TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 62 1955

Н. В. ПАЛУВЕР

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

ЭСТОНСКОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИН 1955

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 62 1955

Н. В. ПАЛУВЕР

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

ЭСТОНСКОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИН 1955

ОГЛАВЛЕНИЕ

Н. В. Палувер.

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ.

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярну маантеэ 10.

*

Редактор А. Гаршнек.
Технический редактор М. Аардма.
Корректор Н. Круглова.

Сдано в набор 28 II 1955. Подписано к печати 9 IV 1955. Бумага 54×84, 1/16. Печатных листов 0,5. По формату 60×92 печатных листов 0,41. Учетно-издательских листов 0,27. Тираж 800. МВ-07279. Заказ № 1183.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк 2.

Цена 25 коп.

Из итерационных методов, позволяющих осуществить непосредственное разложение многочлена на множители степени выше первой, наиболее эффективными являются: метод Лина [1], [2], метод Фридмана [3] и метод Бэрстоу, изложенный Олвером в [4].

Способы ускорения итерационного процесса в методе Лина даны в работах Эйткина [5] и Белостоцкого [6].

В настоящей работе излагается метод, являющийся в некотором смысле аналогом метода Ньютона и позволяющий также осуществить итерационное разложение многочлена на нелинейные множители.

§ 1. ОСНОВЫ МЕТОДА

Пусть дан многочлен $F_n(x)$ степени n с вещественными коэффициентами:

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} \tag{1}$$

и пусть:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^{m-k} \quad \text{и} \quad Q_{n-m}(x) = \sum_{k=0}^{n-m} b_k x^{n-m-k}$$

будут множителями $F_n(x)$, степени m и степени $n-m$.

Тогда:

$$P_m(x) = \frac{F_n(x)}{Q_{n-m}(x)}. \tag{2}$$

Пусть далее $P_m^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k^{(0)} x^{m-k}$ будет достаточно хорошим приближением множителя $P_m(x)$[1]. Тогда после

[1] Относительно условий сходимости итерационного процесса пока ничего определенного сказать нельзя.

деления $F_n(x)$ на $\overset{(o)}{P}_m(x)$ в порядке убывающих степеней x, можно придать $F_n(x)$ вид:

$$F_n(x) = \overset{(o)}{P}_m(x) \cdot \overset{(o)}{Q}_{n-m}(x) + \overset{(o)}{R}_{m-1}(x) , \qquad (3)$$

где частное $\overset{(o)}{Q}_{n-m}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-m} \overset{(o)}{b}_k \, x^{n-m-k}$ будет приближением множителя $Q_{n-m}(x)$, а $\overset{(o)}{R}_{m-1}(x)$ — остаток степени $m-1$.

Если $n-m \geqslant m$, то после деления $\overset{(o)}{Q}_{n-m}(x)$ на $\overset{(o)}{P}_m(x)$ в порядке убывающих степеней x, можем и $\overset{(o)}{Q}_{n-m}(x)$ записать в виде:

$$\overset{(o)}{Q}_{n-m}(x) = \overset{(o)}{P}_m(x) \cdot \overset{(o)}{T}_{n-2m}(x) + \overset{(o)}{S}_{m-1}(x) , \qquad (4)$$

где $\overset{(o)}{T}_{n-2m}(x)$ — частное, а $\overset{(o)}{S}_{m-1}(x)$ — остаток степени $m-1$.

Если же $n-m<m$, то $\overset{(o)}{S}(x) = \overset{(o)}{Q}_{n-m}(x)$.

Обозначим:

$$\Delta_m P(x) = P_m(x) - \overset{(o)}{P}_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \delta_k \, x^{m-k} , \qquad (5)$$

где $\delta_k = a_k - \overset{(o)}{a}_k$, $(k=0, 1, 2, \ldots, m)$.

Подставив в (2) вместо $Q_{n-m}(x)$ его приближение $\overset{(o)}{Q}_{n-m}(x)$ и принимая во внимание (3), (4) и (5), получим приближенное равенство:

$$\overset{(o)}{P}_m(x) + \Delta_m P(x) \approx \frac{\overset{(o)}{P}_m(x) \cdot \overset{(o)}{Q}_{n-m}(x) + \overset{(o)}{R}_{m-1}(x)}{\overset{(o)}{P}_m(x) \cdot \overset{(o)}{T}_{n-2m}(x) + \overset{(o)}{S}_{m-1}(x)} . \qquad (6)$$

Ограничим временно область изменения x множеством M корней $\overset{(o)}{P}_m(x)$. Тогда $\overset{(o)}{P}_m(x) \equiv 0$ на M и (6) примет вид:

$$\Delta_m P(x) \approx \frac{\overset{(o)}{R}_{m-1}(x)}{\overset{(o)}{S}_{m-1}(x)} . \qquad (7)$$

