

Ер. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А

№ 147

1958

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ТАЛЛИН, 1958

Ep. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А

№ 147

1958

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ТАЛЛИН, 1958

Авторы настоящего сборника изъявляют благодарность члену-корреспонденту Академии Наук Эстонской ССР доктору технических наук Н. А. АЛУМЯЭ за ценную дружескую помощь в руководстве их научными трудами.

P37850



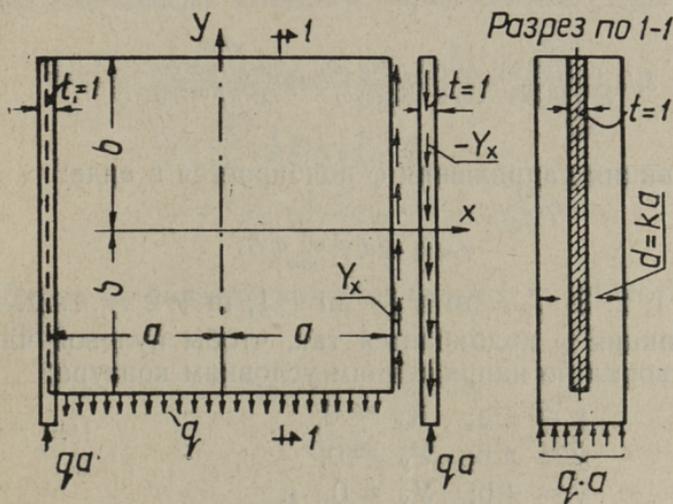
Ep. 2326

РАСЧЕТ БАЛОК-СТЕНОК ОПИРАЮЩИХСЯ НА ТОРЦЕВЫЕ РЕБРА

Л. А. АЛЛИКАС

В настоящее время расчет балок-стенок проводится в основном по схеме, по которой опорные реакции передаются на балки-стенки в виде сил сжатия на ограниченных участках нижнего края стенки. В существующих конструкциях такая схема встречается лишь в исключительных случаях. Обычно же балки-стенки опираются по своим вертикальным торцевым плоскостям либо на столбы, либо на другие балки стенки. При этом опорные реакции передаются от плит на столбы посредством действующих между ними сил сдвига.

Ниже приводится приближенный расчет однопролетной балки-стенки, опирающейся на торцевые ребра, по схеме, приведенной на черт. 1. При решении задачи при-



Черт. 1

менено вариационное уравнение Кастильяно, причем само решение отыскивалось в виде алгебраического ряда. В целях упрощения задачи не приняты во внимание нормальные напряжения в месте сопряжения плиты с торцевыми ребрами. Это оправдано ничтожными значениями напряжений вследствие большого различия между жесткостями плиты и ребер. Точно так же в целях упрощения задачи предполагается, что коэффициент Пуассона $\nu = 0$, силы сдвига, нагружающие ребра, приложены к оси последних и что напряжения в ребре на протяжении поперечного сечения распределены равномерно.

Потенциальная энергия всей системы состоит из суммы потенциальной энергии плиты и двух ребер:

$$U = \frac{1}{2E} \int_{-a-b}^{+a+b} \int_{-b}^{+b} (X_x^2 + Y_y^2 + 2X_y^2) dx dy + \frac{1}{FE} \int_{-b}^{+b} \left\{ \int_{x=a}^{+b} Y_x |_{x=a} dy \right\}^2 dy. \quad (1)$$

В уравнении (1) F выражает площадь поперечного сечения ребра, причем принимается $F = ka = \text{const}$.

Выражая напряжения через функцию напряжения

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad Y_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

можем вариационное уравнение Кастильяно выразить в следующем виде:

$$\delta U = \frac{1}{2E} \delta \int_{-a-b}^{+a+b} \int_{-b}^{+b} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{FE} \delta \int_{-b}^{+b} \left\{ \int_{x=a}^{+b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} |_{x=a} dy \right\}^2 dy = 0. \quad (3)$$

Функция напряжения φ подбирается в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_1^m a_i \varphi_i + \sum_{m+1}^n a_j \varphi_j, \quad (4)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, m$ и $j = m + 1, m + 2, \dots, n$.

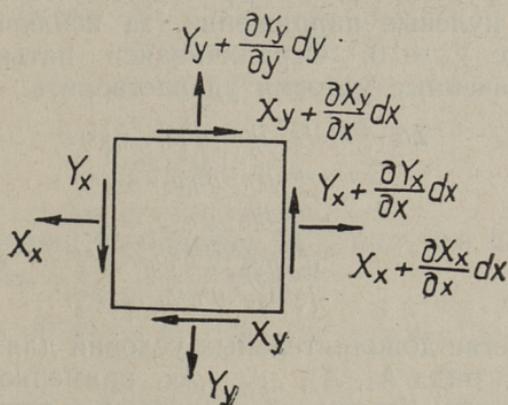
Функция φ подбирается так, чтобы нулевой член φ_0 удовлетворял по напряжениям условиям контура:

$$\begin{aligned} x = \pm a; & \quad X_x = 0, \\ y = \pm b; & \quad Y_y = 0, \\ y = +b; & \quad Y_y = 0 \quad \text{и} \\ y = -b; & \quad Y_y = q. \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве исходного положения используются обыкновенные формулы сопротивления материалов.

$$X_x = \frac{3}{4} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \frac{y}{b} q \quad u$$

$$Y_x = -\frac{3}{4} \frac{x}{a} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] q.$$



Черт. 2

Из равновесия элемента балок-стенок (черт. 2) следует:

$$\frac{\partial Y_y}{\partial y} dx dy + \frac{\partial Y_x}{\partial x} dx dy = 0,$$

$$\frac{\partial Y_y}{\partial y} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} = \frac{3}{4} \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] q.$$

$$Y_y = \int \frac{3}{4} \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] q dy = \frac{3}{4} \frac{1}{a} \left(y - \frac{y^3}{3b^2} \right) q + c$$

Далее из условий контура (если $y = -b$ то $Y_y = q$), получим:

$$Y_y = \frac{3}{4} \frac{1}{a} \left(b - \frac{1}{2} b \right) q + c,$$

$$c = \frac{1}{2} q \quad u$$

$$Y_y = \frac{1}{4} \left(3 \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} + 2 \right) q$$

Если воспользоваться обозначениями $\frac{x}{a} = \xi$ и $\frac{y}{b} = \eta$, то приведенным компонентам напряжений соответствует функция напряжения:

$$\varphi_0 = \frac{1}{8} a^2 (\xi^2 \eta^2 - 3 \xi^2 \eta - \eta^3 + 2 \xi^2) q. \quad (6)$$

Члены функции φ_i избираются так, чтобы они на контуре дали нулевые напряжения, за исключением краев $x = \pm a$, где $Y_y \neq 0$. Ограничиваясь пятью членами, можем означенные условия удовлетворить следующими функциями:

$$\begin{aligned} \sum \sigma_i \varphi_i = & -(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)^2 (a_1 + A_1 \xi^2) - \\ & -(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)^2 \eta (a_2 + A_2 \xi^4) - \\ & -(\xi^4 - 1)(\eta^2 - 1)^2 \eta^2 (a_3 + A_3 \xi^2) - \\ & -(\xi^4 - 1)(\eta^2 - 1)^2 \eta^3 (a_4 + A_4 \xi^4) - \\ & -(\xi^4 - 1)(\eta^2 - 1)^2 \eta^4 (a_5 + A_5 \xi^4). \end{aligned} \quad (7)$$

В качестве дополнительных условий для определения множителей ряда A_1, A_2, \dots, A_5 применяется условие непрерывности напряжений в отдельных точках контакта ребра и плиты в виде:

$$\frac{1}{F} \int_0^b \left(\tau_{0xy} + \sum \sigma_i \varphi_{i,xy} \right) \Big|_{x=0} dy = \int_0^b \left(\tau_{0xx} + \sum \sigma_i \varphi_{i,xx} \right) \Big|_{x=a} dy. \quad (8)$$

Применяя приведенное условие (8) относительно точек ребра ($x = \pm a$): $y = 0$, $y = \pm 1/2 b$ и $y = \pm 3/4 b$, получим при решении системы уравнений для коэффициентов A_1, A_2, \dots, A_5 следующие значения:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{3}{28} a^2 q - \frac{3}{7} a_1, \\ A_2 &= \frac{51}{2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11} a^2 q - \frac{3}{11} a_2, \\ A_3 &= -\frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7} a^2 q - \frac{5}{9} a_3, \\ A_4 &= -\frac{4 \cdot 173}{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13} a^2 q - \frac{5}{13} a_4 \quad \text{и} \\ A_5 &= \frac{8 \cdot 97}{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13} a^2 q - \frac{5}{13} a_5. \end{aligned} \quad (9)$$

Члены функции напряжений φ_j должны отвечать тем же условиям что и φ_1 , причем условие (8) применяется по полному протяжению вертикального сечения $x = \pm a$:

$$\int_y^b \int_x^a \Sigma a_j \varphi_{j,y} |_{x=0} dy = \int_x^a \Sigma a_j \varphi_{j,x} |_{y=0} dx \quad (8')$$

В выражении для φ_j также берется всего пять членов в виде:

$$\begin{aligned} \Sigma a_j \varphi_j = & -(\xi^4 - 3\xi^2 + 2)(\eta^2 - 1)^2 [C_6 + A_6(\xi^2 - 1)] - \\ & -(\xi^4 - 1)(\eta^2 - 1)^2 (C_7 + A_7 \xi^2) - \\ & -(\xi^4 - 1)(\eta^2 - 1)^2 \eta (C_8 + A_8 \xi^4) - \\ & -(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)^2 \eta^4 (C_9 + A_9 \xi^4) - \\ & -(\xi^4 - 1)(\eta^2 - 1)^2 \eta^5 (C_{10} + A_{10} \xi^4). \end{aligned} \quad (10)$$

Удовлетворяя требование (8'), получим для коэффициентов A_6, A_7, \dots, A_{10} значения:

$$\begin{aligned} A_6 &= \frac{1}{2} a_6, \quad A_8 = -\frac{5}{13} a_8, \\ A_7 &= -\frac{5}{9} a_7, \quad A_9 = -\frac{3}{11} a_9 \quad \text{и} \quad A_{10} = -\frac{5}{13} a_{10} \end{aligned}$$

Поместив в уравнения (7) и (10) полученные указанным путем значения коэффициентов A_1, A_2, \dots, A_{10} , можем функцию напряжения выразить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi = & [0,1250(\xi^2 \eta^2 - 3\xi^2 \eta - \eta^3 + 2\xi^2) - \\ & - 0,1071(\xi^4 - \xi^2)(\eta^2 - 1)^2 - \\ & - 0,0473(\xi^6 - \xi^4)(\eta^2 - 1)^2 \eta - \\ & - 0,0170(\xi^6 - \xi^2)(\eta^2 - 1)^2 \eta^2 + \\ & + 0,3621(\xi^6 - \xi^4)(\eta^2 - 1)^2 \eta^3 - \\ & - 0,4061(\xi^8 - \xi^4)(\eta^2 - 1)^2 \eta^4] \eta^2 a_1 + \\ & + 0,1429(3\xi^4 - 10\xi^2 + 7)(\eta^2 - 1)^2 a_2 + \\ & + 0,0909(3\xi^6 - 3\xi^4 - 11\xi^2 + 11)(\eta^2 - 1)^2 \eta a_3 + \\ & + 0,2222(5\xi^6 - 9\xi^4 - 5\xi^2 + 9)(\eta^2 - 1)^2 \eta^2 a_3 + \\ & + 0,0769(5\xi^6 - 13\xi^4 + 13)(\eta^2 - 1)^2 \eta^3 a_4 + \\ & + 0,0769(5\xi^8 - 18\xi^4 + 13)(\eta^2 - 1)^2 \eta^4 a_5 + \\ & + 0,5000(-\xi^6 + 7\xi^2 - 6)(\eta^2 - 1)^2 \eta^5 a_6 + \\ & + 0,1111(5\xi^6 - 9\xi^4 - 5\xi^2 + 9)(\eta^2 - 1)^2 a_7 + \\ & + 0,0769(5\xi^6 - 18\xi^4 + 18)(\eta^2 - 1)^2 \eta a_8 + \\ & + 0,0909(3\xi^6 - 3\xi^4 - 11\xi^2 + 11)(\eta^2 - 1)^2 \eta^4 a_9 \\ & + 0,0769(5\xi^8 - 18\xi^4 + 13)(\eta^2 - 1)^2 \eta^5 a_{10}. \end{aligned} \quad (11)$$

Первая группа членов с множителем a^2q выражает нулевой член φ_0 функции напряжения. Неизвестные множители a_1, a_2, \dots, a_{10} остальных членов ряда отыскиваются из условия минимума потенциальной энергии. Так как после определения коэффициентов A_1, A_2, \dots, A_{10} индексы i и j в выражении (4) имеют одинаковое назначение, то функцию напряжения можно выразить в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum a_i \varphi_i, \quad (4')$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Введя функцию φ в условие минимума $\frac{\delta U}{\delta a_k} = 0$, можем составить канонические уравнения Кастильяно-Ритца:

$$\begin{aligned} a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{21} + a_3 \delta_{31} + \dots &= -\Delta p_1 \\ a_1 \delta_{12} + a_2 \delta_{22} + a_3 \delta_{32} + \dots &= -\Delta p_2 \\ a_1 \delta_{13} + a_2 \delta_{23} + a_3 \delta_{33} + \dots &= -\Delta p_3 \\ \dots & \end{aligned} \quad (12)$$

Множители и свободные члены уравнений (12) определяются путем следующих формул:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \iint_{-a-b}^{+a+b} (\varphi_{i,xx} \varphi_{k,xx} + \varphi_{i,yy} \varphi_{k,yy} + 2\varphi_{i,xy} \varphi_{k,xy}) dx dy + \frac{2}{E} \iint_{-b-y}^{+b+b} \left\{ \int_{x=a}^{+b+b} \varphi_{i,xy} dy \int_{x=a}^{+b} \varphi_{k,xy} dy \right\} dy, \\ \Delta p_k &= \iint_{-a-b}^{+a+b} (\varphi_{0,xx} \varphi_{k,xx} + \varphi_{0,yy} \varphi_{k,yy} + 2\varphi_{0,xy} \varphi_{k,xy}) dx dy + \frac{2}{E} \iint_{-b-y}^{+b+b} \left\{ \int_{x=a}^{+b+b} \varphi_{0,xy} dy \int_{x=a}^{+b} \varphi_{k,xy} dy \right\} dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно изложенному было проведено решение двух численных задач. В первой задаче $a = b$, а во второй $a = 1/2b$, причем в обеих задачах принято $t = t_1 = 1$ и $k = 0,5$.

Вычисляя в первой задаче множители и свободные члены согласно выражениям (13) и решив систему уравнений (12), получим для множителей ряда следующие значения:

$$\begin{aligned} a_1 &= +0,0375 a^2q, & a_6 &= +0,0492 a^2q, \\ a_2 &= +0,1257 a^2q, & a_7 &= +0,0227 a^2q, \\ a_3 &= +0,0218 a^2q, & a_8 &= -0,1613 a^2q, \\ a_4 &= +0,0116 a^2q, & a_9 &= -0,0447 a^2q \quad \text{и} \\ a_5 &= +0,0141 a^2q, & a_{10} &= +0,1323 a^2q. \end{aligned}$$

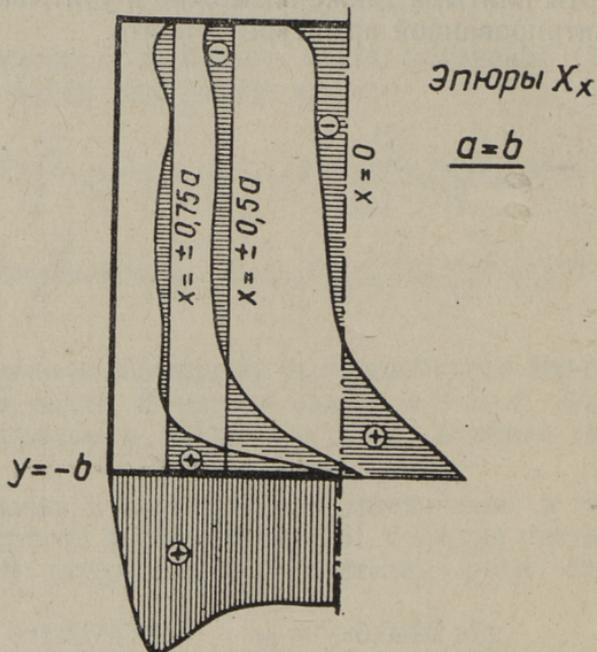
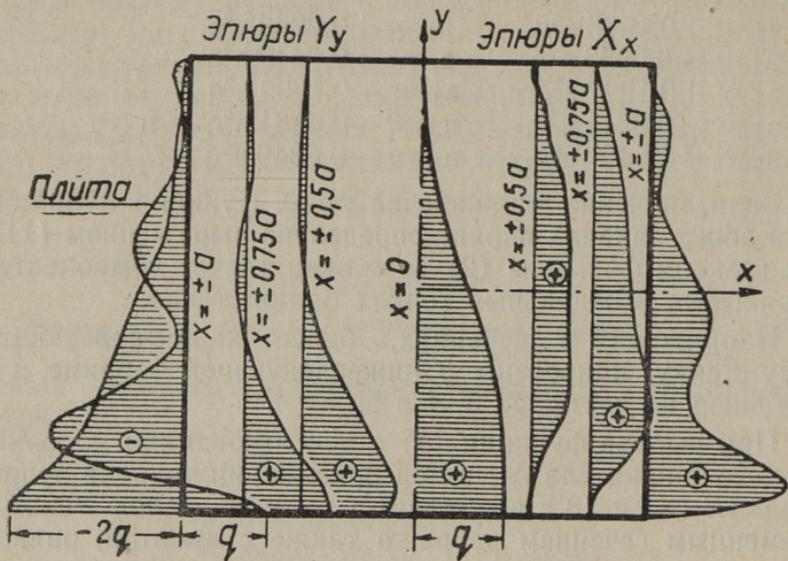
Во второй задаче те же множители ряда имеют значения:

$$\begin{aligned} a_1 &= +0,1575 a^2q, & a_6 &= +0,2269 a^2q, \\ a_2 &= -0,0923 a^2q, & a_7 &= +0,0649 a^2q, \\ a_3 &= +0,1327 a^2q, & a_8 &= -0,1399 a^2q, \\ a_4 &= -0,0211 a^2q, & a_9 &= -0,6281 a^2q, \text{ и} \\ a_5 &= +0,6437 a^2q, & a_{10} &= -0,6849 a^2q. \end{aligned}$$

Зная значение множителей ряда, функция напряжений в обеих задачах вполне определена выражением (11). При помощи формулы (2) возможен расчет компонентов напряжения в отдельных точках балки-стенки.

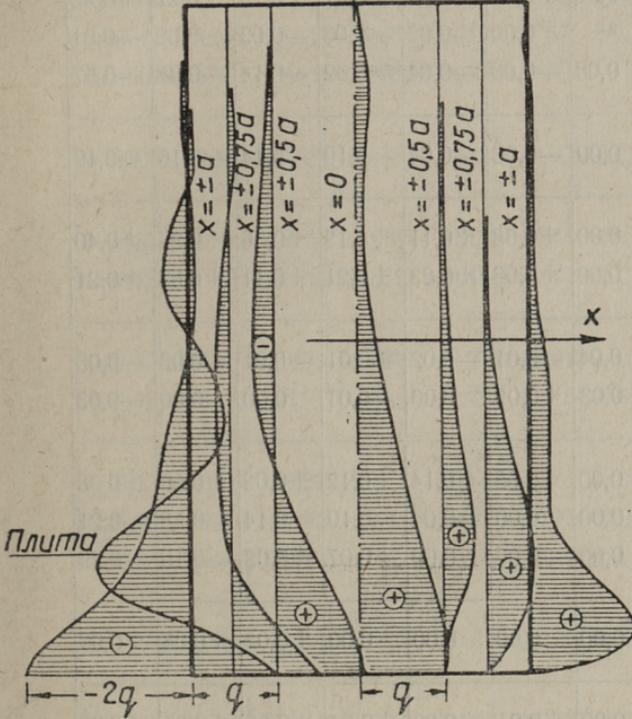
Напряжения в сечениях, более характеризующих балку-стенку, приведены в нижеследующей таблице и в виде эпюр на чертежах 3, 4 и 5.

При выборе функции (4) с использованием дополнительного множителя A и при применении условий непрерывности (8) и (8') возможно и решение балок-стенок с переменным сечением ребра, а также с высотой, равной части высоты плиты, а также возможно и учитывать наличие концентрированной арматуры в плите.

