

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 393

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Сборник статей

IX



Фр. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 393

1976

УДК 518;
517;
531/534

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

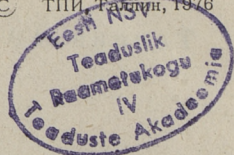
IX

Таллин 1976

С о д е р ж а н и е

1..	В.К.Арро. Наилучшая квадратурная формула с весовой функцией x^∞ на множестве функций $W^{(r)}L_2$	3
2.	Ю.М. Гиршович. Наилучшие квадратурные формулы на множествах функций с заданными краевыми условиями.	15
3.	Ю.М.Гиршович, М.И.Левин. Моносплайны и квадратурные формулы на множествах функций с заданными краевыми условиями.	21
4.	О.М.Сильде, А.Ш. Чистякова. Некоторые дифференциальные уравнения движения для систем с линейными уравнениями связей.	31
5.	Х.А.Рельвик. О некоторых уравнениях аналитической механики.	39
6.	Х.А.Рельвик. О применении аналогов кинетической энергии.	55
7.	Х.А.Рельвик. Об учете уравнений связей при составлении дифференциальных уравнений движения механической системы.	65
8.	А.А.Хайтин. Движение однородного шара по геликоидной поверхности.	71
9.	Г.П. Арясов. Вынужденные колебания перекрестных балок при действии повторной нагрузки.	81
10.	Г.П. Арясов. Экспериментальное исследование свободных и вынужденных колебаний перекрестных балок.	101
11.	А.А.Векслер. О действии прерывной повторной нагрузки на систему с двумя степенями свободы при учете сил внутреннего сопротивления.	111
12.	Т.В.Лийва. О послекритической стадии оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при сжатии.	121
13.	А.Н.Тюманок. Об энергии, сообщаемой обрабатываемому материалу в многоступенчатом роторном помольном агрегате.	131
14.	А.Н.Тюманок. Об остаточной неуравновешенности при автоматическом уравновешивании роторов. . .	139

© ТПИ, Таллин, 1976



В.К. Арро

НАИЛУЧШАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА С ВЕСОВОЙ
 ФУНКЦИЕЙ x^α НА МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИЙ $W^{(n)}L_2$

Пусть $n, r, M; \alpha > -1$ заданные числа. На множестве функций $W^{(n)}L_2 = \{f(x) : f^{(r-1)}$ — абсолютно непрерывна на $[0, 1], \|f^{(r)}\|_{L_2(0,1)} \leq M\}$ рассмотрим задачу построения наилучшей [I] формулы вида

$$\int_0^1 x^\alpha f(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{r-1} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_n(f), \quad (I)$$

где $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1,$ (2)

т.е. найдем узлы и веса формулы (I) так, чтобы величина

$$R_n = \sup_{f \in W^{(n)}L_2} |R_n(f)|$$

имела наименьшее значение.

Учитывая то, что согласно [2] наилучшая квадратурная формула (I) должна быть точна для всех многочленов степени $\leq r-1$, стандартными рассуждениями (см., например, [1]) получим, что

$$R_n = M\sqrt{U_n}, \quad U_n = \int_0^1 [K(t)]^2 dt, \quad (3)$$

$$K(t) = \psi(t) - Q_n(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r-1} A_{ij} \frac{(x_i - t)^{r-1-j}}{(r-1-j)!} E(x_i - t),$$

$$\psi(t) = (-1)^n \int_0^t \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} x^\alpha dx = pt^{n+\alpha}, \quad p = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)},$$

$$Q_n(t) = (-1)^n \int_0^1 \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} x^\alpha dx, \quad E(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$h_i = 0,5(x_{i+1} - x_i), \quad a_i = 0,5(x_{i+1} + x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad Q_0(t) \equiv 0,$$

$Q_i(u)$ — многочлен степени $n-1$, наименее уклоняющийся от функции $\psi(h_i u + a_i)$ на отрезке $[-1, 1]$ в метрике L_2 ($i = 1, 2, \dots, n-1$),

$$L(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [0, x_1), \\ \psi(t) - Q_k\left(\frac{t-a_k}{h_k}\right), & t \in [x_k, x_{k+1}) \quad (k=1, 2, \dots, n-1), \\ \psi(t) - Q_n(t), & t \in [x_n, 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим правую часть неравенства

$$\int_0^1 [k(t)]^2 dt \geq \int_0^1 [L(t)]^2 dt \quad (4)$$

и найдем, при каких значениях чисел x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющих (2), она принимает наименьшее значение.

Имеем (вводя обозначение V_n)

$$V_n = \int_0^1 [L(t)]^2 dt = \int_0^{x_1} [\psi(t)]^2 dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\psi(t) - Q_k\left(\frac{t-a_k}{h_k}\right) \right]^2 dt + \int_{x_n}^1 [\psi(t) - Q_n(t)]^2 dt.$$

Лемма I. Справедливо равенство

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\psi(t) - Q_k\left(\frac{t-a_k}{h_k}\right) \right]^2 dt = \frac{1}{2r+2\alpha+1} \left\{ [\psi(x_{k+1}) - Q_k(1)]^2 x_{k+1} - [\psi(x_k) - Q_k(-1)]^2 x_k \right\} \quad (5)$$

($k = 1, 2, \dots, n-1$).

Доказательство получаем интегрированием рассматриваемого интеграла по частям с использованием свойств многочлена наименьшего уклонения в L_2 от функции $\psi(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$.

Лемма 2. Функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{2^{r+\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(-1)}{\|X_k\|_{L_2(-1,1)}^2} \int_{-1}^1 [1+x+u(x-1)]^{r+\alpha} X_k(u) du, \quad (6)$$

где

$$\chi_{\kappa}(u) = \frac{1}{2^{\kappa} \kappa!} \frac{d^{\kappa}(u^2-1)^{\kappa}}{du^{\kappa}}, \quad (7)$$

при $\kappa = 1, 3, 5, \dots$ монотонно возрастает для всех $x \geq 0$ и при $\kappa = 2, 4, 6, \dots$ монотонно возрастает на отрезке $[0, 1)$ и убывает для $x > 1$.

Кроме того, при $x > 1$ функция $\Phi(x)$ для нечетных $\kappa \geq 3$ вогнутая, а для четных κ выпуклая.

Доказательство. Из (6) получаем, что

$$\Phi'(x) = \frac{(\kappa+1)}{2^{\kappa+1}} \int_{-1}^1 \left\{ [1+x+u(x-1)]^{\kappa+1} (1+u) \sum_{\kappa=0}^{\kappa-1} \frac{\chi_{\kappa}(-1) \chi_{\kappa}(u)}{\|X\|_{L_2}^2} \right\} du. \quad (8)$$

Применяя к сумме в (8) тождество Кристоффеля-Дарбу [3], имеем, что

$$\Phi'(x) = \frac{\kappa+1}{2^{\kappa+1}} \frac{(-1)^{\kappa-1}}{2^{\kappa+1}} \int_{-1}^1 [1+x+u(x-1)]^{\kappa+1} [\chi_{\kappa}(u) + \chi_{\kappa-1}(u)] du,$$

откуда интегрированием по частям находим

$$\Phi'(x) = \frac{(1-x)^{\kappa-1} \kappa^2}{2^{2\kappa+1} \kappa!} \prod_{j=0}^{\kappa-1} (\alpha + \kappa - j) \int_{-1}^1 [1+x+u(x-1)]^{\alpha} (1-u^2)^{\kappa-1} (1+u) du. \quad (9)$$

Так как подынтегральное выражение в (9) неотрицательное для всех $x \geq 0$ и $u \in (-1, 1)$, то отсюда видим, что

$$\text{sign } \Phi'(x) = \text{sign}(1-x)^{\kappa-1},$$

откуда и следует доказательство первой части леммы.

По (9) вычислим (считая $\kappa \geq 2$)

$$\Phi''(x) = \frac{(-1)^{\kappa-1} (x-1)^{\kappa-2} \kappa^2}{2^{2\kappa+1} \kappa!} \prod_{j=0}^{\kappa-1} (\alpha + \kappa - j) \left\{ (\kappa-1) \int_{-1}^1 [1+x+u(x-1)]^{\alpha} (1-u^2)^{\kappa-1} (1+u) du + (x-1) \alpha \int_{-1}^1 [1+x+u(x-1)]^{\alpha-1} (1-u^2)^{\kappa-1} (1+u)^2 du \right\}. \quad (10)$$

Видим, что выражение, стоящее в (10) в фигурных скобках, положительно при $\alpha > 0$ и $x > 1$. С другой стороны, $\Phi''(x)$ можем представить в виде

$$\Phi''(x) = \frac{(-1)^{\kappa-1} (x-1)^{\kappa-2} \kappa^2}{2^{2\kappa+1} \kappa!} \prod_{j=0}^{\kappa-1} (\alpha + \kappa - j) \int_{-1}^1 [1+x+u(x-1)]^{\alpha-1} (1-u^2)^{\kappa-1} (1+$$

$$+u)\{(r+\alpha-1)[1+x+u(x-1)]-2\alpha\} du,$$

откуда видно, что подынтегральное выражение неотрицательно при $-1 < \alpha \leq 0$ и $r \geq 2$ ($x > 1$).

Таким образом, для $x > 1$ и $r \geq 2$ имеем

$$\text{sign} \Phi''(x) = -\text{sign}(1-x)^{r-2}.$$

Лемма доказана.

Известно [4], что интеграл

$$\int_{-1}^1 [\psi(h_i u + a_i) - q(u)]^2 du,$$

где $q(u)$ произвольный многочлен степени $r-1$, принимает наименьшее значение при

$$q(u) = Q_i(u) = \sum_{k=0}^{r-1} \beta_{ik} X_k(u) \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

где $X_k(u)$ определено в (7),

$$\beta_{ik} = \frac{\int_{-1}^1 \psi(h_i u + a_i) X_k(u) du}{\int_{-1}^1 X_k^2(u) du} = \rho \frac{\int_{-1}^1 (h_i u + a_i)^{r+\alpha} X_k(u) du}{\|X_k\|_{L_2}^2} \quad (i=1, 2, \dots, n-1).$$

Отсюда получим

$$Q_i(\pm 1) = \sum_{k=0}^{r-1} \beta_{ik} X_k(\pm 1) = \rho \sum_{k=0}^{r-1} \frac{X_k(\pm 1)}{\|X_k\|_{L_2}^2} \int_{-1}^1 (h_i u + a_i)^{r+\alpha} X_k(u) du. \quad (II)$$

Обозначим $\gamma_i = x_{i+1}/x_i$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), тогда для $Q_i(-1)$ и $Q_i(1)$ получаем выражения

$$Q_i(-1) = \rho \frac{x_i^{r+\alpha}}{2^{r+\alpha}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{X_k(-1)}{\|X_k\|_{L_2}^2} \int_{-1}^1 [1 + \gamma_i + u(\gamma_i - 1)]^{r+\alpha} X_k(u) du, \quad (I2)$$

$$Q_i(1) = \rho \frac{x_{i+1}^{r+\alpha}}{2^{r+\alpha}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{X_k(1)}{\|X_k\|_{L_2}^2} \int_{-1}^1 [1 + \frac{1}{\gamma_i} + u(1 - \frac{1}{\gamma_i})]^{r+\alpha} X_k(u) du. \quad (I3)$$

Учитывая (6), из (I2) получаем

$$Q_i(-1) = \rho x_i^{r+\alpha} \Phi(\gamma_i) \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (I4)$$

¹⁾ Ниже покажем, что можно считать $x_1 \neq 0$.

После замены переменной в интеграле из (I3) с учетом того, что $\chi_{\kappa}(-u) = (-1)^{\kappa} \chi_{\kappa}(u)$, имеем

$$Q_i(1) = p x_{i+1}^{\Gamma+\alpha} \Phi\left(\frac{1}{\gamma_i}\right) \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (I5)$$

Лемма 3. При условии $\gamma_j > 1$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) система

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\gamma_i) [\Phi(\gamma_i) - 2] &= 0 \\ [\Phi(\gamma_i) - \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}})] [\Phi(\gamma_i) - 2 + \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}})] &= 0 \quad (i=2, 3, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (I6)$$

имеет единственное решение, и это решение удовлетворяет соотношению $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{n-1}$.

Доказательство. Пусть $r = 2, 4, 6, \dots$, тогда, согласно лемме 2,

$$\max_{0 \leq x < \infty} \Phi(x) = 1$$

Поэтому при $\gamma_i > 1$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) справедливы неравенства

$$\Phi(\gamma_i) \neq 2, \quad \Phi(\gamma_i) + \Phi\left(\frac{1}{\gamma_{i-1}}\right) \neq 2 \quad (i=2, 3, \dots, n-1),$$

т.е. система (I6) в этом случае эквивалентна системе

$$\Phi(\gamma_1) = 0, \quad \Phi(\gamma_i) = \Phi\left(\frac{1}{\gamma_{i-1}}\right) \quad (i=2, 3, \dots, n-1), \quad \gamma_j > 1 \quad (j=1, 2, \dots, n-1).$$

Кроме того, видим, что решение системы (I6) сводится к повторному решению уравнения, отличающегося от предыдущего только свободным членом, поэтому первая часть леммы будет доказана, если мы докажем, что при $\gamma > 1$ уравнение

$$[\Phi(\gamma) - c] [\Phi(\gamma) - (2-c)] = 0, \quad (I7)$$

где $0 \leq c < 1$, имеет единственное решение.

Пусть $r = 2, 4, 6, \dots$, тогда, согласно вышеизложенному, из (I7) имеем

$$\Phi(\gamma) - c = 0, \quad \gamma > 1. \quad (I8)$$

Так как $\Phi(1) = 1$ и $\Phi(x)$ при $x > 1$ ($r = 2, 4, \dots$) выпуклая монотонно убывающая функция, то найдется такая точка $\gamma = \eta > 1$, где $\Phi(\eta) - c < 0$. Отсюда и из того, что $\Phi(1) - c > 0$, получаем существование и единственность решения уравнения (I8).

При $c = 0$ имеем первое уравнение системы (I6), т.е.

$$\Phi(\gamma_1) = 0, \quad \gamma_1 > 1.$$

Из того, что

$$\Phi(0) = \frac{1}{2^{r+\alpha}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\chi_k(-1)}{\|\chi_k\|_{L_2}^2} \int_{-1}^1 (1-u)^{r+\alpha} \chi_k(u) du > 0$$

и $\Phi(x)$ на интервале $(0, I)$ возрастает, имеем $0 < \Phi(\frac{1}{\gamma_1}) < \Phi(1)$.

Поэтому, по доказанному выше, уравнение $\Phi(\gamma_2) = \Phi(\frac{1}{\gamma_1})$ имеет единственное решение $\gamma_2 > 1$. Покажем, что $\gamma_2 < \gamma_1$. Действительно, из неравенств $\Phi(1) - \Phi(\frac{1}{\gamma_1}) > 0$, $\Phi(\gamma_1) - \Phi(\frac{1}{\gamma_1}) < 0$ и того, что $\Phi(x)$ убывает при $x > I$, следует, что равенство

$$\Phi(\gamma_2) - \Phi(\frac{1}{\gamma_1}) = 0 \quad \text{выполняется только при } \gamma_1 > \gamma_2 > 1.$$

Теперь пусть $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{i-1} > 1$. Покажем, что решение уравнения $\Phi(\gamma_i) - \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}}) = 0$ удовлетворяет неравенству $1 < \gamma_i < \gamma_{i-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Так как } \Phi(1) - \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}}) > 0, \quad \Phi(\gamma_{i-1}) - \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}}) = \\ = \Phi(\gamma_{i-1}) - \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-2}}) + \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-2}}) - \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}}) = \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-2}}) - \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}}) < 0 \end{aligned}$$

(из-за монотонности функции $\Phi(x)$ при $x \in (0, I)$), то равенство $\Phi(\gamma_i) - \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}}) = 0$ выполняется только тогда, когда $\gamma_{i-1} > \gamma_i > 1$.

Тем самым для $r = 2, 4, 6, \dots$ индукцией лемма доказана. В случае $r = 1, 3, 5, \dots$ доказательство аналогично приведенному.

Лемма 4. Пусть $x_n \in (0, I]$ и фиксировано. Тогда система уравнений (относительно неизвестных x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , удовлетворяющих условию (2))

$$[Q_{i-1}(1) - Q_i(-1)][2\psi(x_i) - Q_{i-1}(1) - Q_i(-1)] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (I9)$$

имеет единственное решение

$$x_k^* = x_n \prod_{i=k}^{n-1} \frac{1}{\gamma_i} \quad (k=1, 2, \dots, n-1), \quad (20)$$

где γ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) являются решением системы (I6).

Доказательство. Покажем, что в решении первого уравнения системы (I9) не может быть $x_1 = 0$. Действительно, первое

уравнение из (I9) имеет вид $Q_1(-1) [2\psi(x_1) - Q_1(-1)] = 0$, откуда, учитывая (II), имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(-1)}{\|X_k\|_{L_2}^2} \int_{-1}^1 (h_1 u + a_1)^{r+\alpha} X_k(u) du \left[2x_1^{r+\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(-1)}{\|X_k\|_{L_2}^2} \int_{-1}^1 (h_1 u + a_1)^{r+\alpha} X_k(u) du \right] = 0.$$

Если $x_1 = 0$, то $h_1 = a_1 = x_2/2$, и последнее равенство приводится к виду

$$\left[\frac{x_2^{r+\alpha}}{2^{r+\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(-1)}{\|X_k\|_{L_2}^2} \int_{-1}^1 (1+u)^{r+\alpha} X_k(u) du \right]^2 = 0. \quad (2I)$$

Применяя тождество Кристоффеля-Дарбу и интегрируя затем по частям, убеждаемся, что сумма в (2I) отлична от нуля, поэтому для выполнения равенства (2I) необходимо, чтобы $x_2 = 0$, но это противоречит условию (2). Итак, решение системы (I9) нужно искать среди $x_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Отсюда и из (I4), (I5) для системы (I9) получаем представление

$$\left. \begin{aligned} x_1^{2(r+\alpha)} \Phi(\gamma_1) [2 - \Phi(\gamma_1)] &= 0 \\ x_i^{2(r+\alpha)} [\Phi(\gamma_i) - \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}})] [\Phi(\gamma_i) - 2 + \Phi(\frac{1}{\gamma_{i-1}})] &= 0 \\ (i = 2, 3, \dots, n-1), \quad \gamma_j > 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

В силу того, что $x_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), видим, что система (22) совпадает с (I6), которая по лемме 2 имеет единственное решение. Обозначим это решение γ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), а решение системы (I9) через x_i^* ($i = 1, 2, \dots, n-1$), тогда имеем $x_1^* = x_2^*/\gamma_1$, $x_2^* = x_3^*/\gamma_2, \dots, x_{n-1}^* = x_n^*/\gamma_{n-1}$, откуда и следует (20). Лемма доказана.

Применяя формулу (5) к интегралам, стоящим под знаком суммы в выражении для V_n , получим, что

$$V_n = p^2 \frac{x_1^{2r+2\alpha+1}}{2r+2\alpha+1} + \frac{1}{2r+2\alpha+1} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ [p x_{k+1}^{r+\alpha} - Q_k(1)]^2 x_{k+1} - \right.$$

$$- [p x_k - Q_k(-1)]^2 x_k \Big\} + \int_{x_n}^1 [\psi(t) - Q_n(t)]^2 dt. \quad (23)$$

Лемма 5. Пусть $x_n \in (0, 1]$ и фиксировано. Тогда числа x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , удовлетворяющие (2) и доставляющие величине V_n наименьшее значение (которое обозначим через V_n^*), совпадают с (20).

При этом

$$V_n^* = p^2 \frac{x_n^{2r+2\alpha+1}}{2r+2\alpha+1} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}}\right) \right]^2 + \int_{x_n}^1 [\psi(t) - Q_n(t)]^2 dt,$$

где γ_{n-1} определено в лемме 3.

Доказательство проводится с помощью предыдущих лемм методом индукции по аналогии с доказательством леммы 4 из [5].

Из (23) и леммы 5 имеем неравенство

$$\begin{aligned} V_n &\geq p^2 \frac{x_n^{2r+2\alpha+1}}{2r+2\alpha+1} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}}\right) \right]^2 + \int_{x_n}^1 [\psi(t) - Q_n(t)]^2 dt = \\ &= p^2 \frac{x_n^{2r+2\alpha+1}}{2r+2\alpha+1} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}}\right) \right]^2 + \int_{x_n}^1 \left[\int_t^1 \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} x^\alpha dx \right]^2 dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Найдем, при каком значении величины $x_n \in (0, 1]$ правая часть неравенства (24) принимает наименьшее значение. Для этого используем следующее утверждение.

Лемма 6.

1. Уравнение

$$p^2 x_n^{2r+2\alpha} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}}\right) \right]^2 - \left[\int_{x_n}^1 \frac{(x-x_n)^{r-1}}{(r-1)!} x^\alpha dx \right]^2 = 0, \quad (25)$$

при $x_n \in (0, 1]$ имеет единственное решение, которое обозначим

$$x_n^*. \quad (26)$$

2. Среди всех чисел $x_n \in (0, 1]$ наименьшее значение величине

$$P(x_n) = p^2 \frac{x_n^{2r+2\alpha+1}}{2r+2\alpha+1} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}}\right) \right]^2 + \int_{x_n}^1 \left[\int_t^1 \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} x^\alpha dx \right]^2 dt \quad (27)$$

доставляет число $x_n = x_n^*$. При этом имеем

$$P(x_n^*) = \frac{2}{2r+2\alpha+1} \int_{x_n}^1 \left[\int_t^1 \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} x^\alpha dx \right] \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \quad (28)$$

Доказательство. Вычислением убеждаемся, что уравнение (25) совпадает с уравнением $P'(x_n) = 0$. Тогда из того, что $P''(x_n) > 0$ (при $x_n \in (0,1)$) и $P'(0) < 0$, а $P'(1) > 0$, следует существование и единственность решения уравнения (25).

Так как функция $P(x_n)$ при $x_n \in (0,1)$ является выпуклой, то ее локальный минимум при $x_n = x_n^*$ является и глобальным минимумом, то есть

$$\inf_{0 \leq x_n \leq 1} P(x_n) = P(x_n^*).$$

Выражение (28) получается посредством интегрирования интеграла из (27) по частям и использованием того, что x_n^* является решением уравнения (25). Лемма доказана.

Раскладывая правую часть в выражении (28) в ряд Тейлора по степеням $(x_n^* - 1)$, получим

$$P(x_n^*) = \frac{(1-x_n^*)^{2r}}{(r!)^2} \frac{\varepsilon_\alpha}{2r+2\alpha+1}, \quad (29)$$

где

$$\varepsilon_\alpha = 1 + 2\alpha \frac{(r!)^2}{(r-1)!} \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\alpha-j) \frac{(x_n^*-1)^i}{(r+i)!(2r+i)!}.$$

В итоге из лемм 5 и 6 и из (29) имеем

$$\inf_{\{x_i\}} V_n = P(x_n^*) = \frac{(1-x_n^*)^{2r}}{(r!)^2} \frac{\varepsilon_\alpha}{2r+2\alpha+1}. \quad (30)$$

Пусть далее $L^*(t)$ означает функцию $L(t)$, в которой $x_i = x_i^*$ ($i = 1, 2, \dots, n$), тогда из (4) и (30) следует, что

$$\int_0^1 [K(t)]^2 dt \geq \int_0^1 [L^*(t)]^2 dt = P(x_n^*),$$

откуда видно, что величина (3) принимает наименьшее значение при $K(t) \equiv L^*(t)$.

Пусть теперь у $K(t)$ узлы $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Методом Никольского [1] устанавливаем, что $K(t) \equiv L^*(t)$, если веса формулы (I) имеют следующие значения:

$$A_{kj} = (-1)^{r-1-j} \left[(h_{k-1}^*)^{j+1-r} Q_{k-1}^{(r-1-j)}(1) - (h_k^*)^{j+1-r} Q_k^{(r-1-j)}(-1) \right] \left. \vphantom{A_{kj}} \right\} \\ (k = 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, r-1)$$

$$A_{nj} = (-1)^{r-1-j} [(h_{n-1}^*)^{j+1-r} Q_{n-1}^{(r-1-j)}(1) - Q_n^{(r-1-j)}(x_n^*)] \quad \left. \vphantom{A_{nj}} \right\} \quad (31)$$

$$(j = 0, 1, \dots, r-1),$$

где $h_0^* = 0,5 x_1^*$, $h_i^* = 0,5(x_{i+1}^* - x_i^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Единственная наилучшая на множестве $W^{(r)}L_2$ квадратурная формула (I) имеет узлы (20), (26), веса (31) и оценку остатка

$$R_n = M \frac{(1-x_n^*)^r}{r!} \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha}{2r+2\alpha+1}}. \quad (32)$$

Из (31), с учетом (19), видим, что при $r = 2, 4, 6, \dots$ веса $A_{k, r-1} = Q_{k-1}(1) - Q_k(-1) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$).

Так как уравнение (25) равносильно при четном r уравнению

$$Q_{n-1}(1) = Q_n(x_n), \text{ то имеем } A_{n, r-1} = Q_{n-1}(1) - Q_n(x_n^*) = 0.$$

Таким образом, при $r = 2, 4, 6, \dots$ справедлива

Теорема 2. Единственной наилучшей на множестве $W^{(r)}L_2$ ($r = 2, 4, 6, \dots$) формулой вида

$$\int_0^1 x^\alpha f(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-2} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_n(f) \quad (33)$$

является формула (33) с узлами (20), (26), весами (31) и оценкой остатка (32).

Задачи построения наилучших квадратурных формул с весовой функцией рассматривались ранее, например, в [5-13].

Л и т е р а т у р а

1. Н и к о л ь с к и й С.М. Квадратурные формулы. М., "Наука", 1974.
2. Л е в и н М. Одно свойство наилучших квадратурных формул.— Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 1971, № 1, с. 90–91.
3. К р ы л о в В.И. Приближенное вычисление интегралов. М., Физматгиз, 1959, с. 25.
4. Н а т а н с о н И.П. Конструктивная теория функций. М., Гостехиздат 1949, с. 321–324.
5. Л е в и н М., А р р е В. Наилучшая квадратурная формула с весовой функцией x . — Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 1974, № 4, с. 326–369.
6. Л е в и н М. Решение экстремальной задачи для одной квадратурной формулы с весовой функцией.—"Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1965, серия А, № 222, с. 15–19.
7. А к с е н ь М.Б. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами для некоторых классов функций.—Тр. I Республ. конф. матем. Белоруссии, Минск, 1965, с.5–17.
8. Л е б е д ь Г.К. О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций.— Матем. заметки, 3, 1968, № 5, с. 577–586.
9. Л е б е д ь Г.К. О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций II.—Изв. АН СССР, Сер. математ. 34, 1970, № 3, с. 639–661.
10. А к с е н ь М.Б., Л е в и н М.И. Наилучшая квадратурная формула с весом x и ее использование для интегрирования функций по кругу и его частям.— Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1972, № 1, с. 75–80.
11. А к с е н ь В.Н. Наилучшая квадратурная формула с весом x^n .— Изв. АН ЭССР, Сер. Физ. Матем., 1974, № 1, с. 131–132.
12. S c h o e n b e r g I.J. A second look at approximate quadrature formulae and spline interpolation. Advances Mathem. 4, No. 3, 1970, pp. 277–300.
13. С о м а н G. Monospline generalizate și formule optimale de cuadratură. Studii și cer. Matematica, 4, 1973, 495.

The Best Quadrature Formula with Weightfunction x^α
for Set of Functions $W^{(r)}L_2$

Summary

Let $W^{(r)}L_2 = \{f(x): f^{(r-1)}$ be absolutely continuous for $x \in [0,1]$ and $\|f^{(r)}\|_{L_2(0,1)} \leq M\}$. The best quadrature formula

$$\int_0^1 x^\alpha f(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^q A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_n(f), \quad \alpha > -1$$

has been built on this set. The knots $\{x_k\}$ and weights $\{A_{kj}\}$ for $q = r-1$ ($r=1,2,3,\dots$) and $q = r-2$ ($r=2,4,6,\dots$) are found in condition that the value

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_2} |R_n(f)|$$

assumes the minimal significance.

УДК 518:517.392

Ю.М. Гиршович

НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА МНОЖЕСТВАХ
 ФУНКЦИЙ С ЗАДАНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Настоящая работа является продолжением статьи [1], поэтому мы будем пользоваться обозначениями из этой работы.

Рассмотрим задачу построения наилучшей [2] на множестве $W_U^n L_q$ при четном n квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-2} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_n(f), \quad (I)$$

где $0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1$, а значение n задано.

Пусть на множестве E , являющемся подмножеством действительной оси, при $m \in E \neq 0$ задана M -система непрерывных на E функций $u_0(t), \dots, u_n(t)$ [3, с. 67]. Обозначим через $P(t)$ многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на E в метрике L_P среди всех многочленов вида

$$u_n(t) + \sum_{i=0}^{s-1} a_i u_i(t).$$

Теорема I. Многочлен $P(t)$ имеет на E ровно n простых корней.

Доказательство. Действительно, $P(t)$ не может иметь на E более n корней в силу определения M -системы. Пусть x_1, \dots, x_l - точки перемены знака многочлена $P(t)$. Если $l < n$, можно построить многочлен

$$Q(t) = \sum_{k=0}^l b_k u_k(t)$$

таким образом, что его корнями будут x_1, \dots, x_l и только эти точки, причем $\text{sign } Q(t) = \text{sign } P(t)$ [3]. Но при $1 \leq p < \infty$ из необходимых условий минимума следует, что

$$\int_E |P(t)|^{p-1} |Q(t)| dt = \int_E |P(t)|^{p-1} \text{sign } P(t) Q(t) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^l b_k \int_E |P(t)|^{p-1} \operatorname{sign} P(t) u_k(t) dt = 0,$$

что приводит к противоречию.

При $p = \infty$ подчиним многочлен $Q(t)$ дополнительному условию $\|Q(t)\|_{L_\infty(E)} \leq 1$. Пусть $\|P(t)\|_{L_\infty(E)} = L$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$F(\varepsilon; t) = P(t) - \varepsilon Q(t).$$

Покажем, что при $0 < \varepsilon < 0,5L$ выполнено неравенство

$$\|F(\varepsilon; t)\|_{L_\infty(E)} < L. \quad (2)$$

Для этого разобьем множество E на три непересекающиеся части

$$E_\varepsilon^0 = \{t: t \in E, |P(t)| \leq \varepsilon\},$$

$$E_\varepsilon^+ = \{t: t \in E, P(t) > \varepsilon\},$$

$$E_\varepsilon^- = \{t: t \in E, P(t) < -\varepsilon\}.$$

Тогда

$$|F(\varepsilon; t)| \leq |P(t)| + \varepsilon |Q(t)| \leq 2\varepsilon < L \quad \text{при } t \in E_\varepsilon^0,$$

$$|F(\varepsilon; t)| = P(t) - \varepsilon Q(t) < L \quad \text{при } t \in E_\varepsilon^+,$$

$$|F(\varepsilon; t)| = -(P(t) - \varepsilon Q(t)) < L \quad \text{при } t \in E_\varepsilon^-,$$

откуда и следует неравенство (2), приводящее к противоречию. Теорема доказана.

Обозначим через ρ ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} V_1^0(1) \dots V_1^0(x^{r-1}) & V_1^1(1) \dots V_1^1(x^{r-1}) \\ \dots & \dots \\ V_{2r-s}^0(1) \dots V_{2r-s}^0(x^{r-1}) & V_{2r-s}^1(1) \dots V_{2r-s}^1(x^{r-1}) \end{vmatrix}$$

и положим $\bar{m} = 2r - \rho$. Через $Z(f; E)$ обозначим число нулей функции $f(x)$ на множестве E .

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия.

1⁰. Для любых многочленов $P(x), Q(x)$ степени r со старшими коэффициентами 1, удовлетворяющих условиям

$$V_i^0(P) + V_i^1(Q) = 0 \quad (i = 1, \dots, 2r-s),$$

при любых $a > 0$ и $b < 1$ выполнено неравенство

$$Z(P; (0, a)) + Z(Q; (b, 1)) \leq \bar{m}.$$

2⁰. Для любых многочленов $p(x), q(x)$ степени $\leq r-1$, удовлетворяющих условиям

$$V_i^0(p) + V_i^1(q) = 0 \quad (i=1, \dots, 2r-s),$$

при любых $\alpha > 0$ и $b < 1$ выполнено неравенство

$$Z(p; (0, \alpha)) + Z(q; (b, 1)) \leq \bar{m} - 1.$$

Этим условиям удовлетворяют, например, отдельные краевые условия достаточно общего вида, рассмотренные в [4].

Теорема 2. Пусть r — четное и условия $1^0, 2^0$ выполнены. Наилучшей на множестве $W_U^{(n)} L_q$ формулой (I) является формула, построенная в теореме 2 работы [1]. Точная оценка ошибки этой формулы есть

$$\sup_{f \in W_U^{(n)} L_q} |R_n(f)| = \frac{M F_p(x_1^*, x_n^*)}{r!}.$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы веса наилучшей формулы, полученной в теореме 2 из [1], удовлетворяют равенствам

$$A_{k, r-1} = 0 \quad (k=1, \dots, n).$$

При $k = 2, \dots, n-1$ эти равенства очевидны.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{r-1} a_k V_i^0(x^k) + \sum_{k=0}^{r-1} b_k V_i^1(x^k) = 0 \quad (i=1, \dots, 2r-s)$$

относительно неизвестных $a_0, \dots, a_{r-1}, b_0, \dots, b_{r-1}$. Эта система имеет ровно \bar{m} линейно независимых решений, которые обозначим через $a_0^{(i)}, \dots, a_{r-1}^{(i)}, b_0^{(i)}, \dots, b_{r-1}^{(i)}$ ($i=0, \dots, \bar{m}-1$). Зафиксируем произвольные числа $0 < x_1 < x_n < 1$ и определим на множестве

$$E = (0, x_1) \cup (x_n, 1)$$

функции

$$u_i(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{r-1} a_k^{(i)} x^k, & x \in (0, x_1) \\ \sum_{k=0}^{r-1} b_k^{(i)} x^k, & x \in (x_n, 1) \end{cases}$$

$$(i=0, \dots, \bar{m}-1),$$

$$u_{\bar{m}}(x) = \begin{cases} x^r, & x \in (0, x_1) \\ (x-1)^r, & x \in (x_n, 1). \end{cases}$$

В силу условий $1^0, 2^0$ функции $u_0(x), \dots, u_{\bar{m}-1}(x)$ образуют на E T -систему [3] порядка $\bar{m}-1$, а функции $u_0(x), \dots, u_{\bar{m}}(x)$ T -систему порядка \bar{m} . Поскольку при достаточно малых $\alpha > 0, \beta > 0$ T -систему $u_0(x), \dots, u_{\bar{m}-1}(x)$ можно продолжить на множество $E_1 = (0, x_1 + \alpha) \cup (x_n - \beta, 1)$, то с помощью теоремы 4.1 из

[3, с. 68] получаем, что найдутся функции $v_0(x), \dots, v_{\bar{m}-1}(x)$, являющиеся линейными комбинациями функций $u_0(x), \dots, u_{\bar{m}-1}(x)$ и образующие на E M -систему. Полагая $v_{\bar{m}}(x) = u_{\bar{m}}(x)$ и учитывая условие I^0 , видим, что функции $v_0(x), \dots, v_{\bar{m}}(x)$ образуют на множестве E M -систему, причем при $k = 0, \dots, \bar{m}-1$ функция $v_k(x)$ на каждом из отрезков $(0, x_1)$ и $(x_n, 1)$ является многочленом степени $\leq r-1$.

Отсюда и из теоремы I заключаем, что многочлены $S_{0,r,p}(x; x_1, x_n)$ и $S_{1,r,p}(x; x_1, x_n)$ имеют на множестве E ровно \bar{m} корней, причем в силу условия I^0 многочлен $S_{0,r,p}(x; x_1, x_n)$ не имеет корней, больших чем x_1 , а многочлен $S_{1,r,p}(x; x_1, x_n)$ — корней, меньших чем x_n . Таким образом, при любых значениях $0 < x_1 < x_n < 1$ справедливы неравенства

$$S_{0,r,p}(x_1; x_1, x_n) > 0, \quad S_{1,r,p}(x_n; x_1, x_n) > 0. \quad (3)$$

Покажем, что для моносплайна $K^*(x)$, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[0, 1]$ в метрике L_p среди всех моносплайнов из множества $K_p(V)$, выполнены равенства

$$P_0^*(x_1^*) = P_1^*(x_1^*), \quad P_{n-1}^*(x_n^*) = P_n^*(x_n^*), \quad (4)$$

где $P_i^*(x)$ — многочлены, с которыми функция $r! K^*(x)$ совпадает на отрезках $[x_i^*, x_{i+1}^*]$, а x_i^* — узлы моносплайна $K^*(x)$ ($i = 1, \dots, n$), $x_0^* = 1 - x_{n+1}^* = 0$.

