

Er. 6.7
251

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 251

**ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА
И
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

СБОРНИК СТАТЕЙ

II

Ep. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 251

1967

KONTROLLEKSEMPLAR

ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА
И
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СБОРНИК СТАТЕЙ
II

ТАЛЛИН 1967



ONHKA MATAMATA
H
LOEITPOTTA KALANIKKA
GONNIK EMMI
H

Eesti NSV
Teaduslik
Raamatukogu
Teaduste Akadeemia

Ep. 7849

УДК 669,35'6 : 548.735

Э. Рузалея

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ, ОБУСЛАВЛИВАЮЩИХ РАЗМЫТИЕ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛИНИЙ НЕРАВНОВЕСНЫХ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИХ СПЛАВОВ

В работе исследуются пересыщенные твердые растворы олова в меди, полученные из сернокислых электролитов в присутствии добавок тиомочевины в качестве поверхностно-активного вещества.

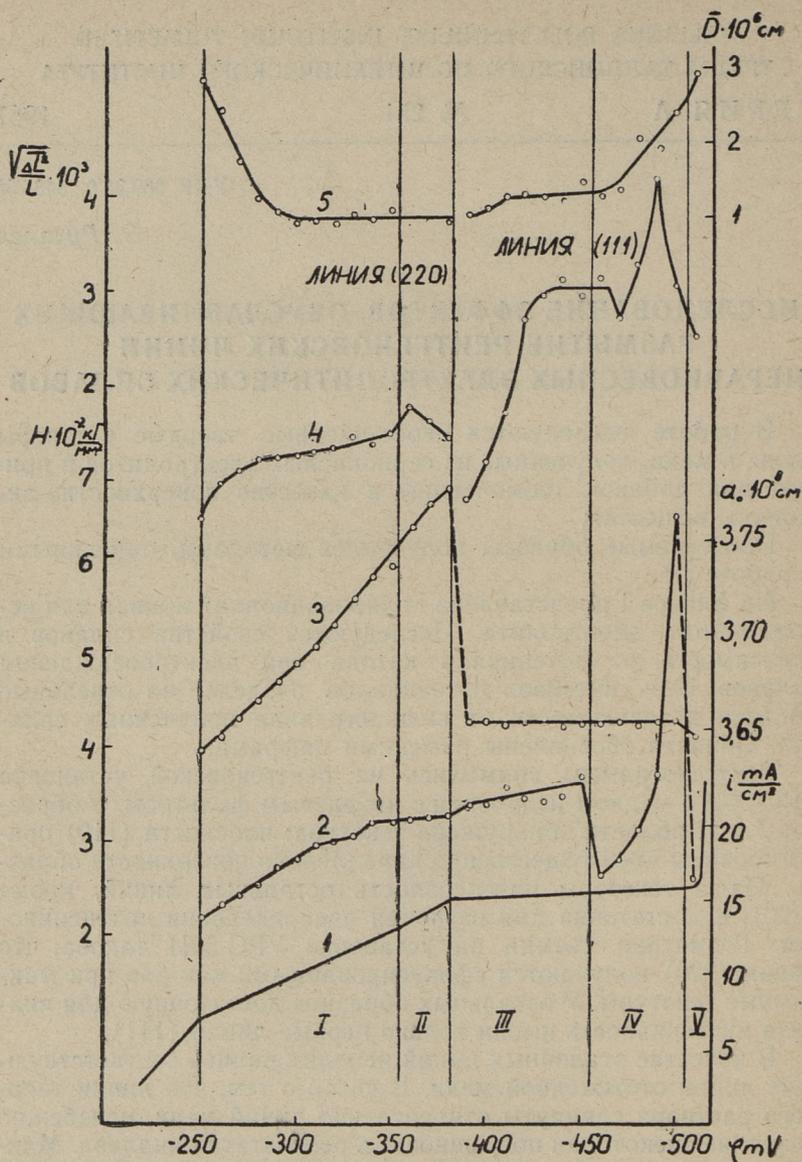
Исследуемые образцы получались методами, описанными в работе [1].

На фигуре 1 представлена поляризационная кривая для используемого электролита. Исследуются свойства сплавов в зависимости от потенциала катода при электроосаждении сплавов. Весь интервал потенциалов разделен на отдельные области в зависимости от внешнего вида полученных сплавов. Области обозначены римскими цифрами.

Рентгенограммы снимались на рентгеновской установке УРС-50И в медном излучении с никелевым фильтром. У образцов I и II области обнаружена текстура: плоскости (110) ориентированы преимущественно параллельно поверхности образца. Из-за текстуры интенсивность остальных линий, кроме (220), недостаточна для изучения распределения интенсивности. Геометрия съемки на установке УРС-50И такова, что линии (220) получают сфокусированными как раз при максимуме текстуры. У остальных образцов достаточную для анализа интенсивность имели только первые линии (111).

В качестве эталонных линий использовались соответствующие линии отожженной меди. В связи с тем, что линии твердого раствора сдвинуты относительно линий меди, неизбежно возникает некоторая погрешность в результатах анализа. Максимальный сдвиг линий (220) $\Delta\theta = 1^\circ 54'$. У всех линий (111) эта погрешность одинаковая, так как сдвиг у них одинаковый $\Delta\theta = 17'$.

Линии сняты по точкам. В каждой точке регистрировалось не менее 10000 импульсов. Режим рентгеновской трубки и ширина щелей подобраны так, чтобы скорость счета не превышала 1200 *имп./сек.* Интервал между точками — 5', а в обла-



Фиг. 1. 1 — поляризационная кривая (0,2N CuSO₄, 0,6N SnSO₄, 2N H₂SO₄, 64 мг/л тиомочевины); 2 — микротвердость; 3 — постоянная решетки твердого раствора; 4 — микродеформации; 5 — средний размер блоков; I — зеркальная бронза; II — гладкая поверхность, слегка блестящая; III — матовая поверхность; IV — серая блестящая поверхность; V — серая поверхность

сти пика — 3'. Учитывалась поправка скорости счета, обусловленная мертвым временем счетчика. Мертвое время счетчика определялось экспериментально [2]. Стабильность работы рентгеновской трубки при съемке точек контролировалась специальным счетчиком. В пределах статистической ошибки скорость счета контрольного счетчика была постоянной.

Как правило, рентгеновские линии электролитических сплавов сильно размыты. Размытость линий обусловлена, в основном, тремя причинами: дисперсностью [3], микроискажениями [4] и неоднородностью химического состава сплава [5].

Разработаны методы, позволяющие разделить эффекты размытия, обусловленные дисперсностью (малостью областей когерентного рассеяния (блоков)), от эффектов, обусловленных микроискажениями путем гармонического анализа формы рентгеновской линии [6]. Химическую неоднородность можно также рассматривать как искажение кристаллической решетки. Действительно, неравномерное распределение атомов олова в твердом растворе типа замещения обуславливает флюктуации межплоскостных расстояний.

Коэффициенты разложения формы рентгеновской линии можно представить в виде:

$$A_t = A_t^D A_t^И, \quad (1)$$

где A_t^D связаны с дисперсностью, $A_t^И$ — с микроискажениями. В случае экспоненциального распределения блоков по размерам и однородных микродеформаций на малых расстояниях [6]:

$$A_t^D = e^{-Mt} \quad (2)$$

и

$$A_t^И = e^{-Nt^2}. \quad (3)$$

В работе [7] теоретически показано, что из статистических соображений и следует ожидать экспоненциального распределения блоков по размерам. Учитывая еще возможную погрешность при отделении рентгеновской линии от фона рентгенограммы, можно A_t представить в виде [8]:

$$A_t = e^{-Z_0 - Mt - Nt^2} \quad (4)$$

и

$$-\ln A_t = Z_0 + Mt + Nt^2. \quad (5)$$

Используя метод, предложенный в работе [9], можно найти

$$f(t) = \frac{d(-\ln A)}{dt} = M + 2Nt \quad (6)$$

и по прямой $f(t)$ определить M и N . По значениям M и N можно найти средний размер блоков \bar{D} и относительные микродеформации $\frac{\sqrt{\Delta L^2}}{L}$.

Гармонический анализ рентгеновских линий произведен анализатором фирмы «Coradi». Нулевые точки определены по центрам тяжести кривых размытия. Для каждой линии получено семь коэффициентов. Мнимые коэффициенты B_t оказались практически равными нулю.

Через точки на графиках функций (6) действительно можно провести прямые с положительными начальными ординатами M . Следовательно, можно было бы считать микродеформации однородными и использование вышеуказанного метода оправданным. Однако в работе [10] показано, что если в кристаллах имеются микродеформации, которые уменьшаются с

расстоянием по закону $\frac{\sqrt{\Delta L^2}}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, то суммарное значение —

$\ln A_t$ будет содержать два слагаемых, которые линейно зависят от t : одно — отвечающее дисперсности, а другое — неоднородным микродеформациям. Разделить вклад дисперсности и микродеформаций в этом случае можно лишь сопоставив коэффициенты разложения кривых размытия для двух порядков отражения от одной и той же плоскости. Так как в данном случае нет двух линий в разных порядках отражения, то разделить указанные эффекты невозможно. Можно лишь определить однородные микродеформации. Если же в образцах есть микродеформации, убывающие как $\frac{1}{\sqrt{t}}$, то они налагаются на эффект дисперсности.

Полученные результаты представлены на фигуре 1. Там же приведена зависимость микротвердости и параметра решетки твердого раствора от потенциала катода при осаждении, взятая из работы [1]. Положение дифракционных максимумов в данной работе можно было определить намного точнее, чем в работе [1], где они были определены по размытым линиям на фотопленке. Оказалось, что постоянство параметра решетки твердого раствора сохранится и во всей IV области. Линии твердого раствора, наряду с линиями олова, имеются и на рентгенограмме от образца V области, имеющего внешний вид олова. Параметр решетки немного уменьшен, но далеко не достигает значения параметра решетки меди.

Как видно на фигуре 1, в I области наблюдается рост микроискажений вместе с повышением содержания олова в растворе. Средний размер блоков в начале области сильно падает, а потом приобретает постоянное значение. Следовательно, повышение микротвердости в этой области можно объяснить

(наряду с другими факторами) увеличением микроискажений и дисперсности.

Во II области размеры блоков остаются такими же. Микроискажения с переходом из I во II область повышаются, а во II области снижаются, вместе с тем как содержание олова достигает наибольшего значения.

В III, IV и V областях наблюдается почти монотонный рост блоков с ростом перенапряжения на катоде. Особенно круто увеличиваются размеры блоков в IV и V областях.

В начале III области, после скачкообразного понижения содержания олова в растворе, микроискажения круто повышаются, а в дальнейшем достигают как бы насыщения. Следует некоторое снижение микроискажений и резкий максимум в IV области, после которого они круто снижаются.

К результатам, полученным в III, IV и V областях, необходимо отнестись критически, так как вблизи рентгеновских линий твердого раствора олова в меди, снятых от образцов этих областей имеются слабые линии каких-то других фаз, идентифицировать которых до сих пор не удалось. При отделении этих линий от линий твердого раствора пришлось допустить некоторый произвол.

Ввиду того, что твердый раствор не является единственной фазой у образцов этих областей, не следует ожидать и хорошей корреляции между микротвердостью и эффектами микроискажений и дисперсности.

