TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOLI TOIMETUSED
PUBLICATIONS FROM THE TECHNICAL UNIVERSITY OF ESTONIA
AT TALLINN
Series A № 5 (February 1939)

Expansionistische Dynamik

I

KORPUSKULARE PUNKTDYNAMIK FÜR EINEN STRENG-EUKLIDISCHEN RAUM

VON

J. NUUT

TALLINN

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOLI TOIMETUSED
PUBLICATIONS FROM THE TECHNICAL UNIVERSITY OF ESTONIA AT TALLINN
Series A № 5 (February 1939)

Expansionistische Dynamik

I

KORPUSKULARE PUNKTDYNAMIK FÜR EINEN STRENG-EUKLIDISCHEN RAUM

VON

J. NUUT

TALLINN

Publications from the Technical University of Estonia at Tallinn, Series A № 5, February 1939.

K. Mattieseni trükikoda o.-ü., Tartu, 1939.

Korpuskulare Punktdynamik für einen streng-euklidischen Raum.

§ 1. **Grundbegriffe.** Man denke sich einen euklidischen Raum E_3 als dreidimensionale Lobatschewski'sche Grenzsphäre in eine vierdimensionale hyperbolische Raum-Zeit-Welt L_4 eingebettet[1]). Die Gleichung des absoluten Gebildes des L_4 laute

$$F_{xx} = c^2 x_0^2 - \sum_{\beta=1}^{4} x_\beta^2 = 0\,, \tag{1}$$

mit $c = 3 \cdot 10^{10}$ [cm sec^{-1}]; x_0 habe hier die Dimension [sec], x_β die Dimension [cm]. Sind dann s_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ drei Parameter von der Dimension [cm], $s^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} s_\alpha^2$, so kann man dem E_3 solche Lagen geben, dass seine Parametergleichung lautet

$$x_\alpha = \frac{2\, s_\alpha}{c^{-2}\, x_0^{-2}\, s^2 + 1 + e^{2\lambda}} \tag{2}$$

$$cx_0 - x_4 = \frac{2\, cx_0}{c^{-2}\, x^{-2}\, s^2 + 1 + e^{2\lambda}}\,,$$

wobei λ eine verschiedener Werte fähige reelle reine Zahl bedeutet, die die Lage dieses E_3 im L_4 endgültig festlegt. Die Parameter s_α sind kartesische Koordinaten des betreffenden Punktes im E_3. Nach Elimination der s_α aus (2) nimmt die Gleichung des E_3 die Gestalt an

$$F_{xx} - e^{2\lambda}\,(cx_0 - x_4)^2 = 0\,. \tag{3}$$

---

1) Die Angaben des § 1 sind vom Verfasser ausführlich entwickelt in der Abhandlung „*Ansätze zu einer expansionistischen Kinematik*", Publ. de l'Obs. Astron. de l'Université de Tartu, XXVIII No 4, 1935. Die Formeln (1) bis (3) werden in der vorliegenden „Dynamik" explizite nicht verwendet.

Der Berührungspunkt U: $(x_\alpha = 0,\ x_4 = cx_0)$ des E_3 mit dem absoluten Gebilde (1) ist der einzige unendlich-ferne Punkt des E_3.

Eine jede Gerade durch U im L_4 möge eine Zeitgerade heissen; diese Zeitgeraden sind also Lobatschewski'sche Parallelen. Jede Zeitgerade schneidet den E_3 orthogonal. U und demnach auch jede Zeitgerade ist unabhängig von λ. Einer Änderung von λ entspricht eine „Verschiebung" des E_3 im L_4 längs einer beliebigen Zeitgeraden, u. zw. gehören zu zwei verschiedenen Werten von λ untereinander kongruente Distanzen der zugehörigen Lagen der E_3, — die Distanz wird nämlich $|(\lambda_2 - \lambda_1)c|$. Werden Punkte, die auf ein und derselben Zeitgeraden liegen, einander zugeordnet, so bedeutet die Verschiebung des E_3 eine Ähnlichkeitstransformation, wobei das Ähnlichkeitszentrum ganz beliebig bleibt. Der Vergrösserungsfaktor beim Übergang von λ_1 zu λ_2 wird $e^{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Man denke sich nun den zeitlichen Ablauf des Weltgeschehens darin bestehend, dass λ eine lineare Funktion der Zeit t ist, dabei mit wachsendem t abnimmt. Setzt man dementsprechend

$$\lambda = -\sigma t + \lambda_0, \tag{4}$$

so ergibt sich als Wert des Vergrösserungsfaktors $e^{\lambda_0 - \lambda} = e^{\sigma t}$. Es handelt sich also um eine Verschiebung in derjenigen Richtung, in der die Zeitgeraden divergieren; die Nichtumkehrbarkeit der Zeit ist damit implizite vorgegeben.

Man definiere nun ein Inertialsystem von Beobachtern im Ruhezustand (ruhendes Inertialsystem) als ein solches, in welchem jeder Beobachter im sich verschiebenden E_3 an seine ihm zukommende Zeitgerade gebunden ist. Eine nicht zu diesem Inertialsystem gehörige Korpuskel wird demnach ihre Zeitgeraden ändern.

Wählt man einen beliebigen Beobachter des Inertialsystems zum Koordinatenursprung, so werden die Koordinaten eines beliebigen anderen zu demselben Inertialsystem gehörigen Beobachters mittels

$$s_\alpha = s_{0\alpha}\, e^{\sigma t}$$

für den Zeitpunkt t bestimmt, wenn $s_{0\alpha}$ seine Koordinaten im Anfangsmoment $t_0 = 0$ bedeuten. Es wird demnach

$$\dot{s}_\alpha = \sigma s_\alpha,\ \dot{s}_\alpha - \sigma s_\alpha = 0$$

(durch Punkte soll stets die Differentiation nach t symbolisiert werden). Gehört die Korpuskel mit den Koordinaten s_α aber nicht zum Inertialsystem, so wird die Differenz

$$\dot{s}_\alpha - \sigma s_\alpha = v_\alpha \tag{5}$$

im allgemeinen von 0 verschieden sein. Diese Grösse v_α erweist sich als invariant gegenüber einem Ursprungswechsel im Inertialsystem. Der euklidische Vektor $\mathfrak{v}$: (v_α) soll die Eigengeschwindigkeit der Korpuskel gegenüber dem Inertialsystem heissen. Das Inertialsystem selbst besteht also aus denjenigen Beobachtern, deren Eigengeschwindigkeit verschwindet.

Die Relation (5) bildet das Fundament der „expansionistischen" Kinematik und Dynamik. Die formal-mathematischen Begriffsbildungen, aus denen sie abgeleitet wurde, haben neben ihrem heuristischen Wert hauptsächlich diejenige Bedeutung, dass sie die logische Widerspruchslosigkeit des auf (5) aufzubauenden Systems sichern.

Fasst man die Rotverschiebung in den extragalaktischen Nebeln als Konsequenz von (5) auf, so ergibt sich (mit einer Unsicherheit von ca. 20% :)

$$\sigma = 1{,}6 \cdot 10^{-17} \ [\mathrm{sec}^{-1}].$$

Der reziproke Wert τ von σ wird demnach etwa

$$\tau = \sigma^{-1} = 6{,}2 \cdot 10^{16} \ [\mathrm{sec}].$$

τ liefert eine natürliche Zeiteinheit für die expansionistische Mechanik, während c die natürliche Geschwindigkeitseinheit darstellt.

Es ist manchmal von Nutzen

$$\gamma = \sigma c = 4{,}8 \cdot 10^{-7} \ [\mathrm{cm\ sec}^{-2}]$$

einzuführen; γ bestimmt den Verschiebungskoeffizienten des E_3 in der Zeitrichtung.

Besitzt eine Korpuskel die Eigengeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und befindet sie sich für $t_0 = 0$ im Ursprung, so wird der Ort für den Moment t aus (5) mittels Integration zu

$$s_\alpha = v_\alpha \, \tau (e^{\sigma t} - 1)$$

gefunden. Bezeichnet man $\tau(e^{\sigma t} - 1)$, was die Dimension [sec] hat, mittels T, so kann man in diesem Falle schreiben

$$s_\alpha = v_\alpha \, T. \tag{6}$$

Wir wollen T als „kinematische Milne-Zeit" bezeichnen [2]).

Ist $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor der Korpuskel, $|\mathfrak{r}| = \varrho$, bedeutet ferner v_ϱ die Projektion der Eigengeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf den Ortsvektor, so ergibt sich mit Hilfe von $\varrho^2 = \Sigma s_\alpha^2$ aus (5):

$$\dot{\varrho} = v_\varrho + \sigma \varrho . \tag{7}$$

Zur endgültigen Festlegung der expansionistischen Kinematik bedarf man noch eines Postulats für die Addition der Eigengeschwindigkeiten, oder, was damit gleichbedeutend ist, eines Transformationsgesetzes für den Übergang zu einem neuen Inertialsystem. Wählt man hierfür

$$\left.\begin{aligned} s_\alpha &= s'_\alpha + k_\alpha (\operatorname{ch} \omega - 1) \sum_{\beta=1}^{3} k_\beta s'_\beta + k_\alpha \cdot \operatorname{sh} \omega \cdot c T' \\ c\, T &= \operatorname{sh} \omega \cdot \sum_{\beta=1}^{3} k_\beta s'_\beta + \operatorname{ch} \omega \cdot c T' , \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wobei ω durch $v = |\mathfrak{v}| = c \operatorname{th} \omega$ bestimmt ist, wenn $\mathfrak{v}$ die Eigengeschwindigkeit des bewegten (gestrichenen) Systems in bezug

---

[2]) Der formal-mathematische Inhalt dieser Betrachtungen deckt sich mit denjenigen, die auf etwas abweichende Weise von E. A. Milne entwickelt worden sind (E. A. Milne, „*Kinematics, Dynamics and the Scale of Time*", I—III, Proc. Roy. Soc., A 158, 159, 1937). Aus Hinweisen im Text der genannten tiefgehenden Untersuchungen und einer brieflichen Mitteilung ihres Verfassers an mich geht hervor, dass auch gleichzeitige Arbeiten von Leontovski (Leningrad) auf derselben mathematischen Grundlage beruhen.