Из (3) следует, что $P_0^*(x_1^*) > 0$, $P_n^*(x_n^*) > 0$, а из [I] — что $P_1^*(x_1^*) > 0$, $P_{n-1}^*(x_n^*) > 0$. Пусть, например $P_0^*(x_1^*) \neq P_1^*(x_1^*)$, тогда при достаточно близком к нулю ε положим

$$K(\varepsilon; x) = \begin{cases} \frac{1}{r!} P_0^*(x), & x \in [0, x_1^* - \varepsilon], \\ \frac{1}{r!} P_1^*(x), & x \in [x_1^* - \varepsilon, x_2^*], \\ K^*(x), & x \in [x_2^*, 1]. \end{cases}$$

Выбрав $\text{sign } \varepsilon = \text{sign}(P_0^*(x_1^*) - P_1^*(x_1^*))$, получаем неравенство

$$\|K(\varepsilon; x)\|_{L_p(0,1)} \leq \|K^*(x)\|_{L_p(0,1)},$$

противоречащее определению моносплайна $K^*(x)$. Точно так же доказывается и второе из равенств (4). Из (4) и [I] следует, что $A_{1,r-1} = A_{n,r-1} = 0$.

Теорема доказана.

Полученная теорема обобщает результаты работ [5–8].

Л и т е р а т у р а

1. Г и р ш о в и ч Ю.М., Л е в и н М.И. Моносплайны и квадратурные формулы на множествах функций с заданными краевыми условиями. См. наст. сб., с. 21.

2. Н и к о л ь с к и й С.М. Квадратурные формулы. М., "Наука", 1974.

3. К р е й н М.Г., Н у д е л ь м а н А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., "Наука", 1973.

4. K a r l i n S., M i s c h e l l i C. The fundamental theorem of algebra for monosplines satisfying boundary conditions. - Israel J. Math., 1972, 11, pp. 405-451.

5. А к с е н ь М.Б., Т у р е ц к и й А.Х. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций. - Изв. АН БССР, Физ.-мат., 1966, № 1, с. 14-27.

6. Л е в и н М. Экстремальные задачи для квадратурных формул на некоторых множествах функций. - Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1970, 19, № 4, с. 407-414.

7. И н г и А. Обобщение некоторых результатов по наилучшим квадратурным формулам. - Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1973, 22, № 4, с. 358-364.

8. Л е в и н М., Л е в и н а М. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых множеств функций. - Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1975, 24, № 1, с. 15-19.

Y. Girshovich

Optimal Quadrature Formulas for the Sets of Functions Satisfying Prescribed Boundary Conditions

Summary

The optimal formula (1) has been constructed for the set $W_u^{(r)} L_q = \{ f(x) : f^{(r-1)}(x) \text{ is absolutely continuous on } [0,1], \|f^{(r)}\|_{L_q(0,1)} \leq M, U_i(f) = 0 (i=1, \dots, s) \}$ where

$U_1(f)$ is linearly independent system of boundary conditions functionals and r is even.

УДК 518:517.392

Ю.М. Гиршович, М.И. Левин

МОНОСПЛАЙНЫ И КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА
 МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАНЫМИ КРАЕВЫМИ
 УСЛОВИЯМИ

Через $W^{(r)}L_q$ (при заданных $M > 0$ и $1 \leq q \leq \infty$) согласно [1] обозначим множество всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную порядка r , удовлетворяющую условию $\|f^{(r)}\|_{L_q(0,1)} \leq M$.

Пусть задана линейно независимая система функционалов

$$U_i(f) = \sum_{j=0}^{r-1} [\alpha_{ij} f^{(j)}(0) + \beta_{ij} f^{(j)}(1)] \quad (i=1, \dots, s), \quad (1)$$

где $0 \leq s \leq 2r$.

Через $W_U^{(r)}L_q$ обозначим множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_q$ и удовлетворяют условиям

$$U_i(f) = 0 \quad (i=1, \dots, s). \quad (2)$$

Рассмотрим задачу построения наилучшей [1] на множестве $W_U^{(r)}L_q$ квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_n(f), \quad (3)$$

где $0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1$, а значение n и множества $J_k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ ($k=1, \dots, n$) заданы. Другими словами, нас будет интересовать вопрос нахождения узлов и весов той формулы (3), для которой величина $\sup_{f \in W_U^{(r)}L_q} |R_n(f)|$ принимает наименьшее значение.

Конкретно рассмотрим случай $J_k = \{0, 1, \dots, r-1\}$ ($k=1, \dots, n$).

Систему функционалов (I) можно продолжить до линейно независимой системы U_1, \dots, U_{2r} функционалов того же вида [2].

Через V_1, \dots, V_{2r} обозначим функционалы краевых условий, сопряженных к условиям $U_i(f) = 0$ ($i=1, \dots, 2r$) относительно дифференциального выражения $y^{(r)}$ [2]. Тогда для любых функций $f(x)$ и $g(x)$, достаточно гладких в окрестностях точек 0 и I, справедливо равенство [2]

$$\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j [f^{(j)}(1) g^{(r-j-1)}(1) - f^{(j)}(0) g^{(r-j-1)}(0)] = \sum_{i=1}^{2r} U_i(f) V_{2r+1-i}(g). \quad (4)$$

Обозначим через m ранг матрицы $\|U_i(x^{k-1})\|_{i=1, k=1}^{s, r}$, а через m' - ранг матрицы $\|V_i(x^{k-1})\|_{i=1, k=1}^{2r-s, r}$. Тогда $m' = r - s + m$ [2].

Обозначим через π_{r-1} пространство всех многочленов степени $\leq r-1$, через $\pi_{r-1}(U)$ - подпространство многочленов $\varphi \in \pi_{r-1}$, удовлетворяющих условиям $U_i(\varphi) = 0$ ($i=1, \dots, s$), а через $\pi_{r-1}(V)$ - подпространство многочленов $\psi \in \pi_{r-1}$, удовлетворяющих условиям $V_i(\psi) = 0$ ($i=1, \dots, 2r-s$). В пространстве π_{r-1} можно ввести базис $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ и ψ_1, \dots, ψ_r таким образом, что

$$\begin{aligned} U_i(\varphi_l) &= 0 & (i=1, \dots, s; l=m+1, \dots, r), \\ V_i(\psi_l) &= 0 & (i=1, \dots, 2r-s; l=m'+1, \dots, r). \end{aligned}$$

Так как наилучшая на множестве $W_U^{(r)} L_q$ формула (3) должна быть точной для многочленов из $\pi_{r-1}(U)$ [3], то в дальнейшем будем считать, что узлы и веса формул (3) удовлетворяют условиям

$$\int_0^1 \varphi_l(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} A_{kj} \varphi_l^{(j)}(x_k) \quad (l=m+1, \dots, r). \quad (5)$$

Множество всех квадратурных формул (3), удовлетворяющих условиям (5), обозначим через $Q_r(U)$.

Через $K_r(V)$ обозначим множество всех многочленов вида

$$K(x) = \frac{x^r}{r!} + \sum_{j=0}^{r-1} c_{0j} x^{r-j-1} + \sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} c_{kj} (x-x_k)^{r-j-1}, \quad (*) \quad (6)$$

*) $u_+^j = u^j$ при $u \geq 0$, $u_+^j = 0$ при $u < 0$.

удовлетворяющих условиям

$$V_i(K) = 0 \quad (i = 1, \dots, 2r-s). \quad (7)$$

Через $\hat{\mathcal{K}}_r(V)$ обозначим фактормножество $\mathcal{K}_r(V)/\pi_{r-1}(V)$.

Теорема I. Множества $Q_r(U)$ и $\hat{\mathcal{K}}_r(V)$ изоморфны, причем для любой формулы из $Q_r(U)$ и функции $f(x) \in W_U^{(r)} L_q$ справедливы соотношения

$$A_{kj} = (-1)^j [K^{(r-j-1)}(x_k-0) - K^{(r-j-1)}(x_k+0)] \quad (8)$$

$$(k = 1, \dots, n; j \in J_k),$$

$$R_n(f) = (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(x) K(x) dx, \quad (9)$$

$$\sup_{f \in W_U^{(r)} L_q} |R_n(f)| = M \min_{K(x) \in \bar{K}} \|K(x)\|_{L_{p(0,1)}} \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1), \quad (10)$$

где \bar{K} - соответствующий этой формуле элемент из $\hat{\mathcal{K}}(V)$, а $K(x)$ - произвольный моносплайн из \bar{K} .

Доказательство. Имеет место равенство [4]

$$\begin{aligned} & \{g: g = f^{(n)}, f \in W_U^{(r)} L_q\} = \\ & = \{g: \|g\|_{L_q(0,1)} \leq M, \int_0^1 g(x) \psi_l(x) dx = 0 \quad (l = m'+1, \dots, r)\}. \quad (II) \end{aligned}$$

Пусть $\bar{K} \in \hat{\mathcal{K}}_r(V)$, $K(x)$ - произвольный моносплайн из \bar{K} . Тогда для любой функции $f(x) \in W_U^{(r)} L_q$ с помощью интегрирования по частям (считая $x_0 = 1 - x_{n+1} = 0$) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{k=0}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) K^{(r)}(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f^{(j)}(x_k) [K^{(r-j-1)}(x_k-0) - K^{(r-j-1)}(x_k+0)] + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j [f^{(j)}(1) K^{(r-j-1)}(1) - f^{(j)}(0) K^{(r-j-1)}(0)] + (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(x) K(x) dx. \quad (I2) \end{aligned}$$

Учитывая, что $K^{(r-j-1)}(x_k-0) = K^{(r-j-1)}(x_k+0)$ ($k = 1, \dots, n; j \notin J_k$), а также (2), (4), (7), видим, что (I2) превращается в формулу (3), веса и ошибка которой есть (8) и (9). В силу определения множества $\hat{\mathcal{K}}_r(V)$ веса, а в силу (II) ошибка по-

лученной формулы (3) не зависят от выбора $K(x) \in \bar{K}$. Очевидно, что полученная формула (3) точна на множестве $\pi_{r-1}(U)$, следовательно, она принадлежит множеству $Q_r(U)$.

Пусть теперь нам дана формула из $Q_r(U)$, покажем, что ей соответствует элемент $\bar{K} \in \hat{\mathcal{K}}(V)$.

Обозначим через $K_1(x)$ моносплайн (6), у которого

$$c_{kj} = (-1)^{j+1} A_{kj} / ((r-j-1)!) \quad (k=1, \dots, n; j \in J_k),$$

а числа $c_{00}, \dots, c_{0,r-1}$ выбраны произвольно. Взяв в (12) $f(x) = \varphi_l(x)$, $K(x) = K_1(x)$, получаем, что

$$\int_0^1 \varphi_l(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} A_{kj} \varphi_l^{(j)}(x_k) + \sum_{i=s+1}^{2r} U_i(\varphi_l) V_{2r+1-i}(K_1) \\ (l = m+1, \dots, r).$$

Отсюда и из (5) следует, что

$$\sum_{i=s+1}^{2r} U_i(\varphi_l) V_{2r+1-i}(K_1) = 0 \quad (l = m+1, \dots, r). \quad (13)$$

Покажем, что найдется моносплайн $K_2(x) = K_1(x) + v(x)$, где $v \in \pi_{r-1}$, удовлетворяющий условиям (7). Будем искать этот моносплайн в виде

$$K_2(x) = K_1(x) + \sum_{k=1}^{m'} b_k \psi_k(x),$$

где числа $b_1, \dots, b_{m'}$ должны являться решением системы

$$\sum_{k=1}^{m'} b_k V_i(\psi_k) = -V_i(K_1) \quad (i=1, \dots, 2r-s). \quad (14)$$

Для разрешимости системы (14) необходимо и достаточно [4], чтобы

$$\sum_{i=s+1}^{2r} z_i V_{2r+1-i}(K_1) = 0, \quad (15)$$

где z_{s+1}, \dots, z_{2r} — любое решение системы уравнений

$$\sum_{i=s+1}^{2r} z_i V_{2r+1-i}(\psi_k) = 0 \quad (k=1, \dots, m'). \quad (16)$$

Столбцы матрицы $\|V_{2r+1-i}(\psi_k)\|_{i=s+1, k=1}^{2r, m'}$ линейно независи-

мы. Действительно, пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{m'} \alpha_k V_{2r+1-i}(\psi_k) = 0 \quad (i = s+1, \dots, 2r).$$

Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{m'} \alpha_k \psi_k(x) = 0$, т.е. $\alpha_k = 0$ ($k = 1, \dots, m'$).

Поэтому ранг матрицы $\|V_{2r+1-i}(\psi_k)\|_{i=s+1, k=1}^{2r, m'}$ равен m' , и система (I6) может иметь $2r-s-m' = r-m$ линейно независимых решений. Очевидно, что система (I6) имеет $r-m$ линейно независимых решений $z_i^{(k)} = U_i(\psi_k)$ ($i = s+1, \dots, 2r$; $k = m+1, \dots, r$). Но из (I3) следует, что для них выполнено (I5), поэтому система (I4) имеет решение, которое обозначим $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m'}$.

Положим

$$K_2(x) = K_1(x) + \sum_{k=1}^{m'} \bar{b}_k \psi_k(x),$$

тогда $K_2(x) \in \mathcal{K}_r(V)$, а множество всех моносплайнов $K(x) = K_2(x) + \psi(x)$, где ψ пробегает $\pi_{r-1}(V)$, образует искомый элемент $\bar{K} \in \hat{\mathcal{K}}_r(V)$. Взяв в (I2) в качестве $K(x)$ любой моносплайн из \bar{K} , убеждаемся в соответствии заданной формулы (3) и построенного класса \bar{K} , при котором выполнены (8) и (9).

Из (9) с помощью неравенства Гёльдера получаем, что для любой квадратурной формулы из $Q_r(U)$ и соответствующего ей класса $\bar{K} \in \hat{\mathcal{K}}_r(V)$

$$\sup_{f \in W_U^{(r)} L_q} |R_n(f)| \leq M \|K(x)\|_{L_p(0,1)} \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1),$$

где $K(x)$ — произвольный моносплайн из \bar{K} . Поэтому

$$\sup_{f \in W_U^{(r)} L_q} |R_n(f)| \leq M \min_{K(x) \in \bar{K}} \|K(x)\|_{L_p(0,1)} = M \|K_p(x)\|_{L_p(0,1)}. \quad (I7)$$

При $1 \leq p < \infty$ из необходимых условий минимума следует, что

$$\int_0^1 |K_p(x)|^{p-1} \text{sign} K_p(x) \psi_l(x) dx = 0 \quad (l = m'+1, \dots, r).$$

Полагая

$$g^*(x) = M(-1)^r |K_p(x)|^{p-1} \text{sign} K_p(x) \|K_p(x)\|_{L_p(0,1)}^{1-p},$$

в силу (II) получаем, что найдется функция $f^*(x) \in W_U^{(r)} L_q$,

для которой $f^{*(r)}(x) = g(x)$. Из того, что $R_n(f^*) = M \|K_p(x)\|_{L_p(0,1)}$, и (I7) следует (IO) для $1 \leq p < \infty$.

Чтобы доказать (IO) для $p = \infty$, положим при $1 < \tau < \infty$

$$g_\tau(x) = M(-1)^r |K_\tau(x)|^{\tau-1} \operatorname{sign} K_\tau(x) \left(\int_0^1 |K_\tau(x)|^{\tau-1} dx \right)^{-1}.$$

В силу (II) при любом $1 < \tau < \infty$ найдется функция $f_\tau \in W_U^{(r)} L_1$, для которой $f_\tau^{(r)}(x) = g_\tau(x)$. Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом τ имеем

$$\begin{aligned} R_n(f_\tau) &= M \int_0^1 |K_\tau(x)|^\tau dx \cdot \left(\int_0^1 |K_\tau(x)|^{\tau-1} dx \right)^{-1} \geq M \|K_\tau(x)\|_{L_\tau(0,1)} \\ &\geq M \|K_\tau(x)\|_{L_\infty(0,1)} - \varepsilon \geq M \min_{K(x) \in K} \|K(x)\|_{L_\infty(0,1)} - \varepsilon, \end{aligned}$$

что вместе с (I7) доказывает (IO) для $p = \infty$.

Теорема доказана.

Отметим, что частные случаи доказанной теоремы имеют-ся, например, в работах [5-6].

Из теоремы I вытекает, что для нахождения наилучшей на множестве $W_U^{(r)} L_q$ формулы (3) достаточно найти моно-сплайн, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0,1]$ в метрике L_p ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) среди всех моносплайнов из множества $\mathcal{K}_r(V)$, а затем применить к нему соотношения (8) - (IO).

Полученный результат распространяется и на квадратур-ные формулы с весовой функцией.

Построим наилучшую формулу (3) при $J_k = \{0, 1, \dots, r-1\}$ ($k=1, \dots, n$) для множества $W_U^{(r)} L_q$. Обозначим $x_0 = 1 - x_{n+1} = 0$.

На каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, \dots, n$) функция $r! K(x)$ явля-ется многочленом степени r со старшим коэффициентом 1. Обозначим через $P_k(x)$ тот многочлен, с которым $r! K(x)$ совпа-дает на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, \dots, n$), $h_k = 0,5(x_{k+1} - x_k)$, $q_k = 0,5(x_{k+1} + x_k)$ ($k=1, \dots, n$), а через $R_{r,p}(x)$ - многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ в метрике L_p среди всех многочленов степени r со старшим коэффициентом 1. Пусть функционалы V_1, \dots, V_{2r-s} имеют вид

$$V_i(g) = V_i^0(g) + V_i^1(g) \quad (i=1, \dots, 2r-s),$$

где

$$V_i^0(g) = \sum_{j=0}^{r-1} \gamma_{ij} g^j(0), \quad V_i^{(1)}(g) = \sum_{j=0}^{r-1} \delta_{ij} g^{(j)}(1).$$

Обозначим через $S_{0,r,p}(x; x_1, x_n)$, $S_{1,r,p}(x; x_1, x_n)$ пару многочленов $S_0(x)$, $S_1(x)$, доставляющих при фиксированных x_1, x_n наименьшее значение величине

$$F = \begin{cases} \int_0^{x_1} |S_0(x)|^p dx + \int_{x_n}^1 |S_1(x)|^p dx, & 1 \leq p < \infty, \\ \max \left\{ \sup_{0 \leq x < x_1} |S_0(x)|, \sup_{x_n \leq x < 1} |S_1(x)| \right\}, & p = \infty \end{cases}$$

среди всех пар многочленов $S_0(x)$, $S_1(x)$ степени r со старшими коэффициентами 1, удовлетворяющих условиям

$$V_i^0(S_0) + V_i^1(S_1) = 0 \quad (i = 1, \dots, 2r-s).$$

Положим

$$F_p(x_1, x_n) = \begin{cases} \left(\int_0^{x_1} |S_{0,r,p}(x; x_1, x_n)|^p dx + \int_{x_n}^1 |S_{1,r,p}(x; x_1, x_n)|^p dx + \right. \\ \left. + [R_{r,p}(1)]^p (x_n - x_1)^{rp+1} / [2^{rp}(r-1)^{rp}(rp+1)] \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max \left\{ \sup_{0 \leq x < x_1} |S_{0,r,\infty}(x; x_1, x_n)|, \sup_{x_n \leq x < 1} |S_{1,r,\infty}(x; x_1, x_n)|, \right. \\ \left. R_{r,\infty}(1) (x_n - x_1)^r / [2^r (r-1)^r] \right\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Выберем x_1^* , x_n^* из условия

$$F_p(x_1^*, x_n^*) = \min_{0 \leq x_1 < x_n \leq 1} F_p(x_1, x_n). \quad (18)$$

Теорема 2. Наилучшей на множестве $W_U^{(r)} L_q$ формулой (3) при $j_k = \{0, 1, \dots, r-1\}$ ($k=1, \dots, n$) является формула (3), имеющая узлы

$$x_k = x_1^* + 2(k-1)h \quad (k=1, \dots, n), \quad (19)$$

веса

$$A_{1j} = \frac{1}{r!} \left[R_{r,p}^{(r-j-1)}(1) h^{j+1} + (-1)^j S_{0,r,p}^{(r-j-1)}(x_1^*; x_1^*, x_n^*) \right], \quad (20)$$

$$A_{kj} = \frac{1}{r!} h^{j+1} R_{r,p}^{(r-j-1)}(1) [1 + (-1)^j] \quad (k=2, \dots, n-1),$$

$$A_{nj} = \frac{(-1)^j}{r!} \left[R_{r,p}^{(n-j-1)}(1) h^{j+1} - S_{1,r,p}^{(n-j-1)}(x_n^*, x_1^*, x_n^*) \right] \\ (j = 0, \dots, n-1),$$

где $h = (x_n^* - x_1^*) / (2n-2)$,

а x_1^* и x_n^* определены в (I8).

Точная оценка ошибки этой формулы есть

$$\sup_{f \in W_U^{(r)} L_q} |R_n(f)| = \frac{M}{r!} F_p(x_1^*, x_n^*). \quad (2I)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $1 < q \leq \infty$. Для любого моносплайна $K(x) \in \mathcal{K}_r(V)$ имеем неравенства

$$\int_0^1 |r! K(x)|^p dx = \sum_{k=0}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} |P_k(x)|^p dx \geq \int_0^{x_1} |P_0(x)|^p dx + \int_1^{x_n} |P_n(x)|^p dx + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} h_k^{rp} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |R_{r,p}\left(\frac{x-a_k}{h_k}\right)|^p dx \geq \int_0^{x_1} |S_{0,r,p}(x; x_1, x_n)|^p dx + \int_1^{x_n} |S_{1,r,p}(x; x_1, x_n)|^p dx + \\ + [R_{r,p}(1)]^p (x_n - x_1)^{rp+1} / [2^{rp} (n-1)^{rp} (rp+1)] = (F_p(x_1, x_n))^p$$

(см., например, [I], с. I47-I48), причем при фиксированных значениях x_1 и x_n равенство здесь достигается лишь при

$$h_k = h = (x_n - x_1) / (2n-2), \quad x_k = x_1 + 2(k-1)h,$$

$$P_k(x) = h^r R_{r,p}\left(\frac{x-a_k}{h}\right) \quad (k=1, \dots, n-1),$$

$$P_0(x) = S_{0,r,p}(x; x_1, x_n), \quad P_n(x) = S_{1,r,p}(x; x_1, x_n).$$

Выбирая $x_1 = x_1^*$, $x_n = x_n^*$ из условия (I8), получаем моносплайн, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0, I]$ в метрике L_p из множества $\mathcal{K}_r(V)$. Используя (8), (I0), нетрудно получить (20)-(2I).

При $q = 1$ также нетрудно для любого моносплайна $K(x) \in \mathcal{K}_r(V)$ получить неравенство

$$\|r! K(x)\|_{L_\infty(0,1)} \geq F_\infty(x_1, x_n) \geq F_\infty(x_1^*, x_n^*),$$

откуда вытекает (I9)-(2I) для рассматриваемого случая. Теорема доказана.

Частными случаями доказанной теоремы являются результаты работ [7-I2].

Л и т е р а т у р а

1. Н и к о л ь с к и й С.М. Квадратурные формулы. М., "Наука", 1974.
2. Н а й м а р к М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., "Наука", 1969.
3. Л е в и н М. Одно свойство наилучших квадратурных формул.-Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1971, 20, № 1, с.90-91.
4. К р е й н С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., "Наука", 1971.
5. S c h o e n b e r g I.J. Monosplines and quadrature formulas. "Theory and applications of spline functions" (T.N.E. Greville, Ed.), Academic Press, N.Y.-L., 1969, pp. 157-207.
6. К а р л и н S. Best quadrature formulas and splines. - J. Approxim. Theory, 1971, 4, No. 1, pp. 59-90.
7. Л у ш п а й Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на некоторых классах функций. - Материалы межвуз. конф. молодых математиков. Харьков, 1966, с. 58-62.
8. К о с ь к С.Д., Н г у е н С у а н Н г у е т. К вопросу о наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций.- Науч.тр. Ташк. ун-та, 1968, вып. 320, с.58-72.
9. Г р е б е н ю к Н.В. О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций.- Научные записки. Сб. раб. асп. ДГУ (механ., матем.). Днепропетровск, 1970, с.67-71.
10. Л е в и н М.И., Ш а ц Э.М. Об увеличении числа узлов наилучшей на множестве функций квадратурной формулы.- Изв. вузов, Математика, 1972, № 10, с. 46-52.
11. С о ш а н G. Monisplines and optimal quadrature formulae. - Rev. roum. math. pures et appl., 1972, 17, No. 9, pp. 1323-1327.
12. Л е в и н М., Л е в и н а М. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых множеств функций.- Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1975, 24, № 1 с. 15-19.

Monosplines and Quadrature Formulas for the Sets
of Functions Satisfying Prescribed Boundary Conditions

Summary

Let $W_U^{(r)}L_q = \{f(x) : f^{(r-1)}(x) \text{ be absolutely continuous on } [0,1], \|f^{(r)}\|_{L_q(0,1)} \leq M, U_i(f) = 0 (i=1, \dots, s)\}$, where $U_i(f)$ is defined in (1).

The correspondence between the set of formulas (3) (for functions $f \in W_U^{(r)}L_q$) and the set of monosplines (6) satisfying (7) is established. This result is used for the construction of the optimal formula (3) for the set $W_U^{(r)}L_q$ with $J_k = \{0, 1, \dots, r-1\} (k=1, \dots, n)$.

УДК 531.011

О.М. Сильде, А.Ш. Чистякова

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
 ДЛЯ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ СВЯЗЕЙ

Уравнение мощности (см. [1], (I) - (5))

$$\begin{aligned} \dot{T} &= N \\ (T &= \frac{1}{2} \sum m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i, \quad N = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i) \end{aligned} \quad (1)$$

можно полностью выписать так:

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{v}_i = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i; \quad \bar{a}_i = \dot{\bar{v}}_i, \quad (2)$$

откуда уравнение возможной мощности

$$\{\dot{T}\} = \{N\} \quad (3)$$

или

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \{\bar{v}_i\} = \sum \bar{F}_i \cdot \{\bar{v}_i\} \quad (4)$$

(в дальнейшем символ \sum всюду относится к индексу i).

Допустим, имеем механическую систему, положение которой определяется n параметрами (обобщенными координатами)

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q^1, \dots, q^n, t). \quad (5)$$

Чтобы избавиться от рассмотрения времени t особо, заменяем его координатой $q^0 = t$ или $q^0 = q^0(t)$, которую будем считать равноправной с другими q^j , так что

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q^0, q^1, \dots, q^n). \quad (6)$$

Пусть имеем l уравнений связей, линейных относительно \dot{q}^j

$$\begin{aligned} a_{ij} \dot{q}^j &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ i &= 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (7)$$

В этом случае можно избавиться от уравнений связей введением $s = n - l$ (число степеней свободы) новых параметров скорости v^j , $j = 1, 2, \dots, s$ (\dot{q}^0 заменяется на v^0), так что

$$\bar{v}_i = v^j \bar{u}_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, s. \quad (8)$$

v^j будут независимыми параметрами, то есть

$$\{\bar{v}_i\} = \{v^j\} \bar{u}_{ij}, \quad (9)$$

где $\{v^j\}$ - произвольные числа.

Подставив (9) в (4), имеем

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} \{v^j\} = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{ij} \{v^j\} \quad (10)$$

(см. [1], (8)), откуда получаются уравнения движения

$$(\sum \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{ij} = Q_j):$$

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (11)$$

(уравнение для $j = 0$ можно отбросить).

Введем выражение кинетической энергии

$$2T = \sum m_i v^k \bar{u}_{ik} \cdot v^l \bar{u}_{il} = \sum m_i \bar{u}_{ik} \cdot \bar{u}_{il} v^k v^l. \quad (12)$$

Пусть $\sum m_i \bar{u}_{ik} \cdot \bar{u}_{il} = g_{kl}; \quad g_{kl} = g_{lk},$

тогда $2T = g_{kl} v^k v^l. \quad (13)$

Из (13) получим

$$\frac{\partial T}{\partial v^j} = g_{jk} v^k = \sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \bar{u}_{ik} v^k \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \right) &= g_{jk} \dot{v}^k + \dot{g}_{jk} v^k = \sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \bar{u}_{ik} \dot{v}^k + \sum m_i \dot{\bar{u}}_{ij} \cdot \bar{u}_{ik} v^k + \\ &+ \sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \dot{\bar{u}}_{ik} v^k. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (8) следует

$$\bar{a}_i = \dot{\bar{v}}_i = \dot{v}^k \bar{u}_{ik} + v^k \dot{\bar{u}}_{ik}, \quad (16)$$

а (11) дает

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = \sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \bar{u}_{ik} \dot{v}^k + \sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \dot{\bar{u}}_{ik} v^k. \quad (17)$$

Из сравнения (15) и (17) получим

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \right) - \sum m_i \bar{v}_i \cdot \dot{\bar{u}}_{ij}. \quad (18)$$

Равенство (18) является основным для дальнейшего.

Введем "квазикоординаты" π^j , так что

$$\pi^j = v^j.$$

Допустим (существование такой связи легко доказать)

$$\dot{q}^k = A_j^{k'} v^j, \text{ где } A_j^{k'} = A_j^{k'}(q^0, \dots, q^n) \quad (19)$$

(индексы обобщенных координат и скоростей будем в дальнейшем обозначать со штрихом).

Произвольная функция (может быть и векторная функция)

$f(q^0, q^1, \dots, q^n)$ дает дифференцированием по времени (см. (19))

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q^{k'}} \dot{q}^k = \frac{\partial f}{\partial q^{k'}} A_j^{k'} v^j = \frac{\partial f}{\partial \pi^j} v^j, \quad (20)$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial \pi^j} = \frac{\partial f}{\partial q^{k'}} A_j^{k'}. \quad (21)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначением $\frac{\partial f}{\partial \pi^j}$, причем его значения определяются равенством (21). Так, из (6) мы получим

$$\bar{v}_i = \dot{r}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^{k'}} \dot{q}^k = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^{k'}} A_j^{k'} v^j, \quad (22)$$

откуда

$$\bar{u}_{ij} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \pi^j} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^{k'}} A_j^{k'}. \quad (23)$$

По (6), (19) и (23) \bar{u}_{ij} в общем являются функциями обобщенных координат $q^{j'}$.

В дальнейшем займемся преобразованием второго члена на правой стороне равенства (18), именно $-\sum m_i \bar{v}_i \cdot \bar{u}_{ij}$.

Заметим, что по (20)

$$\dot{\bar{u}}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial \pi^k} v^k, \quad (24)$$

откуда

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_{ij}}{\partial v^k} = \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial \pi^k} \quad (25)$$

(\bar{u}_{ij} не содержит v^k).

Напишем следующее равенство

$$\frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial \pi^j} - \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial \pi^k} = \gamma_{jk}^s \bar{u}_{is} + \bar{u}_{i(jk)} \quad (26)$$

или по (25)

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_{ik}}{\partial v^j} - \frac{\partial \dot{\bar{u}}_{ij}}{\partial v^k} = \gamma_{jk}^s \bar{u}_{is} + \bar{u}_{i(jk)} \quad (27)$$

(для голономных систем равенства (26) или (27) равны нулю). Здесь коэффициенты γ_{ik}^s имеют одно и то же значение для всех точек системы. В [I] дается аналогичное (27) равенство, только без добавочного вектора $\bar{u}_{i(jk)}$. Но теоретическое исследование и многие примеры показывают, что не всегда удается избежать этого добавочного вектора, и нам следует его в общем случае учитывать.

Подставим в (24) вместо частной производной его выражение из (26), получим

$$\dot{\bar{u}}_{ij} = \left(\frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial \pi^j} - \gamma_{jk}^s \bar{u}_{is} - \bar{u}_{i(jk)} \right) v^k. \quad (28)$$

Учитывая, что по (8) $\bar{u}_{is} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial v^s}$ и $\frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial \pi^j} v^k = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \pi^j}$,

имеем

$$\begin{aligned} -\sum m_i \bar{v}_i \cdot \dot{\bar{u}}_{ij} &= -\sum m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial \pi^j} v^k + \sum m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k + \\ &+ \sum m_i \bar{v}_i \cdot \bar{u}_{i(jk)} v^k = -\frac{\partial T}{\partial \pi^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k + G_{jk \cdot l} v^k v^l, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$G_{jk \cdot l} = \sum m_i \bar{u}_{il} \cdot \bar{u}_{i(jk)}. \quad (30)$$

По (II), (18), (29) и (30) получим дифференциальные уравнения движения для систем с неголономными связями, линейными относительно обобщенных скоростей

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \pi^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k + G_{jk \cdot l} v^k v^l = Q_j, \quad (31)$$

где v^k суть независимые параметры скорости,

$$\frac{\partial T}{\partial \pi^j} = \frac{\partial T}{\partial q^{k'}} A_j^{k'}, \quad \text{а } \gamma_{jk}^s \text{ и } \bar{u}_{i(jk)} \quad (32)$$

вычисляются из (27) (вычисление γ_{jk}^s из (26) является более трудоемким).

Коэффициенты γ_{jk}^s в [I на с. 68] называются коэффициентами трехиндексного символа или коэффициентами объекта неголономности. Будем придерживаться этих названий, хотя здесь равенство (27) более общее, чем в [I], (27) и γ_{jk}^s не сохраняют прежнего геометрического смысла (при $\bar{u}_{i(jk)} \neq 0$) (слово "объекта" иногда для краткости будем пропускать). При других постановках задачи можно получить аналогичные коэффициенты с другими значениями (как увидим дальше) и даже в

другом количестве. Они обладают тем общим свойством, что

$$\gamma_{kj}^s = -\gamma_{jk}^s \quad (\text{аналогично } \bar{u}_{i(kj)} = -\bar{u}_{i(jk)}). \quad (33)$$

Пример для вычисления γ_{jk}^s дается в [I, с. 69-70]. Уравнения (31) кажутся одними из наиболее удобных наряду с другими уравнениями, в которых применяется выражение кинетической энергии системы, именно, из-за легкости вычисления

$$\gamma_{jk}^s \text{ и } G_{jk.l}.$$

Но все же окончательного ответа нельзя дать, пока не исследованы и другие возможности. Поэтому продолжаем рассмотрение проблемы и с других точек зрения.

Пусть по-прежнему

$$\bar{v}_i = v^j \bar{u}_{ij}. \quad (34)$$

где v^j — независимые параметры скорости (их число равно числу степеней свободы системы).

Учитывая (15) до (18) получим

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = g_{jk} \dot{v}^k + \dot{g}_{jk} v^k - \sum m_i \bar{v}_i \cdot \dot{\bar{u}}_{ij}, \quad (35)$$

$$\dot{g}_{jk} = \sum m_i \dot{\bar{u}}_{ij} \cdot \bar{u}_{ik} + \sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \dot{\bar{u}}_{ik}$$

или

$$\dot{g}_{jk} v^k = \sum m_i \bar{v}_i \cdot \dot{\bar{u}}_{ij} + \sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial \pi^l} v^k v^l$$

и

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = g_{jk} \dot{v}^k + \sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial \pi^l} v^k v^l. \quad (36)$$

Обозначаем

$$\sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial \pi^l} = \Gamma_{lk.j}. \quad (37)$$

Тогда

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = g_{jk} \dot{v}^k + \Gamma_{kl.j} v^k v^l \quad (38)$$

(в последнем члене индексы k и l переменны).

Уравнения движения будут

$$g_{jk} \dot{v}^k + \Gamma_{kl.j} v^k v^l = Q_j. \quad (39)$$

Введем еще числа g^{jl} по определению

$$g^{jl} g_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = k, \\ 0, & \text{если } l \neq k. \end{cases} \quad (40)$$

Как известно

$$g^{jl} = \frac{D^{jl}}{g},$$

где $g = \det(g_{jl})$, а D^{jl} — алгебраическое дополнение к члену g_{jl} в $\det(g_{jl})$. Отсюда получим $\Gamma_{kl}^s = g^{js} \Gamma_{kl,j}$, $Q^s = g^{js} Q_j$ и умножением (39) на g^{js} имеем уравнения движения

$$\dot{v}^s + \Gamma_{kl}^s v^k v^l = Q^s. \quad (41)$$

Определяем коэффициенты неголономности γ_{kl}^s равенствами (то есть иначе, чем в (27)):

$$g_{js} \gamma_{kl}^s = \Gamma_{kl,j} - \Gamma_{lk,j} \quad (42)$$

или, умножая на g^{js}

$$\gamma_{kl}^s = \Gamma_{kl}^s - \Gamma_{lk}^s \quad (42, a)$$

(определенные здесь γ_{kl}^s , в общем, не совпадают с γ_{jk}^s в (26) или (27), но нетрудно доказать, что в случае, когда все $\bar{u}_{i(jk)} = 0$, получается совпадение).

