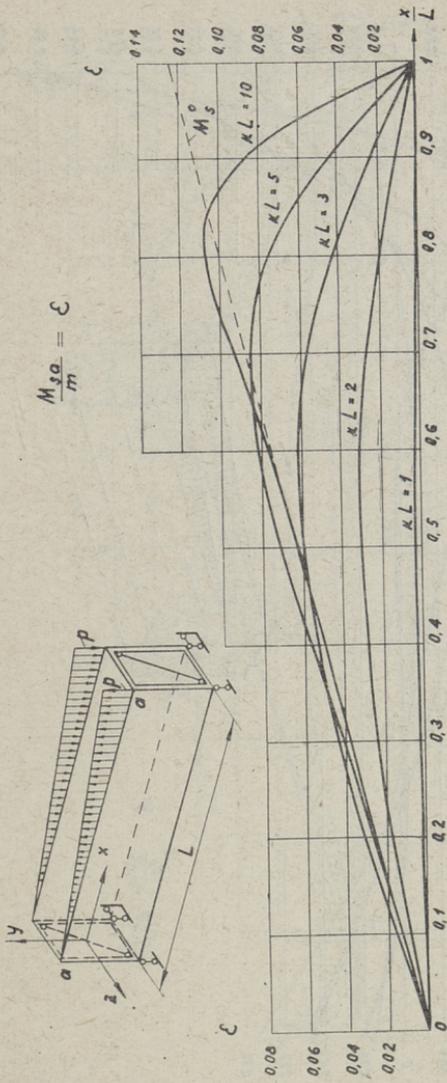
Фиг. 13



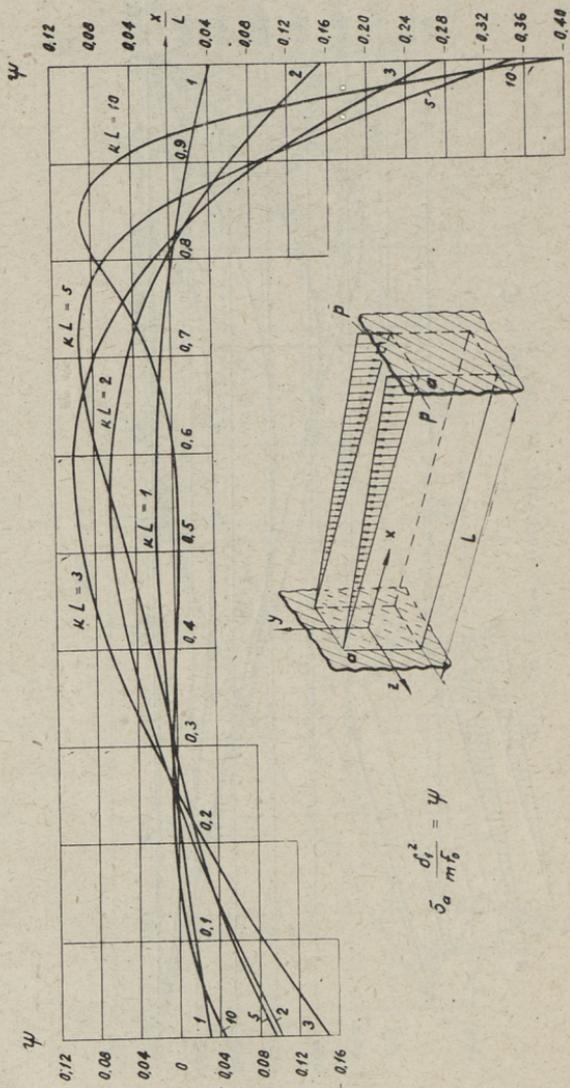
Фиг. 14. Схема нагрузки на фиг. 13



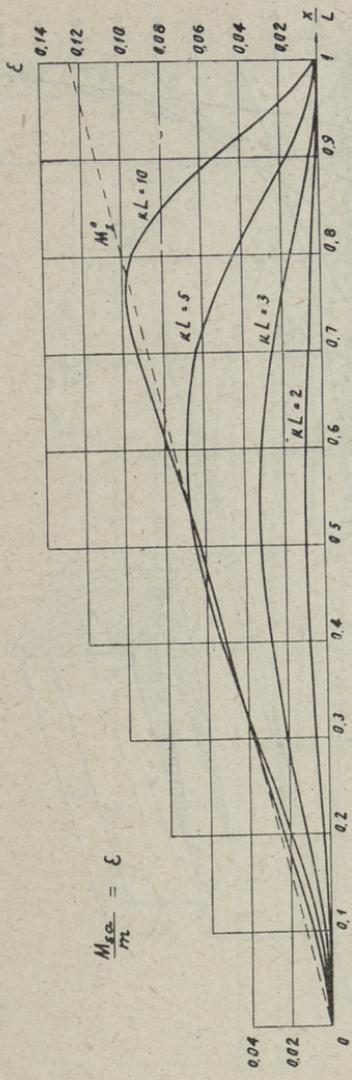
Фиг. 15. Схема на грузки на фиг. 16



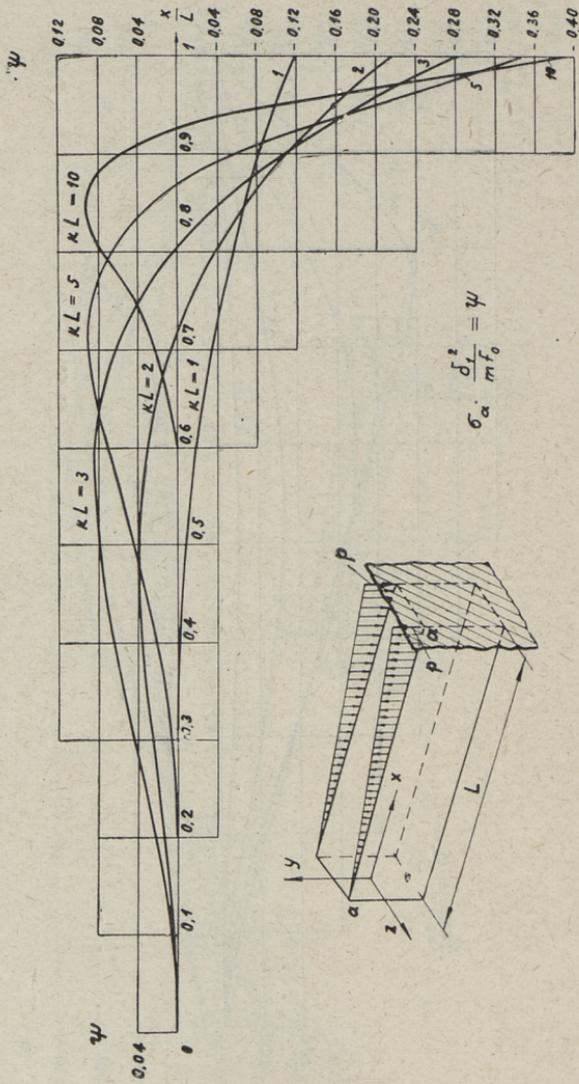
Фиг. 16



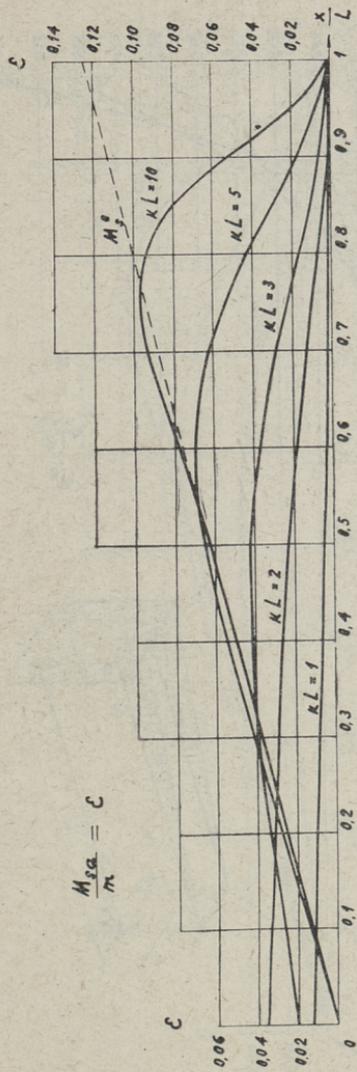
Фиг. 17



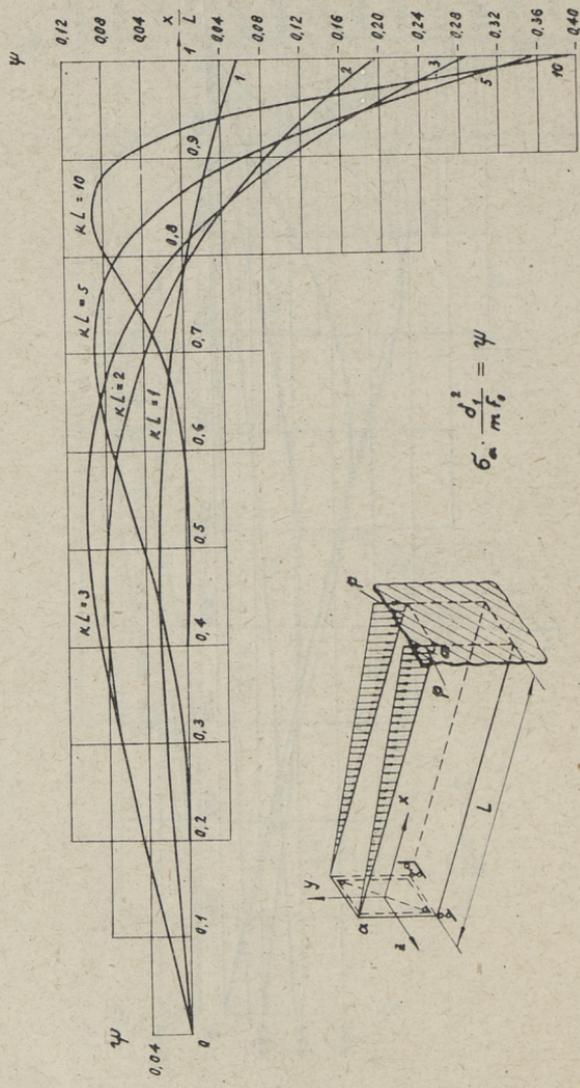
Фиг. 18. Схема нагрузки на фиг. 17



Фиг. 19

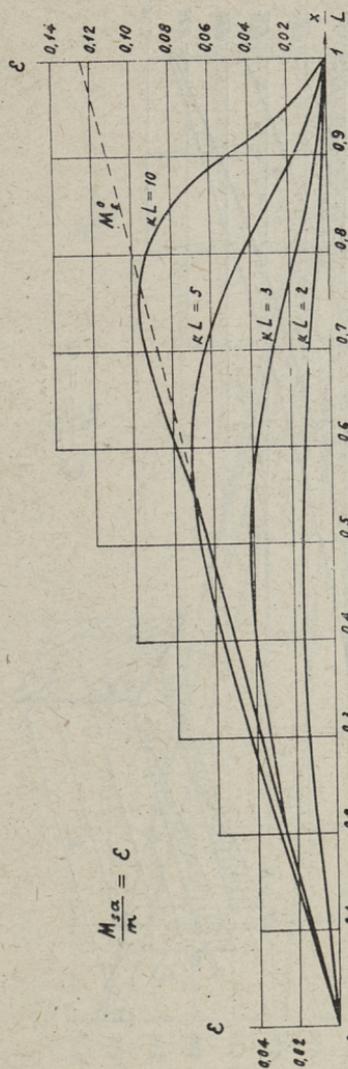


Фиг. 20. Схема нагрузки на фиг. 19

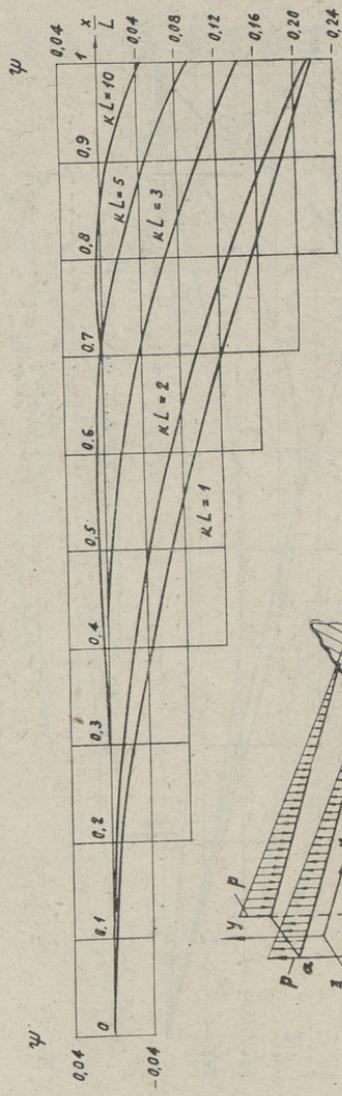


$$\sigma_a \frac{d_1^2}{m_1^2} = \psi$$

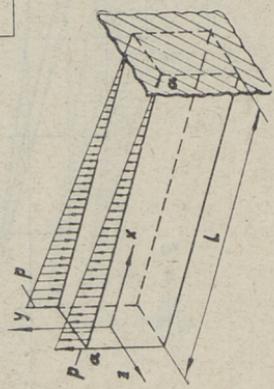
Фиг. 21



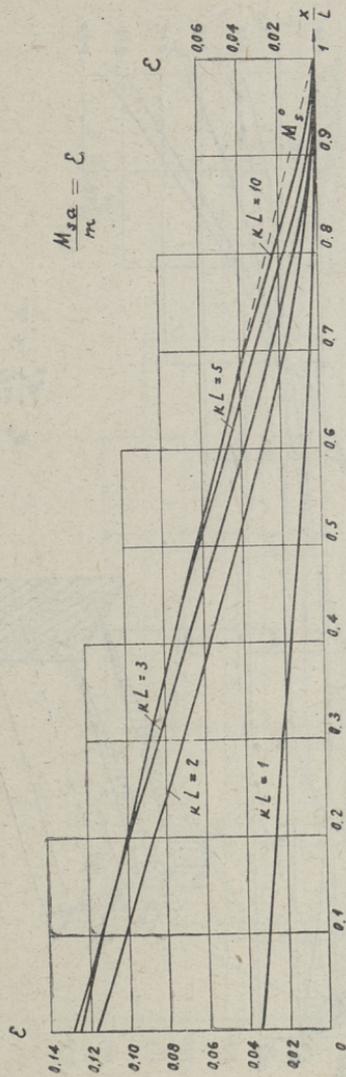
Фиг. 22. Схема нагрузки на фиг. 21



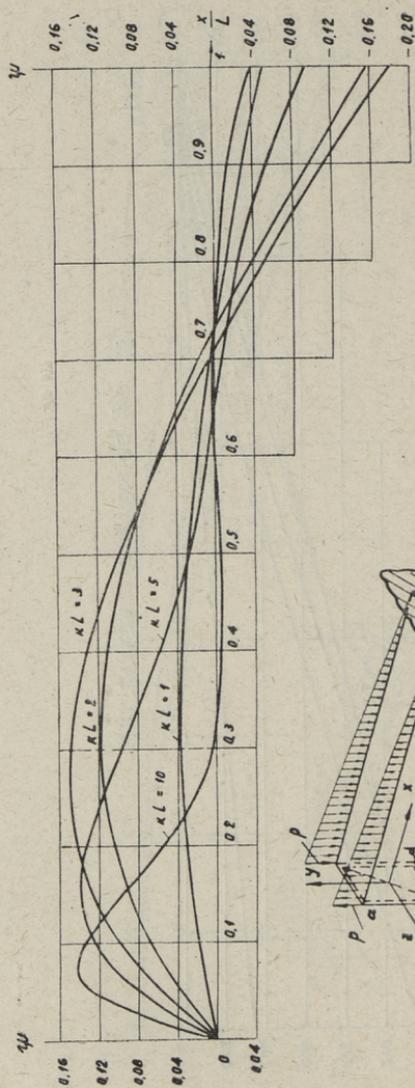
$$\sigma_{\alpha} \frac{d_r^2}{m f_0} = \psi$$



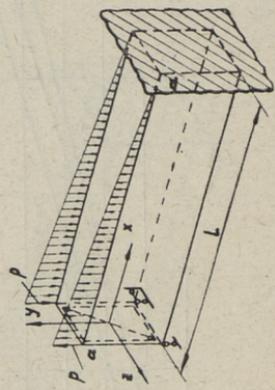
Фиг. 23



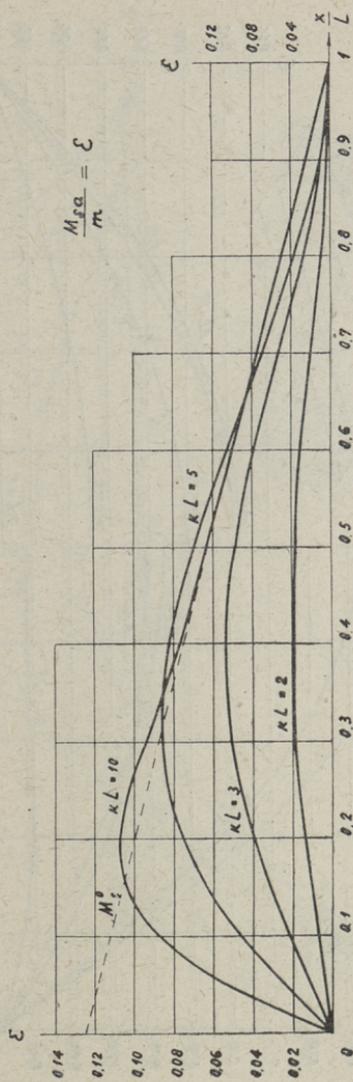
Фиг. 24. Схема нагрузки на фиг. 23



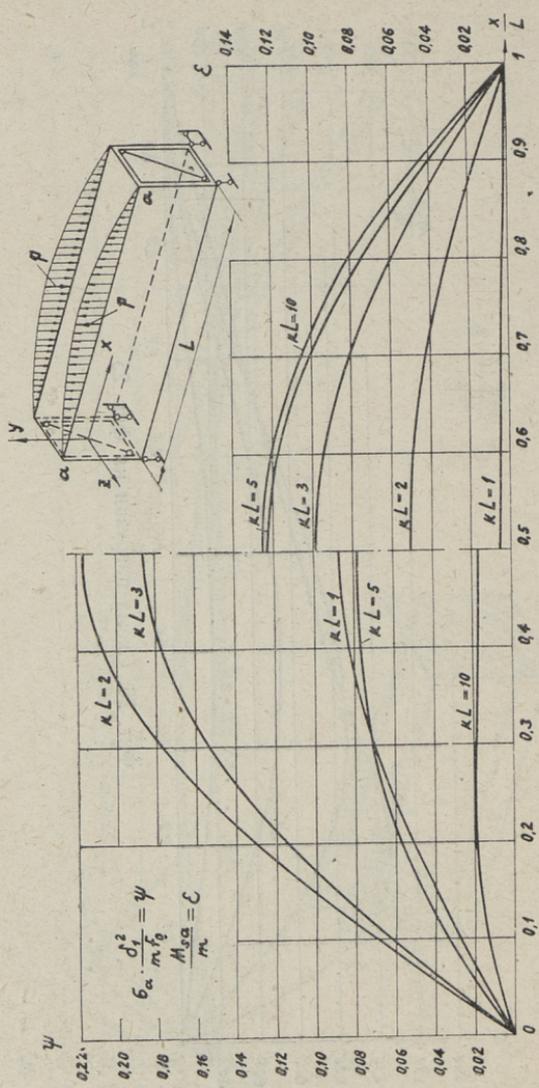
$$\sigma_{\infty} \frac{d^2}{m f_0} = \psi$$



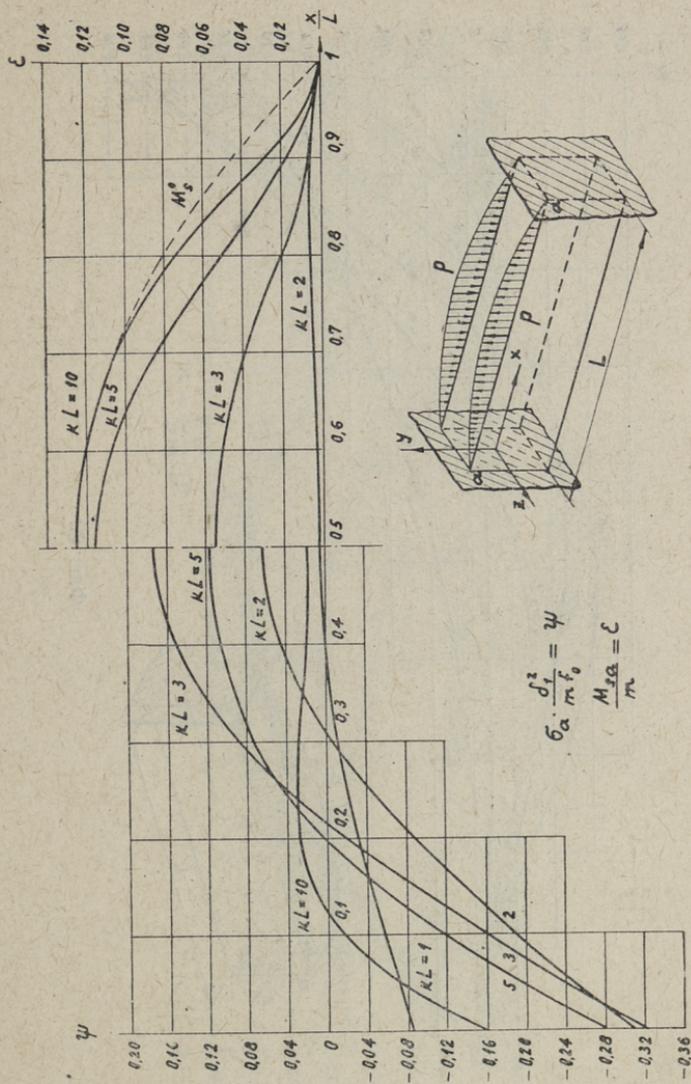
Фиг. 25



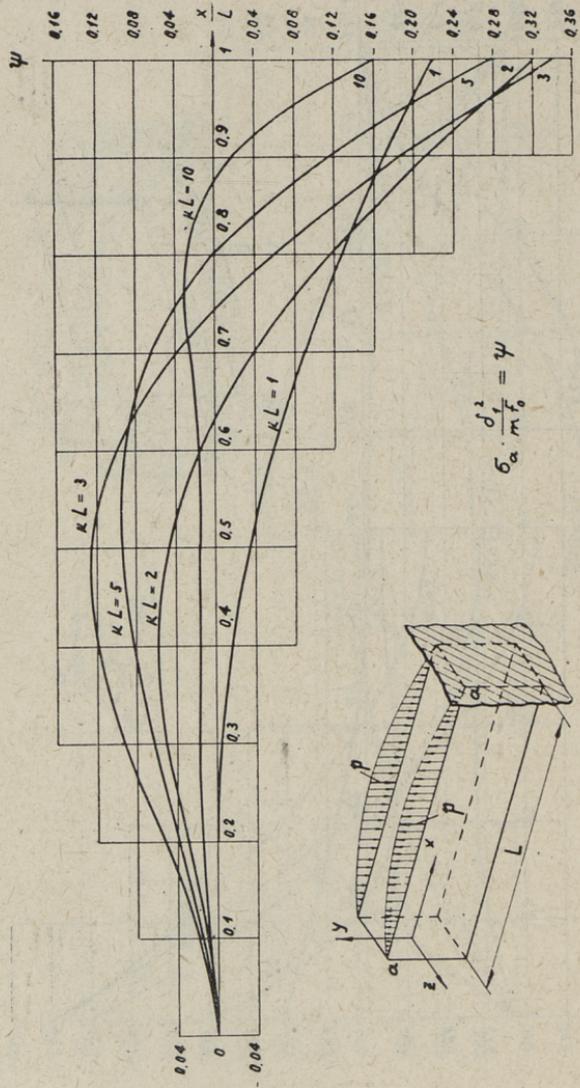
Фиг. 26. Схема нагрузки на фиг. 25



Фиг. 27

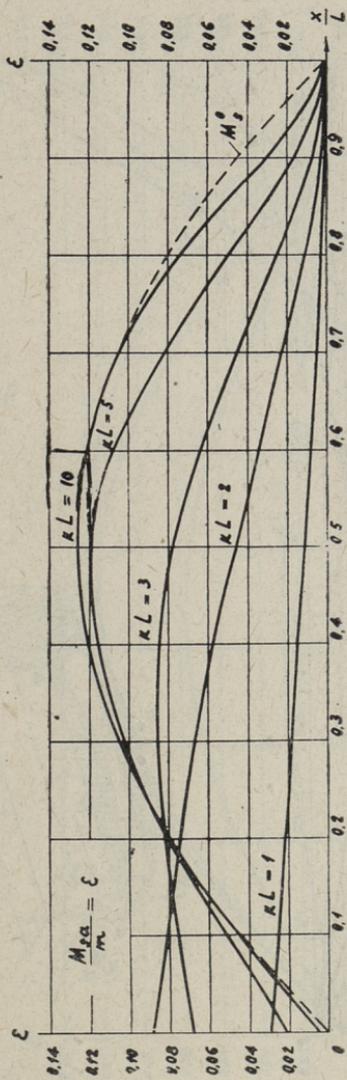


Фиг. 28

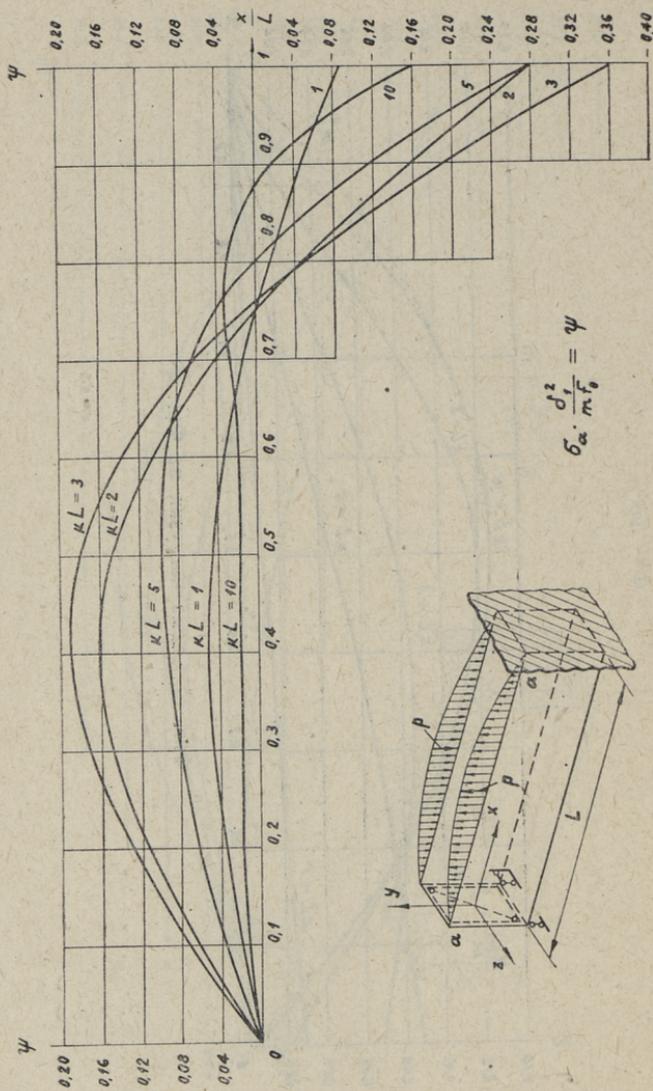


$$\sigma_{\alpha} \frac{d^2}{m f_0} = \psi$$

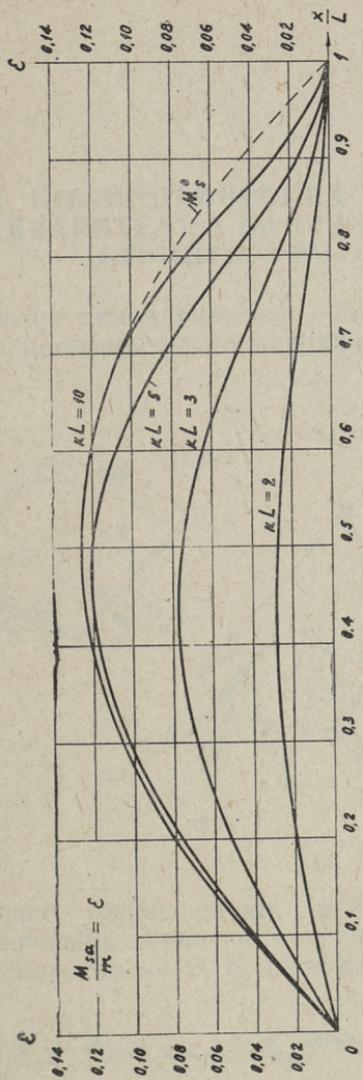
Фиг. 29



Фиг. 30. Схема нагрузки на Фиг. 29



Фиг. 31

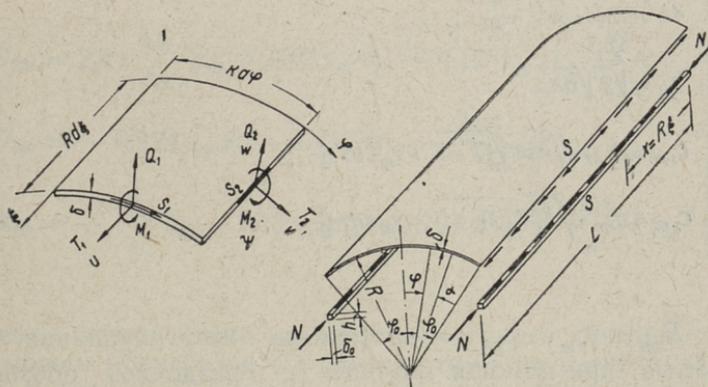


Фиг. 32. Схема нагрузки на Фиг. 31

А. А. Сумбак

**РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
 С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМИ
 СТРИНГЕРАМИ**

Рассматривается цилиндрическая оболочка с торцевыми диафрагмами и предварительно напряженными стрингерами (фиг. 1).



Фиг. 1.

Соответственно обозначениям, приведенным на фиг. 1, усилия и перемещения оболочки могут быть выражены формулами (1), изложенными В. В. Новожиловым [1].

$$T_{1,m} = -\frac{E\delta\lambda_m^2}{R\gamma_m^2} [B_{1,m} e^{-\gamma_{1,m}\alpha} \cos(d_{1,m}\alpha + \beta_{1,m} + \frac{\pi}{4}) - B_{2,m} e^{-\gamma_{2,m}\alpha} \cos(d_{2,m}\alpha + \beta_{2,m} - \frac{\pi}{4})] + T_{1,m}^*$$

$$T_{2,m} = -\frac{E\delta\lambda_m^4}{R\gamma_m^4} [B_{1,m} e^{-\gamma_{1,m}\alpha} \sin(d_{1,m}\alpha + \beta_{1,m}) - B_{2,m} e^{-\gamma_{2,m}\alpha} \sin(d_{2,m}\alpha + \beta_{2,m})] + T_{2,m}^*$$

$$S_m = -\frac{E\delta\lambda_m^3}{R\gamma_m^3} [B_{1,m} e^{-\gamma_{1,m}\alpha} \sin(d_{1,m}\alpha + \beta_{1,m} - \frac{\pi}{8}) + B_{2,m} e^{-\gamma_{2,m}\alpha} \cos(d_{2,m}\alpha + \beta_{2,m} + \frac{\pi}{8})] + S_m^*$$

$$\begin{aligned}
 Q_{2m} &= -\frac{E\delta v_m^2}{4Rb^4} \left[B_{1m} e^{-c_1 m \alpha} \sin(d_{1m} \alpha + \beta_{1m} + \frac{\pi}{8}) - B_{2m} e^{-c_2 m \alpha} \cos(d_{2m} \alpha + \beta_{2m} - \frac{\pi}{8}) \right], \\
 M_{2m} &= -\frac{E\delta v_m^2}{4b^4} \left[B_{1m} e^{-c_1 m \alpha} \cos(d_{1m} \alpha + \beta_{1m} - \frac{\pi}{4}) - B_{2m} e^{-c_2 m \alpha} \cos(d_{2m} \alpha + \beta_{2m} + \frac{\pi}{4}) \right], \\
 u_m &= \frac{\lambda_m}{v_m^2} \left[B_{1m} e^{-c_1 m \alpha} \cos(d_{1m} \alpha + \beta_{1m} + \frac{\pi}{4}) - B_{2m} e^{-c_2 m \alpha} \cos(d_{2m} \alpha + \beta_{2m} - \frac{\pi}{4}) \right] + u_m^*, \\
 v_m &= -\frac{1}{v_m^2} \left[B_{1m} e^{-c_1 m \alpha} \cos(d_{1m} \alpha + \beta_{1m} + \frac{\pi}{8}) - B_{2m} e^{-c_2 m \alpha} \sin(d_{2m} \alpha + \beta_{2m} - \frac{\pi}{8}) \right] + v_m^*, \\
 w_m &= B_{1m} e^{-c_1 m \alpha} \cos(d_{1m} \alpha + \beta_{1m}) + B_{2m} e^{-c_2 m \alpha} \cos(d_{2m} \alpha + \beta_{2m}) + w_m^*, \\
 \psi_m &= -\frac{v_m}{R} \left[B_{1m} e^{-c_1 m \alpha} \cos(d_{1m} \alpha + \beta_{1m} - \frac{\pi}{8}) + B_{2m} e^{-c_2 m \alpha} \sin(d_{2m} \alpha + \beta_{2m} - \frac{\pi}{8}) \right] + \psi_m^* \quad (1)
 \end{aligned}$$

20e

$$\lambda_m = (2m-1) \frac{\pi R}{L}, \quad (m=1; 2; 3; \dots)$$

$$4b^4 = 12(1-\mu^2) \frac{R^2}{\delta^2},$$

$$v_m = \sqrt[4]{2} \sqrt{b\lambda_m},$$

$$c_{1m} = d_{2m} = \sqrt{\frac{b\lambda_m}{2}} \sqrt{\sqrt{2}+1} = v_m \cos \frac{\pi}{8},$$

$$c_{2m} = d_{1m} = \sqrt{\frac{b\lambda_m}{2}} \sqrt{\sqrt{2}-1} = v_m \sin \frac{\pi}{8}. \quad (2)$$

B_{1m} , B_{2m} , β_{1m} , β_{2m} — постоянные интегрирования, определяемые при помощи таблицы 1. Звездочкой обозначены усилия и перемещения, заимствованные из безмоментной теории.

Таблица 1

	$u_m = 1$	$u_m = 0$	$u_m = 0$	$u_m = 0$	$u_m = 0$
	$v_m = 0$	$v_m = 1$	$v_m = 0$	$v_m = 0$	$v_m = 0$
	$w_m = 0$	$w_m = 0$	$w_m = 1$	$w_m = 0$	$w_m = 0$
	$R\Psi_m = 0$	$R\Psi_m = 0$	$R\Psi_m = 0$	$R\Psi_m = 1$	$R\Psi_m = 0$
$B_{1m} \cos \beta_{1m}$	0.00	-0,924 v_m	-0,707	$\frac{0,924}{v_m}$	D_{1m}

$B_{1m} \sin \beta_{1m}$	$-2,41 \frac{\nu_m^2}{\lambda_m}$	$-4,08 \nu_m$	$-4,12$	$-\frac{2,32}{\nu_m}$	D_{2m}
$B_{2m} \cos \beta_{2m}$	0,00	$0,924 \nu_m$	1,707	$\frac{0,924}{\nu_m}$	D_{3m}
$B_{2m} \sin \beta_{2m}$	$\frac{\nu_m^2}{\lambda_m}$	$2,23 \nu_m$	1,707	$\frac{0,383}{\nu_m}$	D_{4m}

В таблице 1

$$\left. \begin{aligned}
 D_{1m} &= 0,924 \nu_m \nu_m + 0,707 \omega_m + \frac{0,924}{\nu_m} R \psi_m, \\
 D_{2m} &= 2,41 \frac{\nu_m^2}{\lambda_m} u_m + 4,08 \nu_m \nu_m + 4,12 \omega_m + \frac{2,32}{\nu_m} R \psi_m, \\
 D_{3m} &= -0,924 \nu_m \nu_m - 1,707 \omega_m - \frac{0,924}{\nu_m} R \psi_m, \\
 D_{4m} &= -\frac{\nu_m^2}{\lambda_m} u_m - 2,23 \nu_m \nu_m - 1,707 \omega_m - \frac{0,383}{\nu_m} R \psi_m.
 \end{aligned} \right\} (3)$$

Ввиду относительно малого поперечного сечения стрингера можем пренебречь его жесткостями на изгиб и на кручение. В этом случае на контактной линии оболочки и стрингера должны соблюдаться условия

$$T_2=0, Q_2=0, M_2=0, u_{об} = u_c; \quad (4)$$

Рассматриваем стрингер как отдельностоящий элемент, к которому приложены сдвигающие усилия S и предварительное напряжение N (фиг. 1). Разложив S и N в ряд Фурье, определяем перемещения стрингера. Получаем:

$$\begin{aligned}
 u_m &= \sum \frac{4(-1)^{m+1}}{\pi(2m-1)} \frac{R^2}{E\Omega\lambda_m^2} (S - \frac{\lambda_m}{R} N) \cos \lambda_m \xi, \\
 \nu_m &= 0, \quad \omega_m = 0, \quad \psi_m = 0.
 \end{aligned} \quad (5)$$

Далее для решения контактной задачи на линии сопряжения оболочки и стрингера воспользуемся таблицей жесткостей края оболочки [1] и формулами (4) и (5). В результате получаем систему уравнений, состоящую из четырех линейных алгебраических уравнений, которую целесообразно представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

u_m	v_m	w_m	$R\Psi_m$	$=k$
$2,613 \frac{\lambda_m^2}{v_m} + F_{1m}$	$3,414 \frac{\lambda_m^3}{v_m^2}$	$2,613 \frac{\lambda_m^3}{v_m}$	$\frac{\lambda_m^3}{v_m^4}$	$A_{1m} + F'_{1m}$
$3,414 \frac{\lambda_m^3}{v_m^2}$	$6,308 \frac{\lambda_m^4}{v_m^3}$	$5,829 \frac{\lambda_m^4}{v_m^4}$	$2,613 \frac{\lambda_m^4}{v_m^5}$	$A_{2m} + F_{2m} + F'_{2m}$
$2,613 \frac{\lambda_m^3}{v_m^3}$	$5,829 \frac{\lambda_m^4}{v_m^4}$	$6,308 \frac{\lambda_m^4}{v_m^5}$	$3,414 \frac{\lambda_m^4}{v_m^6}$	$A_{3m} + F_{3m} + F'_{3m}$
$\frac{\lambda_m^3}{v_m^4}$	$2,613 \frac{\lambda_m^4}{v_m^5}$	$3,414 \frac{\lambda_m^4}{v_m^6}$	$2,613 \frac{\lambda_m^4}{v_m^7}$	A_{4m}

В таблице 2

$$\begin{aligned}
 A_{1m} &= 2,613 \frac{\lambda_m^2}{v_m} U_m^* + 3,414 \frac{\lambda_m^3}{v_m^2} V_m^* + 2,613 \frac{\lambda_m^3}{v_m} W_m^* + \frac{\lambda_m^3}{v_m^4} R\Psi_m^* - \frac{R}{E\delta} S_m^* \\
 A_{2m} &= 3,414 \frac{\lambda_m^3}{v_m^2} U_m^* + 6,308 \frac{\lambda_m^4}{v_m^3} V_m^* + 5,829 \frac{\lambda_m^4}{v_m^4} W_m^* + 2,613 \frac{\lambda_m^4}{v_m^5} R\Psi_m^* - \frac{R}{E\delta} T_{2m}^* \\
 A_{3m} &= 2,613 \frac{\lambda_m^3}{v_m^3} U_m^* + 5,829 \frac{\lambda_m^4}{v_m^4} V_m^* + 6,308 \frac{\lambda_m^4}{v_m^5} W_m^* + 3,414 \frac{\lambda_m^4}{v_m^6} R\Psi_m^* \\
 A_{4m} &= \frac{\lambda_m^3}{v_m^4} U_m^* + 2,613 \frac{\lambda_m^4}{v_m^5} V_m^* + 3,414 \frac{\lambda_m^4}{v_m^6} W_m^* + 2,613 \frac{\lambda_m^4}{v_m^7} R\Psi_m^* \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$F_{1m} = \frac{\Omega}{R\delta} \lambda_m^2$$

$$F_{2m} = \frac{4(-1)^{m+1}}{\pi(2m-1)} \frac{Rq_0}{E\delta} \sin\varphi_0$$

$$F_{3m} = -\frac{4(-1)^{m+1}}{\pi(2m-1)} \frac{Rq_0}{E\delta} \cos\varphi_0$$

$$\begin{aligned}
 F'_{1m} &= \frac{4(-1)^{m+1}}{\pi(2m-1)} \frac{\lambda_m N}{E\delta}, \\
 F'_{2m} &= \frac{4(-1)^{m+1}}{\pi(2m-1)} \frac{\lambda_m^2}{2ER\delta} N h \sin \varphi_0, \\
 F'_{3m} &= \frac{4(-1)^{m+1}}{\pi(2m-1)} \frac{\lambda_m^2}{2ER\delta} N h \cos \varphi_0
 \end{aligned} \tag{7}$$

Таблица 2 применима также при расчете оболочек без предварительного напряжения. Различие состоит лишь в том, что в этом случае отпадают F'_{1m} , F'_{2m} и F'_{3m} выражающие влияние предварительного напряжения.

