5/3

ISSN 0136-3549 0203-9745

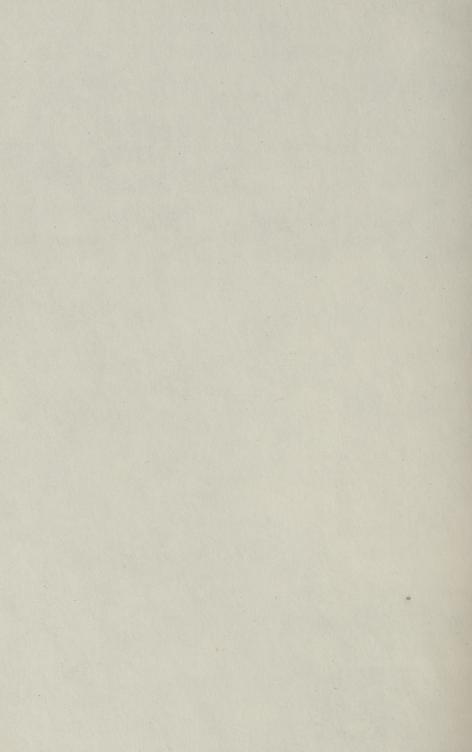
TALLINNA
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI
TOIMETISED

575

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК







# TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

# труды таллинского политехнического института

УДК 624

СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Строительная механика XV



### TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

#### ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.074.4.621.031

Ю.А. Тярно, Э.З. Жуковский, О.В. Шевченко

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТАВНОЙ ВИСЯЧЕЙ ОБОЛОЧКИ С ПЯТИУГОЛЬНЫМ ПЛАНОМ

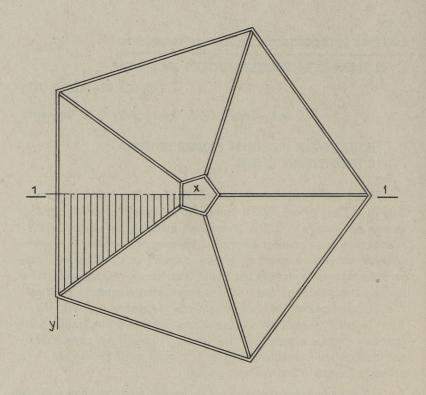
Была изготовлена из стеклопластика (упругие свойства E=13,6 ГПа,  $\gamma=0,22$ ) и испытана на статическую нагрузку модель (в масштабе I:50) составной висячей пятилепестковой оболочки с радиальными жесткими вантами и жестким полигональным опорным элементом в виде пяти арок с затяжками. Опоры натуральной конструкции находятся на круге радиусом 60 м. Размеры модели (см. фиг. I): толщина криволинейной части  $\delta=2,I$  мм; радиальная межпанельная диафрагма  $h_p=20$  мм,  $b_p=14$  мм; радиальный стальной тяж  $\phi$  IO мм; ториевая диафрагма — арка с затяжкой  $h_{\tau}=37$  мм,  $b_{\tau}=22$  мм, тяж ториевой диафрагмы — стальная труба F=2,23 см $^2$ . Геометрия и размеры панели-оболочки см. на фиг. I.

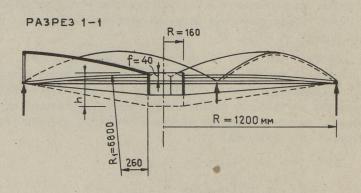
Равномерно распределенная нагрузка была имитирована как нагрузка на отдельные точки (расстояние между нагрузками  $\sim 30\, 5$ ). Общая суммарная нагрузка составляет I5,8 кH, площадь модели  $F_M=3,4 \mbox{I}$  м<sup>2</sup>.

Прогибы (см. фиг. 2) внутреннего кольца зависят от строительной высоты конструкции h (h - расстояние между верхом радиальной арки и центром тяжести радиального тяжа в плоскости внутреннего кольца). При разных отношениях строительной высоты к диаметру получены следующие прогибы (при нагрузке q = 4,60 кПа)

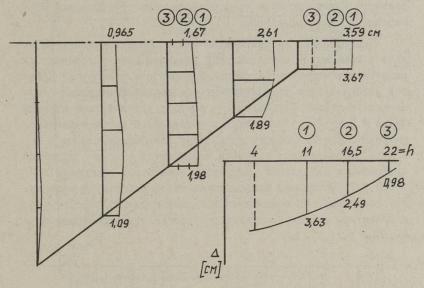
при 
$$h = 11 \text{ cm} \quad \Delta = \frac{1}{66} \text{ D}$$
  $h = 16,5 \text{ cm} \quad \Delta = \frac{1}{97} \text{ D}$   $h = 22 \text{ cm} \quad \Delta = \frac{1}{254} \text{ D}$ 

Прогибы составной оболочки реализуются как прогибы висячей конструкции и изменяются линеарно от максимума у цент-

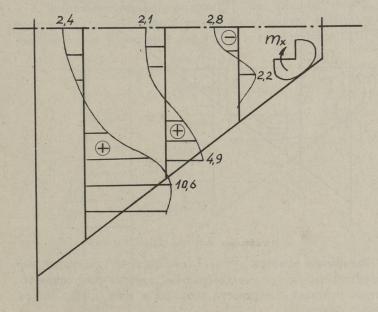




Фиг. 1. Общий вид на модель составной висячей оболочки.



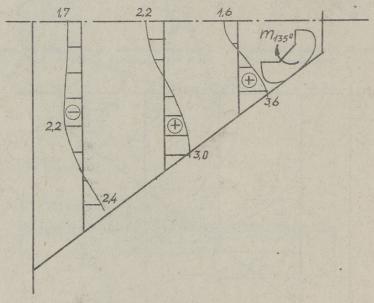
Фиг. 2. Прогибы оболочки ( f = 4 см) при нагрузке q = 4,6 кПа при разных строительных высотах 1 - h = 11 см, 2 - h = 16,5 см, 3 - h = 22 см.



Фиг. 3. Поперечные изгибающие моменты тах [Нсм/см].

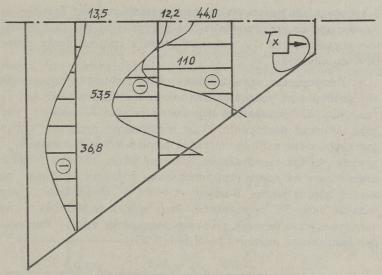
рального кольца до нуля у опор. Изменение прогибов для всех вариантов тяжей одинаково.

Тонкостенная криволинейная часть панели-оболочки работает в мембранном состоянии под влиянием незначительных отрицательных моментов (наружная поверхность растянута). Краевой эффект в виде отрицательных поперечных изгибающих моментов (см. фиг. 3)  $m_x$ , имеет место в угловой зоне шириной около  $0.3\,s_0$  ( $s_0$  полудлина криволинейной части в данном разрезе). Краевой эффект продольных изгибающих моментов  $m_y$ , в виде положительных моментов, наблюдается в зоне торцевой диафрагмы и радиального бортового элемента с размерами 0.3R и  $0.5\,s_0$ . Остальная тонкостенная часть работает в мембранном состоянии. По моментам  $m_x$ и  $m_y$  можно констатировать, что в моментном состоянии находится угловая зона размерами  $x_0$  = 0.3R и  $y_0$  =  $0.5\,s_0$ .



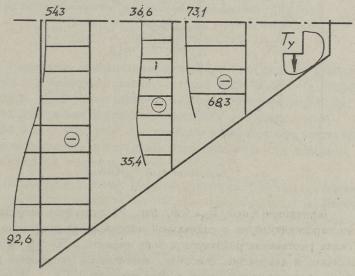
Фиг. 4. Изгибающие моменты т 135° [Нсм/см].

Изгибающие моменты  $m_{135}$ ° (см. фиг. 4) (действуют перпендикулярно к радиальным диафрагмам) требуют расположения арматуры у нижней поверхности оболочки в зоне  $0,5\,\mathrm{S}_{\mathrm{O}}$  от радиальной диафрагмы.



Фиг. 5. Продольные нормальные силы Тх [Н/см].

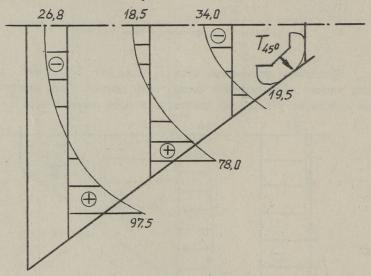
Продольные нормальные силы  $T_x$  (см. фиг. 5), почти во всех точках криволинейной части, силы сжатия. Силы растяжения действуют у торпевой диафрагмы в зоне шириной 0,15 R .



Фиг. 6. Поперечные нормальные силы Ту [Н/см].

У торпевой диафрагмы существуют краевые условия Навье, а усилия сжатия увеличиваеются до внутреннего кольпа. Основные усилия сжатия  $T_{\mathsf{X}}$  занимают место в средних зонах поперечного сечения.

Тонкостенная криволинейная часть находится под влиянием существенных усилий сжатия поперечных нормальных сил  $T_y$  (см. фиг. 6). Поперечные нормальные усилия  $T_y$  зависят от двух основных факторов: I) от поперечного пролета  $t_x$  в данном разрезе и 2) от прогибов радиальной межпанельной диафрагмы. При значительных прогибах рядом стоящие оболочки влияют друг на друга горизонтальными усилиями, которые вызывают эффект свода. В полосе x = 0.4 поперечные нормальные силы  $t_y$  уменьшаются. Этот эффект выявляется при эксперименте с разными высотами радиальных тяжей. Максимальные напряжения сжатия  $t_y = 3.5-4.0$  МПа.

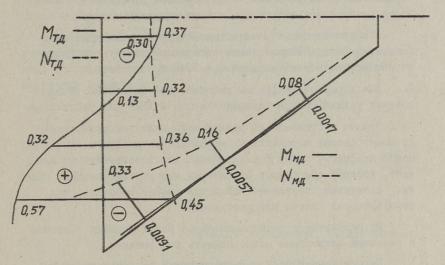


Фиг. 7. Внутренние силы  $T_{45}$ °[H/cм].

Внутренние силы  $T_{45^\circ}$  (см. фиг. 7) действуют практически перпендикулярно к радиальной межпанельной диафрагме. Усилия растяжения действуют в зоне шириной 0,55-0,6  $s_0$  от радиальной диафрагмы. Основное, интенсивное увеличение усилия растяжения имеет место в зоне шириной 0,3  $s_0$ . Можно

предположить, что эти величины близки к главным растягивающим усилиям и требуют добавочной наклонной арматуры.

Внутренние силы  $T_{135}$  у радиальной диафрагмы усилия сжатия, что соответствует и усилиям в бортовом элементе (усилия сжатия).



Фиг. 8. Внутренние силы в межпанельных диафрагмах  $N_{ML}$  [кН],  $M_{ML}$  [кНсм],  $N_{MT}$  = 9,35 кН и в торцевых диафрагмах  $N_{TL}$  [кН],  $M_{TL}$  [кНсм],  $N_{TT}$  = -1,25 кН.

Радиальные межпанельные диафрагмы (см. фиг. 8) находятся под действием сил сжатия, которые увеличиваются в сторону опоры. Зона у гентрального кольца может быть растянута. В этих диафрагмах двухзначные изгибающие моменты. Зона с длиной 0,3 R находится под влиянием отрицательных (верхняя сторона растянута), остальная зона находится под влиянием положительных моментов.

В радиальных тяжах имеются усилия растяжения, которые зависят от строительной высоты оболочки. Принимая за основу оболочку h=11 см при переходе на оболочку h=22 см можно уменьшить внутренние силы в тяжах на 75 %  $\circ$ 

В арках торпевых диафрагм (см. фиг. 8) действуют значительные усилия сжатия, имеющие максимум у опор. У конька диафрагмы усилия сжатия уменьшаются в 2,5 - 3,5 раза, что

свидетельствует о передаче равномерно распределенной нагрузки от тонкостенной оболочки на торцевые диафрагмы в основном при помощи сдвигающих сил. Это указывает на пространственную работу панели-оболочки. Часть общей нагрузки передается на опоры прямо через торцевые диафрагмы, часть через центральное кольцо при помощи радиальных тяжей.

В арках торпевых диафрагм действуют двухзначные изгибающие моменты. Положительные изгибающие моменты возрастают интенсивно в зоне шириной  $0,4-0,45\,s_0$  от опоры.

Тяж торцевой диафрагмы работает под действием незначительных усилий сжатия (напряжение 3 – 4 МПа) или растяжения.

Усилия растяжения от радиального тяжа воспринимаются арками торцевых и радиальных межпанельных диафрагм. Тяж торцевой диафрагмы может быть применен как конструктивный элемент, который при разных отношениях жесткостей основных краевых элементов составной оболочки может работать под действием сил сжатия или растяжения.

Из результатов экспериментов на малых моделях оболочек с висячими элементами можно сделать ряд выводов.

Данные конструкции характеризуются значительными прогибами в пределах I/60...I/I50 D, так как основная система работает как висячая конструкция. Для прогибов конструкции важную роль играет выбор жесткостей радиальных и торцевых диафрагм. Прогибы зависят от строительной высоты конструкции. При более высоких конструкциях прогибы уменьшаются. Предельные прогибы можно назначить как для висячей конструкции. В конструкции необходимо предусмотреть значительный строительный подъем, который реализовался бы от собственного веса конструкции. Необходимо обратить внимание на сохранение внешнего водостока.

Тонкостенная часть работает одинаково при всех вариантах радиальных тяжей (т.е. при всех вертикальных прогибах центрального кольца). Тонкостенная криволинейная часть работает в мембранном состоянии. Настоящую конструкцию в поперечном направлении характеризует существенный эффект свода. Необходимо обратить внимание на восприятие главных растягивающих усилий в зонах у радиальных межпанельных диафрагм. Бортовые элементы (радиальные и торцевые) работают на сжатие под влиянием двухзначных изгибающих моментов. Настоящая комбинированная висячая конструкция чувствительна к выбору жесткостей. При выбранных отношениях жесткостей тяжи торцевых диафрагм не воспринимают значительных внутренних усилий. Контурные усилия воспринимаются арками торцевых и радиальных диафрагм.

Конструкция комбинированной оболочки архитектурно конструктивна и позволяет сэкономить кубатуру объема здания, но требует тщательного выбора размеров и жесткостей отдельных элементов.

Ü. Tärno, E. Zhukovski, O. Shevchenko

Investigation of Complex Hanging Shell Roof with Pentagonal Configuration

Summary

A fiberglass 1:50 scale model (E = 13,6 GPa,  $\gamma$  = 0.22) of the complex hanging shell roof with a pentagonal configuration has been made and tested. The model has radial cables and polygonal support elements (five lowstring arches). The vertical displacements of the complex shell are realized as displacements of hanging structures. The thin walled plate of the shell operates in a membrane state with little bending moments in the corner zones. Pressure and two mark bending moments take place in the radial diafragms. It is possible to use strings of polygonal arches as constructional elements. Depending on the stiffness of the main elements of the shell pressure or tension may occur in the strings.

the body of the second of the THE RESERVE OF THE PARTY OF THE

#### TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

#### ТРУПН ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.04

Р.Н. Ээк, Р.К. Ряямет

РАСЧЕТ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛШИНЫ МЕТОЛОМ СЕТСК

Рассмотрим упругие прямоугольные ортотропные пластинки, нагруженные любой поперечной нагрузкой, и на контуре произвольным образом оперты. Для решения такой задачи обшего жарактера удобным методом является метод сеток.

Воспользуемся следующими обозначениями:

- ж, у главные оси упругости в срединной плоскости пластинки:
  - съ, перпендикулярная к срединной плоскости пластинки;
  - w перемещение в направлении оси 2;
  - h толщина пластинки;
  - р интенсивность поперечной нагрузки;
  - Е<sub>х</sub>, Е<sub>у</sub>, Р<sub>х</sub>, Р<sub>у</sub>, G модули упругости, коэффициенты Пуассона и модуль упругости при сдвиге в главных направлениях упругости.

Изгибные жесткости и крутильная жесткость в главных направлениях упругости выражаются следующими формулами (см. [I] или [2])

$$D_{\infty} = \frac{E_{\infty}h^3}{12(1 - \mu_{\infty}\mu_{\omega})}, \quad D_{y} = \frac{E_{y}h^3}{12(1 - \mu_{\infty}\mu_{\omega})}, \quad D_{\infty y} = \frac{Gh^3}{12}. \tag{I}$$

Еще введем обозначения

$$D_4 = D_x \mu_y = D_y \mu_x, \quad D_2 = D_4 + 2D_{xy}.$$
 (2)

Соответственно теории изгиба тонких гибких пластинок выражения изгибающих моментов, крутящего момента и поперечных сил следующие:

$$\begin{split} \mathsf{M}_{x} &= -\mathsf{D}_{x} \Big( \frac{\partial^{2} \mathsf{w}}{\partial x^{2}} + \mu_{y} \frac{\partial^{2} \mathsf{w}}{\partial y^{2}} \Big) = - \Big( \mathsf{D}_{x} \frac{\partial^{2} \mathsf{w}}{\partial x^{2}} + \mathsf{D}_{y} \frac{\partial^{2} \mathsf{w}}{\partial y^{2}} \Big) \;, \\ \mathsf{M}_{y} &= -\mathsf{D}_{y} \Big( \frac{\partial^{2} \mathsf{w}}{\partial y^{2}} + \mu_{x} \frac{\partial^{2} \mathsf{w}}{\partial x^{2}} \Big) = - \Big( \mathsf{D}_{y} \frac{\partial^{2} \mathsf{w}}{\partial y^{2}} + \mathsf{D}_{y} \frac{\partial^{2} \mathsf{w}}{\partial x^{2}} \Big) \;, \end{split} \tag{3}$$

$$M_{xy} = -2 D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \qquad (4)$$

$$Q_{xz} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$Q_{yz} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$
(5)

Подставив выражения (3)...(5) в уравнение равновесия пластинки

 $\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{y}}{\partial y^2} = -p(x, y), \qquad (6)$ 

получим следующее дифференциальное уравнение упругой поверхности пластинки:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \left[ D_{x} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + D_{1} \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right] + 4 \frac{\partial^{2}}{\partial x \partial y} \left[ D_{xy} \frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y} \right] +$$

$$+ \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} \left[ D_{y} \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} + D_{1} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \right] = p(x, y). \tag{7}$$

После дифференцирования уравнение (7) принимает следующий вид:

$$D_{x} \frac{\partial^{4}w}{\partial x^{4}} + 2D_{2} \frac{\partial^{4}w}{\partial x^{2}\partial y^{2}} + D_{y} \frac{\partial^{4}w}{\partial y^{4}} +$$

$$+ 2 \left[ \frac{\partial D_{x}}{\partial x} \frac{\partial^{3}w}{\partial x^{3}} + \frac{\partial D_{2}}{\partial x} \frac{\partial^{3}w}{\partial x\partial y^{2}} + \frac{\partial D_{2}}{\partial y} \frac{\partial^{3}w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial D_{y}}{\partial y} \frac{\partial^{3}w}{\partial y^{3}} +$$

$$+ \frac{\partial^{2}D_{x}}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}D_{1}}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}} + 4 \frac{\partial^{2}D_{xy}}{\partial x\partial y} \frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y} +$$

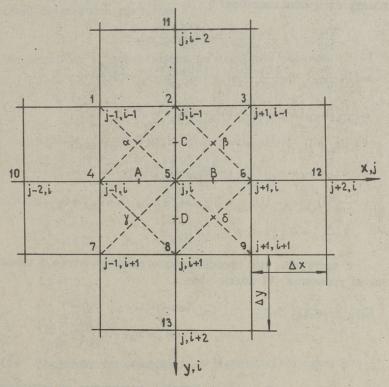
$$+ \frac{\partial^{2}D_{y}}{\partial y^{2}} \frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}D_{1}}{\partial y^{2}} \frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}} \right] = p(x, y).$$
(8)

При замене дифференциального уравнения (7) или (8) конечно-разностным уравнением воспользуемся сеткой, изображенной на фиг. І. Через  $\propto$ ,  $\beta$ , у и  $\delta$  обозначены точки, расположенные в центрах соответствующих клеток.