Пользуясь равенствами (37), получим

$$\begin{aligned} -\sum m_i \bar{v}_i \cdot \dot{\bar{u}}_{ij} &= -\sum m_i v^k \bar{u}_{ik} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial \pi^l} v^l = \bar{\Gamma}_{ij \cdot k} v^k v^l = \\ &= -\Gamma_{kj \cdot l} v^k v^l \end{aligned} \quad (43)$$

(перемена индексов k и l).

Отсюда получаются уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \right) - \Gamma_{kj \cdot l} v^k v^l = Q_j. \quad (44)$$

Из (43) имеем

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \pi^j} + \frac{\partial T}{\partial \pi^j} - \Gamma_{kj \cdot l} v^k v^l, \quad (45)$$

но

$$\frac{\partial T}{\partial \pi^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial \pi^j} v^k v^l,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{kl}}{\partial \pi^j} &= \frac{\partial}{\partial \pi^j} (\sum m_i \bar{u}_{ik} \cdot \bar{u}_{il}) = \sum m_i \frac{\partial \bar{u}_{lk}}{\partial \pi^j} \cdot \bar{u}_{il} + \\ &+ \sum m_i \bar{u}_{ik} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{il}}{\partial \pi^j} = \Gamma_{jk \cdot l} + \Gamma_{jl \cdot k} \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial \pi^j} = \frac{1}{2} (\Gamma_{jk \cdot l} + \Gamma_{jl \cdot k}) v^k v^l = \Gamma_{jk \cdot l} v^k v^l \quad (46)$$

(перемена индексов k и l во втором члене).

Подставляя (46) в (45), получим

$$\sum m_i \cdot \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^j} + (\Gamma_{jk,l} - \Gamma_{kj,l}) v^k v^l \quad (47)$$

Следовательно, учтя (42) и что по (I4)

$$q_{ls} v^l = \frac{\partial T}{\partial v^s},$$

получим уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \chi_{jk}^s v^k = Q_j. \quad (48)$$

Но имея в виду ход вычислений, (48) не имеет преимуществ перед (39). Это имело бы место, если χ_{jk}^s можно было бы вычислить не по (42), а иначе. Например, если имеем

$$\frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} = \chi_{jk}^s \bar{u}_{is} \quad (49)$$

(то есть если в (26) $\bar{u}_{i(jk)} = 0$), тогда χ_{ik}^s в (49) или, что то же самое, в (26) совпадают с χ_{jk}^s в (42) или (42,а). В этом случае $G_{jk,l} = 0$ и уравнения (3I) и (48) одно и то же.

Для практического вычисления вместо (37) следует пользоваться равенством

$$\Gamma_{kl,j} = \sum m_i \bar{u}_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{il}}{\partial v^k}. \quad (50)$$

Из (47) имеем уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^j} + (\Gamma_{jk,l} - \Gamma_{kj,l}) v^k v^l = Q_j. \quad (51)$$

Из (I8) получаем уравнения, которые имеют фундаментальное значение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^i} \right) - \sum m_i \bar{v}_i \cdot \dot{\bar{u}}_{ij} = Q_j. \quad (52)$$

Таким образом, в настоящей статье приводятся следующие дифференциальные уравнения движения для неголомомных систем с линейными уравнениями связей относительно скорости при условии, что v^j независимые параметры скорости: (II), (3I), (39), (4I), (44), (48), (5I), (52). Из них все, кроме (II), (39), (4I), пользуются выражением кинетической энергии. Введением $\Gamma_{jk,l}$ и Γ_{jk}^l мы уже пришли к понятиям римановой геометрии (символы Кристоффеля первого рода и второго рода) с квадратом линейного элемента

$$ds^2 = g_{jk} d\pi^j d\pi^k. \quad (53)$$

Приведенные уравнения движения можно применять и к голономным системам со следующими поправками:

$$\begin{aligned}
 & 1) \gamma_{jk}^s = 0; \quad 2) G_{jk.l} = 0; \quad 3) \pi^j = q^j; \quad 4) v^j = \dot{q}^j; \\
 & 5) \Gamma_{jk.l} = \Gamma_{kj.l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \right). \quad (54)
 \end{aligned}$$

Однако есть ряд других уравнений движения (без применения выражения кинетической энергии), которые часто оказываются более удобными, чем приведенные здесь уравнения. В основе всех лежит равенство (10). Оно позволяет в случае системы твердых тел (и отдельных материальных точек) для каждого тела, входящего в систему, пользоваться своими параметрами скорости, причем параметры, входящие в систему тел, связаны между собой линейными уравнениями.

Л и т е р а т у р а

И. Рельвик Х., Сильде О. Метод уравнения возможной мощности с применением объекта неголономности. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1973, № 345.

O. Silde, A. Tschistjakowa

Einige Differentialgleichungen der Bewegung für das System mit linearen Bindungsgleichungen

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird eine Anzahl von Bewegungsgleichungen für das System mit linearen nichtholonomen Bindungsgleichungen gegeben, die mit Hilfe der Gleichung der möglichen Leistung abgeleitet sind. Die meisten abgeleiteten Gleichungen enthalten den Ausdruck für die kinetische Energie des Systems.

УДК 531.314.2

Х.А. Рельвик

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ
 МЕХАНИКИ

В статье рассматриваются некоторые виды уравнений аналитической механики, среди которых и уравнения Ценова. Применение этих уравнений иллюстрируется на примерах.

1. Во многих статьях [1, 2, 3, 5, 10, 11, 12 и др.] рассматриваются уравнения Ценова II рода

$$\frac{dK}{dt} = 0 \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (I)$$

где

$$K = \frac{1}{2}(\dot{T} - 3\dot{T}_0) - Q_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} \quad (Ia)$$

и дается их обобщение на случай неголономных координат. Вид уравнений (I) при этом сохраняется, то есть

$$\frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}^k} = 0 \quad k=1, 2, \dots, s \quad (2)$$

(см. [1], где звездочка (*) указывает, что величины \dot{q}^j и \dot{q}^j подставлены. В работе [2], а более детально в [1] рассматриваются примеры движения твердого тела вокруг неподвижной точки и качения обруча на шероховатой плоскости.

2. В работе [8] предложено уравнение аналитической механики вида

$$\sum m_i \bar{v}_i \cdot \bar{u}_{ij} = Q_j, \quad (3)$$

где Q_j - обобщенные силы. Для его вывода выбирают параметры скоростей v^j и соответствующие им базисные векторы \bar{u}_{ij} выражают скорость i -ой точки системы

$$\bar{v}_i = v^j \bar{u}_{ij}, \quad (4)$$

вычисляют ускорение \bar{a}_i и пишут, суммируя для всей системы, так называемое уравнение возможной мощности (короче УВМ)

$$\sum (m_i \bar{a}_i - \bar{F}_i) \cdot \{v^j\} \bar{u}_{ij}, \quad (5)$$

где $\{v^j\}$ обозначают возможные значения истинных параметров скоростей. Учитывается независимость величин в фигурных скобках и в результате получают из уравнения (5) уравнения движения (3).

3. Введем так называемые аналоги кинетической энергии

$$V^{l,n} = \sum \frac{m_i}{2} \bar{v}_i^{(l)} \cdot \bar{v}_i^{(n)}, \quad (6)$$

где

$$\bar{v}_i = v^j \bar{u}_{ij}$$

и

$$\bar{v}_i^{(n)} = {}^{(n)}v^j \bar{u}_{ij} + n {}^{(n-1)}\dot{v}^j \bar{u}_{ij} + \dots + v^j \bar{u}_{ij}^{(n)}. \quad (7)$$

Из функций (6) в дальнейшем нам нужны два случая: при $l = 0$ имеем

$$V^{0,n} = \sum \frac{m_i}{2} \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i^{(n)} \quad (8)$$

и при $l = I$

$$V^{I,n} = \sum \frac{m_i}{2} \dot{\bar{v}}_i \cdot \bar{v}_i^{(n)} = \sum \frac{m_i}{2} \bar{a}_i \cdot \bar{v}_i^{(n)}. \quad (9)$$

В частном случае, при $n = 0$, функция (8) совпадает с кинетической энергией $T = \sum \frac{m_i}{2} \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i$, а при $n = I$ формула (9) дает энергию ускорения $S = \sum \frac{m_i}{2} \bar{a}_i \cdot \bar{a}_i$, применяемую в уравнениях Аппеля.

4. При помощи функций (8) можно выписать (см. [6]) уравнения

$$A \left[(n+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} - \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} + \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k \right] = Q_j \quad (10)$$

или, что то же самое,

$$A \left[(n+2) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} - \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} + \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k \right] = Q_j, \quad (11)$$

где

$$A = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0 \\ 2, & \text{если } n = I \\ \frac{2}{n+1}, & \text{если } n > I \end{cases} \quad (12)$$

В частном случае, при $n = 0$ (тогда $A = I$), из (11) следуют уравнения в квазискоростях

$$2 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} - \frac{\partial T}{\partial v^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j, \quad (13)$$

а из (IO) - уравнения в квазикоординатах Больцмана-Гамеля

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} - \frac{\partial T}{\partial \pi^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j. \quad (I4)$$

В другом частном случае, при $n = I$ (тогда $A = 2$), уравнения (IO) и (II) примут виды

$$2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{v}^j} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial v^j} + \frac{\partial \dot{T}}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j; \quad (I5)$$

$$3 \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{v}^j} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial v^j} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j, \quad (I6)$$

а если $n > I$, то уравнения (IO) упрощаются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (2V^{0,n})}{\partial v^j} - \frac{1}{n+1} \frac{\partial (2V^{0,n})}{\partial v^j} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial (2V^{0,n})}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j. \quad (I7)$$

5. Далее имеются (см. [6]) тождества

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} - \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} \right), \quad (I8)$$

при помощи которых уравнения (II) принимают вид

$$A \left[\frac{n+1}{h} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} - \frac{h+n+1}{h} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^i} + \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k \right] = Q_j \quad (I9)$$

или в случае, если $n = 0$ ($V^{00} = T$ - кинетическая энергия)

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} - (h+1) \frac{\partial T}{\partial \pi^j} \right) + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j. \quad (20)$$

6. Вводим теперь первую и вторую функции Ценова

$$R_h = \frac{1}{h} (T - (h+1) T_0) \quad (2I)$$

и

$$K_h = R_h - Q_{\infty} v^{2e}, \quad (22)$$

где T - кинетическая энергия как функция квазикоординат и квазискоростей, а T_0 - значение T при фиксированных скоростях (т.е. скорости считаются постоянными). Чтобы различить в T_0 фиксированные величины от обычных, будем их в вычислениях подчёркивать:

$$T_0 = T_0(\pi^1, \dots, \pi^{s+1}) = T(\pi^1, \dots, \pi^{s+1}, \underline{v}^1, \dots, \underline{v}^{s+1}).$$

Величины, входящие в дальнейшие уравнения, следовало бы обозначать каким-то индексом, чтобы не перепутать с анало-

гичными величинами первого пункта данной статьи (например, T^*), но для простоты записи мы этот индекс опустим.

Тогда

$$T_0 = \frac{\partial T}{\partial \pi^j} v^j; \dots; T_0^{(h)} = \frac{\partial T}{\partial \pi^j} v^j + (\dots). \quad (23)$$

где через (...) обозначены члены, не представляющие интереса для следующего. Частные производные для уравнений (20) будут

$$\frac{\partial T_0^{(h)}}{\partial v^j} = 0; \quad \frac{\partial T_0^{(h)}}{\partial v^j} = \frac{\partial T}{\partial \pi^j}. \quad (24)$$

Вычислим еще величины (см. (21))

$$h \frac{\partial R_h}{\partial v^j} = \frac{\partial T}{\partial v^j} - (h+1) \frac{\partial T_0}{\partial v^j} = \frac{\partial T}{\partial v^j} - (h+1) \frac{\partial T}{\partial \pi^j};$$

$$h \frac{\partial R_h}{\partial v^j} = \frac{\partial T}{\partial v^j} - (h+1) \frac{\partial T_0}{\partial v^j} = \frac{\partial T}{\partial v^j} = \frac{\partial T}{\partial v^j} \quad (25)$$

и уравнения (20) принимают вид

$$\frac{\partial R_h}{\partial v^j} + h \frac{\partial R_h}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j. \quad (26)$$

Дальше, если $\partial Q_j / \partial v^j = 0$, то по формуле (22)

$$\frac{\partial K_h}{\partial v^j} + h \frac{\partial K_h}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j \quad (27)$$

или в частном случае, при $h = 2$

$$\frac{\partial K_2}{\partial v^j} + 2 \frac{\partial K_2}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = 0. \quad (28)$$

Уравнения (28) могут казаться противоречивыми по сравнению с уравнениями (2). Действительно, v^j не что иное, как $\dot{\omega}^k$, но в уравнениях (28) фигурируют еще коэффициенты γ_{jk}^s . Противоречия здесь все-таки нет, так как функция K^* в уравнениях (2) является функцией K из уравнения (I) после исключения \dot{q}^j и \ddot{q}^j с сохранением величин \ddot{q}^j , а в K_2 никаких производных обобщенных координат нет — \dot{q}^j , \ddot{q}^j и \ddot{q}^j все исключены.

7. В работе [6] предложены уравнения движения, получаемые при помощи аналогов кинетической энергии (9):

$$\frac{\partial(2V^{1,n})}{\partial v^j} = Q_j \quad (29)$$

или

$$\frac{\partial(2W^{1,n})}{\partial v^j} = 0, \quad (30)$$

если обозначить

$$2W^{1,n} = 2V^{1,n} - Q_{\infty}^{(n-1)} v^{\infty}. \quad (31)$$

8. Пример I. Будем решать классический пример о составлении уравнений сферического движения твердого тела несколькими способами.

Первый способ. В работе [I] задача сферического движения решена следующим образом:

Кинетическая энергия тела

$$T = \frac{1}{2}(A p^2 + B q^2 + C r^2),$$

где

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \dot{\theta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi,$$

$$q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \dot{\psi} \sin \theta = p \sin \varphi + q \cos \varphi,$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \quad \dot{\varphi} = r - \cot \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi),$$

а θ, ψ и φ - углы Эйлера. Тогда производные от T будут

$$\dot{T} = A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r},$$

$$\ddot{T} = A \dot{p}^2 + B \dot{q}^2 + C \dot{r}^2 + A p \ddot{p} + B q \ddot{q} + C r \ddot{r}. \quad (a)$$

Затем выражению (a) дают вид (см. формулу (I3) на с. 98 работы [II]):

$$\begin{aligned} \ddot{T} - 3\dot{T}_0 = A \dot{p}^2 + B \dot{q}^2 + C \dot{r}^2 + 2A p (r \dot{q} - q \dot{r}) + \\ + 2B q (p \dot{r} - r \dot{p}) + 2C r (q \dot{p} - p \dot{q}). \end{aligned} \quad (б)$$

Уравнения (2) с учетом выражения (б) дают уравнения Эйлера.

Как мы видим, при этом способе нужны две системы отсчета: обобщенные координаты θ, ψ и φ и квазикординаты, производными которых являются p, q и r .

Второй способ. Уравнение возможной мощности.

Скорость i -ой точки при сферическом движении тела

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i,$$

где $\bar{\omega} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}$ система отсчета связана с телом и $\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$. Следовательно,

$$\bar{v}_i = p(y_i\bar{k} - z_i\bar{j}) + q(z_i\bar{i} - x_i\bar{k}) + r(x_i\bar{j} - y_i\bar{i}) = p\bar{u}_{i1} + q\bar{u}_{i2} + r\bar{u}_{i3},$$

а ускорение

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_i + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \\ &= \bar{i} [\dot{q}z_i - \dot{r}y_i + p(qy_i + rz_i) - (q^2 + r^2)x_i] + \\ &+ \bar{j} [\dot{r}x_i - \dot{p}z_i + q(rz_i + px_i) - (r^2 + p^2)y_i] + \\ &+ \bar{k} [\dot{p}y_i - \dot{q}x_i + r(px_i + qy_i) - (p^2 + q^2)z_i]. \end{aligned}$$

Подставив теперь вместо p, q и r $\{p\}, \{q\}$ и $\{r\}$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} \sum m_i \bar{a}_i \cdot \{\bar{v}_i\} &= \{p\} [A\dot{p} + (C-B)qr] + \\ &+ \{q\} [B\dot{q} + (A-C)rp] + \{r\} [C\dot{r} + (B-A)pq], \end{aligned}$$

откуда по независимости величин в фигурных скобках следуют уравнения Эйлера.

Третий способ. По уравнениям (IO) и (II).

Вычисления дают:

$$2V^{0,1} = A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r} = \dot{T};$$

$$2\dot{V}^{0,1} = A \dot{p}^2 + B \dot{q}^2 + C \dot{r}^2 + A p \ddot{p} + B q \ddot{q} + C r \ddot{r} = \ddot{T}$$

и первое уравнение Эйлера получится из уравнений (I5) следующим образом: ($v^1 = p, v^2 = q, v^3 = r$)

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial(2V^{0,1})}{\partial p} - \frac{\partial(2V^{0,1})}{\partial p} - \frac{\partial(2V^{0,1})}{\partial p} \gamma'_{ik} v^k + \frac{\partial(2V^{0,1})}{\partial q} \gamma^2_{ik} v^k + \\ + \frac{\partial(2V^{0,1})}{\partial r} \gamma^3_{ik} v^k = Q_1; \end{aligned}$$

$$2 \frac{d}{dt} (Ap) - A \dot{p} - Bqr + Crq = Q_1;$$

$$A \dot{p} + (C - B)qr = Q_1.$$

Аналогично можно получить из уравнений (I6):

$$3 \frac{d}{dt} (Ap) - 2A \dot{p} - Bqr + Crq = Q_1; \quad A \dot{p} + (C - B)qr = Q_1.$$

Коэффициенты (объекта) неголономности $\hat{\gamma}_{jk}$ можно получить без помощи вспомогательной голономной системы отсчета (см.

[6]). Мы их возьмем из литературы:

$$\delta_{12}^3 = \delta_{31}^2 = \delta_{23}^1 = -\delta_{21}^3 = -\delta_{13}^2 = -\delta_{32}^1 = 1.$$

Остальные δ_{jk}^i равны нулю.

Пользуясь индексом $n > 1$, имеем

$$2V^{0,n} = A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r} + n(B-C) q r \dot{p} + n(C-A) r p \dot{q} + \\ + n(A-B) p q \dot{r} + (\dots);$$

$$2\dot{V}^{0,n} = A p^{(n+1)} + A \dot{p} \dot{p} + B q^{(n+1)} + B \dot{q} \dot{q} + C r^{(n+1)} + C \dot{r} \dot{r} + \\ + n(B-C) q r \dot{p} + n(C-A) r p \dot{q} + n(A-B) p q \dot{r} + (\dots).$$

Уравнения (I3) в этом случае дадут

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(2V^{0,n})}{\partial v^j} - \frac{1}{n+1} \frac{\partial(2V^{0,n})}{\partial v^j} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial(2V^{0,n})}{\partial v^s} \delta_{jk}^s v^k = Q_j;$$

$$\frac{d}{dt} (A p) - \frac{n}{n+1} (B-C) q r - \frac{1}{n+1} B q r + \frac{1}{n+1} C r q = Q_1;$$

$$A \dot{p} + (C-B) q r = Q_1$$

и уравнения (I4):

$$\frac{1}{n+1} \left[(n+2) \frac{d}{dt} \frac{\partial(2V^{0,n})}{\partial v^j} - \frac{\partial(2\dot{V}^{0,n})}{\partial v^j} + \frac{\partial(2V^{0,n})}{\partial v^s} \delta_{jk}^s v^k \right] = Q_j;$$

$$\frac{1}{n+1} \left[(n+2) \frac{d}{dt} (A p) - A \dot{p} - n(B-C) q r - B q r + C q r \right] = Q_1;$$

$$A \dot{p} + (C-B) q r = Q_1.$$

Четвертый способ. По обобщенным уравнениям Ценова II рода (28). (В более общем случае показателя n — по обобщенным уравнениям Манжерона-Делеану).

В данном случае в выражении \dot{T} сохраняются величины \dot{p} , \dot{q} и \dot{r} (различие по сравнению с первым способом решения). Уравнения Эйлера получаются следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2);$$

$$\dot{T} = A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r};$$

$$\ddot{T} = A \dot{p}^2 + B \dot{q}^2 + C \dot{r}^2 + A p \ddot{p} + B q \ddot{q} + C r \ddot{r};$$

$$T_0 = \frac{1}{2} (A \underline{p}^2 + B \underline{q}^2 + C \underline{r}^2) = \text{const};$$

$$\dot{T}_0 = \ddot{T}_0 = 0;$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0) - Q_1 \dot{p} - Q_2 \dot{q} - Q_3 \dot{r};$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \dot{p}} = 2 \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{p}} \gamma_{1k}^1 v^k + \frac{\partial K_2}{\partial \dot{q}} \gamma_{1k}^2 v^k + \frac{\partial K_2}{\partial \dot{r}} \gamma_{1k}^3 v^k \right) = 0;$$

$$A \dot{p} + r(C - B) \dot{q} = Q_1.$$

Мы видим, что уравнения (28) применимы без вспомогательной системы обобщенных координат θ , ψ и φ . Нужны только параметры скорости p , q и r . Присутствие коэффициентов (объекта) неголономности γ_{jk}^i не нарушает этого правила, так как их можно найти в данной неголономной системе отсчета (см., например, [7]).

Пятый способ. По компактным уравнениям при помощи аналогов кинетической энергии (30).

В этом случае пример решается следующим образом. Выбираем за параметры скорости угловые скорости p , q и r вокруг осей, неизменно связанных с телом. Вектор угловой скорости будет тогда

$$\bar{\omega} = p \bar{i} + q \bar{j} + r \bar{k}$$

и радиус-вектор i -ой точки

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k},$$

откуда скорости этой точки

$$\bar{v}_i = (q z_i - r y_i) \bar{i} + (r x_i - p z_i) \bar{j} + (p y_i - q x_i) \bar{k}$$

и ускорение

$$\begin{aligned} \bar{a}_i = & [\dot{q} z_i - \dot{r} y_i + p q y_i + p r z_i - (q^2 + r^2) x_i] \bar{i} + \\ & + [\dot{r} x_i - \dot{p} z_i + q r z_i + q p x_i - (r^2 + p^2) y_i] \bar{j} + \\ & + [\dot{p} y_i - \dot{q} x_i + r p x_i + r q y_i - (p^2 + q^2) z_i] \bar{k}. \end{aligned}$$

Продолжая аналогично, получаем

$$\bar{v}_i^{(n)} = (\dot{q} z_i - \dot{r} y_i) \bar{i} + (\dot{r} x_i - \dot{p} z_i) \bar{j} + (\dot{p} y_i - \dot{q} x_i) \bar{k} + (\dots),$$

где (\dots) не зависит от p , q и r .

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2V^{1,n} = \sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{v}_i^{(n)} = & [A \dot{p} + (C - B) \dot{q} r] \dot{p} + \\ & + [B \dot{q} + (A - C) r p] \dot{q} + [C \dot{r} + (B - A) p q] \dot{r} + (\dots), \end{aligned}$$

$$2W^{1,n} = 2V^{1,n} - [Q_1 \dot{p}^{(n)} + Q_2 \dot{q}^{(n)} + Q_3 \dot{r}^{(n)}].$$

Уравнение (30) дает теперь ответ

$$A\dot{p} + (C - B)q\dot{r} - Q_1 = 0.$$

Мы видим, что здесь не нужны коэффициенты (объекта) неголономности, а также не нужна вспомогательная голономная система отсчета.

9. Пример 2. Составить дифференциальные уравнения движения однородного диска на горизонтальной шероховатой плоскости.

Пользуемся теми же способами и в той же последовательности, как и в примере I.

Первый способ. По уравнениям (2). В работе [I] дается

$$T = \frac{1}{2}(Mv_c^2 + A\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) = \frac{1}{2}[(Ml^2 + A)\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + (Ml^2 + C)\dot{r}^2],$$

где $p = \theta$, $q = \psi \sin \theta$, $r = \psi \cos \theta + \dot{\psi} = R + \dot{\psi}$, θ — угол между вертикалью и геометрической осью диска через центр тяжести C , ψ — угол между фиксированной в пространстве осью ξ и линией пересечения плоскости диска с горизонтальной плоскостью и φ — угол поворота радиуса диска в плоскости самого диска.

Тогда

$$K = \frac{1}{2}[(Ml^2 + A)\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + (C + Ml^2)\dot{r}^2 + (AR - Cr)(p\dot{q} - q\dot{p}) + Ml^2q(r\dot{p} - p\dot{r}) - (Lp + M\dot{q} - N\dot{r})],$$

откуда по уравнениям (2) получаются уравнения движения диска.

Опять мы видим, что нужны две системы отсчета — обобщенные координаты θ , ψ и φ и квазикоординаты, производными которых являются p , q и r .

Второй способ. Уравнение возможной мощности.

Скорость i -ой точки диска

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i = \bar{\omega} \times (l\bar{j} + \bar{r}_i),$$

где $\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j}$, и $\bar{\omega} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}$. Система отсчета $x y z$ не участвует во вращении вокруг оси z с угловой скоростью $\dot{\psi}$, а вращается в пространстве с угловой скоростью $\bar{\Omega} = p\bar{i} + q\bar{j} + R\bar{k}$. Тогда

$$\bar{v}_i = p(l+y_i)\bar{k} - q x_i \bar{k} + r[x_i \bar{j} - (l+y_i)\bar{i}],$$

возможная скорость

$$\{\bar{v}_i\} = \{p\}(l+y_i)\bar{k} + \{q\}(-x_i\bar{k}) + \{r\}[x_i\bar{j} - (l+y_i)\bar{i}]$$

и ускорение

$$\begin{aligned} \bar{a}_i = & [-x_i(q^2 + r^2) + (l+y_i)(pq - \dot{r})]\bar{i} + \\ & + [x_i(pq + \dot{r}) + y_i r^2 - (l+y_i)p^2 - l r R]\bar{j} + \\ & + [x_i(2pr - pR - \dot{q}) + y_i q(r - R) + (l+y_i)(\dot{p} + q, r)]\bar{k}. \end{aligned}$$

Уравнение возможной мощности (5) дает теперь

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot (\{p\}\bar{u}_{i1} + \{q\}\bar{u}_{i2} + \{r\}\bar{u}_{i3}) = Q_1\{p\} + Q_2\{q\} + Q_3\{r\},$$

где

$$\begin{cases} \bar{u}_{i1} = (l+y_i)\bar{k}, \\ \bar{u}_{i2} = -x_i\bar{k}, \\ \bar{u}_{i3} = x_i\bar{j} - (l+y_i)\bar{i}. \end{cases} \quad (a)$$

По независимости $\{p\}$, $\{q\}$ и $\{r\}$ получим

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = Q_j \quad j=1, 2, 3$$

или после суммирования по всему телу

$$\begin{cases} (Ml^2 + A)\dot{p} + (Ml^2 + C)qr - AqR = Q_1, \\ A\dot{q} + ApR - Cpr = Q_2, \\ (Ml^2 + C)\dot{r} - Ml^2 pq = Q_3. \end{cases}$$

Ответ совпадает с уравнениями Аппеля, полученными в работе [9].

Третий способ. По уравнениям (10).

Вычислив γ_{jk}° традиционным путем

$$\gamma_{jk}^{\circ} = b_j^l b_k^r \left(\frac{\partial a_l^{\circ}}{\partial q^r} - \frac{\partial a_r^{\circ}}{\partial q^l} \right)$$

(см., например, [9]), получим $\gamma_{12}^{\circ} = -\gamma_{21}^{\circ} = 1$, $\gamma_{21}^{\circ} = -\gamma_{12}^{\circ} = \cot \theta$,

остальные $\gamma_{jk}^{\circ} = 0$. Ответ будет

$$\begin{cases} (Ml^2 + A)\dot{p} - ARq + (Ml^2 + C)qr = Q_1, \\ A\dot{q} - ARp - (Ml^2 + C)pr = Q_2, \\ (Ml^2 + C)\dot{r} = Q_3 \end{cases}$$

и не совпадает с результатами других способов решения. Это касается всех уравнений движения, которые содержат коэффициенты (объекта) неголономности $\gamma_{jk}^{\dot{}}$. К сожалению, это заранее трудно заметить.

Постараемся решить вопрос другим путем, как это показано в статье [7].

Имеем (см. формулы (а) второго способа решения):

$$\begin{cases} \bar{u}_{i1} = (l+y_i)\bar{k}, \\ \bar{u}_{i2} = -x_i\bar{k}, \\ \bar{u}_{i3} = x_i\bar{j} - (l+y_i)\bar{i}. \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}}_{i1} = q(l+y_i)\bar{i} - p(l+y_i)\bar{j} + (r-R)x_i\bar{k}, \\ \dot{\bar{u}}_{i2} = -qx_i\bar{i} + px_i\bar{j} + (r-R)y_i\bar{k}, \\ \dot{\bar{u}}_{i3} = -rx_i\bar{i} - (Rl+ry_i)\bar{j} + px_i\bar{k} + q(l+y_i)\bar{k}. \end{cases}$$

Вычислим теперь разности

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_{ik}}{\partial v^j} - \frac{\partial \dot{\bar{u}}_{ij}}{\partial v^k} = \gamma_{jk}^{\dot{}} \bar{u}_s$$

и найдем, что

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_{i2}}{\partial p} - \frac{\partial \dot{\bar{u}}_{i1}}{\partial q} = \bar{u}_3 - \cot\theta \bar{u}_2,$$

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_{i3}}{\partial p} - \frac{\partial \dot{\bar{u}}_{i1}}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_{i3}}{\partial q} - \frac{\partial \dot{\bar{u}}_{i2}}{\partial r} = -\cot\theta \cdot l\bar{j} + l\bar{k} = -\cot\theta \bar{u}_4 + \bar{u}_5,$$

где, как видно, мы должны были ввести два новых базисных вектора \bar{u}_4 и \bar{u}_5 . Следовательно,

$$\gamma_{12}^3 = -\gamma_{21}^3 = 1, \quad \gamma_{23}^4 = -\gamma_{32}^4 = -\cot\theta,$$

$$\gamma_{12}^2 = -\gamma_{21}^2 = -\cot\theta, \quad \gamma_{23}^5 = -\gamma_{32}^5 = 1,$$

$$\gamma_{13}^{\dot{}} = 0 = \gamma_{31}^{\dot{}},$$

(остальные $\gamma_{jk}^{\dot{}} = 0$) и скорость i -ой точки следует писать так:

$$\bar{v}_i = p\bar{u}_{i1} + q\bar{u}_{i2} + r\bar{u}_{i3} + s\bar{u}_4 + u\bar{u}_5.$$

Теперь, сохраняя нужные члены, найдем:

$$\begin{aligned}
2V^{0,n} = & p \left[p^{(n)} (Ml^2 + A) + u^{(n)} Ml^2 \right] + q \dot{q}^{(n)} A + r^{(n)} (C + Ml^2) + \\
& + n p \left[\dot{q}^{(n-1)} A (n-R) + \dot{r}^{(n-1)} q (Ml^2 + A) + \delta^{(n-1)} p Ml^2 \right] + \\
& + n q \left[\dot{p}^{(n-1)} A (R-n) - \dot{r}^{(n-1)} p A \right] + \\
& + n r \left[-\dot{p}^{(n-1)} q (Ml^2 + A) + \dot{q}^{(n-1)} p A + \delta^{(n-1)} R Ml^2 - u^{(n-1)} q Ml^2 \right] + (\dots).
\end{aligned}$$

Ограничиваясь частным случаем $n = 0$, то есть кинетической энергией $T = V^{0,0}$, получим

$$T = \frac{1}{2} [(Ml^2 + A)p^2 + Aq^2 + (Ml^2 + C)r^2] + puMl^2,$$

то есть по сравнению с выражением T из первого способа решения следует учитывать еще член $puMl^2$, где в окончательных результатах следует принимать $u = 0$.

Полученное таким образом выражение $V^{0,n}$ (или в частном случае T) дает правильные уравнения движения (I0) (в частном случае (I3), (I5) или (I7)).

Четвертый способ. По обобщенным уравнениям Ценова II рода (26) или (27).

Расширенное выражение кинетической энергии вычисляется как и в случае третьего способа решения:

$$T = \frac{1}{2} Ml^2 (p^2 + r^2 + 2pu) + \frac{1}{2} (Ap^2 + Aq^2 + Cr^2).$$

Отсюда производные \dot{T} и \ddot{T} :

$$\dot{T} = Ml^2 (p\dot{p} + r\dot{r} + p\dot{u} + \dot{p}u) + A p\dot{p} + A q\dot{q} + C r\dot{r},$$

$$\begin{aligned}
\ddot{T} = & Ml^2 (p\ddot{p} + r\ddot{r} + \dot{p}^2 + \dot{r}^2 + \ddot{p}u + 2\dot{p}\dot{u} + p\ddot{u}) + \\
& + A(p\ddot{p} + \dot{p}^2) + A(q\ddot{q} + \dot{q}^2) + C(r\ddot{r} + \dot{r}^2).
\end{aligned}$$

Дальше имеем

$$T_0 = \frac{1}{2} Ml^2 (\underline{p}^2 + \underline{r}^2 + 2\underline{p}\underline{u}) + \frac{1}{2} (A\underline{p}^2 + A\underline{q}^2 + C\underline{r}^2),$$

$$\dot{T}_0 = \ddot{T}_0 = 0; \quad R_2 = \frac{1}{2} (\ddot{T} - 3\dot{T}_0) = \frac{1}{2} \ddot{T},$$

$$K_2 = R_2 - Q_1 \dot{p} - Q_2 \dot{q} - Q_3 \dot{r}.$$

Уравнения (26) будут

$$\begin{aligned}
I) \quad \frac{\partial R_2}{\partial \dot{p}} + \frac{\partial (2R_2)}{\partial \dot{p}} \gamma'_{1k} v^k + \frac{\partial (2R_2)}{\partial \dot{q}} \gamma^2_{1k} v^k + \frac{\partial (2R_2)}{\partial \dot{r}} \gamma^3_{1k} v^k + \\
+ \frac{\partial (2R_2)}{\partial \delta} \gamma^4_{1k} v^k + \frac{\partial (2R_2)}{\partial \ddot{u}} \gamma^5_{1k} v^k = Q_1;
\end{aligned}$$

$$(Ml^2 + A)\dot{p} + Ml^2\dot{u} + [Ml^2(p+u) + Ap]\gamma_{1k}^4 v^k + Aq\gamma_{1k}^2 v^k + \\ + (Ml^2 + C)r\gamma_{1k}^3 v^k + Ml^2p\gamma_{1k}^5 v^k = Q_1,$$

$$(Ml^2 + A)\dot{p} - ARq + (Ml^2 + C)r\dot{q} = Q_1,$$

$$2) \quad \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial(2R_2)}{\partial \dot{p}} \gamma_{2k}^4 v^k + \frac{\partial(2R_2)}{\partial \dot{q}} \gamma_{2k}^2 v^k + \frac{\partial(2R_2)}{\partial \dot{r}} \gamma_{2k}^3 v^k + \\ + \frac{\partial(2R_2)}{\partial \dot{u}} \gamma_{2k}^5 v^k = Q_2,$$

$$A\dot{q} + ARp - Crp = Q_2,$$

$$3) \quad \frac{\partial R_2}{\partial \dot{r}} + \frac{\partial(2R_2)}{\partial \dot{p}} \gamma_{3k}^4 v^k + \frac{\partial(2R_2)}{\partial \dot{q}} \gamma_{3k}^2 v^k + \frac{\partial(2R_2)}{\partial \dot{r}} \gamma_{3k}^3 v^k + \\ + \frac{\partial(2R_2)}{\partial \dot{u}} \gamma_{3k}^5 v^k = Q_3,$$

$$(Ml^2 + C)\dot{r} + Ml^2p\dot{q} = Q_3.$$

Пятый способ. По компактным уравнениям (29) при помощи аналогов кинетической энергии.

Как и при втором способе, получаем

$$\bar{a}_i = \dot{\bar{v}}_i = [(-\dot{r} + p\dot{q})(l + y_i) - (q^2 + r^2)x_i] \bar{i} + \\ + [(\dot{r} + p\dot{q})x_i - y_i r^2 - (y_i + l)p^2 - lnr] \bar{j} + \\ + [x_i(2pr - pR - \dot{q}) + y_i q(r - R) + (l + y_i)(\dot{p} + q\dot{r})] \bar{k},$$

откуда $\bar{v}_i^{(n)} = -\dot{r}(l + y_i) \bar{i} + r x_{ij} \bar{j} + p(l + y_i) \bar{k} - q x_i \bar{k} + (\dots),$

где (\dots) не зависит от p, q и r ;

$$2V^{4n} = \sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{v}_i^{(n)} = \\ = p [(Ml^2 + A)\dot{p} + (Ml^2 + C)q\dot{r} - ARq] + \\ + \dot{q} [A\dot{q} + ARp - Crp] + \\ + \dot{r} [(Ml^2 + C)\dot{r} - Ml^2p\dot{q}] + (\dots).$$

Отсюда уже видно, что уравнения

$$\frac{\partial(2V^{4n})}{\partial \dot{v}_j^{(n)}} = Q_j \quad j=1, 2, 3.$$

дадут правильный ответ.