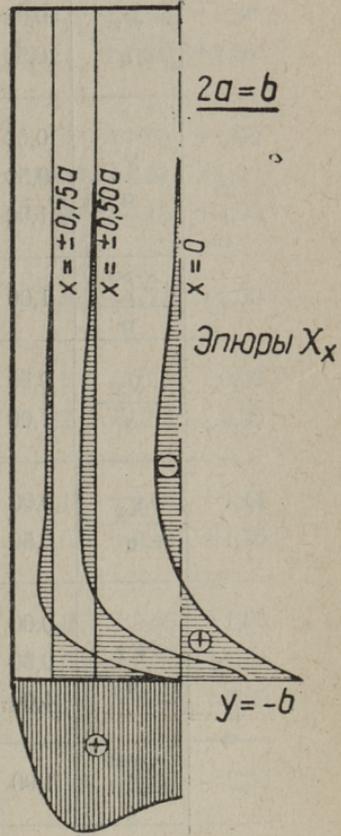


Черт. 3

Эпюры Y_y Эпюры X_x



Черт. 4



Черт. 5

Компоненты

Напря- жения	$\frac{x}{a} \backslash \frac{y}{b}$	1 *	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8		
a = b	$\frac{X_x}{q}$	0,00	-0,65	-0,37	-0,35	-0,38	-0,38	-0,34	-0,28	
		0,50	-0,29	-0,32	-0,26	-0,20	-0,17	-0,18	-0,20	
	$\frac{Y_y}{q}$	0,00	0,00	+0,01	+0,04	+0,07	+0,13	+0,22	+0,33	
		0,50		0,00	-0,02	-0,03	-0,03	-0,02	-0,01	
		1,00	0,00	-0,06	-0,04	-0,02	-0,14	-0,38	-0,57	
	$\frac{Y_y^{реб}}{q}$	1,00	0,00	-0,08	-0,04	-0,10	-0,14	-0,16	-0,19	
	$\frac{Y_x}{q}$	0,50	0,00	+0,08	+0,11	+0,18	+0,36	+0,39	+0,40	
		1,00	0,00	+0,06	+0,23	+0,21	+0,11	+0,08	+0,21	
	a = 1/ab	$\frac{X_x}{q}$	0,00	+0,04	-0,01	-0,02	-0,01	-0,01	-0,03	-0,05
			0,50	-0,03	+0,02	0,00	-0,01	0,00	0,00	-0,03
		$\frac{Y_y}{q}$	0,00	0,00	+0,08	+0,14	+0,12	+0,08	+0,06	+0,08
			0,50	0,00	0,00	-0,04	-0,10	-0,14	-0,18	-0,21
1,00			0,00	-0,06	0,00	+0,07	+0,02	-0,16	-0,29	
$\frac{Y_y^{реб}}{q}$		1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,02	+0,05	+0,09	
$\frac{Y_x}{q}$		0,50	0,00	+0,01	+0,03	+0,04	+0,05	+0,05	+0,06	
		1,00	0,00	0,00	+0,01	-0,01	-0,06	-0,09	-0,04	

напряжений

1/8	0	-1/8	-2/8	-3/8	-4/8	-5/8	-6/8	-7/8	-1
-0,23	-0,20	-0,16	-0,11	-0,02	+0,16	+0,41	+0,73	+1,10	+1,48
-0,22	-0,23	-0,22	-0,19	-0,13	-0,01	+0,20	+0,54	+1,01	+1,59
+0,46	+0,58	+0,70	+0,81	+0,89	+0,95	+0,98	+0,99	+1,00	+1,00
+0,01	+0,05	+0,11	+0,22	+0,37	+0,57	+0,78	+0,94	+1,01	+1,00
-0,59	-0,40	-0,15	-0,08	-0,35	-0,99	-1,53	-1,36	-0,15	+1,00
-0,27	-0,40	-0,58	-0,75	-0,88	-0,99	-1,11	-1,36	-1,74	-2,00
+0,40	+0,39	+0,39	+0,41	+0,43	+0,44	+0,26	+0,12	-0,02	0,00
+0,43	+0,63	-0,71	+0,62	+0,47	+0,42	+0,70	+1,27	+1,58	0,00
-0,10	-0,16	-0,21	-0,26	-0,28	-0,24	-0,10	+0,17	+0,66	+1,44
-0,08	-0,13	-0,17	-0,19	-0,19	-0,18	-0,16	-0,03	+0,44	+1,76
+0,13	+0,19	+0,27	+0,37	+0,48	+0,61	+0,74	+0,85	+0,95	+1,00
-0,25	-0,27	-0,25	-0,18	-0,05	+0,15	+0,39	+0,64	+0,88	+1,00
-0,24	+0,02	-0,33	+0,44	+0,16	-0,45	-1,03	-0,98	+0,02	+1,00
+0,08	+0,02	-0,09	-0,23	-0,34	-0,45	-0,62	-0,98	-1,57	-2,00
+0,07	+0,08	+0,12	+0,19	+0,27	+0,35	+0,36	+0,27	+0,07	0,00
+0,09	+0,18	+0,26	+0,26	+0,22	+0,24	+0,49	+0,97	+1,27	0,00

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, 1947.
 2. Пратусевич Я. А. Вариационные методы в строительной механике, 1948.
 3. Синицын А. П. О распределении напряжения в углах стен. Исследования по теории сооружений. Сборник № 3, 1939.
 4. Лазарьян В. О. Об одном случае изгиба короткой балки. Сборник трудов. Вып. III. Киевский строительный институт. 1936.
-

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГОЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

К. К. ОЛЛИК

В настоящей статье приводятся численные результаты исследования свободных осесимметричных колебаний замкнутой круговой цилиндрической оболочки.

Исходя из дифференциальных уравнений колебаний оболочки, выводятся необходимые соотношения и вычисляется коэффициент для расчета частоты колебаний, зависящий от граничных условий и параметров оболочки.

Основные соотношения

Пусть будет R — радиус срединной поверхности оболочки, $2\alpha \cdot R$ — длина оболочки, δR — толщина стены, μ — плотность массы материала оболочки, E — модуль Юнга и ν — коэффициент Пуассона. Время обозначим через t и частоту собственных колебаний оболочки через ω . Положим, что

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\mu(1-\nu^2)}} \cdot \frac{\Omega}{R} \quad (1)$$

Перемещения некоторой точки срединной поверхности, u — по направлению образующей и w — по нормали срединной поверхности, выражаем в следующем виде:

$$w(\alpha, t) = W e^{r\alpha} \cos \omega t \quad (2)$$

и

$$u(\alpha, t) = U e^{r\alpha} \cos \omega t \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{x}{R}$ — относительное, x — действительное расстояние точки вдоль образующей от середины оболочки.

Пренебрегая силами инерции вращения и деформацией сдвига и отказываясь от исследования колебаний очень больших частот, получим для осесимметричных колебаний оболочки систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u'' + \nu w' - \Omega^2 u &= 0 \\ -\nu u' + h^2 w'' + (1 - \Omega^2) w &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$h^2 = \frac{\delta^2}{12}$$

Краевые условия к системе (4) следующие: в случае свободного опирания краев оболочек —

$$u'(\pm\alpha_n) - w(\pm\alpha_n) - w'(\pm\alpha_n) = 0 \quad (5)$$

и в случае заземленных краев оболочек —

$$u(\pm\alpha_n) = w(\pm\alpha_n) = w'(\pm\alpha_n) = 0 \quad (6)$$

Система уравнений (4) дает относительно u уравнение шестой степени

$$h^2 r^6 + \Omega^2 h^2 r^4 + (1 - \nu^2 - \Omega^2) r^2 + (1 - \Omega^2) \Omega^2 = 0. \quad (7)$$

которая решена при $\nu = 1/3$ и при заданных величинах Ω в интервале $0,5 \leq \Omega \leq 1,1$ и при частичных значениях $\delta = 0,002$, $\delta = 0,01$, $\delta = 0,02$ и $\delta = 0,05$.

При малых величинах Ω , $\Omega < \Omega'$ получим корнями уравнения (7)

$$r_{1,2} = \pm i\beta, \quad r_{3,4,5,6} = \pm a \pm ib.$$

В соответствии с этим представим перемещения в случае симметрического изгиба в форме

$$w = A \cos \rho \alpha + B \operatorname{ch} \alpha \alpha \cos \beta \alpha + C \operatorname{sh} \alpha \alpha \sin \beta \alpha \quad (8)$$

и

$$u = D \sin \rho \alpha + E \operatorname{ch} \alpha \alpha \sin \beta \alpha + F \operatorname{sh} \alpha \alpha \cos \beta \alpha, \quad (9)$$

а в случае антисимметрического изгиба в форме

$$w = A \sin \rho \alpha + B \operatorname{ch} \alpha \alpha \sin \beta \alpha + C \operatorname{sh} \alpha \alpha \cos \beta \alpha \quad (10)$$

и

$$u = D \cos \rho \alpha + E \operatorname{ch} \alpha \alpha \cos \beta \alpha + F \operatorname{sh} \alpha \alpha \sin \beta \alpha. \quad (11)$$

В интервале $\Omega' < \Omega < 1$ (7) имеет два мнимых и 4 вещественных корня

$$\Gamma_{1,2} = \pm i \rho, \quad \Gamma_{3,4} = \pm \rho, \quad \Gamma_{5,6} = \pm \beta.$$

Перемещения выражаются в виде:

$$w = A \cos \rho \alpha + B \operatorname{ch} \beta \alpha + C \operatorname{ch} \beta \alpha \quad (12)$$

и

$$u = D \sin \rho \alpha + E \operatorname{sh} \beta \alpha + F \operatorname{sh} \beta \alpha \quad (13)$$

— при симметрическом изгибе,

$$w = A \sin \rho \alpha + B \operatorname{sh} \beta \alpha + C \operatorname{sh} \beta \alpha \quad (14)$$

и

$$u = D \cos \rho \alpha + E \operatorname{ch} \beta \alpha + F \operatorname{ch} \beta \alpha \quad (15)$$

— при антисимметрическом изгибе.

При $\Omega = 1$, получим 4 вещественных и два нулевых корня:

$$\Gamma_{1,2} = \pm \rho, \quad \Gamma_{3,4} = \pm \beta, \quad \Gamma_{5,6} = \pm \beta = 0.$$

В этом случае имеем при симметрическом изгибе —

$$w = A \cos \beta \alpha + B \operatorname{ch} \beta \alpha + C \quad (16)$$

и

$$u = D \sin \beta \alpha + E \operatorname{sh} \beta \alpha, \quad (17)$$

при антисимметрическом же изгибе —

$$w = A \sin \beta \alpha + B \operatorname{sh} \beta \alpha + C \alpha \quad (18)$$

и

$$u = D \cos \beta \alpha + E \operatorname{ch} \beta \alpha + F. \quad (19)$$

При $\Omega > 1$ уравнение (7) имеет 6 вещественных корней, с которыми выражения для перемещений принимают вид:

$$w = A \cos \beta \alpha + B \operatorname{ch} \beta \alpha + C \cos \beta_3 \alpha \quad (20)$$

и

$$u = D \sin \beta \alpha + E \operatorname{sh} \beta \alpha + F \sin \beta_3 \alpha \quad (21)$$

— при симметрическом изгибе,

$$w = A \sin \beta \alpha + B \operatorname{sh} \beta \alpha + C \sin \beta_3 \alpha \quad (22)$$

и

$$u = D \cos \beta \alpha + E \operatorname{ch} \beta \alpha + F \cos \beta_3 \alpha \quad (23)$$

— при антисимметрическом изгибе.

Соотношения между неизвестными коэффициентами А, В, С, D, E, и F в выражениях перемещений (8) — (23) определяются из уравнений (4). Далее из граничных условий (6) или (7) выводятся выражения для определения критической длины оболочки α_* , которые соответствуют заданному значению Ω .

В случае оболочки со сводным опиранием краев получим из граничных условий (5) следующие выражения для определения критических длин оболочек:

в случае симметрического изгиба —

$$\cos \rho \alpha_* = 0, \quad (24)$$

откуда

$$\alpha_* = m \frac{\pi}{2\rho} \quad (m=1,3,5\dots) \quad (25)$$

в случае же антисимметрического изгиба —

$$\sin \rho \alpha_* = 0, \quad (26)$$

откуда

$$\alpha_* = m \frac{\pi}{\rho} \quad (m=1,2,3\dots) \quad (27)$$

Численные величины α_* (δ , Ω) приводятся в таблице 1.

Для определения критической длины α_* оболочки с защемленным опиранием краев получим из граничных условий (6) в вышеуказанных интервалах Ω следующие различные выражения.

а) $\Omega < \Omega'$:

симметрический изгиб —

$$\operatorname{ctg} \rho \alpha_* (\operatorname{ch}^2 \alpha \alpha_* - \cos^2 b \alpha_*) - g \operatorname{sh} 2 \alpha \alpha_* - k \sin 2 b \alpha_* = 0, \quad (28)$$

антисимметрический изгиб —

$$\operatorname{tg} \rho \alpha_* (\operatorname{ch}^2 \alpha \alpha_* - \sin^2 b \alpha_*) + g \operatorname{sh} 2 \alpha \alpha_* - k \sin 2 b \alpha_* = 0, \quad (29)$$

где

$$g = \rho \frac{(\alpha^2 - b^2 + \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 b^2 - (\alpha^2 + b^2 - \Omega^2)(\rho^2 - \Omega^2)}{4a(\alpha^2 + b^2)(\rho^2 - \Omega^2)}$$

и

$$k = \rho \frac{(\alpha^2 - b^2 + \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 b^2 + (\alpha^2 + b^2 + \Omega^2)(\rho^2 - \Omega^2)}{4b(\alpha^2 + b^2)(\rho^2 - \Omega^2)}$$

б) $\Omega' < \Omega < 1$:

симметрический изгиб —

$$g \operatorname{ctg} \beta_1 \alpha_n + k \operatorname{cth} \beta_2 \alpha_n - \operatorname{ctg} \beta_3 \alpha_n = 0, \quad (30)$$

антисимметрический изгиб —

$$g \operatorname{tg} \beta_1 \alpha_n - k \operatorname{th} \beta_2 \alpha_n + \operatorname{th} \beta_3 \alpha_n = 0, \quad (31)$$

где

$$g = \frac{\beta_3 (\beta_1^2 + \beta_2^2) (\beta_1^2 - \Omega^2)}{\beta_1 (\beta_1^2 + \beta_2^2) (\beta_3^2 - \Omega^2)}$$

и

$$k = \frac{\beta_3 (\beta_1^2 + \beta_2^2) (\beta_3^2 + \Omega^2)}{\beta_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) (\beta_3^2 + \Omega^2)}$$

в) $\Omega = 1$.

При симметрическом изгибе получим для определения условие

$$\sin \beta_1 \alpha_n = 0, \quad (32)$$

которое совпадает с условием при антисимметрическом изгибе для оболочек со свободным опиранием краев.

При антисимметрическом же изгибе условие для определения α_n выражается в виде:

$$g \operatorname{tg} \beta_1 \alpha_n - k \operatorname{th} \beta_2 \alpha_n + \alpha_n = 0, \quad (33)$$

где

$$g = \frac{\beta_2^4}{\beta_1 (\beta_1^2 + \beta_2^2)}$$

и

$$k = \frac{\beta_1^4}{\beta_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)}$$

г) $\Omega > 1$:

симметрический изгиб —

$$g \operatorname{ctg} \beta \alpha_n + k \operatorname{cth} \beta \alpha_n - \operatorname{cth} \beta \alpha_n = 0, \quad (34)$$

антисимметрический изгиб —

$$g \operatorname{tg} \beta \alpha_n - k \operatorname{th} \beta \alpha_n - \operatorname{tg} \beta \alpha_n = 0, \quad (35)$$

где

$$g = \frac{\rho_3 (\rho_2^2 - \rho_3^2) (\rho_1^2 - \Omega^2)}{\rho_1 (\rho_1^2 + \rho_2^2) (\rho_3^2 + \Omega^2)}$$

и

$$k = \frac{\rho_3 (\rho_2^2 - \rho_3^2) (\rho_2^2 + \Omega^2)}{\rho_2 (\rho_1^2 + \rho_3^2) (\rho_3^2 - \Omega^2)}$$

Значения критических длин α_* (δ , Ω), определенные из условий (22) — (35) для первых пяти симметрических и антисимметрических видов колебаний, приведены соответственно при разных значениях относительной толщины стены δ в таблицах 2—5.

Выводы

Для упрощения расчета свободных колебаний цилиндрических оболочек в настоящей работе, как сказано выше, пренебрегаются силы инерции вращения и деформаций сдвига. На основании [2] и [3] это можно в каком-то пределе считать допусаемым. По графику для оболочки $\delta = 1/30$ и $\nu = 0,30$, представленному в [2], результаты упрощенного расчета можно считать практически совпадающими с результатами точного расчета при условии, чтобы

$$\delta < 0,1\lambda, \quad (36)$$

где

λR — длина полуволны.

Из (36) получим ориентировочным условием для использования результаты упрощенного расчета соотношение

$$\alpha_n > 5nd, \quad (37)$$

где n — число полуволн на цилиндре .

Условию (37) удовлетворяют оболочки со следующими частотами колебаний:

оболочки со свободным опиранием краев —

$$\Omega < 1,1 \text{ при } \delta = 0,05$$

и

$$\Omega < 1,7 \text{ при } \delta = 0,02,$$

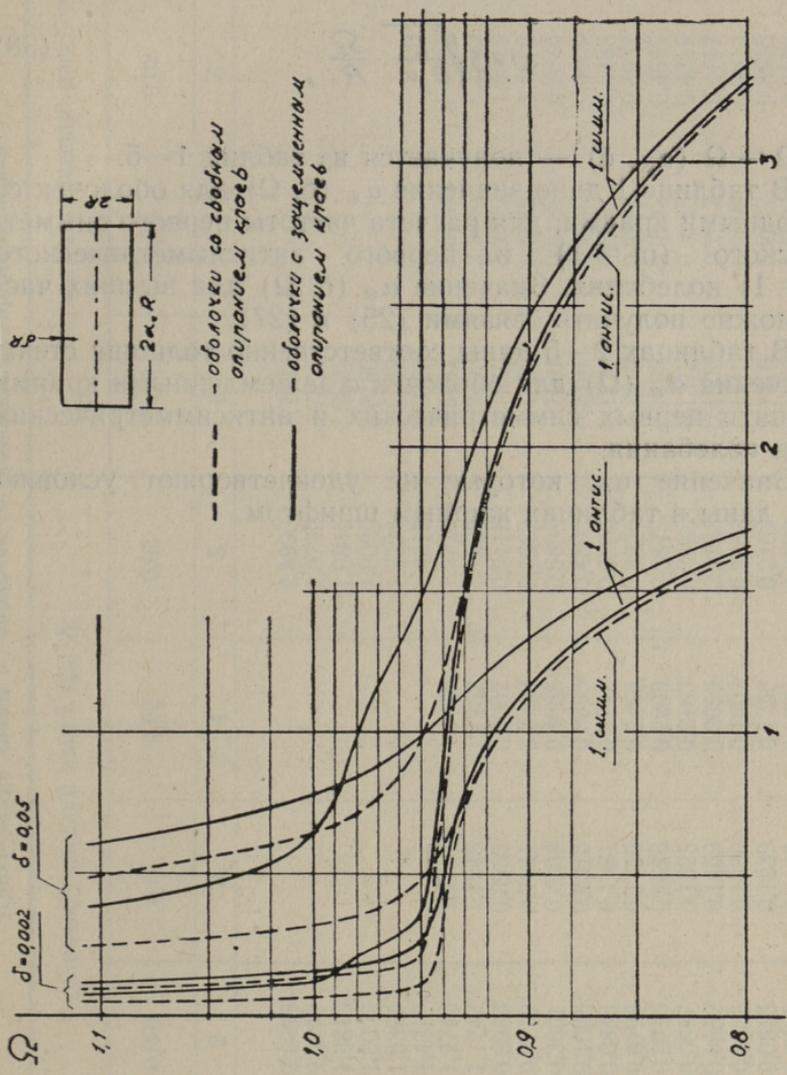
оболочки с защемленным опиранием краев —

$$\Omega < 1,02 \text{ при } \delta = 0,05$$

и

$$\Omega < 1,4 \text{ при } \delta = 0,02.$$

Последующее упрощение расчета с пренебрежением коэффициента Пуассона, как проведено в [1], может привести к значительным расхождениям с результатами точного расчета. Особенно значительное расхождение наблюдается при более длинных оболочках, где $\Omega < 0,9$, причем Ω быстро уменьшается с удлинением оболочки (фиг. 1); (формулы же, полученные с предположением $\nu = 0$, дают всегда $\Omega \geq 1$.) Учет коэффициента Пуассона придает, кроме длины оболочки, существенное значение также толщине стены; это особенно ярко проявляется у оболочек с защемленными краями (фиг. 1). При этом сами условия закрепления концов также имеют более значительное влияние на вид и частоту свободных колебаний, как это показывают результаты, полученные в [1]. Расчеты показали, что вид колебания наименьшей частоты не всегда симметрический. Так, при более длинных оболочках с защемленными краями вид колебания наименьшей частоты — антисимметрический; при этом с увеличением длины частота приближается к частоте первого симметрического колебания оболочки со свободными краями. При уменьшении длины оболочки с защемленными краями при некоторых длинах частоты соответствующих симметрических и антисимметрических видов колебаний совпадают, и только при очень коротких оболочках вид колебания наименьшей частоты симметрический (фиг. 1).



Фиг. 1

Т а б л и ц ы

Частоты свободных осесимметрических колебаний тонкостенных кругоцилиндрических оболочек соответственно соотношению (1) с $\nu = 1/3$ определяются формулой

$$\omega = 3 \sqrt{\frac{E}{8\mu}} \cdot \frac{\Omega}{R}, \quad (38)$$

где $\Omega = \Omega(\alpha_*, \delta)$ — получается из таблиц 1—5.