Для замены дифференциального уравнения (7) или (8) конечно-разностным уравнением были поставлены сдедующие условия:

- I) уравнения (7) и (8) должны дать одинаковое конечно-разностное уравнение.
- 2) должна сокраняться известная I3-членная структура уравнения метода сеток.

Оказалось, что для удовлетворения этих требований необходимо для вторых и четвертых производных воспользоваться центральными конечными разностями, а для первых и третьих производных — левыми и правыми конечными разностями.



Фиг. 1. Обозначение узлов сетки.

Например, в тождестве

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial D_x}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
 (a)

левая часть (в точке 5) будет

$$\begin{split} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \left( D_{x} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \right)_{5} &\approx \frac{1}{\Delta x^{2}} \left[ D_{x,4} \left( \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \right)_{4} - 2 D_{x,5} \left( \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \right)_{5} + D_{x,6} \left( \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \right)_{6} \right] &\approx \\ &\approx \frac{1}{\Delta x^{4}} \left[ D_{x,4} w_{10} - 2 \left( D_{x,4} + D_{x,5} \right) w_{4} + \left( D_{x,4} + 4 D_{x,5} + D_{x,6} \right) w_{5} \right] &\approx \\ &+ D_{x,6} w_{5} - 2 \left( D_{x,5} + D_{x,6} \right) w_{6} + D_{x,6} + w_{12} \right], \end{split}$$

а правую часть необходимо для получения тождества преобразовать следующим способом:

$$\begin{split} &\left(D_{xx}\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{4}}\right)_{5}+\left(\frac{\partial D_{x}}{\partial x}\frac{\partial^{3}w}{\partial x^{3}}\right)_{5}+\left(\frac{\partial^{2}D_{x}}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\right)_{5}\approx\\ &\approx\left(D_{xx}\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{4}}\right)_{5}+\left(\frac{\partial D_{x}}{\partial x}\frac{\partial^{3}w}{\partial x^{3}}\right)_{A}+\left(\frac{\partial D_{x}}{\partial x}\frac{\partial^{3}w}{\partial x^{3}}\right)_{B}+\left(\frac{\partial^{2}D_{x}}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\right)_{5}\approx\\ &\approx\frac{1}{\Delta x^{4}}\Big[D_{x,5}(w_{10}-4w_{4}+6w_{5}-4w_{6}+w_{12})+\\ &+(-D_{x,4}+D_{x,5})(-w_{10}+3w_{4}-3w_{5}+w_{6})+(-D_{x,5}+D_{x,6})(-w_{4}+\\ &+3w_{5}-3w_{6}+w_{12})+(D_{x,4}-2D_{x,5}+D_{x,6})(w_{4}-2w_{5}+w_{6})\Big]=\\ &=\frac{1}{\Delta x^{4}}\Big[D_{x,4}w_{10}-2(D_{x,4}+D_{x,5})w_{4}+(D_{x,4}+4D_{x,5}+D_{x,6})w_{5}-\\ &-2(D_{x,5}+D_{x,6})w_{6}+D_{x,6}w_{12}\Big]\,. \end{split}$$

В частности, при преобразовании среднего члена в левой части уравнения (7) должно быть

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x \partial y} \left[ D_{xy} \frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y} \right] \approx \frac{1}{(\Delta x \Delta y)^{2}} \left[ D_{xy,\alpha} (w_{1} - w_{2} - w_{4} + w_{5}) - D_{xy,\beta} (w_{2} - w_{3} - w_{5} + w_{6}) - D_{xy,\beta} (w_{4} - w_{5} - w_{7} + w_{8}) + D_{xy,\delta} (w_{5} - w_{6} - w_{8} + w_{9}) \right]$$
(9)

$$D_{xy,0} = \frac{1}{4} (D_{xy,1} + D_{xy,2} + D_{xy,4} + D_{xy,5}),$$

$$D_{xy,0} = \frac{1}{4} (D_{xy,2} + D_{xy,3} + D_{xy,5} + D_{xy,6}),$$
(IO)

$$\begin{split} &D_{xy,\chi} = \frac{1}{4} (D_{xy,4} + D_{xy,5} + D_{xy,7} + D_{xy,8}) , \\ &D_{xy,\delta} = \frac{1}{4} (D_{xy,5} + D_{xy,6} + D_{xy,8} + \bar{D}_{xy,9}) . \end{split}$$

Обозначим соотношение квадратов сторон клеток через

$$\alpha = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2. \tag{II}$$

Тогда, в конечном счете, уравнение (7) или (8) можно для центральной точки (5) представить в виде следующего конечно-разностного уравнения

$$\sum_{\kappa=1}^{13} c_{\kappa} W_{\kappa} = p_5 \Delta_{y}^{4}, \qquad (12)$$

где множители Ск определяются по следующим формулам:

$$C_{5} = (D'_{x,4} + 4D'_{x,5} + D'_{x,6}) + (D'_{y,2} + 4D'_{y,5} + D'_{y,8}) + \\ + 8 D'_{1,5} + (D'_{xy,4} + D'_{xy,8} + D'_{xy,7} + D'_{xy,8});$$

$$C_{2} = -[(D'_{y1,2} + D'_{y1,5}) + (D'_{xy,4} + D'_{xy,8})];$$

$$C_{4} = -[(D'_{x1,4} + D'_{x1,5}) + (D'_{xy,7} + D'_{xy,8})];$$

$$C_{6} = -[(D'_{x1,6} + D'_{x1,5}) + (D'_{xy,8} + D'_{xy,8})];$$

$$C_{8} = -[(D'_{y1,8} + D'_{y1,5}) + (D'_{xy,7} + D'_{xy,8})];$$

$$C_{1} = (D'_{1,2} + D'_{1,4}) + D'_{xy,8};$$

$$C_{3} = (D'_{1,2} + D'_{1,6}) + D'_{xy,8};$$

$$C_{7} = (D'_{1,4} + D'_{1,8}) + D'_{xy,7};$$

$$C_{9} = (D'_{1,6} + D'_{1,8}) + D'_{xy,8};$$

$$C_{10} = D'_{x,4};$$

$$C_{11} = D'_{y,2};$$

$$C_{12} = D'_{x,6};$$

$$C_{13} = D'_{y,8}.$$

Выражения жесткостей D' в формулах (ІЗ) следующие:

$$\begin{aligned} D_{\infty}' = \alpha^2 D_{\infty}, & D_{y}' = D_{y}, & D_{1}' = \alpha D_{1}, \\ D_{\infty1}' = 2(D_{\infty}' + D_{1}'), & D_{y1}' = 2(D_{y}' + D_{1}'), & D_{\infty y}' = 4 \alpha D_{\infty y}. \end{aligned} \tag{I4}$$

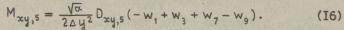
Индекс после запятой — индекс узла (цифра) или индекс поля (буква).

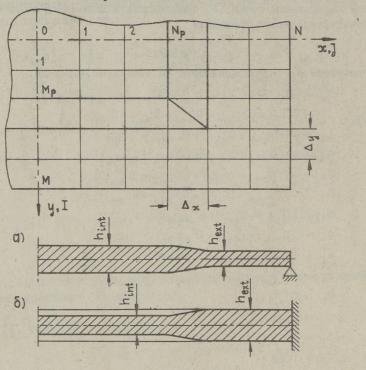
Составление выражений для краевых условий и внутренних усилий не представляет затруднения. Так, например, конечноразностные выражения для изгибающих моментов (3) следующие:

$$M_{x,5} = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ 2 \left( \alpha D_{x,5} + D_{1,5} \right) w_5 - \alpha D_{x,5} \left( w_4 + w_6 \right) - D_{1,5} \left( w_2 + w_8 \right) \right],$$

$$M_{y,5} = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ 2 \left( D_{y,5} + \alpha D_{1,5} \right) w_5 - D_{y,5} \left( w_2 + w_8 \right) - \alpha D_{1,5} \left( w_4 + w_6 \right) \right],$$
(I5)

а вместо выражения (4) для крутящих моментов получим





Фиг. 2. Пластинка переменной толщины.

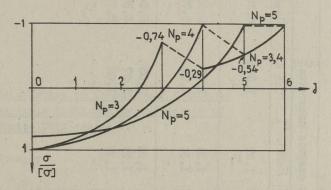
Подученные уравнения метода сеток были использованы для нахождения оптимального соотношения толщин двух частей пластинок ступенчато-переменной толщины, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой (фиг. 2). Рассматривались симметричные свободно опертые пластинки с утолщенной средней частью (фиг. 2,а) и защемленные пластинки с утонченной средней частью (фиг. 2,б). Четверть пластинки разделена в

направлении оси х на N частей, в направлении оси у на М частей; утолщенная (утонченная) часть пластинки разделена на N<sub>p</sub> соответствующих М<sub>p</sub> частей. Минимизировался объем пластинки при условии, что нормальные напряжения в узлах пластинки не должны превышать допускаемых. Программа была составлена на фОРТРАНе.

Результаты вычислений для изотропной квадратной пластинки при равномерно распределенной нагрузке приведены в таблице I. Через V обозначен объем пластинки в сравнении с объемом пластинки постоянной толщины. Через  $\mathsf{max}_{\mathsf{w}}$  обозначен прогиб в центре пластинки, через  $\mathsf{h}_{\mathsf{int}}$  толщина средней части, и через  $\mathsf{h}_{\mathsf{ext}}$  — толщина внешней части; эти величины приведены в сравнении с прогибом и толщиной пластинки постоянной высоты при той же нагрузке.

Экономия материала для свободно опертых пластинок около 8 %, для защемленных пластинок заметно больше — 20 % и более. Однако, прогибы пластинок оптимальных толщин значи тельно больше прогибов пластинок постоянной толщины.

Представляет интерес анализ напряжений в пластинках минимального объема, особенно в защемленных пластинках.



Фиг. 3. Нормальные напряжения в нижних слоях пластинки.

На фиг. З приведены эпиры напряжений  $\sigma$  в нижних слоях защемленной пластинки и при y=0 для N=6 и  $N_p=3,4,5$ . Пунктирная часть линии соответствует части, где толщина пластинки меняется.

Твблица I

										-
Z	Z	Сводобно	опертая пластинка	ластинка		Sam	Защемленная пля	пластинка		
Σ	M	%/	maxm	hint	hext	%/	Mæpu	hint	hext	
4	8	.9'16	I,37	60°I	08,80	6,78	3,35	0,45	1,16	
	0	1	1	•	•	73,I	3,45	19,0	I,I2	
2	S	94°I	I,28	1,07	06 0	94,0	3,13	0,36	I, I3	i i
	3	92,0	I,34	60°I	0,76	83,I	3,62	0,50	I,15	
	4	1	1	-		74,7	2,93	0,67	E,09	
9	23	95,7	I,22	I,05	0,94	1		1		-
	8	93,8	I,29	I,07	0,87	89,4	3,42	0,42	I, I4	
	4	95,6	I,30	I,08	0,72	6,6%	3,72	0,54	I, 14	
	2	-	1	1	1	76,7	2,52	0,71	I,06	

Видно, что при оптимальном решении абсолютные значения напряжений равны допускаемым не в одной, а в двух точках (при  $N_p=4$  даже в трех точках). При  $N_p=3$  и  $N_p=4$  эти точки находятся в центре и на краю пластинки. При  $N_p=5$  наибольшие напряжения возникают при I=N и I=N-1. Однако нельзя упустить из вида, что в последнем случае напряжения между узлами 5 и 6 могут быть больше узловых напряжений. Для такого случая полученное решение не является достаточно точным вообще.

#### Литература

- I. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки.М., Гостехиздат, 1957. 464 с.
- 2. Тимошенко С.П., Войновский Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1966. 635 с.
- 3. Ван Цзи-де. Прикладная теория упругости. М., Физмат. лит. 1959. 400 с.

R. Eek, R. Räämet

Calculation of Orthotropic Plates of Variable Thickness by the Method of Finite Differences

Summary

In this paper equations of the method of finite differences for orthotropic plates of variable thickness are derived. Further, those equations are used for determining optimal thickness rate for isotropic plates, composed of two parts with constant thickness. Economy in material (as compared to plates of constant thickness) equals 8 ... 20 per cent.

the state of the s

#### TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

#### ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

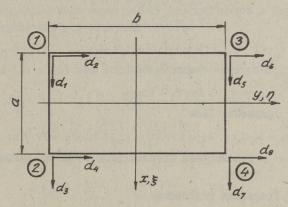
УДК 624.04

Р. Ээк, У. Раукас

# МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ БАЛКИ-СТЕНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛШИНЫ

## І. Предварительные соображения

Ниже рассматривается прямоугольная ортотропная пластинка переменной толщины с целью построения матрицы жесткости и определения напряжений. Результаты могут быть использова ны при решении балки—стенки по МКЭ.



Фиг. 1. Принятые обозначения.

На фиг. I показаны принятая система координатных осей, нумерация узлов и нумерация узловых перемещений  $d_i$  (i=I, ..., 8). Безразмерные координаты

$$\xi = \frac{x}{a/2} = \frac{2x}{a}; \quad \eta = \frac{2y}{b}. \tag{I}$$

Толщина пластинки.  $h = h(\xi, \eta)$ , площадь A.

Константы упругости материала —  $E_x$ ,  $E_y$ , G,  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$ . В целях упрощения выражений введем следующие дополнительные обозначения:

$$E'_{x} = E_{x}/(1-\nu_{x}\nu_{y}); \quad E'_{y} = E_{y}/(1-\nu_{x}\nu_{y});$$

$$E'' = \nu_{x} E_{y}/(1-\nu_{x}\nu_{y}) = \nu_{y} E_{x}/(1-\nu_{x}\nu_{y});$$

$$E_{0} = E'_{x}E'_{y}-(E'')^{2};$$

$$B_{x} = E'_{y}/E_{0}; \quad B_{y} = E'_{x}/E_{0};$$

$$B_{1} = E''/E_{0}; \quad B = 1/G.$$
(2)

Напряжения считаем постоянными в толщине пластинки и объемными силами пренебрегаем. Таким образом, за исходные примем следующие соотношения.

I) Закон Гука для плоского напряженного состояния в

$$\sigma_{x} = E'_{x} \epsilon_{x} + E'' \epsilon_{y},$$

$$\sigma_{y} = E'_{y} \epsilon_{y} + E'' \epsilon_{x},$$

$$\tau_{xy} = G \chi_{xy},$$
(3)

BIE

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x} &= B_{x}\sigma_{x} - B_{1}\sigma_{y}, \\
\varepsilon_{y} &= B_{y}\sigma_{y} - B_{1}\sigma_{x}, \\
\chi_{xy} &= B \tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{4}$$

2) Уравнения Коши

$$\varepsilon_{x} = \partial u/\partial x; \quad \varepsilon_{y} = \partial v/\partial y; \quad \gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x,$$
 (5)

где u, v - перемещения произвельной точки в направлении осей х, ч.

3) Уравнения равновесия

$$\partial N_{x}/\partial x + \partial T_{xy}/\partial y = 0,$$

$$\partial T_{yx}/\partial x + \partial N_{y}/\partial y = 0.$$
(6)

где  $N_x = h\sigma_x$ ,  $N_y = h\sigma_y$ ,  $T_{xy} = h\tau_{xy}$ .

С учетом вышензложенного, потенциальная энергия деформации пластинки

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} h \left( \sigma_{x} \varepsilon_{x} + \sigma_{y} \varepsilon_{y} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \right) dA.$$
 (7)

Толшену  $h(\xi,\eta)$  представем в виде

$$h = h_0 + h_{\xi} + h_{\eta} \eta + h_{\xi \eta} \xi \eta,$$
 (8)

$$\begin{aligned} h_0 &= (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)/4, \\ h_{\xi} &= (-h_1 + h_2 - h_3 + h_4)/4, \\ h_{\eta} &= (-h_1 - h_2 + h_3 + h_4)/4, \\ h_{\xi n} &= (h_1 - h_2 - h_3 + h_4)/4. \end{aligned}$$

Задавшись узловыми перемещениями, перемещения u.v в произвольной точке  $\xi,\eta$  пластинки могут онть выражены так:

$$U = [(1 - \xi)(1 - \eta) d_4 + (1 + \xi)(1 - \eta) d_3 + (1 - \xi)(1 + \eta) d_5 + (1 + \xi)(1 + \eta) d_7]/4,$$

$$V = [(1 - \xi)(1 - \eta) d_2 + (1 + \xi)(1 - \eta) d_4 + (1 - \xi)(1 + \eta) d_6 + (1 + \xi)(1 + \eta) d_8]/4.$$
 (9)

Приступим к формированию матрицы жесткости [R], элемент которой  $R_{ij}$  представляет собой реакцию в направлении перемещения i от перемещения j ( $i=1,\ldots,8$ ),  $j=1,\ldots,8$ ). Решение может быть получено в двух вариантах.