Уравнения	Вспомогательная голономная система отсчета		Коэффициенты (объекта) голономности	
	нужна	не нужна	нужны	не нужны
(2) $\frac{\partial K}{\partial \dot{\omega}^j} = 0$	+			+
(3) $\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = Q_j$		+		+
(10) $A \left[(n+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial \dot{v}^j} - \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} + \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k \right] = Q_j$		+	+	
(11) $A \left[(n+2) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial \dot{v}^j} - \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} + \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k \right] = Q_j$		+	+	
(20) $\frac{1}{h} \left[\frac{\partial T}{\partial v^j} - (h+1) \frac{\partial T}{\partial \pi^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k \right] = Q_j$		+	+	
(26) $\frac{\partial R_h}{\partial v^j} + h \frac{\partial R_h}{\partial v^j} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j$		+	+	
(27) $\frac{\partial K_h}{\partial v^j} + h \frac{\partial K_h}{\partial v^j} \gamma_{jk}^s v^k = 0$		+	+	
(29) $\frac{\partial (2V^{1,n})}{\partial v^j} = Q_j$		+		+
(30) $\frac{\partial (2W^{1,n})}{\partial v^j} = 0$		+		+

Из таблицы видно, что уравнения (3), (29) и (30) имеют преимущества. Говоря о том, что функции $V^{i,n}$, кажется, требуют более сложных вычислений, чем T и T_0 в составе функции K_n в уравнениях (27), можно сказать, что в практике это не так: составить T проще, чем составить $V^{i,n}$, но дальше надо T продифференцировать (в зависимости от порядка уравнения даже несколько раз) и счет сравнивается. Кроме того, $V^{i,n}$ и $W^{i,n}$ сразу готовы для сколько угодно высокого порядка n , в то время как функции K_3 , K_4 и т.д. требуют все больше и больше сложных производных $\overset{III}{T}$, $\overset{IV}{T}$ т.д. Но обойти этот вопрос нельзя, так как рассмотренные уравнения имеют значение при учете уравнений связей с высшими производными параметров скоростей.

Сравнивая уравнения (3) и (29) между собой, нужно сказать, что первые более общие, так как сумму $\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij}$ можно выразить через очень многие функции.

Л и т е р а т у р а

1. Ц е н о в И. Върху една нова форма на уравненията на аналитичната динамика и някои приложения на тия уравнения. - Изв. на мат. инст. Бълг. АН т. I, кн. 2, 1954.

2. Ц е н о в И. Об одной новой форме уравнений аналитической динамики. - ДАН СССР т. 89, № I, 1953.

3. М а н ж е р о н Д. Об обобщенных формах уравнений аналитической динамики. - Изв. АН СССР ОТН Мех. и машиностр. № 2, 1962.

4. Д о б р о н р а в о в В.В. Основы механики неголономных систем. М., "Высшая школа", 1970.

5. Д о л а п ч и е в Б. Об уравнениях Нильзена-Ценова и их применении к неголономным системам с нелинейными связями. - ДАН СССР, т. I71, № 4, 1966.

6. Р е л ь в и к Х. Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1973, № 345.

7. Р е л ь в и к Х., С и л ь д е О. Метод уравнения возможной мощности с применением объекта неголономности. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1973, № 345.

8. Сильде О., Тийкма Б. Метод уравнения возможных мощностей. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1970 серия А, № 293.

9. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М., "Наука", 1967.

10. M a n g e r o n D., D e l e a n u Sp. Sur une classe d'equations de la mecanique analytique au sans de I. Tzenoff. C.R.Acad. Bulg. Sc. Tome 15, No 1, 1962.

11. D o l a p t s c h i e w Bl. Verwendung der einfachsten Gleichungen Tzenoffschen Typs (Nielsensche Gleichungen) in der nichtholonomen Dynamik. ZAMM 49, H. 3, 1969.

12. D o l a p t s c h i e w Bl. Über die verallgemeinerte Form der Lagrangeschen Gleichungen, welche auch die Behandlung von nichtholonomen mechanischen Systemen gestattet. Z. angew. Math. und Phys., Bd.17, Nr. 3, 1966.

H. Relvik

Über einige Gleichungen der analytischen Mechanik

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag ist der Vergleich einiger Gleichungen der analytischen Mechanik gegeben. Von der hinzugefügten Tabelle ist zu ersehen, dass man die Gleichung der möglichen Leistung und auch die kompakte Form der Gleichungen mit Hilfe der Analogie der kinetischen Energie als am besten gelungene Gleichungen bezeichnen kann.

Im Beitrage sind Beispiele gegeben.

УДК 531.314.2

Х.А. Рельвик

О ПРИМЕНЕНИИ АНАЛОГОВ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

В [2,6,7,8,9] освещается вопрос учета уравнений связей при составлении уравнений движения материальной точки и системы материальных точек. При этом вводятся новые функции следующим образом

$$R_n = \frac{1}{n} (T - (n+1) T_0) \quad (1)$$

$$K_n = R_n - \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \dot{q}^{\alpha}, \quad (2)$$

и

$$T_0 = T(q^1, q^2, \dots, q^s, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^s, t) \quad (3)$$

- кинетическая энергия при фиксированных обобщенных скоростях, то есть подчеркнутые величины в (3) следует считать постоянными.

При помощи (1) и (2) получаются уравнения движения в виде [9]

$$\frac{\partial R_n}{\partial \dot{q}^{\alpha}} = Q_{\alpha}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial \dot{q}^{\alpha}} = 0. \quad (5)$$

Если имеются уравнения связей вида

$$\dot{q}^{\alpha} = \sum_{\lambda=1}^l a_{\lambda}^{\alpha} \dot{q}^{\lambda} + a^{\alpha}, \quad (\alpha = l+1, \dots, l+r=s), \quad (6)$$

то можно получить

$$\dot{q}^{\alpha} = \sum_{\lambda=1}^l a_{\lambda}^{\alpha} \dot{q}^{\lambda} + \dots, \quad (\alpha = l+1, \dots, l+r) \quad (7)$$

(n = 1, 2, \dots)

и подставить \dot{q}^{α} из (7) в (2). В результате получатся уравнения

$$\frac{\partial K_n^*}{\partial q^\lambda} = 0 \quad (\lambda=1, 2, \dots, l); \quad (n=1, 2, \dots), \quad (8)$$

где значок при K_n^* означает тот факт, что связи (7) подставлены в (2),

В статье [2] делается предложение пользоваться при составлении уравнений движения функциями

$$V^{l,n} = \sum_i \frac{m_i}{2} \overset{(l)}{\dot{v}}_i \cdot \overset{(n)}{\dot{v}}_i, \quad (9)$$

из которых надо подчеркнуть частный случай $l=I$, то есть

$$V^{I,n} = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{v}_i \cdot \overset{(n)}{\dot{v}}_i. \quad (10)$$

С помощью (10) можно составить уравнения движения в виде

$$\frac{\partial (2V^{I,n})}{\partial v^j} = Q_j \quad n > 1 \quad (11)$$

и дальше, пользуясь функциями

$$W^{I,n} = V^{I,n} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^j Q_\alpha v^\alpha, \quad (12)$$

еще в виде

$$\frac{\partial (2W^{I,n})}{\partial v^j} = 0. \quad (13)$$

На первый взгляд кажется, что (11) и (13) повторяют соответственно (4) и (5), но действительно они имеют и различия.

Случай $n=I$ дает соответственно

$$\frac{\partial V^{I,I}}{\partial v^j} = Q_j \quad \text{или} \quad \frac{\partial S}{\partial v^j} = Q_j \quad (14)$$

и

$$\frac{\partial W^{I,I}}{\partial v^j} = 0, \quad (15)$$

где S — т.н. энергия ускорения, использованная в известных уравнениях Аппеля.

Подстановка (7) в (12) и (13) дает, аналогично тому как получились уравнения (8):

$$\frac{\partial (2W^{*I,n})}{\partial v^j} = 0, \quad (16)$$

где звездочка при $W^{*I,n}$ означает подстановку старших производных (7).

Существенная разница между уравнениями (4) и (II) (соответственно между (5) и (I3) или между (8) и (I6)) в том, что (4) получено исходя из обобщенных координат, а (II) — исходя из параметров скорости [5]. В статье [6] И.Цвнов дает пример функции K_1 (см. формулу (I6) в статье [6]) в случае $\dot{\mu}^k = \omega^k$ при помощи некоторых дифференциальных соотношений вида $\dot{q}^\alpha = b_{\alpha k} \omega^k + b_\alpha$. Но K_1 у него имеет другое значение. Для K_n в смысле (2) можно доказать, что в случае квазикоординат вместо (5) надо написать

$$\frac{\partial K_n}{\partial v^j} + \frac{\partial(nK_n)}{\partial v^j} v^k \gamma_{jk}^S = Q_j, \quad (I7)$$

где γ_{jk}^S — коэффициенты (объекта) неголономности [3].

Пример I. Составить уравнения движения маятника на упругой нити, учитывая связь

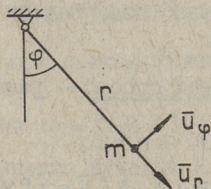
$$\ddot{r} \dot{\varphi} + C = 0$$

или в линеаризованном виде

$$\ddot{r} \dot{\varphi} + \dot{r} \ddot{\varphi} = 0$$

или

$$\ddot{r} = -\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \ddot{\varphi}.$$



Фиг. 1. К примеру 1.

Первый способ. Решение

при помощи уравнений (5):

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \quad \dot{T} = m(\dot{r} \ddot{r} + r \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}),$$

$$\ddot{T} = m(\dot{r} \ddot{r} + \dot{r}^2 + \dot{r}^2 \dot{\varphi}^2 + r \ddot{\varphi}^2 + 4r \dot{r} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}),$$

$$\ddot{\ddot{T}} = m(\dot{r} \ddot{r} + 3\dot{r} \ddot{r} + 3\dot{r} \ddot{\varphi}^2 + 6\dot{r}^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + r \ddot{\varphi}^2 + 6r \dot{r} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + 6r \dot{r} \dot{\varphi}^2 + 6r \dot{r} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + 3r^2 \ddot{\varphi} \ddot{\varphi} + r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}^{(4)}),$$

$$T_0 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \text{фиксированные величины подчеркнуты,}$$

$$\dot{T}_0 = m \dot{\varphi}^2 r \dot{r},$$

$$\ddot{T}_0 = m \dot{\varphi}^2 (r \ddot{r} + \dot{r}^2),$$

$$\ddot{\ddot{T}}_0 = m \dot{\varphi}^2 (r \ddot{r} + 3\dot{r} \ddot{r}),$$

$$R_3 = \frac{1}{3} (\ddot{\ddot{T}} - 4\ddot{\ddot{T}}_0),$$

$$R_3^* = \frac{1}{3} (\ddot{\ddot{T}}^* - 4\ddot{\ddot{T}}_0^*),$$

$$K_3 = R_3 - Q_r \ddot{r} - Q_\varphi \ddot{\varphi},$$

$$K_3^* = R_3^* + Q_r \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \ddot{\varphi} - Q_\varphi \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial R_3^*}{\partial \ddot{\varphi}} = \frac{\partial R_3}{\partial \ddot{\varphi}} + \frac{\partial R_3}{\partial \ddot{r}} \frac{\partial \ddot{r}}{\partial \ddot{\varphi}} = \frac{\partial R_3}{\partial \ddot{\varphi}} - \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \frac{\partial R_3}{\partial \ddot{r}}$$

Уравнение $\frac{\partial K_3^*}{\partial \ddot{\varphi}} = 0$:

$$\frac{\partial R_3^*}{\partial \ddot{\varphi}} + \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} Q_r - Q_\varphi = 0$$

$$\frac{m}{3} [(6 r \dot{r} \dot{\varphi} + 3 r^2 \ddot{\varphi}) - \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} (3 \ddot{r} + r \dot{\varphi}^2) + 4 \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} r \dot{\varphi}^2] = Q_\varphi - \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} Q_r$$

Теперь пора считать подчеркнутую букву равносильной с другими переменными величинами. Ответ:

$$\begin{cases} m (r^2 \ddot{\varphi} + 2 r \dot{r} \dot{\varphi}) - m \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = Q_\varphi - \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} Q_r \\ \ddot{r} \ddot{\varphi} + C = 0. \end{cases}$$

Мы видим, что для к более высоким производным T производные r и φ не идут из одного выражения в другое по хорошо известному закону - из \dot{r} будет \ddot{r}^2 , а еще дальше $3 \ddot{r}$.

Второй способ - решение по уравнению (I6)

$$\bar{v} = \dot{r} \bar{u}_r + r \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \bar{a} = \dot{\bar{v}} &= \ddot{r} \bar{u}_r + \dot{r} \dot{\bar{u}}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi + r \ddot{\varphi} \bar{u}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\bar{u}}_\varphi = \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \bar{u}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \bar{u}_\varphi = \ddot{r} \bar{u}_r + r \ddot{\varphi} \bar{u}_\varphi + (\dots) \end{aligned}$$

$$\bar{v} = \ddot{r} \bar{u}_r + r \ddot{\varphi} \bar{u}_\varphi + (\dots),$$

$$2V^{4,2} = m \dot{\bar{v}} \cdot \bar{v} = m (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \ddot{r} + m (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \ddot{\varphi} + R_{1,2},$$

где $R_{1,2}$ не зависит от \ddot{r} и $\ddot{\varphi}$;

$$2W^{4,2} = m (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \ddot{r} + m (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \ddot{\varphi} + R_{1,2} - Q_r \ddot{r} - Q_\varphi \ddot{\varphi},$$

$$2W^{*4,2} = -m \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \ddot{\varphi} + m (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \ddot{\varphi} + R_{1,2} + \left(\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} Q_r - Q_\varphi \right) \ddot{\varphi}.$$

Уравнение $\frac{\partial (2W^{*4,n})}{\partial \ddot{\varphi}} = 0$ вместе с уравнением связи образует ответ:

$$\begin{cases} m (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) - m \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = Q_\varphi - \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} Q_r, \\ \ddot{r} \ddot{\varphi} + C = 0. \end{cases}$$

Преимущество способа в том, что функцию $V^{4,n}$ можно для сколько угодно высокого показателя n выписать сразу без лишних вычислений, так как производные r и φ идут дальше линейно. Например, для любого n можно сразу выписать

$$2V^{1,n} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \overset{(n)}{r} + m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \overset{(n)}{\varphi} + R_{1,n},$$

где $R_{1,n}$ не зависит от r и φ .

Пример 2. Составить уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии дополнительного требования к составляющим угловой скорости тела.

Пусть система отсчета неизменно связана с телом и оси координат x , y и z совпадают с главными осями инерции тела.

Первый способ. Решение по И.Ценову [6,7].

В статье [7] И.Ценов дает функцию

$$K = \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + Ap(r\dot{q} - q\dot{r}) + Bq(p\dot{r} - r\dot{p}) + Cr(q\dot{p} - p\dot{q}) - (L\dot{p} + M\dot{q} + N\dot{r}) \quad (a)$$

и получает уравнения движения тела при помощи уравнения

$$\frac{\partial K}{\partial \omega^j} = 0 \quad (j=1, 2, 3 \text{ или } \omega^j = p, q, r). \quad (b)$$

Это элегантно решение, но для получения функции K нужна кроме выбранной неголономной системы отсчета π^j ($j=1, 2, 3$; $\pi^1 = p$; $\pi^2 = q$; $\pi^3 = r$) еще другая, голономная система, так что

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, & \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, & \dot{\psi} \sin \theta &= p \sin \varphi + q \cos \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, & \dot{\varphi} &= r - \cot \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi). \end{aligned}$$

где θ , ψ и φ - углы Эйлера.

Второй способ. Решение по расширенным уравнениям Манжера-Делеану (I7). Коэффициенты γ_{jk}^3 при этом требуют специального определения и мы их возьмем из литературы:

$$\gamma_{12}^3 = \gamma_{31}^2 = \gamma_{23}^1 = -\gamma_{21}^3 = -\gamma_{13}^2 = -\gamma_{32}^1 = 1.$$

Остальные $\gamma_{jk}^3 = 0$.

Случай $n = I$.

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) \quad \dot{T} = A\dot{p}\dot{p} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{r}\dot{r},$$

$$T_0 = \text{const}, \quad \dot{T}_0 = 0,$$

$$R_1 = \dot{T} - 2\dot{T}_0 = \dot{T},$$

$$K_1 = R_1 - \sum_{\alpha\epsilon} Q_{\alpha\epsilon} \omega_{\alpha\epsilon} = R_1 - M_x p - M_y q - M_z r,$$

так как обобщенными силами $Q_{\alpha\epsilon}$ здесь являются главные моменты внешних сил.

Уравнение (I7) для случая $n = 1$:

$$\frac{\partial K_1}{\partial p} + \frac{\partial K_1}{\partial \dot{p}} \gamma'_{1k} \omega_k + \frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}} \gamma^2_{1k} \omega_k + \frac{\partial K_1}{\partial \dot{r}} \gamma^3_{1k} \omega_k = 0,$$

$$A\dot{p} + A p \gamma'_{1k} \omega_k + B q \gamma^2_{1k} \omega_k + C r \gamma^3_{1k} \omega_k = M_x,$$

$$A\dot{p} + (C - B) q r = M_x. \quad (в)$$

Случай $n = 2$.

$$\ddot{T} = A(\dot{p}^2 + p\ddot{p}) + B(\dot{q}^2 + q\ddot{q}) + C(\dot{r}^2 + r\ddot{r}),$$

$$\ddot{T}_0 = 0, \quad R_2 = \frac{1}{2} \ddot{T}, \quad K_2 = R_2 - M_x \dot{p} - M_y \dot{q} - M_z \dot{r},$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \dot{p}} + \frac{\partial(2K_2)}{\partial \dot{p}} \gamma'_{1k} \omega_k + \frac{\partial(2K_2)}{\partial \dot{q}} \gamma^2_{1k} \omega_k + \frac{\partial(2K_2)}{\partial \dot{r}} \gamma^3_{1k} \omega_k = 0,$$

откуда получим уравнение Эйлера (в).

Случай $n = 3$.

$$\ddot{T} = A(p\ddot{p} + 3\dot{p}\dot{p}) + B(q\ddot{q} + 3\dot{q}\dot{q}) + C(r\ddot{r} + 3\dot{r}\dot{r}),$$

$$\ddot{T}_0 = 0; \quad R_3 = \frac{1}{3} \ddot{T}, \quad K_3 = R_3 - M_x \dot{p} - M_y \dot{q} - M_z \dot{r},$$

$$\frac{\partial K_3}{\partial \dot{p}} + \frac{\partial(3K_3)}{\partial \dot{p}} \gamma'_{1k} \omega_k + \frac{\partial(3K_3)}{\partial \dot{q}} \gamma^2_{1k} \omega_k + \frac{\partial(3K_3)}{\partial \dot{r}} \gamma^3_{1k} \omega_k = 0,$$

откуда получим уравнение (в).

Остальные два уравнения можно выписать по аналогии. Ответ:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B) q r = M_x, \\ B\dot{q} + (A - C) r p = M_y, \\ C\dot{r} + (B - A) p q = M_z. \end{cases} \quad (г)$$

Пусть теперь требуется учитывать связь $\dot{p}^2 + \dot{q}^2 = C$ или

$$p\ddot{p} + \dot{p}\dot{p} = 0. \quad (д)$$

Независимо от того, при каком значении n мы получили уравнения (г), можно продолжать решение задачи, применяя неопределенные множители Лагранжа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K_n}{\partial p^{(n-1)}} + \frac{\partial(n K_n)}{\partial \omega^{\Delta}} \gamma_{jk}^{\Delta} \omega_k = \lambda \frac{\partial f}{\partial p}, \\ \frac{\partial K_n}{\partial q^{(n-1)}} + \frac{\partial(n K_n)}{\partial \omega^{\Delta}} \gamma_{jk}^{\Delta} \omega_k = \lambda \frac{\partial f}{\partial q}, \\ \frac{\partial K_n}{\partial r^{(n-1)}} + \frac{\partial(n K_n)}{\partial \omega^{\Delta}} \gamma_{jk}^{\Delta} \omega_k = 0 \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} A \dot{p} + (C-B) q r = M_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial p}, \\ B \dot{q} + (A-C) r p = M_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial q}, \\ C \dot{r} + (B-A) p q = M_z, \end{array} \right.$$

где $f = \dot{p}^2 + \dot{q}^2 - C = 0$.

После исключения множителя λ получим

$$\left\{ \begin{array}{l} A \dot{p} + (C-B) q r - \frac{\dot{p}}{q} [B \dot{q} + (A-C) r p] = M_x + \frac{\dot{p}}{q} M_y \\ C \dot{r} + (B-A) p q = M_z \\ \dot{p}^2 + \dot{q}^2 = C. \end{array} \right. \quad (e)$$

Третий способ - решение по уравнениям (16).

Вычисления дают

$$2V^{1,n} = [A \dot{p} + (C-B) q r] \dot{p}^{(n)} + [B \dot{q} + (A-C) r p] \dot{q}^{(n)} + [C \dot{r} + (B-A) p q] \dot{r}^{(n)} + R_{1,n},$$

где $R_{1,n}$ не зависит от старших производных $\dot{p}^{(n)}$, $\dot{q}^{(n)}$ и $\dot{r}^{(n)}$.

Вычисление аналогов кинетической энергии $V^{1,n}$, конечно, требует больше труда, чем нахождение выражения кинетической энергии T , но они имеют и свои преимущества.

Выпишем функцию

$$2W^{1,2} = 2V^{1,2} - Q_1 \ddot{p} - Q_2 \ddot{q} - Q_3 \ddot{r}$$

или после подстановки обобщенных сил $Q_1 = M_x$, $Q_2 = M_y$ и $Q_3 = M_z$

$$2W^{1,2} = [A \dot{p} + (C-B) q r] \ddot{p} + [B \dot{q} + (A-C) r p] \ddot{q} + [C \dot{r} + (B-A) p q] \ddot{r} + R_{1,2} - M_x \ddot{p} - M_y \ddot{q} - M_z \ddot{r}. \quad (3)$$

Подставим уравнение связи (д) в выражение (3):

$$2W^{*1,2} = [A \dot{p} + (C-B) q r] \ddot{p} - \frac{\dot{p}}{q} [B \dot{q} + (A-C) r p] \ddot{p} +$$

$$+ [C\dot{r} + (B-A)pq]\ddot{r} + R_{12} - M_x\ddot{p} + M_y\frac{\dot{p}}{q}\ddot{p} - M_z\ddot{r}.$$

Тогда уравнения

$$\frac{\partial(2W^{*1,2})}{\partial\dot{p}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial(2W^{*1,2})}{\partial\dot{r}} = 0$$

дают

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)q\dot{r} - \frac{\dot{p}}{q}[B\dot{q} + (A-C)r\dot{p}] - M_x + \frac{\dot{p}}{q}M_y = 0, \\ C\dot{r} + (B-A)pq - M_z = 0. \end{cases}$$

откуда уже следует ответ (е).

В ы в о д ы

1. Аналоги кинетической энергии $V^{1,n}$ применимы к составлению дифференциальных уравнений движения материальной точки и системы материальных точек как в обобщенных, так и квазискоростях.

2. Получаемые с помощью $W^{1,n}$ дифференциальные уравнения движения аналогичны уравнениям Мэнжерона-Делеану.

3. Функции $W^{1,n}$, получаемые из аналогов кинетической энергии $V^{1,n}$, допускают учитывать в уравнениях движения уравнения связей путем простой подстановки старших производных обобщенных или квазискоростей.

При этом уравнения связей могут быть линейные или нелинейные относительно сколько угодно высоких производных параметров скоростей (обобщенных или квазискоростей).

4. Аналоги кинетической энергии $V^{1,n}$ имеют преимущество по сравнению с функциями Ценова. Это преимущество тем яснее, чем выше порядок производных параметров скоростей в уравнениях связей.

Л и т е р а т у р а

1. Д о б р о н р а в о в В.В. Ученые записки МГУ, вып. 122, механика 2, 95, 19 (1948).

2. Д о л а п ч и е в Бл. Об уравнениях Нильзена-Ценова и их применении к негодономным системам с нелинейными связями. - ДАН СССР. 1966, т. 171, № 4.

3. Н е й м а р к Ю.М., Ф у ф а е в Н.А. Динамика негодономных систем. М., "Наука", 1967.

4. Р е л ь в и к Х.А. Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии. "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1973, № 345.

5. С и л ь д е О.М., Т и й к м а Б.А. Метод уравнения возможных мощностей - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1970, серия А, № 293.

6. Ц е н о в И. Об одной новой форме уравнений аналитической динамики. - ДАН СССР 1953, т. 89, № 1.

7. Ц е н о в И. Въхру една нова форма на уравненията на аналитичната динамика и някои приложения на тия уравнения. - Изв. на мат. инст. Бълг. АН 1954, т. I, кн. 2.

8. D o l a p t s c h i e w Вl. Verwendung der einfachsten Gleichungen Tzenoffschen Typs (Nielsenschen Gleichungen) in der nichtholonomen Dynamik. ZAMM 49 Н. 3, 1969.

9. D o l a p t s c h i e w Вl. Über die verallgemeinerte Form der Lagrangeschen Gleichungen, welche auch die Behandlung von nichtholonomen mechanischen Systemen gestattet. ZAMP Bd. 17, Nr. 3, 1966.

H. Relvik

Über die Anwendung der Analogien
der kinetischen Energie

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag empfiehlt man bei Berücksichtigung der Bindungsgleichungen den Gebrauch der sogenannten Analogien der kinetischen Energie. Diese Funktionen geben einen einfachen Übergang zu beliebig hohen Ableitungen von den Parametern der Geschwindigkeiten. Die erhaltenen Bewegungsgleichungen (11) und (13) bewahren ihre Form, wenn man die nichtholonomen Koordinaten in Gebrauch nimmt.

УДК 531.314.2

Х.А. Рельвик

ОБ УЧЕТЕ УРАВНЕНИЙ СВЯЗЕЙ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ
 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХА-
 НИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В статье дается довольно общая форма (16) дифференциальных уравнений движения механической системы в случае присутствия уравнений связей, линейных или нелинейных относительно сколько угодно высоких производных v^j параметров скорости.

Пусть скорость i -ой точки механической системы выражена в виде

$$\bar{v}_i = v^j \bar{u}_{ij}, \quad (1)$$

где v^j - общие для всей системы параметры скорости и \bar{u}_{ij} - соответствующие им базисные векторы. Тогда уравнение движения системы можно записать в виде [5]

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{ij} \quad (2)$$

или

$$E_j = Q_j, \quad (3)$$

где для простоты записи обозначено

$$E_j = \sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} \quad \text{и} \quad Q_j = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{ij} \quad (4)$$

(обобщенные силы).

Для вычисления левой части E_j уравнений (2) или (3) применимы очень многие функции, среди других и т.н. аналогии кинетической энергии [4]

$$V^{1,n} = \sum \frac{m_i}{2} \bar{a}_i \cdot \bar{v}_i^{(n)} \quad n > 1, \quad (5)$$

где

$$\bar{v}_i^{(n)} = v^j \bar{u}_{ij}^{(n)} + n v^j \dot{\bar{u}}_{ij}^{(n-1)} + \dots + v^j \bar{u}_{ij}^{(n)}. \quad (6)$$

Пользуясь функциями (5), получим

$$E_j = \sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = \frac{\partial(2V^{1,n})}{\partial \bar{v}_j^{(n)}}, \quad (7)$$

ибо по (6) $\frac{\partial \bar{v}_l^{(n)}}{\partial \bar{v}_j^{(n)}} = \bar{u}_{lj}$. Следовательно, равенство

$$2V^{1,n} = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i^{(n)} \quad (8)$$

является частным случаем источников уравнения (2).

Пусть механическая система имеет s степеней свободы и требуется учитывать совокупность связей, состоящую из $s-l$ уравнений вида

$$\begin{cases} A_{11}^{(n)} v^1 + \dots + A_{1s}^{(n)} v^s = f_1(v^{j_1}, v^{j_2}, \dots, v^j, q^j), \\ \dots \\ A_{s-l,1}^{(n)} v^1 + \dots + A_{s-l,s}^{(n)} v^s = f_{s-l}(v^{j_1}, v^{j_2}, \dots, v^j, q^j). \end{cases} \quad (9)$$

Вид (9) не является слишком стеснительным, так как к этому виду можно путем дифференцирования привести и нелинейные уравнения связей

$$h_k(v^{j_1}, v^{j_2}, \dots, v^j, q^j) = 0.$$

Будем считать независимыми l первых величин v^j . Предположим, кроме того, что нам уже удалось выразить из (9) зависимые величины

$$\begin{cases} v^{l+1} = B_{l+1,1}^{(n)} v^1 + \dots + B_{l+1,l}^{(n)} v^l + g_{l+1}, \\ \dots \\ v^s = B_{s,1}^{(n)} v^1 + \dots + B_{s,l}^{(n)} v^l + g_{s-l} \end{cases} \quad (10)$$

и подставим величины (10) с учетом обозначений (4) в уравнение (8):

$$\begin{aligned} (E_j - Q_j) v^j + n \sum (m_i \bar{a}_i - \bar{F}_i) \cdot \bar{u}_{ij} v^{j_1} + \\ + \dots + \sum (m_i \bar{a}_i - \bar{F}_i) \cdot \bar{u}_{ij} v^j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (11)$$

или

$$(E_j - Q_j) v^j + G_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (12)$$

где обозначенная через G_j часть не зависит от v^j . Получим

$$\sum_{j=1}^l (E_j - Q_j) v^j +$$

$$\begin{aligned}
 & + (E_{l+1} - Q_{l+1})(B_{l+1,1} \overset{(n)}{V}^1 + \dots + B_{l+1,l} \overset{(n)}{V}^l + g_1) + \\
 & + (E_{l+2} - Q_{l+2})(B_{l+2,1} \overset{(n)}{V}^1 + \dots + B_{l+2,l} \overset{(n)}{V}^l + g_2) + \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + (E_s - Q_s)(B_{s,1} \overset{(n)}{V}^1 + \dots + B_{s,l} \overset{(n)}{V}^l + g_{s-l}) = 0,
 \end{aligned} \tag{I3}$$

где g_k не зависят от $\overset{(n)}{V}^j$. После группирования по величинам $\overset{(n)}{V}^j$ уравнение (I3) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & \overset{(n)}{V}^1 [E_1 - Q_1 + \sum_{r=l+1}^s B_{r,1} (E_r - Q_r)] + \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \overset{(n)}{V}^l [E_l - Q_l + \sum_{r=l+1}^s B_{r,l} (E_r - Q_r)] + \\
 & + \sum_{r=l+1}^s (E_r - Q_r) g_{r-l} = 0.
 \end{aligned} \tag{I4}$$

Дифференцируя уравнение (I4) по величинам $\overset{(n)}{V}^j$, получим l уравнений движения

$$\begin{cases} E_1 - Q_1 + \sum_{r=l+1}^s B_{r,1} (E_r - Q_r) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ E_l - Q_l + \sum_{r=l+1}^s B_{r,l} (E_r - Q_r) = 0 \end{cases} \tag{I5}$$

или

$$E_p - Q_p + \sum_{r=l+1}^s B_{r,p} (E_r - Q_r) = 0. \tag{I6}$$

К уравнениям (I6), конечно, следует приписать еще уравнения связей (9).

Уравнения (I5) или (I6) дают сравнительно общий вид уравнений движения механической системы с учетом уравнений связей (I0). Желая получить какой-либо частный случай, следует заменить E_p и Q_r соответствующими выражениями (например,

$$E_p = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^p} - \frac{\partial T}{\partial q^p} \quad \text{или} \quad E_p = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}^p} - \frac{\partial T}{\partial \pi^p} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}^k} \gamma_{pk}^s \dot{\pi}^k$$

или $E_p = \frac{\partial (2V^{4,n})}{\partial \overset{(n)}{V}^p}$ и т.д.). В частном случае $E_p = R_2 = \frac{1}{2}(\ddot{\tau} - 3\ddot{\tau}_0)$ (см. [I, 2, 6, 3]) уравнения (I6) совпадают с уравнениями (I4) из статьи [7].

Проиллюстрируем уравнения (I6) примерами.

Пример I. Учет уравнения связи при сферическом движении твердого тела.

Для твердого тела при сферическом движении функция (5) имеет вид

$$2V^{1,n} = E_1 \omega_1^{(n)} + E_2 \omega_2^{(n)} + E_3 \omega_3^{(n)} + C_{1,n}, \quad (I7)$$

где ω_j - угловые скорости тела относительно трех осей, неизменно связанных с телом,

$$E_1 = J_1 \dot{\omega}_1 - J_{12} \dot{\omega}_2 - J_{13} \dot{\omega}_3 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 + \omega_1 (J_{12} \omega_3 - J_{13} \omega_2) + (\omega_3^2 - \omega_2^2) J_{23}, \quad (I8)$$

A_2 и A_3 получаются из A_1 перестановкой индексов, а $C_{1,n}$ не зависят от $\omega_j^{(n)}$.

Пусть имеется связь $(\omega_1^{(n-1)})^2 + (\omega_3^{(n-1)})^2 = C$

или в линеаризованном виде $\omega_1^{(n-1)} \omega_1^{(n)} + \omega_3^{(n-1)} \omega_3^{(n)} = 0$

или

$$\omega_3^{(n)} = - \frac{\omega_1^{(n-1)}}{\omega_3^{(n-1)}} \omega_1^{(n)}$$

или по обозначению (I0)

$$\omega_3^{(n)} = B_{31}^{(n)} \omega_1^{(n)}. \quad (I9)$$

откуда $B_{31} = - \frac{\omega_1^{(n-1)}}{\omega_3^{(n-1)}}$, и все остальные $B_{jk} = 0$. Отсюда получится ответ (I6) при $p = 1$ и $p = 2$:

$$\begin{cases} E_1 - Q_1 - \frac{\omega_1^{(n-1)}}{\omega_3^{(n-1)}} (E_3 - Q_3) = 0, \\ E_2 - Q_2 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Мы видели, что готовые формулы (I6) дают сравнительно быстрый ответ.

Пример 2. Учет в примере I двух уравнений связей

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1^2 + \ddot{\omega}_2^3 = C \\ \omega_1^{(iv)} + \omega_3^{(iv)} = 0 \end{cases} \quad (2I)$$

или в линеаризованном виде

$$\omega_2^{(iv)} = - \frac{2}{3} \frac{\ddot{\omega}_1^{(iv)}}{\ddot{\omega}_2^{(iv)}} \omega_1^{(iv)} + (\dots) = B_{21}^{(iv)} \omega_1^{(iv)} (\dots) \quad (22)$$

$$\left[\begin{matrix} (iv) \\ \omega_3 \end{matrix} \right] = -\omega_1 = B_{31} \begin{matrix} (iv) \\ \omega_1 \end{matrix}.$$

Следовательно, $B_{21} = -\frac{2\ddot{\omega}_1}{3\ddot{\omega}_2}$ и $B_{31} = -1$. В данном случае общее число степеней свободы до учета уравнений связи $\delta = 3$ и после учета связей $l = 1$. Ответ получим непосредственно из (16) при $p = 1$:

$$E_1 - Q_1 + B_{21}(E_2 - Q_2) + B_{31}(E_3 - Q_3) = 0$$

или

$$E_1 - Q_1 - \frac{2\ddot{\omega}_1}{3\ddot{\omega}_2}(E_2 - Q_2) - E_3 + Q_3 = 0, \quad (23)$$

где E_j даются выражениями (18).

Л и т е р а т у р а

1. Д о б р о н р а в о в В.В. Основы механики неголономных систем. М., "Высшая школа", 1972.
2. Д о л а п ч и е в Бл. Об уравнениях Нильзена-Ценова и их применении к неголономным системам с нелинейными связями. - ДАН СССР, 1966. т. 171, № 4.
3. М а н ж е р о н Д. Об обобщенных формах уравнений аналитической динамики. - Изв. АН СССР ОТН Мех. и машиностр. 1962, № 2.
4. Р е л ь в и к Х. Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1973, № 345.
4. С и л ь д е О., Т и й к м а Б. Метод уравнения возможной мощности. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та" 1970, серия А, № 293.
6. Ц е н о в И. Об одной новой форме уравнений аналитической механики. - ДАН СССР, 1953, № 1.
7. Ш у л ь г и н а И.М. Обобщение некоторых динамических уравнений Ценова. - ДАН УзССР, 1962, № 5.

