

Ep. 6.7

596

ISSN 0136-3549

0203-7343

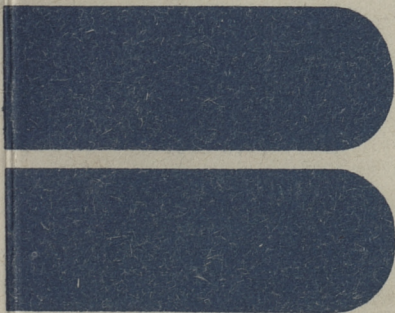
TALLINNA  
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI  
TOIMETISED

596

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

**TPI**  
**'85**

ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ  
ТОНКОСТЕННЫХ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ





УДК 624.01/04

●

**ТЕОРИЯ  
И  
РАСЧЕТ  
ТОНКОСТЕЖНЫХ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ**

**Строительные конструкции  
и строительная механика XXIУ**

В дальнейшем данный сборник "Строительные конструкции и строительная механика" заменяет ранее издаваемые сборники "Строительные конструкции" (последний XXIII) и "Строительная механика" (последний XV).



ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
Труды ТПИ № 596  
ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ

Строительные конструкции и строительная механика XXIV  
На русском языке

Редактор В. Янисо

Техн. ред. М. Тамме

Сборник утвержден коллегией Трудов 26.03.85.

Подписано к печати 19.07.85

МВ-01594.

Формат 60x90/16. Печ. л. 9,5 + прилож. 0,5. Уч.-изд. л. 8,0

Тираж 300.

Зак. 352

Цена 1.20

Таллинский политехнический институт.

200026 Таллин, Эхитаяте теэ, 5

Ротапринт ТПИ 200006, Таллин, ул. Коскла, 2/9



Таллинский политехнический институт, 1985

Maalt tulnud professoreid on küllaga, kuid lugupeetav professor Johannes Aare pole mitte külakooliõpetajate, vaid lausa põllupidajate perest. Ja üks nende hulgaski ole mehi mitmesuguseid, Johannes Aare aga just niisugune, nagu võiks oodata: visa töömees, kahe jalaga kindlalt maas, optimistliku eluhoiakuga, rõhutatud enesekindlusega esimese põlve intelligent.

Tõesti, miks ta ei võiks olla enesekindel, kui on professorite-duetis projekteerinud kraanad, mis ajavad maast püsti rektifikatsioonikolonnid, mille kõrgus ulatub 100 meetrini ja mass 1000 tonnini.

Nende kraanade loomise eest saadud tunnustusele lisandus tehnikadoktori kraadi kinnitamine väitekirja eest, millega Johannes Aare oli pikka aega visalt tööd teinud. Nii tulebki välja, et suurte raskuste ületaja professor Johannes Aare teaduslik kiirgusspekter on ühe joonega - täisseinalise tala otsapaneelide käitumine suurtel koormistel: nii suurtel, et tala otsapaneeli sein on ammu juba mõlkunud. Palju oleneb siin ribide-vööde jäikusest ja selle arvestamine on olnud Johannes Aare uurimisvallaks ja professionaalse taseme baasiks. Mitmed tema järglased uurimistöös valdkonnas on juba tuntud teadurid ja kõrgkooli õppejõud.

Nii mõnigi asjatundja on lugenud Tallinna-meeste liigseks julguseks lubada talaseinte mõlkumist eksploatatsioonikoormistel. Aga maameheliku kasvatusena insener niisama julguse näitamiseks julge ei ole, julguse kaaslasteks on sügavad teadmised, märksa sügavamad kui neil, kes reeglina piirduvad vabalt toetatud plaadi uurimisega.

Johannes Aare pole olnud "mandikorjaja", vaid raskuste (ja mitte ainult raskusjõu) ületaja. Visa töö on teda aeglaselt, kuid tagasilöökideta edasi viinud läbi keerukate ajalooliste situatsioonide "tropi" staatusest kateedris neljakümne aastate teisel poolel sama kateedri professorini kakskümmend viis aastat hiljem.

Just "tropi" staatuses, üle kivide ja kändude, kuid ausate vahenditega ehitas Johannes Aare oma kätega eluaseme kasvavale perele - alternatiive polnud. Nüüd võime väita, et see maja on andnud kolm juba tuntud meest ja

arvestatavast kunstnikust tütre. Mehed üldiselt möönavad, et järgneva põlve üleskasvatamisel annavad peamise panuse abikaasad. Professor Johannes Aare korral lisandub sellele triviaalsele avaldusele alati väljapeetud lugupidamine.

Üldse ja eriti on professor Johannes Aare soliidne isiksus selle parimas tähenduses. Temalt ei kuule teravmeel-seid targutusi pühade vaimsete ja kõlbeliste väärtuste üle, mis on nii omane paljudele maailma irooniliselt mõtestava-tele intellektuaalidele. Tema on sotsiaalselt küpsenud spet-sialist, kes hoidub väljumast kompetentsuse sfäärist. Samal ajal on ta oma kompetentsuse sfääris andnud rahvamajanduse-le suurt abi paljude kraanade, reservuaaride ja autoklaavi-de projekteerimise ja ekspluateerimisega seotud küsimuste lahendamisel.

Järgmise aastakümne künnisel soovivad kõik kolleegid jätkuvat edu ja töötahet ehitusinseneride koolitamisel ning teraskonstruksioonide käitumise hindamisel.

Nikolai Alumäe

## СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЕШЕХОДНЫХ ВИСЯЧИХ МОСТОВ

При разработке современных методов расчета висячих мостов используются нелинейные уравнения кабеля как гибкой нити и уравнения упругой линии балки жесткости. Работы многих авторов [1, 2, 3] базируются на применении матричных методов расчета. Для расчета автодорожных мостов весьма выгодными могут оказаться методы построения линий влияния с учетом геометрической нелинейности системы [4].

За расчетную временную нагрузку для пешеходных мостов принимается полная или частичная равномерно распределенная нагрузка. Поэтому для расчета пешеходных висячих мостов целесообразно развивать аналитические методы с непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений системы кабель-балка. Уравнения указанной системы по структуре весьма близки к нелинейным уравнениям тонких пластин при цилиндрическом изгибе [5].

При выводе уравнений для расчета висячих мостов принимаем обычные допущения линейной упругой работы материала, малости удлинений и горизонтальных перемещений подвесок и уравновешивания начальной (постоянной) нагрузки только кабелями. Полученные уравнения были использованы при составлении одного из вариантных решений моста для лыжников и пешеходов в районе Нымме города Таллина.

Для начального состояния кабеля имеем уравнение равновесия

$$H_0 \frac{d^2 z}{dx^2} = p_0(x), \quad (1)$$

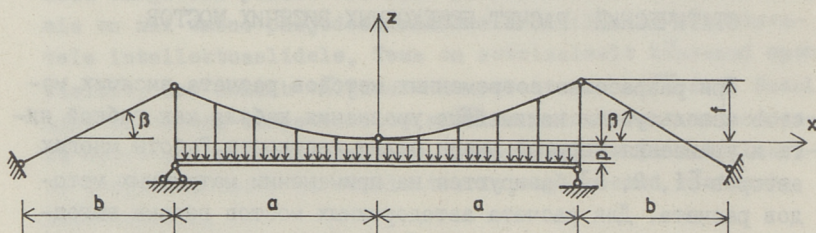
где  $p_0(x)$  — начальная вертикальная (постоянная) нагрузки;  
 $H_0$  — распор кабеля от нагрузки  $p_0$ ;  
 $x, z$  — начальные координаты кабеля.

При равномерном распределении начальной нагрузки получим двойным интегрированием уравнения (I) согласно схеме фиг. I

$$z = f \frac{x^2}{a^2}, \quad (2)$$

где  $a$  - полупролет кабеля;

$f$  - стрела провеса кабеля.



Фиг. 1.

Используя уравнение (I) для опорной точки кабеля, получим значение распора

$$H_0 = \frac{p_0 a^2}{2f}. \quad (3)$$

При действии временной нагрузки мы сможем написать условие равновесия для кабеля

$$H = \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = p_0 + p'(x) \quad (4)$$

и уравнение упругой линии балки жесткости

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = -p''(x), \quad (5)$$

где  $p'(x)$  - составляющая временной нагрузки, уравниваемая кабелем;

$p''(x)$  - остальная часть временной нагрузки, уравниваемая балкой жесткости;

$H$  - суммарный распор кабеля от постоянной и временной нагрузок;

$w = w(x)$  - вертикальное перемещение, общее для кабеля и балки жесткости;

$EJ$  - изгибная жесткость балки жесткости.

Суммированием уравнений (4) и (5) мы получим уравнение равновесия системы в целом

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - H \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + p_0 + p' + p'' = 0, \quad (6)$$



Обозначая  $p(x) = p_0 + p' + p''$  и  $c^2 = EJ/H$ , мы сможем представить дифференциальное уравнение системы с параболическим кабелем в виде

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2f}{a^2 c^2} - \frac{p(x)}{EJ}. \quad (7)$$

Коэффициент с уравнения (7) не может быть задан произвольно, а должен определяться из условия совместности деформаций кабеля как гибкой нити. Указанное условие может быть написано в виде [6]

$$\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dx} \left( \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dw}{dx} \right) = \frac{H - H_0}{E_1 A_1} \left[ 1 - \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (8)$$

где  $u = u(x)$  - горизонтальное перемещение кабеля,

$E_1 A_1$  - жесткость кабеля на растяжение.

Для исключения горизонтальных перемещений  $u(x)$  следует интегрировать уравнение (8) в пределах пролета кабеля. Полученное перемещение опор кабеля (вершин пилонов) должно равняться суммарному перемещению вершин пилонов, обусловленному удлинением анкерных вант (см. фиг. I)

$$\int_{-a}^a \frac{du}{dx} dx = \frac{-2(H - H_0)b}{E_2 A_2 \cos^2 \beta}, \quad (9)$$

где  $b$  - пролет анкерных вант;

$\beta$  - угол наклона анкерных вант;

$E_2 A_2$  - жесткость анкерных вант на растяжение.

В целях получения более простой зависимости для интеграла правой стороны уравнения (8) в случае параболического кабеля разлагаем выражение в квадратных скобках в ряд по степеням  $x$ . Тогда мы имеем

$$\int_{-a}^a \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} dx = 2a \left( 1 + 2 \frac{f^2}{a^2} + \frac{6f^4}{5a^4} - \frac{4f^6}{7a^6} + \dots \right). \quad (10)$$

При реальных соотношениях размеров кабеля мы сможем пренебречь третьим и следующими членами разложения (10) и уравнение (8) может быть приведено к виду

$$\int_{-a}^a \frac{dw}{dx} \left( \frac{fx}{a^2} + \frac{1}{4} \frac{dw}{dx} \right) dx = \frac{(H - H_0)a}{E_1 A_1} \left( 1 + 2 \frac{f^2}{a^2} + \frac{E_1 A_1 b}{E_2 A_2 \cos^3 \beta} \right). \quad (11)$$

Определение усилий и перемещений висячего моста сводится к решению уравнения (7) с учетом распора  $H$  (параметра  $c$ ), определяемого уравнением (11). Далее рассмотрим возможности непосредственного интегрирования указанных урав-

нений при действии равномерно распределенной нагрузки на всем пролете и на половине пролета. Приводятся решения как в точной, так и в приближенной постановке.

### I. Точное решение задачи

Обозначим:

$p_0$  - начальную вертикальную нагрузку кабеля;

$p = p_0 + p_1$  - сумму начальной и дополнительной нагрузок, приложенных по всему пролету;

$p_2$  - дополнительную нагрузку, приложенную на правый полупролет балки жесткости.

В этом случае уравнение равновесия (7) имеет вид:

для левого полупролета

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2f}{a^2 c^2} - \frac{p}{EJ}, \quad (I2)$$

для правого полупролета

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2f}{a^2 c^2} - \frac{p+p_2}{EJ}. \quad (I3)$$

Эти уравнения решаются при граничных условиях

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a,$$

с учетом равенства прогибов и соответствующих производных, полученных для сечения  $x=0$  по уравнениям (I2) и (I3).

Тройное интегрирование приводит нас к функциям прогиба:

при  $x \leq 0$

$$\begin{aligned} \frac{w(x)}{f} = & \left( \frac{p a^2 c^2}{2EJf} - 1 \right) \left[ 2 \frac{c^2}{a^2} \left( 1 - \frac{chx/c}{cha/c} \right) - \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right] + \\ & + \frac{p_2 a^2 c^2}{4EJf} \left[ 2 \frac{c^2}{a^2} \left( ch \frac{a}{c} - 1 \right) \left( \frac{shx/c}{sha/c} + \frac{chx/c}{cha/c} \right) - \left( 1 + \frac{x}{a} \right) \right], \end{aligned} \quad (I4)$$

при  $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{w(x)}{f} = & \left[ \frac{(p+p_2) a^2 c^2}{2EJf} - 1 \right] \left[ 2 \frac{c^2}{a^2} \left( 1 - \frac{chx/c}{cha/c} \right) - \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right] + \\ & + \frac{p_2 a^2 c^2}{4EJf} \left[ 2 \frac{c^2}{a^2} \left( ch \frac{a}{c} - 1 \right) \left( \frac{shx/c}{sha/c} - \frac{chx/c}{cha/c} \right) + \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (I5)$$

Для середины пролета имеем

$$\frac{w_0}{f} = \left[ \frac{(p+0,5 p_2) a^2 c^2}{2EJf} - 1 \right] \left[ 2 \frac{c^2}{a^2} \left( 1 - \frac{1}{cha/c} \right) - 1 \right]. \quad (I6)$$

Для изгибающих моментов балки жесткости находим:  
при  $x \leq 0$

$$M = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = \left( \frac{2EJf}{a^2} - p_2 c^2 \right) \left( 1 - \frac{chx/c}{cha/c} \right) - \frac{1}{2} p_2 c^2 \left( ch \frac{a}{c} - 1 \right) \left( \frac{shx/c}{sha/c} + \frac{chx/c}{cha/c} \right); \quad (I7)$$

при  $x > 0$

$$M = \left( \frac{2EJf}{a^2} - p_2 c^2 \right) \left( 1 - \frac{chx/2}{cha/c} \right) - \frac{1}{2} p_2 c^2 \left[ 2 \left( 1 - \frac{chx/c}{cha/c} \right) + \left( ch \frac{a}{c} - 1 \right) \left( \frac{shx/c}{sha/c} - \frac{chx/c}{cha/c} \right) \right]. \quad (I8)$$

Параметр распора  $c = (EJ/H)^{1/2}$  согласно уравнению (I) с учетом функции прогиба  $w(x)$  по (I4) и (I5) определяется трансцендентным уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} + \frac{c^2}{a^2} (1 - th^2 \frac{a}{c}) - \frac{c^3}{a^3} th \frac{a}{c} + \frac{EJ(1+\psi)a^2}{E_1 A_1 f^2 c^2} - p_0 \frac{a^4(1+\psi)}{2 E_1 A_1 f^3} = \\ & = \frac{(p + 0,5 p_2) a^2 c^2}{2 EJf} \left[ 4 \frac{c^2}{a^2} + 2 \frac{c^2}{a^2} (1 - th^2 \frac{a}{c}) - 6 \frac{c^3}{a^3} th \frac{a}{c} \right] + \\ & + \frac{p(p+p_2) a^4 c^4}{(2 EJf)^2} \left[ \frac{2}{3} - 4 \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} (1 - th^2 \frac{a}{c}) + 5 \frac{c^3}{a^3} th \frac{a}{c} \right] + \\ & + \left( \frac{p_2 a^2 c^2}{2 EJf} \right)^2 \left\{ \frac{5}{24} - \frac{c^2}{a^2} \left[ 2 + \frac{1}{4} (1 - th^2 \frac{a}{c}) + \frac{cha/c - 1}{2 sh^2 ac} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{5c^3}{4a^3} \left( th \frac{a}{c} + 2 \frac{cha/c - 1}{sha/c} \right) \right\}. \quad (I9) \end{aligned}$$

В уравнении (I9) принято обозначение

$$\psi = 2 \frac{f^2}{a^2} + \frac{E_1 A_1 b}{E_2 A_2 a \cos^3 \beta}.$$

Само собой разумеется, что решение задачи при действии нагрузок на всем пролете сводится к уравнениям (I4)... (I9) при  $p_2 = 0$ .

## 2. Приближенное определение перемещений и усилий

Для приближенного расчета моста при действии нагрузок различной интенсивности на левом и правом полупролетах целесообразно разлагать нагрузку на симметричную и антисимметричную составляющие. Обозначим также, как выше,  $p_0$  - начальную нагрузку, уравниваемую только кабелем;  $p_1$  - дополнительную нагрузку на всем пролете и  $p_2$  - дополнитель-

ную нагрузку на правом полупролете балки жесткости. Тогда симметричная часть дополнительной нагрузки будет  $p_s = p_1 + 0,5 p_2$  и соответствующая антисимметричная часть  $p_t = 0,5 p_2 \operatorname{sgn} x$ . Расчет ведется последовательно на нагрузки  $p_s$  и  $p_t$ .

Для расчета моста на симметричную часть нагрузки аппроксимируем функцию прогиба зависимостью

$$w(x) = -w_0 \cos \frac{\pi x}{2a}, \quad (20)$$

которая удовлетворяет граничным условиям. Из условия совместности деформаций кабеля (II) находим

$$\frac{H_1 - H_0}{E_1 A_1} = \frac{4f^2}{\pi a^2(1+\psi)} \left( \frac{w_0}{f} + \frac{\pi^3 w_0^3}{64f^2} \right), \quad (21)$$

где обозначение  $\psi$  соответствует обозначению уравнения (I9). Условие равновесия (6) может быть написано с учетом (I) в виде

$$(H_1 - H_0) \frac{2f}{a^2} + H \frac{d^2 w}{dx^2} - EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = p_s. \quad (22)$$

Подставляя производные функции  $w(x)$  по (20) и приращение распора  $H - H_0$  из (22), уравнение (21) может быть представлено в виде

$$\left( \frac{w_0}{f} \right)^3 \cos \frac{\pi x}{2a} + \left( \frac{w_0}{f} \right)^2 \left( \frac{64}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{2a} + \frac{8}{\pi^2} \right) + \frac{w_0}{f} \left[ \frac{512}{\pi^5} + \frac{4EJ(1+\psi)}{E_1 A_1 f^2} \cos \frac{\pi x}{2a} + \frac{8 p_0 d^4 (1+\psi)}{\pi^2 E_1 A_1 f^3} \cos \frac{\pi x}{2a} \right] = \frac{64 p_s d^4 (1+\psi)}{\pi^4 E_1 A_1 f^3}. \quad (23)$$

После интегрирования уравнения (23), согласно методу Бубнова-Галеркина, мы получим кубическое уравнение для определения параметра прогиба

$$\left( \frac{w_0}{f} \right)^3 + \frac{96}{\pi^3} \left( \frac{w_0}{f} \right)^2 + \left[ \frac{2048}{\pi^6} + \frac{4EJ(1+\psi)}{E_1 A_1 f^2} + \frac{8 p_0 d^4 (1+\psi)}{\pi^2 E_1 A_1 f^3} \right] \frac{w_0}{f} = \frac{256 p_s d^4 (1+\psi)}{\pi^5 E_1 A_1 f^3}. \quad (24)$$

Распор определяется уравнением (21), которое может быть представлено в виде

$$H_1 = H_0 + \frac{4 E_1 A_1 f^2}{\pi a^2 (1+\psi)} \frac{w_0}{f} \left( 1 + \frac{\pi^3 w_0}{64 f} \right). \quad (25)$$

Для определения изгибающего момента балки жесткости имеем

$$M = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\pi^2 EJ f}{4a^2} \frac{w_0}{f} \cos \frac{\pi x}{2a}. \quad (26)$$

Результаты расчета представлены в следующей таблице:

Нагрузка при $x < 0$ $x > 0$		Формулы расчета	Распор H (кН)	w (см)		макс M (кН·м)			
				$\frac{x}{a} = -0,5$	0	+0,5	$\frac{x}{a} = -0,5$	0	
$p_0 + p_1 + p_2$		Точные	551	13,2	18,4	13,2	105	136	105
$p_0 + p_1 + p_2$ $p_0 + p_1 + p_2$		Прибли- женные	550	13,2	18,6	13,2	101	143	101
$p_0 + p_1$		Точные	360	1,9	10,7	17,1	-220	124	342
$p_0 + p_1$ $p_0 + p_1 + p_2$		Прибли- женные	367	1,7	11,0	17,2	-231	85	351

Для антисимметричной составляющей нагрузки аппроксимируем функцию прогиба в виде

$$w = -w_1 \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (27)$$

Из условия совместности деформаций кабеля мы теперь имеем

$$H = H_1 + \frac{\pi^2 E_1 A_1 w_1^2}{4a^2(1+\psi)}, \quad (28)$$

где  $H_1$  - распор кабеля под действием нагрузок  $p_0$  и  $p_5$ .

Теперь, используя уравнение равновесия (6), мы получим кубическое уравнение для определения параметра прогиба

$$\left(\frac{w_1}{f_1}\right)^3 + \left[ \frac{4EJ(1+\psi)}{E_1 A_1 f_1^3} + \frac{2(p_0+p_5)a^4(1+\psi)}{\pi^2 E_1 A_1 f_1^3} \right] \frac{w_1}{f_1} = \frac{16p_5 a^4(1+\psi)}{\pi^5 E_1 A_1 f_1^3}, \quad (29)$$

где  $f_1 = f + w_0$  - провес кабеля с учетом прогиба от симметричной составляющей нагрузки.

Изгибающие моменты балки жесткости

$$M = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\pi^2 EJ f_1}{a^2} \frac{w_1}{f_1} \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (30)$$

### 3. Сопоставление результатов расчета по точным и приближенным уравнениям

В качестве примера был выполнен расчет одного из вариантов висячего моста для лыжников и пешеходов в районе Нымме города Таллина. Геометрические параметры моста (см. фиг. 1):  $a = 22,5$  м,  $f = 6$  м,  $b = 15$  м,  $\operatorname{tg} \beta = 0,4$ ; параметры жесткости балки и кабеля:  $EJ = 0,21 \cdot 10^6 \cdot 705,1 \cdot 10^{-6} = 148,1$  МН/м<sup>2</sup> (I 60 по ГОСТ 8239-72);  $E_1 A_1 = 0,16 \cdot 10^6 \cdot 1960 \cdot 10^{-6} = 313,6$  МН ( $\phi$  52 по ГОСТ 7676-73); нагрузки:  $p_0 = 2,0$  кН/м,  $p_1 = 2,0$  кН/м,  $p_2 = 10,0$  кН/м.

Результаты расчета максимальных прогибов, усилий и изгибающих моментов, полученных по приближенным формулам на 5 % отличаются от точных.

### Л и т е р а т у р а

1. E g e r v a r y E. On the application of the matrix theory of the calculating of chainbridges. - Act. techn. Acad. Sci. Hung., 1955, N 1, 2.

2. A s p l u n d S.O. Practical calculation of suspension bridges. - Scandinavian University Books. N 273. Göteborg, 1963.

3. С м и р н о в В.А. Висячие мосты больших пролетов. М., Высшая школа, 1975.

4. К и р с а н о в Н.М. Расчет висячих комбинированных систем по линиям влияния с учетом прогибов. Изд. Воронежского университета. Воронеж, 1976.

5. К у л ь б а х В.Р. Расчет тонких пластин при цилиндрическом изгибе с учетом начальных прогибов и усилий. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 571, 1984.

6. К у л ь б а х В.Р. Вопросы статического расчета висячих систем. Таллин, ТПИ, 1970.

J. Aare, V. Kulbach

An Investigation of the Statical Behaviour of  
Suspended Pedestrian Overpasses

Summary

Behaviour of the girder-stiffened suspension bridges with geometrically nonlinear parabolic cables are analysed. The usual assumptions about the linear elastic strain-stress dependence of material, absence of elongations and horizontal displacements of hangers and balancing the initial vertical load by the cables only have been taken into account. The action of uniformly distributed loads on the whole and on half-span is treated. The exact and approximate formulas for inner forces and displacements of cables and stiffening girders are given.





## О РАСЧЕТЕ АВТОКЛАВОВ, ОПИРАЮЩИХСЯ НА ДВЕ ОПОРЫ

## Введение

Все автоклавы опираются на концевые и промежуточные опоры. Но в практике часто встречаются случаи, когда автоклав от неравномерного распределения температуры в стенке поднимается с промежуточных опор и опирается только на концевые опоры. Разница температур в верхних и нижних волокнах стенки объясняется наличием конденсата на днище автоклава и может оказаться в пределах 40...80 (и даже 100) °С. Как показывают расчеты, вертикальные перемещения срединного сечения автоклава длиной 17 м и диаметром 2 м могут достигнуть при этом 10...15 мм.

Исходя из вышеизложенного, предложено отказаться от промежуточных опор и рассмотреть автоклав как цилиндрическую оболочку, опертую только на крайние опоры и достигнуть необходимой прочности увеличением толщины стенки.

## 1. Метод расчета

Автоклав рассматривается как цилиндрическая оболочка, опертая по торцам на своей плоскости жесткие диафрагмы и нагруженная в первом приближении равномерно распределенной погонной нагрузкой вдоль нижней образующей (фиг. 1).

При решении задачи исходят из уравнений равновесия в перемещениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (I)$$

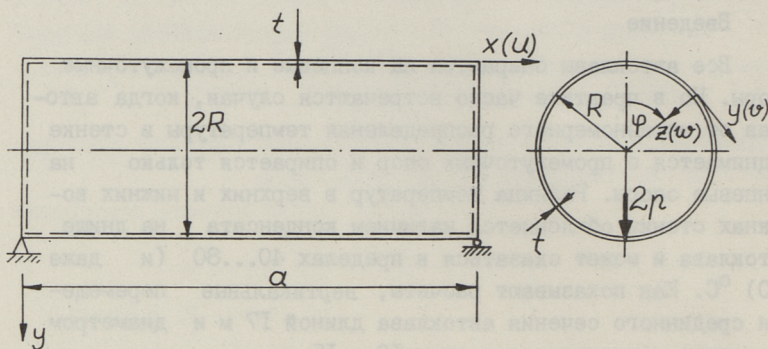
$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + R \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{t^2}{12R} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \varphi^3} \right) -$$

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \frac{t^2}{12R} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} \right] = 0; \quad (2)$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\omega}{R} - \frac{t^2}{12} \left( R \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{2}{R} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \omega}{R^3 \partial \varphi^4} \right) = 0, \quad (3)$$

где  $u, v$  и  $\omega$  - перемещения соответственно вдоль осей  $x, y$  и  $z$ ,

$\nu$  - коэффициент Пуассона ( $\nu = 0,3$ ).



Фиг. 1. Схема автоклава.

Перемещения  $u, v$  и  $\omega$  аппроксимируются следующими выражениями:

$$u = u_0 \cos \frac{\pi x}{a} + u_1 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \varphi + \left\{ \cos \frac{\pi x}{a} (K_1 \operatorname{ch} \varphi + K_2 \varphi \operatorname{sh} \varphi) + \cos \frac{\pi x}{a} \left[ C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} + D_1 (R \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} + \frac{a}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a}) \right] \right\}; \quad (4)$$

$$v = v_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \varphi + \left\{ \sin \frac{\pi x}{a} (N_1 \operatorname{sh} \varphi + N_2 \varphi \operatorname{ch} \varphi) + \sin \frac{\pi x}{a} \left[ C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} + D_1 (R \varphi \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} - \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \frac{a}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a}) \right] \right\}; \quad (5)$$

$$\omega = \omega_0 \sin \frac{\pi x}{a} + \omega_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \varphi + \left\{ \sin \frac{\pi x}{a} (A_1 \operatorname{ch} \varphi + B_1 \varphi \operatorname{sh} \varphi) \right\}, \quad (6)$$

удовлетворяющими автоматически граничные условия на торцах оболочки, а также на линии  $\varphi = 0$ , где  $\nu = 0$ .

Подставляя выражения (4), (5) и (6) в уравнения (1) и (2), можно неизвестные коэффициенты  $u_0, u_1$  и  $v_1$  выразить

через коэффициенты  $\omega_0$  и  $\omega_1$ ,

$$u_0 = -\frac{\nu a}{\pi R} \omega_0; \quad (7)$$

$$u_1 \left( \pi^2 + \frac{a^2}{R^2} \frac{1-\nu}{2} \right) - \nu_1 \frac{\pi a}{R} \frac{1+\nu}{2} = -\nu \frac{\pi a}{R} \omega_1; \quad (8)$$

$$u_1 \pi \frac{1+\nu}{2} - \nu_1 \left[ \frac{\pi^2 R}{a} \frac{1-\nu}{2} + \frac{a}{R} + (1-\nu) \frac{\pi^2 t^2}{12 a R} + \frac{a t^2}{12 R^3} \right] = \\ = - \left[ \frac{a}{R} + \frac{t^2}{12} \left( \frac{\pi^2}{a R} + \frac{a}{R^3} \right) \right] \omega_1. \quad (9)$$

Аналогичным путем можно выражать коэффициенты  $K_1, K_2, N_1$  и  $N_2$  через коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$

$$\left( \frac{a^2}{R^2} \frac{1-\nu}{2} - \pi^2 \right) K_2 + \frac{\pi a}{R} \frac{1+\nu}{2} N_2 = \frac{\nu \pi a}{R} B_1; \quad (10)$$

$$\pi \frac{1+\nu}{2} K_2 + \left\{ \pi^2 \frac{R}{a} \frac{1-\nu}{2} - \frac{a}{R} + \frac{t^2}{12 a R} [\pi^2 (1-\nu) - 1] \right\} N_2 = \\ = -\frac{a}{R} \left[ 1 + \frac{t^2}{12 a^2} (\pi^2 - 1) \right] B_1; \quad (11)$$

$$\left( \frac{a^2}{R^2} \frac{1-\nu}{2} - \pi^2 \right) K_1 + \frac{a^2}{R^2} (1-\nu) K_2 + \frac{\pi a}{R} \frac{1+\nu}{2} N_1 + \frac{\pi a}{R} \frac{1+\nu}{2} N_2 = \frac{\nu \pi a}{R} A_1; \quad (12)$$

$$\pi \frac{1+\nu}{2} K_1 + \pi \frac{1+\nu}{2} K_2 + \left\{ \pi^2 \frac{R}{a} \frac{1-\nu}{2} - \frac{a}{R} + \frac{t^2}{12 a R} [\pi^2 (1-\nu) - 1] \right\} N_2 - \\ - \frac{2a}{R} \left( 1 + \frac{t^2}{12 a^2} \right) N_2 = -\frac{a}{R} \left[ 1 + \frac{t^2}{12 a^2} (\pi^2 - 1) \right] A_1 - \frac{a}{R} \left[ 1 + \frac{t^2}{12 a^2} (\pi^2 - 3) \right] B_1. \quad (13)$$

Значения коэффициентов  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  получаем из граничных условий:

1) при  $\varphi = \pi$   $\nu = 0$ ;

$$N_1 \operatorname{sh} \pi + N_2 \pi \operatorname{ch} \pi + C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a} + \\ + D_1 \left( \pi R \operatorname{ch} \frac{\pi^2 R}{a} - 2 \frac{a}{\pi} \frac{1-\nu}{1+\nu} \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a} \right) = 0; \quad (14)$$

2) при  $\varphi = \pi$

$$Q_\varphi = -\frac{4}{\pi} p \sin \frac{\pi x}{a}; \quad Q_\varphi = -\frac{D}{R^3} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right),$$

где  $D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$  - цилиндрическая жесткость стенки оболочки

$$N_1 \operatorname{sh} \pi + N_2 (2 \operatorname{sh} \pi + \pi \operatorname{ch} \pi) + C_1 \left( \frac{\pi R}{a} \right)^2 \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a} + D_1 \frac{\pi R^2}{a}.$$

$$\cdot \left[ \frac{4\nu}{1+\nu} \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a} + \frac{\pi^2 R}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi^2 R}{a} \right] + A_1 \operatorname{sh} \pi + B_1 (3 \operatorname{sh} \pi + \pi \operatorname{ch} \pi) = a p^*, \quad (15)$$

где  $p^* = \frac{4R^3}{\pi D a} p$  - параметр нагрузки,

3) при  $\varphi = \pi$   $\gamma_{\varphi x} = 0$  или  $\frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ;

$$\begin{aligned} & K_1 \operatorname{sh} \pi + K_2 (\operatorname{sh} \pi + \pi \operatorname{ch} \pi) + N_1 \frac{\pi R}{a} \operatorname{sh} \pi + \\ & + N_2 \frac{\pi^2 R}{a} \operatorname{ch} \pi + C_1 \frac{2\pi R}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a} + D_1 \cdot \\ & \cdot 2R \left( \frac{2\nu}{1+\nu} \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a} + \frac{\pi^2 R}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi^2 R}{a} \right) = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

4) при  $\varphi = \pi$   $\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0$ ;

$$A_1 \operatorname{sh} \pi + B_1 (\operatorname{sh} \pi + \pi \operatorname{ch} \pi) = 0. \quad (17)$$

Подставляя в выражения (10)...(17) численные значения  $a, R, t, E$  и  $\nu$ , а также значения гиперболических функций и решая совместно эти уравнения, получаем значения коэффициентов  $A_1, B_1, C_1, D_1, K_1, K_2, N_1$  и  $N_2$  в зависимости от параметра нагрузки  $p^*$ .

Для определения  $\omega_0$  и  $\omega_1$  рассматриваем уравнение (3). Подставляя в данное уравнение выражения (4), (5) и (6), получаем после упрощений

$$\begin{aligned} & \omega_0 \left( 1 + \frac{t^2 \pi^4 R^4}{12 R^2 a^4} \right) + u_0 \nu \frac{\pi R}{a} + \omega_1 \left[ 1 + \frac{t^2}{12 R^2} \left( 1 + \frac{\pi^2 R^2}{a^2} \right)^2 \right] \cos \varphi + u_1 \nu \frac{\pi R}{a} \cos \varphi - \\ & - \nu_1 \cos \varphi + \left\{ A_1 \left[ 1 + \frac{t^2}{12 R^2} \left( 1 - \frac{\pi^2 R^2}{a^2} \right)^2 \right] + B_1 \frac{t^2}{3 R^2} \left( 1 - \frac{\pi^2 R^2}{a^2} \right) + K_1 \nu \frac{\pi R}{a} - N_1 - \right. \\ & - N_2 \left. \right\} \operatorname{ch} \varphi + \left\{ B_1 \left[ 1 + \frac{t^2}{12 R^2} \left( 1 - \frac{\pi^2 R^2}{a^2} \right)^2 \right] + K_2 \nu \frac{\pi R}{a} - N_2 \right\} \varphi \operatorname{sh} \varphi - \left[ C_1 \frac{\pi R}{a} (1-\nu) - \right. \\ & \left. - D_1 R \frac{(1-\nu)^2}{1+\nu} \right] \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} - D_1 \frac{\pi R^2}{a} (1-\nu) \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для решения этого уравнения необходимо разложить гиперболические функции в ряд по косинусам

1)  $\operatorname{ch} \varphi \approx a_0/2 + a_1 \cos \varphi$ ;

$$a_0/2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \pi; \quad a_1 = -\frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \pi;$$

2)  $\operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} \approx b_0/2 + b_1 \cos \varphi$ ;

$$b_0/2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} d\varphi = \frac{a}{\pi^2 R} \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a};$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} \cos \varphi d\varphi = -\frac{2aR}{\pi^2 R^2 + a^2} \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a};$$

$$3) \varphi \operatorname{sh} \varphi \approx c_0/2 + c_1 \cos \varphi;$$

$$c_0/2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi \operatorname{sh} \varphi d\varphi = \operatorname{ch} \pi - \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \pi;$$

$$c_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi \operatorname{sh} \varphi \cos \varphi d\varphi = -\operatorname{ch} \pi;$$

$$4) \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} \approx d_0/2 + d_1 \cos \varphi;$$

$$d_0/2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} d\varphi = \frac{a}{\pi R} \operatorname{ch} \frac{\pi^2 R}{a} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{a}{\pi R}\right)^2 \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a};$$

$$d_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} \cos \varphi d\varphi = \\ = -\frac{2a^2}{\pi(a^2 + \pi^2 R^2)} \left\{ \frac{\pi^2 R}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi^2 R}{a} + \frac{a^2 - \pi^2 R^2}{a^2 + \pi^2 R^2} \operatorname{sh} \frac{\pi^2 R}{a} \right\}.$$

Подставляя найденные выражения, значения коэффициентов  $A_1, B_1, C_1, D_1, K_1, K_2, N_1, N_2$  и выражения коэффициентов  $u_0, u_1$  и  $v_1$  в уравнение (18), получаем значения коэффициентов  $\omega_0$  и  $\omega_1$  через  $p^*$ .

После этого подставляем  $\omega_0$  и  $\omega_1$  в выражения (7), (8) и (9) и находим значения для  $u_0, u_1$  и  $v_1$ .