Кроме того надо иметь в виду, что результаты, полученные в I, II и в III, IV, V областях, сравнимы между собой не в полной мере, так как размеры блоков и микроискажения определены по разным линиям. Но как размеры блоков, так и микроискажения могут зависеть от направления в кристалле.

Следует отметить хорошую корреляцию между всеми величинами в I области. Именно сплавы этой области представляют наибольший интерес для практического использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Рузалеп. Труды ТПИ, серия А, № 204, 31, 1963.
2. Л. Паккас. См. настоящий сборник, стр. 23—26.
3. В. Бондарь. Диссертация. ИФН АН СССР, М., 1950, стр. 153.
4. Н. Алексеевский, В. Бондарь, Ю. Полукаров. Ж. эксп. и теорет. физики, 38, 294, 1960.
5. Ю. Полукаров, К. Горбунова. Ж. физ. химии, 32, 762, 1958.
6. Б. Пинес. Острофокусные рентгеновские трубки и прикладной рентгеноструктурный анализ. ГИТТЛ, 1955.
7. А. Хачатурян. Крист., 5, 354, 1960.
8. Б. Пинес, А. Сиренко. Крист., 7, 20, 1962.
9. Р. Паккас. Труды ТПИ, серия А, № 204, 23, 1963.
10. Б. Пинес, И. Суровцев. Крист., 8, 480, 1963.

УДК 548.736

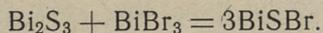
Т. Пикка

СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В BiSBr

В 1962 году были обнаружены сегнетоэлектрические свойства монокристаллов соединения SbSI [1]. В последующие годы уделялось много внимания изучению физических свойств этого соединения, так как это был первый известный материал, обладавший одновременно сегнетоэлектрическими и фотоэлектрическими свойствами.

В настоящей работе исследуется фазовый переход в монокристаллическом BiSBr, структура которого имеет пространственную группу D_{2h}^{16} [2], так же как и соединение SbSI.

Исследуемые монокристаллы выращивались из газовой фазы. В качестве исходных материалов использовались висмут (марка В-000), сера (марка В-5) и бром (марка 4). После зонной очистки монокристаллы выращивались в откачанной ампуле из газовой фазы, в которой происходит следующая реакция:

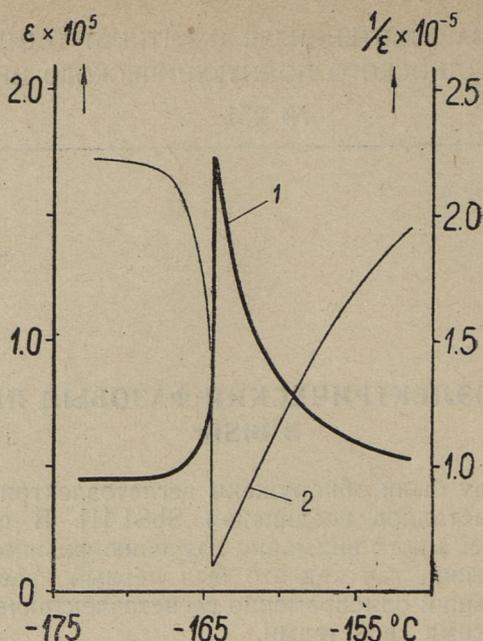


В течение 2—3 суток выростали монокристаллы, имевшие форму игл длиной от 10 до 15 мм и диаметром около 0,3—0,5 мм.

Полученные монокристаллы в отраженном свете имели металлический блеск, а в проходящем свете были темнокрасными.

Диэлектрическая проницаемость и электропроводность измерялись вдоль сегнетоэлектрической оси второго порядка, совпадающей с осью игл.

Измерение диэлектрической проницаемости производилось в вакууме с помощью фазочувствительного электронного моста. Температура и емкость регистрировались электронным потенциометром ЭПР — 0,9.



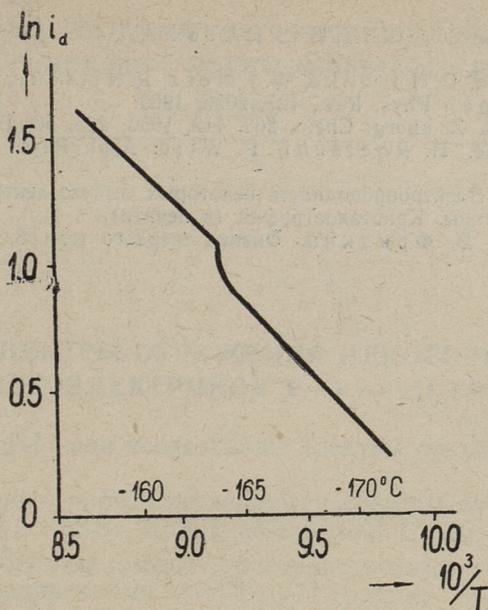
Фиг. 1. Зависимость диэлектрической проницаемости ϵ и обратной величины диэлектрической проницаемости $\frac{1}{\epsilon}$ монокристаллов BiSBr от температуры:

- 1 — зависимость $\epsilon = f(T)$,
 2 — зависимость $\frac{1}{\epsilon} = f(T)$.

Температурная зависимость диэлектрической проницаемости в области фазового перехода представлена на фиг. 1. Вид этой зависимости является характерным для сегнетоэлектрического фазового перехода, для которого выполняется закон Кюри-Вейсса.

Температура фазового перехода определялась по максимуму диэлектрической проницаемости $T_c = -164^\circ\text{C}$; это значение хорошо совпадает со значением, приведенным в работе [3].

В области аномального изменения диэлектрической проницаемости измерялся также темновой ток. Измерения производились с помощью электрометра В 2—5 в слабых полях. На фиг. 2 представлен логарифм темнового тока как функция обратной величины температуры. На основании этого графика определялась энергия активации донорных уровней в сегне-



Фиг. 2. Зависимость логарифма темного тока монокристаллов BiSBr от обратной величины температуры

тоэлектрической и параэлектрической областях, соответственно $u_1 = 0,089$ эв и $u_2 = 0,085$ эв.

График на фиг. 2 весьма характерен для сегнетоэлектрических соединений элементов V—VI—VII группы: SbSI, SbSBr и BiSI [4, 5].

Необходимо отметить фоточувствительность кристалла: при освещенности в 100 люкс удельная проводимость при 18°C увеличивается приблизительно в 100 раз. Темновая проводимость при комнатной температуре $\sigma = 3 \cdot 10^{-2}$ ом⁻¹см⁻¹.

Из полученных данных видно, что монокристаллы BiSBr являются типичным сегнетоэлектрическим соединением элементов V—VI—VII группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fatuzzo, G. Harbeke, W. J. Merz, R. Nitsche, H. Roetschi, W. Ruppel. Phys. Rev., 127, 2036, 1960.
2. R. Dönges. Z. anorg. Chem. 263, 112, 1950; 265, 56, 1951.
3. R. Nitsche, H. Roetschi, P. Wild. Appl. Phys. Letters, 4, 210, 1964.
4. Т. Пикка. Электропроводность некоторых сегнетоэлектриков V—VI — VII группы. Кристаллография (в печати).
5. В. Носов, В. Фридкин. Физика твердого тела, 8, 148, 1966.

УДК 548.736

Т. Пикка

СПЕКТРЫ ОТРАЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ V—VI—VII ГРУППЫ

В работе [1] были исследованы спектры поглощения соединения $SbSI$.

В настоящей работе исследуются спектры отражения соединений $SbSI$, $SbSBr$, $SbSeI$, $SbTeI$, $BiSI$, $BiSBr$, $BiSCl$, $BiSeI$. Структуры которых имеют пространственную группу D_{2h}^{16} и являются соединениями V—VI—VII группы.

Исследуемые образцы изготовлялись из выращенных из газовой фазы монокристаллов. Эти кристаллы измельчались, полученный порошок наносился на белую бумагу. При помощи спектрофотометра СФ — 2М в режиме скорости 3 минут и при щели 3 мкм сравнивалась разница интенсивностей отражения от образца и от белой бумаги, которая автоматически регистрировалась на ленте самописца. Так же были получены спектры отражения при температуре $-196^{\circ}C$, когда образцы находились в жидком азоте.

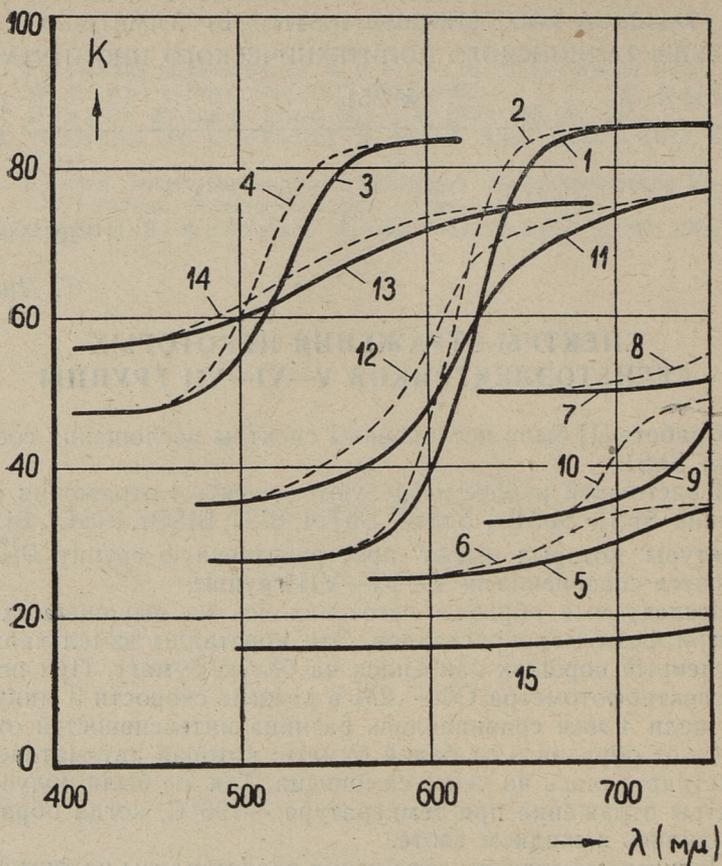
Полученные спектры отражения представлены на фигуре 1.

На основании частоты границы поглощения были вычислены ширины запрещенной зоны. По смещению границы по-

Таблица 1

	T_c $^{\circ}C$	$\lambda_{гр}$ Å	E_g $эв$	β $эв/град$
$SbSI$	+22,5	6500	1,91	$16 \cdot 10^{-4}$
$SbSBr$	-187	5490	2,26	$2,8 \cdot 10^{-4}$
$SbSeI$	-50?	7200	1,72	$4,7 \cdot 10^{-4}$
$SbTeI^*$	—	7500	1,65	—
$BiSI$	-158	7400	1,67	$4,2 \cdot 10^{-4}$
$BiSBr$	-164	6460	1,92	$3,7 \cdot 10^{-4}$
$BiSCl$		5880	2,11	$3,3 \cdot 10^{-4}$
$BiSeI$	-140?	7500		

* При температуре $-196^{\circ}C$.



Фиг. 1. Отражение K (в относительных единицах) в зависимости от длины световой волны.