Über die Berücksichtigung der Bindungs-
gleichungen bei der Zusammenstellung der
Differentialgleichungen der Bewegung
eines mechanischen Systems

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird eine relativ allgemeine Form (16) der Differentialgleichungen der Bewegung eines mechanischen Systems, die linear oder nichtlinear in Bezug auf beliebig hohe Ableitungen v^j ⁽ⁿ⁾ von den Parametern der Geschwindigkeiten sind, betrachtet. Wenn man irgendeinen Sonderfall erhalten will, muss man in den Gleichungen (16) an Stelle E_p und E_r entsprechende Formeln setzen.

УДК 531.36

А.А.Хайтин

ДВИЖЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ШАРА ПО
 ГЕЛИКОИДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе выводятся дифференциальные уравнения движения однородного шара по геликоидной поверхности.

Рассмотрен случай, когда поверхность геликоида неподвижна. Выведены уравнения движения двумя способами. Используются общие теоремы динамики ([1] с. 107) и применяется метод уравнения возможных мощностей ([2] с. 95).

Дано решение задачи движения шара при одновременном свободном вращении вокруг вертикальной оси геликоидной поверхности. Уравнения движения получены с помощью уравнения возможных мощностей.

Рассмотрим однородный абсолютно твердый шар радиусом a и массой M , который катится без скольжения по геликоидной поверхности под действием силы тяжести. Движение шара рассматриваем без учета сопротивлений качению и верчению. Уравнения геликоидной поверхности в декартовых координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \varphi, \\ z &= b \cdot \varphi. \end{aligned} \tag{I}$$

где ϱ и φ - параметры поверхности,
 b - постоянная.

Введем систему $C\xi\eta\zeta$ подвижных осей координат с началом в центре шара - точке C , осью $C\xi$, проходящей через точку N контакта шара с поверхностью, осью $C\eta$, которая параллельна линии поверхности $\varphi = \text{const}$, и осью $C\xi$, которая параллельна касательной к винтовой линии поверхности $\varrho = \text{const}$ (фиг. I). Все векторные величины будем рассматривать в проекциях на подвижные оси $C\xi\eta\zeta$.

Введем следующие обозначения и орты:

\vec{r} - радиус-вектор точки N,

\vec{v}_c - скорость центра шара,

\vec{a}_c - ускорение центра шара,

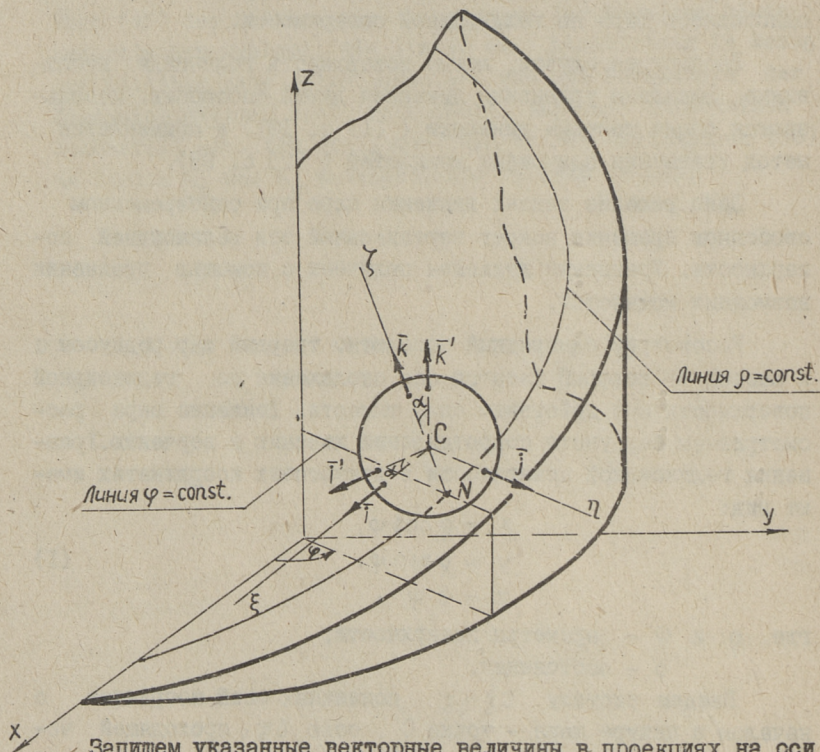
$\vec{\Omega}$ - мгновенная угловая скорость осей $C\xi\eta\zeta$,

$\vec{\omega}$ - мгновенная угловая скорость шара,

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты осей $C\xi\eta\zeta$,

$\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ - орты, повернутые относительно осей $C\xi\eta\zeta$ на угол α так, что $\vec{j}' = \vec{j}$, \vec{k}' - вертикальный орт, \vec{i}' - горизонтальный орт (см. фиг. I),

\vec{R} - реакция неподвижной поверхности.



Запишем указанные векторные величины в проекциях на оси $C\xi\eta\zeta$:

$$\vec{v}_c = u\vec{i} + v\vec{j}, \quad (2)$$

$$\vec{\Omega} = \theta_1\vec{i} + \theta_2\vec{j} + \theta_3\vec{k}, \quad (3)$$

здесь, ввиду определенного выбора подвижных осей $C\xi\eta\zeta$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= -\dot{\varphi} \sin \alpha \\ \theta_2 &= \dot{\alpha} \\ \theta_3 &= \dot{\varphi} \cos \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

α - угол подъема винтовой линии $\rho = \text{const}$.

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{b}{\rho}, \quad (5)$$

$$\alpha = \text{arctg } \frac{b}{\rho}, \quad \dot{\alpha} = -\dot{\varphi} \frac{b}{\rho^2 + b^2}. \quad (6)$$

Подставив в (4) выражения из (5) и (6), получим

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= -\dot{\varphi} \frac{b}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \\ \theta_2 &= -\dot{\varphi} \frac{b}{\rho^2 + b^2} \\ \theta_3 &= \dot{\varphi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$\bar{\omega} = \omega_1 \bar{i} + \omega_2 \bar{j} + \omega_3 \bar{k}, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{v}{\rho} \\ \omega_2 &= \frac{u}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

являются условиями качения без проскальзывания.

$$\bar{a}_c = \dot{V}_c = \dot{u} \bar{i} + u \dot{\bar{i}} + \dot{v} \bar{j} + v \dot{\bar{j}}, \quad (10)$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}_1 \bar{i} + \omega_1 \dot{\bar{i}} + \dot{\omega}_2 \bar{j} + \omega_2 \dot{\bar{j}} + \dot{\omega}_3 \bar{k} + \omega_3 \dot{\bar{k}}, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{i}} &= \bar{\Omega} \times \bar{i} = -\theta_2 \bar{k} + \theta_3 \bar{j} \\ \dot{\bar{j}} &= \bar{\Omega} \times \bar{j} = \theta_1 \bar{k} - \theta_3 \bar{i} \\ \dot{\bar{k}} &= \bar{\Omega} \times \bar{k} = -\theta_1 \bar{j} + \theta_2 \bar{i} \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Подставив (12) в (10) и (11), получим

$$\bar{a}_c = (\dot{u} - v\theta_3) \bar{i} + (\dot{v} + u\theta_3) \bar{j} + (v\theta_1 - u\theta_2) \bar{k}, \quad (13)$$

$$\dot{\bar{\omega}} = (\dot{\omega}_1 + \theta_2\omega_3 - \theta_3\omega_2) \bar{i} + (\dot{\omega}_2 + \theta_3\omega_1 - \theta_1\omega_3) \bar{j} + (\dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1) \bar{k}, \quad (14)$$

$$\bar{R} = R_1 \bar{i} + R_2 \bar{j} + R_3 \bar{k}. \quad (15)$$

Выразим u , v , \dot{u} , \dot{v} через параметры поверхности ρ и φ и их производные

$$\bar{V}_c = \dot{\bar{r}}_c, \quad r_c = \bar{r} + a\bar{k}. \quad (I6)$$

Принимая во внимание уравнения поверхности (I), запишем вектор \bar{r} в проекциях

$$\bar{r} = \rho \cdot \bar{j} + b\varphi \cdot \bar{k}'. \quad (I7)$$

Подставив (I7) в (I6) и взяв производную по времени от \bar{r}_c , получим

$$\bar{V}_c = \dot{\rho} \cdot \bar{j} + \rho \cdot \dot{\bar{j}} + b\dot{\varphi} \cdot \bar{k}' + a\dot{\bar{k}}', \quad (I8)$$

$\dot{\bar{k}}' = 0$, так как $\bar{k}' = \text{const}$.

$$\bar{k}' = \bar{k} \cdot \cos \alpha - \bar{i} \sin \alpha, \quad (I9)$$

что видно из фиг. I.

Подставив в (I8) выражения для производных $\dot{\bar{j}}$ и $\dot{\bar{k}}$ из (I2) и выражение (I9), получим

$$\bar{V}_c = (-\dot{\varphi} \sqrt{\rho^2 + b^2} - \dot{\rho} \frac{ab}{\rho^2 + b^2}) \bar{i} + (\dot{\rho} + \dot{\varphi} \frac{ab}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}) \bar{j}. \quad (20)$$

Сравнивая (2) и (20), имеем

$$u = -\dot{\varphi} \sqrt{\rho^2 + b^2} - \dot{\rho} \frac{ab}{\rho^2 + b^2}, \quad (21)$$

$$v = \dot{\rho} + \dot{\varphi} \frac{ab}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \quad (22)$$

$$\dot{u} = -\ddot{\varphi} \sqrt{\rho^2 + b^2} - \dot{\varphi} \dot{\rho} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} - \ddot{\rho} \frac{ab}{\rho^2 + b^2} + 2\dot{\rho}^2 \frac{\rho ab}{(\rho^2 + b^2)^2}, \quad (23)$$

$$\dot{v} = \ddot{\rho} \frac{ab}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} - \dot{\varphi} \dot{\rho} \frac{\rho ab}{\sqrt{(\rho^2 + b^2)^3}} + \ddot{\varphi}. \quad (24)$$

Уравнения движения шара, составленные на основе теоремы движения центра масс и теоремы кинетического момента, запишутся в виде

$$M\bar{a}_c = \bar{R} - Mg\bar{k}', \quad (25)$$

$$J\dot{\bar{\omega}} = -a\bar{k}' \times \bar{R}, \quad \text{см. [I] с. 108,} \quad (26)$$

где

J — момент инерции шара относительно диаметра.

Уравнение (25) в проекциях на оси $C\xi\eta\zeta$ после подстановки (I3) и (I9) будет иметь вид

$$M(\dot{u} - v\theta_3) = R_1 + Mgs \sin \alpha, \quad (27)$$

$$M(\dot{v} + u\theta_3) = R_2, \quad (28)$$

$$M(v\theta_1 - u\theta_2) = R_3 - Mg \cos \alpha. \quad (29)$$

Для записи уравнения (26) в проекциях на оси $O\xi\eta\zeta$ вычислим прежде векторное произведение

$$d\bar{k} \times \bar{R} = d\bar{k} \times (R_1\bar{i} + R_2\bar{j} + R_3\bar{k}) = d(-R_2\bar{i} + R_1\bar{j}). \quad (30)$$

Подставив в уравнение (26) выражения (14) и (30), получим

$$J(\dot{\omega}_1 + \theta_2\omega_3 - \theta_3\omega_2) = dR_2, \quad (31)$$

$$J(\dot{\omega}_2 + \theta_3\omega_1 - \theta_1\omega_3) = -dR_1, \quad (32)$$

$$\dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1 = 0. \quad (33)$$

После исключения из уравнений (27), (28) и (31), (32) R_1 и R_2 , имеем

$$-(\dot{v} + u\theta_3)dM + J(\dot{\omega}_1 + \theta_2\omega_3 - \theta_3\omega_2) = 0, \quad (34)$$

$$(\dot{u} - v\theta_3)dM + J(\dot{\omega}_2 + \theta_3\omega_1 - \theta_1\omega_3) = Mg \sin \alpha. \quad (35)$$

Производные $\dot{\omega}_1$ и $\dot{\omega}_2$ найдем, используя условия (9)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\frac{\dot{v}}{a} \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{\dot{u}}{a} \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Уравнения движения шара через параметры поверхности ρ , φ получим, подставив в уравнения (33), (34), (35) выражения (7), (9), (21), (22), (23), (24) и (36).

$$\dot{\rho}^2 \frac{b}{a(\rho^2 + b^2)} - \dot{\varphi}^2 \frac{b}{a} = \dot{\omega}_3, \quad (37)$$

$$\ddot{\rho} + \ddot{\varphi} \frac{ab}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} - 2\dot{\varphi}\dot{\rho} \frac{\rho ab}{(\rho^2 + b^2)^{3/2}} - \dot{\varphi}^2 \rho = -\dot{\rho} \frac{\omega_3}{\rho^2 + b^2} \frac{J \cdot ba}{A}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} \frac{ab}{\rho^2 + b^2} + \dot{\varphi} \sqrt{\rho^2 + b^2} + 2\dot{\varphi}\dot{\rho} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} + \dot{\varphi}^2 \rho \frac{ab}{\rho^2 + b^2} - 2\dot{\rho}^2 \dot{\varphi} \frac{ab}{(\rho^2 + b^2)} = \\ = \dot{\varphi} \frac{\omega_3}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \frac{J \cdot ba}{A} - \frac{Mg}{A} \frac{ba^2}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $A = M a^2 + J$.

Эти же уравнения движения шара можно вывести, используя уравнения возможных мощностей (см. [2]). Используем равенство (27), см. [2] с. 100, или в краткой форме

$$\{\dot{T}\} = \{N\}. \quad (40)$$

Подставим выражения (56) и (57) (см. [2] с. 103) в уравнение (40) и, учитывая

$$\sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times m_i \bar{a}_i = \frac{d}{dt} \sum \bar{\rho}_i \times m_i \bar{v}_i = \dot{\bar{k}}_c,$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \{\bar{v}_i\} = \bar{P} \cdot \{\bar{V}_c\},$$

где

$\bar{\rho}_i$ — радиус-вектор от центра масс к i -ой точке,

$\dot{\bar{k}}_c$ — производная от кинетического момента,

\bar{P} — главный вектор активных сил, то есть вес шара,

получим

$$M \bar{a}_c \cdot \{\bar{V}_c\} + \dot{\bar{k}}_c \cdot \{\bar{\omega}\} = \bar{P} \cdot \{\bar{V}_c\}, \quad (41)$$

где

$$\bar{P} = -Mg\bar{k}'$$

или, учитывая (19),

$$\bar{P} = Mg(\bar{i} \sin \alpha - \bar{k} \cos \alpha) \quad (42)$$

из (2) и (9) имеем

$$\bar{V}_c = a \omega_2 \bar{i} - a \omega_1 \bar{j} \quad \text{и} \quad \{\bar{V}_c\} = \{\omega_2\} a \bar{i} - \{\omega_1\} a \bar{j}, \quad (43)$$

из (8)

$$\{\bar{\omega}\} = \{\omega_1\} \cdot \bar{i} + \{\omega_2\} \cdot \bar{j} + \{\omega_3\} \cdot \bar{k} \quad (44)$$

$$\dot{\bar{k}}_c = J \dot{\bar{\omega}}. \quad (45)$$

Подставим в (41) выражения (13), (14), (42), (43), (44), (45), имеем

$$\begin{aligned} & [-(\dot{v} + u \theta_3) a M + J(\dot{\omega}_1 + \theta_2 \omega_3 - \theta_3 \omega_2)] \{\omega_1\} + \\ & + [(\dot{u} - v \theta_3) a M + J(\dot{\omega}_2 + \theta_3 \omega_1 - \theta_1 \omega_3)] \{\omega_2\} + \\ & + J(\dot{\omega}_3 + \theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1) \{\omega_3\} = Mg a \sin \alpha \{\omega_2\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Приравняв множители при одинаковых возможных скоростях $\{\omega_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) в (46), получим уравнения движения

$$\dot{\omega}_3 + \theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1 = 0.$$

$$-(\dot{v} + u \theta_3) a M + J(\dot{\omega}_1 + \theta_2 \omega_3 - \theta_3 \omega_2) = 0.$$

$$(\dot{u} - v \theta_3) a M + J(\dot{\omega}_2 + \theta_3 \omega_1 - \theta_1 \omega_3) = Mg a \sin \alpha,$$

которые совпадают с уравнениями (33), (34) и (35), полученными при решении задачи первым способом.

Рассмотрим вывод уравнений движения при качении шара на свободно вращающейся вокруг оси z геликоидной поверхности (фиг. I). Исходим из основного уравнения

$$\{\dot{T}\} = \{N\}, \quad (47)$$

где

$$\{\dot{T}\} = \{\dot{T}_\omega\} + \{\dot{T}_r\}, \quad (48)$$

$$\{N\} = -Mg \bar{k}' \{\bar{V}_c\} - \text{аналогично предыдущей задаче.} \quad (49)$$

В развернутом виде имеем для геликоидной поверхности

$$\{\dot{T}_r\} = J_z \dot{\omega}_z \{\omega_z\}, \quad (50)$$

где

ω_z - угловая скорость вращения геликоида вокруг оси z ,

J_z - момент инерции геликоида относительно оси z .

Для шара используем

$$\{\dot{T}_\omega\} = M \bar{a}_c \cdot \{\bar{V}_c\} + \bar{K}_c \cdot \{\bar{\omega}\}, \quad (51)$$

где

$$\bar{V}_c = \bar{V}_N + \bar{\omega} \times a \bar{k}, \quad (52)$$

\bar{V}_N - скорость точки N - касания шара с поверхностью,

$$\bar{V}_N = -\omega_z \rho \bar{i}' = -\omega_z \rho (\bar{i} \cos \alpha + \bar{k} \sin \alpha), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_c = \dot{\bar{V}}_c = & -(\dot{\omega}_z \rho - \omega_z \dot{\rho}) (\bar{i} \cos \alpha + \bar{k} \sin \alpha) - \\ & - \omega_z \rho (-\bar{i} \sin \alpha + \bar{k} \cos \alpha) \dot{\alpha} + \bar{\Omega} \times \bar{V}_N + \dot{\bar{\omega}} \times a \bar{k} + a \omega_3 \bar{\Omega} - a \bar{k} (\bar{\omega} \cdot \bar{\Omega}). \end{aligned} \quad (54)$$

здесь $\bar{\Omega}$ - угловая скорость подвижных осей $C \xi \eta \zeta$

и учтено $\bar{\omega} \times a \bar{k} = a \omega_3 \bar{\Omega} - a \bar{k} (\bar{\omega} \cdot \bar{\Omega})$,

$$\begin{aligned} \bar{K}_c = J \dot{\bar{\omega}} = J [& (\dot{\omega}_1 + \theta_2 \omega_3 - \theta_3 \omega_2) \bar{i} + (\dot{\omega}_2 + \theta_3 \omega_1 - \theta_1 \omega_3) \bar{j} + \\ & + (\dot{\omega}_3 + \theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1) \bar{k}]. \end{aligned} \quad (55)$$

Из (52) имеем

$$\{\bar{V}_c\} = -\rho (\bar{i} \cos \alpha + \bar{n} \cdot \sin \alpha) \{\omega_z\} + a \bar{i} \{\omega_2\} - a \bar{j} \{\omega_1\}, \quad (56)$$

здесь учтено

$$\{\bar{\omega}\} \times a \bar{k} = a \bar{i} \{\omega_2\} - a \bar{j} \{\omega_1\}.$$

Подставим (56), (55), (54), (51), (50), (49), (48) в уравнение (47), имеем

$$\begin{aligned}
 & [(J + Ma^2)(\dot{\omega}_1 - \theta_3 \omega_2) + J\theta_2 \omega_3 + Ma\rho \omega_2 (\theta_3 \cos \alpha - \theta_1 \sin \alpha)] \cdot \{\omega_1\} + \\
 & + [(J + Ma^2)(\dot{\omega}_2 + \theta_3 \omega_1) - J\theta_1 \omega_3 - Ma(\dot{\omega}_z \rho + \omega_2 \dot{\rho}) \cos \alpha] \{\omega_2\} + \\
 & + J(\dot{\omega}_3 + \theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1) \{\omega_3\} + [J_2 \dot{\omega}_z + M\rho(\dot{\omega}_z \rho + \omega_2 \dot{\rho} - \\
 & - a \cos \alpha (\dot{\omega}_2 + \theta_3 \omega_1) + a \sin \alpha (\theta_1 \omega_1 + \theta_2 \omega_2))] \{\omega_z\} = \\
 & = Mg a \sin \alpha \{\omega_z\}.
 \end{aligned} \tag{57}$$

Приравняв множители при одинаковых возможных скоростях $\{\omega_i\}$ ($i = 1, 2, 3, z$) в (57), получим уравнения движения:

$$\begin{aligned}
 J_1 \dot{\omega}_1 - J_2 \theta_3 \omega_2 + J_3 \theta_2 \omega_3 + Ma\rho \omega_2 (\theta_3 \cos \alpha - \theta_1 \sin \alpha) &= 0, \\
 J_2 \dot{\omega}_2 + J_1 \theta_3 \omega_1 - J_3 \theta_1 \omega_3 - Ma(\dot{\rho} \omega_z + \rho \dot{\omega}_z) \cos \alpha &= Mg a \sin \alpha, \\
 \dot{\omega}_3 + \theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1 &= 0, \\
 J_2 \dot{\omega}_z + M\rho(\dot{\rho} \omega_z + \rho \dot{\omega}_z - a \dot{\omega}_2 \cos \alpha - a \theta_3 \omega_1 \cos \alpha + \\
 + a \sin \alpha (\theta_1 \omega_1 + \theta_2 \omega_2)) &= 0,
 \end{aligned} \tag{58}$$

где

$$J_1 = J_2 = J + Ma^2, \quad J_3 = J,$$

$$\theta_1 = -(\dot{\varphi} + \omega_z) \sin \alpha,$$

$$\theta_2 = -\dot{\varphi} \frac{\sin^2 \alpha}{b},$$

$$\theta_3 = +(\dot{\varphi} + \omega_z) \cos \alpha.$$

Выразив $\sqrt{V_C}$ через параметры ρ, φ и ω_z , из (52) найдем:

$$\omega_1 = -\frac{\dot{\rho}}{a} - (\dot{\varphi} + \omega_z) \cdot \sin \alpha,$$

$$\omega_2 = -\dot{\varphi} \frac{\sqrt{\rho^2 + b^2}}{a} - \dot{\rho} \sin \alpha,$$

$\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ см. (5).

Подставив $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega_1$ и ω_2 в (58), получим уравнения движения с параметрами ρ, φ, ω_z и ω_3 .

Применение уравнения возможных мощностей явилось удобным методом при решении данных задач и согласуется с выводами в работе [2] с. 105.

Л и т е р а т у р а

1. Добронравов В. Основы механики неголономных систем. М., "Высшая школа", 1970.

2. Сильде О., Тийкма Б. Метод уравнения возможных мощностей. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1970, серия А, № 293.

A. Haitin

The Movement of a Sphere on Helical Surfaces

Summary

In the present paper the problem of sphere rolling on the helical surface is considered. The differential equations of sphere movement have been developed. The equations have been received by two methods: common theorems of dynamics and equations of possible power.

УДК 624.07:534.1

Г.П. Арясов

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК
ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОВТОРНОЙ НАГРУЗКИ

I. Введение

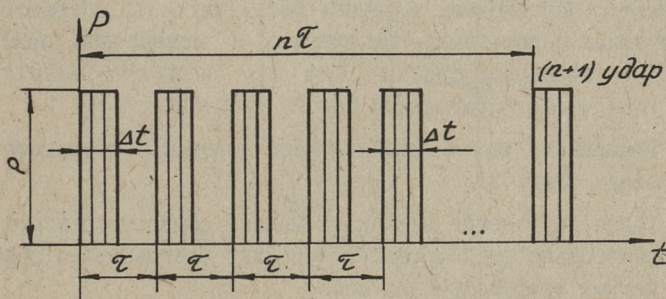
В настоящей статье рассматриваются вынужденные колебания перекрестных балок при действии повторной нагрузки.

Этот вопрос еще не получил достаточного освещения в научной и технической литературе.

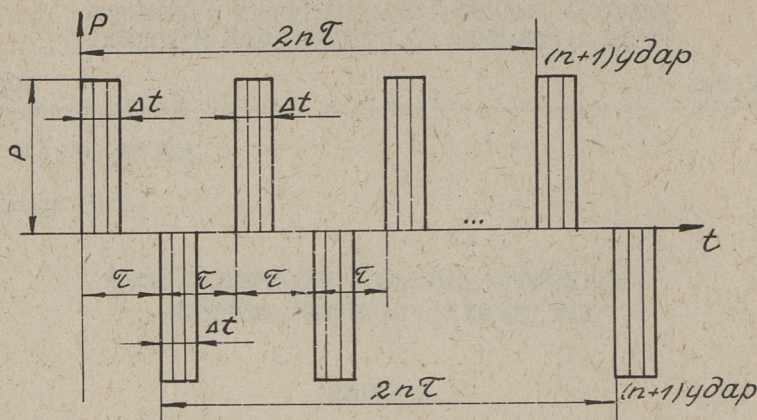
Чаще в исследованиях рассматривалось действие периодических гармонических сил [1,2,3,4,5,6] и мгновенных импульсов [6,7].

Учет повторных сил конечной продолжительности (фиг.1 и 2) рассматривался только для системы с одной степенью свободы [8,9,10,11,12] и двумя степенями свободы [13].

В работе учитывается дискретная схема в виде системы с любым числом степеней свободы (фиг. 3).



Фиг. 1. Периодическая однозначная повторная нагрузка.



Фиг. 2. Периодическая разнозначная повторная нагрузка.

Решение задачи дается в виде формул, удобных для применения на ЭВМ. Определяются динамические поперечные перемещения перекрестных балок в любом интервале действия повторной нагрузки и чисто вынужденные периодические перемещения, повторяющиеся в каждом интервале приложения нагрузки. Задача решается с учетом и без учета сил сопротивления.

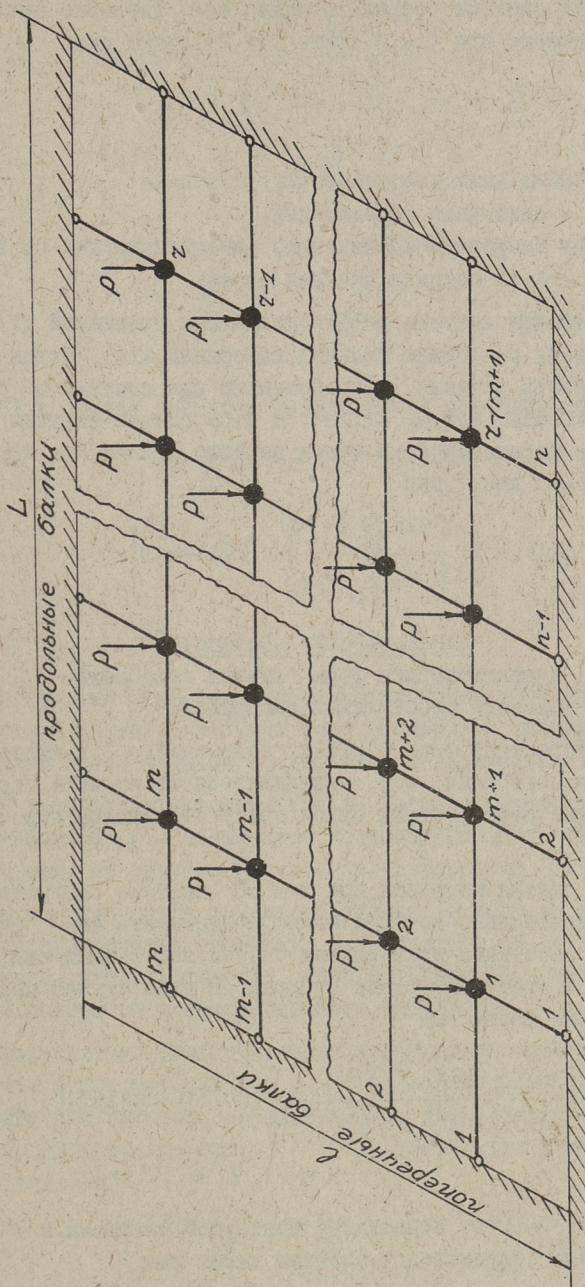
2. Вынужденные колебания без учета сил сопротивления

Дискретная расчетная схема перекрестных балок представляет собой систему точечных масс (фиг. 3), сосредоточенных в узлах пересечений продольных и поперечных балок, с $r = n \cdot m$ степенями свободы, где n — число поперечных балок, m — число продольных балок.

Принимаем, что нагрузка прикладывается к сосредоточенным массам (фиг. 3).

Такая постановка задачи не меняет общности решения, так как произвольно расположенную нагрузку всегда можно привести к местам сосредоточения масс.

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний перекрестных балок (фиг. 3) как системы с r степенями свободы



Фиг. 8. Перекрестные балки при действии системы сосредоточенных повторных сил.

при действии системы сосредоточенных сил, внезапно приложенных одновременно при $t = 0$ (фиг. 1 и 2), имеют вид

$$\sum_{\kappa=1}^r m_{\kappa} \delta_{j\kappa} \ddot{y}_{\kappa}(t) + y_j(t) = \sum_{\kappa=1}^r P_{\kappa} \delta_{j\kappa}, \quad (1)$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots, r),$$

где

- $\delta_{j\kappa}$ - единичные перемещения,
- P_{κ} - сосредоточенная сила, приложенная к κ -ой массе,
- m_{κ} - κ -ая сосредоточенная масса.

Для решения системы дифференциальных уравнений (1) разложим нагрузку по формам главных колебаний [14]. Тогда можно использовать решения, разработанные для системы с одной степенью свободы [8, 9, 10, 11, 12]. В этом случае формулы для определения перемещений во время первого приложения нагрузки $0 \leq t \leq \Delta t$ имеют вид

$$y_{\kappa}(t) = \sum_{i=1}^r \left[\frac{y_{\kappa i} \sum_{j=1}^r P_j y_{ji}}{\omega_i^2 \sum_{j=1}^r m_j y_{ji}^2} (1 - \cos \omega_i t) \right], \quad (2)$$

$$(\kappa = 1, 2, 3, \dots, r),$$

где y_{ji} - характеристики форм главных колебаний,
 ω_i - частоты собственных колебаний.

Характеристики форм главных колебаний y_{ji} и частоты собственных колебаний ω_i определяются из расчета свободных колебаний перекрестных балок при учете дискретной схемы [15].

После снятия нагрузки при $t = \Delta t$ система совершает свободные колебания, которые можно представить как вынужденные под действием двух равных систем постоянных сил, направленных в противоположные стороны. В этом случае перемещения системы имеют вид

$$y_{\kappa}(t) = \sum_{i=1}^r \left[\frac{y_{\kappa i} \sum_{j=1}^r P_j y_{ji}}{\omega_i^2 \sum_{j=1}^r m_j y_{ji}^2} (\cos \omega_i (t - \Delta t) - \cos \omega_i t) \right], \quad (3)$$

$$(\kappa = 1, 2, 3, \dots, r).$$

После $(n+1)$ -го приложения повторной нагрузки в $(n+1)$ -ом интервале перемещения системы имеют вид

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^r \left[\frac{y_{ki} \sum_{j=1}^r P_j y_{ji}}{\omega_i^2 \sum_{j=1}^r m_j y_{ji}^2} (A_i - B_i) \right], \quad (4)$$

(k = 1, 2, 3, \dots, r),

где A_i и B_i являются тригонометрическими функциями вида:

а) в случае действия однозначных повторных сил (фиг.1)

$$A_i = \sum_{\nu=0}^n \cos \omega_i(t - \nu\tau - \Delta t),$$

$$B_i = \sum_{\nu=0}^n \cos \omega_i(t - \nu\tau); \quad (4a)$$

б) в случае действия разнозначных повторных сил (фиг.2)

$$A_i = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \cos \omega_i(t - \nu\tau - \Delta t),$$

$$B_i = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu+1} \cos \omega_i(t - \nu\tau). \quad (4б)$$

3. Учет сил сопротивления

Основными факторами, обуславливающими затухание в перекрестных балках, являются конструктивное демпфирование в подвижных и неподвижных соединениях и внутреннее трение.

В расчетах внутреннее трение характеризуется постоянной величиной γ , называемой коэффициентом вязкого трения, независимым от частоты циклических деформаций [16].

Конструктивное трение во многом зависит от конкретного вида конструкции, поэтому для простоты расчета будем принимать, что коэффициент вязкого трения γ включает в себя и потери от конструктивного трения.

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний перекрестных балок как системы с r степенями свободы (фиг. 3) при действии системы сосредоточенных сил, внезапно приложенных одновременно при $t = 0$ с учетом сил сопротивления, имеют вид [16]

$$m_k \ddot{y}_k^*(t) + (u + i\nu) \sum_{j=1}^r C_{kj} y_j^*(t) = P_k,$$

(k = 1, 2, 3, \dots, r), \quad (5)

где

$$u = \frac{1 - \frac{\gamma^2}{4}}{1 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad v = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (5a)$$

- u_j^* - комплексное перемещение j -ой массы,
- C_{kj} - коэффициент жесткости системы,
- m_k - масса, сосредоточенная в k -ой точке,
- P_k - постоянная сила, приложенная в k -ую точку,
- γ - коэффициент вязкого трения.

Ввиду возможности разложения нагрузки по формам главных колебаний при учете достаточно малых сил сопротивления [3,17] и малого влияния сопротивления на частоты и формы собственных колебаний [17], можно применить решения, разработанные для системы с одной степенью свободы [12], к системе со многими степенями свободы.

При достаточно малом трении вдали от резонанса можно пренебречь сдвигом фаз между отдельными точками системы и их главными колебаниями.

Приближенность такого решения, при учете достаточно малых сил сопротивления, дает возможность получить удобные формулы для применения их на ЭВМ.

Выражения для определения перемещений во время первого приложения нагрузки $0 \leq t \leq \Delta t$ имеют вид

$$y_k(t) = \frac{1 - \frac{\gamma^2}{4}}{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{y_{ki} \sum_{j=1}^r P_j y_{ji}}{\omega_i^2 \sum_{j=1}^r m_j y_{ji}^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \omega_i t\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\cos \omega_i t + \frac{\gamma}{2} \sin \omega_i t \right) \right] \right\}, \quad (6)$$

$(k = 1, 2, 3, \dots, r),$

где y_{ki} - характеристики форм главных колебаний без учета сил сопротивления,
 ω_i - частоты собственных колебаний без учета сил сопротивления.

По аналогии с формулой (4) выражения для определения перемещений системы с учетом сил сопротивления после $(n+1)$ -го приложения нагрузки в $(n+1)$ -см интервале времени имеют вид

$$y_k(t) = \frac{1 - \frac{\gamma^2}{4}}{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \sum_{i=1}^r \left[\frac{y_{ki} \sum_{j=1}^r P_j y_{ji}}{\omega_i^2 \sum_{j=1}^r m_j y_{ji}^2} (A_i^* - B_i^*) \right], \quad (7)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, r),$$

где A_i^* и B_i^* являются тригонометрическими выражениями вида:

а) в случае действия однозначных повторных сил (фиг.1)

$$\begin{aligned} A_i^* &= \sum_{\nu=0}^n \exp \left[-\frac{\gamma}{2} \omega_i (t - \nu\tau - \Delta t) \right] \left\{ \cos \omega_i (t - \nu\tau - \Delta t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2} \sin \omega_i (t - \nu\tau - \Delta t) \right\}, \\ B_i &= \sum_{\nu=0}^n \exp \left[-\frac{\gamma}{2} \omega_i (t - \nu\tau) \right] \left\{ \cos \omega_i (t - \nu\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2} \sin \omega_i (t - \nu\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (7a)$$

б) в случае действия разнозначных повторных сил (фиг.2)

$$\begin{aligned} A_i^* &= \sum_{\nu=0}^n \exp \left[-\frac{\gamma}{2} \omega_i (t - \nu\tau - \Delta t) \right] (-1)^\nu \left[\cos \omega_i (t - \nu\tau - \Delta t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2} \sin \omega_i (t - \nu\tau - \Delta t) \right], \\ B_i &= \sum_{\nu=0}^n \exp \left[-\frac{\gamma}{2} \omega_i (t - \nu\tau) \right] (-1)^{\nu+1} \left[\cos \omega_i (t - \nu\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2} \sin \omega_i (t - \nu\tau) \right]. \end{aligned} \quad (7б)$$

4. Пример расчета

Согласно изложенной теории, составляется программа на языке МАЛГОЛ для вычислений на ЭВМ "Минск-22".

Приводим пример определения вынужденных колебаний перекрестных балок (фиг. 4), состоящих из двух однородных продольных балок, каждая длиной 2,175 м, и двух однородных поперечных балок, каждая длиной 1,35 м, с шарнирным опиранием по контуру.