В таблице 1 дано значение $\alpha_*(\delta, \Omega)$ для оболочек со свободными краями, для расчета частоты первого симметрического ($m = 1$) и первого антисимметрического ($m = 1$) колебания. Значение $\alpha_*(\delta, \Omega)$ для высших частот можно получить связями (25) и (27).

В таблицах 2—5 даны соответственно толщине стены δ значения $\alpha_*(\Omega)$ для оболочек с защемленными краями для пяти первых симметрических и антисимметрических видов колебания.

Значение α_* , которые не удовлетворяют условию (37), даны в таблицах жирным шрифтом.

Критические длины α оболочек со свободным опиранием краев

Ω	Симметрический изгиб при δ :					Антисимметрический изгиб при δ :				
	0,002	0,01	0,02	0,05	0,002	0,01	0,02	0,05		
	2	3	4	5	6	7	8	9		
0,5	2,8996			2,8996	5,7991				5,7991	
0,6	2,3799			2,3799	4,7598				4,7598	
0,7	1,9846			1,9846	3,9691				3,9691	
0,75	1,8090			1,8090	3,6180				3,6180	
0,80	1,6326			1,6326	3,2652				3,2652	
0,85	1,4310			1,4315	2,8620				2,8630	
0,88	1,2716		1,2718	1,2729	2,5432				2,5458	
0,90	1,1247		1,1252	1,1288	2,2493				2,2576	
0,92	0,8980		0,9007	0,9118	1,7960				1,8235	
0,93	0,7119		0,7208	0,7562	1,4237				1,5124	
0,94	0,3601		0,4094	0,5895	0,7201				0,9376	
0,95	0,1096		0,3305	0,4802	0,2191				0,6609	
0,96	0,0886		0,2742	0,4205	0,1771				0,5483	
0,97	0,0790		0,2469	0,3835	0,1579				0,4937	
0,98	0,0730		0,2290	0,3579	0,1459				0,4579	
0,99	0,0687		0,2160	0,3386	0,1373				0,4319	
1	0,0652		0,2059	0,3233	0,1304				0,4117	
1,02	0,0605		0,1907	0,3003	0,1210				0,3814	
1,05	0,0555		0,1753	0,2763	0,1111				0,3505	
1,1	0,0502		0,1584	0,2500	0,1003				0,3168	
1,2	0,0438		0,1381	0,2187	0,0876				0,2762	

Таблица 2

Критические длины α_* оболочек с заземленным опиранием краев при $\delta = 0,002$

Ω	1 с.		1 а.		2 с.		2 а.		3 с.		3 а.		4 с.		4 а.		5 с.		5 а.	
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11										
0,5	5,81	2,91	11,61	8,70	17,41	14,50	23,21	20,30	29,01	26,10										
0,6	4,77	2,39	9,53	7,15	14,29	11,91	19,05	16,67	23,81	21,43										
0,7	3,97	1,99	7,94	5,96	11,91	9,93	15,88	13,90	19,85	17,87										
0,75	3,63	1,82	7,25	5,44	10,87	9,06	14,48	12,68	18,10	16,29										
0,80	3,28	1,65	6,55	4,91	9,81	8,18	13,08	11,44	16,34	14,71										
0,85	2,88	1,45	5,74	4,31	8,60	7,17	11,47	10,03	14,33	12,90										
0,88	2,57	1,30	5,12	3,84	7,66	6,39	10,20	8,93	12,74	11,74										
0,90	2,29	1,16	4,54	3,41	6,79	5,66	9,04	7,91	11,29	10,16										
0,92	1,85	0,95	3,65	2,75	5,44	4,55	7,24	6,34	9,03	8,14										
0,93	1,50	0,78	2,92	2,21	4,35	3,63	5,77	5,06	7,19	6,48										
0,94	0,85	0,49	1,57	1,21	2,29	1,93	3,01	2,65	3,73	3,37										
0,95	0,36	0,26	0,58	0,48	0,80	0,70	1,03	0,92	1,25	1,14										
0,96	0,29	0,22	0,47	0,39	0,65	0,57	0,83	0,75	1,01	0,92										
0,97	0,25	0,20	0,42	0,35	0,58	0,51	0,74	0,67	0,90	0,83										
0,98	0,21	0,18	0,38	0,33	0,53	0,47	0,68	0,62	0,83	0,76										
0,99	0,16	0,17	0,32	0,31	0,48	0,44	0,62	0,58	0,76	0,72										
1	0,13	0,16	0,26	0,29	0,39	0,42	0,52	0,55	0,65	0,68										
1,02	0,11	0,15	0,22	0,27	0,34	0,39	0,46	0,51	0,58	0,63										
1,05	0,09	0,14	0,20	0,25	0,31	0,36	0,42	0,47	0,53	0,58										
1,1	0,08	0,12	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48	0,53										

Таблица 3

Критические длины α_* оболочек с защемленным опиранием краев при $\delta = 0,01$

Ω	1 с.		1 а.		2 с.		2 а.		3 с.		3 а.		4 с.		4 а.		5 с.		5 а.	
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11										
0,88	2,61	1,34	5,15	3,88	7,69	6,42	10,24	8,97	12,78	11,51										
0,90	2,33	1,21	4,58	3,46	6,83	5,71	9,08	7,96	11,33	10,21										
0,92	1,92	1,02	3,72	2,82	5,51	4,62	7,31	6,41	9,11	8,21										
0,93	1,59	0,88	3,02	2,31	4,45	3,74	5,87	5,17	7,30	6,59										
0,94	1,10	0,69	1,92	1,51	2,74	2,33	3,56	3,15	4,38	3,97										
0,95	0,76	0,55	1,25	1,01	1,72	1,48	2,19	1,96	2,67	2,43										
0,96	0,63	0,48	1,05	0,86	1,44	1,24	1,83	1,63	2,20	2,03										
0,97	0,55	0,43	0,93	0,78	1,28	1,12	1,64	1,47	1,99	1,82										
0,98	0,46	0,40	0,84	0,72	1,18	1,04	1,51	1,36	1,84	1,69										
0,99	0,35	0,38	0,71	0,68	1,05	0,98	1,41	1,28	1,70	1,58										
1	0,29	0,36	0,58	0,65	0,88	0,94	1,17	1,23	1,46	1,52										
1,02	0,24	0,34	0,50	0,60	0,76	0,87	1,03	1,14	1,29	1,41										
1,05	0,21	0,31	0,45	0,56	0,69	0,80	0,93	1,05	1,18	1,29										
1,1	0,18	0,28	0,41	0,51	0,63	0,74	0,86	0,97	1,09	1,21										

Таблица 4

Критические длины α_* оболочек с заземленным опиранием краев при $\delta = 0,02$

Ω	1 с.		2 с.		3 с.		4 с.		5 с.	
	1 а.	2	1 а.	4	3 с.	7	8	9	10	11
0,88	1,36	2,66	5,20	3,91	7,74	6,45	10,29	8,99	12,83	11,54
0,90	1,25	2,37	4,62	3,50	6,87	5,75	9,12	8,00	11,37	10,25
0,92	1,08	1,98	3,78	2,87	5,58	4,67	7,38	6,47	9,19	8,27
0,93	1,00	1,72	3,16	2,44	4,60	3,88	6,04	5,32	7,49	6,76
0,94	0,83	1,30	2,24	1,77	3,18	2,71	4,11	3,65	5,05	4,58
0,95	0,72	1,02	1,68	1,35	2,35	2,01	3,01	2,68	3,67	3,34
0,96	0,87	0,87	1,43	1,17	1,99	1,72	2,54	2,26	3,09	2,81
0,97	0,76	0,76	1,29	1,07	1,79	1,56	2,29	2,05	2,78	2,54
0,98	0,64	0,64	1,17	1,01	1,65	1,46	2,12	1,90	2,58	2,36
0,99	0,49	0,49	1,00	0,95	1,49	1,37	1,95	1,80	2,40	2,22
1	0,41	0,41	0,82	0,91	1,24	1,31	1,65	1,71	2,06	2,11
1,02	0,34	0,34	0,71	0,85	1,08	1,23	1,45	1,59	1,83	1,96
1,05	0,29	0,29	0,63	0,78	0,98	1,13	1,32	1,47	1,67	1,79
1,1	0,26	0,26	0,56	0,71	0,88	1,02	1,19	1,34	1,51	1,62

Критические длины α_* оболочек с заземленным опоранием краев при $\delta = 0,05$

Ω	1 с.	1 а.	2 с.	2 а.	3 с.	3 а.	4 с.	4 а.	5 с.	5 а.
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,5	5,83	2,93	11,63	8,73	17,43	14,53	23,23	20,33	29,03	26,13
0,6	4,79	2,41	9,55	7,17	14,31	11,93	19,07	16,69	23,83	21,45
0,7	4,02	1,87	7,99	6,00	11,96	9,97	15,93	13,94	19,90	17,91
0,75	3,68	1,87	7,30	5,49	10,92	9,11	14,53	12,73	18,15	16,34
0,8	3,34	1,71	6,61	4,97	9,87	8,24	13,14	11,50	16,40	14,77
0,85	2,97	1,54	5,83	4,40	8,70	7,26	11,56	10,13	14,42	12,99
0,88	2,69	1,42	5,24	3,97	7,78	6,51	10,33	9,06	12,88	11,60
0,90	2,45	1,32	4,71	3,58	6,97	5,84	9,22	8,10	11,48	10,35
0,92	2,11	1,21	3,93	3,03	5,76	4,85	7,58	6,68	9,40	8,50
0,93	1,89	1,13	3,40	2,65	4,91	4,16	6,43	5,67	7,94	7,19
0,94	1,65	1,06	2,83	2,24	4,01	3,42	5,19	4,60	6,37	5,78
0,95	1,45	0,97	2,41	1,93	3,37	2,89	4,33	3,85	5,30	4,81
0,96	1,29	0,94	2,15	1,74	2,99	2,57	3,83	3,41	4,67	4,25
0,97	1,15	0,89	1,96	1,61	2,73	2,36	3,50	3,12	4,27	3,89
0,98	0,97	0,84	1,79	1,50	2,53	2,20	3,25	2,91	3,97	3,62
0,99	0,76	0,81	1,54	1,44	2,29	2,08	2,98	2,73	3,69	3,39
1	0,65	0,78	1,29	1,39	1,94	1,99	2,59	2,58	3,23	3,18
1,02	0,54	0,74	1,11	1,31	1,69	1,84	2,27	2,30	2,85	2,74
1,05	0,46	0,68	0,99	1,20	1,52	1,69	2,06	2,01	2,62	2,40
1,1	0,40	0,61	0,88	1,11	1,37	1,53	1,85	1,75	2,35	2,14

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Бреславский. О колебаниях цилиндрических оболочек. Инж. сб. Том XVI АН СССР, 1953.
2. T. C. Lin and G. W. Morgan. A Study of Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells as Affected by Rotatory Inertia and Transverse Shear. Journal of Applied Mechanics 1956, Vol. 23, N 2.
3. G. Herrmann, I. Mirsky. Three-Dimensional and Shell-Theory Analysis of Axially Symmetric Motions of Cylinders. Journal of Applied Mechanics 1956, Voll 23, N 4.

МАЛЫЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТОНКИХ КОНИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Л. Ю. ПОВЕРУС

Р. К. РЯЯМЕТ

В настоящей работе рассматривается решение задачи о малых неосесимметричных собственных колебаниях упругих тонких конических и в частном случае цилиндрических оболочек. Вопросу собственных колебаний конических оболочек посвящено до сих пор небольшое число работ, хотя исследованием собственных колебаний цилиндрических оболочек занимались сравнительно много авторов.

М. Стретт [1], определяя частоты собственных колебаний конического громкоговорителя, рассматривал его как усеченную коническую оболочку, опертую на внешнем крае на абсолютно жесткую диафрагму и свободную на внутреннем контуре. При решении задачи энергетическим методом учитывались силы инерции во всех направлениях; при этом принималось условие нерастяжимости срединной поверхности оболочки. Последнее условие для рассматриваемой оболочки не отвечает действительности и ведет, как показали экспериментальные исследования А. Урк'а и Г. Хут'а [2], к значительным погрешностям расчета.

В. Е. Бреславский [3], решая задачу энергетическим методом, определил частоты собственных колебаний для конической оболочки с учетом растяжения ее срединной поверхности.

Э. И. Григолюк [5] рассматривал решение задачи о малых собственных колебаниях тонких конических упругих оболочек любого подъема с опертыми краями. Частными случаями он получил решения для замкнутой кони-

ческой и цилиндрической оболочек. Задача решалась энергетическим методом с учетом силы инерции во всех направлениях и растяжимости срединной поверхности оболочки. Выражения для перемещений срединной поверхности оболочки предлагались следующими:

$$\begin{aligned} w &= A_1 r^2 \sin \frac{m\pi(s-s_1)}{l} \sin n\varphi \\ v &= A_2 r^2 \sin \frac{m\pi(s-s_1)}{l} \cos n\varphi \\ u &= A_3 r^2 \cos \frac{m\pi(s-s_1)}{l} \sin n\varphi \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — функция времени, r — радиус параллельного круга оболочки, s — расстояние от вершины оболочки по образующей, $s_2 - s_1 = l$ — длина оболочки по образующей, m — число осевых полуволн, n — число волн по образующей окружности.

1. Сведение упрощенной системы дифференциальных уравнений колебания оболочки к одному уравнению

Эта упрощенная система, состоящая из трех уравнений равновесия и трех уравнений совместности деформации, получена из общей системы дифференциальных уравнений оболочек в соответствии с положениями полубезмоментной теории — предполагается, что при общей неосесимметричной деформации оболочки число полуwave в направлении образующей окружности значительно превышает число полуwave в направлении меридиана оболочки и следовательно напряженное состояние изменяется значительно быстрее в направлении окружности, чем в направлении меридиана. Обоснование упрощений подробно изложено в работах [6] и [7]. В качестве грузовых членов в уравнениях равновесия приняты инерционные силы в направлении нормали и касательной к образующей окружности срединной поверхности оболочки. Неучет инерционной силы составляющей в направлении меридиана ведет к погрешностям, не превышающим общей погрешности вычислительного метода при изложенных упрощениях расчета. Исходя из энергетических соображений и имея в виду, что определяется наименьшая частота собственных колебаний для оболочки средней приведенной длины, оказывается уместным предположение, что напря-

женное состояние оболочки будет соответствовать невыродившемуся краевому эффекту.

После изложенных преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений колебания конической оболочки:

$$(BS_\alpha)' + AS' = 0 \quad (1.1)$$

$$AS\dot{\beta} + (BS)' + B'S - k_\beta AG\dot{\beta} - AB\left(\frac{r\delta}{g} \frac{\partial}{\partial t^2} v_\beta\right) = 0 \quad (1.2)$$

$$k_\beta S_\beta + \frac{1}{R_2} G\ddot{\beta} - \frac{r\delta}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = 0 \quad (1.3)$$

$$(Bx_\beta)' - A\tau' = 0 \quad (1.4)$$

$$Ax_\alpha - (B\tau)' - B'\tau - k_\beta A\varepsilon_\alpha' = 0 \quad (1.5)$$

$$k_\beta x_\alpha + \frac{1}{R_2} \varepsilon_\alpha'' = 0 \quad (1.6)$$

Здесь $[\dots]' = \frac{\partial}{\partial \alpha} [\dots]$, $[\dots]^\cdot = \frac{\partial}{\partial \beta} [\dots]$,

α , β — внутренние координаты оболочки в направлении меридиана и параллельного круга, A , B — параметры Ляме в направлении соответственно α и β , $K_\beta = \frac{1}{R_2}$ вторая главная кривизны оболочки, S_α , S_β , S — тангенциальные усилия и $G\beta$ — изгибающий момент, возникающие при деформации оболочки, ε_α — относительное удлинение срединной поверхности оболочки в направлении α , x_α , x_β — изменения главных кривизн срединной поверхности оболочки, τ — кручение срединной поверхности оболочки, v_β , w — составляющие перемещения в направлении β и нормали оболочки, γ — объемный вес материала оболочки, g — гравитационное ускорение, δ — толщина оболочки, t — время.

Уравнения (1.1) и (1.4) тождественно удовлетворяются, если допустить следующие соотношения:

$$Bx_{\beta} = \psi'; \quad A\tau = \psi', \quad BS_{\alpha} = \varphi'; \quad AS = -\varphi' \quad (1.7)$$

где ψ — угол поворота срединной поверхности оболочки в направлении β , φ — функция напряжения.

Остальные уравнения (1.2), (1.3) и (1.5), (1.6) можно преобразовать в следующие два уравнения:

$$-\frac{A}{\kappa_{\beta} B^2} G_{\beta}'''' + \frac{A}{\kappa_{\beta}} \left(\frac{r\delta}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w \right)' + (BS)' + B'S - \kappa_{\beta} A G_{\beta}' - AB \left(\frac{r\delta}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{\beta} \right) = 0 \quad (1.8)$$

$$-\frac{A}{\kappa_{\beta} B^2} \varepsilon_{\alpha}'''' - (B\tau)' - B'\tau - \kappa_{\beta} A \varepsilon_{\alpha}' = 0 \quad (1.9)$$

Применим далее следующие упрощенные соотношения упругости:

$$G_{\beta} = -Dx_{\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha} = \frac{1}{E\delta} S_{\alpha} \quad (1.10)$$

где

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$$

E — модуль упругости

ν — коэффициент Пуассона

С помощью соотношений (1.7), (1.10) система (1.8), (1.9) приобретает вид:

$$\frac{AD}{\kappa_{\beta} B^3} \psi'''' + \frac{\kappa_{\beta} AD}{B} \psi'' - \left(\frac{B}{A} \varphi' \right)' - \frac{B'}{A} \varphi' + A \frac{r\delta}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\kappa_{\beta}} w' - Bv \right) = 0 \quad (1.11)$$

$$-\frac{A}{E\delta \kappa_{\beta} B^3} \varphi'''' - \left(\frac{B}{A} \psi' \right)' - \frac{B'}{A} \psi' - \frac{\kappa_{\beta}}{E\delta} \frac{A}{B} \varphi'' = 0 \quad (1.12)$$

Между элементами деформации и составляющими перемещения получаются следующие соотношения:

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{1}{B} v' - \kappa_{\beta} w, \quad \psi = \frac{1}{B} w' + \kappa_{\beta} v \quad (1.13)$$

Решения системы (1.11), (1.12) отыскиваем в виде

$$\begin{aligned} v(\alpha, \beta) &= \bar{v}(\alpha) \sin n\beta \sin \omega t, & w(\alpha, \beta) &= \bar{w}(\alpha) \cos n\beta \sin \omega t \\ \varphi(\alpha, \beta) &= \bar{\varphi}(\alpha) \sin n\beta \sin \omega t, & \psi(\alpha, \beta) &= \bar{\psi}(\alpha) \sin n\beta \sin \omega t, \\ \varepsilon_{\beta}(\alpha, \beta) &= \bar{\varepsilon}_{\beta}(\alpha) \cos n\beta \sin \omega t \end{aligned} \quad (1.14)$$

Используя соотношения (1.13) и (1.14), можем писать:

$$\bar{w} = \frac{B}{n^2 - \kappa_\beta^2 B^2} (\kappa_\beta B \bar{\varepsilon}_\beta - n \bar{\psi}), \quad \bar{v} = \frac{B}{n^2 - \kappa_\beta^2 B^2} (n \bar{\varepsilon}_\beta - \kappa_\beta B \bar{\psi})$$

и

$$\frac{1}{\kappa_\beta} w' - Bv = \sin n\beta \frac{B}{(n^2 - \kappa_\beta^2 B^2) \kappa_\beta} [(n^2 + \kappa_\beta^2 B^2) \bar{\psi} - 2n \kappa_\beta B \bar{\varepsilon}_\beta] \quad (1.15)$$

С точностью, присущей полубезмоментной теории, получаем:

$$\frac{1}{\kappa_\beta} w' - Bv \approx \sin n\beta \frac{n^2 + \kappa_\beta^2 B^2}{n^2 - \kappa_\beta^2 B^2} \frac{B}{\kappa_\beta} \bar{\psi} \quad (1.16)$$

Применяя решения (1.14) и соотношение (1.16), представим систему уравнений (1.11), (1.12) в следующем виде:

$$\frac{AD}{\kappa_\beta B^3} n^2 (n^2 - \kappa_\beta^2 B^2) \bar{\psi} - \frac{1}{AB} (B^2 \bar{\psi}')' - \frac{n^2 + \kappa_\beta^2 B^2}{n^2 - \kappa_\beta^2 B^2} \frac{AB}{\kappa_\beta} \frac{r\delta}{g} \omega^2 \bar{\psi} = 0 \quad (1.17)$$

$$\bar{\psi} = \frac{E\delta \kappa_\beta B^2}{A^2 n^2 (B^2 \kappa_\beta^2 - n^2)} (B^2 \bar{\psi}')' \quad (1.18)$$

Из системы (1.17), (1.18) получим уравнение относительно ψ

$$\frac{E\delta \kappa_\beta B}{A^3 n^2 (n^2 - \kappa_\beta^2 B^2)} \left\{ B^2 [B (B^2 \bar{\psi}')']' \right\}' + \frac{AD}{\kappa_\beta B^2} n^2 (n^2 - \kappa_\beta^2 B^2) \bar{\psi} - \frac{AB^2}{\kappa_\beta} \frac{r\delta}{g} \frac{n^2 + \kappa_\beta^2 B^2}{n^2 - \kappa_\beta^2 B^2} \bar{\psi} \omega^2 = 0 \quad (1.19)$$

Если оболочка опирается на краях на тонкие диафрагмы (такой способ опирания можно называть шарнирным), то решение уравнения (1.19) должно удовлетворять краевым условиям

$$\bar{\psi} = 0, \quad S_\alpha = 0,$$

или в преобразованном виде

$$\bar{\psi} = 0, \quad (B^2 \bar{\psi}')' = 0 \quad (1.20)$$

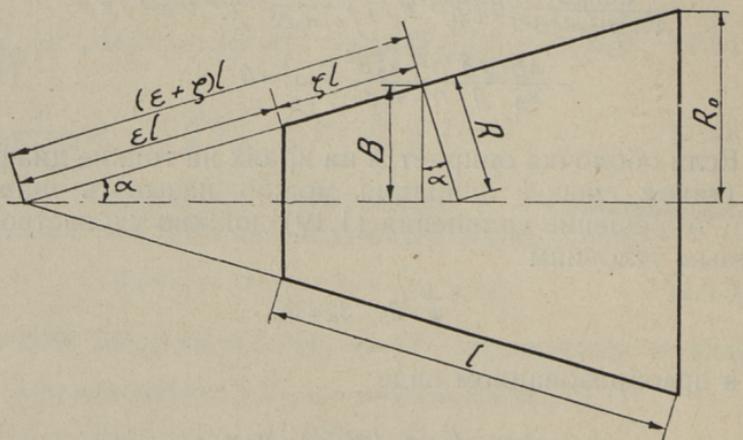
При опирании же краев оболочки на толстостенную диафрагму (способ опирания называем жестко заделанным), имеем следующие краевые условия:

$$\bar{\psi} = 0, \bar{\psi}' = 0 \quad (1.21)$$

2. Свободные колебания конической оболочки

Рассмотрим определение собственных частот для усеченного конуса и в частном случае для замкнутой конической оболочки. Форма усеченного конуса определяется тремя величинами, которым могут быть R_0 — радиус большого основания, l — длина образующей и α — угол между осью конуса и образующей.