Соединения при температуре:

1. SbSI	+25° C	8. SbTeI	-196° C
2. SbSI	+6° C	9. BiSI	+18° C
3. SbSBr	+18° C	10. BiSI	-196°
4. SbSBr	-196° C	11. BiSBr	+18° C
5. SbSeI	+18° C	12. BiSBr	-196° C
6. SbSeI	-196° C	13. BiSCl	+18° C
7. SbTeI	+18° C	14. BiSCl	-196° C

глощения в зависимости от температуры определялся коэффициент изменения ширины запрещенной зоны β в формуле

$$E_g = E_{g0} - \beta T.$$

Длины волн границы поглощения $\lambda_{гр}$, ширины запрещенной зоны E_g при комнатной температуре и коэффициенты изменения ширины запрещенной зоны β приведены в таблице. Также приводятся по данным работы [2, 3] температуры сегнетоэлектрического фазового перехода T_c .

Найденные границы поглощения согласуются с данными работы [4], полученными по максимуму фототока, и работы [5], полученными по смещению максимума фототока с температурой.

Из настоящей работы видно, что максимум фототока приходится на край границы поглощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Kern, J. Phys. Chem. Solids, 23, 249, 1962.
2. Т. Пикка. Электропроводность некоторых сегнетоэлектриков V—VI—VII группы. Кристаллография (в печати).
3. Т. Пикка. Сегнетоэлектрический фазовый переход в BiSBr. См. настоящий сборник, стр. 9—12.
4. R. Nitsche, W. J. Merz. J. Phys. Chem. Solids, 13, 154, 1960.
5. E. Fatuzzo, G. Harbeka, W. J. Merz, R. Nitsche, H. Roetschi, W. Ruppel. Phys. Rev. 127, 2036, 1962.

УДК 669.14 : 548.735

Х. Ууэмыйс, У. Пильвре

РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЛИ МАРКИ Ст. 3 ПРИ УДАРНОМ ИЗНОСЕ

Возникающие при ударном износе искажения кристаллической решетки стали относительно мало изучены. Первые работы по этому вопросу, давшие ценный вклад для лучшего понимания механизма ударного износа и создавшие основы для дальнейших исследований в данной области., проведены в Таллинском политехническом институте [1, 2].

В дальнейшем во ВНИПИС'е исследовалось влияние концентрации абразивной струи и ее средней скорости на искажение кристаллической решетки стали Ст. 3.

Методика исследования

Размеры образцов из стали Ст. 3 $21 \times 25 \times 4$ мм. Изнашиваемые поверхности образцов шлифовались до чистоты поверхности $\nabla 7$. Для снятия внутренних напряжений все образцы отжигались в вакуумной печи при температуре 650°C в течение 1 часа с последующим охлаждением вместе с печью. Отожженные образцы взвешивались на аналитических весах с точностью $\pm 0,1$ мг.

Изнашивание производилось на центробежном ускорителе [3] со специальным ротором, обеспечивающим высокие концентрации абразивной струи.

Абразивным материалом служили сухие фракции песка $d \leq 0,63$ мм карьера «Мяннику». Исследование зависимости микроискажений кристаллической решетки от концентрации абразива проводилось при скорости абразивной струи $V = 115$ м/сек и угле атаки 90° . Количество образцов при каждой концентрации до — 4.

При каждом опыте на образец расходовалось константное количество песка. Изменение концентрации абразива достигалось изменением скорости подачи песка на ротор центробежного ускорителя. Концентрация абразива менялась в пределах от 2,1 до 213 г/см² сек.

После изнашивания до рентгенографирования образцы хранились в жидком азоте для предотвращения возможной релаксации.

При исследовании зависимости искажений кристаллической решетки от скорости абразивной струи изнашивание производилось при углах атаки 30° и 90° и концентрации абразива $30 \text{ г/см}^2 \text{ сек}$. Скорость струи изменялась от 16 до $168,5 \text{ м/сек}$. При каждой скорости испытывалось до 6 образцов.

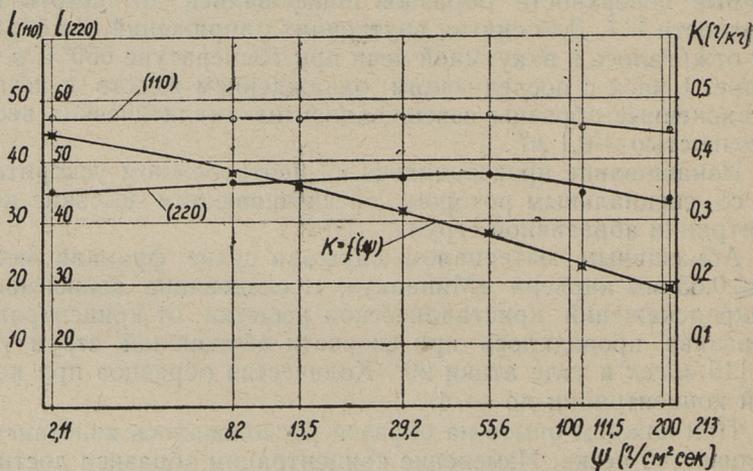
Рентгенографирование производилось на установке УРС-50 ИМ излучением железа. Образец устанавливался в неподвижном держателе. Ширина линии определялась как частное от деления площади кривой интенсивности на максимальную высоту линии. Площадь измерялась планиметром. Окончательный результат дается как арифметическое среднее, полученное от всех образцов, изношенных в одинаковых условиях.

В рассматриваемой работе не ставили задач классификации причин уширения линий, а следили только за суммарным расширением рентгеновских линий.

После рентгенографирования образцы взвешивались на аналитических весах для определения потери веса и расчета интенсивности изнашивания.

Результаты рентгенографических исследований

На фигуре 1 изображена зависимость ширины рентгеновских линий (110) и (220) от концентрации абразивной струи.



Фиг. 1. Зависимость ширины рентгенографических линий (110) и (220) от концентрации абразивной струи и зависимость интенсивности изнашивания от концентрации абразивной струи ψ при $v = 115 \text{ м/сек}$, $\alpha = 90^\circ$

На том же графике приведена кривая интенсивности изнашивания в зависимости от концентрации.

Как видно, в области высоких концентраций наблюдается уменьшение ширины линий (110) и (220), а с увеличением концентраций значительно уменьшается интенсивность изнашивания.

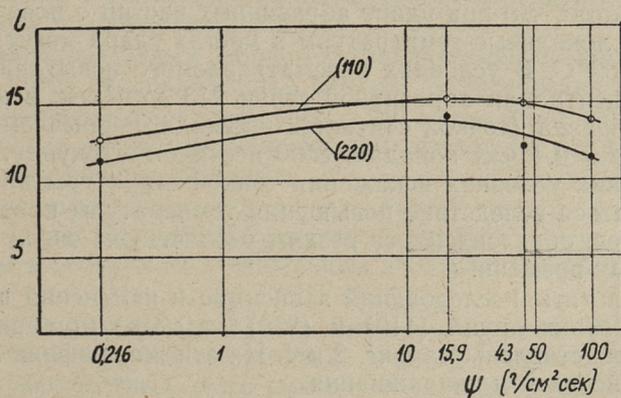
Остается несколько неясным характер изменения ширины рентгеновских линий при очень низких концентрациях, так как в настоящих опытах не удалось получить концентраций ниже $2,1 \text{ г/см}^2 \text{ сек}$, но по характеру хода кривой ширины рентгеновской линии можно предполагать, что ширина линий будет уменьшаться в направлении более низких концентраций.

Изменения ширины линии (110) в этом отношении более неопределенны, так как чувствительность рентгенографического метода здесь низкая.

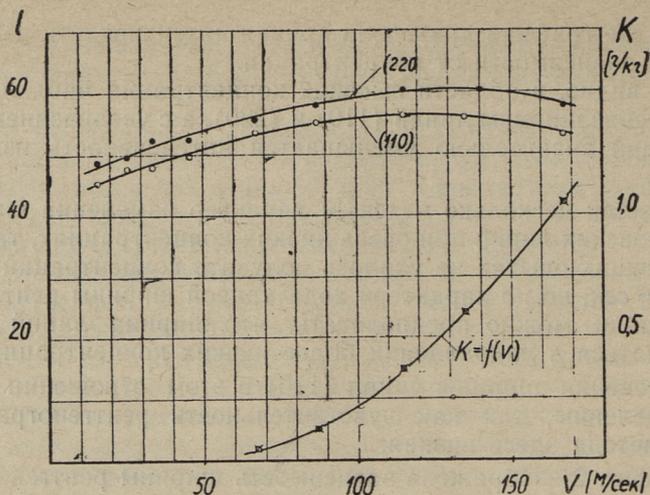
На фиг. 2 изображена зависимость ширины рентгеновских линий (110) и (220) от концентрации абразивной струи при угле атаки 30° .

Можно предполагать, что на кривых изменения рентгеновских линий существует в определенном диапазоне концентраций максимум ширины линии, расположение которого зависит от угла атаки и скорости абразивной струи.

При рассмотрении кривых интенсивности изнашивания на графике фиг. 1 можно предположить, что причиной уменьшения интенсивности изнашивания может быть изменение скорости струи как наиболее влиятельного фактора в процессе ударного износа. Но как показали проведенные опыты [4], уве-



Фиг. 2. Зависимость ширины рентгенографических линий (110) и (220) от концентрации абразивной струи ψ при $v = 115 \text{ м/сек}$, $\alpha = 30^\circ$



Фиг. 3. Зависимость ширины рентгенографических линий (110) и (220) от скорости абразивной струи и зависимость интенсивности изнашивания от скорости абразивной струи ($\alpha = 90^\circ$)

лишение концентрации абразивной струи не оказывает существенного влияния на скорость абразивной струи.

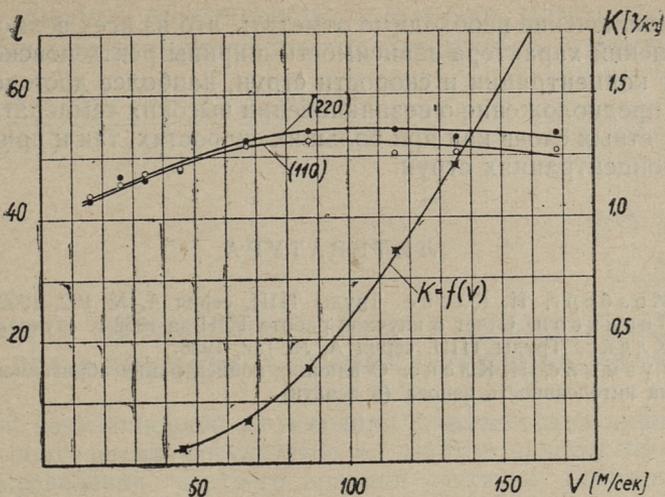
Причиной, обуславливающей уменьшение ширины рентгеновских линий при высоких концентрациях, может быть повышение температуры в поверхностных слоях металла за счет резкого увеличения числа абразивных частиц, падающих на поверхность образца в единицу времени.

Известно, что при ударе абразивных частиц о поверхность образца локальные температуры в местах удара могут превышать 1000°C . В условиях рассматриваемого испытания, т. е. при концентрации абразивной струи $213 \text{ г/см}^2 \text{ сек}$, в каждую точку образца (точкой считается площадь, покрываемая песчинкой $d = 0,4 \text{ мм}$) попадает 3500 песчинок в секунду.

В таких условиях искажения тонкой структуры начинают уменьшаться вследствие повышения температуры поверхностных слоев, обусловленного резким увеличением числа ударов в единицу времени.

Результаты исследований зависимости изменений ширины рентгеновских линий (110) и (220) от скорости абразивной струи представлены на фиг. 3 и 4. На эти же графики нанесены интенсивности изнашивания.