Затем, когда все неизвестные коэффициенты выражены через  $p^*$ , можно приступить к вычислению внутренних усилий и прогибов

$$M_x = -\frac{D}{R^2} \left[ R^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu (\omega + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2}) \right] = -\frac{D\alpha}{R^2} \left\{ (\nu - \frac{\pi^2 R^2}{a^2}) \bar{\omega}_0 - \frac{\pi^2 R^2}{a^2} \bar{\omega}_1 \cos \varphi + \right. \\ \left. + [(2\nu - \frac{\pi^2 R^2}{a^2}) \bar{A}_1 + 2\nu \bar{B}_1] \operatorname{ch} \varphi + (2\nu - \frac{\pi^2 R^2}{a^2}) \bar{B}_1 \varphi \operatorname{sh} \varphi \right\} \sin \frac{\pi x}{a}; \quad (19)$$

$$M_\varphi = -\frac{D}{R^2} \left[ (\omega + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2}) + \nu R^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] = -\frac{D\alpha}{R^2} \left\{ \bar{\omega}_0 (1 - \nu \frac{\pi^2 R^2}{a^2}) - \nu \frac{\pi^2 R^2}{a^2} \bar{\omega}_1 \cos \varphi + \right. \\ \left. + [(2 - \nu \frac{\pi^2 R^2}{a^2}) \bar{A}_1 + 2\bar{B}_1] \operatorname{ch} \varphi + (2 - \nu \frac{\pi^2 R^2}{a^2}) \bar{B}_1 \varphi \operatorname{sh} \varphi \right\} \sin \frac{\pi x}{a}; \quad (20)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} (\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \omega) \right] = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ [-\bar{u}_1 \pi + \nu \frac{\alpha}{R} (\bar{v}_1 - \bar{w}_1)] \cos \varphi + [-\bar{K}_1 \pi + \right. \\ \left. + \nu \frac{\alpha}{R} (\bar{N}_1 + \bar{N}_2 - \bar{A}_1)] \operatorname{ch} \varphi + [-\bar{K}_2 \pi + \nu \frac{\alpha}{R} (\bar{N}_2 - \bar{B}_1)] \varphi \operatorname{sh} \varphi + [-\bar{C}_1 \pi (1-\nu) - \right. \\ \left. - D_1 \frac{1+2\nu-3\nu^2}{1+\nu}] \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} - D_1 \frac{\pi R}{a} (1-\nu) \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} \right\} \sin \frac{\pi x}{a}; \quad (21)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \bar{\omega} \right) + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -(\bar{\omega}_0 \frac{a}{R} + \bar{u}_0 \nu \pi) - [(\bar{\omega}_1 - \bar{v}_1) \frac{a}{R} + \bar{u}_1 \nu \pi] \cos \varphi + [(\bar{N}_1 + \bar{N}_2 - \bar{A}_1) \frac{a}{R} - \bar{K}_1 \nu \pi] \operatorname{ch} \varphi + [(\bar{N}_2 - \bar{B}_1) \frac{a}{R} - \bar{K}_2 \nu \pi] \cdot \varphi \operatorname{sh} \varphi + \left[ \bar{C}_1 (1-\nu) \pi - D_1 \frac{(1-\nu)^2}{1+\nu} \right] \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} + D_1 \frac{\pi R}{a} (1-\nu) \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} \right\} \sin \frac{\pi x}{a}; \quad (22)$$

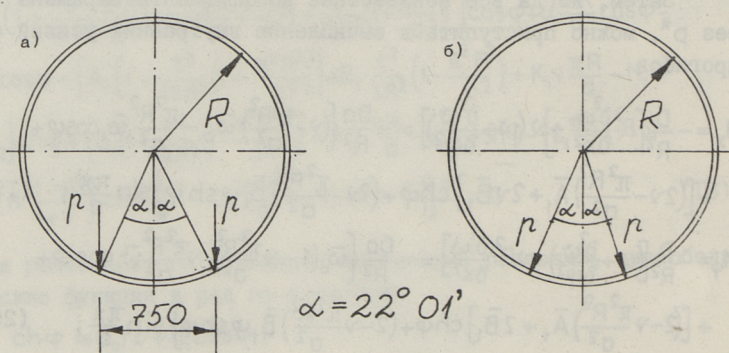
$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ -\left( \frac{a}{R} \bar{u}_1 - \pi \bar{v}_1 \right) \sin \varphi + \left[ \frac{a}{R} (\bar{K}_1 + \bar{K}_2) + \pi \bar{N}_1 \right] \operatorname{sh} \varphi + \left( \frac{a}{R} \bar{K}_2 + \pi \bar{N}_2 \right) \varphi \operatorname{ch} \varphi + 2(\pi \bar{C}_1 + \frac{2\nu}{1+\nu} D_1) \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} + D_1 \frac{2\pi R}{a} \varphi \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} \right\} \cos \frac{\pi x}{a}; \quad (23)$$

$$\bar{\omega} = a(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1 \cos \varphi + \bar{A}_1 \operatorname{ch} \varphi + \bar{B}_1 \varphi \operatorname{sh} \varphi) \sin \frac{\pi x}{a}; \quad (24)$$

где  $\bar{A}_1 = A_1/a$ ,  $\bar{B}_1 = B_1/a$ , ...,  $\bar{\omega}_1 = \omega_1/a$ .

## 2. Пример расчета

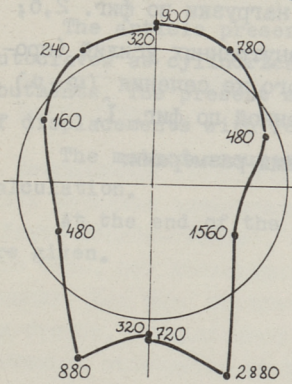
Реальная нагрузка, действующая на стенку автоклава, приложена по рельсам, располагающимся вдоль образующих в нижней части автоклава (фиг. 2, а).



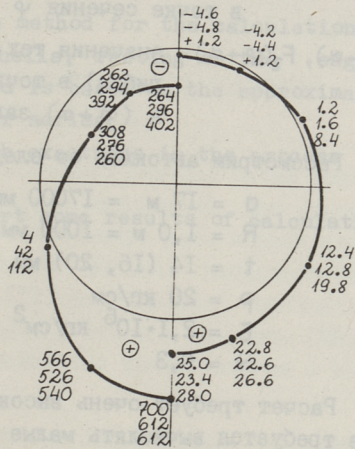
Фиг. 2. Схемы локальных нагрузок.

Так как в практических случаях влияние тангенциального компонента небольшое, можно с достаточной точностью применять упрощенную расчетную схему (фиг. 2, б), причем ошибка при этом будет в запас прочности.

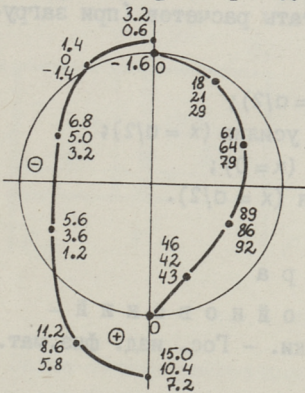
$M_x$  [N·M/M]  $M_\varphi$



$N_x$  [KN/M]  $N_\varphi$



$w$  [MM]  $T_{x\varphi}$



18	- t = 14 MM
21	- t = 16 MM
29	- t = 20 MM

Значения моментов  $M_x$  и  $M_\varphi$  не зависят от толщины стенки  $t$

Фиг. 3. Результаты аналитических расчетов.

При такой упрощенной схеме можно легко найти внутренние усилия при помощи усилий, вычисленных в предыдущей главе. При этом

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} [F_1(\varphi - \alpha) + F_2(\varphi + \alpha)],$$

где  $F(\varphi)$  - значение любого внутреннего усилия (прогиба) в точке сечения  $\varphi$  для нагрузки по фиг. 2, б;

$F_1(\varphi - \alpha)$ ,  $F_2(\varphi + \alpha)$  - значения тех же внутренних усилий (прогибов) в точке того же сечения ( $\varphi - \alpha$ ) и ( $\varphi + \alpha$ ), загруженной по фиг. 1.

Рассмотрим автоклав со следующими размерами:

$$a = 17 \text{ м} = 17000 \text{ мм}$$

$$R = 1,0 \text{ м} = 1000 \text{ мм}$$

$$t = 14 (16, 20) \text{ мм}$$

$$\rho = 20 \text{ кг/см}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$$

$$\nu = 0,3$$

Расчет требует очень высокой точности, так как при расчете требуется вычислять малые разницы больших чисел. В приведенных расчетах точность при вычислении  $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \dots, \bar{\omega}$  - 16 номерных знаков.

На фиг. 3 представлены результаты расчетов (при загрузке по фиг. 2, б), где

$M_x, M_\varphi$  - изгибающие моменты ( $x = a/2$ );

$N_x, N_\varphi$  - нормальные внутренние усилия ( $x = a/2$ );

$T_{x\varphi}$  - тангенциальные усилия ( $x = 0$ );

$\bar{\omega}$  - радиальные перемещения ( $x = a/2$ ).

### Л и т е р а т у р а

1. Тимошенко С.П., Войновский - Кригер С. Пластинки и оболочки. - Гос. изд. физ.мат. литературы. М., 1968.

2. Прочность. Устойчивость. Колебания, т. 2. Справочник / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. - Машиностроение. М., 1968.

3. Ааре И.И. Расчет тонкостенных металлических балок и рам с учетом закритической работоспособности стенки. Автореферат дис. на соискание д-ра техн. наук. -Таллин, 1971.



On the Calculation of Autoclaves,  
Resting on Two Abutments

Summary

The article presents a method for the calculation of autoclaves as cylindrical shells, resting on two edge abutments. The present method is based on the approximation of displacements with Fourier series.

The method assumes high exactness in the process of calculation.

At the end of the report some results of calculations are given.



Fig. 1. Beam-column.

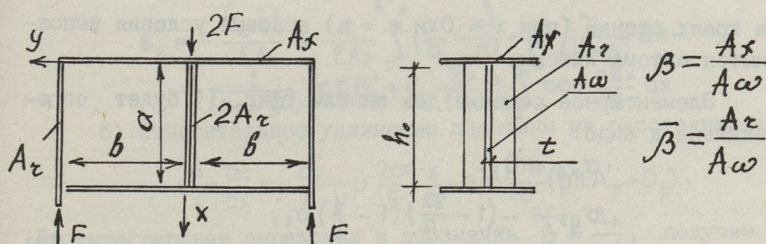
Beam-column is considered as constructed, consisting of separate panels, and, in addition, in its own plane, by means of a rigidness, connected with each other by means of a rigidness. Necessary conditions are determined by the conditions of compatibility of deformations of plates in columns and panels at each node (Fig. 2). Assuming, that panels of beam-column operate in conditions of plane stress state, work of plates in



### АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛКИ-СТЕНКИ ОТ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

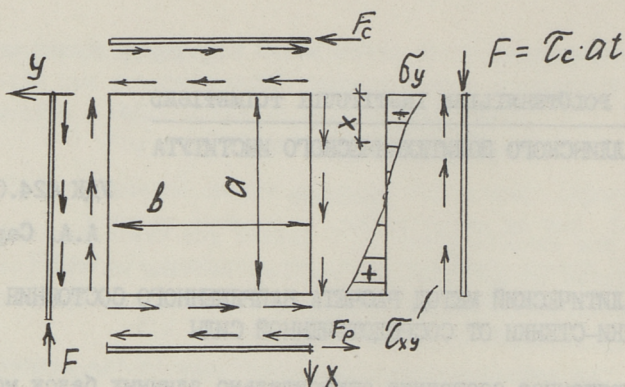
Напряженное состояние относительно длинных балок можно описать методами элементарной теории напряжений. Для коротких балок (балок-стенок), где значительную роль играют сдвигающие силы, нет достаточно точного описания напряженного состояния. Как было показано в [1], напряженное состояние балок-стенок, определенное методом конечного элемента (МКЭ), значительно отличается от традиционного представления о картине распределения напряжений.

Исследуем напряженное состояние балки-стенки на двух опорах со сосредоточенной силой по верхнему поясу в середине пролета с передачей нагрузки через ребро (фиг. 1).



Фиг. 1. Балка-стенка.

Балка-стенка рассматривается как конструкция, составленная из отдельных панелей, а последняя, в свою очередь, из стенки, пояса и ребер жесткости, связанных между собой контактными усилиями. Последние определяются из условия совместности деформаций пластины и контура в каждой точке их сопряжения (фиг. 2). Полагая, что каждый элемент панели работает в условиях плоского напряженного состояния, работа поясов и



Фиг. 2. Составные части балки-стенки.

ребер жесткостей на изгиб в плоскости действия сил не учитывается, а нормальные напряжения в ребрах и поясах принимаются равномерно распределенными. В местах контакта стенки и ребра жесткости выполняют следующие условия совместности деформации:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & y = 0, \quad \varepsilon_x^\omega = \varepsilon_x^r \\
 2) \quad & y = b, \quad \varepsilon_x^\omega = \varepsilon_x^r \\
 3) \quad & y = 0, \quad \nu = 0 \\
 4) \quad & y = b, \quad \sigma_y = 0
 \end{aligned} \tag{I}$$

На краях стенки (при  $x = 0$  и  $x = a$ ) краевые условия выполняются автоматически.

Элементарное решение для панели (фиг. I) будет определяться в виде:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz} &= 0, \\
 \sigma_{yz} &= -\left(1 - \frac{2x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \sigma_1, \\
 \tau_{xz} &= -\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \beta\right) \tau_c / \left(\frac{1}{6} + \beta\right),
 \end{aligned} \tag{2}$$

где:  $\sigma_1 = \frac{\tau_c \cdot b}{\left(\frac{1}{6} + \beta\right) \cdot a}$ ,  $\tau_c = \frac{Q}{a \cdot t}$ ,  $\beta = \frac{A_f}{a \cdot t}$ .

Кроме элементарного решения (2) используются дополнительные функции напряжений, полученные в [2]:

$$\sigma_{xt} = -\frac{E\pi}{1+\mu} \sum_p p \sin \frac{p\pi x}{a} \left[ A'_p \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} + B'_p \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{a} + C_p \left(\frac{y}{a}\right) \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho\pi} \frac{1+3\mu}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + D_p \left( \frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + \frac{1}{\rho\pi} \frac{1+3\mu}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} \right) \Big], \\
\sigma_{yt} = & \frac{E\pi}{1+\mu} \sum_p \rho \cdot \sin \frac{\rho\pi x}{a} \left[ A'_p \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + B'_p \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + C_p \left( \frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\rho\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} \right) + D_p \left( \frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} - \frac{1}{\rho\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} \right) \right], \\
\tau_t = & \frac{E\pi}{1+\mu} \sum_p \rho \cdot \cos \frac{\rho\pi x}{a} \left[ A'_p \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + B'_p \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + C_p \left( \frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} \right) + D_p \left( \frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} \right) \right],
\end{aligned} \tag{3}$$

описывающие условия на краях пластины.

Оба решения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия в напряжениях. Неизвестные коэффициенты уравнения (3)  $A'_p, B'_p, C_p$  и  $D_p$  находятся из условий сопряжения контура и стенки.

Рассмотрим следующие четыре условия контакта контура со стенкой:

I. При  $y = 0$ ,  $\varepsilon_x^r = \varepsilon_x^\omega$

а) относительное удлинение ребра на расстоянии  $x$  (фиг. 2)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^r = & - \frac{\tau_c \cdot a t}{E A_r} + \frac{t}{E A_r} \int_0^x \left( \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \beta \right) \frac{\tau_c}{\left( \frac{1}{6} + \beta \right)} dx - \\
& - \frac{t}{(1+\mu) A_r} \left( \rho\pi B'_p + C_p \frac{2\mu}{1+\mu} \right) \cdot \int_0^x \cos \frac{\rho\pi x}{a} dx
\end{aligned}$$

б) относительное удлинение пластины на расстоянии  $x$

$$\varepsilon_x^\omega = \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{2\sigma_1}{E} \frac{x}{a} - \sin \frac{\rho\pi x}{a} (\rho\pi A'_p + D_p).$$

Проинтегрировав выражение и обозначив  $\bar{\beta} = \frac{A_r}{a \cdot t}$ , получим первое условие контакта в виде

$$\begin{aligned}
- \frac{\tau_c}{E \bar{\beta}} + \frac{1}{E \bar{\beta}} \left( \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^2} + \beta \frac{x}{a} \right) \frac{\tau_c}{\left( \frac{1}{6} + \beta \right)} - \frac{1}{(1+\mu) \bar{\beta}} \left[ B'_p + \frac{2\mu}{(1+\mu) \rho\pi} \cdot \right. \\
\left. \cdot C_p \right] \sin \frac{\rho\pi x}{a} = \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{2\sigma_1}{E} \frac{x}{a} - (\rho\pi A'_p + D_p) \sin \frac{\rho\pi x}{a}. \tag{4}
\end{aligned}$$

Упростив выражение

$$\left( \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^2} + \beta \frac{x}{a} \right) \frac{\tau_c}{\left( \frac{1}{6} + \beta \right)} = \frac{x}{a} \frac{\tau_c}{\left( \frac{1}{6} + \beta \right)}$$

подставим в (4) и проведя преобразование, получим:

$$\left\{ \frac{1}{(1+\mu)\bar{\beta}} \left[ B'_p + \frac{2\mu}{(1+\mu)r\pi} C_p \right] - (r\pi A'_p + D_p) \right\} \sin \frac{r\pi x}{a} =$$

$$= \frac{\tau_c}{E\bar{\beta}} \left\{ -1 - \frac{b}{a} \mu \frac{\bar{\beta}}{\left(\frac{1}{6} + \beta\right)} + \left[ 1 + \frac{2b}{a} \mu \frac{\bar{\beta}}{\left(\frac{1}{6} + \beta\right)} \right] \cdot \frac{x}{a} \right\}. \quad (5)$$

Обозначив

$$S_1 = -1 - \frac{b}{a} \mu \frac{\bar{\beta}}{\left(\frac{1}{6} + \beta\right)}, \quad S_2 = 1 + \frac{2b}{a} \mu \frac{\bar{\beta}}{\left(\frac{1}{6} + \beta\right)} \quad \text{и} \quad S_3 = \frac{S_2}{S_1}, \quad (6)$$

поставим в (5), вынесем за скобку  $S_1$  и обозначим правую часть

$$F(x) = -\frac{\tau_c}{E\bar{\beta}} \cdot S_1 \left( 1 - S_3 \frac{x}{a} \right).$$

Разложив выражение в скобках в ряд Фурье и приравнявая коэффициенты при синусах справа и слева

$$\left( 1 - S_3 \frac{x}{a} \right) = \sum_1^p \bar{A}_p \sin \frac{r\pi x}{a}$$

получим

$$\bar{A}_p = \frac{2}{r\pi} \left[ -\cos(r\pi) + S_3 \cos(r\pi) + 1 \right].$$

Теперь уравнение (5) примет вид:

$$\left[ \frac{1}{(1+\mu)\bar{\beta}} \left( B'_p + \frac{2\mu}{(1+\mu)r\pi} C_p \right) - (r\pi A'_p + D_p) \right] =$$

$$= -\frac{\tau_c}{E\bar{\beta}} S_1 \frac{2}{r\pi} \left[ -\cos(r\pi) + S_3 \cos(r\pi) + 1 \right]. \quad (7)$$

II. При  $y = b$ ,  $\varepsilon_x^n = \varepsilon_x^\omega$

а) относительное удлинение ребра на расстоянии  $x$

$$\varepsilon_x^n = -\frac{t}{EA_r} \int_0^x \left( \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \beta \right) \frac{\tau_c}{\left(\frac{1}{6} + \beta\right)} dx + \frac{at}{(1+\mu)A_r} \sin \frac{r\pi x}{a} \cdot$$

$$\cdot \left[ A'_p \operatorname{sh} \frac{r\pi y}{a} + B'_p \operatorname{ch} \frac{r\pi y}{a} + C_p \left( \frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{r\pi y}{a} + \frac{2\mu}{(1+\mu)} \frac{1}{r\pi} \operatorname{ch} \frac{r\pi y}{a} \right) + \right.$$

$$\left. + D_p \left( \frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{r\pi y}{a} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{r\pi} \operatorname{sh} \frac{r\pi y}{a} \right) \right],$$

б) относительное удлинение пластины на расстоянии  $x$

$$\varepsilon_x^\omega = \frac{\partial u}{\partial x} = -r\pi \sin \frac{r\pi x}{a} \left[ A'_p \operatorname{ch} \frac{r\pi b}{a} + B'_p \operatorname{sh} \frac{r\pi b}{a} + C_p \cdot \right.$$

$$\cdot \left( \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{r\pi b}{a} + \frac{1}{r\pi} \operatorname{sh} \frac{r\pi b}{a} \right) + D_p \left( \frac{b}{a} \operatorname{sh} \frac{r\pi b}{a} + \frac{1}{r\pi} \operatorname{ch} \frac{r\pi b}{a} \right) \right].$$

Второе уравнение контакта получит вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1+\mu)\beta} \left[ A'_p \operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a} + B'_p \operatorname{ch} \frac{p\pi b}{a} + C_p \left( \frac{b}{a} \operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{p\pi} \operatorname{ch} \frac{p\pi b}{a} \right) + \right. \\ & + D_p \left( \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{p\pi b}{a} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{p\pi} \operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a} \right) \left. \right] + p\pi \left[ A'_p \operatorname{ch} \frac{p\pi b}{a} + \right. \\ & + B'_p \operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a} + C_p \left( \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{p\pi b}{a} + \frac{1}{p\pi} \operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a} \right) + D_p \left( \frac{b}{a} \operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{p\pi} \operatorname{ch} \frac{p\pi b}{a} \right) \right] = \frac{\tau_c}{E\beta} \frac{2}{p\pi} \cos(p\pi). \end{aligned} \quad (8)$$

III. При  $y = 0$ ,  $v = 0$

условие контакта запишем в виде:

$$B'_p - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{p\pi} C_p = 0. \quad (9)$$

IV. При  $y = b$ ,  $\sigma_y = 0$

уравнение контакта получит вид:

$$\begin{aligned} & A'_p \operatorname{ch} \frac{p\pi b}{a} + B'_p \operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a} + C_p \left( \frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{p\pi b}{a} - \frac{1}{p\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a} \right) + \\ & + D_p \left( \frac{b}{a} \operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a} - \frac{1}{p\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{p\pi b}{a} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения контакта (7), (8), (9) и (10) могут быть представлены в общем виде как система линейных уравнений:

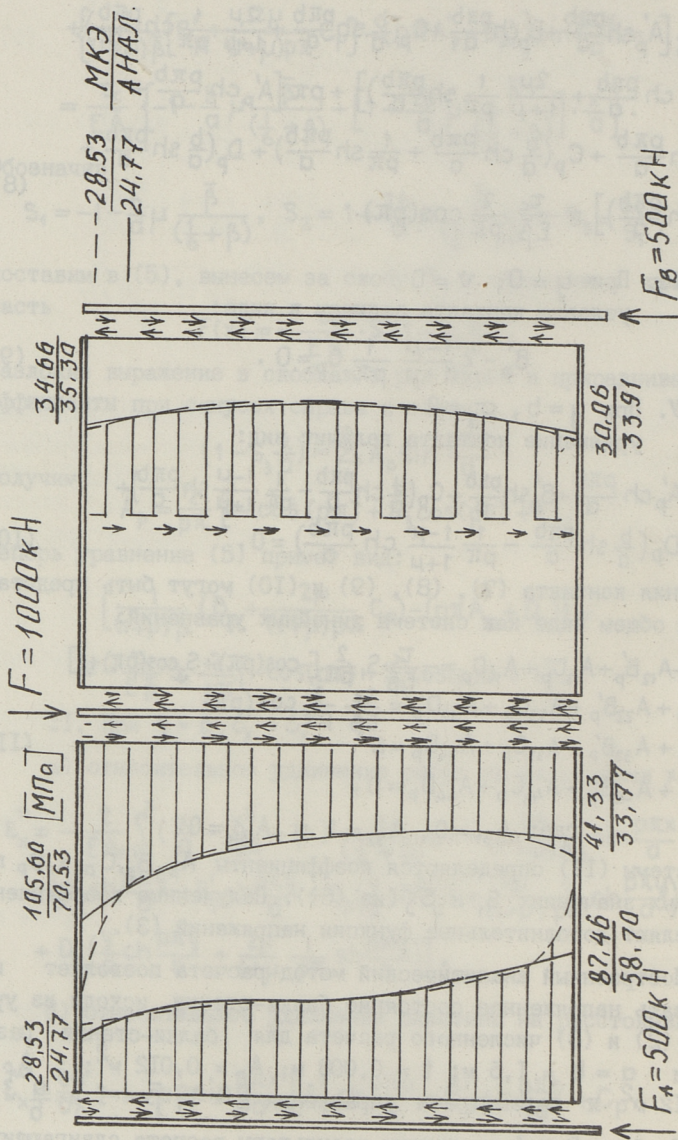
$$\begin{aligned} & A_{11} A'_p + A_{12} B'_p + A_{13} C_p + A_{14} D_p = -\frac{\tau_c}{E\beta} S_1 \frac{2}{p\pi} [-\cos(p\pi) + S_2 \cos(p\pi) + 1] \\ & A_{21} A'_p + A_{22} B'_p + A_{23} C_p + A_{24} D_p = \frac{\tau_c}{E\beta} \frac{2}{p\pi} \cos(p\pi) \\ & A_{31} A'_p + A_{32} B'_p + A_{33} C_p + A_{34} D_p = 0 \\ & A_{41} A'_p + A_{42} B'_p + A_{43} C_p + A_{44} D_p = 0, \end{aligned} \quad (II)$$

где:  $A_{31} = 0$ ,  $A_{32} = 1$  и  $A_{34} = 0$ .

Из системы (II) определяются коэффициенты  $A'_p, B'_p, C_p$  и  $D_p$  при заданных значениях  $S_1$  и  $S_2$  (из (6)). Полученные коэффициенты определяют дополнительные функции напряжений (3).

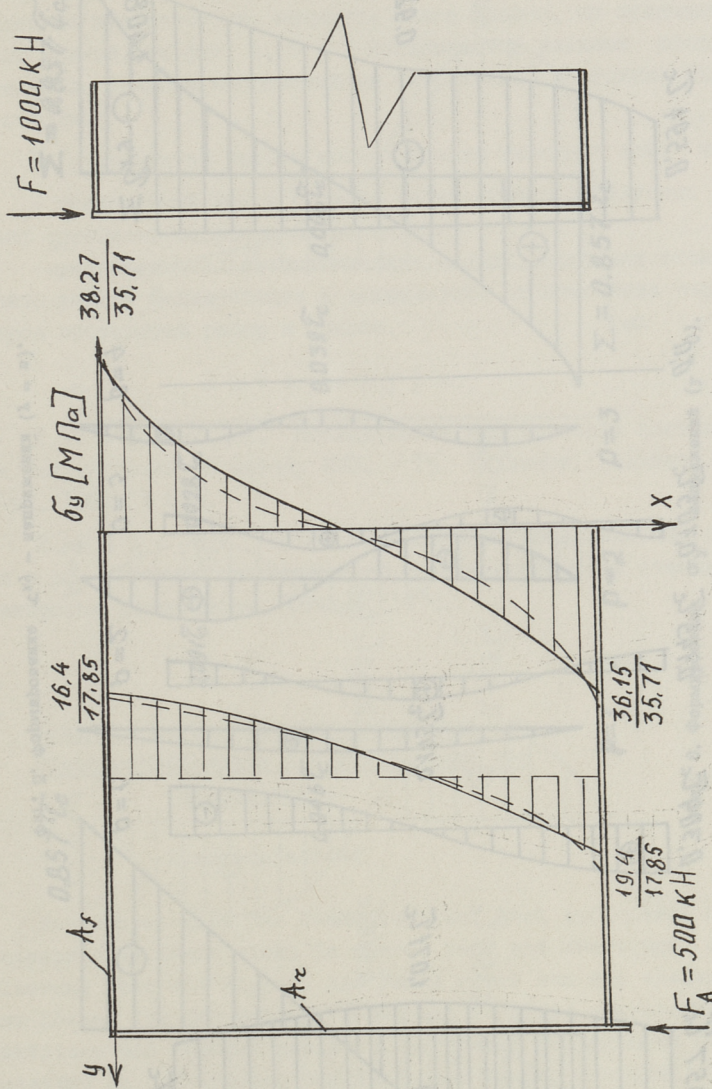
Построенный аналитический метод расчета позволяет исследовать напряженное состояние балки-стенки, исходя из уравнений (2) и (3) численного расчета для балки-стенки размерами  $a = b = 1,5$  м;  $t = 0,008$  м;  $A_r = 0,012$  м<sup>2</sup>;  $A_f = 0,012$  м<sup>2</sup> и параметрами управления  $\beta = 1$ ;  $\bar{\beta} = 1$  и  $\frac{a}{b} = 1$ .

На фиг. 3 и 4 приведены результаты расчета сдвигающих напряжений аналитическим методом в сравнении с результатами расчета МКЭ [1] (числитель дроби показывает результаты по МКЭ). При этом, можно отметить хорошее совпадение результа-

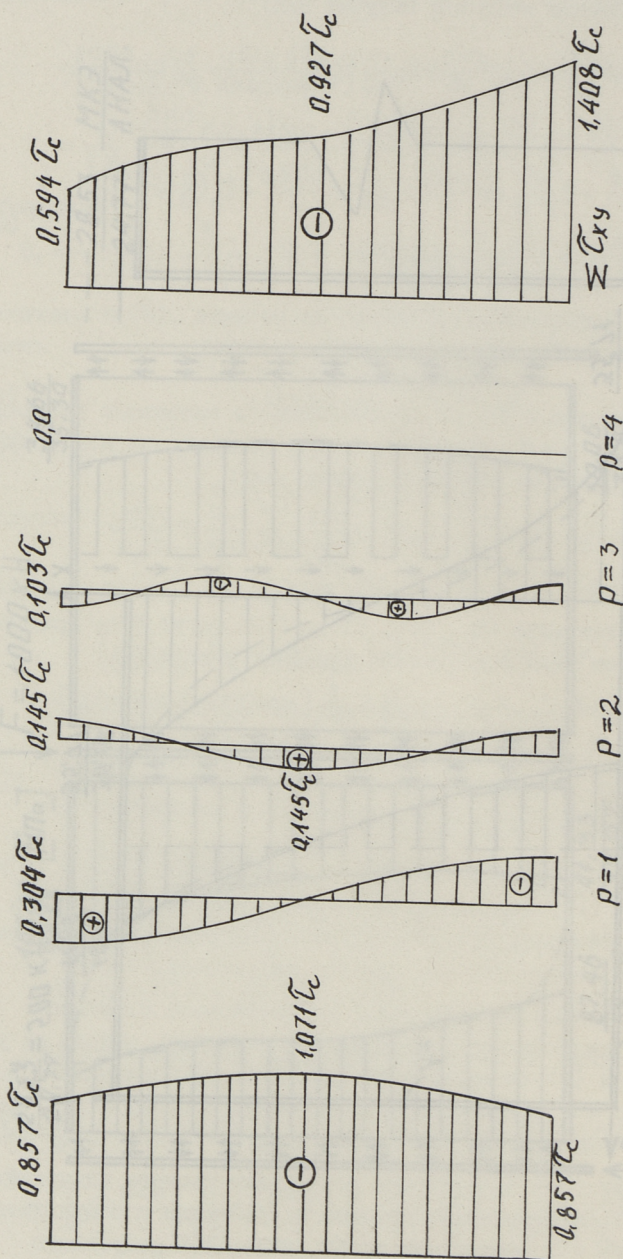


Фиг. 3. Напряжение  $\tau_{xy}$  по МКЭ и аналитически.

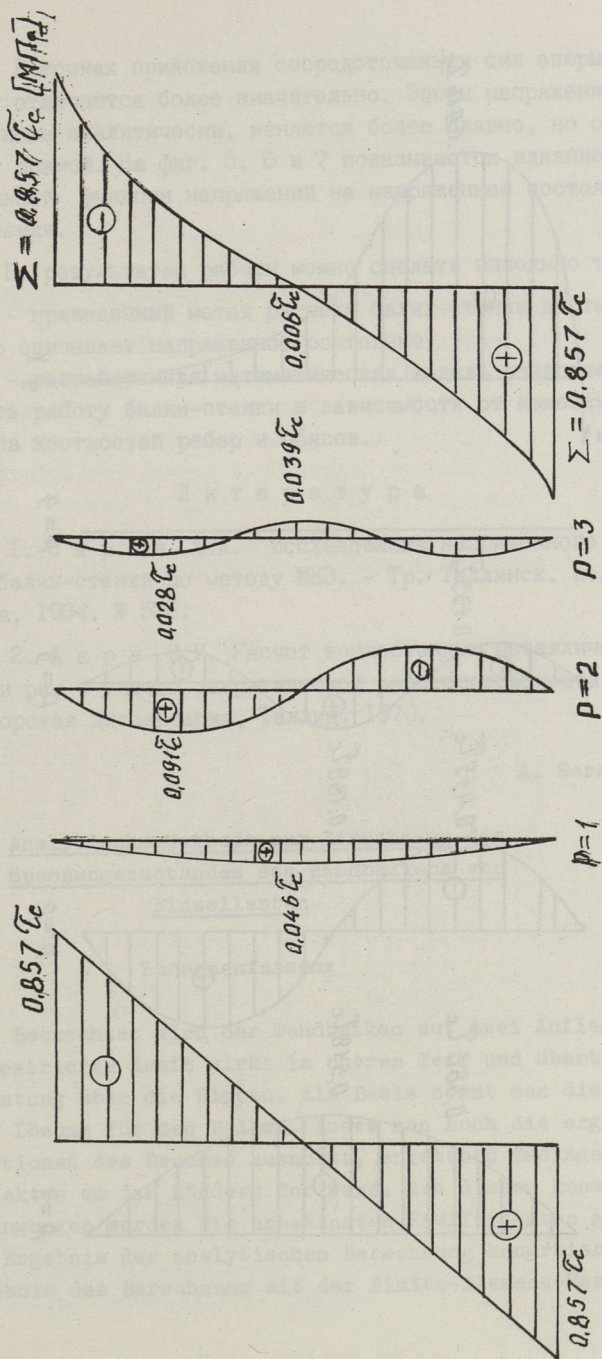




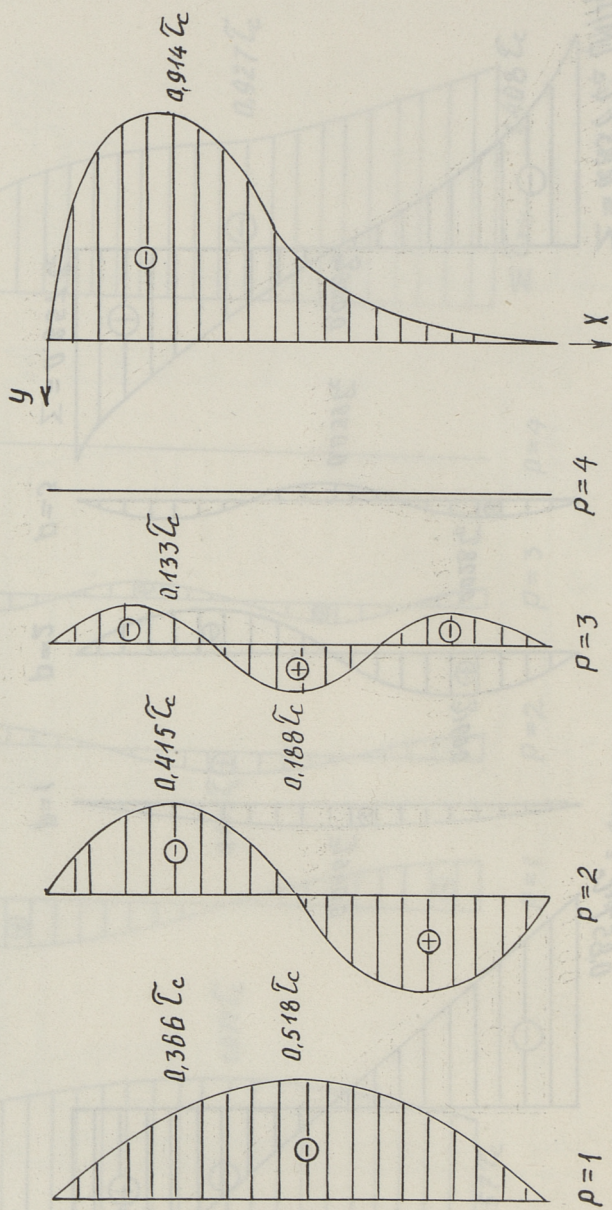
Фиг. 4. Напряжение  $\sigma_y$  по МКЭ и аналитически.



Фиг. 5. Формирование  $\tau_{xy}$  - напряжений ( $y = v$ ).



Фиг. 6. Формирование  $\sigma_y$  - напряжений ( $y = 0$ ).



Фиг. 7. Формирование  $\sigma_x$  - напряжений ( $y = 0$ ).

тов. В точках приложения сосредоточенных сил эпюры напряжений отличаются более значительно. Эпюры напряжений, вычисленные аналитически, меняются более плавно, но отличаются от прямой. На фиг. 5, 6 и 7 показывается влияние дополнительной функции напряжений на напряженное состояние балки-стенки.

По результатам работы можно сделать выводы о том, что

- приведенный метод расчета балки-стенки достаточно точно описывает напряженное состояние;
- разработанная математическая модель позволяет исследовать работу балки-стенки в зависимости от изменения параметров жесткостей ребер и поясов.

### Л и т е р а т у р а

1. С а р а п А.А. Исследование напряженного состояния балки-стенки по методу МКЭ. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1984. № 575.

2. А а р е И.И. Расчет тонкостенных металлических балок и рам с учетом закритической работоспособности стенки. - Докторская диссертация, Таллин, 1970.

A. Sarap

Analytische Methode zur Berechnung des  
Spannungszustandes des Wandbalkens vor  
Einzellasten

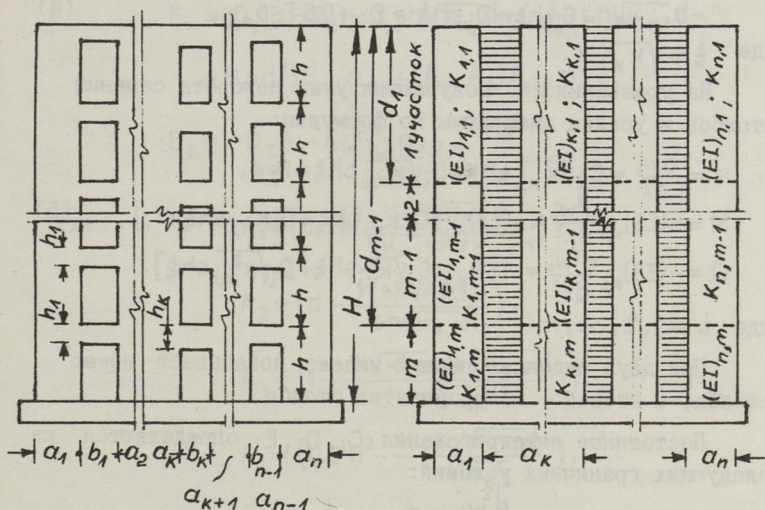
#### Zusammenfassung

Betrachtet wird der Wandbalken auf zwei Auflagern. Die konzentrierte Kraft wirkt im oberen Teil und überträgt die Belastung über die Rippen. Als Basis nimmt man die elementare Lösung für den Balken. Indem man noch die ergänzenden Funktionen des Druckes ausnutzt, entstehen Bedingungen des Kontaktes an den Rändern der Wand. Aus diesen kontaktlichen Bedingungen werden die unbekanntenen Koeffizienten gefunden. Das Ergebnis der analytischen Berechnung kongruiert mit dem Ergebnis der Berechnung mit der Finite-Element-Methode.