Решая систему уравнений, получаем перемещения контактной линии, при помощи которых и таблицы 1 определяем постоянные интегрирования, входящие в формулы (1).

Численный пример

Рассмотрим железобетонную цилиндрическую оболочку (фиг. 1) с предварительно напряженными струнгами, имеющую следующие характерные размеры и нагрузки:

$$\left. \begin{aligned}
 L &= 25,0 \text{ м}, & \Omega &= 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \text{ м}^2, \\
 R &= 9,3343 \text{ м}, & N &= 150 \text{ т}, \\
 \varphi_0 &= 40^\circ, & q &= 0,325 \text{ т/м}^2, \\
 \delta &= 0,07 \text{ м}, & q_0 &= 0,215 \text{ т/м}, \\
 & & E &= 300.000 \text{ кг/см}^2.
 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

В численном примере учитываем только первый член ряда Фурье ($m=1$), чем обеспечивается достаточная для практики точность.

Вначале определяем усилия и перемещения на контактной линии начальной задачи. Воспользуемся формулами безмоментной теории:

$$\begin{aligned}
 T_{1m}^* &= -2Rq_m \frac{1}{\lambda_m^2} \cos \varphi, & u_m^* &= \frac{2R^2 q_m}{E\delta \lambda_m^3} \cos \varphi, \\
 T_{2m}^* &= -Rq_m \cos \varphi, & v_m^* &= \frac{4R^2 q_m}{E\delta \lambda_m^2} \left(1 + \frac{1}{2\lambda_m^2}\right) \sin \varphi, \\
 S_m^* &= 2Rq_m \frac{1}{\lambda_m} \sin \varphi, & w_m^* &= -\frac{R^2 q_m}{E\delta} \left[1 + \frac{4}{\lambda_m^2} \left(1 + \frac{1}{2\lambda_m^2}\right)\right] \cos \varphi, \\
 Q_{2m}^* &= M_{2m}^* = 0, & \psi_m^* &= -\frac{Rq_m}{E\delta} \sin \varphi.
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \lambda_m \xi,$$

$$q_m = \frac{q}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} q, \quad (m=1; 2; 3; 4; \dots). \quad (10)$$

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{E\delta} T_{21}^* &= -394,47 \frac{1}{E}, & v_1^* &= 1311,90 \frac{1}{E}, \\ \frac{R}{E\delta} S_1^* &= 564,65 \frac{1}{E}, & \omega_1^* &= -1957,77 \frac{1}{E}, \\ u_1^* &= 448,81 \frac{1}{E}, & \Psi_1^* &= -35,46 \frac{1}{E}. \end{aligned} \right\} (11)$$

Далее, воспользуясь (11), заполним таблицу 2, т. е. составим систему уравнений, определяющую перемещения контактной линии. Результаты приведены в таблице 3.

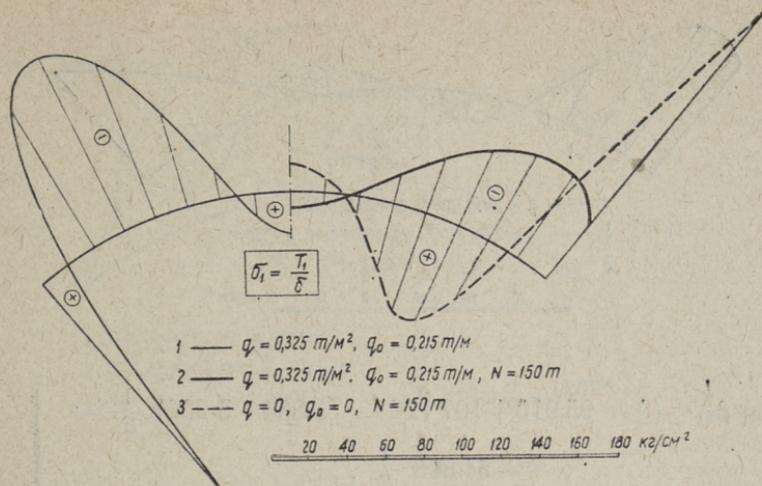
Таблица 3

u_1	v_1	ω_1	$R\Psi_1$	$=k_1$	$=k_{1N}$
0,906	0,219	0,0333	0,00254	$6,89 \frac{1}{E}$	$3207,25 \frac{1}{E}$
0,219	0,0943	0,0174	0,00155	$614,32 \frac{1}{E}$	$575,54 \frac{1}{E}$
0,0333	0,0174	0,00374	0,000403	$3,52 \frac{1}{E}$	$49,73 \frac{1}{E}$
0,00254	0,00155	0,000403	0,0000615	$2,47 \frac{1}{E}$	$2,47 \frac{1}{E}$

В таблице 3 свободные члены в последнем столбце относятся к системе уравнений для оболочки с предварительно напряженными стрингерами, а в предпоследнем к оболочке без предварительного напряжения.

Решая системы уравнений, представленные в таблице 3, получим для предварительно напряженной оболочки:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 3028 \frac{1}{E}, & \omega_1 &= -151592 \frac{1}{E}, \\ v_1 &= 20675 \frac{1}{E}, & R\Psi_1 &= 387393 \frac{1}{E}. \end{aligned} \right\} (12)$$



Фиг. 2.

и для оболочки без предварительного напряжения:

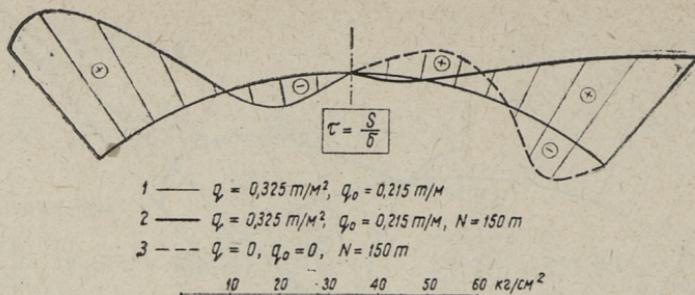
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -13\,507 \frac{1}{E}, & \omega_1 &= -900\,397 \frac{1}{E}, \\ v_1 &= 165\,964 \frac{1}{E}, & R\Psi_1 &= 1\,315\,331 \frac{1}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Таблица 4

	$u_1=1$	$v_1=1$	$\omega_1=1$	$R\Psi_1=1$	
$B_{11} \cos \beta_{11}$	0	-4,639	-0,707	-0,184	$5205,84 \frac{1}{E}$
$B_{11} \sin \beta_{11}$	-51,795	-20,486	-4,120	-0,462	$43\,585,26 \frac{1}{E}$
$B_{21} \cos \beta_{21}$	0	4,639	1,707	0,184	$-2683,41 \frac{1}{E}$
$B_{21} \sin \beta_{21}$	21,492	11,197	1,707	0,0763	$-21830,27 \frac{1}{E}$

Для поределения постоянных интегрирования B_{11} , B_{21} , β_{11} и β_{21} составим две системы уравнений, воспользуясь перемещениями (12) или (13) и таблицей 4.

Так например, применяя (12), определяем для оболочки с предварительно напряженными стрингерами:



Фиг. 3.

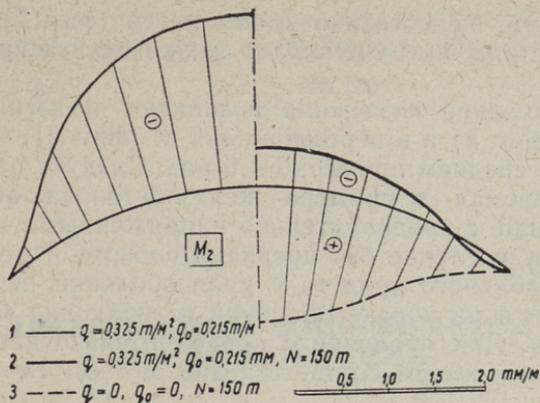
$$\begin{aligned}
 B_{11} \cos \beta_{11} &= (0 - 95\,910 + 107\,176 - 71\,280 + 5\,206) \frac{1}{E} = \\
 &= -54\,808 \frac{1}{E}, \\
 B_{11} \sin \beta_{11} &= (-156\,841 - 423\,541 + 624\,559 - 178\,975 + \\
 &+ 43\,585) \frac{1}{E} = -91\,213 \frac{1}{E}, \\
 B_{21} \cos \beta_{21} &= (0 + 95\,910 - 258\,768 + \\
 &+ 71\,280 - 2683) \frac{1}{E} = -94\,261 \frac{1}{E}, \\
 B_{21} \sin \beta_{21} &= (65\,082 + 231\,494 - 258\,767 + 29\,558 - \\
 &- 21\,830) \frac{1}{E} = 45\,537 \frac{1}{E}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Решая системы уравнений (14) получаем:

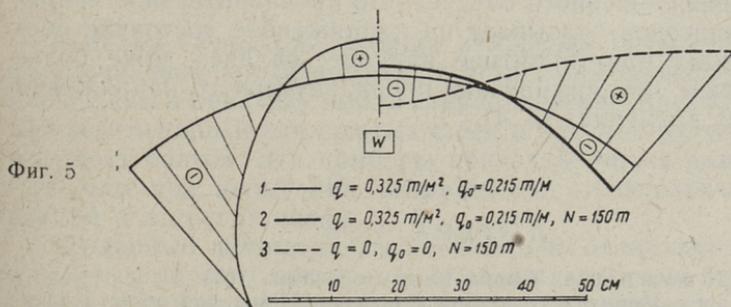
$$\begin{aligned}
 B_{11} &= 106\,400 \frac{1}{E}, & \beta_{11} &= 239^\circ 00', \\
 B_{21} &= 104\,700 \frac{1}{E}, & \beta_{21} &= 154^\circ 12'.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Совершенно аналогично получим для оболочки без предварительного напряжения:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= 554\,400 \frac{1}{E}, & \beta_{11} &= 181^\circ 48', \\
 B_{21} &= 390\,900 \frac{1}{E}, & \beta_{21} &= 151^\circ 36'.
 \end{aligned} \tag{16}$$



Фиг. 4.



Фиг. 5

Далее, воспользуясь постоянным интегрированием (15) и (16), при помощи формул (1) определяем усилия и перемещения предварительно напряженной оболочки, а также оболочки без предварительного напряжения. Некоторые результаты вычислений приведены на фигурах 2—5.

Заключение

Из численного примера явствует, что изложенный метод расчета достаточно нагляден и не требует большой вычислительной работы. Метод применим для практического расчета цилиндрических оболочек с предварительно напряженными стрингерами, а также со стрингерами без предварительного напряжения. Следует отметить, что учет предварительного напряжения не увеличивает объема расчета.

Из сравнения результатов численного примера (фиг. 2—5) следует, что предварительное напряжение существенно изменяет усилия и перемещения оболочки.

В эпюре T_1 у края оболочки ликвидирована зона довольно больших растягивающих усилий, при этом в остальной

части оболочки T_1 существенно уменьшается (фиг. 2). Предварительное напряжение уменьшает также сдвигающие усилия S (фиг. 3).

Особенно большие изменения возникают в изгибающих моментах M_2 (фиг. 4) и в перемещениях w (фиг. 5). Оба они уменьшаются в среднем примерно в 5 раз. Следует отметить, что рассматриваемая в примере железобетонная оболочка осуществима лишь с предварительно напряженными стрингерами, поскольку в случае без предварительного напряжения в середине продольного пролета у края оболочки перемещение $w = 29,1$ см и на коньке оболочки изгибающие моменты $M_2 = 1,863$ тм/м. Для оболочки с предварительно напряженными стрингерами имеем соответственно $w = 5,1$ см и $M_2 = 0,399$ тм/м.

Из вышеизложенного следует, что предварительное напряжение стрингеров оказывает на напряженное состояние оболочки весьма благоприятное влияние, являясь даже более эффективным, чем применение предварительного напряжения в бортовых элементах [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек. 1951.
2. Х. Х. Лаул. Применение метода Кастильяно-Рица для расчета длинных цилиндрических оболочек со стрингерами. Труды ТПИ. Серия А, № 39, 1952.
3. А. А. Сумбак. Расчет предварительно напряженных цилиндрических железобетонных оболочек. Труды ТПИ. Серия А, № 159, 1959.
4. А. А. Сумбак. Расчет предварительно напряженных цилиндрических железобетонных оболочек с учетом жесткостей кручения и горизонтального изгиба бортовых элементов. Труды ТПИ. Серия А, № 161, 1959.

А. О. Юргенсон

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ДИНАМОМЕТРЫ НОВОЙ КОНСТРУКЦИИ

Введение

В целях улучшения техники измерения горного давления на рудниковые крепи автором статьи были сконструированы и внедрены в практику новые гидравлические динамометры — пятидесятитонный для сжатых стоек и пятнадцатитонный для анкерных болтов. Эти приборы пригодны также для измерения силы при испытании сооружений, строительных конструкций и в других целях.

Созданные динамометры значительно отличаются от применяемых до сего времени и обладают многими преимуществами перед ними. Оригинальной чертой является применение тонкой диафрагмы, благодаря чему достигается полная непроницаемость прибора наряду с его высокой точностью и прочностью. К динамометру присоединены специальные вентиль и компенсатор высокого давления, которые позволяют при необходимости убрать манометр и его вновь поставить на нагруженный прибор.

* * *

*

Измерение давления на шахтные крепи происходит в исключительно сложных условиях. В первую очередь заслуживают упоминания следующие характерные черты.

Давление на рудниковое крепление появляется в основном как следствие медленного перемещения горных массивов и поэтому оно значительно зависит от податливости элементов крепления. Те стойки, которые обладают меньшей податливостью, принимают на себя большую нагрузку. Если для измерения давления под элемент крепления подставляют динамометр, то измеряемая сила остается неизменной только при условии сохранения податливости элемен-

та. Так как все динамометры в той или иной мере податливы, то они нарушают условия нормальной работы рудникового крепления и вызывают соответствующую ошибку в результатах измерения. Для уменьшения ошибки следует применить динамометры с меньшей податливостью. Податливость применяемых в настоящее время динамометров (особенно механических, которые в Советском Союзе наиболее распространены) велика. Например, для анкерного крепления применяются динамометры с сжатием в пределах от 2 до 9 мм при силе 10 т, в то время как удлинение анкерного прута при силе 8—9 т составляет лишь 1,0—1,5 мм. Такие динамометры явно искажают действительную работу анкера в такой степени, что теряют свое значение как силоизмерительные приборы при данных условиях.

Другим фактором, усложняющим определение горного давления, является продолжительность измерений, колеблющаяся в пределах от нескольких дней до нескольких месяцев и даже до нескольких лет. Следовательно, к динамометрам предъявляются большие требования по устарению измерительной способности. Применяемые до сего времени динамометры часто недостаточно удовлетворяют этим требованиям. Основным источником изменений в динамометрах под действием длительной нагрузки являются ползучесть и релаксация металла в пружинных элементах, а также в других деталях. В некоторых гидравлических динамометрах имеет место кроме ползучести еще утечка рабочей жидкости из гидравлической системы. В борьбе с устарением в механических динамометрах следует в первую очередь ограничить величину напряжений. В гидравлических приборах необходимо обеспечить полную непроницаемость и сократить время нахождения манометров под давлением.

Следующим важным требованием при конструировании динамометров под рудниковое крепление является сопротивление к разрушающему действию взрывных работ. Часто приборы находятся на расстоянии 1—2 м от груди забоя и подвергаются многократному действию взрывов, а иногда остаются под завалом породы. В то же время все известные нам из практики динамометры неудовлетворительно переносят взрывные работы.

Кроме вышеприведенных факторов усложняют работу динамометров в рудниках еще грязь, влага, корродирующие газы и т. д. Для обслуживающего персонала представляют большие неудобства недостаточное освещение и теснота.

Само собой разумеется, что динамометры для шахтных условий должны быть компактны и небольшого веса ввиду необходимости переноски их иногда на большие расстояния.

Общие конструктивные соображения

Из изученных нами вариантов силоизмерительных приборов под рудниковые крепи наиболее удачными оказались гидравлические динамометры. Неустранимым недостатком механических динамометров можно считать различие характеристик при нагрузке и разгрузке. Обычно указанное обстоятельство при измерениях не мешает, так как нам известно направление изменения нагрузки. Если же оно неизвестно (как это часто бывает при измерениях в шахте), то применение механических приборов ведет к большой погрешности. У механических динамометров также очень трудно уменьшить проявление устарения без чрезмерного увеличения веса прибора. Кроме вышеуказанных они обладают еще рядом других недостатков.

Автором предлагается гидравлический динамометр с тонкой стальной диафрагмой (см. фиг. 1). Грузовая пластинка, заменяющая поршень, упирается на диафрагму и имеет диаметр меньше (на 15—20 мм) диаметра отверстия в кольцевой гайке. В зазоре между грузовой пластинкой и внутренним краем гайки находится волнообразная складка диафрагмы радиусом выпуклости 5—8 мм. Такая диафрагма толщиной 0,3—0,7 мм из мягкой стали работает главным образом на растяжение и разрушающим для нее является давление в полости динамометра не менее 500 ат. Максимальным рабочим давлением принимаем 250 ат, которое достаточно для построения гидравлических динамометров. Применение предложенной диафрагмы позволяет обеспечить герметичность полости внутри прибора и таким образом устранить основной недостаток динамометров поршневого типа. Кроме того, динамометр с тонкой диафрагмой лишен недостатков, присущих динамометрам с толстой плоской мембраной: большой погрешности, чувствительности к изменению температуры окружающей среды и необходимости тарировки после каждого ремонта или открытия гидравлической системы. По сравнению с динамометрами, имеющими тонкие резиновые или стальные мембраны, прибор с диафрагмой обладает тем преимуществом, что он допускает относительно большие и неравномерные осадки грузовой пластинки. У тонкомембранных динамометров небольшое отклонение поршня от нормального положения вызывает обрыв мембраны или же задевание поршня о цилиндр.

Применяемые в настоящее время гидравлические динамометры, хотя и менее податливы чем механические, всё же слишком деформативны, особенно для измерения силы анкерной крепи. Исследование этого вопроса показало, что податливость гидравлических динамометров зависит главным образом от количества жидкости и воздуха в гидравлической системе. Для уменьшения податливости необходимо ограничить объем полости, соединительных каналов и трубок для жидкости до минимальных размеров, а при заполнении и использовании следить, чтобы в системе оказалось минимальное количество воздуха. Еще выяснилось, что обычно много воздуха попадает в систему при соединении (отсоединении) манометра или других узлов с динамометром из-за утечек жидкости из штуцеров.

Для повышения сопротивления к разрушающему действию взрывных работ, а также для устранения устарения манометра у наших гидравлических динамометров предусматривается возможность установки манометра или самопишущего устройства на динамометр для каждого отсчета и возможность последующего удаления прибора от нагруженного динамометра. Многократный обмен манометра вел бы к большим потерям жидкости, если бы применялись обыкновенные масла, глицерин или ртуть. Устранение утечек было достигнуто с применением солидола в качестве рабочей жидкости. Преимущество солидола состоит в том, что ввиду большой вязкости он не вытекает из соединительных каналов и трубки манометра во время соединения или отсоединения штуцеров. Для замены манометра динамометр снабжен вентилем высокого давления.

Перед устанавливаемым на динамометр манометром или самописцем находится компенсатор давления. Дело в том, что в трубке установленного манометра вначале отсутствует давление и поэтому при открытии вентиля нагруженного динамометра небольшое количество солидола перемещается из динамометра в трубку манометра. После отсчета, когда закроют вентиль, манометр остается под давлением и выходящее из полости динамометра масло не возвращается обратно. Если снять манометр с динамометра, то давление в трубке падает, масло выходит из манометра и часть его теряется. Эти потери при многократных установках манометра составляет значительный убыток для гидравлической системы и являются недопустимыми. Поэтому при помощи компенсатора давление в трубке манометра должно подняться перед открытием вентиля примерно до ожидаемого давления в полости дина-

мометра. Тем самым устраняется в значительной мере перемещение масла между полостью динамометра и трубкой манометра. Небольшой переход масла все-таки имеет место из-за некоторой разности давлений. Компенсатор должен вернуть и эту часть потери масла в ту или другую сторону, в зависимости от того, где давление оказалось большим. После закрытия вентиля разгружают трубку манометра с помощью компенсатора из-под давления и снимают манометр без потерь жидкости. Конструктивное решение компенсатора может быть разное, однако наиболее удачным оказался простой поршневой насос с высокой степенью непроницаемости.

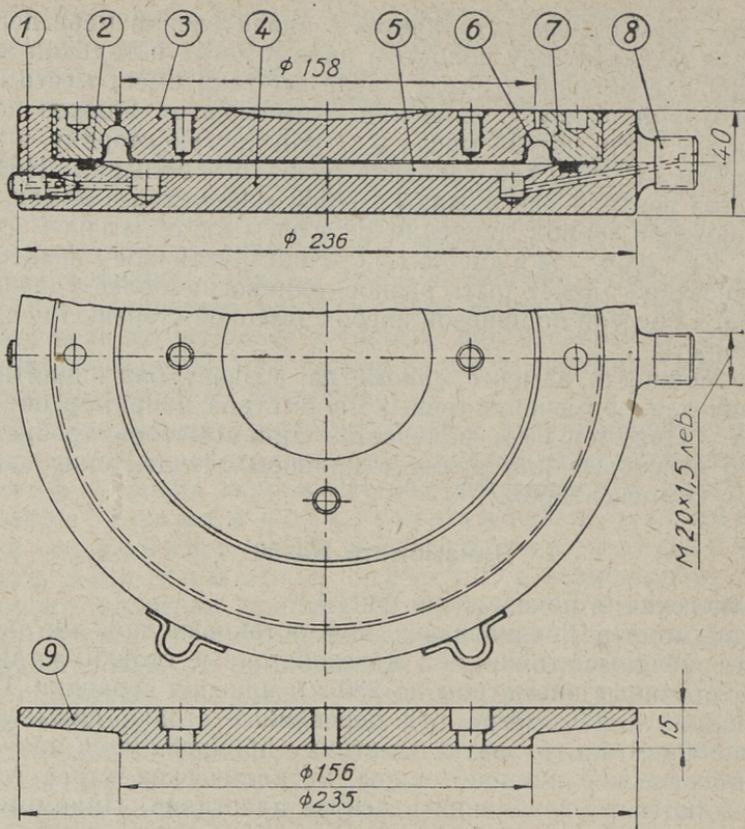
Возможность замены манометра создает благоприятные условия для применения точных манометров, например, образцовых. При большом количестве динамометров требуется только некоторые или даже, в крайнем случае, один манометр с компенсатором.

Динамометр SK-50

Конструкция показана на фиг. 1.

Динамометр предназначен для установки под металлические забойные стойки, под железобетонные стойки, а также под деревянные диаметром до 230 мм или под верхняки. При установке динамометра под деревянные стойки диаметром более 150 мм, на грузовую пластинку прикрепляется накладка. Сферические нижние опоры металлических стоек устанавливаются в углублении в центре пластинки. Динамометр рассчитан на максимальную нагрузку 50 т и не может перегружаться более чем на 20 т. Вес динамометра без накладки 13 кг, с накладкой 17 кг. Предельный угол наклона грузовой пластинки относительно корпуса составляет 4° и предельный угол наклона стойки относительно нормали корпуса 4° при силе 50 т (8° при силе 25 т).

Корпус, грузовая пластинка и кольцевая гайка изготовлены из стали Ст. 5. К корпусу приварен штуцер для соединения динамометра с вентилем, или непосредственно с манометром, или самописцем. Диафрагма спрессована из мягкого стального листа толщиной 0,5—0,6 мм, разрывное удлинение не менее 20%. Уплотнительное кольцо вырезано из бензостойкой резины. Винт воздушного вентиля изготовлен из стали 45 с закаленным коническим концом. Остальные детали из стали Ст. 3. Динамометр покрыт нитроэмалью. Сборка корпуса, кольцевой гайки, диафрагмы и уплотнительного кольца производится привинчиванием гайки на корпус при помощи специального ключа длиной не менее 2500 мм.

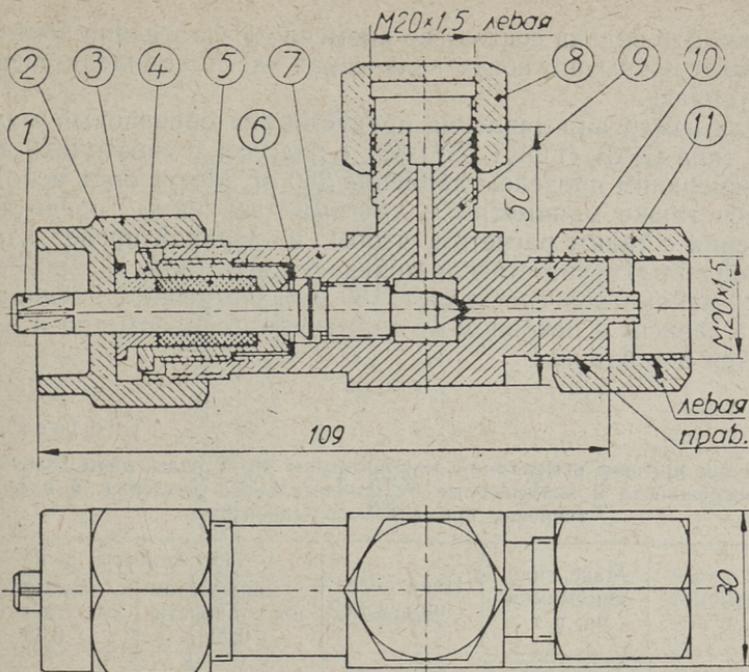


Фиг. 1. Гидравлический динамометр SK-50:

1 — воздушный вентиль; 2 — уплотнительное кольцо; 3 — грузовая пластинка; 4 — корпус; 5 — полость, заполненная солидолом; 6 — диафрагма; 7 — , кольцевая гайка; 8 — штуцер; 9 — накладка к грузовой пластинке

Заполнение динамометра производится горячим ($70\text{—}80^{\circ}\text{C}$) солидолом через штуцер в предварительно нагретый прибор ($40\text{—}50^{\circ}\text{C}$). Особое внимание обращается на полный выход воздуха через воздушный вентиль. Потребность солидола для динамометра примерно 140 см^3 . После заполнения динамометра грузовая пластинка устанавливается на диафрагму, щель между пластинкой и кольцевой гайкой слегка набивается паклей, затем заливается нагретым техническим вазелином. Набивка щели защищает диафрагму от коррозии и обеспечивает удерживание грузовой пластинки на своем месте.

Составной частью динамометра является вентиль высокого давления, конструкция которого изображена на фиг. 2.



Фиг. 2. Вентиль высокого давления:

1 — шпindelь; 2 — нажимная втулка; 3 — гайка; 4 — гайка; 5 — уплотнение; 6 — прокладка; 7 — корпус; 8 — защитный колпак; 9 — штуцер для присоединения манометра; 10 — штуцер для присоединения к динамометру; 11 — соединительная муфта

Корпус вентильа изготовлен из стали Ст. 5, шпindelь — из стали У8 с закаленными коническими частями, уплотнительная прокладка — из красной меди. Остальные части изготовлены из стали Ст. 3. В качестве уплотнения (5) закладывается вокруг шпindelя графитный шнур. Вентиль регулируется при помощи специального ключа. Камеру и соединительные каналы вентильа следует заполнять горячим солидолом. Вентиль прикрепляется к динамометру при помощи соединительной муфты на медной или паронитовой прокладке. При эксплуатации время от времени необходимо подтягивать гайку (3) для обеспечения герметичности вентильа. При открытии вентильа под давлением следует шпindelь развинтить до отказа с небольшим натягом, чтобы коническое расширение на средней части шпindelя плотно прижималось к гнезду на конце гайки (4). Необходимо учесть, что открытый вентиль уплотняется в основном именно на конической поверхности шпindelя. Уплотнение (5) не способно обеспечить длительной непроницаемости вентильа при высоких да-

лениях. Его задача состоит во временном уплотнении вентиля в момент открытия, когда коническая часть шпинделя еще не уплотнилась.

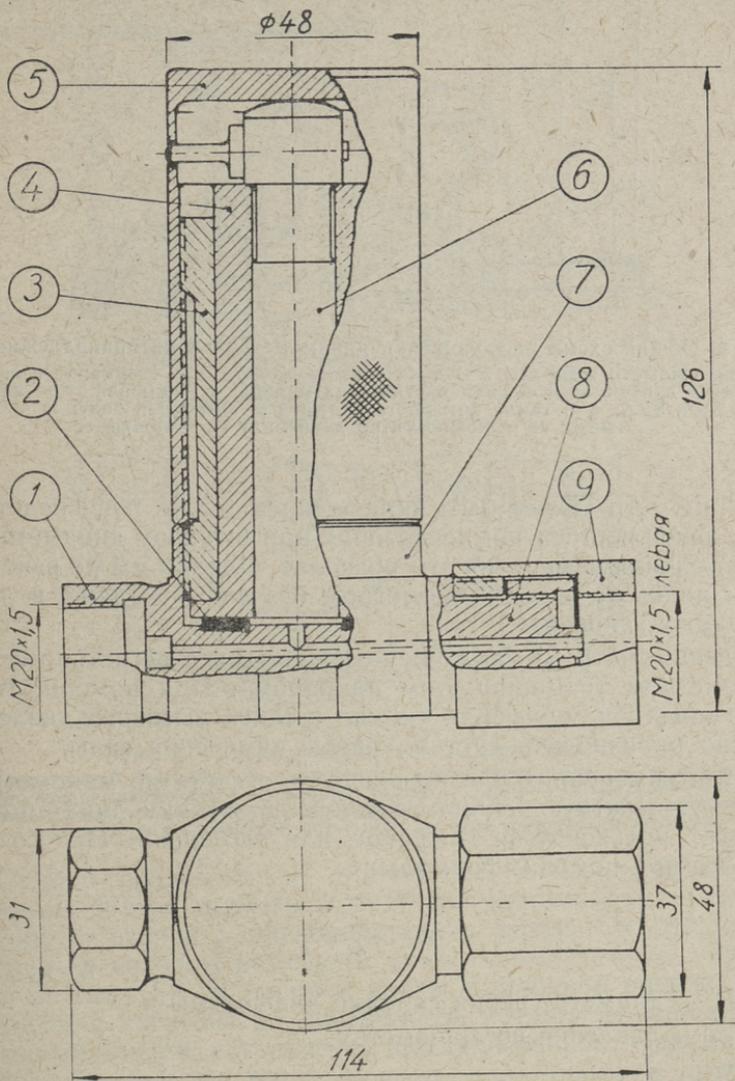
Для измерения давления предусмотрен образцовый манометр типа ОМВ (ГОСТ 6521-53) с классом точности 0,20 или 0,35 и верхним пределом давления 250 ат. Могут быть использованы также манометры с другими верхними пределами давления с таким расчетом, чтобы и верхний предел измеряемой силы соответственно понизился (см. табл. 1). Диаметр таких манометров составляет 180 мм. Погрешность динамометра зависит в основном от применяемого манометра и приводится в таблице 1.

Таблица 1

Верхние пределы измеряемой динамометром СК-50 силы, цены деления и погрешности в зависимости от максимального давления и класса точности применяемого манометра

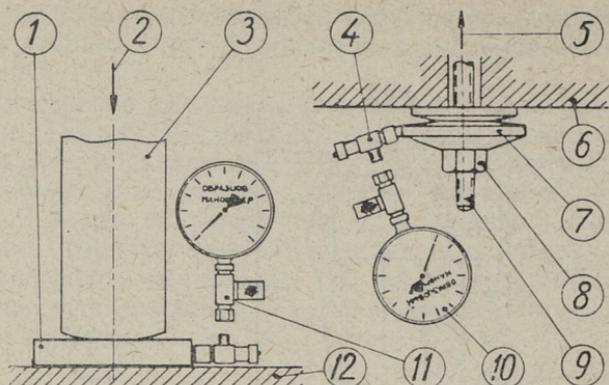
Макс. давление манометра, в ат	Макс. сила динамометра, в т	Цена деления, в кг	Погрешность, в кг	
			с манометром кл. точности 0,20	с манометром кл. точности 0,35
250	50	167	100	175
160	30	105	64	112
100	20	67	40	70
60	12	40	24	42
40	8	27	16	28

К манометру принадлежит компенсатор давления (фиг. 3). Компенсатор соединяется с манометром при помощи резьбы (1). Муфта (9) служит для присоединения компенсатора вместе с манометром к вентилю динамометра. Схематическое расположение принадлежностей динамометра показано на фиг. 4. Наиболее существенными частями компенсатора являются цилиндр и поршень диаметром 16 мм, рабочие поверхности которых пришлифованы с диаметральным зазором 0,0010—0,0015 мм. Такой зазор обеспечивает достаточную герметичность цилиндра, если в качестве рабочей жидкости применяется солидол. В рабочем состоянии поршень компенсатора поднят на 3—4 см и камера в цилиндре заполнена солидолом. Солидолом заполняются также трубка манометра и соединительные каналы в компенсаторе. Положение поршня в цилиндре регулируется поворачиванием ручки. Для фиксации положения ручки она снабжена штопорной кнопкой (на фиг. 3 не показана).



Фиг. 3. Компенсатор давления:

1 — резьба для присоединения к манометру; 2 — прокладка; 3 — корпус компенсатора; 4 — цилиндр; 5 — ручка; 6 — поршень; 7 — корпус; 8 — штуцер для присоединения к вентилю; 9 — соединительная муфта



Фиг. 4. Общая схема расположения динамометров и их принадлежностей: 1 — динамометр типа SK; 2 — сила сжатия стойки; 3 — стойка; 4 — вентиль высокого давления; 5 — сила растяжения анкера; 6 — кровля; 7 — динамометр типа SKA; 8 — гайка анкерного болта; 9 — анкерный болт; 10 — манометр; 11 — компенсатор давления; 12 — почва

Манометр может быть присоединен также непосредственно к вентилю (без компенсатора) или штуцеру динамометра, если условия измерения это позволят. Однако мы не рекомендуем пользоваться динамометром без вентиля даже в лабораторных условиях.

Динамометр SK-50 может соединяться с регистрирующим манометром (самопишущим прибором). При помощи таких динамометров, применяя гибкие шланги высокого давления, можно производить дистанционные измерения силы.

При измерениях для перехода от отсчета по манометру к силе N , действующей на грузовую пластинку динамометра, следует пользоваться графиком или таблицей. Они составляются при помощи формулы:

$$N = \frac{\pi}{4} D^2 p,$$

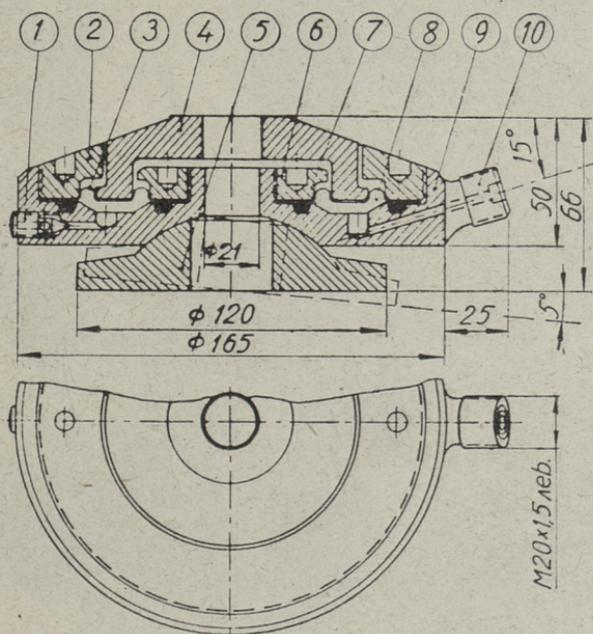
где D — диаметр гребня складки диафрагмы и
 p — давление по манометру.

Для динамометра SK-50 множитель перед давлением p в вышеприведенной формуле составляет примерно 200 см^2 ($D = 159,6 \text{ мм}$).

Если манометр обслуживает только динамометры одной марки, то можно на циферблат манометра нанести новые деления, выражающие непосредственно силу N .

Динамометр SKA-15

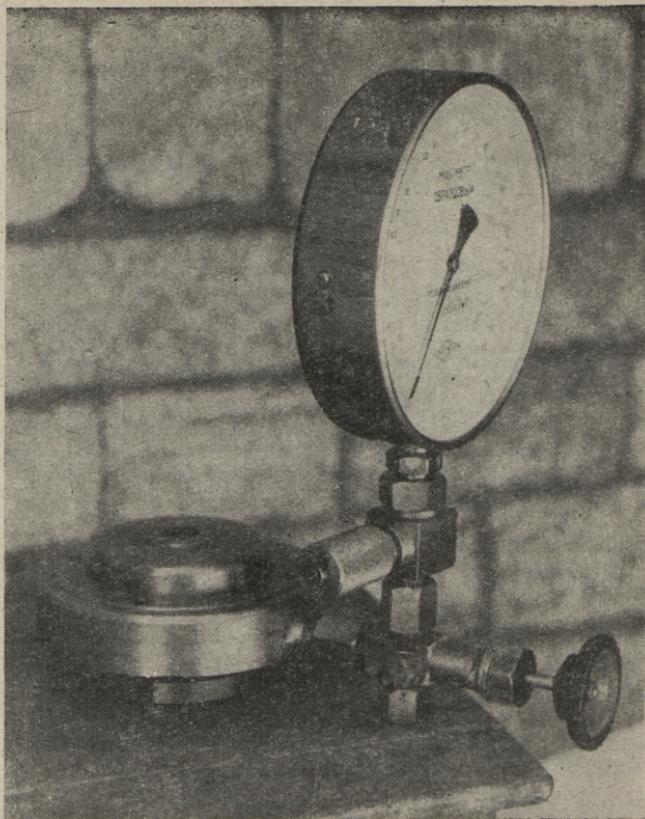
Конструкция показана на фиг. 5 и общий вид несколько видоизмененного образца на фиг. 6.