In der inhaltlichen Auffassung und Deutung der mathematischen Relationen besteht bei mir ein gewisser Unterschied gegenüber Milne. Der englische Forscher operiert in scharfsinniger Weise mit zwei verschiedenen Zeitskalen, einer „dynamischen" τ-Skala und einer „kinematischen" t-Skala, wobei die Transformation

$$\tau = t_0 \log (t\, t_0^{-1}) + t_0$$

gilt, wenn t_0 das „kinematische" Alter des Universums bedeutet. Schreibt man hierin t für τ, T für t und endlich σ für t_0^{-1}, so ergibt sich sofort

$$T = \sigma^{-1} (e^{\sigma t} - 1).$$

Es ist demnach T die „kinematische" Milne-Zeit, t die „dynamische" τ-Zeit. Während nun bei Milne die dualistische Zeitauffassung weiterhin auf-

auf das ruhende System bedeutet und k_α die Richtungskosinus von $\mathfrak{v}$ sind, so hat man die expansionistisch verallgemeinerte Lorentz-Transformation für Koordinatenachsen, die im Moment $t = 0$ koinzidieren. Das Additionsgesetz für die Eigengeschwindigkeiten wird dann mit dem Gesetz der Geschwindigkeitenaddition der speziellen Relativitätstheorie identisch. Der „bewegte" Beobachter hat hierbei mit einem vergrösserten Expansionskoeffizienten

$$\sigma' = \sigma \operatorname{ch} \omega \tag{9}$$

zu operieren, — ein Umstand, der zur bekannten Zeitdilatation und Längenkontraktion hinzukommt. Es zeigt sich aber, dass $\sigma t = \sigma' t'$ wird [3]), wenn t' die Zeitangabe des „bewegten" Ursprungs und t die Zeit an demjenigen Ort des ruhenden Systems ist, mit welchem der bewegte Ursprung gerade koinzidiert. Unter diesen Voraussetzungen gilt also die wichtige Relation

$$e^{\sigma t} = e^{\sigma' t'}. \tag{10}$$

Das Additionsgesetz wird übersichtlich, wenn man jedem $\mathfrak{v}$ einen tangierenden hyperbolischen Vektor in der den E_3 berührenden hyperbolischen dreidimensionalen Ebene L_3 adjungiert, dessen Länge $l = c\omega$ ist, mit $|\mathfrak{v}| = c \operatorname{th} \omega$. Dieser adjungierte Vektor ist die Projektion von $\mathfrak{v}$ auf L_3 aus U mittels der Zeitgeraden, vorausgesetzt, dass der Ursprung von $\mathfrak{v}$ im Berührungspunkt von L_3 und E_3 liegt. Die Geschwindigkeitsaddition ist dann gleichbedeutend mit der hyperbolischen Addition der adjungierten Vektoren; sie ist im allgemeinen nicht kommutativ.

Die Komponenten (orthogonale Projektionen) des adjungierten hyperbolischen Vektors ω sind durch $v_\alpha = c \operatorname{th} \omega_\alpha$ bestimmt; es gilt $\operatorname{th}^2 \omega = \sum_{\alpha=1}^{3} \operatorname{th}^2 \omega_\alpha$.

---

recht erhalten wird, betrachte ich T bloss als eine Abkürzung formalen Charakters und verwende nur t als Zeit im eigentlichen Sinne.

Es dürften wohl sämtliche Expansionstheorien mathematisch ineinander transformierbar sein. Welcher Deutung man den Vorzug gibt, wird davon abhängig, was man als „einfachste" Darstellung ansieht, wobei natürlich experimentell prüfbare Konsequenzen massgebend sind.

[3]) Vgl. *„Ansätze zu einer expansionistischen Kinematik"* § 10.

§ 2. **Impuls und Eigenenergie.** Sämtliche Beziehungen der expansionistischen Mechanik haben im Grenzfall $\sigma \to 0$ (verschwindende Expansion) in die geläufigen relativistischen überzugehen, weil die Transformationsgruppe (8) dann in die gewöhnliche Lorentz-Gruppe übergeht.

Wir modifizieren zunächst die Begriffe Impuls und Energie der Relativitätstheorie so, dass sie bloss durch die Eigengeschwindigkeit definiert werden. Bedeutet der Parameter m die „Ruhemasse" der Korpuskel (Eigengeschwindigkeit gleich 0) und $M = m \operatorname{ch} \omega$ die „bewegte Masse" (Eigengeschwindigkeit $\mathfrak{v}$, $|\mathfrak{v}| = v = c \operatorname{th} \omega$), so bezeichnen wir als Impulsvektor $\mathfrak{p} : (p_\alpha)$, $|\mathfrak{p}| = p$

$$p_\alpha = M v_\alpha = m c \operatorname{ch} \omega \operatorname{th} \omega_\alpha , \qquad (11)$$

und als Eigenenergie den positiven Skalar

$$E = M c^2 = m c^2 \operatorname{ch} \omega . \qquad (12)$$

Die bekannte Minkowski'sche Auffassung interpretiert das Quadrupel $(ip_\alpha, \frac{E}{c})$ als einen vierdimensionalen Impuls-Energie-Vektor in der Raum-Zeit-Welt, was zu eleganten einheitlichen Darstellungen unter Verschmelzung von Raum und Zeit führt. Man kann jedoch ebensogut E als Betrag eines euklidisch-vierdimensionalen Vektors (cp_α, mc^2) auffassen. Nennt man $mc^2 = E_0$ die Ruheenergie der Korpuskel, so ist nach (11) und (12) bekanntlich

$$\Sigma c^2 p_\alpha^2 + E_0^2 = E^2, \text{ resp. } c^2 p^2 + E_0^2 = E^2 , \qquad (13)$$

was bloss ein anderer Ausdruck für die Identität

$$\operatorname{sh}^2 \omega + 1 = \operatorname{ch}^2 \omega$$

ist. Bei der zweiten Auffassung geht allerdings die Kovarianz im üblichen Sinne verloren; dafür sind aber die Komponenten cp_α, E_0 von E reell.

Aus (13) folgt

$$E \dot{E} = c^2 \Sigma p_\alpha \dot{p}_\alpha ,$$

d. h.

$$\dot{E} = c^2 \frac{\Sigma p_\alpha \dot{p}_\alpha}{M c^2} = \Sigma \dot{p}_\alpha \frac{M v_\alpha}{M} = \Sigma \dot{p}_\alpha v_\alpha . \qquad (14)$$

Photone sind Korpuskel von verschwindender Ruhemasse, dennoch aber endlichem Impuls; dies ist nur dann möglich, wenn $\operatorname{th}\omega = 1$, also $v = c$ ist. Aus (13) resultiert für Photone

$$E = cp, \quad p = \frac{E}{c}.$$

Setzt man nach Planck $E = h\nu$, wobei $h = 6{,}55 . 10^{-27}$ [g cm sec^{-1}] und ν die Frequenz bedeutet, so folgt, wie bekannt:

$$p = \frac{h\nu}{c}, \; p_\alpha = \frac{h\nu}{c} k_\alpha. \tag{15}$$

Die Zweckmässigkeit dieser Verallgemeinerungen auf Photone ist durch die Compton'schen Versuche erwiesen.

§ 3. **Skalarer Potentialbegriff** [4]). Verfährt man nach Newton'schem Muster, so werden Bewegungsänderungen durch „Kräfte" resp. „Kraftfelder" zu erklären sein, welche die Derivierte des Impulsvektors bestimmen, ohne dass die Metrik im E_3 durch das Feld in Mitleidenschaft gezogen erscheint. Das Feld bekommt dann den etwas mystisch anmutenden Charakter eines dem L_4 zusätzlich aufgeprägten Zustandes, ohne dass dieser Zustand irgendwie geometrisch fassbar wird, — etwas analoges dem früher so geläufigen imponderabilen Fluidum. Trotz dieser für den modernen Stand-

---

[4]) E. A. Milne hat in den vorhin genannten Arbeiten eine „kinematisch" begründete Dynamik entwickelt, wobei er in eleganter Weise mit der dualistischen Zeitauffassung operiert und die notwendige Anpassung an die Ideen von Mach betont. Milne gibt ferner eine Lorentz-invariante Umformung des Newton'schen Gravitationsgesetzes („*The Inverse Square Law of Gravitation*" I—III, Proc. Roy. Soc., A 156, 160, — 1936, 1937) und gelangt zu einer Aufrechterhaltung des Trägheitsgesetzes („*The Acceleration-Formula for a Substratum and the Principle of Inertia*", Quart. Jour. Math., 8 No 29, 1937).

Die von mir im Text gegebenen Entwickelungen lehnen sich an den klassischen Standpunkt an und bedingen u. a. eine Modifizierung des Trägheitsgesetzes, sobald es sich um Erscheinungen kosmischen Massstabes handelt. Die Zeitauffassung ist dementsprechend einheitlich; dem Moment der „Schöpfung" wird keinerlei Realität zugeschrieben, obgleich es natürlich statthaft ist eine solche Funktion der einheitlichen Zeit einzuführen, dass der Funktionswert für $t = -\infty$ endlich wird. Es handelt sich also meiner Ansicht nach um eine gegenüber Milne abweichende Interpretation des physikalischen Inhaltes gewisser matematischer Relationen.

Von der Notwendigkeit einer Anpassung an den Mach'schen Standpunkt bin ich ebenfalls überzeugt, glaube jedoch, dass diese auf gruppentheoretischer Basis in jeder folgerichtigen relativistischen Theorie erzielt werden kann.

punkt offensichtlichen Unzulänglichkeit, verlohnt es sich die so resultierende „ebene“ Dynamik etwas eingehender zu untersuchen, weil man berechtigt ist gute Annäherungen an die Wirklichkeit zu erwarten, da die tatsächlich auftretenden Krümmungen äusserst schwach sind, wenigstens was den Raum betrifft. Der höhere Standpunkt (allgemeine Relativisierung) würde dann allerdings darauf hinzielen, das Feld eben als Ausdruck einer dem $\boldsymbol{E}_3$ im $\boldsymbol{L}_4$ aufgeprägten Deformation anzusehen, wodurch die Dynamik aufs neue in dem Rahmen der Geometrie festgehalten wird.

Betrachtet man das Feld als Resultat einer Raumdeformation, so erhält das zugehörige Potential den Charakter eines Spannungstensors. In der approximativen „ebenen“ Dynamik dagegen wird das Feldpotential ein Skalar. Wir beschränken uns in der vorliegenden Abhandlung auf die Betrachtung skalarer Potentiale.

Unter „Kraft“ versteht man nach Newton den die Impulsderivierte (nach der Zeit) darstellenden Vektor. Überträgt man diese Definition der Kraft auf einen modifizierten Impulsbegriff, so wird dadurch auch der Begriff der Kraft offensichtlich etwas modifiziert: Kraft im Newton'schen Sinne ist natürlicherweise etwas anderes, als Kraft im relativistischen oder expansionistischen Sinne; die Abweichungen werden aber unter normalen Verhältnissen sehr klein sein. Die „Ableitung“ der Grundgleichungen der Dynamik aus dem Hamilton'schen Variationsprinzip kommt, wie mir scheint, sachlich dem Wesen der Dinge nicht näher, da die zugehörige Lagrange'sche Funktion eben passend gewählt wird; man hat eine Analogie zum Bestreben die Gerade als kürzeste Entfernung zu „definieren“, was aber natürlich bloss eine getarnte Form der Definition der Distanz liefert.

Wir setzen also einfach explizite

$$\dot{p}_\alpha = X_\alpha \tag{16}$$

und nennen dann den Vektor $\mathfrak{K}$: (X_α) die Kraft, welche die Korpuskel beeinflusst.

Lässt sich dann eine Funktion $\Pi(\omega, t, s_1, s_2, s_3)$ angeben, so dass

$$X_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial s_\alpha} \tag{17}$$

wird, so soll Π das (skalare) Feldpotential heissen.

Für gewisse Formen von Π lassen sich „Energiesätze" ableiten.

Fall I: $\Pi \equiv \Pi\,(q_1, q_2, q_3),\ q_\alpha = s_\alpha\, e^{-\sigma t}$.