Длину образующей l можно выражать через R_0 , α , и ϵ , где ϵ отношение радиуса малого основания к разности радиусов оснований усеченного конуса. Форма замкнутой конической оболочки определяется через R_0 и α ($\epsilon = 0$). Вводим в направлении образующей безразмерную координату ξ , начало которой будем отсчитывать от малого основания конуса. Схема оболочки с соответствующими геометрическими величинами представлена на фиг. 1.



Фиг. 1.

Интегрируя уравнение (1.19) методом Галеркина с учетом краевых условий (1.20) или (1.21) и вводя обозначения

$$\frac{1}{k_{\beta}} = R, \quad R = (\varepsilon + \varphi) \operatorname{tg} \alpha, \quad B = R \cos \alpha = (\varepsilon + \varphi) l \sin \alpha, \\ k_{\beta} B = \cos \alpha, \quad A = l \quad (2.1)$$

получаем следующую вариационную формулу для определения собственных частот конической оболочки:

$$\omega^2 = \min \frac{A_1 \int_0^1 (\varepsilon + \varphi) \{ [(\varepsilon + \varphi)^2 \bar{\psi}'] \}^2 d\varphi + A_2 \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \varphi} \bar{\psi}^2 d\varphi}{\int_0^1 (\varepsilon + \varphi)^3 \bar{\psi}^2 d\varphi} \cdot \frac{Eg}{r l^2}, \quad (2.2)$$

где

$$A_1 = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{n^2 (n^2 + \cos^2 \alpha)}, \quad (2.3)$$

$$A_2 = \frac{(1 + \varepsilon)^2}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{\delta}{R_0} \right)^2 \frac{n^2 (n^2 - \cos^2 \alpha)^2}{\sin^2 \alpha (n^2 + \cos^2 \alpha)}. \quad (2.4)$$

В дальнейшем обозначим

$$\omega^2 = \omega_*^2 \frac{Eg}{r l^2} \quad (2.5)$$

Рассматривая примеры определения собственных частот конкретных типов оболочек, при аппроксимировании функции угла поворота срединной поверхности оболочки ψ применим два варианта.

Первый вариант

1. Предположим, что края оболочки прикреплены к тонкостенным диафрагмам. Для определения собственных частот будем исходить из выражения (2.2). Аппроксимирующую функцию ψ отыскиваем одночленной и в следующем виде:

$$\bar{\psi} = a(\varepsilon + \varphi)^k \sin m \pi \varphi \quad (2.6)$$

После подстановки решения (2.6) в выражение (2.2) и интегрирования получим для определения параметра

наинизших собственных частот конической оболочки следующую формулу:

$$\omega_{*}^2 = \min \frac{A_1 \kappa_1 + A_2 \kappa_7}{\kappa_4} \quad (2.7)$$

где A_1 и A_2 определяются формулами (2.3) и (2.4), коэффициенты же κ_1 , κ_4 , и κ_7 получаются в результате интегрирования в зависимости от значения параметра k . Формула (2.7) применяется в дальнейшем и при других способах опираний оболочки.

При заданном значении p отыскиваем те значения m и $k = 0, 1, 2$, которые дают наинизшую высоту собственных колебаний.

Представляем формулы для вычисления коэффициентов κ_1 , κ_4 и κ_7 в зависимости от значения параметра k .

а) при $k = 0$ аппроксимирующая функция для ψ будет:

$$\bar{\psi} = a \sin m \pi \xi \quad (2.8)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} m^4 \pi^4 C_5 + 3 \frac{1}{2} m^2 \pi^2 C_3 + \frac{3}{4} C_1 \quad (2.9)$$

$$\kappa_4 = \frac{1}{2} C_3 - \frac{3}{4} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.10)$$

$$\kappa_7 = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \xi} \sin^2 m \pi \xi d\xi \quad (2.11)$$

Здесь

$$C_1 = \varepsilon + \frac{1}{2} \quad (2.12)$$

$$C_3 = \varepsilon^3 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{4} \quad (2.13)$$

$$C_5 = \varepsilon^5 + 2 \frac{1}{2} \varepsilon^4 + 3 \frac{1}{3} \varepsilon^3 + 2 \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{8} \quad (2.14)$$

$$C_7 = \varepsilon^7 + 3 \frac{1}{2} \varepsilon^6 + 7 \varepsilon^5 + 8 \frac{3}{4} \varepsilon^4 + 7 \varepsilon^3 + 3 \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{8} \quad (2.15)$$

в) При $k = 1$ получим:

$$\bar{\psi} = a(\varepsilon + \xi) \sin m\pi \xi \quad (2.16)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} m^4 \pi^4 C_7 + 12 \frac{3}{4} m^2 \pi^2 C_5 + 2 \frac{1}{4} C_3 - 3 \frac{3}{8} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.17)$$

$$\kappa_4 = \frac{1}{2} C_5 - 2 \frac{1}{2} C_3 / m^2 \pi^2 + 3 \frac{3}{4} C_1 / m^4 \pi^4 \quad (2.18)$$

$$\kappa_7 = \frac{1}{2} C_1 \quad (2.19)$$

2. Если края оболочки прикреплены к толстостенным диафрагмам, аппроксимируем ψ в форме

$$\bar{\psi} = a(\varepsilon + \xi)^k (1 - \cos m\pi \xi) \quad (2.20)$$

а) При $k = 0$ получим:

$$\bar{\psi} = a(1 - \cos 2m\pi \xi) \quad (2.21)$$

$$\kappa_1 = 8m^4 \pi^4 C_5 + 2m^2 \pi^2 C_3 - \frac{3}{4} C_1 \quad (2.22)$$

$$\kappa_4 = 1 \frac{1}{2} C_3 - 2 \frac{13}{16} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.23)$$

$$\kappa_7 = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \xi} (1 - \cos 2m\pi \xi)^2 d\xi \quad (2.24)$$

б) При $k = 1$ получим:

$$\bar{\psi} = a(\varepsilon + \xi)(1 - \cos 2m\pi \xi) \quad (2.25)$$

$$\kappa_1 = 8m^4 \pi^4 C_7 - 3m^2 \pi^2 C_5 + 21 \frac{3}{4} C_3 - 35 \frac{5}{32} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.26)$$

$$\kappa_4 = 1 \frac{1}{2} C_5 - 9 \frac{3}{8} C_3 / m^2 \pi^2 + 14 \frac{49}{64} C_1 / m^4 \pi^4 \quad (2.27)$$

$$\kappa_7 = 1 \frac{1}{2} C_1 \quad (2.28)$$

3. Если малое основание оболочки прикреплено к тонкостенной, а большое основание к толстостенной диафрагме, то для определения собственных частот отыскиваем решения для ψ в виде

$$\bar{\psi} = a(\varepsilon + \zeta)^{\kappa} \left(\sin \frac{1}{2} m \pi \zeta + \sin \frac{3}{2} m \pi \zeta \right) \quad (2.29)$$

а) При $\kappa = 0$ аппроксимирующая функция для ψ будет:

$$\bar{\psi} = a \left(\sin \frac{1}{2} m \pi \zeta + \sin \frac{3}{2} m \pi \zeta \right) \quad (2.30)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\kappa_1 = 2 \frac{9}{16} m^4 \pi^4 C_5 + 8 \frac{3}{16} m^2 \pi^2 C_3 - \frac{9}{32} C_1 - 10 \frac{1}{2} m^2 \pi^2 C_4^* + 84 C_2^* - 169 \frac{1}{3} / m^2 \pi^2 \quad (2.31)$$

$$\kappa_4 = C_3 - 1 \frac{1}{2} C_1 / m^2 \pi^2 - 2 \frac{2}{3} C_2^* / m^2 \pi^2 + 5 \frac{25}{27} / m^4 \pi^4 \quad (2.32)$$

$$\kappa_7 = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \zeta} \left(\sin \frac{1}{2} m \pi \zeta + \sin \frac{3}{2} m \pi \zeta \right)^2 d\zeta \quad (2.33)$$

$$C_2^* = \varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} \quad (2.34)$$

$$C_4^* = \varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \frac{1}{2} \quad (2.35)$$

$$C_6^* = \varepsilon^6 + 3\varepsilon^5 + 7 \frac{1}{2} \varepsilon^4 + 10\varepsilon^3 + 7 \frac{1}{2} \varepsilon^2 + 3\varepsilon + \frac{1}{2} \quad (2.36)$$

б) При $\kappa = 1$ получим:

$$\bar{\psi} = a(\varepsilon + \zeta) \left(\sin m \pi \zeta + \sin \frac{3}{2} m \pi \zeta \right) \quad (2.37)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\kappa_1 = 2 \frac{9}{16} m^4 \pi^4 C_7 + 27 \frac{3}{32} m^2 \pi^2 C_5 - 3 \frac{15}{32} C_3 + 5 \frac{13}{64} C_1 / m^2 \pi^2 - 19 \frac{1}{2} m^2 \pi^2 C_8^* + 330 C_4^* - 3972 C_2^* / m^2 \pi^2 + 7946 \frac{2}{3} / m^4 \pi^4 \quad (2.38)$$

$$\kappa_4 = C_5 - 5 C_3 / m^2 \pi^2 + 7 \frac{1}{2} C_1 / m^4 \pi^4 - 4 \frac{4}{9} C_4^* / m^2 \pi^2 + 59 \frac{7}{27} C_2^* / m^4 \pi^4 - 119 \frac{203}{243} / m^6 \pi^6 \quad (2.39)$$

$$\kappa_7 = C_1 - \frac{8}{9} / m^2 \pi^2 \quad (2.40)$$

с) При $k = 2$ получим:

$$\bar{\psi} = a(\varepsilon + \zeta)^2 (\sin \frac{1}{2} m \pi \zeta + \sin \frac{3}{2} m \pi \zeta) \quad (2.41)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 = & 2 \frac{9}{16} m^4 \pi^4 C_9 + 55 \frac{7}{8} m^2 \pi^2 C_7 - 10 \frac{11}{16} C_5 + 53 \frac{7}{16} C_3 / m^2 \pi^2 - \\ & - 80 \frac{5}{32} C_1 / m^4 \pi^4 - 28 \frac{1}{2} m^2 \pi^2 C_8^* + 840 C_6^* - 25240 C_4^* / m^2 \pi^2 + \\ & + 302933 \frac{1}{3} C_2^* / m^4 \pi^4 - 605878 \frac{14}{27} / m^6 \pi^6 \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \kappa_4 = & C_7 - 10 \frac{1}{2} C_5 / m^2 \pi^2 + 52 \frac{1}{2} C_3 / m^4 \pi^4 - 78 \frac{3}{4} C_1 / m^6 \pi^6 - \\ & - 6 \frac{2}{9} C_6^* / m^2 \pi^2 + 207 \frac{11}{27} C_4^* / m^4 \pi^4 - 2516 \frac{44}{81} C_2^* / m^6 \pi^6 + \\ & + 5039 \frac{169}{729} / m^8 \pi^8 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\kappa_7 = C_3 - \frac{1}{2} C_1 / m^2 \pi^2 - 2 \frac{2}{3} C_2^* / m^2 \pi^2 + 5 \frac{25}{27} / m^4 \pi^4 \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} C_9 = & \varepsilon^9 + 4 \frac{1}{2} \varepsilon^8 + 12 \varepsilon^7 + 21 \varepsilon^6 + 25 \frac{1}{5} \varepsilon^5 + 21 \varepsilon^4 + 12 \varepsilon^3 + \\ & + 4 \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{10} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$C_8^* = \varepsilon^8 + 4 \varepsilon^7 + 14 \varepsilon^6 + 28 \varepsilon^5 + 35 \varepsilon^4 + 28 \varepsilon^3 + 14 \varepsilon^2 + 4 \varepsilon + \frac{1}{2} \quad (2.46)$$

Второй вариант

Этот вариант применим для расчета оболочки, края которой прикреплены к тонкостенным диафрагмам. Для определения параметра собственных частот будем исходить из соотношения (2.2). Аппроксимирующую функцию ψ отыскиваем двучленной в виде

$$\bar{\psi} = a_1(\varepsilon + \zeta)^k \sin m \pi \zeta + a_2(\varepsilon + \zeta)^k \sin 2 m \pi \zeta \quad (2.47)$$

После подстановки выражения (2.47) в формулу (2.2) и интегрирования получим для параметра наимиз-

шей частоты собственных колебаний конической оболочки следующую формулу:

$$\omega_*^2 = \min \frac{A_1 \int_0^1 (\varepsilon + \zeta) \left\{ [(\varepsilon + \zeta)^2 \bar{\psi}'] \right\}^2 d\zeta + A_2 \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \zeta} \bar{\psi}^2 d\zeta}{\int_0^1 (\varepsilon + \zeta)^3 \bar{\psi}^2 d\zeta} \quad (2.48)$$

Условие минимального для ω_*^2 приводит нас к уравнениям

$$\frac{\partial \omega_*^2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \omega_*^2}{\partial a_2} = 0 \quad (2.49)$$

Последние записываются одним биквадратным уравнением относительно ω_*^2 , решение которого будет:

$$\omega_{*1,2}^2 = \frac{D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - 4D_1 D_3}}{2D_1} \quad (2.50)$$

$$D_1 = \kappa_4 \kappa_6 - \kappa_5^2 \quad (2.51)$$

$$D_2 = A_1 (\kappa_1 \kappa_5 - 2\kappa_2 \kappa_5 + \kappa_3 \kappa_4) + A_2 (\kappa_6 \kappa_7 - 2\kappa_5 \kappa_8 + \kappa_4 \kappa_9) \quad (2.52)$$

$$D_3 = A_1^2 (\kappa_1 \kappa_3 - \kappa_2^2) + A_1 A_2 (\kappa_1 \kappa_9 - 2\kappa_2 \kappa_8 + \kappa_3 \kappa_7) + A_2^2 (\kappa_7 \kappa_9 - \kappa_8^2) \quad (2.53)$$

В выражениях для D_1 , D_2 и D_3 коэффициенты A_1 и A_2 определяются формулами (2.3) и (2.4). Коэффициенты $\kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_9$ даются при двух значениях параметра κ ($\kappa = 0$ и $\kappa = 1$) в виде нижеприведенных соотношений.

а) При $\kappa = 0$ получим для аппроксимирующей функции:

$$\bar{\psi} = a_1 \sin m\pi \zeta + a_2 \sin 2m\pi \zeta \quad (2.54)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} m^4 \pi^4 C_5 + 3 \frac{1}{2} m^2 \pi^2 C_3 + \frac{3}{4} C_1 \quad (2.55)$$

$$\kappa_2 = -25 \frac{7}{9} m^2 \pi^2 C_4^* + 263 \frac{19}{27} C_2^* - 527 \frac{227}{243} / m^2 \pi^2 \quad (2.56)$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots)$$

$$\kappa_2 = 51 \frac{5}{9} m^2 \pi^2 C_3 - 263 \frac{19}{27} C_1 \quad (m = 2, 4, 6, \dots) \quad (2.57)$$

$$\kappa_3 = 8m^4 \pi^4 C_5 + 14m^2 \pi^2 C_3 + \frac{3}{4} C_1 \quad (2.58)$$

$$\kappa_4 = \frac{1}{2} C_3 - \frac{3}{4} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.59)$$

$$\kappa_5 = -2 \frac{2}{3} C_2^* / m^2 \pi^2 + 5 \frac{25}{27} / m^4 \pi^4 \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.60)$$

$$\kappa_5 = 2 \frac{2}{3} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (m = 2, 4, 6, \dots) \quad (2.61)$$

$$\kappa_6 = \frac{1}{2} C_3 - \frac{3}{16} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.62)$$

$$\kappa_7 = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \zeta} \sin^2 m \pi \zeta d\zeta \quad (2.63)$$

$$\kappa_8 = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \zeta} \sin m \pi \zeta \sin 2m \pi \zeta d\zeta \quad (2.64)$$

$$\kappa_9 = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \zeta} \sin^2 2m \pi \zeta d\zeta \quad (2.65)$$

б) При $k = 1$ получим:

$$\bar{\psi} = \sigma_1(\varepsilon + \zeta) \sin m \pi \zeta + \sigma_2(\varepsilon + \zeta) \sin 2m \pi \zeta \quad (2.66)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} m^4 \pi^4 C_7 + 12 \frac{3}{4} m^2 \pi^2 C_5 + 2 \frac{1}{4} C_3 - 3 \frac{3}{8} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.67)$$

$$\kappa_2 = -40 \frac{9}{9} m^2 \pi^2 C_6^* + 962 \frac{26}{27} C_4^* - 11555 \frac{77}{81} C_2^* / m^2 \pi^2 + 2311 \frac{721}{729} / m^4 \pi^4 \quad (2.68)$$

$(m = 1, 3, 5, \dots)$

$$\kappa_2 = 122 \frac{2}{3} m^2 \pi^2 C_5 - 1925 \frac{25}{27} C_3 + 11555 \frac{77}{81} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.69)$$

$(m = 2, 4, 6, \dots)$

$$\kappa_3 = 8m^4 \pi^4 C_7 + 51m^2 \pi^2 C_5 + 2 \frac{1}{4} C_3 - \frac{27}{32} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.70)$$

$$\kappa_4 = \frac{1}{2} C_5 - 2 \frac{1}{2} C_3 / m^2 \pi^2 + 3 \frac{3}{4} C_1 / m^4 \pi^4 \quad (2.71)$$

$$\kappa_5 = -4 \frac{4}{9} C_4^* / m^2 \pi^2 + 59 \frac{7}{27} C_2^* / m^4 \pi^4 - 119 \frac{203}{243} / m^6 \pi^6 \quad (2.72)$$

($m = 1, 3, 5, \dots$)

$$\kappa_5 = 8 \frac{8}{9} C_3 / m^2 \pi^2 - 59 \frac{7}{27} C_1 / m^4 \pi^4 \quad (m = 2, 4, 6, \dots) \quad (2.73)$$

$$\kappa_6 = \frac{1}{2} C_5 - \frac{5}{8} C_3 / m^2 \pi^2 + \frac{15}{64} C_1 / m^4 \pi^4 \quad (2.74)$$

$$\kappa_7 = \frac{1}{2} C_1 \quad (2.75)$$

$$\kappa_8 = -\frac{8}{9} / m^2 \pi^2 \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.76)$$

$$\kappa_9 = 0 \quad (m = 2, 4, 6, \dots) \quad (2.77)$$

$$\kappa_9 = \frac{1}{2} C_1 \quad (2.78)$$

3. Свободные колебания цилиндрической оболочки

При определении собственных частот для цилиндрической оболочки будем исходить из уравнения (1.11), причем вводим следующие обозначения: ξ — безразмерная переменная в направлении меридиана, R — радиус цилиндра, L — длина оболочки, δ — толщина оболочки, $A = 1$, $B = R$, $\kappa_\beta = \frac{1}{R}$. Частоты собственных колебаний при разных способах закрепления краев оболочки найдем, решая уравнение (1.11) методом Галеркина; ниже приведены результаты вычислений.

