

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А № 35

1950

Х. Х. ЛАУЛЬ

РАСЧЁТ ДЛИННЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ
АНТИСИММЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ
ПО МЕТОДУ КАСТИЛЬЯНО-РИТЦА



ЭСТОНСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИН 1951

Ер. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А № 35

1950

Х. Х. ЛАУЛЬ

РАСЧЁТ ДЛИННЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ
АНТИСИММЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ
ПО МЕТОДУ КАСТИЛЬЯНО-РИТЦА

388.



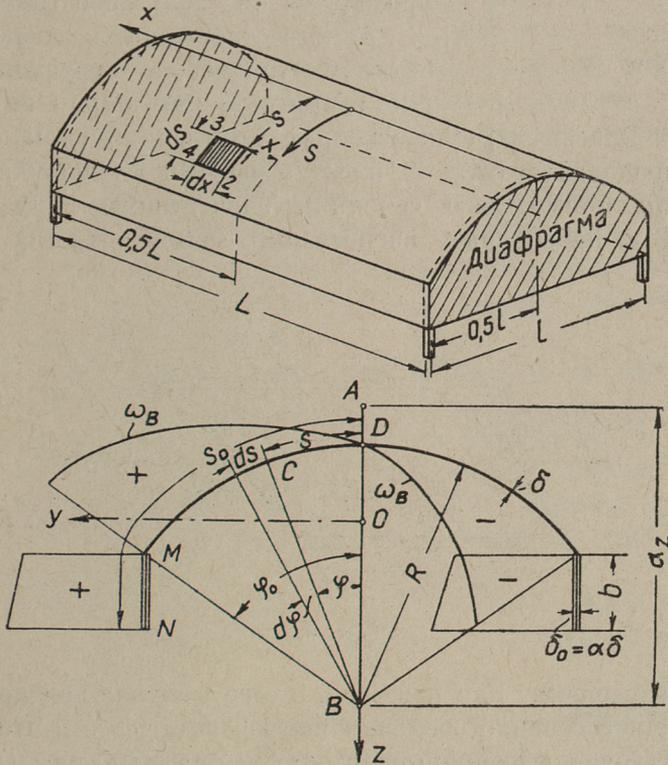
Ер. 1747



ЭСТОНСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

1. Введение.

Объектом изучения является отдельно стоящая длинная цилиндрическая оболочка (черт. 1) с произвольным, но симметрическим относительно конька поперечным сечением, несущая нагрузку

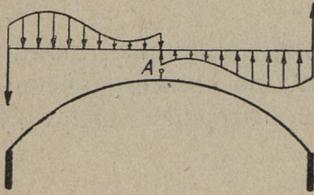


Черт. 1.

постоянную в направлении образующей (оси x) и антисимметрическую относительно $s = 0$ (черт. 2). С такой нагрузкой приходится иметь дело на практике при разложении произвольной нагрузки на симметрическую и антисимметрическую. Расчёт оболочки по

методу Кастильяно-Ритца в случае симметрической нагрузки представлен автором в его работе [13]*).

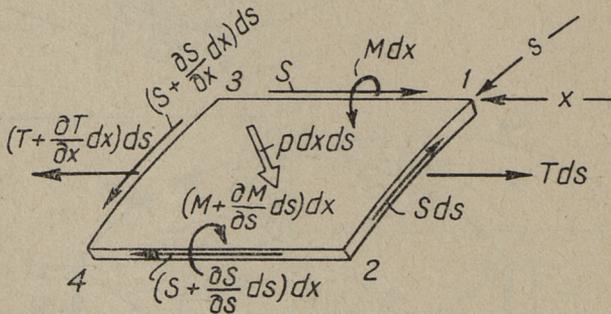
Антисимметрическая нагрузка (черт. 2) может состоять из нагрузок как по криволинейной части поверхности, так и по бортовому элементу. Если рассматривать оболочку в целом, как большую балку, то в соответствии с характером нагрузки в ней отсутствуют изгибающие моменты. Вследствие этого, внутренние продольные усилия возникают только под действием бимоментов.



Черт. 2.

Решение рассматриваемой задачи проводится по следующей схеме:

а) в соответствии с действующей антисимметрической нагрузкой определяем: при помощи теории бимоментов проф. В. С. Власова [4] существенные внутренние силы оболочки (черт. 3), продольную силу T_0 вдоль образующей оболочки (на единицу длины поперечного сечения), сдвигающую силу S_0 (или $\xi_0 = \partial S_0 / \partial x$) и поперечный изгибающий момент M_0 (на единицу



Черт. 3.

длины образующей). Как известно, в таком случае предполагается, что поперечное сечение оболочки не деформируется и что отсутствуют сдвигающие деформации срединной поверхности. Остальные внутренние усилия оболочки считаются несущественными.

б) Выбираем подходящий дополнительный эпюр $\Delta \xi$ прироста внутренних сдвигающих сил $\xi_0 = \partial S_0 / \partial x$ (этот дополнительный эпюр

*) Цифры в квадратных скобках указывают номер соответствующего сочинения в списке литературы, приложенном в конце.

зависит вначале от неизвестных параметров) таким образом, чтобы все условия равновесия были бы соблюдены с известной точностью.

в) Из условий минимума потенциальной энергии внутренних сил по методу Кастильяно-Ритца находим неизвестные параметры, после чего становится возможным определить посредством простого суммирования также и действительные существенные внутренние силы в оболочке M , T и S .

Эта схема тождественна схеме вычисления для случая симметрической нагрузки, представленной автором в [13].

Конечно, предлагаемый ход решения не вполне корректен с точки зрения строгой теории упругости, так как в практических вычислениях нужно ограничиваться сравнительно небольшим числом параметров, в результате чего аппроксимация сдвигающих и др. сил будет, конечно приближенной; кроме того внутренние усилия, вызываемые дополнительным эпюром, вообще говоря, не находятся точно в состоянии равновесия и т. д.

Но зато ход вычислений гораздо короче по сравнению с известными точными методами, не выходит за пределы интуитивной наглядности, почти всегда осуществим посредством логарифмической линейки и даёт результаты с точностью, достаточной для практических надобностей.

Необходимо отметить, что можно принять за неизвестное не дополнительный эпюр $\Delta\zeta$ прироста сдвигающих сил, но и сам эпюр прироста сдвигающих сил — т. е. величину ζ . В таком случае отпадает необходимость определять начальные внутренние усилия T_0 , S_0 и M_0 на основании теории проф. В. С. Власова, что, конечно, означает экономию вычислительной работы; об этом подробнее следует в примере.

В настоящей работе автор придерживается обозначений, принятых в [13], поскольку не появляются новые величины.

2. Внутренние усилия в оболочке с недеформируемым поперечным сечением.

Найдём на основании теории бимоментов проф. В. С. Власова внутренние усилия в оболочке в случае антисимметрической нагрузки.

Для этого необходимо прежде всего найти ряд геометрических величин для поперечного сечения:

а) Центр тяжести поперечного сечения „ O “ (черт. 1) можно найти посредством какогонибудь известного приёма; так например, если имеется математическое выражение для кривой сечения, например дуга окружности, то центр тяжести определяется простым интегрированием.

β) Центр прогиба (секториальный полюс) поперечного сечения — „ A “ (черт. 1) находится, вследствие симметрии, на оси z ; его координата a_z определяется выражением:

$$\alpha_z = - \frac{\int_0^{s_0} \omega_B y dF}{J_{zz}} \quad (1)$$

где:

ω_B — секториальная площадь поперечного сечения оболочки относительно точки B , (в случае оболочки в форме дуги окружности точку B можно поместить в центр), причём за начальную точку отсчёта принято пересечение (D) оболочки с осью симметрии (— осью z) (см. черт. 1).

dF — элемент поверхности оболочки ($dF = \delta ds$)

J_{zz} — момент инерции поперечного сечения оболочки относительно оси z .

В частном случае, для оболочки в форме дуги окружности имеем:

$$\begin{aligned} \omega_B &= R^2 \varphi, \\ \omega_{BM} &= R^2 \varphi_0, \\ \omega_{BN} &= (R^2 \varphi_0 + bl/2), \\ y &= R \sin \varphi, \\ dF &= \delta R d\varphi \end{aligned}$$

и

$$\alpha_z = - \frac{(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) R^4 \delta + 0,25 b \delta_0 l (2R^2 \varphi_0 + 0,5 bl)}{0,5 (\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) R^3 \delta + 0,25 \delta_0 l^2 b} \quad (2)$$

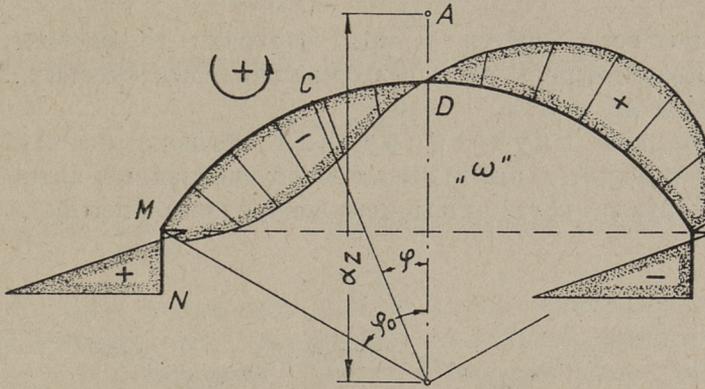
знак „—“ перед дробью указывает, что a_z надо отмерять от точки B в отрицательном направлении оси z , в результате чего центр прогиба A оказывается выше оболочки.

