Tallinna Tehnikaülikooli Toimetused
Публикации Таллинской Технической Высшей Школы (Эстонская ССР)
Publications from the Technical University of Estonian SSR at Tallinn
Seeria A № 18 (Aprill 1941)

Н. Герасимов

О коэфициенте внутреннего трения текучего вещества

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS"
TARTU 1941

Ep. 6.7

Tallinna Tehnikaülikooli Toimetused
Публикации Таллинской Технической Высшей Школы (Эстонская ССР)
Publications from the Technical University of Estonian SSR at Tallinn
Seeria A № 18 (Aprill 1941)

Н. Герасимов

О коэфициенте внутреннего трения текучего вещества

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS"
TARTU 1941

Ep. 3344

Eesti NSV
RESPUBLIKAANSKOGO
Teaduste Akadeemia

Vastutav toimetaja A. Parts. Tehniline toimetaja E. Kollom. Korrektor V. Terras. Ladumisele antud 31. I 1941. MB 3575. Trükkimisele antud 15. III 1941. Laotihedus trpg. 32 888. Trükipoognaid 9. Autoripoognaid 6,8. Paberi formaat 67 × 95. 1/16. Trükiarv 650. Trükitud „Ilutrüki" trükikojas, 1941. Tartu, 21. juuni t. 58. Tellim. nr. 1107.

Н. Герасимов: О коэфициенте внутреннего трения текучего вещества. На русском языке. Эгосиздат „Научная Литература", Тарту.

Предисловие.

Настоящая работа является продолжением ряда работ автора, посвященных внутреннему трению или вязкости текучего вещества. Вследствие обширности темы мы не затрагиваем вопроса о вязкости смесей, а ограничимся лишь однородными веществами.

При этом позволяем себе выразить свою глубокую признательность научным сотрудникам Таллинского ВТУЗа и, в особенности, проф. др. А. Партсу за проявленный ими интерес и содействие в опубликовании настоящей работы, а также всем лицам, приславшим сепарата своих работ, в особенности профессорам Г. Егеру, Л. Шамесу, С. Чепмену и М. Траутцу.

Одновременно считаю своим долгом отметить, что первое указание на роль вращательного движения в рассматриваемом вопросе я получил от проф. Г. Егера (в 1934 г.), обратившего мое внимание на работы Герцога и Кудара (см. в тексте).

Н. Герасимов
Таллинский ВТУЗ

3. I 1941.

ГЛАВА 1.

Первоначальные частицы исследовать столь нужно, как самим частицам быть. И как без нечувствительных частиц тела не могут быть составлены, так и без оных испытаний учение глубочайшее физики невозможно.

М. В. Ломоносов.

Исторический обзор.

§ 1. Вопрос о внутреннем трении или вязкости флюида давно уже привлекал внимание как физиков, так и химиков, однако до шестидесятых годов прошлого столетия не было попыток дать ему теоретическое об'яснение.

Если не считать Ньютоновской формулы

$$R = -\eta f \frac{du}{dz}, \tag{1}$$

хотя и носящей формальный характер, но все же представляющей собой первую гениальную догадку о механизме вязкости, не появлялось также и никакой математической теории вопроса, и только Д. К. Максвелль впервые в 1860 г. на основе кинетической теории дал вывод коэфиц. вн. трения для умеренно разреженных газов[1], показав при этом, что вязкость газов независима от давления и пропорциональна корню из абсолютной температуры.

Первые опыты, поставленные с целью проверки этих выводов как самим Максвеллем, так и другими исследователями[2], подтвердили независимость от давления, но ожидаемая пропорциональность $T^{\frac{1}{2}}$ не подтвердилась. Это побудило Максвелля к дальнейшим исследованиям.

В последующих своих работах, начиная с 1866 г.[3], он развивает свою т. наз. „вторую кинетическую теорию газов.“ Усилия его при этом направлены на обоснование и разработку нового общего и точного математического метода для исследования явлений, происходящих в флюиде, находящемся в состоянии неравновесия. В результате он получает диффе-

ренциальную зависимость, определяющую среднее значение любой величины Q, если только эта величина зависит от скорости поступательного движения молекул, как функцию координат и времени. При этом, принимая модель, согласно которой молекулы рассматриваются как центры отталкивающих сил, действующих обратно пропорционально 5-ой степени расстояния, он получает совершенно точное решение задачи. При этом однако получилось, что вязкость газов, в случае принятой модели, должна быть пропорциональна абсолютной температуре, что опять-таки не соответствует опыту. Однако с несомненностью выяснилось то обстоятельство, что температурная зависимость вязкости определяется законом сил, действующих между молекулами газа.

§ 2. Главнейшим препятствием на пути к точному математическому исследованию вопроса, на которое натолкнулся Максвелль, был вопрос о законе распределения скоростей молекул флюида, находящегося в состоянии движения. В вышеописанном случае только специальные условия задачи (5-я степень расстояния) позволили ему обойти этот вопрос. Важный шаг в этом направлении был сделан Л. Больтцманом[4], который вывел интегро-дифференциальное уравнение, имеющее основное значение для решения указанной проблемы. В ряде дальнейших своих работ Максвелль и Больтцман развивают и углубляют вышеупомянутый метод, не достигая однако численных результатов[5].

В начале 20-го столетия Максвелль — Больтцмановский метод, усовершенствованный и развитый, главным образом, С. Чепменом и Д. Энскогом, разрабатывавшими почти одновременно вышеуказанную проблему, наконец принес свои плоды[6]. Была разрешена с достаточной степенью точности проблема о значении численных коэфициентов в формулах внутр. трения, теплопроводности и диффузии для наиболее простых и важных моделей разреженных газов. В частности, в случае простых сферических молекул, вышеупомянутыми авторами получена следующая формула:

$$\eta = 0{,}499\ nm\bar{c}L = \frac{0{,}499}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m\bar{c}}{\pi d^2}. \qquad (2)$$

(В первом приближении численный множитель этой формулы равен $\frac{5\pi}{32}$. Окончательное число вычислено в четвертом приближении и равно

$$0{,}499 = \frac{5\pi}{32}(1 + 0{,}01485 + 0{,}00103 + 0{,}00019 + \ldots) = \frac{5\pi}{32} \cdot 1{,}01607 .$$

Этот ряд чисел дает понятие о точности вычисления.)

Следуя тому же методу, Пиддак[7] решил аналогичную задачу для более сложной модели сферических „шероховатых" молекул (Rough spherical molecule)[8] и получил результат такого вида:

$$\eta = \frac{5\pi}{32} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+K}{1+\frac{13}{6}K} \cdot \frac{m\bar{c}}{\pi d^2}, \tag{3}$$

где $K = \frac{4I}{md^2}$ и I представляет собой момент инерции молекул. В случае, если $K = o$, формула (3) переходит в форм. (2) в ее первом приближении.

Формула Пиддака важна в том отношении, что принципиально ограничивает значимость Чепмен — Энскоговского коэфициента (0,499) только областью одноатомных газов.

§ 3. Для „Максвеллевской" модели, т. е. когда молекулы представляются как центры отталкивающих сил, действующих обратно пропорционально некоторой степени ν расстояния ($S = \frac{a}{\varrho^\nu}$), Энскогом (Dissertation) получена следующая формула:

$$\eta = \frac{15\sqrt{MRT}}{16\sqrt{\pi}A_2^{(\nu)}\Pi\left(3 - \frac{2}{\nu-1}\right)N} \cdot \left(\frac{2RT}{Na}\right)^{\frac{2}{\nu-1}} \cdot F^{(\nu)}, \tag{4}$$

причем[9]

$$F^{(\nu)} = 1 + \frac{3(\nu-5)^2}{2(\nu-1)(101\nu-113)} + \ldots .$$

Формула (4) является обобщением Максвеллевской и переходит в нее при $\nu = 5$.

Как не трудно убедиться, формула (4) равнозначна следующей:

$$\eta = k \cdot T^n, \tag{5}$$

причем

$$n = \frac{1}{2} + \frac{2}{\nu - 1}. \tag{6}$$

Однако результат этот, как показал уже лорд Рейли[10], можно получить для названной модели простым рассмотрением размеров (дименсионов), не производя даже вовсе подробного анализа самого механизма вязкости.

§ 4. В случае сферических молекул, притягивающихся друг к другу силой, обратно пропорциональной расстоянию, Сутерленд[11], пользуясь методом длины свободного пути, получил свою знаменитую формулу:

$$\eta = k \frac{T^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{C}{T}}. \tag{7}$$

Исследования Чепмена и Энскога подтвердили правильность формулы (7) для Сутерлендовской модели. При этом авторы вывели также и численное значение постоянных этой формулы. Причем, как указывает Чепмен[12], формула (7) носит приближенный характер и в случае, если притягивающие силы значительны, выражение $1 + \frac{C}{T}$ должно быть заменено рядом $1 + \frac{C_1}{T} + \frac{C_2}{T^2} \ldots$ В виду того, что численное значение константы C_2 не установлено с бесспорной точностью и вывод предполагает достаточно высокие температуры, формулу (7) можно считать по существу равнозначущей формуле Рейнганума, предполагающей ту же модель[13]:

$$\eta = k \cdot T^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{C}{T}}. \tag{8}$$

§ 5. Весьма интересен результат, полученный для модели, подобной Максвеллевской, но предполагающей совместное

существование между молекулами как отталкивающей, так и притягивающей силы:

$$S = \frac{A}{\varrho^{\nu}} - \frac{B}{\varrho^{\nu^1}}. \tag{9}$$

Модель эта заслуживает особенного внимания, так как более приближается к реальности, чем вышеупомянутые. В этом случае Максвелль — Больтцмановский метод в первом приближении приводит к формуле[14]:

$$\eta = \frac{\eta_1}{1 + \frac{C}{T^{\frac{\nu - \nu^1}{\nu - 1}}}} \tag{10}$$

При этом η_1 соответствует выражению (4)-му, причем ν показатель степени, относящийся к отталкивающей силе и ν^1 к притягивающей. Значение константы C может быть вычислено для некоторых частных комбинаций чисел ν и ν^1. В частности эта задача разрешена для любых значений ν при $\nu^1 = 3$ (так называемая модель Ленард-Джонса)[15]. Формула (10), как это не трудно видеть, при высоких температурах переходит в формулу (4)-ю.

§ 6. Молекулярной моделью, выражаемой формулой (9)-ой, пользуется также Л. Шамес[16]. Обозначая взаимную потенциальную энергию двух молекул, находящихся на расстоянии ϱ, через Φ и находящихся на расстоянии ϱ_0, при котором сила, действующая между молекулами, равна нулю, через Φ_0, он полагает, что для всех молекул при столкновении можно принять в среднем

$$\Phi - \Phi_0 = kT. \tag{11}$$

Формула (11) совместно с формулой (9) определяет собой эффективный диаметр, соответствующий данной температуре. То-есть, по мнению Л. Шамеса молекулы при данной температуре ведут себя так, как если бы они были эластичными сферами диаметра ϱ, вследствие чего коэфициент вн. трения выражается формулой[17]

$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{m\bar{c}}{\pi\varrho^2}. \tag{12}$$

Таким образом, зная константы ν, ν^1 и Φ_0, мы можем вычислить ϱ и, следовательно, η для любой заданной температуры. Однако такой метод, конечно, практически не применим, так как требует сложных вычислений. Сам Л. Шамес пользуется своей теорией лишь для вычисления кривой, выражающей зависимость ϱ от температуры или, что по теории Л. Шамеса то же самое, — кривой взаимной потенциальной энергии молекул.

§ 7. Полагая подобно Л. Шамесу, что эффективным диаметром, определяющим собой процесс столкновения молекул, нужно считать то наименьшее расстояние, которое достигают центры молекул в процессе столкновения, Н. Герасимов[18] выводит формулу для среднего числа столкновений и коэфициента внутреннего трения газов. Вывод этот не предполагает никакого определенного силового закона и требует только шаросимметричности силового поля.

В случае силового поля, подобного Шамесовскому, для которого кривая взаимной потенциальной энергии имеет минимум, среднее число столкновений выражается формулой

$$z = n\pi\bar{c}_0 d^2 \cdot e^{-\frac{\varphi_0}{kT}} \cdot I, \tag{13}$$

где

$$I = \int\limits_{\substack{\varphi-\varphi_0=0\\ \delta=1}}^{\substack{\varphi-\varphi_0=\infty\\ \delta=0}} \delta^2 \cdot e^{-\frac{\varphi-\varphi_0}{kT}} \cdot d\frac{\varphi-\varphi_0}{kT}, \tag{14}$$

причем d и φ_0 соответствуют ϱ_0 и Φ_0 в теории Л. Шамеса и величана $\delta = \frac{\varrho}{d}$.

