

р. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А

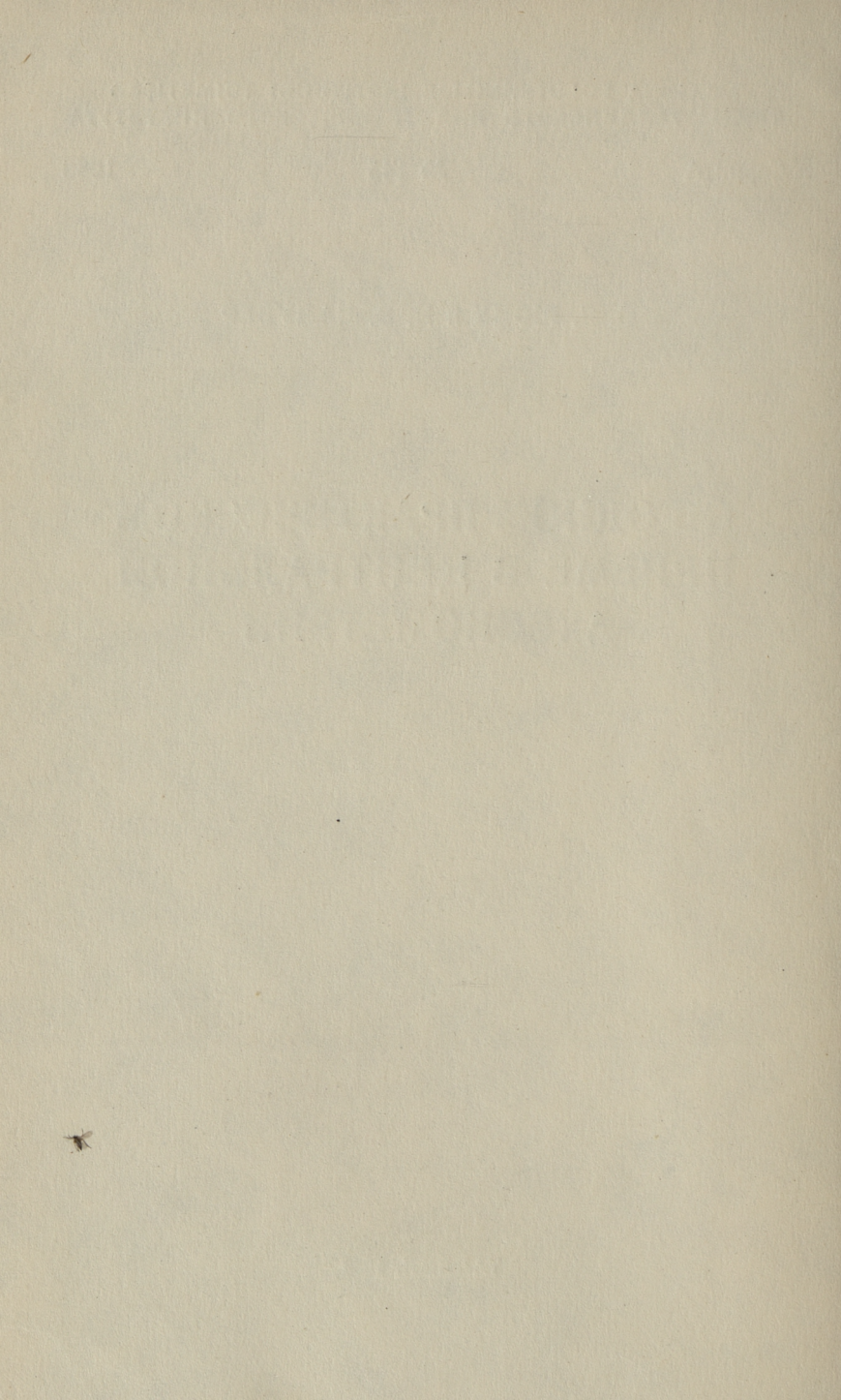
№ 145

1958

О. Я. РЮНК и Н. В. ПАЛУВЕР

**ОБ ОДНОМ ПРАКТИЧЕСКОМ
ПРИЕМЕ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ
АКСОНОМЕТРИИ**

ТАЛЛИН, 1958



Er. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А

№ 145

1958

О. Я. РЮНК и Н. В. ПАЛУВЕР

ОБ ОДНОМ ПРАКТИЧЕСКОМ
ПРИЕМЕ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ
АКСОНОМЕТРИИ

Er. 1583



ТАЛЛИН, 1958

1. Аксонометрический метод изображения применялся до сих пор только в случае параллельной проекции, как косоугольной, так и прямоугольной.