Man hat dann nach (16) und (5) nebst (14):

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi} &= \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial s_\alpha} \cdot \dot{s}_\alpha \\
&= \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum \dot{p}_\alpha (v_\alpha + \sigma s_\alpha) \\
&= \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum \dot{p}_\alpha v_\alpha - \sigma \sum \dot{p}_\alpha s_\alpha \\
&= \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \dot{E} - \sigma \sum \dot{p}_\alpha s_\alpha\,.
\end{aligned}$$

Es ist also stets, sofern Π die Variable ω explizit nicht enthält, sonst aber beliebig ist:

$$\dot{E} + \dot{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sigma \sum \dot{p}_\alpha s_\alpha\,. \tag{18}$$

Im vorliegenden Falle ergibt sich aber nun ferner:

$$\begin{aligned}
-\sigma \sum \dot{p}_\alpha s_\alpha &= \sigma \sum s_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial s_\alpha} \\
&= \sigma \sum s_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} e^{-\sigma t} \\
&= \sum \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} \cdot \sigma s_\alpha e^{-\sigma t} \\
&= \sum \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} \cdot \left(-\frac{\partial q_\alpha}{\partial t}\right) \\
&= -\sum \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial \Pi}{\partial t}\,,
\end{aligned}$$

d. h. die rechte Seite von (18) verschwindet. Somit wird für $\Pi \equiv \Pi\,(q_\alpha)$

$$\dot{E} + \dot{\Pi} = 0$$

und demnach

$$E + \Pi = \text{konst.} \tag{19}$$

Nennt man hier Π die potentielle Energie des Feldes, $E + \Pi = W$ die Gesamtenergie der Korpuskel, so gilt der Energiesatz in der klassischen Form. Das Potential $\Pi\,(q_\alpha)$ soll demnach als ein konservatives bezeichnet werden.

In der nichtexpansionistischen Mechanik hat man $\sigma = 0$, also $q_\alpha = s_\alpha$; man gelangt dann zur klassischen Behauptung, dass die Gesamtenergie konstant ist, wenn die potentielle Energie nur von Ort abhängig ist.

Fall II: $\Pi = M\Phi\,(q_1, q_2, q_3)$, $M = m\,\mathrm{ch}\,\omega$, $q_\alpha = s_\alpha\,e^{-\sigma t}$.

Im Ausdruck für $\dot{\Pi}$ hat man in diesem Falle das Zusatzglied $\frac{\partial \Pi}{\partial M} \cdot \dot{M}$, d. h. $\Phi\,\dot{M}$; statt (18) erhält man also

$$\dot{E} + \dot{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sigma \sum \dot{p}_\alpha s_\alpha + \Phi\,\dot{M}\,.$$

Nun ist aber hier

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = M \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,,$$

$$\begin{aligned}
-\sigma \sum \dot{p}_\alpha\, s_\alpha = \sigma \sum \frac{\partial \Pi}{\partial s_\alpha} \cdot s_\alpha &= \sigma M \sum \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} \cdot s_\alpha \\
&= \sigma M \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}\, e^{-\sigma t} \,.\, s_\alpha \\
&= -M \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} (-\sigma\, s_\alpha\, e^{-\sigma t}) \\
&= -M \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} \\
&= -M \frac{\partial \Phi}{\partial t} \,.
\end{aligned}$$

Man hat somit

$$\dot{E} + \dot{\Pi} = M \frac{\partial \Phi}{\partial t} - M \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi \dot{M}$$

Führt man noch infolge $\Pi = M\Phi$, $\dot{\Pi} = \dot{M}\Phi + M\dot{\Phi}$ ein, so resultiert

$$\dot{E} + \dot{M}\Phi + M\dot{\Phi} = \dot{M}\Phi\,,$$

also

$$\dot{E} + M\dot{\Phi} = 0.$$

Schreibt man $\frac{E}{c^2}$ statt M, so folgt

$$\frac{dE}{E} = -\frac{d\Phi}{c^2}\,,$$

und daher, wenn K eine Integrationskonstante bedeutet,

$$\log E = -\frac{\Phi}{c^2} + \log K,$$

somit

$$E = Ke^{-\frac{\Phi}{c^2}}, \quad E - Ke^{-\frac{\Phi}{c^2}} = 0. \tag{20}$$

Bezeichnet man jetzt $-Ke^{-\frac{\Phi}{c^2}}$ als potentielle Energie, so ergibt sich der Satz, dass die Gesamtenergie verschwindet. Es ist hier natürlich im Auge zu behalten, dass die potentielle Energie nun nicht das Potential, sondern die Funktion $-Ke^{-\frac{\Pi}{Mc^2}}$ ist.

Da die Kraft hierbei proportional der jeweiligen Masse anzusetzen ist, wollen wir im Falle II von einem „quasi-Newton'schen" Potential sprechen.

Fall III: $\Pi \equiv \Pi\,(s_1, s_2, s_3)$.

Man hat dann $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ und mithin nach (18)

$$\dot{E} + \dot{\Pi} = \sigma \sum s_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial s_\alpha},$$

was im Grenzfall $\sigma = 0$ wieder den klassischen Energiesatz bedeutet.

$\sum s_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial s_\alpha}$ ist das skalare Produkt des Ortsvektors mit dem negativ gerichteten Kraftvektor (der Trägheitskraft). Bezeichnet f_ϱ die Projektion der Kraft auf den Ortsvektor $\mathfrak{r}$, so gilt also, mit $|\mathfrak{r}| = \varrho$:

$$\dot{E} + \dot{\Pi} = -\sigma\varrho f_\varrho. \tag{21}$$

Nach (7) bedeutet $\sigma\varrho\, dt$ den Expansionszuwachs von ϱ während der Zeitspanne dt. Setzt man $E + \Pi = W$, so zeigt (21)

$$-dW = f_\varrho \cdot \sigma\varrho\, dt.$$

Nennt man f_ϱ den zum Potential Π gehörigen „Expansionswiderstand", so besagt demnach (21), dass der Verlust an Gesamtenergie gleich ist der vom Expansionswiderstand infolge der reinen Expansion geleisteten Arbeit. Die Gesamtenergie wächst, wenn der Expansionswiderstand f_ϱ negativ, also zum Ursprung hin gerichtet ist. Die Gesamtenergie bleibt ungeändert, wenn die Feldkraft beständig senkrecht ist zum Ortsvektor.

§ 4. **Zentralsymmetrische Potentiale.** Es habe das Potential die Gestalt $\Pi(\omega, \varrho, t)$, wo wiederum $\varrho = |\mathfrak{r}|$ den Betrag des Ortsvektors bedeutet; das Potential ist dann zentralsymmetrisch.

Aus $\varrho^2 = \sum s_\alpha^2$ folgt $\dfrac{\partial \varrho}{\partial s_\alpha} = \dfrac{s_\alpha}{\varrho}$, und daher

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial s_\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial s_\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} \cdot \frac{s_\alpha}{\varrho}$$

Hieraus ergibt sich nun für ein beliebiges Indexpaar α, β

$$\dot{p}_\alpha s_\beta - \dot{p}_\beta s_\alpha = 0\,. \tag{22}$$

Dann muss aber die zeitliche Derivierte der Funktion

$$s_{\alpha\beta} = e^{-\sigma t}(p_\alpha s_\beta - p_\beta s_\alpha)$$

verschwinden, denn man findet bei dieser Annahme:

$$\begin{aligned}
\dot{s}_{\alpha\beta} &= e^{-\sigma t}[-\sigma(p_\alpha s_\beta - p_\beta s_\alpha) + (\dot{p}_\alpha s_\beta - \dot{p}_\beta s_\alpha) + (p_\alpha \dot{s}_\beta - p_\beta \dot{s}_\alpha)] \\
&= e^{-\sigma t}[-\sigma(p_\alpha s_\beta - p_\beta s_\alpha) + (p_\alpha \dot{s}_\beta - p_\beta \dot{s}_\alpha)] \\
&= e^{-\sigma t}[p_\alpha(\dot{s}_\beta - \sigma s_\beta) - p_\beta(\dot{s}_\alpha - \sigma s_\alpha)] \\
&= e^{-\sigma t}[p_\alpha v_\beta - p_\beta v_\alpha] \\
&= e^{-\sigma t}[M v_\alpha v_\beta - M v_\beta v_\alpha] \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Im Falle eines zentralsymmetrischen Potentials ist also $s_{\alpha\beta}$ für jedes Indexpaar $\alpha \neq \beta$ eine Konstante. Man erhält somit die expansionistische Form des Drehimpulssatzes:

$$p_\alpha s_\beta - p_\beta s_\alpha = s_{\alpha\beta} e^{\sigma t}\,. \tag{23}$$

Der Drehimpuls (Moment des Impulsvektors) wächst also exponentionell mit der Zeit. Für $\sigma = 0$ gilt wieder die klassische Form. Aus dem Drehimpulssatz folgt sofort die Ebenheit der Bahn, denn es wird hiernach

$$\sum s_{\alpha\beta}\, s_\gamma = e^{-\sigma t} \sum s_\gamma\, (p_\alpha\, s_\beta - p_\beta\, s_\alpha) = 0 \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma).$$

Legt man die Bahn in die Koordinatenebene 1—2, so wird $s_3 = 0$, mithin auch $v_3 = 0$ und $p_3 = 0$.

Es bezeichne nun in dieser Ebene φ den Winkel des Ortsvektors gegen die 1-Achse; es sei ferner p_ϱ die Projektion des Impulses auf den Ortsvektor, p_φ die Projektion des Impulses auf die zum Ortsvektor senkrechte, im Sinne wachsender φ orientierte Richtung. Man findet dann auf bekannte Weise

$$\varrho\, p_\varphi = s_1\, p_2 - s_2\, p_1 .$$

Führt man wieder den reduzierten Ort q mittels $q = \varrho\, e^{-\sigma t}$ ein, so erhält nun der Drehimpulssatz bei dieser Achsenwahl die Gestalt

$$e^{-\sigma t}\, \varrho\, p_\varphi = s_{12}, \text{ d. h. } q \cdot p_\varphi = s, \tag{24}$$

wobei einfach eine Konstante s für s_{12} steht.

Ferner ist hierbei nach (7)

$$\dot{q} = e^{-\sigma t}\, \dot{\varrho} - \sigma \varrho\, e^{-\sigma t} = e^{-\sigma t}\, (\dot{\varrho} - \sigma \varrho) = e^{-\sigma t} \cdot v_\varrho . \tag{25}$$

Geht man mittels $s_1 = \varrho \cos \varphi$, $s_2 = \varrho \sin \varphi$ zu Polarkoordinaten über, so folgt aus

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 = v_1 + \sigma s_1 &= \dot{\varrho} \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ &= (v_\varrho + \sigma \varrho) \cdot \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

d. h.

$$v_1 + \sigma s_1 = v_\varrho \cos \varphi + \sigma s_1 - s_2 \dot{\varphi},$$

die Beziehung:

$$\dot{\varphi} = \frac{v_\varrho \cos \varphi - v_1}{\varrho \sin \varphi} .$$

Weil aber laut dem Projektionssatz

$$v_1 = v_\varrho \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi,$$

so ergibt sich endlich

$$\dot{\varphi} = \frac{v_\varphi}{\varrho} = \frac{p_\varphi}{M \varrho}, \tag{26}$$

in Übereinstimmung mit der klassischen Mechanik.

§ 5. **Quasi-Newton'sches symmetrisches Potential.** Im Falle eines konservativen oder eines quasi-Newton'schen symmetrischen Potentials führt die Lösung der Bewegungsgleichungen zu Quadraturen. Es soll dies am Beispiel des quasi-Newton'schen Potentials erläutert werden.