#### 2. Первый вариант решения

Приравняем возможную работу реакций узлов и внутренних сил на единичных перемещениях узлов:

 $R_{ij} = \int h \left[ (\sigma_x)_i (\epsilon_x)_j + (\sigma_y)_i (\epsilon_y)_j + (\tau_{xy})_i (\gamma_{xy})_j \right] dA. \tag{IO}$  С учетом (3) и (5) это выражение примет следующий вид:

$$\begin{split} R_{ij} &= \int_{A} h \left\{ E_{\infty}' \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j} + E_{y}' \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{i} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{j} + \right. \\ &+ \left. E_{\infty}' \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{i} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{j} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i} \right] + \\ &+ \left. E_{\infty}' \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{j} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{j} \right] + \\ &+ \left. \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{j} \right] \right\} dA. \end{split}$$

Воспользовавшись формулами (8) и (9), выполним интегрирование. Для представления результата в более удобной форме, введем следующие обозначения:

$$A_{x} = E'_{x}b/6a$$
,  
 $A_{y} = E'_{y}a/6b$ ,  
 $A_{e} = E''/4$ ,  
 $A_{f} = G_{b}/6a$ ,  
 $A_{h} = G_{a}/6b$ ,  
 $A_{q} = G_{a}/4$ ;

$$E_{1} = 2(A_{x} + A_{h}), \qquad E_{10} = -A_{y} - A_{f},$$

$$E_{2} = A_{e} + A_{g}, \qquad E_{11} = A_{y},$$

$$E_{3} = -2A_{x} + A_{h} \qquad E_{12} = (E'' + G)/12,$$

$$E_{4} = A_{e} - A_{g}, \qquad E_{43} = (E'' - G)/12, \qquad (I2)$$

$$E_{5} = A_{x} - 2A_{h}, \qquad E_{44} = A_{h},$$

$$E_{6} = -A_{x} - A_{h}, \qquad E_{15} = A_{x},$$

$$E_{7} = 2(A_{y} + A_{f}), \qquad E_{16} = A_{f},$$

$$E_{8} = A_{y} - 2A_{f}, \qquad E_{47} = (E'' + G)/9$$

$$E_{9} = -2A_{y} + A_{f}$$

С помощью этих обозначений можно элементы матрицы жесткости свести в таблицу I. По этой таблице каждый элемент определяется как сумма членов в соответствующей строке, умноженных на коэффициенты над столбцами. Например,

Если известны узловые перемещения d; то после подстановки их в (9), с учетом (6), можно по формулам (3) найти узловые напряжения

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{x}^{(k)} \sigma_{y}^{(k)} \tau_{xy}^{(k)}\} \qquad (k = 1, \dots 4).$$

Выражения напряжений могут быть представлены в виде таблицы 2, в которой приняты следующие обозначения:

По этой таблице каждое напряжение определяется как сумма членов в соответствующей строке, умноженных на узловые перемещения над столбцами. Например, в узле 2

$$\sigma_{y}^{(2)} = -d_{1}\theta_{2} + d_{3}\theta_{2} - d_{4}\theta_{4} + d_{8}\theta_{4}.$$

# 3. Второй вариант решения

Зедадимся усилиями на краях пластинки в виде выражений, удовлетворяющих уравнениям равновесия (6):

$$N_{\infty} = C_1 + \eta C_2$$
,  
 $N_y = C_3 + \xi C_4$ ,  
 $T = C_5$ . (I4)

Таблица I Элементы R; матрицы жесткости

The same of	MATERIAL PROPERTY.	1	CHARLES CO.	-	TO SHELL ON COMPANY	THE REAL PROPERTY.	THE REAL PROPERTY.	Name and Address of the Owner, where	/
	ho	h3	hn	130		ho	his	hn	430
R11	E1	-E14	-E15		R36	E <sub>2</sub>	-E13	-E13	E17
R12	E <sub>2</sub>	-E12	-E12	E 17	R37	E <sub>5</sub>	-E14		
R13	E3		E15		R38	E <sub>4</sub>	E13	- E12	-E17
R14	E <sub>4</sub>	E12	-E13	-E17	R44	ET	En	-E16	,
R15	Es	E14			R45	Ez	E13	E13	E17
R16	-E4	E13	E12	-E17	R46	E10			
R17	E <sub>6</sub>				R47	-E4	-E13	-E12	-E17
R18	-E2	-E13	E13	E17	R48	Eg	-E11		
R22	ET	-E11	-E16		R55	En	-E14	E15	
R23	-E4	E12	E13	-E17	R56	$-E_2$	E12	-E12	E17
R24	Es		E16		R57	E3		-E15	
R25	E4	-E13	E12	-E19	R58	-E4	-E12	-E13	-E18
R26	Eg	E11			R66	ET	-E11	E16	
R27	-E2	E13	-E13	E17	R67	E <sub>4</sub>	-E12	E13	-E17
R28	E10				R68	Ea		-E16	
R33	E1	E14	-E15		R77	E1	E14	E15	
R34	-E2	-E12	E12	E17	R78	E <sub>2</sub>	E12	E12	E17
R35	E6				R88	ET	E11	E16	

Таблица 2 Напряжения в узлах пластинки

43en	6	de	de	d <sub>3</sub>	d4	ds	de	do.	de
	Ox.	-3,	-35	31			95		
1	54	-32	- 34	32			34		
	Toey	<i>- Э₃</i>	-36		36	33			
	62	-31		3,	-35				35
2	бу	- 32		32	-34				34
	Txy		-36	-73	36			33	
3	62		-35			-3,	35	3,	
	64		-34			-32	34	32	
	Tzey	- 93				93	-36		96
4	Ox				-35	-3,	1000	3,	35
	бу				-34	-32		32	34
	Tocy			- 93			-36	3	36

Напряжения

$$\begin{split} \sigma_{x} &= (C_{1} + \eta C_{2}) / h, \\ \sigma_{y} &= (C_{3} + \xi C_{4}) / h, \\ \tau_{xy} &= C_{5} / h \end{split} \tag{I5}$$

и по (4) деформации

$$\begin{aligned} & \epsilon_{x} = \left[ B_{x}(C_{1} + \eta C_{2}) - B_{1}(C_{3} + \xi C_{4}) \right] / h, \\ & \epsilon_{y} = \left[ B_{y}(C_{3} + \xi C_{4}) - B_{1}(C_{1} + \eta C_{2}) \right] / h, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \chi_{xy} = BC_{5} / h. \end{cases}$$
(16)

Выпишем потенциальную энергию внутренних сил (7):

$$U = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{H}} [B_{\alpha}(C_{1}^{2} + 2C_{1}C_{2}\eta + C_{2}^{2}\eta^{2}) + B_{y}(C_{3}^{2} + 2C_{3}C_{4}\xi + C_{4}^{2}\xi^{2}) - 2B_{1}(C_{1}C_{3} + C_{1}C_{4}\xi + C_{2}C_{3}\eta + C_{2}C_{4}\xi\eta) + BC_{5}^{2}] dA.$$
(17)

При интегрировании (17) введем следующие обозначения:

$$\int_{A} dA/h = D_{0}, \qquad \int_{A} \xi^{2} dA/h = D_{\xi\xi},$$

$$\int_{A} \xi dA/h = D_{\xi}, \qquad \int_{A} \eta^{2} dA/h = D_{\eta\eta},$$

$$\int_{A} \eta dA/h = D_{\eta}, \qquad \int_{A} \xi \eta dA/h = D_{\xi\eta}.$$
(I8)

Производные от потенциальной энергии по силовым факторам  $C_k$  (k=1,...,5) примут такой вид:

$$\begin{cases}
dU/\partial C_1 \\
dU/\partial C_2 \\
dU/\partial C_3 \\
dU/\partial C_4 \\
dU/\partial C_5
\end{cases} = \begin{bmatrix}
B_x D_0 & B_x D_{\eta} & -B_1 D_0 & -B_1 D_{\xi} & 0 \\
B_x D_{\eta} & B_x D_{\eta\eta} & -B_1 D_{\eta} & -B_1 D_{\xi\eta} & 0 \\
-B_1 D_0 & -B_1 D_{\eta} & B_y D_0 & B_y D_{\xi} & 0 \\
-B_1 D_{\xi} & -B_1 D_{\xi\eta} & B_y D_{\xi} & B_y D_{\xi} & 0 \\
0 & 0 & 0 & BD_0
\end{cases} \cdot \begin{cases}
C_1 \\
C_2 \\
C_3 \\
C_4 \\
C_5
\end{cases}$$
(19)

То же самое в матричной форме:

$$\{U'\} = [RJ\{C\}.$$
 (19\*)

Здесь  $[R_1]$  можно рассматривать как матрицу жесткости, относящуюся к силовым факторам  $\{C\}$ .

Установим зависимость между  $\{C\}$  и узловыми перемещениями  $\{d\}$ . Для этого найдем работу W усилий  $N_{x},N_{y}$  и T по (14) на перемещениях (9) краев пластинки.

Производные от работы по силовым факторам  $C_k$  ( k=1,... 5) могут быть представлены так:

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial W}{\partial C_{1}} \\
\frac{\partial W}{\partial C_{2}} \\
\frac{\partial W}{\partial C_{3}} \\
\frac{\partial W}{\partial C_{4}} \\
\frac{\partial W}{\partial C_{5}}
\end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix}
-b & 0 & b & 0 & -b & 0 & b & 0 \\
b/3 & 0 & -b/3 & 0 & -b/3 & 0 & b/3 & 0 \\
0 & -a & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & a \\
0 & a/3 & 0 & -a/3 & 0 & -a/3 & 0 & a/3 \\
-a & -b & -a & b & a & -b & a & b
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
d_{1} \\
d_{2} \\
d_{3} \\
d_{4} \\
d_{5} \\
d_{6} \\
d_{7} \\
d_{8}
\end{bmatrix} (20)$$

вля в матричной форме

$$\{w'\} = [H]\{d\}.$$
 (20)

Приравняв {U'} и {W'}, получим

$$\{C\}=[R_j]^{-1}[H]\{d\}=[K]\{d\},$$
 (21)

THE

$$[K] = [R_i]^{-1}[H].$$
 (22)

(23)

Теперь можно выписать матрицу жесткости пластинки:

$$[R] = [K]^T [R_1] [K] = [H]^T [R_1]^{-1} [R_1] [R_1]^{-1} [H]$$
  
 $[R] = [H]^T [K]$ 

HIN

При определении узловых усилий можно исходить из (14):

вие в матричной форме

$$\{S\} = [P]\{C\}.$$
 (24°)

С учетом (2I), усилия можно выразить через узловне перемешения {d}:

 ${S}=[P][K]{d}.$  (25)

Напряжения получаются делением усилий на толщину пластинки.

## Литература

- І. Вилипнльд D.K., Харкурим И.Я. Расчет упругих систем по методу конечных элементов. Вып. I-IO8. М., Гипротис, 1969.
- 2. Немчинов D.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). Киев, Будивельник, 1980.
- 3. Справочник по строительной механике корабля, т. 2/ Под ред. Палий О.М. Л., Судостроение, 1982.
- 4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Наука, 1966. 636 с.

R. Eek, U. Raukas

# The Stiffness Matrix for Orthotropic Rectangular Plane Elements of Variable Thickness

Summary

Two variants of stiffness and stress matrices for orthotropic rectangular plane elements of variable thickness are proposed to be used in the finite element method.

#### ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.04I.2 А.А. Сарап

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛКИ-СТЕНКИ ПО МЕТОЛУ МКЭ

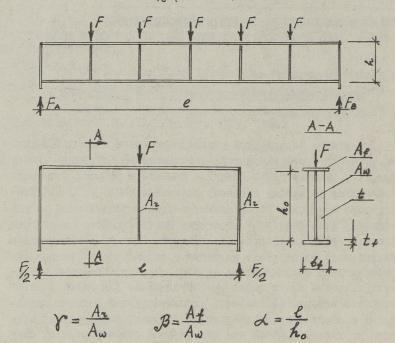
В статье исследуется напряженное состояние балки-стенки с симметричной нагрузкой, действующей по верхнему поясу фиг. І.а. Расчет балки-стенки с поясами и ребрами жесткости проводится по методу конечных элементов (МКЗ) [1], [2].Конструкция с помощью воображаемых разрезов разделяется на ряд конечных элементов. Для упрощения расчета ребра жесткости и пояса заменяем стержневой системой. Считая. что верхний и нежней пояс не работают на изгиб и нормальное напряжение распределено равномерно по сечению стержия. Конечный мент пластины имеет форму прямоугольника. Для такой стинчато-стержневой системы, удовлетворяющей условию равновесия и неразривности деформаций в узлах, формируется рица жесткости системы как структурная суперматрица с элементами подматрицы, соответствующей матрицам жесткости подсистем. Матрица жесткости для прямоугольного элемента фиг. І, б пластинчатой подсистемы формируется в виде:

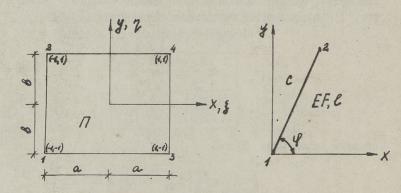
$$[K]^{n} = \begin{bmatrix} M_{N} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ 2 & K_{21} & & & & \\ 3 & K_{31} & K_{MN} & & & \\ 4 & K_{41} & & & & & \end{bmatrix}$$
(I)

элемент подматрицы [Km N]

$$[K_{MN}] = \frac{E}{4(1-\gamma)^2} \begin{bmatrix} A_{11} + \frac{1-\gamma}{2} A_{22} & \gamma A_{12} + \frac{1-\gamma}{2} A_{21} \\ \gamma A_{21} + \frac{1-\gamma}{2} A_{42} & A_{22} + \frac{1-\gamma}{2} A_{41} \end{bmatrix}$$
(2)

$$\begin{split} A_{11} &= \; \frac{b}{4\alpha} \; \xi_M \, \xi_N (1 + \frac{1}{3} \, \eta_M \, \eta_N) \, , \\ A_{22} &= \; \frac{\alpha}{4b} \, \eta_M \, \eta_N (1 + \frac{1}{3} \, \xi_M \, \xi_N) \, , \end{split}$$





Фиг. 1,а. Топология балки-стенки. Фиг. 1,6. Конечный элемент, пластина и стержень.

$$A_{12} = \frac{1}{4} \, \xi_M \, \xi_N \,,$$

$$A_{21} = \frac{1}{4} \, \eta_M \, \eta_N \,.$$

Матрица жесткости стержня для стержневой подсистемы:

$$[K]^{c} = \begin{bmatrix} M & 1 & 2 \\ 1 & K_{11} & K_{12} \\ 2 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \frac{EF}{\ell} \begin{bmatrix} M & 1 & 2 \\ 1 & c^{2} & cs & -c^{2} & -cs \\ 1 & cs & s^{2} & -cs & -s^{2} \\ 2 & -c^{2} & -cs & c^{2} & cs \\ -cs & -s^{2} & cs & s^{2} \end{bmatrix}$$
(3)

rде.  $c - cos \phi$  $s - sin \phi$ 

Структура суперматрицы для всей системы

$$[K] = \begin{vmatrix} \sum_{s \in ij} [K_{i1}]^{\ell} & \sum_{s \in ij} [K_{i2}]^{\ell} & \dots & \sum_{s \in ij} [K_{ij}]^{\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s \in ij} [K_{i1}]^{\ell} & \sum_{s \in ij} [K_{i2}]^{\ell} & \dots & \sum_{s \in ij} [K_{ij}]^{\ell} \end{vmatrix}$$

$$(4)$$

 $\sum_{s \in ij} [K_{ij}]^{\ell}$  — означает суммирование по всем элементам системы, содержащим уэлы  $\dot{\ell}$ ,  $\dot{j}$ , число которых равно S.

Подчеркнем смысл матрицы  $\left[K_{ij}\right]^{\ell}$  — соответствующий элементу матрицы жесткости суперматрицы  $\sum_{s \in ij} \left[K_{ij}\right]$  . Эта матрица яв-

ляется подматрицей матрицы жесткости элемента  $\ell$ , определяющей реакции в  $\ell$ -том узле от единичных смещений j-того узла. Если элемент  $\ell$  не содержит либо узла  $\ell$ , либо узла j, то матрица  $\sum [K_{ij}]^\ell$  не имеет физического смысла и равна нулю.

После решения системы получаем перемещение узлов, на основе которых определяем реакции этих узлов. Количество узлов

в системе достигает 441 и соответственно количество неизвестных перемещений в два раза больше.

Критерий оценке напряженного состояния может быть неоднозначен и зависит от поставленной цели. Для определения
устойчивости панеле в балках-стенках главную роль играют
сдвигающие усилия. В высоких балках, в опорной панели, сдвигающие усилия также достигают максимальных значений, а нормальные усилия незначительны, которыми можно пренебречь или
достигают определенной величены. В результате численного
анализа напряженного состояния получили, что сдвигающие усилия являются нелинейной функцией относительно координат.

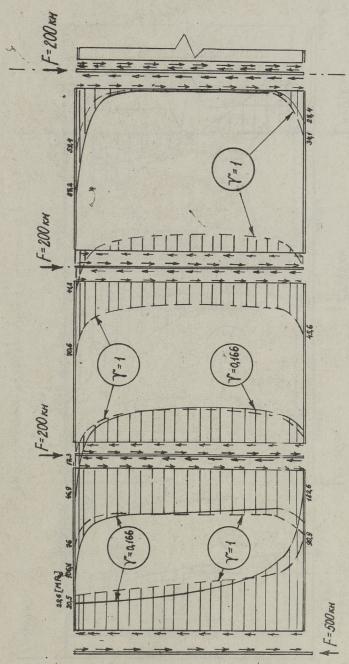
Необходимо исследовать изменение сдвигающих усилий и нормальных напряжений от различных параметров (не решая вопроса устойчивости). В качестве параметров вноерем параметри управления

$$\chi = \frac{A_r}{A\omega}, \ \alpha = \frac{\ell}{h_o} \ \mathbf{M} \ \beta = \frac{A_f}{A\omega}.$$

Напряжение в сечениях (сечения в направлении оси X) является функцией трех параметров. Они представлени для сил, действующих на пластины, и вычерчены для одной стороны оси симметрив.

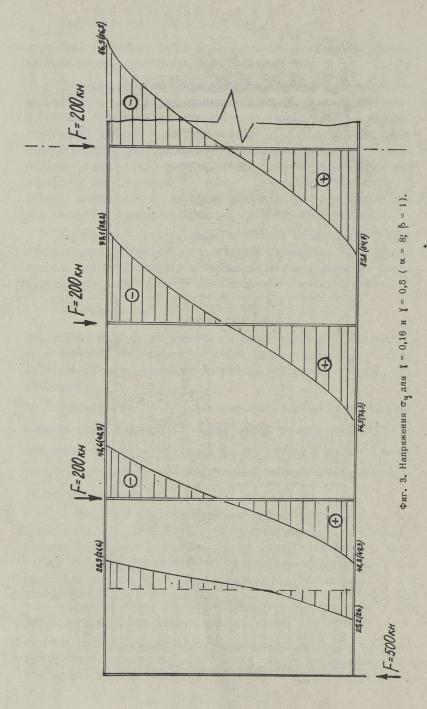
Параметр  $\chi = \frac{A_{\Gamma}}{A_{\omega}}$  представляет соотношение двух площадей, площади ребра к площади сечения стенки по направлению оси X. Параметр  $\alpha = \frac{\ell}{h_0}$  — отношение высоты стенки к длине балки—стенки, параметр  $\beta = \frac{A_{\Gamma}}{A_{\omega}}$  — отношение площади пояса к площади сечения стенки.