Целью этих испытаний ставилось выяснение и подтверждение результатов, полученных при исследованиях влияния концентрации. Если при увеличении средней скорости струи также наблюдалось бы уменьшение ширины рентгеновских линий,



Фиг. 4. Зависимость ширины рентгенографических линий (110) и (220) от скорости абразивной струи и зависимость интенсивности изнашивания от скорости абразивной струи ($\alpha = 30^\circ$)

это служило бы подтверждением гипотезы о происходящих в поверхностных слоях металла процессах отжига.

С другой стороны, если с увеличением скорости струи увеличилась бы ширина линий, можно было бы предполагать, что наблюдаемое уменьшение ширины рентгеновских линий обуславливается снижением скорости удара абразивных частиц при больших концентрациях.

В диапазоне малых скоростей с увеличением скорости абразивной струи увеличивается и ширина рентгеновских линий.

В диапазоне скоростей 110...140 м/сек (при угле атаки 90°) кривые достигают максимума и начинают медленно падать с увеличением скорости.

Аналогичный характер имеют кривые ширины рентгеновских линий (110) и (220) при угле атаки 30° , но с менее выраженным максимумом и снижением в сторону больших скоростей.

Одним объяснением такого характера изменений ширины рентгеновских линий может быть также повышение температуры поверхностных слоев выше температуры отжига при высоких скоростях струи. Это, в свою очередь, подтверждает возможность появления изменений в механизме изнашивания, начиная со скоростей, при которых наблюдается интенсивное повышение температуры поверхностных слоев.

В заключение необходимо отметить, что из всех возможных объяснений характера зависимости ширины рентгеновской линии от концентрации и скорости струи, наиболее достоверным будет предположение о возникновении высоких температур поверхностных слоев как при больших скоростях, так и при больших концентрациях струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Мозберг, И. Клейс. Труды ТПИ, серия А, № 192, 1962.
2. Х. Лепиксон. Отчет о научной работе ТПИ за 1962 г. (рукопись).
3. И. Клейс. Труды ТПИ, серия А, № 152, 1958.
4. Х. Ууэмыйс, И. Клейс. О влиянии концентрации абразивной струи на интенсивность износа (в печати).

УДК 539.107.4

Л. Паккас

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ СЧЕТЧИКА ГЕЙГЕРА-МЮЛЛЕРА

При ионизационной регистрации рентгеновских линий точность получаемых результатов во многом зависит от точности определения мертвого времени счетчика Гейгера-Мюллера (Г-М-а) [1]. Поправка на просчеты обычно вычисляется по формуле [2—4]

$$n = \frac{n_u}{1 - n_u \tau}, \quad (1)$$

где n — истинная скорость счета,
 n_u — измеренная скорость счета,
 τ — эффективное мертвое время счетчика.

Из этой формулы можно вычислить эффективное мертвое время, если определены истинная скорость счета и наблюдаемая скорость счета. В работах [5] и [6] предлагается графический метод определения мертвого времени, основанный на вычерчивании графика зависимости истинной скорости счета от наблюдаемой скорости счета.

Оба эти способа основываются на ослаблении рентгеновского пучка в точно известное число раз до уровня, при котором просчеты из-за мертвого времени становятся пренебрежимо малыми. Для этого используются поглощающими фольгами. Толщина фольги определяется с большой погрешностью и по всей фольге колеблется в некоторых пределах.

Однако основным недостатком метода ослабления пучка поглощением является изменение спектрального состава излучения и как следствие этого — изменение эффективности счетчика. Даже монохроматизированный отражением от монокристалла пучок рентгеновских лучей содержит гармоники с длиной волны в целое число раз меньшие, чем длина волны характеристического излучения.

При определении мертвого времени методом сложения двух источников в качестве источников используются обычно два

отверстия в пластинке, перекрывающей рентгеновский пучок. Закрывая поочередно то одно, то другое отверстие, определяют скорость счета для каждого отверстия в отдельности, а затем для обоих отверстий вместе.

Существенным недостатком данного метода является необходимость измерять и складывать малые интенсивности, при которых еще не сказываются потери счета. Однако и сумма малых интенсивностей недостаточно велика для достижения достаточно больших просчетов, позволяющих точнее вычислить мертвое время. С другой стороны, измерение малых интенсивностей связано с большой затратой времени, в течение которого режим работы рентгеновской установки может измениться.

Оциллографические и другие более сложные методы [1] применяются редко, так как они требуют для осуществления дополнительной, иногда довольно сложной вспомогательной аппаратуры.

Таким образом видим, что все доступные в обычных лабораторных условиях методы определения эффективного мертвого времени счетчиков Г-М-а имеют существенные недостатки и, пользуясь ими, трудно получить точные результаты. Ниже предлагаем простой и свободный от вышеуказанных недостатков метод определения мертвого времени при помощи контрольного счетчика, который применяется обычно для контроля постоянства режима работы рентгеновской трубки и введения поправок при точных измерениях интенсивности [7].

Выражение (1) можно представить в виде

$$\tau = \frac{1}{n_u} - \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Если выбрать щель перед контрольным счетчиком так, что скорость счета не будет превышать 80—100 импульсов в секунду, то истинная скорость счета исследуемого рабочего счетчика будет пропорциональной скорости счета контрольного счетчика n_k , т. е.

$$n = an_k, \quad (3)$$

где a — коэффициент пропорциональности. Подставляя (3) в (2) и преобразуя, получим:

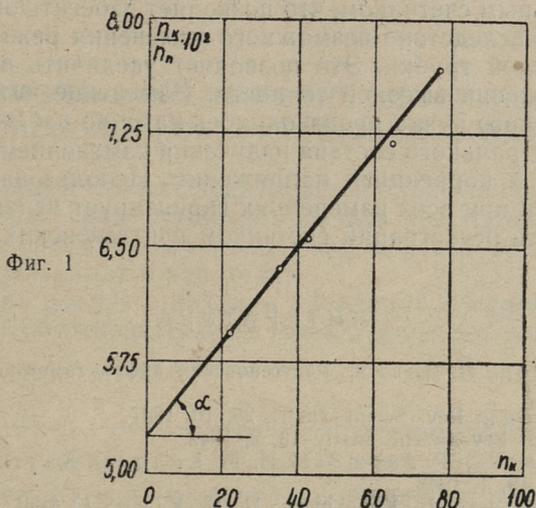
$$\frac{n_k}{n_u} = \tau n_k + \frac{1}{a}. \quad (4)$$

и

$$\tau = \frac{\frac{n_{k2}}{n_{u2}} - \frac{n_{k1}}{n_{u1}}}{n_{k2} - n_{k1}}, \quad (5)$$

где индекс 1 относится к измерению при одной и индекс 2 — при другой интенсивности рентгеновского пучка.

Выражением (5) можно пользоваться при аналитических вычислениях, а выражение (4) есть уравнение прямой с угловым коэффициентом τ в координатах n_k и $\frac{n_k}{n_u}$ (фиг. 1).



Для построения прямой достаточно иметь две точки, т. е. нужно определить одновременно скорости счета как контрольного, так и рабочего счетчика только при двух интенсивностях. Практически, однако, для избежания случайных ошибок целесообразно получить три—четыре точки.

Разработанная методика проверялась нами при определении эффективного мертвого времени ряда счетчиков Г-М-а типа МСТР-4. Исследуемый счетчик находился в рабочем положении и регистрировал фон рассеянных рентгеновских лучей сильно наклепанным медным образцом. Трубка типа БСВ-6 с антикатодом Си. Контрольный счетчик находился у второго окна трубки и регистрировал в то же время фон лучей, отраженных от второго медного образца. Скорость счета обоих счетчиков находилась делением числа импульсов, зарегистрированных пересчетными схемами, на время счета. Результаты были обработаны аналитически по формуле (5), а также графически (фиг. 1), где по наклону прямой можно было определить среднее значение мертвого времени

$$\tau = \text{tg } \alpha.$$

Нужно отметить, что графическое представление результатов измерения имеет большую наглядность и позволяет усреднять результаты при проведении прямой. В проведенных нами измерениях отклонение экспериментальных точек от прямой не превышало 2—3%.

Большим преимуществом предлагаемого метода считаем одновременную регистрацию скорости счета как рабочим, так и контрольным счетчиком, что позволяет избегать ошибок, возникающих вследствие возможного изменения режима работы рентгеновской трубки. Это позволяет увеличить время счета для достижения высокой точности. Изменение интенсивности рентгеновского пучка производилось нами во избежание изменения спектрального состава излучения изменением тока накала трубки и коррекцией напряжения. Использование только одной щели при всех измерениях гарантирует неизменную эффективность регистрации счетчиком рентгеновских квантов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Хейкер, Л. Зевин. Рентгеновская дифрактометрия. Физматгиз, 1963.
2. R. H. Bragg. *Rev. Scient. Instr.*, 28, 10, 1957.
3. Y. Beers. *Rev. Scient. Instr.*, 13, 2, 1942.
4. R. Peninsky, P. Jarmotz, H. M. Long, D. Sayre. *Rev. Scient. Instr.*, 19, 1, 1948.
5. L. Alexander, E. Kummer, H. P. Klug. *J. Appl. Phys.*, 20, 8, 1949.
6. K. Lonsdale. *Am. Mineralog.*, 32, 1948.
7. R. Rabillon. *Acta Crystallogr.*, 7, 10, 1954.

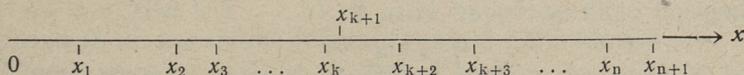
УДК 330.115

М. Левин, О. Оя

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В настоящей заметке доказывается одна элементарная теорема, которая сразу позволяет решать некоторые задачи на отыскание оптимального положения объекта обслуживания. Заметка примыкает к работе [1].

Пусть на оси Ox с началом координат O справа от O заданы $n + 1$ последовательных точек с координатами $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{n+1}$.



Пусть далее p и q — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $p + q = 1$.

Введем в рассмотрение функцию

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{n+1} v_i(x) |x - x_i|, \quad (1)$$

где

$$v_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq x_{k+1} \text{ и } x < x_i < x_{k+1}, \\ q & \text{при } x \leq x_{k+1} \text{ и } x_i \leq x \text{ или } x_i > x_{k+1}, \\ 1 & \text{при } x > x_{k+1} \text{ и } x_{k+1} < x_i \leq x, \\ q & \text{при } x > x_{k+1} \text{ и } x_i < x_{k+1} \text{ или } x_i > x \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \dots, k, k + 2, \dots, n + 1)$,

$$v_{k+1}(x) = \begin{cases} (n - k)p & \text{при } x \leq x_{k+1}, \\ kp & \text{при } x > x_{k+1}. \end{cases}$$

Через z обозначим координату точки, в которой на отрезке $[0, x_{n+1}]$ функция $S_k(x)$ принимает наименьшее значение. Теорема. Пусть $[x]$ означает целую часть числа x и

$$v = \left[\frac{n}{1+q} \right], \quad \mu = \left[\frac{nq}{1+q} + 1 \right].$$

Если $\nu \leq k$, то z есть координата произвольной точки отрезка $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ в случае целого значения $\frac{n}{1+q}$ и $z = x_{k+1}$ в противном случае.

Если $\mu \geq k+1$, то z есть координата произвольной точки отрезка $[x_\mu, x_{\mu+1}]$ в случае целого значения $\frac{nq}{1+q}$ и $z = x_{\mu+1}$ в противном случае.