Будем делить $\overset{(o)}{R}_{m-1}(x)$ на $\overset{(o)}{S}_{m-1}(x)$ в порядке возрастающих степеней x до получения частного $\overset{(o)}{\Delta_m} P(x)$ степени m

$$\overset{(o)}{\Delta_m} P(x) = \sum_{k=0} \overset{(o)}{\delta_k} x^{m-k} . \tag{8}$$

Взяв $\overset{(o)}{\Delta_m} P(x)$ за приближение поправки $\Delta_m P(x)$, подставим его в (7) и получим:

$$\overset{(o)}{\Delta_m} P(x) \approx \frac{\overset{(o)}{R}_{m-1}(x)}{\overset{(o)}{S}_{m-1}(x)} . \tag{9}$$

Если снять ограничение, наложенное на область изменения x, то (9) можно переписать в виде:

$$\overset{(1)}{P}_m(x) \approx \overset{(o)}{P}_m(x) + \frac{\overset{(o)}{R}_{m-1}(x)}{\overset{(o)}{S}_{m-1}(x)} , \tag{10}$$

где $\overset{(1)}{P}_m(x) = \overset{(o)}{P}_m(x) + \overset{(o)}{\Delta_m} P(x)$ — новое приближение множителя $P_m(x)$.

Для i-го приближения итерационная формула (10) перепишется окончательно в виде:

$$\overset{(i)}{P}_m(x) \approx \overset{(i-1)}{P}_m(x) + \frac{\overset{(i-1)}{R}_{m-1}(x)}{\overset{(i-1)}{S}_{m-1}(x)} . \tag{11}$$

Процесс будет сходящимся, если при $i \to \infty$ будет $\overset{(i)}{R}_m(x) \to 0$ и $\overset{(i)}{S}_{m-1}(x) \to S(x)$, где $S(x)$ — предельная функция последовательности $\left\{\overset{(i)}{S}_{m-1}(x)\right\}$. Если при выбранном $\overset{(o)}{P}_m(x)$ процесс сходится, то метод дает возможность осуществить разложение $F_n(x)$ на множители.

§ 2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА

При практическом применении метода для численного решения алгебраических уравнений, можно за исходное приближение $\overset{(o)}{P}_m(x)$ взять, как это делается и в методе Лина, многочлен, получающийся при делении последних $m+1$ членов $F_n(x)$ на коэффициент при x^m. При этом следует отметить, что если $F_n(x)$ является многочленом четной степени, то и $\overset{(0)}{P}_m(x)$ следует выбрать четной степени, за исключением случаев, когда наперед известно, что $F_n(x)$ имеет хотя бы одну пару вещественных корней.

Деление на коэффициент при x^m не увеличивает объема вычислений, но зато позволяет сравнивать коэффициенты при степенях x в последовательных приближениях.

Согласно изложенному в § 1, одна итерация будет состоять из следующих этапов:

1) Многочлен $F_n(x)$ делят в порядке убывающих степеней x на $\overset{(0)}{P}_m(x)$ до получения остатка $\overset{(0)}{R}_{m-1}(x)$.

2) Полученное от первого деления частное $\overset{(0)}{Q}_{n-m}(x)$ делят на $\overset{(0)}{P}_m(x)$ в порядке убывающих степеней x до получения остатка $\overset{(0)}{S}_{m-1}(x)$.

3) $\overset{(0)}{R}_{m-1}(x)$ делят на $\overset{(0)}{S}_{m-1}(x)$ в порядке возрастающих степеней x до получения частного $\overset{(0)}{\Delta_m} P(x)$.

4) Вычисляют $\overset{(1)}{P}_m(x) = \overset{(0)}{P}_m(x) + \overset{(0)}{\Delta_m} P(x)$, который после деления на коэффициент при x^m берется за новое приближение.

В качестве примера выделим множитель второй степени из многочлена:

$$F_4(x) = x^4 + 16x^3 + 71x^2 + 122x + 120.$$

За исходное приближение возьмем многочлен:

$$\overset{(0)}{P}_2(x) = x^2 + 1{,}7x + 1{,}7,$$

полученный делением трех последних членов $F_4(x)$ на коэффициент при x^2. [2]

Покажем подробно ход вычислений за одну итерацию.

1. Делим $F_4(x)$ на $\overset{(0)}{P}_2(x)$ в порядке убывающих степеней x:

[2] Этот пример, при таком же исходном приближении, решен методом Лина Эйткином в [5] и Белостоцким [6].