Возникает вопрос, имеет ли аксонометрический метод практическое значение и в случае центральной проекции, т. е. возможно ли на основе аксонометрического метода дать такие способы построения перспективы объекта, которые по своей простоте и ясности не уступали бы обыкновенно применяемым способам построения перспективы. В настоящей статье на это дается утвердительный ответ.

Сущность аксонометрического метода, как известно, заключается в том, что изображение точки пространства находят на базе проекции системы координат при помощи координат этой точки. Разумеется, что построение аксонометрического изображения проще в том случае, если координатные отрезки можно откладывать без искажения; это обстоятельство и заставляет в аксонометрии предпочитать частные положения координатных осей относительно плоскости проекций.

Самым общим положением прямоугольного координатного трехосника относительно плоскости проекций является **триклинное** положение, при котором углы наклона α , β , γ осей x , y , z все различные; при **диклинном** положении углы наклона двух осей равны и, наконец, при **изоклинном** расположении углы наклона всех трех осей равны (именно $35^\circ 16'$). Напомним, что в случае прямоугольной изометрии применяется изоклинное, а в случае прямоугольной диметрии — диклинное расположение координатного трехосника. Оба эти положения позволяют в значительной мере упростить построение изображений в прямоугольной аксонометрии. Это обстоятельство наводит на мысль, нельзя ли использовать изоклинное, а также диклинное расположение координатного трехосника и в слу-

чае центральной аксонометрии с целью получения некоторых упрощений в построениях.

При применении центральной аксонометрии на практике приходится тем или иным путем преодолевать затруднения, связанные с построением гармонических шкал на перспективах координатных осей. Ниже показана возможность избежания построения гармонических шкал.

2. Предположим вначале, что координатный трехосник имеет триклинное расположение и что начало координат O лежит на картинной плоскости. Для однозначного фиксирования точки зрения S и положения координатного трехосника зададимся остроугольным треугольником схода $F_x F_y F_z$ координатных осей, стороны которого были бы по длине все различные (черт. 1). Точка пересечения высот T этого треугольника, как известно, является главной точкой или прямоугольной проекцией точки зрения на картинной плоскости. Перспективы координатных осей проходят через начало координат O и через соответствующие точки схода.

Для нахождения перспективы точки $A(x, y, z)$ пространства используем прямые, проектирующие эту точку ортогонально на координатные плоскости. Точками схода этих прямых, как прямых, параллельных координатным осям, являются вершины треугольника схода. Кроме того нам нужны и следы этих прямых; для их определения используем следующий искусственный прием.

Для нахождения, например, следа (на картинной плоскости) прямой, проектирующей точку A ортогонально на плоскость xu , используем вспомогательное косоугольное проектирование лучами, параллельными оси z или прямой SF_z . При таком косоугольном проектировании проекцией точки A на картинной плоскости будет именно искомый след, т. е. $A' \equiv J_{A, A'}$. То же самое косоугольное проектирование дает проекциями осей x и y соответственно

