TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 293

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

V

ТАЛЛИН 1970

Ep. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 518;
517;
51: 373;
531/534

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

V

ТАЛЛИН 1970

Ep. 9771

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
IV
Teaduste Akadeemia

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 518:517.91/94

М. Левина

О СХОДИМОСТИ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(m)}(t) - \lambda \sum_{i=0}^{m-2-j} a_i(t) x^{(i)}(t) = \varphi(t), \qquad (I)$$

где j – целое число, удовлетворяющее условию $1 \leq j \leq m-2$;

$\varphi(t) \in C^{(j)}[a,b]$, $a_i(t) \in C^{(j)}[a,b]$ $(i = 0,1,\cdots, m-2-j)$.

Это уравнение требуется проинтегрировать в интервале $[a,b]$ при краевых условиях

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left[\alpha_{ik} x^{(k)}(a) + \beta_{ik} x^{(k)}(b)\right] = 0 \qquad (2)$$

$$(i = 1,2,\cdots, m),$$

где α_{ik}, β_{ik} $(i = 1,2,\cdots,m;\ k = 0,1,\cdots,m-1)$ – заданные числа.

Через $G(t,\tau)$ обозначим функцию Грина для дифференциального выражения $\frac{d^m}{dt^m}$ при краевых условиях (2).

Положим

$$x^{(m)}(t) = v(t). \qquad (3)$$

Тогда, подставив в (I) выражения

$$x^{(i)}(t) = \int_a^b \frac{\partial^i G(t,\tau)}{\partial t^i} v(\tau)\, d\tau \qquad (4)$$

$$(i = 0,1,\cdots, m),$$

мы получим уравнение (I) в виде

$$v(t) - \lambda \int_a^b K(t,\tau)\, v(\tau)\, d\tau = \varphi(t),$$

где

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{m-2-j} a_i(t)\, G_t^{(i)}(t,\tau),$$

или в операторной форме

$$v - \lambda K v = \varphi, \qquad (5)$$

где

$$Kv \equiv \int_a^b K(t,\tau)\, v(\tau)\, d\tau.$$

Предполагаем, что λ не есть собственное значение задачи (I) - (2) и $x(t)$ единственное решение этой задачи.

Тогда эквивалентное краевой задаче операторное уравнение (5), рассматриваемое в пространстве C, имеет также единственное решение, которое обозначим через $v(t)$, так что выполнено (3).

Будем искать решение уравнения (5) методом проектирования его на конечномерные пространства $F_n < C^{(j)}[a,b]$, где F_n есть пространства кусочно-полиномиальных функций, получаемых следующим образом:

I) интервал $[a,b]$ разбиваем точками t_ν :

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b;$$

2) пространству F_n принадлежат функции $s(t)$, которые на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ есть многочлены степени не выше $m-1$ и удовлетворяют условию непрерывности

$$s(t) \in C^{(j)}[a,b] \quad (1 \le j \le m-2).$$

Обозначим

$$\|\Delta\| = \max_{i=1,\cdots,n} |t_i - t_{i-1}|.$$

Пусть оператор проектирования P_n обладает свойствами

$$P_n x \in F_n, \text{ где } x \in C^{(j)}[a,b];$$

$$P_n^2 = P_n;$$

$$P_n x\big|_{t=t_i} = x(t_i) \quad (i=0,1,\cdots,n).$$

Уравнение (5) запишем в виде

$$(J - \lambda K)v = \varphi,$$

где J - тождественный оператор.

Для этого уравнения составим приближенное уравнение

$$(J - \lambda P_n K) v_n = P_n \varphi, \qquad (6)$$

где

$$P_n K v_n = \int_a^b P_n K(t,\tau) v_n(\tau) d\tau.$$

Введем норму.

$$\|f\| = \|f\|_{C^{(j)}} = \sum_{i=0}^{j} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(i)}(t)|.$$

Теорема I. Пусть для всех τ, t, $\in [a,b]$ выполнены оценки

$$\left|[P_n \varphi(t)]^{(j)} - \varphi^{(j)}(t)\right| < \varkappa_1 \cdot \omega(\|\Delta\|),$$

$$\left|[P_n K(t,\tau)]^{(j)}_t - K^{(j)}_t(t,\tau)\right| < \varkappa_2 \omega(\|\Delta\|),$$

где $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности.

Тогда при $\|\Delta\| \to 0$ последовательность v_n решений уравнения (6) сходится к решению v уравнения (5), при этом скорость сходимости

$$\|v - v_n\| = \mathcal{O}(\|\Delta\|^j). \qquad (7)$$

Доказательство.[I] Так как при любом $\tau \in [a,b]$ функция $K(t,\tau) \in C^{(j)}[a,b]$, то согласно [I]

$$\|K - P_n K\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (8)$$

Так как λ не есть собственное значение задачи (I)-(2), то для оператора $J - \lambda K$ существует обратный, следовательно найдется положительное число r, что для всех $v \in C^{(j)}[a,b]$

$$\|(J - \lambda K) v\| \geq r \|v\|. \qquad (9)$$

Теперь покажем, что оператор $J - v P_n K$ также имеет обратный.

[I] Мы пользуемся в доказательстве ходом рассуждений из работы [2].

Очевидно, что

$$\|(J-\lambda P_n K)v\| = \|J-\lambda P_n K+\lambda K-\lambda K)v\| \geq$$

$$\geq \|(J-\lambda K)v\| - |\lambda|\,\|(K-P_n K)v\|.$$

В силу (8) для достаточно больших $n > n_0(\varepsilon)$

$$\|(K-P_n K)v\| < \varepsilon\|v\|.$$

Поэтому

$$\|(J-\lambda P_n K)v\| \geq (r-|\lambda|\varepsilon)\|v\|. \qquad (10)$$

Выбрав $\varepsilon > 0$ так, чтобы $R = r-|\lambda|\varepsilon > 0$, получим

$$\|(J-\lambda P_n K)v\| \geq R\|v\|$$

для всех $v \in C^{(j)}$ и $n > n_0(\varepsilon)$, откуда и следует существование оператора $(J-\lambda P_n K)^{-1}$.

Итак, по (6), имеем

$$v_n = (J-\lambda P_n K)^{-1} P_n \varphi.$$

По (5) имеем

$$P_n v - \lambda P_n K v = P_n \varphi. \qquad (11)$$

Вычитая (6) из (11), получаем

$$(J-\lambda P_n K)(v-v_n) = v - P_n v.$$

Отсюда и по (10) следует существование числа $R_0 > 0$, что

$$\|v-v_n\| < \frac{1}{R_0}\|v-P_n v\|. \qquad (12)$$

Оценим норму, стоящую в правой части неравенства (12).

Для этого найдем оценку приближения

$$(P_n u)^{(\kappa)} - u^{(\kappa)} \quad (\kappa = 0, 1, \dots, j-1)$$

для j раз непрерывно дифференцируемой функции $u = u(t)$, для которой

$$\left|(P_n u)^{(j)} - u^{(j)}\right| < \varkappa\omega(\|\Delta\|).$$

Пусть $t \in [t_i, t_{i+j}]$. По определению оператора P_n и теореме Ролля найдутся всегда точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{j-\kappa} \in$ $\cdot[t_i, t_{i+j}]$ $(\kappa < j)$, что в них разность

$$(P_n u)^{(\kappa)} - u^{(\kappa)}$$

равна нулю. Тогда для этой функции интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по узлам $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{j-k}$, равен тождественно нулю, и поэтому она совпадает с ошибкой интерполяции, т.е.

$$(P_n u)^{(k)} - u^{(k)} = \frac{\left[(P_n u)^{(k)} - u^{(k)}\right]^{(j-k)}}{(j-k)!} \prod_{l=1}^{j-k} (t-\xi_l).$$

Отсюда имеем неравенство

$$\left|(P_n u)^{(k)} - u^{(k)}\right| \le \mu_k \|\Delta\|^{j-k}, \qquad (13)$$

где

$$\mu_k \le \varkappa\omega(\|\Delta\|) \cdot \frac{j^{j-k}}{(j-k)!}.$$

Вернемся к оценке (12). По (5) и (11)

$$\|v - P_n v\| = \|\lambda(K - P_n K)v + \varphi - P_n\varphi\| \le$$

$$\le |\lambda| \cdot \|(K - P_n K)v\| + \|\varphi - P_n\varphi\| \le$$

$$\le |\lambda| \cdot \sup_\tau \|K(t,\tau) - P_n K(t,\tau)\| (b-a) \|v\| + \|\varphi - P_n\varphi\|.$$

Но по (9) найдется r_0 такое, что

$$\|v\| \le \|(J - \lambda K)^{-1}\| \cdot \|\varphi\| \le \frac{1}{r_0}\|\varphi\|.$$

Значит

$$\|v - P_n v\| \le \frac{|\lambda|(b-a)}{r_0} \sup_\tau \|K - P_n K\| \cdot \|\varphi\| + \|\varphi - P_n\varphi\|. \qquad (14)$$

Взяв теперь в (13) один раз $u = K(t,\tau)$ и второй раз $u = \varphi$. мы по (14) получим, что найдется постоянная γ, такая, что

$$\|v - P_n v\| \le \gamma \|\Delta\|^j.$$

Отсюда и по (12) следует доказательство теоремы.

Определим приближенное решение задачи (1) – (2) следующим образом:

$$x_n^{(i)} = \int_a^b \frac{\partial^i}{\partial t^i} G(t,\tau) \cdot v_n(\tau)\, d\tau$$

$$(i = 0, 1, \dots, m) \qquad (15)$$

Теорема 2. Имеет место оценка[I]

$$\| x^{(i)} - x_n^{(i)} \| = O(\| \Delta \|^j) \qquad (16)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m).$$

Доказательство.

Вычитая из (4) равенство (15), получим

$$x^{(i)} - x_n^{(i)} = \int_a^b \frac{\partial^i}{\partial t^i} G(t,\tau) \left[v(\tau) - v_n(\tau) \right] d\tau.$$

Отсюда и по (7) следует (16), что и доказывает теорему.

Литература

1. J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Walsh, Best approximation and convergence properties of higher order splines. J. Math. Mech., 14, No. 2 (1965), 231-241.

2. A. Särev, Koonduvuskiiruse hindamine tükatipolünomiaalsete funktsioonidega lähendamisel. Отчёт госбюджетной научной работы МХ-7078, ТПИ, 1967, 1-13.

[I] В предположении, что условия теоремы I выполнены.

M. Levina

On the Convergence of the Approximate Solutions of the Boundary Value Problem by Spline Functions

Summary

The approximate solution of the problem (1)-(2) where V_n is the solution of the equation (6) and $G(t,\tau)$ is Green's function for the operator $\frac{d^m}{dt^m}$ and boundary value conditions (2) is considered in the article. The error is estimated by the formula (16).

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 517.512.6

М. Левина

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКЕ ДЛЯ ОДНОГО ВИДА СРАЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В последнее время много внимания уделяется изучению приближения функций с помощью сращенных функций. В настоящей заметке дается простой вывод оценки среднеквадратичной ошибки приближения, когда сращение производится с помощью многочленов Эрмита.

Рассмотрим функцию $f(x)$ на отрезке $[x_0,x_p]$. Пусть узлы $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ и $h_i = x_{i+1} - x_i \quad (i=0,1,\ldots,p-1)$. Через $\varphi(x)$ обозначим сращенную функцию, построенную на отрезке $[x_0, x_p]$ для функции $f(x)$, удовлетворяющую условиям:

1^0. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,p-1)$ функция $\varphi(x)$ есть многочлен степени $2n-1$.

2^0. $\varphi^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i)$ $(k=0,1,\ldots,n-1;\ i=0,1,\ldots,p)$.

Найдем оценку для среднеквадратической ошибки приближения функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ на отрезке $[x_0,x_p]$.

Теорема. Пусть на отрезке $[x_0,x_p]$ функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $4n$. Тогда справедлива оценка

$$\|f(x)-\varphi(x)\|_{L_2[x_0,x_p]} \le \frac{\|h\|^{2n}}{(2n)!\,2^{2n}} \sqrt{\|h\|\cdot p \left\| \frac{d^{4n}}{dx^{4n}} [f(x)-\varphi(x)]^2 \right\|_{C[x_0,x_p]}},$$

где $\|h\| = \max_i |h_i|$.

Доказательство. Пусть

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{2^n\sqrt{1-x^2}},$$

$t_{n,i}(x)$ – многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным I, наименее уклоняющийся от нуля в метрике L на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Через $p_n(x)$ обозначим произвольный многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным I.

Тогда

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |t_{n,i}(x)|\,dx = \min_{p_n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |p_n(x)|\,dx =$$

$$= \min_{p_n} \int_{-1}^{1} \left|p_n\left(\frac{h_i}{2}z + \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right| \frac{h_i}{2}\,dz =$$

$$= \frac{h_i^{n+1}}{2^{n+1}} \int_{-1}^{1} |U_n(x)|\,dx = \frac{h_i^{n+1}}{2^{2n}}\,.$$

Итак

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |t_{n,i}(x)|\,dx = \frac{h_i^{n+1}}{2^{2n}}. \qquad (2)$$

Ниже нам потребуется формула интегрирования по частям

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)\psi(x)\,dx = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j F^{(j)}(x)\psi_{j+1}(x)\Big|_{x=x_i}^{x_{i+1}} + \qquad (3)$$

$$+ (-1)^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} F^{(m)}(x)\,\psi_m(x)\,dx,$$

где

$$\psi_1(x) = \int \psi(x)\,dx, \quad \psi_k(x) = \int \psi_{k-1}(x)\,dx \quad (k = 2, 3, \cdots, m),$$

причем здесь имеется в виду одна из первообразных.

Имеют место равенства

$$\frac{d^l}{dx^l}\left[f(x) - \varphi(x)\right]^2\Big|_{x=x_i} = 0 \qquad (4)$$

$$(l = 0, 1, \cdots, 2n-1;\ i = 0, 1, \cdots, p).$$

Действительно, применяя формулу Лейбница для дифференцирования произведения, имеем

$$\frac{d^l}{dx^l}\left[f(x) - \varphi(x)\right]^2 = \frac{d^l}{dx^l}\left[f(x) - \varphi(x)\right]\left[f(x) - \varphi(x)\right] =$$

$$= \sum_{q_i=0}^{l} C_l^{q_i} \left[f(x)-\varphi(x)\right]^{(q_i)} \left[f(x)-\varphi(x)\right]^{(l-q_i)}.$$

По условию 2^0 для $q_i \leq n-1$ имеем $\left[f(x)-\varphi(x)\right]^{(q_i)} = 0$ в точках $x = x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$; если же $q_i \geq n$ и $l \leq 2n-1$, то $l - q_i \leq 2n-1-n = n-1$, и тогда по условию 2^0 в точках $x = x_i$ $(i = 0, 1, \cdots, p)$ равна нулю величина $\left[f(x)-\varphi(x)\right]^{(l-q_i)}$. Этим (4) доказано.

Применяя к функции $\left[f(x)-\varphi(x)\right]^2$ теорему Ролля и учитывая равенства (4), мы получим, что на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ найдутся точки

$$\xi_0^{(i)}, \xi_1^{(i)}, \cdots, \xi_{2n-1}^{(i)}, \tag{5}$$

в которых функция

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 \tag{6}$$

равна нулю.

Но тогда для функции (6) интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам (5) тождественно равен нулю и функция (6) совпадает с ошибкой интерполирования по узлам (5).

Поэтому на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 = \frac{1}{(2n)!}\frac{d^{4n}}{dx^{4n}}\left[f(x)-\varphi(x)\right]^2\Big|_{x=\eta_i} \cdot \prod_{k=0}^{2n-1}(x-\xi_k^{(i)})$$

$$(x_i < \eta_i < x_{i+1}).$$

Отсюда, так как $|x-\xi_k^{(i)}| \leq h_i$, следует неравенство:

$$\left\| \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 \right\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \leq \frac{h_i^{2n}}{(2n)!}\left\| \frac{d^{4n}}{dx^{4n}}\left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 \right\|_{C[x_i,x_{i+1}]}. \tag{7}$$

Рассмотрим очевидное равенство:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 dx = \frac{1}{(2n)!}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 t_{2n,i}^{(2n)}(x)\,dx.$$

К последнему интегралу применяем формулу интегрирования по частям (3), где $m = 2n$, $F(x) = \left[f(x)-\varphi(x)\right]^2$ и $\varphi(x) = t_{2n,i}^{(2n)}(x)$.

В силу равенства (4) сумма, участвующая в формуле (3), будет равна нулю.

Поэтому

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x) - \varphi(x)\right]^2 dx = \frac{1}{(2n)!} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left[f(x) - \varphi(x)\right]^2 \cdot t_{2n,i}(x)\, dx.$$

Отсюда, учитывая (7) и (2), имеем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 dx \leqslant \frac{h_i^{4n+1}}{2^{4n}\left[(2n)!\right]^2} \left\| \frac{d^{4n}}{dx^{4n}} \left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 \right\|_{C[x_i, x_{i+1}]}. \qquad (8)$$

Так как

$$\sqrt{\int_{x_0}^{x_p} \left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 dx} = \sqrt{\sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x)-\varphi(x)\right]^2 dx},$$

то, учитывая (8), имеем доказательство теоремы.

M. Levina

On the Mean-Root-Square Error for Some Spline Functions

S u m m a r y

Let $\varphi(x)$ be the approximate of the function $f(x)$ and on each segment $[x_i, x_{i+1}]$ $\varphi(x)$ be the Hermite's interpolation polynomial of 2n-1 power. Then the estimate (1) is true.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 518:517.392

М. Левин, Э. Шац

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЙ НАИЛУЧШЕЙ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

Через $W_{L_2}^{(2,2)}(M)$ обозначим множество всех функций $f(x,y)$, которые на квадрате $[0,1;\ 0,1]$ имеют абсолютно непрерывные производные $f'''_{x^2y}(x,y)$ и $f'''_{xy^2}(x,y)$ и производную $f^{IV}_{x^2y^2}(x,y)$, для которой

$$\left\| f^{IV}_{x^2y^2} \right\|_{L_2} = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[f^{IV}_{x^2y^2}(x,y) \right]^2 dx\,dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant M.$$

Через $W_{(0,1)L_2}^{(2,2)}(M)$ обозначим множество тех функций $f(x,y)$, которые принадлежат множеству $W_{L_2}^{(2,2)}(M)$ и удовлетворяют условию

$$f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = f(1,1) = 0.$$

Через $W_{01L_2}^{(2,2)}(M)$ обозначим множество тех функций из $W_{L_2}^{(2,2)}(M)$, которые удовлетворяют условию

$$f(x,0) \equiv f(0,y) \equiv f(x,1) \equiv f(1,y) \equiv 0.$$

Рассмотрим формулу

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = A \int_L f(x,y)\,ds + \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{l=0}^{n+1} A_{kl} f(x_k, y_l) + R_{mn}(f), \qquad (I)$$

где $m, n \geqslant 2$,

$$x_0 = y_0 = 0;\ x_{m+1} = y_{n+1} = 1,$$

L – граница квадрата $[0,1;\ 0,1]$.

Формула вида (I) называется наилучшей среди формул (I) для множества функций F, если для нее

$$\sup_{f\in F}\left|R_{mn}(f)\right|$$

принимает наименьшее значение.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема I.

Для множества $W_{01L_2}^{(2,2)}(M)$ наилучшей формулой (I) является та, у которой

$$\left.\begin{aligned}
&x_k = x_1 + 2h(k-1) = 2h\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} + k - 1\right);\\
&y_l = y_1 + 2g(l-1) = 2g\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} + l - 1\right);\\
&h = \frac{1}{2\left(2\sqrt{\tfrac{2}{3}} + m - 1\right)};\\
&g = \frac{1}{2\left(2\sqrt{\tfrac{2}{3}} + n - 1\right)};\\
&\qquad (k=1,2,\dots,m;\ l=1,2,\dots,n);\\
&A_{kl} = 4hg\ (k=2,3,\dots,m-1;\ l=2,3,\dots,n-1);\\
&A_{1l} = A_{ml} = A_{k1} = A_{kn} = 2gh\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}+1\right);\\
&\qquad (k=2,3,\dots,m-1;\ l=2,3,\dots,n-1);\\
&A_{11} = A_{1n} = A_{m1} = A_{mn} = gh\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}+1\right)^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Теорема 2.

Для множества $W_{(0,1)L_2}^{(2,2)}(M)$ наилучшей формулой (I) является та, у которой узлы (x_k, y_l) и коэффициенты A_{kl} $(k=1,2,\dots,m;\ l=1,2,\dots,n)$ определяются по (2) и

$$
\left.
\begin{aligned}
&A = \tfrac{1}{2};\\
&A_{0l} = A_{m+1,l} = -2gh\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}} + m - 1\right);\\
&\qquad (l = 2, \dots, n-1);\\
&A_{k0} = A_{k,n+1} = -2gh\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}} + n - 1\right);\\
&\qquad (k = 2, \dots, m-1);\\
&A_{01} = A_{0n} = A_{m+1,1} = A_{m+1,n} =\\
&\quad = -gh\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}} + 1\right)\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}} + m - 1\right);\\
&A_{10} = A_{m0} = A_{1,n+1} = A_{m,n+1} =\\
&\quad = -gh\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}} + 1\right)\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}} + n - 1\right).
\end{aligned}
\right\} \qquad (3)
$$

Теорема 3.

Для множества $W_{L_2}^{(2,2)}(M)$ наилучшей формулой (I) является та, у которой узлы (x_k, y_l) и коэффициенты A, A_{kl} $(k=0,1,\dots,m+1;\ l=0,1,\dots,n+1)$ определяются по (2) и (3) и

$$
\begin{aligned}
&A_{00} = A_{m+1,0} = A_{0,n+1} = A_{m+1,n+1} =\\
&\quad = -\tfrac{1}{4} + hg\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}} + m - 1\right)\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}} + n - 1\right).
\end{aligned} \qquad (4)
$$

Доказательство.

Для функции $f(x,y)$ из множества $W_{0+L_2}^{(2,2)}(M)$ имеет место представление

$$
f(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 f^{IV}_{u^2v^2}(u,v)\, g(x,u)\, g(y,v)\, du\, dv, \qquad (5)
$$

где $g(q,p) = \tfrac{1}{2}\left[(q-p)E(q-p) - q(1-p)\right]$;

$$
E(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0,\\ 0, & \text{если } t \leqslant 0. \end{cases}
$$

Принимая для удобства $p_{kl} = 4A_{kl}$ и подставляя (5) в (I), используя неравенство Буняковского, получаем

$$|R_{mn}(f)| \leq \frac{M}{4}\left\{\int_0^1\int_0^1 [K(u,v)]^2\,du\,dv\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (6)$$

где

$$K(u,v) = (1-u)^2(1-v)^2 - (1-u)^2(1-v) -$$
$$- (1-u)(1-v)^2 + (1-u)(1-v) - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} p_{kl}\left[E(x_k-u)\times\right.$$
$$\times E(y_l-v)(x_k-u)(y_l-v) - y_l(1-v)(x_k-u)E(x_k-u) -$$
$$\left. - x_k(1-u)(y_l-v)E(y_l-v) + x_k y_l(1-u)(1-v)\right].$$

Так как функция

$$f(x,y) = M\left\{\int_0^1\int_0^1 [K(x,y)]^2\,dx\,dy\right\}^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\,g(x,u)\,g(y,v)\,du\,dv,$$

принадлежит множеству $W_{01L_2}^{(2,2)}(M)$ и для нее неравенство (6) превращается в равенство, то

$$\sup_{f\in W_{01L_2}^{(2,2)}(M)} |R_{mn}(f)| = \frac{M}{4}\left\{\int_0^1\int_0^1 [K(u,v)]^2\,du\,dv\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (7)$$

Задача состоит в определении узлов (x_k, y_l) и коэффициентов p_{kl} таким образом, чтобы величина (7) или, что то же, величина

$$U = \int_0^1\int_0^1 [K(u,v)]^2\,du\,dv$$

приняла наименьшее значение.

Перепишем U в виде

$$U = \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\int_0^{x_1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} [K(u,v)]^2\,du\,dv +\right.$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} [K(u,v)]^2\,du\,dv +$$
$$\left. + \int_{x_n}^{1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} [K(u,v)]^2\,du\,dv\right\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{0}^{y_1}\left[K(u,v)\right]^2 dudv +$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_n}^{1}\left[K(u,v)\right]^2 dudv +$$

$$+\int_{0}^{x_1}\int_{0}^{y_1}\left[K(u,v)\right]^2 dudv + \int_{0}^{x_1}\int_{y_n}^{1}\left[K(u,v)\right]^2 dudv +$$

$$+\int_{x_m}^{1}\int_{0}^{y_1}\left[K(u,v)\right]^2 dudv + \int_{x_m}^{1}\int_{y_n}^{1}\left[K(u,v)\right]^2 dudv .$$

Заменим в (8) функцию $K(u,v)$ на каждом прямоугольнике соответствующим многочленом, наименее уклоняющимся от нуля в L_2 на этом прямоугольнике.

Тогда, используя утверждения I, 2, 3 из [I] при $r=2,\ s=2;\ \lambda=\eta=1;\ \alpha_1=-1;\ \beta_1=-1;\ \alpha_0=\beta_0=0$, получим из (8)

$$U \geq \frac{1}{21600}\left\{9\left[x_1^5+(1-x_m)^5\right]+\right.$$

$$\left.+4\sum_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)^5\right\}+\frac{1}{21600}\left\{9\left[y_1^5+(1-y_n)^5\right]+\right.$$

$$\left.+4\sum_{j=1}^{n-1}(y_{j+1}-y_j)^5\right\}-\frac{1}{518400}\left\{9\left[x_1^5+(1-x_m)^5\right]+\right. \qquad (9)$$

$$\left.+4\sum_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)^5\right\}\cdot\left\{9\left[y_1^5+(1-y_n)^5\right]+\right.$$

$$\left.+4\sum_{j=1}^{n-1}(y_{j+1}-y_j)^5\right\}.$$

Минимизируя правую часть этого неравенства по аналогии с [2] (стр. 222-224), находим

$$\left.\begin{aligned} x_\kappa &= 2h\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}+\kappa-1\right);\\ y_\iota &= 2g\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}+\iota-1\right);\\ (\kappa&=1,2,\dots,m;\quad \iota=1,2,\dots,n)\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

h и g определены в (2).

Через $K^*(u,v)$ обозначим функцию, построенную выше, которая на каждом прямоугольнике $[x_\kappa, x_{\kappa+1}, y_\iota, y_{\iota+1}]$ есть многочлен степени 2 по u и по v со старшим коэффициентом единица, наименее уклоняющийся от нуля в L_2. Здесь (x_κ, y_ι)- узлы (10).