## РАСЧЕТ ДИАФРАГМЫ ЗДАНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

В статье представлен приближенный метод расчета горизонтально нагруженной диафрагмы. При расчете используется континуальная расчетная схема (фиг. 1,б). Предполагается, что 1) сохраняется гипотеза плоских сечений для всех частей диафрагмы; 2) при определении прогиба диафрагмы учитывается только деформация изгиба; 3) различие моментов инерции в сечениях столбов диафрагмы незначительно; 4) все столбы диафрагмы прогибаются одинаково и их можно рассматривать отдельно.



Фиг. 1.

Каждый отдельный столб диафрагмы нагружен частью внешней нагрузки и опорными моментами связей. Используя равенство прогибов отдельных столбов, действующую на них часть нагрузки  $p_k$  определяют по формуле

$$P_k = \frac{P}{w_k \sum \frac{1}{w_l}} \quad (I)$$

где  $p$  - общая нагрузка, действующая на диафрагму,  
 $l = 1, 2, \dots, k, \dots, n$ .

В участке  $d_i - d_{i+1}$  диафрагмы с постоянной нагрузкой и жесткостью дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} - k_{k,i} \frac{dw_i}{dx} + \frac{P_{k,i}}{(EJ)_{k,i}} = 0, \quad (2)$$

где  $w_i$  - горизонтальное перемещение диафрагмы,  
 $(EJ)_{k,i}$  - жесткость при изгибе столба диафрагмы,

$$k_{k,i} = \frac{6}{J_{k,i}} \left[ \frac{i_{k-1,i}}{b_{k-1,i}^2} (a_{k,i} + b_{k-1,i}) + \frac{i_{k,i}}{b_{k,i}^2} (a_{k,i} + b_{k,i}) \right], \quad (3)$$

$$i_{k,i} = \bar{J} : h,$$

$\bar{J}$  - момент инерции сечения связи,  
 $h, a_k, b_k$  - выявляются из фиг. I.

Решение дифференциального уравнения (2) является

$$w_i = C_i ch \xi + D_i sh \xi + E_i + 0,5 F_i p_{k,i}, \quad (4)$$

где  $\xi = \sqrt{k_{k,i}} x$ .

Из уравнения (4) получаются углы поворота сечений столбов и усилия диафрагмы по формулам:

$$\gamma = \frac{dw_i}{dx} = C_i \sqrt{k_{k,i}} sh \xi + D_i \sqrt{k_{k,i}} ch \xi + F_i x,$$

$$M = -(EJ)_{k,i} \frac{d^2 w_i}{dx^2} = -(EJ)_{k,i} [C_i k_{k,i} ch \xi + D_i k_{k,i} sh \xi + F_i], \quad (5)$$

$$Q = -(EJ)_{k,i} \frac{d^3 w_i}{dx^3} = -(EJ)_{k,i} [C_i \sqrt{k_{k,i}^3} sh \xi + D_i \sqrt{k_{k,i}^3} ch \xi],$$

где  $i = 1, 2, \dots, m$ .

При двух индексах первый индекс показывает номер столба, а второй - номер участка столба.

Постоянные интегрирования  $C_i, D_i, E_i$  определяются из следующих граничных условий:

$$x = 0, \text{ тогда } \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0,$$

$$x = H, \text{ тогда } w_m = \frac{dw_m}{dx} = 0,$$

$$x = d_i, \text{ тогда } w_{i-1} = w_i, \quad (6)$$

$$\frac{dw_{i-1}}{dx} = \frac{dw_i}{dx},$$



$$\frac{d^2 w_{i-1}}{dx^2} = \frac{d^2 w_i}{dx^2},$$

$$i = 2, 3, \dots, m-1.$$

При  $m = 2$  постоянные интегрирования имеют вид:

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{\kappa_{\kappa,1}}} F_{\kappa,1} p_{\kappa,1},$$

$$D_1 = \frac{[B_1(\sqrt{\kappa_{\kappa,2}/\kappa_{\kappa,1}} \operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,1}}d - \sqrt{\kappa_{\kappa,2}}d) + B_2 r(1 - \operatorname{ch}\sqrt{\kappa_{\kappa,1}}d)] F_{\kappa,1} p_{\kappa,1}}{\sqrt{\kappa_{\kappa,1}} \cdot G} +$$

$$+ \frac{(\sqrt{\kappa_{\kappa,2}} A_2 B_1 - A_3 B_2) F_{\kappa,2} p_{\kappa,2}}{\sqrt{\kappa_{\kappa,1}} G},$$

$$D_2 = \frac{-r(\sqrt{\kappa_{\kappa,1}} d \operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,1}}d - \operatorname{ch}\sqrt{\kappa_{\kappa,1}}d + 1) F_{\kappa,1} p_{\kappa,1}}{\sqrt{\kappa_{\kappa,2}} G} +$$

$$+ \frac{(\sqrt{\kappa_{\kappa,1}} r A_2 \operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,1}}d - A_3 \operatorname{ch}\sqrt{\kappa_{\kappa,1}}d) F_{\kappa,2} p_{\kappa,2}}{\sqrt{\kappa_{\kappa,2}} G},$$

$$C_2 = -D_2 \operatorname{cth}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H - \frac{H}{\sqrt{\kappa_{\kappa,2}} \operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H} F_{\kappa,2} p_{\kappa,2},$$

$$E_1 = D_2(B_1 - B_3) - D_1 \operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,1}}d + \left(\frac{1}{\kappa_{\kappa,1}} \operatorname{ch}\sqrt{\kappa_{\kappa,1}}d - 0,5d^2\right) F_{\kappa,1} p_{\kappa,1} + (A_1 - A_4) F_{\kappa,2} p_{\kappa,2},$$

$$E_2 = -D_2 B_3 - A_4 F_{\kappa,2} p_{\kappa,2},$$

где

$$A_1 = \left(0,5d^2 \frac{H \operatorname{ch}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}d}{\sqrt{\kappa_{\kappa,2}} \operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H}\right),$$

$$A_2 = \left(d - \frac{H \operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}d}{\operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H}\right),$$

$$A_3 = \left(1 - \frac{H \sqrt{\kappa_{\kappa,2}} \operatorname{ch}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}d}{\operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H}\right),$$

$$A_4 = \left(0,5H^2 - \frac{H \operatorname{cth}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H}{\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}}\right),$$

$$B_1 = (\operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}d - \operatorname{cth}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H \cdot \operatorname{ch}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}d),$$

$$B_2 = (\operatorname{ch}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}d - \operatorname{cth}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H \cdot \operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}d),$$

$$B_3 = (\operatorname{sh}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H - \operatorname{cth}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}H \cdot \operatorname{ch}\sqrt{\kappa_{\kappa,2}}d),$$

$$G = \sqrt{k_{k,2}} B_1 \operatorname{ch} \sqrt{k_{k,1}} d - \sqrt{k_{k,1}} r B_2 \operatorname{sh} \sqrt{k_{k,2}} d,$$

$$F_{k,i} = \frac{1}{k_{k,i} (EJ)_{k,i}},$$

$$r = (EJ)_{k,1} : (EJ)_{k,2}.$$

Если  $d = 0$ , то постоянное интегрирование имеет вид

$$k_{k,1} = k_{k,2} = k_k$$

$$C_2 = -\frac{1}{k_k} F_k P_k,$$

$$D_2 = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{k_k} H - \sqrt{k_k} H}{k_k \operatorname{ch} \sqrt{k_k} H} F_k P_k,$$

$$E_2 = \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{k_k} H} + \sqrt{k_k} H \operatorname{tgh} \sqrt{k_k} H - \frac{k_k H^2}{2} \right) F_k P_k,$$

что совпадает с полученными в статье [1] результатами.

### Л и т е р а т у р а

1. Лаул Х.Х., Алликас Л.А. О расчете вертикальных диафрагм зданий. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1972, № 333.

2. Алликас Л.А. Расчет диафрагм зданий на вертикальных сосредоточенных нагрузках. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1982, № 527.

H. Laul, L. Allikas

### Stresses in Shear Wall with Non-continually Bending Stiffness

An approximate method for the analysis of shear wall with non-continually bending stiffness, subjected to non-continually distributed horizontal loads is described. For the calculations a continuous system method is used. Formulae have been developed for the internal forces in walls on rigid foundations.

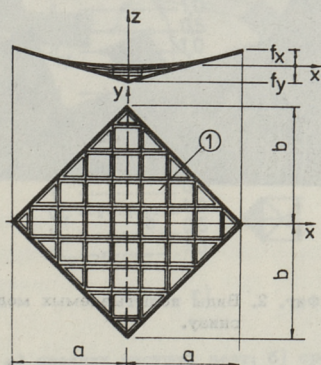
## О ВЛИЯНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПОКРЫТИЯ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЕДЛОВИДНЫХ ВАНТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

### I. Экспериментальное исследование

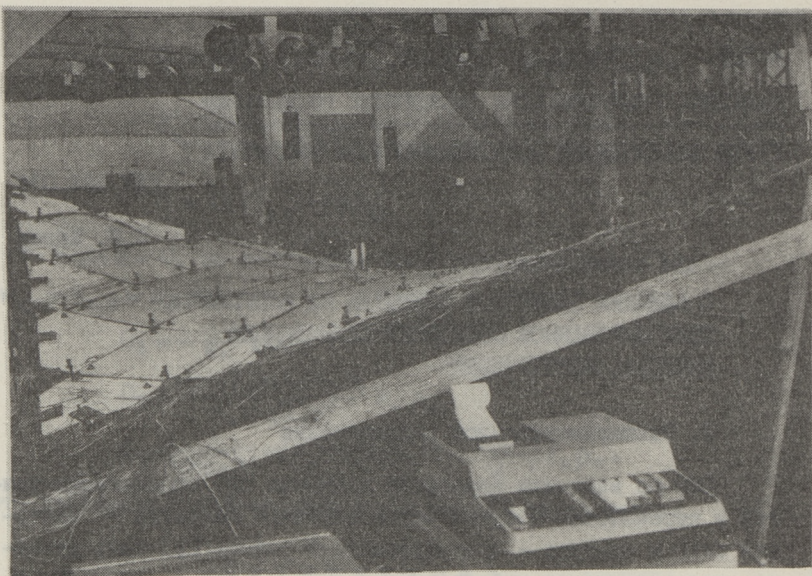
Обычно влиянием элементов покрытия при определении усилий и перемещений несущей части висячего покрытия - вантовой сети и контура - пренебрегают. В работе [1] было указано, что совместная работа сети и контура как с ограждающей частью покрытия, так и с колоннами и связями, расположенными, например, в плоскости ограждающих стен, значительно изменяет напряженно-деформированное состояние основных несущих элементов конструкций.

В настоящей статье приводятся некоторые результаты исследования совместной работы сети и контура с элементами покрытия, выполненного в виде квадратных или ромбовидных панелей. Рассматривается вид покрытия, изображенный на фиг. 1.

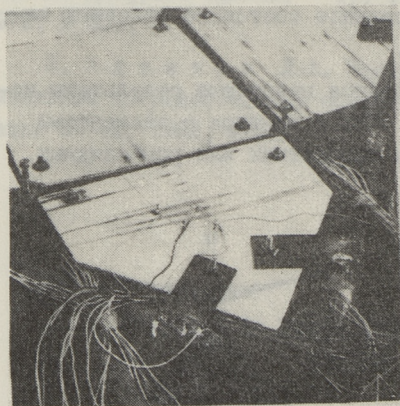
Для исследования действительной работы системы была построена модель (фиг. 2), напряженно-деформированное состояние которой определялось при действии различной нагрузки. Основные параметры модели: размеры в плане  $2a = 2b = 2,5$  м; бортовой элемент из стальной трубы  $\phi 33,5$  мм;  $t = 3,2$  мм и модель опирается в вертикальном направлении на



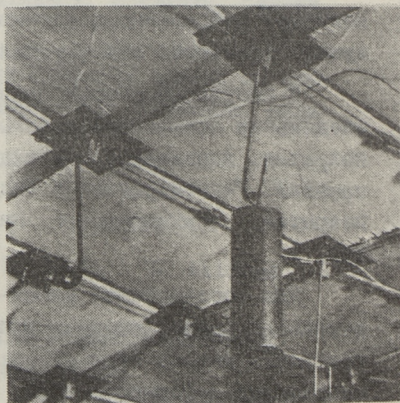
Фиг. 1. Схема покрытия с панелями.



а)

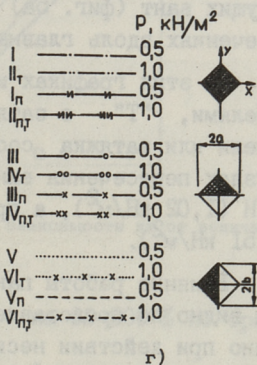
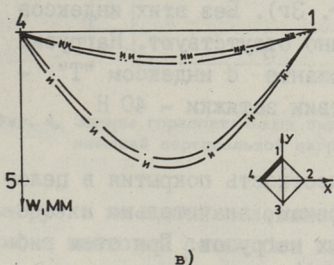
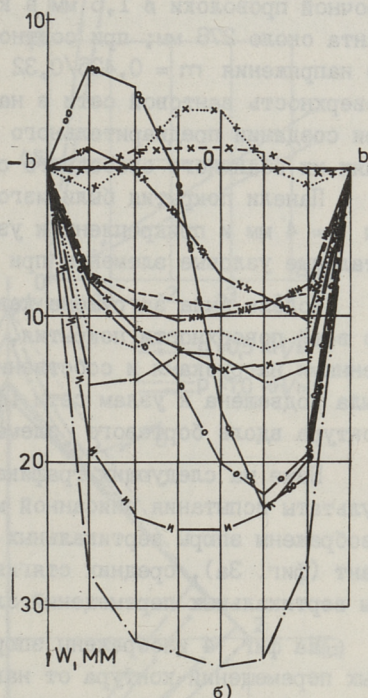
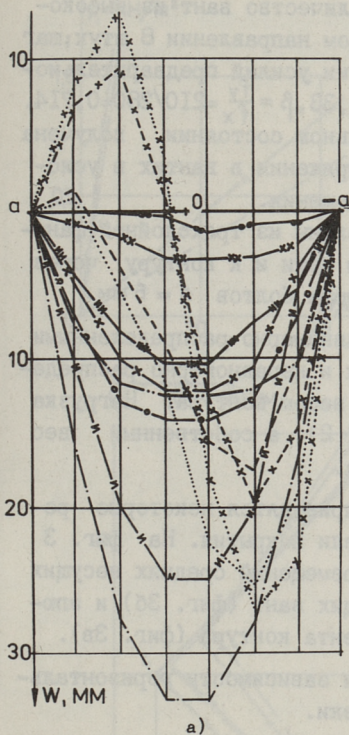


б)



в)

Фиг. 2. Виды испытываемых моделей: а) общий вид; б) деталь узла; в) вид снизу.



Фиг. 3. Эпюры вертикальных перемещений: а) средних несущих вант; б) средних стягивающих вант; в) эпюры вертикальных перемещений контура; г) схемы вариантов нагружения и конструкций.

четыре угла;  $f_x + f_y = 0,49$  м; количество вант из высокопрочной проволоки  $\phi$  1,6 мм в каждом направлении 8 штук; шаг ванты около 278 мм; при соотношении усилий предварительного напряжения  $m = 0,425/0,32 = 1,33$ ,  $\beta = \frac{f_y}{f_x} = 210/280 = 0,714$ . Поверхность вантовой сети в начальном состоянии получена при создании предварительного напряжения в вантах в условиях их взаимного свободного скольжения.

Панели покрытия были изготовлены из трехслойной фанеры  $t = 4$  мм и прикреплены к узлам сети и к контуру через стальные узловые элементы при помощи болтов  $d = 6$  мм.

Модель была загружена как равномерно распределенными по всей поверхности покрытия, так и неравномерно распределенными нагрузками и собственным весом контура. Нагрузка была подвешена к узлам сети (фиг. 2), а собственный вес контура вдоль бортового элемента.

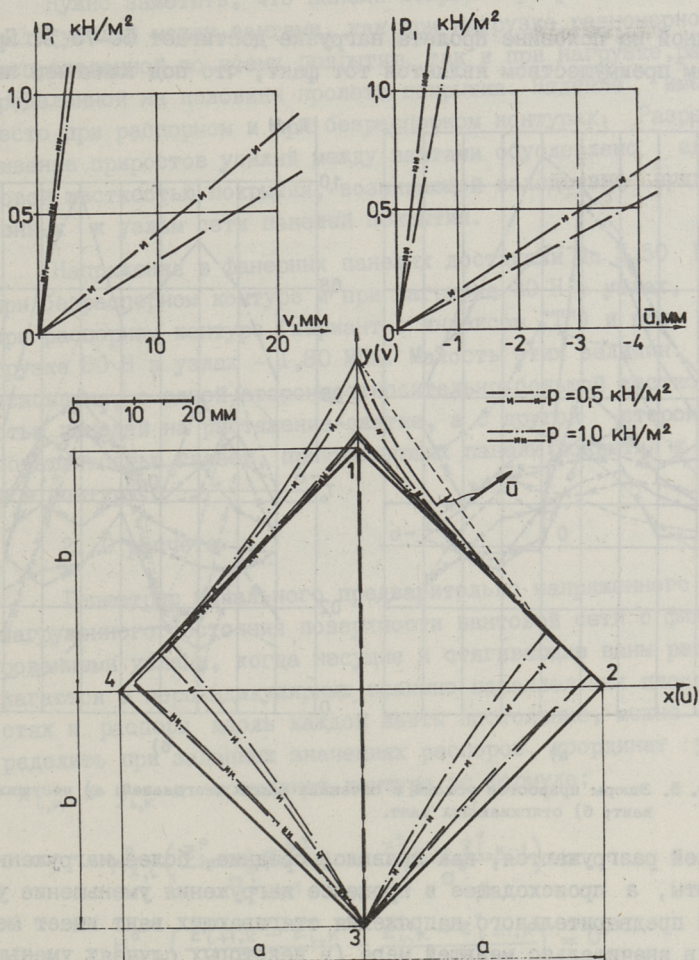
Ниже на следующих графиках приводятся некоторые результаты испытания описанной модели покрытия. На фиг. 3 изображены эпюры вертикальных перемещений средних несущих вант (фиг. 3а), средних стягивающих вант (фиг. 3б) и эпюры вертикальных перемещений элемента контура (фиг. 3в).

На фиг. 4 изображены эпюры и зависимости горизонтальных перемещений контура от нагрузки.

На фиг. 5 показаны эпюры распределения усилий среди несущих вант (фиг. 5а) и среди стягивающих вант (фиг. 5б) в сечениях вдоль главных диагоналей.

На этих графиках индекс "П" обозначает покрытия с панелями, "Т" - с затяжкой (фиг. 3г). Без этих индексов панели или затяжка соответственно отсутствуют. Нагрузка в узлах пересечения вант при варианте с индексом "Т" - 80 Н ( $1,02 \text{ кН/м}^2$ ), а при отсутствии затяжки - 40 Н ( $0,51 \text{ кН/м}^2$ ).

Влияние работы панелей на жесткость покрытия в целом, как видно по представленным графикам, значительно и особенно при действии несимметричных нагрузок. При этом гибкость панелей  $\lambda = l'/t = 70$ , где  $l'$  - длина стороны панели, относительно большая. Так, например, при равномерно распределенной нагрузке по всей поверхности покрытия прогибы его уменьшаются на 20 - 40 %, а при равномерно распределенной

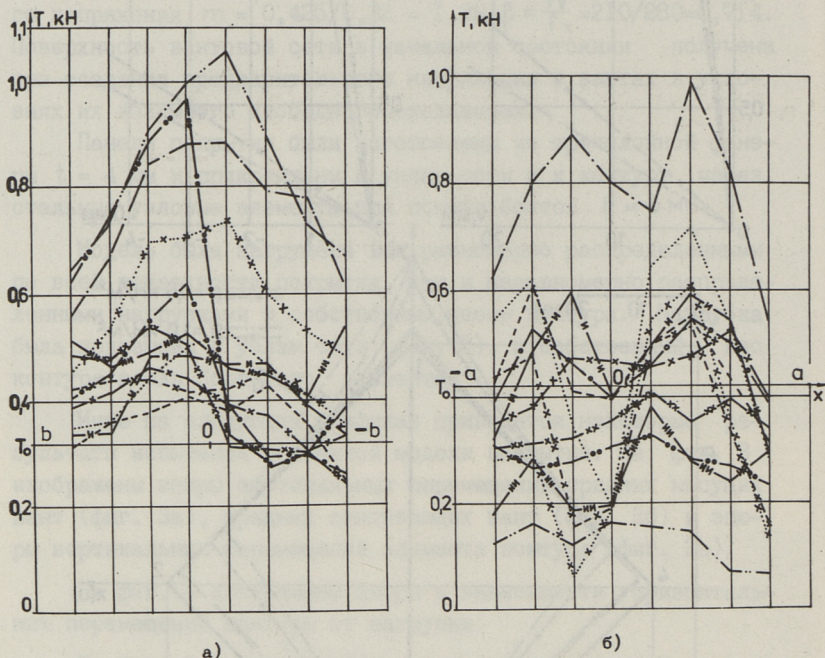


Фиг. 4. Эпюры горизонтальных перемещений и зависимости их от величины внешней вертикальной нагрузки.

нагрузке на одной половине покрытия - на 60-100 % по сравнению с вантовой сетью без панелей.

Панели покрытия значительно уменьшают приращения усилий как несущих, так и стягивающих вант. Так, например, в случае затяжки уменьшение приращения усилий более нагруженных вант при общей равномерно распределенной и распреде-

ленной на половине пролета нагрузке достигает 60-75 %. При этом преимуществом является тот факт, что под влиянием па-



Фиг. 5. Эпюры приростов усилий в сечениях вдоль диагоналей: а) несущих вант; б) стягивающих вант.

нелей разгружаются, как правило, средние, более нагруженные ванты, а происходящее в процессе нагружения уменьшение усилий предварительного напряжения стягивающих вант имеет место в значительно меньшей мере (в некоторых случаях уменьшение приростов на 50-80 %).

Следует подчеркнуть, что в случае неподатливых креплений (болты) панелей эти панели восприняли бы основную часть продольных усилий на себя, так как в данном случае соотношение жесткости панелей и вантов на растяжение или сжатие составляет  $E A_{II} / E A_{B} = 20$ . В самом деле заметны значительные рыхлые деформации (податливость связей) и продольные усилия передаются от панелей в пределах 70 % на ванты.



Нужно заметить, что панели покрытия разравнивают приросты усилий между вантами, как при нагрузке, равномерно распределенной по всему покрытию, так и при нагрузке, распределенной на половине пролета покрытия. Явление имеет место при распорном и при безраспорном контурах. Разравнивание приростов усилий между вантами обусловлено сдвиговой жесткостью покрытия, возникающей вследствие прикрепленных к узлам сети панелей покрытия.

Напряжения в фанерных панелях достигали до 3,50 МПа при безраспорном контуре и при нагрузке 40 Н в узлах, а при распорном контуре (вариант с индексом "Г") и при нагрузке 80 Н в узлах - 1,80 МПа. Малость этих величин обусловлена, с одной стороны, относительно большой жесткостью панелей на растяжение-сжатие, а с другой стороны, - податливостью связей, прикрепляющих панели покрытия к сети и к контуру.

## 2. 0 расчете

Геометрию начального предварительно напряженного ненагруженного состояния поверхности вантовой сети с фиксированными узлами, когда несущие и стягивающие ваны располагаются в перпендикулярных взаимно параллельных плоскостях и распоры вдоль каждой ваны постоянные, можно определить при заданных значениях распоров, координат узлов  $x_{i,k}$  и  $y_{i,k}$  и координат контура по формуле:

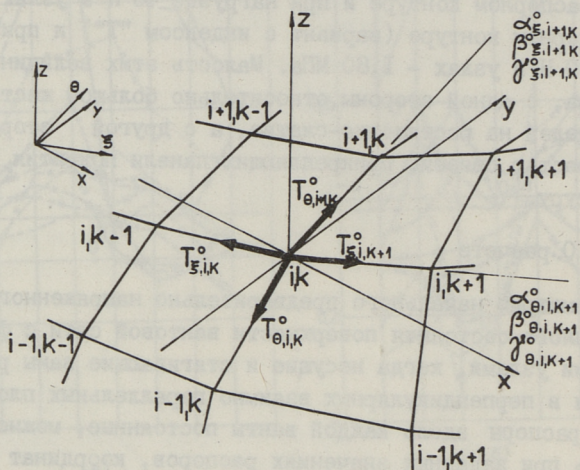
$$\begin{aligned}
 & H_{x,i}^{\circ} \left( \frac{z_{i,k+1}^{\circ} - z_{i,k}^{\circ}}{a_{i,k+1}^{\circ}} - \frac{z_{i,k}^{\circ} - z_{i,k-1}^{\circ}}{a_{i,k}^{\circ}} \right) + \\
 & H_{y,k}^{\circ} \left( \frac{z_{i+1,k}^{\circ} - z_{i,k}^{\circ}}{b_{i+1,k}^{\circ}} - \frac{z_{i,k}^{\circ} - z_{i-1,k}^{\circ}}{b_{i,k}^{\circ}} \right) = 0
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $H_{x,i}^{\circ}$ ;  $H_{y,k}^{\circ}$  - соответственно распоры несущих и стягивающих вант от их предварительного напряжения;

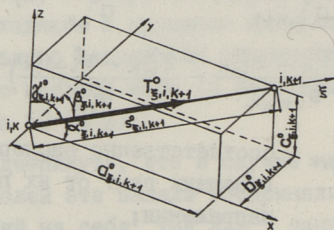
$a_{i,k}^{\circ}$ ;  $b_{i,k}^{\circ}$  - проекции длин отрезков  $i$ -того и  $k$ -того отрезка ванта.

Неизвестными являются только координаты узлов по высоте  $z_{i,k}^{\circ}$ .

В общем случае вантовая сеть неортогональна и распоры вдоль каждой ванты непостоянны. Геометрию (например, координаты  $z_{i,k}^{\circ}$ ) начального состояния такой сети с фиксированными узлами при заданных значениях усилий предварительного напряжения приконтурных отрезков вант, координат узлов  $x_{i,k}^{\circ}$  и  $y_{i,k}^{\circ}$  и координат контура можно определить по формулам (2.2). Схема узла  $i, k$  с необходимыми обозначениями приведена на фиг. 6.



а)



б)

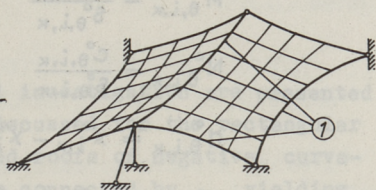
Фиг. 6. а) схема узла сети; б) схема отрезка ванты.

Уравнения получены из равновесия ненагруженного узла сети. По представленным формулам можно также определить геометрию предварительно напряженного тенто-вантового покрытия (фиг. 7).

Координаты узлов  $x_{i,k}^{\circ}$ ,

$y_{i,k}^{\circ}$ ,  $z_{i,k}^{\circ}$  при заданных координатах контура, соотношении усилий предварительного напряжения  $m_{i,k} = \frac{T_{\theta,i,k}^{\circ}}{T_{\xi,i,k}^{\circ}}$  вантовой сети,

образующейся при создании предварительного напряжения в вантах в условиях их взаимного свободного скольжения, определяются по методике [2].



Фиг. 7. Схема тенто-вантового покрытия.

Определение напряженно-деформированного состояния ортогональной и неортогональной предварительно напряженной вантовой сети, в том числе с дополнительными элементами моделирующими работу панелей покрытия, приведено в работе [3].

$$\begin{aligned}
 -T_{\xi,i,k}^{\circ} \cdot L_{\xi,i,k}^{\circ} - T_{\theta,i,k}^{\circ} \cdot L_{\theta,i,k}^{\circ} + T_{\xi,i,k+1}^{\circ} \cdot L_{\xi,i,k+1}^{\circ} + T_{\theta,i+1,k}^{\circ} \cdot L_{\theta,i+1,k}^{\circ} &= 0 \\
 -T_{\xi,i,k}^{\circ} \cdot M_{\xi,i,k}^{\circ} - T_{\theta,i,k}^{\circ} \cdot M_{\theta,i,k}^{\circ} + T_{\xi,i,k+1}^{\circ} \cdot M_{\xi,i,k+1}^{\circ} + T_{\theta,i+1,k}^{\circ} \cdot M_{\theta,i+1,k}^{\circ} &= 0 \quad (2.2) \\
 -T_{\xi,i,k}^{\circ} \cdot N_{\xi,i,k}^{\circ} - T_{\theta,i,k}^{\circ} \cdot N_{\theta,i,k}^{\circ} + T_{\xi,i,k+1}^{\circ} \cdot N_{\xi,i,k+1}^{\circ} + T_{\theta,i+1,k}^{\circ} \cdot N_{\theta,i+1,k}^{\circ} &= 0
 \end{aligned}$$

где

$$L_{\xi,i,k}^{\circ} = \frac{a_{\xi,i,k}^{\circ}}{S_{\xi,i,k}^{\circ}}$$

$$M_{\xi,i,k}^{\circ} = \frac{b_{\xi,i,k}^{\circ}}{S_{\xi,i,k}^{\circ}}$$

$$N_{\xi,i,k}^{\circ} = \frac{c_{\xi,i,k}^{\circ}}{S_{\xi,i,k}^{\circ}}$$

$$a_{\xi,i,k}^{\circ} = x_{i,k}^{\circ} - x_{i,k-1}^{\circ}$$

$$b_{\xi,i,k}^{\circ} = y_{i,k}^{\circ} - y_{i,k-1}^{\circ}$$

$$c_{\xi,i,k}^{\circ} = z_{i,k}^{\circ} - z_{i,k-1}^{\circ}$$

$$S_{\xi, i, k}^{\circ} = [(a_{\xi, i, k}^{\circ})^2 + (b_{\xi, i, k}^{\circ})^2 + (c_{\xi, i, k}^{\circ})^2]^{1/2}$$

$$L_{\theta, i, k}^{\circ} = \frac{a_{\theta, i, k}^{\circ}}{S_{\theta, i, k}^{\circ}}$$

$$M_{\theta, i, k}^{\circ} = \frac{b_{\theta, i, k}^{\circ}}{S_{\theta, i, k}^{\circ}}$$

$$N_{\theta, i, k}^{\circ} = \frac{c_{\theta, i, k}^{\circ}}{S_{\theta, i, k}^{\circ}}$$

$$a_{\theta, i, k}^{\circ} = x_{i, k}^{\circ} - x_{i-1, k}^{\circ}$$

$$b_{\theta, i, k}^{\circ} = y_{i, k}^{\circ} - y_{i-1, k}^{\circ}$$

$$c_{\theta, i, k}^{\circ} = z_{i, k}^{\circ} - z_{i-1, k}^{\circ}$$

$$S_{\theta, i, k}^{\circ} = [(a_{\theta, i, k}^{\circ})^2 + (b_{\theta, i, k}^{\circ})^2 + (c_{\theta, i, k}^{\circ})^2]^{1/2}$$

Все величины определяются с учетом знака.

В заключение следует сказать, что прикрепление панелей покрытия к узлам вантовой сети и к контуру и тем самым включение их в совместную работу с остальной несущей частью висячего покрытия позволяет значительно повысить ее жесткость или достичь экономии материала основных несущих элементов.

#### Л и т е р а т у р а

1. Ыйгер К.П., Тальвик А.И. О влиянии жесткости прямолинейного контура и элементов покрытия на работу седловидного висячего покрытия. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1984, № 571.

2. Кульбах В.Р., Ыйгер К.П. О начальной геометрии предварительно напряженной вантовой сети. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, серия А, 1969, № 278.

3. Ыйгер К.П. Учет влияния панелей и других элементов покрытия на работу седловидных висячих вантовых конструкций. См. наст. сб., с. 53.

Action of Roof Elements on the Stress-Strain  
State of Saddle-Shape Suspended Cable Structures

Summary

Some data of experimental investigation are presented and calculation problems are discussed for the rectangular or trapezoidal shallow suspended roofs of negative curvature, the sheathing of which is connected by yielding fasteners to the prestressed steel cable network and to the contour. The action of roof panels on the work of the cable network and edge beams was studied. It is shown that connected roof panels substantially change the stress-strain state of the whole system. Equations for determining the geometry of prestressed cable networks are also described.



Рис. 1. Образ вид шатровой кровли. 1 - несущая сеть, 2 - ступенчатая обшивка, 3 - контур жесткости, 4 - жесткий, 5 - элементы кровли, 6 - жесткая подкладка к шатровой.

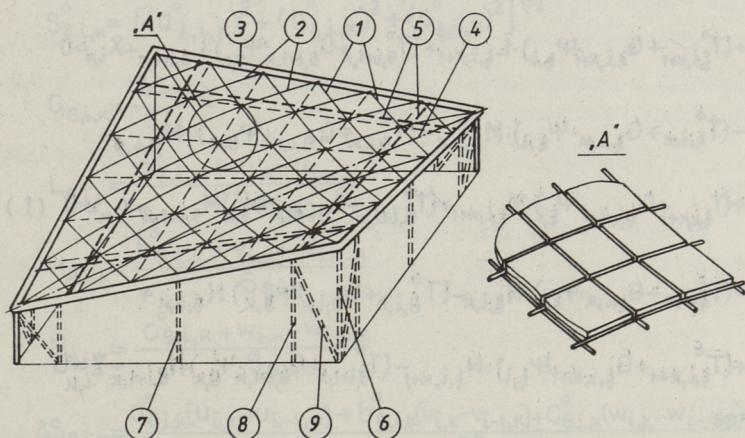
Как показывают экспериментальные исследования [1], панели и другие дополнительные элементы, обычно не учитываемые в расчетах несущей сети, значительно влияют на работу кантовой сети и контура.

Все вытекающие формулы получены на рассмотрении равновесия нагруженного узла сети с учетом возможных перемещений его.



### УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПАНЕЛЕЙ И ДРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОКРЫТИЯ НА РАБОТУ СЕДЛОВИДНЫХ ВИСЯЧИХ ВАНТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящей статье рассматриваются вопросы расчета седловидной висячей предварительно напряженной вантовой сети, в том числе с учетом влияния панелей и других элементов покрытия на работу конструкций (фиг. 1, А).



Фиг. 1. Общий вид висячего покрытия. 1 - несущие ванты, 2 - стягивающие ванты, 3 - контур покрытия, 4 - затяжка, 5 - элементы покрытия, А - деталь покрытия с панелями.

Как показывают экспериментальные исследования [1], панели и другие дополнительные элементы, обычно не учитываемые в расчетах висячего покрытия, значительно влияют на работу вантовой сети и контура.

Все нижеследующие формулы получены из рассмотрения равновесия нагруженного узла сети с учетом конечных перемещений его.

Во-первых, приводятся формулы определения напряженно-деформированного состояния нагруженной неортогональной предварительно напряженной вантовой сети. Заданы: геометрия начального ненагруженного состояния,  $x_{i,k}^0, y_{i,k}^0, z_{i,k}^0$ ; усилия предварительного напряжения вант  $T_{\xi,i,k}^0, T_{\theta,i,k}$ ; величины модулей упругостей  $E_{\xi}, E_{\theta}$  и поперечные сечения  $\Omega_{\xi,i}, \Omega_{\theta,k}$  каждого направления вант; составляющие узловой нагрузки  $X_{i,k}, Y_{i,k}$  и  $Z_{i,k}$  (см. фиг. 4).