Отсюда вытекает для коэф. вн. трения газа следующая формула[19]:

$$\eta = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m\bar{c}}{\pi d^2} \cdot e^{\frac{\varphi_0}{kT}} \cdot \frac{1}{I}. \tag{15}$$

Выражая в „первом приближении“ силовой закон следующей формулой:

$$\delta = e^{-a(\varphi-\varphi_0)}, \tag{16}$$

где a некоторая постоянная, получена следующая формула для коэф. вн. трения газа:

$$\eta = B(1 + 2akT)e^{\frac{\varphi_0}{kT}} \cdot T^{\frac{1}{2}}. \qquad (17)$$

Ближайший анализ формул, вытекающих из выражений (13) и (14), в случае различных моделей силового поля, дан ниже.

§ 8. Все вышеприведенные теории вн. трения основаны на классической механике. В новейшее время появились попытки приложения квантовой теории к вопросу о вн. тр. газа. Среди последних следует в особенности отметить работы Юлинга [20] и Мэсси и Мор [21] [22]. Однако пока что результаты, полученные этим путем, не дают этим теориям преимуществ по сравнению с прежними. Вообще же кванто-механическое рассмотрение вопроса может иметь значение только в отношении к молекулам легких газов, т. е. водороду и гелию, да и то лишь при температурах, близких к абсолютному нулю.

§ 9. В заключение обзора работ, относящихся к умеренно разреженным газам, упомянем еще о весьма интересной работе М. Траутца [23]. Автор следует индуктивному методу и, повидимому, весьма успешно. Полученные формулы, по утверждению автора, „liefern ohne η Messungen eine Genauigkeit von wenigen Prozenten, bei Vorliegen von nur einem gemessenen η nicht selten eine von Promillen, innerhalb der Fehlergrenze."

Метод в сущности сводится к следующему. На основании обширного опытного материала автор устанавливает эмпирическую зависимость:

$$m_k = \left(\frac{d\ln\eta}{d\ln T}\right)_{T=T_k} = 1. \qquad (18)$$

Т. е., что производная логарифма вязкости газа по логарифму абсолютной температуры, при критической температуре (не в критической точке!) равна 1.

Рассматривая величину m как некоторую функцию температуры, он принимает, что значение ее m_0, соответствующее $T = o$, настолько же больше m_k, насколько m_k больше m_∞, т. е., что

$$m_0 - m_k = m_k - m_\infty. \qquad (19)$$

Таким образом критическая температура приобретает значение как бы некоторого центра симметрии.

Рассматривая газ при любой температуре как находящуюся в равновесии смесь молекул в состоянии, соответствующем $T = o$ и $T = \infty$ (причем при критической температуре число молекул обоих сортов принимается равным друг другу), с помощью представлений соответствующих кинематике реакций, он получает для m_∞ следующее выражение:

$$m_\infty = \frac{m - (2 - m)\left(\frac{T_k}{T}\right)^{\frac{3}{2}}}{1 - \left(\frac{T_k}{T}\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{20}$$

откуда следует для m следующее выражение[24]:

$$m = \frac{d \ln \eta}{d \ln T} = m_\infty + \frac{2(1 - m_\infty)}{1 + \left(\frac{T}{T_k}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{21}$$

Интегрированием этого уравнения получается формула

$$\eta = \eta_k \cdot \frac{\left(\frac{T}{T_k}\right)^{2 - m_\infty}}{\left\{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{T}{T_k}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}^{\frac{4}{3} \cdot (1 - m_\infty)}}, \tag{22}$$

где η_k соответствует критической температуре.

Не трудно видеть, что формулу М. Траутца можно рассматривать как Максвеллевскую (форм. 5) с переменным n.

Отметим то центральное значение, которое имеет в теории М. Траутца критическая температура. Результат этот мы обсудим впоследствии.

§ 10. Мы упомянули выше, что одним из следствий Максвеллевской теории была независимость вязкости газа от давления. Этот результат верен примерно лишь в тех же пределах, в которых верен и простой закон $pv = RT$. При большем сгущении вещества размеры молекул начинают уже сказываться на вязкости газов подобно тому, как они сказываются на зависимости об'ема газа от давления.

Первая теория этого вопроса принадлежит Г. Егеру[25]. При этом он получил сл. формулу:

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{11}{2} \frac{b_0}{v}\right), \tag{23}$$

где b_0 равно учетверенному об'ему молекул (эластичных сфер), соответствующих данному об'ему газа v, и η_0 есть вязкость, соответствующая умеренно разреженному газу при той же температуре. Однако, как замечает автор „unsere Formel natürlich nur für mässige Verdichtungen des Gases gilt, indem wir für stärkere Verdichtungen η_0 mit einer nach Potenzen von $\frac{b_0}{v}$ steigenden Reihe zu multiplicieren hätten (Wien. Ber. 109. 1900. 79.)".

Р. Планк[26] развертывает вышеуказанный ряд до $\left(\frac{b_0}{v}\right)^3$. При этом оказывается, что с помощью формулы

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{1{,}75}{v} + \frac{3{,}32}{v^2} + \frac{9{,}65}{v^3}\right) \tag{24}$$

($v - b$ куб. метр. на кг.) возможно выразить изотермы коэф. вн. трения углекислоты, найденные Филлипсом[27], с точностью от 1 до 2%.

Данные Г. Шпейерера[28] для перегретого водяного пара автор выражает формулой

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{0{,}0175}{v} + \frac{0{,}0025}{v^2}\right) \tag{25}$$

($v - b$ куб. метр. на кг.)

В той же работе автор показывает, что для величины обратной вязкости $\frac{1}{\eta}$, относящейся к парам и жидкости, имеет место закон прямой линии, подобный тому, какой Е. Матиас нашел для плотностей паров и жидкостей. К этому результату мы еще вернемся.

§ 11. Д. Энскок[29], пользуясь Максвелль-Больтцмановским методом для модели сферических молекул, получил следующую формулу для вязкости сжатого газа:

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho} = \frac{\nu_m}{2{,}545}\left(\frac{1}{b_0 \cdot \varrho\chi} + \frac{4}{5} + 0{,}7614 b_0 \varrho\chi\right), \tag{26}$$

где ν — кинематическая вязкость,

ν_m — минимальное значение кинематической вязкости (на изотерме),

ϱ — плотность и

$$\chi = 1 + \frac{5}{8}\varrho b_0 + 0{,}2869\varrho^2 b_0^2 . \tag{27}$$

Величина $b_0\varrho\chi$ соответствует в. д. Ваальсовскому уравнению состояния, развитому Л. Больтцманом и Клаузиусом:

$$p + a\varrho^2 = R_1 T(1 + b_0\varrho\chi) . \tag{28}$$

Как показал Энског для углекислоты на экспериментальном материале Варбурга и Бабо[30], а также Мичельс и Джибсен[87] на собственном экспериментальном материале, формула довольно удовлетворительно соответствует опыту. Формула Энскога требует более детального обсуждения, которое будет приведено ниже.

§ 12. Независимо от этой работы Н. Герасимов в 1928 г. опубликовал работу, посвященную тому же вопросу [31].

В этой работе автор выводит следующую формулу для средней длины пути молекул сгущенного газа:

$$L = \frac{\sqrt{2}}{3} d \frac{v - b}{b} , \tag{29}$$

где d диаметр молекул (эластичных сфер) и величина b определяется уравнением состояния, заданным в общей форме

$$(p + P)(v - b) RT ,$$

причем b понимается как некоторая неизвестная функция об'ема и температуры.

Исходя из представлений о переносе количества движения в газах, высказанных впервые Г. Егером [32] методом средней длины пути, автор приходит к формуле

$$\eta = \frac{n m \bar{c} L}{3} \cdot \left(\frac{v}{v - b}\right)^2 . \tag{30}$$

Или

$$\eta = k T^{\frac{1}{2}} \frac{v}{b(v - b)} . \tag{31}$$

С помощью этой формулы автору удается выразить изотерму вязкости углекислоты при 30°С с удовлетворительной точностью, но переход на другие температуры дает недостаточно удовлетворительные результаты. Автор вычисляет также диаметр молекулы и Авогадрово число, однако эти вычисления имеют лишь относительную ценность, так как при этих вычислениях численный коэфициент формулы трения принят равным Больтцмановскому числу 0,35028, которое мы вправе в настоящее время считать слишком приближенным (см. § 2).

В своей последующей работе[33], исследуя изотермы кинематической вязкости в связи с формулой (31), автор находит что величина

$$kT^{\frac{1}{2}} = \frac{\nu_m}{4}, \tag{32}$$

где ν_m минимальное значение кинематической вязкости на изотерме. Отношение $\frac{b}{v}$ в точках, соответствующих минимуму кинематической вязкости (а также и в критической точке), постоянно и равно $\frac{1}{2}$. Кривая

$$P_m = f(T)$$

для вышеуказанных точек проходит через критическую точку и, возможно, является продолжением кривой давления паров.

Формулы (31) и (32) дают возможность вычислить величину b по изотермам кинематической вязкости. Вычисленные автором кривые оказались волнообразного характера, лишь отдаленно напоминая кривые, полученные с помощью в. д. Ваальсовского уравнения [34].

§ 13. В заключение этого обзора нам остается коснуться еще вопроса о коэфициенте вн. трения жидкостей.

Первая теория вязкости жидкостей дана Г. Егером [35].

Модель „идеальной жидкости“, принятая Г. Егером, предполагает, что молекулы представляют собой эластичные шары диаметра d. При этом предполагается, что „свободный об'ем“, представленный для движения молекул, чрезвычайно мал по сравнению с об'емом жидкости.

Формула Г. Егера такова:

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{Pd}{c}, \tag{33}$$

где P термическое давление, определяемое ур-ем состояния

$$P(v-b)RT \tag{34}$$

и $\bar{C}$ средняя скорость поступательного движения молекул.

Формула Г. Егера исследована Р. О. Герцогом[36], причем найдено, что в первом приближении, согласно с опытом, удовлетворительно. В своей последующей работе, совместной с Г. К. Кудар, Р. О. Герцог доказывает, что формула Г. Егера идентична формуле Бачинского[37]

$$\eta = \frac{c}{\nu - \omega} \tag{35}$$

и отличается от нее только численным коэфициентом[38]. Не трудно видеть, что формулу (33) можно привести к такому виду:

$$\eta = k \cdot \frac{T^{\frac{1}{2}}}{v-b}. \tag{36}$$

В формуле Бачинского отсутствует пропорциональность $T^{\frac{1}{2}}$, но, как указывают авторы, взрастание числителя формулы (36) компенсируется уменьшением величины b с температурой.

§ 14. Авторы исследуют также ту роль, какую играет вращение молекул в механизме вн. трения жидкостей. Развивая эту мысль в далнейшей работе[39], они рассматривают коэф. вн. трения как сумму двух коэфициентов одного $\eta_{\tan}$, обусловленного поступательным движением, и другого $\eta_{\cot}$, обусловленного вращательным движением молекул, так что

$$\eta = \eta_{\tan} + \eta_{\cot} = \eta_{\tan}\left(1 + \frac{\bar{K}_{\cot}}{\bar{K}_{\tan}}\right), \tag{37}$$

где $\bar{K}_{\cot}$ и $\bar{K}_{\tan}$ обозначают соответствующие компоненты силы трения.

Вывод $\bar{K}_{\cot}$ и $\bar{K}_{\tan}$ проводится ими гидродинамическим методом, впервые примененным Эйнштейном к выводу формулы

коэфициента диффузии коллоидов[40]. Авторы проводят вычисления $\frac{K_{rot}}{K_{trans}}$ для различных моделей молекул, как-то: шарообразной, кольцеобразной, палочковой и т. д. и с успехом проверяют свои вычисления на экспериментальном материале[41].

§ 15. Во всех вышеизложенных работах вязкость жидкости рассматривается гл. образом как функция об'ема, однако имеется также немалое количество работ, авторы которых стремятся найти и теоретически обосновать непосредственную зависимость вязкости жидкости от температуры. Из них следует упомянуть работы Андрадэ, Шеппард и Венкатарама Джюэр[42], предлагающих формулу

$$\eta = Ae^{\frac{B}{T}}. \tag{38}$$

Интересно отметить, что все указанные авторы при выводе этой формулы исходят из различных предположений и что константы A и B в их толкованиях имеют различное физическое значение[43].

Некоторые авторы приходят к более сложной формуле, так Френкель[44] выводит следующую формулу:

$$\eta = lTe^{\frac{u}{kT}}, \tag{39}$$

(где u, k, l постоянные), в то время как Д. Б. Мэклоод[45] получает:

$$\eta = Be^{\frac{C}{Tv}} \cdot \frac{1}{T} \tag{40}$$

(B, C постоянные, v — об'ем).

Все перечисленные работы столь разнообразны по своим результатам и исходным положениям, что мы принуждены отказаться как от их подробного разбора, так и от оценки их по существу. Заметим лишь, что кинетика сжатых газов приводит к формулам, которые, как мы увидим впоследэтвии, приложимы и к жидкостям. Поэтому нам кажется несомнснным, что, как в жидкостях, так и в газах, главную роль в передаче импульсов движения играют столкновения молекул.