Bezeichnet man den Winkel zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$ mit ψ, wobei der positive Sinn dieses Winkels mit dem positiven Sinn von φ übereinstimmen möge, so hat man aus $p_\varphi = p \cdot \sin\psi = Mv \sin\psi = m \cdot \operatorname{ch}\omega \cdot c \cdot \operatorname{th}\omega \cdot \sin\psi = mc \cdot \operatorname{sh}\omega \sin\psi$ für den Drehimpulssatz und den Energiesatz

$$\begin{aligned} q\, mc \operatorname{sh}\omega \sin\psi &= s \\ m c^2 \operatorname{ch}\omega &= K e^{-\frac{\Phi}{c^2}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{s}{mc} = A$, $\frac{K}{mc^2} = H$, $\frac{\Phi}{c^2} = \chi$, so schreibt sich dies

$$\begin{aligned} q \operatorname{sh}\omega \sin\psi &= A \\ \operatorname{ch}\omega &= H e^{-\chi}. \end{aligned} \tag{28}$$

Ausserdem gilt nach (26) und (25):

$$\dot\varphi = \frac{c \operatorname{th}\omega \sin\psi}{q\, e^{\sigma t}}, \quad \dot q = \frac{c \operatorname{th}\omega \cos\psi}{e^{\sigma t}} \tag{29}$$

woraus sofort

$$d\varphi = \frac{\tan\psi}{q} dq \tag{30}$$

resultiert.

Es ist zur Vereinfachung der Schreibweise zweckmässig den reziproken Wert von q als Integrationsvariable u einzuführen. Man hat

$$qu = 1, \quad \frac{dq}{q} = -\frac{du}{u}.$$

Aus (28) ergibt sich nun

$$\sin\psi = \frac{Au}{\operatorname{sh}\omega} = \frac{Au}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\omega - 1}} = \frac{Au}{\sqrt{H^2 e^{-2\chi} - 1}}.$$

Daraus resultiert für $\tan\psi$:

$$\tan\psi = \pm \frac{\sin\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\psi}} = \frac{\pm Au}{\sqrt{H^2 e^{-2\chi} - 1 - A^2 u^2}},$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$H^2 e^{-2\chi} - 1 - A^2 u^2 \equiv Q(u) \tag{31}$$

setzt,

$$\tan\psi = \frac{\pm Au}{\sqrt{Q(u)}}.$$

Somit wird nach (30)

$$d\varphi = \mp \frac{A}{\sqrt{Q(u)}}\, du. \tag{32}$$

Damit ist die Bestimmung von φ als Funktion von u auf eine Quadratur zurückgeführt.

Ferner ergibt (29):

$$e^{-\sigma t}\, dt = \frac{dq}{c \operatorname{th}\omega \cos\psi} = \frac{-du}{cu^2 \operatorname{th}\omega \cos\psi}$$

$$= \frac{-du \operatorname{ch}\omega \tan\psi}{cu^2 \operatorname{sh}\omega \sin\psi}$$

$$= \frac{\mp He^{-\chi} Au \cdot du}{\sqrt{Q(u)} \cdot cu^2 \cdot Au},$$

also

$$c\, e^{-\sigma t}\, dt = \frac{\mp H e^{-\chi}\, du}{u^2 \sqrt{Q(u)}}, \tag{33}$$

was wiederum eine Quadratur zur Bestimmung von t als Funktion von u erfordert.

Integriert man links von $t_0 = 0$ beginnend und bezeichnet das zugehörige Integral der rechten Seite mittels $F(u)$, so folgt aus (33):

$$c\tau\,(1 - e^{-\sigma t}) = F(u).$$

Es bedeutet aber $c\tau$ den Radius R der „Sichtsphäre", d. h. diejenige minimale Distanz zwischen zwei Beobachtern des Inertialsystems, die von Lichtsignalen gerade nicht mehr überbrückt werden kann. Schreibt man demnach

$$R(1 - e^{-\sigma t}) = F(u) \tag{34}$$

und beachtet, dass $e^{-\sigma t} = \frac{1}{\varrho u}$ ist, so fliesst aus (34):

$$1 - \frac{1}{\varrho u} = \frac{1}{R} \cdot F(u),$$

d. h.

$$\varrho = \frac{1}{u\left[1 - \frac{F(u)}{R}\right]} \cdot \tag{35}$$

Hierdurch sind ϱ und φ als Funktionen von u durch Quadraturen bestimmt, desgleichen also auch die Bahn.

Bei der Integration entstehen natürlich durch das doppelte Vorzeichen bedingte Komplikationen, die man am besten durch Einführung einer passenden uniformisierenden Variablen umgeht, wie im nächsten Paragraphen am Beispiel erläutert werden soll.

Will man die Formeln auf das Zweikörperproblem anwenden, so kann man wie folgt verfahren, wenn man das dritte Newton'sche Gesetz von der Gegenwirkung postuliert:

Es sei m die Ruhemasse des bewegten Punktes, μ die Ruhemasse des Anziehungszentrums. Der Schwerpunktsatz der klassischen Mechanik gilt schon in der speziellen Relativitätstheorie nicht mehr; um ein Bezugssystem zu fixieren, genügt es das Anziehungszentrum resp. sein Inertialsystem als ruhend und die Koordinatenachsen tragend anzusehen. Die von m auf μ ausgeübte Gegenwirkung liefert dann eine additive Impulsderivierte in m in bezug auf dieses ruhende Inertialsystem. Es sei f_α die Komponente der von μ auf m ausgeübten Kraft; die Kraft, die von m auf μ ausgeübt wird, hat dann nach Newton die Komponenten $-f_\alpha$. Betrachtet man m, dessen Impulskomponente $mc \operatorname{sh} \omega \cdot k_\alpha$ ist (k_α bedeutet, wie früher, den Richtungskosinus), für den Augenblick als ruhend, so besitzt μ in bezug auf dieses letztere Inertialsystem von m die Impulskomponente $-\mu c \operatorname{sh} \omega \cdot k_\alpha$. Die Derivierte hiervon muss $-f_\alpha$ sein. Für eine Zeitspanne dt resultiert hiernach eine Änderung $\delta_\mu \omega$ und $\delta_\mu k_\alpha$ in μ, die durch

$$-\mu c (\operatorname{ch} \omega \cdot k_\alpha \cdot \delta_\mu \omega + \operatorname{sh} \omega \cdot \delta_\mu k_\alpha) = -f_\alpha \, dt$$

geregelt wird. Geht man wieder auf das Inertialsystem von μ zurück, so bedeutet dies, wegen der Relativität der Bewegungen, bei m eine zusätzliche Änderung $\delta_\mu \omega$, $\delta_\mu k_\alpha$. Infolge der Kraft f_α bei m resultiert dortselbst noch ein $\delta_m \omega$, $\delta_m k_\alpha$ gemäss

$$mc(\operatorname{ch}\omega \cdot k_\alpha \cdot \delta_m \omega + \operatorname{sh}\omega \cdot \delta_m k_\alpha) = + f_\alpha \, dt \, .$$

Die Komponente dp_α der totalen Impulsänderung von m im Inertialsystem μ wird demnach, wenn man $d\omega = \delta_\mu \omega + \delta_m \omega$ und $dk_\alpha = \delta_\mu k_\alpha + \delta_m k_\alpha$ setzt:

$$\begin{aligned} dp_\alpha &= mc(\operatorname{ch}\omega \cdot k_\alpha \cdot d\omega + \operatorname{sh}\omega \cdot dk_\alpha) \\ &= mc[\operatorname{ch}\omega \cdot k_\alpha (\delta_\mu \omega + \delta_m \omega) + \operatorname{sh}\omega (\delta_\mu k_\alpha + \delta_m k_\alpha)] \\ &= mc(\operatorname{ch}\omega \cdot k_\alpha \cdot \delta_\mu \omega + \operatorname{sh}\omega \cdot \delta_\mu k_\alpha) + \\ &\qquad + \frac{m}{\mu} \mu c (\operatorname{ch}\omega \cdot k_\alpha \cdot \delta_m \omega + \operatorname{sh}\omega \cdot \delta_m k_\alpha) \\ &= f_\alpha dt + \frac{m}{\mu} f_\alpha dt \, , \end{aligned}$$

d. h. die Bewegungsgleichung für m im Inertialsystem μ hat zu lauten:

$$\dot{p}_\alpha = \left(1 + \frac{m}{\mu}\right) \cdot f_\alpha \, .$$

Ist hierbei f_α als partielle Derivierte des negativen Potentials $-\Pi$ gegeben, so besagt dies

$$\dot{p}_\alpha = -\left(1 + \frac{m}{\mu}\right) \frac{\partial \Pi}{\partial s_\alpha} = -\frac{\partial \left(1 + \frac{m}{\mu}\right) \Pi}{\partial s_\alpha} \, . \tag{36}$$

Es besteht also kein prinzipieller Unterschied gegen den früher behandelten Einkörperfall, es ist bloss Π um den konstanten Faktor $\left(1 + \frac{m}{\mu}\right)$ korrigiert. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass (36) ein neues Postulat, nämlich das Newton'sche Gesetz der Gegenwirkung, involviert: eine Zurückführung auf frühere Postulate ist im Rahmen der „ebenen" Dynamik wohl nicht möglich.

§ 6. **Planetenbewegung.** Auf Grund der im Anfang des § 3 angeführten Überlegungen dürfte eine exakte Lösung des Problems der Planetenbewegung (d. h. eine Lösung, die streng der „Wirklichkeit" entspricht) auf der Grundlage eines skalaren Feldpotentials nicht zu erhalten sein. Eine jede beliebige Annahme über Π für das Gravitationsfeld wird daher im besten Falle den wirklichen Tatsachen gegenüber bloss eine Näherungslösung bedeuten. Akzeptiert man diesen Standpunkt, so kann man immerhin nach solchen Π fragen, die zu Resultaten führen, deren Abweichungen von der Wirklichkeit praktisch „nicht beobachtbar" sind. Auch bei Berücksichtigung dieser Forderung bleibt Π noch in hohem Masse willkürlich. Wenn ein „richtiges" Π überhaupt nicht existiert, so kann man die verbleibende Willkür dazu verwenden, dem zu wählenden Π einen analytisch möglichst bequemen Ausdruck zu verleihen.

Soll die Annäherung besser werden als diejenige, die aus der Newton'schen Hypothese resultiert, so hat man für das Zweikörperproblem wohl in erster Linie die Perihelverschiebung der Bahn in Rechnung zu ziehen. Da es sich auch hierbei bekanntlich um nicht ganz sichere Beobachtungsdaten handelt, so liegt es nahe in dem Ausdruck für Π einen oder vielleicht mehrere Parameter einzuführen, deren numerische Werte dann nachträglich mit den Beobachtungen in Einklang zu bringen sind. Ein Beispiel soll hier zur Erläuterung ausführlich behandelt werden. Der Ansatz von Newton lautet:

$$\Pi = -m\frac{\mu\varkappa^2}{\varrho},$$

wobei m die Ruhemasse des Planeten, μ die Ruhemasse der Sonne, $\varkappa^2$ die geläufige Gravitationskonstante ($\varkappa^2 = 6{,}68.10^{-8}$) und ϱ die Distanz bedeutet. Sowohl μ als $\varkappa^2$ sind nur sehr ungenau bekannt; setzt man aber $\mu\varkappa^2 = c^2 k^2$, so kann k aus den Beobachtungen der Planetenbewegung viel genauer bestimmt werden; man findet auf Grund der klassischen Formeln

$$k^2 = 1{,}4722 \cdot 10^5.$$

Hierbei sind durchweg C-G-S Einheiten verwendet und es ist $c = 299796 \cdot 10^5$ (Michelson, 1927) angenommen.