Ниже мы покажем, как можно выбрать коэффициенты $p_{\kappa\iota}$, чтобы при узлах (10) на $[0,1;\ 0,1]$ $K(u,v)=K^*(u,v)$. Значит $K^*(u,v)$ доставляет наименьшее значение величине U.

Поэтому из (9) при узлах (10) получаем

$$\min U=\frac{1}{900}\left(\frac{8}{3}h^4+\frac{8}{3}g^4-\frac{64h^4g^4}{9}\right),$$

откуда по (7)

$$\min_{f\in W^{(2,2)}_{01L_2}(M)}\ \sup|R_{mn}(f)|=\frac{M}{120}\sqrt{\frac{8}{3}h^4+\frac{8}{3}g^4-\frac{64h^4g^4}{9}}.$$

Для вычисления коэффициентов $p_{\kappa\iota}$ воспользуемся равенством

$$\frac{\partial^2K}{\partial u\partial v}(x_i+0,\,y_j+0)-\frac{\partial^2K}{\partial u\partial v}(x_i-0,\,y_j+0)-$$

$$-\frac{\partial^2K}{\partial u\partial v}(x_i+0,\,y_j-0)+\frac{\partial^2K}{\partial u\partial v}(x_i-0,\,y_j-0)=$$

$$=-p_{ij},\ (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n).$$

Отсюда и, учитывая, что $A_{\kappa\iota}=\frac{1}{4}p_{\kappa\iota}$, получим коэффициенты, приведенные в (2).

Таким образом теорема I доказана.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что на каждом прямоугольнике $[x_\kappa, x_{\kappa+1};\ y_\iota, y_{\iota+1}]$ функция $K(u,v)$ с узлами и коэффициентами (2) совпадает с $K^*(u,v)$.

Если

$$f(x)\in W^{(2,2)}_{(0,1)L_2}(M),$$

то

$$f(x,y) - F(x,y),$$

где

$$F(x,y) = yf(x,1) + (1-y)f(x,0) + xf(1,y) + (1-x)f(0,y),$$

принадлежит множеству $W^{(2,2)}_{01L_2}(M)$. Учитывая, что формула (I) с узлами и коэффициентами (2), (3) точна для $F(x,y)$, и поступая, как в [3], получаем равенство

$$\min_{f\in W^{(2,2)}_{(0,1)L_2}(M)} \sup |R_{mn}(f)| = \min_{f\in W^{(2,2)}_{01L_2}(M)} \sup |R_{mn}(f)|.$$

Отсюда следует, что формула (I) с узлами и коэффициентами (2), (3) есть наилучшая для множества $W^{(2,2)}_{(0,1)L_2}(M)$, что доказывает теорему 2.

Аналогично доказывается и теорема 3.

При этом

$$\min_{f\in W^{(2,2)}_{L_2}(M)} \sup |R_{mn}(f)| = \min_{f\in W^{(2,2)}_{01L_2}(M)} \sup |R_{mn}(f)|.$$

Построенная наилучшая кубатурная формула обобщает на двумерный случай формулу из [3].

Литература

I. Э. Шац. О некоторых многочленах наименьшего уклонения в метрике L_2. См. наст.сб.

2. В.И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967.

3. М. Левин. Одна экстремальная задача для квадратурной формулы Маркова. Изв. Ан ЭССР, Физика. Математика, 2, 1969, стр. 249-252.

M. Levin, E. Schats

The Constructing of the Best Cubature Formula

S u m m a r y

The best cubature formula of type (1) has been constructed for the class functions $W_{01L_2}^{(1,1)}(M)$, $W_{(0,1)L_2}^{(1,1)}(M)$, $W_{L_2}^{(1,1)}(M)$. The solutions are given by expressions (2), (3), (4).

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 517.512.6

Э. Шац

О НЕКОТОРЫХ МНОГОЧЛЕНАХ НАИМЕНЬШЕГО УКЛОНЕНИЯ В МЕТРИКЕ L_2

При решении экстремальных задач теории кубатурных формул приходится решать проблему нахождения многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на заданной области в метрике L_2, среди всех многочленов определенного вида.

Рассмотрим некоторые такие задачи.

Через $Q_{m,\nu,\theta}(x)$ обозначим многочлен вида

$$x^m + \sum_{i=\nu}^{m-1} p_i x^i,$$

наименее уклоняющийся от нуля в метрике L_2 на отрезке $[0,\theta]$.

Нетрудно получить, что для этого многочлена

$$p_i = (-1)^{m-i}\binom{m-\nu}{i-\nu}\theta^{m-i}\frac{(m+\nu)(m+\nu-1)\cdots(\nu+i+1)}{2m(2m-1)\cdots(m+i+1)},$$

$$(i=\nu,\nu+1,\ldots,m-1).$$

Через $X_m(x)$ обозначим многочлен Лежандра со старшим коэффициентом I на отрезке $[-1,1]$.

Имеют место следующие утверждения.

I. Среди всех многочленов вида

$$P_{r,s}(x,y) = x^r y^s + x^r \sum_{l=\eta}^{s-1} \beta_l y^l +$$

$$+y^{s}\sum_{\kappa=\lambda}^{r-1}\alpha_{\kappa}x^{\kappa}+\sum_{\kappa=\lambda}^{r-1}\sum_{\iota=\eta}^{s-1}a_{\kappa\iota}x^{\kappa}y^{\iota},$$

где α_{κ} и β_{ι} $(\kappa=\lambda,\dots,r-1;\ \iota=\eta,\dots,s-1)$ - заданные числа, наименьшее значение интегралу

$$\int_{0}^{c}\int_{0}^{d}\left[P_{r,s}(x,y)\right]^{2}dxdy$$

доставляет многочлен

$$P^{*}_{r,s}(x,y)=\left[x^{r}+\sum_{\kappa=\lambda}^{r-1}\alpha_{\kappa}x^{\kappa}\right]\cdot Q_{s,\eta,d}(y)+$$

$$+\left[y^{s}+\sum_{\iota=\eta}^{s-1}\beta_{\iota}y^{\iota}\right]Q_{r,\lambda,c}(x)-Q_{r,\lambda,c}(x)Q_{s,\eta,d}(y).$$

2. Среди всех многочленов вида

$$F_{r,s}(x,y)=x^{r}y^{s}+x^{r}\sum_{\iota=0}^{s-1}\beta_{\iota}y^{\iota}+y^{s}\sum_{\kappa=\lambda}^{r-1}\alpha_{\kappa}x^{\kappa}+$$
$$+\sum_{x=\lambda}^{r-1}\sum_{\iota=0}^{s-1}a_{\kappa\iota}x^{\kappa}y^{\iota},$$

где α_{κ} и β_{ι} $(\kappa=\lambda,\dots,r-1;\ \iota=0,1,\dots,s-1)$ -заданные числа, наименьшее значение интегралу

$$\int_{0}^{c}\int_{b-g}^{b+g}\left[F_{r,s}(x,y)\right]^{2}dxdy$$

доставляет многочлен

$$F^{*}_{r,s}(x,y)=g^{s}\left[x^{r}+\sum_{\kappa=\lambda}^{r-1}\alpha_{\kappa}x^{\kappa}\right]\cdot X_{s}\left(\frac{y-b}{g}\right)+$$

$$+\left[y^{s}+\sum_{\iota=0}^{s-1}\beta_{\iota}y^{\iota}\right]Q_{r,\lambda,c}(x)-g^{s}\Theta_{r,\lambda,c}(x)X_{s}\left(\frac{y-b}{g}\right).$$

3. Среди всех многочленов вида

$$L_{r,s}(x,y)=x^{r}y^{s}+x^{r}\sum_{\iota=0}^{s-1}\beta_{\iota}y^{\iota}+$$
$$+y^{s}\sum_{\kappa=0}^{r-1}\alpha_{\kappa}x^{\kappa}+\sum_{\kappa=0}^{r-1}\sum_{\iota=0}^{s-1}a_{\kappa\iota}x^{\kappa}y^{\iota},\qquad(I)$$

где α_{κ} и β_{ι} $(\kappa=0,1,\dots,r-1;\ \iota=0,1,\dots,s-1)$ - заданные числа, наименьшее значение интегралу

$$\int_{a-h}^{a+h}\int_{b-g}^{b+g}\left[L_{r,s}(x,y)\right]^2 dxdy$$

доставляет многочлен

$$L^*_{r,s}(x,y) = g^s\left[x^r + \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k x^k\right]X_s\left(\frac{y-b}{g}\right) +$$

$$+ h^r\left[y^s + \sum_{l=0}^{s-1}\beta_l y^l\right]X_r\left(\frac{x-a}{h}\right) -$$

$$- h^r g^s X_r\left(\frac{x-a}{h}\right)X_s\left(\frac{y-b}{g}\right).$$

Докажем первое утверждение.

Любой многочлен (I) можно записать в виде

$$P_{r,s}(x\ y) = P^*_{r,s}(x,y) + S_{r-1,s-1}(x,y),$$

где $S_{r-1,s-1}(x,y)$ некоторый многочлен степени $r-1$ по x и $s-1$ по y, не содержащий членов с $x^k y^l$, где $k<\lambda$, $l<\eta$.

Учитывая, что

$$\int_0^{\Theta} x^i Q_{m,\nu,\Theta}(x) = 0 \quad i = (\nu, \cdots, m-1),$$

имеем

$$\int_0^c\int_0^d\left[P_{r,s}(x,y)\right]^2 dxdy = \int_0^c\int_0^d\left[P^*_{r,s}(x,y)\right]^2 dxdy +$$

$$+ \int_0^c\int_0^d\left[S_{r-1,s-1}(x,y)\right]^2 dxdy.$$

Отсюда следует, что наименьшее значение правая часть достигает при $S_{r-1,s-1}(x,y) \equiv 0$, что и доказывает утверждение I.

Остальные утверждения доказываются аналогично или вытекают из первого после соответствующей замены переменных.

Полученные результаты можно легко обобщить и на многочлены произвольного числа переменных.

E. Schats

On Some Polynomials of Least Deviation in Metric Space L_2

S u m m a r y

The polynomials of least deviation on a rectangle have been sought amongst certain types of polynomials in metric space L_2.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 518:517.392

Э. Шац

НАИЛУЧШАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ КЛАССА ФУНКЦИЙ $W_{L_q}^{(4)}(M;\,0,1)$

Пусть задан класс $W_{L_q}^{(4)}(M;\,0,1)$ функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[0,1]$ абсолютно непрерывную производную третьего порядка и производную четвертого порядка, удовлетворяющую условию

$$\|f^{IV}(x)\|_{L_q}=\left\{\int_0^1|f''(x)|^q dx\right\}^{1/q}\le M,\quad q>1.$$

Для данного класса рассмотрим формулу Маркова вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx=A^{(0)}f(0)+A^{(1)}f'(0)+$$

$$+\frac{1}{4!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{2}B_k^{(l)}(4-l-1)!\,f^{(l)}(x_k)+C^{(0)}f(1)+C^{(1)}f'(1)+R_n(f),\qquad (I)$$

где $n\ge 2$.

Выберем узлы x_k и коэффициенты $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, $B_k^{(l)}$ $(k=1,2,\dots,n;\ l=0,1,2)$ таким образом, чтобы верхняя грань ошибки

$$\sup_{f\in W_{L_q}^{(4)}(M;\,0,1)}|R_n(f)|$$

была наименьшей среди возможных.

Задачу решим предварительно для класса функций $W_{01L_q}^{(4)}(M;\,0,1)$, состоящего из всех функций класса $W_{L_q}^{(4)}(M;\,0,1)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$f(0)=f'(0)=f(1)=f'(1)=0.$$

Для данного класса функций имеет место представление

$$f(x) = \int_0^1 f^{IV}(t)\, g(x,t)\, dt, \qquad (2)$$

где

$$g(x,t) = \frac{1}{6}\left[E(x-t)t^2(x-1)^2(3x-2xt-t) + \right.$$
$$\left. + E(t-x)x^2(t-1)^2(3t-2xt-x)\right],$$

$$E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

Подставляя (2) в (I) и применяя неравенство Гельдера, имеем

$$|R_n(f)| \le \frac{M}{24}\left\{\int_0^1 |K(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad (3)$$

где

$$K(t) = t^2(1-t)^2 - \sum_{k=1}^{n} B_k^{(0)}\left[E(x_k-t)t^2(1-x_k)^2(3x_k - \right.$$
$$\left. - 2x_k t - t) + E(t-x_k)x_k^2(1-t)^2(3t-2x_k t - x_k)\right] -$$
$$- \sum_{k=1}^{1} B_k^{(1)}\left[E(x_k-t)t^2(x_k-1)(3x_k-2tx_k-1) + \right.$$
$$\left. + E(t-x_k)(1-t)^2 x_k(2t-2x_k t-x_k)\right] - \sum_{k=1}^{n} B_k^{(2)}\left[E(x_k-t)\times\right.$$
$$\left.\times t^2(3x_k-2x_k t+t-2) + E(t-x_k)(1-t)^2(t-2x_k t-x_k)\right].$$

Для функции

$$f(x) = M\left\{\int_0^1 |K(x)|^p dx\right\}^{-\frac{1}{q}} \int_0^1 |K(t)|^{\frac{p}{q}} \operatorname{sign} K(t)\, g(x,t)\, dt,$$

принадлежащей классу $W_{01Lq}^{(4)}(M;0,1)$ неравенство (3) превращается в равенство, поэтому

$$\sup_{f \in W_{01Lq}^{(4)}(M;0,1)} |R_n(f)| = \frac{M}{24}\left\{\int_0^1 |K(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (4)$$

Таким образом, остается найти значения x_k, $B_k^{(l)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 0, 1, 2$), минимизирующие интеграл в правой части равенства (4).

Введем обозначение

$$U = \int_0^1 |K(t)|^p \, dt.$$

Перепишем U следующим образом

$$U = \int_0^{x_1} |K(t)|^p dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |K(t)|^p dt + \int_{x_n}^{1} |K(t)|^p dt. \qquad (5)$$

На каждом из отрезков $[0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, 1]$ функцию $K(t)$ заменим многочленом четвертой степени, наименее уклоняющимся от нуля в метрике L_p.

Для отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ это есть многочлен

$$h_i^4 R_{4,p}\left(\frac{t-a_i}{h_i}\right),$$

где

$$h_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}; \qquad a_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2},$$

а $R_{4,p}(x)$ – многочлен четвертой степени со старшим коэффициентом, равным единице, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ в метрике L_p.

Для крайних отрезков соответствующие многочлены наименьшего уклонения имеют вид:

$$t^4 + \alpha x_1 t^3 + \beta x_1^2 t^2; \qquad 0 \le t \le x_1$$

$$(1-t)^4 + \alpha(1-x_n)(1-t)^3 + \beta(1-x_n)^2(1-t)^2, \qquad x_n \le t \le 1,$$

где α и β равны соответственно коэффициентам a и b многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[0, 1]$ в метрике L_p, среди всех многочленов вида

$$Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2.$$

Числа α и β можно найти, решив систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^1 |Q(x)|^p\,dx = 0;\\ \frac{\partial}{\partial b}\int_0^1 |Q(x)|^p\,dx = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Используя условия (6), интегрированием по частям найдем

$$\int_0^1 |x^4+\alpha x^3+\beta x^2|^p\,dt = \frac{(1+\alpha+\beta)^p}{4p+1}.$$

Учитывая вышеизложенное и равенство (I.II) в [I], из (5) найдем

$$U \geqslant \frac{x_1^{4p+1}+(1-x_n)^{4p+1}}{4p+1}(1+\alpha+\beta)^p + \\ + \frac{[R_{4,p}(1)]^p}{(4p+1)\,2^{4p}}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^{4p+1}. \qquad (7)$$

Минимизируя правую часть (7) по аналогии с [2, стр.222-224], находим

$$\left.\begin{aligned}h_* = \frac{x^*_{k+1}-x^*_k}{2} = \frac{1}{2\left[\sqrt[4]{\frac{R_{4,p}(1)}{1+\alpha+\beta}}+n-1\right]};\\ x^*_k = \frac{\sqrt[4]{\frac{R_{4,p}(1)}{1+\alpha+\beta}}+2(k-1)}{2\left[\sqrt[4]{\frac{R_{4,p}(1)}{1+\alpha+\beta}}+n-1\right]} = x^*_1+2h_*(k-1),\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$(k=1,2,\ldots,n).$$

Через $K^*(t)$ обозначим функцию, построенную выше, которая на каждом отрезке $[x^*_k, x^*_{k+1}]$ $(k=0,1,\ldots,n;\ x^*_0=0;\ x^*_{n+1}=1)$ является соответствующим многочленом, наименее уклоняющимся от нуля в метрике L_p.

Ниже мы выберем коэффициенты $B_k^{(1)}$ так, что при узлах (8) на $[0,1]$ $K(t)=K^*(t)$. Поэтому $K^*(t)$ есть функция вида $K(t)$, доставляющая наименьшее значение интегралу (5).

Поэтому из (7) при узлах (8) получаем:

$$\min U = \frac{h_*^{4p}\,[R_{4,p}(1)]^p}{4p+1}.$$

Отсюда по (4)

$$\min \sup_{f\in W^{(4)}_{01}L_q(M;0,1)} |R_n(f)| = \frac{Mh_*^4 R_{4,p}(1)}{24\sqrt[p]{4p+1}}. \qquad (9)$$

Перейдем теперь к вычислению коэффициентов $B_\kappa^{*(l)}$ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$; $l = 0, 1, 2$), соответствующих минимуму интеграла (5).

На интервале $[x_1^*, x_2^*]$

$$K^*(t) = h_*^4 R_{4,p}\left(\frac{t-a_1^*}{h_*}\right) = t^4 + \alpha x_1^* t^3 + \beta x_1^{*2} t^2 - \\ - \sum_{l=0}^{2} (-1)^l B_1^{*(l)} (t-x_1)^{3-l}.$$

Выписывая аналогичные равенства и для других интервалов, окончательно получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{2} (-1)^l B_1^{*(l)} (t-x_1)^{3-l} = t^4 + \alpha x_1^* t^3 + \beta x_1^{*2} t^2 - \\
&\quad - h_*^4 R_{4,p}\left(\frac{t-a_1^*}{h_*}\right); \\
&\sum_{l=0}^{2} (-1)^l B_\kappa^{*(l)} (t-x_\kappa^*)^{3-l} = h_*^4 R_{4,p}\left(\frac{t-a_{\kappa-1}^*}{h_*}\right) - \\
&\quad - h_*^4 R_{4,p}\left(\frac{t-a_\kappa^*}{h_*}\right) \\
&\quad (\kappa = 2, \ldots, n-1); \\
&\sum_{l=0}^{2} (-1)^l B_n^{*(l)} (t-x_n^*)^{3-l} = h_*^4 R_{4,p}\left(\frac{t-a_{n-1}^*}{h_*}\right) - \\
&\quad - (1-t)^4 - \alpha(1-x_n^*)(1-t)^3 - \beta(1-x_n^*)^2(1-t)^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Разлагая правые части равенства (10) по степени $t - x_\kappa^*$ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$) и сравнивая коэффициенты при одинаковых

степенях, получаем, принимая во внимание (8), что

$$
\left.
\begin{aligned}
B_1^{*(0)} &= B_n^{*(0)} = \frac{h_*}{6}\left\{6(4+\alpha)\sqrt[4]{\frac{R_{4,p}(1)}{1+\alpha+\beta}} - R'''_{4,p}(-1)\right\} = \\
&= h_*\left[(4+\alpha)\sqrt[4]{\frac{R_{4,p}(1)}{1+\alpha+\beta}} + 4\right]; \\
B_1^{*(1)} &= -B_n^{*(1)} = \frac{h_*^2}{2}\left[R''_{4,p}(1) - 2\left(6+3\alpha+\beta\right)\sqrt{\frac{R_{4,p}(1)}{1+\alpha+\beta}}\right]; \\
B_1^{*(2)} &= B_n^{*(2)} = h_*^3\left[(4-3\alpha+2\beta)\sqrt[4]{\left(\frac{R_{4,p}(1)}{1+\alpha+\beta}\right)^3} + R'_{4,p}(1)\right]; \\
B_\kappa^{*(0)} &= \frac{1}{3}h_* R'''_{4,p}(1) = 8h_*\,; \\
B_\kappa^{*(1)} &= 0; \quad (\kappa = 2, \ldots, n-1); \\
B_\kappa^{*(2)} &= 2h_*^3 R'_{4,p}(1).
\end{aligned}
\right\} \qquad (II)
$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что ядро $K(t)$ с узлами (8) и коэффициентами (II) на $[x_n^*, 1]$ совпадает с $K^*(t)$, но тогда $K(t) = K^*(t)$ на $[0,1]$ в силу выбора коэффициентов (II).

Таким образом среди всевозможных квадратурных формул (I) наилучшей для класса $W_{01Lq}^{(4)}(M; 0,1)$ является формула с узлами x_κ^* и коэффициентами $B_\kappa^{*(l)}$, выражаемыми при помощи равенств (8), (II) и с точной оценкой (9).

А теперь вернемся к классу функций $W_{Lq}^{(4)}(M; 0,1)$.

Положим в формуле (I), где узлы x_κ^* и коэффициенты $B_\kappa^{*(l)}$ находятся из (8) и (II),

$$
\begin{aligned}
A^{*(0)} &= C^{*(0)} = -\frac{h_*\alpha}{4}\sqrt[4]{\frac{R_{4,p}(1)}{1+\alpha+\beta}}\,; \\
A^{*(1)} &= -C^{*(1)} = \frac{h_*^2\beta}{12}\sqrt{\frac{R_{4,p}(1)}{1+\alpha+\beta}}\,.
\end{aligned}
\qquad (I2)
$$

Полученная формула (I) является наилучшей для класса функций $W_{Lq}^{(4)}(M; 0,1)$.

Во-первых, она для класса функций $W^{(4)}_{01L_q}(M;\,0,1)$ наилучшая по построению.

Во-вторых, если $f(x)\in W^{(4)}_{L_q}(M;\,0,1)$, то функция

$$f(x)-x^2f'(1)(x-1)-f'(0)x(x-1)^2-x^2(3-2x)f(1)-$$
$$-(x-1)^2(2x+1)f(0)\in W^{(4)}_{01L_q}(M;\,0,1).$$

А так как формула (I) с узлами (8) и коэффициентами (II), (I2) точна для любого многочлена третьей степени, то рассуждения, аналогичные [3], и доказывают наше утверждение.

При этом

$$\min_{f\in W^{(4)}_{L_q}(M;\,0,1)}\sup|R_n(f)|=\min_{f\in W^{(4)}_{01L_q}(M;\,0,1)}\sup|R_n(f)|$$

В частном случае, когда $q=2$, из системы (6) получаем

$$\alpha=-\frac{3}{2};\quad \beta=\frac{15}{28}.$$

Подставив в полученные формулы вместо $R_{4,p}(x)$ - полиномы Лежандра $X_4(x)$, найдем узлы и коэффициенты наилучшей формулы (I) для класса функций $W^{(4)}_{L_2}(M;\,0,1)$.

$$x^*_k=2h_*\left(\sqrt[4]{\frac{2}{5}}+k-1\right)=\frac{\sqrt[4]{\frac{2}{5}}+k-1}{2\sqrt[4]{\frac{2}{5}}+n-1};$$

$$h_*=\frac{1}{2\left[2\sqrt[4]{\frac{2}{5}}+n-1\right]};$$

$$B_1^{*(0)}=B_n^{*(0)}=\left(5\sqrt[4]{\frac{2}{5}}+4\right)h_*;$$

$$B_1^{*(1)}=-B_n^{*(1)}=\frac{3}{7}\left(12-19\sqrt{\frac{2}{5}}\right)h_*^2;$$

$$B_1^{*(2)}=B_n^{*(2)}=\frac{16}{7}\left(2\sqrt[4]{\frac{8}{125}}+1\right)h_*^3;$$

$$B_k^{*(0)}=8h_*;$$

$$B_k^{*(1)}=0;\qquad (k=2,\dots,n-1)$$

$$B_k^{*(2)}=\frac{32}{7}h_*^3;$$

$$A^{*(0)}=C^{*(0)}=\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{2}{5}}h_*;$$

$$A^{*(1)} = -C^{*(1)} = \frac{5}{28}\sqrt{\frac{2}{5}}\,h_*^2;$$

$$\min \sup_{f\in W_{L_2}^{(4)}(M;\,0,1)} |R_n(f)| = \frac{Mh_*^4}{315} = \frac{M}{5040\left[2\sqrt[4]{\frac{2}{5}}+n-1\right]^4}.$$

Литература

I. М.Б. Аксень, А.Х. Турецкий. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций. Изв. АН БССР, сер. физ. матем. № I, I966, I5-27.

2. В.И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. М., I967.

3. М. Левин. Замечание об одном свойстве формулы трапеций. Изв. АН ЭССР, Физика. Математика, I7, № I, I968, I09-III.

E. Schats

The Best Quadrature Formula for the Class Functions $W_{L_2}^{(4)}(M;\,0,1)$

Summary

In the present paper the best quadrature formula of type (1) has been constructed for the class functions $f(x)\in W_{L_2}^{(4)}(M;\,0,1)$. The solutions are given by expressions (8), (11) and (12).

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

С Е Р И Я А № 293 1970

УДК 51:373

Х.Роос

ВОЗМОЖНОСТЬ РАССМОТРЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И СИСТЕМ ЧИСЕЛ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ЧИСЛОВЫМ РЯДАМ

Для усвоения математического анализа необходима хорошая подготовка в области действительных чисел. Рассмотрение действительных чисел должно относиться и относится к программе средних школ. Но методы, которые применяют до сего времени в средних школах при рассмотрении этого вопроса, способствуют вполне удовлетворительному усвоению только понятия о рациональных, а не об иррациональных числах.

Таким образом студенты первого курса недостаточно разбираются в области действительных чисел. Поэтому в начале первого семестра следовало бы более основательно рассматривать иррациональные числа. Но это возможно было бы достигнуть теми же методами, которые следовало бы ранее применять в средней школе. В высшем учебном заведении заниматься этим не позволяет отсутствие времени. Хотя более глубокое изучение в области действительных чисел возможно позднее и в высших технических учебных заведениях (и безусловно необходимо в высших педагогических учебных заведениях) при изучении теории числовых рядов.

Такое запоздалое изучение действительных чисел не заменяет собой их изучения в средней школе, но все же оно хоть и задним числом углубляет понятие о действительных числах (даже в том случае, если это понятие уже достаточно усвое-

но), обосновывая написание чисел, давая основания для определения порядка величины действительных чисел и образования их приближенных значений.

Работу на этом этапе можно организовать так, чтобы все необходимые теоремы изучались во время лекций на конкретных примерах для пояснения теории, а частично на практических занятиях и при выполнении домашних заданий.