Если $\nu > k$ и $\mu < k+1$, то $z = x_{k+1}$.

Доказательство. Пусть z_1 и z_2 — координаты точек, в которых функция $S_k(x)$ принимает наименьшие значения соответственно на отрезках $[0, x_{k+1}]$ и $[x_{k+1}, x_{n+1}]$.

Рассмотрим отрезок $[0, x_{k+1}]$ и найдем z_1 .

Пусть $0 < \Delta x < x_{j+1} - x_j$. Исходя из (1), найдем

$$\Delta S_k(x_j) = S_k(x_j + \Delta x) - S_k(x_j) = \Delta x \cdot [j(1+q) - n].$$

Отсюда видим, что с ростом j величина $\Delta S_k(x_j)$ возрастает, оставаясь положительной для всех j , начиная с некоторого. Функция $S_k(x)$ с ростом x убывает, пока $\Delta S_k(x_j) < 0$, т. е. пока

$$j < \frac{n}{1+q}. \quad (2)$$

Пусть $\nu \leq k$.

а) Если число $\frac{n}{1+q}$ целое, то из (2) следует, что функция $S_k(x)$ будет иметь наименьшее значение при $x = x_\nu$. Так как при этом $\Delta S_k(x_\nu) = 0$, то функция $S_k(x)$ не меняет своего значения на отрезке $[x_\nu, x_{\nu+1}]$. Отсюда мы получаем, что z_1 есть произвольная точка отрезка $[x_\nu, x_{\nu+1}]$.

б) Если число $\frac{n}{1+q}$ дробное, то отрезок $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ является последним, на котором $S_k(x)$ убывает, т. е. $z_1 = x_{\nu+1}$.

Пусть теперь $\nu > k$. Тогда $\Delta S_k(x_j) < 0$ на всем отрезке $[0, x_{k+1}]$ и этим $z_1 = x_{k+1}$.

Совершенно аналогично рассматривается отрезок $[x_{k+1}, x_{n+1}]$ и находится значение z_2 . Мы получим, что z_2 есть произвольная точка отрезка $[x_\mu, x_{\mu+1}]$ в случае целого числа $\frac{nq}{1+q} \geq k$ и совпадает с $x_{\mu+1}$ в случае дробного числа $\frac{nq}{1+q} \geq k$; если же $\frac{nq}{1+q} < k$, то $z_2 = x_{k+1}$.

Так как неравенства $\nu < k$ и $\mu > k+1$ одновременно невозможны, то z_1 и z_2 не могут быть одновременно внутренними

точками своих отрезков. Отсюда (так как конец первого отрезка является началом второго) следует, что $z = z_1$ или $z = z_2$ (в зависимости от того, какая из z_1, z_2 является внутренней точкой соответствующего отрезка), или $z = z_1 = z_2 = x_{k+1}$, что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 1. Теорема остается в силе (как это видно из доказательства), если Ox — кривая линия и расстояния измеряются вдоль нее.

З а м е ч а н и е 2. В теореме не налагалось ограничения на величину расстояний между соседними точками, эти расстояния могут быть и сколь угодно малы. Отсюда следует, что теорема остается в силе и в случае, когда некоторые точки совпадают.

Рассмотрим применение теоремы к решению следующей задачи.

Пусть нам дан жилой квартал.* Расстояния будем отсчитывать вдоль него от его начала. В квартале функционирует магазин A с координатой x_{k+1} , который обслуживает n квартир с координатами $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_{n+1}$ (координату квартиры можно, например, находить как расстояние от начала квартала до соответствующего подъезда). Считаем, что $x_{i+1} \geq x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В этом квартале надо построить магазин B , не имеющий общих функций с магазином A .

Пусть жильцы каждой квартиры квартала в течение каждого периода времени T (например, T — одни сутки) должны пользоваться один раз услугами магазина B . Через p обозначим вероятность того, что за этот же период жильцы квартала пользуются и услугами магазина A . Спрашивается, в каком месте наиболее целесообразно (оптимально) построить магазин B .

Пусть $S_k(x)$ означает суммарное расстояние от всех квартир до магазина B (с координатой x). При вычислении величины $S_k(x)$ мы учитываем следующее: если жилец квартала, пользуясь услугами магазина A , должен при этом пройти мимо магазина B , то мы считаем расстояние от квартиры этого жильца до магазина B равным 0 (так как это расстояние он проходит в любом случае). Если это иметь в виду, то мы получаем для функции $S_k(x)$ выражение, даваемое формулой (1).

За критерий оптимальности расположения магазина B выберем наименьшее значение суммарного расстояния $S_k(x)$. Тогда оптимальную координату z для магазина B нам сразу дает вышедоказанная теорема.

* Под кварталом понимаем ряд последовательных домов, расположенных по одной стороне улицы.

В качестве применения теоремы рассмотрим еще одну задачу. Вдоль кривой Ox расположены n объектов (например, колхозов) с координатами x_1, x_2, \dots, x_n . Требуется найти положение z объекта обслуживания (например, маслозавода), при котором сумма расстояний от этого объекта до заданных объектов была бы наименьшей. Решение этой задачи: $z = x_{m+1}$ при $n = 2m + 1$ и z есть произвольная точка отрезка $[x_m, x_{m+1}]$ при $n = 2m$. Это сразу получается из теоремы (или из предыдущей задачи), если в ней положить $p = 0, k = n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Файнзильбер, Экстремальные методы в экономических исследованиях по наивыгоднейшему расположению объектов. Математические методы в планировании и эксплуатации на транспорте. Москва, 1961, 86—92.

УДК 517.384

Ф. Вихманн

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ФОРМАЛЬНОМ УМНОЖЕНИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим два несобственных интеграла Римана $\int_0^{\infty} a(t) dt$ и $\int_0^{\infty} b(t) dt$. Их произведением Коши называется интеграл $\int_0^{\infty} c(x) dx$, где

$$c(x) = \int_0^x b(x-t)a(t) dt.$$

Если один из сомножителей есть интеграл сходящийся, а другой — абсолютно сходящийся, то их произведение Коши есть сходящийся интеграл. Однако перемножение двух сходящихся интегралов может дать расходящийся интеграл. Поэтому представляет интерес следующая проблема. На функцию $a(t)$ наложим условие, которое слабее сходимости интеграла $\int_0^{\infty} a(t) dt$, а на функцию $b(t)$ — условие, которое сильнее абсолютной сходимости интеграла $\int_0^{\infty} b(t) dt$. Возникает вопрос, как должны быть связаны эти два условия, чтобы выражение

$$\int_0^x c(t) dt - \int_0^x a(t) dt \int_0^{\infty} b(t) dt = C(x) - A(x)B = o(1). \quad (1)$$

Если это условие выполнено, то говорят, что $C(x)$ есть интеграл, равносходящийся с $A(x)B$.

Целью настоящей статьи является вывод таких теорем в случае однократных интегралов.

Аналогичные вопросы можно рассматривать и для двойных рядов.

Некоторые результаты, относящиеся к формальному умножению рядов, приведены в монографии Харди [1] и в статье В. П. Третьякова [2]; такие же вопросы для интегралов изучались автором в [3].

Рассматриваемые интегралы являются интегралами Римана; все встречающиеся функции считаются интегрируемыми на конечных интервалах.

Теорема 1. *Если*

$$\int_0^{\infty} (t+1)^{\alpha} |a(t)|^{\beta} dt < \infty \quad (\beta > \alpha + 1, \alpha \geq 0), \quad (2)$$

то достаточным условием для выполнения (1) является условие

$$\int_0^{\infty} (t+1)^{1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}} |b(t)| dt < \infty. \quad (3)$$

В некотором смысле это условие минимально.

Доказательство.

Поскольку

$$C(x) - A(x)B = - \int_0^x a(t) dt \int_{x-t}^{\infty} b(y) dy,$$

то достаточно показать, что правая часть этого равенства при $x \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Для этого представим ее в виде

$$\begin{aligned} r(x) &= \int_0^x a(t) dt \int_{x-t}^{\infty} b(y) dy = \int_0^h a(t) dt \int_{x-t}^{\infty} b(y) dy + \\ &+ \int_0^{x-h} b(y) dy \int_{x-y}^x a(t) dt + \int_{x-h}^{\infty} b(y) dy \int_h^x a(t) dt = I + II + III. \end{aligned}$$

Выберем h таким, что $\int_h^\infty (t+1)^\alpha |a(t)|^\beta dt < \varepsilon$. Если h зафиксировано, то, ввиду абсолютной сходимости $\int_0^\infty |b(t)| dt$, можно найти X , что $|I| < \varepsilon$ для всех $x \geq X$. Для второго интеграла, в силу неравенства Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} |II| &= O(1) \int_0^{x-h} |b(y)| \left(\int_{x-y}^x (t+1)^\alpha |a(t)|^\beta dt \right)^{\frac{1}{\beta}} \times \\ &\times \left(\int_{x-y}^x \frac{dt}{(t+1)^{\frac{\alpha}{\beta-1}}} \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} dy = O(1) \int_0^{x-h} |b(y)| \left(\int_{x-y}^x (t+1)^\alpha |a(t)|^\beta dt \right)^{\frac{1}{\beta}} \times \\ &\times \left(\int_0^y \frac{dt}{(t+1)^{\frac{\alpha}{\beta-1}}} \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} dy = O(1) \int_0^{x-h} [(y+1)^{1-\frac{\alpha}{\beta-1}} - 1]^{\frac{\beta-1}{\beta}} |b(y)| \times \\ &\times \left(\int_{x-y}^x (t+1)^\alpha |a(t)|^\beta dt \right)^{\frac{1}{\beta}} dy = O(1) \int_0^{x-h} (y+1)^{1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}} |b(y)| \times \\ &\times \left(\int_{x-y}^x (t+1)^\alpha |a(t)|^\beta dt \right)^{\frac{1}{\beta}} dy, \end{aligned}$$

что выбором h можно сделать сколь угодно малым. Для третьего интеграла получим

$$\begin{aligned} |III| &= O(1) \int_{x-h}^\infty |b(y)| \left(\int_h^x (t+1)^\alpha |a(t)|^\beta dt \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_h^x \frac{dt}{(t+1)^{\frac{\alpha}{\beta-1}}} \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \times \\ &\times dy = O(1) \left[(x+1)^{1-\frac{\alpha}{\beta-1}} + O(1) \right]^{\frac{\beta-1}{\beta}} \int_{x-h}^\infty |b(y)| dy = \\ &= O(1) (x+1)^{1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}} \int_{x-h}^\infty |b(y)| dy = \\ &= O(1) \int_{x-h}^\infty (y+1)^{1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}} |b(y)| dy, \end{aligned}$$

что при $x \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Покажем, что (3) является минимальным в том смысле, что условие

$$\int_0^{\infty} (y+1)^{1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}-\varepsilon} |b(y)| dy,$$

где $\varepsilon > 0$, уже не гарантирует выполнения условия (1) для всех $a(t)$, удовлетворяющих (2). Для этого выберем

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{(t+2)^{1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}}}{\ln(t+2)} \right) = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}\right) \ln(t+2) - 1}{(t+2)^{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}} \ln^2(t+2)}.$$

Ввиду неравенства Минковского, функция $a(t)$ удовлетворяет условию (2). Функцию $b(t)$ определим равенствами ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$b(t) = \begin{cases} 1, & n \leq t \leq \frac{\ln^2(n+2)}{(n+2)^{2-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}}} + n, \\ 0 & \text{для других } t. \end{cases}$$

Теперь

$$\int_0^{\infty} (y+2)^{1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}} |b(y)| dy > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^2(n+2)}{n+2} = \infty,$$

но

$$\int_0^{\infty} (y+2)^{1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}-\varepsilon} |b(y)| dy < \infty \text{ при любом } \varepsilon > 0.$$

При $n \rightarrow \infty$, где n — число натуральное, выражение

$$\int_0^n a(t) dt \int_n^{\infty} b(y) dy \quad (4)$$

не стремится к нулю. Тогда и $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) \neq 0$.