Следуя идее непрерывности строения вещества, мы вправе требовать, чтобы формула, выражающая закон вн. трения жидкостей, непосредственно вытекала из формулы вн. трения сжатых газов. Как мы увидим впоследствии, такому требованию удовлетворяет лишь формула Г. Егера. Правда, она выведена для модели „идеальной жидкости“ и в случае реальной жидкости в нее необходимо внести некоторые поправки, однако эти поправки не меняют ее смысла по существу. В виду вышеизложенного формула Г. Егера является, так сказать, первичным и естественным выражением закона вязкости жидкостей и потому, по нашему мнению, естественным было бы в поисках об'яснения температурной зависимости вязкости жидкостей исходить из этой формулы вместо того, чтобы, нацело отвергая теорию столкновений, изобретать принципиально новый механизм явления, как это делают Андрадэ и др.[46].

§ 16. Подводя итог историческому развитию интересующего нас вопроса, мы вправе сказать следующее:

1) В области умеренно разреженных газов мы имеем много разнообразных формул, соответствующих в общем четырем основным моделям:

a) модели сферических молекул (d-const),

b) сферических молекул, наделенных силами притяжения (Сутерлендовская модель),

c) Максвеллевских молекул (силовые центры, отталкивающиеся обратно пропорционально некоторой степени расстояния между ними),

d) Шамесовских молекул (силовые центры, наделенные как отталкивающими, так и притягивающими силами).

При этом мы имеем точное математическое решение задачи только для первых трех случаев *(a, b, c)*. Однако ни одна из формул, соответствующих этим моделям, не приложима ко всем без исключения реальным газам. Модель *(a)* приводит к формуле, плохо отвечающей опыту. Формулы, соответствующие модели *(b)*, хорошо приложимы к некоторым газам, в большинстве высокого молекул. веса, да и то в пределах умеренных температур, но к легким газам *(He*, H_2*)* и в более

широких температурных интервалах они не приложимы. Формула, соответствующая модели (*c*), прекрасно передает температурную зависимость к. вн. тр. легких газов даже в очень широких темп. интервалах, но в отношении тяжелых газов имеет лишь весьма ограниченное приложение, что и следует ожидать вследствие явного несовершенства модели.

В случае модели *(d)* до сих пор мы имеем точные решения только для случая достаточно высоких температур и, хотя соответствующие формулы и приложимы в довольно широких температурных пределах, постоянные, входящие в них, не дают возможности составить определенного суждения о законе сил, действующих между молекулами[47], так что в результате формулы эти не имеют преимуществ перед вышеприведенными. Шамесовское решение проблемы приближенно и неудобно в аналитическом смысле, но, несмотря на это, дает более удовлетворительные результаты в отношении силового закона. Кроме того, что весьма замечательно, оно показывает[48], что Чепмен-Энскоговский численный коэфициент 0,499 правилен и что простая формула коэф. вн. тр. газа (2) приложима к одноатомным газам, если только диаметр рассматривать как эффективный.

2) В отношении метода мы имеем теперь достаточно широкую историческую перспективу для того, чтобы с полной определенностью утверждать, что Максвелль-Больтцмановский метод обладает лишь тем преимуществом, что позволяет точно определить численные коэфициенты формулы вн. тр. газов в случае простейших моделей. В отношении температурной зависимости метод длины пути приводит к тем же решениям, как и Максвелль-Больтцмановский (за исключением численных коэфициентов). При этом метод длины пути лишен громоздкости и сложности, присущей вышеупомянутому методу.

3) В отношении коэф. вн. трения сжатых газов мы имеем три формулы (23, 26 и 31).

Как будет показано ниже, формулы эти являются лишь частными выражениями более общего закона и по существу не так уж различны между собой, как это кажется на первый взгляд.

4) В отношении коэф. вн. тр. жидкостей мы приходим к заключению, что, соответственно идее непрерывности строения, формулы вн. тр. жидкостей должны непосредственно вытекать из форм. коэф. вн. тр. сжатых газов и что, следовательно, формула Г. Егера, единственная из формул удовлетворяющая этому условию, нуждается лишь в незначительных поправках.

ГЛАВА 2.

Статистика столкновений.

§ 17. Максвеллевский закон распределения скоростей, как известно, справедлив лишь для флюида, находящегося в состоянии равновесия, т. е., когда все достаточно малые части его одинаковы по своему составу и по состоянию движения. Если это условие отсутствует, например, если различные слои флюида движутся с различными относительными скоростями, теряет силу и Максвеллевский закон (см. § 2). Несмотря на это, мы будем пользоваться в дальнейшем этим законом при вычислении всех средних величин, относящихся к процессу столкновений молекул движущегося флюида, не упуская, конечно, из виду приблизительность полученных результатов. При этом, исследуя статистику столкновений молекул, мы будем придерживаться модели эластичных сфер.

§ 18. Переходя к разбору темы, нам прежде всего придется остановиться на двух положениях, одно из которых мы назовем для краткости законом центровой линии, второе же — законом траэкторий.

Закон центровой линии выражает вероятность $W(\beta)$ того, что направление линии центров, в момент столкновения молекул, образует с направлением движения одной из них угол β. Вероятность эта должна иметь одинаковое выражение как для сгущенного, так и для разреженного флюида, вывод же ее легче всего провести на примере газа, чем мы и воспользуемся. Положим, что линия центров так же, как и скорость c_1 одной из молекул газа, расположена в плоскости чертежа (см. фиг. 1). Для определенности принимаем, что угол β между центровой линией и скоростью c_1 есть острый угол. Обозначим через α

угол между скоростями c_1 и c_2 соударяющихся молекул, ϑ — угол между плоскостью чертежа и плоскостью, в которой лежит угол a; $W(c_1)$ и $W(c_2)$ суть вероятности соответствующих скоростей.

Определим теперь вероятность того, что какое-нибудь из рассматриваемых столкновений, происходящих внутри флюида в единицу времени, произойдет в указанных условиях. Если n число молекул в единице об'ема, то число молекул, обладающих скоростью c_2, будет $nW(c_2)$. Из числа этих молекул некоторым определенным направлением в пространстве обладают

$$nW(c_2) \cdot \frac{d\omega_2}{4\pi}$$

молекул, причем $d\omega_2$ есть дифференциал телесного угла, „заключающий" в себе это направление [49].

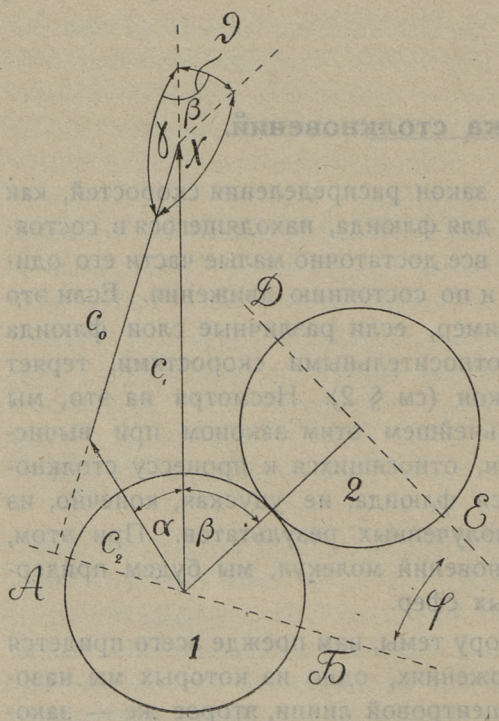

Рис. 1.

Рассмотрим теперь молекулу, обладающую заданной по величине и направлению скоростью c_1, которая образует со скоростью вышеупомянутой группы относительную скорость c_0. Число столкновений рассматриваемой молекулы с молекулами данной группы в секунду будет равно

$$\pi d^2 n c_0 W(c_2) \cdot \frac{d\omega_2}{4\pi},$$

а так как число молекул газа, обладающих скоростью c_1, есть $NW(c_1)\frac{d\omega_1}{4\pi}$, то секундное число всех столкновений, происхо-

дящих в данном об'еме газа между молекулами рассматриваемых групп, равно

$$\cdot N\pi d^2 n c_0 W(c_2) W(c_1) \cdot \frac{d\omega_1}{4\pi} \cdot \frac{d\omega_2}{4\pi}.$$

Число молекул газа, имеющих скорость, совпадающую по направлению со скоростью c_1, равно $N\frac{d\omega_1}{4\pi}$, каждая из них испытывает в течение секунды $\pi d^2 n \bar{c}_0$ столкновений, поэтому секундное число столкновений всех молекул, обладающих данным направлением движения, будет равно

$$N\pi d^2 n \bar{c}_0 \frac{d\omega_1}{4\pi}$$

и, следовательно, вероятность того, что столкновение происходит при данных условиях, равна

$$\frac{c_0}{\bar{c}_0} \cdot W(c_2) \cdot W(c_1) \cdot \frac{d\omega_2}{4\pi} = \frac{c_0}{\bar{c}_0} \cdot W(c_2) \cdot W(c_1) \cdot \frac{\sin\alpha \cdot d\alpha \cdot d\vartheta}{4\pi}, \qquad (41)$$

так как дифференциал телесного угла

$$d\omega_2 = \sin\alpha \cdot d\alpha \cdot d\vartheta.$$

Нетрудно далее убедиться в том, что вероятность того, что при подобном столкновении линия центров образует с c_1 угол β, равна $\cos\varphi \cdot \frac{d\omega}{\pi}$, где $d\omega$ дифференциал телесного угла, заключающий центровую линию, и φ угол между плоскостью ДЕ, перпендикулярной к линии центров, и плоскостью АБ, перпендикулярной к относительной скорости c_0. (На чертеже 1-ом пересечение обоих плоскостей с плоскостью чертежа обозначено пунктиром, причем угол φ показан лишь условно). Таким образом, вероятность подобных столкновений будет равна

$$W(c_1 c_2 c_0 \beta) = \frac{c_0}{\bar{c}_0} \cdot W(c_1) \cdot W(c_2) \cdot \frac{\sin\alpha \cdot d\alpha \cdot d\vartheta}{4\pi} \cdot \frac{d\omega}{\pi} \cdot \cos\varphi. \qquad (42)$$

В виду того, что

$$\cos\varphi = -\cos\chi = -\cos\gamma \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \sin\gamma,$$

где χ — угол между относительной скоростью c_0 и линией центров и

γ — угол между c_1 и c_0, а также, что

$$\cos\gamma = \frac{c_2 \cos\alpha - c_1}{c_0}$$

$$\sin\gamma = \frac{c_2 \sin\alpha}{c_0},$$

получается

$$\cos\varphi = \frac{(c_1 - c_2\cos\alpha)\cos\beta - c_2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\vartheta}{c_0} \tag{43}$$

и, следовательно,

$$W(c_1 c_2 c_0 \beta) = \frac{W(c_1)\cdot W(c_2)}{4\pi^2 c_0}\left[(c_1 - c_2\cos\alpha\cos\beta - c_2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\vartheta\right]\cdot$$

$$\cdot \sin\alpha \cdot d\alpha \cdot d\vartheta \cdot d\omega\,. \tag{44}$$

Интегрируя это выражение по всем входящим в него переменным за исключением β, мы и получим вероятность того, что направление центровой линии в момент столкновения образует с направлением движения избранной молекулы угол β, независимо от величины скоростей сталкивающихся молекул. Для того, чтобы провести это интегрирование, определим предварительно пределы, в которых нужно интегрироват каждую из переменных. Если β острый угол, то столкновения под углом β возможны только в случае, если $\cos\varphi > 0$. Поэтому условие $\cos\varphi = 0$ определяет собою пределы интегрирования. Уравнение (43) в этом случае дает:

$$\cos\vartheta_0 = \frac{(c_1 - c_2\cos\alpha)\cdot\cos\beta}{c_2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}\,. \tag{45}$$

При этом $\cos\vartheta_0$ является косинусом наименьшего и наибольшего угла, между которыми необходимо интегрировать. Условие $\vartheta_0 = o$ определяет собой те предельные углы α, до которых интегрирование по ϑ можно провести от 2π до 0. Полагая

$\cos\vartheta_0 = 1$, получим уравнение для определения этих предельных углов α_0:

$$1 = \frac{(c_1 - c_2\cos\alpha_0)\cos\beta}{c_2\sin\alpha_0\cdot\sin\beta} = \frac{(c_1 - c_2\cos\alpha_0)\cos\beta}{c_2\cdot\sin\beta\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha_0}}.$$

Решая его относительно $\cos\alpha_0$, получим:

$$\cos\alpha_0 = \frac{c_1}{c_2}\cos^2\beta \pm \sin\beta\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\cos\beta\right)^2}. \qquad (46)$$

Отсюда видно, что для α_0 имеются два значения, становящиеся равными при $\cos\beta = \frac{c_2}{c_1}$, поэтому в случае, если c_2 заключается в пределах

$$o \leqslant c_2 \leqslant c_1\cos\beta,$$

интегрирование по ϑ распространяется от 2π до 0 и затем по α от π до 0. Далее, при

$$c_1\cos\beta \leqslant c_2 \leqslant c_1$$

угол α_0 имеет два значения:

$$\alpha_{01} = arc\cos\left(\frac{c_1}{c_2}\cdot\cos^2\beta - \sin\beta\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\cos\beta\right)^2}\right)$$