$$x' \parallel F_x F_z \text{ и } y' \parallel F_y F_z$$

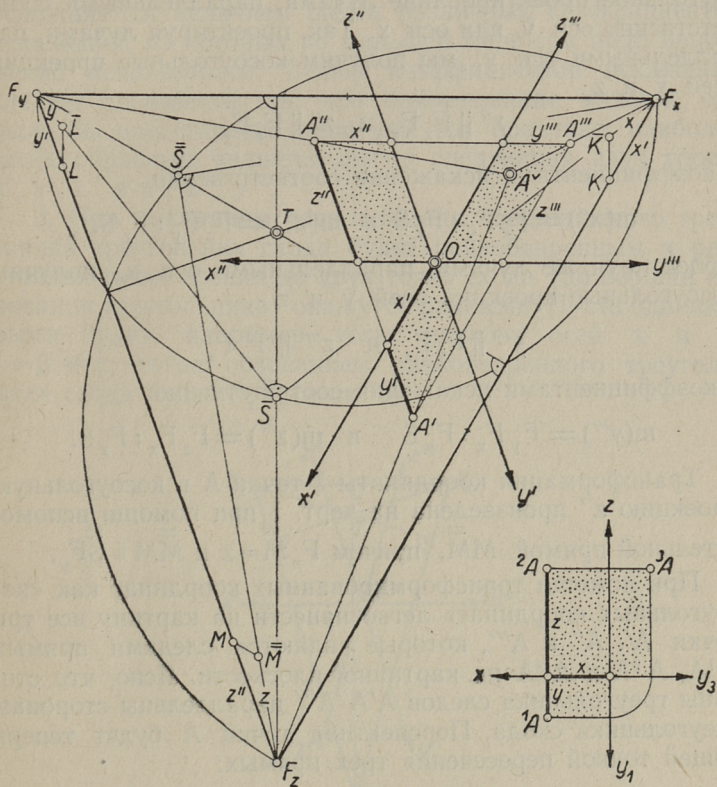
с коэффициентами искажения соответственно

$$m(x') = F_x F_z : F_x S \text{ и } m(y') = F_y F_z : F_y S.$$

Но при помощи косоугольных проекций x' и y' осей x и y и их коэффициентов искажений легко нанести на картинную плоскость косоугольную проекцию A' точки A , кото-

рая, как мы видели ранее, и является следом прямой $A'A$ на картинной плоскости.

На черт. 1 найдены натуральные длины $F_x \bar{S}$ и $F_y \bar{S}$ отрезков $F_x S$ и $F_y S$ совмещением плоскости $F_x F_y S$ с картинной плоскостью. При построении совмещенного поло-



Черт. 1.

жения \bar{S} точки зрения учитываем, что \bar{S} должна лежать на прямой TF_z так, чтобы угол $F_x \bar{S} F_y$ был бы прямым. Умножение координатных отрезков x и y точки A на соответствующие коэффициенты искажения можно теперь легко осуществить графически, взяв $\bar{K}F_x = x$ и $\bar{K}K \parallel \bar{S}F_z$, а также $\bar{L}F_y = y$ и $\bar{L}L \parallel \bar{S}F_z$. Полученные таким образом отрезки

$F_x K$ и $F_y L$ можно использовать на косоугольной проекции $x'y'$ плоскости xy как «косоугольные координаты» точки $A' \equiv ({}^1A)' \equiv J_{A^1A}$. Искомая перспектива A^\sim точки A должна теперь находиться на прямой $F_z A'$.

Аналогично можно найти точки A'' и A''' , используя косоугольное проектирование лучами, параллельными соответственно оси y или оси x . Так, проектируя лучами, параллельными оси y , мы получим косоугольные проекции осей x и z

$$x'' \parallel F_x F_y \text{ и } z'' \parallel F_z F_y$$

с коэффициентами искажения соответственно

$$m(x'') = F_x F_y : F_x S \text{ и } m(z'') = F_z F_y : F_z S.$$

Проектируя же лучами, параллельными оси x , получим косоугольные проекции осей y и z

$$y''' \parallel F_y F_z \text{ и } z''' \parallel F_z F_x$$

с коэффициентами искажения соответственно

$$m(y''') = F_y F_x : F_y S \text{ и } m(z''') = F_z F_x : F_z S.$$

Трансформация координаты z точки A в косоугольную проекцию z'' произведена на черт. 1 при помощи вспомогательной прямой \overline{MM} , причем $F_z \overline{M} = z$ и $\overline{MM} \parallel \overline{SF}_y$.