Интегрированием по частям, если n достаточно велико, получим

$$\int_n^{\infty} b(y) dy = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln^2(k+2)}{(k+2)^{2-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}}} > \int_n^{\infty} \frac{\ln^2(t+2)}{(t+2)^{2-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}}} dt =$$

$$= \frac{2}{(n+2)^{1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}}} \left[\frac{\ln^2(n+2)}{2\left(1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right)} + \frac{\ln(n+2)}{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right)^2} + \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right)^3} \right].$$

Поскольку

$$\int_0^n a(t) dt = \frac{(n+2)^{1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}}}{\ln(n+2)} + O(1),$$

то (4) к нулю не стремится.

Теорема 2. Если

$$\int_0^{\infty} (t+1)^{\beta-1} |a(t)|^{\beta} dt < \infty \quad (\beta > 1), \quad (5)$$

то достаточным условием для выполнения (1) является условие

$$\int_0^{\infty} \ln^{1-\frac{1}{\beta}}(t+1) |b(t)| dt < \infty. \quad (6)$$

В некотором смысле это условие минимально.

Доказательство достаточности можно провести аналогично. Минимальность условия (6) понимается в том смысле, что

$$\int_0^{\infty} \ln^{1-\frac{1}{\beta}-\varepsilon}(t+1) |b(t)| dt < \infty \quad (\varepsilon > 0)$$

уже не обеспечивает выполнения (1) для всех функций $a(t)$, удовлетворяющих условию (5). Для доказательства достаточности выбрать

$$b(t) = \begin{cases} 1, & n \leq t \leq n + \frac{\ln^2 \ln(n+2)}{(n+2) \ln^{2-\frac{1}{\beta}}(n+2)}, \\ 0 & \text{для других } t \end{cases}$$

и

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\ln^{1-\frac{1}{\beta}}(t+2)}{\ln \ln(t+2)} \right).$$

Следствие 1. Если выполнены условие (2) и

$$\int_0^{\infty} (t+1)^{\gamma} |b(t)| dt < \infty,$$

то (1) следует для всех соответствующих $a(t)$ и $b(t)$ только тогда, когда $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta} + \gamma \geq 1$.

Следствие 2. Если выполнены условие (5) и

$$\int_0^{\infty} \ln^{\gamma} (t+1) |b(t)| dt < \infty,$$

то (1) следует для всех соответствующих $a(t)$ и $b(t)$ тогда, когда $\frac{1}{\beta} + \gamma \geq 1$.

Замечание. Случай $\beta < \alpha + 1$ не рассматривается, поскольку тогда $\int_0^{\infty} |a(t)| dt < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Харди. Расходящиеся ряды. М., 1951.
2. В. Третьяков. К теории формального умножения двойных рядов. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, № 5 (24), 1961, 78—85.
3. Ф. Вихманн. О формальном умножении интегралов. Изв. АН Эст. ССР. Физика, математика, 16, № 1, 1967, 45—53.

УДК 517.384

Ф. Вихманн

О ФОРМАЛЬНОМ УМНОЖЕНИИ ДВОЙНЫХ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В настоящей статье рассматривается одно обобщение результатов работы [1] на случай двойных несобственных интегралов Лебега.

Пусть заданы интегралы $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} a(s, t) ds dt$ и $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} b(s, t) ds dt$.

Их произведением называется интеграл $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} c(u, v) du dv$, где

$$c(u, v) = \int_0^u \int_0^v b(u-s, v-t) a(s, t) ds dt.$$

Обозначим $\int_0^x \int_0^y a(u, v) du dv$ и $\int_0^x \int_0^y c(u, v) du dv$ соответственно

через $A(x, y)$ и $C(x, y)$; значение интеграла $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} b(s, t) ds dt$, если он сходится, через B . Если при $(x, y) \rightarrow \infty$ разность

$$C(x, y) - BA(x, y) \rightarrow 0,$$

то будем говорить, что $C(x, y)$ есть интеграл, равносходящийся с $BA(x, y)$.

Ниже рассматривается сходимость $(x, y)_{\lambda} \rightarrow \infty$, под которой понимается стесненная сходимость, т. е. x и y стремятся к бесконечности так, что $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{y}{x} \leq \lambda$, где $\lambda \geq 1$. При доказательстве теоремы используется следующая лемма.

Лемма. Преобразование

$$\omega(x, y) = \int_0^x \int_0^y \gamma(x, y, s, t) a(s, t) ds dt \quad (1)$$

переводит функцию $a(s, t)$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |a(s, t)|^\alpha ds dt < \infty (\alpha > 1),$$

в функцию $\omega(x, y)$, для которой $\lim_{x, y \rightarrow \infty} \omega(x, y) = 0$, тогда, когда выполнены условия

1° $\int_0^x \int_0^y |\gamma(x, y, s, t)|^{\alpha'} ds dt = o(1)$ (для достаточно больших x и y),

$$2^\circ \lim_{x, y \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^y |\gamma(x, y, s, t)|^{\alpha'} ds dt = 0,$$

$$3^\circ \lim_{x, y \rightarrow \infty} \int_0^x \int_0^b |\gamma(x, y, s, t)|^{\alpha'} ds dt = 0,$$

где

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1.$$

Условие 1° необходимо.

Если сходимость $(x, y) \rightarrow \infty$ заменить стесненной сходимостью $(x, y)_\lambda \rightarrow \infty$, то условия 1°—3° должны выполняться для $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{y}{x} \leq \lambda$.

Доказательство достаточности элементарно; доказать необходимость условия 1° можно при помощи теоремы Банаха—Штейнхауса.

Сформулируем результат статьи.

Теорема. Если

$$1^\circ \int_0^\infty \int_0^\infty (s+1)^\alpha (t+1)^\beta |a(s, t)|^\gamma ds dt < \infty (\alpha, \beta > 0, \gamma > 1);$$

$$2^\circ \int_0^\infty \int_0^\infty (s+1)^\delta (t+1)^\varepsilon |b(s, t)| ds dt < \infty (\delta, \varepsilon \geq 0);$$

$$3^\circ \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \delta > 1, \quad \frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \varepsilon > 1;$$

$$4^\circ \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \geq 1, \quad \frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \delta > 1, \quad \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \varepsilon > 1;$$

$$5^\circ \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{2}{\gamma} + \delta \geq 2, \quad \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{2}{\gamma} + \varepsilon \geq 2,$$

то при $(x, y)_\lambda \rightarrow \infty$ $C(x, y)$ есть интеграл, равносходящийся с $BA(x, y)$.

Условий теоремы нельзя ослабить.

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} C(x, y) &= \int_0^x \int_0^y a(s, t) ds dt \int_s^x \int_t^y b(u-s, v-t) dudv = \\ &= BA(x, y) - \int_0^x \int_0^y a(s, t) ds dt \int_0^\infty \int_{y-t}^\infty b(u, v) dudv - \\ &\quad - \int_0^x \int_0^y a(s, t) ds dt \int_{x-s}^\infty \int_0^\infty b(u, v) dudv + \\ &\quad + \int_0^x \int_0^y a(s, t) ds dt \int_{x-s}^\infty \int_{y-t}^\infty b(u, v) dudv = \\ &= BA(x, y) - r_1 - r_2 + r_3, \end{aligned}$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} r_i = 0$.

1) Рассмотрим r_3 в виде преобразования (1), где

$$\gamma(x, y, s, t) = (s+1)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (t+1)^{-\frac{\beta}{\gamma}} \int_{x-s}^\infty \int_{y-t}^\infty b(u, v) dudv,$$

и покажем, что для него выполнены условия леммы. Так как

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{ds}{(x+1-s)^{\frac{\delta\gamma}{\gamma-1}} (s+1)^{\frac{\alpha}{\gamma-1}}} &= O(1) \left[\left(\frac{x}{2} + 1 \right)^{-\frac{\delta\gamma}{\gamma-1}} \int_0^{x/2} (s+1)^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}} ds + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}} \int_{x/2}^x (x+1-s)^{-\frac{\delta\gamma}{\gamma-1}} ds \right], \end{aligned}$$

то для условия 1°, в силу условия 3° теоремы и $\alpha, \beta > 0$, при $\gamma, \delta > 0$ получим $\left(\alpha' = \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \iint_{00}^{xy} \frac{dsdt}{(s+1)^{\frac{\alpha}{\gamma-1}} (t+1)^{\frac{\beta}{\gamma-1}}} \left| \int_{x-s}^{\infty} \int_{y-t}^{\infty} b(u, v) dudv \right|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \\ &= O(1) \iint_{00}^{xy} \frac{dsdt}{(x+1-s)^{\frac{\delta\gamma}{\gamma-1}} (s+1)^{\frac{\alpha}{\gamma-1}} (y+1-t)^{\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}} (t+1)^{\frac{\beta}{\gamma-1}}} \times \\ &\times \left(\int_{x-s}^{\infty} \int_{y-t}^{\infty} (u+1)^{\delta} (v+1)^{\varepsilon} |b(u, v)| dudv \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = o(1). \end{aligned}$$

Если же, например, $\delta = 0$, то

$$p(x, y) = \int_0^x (s+1)^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}} a(x, y, s) ds = o(1),$$

так как $\alpha + 1 > \gamma$ и $\lim_{x, y \rightarrow \infty} a(x, y, s) = 0$ равномерно относительно s . Случаи $\varepsilon = 0$ и $\delta = \varepsilon = 0$ рассматриваются аналогично.

Поскольку для первого условия леммы получена оценка $o(1)$, то автоматически выполнены и два остальных условия.

2) Перейдем к оценке r_2 . Покажем, что для него выполнены условия леммы в случае стесненной сходимости. Выражение r_2 рассмотрим в виде преобразования (1), где

$$\gamma(x, y, s, t) = (s+1)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (t+1)^{-\frac{\beta}{\gamma}} \int_{x-s}^{\infty} \int_0^{\infty} b(u, v) dudv.$$

Для условия 1° получим

$$\begin{aligned} &\iint_{00}^{xy} |\gamma(x, y, s, t)|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} dsdt = \\ &= O(1) \int_0^x \frac{ds}{(s+1)^{\frac{\alpha}{\gamma-1}} (x+1-s)^{\frac{\delta\gamma}{\gamma-1}}} \int_0^y \frac{dt}{(t+1)^{\frac{\beta}{\gamma-1}}} = O(1), \end{aligned}$$

если учесть условие 3° теоремы и неравенства $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \gg 1$
 $\gg 1$, $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \gg 1$, $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{2}{\gamma} + \delta \gg 2$ и $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{y}{x} \leq \lambda$.