Фиг. 5. Гидравлический динамометр SKA-15:

1 — воздушный вентиль; 2 — наружная кольцевая гайка; 3 — диафрагма; 4 — грузовая пластинка; 5 — опорная плита с шаровой опорой; 6 — внутренняя кольцевая гайка; 7 — уплотнительное кольцо; 8 — полость, заполненная солидолом; 9 — корпус; 10 — штуцер для соединения вентиля

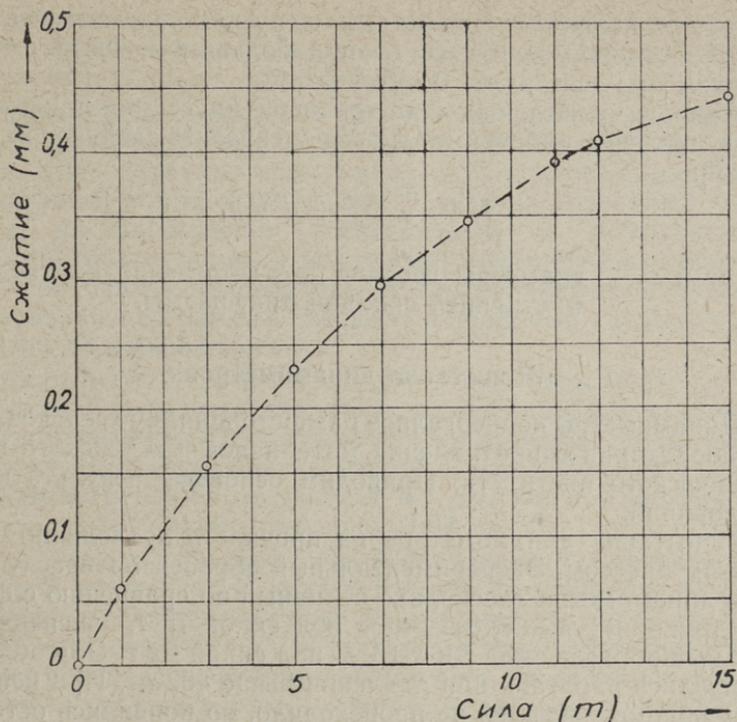
Прибор предназначен для измерения силы натяжения анкерных болтов диаметром до 20 мм. Динамометр по своему устройству сходен с описанным выше типом. Он состоит из корпуса, в котором помещены аналогичные детали, как в корпусе типа SK, и опорной плиты с шаровой опорой. Внецентренная нагрузка на динамометр, которая возможна при перекосах болтов, устраняется шаровой опорой. Динамометр устанавливается на выступающую часть болта и крепится гайкой, которая одновременно осуществляет и затяжку болта до требуемой величины (см. фиг. 4). Динамометр рассчитан на максимальную нагрузку 15 т и не должен перегружаться более чем на 5 т. Вес динамометра 7 кг. Динамометр SKA-15 без опорной плиты может быть установлен также под сжатые стойки.



Фиг. 6. Вид динамометра SKA-15 вместе с вентилем, компенсатором и манометром (на снимке показаны опытные образцы, внешний вид которых немного отличается от описанных в тексте и на других фигурах)

Основным конструктивным различием динамометра SKA-15 по сравнению с типом SK-50 является отверстие в центре прибора для анкерного болта. Отверстие обуславливает применение кольцевой диафрагмы, двух кольцевых гаек и двух уплотнительных колец. Толщина диафрагмы здесь 0,3—0,4 мм; она спрессована из мягкой стали (разрывное удлинение не менее чем 35%). Потребность солидола для динамометра — 50 см³.

Для динамометра SKA-15 предусмотрены такие же вентиль, манометр и компенсатор, как для SK-50. Характеристики динамометра с различными манометрами приводятся в таблице 2.



Фиг. 7. График сжатия динамометра SKA-15

Таблица 2

Верхние пределы измеряемой динамометром SKA-15 силы, цены деления и погрешности в зависимости от максимального давления и класса точности применяемого манометра

Макс. давление манометра, в ат	Макс. сила динамометра, в т	Цена деления, в кг	Погрешность в кг	
			с манометром кл. точности 0,20	с манометром кл. точности 0,35
250	15	50	30	50
160	10	32	20	35
100	6	20	12	20
60	3,5	12	7	12
40	2,4	8	5	9

Сжатие динамометра при номинальной силе составляет 0,452 мм (фиг. 7). Из графика сжатия видно, что податливость является переменной величиной; с увеличением нагрузки

ки она уменьшается. При малых нагрузках податливость прибора примерно 0,060 мм/т, при больших — 0,016 мм/т; в среднем она составляет 0,030 мм/т.

Сила N , действующая на грузовой пластинке динамометра, и давление рабочей жидкости p связаны следующей формулой:

$$N = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) p,$$

где D и d — диаметры гребней соответственно наружной и внутренней складки диафрагмы.

Испытание динамометров

Динамометры подвергались разностороннему исследованию в лаборатории сопротивления материалов Таллинского политехнического института. Приводим основные результаты исследований.

Испытание динамометров на прочность провели под статическим прессом. Экспериментальный образец пятидесятитонного динамометра (несколько отличный по сравнению с фиг. 1 конструкции) вышел из строя под силой 75 т, экспериментальный образец типа SKA-15 — под силой 22 т. Оба образца отказались работать при давлении выше 400 ат. При испытаниях поломок деталей не происходило, но появились остаточные деформации в кольцевой гайке и на краях корпуса, вследствие чего уплотнение нарушилось и жидкость вышла за резиновое уплотнительное кольцо. По приближенным расчетам наиболее слабым местом оказалась диафрагма, однако она выдержала давления больше расчетного.

Запас прочности динамометров составляет 1,5. Предполагается после накопления соответствующего опыта на шахтах несколько уменьшить запас прочности для таких динамометров.

Вместе с динамометром находились под давлением 400 ат вентиль и компенсатор, у которых никаких повреждений не появилось. Утечки солидола из вентиля и компенсатора не наблюдались.

Непроницаемость динамометра испытывалась под пятидесятитонной механической машиной при давлении 250 ат. Первое испытание производилось над пятидесятитонным динамометром, который был снабжен вентиляем, компенсатором и манометром (номинальное давление 250 ат, класса точности 0,20). Прибор стоял под давлением в течение 30 минут. При втором испытании динамометра SKA-15 вместе с вентиляем и манометром (без компенсатора) находился под дав-

лением в течение 12 часов. При обоих испытаниях проникновения жидкости, понижения давления по манометру, а также движения рычага не наблюдалось.

Пригодность солидола в качестве рабочей жидкости проверялась при нормальной и пониженной до -25°C температурах. Для сравнения испытывали параллельно динамометр, заполненный тормозным маслом. Следя за стрелками манометра на параллельно нагруженных и разгруженных динамометрах, разницы в показаниях манометра не заметили даже при низкой температуре. В течение полугода проявления признаков устарения солидола в полости и каналах динамометра не наблюдалось.

Динамометр SKA-15 подвергался еще испытанию на податливость. О результатах этого испытания было сказано в описании прибора. Податливость динамометра SK-50 специально не изучалась, однако известно, что сжатие при номинальной нагрузке не превышает 0,2 мм, так что средняя податливость составляет примерно 0,004 мм/т.

Погрешность динамометров исследовалась на пятидесяти-тонновой механической испытательной машине при помощи прецизионных динамометров и образцовых манометров из класса точности 0,16 и 0,20. Машина и манометры были проверены перед испытаниями. Испытания проводились в виде тарировки гидравлических динамометров с применением манометров при различных максимальных давлениях (см. табл. 1 и 2). Из испытаний можно было заключить, что между силой и давлением существует линейная зависимость в пределах точности манометра. Характеристики динамометров при загрузке и разгрузке совпадают с погрешностью в пределах допустимого разброса отсчетов манометра. После разгрузки стрелка манометра возвращается на нуль. Из вышесказанного следует, что класс точности динамометра совпадает с классом точности применяемого манометра (если манометр не точнее класса 0,16). Приведенные в таблицах 1 и 2 погрешности получены с учетом погрешности только манометра.

Величина площади, которая получается делением нагрузки на давление жидкости, имеет постоянное значение и для динамометра SK-50 с достаточной точностью для измерения совпадает с площадью круга πR^2 , где R представляет радиус гребня складки диафрагмы и для динамометра SKA-15 площадью кольца $\pi (R^2 - r^2)$, где R и r — радиусы гребней соответственно наружной и внутренней складок диафрагмы. Следовательно динамометры типа SK и SKA не требуют тарировки, а рабочие характеристики можно

составлять расчетным путем. Динамометры рассчитываются по схеме поршневого гидравлического прибора без учета трения. При этом условным диаметром расчетного поршня является для типа SK — диаметр гребня складки диафрагмы, а для типа SKA — площадь поршня, равная площади полосы между гребнями внешней и внутренней складок диафрагмы. Возможность обойти тарировку значительно облегчает применение динамометров на шахтах и на других предприятиях, где отсутствуют соответствующие испытательные машины.

При некоторых испытаниях динамометр SK-50 находился в испытательной машине с наклоненной относительно корпуса грузовой пластинкой. Пластика отклонилась до 4° , что соответствует относительному наклону примерно 1 : 15. Отметим, что большего уклона пластинки не позволяет конструкция динамометра. Данные испытаний показали, что наклонное положение грузовой пластинки незначительно влияет на погрешность динамометра. Однако при этом следует иметь в виду, что значительный уклон пластинки усложняет условия работы диафрагмы, особенно при больших отклонениях от нормального положения последовательно в разные направления. В интересах продления срока службы диафрагмы желательнее ее не заставлять работать в сильно деформированном состоянии.

Ряд испытаний проводился таким образом, что для каждого отсчета манометр был вновь установлен при помощи компенсатора давления на загруженный динамометр. Эти испытания показали, что удаление манометра от динамометра после каждого отсчета влияет незначительно на точность измерений и податливость прибора.

Динамометр SK-50 испытывали также на совместное действие нормальной и боковой силы. При нормальных силах от 3 до 50 т были приложены к грузовой пластинке еще боковые силы 1, 2 и 3 тонны. Влияние боковой силы на погрешность прибора не замечалось, но при боковой силе 3 тонны появилась значительная деформация диафрагмы.

Кроме специальных исследований динамометр SK-50 использовался при лабораторном испытании стоек крепления кровли и был применен в шахте № 10 (г. Ахтме) для измерения силы в стойках М 53-Д. Динамометром SKA-15 пользовались в той же шахте работники горной лаборатории института сланца. Он был установлен под гайкой анкерного болта кровли примерно 1 м от груди забоя в камере. Приборы подвергались действию взрывных работ. Оба динамометра успешно выдерживали производственное испытание.

На Таллинском машиностроительном заводе изготовили динамометр типа СК номинальной силой 120 т для проверки прессов, выпускаемых заводом. По данным завода прибор работает нормально.

В ближайшем будущем намечается сконструировать динамометр типа СК с номинальной силой 30 т и типа СКА — 8 т. В этих приборах предполагается повысить предельное давление гидравлической системы и применить легкие сплавы.

* * *

Все экспериментальные образцы динамометров и их принадлежности были изготовлены в экспериментальной мастерской Таллинского политехнического института.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. И. Безухов. Испытание строительных конструкций. Москва, 1954.
2. Ш. М. Билик и др. Приборы и аппаратура для исследования проявлений горного давления. Москва, 1958.
3. N. Hast. Measuring Stresses and Deformations in Solid Materials. Stockholm, 1945.
4. Каталог-справочник лабораторных приборов и оборудования. Вып. 16—19. Машгиз, 1949.
5. К. А. Миронов, Л. И. Шипетин. Теплотехнические измерительные приборы. Москва, 1960.

Х. А. Орувез

ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИСПОЛНЕНИЯ КРУПНОГО ВОКАЛЬНОГО АНСАМБЛЯ

Введение

Проектирование зеленых театров или певческих площадок, а также крупных концертных зал и сценических помещений связано прежде всего с одной проблемой — возможно ли выступление массового инструментального или вокального ансамбля. В отличие от простого естественного источника звука массовый ансамбль является комплексным по всей сложности различных проблем. Комплексный источник звука представляет собой крупную звучащую массу, распределение энергии в которой практически равномерно, но разности в путях звуковых волн от различных элементарных источников создают многократное запаздывание основному сигналу от самой близкой к слушателю части ансамбля. Расчет или даже практическое измерение плотности энергии вблизи комплексного источника связано с большими трудностями из-за наличия интерференционных эффектов. Вообще вопрос об условии когерентности натуральных звучаний требует особого подхода, т. к. иногда наблюдаемая интерференционная картина весьма переменна. Если интерференционные эффекты чередуются быстрее инерционной способности человеческого уха, то обычно результаты взаимного усиления более заметны, чем результаты ослабления. Это приводит к полезному усилению уровня, т. е. усредненный уровень интенсивности звука не соответствует энергетическому сложению интенсивностей, но ощущается большая громкость.

Большой интерес для проектировщика представляет предел допустимых габаритов размещения большого источника, глубина и ширина подиума. Пределы определяются известным образом синхронностью исполнения. Последнее обстоя-

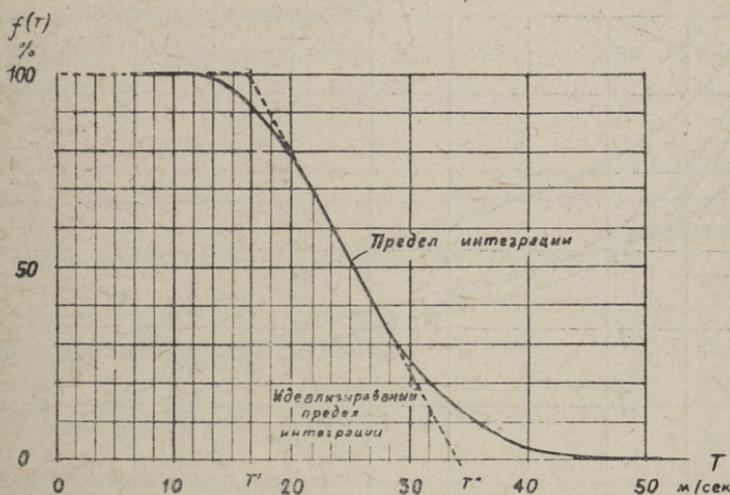
тельство связано также со слуховым аппаратом человека, т. е. «памятью» органа слуха и в связи с этим допустимым интервалом запаздывания звуков от удаленных рядов исполнителей. Последний определяется временным сдвигом, при котором человек не ощущает помех, имеющих прямое действие на разборчивость или четкость исполняемой программы. По данному вопросу имеются относительно недавние экспериментальные данные для речи и некоторых видов музыки [1, 2, 3, 4, 8]; что же касается вокальной музыки, и в частности, исполняемой крупным ансамблем, то таких данных до сих пор в литературе нет.

В архитектурно-акустических задачах качество передачи должно оцениваться также некоторыми статистическими характеристиками таких случайных звуковых процессов, как речь и музыка, для того, чтобы определять оптимальные условия их восприятия. В этих целях целесообразно, например, анализировать не кривую прямой сигнальной функции, а некоторых более медленных, но все же связанных с ней функций времени, соответствующих интеграционной способности органа слуха. В качестве одной из таких функций обычно выбирают среднюю за некоторое время мощность сигнала или, в логарифмических единицах, — достаточно долговременное среднее значение текущего уровня. Для исследования применяется логарифмический самописец, который способен вследствие своей инерционности интегрировать напряжение. Получаемые уровнеграммы при записи различных речевых и музыкальных звучаний показывают, что вероятность наличия различных динамических уровней подчиняется определенной закономерности в течение определенного времени исполнения, удовлетворяя в большей или меньшей степени закон нормального распределения Гаусса. Из более ранних работ известно, что уровни, встречаемые в симфонической музыке, хорошо следуют кривой нормального распределения, однако речевой сигнал не дает хорошего приближения. Что же касается вокального исполнения, и в частности, хорового пения, то это представляет собой комбинацию речевых и музыкальных звучаний, с заметной неоднородностью при умеренных темпах исполнения. Можно предположить, что распределение динамических уровней во времени несимметрично относительно наиболее вероятного уровня. Это подтверждается в данной работе результатами экспериментального исследования.

1. Статистический анализ динамических уровней

а) определение степени интеграции

Многие авторы исследовали время интеграции органа слуха независимо от амплитуды колебаний. Некоторые авторы рассматривали способность интеграции уха в зависимости от субъективного мешающего действия запаздывания звука. При определенном интервале времени запаздывание не имеет мешающего характера, а создает полезное усиление звука. Таким возможным интервалом считается различными авторами 10—15 мсек. Достаточную ясность в данный вопрос принесла работа Низе [5], из которой следует, что при определенной скорости следования коротких импульсов можно добиться ощущения непрерывного звучания. Из опыта выяснилось, что «память» уха, т. е. время чистой интеграции уха составляет 15 мсек. Свыше 15 мсек были у всех наблюдателей до некоторой степени обнаружены потери непрерывности сигнала, однако, в зависимости от мощности оригинальных и эхо-сигналов, границы интеграции могли расширяться до 50 мсек в идеальном и 35 мсек в общем случае. (фиг. 1).



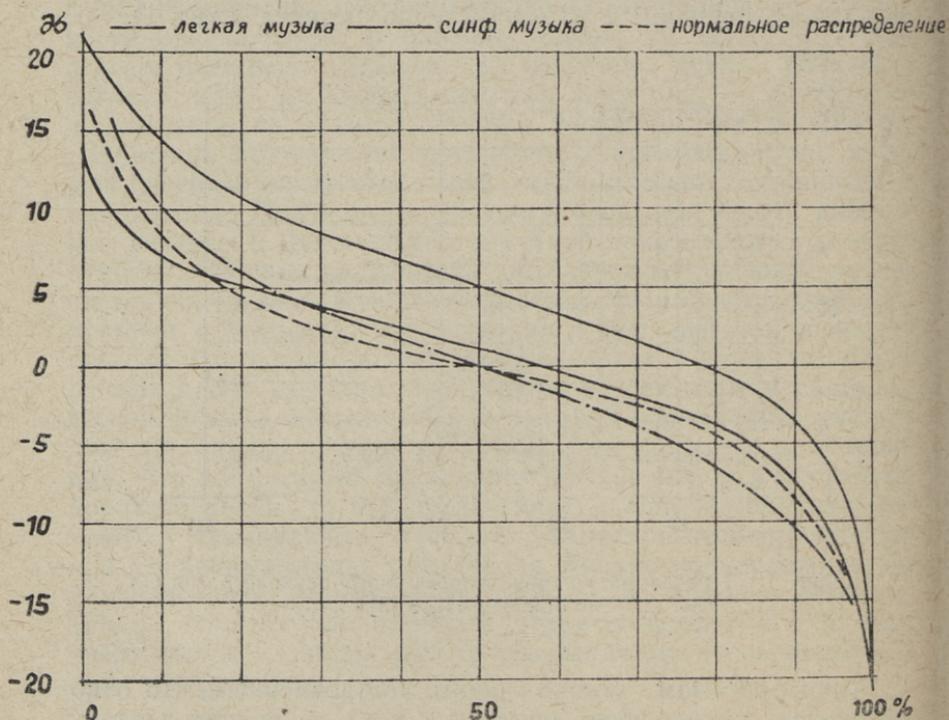
Фиг. 1. Предел интеграции человеческого слухового органа по данным Низе [5]

Таким образом можно считать установленным, что относительная длительность сигнала t/t_0 (t_0 — полная длительность сигнала) ниже 35 мсек, в течение которых динамический уровень сигнала меняется, с точки зрения архитектур-

ной акустики не имеет значения. Достаточно, чтобы в учет принимались условия распределения динамических уровней, наблюдаемых при усреднении в интервале времени 35 мсек.

б) Динамический диапазон хорового исполнения

Разницу в децибелах минимальных и максимальных (пиковых) значений уровней интенсивности источников звука обычно называют динамическим диапазоном сигнала. Динамический диапазон для данного источника величина непостоянная и зависит главным образом от характера исполняемого произведения и от акустических условий помещения, в котором измеряют уровни звука. Реверберация расширяет динамический диапазон, обычно достигая максимального значения в помещениях, имеющих максимальный удельный объем и минимальное звукопоглощение. При выступлении на открытом воздухе необходимо несколько повысить средний



Фиг. 2. Интегральный закон распределения динамических уровней в симфонической и легкой музыке, исполняемой небольшим оркестром

уровень исполнения, уменьшая при этом контрасты минимальных и максимальных относительных уровней. С другой стороны на открытой эстраде отсутствует реверберация. В результате динамический диапазон сокращается на 10—15 *дб*, по сравнению с диапазоном в концертном зале. При записи или непосредственной передаче хорового концерта электроакустическими средствами хоры представляют большие трудности. Например, при *fortissimo* требуется в первую очередь срезание высоких частот, примерно 5 *дб* на 1 *кГц* начиная от 1 *кГц*, а общий динамический диапазон нередко сокращается до 25—35 *дб* по причине, что чрезмерно низкие уровни могут маскироваться фоном, а слишком высокие неизбежно вызывают искажения и перегрузку звукового тракта.

Для практического измерения динамического диапазона хоров различного типа и состава мы записали в логарифмическом масштабе характерные отрывки, а также целые произведения в исполнении смешанного, мужского и женского хоров во время генеральной репетиции дня песни города Таллина на певческой эстраде. Далее были зарегистрированы уровни исполнения обычных хоров в условиях студийного, а также концертного исполнения.

Данные о динамическом диапазоне хоров приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вид и состав хора	Место выступления	Динамический диапазон в <i>дб</i>
Смешанный хор, 140 чел.	Певческая эстрада	40—46
то же	Концертный зал «Эстония»	55—60
Смешанный хор, 60 чел.	Большая студия дома радио	35—40
Сводный смешанный хор, 1500 человек	Певческая эстрада	46—49
то же 5000 чел.	„ „	48—52
Мужской хор, 80 чел.	Концертный зал «Эстония»	50—55
то же	Певческая эстрада	43—48
Сводный мужской хор, 500 чел.	„ „	44—50
Сводный женский хор, 800 чел.	„ „	42—45

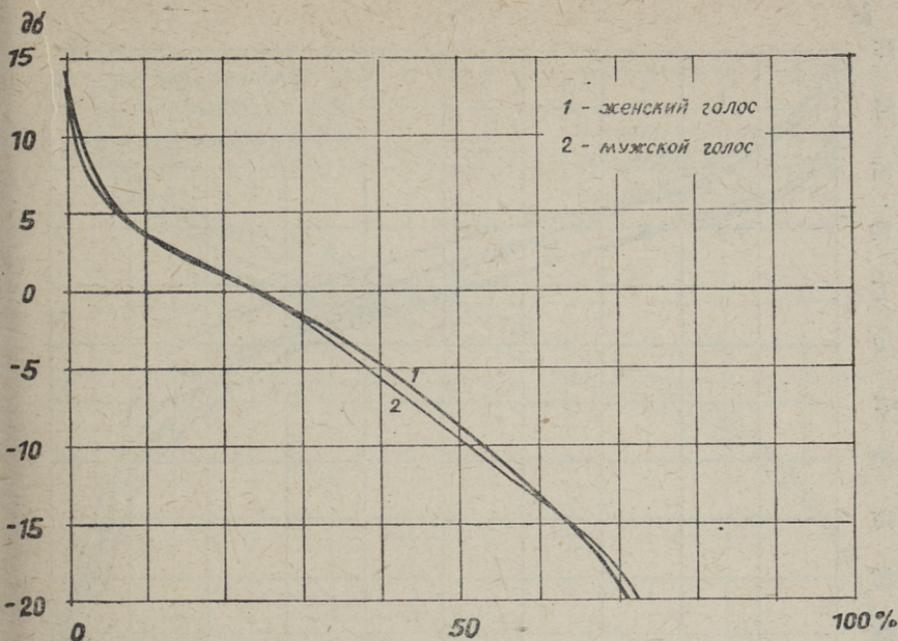
Интегральный закон распределения динамических уровней в обычном графическом изображении представлен на фиг. 3—6: по оси ординат отложена относительная величина уровня, по оси абсцисс — относительное время (в %), в течение которого соответствующий уровень превышаетя.

На фиг. 2 показан интегральный закон распределения динамических уровней симфонической и легкой музыки и закон нормального распределения. Симметричность функции в случае легкой музыки немного искажена относительно нулевого уровня (57% соответственно совпадает с нулем), другими словами, вероятность уровня, приближающегося к максимальному уровню, немного превышает соответственно небольшие уровни, приближающиеся к уровню фона.

На фиг. 3 дано распределение уровней во времени для речи (мужской и женский голос). В качестве звукового материала была использована дикторская речь эстонского радио*. Несмотря на большую «сквазность» речевого сигнала, он все же характеризуется достаточной однородностью, т. е. минимальная длительность сигнала небольшая, достаточная для выявления характерных для него статистических характеристик. То же самое нельзя сказать относительно хорового исполнения, т. к. различные произведения характеризуются значительной неравномерностью структуры. В тех пределах, когда они являются однородными, предел однородности составляет 1,5—4 мин.

В качестве основного звукового материала нами были статистически обработаны самые различные по своему характеру, т. е. темпу исполнения, динамической структуре и музыкальной стили (классические, народные и современные) вокальные произведения в исполнении хора эстонского радио (a capella). Далее были проанализированы песни в массовом исполнении во время концерта дня песни города Таллина в 1961 г. Соответствующие уровнеграммы были сняты непосредственно на выходе главного микшерного пульта радиовещания при фиксированном рабочем режиме без регулировки звукорежиссера. Результаты анализа представлены на фиг. 4 и 5. На фиг. 6 изображены результаты опытов со смешанным хором Эстонского радио при исполнении песен различного характера. Выяснено, что кривые, получаемые по отдельным отрывкам разных песен, отличаются друг от друга значительно больше, чем интегральные кривые для данного

* Полученные кривые вполне аналогичны кривым, описанным в литературе [10].

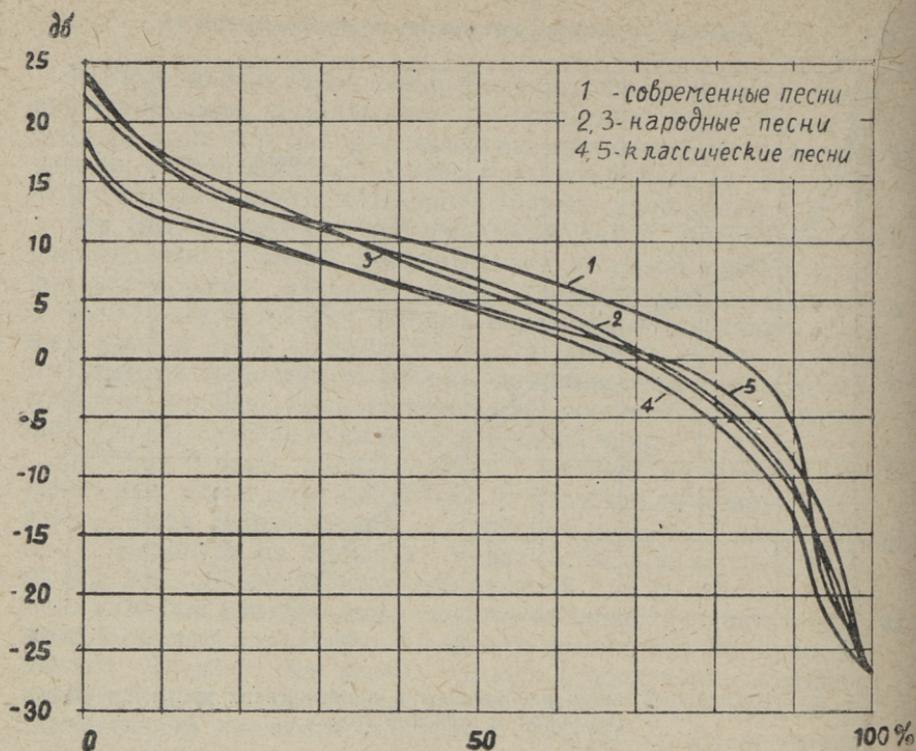


Фиг. 3. Интегральный закон распределения динамических уровней в речи (мужской и женский голос)

произведения в целом. Это говорит о том, что хоровые музыкальные произведения исполняются в среднем с достаточной закономерностью наиболее вероятного уровня, т. е. комплексные интегральные кривые различных произведений по своей форме достаточно близки друг к другу. В зависимости от расширения общего динамического диапазона повышается лишь наиболее вероятный уровень, принятый как нулевой, но сама кривая соответственно мало изменяется, т. е. расхождение небольшое. Для всех характерно еще одно: наблюдается большая вероятность более высоких уровней чем низких, причем небольшие уровни имеют очень малую длительность; из-за этого кривая асимметрична относительно нулевого уровня, а также вертикали 50%, и не дает хорошей аппроксимации с нормальным распределением.

г) Распределение уровней по спектру частот

Более детальной характеристикой временной структуры музыкального сигнала является анализ динамических уровней по полосам основных частот. Используется обычно для этой цели спектрометр с $1/3$ -октавными или октавными филь-



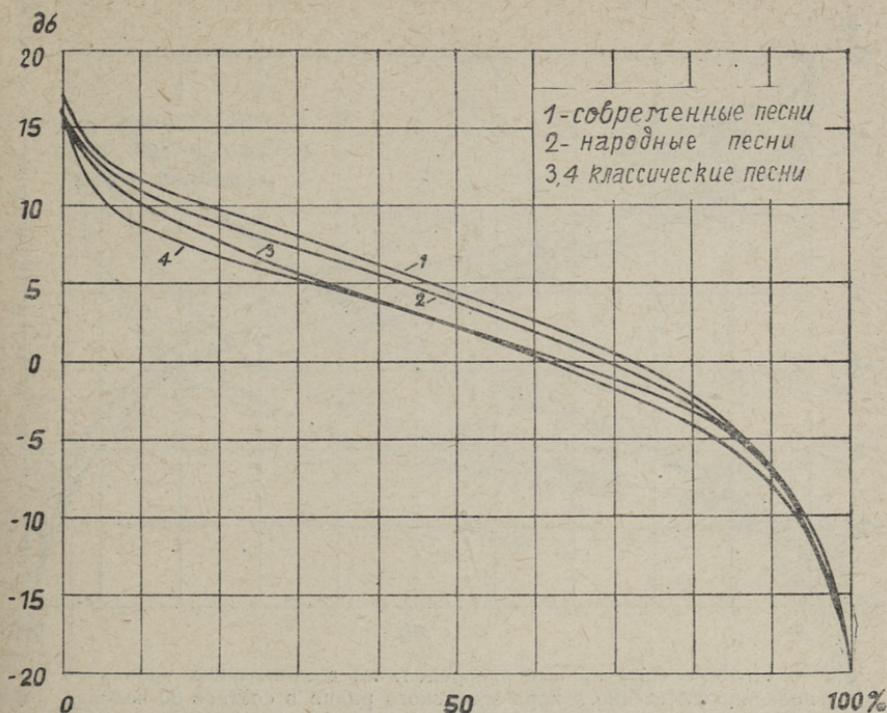
Фиг. 4. Интегральные кривые распределения динамических уровней в исполнении сводного смешанного хора в составе 2000 человек

трами. Полученные уровнеграммы статистически обрабатывают и строят графики интегрального распределения всего спектра звуковых частот.

Распределение в уровнеграммах спектральных составляющих в случае исполнения хора эстонского радио представлено на фиг. 7.

Кривые характеризуются большим расхождением в начале координат, однако, при определенной частоте отдельные произведения не дают заметного расхождения. Кривая распределения уровней при средней частоте $1/3$ -октавы 500 гц отличается наибольшей крутизной и достаточно хорошо аппроксимируется симметричной функцией. Более низкие и высокие частоты имеют меньший динамический диапазон и по своей форме приближаются к общему распределению.

На основе полученных кривых можно определить максимальные и средние значения уровней по полосам всего спектра исследуемого сигнала или т. н. спектры сигнала. Спектр



Фиг. 5. Интегральные кривые распределения динамических уровней в хоровой музыке, исполняемой сводным мужским хором в составе 500 человек

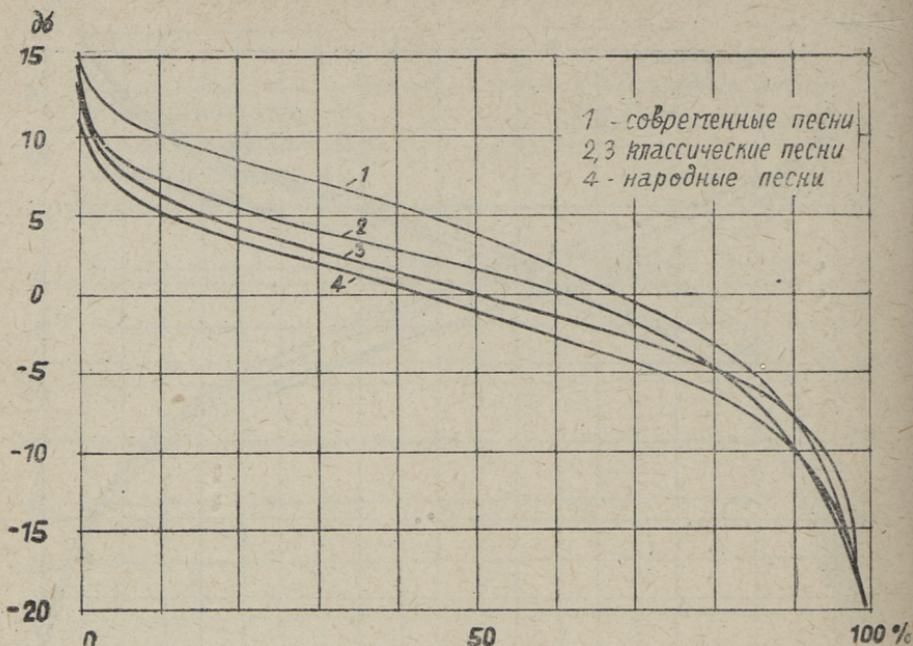
максимальных, а также наиболее часто встречаемых уровней хоровой музыки в исполнении смешанного хора в интервале времени 1 мин. представлен на фиг. 8 (обе кривые имеют разные значения делений по оси ординат). Спектрограмма снята в большой радиостудии на расстоянии 5 м до ансамбля.

Хотя приводимые здесь результаты являются лишь предварительными и требуют исследования значительно большего количества звуковых образцов, все же они позволяют сделать ряд практических выводов.

Выводы

1. Интегральное распределение всевозможных уровней исполняемых хором массовых вокальных произведений подчиняется определенной закономерности, но не удовлетворяет т. н. закону нормального распределения.

2. Общая кривая распределения динамических уровней мало зависит от величины ансамбля, но акустические условия места выступления имеют исключительное значение.



Фиг. 6. Интегральные кривые распределения динамических уровней в исполнении смешанного хора эстонского радио в составе 60 человек

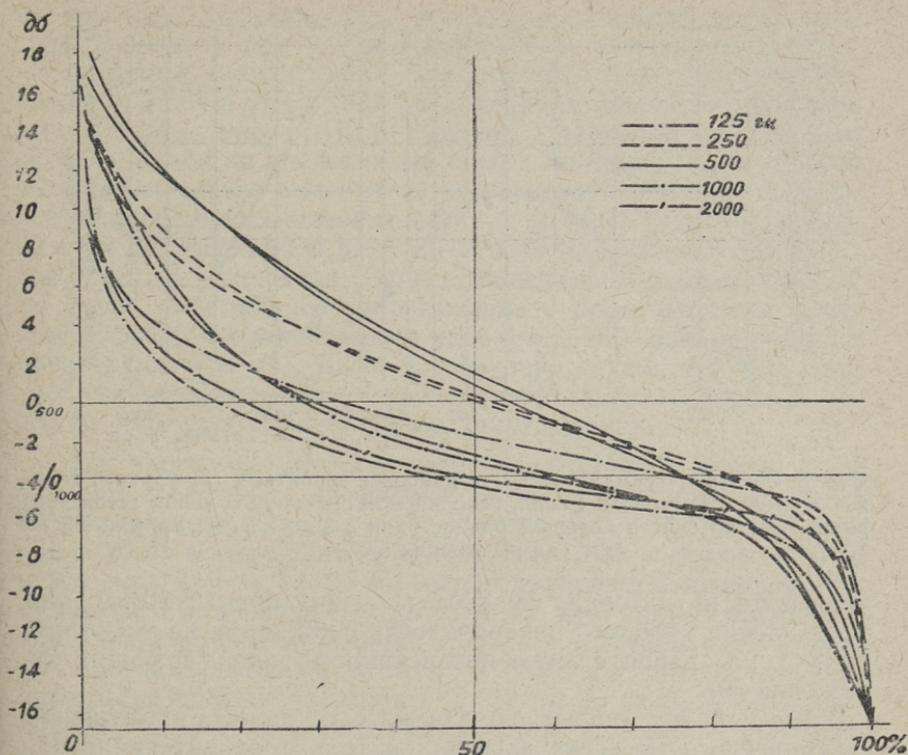
3. Для акустического проектирования важен как средний, наиболее вероятный уровень, так и наименьшие уровни, так как все динамические нюансы начиная от *pianissimo* вплоть до *forte fortissimo* во всех точках зала должны быть выше уровня собственного шума. Практически наименьший уровень музыкального сигнала около самого исполнителя должен превышать фон не менее чем на 25 дБ.

4. При строительстве больших зеленых театров и эстрад для массовых представлений необходимо добиться повышения общего уровня исполнения при помощи естественного или искусственного звукоусиления, т. к. снижение уровня от расстояния может быть значительным.

2. Условия запаздывания сигнала от комплексного источника

а) Обзор более ранних исследований

Применяя субъективно-экспериментальные методы, разные авторы исследовали эффект нарастания звуковой энергии в зависимости от интервала времени между прямым зву-

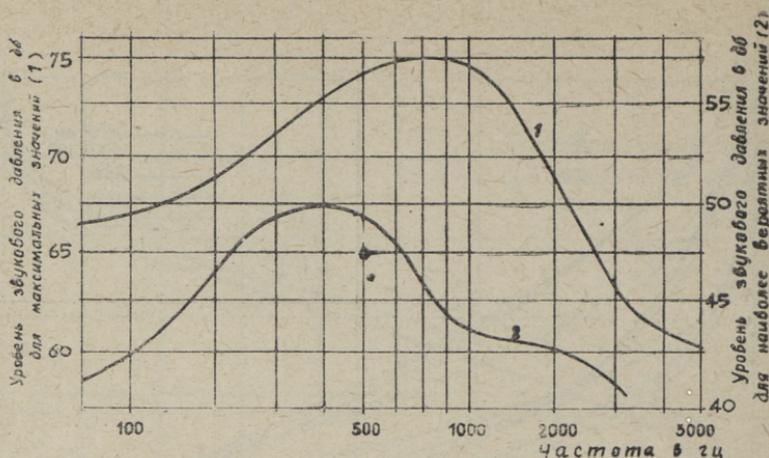


Фиг. 7. Интегральное распределение спектральных составляющих в динамических уровнях хоровой музыки, исполняемой смешанным хором эстонского радио

ком и первым отражением (однократное эхо) или между прямым звуком и соседними эхо-сигналами (многократное эхо). При этом основной интерес представляет вопрос о том, в каких пределах площади возможно размещение ансамбля и какие предельные расстояния возможны между инструментами или вокалистами в ансамбле.

Еще в ранней стадии развития архитектурной акустики Петцольд исследовал мешающее влияние задержанного сигнала различных интервалов, причем для музыкальных звучаний предельное время запаздывания отраженного звука, еще не вызывающее неразборчивости, составляло от 35 до 63 мсек, в зависимости от характера музыки.

Далее, Цвиккер рассматривал как полезный звук звуковую энергию, которая приходит к слушателю с большой интенсивностью и непосредственно вслед за прямым звуком с разрывом во времени не более $1/16 \text{ сек} = 63 \text{ мсек}$. Вермейлен



Фиг. 8. Спектр максимальных (1) и наиболее вероятных (2) уровней хорошей музыки в интервале 1 мин., исполняемой смешанным хором эстонского радио. Спектр снят в большой радиостудии с $T = 1,3$ сек. Уровень 85 дб на расстоянии 5,0 м

указывает на интервал 59 мсек (разницу в пути 20 м), при превышении которого разборчивость снижается, не указывая, однако, на сравнительную интенсивность запаздывающих отражений [6].