Таким образом для усвоения данного раздела не требуется дополнительное время, весь вопрос заключается только в правильном подборе примеров и задач. Поэтому дополнительное время требуется только для выводов и увязок нового с ранее пройденным. Целью настоящей статьи и является указать на те теоремы, которые были бы необходимы для понимания действительных чисел. В статье в виде задач дается семь теорем.

При сравнении рядов можно было бы на лекции привести следующий пример:

Задача I. Пусть a, k, b_k и m – целые числа, причем $a>1$, $k\geq 1$ и $0\leq b_k\leq a-1$. Доказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k a^{m+1-k} \qquad (I)$$

сходится.

Решение:

а) Если $b_k=a-1$ при любом k, тогда ряд сводится к геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a-1)\, a^{m+1-k}, \qquad (2)$$

знаменатель которой $\frac{1}{a}$. Так как $a>1$, то $0<\frac{1}{a}<1$. Следовательно ряд (2) сходится.

б) В остальных случаях

$$0\leq b_k a^{m+1-k}\leq (a-1)\, a^{m+1-k}.$$

Таким образом, члены данного ряда не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда (2). Следовательно сходится и ряд (I).

Назовем число b_k коэффициентом и число a основанием ряда (I).

Если существует такое натуральное число n, что при $k > n$ $b_k = 0$, то ряд (I) имеет конечное число членов, отличных от нуля. В таком случае называем ряд конечным, в противном случае - бесконечным. В случае, если у бесконечного ряда определенные коэффициенты будут бесконечно повторяться в одном и том же порядке, то называем ряд периодическим, в противном случае - непериодическим.

Легко убедиться, что любой периодический ряд сводится к геометрической прогрессии и его сумма S получается в результате конечного числа арифметических действий с целыми числами b_k и a. Следовательно, сумма S периодического ряда есть рациональное число. На тех же основаниях сумма конечного ряда также рациональное число.

Для оценки точности частичной суммы можно привести следующий пример.

Задача 2. Показать, что ошибка, которая получается, если сумму S ряда (I) заменить его частичной суммой S_n, не превосходит числа a^{m+1-n}.

Решение. Так как $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a^{m+1-k}$,

то упомянутая ошибка $S - S_n$ представима в виде ряда

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k a^{m+1-k} = \sum_{i=1}^{\infty} b_{n+i} a^{m+1-(n+i)}.$$

Сумма же полученного ряда не превосходит суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a-1) a^{m+1-(n+i)} = a^{m+1-n}.$$

Из этой задачи следует, что $S \leq S_n + a^{m+1-n}$,

и поэтому сумма ряда (I) ограничена как сверху, так и снизу, а именно

$$S_n < S \leq S_n + a^{m+1-n}$$

или

$$S_{n-1}+b_n a^{m+1-n} < S_{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty} b_k a^{m+1-k} \leq$$

$$\leq S_{n-1}+(b_n+1)a^{m+1-n}.$$

Если $b_n+1 \leq a-1$, то легко заметить, что как ряд (I), так и верхняя и нижняя границы его суммы или, что то же самое приближенные значения с недостатком и с избытком, начинаются с $n-1$ одинаковых членов. Следовательно такая пара приближенных значений, с ошибкой не более a^{m+1-n} дает n первых членов ряда (I).

Поэтому, если дано какое-нибудь правило для образования пар приближенных значений ряда в случае как угодно большого n, т.е. с как угодно малой ошибкой a^{m+1-n}, то тем самым задан и любой член ряда (I). Таким образом ряд (I) задан с какой угодно точностью через свои пары приближенных значений.

Далее следует показать, что любое действительное число представимо суммой ряда (I). Для этого можно на практических занятиях решить следующие задачи.

Задача 3. Доказать, что любое натуральное число n выражается суммой ряда (I), где $m \geq 0$ и при $k > m+1$ $b_k = 0$ т.е. n выражается суммой конечного ряда, где отсутствуют члены с отрицательными показателями степени основания a.

Решение. Так как $a > 1$, то для любого натурального числа n найдется такое неотрицательное целое число r_1, что $a^{r_1} < n < a^{r_1+1}$, откуда $1 \leq \frac{n}{a^{r_1}} < a$.

Таким образом число n можно представить суммой

$$n = \frac{n}{a^{r_1}} \cdot a^{r_1} = \left(b_1 + \frac{n_1}{a^{r_1}}\right) a^{r_1} = b_1 a^{r_1} + n_1,$$

где b_1 и n_1 – целые числа, удовлетворяющие условиям $1 \leq b_1 \leq a-1$ и $0 \leq n_1 < a^{r_1}$ т.е. $n_1 < n$.

Если $0 \leq n_1 \leq a$, то задача очевидно решена.

Но если $n_1 > a$ то в свою очередь найдется такое натуральное число r_2 что $r_2 < r_1$ и $a^{r_2} \le n_1 < a^{r_2+1}$, откуда

$$1 \le \frac{n_1}{a^{r_2}} < a.$$

Следовательно теперь можно число n_1 представить суммой

$$n_1 = \frac{n_1}{a^{r_2}} a^{r_2} = \left(b_2 + \frac{n_2}{a^{r_2}}\right) a^{r_2} = b_2 a^{r_2} + n_2,$$

где b_2 и n_2 - опять целые числа, удовлетворяющие условиям $1 \le b_2 \le a-1$ и $0 \le n_2 < a^{r_2}$, т.е. $n_2 < n_1 < n$.

Поэтому $n = b_1 a^{r_1} + b_2 a^{r_2} + n_2$.

Если $0 \le n_2 \le a$, то снова полученная сумма окажется надлежащим рядом.

Если все еще $n_2 > a$, то можно описанный выше процесс продолжать так долго, пока наконец n_i удовлетворит условиям $0 \le n_i \le a$. Но тогда задача решена:

$$n = b_1 a^{r_1} + b_2 a^{r_2} + b_3 a^{r_3} + \dots + b_i a^{r_i} + n_i.$$

Полученную нами сумму можно записать следующим образом:

$$n = \sum_{k=1}^{r-1} b_k a^{r+1-k}, \qquad (3)$$

где b_k и r - целые числа, которые удовлетворяют условиям $0 \le b_k \le a-1$ и $r \ge 0$.

Задача 4. Доказать, что любое положительное число, меньшее единицы, представимо суммой ряда (I), где $m = 0$ и $b_1 = 0$ т.е. рядом, у которого отсутствуют слены с положительными показателями степени основания a.

Решение. Если $0 < t < 1$, то найдется такое натуральное число r_1, что

$$a^{-r_1} \le t < a^{-(r_1-1)},$$

откуда

$$1 \le t a^{r_1} < a.$$

Таким образом, можно записать число t в виде суммы:

$$t = t a^{r_1} \cdot a^{-r_1} = (c_1 + t_1) a^{-r_1} = c_1 a^{-r_1} + t_1 a^{-r_1} = 0 \cdot a^0 + c_1 a^{-r_1} + t_1 a^{-r_1},$$

где c_1 - натуральное число, удовлетворяющее условиям $1 \le c_1 \le a-1$ и t_1 удовлетворяет условиям $0 \le t_1 < 1$.

Если $t_1 = 0$, то задача, очевидно, решена.

Если же $t_1 \neq 0$, то опять найдется такое натуральное число r_2, что

$$a^{-r_2} \leqslant t_1 < a^{-(r_2-1)},$$

откуда

$$1 \leqslant t_1 a^{r_2} < a.$$

Следовательно, теперь t_1 выражается суммой двух слагаемых:

$$t_1 = t_1 a^{r_2} a^{-r_2} = (c_2 + t_2) a^{-r_2} = c_2 a^{-r_2} + t_2 a^{-r_2},$$

где c_2 - натуральное число, удовлетворяющее условиям $1 \leqslant c_2 \leqslant a-1$ и t_2 удовлетворяет условиям $0 \leqslant t_2 < 1$.

Таким образом,

$$t = 0 \cdot a^0 + c_1 a^{-r_1} + c_2 a^{-(r_1+r_2)} + t_2 a^{-(r_1+r_2)}.$$

Когда $t_2 = 0$, то задача решена, причем полученный ряд конечный.

Но если $t_2 \neq 0$, то описанный выше процесс можно продолжить до некоторого $t_n = 0$ или бесконечно, если ни при одном n $t_n \neq 0$.

В обоих случаях задача, очевидно, решена.

В первом случае число t выражается конечным, а во втором случае - бесконечным рядом. В обоих случаях

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a^{1-k}, \qquad (4)$$

где $c_1 = 0$ и при $k > 1$ $0 \leqslant c_k \leqslant a-1$.

Если $c_k = 0$ при любом k, то $t = 0$.

Если t - рациональное число, т.е. $t = \frac{p}{q}$ где p и q натуральные числа без общих сомножителей и $p < q$, то

$$1 \leqslant \frac{pa}{q} < a \quad \text{и} \quad \frac{p}{q} = \frac{pa^{r_1}}{q} \cdot a^{-r_1} = \left(c_1 + \frac{p_1}{q}\right) a^{-r_1} =$$

$$= 0 \cdot a^0 + c_1 a^{-r_1} + \frac{p_1}{q} a^{-r_1},$$

где c_1 и p_1 - целые числа, удовлетворяющие условиям

$$1 \leqslant c_1 \leqslant a-1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant p_1 < q.$$

В случае, если $p_1 = 0$, то задача решена.

Если же $p_1 \neq 0$, то процесс можно продолжать до какого-нибудь $p_n = 0$ или бесконечно, если ни при одном n $p_n \neq 0$. Но так как p_n - натуральное число, меньшее, чем число q, то оно может принимать только $q-1$ различных значений. Следовательно при бесконечном повторении процесса должны бесконечно повторяться и некоторые значения числа p_n, в связи с чем начнут повторяться и соответствующие коэффициенты ряда (4). Полученный ряд (4) таким образом - периодический.

Задача 5. Доказать, что любое число, большее единицы, представимо суммой ряда (I), где $m \geq 0$.

Решение. Так как любое число p, большее единицы, представимо в виде суммы $p = n + t$, где n - натуральное число и $0 \leq t < 1$, то число p выражается суммой рядов (3) и (4):

$$p = \sum_{k=1}^{n+1} b_k a^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k a^{1-k} = b_1 a^n + b_2 a^{n-1} + \cdots +$$

$$+ b_{n+1} a^0 + 0 \cdot a^0 + c_2 a^{-1} + c_3 a^{-2} + \cdots + c_n a^{-(n-1)} + \cdots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} d_k a^{n+1-k}, \qquad (5)$$

где $r \geq 0$ и $0 \leq d_k \leq a-1$.

Из задач I - 5 можно сделать важные выводы.

I) В случае, если p - рациональное число, то t рациональное число. Значит ряд (4) или конечный, или бесконечный периодический, в связи с чем ряд (5) также или конечный или бесконечный периодический.

Следовательно, любое положительное рациональное число является суммой конечного, либо бесконечного периодического ряда, как мы ранее видели, и, наоборот, сумма бесконечного периодического или конечного ряда есть рациональное число.

2) Сумма бесконечного непериодического ряда таким образом не может быть рациональным числом, и, следовательно, оно - иррациональное число.

3) Так как любое действительное число представимо суммой ряда (I), то все действительные числа можно записывать в виде ряда (I).

Но запись ряда (I) можно условно упростить. Так как все члены ряда положительны и все знаки действий - плюсы, то можно их, как заранее известные, опустить. Каждый член ряда является произведением двух сомножителей, из которых один - степень основания, причем (в счет берутся и члены с коэффициентом 0), показатель степени каждого члена на единицу меньше показателя степени предыдущего члена. Поэтому можно и степень основания, как заранее известную, опустить. Таким образом остаются только коэффициенты b_k и показатель степени m. Коэффициенты b_k записывают в одну строку слева направо точно в том же порядке, в каком они следуют в ряду, включая и коэффициенты 0. (Коэффициенты 0 не записывают только в том случае, если найдется такое натуральное число $l \geq m+1$, что при $k > l$ $b_k = 0$).

Как выяснилось из задач 3 - 5, каждому действительному числу соответствует ряд, у которого показатель m неотрицательный, $m \geq 0$. Таким образом у каждого ряда (I) имеется такой член, показатель степени основания a, которого равен нулю: $m + 1 - k = 0$ откуда $k = m + 1$. Число m дается теперь таким образом, что после коэффициента b_{m+1} ставят запятую.

И так, как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k a^{m+1-k}$, то и его сумму записывают в виде

$$b_1 b_2 b_3 \cdots b_m b_{m+1}, b_{m+2} b_{m+3} b_{m+4} \cdots \qquad (6)$$

Когда сумма ряда (I) целое число, то, как мы видели, при $k > m+1$ $b_k = 0$, т.е. все коэффициенты, стоящие справа от запятой равны нулю. Эти нули тогда не записывают, а также не ставят и запятой.

Если каждое неотрицательное целое число, меньше a обозначить своим особым символом, то этих символов, называемых цифрами, будет a. Каждому коэффициенту b_k соответствует тогда одна цифра.

Запись числа с помощью a цифр в виде (6) называется позиционной записью числа, так как место или позицию каждой цифры относительно запятой (или при ее отсутствии относительно последней цифры справа) определяет показатель степени ненаписанного сомножителя, т.е. величина сомножителя a^{m+1-k}.

4) Наименьшее значение основания - 2, это основание употребляется при работе на электронно-счетных машинах. Обычно в качестве основания употребляют число 10, в этом случае говорят, что числа даны в десятичной системе. Если в записи числа имеется запятая, то такое число называют десятичной дробью.

5) Из предыдущего следует, что любая конечная или бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом, наоборот, любое рациональное число записывается в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Бесконечная непериодическая десятичная дробь есть иррациональное число. Пара приближенных значений ряда (I) является парой приближенных значений десятичной дроби.

Если дано какое-либо правило для образования сколь угодно точных приближенных значений бесконечной десятичной дроби, то тем самым задана любая цифра десятичной дроби. Десятичную дробь считают в таком случае известной точно.

Теперь нужно еще исследовать, как сравнить по величине числа, записанные по позиционному принципу. Для этого необходимо сравнить суммы следующих рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k a^{m+1-k} = S \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b'_k a^{m+1-k} = S'.$$

Задача 6. Доказать, что $S = S'$ не только тогда, когда при каждом k $b_k = b'_k$ (ряды идентичны), но и тогда, когда при $k<n$ $b_k = b'_k$, $b_n < a-1$, $b'_n = b_n+1$ и при $k>n$ $b_k = a-1$ и $b'_k = 0$.

Решение.

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} b_k a^{m+1-k}=b_1 a^m+b_2 a^{m-1}+\dots+b_{n-1}a^{m+2-n}+$$

$$+b_n a^{m+1-n}+\sum_{i=1}^{\infty}(a-1)a^{m+1-n-i}=b_1 a^m+b_2 a^{m-1}+\dots+$$

$$+b_{n-1}a^{m+2-n}+b_n a^{m+1-n}+a^{m+1-n}=b_1' a^m+b_2' a^{m-1}+$$

$$+\dots+b_{n-1}' a^{m+2-n}+b_n' a^{m+1-n}+\sum_{i=1}^{\infty}0\cdot a^{m+1-n-i}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} b_k' a^{m+1-k}=S'.$$

Задача 7. Доказать, что $S<S'$, если при $k<n$, $b_k=b_k'$ и $b_n<b_n'$ и при этом b_k и b_k' не удовлетворяют всем условиям задачи 6.

Решение: Ряд (I) ограничен следующим образом:

$$b_1 a^m+b_2 a^{m-1}+\dots+b_{n-1}a^{m+1-n}<S\leq$$

$$\leq b_1 a^m+b_2 a^{m-1}+\dots+b_{n-1}a^{m+2-n}+(b_n+1)a^{m+1-n},$$

причем знак равенства действует в случае, когда при $k>n$ $b_k=a-1$.

Так как по условию $b_n<b_n'$, то $b_n'\geq b_n+1$. Поэтому

$$S_n'=b_1' a^m+b_2' a^{m-1}+\dots+b_{n-1}' a^{m+2-n}+b_n' a^{m+1-n}\geq$$

$$\geq b_1' a^m+b_2 a^{m-1}+\dots+b_{n-1}a^{m+2-n}+(b_n+1)a^{m+1-n}.$$

Таким образом $S\leq S_n'$ причем знак равенства действует тогда, когда $b_n'=b_n+1$.

Кроме этого известно, что $S_n'<S'$, причем знак равенства действует, когда при $k>n$ $b_k'=0$.

Следовательно $S\leq S_n'\leq S'$, причем оба знака равенства действуют только тогда, когда оба ряда удовлетворяют все поставленные условия задачи 6. Значит, исходя из условий данной задачи, S и S' удовлетворяют

либо неравенствам $S<S_n'<S'$,

либо неравенствам $S \leqslant S'_n < S'$,

либо неравенствам $S < S'_n \leqslant S'$.

Таким образом, в любом случае $S < S'$.

Задачи 6 и 7 дают простое предписание для сравнения сумм рядов при условии, что у обоих рядов показатели степени основания в первом члене равны. В действительности это условие не препятствует сравнению каких угодно двух рядов, так как мы можем показатель степени числа a у первого члена произвольно увеличивать, беря в начале ряда новые члены с коэффициентами 0.

Из задачи 6 следует, что любое целое число или конечная десятичная дробь могут быть записаны еще и как бесконечная десятичная дробь с периодом 9 (при этом последнюю цифру данного числа необходимо только уменьшить на единицу):

$$3{,}457 = 3{,}456(9)$$
$$438 = 437{,}(9).$$

Из задачи 7 следует, что бесконечную десятичную дробь, как периодическую, с периодом не равным 9, так и непериодическую, можно с помощью десятичной дроби выразить только единственным образом.

H. Roos

Eine Möglichkeit der Behandlung reeller Zahlen und Zahlensysteme durch geeignetes Übungsmaterial zur Zahlenreihe

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es wird die Ansicht vertreten, daß der Begriff der reellen Zahl in der Hochschule vertieft werden soll, und für zweckmäßig gehalten, dies durch die Behandlung der Zahlenreihen mit positiven Gliedern zu erreichen.

So kommt man zur Aufgabe, die Eigenschaften der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k a^{m+1-k}$ (wo a, b, k, m ganze Zahlen sind, $a > 1$ und $0 \leq b_k \leq a - 1$) zu unterzuchen. Diese Aufgabe besteht aus sieben Übungen, die die Schreibweise der Zahlen nach Positionsprinzip, das Vergleichen reeller Zahlen der Größe nach und die Bildung der Näherungswerte reeller Zahl begründen.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

С Е Р И Я А № 293 1970

УДК 531.391+624.074.4.001.2

Т. Лийва

О СОБСТВЕННЫХ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

В статье [1] рассматриваются малые установившиеся колебания тонкой упругой оболочки вращения при различных значениях числа m волн по параллели. Воспользовавшись асимптотическим методом интегрирования, автор этой статьи показывает, что при кратных корнях характеристического уравнения изучение неосесимметричных колебаний требует дополнительного анализа.

В настоящей статье внимание сосредоточено на колебаниях тонкой упругой оболочки вращения отрицательной гауссовой кривизны – тогда безмоментные корни характеристического уравнения становятся попарно тождественно равными. Исследуется часть спектра, лежащая в окрестности частоты собственных колебаний. Оболочка замкнута в окружном направлении и ограничена двумя параллелями.

Уравнение частот приводится для оболочки, жестко заделанной по двум параллелям. В качестве примера найдены частота и формы колебаний части тора, у которой радиусы кривизны имеют противоположные знаки.

I. Система уравнений

В качестве координат на срединной поверхности возьмем длину дуги s и φ в окружном направлении. Положим

$$T_1(s,\varphi,t)=Ehp(s)\cos m\varphi\cdot e^{i\omega t};\ u(s,\varphi)=u(s)\cos m\varphi\cdot e^{i\omega t},$$
$$T_2(s,\varphi,t)=Ehq(s)\cos m\varphi\cdot e^{i\omega t};\ v(s,\varphi)=v(s)\sin m\varphi\cdot e^{i\omega t},$$
$$S(s,\varphi,t)=Ehr(s)\sin m\varphi\cdot e^{i\omega t};\ w(s,\varphi)=mw(s)\cos m\varphi\cdot e^{i\omega t}, \qquad (I.I)$$

где T_1, T_2, S, u, v, w – неизвестные напряжения и проекции смещения, E – модуль Юнга, h – толщина оболочки, m – число волн в окружном направлении, ω – частота колебаний. Пусть в качестве единицы длины выбран характерный размер срединной поверхности. Тогда h можно считать малым параметром.

После подстановки (I.I) в уравнении равновесия и соотношении упругости получим систему уравнений для определения p, q, r, u, v, w:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(Bp)+mr-q\frac{dB}{ds}+B\lambda u=0 \\ \frac{d}{ds}(Br)+r\frac{dB}{ds}-mq+B\lambda v=0 \\ \frac{p}{R_1}+\frac{q}{R_2}+m\lambda w-\frac{mh^2}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{1}{B}\frac{d}{ds}B\frac{d}{ds}-\frac{m^2}{R^2}\right)^2 w=0 \\ \frac{du}{ds}-\frac{m}{R_1}w=p-\sigma q \\ \frac{u}{B}\frac{dB}{ds}+\frac{m}{B}v-\frac{m}{R_2}w=q-\sigma p \\ -\frac{m}{B}u+\frac{dv}{ds}-\frac{v}{B}\frac{dB}{ds}=2(1+\sigma)r, \end{cases} \qquad (I.2)$$

где $\lambda=\gamma\omega^2E^{-1}$ – параметр частоты, γ – плотность, σ – коэффициент Пуассона, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны, B – расстояние до оси вращения. В связи с тем, что в данной задаче, определяющей является безмоментная деформация, безмоментные слагаемые в (I.2) выписаны точно, а из моментных членов сохранен только главный член в третьем уравнении равновесия.

2. Асимптотическое интегрирование системы уравнений

Введем малый параметр ε в виде

$$\varepsilon=\left[\frac{h^2}{12(1-\sigma^2)}\right]^{\frac{1}{6}}. \qquad (2.I)$$

Четыре интеграла системы (I.2) ищем в виде рядов

$$p_\kappa(s,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{n\kappa}(s)\,\varepsilon^n \exp\left\{\frac{\rho}{\varepsilon}\int_{s_1}^{s}\alpha_\kappa(s)\,ds\right\} \qquad \kappa=1,2,3,4$$
$$[p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w], \tag{2.2}$$

где символ в квадратных скобках указывает на то, что аналогичные формулы имеют место и для q, r, u, v, w. Здесь функция α_κ пока неизвестна.

Система (I.2) имеет также четыре интеграла типа краевого эффекта с показателем изменяемости $\frac{1}{2}$, они найдены в статье [I] и имеют вид

$$u_\kappa(s,\varepsilon)=\frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{q_\kappa}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\eta_\kappa(s,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_{s_1}^{s}q_\kappa(t)\,dt\right\}+O(\varepsilon^3)$$

$$v_\kappa(s,\varepsilon)=\frac{\rho\varepsilon^2}{q_\kappa^2 B}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\eta_\kappa(s,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_{s_1}^{s}q_\kappa(t)\,dt\right\}+O(\varepsilon^{\frac{7}{2}})$$

$$w_\kappa(s,\varepsilon)=\eta_\kappa(s,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_{s_1}^{s}q_\kappa(t)\,dt\right\}+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$$

$$\eta_\kappa(s,\varepsilon)=B^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{8}}\exp\left\{-\varepsilon^{\frac{3}{2}}m^2\int_{s_1}^{s}\frac{B\left[\lambda(1-\sigma^2)-2q_\kappa^4\right]+(1-\varepsilon^2)B''}{2B^3q_\kappa^5}\right\}$$

$$b(s,\lambda)=(1-\sigma^2)\left[\lambda-\frac{1}{R_2^2(s)}\right];\quad q_\kappa=b^{\frac{1}{4}}(s,\lambda). \tag{2.3}$$

Ограничимся построением интегралов (2.2), так как безмоментная деформация является здесь определяющей.

Результаты расчетов и экспериментальные данные показывают, что в задачах о колебаниях оболочек отрицательной гауссовой кривизны наименьшее собственное число соответствует собственным функциям, в которых число узловых линий неограниченно всзрастает при $h\to 0$, причем одновременно и $\lambda\to 0$ [2].

Положим

$$\lambda=\varepsilon^2\lambda_0+\varepsilon^3\lambda_1+\cdots \tag{2.4а}$$

$$m=\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{2.4б}$$

Целесообразность такого представления λ и m подтверждается и ниже.

Подставим (2.2), (2.I), (2.4а) и (2.4б) в уравнения(I.2) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

В нулевом приближении (при степенях ε^{-1}) получаем две системы линейных однородных уравнений.

$$\begin{cases} \varrho B\alpha_k p_{ok} + \varrho r_{ok} = 0 \\ \varrho B\alpha_k r_{ok} - \varrho q_{ok} = 0 \\ \dfrac{p_{ok}}{R_1} + \dfrac{q_{ok}}{R_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varrho\alpha_k u_{ok} - \varrho\dfrac{w_{ok}}{R_1} = 0 \\ \varrho\dfrac{v_{ok}}{B} - \varrho\dfrac{w_{ok}}{R_2} = 0 \\ -\varrho\dfrac{u_{ok}}{B} + \varrho\alpha_k v_{ok} = 0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

Запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &q_{ik} = -\frac{R_2}{R_1} p_{ik}; \quad r_{ik} = -B\alpha_k p_{ik} \\ &u_{ik} = B\alpha_k v_{ik}; \quad w_{ik} = \frac{R_2}{B} v_{ik} \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots). \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Нас интересуют нетривиальные решения систем (2.5), поэтому следует приравнять нулю детерминанты. Получаем два одинаковых алгебраических уравнения, решение которых имеет следующий вид:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{\frac{R_2}{B^2 R_1}}, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = -\sqrt{\frac{R_2}{B^2 R_1}}. \qquad (2.7)$$

При $i = 0$ соотношения (2.6) являются решением системы (2.5), причем функции p_{ok} и v_{ok} пока не определены.