При помощи трансформированных координат как «косоугольных координат» легко нанести на картину все три точки A' , A'' и A''' , которые являются следами прямых A^1A , A^2A и A^3A на картинной плоскости. Ясно, что стороны треугольника следов $A'A''A'''$ параллельны сторонам треугольника схода. Перспектива точки A будет теперь общей точкой пересечения трех прямых:

$$A^\sim \equiv A' F_z \times A'' F_y \times A''' F_x.$$

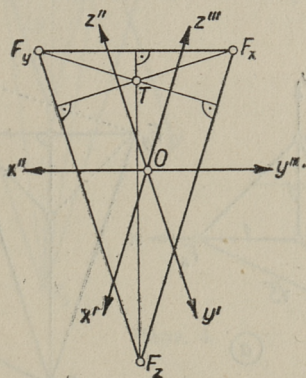
Результаты наших рассуждений можно сжато охватить следующим образом:

Перспектива A^\sim точки A пространства является центром гомотетии, определяемым треугольником схода осей и треугольником следов лучей, проектирующих точку A ортогонально на координатные плоскости.

Таким образом, основным построением является нахождение какой-нибудь одной пары следов ортогонально-проектирующий лучей A^1A , A^2A и A^3A ; определение перспективы точки не представляет после этого уже никаких затруднений.

В рассматриваемом триклинном случае построения усложняются наличием шести различных коэффициентов искажения, из которых по меньшей мере три надо непременно использовать. Выбор коэффициентов искажений следует произвести так, что наименование каждой оси было бы представлено один раз. На практике наиболее целесообразным является выбор следующих двух троек: x', y', z'' и x'', z'', y''' .

3. При диклинном расположении координатного трехосника треугольник схода будет равнобедренным и расстояния точки зрения до двух точек схода (до вершин основания треугольника) окажутся равными. Пусть одинаковыми будут, например, углы наклона осей x и y : $\alpha = \beta \neq \gamma$; тогда основанием равнобедренного треугольника схода будет $F_x F_y$ (черт. 2).



Черт. 2.

Из всех диклинных расположений следует предпочесть те, которые дают для косоугольных проекций осей коэффициенты искажения с какими-нибудь простыми отношениями. Аналогично прямоугольной аксонометрии следовало бы и здесь применить в первую очередь такое диклинное расположение, которое дало бы для косоугольных

проекций осей коэффициенты искажения с отношением 2:1. Приведенные ранее шесть коэффициентов искажения оказываются в диклинном случае, ввиду равенств $F_x F_z = F_y F_z$ и $F_x S = F_y S$, попарно равными:

$$m(x') = m(y') = F_x F_z : F_x S;$$

$$m(z'') = m(z''') = F_x F_z : F_z S;$$

$$m(x''') = m(y''') = F_x F_y : F_x S;$$

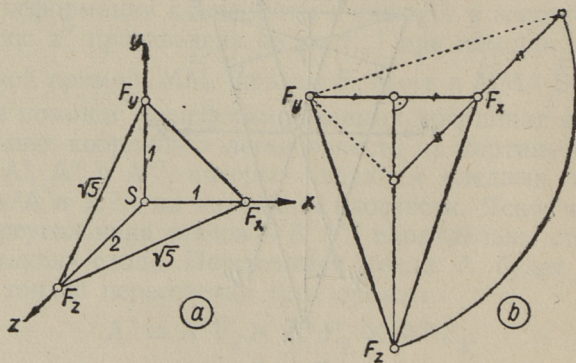
Применим для построения косоугольные проекции x' , y' , z' и потребуем, чтобы их коэффициенты искажения относились бы как 2:2:1. Выясним какая будет форма соответствующего треугольника схода. Из условия

$$(F_x F_z : F_x S) : (F_x F_z : F_z S) = 2 : 1$$

находим, что

$$F_z S = 2 \cdot F_x S.$$

Отсюда заключаем, что треугольник схода является равнобедренным, основание и боковая сторона которого относятся как $\sqrt{2} : \sqrt{5}$ (черт. 3-а). Построение такого треугольника сразу же в подходящем положении показывает черт. 3-б