Дальнейшие опыты показали, что степень нарушения акустического качества зависит не только от интервала запаздывания, а также от сравнительной интенсивности его.

Так, Мэзон и Мойр установили, что для неискаженной передачи естественного звучания, каким по существу является речь и музыка, можно допускать интервал до 70... 100 мсек при условии, что задержанный звук имеет силу на 10 дб меньшую [7]. В 1951 г. на сессии, проведенной в обществе «Society of Motion Picture and Television Engineers», они считали верхний предел допустимым для речи при условии, что запаздывающий звук имеет уровень на 20 дб меньше. Хаас исследовал влияние различных видов однократного искусственного эха на воспроизводимые речевые сигналы и показал, что при запаздываниях свыше 40 мсек ощущаются заметные помехи при соответствующих уровнях запаздываний (запаздывающее повторение имеет равный или повышенный уровень с основным сигналом), так например, при равногромких эхосигналах запаздывание 68 мсек было замечено до 50% слушателей [8].

Вслед за Хаасом данную проблему исследовали Никсон, Дюбо и Мюнси, обращая внимание не только на речевой, но и музыкальный сигнал (камерная и органная музыка) [1, 2].

Им удалось показать, что условия восприятия запаздывающих звуков в заглушенном помещении отличаются от условий обычных помещений с определенным временем реверберации, так как в отсутствие реверберации мешающее действие эхо-сигналов сильнее. По сравнению с данными для речевого сигнала Хааса их аналогичные опыты показали более строгое условие, но только в случае заглушенного помещения (снижение уровня запаздывающего сигнала до -10 дб при задержке 50 мсек для медленной речи и -15 дб при 50 мсек для быстрой речи). В помещении с нормальной реверберацией допустимо более значительное запаздывание с более высоким уровнем (50 мсек с равногромким уровнем и 100 мсек при снижении уровня -4 дб). Было установлено также, что снижение уровня задержанного звука относительно основного $-35...40$ дб допустимо при любом запаздывании.

Для инструментального квартета (быстрый темп) были найдены следующие предельные значения (при заметности их 20% слушателей, как обычно): 50 мсек при -7 дб и 150 мсек при -20 дб в заглушенном помещении и 100 мсек при -10 дб и 200 мсек при -25 дб в реверберирующем помещении. Замедление темпа исполнения уменьшало вероятность ощущения эха, и наоборот. Для органной музыки в заглушенном помещении при запаздывании сигнала до 100 мсек соответствующий уровень не должен превышать -12 дб по отношению к первичному сигналу и в реверберирующем помещении 100 мсек и -4 дб (при 50 мсек соответственно $+3$ дб).

Большой интерес представляет для нас и работа Мейера и Шоддера [3]. Их опыт заключался в применении последовательно нескольких отражений (эхо-сигналов), а это давало возможность устранять заметность эха даже со значительным запаздыванием и уровнем. Например, было установлено, что введением между основным сигналом и эхо-сигналом 9 промежуточных эхо-сигналов при запаздывании последнего из них в 50 мсек уровень задержки может быть выше оригинала на $7...8$ дб. Чтобы устранять маскировки первичного звука, уровень задержки должен снижаться при более длительных задержках, но эти условия совершенно иные по сравнению с опытами с однократным эхом.

На основе результатов этого исследования можно предположить, что ощущение эха совершенно не зависит от того, создается ли запаздывание искусственно с помощью специального магнитофона смещением звука в одном канале, или непосредственно путем соответствующего отодвигания эхо-громкоговорителей.

Дальнейшими исследованиями Фигвера (применением целого ряда громкоговорителей для распределения запаздывающего звука) [4] было установлено, что при стереофоническом восприятии даже короткого сигнала изменение угла прихода мешающего сигнала в пределах 50° до 90° не сказывается на его восприятии. Аналогичные исследования Низе [9], (громкоговорители расположены в пределах $0-180^\circ$ вокруг наблюдателя) показали, что в пределах $60-105^\circ$ чувствительность уха к эху максимальна. Эхо под азимутом -30° до $+30^\circ$ не критично, и кажется на $7...8$ дБ слабее, другими словами, для равногромкого эха мешающий эхо-сигнал, приходящий из направления 90° и 0° , должен иметь уровень на $7-8$ дБ меньше.

б) Теория ансамблевого исполнения

При рассмотрении вопроса об оптимальных условиях выступления большого ансамбля в свете современной теории и практики применения искусственных эхо-сигналов выясняется, что крупный музыкальный ансамбль представляет собой комплекс музыкальных инструментов или вокалистов с определенной разностью интервалов между собой, следовательно созданные этим ансамблем музыкальные сигналы воспринимаются и различными временными сдвигами относительно первичного сигнала. Может ли восприятие звуков, особенно коротких, излучаемых всем ансамблем с определенными интервалами времени, создавать эхо? Предположим, что при увеличении расстояний между участниками ансамбля и размеров всего ансамбля элементарные источники представляют собой целую цепь эхо-сигналов по сравнению с самым близким к слушателю источником звука. Приход к приемнику прямого сигнала и его запаздывающих «повторений» от следующих участников или групп участников (в пределах интеграции слухового аппарата) является последовательным процессом, в котором происходят явления энергетического суммирования, а также превышающие результаты энергетического суммирования, маскировки эхо-сигналов, а возможно, также и первичного сигнала. Уровень «эхо-сигналов» в среднем убывает по мере нарастания времени запаздывания и до определенной разницы расстояний, т. е. в определенных пределах разности времени и интенсивности эхо-сигналов «сливаются» с первичным звуком и пространственная удаленность отдельных групп не будет заметна, даже при увеличении мощности задних групп по сравнению с передними, т. к. каждое время запаздывания не превышает критичной величины, соответствующей порогу заметности эха от одного и того же направления или в определенных пределах угла. В отличие от условий открытого

воздуха (или заглушенного помещения) в реверберирующем помещении до слушателя доходят еще отражения по различным направлениям, имеющие различную задержку и интенсивность из-за поглощения в границах помещения, а также характеристики направленности слухового восприятия. Не осложняя данную проблему условиями закрытого помещения, ограничимся рассмотрением условий открытого воздуха и полузакрытого сооружения, в котором истинные источники и мнимые источники эхо-сигналов локализованы в одну зону. В таких условиях максимальная глубина ансамбля определима безискаженным восприятием сигнала от первого и последнего ряда исполнителей, а также интервалами между участниками внутри ансамбля. В данном случае безискаженное восприятие сигнала определяется на основании того простого условия, что время запаздывания не превышает величины, соответствующей порогу заметности многократного эха равного уровня. Нельзя упускать из виду и того факта, что допустимое время запаздывания не может не зависеть от характера исполняемого музыкального произведения. Это значит, что ансамбли, не дающие очень коротких сигналов, могут располагаться на более широкой площадке.

в) Исследование влияния искусственного эха на восприятие ансамблевого исполнения

С пониманием всех упомянутых выше факторов нами проведены соответствующие субъективно-статистические опыты, применяя как однократное, так и повторяющееся искусственное эхо. В качестве звукового материала использовались звукозаписи хороших выступлений, специально записанных при помощи одного микрофона. Большая часть была записана с концерта сводного хора на певческом празднике города Тарту в 1959 году. Были также анализированы записи студийного концерта смешанного хора эстонского радио (в составе 60 человек).

В отличие от принятой до сих пор методики создания искусственных эхо с помощью специального магнитофона, мы получили запаздывание эхо-сигналов тремя фильм-фонографами, работающими синхронно при скорости движения ленты 456 мм/сек. Достоинством широкоплечных фонографов является то, что здесь скольжение ленты доведено до минимума, включение нескольких постов может быть организовано автоматически с пульта управления и установка временного сдвига может быть любой.

Перед испытанием была произведена соответствующая проверка аппаратуры. Было установлено, что аппаратура по тех-

ническим параметрам и частотной характеристике может обеспечить высокое качество магнитной фонограммы, удовлетворяя предъявленным здесь требованиям.

Экспертные прослушивания звукового материала происходили в студии звукозаписи киностудии «Таллинфильм», имеющей малое время реверберации (0,4 сек при 500 гц) при объеме 810 куб. м. и по условиям диффузности мало отличающейся от акустических условий открытого воздуха. На прослушивание были приглашены эксперты — звукорежиссеры и операторы студии «Таллинфильм» и телецентра. Критериями было принято 20% и 50% слушателей, которые при данном уровне и времени запаздывания ощущали его мешающее действие. Для получения сведений, непосредственно характеризующих маскировку первичного хорового-музыкального сигнала однократными и несколькими эхо-сигналами, были проведены два принципиально различных опыта:

1. Воспроизведение отрывков из концерта, записанного на открытом воздухе, при различных временных сдвигах второй и третьей ленты, соответственно изменяя и уровень их воспроизведения. Оригинал был монофоническим и представлял собой песни с темпом исполнения 1; 1,25 и 1,9 слогов в сек.

2. Воспроизведение двухканальной звукозаписи с искусственным эхом. Звукозапись делалась в радиостудии при выступлении хора эстонского радио с тремя различными по темпу произведениями.

Вначале были прослушаны оригиналы без искусственного эха. Затем применяли одно искусственное эхо включением второго фонографа с временным сдвигом 20...500 мсек. При достигнутом максимальном запаздывании уровень звука от второго запаздывающего фонографа регулировался отдельно одним из звукооператоров до тех пор, пока не показалось, что эхо незаметно. Затем было увеличено время запаздывания и вновь отрегулирован уровень его. Отзывы на вопросы 1) заметно ли эхо, 2) имеет ли оно мешающее действие и 3) оценка звучания были поданы в письменном виде. Уровень воспроизведения был на всех местах примерно одинаковый, достигая максимально 75—85 дб.

Необходимо отметить, что при запаздывании однократного эха начиная от 50 мсек было получено впечатление приобретения определенного гулкого тембра той звукозаписи, которая делалась на открытом воздухе. В то же время первоначальная фонограмма хорового концерта отмечалась известной сухостью, характерной для выступления на открытом воздухе. При временном сдвиге второго фонографа 50...100 мсек в среднем для всех видов программ наблюдалось заметное улучшение

ние объемности звучания, если даже уровень запаздывающего звука соответственно превышал первичный звук на 3...5 дб. Наступает такой критический момент, когда улучшение звукового качества достигает своего предела и дальнейшее увеличение временного сдвига нежелательно.

Наибольшее превышение уровня запаздывающего повторения было зарегистрировано всеми слушателями при интервале 20...50 мсек (до + 10 дб). При запаздывании 100...300 мсек требуется снижение уровня однократного эха до -15 дб, или же уменьшение темпа исполнения до 1 слога в сек при уровне -4...-6 дб, чтобы эхо было незаметным.

Введение другого, повторяющегося эхо значительно улучшает качество воспроизведения и расширяет временные интервалы. В результате могут быть найдены оптимальные и предельные значения временного сдвига и уровня, или, как принято ранее, могут быть рассчитаны кривые равной неприятности эха, при заметности его 20% и 50% слушателей при изменении параметров времени и уровня. Некоторые характерные моменты применения двухкратного эха представлены в табл. 2 (для средней скорости исполнения).

Таблица 2

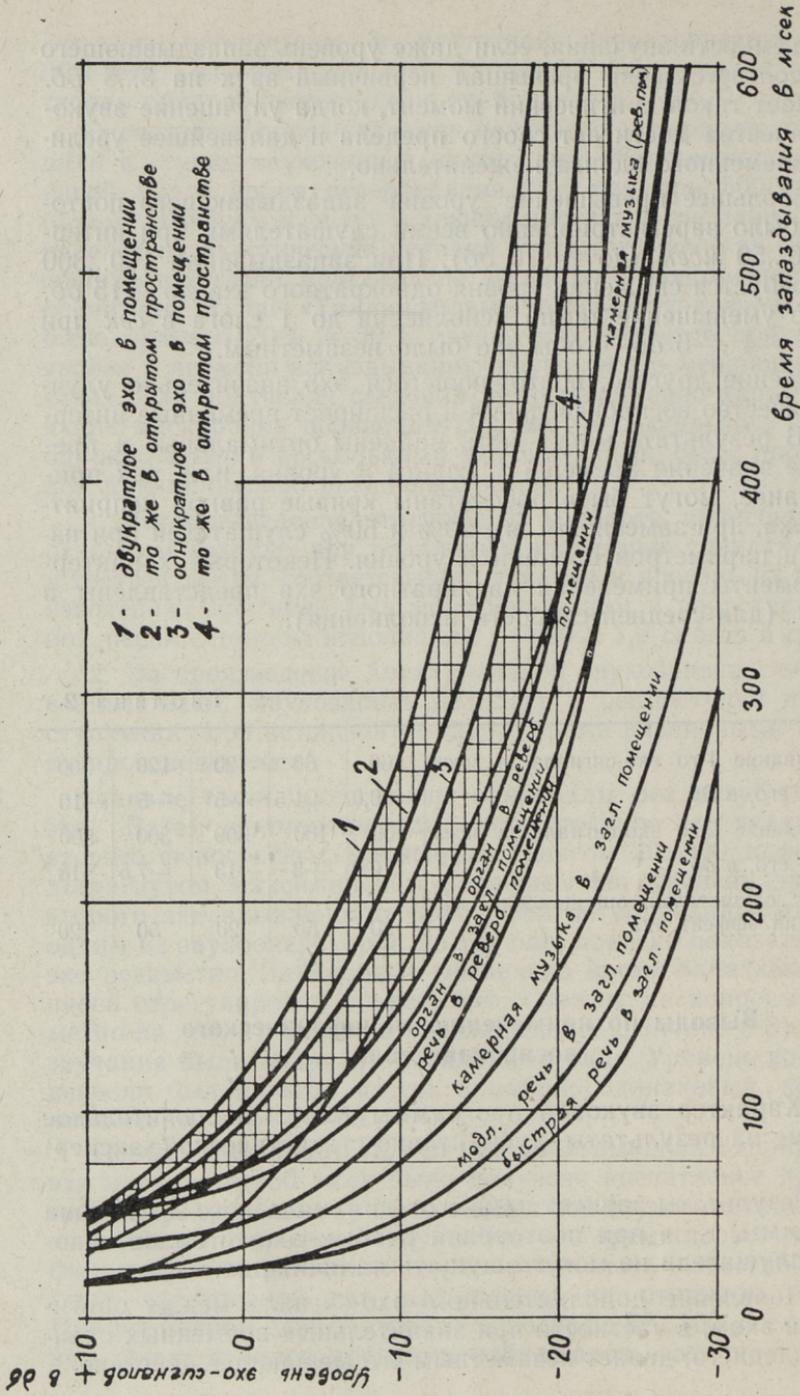
Запаздывание 1-го эхо-сигнала, в мсек	60	60	120	120	200
Уровень его, в дб	0,0	+1,5	-5	-5	-10
Запаздывание 2-го эхо-сигнала, в мсек	100	100	300	300	500
Уровень его, в дб	0,0	+3	-13	-7,5	-18
Процент слушателей, ощущающих мешающий эффект эха	20	50	20	50	20

Выводы по применению монофонического воспроизведения

1. Характер звуковой программы имеет исключительное значение на результаты субъективно-статистической экспертизы.

2. Результаты зависят также от динамического диапазона программы, т. к. при повторении слабых эхо-сигналов некоторые слушатели не могут ощущать наличия эха.

3. Появление дополнительного эхо-сигнала между оригиналом и эхом, в частности при значительных временных сдвигах последнего, делает незаметным его мешающее действие.



Фиг. 9. Критические величины запаздывания эхо-сигналов, заполненных хоровой музыкой, в зависимости от их уровня (заштрихованная область между кривыми 1—4) при среднем темпе исполнения. Кривые для речи, камерной и органной музыки показаны по данным Никсона и Дюбо [1]

г) Результаты маскировки двухканальной звукозаписи искусственными эхо-сигналами

При выступлении хора мужские и женские певческие группы были размещены необычно — в разных концах радиостудии. Для записи были использованы два самостоятельных канала с микрофонами кардиойдной характеристики, ввиду того уровень противостоящей певческой группы был на $-16...-20$ дб ниже прямого уровня. Было исполнено и записано три песни различного темпа исполнения (1,0; 1,17 и 3,17 слогов в секунду). Затем звукозапись дублировалась на широкую магнитную ленту и воспроизводилась фильм-фонографами аналогично описанному выше опыту. С целью исследования маскировки от мужских или женских вокальных групп было создано одно- и двухкратное искусственное эхо с различными интервалами и уровнями.

Как показали опыты, при медленном и среднем темпе исполнения и при создании двух искусственных эхо с интервалами соответственно 50 и 75 мсек уровень обоих эхо-сигналов может быть повышен по отношению к прямым сигналам до $+5$ дб. При быстром темпе исполнения эхо ощущается (но не мешает) даже при временном сдвиге 40 и 80 мсек и при уровне ± 0 дб. Результаты в виде критических величин запоздания эхо-сигналов, заметных 20% или 50% слушателей, показаны в табл. 3 и фиг. 9. На фиг. 9 даны также кривые равной неприятности мешающего однократного эха по данным Никсона и Дюбо. Наша кривая для однократного эха в хоровой музыке, записанной на открытом воздухе, почти совпадает с кривой для речи в реверберирующем помещении, другие же наши кривые лежат выше кривых Никсона, и это вполне понятно для двухкратного эха. Разумеется, что при увеличении количества эхо-сигналов (кратности эха) критические величины запоздания могут быть увеличены при тех же уровнях запаздывающих сигналов.

Таблица 3

Запаздывание 1-го эхо-сигнала, в мсек	50	60	100	100	120
Уровень его, в дб	+5	± 0	-3	-3	-4
Запаздывание 2-го эхо-сигнала, в мсек	75	120	220	220	300
Уровень его, в дб	+5	± 0	-5	-7	-11
Процент слушателей ощущающих мешающий эффект эха	20	20	50	20	20

Общие выводы

1. При субъективной оценке мешающего действия эха на музыкальный сигнал при временном сдвиге второго эха до 100 мсек в зависимости от уровня запоздалых сигналов возможна:

а) маскировка первичного звука, если уровень эха выше +10 дб;

б) кажущаяся равная громкость первичного и эхо-сигнала, если уровень эха на 3...5 дб выше;

в) маскировка эха, если уровни его настолько малы, что эхо не слышно.

2. При временном сдвиге второго, повторяющегося эха более 100...200 мсек происходит:

а) маскировка первичного звука, если уровень эха на 0...5 дб выше;

б) равная громкость первичного сигнала и эхо-сигнала, но лишь в случае, если запоздание имеет уровень на 0...5 дб ниже первичного звука или

в) маскировка эха, если эхо на 15... 20 дб слабее первичного звука.

3. Эксперименты доказывают, что также в случае хоровой музыки, как и в других нестационарных звучаний, в известных пределах разности времени и уровня эхо-сигналы интегрируются ухом энергетически, или даже несколько превышением энергетического сложения, если громкость отдельных звуков достаточна.

4. При строительстве эстрад для выступления хора или других видов крупного ансамбля, предельными размерами ее являются такие, при которых запоздалые звуки от задних и боковых рядов не имеют уровня, достаточного для ощущения их мешающего действия при соответствующем временном интервале.

5. При подвеске акустических рефлекторов для ансамблевых выступлений возможна значительно большая высота подвески, чем известно по рекомендациям различных авторов, считающих предельной высотой 6—7 м над подиумом, а именно 15—20 м.

3. Субъективная оценка временной структуры исполнения крупного сводного хора

Настоящая работа была выполнена еще до строительства таллинской и вильнюсской певческих эстрад (см. [11]). Большой интерес представляла проверка полученных результатов

с применением натуральных звучаний на законченном сооружении в условиях хорового концерта. Надо отметить, что кроме соблюдения больших размеров в плане сооружения (100 на 30 м) пришлось создать большой акустический отражатель в виде висячей вантовой конструкции общей высотой передней части в 32 м. Такой отражатель может служить естественному звукоусилению ввиду некоторой концентрации отражений при максимальной временном сдвиге последних до 0,1 сек. Такой же величиной определяется интервал между первыми и последними рядами при максимальном заполнении трибуны (20 тыс. человек).

Для убеждения в том, нет ли где заметного ухудшения акустического качества при передаче программы, были проведены записи пробных концертов при помощи одного единственного микрофона. Микрофон располагался в нескольких «звуковых планах», т. е. расстояниях от эстрады. Хор размещался на эстраде нормальными интервалами, а также увеличенными интервалами между участниками. Увеличение этих интервалов несколько уменьшало общую мощность звучания, что вполне понятно по двум причинам:

1) певцы не так хорошо слышны друг другу, что приводит к некоторому уменьшению силы звука и

2) увеличение общей глубины расположения ансамбля связано и с физическим снижением плотности звуковой энергии.

Наилучшие результаты были достигнуты при расположении микрофона на оси симметрии певческой эстрады на расстоянии до переднего края ее в 50 м. Однако качественные звукозаписи возможны и с других звуковых планов. Хор звучит прозрачно и сбалансированно, синхронность выступления удивительна. Уже этот факт, что концерт большого сводного хора с фронтом около 100 м можно передать лишь одним микрофоном (при оговорке, что нет сильного ветра), говорит о некотором положительном качестве нового сооружения. Необходимо отметить, что объемность звучания, достигаемая одним микрофоном, значительно уменьшается при расположении микрофона ближе чем 25 м. К сожалению во время певческого праздника в 1960 г. из-за сильного ветра такое близкое месторасположение микрофона было неизбежно. Более-менее качественная передача по радио при этом достигалась посредством трех микрофонов, располагаемых около переднего края эстрады.

Звукозапись с одного асимметрично расположенного микрофона характеризуется достаточной синхронностью, однако неправильным соотношением уровней отдельных

групп исполнителей. При непосредственном слушании этого не замечалось. Маскировки первичного сигнала запаздывающими сигналами действительно не ощущалось даже на самых близких к эстраде местах слушателей. Все критики сходятся в мнении, что слышимость была одинаковой по всему фронту певческой эстрады.

Месторасположение дирижерского пульта соответствует такой точке на эстраде, где разность в путях звуковых волн при максимальном заполнении трибуны составляет 50 мсек. Субъективная оценка качества звучания на этом месте, ввиду того, что оно расположено весьма близко к исполнителям, не сравнима с данными, полученными с оптимального звукового плана, однако, синхронность исполнения и здесь превосходна, и это очень важно для управления хором.

Результаты наблюдений привели к вопросу, является ли уровень исполнения хора и его задних групп критическим для появления маскировки запаздывающими звуками. Как мы указали выше, этот фактор имеет существенное значение. Ответ на этот вопрос мы получили, когда на эстраде выступал сводный духовой оркестр в составе более 1500 оркестрантов. Размещение оркестра на трибуне было таким, что самые мощные медные инструменты были на заднем плане.

В таком случае уровни убывают с возрастанием расстояний лишь в среднем, отдельные же запаздывающие сигналы могут иметь повышенные уровни за счет, например, совпадения времен прихода нескольких прямых и отраженных звуков. В действительности никакой маскировки исполняемой программы не было, а если в партитуре были сольные партии задних инструментов, то и это не маскировалось передними инструментами.

Весьма примечательно еще одно обстоятельство. Певческое поле в г. Вильнюс по своим акустическим качествам отличается от таллинского тем, что вокруг него на расстоянии 200...300 м расположен высокий сосновый лес, будучи причиной возникновения заметного эхо, если вызывать короткие звуковые импульсы с последующей паузой. Таких же явлений во время хоровых и оркестровых выступлений не замечалось, таким образом условия в поле приближаются к условиям реверберации в помещении.

Впрочем, как на таллинской, так и на вильнюсской эстрадах громкая речь, в частности, если оратор обращен лицом к трибуне, ощущается с повторяющимся эхом. При выступлении даже небольшого ансамбля таких впечатлений нет, но чувствуется отзвук. Практикой уже установлено, что нормальная слышимость достигается по всему певческому полю

при выступлении хора в составе 100—150 человек, но в основном эстрада рассчитана на массовые хоры и оркестры.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. W. Muncey, A. F. B. Nickson, P. Dubout. The acceptability of speech and music with a single artificial echo. «Acustica», 3, v. 3. 1953.
2. R. W. Muncey, A. F. B. Nickson, P. Dubout. The acceptability of artificial echoes with reverberant speech and music. «Acustica», 4, v. 4, 1954.
3. E. Meyer, G. R. Schodder. Über den Einfluss von Schallrückwürfen auf Richtungslokalisation und Lautstärke bei Sprache. Nachrichten d. Akademie d. Wissenschaften in Göttingen. Math. Phys. Klasse, II a. 6, 1952.
4. Ю. Я. Фигвер. К вопросу о влиянии однократного искусственного эха на стереофоническое восприятие речи. Труды НИКФИ, вып. 28, 1959.
5. H. Niese. Vorschlag für die Definition und Messung der Deutlichkeit nach subjektiven Grundlagen. «Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik». Band 65, Heft 1, 1957.
6. R. Vermeulen. Saalakustik und Verständlichkeit. Philips Technische Rundschau, 3, 1938.
7. C. A. Mason, J. Moir. Acoustics of Cinema Auditoria. «J. Elec. Eng.» 88, Nr. 3, 1941.
8. H. Haas. Über den Einfluss eines Einfachechos auf die Hörsamkeit von Sprache. «Acustica», 1, 1951.
9. H. Niese. Untersuchung für die Richtcharakteristik des Aufnahmehochfrequenzmikrophons bei raumakustischen Impulsmessungen. «Hochfrequenz u. Elektroakustik», Band 65, Heft 6, 1957.
10. В. В. Фурдуев. Акустические основы вещания. Связьиздат, Москва, 1960.
11. Х. А. Орувез. Проектирование акустических экранов для выступления массовых ансамблей. «Архитектурная акустика». Труды научн.-техн. совещания, Москва, 1961.

Х. А. Орувез

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПРИМЕНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ЭКРАНОВ ДЛЯ МАССОВЫХ АНСАМБЛЕЙ

Введение

В 1960 году было закончено строительство двух огромных эстрад — на певческом поле г. Таллина и в парке Вингис г. Вильнюса. Выполненные в основном по одному и тому же проекту сооружения — певческие эстрады представляют собой ступенчатую трибуну вместимостью до 20 тысяч певцов с подвесным акустическим экраном-рефлектором. Количество слушателей в зеленом поле-амфитеатре достигает до 100 тысяч; лишь приведенные цифры говорят о сложности акустического проектирования. Ввиду отсутствия в литературе данных об оптимальных условиях выступления массовых ансамблей, параллельно практическому проектированию проводились соответствующие исследования на макетах различной формы сооружения. На основе этих исследований выяснилась непригодность для выступления массовых ансамблей принятых ранее полузакрытых эстрад подобной раковине, внутренняя поверхность которой представляет собой полусферу, полупараболоид, эллипсоид и т. д. Раковины такой формы могут быть применены для небольшого ансамбля, размещенного в фокальной зоне. При выступлении более крупного ансамбля распределение звуковой энергии по площади мест слушателей становится менее равномерным и нарушается музыкальный баланс исполнения.

Теоретический анализ показал преимущества выбранного по конструктивным и архитектурным соображениям гиперболического парабоида, что и подтверждалось на практике.

1. Расчет уровней комплексного источника

Обычно комплексный источник звука (хор или оркестр) характеризуется дискретным размещением элементарных источников на горизонтальной или поднимающейся эстраде.

При сохранении условий некогерентности средняя интен-

сивность результирующего сигнала ансамбля равна сумме средних интенсивностей суммируемых сигналов, т. е. получаемая мощность суммарного сигнала есть сумма мощностей каждого из них в отдельности.

Результирующая объемная плотность звуковой энергии

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi c} \sum \frac{P_i}{R_i^2}, \quad (1)$$

где P_i — акустическая мощность i -го источника, отнесенная к единице объема ансамбля*,

R_i — расстояние до точки приема.

Поток звуковой энергии (интенсивность звука) через 1 см^2 определяется как

$$I = c \cdot \varepsilon = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{P_i}{R_i^2}. \quad (2)$$

Оценивая снижение уровня интенсивности звука (или плотности звуковой энергии) с расстоянием в случае одиночного точечного источника или ансамбля, состоящего из небольшого количества участников:

$$\Delta L = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 10 \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 20 \lg \frac{R}{R_0} \text{ (дБ)}, \quad (3)$$

где R_0 — расстояние от источника до точки приема, при котором интенсивность соответствует условно выбираемому нулевому уровню.

При дискретном комплексном источнике соответствующие расстояния до каждого элементарного источника (характеризующие пространственное расположение ансамбля) изменяются в достаточно больших пределах. Расчет уровня интенсивности по принципу ненаправленного точечного источника может оказаться приблизительно верным только для приемника на таком расстоянии, при котором можно пренебречь разностью в значениях R_i . В действительных условиях места слушателей в зеленых театрах располагаются на расстояниях, превышающих наибольший размер ансамбля лишь в 2—4 раза. В этих случаях пространственным характером расположения ансамбля пренебречь нельзя, в частности расположением участников в ширину.

* При применении единиц системы СГС для P_i получим число эргов в секунду, а для ε — $\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$.

Перейдем к установлению тех величин, которые характеризуют выступление больших ансамблей. Акустическая мощность внутри ансамбля зависит как от индивидуальных способностей участников, так и от акустических условий места выступления. Не считая индивидуальных различий голосов, а также динамических различий отдельных групп по исполнению программы, можно предположить, что энергия ансамбля распределена внутри определенного объема равномерно. Практически это обеспечивается в тех случаях, когда звуковая энергия на месте выступления хорошо перемешивается, сохраняя при этом прозрачность и репродуктивность ансамбля, т. е. при выступлении ансамбля в сооружении типа раковины. Такой объемный ансамбль может рассматриваться как звучащая «масса», имеющая постоянную поверхностную плотность мощности (удельную мощность) — $P_y \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{сек}} \right]$.

Применительно к случаю наличия акустического экрана, границы звучащей «массы» распространяются еще на поле мнимых источников, мощность которых зависит от потерь на отражение. Считая эти потери на отражение ничтожными, поток звуковой энергии в точке приема может рассматриваться как интеграл, ограниченный пределами всего звучащего «объема».

Выбирая полярными координатами звучащего элемента R, θ, φ при условии $P_y = f(R, \theta, \varphi)$ элемент объема $dV = R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi$ содержит мощность $dP = f(R, \theta, \varphi) \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi$.

Интенсивность звука в точке приема будет

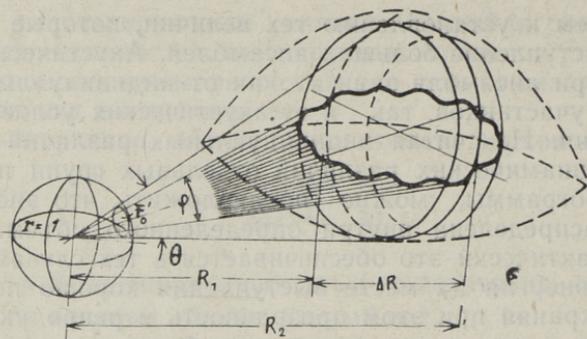
$$I = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{f(R, \theta, \varphi) R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi}{R^2} \quad (4)$$

или

$$I = \frac{1}{4\pi} \iint \sin \theta d\theta d\varphi \int_{R_1}^{R_2} f(R, \theta, \varphi) dR. \quad (5)$$

Линейный интеграл $\int_{R_1}^{R_2} f(R, \theta, \varphi) dR$ характеризует расположение отдельных единиц ансамбля в пространстве, а пределы интегрирования в общем случае являются функциями направления радиуса-вектора (φ и θ) (фиг. 1).

Интеграл по поверхности $\iint \sin^2 \theta d\theta d\varphi$ представляет собой телесный угол, под которым виден данный «звучащий» объем из точки, принятой как начало координат. Назовем этот угол ω . В случае объемного источника ненаправленного действия



Фиг. 1. Геометрическое соответствие уравнению (5)

звуковое поле в точке приема зависит только от R_1 , а линейный интеграл $\int_{R_1}^{R_2} f(R, \theta, \varphi) dR$ можно заменить функцией расстояния $F(R)$. Следовательно

$$\int_{R_1 = \text{const}}^{R_2 = \text{const}} dR = R_2 - R_1 = \Delta R,$$

где ΔR выражает в общей форме глубину ансамбля.

Учитывая, что распределение звукового потока в телесном угле ω равномерно, средняя интенсивность звука одинакова с интенсивностью в любом направлении в пределах этого угла

$$I = \frac{\omega \cdot P_y \cdot \Delta R}{4\pi}. \quad (6)$$

В данном выражении телесный угол ω напишется как

$$\omega = \frac{F}{R^2}, \quad (7)$$

где F — площадь, которую он вырезает на поверхности сферы, описанной из его вершины,
 R — радиус этой сферы.

Согласно (7) уравнение (6) приводится к виду

$$I = \frac{F \cdot P_y \cdot \Delta R}{4\pi R^2}. \quad (8)$$

Величину снижения суммарного уровня (в децибелах) в зависимости от расстояния до точки, принятой как полевой, можно оценить как

$$\Delta L = 10 \lg \frac{I_0}{I_n} = 10 \lg \frac{F_0 \cdot R_n^2}{R_0^2 \cdot F_n}, \quad (9)$$

где F_0, F_n — площади сфер, описанных соответственно из левой точки, и n -той точки;

R_0, R_n — соответствующие радиусы сфер.

При применении для определения телесного угла единичного радиуса ($R=1$) $\frac{F_0}{R_0^2} = F_0'$ и $\frac{F_n}{R_n^2} = F_n'$,

т. е. ω представляет собой проекцию выражаемого участка сферической поверхности на сферу радиуса 1 , описанной из одной и той же точки (фиг. 1).

Следовательно

$$\Delta L = 10 \lg \frac{F_0'}{F_n'}. \quad (10)$$

Согласно (5) и (9) F_0', F_n' представляют собой проекцию видимой поверхности ансамбля и его мнимого отображения на сферу радиуса 1 , описанную от начала координат, принятого соответственно для сравнения уровней.

Телесные углы быстрее изменяются в ближней зоне, т. е. снижение уровня происходит быстрее, чем в дальней зоне.

Для сравнения уравнения (10) с (3) логарифмируем выражение (9):

$$\Delta L = 10 \lg \frac{F_0}{F_n} + 20 \lg \frac{R_n}{R_0}, \quad (11)$$

где R_n и R_0 являются радиусами видимых телесных углов, т. е. не равноценны с R в (3), за счет того, что ансамбль имеет достаточную глубину. Применение формулы (3) для расчета интенсивности звука большого ансамбля как функции от расстояния может оказаться сколько-нибудь верным при правильном определении расстояния до точки, являющегося «средним» для всего ансамбля. При применении же формулы телесных углов (10) результаты зависят от величины площади, занятой исполнителями и от акустических свойств эстрады.

Все это указывает на то, что звуковое поле крупного источника ненаправленного действия отличается от поля оди-

ночного источника главным образом большей интенсивностью в ближней зоне. Повышению интенсивности звука в этой зоне содействуют еще следующие факторы:

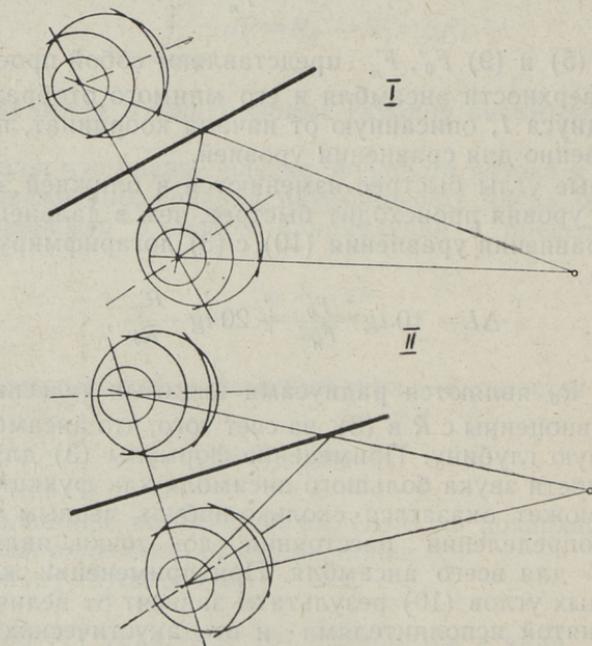
1) определенный панорамный эффект, создаваемый как прямыми, так и отраженными звуковыми волнами из различных направлений,

2) реверберация, имеющая место и в полузакрытых сооружениях, содержит некоторую долю диффузной энергии, и

3) отсутствие, как правило, поглощения за счет отсутствия публики, т. к. места для публики обычно дальше от крупного ансамбля.

Важно, чтобы на всех местах слушателей была достигнута приемлемая интенсивность при возможно более однородном ее распределении, поэтому надо рассматривать как основной фактор размеры и форму поверхности певческого сооружения.

Формулы (10) и (11) могут применяться для расчета относительных уровней ансамблей, излучаемых в свободное пространство по принципу сферических волн, т. е. имеющих не-



Фиг. 2. Два варианта плоского акустического экрана, показывающие трансформацию диаграммы направленности

направленное действие. Для расчета интенсивности звука комплексного источника направленного действия, которым по существу является массовый хор, выступающий на полузакрытой эстраде, необходимо вывести $f(R, \Theta, \varphi)$ в зависимости от факторов Θ и φ , т. е. от углов видимости звучащего «объема» в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Обычно размещенные на эстраде ансамбли не имеют чрезмерно большой протяженности по глубине, и получаемые вертикальные углы видимости малы по сравнению с углами раскрытия в горизонтальной плоскости. Опыт измерений показывает, что перед фронтом протяженного источника характеристика направленности в горизонтальной плоскости в хорошем приближении $D(\varphi) = 1$.

При наличии осевой симметрии направленности в вертикальной плоскости интенсивность звука под углом Θ к акустической оси будет:

$$I_{\Theta} = \frac{P_{\Theta}^2}{\rho c} = \frac{P_0^2}{\rho c} \cdot D^2(\Theta) \quad (12)$$

и формула (6) напишется в виде

$$I_{\Theta} = \frac{\omega \cdot P_y \cdot \Delta R \cdot D^2(\Theta)}{4\pi} \quad (13)$$

Переходим к децибелам:

$$\begin{aligned} \Delta L &= 10 \lg \frac{(I_{\Theta})_o}{(I_{\Theta})_n} = 10 \lg \frac{F_0' \cdot D^2(\Theta)_o}{F_n' \cdot D^2(\Theta)_n} = \\ &= 10 \lg \frac{F_0'}{F_n'} + 20 \lg \frac{D(\Theta)_o}{D(\Theta)_n} \end{aligned} \quad (14)$$

Первое слагаемое в (14) представляет собой известное отношение видимых проекций звучащей «массы», второе — поправку, обусловленную различной возможной высотой расположения точки приема. Так как в случае размещения слушателей на наклонной плоскости (амфитеатр) $D(\Theta)_n > D(\Theta)_o$, а $F_n' < F_0'$, то эта поправка имеет отрицательный знак (т. е. точка приема располагается выше точки, принятой как левая) и ΔL уменьшается. Этим еще раз подтверждается преимущество амфитеатрального размещения публики, причем желателен как можно более крутой подъем мест.

С другой стороны, в этой поправке выражается характер распространения различных звуковых частот, т. к. $D(\Theta)_n$ не может не зависеть от частоты. Для низких частот $D(\Theta)_o =$

$=D(\Theta)_n = 1$, и следовательно выражение (14) принимает вид (10), рассматривающий характер сферической волны. Для более высоких частот $D(\Theta)_n > D(\Theta)_0$ и общее снижение уровня с расстоянием происходит медленно. Начиная с 1,5...2 кгц необходимо дополнительно рассчитывать возрастающее с частотой поглощение в воздухе как функцию от температуры и влажности последнего.

Формула (14) имеет практическое значение лишь в том случае, если можно определить $D(\Theta)$. В действительности определение $D(\Theta)$ массового источника является затруднительным и зависит от взаимного действия прямого звукового поля и отражателя-экрана (фиг. 2).