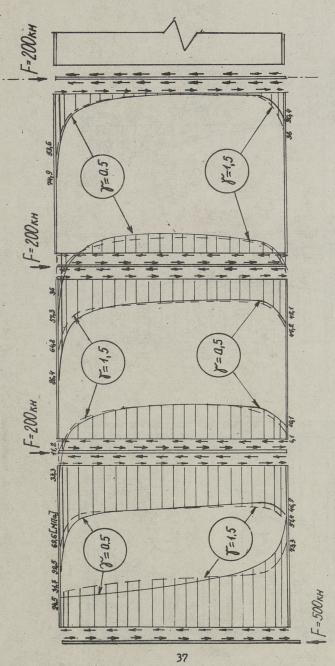
На фиг. 2 и 4 представлени изменения напряжений  $\tau_{yx}$  для параметров  $\gamma = 0.166$ ; 0,5; I; I,5. При малых  $\gamma$  возникают большие сдвигающие напряжения, по мере увеличения  $\gamma$  сдвигающие напряжения по мере увеличения  $\gamma$  сдвигающие напряжения уменьшаются, график зависимости  $\tau_{yx} - \gamma$  для опоры дан на фиг. 8. На фиг. 3 нормальные напряжения  $\sigma_y$  для параметров  $\gamma = 0.5$  (в скобках  $\gamma = 0.166$ ). Как видно из чертежа, изменение площади ребра практически не влияет на  $\sigma_y$ . На фиг. 5 представлено напряженное состояние для  $\alpha = \frac{\ell}{h_o} = 2.6$  ( $\gamma = 0.5$ ;  $\gamma = 1$ ;  $\gamma = 1$ ). Длина балки не влияет на  $\tau_{yx}$  в сечение опоры, но с уменьшением длины балки более значительное влияние играет площадь ребра на  $\sigma_y$ . Напряженное состояние для бание играет площадь ребра на  $\sigma_y$ .



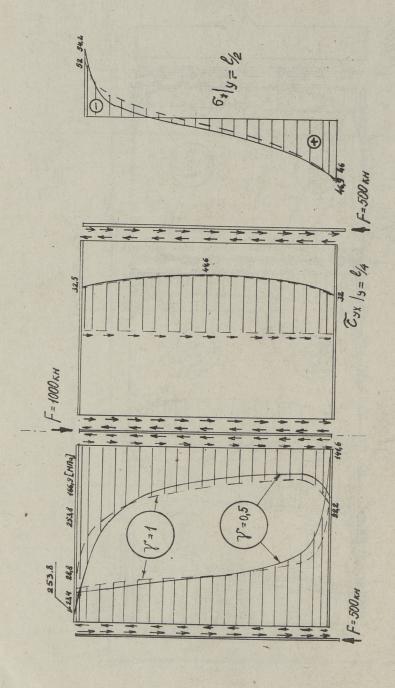
Фиг. 2. Напряжения Тух для 1 = 0,16 и

35

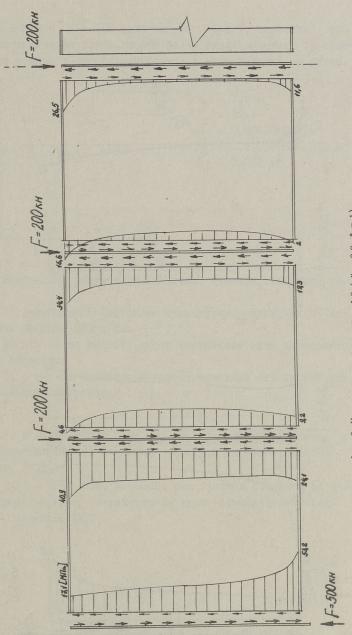




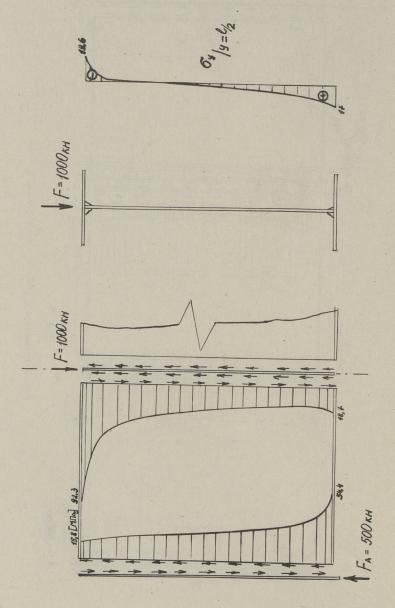
фиг. 4. Напряжения  $T_{\rm цx}$  для  $\gamma=0,5$  и  $\gamma=1,5$  (  $\alpha=8;\,\beta=1$  ).



Фиг. 5. Напряжения Сух и σ, для α = 2,6 ( γ = 0,5; γ = 1).

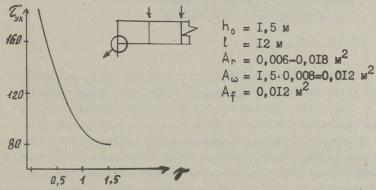


Фиг. 6. Напряжения  $\tau_{yx}$  для 6. = 4,8 (  $\gamma$  = 0,9;  $\beta$  = 1).



Фиг. 7. Напряжения  ${\bf c}_{\bf yx}$  и  ${\bf \sigma}_{\bf y}$  для  $\alpha=1,6$  (  $\chi=0,9;~\beta=1$ ).

лок  $\alpha = 4,8$  и  $\alpha = 1,6$  дано на фиг. 6 и 7, если при постоянном сечении ребра высота балки увеличивается, то сдвигающие усилия в опоре уменьшаются и мало зависят от длины.



Фиг. 8. Изменения напряжений в опоре.

Полученные результаты позволяют сделать следующие вы-

- I) напряженное состояние существенно реагирует на изменение площади ребра для  $\frac{1}{3} < 1,5;$
- 2) для более жестких ребер внутренние силы изменяются более спокойно:
- 3) в местах приложения сосредоточенных сил происходит концентрация напряжений (  $\tau_{q\infty}$  и  $\sigma_q$  ).

- I. В и л и п н л ь д Ю.К. и др. Расчет стержневых и пластинчатых систем по методу конечных элементов МКЭ/20. Таллин, 1979.
- 2. Hahn H.G. Methoden der finiten Elemente in der Festigkeitslehre. Frankfurt am Main, Akademiche Verlagsgesellschaft, 1975.

# Die Forschung des Spannungszustandes des Wandbalkens mit Hilfe der Fim

Zusammenfassung

Im Artikel wird der Spannungszustand des Wandbalkens mit Hilfe der Finite-Element-Methode (FEM) erforscht.

Betrachtet werden Fragen des Verfassens der Steifigkeitsmatrizen für die Viereckelemente und den Stab.

Es werden die Lenkungsparameter bestimmt (die Fläche der Rippe, der Kante und die Topographie). Studiert wird der Einfluß jeden Parameters auf den Spannungszustand.

### TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

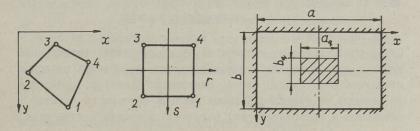
#### ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УЛК 624.074:518.61

х.х. Кяэрди

# МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ

В настоящей работе разработана математическая модель динамического поведения трансверсально изотропной плитной конструкции с учетом физических нелинейностей и возможного возникновения трещин в плите. Математическая модель базируется на методе конечных элементов. Применяемые четырехугольные изопараметрические элементы с четырымя узлами (фиг. I) разделены по высоте на "слои". Это позволяет относительно легко учитывать трансверсальную изотропию (влияние арматуры), и хотя бы до некоторой степени наблюдать за развитием пластических зон и расширением трещин по высоте плиты.



Фиг. 1. Форма плиты и элемента.

Исследуемая плита в плане произвольной формы, например, четырехугольная. Краевые условия по контуру любые, например, жесткое закрепление плиты с опорой, как на фиг. I.

Равномерно распределенная импульсная нагрузка действует перпендикулярно к плите, по необходимости на некоторую ограниченную (на фиг. I заштрихованную) область. Предполагается, что деформации небольшие и рассматривается геометрически линейная задача. Для описания волновых процессов применяется теория Тимошенко-Миндлина, которая учитывает инерцию вращения и поправку на сдвиг. Поле перемещений в плите запишется в виде

$$u(x, y, z, t) = -z \cdot \theta_{x}^{*}(x, y, t),$$

$$v(x, y, z, t) = -z \cdot \theta_{y}^{*}(x, y, t),$$

$$w(x, y, z, t) = w_{o}(x, y, t),$$

$$(I)$$

где  $\theta_{x}, \theta_{y}$  — углы поворота нормали к срединной поверхности плиты в плоскостях хг и чг;

w₀ - перемещение срединной поверхности в направлении оси ₹ (перпендикулярно к плите).

Координаты элемента интерполируются зависимостями

$$x = \sum_{i=1}^{4} h_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{4} h_i y_i,$$
 (2)

а перемещения как

$$\theta_{x}^{*} = \sum_{i=1}^{4} h_{i} \theta_{xi}^{*}, \quad \theta_{y}^{*} = \sum_{i=1}^{4} h_{i} \theta_{yi}^{*}, \quad w_{o} = \sum_{i=1}^{4} h_{i} w_{oi},$$
 (3)

где  $h_i$  — функции формы применяемого элемента, как в моно-графии [I]. Здесь x, y,  $\theta_x^*$ ,  $\theta_y^*$ ,  $w_o$  определены в произвольной точке элемента, а  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $\theta_{xi}^*$ ,  $\theta_{yi}^*$ ,  $w_{oi}$  в узле i.

Плита разбивается по тощине на отдельные слои, тощина которых в зоне предполагаемых интенсивных деформаций выбирается меньшей. Тощины слоев, содержащих арматуру, выбираются равными ее тощине. Прирост вектора внутренних усилий (моментов и поперечных сил) в течение временного интервала  $\Delta t$ 

$$\Delta \underline{\sigma} = [\Delta M_{\infty}, \Delta M_{y}, \Delta M_{\infty y}, \Delta \Theta_{\infty}, \Delta \Theta_{y}]^{\mathsf{T}}$$
 (4)

определяется в каждом слое отдельно (с последующим суммированием по толщине, т.e. по слоям) по формуле

$$\Delta \sigma = D \Delta \epsilon$$
. (5)

$$\Delta \underline{\varepsilon} = \left[ -\frac{\partial \Delta \Theta_{x}^{*}}{\partial x}, -\frac{\partial \Delta \Theta_{y}^{*}}{\partial y}, -\frac{\partial \Delta \Theta_{x}^{*}}{\partial y}, -\frac{\partial \Delta \Theta_{x}^{*}}{\partial x}, \frac{\partial \Delta \Theta_{y}^{*}}{\partial x}, \frac{\partial \Delta W_{o}}{\partial x} - \Delta \Theta_{x}^{*}, \frac{\partial \Delta W_{o}}{\partial y} - \Delta \Theta_{y}^{*} \right]^{\mathsf{T}}$$
(6)

вектор прироста (условных) деформаций. Матрица <u>D</u> характеризует свойства материала. При физически динейном однородном материале (здесь бетона) она постоянна и имеет классический вид, как, например, в статье [2]. При физически нелинейном бетоне упруго-пластическая матрица материала следующая (как в работе [3]):

$$\underline{D}_{b}^{ep} = \underline{D}_{b}^{e} - \frac{\underline{D}_{b}^{e} \frac{\partial F}{\partial g} (\frac{\partial F}{\partial g})^{T} \underline{D}_{b}^{e}}{H \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial g})^{T} \frac{\partial F}{\partial g} + (\frac{\partial F}{\partial g})^{T} \underline{D}_{b}^{e} \frac{\partial F}{\partial g}}}.$$
 (7)

Здесь  $H = 2 M_p H'$ ,

где  $H' = \frac{d M_p}{d \, \epsilon_p}$  угловой коэффициент кривой: пластический момент  $M_p$  — соответствующая деформация  $\epsilon_p$  при одноосном нагружении.

Условие текучести в слое і похоже применяемому в работе [3]:

$$F_{i}(\sigma_{i}) = \frac{\frac{\kappa^{2}}{3} \left[ \frac{1}{3} (M_{xi}^{2} - M_{xi} M_{yi} + M_{yi}^{2}) + M_{xyi}^{2} + \frac{(v_{i} + u_{i})^{2}}{4} (Q_{xi}^{2} + Q_{yi}^{2}) \right] - \frac{2\alpha}{3(v_{i}^{2} - u_{i}^{2})} (M_{xi} + M_{yi})}{1 - \frac{2\alpha}{3(v_{i}^{2} - u_{i}^{2})} (M_{xi} + M_{yi})} = \frac{-\left(\frac{\kappa^{2}}{36} + \frac{c_{i}}{12}\right) (M_{xi} + M_{yi})^{2} + \frac{v_{i}^{2} - u_{i}^{2}}{6} (M_{xi} + M_{yi})}{6} = \tau^{2}, \quad (8)$$

где  $u_i, v_i - z$  — координати поверхностей і-того слоя от нейт-ральной поверхности,  $v_i < u_i$ .

После нахождения частных производных от F и матричных операций по (7) определяется  $D_{\delta}^{ep}$  в явном виде. Здесь  $\kappa^2 =$  = 3, C = -I в зоне сжатие—сжатие и C = +I в остальных зонах.

 $\alpha = \frac{A_{u} - A_{0}}{\tau_{u}^{2} - \tau_{0}^{2}} \quad \mathbb{E} \quad \beta = \frac{A_{0}\tau_{u}^{2} - A_{u}\tau_{0}^{2}}{\tau_{u}^{2} - \tau_{0}^{2}}$  (9)

величины, характеризующие свойства материала.

В зоне сжатие-сжатие

$$A_{u} = \frac{f_{Bc}^{2} - f_{c}^{2}}{f_{c} - 2f_{cc}}, \qquad \tau_{u}^{2} = \frac{f_{c}^{2}}{3} + \frac{f_{c}}{3}A_{u}. \tag{I0}$$

а в остальных зонах

$$A_{u} = \frac{f_{c}^{2} - f_{T}^{2}/2}{f_{T} - f_{c}}, \quad \tau_{u}^{2} = \frac{f_{c}^{2}}{3} + \frac{f_{c}}{3}A_{u}. \tag{II}$$

Здесь  $f_c$ ,  $f_{\tau}$ , - пределы прочности бетона при одноосном сжатии и растяжении;

 $f_{BC}$  - предел прочности бетона при двуосном сжатии. Если заменить  $f_{C}$ ,  $f_{T}$ ,  $f_{BC}$  пределами текучести  $\bar{f}_{C}$ ,  $\bar{f}_{T}$ ,  $\bar{f}_{BC}$ ,

то аналогичным образом находятся  $A_o \times \tau_0^2$ . В течение процесса (текучести и разрушения)  $A_{\mu}, \tau_{\mu}^2, \alpha, \beta$  постоянные, а  $\tau_0^2, A_0 =$  $\alpha \tau_0^2 + \beta$  - переменные. Если текучесть возникает в зоне сжатие-сжатие, то для остальной области корригируется

$$\tau_o^2 = \frac{f_c + \beta}{3/f_c - \alpha} . \tag{I2}$$

(I3)

В обратном случае уравнение (I2) сохраняет свой Из вышеизложенного следует, что при соответственном выборе т 2 условие (8) служит как для определения начала текуче-СТИ. ТАК И ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТРЕШИНЫ.

Если в слое і арматура, которая направлена по оси х, то элементу  $d_{11}$  матрицы материала в этом слое  $D_{b}^{ep}$  (см. (7)) прибавляется  $d_{11}^{(q)} = \frac{\pi}{4} (v_i - u_i) n E \frac{v_i^3 - u_i^3}{3}.$ 

п - количество стержней арматуры на один погонный MeTD:

 $\frac{\pi}{L} (v_i - u_i)$  - процент армирования;

 $E = E^{e}$ или  $E = E^{p}$  — модуль, характеризующий материал арматуры в упругой стании или в пластической стании с учетом линейного упрочнения.

В работе предполагается, что трешена возникает перпендикулярно к срединной поверхности пластины и перпендикулярно к проекции главного напряжения о, на поверхности ху. Угол возникновения трешины

 $\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}.$ (I4)

Также предподагается, что в момент возникновения трешины касательные напряжения отсутствуют в трешине. В нее разрушенном месте нормальные растягивающие напряжения, перпендикулярные к трешине, не принимаются, а принимаются (в некоторой степени с коэффициентом q < I) касательные напряжения.

Упругая матрица материала (бетона) известна в координатной системе трещины, от которой она преобразуется в координатную систему х ч.

Для получения уравнения движения исходят из виртуальной работы в следующем виде, как в статье [2]:

$$\int_{A} d \underline{u}^{\mathsf{T}} \rho \underline{H} \, \underline{\ddot{u}} \, dA + \int_{A} d \underline{\varepsilon}^{\mathsf{T}} \underline{\sigma} \, dA = \int_{A} d \underline{u}^{\mathsf{T}} \underline{b} \, dA, \tag{I5}$$

где du - виртуальное перемещение от положения равновесия;

плотность материала;

А - площадь пластины;

 $\underline{b} = [0, 0, q, 0, 0]^{\mathsf{T}};$ 

 равномерно распределенная нагрузка, действующая перпендикулярно к пластине;

h - толщина пластины;

I<sub>3</sub> и I<sub>2</sub> - единичные матрицы третьего и второго порядка.

От уравнения (І5) переходят к следующему:

$$M\ddot{a} + p = f, \qquad (I6)$$

Матрица масси М составляется как диагональная (масси централизуются в узлы),

$$\underline{p} = \int_{A} \underline{B}^{\mathsf{T}} \underline{\sigma} \, dA, \qquad (17)$$

$$\underline{f} = \int_{A_{ab}} q(t) \underline{N}^{\mathsf{T}} dA. \tag{18}$$

Здесь

$$\underline{I} = \underbrace{A_{0}h_{i}}_{0} \quad 0 \quad (I8)$$

$$\underline{B}_{i} = \begin{bmatrix}
0 & -\frac{\partial h_{i}}{\partial x} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{\partial h_{i}}{\partial y} \\
0 & -\frac{\partial h_{i}}{\partial y} & -\frac{\partial h_{i}}{\partial x} \\
\frac{\partial h_{i}}{\partial x} & -h_{i} & 0 \\
\frac{\partial h_{i}}{\partial y} & 0 & -h_{i}
\end{bmatrix}$$
(19)

$$\underline{N} = [h_1 \ 0 \ 0 \ h_2 \ 0 \ 0 \ h_3 \ 0 \ 0 \ h_4 \ 0 \ 0]^T, \quad (20)$$

q(t) - равномерно распределенная нагрузка, зависящая от времени t. Отметим, что

$$d\underline{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{4} \underline{B}_{i} d\underline{\sigma}_{i}. \tag{2I}$$

Интегралы (I7) и (I8) вычисляются численно в координатной системе г. в по квадратурным формулам Гаусса порядка 2X2.