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
1 & +16 & +71 & +122 & +120 & 1 & +1{,}7 & +1{,}7 \\ \cline{6-8}
1 & +1{,}7 & +1{,}7 & & & 1 & +14{,}300 & +44{,}990 \\ \cline{1-5}
 & +14{,}300 & +69{,}300 & +122 & & & & \\
 & +14{,}300 & +24{,}310 & +24{,}310 & & & & \\ \cline{1-5}
 & & +44{,}990 & +97{,}690 & +120 & & & \\
 & & +44{,}990 & +76{,}483 & +76{,}483 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & +21{,}207 & +43{,}517 & & &
\end{array}$$

Получили: $\overset{(0)}{Q}_2(x) = x^2 + 14{,}300\,x + 44{,}990$

и $\overset{(0)}{R}_1(x) = 21{,}207\,x + 43{,}517.$

2) Делим $\overset{(0)}{Q}_2(x)$ на $\overset{(0)}{P}_2(x)$ в порядке убывающих степеней x:

$$\begin{array}{rrr|rrr}
1 & +14{,}300 & +44{,}990 & 1 & +1{,}7 & +1{,}7 \\ \cline{4-6}
1 & +1{,}7 & +1{,}7 & 1 & & \\ \cline{1-3}
 & +12{,}600 & +43{,}290 & & &
\end{array}$$

Получили: $\overset{(0)}{S}_1(x) = 12{,}600\,x + 43{,}290.$

3) Делим $\overset{(0)}{R}_1(x)$ на $\overset{(0)}{S}_1(x)$ в порядке возрастающих степеней x:

$$\begin{array}{rrr|rrr}
43{,}517 & +21{,}207 & & 43{,}290 & +12{,}600 & \\ \cline{4-6}
43{,}517 & +12{,}663 & & 1{,}005 & +0{,}197 & -0{,}057 \\ \cline{1-2}
 & +8{,}544 & & & & \\
 & +8{,}544 & +2{,}482 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -2{,}482 & & & \\
 & & -2{,}482 & & & \\ \cline{3-3}
\end{array}$$

Получили: $\overset{(0)}{\Delta_2} P(x) = -0{,}057\,x^2 + 0{,}197\,x + 1{,}005$

и $\overset{(1)}{P}_2(x) = 0{,}943\,x^2 + 1{,}897\,x + 2{,}705$

или $\overset{(1)}{P}_2(x) = x^2 + 2{,}012\,x + 2{,}868.$

Вторая итерация дает:

$\overset{(1)}{Q}_2(x) = x^2 + 13{,}98800\,x + 39{,}98814,$

$\overset{(1)}{R}_1(x) = 1{,}42628\,x + 5{,}31401,$

$$S_1^{(1)}(x) = 11{,}97600\,x + 37{,}12014,$$

$$\Delta_2^{(1)} P(x) = 0{,}00250\,x^2 + 0{,}00776\,x + 0{,}14316,$$

и $$P_2^{(2)}(x) = 1{,}00250\,x^2 + 2{,}00424\,x + 3{,}01116$$

или $$P_2^{(2)}(x) = x^2 + 1{,}99925\,x + 3{,}00366.$$

Точный множитель:

$$P_2(x) = x^2 + 2x + 3.$$

Точность, полученная по этому методу после двух итераций, превышает точность, полученную Эйткином после девяти итераций по методу Лина (результат Эйткина: $x^2 + 2{,}00073\,x + 2{,}98916$) и точность, полученную Белостоцким после двух итераций по методу Лина с добавлением одной итерации по предложенному им модифицированному методу Лина (результат Белостоцкого: $x^2 + 2{,}00126\,x + 2{,}99428$).

По объему вычислений одна итерация по предлагаемому методу равна примерно двум с половиной итерациям по методу Лина и одной итерации по методу Фридмана. Но, как показывают решенные примеры, сходимость изложенного метода, в тех случаях, когда она существует, значительно превосходит сходимость метода Лина. Поэтому метод может быть с успехом использован для разложения многочленов на множители наряду с методами Лина, Фридмана и Бэрстоу.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Shih — Nge Lin, A method of successive approximations of evaluating the real and complex roots of cubic and higher — order equations, Journal of Mathematics and Physics, Vol. XX, (1941), 231—242.

[2] Shih — Nge Lin, A method for finding roots of algebraic equations, Journal of Mathematics and Physics, Vol. XXII, (1943), 60—77.

[3] B. Friedman, Note on approximating complex zeros of a polynomial, Communications on Pure and App. Math., II (1949), 195—208.

[4] F. W. J. Olver, The evaluation of zeros of high-degree polynomials. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, N 885, Vol. 244, (1952), 385—415.

[5] A. C. Aitken, On the factorization of polynomials by iterative methods, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. LXIII, (1949—1950), 174—191.
Русский перевод: Успехи математических наук, VIII, вып. 6(58), (1953), 71—86.

[6] А. Я. Белостоцкий, Об одном методе решения алгебраических уравнений, Успехи математических наук, VIII, вып. 6(58), (1953), 87—96.

25 коп.