Дальнейшее исследование данной проблемы и создание для массового ансамбля необходимой направленности носит экспериментальный характер, при применении для этой цели как моделирования, так и измерения в натуре.

2. Исследование распределения уровней на моделях

а) Оптический метод

Формулы (9) и (10) дают возможность построить небольшую объемную модель, внутренние поверхности которой являются оптически отражающими. Источники звука заменяются источниками точечного света в виде большого количества электрических лампочек, равномерно распределенных по всей площади имитируемой трибуны.

Исследование акустических свойств сооружения и его «настройка» посредством модели может осуществляться двумя путями:

1) при помощи фотографирования с различных точек расположения зрительных мест при светящей модели и определением площадей по контурам, в пределах которых видны источники света и их мнимые отображения. Определение площадок, входящих в выражение (10) выполняется посредством обычного планиметра*;

2) непосредственным измерением освещенности в вертикальной плоскости с помощью фотоэлементов, расположенных в разных точках модели амфитеатра. В этом случае закон снижения уровня звука выражается следующим образом:

$$\Delta L = 20 \lg \frac{E_0}{E_n}, \quad (15)$$

* По формуле боковой площади шарового сегмента ($S = \pi(a^2 + h^2)$) планиметрирование дает πa^2 , причем h дополнительно определяется графическим построением.

где F_0, F_n — фототоки, измеренные микро-амперметром в соответствующих точках.

При проектировании певческой эстрады были построены две модели в масштабе 1:100. Первая из них имела экран в виде наклонной плоскости, другая — поверхности двоякой кривизны. Анализ двух вариантов показал, что второй вариант имел следующие преимущества: 1) лучшая осевая концентрация звука, 2) более высокий общий уровень по всему полю, 3) более равномерное распределение уровней по местам слушателей, 4) возрастающая эффективность акустического экрана (отношение уровней интенсивностей отраженного звука к прямой) к задним рядам, как желательно. Таким образом результаты предварительного моделирования оказались настолько убедительными, что было решено продолжать акустические опыты только по второму варианту.

б) Акустический метод

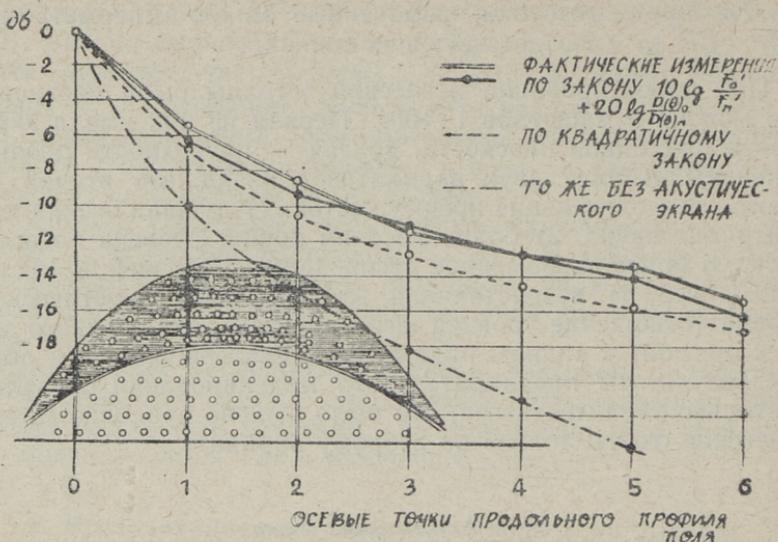
Двухстадийное моделирование было вызвано некоторыми известными соображениями, которые всегда имеют место, когда идет речь о достоверности результатов, получаемых на оптических моделях [6]. Прежде всего могут быть сомнения в том, что картина распределения уровней должна зависеть от λ , а следовательно на оптических моделях могут рассматриваться только условия распространения высоких частот. Во вторых, источники света неполностью имитируют соответствующий массовый источник звука. В третьих, масштаб моделирования 1:100 не дает возможности точного соблюдения формы акустического экрана.

Для объемно-акустических моделей, как известно, необходимо соблюдать в основном два условия:

- 1) как можно полная имитация формы всех ограждающих поверхностей,
- 2) обеспечение аналогичного для помещения акустического импеданса для всех этих поверхностей при данной звуковой частоте.

Моделирование крупного источника звука в условиях его выступления на открытом воздухе выдвигает еще некоторые дополнительные требования к методике исследования. Прежде всего эти требования относятся к характеристике направленности источника и к размерам его, кроме того требуется дополнительный учет микроклиматических факторов.

Для имитации ансамблей до сих пор всегда предпочитались ненаправленные источники [3, 4]. Правильность такой концепции подтверждается при распространении низких



Фиг. 3. Снижение уровня звука с расстоянием в результате измерений на оптической модели

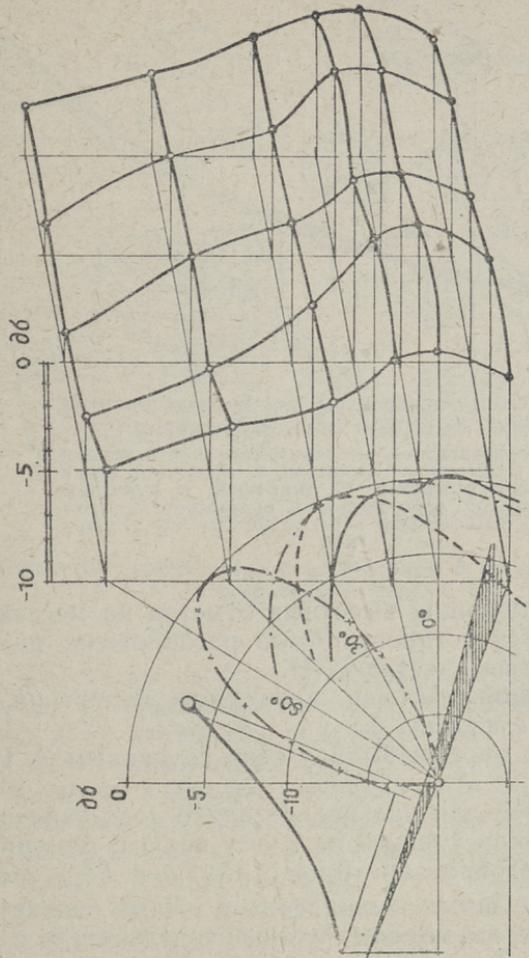
частот ($d \ll \lambda$). При более высоких частотах ($d \gg \lambda$) излучение звука становится более направленным, а волновой фронт приближается по форме к плоской волне. Таким образом, направленность источника наблюдается начиная с средних частот речи и музыки (400...500 гц) и ее нужно на модели соответственным образом учитывать.

Исходя из вышеуказанного была поставлена задача о разработке такого источника уменьшенного масштаба, который бы по своей характеристике был близким к действительному. Однако, моделирование массового хора представляет большие технические трудности, так что приходится довольствоваться приближенным решением. Это означает, что на модели предусматривается ограниченное количество излучателей, причем каждый ряд располагается на таком интервале, чтобы сохранились условия некогерентности шумового сигнала и не было заметных искажений волнового фронта в ближней зоне.

Разработанный автором групповой секционный излучатель состоит из десяти миниатюрных динамиков, смонтированных в специальной коробке и закрытых с акустически непрозрачными плитами, имеющими по одному отверстию в центре каждого динамика. Всего таких секций было принято три. Целью специального экрана является достижение незначительной направленности воспроизводимых частот до полосы

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ДИАГРАММА

ПОЛЯРНАЯ ДИАГРАММА



ЧИСТЫЙ ТОН
($f = 12,5 \text{ кГц}$)
ТО ЖЕ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ
ОБЫЧНЫХ ДИФФРАКТОРОВ

1/10 окт. полосы ($f_{\text{ср}} = 12,5 \text{ кГц}$)
ШУМА, БЕЗ АКУСТИЧЕСКОГО ЭКРАНА

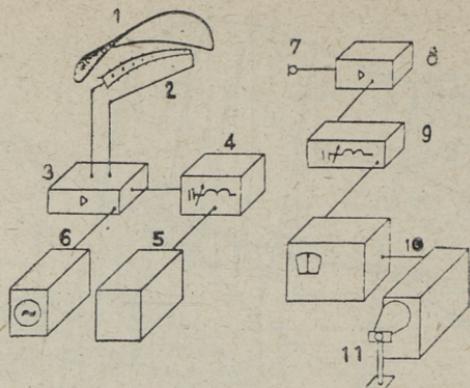
ТО ЖЕ, С ЭКРАНОМ.

Фиг. 4. Пространственная характеристика направленности модели сводного хора

7,5—15 кГц. На фиг. 4 показана пространственная характеристика направленности, снятая при одновременном излучении трех секций «в глубине» посредством полосы белого шума при испытании модели на открытом воздухе (на расстоянии 80 см от переднего края первой секции).

В качестве акустической модели певческого сооружения была использована изготовленная ранее в масштабе 1:25 конструктивная модель, с дополнительной акустической обработкой [7]. Все элементы акустического экрана были сделаны из аналогичных к действительной конструкции материалов.

Профиль певческого поля был отмечен лишь условно при



Фиг. 5. Схема аппаратуры для проведения измерений на модели певческой эстрады:

1. модель эстрады; 2. источник звука; 3. выходной каскад; 4. октавные фильтры; 5. генератор шума; 6. звуковой генератор; 7. микрофон; 8. усилитель микрофона; 9. три-фильтры; 10. ламповый вольтметр; 11. осциллограф с репродукционной установкой

помощи соответствующих высотных отметок на местах перелома профиля. Вся установка была расположена на озелененной площадке на участке ТПИ.

Аппаратура, принятая для проведения измерений, показана в блок-схеме на фиг. 5.

Поглощение в воздухе было учтено по данным Э. Ивенса и Э. Безли [2].

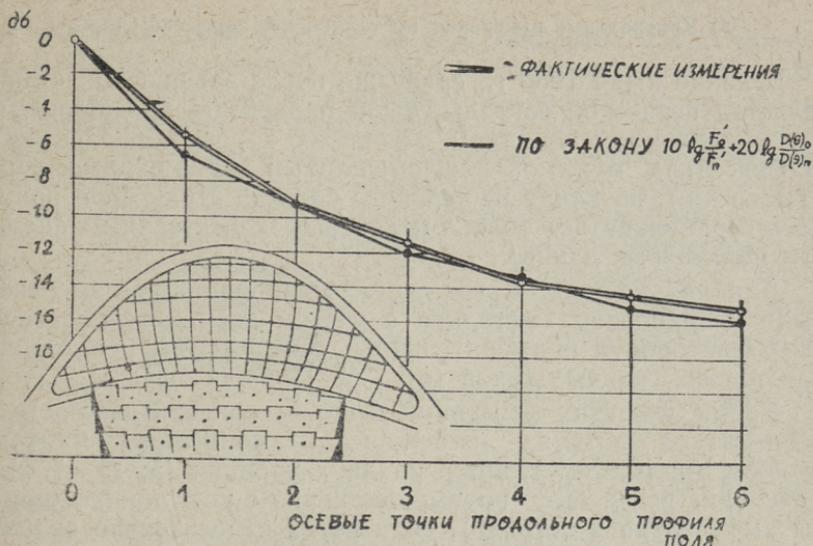
Особый интерес для нас представляло сопоставление результатов измерения уровней по всему полю с результатами расчета (планиметрирование площадей F_0' и F_n'). Соответствующие данные показаны на фиг. 6. Надо отметить, что применение на той же модели группового излучателя с открытыми динамиками не давало сравнимых с полученными формулами (10, 14) результатов.

3. Проверка теоретических выводов и результатов моделирования в натуре

а) Особенности акустики открытого воздуха

Распространение звука на открытом воздухе подчиняется ряду случайных и редко элиминируемых явлений, так что при натуральных измерениях поставленные нами задачи значительно усложняются.

До настоящего времени в литературе достаточно много сведений о влиянии следующих микроклиматических компо-



Фиг. 6. Снижение уровня звука с расстоянием в результате измерений на акустической модели

ментов: 1) состав свободной атмосферы, 2) температурные градиенты, 3) градиенты ветра, 4) колебания ветра (порывистость) и 5) влажность воздуха. Эти компоненты часто колеблются не только по высоте, но и по расстоянию. Условия передачи звука в непосредственной близости земли зависят кроме того еще от поглощающей способности поверхности земли (растительности) и в случае зеленого театра — публики. Из всех атмосферных факторов наибольшее влияние на затухание звука в воздухе имеют ветер и градиенты ветра [5]. В действительности действуют одновременно как градиент температуры, так и градиент ветра. При наличии ветра влияния температуры и влажности становятся минимальными, т. е. незначительные градиенты ветра компенсируют значительные градиенты температуры. Ветер изменяет форму волнового фронта в случае, если звуковые волны распространяются против ветра или попутно с ветром (отклоняясь кверху или загибаясь вниз), и только в случае совпадения направления ветра с огибающими кривой фронта волны ветер не имеет влияния на распространение звука.

При отсутствии ветра или при слабом ветре (0...2 м/сек) основными факторами, влияющими на распространение звука, являются температурные градиенты, влажность воздуха и поглощение публикой.

б) Контрольные измерения на таллинском певческом поле

В конце июня 1960 г., сразу же после завершения строительства певческой эстрады, были проведены предварительные измерения с участием известных хоровых коллективов (Госуд. Акад. мужской хор, смешанный хор «Раудам», хоры ТПИ и др.), но ввиду небольшого состава этих хоров пришлось ограничиваться только некоторым качественным анализом полученных данных.

Для дальнейших, более систематизированных измерений была разработана методика с учетом всех метеорологических факторов и применительно к генеральным репетициям таллинских сводных хоров (от 5 по 15 июля 1960 г.).

Время для этих репетиций было вечернее. Влажность и температура воздуха измерялись самописцами на трех уровнях (0; 10; 20 м), ветер на двух уровнях (5; 15 м). Направление ветра было преимущественно с востока (со стороны амфитеатра к эстраде), сила ветра относительно слабая.

Уровни звука зарегистрировались одновременно в двух точках — на отметке, считаемой как полевой, и поочередно во всех кардинальных точках певческого поля. При этом уровни были записаны как при исполнении *fortissimo*, так и при *mezzoforte* и *piano*.

Для сравнения практических и теоретических результатов были рассчитаны величины, входящие в выражения (10) и (14).

Несмотря на полученные хорошие результаты, проведенные измерения не давали полного основания того, чтобы оценить максимально достижимое усиление массового выступления, т. к. не было достигнуто максимального заполнения трибуны. Стало ясным, что полная картина акустики нового сооружения открывается лишь при полной его «нагрузке».

Такой момент наступил 18 и 19 июля 1960 г., когда в Таллине собрались все участники очередного 15 певческого праздника.

Пробные концерты были организованы в дневное время (с 9 до 16 часов). Все микроклиматические факторы содействовали проведению опыта (например, скорость ветра была лишь 1,3—1,6 м/сек) и при дешифровке полученных данных удалось элиминировать все основные факторы, влияющие на затухание звука на свободном воздухе.

Очередной эксперимент был предусмотрен в день праздника песни, 21 июля. Основной задачей была поставлена исследование влияния фактора поглощения звука зрителями на снижение уровня звука на зрительных местах. К сожалению

метеорологические условия ко дню концерта сильно изменялись. После проливного дождя в предыдущий день поднялся ветер со скоростью 4—6 м/сек, с направлением юго-запада (перпендикулярно к акустической оси поля). Несмотря на удачное направление ветра, измерения оказались невозможными из-за маскирующего эффекта шума (50—70 дб), т. к. защитные сетки микрофонов были бесполезными. Качество сделанных звукозаписей от концерта получилось невысокое, т. к. вещательные микрофоны также не получили защиты от ветра.

К счастью ветер не мог испортить субъективных впечатлений слушателей и критиков, которые, судя по данным печати, были весьма хорошие.

Повторение предлагаемых измерений оказалось возможным в июне 1961 г., когда на певческом поле состоялся день песни города. Ввиду того, что в предыдущем году нам не удалось измерять уровни в присутствии публики, а также уровня шума от публики и спектральных уровней, то программа измерений была достаточно широкой.

Методика исследования была немного изменена с тем, чтобы получать записи уровней для трех звуковых частот (250; 500; 2000 гц) при выступлении сводного хора, а также для таких же частот при применении искусственного сигнала.

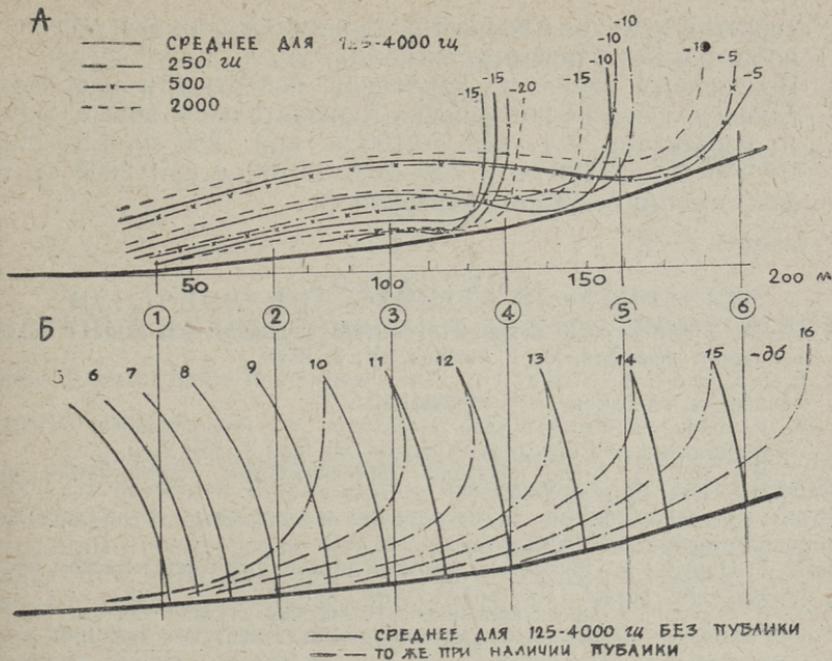
Метеорологические условия оказались в этот раз положительными как в день репетиции (8 июня), так и во время концерта (9 июня). Концерт состоялся во второй половине дня, когда градиенты температуры практически не имели влияния на распространение звука. Ветер с максимальной скоростью 2,5 м/сек с юго-запада был перпендикулярным к акустической оси и не имел влияния на волновой фронт. Уровень собственного шума от публики составлял 50—60 дб (во время паузы в исполнении). В таблице 1 даны средние значения всех измерений в натуре и сравнение с результатами моделирования, а также теоретических расчетов.

В связи с тем, что ряд мешающих факторов был элиминирован, сравнение данных измерения 8 июня (без публики) и 9 июня (с публикой) дало возможность рассмотреть поглощение звука вдоль мыслимой поверхности слушателей. На фиг. 7 изображена поглощающая способность в дб/100 м на профиле певческого поля, а также кривые равного уровня в зависимости от заполнения площади зрителями.

В зависимости от особенностей продольного профиля Таллинского певческого поля затухание за счет «скользящего» поглощения не пропорционально расстоянию до источника, т. к. зависит от уклона поверхности, занятой слушателями и наименьшее затухание обнаруживается в тех участках про-

Таблица 1

Точки на осевой линии	1	2	3	4	5	6	
Расстояние в м от нолевой точки	42	73	103	130	156	180	
Теоретическое снижение уровня по (14) на основе акустической модели (для 500 гц)	-5,48 +0,1	-9,11 +0,15	-11,13 + 0,22	-12,94 + 0,30	-14,21 + 0,42	-15,91 + 0,60	
	-5,38	-8,96	-10,91	-12,64	-13,79	-15,31	
Измеренное снижение уровня на модели на полосе белого шума 1/3 окт. (средн. частота 12,5 кгц)	-6,36	-9,13	-11,31	-12,83	-14,84	-15,45	
То же на чистом тоне 12,5 кгц	-6,98	-9,30	-10,58	-13,90	-14,60	-16,06	
Теоретическое снижение уровня по (14) на основе сооружения в натуре (для 500 гц)	-6,86 +0,1	-9,18 +0,15	-10,80 + 0,22	-12,63 + 0,30	-14,01 + 0,42	-15,17 + 0,60	
	-6,76	-9,03	-10,58	-12,33	-13,59	-14,57	
Измеренное снижение общего уровня в дневное время 1960 (без публики)	-5,8	-8,7	-10,4	-12,5	-13,5	-16,0	
То же, вечернее время, сводный хор, 1961	-5,37	-8,50	-9,92	-11,57	-12,58	-15,02	
Общий уровень в вечернее время 1961, при наличии публики	-10,4	-12,5	-13,4	-14,9	-15,3	-16,8	
Спектральное снижение уровня при заполнении поля публикой, 1961	250	-12,0	-13,5	-14,1	-15,0	-16,6	-17,7
	500	-11,5	-11,8	-12,2	-13,7	-14,8	-16,6
	2000	-10,7	-14,8	-16,3	-18,5	-19,9	-21,0
То же, без публики, 1961.	250	-6,8	-8,8	-10,5	-12,5	-14,7	-17,2
	500	-5,3	-7,2	-9,6	-11,1	-13,0	-15,5
	2000	-6,1	-8,3	-10,6	-13,4	-16,0	-18,0



Фиг. 7. А. Поглощающая способность публики, измеренная в таллинском певческом поле. Б. Кривые равного уровня в зависимости от заполнения площади мест зрителями

филя поля, имеющих наиболее крутой подъем. Резкое снижение затухания на участке 5—6 объясняется также незначительной плотностью слушателей в этой зоне во время концерта.

Выводы

1. Распределение разных звуковых частот по расстоянию до источника не одинаково. Снижение уровня низких частот близко квадратичному закону распространения, средние и высокие частоты имеют известную направленность, которая хорошо описывается выражением (14).
2. Количество выступающих участников ансамбля практически не влияет на относительный уровень в певческом поле. Это указывает на то, что акустический экран дает одинаковую поддержку для всех выступающих, независимо от места расположения под экраном.
3. Каждое удвоение количества участников повышает абсолютный уровень примерно на 3 дб. Это говорит о досто-

верности принципа энергетического сложения (некогерентности рассматриваемого сигнала).

4. Поглощение звука по наклонной поверхности мест для слушателей ниже поглощения горизонтальной поверхности и составляет 4,4—15,2 дб/100 м при 250 гц, 4,5—16,5 дб/100 м при 500 гц и 7,2—20,0 дб/100 м при 2000 гц, в зависимости от уклона поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Дрейзен. К вопросу о расчете звукового давления в поле излучения ансамбля. Ж. Т. Физики, IV, 3, 1934.
2. E. J. Evans. E. N. Bazley. The absorption of sound in air at audio frequencies. «Acustica», V. 6 (1956) Nr. 2.
3. W. Краак. Elektroakustische Messungen an Raummodellen. «Hochfrequenztechnik und Elektroakustik». Bd. 65, Heft 3, 1956.
4. W. Reichardt. Die Messung raumakustischer Eigenschaften im Modell. «Die Schalltechnik». Nr. 22, 1957.
5. U. Ingard. A Review of the influence of meteorological conditions on sound propagation. JASA, v. 25, Nr. 3, 1953.
6. Х. А. Орувэ. Применение методов аналогии при акустическом проектировании. Труды ТПИ. Серия А, № 74, 1956.
7. Х. А. Орувэ. Проектирование акустических экранов для выступления массовых ансамблей. «Архитектурная акустика». Москва, 1961.

Х. А. Орувез

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА АКУСТИЧЕСКИХ ЭКРАНОВ НА АКУСТИЧЕСКИЙ БАЛАНС ПОМЕЩЕНИИ

Введение

За последние годы в практике строительства больших залов стали более широко применяться такие акустические конструкции, как отражатели-экраны, диффузоры, комбинированные резонансные поглотители и др. Эти средства применяются либо для естественного усиления прямого звука путем добавления отражений от поверхностей зала, либо для достижения акустических условий, в которых статистический подход более оправдан, и, следовательно, гарантировано экспоненциальное затухание звуковой энергии.

Несмотря на широкое применение акустических экранов, теоретическая сторона этого вопроса освещается только односторонне. Между тем применение экранов не всегда оправдано и не всегда приводит к улучшению акустики залов. С этой проблемой связана, с одной стороны, однородность звукового поля при переходе от одной точки к другой и, с другой стороны, акустический баланс (в отношении энергии ревербирующего и прямого звука). Ниже будет показано, в каких пределах возможно искусственное перераспределение частей звуковой энергии при введении в зал эффективных акустических конструкций типа экранов-козырьков, а также, в каких пределах это перераспределение оправдано с эстетической точки зрения. В связи с тем, что положение в звуковом поле всегда носит статистический характер, в первую очередь следует применять соответствующий метод.

Обозначения:

- A — общее звукопоглощение ($= \alpha \cdot S$);
- α — средний коэффициент звукопоглощения ($= 1 - \beta$);
- β — средний коэффициент звукоотражения;
- S — общая поверхность помещения;

- P — мощность источника звука;
 c — скорость звука;
 E_T — суммарная плотность звуковой энергии в помещении;
 E_R — плотность отраженной звуковой энергии;
 E_D — плотность прямой звуковой энергии;
 r — расстояние от источника до точки приема;
 T — стандартное время реверберации;
 V — объем помещения;
 $W(t)$ — энергия звука, излучаемая за время t ;
 L, l — средний свободный пробег звуковой волны;
 τ — время среднего свободного пробега;
 τ_0 — критический интервал времени, характеризующий длительность полезной части отзвука;
 Q — акустическое отношение в случае точечного источника;
 Q_a — то же в случае ансамблевого источника;
 d_0, D_0 — расстояние от источника до слушателя при условии, что $Q=1$.

1. Теоретические соображения

Согласно статистической теории в стационарном диффузном поле ненаправленного источника распределение звуковой энергии в зале равномерно в любой момент.

Сумма статистически усредненных плотностей всех отражений (= плотность энергии диффузного звука) зависит только от акустической мощности источника и от общего поглощения:

$$E_R = \frac{4P(1-a)}{Ac}. \quad (1)$$

Плотность энергии прямого звука в точке приема на расстоянии r от источника может быть выражена как:

$$E_D = \frac{P}{4\pi c} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (2)$$

В случае дискретных музыкальных ансамблей участники размещены на достаточно большой площади эстрады, являющейся эффективной звукоотражающейся средой, поэтому

$$E_D = \frac{P}{2\pi c} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (3)$$

В идеальном диффузном поле величина E_R считается постоянной по всему помещению, поэтому общая плотность звуковой энергии на расстоянии r от источника равна сумме

$$E_T = E_D + E_R = \frac{P}{4\pi r^2 c} + \frac{4P(1-a)}{Ac} \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что E_D изменяется от точки к точке, поэтому и $E_T \neq \text{const}$.

Отношение

$$Q = \frac{E_R}{E_D} \quad (5)$$

принято называть акустическим отношением, которое, исходя из формулы для точечного источника (2), выражается как

$$Q = \frac{16\pi r^2(1-a)}{A} \quad (6)$$

или, переходя к стандартному времени реверберации T ($A \approx \frac{0,16V}{T}$),

$$Q = 100\pi \cdot \frac{Tr^2}{V} \quad (7)$$

Для источника, излучающего на полусферу (ансамбль):

$$Q_a = \frac{8\pi r^2(1-a)}{A} = 50\pi \frac{Tr^2}{V} \quad (8)$$

Переходя к децибелам:

$$10 \log Q = 20 \log r + 10 \log \frac{1-a}{A} + 17 \text{ дб}, \quad (9)$$

$$10 \log Q_a = 20 \log r + 10 \log \frac{1-a}{A} + 14 \text{ дб}. \quad (10)$$

Ниже будут рассмотрены некоторые случаи, когда акустическое отношение известно и требуется определить расстояние до источника, на котором оно действует:

а) $Q=1$, т. е. $E_D = E_R$.

Расстояние d_0 , на котором плотности прямой и диффузной энергии равны, может быть легко найдено по уравнению (4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{4P}{cS} \cdot \frac{1-a}{\alpha} &= \frac{P}{4\pi d_0^2 c}, \\ d_0 &= \sqrt{\frac{A}{50,3(1-a)}} = 0,141 \sqrt{\frac{A}{1-a}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Так как $A \simeq \frac{0,16V}{T}$, то при значениях α , мало отличающихся от нуля,

$$d_0 = 0,141 \sqrt{\frac{0,16V}{T}} = 0,057 \sqrt{\frac{V}{T}}. \quad (12)$$

Соответственно, в случае ансамбля:

$$d_0' = 0,2 \sqrt{\frac{A}{1-\alpha}} = \quad (13)$$

$$= 0,2 \sqrt{\frac{0,16V}{T}} = 0,08 \sqrt{\frac{V}{T}}. \quad (14)$$

б) $Q = \frac{1}{\alpha}$, т. е. $\frac{E_D}{E_R} = \alpha$.

В случае сферического излучения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{4\pi d^2 c} : \frac{4P}{cS} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} = \alpha, \\ d = 0,14 \sqrt{\frac{S}{1-\alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В случае ансамбля:

$$d' = 0,2 \sqrt{\frac{S}{1-\alpha}}. \quad (16)$$

в) $\frac{E_D}{E_D + E_R} = \alpha$.

Для сферического излучения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{4\pi d_\alpha^2 c} = \frac{P\alpha}{4\pi d_\alpha^2 c} + \frac{4P(1-\alpha)\alpha}{cS\alpha}, \\ d_\alpha = 0,14 \sqrt{S}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для ансамбля:

$$d_\alpha' = 0,2 \sqrt{S}. \quad (18)$$

В действительности в залах, имеющих специальные устройства для направления звука, т. е. в залах, где распределение энергии не носит случайный характер, количество отражений не очень велико. Это означает, что в таких случаях диффузный режим нарушается и серьезная оценка по формулам (4)...(18) не является возможной.

2. Зависимость акустического баланса от архитектурного решения зала

Работы последних лет [1, 2, 3, 4, 5] показали, что понятие «прямой звук» необходимо рассматривать как совокупность воздействий прямой звуковой энергии и первых отражений с запаздыванием, не превышающим некоторой предельной величины τ_0 , характеризующей длительность полезной части реверберации в помещении. Здесь следует отметить, что по сей день еще мало изучены необходимые соотношения прямой (полезной) и реверберационной (диффузной) энергии, в частности, применительно к музыкальному сигналу. В помещении, предназначенном для слушания музыкальных произведений, доля диффузной энергии в смысле полноценного восприятия столь же важна, как и энергия прямого звука и первых отражений. Ввиду того, что с помощью отражающих устройств на слушателей можно направить немало полезных отражений в пределах интервала τ_0 после прихода прямого звука, то акустическое отношение должно изменяться, так как общая плотность звуковой энергии остается постоянной.

Для качественного анализа целесообразно различать в совокупности реверберирующего звука три компонента:

1) непосредственный звук — т. е. звук, достигающий слушателей без каких либо отражений от поверхности помещения;

2) эффективный звук — приходящий отражениями вслед за непосредственным звуком с запаздыванием, не превышающем предельную величину τ_0 , зависящую от характера сигнала;

3) диффузный или реверберирующий звук, приходящий за эффективным звуком и замирающий с уровнем до фона помещения.

Сумма непосредственного и эффективного звука называется полезным звуком, т. к. плотность полезной энергии в разных точках помещения больше всего характеризует звуковое поле.

Энергия эффективного звука отпадает от диффузного, т. к. в течение интервала τ_0 отражения сливаются с прямым звуком. Чем больше энергии отпадает от диффузного звука, тем больше закрытое помещение приближается к случаю полукрытой эстрады на открытом воздухе. Этот предельный случай является далеко не идеальным с музыкальной точки зрения, т. к. ценность музыкального восприятия определяется не столько интенсивностью, сколько множеством маломощных звуковых отражений. Опыт строительства новых за-

лов с большой вместимостью показывает, что добиться акустических условий, сравнимых с условиями старой стройки удается не всегда [6, 7], что объясняется односторонностью проектировщиков, игнорирующих всю сложность музыкального восприятия. Такие факты имеют место при некоторых формах зрительного зала, как например, яйцеобразной или трапецеидальной, т. к. при этих формах залов наряду с мощными отражениями не может обеспечиваться также и богатство диффузных отражений.

При стационарном режиме доля энергии непосредственного звука в случае диффузного поля определяется в любой момент как энергия, излучаемая источником за время среднего свободного пробега τ ($= \frac{4V}{cS}$), отнесенная к общей энергии:

$$W(\tau) = P \cdot \tau,$$

$$W(\tau) = P \frac{4V}{cS}.$$

При установившемся режиме отношение прямой энергии к общей энергии ($W(t) = \frac{4PV}{aSc}$):

$$\frac{W(\tau)}{W(t)} = \alpha. \quad (19)$$

Эргодический принцип* и физиологические особенности слуха позволяют развить следующую мысль. Скопление энергии за промежуток τ_0 равно $P \cdot \tau_0$, и в тот же момент прибавляется к энергии непосредственного звука. Таким образом повышение энергии за некоторый небольшой интервал может рассматриваться не как результат скопления во времени, а как повышение мощности источника.

Если учесть, что потери на отражения являются ничтожными, то полезная энергия и общая энергия соответственно равняются:

$$W(\tau_0) = P \cdot \tau_0,$$

$$W(t) = \frac{4PV}{aSc}$$

и отношение полезной энергии к общей энергии

* Эргодический принцип — предположение о том, что усреднение по времени, выполненное для какого-либо одного отражения и усреднение по совокупности всех отражений приводит к одним и тем же результатам.

$$\frac{W(\tau_0)}{W(t)} = \frac{\tau_0 c \alpha S}{4V} = \frac{\tau_0 c A}{4V}. \quad (20)$$

Например, в зале объемом 5400 м^3 ($30 \times 18 \times 10 \text{ м}$), имеющем средний коэффициент поглощения $0,2$ и $S = 2043 \text{ м}^2$ при $\tau_0 = 100 \text{ мсек}$

$$\frac{W(\tau_0)}{W(t)} = \frac{34,2 \cdot 408}{21600} = 64,4\%.$$

Эта доля будет тем больше, чем больше α_{cp} . При наличии публики нередко $\alpha_{cp} \geq 0,5$ и доля диффузной энергии значительно уменьшается.

τ_0 принимается нами как промежуток времени, в течение которого эффективные отражения от акустических экранов и др. близких к источнику поверхностей используются полностью.

Пусть ϕ будет той долей мощности P' , которая излучается на полусферу ансамблевым источником и доходит до слушателя в пределах интервала τ_0 ($\tau_0 > \frac{4V}{Sc}$) в виде всего полезного звука.

В случае непосредственного звука, как было показано выше, отношение его энергии к общей энергии равняется α . В случае всего полезного звука (см. 20), соответствующее отношение равняется $\frac{\tau_0 c A}{4V}$. Доля повышения энергии непосредственного звука за счет полезных отражений от специальных отражателей:

$$\frac{\tau_0 c A}{4V} : \alpha = \frac{\tau_0 c S}{4V} = \frac{\tau_0 c}{L}, \quad (21)$$

где L — средний свободный пробег.

Кажущееся повышение мощности звука:

$$\frac{P'}{P} = \frac{\tau_0 c S}{4V}, \text{ откуда } P' = P \cdot \frac{\tau_0 c S}{4V}. \quad (22)$$

Так как звуковое поле в помещении характеризуется плотностью полезного звука, то для нас прежде всего представляет интерес прирост плотности за счет эффективных отражений.

Повышение плотности энергии звука в данном объеме прямо пропорционально мощности, из чего следует, что

$$(02) \quad \frac{\tau_0 c S}{4V} = \vartheta. \quad (23)$$

В определенном объеме энергии звука относятся друг к другу как плотности энергии на соответствующих расстояниях (т. е. за время соответствующего пробега). На расстоянии от источника d_α , т. е. там, где отношение плотности энергии непосредственного звука к общей энергии равно α , плотность энергии полезного звука, отнесенная к энергии первичного звука, равна $\frac{\tau_0 c}{L}$.

Плотность полезной энергии будет:

$$E'_D = \frac{P}{2\pi r^2 c} \vartheta = \frac{P}{2\pi r^2} \cdot \frac{\tau_0 S}{4V}.$$

На расстоянии от источника d_α ($d_\alpha^2 = \frac{S}{8\pi}$)

$$E'_D = \frac{P \cdot 8\pi \tau_0 S}{2\pi S 4V} = \frac{\tau_0 P}{V}. \quad (24)$$

Аналогичным выражением для точечного источника является

$$E'_D = \frac{\tau_0 P}{2V}.$$

Прирост плотности прямой звуковой энергии ΔE_D (по сравнению с первоначальной плотностью) на расстоянии d_α ($=0,2 \sqrt{S}$) (или на любом расстоянии, при условии, что экраны дают полезные отражения равномерно по всей площади пола) будет равняться:

$$\Delta E_D = \frac{\tau_0 P}{V} - \frac{P 8\pi}{2\pi S c} = \frac{\tau_0 P}{V} - \frac{4P}{S c}. \quad (25)$$

Вместе с тем ΔE_D является долей плотности энергии, на которой плотность диффузной энергии снижается по всему залу, так как

$$E_T = E_D + E_R = E'_D + E'_R.$$

Здесь нетрудно заметить, что уравнением (25) определяется интересная с точки зрения статистической акустики величина, зависящая от нового подхода к структуре плотности

звуковой энергии. Формула общей плотности звуковой энергии примет вид (для ансамбля сигналов):

$$E_T = \frac{P}{2\pi r^2} \cdot \frac{\tau_0 S}{4V} + \frac{4P}{cS} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{\tau_0 P}{V} + \frac{4P}{Sc} =$$

$$= \frac{P}{2\pi r^2} \cdot \frac{\tau_0 S}{4V} + \frac{4P}{cS\alpha} - \frac{\tau_0 P}{V}. \quad (26)$$

Новое акустическое отношение:

$$Q' = \frac{E_R'}{E_L'} = \left(\frac{4P}{cS\alpha} - \frac{\tau_0 P}{V} \right) : \left(\frac{P\tau_0 S}{2\pi r^2 4V} \right) =$$

$$= \frac{4V - \tau_0 A c}{Ac} \cdot \frac{8\pi r^2}{\tau_0 S}. \quad (27)$$

Для точечного источника:

$$Q' = \frac{4V - \tau_0 A c}{Ac} \cdot \frac{16\pi r^2}{\tau_0 S}. \quad (28)$$

При равных r :

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{16\pi r^2(1-\alpha)}{A}, \\ Q' &= Q \cdot \frac{4V - \tau_0 A c}{\tau_0 c S(1-\alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Уравнение (29) показывает, насколько акустическое отношение уменьшается при соответственном усилении непосредственного звука, т. е. за счет эффективного звука.