и

$$\alpha_{02} = arc\cos\left(\frac{c_1}{c_2}\cdot\cos^2\beta + \sin\beta\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\cos\beta\right)^2}\right),$$

так что для этого промежутка получаем два интеграла: первый — по ϑ от 2π до 0 и затем по α от π до α_{01} и, далее, от α_{02} до 0, второй же интеграл необходимо взять по ϑ от $2\pi - \vartheta_0$ до ϑ_0 и по α от α_{01} до α_{02}. Наконец, в промежутке

$$o \leqslant c_1 \leqslant c_2$$

мы имеем тоже два интеграла: первый — по ϑ от 2π до 0 и затем по α от π до α_{01}, второй же — по ϑ от $\pi - \vartheta_0$ до ϑ_0 и затем по α от α_{01} до α_{02}. В виду того, что показ этого интегрирования занял бы слишком много места, приводим здесь только его результат:

В пределах

$$o \leqslant c_2 \leqslant c_1 \cos\beta$$

получим

$$W(c_1 c_2 \beta) = \frac{c_1}{\bar{c}_0} \cdot \cos\beta \cdot W(c_1) \cdot W(c_2) \frac{d\omega}{\pi}, \tag{47}$$

в пределах

$$c_1 \cos\beta \leqslant c_2 \leqslant c_1 \quad .$$

получим

$$W(c_1 c_2 \beta) = \frac{c_2}{\bar{c}_0} \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \cos\beta\right)^2 \cdot W(c_1) \cdot W(c_2) \cdot \frac{d\omega}{4\pi} \tag{48}$$

и, наконец, в последнем промежутке

$$o \leqslant c_1 \leqslant c_2,$$

в результате интегрирования получается точно такое же выражение (48). Поэтому, вероятность того, что при столкновении линия центров образует с направлением движения рассматриваемой молекулы угол β независимо от ее скорости, выразится так:

$$W(c_2 \beta) = \frac{W(c_2)}{\bar{c}_0} \cdot \frac{d\omega}{\pi} \cdot \cos\beta \int\limits_{\frac{c_2}{\cos\beta}}^{\infty} W(c_1) \cdot c_1 + \frac{W(c_2)}{\bar{c}_0} \cdot \frac{d\omega}{4\pi} \cdot$$

$$\cdot c_2 \int\limits_0^{\frac{c_2}{\cos\beta}} W(c_1) \cdot \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \cos\beta\right)^2, \tag{49}$$

что после преобразования дает:

$$W(c_2 \beta) = W(c_2) \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{c}_0} \cdot \frac{d\omega}{\pi} \cdot \cos\beta + \frac{c_2 \cdot W(c_2)}{\bar{c}_0} \cdot \frac{d\omega}{4\pi} \int\limits_0^{\frac{c_2}{\cos\beta}} W(c_1) \cdot \left(1 - \frac{c_1}{c_2} \cos\beta\right)^2.$$

Интегрируя это выражение по c_2 от ∞ до 0, получим искомую вероятность вне зависимости от скорости второй молекулы:

$$W(\beta)=\frac{d\omega}{4\pi\bar{c}_0}\left[4\bar{c}\cos\beta+\int\limits_0^\infty W(c_2)\cdot c_2\int\limits_0^{\frac{c_2}{\cos\beta}} W(c_1)\cdot\left(1-\frac{c_1}{c_2}\cos\beta\right)^2\right]. \quad (50)$$

В рассматриваемом интеграле, назовем его I, величина c_2 принимает все значения от ∞ до 0, тогда как c_1 может иметь значения только меньшие, чем $\frac{c_2}{\cos\beta}$, поэтому, если мы переменим порядок интегрирования, то должны будем интегрировать по c_2 от ∞ до $c_1\cos\beta$ и затем по c_1 от ∞ до 0. Таким образом получим:

$$I=\int\limits_0^\infty W(c_1)\int\limits_{c_1\cos\beta}^\infty c_2\left(1-\frac{c_1}{c_2}\cos\beta\right)^2\cdot W(c_2)=\int\limits_0^\infty W(c_1)\cdot i\,.$$

Нетрудно показать, подставляя в выражение для i

$$W(c_2)=\frac{4}{a^3\sqrt{\pi}}c_2{}^2\cdot e^{-\left(\frac{c_2}{a}\right)^2}\cdot dc_2\,, \quad (51)$$

что [50]

$$i=\frac{2\bar{c}}{a^2}\int\limits_{c_1\cos\beta}^\infty(c_2-c_1\cos\beta)\cdot e^{-\left(\frac{c_2}{a}\right)^2}\cdot dc_2$$

и, следовательно,

$$I=2\frac{\bar{c}}{a^2}\int\limits_0^\infty W(c_1)\int\limits_{c_1\cos\beta}^\infty(c_2-c_1\cos\beta)e^{-\left(\frac{c_2}{a}\right)^2}\cdot dc_2=2\bar{c}A-2\bar{c}\cdot\cos\beta\cdot B,$$

где

$$A=\int\limits_0^\infty\frac{W(c_1)}{a^2}\int\limits_{c_1\cos\beta}^\infty c_2\cdot e^{-\left(\frac{c_2}{a}\right)^2}\cdot dc_2=\frac{1}{2(1+\cos^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

и

$$B=\int_0^\infty \frac{W(c_1)}{a^2}\cdot c_1\int_{c_1\cos\beta}^\infty e^{-\left(\frac{c_2}{a}\right)^2}\cdot dc_2=\int_0^\infty e^{-\left(\frac{c_2}{a}\right)^2}\cdot d\frac{c_2}{a}\int_0^{\frac{c_2}{\cos\beta}} W(c_1)\cdot\frac{c_1}{a}=$$

$$=1-\frac{\cos\beta}{(1+\cos^2\beta)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\cos\beta}{2(1+\cos^2\beta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставляя A и B в выражение для I, получим искомую вероятность или „закон центровой линии“ в следующем виде:

$$W(\beta)=\frac{1}{4\pi}\frac{\bar{c}}{\bar{c}_0}\left[2\cos\beta+\frac{1+2\cos^2\beta}{(1+\cos^2\beta)^{\frac{1}{2}}}\right]\cdot d\omega\,. \qquad (52)$$

§ 19. Весьма важно отметить также, что $W(\beta)$ может быть рассматриваема не только как вероятность того, что центровая линия при столкновении образует с направлением молекулы угол β, но и как вероятность того, что при данном положении линии центров, траэктория молекулы образуют угол β с направлением линии центров, т. е. может быть формулирована как закон распределения направлений траэкторий молекул по отношению к направлению линии центров при столкновении.

Для доказательства этого положения рассмотрим все столкновения молекул, находящихся в данном об'еме газа, при которых линия центров занимает данное положение в пространстве. Пусть β_1 есть угол между траэкторией молекулы сталкивающейся с данной и линией центров. В виду того, что направления движения рассматриваемых молекул произвольны, — все направления линии центров при столкновениях равно вероятны. Вследствие этого вероятность данного положения линии центров при столкновении будет $\frac{d\omega}{4\pi}$, где $d\omega$ дифференциал телесного угла, заключающий в себе это направление. Обозначая при этом вероятность того, что траэктория молекулы, сталкивающейся с данной, образует угол β_1 с направлением линии центров через $W(\beta_1)$, получим число столкновений, происходящих при данных условиях, в секунду:

$$NzW(\beta_1)\cdot\frac{d\omega}{4\pi} \qquad (53)$$

(N — число всех молекул рассматриваемого газа

z — среднее число столкновений молекулы в секунду).

Ту же самую величину можно найти и другим способом, а именно: так как, по вышеупомянутому, направления движения рассматриваемых молекул произвольны, вероятность данного направления их движения перед столкновением будет $\frac{d\omega}{4\pi}$, поэтому, по „закону центровой линии", число столкновений, происходящих так, что линия центров образует с направлением рассматриваемых молекул угол β, будет:

$$NzW(\beta) \cdot \frac{d\omega}{4\pi}. \tag{54}$$

Так как выражения (53) и (54) представляют собою одну и ту же величину, заключаем о тождестве

$$W(\beta_1) = W(\beta),$$

что и требовалось доказать. Таким образом, „закон траэкторий" представляет собою т. ск. просто обращение „закона центровой линии" и выражается также формулой (52).

§ 20. С помощью формулы (52), а также формул (47), (48) и (49), мы можем вычислить ряд средних величин, относящихся к процессу столкновения молекул, необходимых нам для дальнейших выводов.

Так, прежде всего, на основании форм. (52) легко получается выражение для средней относительной скорости молекулы. Действительно, подставляя в формулу (52) значение дифференциала телесного угла:

$$d\omega = \sin\beta \cdot d\beta \cdot d\vartheta \tag{55}$$

и интегрируя по угловым переменным в тех пределах, в которых мыслимо их изменение, получаем:

$$\int\limits_{\beta=0}^{\beta=\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} W(\beta) = \frac{\bar{c}}{c_0}\sqrt{2}, \tag{56}$$

а так как суммирование вероятности по всем значениям пере-

менных должно приводить к единице, то и получается известное выражение:

$$\bar{c}_0 = \bar{c}\sqrt{2}.$$

Далее, умножая форм. (52) на $\cos\beta$, подставляя $d\omega$ и интегрируя в тех же пределах, как и в предыдущем случае, получим среднее значение $\cos\beta$:

$$\overline{\cos\beta} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \tag{57}$$

Точно также находится и среднее значение $\cos^2\beta$, которое оказывается равным

$$\int\limits_0^{\beta=\pi} \int\limits_0^{\vartheta=2\pi} \cos^2\beta \cdot W(\beta) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8\sqrt{2}} ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 0.405806. \tag{58}$$

Величина эта представляет собой т. н. среднюю персистенцию, речь о которой будет ниже (см. главу 5).

С помощью форм. (52) легко получается также и

$$\overline{\cos^3\beta} = \frac{\sqrt{2}}{5}. \tag{59}$$

Среднее значение величин, зависящих не только от β, но и от скорости, с помощью формулы (52) получить нельзя, — в этом случае нужно исходить из формул (47) и (48). Так, если B есть функция c_1 и β, то, на основании вышеизложенного, получим среднее значение этой величины по формуле

$$\bar{B} = \int\limits_{\beta=0}^{\beta=\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \frac{d\omega}{\pi\bar{c}_0} \cos\beta \int\limits_0^{\infty} W(c_2) \int\limits_{\frac{c_2}{\cos\beta}}^{\infty} B \cdot c_1 \cdot W(c_1) +$$

$$+ \int\limits_{\beta=0}^{\beta=\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \frac{d\bar{\omega}}{4\pi\bar{c}_0} \int\limits_0^{\infty} W(c_2) \cdot c_2 \int\limits_0^{\frac{c_2}{\cos\beta}} B \cdot W(c_1) \left(1 + \frac{c_1}{c_2}\cos\beta\right)^2. \tag{60}$$

Таким образом находим среднее значение составляющей скорости сталкивающейся молекулы в направлении линии центров ($\bar{\sigma}$), которая нужна будет нам впоследствии для вывода длины свободного пути молекулы:

$$\bar{\sigma} = \overline{c \cdot \cos\beta} = \frac{2}{3}\frac{\overline{c^2}}{\bar{c}_0}. \tag{61}$$

Таким же методом находим среднюю глубину, с которой приходят молекулы в точку столкновения. Эта глубина l расположена в направлении линии центров и равна

$$l = \overline{L_c \cdot \cos\beta} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 1{,}050813\, L, \tag{62}$$

причем L_c представляет собою среднюю длину свободного пути молекул данной скорости c и выражается, согласно выводу Больтцмана, формулой

$$L_c = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{L}{\varphi(x)}, \tag{63}$$

где $$x = \frac{c}{a};\ a^2 = \tfrac{2}{3}\overline{c^2},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} e^{-x^2} + \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) \int_0^x e^{-y} dy. \tag{64}$$

Подобным же путем находим еще величину

$$\overline{L_c \cdot \cos^3\beta} = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot 1{,}050813 \cdot L. \tag{65}$$

§ 21. Некоторые из вышеприведенных средних величин можно найти также и с помощью закона распределения относительных скоростей, опубликованного мною ранее[52].

Надо заметить, что, к сожалению, вывод этого закона так, как он изложен мною в вышеупомянутой статье, страдает неясностью и может привести к неправильному толкованию результата. Поэтому считаю необходимым повторить его здесь еще раз, исправив его недостатки. При этом для простоты на этот раз ограничимся только случаем однородного газа.

Допустим, что в данном об'еме газа находится N молекул. Рассмотрим состояние газа в некоторый данный момент времени. Каждая из молекул газа обладает в этот момент определенной скоростью и распределение скоростей подчинено закону Максвелля.

Выберем из числа всех молекул какую нибудь одну (A) и допустим, что мы не имеем никакой возможности узнать, какова ее скорость. Поставим себе задачу определить вероятность того, что любая из других молекул газа (B) обладает составляющей относительной скорости u_0 (параллельной некоторой оси U), по отношению к ранее выбранной нами молекуле (A).