Если матрица М диагональная, то система (16) распадается на отдельные уравнения, которые можно решить явной схемой независимо друг от друга. Типичное уравнение системы (16)

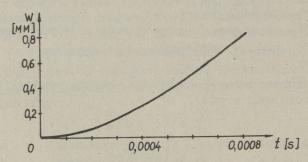
 $m_i \ddot{a}_i + p_i = f_i$ (22)

решается центральной схемой конечных разностей, из которой

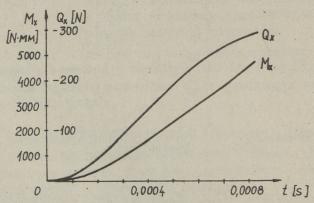
$$a_{i}^{n+1} = \frac{\Delta t^{2}}{m_{i}} (f_{i}^{n} - p_{i}^{n}) + 2a_{i}^{n} - a_{i}^{n-1}.$$
 (23)

Индексам n-1, n, n+1 соответствуют три состояния системы с временным интервалом  $\Delta t$  друг от друга.

По вышеизложенной математической модели составлена программа на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Ниже приводятся некоторые численные результаты.



фиг. 2. Зависимость перемещения w от времени t.



Фиг. 3. Зависимость момента  $M_{\chi}$  и поперечной силы  $Q_{\chi}$  от времени t .

Бетонная пластина имеет размеры a=8,5 м, b=7,2 м (фиг. I) и толщину h=0,2 м. Равномерно распределенная нагрузка действует на ограниченную область пластины ( $q_q=2,83$  м,  $b_q=2,4$  м) по закону

$$q = Q \frac{t}{t_{max}} \exp\left(1 - \frac{t}{t_{max}}\right), \qquad (24)$$

где Q = 1,5 мРа;  $t_{max} = 0,0001$ s.

Характеристики материала следующие:  $\bar{f}_{\tau} = I$ , 5 мРа,  $\bar{f}_{c} = -I2$ , 8 мРа,  $\bar{f}_{\rm BC} = -14,9$  мРа,  $f_{\rm T} = 2,4$  мРа,  $f_{\rm C} = -21,4$  мРа,  $f_{\rm BC} = -24,8$  мРа, модуль упругости  $E_{\delta} = 2,65\cdot 10^4$  мРа, коэффициент Пуассона  $v_8 = 0.15, \ \rho_8 = 2500 \ {
m kr/m}^3, \ {
m H}' = 0.01. \ {
m Tak \ Rak \ пластина \ сим-}$ метричная рассматривается только ее четверть, которая распределена на 9 одинаковых элементов. При этом область воздействия нагрузки совпадает точно с одним ("центральным") элементом. На последующих двух графиках (фиг. 2 и 3) приведены зависимости перемещения  $w_0$  (в точке x = 4,25 м; y == 3,6 M), MOMERTA  $M_{\infty}$  (B TOURE  $x \approx 3,84$  M,  $y \approx 3,25$  M) H HOперечной силы  $Q_{\infty}$  (в точке  $\infty \approx I$ , OI м,  $y \approx 3,25$  м) от времени t. Пластическая зона возникает при t = 0.00064 s в одной гауссовой точке интеграции "центрального" элемента с координатами  $x \approx 3,24$  м,  $y \approx 2,75$  м. Текучесть начинается с нижнего слоя и в момент времени t = 0.00088 s охвативает этой точке три нижних слоя. При t = 0,00088 s наблюдается текучесть также в остальных трех гауссовых точках "центрального " элемента (в нижнем или в двух нижних слоях).

## Литература

- 1. Hinton E., Owen D.R.J. Finite element programming. London, New York, San Francisco, Academic Press, 1977.
- 2. Pica A., Hinton E. Transient and pseudotransient analysis of Mindlin plates. - Int. J. for Numer. Meth. in Engng., 1980, vol. 15, p. 189-208.
- 3. Příspěvky k řešeni železobetonových konstrukci. Příloha k závěrečné zprávě výzkumného úkolu III-8-2/4-1, VUT FAST, Brno, 1980.

<u>Die Finite-Element-Methode zu dem</u> <u>mathematischen Modellieren der Dynamik</u> <u>einer Stahlbetonplatte</u>

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird die Dynamik einer Stahlbetonplatte erforscht. Dabei wird ein nichtlineares Stoffgesetz gebraucht und die mögliche Entstehung von Rissen berücksichtigt. Als Untersuchungsmethode wird die Finite-Element-Methode benutzt.

# TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

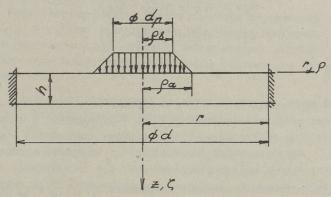
### ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 539.3

Л.Ю. Поверус

#### УПРУТИЕ ВОЛНЫ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ

Круглые пластины являются в технике важными элементами конструкций. Часто они подвергаются воздействию динамических нагрузок. В настоящей работе рассматривается круглая пластина с жестко защемленным краем. В центре лицевой поверхности пластины, на некоторой круговой области, действует равномерно распределенный импульс плавно, но быстро возрастающий и затем медленно убывающий во времени. Целью настоящей работы является определение напряженного и деформированного состояния пластины.



Фиг. 1. Сеч инс з на тины.

Исследование производится при помощи уравнений движения, разработанных на основе теории упругости и теории Тимошенко. Первые уравнения решаются численно методом трехмерных сеток, а вторые при помощи прямого численного метода конечных элементов. Упомянутые методы решения достаточно подробно описаны в работах [2, 3, 4, 5, 6 и 7]. В на-

стоящей работе приводятся только некоторые основные уравнения. зависимости и условия решения задач.

Исследуется распространение волн в пластине на базе уравнений трехмерной теории упругости.

Дифференциальные уравнения осесимметричного движения пластины в безразмерных переменных

$$\rho = \frac{r}{h}, \quad \zeta = \frac{\overline{z}}{h}, \quad u = \frac{u_1}{h}, \quad w = \frac{u_3}{h}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{h}$$
 (I)

представляются в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^{2} u}{\partial \rho^{2}} + \frac{\partial u}{\rho \partial \rho} - \frac{u}{\rho^{2}}\right) + \kappa^{2} \frac{\partial^{2} u}{\partial \rho^{2}} + \left(1 - \kappa^{2}\right) \frac{\partial^{2} w}{\partial \rho \partial \zeta} = \frac{\partial^{2} u}{\partial \tau^{2}},$$

$$\kappa^{2} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial \rho^{2}} + \frac{\partial w}{\rho \partial \rho}\right) + \frac{\partial^{2} w}{\partial \zeta^{2}} + \left(1 - \kappa^{2}\right) \left(\frac{\partial^{2} u}{\partial \rho \partial \zeta} + \frac{\partial u}{\rho \partial \zeta}\right) = \frac{\partial^{2} w}{\partial \tau^{2}}.$$
(2)

Безразмерные напряжения определяются следующими выражениями

$$\sigma_{\rho} = (1 - \nu) \frac{\partial u}{\partial \rho} + \nu \left( \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) 
\sigma_{\theta} = (1 - \nu) \frac{u}{\rho} + \nu \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) 
\sigma_{\zeta} = (1 - \nu) \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \nu \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) 
\tau_{\rho\zeta} = \frac{1}{2} (1 - 2\nu) \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) .$$
(3)

В выражениях (I) и (3) и в системе (2):  $\Gamma$ ,  $\xi$  — цилиндрические координаты пластины;  $U_1, U_3$  — перемещения в направлении  $\Gamma$  и  $\xi$  соответственно; h — толщина пластины; t — время;  $C_1$  — скорость волны расширения;  $C_2$  — скорость волны искажения;  $\kappa^2 = c_2^2/c_1^2$ ;  $\kappa_3 = E/1 - \nu - \nu^2$ .

Для получения размерных напряжений  $\sigma_{\rm p}$ ,  $\sigma_{\rm c}$ ,  $\sigma_{\rm e}$  и  $\tau_{\rm pp}$  нужно им соответствующие безразмерные величины умножить на коэффициент  $\kappa_{\rm 3}$ , в котором E модуль Юнга и  $\nu$  коэффициент Пуассона.

При решении уравнений движения (2) методом конечных разностей нужно удовлетворить соответствующие начальные, граничные и фронтовые условия. Определение последних, состоящих в проведении лучшей и построении соответствующих волновых фронтов, происходит в согласии с законами геометрической оптики.

Граничные условия следующие: на верхней поверхности пластины нормальные напряжения равняются внешней нагрузке, касательные напряжения равны нулю: на оси симметрии перемещение u=0 и касательные напряжения  $\tau_{\rho\,\varsigma}=0$ ; на нижней поверхности пластины нормальные и касательные напряжения равны нулю; на фронте волны расширения перемещения равны нулю; на краю пластины, в случае жесткого защемления, перемещение w=0 и угол поворота  $\frac{\partial w}{\partial \rho}=0$ , в случае свободного опирания на краю нормальное напряжение  $\sigma_{\rho}=0$  и на нижнем контуре w=0.

В настоящей работе рассматривается процесс распространения волн в пластине, на верхнюю поверхность которой действует осесимметричная равномерно распределенная, но во времени меняющаяся нагрузка. Такая нагрузка имитирует действие заряда взрывчатого вещества или удар ударником; интенсивность нагрузки выбрана равной единице. Методом наложения можно результаты вычисления приспособить для любого значения нагрузки.

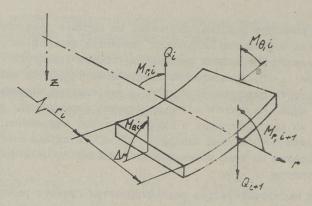
Результатами решения задачи являются перемещения  $u_{ijn}$  и  $w_{ijn}$  в узловых точках сетки. При помощи полученных решений можно определить значения любых искомых величин и заранее представить также необходимые условия для решения задачи.

Задачу запрограммировал на алгоритмическом языке  $\Phi$ ортран А. Мяннил. Примеры решены на ЭВМ и EC-1052.

2. Расчеты на основе теории упругости при описании распространения волн по толщине пластины показывают, что после сравнительно короткой начальной стадии процесса переменные по толщине имеют распределения, близкие к линейным. Поэтому, с достаточной степенью точности отражает динамику процесса теория пластин типа Тимошенко, которая учитывает инерцию вращения и поправку на сдвиг.

Для прямого применения физических законов при описании волновых полей в пластине последняя разбивается на оси г на конечное число секторов, как показано на фиг. 2.

Физические и кинематические зависимости применяются непосредственно к этим макроскопическим элементам без записи дифференциальных или интегральных уравнений данных зависи-



Фиг. 2. Элемент пластины.

мостей. Решение смешанной задачи в скоростях и внутренних силовых факторах облегчает применение законов сохранения момента и количества движения. Соблюдение определенной последовательности соотношений с учетом начальных и граничных условий приводит к алгоритму, который отличается большой наглядностью и экономичностью. Используя безразмерные переменные:

$$\ddot{r} = \frac{r}{h}, \quad \overline{w} = \frac{w}{h}, \quad \overline{v} = \frac{v}{h}, \quad \overline{\omega} = \frac{h\omega}{c_1}, 
\ddot{Q} = \frac{g}{hE^*}, \quad \dot{M} = \frac{M}{h^2E^*}, \quad \dot{\overline{t}} = \frac{c_1t}{h} - (4)$$

- безразмерное время, равняется единице, если фронт волны расширения проходит расстояние, равное толщине пластины. Здесь скорость волны расширения

$$C_1 = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}} \quad N \quad E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
 (5)

В дальнейшем для упрощения в безразмерных переменных штрих опускается.

В і-том элементе разбиения пластины за временной шаг рассчитываются:

## I) изменения деформации

$$\Delta \varepsilon_{w} = V_{i+1} - V_{i}, \qquad (6)$$

$$\Delta \varepsilon_{\psi} = \omega_{i+1} - \omega_{i}, \qquad (7)$$

- где  $v_i$  скорость i-того элемента в направлении оси Z;  $\omega_i$  угловая скорость элемента;
- 2) внутренние силы  $M_{n}$ ,  $M_{\Theta}$  и Q получены путем добавления к их существующим величинам в момент времени прироста за интервал  $\Delta t$

$$Q_{i+1} = Q_{i+1} + K_{\frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)}} (\Delta \varepsilon_{w} - \omega_{i+1} \Delta t), \tag{8}$$

$$M_{r,i+1} = M_{r,i+1} + \frac{-1+2\nu}{12(1-\nu)^2} (\Delta \varepsilon_{\psi} + \frac{\nu}{r_{i+1}} \omega_{i+1} \Delta t), \qquad (9)$$

$$M_{\theta,i} - M_{\theta,i} + \frac{-1+2\nu}{12(1-\nu)^2} \left( \frac{\omega_{i+1}}{\Gamma_{i+1}} - \Delta t + \nu \Delta \epsilon_{\psi} \right); \tag{10}$$

3) скорость элемента V; в направлении оси 7 (получена на основе закона сохранения количества движения).

$$v_i \leftarrow v_i \left[ (r_i + \Delta r) Q_{i+1} - r_i Q_i + p_i \Delta r \left( r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) \right] / (r_i + \frac{\Delta r}{2}); \quad (II)$$

4) угловая скорость элемента (получена на основе закона сохранения момента)

$$\omega_{i} = \omega_{i} + 12 \left\{ r_{i} M_{r,i} - (r_{i} + \Delta r) M_{r,i+1} + M_{\theta,i} \Delta r + \frac{1}{2} \left[ Q_{i} r_{i} \Delta r + Q_{i+1} (r + \Delta r) \Delta r \right] \right\} (r_{i} + \frac{\Delta r}{2}).$$
 (I2)

Представленные в формулах E и  $\gamma$  – модуль Dнга и ко-эффициент Пуассона материала пластины,  $K=0.76+0.3\gamma$  – коэффициент сдвига.

Влияние равномерно распределенной нагрузки р; учитывается в законе сохранения количества движения (II) при вычислении скорости элемента в направлении оси  $\Xi$ .

На оси симметрии поперечная сила  $Q_1=0$  и угловая скорость  $\omega_1=0$ . На контуре пластины, ради жесткого закрепления, скорость и угловая скорость фиктивного элемента равны нулю, т.е.  $V_{i_m+1}=0$  и  $\omega_{i_m+1}=0$ . Данная модель представляет из себя так называемую явную схему расчета. В начале пропесса исходят из начальных условий.

Условие устойчивости в безразмерных переменных следующее

Для обеспечения максимальной точности принимается  $\Delta t = \Delta r$ .

Алгоритм задачи разработан и запрограммирован в алгоритмическом языке Фортран X.X. Кяэрди. Пример решен на ЭВМ ЕС-1022.

3. В качестве расчетных примеров рассматриваются пластины диаметром d и толщиной h. Рассматриваются разные варианты конструкции в зависимости от свойств используемого материала плиты и от характера и длительности импульса. Результаты решения задач получены в виде выпечатанных таблиц и по ним вычерченным графикам. Так как задача осесимметричная, то для описания деформации пластины достаточно описать одно радиальное сечение.

В случае решения методом конечных разностей в качестве результатов решения являются перемещения  $u_{ijn}$  и  $w_{ijn}$  и по этим величинам вычисленные напряжения  $\sigma_{\xi}, \sigma_{\rho}, \sigma_{0}$  и  $\tau_{\rho \xi}$  на вертикалях сечения  $i=2,6,10,14,\ldots$  и на определенном слое N по времени.

Деформация  $\varepsilon_{\rho}$  определяется на нижней поверхности пластины в трех точках на расстоянии 0,25  $^{\circ}$ , 0,5  $^{\circ}$  и 0,75  $^{\circ}$  от центра пластины в зависимости от номера N слоев по времени. Вышеупомянутые результаты представлены на фигурах 3,4,5,6,7.

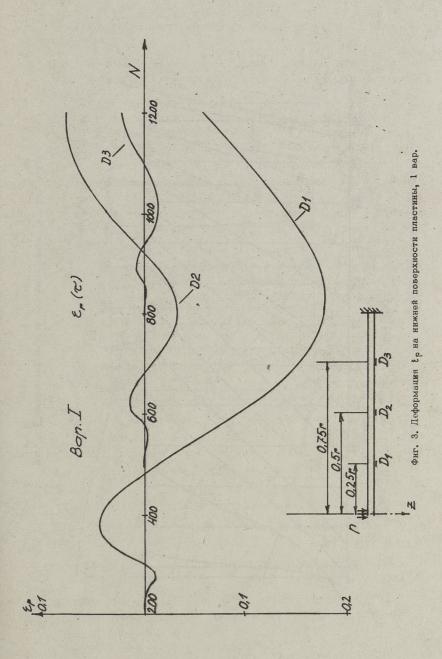
В случае решения задачи прямым численным методом половина пластины распределена на 35 элементов. В качестве результатов решения получены динамические характеристики Q,  $M_{\rm p}$ ,  $M_{\rm g}$  и кинематические характеристики  $\vee$ ,  $\omega$ ,  $\vee$  и  $\psi$ .

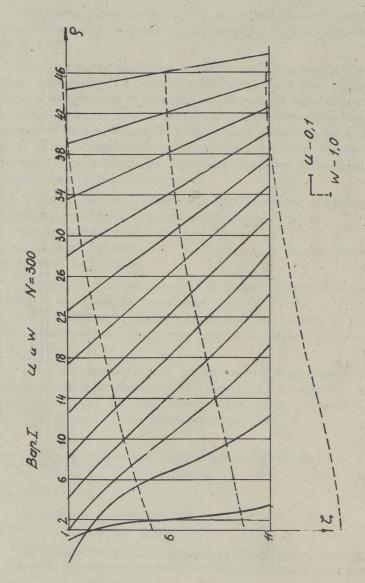
Представлены решения следующих вариантов пластин:

I. I Bapuart:  $E = 2,85 \cdot 10^4$  MMa,  $\forall = 0,20$ ,  $\rho = 1888$  kr/m<sup>3</sup>,  $c_1 = 4110$  m/c, d = 0,20 m, h = 3 mm.