Погонные массы продольных и поперечных балок $\bar{m}_x = \bar{m}_y = 1,1927 \cdot 10^{-4} \text{ тс}^2/\text{м}^2$, моменты инерции $J_x = J_y = 0,03125 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$.

Четыре равные массы $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1,3775 \cdot 10^{-4} \text{ тс}^2/\text{м}^2$

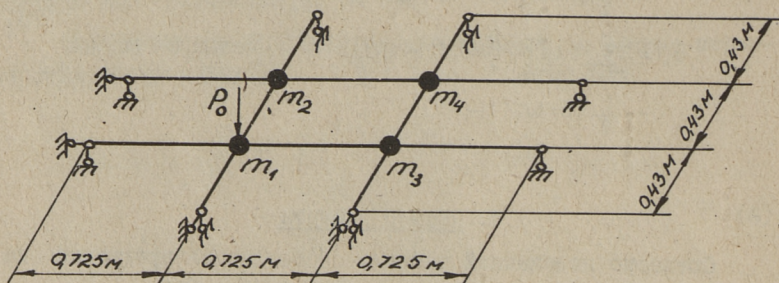
сосредоточены в узлах пересечений продольных и поперечных балок (фиг. 4)

На перекрестные балки (фиг. 4) к массе m_1 прикладывается периодическая нагрузка в виде повторных безмассовых сил (фиг. 1).

Величина постоянной силы $P = 3 \text{ кГ}$, продолжительность действия силы $\Delta t = 0,08 \text{ с}$, интервал между повторными приложениями нагрузки $\tau = 0,5 \text{ с}$.

При расчете перекрестных балок (фиг. 4) на свободные колебания [15], без учета сил сопротивления, получены частоты собственных колебаний: $\omega_1 = 28,6 \text{ 1/с}$, $\omega_2 = 53,3 \text{ 1/с}$, $\omega_3 = 104 \text{ 1/с}$, $\omega_4 = 112 \text{ 1/с}$ и характеристики форм главных колебаний:

$$\begin{aligned} y_{11} &= 1, & y_{12} &= 1, & y_{13} &= 1, & y_{14} &= 1 \\ y_{21} &= 1, & y_{22} &= 1, & y_{23} &= -1, & y_{24} &= -1 \\ y_{31} &= 1, & y_{32} &= -1, & y_{33} &= 1, & y_{34} &= -1 \\ y_{41} &= 1, & y_{42} &= -1, & y_{43} &= -1, & y_{44} &= 1. \end{aligned}$$



Фиг. 4. Перекрестные балки в виде системы с четырьмя сосредоточенными массами.

Графики вынужденных колебаний первой массы (фиг. 5, 6 и 7) при различных значениях коэффициента внутреннего трения γ показывают, что силы сопротивления значительно снижают перемещения перекрестных балок.

Особенно наглядно видно влияние сопротивления для максимальных перемещений (табл. 1).

Т а б л и ц а I

Максимальные перемещения первой массы m_1
перекрестных балок при действии повторных сил

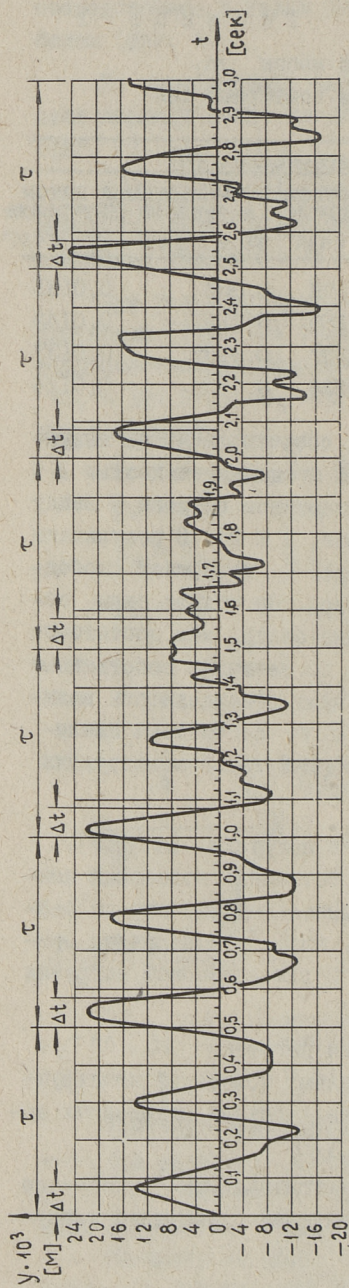
Коэффициент внутреннего трения	Максимальные перемещения (M)				
	в первом интервале	во втором интервале	в третьем интервале	в четвертом интервале	в пятом интервале
	$0 \leq t \leq \tau$	$\tau \leq t \leq 2\tau$	$2\tau \leq t \leq 3\tau$	$3\tau \leq t \leq 4\tau$	$4\tau \leq t \leq 5\tau$
0	0,0153	0,023	0,0208	0,009	0,0191
0,06	0,0147	0,0171	0,0150	0,0131	0,0142
0,2	0,0122	0,0160	0,0137	0,0137	0,0137
0,4	0,0122	0,0124	0,0124	0,0124	0,0124

Такое значительное влияние сил сопротивления на вынужденные перемещения объясняется малой продолжительностью Δt действия нагрузки по сравнению с интервалом времени τ между повторными приложениями нагрузки (фиг. I и 2). В результате система большую часть времени периода τ совершает свободные колебания, затухающие тем быстрее, чем больше силы сопротивления. Кроме того, перекрестные балки, как достаточно жесткая система, имеют значительные по величине собственные частоты и тогда, учитывая принятую нами независимость величины коэффициента внутреннего трения γ от частоты циклических деформаций, собственные колебания такой конструкции будут сравнительно быстро затухать.

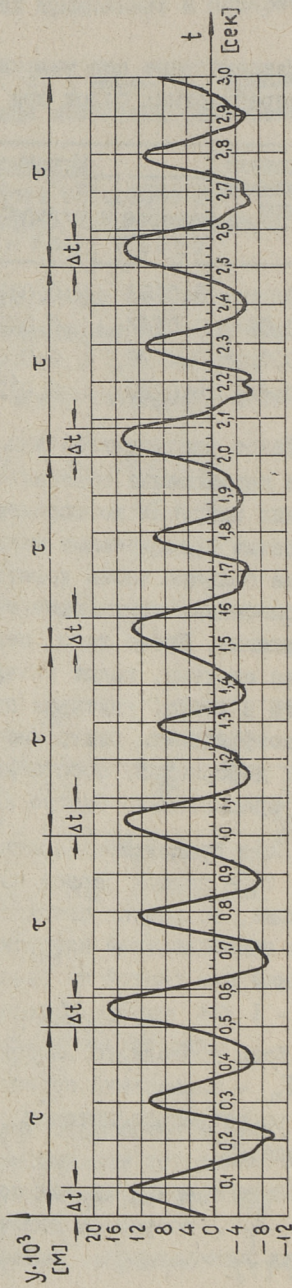
Если продолжительность действия нагрузки $\Delta t > 2,5 T_1$, где T_1 — период первой частоты собственных колебаний конструкции, то расчет сводится к статическому расчету на действие эквивалентной нагрузки $\varkappa P_0$, где P_0 — величина приложенной или снятой нагрузки, $\varkappa = 2$ для внезапной нагрузки и $\varkappa = 1$ для внезапной разгрузки [7].

Если продолжительность действия нагрузки $\Delta t < 0,1 T_n$, где T_n — наименьший период собственных колебаний конструкции, то расчет сводится к расчету на действие мгновенных импульсов [7].

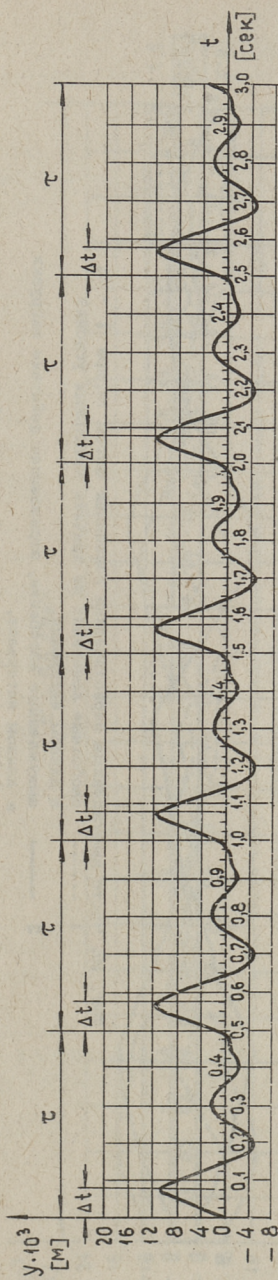
Если период между повторными приложениями нагрузки $\tau > \frac{2T_1}{\gamma}$, то расчет ведется на действие одиночного нагружения [7].



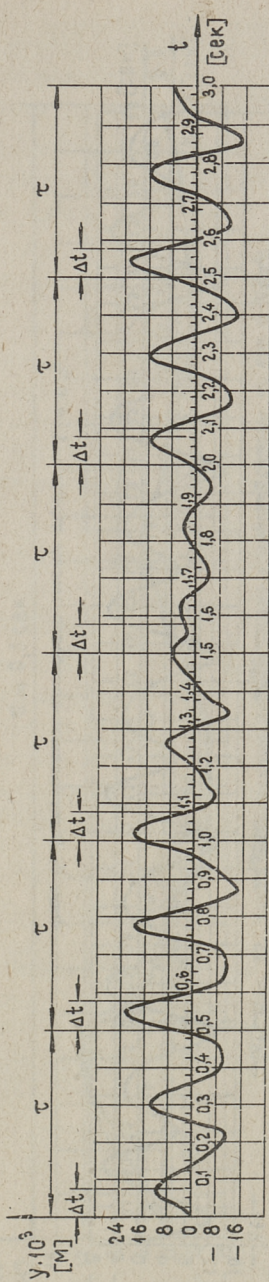
Фиг. 5. Вынужденные колебания массы m_1 при $\gamma = 0$.



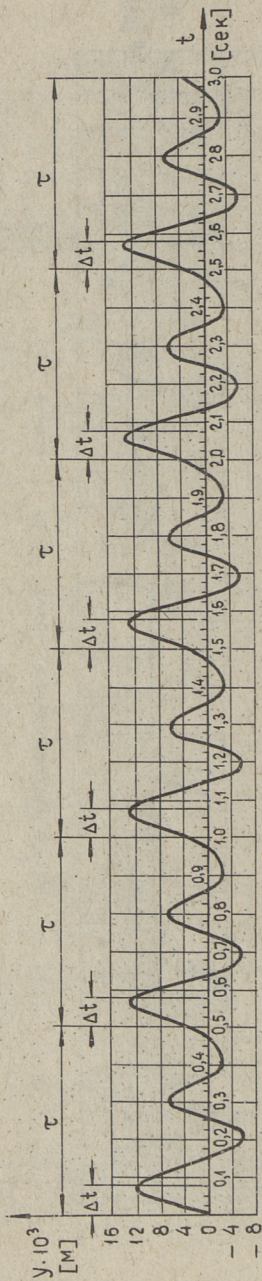
Фиг. 6. Вынужденные колебания массы m_1 при $\gamma = 0,06$.



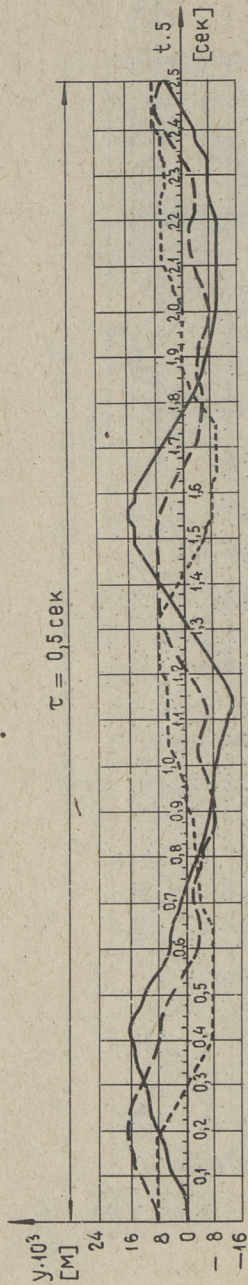
Фиг. 7. Вынужденные колебания массы m_1 при $\zeta = 0,4$.



Фиг. 8. Вынужденные колебания массы m_1 при $\zeta = 0$.

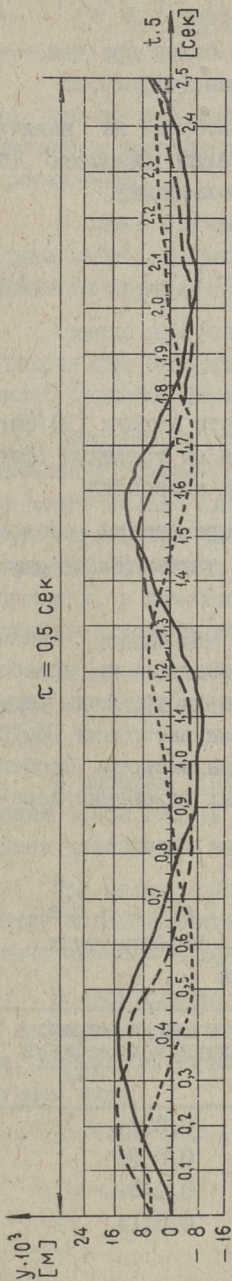


Фиг. 9. Вынужденные колебания массы m_1 при $\lambda = 0,2$.



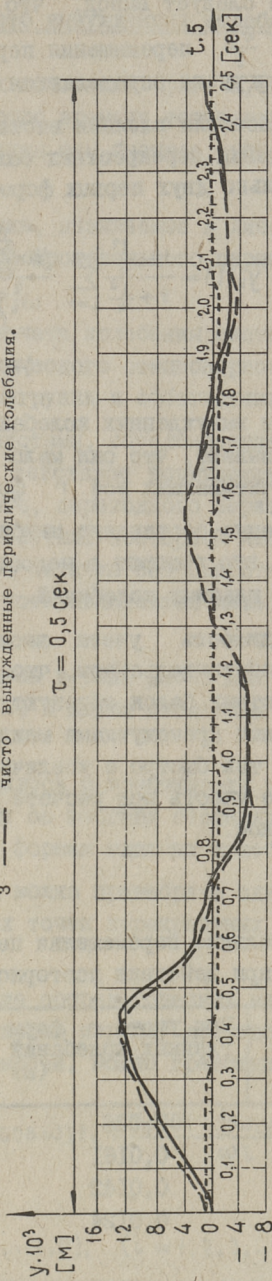
Фиг. 10. Чисто вынужденные периодические колебания массы m_1 при $\lambda = 0$:

- 1 ----- свободные колебания по причине начальных условий
 2 ————— в данном интервале, вынужденные колебания, отражающие действие нагрузки
 3 - · - · - · в данном интервале, чисто вынужденные периодические колебания.



Фиг. 11. Чисто вынужденные периодические колебания массы m_1 при $\xi = 0,06$:

- 1 свободные колебания по причине начальных условий в данном интервале,
 2 ————— вынужденные колебания, отражающие действие нагрузки в данном интервале,
 3 - - - - - чисто вынужденные периодические колебания.



Фиг. 12. Чисто вынужденные периодические колебания массы m_1 при $\xi = 0,4$:

- 1 свободные колебания по причине начальных условий в данном интервале,
 2 ————— вынужденные колебания, отражающие действие нагрузки в данном интервале,
 3 - - - - - чисто вынужденные колебания.

Отсюда следует вывод, что при $0,1T_n \leq t \leq 2,5T_1$ и $\Delta t \leq \tau \leq \frac{2T_1}{\gamma}$ перемещения перекрестных балок при действии повторной нагрузки определяются выражениями (4), (7).

Для выяснения влияния высших форм колебаний на величины перемещений перекрестных балок представим выражение (7) с учетом только двух первых форм главных колебаний.

$$y_k(t) = \frac{1 - \frac{\gamma^2}{4} \sum_{i=2}^r}{1 + \frac{\gamma^2}{4} \sum_{i=1}^r} \frac{y_{ik} \sum_{j=1}^r P_j y_{ji}}{\omega_i^2 \sum_{j=1}^r m_j y_{ji}} (A_i^* - B_i^*), \quad (9)$$

(k = 1, 2, 3, \dots, r).

Графики вынужденных колебаний при учете формул (9) (фиг. 8 и 9) показывают, что они мало отличаются от графиков (фиг. 5, 6 и 7), учитывающих все r форм главных колебаний.

Исключение составляют максимальные перемещения системы (табл. 2), что говорит о недостаточности учета только двух первых форм главных колебаний.

Необходимость учета высших форм колебаний вызывается тем обстоятельством, что частоты собственных колебаний перекрестных балок образуют на спектре частот зоны сгущения с малыми промежутками между соседними частотами [6, 15] и не растут так быстро с увеличением номера частоты. Особенно это важно учесть при расчете резонансных колебаний перекрестных балок.

Т а б л и ц а 2

Максимальные перемещения первой массы перекрестных балок при действии повторной нагрузки

Коэффициент внутреннего трения	При учете r форм главных колебаний (м)	При учете двух первых форм главных колебаний (м)
0	0,026	0,023
0,06	0,0161	0,0156
0,2	0,0142	0,0132
0,4	0,0124	0,0114

5. Определение чисто вынужденных колебаний

Из графиков вынужденных колебаний (фиг. 5, 6, 7 и 8) видно, что по истечении некоторого времени устанавливаются стационарные вынужденные колебания тем быстрее, чем больше сопротивление.

В общем случае колебания, вызываемые в линейной системе периодической нагрузкой произвольного периода τ , не являются периодическими.

Однако для упрощения расчета колебания системы можно представить как сумму периодического стационарного колебания с периодом возмущающей нагрузки и собственных колебаний.

Собственные колебания системы, обусловленные наличием начальных условий при $t=0$ и действием возмущающей силы, имеют место только для начального, переходного периода движения. Затем, при длительном действии повторной нагрузки, собственные колебания вследствие наличия сил сопротивления затухают, и, в конечном итоге, устанавливаются лишь чисто вынужденные колебания.

Такая задача уже ставилась в ряде работ для системы с одной степенью свободы [10, 12] и двумя степенями свободы [13].

В работах [10, 12] говорилось о возможности распространения такой задачи на систему со многими степенями свободы, путем разложения нагрузки по формам главных колебаний.

При малом сопротивлении можно пренебречь сдвигом фаз между перемещениями отдельных точек перекрестных балок, что значительно упрощает задачу.

В этом случае перемещение сосредоточенных масс (фиг. 3) в любом интервале, соответственно периоду действия нагрузки, по каждой форме в отдельности, можно представить в следующем виде

$$y_{ki}(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \omega_i t_1\right) \times (y_{ki}(0) \cos \omega_i t_1 + \frac{y_{ki}(0) + \frac{\gamma}{2} \omega_i y_{ki}(0)}{\omega_i} \times \\ \times \sin \omega_i t_1) + y_{ki}^*(t_1), \quad (10)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, r), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r),$$

где два первых слагаемых учитывают начальные условия дви-

жения в данном интервале, а третье слагаемое отражает действие нагрузки в этом интервале в пределах $0 \leq t_1 \leq \tau$.

Чтобы обеспечить чисто периодические, повторяющиеся перемещения системы, приравниваем перемещения и скорости сосредоточенных масс в начале и конце интервала по каждой форме в отдельности

$$y_{ki}(0) = y_{ki}(\tau), \quad \dot{y}_{ki}(0) = \dot{y}_{ki}(\tau), \quad (i, k = 1, 2, 3, \dots, r).$$

Тогда можно составить два уравнения, по каждой форме в отдельности, из которых определяются начальные условия периодического движения системы.

Полные перемещения в любом интервале складываются из периодических перемещений и собственных колебаний системы

$$y_k(t) = - \sum_{i=1}^r \exp(-\frac{\gamma}{2} \omega_i t) \times \left[y_{ki}(0) \cos \omega_i t + \frac{y_{ki}(0) + \frac{\gamma}{2} \omega_i \dot{y}_{ki}(0)}{\omega_i} \times \right. \\ \left. \times \sin \omega_i t \right] + \sum_{i=1}^r \exp(-\frac{\gamma}{2} \omega_i t_1) \times \left[y_{ki}(0) \cos \omega_i t_1 + \right. \\ \left. + \frac{y_{ki}(0) + \frac{\gamma}{2} \omega_i \dot{y}_{ki}(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t_1 \right] + \sum_{i=1}^r y_{ki}^*(t_1), \quad (II)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, r).$$

В случае действия разнозначной повторной нагрузки (фиг. 2) задача решается путем суммирования двух решений (II), но с учетом сдвига второй периодической нагрузки относительно первой на интервал τ .

Составляем программу для ЭВМ "Минск-22" на языке МАЛ-ГОЛ, с помощью которой определяем графики чисто вынужденных колебаний (фиг. I0, II и I2).

Из сравнения графиков на фиг. I0, II и I2 с графиками фиг. 5, 6, 7 видно их хорошее совпадение, особенно в случае большого сопротивления.

Это объясняется тем, что с увеличением сопротивления уменьшается влияние свободных колебаний, определяемых первыми двумя слагаемыми в формуле полного перемещения (II).

В ы в о д ы

I. Применение дискретной расчетной схемы позволяет с достаточной точностью и простотой определять с помощью ЭВМ

вынужденные перемещения перекрестных балок при действии повторной нагрузки конечной продолжительности.

2. Вынужденные колебания при действии повторной нагрузки необходимо определять с учетом сил сопротивления. Вследствие долговременности повторной нагрузки силы сопротивления значительно снижают перемещения перекрестных балок.

3. Разделение вынужденных колебаний системы на собственные и чисто вынужденные значительно упрощает расчет и позволяет ограничиться рассмотрением одного интервала действия повторной нагрузки в пределах времени τ .

4. Получено хорошее совпадение при определении вынужденных колебаний двумя путями: при последовательном определении перемещений во всех интервалах и при рассмотрении одного интервала с разделением колебаний на собственные и чисто вынужденные.

5. Определение чисто вынужденных колебаний особенно целесообразно применять при резонансе, так как в этом случае достаточно учитывать только одну форму колебаний, по которой имеет место резонанс.

6. Наличие близких по своим значениям собственных частот перекрестных балок вызывает необходимость учета высших форм колебаний.

7. Когда не требуется большой точности в определении вынужденных перемещений, можно учитывать только две первые формы собственных колебаний.

Л и т е р а т у р а

1. Е г у п о в В.К. Расчет демпфирования местной вибрации днища машинного отделения судна. - "Судостроение", 1957, № 3.

2. К у р д ю м о в В.К. Ходовая вибрация палубных перекрытий. - "Тр. Ленинградск. кораблестроит. ин-та", 1958, вып. 22.

3. П а п к о в и ч П.Ф. Труды по вибрации корабля. М., Судпромгиз, 1960.

4. П о с т н о в В.А. Вынужденные колебания плоских перекрытий с учетом сдвига. - "Тр. Ленинградск. кораблестроит. ин-та", 1960, вып. 31.

5. Ш и м а н с к и й Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций. М., Судпромгиз, 1948.

6. С о р о к и н Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. М., Госстройиздат, 1956.

7. С о р о к и н Е.С. Инструкция по расчету перекрытий на импульсные нагрузки. М., Стройиздат, 1966.

8. Г о л ь с т Г.К. К вопросу о повторных ударах. - "Известия высших учебных заведений", Строительство и архитектура, 1963, № 4, с. II-18. (Новосибирск).

9. Л у р ь е А.И. Операционное исчисление. М., Гостехиздат, 1951.

10. П а н о в к о Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М., Машгиз, 1957.

11. С н и т к о Н.К. Динамика сооружений. М., Госстройиздат, 1960.

12. Р а б и н о в и ч И.М. К расчету сооружений на нагрузки, изменяющиеся во времени по произвольному периодическому закону. - "Исследования по теории сооружений", 1960, вып. 9, с. 109-118.

13. Г о л ь с т Г.К. Действие повторных ударов на систему с двумя степенями свободы. - "Труды ВАТТ", 1962, № 73, (Ленинград).

14. К и с и л е в В.А. Строительная механика. (Специальный курс). М., Стройиздат, 1969.

15. А р я с о в Г.П. Свободные колебания перекрестных балок при учете дискретной расчетной схемы. - "Тр.Таллинск. политехн. ин-та", 1975, № 384.

16. С о р о к и н Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., Госстройиздат, 1960.

17. Д о н д о ш а н с к и й В.К. Расчет колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах. М., Машиностроение, 1965.

The Forced Vibration of Grillages under
the Action of Repeated Loading

Summary

This paper presents a method for the determination of the forced vibration of grillages under the action of repeated loading.

The discrete calculation scheme is applied in the form of a system with many degrees of freedom.

The dynamic deflection is determined in any interval of the action of loading and the pure forced periodical deflection repeating in each interval of the action of loading.

The programmes in the language of MALGOL are composed for calculating with the computer MINSK 22.

The problem is solved with and without taking into account the resistance forces.

УДК 624.07:534.1

Г.П. Арясов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК

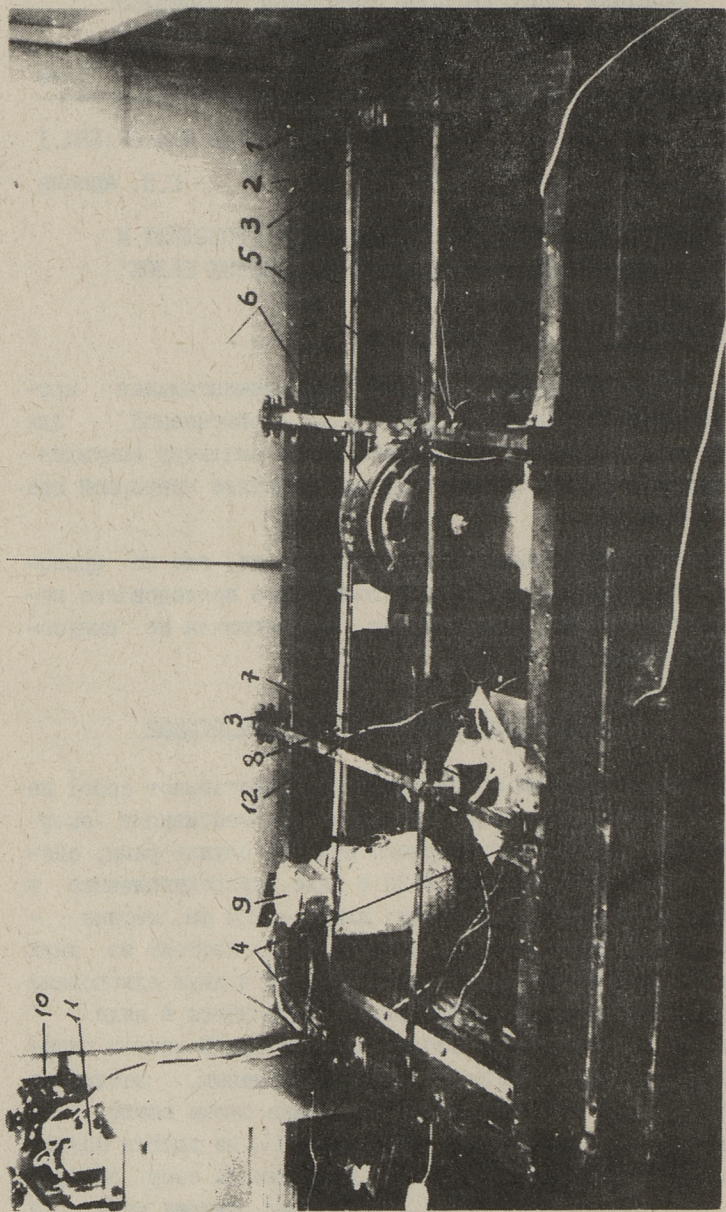
1. Введение

В настоящей статье приводится экспериментальная проверка дискретной расчетной схемы [1,2], применяемой для определения динамических характеристик и амплитуд вынужденных колебаний перекрестных балок при действии повторной прерывной нагрузки.

Такое исследование, судя по литературе, еще не проводилось. Чаще выполнялось экспериментальное исследование перекрестных балок при действии сил, изменяющихся по синусоидальному закону [3,4,5,6].

2. Описание экспериментального стенда

Экспериментальный стенд (фиг. 1) представляет собой перекрестные балки, шарнирно закрепленные к массивному опорному контуру. В качестве опорного контура служит рама, сделанная из двутавровых балок № 20 в виде четырехугольника с размерами по внешнему периметру: длина - 224 см, ширина - 143 см. Модель перекрестных балок (фиг. 1) состоит из двух однородных поперечных балок длиной 135 см и двух однородных продольных балок длиной 217,5 см. Балки приняты в виде стальных полос марки Ст.3 сечением 3x0,5 см. В местах пересечений балки скреплены болтовыми соединениями, натяжение которых можно регулировать. Перекрестные балки имеют на одних концах цилиндрические опоры (фиг. 1), на других концах - подвижные цилиндрические опоры. Конструкция опор обеспечивает шарнирность соединений и исключает биение опор в процессе вибрации и возникновение продольных сил в балках другого направления.



Фиг. 1. Экспериментальный стенд:

1 - рама, 2 - перекрестные балки, 3 - подвижные цилиндрические опоры, 4 - неподвижные цилиндрические опоры, 5 - вибратор с неуравновешенным грузом, 6 - электромотор, 7 - электромagnet, 8 - пьезодатчик, 9 - усилитель с фильрами, 10 - автотрансформатор, 11 - реле времени, 12 - соединительные провода.

3. Методика измерений

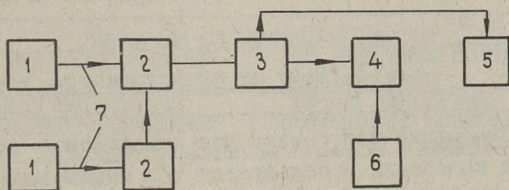
Для более точного экспериментального исследования динамических характеристик и амплитуд вынужденных колебаний в данной работе применяются два метода измерений [7,8]: непосредственное измерение механических колебаний и измерение посредством преобразования механических колебаний в электрические.

Непосредственное измерение осуществляется несколькими способами, заключающимися в следующем:

а) для измерения форм свободных колебаний и амплитуд вынужденных колебаний используются: 1) грифели, прикрепляемые в различных точках перекрестных балок; их применение обеспечивает точность измерений до 0,5 мм, 2) оптическое устройство в виде катетометра в сочетании со стробоскопом при точности измерений 0,05 мм;

б) для измерения частоты свободных колебаний используются: 1) стробоскоп, ошибка измерения которого составляет 2%; 2) язычковый частотометр, точность измерения которого - 0,5 1/с.

Второй метод измерения основан на преобразовании механических колебаний в электрические, которые затем записываются шлейфовым осциллографом или регистрируются каким-либо еще электроизмерительным прибором (фиг. 2).



Фиг. 2. Блок-схема измерений колебаний электро-дистанционной аппаратурой:

- 1 - вибродатчик ИС-318 или И0001, 2 - интегрирующий контур,
- 3 - усилитель электрических колебаний ИС-943А или Р003,
- 4 - шлейфовый осциллограф, Н-10, 5 - электронно-лучевой осциллограф, 6 - генератор частот, 7 - соединительные провода.

4. Испытание модели

Для создания вибрации перекрестных балок в данной работе применяется два типа вибраторов.

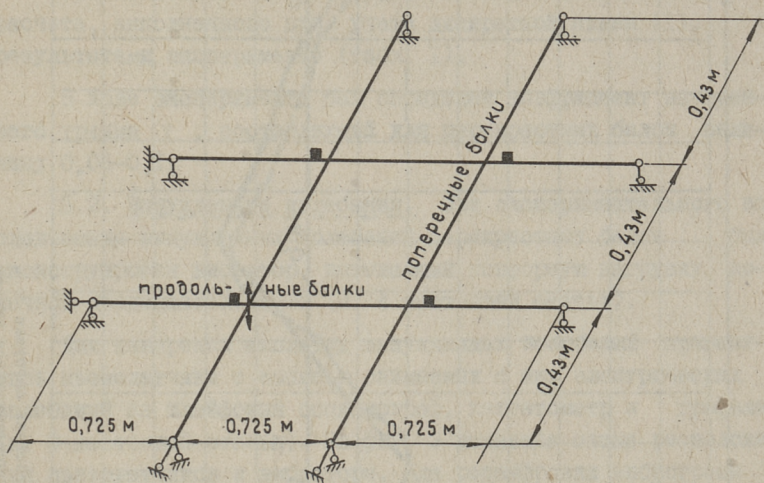
Один из них создает гармоническую нагрузку, вследствие неуравновешенности вращающегося ротора вибратора (фиг. 1). Привод осуществляется от электрической машины постоянного тока (фиг. 1), число оборотов которой можно регулировать от 0 до 3000 об/мин.

Второй тип вибратора представляет собой электромагнит (фиг. 1), создающий нагрузку в виде отдельных импульсов конечной продолжительности. При помощи специально сконструированного реле времени осуществляется управление электромагнитом: включение и выключение постоянного тока, питающего обмотку электромагнита. Сердечник цилиндрической формы крепится с помощью резьбового соединения непосредственно к перекрестным балкам и при включении электрического тока втягивается внутрь катушки, при выключении питания возвращается обратно. Обмотка электромагнита имеет цилиндрическую форму. Она выполнена из трансформаторного провода сечением 0,3 мм с 52300 витками. С помощью автотрансформатора и зазора между сердечником и обмоткой осуществляется регулирование силы притяжения электромагнита от 0,1 до 10 кг. Реле времени позволяет регулировать продолжительность действия постоянной силы (время, в течение которого на обмотку поступает электрический ток) от 0,01 до 0,15 с и период между повторными приложениями силы от 0,05 с до бесконечности.

Запись колебаний на шлейфовый осциллограф производилась от четырех пьезодатчиков, схема расположения которых приведена на фиг. 3.

5. Результаты испытаний

5.1. Свободные колебания. Для определения частот и форм собственных колебаний используется так называемый резонансный метод. Необходимость выбора данного экспериментального метода для определения динамических характеристик перекрестных балок вызвана как его простотой, так и возможностью получить достаточно точные результаты в случае близких частот [9, 10, 11].



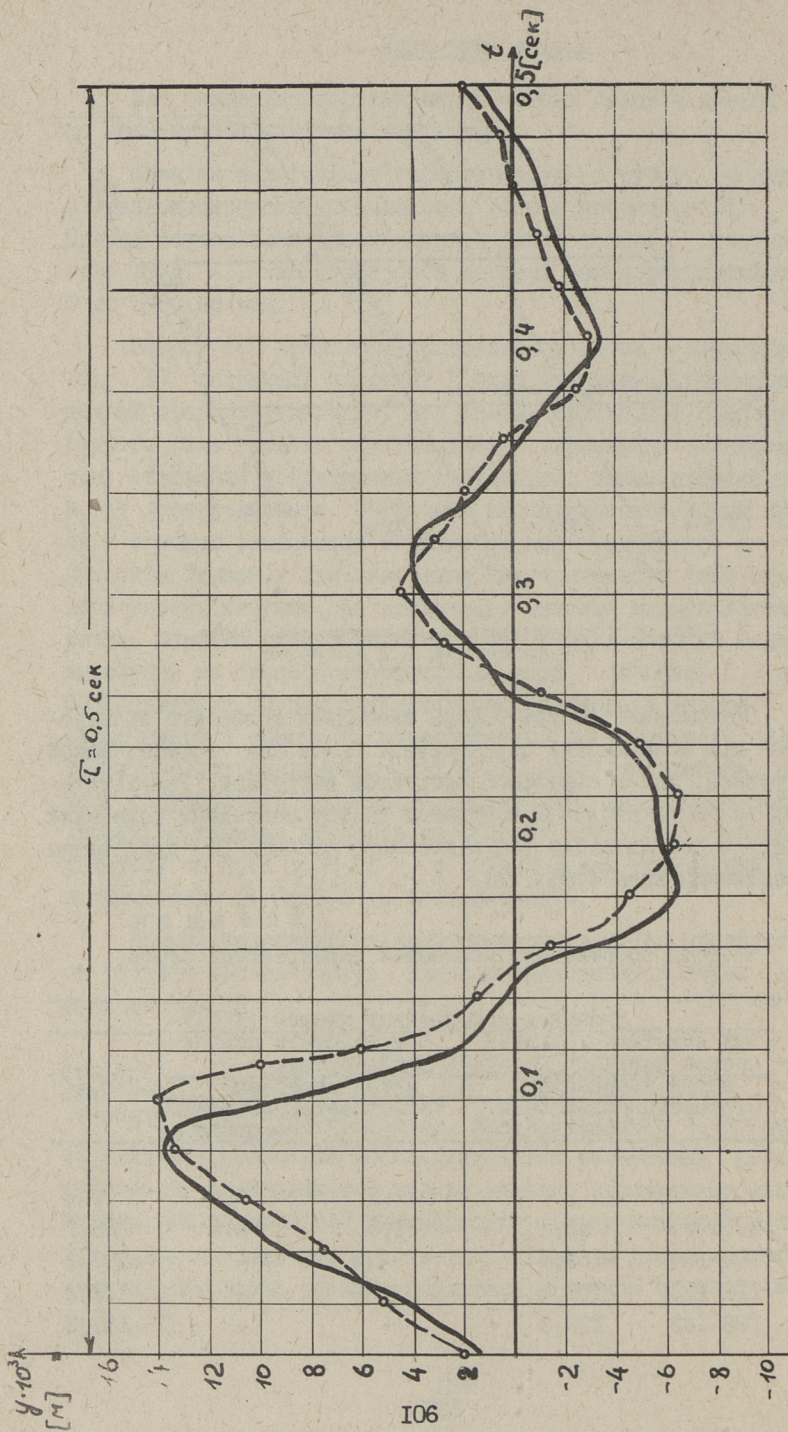
Фиг. 3. Конструктивная схема перекрестных балок
 ■ - пьезодатчик, ⚡ - вибратор.