Допустим сначала, что наша молекула (A) обладает составляющей абсолютной скорости, равной u, в направлении оси U. Рассмотрим группу молекул (B) газа, обладающих составляющей v в направлении той же оси. В таком случае составляющая относительной скорости между данной молекулой и каждой из молекул группы (B) будет

$$u_0 = v - u .$$

По закону Максвелля число молекул со скоростью v будет равно

$$\frac{N}{a\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{v}{a}\right)^2} \cdot dv .$$

Очевидно, что при сделанных нами допущениях число это будет равно числу случаев осуществления относительной скорости u_0. Мы можем подставить в это выражение вместо v его значение $v = u_0 + u$, тогда, принимая во внимание постоянство u, получим

$$\frac{N}{a\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(u_0+u)^2}{a^2}} \cdot du_0 .$$

Формула эта дает число случаев осуществления u_0 для молекул (B) в случае, если рассматриваемая нами молекула (A) обладает скоростью u. Однако вероятность того, что молекула (A) обладает этой скоростью, равна

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{a^2}} \cdot du .$$

Поэтому число молекул (B), обладающих сост. относительной скорости u_0, в рассматриваемом случае будет равно

$$\frac{N}{a^2\pi}\cdot e^{-\frac{(u_0+u)^2}{a^2}-\frac{u^2}{a^2}}\cdot du_0\cdot du.$$

Интегрируя это выражение по u от $+\infty$ до $-\infty$, мы получим число всех молекул (B), обладающих состав. относит. скорости u_0 по отношению к молекуле (A), когда абсолютная скорость ее неопределенна. Деля полученное выражение на N, мы получим в результате вероятность того, что произвольно выбранная молекула (B) обладает, по отношению к произвольно же выбранной молекуле (A), составляющей относительной скорости, равной u_0:

$$W(u_0)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{u_0^2}{2a^2}}\cdot du_0. \tag{66}$$

Это выражение мы и называем законом распределения относительных скоростей.

Сравнивая полученное выражение с Максвеллевской формулой, мы видим, что оно отличается от нее только величиной постоянной. Поэтому достаточно подставить в выражения для средних абсолютных величин, получающихся по формуле Максвелля, вместо a соответствующую ей величину $a\sqrt{2}$, чтобы получить выражения для средних относительных величин. Например, средняя абсолютная скорость молекул, согласно Максвеллевской формуле, равна

$$\bar{c}=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}. \tag{67}$$

Подставляя сюда вместо a величину $a\sqrt{2}$, получим выражение для средней относительной скорости

$$\bar{c}_0=\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=\bar{c}\sqrt{2} \text{ и т. д.} \tag{68}$$

§ 22 С помощью форм. (66) мы выведем еще раз уже найденное нами выше (см. формулу 61) выражение для среднего значения радиальной составляющей скорости сталкивающихся молекул.

Таким образом, эта важная величина, необходимая для вывода среднего числа столкновений молекул реального газа и жидкости, будет дважды проконтролирована.

Выберем некоторое определенное направление U и зададимся, прежде всего, вопросом о том, чем определяется число таких столкновений молекул, при которых линия центров в момент столкновения совпадает с вышеуказанным направлением. Для решения задачи опишем вокруг одной из молекул (A) газа сферу радиусом, равным диаметру молекулы d, и рас-

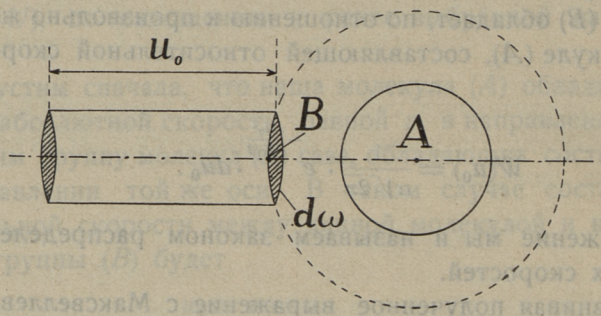

Рис. 2.

смотрим группу молекул (B), составляющая относительной скорости которых по отношению к данной (A) в направлении оси U равна u_0.

Для того, чтобы при столкновениях этих молекул (B) с данной (A) линия центров занимала бы положение AB, параллельное оси U, необходимо, чтобы центр ударяющей молекулы (B) в момент столкновения достигал поверхность элемента $d\omega$, расположенного у точки B на поверхности вышеописанной сферы. Легко видеть, что число молекул, обладающих составляющей u_0 и достигающих элемента $d\omega$ в течение секунды равно числу центров названных молекул в об'еме цилиндра с основанием $d\omega$ и высотой u_0. Если число молекул газа в единице об'ема равно n и вероятность данной составляющей относительной скорости $W(u_0)$, то искомое число будет равно

$$nW(u_0)u_0 \cdot d\omega,$$

между тем как полное число столкновений на элементе $d\omega$ в секунду, очевидно, равно

$$n\bar{u}_0 \cdot d\omega,$$

где $\bar{u}_0$ среднее значение вышеуказанной составляющей. Отсюда вероятность того, что при данном столкновении составл. относительной скорости молекул равна u_0, выразится так:

$$\frac{W(u_0) \cdot u_0}{\bar{u}_0}. \tag{69}$$

Поэтому среднее значение u_0 при столкновении молекул (назовем его $\bar{u}_r$) будет равно

$$\bar{u}_r = \int_0^\infty \frac{W(u_0) \cdot u_0^2}{\bar{u}_0} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\bar{u}_0}.$$

А так как

$$\bar{u}_0 = \int_0^\infty W(u_0) \cdot u_0 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}, \tag{70}$$

то

$$\bar{u}_r = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{71}$$

Принимая во внимание, что средняя скорость молекул газа

$$\bar{c} = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \tag{72}$$

и средний квадрат скорости

$$\overline{c^2} = \frac{3}{2} a^2 = \frac{3\pi}{8}\left(\bar{c}\right)^2, \tag{73}$$

получим

$$\bar{u}_r = \bar{c} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(\bar{c})^2}{\bar{c}_0} = \frac{4}{3} \frac{\overline{c^2}}{\bar{c}_0}. \tag{74}$$

А так как

$$\bar{u}_r = 2\,\bar{\sigma}, \tag{75}$$

где $\bar{\sigma}$ есть среднее значение радиальной составляющей абсолютной скорости сталкивающихся молекул, то

$$\bar{\sigma} = \frac{2}{3}\frac{\overline{c^2}}{\bar{c}_0}, \tag{61}$$

в полном согласии с ранее полученным результатом.

§ 23. Подобным же образом не трудно найти и среднее значение для энергии сталкивающихся молекул.

Если возьмем за центр координат центр тяжести двух сталкивающихся молекул, то изменения кинетической энергии обоих молекул ΔE_1 и ΔE_2 будут связаны с изменением потенциальной энергии системы ($\Delta \Phi$) уравнением

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta \Phi = 0.$$

Принимая во внимание, что составляющая скорости каждой из сталкивающихся молекул в направлении центра тяжести или, что то же самое, в направлении линии центров, в момент, непосредственно предшествующий столкновению, равна $\frac{u_r}{2}$ (по отношению к центру тяжести!), в самый же момент столкновения равна нулю, получается

$$\Delta E_1 = \Delta E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{u_r}{2}\right)^2 m = \frac{u_r^2 m}{8}.$$

Поэтому

$$\frac{u_r^2 m}{4} = -\Delta \Phi = \Phi - \Phi_0,$$

где Φ_0 значение потенциальной энергии системы в момент, предшествующий столкновению, и Φ соответствующее значение ее в момент столкновения. Среднее значение u_r^2 получим с помощью формулы (69) следующим образом:

$$\overline{u_r^2} = \int_0^\infty \frac{u_0^3 \cdot W(u_0)}{\bar{u}_0} = 2\alpha^2 = \frac{4}{3}\overline{c^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\overline{u_r^2} m}{4} = \frac{m\overline{c^2}}{3} = kT,$$

где k — Больтцмановская константа $= \frac{R}{N}$.

Откуда и получается уравнение

$$\bar{\Phi} - \Phi_0 = kT,$$

лежащее в основе теории внутреннего трения Л. Шамеса. (См. форм. 11).

ГЛАВА 3.

Среднее число столкновений и длина свободного пути молекулы.

§ 24. Исследуя статистику столкновений, мы пользовались моделью эластичных шаров. Модель эта и в дальнейшем пригодится нам для изучения интересующих нас явлений в сжатых газах и жидкостях, где пока что пользование ею неустранимо. Однако, при исследованиях, относящихся к „идеальным“ или умеренно разреженным газам, эту модель мы в состоянии уже заменить моделью, более приближающейся к реальности, а именно моделью, в которой молекулы рассматриваются как точечные центры некоторых силовых полей. При этом, пока что, при выводе среднего секундного числа столкновений подобных молекул, нам достаточно будет знать лишь одно и главное свойство этих полей, их шаросимметричность. Иными словами, силу взаимодействия между молекулами мы будем предполагать зависящей лишь от расстояния между их центрами. Конечно, модель эта в строгом смысле применима лишь для одноатомных газов, однако пользование ею возможно и в случае газов, состоящих из многоатомных молекул.

§ 25. Вывод среднего числа столкновений в случае вышеописанной модели был опубликован нами ранее (см. § 7 гл. 1); несмотря на это, имея в виду удобство читателя, а также вследствие его краткости и важности для дальнейшего изложения, мы позволим себе привести его здесь вторично.

Рассмотрим некоторую молекулу газа (A). Опишем из центра ее сферы радиусом $\varrho + d\varrho$; ϱ и $\varrho - d\varrho$. Промежуток между первыми двумя сферами назовем зоной I, а промежуток между двумя последними — зоной II (см. рис. 3). Из числа молекул, центры которых находятся в I-ой зоне, лишь те могут проник-

нуть во II-ую зону, которые обладают запасом кинетической энергии, необходимым для уравновешивания разности в потенциальной энергии $-d\Phi$, господствующей между этими зонами.

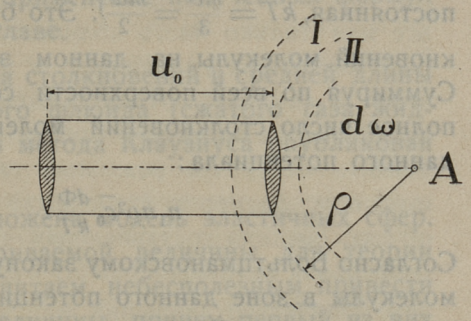

Рис. 3.

На основании изложенного в § 23 легко понять, что уравнение, выражающее изменение энергии, происходящее при переходе центра молекулы из зоны I в зону II, в данном случае, получит такую форму [53]:

$$d\,\frac{u_0^2 m}{4} = d\Phi \tag{76}$$

Таким образом, из молекул, находящихся в зоне I, лишь те проникнут в зону II, для которых

$$u_0 \geqslant \sqrt{4\,\frac{d\Phi}{m}} = a\,. \tag{77}$$

Все же молекулы, для которых u_0 лежит ниже этого предела, будут отброшены назад, для них акт столкновения наступит в зоне *I*-ой.

Поток молекул, стремящихся проникнуть сквозь элемент $d\omega$ со скоростью u_0 из зоны *I* в зону *II*, как мы видели (см. § 22), равен

$$n_1\, W(u_0)\cdot u_0 \cdot d\omega\,,$$

где n_1 число всех молекул в единице об'ема зоны I. Поэтому полный поток молекул, который будет отброшен назад на границе зон, будет равен

$$n_1\, d\omega \int\limits_0^a W(u_0)\cdot u_0 = \frac{n_1\cdot d\omega}{a\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^a e^{-\frac{u_0^2}{2a^2}} \cdot\, u_0 \cdot du_0 =$$

$$= -\frac{n_1 a}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-x^2} \right)_0^{\frac{a}{a\sqrt{2}}} = \frac{n_1 \bar{c}_0}{4}\,\frac{d\Phi}{kT}\cdot d\omega$$

(см. к этому форм. 68 и 77. Величина k — Больтцмановская постоянная, $kT = \frac{m\overline{c^2}}{3} = \frac{ma^2}{2}$). Это будет секундным числом столкновений молекулы на данном элементе поверхности сферы. Суммируя по всей поверхности сферы, равной $4\pi\varrho^2$, получим полное число столкновений молекулы, происходящих в зоне данного потенциала:

$$n_1 \pi \varrho^2 \overline{c_0} \frac{d\Phi}{kT}. \tag{78}$$

Согласно Больтцмановскому закону, если потенциальная энергия молекулы в зоне данного потенциала равна Φ, то число молекул в единице об'ема зоны равно

$$n_1 = ne^{-\frac{\Phi}{kT}}, \tag{79}$$

где n число молекул в той зоне, где $\Phi = 0$.