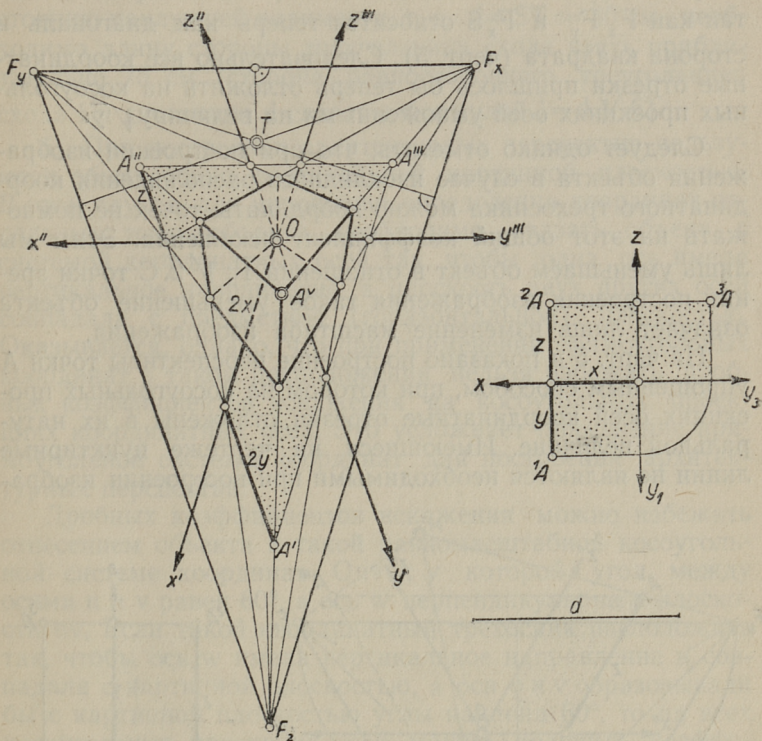
Черт. 3.

Величины трех неравных коэффициентов искажения легко определяются по черт. 3-а:

$$F_x F_z : F_x S = \sqrt{5}; \quad F_x F_z : F_x S = \sqrt{5} : \sqrt{2};$$

$$F_x F_y : F_x S = \sqrt{2}.$$

Эти величины относятся как 2:1:1,265 и поэтому ясно, что в рассматриваемом случае косоугольные проекции x'' и y''' применять нецелесообразно, так как их общий коэффициент искажения не дает с другими коэффициентами искажения простого отношения.



Черт. 4.

На черт. 4 построено изображение точки $A(x, y, z)$ в диклиной центральной аксонометрии с отношением коэффициентов искажения $m(x') : m(y') : m(z') = 2 : 2 : 1$; на картине можно проследить, как получена перспектива прямоугольного координатного параллелепипеда точки A . Величины 2, 2 и 1 используются здесь как приведенные коэффициенты искажения.

4. При изоклинном расположении координатного трех-

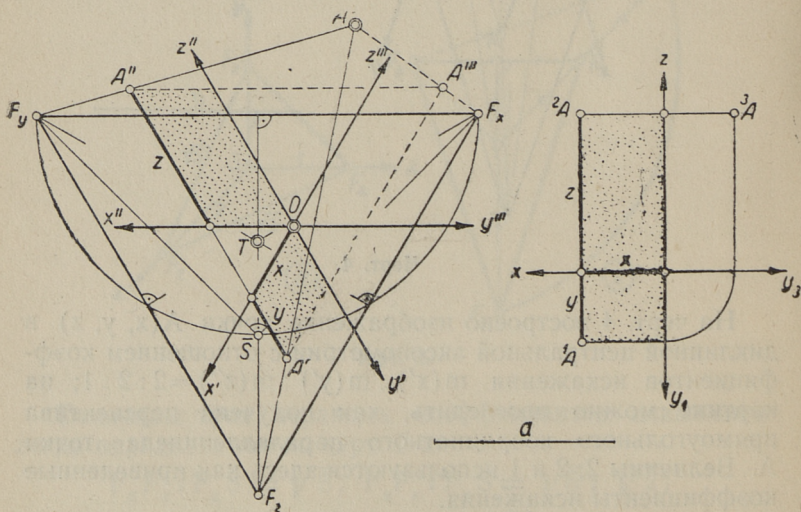
осника треугольник следов является равносторонним и расстояния точки зрения до точек схода равны. Ввиду этого все шесть коэффициентов искажения также равны и имеют значение

$$m = F_x F_y : F_x S = \sqrt{2},$$

так как $F_x F_y$ и $F_x S$ относятся теперь как диагональ и сторона квадрата (черт. 5). Следовательно все координатные отрезки пришлось бы теперь отложить на косоугольных проекциях осей умноженными на величину $\sqrt{2}$.