Схема узла сети вант  $i, k$  и необходимые обозначения приведены в статье [1] на (фиг. 6). Разрешающая система уравнений в перемещениях имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & -(T_{\xi,i,k}^0 + G_{\xi,i,k} \cdot \psi_{\xi,i}) \cdot L_{\xi,i,k} - (T_{\theta,i,k}^0 + G_{\theta,i,k} \cdot \psi_{\theta,k}) \cdot L_{\theta,i,k} + \\
 & + (T_{\xi,i,k+1}^0 + G_{\xi,i,k+1} \cdot \psi_{\xi,i}) \cdot L_{\xi,i,k+1} + (T_{\theta,i+1,k}^0 + G_{\theta,i+1,k} \cdot \psi_{\theta,k}) \cdot L_{\theta,i+1,k} + X_{i,k} = 0 \\
 & -(T_{\xi,i,k}^0 + G_{\xi,i,k} \cdot \psi_{\xi,i}) \cdot M_{\xi,i,k} - (T_{\theta,i,k}^0 + G_{\theta,i,k} \cdot \psi_{\theta,k}) \cdot M_{\theta,i,k} + \\
 & + (T_{\xi,i,k+1}^0 + G_{\xi,i,k+1} \cdot \psi_{\xi,i}) \cdot M_{\xi,i,k+1} + (T_{\theta,i+1,k}^0 + G_{\theta,i+1,k} \cdot \psi_{\theta,k}) \cdot M_{\theta,i+1,k} + Y_{i,k} = 0 \quad (I) \\
 & -(T_{\xi,i,k}^0 + G_{\xi,i,k} \cdot \psi_{\xi,i}) \cdot N_{\xi,i,k} - (T_{\theta,i,k}^0 + G_{\theta,i,k} \cdot \psi_{\theta,k}) \cdot N_{\theta,i,k} + \\
 & + (T_{\xi,i,k+1}^0 + G_{\xi,i,k+1} \cdot \psi_{\xi,i}) \cdot N_{\xi,i,k+1} - (T_{\theta,i+1,k}^0 + G_{\theta,i+1,k} \cdot \psi_{\theta,k}) \cdot N_{\theta,i+1,k} + Z_{i,k} = 0
 \end{aligned}$$

где

$$\psi_{\xi,i} = E_{\xi} \cdot \Omega_{\xi,i}$$

$$\psi_{\theta,k} = E_{\theta} \cdot \Omega_{\theta,k}$$

$$G_{\xi,i,k} = \frac{\Delta S_{\xi,i,k}}{S_{\xi,i,k}^0}$$

$$L_{\xi,i,k} = \frac{a_{\xi,i,k}^0 + u_{i,k} - u_{i,k-1}}{S_{\xi,i,k}}$$

$$M_{\xi,i,k} = \frac{b_{\xi,i,k}^0 + v_{i,k} - v_{i,k-1}}{S_{\xi,i,k}}$$



$$N_{\xi,i,k} = \frac{c_{\xi,i,k}^{\circ} + w_{i,k} - w_{i,k-1}}{S_{\xi,i,k}}$$

$$\Delta S_{\xi,i,k} = \frac{a_{\xi,i,k}^{\circ}(u_{i,k} - u_{i,k-1}) + b_{\xi,i,k}^{\circ}(v_{i,k} - v_{i,k-1}) + c_{\xi,i,k}^{\circ}(w_{i,k} - w_{i,k-1})}{S_{\xi,i,k}}$$

$$S_{\xi,i,k} = S_{\xi,i,k}^{\circ} + \Delta S_{\xi,i,k}$$

$$a_{\xi,i,k}^{\circ} = x_{i,k}^{\circ} - x_{i,k-1}^{\circ}$$

$$b_{\xi,i,k}^{\circ} = y_{i,k}^{\circ} - y_{i,k-1}^{\circ}$$

$$c_{\xi,i,k}^{\circ} = z_{i,k}^{\circ} - z_{i,k-1}^{\circ}$$

$$S_{\xi,i,k}^{\circ} = [(a_{\xi,i,k}^{\circ})^2 + (b_{\xi,i,k}^{\circ})^2 + (c_{\xi,i,k}^{\circ})^2]^{1/2}$$

$$G_{\theta,i,k} = \frac{\Delta S_{\theta,i,k}}{S_{\theta,i,k}^{\circ}}$$

$$L_{\theta,i,k} = \frac{a_{\theta,i,k}^{\circ} + u_{i,k} - u_{i-1,k}}{S_{\theta,i,k}}$$

$$M_{\theta,i,k} = \frac{b_{\theta,i,k}^{\circ} + v_{i,k} - v_{i-1,k}}{S_{\theta,i,k}}$$

$$N_{\theta,i,k} = \frac{c_{\theta,i,k}^{\circ} + w_{i,k} - w_{i-1,k}}{S_{\theta,i,k}}$$

$$\Delta S_{\theta,i,k} = \frac{a_{\theta,i,k}^{\circ}(u_{i,k} - u_{i-1,k}) + b_{\theta,i,k}^{\circ}(v_{i,k} - v_{i-1,k}) + c_{\theta,i,k}^{\circ}(w_{i,k} - w_{i-1,k})}{S_{\theta,i,k}}$$

$$S_{\theta,i,k} = S_{\theta,i,k}^{\circ} + \Delta S_{\theta,i,k}$$

$$a_{\theta,i,k}^{\circ} = x_{i,k}^{\circ} - x_{i-1,k}^{\circ}$$

$$b_{\theta,i,k}^{\circ} = y_{i,k}^{\circ} - y_{i-1,k}^{\circ}$$

$$c_{\theta,i,k}^{\circ} = z_{i,k}^{\circ} - z_{i-1,k}^{\circ}$$

$$S_{\theta,i,k}^{\circ} = [(a_{\theta,i,k}^{\circ})^2 + (b_{\theta,i,k}^{\circ})^2 + (c_{\theta,i,k}^{\circ})^2]^{1/2}$$

$$\Delta T_{\xi,i,k} = \frac{\Delta S_{\xi,i,k}}{S_{\xi,i,k}^{\circ}} \cdot \psi_{\xi,i}; \quad T_{\xi,i,k} = \Delta T_{\xi,i,k} + T_{\xi,i,k}^{\circ}$$

$$\Delta T_{\theta,i,k} = \frac{\Delta S_{\theta,i,k}}{S_{\theta,i,k}^{\circ}} \cdot \psi_{\theta,i,k}; \quad T_{\theta,i,k} = \Delta T_{\theta,i,k} + T_{\theta,i,k}^{\circ}$$

$U_{i,k}, V_{i,k}, W_{i,k}$  — искомые перемещения узла  $i, k$  соответственно в направлениях осей  $X, Y, Z$

$\Delta T_{\xi,i,k}, \Delta T_{\theta,i,k}$  — искомые приросты усилий.

Удлинение отрезка ванты  $\Delta S_{\xi,i,k} (\Delta S_{\theta,i,k})$  получено из геометрического соотношения

$$S_{\xi,i,k}^{\circ} + \Delta S_{\xi,i,k} = [(a_{\xi,i,k}^{\circ} + U_{i,k} - U_{i,k-1})^2 + (b_{\xi,i,k}^{\circ} + V_{i,k} - V_{i,k-1})^2 + (c_{\xi,i,k}^{\circ} + W_{i,k} - W_{i,k-1})^2]^{1/2}$$

после деления обеих сторон на  $S_{\xi,i,k}^{\circ}$ , отложения подкоренного выражения в биномиальный ряд, сохранения двух членов и пренебрежения величинами высшего порядка малости.

Все формулы представлены в удобном для расчета на ЭВМ виде.

По приведенным формулам возможно с достаточной для практических целей точностью также вести расчет напряженно-деформированного состояния тенто-вантовых покрытий.

В практике часто применяется ортогональная вантовая сеть, расчет которой значительно упрощается. На фиг. 2 приведены схема узла  $i, k$  сети (фиг. 2а) и расчетная схема несущей и стягивающей ванты, соответственно (фиг. 2б) и (фиг. 2в). Ось  $X$  направлена параллельно плоскостям вант, а ось  $Y$  параллельно плоскостям стягивающих вант. Составляющие узловой нагрузки  $X_{i,k}, Y_{i,k}$  и  $Z_{i,k}$  (см. фиг. 4а) на схемах фиг. 2 условно не показаны.

Заданы: геометрия начального ненагруженного состояния  $X_{i,k}^{\circ}, Y_{i,k}^{\circ}, Z_{i,k}^{\circ}$  (определяются по формулам 2.1, приведенным в работе [1]), усилия предварительного напряжения вант  $T_{X,i,k}^{\circ}, T_{Y,i,k}^{\circ}$ ; модули упругостей и поперечные сечения каждого направления вант,  $E_i, E_k$  и  $\Omega_i, \Omega_k$  и составляющие узловой нагрузки  $X_{i,k}, Y_{i,k}, Z_{i,k}$ . Разрешающая система уравнений в перемещениях имеет вид:

$$\begin{aligned}
& -T_{x,i,k}^{\circ} \cdot L_{x,i,k} + T_{x,i,k+1}^{\circ} \cdot L_{x,i,k+1} - \psi_{x,i} (G_{x,i,k} - G_{x,i,k+1}) + X_{i,k} = 0 \\
& -T_{y,i,k}^{\circ} \cdot M_{y,i,k} + T_{y,i+1,k}^{\circ} \cdot M_{y,i+1,k} - \psi_{y,k} (G_{y,i,k} - G_{y,i+1,k}) + Y_{i,k} = 0 \\
& -T_{x,i,k}^{\circ} \cdot N_{x,i,k} + T_{x,i,k+1}^{\circ} \cdot N_{x,i,k+1} - \psi_{k,i} (J_{x,i,k} - J_{x,i,k+1}) - \\
& -T_{y,i,k}^{\circ} \cdot N_{y,i,k} + T_{y,i+1,k}^{\circ} \cdot N_{y,i+1,k} - \psi_{y,k} (J_{y,i,k} - J_{y,i+1,k}) + Z_{i,k} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\psi_{x,i} = E_i \cdot \Omega_i$$

$$\psi_{y,k} = E_k \cdot \Omega_k$$

$$L_{x,i,k} = \frac{a_{x,i,k}}{S_{x,i,k}^{\circ} + \Delta S_{x,i,k}}$$

$$G_{x,i,k} = \frac{\Delta S_{x,i,k}}{S_{x,i,k}^{\circ}} \cdot L_{x,i,k}$$

$$a_{x,i,k} = a_{x,i,k}^{\circ} + u_{i,k} - u_{i,k-1}$$

$$\Delta S_{x,i,k} = \frac{a_{x,i,k}^{\circ} (u_{i,k} - u_{i,k-1}) + c_{x,i,k}^{\circ} (w_{i,k} - w_{i,k-1})}{S_{x,i,k}^{\circ}}$$

$$a_{x,i,k}^{\circ} = x_{i,k}^{\circ} - x_{i,k-1}^{\circ}$$

$$c_{x,i,k}^{\circ} = z_{i,k}^{\circ} - z_{i,k-1}^{\circ}$$

$$S_{x,i,k}^{\circ} = [(a_{x,i,k}^{\circ})^2 + (c_{x,i,k}^{\circ})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$M_{y,i,k} = \frac{b_{y,i,k}}{S_{y,i,k}^{\circ} + \Delta S_{y,i,k}}$$

$$G_{y,i,k} = \frac{\Delta S_{y,i,k}}{S_{y,i,k}^{\circ}} \cdot M_{y,i,k}$$

$$b_{y,i,k} = b_{y,i,k}^{\circ} + v_{i,k} - v_{i-1,k}$$

$$\Delta S_{y,i,k} = \frac{b_{y,i,k}^{\circ}(v_{i,k} - v_{i-1,k}) + c_{y,i,k}^{\circ}(w_{i,k} - w_{i-1,k})}{S_{y,i,k}^{\circ}}$$

$$b_{y,i,k}^{\circ} = y_{i,k}^{\circ} - y_{i-1,k}^{\circ}$$

$$c_{y,i,k}^{\circ} = z_{i,k}^{\circ} - z_{i-1,k}^{\circ}$$

$$S_{y,i,k}^{\circ} = [(b_{y,i,k}^{\circ})^2 + (c_{y,i,k}^{\circ})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$N_{x,i,k} = \frac{c_{x,i,k}}{a_{x,i,k}} \cdot L_{x,i,k}$$

$$f_{x,i,k} = N_{x,i,k} \frac{G_{x,i,k}}{L_{x,i,k}}$$

$$C_{x,i,k} = c_{x,i,k}^{\circ} + w_{i,k} - w_{i,k-1}$$

$$N_{y,i,k} = \frac{c_{y,i,k}}{b_{y,i,k}} \cdot M_{y,i,k}$$

$$f_{y,i,k} = \frac{G_{y,i,k}}{M_{y,i,k}} \cdot N_{y,i,k}$$

$$c_{y,i,k} = c_{y,i,k}^{\circ} + w_{i,k} - w_{i-1,k}$$

$$\Delta T_{x,i,k} = \frac{\Delta S_{x,i,k} \cdot \psi_{x,i}}{S_{x,i,k}^{\circ}}$$

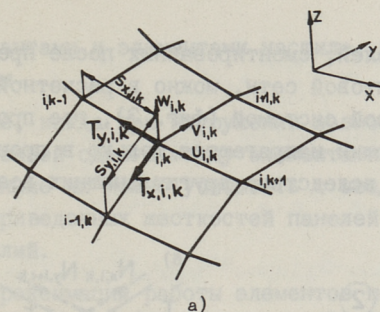
$$T_{x,i,k} = T_{x,i,k}^{\circ} + \Delta T_{x,i,k}$$

$$\Delta T_{y,i,k} = \frac{\Delta S_{y,i,k} \cdot \psi_{y,k}}{S_{y,i,k}^{\circ}}$$

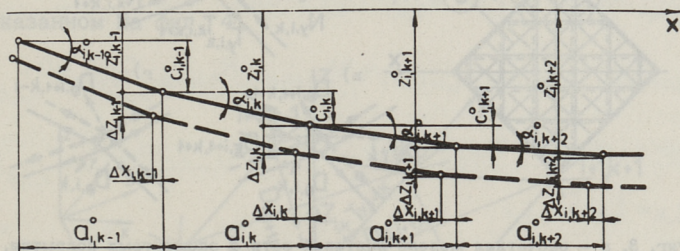
$$T_{y,i,k} = T_{y,i,k}^{\circ} + \Delta T_{y,i,k}$$

$\Delta T_{x,i,k}$  и  $\Delta T_{y,i,k}$  соответственно приросты усилий несущих и стягивающих вант.

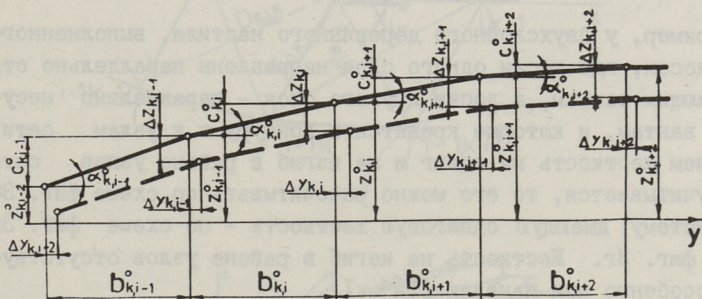
$$u_{i,k} = \Delta x_{i,k}, \quad v_{i,k} = \Delta y_{i,k}, \quad w_{i,k} = \Delta z_{i,k}.$$



a)



б)



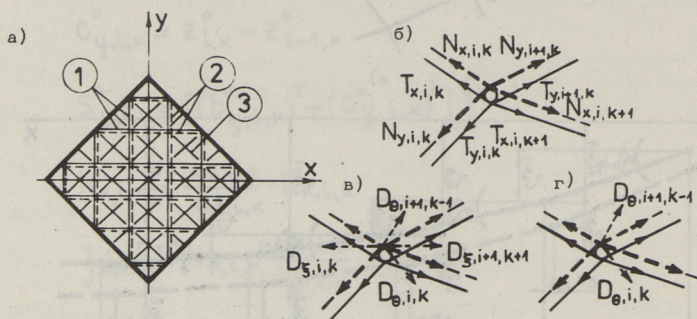
в)

Фиг. 2. а - схема узла вантовой сети, б - расчетная схема несущей ванты, в - расчетная схема стягивающей ванты.

В последних уравнениях пренебрегают влиянием составляющего смещения узла перпендикулярной плоскости рассматриваемой ванты при определении удлинений и усилий ее отрезков.

В уравнениях (1) и (2) приведенные операторы  $L$ ,  $M$ ,  $N$  представляют соответственно направляющие косинусы отрезков вант в конечном нагруженном состоянии. Все величины определяются с учетом знака координат.

Влияние панелей, смонтированных после предварительного напряжения вантовой сети, можно в расчетной схеме моделировать стержневой системой (фиг. 3), где продольные или диагональные стержни напрягаются только в процессе нагружения покрытия или вследствие других внешних воздействий.



Фиг. 3. а - расчетная модель вантовой сети с элементами покрытия, б...г - варианты различных расчетных схем.

Например, у двухслойного деревянного настила, выполненного из досок, где доски одного слоя направлены параллельно стягивающим вантам, а доски другого слоя - параллельно несущим вантам, и которые крепятся к контуру и к узлам сети, причем жесткость на сдвиг и на изгиб в районе узлов сети не учитывается, то его можно рассчитывать по схеме фиг. 3б, а систему, имеющую сдвиговую жесткость - по схеме фиг. 3в или фиг. 3г. Жесткость на изгиб в районе узлов отсутствует особенно при панелях (фиг. 1).

При аппроксимации работы элементов покрытия по схеме фиг. 3 б, в уравнениях (2) следует к жесткости ванта добавить еще жесткость элемента покрытия на растяжение или на сжатие. Например, первое уравнение системы (2) принимает в этом случае вид:

$$-T_{x,i,k}^0 \cdot L_{x,i,k} + T_{x,i,k+1}^0 \cdot L_{x,i,k+1} - (\psi_{B,i} + \psi_{P,i})(G_{x,i,k} - G_{x,i,k+1}) + X_{i,k} = 0,$$

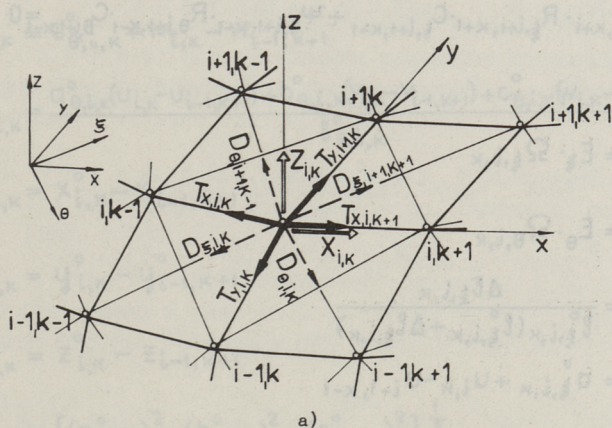
где  $\psi_{B,i} = E_B \cdot \Omega_{B,i}$  - жесткость на растяжение несущих вант;  
 $\psi_{P,i} = E_P \cdot \Omega_{P,i}$  - жесткость на растяжение или сжатие панелей.

Вычисленные приросты усилий имеют в своем составе и приросты  $\Delta N_{i,k}$ . При этом общие приросты усилий распределя-

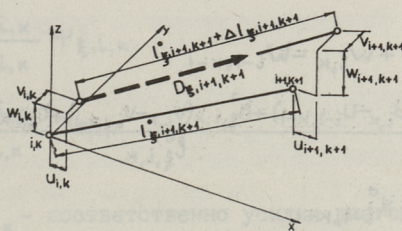
ются между вантами и элементами настила, пропорционально их жесткостям.

В случае, когда при нагружении возможны вследствие податливости связей сдвиги между элементами покрытия и узлами сети, влияние их можно учитывать с введением в уравнения (2) приведенных жесткостей панелей, зависящих от величины усилий.

При аппроксимации работы элементов покрытия по схеме фиг. 3в расчетная схема узла  $i, k$  представляется в виде, показанном на фиг. 4.



а)



б)

Фиг. 4. а - расчетная модель узла вантовой сети с элементами покрытия, б - схема перемещения диагонального элемента.

Разрешающая система уравнений для дополнительных стержней, расположенных в направлениях  $\xi$  и  $\theta$ , имеет вид:

$$\begin{aligned}
& -\psi_{\xi, i, k} \cdot R_{\xi, i, k} \cdot A_{\xi, i, k} - \psi_{\theta, i, k} \cdot R_{\theta, i, k} \cdot A_{\theta, i, k} + \\
& + \psi_{\xi, i+1, k+1} \cdot R_{\xi, i+1, k+1} \cdot A_{\xi, i+1, k+1} + \psi_{\theta, i+1, k-1} \cdot R_{\theta, i+1, k-1} \cdot A_{\theta, i+1, k-1} = 0 \\
& -\psi_{\xi, i, k} \cdot R_{\xi, i, k} \cdot B_{\xi, i, k} - \psi_{\theta, i, k} \cdot R_{\theta, i, k} \cdot B_{\theta, i, k} + \\
& + \psi_{\xi, i+1, k+1} \cdot R_{\xi, i+1, k+1} \cdot B_{\xi, i+1, k+1} + \psi_{\theta, i+1, k-1} \cdot R_{\theta, i+1, k-1} \cdot B_{\theta, i+1, k-1} = 0 \\
& -\psi_{\xi, i, k} \cdot R_{\xi, i, k} \cdot C_{\xi, i, k} - \psi_{\theta, i, k} \cdot R_{\theta, i, k} \cdot C_{\theta, i, k} + \\
& + \psi_{\xi, i+1, k+1} \cdot R_{\xi, i+1, k+1} \cdot C_{\xi, i+1, k+1} + \psi_{\theta, i+1, k-1} \cdot R_{\theta, i+1, k-1} \cdot C_{\theta, i+1, k-1} = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\psi_{\xi, i, k} = E_{\xi} \cdot \Omega_{\xi, i, k}$$

$$\psi_{\theta, i, k} = E_{\theta} \cdot \Omega_{\theta, i, k}$$

$$R_{\xi, i, k} = \frac{\Delta l_{\xi, i, k}}{l_{\xi, i, k}^{\circ} (l_{\xi, i, k}^{\circ} + \Delta l_{\xi, i, k})}$$

$$A_{\xi, i, k} = a_{\xi, i, k}^{\circ} + u_{i, k} - u_{i-1, k-1}$$

$$B_{\xi, i, k} = b_{\xi, i, k}^{\circ} + v_{i, k} - v_{i-1, k-1}$$

$$C_{\xi, i, k} = c_{\xi, i, k}^{\circ} + w_{i, k} - w_{i-1, k-1}$$

$$\Delta l_{\xi, i, k} = \frac{a_{\xi, i, k}^{\circ} (u_{i, k} - u_{i-1, k-1}) + b_{\xi, i, k}^{\circ} (v_{i, k} - v_{i-1, k-1}) + c_{\xi, i, k}^{\circ} (w_{i, k} - w_{i-1, k-1})}{l_{\xi, i, k}^{\circ}}$$

$$a_{\xi, i, k}^{\circ} = x_{i, k}^{\circ} - x_{i-1, k-1}^{\circ}$$

$$b_{\xi, i, k}^{\circ} = y_{i, k}^{\circ} - y_{i-1, k-1}^{\circ}$$

$$c_{\xi, i, k}^{\circ} = z_{i, k}^{\circ} - z_{i-1, k-1}^{\circ}$$



$$l_{\xi,i,k}^{\circ} = [(a_{\xi,i,k}^{\circ})^2 + (b_{\xi,i,k}^{\circ})^2 + (c_{\xi,i,k}^{\circ})^2]^{1/2}$$

$$R_{\theta,i,k} = \frac{\Delta l_{\theta,i,k}}{l_{\theta,i,k}^{\circ} (l_{\theta,i,k}^{\circ} + \Delta l_{\theta,i,k})}$$

$$A_{\theta,i,k} = a_{\theta,i,k}^{\circ} + u_{i,k} - u_{i-1,k+1}$$

$$B_{\theta,i,k} = b_{\theta,i,k}^{\circ} + v_{i,k} - v_{i-1,k+1}$$

$$C_{\theta,i,k} = c_{\theta,i,k}^{\circ} + w_{i,k} - w_{i-1,k+1}$$

$$\Delta l_{\theta,i,k} = \frac{a_{\theta,i,k}^{\circ}(u_{i,k} - u_{i-1,k+1}) + b_{\theta,i,k}^{\circ}(v_{i,k} - v_{i-1,k+1}) + c_{\theta,i,k}^{\circ}(w_{i,k} - w_{i-1,k+1})}{l_{\theta,i,k}^{\circ}}$$

$$a_{\theta,i,k}^{\circ} = x_{i,k}^{\circ} - x_{i-1,k+1}$$

$$b_{\theta,i,k}^{\circ} = y_{i,k}^{\circ} - y_{i-1,k+1}$$

$$c_{\theta,i,k}^{\circ} = z_{i,k}^{\circ} - z_{i-1,k+1}$$

$$l_{\theta,i,k}^{\circ} = [(a_{\theta,i,k}^{\circ})^2 + (b_{\theta,i,k}^{\circ})^2 + (c_{\theta,i,k}^{\circ})^2]^{1/2}$$

$$D_{\xi,i,k} = \frac{\Delta l_{\xi,i,k}}{l_{\xi,i,k}^{\circ}} \psi_{\xi,i,k}$$

$$D_{\theta,i,k} = \frac{\Delta l_{\theta,i,k}}{l_{\theta,i,k}^{\circ}} \psi_{\theta,i,k}$$

$D_{\xi,i,k}$ ,  $D_{\theta,i,k}$  - соответственно усилия диагональных элементов расположенных в направлениях  $\xi$  и  $\theta$ .

Общая система разрешающих уравнений нагруженного узла, (фиг. 4, а) с учетом предварительного напряжения вантовой сети и диагональных элементов без предварительного напряжения, в перемещениях имеет вид:

$$\begin{aligned}
& -T_{x,i,k}^{\circ} \cdot L_{x,i,k} + T_{x,i,k+1}^{\circ} \cdot L_{x,i,k+1} - \psi_{x,i} (G_{x,i,k} - G_{x,i,k+1}) - \\
& - \psi_{\xi,i,k} \cdot R_{\xi,i,k} \cdot A_{\xi,i,k} - \psi_{\theta,i,k} \cdot R_{\theta,i,k} \cdot A_{\theta,i,k} + \\
& + \psi_{\xi,i+1,k+1} \cdot R_{\xi,i+1,k+1} \cdot A_{\xi,i+1,k+1} + \psi_{\theta,i+1,k-1} \cdot R_{\theta,i+1,k-1} \cdot A_{\theta,i+1,k-1} + X_{i,k} = 0 \\
& + T_{y,i,k}^{\circ} \cdot M_{y,i,k} + T_{y,i+1,k}^{\circ} \cdot M_{y,i+1,k} - \psi_{y,k} (G_{y,i,k} - G_{y,i+1,k}) - \\
& - \psi_{\xi,i,k} \cdot R_{\xi,i,k} \cdot B_{\xi,i,k} - \psi_{\theta,i,k} \cdot R_{\theta,i,k} \cdot B_{\theta,i,k} + \\
& + \psi_{\xi,i+1,k+1} \cdot R_{\xi,i+1,k+1} \cdot B_{\xi,i+1,k+1} + \psi_{\theta,i+1,k-1} \cdot R_{\theta,i+1,k-1} \cdot B_{\theta,i+1,k-1} - Y_{i,k} = 0 \quad (4) \\
& - T_{x,i,k}^{\circ} \cdot N_{x,i,k} + T_{x,i,k+1}^{\circ} \cdot N_{x,i,k+1} - \psi_{x,i} (J_{x,i,k} - J_{x,i,k+1}) - \\
& - T_{y,i,k}^{\circ} \cdot N_{y,i,k} + T_{y,i+1,k}^{\circ} \cdot N_{y,i+1,k} - \psi_{y,k} (J_{y,i,k} - J_{y,i+1,k}) - \\
& - \psi_{\xi,i,k} \cdot R_{\xi,i,k} \cdot C_{\xi,i,k} - \psi_{\theta,i,k} \cdot R_{\theta,i,k} \cdot C_{\theta,i,k} + \\
& - \psi_{\xi,i+1,k+1} \cdot R_{\xi,i+1,k+1} \cdot C_{\xi,i+1,k+1} + \psi_{\theta,i+1,k-1} \cdot R_{\theta,i+1,k-1} \cdot C_{\theta,i+1,k-1} + Z_{i,k} = 0.
\end{aligned}$$

Соответствующие операторы определяются согласно уравнениям 2 и 3.

В случае, когда диагональные элементы в местах пересечения шарнирно соединены, приходится кроме уравнений (4) для узлов, где пересекаются ванты и диагональные элементы, применять уравнения (3) для ненагруженных узлов пересечения диагональных элементов.

При дискретной постановке задачи перемещения контура учитываются с введением их величины в уравнения (1), (2), (3) или (4). При этом учет деформаций контура можно вести итерационным приближением, а именно на I этапе определяются усилия вант при недеформируемом контуре и перемещения действительного контура с усилиями приконтурных отрезков этого

же этапа. На втором этапе при определении напряженно-деформированного состояния системы учитываются перемещения контура первого этапа расчета и т.д. до заданной точности расчета. Как правило, такой итерационный процесс сходится на 3...4-м шаге.

В плане ромбовидного или квадратного контура, перемещения и усилия можно определить методом сил [2] или при любом контуре - методом конечных элементов [3].

### Л и т е р а т у р а

1. Ы й г е р К.П. О влиянии элементов покрытия на напряженно-деформированное состояние седловидных вантовых конструкций. См. наст. сб. с. 41.

2. Ы й г е р К.П., Т а л ь в и к А.И. Расчет несимметричного седловидного покрытия. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1981, № 504.

3. Госстрой ЭССР. Составители Вилипыльд Ю.К. и др. Расчет стержневых и пластинчатых систем по методу конечных элементов МКЭ/20. Ротапринт ПТИ МТ ЭССР, Таллин, 1979.

K. Oiger

#### Action of Panels and Other Roof Elements on the Work of Saddle-Shape Suspended Cable Structure

#### Summary

Calculation problems are described for the rectangular and other suspended roofs of negative curvature, the sheathing of which is connected or non-connected by stiff fasteners to the prestressed steel cable network and to the contour. Systems with orthogonal and non-orthogonal cable networks are discussed.

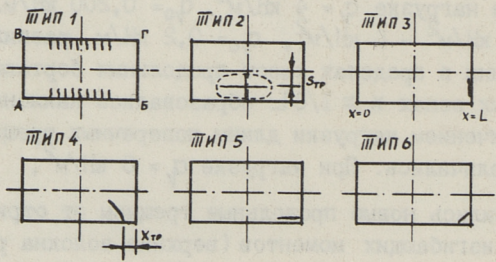
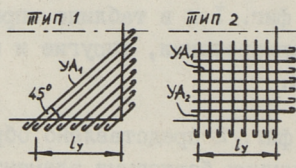
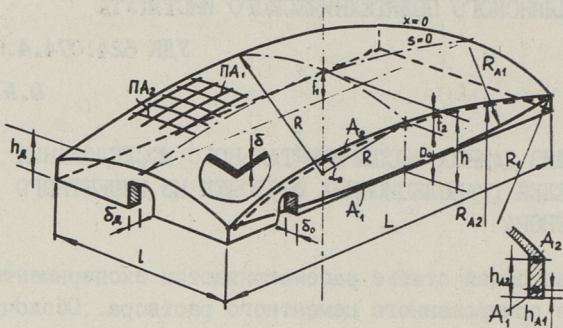


### АНАЛИЗ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ТРАНСЛЯЦИОННЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ ЦЕМЕНТНОГО РАСТВОРА

В настоящей статье рассматриваются эксперименты с моделями из армированного цементного раствора. Оболочки имеют ортогональный план с отношением сторон  $L/l = 2$ , отношение главных радиусов  $R_1/R \approx 5$  и продольные бортовые элементы вида балок.

На фиг. 1 и в таблице приведены основные размеры, данные об армировании, упругие и прочностные свойства моделей оболочек.

На фиг. 2 представлено образование трещин в оболочках со свободными бортовыми элементами. В моделях II 1 и II 2 первые продольные трещины появились в зоне конька криволинейной части при нагрузке  $q_1 = 4 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_0 = 0,200 \text{ кН/м}$ . При нагрузках  $q_1 = 4 \text{ кН/м}^2 - 6 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_0 = 0,2 \text{ кН/м}$  развились поперечные трещины в пределах высот продольных бортовых элементов. В угловых зонах  $x \approx l/6 L$  образовались наклонные трещины. С увеличением нагрузки длины поперечных трещин существенно не увеличились. При нагрузке  $q_1 = 8 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_0 = 0,4 \text{ кН/м}$  появились новые продольные трещины от отрицательных поперечных изгибающих моментов (верхние волокна растянуты) в четвертях поперечного пролета ( $l/2 s_0$ ). Эти трещины соединились с диагональными трещинами. На линии соединения криволинейной части с бортовым элементом наблюдались продольные трещины от положительных (нижние волокна растянуты) поперечных моментов. Разрушение модели II 1 произошло от разрыва арматуры в продольном бортовом элементе при нагрузке  $q_1 = 13,2 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_0 = 0,6 \text{ кН/м}$ , модель II 2 по наклонной трещине при нагрузке  $q_1 = 7,85 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_0 = 0,4 \text{ кН/м}$ .



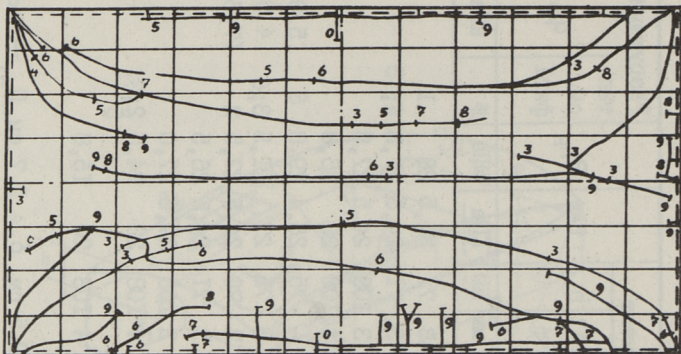
Фиг. 1. Основные геометрические параметры исследуемых оболочек.

Геометрические параметры, армирование, упругие свойства, разрушение

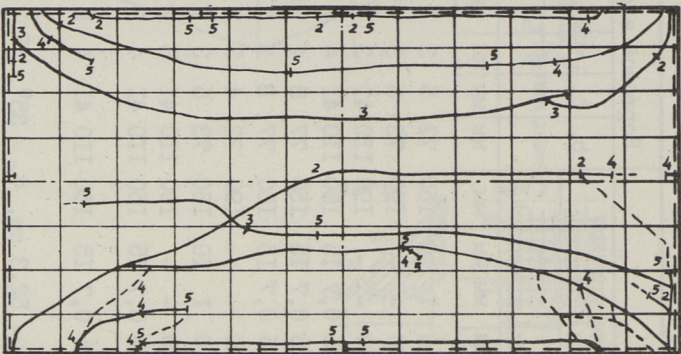
Марка мо- де- ли	h мм	Криволинейная часть												Бортовой элемент						Разрушение						
		δ мм	армирование средней зоны IIA1						армирование угловой зоны						E			R <sub>нр</sub> МПа	тип см. фиг.1	q <sub>p</sub>						
			φ шаг		φ шаг		φ шаг		φ шаг		φ шаг		φ шаг		b <sub>0</sub> мм	b <sub>0</sub> мин мм	A1 φ				A2 φ	h <sub>A2</sub> мм				
			мм	мм	мм	мм	мм	мм	мм	мм	мм	мм	мм	мм									мм	мм	мм	мм
III	168	6,2	I	30	I	30	I	10	I	10	I	10	I	10	160	73	5	3	7	3	71	24,5	28	I		
III2	168	6,5	I	30	I	30	I	20	-	-	-	-	-	190	73	5	3	7	3	71	24,5	27,8	4; 5			
III3	205	7,9	I	30	I	30	I	20	-	-	-	-	-	190	110	41	3	7	3	108	24,5	27,8				
III4	205	7,1	I,2	150	I,2	30	2	0,7	15	0,7	15	150	110	41	4	7	4	7	4	108	20	15,8	6	5,9		
III5	172	6,2	0,7	150	0,7	30	2	0,7	15	0,7	15	150	77	8	4	7	-	75	26,4	29,8	20	15,8	6	5,9		
III6	172	6,2	0,7	150	0,7	30	2	0,7	15	0,7	15	150	77	8	3	7	3	75	27	21,5	27,5	2	3;6	4,9		
III7	168	6,3	I	30	I	30	I	20	-	-	-	-	-	190	72	4	3	7	3	70	24,5	27,5	2	17,6		
III8	168	7,5	I	30	I	30	2	I	10	I	10	160	73	5	3	7	3	71	24,5	26,5	24,5	27,0				
III9	205	7,9	I	30	I	30	I	20	-	-	-	-	-	190	110	41	3	7	3	108	24,5	27,0				
III10	205	7,5	I,2	150	I,2	30	2	0,7	15	0,7	15	150	110	41	4	8	4	8	4	108	23	24,5	2;3; 5			
III11	205	7,1	I,2	150	I,2	30	2	0,7	15	0,7	15	150	110	41	4	8	4	8	4	108	20	15,8				

L = 120 см, l = 60 см, R<sub>1</sub> = R<sub>A2</sub> = 261,5 см, R = 52,3 см, α<sub>0</sub> = 35°, f = 9,5 см, δ<sub>0</sub> = 1,7 см, R<sub>A1</sub> → ∞

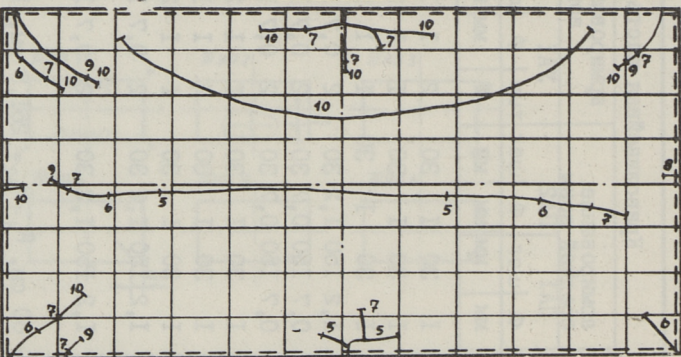
II1



II2



II3

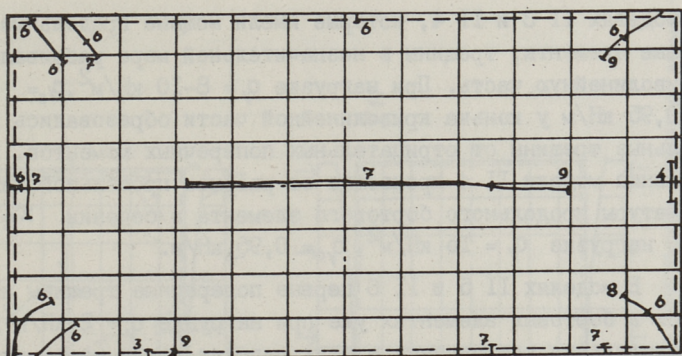


Фиг. 2. Образование трещин в моделях II1, II2, II3, II4, II5, II6 со свободными бортовыми элементами.