В первом приближении (при степенях ε^0) получаем две системы линейных неоднородных уравнений с нулевыми определителями в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{du_{ok}}{ds} + \varrho\alpha_k u_{ik} - \varrho\dfrac{w_{ik}}{R_1} = p_{ok} - \sigma q_{ok} \\ \dfrac{u_{ok}}{B}\dfrac{dB}{ds} + \varrho\dfrac{v_{ik}}{B} - \varrho\dfrac{w_{ik}}{R_2} = q_{ok} - \sigma p_{ok} \\ -\varrho\dfrac{u_{ik}}{B} + \dfrac{dv_{ok}}{ds} + \varrho\alpha_k v_{ik} - \dfrac{dB}{ds}\cdot\dfrac{v_{ok}}{B} = 2(1+\sigma) r_{ok} \end{cases} \qquad (2.8а)$$

$$\begin{cases} (p_{0k}-q_{0k})\dfrac{dB}{ds}+B\left(\dfrac{dp_{0k}}{ds}+\rho\alpha_k p_{1k}\right)+\rho r_{1k}=0 \\ 2r_{0k}\dfrac{dB}{ds}+B\left(\dfrac{dr_{0k}}{ds}+\rho\alpha_k r_{1k}\right)-\rho q_{1k}=0 \\ \dfrac{p_{1k}}{R_1}+\dfrac{q_{1k}}{R_2}+\lambda_0\rho w_{0k}-\rho^5 w_{0k}\left(\alpha_k^4-\dfrac{2}{B^2}\alpha_k^2+\dfrac{1}{B^4}\right)=0. \end{cases} \qquad (2.8б)$$

После элементарных преобразований (умножим строки системы (2.8а) соответственно на $B\alpha_k, -1, -\rho R_2,$, а (2.8б) – на $R_1, -R_2, \alpha_k R_1 B$ и складываем) члены с неизвестными функциями $p_{1k}, q_{1k}, r_{1k}, u_{1k}, v_{1k}, w_{1k}$ сокращаются и в результате получаются два уравнения для определения p_{0k}, v_{0k}:

$$\begin{aligned} &B\alpha_k\left[B'(p_{0k}-q_{0k})+Bp'_{0k}\right]-2B'r_{0k}-Br'_{0k}+ \\ &+\frac{\rho^6 R_2}{B^4}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2 w_{0k}-\rho^2 R_2\lambda_0 w_{0k}=0 \\ &R_1 u'_{0k}-\frac{B'}{B}R_2 u_{0k}+R_1 B\alpha_k\left(v'_{0k}-\frac{B'}{B}v_{0k}\right)= \\ &=R_1(p_{0k}-\sigma q_{0k})-R_2(q_{0k}-\sigma p_{0k})+2(1+\sigma)R_1 B\alpha_k r_{0k}. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

С учетом (2.6) при $i=0$ приводим (2.9) к уравнению

$$\frac{d}{ds}\left(g(s)\frac{dx}{ds}\right)-\frac{\rho^6}{g(s)}x+\rho^2 f(s)\lambda_0 x=0, \qquad (2.10)$$

где

$$g(s)=\frac{2R_1^2B^4|\alpha|}{R_2(R_1-R_2)^2},\quad f(s)=\frac{1}{2}\frac{R_2}{|\alpha|},\quad |\alpha_k|=|\alpha|.$$

(Коэффициенты этого уравнения от индекса k не зависят).

Величины p_{0k}, v_{0k} связаны с x соотношениями

$$v_{0k}=\left|\frac{B}{R_2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}}x,\quad p_{0k}=\frac{2BR_1^2\alpha_k}{(R_2-R_1)^2}\left|\frac{B}{R_2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{ds}. \qquad (2.11)$$

С учетом (2.6) при $i=0$ величины $u_{0k}, w_{0k}, q_{0k}, r_{0k}$ также выражаются через x и $\frac{dx}{ds}$. При этом величины v_{0k}, w_{0k}, r_{0k} получаются вещественными, а u_{0k}, p_{0k}, q_{0k} – чисто мнимыми.

Через x_1, x_2 обозначены решения уравнения (2.10), удовлетворяющие начальным условиям

$$x_1(s_1)=0\,,\quad x_1'(s_1)=1\,,\quad x_2(s_1)=1,\ x_2'(s_1)=0\,. \tag{2.I2}$$

Во втором приближении (при степенях ε') находим снова две линейные неоднородные системы с нулевыми определителями. В результате аналогичного элементарного преобразования, использованного в системах (2.8а) и (2.8б), новые неизвестные функции p_{2k}, q_{2k}, r_{2k}, u_{2k}, v_{2k}, w_{2k} сокращаются и в результате получаются два уравнения для определения p_{1k}, v_{1k}:

$$\begin{aligned}
&B\alpha_k\left[B'(p_{1k}-q_{1k})+Bp_{1k}'\right]-2B'r_{1k}-Br_{1k}'-\\
&-\rho^2R_2\lambda_0w_{1k}+\frac{\rho^6R_2}{B^4}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)^2w_{1k}=\\
&=\lambda_1\rho^2R_2w_{0k}+\rho^3R_2\left[\rho^3\left(6\alpha_k'\alpha_k^2w_{0k}+4\alpha_k^3w_{0k}'\right)-\right.\\
&\left.-\frac{2\rho^3}{B^2}\left(2\alpha_kw_{0k}'+\alpha_k'w_{0k}\right)+2\frac{B'}{B}\alpha_k^3\rho^3w_{0k}+2\frac{B'}{B^3}\rho^3\alpha_kw_{0k}\right]\\
&R_1u_{1k}'-\frac{B'}{B}R_2u_{1k}+R_1B\alpha_k\left(v_{1k}'-\frac{B'}{B}v_{1k}\right)=\\
&=R_1\left(p_{1k}-\sigma q_{1k}\right)-R_2\left(q_{1k}-\sigma p_{1k}\right)+2(1+\delta)R_1B\alpha_kr_{1k}\,.
\end{aligned} \tag{2.I3}$$

Искомые u_{1k}, v_{1k}, w_{1k}, q_{1k}, p_{1k}, r_{1k} связаны с y соотношениями (2.8) и

$$v_{1k}=\left|\frac{B}{R_2\alpha}\right|^{\frac12}y\,,\quad p_{1k}=\frac{2BR_1^2\alpha_k}{(R_2-R_1)^2}\left|\frac{B}{R_2\alpha}\right|^{\frac12}\frac{dy}{ds}\,. \tag{2.I4}$$

Для определения функции y находим новое уравнение из системы (2.I3) – таким же способом как уравнение (2.I0) из системы (2.9). Искомое уравнение, однородная часть которого совпадает с левой частью уравнения (2.I0), приобретает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(g(s)\frac{dy}{ds}\right)-\frac{\rho^6}{g(s)}y+\rho^2f(s)\lambda_0y=-\rho^2f(s)\lambda_1x\pm\\
&\pm i\rho^5\frac{R_2}{B^2}\left\{2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{dx}{ds}+x\left[\frac{B'}{B}\left(1+\frac{R_2}{R_1}-2\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)+R_2\left(\frac{1}{R_1}\right)'\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{2.I5}$$

Здесь знак плюс соответствует корням α_1, α_2, а знак минус – корням α_3, α_4. Неизвестный параметр λ_1 определяется из уравнения частоты.

Из уравнения (2.I5) следует, что его общее решение y содержит кроме вещественной и мнимую часть, поэтому можно записать

$$
\begin{aligned}
u_{1k} &= i\lambda_1 u_{1k}^{(\lambda)} + u_{1k}^{(0)}, \\
v_{1k} &= \lambda_1 v_{1k}^{(\lambda)} + i v_{1k}^{(0)}, \qquad [v_{1k}, w_{1k}] \\
p_{1k} &= i\lambda_1 p_{1k}^{(\lambda)} + p_{1k}^{(0)},
\end{aligned}
\tag{2.I6}
$$

Здесь функции $u_{1k}^{(\lambda)}$, $u_{1k}^{(0)}$, $v_{1k}^{(\lambda)}$, $v_{1k}^{(0)}$, $w_{1k}^{(\lambda)}$, $w_{1k}^{(0)}$, $p_{1k}^{(\lambda)}$, $p_{1k}^{(0)}$ пока неизвестны.

Составляя линейные комбинации безмоментных интегралов (2.2) и имея в виду (2.I6), получим вещественное безмоментное решение системы (I.2) в виде

$$
\begin{aligned}
u(s) = {} & C_1\left[-(u_{01}+\lambda_1\varepsilon u_{11}^{(\lambda)})\sin\psi-\varepsilon u_{11}^{(0)}\cos\psi\right]+ \\
& + C_2\left[-(u_{02}+\lambda_1\varepsilon u_{12}^{(\lambda)})\sin\psi-\varepsilon u_{12}^{(0)}\cos\psi\right]+ \\
& + C_3\left[(u_{01}+\lambda_1\varepsilon u_{11}^{(\lambda)})\cos\psi-\varepsilon u_{11}^{(0)}\sin\psi\right]+ \\
& + C_4\left[(u_{02}+\lambda_1\varepsilon u_{12}^{(\lambda)})\cos\psi-\varepsilon u_{12}^{(0)}\sin\psi\right], \\
v(s) = {} & C_1\left[(v_{01}+\lambda_1\varepsilon v_{11}^{(\lambda)})\cos\psi-\varepsilon v_{11}^{(0)}\sin\psi\right]+ \\
& + C_2\left[(v_{02}+\lambda_1\varepsilon v_{12}^{(\lambda)})\cos\psi-\varepsilon v_{12}^{(0)}\sin\psi\right]+ \\
& + C_3\left[(v_{01}+\lambda_1\varepsilon v_{11}^{(\lambda)})\sin\psi+\varepsilon v_{11}^{(0)}\cos\psi\right]+ \\
& + C_4\left[(v_{02}+\lambda_1\varepsilon v_{12}^{(\lambda)})\sin\psi+\varepsilon v_{12}^{(0)}\cos\psi\right], \qquad [v, w] \\
p(s) = {} & C_1\left[-(p_{01}+\lambda_1\varepsilon p_{11}^{(\lambda)})\sin\psi-\varepsilon p_{11}^{(0)}\cos\psi\right]+ \\
& + C_2\left[-(p_{02}+\lambda_1\varepsilon p_{12}^{(\lambda)})\sin\psi-\varepsilon p_{12}^{(0)}\cos\psi\right]+ \\
& + C_3\left[(p_{01}+\lambda_1\varepsilon p_{11}^{(\lambda)})\cos\psi-\varepsilon p_{11}^{(0)}\sin\psi\right]+ \\
& + C_4\left[(p_{02}+\lambda_1\varepsilon p_{12}^{(\lambda)})\cos\psi-\varepsilon p_{12}^{(0)}\sin\psi\right],
\end{aligned}
\tag{2.I7}
$$

где $\psi(s) = \frac{\varrho}{\varepsilon}\int_{s_1}^{s} |\alpha_k|\, ds$,

C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Из начальных условий для первого приближения (2.I2) вытекает

$$u_{01}(s_1) = v_{01}(s_1) = w_{01}(s_1) = p_{02}(s_1) = 0. \qquad (2.I8)$$

Во втором приближении положим

$$v_{11}^{(\lambda)}(s_1) = v_{11}^{(0)}(s_1) = p_{11}^{(0)}(s_1) = 0, \qquad (2.I9)$$

тогда, пользуясь соотношениями из системы (I.2) получим

$$u_{11}^{(\lambda)}(s_1) = w_{11}^{(\lambda)}(s_1) = r_{11}^{(0)}(s_1) = 0. \qquad (2.20)$$

После произведенных вычислений получаем

$$u_{02}(s_1) = B\left|\frac{\alpha B}{R_2}\right|^{\frac{1}{2}}_{s=s_1}; \quad u_{02}(s_2) = B\left|\frac{\alpha B}{R_2}\right|^{\frac{1}{2}}_{s=s_2} \cdot x_2(s_2)$$

$$v_{02}(s_1) = \left|\frac{B}{R_2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}}_{s=s_1}; \quad v_{02}(s_2) = \left|\frac{B}{\alpha R_2}\right|^{\frac{1}{2}}_{s=s_2} \cdot x_2(s_2)$$

$$u_{11}^{(\lambda)}(s_2) = B\left|\frac{\alpha B}{R_2}\right|^{\frac{1}{2}}_{s=s_2} y_1^{(\lambda)}(s_2); \quad v_{11}^{(\lambda)}(s_2) = \left|\frac{B}{\alpha R_2}\right|^{\frac{1}{2}}_{s=s_2} y_1^{(\lambda)}(s_2)$$

$$u_{11}^{(0)}(s_1) = \frac{B}{\rho}\left|\frac{B}{\alpha R_2}\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{4(1+\sigma)R_1R_2}{(R_2-R_1)^2}\right]_{s=s_1}$$

$$u_{11}^{(0)}(s_2) = \frac{B}{\rho}\left|\frac{B}{\alpha R_2}\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{4(1+\sigma)R_1R_2}{(R_2-R_1)^2}\right]\frac{dx_1}{ds}\Big|_{s=s_2} - B\left|\frac{B\alpha}{R_2}\right|^{\frac{1}{2}}_{s=s_2} \cdot y_1^{(0)}(s_2)$$

$$v_{11}^{(0)}(s_2) = \left|\frac{B}{\alpha R_2}\right|^{\frac{1}{2}}_{s=s_2} \cdot y_1^{(0)}(s_2)$$

$$w_{11}^{(\lambda)}(s_2) = \frac{R_2}{B} v_{11}^{(\lambda)}(s_2)\Big|_{s=s_2}$$

$$w_{11}^{(0)}(s_1) = \frac{2BR_1^2R_2}{\rho(R_2-R_1)^2}\left(\sigma + \frac{R_2}{R_1}\right)\left|\frac{\alpha B}{R_2}\right|^{\frac{1}{2}}_{s=s_1} \qquad (2.2I)$$

$$w_{11}^{(0)}(s_2) = \frac{2BR_1^2R_2}{\rho(R_2-R_1)^2}\left(\sigma + \frac{R_2}{R_1}\right)\left|\frac{\alpha B}{R_2}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{dx_1}{ds}\Big|_{s=s_2} + \left|\frac{R_2}{\alpha B}\right|^{\frac{1}{2}} y_1^{(0)}(s_2)\Big|_{s=s_2}$$

$$w_{02}(s_1) = \frac{R_2}{B} v_{02}(s_1)\Big|_{s=s_1}$$

$$w_{02}(s_2) = \frac{R_2}{B} v_{02}(s_2)\Big|_{s=s_2}$$

$$y_1^{(\lambda)}(s_2) = \frac{\rho^2 x_2(s_2)}{2g(s_1)} \int_{s_1}^{s_2} \frac{x_1^2 R_2}{|\alpha|}\, ds$$

$$y_1^{(0)}(s_2) = -\frac{\rho^5 x_2(s_2)}{g(s_1)} \int_{s_1}^{s_2} \frac{x_1 R_2}{B^2}\left\{2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{dx_1}{ds} + x_1\left[\frac{B'}{B}\left(1+\frac{R_2}{R_1}-2\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)+R_2\left(\frac{1}{R_1}\right)''\right]\right\} ds.$$

3. Случай жесткой заделки краев

Для оболочки, жестко закрепленной по параллелям $s = s_1$ и $s = s_2$ $(s_2 > s_1)$, должны быть выполнены граничные условия

$$u(s_i) = v(s_i) = w(s_i) = \frac{dw(s_i)}{ds} = 0 \qquad i = 1, 2. \tag{3.1}$$

В первом приближении зависимость собственного значения λ от вида тангенциальных граничных условий весьма велика. Оказывается, что учет нетангенциальных граничных условий дает поправку, относительная величина которой имеет порядок $h^{\frac{1}{2}} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$.

Поэтому наши результаты в первом приближении являются фактически решением задачи по безмоментной теории при тангенциальных краевых условиях $u(s_i) = v(s_i) = 0$ $(i = 1, 2)$. Из условия (3.1) вытекает

$$\begin{aligned} C_2 &= O(\varepsilon) \\ C_4 &= O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.2а}$$

и уравнением для определения частот будет

$$\left[\chi_1(s_2, \lambda_0)\right]^2 = 0. \tag{3.2б}$$

Следовательно, в первом приближении задача интегрирования системы дифференциальных уравнений восьмого порядка (I.2) свелась к задаче интегрирования дифференциального уравнения второго порядка (2.I0) с неизвестным параметром λ_0 при краевых условиях

$$\chi_1(s_1) = \chi_1(s_2) = 0. \tag{3.3}$$

Это классическая краевая задача Штурма-Лиувилля. В уравнении (2.I0) инерционный член $\rho^2 f(s)\lambda_0 \chi$ и главная часть моментного члена $l(s) = \frac{\rho^6}{g(s)}\chi$ имеют один порядок, что является результатом нашего выбора соотношений (2.I) и (2.4).

Теперь допустим, что $l(s)$ в уравнении (2.10) мала, т.е. $\frac{l(s)}{f(s)} << \lambda_0$ и пусть $\lambda_0^{(1)}$ – первое собственное значение данной задачи Штурма-Лиувилля. Тогда λ найдем из (2.4а), $\lambda = \varepsilon^2 \lambda_0$, $\varepsilon = \frac{\rho}{m}$, т.е. частота колебаний убывает с ростом m. Это будет происходить до тех пор, пока малое слагаемое $\frac{l(s)}{f(s)}$ не будет соизмеримо с λ_0.

Если же $\frac{l(s)}{f(s)} >> \lambda_0$, то задача Штурма-Лиувилля вообще не имеет нетривиального решения.

Во втором приближении влияние нетангенциальных краевых условий $w(s_i) = \frac{dw(s_i)}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2)$ и интегралов типа краевого эффекта уже более значительное. Раскрывая детерминант восьмого порядка, получающийся в результате подстановки линейной комбинации всех интегралов (2.2) и (2.17) в краевые условия (3.1), находим

$$C_2 = 0(\varepsilon^2)$$

$$C_4 = \varepsilon C_1 \frac{u_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} - C_3 \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho}{A(s_1)} \left[\frac{1}{R_1(s_1)} + \frac{\sigma}{R_2(s_1)} \right] \frac{w_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} + 0(\varepsilon^2). \qquad (3.4а)$$

$$C_1 \left\{ \lambda_1 v_{11}^{(\lambda)}(s_2) \cos\psi_1 + \left[v_{02}(s_2) \frac{u_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} - v_{11}^{(0)}(s_2) \right] \sin\psi_1 \right\} +$$

$$+ C_3 \left\{ \lambda_1 v_{11}^{(\lambda)}(s_2) \sin\psi_1 + v_{11}^{(0)}(s_2) \cos\psi_1 - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho}{A(s_1)} \left[\frac{1}{R_1(s_1)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\sigma}{R_2(s_1)} \right] \frac{w_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} v_{02}(s_2) \cdot \sin\psi_1 \right\} + 0(\varepsilon) = 0. \qquad (3.4б)$$

$$C_1 \left\{ -\lambda_1 u_{11}^{(\lambda)}(s_2) \sin\psi_1 + \left[u_{02}(s_2) \frac{u_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} - u_{11}^{(0)}(s_2) \right] \cos\psi_1 \right\} +$$

$$+ C_3 \left\{ \lambda_1 u_{11}^{(\lambda)}(s_2) \cos\psi_1 - u_{11}^{(0)}(s_2) \sin\psi_1 \right\} - C_3 \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho}{A(s_1)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{R_1(s_1)} + \frac{\sigma}{R_2(s_1)} \right] \frac{w_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} u_{02}(s_2) \cos\psi_1 + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho}{A(s_2)} \left[\frac{1}{R_1(s_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma}{R_2(s_2)} \right] \cdot \left\{ C_1 \left[-\lambda_1 w_{11}^{(\lambda)}(s_2) \cos\psi_1 + \left(w_{11}^{(0)}(s_2) - w_{02}(s_2) \cdot \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \cdot \frac{u_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} \right) \sin\psi_1 \right] + C_3 \left[-\lambda_1 w_{11}^{(\lambda)}(s_2) \sin\psi_1 - \left(w_{11}^{(0)}(s_2) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + u_{02}(s_2) \frac{w_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} \right) \cos\psi_1 \right] \right\} + 0(\varepsilon) = 0.$$

где $$\psi_1 = \frac{\rho}{\varepsilon}\int_{s_1}^{s_2} |\alpha_\kappa|\, ds,$$

$$A = \left[\frac{(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{R_2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Здесь члены с множителями $\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\rho}{A}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)$ и $\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\rho}{A}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)$ являются членами, учитывающими влияние моментных краевых условий. Они имеют порядок $h^{\frac{1}{6}} = 0\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ по сравнению с безмоментным членом во втором приближении.

Если говорить о главном члене λ_0, то поправка будет иметь порядок $h^{\frac{1}{2}}$.

Предполагая, что константы C_1 и C_3 одновременно не равны нулю, находим из (3.4б) уравнение для определения параметра λ_1. Оно имеет следующий вид:

$$\lambda_1^2 \cdot u_{11}^{(\lambda)}(s_2)\, v_{11}^{(\lambda)}(s_2) +$$

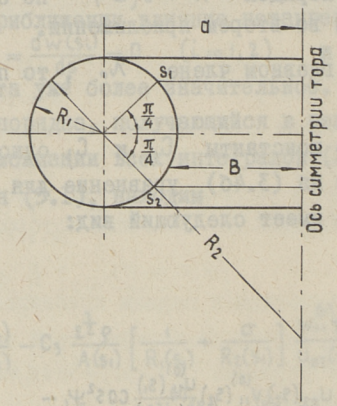
$$+ u_{11}^{(0)}(s_2)\, v_{11}^{(0)}(s_2) - u_{02}(s_2) v_{11}^{(0)}(s_2) \frac{u_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} \cos^2\psi_1 -$$

$$- u_{11}^{(0)}(s_2)\, v_{02}(s_2) \frac{u_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} \sin^2\psi_1 + \qquad (3.5)$$

$$+ \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\rho}{A} \cdot G(s_1, s_2, \lambda_1) + 0(\varepsilon) = 0.$$

4. Численный пример

В качестве примера найдем в первом и во втором приближениях собственные частоты той части тора (фиг. I), где



Фиг.1.

гауссовая кривизна отрицательна. Вычисляются также и формы колебаний в первом приближении. За начальные данные примем следующие величины:

$S_1 = 0,7854$ $\quad S_2 = 2,356$

$\sigma = 0,3000$ $\quad h = 0,0030$

$a = 1,500$ $\quad R_1 = -1,000$

После вычислений на ЭВМ М-20 первые значения собственных частот при разном числе m волн по параллели получились следующими:

m	λ_0	$\lambda_0 \varepsilon^2$
6	0,1390	0,001303
7	0,1366	0,001281
8	0,1576	0,01478

Следовательно, в первом приближении наименьшее собственное значение достигается при $m = 7$.

Во втором приближении при $m = 7$ уравнение (3.5) имеет следующие корни:

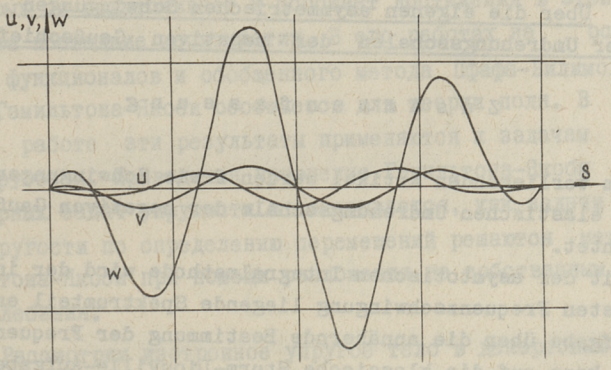
$$\lambda_1^{(1)} = -0,1101$$
$$\lambda_1^{(2)} = 0,2477.$$

По формуле (2.4а) во втором приближении вычисляем минимальные частоты колебаний. При $m = 7$ получаем

$$\lambda^{(1)} = 0,001181$$
$$\lambda^{(2)} = 0,001506.$$

Если в уравнении (3.5) влияние нетангенциальных краевых условий не учитывать (т.е. члена с множителем $\frac{\varepsilon^2\rho}{A}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)$, получаем следующие результаты:

$$\lambda_1^{(1)} = -0,1108 \qquad \lambda_1^{(2)} = 0,1108$$
$$\lambda^{(1)} = 0,001180 \qquad \lambda^{(2)} = 0,001382.$$



Фиг.2.

Собственные формы безмоментных колебаний в данной задаче представлены на фиг. 2.

Автор благодарит П.Е. Товстика за руководство во время работы.

Литература

I. П.Е. Товстик. Интегралы системы неосесимметричных колебаний тонкой оболочки вращения. Исследования по упругости и пластичности, сб. 5. Изд. ЛГУ, 1966.

2. А.Л. Гольденвейзер. Некоторые математические проблемы теории упругих тонких оболочек. УМН, т.15, вып. 5. 1960.

T. Liiva

Über die eigenen asymmetrischen Schwingungen der Umdrehungsschalen der negativen Gaußschiefe

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden freie Schwingungen der dünnen elastischen Umdrehungsschale der negativen Gaußschiefe betrachtet.

Mit der asymtotischen Integralmethode wird der in der geringsten Frequenzschwingung liegende Spektrumteil enforscht. Die Aufgabe über die annähernde Bestimmung der Frequenzschwingungen kann auf die klassische Sturm-Liouville-Aufgabe zurückgeführt werden. Als Beispiel werden die Frequenz und die Formen eines Teils der Ringflache angeführt, wo die Gaußschiefe negativ ist.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

С Е Р И Я А № 293 1970

УДК 539.3

А. Чистякова

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Первые попытки обобщения механики Гамильтона и Якоби для случая непрерывных сред и теории поля относятся к концу прошлого и началу этого столетия. Сделанное в этом направлении наиболее полно было изложено Г. Пранге [I]. В последнее время появился ряд работ Д. Мушески [2], [3], [4], в которых он подытоживает и обобщает достижения в этой области за последние десятилетия. В его работах на основе теории функционалов и обобщенного метода Пфафа-Билимовика метод Гамильтона-Якоби обобщается для теории поля. В настоящей работе эти результаты применяются к задачам теории упругости. Приводится уравнение Гамильтона-Якоби для трехмерных задач упругости и показывается, как задачи теории упругости по определению перемещений решаются методом Гамильтона-Якоби при помощи разложения по собственным формам колебания.

I. Рассмотрим изотропное упругое тело в декартовых координатах и будем искать решение уравнения Ляме

$$\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \vec{X} = \rho \ddot{\vec{u}} \qquad (I.I)$$

при заданных начальных

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0 , \quad \dot{\vec{u}}|_{t=0} = \dot{\vec{u}}_0 \qquad (I.2)$$

и граничных условиях

$$\vec{u}|_B = \vec{u}_B \quad \text{или} \quad \vec{t}(\vec{u}) = t_B , \qquad (I.3)$$

здесь $\vec{u}$ - вектор перемещения, $\vec{X}$ - вектор объемных сил, ρ - плотность материала, ν - коэффициент Пуассона, B - поверхность тела, $\vec{t}_B$ - вектор поверхностных сил, $\vec{t}(\vec{u})$ - вектор поверхностного напряжения.

Для трехмерного поля уравнение Гамильтона-Якоби, согласно [3], запишется следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left[\psi_i, \frac{\delta S}{\delta \psi_i}, t\right] = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (I.4)$$

где H - функционал Гамильтона, ψ_i - компоненты поля по осям x_1, x_2, x_3; $S = S[\psi_i, \alpha_i, t]$ - производящий функционал Гамильтона, α_i - произвольные функции координат.