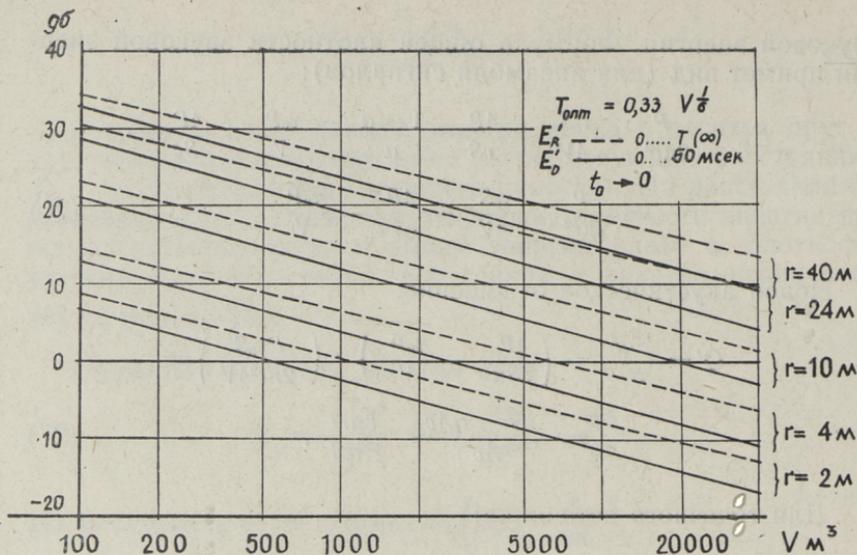
Расстояние D_0 , на котором $Q'=1$, может быть исчислено, исходя из равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{2\pi D_0^2} \cdot \frac{\tau_0 S}{4V} &= \frac{4P}{cS\alpha} - \frac{\tau_0 P}{V}, \\ D_0 &= 0,2S \sqrt{\frac{c\alpha\tau_0}{4V - cA\tau_0}} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

или для точечного источника:

$$D_0' = 0,14S \sqrt{\frac{c\alpha\tau_0}{4V - cA\tau_0}}. \quad (31)$$

Сравнение уравнений (30) и (13) показывает, что $D_0 > d_0$. Это отличие вносит некоторые существенные особенности в

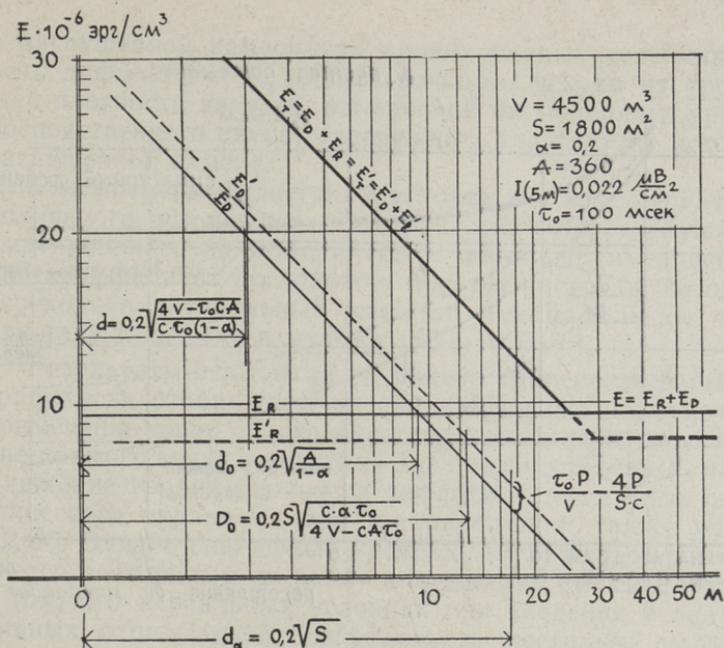


Фиг. 1. Формирование баланса уровней звуковой энергии в хороших концертных залах различной вместимости

оценку акустических свойств помещений, имеющих соответствующее решение в архитектурном и техническом отношениях. На фиг. 1 приведен график формирования уровней звуковой энергии (диффузной за $\tau = \infty$ и полезной за $\tau_0 = 50$ msec) в хороших концертных залах различной вместимости, в зависимости от расстояния от источника до слушателя. Расчет выполнен при условии, что время реверберации T исходит из т. н. объемного оптимума для музыки (по формуле $T = 0,33 \cdot V^{1/6}$).

На фиг. 2 приведен график изменения акустического отношения в зависимости от устройства акустических экранов в прямоугольном зале $30 \times 15 \times 10$ м (при условиях: $\alpha_{cp} = 0,2$; $\tau_0 = 100$ msec) в случае выступления небольшого хора.

На практике распространено применение экранов, рассчитанных на однократное отражение на более удаленные места для публики или в определенную зону, где уровень звука недостаточно высок. Однократность отражений вызвано формой экранов и большой поглощаемостью поверхности, на которую эти отражения направляются. Тем самым уровень полезной энергии значительно повышается за счет диффузной энергии. Таким образом может быть нарушен привычный акустический баланс, характерный для старых залов без отражателей, в частности, если форма зала заметно отличается от прямоугольной. Дело обстоит несколько лучше в тех залах, где



Фиг. 2. График изменения акустического отношения в прямоугольном зале в случае выступления небольшого хора до и после введения в зал акустических экранов

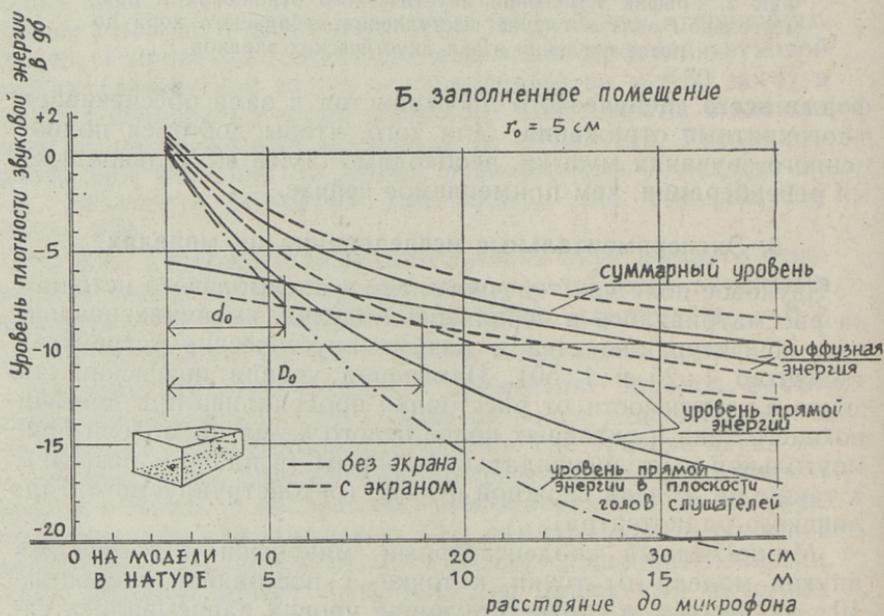
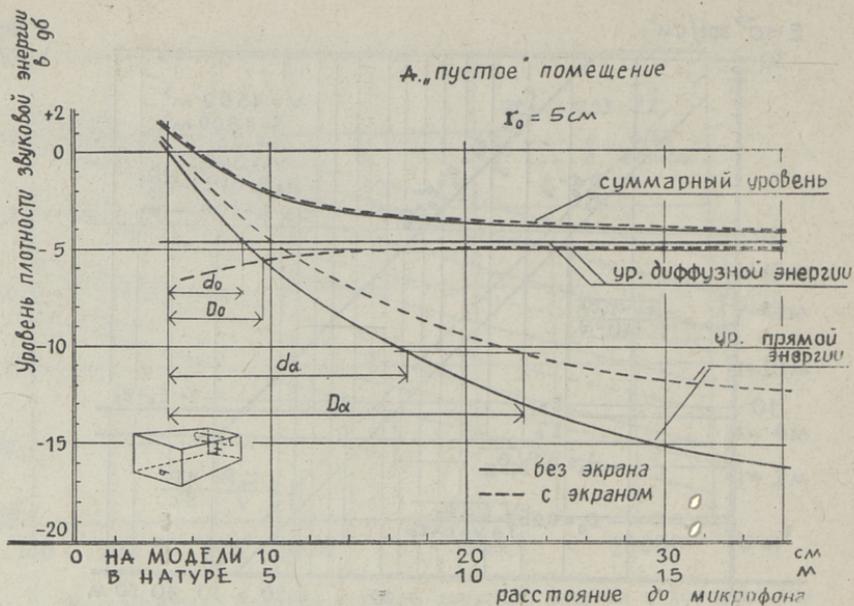
форма всего сценического пространства и зала обеспечивает многократные отражения. Для того, чтобы добиться полноценного звучания музыки, необходимо более длительное время реверберации, чем применяемое сейчас.

3. Экспериментальные исследования на моделях

Звуковое поле как точечного, так и ансамблевого источника рассматривалось в небольших моделях, имеющих различную конфигурацию стен и разные акустические устройства (масштаб 1:25 и 1:50). Измерения уровня интенсивности звука в зависимости от расстояния проводились при помощи воющего тона и октавных полос белого шума на модели прямоугольной и трапециевидальной формы (в плане и разрезе), а также на модели сложной формы (реконструируемого Таллинского радиотеатра).

Миниатюрный конденсаторный микрофон перемещался внутри модели от точки к точке с постоянной скоростью 10...12 мм/сек, а соответствующие уровни записывались самописцем.

Уровень непосредственного звука измерялся вне модели



Фиг. 3. Формирование уровней на модели трапецидального зала при применении акустических экранов

в заглушенной камере при прочих равных условиях, а уровень диффузного звука был исчислен исходя из уровня общей плотности энергии, измеренной на моделях и уровня непосредственного звука, измеренного для того же источника в заглушенной камере.

Рассмотрены были также условия как «пустого», так и заполненного помещения. Поверхность, занятая слушателями, имитировалась на модели слоем поролона, имеющего высокий коэффициент поглощения при тех частотах, которые при переходе в натуральный масштаб имеют большое значение для слушания речи и музыки (500, 1000 гц).

Результаты испытаний на модели трапециевидальной формы графически отображены на фиг. 3. Кривые показывают, что применение лишь одного акустического экрана дало повышение прямого звука в «пустом» зале на расстоянии d_0 на 1,2 дб. Снижение уровня плотности диффузной энергии за счет акустического экрана на том же расстоянии также равняется 1,2 дб. Однако сниженный уровень диффузной энергии не является постоянным по всему помещению, что свидетельствует о том, что в реальных условиях при введении в зал эффективных отражателей диффузность несколько нарушается. Увеличение расстояния равных плотностей прямого и диффузного звука ($D_0 > d_0$) указывает на некоторое ухудшение акустического баланса, однако в данном случае не является существенным недостатком.

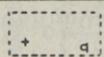
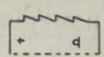
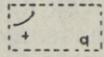
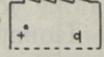
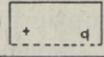
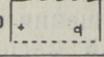
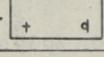
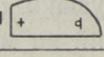
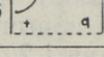
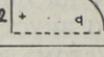
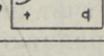
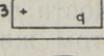
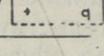
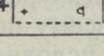
Уровень плотности общей энергии в данном случае вследствие акустического экрана не изменяется. Расстояние d_0 соответствует исчисляемому по формуле (11) d_0 . Так, например, на расстоянии d_0 уровень суммарной плотности энергии на 3 дб выше уровня прямого звука, а на расстоянии d_a суммарный уровень на 7 дб выше уровня диффузного звука.

Влияние конструкции и формы потолка на общий уровень в определенной точке помещения показано на фиг. 4.

Более детально были исследованы условия заполненного зала. Эти условия рассматривались вначале при различной высоте микрофона от поверхности поглотителя (пола). Было установлено, что дополнительное снижение измеряемого уровня звука вызывается как при приближении микрофона к поверхности поглотителя, так и при увеличении площади поглотителя.

Условия реального восприятия звука в случае горизонтальной или наклонной поверхностей пола требуют, чтобы микрофон был размещен в одной плоскости с поглотителем.

Отдельно исследовалось влияние излучателя на снижение уровня звука при изменении его высоты над поверхностью

Форма помещения в разрезе	ОПИСАНИЕ КОНСТРУКЦИИ	уровень силы звука дБ	$\frac{t \rightarrow \infty}{t \rightarrow 50}$ дБ	Форма помещения в разрезе	ОПИСАНИЕ КОНСТРУКЦИИ	уровень силы звука дБ	$\frac{t \rightarrow \infty}{t \rightarrow 50}$ дБ
	заглушенное помещение	0	-		пилообразный потолок с обратным уклоном	+13,3	2,0
	акуст. экран в заглушенном помещении	+3,5	-		то же при большей высоте	+16,1	3,0
	Все поверхности отражающие кроме пола	+13,5	2,6		как вариант 7, но с большей высотой	+15,7	3,5
	все поверхности отражающие	+19,0	3,9		„оргофонический“ потолок	+24,0	1,7
	как вариант 3, но с акуст. экраном	+15,5	0,9		то же, пол поглощающий	+16,8	0,6
	как вариант 4, но с акуст. экраном	+19,0	2,6		„суперфонический“ потолок	+24,9	1,1
	потолок пилообразного профиля	+16,6	3,2		то же, пол поглощающий	+17,5	0,4

Фиг. 4. Влияние конструкции и формы потолка на уровень плотности звуковой энергии

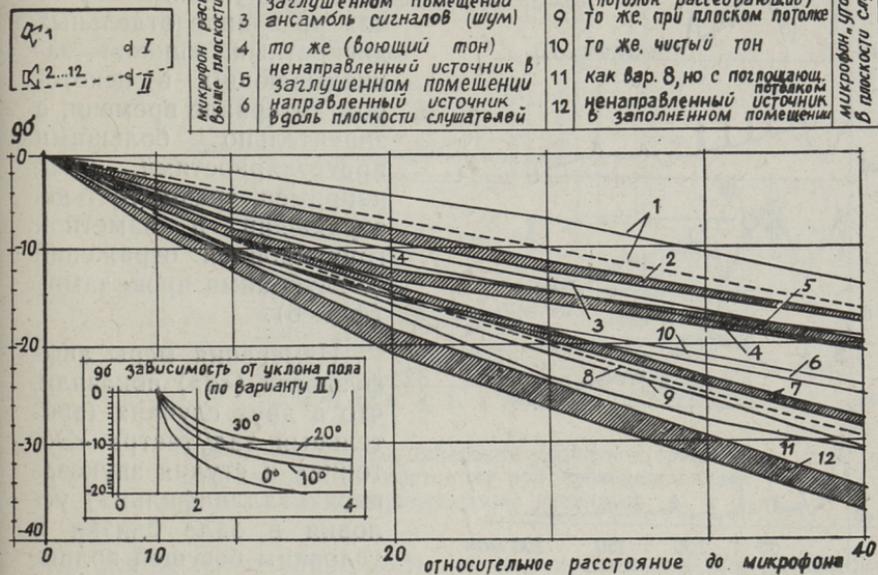
слушателей (при различной направленности источника, при применении акустических экранов и при изменении уклона пола). Основные результаты этих измерений приведены на фиг. 5. Из представленных кривых явствует, что максимальное снижение уровня наблюдается при действии ненаправленного источника, находящегося на одном уровне с приемником, независимо от уклона поверхности. При этом дополнительное звукопоглощение составляет примерно до -4 дБ при каждом удвоении расстояния*. При большей высоте расположения источника и увеличении подъема пола имеется возможность приблизиться к условиям квадратичного распространения звукового давления, постепенно уменьшая потери на скользящее поглощение.

5. Экспериментальные исследования в натуре

Целью исследований в натуре являлось не столько установление идентичности акустических параметров в зале и в модели (которые доказаны неоднократно экспериментальными рядами авторов [9, 10, 11, 12, 13]), сколько субъективная оценка влияния акустических экранов, применяемых в помещениях. Такая оценка возможна также на модели (путем применения

* Сверх -6 дБ, получаемых по теоретическому закону обратных квадратов.

I		II	
1	источник расположен высоко	7	направленный источник в заполненном помещении
2	направленный источник в заглушенном помещении	8	ансамбль сигналов (шум) (потолок рассеивающий)
3	ансамбль сигналов (шум)	9	то же, при плоском потолке
4	то же (воюющий тон)	10	то же, чистый тон
5	ненаправленный источник в заглушенном помещении	11	как вар. 8, но с поглощающим потолком
6	ненаправленный источник вдоль плоскости слушателей	12	ненаправленный источник в заполненном помещении



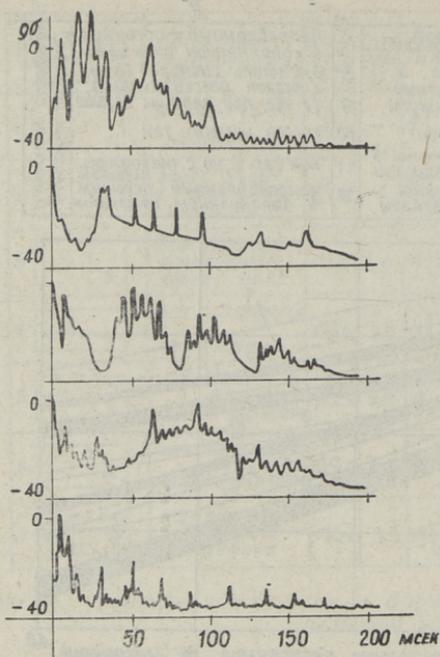
Фиг. 5. Зависимость распределения уровней от направленности и высоты источника и подъема мест для слушателей

метода транспонирования частотного спектра), однако это требует совершенную технику, оставаясь все же монофонической.

В качестве объектов исследования были выбраны зрительный зал театра оперы и балета «Эстония», большая студия звукозаписи киностудии «Таллинфильм» и большая концертная студия Таллиннского радиодома.

Первоначальный анализ акустических свойств помещений производился на основе измерений частотной характеристики времени реверберации в пустом и заполненном зале, импульсных исследований и измерений меры диффузности « d » по [14].

Измерения времени реверберации для каждой $1/3$ октавы показали, что полученные данные не могут служить достаточным материалом для выявления акустических недостатков помещений. Импульсные измерения дали возможность установить локальные особенности звукового поля и показали, что форма огибающей отраженного импульса может оказаться различной и не всегда согласована с субъективной оценкой по т. н. контуру неудобств. Наши опыты показали, что в музы-



Фиг. 6. Примеры осциллограмм импульсных картин акустически неудачных помещений.

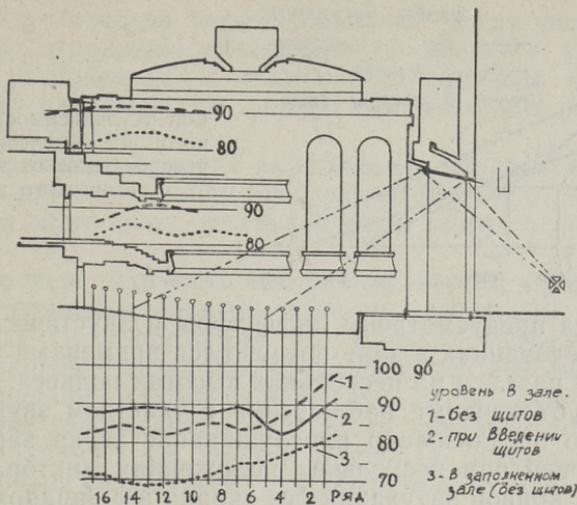
тально хороший результат. Несмотря на это и здесь акустические условия признаны нехорошими. Причина этого может крыться в том, что при частотах ниже 250 гц в данном помещении картина затухания импульсов иррегулярна. Применение там же стационарного режима для непосредственного измерения диффузности дало менее наглядный результат. Этот эксперимент указывает на то, что в реальных залах следует рассматривать отдельно два вида диффузности — диффузность во времени (при затухающем процессе) и диффузность направлений (при стационарном процессе).

Опыты, подтверждающие полезное действие акустических экранов, были проведены в зале театра «Эстония». Плохая слышимость этого зала объясняется главным образом недостаточным уровнем звука и большой неравномерностью распределения энергии в зале. Импульсные измерения показали, что на места в партере поступает преимущественно прямой звук и более поздние отражения, поскольку все поверхности, расположенные вблизи порталной арки, ориентированы так,

кальном зале акустические дефекты выражаются в импульсных картинах не в виде отдельных дискретных «пиков», запаздывающих в некотором интервале времени, а значительно большими иррегулярностями, как например, «размытостью» отражений и заметной группировкой отражений (с глубокими провалами) (фиг. 6).

Измерения меры диффузности (d) показали, что в двух случаях (зрительный зал театра «Эстония» и студия звукозаписи «Таллинфильм») условия в зале близки к условиям бегущей волны, являющимся причиной

неудовлетворительной акустики, а в одном случае (большая радиостудия) показали сравнительно

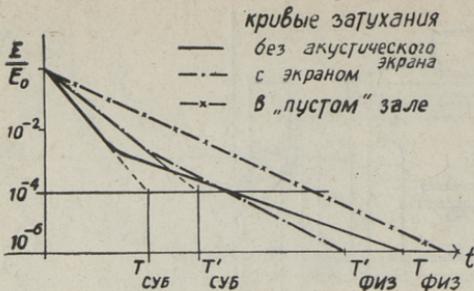


Фиг. 7. Результаты измерений уровней в зрительном зале театра «Эстония» при проведении опытов с акустическими экранами

что они не могут направлять звука в публику. Доля отраженной энергии несколько возрастает, приближаясь к задним местам партера и балконов (за счет отражений от потолка и планшета сцены). Путем применения деревянных жестких щитов для формирования временного акустического экрана вокруг сценического портала нам удалось не только повысить уровень полезного звука на местах с плохой слышимостью, но также добиться повышения субъективного времени реверберации.

Для оперы большое значение имеют четкость ревербирующего сигнала и соотношение силы звуков солистов к силе звуков оркестра. Поэтому плотность диффузной энергии играет здесь второстепенную роль. По этой причине применение акустических экранов является вполне реальным и было включено в предложение для реконструкции данного зала.

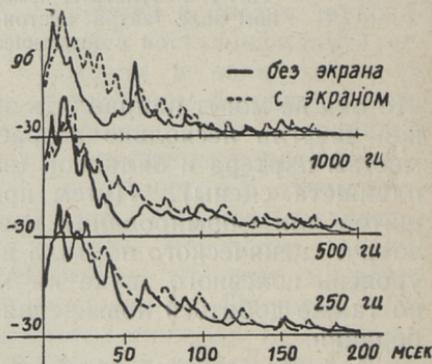
Эффект акустических экранов исследовался также на студии звукозаписи «Таллифильм». Измерения меры диффузности также как и картины, снятые с экрана осциллографа при коротком сигнале, показали весьма слабую диффузность данного помещения. Вначале имеется крутой спад плотности энергии (приход отражений с уровнем до -20 дБ происходит в течение $50 \dots 150$ мсек). Причиной этого явления оказалось неравномерное распределение звукопоглотителей и отсутствие рассеивающих элементов. По проекту реконструкции в по-



Фиг. 8. Зависимость субъективного и физического времени реверберации от эффекта акустического экрана

голке зала предусмотрены диффузоры и акустический экран. При исследованиях в зале применялся временный экран размером 1,8 на 3,2 м на нескольких высотах подвеса. Были проведены субъективные наблюдения с участием звукорежиссеров. Было организовано прослушивание звука записей дикторской речи при нескольких положениях диктора. Характер спада кривой затухания без экрана и с экраном виден на осциллограммах, представленных на фиг. 9. С помощью экра-

Фиг. 9. Осциллограммы импульсных картин, полученных в студии звукозаписи «Таллифильм»



на удалось ликвидировать провал между начальным и завершающим участком кривой спада и несколько повысить уровень полезного звука (около 2,5 дб). Такое повышение уровня на начальном участке благоприятствует удовлетворительной артикуляции. При записи речи субъективная реверберация настолько увеличивается, что при более быстром темпе исполнения стало заметно некоторое мешающее влияние.

Выводы

На основании теоретических соображений и данных прямых измерений можно рекомендовать исходить при проектировании из следующих основных принципов, касающихся применения акустических экранов в закрытых помещениях.

1. Акустический экран (козырек) путем получения зеркального отражения прямого звука является звукоусиливающим устройством и применяется главным образом для создания равномерного уровня на площади расположения мест слушателей.

2. Применение в зале акустических экранов и др. близких к источнику отражающих поверхностей требует комплексного решения всего зала, учитывая роль прямого и диффузного звука.

3. Уровень плотности диффузной энергии в реальных условиях зрительных залов не является постоянным по всему помещению. Предположение, что уровень постоянен, является идеализацией, принятой в статистической акустике.

4. Спадание плотности непосредственной звуковой энергии на уровне голов слушателей (в тех случаях, когда источник звука находится на высоте, немногим превышающей плоскость уровня слушателей) примерно обратнопропорционально кубу расстояния до слушателя.

5. В концертном зале, имеющем средний коэффициент звукопоглощения $\alpha_{cp} \geq 0,4$ (с публикой) и время реверберации, близкое к оптимуму (по $T = 0,33 \cdot V^{1/3}$), применение эффективных отражателей вызывает чрезмерное снижение диффузной энергии, что нежелательно для звучания музыки.

6. В случае применения экранов из расчета максимального использования полезного звука для музыкальных залов требуется большее время (примерно на +25%) реверберации по сравнению с т. н. объемным оптимумом.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Bolt, P. E. Doak. A tentative criterion for the shortterm transient response of auditoriums. JASA, V. 22, No 4 (1950).
2. E. Meyer, W. Kuhl. Bemerkungen zur geometrischen Raumakustik. Acustica, 2, No 2 (1952).
3. H. Niese. Vorschlag für die Definition und Messung der Deutlichkeit nach subjektiven Grundlagen. Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, Bd 65, 1, (1957).
4. R. Thiele. Richtungsverteilung und Zeitfolge der Schallrückwürfe in Räumen. Acustica, No 3 (1953).
5. W. Junius. Raumakustische Untersuchungen mit neueren Messverfahren in der Liederhalle Stuttgart. Acustica, v. 9, No 4 (1959).
6. L. Villard. A propos de l'acoustique des Theatres lyriques. Bul. Techn. Suisse Romande XI, No 24 (1957).
7. F. Winckel. Optimum acoustic criteria of concert halls for the performance of classical music. JASA, v. 34, No 1 (1962).
8. J. Maxfield, W. Albersheim. An acoustic constant of enclosed spaces correlatable with their apparent liveness. JASA, v. 19, 71 (1947).

9. B. Muncey. The use of three-dimensional models in room acoustics. *JASA*, v. 22, 4 (1950).
10. R. Lamoral. Recherche de la forme optimum d'un grand auditorium sur maquette. *Electronica*, 4 1—2 (1955).
11. W. Kraak. Elektroakustische Messungen an Raummodellen. *Hochfrequenztechnik und Elektroakustik*. Bd. 65, 3. (1956).
12. E. Karaskiewicz, M. Kwiek. Etude des salles de concert sur des modèles par la méthode des impulsions. *Acustica*, v. 12, Nr. 3 (1962).
13. В. М. Гардашьян. Исследование акустических свойств помещений на моделях. *Труды НИКФИ*, 4, (1957).
14. В. В. Фурдуев. Чен. Тун. Измерение диффузности звукового поля в помещениях методом направленного микрофона. *Акустический журнал*, 5, 1 (1960).

УДК 534. 84. 001. 57

Х. А. Орувез

ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИКИ ЗАЛОВ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

Введение

В настоящее время единственными и решающими показателями, характеризующими акустические качества проектируемого зала, являются время реверберации и его частотная характеристика, исчисляемые с помощью соответствующих расчетов. В основу расчета времени реверберации положен ряд упрощений и идеализаций физических процессов, главным из которых является представление о полной диффузности звукового поля, т. е. предположение, что в течение длительного времени и в любой момент звуковая энергия распространяется по всем направлениям одинаково.

В практике эксплуатации залов диффузность помещения редко гарантируется в мере, необходимой для экспоненциального спадания звуковой энергии. С другой стороны, в инженерной практике пока еще не известны способы для количественной или качественной оценки диффузности проектируемого помещения, что дало бы возможность сделать вывод о том, сможет ли принятая форма помещения обеспечить необходимые предпосылки для стандартной реверберации.

Парадоксальным является тот факт, что залы проектируются исходя из акустических условий «пустого» зала, при которых ход затухания звуковой энергии в большинстве случаев хорошо аппроксимируется обычным статистическим усреднением. При этом вопросам эксплуатации залов, т. е. условиям заполненного зала, внимания не уделяется.

Ошибочными являются выводы, сделанные для заполненного зала на основе акустики в зале без публики, также как и выводы, сделанные, например, на основе помещения правильной формы, для помещений сложной формы.

Влияние аудитории в зале не только отражается на сокращении общего времени реверберации, но дает также и качественно различную картину затухания звуковой энергии. При

этом особую роль играет начальный участок затухания, имеющий меньшую или большую крутизну спада в зависимости от формы поверхностей помещения (и в некоторой степени — от общего поглощения). Завершающий участок имеет обычно небольшой уклон и зависит от общего поглощения. От геометрии помещения завершающий участок зависит в незначительной мере.

Основное внимание в данной работе уделено частному случаю — акустически необработанному залу, в котором на полу сосредоточено максимальное звукопоглощение. Рассмотрение такого помещения — помещения массового типа — несколько упрощает поставленную задачу. Акустическая оценка возможна на основе геометрического подхода к рассмотрению отражения звука в помещении, а результаты легко могут быть проверены на моделях.

1. Сопоставление условий «пустого» и заполненного зала

Для анализа пространственной и временной структуры прихода звуковой энергии ниже будет рассмотрен процесс реверберации с геометрической точки зрения в зале, имеющем форму параллелепипеда. При условии, что коэффициент отражения звука (β) достаточно велик для любого ограждения помещения (соответствуя условиям «пустого» зала), картина мнимых источников звука равномерно распределяется по трехмерной решетке, размеры которой отвечают размерам помещения. Общее количество мнимых источников N действительного точечного источника, действие которых доходит до слушателя в течение времени t , определяется путем деления объема сферы ($V = \frac{4}{3} \pi c^3 t^3$) на объем одной ячейки решетки мнимых источников, соответствующей объему помещения*.

$$N = \frac{4\pi c^3 t^3}{3V} \quad (1)$$

Усредненное количество отражений, падающее на точку приема в течение интервала 1 сек, исчисляется при определенном допущении, что интервалы, разделяющие какие-либо два отражения, постоянны:

$$\frac{dN}{dt} \ll \frac{4\pi c^3 t^2}{V} \quad (2)$$

* Принятая величина t достаточно велика, что позволяет пренебречь детальным расположением источника и приемника в помещении; c — скорость звука.

Знак равенства соответствует случаю, когда все мнимые источники дискретны и отражения приходят в плавной последовательности, исключая неслучайные совпадения моментов прихода нескольких отражений. В этих условиях количество отражений в течение τ секунд

$$n = \frac{dN}{dt} \cdot \tau = \frac{4\pi c^3 t^2}{V} \tau \quad (3)$$

и средний интервал времени $\Delta\tau_{cp}$ в промежутке $\tau_1 \dots \tau_2$ равен

$$\Delta\tau_{cp} = \frac{\tau}{n} = \frac{V}{4\pi c^3 t^2} \quad (4)$$

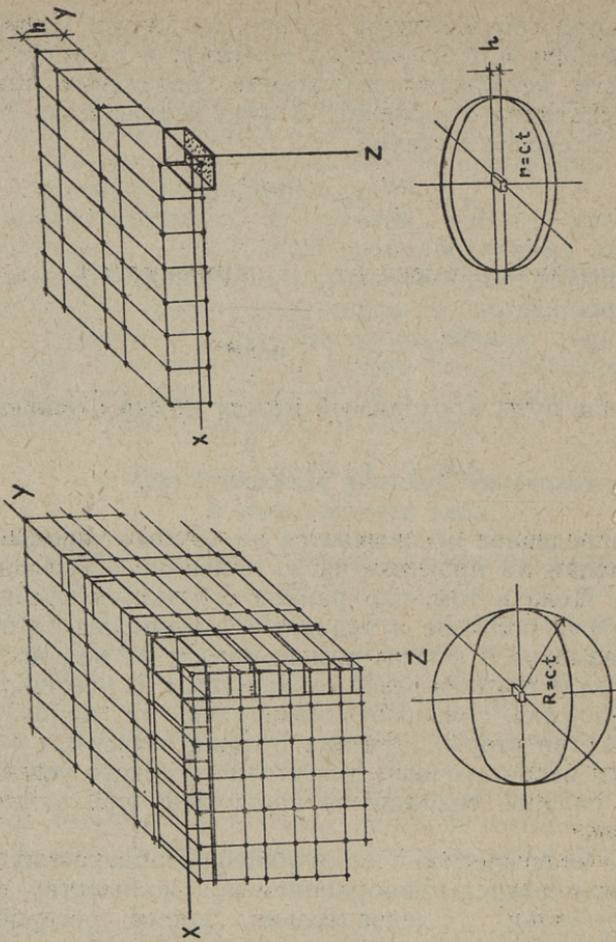
В этом случае путь, проходимый между двумя отражениями:

$$\Delta d = c \cdot \tau_{cp} = \frac{V}{4\pi c^2 t^2} \quad (5)$$

Вышеприведенное основывается на грубых упрощениях и при применении на практике часто приводит к большим неточностям. Дело в том, что ранние отражения попадают в приемник через большие и неравные интервалы (в зависимости от размеров и формы помещения) и их количество на практике в ряде случаев резко сокращается. В частности, при некоторых формах, сильно отличающихся от параллелепипеда, количество вторых, третьих и даже четвертых отражений является недостаточным для статистического усреднения. Еще более сильное сокращение происходит при заполнении зала людьми.

Согласно классической теории общее поглощение публикой принимается в расчет пропорционально количеству слушателей ($\alpha_i = const$). Следовательно, время реверберации должно приблизительно быть пропорциональным удельному объему зала. Однако, при сопоставлении результатов измерений большого количества залов с данными удельного объема этих залов, выяснилось, что эти две величины только слабо коррелированы. Из-за расхождения данных о времени реверберации некоторые исследователи пришли к выводу, что время реверберации должно зависеть либо от формы помещения, либо от влияния формы помещения на величину коэффициентов поглощения одних и тех же материалов.

Недавно Беранек [2] показал, что поглощаемость публики, хора и оркестра увеличивается пропорционально площади пола, занимаемой ими, причем это почти не зависит от числа мест, при условии, что площадь слушательских мест занята равномерно. Таким образом, в заполненном концертном зале,



Фиг. 1. Сопоставление картин мнимых источников в случае «пустого» и заполненного помещений

где аудитория и исполнители занимают основную площадь пола, на полу сосредоточено максимальное звукопоглощение, что исключает все мнимые источники ниже плоскости пола, а следовательно, исключена и большая часть мнимых источников выше потолка, кроме источников, расположенных в первой плоскости над потолком (фиг. 1). В тех случаях, когда пол эстрады остается свободным, до некоторых слушателей доходят еще и вторые и т. д. отражения от потолка, но общее количество отражений изменяется лишь незначительно.

Ниже рассматривается случай, когда в прямоугольном зале весь пол имеет коэффициент поглощения, близкий к

единице ($\beta_n = 0$). Мощность всех мнимых источников ниже плоскости пола также равна нулю и картина мнимых источников распространяется лишь в двух плоскостях: на уровне действительного источника и на высоте h , 2 раза превышающей высоту от источника звука до потолка. Это означает, что звуковые волны, исходящие из мнимых источников, распределенных в плане, отражаются от стен многократно, а от потолка — один раз.

В случае точечного источника количество отражений N приходящих в точку приема за некоторое время t , определяется по аналогии с (1), путем деления объема диска ($V = \pi c^2 t^2 h$) на объем помещения:

$$N_t = \frac{\pi c^2 t^2 h}{V}. \quad (6)$$

Среднее количество отражений, попадающее на точку приема в течение интервала $\Delta t = t_1 \dots t_2$, будет

$$n_t = \frac{dN_t}{dt} \cdot \Delta t = \frac{2\pi c^2 t h}{V} \cdot \Delta t \quad (7)$$

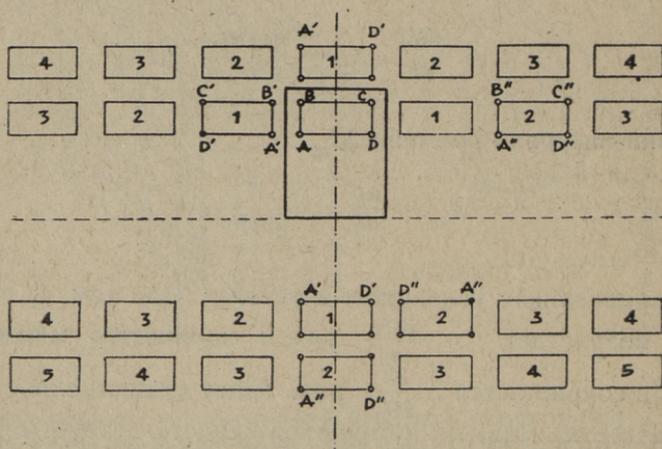
и средний интервал времени Δt_{cp} :

$$\Delta t_{cp} = \frac{\Delta t}{dt} = \frac{V}{2\pi c^2 t h}. \quad (8)$$

По сравнению с условиями «пустого» зала (см. 4) этот интервал возрастает $\frac{2ct}{h}$ раз и количество мнимых источников сокращается $\frac{3h}{4ct}$ раз. Такое существенное снижение количества мнимых источников свидетельствует о некотором качественном различии условий закрытого («пустого») и полузакрытого (заполненного) залов. Ввиду того, что сокращение количества мнимых источников происходит неравномерно и лишь за счет более мощных источников (образующихся в пространстве на оси Z , где расстояния между источниками минимальны, т. к. высота помещения обычно меньше других размеров), то кривая затухания сильно деформируется. В начале уровень плотности звуковой энергии резко снижается за счет быстрого рассеивания в связи с попаданием на интенсивно поглощающую поверхность пола, а затем ход затухания замедляется за счет многократных отражений

от стен.* Нарушение нормированных условий процесса реверберации настолько существенно, что говорить о каком-либо определенном времени реверберации нет основания. Аналогичные случаи известны из практики, когда вместо равномерного имеет место концентрированное расположение звукопоглотителей. Это явление особенно ярко выступает в тех случаях, когда звукопоглощение концентрируется на доминирующие по площади ограждения (пол, потолок). Качественная сторона данного явления еще недостаточно исследована, однако имеющиеся наблюдения позволяют прийти к выводу, что отклонение от экспоненциального хода затухания ощущается недостаточной четкостью затухающего сигнала, сухостью, недостатком субъективной реверберации.

В случае дискретного ансамблевого источника количество отражений увеличивается пропорционально количеству инструменталистов-хористов. Это происходит за счет прироста мнимых источников, т. е. уплотнения решетки их распространения, многократно повторяющей форму расположения ансамбля в помещении (фиг. 2). Локализация отдельных инст-



Фиг. 2. Картина распространения мнимых источников ансамбля при правильной форме помещения

рументов и групп инструментов очевидно происходит за счет прямого звука и первых отражений от ближайших поверхностей помещения и с помощью акустических экранов (отража-

* Таким образом кривая снижения плотности звуковой энергии представляется в первом приближении в виде ломаной прямой, имеющей два наклона.

телей) может быть значительно усилена. Таким образом диффузность помещения при возбуждении звукового поля ансамблями повышается и затухание звуковой энергии происходит в связи с этим более равномерно, чем при точечном источнике.

2. Расчет затухания звуковой энергии в заполненном зале

На основе многочисленных геометрических построений картин мнимых источников для наиболее типичных конфигураций помещений, удалось выяснить, что существуют определенные закономерности, которые могут быть использованы для расчета затухания, а именно:

1) отношение количества мнимых источников к расстоянию до точки восприятия $\frac{N}{R}$ возрастает после первых и вторых отражений до практически постоянной величины, т. е. пропорционально общему пробегу звуковой волны;

2) количество отражений N порядка n в случае параллелепипеда определяется на основании формулы

$$N = (n - 1) 8 + 4.$$

В случае сложной формы общее количество мнимых источников возрастает, однако в их числе имеется целый ряд источников, действие которых не доходит до каждого слушателя;

3) средний свободный пробег звуковой волны, исчисленный исходя из условия, что

$$L = \frac{\sum l}{n} = \frac{\text{общий пробег за время } t}{\text{среднее количество встреч с поверхностями помещения}}$$

численно равен $L = \frac{k \cdot V}{S}$, (где V — объем, в m^3 , S — общая поверхность, в m^2 , $k = 6..8$ для практически применяемых форм помещения), т. е. превышает средний свободный пробег в пустом помещении $(L = \frac{4V}{S})$ 1,5..2 раза. От этой величины заметно отличается лишь средний пробег первых отражений (L_1);*

4) средний свободный пробег звуковых отражений, перенесших 5 и более отражений, приближается к среднему свободному пробегу в случае т. н. двухмерной реверберации, исчисляемому по формуле $L'' = \frac{\pi \cdot F_n}{P}$, (где F_n — площадь горизонтального сечения зала, P — периметр зала).

* Средний пробег первых отражений определяется на основе графических построений.