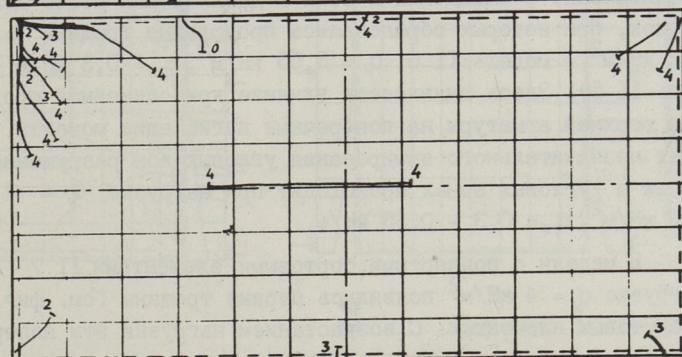
Нагрузки для моделей II1 и II2: 1 -  $q=2$ , 2 -  $q=4$ ,  
 3 -  $q=4, q_c=0,2$ ; 4 -  $q=6, q_w=0,2$ ; 5 -  $q=8, q_c=0,2$ ; 6 -  $q=8$ ,  
 $q_c=0,4$ , 7 -  $q=10, q_w=0,4$ ;



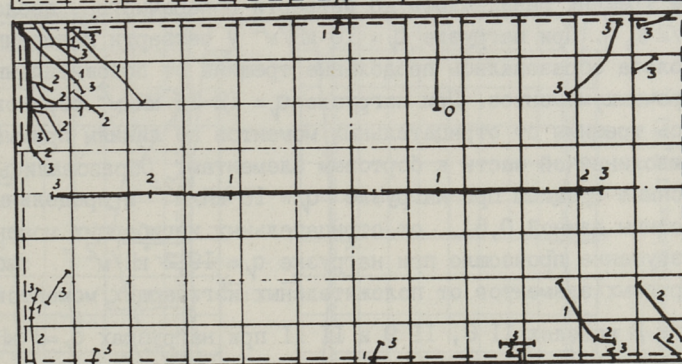
II4



II5



II6



для модели II3 и II4: 1  $-q=2$ ; 2  $-q=4$ ; 3  $-q=4$ ,  $q_c=0,475$ ;  
 4  $-q=6$ ,  $q_c=0,475$ ; 5  $-q=8$ ,  $q_c=0,475$ ; 6  $-q=8$ ,  $q_c=0,85$ ;  
 7  $-q=10$ ,  $q_c=0,95$ ; 8  $-q=12$ , 9  $-q=14$ ,  $q_c=0,95$ , для II5:  
 1  $-q=2,4$ ; 2  $-q=4,8$ ; 3  $-q=4,8$ ,  $q_c=0,3$ ; 4  $-q=5,55$ ,  $q_c=0,3$ ;  
 для модели II6: 1  $-q=2,75$ ; 2  $-q=4,5$ ; 3  $-q=4,5$ ,  
 $q_c=0,35$  [ $q$  - кН/м;  $q_c$  - кН/м]

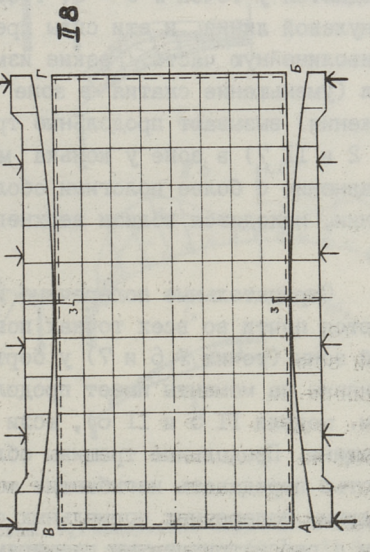
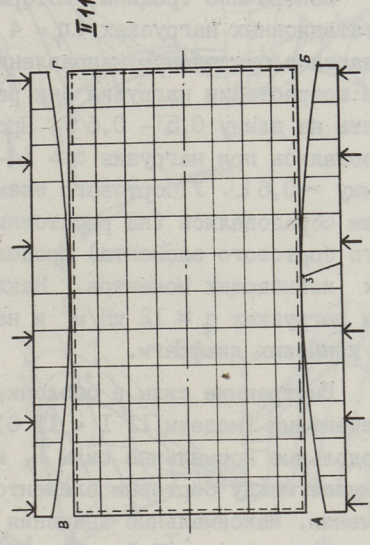
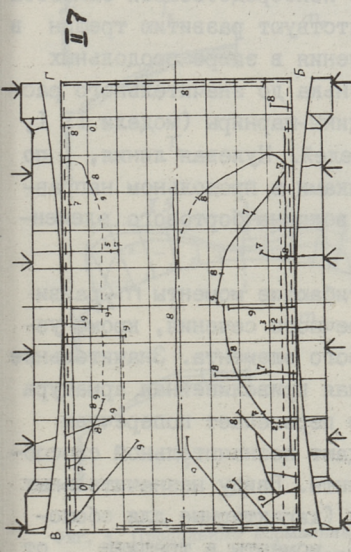
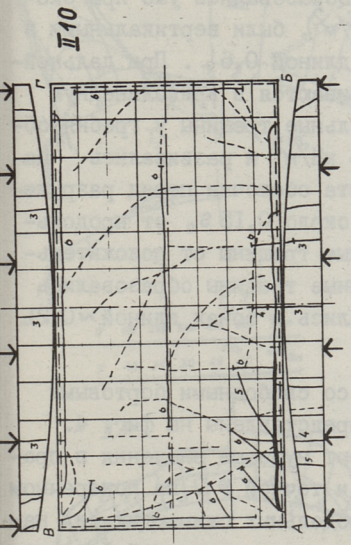
В моделях II 3 и II 4, которые имели мощные продольные бортовые элементы, трещины в незначительной мере развивались в криволинейную часть. При нагрузке  $q_y = 8-10 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_{y0} = 0,95 \text{ кН/м}$  у конька криволинейной части образовались продольные трещины от отрицательных поперечных моментов. Разрушение модели II 4 произошло от разрыва продольной нижней арматуры продольного бортового элемента в сечении  $x = l/4L$  при нагрузке  $q_y = 15 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_{y0} = 0,95 \text{ кН/м}$ .

В моделях II 5 и II 6 первые поперечные трещины появились в бортовых элементах уже при нагрузке  $q_y = 2 \text{ кН/м}^2$ . Значительные расхождения в этих моделях имели место для нагрузок, при которых образовались продольные трещины ( $q_y = 2 \text{ кН/м}^2$  - модель II 6,  $q_y = 5,55 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_{y0} = 0,3 \text{ кН/м}$  - модель II 5). Здесь выявляется влияние криволинейной продольной верхней арматуры на поперечные изгибающие моменты. За счет незначительного армирования угловых зон разрушение оболочек в угловых зонах происходит при нагрузке  $q_y = 4,9 - 5,9 \text{ кН/м}^2$ ,  $q_{y0} = 0,3 - 0,35 \text{ кН/м}$ .

В модели с подпертыми бортовыми элементами II 7 при нагрузке  $q_y = 4 \text{ кН/м}^2$  появились первые трещины (см. фиг. 3) в бортовых элементах. С возрастанием нагрузки эти поперечные трещины развивались до четверти поперечного пролета ( $l/2 s_0$ ). При нагрузке  $q_y = 10 \text{ кН/м}^2$  у четверти поперечного пролета образовались продольные трещины от положительных поперечных моментов. При нагрузке  $q_y = 12-14 \text{ кН/м}^2$  образовались трещины от отрицательных моментов по линиям примыкания криволинейной части к бортовым элементам. Образовались наклонные трещины при нагрузке  $q_y = 16 \text{ кН/м}^2$  и продольные трещины длиной  $0,6L$  от отрицательных изгибающих моментов. Разрушение произошло при нагрузке  $q_y = 19,2 \text{ кН/м}^2$  вблизи бортовых элементов от положительных изгибающих моментов.

В моделях II 8, II 9 и II 11 при нагрузках  $q_y = 8 \text{ кН/м}^2$  наблюдались трещины только в пределах высоты бортовых элементов.

В модели II 10 поперечные трещины в пределах бортового элемента образовались при нагрузке  $q_y = 6 \text{ кН/м}^2$ . Поперечные трещины развивались до четверти длины криволинейной части (при  $q_y = 12 \text{ кН/м}^2$ ). При этой же нагрузке образовалась и продольная трещина от отрицательных моментов. Разрушение



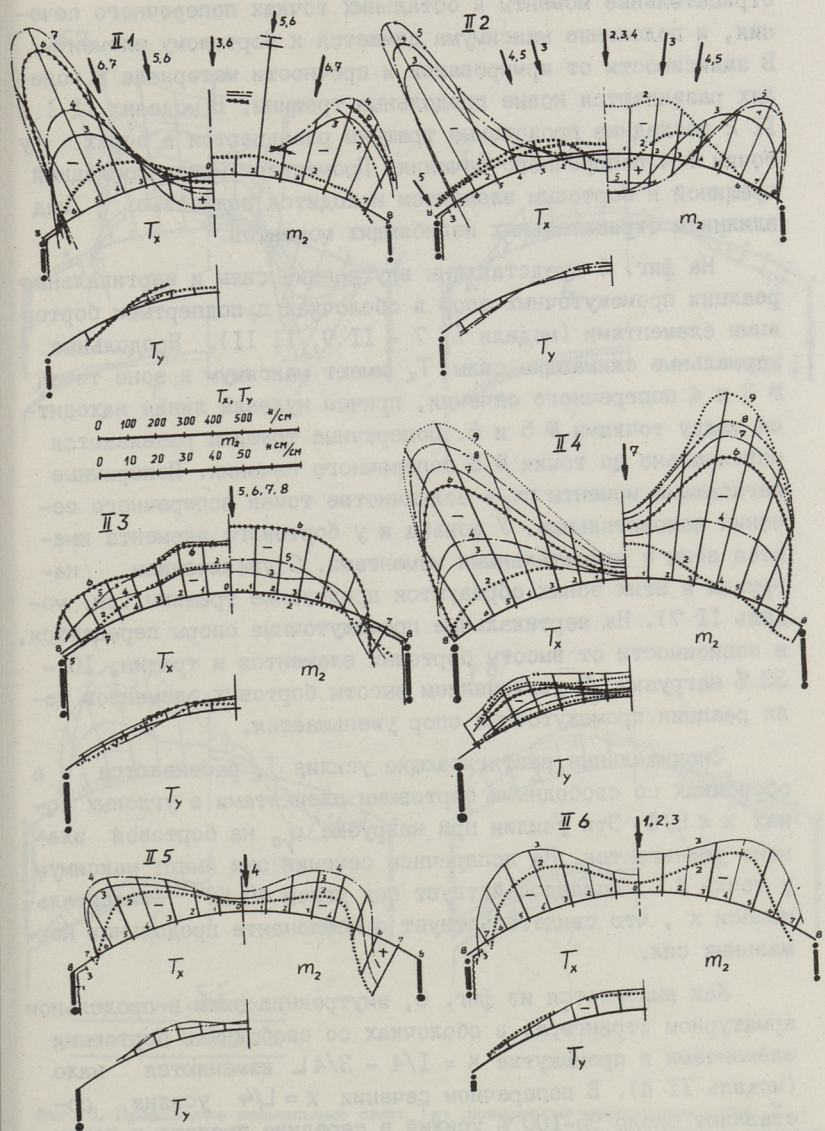
Фиг. 3. Образование трещин в моделях 11 7, 11 8, 11 10, 11 11 с вертикально подпертыми продольными бортовыми элементами. Нагрузки: 1 -  $q_1 = 2 \text{ кН/м}^2$ ; 2 -  $q_2 = 4 \text{ кН/м}^2$ ; 3 -  $q_3 = 6 \text{ кН/м}^2$ ; 4 -  $q_4 = 8 \text{ кН/м}^2$ ; 5 -  $q_5 = 10 \text{ кН/м}^2$ ; 6 -  $q_6 = 12 \text{ кН/м}^2$ ; 7 -  $q_7 = 14 \text{ кН/м}^2$ ; 8 -  $q_8 = 16 \text{ кН/м}^2$ ; 9 -  $q_9 = 18 \text{ кН/м}^2$ .

происходило от действия положительных поперечных моментов и сдвигающих сил в угловой зоне вблизи бортового элемента.

Поперечные трещины, которые образовались уже при эксплуатационных нагрузках ( $q_y = 4 \text{ кН/м}^2$ ), были вертикальными в области в продольном направлении длиной  $0,6L$ . При дальнейшем возрастании нагрузки они развиваются в криволинейную часть на длину  $0,5 - 0,6 S_0$ . Продольные трещины у гребня образовались при нагрузке  $q_y = 14-16 \text{ кН/м}^2$  и развивались на длину  $\sim 0,6L$ . У бортового элемента оболочки перед разрушением образовались (на расстоянии около  $0,15 S_0$  от продольного бортового элемента) продольные трещины от положительных изгибающих моментов. Наклонные трещины образовались при нагрузках  $q_y \approx 12 \text{ кН/м}^2$  и начались в зонах длиной  $\sim 0,2L$  от концевых диафрагм.

Внутренние силы в оболочках со свободными бортовыми элементами (модели II I - II 6) представлены на фиг. 4. Продольные нормальные силы  $T_x$  имеют нулевые значения в промежутке между бортовым элементом и точкой № 7 на поперечном сечении. Максимальные значения продольных сжимающих сил наблюдаются у точек № 5 - 6, т.е. в непосредственной близости к нулевой линии, и эти силы препятствуют развитию трещин в криволинейную часть. Резкие изменения в эпюре продольных сил (уменьшение сжатия в зоне конька до значительного растяжения) вызывают продольные трещины-шарниры (модели II I, II 2 и II 7) в зоне у конька моделей. Нулевая линия, по сравнению с более пологими оболочками в продольном направлении, находится вблизи верхнего волокна бортового элемента.

Отрицательные поперечные изгибающие моменты  $m_2$  развиваются почти во всех точках поперечного сечения, кроме узкой зоны (точки № 6 и 7) у бортового элемента. Значительное влияние на моменты имеет продольная криволинейная арматура (см. модели II 5 и II 6), если ее пересекает поперечная трещина. Продольные трещины обладают незначительной способностью передавать изгибающие моменты. Ввиду незначительных величин поперечных нормальных сил (характерные для оболочек с рассматриваемыми размерами), моменты в трещине от этих сил незначительны (см. модели II I, II 2, II 4). При образовании продольных трещин-шарниров происходит перераспределение внутренних сил. В значительной мере возрастают



Фиг. 4. Продольные нормальные силы  $T_x$ , поперечные нормальные силы  $T_y$  и поперечные изгибающие моменты  $m_2$  в моделях 11 1 - 11 6 со свободными бортовыми элементами. Нагрузки см. на фиг. 2. Стрелками обозначены продольные трещины.

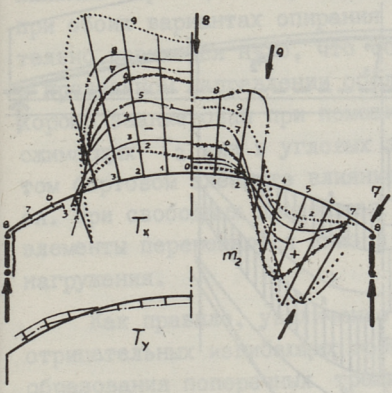
отрицательные моменты в остальных точках поперечного сечения, и положение максимума движется к бортовому элементу. В зависимости от армирования и прочности материала в моделях развиваются новые продольные трещины. В моделях II 1 и II 2 последние продольные трещины развиваются в зонах у точки № 4 поперечного сечения. Промежуток между последней трещиной и бортовым элементом находится полностью под влиянием отрицательных изгибающих моментов.

На фиг. 5 представлены внутренние силы и вертикальные реакции промежуточных опор в оболочках с подпертыми бортовыми элементами (модели II 7 - II 9, II 11). Продольные нормальные сжимающие силы  $T_x$  имеют максимум в зоне точек № 3 и 4 поперечного сечения, причем нулевая линия находится между точками № 5 и 6. Поперечные трещины развиваются максимально до точки № 6 поперечного сечения. Поперечные изгибающие моменты  $m_2$  в большинстве точек поперечного сечения положительные. У конька и у бортового элемента имеются зоны с отрицательными моментами. С увеличением нагрузки в этих зонах образуются продольные трещины (см. модель II 7). На вертикальные промежуточные опоры передается, в зависимости от высоты бортовых элементов и трещин, 10 - 33 % нагрузки. С увеличением высоты бортовых элементов доля реакции промежуточных опор уменьшается.

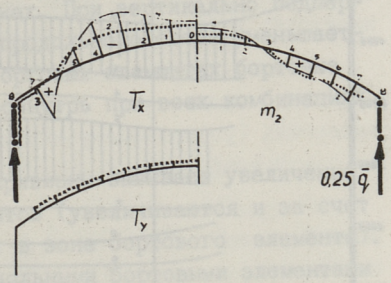
Значительные растягивающие усилия  $T_1$  развиваются в оболочках со свободными бортовыми элементами в угловых зонах  $x \leq L/8$ . Эти усилия при нагрузке  $q_0$  на бортовой элемент уменьшаются. На поперечном сечении они имеют максимум у точки № 6. Усилия действуют под углом 45-60° относительно оси  $x$ , что свидетельствует о компоненте продольных нормальных сил.

Как выясняется из фиг. 6, внутренние силы в продольном арматурном стрингере, в оболочках со свободными бортовыми элементами в промежутке  $x = L/4 - 3/4L$  изменяются мало (модель II 4). В поперечном сечении  $x = L/4$  усилия составляют около 95-100 % усилий в середине пролета и почти не зависят от поперечного распределения внешней нагрузки. Так как в середине пролета поперечная трещина развивается до половины высоты бортового элемента, то основная часть продольных растягивающих сил воспринимается бетоном. Ниж-

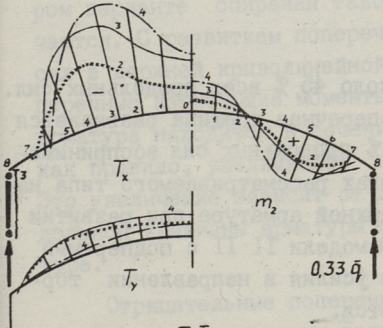
II 7



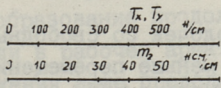
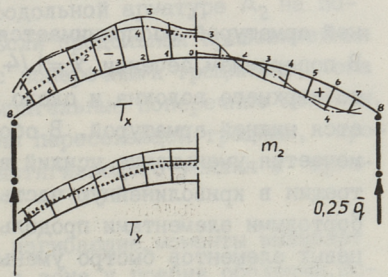
II 8



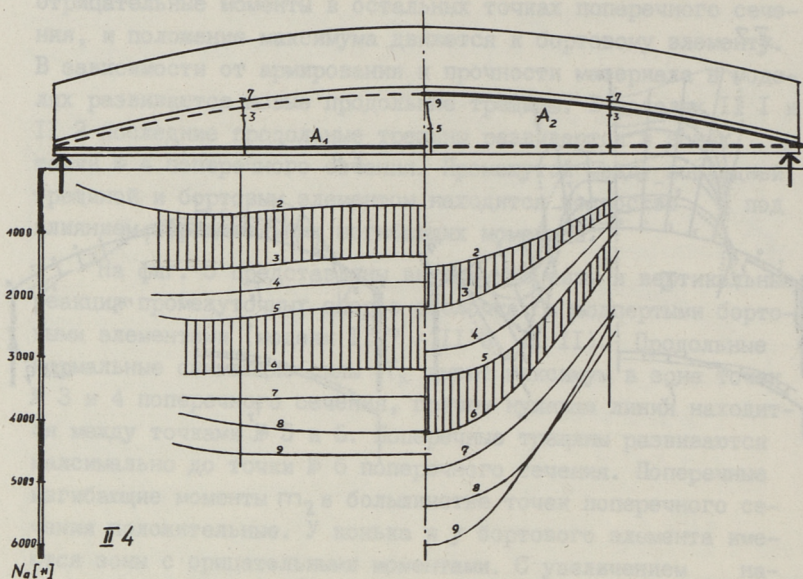
II 11



II 9



Фиг. 5. Продольные нормальные силы  $T_x$ , поперечные нормальные силы  $T_y$ , поперечные изгибающие моменты  $m_2$  и вертикальные реакции в моделях II 7 - II 11 с вертикально подпертыми продольными бортовыми элементами. Нагрузки см. на фиг. 3. Стрелками обозначены продольные трещины.



Фиг. 6. Внутренние силы в продольных прямолинейных ( $A_1$ ) и криволинейных ( $A_2$ ) рабочих продольных арматурах модели II 4. Нагрузки см. на фиг. 2.

ней арматурой воспринимается около 45 % всех продольных сил. В поперечном сечении  $x = L/4$  поперечная трещина развивается до верхнего волокна и около 65 % продольных сил воспринимается нижней арматурой. В оболочках рассматриваемого типа намечается уменьшение усилий в верхней арматуре при развитии трещин в криволинейную часть. В модели II II с подпертыми бортовыми элементами продольные усилия в направлении торцевых элементов быстро уменьшаются.

Вертикальные перемещения конька оболочек со свободными бортовыми элементами  $\Delta V_1$  в 3-4 раза меньше перемещений бортовых элементов  $\Delta V_3$  и составляют  $1/4000 - 1/550 L$ .

Вертикальные перемещения оболочек с подпертыми бортовыми элементами незначительны и создают возможность образования зон отрицательных и положительных изгибающих поперечных моментов. Если свободные бортовые элементы при нагружении всегда сближаются, то расстояние между подпертыми элементами увеличивается (модели II 2 и II 7).



Как выясняется из проведенных экспериментов, вертикальные перемещения гребня оболочек положительной кривизны при обоих вариантах опирания бортового элемента приблизительно равняются нулю, что объясняется образованием свода в продольном направлении оболочки. Этот продольный свод хорошо заанкерован при помощи главных растягивающих  $T_1$  и сжимающих  $T_2$  сил в угловых зонах. При вертикально подпертом бортовом элементе влияние продольного свода уменьшается. При свободных продольных бортовых элементах бортовые элементы перемещаются вниз и вовнутрь при всех комбинациях нагружения.

Как правило, увеличение кривизны вызывает увеличение отрицательных изгибающих моментов (увеличиваются и за счет образования поперечных трещин в зоне бортового элемента). В оболочках со свободными продольными бортовыми элементами поперечные трещины образуются при низких нагрузках, но в дальнейшем мало развиваются на криволинейную тонкостенную часть. Быстрое затухание трещин происходит из-за характерной эпюры продольных нормальных сил  $T_x$ , где максимум сжимающих сил находится вблизи бортового элемента. При втором варианте опирания такого быстрого затухания не отмечается. С развитием поперечных трещин связано и влияние сил в верхней криволинейной продольной арматуре  $A_2$  на поперечные изгибающие моменты. Если продольная криволинейная арматура находится в сечении с поперечными трещинами, она как правило, увеличивает отрицательные поперечные моменты. Это увеличение зависит от длины пересекающей трещины, продольной кривизны арматуры и растягивающего усилия в арматуре.

Отрицательные поперечные изгибающие моменты вызывают образование продольных трещин в зоне у гребня оболочки. Если в рабочей арматуре в пределах продольной трещины напряжения выше предела текучести, то образуются пластичные линейные шарниры, воспринимающие предельные изгибающие моменты  $m_{пред}$ . Происходит перераспределение внутренних сил (сдвигающих сил, продольных сил и изгибающих моментов). Для такого типа оболочек это вызывает увеличение отрицательных моментов в зоне между трещиной и бортовым элементом, а также увеличение сжимающих усилий у бортового элемента. Перераспределение моментов вызывает образование новых пластич-

ных шарниров (ряд продольных трещин), которые распространяются почти по всей длине оболочки.

Продольные трещины от положительных изгибающих моментов (открываются с внутренней стороны оболочки) образуются в узкой зоне у бортового элемента. Наклонные трещины образуются в угловых зонах на небольшом протяжении и скоро переходят в продольные трещины.

Усилия в продольной рабочей арматуре у нижнего края бортового элемента на длине  $l/8-7/8l$  почти постоянные, а анкеровка (уменьшение усилий) имеет место в узкой зоне у торцевой диафрагмы.

Разрушение оболочек рассматриваемого типа со свободными бортовыми элементами происходит по балочной схеме при величине плеча внутренних сил  $0,7-0,8$  от полной высоты оболочки. Так как поперечные трещины при этом очень быстро затухают и незначительно развиваются в криволинейной части оболочки, а максимум эпюры сжимающих продольных сил находится у бортового элемента, то вся высота оболочки не реализуется как плечо внутренних сил.

Разрушение от отрицательных изгибающих поперечных моментов немислимо, так как это ведет, в момент разрушения, к увеличению потенциальной энергии конструкции.

В оболочках с подпертыми бортовыми элементами поперечные трещины (т.е. зона растяжения) развиваются в криволинейную часть и затухают примерно в четверти поперечной длины криволинейной части оболочки. При этом развиваются значительные положительные изгибающие поперечные моменты, которые вызывают образование продольных линейных пластичных шарниров. Имеется возможность образования пятилинейных пластичных шарниров от изгибающих моментов разного знака, которые от совместного влияния продольных усилий  $T_x$  (растяжения) и поперечных усилий  $T_y$  (сжатия) вызывают разрушение оболочки.

Data Analysis of the Experimental Investigation of  
the Translator Shell Models of Cement Mortar

Summary

The paper presents some data of the experiments of reinforced cement mortar models. The shell had the rectangular plan with sizes  $L/l = 2$  and  $R_1/R \approx 5$ . The longitudinal edge diaphragms had the shape of a beam. The schemes of cracks and inner forces of the models are given in the paper. Transversal cracks in the shells with free longitudinal edge-beams arise under low loads. These cracks will not progress far into the curved part of the shell. There are longitudinal cracks caused only by the negative transversal bending moments. Plastic line-hinges are formed and redistribution of the inner forces takes place. New parallel longitudinal cracks occur. The failure of the shells with free longitudinal edge-beams may be caused by the scheme of the beam. The length of the shoulder of the longitudinal normal forces is  $0,7 \dots 0,8$  of the total height of the shell.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК ИЗ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ С ДИСКРЕТНЫМИ ИСКУССТВЕННЫМИ ТРЕЩИНАМИ

В статье рассматриваются вопросы работы квазицилиндрических оболочек со сквозными поперечными и с продольными моментными трещинами. В железобетонных оболочках средней длины поперечные трещины вызываются продольными нормальными силами, а продольные несквозные трещины — поперечными изгибающими моментами.

Для лучшего исследования влияния названных трещин применяли отдельные для каждого типа трещин упругие модели (плановые размеры 120х60 см, толщина тонкостенной оболочки 4–5 мм) из стелопластика ( $E = 20$  ГПа,  $\mu = 0,2$ ). Использовали метод продельвания искусственных трещин с определенными свойствами.

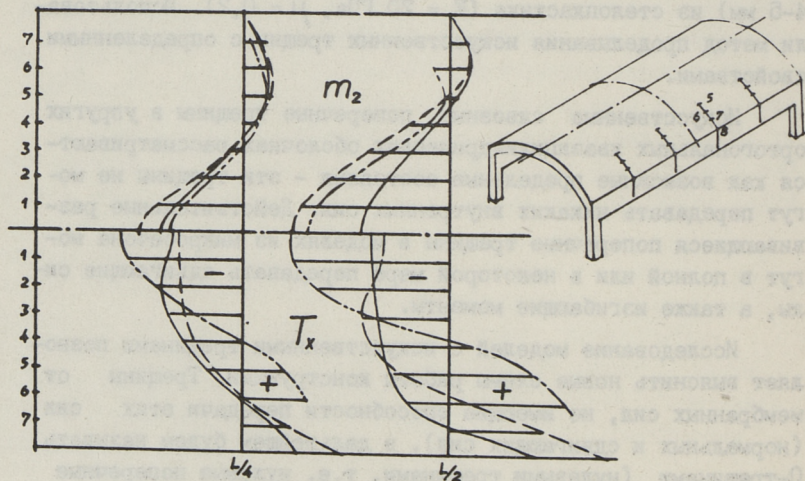
Искусственные сквозные поперечные трещины в упругих ортогональных квазицилиндрических оболочках рассматриваются как возможные предельные состояния — эти трещины не могут передавать никаких внутренних сил. Действительные развивающиеся поперечные трещины в моделях из микробетона могут в полной или в некоторой мере передавать сдвигающие силы, а также изгибающие моменты.

Исследование моделей с искусственными трещинами позволяет выяснить новые схемы работы конструкции. Трещины от мембранных сил, не имеющие способности передачи этих сил (нормальных и сдвигающих сил), в дальнейшем будем называть 0-трещинами (нулевыми трещинами, т.е. нулевые поперечные трещины и нулевые наклонные трещины).

Искусственные продольные трещины в ортогональных квазицилиндрических оболочках имеют способность передачи мембранных сил. Если мембранные силы не вызывают в трещинах

поперечных изгибающих моментов, то эти трещины называются действительными шарнирами.

Значительные усилия продольного растяжения развиваются всегда у нижнего волокна продольного бортового элемента, а у верха бортового элемента развивается зона сжатия. Такое распределение внутренних продольных сил типично для исследуемого типа оболочек и вызывает образование поперечных трещин. Для исследования применяли масштабные стеклопластиковые модели в разных геометрических параметрах и длинами поперечных трещин. В моделях с поперечными трещинами только в пределах высоты бортовых элементов трещины имели шаг около  $1/12$  от продольного пролета  $L$ . Продольные стрингера для восприятия продольных сил были предусмотрены в виде целой части стеклопластика (около  $0,25 \text{ см}^2$ ) у низа бортового элемента. Эти элементы позволяли изменения продольных сил стрингера в продольном направлении. Для исследования влияния поперечных трещин в криволинейной части были использованы искусственные нулевые трещины с шагом  $1/5L$  с постепенным увеличением длин трещин с шагом  $1/8 s_0$  (см. фиг. 1).



Фиг. 1. Продольные нормальные силы и поперечные изгибающие моменты в моделях  $s_2$  разными длинами поперечных трещин при нагрузке  $q = 4 \text{ кН/м}$ ,  $q_0 = 0,37 \text{ кН/м}$ . Условные обозначения — упругая, - - - поперечная трещина до точки № 8, - · - · - поперечная трещина до точки № 6.

В качестве продольных стрингеров у низа бортовых элементов была использована стальная проволока, прикрепленная к бортовым элементам. В продольном направлении эти стержни не были анкерованы к бортовым элементам против продольного сдвига. Исследуемые трещины не позволяли никакой передачи внутренних сил в пределах трещин. Такое состояние дает картину распределения внутренних сил в стадии, когда неармированные поперечные трещины в железобетонных оболочках чрезмерно открываются. Такие варианты трещин также дают ответ на вопросы, как распределяются внутренние силы в оболочках с неанкерованными против сдвига продольными арматурными стрингерами.

Некоторые типичные эпюры основных внутренних сил представлены на фиг. 1. Перераспределение продольных нормальных сил между неанкерованными стрингерами и криволинейной частью в большей мере зависит от жесткости отдельных элементов на растяжение. При свободном против продольного сдвига стрингере основная часть продольного растяжения воспринимается криволинейной частью. С увеличением длины поперечной трещины доля растяжения в стрингере увеличивается. В поперечной трещине до точки № 8 поперечного сечения эта доля составляет 7,2 % от общего растяжения, до точки № 7 - 8,9 %, до точки № 6 - 13,7 %, до точки № 5 - 16,8 %, до точки № 4 - 32 %. Во всех случаях в стержнях имеются постоянные в продольном направлении усилия, которые намного меньше усилий действительного распределения продольных сил. С увеличением длины трещин доля продольного свода увеличивается. В железобетонных оболочках криволинейная часть которых не имеет продольной рабочей арматуры, перераспределение растяжения на криволинейную часть приведет к образованию трещины максимальной длины. При этом распределение продольных нормальных сил позволяет беспрепятственное развитие поперечных трещин в сторону конька оболочки. Образование поперечных трещин в средних зонах вызывает похожее распределение внутренних сил и в других поперечных сечениях. При этом главные растягивающие усилия перераспределяются так, что в железобетонных оболочках развиваются новые наклонные трещины.

Основное изменение в изгибающих моментах происходит при переходе от упругой стадии в стадию с трещинами в пре-

делах бортовых элементов. Дальнейшее изменение в зоне у конька оболочки не так заметно. Распределение поперечных изгибающих моментов в зоне у точек № 3-5 свидетельствует об образовании оболочки с изменяющимися размерами.

Можно сделать вывод, что применение свободных продольных стержней будет благоприятным условием для чрезмерного образования и развития поперечных трещин. В квазицилиндрических железобетонных оболочках продольная рабочая арматура должна всегда быть анкерована не только на концах, но и против сдвига в продольных каналах бортовых элементов.

В квазицилиндрических оболочках положительной кривизны при всех видах нагрузок развиваются значительные изгибающие поперечные моменты, которые вызывают образование продольных трещин.

Как правило, с появлением первой трещины в шельге в некоторых типах оболочек положительной гауссовой кривизны не образуется пластического шарнира в полном смысле. В продольных сечениях оболочек действуют изгибающие моменты и поперечные нормальные силы.

Эти силы по величине зависят от типа, геометрических и грузовых параметров оболочки. Если поперечная арматура располагалась у нижней поверхности моделей с небольшим защитным слоем, оказалось необходимым считать, что сечения в продольных трещинах являются бетонными, внецентренно сжатыми поперечными нормальными силами. Эти силы вызывают в непосредственной близости трещины значительные моменты защемления, которые по величине в некоторых случаях даже больше естественных.

На такое влияние обращает внимание проф. У. Нигул (1956 г.) в эксперименте с цилиндрической оболочкой с неармированной криволинейной частью. В моделях разрушения почти не зависели от продольных трещин в зоне отрицательных моментов.

Если передача моментов не обеспечивается, то эти трещины работают как действительные шарниры, а нулевые значения изгибающих моментов обеспечиваются перераспределением внутренних сил.





сравнению с упругой стадией изменяются, причем в зоне конька силы сжатия уменьшаются, а максимум сжимающих сил передвигается в сторону бортового элемента. Такое изменение отмечается в обоих вариантах нагружения. Отрицательные поперечные изгибающие моменты у трещины уменьшаются, а в зоне у бортового элемента увеличиваются. В модели с двумя продольными трещинами отмечается дальнейшее перемещение максимума сжатия в сторону бортового элемента. В эпюре заметны изгибающие моменты в пределах трещин. Предельное значение этих моментов выясняется из эпюры обеих схем нагружения. В пределах продольных трещин (в зоне у точки № 0 и № 2) изгибающие моменты близки к постоянным, но они существенно меньше, чем в упругих оболочках. Отмечается дальнейшее увеличение отрицательных моментов в зонах у бортовых элементов. С третьей продольной трещиной вышеописанные процессы продолжают, но уже отмечается общее уменьшение площади эпюры поперечных изгибающих моментов. Аналогичное влияние имеет место во всех поперечных сечениях ( $x = L/2$ ,  $x = L/4$ ,  $x = L/8$ ). Если вся криволинейная часть подвергнута влиянию продольных искусственных трещин (в поперечном сечении существуют 4 шарнира), то поперечные изгибающие моменты почти постоянные во всех точках сечения.

Эпюры поперечных нормальных сил  $T_y$  позволяют выяснить влияние эксцентриситета целой части трещины. Существует связь между силами  $T_y$  и изгибающими моментами  $m_2$ . При всех экспериментах отмечается, что знак локальных моментов у краев трещин совпадает с приведенной эпюрой ( $m_{\text{прив.}} = T_y \cdot e$ ) поперечных моментов, а абсолютные величины отличаются примерно в 2 раза. Это можно объяснить уменьшением плеча внутренней пары сил в трещине за счет концентрации напряжений. По сравнению с оболочками без трещин отмечается значительное уменьшение отрицательных моментов даже при существенных эксцентриситетах усилий  $T_y$ . Для определения плеча внутренних сил был сделан ряд экспериментов, из которых выяснилось, что плечо колеблется в пределах  $0,2-0,35 \delta$ . Влияние поперечной нормально-силы  $T_y$  при растяжении выясняется по схеме средней волны.

Можно сделать вывод, что при помощи искусственных трещин можно исследовать влияние продольных трещин и что эти трещины приводят оболочки к состоянию, близкому к безмомент-

ному (относительно небольшие моменты и характерное поперечное распределение продольных нормальных сил). Все поперечное сечение сжато, а максимум сжатия находится в зоне у точек № 5 и № 6. Такое распределение продольных сил дает возможность отказаться от продольной арматуры в железобетонных оболочках в криволинейной части. Поперечные трещины не проникают в криволинейную часть. Поперечные изгибающие моменты, как правило, при всех вариантах нагружений однозначные и отрицательные. Шарниры-трещины отрицательных изгибающих моментов вызывают такое распределение моментов, что имеется возможность образования следующих трещин. Как правило, эти трещины не вызывают разрушения конструкции, если продольная арматура предусмотрена с учетом уменьшения плеча продольных внутренних сил и возможного образования зоны растяжения у конька оболочки.

Если связать эпюру сил  $T_x$  с образованием поперечных трещин у точки № 7 поперечного сечения и мало перемещается, а максимальная точка сжатия находится рядом с нейтральной линией, и тем самым прекращается дальнейшее развитие трещин.

При расчете оболочек с учетом возможности образования продольных трещин основной задачей является расчет без трещин, если трещины конструктивно не предусмотрены. Вторым вариантом нужно рассмотреть оболочки с трещинами с учетом конкретных поперечных нормальных сил с эксцентриситетом. Самые отличающиеся результаты получаются, если в трещинах поперечные изгибающие моменты равняются нулю. Все эти расчеты должны быть тесно связаны с другими возможными типами трещин.