γ) ω — эпюр секториальных площадей поперечного сечения и секториальный момент инерции.

Секториальный момент инерции:

$$J_\omega = 2 \int_0^{s_0} \omega^2 dF,$$

где ω секториальная площадь текущей точки C относительно центра прогиба A , причём за начальную точку отсчёта принята точка D оболочки на оси симметрии. Качественно ω эпюр пред-



Черт. 4.

ставлен на черт. 4. В случае оболочки с круговым поперечным сечением имеем:

$$\begin{aligned} \omega_{\varphi} &= -R(\alpha_z \sin \varphi - R\varphi), \\ \omega_M &= -R(\alpha_z \sin \varphi_0 - R\varphi_0), \\ \omega_N &= -R(\alpha_z \sin \varphi_0 - R\varphi_0) + 0,5 bl. \\ J_{\omega} &= 2R^3 \delta [\alpha_z^2 (\varphi_0/2 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0/2) - 2R\alpha_z (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) + \\ &\quad + R^2 \varphi_0^3/3] + 0,67 b \delta_0 (\omega_M^2 + \omega_N^2 + \omega_M \omega_N). \end{aligned} \quad (3)$$

д) Полярный момент инерции поперечного сечения

$$J_d \approx \frac{2}{3} \int_0^{s_0} \delta^3 ds.$$

Изгибно-крутильная характеристика

$$k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_{\omega}}}.$$

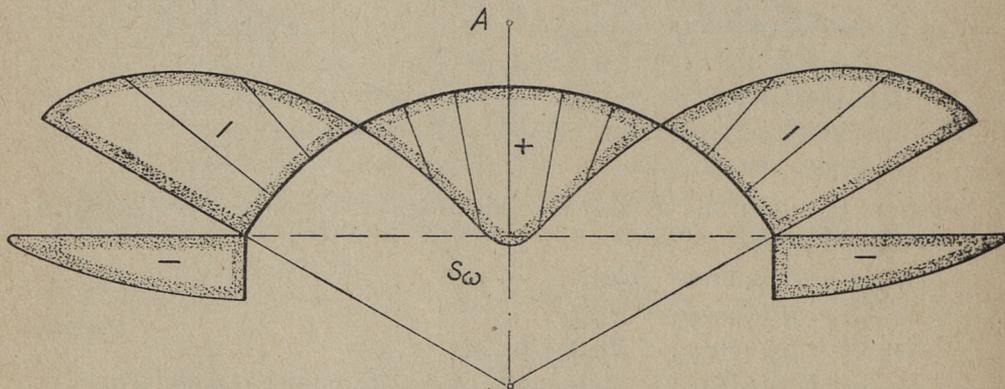
Так как толщина оболочки δ сравнительно невелика, то величина kL (L — пролёт оболочки) всегда меньше чем 0,75, вследствие чего, согласно исследованиям Д. В. Бычкова, величины k и J_d соответственно можно считать равными нулю. Таким образом пренебрегаем влиянием неравномерности распределения сдвигающих напряжений по толщине оболочки, чем значительно упрощаются последующие выкладки.

е) Эпюр секториальных статических моментов. Секториальный статический момент относительно текущей точки C

$$S_{\omega} = \int \omega dF, \quad (4)$$

причём интеграл берётся от края оболочки до рассматриваемой точки. Качитативно эпюр секториальных статических моментов представлен на черт. 5.

Источником внутренних сил оболочки (на черт. 3 представлѣны положительными) является обусловленный антисимметрической нагрузкой крутящий момент вокруг центра изгиба A (черт. 2).



Черт. 5.

Пусть теперь крутящий момент m_A вызывается постоянной на протяжении всей оболочки нагрузкой на единицу длины ($\Delta x = 1$). (— положительное направление указано на черт. 6).

Тогда бимоменты распределяются вдоль оболочки по квадратичной параболе; максимальный бимомент располагается в середине пролёта оболочки ($x = 0$) и по величине равен

$$\max B = m_A L^2 / 8. \quad (5)$$

а) Продольные внутренние силы T_0 находим из

$$T_0 = \frac{B\omega}{J_{\omega}} \delta. \quad (6)$$

Таким образом, в поперечном сечении — если толщина оболочки постоянна — продольные внутренние силы изменялись бы афинно ω -эпюру. Изменение продольных внутренних сил вдоль

по оболочке происходит соответственно с изменением величины B по квадратичной параболе.

Посреди оболочки ($x = 0$) продольные внутренние усилия

$$\max T_0 = \frac{\max B \cdot \omega}{J_\omega} \delta. \quad (6')$$

β) Сдвигающие усилия S_0 находим из выражения

$$S_0 = \frac{M_\omega S_\omega}{J_\omega}, \quad (7)$$

где $M_\omega = \partial B / \partial x = 2 \int_0^{s_0} S d\omega$ — изгибно-крутящий момент.

В настоящем случае этот момент можно определить как фиктивную поперечную силу, вызываемую фиктивной нагрузкой в оболочке, как в большой балке. Вместе с тем становится возможным выразить M_ω в сечении x :

$$M_\omega = x m_A.$$

Максимальное значение M_ω имеет в сечении диафрагмы:

$$\max M_\omega = m_A L / 2.$$

Для последующих выкладок понадобится величина

$$\xi_0 = \frac{S_\omega}{J_\omega} \frac{\partial}{\partial x} M_\omega = \frac{m_A S_\omega}{J_\omega}. \quad (7')$$

Таким образом ξ_0 на поперечном сечении афинна с эпюром S_ω . Вдоль оболочки $\xi_0 = \text{конст.}$

γ) Поперечные изгибающие моменты M_0 обуславливаются нагрузкой и приростом ξ_0 сдвигающих сил (черт. 6 — положительный момент вызывает растяжение на внутренней поверхности оболочки).

Например в сечении s_1

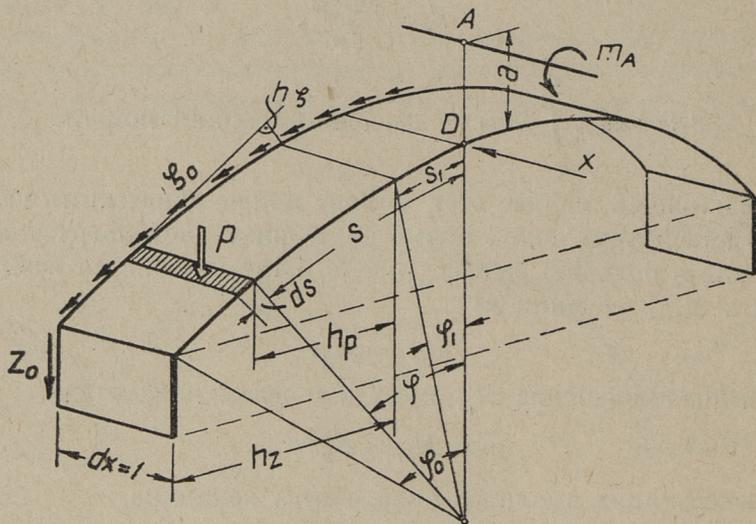
$$M_0^{s_1} = -Z_0 h_z - \int \xi_0 h_\zeta ds - \int p h_p ds, \quad (8)$$

где интегралы распространяются от края оболочки ($s = s_0$) до рассматриваемого сечения s_1 . Интегрирование проводится численными методами, обычно по формуле Симпсона с необходимой для данной проблемы точностью.

Z_0 — результирующая сила прироста сдвигающих усилий ξ_0 в бортовом элементе.

h_z, h_ζ, h_p — соответствующие плечи (см. черт. 6).

Весь, находящийся по одну сторону центра изгиба A ξ -эпюр уравнивает своим моментом момент внешней нагрузки $m_A/2$. Таким образом „изгибающий момент“ относительно центра изгиба равен нулю.



Черт. 6.

Но также и относительно конька D оболочки изгибающий момент M_D должен быть равен нулю (антисимметрия). Так как вертикальная нагрузка даёт в точках A и D одинаковые моменты, то должны быть равными также и моменты, обусловленные эпюром прироста сдвигающих сил ξ_0 ; так например, если криволинейная часть есть дуга окружности, то

$$\int_0^{\varphi_0} \xi_0 [R - (R + a) \cos \varphi] R d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \xi_0 [R - R \cos \varphi] R d\varphi.$$

Отсюда следует

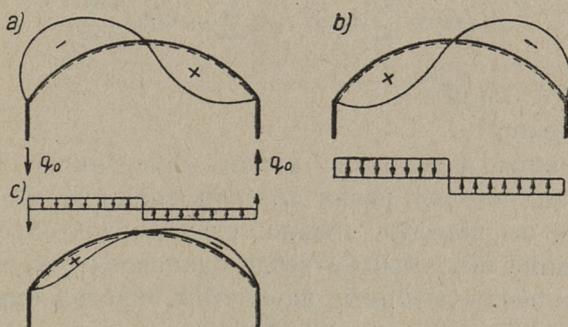
$$\int_0^{\varphi_0} \xi_0 \cos \varphi d\varphi = 0.$$

Таким образом, если горизонтальная результирующая сила, обусловленная ξ_0 — эпюром на одной половине оболочки равна

нулю, (как это и должно быть в случае антисимметрии), то и моменты относительно точек A и D равны между собой, какова бы ни была величина „ a “ (см. черт. 6).