а) Если края оболочки закреплены шарнирно, то решение для ψ имеем в форме

$$\bar{\psi} = a \sin \frac{m\pi R}{L} \xi \quad (3.1)$$

Обозначая аналогично, как при конической оболочке,

$$\omega^2 = \omega_*^2 \frac{Eg}{\gamma R^2} \quad (3.2)$$

получим

$$\omega_*^2 = \left(\frac{m\pi R}{L}\right)^4 \frac{1}{n^2(n^2+1)} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \frac{n^4(n^2-1)^2}{(n^2+1)} \quad (3.3)$$

б) Если края оболочки прикреплены к толстостенным диафрагмам, аппроксимируем ψ в виде

$$\bar{\psi} = a \left(1 - \cos \frac{2m\pi R}{L} \xi\right) \quad (3.4)$$

и

$$\omega_*^2 = \frac{16}{3} \left(\frac{m\pi R}{L}\right)^4 \frac{1}{n^2(n^2+1)} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \frac{n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)} \quad (3.5)$$

Точному решению соответствует

$$\omega_*^2 = 5,139 \left(\frac{\pi R}{L}\right)^4 \frac{1}{n^2(n^2+1)} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} \quad (3.6)$$

с) Если один край цилиндра прикреплен к тонкостенной, а другой к толстостенной диафрагме, то, отыскав решение в виде

$$\bar{\psi} = a \left(\sin \frac{m\pi R}{2L} \xi + \sin \frac{3m\pi R}{2L} \xi \right), \quad (3.7)$$

получим для параметра собственных частот:

$$\omega_*^2 = \frac{41}{16} \left(\frac{m\pi R}{L}\right)^4 \frac{1}{n^2(n^2+1)} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \frac{n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)} \quad (3.8)$$

В приведенных формулах, как и раньше, m — число полуволн в направлении меридиана, n — число волн в направлении параллельного круга.

4. Числовые примеры

1) Для оценки влияния составляющей инерционной силы в направлении касательной к образующей окружности на частоты собственных колебаний, произведен расчет свободно опертой цилиндрической оболочки при различных значениях ее относительной толщины и длины, с учетом и без учета составляющей инерционной силы в упомянутом направлении. Из результатов вычислений сле-

дует, что у оболочек при сравнительно большой относительной длине и толщине неучет инерционной силы в направлении окружности существенно повышает значения ω_* . Некоторые данные расчета приведены в таблице 1.

Повышение ω_*

Таблица 1

L/R \ δ/R	2	4	8
$\frac{1}{30}$	7,2%	14%	27%
$\frac{1}{200}$	2,8%	5,1%	9%

2) Далее определим параметры собственных частот ω_* для усеченной конической оболочки при помощи первого варианта решения тремя способами опирания краев и при помощи второго варианта решения, но только для шарнирного опирания краев оболочки. Вычисления проведены при следующих данных: относительные толщины 1) $\delta/R_0 = 0,03$, 2) $\delta/R_0 = 0,003$, $\alpha = 15^\circ$, $\varepsilon = 1/2$, число круговых волн $n = 2-10$, число меридиальных полуволн $m = 1$ и $m = 2$. Результаты вычислений представлены в таблицах 2, 3, 4, 5 и в фиг. 2, 3, 4, 5. В этих таблицах и фигурах приведены также значения ω_* , которые вычислены по формуле цилиндра с радиусом равным среднему радиусу кривизны данной конической оболочки и при той же толщине. Э. И. Григолюк [5] рекомендует такой метод приближенного определения наименьших собственных частот при углах $\alpha \leq 15^\circ$. В нашем примере при $\alpha = 15^\circ$ этот приближенный метод дает расхождение для наименьшей частоты примерно на $\sim 6\%$. Из результатов вычислений следует также, что второй вариант решения точнее чем первый, если $m = 1$, но не вносит существенного исправления при $m = 2$.

3) В таблицах 6 и 7 в фиг. 6, 7 приведены результаты вычислений параметра собственных частот первого и второго вариантов решения при шарнирном опирании краев оболочки. Данные для оболочек: 1) $\delta/R_0 = 0,03$, 2) $\delta/R_0 = 0,003$; $\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$; $\varepsilon = 1/2$, $m = 1$,

$n = 2-10$. В таблице дано под обозначением а) значение ω_* , определенное при параметре $k = 0$, б) ω_* при $k = 1$. На основе приведенных примеров можно сказать, что наименьшие частоты собственных колебаний, а также и частоты при больших значениях n уменьшаются с увеличением угла α . При значении $n = 2$ наибольшее значение ω_* получается при $\alpha \approx 45^\circ$.

4) В таблице 8 и в фиг. 8 представлены результаты вычислений ω_* первого варианта решения при шарнирном и жестком закреплениях краев оболочки и при нескольких различных значениях α . Данные для оболочек: $\delta/R_0 = 0,01$, $\alpha = 15^\circ$, $\varepsilon = 1/2$, $m = 1$, $n = 2-8$. Из данных таблицы следует, что жесткое закрепление существенно повышает наименьшие собственные частоты и частоты, которые возникают при малом числе окружных волн.

5) В таблице 9 и в фиг. 9 приведены результаты вычислений ω_* замкнутой конической оболочки ($\varepsilon = 0$) при двух вариантах решения и при значениях параметра $k = 0$ и $k = 1$. Остальные данные: $\delta/R_0 = 0,001$, $\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$, $n = 2-8$. Из приведенных результатов следует, что второй вариант решения для замкнутой конической оболочки более точен, чем первый вариант и с увеличением α наименьшие собственные частоты уменьшаются.

6) Приведем сравнение результатов вычислений настоящей работы с некоторыми численными примерами работ Э. И. Григолюка [5] и В. Е. Бреславского [3]. Например, рассматривая цилиндрическую оболочку, данные для которой — $R = 13,75$ см, $L = 59,44$ см, $\delta = 0,1$ см, $E = 1,93 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu = 0,3$, $\gamma = 0,00785$ кг/см³, $g = 981$ см/сек², получим для собственных частот: 1) $\omega = 1596$ кол/2 π сек — теоретическое и $\omega = 1791$ кол/2 π сек — экспериментальное значение по работе В. Е. Бреславского [3]; 2) $\omega = 1728$ кол/2 π сек — по работе Э. И. Григолюка [5]; 3) $\omega = 1616$ кол/2 π сек — по формуле (3.3).

Далее произведено сравнение собственных частот конической оболочки при втором варианте решения, данные которой — $\delta = 1,5$ см, $R_0 = 50$ см, $l = 128,8$ см ($\varepsilon = 0,5$), $E = 2,0 \cdot 10^6$ кг/см², $g = 981$ см/сек², $\gamma = 0,00785$ кг/см³ и получены следующие результаты: $\omega = 2423$ кол/2 π сек — по работе [5], $\omega = 1910$ кол/2 π сек (2.50, 2.54).

Рассматривая замкнутую коническую оболочку при $\delta/R_0 = 0,001$, получим для параметра ω_* наиминзший частоты следующие данные:

Т а б л и ц а 1а

α	15°	30°	45°	60°	75°
По работе Гри-голюка	0,548	0,479	0,408	0,337	0,236
Второй вариант решения	0,414	0,399	0,390	0,331	0,236

При сравнении данных таблицы следует, что параметры собственных частот получаются значительно низшими при сравнительно длинных оболочках, рассчитанных по полубезмоментной теории, так как основные положения этой теории реализуются хорошо при длинных оболочках и оболочках средней длины.

Следует еще отметить, что расчетные аглорифмы для определения собственных частот оболочки, полученные на основе полубезмоментной теории, требуют при проведении расчетов сравнительно меньше вычислительного труда.

Значения для ω_* при:

$$\alpha = 15^\circ, \quad \varepsilon = 1/2, \quad \delta/R_0 = 0,03, \quad m = 1, \quad \nu = 0,3$$

n	1 вариант						2 вариант				По формуле цилиндра		
	Шарнирное закрепл.		Смешанное закрепл.		Жесткое закрепл.		Шарнирное закрепл.		Шарн. закр.	Смешан. закр.	Жест-кое закр.		
	а)	б)	а)	б)	а)	б)	а)	б)					
2	0,898 0,868*)	1,376 1,317*)	1,248	1,557	1,958	1,735	2,082	0,616	0,736	0,628	0,990	1,421	
3	0,572 0,568*)	0,732 0,725*)	0,750	0,842	0,996	0,904	1,043	0,528	0,541	0,492	0,666	0,777	
4	0,786 0,784*)	0,762 0,759*)	0,965	0,909	0,906	0,889	0,898	0,738	0,762	0,783	0,810	0,856	
5	1,217 1,216*)	1,100 1,099*)	1,510	1,330	1,237	1,258	1,189	0,957	0,962	1,243	1,250	1,263	
6	1,773 1,772*)	1,583 1,582*)	2,146	1,917	1,758	1,801	1,678	1,320	1,274	1,818	1,820	1,825	
7	2,435	2,168	2,946	2,627	2,402	2,465	2,290	1,790	1,705	2,501	2,502	2,503	
8	3,200	2,848	3,872	3,451	3,154	3,232	3,004	2,344	2,225	3,289	3,290	3,290	

В таблице: а) решение ψ при $k = 0$, б) решение ψ при $k = 1, c$) решение ψ при $k = 2$.

*) Учтено также влияние составляющей инерционной силы в направлении меридиана.

Значения для ω_* при: $\alpha = 15^\circ$, $\varepsilon = 1/2$, $\delta/R_0 = 0,003$, $m = 1$, $\nu = 0,3$

n	1 вариант						2 вариант		По формуле цилиндра			
	Шарнирное закрепл.		Смешанное закрепл.		Жесткое закрепл.		Шарнирное закрепл.		Шарн. закр.	Смешан. закр.	Жесткое закр.	
	а)	б)	а)	б)	а)	б)	а)	б)				
2	0,887 0,857*)	1,370 1,311*)	1,236	1,550	1,953	1,729	2,078	0,594	0,720	0,618	0,980	1,414
3	0,418 0,416*)	0,645 0,638*)	0,583	0,729	0,918	0,813	0,977	0,283	0,341	0,291	0,464	0,668
4	0,253 0,252*)	0,376 0,374*)	0,346	0,429	0,532	0,473	0,565	0,182	0,211	0,183	0,277	0,391
5	0,196 0,196*)	0,262 0,262*)	0,260	0,300	0,361	0,314	0,380	0,173	0,181	0,164	0,212	0,277
6	0,207	0,229	0,262	0,268	0,295	0,276	0,303	0,207	0,207	0,196	0,218	0,251
7	0,256	0,249	0,315	0,297	0,297	0,291	0,295	0,242	0,249	0,256	0,265	0,281
8	0,326	0,300	0,396	0,361	0,343	0,345	0,333	0,273	0,286	0,332	0,336	0,343
9	0,410	0,370	0,498	0,447	0,414	0,422	0,398	0,319	0,319	0,420	0,422	0,426
10	0,505	0,452	0,612	0,548	0,504	0,515	0,481	0,381	0,371	0,519	0,520	0,522

В таблице: а) решение ψ при $k = 0$, б) решение ψ при $k = 1$, с) решение ψ при $k = 2$.

*) Учтено также влияние составляющей инерционной силы в направлении меридиана.

Таблица 4

Значения для ω_* при:

$$\alpha = 15^\circ, \quad \varepsilon = 1/2, \quad \delta/R_0 = 0,03, \quad m = 2, \quad \nu = 0,3$$

n	1 вариант				2 вариант		По формуле цилиндра	
	Шарнирное закрепл.		Жесткое закрепл.		Шарнирное закрепл.		Шарн. закр.	Жестк. закр.
	а)	б)	а)	б)	а)	б)		
2	2,941	3,545	6,458	7,018	2,761	2,994	2,453	5,657
3	1,432	1,693	3,057	3,311	1,351	1,442	1,222	2,696
4	1,076	1,120	1,888	1,984	1,037	1,012	1,013	1,714
5	1,280	1,127	1,628	1,551	1,274	1,107	1,311	1,587
6	1,756	1,446	1,893	1,636	1,770	1,439	1,841	1,944
7	2,378	1,924	2,438	2,020	2,361	1,882	2,510	2,552
8	3,115	2,508	3,145	2,569	3,054	2,267	3,293	3,312

В таблице: а) решение ψ при $k = 0$, б) $k = 1$.

Таблица 5

Значения для ω_* при:

$$\alpha = 15^\circ, \quad \varepsilon = 1/2, \quad \delta/R_0 = 0,003, \quad m = 2, \quad \nu = 0,3$$

n	1 вариант				2 вариант		По формуле цилиндра	
	Шарнирное закрепл.		Жесткое закрепл.		Шарнирное закрепл.		Шарн. закр.	Жестк. закр.
	а)	б)	а)	б)	а)	б)		
2	2,948	3,543	6,456	7,017	2,757	2,993	2,449	5,655
3	1,381	1,665	3,033	3,297	1,296	1,407	1,155	2,666
4	0,796	0,958	1,748	1,895	0,748	0,810	0,668	1,535
5	0,526	0,625	1,132	1,228	0,495	0,531	0,447	1,000
6	0,397	0,453	0,805	0,866	0,381	0,392	0,351	0,716
7	0,354	0,370	0,631	0,659	0,343	0,334	0,334	0,569
8	0,371	0,349	0,543	0,545	0,366	0,332	0,370	0,512
9	0,426	0,372	0,530	0,499	0,425	0,367	0,439	0,521
10	0,506	0,423	0,567	0,504	0,506	0,423	0,530	0,576

В таблице: а) решение ψ при $k = 0$, б) $k = 1$.

Таблица б
 Значения для ω_* при 1. варианте решения и шарниром закреплены оболочки $m = 1$; $\varepsilon = 1/2$

n	α°		15		30		45		60		75	
	δ/R_0		0,03	0,003	0,03	0,003	0,03	0,003	0,03	0,003	0,03	0,003
2	a)	0,898	0,887	1,565	1,565	1,857	1,856	1,654	1,654	0,978	0,978	0,976
	b)	1,376	1,370	2,420	2,419	2,870	2,869	2,557	2,557	1,510	1,510	1,509
3	a)	0,572	0,418	0,758	0,728	0,866	0,852	0,759	0,748	0,453	0,453	0,436
	b)	0,732	0,645	1,141	1,126	1,324	1,316	1,161	1,155	0,682	0,682	0,674
4	a)	0,786	0,251	0,574	0,419	0,563	0,486	0,486	0,424	0,328	0,328	0,247
	b)	0,762	0,376	0,733	0,645	0,791	0,750	0,687	0,654	0,426	0,426	0,380
5	a)	1,221	0,196	0,687	0,276	0,551	0,315	0,464	0,274	0,376	0,376	0,161
	b)	1,100	0,262	0,699	0,419	0,629	0,484	0,537	0,421	0,389	0,389	0,245
6	a)	1,772	0,207	0,942	0,209	0,694	0,227	0,576	0,196	0,504	0,504	0,120
	b)	1,583	0,229	0,871	0,301	0,676	0,341	0,565	0,296	0,469	0,469	0,174
7	a)	2,435	0,256	1,274	0,187	0,917	0,184	0,756	0,158	0,674	0,674	0,104
	b)	2,168	0,249	1,147	0,241	0,840	0,260	0,695	0,224	0,608	0,608	0,138
8	a)	3,200	0,326	1,667	0,197	1,189	0,170	0,978	0,144	0,877	0,877	0,107
	b)	2,848	0,300	1,489	0,221	1,069	0,217	0,880	0,186	0,784	0,784	0,123
9	a)	4,068	0,410	2,115	0,227	1,504	0,179	1,234	0,149	1,109	1,109	0,121
	b)	3,620	0,370	1,884	0,228	1,344	0,201	1,103	0,170	0,988	0,988	0,124
10	a)	5,039	0,505	2,617	0,270	1,858	0,202	1,523	0,167	1,368	1,368	0,142
	b)	4,483	0,452	2,329	0,225	1,656	0,205	1,358	0,171	1,218	1,218	0,136

В таблице: а) решение ψ при $k = 0$, б) решение ψ при $k = 1$,

Значения для ϕ_* при 2. варианте решения и шарниром закреплении оболочки $m = 1$; $\varepsilon = 1/2$

n	α°		15		30		45		60		75	
	δ/R_0		0,03	0,003	0,03	0,003	0,03	0,003	0,03	0,003	0,03	0,003
2	a)	0,616	0,594	1,052	1,048	1,245	1,243	1,110	1,108	0,657	0,654	
	b)	0,736	0,720	1,273	1,271	1,509	1,508	1,289	1,288	0,795	0,793	
3	a)	0,528	0,283	0,545	0,488	0,598	0,571	0,524	0,501	0,325	0,292	
	b)	0,541	0,341	0,634	0,592	0,712	0,692	0,624	0,607	0,378	0,354	
4	a)	0,738	0,182	0,530	0,283	0,463	0,326	0,396	0,285	0,299	0,166	
	b)	0,762	0,211	0,543	0,342	0,513	0,395	0,430	0,344	0,308	0,201	
5	a)	0,957	0,173	0,676	0,194	0,534	0,216	0,457	0,187	0,373	0,113	
	b)	0,962	0,181	0,685	0,229	0,545	0,258	0,458	0,224	0,376	0,133	
6	a)	1,320	0,207	0,800	0,165	0,656	0,164	0,550	0,141	0,436	0,0928	
	b)	1,274	0,207	0,830	0,182	0,676	0,190	0,568	0,164	0,454	0,1035	
7	a)	1,790	0,242	0,928	0,172	0,758	0,157	0,631	0,132	0,526	0,0938	
	b)	1,705	0,249	0,978	0,177	0,781	0,163	0,652	0,138	0,526	0,0974	
8	a)	2,344	0,273	1,244	0,196	0,914	0,158	0,755	0,132	0,657	0,1057	
	b)	2,225	0,283	1,201	0,196	0,905	0,162	0,751	0,136	0,637	0,1057	
9	a)	2,977	0,319	1,559	0,222	1,123	0,178	0,924	0,148	0,819	0,1195	
	b)	2,822	0,319	1,488	0,226	1,085	0,178	0,894	0,148	0,783	0,1208	
10	a)	3,686	0,381	1,920	0,320	1,371	0,198	1,125	0,165	1,005	0,1307	
	b)	3,170	0,371	1,825	0,252	1,311	0,201	1,076	0,167	0,956	0,1356	

В таблице: а) решение ϕ при $k = 0$, б) решение ϕ при $k = 1$,

Таблица 8

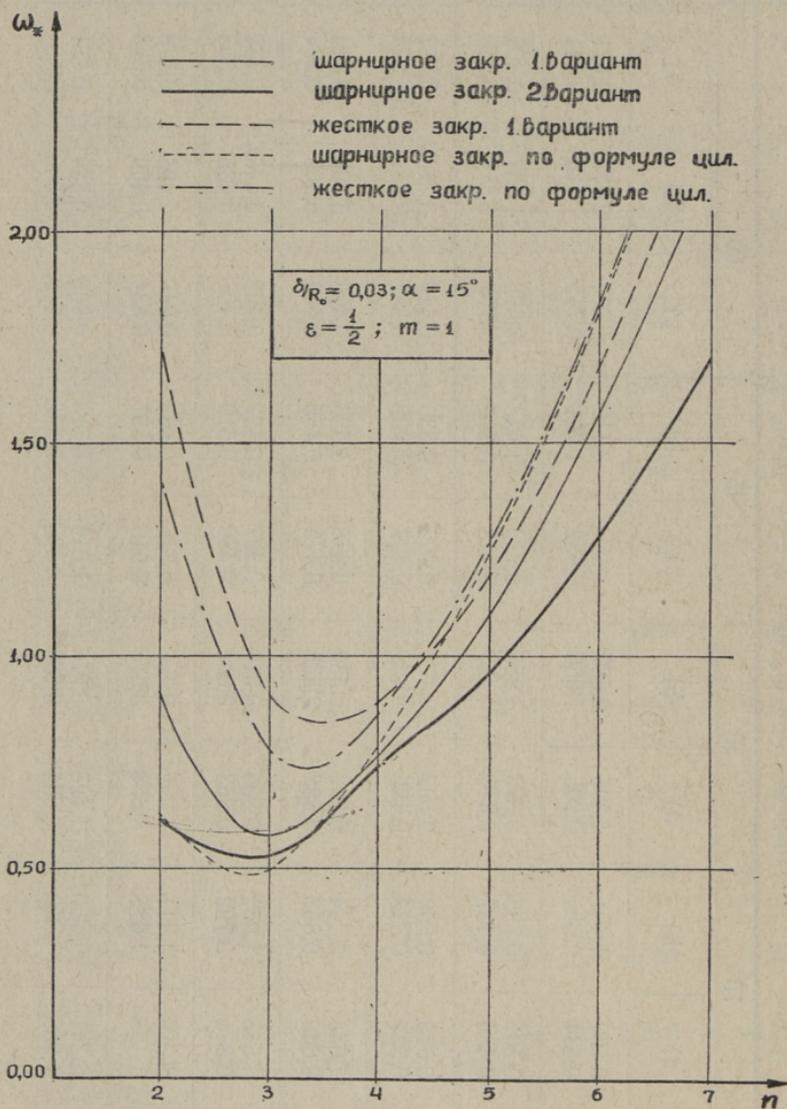
Значения для ω_* при: $m = 1$, $\varepsilon = 1/2$, $\delta/R_0 = 0,01$

n	α°	15	30	45	60	75
		Шарнир. закреп.	0,888	1,565	1,857	1,655
2	Жестк. закреп.	1,730	3,053	3,621	3,227	1,905
	Шарнир. закреп.	0,437	0,732	0,853	0,749	0,438
3	Жестк. закреп.	0,823	1,438	1,662	1,459	0,851
	Шарнир. закреп.	0,346	0,437	0,494	0,430	0,256
4	Жестк. закреп.	0,530	0,824	0,950	0,829	0,485
	Шарнир. закреп.	0,431	0,342	0,347	0,299	0,194
5	Жестк. закреп.	0,507	0,566	0,627	0,544	0,328
	Шарнир. закреп.	0,600	0,360	0,309	0,262	0,197
6	Жестк. закреп.	0,632	0,480	0,479	0,412	0,270
	Шарнир. закреп.	0,815	0,444	0,341	0,284	0,237
7	Жестк. закреп.	0,835	0,505	0,436	0,369	0,275
	Шарнир. закреп.	1,068	0,564	0,413	0,341	0,298
8	Жестк. закреп.	1,085	0,598	0,465	0,388	0,318