Investigation of the Elastic Shells  
with Artificial Cracks

Summary

The paper deals with the problems of the quasi-cylindrical shells with the membrane and moment cracks. Elastic models (120 x 60 cm, thickness 4...5 mm) made from fiberglassplastic ( $E = 20$  GPa,  $\mu = 0,2$ ) were used. The method of the artificial cracks was used. The longitudinal cracks were made taking into account the values of the transversal bending moments. Between the artificial longitudinal cracks in the shell there are elastic zones with great stiffness. It is possible to draw a conclusion that the longitudinal cracks change the shell into a membrane with little transverse bending moment and with the characteristic distribution of the longitudinal normal forces.

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ РАСЧЕТА АВТОКЛАВОВ  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

## Введение

В статье рассматриваются некоторые результаты расчета автоклава, опирающегося только на две опоры. Для исследования напряженно-деформированного состояния стенки автоклава в районах действия локальных нагрузок существуют разные методы. Одним из них является метод конечных элементов, который в последнее время широко применяется в исследованиях инженерных конструкций.

Статья является продолжением предыдущей статьи [2]. В ней проведено сравнение результатов аналитических расчетов с результатами, полученными при помощи использования метода конечных элементов. Она является первичной попыткой исследовать напряженно-деформированное состояние опорных районов стенки автоклава, опирающегося на две опоры, при помощи использования метода конечных элементов.

## О возможностях программы

Инженерные конструкции можно рассматривать как некоторую совокупность конструктивных элементов, соединенных в конечном числе узловых точек. Когда известны соотношения между внешними усилиями и перемещениями для каждого отдельного элемента, то, используя хорошо известные методы [1], можно описать поведение конструкции в целом.

Составлена вычислительная программа для статического линейного упругого анализа трехмерных тел методом конечных элементов. Программа написана на алгоритмическом языке Фортран и не зависит от типа вычислительной машины.

Программа может быть использована для расчета систем, состоящих из большого числа подконструкций. Практически нет ограничений на число элементов и количество случаев нагружений, но несмотря на большую мощность, программа позволяет эффективно решать и достаточно простые задачи.

Для исследования напряженно-деформированного состояния стенки автоклава использовали произвольный четырехугольный конечный элемент тонкой оболочки любой геометрии, где могут быть учтены узловые нагрузки (проекция вектора нагрузки на три оси и моменты относительно трех осей), температура (либо в каждом узле отдельно либо градиент в любом направлении), гравитационные силы, силы инерции и давление.

Для статического анализа программа разбита на 4 фазы. Эти фазы выполняются в следующей последовательности:

1) считывание и формирование исходных данных (координаты узлов и нагрузки);

2) формирование глобальной матрицы жесткости происходит считыванием элементных матриц жесткости и формирование уравнений равновесия;

3) решение уравнений равновесия для определения узловых перемещений (все условия по нагрузкам обрабатываются одновременно);

4) с использованием узловых перемещений вычисляются внутренние усилия и моменты в элементах для всех условий нагружения.

Для каждого четырехугольного элемента можно кодировать 24 степени свободы (6 в каждом узле - движения в направлении трех осей, а также вращения относительно этих осей). Изгибные свойства такого элемента полностью описаны в [1]. Таким образом, можно имитировать почти все граничные условия.

Но существует и т.н. "граничный элемент", с помощью которого можно ограничивать узловые перемещения, вычислять реакции опор и учитывать перемещения линейного упругого основания.

Использование "граничного элемента" дает возможность ограничить полностью или до определенной величины любую степень свободы, а также вычислить реакции соответствующих

опор. Кроме того, "граничный элемент" можно использовать для определения ненулевых узловых перемещений в любом направлении.

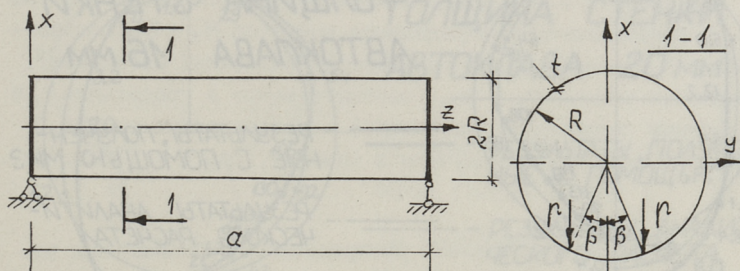
"Граничный элемент" представляет собой некоторую гипотетическую ленту, которая имеет осевую и вращательную жесткость, и может быть ориентирована отдельными осями.

В настоящее время идут попытки соединить четырехугольный элемент с "граничным элементом", чтобы еще эффективнее имитировать поведение опорного кольца, и опорного района стенки автоклава.

Этот процесс помогает нам исключить вычислительные трудности, связанные с шестью степенями свободы при исследованиях и при расчетах автоклавов как замкнутых цилиндрических оболочек.

## 2. Сравнение результатов

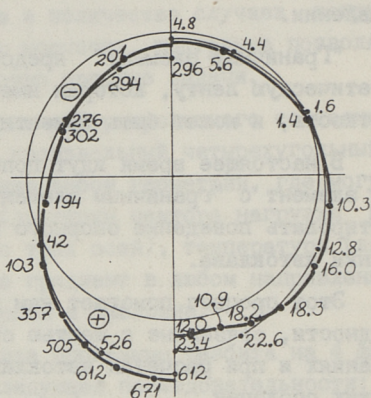
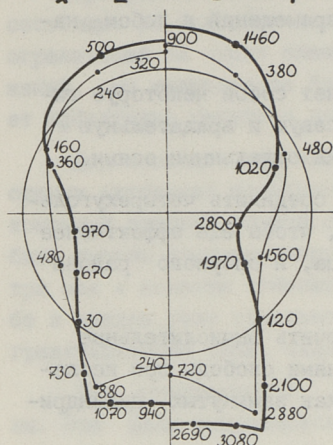
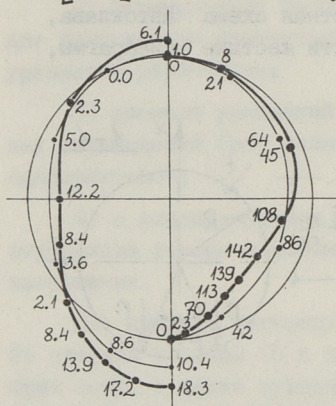
На фигуре I представлена расчетная схема автоклава, опирающегося на две в своей плоскости жесткие диафрагмы, где



Фиг. 1. Расчетная схема автоклава.

- $a = 17000$  мм - длина автоклава;
- $R = 1000$  мм - радиус автоклава;
- $t = 16(20)$  мм - толщина стенки автоклава;
- $p = 20$  кН/м - нагрузка от рельса;
- $\beta = 22^{\circ}01'$

На фигурах 2 и 3 представлены результаты расчетов и проведено сравнение результатов, полученных с помощью МКЭ, с результатами аналитических расчетов.

$M_x$  [N·M/M]  $M_\varphi$  $N_x$  [kN/M]  $N_\varphi$  $w$  [MM]  $T_{x\varphi}$ 

ТОЛЩИНА СТЕНКИ  
АВТОКЛАВА 16 мм

— РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ МКЭ  
- - РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Фиг. 2. Сравнение результатов, полученных МКЭ, с результатами аналитических расчетов при  $t = 16$  мм.

На фигурах 2 и 3:

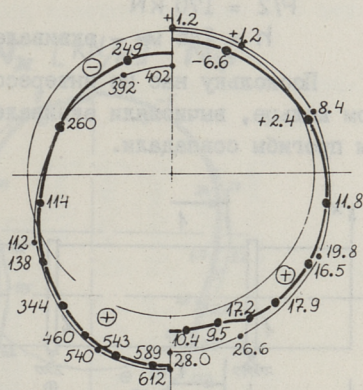
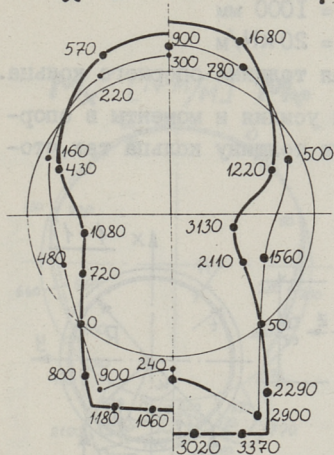
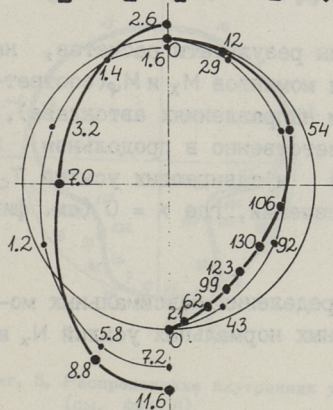
$M_x, N_x$  - моменты и нормальные усилия в продольном направлении автоклава ( $z = d/2$ );

$M_\varphi, N_\varphi$  - моменты и нормальные усилия в окружном направлении автоклава ( $z = d/2$ );

$T_{x\varphi}$  - сдвигающие усилия ( $z = 0; d$ );

$w$  - радиальные перемещения стенки автоклава ( $z = d/2$ ).



$M_x$  [N·M/M]  $M_{\varphi}$  $N_x$  [KN/M]  $N_{\varphi}$  $w$  [MM]  $T_{x\varphi}$ 

ТОЛЩИНА СТЕНКИ  
АВТОКЛАВА 20 мм

- РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ МКЭ  
— РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Фиг. 3. Сравнение результатов, полученных МКЭ, с результатами аналитических расчетов при  $t = 20$  мм.

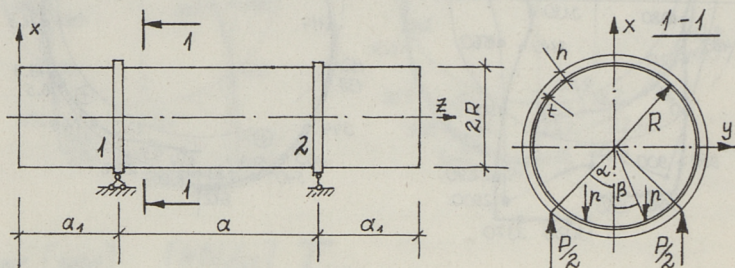
Можно сказать, что результаты довольно хорошо совпадают и метод конечных элементов применим при исследованиях стенки автоклава.

### 3. Результаты расчета опорных районов стенки автоклава

На фигуре 4 представлена расчетная схема, где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 4000 \text{ мм} & t &= 14(20) \text{ мм} \\
 a &= 12000 \text{ мм} & R &= 1000 \text{ мм} \\
 P/2 &= 170 \text{ кН} & p &= 20 \text{ кН/м} \\
 h &= 145 \text{ мм} - \text{эквивалентная толщина опорного кольца.}
 \end{aligned}$$

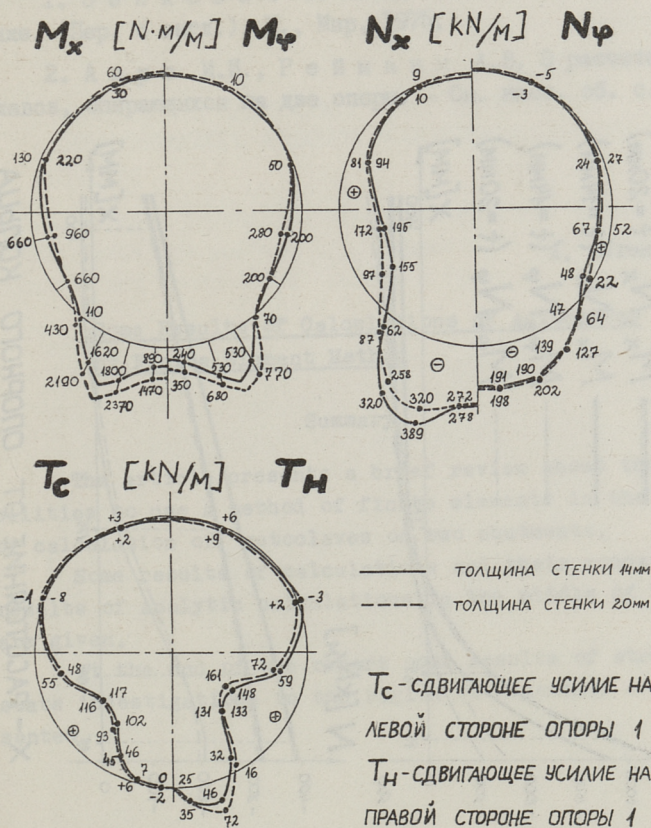
Поскольку нас не интересовали усилия и моменты в опорном кольце, вычисляли эквивалентную толщину кольца так, чтобы прогибы совпадали.



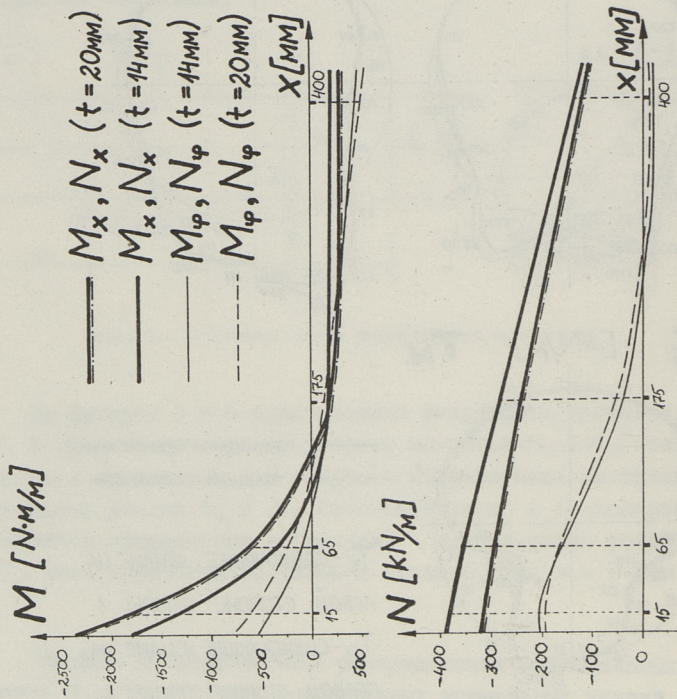
Фиг. 4. Расчетная схема двухопорного автоклава.

На фигурах 5 и 6 представлены результаты расчетов, на фиг. 5 представлены распределения моментов  $M_x$  и  $M_\varphi$  (соответственно в продольном и в окружном направлениях автоклава), нормальных усилий  $N_x$  и  $N_\varphi$  (соответственно в продольном и в окружном направлении автоклава) и сдвигающих усилий  $T_c$  и  $T_n$ . Все результаты получены в сечении, где  $x = 0$  (см. фиг. 6).

На фиг. 6 представлены распределения максимальных моментов  $M_x$  и  $M_\varphi$ , а также максимальных нормальных усилий  $N_x$  и  $N_\varphi$ .



Фиг. 5. Распределение внутренних усилий и моментов в сечении  $x = 0$  (см. фиг. 6).



### X - РАССТОЯНИЕ ОТ ОПОРНОГО КОЛЬЦА

Фиг. 6. Распределение максимальных моментов и максимальных нормальных усилий.

## Л и т е р а т у р а

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. (Пер. с англ.), М., Мир, 1975.

2. Ааре И.И., Рейманн А.В. О расчете автоклавов, опирающихся на две опоры. - См. наст. сб. с. 15.

A. Reimann

### Some Results of Calculations of Autoclaves by Finite Element Method

#### Summary

The article presents a brief review about the possibilities to use a method of finite elements in the process of calculation of autoclaves on two abutments.

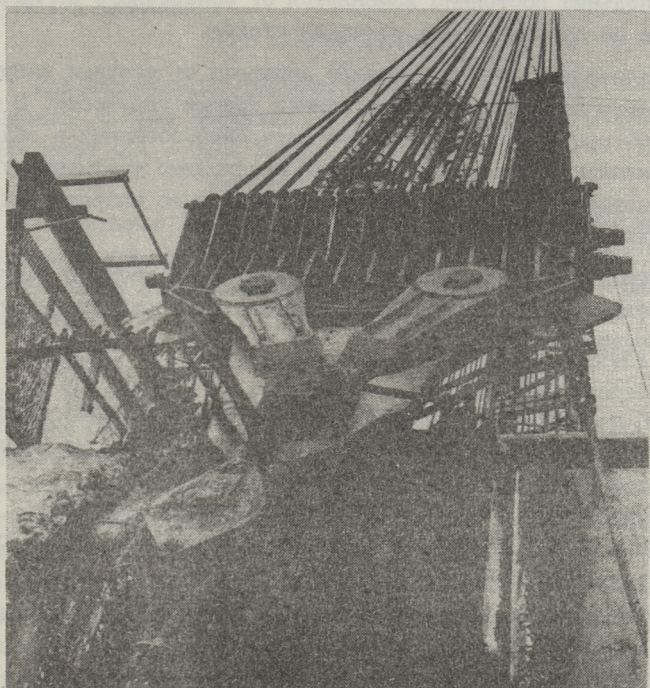
Some results of calculations and their comparison with results of analytic calculations in the middle of the span are given.

At the end of the report some results of stress-strain state investigations in the region of abutments are presented.



ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОРПУСА  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОБЛАСТИ МОНТАЖНОГО  
ШТУЦЕРА

Строповка крупногабаритных тяжеловесных аппаратов колонного типа при монтаже осуществляется с помощью монтажных штупцеров или бестросовых захватов (фиг. 1). В настоящее



Фиг. 1. Монтаж цилиндрического аппарата массой 980 т диаметром 5 м и высотой 92 м с помощью бестросового захвата.

время используются три вида соединений монтажных штуцеров и бестросовых захватов с корпусом аппарата в зависимости от их конструкции:

- 1) с помощью короткой квадратной листовой коробки, приваренной к корпусу по периметру;
- 2) с помощью короткой цилиндрической оболочки, приваренной к аппарату по периметру;
- 3) с помощью системы ребер, установленных по концам крестообразного штуцера.

Корпус аппарата в условиях подъема работает как цилиндрическая оболочка под действием локальных нагрузок от штуцеров в виде изгибающего момента и сдвигающей силы. Причем, направление этих нагрузок относительно аппарата в процессе подъема постоянно изменяется от поперечного в начале подъема до продольного в конечной стадии.

Расчет напряжений в стенке аппарата от местных нагрузок производится на основе линейной теории упругости. В то же время при оценке предельного состояния оболочки в области приложения локальной нагрузки необходимо учитывать упругопластическую работу материала в наиболее напряженных сечениях.

Нормами расчета сосудов и аппаратов на местную нагрузку в области опор [1, 2] рекомендуется проверку прочности производить по формуле:

$$\sigma_b \leq \sigma_T \cdot k_1, \quad (I)$$

где  $\sigma_b$  - напряжения от изгибающего момента в области приложения местной нагрузки, определенные из условия упругой работы оболочки;

$\sigma_T$  - предел текучести материала корпуса аппарата;

$k_1$  - коэффициент, учитывающий упругопластическую работу оболочки.

В общем случае коэффициент " $k_1$ " может быть определен из следующего выражения (I):

$$k_1 = \frac{1 + 3\nu_1 \cdot \nu_2}{3\nu_1^2} \left( \sqrt{\frac{9\nu_1^2(1 - \nu_2^2)}{(1 + 3\nu_1 \cdot \nu_2)^2 + 1} - 1} \right), \quad (2)$$

здесь

$$\nu_1 = \frac{\tilde{\sigma}_m}{\sigma_b} \quad \text{и} \quad \nu_2 = \frac{\bar{\sigma}_m}{\sigma_b}; \quad (3)$$



$\sigma_m^2$  - мембранные напряжения в оболочке от местной нагрузки;

$\bar{\sigma}_m$  - общие мембранные напряжения в оболочке, как в балке кольцевого сечения, от массы аппарата.

Величина общих мембранных напряжений ( $\bar{\sigma}_m$ ) в области приварки штуцеров невелика и ею можно пренебречь при практических расчетах. В этом случае  $\nu_2 = 0$  и формула (2) принимает вид:

$$k_1 = \frac{1}{3\nu_1^2} (\sqrt{9\nu_1^2 + 1} - 1). \quad (4)$$

Величина максимального условного напряжения, подсчитанного из условия упругой работы материала оболочки, равна:

$$[\sigma] = \tilde{\sigma}_m + \sigma_\delta. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (5) значения  $\sigma_b$  и  $\tilde{\sigma}_m$  из выражений (1) и (3) получим

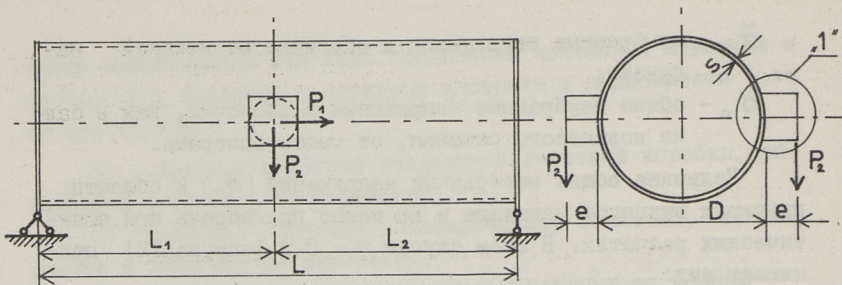
$$[\sigma] = \sigma_r \cdot k_1 (1 + \nu_1). \quad (6)$$

Предварительные расчеты показывают, что величина коэффициента " $\nu_1$ " для нагрузок от монтажных штуцеров изменяется в пределах 0,1 - 0,3. В этом случае

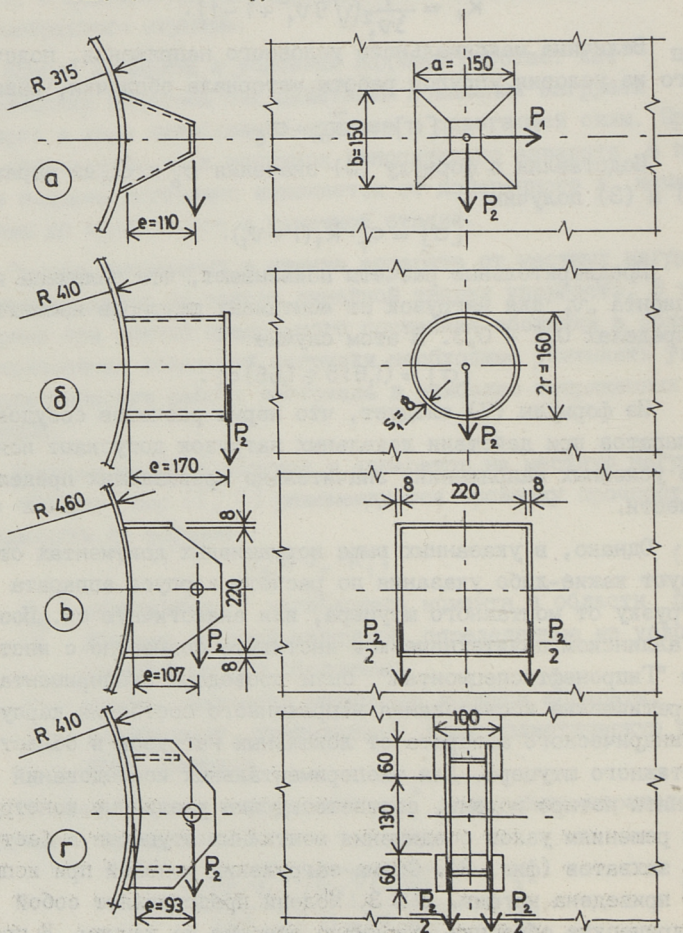
$$[\sigma] = (1,615 \div 1,66) \sigma_r. \quad (7)$$

Из формулы (7) следует, что нормы расчетов сосудов и аппаратов при действии локальных нагрузок допускают появление условных напряжений, значительно превышающих предел текучести.

Однако, в указанных выше нормативных документах отсутствуют какие-либо указания по расчету корпуса аппарата на погрузку от монтажного штуцера, или аналогичную ей. Поэтому в Таллинском политехническом институте совместно с институтом "Гипронефтеспецмонтаж" были проведены экспериментально-теоретические исследования напряженного состояния корпуса цилиндрического аппарата от локальных нагрузок в области монтажного штуцера. Для экспериментальных исследований были приняты четыре модели, соответствующие различным конструктивным решениям узлов соединения монтажных штуцеров и бестросовых захватов (фиг. 3). Схема загрузки моделей при испытании приведена на фиг. 2 и 3. Модели представляют собой цилиндрические оболочки, шарнирно опертые по концам. В пролете по длине оболочек в диаметрально противоположных точках установили два консольных штуцера.



Фиг. 2. Схема нагружения моделей при испытании.



Фиг. 3. Конструкции узлов соединений штулеров с оболочкой и схема приложения нагрузки: а) модель № 1; б) модель № 2; в) модель № 3; г) модель № 4.

Штуцера были выполнены в виде:

- Модель № 1 - усеченной пирамиды;
- Модель № 2 - цилиндрической оболочки;
- Модель № 3 - квадратной листовой коробки;
- Модель № 4 - части крестообразного штуцера, прикрепленного к оболочке по концам.

Штуцера приваривались к оболочке сплошными сварными швами. Основные характеристики моделей приведены в табл. I.

Т а б л и ц а I

Наименование характеристики моделей	Модель № 1	Модель № 2	Модель № 3	Модель № 4
Диаметр цилиндрической оболочки "Д", мм	630	820	920	620
Толщина стенки оболочки "S", мм	6	6	8	6
Длина оболочки "α", мм	4000	3850	3000	3850
Расстояние от споры до места установки штуцера "α₁", мм	2200	2150	1500	1700
Высота сечения штуцера "в", мм	150	-	228	250
Ширина сечения штуцера "а", мм	150	-	228	100
Диаметр оболочки штуцера "2r", мм	-	160	-	-
$\frac{R_{ср}}{S}$	52	67,8	57	67,8
$\frac{b}{2R_{ср}} \left( \frac{r_{ср}}{R_{ср}} \right)$	0,24	0,187	0,25	0,307
$\frac{b}{S} \left( \frac{2r_{ср}}{S} \right)$	25	25,3	28,5	41,7

Нагружение модели № 1 производилось приложением нагрузки к монтажным штуцерам вдоль образующей и направляющей цилиндрической оболочки, а моделей № 2-4 - приложением нагрузки вдоль направляющей. Деформации (условные напряжения) и перемещения в оболочке измерялись в области крепления штуцеров при помощи тензодатчиков и индикаторов. Экспериментальные исследования показали следующее. Максимальные нормальные напряжения и прогибы в стенке оболочки возникают в месте приварки штуцера при направлении нагрузки вдоль направляющей.

Кольцевые нормальные напряжения в этом случае в 2-3 раза больше продольных. При направлении нагрузки вдоль об-

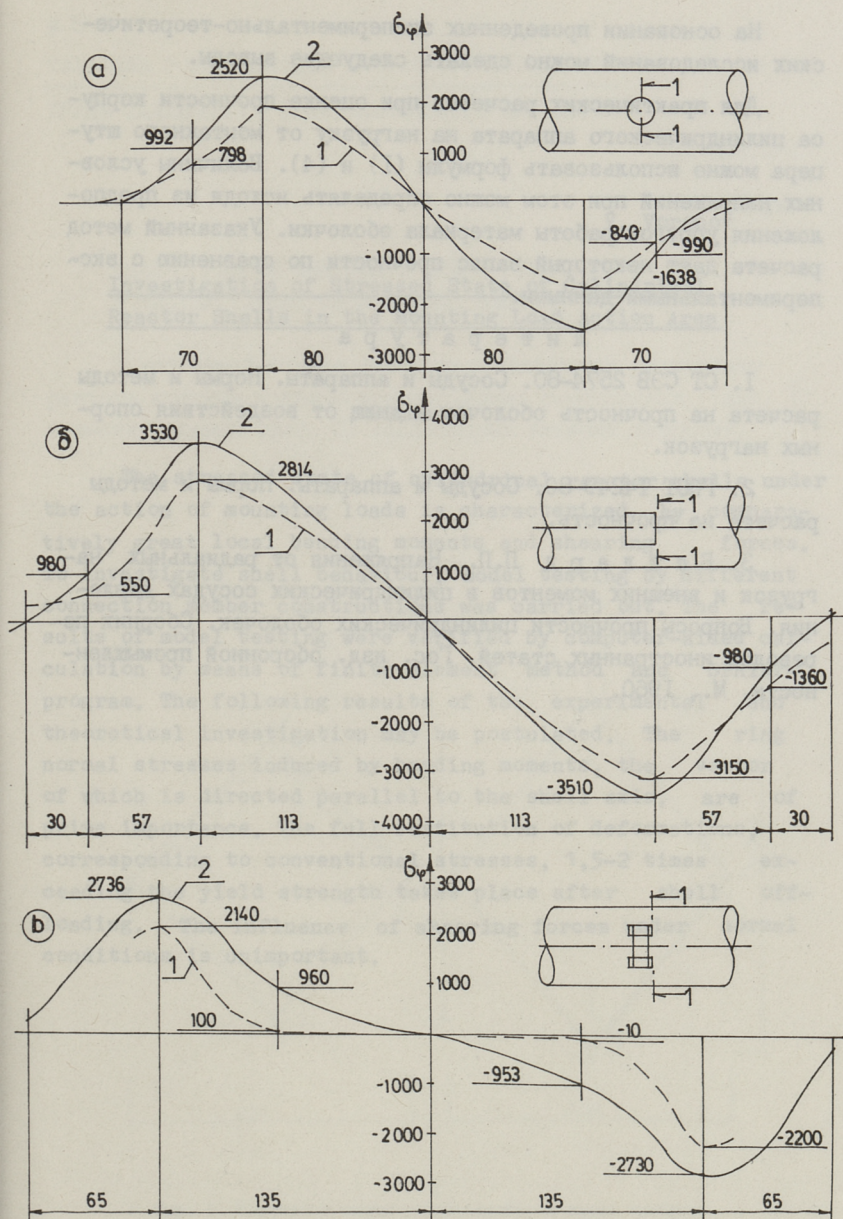
разующей нормальные направления как кольцевые, так и продольные в 2,5-3 раза меньше максимальных.

После снятия нагрузки происходит полное восстановление деформации, соответствующих условным напряжениям и в 1,5-2 раза превышающим предел текучести. Эпюры прогибов и напряжений близки к кососимметричным и, следовательно, основное влияние на напряженно-деформированное состояние оболочки оказывают местные изгибающие моменты и сравнительно малое влияние оказывают сдвигающие силы. Зависимость максимальных напряжений и прогибов от внешней нагрузки близка к линейной.

Таким образом, при расчете цилиндрической оболочки от воздействия локальных нагрузок, аналогичных нагрузкам от монтажных штуцеров, определяющими являются кольцевые нормальные напряжения при нагружении вдоль направляющей. На фиг. 4 приведены эпюры условных кольцевых нормальных напряжений, полученных при испытании моделей № 2, 3 и 4. Из этих эпюр видно, что напряжения от местной нагрузки быстро затухают за пределами штуцера, и на расстоянии, равном половине его высоты сечения, ими практически можно пренебречь.

Для теоретического расчета указанных выше моделей была использована программа расчета комбинированных систем методом конечного элемента (СПРИНТ), разработанная на кафедре строительной механики Московского института инженеров железнодорожного транспорта. В качестве конечного элемента принималась цилиндрическая прямоугольная панель. Внешняя нагрузка на оболочку принималась в предположении о передаче ее от штуцеров через сварные швы и распределялась по линейному закону по высоте сечения штуцера.

Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1035. Полученные теоретическим путем эпюры условных кольцевых нормальных напряжений при нагружении вдоль направляющей приведены на фиг. 4. Из сравнения эпюр условных напряжений, полученных экспериментальным путем, и на основании теоретических расчетов видно, что теоретические значения напряжений для всех трех моделей выше, чем экспериментальные. Расхождение экспериментальных и теоретических данных для максимальных напряжений составило: для модели № 2 - 31 %, для модели № 3 - 11,4 % и для модели № 4 - 24 %.



Фиг. 4. Эпюры распределения кольцевых нормальных напряжений в оболочке по сечению 1 - 1 построенные по экспериментальным (1) и теоретическим (2) данным. а) модель № 2 нагруженная силой  $P = 1$  тс, б) модель № 3 нагруженная силой  $P = 2,5$  тс, в) модель № 4 нагруженная силой  $P = 7$  тс.

На основании проведенных экспериментально-теоретических исследований можно сделать следующие выводы.

Для практических расчетов при оценке прочности корпуса цилиндрического аппарата на нагрузку от монтажного штуцера можно использовать формулы (1) и (4). Величины условных напряжений при этом можно определять исходя из предположения упругой работы материала оболочки. Указанный метод расчета дает некоторый запас прочности по сравнению с экспериментальными данными.

#### Л и т е р а т у р а

1. СТ СЭВ 2574-80. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность оболочек и днищ от воздействия опорных нагрузок.

2. ГОСТ 14249-80. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность.

3. Бейлард П.П. Напряжения от радиальных нагрузок и внешних моментов в цилиндрических сосудах давления. Вопросы прочности цилиндрических оболочек. Сборник переводов иностранных статей. Гос. изд. оборонной промышленности. М., 1960.

V. Voronov

Investigation of Stressed State of Cylindrical  
Reactor Shells in the Mounting Load Action Area

Summary

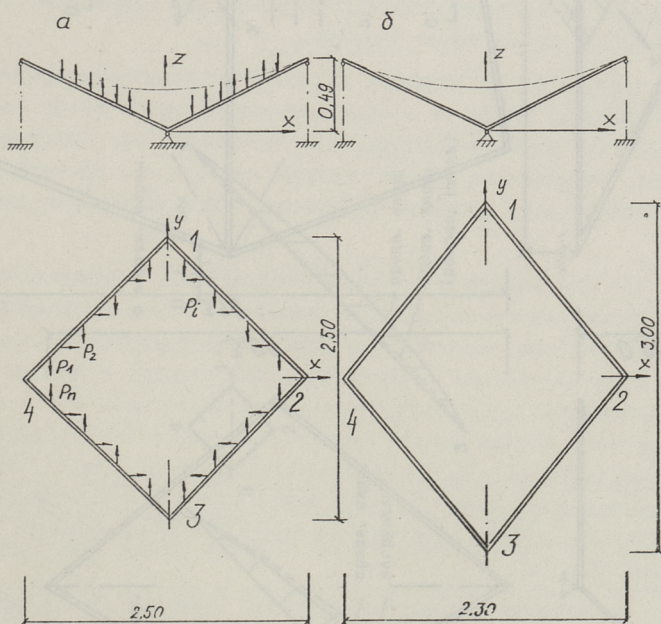
The stressed state of cylindrical reactor shells under the action of mounting loads is characterized by comparatively great local bending moments and shearing forces. To investigate shell behaviour, model testing by different connection member constructions was carried out. The results of model testing were verified by computer-aided calculation by means of finite element method and SPRINT-program. The following results of the experimental and theoretical investigation may be postulated. The ring normal stresses induced by bending moments, the vector of which is directed parallel to the shell axis, are of prime importance. The full restitution of deformations, corresponding to conventional stresses, 1,5-2 times exceeding the yield strength takes place after shell off-loading. The influence of shearing forces under normal conditions is unimportant.



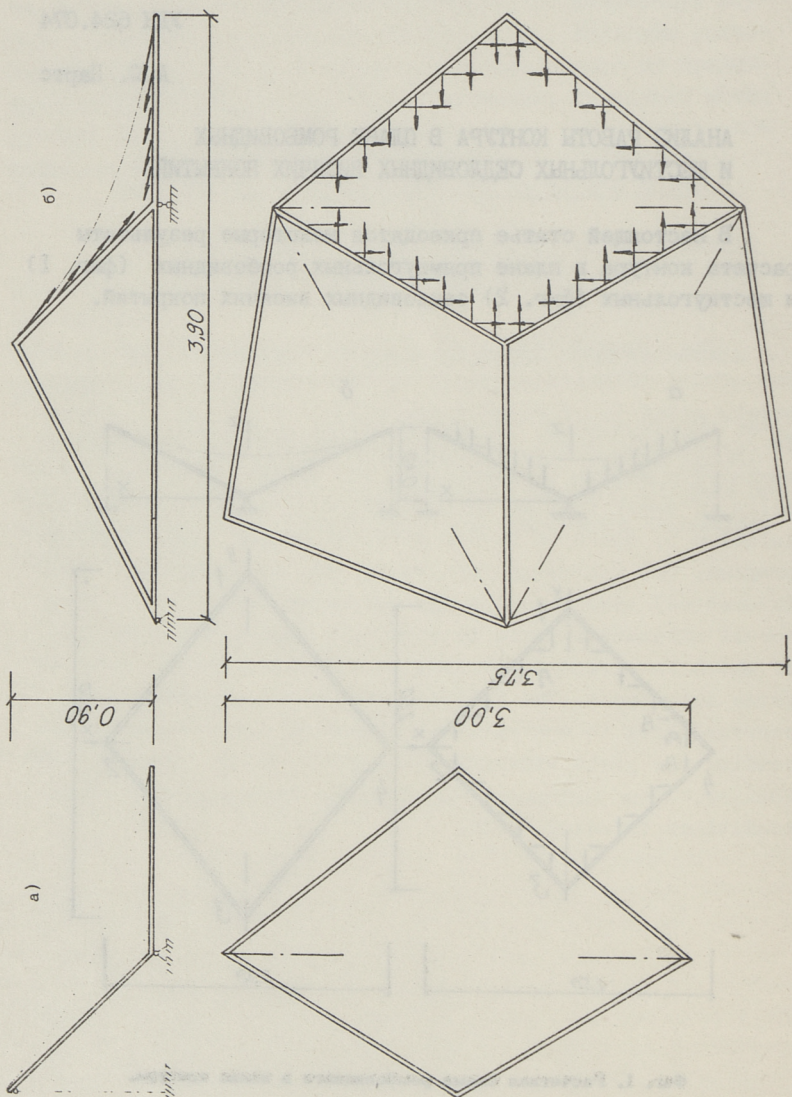


### АНАЛИЗ РАБОТЫ КОНТУРА В ПЛАНЕ РОМБОВИДНЫХ И ШЕСТИУГОЛЬНЫХ СЕДЛОВИДНЫХ ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ

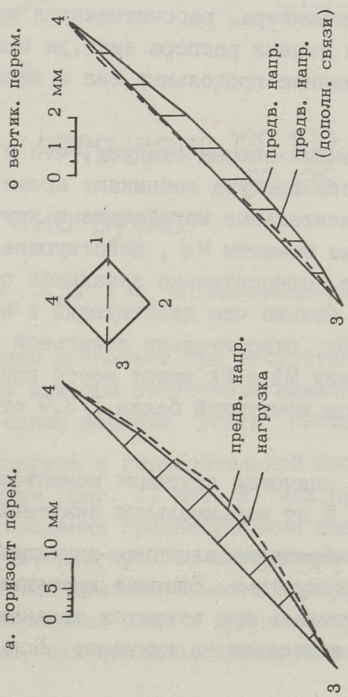
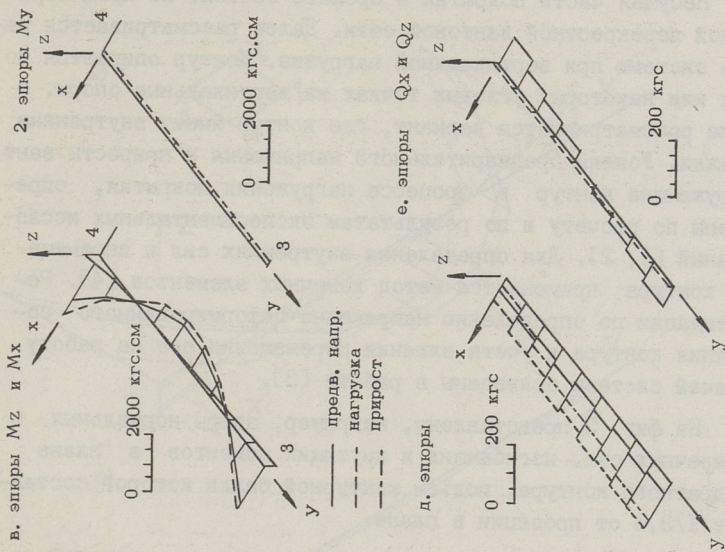
В настоящей статье приводятся некоторые результаты расчета контура в плане прямоугольных ромбовидных (фиг. 1) и шестиугольных (фиг. 2) седловидных висячих покрытий.