Значения T_0 и S_0 (соответственно ζ_0) не зависят от распределения нагрузки в направлении поперечного сечения, а только от величины крутящего момента m_A .

Поперечный же момент M_0 , напротив, зависит прежде всего от распределения нагрузки в направлении поперечного сечения. На черт. 7 представлены качественно эпюры поперечных моментов, обусловленных различным распределением нагрузки в направлении поперечного сечения. Сравнивая чертежи 7а, 7в и 7с видим, что моменты могут иметь различные знаки и даже принимать значения близкие к нулю.



Черт. 7.

Внутренние усилия, найденные в настоящем разделе, определены в соответствии с теорией бимоментов проф. Власова и связаны предпосылками, выдвигаемыми при построении этой теории, т. е. что поперечные сечения недеформируемы и что сдвигающая деформация отсутствует. В рассматриваемом же случае эти предположения, и в особенности требование о недеформируемости поперечного сечения, в общем не удовлетворены, т. к. толщина оболочки — δ — величина сравнительно малая. Деформации поперечного сечения обуславливаются главным образом поперечными моментами. Если, в случае какойнибудь данной нагрузки, поперечные моменты будут близкими к нулю, то теория проф. Власова будет непосредственно применимой также и к сравнительно тонкой оболочке. Если же поперечные моменты достигают значительной

величины, то, как это показывает настоящая работа, в распределении внутренних усилий следует ожидать крупных расхождений с теорией бимоментов. Настоящее замечание ни в коей мере не умаляет огромное значение теории проф. Власова; в технике применяется очень много конструкций, для которых допущения теории проф. Власова удовлетворены в полной мере.

3. Дополнительный эюр $\Delta\zeta(s)$.

Эффективность предлагаемого метода зависит главным образом от удачного выбора дополнительного эюра.

В случае антисимметрической нагрузки дополнительный эюр выбираем в виде:

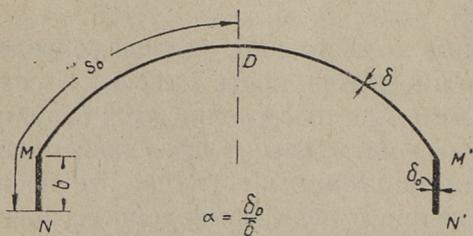
$$\Delta\zeta(s) = \sum_1^n a_m \Delta\zeta_m = \sum_1^n a_m \cos \frac{m\pi s}{2s_{0m}}, \quad (9)$$

где: $m = 1, 3, 5, 7 (2n - 1)$

s — см. черт. 1

s_{0m} — половина фиктивной длины поперечного сечения оболочки, которая равна s_0 , если толщина оболочки постоянна, и которую нужно специально определять, если толщина оболочки не везде одинакова (см. ниже).

a_m — пока неопределённые параметры, определяемые из условий минимума потенциальной энергии.



Черт. 8.

Избранный таким образом дополнительный эюр антисимметричен относительно $s = 0$ и равен нулю на краях оболочки (практически всегда встречающийся случай).

а) Определение половины фиктивной длины оболочки s_{0m} .

Вообще говоря, величина s_{0m} немного больше (на ξ_m) чем

s_0 и для оболочки, у которой бортовой элемент толще в $a = \delta_0/\delta$ раз, её определяют исходя из следующих соображений (черт. 8 и 9):

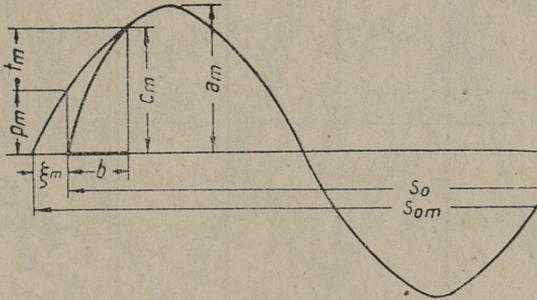
Продольные внутренние усилия T претерпевают скачок в точке M (см. черт. 1), т. е. в части бортового элемента значения T в a

раз больше чем на криволинейной части. Из условий равновесия элемента, представленного на черт. 3 находим

$$\frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Отсюда следует, что на S -эпюре (соотв. на ξ -эпюре) в точке M будет перелом, увеличивающий угол касания в α раз. Но все же эпюр должен иметь нулевую ординату в точке N .

Тогда в случае m -го члена дополнительного эпюра имеем: (см. черт. 9)



Черт. 9.

$$c_m = a_m \cos \frac{m\pi(s_0 - b)}{2s_{0m}}$$

и

$$p_m = a_m \cos \frac{m\pi s_0}{2s_{0m}}$$

т. к. $c_m = \alpha t_m = \alpha(c_m - p_m)$, то

$$\cos \frac{m\pi(s_0 - b)}{2(s_0 + \xi_m)} = \alpha \left[\cos \frac{m\pi(s_0 - b)}{2(s_0 + \xi_m)} - \cos \frac{m\pi s_0}{2(s_0 + \xi_m)} \right].$$

Отсюда

$$\cos \frac{m\pi(s_0 - b)}{2(s_0 + \xi_m)} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cos \frac{m\pi s_0}{2(s_0 + \xi_m)}.$$

Так как $b \ll s_0$ и $\xi_m \ll s_0$, то ξ_m можно приблизительно определить из выражения:

$$\xi_m = \frac{\sin \frac{m\pi b}{2s_0}}{\frac{\alpha}{\alpha - 1} - \cos \frac{m\pi b}{2s_0}} \cdot \frac{2s_0}{m\pi} \quad (11)$$

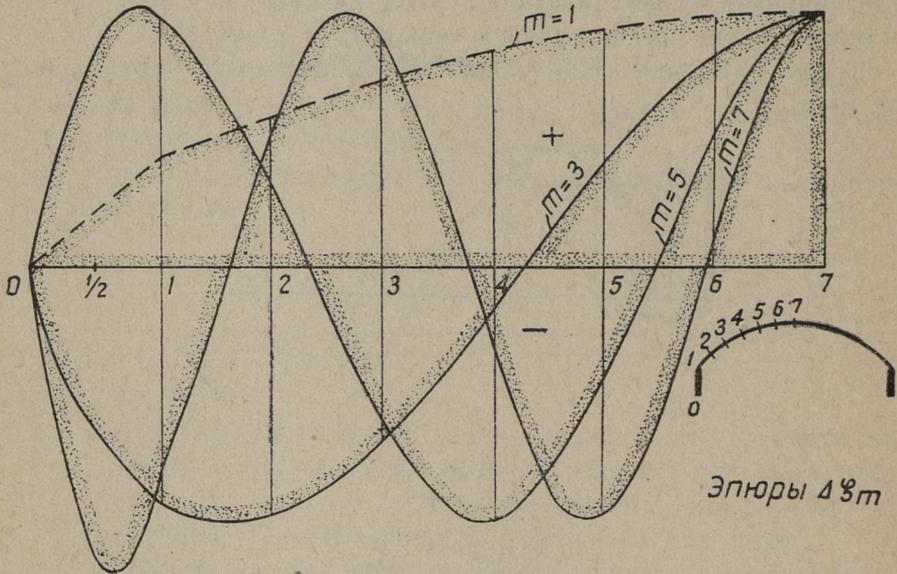
и

$$s_{0m} = s_0 + \xi_m.$$

В части бортового члена дополнительный эпюр имеет вид:

$$\Delta \zeta = \sum_1^n a_m \left[(1-a) \cos \frac{m\pi(s_0-b)}{2s_{0m}} + a \cos \frac{m\pi s}{2s_{0m}} \right]. \quad (9')$$

Качественно эпюры $\Delta \zeta_m$ представлены на черт. 10.



Черт. 10.

д) Внутренние усилия оболочки из дополнительного эпюра $\Delta \zeta_m$.