Для рассматриваемой задачи теории упругости функционал Гамильтона будет равен:

$$H = \int_V \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial t} \pi_i \, dV - L, \qquad (I.5)$$

где π_i - импульсы, L - лагранжиан:

$$L = \int_V F dV = \int_V \left[\frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 - G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left[\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \right. \right.$$

$$+ \sum_{\substack{i=j=1 \\ i \neq j}}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \Bigg] - \sum_{\substack{i=j=1 \\ i \neq j}}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i=j=1 \\ i \neq j}}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{\substack{i=j=1 \\ i \neq j}}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \Bigg\} +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{3} X_i u_i \right] dV + \int_B \sum_{i=1}^{3} t_{B_i} u_i \, dB. \qquad (I.6)$$

Согласно [I.2] справедливы следующие равенства:

$$\pi_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{u}_i} = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}_i} = \frac{\delta S}{\delta u_i} = \frac{\partial R}{\partial u_i} = \rho \ddot{u}_i, \qquad (I.7)$$

здесь $$S = \int_V R dV.$$

Подставляя соотношения (I.5) и (I.6) в уравнение (I.4) и учитывая равенства (I.7), получаем уравнение Гамильтона-Якоби для задач теории упругости:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\int_V\Big[\frac{1}{2\rho}\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\delta S}{\delta u_i}\Big)^2+G\Big\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}\Big[\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)^2+\sum_{\substack{i=j=1\\ i\neq j}}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big]-$$

$$-\sum_{\substack{i=j=1\\ i\neq j}}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\Big[\sum_{\substack{i=j=1\\ i\neq j}}^{3}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2+\sum_{\substack{i=j=1\\ i\neq j}}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big]\Big\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{3}X_i u_i\Big]dV-\int_B\sum_{i=1}^{3}t_{Bi}u_i dB=0.$$

Полный интеграл уравнения (I.8) ищется в виде:

$$S[u_1,u_2,u_3]=\int_V R(u_1,u_2,u_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,x_1,x_2,x_3,t)\,dV. \qquad (I.9)$$

Если полный интеграл уравнения (I.8) определен, теорема Якоби дает общее решение задачи, определяемое из равенств :

$$\int_V\pi_i\,dV=\int_V\frac{\delta S[u_1,u_2,u_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t]}{\delta u_i}dV,$$
$$\int_V\beta_i\,dV=\int_V\frac{\delta S[u_1,u_2,u_3,\alpha_1\ \alpha_2,\alpha_3,t]}{\delta\alpha_i}dV, \qquad (I.10)$$
$$(i=1,2,3),$$

где β_i - произвольные функции координат.

2. Будем искать решение, сформулированной выше задачи, в виде ряда

$$\vec{u}=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\,\vec{u}_n\,, \qquad (2.1)$$

где $\vec{u}_n$ - собственные формы колебаний упругого тела. Можно показать, что тогда уравнение Гамильтона-Якоби (I.8) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{2\rho A_n}\Big(\frac{\partial S}{\partial v_n}\Big)^2+B_n v_n^2+D_n v_n\Big]=0, \qquad (2.2)$$

где

$$A_n=\int_V(u_{1n}^2+u_{2n}^2+u_{3n}^2)\,dV \qquad (2.3)$$

$$B_n = \int_V \frac{1}{2} G \left[\vec{u}_n \cdot \left(\nabla^2 \vec{u}_n + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}_n \right) \right] dV \qquad (2.4)$$

$$D_n = \int_V \vec{X} \cdot \vec{u}_n \, dV + \int_B \vec{t}_B \cdot \vec{u}_n \, dB . \qquad (2.5)$$

Действительно: подставим ряд (2.I) в выражение для полного интеграла (I.9). Имеем

$$S(v_n, t) = \int_V R \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n u_{1n}, \sum_{n=1}^{\infty} v_n u_{2n}, \sum_{n=1}^{\infty} v_n u_{3n}, x_1, x_2, x_3, t \right) dV. \qquad (2.6)$$

Частная производная от соотношения (2.6) по v_n будет:

$$\frac{\partial S}{\partial v_n} = \int_V \left(\frac{dR}{\partial u_1} u_{1n} + \frac{\partial R}{\partial u_2} u_{2n} + \frac{\partial R}{\partial u_3} u_{3n} \right) dV. \qquad (2.7)$$

Подставляя разложение (2.I) в соотношение (I.7) получим

$$\frac{\partial R}{\partial u_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho \dot{v}_n u_{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_{in}, \qquad \gamma_n = \rho \dot{v}_n . \qquad (2.8)$$

Учитывая равенство (2.8) и ортогональность собственных форм, соотношение (2.7) преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial v_n} = \int_V \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_{1k} \cdot u_{1n} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_{2k} \cdot u_{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_{3k} \cdot u_{3n} \right) dV =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n \int_V \left(u_{1k} \cdot u_{1n} + u_{2k} \cdot u_{2n} + u_{3k} \cdot u_{3n} \right) dV = A_n \gamma_n . \qquad (2.9)$$

Из отношения (2.9) имеем:

$$\gamma_n = \frac{\partial S}{\partial v_n} \cdot \frac{1}{A_n} . \qquad (2.10)$$

Подставляя равенство (2.I0) в выражение (2.8) и учитывая равенство (I.7), получаем:

$$\frac{\delta S}{\delta u_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} \frac{\partial S}{\partial v_n} \cdot u_{in} . \qquad (2.11)$$

Используя формулу Грина и учитывая последнее равенство в условии (I.3), преобразуем уравнение (I.8) к виду:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\int_V\left\{\frac{1}{2\rho}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\delta S}{\delta u_i}\right)^2+\frac{1}{2}G\vec{u}\cdot\left(\nabla^2\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}\right)-\right.$$

$$\left.-\vec{X}\cdot\vec{u}\right\}dV-\frac{1}{2}\int_B\vec{t}_B\cdot\vec{u}\,dB=0. \qquad (2.I2)$$

Умножим теперь скалярно обе части уравнения движения (I.I) на $\frac{1}{2}\vec{u}\,dV$:

$$\frac{1}{2}G\vec{u}\cdot\left[\nabla^2\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}\right]dV=\frac{1}{2}G\rho\vec{u}\cdot\ddot{\vec{u}}\,dV. \qquad (2.I3)$$

Левая часть этого равенства есть работа внутренних упругих сил деформации, отнесенная к элементарному объему dV. Подставим в выражение (2.I3) искомое решение (2.I):

$$\frac{1}{2}G\sum_{k=1}^{\infty}v_k\vec{u}_k\cdot\sum_{n=1}^{\infty}v_n\left[\nabla^2\vec{u}_n+\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}_n\right]dV=$$

$$=\frac{1}{2}G\rho\sum_{k,n=1}^{\infty}v_k\ddot{v}_n(\vec{u}_k\cdot\vec{u}_n)\,dV. \qquad (2.I4)$$

В силу ортогональности векторов $\vec{u}_n$ и $\vec{u}_k$ в выражении (2.I4) суммирование совершается только по одному индексу:

$$\frac{1}{2}G\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2\vec{u}_n\cdot\left[\nabla^2\vec{u}_n+\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}_n\right]dV=$$

$$=\frac{1}{2}G\rho\sum_{n=1}^{\infty}v_n\ddot{v}_n u_n^2\,dV. \qquad (2.I5)$$

Подставляя в уравнение (2.I2) решение в виде ряда (2.I), значение $\frac{\delta S}{\delta u_i}$ (2.II) и принимая во внимание равенства (2.I3), (2.I4) и (2.I5), получим:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\rho A_n}\left(\frac{\partial S}{\partial v_n}\right)^2+B_nv_n^2+D_nv_n\right]=0. \qquad (2.I6)$$

Таким образом, если искать решение задачи в виде разложения (2.I), уравнение Гамильтона-Якоби (I.8) приводится к виду (2.I6) и задача сводится к определению функций $v_n(t)$.

3. Пример. Решим методом Гамильтона-Якоби задачу о колебании квадратной свободно опертой пластинки

$$D\nabla^4 w + h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.1)$$

при начальных условиях

$$w\Big|_{t=0} = f(x,y), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x,y) \qquad (3.2)$$

и граничных условиях,

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{при} \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=l \end{matrix} \qquad (3.3)$$

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{при} \quad \begin{matrix} y=0 \\ y=l. \end{matrix} \qquad (3.4)$$

Лагранжиан для данной задачи запишется в виде функционала:

$$L = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left\{ \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\,dy, \qquad (3.5)$$

где ρ - плотность, $D = \dfrac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$, h - тощина пластинки.

Для функционала Гамильтона, согласно (I.5) получим выражение:

$$H = \int_0^l\int_0^l \frac{\partial w}{\partial t}\, p\, dx\,dy - L = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left\{ \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$

$$+ 2D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\Bigg\} dx\,dy, \qquad (3.6)$$

где p - импульс, соответствующий переменной w равен:

$$p = \frac{\delta L}{\delta \dot{w}} = \rho h \frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (3.7)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби (I.8) для рассматриваемой задачи запишется таким образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \Bigg\{ \rho h \left(\frac{\delta S}{\delta w}\right)^2 + D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ 2D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\Bigg\} dx\,dy = 0. \qquad (3.8)$$

Будем искать решение в виде разложения по собственным формам:

$$w = \sum_{n,k=1}^{\infty} v_{nk}(t) \sin\frac{k\pi}{l} x \sin\frac{n\pi}{l} y. \qquad (3.9)$$

Подставляя ряд (3.9) в выражение (3.5) получим:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\left(K_{nk}\dot{v}_{nk}^2 - P_{nk}v_{nk}^2\right), \qquad (3.10)$$

где $K_{nk} = \rho h A_{nk}$,

$$P_{nk} = DA_{nk}\frac{k^4\pi^4}{l^4} + 2DA_{nk}\frac{k^2\pi^2}{l^2}\frac{n^2\pi^2}{l^2} + DA_{nk}\frac{n^4\pi^4}{l^4} -$$

$$- 2D(1-\nu)A_{nk}\frac{k^2\pi^2}{l^2}\frac{n^2\pi^2}{l^2} + 2D(1-\nu)B_{nk}\frac{k^2\pi^2}{l^2}\frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

$$A_{nk} = \int_0^l\int_0^l \sin^2\frac{k\pi}{l}x \sin^2\frac{n\pi}{l}y\,dx\,dy, \quad B_{nk} = \int_0^l\int_0^l \cos^2\frac{k\pi}{l}x \cos^2\frac{n\pi}{l}y\,dx\,dy. \qquad (3.11)$$

Вместо одной переменной $w(x,y,t)$ имеем теперь переменные v_{nk}. Импульсы, соответствующие переменным v_{nk} определяются из зависимости:

$$\pi_{nk} = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_{nk}} = K_{nk}\dot{v}_{nk}. \qquad (3.12)$$

Функция Гамильтона теперь запишется так:

$$H=\sum_{k,n=1}^{\infty}\dot{v}_{nk}\pi_{nk}-L=\frac{1}{2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\left(K_{nk}\dot{v}_{nk}^{2}+P_{nk}v_{nk}^{2}\right) \tag{3.I3}$$

$$\pi_{nk}=\frac{\partial S}{\partial v_{nk}}. \tag{3.I4}$$

Подставляя выражение (3.I3) и (3,I4) в уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H=0; \tag{3.I5}$$

имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{K_{nk}}\left(\frac{\partial S}{\partial v_{nk}}\right)^{2}+P_{nk}v_{nk}^{2}\right]=0. \tag{3.I6}$$

Решая уравнение Гамильтона-Якоби (3.I6) методом разделения переменных, получаем полный интеграл:

$$S=-t\sum_{n,k=1}^{\infty}\alpha_{nk}+\sum_{n,k=1}^{\infty}\int\sqrt{\alpha_{nk}-P_{nk}v_{nk}^{2}}\,dv_{nk}. \tag{3.I7}$$

На основании теоремы Якоби имеем:

$$\pi_{nk}=\frac{\partial S}{\partial v_{nk}}=\sqrt{\alpha_{nk}-P_{nk}v_{nk}^{2}}. \tag{3.I8}$$

$$\beta_{nk}=\frac{\partial S}{\partial \alpha_{nk}}=-t-\sqrt{\frac{K_{nk}}{P_{nk}}}\int\frac{dv_{nk}}{\sqrt{\frac{2d_{nk}}{P_{nk}}-v_{nk}^{2}}}. \tag{3.I9}$$

Из равенства (3.I9) находим:

$$v_{nk}=-C_{nk}\sin\omega_{nk}(\beta_{nk}+t) \tag{3.20}$$

или

$$v_{nk}=C'_{nk}\sin\omega_{nk}t+C''_{nk}\cos\omega_{nk}t,$$

где

$$C_{nk}=\frac{2\alpha_{nk}}{P_{nk}},\qquad \omega_{nk}^{2}=\frac{P_{nk}}{K_{nk}}.$$

Подставляя выражение (3.20) для v_{nk} в ряд (3.9) получаем окончательное решение задачи (3.I) - (3.2):

$$w(x,y,t)=\sum_{n,k=1}^{\infty}\left(C'_{nk}\sin\sqrt{\frac{P_{nk}}{K_{nk}}}t+C''_{nk}\cos\sqrt{\frac{P_{nk}}{K_{nk}}}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}y, \tag{3.2I}$$

где C^1_{nk} и C^2_{nk} - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

В заключении отметим, что иная методика для перехода от непрерывных систем к системам с n степенями свободы применяется в работе [5] К.А. Лурье, где уравнение Гамильтона-Якоби записывается при помощи конечных разностей, а окончательное решение задачи определения колебаний получается путем перехода к пределу.

Литература

I. G. Prange, Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale. Diss., Göttingen,1915.

2. D. Mušicki, Generalisation of the Pfaff-Bilimovič method in the field theory. Publs.Inst. Math., 1962, 2(16), p. 5-20.

3. D. Mušicki, Canonical transformations and the Hamilton-Jacobi method in the field theory. Publs. Inst.Math., 1962, 2(16), p. 21-34.

4. D. Mušicki, Transformations canoniques dans la théorie classique des champs. Publs. Inst. Math., 1967, 7(21), p. 5-24.

5. К.А. Лурье. О методе Гамильтона-Якоби в вариационных задачах с частными производными. ПММ,т.XXУП, I963, стр. 255-264.

6. Е. Трефф ц. Математическая теория упругости. I932.

7. E. Blanchet on, Mécanique analytique des milieux continus. J. Annales de l'Institut Henry Poincare, Physique théorique, vol. VII, № 3 - 1967.

A. Chistyakova

Application of the Hamilton-Jacobi Method for Problems of the Theory of Elasticity

Summary

The generalized Hamilton-Jacobi method for the field theory is utilized to solve problems of the theory of elasticity. The Hamilton-Jacobi equation is given for a three-dimensional problem of the theory of elasticity and it is shown how this equation may be solved using the expansion into a series of self-oscillation. The evolved method is then applied to the problem of vibration of a square plate.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 531.01

А. Чистякова

ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Теоремы взаимности выведены для различных динамических систем: в аналитической механике, в теории упругости, в теории звука, в акустике и электродинамике [I] - [II]. В классическом виде принцип взаимности впервые был получен в 1873 г. Рэлеем [I2]. В настоящей работе показывается, как теоремы взаимности для линейных и нелинейных задач могут быть получены из принципа Гамильтона и вариационного принципа для задач с начальными условиями [I3], [I4]. При этом теоремы взаимности получаются в наиболее общем виде, из которого как частные случаи следуют известные формы теорем взаимности [I], [2], [3].

I. Вывод теорем взаимности из принципа Гамильтона.

а) Рассмотрим линейную механическую систему с n степенями свободы

$$\sum_{k=1}^{n}\left(A_{ik}\ddot{q}_k+C_{ik}q_k\right)=f_i\,,\quad (i=1\ldots n). \tag{I.I}$$

Ограничимся случаем, когда $A_{ik}=A_{ki}$, $C_{ik}=C_{ki}$. Лагранжиан, соответствующий данной задаче, имеет вид:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}C_{ik}q_{ik}+\sum_{i=1}^{n}f_iq_i\,. \tag{I.2}$$

Если при помощи множителей Лагранжа в принцип Гамильтона ввести заданное начальное и конечное положение системы:

$$q_k(0) = q_{k0}, \quad q_k(\tau) = q_{k\tau}, \quad (k = 1 \cdots n) \tag{I.3}$$

то имеем:

$$J = \int_0^\tau L\,dt + \sum_{k,i=1}^{n} \left[A_{ki}\dot{q}_i(0)\left(q_k(0) - q_{k0}\right) - \right.$$
$$\left. - A_{ki}\,\dot{q}_i(\tau)\left(q_k(\tau) - q_{k\tau}\right) \right]. \tag{I.4}$$

Вариацию функционала (I.4) можно представить в виде:

$$\delta J = \int_0^\tau \sum_{i,k=1}^{n} \left(-A_{ik}q_i\delta\ddot{q}_k - C_{ik}q_i\delta q_k + f_i\delta q_i\right) dt +$$
$$+ \sum_{i,k=1}^{n} \left[-A_{ik}\delta q_k(\tau)\dot{q}_i(\tau) + A_{ik}\delta q_k(0)\dot{q}_i(0) + \right.$$
$$\left. + A_{ik}\delta\dot{q}_k(\tau)q_{i\tau} - A_{ik}\delta\dot{q}_k(0)q_{i0}\right]. \tag{I.5}$$

Для действительного движения δJ равна нулю. Положим, что

$$\delta q_i = \varepsilon Q_i, \tag{I.6}$$

где ε – бесконечно-малая величина. Подставив выражение для вариации (I.6) в выражение (I.5) и, приравняв его нулю, получаем:

$$\int_0^\tau \sum_{i,k=1}^{n} \left(-A_{ik}q_i\ddot{Q}_k - C_{ik}q_iQ_k + f_iQ_i\right) dt +$$
$$+ \sum_{i,k=1}^{n} \left[-A_{ik}Q_k(\tau)\dot{q}_i(\tau) + A_{ik}Q_k(0)\dot{q}_i(0) + \right.$$
$$\left. + A_{ik}\dot{Q}_k(\tau)q_{i\tau} - A_{ik}\dot{Q}_k(0)q_{i0}\right] = 0. \tag{I.7}$$

Предполагая, что переменная Q удовлетворяет уравнениям движения

$$\sum_{k=1}^{n} \left(A_{ik}\ddot{Q}_k + C_{ik}Q_k\right) = F_i, \quad (i = 1 \cdots n) \tag{I.8}$$

и условиям $$Q_k(0) = Q_{k0}, \quad Q_k(\tau) = Q_{k\tau}, \tag{I.9}$$

получаем из уравнения (I.7) закон взаимности в виде:

$$\int_0^\tau \sum_{i=1}^{n} f_iQ_i\,dt + \sum_{i,k=1}^{n} \left[A_{ik}Q_{k0}\dot{q}_i(0) + A_{ik}\dot{Q}_k(\tau)q_{i\tau}\right] =$$

$$= \int_0^{\tau} \sum_{i=1}^{n} F_i q_i dt + \sum_{i,k=1}^{n} \left[A_{ik} q_{io} \dot{Q}_k(0) + A_{ik} \dot{q}_i(\tau) Q_{k\tau} \right]. \qquad (I.10)$$

Рассмотрим случай стационарного режима вынужденных колебаний [I], когда:

$$f_i = \tilde{f}_i e^{\omega t}, \quad q_i = \tilde{q}_i e^{\omega t}, \quad F_i = \tilde{F}_i e^{\omega t}, \quad Q_i = \tilde{Q}_i e^{\omega t}, \qquad (I.11)$$

где ω – частота вынужденных колебаний системы, $\tilde{f}_i$, $\tilde{q}_i$ и $\tilde{F}_i, \tilde{Q}_i$ – соответственно амплитуды обобщенных возмущающих сил и амплитуды вынужденных колебаний при первом и втором случае колебания системы. В этом случае теорема взаимности может быть представлена в формах, полученных ранее в [2]:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i q_i - f_i Q_i) = 0 \qquad (I.12)$$

и классической форме [I]:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i \dot{q}_i - f_i \dot{Q}_i) = 0. \qquad (I.13)$$

В случае, рассмотренном в работе [3], когда

$$F_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad \text{и} \quad f_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases} \qquad (I.14)$$

получаем зависимость:

$$\ddot{q}_j = \ddot{Q}_k. \qquad (I.15)$$

б) Рассмотрим нелинейную задачу. Пусть механическая система имеет n степеней свободы.

Уравнения движения системы:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \qquad (I.16)$$

Фундаментальный функционал Гамильтона при удовлетворении начальным и конечным условиям:

$$q_i(0) = q_{io}, \; q_i(\tau) = q_{i\tau}, \; (i = 1 \cdots n), \qquad (I.17)$$

имеет вид

$$J = \int_0^{\tau} \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \Big) dt + \sum_{i=1}^{n} \left[p_i(0)\big(q_i(0) - q_o\big) - p_i(\tau)\big(q_i(\tau) - q_{i\tau}\big) \right]. \qquad (I.18)$$

Для действительного движения $\delta J = 0$. Вариацию фундаментального функционала можно представить в виде:

$$\delta J = \int_0^\tau \Big[\sum_{i=1}^n \Big(-q_i \delta \dot{p}_i + \delta \dot{q}_i p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\Big)\Big] dt + \\ + \sum_{i=1}^n \big[p_i(0)\delta q_i(0) - p_i(\tau)\delta q_i(\tau) + \delta p_i(\tau) q_{i\tau} - \\ - \delta p_i(0) q_{i0} \big] = 0. \qquad (I.19)$$

Положим, что $\delta p_i = \varepsilon P_i$, $\delta q_i = \varepsilon Q_i$, (I.20)

где ε – бесконечно малая величина.

Подставляя вариации (I.20) в выражение (I.19) и сокращая на ε, получим:

$$\int_0^\tau \Big[\sum_{i=1}^n \Big(-q_i \dot{P}_i + \dot{Q}_i p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} P_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} Q_i\Big)\Big] dt + \\ + \sum_{i=1}^n \big[p_i(0) Q_i(0) - p_i(\tau) Q_i(\tau) + P_i(\tau) q_{i\tau} - \\ - P_i(0) q_{i0} \big] = 0. \qquad (I.21)$$

Пусть Q_i, P_i и $\tilde{H}$ есть соответственно обобщенные координаты, импульсы и функция Гамильтона для другого случая движения рассматриваемой системы. Тогда Q_i и P_i удовлетворяют уравнениям движения:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \qquad (I.22)$$

и условиям $Q_i(0) = Q_{i0}$, $Q_i(\tau) = Q_{i\tau}$. (I.23)

Подставляя выражения (I.22) и (I.23) в выражение (I,2I), получаем теорему взаимности для нелинейных задач:

$$\int_0^\tau \Big[\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} Q_i\Big)\Big] dt + \sum_{i=1}^n \big[p_i(0) Q_{i0} - p_i(\tau) Q_{i\tau}\big] = \\ = \int_0^\tau \Big[\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial H}{\partial p_i} P_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} q_i\Big)\Big] dt + \sum_{i=1}^n \big[P_i(0) q_{i0} - P_i(\tau) q_{i\tau}\big]. \qquad (I.24)$$

в) Выведем еще одну форму теоремы взаимности для нелинейных задач. Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы. Предположим, что

$$\Pi = \Pi(q_i, \dot{q}_i), \quad T = T(q_i, \dot{q}_i), \quad (i = 1 \dots n), \tag{1.25}$$

где Π - потенциальная энергия системы, T - кинетическая энергия системы.

Учитывая равенства:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L, \quad L = T - \Pi, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$
$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \tag{I.26}$$

для первого и второго случаев движения системы, преобразуем выражение (I.24) к виду:

$$\int_0^\tau \sum_{i=1}^{n} \left[\dot{q}_i \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) Q_i \right] dt +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \Big|_0 Q_{i0} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \Big|_\tau Q_{i\tau} \right] =$$
$$= \int_0^\tau \sum_{i=1}^{n} \left[\dot{q}_i \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial Q_i} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial Q_i} \right) q_i \right] dt + \tag{I.27}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{Q}_i} \Big|_0 q_{i0} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{Q}_i} \Big|_\tau q_{i\tau} \right],$$

где $\tilde{\Pi}$ и $\tilde{T}$ потенциальная и кинетическая энергия для второго случая движения системы.

Проводя в выражении (I.27) интегрирование по частям и принимая во внимание, что обобщенные силы для первого и второго случаев движения системы соответственно равны:

$$f_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \tag{I.28}$$

$$F_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial Q_i}, \tag{I.29}$$

получаем принцип взаимности для нелинейных систем в новой форме:

$$\int_0^\tau \sum_{i=1}^{n} \left[Q_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} Q_i - Q_i f_i \right] dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\Big|_0 Q_{i0}-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\Big|_\tau Q_{i\tau}\right]=$$

$$=\int_0^\tau \sum_{i=1}^{n}\left[\dot{q}_i\frac{\partial \tilde{T}}{\partial Q_i}+\frac{\partial \tilde{T}}{\partial Q_i}q_i-q_i F_i\right]dt+ \qquad (I.30)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{Q}_i}\Big|_0 q_{i0}-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{Q}_i}\Big|_\tau q_{i\tau}\right].$$

2. Вывод теорем взаимности из вариационного принципа для задач с начальными условиями.

а) Пусть движение механической системы с n степенями свободы описывается линейной системой уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(A_{ik}\ddot{q}_k+B_{ik}\dot{q}_k+C_{ik}q_k\right)=f_i, \quad (i=1\dots n), \qquad (2.1)$$

с начальными условиями

$$q_i(0)=q_{i0}, \quad \dot{q}_i(0)=\dot{q}_{i0}. \qquad (2.2)$$

Ограничимся случаем, когда $A_{ik}=A_{ki}$, $B_{ik}=B_{ki}$, $C_{ik}=C_{ki}$.