Следует однако отметить, что при построении изображения объекта в случае изоклинного расположения координатного трехосника можно координаты точек не помножать на этот общий коэффициент искажения. Этим мы лишь уменьшаем объект в отношении $1 : \sqrt{2}$. С точки зрения построения изображения такое уменьшение объекта означает лишь изменение масштаба изображения.

На черт. 5 и показано построение перспективы точки A упрощенным способом, при котором на косоугольных проекциях осей координатные отрезки отложены в их натуральной величине. Имеющиеся на чертеже пунктирные линии не являются необходимыми при построении изобра-



Черт. 5.

жения $A \sim$ точки A — они могут служить для проверки и уточнения результата.

Из изложенного видно, что изоклинная центральная аксонометрия оказывается для применения почти таким же простым и удобным, как и прямоугольная изометрия. Чтобы получить изображение с дистанцией, равной расстоянию наилучшей видимости, т. е. $d = ST \approx 30$ см., необходимо длину стороны треугольника схода взять приблизительно 75 см (сторона равностороннего треугольника схода l и дистанция d связаны формулой $l = d \sqrt{3}$).

5. При построении архитектурных перспектив пользуются обыкновенно вертикальной картинной плоскостью. В этом случае, для упрощения определения координат отдельных точек объекта, необходимо связать объект с системой координатных осей так, чтобы одна ось имела вертикальное направление, а плоскость двух других осей совпадала с предметной (горизонтальной) плоскостью. Оказывается, однако, что при применении прямоугольных координат в таком расположении нельзя избежать дробных коэффициентов искажения на косоугольных проекциях координатных осей. Это усложняет применение прямоугольной системы координат для построения архитектурных перспектив.

Дробных коэффициентов искажения можно избежать отнесением объекта к такой равномасштабной косоугольной системе координат $Ouvw$, у которой угол между осями u и v равен 60° , а ось w перпендикулярна к плоскости uv . Если такой координатный трехосник расположить так, чтобы ось w имела вертикальное направление и совпадала с картинной плоскостью, а оси u и v образовывали бы с картинной плоскостью углы наклона 60° , то на всех косоугольных проекциях осей можно получить коэффициенты искажения равные единице. Это легко выясняется по чертежу 6-а, где на комплексном чертеже (x — ось проекций) показаны проекции косоугольного координатного трехосника $Ouvw$, а также проекции точки зрения $S(u_0, v_0, w_0)$ и произвольной точки $A(u_1, v_1, w_1)$, отнесенных к системе $Ouvw$. Через ${}^1O^1u^1v$, 1A , 1S обозначены горизонтальные проекции указанных элементов, а через ${}^2O^2u^2v^2w$, 2A , 2S — их фронтальные проекции. Прямая P_τ является горизонтальным следом вертикальной картинной плоскости τ .

Проектируя точку A на картинную плоскость лучами, параллельными оси v , убеждаемся, что координата u_1 этой точки проектируется без искажения, так как $u_1 = O^1(A'')$, где $^1(A'')$ — горизонтальная проекция косоугольной проекции A'' точки A . Проектируя точку A лучами, параллельными оси u видим, что и координата v_1 проектируется на плоскость τ без искажения в силу равенства $v_1 = O^1(A''')$. Само собой понятно, что и координата w_1 точки A проектируется при обоих косоугольных проектированиях без искажения. Таким образом, на всех косоугольных проекциях осей u , v и w мы получим коэффициенты искажения равные единице. Косоугольные проекции A'' и A''' точки A являются следами (на картинной плоскости) лучей, проектирующих точку A соответственно на координатные плоскости uw и vw .