а) Прирост сдвигающих усилий

$$\Delta S_m = x \Delta \zeta_m. \quad (12)$$

б) Прирост продольных внутренних усилий ΔT_m находим из условий равновесия элемента оболочки относительно оси x (см. черт. 3)

$$\frac{\partial(\Delta T_m)}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta S_m)}{\partial s} = 0; \text{ т. е.}$$

$$d(\Delta T_m) = -x \frac{\partial(\Delta \zeta_m)}{\partial s} dx$$

$$\Delta T_m = -\frac{\partial(\Delta \zeta_m)}{\partial s} \frac{x^2}{2} + C.$$

Если $x = 0,5 L$ то $\Delta T_m = 0$

Отсюда: $C = \frac{L^2}{8} \frac{\partial(\Delta \zeta_m)}{\partial s}$

и

$$\Delta T_m = \frac{\partial(\Delta \zeta_m)}{\partial s} \frac{L^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Причём

$$\frac{\partial(\Delta \zeta_m)}{\partial s} = \Delta t_m = -a_m \frac{m\pi}{2s_{0m}} \sin \frac{m\pi s}{2s_{0m}}.$$

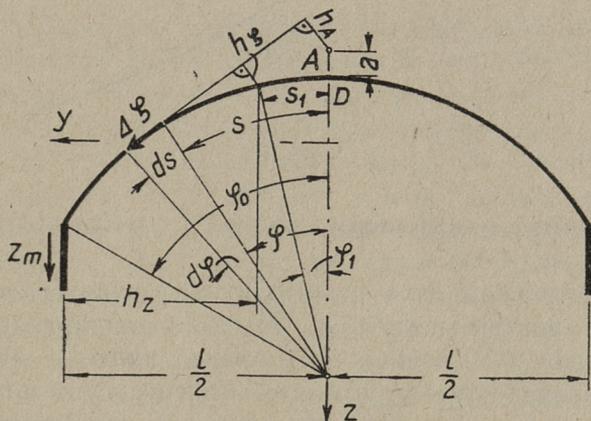
Таким образом, поправка ΔT_m обусловленная m -ым членом дополнительного эпюра (если $a_m = 1$) будет:

$$\Delta T_m = -\frac{m\pi}{2s_{0m}} \frac{L^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi s}{2s_{0m}}. \quad (13')$$

Прирост продольных усилий на середине оболочки ($x = 0$) оказывается максимальным:

$$\max \Delta T_m = -\frac{m\pi}{2s_{0m}} \frac{L^2}{8} \sin \frac{m\pi s}{2s_{0m}}. \quad (13'')$$

В части же бортового элемента прирост продольных усилий в a раз больше.



Черт. 11.

γ) Поперечный изгибающий момент m_m в произвольной точке получается из эпюра $\Delta \zeta_m$ (если $a_m = 1$) (черт. 11).

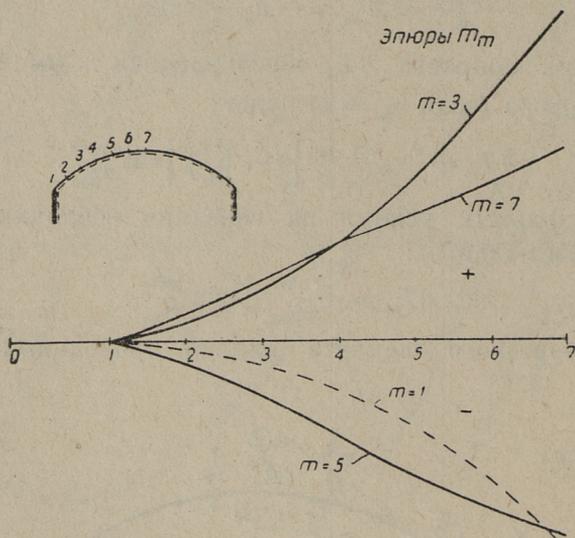
$$m_m = - \left[Z_m \cdot h_z + \int_{s_0-b}^{s_1} \cos \frac{m\pi s}{2s_{0m}} h_z ds \right], \quad (14)$$

где Z_m — результат эпюра $\Delta \zeta_m$ в части бортового элемента.

Если криволинейная часть есть дуга окружности, то интеграл берётся легко; но ещё проще — численное интегрирование, годное, конечно для любой формы криволинейной части.

На черт. 12 представлены эпюры m_m для $m = 1, 3, 5, 7$.

Необходимо заметить, что можно ограничиться членами разложения до $m = 7$; во многих же случаях достаточно даже $m = 5$.



Черт. 12.

4. Условия равновесия, которым должен удовлетворять эпюр $\Delta\zeta$. (см. черт. 11).

Эпюр $\Delta\zeta$ должен дать равный нулю результирующий момент относительно центра изгиба A . Также и результирующая горизонтальная сила (ΣY) должна быть равна нулю, — это второе условие эквивалентно требованию, чтобы изгибающий момент в точке D был равен нулю (см. рубр. 2.). Условия равновесия являются существенными предпосылками применимости метода Кастильяно-Ритца, так как только в таком случае можно исключить из выражений работу внешних сил.

Условие $\Sigma M_A = 0$ (черт. 11)

$$\Sigma M_A = 2 \sum_1^n a_m \left[Z_m \frac{l}{2} + \int_0^{s_0-b} h_A \cdot \cos \frac{m\pi s}{2s_{0m}} ds \right] = 0. \quad (15)$$

Если поперечное сечение оболочки есть дуга окружности, то это условие легко интегрируется :

$$\sum_{m=1}^n a_m \left[Z_m \cdot \frac{l}{2} + \frac{R}{\gamma} \sin \gamma (s_0 - b) - (R + a) \frac{\sin \varphi_0 \cos \gamma (s_0 - b) - \gamma R \cos \varphi_0 \sin \gamma (s_0 - b)}{\frac{1}{R} - R\gamma^2} \right] \quad (15')$$

где $\gamma = m\pi/2s_{0m}$.

В случае же произвольной формы поперечного сечения выражение (15) интегрируется численно.

Условие, чтобы проекции горизонтальных сил были равны нулю даёт например для оболочки с поперечным сечением в форме дуги окружности :

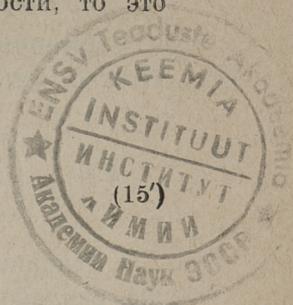
$$\sum_1^n a_m = \frac{\sin \varphi_0 \cos \gamma (s_0 - b) - \gamma R \cos \varphi_0 \sin \gamma (s_0 - b)}{\frac{1}{R} - R\gamma^2} = 0. \quad (16)$$

В условии равновесия (15) числовой коэффициент перед a_1 окажется значительно меньшим (примерно в 50 раз) чем перед остальными параметрами. Но зато в условии равновесия (16) числовой коэффициент перед a_1 значительно больше (примерно в 30 раз) чем коэффициенты перед остальными параметрами. Это значит, что без большой погрешности можно принять $a_1 = 0$. Таким образом аппроксимация сдвигающих усилий начинается дополнительным эпюром $\Delta \xi_3$, похожим по своей форме на эпюр S_0 (ср. черт. 5 и 10). Это вполне логичный результат, т. к. во всех случаях применения энергетических методов, исходим из поправочных эпюров, аффинных эпюрам начальных функций нагрузок. Само собою разумеется, что это обстоятельство значительно упрощает наши дальнейшие выкладки. Одновременно с этим считаем использованным условие равновесия горизонтальных сил (16).

Из условия, что моменты равны нулю (15) можно выразить например параметр a_7 через параметры a_3 и a_5

$$a_7 = k_1 a_3 + k_2 a_5. \quad (17)$$

Таким образом приходится определить два независимых параметра из двух условий минимума потенциальной энергии внутренних сил.



5. Выражения для минимума потенциальной энергии.

Потенциальная энергия одной четверти поверхности оболочки, если $E \approx 2G$ выражается следующим образом:

$$V = \frac{L}{2} \int_0^{s_0} \frac{12M^2}{2E\delta^3} ds + \int_0^{0,5L} x^2 dx \int_0^{s_0} \frac{\zeta^2}{E\delta} ds + \int_0^{0,5L} \left[1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right]^2 dx \int_0^{s_0} \frac{\max T^2}{2E\delta} ds.$$

Условий минимума потенциальной энергии составляем столько же, сколько имеется неизвестных независимых параметров:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_m} = & 6L \int_0^{s_0} \frac{M}{\delta^3} \frac{\partial M}{\partial a_m} ds + 2 \int_0^{0,5L} x^2 dx \int_0^{s_0} \frac{\zeta}{\delta} \frac{\partial \zeta}{\partial a_m} ds + \\ & + \int_0^{0,5L} \left[1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right]^2 dx \int_0^{s_0} \frac{\max T}{\delta} \cdot \frac{\partial \max T}{\partial a_m} ds = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$M = M_0 + \sum_{3,5,7} a_m m_m = M_0 + a_3 (m_3 + k_1 m_7) + a_5 (m_5 + k_2 m_7); \quad (19)$$

$$\zeta = \zeta_0 + \sum_{3,5,7} a_m \Delta \zeta_m = \zeta_0 + a_3 (\Delta \zeta_3 + k_1 \Delta \zeta_7) + a_5 (\Delta \zeta_5 + k_2 \Delta \zeta_7); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \max T = \max T_0 + \sum \max \Delta T_m = \max T_0 + a_3 (\max \Delta T_3 + k_1 \max \Delta T_7) + \\ + a_5 (\max \Delta T_5 + k_2 \max \Delta T_7). \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда следует, что