В виду того, что громадное большинство молекул „идеального" газа находятся на таких расстояниях между собой, на которых действие междумолекулярных сил практически незаметно, можно принять n равным просто среднему числу молекул в единице об'ема газа, и поэтому формула, выведенная нами для столкновений, перепишется так:

$$n\pi\varrho^2 \overline{c_0} e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot \frac{d\Phi}{kT}. \tag{80}$$

Интегрируя это на всю область, в которой между молекулами преобладает отталкивающая сила, получим полное среднее число столкновений молекулы в секунду

$$z = n\pi \overline{c_0} \overline{\varrho^2}, \tag{81}$$

где

$$\overline{\varrho^2} = \int\limits_{\substack{\Phi=\Phi_0 \\ \varrho=\varrho_0}}^{\substack{\varrho=0 \\ \Phi=\infty}} \varrho^2 e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot \frac{d\Phi}{kT}, \tag{82}$$

причем $\sqrt{\overline{\varrho^2}}$ можно назвать эффективным диаметром столкновений. Дальнейшее развитие и применение полученных формул будет изложено в следующей главе.

§ 26. Вывод среднего числа столкновений и средней длины свободного пути для сгущенного флюида (сжатого газа, жидкости) с помощью вириального метода Клаузиуса опубликован нами ранее[54].

В основу этого вывода положена модель эластичных сфер. Вследствие важности рассматриваемой величины для теории внутреннего трения флюида считаем небесполезным привести здесь еще два вывода этой величины, причем первый из них вследствие своей простоты может служить в качестве введения.

С этого вывода мы сейчас и начнем. Прежде всего — несколько слов о модели, лежащей в его основе. В данном случае мы будем представлять себе молекулы в виде эластичных шаров, между которыми действуют силы притяжения, которые однако внутри самого флюида совершенно уравновешиваются и проявляются только как „внутреннее давление" в в. д. Ваальсовском смысле. То-есть, иными словами, мы принимаем здесь простую в. д. Ваальсовскую модель. Вследствие этого, движение молекул внутри флюида мы вправе рассматривать, как прямолинейное и равномерное.

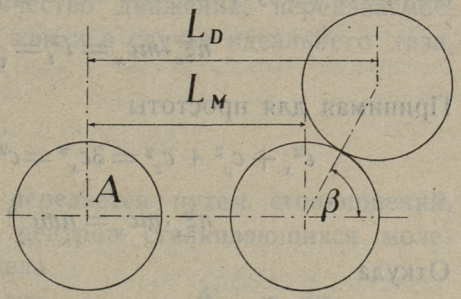

Рис. 4.

Легко показать, что скорость перемещения количества движения в сгущенном веществе, благодаря столкновениям молекул, более скорости перемещения материи. Действительно, рассматривая процесс столкновения молекул (см. рис. 4), мы видим, что в то время, как молекула (A) проходит в промежутке между столкновениями путь L_M, количество движения в то же время, в среднем, перемещается на расстояние

$$L_D = L_M + \overline{d \cdot \cos\beta}, \tag{83}$$

где $\overline{\cos\beta}$ представляет собой величину, выведенную нами выше (см. форм. 57). Происходит это оттого, что при столкновении все или только часть количества движения как бы перескакивает из центра ударяющей в центр ударяемой молекулы. Поэтому и скорость потока движения в реальных газах более скорости потока материи. Соответственно этому, мы можем представить себе, что реальный газ как бы состоит из неких, не имеющих размеров (точечных) молекул, числом n в единице об'ема, средняя составляющая скорости движения которых, параллельная некоторой оси X, будет ξ_x, несущих, однако, в среднем, количество движения mc_x, как и молекулы реального газа. В таком случае для термического давления газа $P_t = p + P$ (внешнее + внутреннее) мы получим следующее выражение:

$$n\xi_x \cdot mc_x = P_t = \frac{RT}{v-b} = \frac{Nmc^2}{3(v-b)}.$$

Принимая для простоты

$$c^2_x + c_y^2 + c_z^2 = 3c_x^2 = c^2,$$ можем переписать это так:

$$n\xi_x \cdot mc_x = nmc_x^2 \cdot \frac{v}{v-b}.$$

Откуда

$$\frac{\xi_x}{c_x} = \frac{v}{v-b}.$$

В таком же отношении, очевидно, находятся и $\frac{\xi}{c}$, но, с другой стороны, в силу вышеизложенного

$$\frac{\xi}{c} = \frac{L_D}{L_M} = \frac{L_M + d \cdot \overline{\cos\beta}}{L_M} = \frac{v}{v-b}.$$

Откуда

$$L_M = d \cdot \overline{\cos\beta} \cdot \frac{v-b}{b}$$

и, следовательно, принимая во внимание форм. (57), получим

$$L_M = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot d \cdot \frac{v-b}{b}, \qquad (84)$$

что представляет собой формулу средней длины свободного пути молекулы сгущенного флюида.

§ 27. Строгий вывод средней длины пути, к которому мы теперь переходим, предполагает ту же в. д. Ваальсовскую модель, которую, однако, оказывается в этом случае возможным несколько приблизить к реальности, устранив предположение об отсутствии взаимодействия молекул внутри флюида.

Как показал уже Г. Егер, термическое давление флюида, равное сумме внутреннего и внешнего давления, мы можем определить как количество движения, сообщаемое одной частью флюида другой его части, отделенной от нее некоторой идеальной плоскостью (пл. AB на рис. 5), в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Механизм этого процесса двоякого рода: прежде всего процесс этот осуществляется путем прямого переноса движения, причем не трудно убедиться в том, что при любом сгущении флюида количество движения, передаваемое, таким образом, на одном см^2, как и в случае идеального газа, будет равно

$$\frac{nm\overline{c^2}}{3},$$

другая же часть движения передается путем столкновений, происходящих так, что линия центров сталкивающихся молекул пересекает плоскость раздела (AB). Для того, чтобы найти эту часть, поступаем так: Рассмотрим элемент об'ема толщиною dw, ограниченный с боков плоскостями в 1 кв. см. и расположенный на расстоянии w (меньшем, чем диаметр молекулы d) от плоскости раздела AB.

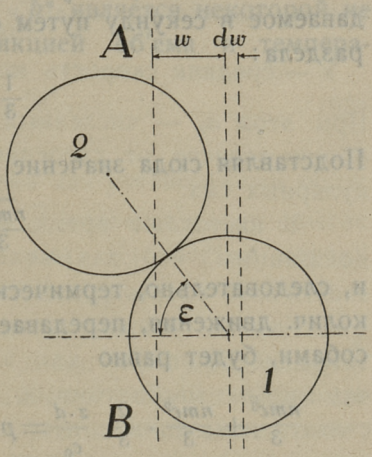

Рис. 5.

В течение секунды в этом элементе происходит $n \cdot z \cdot dw$ столкновений (z — среднее число столкновений молекулы в секунду). При каждом из этих столкновений количество движения каждой из сталкивающихся молекул изменяется на $m(\sigma_1 - \sigma_2)$, где σ_1 и σ_2 суть проэкции скоростей

молекул на направление линии центров. Проэкция этой величины на направление нормали к плоскости раздела, равная

$$m(\sigma_1 - \sigma_2)\cdot\cos\varepsilon$$

(ε — угол между указанной нормалью и линией центров), и есть то количество движения, которое создает давление. Вероятность данного положения линии центров при столкновении равна

$$\frac{1}{2}\sin\varepsilon\cdot d\varepsilon\,.$$

Среднее значение разности

$$\overline{\sigma_1 - \sigma_2} = \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 = 2\bar{\sigma}$$

(так как $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ должны быть равны по абсолютной величине и лишь различаются знаком), и поэтому количество движения и, в среднем передаваемое в данных геометрических условиях, равно

$$mnz\bar{\sigma}\cdot\cos\varepsilon\cdot\sin\varepsilon\cdot d\varepsilon\cdot dw\,. \tag{85}$$

Интегрируя это выражение по ε от $\cos\varepsilon = \frac{w}{d}$ до 1 и затем по w от $w = d$ до 0, получим искомое количество движения, передаваемое в секунду путем столкновений сквозь 1 см² плоскости раздела:

$$\frac{1}{3}\,mnzd\bar{\sigma}\,. \tag{86}$$

Подставляя сюда значение $\bar{\sigma}$ из формулы (61), получим

$$\frac{nmc^2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{z\cdot d}{\bar{c}_0}$$

и, следовательно, термическое давление флюида, равное сумме колич. движения, передаваемого обоими вышеописанными способами, будет равно

$$\frac{nm\bar{c^2}}{3} + \frac{nmc^2}{3}\cdot\frac{2}{3}\,\frac{z\cdot d}{\bar{c}_0} = p + P = \frac{RT}{v-b} = \frac{nm\bar{c^2}}{3}\cdot\frac{v}{v-b}\,, \tag{87}$$

откуда получается уравнение

$$1 + \frac{2}{3}\,\frac{z\cdot d}{\bar{c}_0} = \frac{v}{v-b}\,,$$

из которого вытекает следующее выражение для среднего числа столкновений молекулы в секунду:

$$z = \frac{3}{2} \cdot \bar{c}_0 \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{b}{v-b}. \tag{88}$$

В виду того, что, как мы видели, вывод этой формулы не требует никакой определенной картины силового поля внутри флюида и основывается на самом общем выражении для уравнения состояния

$$(p+P)(v-b) = RT,$$

полученный результат должен быть вполне приложим к реальному флюиду, независимо от степени его сгущения. При этом, конечно, диаметр d следует понимать как некоторую эффективчую величину, зависящую от температуры, а может быть и от об'ема. Величина эта идентична т. н. „Энскоговскому диаметру", подробное определение которого будет дано в главе 4.

Из формулы (88) вытекает и найденное нами уже выше выражение для средней длины пути молекулы

$$L = \frac{\bar{c}}{z} = \frac{2}{3} \frac{\bar{c}}{\bar{c}_0} \cdot d \cdot \frac{v-b}{b} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot d \cdot \frac{v-b}{b}. \tag{89}$$

Входящая в эти формулы величина „b" является некоторой не вполне еще пока выясненной функцией об'ема и температуры [55].

ГЛАВА 4.

Умеренно разреженные газы.

§ 28. Под именем умеренно разреженных или „идеальных газов мы подразумеваем газы, состояние которых с достаточной точностью выражается уравнением

$$pv = RT.$$

Коэфициент внутреннего трения идеальных газов, в первом приближении, не зависит от плотности газа и может быть выражен формулой

$$\eta_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m\bar{c}}{\pi\varrho^2}, \tag{90}$$

где m — масса молекулы и

$\bar{c}$ — средняя скорость молекул $= \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 14552\left(\frac{T}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$ см./сек.

При этом a_0 — численный коэфициент, величина которого в общем зависит от строения молекул и от закона междумолекулярных сил.

В настоящее время можно считать теоретически строго доказанным, что для молекул, рассматриваемых как вполне эластичные сферы $a_0 = 0.499$ (С. Чепмен, Д. Энског).

Как мы увидим ниже, этот численный коэфициент подтверждается опытом как в случае одноатомных, так и в случае многих многоатомных газов, хотя, принципиально, можно считать доказанным, что для многоатомных молекул, способных к вращению, величина $a_0 > 0.499$ (Пиддак).

Не исключено, что форма молекул может также влиять на величину этого коэфициента, однако это влияние пока что не исследовано.

Величина $\overline{\varrho^2}$, входящая в формулу (90), представляет собой эффективный квадрат диаметра молекулы. Корень квадратный из этой величины мы будем называть эффективным диаметром трения.

§ 29. Мы увидим ниже (в главе 6), что коэфициент внутр. трения „идеального" газа может быть представлен также и следующей формулой:

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \frac{\bar{c}d}{b_0}, \tag{91}$$

где d — эффективный диаметр молекулы, который мы будем называть Энскоговским,

b_0 — предельное значение величины b уравнения состояния

$$(p + P)(v - b) = R_1 T \tag{92}$$

при давлении $p = 0$. Уравнение (92) есть обобщение в. д. Ваальсовского уравнения. P обозначает внутреннее давление. Как P, так и b мы предполагаем функциями об'ема и температуры, однако не задаемся никакой определенной формой этих функций. Уравнение это мы будем относить к 1 гр. газа, что мы отметим индексом при постоянной $R_1 = \frac{R}{M}$.

Величину b_0 можно считать равной

$$b_0 = 4\frac{\pi\overline{\varrho^3}}{6} \cdot \frac{N}{M} = \frac{2}{3}\frac{\pi\overline{\varrho^3}}{m}, \tag{93}$$

то-есть она может быть рассматриваема как учетверенный об'ем молекул одного грамма газа, так что $\overline{\varrho^3}$ является в этом смысле эффективным кубом диаметра молекулы. Кубический корень из $\overline{\varrho^3}$ принято называть Бойлевским диаметром.

Формулы (90) и (91) вполне равнозначны по физическому смыслу, поэтому, приравнивая их правые части друг к другу и подставляя величину b_0 из выражения (93), мы получаем простое взаимоотношение между эффективными диаметрами: трения, Бойлевским и Энскоговским

$$d = \frac{\overline{\varrho^3}}{\overline{\varrho^2}}. \tag{94}$$

Для реальных молекул все три диаметра различны по величине. Наибольшим из них является диаметр трения, затем идет Бойлевский и, наконец, Энскоговский диаметр. Само собой разумеется, что, в случае модели эластичных сфер, все эти три диаметра равны друг другу.