Wir setzen noch zur Abkürzung

$$k^2\left(1 + \frac{m}{\mu}\right) = k_1^2,$$

verstehen unter $M = m \operatorname{ch} \omega$ die bewegte Masse des Planeten, und verwenden statt des Newton'schen den Ansatz

$$\Pi = -\frac{Mc^2}{2\left(1+\frac{m}{\mu}\right)} \log\left[1 + 2\,k_1^2\,u + 2\,a\,k_1^4\,u^2\right]$$

mit einem zunächst willkürlichen Parameter a. Im ungünstigsten Falle des Merkur hat hierbei $k_1^2\,u$ immer noch die ausreichend geringe Grössenordnung 10^{-7}. Beschränkt man sich in der Entwicklung des Logarithmus auf Glieder mit $(k_1^2\,u)^2$, also Glieder, deren Wert höchstens 10^{-14} beträgt, so folgt

$$\Pi = -Mc^2\,k^2\,u\,[1 + (a-1)\,k_1^2\,u],$$

was bei der Annahme $a = 1$ sich vom Newton'schen Ansatz nur dadurch unterscheidet, dass M an die Stelle von m, und $q\ (= u^{-1})$ an die Stelle von ϱ tritt.

Als Betrag der Gravitationskraft findet man aus dem angeführten Näherungsausdruck:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} = \frac{M\mu\varkappa^2\,e^{\sigma t}}{\varrho^2}\left[1 + 2\,(a-1)\frac{k_1^2\,e^{\sigma t}}{\varrho}\right].$$

Bei $a - 1 \neq 0$ bedeutet dies für den Merkur eine relative Abweichung von der Newtonschen Kraft im Betrage von etwa 10^{-7}, sofern man $\sigma = 0$ wählt. Prinzipiell besteht aber der wesentliche Unterschied, dass im Zeitpunkt t die „Gravitationskonstante" durch $\varkappa^2\,e^{\sigma t}$ ersetzt, die Feldstärke also exponentiell mit der Zeit wachsend angenommen worden ist (um 1‰ in ca. 2 Millionen Erdjahren). Der zunächst befremdlich erscheinende Umstand einer zeitlich wachsenden Feldstärke der Gravitation ist mit unserem expansionistischen Ansatz eng verknüpft und steht im Einklang mit anderen Konsequenzen dieser expansionistischen Mechanik, etwa der „Lichtermüdung", die anderweits behandelt werden sollen [5]).

Zur Behandlung des Zweikörperproblems auf der Grundlage des hier postulierten Ansatzes hat man den Ausdruck von

---

[5]) Es ist natürlich mathematisch statthaft auch von der Annahme einer säkular konstanten Feldstärke auszugehen. Massgebend für die im Text getroffene Wahl ist das Bestreben den Energiesatz in einer Form beizubehalten, die der klassischen möglichst nahe kommt, im guten Glauben, dass dies einer physikalischen Realität entspricht.

Π noch mit dem Faktor $1+\frac{m}{\mu}$ zu multiplizieren. Dies ergibt als Ausgangspunkt dann den korrigierten Π-Ausdruck:

$$\Pi = -\tfrac{1}{2} Mc^2 \log[1 + 2k_1^2 u + 2ak_1^4 u^2]. \tag{37}$$

Für diesen Ansatz wird (31) ein quadratisches Polynom:

$$Q(u) \equiv H^2 e^{-2\chi} - 1 - A^2 u^2 \equiv Fu^2 + 2Gu + J,$$

mit

$$F = -A^2 + 2H^2 k_1^4 a, \quad G = H^2 k_1^2, \quad J = -1 + H^2. \tag{38}$$

Es sei gleich bemerkt, dass für die Planeten unseres Sonnensystems sowohl J als $\frac{k_1^4}{A^2}$ kleine Zahlen von der Ordnung 10^{-8} sind und zudem $J < 0$, $F < 0$ wird.

Wir setzen noch

$$U(q) = Jq^2 + 2Gq + F, \tag{39}$$

also

$$Q(u) = u^2 \cdot U(q).$$

Das Polynom $Q(u)$ hat zwei positive (übrigens sehr kleine) Nullstellen u_1, u_0, wobei die Bezeichnung so gewählt sein möge, dass

$$0 < u_1 < u_0.$$

Es sind dann entsprechend $q_1 = u_1^{-1}$, $q_0 = u_0^{-1}$ die Nullstellen von $U(q)$, wobei

$$0 < q_0 < q_1.$$

Da $Q(u)$ resp. $U(q)$ in den Gleichungen unter dem Wurzelzeichen auftreten, und $F < 0$, $J < 0$, so sind nur solche Werte u resp. q zulässig, für welche

$$u_1 \leqq u \leqq u_0, \quad q_0 \leqq q \leqq q_1$$

gilt. Während der Bewegung pendeln u und q wiederholt in diesen Grenzen. Um die dadurch wesentlich bedingte Vieldeutigkeit der resultierenden Integrale zu vermeiden, ist es zweckmässig uniformisierende Variable einzuführen.

Die entstehenden Probleme sollen nun einzeln nacheinander behandelt werden.

a) Perihelverschiebung.

Zur Uniformisierung verwenden wir eine Variable λ, die mittels

$$u = \frac{G + \sqrt{\Delta}\cos 2\pi\lambda}{-F} \tag{40}$$

eingeführt werde, wo $\Delta = G^2 - FJ$ die Diskriminante der Polynome Q und U bedeutet. Für jedes ganzzahlige λ, $\lambda = n$, wird $u = u_0$; für jedes halbzahlige λ, $\lambda = n + \frac{1}{2}$ wird dagegen $u = u_1$.

Aus (40) folgt

$$Q(u) = \frac{\Delta}{-F}\sin^2 2\pi\lambda,$$

und wir setzen im Einklang hiermit

$$\pm\sqrt{Q(u)} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{-F}}\sin 2\pi\lambda. \tag{41}$$

Sämtliche Wurzelzeichenausdrücke sollen hierbei als positive Grössen aufgefasst werden. Nach (41) gilt in jeder vollen Schwingungsperiode von u, während welcher λ das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen durchläuft, vor $\sqrt{Q}$ teils das Zeichen $+$, teils das Zeichen $-$.

Als Anfangsbedingung wählen wir $\lambda_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

Da nach (40)

$$du = -2\pi\frac{\sqrt{\Delta}}{-F}\sin 2\pi\lambda\, d\lambda$$

ist, so folgt aus (32) und (41)

$$d\varphi = 2\pi\frac{A}{\sqrt{-F}}\, d\lambda,$$

also, gemäss der festgesetzten Anfangsbedingung:

$$\varphi = 2\pi\frac{A}{\sqrt{-F}}\lambda. \tag{42}$$

Wir wollen die Orte, wo λ ganzzahlig wird, Perihele nennen. Man kann sich durch Nachrechnen überzeugen, dass in diesen Orten die Eigengeschwindigkeit senkrecht zum Ortsvektor steht; infolge der Expansionserscheinung weicht aber die Bahntangente etwas von dieser Senkrechten ab und das soeben definierte „Perihel“ differiert um eine äusserst geringe

Grösse von dem Ort relativ kleinster Entfernung. Wir brauchen hier darauf nicht genauer einzugehen, da der Unterschied gegenüber den schon früher gestatteten Vernachlässigungen von nochmals so kleiner relativer Grössenordnung ist.

Nach Ablauf von n Perioden wird infolge (42) φ den Betrag $2n\pi$ um eine Grösse $n \cdot \delta$ übersteigen. Man findet für die Perihelverschiebung δ während einer Periode aus (42):

$$\delta = 2\pi - \varphi = 2\pi\left(\frac{A}{\sqrt{-F}} - 1\right)$$

$$= 2\pi\left[\left(1 - 2aH^2\frac{k_1^4}{A^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right],$$

also mit dem hier durchweg verwendeten Grad der Annäherung, wenn man noch $H \approx 1$ in Betracht zieht:

$$\delta = +2\pi a\frac{k_1^4}{A^2}. \tag{43}$$

Auf die Interpretation der Grösse $\frac{k_1^4}{A^2}$ soll späterhin eingegangen werden. Hier sei zunächst bloss erwähnt, dass für den Merkur $\frac{k_1^4}{A^2} = 2{,}654 \cdot 10^{-8}$, also $\delta = a \cdot 1{,}668 \cdot 10^{-7}$ wird. Im Laufe von 100 Erdjahren entfallen auf den Merkur 415 Perioden; man erhält demnach als säkulare Perihelverschiebung des Merkur

$$a \cdot 415 \cdot 1{,}668 \cdot 10^{-7} = a \cdot 6{,}92 \cdot 10^{-5} = a \cdot 14''.$$

Bei $a = 1$ (Newton) erhält man $14''$, während tatsächlich $42''$ als beobachteter Wert gilt; um letzteren zu erhalten, wäre also $a = 3$ anzusetzen.

b) Periodendauer.

Wir gehen zum Polynom $U(q)$ über, beachten $\frac{du}{u^2} = -dq$, definieren eine uniformisierende Variable v mittels

$$q = \frac{G - \sqrt{\Delta}\cos 2\pi v}{-J} \tag{44}$$

und setzen danach

$$\pm\sqrt{U(q)} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{-J}}\sin 2\pi v,$$

wobei die Wurzelausdrü ckewiederum positive Grössen bezeichnen. Für jedes ganzzahlige $\nu = n$ wird $q = q_0 = u_0^{-1}$; die durch λ und ν bestimmten Phasen stimmen also in ihren Endpunkten stets überein.

Man hat, immer mit demselben Grad der Annäherung:

$$e^{-\chi} = \sqrt{1 + 2k_1^2 u + 2a k_1^4 u^2} = 1 + k_1^2 u + k_1^4 u^2 (a - \tfrac{1}{2}).$$

Laut (33) ergibt sich daher

$$\begin{aligned} c\,e^{-\sigma t}\,dt &= \frac{He^{-\chi}\,dq}{\pm u\sqrt{U(q)}} \\ &= 2\pi\frac{H}{\sqrt{-J}}\left[q + k_1^2 + \frac{k_1^4(a-\frac{1}{2})}{q}\right]d\nu \\ &= 2\pi\frac{H}{\sqrt{-J}}\left[\frac{k_1^2 - \sqrt{\Delta}\cos 2\pi\nu}{-J} + \frac{-Jk_1^4(a-\frac{1}{2})}{G-\sqrt{\Delta}\cos 2\pi\nu}\right]d\nu\,. \end{aligned}$$

Das Integral des zweiten Gliedes der eckigen Klammer kann gegenüber dem Integral des ersten Gliedes vernachlässigt werden, da ein Überschlag zeigt, dass das Verhältnis des zweiten Integralgliedes zum ersten für den Merkur die Grössenordnung 10^{-16} und für die übrigen Planeten eine noch kleinere Grössenordnung aufweist.

Wir schreiben demnach

$$c\,e^{-\sigma t}dt = 2\pi\frac{H}{\sqrt{-J}}\left(\frac{k_1^2 - \sqrt{\Delta}\cos 2\pi\nu}{-J}\right)d\nu$$

und finden daraus durch Integration, ausgehend von den Anfangsbedingungen $\nu_0 = 0$, $t_0 = 0$:

$$c\tau(1 - e^{-\sigma t}) = \frac{H}{(-J)^{\frac{3}{2}}}(2\pi k_1^2\nu - \sqrt{\Delta}\sin 2\pi\nu), \qquad (45)$$

wodurch t allgemein bestimmt ist.