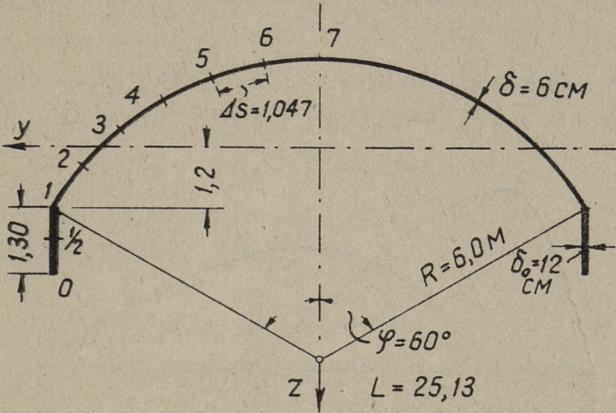
$$\begin{aligned} \partial M / \partial a_3 &= m_3 + k_1 m_7; \\ \partial M / \partial a_5 &= m_5 + k_2 m_7; \\ \partial \zeta / \partial a_3 &= \Delta \zeta_3 + k_1 \Delta \zeta_7; \\ \partial \zeta / \partial a_5 &= \Delta \zeta_5 + k_2 \Delta \zeta_7; \\ \partial \max T / \partial a_3 &= \max \Delta T_3 + k_1 \max \Delta T_7; \\ \partial \max T / \partial a_5 &= \max \Delta T_5 + k_2 \max \Delta T_7. \end{aligned}$$

Выражения для минимума потенциальной энергии наиболее целесообразно интегрировать численным методом, при этом форма поперечного сечения не играет существенной роли.

Из условий минимума потенциальной энергии получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных параметров a_3 и a_5 . Затем, суммированием находим существенные внутренние усилия оболочки по формулам (19), (20) и (21).

6. Пример.

В настоящем вычислительном примере рассматривается оболочка представленная в работе автора [13] (черт. 13).



Черт. 13.

а) Геометрические величины.

Толщина оболочки в её криволинейной части $\delta = 0,06$.

Толщина бортового элемента $\delta_0 = 0,12$.

Центр тяжести поперечного сечения на 1,2 м выше бортового элемента.

$$J_{zz} = 16,38 \text{ м}^4$$

$$a_z = -\frac{119,8}{16,38} = -7,313 \text{ м};$$

ω — эюр представлен на черт. 14

$$J_{\omega} = 2 \int_0^{s_0} \omega^2 dF = 8,25 \text{ м}^6.$$

Полярный момент инерции.

$$J_a \cong \frac{1}{3} \sum s \delta^3 = \frac{1}{3} [12,56 \cdot 0,06^3 + 2 \cdot 1,3 \cdot 0,12^3] = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$$

$$k = \sqrt{\frac{GJ_a'}{EJ_{\omega}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{8,25}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$$

$$kL = 1,2 \cdot 10^{-2} \cdot 25,13 = \sim 0,3 < 0,75.$$

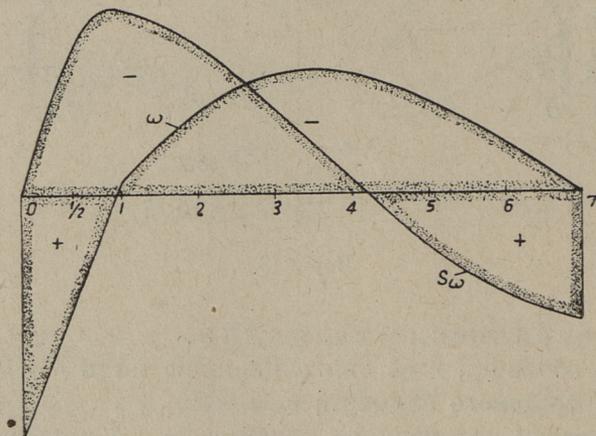
Поэтому в дальнейшем предполагается $k = 0$.

$S_\omega = \int \omega dF$ причём интегрирование производится от края оболочки до рассматриваемого сечения s .

Эпюр S_ω представлен на черт. 14.

Фиктивные полудлины поперечного сечения оболочки находим по формуле (11) ($\alpha = 2$)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1,23 \text{ м}; & \xi_3 &= 0,89 \text{ м}; & \xi_5 &= 0,53 \text{ м}; & \xi_7 &= 0,29 \text{ м}; \\ s_{01} &= 8,81 \text{ м}; & s_{03} &= 8,47 \text{ м}; & s_{05} &= 8,11 \text{ м}; & s_{07} &= 7,88 \text{ м}. \end{aligned}$$



Черт. 14.

б) Нагрузка.

Пусть оболочка несёт антисимметрическую, неизменную в направлении оси x нагрузку (черт. 7а) в $q_0 = 0,436$ т на погонный метр бортового члена.

Текущий крутящий момент, соответствующий этой нагрузке

$$m_A = 0,436 \cdot 10,40 = 4,53 \text{ тм/м.}$$

Максимальный бимомент в середине пролёта

$$\max B = \frac{m_A \cdot L^2}{8} = \frac{4,53 \cdot 25,13^2}{8} = 360 \text{ тм}^2.$$

(Бимомент изменяется в направлении оси x по закону квадратичной зависимости).

в) Внутренние усилия в оболочке, если поперечное сечение недеформируемо.

Продольные усилия: $\max T_0$ находим по форм. (6'). Например на нижнем краю оболочки ($s = s_0$) в центральном сечении ($x = 0$):

$$\max T_0^{(0)} = \frac{360 \cdot 6,456}{8,25} \cdot 0,12 = + 33,8 \text{ т/м.}$$

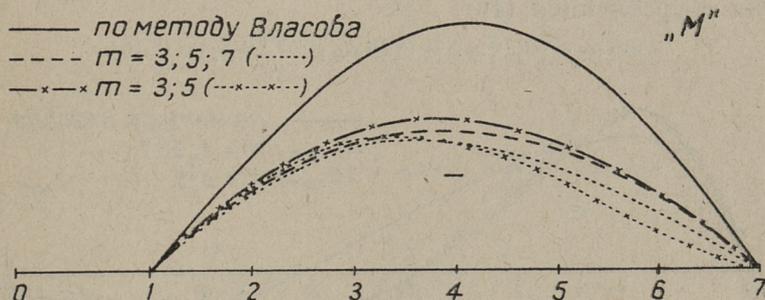
Значения $\max T_0$ представлены в таблице I, а также и на черт. 17 (— сплошной линией).

Прирост сдвигающих усилий ζ_0 находим по форм. (7'). Например в точке $M(s = s_0 - b)$ имеем для всех значений x :

$$\zeta_0^{(1)} = - \frac{4,53 \cdot 0,480}{8,25} = 0,264 \text{ т/м}^2.$$

Эпюр ζ_0 изображен на черт. 16 сплошной линией.

Численные значения даны в табл. I.



Черт. 15.

Поперечные моменты M_0 найдены по форм. 8.

Правило Симпсона дает для Z_0 :

$$Z_0 = \frac{0,65}{3} [0 - 4 \cdot 0,205 - 0,264] = - 0,236.$$

и для бортового элемента после сложения:

$$q_0 + Z_0 = 0,436 - 0,236 = 0,200 \text{ т/м.}$$

Изгибающий момент например для сечения 5 ($\varphi = 20^\circ$)

$$h_z = 3,14 \text{ м}; \quad h_{\zeta_1} = 1,41 \text{ м}; \quad h_{\zeta_2} = 0,81 \text{ м};$$

$$h_{\zeta_3} = 0,36 \text{ м}; \quad h_{\zeta_4} = 0,09 \text{ м.}$$

$$M_0^{(5)} = - 0,20 \cdot 3,14 - \frac{1,047}{3} [- 0,264 \cdot 1,41 - 4 \cdot 0,217 \cdot 0,81 - \\ - 2 \cdot 0,124 \cdot 0,36 - 4 \cdot 0,015 \cdot 0,09] = - 0,220 \text{ тм/м.}$$

Эпюр M_0 представлен на черт. 15 сплошной линией численные значения даны в табл. I.

2) Дополнительный эпюр $\Delta\zeta$.

Дополнительный эпюр избран в форме

$$\Delta\zeta = a_1 \cos \frac{\pi s}{2 \cdot 8,81} + a_3 \cos \frac{3\pi s}{2 \cdot 8,47} + a_5 \cos \frac{5\pi s}{2 \cdot 8,11} + a_7 \cos \frac{7\pi s}{2 \cdot 7,88}.$$

$\Delta\zeta_m$ представлен на черт. 10, а его числовые значения — в табл. I.

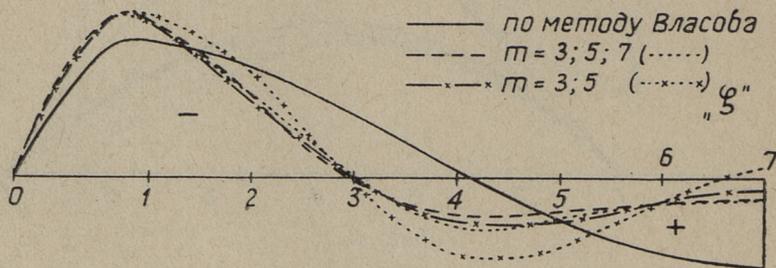
б) Условия равновесия, которым должен удовлетворять эпюр $\Delta\zeta$.