§ 30. Рассматривая молекулы, как центры некоторых сил, в § 25 предыдущей главы, мы пришли к следующему выражению для квадрата эффективного диаметра столкновений:

$$\overline{\varrho^2} = \int\limits_{\substack{\Phi = \Phi_0 \\ \varrho = \varrho_0}}^{\substack{\varrho = 0 \\ \Phi = \infty}} \varrho^2 e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot \frac{d\Phi}{kT} \tag{82}$$

Здесь k — Больтцмановская константа $\frac{R}{N} = \frac{\text{газовая постоянная}}{\text{Авогадрово число}}$.

Φ — взаимная потенциальная энергия молекул, соответствующая расстоянию ϱ, т. е. работа, которую нужно совершить, чтобы приблизить одну молекулу к другой из бесконечности до ϱ.

Φ_0 — минимальное значение потенциальной энергии, соответствующее расстоянию ϱ_0, при котором сила, действующая между молекулами, равна нулю. Если между молекулами действуют одновременно притягивающая и отталкивающая сила, то на расстоянии, меньшем чем ϱ_0, преобладает отталкивающая, а на расстоянии большем — притягивающая сила. Ясно, что в этом случае Φ_0 отрицательная величина.

Величину ϱ_0 мы будем называть Шамесовским диаметром молекулы. При абсолютном отсутствии движения, т. е. при — 273°С, молекулы должны сблизиться между собой так, что расстояние их центров сделается равным ϱ_0. Если бы молекулы было просто твердыми — эластичными шарами диаметра ϱ, величина ϱ под знаком интеграла в формуле (82) была бы постоянна и равна диаметру молекулы d, величина Φ_0 равня-

лась бы нулю и мы получили бы для среднего числа столкновений (форм. 81)

$$z = n\pi\bar{c}_0 d^2,$$

т. е. давно известную формулу кинетической теории газов. В случае любой другой модели

$$z = n\pi\bar{c}_0\overline{\varrho^2},$$

причем $\overline{\varrho^2}$ есть квадрат эффективного диаметра молекулы, так как молекулы реального газа в отношении столкновений ведут себя так, как будто бы они были твердыми эластичными шарами с диаметром, равным этому эффективному диаметру — диаметру столкновений.

Коэфициент внутреннего трения газа, как известно, пропорционален величине средней длины свободного пути молекул

$$L = \frac{\bar{c}}{z}.$$

Поэтому эффективный диаметр столкновений должен быть тождествен эффективному диаметру трения в формуле (90).

§ 31. Зная закон сил, действующих между молекулами газа, и пользуясь вириальным методом Клаузиуса, мы легко можем вывести величину b_0, входящую в формулу (91). Для этого нам нужно будет, прежде всего, найти вириал сил, соответствующий области отталкивающих сил, т. е. найти мгновенную сумму произведений из силы S, действующей между двумя молекулами, на их взаимное расстояние ϱ, взятую с обратным знаком. Хотя суммирование это должно распространяться на все мыслимые комбинации молекул газа, но фактически в эту сумму попадут лишь те молекулы, которые в данный момент находятся в процессе столкновения, т. е. на таких расстояниях, которые меньше, чем Шамесовский диаметр ϱ_0, так как только в этом случае результирующая сила взаимодействия будет отталкивающей.

Число молекул, находящихся на расстоянии ϱ от центра некоторой рассматриваемой молекулы, при отсутствии силового поля, будет равно

$$4\pi\varrho^2 n \cdot d\varrho.$$

В случае, если взаимный потенциал междумолекулярных сил будет Φ, то по закону Л. Больтцмана число это будет равно

$$4\pi\varrho^2 n e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot d\varrho .$$

Умножая это на число всех молекул, находящихся в данном об'еме газа (1 граммолекула) и деля пополам, получим полное число таких молекулярных пар в газе:

$$2\pi n\varrho^2 N e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot d\varrho .$$

Сила, действующая между молекулами каждой из этих пар

$$S = -\frac{d\Phi}{d\varrho} .$$

Поэтому вириал, распространенный на эти пары, будет равен

$$2\pi\varrho^3 n N e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot d\Phi .$$

Суммируя это выражение на всю область, в которой действуют отталкивающие силы, т. е. от $\varrho = o$ до $\varrho = \varrho_0$ или соответственно от $\Phi = \infty$ до $\Phi = \Phi_0$, получим полный вириал отталкивающих сил

$$V_{\text{отт.}} = 2\pi n N \int_{\Phi_0}^{\infty} \varrho^3 \cdot e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot d\Phi = 2\pi n N k T \int_{\Phi_0}^{\infty} \varrho^3 e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot \frac{d\Phi}{kT} =$$

$$= 2\pi n R T \overline{\varrho^3} ,$$

где

$$\overline{\varrho^3} = \int_{\Phi_0}^{\infty} \varrho^3 e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot \frac{d\Phi}{kT} . \qquad (95)$$

Подставляя полученное значение вириала отталкивания в вириальное уравнение Клаузиуса

$$V_{\text{отт.}} + V_{\text{прит.}} + 3RT = 3pv\,,$$

после преобразований получим

$$RT = \frac{v}{1 + \frac{2}{3}\pi n\overline{\varrho^3}} \cdot \left(p - \frac{V_{\text{прит.}}}{3v}\right).$$

В этом выражении величина $-\frac{V_{\text{прит.}}}{3v} = P$, т. е. внутреннему давлению газа, обусловленному притяжением молекул, величина же

$$\frac{v}{1 + \frac{2}{3}\pi n\overline{\varrho^3}} = v - \frac{2}{3}\pi n v\overline{\varrho^3} = v - \frac{2}{3} \cdot \pi N\overline{\varrho^3} = v - b\,.$$

Таким образом, для одной граммолекулы газа

$$b = \frac{2}{3}\pi N\overline{\varrho^3}$$

и, следовательно, для одного грамма газа получается выражение, приведенное выше (93), причем величина $\overline{\varrho^3}$, даваемая формулой (95), будет представлять собой куб эффективного — Бойлевского диаметра.

§ 32. Задаваясь тем или иным законом междумолекулярных сил, который в общем можно выразить формулой

$$\Phi = f(\varrho)\,,$$

с помощью формулы (82) и (95) мы получим то или иное выражение для эффективных диаметров, которое в конечном счете приводит к тому или иному виду температурной зависимости коэфициента вн. трения и в. д. Ваальсовской „константы“, что в связи с данными эксперимента позволит нам составить суждение о степени соответствия действительности этих силовых законов.

Так, например, полагая молекулы твердыми эластичными шарами диаметра d, мы получим по форм. (82)

$$\overline{\varrho^2} = d^2 \int_0^\infty e^{-\frac{d\Phi}{kT}} \frac{d\Phi}{kT} = d^2$$

и точно также (по форм. 95) $\overline{\varrho^3} = d^3$, что приводит к общеизвестным формулам для η_0 и b_0.

Приписывая этим твердым — эластичным молекулам еще и силы притяжения (Сутерлендовская модель), увеличивающиеся по мере приближения молекул друг к другу, согласно некоторому закону так, что, когда молекулы достигают соприкосновения, взаимный потенциал их будет равен Φ_0, получим:

$$\overline{\varrho^2} = d^2 \int_{\Phi_0}^\infty e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot \frac{d\Phi}{kT} = d^2 e^{-\frac{\Phi_0}{kT}}$$

и также

$$\overline{\varrho^3} = d^3 e^{-\frac{\Phi_0}{kT}},$$

что приводит к Рейнганум — Сутерлендовской формуле коэф. вн. трения:

$$\eta_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m\bar{c}}{\pi d^2} \cdot e^{-\frac{C}{T}} = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m\bar{c}}{\pi d^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{C}{T}} \tag{96}$$

и дает для величины b_0 следующее выражение:

$$b_0 = \frac{2}{3} \frac{\pi d^3}{m} \cdot e^{\frac{C}{T}}.$$

Как известно, эта формула трения, хотя и имеет широкое применение, приложима лишь в ограниченных температурных интервалах и к ограниченному числу веществ, выражение же, полученное для b_0, вовсе не в состоянии выразить температурный ход этой величины, так как, согласно этой формуле, с уве-

личением температуры величина b_0 должна стремиться к определенному пределу, тогда как экспериментальные данные (как мы увидим ниже) показывают, что предел этот, если и не равен, то во всяком случае весьма близок к нулю.

Таким образом, Сутерлендовская модель мало согласуется с экспериментом и непригодна для определения размеров молекул.

§ 33. Согласно Максвеллевской модели, молекулы представляют собой центры отталкивающих сил, убывающих обратно пропорционально некоторой степени расстояния по закону

$$S = \frac{\mu}{\varrho^{\nu}}. \tag{97}$$

В этом случае взаимный потенциал двух молекул будет

$$\Phi = \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\mu}{\varrho^{\nu}} \cdot d\varrho = \frac{\mu}{\varrho^{\nu-1}} \cdot \frac{1}{\nu-1}.$$

Пользуясь этим выражением, мы можем выразить ϱ как функцию Φ:

$$\varrho = \left[\frac{\mu}{(\nu-1)\Phi}\right]^{\frac{1}{\nu-1}} = \left[\frac{\mu}{(\nu-)kT}\right]^{\frac{1}{\nu-1}} \left(\frac{\Phi}{kT}\right)^{-\frac{1}{\nu-1}}.$$

Подставляя это выражение в формулы (82) и (95) и принимая во внимание, что интегрирование в этом случае нужно вести от ∞ до o, получим:

$$\overline{\varrho^2} = \left[\frac{\mu}{(\nu-1)kT}\right]^{\frac{2}{\nu-1}} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{2}{\nu-1}\right), \tag{98}$$

а также

$$\overline{\varrho^3} = \left[\frac{\mu}{(\nu-1)kT}\right]^{\frac{3}{\nu-1}} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{3}{\nu-1}\right), \tag{99}$$

где Γ обозначает собой гамма функцию.

Подставляя $\overline{\varrho^2}$ в формулу (90), мы приходим к формуле вн. трения, по существу не отличающейся от Энског—Максвеллевской (см. форм. 4 и 5). Максвеллевская формула, как известно, превосходно передает температурный ход кривой трения легких газов (например *He*) в весьма широких температурных интервалах, однако к более тяжелым газам (CO_2), между молекулами которых действуют значительные силы притяжения, она уже плохо применима. Кроме того, она не в состоянии об'яснить перегиб на кривой трения, наблюдающийся при некоторой температуре у всех газов, когда кривая из вогнутой к оси T становится выпуклой[56].

Действительно, если величина n формулы (5), равная

$$\frac{2}{\nu - 1} + \frac{1}{2},$$

меньше единицы, то кривая может быть только выпуклой по отношению к оси температур и наоборот. Переход от выпуклости к вогнутости требует изменения величины n, что невозможно.

Что касается величины b_0, то последняя, как это следует из выражения для $\overline{\varrho^3}$, с увеличением температуры до ∞, стремится к нулю, что, как упомянуто, согласно с опытом, и в этом отношении Максвеллевская модель несомненно имеет веское преимущество пред Сутерлендовской. С приближением температуры к нулю, величина b_0, в соответствии с формулой (99), становится бесконечной, тогда как в этом случае пределом ее должен быть об'ем вещества при абсолютном нуле, но это происходит оттого, что сам вышеприведенный вывод (§ 31) не верен при очень низких температурах.

§ 34. Таким образом, несмотря на то, что Максвеллевская модель, в противоположность Сутерлендовской, пренебрегает силами притяжения, наличие которых между молекулами газа несомненно, она обладает существенными преимуществами по сравнению с Сутерлендовской. Тем более мы могли бы ожидать этого от модели, в которой молекулы рассматриваются также как точечные центры сил, но где, однако, наряду с отталкивающими силами, учитываются также и силы притя-

жения. Эту модель мы будем называть Шамесовской. Выражение для силы в этом случае таково:

$$S = \frac{A}{\varrho^n} - \frac{B}{\varrho^m}, \tag{100}$$

где A B n и m некоторые постоянные.

Значение взаимного потенциала в этом случае:

$$\Phi = \int_{\varrho}^{\infty} S d\varrho = \frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{\varrho^{n-1}} - \frac{B}{m-1} \cdot \frac{1}{\varrho^{m-1}}.$$

При некотором расстоянии $\varrho = \varrho_0$ (Шамесовский диаметр — см. § 30), которому соответствует $\Phi = \Phi_0$ сила, действующая между молекулами, становится равной нулю. Это обстоятельство позволяет исключить постоянные A и B и написать выражение для взаимного потенциала так:

$$\Phi = \Phi_0 \left[\frac{m-1}{m-n} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{n-1} - \frac{n-1}{m-n} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{m-1} \right]. \tag{101}$$

Если бы было возможно дать алгебраическое решение этого уравнения относительно $\frac{\varrho_0}{\varrho}$, то, подставляя его в формулы (82) и (95), мы получили бы общее решение вопроса для этого случая. К сожалению это невозможно и потому мы ограничимся лишь частным случаем, а именно, когда $m = \frac{n+1}{2}$, что позволит нам все же составить некоторое понятие о характере решения, к которому приводит рассматриваемая модель.