Mit t_ν, ϱ_ν usw. bezeichnen wir fernerhin die Werte von t, ϱ usw. für den Phasenwert ν. Uns interessieren in erster Linie ganzzahlige Phasenwerte $\nu = n$.

Aus (45) resultiert

$$e^{-\sigma t_n} = 1 - n\,\frac{2\pi k_1^2 H}{c\tau(-J)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Führt man also mittels

$$\frac{c\tau(-J)^{\frac{3}{2}}}{2\pi k_1^2 H} = N \tag{46}$$

eine Zahl N ein, so ergibt sich

$$e^{-\sigma t_n} = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N}. \tag{47}$$

N wird sehr gross, wenn man im Sonnensystem den Anfangsmoment der Zeitzählung in die gegenwärtige Epoche legt; für den Merkur findet man z. B. $N = 1{,}6 \cdot 10^{10}$. Da die Grösse $e^{-\sigma t_n}$ niemals negativ wird, so folgt $n \leqq N$. Die Anzahl der Perioden für die Zukunft ist also beschränkt.

Die Dauer T_n der n-ten Periode beträgt offenbar $t_n - t_{n-1}$. Man hat nach (47):

$$e^{-\sigma T_1} = 1 - \frac{1}{N} \tag{48}$$

und

$$e^{-\sigma T_n} = e^{-\sigma(t_n - t_{n-1})} = \frac{e^{-\sigma t_n}}{e^{-\sigma t_{n-1}}}$$

$$= \frac{N-n}{N} : \frac{N-(n-1)}{N}$$

$$= \frac{N-n}{N-(n-1)},$$

also

$$e^{-\sigma T_n} = 1 - \frac{1}{N-(n-1)}. \tag{49}$$

Es unterscheidet sich also T_n von T_1 dadurch, dass die zu Anfang der betreffenden Periode noch übrigbleibende Periodenhöchstzahl $N-(n-1)$ an Stelle von N tritt, was direkt verständlich wird, wenn man beachtet, dass es sich hierbei ja bloss um eine Verschiebung der Nullepoche handelt. Da die Wahl der Nullepoche beliebig ist, genügt es T_1 zu kennen. Wir bestimmen aber noch $\frac{T_n}{T_1}$ für kleine n bei grossem N. Die explizite Darstellung lässt sich dann folgendermassen schreiben:

$$\frac{T_n}{T_1} = \frac{\log\left(1 - \frac{1}{N-(n-1)}\right)}{\log\left(1 - \frac{1}{N}\right)} \approx \frac{N}{N-(n-1)} \approx 1 + \frac{n-1}{N}.$$

Man darf also setzen, wenn $\frac{n}{N}$ genügend klein ist:

$$T_n \approx T_1 \left(1 + \frac{n-1}{N}\right). \tag{50}$$

Die Periodendauer wächst somit annähernd linear mit der Periodennummer n.

c) Distanz.

Aus $\varrho_n = q_n e^{\sigma t_n}$ folgt für die n-te Periheldistanz ϱ_n:

$$\varrho_n = \frac{G - \sqrt{\Delta}}{-J}\left(1 - \frac{n}{N}\right)^{-1} = \frac{\varrho_0}{1 - \frac{n}{N}}, \tag{51}$$

oder, bei genügend kleinem $\frac{n}{N}$,

$$\varrho_n \approx \varrho_0 \left(1 + \frac{n}{N}\right). \tag{52}$$

Die Periheldistanzen wachsen also gleichfalls annähernd linear mit n.

Es ist naheliegend den zum Phasenwert $\nu = n + \frac{1}{2}$ gehörigen Ort als Aphel zu definieren, obgleich wiederum hierbei eine extremale Distanz noch nicht vollständig erreicht ist. Für die Apheldistanz $\varrho_{n+0,5}$ findet man sofort aus $\varrho_{n+0,5} = q_{n+0,5} e^{\sigma t_{n+0,5}}$, wenn man noch berücksichtigt, dass $\sin 2\pi\nu$ wiederum verschwindet:

$$\varrho_{n+0,5} = \frac{G + \sqrt{\Delta}}{-J}\left(1 - \frac{n+0,5}{N}\right)^{-1}$$

$$\approx \frac{G + \sqrt{\Delta}}{-J}\left(1 - \frac{0,5}{N}\right)^{-1}\left(1 - \frac{n}{N}\right)^{-1},$$

d. h.

$$\varrho_{n+0,5} = \frac{\varrho_{0,5}}{1 - \frac{n}{N}} \approx \varrho_{0,5} \cdot \left(1 + \frac{n}{N}\right). \tag{53}$$

Wir führen noch den ϱ-Wert für die Viertelphase $n + 0,25$ ein. Hier wird $\cos 2\pi\nu = 0$, $\sin 2\pi\nu = 1$ und man findet auf ähnliche Weise mit Hilfe von (44) und (45):

$$\varrho_{n+0,25} = q_{n+0,25} \cdot e^{\sigma t_{n+0,25}}$$

$$= \frac{G}{-J}\left(1 - \frac{n+0,25}{N} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi k_1^2 N}\right)^{-1}$$

$$= \frac{G}{-J}\left(1 - \frac{n}{N} + \frac{k_1^{-2}\sqrt{\Delta}}{2\pi N} - \frac{1}{4N}\right)^{-1}.$$

Wegen $\sqrt{\Delta} < H^2 k_1^2$ und $H < 1$ ist $k_1^{-2}\sqrt{\Delta} < 1$; die Summe der beiden letzten Glieder in der Klammer wird demnach absolut kleiner als $\frac{1}{4N}$. Führt man nun mittels

$$a_n = \frac{G}{-J}\left(1 - \frac{n}{N}\right)^{-1} \tag{54}$$

eine Grösse a_n ein, so wird diese sich von $\varrho_{n+0,25}$ nur ganz wenig unterscheiden. Da für kleine $\frac{n}{N}$

$$a_n \approx a_0\left(1 + \frac{n}{N}\right), \quad a_0 = \frac{G}{-J} \tag{55}$$

wird, so ergibt ein Vergleich mit (52) und (53) bei Vernachlässigung von $\frac{0,5}{N}$ annähernd

$$a_n \approx \tfrac{1}{2}(\varrho_n + \varrho_{n+0,5}).$$

Es darf demnach a_n als „mittlere Entfernung" während der mit $\nu = n$ beginnenden Periode bezeichnet werden.

Die Grösse

$$\varepsilon = \frac{a_n - \varrho_n}{a_n} = 1 - \frac{\varrho_n}{a_n} = 1 - \frac{\varrho_0}{a_0} = 1 - \frac{G - \sqrt{\Delta}}{G} = \frac{\sqrt{\Delta}}{G} \tag{56}$$

bezeichnen wir dann konsequenterweise als „Exzentrizität" der Bahn. Diese Exzentrizität ε ist von der Periodennummer unabhängig.

d) Geschwindigkeit.

Laut (28) wird

$$\operatorname{ch}\omega = He^{-\chi} = H\sqrt{1 + 2\frac{k_1^2}{q} + 2\alpha\frac{k_1^4}{q^2}}.$$

Es ist $\frac{k_1^2}{q}$ für den Merkur von der Ordnung 10^{-7}, für die übrigen Planeten noch kleiner. Begnügt man sich mit der ersten Potenz von $\frac{k_1^2}{q}$, so erhält man schon eine Genauigkeit für die Geschwindigkeitsbestimmung, die den Genauigkeitsgrad der Beobachtung merklich übersteigt. Man findet bei dieser Annäherung:

$$\operatorname{ch} \omega = H\left(1 + \frac{k_1^2}{q}\right),$$

also

$$\operatorname{ch} \omega = H\left(1 + \frac{-J\, k_1^2}{G - \sqrt{\Delta} \cos 2\pi\nu}\right)$$

$$= H\left(1 - \frac{J\, k_1^2}{G} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon \cos 2\pi\nu}\right)$$

$$= H\left(1 + \frac{1 - H^2}{H^2}\, \frac{1}{1 - \varepsilon \cos 2\pi\nu}\right).$$

Bezeichnen wir den Wert von ω für die Viertelphase $\nu = n + 0{,}25$ mit $\overline{\omega}$, so folgt hiernach

$$\operatorname{ch} \overline{\omega} = H\left(1 + \frac{1 - H^2}{H^2}\right) = \frac{1}{H}.$$

Die Konstante H bedeutet also den reziproken Wert von $\operatorname{ch} \overline{\omega}$:

$$H = \frac{1}{\operatorname{ch} \overline{\omega}}, \tag{57}$$

woraus u. a. sich ergibt:

$$-J = 1 - H^2 = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \overline{\omega}} = \operatorname{th}^2 \overline{\omega}. \tag{58}$$

Da es sich um die Viertelphase handelt, so entspricht $\overline{\omega}$ der „mittleren Entfernung“ a_n; wir nennen demnach die zu $\overline{\omega}$ gehörige Geschwindigkeitsgrösse $\bar{v}$ die „mittlere Bahngeschwindigkeit“ der Periode. $\bar{v}$ ist von der Periodennummer n unabhängig. Man hat

$$\bar{v} = c \operatorname{th} \overline{\omega} = c \sqrt{-J}. \tag{59}$$

Mit Hilfe von $\overline{\omega}$ resp. $\bar{v}$ erhält man aus dem früheren Ausdruck für ch ω

$$\operatorname{ch} \overline{\omega} \operatorname{ch} \omega_{\nu} = 1 + \frac{\operatorname{sh}^2 \overline{\omega}}{1 - \varepsilon \cos 2\pi\nu}. \tag{60}$$

Schreibt man dies immer mit derselben Abrundung in der Gestalt

$$\left(1 + \frac{\overline{\omega}^2}{2}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{2}\right) = 1 + \frac{\overline{\omega}^2}{1 - \varepsilon \cos 2\pi\nu},$$

also, unter Berücksichtigung bloss der zweiten Potenzen,

$$1 + \frac{\overline{\omega}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} = 1 + \frac{\overline{\omega}^2}{1 - \varepsilon \cos 2\pi\nu},$$

so folgt

$$\omega^2 = \frac{2\,\overline{\omega}^2}{1 - \varepsilon \cos 2\pi\nu} - \overline{\omega}^2$$

$$= \frac{\overline{\omega}^2 (1 + \varepsilon \cos 2\pi\nu)}{1 - \varepsilon \cos 2\pi\nu}.$$

Nach Einführung von $v = c \operatorname{th} \omega$ ergibt sich hiernach, wenn man ω durch *th* ω ersetzt denkt:

$$v = \bar{v} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon \cos 2\pi\nu}{1 - \varepsilon \cos 2\pi\nu}}. \tag{61}$$

e) Perihelverschiebung, ausgedrückt durch mittlere Bahngeschwindigkeit und Exzentrizität.