Фиг. 1. Расчетная схема ромбовидного в плане контура.



Фиг. 2. Расчетная схема комплексного контура.



Фиг. 3. Перемещения и эпюры внутренних сил квадратного в плане контура.

Несущая часть покрытия в пролете состоит из преднапряженной перекрестной вантовой сети. Далее рассматривается работа системы при вертикальной нагрузке. Контур опирается во всех или некоторых угловых точках на вертикальные опоры. Также рассматривается вариант, где контур имеет внутренние затяжки. Усилия предварительного напряжения и прироста вант, нагружающие контур в процессе нагружения покрытия, определены по расчету и по результатам экспериментальных исследований [1, 2]. Для определения внутренних сил и перемещений контура применяется метод конечных элементов [4]. Рекомендации по определению напряженно-деформированного состояния контура и учета влияния перемещения его на работу висячей системы приведены в работе [3].

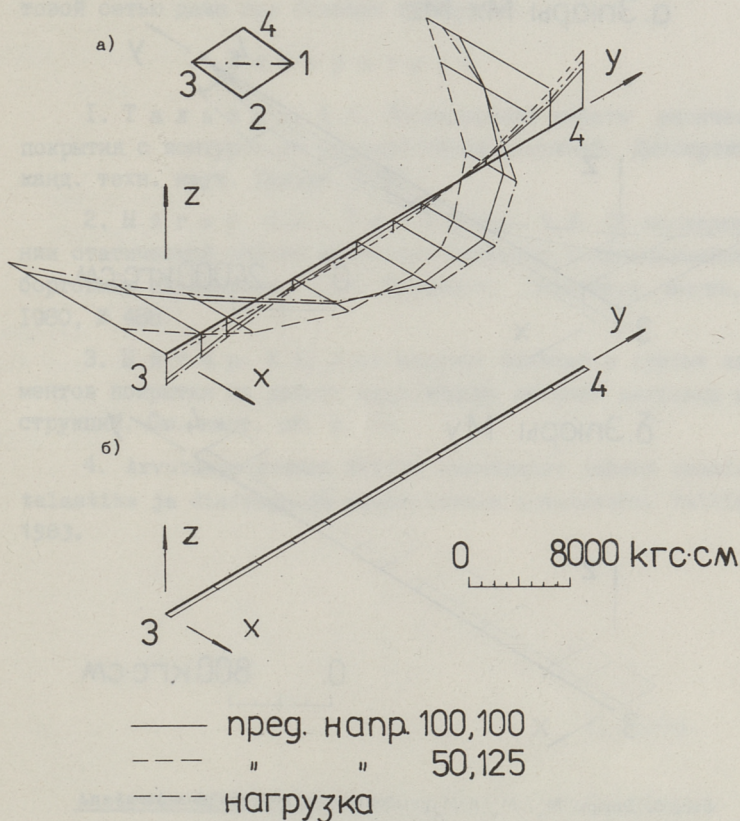
На фиг. 3 представлены, например, эпюры нормальных и поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов в плане квадратного контура, подъем контурной балки которой составляет  $1/3,6$  от проекции в плане.

Обычно контур пологих седловидных висячих покрытий, даже в случае, когда он в вертикальном направлении не опирается вдоль всего периметра, рассчитывается как плоская система, нагруженная силами распора вант, и при расчете учитывается только влияние продольных сил и изгибающих моментов.

По представленным эпюрам следует, что в прямолинейных элементах указанного контура возникают кроме продольных и поперечных сил значительные изгибающие и крутящие моменты. При этом изгибающие моменты  $M_z$ , действующие в плоскости рамы контура, т.е. относительно локальной оси  $z$  все-таки примерно в 4 раза больше чем действующий в вертикальной плоскости момент  $M_x$  относительно локальной оси  $x$ . Такие же соотношения между  $M_z$  и  $M_x$  имеют место при ромбовидном контуре, с подъемом контурной балки  $1/3,9$  от размера в плане (фиг. 4).

Максимальные значения крутящих моментов  $M_y$  составляют примерно 5...6 % от максимальных значений  $M_z$ .

Поэтому пренебрежение влиянием крутящих моментов  $M_y$  и особенно  $M_x$  недопустимо. Влияние крутящих моментов следует особенно учитывать при открытых сечениях контура, не имеющих большой жесткости на кручение. Большие изгибающие

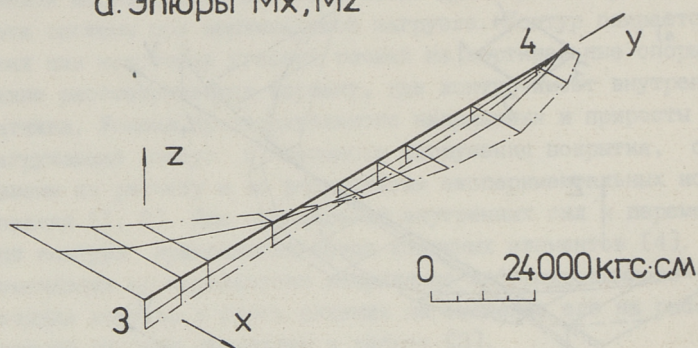


Фиг. 4. Эпюры  $M_x$ ,  $M_z$ (а) и  $M_y$  (б) ромбовидного контура с затяжкой.

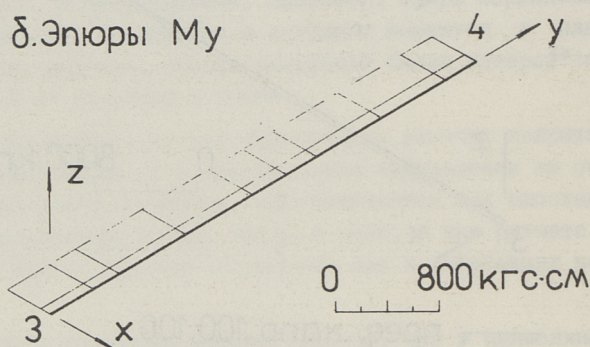
и крутящие моменты возникают при отсутствии горизонтальной затяжки (фиг. 5) или при отсутствии наклонных или вертикальных опор под одним верхним углом системы (фиг. I).

Элементы контура в горизонтальной плоскости в случае внутренней затяжки (фиг. I, поз. а) или при отсутствии ее как в процессе создания преднапряжения вант, так и при нагружении покрытия, изогнуты во внутреннюю сторону покрытия. Это значит, что, изгибающие моменты контура от усилий предварительного напряжения вант и приростов усилий вант от внешней нагрузки, как правило, суммируются.

а. Эпюры  $M_x, M_z$



б. Эпюры  $M_y$



Фиг. 5. Эпюры  $M_x, M_y$  и  $M_z$  ромбовидного контура без затяжки.

Как показывает анализ внутренние элементы шестигранного контура работают в вертикальной плоскости на изгиб. В случае поднятой средней точки пересечения внутренних элементов контура относительно внешнего периметра внутренние части контура работают как сжато-изогнутые стержни. Это обстоятельство нежелательно, но зато контур внешнего периметра работает в меньшей степени на сжатие чем при опущенной средней точки. Кроме того, в последнем случае образуются большой снеговой мешок и затруднен отвод дождевых вод.

Как показывает анализ работы седловидного висячего покрытия, контур, состоящий из прямолинейных элементов, имеет со статической стороны работы определенные недостатки,

но в то же время работает совместно с преднапряженной вантовой сетью даже при больших гибкостях.

## Л и т е р а т у р а

1. Т а л ь в и к А.И. Исследование работы висячего покрытия с контуром из прямолинейных стержней. Диссертация канд. техн. наук. Таллин, 1982.

2. Н и г е р К.П., Т а л ь в и к А.И. Об исследовании статической работы вантового покрытия с прямолинейными бортовыми элементами. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1980, № 488.

3. Н и г е р К.П. Учет влияния панелей и других элементов покрытия на работу седловидных висячих вантовых конструкций. См. наст. сб. с. 53.

4. Arvutusprogrammi MKE/20 kasutamise juhend raamide talastike ja diafragmaade staatiliseks arvutuseks. Tallinn, 1983.

A. Parts

### Analysis of Edgeframes Behaviour in Saddle-Shaped Hanging Roofs

#### Summary

In this paper some results of calculation of saddle-shaped hanging roofs are presented. The construction of surface with negative curvature is made up of prestressed cable network. The edgeframe consists of straight line elements. Longitudinal, shear forces, bending moments and torques in the edgeframe are induced. The order of values of torques and bending moments is the same. In spite of the disadvantages of the statical behaviour of edgeframes we can use edgeframe elements of greater flexibility.

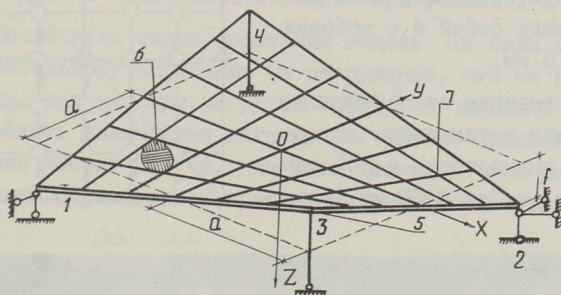




### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ РЕБРИСТЫХ ДЕРЕВЯННЫХ ГИПАРОВ

Для выявления возможности использования в покрытиях деревянных ребристых гипаров, на кафедре строительных конструкций были построены две модели.

Модель I - пространственная система перекрестных ребер типа гипар.



Фиг. 1. Общий вид оболочки.

Модель II - оболочка в виде ребристого гипара. На фиг. I изображены:

- I, 2 - нижние опоры;
- 3, 4 - верхние опоры стойки;
- 5 - бортовой элемент;
- 6 - слои реек;
- 7 - ребра;
- a - размеры оболочки в плане;
- f - подъем бортового элемента относительно начала координат.

В плане модели гипаров выполнялись квадратные, в масштабе 1:10, размером 2,4x2,4 м,  $f = 24$  см.

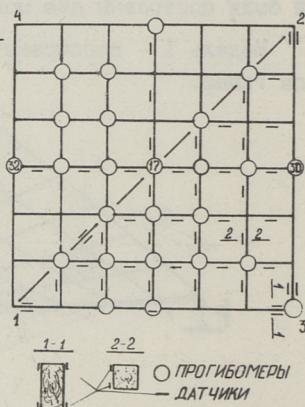
Модель I состоит из десяти пересекающихся между собой ребер, выполненных из брусьев сечением 40x40 мм. Бортовые элементы изготовлены из брусьев сечением 40x80 мм. Верхние опоры стойки изготовлены из брусьев сечением 40x80 мм. Ребра крепятся к бортовому элементу с помощью двух уголков. В узлах между собой ребра соединяются в вырезанные пазы, сверху и снизу дополнительно соединятся при помощи металлических пластин сечением 40x1,5 мм. Надо сказать, что узлы соединения ребер оставались все-таки менее жесткими, чем цельные сечения. Нижние опоры изготовлены в виде металлических башмаков, в которые крепятся бортовые элементы.

Модель II изготовлена по модели I, путем закрытия последней двумя слоями реек сечением 3,2x20 мм, расположенных взаимно перпендикулярно к друг другу по главным диагоналям оболочки. Слои реек соединены между собой и с ребрами гвоздями 1x15 мм.

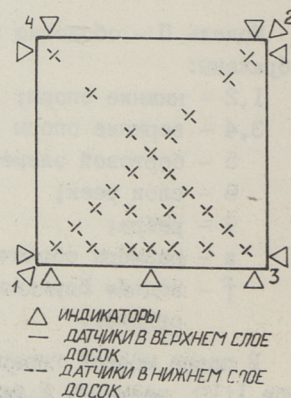
Для проведения эксперимента на модели были установлены 36 прогибомеров и индикаторов и 200 тензорезисторов, с базой 20 мм (фиг. 2, 3).

Показания тензорезисторов печатала машина "Искра", соединенная с тензометрическим мостом. Датчики были наклеены на бортовые элементы, ребра и на каждый слой реек.

Модели испытывались при различных видах загрузки, как при симметричном, так и несимметричном, а также испытывалось нагружение, имитирующее работу оболочки, например, при снеговых неравномерно распределенных нагрузках. Была исследована работа оболочек при моделировании различных граничных условий на контуре, а именно:



Фиг. 2. Схема расположения прогибомеров и датчиков.



Фиг. 3. Схема расположения индикаторов.

а) контур, свободно деформирующий в горизонтальном направлении (без затяжки);

б) при восприятии распорных сил контура горизонтальной затяжкой  $d = 12$  мм;

в) при восприятии распорных сил контура связями, расположенными в плоскости вертикальных стен;

г) с загрузкой контурных элементов;

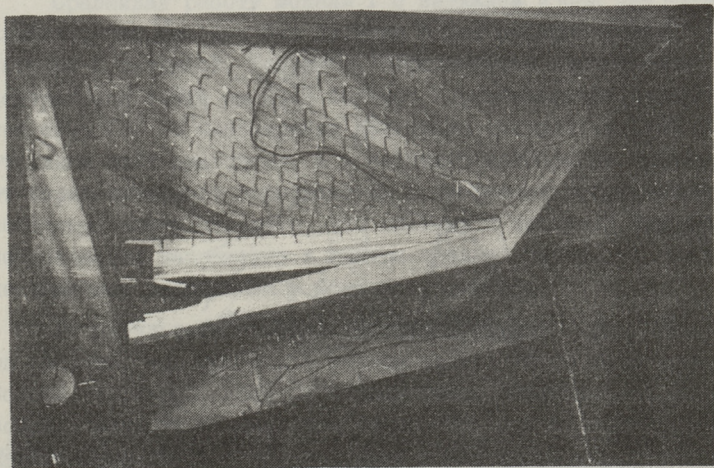
д) с тремя опорами и одним свободным концом (фиг. 1, опоры 1.2.4, где опорная стойка 4 работала совместно с вантом, жестко закрепленным к основанию и оболочке);

е) с дополнительными опорными стойками в середине пролета контурных элементов.

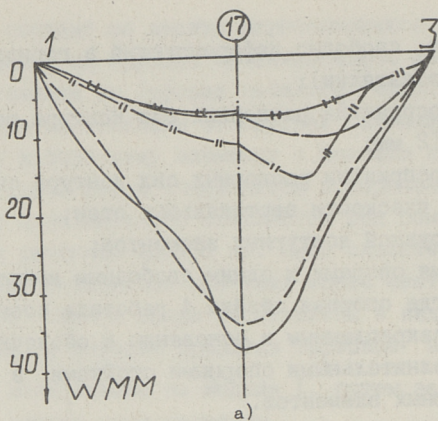
Модели имели и различное сочетание этих условий, например, Пае, Пбв.

Модель I испытывалась только при условиях а и б.

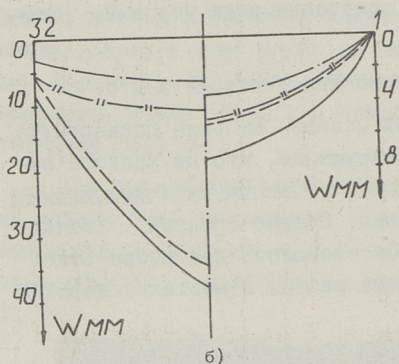
После всех видов испытаний модель Пв была подвергнута дополнительному испытанию на разрушение, что не удалось выполнить, так как при нагрузке  $4 \text{ кН/м}^2$  не имелось возможности производить дальнейшее нагружение. Прогиб средней точки оболочки достиг 9,9 см, при этом сломалось два ребра (фиг. 4), также образовались трещины на ребрах в местах с дефек-



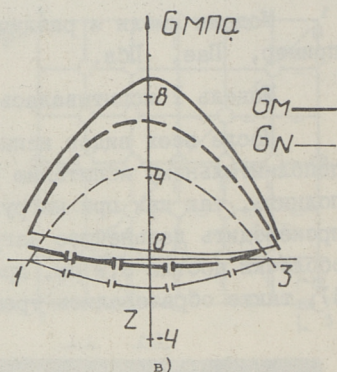
Фиг. 4. Разрушение ребер оболочки.



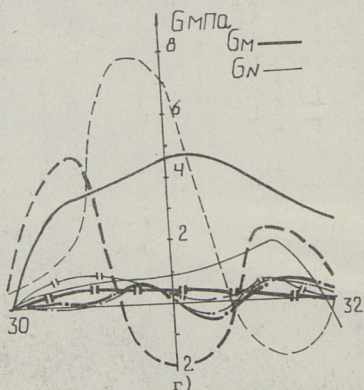
а)



б)



в)



г)

Фиг. 5. Результаты 1-го этапа испытаний: а) прогибы главных диагоналей; б) прогибы ребра 32-30 и контура 1-3; в) эпюры напряжений в контуре 1-3; г) эпюры напряжений в ребре 30-32.

— 1а; — — 1б; —|— 11а; —.— 11б; —||— 111а (модель 111 — трехслойный гипар, исследование инженера Э. Юста при нагрузке  $415 \text{ Н/м}^2$ ).

тами древесины. Горизонтальные расползания опор в направлении диагонали I-2 достигли 2,93 см.

На первом этапе исследований была испытана модель I при равномерно распределенных нагрузках  $174 \text{ Н/м}^2$  и  $347 \text{ Н/м}^2$ .

Затем была построена модель II и испытана по такой же схеме.

На втором этапе испытаний была детально исследована работа модели II, при следующих нагрузках: 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 3,5; 4,0  $\text{кН/м}^2$ .

### Некоторые результаты испытаний

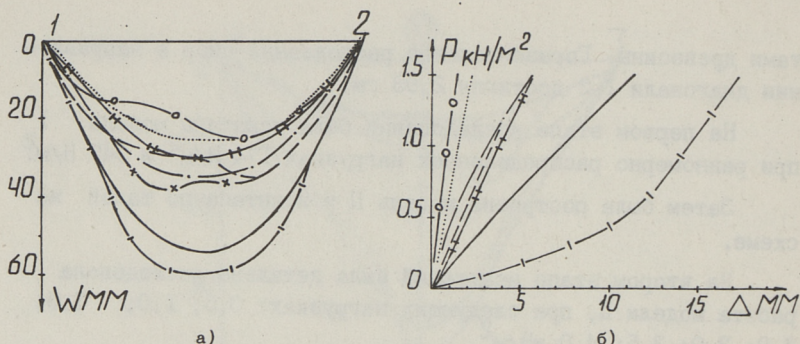
Первый этап исследований показал, что прогибы и нормальные напряжения у модели II значительно меньше, чем у модели I и сравнимы с трехслойным гипаром.

Модель I не рекомендуется применять самостоятельно, что и не было целью эксперимента, а только служило для выяснения характера работы и влияния системы ребер на оболочку модели II.

По данным эксперимента можно сделать вывод, что модель I работает как пространственная стержневая система.

Сравнивая работу модели I с затяжкой и без нее, можно сказать, что система без затяжки более деформируема, чем система с затяжкой. Например, вертикальное перемещение центральной точки на 24 % больше. Горизонтальное расползание опор I,2 в направлении диагонали составляет 1/62 доли от длины этой диагонали, а с затяжкой приборы не показывают горизонтального перемещения. В отношении напряженного состояния можно отметить, что система с затяжкой значительно сокращает напряжение в центре средних ребер и почти не изменяет напряжения в бортовом элементе.

По результатам второго этапа испытаний (фиг. 6а) можно сказать, что прогибы с учетом собственного веса контура больше, особенно, если не используется затяжка. При использовании затяжки в различных вариантах модели вертикальные перемещения уменьшаются примерно в два раза. Использование опор, имитирующих работу закрепления оболочки в углах жестких стен, по эффективности сравнимо с использованием затяжки, что можно учитывать при проектировании.



Фиг. 6. Результаты 11 этапа испытаний: а) прогибы диагонали 1-2 ребристой оболочки, б) "расползание" в направлении опор 1-2 ребристой оболочки.

— 11а; — — 11б; — · — 11в; — | — 11аг; — x — 11бг; — o — 11бв;  
— + — 11ае; ..... 11бе.

Горизонтальное расползание нижних опор I, 2 (фиг. 6б) в направлении выпуклой диагонали нелинейно зависимо от нагрузки для модели П аг, в остальных случаях - линейно. При использовании затяжки в различных видах моделей, расползание примерно в два раза меньше. Использование модели типа Пв дает тот же эффект.

Внутренняя сила горизонтальной затяжки для модели типа Пб растет линейно с увеличением нагрузки. Например, при нагрузке  $2 \text{ кН/м}^2$  она достигает  $9 \text{ кН}$  - самой большей по сравнению с другими типами моделей.

При использовании затяжки и граничных условий типа "в", прогибы оболочки по главным диагоналям становятся несимметричными, наблюдаются неравномерные волны, что может вызвать потерю устойчивости оболочки.

Эпюры напряжений на контуре поддаются классификации для модели типа Па, Пб, Пае, остальные типы моделей дают значительный разброс. Это можно объяснить сбоями в работе аппаратуры, уменьшением чувствительности датчиков. Напряжения в поверхности оболочки и в ребрах у различных видов моделей по своим абсолютным величинам не превышают расчетной прочности древесины хвойных пород.

При использовании затяжки распределение опорных реакций неравномерное: 70 % воспринимают нижние опоры. В варианте без затяжки распределение опорных реакций близко к равномерному.

В случае использования модели типа Пбе, происходит поднятие верхних углов оболочки, при нагрузке  $2 \text{ кН/м}^2$  до 3 мм, а в варианте Пае, верхние опоры стоят свободно.

При испытании модели типа Пв без верхних стоек прогибы свободных углов с нагрузкой  $2 \text{ кН/м}^2$  не превышали 3,3 мм.

Проектируя деревянные ребристые гипары, следует обратить внимание на следующие вопросы:

1. В варианте без затяжки вертикальные прогибы модели достигают 5-6 см при нагрузке  $1,5 \text{ кН/м}^2$ , что практически составит 50-60 см, на пролете 24 м.

Расползание опор 1-2 в направлении выпуклой диагонали составит от II до I6 см. Эти перемещения ухудшают эксплуатационные свойства конструкции. В какой-то мере этот вопрос может быть решен с помощью опор типа "в", вертикальные связи которых расположены и жестко закреплены в плоскости стен.

По испытаниям модели П в с нагрузкой -  $1,5 \text{ кН/м}^2$  вертикальные прогибы составили 35 мм, расползание опор 1-2 - до 5,5 мм. В реальной конструкции жесткость опор типа "в" будет значительно больше, а значит, вертикальные перемещения - меньше, что подтверждается сравнением с моделью П бв, где вертикальные прогибы - 25 мм, а расползание опор 1-2 - 1,7 мм.

2. При использовании варианта с затяжкой, вертикальные прогибы достигают 30-37 мм, а расползание опор - до 5,5 мм. С помощью затяжки возможно создать самопреднапряжение конструкции и тем самым уменьшить прогибы и расползание опор 1-2, а в реальном объекте выбираются люфты конструкции.

Необходимо также обеспечить свободное перемещение одной из опор на катках.

3. Поскольку при нагрузке ребристой оболочки в предельном состоянии разрушение происходит в узлах и местах дефектов древесины, то главное внимание следует обратить на разработку и конструирование узлов нового типа, а также промышленного изготовления ребер и бортовых элементов из дощато-клееной древесины.

По результатам проведенных испытаний можно сделать вывод, что ребристая оболочка достаточно перспективна. При

выборе более эффективных подкрепляющих ребер с большим моментом инерции и конструирования надежного узла соединений ребер между собой, можно поднять надежность и местную жесткость конструкции, снизить вертикальные перемещения. С учетом вышесказанного данный тип оболочек можно будет широко использовать в практике строительства объектов различного назначения, особенно при пролетах 24 м и более.

V. Fjodorov

Experimentelle Untersuchung des Modells  
verrippter Holzhyparschalen

Zusammenfassung

In vorliegendem Artikel werden die Beschreibung des Modells und einige Resultate der Untersuchungen des Spannungs- und Formänderungszustandes unter statischer Belastung gegeben. Die Versuchsmodelle über den rechteckigen Grundriss hatten folgende Abmessungen: Schalenseiten 2,4 · 2,4 m, Pfeilhöhe der Schale 48 cm, Schalendicke 0,64 cm, 10 senkrecht zueinander vereinigte Versteifungsrippen 4 · 4 cm parallel zu den Randgliedern, Randglieder 4 · 8 cm.

Die Schichten der Holzschale waren aus zwei senkrecht zueinander vereinigten Brettern parallel zu den Hauptdiagonalen aufgebaut.



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ  
ДЕРЕВЯННЫХ КОНОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

В практике исследования коноидальных деревянных оболочек мало изучены и авторам неизвестны результаты в области эксперимента и реальных объектов. Железобетонные коноидальные оболочки применялись в практике строительства и эксперимента с моделями. Они положительно зарекомендовали себя в промышленном строительстве: решение вопросов освещенности (отсутствие фонарей), технологичность возведения, экономный расход материалов. Все это в настоящее время начинает играть важную роль, так как энергетические и материальные ресурсы не беспредельны и с каждым годом повышается их стоимость, а с этим и стоимость эксплуатации строительных объектов.

Дерево — единственный материал, запасы которого при разумном использовании не уменьшаются. Все сказанное вызывает интерес к деревянным коноидальным оболочкам.

Коноидальная поверхность является одним из видов поверхностей отрицательной гауссовой кривизны.

Уравнение в общем виде:

$$z = \frac{x}{d} f(y).$$

Направляющей  $z = f(y)$  может быть любая кривая. При моделировании принята квадратная парабола для направляющей коноидальной поверхности (фиг. I),

где  $a, b$  — размеры в плане;

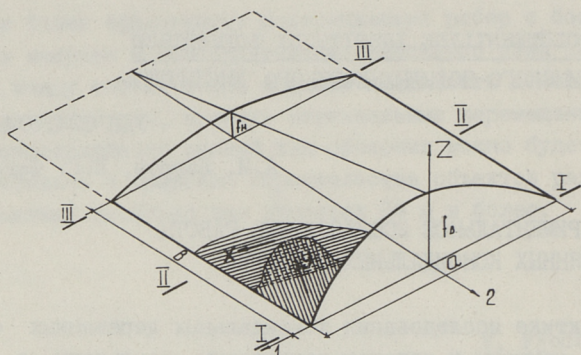
$x, y$  — направление слоев реек;

$f_v, f_n$  — стрела подъема верхней и нижней диафрагм;

I-I, II-II, III-III — оечения оболочки.

Таким образом, уравнение поверхности

$$z = \frac{x f_v}{a} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right).$$



Фиг. 1. Общий вид оболочки.

где  $d$  - расстояние между направляющими;  
 $f_b$  - стрела подъема высокой диафрагмы;  
 $l$  - пролет арки диафрагмы.

При такой поверхности любое поперечное сечение тоже квадратная парабола.

Модель в плане прямоугольная, размерами 180 см (пролеты диафрагм) и 120 см (длина бортового элемента). Стрела подъема диафрагм 55 и 25 см.

Диафрагмы очерчены по квадратной параболе. Все элементы модели оболочки изготовлены в соответствии с моделированием в масштабе 1:10.

Диафрагмы модели изготовлены из десятислойного пакета досочек на клею ДФК-14, разработанном в проблемной лаборатории ТПИ, шириной 3 см и высотой 5 см со стальной затяжкой диаметром 6 мм. Бортовой элемент выполнен из древесины цельного сечения шириной 3 см и высотой 47...22 мм со стальной затяжкой, расположенной внизу, диаметром 6 мм (т.н. стрингер), криволинейная часть поверхности выполнена из двух слоев досочек 3,2x20 мм на клеегвоздевом соединении, направленных по диагоналям (фиг. 1). Соединение поверхности модели с диафрагмами и бортовыми элементами такое же, а соединение бортовых элементов с диафрагмами осуществлено при помощи опорных металлических башмаков. Опирание модели в углах шарнирное в поперечном направлении.

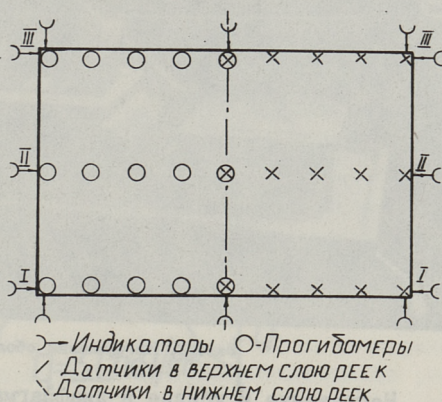
Модель испытывалась на специальном стенде. При испытании модели поверхность загружалась симметрично и несимметрично в продольном и поперечном направлениях. Испытания проводились при 12 различных комбинациях загрузки, при двух различных изгибных жесткостях диафрагм и предварительных натяжениях стрингеров. Ступени загрузки 0,75; 1,5; 2,25 и 3,0 кН/м<sup>2</sup>. Измерение деформации поверхности оболочки происходило при помощи тензорезисторов с длиной базы 20 мм, которые были наклеены по направлению волокон древесины. На диафрагме и бортовых элементах датчики были расположены сбоку. Вертикальные и горизонтальные прогибы поверхности и диафрагм измерялись при помощи прогибомеров Максимова и индикаторов. Общее количество тензорезисторов было 100 шт., а индикаторов и прогибомеров 29 (фиг. 2, 3).

Показания тензорезисторов печатала машина "Искра", соединенная с тензометрическим мостом. Для определения опорных реакций использовали приспособление, работающее по схеме простой балки.

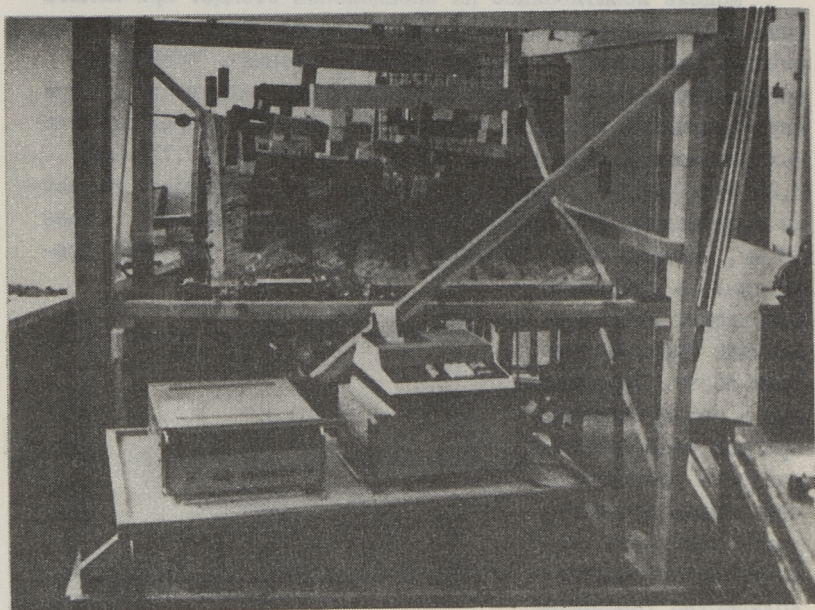
Параллельно испытанию моделей была произведена серия испытаний на образцах с целью определения механических свойств древесины, поскольку модель была построена из лиственной (поверхность) и хвойной (диафрагмы и бортовые элементы) пород древесины.

Для обработки данных измерений была составлена специальная программа и все данные обрабатывались на ЭВМ. На основании этих данных были составлены эпюры напряжений и прогибов в трех поперечных сечениях поверхности оболочки (фиг. 1). В сечении II-II также нормальные напряжения от изгиба.

Для обработки данных измерений была составлена специальная программа и все данные обрабатывались на ЭВМ. На основании этих данных были составлены эпюры напряжений и прогибов в трех поперечных сечениях поверхности оболочки (фиг. 1). В сечении II-II также нормальные напряжения от изгиба.



Фиг. 2. Схема приборов измерения.

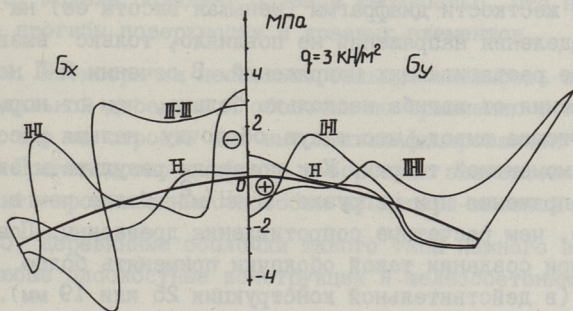


Фиг. 3. Нагружение оболочки.

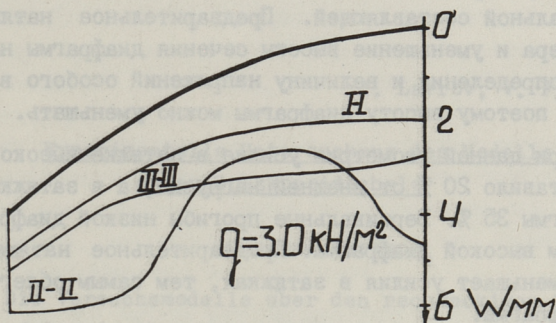
Напряжение и усилие в диафрагмах и бортовых элементах, а также усилие в затяжках и стрингерах приведены на фиг. 4, 5, 6.

Из анализа результатов испытания необходимо отметить следующее. В сечении П-П (см. фиг. 1) на коньке в направлении оси X поверхность оболочки сжата, а в направлении оси Y растянута. В районах бортового элемента напряжения  $\sigma_x$  положительные, однако, максимальными являются отрицательные напряжения. Почти во всех точках поверхности оба слоя имеют обратные знаки напряжений, поэтому поверхность работает в благоприятных условиях.

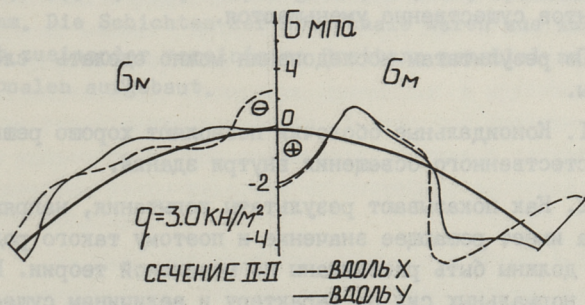
Напряжения в сечении I-I в несколько раз меньше, чем в сечении П-П, однако, характер распределения их иной. Отсюда следует, что крепление поверхности к диафрагме нельзя считать шарнирным. В районе низкой диафрагмы (сечение III-III) напряжения существенно больше и в несколько раз местами превышают напряжения среднего сечения П-П. От предварительного натяжения стрингера максимальные напряжения в сечении П-П существенно не изменились (кроме конька). Уменьшение из-



Фиг. 4. Эпюры нормальных напряжений в сечениях.



Фиг. 5. Эпюры прогибов сечений.



Фиг. 6. Эпюры напряжений.

гибной жесткости диафрагмы (меньшая высота ее) на характер распределения напряжений не повлияло, только вызвало увеличение растягивающих напряжений. В сечении П-П нормальные напряжения от изгиба несколько больше, чем от нормальных сил. Отсюда вывод, что такую оболочку нельзя рассчитывать по безмоментной теории. Как показали результаты эксперимента, напряжения при нагрузке  $3 \text{ кН/м}^2$  более чем в 2 раза меньше, чем расчетные сопротивления древесины. Поэтому следует при создании такой оболочки применять более тонкие доски (в действительной конструкции 25 или 19 мм).

Напряжения от изгиба в плоскости арки положительные, что говорит о том, что нагрузка от поверхности оболочки на диафрагму передается не только сдвигающими усилиями, но и вертикальной составляющей. Предварительное натяжение стрингера и уменьшение высоты сечения диафрагмы на характер распределения и величину напряжений особого влияния не имеет, поэтому высоту диафрагмы можно уменьшать.