Функционал вариационной задачи с начальными условиями, соответствующий рассматриваемой задаче, имеет вид [13]:

$$J=\int_0^\tau \sum_{k,i=1}^{n}\Big[A_{ki}\dot{q}_k(t)\dot{q}_i(\tau-t)+B_{ki}\dot{q}_k q_i(\tau-t)+$$

$$+C_{ki}q_k(t)q_i(\tau-t)-2f_i q_i(\tau-t)\Big]dt+$$

$$+\sum_{k,i=1}^{n}\Big\{\Big[2A_{ik}\dot{q}_i(\tau)+B_{ik}q_i(\tau)\Big]q_k(0)-2\Big[A_{ik}\dot{q}_{k0}+$$

$$+B_{ik}q_{k0}\Big]q_i(\tau)-2A_{ik}q_{k0}\dot{q}_i(\tau)\Big\}. \qquad (2.3)$$

Применяя методику, описанную в I, получаем принцип взаимности для линейных систем с диссипацией в виде:

$$\int_0^\tau \sum_{i=1}^{n}F_i(t)q_i(\tau-t)\,dt+\sum_{i,k=1}^{n}\Big[A_{ik}Q_{k0}\dot{q}_i(\tau)+$$

$$+A_{ik}\dot{Q}_{k0}q_i(\tau)+B_{ik}Q_{k0}q_i(\tau)\Big]=$$

$$= \int_0^\tau \sum_{i=1}^n f_i(t)\, Q_i(\tau - t)\, dt + \sum_{i,k=1}^n \left[A_{ik}\, q_{io}\, \dot{Q}_k(\tau) + \right.$$

$$\left. + A_{ik}\, \dot{q}_{io}\, Q_k(\tau) + B_{ik}\, q_{io}\, Q_k(\tau) \right]. \qquad (2.4)$$

Дифференцируя выражение (2.4) по параметру τ, получаем теорему взаимности в новой форме:

$$\int_0^\tau \sum_{i=1}^n F_i(t)\, \dot{q}_i(\tau - t)\, dt + \sum_{i=1}^n F_i(\tau)\, q_{io} +$$

$$+ \sum_{i,k=1}^n \left[A_{ik} Q_{ko}\, \ddot{q}_i(\tau) + A_{ik}\, \dot{Q}_{ko}\, \dot{q}_i(\tau) + B_{ik}\, Q_{ko}\, \dot{q}_i(\tau) \right] =$$

$$= \int_0^\tau \sum_{i=1}^n f_i(t)\, \dot{Q}_i(\tau - t)\, dt + \sum_{i=1}^n f_i(\tau)\, Q_{io} + \qquad (2.5)$$

$$+ \sum_{k,i=1}^n \left[A_{ik}\, q_{io}\, \ddot{Q}_k(\tau) + A_{ik}\, \dot{q}_{io}\, \dot{Q}_k(\tau) + B_{ik}\, q_{io}\, \dot{Q}_k(\tau) \right].$$

Можно показать, что из теоремы взаимности в форме (2.4) следуют частные случаи (I.II) - (I.I5).

б) Будем рассматривать движение нелинейной механической системы с n степенями свободы:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (2.6)$$

с заданными начальными условиями:

$$q_i(0) = q_{io}, \quad p_i(0) = p_{io}, \quad (i = 1 \dots n). \qquad (2.7)$$

Функционал, соответствующий рассматриваемой задаче, получен путем применения методики, изложенной в [I4]:

$$J = \int_0^\tau \sum_{i=1}^n \left(R_{1i}[x_{1i}]_* + R_{2i}[x_{2i}]_* + g_i\, q_i \right) dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left\{ [x_{2i}]_*\, |_0 \left(q_i(0) - q_{io} \right) - \alpha_i\, q_i(\tau) - \right. \qquad (2.8)$$

$$\left. - \beta_i\, p(\tau) + [x_{1i}]_*\, |_0 \left(p_i(0) - p_{io} \right) \right\},$$

где

$$R_{1i} = \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad R_{2i} = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (2.9)$$

$$[x_{1i}(t)]_* = x_{1i}(\tau - t), \quad [x_{2i}(t)]_* = x_{2i}(\tau - t); \qquad (2.10)$$

$x_{1i}(t)$ и $x_{2i}(t)$ удовлетворяют уравнениям присоединенной задачи [I4]:

$$\left[\frac{\partial R_{1i}}{\partial q_i}\right]_* x_{1i} + \left[\frac{\partial R_{2i}}{\partial q_i}\right]_* x_{2i} - \dot{x}_{2i} + g_i = 0, \qquad (2.II)$$

$$\left[\frac{\partial R_{1i}}{\partial p_i}\right]_* x_{1i} + \left[\frac{\partial R_{2i}}{\partial p_i}\right]_* x_{2i} - \dot{x}_{1i} = 0,$$

$$x_{1i}(0) = \beta_i, \quad x_{2i}(0) = \alpha_i. \qquad (2.I2)$$

Функция $g_i = g_i(t)$ и постоянные α_i и β_i могут быть выбраны произвольно.

Для вывода теоремы взаимности представим вариацию функционала (2.8) в виде:

$$\delta J = \int_0^\tau \sum_{i=1}^n \left(\delta[x_{1i}]_* R_{1i} + \delta R_{1i}[x_{1i}]_* + \delta[x_{2i}]_* R_{2i} + \right.$$
$$\left. + \delta R_{2i}[x_{2i}]_* + g_i \delta q_i\right) dt + \sum_{i=1}^n \left\{\delta[x_{2i}]_*|_0 (q_i(0) - \right.$$
$$\left. - q_{0i}) + [x_{2i}]_*|_0 \delta q_i(0) + \delta[x_{1i}]_*|_0 (p_i(0) - p_{0i}) + \right.$$
$$\left. + [x_{1i}]_*|_0 \delta p_i(0) - \alpha_i \delta q_i(\tau) - \beta_i \delta p_i(\tau) = 0. \right. \qquad (2.I3)$$

Произведя интегрирование по частям, получим для вариации выражение:

$$\delta J = \int_0^\tau \sum_{i=1}^n \left\{-p_i \delta[\dot{x}_{1i}]_* + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta[x_{1i}]_* - \delta p_i [\dot{x}_{1i}]_* + \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i^2}\delta q_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\delta p_i\right)[x_{1i}]_* - q_i \delta[\dot{x}_{2i}] -$$
$$- \delta[x_{2i}]_* \frac{\partial H}{\partial p_i} - [\dot{x}_{2i}]_* \delta q_i - [x_{2i}]_* \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}\delta q_i + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^2}\delta p_i\right)\Big\} dt + \sum_{i=1}^n \left\{p_i(\tau)\delta[x_{1i}]_*|_\tau - \delta[x_{2i}]_*|_0 q_{i0} - \right.$$
$$- \delta[x_{1i}]_*|_0 p_{i0} + [x_{1i}]_*|_\tau \delta p_i(\tau) + [x_{2i}]_*|_\tau \delta q_i(\tau) +$$
$$\left. + \delta[x_{2i}]_* q_i(\tau) - \alpha_i \delta q_i(\tau) - \beta_i \delta p_i(\tau)\right\} = 0. \qquad (2.I4)$$

Пусть

$$\delta[x_{1i}]_* = \varepsilon[X_{1i}]_*,\ \delta[x_{2i}]_* = \varepsilon[X_{2i}]_*,\ \delta p_i = \varepsilon P_i,\ \delta q_i = \varepsilon Q_i, \quad (2.15)$$

где ε – бесконечно малая величина.

Предположим, что переменные P_i и Q_i являются импульсами и координатами некоторого движения рассматриваемой системы с функцией Гамильтона $\tilde{H}$:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad (2.16)$$

и с начальными условиями $Q_i(0) = Q_{i0}$, $P_i(0) = P_{i0}$, а $[X_{1i}]$ и $[X_{2i}]$ удовлетворяют уравнениям присоединенной задачи (2.11) и (2.12), соответствующей движению системы, описываемому уравнениями (2.16):

$$\left[\frac{\partial \tilde{R}_{1i}}{\partial Q_i}\right]_* X_{1i} + \left[\frac{\partial \tilde{R}_{2i}}{\partial Q_i}\right]_* X_{2i} - \dot{X}_{2i} + g_i = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{R}_{1i}}{\partial P_i}\right]_* X_{1i} + \left[\frac{\partial \tilde{R}_{2i}}{\partial P_i}\right]_* X_{2i} - \dot{X}_{1i} = 0 \quad (2.18)$$

$$X_{1i}(0) = \beta_i, \quad X_{2i}(0) = \alpha_i. \quad (2.19)$$

Подставляя в выражение (2.14) равенства (2.15) и значения для $[\dot{x}_{1i}]_*$, $[\dot{x}_{2i}]_*$ и $[\dot{X}_{1i}]_*$, $[\dot{X}_{2i}]_*$, найденные соответственно из уравнений (2.11) и (2.18), получаем принцип взаимности для нелинейных задач:

$$\int_0^\tau \sum_{i=1}^n \left\{ -p_i\left([X_{1i}]_* \frac{\partial \tilde{R}_{1i}}{\partial P_i} + [X_{2i}]_* \frac{\partial \tilde{R}_{2i}}{\partial P_i}\right) + \frac{\partial H}{\partial q_i}[X_{1i}]_* - q_i\left([X_{1i}]_* \frac{\partial \tilde{R}_{1i}}{\partial Q_i} + \right.\right.$$

$$\left. + [X_{2i}]_* \frac{\partial \tilde{R}_{2i}}{\partial Q_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_i}[X_{2i}]_* + g_i q_i \Big\} dt + \sum_{i=1}^n \Big\{ p_i(\tau)\beta_i + q_i(\tau)\alpha_i -$$

$$- q_{0i}[X_{2i}]_*|_0 - p_{0i}[X_{1i}]_*|_0 \Big\} = \int_0^\tau \sum_{i=1}^n \left\{ P_i\left([x_{1i}]_* \frac{\partial R_{1i}}{\partial p_i} + [x_{2i}]_* \frac{\partial R_{2i}}{\partial p_i}\right) - \right.$$

$$- \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i^2} Q_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} P_i\right)[x_{1i}]_* + Q_i\left([x_{1i}]_* \frac{\partial R_{1i}}{\partial q_i} + [x_{2i}]_* \frac{\partial R_2}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} Q_i + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^2} P_i\right)[x_{2i}]_* \right\} dt + \sum_{i=1}^n \left\{ -P_i(\tau)[x_{1i}]_*|_\tau - Q_i(\tau)[x_{2i}]_*|_\tau + \alpha_i Q_i(\tau) + \beta_i P_i(\tau) \right. \quad (2.20)$$

Теорема взаимности в виде (2.20) устанавливает связь не только между обобщенными координатами и импульсами двух различных движений системы, но и между переменными присоединенных задач (2.II), (2.I2), (2.I8), (2.I9), соответствующих этим движениям.

3. Пример применения теоремы взаимности.

Определим колебание диссипативной линейной системы (2.I) - (2.2) при действии произвольной нагрузки, зависящей от времени.

Рассмотрим дополнительно n движений данной механической системы:

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\left(A_{i\kappa}\ddot{Q}_{\kappa s}+B_{i\kappa}\dot{Q}_{\kappa s}+C_{i\kappa}Q_{\kappa s}\right)=\delta_{is},\quad \delta_{is}=\begin{cases}0 & i\neq s\\ 1 & i=s\end{cases}\qquad (i,s=1\dots n) \tag{3.I}$$

с начальными условиями

$$Q_{\kappa s}(0)=0;\quad \dot{Q}_{\kappa s}(0)=0. \tag{3.2}$$

Применим теорему взаимности в форме (2.5) для случая движения (2.I) - (2.2) и каждого из n случаев движения (3.I) - (3.2):

$$\int_0^{\tau}\dot{q}_{\kappa}(\tau-t)\,dt+q_{\kappa 0}=\int_0^{\tau}\sum_{\kappa=1}^{n}f_{\kappa}\dot{Q}_{\kappa s}(\tau-t)\,dt+$$
$$+\sum_{i,\kappa=1}^{n}\left[A_{i\kappa}q_{i0}\ddot{Q}_{\kappa s}(\tau)+A_{i\kappa}q_{i0}\dot{Q}_{\kappa s}(\tau)+\right.$$
$$\left.+B_{i\kappa}q_{i0}\dot{Q}_{\kappa s}(\tau)\right],\qquad (\kappa=1\dots n). \tag{3.3}$$

Интегрируя левую часть равенства (3.3) и меняя обозначения, получаем решение задачи в квадратурах:

$$q_{\kappa}(t)=\int_0^{t}\sum_{j=1}^{n}f_j(t)\dot{Q}_{j\kappa}(t-\tau)\,dt+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left[A_{ij}q_{i0}\ddot{Q}_{j\kappa}(t)+A_{ij}q_{i0}\dot{Q}_{j\kappa}(t)+\right.$$
$$\left.+B_{ij}q_{i0}\dot{Q}_{j\kappa}(t)\right],\quad (\kappa=1\dots n), \tag{3.4}$$

где Q_{jk} - решение задачи (3.I) - (3.2).

Литература

I. В.В. Фурдуев. Теоремы взаимности. ОГИЗ Гостехиздат, I948.

2. Дж. В. Стретт. (Рэлей). Теория звука. Гос. издат. техн. -теор. лит., I940.

3. M. R'ozsa, Acta techn., Théoremes de réciprocté dynamique relatifs a des systèmes ayant plusieurs degrés de liberté, Acta techn. Acad. scient. hung., 1964, 48, № 3-4, 399.

4. Л.Я. Айнола. К теореме взаимности для динамических задач теории упругости. Прикладная матем. и мех., т. 3I, вып. I, I967, I76-I77.

5. Н.Н. Андреев. Физический словарь, т.I, I936, стр. 458.

6. А.А. Харкевич. Теорема взаимности и закон Шоттки в применении к нестационарным процессам, ЖТФ, I938, 8, I889-I895.

7. Л.М. Лямшев. К вопросу о принципе взаимности в акустике. Доклады АН СССР, I959, I25, 6, I23I-I234.

8. Cheo, B. Ru-Shao, A reciprocity theorem for electromagnetic fields with general time dependence, IEEE Trans. on Antennas and Propag., AP-13 (1965), No. 2, 278-284.

9. D. Craffi, Sul theorema di reciprocitá nella dinamica dei corpi elastici. Mem. Accad. Sci., Bologna, Ser.,10, 1946/1947, vol. 4.

10. B. Tanimoto, The Reciprocal Theorem Method for Applied Mechanics, Zeitschrift für Angew. mathem. und mech., 1961, Band 41, Heft 185-197.

II. Н.А. Кильчевский. Основы аналитической механики оболочек, Изд. АН УССР, I963, стр. 78-8I.

12. I.W. Strutt (Rayleigh), Some general theorems relating to vibrations, Proc. Lond. Math. Soc.,vol. IV; 1873, 357-368.

I3. Л.Я. А й н о л а. Вариационный принцип для диссипативных систем. Инж. журнал, Механика тв. тела, I966, № 5, I59-I6I.

I4. Л.Я. А й н о л а. Вариационный принцип механики для задач с начальными условиями. Инж. журнал, Мех. тв. тела, I967, № 2: 87-90.

A. Chistyakova

Reciprocal Theorems for Dynamic Systems with Final Degree of Freedom

S u m m a r y

Reciprocal theorems for dynamic problems of mechanics with final degree of freedom are derived from the principle of Hamilton and from variational principle for problems with conditions. It is shown how with the help of reciprocal theorem it is possible to get the solution of problem of determining the oscillation of mechanical systems with n degree of freedom in quadratures when the power depends on time.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

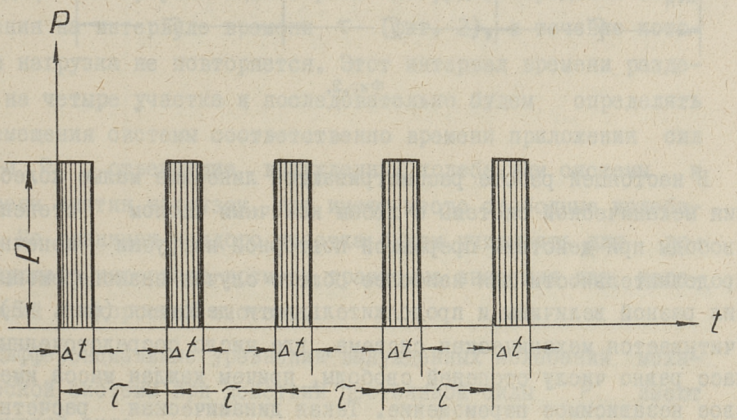
СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 534

Г. Гольст

О КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПРЕРЫВНОЙ ПОВТОРНОЙ НАГРУЗКИ

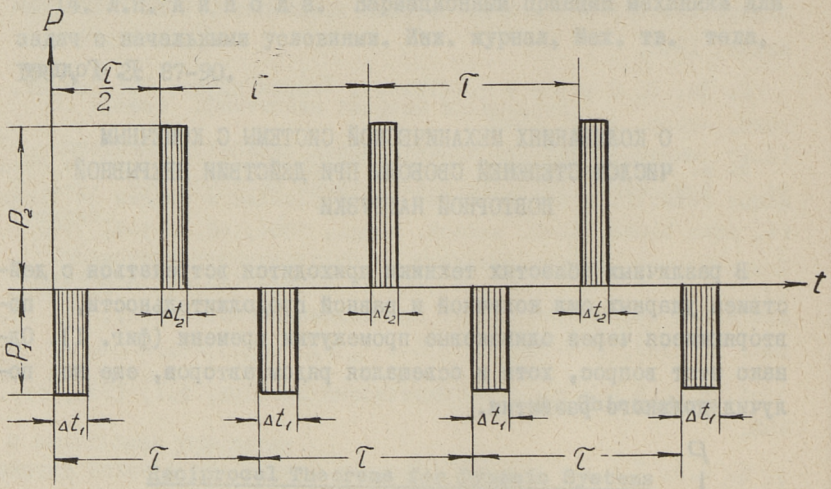
В различных областях техники приходится встречаться с действием ударных сил конечной и равной продолжительности, повторяющиеся через одинаковые промежутки времени (фиг. I). Однако этот вопрос, хотя и освещался рядом авторов, еще не получил должного развития.



Фиг.1.

В литературе чаще встречается задача о действии повторных мгновенных импульсов для системы с одной степенью свободы

[2], [3], [7]. Шире такая задача исследовалась в работах [4], [6], [8]. Действие повторной прерывной нагрузки конечной продолжительности для системы с одной степенью свободы изучалась в работах [5], [10], [11]. Система с двумя степенями свободы без учета сил сопротивления дана в статье [12].



Фиг.2.

В настоящей работе рассматриваются линейные малые колебания механической системы с любым конечным числом степеней свободы при действии прерывной повторной нагрузки конечной продолжительности для наиболее общего случая знакопеременных сил разной величины и продолжительности действия (фиг. 2). Учитывается механическая система, где число сосредоточенных масс равно числу степеней свободы, причем каждая масса имеет свое независимое перемещение. Такая динамическая расчетная схема обычно принимается при изучении колебаний и анализе жесткости строительных стержневых конструкций. Задача решается при следующих ограничениях. Учитываются только две первые главные формы колебаний при возможном определении перемещений всех масс механической системы. Такая задача имеет практический смысл, если учесть, что первые формы колебаний, как правило, создают наибольшие перемещения системы.

Решение дается в двух вариантах: с учетом сил сопротивления и без них. Коэффициент затухания принимается в соответствии с той из двух первых главных форм колебаний, которой соответствует резонанс, причем значение этого коэффициента сохраняется постоянным для всей системы. Будем принимать, что силы сопротивления достаточно малы и коэффициент затухания находится в пределах $\varepsilon_i = (0{,}01\text{-}0{,}03)\,\omega_i$, где ω_i - собственные частоты колебания системы. В таких пределах коэффициенты затухания соответствуют стальным железобетонным и деревянным конструкциям.

Будем пренебрегать влиянием сил сопротивления на собственные частоты колебаний механической системы. Считаем, что значения всех собственных частот колебаний рассматриваемой системы уже известны. Они могут быть определены или путем решения векового уравнения с помощью ЦВМ или, используя матричные методы, метод спектральной функции [1], [9].

Для решения задачи о колебаниях механической системы при действии прерывной повторной нагрузки определим перемещения на интервале времени τ (фиг. 2), в течение которого нагрузка не повторяется. Этот интервал времени разделим на четыре участка и последовательно будем определять перемещения системы соответственно времени приложения сил P_1 и P_2, отвечающие вынужденным колебаниям системы и времени снятия нагрузок, где имеют место свободные колебания. На границах каждого участка будем учитывать для последующего интервала времени граничные значения для перемещений и скоростей системы.

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний механической системы при действии постоянной силы P имеют следующий вид:

а) без учета затухания

$$y_i + m_1 y_1'' \delta_{i1} + m_2 y_2'' \delta_{i2} + \cdots + m_i y_i'' \delta_{ii} + \cdots m_n y_n'' \delta_{in} = P\delta_{ip} \qquad (a)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

б) с учетом затухания

$$y_i + (m_1 y_1'' + r_1 y_1')\delta_{i1} + (m_2 y_2'' + r_2 y_2')\delta_{i2} + \cdots$$

$$\dots + (m_i y_i'' + r_i y_i')\,\delta_{i1} + \dots + (m_n y_n'' + r_n y_n')\,\delta_{in} = P\delta_{ip} \qquad (6)$$
$$(i = 1 \dots n),$$

где y_i – перемещения системы соответственно массам; m_i; $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots \delta_{ii} \dots \delta_{in}$ и δ_{ip} единичные перемещения.

Согласно принятому допущению

$$\frac{r_1}{m_1} = \frac{r_2}{m_2} = \dots = \frac{r_i}{m_i} = \dots \frac{r_n}{m_n} = 2\varepsilon = \text{const},$$

где r_i – коэффициенты сопротивления перемещениям системы пропорциональные их скоростям, ε – коэффициент затухания, соответствующий той частоте собственных колебаний системы, при которой возникает резонанс.

Перемещения рассматриваемой системы для каждого из четырех участков полного интервала времени τ приводим в окончательном виде. I) Первый участок при $t = \Delta t_1$ согласно интервалу времени $0 \leqslant t \leqslant \Delta t_1$ при действии силы P_1:

$$\left.\begin{aligned}
&Y_{11} = -P_1\,\delta_{1p_1}\,(S_{11}\cdot A_1 + S_{21}\cdot A_2);\\
&Y_{21} = -P_1\,\delta_{1p_1}\,(\rho_{21}\cdot S_{11}\cdot A_1 + \rho_{22}\cdot S_{21}\cdot A_2);\\
&\text{- -}\\
&Y_{i1} = -P_1\,\delta_{1p_1}\,(\rho_{i1}\cdot S_{11}\cdot A_1 + \rho_{i2}\cdot S_{21}\cdot A_2);\\
&\text{- -}\\
&Y_{n1} = -P_1\,\delta_{1p_1}\,(\rho_{n1}\cdot S_{11}\cdot A_1 + \rho_{n2}\cdot S_{21}\cdot A_2).
\end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Здесь: $\rho_{i1} = \frac{Y_{i1}^{(0)}}{Y_{11}^{\circ}}$, $\rho_{i2} = \frac{Y_{i2}^{(0)}}{Y_{12}^{\circ}}$ – характеристики главных форм колебаний, где Y_{11}°, Y_{12}° – амплитуды колебаний массы m_1 соответственно двум первым значениям собственных частот колебаний, Y_{i1}°, Y_{i2}° – аналогичные амплитуды массы m_i.

Характеристики главных форм колебаний определяются из системы частотных уравнений собственных колебаний механической системы и являются отношениями амплитуд всех масс системы к амплитуде массы m_1 согласно первой и второй формам колебаний.

Коэффициенты разложения силы P_1 по двум главным формам колебания системы:

$$S_{1p_1}=\frac{\delta_{2p_1}-\rho_{22}\cdot\delta_{1p_1}}{\delta_{1p_1}(\rho_{21}-\rho_{22})};\qquad S_{2p_1}=\frac{\delta_{1p_1}\cdot\rho_{21}-\delta_{2p_1}}{\delta_{1p_1}(\rho_{21}-\rho_{22})}.$$

где δ_{1p_1}, δ_{2p_1} – единичные перемещения масс m_1 и m_2 от силы $P_1=1$. Коэффициенты, учитывающие частоты форм колебаний системы:

а) без учета затухания

$$A_1=1-\cos\omega_1\Delta t_1;$$
$$A_2=1-\cos\omega_2\Delta t_1;$$

б) при учете затухания

$$A_{1\varepsilon}=1-e^{-\varepsilon\Delta t_1}\left(\cos\omega_1\Delta t_1+\frac{\varepsilon}{\omega_1}\sin\omega_1\Delta t_1\right);$$
$$A_{2\varepsilon}=1-e^{-\varepsilon\Delta t_1}\left(\cos\omega_2\Delta t_1+\frac{\varepsilon}{\omega_2}\sin\omega_2\Delta t_1\right).$$

2) Второй участок перемещения системы при $t=\frac{\tau}{2}$ соответственно интервалу $\Delta t_1\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2}$ после снятия силы P_1:

$$\left.\begin{aligned}
&Y_{12}=Y_{11}(S_{12}\cdot B_1+S_{22}\cdot B_2)+Y'_{11}(S'_{12}\cdot C_1+S'_{22}\cdot C_2);\\
&Y_{22}=Y_{11}(\rho_{21}\cdot S_{12}\cdot B_1+\rho_{22}\cdot S_{22}\cdot B_2)+Y'_{11}(\rho_{21}\cdot S'_{12}\cdot C_1+\rho_{22}\cdot S'_{22}\cdot C_2);\\
&\text{----------}\\
&Y_{i2}=Y_{11}(\rho_{i1}\cdot S_{12}\cdot B_1+\rho_{i2}\cdot S_{22}\cdot B_2)+Y'_{11}(\rho_{i1}\cdot S'_{12}\cdot C_1+\rho_{i2}\cdot S'_{22}\cdot C_2);\\
&\text{----------}\\
&Y_{n2}=Y_{11}(\rho_{n1}\cdot S_{12}\cdot B_1+\rho_{n2}\cdot S_{22}\cdot B_2)+Y'_{11}(\rho_{n1}\cdot S'_{12}\cdot C_1+\rho_{n2}\cdot S'_{22}\,C_2);
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Здесь

$$S_{12}=\frac{Y_{21}-Y_{11}\rho_{22}}{Y_{11}(\rho_{21}-\rho_{22})};\qquad S_{22}=\frac{Y_{11}\cdot\rho_{21}-Y_{21}}{Y_{11}(\rho_{21}-\rho_{22})};$$

$$S'_{12}=\frac{Y'_{21}-Y'_{11}\cdot\rho_{22}}{Y'_{11}(\rho_{21}-\rho_{22})};\qquad S'_{22}=\frac{Y'_{11}\rho_{21}-Y'_{21}}{Y'_{11}(\rho_{21}-\rho_{22})}.$$

а) $B_1=\cos\omega_1 t_2;\quad B_2=\cos\omega_2 t_2;$

$$C_1=\frac{\sin\omega_1 t_2}{\omega_1};\qquad C_2=\frac{\sin\omega_2 t_2}{\omega_2};$$

б) $B_{1\varepsilon} = e^{-\varepsilon t_2}(\cos\omega_1 t_2 + \frac{\varepsilon}{\omega_1}\sin\omega_1 t_2)$;

$B_{2\varepsilon} = e^{-\varepsilon t_2}(\cos\omega_2 t_2 + \frac{\varepsilon}{\omega_2}\sin\omega_2 t_2)$;

$C_{1\varepsilon} = e^{-\varepsilon t_2}\cdot\frac{\sin\omega_1 t_2}{\omega_1}$; $C_{2\varepsilon} = e^{-\varepsilon t_2}\frac{\sin\omega_2 t_2}{\omega_2}$,

где $t_2 = \frac{\tau}{2} - \Delta t_1$.