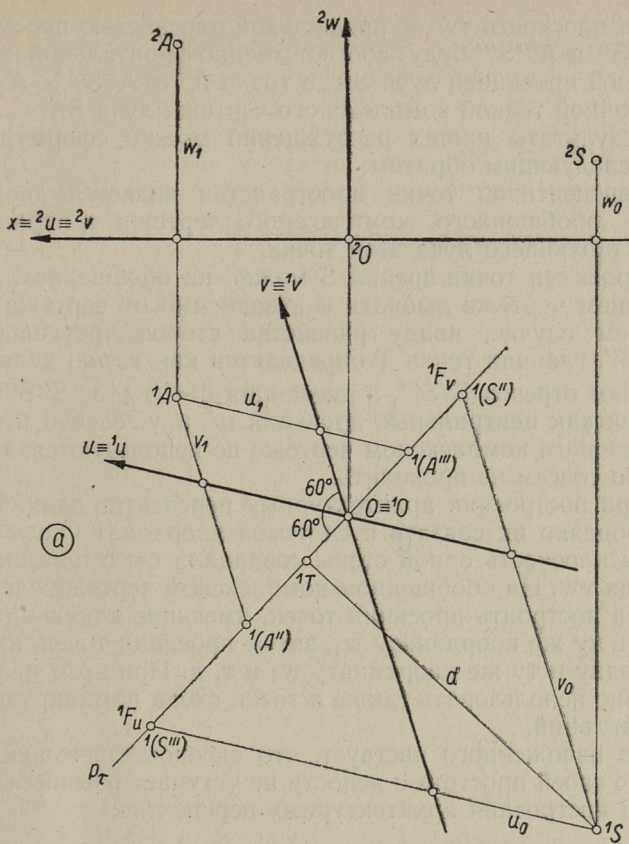
Косоугольные проекции u'' и v''' осей u и v имеют противоположные направления и лежат на одной прямой, перпендикулярной к оси w (черт. 6—b).

Понятно, что при рассмотренных косоугольных проектированиях координаты u_0 , v_0 , w_0 точки зрения S также будут проектироваться на картинную плоскость без искажения. При этом косоугольные проекции S''' и S'' точки S дают соответственно точки схода F_u и F_v осей u и v .

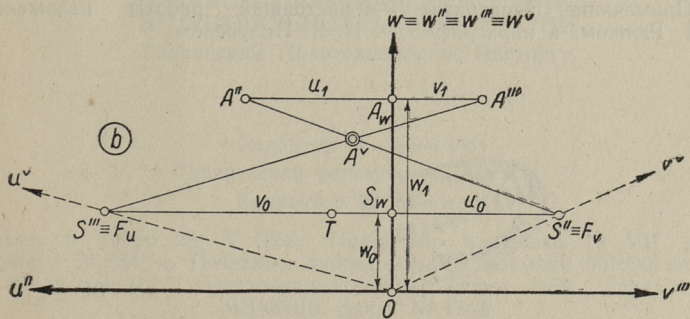
На чертеже 6—b показано построение перспективы A^\vee точки A по ее координатам u_1 , v_1 , и w_1 . Для этого сперва отложено $OA_w = w_1$, а затем $A_w A'' = u_1$ и $A_w A''' = v_1$ ($A''A''' \perp Ow$.) Аналогично по координатам u_0 , v_0 , w_0 построены косоугольные проекции $S''' \equiv F_u$ и $S'' \equiv F_v$ точки зрения S . При этом следует учитывать, что координаты u_0 и v_0 точки S отрицательны. Перспективой A^\vee точки A будет точка пересечения прямых $A''S''$ и $A'''S'''$.

Нетрудно заметить, что система косоугольных проекций точек A и S на черт. 6-b представляет собой комплексный чертеж этих точек, полученный вращением координатных плоскостей uw и vw вокруг оси w до совмещения с картинной плоскостью. Ввиду того, что этот комплексный чертеж получен отнесением точек к косоугольной системе координат, условимся его впредь называть обобщенным комплексным чертежом.

Если по аналогии с прямоугольной системой координат назовем плоскость uw фронтальной плоскостью проек-



(a)



(b)

Черт. 6.

ций, а плоскость vw — профильной плоскостью проекций, то $A''S''$ и $A'''S'''$ будут соответственно фронтальной и профильной проекцией луча SA , а точка $A \vee \equiv A''S'' \times A'''S'''$ — двойной точкой комплексного чертежа луча SA .

Результаты наших рассуждений можно сформулировать следующим образом:

Перспективой точки пространства является двойная точка обобщенного комплексного чертежа центрально-проектирующего луча этой точки.

Проекция точки зрения S можно на обобщенном комплексном чертеже выбрать и независимо от чертежа б-а. В этом случае, ввиду равенства сторон треугольника $SS''S'''$, главная точка T определится как точка, делящая пополам отрезок $S''S'''$, а дистанция $d = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot S''S'''$.