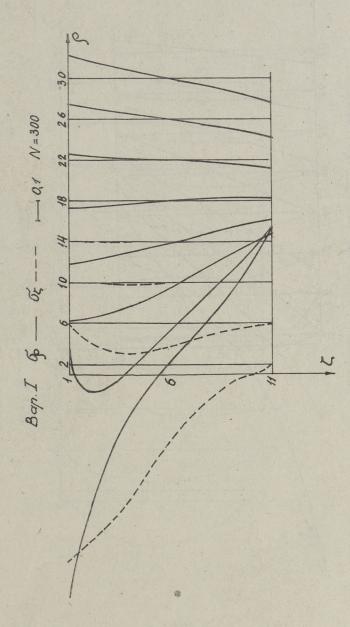
Прилагается несимметричный импульс с длительностью 30 мкс,  $p_{max} = -I$  при 9 мкс.

2. П вариант: упругие постоянные те же самые, что при I варианте. Длительность импульса IO мкс,  $p_{max} = -I$ , при 3 мкс, d = 0.24, h = 30 мм.

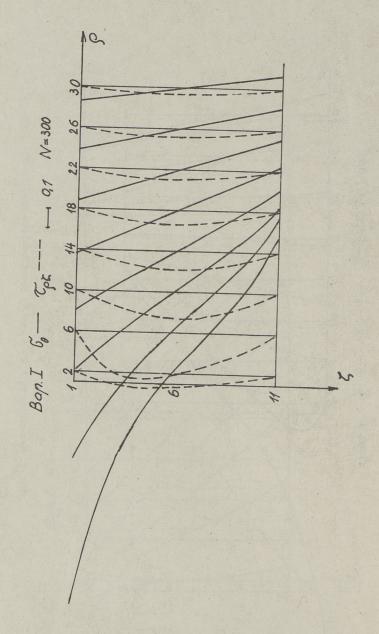




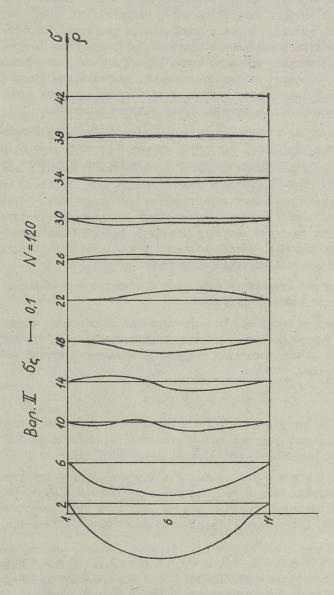
фиг. 4. Переменения и и w при числе слоев N = 300, 1 вар.



фиг. 5. Напряжения  $\sigma_{\varrho}$  и  $\sigma_{\zeta}$  в средней части пластины при N = 300, 1 вар.



и  $c_{o5}$  в средней части пластины при  $N=300,\ 1$  вар, фиг. 6. Напряжения Ф



Фиг. 7. Напряжение  $\sigma_{\xi}$  в сечении пластины при N = 120, 11 вар.

Переходя к обсуждению результатов расчета пластины, нужно подчеркнуть обстоятельство, что одним из главных факторов, от которых зависит характер напряженного состояния пластины, является форма и длительность импульса. Короткие резкие импульсы вызывают в пластине быстроменяющие напряженные состояния, особенно около фронта волны расширения. Условно коротким называется импульс, длительность которого значительно меньше, чем время пробега характерной длины волны расширения, в данном случае толщины пластины.

Исходя из вышеизложенного определения импульсы, приложенные к пластине I варианта, являются сравнительно длинными. По этой причине поведение характеристик волнового поля спокойное — квазистатическое.

Картины отдельных характеристик волнового поля, так как прилагается линейная теория упругости, на соответствующих этапах развития импульса подобные. Максимальные напряжения возникают в сечении пластины в момент времени, когда внешняя нагрузка достигает максимума.

Большие напряжения возникают в пластине под областью приложения внешней нагрузки.

Энергия импульса, по мере удаления от области нагружения, быстро рассеивается и по этой причине вклад отраженных волн от жесткого края в случае I варианта пластины является малым.

## Литература

- I. Айнола Л.Я., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. Известия АН ЭССР. Том XIУ, серия физ-мат. и техн. наук. 1965, № I.
- 2. Поверус Л.Ю., Ряямет Р.К. Распространение упругих волн в трансверсально-изотропной и изотропной толстой пластине. Распространение упругих и упругопластических волн (материалы У Всесоюзного симпозиума). Алма-Ата, 1973.
- 3. Кяэрди Х.Х., Мяннил А.D., Поверус Л.D. Распространение упругих волн в слоистых преградах. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1977, № 428, с. 25-33.

- 4. Кяэрди Х.Х., Поверус Л.D. Динамика слоистых пластин. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1980, № 487, с. 69-79.
- 5. Поверус Л.В. Упругие волны в однослойных и слоистых пластинах Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1981, № 507, с. 79-91.
- 6. Поверус Л.В. Анализ волнового напряженного состояния в однослойных и слоистых пластинах. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1982, № 532, с. 27-38.
- 7. Koenig H.A., Davids N. Dynamical finite element analysis for elastic waves in beams and plates. Int. J. Solids and Struct., 1968, N 4, p. 643-660.

L. Poverus

## Elastische Wellen in einer kreisförmigen Platte

Zusammenfassung

Es werden elastische Wellen in einer kreisförmigen Platte untersucht. Als Bewegungsgleichungen werden die Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie sowie der Plattentheorie Timoschenkos benutzt. Die Berechnungen werden nach der dreidimensionalen Differenzenmethode und der Finite-Element-Methode durchgeführt. Es sind einige numerische Resultate mit zugehörigen Analysen beigefügt.

### TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

### ТРУЛЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 534.2 А.Я. Лахе

АЛГОРИТМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭХО-СИГНАЛОВ ОТ ОБОЛОЧЕК В ЖИДКОСТИ

Рассматривается комплекс алгоритмов метода конечных элементов для расчета низкочастотных эхо-сигналов от упругой оболочки произвольной формы в жидкости. Комплекс алгоритмов состоит из алгоритма составления динамической матрицы влияния, алгоритма решения системы интегральных уравнений и алгоритма расчета давления в произвольной точке среды при помощи интеграла Гельмгольца.

Пусть в безграничной идеальной жидкости имеется оболочка, имеющая поверхность А. На оболочку падает волновой пакет, давление в котором изменяется заданным образом. Требуется рассчитать внешнее волновое поле, вызванное падающим волновым пакетом.

Решение указанной задачи для тела произвольной геометрической форми вызывает существенные трудности. В подавляющем большинстве случаев полученные решения относятся к задачам рассеяния упругими телами сферической и цилиндрической формы СІ, 2]. Для тел иной формы задачи дифракции и излучения акустических воли приходится решать приближенными методами или численно [3]. В задачах дифракции и излучения широкое применение нашли методы граничных интегральных уравнений, которые успешно решаются численно.

Одной из первых работ, в которой задача дифракции решается при помощи интегральной формулы Кирхгофа и приводятся численные результаты, была работа М. Фридмана и Р. Шоу [4]. Применение интеграла Кирхгофа в задачах дифракции и излучения звука подробно рассматривается Е.Л. Шендеровым в монографии [5]. При численном решении интегральных уравнений рассеяния, широкое применение нашел метод Т-матрицы [6, 7, 8].

Далее рассматривается решение поставленной задачи. Интеграл Гельмгольца [9] и уравнения колебания оболочки решаются методом конечных элементов.

Пусть P и  $S^*$  точки наблюдения в среде и на поверхности оболочки соответственно, где определяются амплитуды гармонических акустических давлений  $p(P)e^{-i\omega t}$  и  $p(S^*)e^{-i\omega t}$ . Расстояния между точкой излучения S на поверхности A и точками  $P, S^*$  обозначаются через  $r, r^*$  соответственно. Тогда акустические давления p(P) и  $p(S^*)$  определяются соотношениями

$$p(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{A} \frac{e^{i\kappa r}}{r} \frac{\partial p(S)}{\partial n} dA + \frac{1}{4\pi} \iint_{A} p(S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i\kappa r}}{r} \right) dA \qquad (I)$$

$$p(S^*) = -\frac{1}{2\pi} \iint_A \frac{e^{i\kappa r^*}}{r^*} \frac{\partial p(S)}{\partial n} dA + \frac{1}{2\pi} \iint_A p(S) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{i\kappa r^*}}{r^*}\right) dA, \quad (2)$$

где п - внешняя нормаль поверхности А.

Производная функции давления по направлению нормали в случае гармонической волны определяется через перемещения соотношением

$$\frac{\partial p(S)}{\partial n} = i \rho \omega^2 w_n(S), \tag{3}$$

где  $w_n(S) e^{-i\omega t}$  - амплитуда нормального перемещения в точ-

р - плотность среды;

ω - частота;

t - время.

Представим акустическое давление на поверхности A в виде двух составляющих

$$p = p_0 + p_S, \qquad (4)$$

где  $p_0, p_5$  - соответственно падающее и рассеянное давления. Падающую волну зададим в виде

$$p_0 = a_0 f(\omega) e^{i\kappa t}, \qquad (5)$$

здесь 0 - постоянная, имеющая размерность давления;

f (ω) - спектральная плотность падакщего импульса;

 $k = \omega/c$  — волновое число:

#### с - скорость звука в среде.

Для нахождения давления p(S) следует решать интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (2). Но для этого нам надо знать еще закон, связнвающий давление p(S) с перемещением  $w_n(S)$ . В качестве такой связи используем уравнения движения оболочки. Задача решается методом конечных элементов.

Оболочка разбивается на прямоугольные или треугольные элементы поверхностью  $\Delta A$ . Рассматриваются конечные элементы, описываемые в работах [10, 11, 12].

Для описания геометрии элемента оболочки принимаем рассмотрение глобальных декартовых координат х; и локальных криволинейных прямоугольных координат \$;, которые связаны следующим выражением

$$\{x_i\} = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi_1, \xi_2) \{x_i^{\alpha}\}_{\text{mid}} + \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi_1, \xi_2) \frac{\xi_3}{2} \{v_{3,i}^{\alpha}\},$$
 (6)

где  $\psi_{\alpha}(\xi_1,\xi_2)$  — интерполяционная функция Лагранжа, имею— шая в точке  $\propto$  единичное значение, а в остальных точках равная нулю;

 $\{x_i^{\alpha}\}_{mid}$  и  $\{v_{3,i}^{\alpha}\}$  следующие соотношения

$$\{x_i^{\alpha}\}_{mid} = \frac{1}{2} \{x_i^{\alpha}\}_{top} + \frac{1}{2} \{x_i^{\alpha}\}_{bottom}$$
 (7)

$$\{V_{3,i}^{\alpha}\} = \{x_i^{\alpha}\}_{\text{top}} - \{x_i^{\alpha}\}_{\text{bottom}}.$$
 (8)

Здесь  $\{x_i^{\alpha}\}_{\text{top}}$  и  $\{x_i^{\alpha}\}_{\text{boltom}}$  глобальные декартовы координаты узловых точек  $\alpha$  на внешней и внутренней поверхности оболочки, которые выбраны так, чтобы вектор  $\{\vee_{3,i}^{\alpha}\}$  был перпендикулярен к срединной поверхности оболочки.

В качестве определяемых параметров выбираются значения давления  $p^{\alpha}$ , перемещения срединной поверхности  $u^{\alpha}_{i}$  и углы поворотов  $\phi^{\alpha}_{j}$  нормали срединной поверхности в узловых точках  $\alpha$ . Перемещения  $u_{i}$  в направлении глобальных декартовых координат и давления p на поверхности элемента оболочки интерполируются в следующем виде

$$\{u_{i}\} = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi_{1}, \xi_{2})\{u_{i}^{\alpha}\} + \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi_{1}, \xi_{2}) \frac{t^{\alpha}\xi_{3}}{2} [v_{j}^{\alpha}] \{\phi_{i}^{\alpha}\},$$
 (9)

$$p = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\xi_1, \xi_2) p^{\alpha}, \qquad (10)$$

где  $t^{\alpha}$  - толдина оболочки в узле  $\alpha$ ;

 $v_j^\alpha$  — единичные ортогональные векторы, которые выбраны так, чтобы они были ортогональными векторами  $\{v_{3,i}^\alpha\}$ .

Для каждого комечного элемента (e) определяются матрица жесткости [K], матрица масси [M] и вектор увловых сил [F] по соответствующим формулам [IO, II, I2, I3, I4]

$$\begin{bmatrix} \kappa \\ \end{bmatrix} = \iiint_{\Delta V} [B]^{\mathsf{T}} [D] [B] dV, \qquad (II)$$

$$[M] = \iiint_{\Lambda V} \rho [\psi]^{\mathsf{T}} [\psi] dV, \qquad (I2)$$

$$[F] = \iint_{\Lambda A} [\Psi]^{\mathsf{T}} p \, dA ,$$
 (I3)

где [D] - матрица упругости [IO, II];

[В] - матрица, связывающая деформации (є) с узловими перемещениями (d) в следующем виде [ІО, ІІ]

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d\}, \tag{I4}$$

[ψ] - матрица, которая позволяет вычислить смещения, заданные формулой (9), в зависимости от смещения узловых точек {d} конечного элемента

$$\{u_i\} = [\psi] \{d\}.$$
 (I5)

Здесь

вектор давления р задан формулой (10);

Р - плотность материала.

После объединения всех элементов имеем следующее матричное уравнение [13]:

$$([K]-\omega^{2}[M])\{d\}_{N}=\{F\}_{N},$$
 (17)

где ω - частота;

[К],[М] - матрицы жесткости и массы соответственно;

 $\{F\}_N$  - вектор узловых сил в случае, когда в N - м узле давление  $p^N$  равно единице, а в остальных узловых точках равно нулю, т.е.

$$p^{N} = \delta_{NM}. \tag{18}$$

Здесь бым - символ Кронекера;

 $\{d\}_{N}$  — узловые перемещения, соответствующие нагружению р  $^{N}$  .

Нормальное перемещение в узле M от нагружения единичным давлением в узле N обозначим через  $w_{MN}$ . Тогда зависимость между нормальными перемещениями  $w^M$  в узле M и давлением  $p^N$  в узле N следующая

$$w^{M} = w_{MN} p^{N}. \tag{19}$$

Нормальное перемещение в элементе оболочки интерполируем в следующем виде

$$W_{(n)} = \Psi_{\alpha}(\xi_1, \xi_2) W^{\alpha}.$$
 (20)

Подстановка выражения (20) в условие (3) с учетом (19) приводит к следующему равенству

$$\frac{\partial p(S)}{\partial n} = i \rho \omega^2 \psi_{\alpha} w_{\alpha N} p^N, \qquad (2I)$$

В выражениях (I) и (2) первый член, соответствующий источникам сферических воды с учетом равенства (2I), принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \iint \frac{e^{i\kappa r}}{r} \frac{dp(S)}{\partial n} dA = \omega^2 \sum_{(e)}^{(e)} B_N^N p^N, \qquad (22)$$

где

$$\overset{\text{(e)}}{\mathsf{B}}_{\mathsf{N}} = \frac{1}{\pi} \left( \iint_{\mathsf{A}\mathsf{A}} \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\mathsf{K}\mathsf{r}}}{\mathsf{r}} \, \mathsf{i} \, \rho \, \psi_{\mathsf{\alpha}} \, \mathsf{d} \, \mathsf{A} \right) \, \mathsf{w}_{\mathsf{\alpha}\mathsf{N}}. \tag{23}$$

Второй член в выражениях (I) и (2), соответствующий источникам двойного слоя и дающий дипольное излучение звука, представляется в виде

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} p(s) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i\kappa r}}{r} \right) dA = \sum_{(e)}^{(e)} A_{\alpha} \bigwedge_{\alpha}^{M} p^{M}, \qquad (24)$$

где

$$A_{\alpha} = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta A} \psi_{\alpha} \mathcal{K} dA. \qquad (25)$$

Здесь ядро К - следующее выражение

$$\mathcal{K} = \left(\frac{i\kappa}{r} - \frac{1}{r}\right) e^{i\kappa r} \frac{\partial r}{\partial n} . \tag{26}$$

 $\Lambda_{\infty}^{m}$  определяет отношение инцидентности, т.е. вводит в соответствие локальный номер  $\alpha$  узловой точки элемента с глобальным номером М узловой точки оболочки. В выражениях (23)

и (26) расстояние r интерполируется при помощи функции  $\psi_{\infty}(\xi_1,\xi_2)$ . Множитель  $\partial r/\partial n$  определяет кривизну оболочки. При использовании интерполирующих полиномов Эрмита аппроксимация кривизны оболочки удучшается.

Подставляя выражение (4) в уравнение (2) и учитывая соотношения (22), (24), получим следующую систему уравнений

$$C_{NM} p_s^M = -C_{NM} p_0^M,$$
 (27)

где

$$C_{NM} = -\delta_{NM} + \frac{1}{2} \sum_{(e)}^{(e)} A_{ox}^{(e)} \Lambda_{ox}^{M} - \frac{\omega^2}{2} \sum_{(e)}^{(e)} B_{M}, \qquad (28)$$

ром - значение падающей волны в узловой точке М оболочки.

Решая линейную комплексную систему уравнений (27) определяем рассеянное давление  $p_s^M$  в узловых точках M оболочки.

Рассеянное давление р<sub>s</sub> в произвольной точке среды вне оболочки вычисляется интегралом Кирхгофа (I), который с учетом соотношений (22) и (24) принимает вид

$$p_{s} = \frac{1}{4} \left( \sum_{(e)}^{(e)} A_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{M} - \omega^{2} \sum_{(e)}^{(e)} B_{M} \right) p_{5}^{M}.$$
 (29)

Здесь при вычислении коэффициентов  $\stackrel{\text{(e)}}{A}_{\alpha}$  и  $\stackrel{\text{(e)}}{B}_{\text{м}}$  формулами (23) и (25) расстояние г принимается от точки М оболочки до точки, где вычисляется акустическое давление  $p_s$ .

## Литература

- І. Метсавээр Я.А., Векслер Н.Д., Стулов А.С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах. М., Наука, 1969. 239 с.
- 2. Векслер Н.Д. Информационные проблемы гидроупругости. Таллин. Валгус, 1982. 246 с.
- 3. M e i C.C. Numerical methods in water-wave diffraction and radiation. Ann. Rev. Fluid Mech., 1978, 10, p. 393-416.
- 4. Friedman M.B., Shaw R.P. Diffraction of a plane wave by an arbitrary rigid cylindrical obstacle. Trans. ASME E, J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, N 1, p. 40-46.