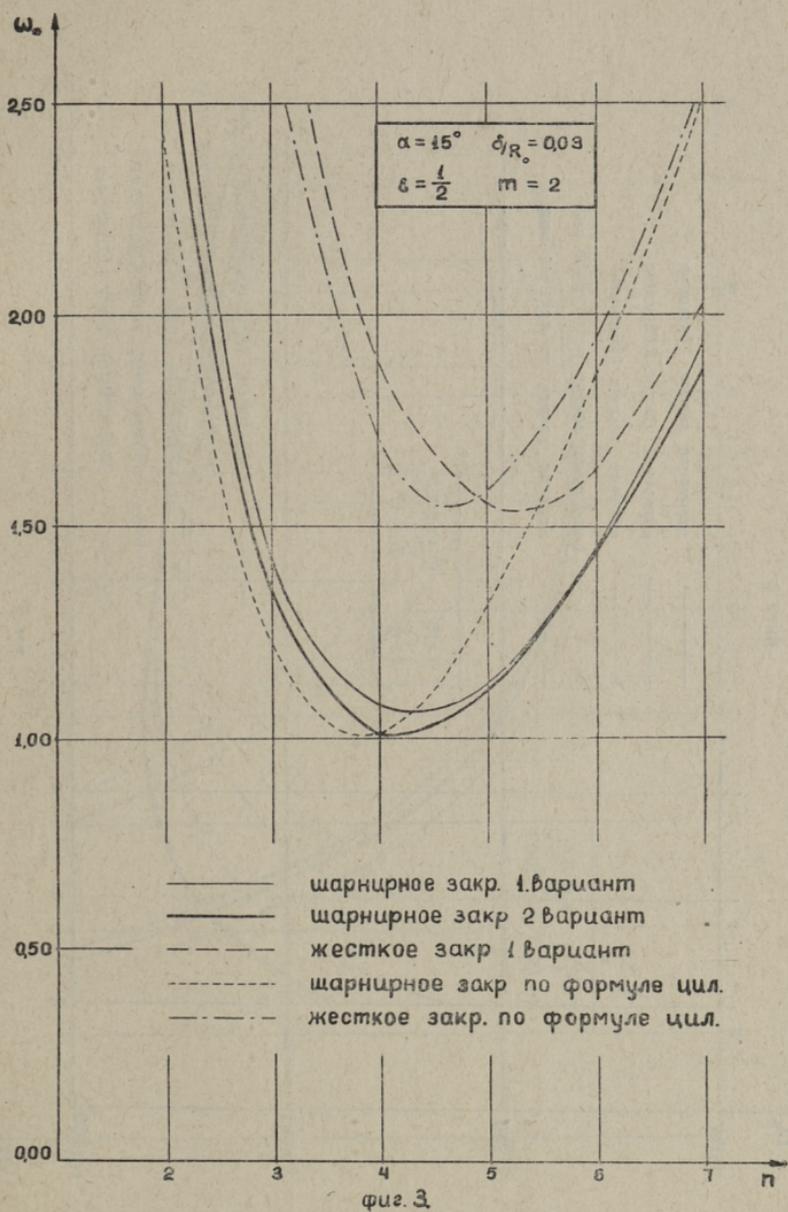
Значения для ω_* при: $\epsilon = 0$, $\delta/R_0 = 0,001$

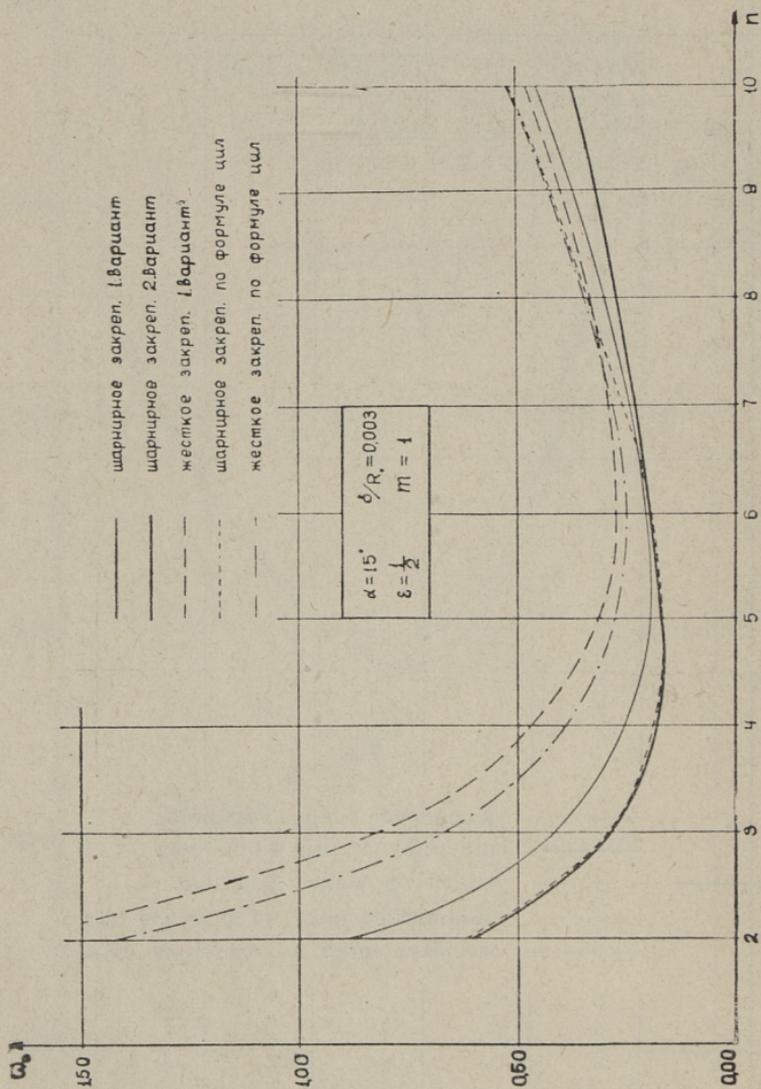
α°	15		30		45		60		75	
	а)	б)								
2	0,799	1,491	1,395	2,627	1,654	3,117	1,474	2,777	0,871	1,640
	0,434	0,609	0,705	1,056	0,832	1,251	0,742	1,115	0,441	0,659
3	0,501	0,735	0,673	1,228	0,770	1,433	0,675	1,257	0,402	0,735
	0,484	0,437	0,419	0,523	0,428	0,589	0,373	0,516	0,248	0,312
4	0,675	0,590	0,502	0,736	0,496	0,830	0,429	0,723	0,287	0,431
	0,537	0,583	0,485	0,439	0,409	0,409	0,347	0,351	0,274	0,248
5	1,043	0,744	0,592	0,580	0,478	0,586	0,403	0,505	0,324	0,329
	0,648	0,653	0,522	0,535	0,475	0,435	0,402	0,365	0,294	0,294
6	1,518	1,037	0,808	0,619	0,597	0,527	0,495	0,446	0,432	0,338
	0,875	0,792	0,553	0,604	0,480	0,519	0,406	0,435	0,303	0,333
7	2,085	1,411	1,092	0,767	0,786	0,586	0,648	0,488	0,578	0,409
	1,198	1,028	0,664	0,673	0,519	0,557	0,434	0,469	0,356	0,353
8	2,741	1,850	1,428	0,976	1,019	0,713	0,838	0,589	0,751	0,516
	1,568	1,330	0,834	0,750	0,616	0,596	0,510	0,500	0,458	0,401

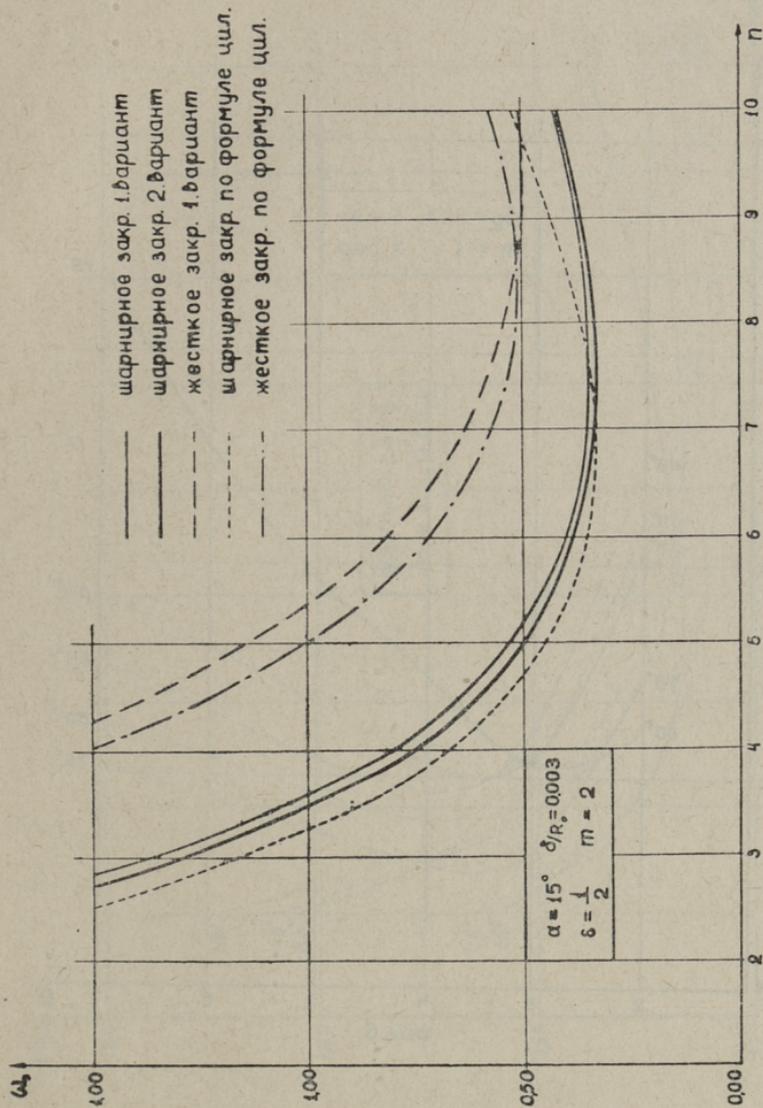
В таблице: а) решение ψ при $k = 0$, б) решение ψ при $k = 1$



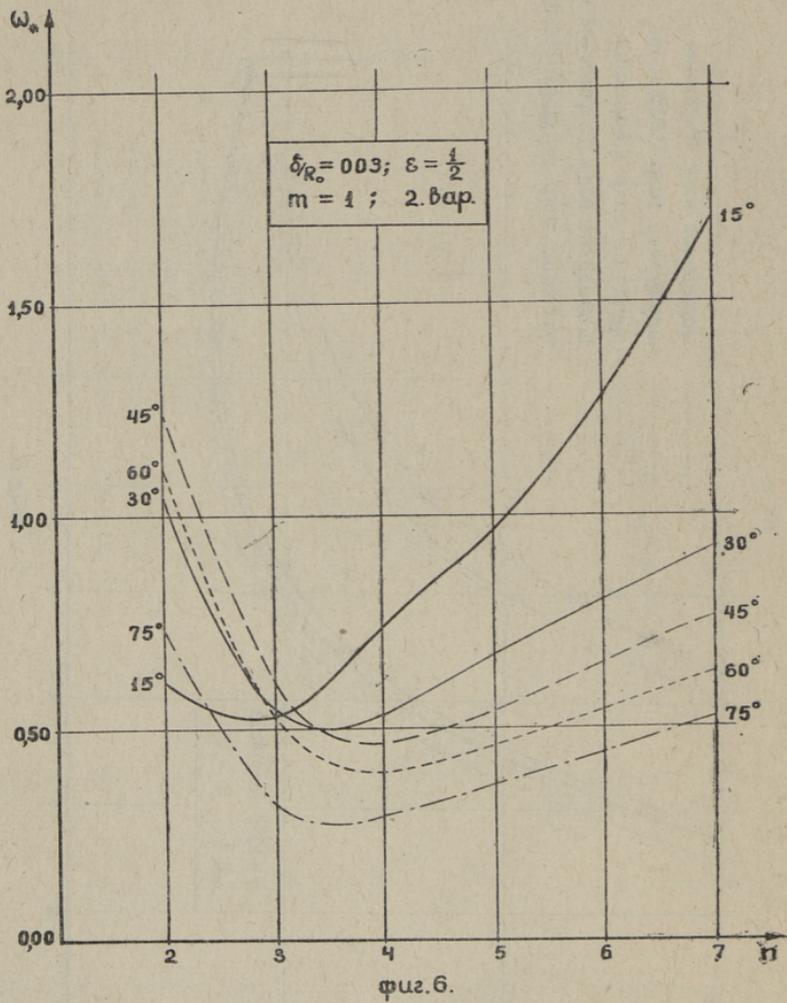
Фиг. 2.

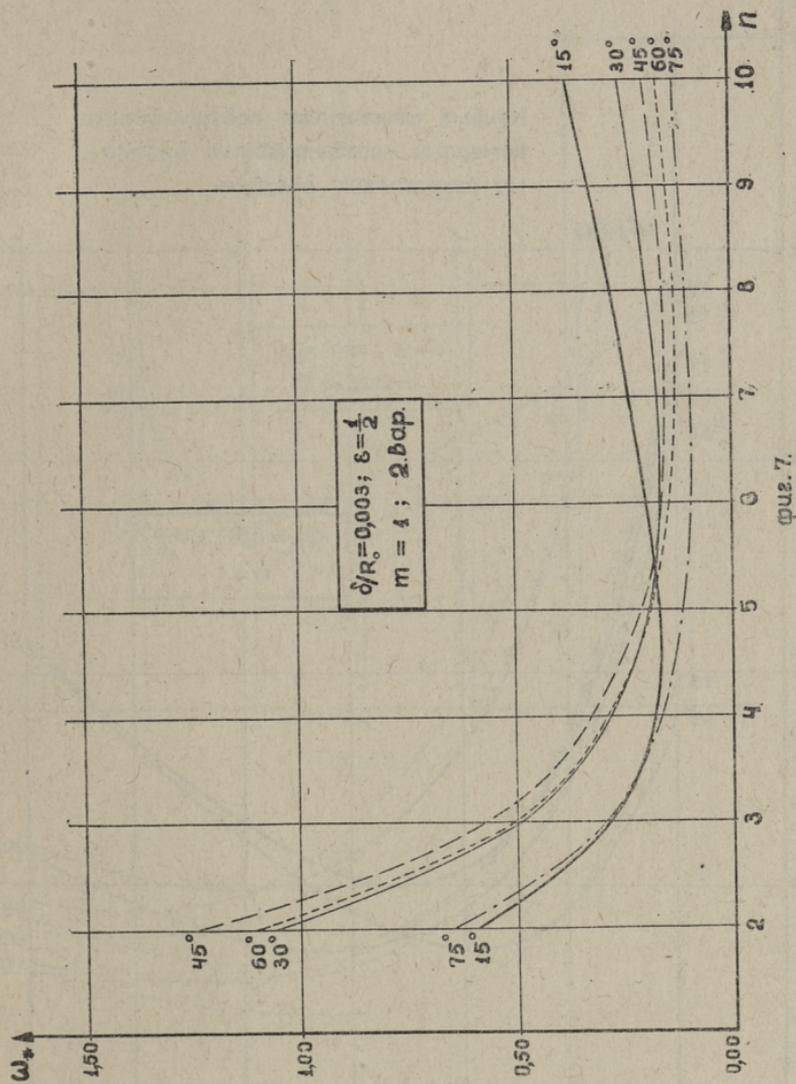


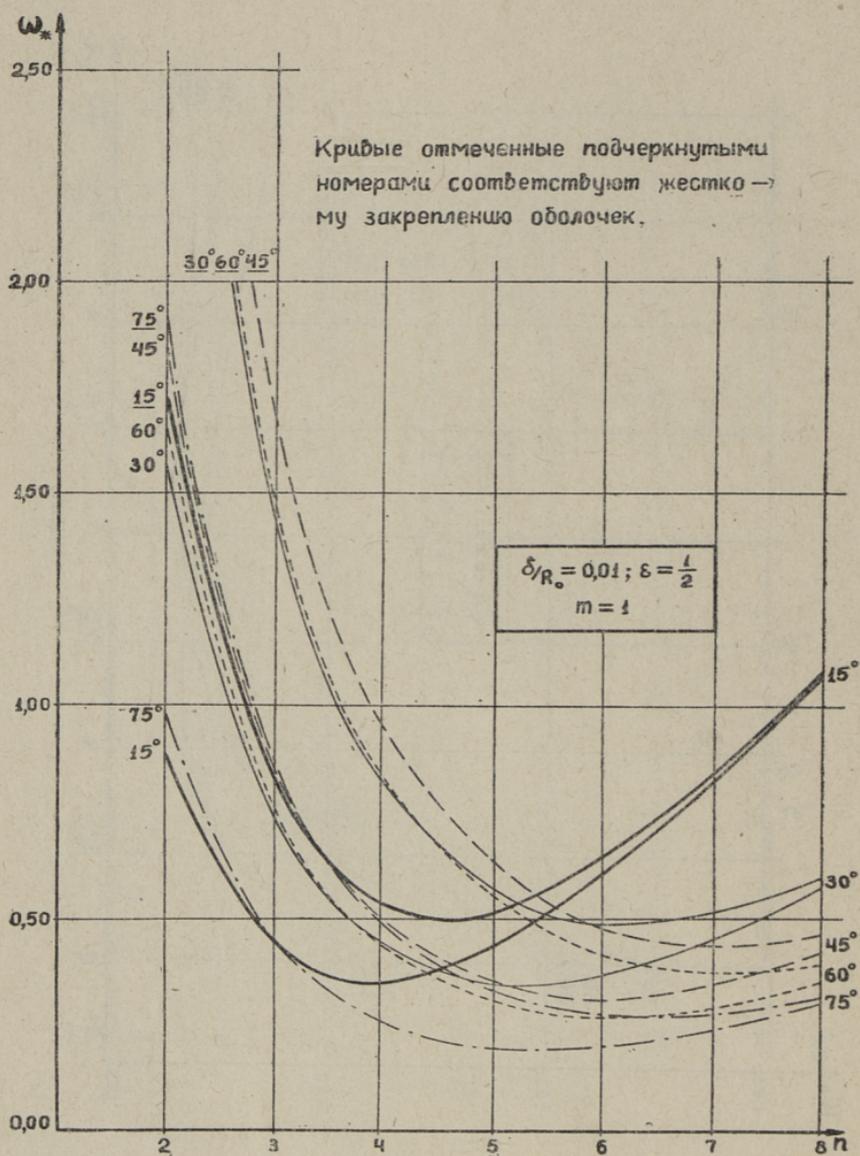




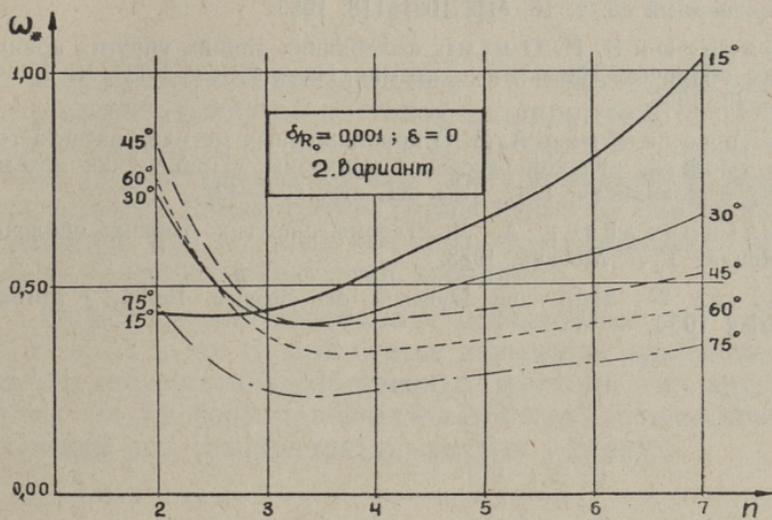
фиг. 5.







фиг. 8.



