TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
PUBLICATIONS FROM THE TALLINN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Seeria A nr. 24 1948

О. СИЛЬДЕ

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ГИЗ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“

51

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
PUBLICATIONS FROM THE TALLINN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Seeria A nr. 24 1948

О. СИЛЬДЕ

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ГИЗ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“
ТАРТУ, 1948

Две теоремы теории чисел.

Теорема I. $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} (n-\nu)^{n} = \frac{(n+1)!}{2}$,

при любом натуральном числе n.

Доказательство.

Известно, что (Вандермонд)

$$\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{m} (a_k - a_1)(a_k - a_2) \dots (a_k - a_{k-1})$$

и

$$\text{(II)} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} = (a_1 + \dots + a_n) \prod_{k=2}^{n} (a_k - a_1) \dots (a_k - a_{k-1}).$$

Доказательство (I) см. напр. Л. Я. Окунев, Высшая алгебра, 1944 г. изд., стр. 36.

Для доказательства (II) напишем равенство:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}} = \prod_{i=1}^{n} (z - a_i),$$

верность которого можно доказать при помощи (I) непосредственным вычислением. Если разложить определитель в числителе с левой стороны по последней строке, а с правой стороны раскрыть скобки, то, имея в виду, что коэффициенты при z^{n-1} с обеих сторон должны быть равны, получим:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}} = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

из чего легко получается (II).

В определителе (II) выберем элементы следующим образом:

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $\dots$, $a_n = n$ (при $n > 1$), а величину определителя в этом случае обозначим буквою D, так что

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{n-2} & 1^n \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} & 2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-2} & n^n \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение элемента n^n в определителе обозначим буквою V; это дополнение является определителем Вандермонда, так что

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \dots & (n-1)^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{n-1} (k-1)! = 1!\,2!\dots(n-2)!$$

(как следует из равенства (I)).

Алгебраическое дополнение какого-нибудь элемента $(n-\nu)^n$ (где $\nu = 1, 2, \dots, n-1$) последнего столбца определителя есть также определитель Вандермонда и по равенству (I) может быть выражено следующим образом:

$$(-1)^{\nu}\, 1!\, 2! \ldots (n-\nu-2)!\, \frac{(n-\nu)!}{1} \cdot \frac{(n-\nu+1)!}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)!}{\nu}$$

или

$$(-1)^{\nu} \cdot V \cdot \frac{(n-\nu)(n-\nu+1)\ldots(n-1)}{\nu!}$$

или

$$(-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} V.$$

Следовательно, при разложении определителя D по последнему столбцу получаем:

$$D = \sum_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu)^{n} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} V =$$

$$= V \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} (n-\nu)^{n}.$$

С другой стороны, из равенства (II) следует, что

$$D = (1+2+\ldots+n) \cdot 1!\, 2! \ldots (n-2)!\, (n-1)! =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} V (n-1)! = \frac{(n+1)!}{2} V.$$

Сравнивая оба выражения для D, получим:

$$V \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} (n-\nu)^{n} = \frac{(n+1)!}{2} V.$$

Если $n > 1$, то $V \neq 0$, и, разделив последнее равенство на V, получим то, что и требовалось доказать.

Если $n = 1$, то правильность равенства доказывается непосредственным вычислением.

Теорема II. Коэффициенты $S_{\lambda}^{(k)}$ факториального полинома $z^{[k]}$, определённые равенством

$$z^{[k]} = \prod_{\nu=0}^{k-1} (z-\nu) = z^{k} - S_{1}^{(k)} z^{k-1} + S_{2}^{(k)} z^{k-2} - \ldots - (-1)^{k} S_{k-1}^{(k)} z,$$

выражаются через числа $P^{(k)}_{k-\lambda}$, данные формулой

$$P^{(k)}_{k-\lambda} = \frac{1}{(\lambda-1)!} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} (-1)^{\nu} \binom{\lambda-1}{\nu} (\lambda-\nu)^{k-1},$$

в виде определителей:

$$S^{(k)}_{\lambda} = \begin{vmatrix} P_1^{(k-\lambda+1)} & P_2^{(k-\lambda+2)} & \ldots & P^{(k-1)}_{\lambda-1} & P^{(k)}_{\lambda} \\ 1 & P_1^{(k-\lambda+2)} & \ldots & P^{(k-1)}_{\lambda-2} & P^{(k)}_{\lambda-1} \\ 0 & 1 & \ldots & P^{(k-1)}_{\lambda-3} & P^{(k)}_{\lambda-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & P^{(k)}_{1} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