Определение частот и форм свободных колебаний производится при возбуждении перекрестных балок как гармонической нагрузкой, так и повторной прерывной нагрузкой. Результаты всех экспериментальных измерений частот свободных колебаний вместе с результатами теоретического расчета [1] представим в табличном виде (табл. I).

Т а б л и ц а I

Частоты собственных колебаний перекрестных балок

№ ча- сто- ты	Значения собственных частот (I/c)				теорети- ческий расчет
	при действии гармонической нагрузки		при действии повторной нагрузки		
	метод измерений		метод измерений		
	стробоскоп	шлейфовый осциллограф	частотометр	шлейфовый осцилогр.	
I	-	-	27,5	25,4	29,4
2	52,5-54	58,2	56,5	55,8	55,7
3	I02-I04	I02,4	-	-	I03,2
4	II0-II3	I09,5	-	-	III,2
5	I28-I42	I33,9	-	-	I33,9



Фиг. 4. Вынужденные колебания перекрестных балок в интервале действия нагрузки τ .
 ————— теоретическая кривая, -o-o-o- экспериментальная кривая.

Сравнение показывает хорошее совпадение теоретического расчета, выполненного при учете дискретной схемы [1], с результатами эксперимента (табл. I).

В ходе эксперимента был определен коэффициент внутреннего трения γ , составляющий для перекрестных балок величину 0,06—0,1.

5.2. Вынужденные колебания. Для экспериментального исследования вынужденных колебаний перекрестных балок был сконструирован вибратор, вызывающий повторную нагрузку конечной продолжительности (п. 4 настоящей статьи).

Для измерения амплитуд вынужденных колебаний применялись пьезодатчики с записью снимаемых с них электрических колебаний на шлейфовый осциллограф, катетометр и грифели (п. 3 настоящей статьи). На фиг. 3 показана схема расположения пьезодатчиков и вибратора. Для расшифровки виброграмм вынужденных колебаний определялся "коэффициент пересчета", на который следует делить ординаты записи, чтобы перейти к мерам, выражающим реальную вибрацию. "Коэффициент пересчета" определяется на основе "чувствительностей" всех элементов виброизмерительной аппаратуры.

На фиг. 4 приведены графики вынужденных колебаний — установившихся периодических колебаний в произвольном интервале времени τ , где τ — период между повторными приложениями нагрузки, определенными экспериментальным путем и теоретическим расчетом [2]. Для конкретности на графике изображены вынужденные колебания в точке приложения нагрузки (фиг. 3).

Из графика (фиг. 4) видно хорошее совпадение теоретической кривой и экспериментальной кривой вынужденных колебаний перекрестных балок при действии повторной прерывной нагрузки.

В ы в о д ы

1. Результаты экспериментального определения частот и форм свободных колебаний перекрестных балок хорошо совпадают с результатами теоретического расчета.

2. Полученные экспериментальные графики динамических перемещений перекрестных балок показали хорошее их совпадение с теоретическими расчетами.

3. Экспериментальные исследования подтвердили возможность и целесообразность применения дискретной схемы для расчета свободных и вынужденных колебаний перекрестных балок.

Л и т е р а т у р а

1. А р я с о в Г.П. Свободные колебания перекрестных балок при учете дискретной расчетной схемы. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1975, № 384.

2. А р я с о в Г.П. Вынужденные колебания перекрестных балок при действии повторной нагрузки. См. наст. сб. с. 91.

3. A r m s t r o n g J.D. The natural frequencies of grillages. "Intern. J. mech. Sci.", No. 1, 1968, pp. 43-55.

4. А р с ю т к и н А.А. Расчет вынужденных колебаний перекрытий судового корпуса. - "Судостроение", 1957, № 3.

5. Е г у п о в В.К. Качественное исследование вибрации и устойчивости плоских балочных перекрытий. - "Прикладная механика", 1957, № 3.

6. С о р о к и н Е.С. Динамика междуэтажных перекрытий. М., Стройиздат, 1941.

7. Г е в о н д я н Т.А., К и с е л е в Л.Т. Приборы для измерения и регистрации колебаний М., Машгиз, 1963.

8. И о р и ш Ю.И. Измерение вибрации. М., Машгиз, 1956.

9. М и к и ш е в Г.Н. и др. Об эффективности некоторых экспериментальных методов определения основных динамических характеристик упругих конструкций в случае близких частот. - "Исследования по теории сооружений", вып. 20, 1974, с. 112-120.

10. B i s h o p R.E.D., G l a d w e l l G.M.L. An investigation into the theory of resonance testing. "Phil. Trans.", vol. 255, series A, No. 1055, 1963.

11. T r a i l l - N a s h R.W. Experimental determination of the complete dynamical properties of two-degree of freedom model having nearly coincident natural frequencies. "Engng. Sci.", vol. 9, No. 5, 1967.

An Experimental Investigation of Free and
Forced Vibrations of Grillages

Summary

In this article a survey of an experimental investigation of free and forced vibrations of grillages is given.

A description of the experimental mounting allowing to receive massless repeated loading of final duration is presented.

The results of the experimental investigation are in good agreement with the theoretical values taking into account the discrete calculation scheme.

УДК 534+539.4;624.011

А.А. Векслер

О ДЕЙСТВИИ ПРЕРЫВНОЙ ПОВТОРНОЙ НАГРУЗКИ
НА СИСТЕМУ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ
ПРИ УЧЕТЕ СИЛ ВНУТРЕННЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В данной статье представлен алгоритм расчета колебаний системы с двумя степенями свободы при действии прерывной повторной нагрузки при учете сил внутреннего сопротивления. Периодическое решение получено методом, изложенным в [1]. Дан пример численной реализации алгоритма на ЭВМ.

I. Постановка задачи

Рассмотрим элемент строительной конструкции как систему с двумя степенями свободы (фиг. 1). Масса m_1 сосредоточена в середине пролета, а две массы m_2 расположены на опорах.

К массе m_1 прикладывается прерывная повторная нагрузка согласно графику (фиг. 2). Величина силы — P , продолжительность действия — t_0 , интервал между повторным действием нагрузки — T . Жесткость опор полагаем одинаковой и охарактеризуем ее единичным перемещением δ .

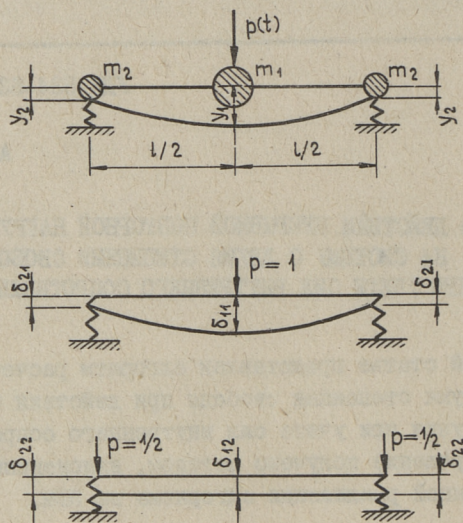
В связи с тем, что масса m_1 и нагрузка приложены в середине пролета, а масса m_2 на опорах равны, имеем симметричную систему, которую используем для перехода к системе с двумя степенями свободы. Единичные перемещения системы определим согласно фиг. 1.

$$\delta_{21} = \frac{1}{2} \delta \quad (I.1)$$

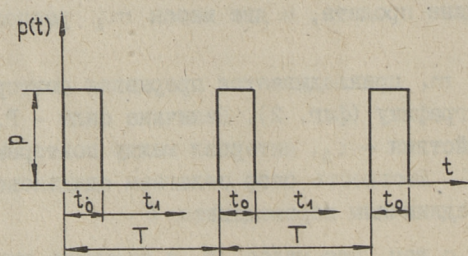
$$\delta_{11} = \delta_{21} + \frac{L^3}{48} EJ$$

$$\delta_{22} = \delta_{12} = \delta$$

где E - модуль упругости материала конструкции,
 J - момент инерции поперечного сечения балки.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В течение одного интервала колебания системы описываются системой дифференциальных уравнений

$$a_{11} \ddot{y}_1 + a_{12} \dot{y}_1 + y_1 + b_{21} \ddot{y}_2 + b_{22} \dot{y}_2 = p_1 [H(t) - H(t_1)] \quad (\text{I.2})$$

$$a_{21} \ddot{y}_1 + a_{21} \dot{y}_1 + y_2 + b_{11} \ddot{y}_2 + b_{12} \dot{y}_2 = p_2 [H(t) - H(t_1)],$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 \delta_{11}, & a_{12} &= r_1 \delta_{11}, & a_{21} &= m_1 \delta_{21}, & a_{22} &= r_1 \delta_{21}, \\ b_{11} &= m_2 \delta_{22}, & b_{12} &= r_2 \delta_{22}, & b_{21} &= m_2 \delta_{12}, & b_{22} &= r_2 \delta_{12}, & (I.3) \\ p_1 &= p \delta_{p1}, & p_2 &= p \delta_{p2}, & \delta_{p1} &= \delta_{11}, & \delta_{p2} &= \delta_{21}, \\ r_j &= 2m_j \varepsilon \quad (j = 1, 2), & \varepsilon &= k\omega, & t_1 &= t - t_0. \end{aligned}$$

Здесь ω — низшая частота системы, ε — коэффициент затухания, k — численная величина для определения коэффициента затухания, H — единичная функция Хевисайда. Нагрузка представлена в виде суперпозиции положительной $P_j H(t)$ и отрицательной $-P_j H(t_1)$ сил.

Полагаем, что время отсчитывается от момента приложения динамической нагрузки. В этом случае начальные условия при $t = 0$ имеют вид

$$Y_1 = \dot{Y}_1 = Y_2 = \dot{Y}_2 = 0. \quad (I.4)$$

2. Решение задачи

Существуют различные пути решения сформулированной задачи, из которых отметим следующие:

1. Использовать интегральное преобразование Лапласа, преобразующее систему обыкновенных дифференциальных уравнений в систему алгебраических уравнений. Решить преобразованную систему алгебраических уравнений при ограничениях, накладываемых преобразованными начальными условиями, и вернуться в пространство оригиналов.

2. Разложить нагрузку в ряд Фурье по времени и рассчитать систему на действие гармонически изменяющейся по времени нагрузки (от каждого члена ряда) с последующим суммированием всех воздействий. При типе нагрузки, представленной на фиг. 2 и имеющей разрывы первого рода, сходимость ряда Фурье будет медленной [1, 2].

3. Применить метод последовательного приложения нагрузки, при котором сперва находятся вынужденные колебания системы в интервале действия нагрузки при нулевых начальных ус-

ловиях. Затем отыскиваются свободные колебания системы в промежутке, когда нагрузка снята, при использовании в качестве начальных условий перемещений и скоростей в конце действия нагрузки. Вновь рассмотреть вынужденные колебания системы в интервале действия второй нагрузки при использовании в качестве начальных условий перемещений и скоростей в конце первого интервала и т.д. [3].

4. Рассчитать систему на совокупность воздействий последовательной постоянной силы положительной (приложенной в момент времени $t = 0$) и отрицательной (приложенной при $t = t_0$), снова положительной (приложенной при $t = T$) и отрицательной (приложенной при $t = T + t_0$) и т.д. [3].

5. Наложить условие периодичности [II], состоящее в том, что вследствие периодичности нагрузки перемещения и скорости в начале и конце каждого периода действия нагрузки будут соответственно одинаковыми.

Ниже совместно используются оба последних подхода.

В каждом из периодов представим силу $p_j(t)$ в виде суперпозиции

$$p_j(t) = p_j [H(t) - H(t_1)] \quad (j=1,2). \quad (2.1)$$

Вынужденные колебания системы (I.2), имеющие период T , определим в виде [4]

$$Y_j(t) = y_j(t) H(t) - y_j(t_1) H(t_1) \quad (j=1,2), \quad (2.2)$$

причем

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A \exp(-\delta_1 t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \exp(-\delta_2 t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + p_1 H(t), \\ y_2(t) &= A k_1 \exp(-\delta_1 t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \varkappa_1) + \\ &+ B k_2 \exp(-\delta_2 t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \varkappa_2) + p_2 H(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

а величины $y_1(t_1)$ и $y_2(t_1)$ получаются при замене в выражениях (2.3) времени t на t_1 .

Внутренние параметры системы и собственные частоты найдем из характеристического уравнения

$$c_4 \lambda^4 + c_3 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + 1 = 0, \quad (2.4)$$

где

$$c_4 = a_{11} b_{11} - a_{21} b_{21},$$

$$\begin{aligned}
 c_3 &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} - a_{21}b_{22} - a_{22}b_{21}, \\
 c_2 &= a_{11} + b_{11} + a_{12}b_{12} - a_{22}b_{21}, \\
 c_1 &= a_{12} + b_{12}.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

В общем случае уравнение (2.4) имеет четыре корня

$$\lambda_{ij} = -\delta_j \pm i\omega_j \quad (i, j = 1, 2). \tag{2.6}$$

Входящие в формулы (2.3) величины \varkappa_j и k_j ($j = 1, 2$) полностью определяются корнями λ_{ij}

$$\varkappa_j = \arctg\left(\frac{\eta_j}{\xi_j}\right), \quad k_j = \frac{-(\eta_j + \xi_j)}{\sin \varkappa_j + \cos \varkappa_j} \tag{2.7}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \eta_j &= \frac{\alpha_{1j}\beta_{2j} - \alpha_{2j}\beta_{1j}}{\beta_{1j}^2 + \beta_{2j}^2}, \\
 \xi_j &= \frac{\alpha_{1j}\beta_{1j} + \alpha_{2j}\beta_{2j}}{\beta_{1j}^2 + \beta_{2j}^2}, \\
 \alpha_{1j} &= a_{11}(\delta_j^2 - \omega_j^2) - a_{12}\delta_j + 1, \\
 \alpha_{2j} &= \omega_j(2a_{11}\delta_j - a_{12}), \\
 \beta_{1j} &= b_{21}(\delta_j^2 - \omega_j^2) - b_{22}\delta_j, \\
 \beta_{2j} &= \omega_j(2b_{21}\delta_j - b_{22}).
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Постоянные $A, B, \varphi_1, \varphi_2$ (2.3) отыщем не из начальных условий (1.4), а из условий периодичности

$$Y_j(0) = Y_j(T), \quad \dot{Y}_j(0) = \dot{Y}_j(T) \quad (j = 1, 2). \tag{2.9}$$

Подставив в (2.9) выражения (2.2), получим алгебраическую систему уравнений

$$R\bar{z} = P \tag{2.10}$$

относительно неизвестных

$$z_1 = A \cos \varphi_1, \quad z_2 = A \sin \varphi_1, \quad z_3 = B \cos \varphi_2, \quad z_4 = B \sin \varphi_2. \tag{2.11}$$

Квадратная матрица R и матрица-столбец P имеют компоненты

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= -1 + \exp(-\delta_1 T) \cos \omega_1 T - \exp(-\delta_1 T_1) \cos \omega_1 T_1, \\
 r_{12} &= -\exp(-\delta_1 T) \sin \omega_1 T + \exp(-\delta_1 T_1) \sin \omega_1 T_1, \\
 r_{13} &= -1 + \exp(-\delta_2 T) \cos \omega_2 T - \exp(-\delta_2 T_1) \cos \omega_2 T_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{14} &= -\exp(-\delta_1 T) \sin \omega_2 T + \exp(-\delta_2 T_1) \sin \omega_2 T_1, \\
r_{21} &= k_1 [-\cos \alpha_1 + \exp(-\delta_1 T) \cos(\omega_1 T + \alpha_1) - \exp(-\delta_1 T_1) \cos(\omega_1 T_1 + \alpha_1)], \\
r_{22} &= k_1 [\sin \alpha_1 - \exp(-\delta_1 T) \sin(\omega_1 T + \alpha_1) + \exp(-\delta_1 T_1) \sin(\omega_1 T_1 + \alpha_1)], \\
r_{23} &= k_2 [-\cos \alpha_2 + \exp(-\delta_2 T) \cos(\omega_2 T + \alpha_2) - \exp(-\delta_2 T_1) \cos(\omega_2 T_1 + \alpha_2)], \\
r_{24} &= k_2 [\sin \alpha_2 - \exp(-\delta_2 T) \sin(\omega_2 T + \alpha_2) + \exp(-\delta_2 T_1) \sin(\omega_2 T_1 + \alpha_2)], \\
r_{31} &= \delta_1 + \exp(-\delta_1 T) (-\delta_1 \cos \omega_1 T - \omega_1 \sin \omega_1 T) - \\
&\quad - \exp(-\delta_1 T_1) (-\delta_1 \cos \omega_1 T_1 - \omega_1 \sin \omega_1 T_1), \\
r_{32} &= \omega_1 + \exp(-\delta_1 T) (\delta_1 \sin \omega_1 T - \omega_1 \cos \omega_1 T) - \\
&\quad - \exp(-\delta_1 T_1) (\delta_1 \sin \omega_1 T_1 - \omega_1 \cos \omega_1 T_1), \\
r_{33} &= \delta_2 + \exp(-\delta_2 T) (-\delta_2 \cos \omega_2 T - \omega_2 \sin \omega_2 T) - \\
&\quad - \exp(-\delta_2 T_1) (-\delta_2 \cos \omega_2 T_1 - \omega_2 \sin \omega_2 T_1), \\
r_{34} &= \omega_2 + \exp(-\delta_2 T) (\delta_2 \sin \omega_2 T - \omega_2 \cos \omega_2 T) - \\
&\quad - \exp(-\delta_2 T_1) (\delta_2 \sin \omega_2 T_1 - \omega_2 \cos \omega_2 T_1), \\
r_{41} &= k_1 \{ \delta_1 \cos \alpha_1 + \omega_1 \sin \alpha_1 - \\
&\quad - \exp(-\delta_1 T) [\delta_1 \cos(\omega_1 T + \alpha_1) + \omega_1 \sin(\omega_1 T + \alpha_1)] + \\
&\quad + \exp(-\delta_1 T_1) [\delta_1 \cos(\omega_1 T_1 + \alpha_1) + \omega_1 \sin(\omega_1 T_1 + \alpha_1)] \}, \\
r_{42} &= k_1 \{ -\delta_1 \sin \alpha_1 - \omega_2 \cos \alpha_2 + \\
&\quad + \exp(-\delta_1 T) [\delta_1 \sin(\omega_1 T + \alpha_1) - \omega_1 \cos(\omega_1 T + \alpha_1)] - \\
&\quad - \exp(-\delta_1 T_1) [\delta_1 \sin(\omega_1 T_1 + \alpha_1) - \omega_1 \cos(\omega_1 T_1 + \alpha_1)] \}, \\
r_{43} &= k_2 \{ \delta_2 \cos \alpha_2 + \omega_2 \sin \alpha_2 - \\
&\quad - \exp(-\delta_2 T) [\delta_2 \cos(\omega_2 T + \alpha_2) + \omega_2 \sin(\omega_2 T + \alpha_2)] + \\
&\quad + \exp(-\delta_2 T_1) [\delta_2 \cos(\omega_2 T_1 + \alpha_2) + \omega_2 \sin(\omega_2 T_1 + \alpha_2)] \}, \\
r_{44} &= k_2 \{ -\delta_2 \sin \alpha_2 + \omega_2 \cos \alpha_2 + \\
&\quad + \exp(-\delta_2 T) [\delta_2 \sin(\omega_2 T + \alpha_2) + \omega_2 \cos(\omega_2 T + \alpha_2)] - \\
&\quad - \exp(-\delta_2 T_1) [\delta_2 \sin(\omega_2 T_1 + \alpha_2) + \omega_2 \cos(\omega_2 T_1 + \alpha_2)] \}, \\
P_1 &= p \delta_{p1}, \quad P_2 = p \delta_{p2}, \quad P_3 = 0, \quad P_4 = 0, \\
T_1 &= T - t_0.
\end{aligned}$$

Решив систему уравнений (2.10), найдем из (2.11) интересные нас постоянные $\varphi_1, \varphi_2, A, B$.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \operatorname{arctg} \frac{Z_2}{Z_1}, & \varphi_2 &= \operatorname{arctg} \frac{Z_4}{Z_3}, \\ A &= \frac{Z_1 + Z_2}{\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1}, & B &= \frac{Z_3 + Z_4}{\sin \varphi_2 + \cos \varphi_2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. Численный пример

Рассматриваются вынужденные колебания стальной балки (фиг. 1). Для сопоставления результатов исходные данные прием такими же, как в работе [5]

$$\begin{aligned} l &= 23 \text{ м}, & m_1 &= 9,6 \frac{\text{Тс}^2}{\text{М}}, & m_2 &= 2,0 \frac{\text{Тс}^2}{\text{М}}, \\ J &= 0,128 \text{ м}^4, & E &= 2,10^7 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}, & \delta &= 13,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{М}}{\text{Т}}, \\ p &= 20 \text{ Т}, & T &= 0,64 \text{ с}, & t_0 &= \frac{1}{8} T. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Численную величину коэффициента затухания K в (1.3) примем равной 0,02 [3].

Для численного решения уравнения (2.4) на ЭВМ "Минск-32" используем стандартную программу, базирующуюся на итерационном методе Ньютона [6].

В результате счета получим следующие значения:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1120 \frac{1}{\text{с}}, \quad \omega_1 = 5,744 \frac{1}{\text{с}}, \quad \omega_2 = 31,69 \frac{1}{\text{с}}. \quad (3.2)$$

При расчете этой же системы, но без учета сил внутреннего сопротивления, были получены следующие значения частот [5]

$$\omega_1 = 5,75 \frac{1}{\text{с}}, \quad \omega_2 = 31,5 \frac{1}{\text{с}}. \quad (3.3)$$

Можно утверждать, что частоты данной системы практически не изменяются при учете сил внутреннего сопротивления с коэффициентом затухания K , равным 0,02. Используя в формулах (2.7), (2.8) значения (3.2), имеем

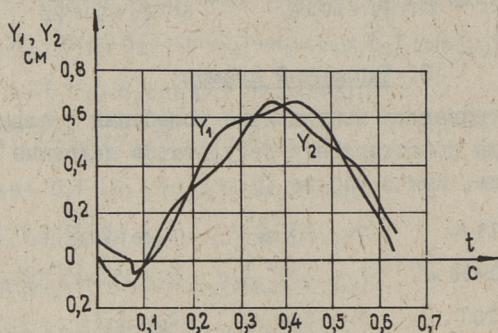
$$\kappa_1 = 0,002010, \quad \kappa_2 = 0, \quad k_1 = 0,9386, \quad k_2 = 0,8701. \quad (3.4)$$

Для решения системы уравнений (2.10) и вычисления $Y_j(t)$ (2.2) была составлена программа на языке АКИ [7]. Вычисления проведены на ЭВМ "Минск-32". Получены следующие значения постоянных (2.13):

$$A = -0,01559 \text{ м}, \quad B = -0,0002415 \text{ м},$$

$$\varphi_1 = -0,4576, \quad \varphi_2 = 0,9384.$$

Результаты вычисления $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ представлены в виде графика на фиг. 3. Наблюдается хорошее качественное и количественное согласование результатов с приведенными в [5].



Фиг. 3.

Л и т е р а т у р а

1. Л о й ц я н с к и й Л.Г., Л у р ь е А.И. Курс теоретической механики, ч. II. ОГИЗ, М.—Л., Гос. изд. тех.—теор. лит., 1948.
2. П а н о в к о Я.Г., Г у б а н о в а И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., "Наука", 1964.
3. С н и т к о Н.К. Динамика сооружений. М.—Л., Госстройиздат, 1960.
4. С т р е л к о в С.П. Введение в теорию колебаний. М., "Наука", 1964.
5. Г о л ь с т Г.К. Действие повторных ударов на систему с двумя степенями свободы. "Труды ВАТТ", 1962, № 73, с.46-61.
6. Х е м м и н г Р.В. Численные методы. М., "Наука", 1968.
7. Н е м е н м а н М.Е., Ц е г е л ь с к и й В.И., М а т ь ш е в с к а я И.М. Автокод для решения инженерных задач на машине "Минск-2". Минск, 1965.

On the Action of Periodical Impulsive Loading on
the System with Two Degrees of Freedom when Taking
into Account the Forces of Internal Damping

Summary

The paper presents the algorithm of calculation of a system with two degrees of freedom subjected to the action of periodical impulsive loading when the forces of internal damping are taken into account. The numerical example of algorithm realization on a computer is given.

УДК 39I+624.074.4.00I.2

Т.В. Лийва

О ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
 ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ СЖАТИИ

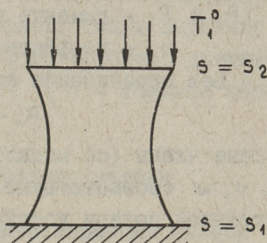
I. Введение

Рассмотрим тонкую упругую оболочку вращения отрицательной гауссовой кривизны при осевом сжатии. В качестве координат на срединной поверхности возьмем длину дуги образующей s и угол φ в окружном направлении. Пусть оболочка замкнута в окружном направлении и ограничена двумя параллелями $s = s_1$ и $s = s_2$ (фиг. 1).

Начальное напряженное состояние предполагается осесимметричным и безмоментным.

Исследование устойчивости выполнено на основании энергетического метода в геометрически нелинейной постановке в сочетании с предшествующим асимптотическим анализом линейных уравнений. При описании неосесимметричных равновесных состояний предположим, что характер деформаций, свойственный верхней критической нагрузке по линейной теории, будет влиять в какой-то степени и в начале послекритической стадии. Кроме того, как известно [1,2], у оболочек отрицательной гауссовой кривизны вмятины при потере устойчивости охватывают всю срединную поверхность, то есть число m волн по параллели велико ($m \gg 1$).

Предполагая, что по торцам оболочки обеспечиваются граничные условия (I.5), компоненты перемещений при неосесимметричной потере устойчивости u, v, w принимаем в следующем виде:



Фиг. 1.

$$u = -C_1 \bar{u}_1(s) \sin \psi \cos m\varphi + \frac{1}{8} C_2 R_1 \bar{u}_2(s) \left[\frac{1}{|R_1|} \cos 2m\varphi - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \right] \sin 2\psi + C_3 M(s), \quad (I.1)$$

$$v = C_1 \bar{v}_1(s) \cos \psi \sin m\varphi + \frac{1}{8} C_2 R_2 \bar{v}_2(s) \left[\frac{1}{R_2} \cos 2\psi + \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \sin 2m\varphi,$$

$$w = C_1 m \bar{w}_1(s) \cos \psi \cos m\varphi + C_2 m \bar{w}_2(s) \cos^2 \psi \cos^2 m\varphi + C_3 N(s).$$

Здесь C_1, C_2, C_3 - варьируемые параметры, подлежащие определению,

$$\bar{u}_1(s) = \bar{u}_2(s) = \bar{u}(s) = \left| \frac{B^3 \alpha}{R_2} \right|^{\frac{1}{2}} x(s), \quad \bar{v}_1(s) = \bar{v}_2(s) = \bar{v}(s) = \left| \frac{B}{R_2 \alpha} \right|^{\frac{1}{2}} x(s),$$

$$\bar{w}_1(s) = \bar{w}_2(s) = \bar{w}(s) = \left| \frac{R_2}{B \alpha} \right|^{\frac{1}{2}} x(s), \quad x(s) = \sin \alpha \tilde{s},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{s_2 - s_1}, \quad \tilde{s} = s - s_2, \quad |\alpha| = \frac{1}{B} \left| \frac{R_2}{R_1} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad \psi = m \int_{s_1}^s |\alpha| ds + \psi_0,$$

$B = B(s)$ - расстояние точки срединной поверхности до оси вращения;

R_1 и R_2 - главные радиусы кривизны оболочки;

ν - коэффициент Пуассона.

Без ограничения общности считаем

$$R_1 < 0, \quad R_2 > 0. \quad (I.2)$$

Первые члены (со множителем C_1) в аппроксимации (I.1) для u, v, w соответствуют линейному частному решению неосесимметричной потери устойчивости [3]. Вторые члены со множителем C_2 удовлетворяют линейным уравнениям равновесия оболочки, полученным после проектирования всех внутренних усилий оболочки на тангенциальные направления, причем член $C_2 m \bar{w}_2(s) \cos^2 \psi \cos^2 m\varphi$ отражает тенденцию оболочки выпучиваться внутрь.

Члены со множителем C_3 для u и w

$$M(s) = \frac{B}{R_2} \int_{s_1}^s \frac{R_2^4}{B_3} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) ds, \quad (I.3)$$

$$N(s) = \frac{R_2}{B} \frac{\partial B}{\partial s} M(s) + \frac{R_2^2}{B^2} \left(\nu + \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (I.4)$$

аппроксимируют осесимметричные перемещения, вызываемые осевым сжатием, в то время как все остальные члены являются неосесимметричными перемещениями, возникающими вследствие изгиба образующих оболочки.

Пусть на нижний неподвижный край оболочки ($s = s_1$) наложены условия жесткой заделки

$$\begin{aligned} u(s_1) &= 0, & w(s_1) &= 0, \\ v(s_1) &= 0, & \frac{\partial w}{\partial s}(s_1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I-5a})$$

и на ее верхний край ($s = s_2$) - следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} v(s_2) &= 0, & T_1^0(s) &= T_1(s_2), \\ \frac{\partial w}{\partial s}(s_2) &= 0, & w(s_2) - \frac{\partial B}{\partial s}(s_2) \frac{R_2(s_2)}{B(s_2)} u(s_2) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.5б})$$

которые под сжатием внешней силы

$$T_1^0 = \beta \frac{R_2}{B^2} \quad (\text{I.6})$$

допускают перемещения верхнего края оболочки в направлении ее оси вращения. Здесь β - параметр нагрузки и T_1 - внутреннее усилие.

Нормальный прогиб w в виде (I.I) нетангенциальным граничным условиям точно не удовлетворяет. Такую неувязку можно устранить интегралами типа краевого эффекта, дающими в линейной теории поправку порядка $h^{\frac{1}{2}}$ (h - толщина оболочки) [4].

2. Использование энергетического метода

В соответствии с принципом Лагранжа вариация полной энергии деформированной оболочки равна нулю в состоянии равновесия

$$\delta \mathcal{E} \equiv \delta U_1 + \delta U_2 - \delta A = 0. \quad (2.1)$$

Здесь U_1 - энергия деформации растяжения (сжатия) срединной поверхности оболочки, U_2 - энергия, возникающая вследствие деформации изгиба и A - потенциал внешних сил.

Пользуясь энергетическим методом, вариационное уравнение (2.1) можно преобразовать в следующую алгебраическую систему:

$$\begin{cases} C_1 m^8 \frac{1}{16} b_1 + C_1 C_2^2 m^8 \frac{3}{16} b_2 + C_1 C_3^2 m^4 \frac{1}{2} b_3 - C_1 C_2 m^5 (3 - \nu^2) \frac{1}{8} b_4 - \\ - C_1 C_3 m^4 \cdot 2(1 - \nu^2) b_5 + C_1 \cdot 4(1 - \nu^2) b_6 + C_1 \frac{1}{12} h^2 m^6 \frac{R_2(s_2)}{B(s_2)} M(s_2) = 0, \end{cases} \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned}
 & C_1^2 C_2 m^8 \frac{3}{16} b_2 - C_1^2 m^5 \frac{1}{16} (3 - \nu^2) b_4 + C_2^3 m^8 \frac{5}{256} b_7 + C_2 C_3^2 m^4 \frac{3}{8} b_3 - \\
 & - C_2^2 m^5 \frac{3}{32} (5 - 2\nu^2) b_4 - C_2 C_3 m^4 \frac{3}{2} (1 - \nu^2) b_5 - C_3^2 m \frac{1}{2} b_9 + \\
 & + C_2 m^2 \frac{1}{8} b_{11} + C_2 \frac{1}{6} h^2 m^6 b_{12} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
 & C_1^2 C_3 m^4 \frac{1}{2} b_3 - C_1^2 m^4 (1 - \nu^2) b_5 + C_2^2 C_3 m^4 \frac{3}{8} b_3 - C_2^2 m^4 \frac{3}{4} (1 - \nu^2) b_5 + \\
 & + C_3^3 \frac{2}{(s_2 - s_1)} b_8 - C_2 C_3 m b_9 + C_3^2 \cdot 6 \frac{(1 - \nu^2)}{(s_2 - s_1)} b_{10} + \\
 & + (C_3 - \frac{\beta}{Eh}) 4 \frac{(1 - \nu^2)}{(s_2 - s_1)} \cdot \frac{R_2(s_2)}{B(s_2)} M(s_2) = 0,
 \end{aligned} \tag{2.2B}$$

где

$$b_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\bar{w}^4(s)}{B^3} \left(\frac{9}{2} \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{R_2}{R_1} + \frac{9}{2} \right) ds, \quad b_2 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\bar{w}^4(s)}{B^3} \left(\frac{5}{2} \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{R_2}{R_1} + \frac{5}{2} \right) ds,$$

$$b_3 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\bar{w}^2(s)}{B} N'^2 \left(1 - 3 \frac{R_2}{R_1} \right) ds, \quad b_4 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\bar{w}^3(s)}{B} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1^2} \right) ds,$$

$$b_5 = \int_{s_1}^{s_2} \bar{w}^2(s) \frac{R_2^2}{R_1 B^3} ds, \quad b_6 = \int_{s_1}^{s_2} \alpha^2(s) \frac{B^4 |\alpha| R_1^2}{R_2 (R_2 - R_1)^2} ds,$$

$$b_7 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\bar{w}^4(s)}{B^3} \left(\frac{21}{2} \frac{R_2^2}{R_1^2} - 5 \frac{R_2}{R_1} + \frac{21}{2} \right) ds, \quad b_8 = \int_{s_1}^{s_2} B N'^4(s) ds,$$

$$b_9 = \int_{s_1}^{s_2} B \bar{w}(s) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) N'^2(s) ds, \quad b_{10} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{R_2}{B} N'^2(s) ds,$$

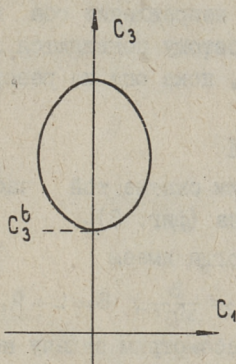
$$b_{11} = \int_{s_1}^{s_2} B \bar{w}^2(s) \left[\frac{3 - 2\nu^2}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{2 - \nu^2}{R_2^2} + \frac{1}{(s_2 - s_1)} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 \right] ds.$$

$$b_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\bar{w}^2(s)}{B^3} \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 2 \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) ds, \quad b_{13} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\bar{w}^2(s)}{B^3} \left(\frac{3}{2} \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{R_2}{R_1} + \frac{3}{2} \right) ds.$$

Из-за соображений выбора функций $M(s)$ и $N(s)$ множитель C_3 пропорционален параметру нагрузки β , то есть

$$C_3 = \frac{\beta}{EH}. \quad (2.3)$$

Двумерная зависимость на C_1, C_3 -плоскости по уравнению (2.2a) представлена на фиг. 2, где его тривиальное решение представлено как линия, совпадающая с ординатной осью. Здесь



Фиг. 2.

$$C_3^b = \frac{48(1-\nu^2)b_5 + h^2 m^6 b_{12}}{24(1-\nu^2)m^4 b_5}. \quad (2.4)$$

Точка $C_3 = C_3^b$ является точкой разветвления и формула для ее вычисления (2.4) совпадает точно с формулой верхней критической точки потери устойчивости по линейной теории [3].

Характер поведения оболочки в ее послекритической стадии зависит от знака второй вариации ее полной энергии $\delta^2 \mathcal{E}$ [5].