Для третьего условия леммы имеем

$$q(x, y) = \int_0^x \int_0^b |\gamma(x, y, s, t)|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} ds dt =$$

$$= O(1) \int_0^x \frac{ds}{(s+1)^{\frac{\alpha}{\gamma-1}} (x+1-s)^{\frac{\delta\gamma}{\gamma-1}}} \int_0^b \frac{dt}{(t+1)^{\frac{\beta}{\gamma-1}}} = o(1),$$

если только $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \delta > 1$ и $\delta > 0$. Если же $\delta = 0$, то

$$q(x, y) = \int_0^x (s+1)^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}} a(x, s) ds = o(1),$$

поскольку $\gamma < \alpha + 1$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x, s) = 0$ равномерно относительно s . Осталось проверить второе условие леммы. Но

$$s(x, y) = \int_0^a \int_0^y |\gamma(x, y, s, t)|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} ds dt =$$

$$= O(1) \int_0^a \int_0^y \frac{ds dt}{(s+1)^{\frac{\alpha}{\gamma-1}} (x+1-s)^{\frac{\delta\gamma}{\gamma-1}} (t+1)^{\frac{\beta}{\gamma-1}}} =$$

$$= O(1) (x+1-a)^{-\frac{\delta\gamma}{\gamma-1}} \int_0^y \frac{dt}{(t+1)^{\frac{\beta}{\gamma-1}}} = o(1)$$

при $(x, y)_\lambda \rightarrow \infty$, если только $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \delta > 1$ и $\delta > 0$. Нетрудно видеть, что и при $\delta = 0$ выполняется $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} s(x, y) = 0$.

3) Рассуждения для доказательства $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} r_1 = 0$ аналогичны;

используются условие 3° теоремы и условия $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \gg 1$,
 $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{2}{\gamma} + \varepsilon \gg 2$, $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \varepsilon > 1$.

Первая часть теоремы доказана. Осталось показать минимальность соответствующих условий.

а) Условие $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \delta > 1$. Выберем $b(u, v) = 6(s+2)^{-1} \ln^{-5/4}(s+2)(t+2)^{-4}$ и $a(s, t) = (s+2)^{-2} \ln^{-1}(s+2) \times \times (t+2)^{-1} \ln^{-1/2}(t+2)$. Здесь $\alpha = 7$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\delta = 0$ и $\varepsilon < 3$ (пусть одновременно $\varepsilon > 0$). Все условия теоремы, кроме вышеуказанного, выполнены. Из доказательства видно, что $\lim_{x, y \rightarrow \infty} r_3 = 0$. Но при $(x, y)_\lambda \rightarrow \infty$

$$r_2 = \int_0^x (s+2)^{-2} \ln^{-1}(s+2) \ln^{-1/4}(x-s+2) ds \int_0^y (t+2)^{-1} \times \times \ln^{-1/2}(t+2) dt = o(1) + 2 \ln^{1/2}(y+2) \ln^{-1/4}(x+2) \int_0^x (s+2)^{-2} \times \times \ln^{-1}(s+2) ds \rightarrow +\infty.$$

б) Условие $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{2}{\gamma} + \delta \geq 2$. Выберем $b(u, v) = = \frac{\sigma}{3} (u+1)^{-1-\sigma} (v+1)^{-4}$, где σ произвольно малое положительное число. Здесь $\frac{1}{4} < \delta < \sigma < \frac{1}{2}$ и $\varepsilon < 3$ (пусть одновременно $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$). Будем рассматривать только такие $a(s, t)$, для которых $\alpha = \beta = 0,5$ и $\gamma = 2$. Все условия теоремы, кроме вышеуказанного, выполнены, и потому $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} r_3 = \lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} r_1 = 0$.

Тогда

$$r_2 = \int_0^x \int_0^y \frac{a(s, t) ds dt}{(x-s+1)^\sigma}.$$

Если $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} r_2 = 0$ было бы для всех соответствующих $a(s, t)$, то должно было бы выполняться условие 1° леммы. Но при $(x, y)_\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{ds dt}{(s+1)^{1/2} (t+1)^{1/2} (x-s+1)^{2\sigma}} = = o(1) + 2(y+1)^{\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{ds}{(s+1)^{1/2} (x-s+1)^{2\sigma}} \rightarrow +\infty.$$

в) Условие $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \geq 1$. Выберем $b(u, v) = \frac{1}{4}(u+1)^{-3}(v+1)^{-3}$. Будем рассматривать только такие $a(s, t)$, для которых $\alpha = \beta = 0,5 - \sigma$, $\gamma = 2$, где σ произвольно малое положительное число. Очевидно, что все условия теоремы, кроме вышеуказанного, выполнены. Поэтому $\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} r_3 = 0$.

Теперь

$$r_2 = \int_0^x \int_0^y \frac{a(s, t) ds dt}{(x-s+1)^2}.$$

Поскольку при $(x, y)_\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{ds dt}{(s+1)^{0,5-\sigma} (x-s+1)^4 (t+1)^{0,5-\sigma}} = O(1) + \\ + \frac{(y+1)^{0,5+\sigma}}{0,5+\sigma} \int_0^x \frac{ds}{(s+1)^{0,5-\sigma} (x-s+1)^4} \rightarrow +\infty,$$

то необходимое условие 1° леммы не выполнено и $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} r_2 \neq 0$

хоть для одной соответствующей $a(s, t)$. Тогда и по-прежнему $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} (r_1 + r_2) \neq 0$ для этой же $a(s, t)$.

г) Условие $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \delta > 1$. Выберем $b(u, v) = \frac{10}{3}(u+2)^{-1} \ln^{-1,1}(u+2)(v+1)^{-4}$. Очевидно $\delta = 0$, $0 < \epsilon < 3$. Пусть $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$. Тогда

$$r_2 = \int_0^x \int_0^y \frac{a(s, t) ds dt}{\ln^{0,1}(x-s+2)}.$$

Здесь $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \delta = 1$, а все другие условия выполнены. Если $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} r_2 = 0$ было бы для всех соответствующих $a(s, t)$, то должно было бы выполняться условие 1° леммы. Но при $(x, y)_\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{ds dt}{(s+1) \ln^{0,2}(x-s+2) (t+1)^2} = o(1) +$$

$$+ \int_0^x \frac{ds}{(s+1) \ln^{0,2}(x-s+2)} \geq o(1) + \frac{\ln(x+1)}{\ln^{0,2}(x+2)} \rightarrow +\infty.$$

Значит, найдется $a(s, t)$, для которой $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} r_2 \neq 0$. Поскольку

$$-r_1 - r_2 + r_3 = -r_2 - \int_0^x \int_0^y a(s, t) ds dt \int_0^{x-s} \int_{y-t}^\infty b(u, v) du dv,$$

то для этой же функции $|a(s, t)| \lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} (r_3 - r_1 - r_2) \neq 0$.

д) Условие $\alpha > 0$. Выберем $b(u, v) = \frac{1}{16}(u+1)^{-5} \cdot (v+1)^{-5}$ и будем рассматривать только такие $a(s, t)$, для которых $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2$. Поскольку при $(x, y)_\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{ds dt}{(x-s+1)^8 (t+1)} \rightarrow +\infty,$$

то $\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} (r_3 - r_2 - r_1) = 0$ не для всех соответствующих $a(s, t)$.

Теорема полностью доказана .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Вихманн. Некоторые теоремы о формальном умножении несобственных интегралов. См. настоящий сборник, стр. 31—36.

УДК 517.948

Х. Коппель

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА СТЕФФЕНСЕНА

1. Для приближенного решения нелинейного операторного уравнения

$$P(x) = 0 \quad (1)$$

рассмотрим обобщенный метод Стеффенсена *

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n P(x_n), \quad (2)$$

где $\Lambda_n = [P(\tilde{x}_n, x_n)]^{-1}$, $\tilde{x}_n = x_n + \gamma P(x_n)$ (γ — вещественное число), $P(\tilde{x}_n, x_n)$ — первая разделенная разность оператора $P(x)$.

Установим условия:

1° Элемент x_0 приближенно удовлетворяет уравнению (1), причем

$$\|P(x_0)\| \leq \eta_0;$$

2° для x_0 оператор $P(\tilde{x}_0, x_0)$ имеет обратный

$$\Lambda_0 = [P(\tilde{x}_0, x_0)]^{-1} \text{ и } \|\Lambda_0\| \leq B_0;$$

3° $\|P(\tilde{x}_0, x_0)\| \leq M_0$;

4° для любых x', x'', x''' из некоторой замкнутой сферы S справедливы оценки (ср. [4])

$$\text{а) } \|P(x', x''') - P(x'', x''')\| \leq K\|x' - x''\|;$$

$$\text{б) } \|P(x', x'') - P(x', x''')\| \leq K\|x'' - x'''\|;$$

$$\text{5° } \|P(x', x'')\| \leq M.$$

По сравнению с условиями, установленными в статье [3], существенная разница заключается именно в форме условия 4°. В [3] для исследования сходимости обобщенного метода Стеффенсена была использована оценка И. В. Шмидта [5]:

* Отметим, что сходимость обобщенного метода Стеффенсена исследована и в статьях [1—3].

$$\begin{aligned} & \|P(x', x'') - P(x'', x''')\| \leq \\ & \leq K'\|x' - x'''\| + K''(\|x' - x''\| + \|x'' - x'''\|). \end{aligned} \quad (3)$$

В данной статье эта оценка заменена оценками 4° а) и б), которые для случая векторной функции от векторного аргумента установлены в статье [4]. Легко видеть, что из оценок 4° а) и б) вытекает оценка:

$$\|P(x', x'') - P(x'', x''')\| \leq K(\|x' - x''\| + \|x'' - x'''\|). \quad (4)$$

Оценки в виде 4° а) и б) можно получить и для других типов операторов, например, для операторов, связанных с системами интегральных уравнений типа Фредгольма. Оценки (3) и (4) в общем несравнимы между собой (ср. [4]).