Es ist bei der verwendeten Abrundung

$$\operatorname{ch} \overline{\omega} = 1 + \frac{\overline{\omega}^2}{2} = \frac{1}{H},$$

also

$$\overline{\omega}^2 = 2\,\frac{1 - H}{H}.$$

Andererseits wird

$$1 - \varepsilon^2 = 1 - \frac{\Delta}{G^2} = \frac{FJ}{G^2} = \frac{(A^2 - 2\,a\,k_1^4 H^2)(1 - H^2)}{k_1^4 H^4}$$

$$= \frac{A^2}{k_1^4} \cdot \frac{1 - H^2}{H^4} \left(1 - 2\,a\,H^2 \frac{k_1^4}{A^2}\right).$$

Da $\frac{k_1^4}{A^2}$ klein von der Ordnung 10^{-8} ist, so darf man schreiben

$$1-\varepsilon^2 \approx \frac{A^2}{k_1^4}\frac{1-H^2}{H^4},$$

und findet sodann

$$\frac{\overline{\omega}^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{2\,(1-H)\,H^4 k_1^4}{H\,(1-H^2)\,A^2} = \frac{k_1^4}{A^2}\cdot\frac{2\,H^3}{1+H}$$

$$= \frac{k_1^4}{A^2}\cdot\frac{2\,H^2}{H^{-1}+1}$$

$$= \frac{k_1^4}{A^2}\cdot\frac{2}{\operatorname{ch}^2\overline{\omega}\,(\operatorname{ch}\overline{\omega}+1)}$$

$$= \frac{k_1^4}{A^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2\overline{\omega}\cdot\operatorname{ch}^2\frac{\overline{\omega}}{2}}.$$

Da nun $\operatorname{ch}^2\overline{\omega}$ und $\operatorname{ch}^2\frac{\overline{\omega}}{2}$ sich von 1 nur um etwa 10^{-8} unterscheiden, so resultiert

$$\frac{\overline{\omega}^2}{1-\varepsilon^2} \approx \frac{k_1^4}{A^2} \tag{62}$$

Für die Perihelverschiebung δ folgt somit aus (43)

$$\delta = +\,2\,\pi\,a\,\frac{k_1^4}{A^2} = +\,2\,\pi\,a\,\frac{\overline{\omega}^2}{1-\varepsilon^2},$$

oder

$$\delta = +\,2\,\pi\,\frac{a\cdot\overline{v}^2}{c^2\,(1-\varepsilon^2)}. \tag{63}$$

f) Abhängigkeit der Periodendauer von der mittleren Entfernung. Laut (50) wird mit der berücksichtigten Genauigkeit

$$T_n = T_1\left(1+\frac{n-1}{N}\right) = \frac{T_1}{1-\frac{n-1}{N}}.$$

Aus (48) folgt noch

$$T_1 = -\,\tau\log\left(1-\frac{1}{N}\right) \approx \frac{\tau}{N},$$

mithin, auf Grund von (46), (54) und (55):

$$T_1 = \frac{2\pi k_1^2 H}{c(-J)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2\pi k_1^2 H a_0^{\frac{3}{2}}}{c\, G^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2\pi a_0^{\frac{3}{2}}}{c\, k_1 H^2}$$

$$= \frac{2\pi a_{n-1}^{\frac{3}{2}}}{c\, k_1 H^2} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Man findet daher mit Hilfe von (47):

$$T_n = \frac{2\pi a_{n-1}^{\frac{3}{2}}}{c\, k_1 H^2} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi a_{n-1}^{\frac{3}{2}}}{c\, k_1 e^{\frac{1}{2}\sigma t_{n-1}} \cdot H^2}.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung $k e^{\frac{1}{2}\sigma t_{n-1}}$ mittels $k^{(n-1)}$, so stellt $k^{(n-1)}$ den Wert der Feldkonstante k zu Beginn der $(n-1)$-ten Periode dar (wie schon erwähnt, wächst die Feldstärke k^2 exponentiell mit der Zeit). Dementsprechend versehen wir auch $\varkappa$ mit einem den Beginn der n-ten Periode charakterisierenden Index, indem wir

$$c^2 k^{(n)2} = \mu \varkappa^{(n)2}$$

ansetzen. Der Ausdruck für T_n erhält dann, wenn wieder $\overline{\omega}$ eingeführt wird, die Gestalt

$$T_n = \frac{2\pi a_{n-1}^{\frac{3}{2}}}{\varkappa^{(n-1)} \sqrt{\mu + m}} \operatorname{ch}^2 \overline{\omega}. \tag{64}$$

Von dem Newton'schen unterscheidet sich dieses Resultat in dreierlei Hinsicht:

1) Infolge der Expansion steht statt $\varkappa$ die exponentiell mit der Zeit wachsende Grösse $\varkappa^{(n-1)}$. Praktisch kann man trotzdem mit einem beständigen $\varkappa$ rechnen, weil der Zuwachs sogar im Laufe von Jahrtausenden wenig fühlbar wird.

2) Es enthält (64) den bei Newton nicht vorhandenen Faktor $\operatorname{ch}^2 \overline{\omega}$, der gleich $(1 - \operatorname{th}^2 \overline{\omega})^{-1} \approx 1 + \operatorname{th}^2 \overline{\omega} = 1 + \frac{\overline{v}^2}{c^2}$ ist.

3) Das Newton'sche T_n bezieht sich auf einen siderischen Umlauf, während (64) den anomalistischen Umlauf (von Perihel zu Perihel) bestimmt.

Was die zuletzt genannte Abweichung betrifft, so kann man natürlich eine Korrektur zur Erhaltung der siderischen Umlaufszeit anbringen. Sie ergibt sich durch folgende Überlegungen:

Für die kurze Strecke von $\varphi = 2\pi$ bis $\varphi = 2\pi + \delta$ kann v als konstant,

$$v = \bar{v}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}},$$

und die Bahn als Kreisbogen vom Radius ϱ_n angesehen werden. Die Zeitkorrektur ΔT_1 beträgt sodann

$$\Delta T_1 = -\frac{\varrho_1 \delta}{v} \approx -\frac{\varrho_0 \delta}{v}$$

$$= -\frac{2\pi a \bar{v}^2 \sqrt{1-\varepsilon}\, G(1-\varepsilon)}{c^2(1-\varepsilon^2)\bar{v}\sqrt{1+\varepsilon}\,(-J)}$$

$$= -\frac{2\pi a \bar{v}\sqrt{1-\varepsilon}\, a_0}{c^2(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}.$$

Schreibt man noch $B(\varepsilon)$ für $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}$, so kann dies auf die Form

$$\Delta T_1 = -\frac{\bar{v}}{c} a \cdot \frac{k_1}{a_0^{\frac{1}{2}}} \frac{2\pi a_0^{\frac{3}{2}}}{c k_1} B(\varepsilon)$$

gebracht werden. Wegen (55) ist aber

$$a_0 = \frac{G}{-J} = \frac{k_1^2}{\operatorname{sh}^2 \omega} \approx \frac{c^2 k_1^2}{\bar{v}^2},$$

woraus

$$\frac{\bar{v}}{c} = \frac{k_1}{\sqrt{a_0}} \tag{65}$$

resultiert. Die Korrektur lautet demnach

$$\Delta T_1 = -\frac{\bar{v}^2}{c^2} a \cdot B(\varepsilon) \frac{2\pi a_0^{\frac{3}{2}}}{c k_1}.$$

Bringt man sie bei (64) für $n=1$ an, so erhält man die siderische Umlaufszeit $T_1^{(s)}$:

$$T_1^{(s)} = \frac{2\pi a_0^{\frac{3}{2}}}{\varkappa \sqrt{\mu + m}} \left[1 + \frac{\bar{v}^2}{c^2}(1 - \alpha B(\varepsilon)) \right]. \tag{66}$$

Da die Exzentrizität ε im allgemeinen nicht gross ist, so wird $B(\varepsilon)$ in grober Annäherung gleich 1, tatsächlich aber kleiner. Um Übereinstimmung mit der Umlaufszeit nach Newton zu erhalten, müsste α etwas grösser als 1 genommen werden, während für die Perihelverschiebung $\alpha = 3$ notwendig war. Die Formel (66) liefert bei $\alpha = 3$ kleinere Werte als die Newton'sche. Die relative Abweichung für (64) resp. (66) von Newton beträgt 10^{-5} Promille für den Merkur und 10^{-7} Promille für die äussersten Planeten und dürfte daher wohl als „nicht-beobachtbar" angesehen werden, wenn man berücksichtigt, dass die ideale Gleichförmigkeit der uns zur Verfügung stehenden Normaluhr, nämlich der rotierenden Erde, auf die Dauer nicht mit Sicherheit postuliert werden darf.

§ 7. **Anwendungen auf das Sonnensystem.** Da die Periheldistanz ϱ_0 eines Planeten laut (51) mit der Zeit wächst, so lässt sich rückwärtig der Zeitpunkt berechnen, wo diese Distanz dem gegenwärtigen Sonnenradius $r = 6{,}953 \cdot 10^{10}$ gleich sein hätte müssen. Geht man von der Annahme aus, dass die Dichte des Zentralkörpers „Sonne" in keinem Zeitpunkt der Vergangenheit grösser war, als in der Gegenwart, so folgt daraus sofort eine obere Schranke für das Höchstalter der individuellen Existenz des betreffenden Planeten. Wie aus der Tabelle Seite 37 ersichtlich ist, schwankt dieses Höchstalter, das aus

$$\varrho_0 e^{\sigma t} = r$$

mit $\tau = 6{,}2 \cdot 10^{16}$ berechnet ist, von $8{,}2 \cdot 10^9$ tropischen Erdjahren (Merkur) bis zu $17{,}2 \cdot 10^9$ Erdjahren (Neptun, Pluto)[6].

[6]) Auf radioaktiver Grundlage basierende Schätzungen haben für das Alter von Mineralien und Gesteinen der Erde bis zu $1{,}6 \cdot 10^9$ Jahre ergeben. Bei der Auswertung der Messungen sind hierbei die Halbwertszeiten des radioaktiven Zerfalls als säkulare Konstanten behandelt. Ob dies für so grosse Zeitspannen berechtigt ist, bleibt eine offene Frage; Zweifel sind jedenfalls nicht unbegründet, sobald man die Möglichkeit eines säkularen Wachstums der Gravitationskonstanten und der Planck'schen Konstanten h in Erwägung zieht. Trotz alledem ist es auffallend, dass die Grössenordnung 10^9 sowohl der expansionistischen Hypothese, als auch der radioaktiven Betrachtungsweise entspricht.

Akzeptiert man den Grundgedanken der Laplace'schen kosmogonischen Hypothese und macht zuträglich noch die Annahme, dass der Halbmesser ϱ_A des Zentralkörpers in der Ebene der Ekliptik von der „Geburt" des äussersten Planeten an bis zur Gegenwart ständig abgenommen hat, u. zw. nach dem naheliegenden Exponentialgesetz

$$\varrho_A = r\, e^{-\beta t}, \tag{67}$$

wo β eine unbekannte Konstante bedeutet, so kann man einen Schritt weiter gehen. Setzt man

$$\sigma + \beta = \lambda \tag{68}$$

und bezeichnet mit t_A den Zeitpunkt der Ablösung des Planeten vom Zentralkörper, so wird

$$\varrho_0\, e^{\sigma t_A} = \varrho_A = r\, e^{-\beta t_A},$$

mithin

$$\frac{\varrho_0}{r} = e^{-\lambda t_A}, \quad \lambda t_A = -\log \frac{\varrho_0}{r}. \tag{69}$$

Hierin ist λ eine unbekannte Konstante. Durch (69) wird jedenfalls die Verhältniszahl des Alters zweier beliebiger Planeten eindeutig festgelegt. Bei der Annahme $\beta = 0$, also $\lambda = \sigma$ ergibt sich wiederum das Höchstalter.