Из равенства (I) следует, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \ldots & 1^{m-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & m & m^2 & \ldots & m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{\nu=1}^{m-1} \nu!\,.$$

Алгебраическое дополнение элемента последнего столбца $t_{n-\nu}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \ldots & 1^{n-2} & t_1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-2} & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n^2 & \ldots & n^{n-2} & t_n \end{vmatrix}$$

равняется

$$(-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \ldots & 1^{n-2} \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \ldots & (n-1)^{n-2} \end{vmatrix}.$$

(Ср. соответствующие выводы в п. I.)

Следовательно:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{\lambda-2} & 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{\lambda-2} & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{\lambda-2} & \lambda^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1^{\lambda-2} \\ 1 & 2 & \dots & 2^{\lambda-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda-1 & \dots & (\lambda-1)^{\lambda-2} \end{vmatrix} \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} (-1)^\nu \binom{\lambda-1}{\nu} (\lambda-\nu)^{k-1}.$$

Из этого, имея в виду определение чисел $P_i^{(k)}$, ясно, что

$$(\lambda-1)!\, P_{k-\lambda}^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{\lambda-2} & 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{\lambda-2} & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{\lambda-2} & \lambda^{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{\lambda-2} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{\lambda-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda-1 & (\lambda-1)^2 & \dots & (\lambda-1)^{\lambda-2} \end{vmatrix}}.$$

Из этого равенства следует, что

$$P_0^{(l)} = 1, \text{ но } P_{-1}^{(l)} = P_{-2}^{(l)} = \dots = 0.$$

Непосредственное вычисление даёт, что $P_{l-1}^{(l)} = 1$.

Из матрицы этих чисел

$$\begin{pmatrix} P_0^{(1)} & P_1^{(2)} & \dots & P_{k-1}^{(k)} \\ P_{-1}^{(1)} & P_0^{(2)} & \dots & P_{k-2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{-k+2}^{(1)} & P_{-k+3}^{(2)} & \dots & P_1^{(k)} \end{pmatrix},$$

заключающей $k-1$ строк и k столбцов, можно путём вычёркивания $(k-\lambda)$-го столбца получить определитель

$$\begin{vmatrix} P_0^{(1)} & P_1^{(2)} & \dots & P_{k-\lambda-2}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-1}^{(k)} \\ P_{-1}^{(1)} & P_0^{(2)} & \dots & P_{k-\lambda-3}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda-1}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{-k+2}^{(1)} & P_{-k+3}^{(2)} & \dots & P_{-\lambda}^{(k-\lambda-1)} & P_{-\lambda+2}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_1^{(k)} \end{vmatrix},$$

который сокращённо обозначаем символом $\Delta_\lambda^{(k)}$. Все элементы первой строки этого определителя имеют общий множитель $\frac{1}{0!}$, второй строки $\frac{1}{1!}$, третьей строки $\frac{1}{2!}$, и т. д., последней строки $\frac{1}{(k-2)!}$, так что можно вывести и написать перед определителем коэффициент

$$\frac{1}{1!\,2!\,3!\ldots(k-2)!}.$$

Тогда элементами определителя будут суммы, которые заключаются в выражениях для $P_i^{(k)}$. В первой строке все эти элементы одночлены, именно 1^0, 1^1, $1^2, \ldots,$ $1^{k-\lambda-2}$, $1^{k-\lambda}, \ldots,$ 1^{k-1}, а во второй строке двучлены: $2^0-\binom{1}{1}\,1^0$, $2^1-\binom{1}{1}\,1^1, \ldots,$ $2^{k-\lambda-2}-\binom{1}{1}1^{k-\lambda-2}$, $2^{k-\lambda}-\binom{1}{1}\,1^{k-\lambda}, \ldots,$ $2^{k-1}-\binom{1}{1}\,1^{k-1}$; но эти двучлены можно сделать одночленами, если к ним прибавить соответствующие элементы первой строки, помноженные на $\binom{1}{1}$, после чего элементы второй строки будут равны числам 1, 2^1, $2^2, \ldots,$ $2^{k-\lambda-2}$, $2^{k-\lambda}, \ldots,$ 2^{k-1}. Элементы третьей строки имеют вид $3^m-\binom{2}{1}\,2^m+\binom{2}{2}\,1^m$. Если к ним прибавить соответствующие, $\binom{2}{1}$ раза взятые элементы второй строки и вычесть $\binom{2}{2}$ раза взятые элементы первой строки, то элементы третьей строки будут одночленами, а именно: 3^0, $3^1, \ldots,$ $3^{k-\lambda-2}$, $3^{k-\lambda}, \ldots,$ 3^{k-1}. Поступая таким же образом последовательно со всеми строками, т. е. прибавляя или вычитая одночленные элементы предшествующих строк, взятых с подходящими множителями, можно $\Delta_\lambda^{(k)}$ представить в следующем виде:

$$\Delta_\lambda^{(k)}=\frac{1}{1!\,2!\ldots(k-2!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \ldots 1^{k-\lambda-2} & 1^{k-\lambda} & \ldots 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots 2^{k-\lambda-2} & 2^{k-\lambda} & \ldots 2^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \ldots (k-1)^{k-\lambda-2} & (k-1)^{k-\lambda} & \ldots (k-1)^{k-1} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, как можно доказать при помощи равенства (I):

$$z^{[k]}=z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \ldots 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots 2^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \ldots (k-1)^{k-1} \\ 1 & z & z^2 & \ldots z^{k-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \ldots 1^{k-2} \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots 2^{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \ldots (k-1)^{k-2} \end{vmatrix}$$

или

$$z^{[k]} = \frac{z}{1!\,2!\,3!\dots(k-2)!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots\, 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots\, 2^{k-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \dots\, (k-1)^{k-1} \\ 1 & z & z^2 & \dots\, z^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k-1} (-1)^{\lambda} \Delta_{\lambda}^{(k)} z^{k-\lambda}.$$

Последнее выражение получается, если разложить определитель по последней строке.

Сравнивая последнее выражение с разложением $z^{[k]}$ по степеням z в теореме, можем сделать вывод, что

$$\Delta_{\lambda}^{(k)} = S_{\lambda}^{(k)}.$$

Следовательно:

$$S_{\lambda}^{(k)} = \begin{vmatrix} P_0^{(1)} & P_1^{(2)} & \dots & P_{k-\lambda-2}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-1}^{(k)} \\ P_{-1}^{(1)} & P_0^{(2)} & \dots & P_{k-\lambda-3}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda-1}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-2}^{(k)} \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ P_{-k+2}^{(1)} & P_{-k+3}^{(2)} & \dots & P_{-\lambda}^{(k-\lambda-1)} & P_{-k+2}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_1^{(k)} \end{vmatrix};$$

принимая в расчёт значения $P_i^{(k)}$ при $i = 0$ и $i < 0$, можем предыдущее равенство написать в следующем виде:

$$S_{\lambda}^{(k)} = \begin{vmatrix} 1 & P_1^{(2)} & P_2^{(3)} & \dots & P_{k-\lambda-2}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-2}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-2}^{(k-1)} & P_{k-1}^{(k)} \\ 0 & 1 & P_1^{(3)} & \dots & P_{k-\lambda-3}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda-1}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-3}^{(k-1)} & P_{k-2}^{(k)} \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & P_2^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{\lambda}^{(k-1)} & P_{\lambda+1}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_1^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{\lambda-1}^{(k-1)} & P_{\lambda}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & P_{\lambda-2}^{(k-1)} & P_{\lambda-1}^{(k)} \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & P_1^{(k)} \end{vmatrix},$$

откуда, пользуясь известными теоремами из теории определителей, получаем для $S_{\lambda}^{(k)}$ данное в теореме выражение.

Этим теорема II доказана.

Доказанные выше положения сообщил автору действительный член Академии Наук Эстонской ССР проф. Ю. Ю. Нут, получивший эти соотношения при исследовании топологической структуры сетей.

Vastutav toimetaja A. Humal.

Tehniline toimetaja H. Kohu.

Ladumisele antud 14. IV 48. Trükkimisele antud 24. VII 48. Paberi kaust 67×95 1/16. Trükipoognaid 5/8. Autoripoognaid 0,33. Arvestuspoognaid 0,33. MB 04350. Laotihedus trpg. 31 200. Tiraaž 800. Trükikoja tellimus nr. 772.

Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi 4.

Hind rbl. 1.—

Rbl. 1.—