Следует отметить, что при установленных условиях доказательства теорем о сходимости обобщенного метода Стеффенсена несколько проще, чем в [3]. Но так как в общем доказательства нижеследующих теорем аналогичны доказательствам соответствующих теорем из [3], мы приведем только их формулировки.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1°—4° и

$$h_0 + \sqrt{L_0 k_0} \leq 1,$$

причем в качестве S выбрана сфера

$$\|x - x_0\| \leq R,$$

тогда уравнение (1) имеет в сфере

$$\|x - x_0\| \leq r$$

решение x^* , к которому последовательность (2) сходится со скоростью

$$\|x^* - x_n\| \leq B_0 \eta_0 S_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Введены обозначения:

$$k_0 = K(1 + |\gamma| M_0) B_0^2 \eta_0;$$

$$h_0 = k_0 + K(|\gamma| k_0 + B_0) B_0 \eta_0;$$

$$L_0 = \frac{h_0 |\gamma| + B_0(1 + |\gamma| M_0)}{B_0(1 + |\gamma| M_0)};$$

$$S_n = \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1-h_0}{L_0} \right)^i \left[\frac{L_0 k_0}{(1-h_0)^2} \right]^{2^{i-1}} \quad (n = 0, 1, \dots);$$

$$r = B_0 \eta_0 S_0; \quad R = \max\{|\gamma| k_0 \eta_0 + r; |\gamma| \eta_0\}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1°, 2°, 4°, 5° и

$$h_0 + \sqrt{k_0} \leq 1,$$

причем в качестве S выбрана сфера

$$\|x - x_0\| \leq R.$$

Тогда уравнение (1) имеет в сфере

$$\|x - x_0\| \leq r$$

решение x^* , к которому последовательность (2) сходится со скоростью

$$\|x^* - x_n\| \leq B_0 \eta_0 S_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Введены обозначения:

$$k_0 = K(1 + |\gamma| M) B_0^2 \eta_0;$$

$$h_0 = k_0 + K B_0^2 \eta_0;$$

$$S_n = \sum_{i=n}^{\infty} (1 - h_0)^i \left[\frac{k_0}{(1 - h_0)^2} \right]^{2^{i-1}} \quad (n = 0, 1, \dots);$$

$$r = B_0 \eta_0 S_0; \quad R = (1 + |\gamma| M) r + |\gamma| \eta_0.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1°, 2°, 4° и

$$h_0 + \sqrt{k_0} \leq 1,$$

причем в качестве S выбрана сфера

$$\|x - x_0\| \leq R.$$

Тогда уравнение (1) имеет в сфере

$$\|x - x_0\| \leq r$$

решение x^* , к которому последовательность (2) сходится со скоростью

$$\|x^* - x_n\| \leq B_0 \eta_0 S_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Введены обозначения:

$$k_0 = K(B_0 + |\gamma|) B_0 \eta_0;$$

$$h_0 = k_0 + K(B_0 + |\gamma| k_0) B_0 \eta_0;$$

$$S_n = \sum_{i=n}^{\infty} (1 - h_0)^i \left[\frac{k_0}{(1 - h_0)^2} \right]^{2^{i-1}} \quad (n = 0, 1, \dots);$$

$$r = B_0 \eta_0 S_0; \quad R = \max\{|\gamma| k_0 \eta_0 + r; \quad |\gamma| \eta_0\}.$$

Замечание 1. Теорема 3 справедлива и при более общем алгоритме (2), где вместо фиксированной величины γ на каждом шагу можно применять переменную γ_n . В таком случае в этой теореме

$$|\gamma| = \sup_n |\gamma_n|.$$

2. Исследуем еще на основе принципа мажорант [6] сходимость метода (2), заданного в виде

$$x_{n+1} = x_n - [P(\Phi(x_n), x_n)]^{-1}P(x_n). \quad (5)$$

Уравнение (1) означает теперь

$$P(x) \equiv \Phi(x) - x = 0. \quad (6)$$

Наряду с уравнением (6) рассмотрим вещественное мажорантное уравнение

$$f(t) \equiv \varphi(t) - t = 0 \quad (7)$$

и для его решения метод

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(\varphi(t_n), t_n)}. \quad (8)$$

Сходимость метода (5) на основе принципа мажорант характеризуют следующие две теоремы.

Теорема 4. Пусть

$$1^\circ \quad \|\Phi(x_0) - x_0\| \leq \varphi(t_0) - t_0;$$

$$2^\circ \quad \|\Phi(\Phi(x_0), x_0)\| \leq \varphi(\varphi(t_0), t_0);$$

$$3^\circ \quad \text{а) } \|\Phi(x', x''') - \Phi(x'', x''')\| \leq \varphi(t', t''') - \varphi(t'', t''');$$

$$\text{б) } \|\Phi(x', x'') - \Phi(x', x''')\| \leq \varphi(t', t'') - \varphi(t', t'''),$$

если $\|x - x_0\| \leq t^* - t_0$ и $\|x' - x''\| \leq t' - t''$, $\|x'' - x'''\| \leq t'' - t'''$, $t_0 \leq t'''$, t'' , $t' \leq t^*$;

4° уравнение (7) имеет положительное решение.

Тогда уравнение (6) имеет в сфере

$$\|x - x_0\| \leq t^* - t_0$$

решение x^* , к которому сходится последовательность (5) со скоростью

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

где t^* — наименьший положительный корень уравнения (7); t_n — n -ое приближение по методу (8) к t^* .

Взяв в качестве мажорантного уравнения (7) уравнение

$$f(t) \equiv Kt^2 - (K\eta + 1 - M)t + \eta = 0, \quad (9)$$

получим, что справедлива (как следствие из теоремы 4).

Теорема 5. Пусть

1° $\|\Phi(x_0) - x_0\| \leq \eta$;

2° $\|\Phi(\Phi(x_0), x_0)\| \leq M$;

3° для каждого $\|x - x_0\| \leq t^*$ справедливы

а) $\|\Phi(x', x''') - \Phi(x'', x''')\| \leq K\|x' - x''\|$;

б) $\|\Phi(x', x'') - \Phi(x', x''')\| \leq K\|x'' - x'''\|$;

4° $\sqrt{K\eta} + \sqrt{M} \leq 1$.

Тогда уравнение (1) имеет в сфере

$$\|x - x_0\| \leq t^*$$

решение x^* , к которому последовательность (5) сходится со скоростью

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

где $t^* = (2K)^{-1}[K\eta + 1 - M - \sqrt{K\eta + 1 - M)^2 - 4K\eta}]$ и t_n — n -ое приближение по методу (8) к решению t^* уравнения (9).

Доказательства теорем 4 и 5 аналогичны доказательствам теорем о сходимости методов Ньютона [6] и хорд [7].

Замечание 2. Теорема 5 уточняет соответствующую теорему из статьи [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen Kuo-Wang. Generalization of Steffensen's Method for Operator Equations in Banach Space. Comment. math. Univ. Carolinae, 5, № 2, 1964, 47—77.
2. С. Ульм. Обобщение метода Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 4, № 6, 1964, 1093—1097.
3. Х. Коппель. О сходимости обобщенного метода Стеффенсена. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 15, № 4, 1966, 531—539.
4. С. Ульм. Об обобщенных разделенных разностях 1. Изв. АН ЭССР. Физика, математика, 16, № 1, 1967, 13—26.
5. J. W. Schmidt. Die Regula Falsi für Operatoren in Banachräumen. Z. angew. Math. und Mech., 41, Sonderheft, 1961, 61—63.
6. Л. Канторович. Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона. Вестник ЛГУ, 2, № 7, 1957, 68—103.
7. С. Ульм. Принцип мажорант и метод хорд. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 13, № 3, 1964, 217—227.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Э. Рузалеп. Исследование эффектов, обуславливающих размытие рентгеновских линий неравновесных электролитических сплавов	3
2. Т. Пикка. Сегнетоэлектрический фазовый переход в BiSbTe	9
3. Т. Пикка. Спектры отражения некоторых сегнетоэлектриков V—VI—VII группы	13
4. Х. Ууэмыйс, У. Пильвэ. Рентгенографическое исследование стали марки Ст. 3 при ударном износе	17
5. Л. Паккас. Новый метод определения эффективного мертвого времени счетчика Гейгера-Мюллера	23
6. М. Левин, О. Оя. Элементарное решение одной задачи размещения объектов обслуживания	27
7. Ф. Вихманн. Некоторые теоремы о формальном умножении несобственных интегралов	31
8. Ф. Вихманн. О формальном умножении двойных несобственных интегралов	37
9. Х. Коппель. Некоторые теоремы о сходимости обобщенного метода Стеффенсена	45

Статьи поступили в редакцию
29 октября 1966 года.



ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА
И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СБОРНИК СТАТЕЙ II

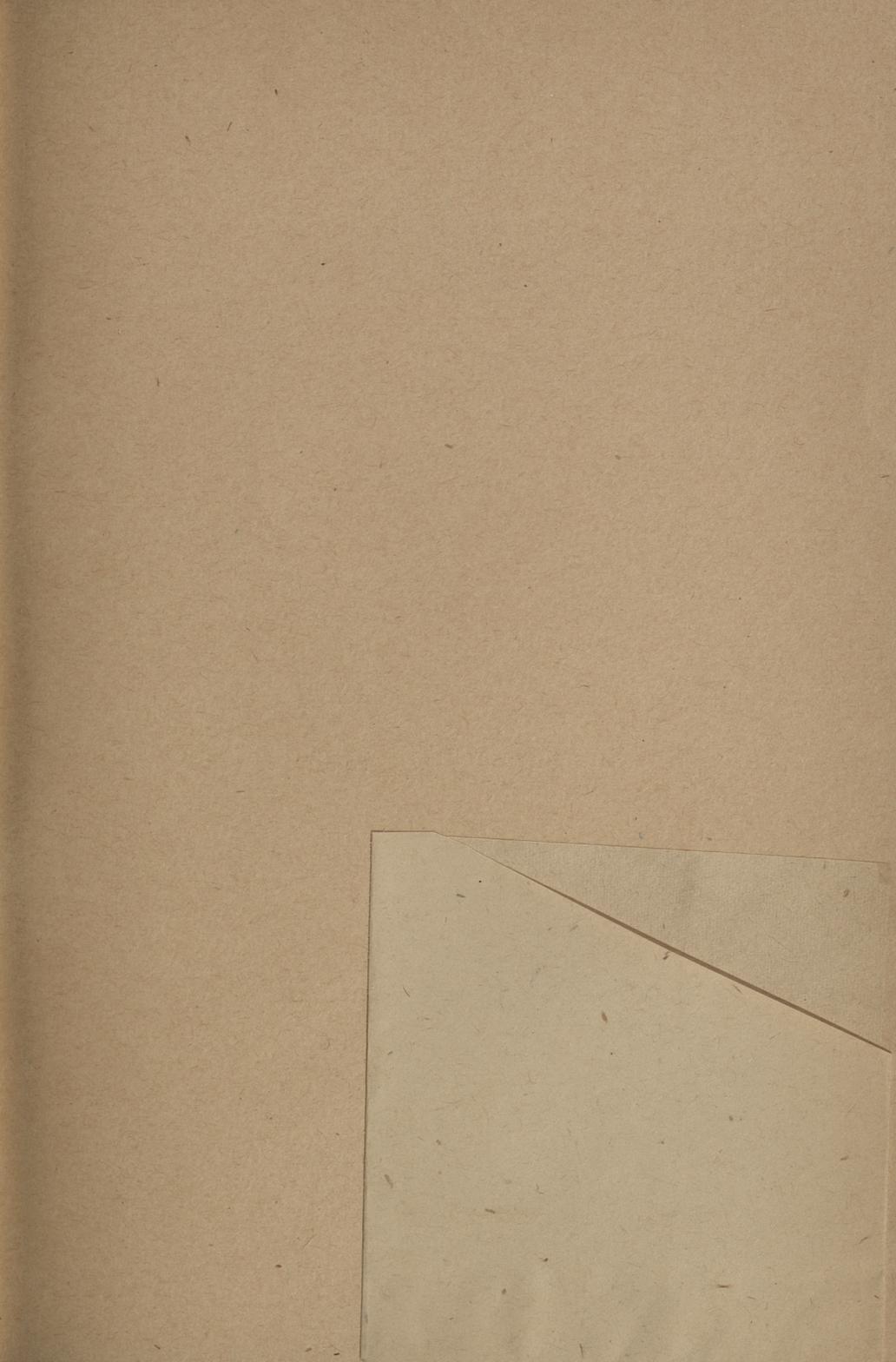
Таллинский политехнический институт

Редактор Ф. Вихманн

Технический редактор Я. Мыттус

Сдано в набор 17 XI 1966. Подписано к печати 22. VI 1967. Бумага 60×90 1/16. Печатных листов 3,25. Учетно-издательских листов 2,0. Тираж 500. МВ-06804. Заказ № 8474. Типография им. Х. Хейдеманна, Тарту, ул. Юликооли 17/19. 1

Цена 13 коп.



Цена 13 коп.

10