Так как центральные проекции $u \vee$ и $v \vee$ осей u и v на обобщенном комплексном чертеже не используются, то их можно совсем не проводить.

При построении архитектурных перспектив зданий целесообразно их связать с системой координат $Ouvw$ так, чтобы плоскость одной стены совпадала бы с плоскостью uw или vw . На обобщенном комплексном чертеже следует сперва построить проекции точек, имеющие какую-нибудь одну и ту же координату w_1 , затем проекции точек, имеющие одну и ту же координату w_2 и т. д. При этом целесообразно использовать также и точки схода доминирующих направлений.

Из изложенного явствует, что аксонометрический метод по своей простоте и ясности не уступает обычным способам построения архитектурных перспектив.

Примечание: Параграфы 1—4 настоящей работы изложены О. Я. Рюнком, а параграф 5 — Н. В. Палувером.



ОБ ОДНОМ ПРАКТИЧЕСКОМ ПРИЕМЕ
В ЦЕНТРАЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ
Таллинский Политехнический Институт

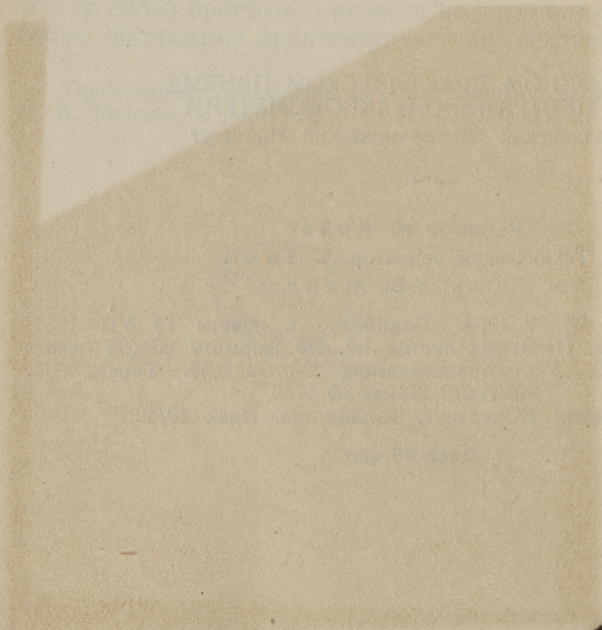
*

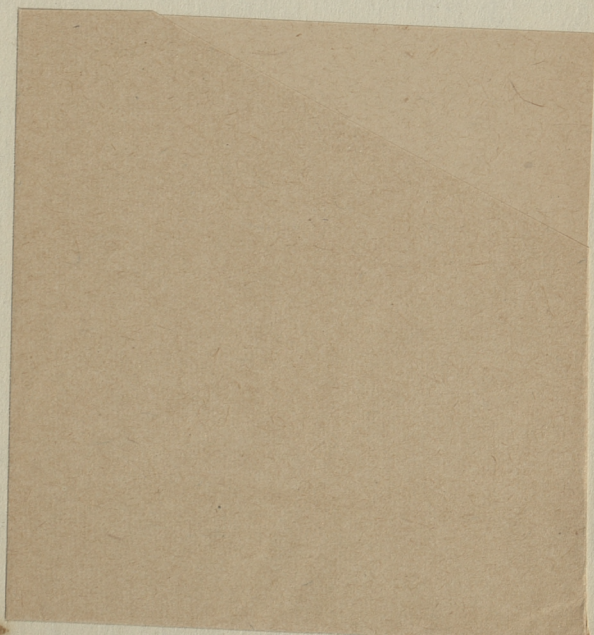
Редактор И. Кийсс
Технический редактор А. Тамм
Корректор В. Мянд

Сдано в набор 28 V 1958. Подписано к печати 19 VII 1958.
Бумага $54 \times 84^{1/16}$. Печатных листов 1,0. По формату 60×92 печатных листов 0,82. Учетно-издательских листов 0,59. Тираж 800.
МВ-06010. Заказ № 1748.

Типография «Юхисэлу», Таллин, ул. Пикк 40/42.

Цена 45 коп.





Цена 45 коп.