Приближенный расчет времени затухания звуковой энергии до принятого стандартного уровня требует аппроксимации функции спадаения несколькими экспоненциальными функциями. Условие стандартной реверберации может быть определено как

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \frac{E_n}{E_0} &= \beta^{\frac{c \cdot t_1}{L_1}} = \frac{1}{k}, \\ 2) \quad \frac{E}{E_n \cdot k} &= \beta^{\frac{c \cdot t_2}{L_2}} = 10^{-6}, \\ 3) \quad \frac{E}{E_0} &= k \cdot \beta^{\frac{c \cdot t_1}{L_1} + \frac{c \cdot t_2}{L_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $\beta^{\frac{c \cdot t_2}{L_2}} = 10^{-6}$,

E_0 — плотность звуковой энергии в момент выключения источника,

E_n — плотность звуковой энергии в конце начального участка затухания,

E — средняя плотность звуковой энергии,

$t_1 t_2$ — отрезки времени двух участков,

$L_1 L_2$ — свободные пробеги для соответствующего отрезка времени,

β — средний коэффициент отражения.

Начальный отрезок времени определяется исходя из условия, что вероятность попадания звуковых волн на все поверхности помещения примерно одинаково, а количество отражений, претерпевших одно, два или n встреч с поверхностями помещения, достаточно велико, чтобы на этом основании приобрести для помещения значение среднего коэффициента отражения β . При точечном источнике и, в частности, в больших помещениях усреднение длины отражений на участке 0...50 мсек является условной операцией. В случае ансамбля и при наличии в зале акустических экранов количество отражений на этом участке достаточно велико для того, чтобы функция спадаения звуковой энергии могла быть в среднем аппроксимирована экспоненциальной функцией.* В дальнейшем, по мере возрастания порядка отражений, продолжительные отражения наблюдаются лишь в горизонтальной проек-

* Расчеты показывают, что в залах средних и больших размеров первый участок совпадает со снижением уровня примерно на -20 дб, что дает $n = 10 \dots 15$.

ции объема. Это становится особенно заметным в помещениях, имеющих небольшую высоту по сравнению с их другими размерами. Процесс затухания дополняется отражениями от боковых и торцевых стен, приближаясь к т. н. двухмерной реверберации. В данном случае нет основания учитывать средний коэффициент отражения для всей общей поверхности, а лишь коэффициент отражения для стен. Таким образом можно получить два средних коэффициента отражения, участвующих в общем процессе замирания звука и два качественно различных процесса затухания. Поэтому в данном случае формула (10) примет следующий вид:

$$\frac{E}{E_0} = k \cdot \beta_{cp}^{\frac{c \cdot t_1}{L_1}} \cdot \beta_{cm}^{\frac{c \cdot t_2}{L''}}, \quad (11)$$

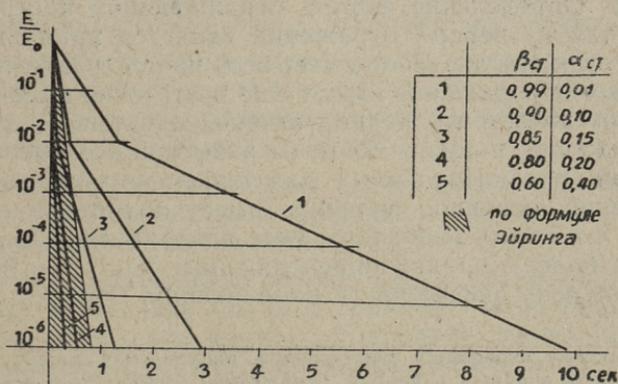
где $\beta_{cp}^{\frac{c \cdot t_1}{L_1}} = 10^{-2}$

и $\beta_{cm}^{\frac{c \cdot t_2}{L''}} = 10^{-6}$,

следовательно

$$\frac{E}{E_0} = 100 \cdot \beta_{cp}^{\frac{c \cdot t_1}{L_1}} \cdot \beta_{cm}^{\frac{c \cdot t_2}{L''}} \quad (12)$$

На фиг. 3 приведено графическое изображение кривых затухания звука для зала $10 \times 20 \times 5$ м (в заполненном виде) при различных значениях β_{cm} .



Фиг. 3. Теоретические кривые затухания звука в прямоугольном помещении ($10 \times 20 \times 5$ м) в зависимости от коэффициента отражения стен β

В литературе можно найти немало высказываний о том, что конец процесса затухания практически особого интереса не представляет и решающее значение имеет, якобы, только первая часть процесса затухания (первые — 20—25 дб). В работе [3] показано, что субъективная реверберация может в значительных пределах колебаться вокруг физической в зависимости от разности уровней полезного сигнала и собственно шума помещения. Так как в конце реверберации уровень сигнала соизмерим с собственным шумом, восприятие звука зависит от скорости спадания уровня звука в начальной стадии затухания. Большая скорость затухания в начале отзвука создает у наблюдателя впечатление, будто общее время реверберации невелико. Для достижения полноты музыкального звучания необходимо, чтобы кривая спада уровня звуковой энергии на начальном участке имела бы небольшую крутизну. Для этого необходимо, чтобы звуковая энергия, падающая на потолок, акустические экраны и заэкранное пространство, приходила на пол после нескольких отражений. В результате этого возможно некоторое уменьшение общего (фактического) времени реверберации — вывод, соответствующий субъективным наблюдениям.

3. Учет степени диффузности заполненного помещения на основе начального периода отзвука

В целях проверки формы проектируемых помещений в плане и разрезе помещения до настоящего времени применяется эскиз звуковых траекторий первых отражений, исходящих от точечного источника в произвольных направлениях, находящегося в одном из возможных положений на эстраде или сцене. Определение формы ограждающих поверхностей лишь исходя из первых отражений является принципиально неверным, так как значение имеет весь начальный участок затухания, когда отражения имеют еще достаточно высокий уровень.* Этот начальный период отзвука охватывает не менее 3...6 отражений, в зависимости от размеров помещения. Для помещений, предназначенных для исполнения музыкальных произведений, основное значение имеет полнота и сочность звучания и поэтому необходим учет дополнительных отражений (10 и более), причем определяющим фактором является высокая степень диффузности направлений. Степень диффуз-

* По уровню отражений диффузность направлений может делиться на диффузность мощных и слабых отражений. Диффузность мощных отражений достигается удачной формой отражающих поверхностей, диффузность слабых отражений — равномерным распределением звукопоглотителей.

ности направлений определялась некоторыми исследователями экспериментальным или расчетным путем. Косвенным показателем диффузности является и форма кривой спада звуковой энергии. Для оценки диффузности направлений для различных интервалов времени (например 0..50 мсек, 0..100 мсек, 0..150 мсек, 0..200 мсек и т. д.) ниже предлагается графоаналитический метод, на основе которого можно сделать вывод об акустическом качестве проектируемого помещения. По сути дела предлагаемый нами метод соответствует экспериментальному методу, предложенному Тиле [4] и принятому Мейером на модели [5]. Упомянутые авторы измеряли потоки звуковой энергии, приходящие в точку наблюдения по различным направлениям в стационарном режиме. Результаты были ими наглядно изображены в виде пространственной диаграммы стержней (т. н. ежа).

Измерения в натуре, предложенные Тиле, в настоящее время еще мало применяются, так как другие экспериментальные методы дают гораздо большие возможности для анализа звукового поля (например, импульсный метод). Однако возможность применения такого анализа при проектировании создает предпосылки для достижения необходимой диффузности звукового поля и может значительно дополнить наши сведения о проектируемом помещении.

Для применения графоаналитического метода необходимы следующие упрощающие предположения:

- 1) сложение отражений происходит энергетически (без интерференционных эффектов);
- 2) коэффициент отражения пола соответствует или близок к случаю его максимального заполнения, т. е. $\beta_n \approx 0$;
- 3) поверхности стен и потолка обработаны одинаково;
- 4) расчет диффузности направлений производится в горизонтальной плоскости и для тех частот, для которых размеры помещения и его архитектурных элементов достаточно велики по сравнению с длиной волны ($d \geq 4 \dots 5\lambda$);
- 5) при исследовании формы помещения и отдельных поверхностей, на звуковое поле в разных местах опускаются архитектурные детали помещения.

Основой для анализа является чертеж двухмерной решетки мнимых источников (до 5-го порядка). Отражения, попадающие на какое-либо место в помещении, имеют направления, соответствующие картине мнимых источников. Все отражения, приходящие в точку приема после однократного отражения от потолка, повторяют соответствующее направление в плане, и должны самостоятельно учитываться.

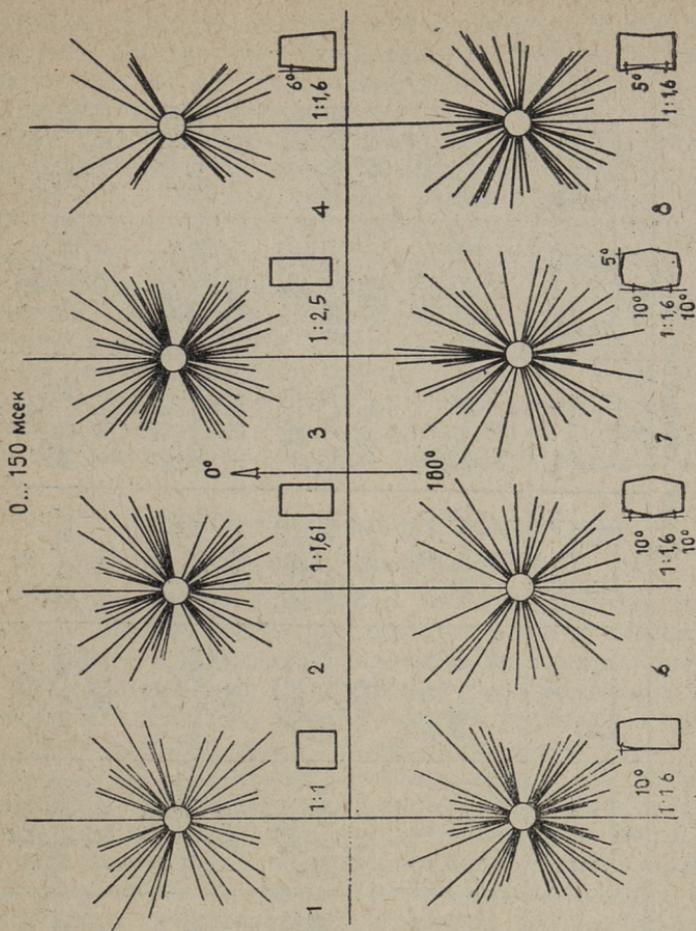
Первой операцией после изображения на чертеже картины мнимых источников является выяснение источников, действительно посылающих отражения в данную точку приема. В простейшем случае — в случае помещения прямоугольной формы — действие всех мнимых источников доходит до любой точки слушательских мест. В случае трапеции или других более сложных форм в данном направлении действует только часть этих источников. Путем соединения полученных точек мнимых источников с точкой приема составляется диаграмма распределения отражений в виде стержней для анализируемого промежутка времени (в пределах круга радиусом $c \cdot \tau$, где c — скорость звука, τ — время).

Следующим этапом является определение длины стержней, которая пропорциональна квадрату звукового давления или обратнопропорциональна квадратному корню расстояний до соответствующего мнимого источника. При этом необходимо учесть порядковый номер мнимого источника и средний коэффициент отражения:

$$l = \beta_{cp}^n \cdot \frac{1}{\sqrt{r}},$$

где l — длина стержней, β_{cp} — средний коэффициент отражения стен и потолка, n — порядок мнимого источника, r — расстояние от мнимого источника до точки восприятия.

Третья операция заключается в определении процентного числа отражений, поступающих в точку приема с разных сторон. Все пространство помещения может быть разделено на четыре квадранта, в пределах которых суммируются потоки отраженной энергии. В случае идеального диффузного звукового поля в конце достаточно небольшого промежутка времени все отражения равномерно распределены вокруг точки приема, т. е. количественно все квадранты равноценны. Ухудшение диффузности направления выражается, прежде всего, в отсутствии или в уменьшении отражений в каком-либо направлении, например, по бокам, что особенно заметно в интервале 0...50 мсек. Требования диффузности начинают удовлетворяться с определенного момента, после которого количество приходящих отражений в единицу времени заметно возрастает. Таким образом интервал времени, на основе которого можно сделать вывод о степени приближения к равномерному распределению потоков отраженной энергии по различным направлениям ее прихода, является в некоторой степени критерием акустики помещения.



Фиг. 4. Анализ диффузности направлений наполненных залов различной формы (при прочих равных условиях)

На фиг. 4 в качестве примера изображены картины распределения до 5-и отражений, причем расчет выполнен для симметричной точки, находящейся на постоянном расстоянии от источника звука и от торцевых стен в залах с одинаковой площадью пола (600 м^2), но с различной формой в плане (прямоугольной, трапецидальной и более сложной), при условии, что все поверхности, кроме пола, гладкие (отражающие).

Результаты анализа диффузности направлений по разным квадрантам приведены в сводной таблице, данные которой показывают, что в интервале 0...150 мсек форма прямоугольника дает относительно равномерное распределение для всех вариантов соотношения сторон, принятых в архитектурной

Таблица 1

Диффузность направлений в горизонтальной плоскости в процентах к общей плотности звуковой энергии

Интервал времени мсек	Форма помещения в плане						
	1	2	3	4	5	6	7
0 ... 50							
0 ... 100							
0 ... 150							
0 ... 200							

практике. При трапецидальной форме (в случае угла расхождения боковых стен более чем на 5°) большая часть мнимых источников дает отражения лишь в переднюю часть зала. На задние места отражения поступают только с передней половины боковых стены и с торцевых стен. Неудовлетворительная диффузность становится особенно заметной в интервалах 0...100 и 0...150 мсек. Форма двойкой трапеции (6) улучшает диффузность за счет боковых отражений. При помощи излома передней и задней стены (7) прибавляется еще ряд отражений с передней и задней стены. В начале затухающего процесса (первые 50 мсек) возможно его более диффузное формирование, как при форме, близкой к квадрату, так и при форме двойкой трапеции и многоугольника. В интервале же 0...150 мсек, характеризующем конец первой стадии формирования затухающего процесса, форма квадрата менее приемлема, чем прямоугольная и комбинированная формы.

4. Экспериментальные исследования

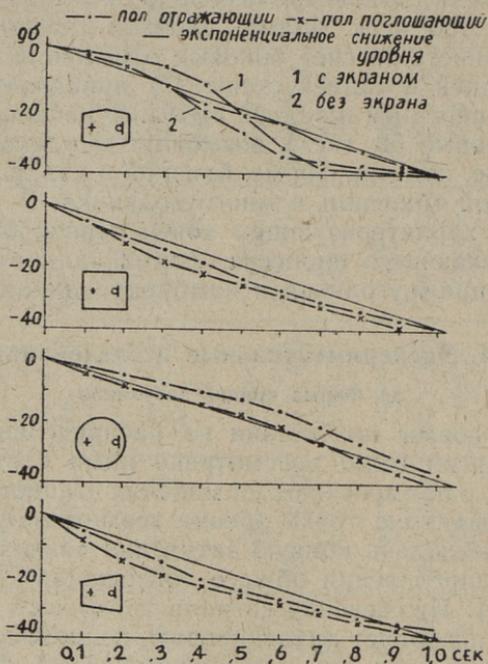
а) Форма кривой затухания

Влияние формы помещения на распределение плотности звуковой энергии было рассмотрено нами с статистической точки зрения, с применением на моделях стационарного режима. Исследования с точки зрения геометрической акустики позволяют наблюдать кривую затухания также и при неравномерном распределении общего поглощения (случай заполненного зала). Применение сигнала небольшой длительности (импульсов) позволяет анализировать подробности кривой на экране осциллографа при любых изменениях формы ограждающих конструкций помещения, причем желательно иметь логарифмическое усиление. Поглощение в воздухе сверхвысоких частот учитывается с помощью соответствующих поправок. Сравнение полученной кривой с кривой стандартной реверберации дает возможность оценить акустические качества зала (или его модели).

Опыт показал, что получаемая кривая снижения звуковой энергии тем больше отличается от экспоненциальной кривой, чем ближе микрофон расположен к плоскости, имитирующей слушателей, и чем больше коэффициент поглощения этой плоскости отличается от коэффициента поглощения остальных поверхностей помещения. Основной задачей для улучшения акустики залов при их эксплуатации является приближение к условиям стандартной реверберации, являющейся своего рода эталоном. Следует отметить, что вероятность удовлетворения изложенных условий при большем подъеме площади мест для слушателей больше, нежели в случае

горизонтального пола, и при большей высоте зала. Кроме того, целесообразно иметь расчлененные поверхности вертикальных ограждений.

Результаты исследований на моделях различной формы для двух вариантов заполнения приведены на фиг. 5. В ка-

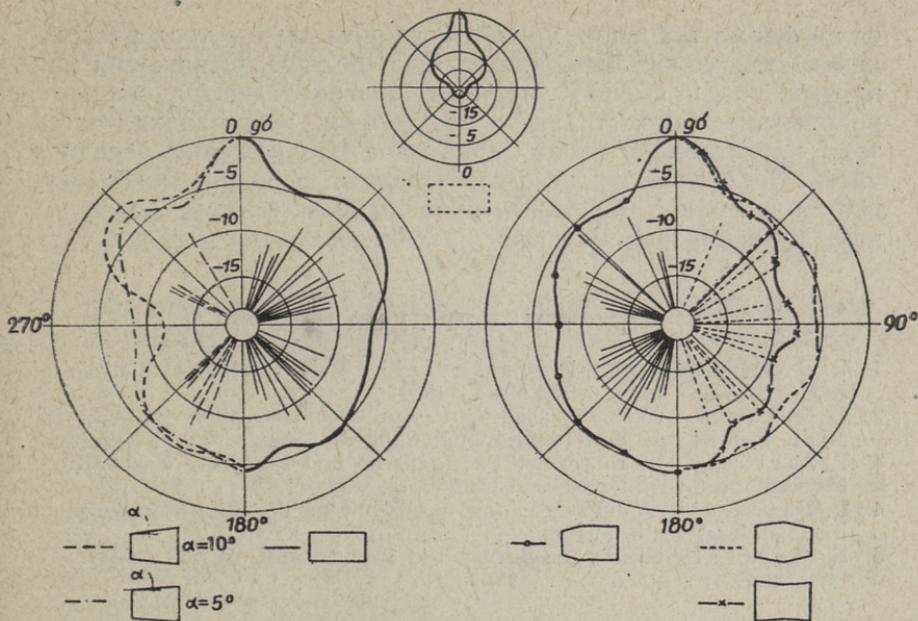


Фиг. 5. Кривые затухания звука для моделей различной формы в случае аналогии «пустого» и заполненного зала

честве аппаратуры применялись: генератор импульсов собственной конструкции, точечный излучатель, спектрометр типа 2111 (Брюль и Кьер) с конденсаторным микрофоном типа 4133, осциллограф С1-4 с фотоприставкой.

б) Диффузность

Для проверки графического метода изучения отражений по направлению их прихода на модели, измерения с помощью остронаправленного микрофона проводились в стационарном режиме. Для повышения направленности микрофона на его капсиль прикреплялось параболическое зеркало диаметром 5 см. В качестве сигнала применялись $1/3$ -октавные полосы белого шума со средней частотой 8, 12,5 и 16 гц, в качестве



Фиг. 6. Примеры результатов исследования моделей на диффузность направлений в стационарном режиме. На диаграммах направленности стержни показывают результаты соответствующего графического анализа

измерителя — спектрометр типа 2111. Масштаб моделирования 1 : 25. Поверхность, занятая слушателями, имитировалась на модели слоем поролона.

Сравнительные результаты измерений для моделей с плоскими поверхностями стен соответствуют условиям графического анализа (см. фиг. 6). На диаграммах направленности приведены также теоретические результаты для интервала 0...150 мсек. Диаграммы показывают, что для исследования диффузности направлений в залах средней вместимости достаточно рассмотреть 5...6 отражений, так как энергия более поздних отражений уже невелика и практически на общее распределение почти не оказывает влияния.

Опыт подтверждает, что форма прямоугольника в плане отвечает требованиям диффузности направлений тем больше, чем менее вытянута ее пропорции. Форма трапеции дает хорошие результаты лишь при весьма небольшом угле расхождения стен (0...5°). Увеличение угла расхождения приводит к ликвидации значительной части эффективных отражений с боковых стен около азимута 90°. Условия диффузности заметно улучшаются при более сложных формах, базирующих-

ся на форме трапеции, причем в данном случае угол расхождения стен может быть значительно больше. Отражения как первых, так и высших порядков распределяются хорошей равномерностью не только в тех случаях, когда задняя часть зала представляет собой зеркальное изображение передней части. Возможны также асимметричные решения (например, прямоугольник с обрезанными передними углами, форма из двух трапеции разных углов расхождения стен и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Bolt, P. Doak, P. Westerfelt. Pulse statistics analysis of room acoustics. JASA, v. 22 Nr. 3, (1950).
2. L. Beranek. Audience absorption and seat absorption in halls for music. Proceedings 3-rd International Congress Acoust. Vol. 1. (1961).
3. T. Jarfas, T. Tarnoczy. Physikalische und subjektive Nachhallzeit. Proceedings 3-rd International Congr. Ac. V. 1. (1961).
4. R. Thiele. Richtungsverteilung und Zeitfolge der Schallrückwürfe in Räumen. Acustica, 3. (1953).
5. E. Meyer. Definition and diffusion in rooms. JASA, 26, 630 (1954).

Х. Х. Лауль, М. Х. Лейбур

ПРАКТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА КВАДРАТНЫХ В ПЛАНЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК ВИДА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

Введение

Расчет железобетонных оболочек вида пологих гиперболических параболоидов производится, как правило, по безмоментной (так назыв. мембранной) теории, результаты которой не согласуются с истинными величинами усилий и распределением их в сечениях оболочки [4].

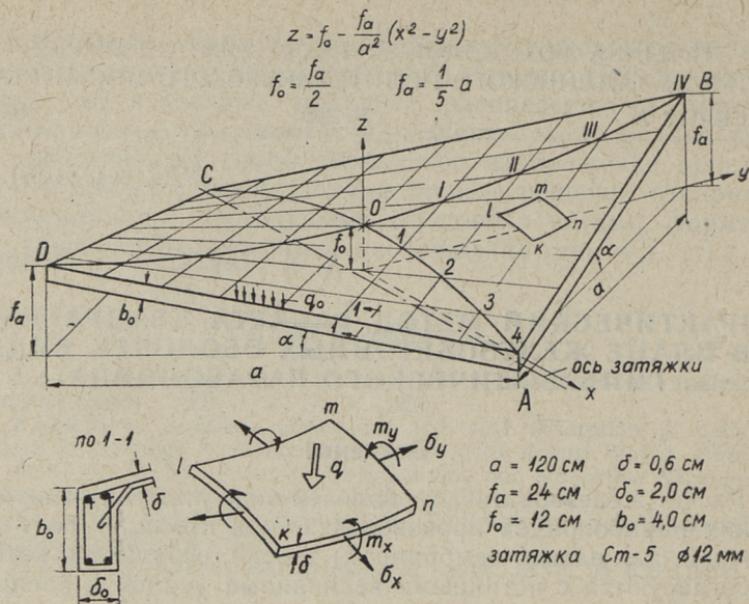
Применение методов теории упругости в настоящей задаче оказывается затруднительным при таком неоднородном материале как железобетон.

Необходимо отметить, что появление трещин в растянутых зонах оболочки (характерна и допустима железобетонным конструкциям) и распространение краевого эффекта на всю криволинейную часть (так как оболочка рассматриваемого типа имеет прямолинейные, т. н. асимптотические края) перераспределяют усилия. По указанным причинам не разработан до настоящего времени точный метод, который нашел бы широкое применение в практике.

В настоящей статье делается попытка изложить приближенный инженерный метод расчета, основой которого являются общеизвестные законы строительной механики в теории железобетона.

1. Метод расчета

Рассматривается квадратная в плане пологая железобетонная оболочка вида гиперболического параболоида, уравнение срединной поверхности и основные геометрические данные которой приведены на фиг. 1. Оболочка опирается на четыре опоры (под углами A, B, C, D) и несет нагрузку: q — интенсивность которой на 1 м^2 горизонтальной проекции можно принять постоянной, и q_0 — собственный вес 1 м горизонтальной проекции бортового элемента.



Фиг. 1. Конструктивная схема оболочки

Основой расчета принимается предельное состояние — разрушение — оболочки. Учитывая результаты экспериментальных исследований [4], оболочка рассматривается в направлении x как «большая» арка, а в направлении y статической схемой является консоль.

а) Задача «большой» арки AOC

В расчет вводятся следующие упрощения:

1) в предельном состоянии опорные реакции обращаются

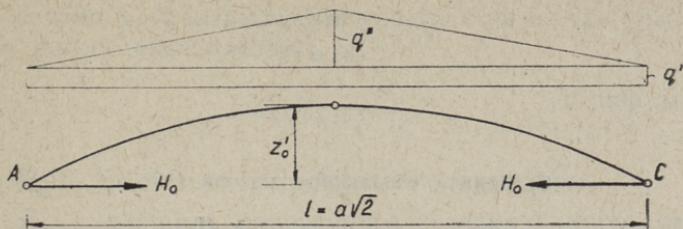
$$R_B = R_D \approx 0 \quad (\text{из опыта});$$

2) напряжение σ_x в криволинейной части воспринимается бетоном;

3) «большая» арка AOC рассматривается трехшарнирной;

4) так как главные параболы пологие, метрика оболочки может быть заменена метрикой плоскости.

Из схемы трехшарнирной арки (фиг. 2), которая несет нагрузку, распределенной по оси AOC от интенсивностей криволинейной части и бортовых элементов следующим образом:



Фиг. 2. Статическая схема «большой» арки

$$q' = 2q_0 \sqrt{2}, \quad (1)$$

$$q'' = aq \sqrt{2}; \quad (2)$$

определяем усилие H_0 в затяжке:

$$H_0 = \frac{q'l^2}{8z'_0} + \frac{q''l^2}{12z'_0}. \quad (3)$$

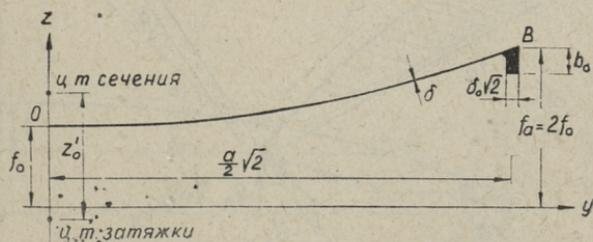
Из (3), учитывая (1) и (2), получим:

$$H_0 = a \sqrt{2} \frac{a^2q + 3aq_0}{6z'_0}, \quad (3')$$

где z'_0 — расстояние между центрами тяжести поперечного сечения «большой» арки и затяжки (фиг. 3). Величина z'_0 определяется из условия статического момента относительно оси y :

$$z'_0 = \frac{1,33f_0 \frac{a}{2} \delta \sqrt{2} + b_0 \delta_0 \left(2f_0 - \frac{b_0}{2} \right) \sqrt{2}}{\frac{a}{2} \delta \sqrt{2} + b_0 \delta_0 \sqrt{2}} + \frac{b_0}{2}. \quad (4)$$

Далее определяется максимальное усилие N_0 в бортовом элементе, пользуясь условием равновесия в углах оболочки А или С, т. е.:



Фиг. 3. Поперечное сечение «большой» арки

$$N_0 = \frac{H_0}{\cos \alpha \sqrt{2}}, \quad (5)$$

где α см. фиг. 1.

б) Задача «большой» консоли OB

В направлении OB возникают в оболочке максимальные растягивающие усилия и происходит разрушение приблизительно по дуге AOC . Поэтому в направлении y нужно предусмотреть расчетную арматуру.

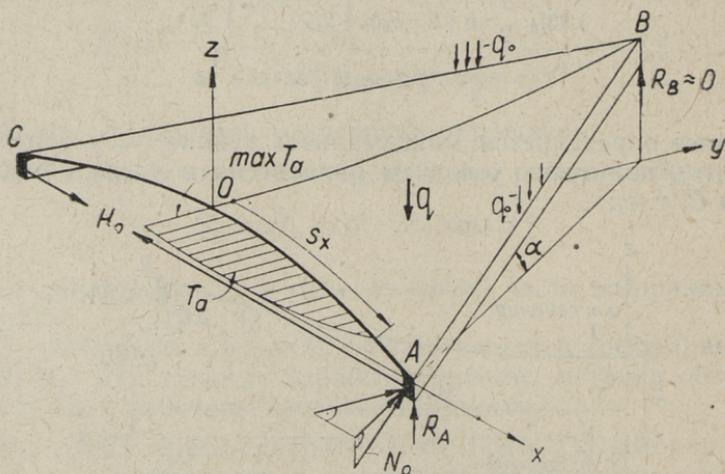
В расчет вводятся следующие допущения:

- 1) оболочка работает трещинами в растянутой зоне;
- 2) в опасном сечении AOC растягивающие усилия принимаются только арматурой;
- 3) сила арматуры T_a на единицу длины поперечного сечения распределяется по закону квадратной параболы, с максимальным ординатом — $\max T_a$ — в точке O ; т. е.:

$$T_a = \max T_a \frac{x_0^2 - x^2}{x_0^2};$$

- 4) опорные реакции $R_B = R_D = 0$;
- 5) предполагается, что поперечное сечение AOC остается плоским.

Схема консоли, которая является основой расчета, при-



Фиг. 4. Статическая схема «большой» консоли

ведена на фиг. 4. Максимальное усилие в арматуре $\max T_a$ на единицу длины выражается:

$$\max T_a = \frac{R_a F_a}{u}, \quad (6)$$

где R_a — расчетное сопротивление арматуры,

F_a — площадь поперечного сечения одного арматурного стержня,

u — шаг стержней арматуры.

Введя
$$\frac{F_a}{u} = \bar{F}_a, \quad (7)$$

получим

$$\max T_a = \max \bar{F}_a R_a. \quad (6')$$

Из условия равновесия внутренних сил на ось y , т. е. $\Sigma Y = 0$, следует:

$$2 \frac{2}{3} \max T_a s_x = N_0 \cos \alpha \sqrt{2}. \quad (8)$$

Учитывая, что

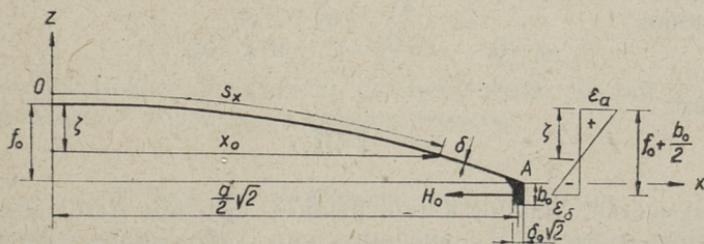
$$s_x \approx x_0$$

и
$$N_0 \cos \alpha \sqrt{2} = H_0, \quad (5')$$

выражение (8) принимает вид:

$$\max T_a = \frac{3H_0}{4x_0}. \quad (8')$$

Расположение нулевой линии ζ (фиг. 5) определяется из гипотезы плоских сечений:



Фиг. 5. Схема определения нулевой линии

$$\zeta = \frac{\varepsilon_a \left(f_0 + \frac{b_0}{2} \right)}{\varepsilon_a + \varepsilon_\sigma}, \quad (9)$$

где ε_a — относительное удлинение арматуры

$$\varepsilon_a = \frac{\max T_a}{F_a E_a}, \quad (10)$$

ε_σ — относительное укорочение бортового элемента в направлении y ,

$$\varepsilon_\sigma = \frac{N_0 \cos \alpha \sqrt{2}}{F_{0\sigma} E_\sigma} = \frac{H_0}{F_{0\sigma} E_\sigma}, \quad (11)$$

E_a, E_σ — модули упругостей соответственно арматуры и бетона,

и
$$F_{0\sigma} = 2\delta_0 b_0 \sqrt{2}. \quad (12)$$

Учитывая (10), (11), (12), (6') и после некоторых преобразований из выражения (9) имеем:

$$\zeta = \frac{2f_0 + b_0}{2 + n \frac{H_0}{R_a \delta_0 b_0 \sqrt{2}}}, \quad (9')$$

где

$$n = \frac{E_a}{E_\sigma}.$$

Величина x_0 , которую содержит условие (8'), определяется из уравнения срединной поверхности оболочки

$$z = f_0 - \frac{f_a}{a^2} (x^2 - y^2). \quad (14)$$

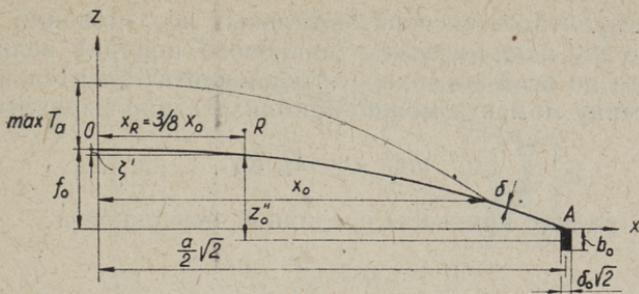
Приняв

$$y = 0, \quad z = f_0 - \zeta \quad \text{и} \quad x = x_0,$$

получим:

$$x_0 = a \sqrt{\zeta / f_a}. \quad (15)$$

Разумеется, усилия в поперечном сечении АОС должны принимать момент M_0 внешних сил «большой» консоли. Таким образом должно быть выполнено условие



Фиг. 6. Схема определения z_0'' . R — равнодействующий усилий T

$$M_0 \leq m z_0'' H_0, \quad (16)$$

где m — коэффициент условия работы конструкции (обычно $m=1$),

z_0'' — плечо внутренних сил (фиг. 6).

Момент «большой» консоли определяется (см. и допущение 4)

$$M_0 = \frac{a^3}{6\sqrt{2}} q + \frac{a^2}{2} q_0 \sqrt{2}. \quad (17)$$

Пользуясь выражением (15) и приняв

$$\xi = \xi', \quad x_R = \frac{3}{8} x_0,$$

имеем

$$\zeta' = \frac{9}{64} \frac{f_a}{a^2} x_0^2. \quad (18)$$

Теперь можем найти

$$z_0'' = f_0 + \frac{b_0}{2} - \zeta'. \quad (19)$$

Так же можно определить распределение усилий и в других сечениях с нормалью в направлении y .

в) Величины изгибающих моментов плиты

В настоящей статье не решаются теоретически вопросы определения величины изгибающих моментов m_x , m_y .

Из результатов экспериментальных исследований [4] следует, что m_x и m_y имеют одинакового порядка величины и они почти по всей поверхности оболочки положительны.

Величину момента можно приблизительно выразить в виде

$$\max m = kq Rq, \quad (20)$$

где R — радиус кривизны срединной поверхности

$$R = \frac{a^2}{2f_a}. \quad (21)$$

Таким образом

$$\max m = \frac{1}{2} kq \frac{a^2}{f_a} \delta. \quad (20')$$

Наилучшее совпадение получим с моментами, измеренными в моделях, если примем

$$k = 0,24.$$

Окончательно можем написать

$$\max m = 0,12 q \frac{a^2}{f_a} \delta. \quad (20'')$$

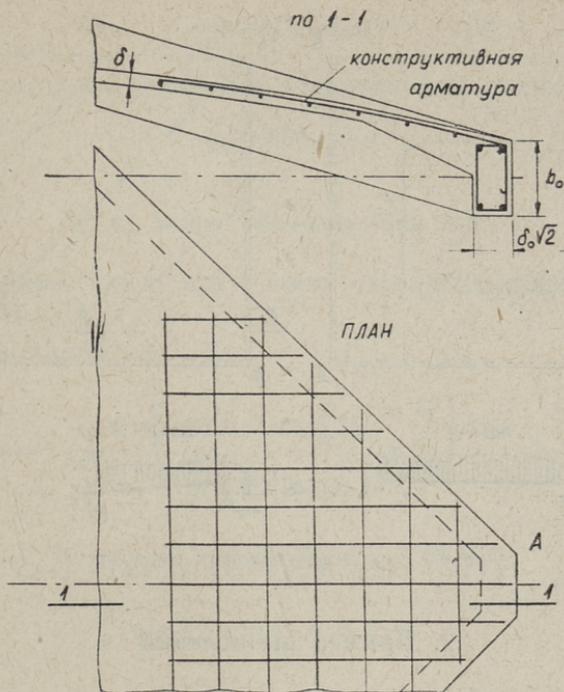
Весьма важно отметить, что при содействии изгибающего момента m_y , продольная сила T_a перемещается на уровне рабочей арматуры, которая располагается в нижней поверхности оболочки (см. пример вычислений). Следовательно, количество арматуры в криволинейной части определяется только от растягивающей усилия T_a .

В направлении x растягивающие напряжения, вызванные изгибающими моментами m_x , как правило, покрываются сжимающими напряжениями σ_x или воспринимаются конструктивной распределительной арматурой.

г) О бортовых элементах

Усилия сжатия в бортовых элементах обычно принимаются бетоном, а растягивающие усилия, возникающие около точек B и D при прохождении упругой стадии, конструктивной арматурой.

В районах A и C возникают в криволинейной части значительные отрицательные изгибающие моменты заделки m_x от



Фиг. 7. Усиление опорного узла

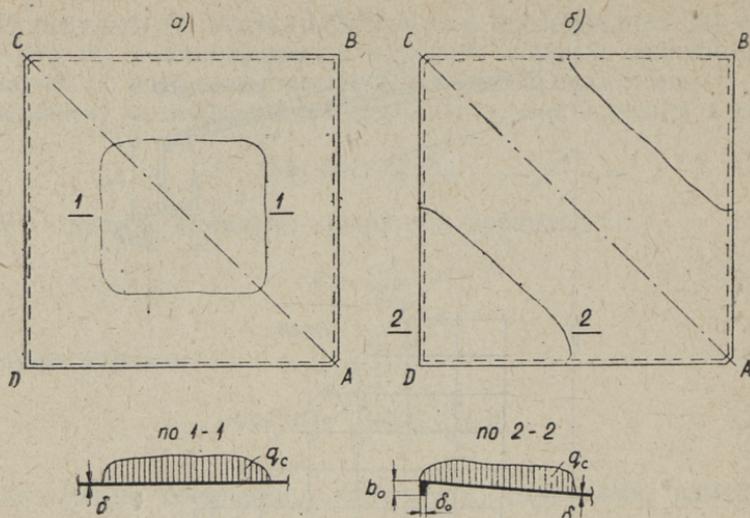
внецентренного сжатия силы затяжки относительно центра тяжести опорных сечений. Поэтому в этих районах нужно увеличить толщину оболочки и предусматривается конструктивная арматура в верхней поверхности оболочки (фиг. 7).

Предлагаемый метод применим и в случаях, если действующие нагрузки сосредоточены более к гребню оболочки (например, вследствие накопления снега, фиг. 8а), или более к опорам *B* и *D* (фиг. 8б). Очевидно первый вариант нагрузки принимается главным образом «большой» аркой и поэтому значительно увеличивается усилие затяжки. В направлении *y* усилия T_a ничтожны из-за малости момента «большой» консоли.

Во втором случае нагрузки (фиг. 8б) повышаются усилия T_a .

Но все же нагрузка должна располагаться симметрично относительно линий главных кривизн.

Ход вычислений иллюстрируется нижеприведенным числовым примером.



Фиг. 8. Варианты снеговых нагрузок

2. Пример вычислений

а) Геометрические и расчетные данные

В качестве примера приводится расчет оболочки, представленной на фиг. 1, со следующими данными:

- плано́вые размеры $a = 12$ м;
- стрела подъема углов $f_a = 2,4$ м;
- стрела подъема конька $f_v = 1,2$ м;
- общая толщина оболочки $\delta = 0,06$ м;
- толщина бортового элемента $\delta_0 = 0,20$ м;
- высота бортового элемента $b_0 = 0,40$ м.

Пользуется:

- бетон — М200;
- арматура C_T — 3, $R_a = 2100$ кг/см² (в криволинейной части оболочки) и A —IV (25 Г 2 С)— $R_a = 3400$ кг/см² (в затяжке).