Используя уравнение (15'), можно выразить условие, чтобы момент относительно точки А был равен нулю, следующим образом:

$$0,10 a_1 - 8,83 a_3 + 5,56 a_5 + 5,45 a_7 = 0 \quad (a)$$

Условие чтобы горизонтальная сила была равна нулю даёт в соответствии с уравнением (16):

$$4,35 a_1 + 0,14 a_3 - 0,26 a_5 + 0,28 a_7 = 0 \quad (b)$$



Черт. 16.

Эти два уравнения показывают, что a_1 почти равно нулю (и поэтому в дальнейшем a_1 больше не встречается).

Из уравнения (a) получаем:

$$a_7 = -1,62 a_3 + 1,02 a_5.$$

е) Внутренние усилия из дополнительных эпюров.

Продольные внутренние усилия посреди пролёта оболочки ($x=0$) находим из уравнения (13'').

Например на краю оболочки ($s=s_0$) для $m=7$ имеем:

$$\max \Delta T_7^{(0)} = -\frac{7\pi}{2 \cdot 7,88} \cdot \frac{25,13^2}{8} \left(\sin \frac{7\pi \cdot 7,58}{2 \cdot 7,88} \right) \cdot 2,0 = +202.$$

Значения $\max \Delta T_m$ приводятся в таблице I ($a_m=1$). Поперечные изгибающие моменты m_m находим посредством формулы (14).

Ход вычислений аналогичен изложенному в рубрике *в*).
 Для примера найдём изгибающий момент в сечении 5 для случая
 $m = 7$ ($a_7 = 1$).

$$Z_7 = \frac{0,65}{3} (0 - 4 \cdot 1,142 - 0,793) = -1,154.$$

$$m_7 = 1,154 \cdot 3,14 - \frac{1,047}{3} [-0,793 \cdot 1,41 + 4 \cdot 0,518 \cdot 0,81 + \\ + 2 \cdot 0,906 \cdot 0,36 - 4 \cdot 0,321 \cdot 0,09] = +3,25.$$

Поперечные изгибающие моменты m_m представлены на черт. 12 и в табл. I. Там же в табл. I даются и внутренние усилия, обусловленные дополнительным эпюром $\Delta\zeta_7$, умноженные соответственно на $k_1 = -1,62$ и $k_2 = 1,02$.

ж) Условия минимума потенциальной энергии:

$$\frac{6L}{d^2} \int_0^{s_0} M \frac{\partial M}{\partial a_3} ds + 2 \int_0^{0,5L} x^2 dx \int_0^{s_0} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial a_3} ds + \\ + \int_0^{0,5L} \left[1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right]^2 dx \int_0^{s_0} \max T \frac{\partial (\max T)}{\partial a_3} ds = 0;$$

$$\frac{6L}{d^2} \int_0^{s_0} M \frac{\partial M}{\partial a_5} ds + 2 \int_0^{0,5L} x^2 dx \int_0^{s_0} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial a_5} ds + \\ + \int_0^{0,5L} \left[1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right]^2 dx \int_0^{s_0} \max T \frac{\partial (\max T)}{\partial a_5} ds = 0,$$

где

$$M = M_0 + a_3 (m_3 - 1,62 m_7) + a_5 (m_5 + 1,02 m_7);$$

$$\frac{\partial M}{\partial a_3} = m_3 - 1,62 m_7; \quad \frac{\partial M}{\partial a_5} = m_5 + 1,02 m_7;$$

$$\zeta = \zeta_0 + a_3 (\Delta\zeta_3 - 1,62 \Delta\zeta_7) + a_5 (\Delta\zeta_5 + 1,02 \Delta\zeta_7);$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial a_3} = \Delta\zeta_3 - 1,62 \Delta\zeta_7; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial a_5} = \Delta\zeta_5 + 1,02 \Delta\zeta_7;$$

$$\max T = \max T_0 + a_3 (\max \Delta T_3 - 1,62 \max \Delta T_7) + \\ + a_5 (\max \Delta T_5 + 1,02 \max \Delta T_7);$$

$$\frac{\partial (\max T)}{\partial a_3} = \max \Delta T_3 - 1,62 \max \Delta T_7;$$

$$\frac{\partial (\max T)}{\partial a_5} = \max \Delta T_5 + 1,02 \max \Delta T_7.$$

Интегралы по x : $2 \int_0^{0,5L} x^2 dx = L^3/12$; $\int_0^{0,5L} \left[1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right]^2 dx = 0,267L$.

Интегралы по поперечным сечениям, встречающиеся в выражениях минимума, наиболее целесообразно находить числовыми методами. Например, по правилу Симпсона (см. табл. I):

$$\int_0^{s_0} M_0 \frac{\partial M}{\partial a_3} ds = \frac{1,047}{3} [4 \cdot 0,114 \cdot 0,65 + 2 \cdot 0,205 \cdot 1,36 + 4 \cdot 0,245 \cdot 1,50 + 2 \cdot 0,22 \cdot 1,03 + 4 \cdot 0,128 \cdot 0,35] = 1,032.$$

Всего для двух условий минимума (18) надо вычислить 15 таких интегралов.

После этого получаем:

$$\begin{aligned} \text{I условие: } & 43400 + 254000a_3 - 4000a_5 \text{ (моменты)} \\ & - 700 + 1012000a_3 - 581000a_5 \text{ (продольные силы)} \\ & 1000 + 16000a_3 - 7000a_5 \text{ (сдвигающие силы)} \\ & \hline & 43700 + 1282000a_3 - 592000a_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II условие: } & 1050 - 4000a_3 + 9000a_5 \text{ (моменты)} \\ & 110 - 581000a_3 + 502000a_5 \text{ (продольные силы)} \\ & - 110 - 7000a_3 + 9000a_5 \text{ (сдвигающие силы)} \\ & \hline & 1050 - 592000a_3 + 520000a_5 = 0 \end{aligned}$$

Решения этой системы уравнений:

$$\begin{aligned} a_3 &= -0,0734, \\ a_5 &= -0,0855. \end{aligned}$$

Следует отметить, что работой сдвигающих сил почти всегда можно пренебречь (в соответствии с предположениями теории бимоментов Власова).

Также и интегралы, содержащие начальные значения продольных внутренних усилий (T_0) оказываются почти всегда равными нулю:

$$\int_0^{s_0} T_0 \frac{\partial T}{\partial a_3} ds \approx \int_0^{s_0} T_0 \frac{\partial T}{\partial a_5} ds \approx 0.$$

Если эти упрощения считать допустимыми, то количество интегрирований снизится с 15-го до 8. В настоящем примере в результате этих упрощающих предположений получили бы для искомых параметров a_3 и a_5 соответственно значения $-0,074$ и $-0,087$.