В упрощенной постановке задачи, где множитель C_3 берется в качестве параметра нагрузки и не подчиняется варьированию, начальное послекритическое поведение оболочки определяется следующей приближенной формулой:

$$\det |S^2 \mathcal{E}| \approx C_1^2 m^{10} \frac{1}{8} b_4 \cdot f(m). \quad (2.5)$$

Здесь большой интерес представляет знак функции

$$f(m) = \frac{1}{8} b_{11} + \frac{1}{8} m^4 h^2 b_{13} - 3(1-\nu^2)m^{-2} b_6 - \frac{1}{16} h^2 m^4 b_{12} - \frac{1}{8} (3-\nu^2) \frac{b_4^2}{b_1}, \quad (2.6)$$

так как всегда $C_1^2 m^{10} \frac{1}{8} b_4 > 0$.

Функция (2.6) достигает свое экстремальное значение в точке $m = M$, где

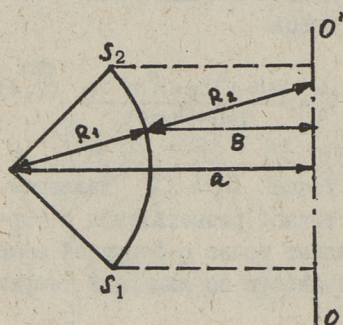
$$M = h^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{2(3-\nu^2)^2 b_4^2 - 2b_4 b_{41}}{8b_1 b_{13} - 3b_4 b_{12}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.7)$$

Следует добавить, что алгоритм, разработанный в настоящей статье, не работает в случае пологих оболочек вращения.

Отметим также, что при растяжении оболочек отрицательной гауссовой кривизны в осевом направлении оба внутренние усилия T_1 и T_2 растягивающие; поэтому появляются лишь осесимметричные деформации оболочки, пока она не разорвется.

3. Сжатие тора

В качестве примера рассмотрим сжатие той части тора, где гауссова кривизна отрицательна (фиг. 3).



Фиг.3.

Тогда имеем

$$R_2 = \frac{B}{\sin s}, \quad B = L + R_1 \sin s.$$

Рассмотрим задачу на отрезке

$$\frac{\pi}{4} \leq s \leq \frac{3\pi}{4}$$

при граничных условиях (I.5) и возьмем следующие значения параметров:

$$h = 0,003; \quad R_1 = -1.$$

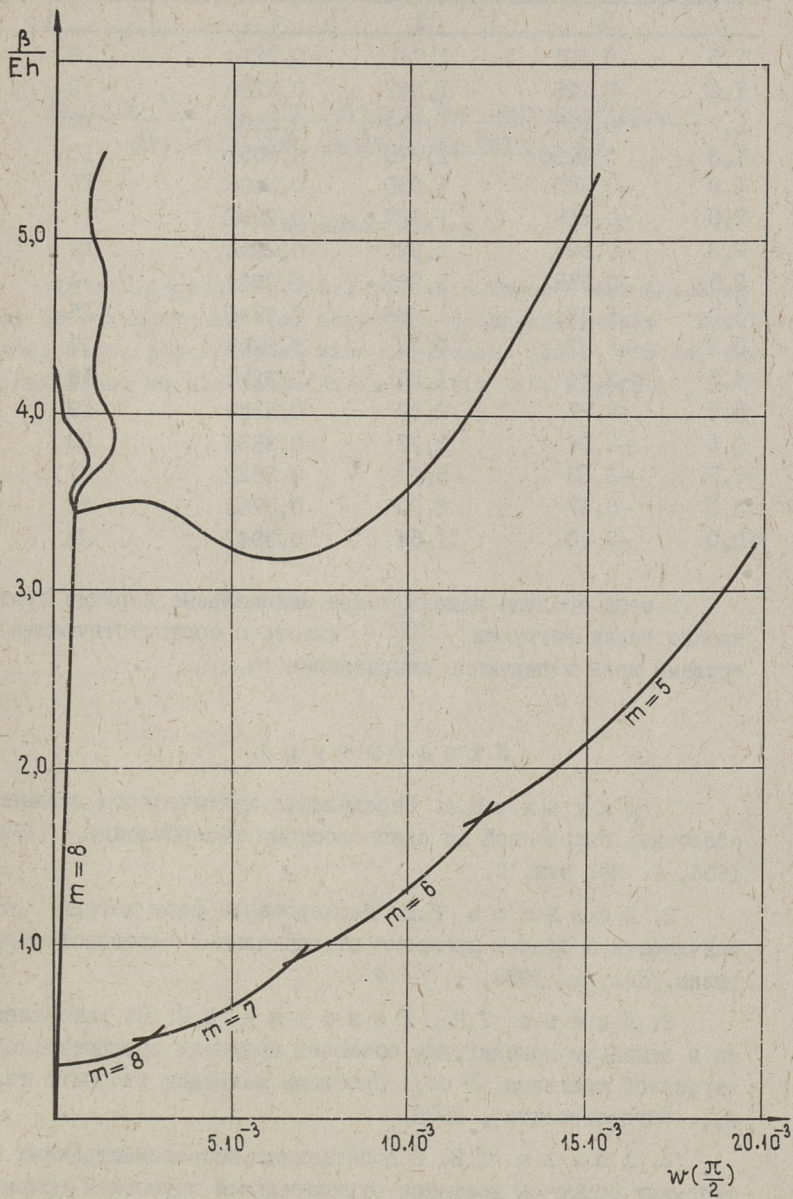
На фиг. 4 представлена зависимость между параметром нагрузки

$$\frac{\beta}{Eh} \quad \text{и прогибом } w \quad \text{при} \\ L = 1,5 \quad \text{на параллели } s = \frac{\pi}{2}.$$

При изменении геометрии тора в диапазоне $1,1 \leq L \leq 1,0$ функция (2.6) не имеет экстремальных значений и может быть определена отрицательно лишь при $m = 2$. В таблице приводятся основные численные результаты:

Т а б л и ц а

L	f(2)	f(3)	$\frac{\beta_{\min}}{Eh}$	m_*
I	2	3	4	5
I,1	0,720	I,336	0,7085 10^{-3}	4
I,2	0,503	I,535	0,4692	5
I,3	0,423	I,54I	0,3963	6
I,4	0,367	I,630	0,3564	7



Фиг. 4.

1	2	3	4	5
1,5	0,301	1,746	0,3314	8
1,6	0,225	1,847	0,3180	9
1,7	0,137	1,924	0,3103	10
1,8	0,0290	1,970	0,3051	10
1,9	-0,089	1,990	0,3000	11
2,0	-0,218	1,987	0,2992	11
2,2	-0,504	1,925	0,2955	12
2,5	-0,955	1,766	0,2964	14
3,0	-1,68	1,488	0,2990	15
3,5	-2,32	1,33	0,3059	16
4,5	-3,24	1,53	0,3202	18
5,5	-3,77	2,37	0,3358	19
6,5	-3,94	3,77	0,3536	20
7,5	-3,83	5,68	0,3622	21
8,5	-3,47	8,00	0,3763	22
10,0	-2,80	11,54	0,3942	23

В этой таблице заданы также минимальные верхние критические точки нагрузки $\frac{\beta_{min}}{Eh}$ вместе с соответствующими m_* числами волн в окружном направлении m_* .

Л и т е р а т у р а

1. А л у м я э Н.А. Определение критического давления оболочки, очерченной по однополосному гиперболоиду. ПИММ, 1956, т. 20, вып. 2.

2. П о л я к о в Н.Н. Исследование форм потери устойчивости оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. Инж. ж. 1956, т. 5, № 3.

3. Л и й в а Т.В., Т о в с т и к П.Е. Об устойчивости в линейном приближении оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. В сб.: Проблемы механики твердого тела. Л., "Судостроение", 1970.

4. Л и й в а Т.В. О собственных неосесимметричных колебаниях оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1970, серия А, № 293.

5. В о л ь м и р А.С. О критериях устойчивости оболочек. Расчет пространственных конструкций, т. IX. М., 1964.

Über die Theorie der Knickung der Umdrehungsschale
der negativen Gaußschiefe beim Druck

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wird die Theorie der Knickung der Umdrehungsschale der negativen Gaußschiefe beim Druck betrachtet. Als Beispiel wird der Druck jenes Teils der Ringfläche, wo die Gaußschiefe negativ ist, angeführt.

УДК 621.926.88

А.Н. Тюманок

ОБ ЭНЕРГИИ, СООБЩАЕМОЙ ОБРАБАТЫВАЕМОМУ
МАТЕРИАЛУ В МНОГОСТУПЕНЧАТОМ РОТОРНОМ
ПОМОЛЬНОМ АГРЕГАТЕ

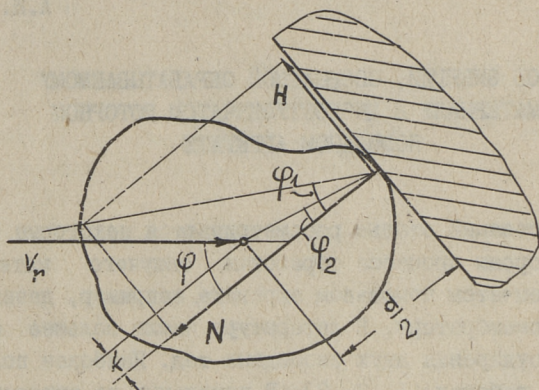
В настоящей статье рассматриваются некоторые энергетические стороны процесса обработки сыпучего материала в многоступенчатом помольном агрегате, например, дезинтеграторе или дисмембраторе. В литературе нашло большее освещение явление соударения двух свободных тел. Наиболее полно это сделано в работах [1, 2, 3]. В помольных же агрегатах рассматриваемого типа происходит соударение потока материала с вращающимся мелющим телом, которое прикреплено к приводу, состоящему из вала и диска. Однако продолжительность соударения [4] имеет порядок $\Delta t = 10^{-5} - 10^{-8}$ с, в течение которого мелющее тело можно считать свободным. Далее можно убедиться, что в первом приближении соударение самого потока можно рассматривать как соударение индивидуальных частиц. Например, при производительности агрегата 10 т/час, числе оборотов роторов 1500 об/мин и количестве мелющих тел на круге обработки, равном 10, однократная обрабатываемая порция материала будет составлять 0,56 г. Если она распределяется на рабочей площади 10 см^2 , то при плотности материала $2,5 \text{ г/см}^3$ толщина слоя равна 0,2 мм, то есть она одного порядка с размерами частиц обрабатываемого материала, например, в случае строительных известково-песчаных смесей. Следовательно, в этом случае процесс соударения можно рассматривать как соударение двух свободных тел — частицы и мелющего тела.

Процесс соударения начинается с первого контакта тел, и в зависимости от его характера по частице начинает распространяться волна напряжения сжатия или сжатия и сдвига.

По этому признаку процесс обработки можно разделить на два вида. В точке контакта частицы и мелющего тела имеем мгновенный коэффициент трения скольжения f и трения качения k . Первый из них определяет угол трения скольжения

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = f.$$

второй определяет смещение нормальной реакции (фиг. 1).



Фиг. 1.

Если провести из точки контакта в центр массы частицы прямую, то она образует с нормалью угол φ_2

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2k}{d},$$

который условно можно назвать углом трения качения. Если поступательно движущаяся частица соударяется с рабочей поверхностью мелющего тела, с относительной скоростью V_r под углом φ , то возможны различные начальные режимы движения:

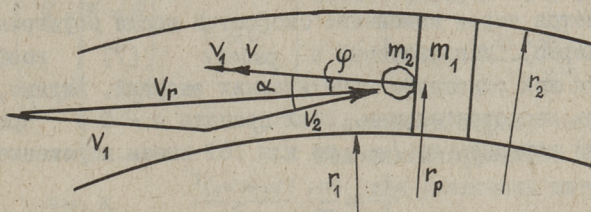
1) при $\varphi < \varphi_1, \varphi < \varphi_2$ соударение происходит без скольжения и качения и возбуждаются интенсивные нормальные усилия;

2) при $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ или $\varphi_1 > \varphi > \varphi_2$ возникают интенсивные нормальные и касательные напряжения. В первом случае происходит скольжение без качения, во втором — качение частицы без скольжения;

3) при $\varphi > \varphi_1, \varphi > \varphi_2$ будет иметь место скольжение с поворотом частицы. В этом случае возникают волны сжатия и сдвига и измельчение происходит главным образом под дей-

ствием сдвига и среза верхних слоев частицы.

Все возможные случаи контакта при соударении двух твердых недеформируемых тел подробно изучены в работах В.Ю.Плявникса [5,6]. В роторных помольных агрегатах реализуются же главным образом первый и третий режимы соударения деформируемых тел.



Фиг. 2.

Энергетическую расчетную эффективность помольного агрегата целесообразно определять, предполагая, что удары являются прямыми (первый случай). В таком случае при соударении двух тел (фиг. 2) после вполне неупругого удара их общая скорость v получается из теоремы о сохранении количества движения

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Учитывая, что масса частицы $m_2 \ll m_1$, имеем

$$v = v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2 \cos \alpha \quad (2)$$

Импульсы, сообщаемые мелшему телу и частице, равны. Их радиальная и тангенциальная составляющие определяются по следующим формулам:

$$S_r = m_2 v_2 \sin \alpha, \quad (3)$$

$$S_\tau = m_2 (v_2 \cos \alpha + v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2 \cos \alpha),$$

$$S = m_2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha - 2 \frac{m_2}{m_1} v_2 \cos \alpha (v_1 + v_2 \cos \alpha)}.$$

В то же время работа внутренних сил

$$A = \frac{m_1 m_2 (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (4)$$

распределяется между телами неодинаково.

Работа, затрачиваемая на мелющее тело (A_I) на частицу (A_2)

$$A_1 = \frac{m_1(\bar{v}_1 - \bar{v})^2}{2}, \quad A_2 = \frac{m_2(\bar{v}_2 - \bar{v})^2}{2} \quad (5)$$

и их отношение

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{m_2(\bar{v}_2 - \bar{v})^2}{m_1(\bar{v}_1 - \bar{v})^2}, \quad (6)$$

выражается через изменение скоростей после соударения (теорема Карно). Используемый в работе [7] коэффициент влияния как отношение кинетических энергий, видимо, следует считать несостоятельным. Если принять $\alpha = 0$ и пренебречь членами порядка m_2/m_1 , то для (6) имеем выражение

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{m_1(v_1 + v_2)^2}{m_2 v_2^2}.$$

Однако работа, выполняемая внутренними силами в частице и мелющем теле, не равна и не пропорциональна работе (5). Доля выполняемой работы определяется физическими свойствами их материала. Рассмотрим процессы, происходящие при соударении упругих материалов. В зоне контакта частицы и мелющего тела возникают интенсивные напряжения. В первом приближении можно принять, что в зоне контакта на начальном этапе начинает распространяться плоская волна напряжения (фиг. 3).

Из закона сохранения импульса и массы получаем скорость зоны контакта

$$u = \frac{\rho_1 c_1 v_1 - \rho_2 c_2 v_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}, \quad (7)$$

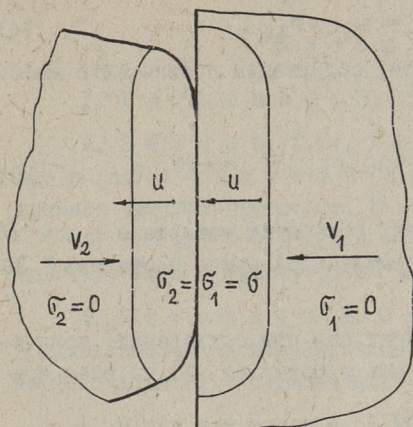
где ρ_1, ρ_2 — плотность мелющего тела и частицы,
 c_1, c_2 — скорость продольной упругой волны,
 v_1, v_2 — скорость движения частицы и мелющего тела.

Напряжения в зоне контакта равны

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\rho_1 c_1 \cdot \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} (v_1 + v_2). \quad (8)$$

Работа на единицу объема при деформировании упругого тела выражается через напряжения

$$A_{11} = \frac{\sigma_1^2}{2E_1}, \quad A_{21} = \frac{\sigma_2^2}{2E_2}. \quad (9)$$



Фиг. 3.

Отсюда можно получить отношение работ внутренних сил в мелющем теле и частице

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{E_1}{E_2} \quad (10)$$

Выполняя те же операции с использованием теории Герца, вместо формулы (10) получаем

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)} \quad (11)$$

Результаты хорошо совпадают, так как коэффициент Пуассона ν для различных материалов отличается незначительно.

Для повышения эффективности помола целесообразно увеличить долю работы внутренних сил в частице A_{21} , так как, во-первых, именно величина работы A_{21} определяет разрушение и, во-вторых, работа внутренних сил почти полностью превращается в тепло. Чем больше будет доля работы A_{21} , тем больше будет повышаться температура обрабатываемого материала и тепло будет выноситься самим материалом без лишнего нагревания ротора.

Энергия, сообщаемая обрабатываемому материалу, получается суммированием правых частей второй формулы (5) по отдельным кругам обработки. Удельная энергия, сообщаемая единице массы обрабатываемого материала, равна

$$N_* = \frac{1}{m_2} \sum_{i=1}^n A_i \quad (12)$$

или

$$N_* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (v_{1i}^2 + v_{2i}^2 + 2v_{1i} \cdot v_{2i} \cdot \cos \alpha_i (1 - \frac{m_2}{m_1})), \quad (13)$$

где второй индекс (i) является порядковым номером круга обработки и

$$v_{2i} = \omega_i r_{pi}$$

Остальные обозначения приведены на фиг. 2. На первом круге обработки $v_{11} = 0$.

Формула (13) упрощается, если принять

$$\alpha = 0, \quad v_{1i} = \omega_{i-1} \cdot r_{2,i-1} \quad (14)$$

и пренебречь последним членом, содержащим соотношение масс. В таком случае

$$N_* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\omega_i r_{pi} + \omega_{i-1} r_{2,i-1})^2 \text{ Нм/кг}. \quad (15)$$

При выражении удельной энергии обработки материала в квт ч/т, вместо коэффициента 1/2 в формуле (15) нужно поставить 1,39 x 10⁻⁴.

Удельная работа внутренних сил при соударении получается суммированием обоих членов в формулах (5) по всем кругам обработки

$$N_{*2} = \frac{1}{m_2} \sum_{i=1}^n (A_{1i} + A_{2i}). \quad (16)$$

Но при упрощениях, сделанных в (13), приходим опять к формуле (15). Формулы (16) и (12) отличаются членами, имеющими порядок m_2/m_1 .

В ы в о д ы

1. В роторных помольных агрегатах, работающих по принципу соударения мелющего тела и свободно летящего обрабатываемого материала, возможно осуществление силового воздействия двоякого характера: преимущественно сжатия и растяжения или сдвига и среза.

2. Для увеличения эффективности соударения масса мелющего тела должна значительно превышать массу однократно обрабатываемой порции материала. Модуль упругости мелющего тела должен по возможности превышать модуль упругости обрабатываемого материала.

3. Выведена формула удельной энергии, сообщаемой измельчаемому материалу в роторном помольном агрегате — дезинтеграторе, в котором измельчение происходит при соударении материала о мелющее тело.

Л и т е р а т у р а

1. Г о л ь д ш м и т В. Удар. М., Строительство 1965.
2. Б а т у е в Г.С., Г о л у б к о в Ю.В., Е ф р е м о в А.К., Ф е д о с о в А.А. Инженерные методы исследования ударных процессов. М., "Машиностроение", 1969.
3. К и л ь ч е в с к и й Н.А. Теория соударения твердых тел. Киев "Наукова думка", 1969.
4. А с т о ф ь е в В. О теоретическом определении продолжительности соударения элементов ударных механизмов. Инст. горного дела им. А.А.Скочинского. М., 1965.
5. П л я в н и е к с В.Ю. Расчет косоугольного удара о препятствие. В сб.: Вопросы динамики и прочности, вып. 18, Рига, 1969.
6. П л я в н и е к с В.Ю. Косое соударение двух тел. В сб.: Вопросы динамики и прочности, вып. 19, Рига, 1969.
7. H i n t J.A. Zur tribomechanischen Aktivierung von Festkörpern unter Anwendung hoher mechanischer Energien. "Silikattechnik" 21, 1970, 4.

А. Туманок

On Energy Received by the Material Treated in the Multistep Rotor Mill

Summary

The paper deals with the energy relation in the grinding machine where crushing takes place when a free flying particle collides with the grinding body. In grinding machines of this type two kinds of processing can be realised: by straight or inclined collision. A formula for determining the specific energy given to the treated material by grinding is derived.

УДК 621.926.88

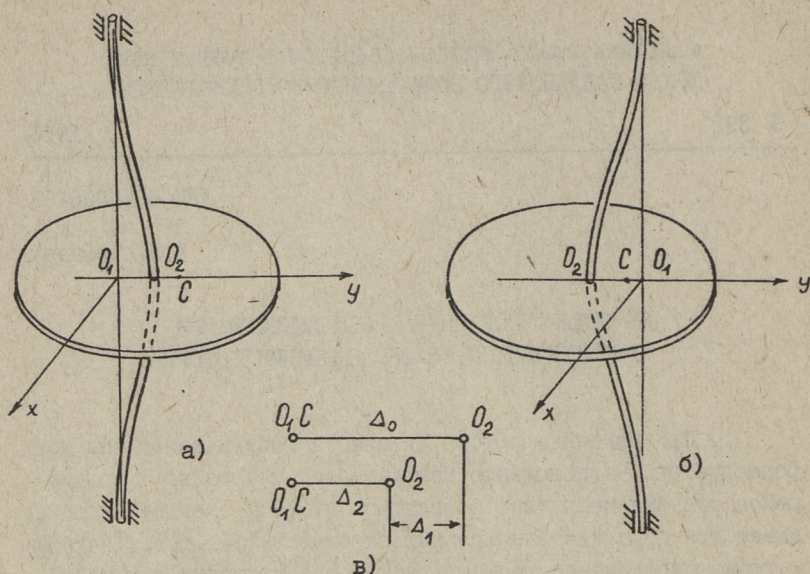
А.Н. Тюманок

ОБ ОСТАТОЧНОЙ НЕУРАВНОВЕШЕННОСТИ ПРИ АВТОМАТИЧЕСКОМ УРАВНОВЕШИВАНИИ РОТОРОВ

1. При вращении ротора (диска) с гибким валом вал деформируется. Расположение центра массы ротора во вращающейся системе координат зависит от угловой скорости вала и имеет два принципиально разных положения (фиг. 1). Точка O_1 — точка пересечения геометрической оси вращения с диском;

O_2 — центр крепления вала на диске; C — положение центра массы. При сверхкритической угловой скорости происходит самоуравновешивание роторов, и при достаточно больших угловых скоростях центр массы C совпадает с геометрическим центром вращения O (фиг. 1в). Это явление хорошо известно, изучено и освещено во многих источниках, например [1, 2].

При вращении ротора со сверхкритической угловой скоростью вал ротора имеет изогнутую форму и вращается в стационарно деформированном состоянии. В таких случаях целесообразно применение автоматических уравновешивающих устройств [3–10]. В результате перемещения дополнительных грузов или жидкости центр массы ротора смещается к точке O_2 . Это означает, что в движущейся системе координат точки O_2 и C теоретически будут совпадать с точкой O_1 . Практически же полного совпадения центра массы C и точки O_2 не будет. Остаточная неуравновешенность недостаточно освещена в литературе и является объектом изучения в данной работе. Рассмотрены три основных уравновешивающих устройства: с подвижными грузами, кольцами и жидкостью. Для сравнения устройств введен коэффициент эффективности уравновешивающего устройства. Первоначальная эксцентricность Δ_0 ротора (фиг. 1в) после срабатывания уравновешивающего устройства



Фиг. 1. Расположение характерных точек O_1 , O_2 и C во вращающейся системе координат при:

- а) докритической угловой скорости,
- б) вышекритической угловой скорости,
- в) изменение расположения точки O_2 после срабатывания балансирующего устройства.

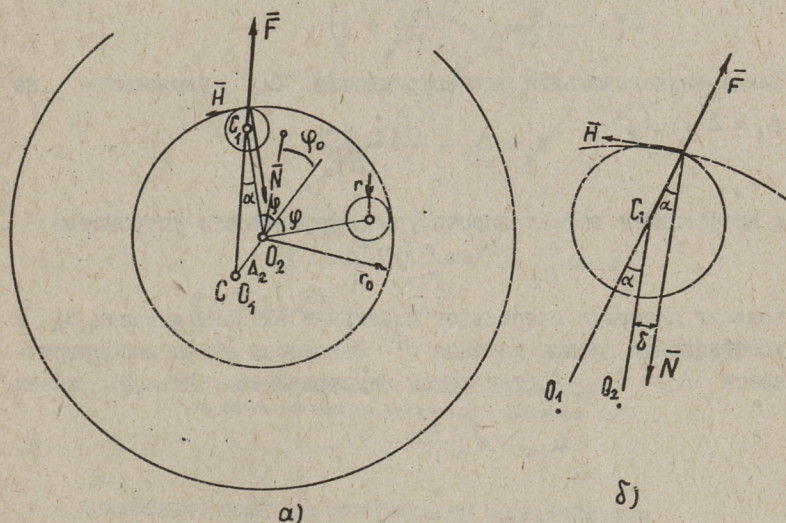
уменьшается на Δ_1 и остается $\Delta_2 = \Delta_0 - \Delta_1$. Величина Δ_1 характеризует эффективность устройства, а Δ_2 — остаточную неуравновешенность. Коэффициентом эффективности уравновешивающего устройства примем соотношение

$$k = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

2. Уравновешивающее устройство Сирли [2] включает несколько шариков или роликов, свободно перекатывающихся в круглом канале (фиг. 2). При вращении неуравновешенного ротора ролики перекатываются в наиболее отдаленную по отношению к точке O_1 часть полости и тем уравновешивают ротор. Перекатыванию роликов препятствует трение качения ролика о стенку полости. В равновесном состоянии сила инерции будет проходить через точку приложения нормальной реакции. В результате этого сила инерции образует с отрезком O_2C_1 малый угол α

$$\sin \alpha \approx \alpha = \frac{\delta}{r}, \quad (I)$$

где δ - коэффициент трения качения.



Фиг. 2. Расположение подвижных грузов и действующих сил во время вращения ротора:
 а) общая схема расположения,
 б) силы, действующие на один груз.

Эксцентрисность вала определяется из треугольника O, C, O_2

$$\frac{\sin \alpha}{\Delta_2} = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{r_0 - r}. \quad (2)$$

С учетом малости угла α имеем

$$\Delta_2 = \frac{\delta(r_0 - r)}{r \sin \varphi}. \quad (3)$$

С другой стороны, Δ_2 определяется положением центра масс

$$\Delta_2 = \frac{m_0 \Delta_0 - 2m_1(r_0 - r) \cos \varphi}{m + 2m_1}, \quad (3')$$

где m_0, m_1 - массы ротора и ролика.

Если бы трение качения отсутствовало ($\delta = 0$), ролики заняли бы положение $\varphi = \varphi_0$, фиг. 2а.

$$\cos \varphi_0 = \frac{m_0 \Delta_0}{2m_1(r_0 - r)} \quad (4)$$

и полностью уравновесили бы ротор ($\Delta_2 = 0$).

Из уравнений (3') и (4) определим $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, которое выражается, с учетом его малости,

$$\Delta\varphi = \frac{\delta}{r \sin^2 \varphi_0} \left(\frac{m_0}{2m_1} + 1 \right).$$

Тогда первоначальная эксцентricность Δ_0 уменьшится на

$$\Delta_1 = \Delta_0 - \Delta_2 \quad \Delta_1 = \Delta_0 - \frac{\delta(r_0 - r)}{r \sin \varphi_0}$$

и коэффициент эффективности уравновешивающего устройства

$$k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\Delta_0 r \sin \varphi_0}{\delta(r_0 - r)} - 1$$

зависит в первую очередь от начальной эксцентricности Δ_0 и коэффициента трения качения δ . Некоторая малая эксцентricность $\Delta_0 = \Delta_{1*}$ становится неустранимой. Из (3) имеем

$$\Delta_{1*} = \delta \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right). \quad (5)$$

3. Уравновешивающее устройство Бакшина [3] (фиг.3) отличается от устройства Сирли тем, что вместо роликов в нем имеются массивные тела, перекатывающиеся на малых роликах или шариках. Если пренебречь массой малых роликов, то сила для преодоления трения качения будет

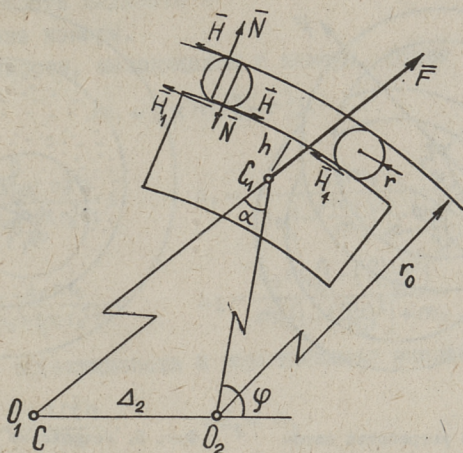
$$2N = 2 \frac{\delta N}{\rho}. \quad (6)$$

Из треугольника $O_1 C_1 O_2$ видно, что связь между силой инерции и углом α , при котором уравновешивающий груз еще находится в равновесии, будет следующей

$$2N_1(r_0 - 2r) = F \Delta_2 \sin(\varphi - \alpha).$$

Учитывая (6) и подставляя $2N = F \cos \alpha$, после упрощения находим остаточный эксцентricитет:

$$\Delta_2 = \frac{\delta(r_0 - 2r)}{r \sin \varphi}. \quad (7)$$



Фиг. 3. Схема расположения груз и действующих сил в автоматическом регуляторе Бакшина [3] .

Аналогично получим коэффициент эффективности

$$k_2 = \frac{\Delta_2 r \sin \varphi}{\delta(r_0 - 2r)} - 1 \quad (8)$$

и неустранимую эксцентricность

$$\Delta_{2*} = \delta \left(\frac{r_0}{r} - 2 \right). \quad (9)$$

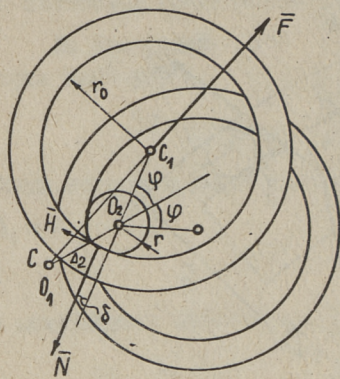
Если сравнить устройство Бакшина [3] с устройством Сирли, то ввиду того что радиусы роликов в устройстве Бакшина r_B и Сирли r_C различны, $r_B \ll r_C$. Поэтому

$$K_1 > K_2 \text{ и } \Delta_{1*} < \Delta_{2*},$$

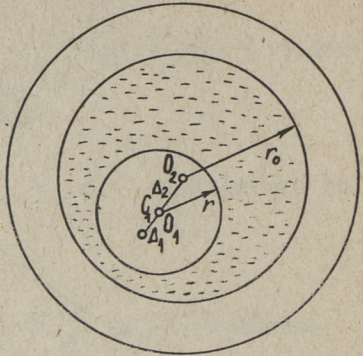
т.е. устройство Сирли более эффективно.

4. Уравновешивающее устройство Герхарда [9] состоит из двух колец r_0 , которые опираются на вал с радиусом r (фиг. 4). Аналогично предыдущим рассуждениям об условиях равновесия имеем

$$\sin \alpha = \frac{\delta}{r_0}, \quad \Delta_2 = \frac{\delta(r_0 - r)}{r_0 \sin \varphi}. \quad (10)$$



Фиг. 4. Схема устройства автоматического уравновешивания Герхарда [9].



Фиг. 5. Устройство автоматического уравновешивания Леблана. Полость заполнена частично жидкостью.

Коэффициент эффективности и неустранимая эксцентricность будут соответственно

$$k_3 = \frac{\Delta_0 r_0 \sin \varphi_0}{\delta(r_0 - r)} - 1, \quad (II)$$

$$\Delta_{3*} = \delta \left(1 - \frac{r}{r_0}\right). \quad (I2)$$

Так как радиусы кольца r_0 и вала r удовлетворяют условию $r_0 > r$, то сравнивая коэффициент k_3 с остальными коэффициентами эффективности k_1 и k_2 , можно заметить, что он больше остальных т.к. в числителе в (I2) стоит радиус кольца r_0 , а неустранимая неуравновешенность Δ_{3*} будет меньше Δ_{1*} и Δ_{2*} . Отсюда следует, что среди сравнимых устройств Герхарда будет наиболее эффективным.

5. Уравновешивающее устройство Леблана [2] состоит из круговой полости, частично заполненной жидкостью. В таком случае Δ_1 и Δ_2 связаны соотношениями (фиг. 5)

$$m_0 \Delta_1 = \rho \pi r_0^2 h \Delta_2 \quad (I3)$$

$$\Delta_0 = \Delta_1 + \Delta_2 \quad (I4)$$

где
 ρ - плотность жидкости и
 h - ширина камеры.

Масса жидкости, находящаяся в камере, будет

$$m_1 = \rho \pi h (r_0^2 - r^2). \quad (I5)$$

Тогда имеем

$$\Delta_1 = \frac{\Delta_0 \rho \pi r_0^2 h}{m_0 + \rho \pi r_0^2 h}; \quad \Delta_1 = \frac{\Delta_0 m_1}{m_0 \left[1 - \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^2 \right] + m_1} \quad (I6)$$

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_0 m_0}{m_0 + \rho \pi r_0^2 h}; \quad \Delta_2 = \frac{\Delta_0 m_0 \left[1 - \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^2 \right]}{m_0 \left[1 - \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^2 \right] + m_1} \quad (I7)$$

коэффициент эффективности и неустранимая эксцентricность будут

$$k_4 = \frac{\rho \pi r_0^2 h}{m_0}; \quad \Delta_{4*} = \Delta_2. \quad (I8)$$

Из этой формулы видно, что коэффициент эффективности устройства Леблана весьма низок. Действительно, k_4 имеет порядок соотношения масс, в то время как $k_3 \div \frac{r_0}{\delta}$, где δ - коэффициент трения качения, величина малая. Следует также отметить, что остаточная неуравновешенность Δ_2 и уменьшение эксцентricности по формулам (I6) и (I7) не зависят от радиуса полости r .

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. Во всех рассмотренных устройствах автоматического уравновешивания всегда имеется остаточная неуравновешенность.

2. Мерой эффективности уравновешивающего устройства можно принять соотношение уменьшения эксцентricности к остаточной эксцентricности.

3. Наиболее хорошо уравновешивают ротор устройства маятникового типа, в котором происходит движение кольца или маятника вокруг вала со сравнительно малым радиусом.

Л и т е р а т у р а

1. Филиппов А.П. Колебание механических систем. Киев, "Наукова думка", 1965.

2. Ден - Гартон Дж. Механические колебания. М., Физматгиз, 1960.

3. Бакшин А. Устройство для автоматической балансировки. Авт. св. СССР № I6299I, 1964.

4. L a r g e n E.M. Automatic balancing device. USA Patent No 2.882.746 1959.

5. V l a r c K. Domestic appliance. USA Patent No. 2.405.404 1946.

6. D y e r L. Domestic appliance. USA Patent No. 2.375.635 1945.

7. C l a r k K. Domestic appliance. USA Patent No. 2.549.756 1951.

8. G o o d r i c h A., J o h n s o n H. Automatic balancer for rotating masses. USA Patent No. 3.696.688 1972.

9. G e r h a r d t A.H. Balancing means for centrifugal machines. USA Patent No. 2.420.592 1947.

10. S t e e n b e c k H. Verfahren und Vorrichtung zur Bestimmung dñnamischer Unwucht. DBR Patent Nr. 1138960 1963.

A. Туманок

On Residual Unbalance by Using Dynamic
Automatic Balancing Devices

Summary

When rotating a rotor with a flexible shaft with an angular velocity above the critical one there takes place selfbalancing (Fig. 1). With a considerably great angular velocity the centre of the mass of the rotor will stay on the geometrical axis in point O_1 and the shaft rotates in the permanently deformed form. In this case it is efficient to use an automatic balancing device though it eliminates the unbalance only partially.

The unbalance is determined by eccentricity Δ . The initial value of the eccentricity $\Delta = \Delta_0$ is decreased during the balancing from Δ_0 by Δ_1 to Δ_2 . The residual eccentricity Δ_2 is governed by rolling friction of the device elements.

The ratio of Δ_1 to Δ_2 has been taken as a measure of the balancing efficiency of the device denoted by K . There is determined residual unbalancing eccentricity Δ_x .

In the paper the efficiency of different balancing devices has been compared.



Таллинский политехнический институт. Труды ТПИ № 393.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. Сборник статей 1
Редактор Г. Гольст. Технический редактор Л. Лоопер.

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 11 ноября 1975 года.

Подписано к печати 12 мая 1976 года. Бумага 60x90/16.

Печ. л. 9,25+0,5 прил. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 350. МВ-01219.

Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскля, 2/9. Зак. № 548

Цена 70 коп.

Цена 70 коп.