б) Расчетные нагрузки

Нагрузка оболочки (собственный вес, утепление, кровля и снег):

$$q=410 \text{ кг/м}^2;$$

нагрузка в части бортового элемента (собственный вес):

$$q_0=220 \text{ кг/м.}$$

в) Задача «большой» арки АОС

Определим плечо внутренних сил «большой» арки (см. фиг. 2 и 3).

По (4) имеем

$$z'_0 = \frac{1,33f_0 \frac{a}{2} \delta \sqrt{2} + b_0 \delta_0 \left(2f_0 - \frac{b_0}{2} \right) \sqrt{2}}{\frac{a}{2} \delta \sqrt{2} + b_0 \delta_0 \sqrt{2}} + \frac{b_0}{2} =$$

$$= \frac{1,33 \cdot 1,2 \frac{12}{2} \cdot 0,06 \sqrt{2} + 0,4 \cdot 0,2 \left(2 \cdot 1,2 - \frac{0,4}{2} \right) \sqrt{2}}{\frac{12}{2} \cdot 0,06 \sqrt{2} + 0,4 \cdot 0,2 \sqrt{2}} + \frac{0,4}{2} = 1,91 \text{ м.}$$

Из (3') определяем усилие затяжки

$$H_0 = a \sqrt{2} \frac{a^2 q + 3aq_0}{6z'_0} = 12 \sqrt{2} \frac{12^2 \cdot 0,41 + 3 \cdot 12 \cdot 0,22}{6 \cdot 1,91} = 99,4 \text{ т.}$$

Назначим арматуру в затяжке

$$5 \text{ } \varnothing 27 \text{ ПЛ} = 28,65 \text{ см}^2.$$

Затяжкой воспринимается

$$R_a F_a = 3,400 \cdot 28,65 = 97,5 \approx 99,4 \text{ т.}$$

Максимальное усилие в бортовом элементе

$$N_0 = \frac{H_0}{\cos \alpha \sqrt{2}} = \frac{99,4}{0,981 \sqrt{2}} = 71,7 \text{ т.}$$

N_0 воспринимается бетоном, так как

$$R_{np} F_\sigma = 100 \cdot 20 \cdot 40 = 80000 > 71700 \text{ кг.}$$

Положение нулевой линии находим по (9') (см. и фиг. 5)

$$\zeta = \frac{2f_0 + b_0}{2 + n \frac{H_0}{R_a \delta_0 b_0 \sqrt{2}}} = \frac{2 \cdot 120 + 40}{2 + 10,5 \frac{99400}{2100 \cdot 20 \cdot 40 \sqrt{2}}} = 114,8 \text{ см},$$

из (15) находим

$$x_0 = a \sqrt{\zeta / f_a} = 1200 \sqrt{\frac{114,8}{240}} = 829,9 \text{ см}.$$

Формула (8') дает

$$\max T_a = \frac{3H_0}{4x_0} = \frac{3 \cdot 99,4}{4 \cdot 8,299} = 8,987 \text{ т/м}.$$

По (20'') можем найти:

$$\max m_y = 0,12 q \frac{a^2}{f_a} \delta = 0,12 \cdot 410 \frac{12^2}{2,4} \cdot 0,06 = 177 \text{ кгм/м}$$

и теперь

$$e_0 = \frac{\max m_y}{\max T_a} = \frac{177}{8987} = 0,0197 \text{ м} = 1,97 \text{ см}.$$

Таким образом $\max T_a$ перемещается как раз на уровне нижней арматуры.

Из (6') определяем требуемую площадь расчетной арматуры на пог. метр сечения оболочки

$$\max \bar{F}_a = \frac{\max T_a}{R_a} = \frac{8987}{2100} = 4,28 \text{ см}^2/\text{м},$$

т. е. $9 \varnothing 8 = 4,5 \text{ см}^2/\text{м}$.

Для проверки выполнения условия (16) определяем по (18) (см. фиг. 6)

$$\zeta' = \frac{9}{64} \frac{f_a}{a^2} x_0^2 = \frac{9 \cdot 2,4}{64 \cdot 12^2} 8,299^2 = 0,16 \text{ м}$$

и по (19) плечо внутренних сил

$$z_0'' = f_0 - \zeta' + \frac{b_0}{2} = 1,2 - 0,16 + \frac{0,4}{2} = 1,24 \text{ м}.$$

Изгибающий момент внешних сил в оболочке из задачи «большой» консоли (17)

$$M_0 = \frac{a^3}{6\sqrt{2}} q + \frac{a^2}{2} q_0 \sqrt{2} = \frac{12^3}{6\sqrt{2}} 0,41 + \frac{12^2}{2} 0,22\sqrt{2} = 105,9 \text{ тм},$$

а момент внутренних сил

$$H_0 z_0'' = 99,4 \cdot 1,24 = 123 \text{ тм} > M_0.$$

Таким образом условие (16) выполнено.

3. Заключение

В настоящей работе предлагаемый инженерный метод расчета имеет ряд особенностей, а именно:

1) Метод учитывает специфику железобетона: его статическую работу трещинами в растянутых зонах, исходя из предельного состояния — разрушения.

2) Напротив безмоментной теории, учитывается в расчетах влияние содействия и нагрузки бортовых элементов и приблизительно оцениваются величины изгибающих моментов в криволинейной части оболочки.

3) Настоящий метод позволяет рассчитывать и оболочки, несущие нагрузки, отличающиеся в некоторой степени от равномерного распределения, если только нагрузка остается симметричным относительно главных парабол оболочки.

4) Расчеты просты, так как пользуемся общеизвестными законами строительной механики и теории железобетона.

5) Получается экономия в расходе стали, особенно в затяжке, где понижение количества стали до 20% (напомним, что количество арматуры затяжки составляет приблизительно 50% от общего расхода стали на всю конструкцию).

Дальнейшего исследования требует уточнение определения изгибающих моментов плиты оболочки. Распространение предлагаемого метода расчета на прямоугольные в плане оболочки требует также дальнейших экспериментов и исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Строительные нормы и правила, часть 2, раздел В, глава 1. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования. 1962.
2. В. З. В л а с о в. Общая теория оболочек. 1949.
4. М. Л е й б у р. Экспериментальное исследование квадратных в плане железобетонных оболочек вида гиперболического параболоида.
5. В. Д. Р а й з е р. К расчету линейчатых оболочек по безмоментной теории. Строительная механика и расчет сооружений № 3, 1962.

М. Х. Лейбур

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНЫХ В ПЛАНЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК ВИДА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА*

Введение

В настоящее время большое распространение получили оболочки покрытий, срединная поверхность которых очерчена по поверхности переноса отрицательной гауссовой кривизны. С точки зрения архитектурной выразительности и простоты возведения особый интерес представляют прямоугольные и квадратные в плане покрытия вида гиперболических параболоидов.

Расчет названных конструкций производится, как правило, по безмоментной-мембранной теории, результаты которой вызывают по отношению к железобетонным оболочкам некоторые сомнения. Также недостаточная экспериментальная изученность работы таких оболочек требует проведения экспериментальных исследований.

Особо остро поднимаются вопросы расчета и конструирования таких оболочек с точки зрения пригодности их для резки на одинаковые элементы, а также выявления характера их статической работы для упрощения стыковых соединений.

Для оценки результатов безмоментной теории нами были моделированы две квадратные в плане железобетонных оболочки вида гиперболического параболоида и произведено их экспериментальное исследование.

Разумеется результаты испытаний не могут быть критерием оценки пригодности мембранной теории, но все же хотя бы качественно можно судить о характере работы таких оболочек.

*Работа выполнена под руководством проф., докт. техн. наук Х. Х. Лауля.

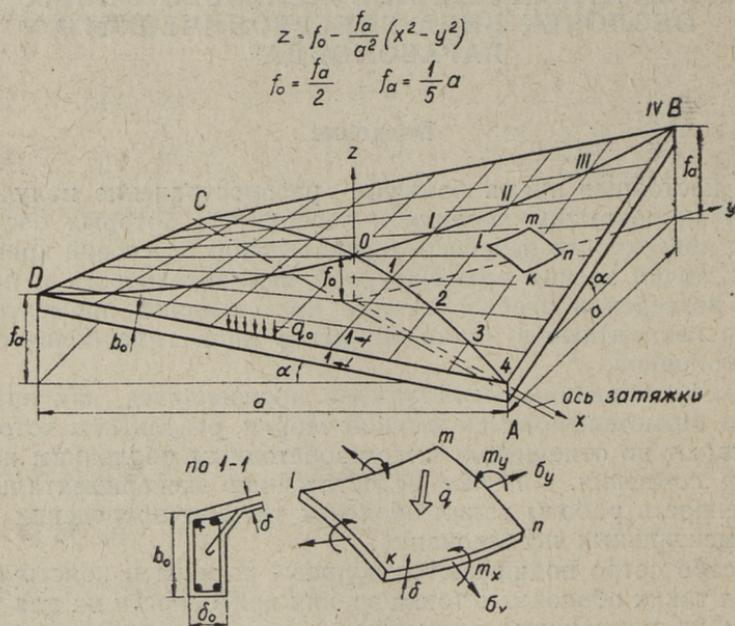
ainmet et
rajatuzim
kelgi u ta

1. Моделирование

а) Геометрические характеристики модели

При моделировании мы исходили из равенства напряжений модели и действительной конструкции, учитывая при том изменение деформаций линейной и сосредоточенной нагрузки, вызванное масштабом моделирования, которое было выбрано 1 : 10.

Основные размеры и общий вид модели представлены на фиг. 1 и 2.



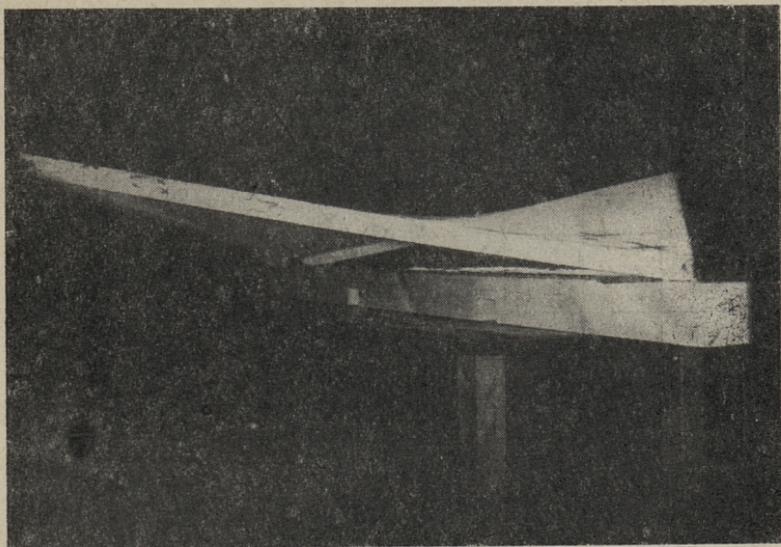
Фиг. 1. Конструктивная схема модели оболочки

б) Опалубка и бетонирование

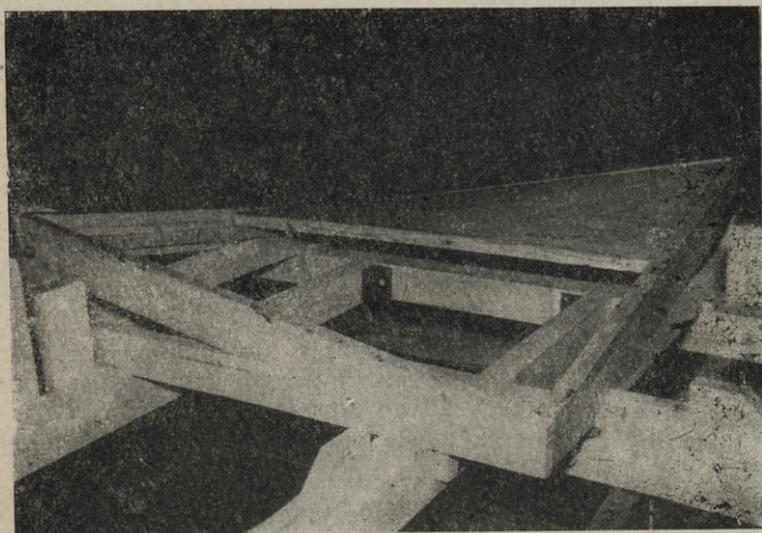
Для бетонирования моделей приготовили сборную деревянную опалубку (фиг. 3 и 6).

Основой опалубки являются четыре направляющих деревянных треугольника, на которые закрепляются два пакетных щита криволинейной части и доски опалубки бортовых элементов.

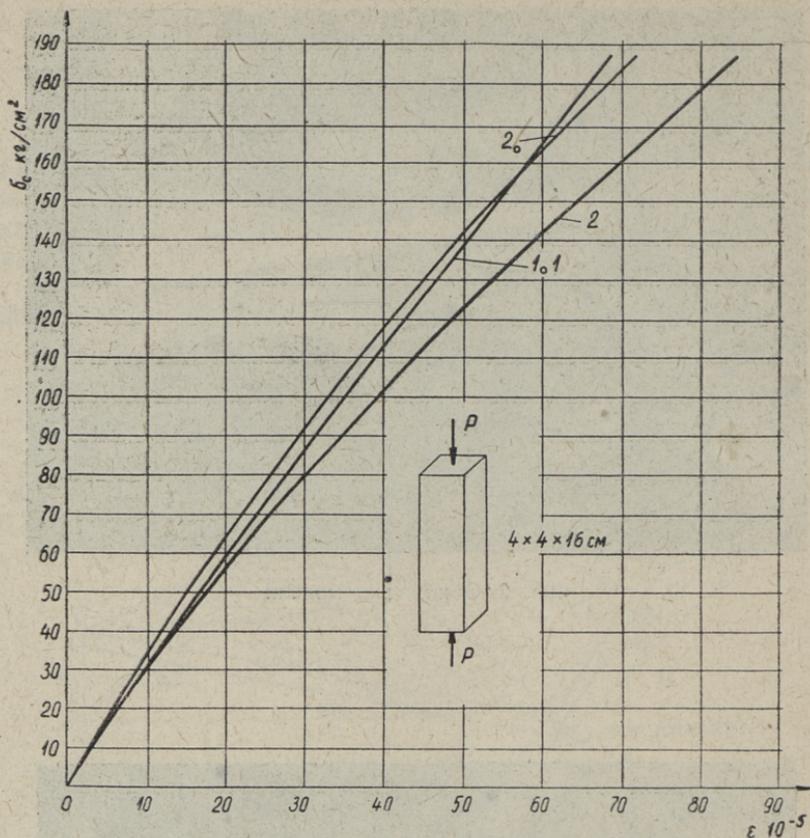
Вся опалубка опирается на несущую крестообразную раму.



Фиг. 2. Общий вид модели



Фиг. 3. Опалубка модели в процессе сборки



Фиг. 4. Графики укорочения образцов:

- 1, 2 — образцы криволинейной части соответственно первой и второй модели, 1, 2₀ — образцы бортового элемента

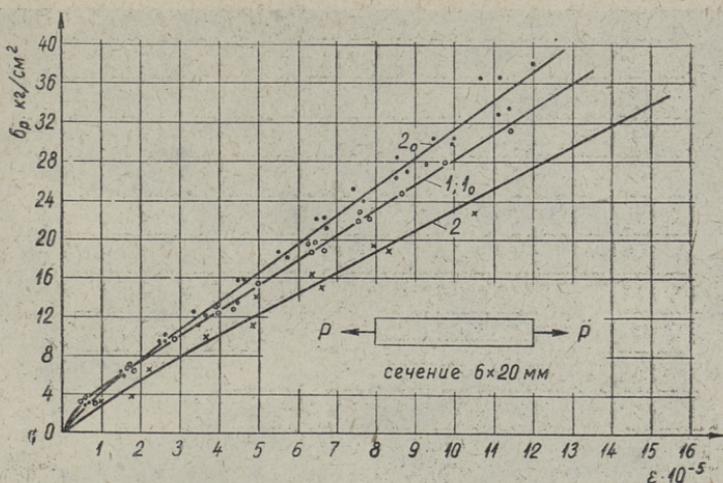
В целях защиты от увлажнения древесины, опалубка пропитывалась олифой, а щиты криволинейной части дополнительно покрыли шпаклевкой и лаком.

Бортовые элементы бетонировали вибрированием. Были оставлены отверстия для затяжки и забетонированы проволоки для передачи нагрузки на бортовой элемент.

Криволинейную часть бетонировали по маякам, а уплотнение провели трамбовкой и заглаживанием.

Распалубка модели не представляла никаких трудностей.

Для лучшего обнаружения трещин все поверхности модели были выбелены.



Фиг. 5. Графики удлинения образцов:
 1, 2 — образцы криволинейной части соответственно первой и второй модели, 1₀, 2₀ — образцы бортового элемента

в) Раствор

Модели изготавливались из цементного раствора 1:2,5 (портланд-цемент марки «400» и песок, не содержащий частиц диаметром более 2,5 мм). Водоцементное отношение раствора в бортовом элементе — 0,44, а в криволинейной части — 0,38.

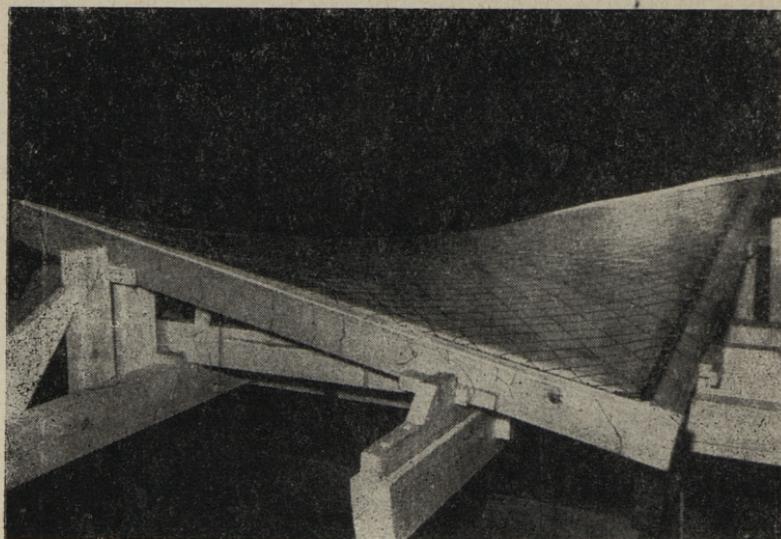
Одновременно бетонированием моделей были изготовлены образцы: призмы сжатия $4 \times 4 \times 16$ см и балочки растяжения поперечным сечением $0,6 \times 2,0$ см, твердение которых происходило в одинаковых условиях с оболочками. В день испытания модели были определены напряжения и деформации образцов (фиг. 4, 5).

Представленные графики при помощи сравнения деформаций моделей с деформациями образцов дают возможность определить напряжения в оболочках.

г) Арматура

Криволинейная часть модели армирована сеткой из проволоки $d=1,0$ мм ($\sigma_p = 7650$ кг/см²), которая располагается в срединной поверхности оболочки (фиг. 6); бортовые элементы снабжены каркасом из $4 \varnothing 2$ мм ($\sigma_p = 8600$ кг/см²) и хомутов $\varnothing 1,0$ мм, шаг которых 5 см (фиг. 1).

Углы модели А и С соединяются затяжкой из $C_T - 5 \varnothing 12$ мм.



Фиг. 6. Опалубка с арматурой

2. Испытание моделей

а) Загружение

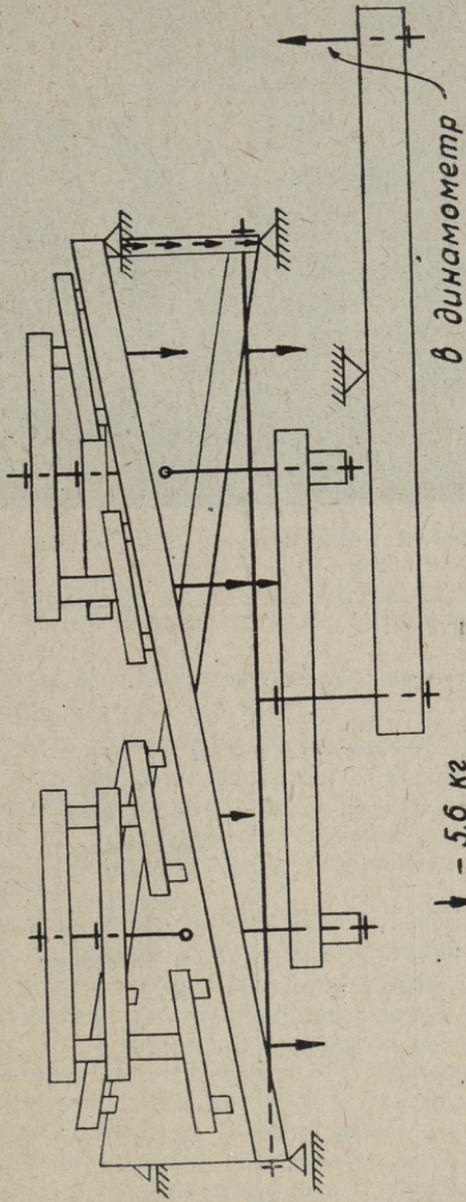
Модель опиралась на четыре опоры и была установлена на специальный стенд испытаний, где проводилось нагружение.

Сила, развиваемая динамометром, передавалась при помощи рычажной системы на поверхность модели, где ее 32 рейками распределили на всю криволинейную часть оболочки (фиг. 7 и 8).

Линейную нагрузку, соответствующую собственному весу бортового элемента оболочки (учитывая, конечно, масштаб моделирования), передавали подвешиванием тяжестей на заранее забетонированные в бортовой элемент проволоки.

б) Измерение деформаций

Продольные деформации измерялись проволочными датчиками сопротивления с базой 25,0 мм, сопротивление ($119,0\Omega \div 120,5\Omega$), наклеянными на верхнюю и нижнюю поверхность криволинейной части модели (52 штуки), на бортовой элемент (10 штук) и на металлическую затяжку (2 штуки) (фиг. 9).



Фиг. 7. Схема загрузки

Регистрация деформаций (относительное удлинение, укорочение — ε) производилась при помощи специального прибора ЭИД (электрический измеритель деформаций) (фиг. 8).

Прогибы в плоскостях главных кривизн и бортовых элементов, а также возможные вертикальные перемещения опор измерялись индикаторами (10 штук) (фиг. 9).

Для определения опорных реакций R_A и R_C была сконструирована из полосовой стали в статической схеме простой балки установка, на которую в середину пролета приклеили проволочный датчик сопротивления (фиг. 9 и по 1—1). После тарировки, измеряя при загрузке модели ε по ЭИД, определяем величину реакции.

Общий вид модели на стенде перед испытанием см. фиг. 8.

3. Результаты испытаний

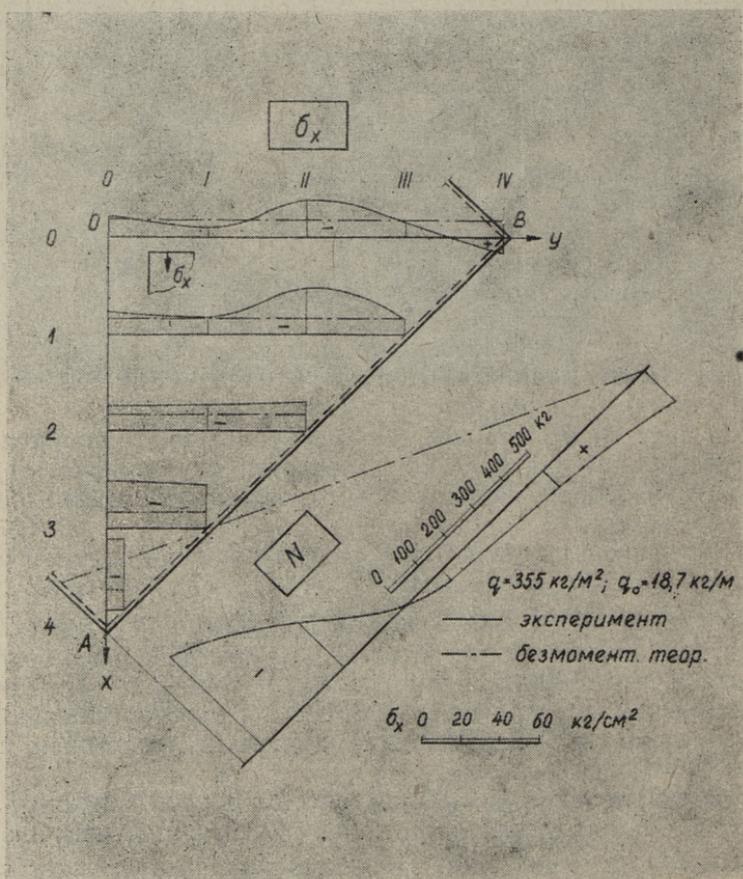
В настоящей статье можем изложить только некоторые результаты испытаний (нагрузка модели $q=355 \text{ кг/м}^2$; $q_0=18,7 \text{ кг/м}$) двух оболочек (фиг. 10, 11, 12, 13, 14).

На фиг. 10 и 11 видим, что распределение напряжений в криволинейной части резко отличается от напряжений безмоментной теории. Изменяется и нормальное усилие бортового элемента.

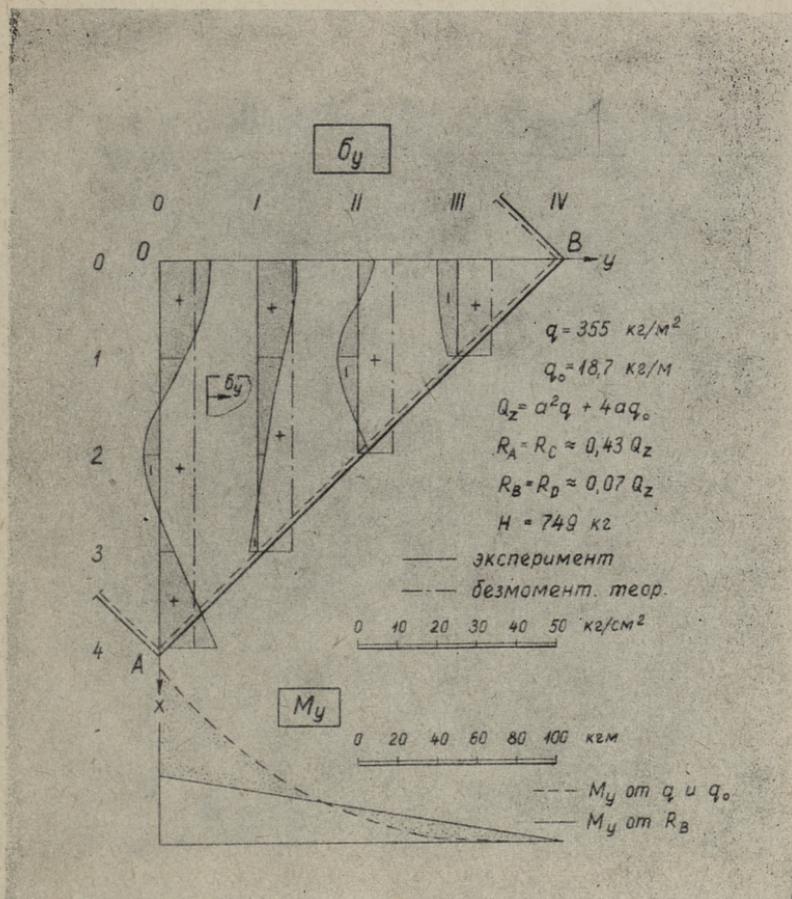
Полученные из экспериментов соотношения величин опорных реакций $R_A=R_C \approx 0,43Q_z$ и $R_B=R_D \approx 0,07Q_z$, где общая нагрузка оболочки $Q_z = a^2q + 4aq_0$, остаются в упругой стадии постоянными. Этот весьма важный результат показывает, что значительная часть нагрузки передается по направлению x , т. е. статической схемой работы оболочки является арка AOC переменным поперечным сечением с затяжкой.

По направлению y можем рассматривать оболочку как консоль OB нагрузкой q , q_0 и R_B . Суммарный изгибающий момент M_y консоли (фиг. 11 заштрихованный) меняет знак. Этим объясняется растягивающие усилия в бортовых элементах (фиг. 10) и напряжения сжатия σ_y в криволинейной части в сечениях II и III (фиг. 11). Нулевая точка $M_y=0$ хорошо совпадает с точкой $N=0$ и районом, где в криволинейной части оболочки σ_y меняет знак.

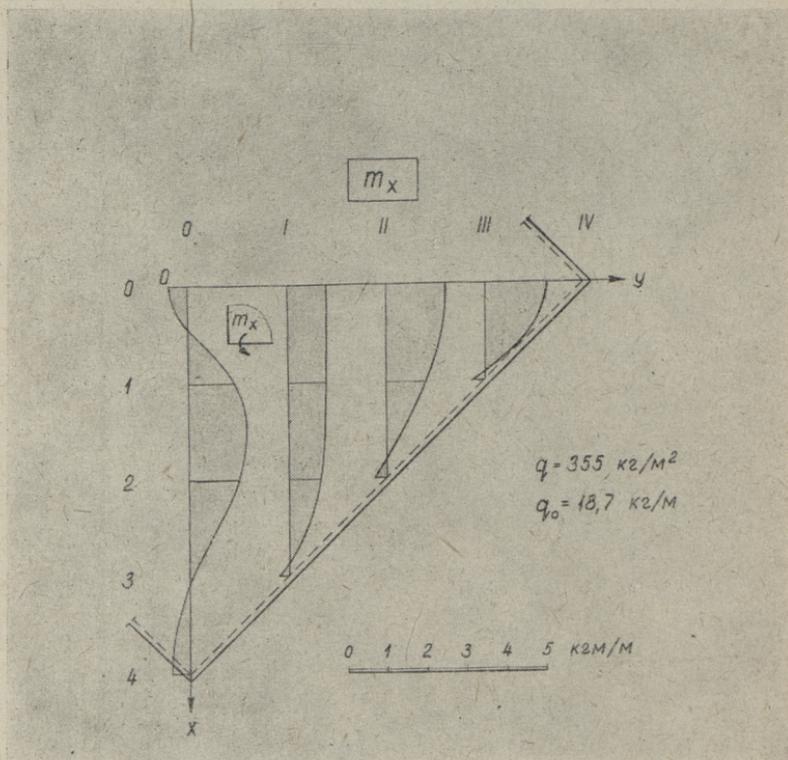
Исследование моделей показывает, что в криволинейной части появляются значительные изгибающие моменты m_x и m_y (фиг. 12 и 13), которые нужно учитывать при армировании. Изгибающие моменты в бортовых элементах оказались ничтожными.



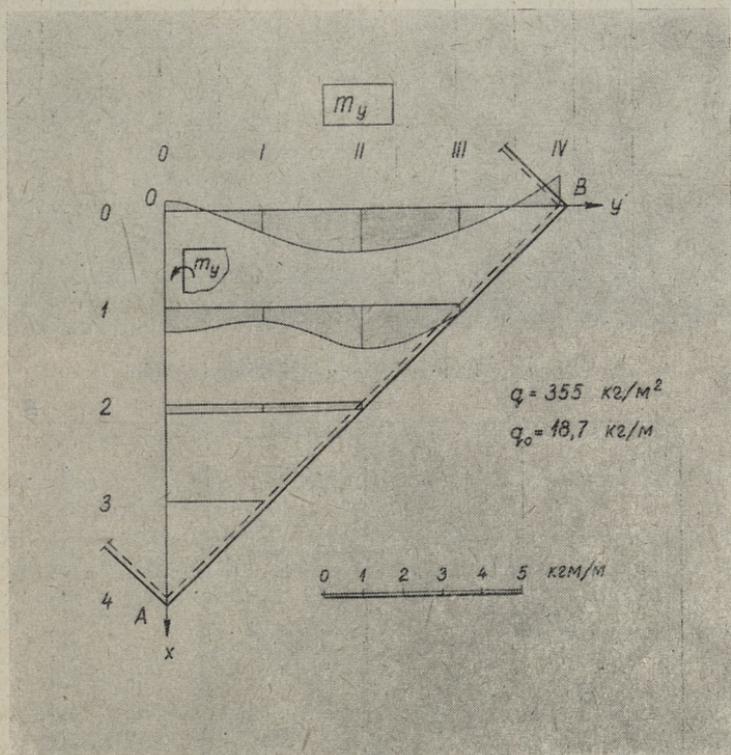
Фиг. 10. Распределение продольных усилий в сечениях модели



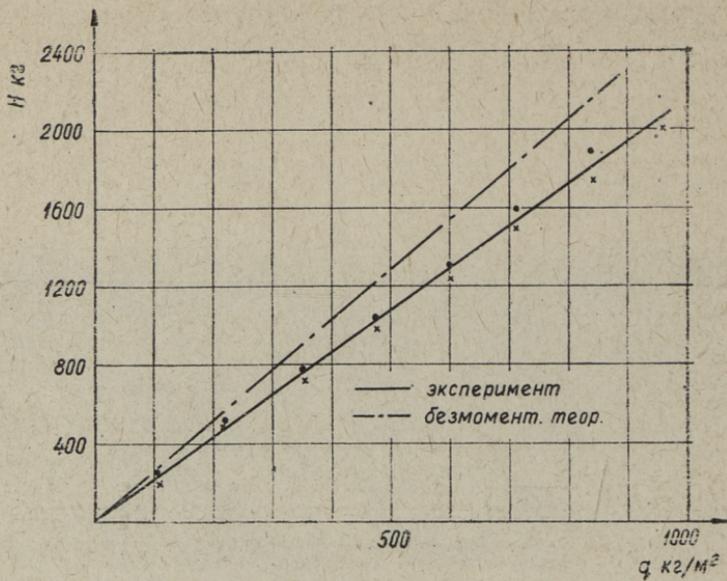
Фиг. 11. Распределение продольных усилий и изгибающего момента консоли в сечениях модели



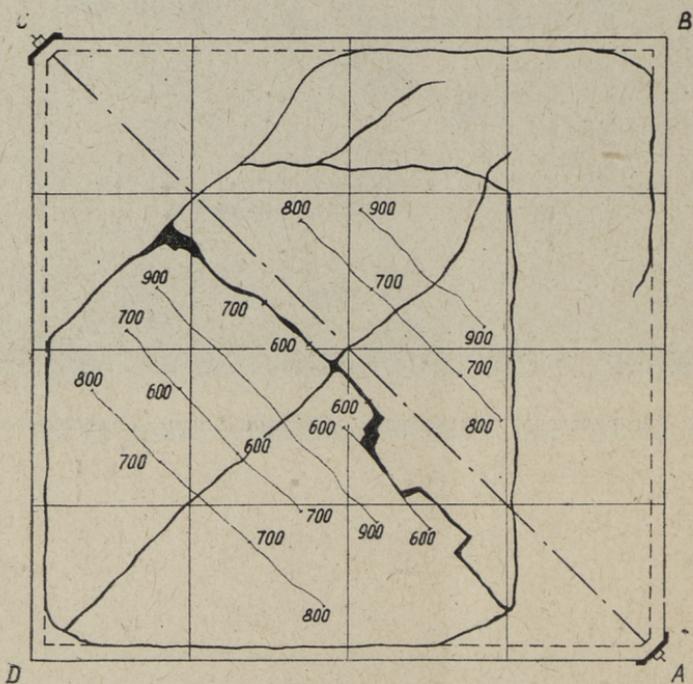
Фиг. 12. Распределение изгибающих моментов плиты в сечениях модели



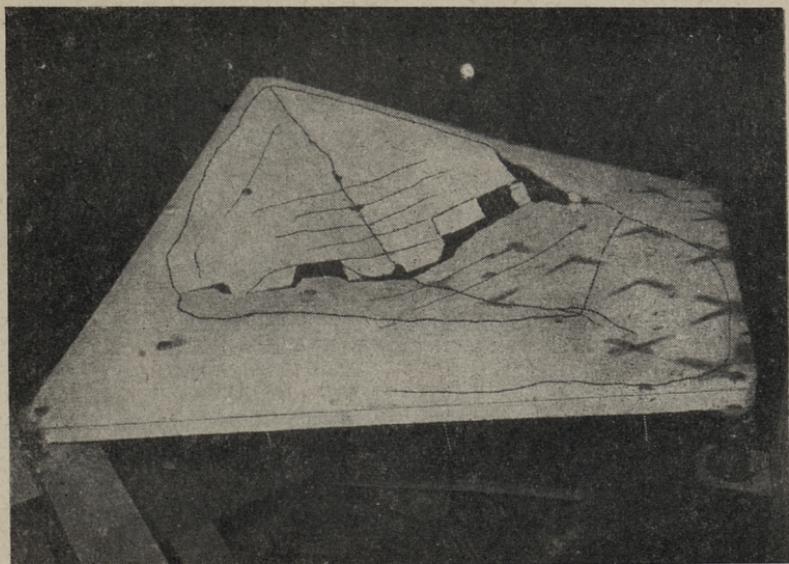
Фиг. 13. Распределение изгибающих моментов плиты в сечениях модели



Фиг. 14. График усилий затяжки модели



Фиг. 15. Схема трещин модели



Фиг. 16. Общий вид разрушения модели

Безмоментная теория дает увеличенное значение растягивающей усилия N затяжки (фиг. 14).

До нагрузки $q=355 \text{ кг/м}^2$ удлинение бетона криволинейной части оболочки меньше предельного. С возрастанием поверхностной нагрузки (линейная нагрузка осталась $q_0 = \text{const.} = 18,7 \text{ кг/м}$) проявляются трещины (см. фиг. 15). Цифры отмечают нагрузку в кг/м^2 . Первые из них были обнаружены при $q=600 \text{ кг/м}^2$.

Важно отметить, что с возрастанием нагрузки не происходит раскрытия трещин, а в связи с перераспределением усилий появляются новые трещины. Оболочка покрывается почти равномерно распределенными трещинами. Само-собой разумеется, что распределение трещин сравнительно на большую площадь не ухудшает эксплуатационные качества оболочки.

Когда напряжения в арматуре достигают предела прочности на растяжение, оболочка разрушается и одновременно раздавливается свод.

Трещины разрушения представлены на фиг. 15 жирными линиями (см. и фиг. 16).

Несущую способность оболочки можно характеризовать коэффициентом запаса

$$\kappa_p = \frac{q_p}{q^H} = \frac{1140}{310} = 3,7,$$

где q_p и q^H соответственно разрушающая и нормативная (собственный вес, утепление и снег) нагрузка, в $\text{кг}/\text{м}^2$.

Экспериментальное исследование моделей квадратных в плане железобетонных оболочек дало следующие результаты и выводы:

1) безмоментная теория не может быть основой расчета исследуемых оболочек;

2) выявилась основная схема статической работы оболочки;

3) учитывая обстоятельство, что оболочка продолжает успешно работать после возникновения трещин в растянутой зоне, основой расчета нужно принимать предельное состояние — разрушение — оболочки.

Практический метод расчета приведен в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Lau. Raudoetoon I ja II, Tallinn, 1960 ja 1962.
2. В. З. В л а с о в. Общая теория оболочек. 1949.
3. К. Финк и Х. Рорбах. Измерение напряжений и деформаций. 1961.
4. Х. Лауль и М. Лейбур. Практический метод расчета квадратных в плане железобетонных оболочек вида гиперболического параболоида.
5. G. Schleicher. Die Auswertung von Modelluntersuchungen und Dehnungsmessungen. Bauplanung — Bautechnik № 5, 1962.



СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА I

Таллинский политехнический институт

Редактор Х. Лауль

Технический редактор Я. Мыттус

Сдано в набор 1 X 1962 Подписано к печати 19 XI 1963.
Бумага 60 X 90 1,16. Печатных листов 17. Учетно-издательских
листов 16,35. Тираж 600 экз. МВ-08069. Заказ 6130.
Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк 2.

Цена 1 руб. 14 коп.

64

Цена 1 руб. 14 коп.