Таблица I

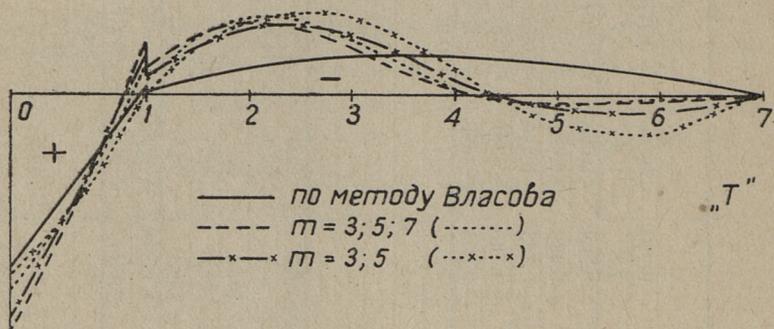
Сечение	0	$1/2$	1	1	2	3	4	5	6	7
M_0	—	—	—	—	-0,114	-0,205	-0,245	-0,220	-0,128	0
ζ_0	0	-0,205	-0,264	-0,264	-0,217	-0,124	-0,015	+0,083	+0,151	+0,171
$\max T_0$	+33,8	+16,1	-1,6	-0,8	-5,7	-8,0	-8,1	-6,4	-3,6	0
A_{ξ_3}	0	-0,673	-0,938	-0,938	-0,794	-0,688	-0,175	+0,395	+0,835	+1,0
A_{ξ_5}	0	+0,840	+0,980	+0,980	+0,350	-0,611	-0,995	-0,441	+0,528	+1,0
A_{ξ_7}	0	-1,142	-0,793	-0,793	+0,518	+0,906	-0,321	-0,976	+0,109	+1,0
$-1,62 A_{\xi_7}$	0	+1,850	+1,286	+1,286	-0,838	-1,468	+0,520	+1,580	-0,176	-1,620
$1,02 A_{\xi_7}$	0	-1,163	-0,808	-0,808	+0,528	+0,924	-0,327	-0,995	+0,111	+1,020
m_3	—	—	—	—	+0,50	+1,30	+2,53	+4,23	+6,35	+8,65
m_5	—	—	—	—	-0,59	-1,43	-2,50	-3,55	-4,50	-5,20
m_7	—	—	—	—	+0,71	+1,64	+2,49	+3,25	+4,14	+5,00
$-1,62 m_7$	—	—	—	—	-1,15	-2,66	-4,03	-5,26	-6,70	-8,00
$1,02 m_7$	—	—	—	—	+0,72	+1,67	+2,52	+3,31	+4,22	+5,10
$\max AT_3$	+77,4	+57,6	+30,5	+15,3	-10,0	-32,0	-43,3	-40,4	-24,1	0
$\max AT_5$	-133,3	-63,6	+30,6	+15,3	+71,6	+60,6	-7,7	-68,6	-65,0	0
$\max AT_7$	+202	+55,3	-134	-67	-94,3	+46,6	+104,3	-23,8	-109,0	0
$-1,62 \max AT_7$	-327,0	-89,5	+217,0	+108,5	+152,7	-75,4	-169,0	+38,5	+177,3	0
$1,02 \max AT_7$	+206,0	+56,3	-136,7	-68,3	-96,1	+47,5	+106,2	-24,3	-111,6	0
$\partial \zeta / \partial a_3$	0	+1,177	+0,348	+0,348	-1,812	-2,156	+0,345	+1,975	+0,659	-0,620
$\partial \zeta / \partial a_5$	0	-0,323	+0,172	+0,172	+0,878	+0,313	-1,322	-1,436	+0,639	2,020
$\partial M / \partial a_3$	—	—	—	—	-0,65	-1,36	-1,50	-1,03	-0,35	+0,56
$\partial M / \partial a_5$	—	—	—	—	+0,13	+0,24	+0,02	-0,24	-0,28	-0,10
$\partial (\max T) / \partial a_3$	-250	-32,0	+247	+123,5	+142,7	-107,4	-212	-2,0	+153,2	0
$\partial (\max T) / \partial a_5$	+73	-7,3	-106,3	-53	-24,5	+108,1	+98,5	-92,9	-176,6	0

Совершенно очевидно, что возникающая таким образом погрешность не оказывает существенного влияния на окончательные, необходимые суммированием, внутренние усилия.

Для примера в таблице II показано нахождение продольных усилий посредством суммирования:

Таблица II

Сечение	0	1/2	1	1	2	3	4	5	6	7
$\max T_0$	+33,8	+16,1	-1,6	-0,8	-5,7	-8,0	-8,1	-6,4	-3,6	0
$\frac{\partial(\max T)}{\partial a_3} a_3$	+18,3	+2,3	-18,1	-9,0	-10,5	+7,9	+15,6	+0,2	-11,3	0
$\frac{\partial(\max T)}{\partial a_5} a_5$	-6,3	+0,6	+9,1	+4,5	+2,1	-9,2	-8,4	+7,9	+15,1	0
$\max T$	+45,8	+19,0	-10,6	-5,3	-14,1	-9,3	-0,9	+1,7	+0,2	0



Черт. 17.

Найденные усилия M , ζ и T представлены соответственно на чертежах 15, 16 и 17 прерывающейся линией. Сравнивая эти величины с соответствующими величинами M_0 , ζ_0 и T_0 (на тех же чертежах — сплошной линией), найденными согласно теории бимоментов Власова, видим, что различия все же достаточно велики.

з) Замечание относительно приведённого примера.

Автором проведён расчёт оболочки при тех же данных, причём дополнительный эпюр был избран в виде:

$$\Delta \zeta = a_3 \cos \frac{3\pi s}{2 \cdot 8,47} + a_5 \cos \frac{5\pi s}{2 \cdot 8,11}.$$

Величина a_1 была принята равной нулю на основании рассуждений в рубрике д).

В таком случае можно из уравнения равновесия (15) выразить например параметр a_5 через параметр a_3 . Составлять придётся только одно уравнение условия минимума потенциальной энергии, в котором будет фигурировать только 4 существенных интеграла. Точность результатов вычислений вполне удовлетворяет потребностям практики, как это явствует из чертежей 15, 16, 17, где соответствующие внутренние усилия представлены прерывающейся линией с крестиками.

На тех же чертежах, пунктиром обозначены результаты вычислений, проведённых не используя теорию проф. Власова, а беря непосредственно эпюр прироста сдвигающих сил в виде

$$\zeta = a_3 \cos \frac{3\pi s}{2 \cdot 8,47} + a_5 \cos \frac{5\pi s}{2 \cdot 8,11} + a_7 \cdot \cos \frac{7\pi s}{2 \cdot 7,88}.$$

Из чертежей 15, 16, 17 видно, что точность результатов вполне достаточная.

Проведём теперь вычисления для случая, если для эпюра прироста сдвигающих сил ограничиться только двумя членами

$$\zeta = a_3 \cos \frac{3\pi s}{2 \cdot 8,47} + a_5 \cos \frac{5\pi s}{2 \cdot 8,11} = a_3 \zeta_3 + a_5 \zeta_5.$$

Условие равновесия горизонтальных сдвигающих сил (16) использовано только для обоснования возможности принять $a_1 = 0$.

Далее потребуем, чтобы изгибающий момент $M^{(7)}$ был равен нулю. Этим мы избавляемся от необходимости отыскивать центр изгиба А.

Момент внешних сил в сечении 7:

$$M_0^{(7)} = -0,436 \cdot 5,20 = -2,267 \text{ т/м.}$$

Изгибающие моменты эпюров прироста сдвигающих сил (см. табл. I):

$$m_3^{(7)} = +8,65 \text{ т/м}$$

$$m_5^{(7)} = -5,20 \text{ т/м.}$$

Таким образом:

$$-2,267 + 8,65 a_3 - 5,20 a_5 = 0$$

откуда

$$a_5 = 1,66 a_3 - 0,436.$$

Внутренние усилия находим суммированием:

$$M = (M_0 - 0,436 m_5) + (m_3 + 1,66 m_5) a_3 = M'_0 + \frac{\partial M}{\partial a_3} a_3 \dots \dots (\alpha)$$

$$\zeta = -0,436 \zeta_5 + (\zeta_3 + 1,66 \zeta_5) a_3 = \zeta'_0 + \frac{\partial \zeta}{\partial a_3} a_3 \dots \dots (\beta)$$

$$\begin{aligned} \max T &= -0,436 T_5 + (\max T_3 + 1,66 \max T_5) a_3 = \\ &= \max T'_0 + \frac{\partial(\max T_5)}{\partial a_3} a_3 \dots \dots (\gamma) \end{aligned}$$

Величины:

$$\begin{aligned} m_3; m_5; \zeta_3 (= \Delta \zeta_3); \zeta_5 (= \Delta \zeta_5); \\ \max T_3 (= \max \Delta T_3) \text{ и } \max T_5 (= \max \Delta T_5) \end{aligned}$$

находим из таблицы I.

В таблице III собраны все, необходимые для вычислений величины и проведены некоторые промежуточные вычисления.

Условий минимума потенциальной энергии надо составить в данном случае только одно, для чего надо вычислить 4 существенных интеграла (— распространённых по половине поперечного сечения оболочки — см. табл. III).

$$\begin{aligned} \int_0^0 M'_0 \frac{\partial M}{\partial a_3} ds &= \frac{1,047}{3} [4 \cdot 0,005 \cdot 0,48 - 2 \cdot 0,04 \cdot 1,07 - 4 \cdot 0,131 \cdot 1,62 - \\ &- 2 \cdot 0,18 \cdot 1,66 - 4 \cdot 0,148 \cdot 1,12] = -0,761 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} \left(\frac{\partial M}{\partial a_3} \right)^2 ds &= \frac{1,047}{3} [4 \cdot 0,48^2 + 2 \cdot 1,07^2 + 4 \cdot 1,62^2 + 2 \cdot 1,66^2 + 4 \cdot 1,12] = \\ &= 10,36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} \max T'_0 \frac{\partial(\max T)}{\partial a_3} ds &= \frac{0,65}{2 \cdot 3} [-58,1 \cdot 143,9 - 4 \cdot 27,8 \cdot 48,0 - 13,3 \cdot 81,3] + \\ &+ \frac{1,047}{3} [-6,6 \cdot 40,7 - 4 \cdot 31,2 \cdot 108,8 - 2 \cdot 26,4 \cdot 68,4 - 4 \cdot 3,4 \cdot 56,1 - \\ &- 2 \cdot 29,9 \cdot 154,4 - 4 \cdot 28,4 \cdot 132,0] = -1,642 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} \left(\frac{\partial \max T}{\partial a_3} \right)^2 ds &= \frac{0,65}{6} [143,9^2 + 4,48^2 + 81,3^2] + \frac{1,047}{3} [40,7^2 + 4 \cdot 108,8^2 + \\ &+ 2 \cdot 68,6^2 + 4 \cdot 56,1^2 + 2 \cdot 154,4^2 + 4 \cdot 132^2] = 6,97 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Работа сдвигающих сил здесь не принята в расчёт, как не влияющая на результат вычислений.