- 5. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., Судостроение, 1972. 352 с.
- 6. Waterman P.C. New formulation of acoustic scattering. J. Acoust. Soc. Amer., 1969, vol. 45, N 6, p. 1417-1429.
- 7. Watterman P.C. Matrix theory of elastic wave scattering. J. Acoust. Soc. Amer., 1976, vol. 60, N 6, p. 567-580.
- 8. Wattern an P.C. Matrix theory of elastic wave scattering II. A new conservation law. J. Acoust. Soc. Amer., 1978, vol. 63, N 5, p. 1320-1325.
- 9. Chertock G. Sound radiation from vibrating surfaces. J. Acoust. Soc. Amer., 1964, vol. 36, N 6, p. 1305-1313.
- 10. A h m a d S., I r o n s B.M., Z i e n k i e w i z 0.C. Analysis of thick and thin shell, structures by curved finite elements. Int. J. Num. Meth. Engng, 1970, vol. 2, p. 419-451.
- 11. Parisch H. Thick shell elements, ASKA UM-214. Stuttgart, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, 1976. 109 p.
- 12. Hahn H.G. Methoden der finiten Elemente in der Festigkeitslehre. Frankfurt am Main, Akademische Verlagsgesellschaft. 1975. 461 S.
- I3. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Пер. с англ. Л., Судостроение, 1979. 264 с.
- 14. С и и ц и н А.П. Метод конечных элементов в динамике сооружений. М., Стройиздат, 1978. 231 с.

The Algorithm of the Finite Element Method for Calculation of an Echo-signal from the Shell in the Liquid

Summary

The algorithm for calculation of an echo-signal from the arbitrary shape of shell in the liquid is presented. A general numerical method used with an arbitrary shape of shells based on the Helmholtz integral for the sound pressure and on the finite element method.

The Helmholtz integral for the sound pressure consists of the terms of the values of the pressure and its gradient at the vibrating surface of the shell. The pressure gradient at the vibrating surface of the shell is specified by the boundary condition where the normal component of the displacement of vibrating shell is calculated by the finite element method.

## TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

#### ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 539.3

А.А. Равасоо

О ПРИМЕНИМОСТИ ПЕРВОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ ВОЛНЫ В АКУСТОДИАГНОСТИКЕ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

При интерпретации данных наблюдений об эволюции волн деформации в упругих средах часто приходится учитывать неоднородность среды. Хотя волновой процесс в неоднородной среде изучается интенсивно [I-3], остается актуальным построение простых алгоритмов для описания искажения формы волны в таких средах.

В данной работе на основе работы [4] предлагается сравнительно простой асимптотический метод при различных краевых воздействиях и дается оценка справедливости применения его при нахождении физических параметров неоднородной среды по измерениям скорости и интенсивности волны.

I. Пусть одномерный волновой процесс описывается уравнением

$$U_{,xx}(x,t) + f_1(x)U_{,x}(x,t) - f_2(x)U_{,tt}(x,t) = 0.$$
 (1)

Здесь t - время;

х - лагранжева координата;

U(x,t) - перемещение материальных точек среды в направлении x;

 $f_1(x) \cup f_2(x)$  - гладкие функции с непрерывными и ограниченными производными необходимых порядков, причем  $f_2(x) > 0$  в области  $0 \le x < \infty$ .

Асимптотическое решение уравнения (1), выведенное в [4] при начальных условиях

$$U(x,0) = U_{+}(x,0) = 0$$
 (2)

имеет в пространстве преобразования Лапласа вид

$$U^{L}(x,p) = C_{1} \exp \left[ -p \Phi_{2}(x) + \Phi_{1}(x) - p^{-1} \Phi_{3}(x) + O(p^{-2}) \right] +$$

$$+ C_{2} \exp \left[ p \Phi_{2}(x) + \Phi_{1}(x) + p^{-1} \Phi_{3}(x) + O(p^{-2}) \right],$$
(3)

где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные, определяемые граничными условиями;

р - параметр преобразования Лапласа,

$$\Phi_{1}(x) = -\frac{1}{4} \int_{0}^{x} \left[ 2f_{1}(x) + f_{2,x}(x) f_{2}^{-1}(x) \right] dx, \qquad (4)$$

$$\Phi_2(x) = \int_0^x f_2^{4/2}(x) \, dx, \qquad (5)$$

$$\Phi_{3}(x) = \frac{1}{2} \int_{0}^{x} f_{2}^{-1/2}(x) \left[ g(x) - \frac{1}{4} f_{2,xx}(x) f_{2}^{-1}(x) + \frac{3}{16} f_{2,x}^{2}(x) f_{2}^{-2}(x) \right] dx.$$
(6)

В работе [4] был анализирован волновой процесс деформа-

$$U_{,t}(0,t) = -\varepsilon \hat{c} \varphi(t) H(t),$$

$$|U(x,t)| \rightarrow 0 \text{ npu } x \rightarrow \infty,$$
(7)

где H(t) - функция хевисайда,  $|\epsilon| << 1$  и  $\hat{c} = const > 0$ , функция  $\phi(t)$  удовлетворяет условие  $\max |\phi(t)| = 1$ .

При этом было выведено решение для случая  $\Phi_3(x) > 0$ .

В общем случае решением уравнения (1) при начальных и краевых условиях (2) и (7) и при учете трех первых членов в рядах (3) является выражение

$$U(x,t) = -\varepsilon \hat{c} H(\zeta) \exp \Phi_1(x) \int_0^\xi \phi(\zeta - \xi) F_0(2\sqrt{\xi |\Phi_3(x)|}) d\xi, \qquad (8)$$

где  $S = t - \Phi_2(x)$ ,

$$F_{i}(x,t) = \begin{cases} J_{i}(x,t), & \text{если } \Phi_{3}(x) \geqslant 0, \\ I_{i}(x,t), & \text{если } \Phi_{3}(x) \leqslant 0. \end{cases}$$
 (9)

Здесь через  $J_i$  и  $I_i$  (i=0,1,2,...) обозначены функции Бесселя первого рода вещественного и мнимого аргументов, соответственно.

Рассмотрим расширение класса задач, исследуемых в работе [4].

Во-первых, отметим, что в случае краевых условий

$$U(0,t) = \varepsilon u_0 \varphi(t) H(t),$$

$$U_{,\varepsilon}(x,t) \to 0 \text{ mpn } x \to \infty,$$
(10)

где  $u_0$  - положительная постоянная, легко показать, что в формуле (3)  $C_2 = 0$  и решение уравнения (1) приобретает вид

$$U(x,t) = \varepsilon u_0 H(\zeta) \exp \Phi_1(x) \left[ \varphi(\zeta) + \frac{\zeta}{2} \varphi(\zeta - \xi) F_{0, \xi} (2 \sqrt{\xi | \Phi_3(x)|}) d\xi \right]. \tag{11}$$

Во-вторых, отметим, что в случае граничных условий

$$U_{,x}(0,t) = \varepsilon \varphi(t)H(t), \qquad (12)$$

 $U_{,t}(x,t) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  в формуле (3)  $C_1 = \epsilon \varphi^t(p)W(x,p)$  и  $C_2 = 0$ , причем

$$W(x,p) = \left[-p \, \Phi_{2,x}(0) + \Phi_{1,x}(0) - p^{-1} \, \Phi_{3,x}(0) + \mathcal{O}(p^{-2})\right]^{-1}. \tag{13}$$

Если  $\Phi_{1,x}(0) = \Phi_{3,x}(0) = 0$ , то при учете первых трех членов в ряде (I3) постоянная  $C_1$  приобретает значение

$$C_1 = -\varepsilon p^{-1} \varphi^L(p) \varphi_{2,x}^{-1}(0)$$
 (14)

и решением уравнения (I) в пространстве преобразования Лапласа будет выражение

$$U_{,x}(x,p) = -\varepsilon \Phi_{2,x}^{-1}(0) \varphi^{L}(p) \left[ -\Phi_{2,x}(x) - p^{-1} \Phi_{4,x}(x) - p^{-2} \Phi_{3,x}(x) \right] \exp \left[ -p \Phi_{2}(x) + \Phi_{4}(x) - p^{-1} \Phi_{3}(x) \right]. \tag{15}$$

В пространстве оригиналов решение (15) принимает вид

$$U_{,x}(x,t) = \varepsilon \Phi_{2,x}^{-1}(0) H(\xi) \exp \Phi_{1}(x) \left\{ \Phi_{2,x}(x) \varphi(\xi) - \Phi_{1,x}(x) \int_{0}^{\xi} \varphi(\xi - \xi) F_{0}(2\sqrt{\xi|\Phi_{3}(x)|}) d\xi + \int_{0}^{\xi} \varphi(\xi - \xi) \sqrt{\xi^{-1}|\Phi_{3}(x)|} F_{1}(2\sqrt{\xi|\Phi_{3}(x)|}) \cdot \left[ n \Phi_{2,x}(x) + \xi \Phi_{3,x}(x) \Phi_{3}^{-1}(x) \right] d\xi \right\},$$
(16)

где 
$$n = \begin{cases} -1 & \text{при } \Phi_3(x) \ge 0 \\ 1 & \text{при } \Phi_3(x) < 0. \end{cases}$$
 (17)

Такой же результат получим и в том случае, если второе условие в (I2) заменить условием  $|U(x,t)| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

2. С теоретической точки зрения [4] акустодиагностика неоднородной среды путем измерения функций  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  позволяет получить сравнительно простые аналитические формулы для определения искомых параметров среды. Однако это оправдано, если вклад первых двух членов ряда (3) намного больше вклада остальных.

Рассмотрим краевне условия (7) и перегруппируем полученное решение

$$U^{L}(x,p) = -\varepsilon \hat{c} \varphi^{L}(p) p^{-1} \exp[-p \Phi_{2}(x) + \Phi_{1}(x) - p^{-1} \Phi_{3}(x)] \cdot \exp[p^{-2} \Phi_{4}(x) + p^{-3} \Phi_{5}(x) + \dots + p^{-n} \Phi_{n+2} + \dots]. \quad (18)$$

Так как решение (I8) выведено при условии  $p o \infty$ , то справедливо разложение

$$\exp\left[p^{-2}\Phi_{4}(x) + p^{-3}\Phi_{5}(x) + \dots + p^{-n}\Phi_{n+2}(x) + \dots\right] \sim \\ \sim 1 + p^{-2}\left\{\Phi_{4}(x) + p^{-4}\Phi_{5}(x) + p^{-2}\left[\Phi_{6}(x) + \frac{1}{2}\Phi_{4}^{2}(x)\right] + \dots\right\}. \tag{19}$$

Предположим, что форма краевого воздействия задана в

$$\varphi(t) = \delta(t), \tag{20}$$

где δ(t) - дельта-функция. Тогда решением задачи является выражение

$$\begin{split} U(x,t) &= - \varepsilon \hat{c} \, H(\xi) \, exp \, \Phi_{1}(x) \Big\{ F_{0}(\eta) + \\ &+ \Phi_{4}(x) \, \xi |\Phi_{3}(x)|^{-1} F_{2}(\eta) + \Phi_{5}(x) \, [\xi |\Phi_{3}(x)|^{-1}]^{3/2} \, F_{3}(\eta) + \\ &+ \left[ \Phi_{6}(x) + \frac{1}{2} \Phi_{4}^{2}(x) \right] \, \xi^{2} |\Phi_{3}(x)|^{-2} \, F_{4}(\eta) + \ldots + \\ &+ \overline{\Phi}_{n} \, \xi^{n/2} |\Phi_{3}(x)|^{-n/2} \, F_{n}(\eta) + \ldots \Big\} \,, \end{split} \tag{21}$$

где 
$$\eta = 2\sqrt{\xi |\Phi_3(x)|}$$
,  $\bar{\Phi}_n = \bar{\Phi}_n(\Phi_i, \Phi_j, ...)$ .

Следовательно, время прибытия фронта волны в точку наблюдения определено функцией  $\Phi_2(x)$  точно. Функция  $\exp \Phi_1(x)$ определяет только главную часть изменения амплитуды волны и остальные члены ряда (21) вносят поправку как в величину амплитуды, так и в форму распространяющейся волны.

При предположении гладкости и ограниченности функций Ф; (i = 1,2,3,..) в рассматриваемом промежутке аргументов и учитывая, что  $F_0(\eta) \to 1$  и  $F_1(\eta) \to 0$  ( j = 2, 3, 4, ...) при  $\eta \to 0$ , выявляется, что акустодиагностика параметров сред с учетом только функций Ф,(х) и Ф,(х) оправдана при условии

$$|\zeta \Phi_3(x)| << 1. \tag{22}$$

В этом случае, очевидно, можно в решении (8) пренебречь вкладом функции Бесселя.

3. Попытаемся оценить строгость условия (22) на численном примере. Расчеты проведены на основе решения (8).

Рассмотрим стержень, материал которого имеет переменные по длине плотность  $\rho(x)$  и модуль Dhra E(x), определяемые по формулам

$$p(x) = p_0(1 + \alpha x)^{\frac{m}{2}},$$

$$E(x) = E_0(1 + \alpha x)^{\frac{m}{2}},$$
(23)

где  $E_0, \rho_0, \alpha, m, q$  - постоянные, причем  $E_0 > 0$  и  $\rho_0 > 0$ .

Параметры стержня выберем так, что при изучении волновых процессов можно опустить поправку Рэлея [5] и считать, что движение стержня определяется уравнением (1).

Тогда легко определить, что

$$\Phi_1(x) = -\frac{1}{4} \ln \frac{E(x) \rho(x)}{E(0) \rho(0)}$$
 (24)

и главная часть величины изменения амплитуды волны определяется формулой  $\exp \Phi_{q}(x) = (1 + \alpha x)^{-(m+q)/4}$ 

Скорость распространения продольной волны

$$c = c_0 (1 + \alpha x)^{(m-q)/2},$$
 (26)

(25)

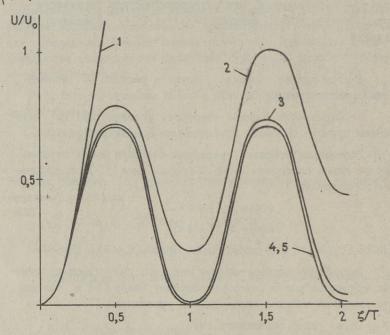
где  $C_0 = (E_0 \rho_0^{-1})^{1/2}$ .

Отсюда легко определить время прибытия фронта волны точку наблюдения.

 $\Phi$ ункция  $\Phi_3(X)$  определяется в виде

$$\Phi_{3}(x) = \frac{1}{32} \int_{0}^{x} (E \rho^{-1})^{1/2} \left\{ 12 E_{,xx} E^{-1} - 4 \rho_{,xx} \rho^{-1} + \rho_{,x} E_{,x} \rho^{-1} E^{-1} + 3 \rho_{,x}^{2} \rho^{-2} - 9 E_{,x}^{2} E^{-2} \right\} dx$$
 (27)

и следовательно, зависит как от абсолютных величин E(X) и  $\rho(X)$ , так и от их производных.



Фиг. 1. Зависимость формы волны от параметра  $| \xi \, \varphi_3(x) |$ .

При расчете примем форму краевого воздействия в виде

$$\varphi(t) = \sin \omega t, \qquad (28)$$

где ω - угловая частота возмущения.

Результаты расчета при значениях параметров m=2, q=0,  $\alpha=1$  м $^{-1}$ ,  $c_0=3\cdot10^3$  м $c^{-1}$  и расстоянии x=1 м представлены на фиг. I, где T и  $U_0$  – период и удвоенная амплитуда краевого воздействия, соответственно. Формы двух первых периодов распространяющихся в стержне волн, обозначенных через I,2,3,4 и 5, вычислены для пяти значений величины  $15.9_3(x)1$ , равных IO, I,  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ , соответственно, при  $5.7^{-1}=2$ .

Выявляется, что результаты расчета стабилизируются при  $|\zeta \, \varphi_3(x)| < 10^{-2}$ . Форма волны при  $|\zeta \, \varphi_3(x)| = 10^{-3}$  с точностью толщины линии совпадает с формой волны при  $|\zeta \, \varphi_3(x)| = 10^{-2}$  и с формой волны, вычисленной по формуле (8) без учета вклада функций Бесселя. Полезмо также учесть, что при изменении величины  $|\zeta \, \varphi_3(x)|$  в пределах  $0 \le |\zeta \, \varphi_3(x)| \le 10^{-2}$  функции Бесселя. изменяются в пределах  $1 \ge J_0(\eta) > 0$ ,990 и  $1 \le I_0(\eta) < 1$ ,010.

## Литература

- I. C r a m p i n S.A. Review of wave motion in anisotropic and cracked elastic media. Wave Motion, 1981, vol. 3, N 4, p. 343-391.
- 2. По пович А.D.,  $\Phi$  илиппов И.Г. Распространение плоских волн сжатия в неоднородных вязкоупругих средах. Изв. АН МССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук. 1977, № I, с. 28-35.
- 3. Tokuoka T., Shimauchi K. Weak and short waves in inhomogeneous isotropic elastic materials, I.-J. Acoust. Soc. Am., 1983, vol. 73, N 2, p. 441-449.
- 4. Равасо о А.А. О нахождении физических параметров неоднородной среды по измерениям скорости и интенсивности волны. Тр. Таллинск. политехн. ин-та. 1983, № 551, с. II-I6.
- 5. Brepta R., Prokopec M. Sirení napětových vln a rázy v tělesech. Praha, Academia, 1972, c. 521.

On the Applicability of the First Asymptotic
Approximation of the Waveform Distortion in
Acousto-Diagnostics of an Inhomogeneous Medium

Summary

The process of the one-dimensional longitudinal wave propagation in an inhomogeneous medium is described asymptotically by means of a series representation. The solution is obtained for various boundary conditions. The applicability of the first asymptotic approximation of the solution is discussed in case of the acoustic evaluation of the physical parameters.

The corresponding estimation deduced from the convergence of the series is established.

# TALLINDA POLOTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

труды таллинского политехнического института

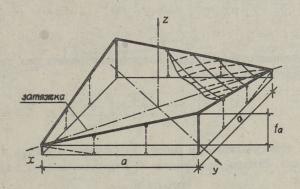
УДК 624.074

К.П. Ийгер, Э.Э. Ост

О РАСЧЕТЕ СЕДЛОВИДНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

### I. Общий алгоритм расчета

В статье рассматривается работа седловидной пространственной системы, поверхность которой состоит из двух или трех слоев пересекающихся выпуклых и вогнутых арок. Арки системы имеют жесткость на изгиб, на растяжение и сжатие.



Фиг. 1. Схема системы.

В узлах пересечения взаимное соединение арок и соединение арок с контуром шарнирное. Контур состоит из упругих прямолинейных балок (фиг. I), опертых в вертикальном направлении в углах или вдоль балок на стойки или на стены.

В горизонтальной плоскости балки контура свободно перемещаемые или нижние углы оперты на контрафорсы или соединены с затяжкой, взаимное соединение балок изгибно-жесткое.

Внешняя нагрузка приложена в узлах системы арок.

Примерно такую конструкцию имеют деревянные седловидные оболочки (I, 2).

Расчетная схема произвольной выпуклой и вогнутой арки и контура представлена на фиг. 2.