Zur Bestimmung von β resp. λ gibt es nur mangelhafte Anhaltspunkte. Immerhin dürften folgende Überlegungen vielleicht nicht von der Hand zu weisen sein:

Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Urkörpers wird infolge der Kontraktion wachsen müssen; gegenwärtig beträgt diese Winkelgeschwindigkeit $w_0 = 2{,}882 \cdot 10^{-6}$. Wenn die Kontraktion exponentiell abnimmt, so wird der Anstieg der Winkelgeschwindigkeit vor einiger Zeit verhältnismässig stark gewesen sein müssen, während er jetzt nur noch schwach ist. Zeichnet man die Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit, so liegt es demnach nahe anzunehmen, dass die Kurve irgendwo in der Vergangenheit einen Wendepunkt aufweist; in noch entfernterer Vergangenheit wird der Betrag von w sehr klein ($w = 0$ als Asymptote); für die Gegenwart und Zukunft dürfte man eine zweite Asymptote voraussetzen, die nicht merklich von $w = 2{,}882 \cdot 10^{-6}$ verschieden sein wird.

Es ist nun ebenfalls naheliegend anzunehmen, dass die Geschwindigkeit des Planeten im Zeitpunkt der Ablösung zum grössten Teil durch die damals herrschende Winkelgeschwindigkeit bedingt wurde; der zusätzlich hinzukommende kleinere Teil dürfte dann vielleicht durch bestehende Spannungsdifferenzen, also etwa explosionsartige Erscheinungen, oder auch möglicherweise durch Lichtdruck[7]) zu erklären sein. Dieser zusätzliche kleine Teil bewirkt, wie man leicht einsieht, die Exzentrizität der Bahn.

Nun dürfte es als fast sicher gelten, dass intramerkurielle Planeten von merklicher Grösse nicht existieren. Die „Geburt" des Merkur wäre demnach auch die letzte. Man könnte dies damit in Zusammenhang bringen, dass der oben erwähnte Wendepunkt der Winkelgeschwindigkeit gerade in die Epoche der Ablösung der Merkurmasse fällt. Andererseits zeigen die Zahlen λt_A, dass der Merkur ungefähr halb so alt ist, wie die ältesten Planeten Neptun und Pluto. Darin liegt ein plausibler Grund für die Hypothese, dass die Winkelgeschwindigkeit im Zeitpunkt der Geburt des Merkur ungefähr die Hälfte des gegenwärtigen nahezu schon konstanten Wertes w_0 betrug. Nimmt man ausserdem noch an, dass die lineare Geschwindigkeit an der Peripherie des Zentralkörpers im Moment der Geburt des Merkur gleich war der mittleren Bahngeschwindigkeit dieses Planeten, so berechnet sich aus

$$w = 1{,}44 \cdot 10^{-6}, \quad \bar{v} = 4{,}78 \cdot 10^{6}$$

zunächst

$$\varrho_A = 3{,}32 \cdot 10^{12}.$$

Infolge

$$\varrho_A = \varrho_0 e^{\sigma t_A}, \quad \varrho_0 = 4{,}60 \cdot 10^{12},$$

ergibt sich für den Merkur alsdann

$$t_A = -6{,}4 \cdot 10^{8} \text{ [tropische Erdjahre]}$$

und hiernach, aus $\lambda t_A = -4{,}19$, $\lambda = 2{,}1 \cdot 10^{-16}$. Eine grössere Genauigkeit ist natürlich illusorisch; trotzdem ist es jedoch mathematisch statthaft genauer zu rechnen. Man findet dann

$$\lambda = 2{,}077 \cdot 10^{-16}. \tag{70}$$

---

[7]) Eine eigenartige kosmogonische physikalisch-chemische Theorie, bei der u. a. der Lichtdruck eine wesentliche Rolle spielt, ist neuerdings von Z. Zeitline entwickelt worden („*La Mécanique Physico-Chimique des Corps et des Systèmes Cosmiques*", Moscou 1937). Die Gravitation wird dort mit der kosmischen Strahlung in Verbindung gebracht.

Tabelle der Daten für das Sonnensystem.

	a_0 (10^6 km)	ε	ϱ_0 (10^6 km)	$\bar{v}$ (km sec^{-1})	v_0 (km sec^{-1})	N	δ ($\alpha = 3$)	λt_A	Höchstalter (10^9 Erdjahre)	Hypothese $\lambda = 2{,}077 \cdot 10^{-16}$: t_A (10^8 Erdj.)	$\frac{\varrho_0}{\varrho_A}$	ϱ_A (10^6 km)	$T_2 - T_1$ (sec)	$a_1 - a_0$ (km)
Merkur .	57,852	0,2056	45,958	47,83	58,93	$8{,}1 \cdot 10^9$	0,″103	— 4,19	8,2	— 6,4	1,385	33,2	0,00094	0,007
Venus .	108,10	0,0068	107,36	34,99	35,23	$3{,}2 \cdot 10^9$	0,″053	— 5,04	9,9	— 7,7	1,479	72,6	0,0061	0,034
Erde . .	149,45	0,0167	146,95	29,76	30,27	$2{,}0 \cdot 10^9$	0,″038	— 5,35	10,5	— 8,2	1,515	97,0	0,016	0,075
Mars . .	227,72	0,0933	206,47	24,11	26,47	$1{,}0 \cdot 10^9$	0,″025	— 5,69	11,2	— 8,7	1,556	133	0,059	0,23
Ceres . .	413,35	0,0793	380,53	17,89	19,37	$4{,}3 \cdot 10^8$	0,″014	— 6,30	12,4	— 9,6	1,632	233	0,41	0,96
Jupiter .	777,56	0,0484	739,93	13,05	13,70	$1{,}7 \cdot 10^8$	0,″007	— 6,97	13,7	— 10,6	1,718	431	2,2	4,6
Saturn .	1425,6	0,0558	1346,1	9,64	10,19	$6{,}7 \cdot 10^7$	0,″004	— 7,57	14,9	— 11,5	1,800	748	14	21
Uranus .	2868,1	0,0471	2733,0	6,80	7,13	$2{,}3 \cdot 10^7$	0,″002	— 8,28	16.3	— 12,6	1,901	1440	120	120
Neptun .	4494.1	0,0086	4455,5	5,43	5,48	$1{,}2 \cdot 10^7$	0,″001	— 8,76	17,2	— 13,4	1,975	2260	430	370
Pluto . .	5905,9	0,2486	4437,7	4,74	6,11	$7{,}9 \cdot 10^6$	0,″001	— 8,76	17,2	— 13,4	1,974	2250	990	750

Die sich aus der Hypothese (70) ergebenden Daten für die übrigen Planeten sind in der Tabelle auf Seite 37 in 3 Spalten $\left(t_A, \frac{\varrho_0}{\varrho_A}, \varrho_A\right)$ angeführt.

Bei der Zusammenstellung dieser Tabelle bildeten die Daten der ersten zwei Spalten a_0, ε den Ausgangspunkt; die übrigen Spalten sind sämtlich durch Rechnung aus den beiden ersten ermittelt.

Die 2 letzten Spalten ($T_2 - T_1$, $a_1 - a_0$) zeigen den Zuwachs der Umlaufsdauer resp. den Zuwachs der mittleren Entfernung für zwei aufeinanderfolgende Umläufe in der Gegenwart. Wie ersichtlich, sind diese Zuwächse für die äussersten Planeten des Sonnensystems absolut genommen recht beträchtlich. Sie dürften aber dennoch zu den „nichtbeobachtbaren" Effekten gehören, schon deshalb, weil die Zeiteinheit sec prinzipiell unsicher ist, da die sehr wahrscheinliche Ungleichförmigkeit der Erdrotation[8]) die Exaktheit der Zeitmessung für grössere Intervalle illusorisch macht. Als zweiter Unsicherheitsfaktor für den Beobachter tritt die grosse Entfernung der äussersten Planeten hinzu: Im günstigsten Falle des Pluto werden in $T_2 - T_1 = 990$ sec ca. 6050 km zurückgelegt, was, von der Erde aus gesehen, ungefähr 0,″3 entspricht. Nun sind 0,″3 allerdings beobachtbar; es dürfte aber recht schwierig sein mit dieser Genauigkeit den Ort des Perihels direkt aus der Beobachtung zu ermitteln. Im Falle des Jupiter wird der Winkelunterschied 0,″01, was selbst schon an der äussersten Grenze des Beobachtbaren liegt, während die übrigen Schwierigkeiten bestehen bleiben. Allerdings hat man die Möglichkeit der Beobachtung des Effekts, wenn man ihn sich im Laufe vieler Umläufe summieren lässt; hierzu ist eine grosse Zeitspanne äusserst exakter Beobachtungen und wiederum eine absolut gleichförmig laufende Uhr notwendig.

Die grösste Chance einer Registrierung des Effekts scheint in der Zunahme des Erdjahres um 0,016 sec zu liegen; es ist

---

[8]) Die erforderliche Genauigkeit beträgt $5 \cdot 10^{-7}$ Promille. Macht man die Abnahme der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation für die Abweichungen in der Bewegung des Mondes verantwortlich, so resultiert eine Zunahme der Sekundendauer um $23 \cdot 10^{-7}$ Promille (S. Oppenheim, Enzykl. math. Wiss., VI 2,22, § 27).

aber wahrscheinlich, dass diese Zunahme durch die allmähliche Abnahme der Rotation der Erde verdeckt wird.

Die Zunahme der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde direkt aus der Beobachtung zu konstatieren ist praktisch unmöglich: Erst nach 20 000 Jahren wird der scheinbare Sonnenradius um 0,"01 kleiner sein, vorausgesetzt, dass die fortdauernde Kontraktion der Sonne diesen Betrag nicht wesentlich vergrössert.

Alle diese Konsequenzen stehen im Einklang damit, dass der Einfluss der Expansion wegen der Kleinheit des Expansionskoeffizienten σ bei Beobachtungen auf relativ kleine Entfernungen (etwa innerhalb der Milchstrasse) erst dann bemerkbar wird, wenn man grosse Zeitspannen in Betracht zieht. Anders wird die Sachlage, wenn man Beobachtungen auf grosse Entfernungen unternimmt: die starke Rotverschiebung für die extragalaktischen Nebel und die damit eng zusammenhängende Dunkelheit des Himmelsgewölbes sind Beispiele hierfür.

Immerhin ergibt die expansionistische Konzeption ein von der klassischen Anschauung in wesentlichen Zügen verschiedenes Bild von der Evolution des Sonnensystems.

In der demnächst folgenden zweiten Publikation soll gezeigt werden, welche prinzipiellen Unterschiede sich ergeben, wenn man die expansionistische Konzeption auf die Atomphysik und Wellenmechanik ausdehnt. Es zeigt sich da u. a., dass es folgerichtig ist nicht nur die Gravitationskonstante, sondern auch die Planck'sche Konstante h als exponentiell mit der Zeit wachsend anzunehmen [9]. Die Streitfrage, ob die Rotverschiebung „reell" oder aber auf „Lichtermüdung" zurückzuführen ist, wird dann inhaltslos: Expansion und Lichtermüdung erscheinen als zwei untrennbar miteinander verknüpfte Seiten ein und desselben Ursprungs; Lichtermüdung ist eben das allmähliche Anwachsen der Konstanten h.

---

[9]) G. J. Whitrow, *„Photons, Energy, and Red-Shifts in the Spectra of Nebulae"* (Quart. Journ. Math., 7, Nr. 28, 1936) gelangt auf Grund an Milne anlehnender Vorstellungen zum Schluss, dass h säkular konstant ist, und erwähnt in einer Fussnote, dass die Möglichkeit einer säkularen Änderung von Chalmers and Chalmers, (Phil. Mag. 19 (1934), 436—46) untersucht worden ist.

Inhalt.

O/Ü. K. MATTIESENI TRÜKIK., TARTU