При данной геометрии усилие в затяжке высокой диафрагмы составило 20 % от внешней нагрузки, а в затяжке низкой диафрагмы 35 %. Вертикальные прогибы низкой диафрагмы больше, чем высокой диафрагмы. Предварительное натяжение стрингера уменьшает усилия в затяжках, тем самым облегчает работу диафрагмы.

При изучении работы бортового элемента было установлено, что изгибающие моменты наблюдаются в обеих плоскостях.

При натяжении стрингера вертикальные перемещения всех элементов существенно уменьшаются.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы.

1. Коноидальные оболочки позволяют хорошо решить вопрос естественного освещения внутри здания.

2. Как показывают результаты испытания, напряжение от изгиба имеет решающее значение и поэтому такого рода оболочки должны быть рассчитаны по моментной теории. Распределение нормальных сил по характеру и величинам существенно отличается от усилий, полученных по методам безмоментной теории.

3. Модель обладает большой жесткостью, что показывают малые прогибы поверхности и краевых элементов.

4. Несмотря на несколько большую сложность возведения коноидальной деревянной оболочки по сравнению с гипаром, ее можно все же строить без высококвалифицированной рабочей силы. Производство диафрагм и бортовых элементов можно осуществить промышленным способом из дощато-клееной древесины.

5. Деревянные оболочки такого типа намного экономичнее, чем любые плоскостные конструкции и железобетонные оболочки.

A. Lavrov, V. Fjodorov

Experimentelle Untersuchung des Modells  
einer Holzkonoidschale

Zusammenfassung

Die Versuchsmodelle über den rechteckigen Grundriss hatten folgende Abmessungen: Schalenseiten 1,8 m (die Spannweiten der Diaphragmen) 1,2 m, Pfeilhöhen der Diaphragmen  $f_B = 55$  cm,  $f_H = 25$  cm, Schalendecke 0,68 cm, Randglieder 3 x 4,7 ... 2,2 cm, Diaphragmen 3 x 5 cm, Spannbalken  $d = 6$  mm. Die Schichten der Holzschale waren aus zwei senkrecht zueinander vereinigten Brettern parallel zu den Diagonalen aufgebaut.





## ДИФРАКЦИЯ УЗКОНАПРАВЛЕННЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

При исследовании дифракции звуковых волн на деформируемых телах часто представляет интерес выделение из эхо-сигнала составляющих, имеющих различный механизм формирования. Для этого существуют различные методы, например, метод преобразования Ватсона [1]; метод резонансной теории рассеяния [2]; методы, использующие эффект направленного зондирования в сочетании с преобразованием Ватсона [3] или с преобразованием Фурье по угловой координате [4], причем в последней работе рассматриваются только задачи, в которых ось звукового пучка проходит через ось зондируемого цилиндра. Все перечисленные методы, как известно, довольно трудоемки при их реализации.

В данной работе для отдельного вычисления компонентов рассеянного акустического поля давления от цилиндрического тела используется алгоритм, основывающийся на применении направленного зондирования в сочетании с вычислением эхо-сигнала в рядах по собственным волнам. Предлагаемый алгоритм не меняет схему, применяемую при вычислении давления в рядах, а приводит лишь к добавлению в эти ряды некоторых множителей. Процедура применима к круговым цилиндрическим телам различного рода. В качестве численного примера в работе приведены результаты расчета в случае, когда зондируемым телом является тонкостенная круговая цилиндрическая оболочка.

1. На тело круговой цилиндрической формы и бесконечной протяженности, находящееся в безграничной идеальной жидкой среде, параллельно его оси падает цилиндрическая волна. Выражение для эхо-сигнала в таком случае можно записать в виде бесконечного ряда [1]:

$$p(r, \theta, \omega) = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(1)}(\omega r) H_m^{(1)}(\omega l) \chi_m(\omega) \cos m \theta, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_m = 2, m = 1, 2, 3, \dots$ ;

$p_0$  - константа, имеющая размерность давления;

$H_m^{(1)}(\omega l)$  - цилиндрические функции Ханкеля первого рода;

$l, r$  - расстояния, измеренные в радиусах  $R$  цилиндра, от источника до оси тела и от оси тела до приемника соответственно;

$\theta$  - угол между лучами  $l$  и  $r$ ;

$\omega$  - безразмерная круговая частота, определяемая, как  $\omega = 2\pi f R/c$ ,

где  $f$  - частота колебаний;

$c$  - скорость распространения звука в окружающей тело среде.

Вычисление функции  $\chi_m(\omega)$ , определяющей податливость цилиндра, детально изложено в работе [1].

В случае, когда  $\omega l \gg 1$  и  $\omega r \gg 1$ , функции Ханкеля в (1) могут быть заменены их асимптотическими представлениями

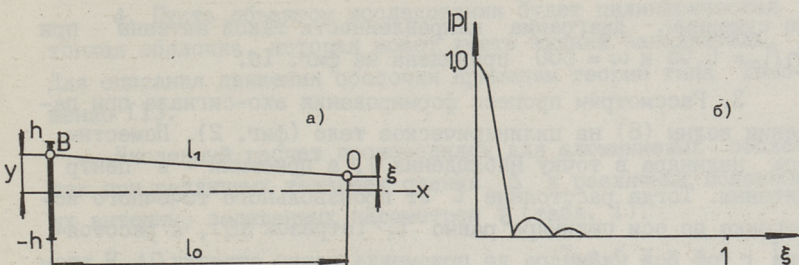
$$H_m^{(1)}(\omega l) \approx (2/\pi \omega l)^{1/2} \cdot \exp[i(\omega l - m\pi/2 - \pi/4)] \quad (2)$$

$$H_m^{(1)}(\omega r) \approx (2/\pi \omega r)^{1/2} \cdot \exp[i(\omega r - m\pi/2 - \pi/4)].$$

Следовательно, для случая удаленных источника и приемника, эхо-сигнал (1) можно преобразовать к виду:

$$p(r, \theta, \omega) = -\frac{2p_0}{\sqrt{rl}} \cdot \frac{i}{\pi \omega} e^{i\omega(r+l)} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m \chi_m(\omega) \cos m \theta. \quad (3)$$

2. Рассмотрим стационарную задачу облучения тела направленной волной, излучаемой антенной, высотой  $2h$ . На схеме антенны (фиг. 1а):  $\xi$  - смещение точки наблюдения  $O$  от оси  $x$  антенны,  $l_0$  - расстояние от антенны до точки наблюдения  $O$ . Здесь, как и прежде, все расстояния измерены в радиусах цилиндра. Зондирующая волна такой антенны представляет собой сумму волн от всех точечных источников, находящихся на поверхности антенны. Если произвольный точечный источник с координатой  $y$  (точка  $B$ ) имеет интенсивность звукового давления  $q(y)$  и задержку  $\chi(y)$ , то выражение для направленной зондирующей волны при  $l_1 \gg \chi(y)$ ,  $\omega l_1 \gg 1$  примет вид:



Фиг. 1. а) схема принципа работы антенны; б) диаграмма направленности антенны.

$$p_i(\xi, \omega) = \frac{p_0 N}{2h} \int_{-h}^h g(y) H_0^{(1)}(\omega l_1) e^{-i\omega \chi(y)} dy = \frac{p_0 N}{2h} \sqrt{\frac{2}{i\pi\omega l_1}} \int_{-h}^h g(y) e^{i\omega [l_1 - \chi(y)]} dy, \quad (4)$$

где  $N$  - нормирующий множитель, приводящий пик диаграммы направленности источника к единице.

Расстояние от произвольного точечного источника до приемника можно выразить следующим образом:

$$l_1 = [l^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Если  $l_0 \gg h + \max \xi$ , то выражение (5) можно упростить, удержав в ряду Тейлора первые члены

$$l_1 \approx l_0 \quad l_1 \approx l_0 + \xi^2 / 2l_0 + y^2 / 2l_0 + y\xi / l_0. \quad (6)$$

Выбрав задержку звукового сигнала в виде  $\chi(y) = y^2 / 2l_0$ , получим

$$p_i(\xi, \omega) = \frac{p_0 N}{2h} \sqrt{\frac{2}{i\pi\omega l_0}} e^{i\omega(l_0 + \xi^2 / 2l_0)} \int_{-h}^h g(y) e^{-y\xi / l_0} dy. \quad (7)$$

Вводя относительную координату  $\eta = y/h$ , придадим выражению (7) вид:

$$p_i(\xi, \omega) = \frac{p_0 N}{2} \sqrt{\frac{2}{i\pi\omega l_0}} e^{i\omega(l_0 + \xi^2 / 2l_0)} \int_{-1}^1 g(\eta) e^{-\eta\xi h / l_0} d\eta. \quad (8)$$

Функцию распределения интенсивности звукового давления вдоль апертуры антенны примем в виде:

$$g(\eta) = \cos(\eta \cdot \pi / 2). \quad (9)$$

Множитель  $N$  в этом случае принимает значение  $\pi/4$ .

Относительно частот зондирующего сигнала следует заметить, что лишь при частотах порядка  $\omega = 400-600$  главный лепесток характеристики направленности получается достаточ-

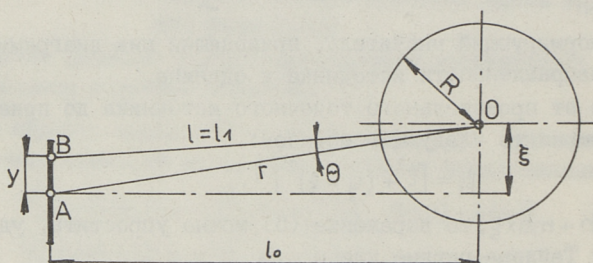
но суженным. Диаграмма направленности такой антенны при  $h/l_0 = 0,05$  и  $\omega = 600$  приведена на фиг. 1б.

3. Рассмотрим процесс формирования эхо-сигнала при падении волны (8) на цилиндрическое тело (фиг. 2). Поместим ось цилиндра в точку наблюдения  $O$ , а приемник - в центр антенны. Тогда расстояние  $l$  от произвольного точечного источника до оси цилиндра равно  $l_1$  (отрезок  $BO$ ), а расстояние  $r$  от оси цилиндра до приемника равно отрезку  $OA$ . В этом случае:

$$r = (\ell_0^2 + \xi^2)^{1/2} \approx \ell_0 + \xi^2/2\ell_0 \quad (I0)$$

и угол между лучами  $OA$  и  $OB$  приблизительно равен

$$\Theta = y/r. \quad (II)$$



Фиг. 2. Схема зондирования цилиндрического тела.

Поскольку для эхо-сигналов, возбуждаемых каждым отдельным точечным источником  $B$ , справедливо выражение (3), то оно останется справедливым и для суммарного эхо-сигнала при одновременном действии всех точечных источников антенны. Такой суммарный эхо-сигнал определим, проинтегрировав выражение (3) по всей длине антенны, с учетом того, что зондирующий сигнал имеет вид (8). В результате получим:

$$p(r, \theta, \omega) = -\frac{2\rho_0}{\sqrt{r\ell}} \frac{i}{\pi\omega} e^{i\omega 2r} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m \chi_m(\omega) I(\eta, \theta, m, h/l_0, \xi, \omega) \quad (I2)$$

где

$$I(\eta, \theta, m, h/l_0, \xi, \omega) = \frac{\pi}{8} \int_0^1 e^{-i\omega\xi\eta h/l_0} \cos(m\eta h/r) \cos(\eta\pi/2) d\eta =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} \left[ \frac{\cos(a-b)}{\pi^2/4 - (a-b)^2} - \frac{\cos(a+b)}{(a+b)^2 - \pi^2/4} \right], \quad a = \frac{\omega h \xi}{\ell_0}, \quad b = \frac{mh}{\ell_0}. \quad (I3)$$

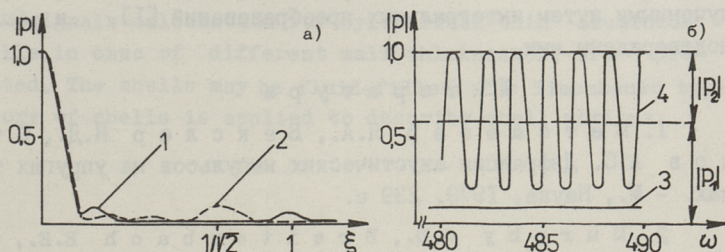
4. Пусть объектом исследования будет цилиндрическая тонкая оболочка, которая может иметь жидкий наполнитель. Для описания движения оболочки применим теорию типа Тимошенко [1].

Численный расчет производился для алюминиевых оболочек при различных толщинах стенки  $\Delta$  и различных положениях антенны, задаваемых параметром  $\xi$  (табл. I).

Т а б л и ц а I

№	$\xi$	$\alpha = \frac{\rho_0 c_0}{\rho c}$	$\frac{\rho_1}{\rho}$	$\nu$	$\delta = \frac{\Delta}{R}$
1	I	0	2,7	0,355	0,003
2	$I/\sqrt{2}$	I	2,7	0,355	0,0012
3	0	I	2,7	0,355	0,0012
4	0	I	2,7	0,355	0,0024

В таблице использованы следующие обозначения:  $\rho, \rho_0$  и  $\rho_1$  - плотности окружающей среды, заполнителя и материала оболочки соответственно,  $c_0$  - скорость распространения звука в заполнителе,  $\delta$  - относительная толщина стенки оболочки,  $\nu$  - коэффициент Пуассона материала оболочки.



Фиг. 3. а) диаграмма направленности эхо-сигнала, б) частотная зависимость эхо-сигнала.

Зондируя оболочку толщины  $\delta = 0,003$  частотой  $\omega = 600$  по касательной к ее поверхности ( $\xi = I$ ), удалось выделить (фиг. 3а, кривая I) решение, соответствующее изгибной моде у пустой оболочки. В диаграмме направленности оно проявляется, как всплеск с амплитудой  $|r| = 0,04$  при  $\xi = I$ . При зондировании с той же частотой оболочки толщины  $\delta = 0,0012$ , заполненной водой, при  $\xi = I/\sqrt{2}$ , была выделена волна, от-

раженная от внутренних поверхностей стенки оболочки два раза (фиг. 3а, кривая 2). Путь такой рефрагированной волны проходит по сторонам квадрата, вписанного в окружность, совпадающую со срединной поверхностью оболочки. Из спектра, приведенного на фиг. 3б для диапазона частот  $\omega = 480 \div 490$  видно, что амплитуда такой волны с изменением частоты меняется мало (кривая 3). Из этой же фигуры следует, что при зондировании по центру ( $\xi = 0$ ), амплитуда эхо-сигнала с изменением частоты осциллирует (кривая 4). Это можно объяснить интерференцией двух волн - прямоотраженной и рефрагированной, отразившейся один раз от внутренней поверхности задней стенки оболочки. Амплитуду первой волны можно определить, как ординату средней линии колеблющейся кривой  $|p_1| = 0,6$ , а амплитуду второй - как величину отклонения от этой средней линии  $|p_2| = 0,4$ . Запаздывание такой рефрагированной волны равно времени прохождения ею 4 радиусов оболочки. При увеличении толщины оболочки в два раза ( $\delta = 0,0024$ ) запаздывание не меняет своего значения, меняются лишь амплитуды волн, так что  $|p_1| = 0,83$ ,  $|p_2| = 0,28$ . Регулярность колебаний спектра свидетельствует об отсутствии других компонентов эхо-сигнала (волны, отразившиеся два, три и более раз от задней стенки, весьма малы).

Полученные результаты сравнивались с результатами, полученными путем интегральных преобразований [1], и были подтверждены ими.

#### Л и т е р а т у р а

1. М е т с а в э э р Я.А., В е к с л е р Н.Д., С т у л о в А.С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах. - М., Наука, 1979. 239 с.
2. M u r p h y J.D., B r e i t e n b a c h E.E., U b e r a l l H. Resonance scattering of acoustic waves from cylindrical shells. - J. Acoust. Soc. Amer., 1978, v. 64, N 2, p. 677-683.
3. М е т с а в э э р Я.А. Вычисление эхо-сигнала направленного зондирующего импульса от сферической оболочки. - Акуст. ж., 1976, т. 22, № 6, с. 939-941.
4. П о д д у б н я к А.П., В о л о ш и н А.Р. Локализованное воздействие звукового пучка на упругую цилиндрическую оболочку. - Мат. методы и физ.-мех. поля, 1984, вып. 20, с. 82-86.

A. Klauson

Diffraction of Acoustic Beams by Cylindrical Bodies

Summary

A method of separate calculation of echo-signal components having a different formation mechanism, is proposed. The method is based on the fact that various echo-signal components are excited at different points of body surfaces. Surface sounding at the points with an acoustic beam of high frequency ( $kR = 400-600$  where  $k$  is wave number and  $R$  is the cylinder radius), permits to separate the corresponding components from the total echo-signal. In the present algorithm a backscattered field is calculated in eigenwaves series, but the effect of acoustic beam leads to the addition of several multipliers to this series. As numerical examples, the results of farfield steady-state echo-signals calculation for cylindrical thin aluminium shells in case of different wall thicknesses, are presented. The shells may be fluid-filled. The Timoshenko type theory of shells is applied to describe shell motions.





### АКУСТОДИАГНОСТИКА СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНОЙ СТАНДАРТНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Рассматривается процесс распространения одномерной продольной волны в упругой среде, наследственные свойства которой задаются согласно модели стандартного вязкоупругого тела. Плотность и мгновенный модуль упругости среды предполагаются произвольными гладко меняющимися по пространственной координате функциями. Выводится асимптотическое решение, описывающее прифронтную зону волны. На основе этого решения построен алгоритм акустодиагностики физических параметров среды.

Акустодиагностика однородной наследственно упругой среды исследована, например, в [1, 2].

I. Для описания одномерного движения сплошной неоднородной наследственно упругой среды с переменными по пространственной лагранжевой координате  $x$  плотностью  $\rho(x)$  и мгновенным модулем упругости  $E(x)$  постулируем определяющее уравнение среды согласно одной из формул [3, 4 и др.]

$$\sigma(x,t) = E(x)[U_{,x}(x,t) - R(t) * U_{,x}(x,t)], \quad (1)$$

$$U_{,x}(x,t) = E^{-1}(x)[\sigma(x,t) + K(t) * \sigma(x,t)], \quad (2)$$

где  $t$  - время,

$\sigma(x,t)$  - напряжение,

$U(x,t)$  - перемещение материальных точек среды,

$R(t)$  - ядро релаксации,

$K(t)$  - ядро ползучести, и используем обозначение интеграла свертки

$$F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(t-\tau) F_2(\tau) d\tau. \quad (3)$$

На основе (1) и (2) можно вывести два эквивалентных уравнения движения среды:

$$U_{,xx}(x,t) - R(t) * U_{,xx}(x,t) + f_1(x) [U_{,x}(x,t) - R(t) * U_{,x}(x,t)] - f_2(x) U_{,tt}(x,t) = 0, \quad (4)$$

$$U_{,xx}(x,t) + f_1(x) U_{,x}(x,t) - f_2(x) [K(t) * U_{,tt}(x,t) - U_{,tt}(x,t)] = 0, \quad (5)$$

где

$$f_1(x) = E_{,x}(x) E^{-1}(x), \quad (6)$$

$$f_2(x) = \rho_0(x) E^{-1}(x) > 0. \quad (7)$$

Уравнение (4) выведено в работе [5]. Для исследования процесса распространения одномерной продольной волны, уравнения (4) и (5) решаются согласно методике, изложенной в [6]. Рассматривается волна, распространяющаяся в положительном направлении оси  $x$ . Использование преобразования Лапласа и метода ВКБ при нулевых начальных условиях

$$U(x,0) = U_{,t}(x,0) = 0 \quad (8)$$

и при граничном условии

$$U_{,t}(0,t) = -\varepsilon c \varphi(t) H(t) \quad (9)$$

позволяет представить решения уравнений (4) и (5) в едином виде

$$U(x,t) = -\varepsilon c \exp \Phi_1(x) H(\zeta) \int_0^{\zeta} \varphi(\zeta - \xi) F(x, \xi) d\xi, \quad (10)$$

где  $\zeta = t - \Phi_2(x)$ ,

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L s^{-1} \exp \{st - s \Phi_2(x) [1 + \frac{1}{2} W(s)] - s^{-1} \Phi_3(x) [1 - \frac{1}{2} W(s)] + \dots\} ds. \quad (11)$$

Здесь  $H(t)$  - функция Хевисайда,

$\varphi(t)$  - произвольная гладкая функция,

$\varepsilon$  и  $c$  - постоянные,

$s$  - параметр преобразования Лапласа.

При этом выполняются условия  $|\varepsilon| \ll 1$  и  $\max |\varphi(t)| = 1$ . В случаях использования уравнений (4) и (5),  $W(s)$  отождествляется с  $R^L(s)$  и  $K^L(s)$  соответственно. Предполагается также, что при  $t \geq 0$  ядра  $R(t)$  и  $K(t)$  являются ограниченными и однозначными функциями своего аргумента и удовлетворяют условию

$$R^L(s) \rightarrow 0, K^L(s) \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В решении (10) функция

$$\Phi_1(x) = -\frac{1}{4} \ln |E(x) \rho_0(x) / [E(0) \rho_0(0)]| \quad (13)$$

характеризует влияние переменных свойств среды на амплитуду волны, функция

$$\Phi_2(x) = \int_0^x [\rho_0(x) E^{-1}(x)]^{1/2} dx \quad (14)$$

определяет время прибытия фронта волны, а функция

$$\begin{aligned} \Phi_3(x) = \frac{1}{8} \int_0^x [E(x) \rho_0^{-1}(x)]^{1/2} \{ E_{,xx}(x) E^{-1}(x) + \\ + \rho_{0,xx}(x) \rho_0^{-1}(x) - [\rho_{0,x}(x) \rho_0^{-1}(x)]^2 - \\ - \frac{1}{4} [E_{,x}(x) E^{-1}(x) - \rho_{0,x}(x) \rho_0^{-1}(x)]^2 \} dx \end{aligned} \quad (15)$$

- искажение формы волны.

Пусть наследственные свойства среды определяются моделью стандартного вязкоупругого тела. Тогда справедливы формулы

$$R(t) = M \exp(-t/\tau_1), \quad (16)$$

$$K(t) = M \exp(-t/\tau_2), \quad (17)$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  - положительные постоянные,

$M = (1/\tau_1) - (1/\tau_2)$  и выполняется условие  $\tau_2 > \tau_1$ .

После вычисления контурного интеграла в (11), главная часть решения (10) приводится к виду

$$U(x,t) = -\varepsilon c N(\zeta) \exp[\Phi_1(x) - \frac{1}{2} M \Phi_2(x)] \int_0^{\zeta} \varphi(\zeta - \xi) d\xi. \quad (18)$$

На основе теорем о предельных значениях оригиналов и изображений преобразования Лапласа можно заключить, что решение (10) описывает волновой процесс в среде при соблюдении условий

$$|\Phi_3(x) \{ \zeta(1 - \frac{1}{2} r M) - \frac{1}{2} r^2 M [1 - \exp(-\zeta/r)] \}| \ll 1, \quad (19)$$

$$|\frac{1}{2} M \Phi_2(x) [1 - \exp(-\zeta/r)]| \ll 1. \quad (20)$$

Через  $r$  в (19) и (20) обозначены постоянные  $\tau_1$  или  $\tau_2$  при использовании уравнения (4) или (5) соответственно.

Неравенства (19) и (20) позволяют определить глубину прифронтальной зоны волны, в которой решение (18) качественно правильно определяет волновой процесс.

2. Уравнения движения среды (4) и (5) выводились при предположении, что плотность среды  $\rho_0(x)$  и мгновенный модуль

упругости  $E(x)$  являются произвольными гладко меняющимися по пространственной координате  $x$  функциями, а наследственные свойства среды, выраженные формулами (I6) и (I7) зависят только от времени. Для случая модели стандартного вязкоупругого тела известно, что характерные времена релаксации  $\tau_1$  и ползучести  $\tau_2$  определяются формулами

$$\tau_1 = \eta_1(x) E^{-1}(x), \quad \tau_2 = \eta_1(x) E_0^{-1}(x), \quad (21)$$

где  $\eta_1(x)$  - коэффициент вязкости,  
 $E_0(x)$  - модуль упругости среды.

Для выполнения условия независимости от пространственной координаты функции  $R(t)$  и  $K(t)$  необходимо, чтобы  $\tau_1$  и  $\tau_2$  являлись постоянными. При переменном по координате  $x$  мгновенным модулем упругости  $E(x)$  это соблюдается, если функции  $\eta_1(x)$  и  $E_0(x)$  выражаются через  $E(x)$  зависимостями

$$\eta_1(x) = C_1 E(x) \quad (22)$$

$$E_0(x) = C_2 E(x). \quad (23)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  - положительные постоянные.

Исследуем далее возможность экспериментального определения параметров среды допуская, что из эксперимента известны время прибытия волны  $\Phi_2(x)$  и относительное изменение ее амплитуды, которое на основе решения (I8) определяется формулой

$$A(x)/A_0 = \exp \left[ \Phi_1(x) - \frac{1}{2} M \Phi_2(x) \right]. \quad (24)$$

Возможны два вида экспериментов. В первом возможно установить  $\Phi_2(x)$  и  $A(x)/A_0$  как непрерывные функции, что позволяет при помощи формул (I4) и (24) определить две неизвестные функции, характеризующие свойства среды. При этом в случае стандартного вязкоупругого тела принимаем за основные величины, характеризующие среду, постоянные  $\rho_0(0)$  и  $M$  и функции  $\rho_0(x)$  и  $E(x)$ . Предполагаем, что две из них являются известными, а две искомыми. Возможные варианты экспериментов и формулы для определения неизвестных представлены в таблице I. Здесь, как и в таблице 2 через "+" обозначены известные и через "-" неизвестные величины.

Во втором случае измерения производятся в одной точке среды с координатой  $x = \bar{x}$ . На основе двух измеряемых величин  $\Phi_2(x)$  и  $A(\bar{x})/A_0$  удастся теперь определить два пара-

Возможные варианты экспериментов при измерении  $A(x)/A_0$  и  $\Phi_2(x)$  в нескольких точках по оси  $x$

№	$\rho_0(0)$	$\rho_0(x)$	$E(x)$	$M$	Формулы вычисления искомых величин
1	-	-	+	+	$\rho_0(x) = E(x) \Phi_{2,x}^2(x)$ $\rho_0(0) = \rho_0(x) \left( \frac{A(x)}{A_0} \right)^4 \exp \left[ \frac{1}{2} M \Phi_2(x) \right]$
2	-	+	-	+	$E(x) = \rho_0(x) \Phi_{2,x}^{-2}(x)$ $\rho_0(0) \text{ определяется по } \rho_0(x)$
3	-	+	+	-	$M = -2 \Phi_2^{-1}(x) \ln \left\{ \frac{A(x)}{A_0} \left[ \frac{\rho_0(x)}{\rho_0(0)} \right]^{1/4} \right\}$ $\rho_0(0) \text{ определяется по } \rho_0(x)$
4	+	-	-	+	$\rho_0(x) = \left( \frac{A_0}{A(x)} \right)^4 \rho_0(0) \exp [-2M \Phi_2(x)]$ $E(x) = \rho_0(x) \Phi_{2,x}^{-2}(x)$
5	+	-	+	-	$\rho_0(x) = E(x) \Phi_{2,x}^2(x)$ $M = -2 \Phi_2^{-1}(x) \ln \left\{ \frac{A(x)}{A_0} \left[ \frac{\rho_0(x)}{\rho_0(0)} \right]^{1/4} \right\}$
6	+	+	-	-	$E(x) = \rho_0(x) \Phi_{2,x}^2(x)$ $M = -2 \Phi_{2,x}^{-1}(x) \ln \left\{ \frac{A(x)}{A_0} \left[ \frac{\rho_0(x)}{\rho_0(0)} \right]^{1/4} \right\}$

Возможные варианты экспериментов при измерении  $A(x)/A_0$  и  $\Phi_2(x)$  в одной точке  $x = \bar{x}$  при  $\rho_0(x) = \rho_0(0)(1 + \alpha x)$  и  $E = \text{const}$ .

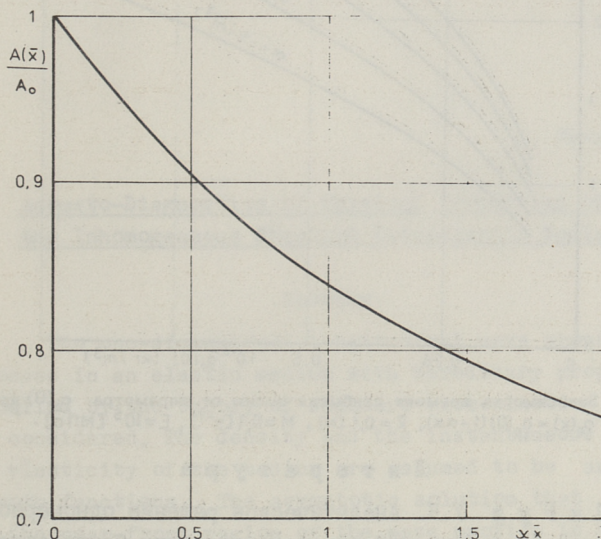
№	$\rho_0(0)$	$\alpha$	$E$	$M$	Формулы вычисления искомых величин
1	-	-	+	+	$\alpha = \bar{x}^{-1} \left\{ \left( \frac{A_0}{A(\bar{x})} \right)^4 \exp[-2M\Phi_2(\bar{x})] - 1 \right\}$ $\rho_0(0) = E \left\{ \frac{3}{2} \alpha \Phi_2(\bar{x}) / [(1 + \alpha \bar{x})^{3/2} - 1] \right\}^2$
2	-	+	-	+	$\frac{E}{\rho_0(0)} = \left\{ \frac{2}{3} [(1 + \alpha \bar{x})^{3/2} - 1] / [\alpha \Phi_2(\bar{x})] \right\}^2$
3	-	+	+	-	$\rho_0(0) = E \left\{ \frac{3}{2} \alpha \Phi_2(\bar{x}) / [(1 + \alpha \bar{x})^{3/2} - 1] \right\}$ $M = -2\Phi_2^{-1}(\bar{x}) \ln \left[ \frac{A(\bar{x})}{A_0} (1 + \alpha \bar{x})^{1/4} \right]$
4	+	-	-	+	$\alpha = \bar{x}^{-1} \left\{ \left( \frac{A_0}{A(\bar{x})} \right)^4 \exp[-2M\Phi_2(\bar{x})] - 1 \right\}$ $E = \rho_0(0) \left\{ \frac{2}{3} [(1 + \alpha \bar{x})^{3/2} - 1] / [\alpha \Phi_2(\bar{x})] \right\}^2$
5	+	-	+	-	$\alpha = \frac{1}{2} \bar{x}^{-3} \left\{ (B^2 - 3\bar{x}^2) \pm [(B^2 - 3\bar{x}^2)^2 - 4\bar{x}^3(3\bar{x} - 2B)]^{1/2} \right\}$ $M = -2\Phi_2^{-1}(\bar{x}) \ln \left[ \frac{A(\bar{x})}{A_0} (1 + \alpha \bar{x})^{1/4} \right]$ $B = \frac{3}{2} \Phi_2(\bar{x}) \left[ \frac{E}{\rho_0(0)} \right]^{1/2}$
6	+	+	-	-	$E = \rho_0(0) \left\{ \frac{2}{3} [(1 + \alpha \bar{x})^{3/2} - 1] / [\alpha \Phi_2(\bar{x})] \right\}^2$ $M = -2\Phi_2^{-1}(\bar{x}) \ln \left[ \frac{A(\bar{x})}{A_0} (1 + \alpha \bar{x})^{1/4} \right]$

метра среды. В таблице 2 приведены возможные варианты экспериментов в частном случае, когда

$$\rho_0(x) = \rho_0(0)(1 + \alpha x), \quad E(x) = \text{const.} \quad (25)$$

и представлены формулы для определения неизвестных.

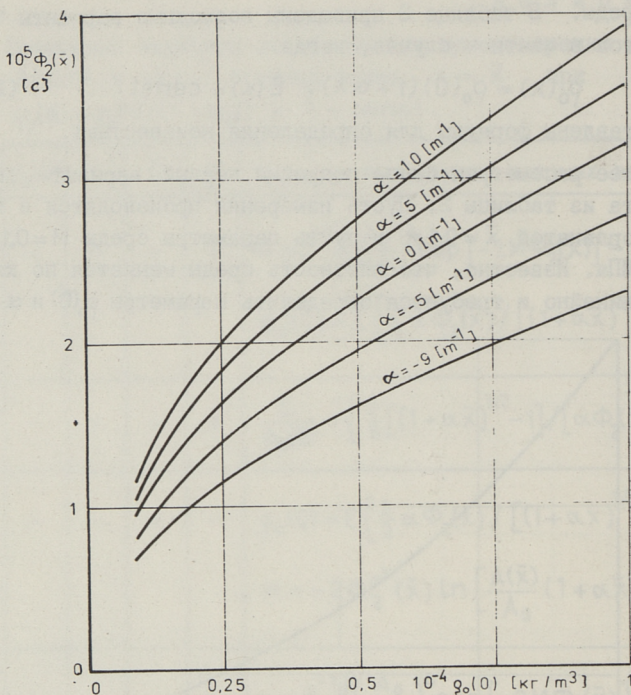
Далее рассмотрим более подробно первый вариант эксперимента из таблицы 2. Пусть измерения производятся в точке с координатой  $\bar{x} = 0,1 \text{ м}$  и пусть параметры среды  $M = 0,1 \text{ с}^{-1}$  и  $E = 10^5 \text{ МПа}$ . Известно, что плотность среды меняется по координате линейно и требуется определить параметры  $\rho_0(0)$  и  $\alpha$ .



Фиг. 1. Влияние параметра  $\alpha$  на относительное изменение амплитуды волны при  $\rho_0(x) = \rho_0(0)(1 + \alpha x)$ ,  $\bar{x} = 0,1 \text{ [м]}$ ,  $M = 0,1 \text{ [с}^{-1}\text{]}$ ,  $E = 10^5 \text{ [МПа]}$ .

Это удастся, если по измеряемой величине  $A(\bar{x})/A_0$  из фиг. 1 определить величину  $\alpha \bar{x}$  и далее из фиг. 2 на основе измеряемой величины  $\Phi_2(x)$  и известной теперь  $\alpha$  определить параметр  $\rho_0(0)$ .

Необходимо отметить, что фиг. 1 и 2 позволяют определить также точность измерений, требуемую для определения искомых параметров среды.



Фиг. 2. Зависимость времени прибытия волны от параметра  $\rho_0(0)$  при  $\rho_0(x) = \rho_0(0)(1 + \alpha x)$ ,  $\bar{x} = 0,1$  [м],  $M = 0,1$  [с<sup>-1</sup>],  $E = 10^5$  [МПа].

### Л и т е р а т у р а

1. Н и г у л У.К. Аналитическое решение одномерной обратной задачи импульсной акустодиагностики наследственной среды. В кн.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М., Наука, 1984, с. 142-152.

2. E n g e l b r e c h t J. Recent results on nonlinear waves and inverse problems in acoustoelasticity. - Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti. Classe I<sup>a</sup> di Scienze Fis. Mat. e Nat., 1981, v. 59, p. 5-23.

3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., Наука, 1977, 384 с.

4. Н и г у л У.К. Нелинейная акустодиагностика. Л., Судостроение, 1981. 252 с.



5. П о п о в и ч А.Ю., Ф и л и п п о в И.Г. Распространение плоских волн сжатия в неоднородных вязкоупругих средах. - Изв. АН МССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук, 1977, № 1, с. 28-35.

6. Р а в а с о о А.А. О нахождении физических параметров неоднородной среды по измерениям скорости и интенсивности волны. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1983, № 551, с. II-16.

A. Ravasoo

Acousto-Diagnostics of Physical Properties of  
the Inhomogeneous Standard Viscoelastic Medium

Summary

The one-dimensional longitudinal wave propagation process in an elastic medium with hereditary properties, modelled by the theory of standard viscoelastic body, is considered. The density and the instantaneous modulus of elasticity of the medium are assumed to be arbitrary smooth functions. The asymptotic solution that exists at the near-front region of the wave profile is derived. On the basis of this solution the algorithm of acousto-diagnostics of physical parameters of the medium is constructed. The variants of possible experiments are discussed and a numerical example is presented.

## С о д е р ж а н и е

I.	Johannes Aare 70	3
2.	Ааре И., Кульбах В. Статический расчет пешеходных висячих мостов.....	5
3.	Ааре И., Реймани А. О расчете автоклавов, опирающихся на две опоры.....	15
4.	Сарап А. Аналитический метод расчета напряженного состояния балки-стенки от сосредоточенной силы.....	25
5.	Лаул Х., Алликас Л. Расчет диафрагмы зданий переменной жесткости.....	37
6.	Цйгер К. О влиянии элементов покрытия на напряженно-деформированное состояние седловидных вантовых конструкций.....	41
7.	Цйгер К. Учет влияния панелей и других элементов покрытия на работу седловидных висячих вантовых конструкций.....	53
8.	Тярно Ю. Анализ данных экспериментального исследования моделей трансляционных оболочек из цементного раствора.....	67
9.	Тярно Ю. Исследование оболочек из упругих материалов с дискретными искусственными трещинами	83
10.	Рейман А. О некоторых результатах расчета автоклавов методом конечных элементов.....	91
II.	Воронов В. Исследование напряженного состояния корпуса цилиндрического аппарата в области монтажного штуцера.....	101
12.	Партс А. Анализ работы контура в плане ромбовидных и шестиугольных седловидных висячих покрытий.....	III
13.	Федоров В. Экспериментальное исследование работы ребристых деревянных гипаров.....	II9
14.	Лавров А., Федоров В. Экспериментальное исследование работы деревянных коноидальных оболочек	I27
15.	Клаусон А.В. Дифракция узконаправленных волн на цилиндрических телах.....	I35
16.	Равасоо А. Акустодиагностика свойств неоднородной стандартной вязкоупругой среды.....	I43



руб. 1.20