фиг. 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Strutt H. O. J. Eigenschwingungen einer Kegelschale. *Annalen der Physik*. 5 Folge. Bd. 17, Heft 7, S. 729—735, 1933.
 2. Urk A. Th. van, Hut G. B. Messung der Radialschwingungen von Aluminium Kegelschale. *Annalen der Physik*. 5 Folge. Bd. 17, Heft 8, S. 915—920, 1933.
 3. Бреславский В. Е. Некоторые основные случаи свободных колебаний конических оболочек. Труды Харьковского Высшего авиационно-инженерного военного училища. Вып. 27, стр. 107—123, 1954.
 4. Бреславский В. Е. О колебаниях цилиндрических оболочек. Инженерный сб. т. 16, стр. 109—118. 1953.
 5. Григолюк Э. И. О малых колебаниях тонких упругих конических оболочек. Известия Академии Наук СССР ОТН № 6, стр. 35—43, 1956.
 6. Гольденвейзер А. Л. О приближенных методах расчета тонких оболочек нулевой гауссовой кривизны. «Прикладная математика и механика», 1947, Том. XI, стр. 409—422.
 7. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Госиздат ТТЛ, Москва, 1953.
 8. Flügge W. *Statik und Dynamik der Schalen*. Berlin. J. Springer Verlag 1934.
-

ОБ ОБЩИХ ФОРМАХ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

У. К. НИГУЛ

Бесконечную совокупность форм собственных колебаний упругой замкнутой круговой цилиндрической оболочки можно разделить на две группы: а) частные формы колебания, при которых один или два компонента вектора перемещений тождественно равны нулю; б) общие формы колебания, при которых все компоненты вектора перемещений являются функциями координат.

Общие формы колебания исследованы в работах [1, 2, 4, 6] и др. В этой статье изучаются приближенные методы определения собственных функций и круговых частот общих форм колебания замкнутой цилиндрической оболочки при стационарных краевых условиях.

1. Общие уравнения

1. Исходные уравнения. Составим исходную систему уравнений равновесия без учета сил инерции вращения с точностью теории тонких оболочек Кирхгофа-Лява. После исключения поперечных сил получим систему трех уравнений, которую можно выразить в перемещениях

$$\begin{aligned}L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w - Hu &= 0, & \text{(I)} \\L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w - Hv &= 0, & \text{(II)} \\L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w - Hw &= 0, & \text{(III)}\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$H = \frac{(1-\nu^2)R^2D}{E\delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2}$$

и выражения L_{ij} имеют следующие значения [3]:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi}, \quad L_{13} = -L_{31} = \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \\ L_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]}{\partial \xi^2}, \\ L_{23} &= -L_{32} = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \right]}{\partial \xi^2}, \\ L_{33} &= - \left\{ 1 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ξ, φ — безразмерные координаты соответственно по длине и по поперечному кругу оболочки, R — радиус оболочки, ν — коэффициент Пуассона, ρ — приведенная масса, δ — толщина оболочки, E — модуль упругости;

$$a^2 = \frac{\delta^2}{12R^2} \ll 1. \quad (4)$$

В выражениях (3) и далее подчеркнуты члены, которые исчезают, если принять исходные уравнения равновесия с точностью общей технической теории В. З. Власова [2].

Приближенные уравнения (1) для тонкой оболочки по видимому являются законными [5], если выполняются следующие условия:

$$a^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{u}{v} \right\} \ll \left\{ \frac{u}{v} \right\}, \quad a^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left\{ \frac{u}{v} \right\} \ll \left\{ \frac{u}{v} \right\} \quad (5)$$

Система (1) имеет бесконечное количество решений вида

$$u_j = \bar{u}_j f_j, \quad v_j = \bar{v}_j f_j, \quad w_j = \bar{w}_j f_j, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (6)$$

где f_j периодическая функция времени, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f_j + \omega_j^2 f_j = 0. \quad (7)$$

ω_j — круговая частота незатухающих колебаний оболочки;

$\tilde{u}_j, \tilde{v}_j, \tilde{w}_j$ — функции собственных колебаний, которые для краткости будем называть собственными функциями. В случае общих форм колебания круговой замкнутой цилиндрической оболочки можно принимать

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j &= \bar{u}_n \cos m\varphi, \quad \tilde{v}_j = \bar{v}_n \sin m\varphi, \quad \tilde{w}_j = \bar{w}_n \cos m\varphi; \\ (m &= 1, 2, 3, \dots, \infty; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty). \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\bar{u}_n = \bar{u}_n(\xi), \quad \bar{v}_n = \bar{v}_n(\xi), \quad \bar{w}_n = \bar{w}_n(\xi) \quad (9)$$

На основе (6), (8) из системы (1) следуют уравнения (для упрощения записи индекс n опускается):

$$\begin{aligned} L_{11}^* \bar{u} + L_{12}^* \bar{v} + L_{13}^* \bar{w} + N \bar{u} &= 0, & (I) \\ L_{21}^* \bar{u} + L_{22}^* \bar{v} + L_{23}^* \bar{w} + N \bar{v} &= 0, & (II) \\ L_{31}^* \bar{u} + L_{32}^* \bar{v} + L_{33}^* \bar{w} + N \bar{w} &= 0, & (III) \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11}^* &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1-\nu}{2} m^2, \quad L_{12}^* = -L_{21}^* = \frac{1+\nu}{2} m \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ L_{13}^* &= -L_{31}^* = \nu \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad L_{22}^* = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - m^2 + \sigma^2 \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - m^2 \right], \\ L_{23}^* &= L_{32}^* = -m \left\{ 1 + \sigma^2 \left[m^2 - (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \right\}, \\ L_{33}^* &= - \left\{ 1 + \sigma^2 \bar{\nu} \bar{\nu} \right\}, \quad \bar{\nu} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - m^2; \end{aligned} \quad (11)$$

$$N = \frac{(1-\nu^2) R^2 \rho \omega^2}{E \delta} \quad (12)$$

N по своему определению (12) вещественное положительное число.

Отметим одно свойство системы (10).

$$\text{Если} \quad \bar{u} = \bar{u}(\xi) \neq 0, \quad \bar{v} = \bar{v}(\xi) \neq 0, \quad (13)$$

$$\text{тогда} \quad G_1 \bar{u} \neq 0, \quad G_1 \bar{v} \neq 0, \quad \bar{w} \neq 0, \quad (14)$$

где

$$G_1 = G_{10} + \sigma^2 \left\{ 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \frac{2-2\nu+\nu^2}{2(1-\nu)} m^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{m^4}{4} \right] + \right. \\ \left. + N \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - m^2 \right] \right\}, \quad (15)$$

$$G_{10} = \left(N + \bar{\nu} \right) \left(N + \frac{1-\nu}{2} \bar{\nu} \right).$$

2. Видоизмененная система основных уравнений. Исключая из I и II уравнений системы (10) или u или v , получим уравнения:

$$G_1 \bar{u} = G_2 \bar{w}, \quad G_1 \bar{v} = G_3 \bar{w}, \quad (16)$$

где

$$G_2 = G_{20} + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1+\nu}{2} m^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - m^2 \right] - \nu \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - m^2 \right] \right\},$$

$$G_{20} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \nu N + \frac{1-\nu}{2} \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 \right) \right\},$$

$$G_3 = G_{30} - \sigma^2 m \left\{ N \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - m^2 \right] + (2-\nu) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \right. \\ \left. - \left(2 - 1.5\nu + \frac{\nu^2}{2} \right) m^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} m^4 \right\}, \quad (17)$$

$$G_{30} = -m \left\{ -N + \frac{1-\nu}{2} \left[m^2 - (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \right\}.$$

Исключим при помощи (16) тангенциальные перемещения из III уравнения системы (10). Пренебрегая малыми членами с множителем a^4 , получим уравнение:

$$N^3 \bar{w} - N^2 G_4 \bar{w} + N G_5 \bar{w} = G_6 \bar{w} \quad (18)$$

где

$$G_4 = G_{40} + \sigma^2 \left[\bar{\nu} \bar{\nu} - 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 \right], \quad G_{40} = 1 - \frac{3-\nu}{2} \bar{\nu},$$

$$G_5 = G_{50} - \sigma^2 \left[\frac{3-\nu}{2} \bar{\nu} \bar{\nu} - 2(1-\nu) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - (2-\nu^2) m^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{3+\nu}{2} m^4 \right], \quad (19)$$

$$G_{50} = \frac{1-\nu}{2} \left[-(3+2\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 + \bar{\nu} \bar{\nu} \right],$$

$$G_6 = G_{60} - \frac{1-\nu}{2} \sigma^2 \left[-8m^4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (8-2\nu^2)m^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 4m^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right],$$

$$G_{60} = \frac{1-\nu}{2} \left\{ (1-\nu^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \sigma^2 (\bar{\nu} \bar{\nu} \bar{\nu} \bar{\nu} - 2m^6 + m^4) \right\}.$$

3. Характеристическое уравнение. Предполагаем, что система (16), (18) имеет бесконечную последовательность решений вида

$$\bar{u}_n = U_n e^{\lambda n \xi}, \quad \bar{v}_n = V e^{\lambda n \xi}, \quad \bar{w}_n = W e^{\lambda n \xi}, \quad (20)$$

где U_n, V_n, W_n — комплексные постоянные (для упрощения записи в дальнейшем индекс n опускается). На основе (20) следуют из (16), (18) уравнения:

$$\psi_1 U = -\lambda \psi_2 W, \quad \psi_1 V = -m \psi_3 W, \quad m \psi_3 U = \lambda \psi_2 V \quad (21)$$

$$N^3 - bN^2 + dN = D \quad (22)$$

где

$$\psi_1 = \psi_{10} + \sigma^2 \left\{ \frac{2(1-\nu) \left[\lambda^4 - \frac{2-2\nu+\nu^2}{2(1-\nu)} m^2 \lambda^2 + \frac{m^4}{4} \right] + N \left[2(1-\nu) \lambda^2 - m^2 \right]}{2(1-\nu)} \right\},$$

$$\psi_{10} = \left[N + \lambda^2 - m^2 \right] \left[N + \frac{1-\nu}{2} (\lambda^2 - m^2) \right],$$

$$\psi_2 = \psi_{20} - \sigma^2 \left\{ \frac{1+\nu}{2} m^2 [(2-\nu) \lambda^2 - m^2] - \nu [2(1-\nu) \lambda^2 - m^2] \right\},$$

$$\psi_{20} = \nu N + \frac{1-\nu}{2} (\nu \lambda^2 + m^2),$$

$$\psi_3 = \psi_{30} + \sigma^2 \left\{ \frac{N \left[(2-\nu) \lambda^2 - m^2 \right] + (2-\nu) \lambda^4 - [2-1.5\nu + \frac{\nu^2}{2}] m^2 \lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} m^4}{2} \right\}, \quad (23)$$

$$\psi_{30} = -N + \frac{1-\nu}{2} [m^2 - (2+\nu) \lambda^2],$$

$$b = b_0 + \sigma^2 \left[(\lambda^2 - m^2)^2 - 2(1-\nu) \lambda^2 + m^2 \right],$$

$$b_0 = 1 - \frac{3-\nu}{2} (\lambda^2 - m^2).$$

$$d = d_0 - a^2 \left[\frac{3-\nu}{2} (\lambda^2 - m^2)^3 - \frac{2(1-\nu)\lambda^4 - (2-\nu^2)m^2\lambda^2 + \frac{3+\nu}{2}m^4}{2} \right].$$

$$d_0 = \frac{1-\nu}{2} [-(3+2\nu)\lambda^2 + m^2 + (\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$D = D_0 - \frac{1-\nu}{2} a^2 \left[-8m^4\lambda^2 + (8-2\nu^2)m^2\lambda^4 + 4m^2\lambda^2 \right],$$

$$D_0 = D_0^* + \frac{1-\nu}{2} a^2 [-2m^6 + m^4].$$

$$D_0^* = \frac{1-\nu}{2} \left\{ [(1-\nu^2)\lambda^4 + a^2(\lambda^2 - m^2)^4] \right\}.$$

Уравнение (22) в общем случае имеет 8 корней λ_r ($r = 1, 2, \dots, 8$), зависящих от N . При конкретной длине и краевых условиях оболочки существует бесконечная последовательность значений $N = N_n$, при которых решения

$$\bar{u}_n = \sum_{r=1}^8 U_{nr} e^{\lambda_{nr} \xi}, \quad \bar{v}_n = \sum_{r=1}^8 V_{nr} e^{\lambda_{nr} \xi}, \quad \bar{w}_n = \sum_{r=1}^8 W_{nr} e^{\lambda_{nr} \xi} \quad (24)$$

удовлетворяют краевым условиям. Во многих случаях корни λ_r разделяются на две группы, отличающиеся друг от друга по порядку величины. Далее индексы опускаются и принимаются следующие условные обозначения малых и больших корней

$$\lambda_r = \lambda \ll \lambda_n = \bar{\lambda} \quad (r = 1, 2, 3, 4) \quad (r = 5, 6, 7, 8) \quad (25)$$

4. Частный случай краевых условий Навье. При краевых условиях

$$\xi = 0, \quad \xi = \xi_0 = \frac{L}{R} : \frac{\partial u}{\partial \xi} = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad (26)$$

можно обойти решение в общей форме (20) и предполагать [1]

$$\bar{u} = U \cos k \xi, \quad \bar{v} = V \sin k \xi, \quad \bar{w} = W \sin k \xi, \quad (27)$$

где U, V, W — вещественные постоянные,

$$k = \frac{n\pi R}{L} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty), \dots \quad (28)$$

L — длина оболочки. Уравнения (21) превращаются в следующие

$$\bar{\psi}_1 U = -k \bar{\psi}_2 W, \quad \bar{\psi}_1 V = -m \bar{\psi}_3 W, \quad m \bar{\psi}_3 U = k \bar{\psi}_2 V; \quad (21')$$

коэффициенты уравнений (21'), (22) следуют из формул (23), если в них принять

$$\lambda^2 = -k^2. \quad (29)$$

II. Приближенные методы

При общем случае краевых условий определение корней λ_{nr} и частот N_n из системы (21), (22) приводит к сложным краевым задачам. В связи с этим, допуская асимптотическую погрешность

$$\epsilon = \sigma^{1/2} \quad (30)$$

упростим уравнения (21), (22) методом асимптотического интегрирования [3]. Строгие неравенства (5), ограничивающие область исследования, далее также подразумеваются с точностью (30). Введем обозначения

$$\lambda = \sigma^y, \quad \bar{\lambda} = \sigma^{\bar{y}}, \quad N = \sigma^z, \quad m = \sigma^{-\bar{n}} \quad (31)$$

Диаграмма на рис. 1 позволяет определить y и \bar{y} по заданным значениям z и \bar{n} . Представим упрощенные уравнения (21), (22) для разных областей диаграммы.

I область — изгибные колебания стержня с недеформируемым кольцевым поперечным контуром ($m=1$). Основные интегралы и собственные частоты определяются с учетом тангенциальных краевых условий при помощи уравнения

$$\sigma^2 \geq N = \frac{1}{2} (1 - \nu^2) \lambda^4 \quad (32)$$

Уравнения (21) упрощаются в следующие:

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \frac{1-\nu}{2}, \quad V = -W, \quad U = -\lambda W. \quad (33)$$

Если нетангенциальные краевые условия не удовлетворяются автоматически, тогда можно учитывать простые краевые эффекты (см. II область).

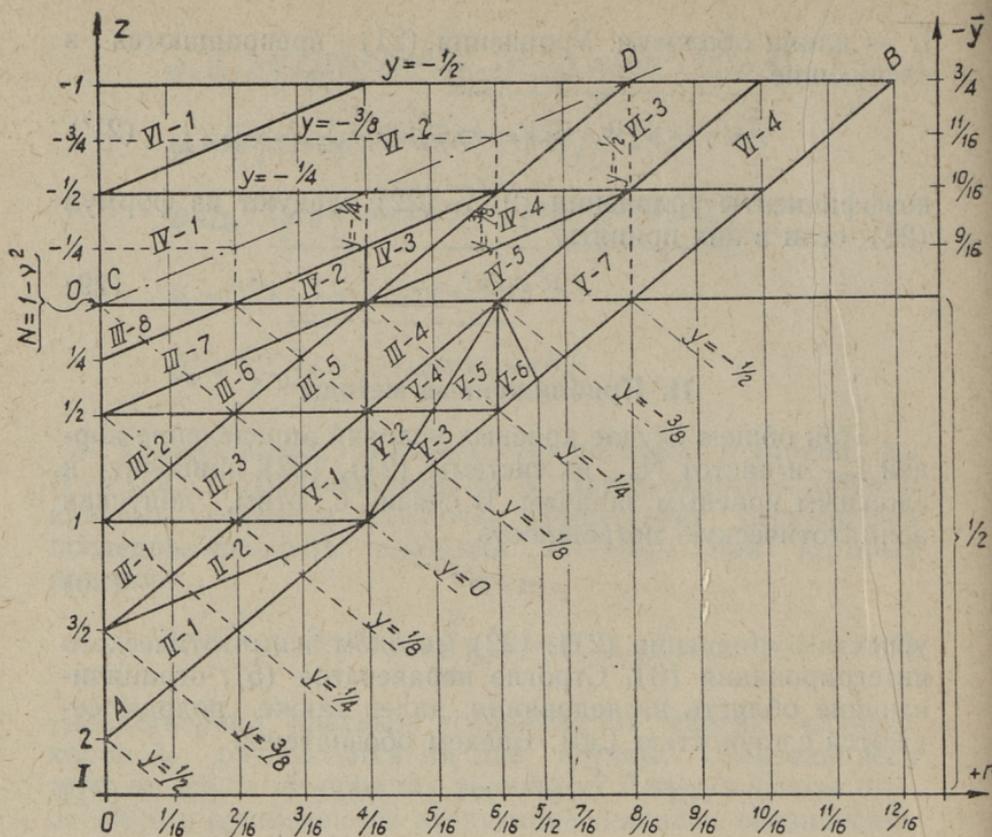


Рис. 1.

II область — полубезмоментная теория. Основные интегралы и собственные частоты определяются с учетом тангенциальных краевых условий при помощи следующих уравнений

$$m^2(m^2+1)N = (1-v^2)\lambda^4 + \sigma^2 m^4(m^2-1)^2; \quad (34)$$

$$\psi_1 = \frac{1-v}{2} m^4, \quad \psi_2 = \psi_3 = \frac{1-v}{2} m^2, \quad (34')$$

$$U = -\frac{\lambda}{m^2} W, \quad V = -\frac{1}{m} W.$$

Уравнение (34) соответствует полубезмоментной теории в варианте выродившегося краевого эффекта [3] без учета инерционных сил в направлении u . В части II—2

можно отбросить подчеркнутые члены (полубезмоментная теория в варианте невыродившегося краевого эффекта). Из уравнения (34) следует:

$$\lambda_{\tilde{n}; n=1,2} = \pm K_n, \quad \lambda_{n; n=3,4} = \pm i K_n, \quad (35)$$

где K_n вещественная величина, определяемая в соответствии с тангенциальными краевыми условиями [6]. Например:

1) при краевых условиях Навье (26):

$$K_n = k; \quad (36)$$

2) при заделанных краях:

$$\xi = 0; \quad \xi = \xi_0 = \frac{L}{R} : \quad \dot{u} = v = w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 : \quad (37)$$

$$K_1 = 1,506 \frac{\pi R}{L}, \quad K_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi R}{L}, \quad (n = 2, 3, \dots, \infty). \quad (38)$$

В указанных случаях нетангенциальные краевые условия удовлетворяются автоматически. В других случаях простые краевые эффекты можно учесть при помощи формул

$$\sigma^2 \bar{\lambda}^4 = -(1 - \nu^2) \dot{\gamma}; \quad (39)$$

$$\psi_1 = \frac{1-\nu}{2} \bar{\lambda}^4, \quad \psi_2 = \frac{1-\nu}{2} \nu \bar{\lambda}^2, \quad \psi_3 = -\frac{1-\nu}{2} (2+\nu) \bar{\lambda}^2. \quad (39')$$

Из (39) следуют дополнительные интегралы для нормальных перемещений

$$\begin{aligned} \bar{w}^* = \sum_{n=5,6,7,8} W_n e^{\bar{\lambda}_n \xi} = C_5 e^{\gamma(\xi - \xi_0)} \cos \gamma(\xi - \xi_0) + \\ + C_6 e^{\gamma(\xi - \xi_0)} \sin(\xi - \xi_0) + C_7 e^{-\gamma \xi} \cos \gamma \xi + C_8 e^{-\gamma \xi} \sin \gamma \xi, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\bar{\gamma} = \sqrt[4]{\frac{1-\nu^2}{4a^2}} \sim \sigma^{-\frac{1}{2}} \gg 1, \quad (41)$$

и C_i — вещественные постоянные. В правой части формулы (40) первые два слагаемых быстро затухают при удалении от края $\xi = \xi_0$ и два последних слагаемых при удалении от края $\xi = 0$.