3) Третий участок перемещения системы при $t = \frac{\tau}{2} + \Delta t_2$ согласно интервалу времени $\frac{\tau}{2} \le t \le \frac{\tau}{2} + \Delta t_2$ действия силы P_2:

$$
\left.
\begin{aligned}
&Y_{13} = Y_{12}(S_{13}\cdot D_1 + S_{23}\cdot D_2) + Y'_{12}(S'_{13}\cdot E_1 + S'_{23}\cdot E_2) + P_2\delta_{1p_2}(S_{1p_2}\cdot A_1 + S_{2p_2}\cdot A_2);\\
&Y_{23} = Y_{12}(\rho_{21}\cdot S_{13}\cdot D_1 + \rho_{22}\cdot S_{23}\cdot D_2) + Y'_{12}(\rho_{21}\cdot S'_{13}\cdot E_1 + \rho_{22}\cdot S'_{23}\cdot E_2) +\\
&\quad + P_2\cdot\delta_{1p_2}(\rho_{21}\cdot S_{1p_2}\cdot A_1 + \rho_{22}\cdot S_{2p_2}\cdot A_2);\\
&\text{---------- ---------- ----------}\\
&Y_{i3} = Y_{12}(\rho_{i1}\cdot S_{13}\cdot D_1 + \rho_{i2}\cdot S_{23}\cdot D_2) + Y'_{12}(\rho_{i1}\cdot S'_{13}\cdot E_1 + \rho_{i2}\cdot S'_{23}\cdot E_2) +\\
&\quad + P_2\,\delta_{1p_2}(\rho_{i1}\cdot S_{1p_2}\cdot A_1 + \rho_{i2}\cdot S_{2p_2}\cdot A_2);\\
&\text{---------- ---------- ----------}\\
&Y_{n3} = Y_{12}(\rho_{n1}\cdot S_{13}\cdot D_1 + \rho_{n2}\cdot S_{23}\cdot D_2) + Y'_{12}(\rho_{n1}\cdot S'_{13}\cdot E_1 + \rho_{n2}\cdot S'_{23}\cdot E_2) +\\
&\quad + P_2\,\delta_{1p_2}(\rho_{n1}\cdot S_{1p_2}\cdot A_1 + \rho_{n2}\cdot S_{2p_2}\cdot A_2).
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

Здесь

$$S_{13} = \frac{Y_{22} - Y_{12}\cdot\rho_{22}}{Y_{12}(\rho_{21} - \rho_{22})};\qquad S_{23} = \frac{Y_{12}\cdot\rho_{21} - Y_{22}}{Y_{12}(\rho_{21} - \rho_{22})};$$

$$S'_{13} = \frac{Y'_{22} - Y'_{12}\cdot\rho_{22}}{Y'_{12}(\rho_{21} - \rho_{22})};\qquad S'_{23} = \frac{Y'_{12}\cdot\rho_{21} - Y'_{22}}{Y'_{12}(\rho_{21} - \rho_{22})};$$

$$S_{1p_2} = \frac{\delta_{2p_2} - \delta_{1p_2}\cdot\rho_{22}}{\delta_{1p_2}(\rho_{21} - \rho_{22})};\qquad S_{2p_2} = \frac{\delta_{1p_2}\cdot\rho_{21} - \delta_{2p_2}}{\delta_{1p_2}(\rho_{21} - \rho_{22})}.$$

где $\delta_{1p_2}, \delta_{2p_2}$ – единичные перемещения масс m_1 и m_2 от силы $P_2 = 1$.

а)

$$D_1 = \cos\omega_1\Delta t_2;\quad D_2 = \cos\omega_2\Delta t_2;$$

$$E_1 = \frac{\sin\omega_1\Delta t_2}{\omega_1};\quad E_2 = \frac{\sin\omega_2\Delta t_2}{\omega_2},$$

б)

$$D_{1\varepsilon} = e^{-\varepsilon\Delta t_2}\left(\cos\omega_1\Delta t_2 + \frac{\varepsilon}{\omega_1}\sin\omega_1\Delta t_2\right);$$

$$D_{2\varepsilon} = e^{-\varepsilon\Delta t_2}\left(\cos\omega_2\Delta t_2 + \frac{\varepsilon}{\omega_2}\sin\omega_2\Delta t_2\right);$$

$$E_{1\varepsilon} = e^{-\varepsilon\Delta t_2}\cdot\frac{\sin\omega_1\Delta t_2}{\omega_1};\quad E_{2\varepsilon} = e^{-\varepsilon\Delta t_2}\cdot\frac{\sin\omega_2\Delta t_2}{\omega_2}.$$

4) Четвертый участок перемещения системы при $t=\tau$ соответственно интервалу $\frac{\tau}{2}+\Delta t \leqslant t \leqslant \tau$ после снятия силы P_2:

$$\left.\begin{aligned}
&Y_{14} = Y_{13}(S_{14}\cdot F_1 + S_{24}\cdot F_2) + Y'_{13}(S'_{14}\cdot G_1 + S'_{24}\cdot G_2);\\
&Y_{24} = Y_{13}(\rho_{21}\cdot S_{14}\cdot F_1 + \rho_{22}\cdot S_{24}\cdot F_2) + Y'_{13}(\rho_{21}\cdot S'_{14}\cdot G_1 + \rho_{22}\cdot S'_{24}\cdot G_2);\\
&\text{----------}\\
&Y_{i4} = Y_{13}(\rho_{i1}\cdot S_{14}\cdot F_1 + \rho_{i2}\cdot S_{24}\cdot F_2) + y'_{13}(\rho_{i1}\cdot S'_{14}\cdot G_1 + \rho_{i2}\cdot S'_{24}\cdot G_2);\\
&\text{----------}\\
&Y_{n4} = Y_{13}(\rho_{n1}\cdot S_{14}\cdot F_1 + \rho_{n2}\cdot S_{24}\cdot F_2) + Y'_{13}(\rho_{n1}\cdot S'_{14}\cdot G_1 + \rho_{n2}\cdot S'_{24}\cdot G_2).
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Здесь

$$S_{14} = \frac{Y_{23} - Y_{13}\cdot\rho_{22}}{Y_{13}(\rho_{21}-\rho_{22})};\qquad S_{24} = \frac{Y_{13}\cdot\rho_{21} - Y_{23}}{Y_{13}(\rho_{21}-\rho_{22})};$$

$$S'_{14} = \frac{Y'_{23} - Y'_{13}\cdot\rho_{22}}{Y'_{13}(\rho_{21}-\rho_{22})};\qquad S'_{24}\ \frac{Y'_{13}\cdot\rho_{21} - Y'_{23}}{Y'_{13}(\rho_{21}-\rho_{22})};$$

а)

$$F_1 = \cos\omega_1 t_3;\qquad F_2 = \cos\omega_2 t_3;$$

$$G_1 = \frac{\sin\omega_1 t_3}{\omega_1};\qquad G_2 = \frac{\sin\omega_2 t_3}{\omega_2};$$

б)

$$F_{1\varepsilon} = e^{-\varepsilon t_3}\left(\cos\omega_1 t_3 + \frac{\varepsilon}{\omega_1}\sin\omega_1 t_3\right);$$

$$F_{2\varepsilon} = e^{-\varepsilon t_3}\left(\cos\omega_2 t_3 + \frac{\varepsilon}{\omega_2}\sin\omega_2 t_3\right);$$

$$G_{1\varepsilon} = e^{-\varepsilon t_3}\,\frac{\sin\omega_1 t_3}{\omega_1};\quad G'_{2\varepsilon} = e^{-\varepsilon t_3}\,\frac{\sin\omega_2 t_3}{\omega_2},$$

где $$t_3 = \frac{\tau}{2} - \Delta t_2.$$

Для определения начальных условий чисто вынужденных периодических колебаний системы достаточно составить четыре уравнения с четырьмя неизвестными условиями в начале и в конце интервала времени τ для двух масс m_1 и m_2 [12]:

$$\left.\begin{aligned} Y_{10} &= Y_{1\tau};\ Y'_{10} = Y'_{1\tau} \\ Y_{20} &= Y_{2\tau};\ Y'_{20} = Y'_{2\tau} \end{aligned}\right\} (в)$$

С учетом коэффициентов главных форм колебаний этими условиями определяются все периодические перемещения системы.

В развернутом виде условия (в) становятся системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Y_{10} &= Y_{10}(S_{10}\cdot A_1^\circ + S_{20}\cdot A_2^\circ) + Y'_{10}(S'_{10}\cdot B_1^\circ + S'_{20}\cdot B_{20}^\circ) + Y_{14}; \\ Y'_{10} &= -Y_{10}(S_{10}\cdot C_1^\circ + S_2\cdot C_2^\circ) + Y'_{10}(S'_{10}\cdot A_1^\circ + S'_{20}\cdot A_2^\circ) + Y'_{14}; \\ Y_{20} &= Y_{10}(\rho_{21}\cdot S_{10}\cdot A_1^\circ + \rho_{22}\cdot S_{20}\cdot A_2^\circ) + Y'_{10}(\rho_{21}\cdot S'_{10}\cdot B_1^\circ + \rho_{22}\cdot S'_{20}\cdot B_2^\circ) + Y_{24}; \\ Y'_{20} &= -Y_{10}(\rho_{21}\cdot S_{10}\cdot C_1^\circ + \rho_{22}\cdot S_{20}\cdot C_2^\circ) + Y'_{10}(\rho_{21}\cdot S'_{10}\cdot D_1^\circ + \rho_{22}\cdot S'_{20}D_2^\circ) + Y'_{24}, \end{aligned}\right\} (5)$$

Здесь

$$S_{10} = \frac{Y_{20} - Y_{10}\cdot\rho_{22}}{Y_{10}(\rho_{21}-\rho_{22})};\quad S_{20} = \frac{Y_{10}\cdot\rho_{21} - Y_{20}}{Y_{10}(\rho_{21}-\rho_{22})};$$

$$S'_{10} = \frac{Y'_{20} - Y'_{10}\cdot\rho_{22}}{Y'_{10}(\rho_{21}-\rho_{22})};\quad S'_{20} = \frac{Y'_{10}\cdot\rho_{21} - Y'_{20}}{Y'_{10}(\rho_{21}-\rho_{22})}.$$

а)

$$A_1^\circ = \cos\omega_1\tau;\qquad A_2^\circ = \cos\omega_2\tau;$$

$$B_1^\circ = \frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1};\qquad B_2^\circ = \frac{\sin\omega_2\tau}{\omega_2};$$

$$C_1^\circ = \omega_1\cdot\sin\omega_1\tau;\ C_2^\circ = \omega_2\cdot\sin\omega_2\tau;\ D_1^\circ = A_1^\circ;\ D_2^\circ = A_2^\circ.$$

б)

$$A_{1\varepsilon}^\circ = e^{-\varepsilon\tau}\left(\cos\omega_1\tau + \frac{\varepsilon}{\omega_1}\sin\omega_1\tau\right);$$

$$A_{2\varepsilon}^\circ = e^{-\varepsilon\tau}\left(\cos\omega_2\tau + \frac{\varepsilon}{\omega_2}\sin\omega_2\tau\right);$$

$$B_{1\varepsilon}^\circ = e^{-\varepsilon\tau}\frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1};\qquad B_{2\varepsilon}^\circ = e^{-\varepsilon\tau}\frac{\sin\omega_2\tau}{\omega_2};$$

$$C_{1\varepsilon}^\circ = e^{-\varepsilon\tau}\omega_1\cdot\sin\omega_1\tau;\qquad C_{2\varepsilon}^\circ = e^{-\varepsilon\tau}\cdot\omega_2\cdot\sin\omega_2\tau;$$

$$D^{\circ}_{1\varepsilon} = e^{-\varepsilon\tau}\left(\cos\omega_1\tau - \frac{\varepsilon}{\omega_1}\sin\omega_1\tau\right);$$

$$D^{\circ}_{2\varepsilon} = e^{-\varepsilon\tau}\left(\cos\omega_2\tau - \frac{\varepsilon}{\omega_2}\sin\omega_2\tau\right).$$

В уравнениях (5) первые два слагаемых учитывают начальные условия колебаний системы в интервале времени τ. Последний член отражает действие сил P_1 и P_2 в этом интервале и определяется из формул (4).

Решив эту систему уравнений и определив четыре начальных условия, можем составить выражения чисто периодических перемещений системы в интервале $0 \leq t \leq \tau$:

$$\left.\begin{aligned}
&Y_{1t} = Y_{10}(S_{10}\cdot A_{1t} + S_{20}\cdot A_{2t}) + Y'_{10}(S'_{10}\cdot B_{1t} + S'_{20}\cdot B_{2t}) + Y_{1j};\\
&Y_{2t} = Y_{10}(\rho_{21}\cdot S_{10}\cdot A_{1t} + \rho_{22}\cdot S_{20}\,A_{2t}) + Y'_{10}(\rho_{21}\cdot S'_{10}\cdot B_{1t} + \rho_{22}\cdot S'_{20}\cdot B_{2t}) + Y_{2j};\\
&\text{----------}\\
&Y_{it} = Y_{10}(\rho_{i1}\cdot S_{10}\cdot A_{1t} + \rho_{i2}\cdot S_{20}\cdot A_{2t}) + Y'_{10}(\rho_{i1}\cdot S'_{10}\cdot B_{1t} + \rho_{i2}\cdot S'_{20}\cdot B_{2t}) + Y_{ij};\\
&\text{----------}\\
&Y_{nt} = Y_{10}(\rho_{n1}\cdot S_{10}\cdot A_{1t} + \rho_{n2}\cdot S_{20}\cdot A_{2t}) + Y'_{10}(\rho_{n1}\cdot S'_{10}\cdot B_{1t} + \rho_{n2}\cdot S'_{20}\cdot B_{2t}) + Y_{nj}.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Здесь Y_{ij}, где $j = I, 2, 3, 4$ - определяются по формулам (I), (2), (3), (4) и соответствующему значению t, для каждого участка времени,

а)

$$A_{1t} = \cos\omega_1 t; \qquad A_{2t} = \cos\omega_2 t;$$

$$B_{1t} = \frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}; \qquad B_{2t} = \frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}.$$

б)

$$A_{1\varepsilon t} = e^{-\varepsilon t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\varepsilon}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right);$$

$$A_{2\varepsilon t} = e^{-\varepsilon t}\left(\cos\omega_2 t + \frac{\varepsilon}{\omega_2}\sin\omega_2 t\right);$$

$$B_{1\varepsilon t} = e^{-\varepsilon t}\,\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}; \quad B_{2\varepsilon t} = e^{-\varepsilon t}\,\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}.$$

Собственные колебания системы Y_{it_1} можно легко получить из (6), [7], отбросив последний член, приняв знак "минус" перед всем выражением, и заменив время t, на $t_1 = k\tau + t$, где t_1 - отсчет времени от начала колебаний при первом ударе, k - число полных интервалов τ.

Полные колебания системы в любом интервале времени определяются как сумма чисто периодических перемещений по (6) и собственных колебаний (I2):

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= Y_{1t} + Y_{1t_1} \\ Y_2 &= Y_{2t} + Y_{2t_1} \\ &\text{----------} \\ Y_i &= Y_{it} + Y_{it_1} \\ &\text{----------} \\ Y_n &= Y_{nt} + Y_{nt_1} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

При учете затуханий собственные колебания будут постепенно уменьшаться и в конечном итоге останутся чисто вынужденные периодические перемещения системы согласно выражениям (6).

При наличии резонансных колебаний, когда период одной из двух первых собственных частот колебаний будет совпадать или будет кратным с интервалами повторной нагрузки, необходимо применять решение с учетом сил сопротивления. В этом случае система уравнений (5) упрощается.

При резонансе по первой собственной частоте колебания системы будем иметь:

$$A^{\circ}_{1\varepsilon} = D^{\circ}_{1\varepsilon} = e^{-\varepsilon\tau};\quad B^{\circ}_{1\varepsilon} = C^{\circ}_{1\varepsilon} = 0;$$

при резонансе по второй частоте колебания:

$$A^{\circ}_{2\varepsilon} = D^{\circ}_{2\varepsilon} = e^{-\varepsilon\tau};\quad B^{\circ}_{2\varepsilon} = C^{\circ}_{2\varepsilon} = 0.$$

Литература

I. С.А. Бернштейн, К.К. Керопян. Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции. Госстройиздат, I960.

2. А.Н. Крылов. Вибрация судов, ОНТИ, I936.

3. Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. Курс теоретической механики, часть П. Техтеоркздат, I938.

4. А.И. Лурье. Операционное исчисление и его применение в технике, ОНТИ, I938.

5. А.Н. Обморшев. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы в случае прерывного изменения возмущающей силы. Труды МВТУ, 1940.

6. Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. Устойчивость и колебания упругих систем. "Наука", 1964.

7. И.М. Рабинович. Курс строительной механики стержневых систем, часть II. Госстройиздат, 1954.

8. И.М. Рабинович. К расчету сооружений на нагрузки, изменяющиеся во времени по произвольному закону. "Исследования по теории сооружений", вып. IX. 1960.

9. А.Ф. Смирнов. Устойчивость и колебания сооружений. Трансжелдориздат, 1956.

10. Н.К. Снитко. Динамика сооружений. Госстройиздат, 1960.

11. Г.К. Гольст. К вопросу о повторных ударах. "Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура" № 4, 1963.

12. Г.К. Гольст. Действие повторных ударов на систему с двумя степенями свободы. Труды ВАТТ, № 73, 1962.

G. Golst

Über die Schwingungen des mechanischen Systems mit der Endzahl der Freiheitspotenz unter Einwirkung wiederholter Überbelastung

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird die Formel für die Bestimmung der Verschiebungen im Falle geringer Linearschwingungen des mechanischen Systems mit der Endzahl der Freiheitspotenz unter Einwirkung wiederholter Belastung angeführt.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 531.311

О. Сильде, Б. Тийкма

МЕТОД УРАВНЕНИЯ ВОЗМОЖНЫХ МОЩНОСТЕЙ

I. Введение

В работе [I] был дан общий метод решения задач динамики, исходя из теоремы об изменении кинетической энергии. В этой работе данный вопрос был решен формальным подходом путем введения символического множителя δ_i, который позволил представить характеристики скоростей механической системы в комплексной, но достаточно абстрактной форме. В настоящей работе изложение метода возможных мощностей дается в конкретной форме, принятой в теоретической механике. В статье приведены три примера согласно решениям для материальной точки, твердого тела и механической системы.

2. Движение материальной точки

Рассмотрим движение свободной материальной точки. Допустим, что масса точки m, ее вектор-скорости $\bar{v}$ и действующая сила $\bar{F}$, тогда кинетическая энергия точки

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v} \qquad (I)$$

и мощность N силы $\bar{F}$

$$N = \bar{F} \cdot \bar{v}, \qquad (2)$$

а теореме об изменении кинетической энергии в производной форме соответствует уравнение

$$\dot{T} = N \qquad (3)$$

или

$$m\bar{w}\cdot\bar{v} = \bar{F}\cdot\bar{v}, \qquad (4)$$

или

$$(m\bar{w} - \bar{F})\cdot\bar{v} = 0. \qquad (5)$$

Возникает вопрос, что надо изменить в уравнениях (4) и (5), чтобы из них получить основные уравнения динамики

$$m\bar{w} - \bar{F} = 0 \qquad (6)$$

или

$$m\bar{w} = \bar{F}. \qquad (7)$$

Оказывается, что для этого достаточно заменить в (4) или (5) вектор-скорости $\bar{v}$ вектором возможной скорости, которую будем обозначать символом $\{\bar{v}\}$. Вектор возможной скорости $\{\bar{v}\}$ включает в себе все скорости, которые материальная точка может иметь в данный момент времени при условиях задачи (при наличии геометрических и кинематических связей). Так например, в случае свободной точки вектор $\{\bar{v}\}$ содержит в себе все возможные векторы скоростей.

Введя понятие возможной скорости, теперь вместо уравнений (4) и (5), имеем следующие уравнения:

$$m\bar{w}\cdot\{\bar{v}\} = \bar{F}\cdot\{\bar{v}\} \qquad (8)$$

или

$$(m\bar{w} - \bar{F})\cdot\{\bar{v}\} = 0. \qquad (9)$$

Но из (9) следует, что

$$m\bar{w} - \bar{F} = 0. \qquad (10)$$

Введем кроме обозначения $\{\bar{v}\}$ еще следующие обозначения

$$m\bar{w}\cdot\{\bar{v}\} = \{\dot{T}\} \qquad (11)$$

и

$$\bar{F}\cdot\{\bar{v}\} = \{N\}. \qquad (12)$$

Величину $\{N\}$ будем называть возможной мощностью.

Теперь вместо уравнения (3) имеем уравнение

$$\{\dot{T}\} = \{N\}, \qquad (13)$$

которое (или в развернутом виде (8)) называем уравнением возможных мощностей. Это уравнение будет одним основным уравнением данной работы.

Сравнивая уравнения (I3) или (8) с уравнением (3) или (4), видно, что в членах новых уравнений вместо скоростей стоят возможные скорости.

Для решения конкретной задачи необходимо сначала выразить вектор скорости, затем вектор возможной скорости и вычислить вектор ускорения точки. В общем случае можно полагать, что вектор скорости точки определяется параметрами скоростей или обобщенными скоростями v_j . Пусть им соответствуют "базисные векторы" $\bar{u}_j$. Тогда вектор скорости $\bar{v}$ выражается так:

$$\bar{v} = \sum_{j=1}^{s} v_j \bar{u}_j , \qquad (I4)$$

где s - число степеней свободы.

Очевидно, для возможной скорости имеем

$$\{\bar{v}\} = \sum_j \{v_j\} \bar{u}_j , \qquad (I5)$$

а вектором ускорения будет

$$\bar{w} = \dot{\bar{v}} = \sum_j (\dot{v}_j \bar{u}_j + v_j \dot{\bar{u}}_j). \qquad (I6)$$

Если обобщенные силы, соответствующие обобщенным скоростям обозначить буквой Q_j , то уравнение $\{\dot{T}\} = \{N\}$ получит следующий вид

$$m \sum_{j,k} (\dot{v}_k \bar{u}_k + v_k \dot{\bar{u}}_k) \cdot \{v_j\} \bar{u}_j = \sum_j Q_j \{v_j\}, \qquad (I7)$$

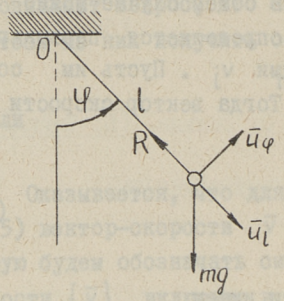
откуда при условии, что возможные скорости $\{v_j\}$ могут иметь произвольные численные значения, следуют уравнения движения точки

$$m \sum_k (\dot{v}_k \bar{u}_k + v_k \dot{\bar{u}}_k) \cdot \bar{u}_j = Q_j , (j = 1, 2, \ldots, s). \qquad (I8)$$

Соотношение (I8) является основным для изучения движения материальной точки. С помощью этого соотношения получаются уравнения движения точки при любом числе степеней свободы. Таким образом, уравнений (I7) и (I8) являются более общими, чем уравнения (3) или (4), которые применяются иногда для изучения движения точки или системы с одной степенью свободы. Уравнения (I7) и (I8) заменяют уравнения Лагранжа второго рода, но они являются более общими, чем уравнения

Лагранжа, так как под параметрами скоростей можно понимать и квазискорости, т.е. скорости, не являющиеся производными по времени от координат.

Пример I. Составить уравнение движения математического маятника на упругой нити. Длина нити в положении равновесия l_0, ее жесткость равна c (фиг. I).



Фиг.1.

Решение: Если длина нити l, то скорость точки

$$\bar{v} = l\dot{\varphi}\,\bar{u}_\varphi + \dot{l}\,\bar{u}_l,$$

возможная скорость

$$\{\bar{v}\} = \{\dot{\varphi}\}\,l\,\bar{u}_\varphi + \{\dot{l}\}\,\bar{u}_l$$

и ускорение

$$\bar{w} = \dot{l}\dot{\varphi}\,\bar{u}_\varphi + l\ddot{\varphi}\,\bar{u}_\varphi + l\dot{\varphi}\,\dot{\bar{u}}_\varphi + \ddot{l}\,\bar{u}_l + \dot{l}\,\dot{\bar{u}}_l.$$

Так как

$$\dot{\bar{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\bar{u}_l \quad \text{и} \quad \dot{\bar{u}}_l = \varphi\,\bar{u}_\varphi,$$

то

$$\{\dot{T}\} = m\bar{w}\cdot\{\bar{v}\} = m\left[(2\dot{l}l\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi})\{\dot{\varphi}\} + (\ddot{l} - l\dot{\varphi}^2)\{\dot{l}\}\right],$$

а

$$\{N\} = -mgl\sin\varphi\{\dot{\varphi}\} + [-c(l-l_0) + mg\cos\varphi]\{\dot{l}\}.$$

Приравнивая в уравнении

$$\{\dot{T}\} = \{N\},$$

коэффициенты перед $\{\dot{\varphi}\}$ и $\{\dot{l}\}$ получаются уравнения движения маятника (после деления соответственно на l и m)

$$\begin{cases} l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 \\ \ddot{l} + \frac{c}{m}(l-l_0) - g\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2 = 0. \end{cases}$$

(В задачнике И.В. Мещерского, в ответе задачи I2I4 во втором уравнении в последних скобках надо вычеркнуть число I).

3. Движение произвольной механической системы

I) Допустим, что положение системы определяется обобщенными координатами q_j, $j = 1, 2, \ldots, s$. Тогда радиус-вектор i-той точки

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots, q_s, t), \tag{19}$$

а вектор скорости этой точки

$$\bar{v}_i = \sum_j \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}. \tag{20}$$

Здесь $\dot{q}_j$ обобщенная скорость.