Неизвестными являются  $T_{i,\kappa}^{x}, T_{i,\kappa}^{y}, P_{i,\kappa}^{z}, N_s, R_{i,\kappa}$ , где, например, продольное усилие i—той арки определяется

$$N_{i,j}^{Yqcn} = \sum_{k=1}^{j} T_{i,k}^{X} a_{i,k,j}^{Ycn} + \sum_{k=2}^{n-i+1} T_{i,k}^{Y} b_{i,k,j}^{nYen} - \sum_{k=1}^{n-i} P_{i,k}^{Z} c_{i,k,j}^{nY} + Pd_{j}^{nYen}$$

$$i = 1 \cdots (n-1) \quad j = 1 \cdots (n-i+1),$$

а изгибающий момент контура в горизонтальной плоскости

$$\begin{split} M_{j}^{Zb} &= \sum_{i=2}^{n} \frac{\sum_{k=1}^{n-i+1} T_{i,k}^{X} q_{i,k,j}^{Z} + \sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{\sum_{k=n-j+2}^{n} T_{i,k}^{Y} h_{i,k,j}^{Z} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-i} \sum_{k=1}^{n-i} p_{i,k}^{Z} m_{i,k,j}^{Z} + N_{S} n_{j}^{Z} + M_{1}^{Zb} \\ &\quad \quad j = 1 \cdots n \end{split}$$

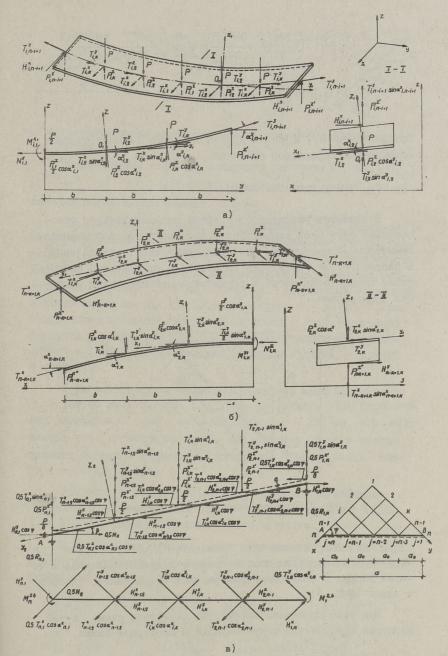
Уравнение потенциальной энергии внутренних сил системы выражается как обычно:

$$U = 2 \sum_{i=1}^{n-4} \sum_{i=1}^{lai} \frac{Y_{a,j}^{a}ds}{2EA_{a}} + 4 \int_{0}^{\frac{d}{\cos \beta}} \frac{M_{j}^{Xb}{}^{2}ds}{2EJ_{Z2}} + \dots$$

При этом учитывается работа изгибающих моментов и продольных сил. Неизвестные усилия  $X_{i,k}$  определяются из системы уравнения  $\frac{\partial U}{\partial X_{i,k}} = 0 \ ,$ 

где, например, одно из уравнений имеет структуру:

$$\begin{split} \frac{\partial U}{\partial T_{i,k}^{X}} &= \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} K_{i} \left[ M_{i,j}^{Za} \left( 2 \frac{\partial M_{i,j}^{Za}}{\partial T_{i,k}^{X}} + \frac{\partial M_{i,j+1}^{Za}}{\partial T_{i,k}^{X}} \right) + M_{i,j+1}^{Za} \left( 2 \frac{\partial M_{i,j+1}^{Za}}{\partial T_{i,k}^{X}} + \frac{\partial M_{i,j}^{Za}}{\partial T_{i,k}^{X}} \right) \right] + \dots + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-i+1} K_{ii} \left[ N_{i,j}^{Ya ca} \left( 2 \frac{\partial N_{i,j}^{Ya ca}}{\partial T_{i,k}^{X}} + \frac{\partial N_{i,j+1}^{Ya ca}}{\partial T_{i,k}^{X}} \right) + N_{i,j+1}^{Ya ca} \left( 2 \frac{\partial N_{i,j+1}^{Ya ca}}{\partial T_{i,k}^{X}} + \frac{\partial N_{i,j}^{Ya ca}}{\partial T_{i,k}^{X}} \right) \right] + \dots + \end{split}$$



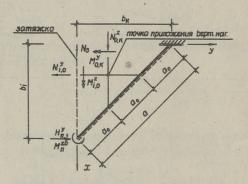
Фиг. 2. Расчетные схемы: а) вогнутых арок, б) выпуклых арок, в) контура.

$$+ \sum_{j=2}^{n} K_{VII} 2N_{j}^{bcn} \left(2 \frac{\partial M_{j}^{xbcn}}{\partial T_{i,k}^{x}} + \frac{\partial M_{j+1}^{xbcn}}{\partial T_{i,k}^{x}}\right) + M_{j+1}^{xbcn} \left(2 \frac{\partial M_{j+1}^{xbcn}}{\partial T_{i,k}^{x}} + \frac{\partial M_{j}^{xbcn}}{\partial T_{i,k}^{x}}\right) + \dots + \sum_{j=4}^{n-4} K_{VII} 2N_{j}^{bcn} \frac{\partial N_{j}^{bcn}}{\partial T_{i,k}^{x}} = 0$$

Коэффициенты  $\kappa_i$ ,  $\kappa_m$ ,  $\kappa_y$  и другие подобные зависят от геометрических параметров оболочки.

#### 2. Пример расчета

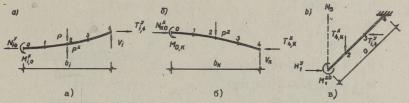
В качестве упрощенного примера рассматривается относительно двух осей симметричная система арок, нагруженная симметричной нагрузкой, где арки имеют жесткость на изгиб в плоскости их, жесткость на сжатие и растяжение, а бортовые элементы на изгиб в горизонтальной плоскости покрытия и на сжатие.



Фиг. 3. Расчетная схема четверти системы.

Далее вся система арок приводится к четырем аркам и вертикальная нагрузка соответственно сосредотачивается в четырех узлах. В силу симметрии расчета схема такой системы в плане (фиг. 3).

При этом приведены на фиг. 4 расчетная схема (-той вогнутой арки, к-той выпуклой арки и контурной балки.



Фиг. 4. Расчетные схемы: a) вогнутой арки, б) выпуклой арки, в) балки контура.

Неизвестными являются следующие величины  $P_{\star}^{Z}$   $M_{i,0}^{X}$ ,  $N_{i,0}^{Y}$ ,  $T_{i,4}^{Y}$ ,  $M_{o,\kappa}^{Y}$ ,  $N_{o,\kappa}^{X}$ ,  $T_{4,\kappa}^{X}$ ,  $M_{1}^{Zb}$ ,  $N_{s}$ . В расчетах площадь поперечного сечения затяжки принимается  $0.5 \, A_{s}$ .

По описанной методике и по упрощенной схеме определяются внутренние силы и перемещения деревянного гипара размерами (см. фиг. I) d=3500 мм,  $f=\frac{1}{5}d=700$  мм, поверхность которого состоит из двух перпендикулярно направленных слоев досок сечением t=9 мм, b=45 мм. Деревянный бортовой элемент имеет высоту h=15,8 мм, ширину b=80 мм. Доски поверхности оболочки выступают за внешнюю грань бортового элемента (карниз) шириной 100 мм. Модуль упругости древесины  $E=1,25\cdot10^4$  МПа, затяжка из стали  $\phi$  24 мм, длиной t=4950 мм.

В расчетной схеме приведенная ширина арок принимается  $b_d=164,99$  мм и высота t=9 мм, координаты узла пересечения приведенных арок x=y=824,9 мм; Z=350 мм, т.е. названный узел пересечения арок находится в плане в центре тяжести четверти покрытия. Приведенное сечение балки контура показано на фиг. 5

При этом с внутренней стороны контура учитывается в горизонтальном направлении часть оболочки шириной  $b_1 \approx 16,0$ ,  $t \approx 140$  мм, работающей совместно с контуром.

2.I. В случае затяжки между внутренними усилиями арок и контура, внешней нагрузкой Р и неизвестными имеются следующие зависимости (см. фиг. 3 и фиг. 4).

$$\begin{split} N_{4,i} &= 0,1853 \, (P - P^Z) + 0,9827 \, T_{i,4}^Y \\ N_{3,i} &= 0,14 \, (P - P^Z) + 0,9901 \, T_{i,4}^Y \\ N_{2,i} &= 0,0939 (P - P^Z) + 0,9956 \, T_{i,4}^Y \\ N_{2,i}^{cn} &= 0,0939 (P - P^Z) + 0,9956 \, T_{i,4}^Y \\ N_{2,i}^{cn} &= 0,9956 \, T_{i,4}^Y \\ N_{2,k}^{cn} &= -0,9956 \, T_{4,k}^X \\ N_{2,k}^{cn} &= -0,9956 \, T_{4,k}^X \end{split}$$

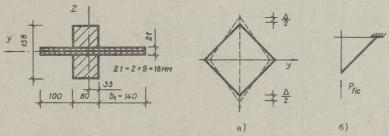
$$\begin{split} N_{i,i} &= 0.9989\,T_{i,4}^{\ Y} & N_{1,k} = -0.9989\,T_{4,k}^{\ X} \\ N_{0,i} &= T_{i,4}^{\ Y} & N_{0,k} = -T_{4,k}^{\ X} \\ M_{4,i} &= 0 & M_{4,k} = 0 \\ M_{3,i} &= 0.4125\,(P-P^Z)-0.068\,T_{i,4}^{\ Y} & M_{3,k} = 0.4125\,P^Z-0.068\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,i} &= 0.825\,(P-P^Z)-0.1167\,T_{i,4}^{\ Y} & M_{2,k} = 0.825\,P^Z-0.1167\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,i} &= 0.825\,(P-P^Z)-0.1458\,T_{i,4}^{\ Y} & M_{1,k} = 0.825\,P^Z-0.1458\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{0,i} &= 0.825\,(P-P^Z)-0.1556\,T_{i,4}^{\ Y} & M_{0,k} = 0.825\,P^Z-0.1556\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,i} &= 0.825\,(P-P^Z)-0.1556\,T_{i,4}^{\ Y} & M_{0,k} = 0.825\,P^Z-0.1556\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,i} &= 0.825\,(P-P^Z)-0.1556\,T_{4,k}^{\ Y} & M_{1,k} = 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.16556\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,k} &= 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,k} &= 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{3,k} &= 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,k} &= 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{3,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1655\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{3,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{3,k} &= 0.425\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{2,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{3,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{3,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{3,k} &= 0.825\,P^Z-0.1657\,T_{4,k}^{\ X} \\ M_{1,k} &= 0.825\,P^Z-0.1$$

Уравнение потенциальной энергии деформации

$$U = \int_{0}^{L/2} \frac{N_{i,\kappa}^{Y2} ds}{2EA_{\alpha}} + \int_{0}^{L/2} \frac{M_{i,\kappa}^{X2} ds}{2EJ_{i,z}} + \int_{0}^{L/2} \frac{N_{i,\kappa}^{X2} ds}{2EA_{\alpha}} + \int_{0}^{L/2} \frac{M_{j}^{Y2} ds}{2EJ_{\kappa Z}} + \int_{0}^{\alpha} \frac{N_{j}^{D2} ds}{2E$$

получим следующую систему уравнений

$$6\,M_1^{Zb} + \, 0,6115\,P^Z - 9,7286\,T_{i,K} + \, 7,425\,\,N_S - \, \, 1,2230\,\,P = 0 \\ 0,3576\,M_1^{Zb} + 583,9825\,P^Z - 0,5798\,T_{i,K} + \, 0,4425\,N_S - 292,0458\,\,P = 0 \\ -5,6844\,M_1^{Zb} - \, 0,5792\,P^Z + 29,2382\,T_{i,K} - \, 9,6401\,N_S - \, 46,8501\,\,P = 0 \\ 4,3436\,M_1^{Zb} + \, 0,4417\,P^Z - \, 9,6515\,T_{i,K} + \, 7,1965\,\,N_S - \, \, 1,1308\,\,P = 0 \\ \end{aligned}$$



фиг. 5. Поперечные сечения контура. Фиг. 6. а) горизонтальные перемещения углов контура, б) расположение фиктивных сил.

Принимая P = 7,5 кH, получим после решения системы уравнений величины неизвестных усилий, приведенные в табл. I (вариант I).

2.2. При отсутствии затяжки (вариант П) нижние углы контура подобно верхним углам могут в горизонтальном направлении свободно перемещаться (фиг. 6,a). В этом случае усилие затяжки  $N_{\rm S}=0$ .

Для определения перемещения  $\frac{\Delta}{2}$  в направлении отсутствующей затяжки прилагается фиктивная сила  $P_{\text{fic}}$ , влияние которой учитывается в уравнении потенциальной энергии.

Далее принимая первое производное уравнения потенциальной энергии по  $P_{fic}$  и приравнивая  $P_{fic} = 0$ , получим перемещение:

 $\frac{\partial U}{\partial P_{fic}} = \frac{\Delta}{2}.$ 

Вертикальное перемещение точки среднего сечения выпуклой арки определяют из условия:

 $\Delta Z = \frac{\partial U}{\partial P_{fic}}$ 

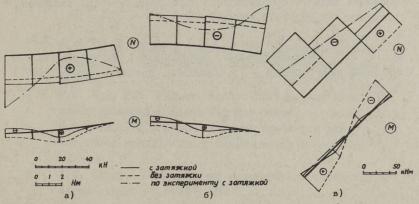
Результаты расчета см. таблица I (вариант П). Также приводятся в таблице I результаты испытания соответствующей модели деревянной оболочки. Результаты эксперимента даны в скобках.

На фиг. 7 показаны эпоры продольных сил и изгибающих моментов арок и контура.

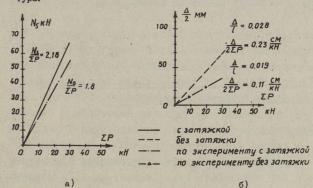
На фиг. 8 показаны усилия затяжки и горизонтальных перемещений нижнего угла контура в зависимости от общей нагрузки.

Таблица

Z V WW	-2,I (-3,5)	1.4
AN E	1-1	7 (3,3)
N × N × N × N × N × N × N × N × N × N ×	-23,02	-18,74
N X S, I	23,02	18,74
X X X X X X X X X X X X X X X X X X X	-0,378	0,301
XX V,0 MHX	23,02 -23,02 -0,378 -0,378	0,301
7,4,1 K∏	-23,02	18,74 -18,74 0,301
۲. ۲ ۲ ۲	23,02	18,74
P <sup>2</sup>	67,115 3,825 (52,1) —	3,825
Z X Z T	67,115	1.1
M Zb K H M	-4,625 (-2,16)	40,41
σŦ	7,65	7,65
Вариант	I с за- тяжкой	П без затяжки



Фиг. 7. Эпюры N и M ; а) вогнутой арки, б) выпуклой арки, в) балки контура.



Фиг. 8. а) зависимости усилия затяжки, б) зависимость перемещения контура от общей нагрузки.

В заключение можно сказать, что приведенная методика определяет напряженно деформируемое состояние вышеописанных деревянных оболочек с удовлетворительной точностью даже при относительно грубой аппроксимации системы арок, т.е. при замене всей системы арок лишь четырымя арками. Для получения более удовлетворительной точности оболочки описанной конструкции рекомендуем заменить сеткой арок, состоящей не менее, чем из 5 арок в каждом направлении.

## Литература

I. Лаул X.X., Лавров А.И., Пугаль Я.П. Экспериментальное исследование квадратной в плане деревянной

оболочки вида гиперболического параболоида. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1972, № 333.

2. Вайк М.Г., Лавров А.И., Нйгер К.П., Юст Э.Э. Экспериментальное исследование модели деревянной оболочки вида гипара. — Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1977, № 433.

K. Õiger, E. Just

On Calculation of Saddle-shape Crossing Bar Structure by the Energy Method

Summary

Calculation problems of saddle-shape crossing bar structure are presented. Inner force values are determined from the minimum potential energy condition. Specifically, the method proposed is used to calculate timber hypars consisting of two layers of the elements perpendicular in direction. An example of the calculation of a timber hypar is given. A comparison of the values and displacements obtained with the results of the corresponding shell model tests is provided.

#### Содержание

I.	D.A. Тярно, Э.З. Жуковский, О.В. Шевченко. Исследование составной висячей оболочки с пятиугольным	
	планом	3
2.	Р.Н. Ээк, Р.К. Ряямет. Расчет ортотропных пласти-	
	нок переменной толщины методом сеток	13
3.	Р.Н. Ээк, У.В. Раукас. Матрица жесткости для ор- тотропной прямоугольной балки-стенки переменной	
	ТОЛЦИНЫ	23
4.	А.А. Сарап. Исследование напряженного состояния	
	балки-стенки по методу МКЭ	31
5.	X.X. Кяэрди. Метод конечных элементов при мате- матическом моделировании динамики железобетонных	
	пдит	43
6.	Л.В. Поверус. Упругие волны в круглой пластине.	51
7.	А.Я. Лаже. Алгоритм метода конечных элементов	
	для вычисления эко-сигналов от оболочек в жест-	
	ROCTU	65
8.	А.А. Равасоо. О применимости первого асимптоти-	
	ческого приближения для описания изменения фор-	
	мы волны в акустодиагностике неоднородной среды	73
9.	К.П. Ыйгер, Э.Э. Юст. О расчете седловидной пе-	
	рекрестной стержневой системы энергетическим	
	методом	81

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ Труды ТПИ  $10^{10}$  575

СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Строительная механика XУ На русском языке

Ответственный редактор В. Компус. Техн. редактор В. Ранник Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 15.02.84 Подписано к печати 29.06.84.

MB-08601 .

Формат 60х90/16. Печ. л. 5,75+0,25 прил. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 300.

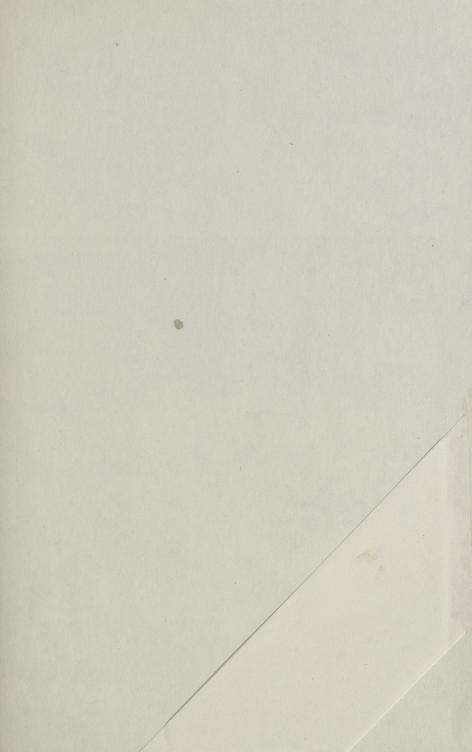
Зак. № 434.

Цена 75 коп.

Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9.



Remain consistence of the second



Цена 75 коп.

8