III область — безмоментная теория. В этой области основные интегралы и собственные частоты определяются с учетом тангенциальных краевых условий из следующих общих уравнений безмоментной теории:

$$N^3 - b_0 N^2 + d_0 N = \frac{1-\nu}{2} (1-\nu^2) \lambda^4, \quad (42)$$

$$\Psi_i = \Psi_{i0}. \quad (43)$$

(42) является квадратным уравнением относительно λ^2 . В общем случае краевых условий задача состоит в разыскивании таких $N = N_n$, при которых λ_r ($r = 1, 2, 3, 4$) позволяют удовлетворить заданным тангенциальным краевым условиям. В случае более тонких и длинных оболочек III область охватывает большое количество собственных частот. В связи с тем может оказаться целесообразным разделение области на части, для которых (42), (43) можно еще несколько упростить в пределах асимптотической погрешности (30).

$$\text{III—1:} \quad m^2(m^2+1)N = (1-\nu^2)\lambda^4, \quad (42.1)$$

Ψ_i по формулам (34');

$$\text{III—2:} \quad [m^2 - (3+2\nu)\lambda^2 + m^4 - 2m^2\lambda^2]N = (1-\nu^2)\lambda^4, \quad (42.2)$$

$$\Psi_1 = \frac{1-\nu}{2} [m^4 - 2m^2\lambda^2], \quad \Psi_2 = \frac{1-\nu}{2} [m^2 + \nu\lambda^2], \quad (43.2)$$

$$\Psi_3 = \frac{1-\nu}{2} [m^2 - (2+\nu)\lambda^2],$$

$$\text{III—3:} \quad m^2[m^2 + 1 - 2\lambda^2]N = (1-\nu^2)\lambda^4, \quad (42.3)$$

Ψ_i по формулам (43.2);

$$\text{III—4:} \quad (m^2 - \lambda^2)^2 N = (1-\nu^2)\lambda^4, \quad (42.4)$$

$$\Psi_1 = \frac{1-\nu}{2} [m^2 - \lambda^2]^2, \quad \Psi_2 = \frac{1-\nu}{2} [m^2 + \nu\lambda^2], \quad (43.4)$$

$$\Psi_3 = \frac{1-\nu}{2} [m^2 - (2+\nu)\lambda^2];$$

$$\text{III—5:} \quad [m^2 + (m^2 - \lambda^2)^2]N = (1-\nu^2)\lambda^4, \quad (42.5)$$

Ψ_i по формулам (43.4);

$$\text{III—6: } [m^2 - (3+2\nu)\lambda^2 + (m^2 - \lambda^2)^2]N = (1-\nu^2)\lambda^4, \quad (42.6)$$

Ψ_i по формулам (43.4);

$$\text{III—7: } -\left[1 + \frac{3-\nu}{2}(m^2 - \lambda^2)\right]N^2 + \frac{1-\nu}{2}[m^2 - (3+2\nu)\lambda^2 + (m^2 - \lambda^2)^2]N = \frac{1-\nu}{2}(1-\nu^2)\lambda^4, \quad (42.7)$$

$$\Psi_1 = -\frac{3-\nu}{2}(m^2 - \lambda^2)N + \frac{1-\nu}{2}(m^2 - \lambda^2)^2, \quad \Psi_2 = \Psi_{20}, \quad \Psi_3 = \Psi_{30}. \quad (43.7)$$

В части III—8 приходится воспользоваться уравнениями (42), (43) в общем виде.

Простые краевые эффекты приближенно определяются:

а) в частях области III—1, III—2, III—3 — по формулам (39), (39'), (40), (41);

б) в частях области III—5, III—6, III—7, III—8 при помощи уравнения

$$\sigma^2 \bar{\lambda}^4 = -(1-\nu^2) + N \leq 0, \quad (44)$$

который приводит к дополнительным интегралам нормальных перемещений вида (40), если принимать

$$\gamma = \gamma' = \sqrt{\frac{4(1-\nu^2 - N)}{4\sigma^2}}; \quad (45)$$

в) в части III—4 при помощи уравнения

$$\sigma^2(\bar{\lambda}^4 - 4m^2\bar{\lambda}^2) = -(1-\nu^2) + N \leq 0, \quad (46)$$

и упрощенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1-\nu}{2}[\bar{\lambda}^4 - 2m^2\bar{\lambda}^2], \quad \Psi_2 = \frac{1-\nu}{2}(m^2 + \nu\bar{\lambda}^2), \\ \Psi_3 &= \frac{1-\nu}{2}[m^2 - (2+\nu)\bar{\lambda}^2]. \end{aligned} \quad (47)$$

В крайней полосе III области, где

$$*0 \leq 1 - \nu^2 - N \ll 1, \quad (48)$$

краевые эффекты потеряют свой быстрозатухающий характер.

IV область — безмоментная теория и обобщенные краевые эффекты. Четыре основных интеграла и собственные частоты определяются с учетом тангенциальных краевых условий по безмоментной теории (42), (43). Принципиально можно разделить IV область на несколько частей, в которых некоторые члены уравнении (42) являются пренебрежимо малыми в смысле (30), но практически заметные упрощения вычислений оказываются возможными только в следующих частях области:

IV—2: формулы (42.7), (43.7);

IV—3 и IV—4:

$$-\frac{3-\nu}{2}(m^2-\lambda^2)N^2 + \frac{1-\nu}{2}(m^2-\lambda^2)^2N = \frac{1-\nu}{2}(1-\nu^2)\lambda^4 \quad (49)$$

Ψ_1 по формулам (43.7);

IV—5: формулы (42.4), (43.4).

Если нетангенциальные краевые условия не удовлетворяются автоматически, тогда необходимо учесть остальные четыре интеграла. Для частей IV области: IV—1, IV—2, IV—3 — эти интегралы определяются при помощи уравнения обобщенных краевых эффектов

$$\sigma^2 \bar{\lambda}^4 = -(1-\nu^2) + N > 0 \quad (44')$$

Из (44') следуют дополнительные интегралы для нормальных перемещений

$$\bar{w}^* = \sum_{r=5,6,7,8} W_r e^{\bar{\lambda}_r \xi} = C_5 \sin \gamma'' \xi + C_6 \cos \gamma'' \xi + C_7 e^{\gamma''(\xi - \xi_0)} + C_8 e^{-\gamma'' \xi} \quad (50)$$

$$\gamma'' = \sqrt[4]{\frac{N-1+\nu^2}{\sigma^2}} \quad (51)$$

В (50) два первых слагаемых являются гармоническими, третье слагаемое затухает при удалении от края $\xi = \xi_0$ и четвертое — при удалении от края $\xi = 0$. Дополнительные интегралы для тангенциальных перемещений можно определить по формулам

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \bar{u}^* = -\nu \bar{w}^*, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \bar{v}^* = (2+\nu) m \bar{w}^* \quad (52)$$

Части IV—4, IV—5 в некотором смысле являются промежуточными между областями применения безмоментной теории и теории напряженного состояния с большим показателем изменяемости. В этих частях IV области приходится учесть обобщенные краевые эффекты, пользуясь четырьмя большими корнями уравнения

$$(\bar{\lambda}^2 - 2m^2)N = (1 - \nu^2)\bar{\lambda}^2 + \sigma^2(\bar{\lambda}^6 - 4m^2\bar{\lambda}^4). \quad (53)$$

V область — собственные функции с большим показателем изменяемости. В этой области собственные функции можно определить по общей технической теории [2]. Однако в некоторых частях этой области можно определить малые корни λ из квадратных уравнений относительно λ^2 . При заданных тангенциальных краевых условиях эти уравнения определяют основные интегралы собственных функций и собственные частоты.

$$V-1: \quad m^2[m^2 + 1 - 2\lambda^2]N = (1 - \nu^2)\lambda^4 + \sigma^2 m^6, \quad (54.1)$$

Ψ_i по формулам (43.2);

$$V-2: \quad m^2[m^2 - 2\lambda^2]N = (1 - \nu^2)\lambda^4 + \sigma^2 m^6, \quad (54.2)$$

Ψ_i по формулам (43.2);

$$V-3: \quad m^2[m^2 - 2\lambda^2]N = (1 - \nu^2)\lambda^4 + \sigma^2 m^6 (m^2 - 4\lambda^2). \quad (54.3)$$

Ψ_i по формулам (43.2);

$$V-4: \quad (m^2 - \lambda^2)^2 N = (1 - \nu^2)\lambda^4 + \sigma^2 m^6, \quad (54.4)$$

Ψ_i по формулам (43.4);

$$V-5: \quad (m^2 - \lambda^2)^2 N = (1 - \nu^2)\lambda^4 + \sigma^2 m^6 (m^2 - 4\lambda^2), \quad (54.5)$$

Ψ_i по формулам (43.4);

$$V-6: \quad (m^2 - \lambda^2)^2 N = (1 - \nu^2)\lambda^4 + \sigma^2 m^4 (m^4 - 4m^2\lambda^2 + 6\lambda^4). \quad (54.6)$$

Ψ_i по формулам (43.4);

В части V—1 краевые эффекты можно определить по формулам (39), (39'), (40), (41). В частях V—2, V—3, V—4, V—5 краевые эффекты можно определить по формулам (46); при этом в частях V—2, V—3 в правой части уравнения (46) можно отбросить N . В части V—6 краевые эффекты можно учесть при помощи уравнения

$$\sigma^2(\bar{\lambda}^4 - 4m^2\bar{\lambda}^2 + 6m^4) = -(1-\nu^2) + N \neq 0. \quad (55)$$

В части V—7 все 8 корней λ_r определяются из одного характеристического уравнения, которое соответствует общей технической теории без учета тангенциальных сил инерции

$$[m^2 - \lambda^2]^2 N = (1 - \nu^2) \lambda^4 + \sigma^2 [m^2 - \lambda^2]^4. \quad (56)$$

Коэффициенты уравнений (21) определяются по формулам (43.4). Формулы (56), (43.4) являются принципиально годными для всей V области кроме части V—1.

VI область. В этой области

$$\sigma^2 \geq N \geq \sigma^{-1/2}. \quad (57)$$

Упрощение уравнений (21), (22) с асимптотической погрешностью (30) приводит к уравнениям, которые не подчиняются условиям (14). В VI области применение теории тонких оболочек Кирхгофа-Лява имеет приближенный и качественный характер.

VI—1: С точностью (30) общие формы колебания вырождаются в следующие:

а) продольные колебания

$$N + \lambda^2 = 0; \quad (58)$$

$$W \equiv V \equiv 0, \quad U \neq 0; \quad (59)$$

б) обобщенные крутильные колебания

$$N + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \equiv 0; \quad (60)$$

$$U \equiv W \equiv 0, \quad V \neq 0; \quad (61)$$

в) нормальные колебания

$$\sigma^2 \bar{\lambda}^4 = N; \quad (62)$$

$$U \equiv V \equiv 0, \quad W \neq 0. \quad (63)$$

Интегралы, соответствующие уравнениям (58), (60), и два интеграла, соответствующие уравнению (62), имеют гармонический характер. Отметим, что в случае (57) с точностью членов порядка (30) характеристические уравнения (58), (62) также следуют из уравнений осесимметрических колебаний замкнутой цилиндрической оболочки. Следовательно в рассматриваемом случае собственные частоты и изменение собственных функций по длине оболочки являются почти одинаковыми при значениях m :

$$m = 0, 1, 2, \dots \leq \sigma^{-1/4} \quad (64)$$

VI-2: Тангенциальные перемещения приближенно определяются из уравнений плоской задачи теории упругости, т. е. пользуясь характеристическими уравнениями:

$$\psi_1 = 0; \quad \lambda^2 = m^2 - \frac{2}{1-\nu} N, \quad \bar{\lambda}^2 = m^2 - N. \quad (65)$$

Нормальные перемещения определяются при помощи уравнения (62). VI-3: Эта часть отличается от предыдущей тем, что нормальные перемещения определяются по уравнению колебания плоской пластинки

$$\sigma^2 (\bar{\lambda}^2 - m^2)^2 = N. \quad (66)$$

VI-4. Нормальные перемещения и собственные частоты почти не зависят от тангенциальных краевых условий и приближенно определяются при помощи уравнения (66). Затем определяют тангенциальные перемещения из первого и второго уравнения системы (10), рассматривая как заданную функцию и учитывая тангенциальные краевые условия.

VII область. На логарифмической диафрагме (рис. 1) эту область условно представляет линия АВ. Основные интегралы собственных функций в этой области характеризуются условием: $0 \leq |\lambda| < m^2 \sqrt{a}$ (в конкретных задачах длина оболочки определяет нижний предел

для λ). При заданном значении m может иметь место целая совокупность собственных функций (различных значений λ), которым соответствуют почти одинаковые значения N . Общее характеристическое уравнение для VII области

$$d_0 N = D. \quad (67)$$

В пределах асимптотической погрешности (30) в уравнении (67) можно принять $D \approx D_0$. В отдельных частях этой области можно применить приближенные уравнения тех областей, которым линия \overline{AB} является границей. В некоторых случаях задачу можно еще упростить. Именно, если λ является достаточно малым по сравнению с m , то полубезмоментная теория (34), (34') применима также в этой части VII области, где линия \overline{AB} является границей V области. Отметим, что в случае $\lambda = 0$ уравнение (34) превращается в формулу, которая приближенно определяет наименьшую частоту колебания кольца. Следовательно наименьшие частоты колебания кольца также относятся к VII области.

VIII область. Уравнение (22) является кубическим относительно N . Следовательно каждой паре u и γ соответствуют Z_i ($i = I, II, III$), которые определяют N_i ($i = I, II, III$). Пусть эти частоты пронумерованы в возрастающем порядке. На диаграмме (рис. 1) точки, соответствующие частотам N_{II} и N_{III} , расположены выше от линии \overline{CD} . Назовем условно VIII область совокупность значений N_{II} и N_{III} , которым соответствуют значения N_I ниже от линии \overline{CD} . N_{II} и N_{III} , относящиеся к VIII области, увеличиваются с возрастанием $|\lambda|$ и m . Рассматриваемые формы колебания характеризуются относительно большими тангенциальными и относительно малыми нормальными перемещениями.

В тех случаях, когда N_I определяется по полубезмоментной теории, N_{II} и N_{III} являются весьма близкими к высоким частотам колебаний кольца.

$$N_I \approx \frac{1-\nu}{2} m^2, \quad N_{II} \approx 1 + m^2. \quad (68)$$

Некоторые из членов уравнений (21), (22) не вошли ни в одно из приближенных уравнений этой части статьи и для всей диаграммы (рис. 1) являются пригодными следующие упрощения:

$$\psi_i \approx \psi_{i0}, \quad b = b_0, \quad d = d_0, \quad D = D_0. \quad (69)$$

Соответственно можно упростить выражения дифференциальных уравнений (16), (18).

$$G_i = G_{i0} \quad (70)$$

З а м е ч а н и е. В действительных задачах вышеперечисленные области не имеют резких границ. Кроме того, надо учесть, что при асимптотическом упрощении уравнений (21), (22) были опущены численные коэффициенты [3] и фактическая погрешность может несколько превышать оценку (30). В связи с указанным целесообразно расчленять диаграмму на мелкие части только в случае более тонких оболочек ($a \leq 0,001$). При сравнительно толстых оболочках следует объединить некоторые группы мелких частей. Отметим, что в II, V, VII области, в частях III-1, III-2, III-3, III-4, III-5, III-6 и в части IV-5 можно применить уравнение (67). При этом кроме второй области везде

$$D \approx D_0 \quad (71)$$

В частном случае краевых условий Навье (26) уравнение (67) представляет из себя достаточно простую и сравнительно точную формулу для определения собственных частот в большей части диаграммы.

III. Наименьшая собственная частота

П р и б л и ж е н н ы е ф о р м у л ы. При заданных геометрических размерах оболочки $\min \lambda$ и $\max \lambda$ приближенно определяются по формуле

$$|\min \lambda| = a^{\max \lambda} \sim \frac{\pi R}{L} \quad (72)$$

Если $\min \lambda$ соответствует первой или второй области диаграммы, тогда формула (72) легко уточняется в зависимости от краевых условий. Пусть при наименьшей частоте число поперечных волн $m = \bar{m}$. В случае $\tau a x u \geq 1/2$ наименьшая частота соответствует собственной функции типа изгибного колебания стержня ($\bar{m} = 1$) и определяется из уравнения (32). В случае $\tau a x u < 1/2$ линия $u = \tau a x u$ отрежет некоторую часть диаграммы (рис. 1), и наименьшая частота находится на диаграмме в близости точки пересечения линий \overline{AB} и $u = \tau a x u$. Следовательно

$$\bar{m} \sim a^{-1/4} (|\min \lambda|)^{1/2}, \quad (73)$$

$$\min N \sim a (|\min \lambda|)^2 \quad (74)$$

Фактически \bar{m} является целым числом и в связи с тем формула (74) дает несколько пониженные значения $\min N$. Но имея оценки для \bar{m} и $\min N$, легко подобрать более точный метод для определения наименьшей частоты. Отметим, что в практических задачах достаточную точность всегда обеспечивает уравнение (67).

2. Численные примеры. Приводим для иллюстрации численные примеры в случае краевых условий Навье ($|\min \lambda| = \min k$). Исходные данные и результаты расчета приведены в таблице.

Примеры вычисления наименьших частот

Пример	Исходные данные				По формулам		По формуле (67)		Точный результат по формуле (22)
					(73)	(74)			
	$\frac{L}{R}$	$\frac{\delta}{R}$	ν	$\min k$	\bar{m}	$\min N \cdot 10^5$	$\min N \cdot 10^5$	\bar{m}	$\min N \cdot 10^5$
I	4π	$\frac{1}{30}$	0,3	$\frac{1}{4}$	1,60	62,0	85,9	2	85,9
II	4π	$\frac{1}{300}$	0,3	$\frac{1}{4}$	2,84	6,02	9,28	3	9,28
III	π	$\frac{1}{30}$	0,3	1	3,20	961	1456	3	1463

З а м е ч а н и е. Пусть собственные функции пронумерованы в возрастающем порядке собственных частот. В практических задачах иногда требуется определить некоторое количество j_* первых собственных функций (j_* наименьших частот), где j_* выбирается по заданному отношению N_{j_*}/N_1 . Отметим, что j_* тем больше, чем короче и тоньше оболочка. При заданной оболочке ряд N_j станет более густым с возрастанием j .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреславский В. Е. О колебаниях цилиндрических оболочек, Инж. сборник, т. XVI, АН СССР, 1953.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек, 1949.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек, 1953.
4. Ониашвили О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек, АН СССР, 1957.
5. Naghdi, P. M. On the theory of thin elastic shells, Quarterly of Applied Mathematics. Vol. XIV, January, 1957, Nr. 4.
6. Yi-Yuan Yu, Free Vibrations of Thin Cylindrical Shells Having Finite Lengths with Freely Supported and Clamped Edges. Journal of Applied Mechanics, March, 1955.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Л. А. Алликас. — Расчет балок-стенок опирающихся на торцевые ребра	3
3.1	К. К. Оллик. — Об осесимметрических колебаниях кругоцилиндрических тонкостенных оболочек	15
3.2	Л. Ю. Поверус и Р. К. Ряямет. — Малые неосесимметричные собственные колебания упругих тонких конических и цилиндрических оболочек	31
3.3	У. К. Нигул. — Об общих формах колебания круговой замкнутой цилиндрической оболочки	65



СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИИ

Таллинский Политехнический Институт

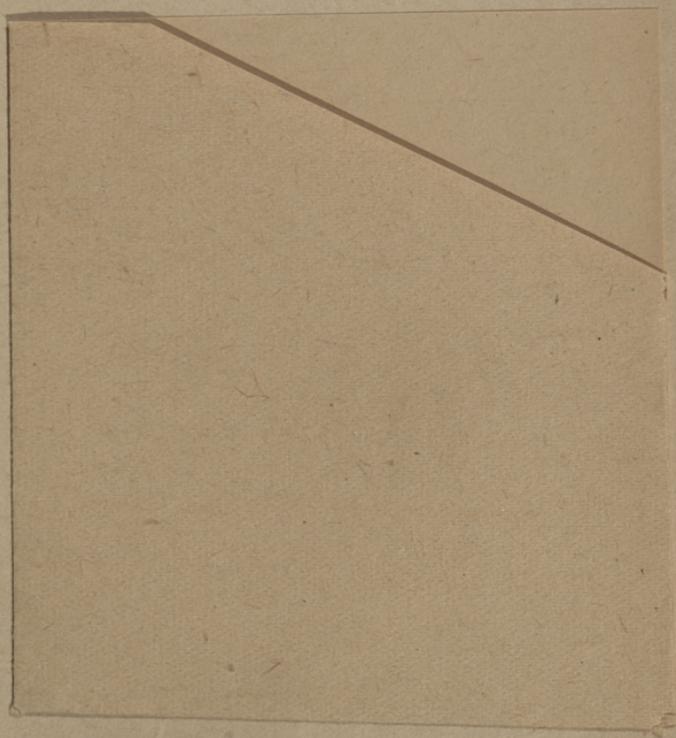
*

Редактор О. Роотс
Технический редактор А. Тамм
Корректор Л. Тоомисте

Сдано в набор 14. X 1958. Подписано к печати 25. XI 1958. Бумага 54×84 $\frac{1}{16}$. Печатных листов 5,25. По формату 60×92 печатных листов 4,3. Учетно-издательских листов 2,82. Тираж 800. МВ-08329. Заказ 692.

Типография Управления Делами СМ ЭССР, Таллин.

Цена 2 рубля



Цена 2 рубля