Как видно, в формулах для $\bar{v}_i$ появляются скорости, а координаты, так сказать, остаются в стороне. Поэтому в дальнейших рассуждениях членам в этих формулах можем давать следующее, более общее содержание. Во-первых, вместо $\dot{q}_j$ введем "обобщенные скорости" v_j, в более общем смысле, они могут быть и квази-скорости. Во-вторых, введем вместо $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$ базисные векторы $\bar{u}_{ij}$ (для i-той точки), и чтобы в дальнейшем не приходилось уделять особого внимания на член $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$, а также, чтобы выражения $\bar{v}_i$ получили более симметричный вид, внесем вектор $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$ в совокупность базисных векторов $\bar{u}_{ij}$. Этот базисный вектор сопоставим с "обобщенной скоростью", которая является одной из возможных обобщенных скоростей v_j: $v_t = \frac{dt}{dt} = 1$, но $\{v_t\}$ - любое число. В случае стационарных систем член $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$ отсутствует. При таких обозначениях вектор-скорости i-той точки выражается коротко так:

$$\bar{v}_i = \sum_j v_j \bar{u}_{ij}, \tag{21}$$

а вектор возможной скорости так:

$$\{\bar{v}_j\} = \sum_j \{v_j\} \bar{u}_{ij}. \tag{22}$$

Из (21) получим вектор-ускорения

$$\bar{w}_i = \sum_j (\dot{v}_j \bar{u}_{ij} + v_j \dot{\bar{u}}_{ij}). \tag{23}$$

Запишем для i-той точки равенство

$$m \bar{w}_i \cdot \bar{v}_i = \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i \quad \text{или} \quad \dot{T}_i = N_i \tag{24}$$

и $m_i \bar{w}_i \cdot \{\bar{v}_i\} = \bar{F}_i \cdot \{\bar{v}_i\}$ или $\{\dot{T}_i\} = \{N_i\}$. (25)

Учитывая формулы для $\{\bar{v}_i\}$ и $\bar{w}_i$ (21) и (23) напишем равенство (25) теперь в развернутом виде

$$m_i \sum_{j,l} (\dot{v}_j \bar{u}_{ij} + v_j \dot{\bar{u}}_{ij}) \cdot \{v_l\} \bar{u}_{il} = \sum_l \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{il} \{v_l\}. \qquad (26)$$

Суммируя для всех точек системы, получим

$$\sum_{i,j,l} m_i (\dot{v}_j \bar{u}_{ij} + v_j \dot{\bar{u}}_{ij}) \cdot \{v_l\} \bar{u}_{il} = \sum_{i,l} \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{il} \{v_l\}. \qquad (27)$$

или коротко $$\{\dot{T}\} = \{N\}.$$

Формула (27) для системы напоминает раньше полученную формулу (I7) для материальной точки, если обозначить

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{il} = Q_l, \qquad (28)$$

где Q_l обобщенная сила соответствующая скорости v_l.

Считая теперь все величины $\{v_l\}$ произвольными, получим уравнения движения системы

$$\sum_{i,j} m_i (\dot{v}_j \bar{u}_{ij} + v_j \dot{\bar{u}}_{ij}) \cdot \bar{u}_{il} = Q_l. \qquad (29)$$

В случае $\{\dot{T}\} = 0$ вместо уравнения (27) имеем уравнение

$$\sum_l Q_l \{v_l\} = 0. \qquad (30)$$

Это представляет собой общее уравнение статики.

В уравнениях (29) могут встречаться обыкновенные скорости и квазискорости, поэтому уравнения (29) являются более общими, чем, например, уравнения Лагранжа.

2) Преобразование уравнений (27).

Проведем преобразование левой стороны уравнений (27), чтобы дать им более компактное выражение, подобное уравнениям Лагранжа.

Из выражения кинетической энергии для системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} m_i v_j v_l \bar{u}_{ij} \cdot \bar{u}_{il} \qquad (3I)$$

следует

$$\frac{\partial T}{\partial v_l} = \sum_{i,j} m_i v_j \bar{u}_{ij} \cdot \bar{u}_{il}, \qquad (32)$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_\iota} = \sum_{i,j} m_i\left(\dot{v}_j \bar{u}_{ij} + v_j \dot{\bar{u}}_{ij}\right)\cdot \bar{u}_{i\iota} + \sum_{ij} m_i v_j \bar{u}_{ij}\cdot\dot{\bar{u}}_{i\iota}. \qquad (33)$$

Теперь уравнение (27) можно переписать так

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_\iota} - \sum_{i,j} m_i v_j \bar{u}_{ij}\cdot\dot{\bar{u}}_{i\iota}\right)\{v_\iota\} = Q_\iota\{v_\iota\} \qquad (34)$$

или зная, что $\sum_j v_j \bar{u}_{ij} = \bar{v}_i$,

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_\iota} - \sum_i m_i \bar{v}_i\cdot\dot{\bar{u}}_{i\iota}\right)\{v_\iota\} = Q_\iota\{v_\iota\}. \qquad (35)$$

В случае произвольности скоростей $\{v_\iota\}$ получим отсюда дифференциальные уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_\iota} - \sum_i m_i \bar{v}_i\cdot\dot{\bar{u}}_{i\iota} = Q_\iota, \qquad (36)$$

напоминающие уравнения Лагранжа, но которые являются более общими, так как v_ι могут быть как обыкновенные обобщенные скорости $\dot{q}_\iota$, так и квазискорости.

3) Вывод уравнений Лагранжа.

Выводим из уравнений (36) как частный случай уравнения Лагранжа.

Используя обозначения

$$v_\iota = \dot{q}_\iota \qquad \text{и} \qquad \bar{u}_{i\iota} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\iota}, \qquad (37)$$

можно написать

$$\bar{v}_i = \sum_s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s \qquad (38)$$

и

$$\dot{\bar{u}}_{i\iota} = \sum_s \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\iota \partial q_s}\dot{q}_s. \qquad (39)$$

С другой стороны (см. (20))

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_\iota} = \sum_s \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_\iota}\dot{q}_s. \qquad (40)$$

Следовательно

$$\dot{\bar{u}}_{il} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_l} . \tag{41}$$

Теперь

$$\sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \dot{\bar{u}}_{il} = \sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} , \tag{42}$$

а уравнения (36) получают такую форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l , \quad l = 1, 2, \ldots, s. \tag{43}$$

т.е. будут уравнениями Лагранжа.

4) Уравнения Аппеля

С помощью метода возможных мощностей выводим теперь уравнения Аппеля.

Из формулы скорости

$$\bar{v}_i = \sum_j \bar{u}_{ij} \dot{q}_j , \tag{44}$$

где $\dot{q}_j$ – обобщенная скорость, получим вектор ускорения

$$\bar{w}_i = \sum_j \dot{\bar{u}}_{ij} \dot{q}_j + \sum_j \bar{u}_{ij} \ddot{q}_j , \tag{45}$$

отсюда

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \bar{u}_{ij} , \tag{46}$$

т.к. $\bar{u}_{ij}$ не зависит от $\ddot{q}_j$, а (см.(20))

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \bar{u}_{ij} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} . \tag{47}$$

Теперь

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \bar{w}_i \cdot \left\{ \bar{v}_i \right\} &\equiv \sum_{ij} m_i \bar{w}_i \cdot \bar{u}_{ij} \left\{ \dot{q}_j \right\} = \\ &= \sum_{i,j} m_i \bar{w}_i \cdot \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \ddot{q}_j} \left\{ \dot{q}_j \right\} = \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left(\frac{m_i w_i^2}{2} \right) \left\{ \dot{q}_j \right\} = \\ &= \sum_j \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} \left\{ \dot{q}_j \right\}, \end{aligned} \tag{48}$$

где

$$S = \sum_i \frac{m_i w_i^2}{2} \quad - \tag{49}$$

"кинетическая энергия ускорений" данной системы. Уравнение $\left\{ \dot{T} \right\} = \left\{ N \right\}$ теперь имеет следующую форму:

$$\sum_j \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j}\{\dot{q}_j\} = \sum_j \sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}\{\dot{q}_j\} \qquad (50)$$

или ввиду произвольности величины $\{\dot{q}_j\}$

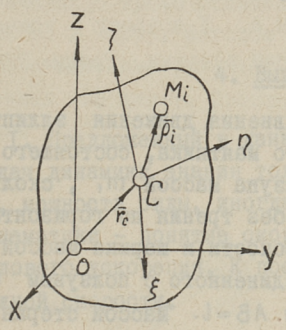
$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j} = Q_j , \qquad (51)$$

где

$$Q_j = \sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} . \qquad (52)$$

Вывод можно дать и в более общем виде, заменяя $\dot{q}_i$ на v_i

Пример 2. Выводим при помощи метода возможных мощностей общие уравнения движения твердого тела в векторном виде. Точка C – центр масс твердого тела. Мгновенную угловую скорость тела обозначим $\bar{\omega}$.



Фиг.2.

Радиус-вектор i -той точки M_i (фиг. 2) запишется в виде

$$\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{\rho}_i . \qquad (53)$$

Зная, что

$$\dot{\bar{\rho}}_i = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i ,$$

можно выписать векторы скорости и возможной скорости

$$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i \qquad (54)$$

$$\{\bar{v}_i\} = \{\bar{v}_c\} + \{\bar{\omega}\} \times \bar{\rho}_i . \qquad (55)$$

Теперь

$$\sum_i m_i \bar{w}_i \cdot \{\bar{v}_i\} = \sum_i m_i \bar{w}_i \cdot \{\bar{v}_c\} + \sum_i m_i \bar{w}_i \cdot (\{\bar{\omega}\} \times \bar{\rho}_i) =$$

$$= M \bar{w}_c \cdot \{\bar{v}_c\} + \{\bar{\omega}\} \cdot \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \bar{w}_i , \qquad (56)$$

а

$$\{N\} \equiv \sum_i \bar{F}_i \cdot \{\bar{v}_i\} = \sum_i \bar{F}_i \cdot \{\bar{v}_c\} + \{\bar{\omega}\} \cdot \sum_i \bar{\rho}_i \times \bar{F}_i . \qquad (57)$$

Из уравнения $\{\dot{T}\} = \{N\}$ ввиду произвольности величин $\{\bar{v}_c\}$ и $\{\bar{\omega}\}$ получаются уравнения

$$M\bar{w}_c = \sum_i \bar{F}_i, \tag{58}$$

$$\sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \bar{w}_i = \sum_i \bar{\rho}_i \times \bar{F}_i. \tag{59}$$

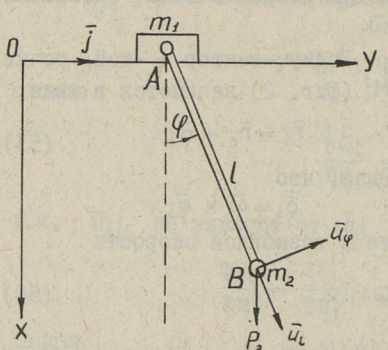
Это есть уравнения движения твердого тела в векторном виде.

Если положить, что $\bar{w}_i = \bar{w}_c + \bar{w}_i'$, где $\bar{w}_i'$ ускорение точки в относительном движении вокруг центра тяжести, то

$$\sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \bar{w}_i = \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \bar{w}_i',$$

так как $\sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \bar{w}_c = 0$.

Пример 3. Составить уравнения движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна массой m_1, скользящего без трения по горизонтальной плоскости и шарика массой m_2, соединенного с ползуном стержнем $AB = l$. Массой стержня пренебрегаем (фиг. 3).



Фиг.3.

Решение: Пусть параметрами скоростей будут $\dot{y}$ и $\dot{\varphi}$, соответствующими базисными векторами $\bar{u}_y = \bar{j}$ и $\bar{u}_\varphi$. Число степеней свободы – два. Тогда

$$\bar{v}_1 = \dot{y}\bar{j}; \quad \bar{v}_2 = \dot{y}\bar{j} + l\dot{\varphi}\bar{u}_\varphi;$$

$$\{\bar{v}_1\} = \{\dot{y}\}\bar{j}; \quad \{\bar{v}_2\} = \{\dot{y}\}\bar{j} + \{\dot{\varphi}\} l\bar{u}_\varphi;$$

$$\bar{w}_1 = \ddot{y}\bar{j}; \quad \bar{w}_2 = \ddot{y}\bar{j} + l\ddot{\varphi}\bar{u}_\varphi + l\dot{\varphi}\dot{\bar{u}}_\varphi; \quad \dot{\bar{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\bar{u}_l;$$

$$\bar{j}\cdot\bar{u}_\varphi = \cos\varphi; \quad \bar{j}\cdot\dot{\bar{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\varphi; \quad \bar{u}_\varphi\cdot\dot{\bar{u}}_\varphi = 0.$$

Получим

$$\{\dot{T}\} = \sum_i m_i \bar{w}_i \cdot \{\bar{v}_i\} = m_1 \ddot{y}\{\dot{y}\} + m_2(\ddot{y}\bar{j} + l\ddot{\varphi}\bar{u}_\varphi + l\dot{\varphi}\dot{\bar{u}}_\varphi)\cdot$$

$$\cdot(\{\dot{y}\}\bar{j} + \{\dot{\varphi}\}l\bar{u}_\varphi) = [(m_1+m_2)\ddot{y} + m_2(l\ddot{\varphi}\cos\varphi -$$

$$- l\dot{\varphi}^2\sin\varphi)]\{\dot{y}\} + m_2(\ddot{y}l\cos\varphi + l^2\ddot{\varphi})\{\dot{\varphi}\};$$

$$\{N\} = \bar{P}_2 \cdot \{\bar{v}_2\} = -m_2 g l \sin\varphi \{\dot{\varphi}\}.$$

Из $\{\dot{T}\} = \{N\}$ получим уравнения движения маятника:

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{y} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0 \\ \ddot{y}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

4. Выводы

I. Предложенный в данной работе метод требует при решении задач динамики знания только самых основных понятий, как сила, мощность силы, иногда кинетическая энергия и работа, из кинематики - понятие скорости, скорения, угловой скорости и углового ускорения. К последним прибаляется еще понятие возможной скорости.

2. Сравнение метода с другими известными методами динамики на примерах показало, что вычислительная работа в общем случае проще, чем при использовании других методов, выгоднее со стороны более четкой и общей постановки вопроса и дает почти единый подход к решению самых различных задач динамики. Метод позволяет вместо подхода к каждой задаче индивидуальным способом (этим не сказано, что надо уменьшить значение индивидуального подхода) подойти ко многим задачам с единой точки зрения.

3. Несмотря на то, что исходным понятием была кинетическая энергия, она как величина в уравнениях, использованных при решении задач, совсем не входит, - решение задач проводится без вычисления кинетической энергии системы. В то же время метод уравнений Лагранжа требует определения кинетической энергии, что не всегда является простым делом. Еще труднее найти энергию ускорения в уравнениях Аппеля.

4. Что касается неголономных систем, то изложенный метод имеет свое место наряду с существующими методами, несмотря на то, что в течение самых последних лет вышли в свет многие статьи и книги о неголономных системах.

5. Благодаря своей простоте изложенный метод представляет интерес с точки зрения методики и дидактики.

Литература

I. О. Сильде, Б. Тийкма. К вопросу о применении в механике теоремы кинетической энергии. Труды ТПИ, серия А, № 261, 1968.

O. Silde, B. Tiikma

Über die Gleichung der möglichen Leistungen

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird auf Grund des Energiesatzes eine allgemeine Methode zur Berechnung der Aufgaben aus der Mechanik gegeben. Die Bewegungsgleichungen eines Punktes (oder Systems) werden dadurch ermittelt, daß man im vektoriellen Ausdruck für die Ableitung der kinetischen Energie nach der Zeit und im Ausdruck für die Leistung der Kraft statt des Geschwindigkeitsvektors $\{\bar{v}\}$ die mögliche Geschwindigkeit $\bar{v}$ einsetzt.

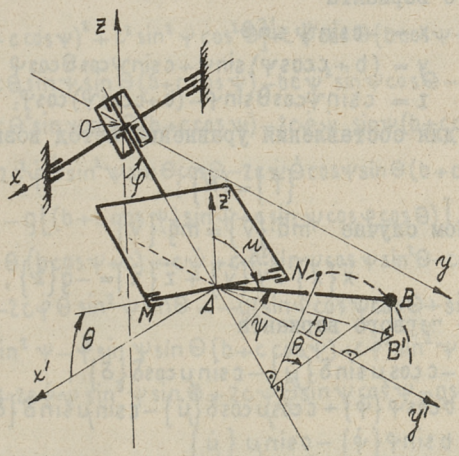
TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 293 1970

УДК 531.311

Х. Рельвик

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КАЧАНИЯ

В статье изучается движение тяжелой материальной точки на качелях с тремя степенями свободы (математически - движение её в торе). Методом возможных мощностей составлены дифференциальные уравнения движения для двух вариантов обобщенных координат. Проблема возникла в связи с новым спортивным прибором, изготовленным в ТПИ.



Фиг.1.

Рассмотрим качель, состоящую из двух рам. Первая рама может вращаться вокруг оси x (фиг. I) и вокруг оси симметрии OA. Вторая рама имеет возможность вращаться вокруг оси MN . На конце B второй рамы находится тяжелая материальная точка массой m .

Принимаем следующие обозначения: OA = b , AB = c. Первый вариант обобщенных координат:

φ - угол между осью первой рамы OA и осью z ,

μ - угол между вертикалью и прямой AB,

δ - угол между координатной плоскостью yz и прямой AB' (AB' есть проекция прямой AB на горизонтальную плоскость).

Второй вариант обобщенных координат:

φ - угол между осью первой рамы OA и осью z ,

ψ - угол между прямыми OA и AB,

Θ - угол поворота второй рамы вокруг оси OA.

Тогда координаты точки B будут: для первого варианта

$$x = -c\sin\mu\sin\delta$$
$$y = b\sin\varphi + c\sin\mu\cos\delta$$
$$z = -b\cos\varphi + c\cos\mu$$

и для второго варианта

$$x = -c\sin\psi\sin\Theta$$
$$y = (b + c\cos\psi)\sin\varphi + c\sin\psi\cos\Theta\cos\varphi$$
$$z = c\sin\psi\cos\Theta\sin\varphi - (b + c\cos\psi)\cos\varphi.$$

Выбираем для составления уравнений метод возможных мощностей [4]:

$$\{\dot{T}\} = \{N\};$$

т.е. в данном случае $m\bar{a}\cdot\{\bar{v}\} = m\bar{g}\cdot\{\bar{v}\}$

или

$$\ddot{x}\{\dot{x}\} + \ddot{y}\{\dot{y}\} + \ddot{z}\{\dot{z}\} = -g\{\dot{z}\},$$

где в случае первого варианта

$$\{\dot{x}\} = -c\cos\mu\sin\delta\{\dot{\mu}\} - c\sin\mu\cos\delta\{\dot{\delta}\}$$
$$\{\dot{y}\} = b\cos\varphi\{\dot{\varphi}\} + c\cos\mu\cos\delta\{\dot{\mu}\} - c\sin\mu\sin\delta\{\dot{\delta}\}$$
$$\{\dot{z}\} = b\sin\varphi\{\dot{\varphi}\} - c\sin\mu\{\dot{\mu}\}$$

и

$$\ddot{x} = -c\ddot{\mu}\cos\mu\sin\delta - c\ddot{\delta}\sin\mu\cos\delta + c\dot{\mu}^2\sin\mu\sin\delta + c\dot{\delta}^2\sin\mu\sin\delta - 2c\dot{\mu}\dot{\delta}\cos\mu\cos\delta$$
$$\ddot{y} = b\ddot{\varphi}\cos\varphi + c\ddot{\mu}\cos\mu\cos\delta - c\ddot{\delta}\sin\mu\sin\delta - b\dot{\varphi}^2\sin\varphi - c\dot{\mu}^2\sin\mu\cos\delta - c\dot{\delta}^2\sin\mu\cos\delta - 2c\dot{\mu}\dot{\delta}\cos\mu\sin\delta$$
$$\ddot{z} = b\ddot{\varphi}\sin\varphi - c\ddot{\mu}\sin\mu + b\dot{\varphi}^2\cos\varphi - c\dot{\mu}^2\cos\mu,$$

откуда после элементарных преобразований получим:

$$b\ddot{\varphi} + c\ddot{\mu}(\cos\varphi\cos\mu\cos\delta - \sin\varphi\sin\mu) - c\ddot{\delta}\cos\varphi\sin\mu\sin\delta -$$

$$-c\dot{\mu}^2(\cos\varphi\sin\mu\cos\delta+\sin\varphi\cos\mu)-c\dot{\delta}^2\cos\varphi\sin\mu\cos\delta-$$
$$-2c\dot{\mu}\dot{\delta}\cos\varphi\cos\mu\sin\delta=-g\sin\varphi,$$
$$b\ddot{\varphi}(\cos\varphi\cos\mu\cos\delta-\sin\varphi\sin\mu)+c\ddot{\mu}-b\dot{\varphi}^2(\sin\varphi\cos\mu\cos\delta+$$
$$+\cos\varphi\sin\mu)-c\dot{\delta}^2\sin\mu\cos\mu=g\sin\mu$$
$$b\ddot{\varphi}\cos\varphi\sin\mu\sin\delta-c\ddot{\delta}\sin^2\mu-b\dot{\varphi}^2\sin\varphi\sin\mu\sin\delta-$$
$$-2c\dot{\mu}\dot{\delta}\sin\mu\cos\mu=0.$$

Следует отметить, что уравнения данного варианта получаются в полтора раза более короткими, чем в случае второго варианта. Но и этот вариант решения интересен, потому что он позволяет некоторые обобщения, например для случая, когда рассматриваемая точка не находится на оси симметрии второй рамы.

Дифференциальные уравнения движения точки в случае второго варианта следующие:

$$\ddot{\varphi}\left[(b+c\cos\psi)^2+c^2\sin^2\psi\cos^2\Theta\right]+c\ddot{\psi}\cos\Theta(b\cos\psi+c)-$$
$$-c\ddot{\Theta}\sin\psi\sin\Theta(b+c\cos\psi)-bc\dot{\psi}^2\sin\psi\cos\Theta-$$
$$-c\dot{\Theta}^2\sin\psi\cos\Theta(b+c\cos\psi)-2c\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\psi(b+c\cos\psi\sin^2\Theta)-$$
$$-2c^2\dot{\varphi}\dot{\Theta}\sin^2\psi\sin\Theta\cos\Theta-2c\dot{\psi}\dot{\Theta}\cos\psi\sin\Theta(b+c\cos\psi)=$$
$$=-g\left[(b+c\cos\psi)\sin\varphi+c\sin\psi\cos\varphi\cos\Theta)\right],$$
$$\ddot{\varphi}\cos\Theta(b\cos\psi+c)+c\ddot{\psi}+c\dot{\varphi}^2\sin\psi\cos\psi\sin^2\Theta-c\dot{\Theta}^2\sin\psi\cos\psi-$$
$$-2c\dot{\varphi}\dot{\Theta}\sin^2\psi\sin\Theta=-g(\sin\varphi\cos\psi\cos\Theta+\sin\psi\cos\varphi)$$
$$c\ddot{\Theta}\sin^2\psi-\ddot{\varphi}\sin\psi\sin\Theta(b+c\cos\psi)+c\dot{\varphi}^2\sin^2\psi\sin\Theta\cos\Theta+$$
$$+2c\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin^2\psi\sin\Theta+2c\dot{\psi}\dot{\Theta}\sin\psi\cos\psi=g\sin\varphi\sin\psi\sin\Theta.$$

В процессе составления уравнений возникла возможность сравнения метода возможных мощностей с общим уравнением динамики и с уравнениями Лагранжа второго рода. Но последние оказались более трудоемкими. Кроме того метод возможных мощностей требует более простых математических операций.

Литература

I. Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. Курс теоретической механики II. Гос.изд. технико-теор. лит. Москва, 1954.

2. С.М. Тарг. Краткий курс теоретической механики. Гос. изд. технико-теор. лит. Москва, 1963.

3. Б.А. Тийкма. Метод уравнений возможных мощностей. Диссертация. Таллин, 1968.

4. О.М. Сильде, Б.А. Тийкма. Метод уравнений возможных мощностей. Настоящий сборник.

H. Relvik

Zur Aufgabe des Schaukelns

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag werden die dynamischen Bewegungsgleichungen des Massenpunktes, der sich auf einer Schaukel mit drei Freiheitsgraden bewegt, beschrieben.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Стр.

М. Л е в и н а. О сходимости кусочно-полиномиальных приближений для краевой задачи. . . . 3

М. Л е в и н а. О среднеквадратической ошибки для одного вида сращенных функций . . . II

М. Л е в и н, Э. Ш а ц. Построение одной наилучшей кубатурной формулы. I5

Э. Ш а ц. О некоторых многочленах наименьшего уклонения в метрике L_2. 23

Э. Ш а ц. Наилучшая квадратурная формула для класса функций $W_{L_2}^{(4)}(M; 0,1)$. 27

Х. Р о о с. О возможностях рассмотрения действительных чисел и систем чисел на практическом материале по рядам. 35

Т. Л и й в а. О собственных неосесимметричных колебаниях оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. 47

А. Ч и с т я к о в а. О применении метода Гамильтона-Якоби в задачах теории упругости. . 6I

А. Ч и с т я к о в а. Теоремы взаимности для динамических систем с конечным числом степеней свободы. 7I

Г. Г о л ь с т. О колебаниях механической системы с конечным числом степеней свободы при действии прерывной повторной нагрузки. . . 83

О. С и л ь д е, Б. Т и й к м а. Метод уравнения возможных мощностей. 95

Х. Р е л ь в и к. Об одной задаче качания. I07

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Raamatukogu IV Teaduste Akadeemia

МАТЕМАТИКА

И

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

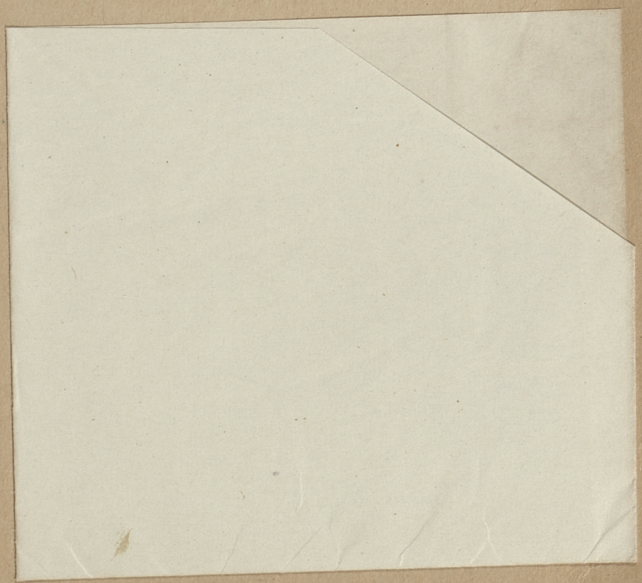
СБОРНИК СТАТЕЙ

У

Редактор проф. Г. Гольст
Технический редактор Г. Гришина

Сборник утверждён коллегией Трудов ТПИ 27/11 1970.

Сдано в набор 30/1У 1970.
Подписано к печати 14/1У 1970.
Бумага 60x90/16. Печ. л. 7,0 + прилож. 0,5.
Уч. изд. л. 5,25. Тираж 350. МВ-02878. Зак. №208
Ротапринт ТПИ, Таллин, Коскла 2/9.
Цена 53 коп.



Цена 53 коп.