Т а б л и ц а III

Сечение	0	1/2	1	1	2	3	4	5	6	7
M_0 — 0,436 m_5	—	—	—	—	— 0,262 + 0,257	— 0,584 + 0,624	— 0,959 + 1,090	— 1,369 + 1,549	— 1,814 + 1,962	— 2,267 + 2,267
M'_0	—	—	—	—	— 0,005	+ 0,040	+ 0,131	+ 0,180	+ 0,148	0
m_3 1,66 m_5	—	—	—	—	+ 0,50 — 0,98	+ 1,30 — 2,37	+ 2,53 — 4,15	+ 4,23 — 5,89	+ 6,35 — 7,47	+ 8,65 — 8,65
$\partial M / \partial a_3$	—	—	—	—	— 0,48	— 1,07	— 1,62	— 1,66	— 1,12	0
$\zeta'_0 = -0,436 \zeta_5$	0	— 0,366	— 0,427	— 0,427	— 0,153	+ 0,266	+ 0,434	+ 0,192	— 0,230	— 0,436
ζ_3 1,66 ζ_5	0	— 0,673	— 0,938	— 0,938	— 0,974	— 0,688	— 0,175	+ 0,395	+ 0,835	+ 1,000
$\partial \zeta / \partial a_3$	0	+ 1,394	+ 1,625	+ 1,625	+ 0,581	— 1,012	— 1,650	— 0,731	+ 0,876	+ 1,660
$\partial \zeta / \partial a_3$	0	+ 0,721	+ 0,687	+ 0,687	— 0,393	— 1,700	— 1,825	— 0,336	+ 1,711	+ 2,660
$\max T'_0 =$ — 0,436 $\max T_5$	+ 58,1	+ 27,8	— 13,3	— 6,6	— 31,2	— 26,4	+ 3,4	+ 29,9	+ 28,4	0
$\max T_3$ 1,66 $\max T_5$	+ 77,4	+ 57,6	+ 30,5	+ 15,3	— 10,0	— 32,0	— 43,3	— 40,4	— 24,1	0
$\partial (\max T) / \partial a_3$	— 143,9	— 48,0	+ 81,3	+ 40,7	+ 118,8	+ 100,6	— 12,8	— 114,0	— 107,9	0
							— 56,1	— 154,4	— 132,0	0

Из условия минимума потенциальной энергии
 $42000(-0,761 + 10,36 a_3) + 6,71(-1,642 \cdot 10^4 + 6,97 \cdot 10^4 a_3) = 0$
 находим, что

$$a_3 = 0,157.$$

Внутренние усилия находим суммированием по формулам (а), (β) и (γ). Например для поперечного момента M находим:

Сечение	1	2	3	4	5	6	7
M'_0	0	-0,005	0,040	0,131	0,180	0,148	0
$a_3 \partial M / \partial a_3$	0	-0,075	-0,168	-0,254	-0,260	-0,176	0
M	0	-0,080	-0,128	-0,123	-0,080	-0,028	0

Результаты вычислений представлены на черт. 15, 16, 17 пунктирными линиями с крестиками.

При сравнении с результатами более точных вычислений выясняется, что предлагаемый вариант метода вполне удовлетворителен с точки зрения практики, и что таким образом найденная картина усилий значительно ближе к действительности, чем находимая по методу Власова. Объёмы вычислительной работы в обоих случаях примерно одинаковы.

Правда, в некотором отношении внутренние продольные усилия на краю бортового элемента получаются все же немного меньшими, чем в действительности — по причинам, изложенным в работе автора [13] на стр. 22.

7. Заключение.

Излагаемый в настоящем метод обладает некоторыми существенными преимуществами по сравнению с точными методами, а именно:

а) Вычисления не выходят из рамок интуитивной наглядности, чем избегается возможность крупных ошибок (например, в знаках).

б) Вычисления проводятся обыкновенной (длиной в 25 см) логарифмической линейкой.

в) Вычисления одинаково просты при любых симметричных формах поперечного сечения, даже и в случае поперечного сечения в форме дуги окружности целесообразнее пользоваться численными методами интегрирования.

Как это следует из приведенного вычислительного примера (п. 6), вообще говоря в разложении $\Delta \zeta$ достаточно взять только два существенных члена ($m=3$ и 5), вследствие чего надо удовлетворить только одному условию минимума потенциальной энергии. Только в случае относительно очень тонких оболочек приходится учитывать также и третий существенный член разложения ($m=7$) и вместе с этим удовлетворять не одному, а двум условиям минимума потенциальной энергии.

В ходе вычислений можно пренебречь работой сдвигающих сил также и в случае относительно тонких оболочек (II предположение проф. Власова). Также и интегралы, содержащие начальные продольные внутренние усилия (T_0), можно всегда считать равными нулю (ср. [13] стр. 15).

Следует еще упомянуть, что ход вычислений можно значительно упростить, если выражение для прироста сдвигающих сил ζ избрать сразу в форме

$$\zeta(1) = \frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{3,5,7 \dots} a_m \cos \frac{m\pi s}{2s_{0m}}.$$

в результате чего отпадает необходимость вычислять функции нагрузки по теории бимоментов Власова.

Такой путь даёт достаточно хорошие результаты (ср. пример п. 6), хотя продольные внутренние силы на краю бортового элемента получаются несколько меньшими, чем в действительности.

Обозначения.

- p — нагрузка на единицу кривой поверхности оболочки (т/м²).
 q_0 — тоже на единицу длины бортового элемента (т/м).
 $S(s, x)$ — сдвигающие силы (т/м).
 $\zeta(s) = \partial S / \partial x$ — прирост сдвигающих сил (т/м²).
 $T(s, x)$ — продольная сила в поперечном сечении оболочки (т/м).
 $M(s)$ — поперечный момент на единицу длины образующей оболочки (т).
 $S_0; \zeta_0; T_0; M_0$ — те же величины, но вычисленные на основании теории бимоментов Власова.
 $AS_m, A\zeta_m, AT_m, m_m$ — те же величины, то вычисленные из m -го члена разложения $A\zeta$ в ряд, если $a_m = 1$.
 m_A — крутящий момент вокруг центра изгиба A внешней нагрузки оболочки.
 B — бимомент (тм²).
 s, x — координаты на поверхности оболочки (см. черт. 1).
 s_0 — полудлина поперечного сечения оболочки.
 s_{0m} — фиктивная полудлина поперечного сечения оболочки в m -ом члене разложения $A\zeta(s)$.
 b — высота бортового элемента.
 $\delta; \delta_0$ — значения толщины оболочки.
 a_z — ордината центра изгиба A относительно начальной исходной точки B .
 $\omega; \omega_B$ — секториальные площади (м²).
 J_ω — секториальный момент инерций (м⁶).
 J_{zz} — момент инерции относительно вертикальной оси (м⁴).
 J_d — полярный момент инерций поперечного сечения (м⁴).
 S_ω — секториальный статический момент (м⁴).
 a_m — подлежащие определению параметры в разложении $A\zeta(s)$.

Библиография.

1. В. З. Власов. Перекрытия типа оболочек. Справочник проектировщика, Т. IV, 1935.
2. В. З. Власов и А. Л. Гольденвейзер. Расчёт тонкостенных сводов — оболочек. Справочник проектировщика, деревянные конструкции, 1937.
3. В. З. Власов. Новый метод расчёта тонкостенных призматических складчатых покрытий и оболочек, 1938.
4. В. З. Власов. Строительная механика оболочек, 1935.
5. Л. С. Гильман. Приближённый метод расчёта цилиндрических сводов — оболочек (С. А. Шустиков, Деревянные конструкции, 1933).
6. С. С. Голушкевич. Графический способ приближённого расчёта цилиндрических оболочек (Труды Ленинградского Института инженеров промышленного строительства, вып. 5, 1938).
7. С. А. Тимошенко. Пластинки и оболочки, 1948.
8. А. А. Уманский. Изгиб и кручение тонкостенных авиаконструкций, 1939.
9. В. З. Власов. Общая теория оболочек, 1949.
10. Х. Х. Лауль. Применение метода Кастильяно-Ритца к расчёту длинных цилиндрических оболочек. Труды Таллинского Политехн. Инст. 1949. г.

Содержание.

	Стр.
1. Введение	3
2. Внутренние усилия в оболочке, если поперечное сечение оболочки недеформируемо	5
3. Дополнительный эпюр $A\zeta$	12
4. Условия равновесия, которым должен удовлетворять эпюр $A\zeta$	16
5. Выражения для минимума потенциальной энергии	18
6. Пример вычислений	19
7. Заключение	30
Обозначения	32
Библиография	33

Vastutav toimetaja A. Garšnek.

Tehniline toimetaja E. Lellep.

Ladumisele antud 13. XII 1950. Trükkimisele antud 20. III 1951. Trükiarv 1000. Paber 67×95, $\frac{1}{16}$. Trükipoognaid 2,25. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid 2,59. Arvutuspoognaid 2,03. MB-01342.

Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 3656.

Hind rbl. 1.85.



20.11.

Руб. 1.85.

Tasuta
4.08.57