В данном случае получается

$$\Phi = \Phi_0 \left[-\left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{n-1} + 2 \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right],$$

откуда [57]

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(1 + \sqrt{-\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_0}} \right)^{-\frac{2}{n-1}} \tag{102}$$

Подставляя это выражение в формулу (82), получим после интегрирования

$$\overline{\varrho^2} = \varrho_0^2 \cdot e^{-\frac{\Phi_0}{kT}} \cdot I, \tag{103}$$

причем

$$I = \int_0^\infty (1 + \varepsilon x^{\frac{1}{2}})^\nu e^{-x} dx \quad \text{где } \varepsilon = \sqrt{\frac{kT}{-\Phi_0}} \text{ и } \nu = -\frac{4}{n-1}.$$

Разлагая по биному Ньютона выражение в скобках, получим после интегрирования

$$I = 1 + A_1(\nu) \cdot \Gamma(\tfrac{3}{2}) \cdot \varepsilon + A_2(\nu) \cdot \Gamma(2) \cdot \varepsilon^2 + \ldots, \tag{104}$$

где $A_1(\nu)$ и т. д. суть постоянные, зависящие от ν.

Из этого выражения видно, что при T, стремящемся к нулю, значение I стремится к единице и, следовательно, $\overline{\varrho^2}$, а также, соответственно, и формула коэфициента вн. трения стремится к Рейнганумовскому выражению (форм. 96).

Выполняя вышеприведенное биномиальное разложение иным способом, получим после интегрирования

$$I = \varepsilon^\nu \cdot \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)\left[1 + B_1(\nu) \cdot \frac{1}{\varepsilon} + B_2(\nu) \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots\right], \tag{105}$$

где $B_1(\nu)$, $B_2(\nu)$ и т. д. также являются постоянными, зависящими от ν.

Из последнего выражения видно, что при температуре, стремящейся к бесконечности, I стремится к выражению

$$I_\infty = \varepsilon^\nu \cdot \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{kT}{-\Phi_0}\right)^{-\frac{2}{n-1}} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{2}{n-1}\right)$$

и, следовательно,

$$\left(\overline{\varrho^2}\right)_\infty = \varrho_0^2 \left(\frac{kT}{-\Phi_0}\right)^{-\frac{2}{n-1}} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{2}{n-1}\right). \tag{106}$$

Выражение совершенно подобно выражению, полученному для Максвеллевских молекул (форм. 98), поэтому мы можем утвер-

ждать, что при высоких температурах формула трения в этом случае уподобляется Максвеллевской. К сожалению оба ряда (форм. 104 и 105), выражающие величину I, знакопеременные с весьма малой сходимостью, поэтому решение это неудобно для практического использования.

В заключение следует отметить, что полученное решение значительно отличается от того решения, которое приведено выше (форм. 10).

Для величины $\overline{\varrho_0^3}$ с помощью формулы (95) в случае рассматриваемой модели получаются выражения, подобные тем, которые получены для $\overline{\varrho^2}$, причем предельное значение при $T=\infty$

$$(\varrho^3)_\infty = \varrho_0^3 \left(\frac{kT}{-\Phi_0}\right)^{-\frac{3}{n-1}} \cdot \Gamma\left(1-\frac{3}{n-1}\right), \tag{107}$$

т. е. также вполне подобно полученному нами выше для Максвеллевской модели (форм. 99).

§ 35. Таким образом мы видим, что с помощью формулы (100) невозможно притти к удовлетворительному и практически полезному решению вопроса в случае указанной модели. Поэтому уже раньше нами была сделана попытка по иному решить этот вопрос (см. § 7 форм. 17). Чтобы понять суть дела, обратимся к кривой, изображенной на рис. 6 и представляющей взаимную потенциальную энергию молекул в случае Шамесовской модели. Кривая эта здесь представлена сплошной линией $ABCDE$.

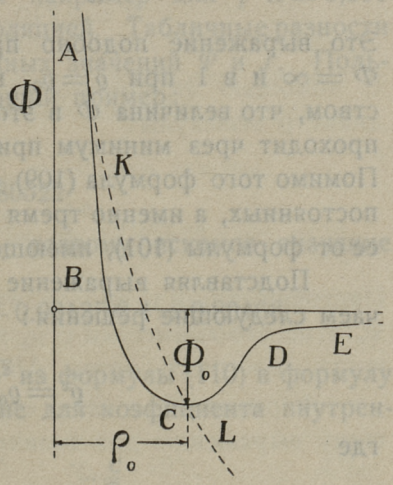

Рис. 6.

Прежде всего следует отметить то обстоятельство, что для решения нашей задачи нам нужно знать ход этой кривой только на отрезке ABC, так как, как показывают формулы (82) и (95), нам нужно выполнить интегрирование от $\Phi=\infty$ до o или, что то же, от $\varrho=o$ до $\varrho=\varrho_0$.

В вышеупомянутой работе[18], для приблизительного выражения интересующего нас участка кривой, нами была избрана формула:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = e^{-a(\Phi - \Phi_0)}, \tag{108}$$

где a некоторая постоянная. Кривая KL, соответствующая этой формуле, изображена на рис. 1 пунктиром. Как мы видим, характер этой кривой лишь отдаленно сходствует кривой ABC. Естественно поэтому, что формула коэф. вн. трения, вытекающая отсюда (форм. 17), недостаточно хорошо передает экспериментальный материал.

Продолжая поиски формулы, которая была бы более пригодна для изображения интересующей нас ветви потенциальной кривой и в то же время приводила бы к удобным в аналитическом отношении результатам, мы остановились на следующем выражении:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = e^{-\sqrt{a(\Phi - \Phi_0)}}. \tag{109}$$

Это выражение подобно предыдущему обращается в o при $\Phi = \infty$ и в 1 при $\varrho = \varrho_0$, но обладает еще и тем преимуществом, что величина Φ в этом случае, подобно кривой $ABCDE$, проходит чрез минимум при $\varrho = \varrho_0$, в чем нетрудно убедиться. Помимо того формула (109) обладает минимальным количеством постоянных, а именно тремя: ϱ_0, Φ_0 и a, что выгодно отличает ее от формулы (101), имеющей 4 постоянных: ϱ_0, m, n и Φ_0.

Подставляя выражение (109) в формулы (82) и (95), получаем следующие решения:

$$\overline{\varrho^2} = \varrho_0^2 e^{-\frac{\Phi_0}{kT}} \cdot \Psi, \tag{110}$$

где

$$\Psi = 1 - 2\sqrt{x} \cdot e^x \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-z^2} dz, \tag{111}$$

причем

$$\sqrt{x} = \sqrt{akT}, \tag{112}$$

где $k = \frac{R}{N}$ Больтцмановская константа,

и a — некоторая постоянная.

Точно также:

$$\overline{\varrho^3} = \varrho_0^3 \cdot e^{-\frac{\Phi_0}{kT}} \cdot J, \tag{113}$$

где J выражается той же формулой (111), как и величина Ψ, только в этом случае

$$\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{akT}. \tag{114}$$

Таблица значений функции Ψ, выражаемой формулой (111), приложена в конце настоящей главы, так что вычисления величин Ψ и J, если дана постоянная, $\sqrt{ak}$, не представляет никаких затруднений. При вычислении этой таблицы, числа, соответствующие $\sqrt{x} = 0{,}01$; $0{,}02\ldots$ и т. д., вычислены непосредственно по формуле (111) с помощью таблиц входящего в нее интеграла. Промежуточные же значения, как например для $\sqrt{x} = 0{,}011$ и т. д., получены линейной интерполяцией. Табличные разности облегчают вычисление промежуточных значений Ψ и J. Пользование таблицей поясняет следующий пример:

$$\sqrt{x} = 0{,}1264$$

$$\Psi(0{,}1260) = 0{,}80522$$

Табличная разность $\Delta = 0.00135$ — поэтому искомое значение равно

$$\Psi(0{,}1264) = 0.80522 - 0.00135.0{,}4 = 0.80468.$$

§ 36. Подставляя значение $\overline{\varrho^2}$ из формулы (110) в формулу (90), получим следующее выражение для коэфициента внутреннего трения:

$$\eta = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m\bar{c}}{\pi\varrho_0^2} \cdot \frac{e^{\frac{\Phi_0}{kT}}}{\Psi} = K \cdot T^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{C}{T}}}{\Psi}. \tag{115}$$

В формулу эту входит три постоянных:

$$C = -\frac{\Phi_0}{k},$$

$\sqrt{ak}$ — определяющая собой величину Ψ и величина K, значение которой мы сейчас выведем

Принимая значение газовой постоянной

$$R = 8{,}316 \cdot 10^7 \text{ эрг./мол.},$$

получим выражение для средней скорости молекулы

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 14552 \left(\frac{T}{M}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{116}$$

При этом, считая Авогадрово число[58] равным $N = 6{,}03 \cdot 10^{23}$, получим

$$K = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{14552}{6{,}03 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{M^{\frac{1}{2}}}{\varrho_0^2} = 5{,}4317 \cdot 10^{-21} \cdot \frac{a_0 M^{\frac{1}{2}}}{\varrho_0^2}. \tag{117}$$

Что дает, если принять[59] $a_0 = 0{,}499$,

$$K = 2{,}710 \cdot 10^{-21} \cdot \frac{M^{\frac{1}{2}}}{\varrho_0^2}. \tag{118}$$

С помощью этой постоянной можно вычислить Шамесовский диаметр молекулы:

$$\varrho_0 = 10^{-8} \sqrt{2{,}710 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{M^{\frac{1}{2}}}{K}} \text{ см.} \tag{119}$$

Постоянные C и $\sqrt{ak}$ позволяют определить также величины Φ_0 и a, что совместно с ϱ_0 дает возможность, в случае надобности, построить ветвь ABC кривой потенциальной энергии.

Формула (93) в связи с формулой (113) приводит к следующему выражению для величины b_0 (для 1 гр. газа):

$$b_0 = \frac{2}{3} \frac{\pi \varrho_0^3}{m} \cdot e^{-\frac{\Phi_0}{kT}} \cdot J. \tag{120}$$

С увеличением температуры как величина Ψ, так и J стремятся к нулю, так что величина b_0 должна стремиться в этом случае

к нулю. Отметим еще, что из формул (110) и (113) в связи с форм. (94) вытекает также простое выражение для Энскоговского диаметра:

$$d = \varrho_0 \cdot \frac{J}{\Psi}. \tag{121}$$

§ 37. С приближением температуры к нулю, величина Ψ, как показывает формула (111), стремится к 1 и, следовательно, формула (115) стремится к Рейнганумовскому выражению (8), если-же при этом $-\frac{\Phi_0}{k}$ тоже очень мало или равно нулю, то формула превращается в выражение, тождественное тому, какое следует для модели эластичных, твердых шаров. Но, как мы знаем, для подобной модели численный коэфициент $a_0 = 0.499$, а так как это число зависит лишь от силового закона, то мы вправе заключить отсюда, что для Шамесовской модели численное значение вышеуказанной постоянной равно 0.499. Это простое умозаключение прекрасно оправдывается на примере гелия и других одноатомных газов, в чем мы сейчас и убедимся.

§ 38. В основу вычисления постоянных кривой вн. тр. гелия взяты экспериментальные данные Камерлинг Оннеса и С. Вебера[60]. Значения их, вычисленные по точкам

$t = 183{,}7^0$C; $17{,}6^0$ и -253^0C, оказались таковы:

$$C = -\frac{\Phi_0}{k} = 3{,}27;\ \sqrt{ak} = 11{,}54 \cdot 10^{-3};\ K = 0{,}8366 \cdot 10^{-5}$$

Нижеследующая таблица позволяет сравнить экспериментальные величины с величинами, вычисленными по формуле (115).

Таблица 1.

t^0C	T	$\eta_{эксп.} \cdot 10^4$	$\eta_{выч.} \cdot 10^4$	$\Delta\%$
183,7	456.8	2.681	2.681	0.00
99.8	372.9	2.337	2.329	— 0.34
18.7	291.8	1.980	1.972	— 0.40
17.6	290.7	1.967	1.967	0.00
— 22.9	250.3	1.788	1.781	— 0.39

— 60.9	212.2	1.587	1.597	+ 0.63
— 70.0	203.1	1.564	1.553	— 0.70
— 78.5	194.6	1.506	1.510	+ 0.27
— 102.6	170.5	1.392	1.386	— 0.43
— 183.3	89.75	0.9186	0.9230	+ 0.48
— 197.6	75.50	0.8176	0.8279	+ 1.26
— 198.4	74.70	0.8132	0·8225	+ 1.14
— 253.0	20.17	0.3498	0.3498	0.00
— 258.1	15.00	0.2946	0.2818	— 4.34

Как мы видим отсюда, согласие между вычисленными и экспериментальными величинами удовлетворительно, за исключением самых низких температур. Однако при столь низкой температуре как 15° абс. и для столь легкого газа как *He*, формула, выведенная на основании классической механики, уже принципиально не может быть вполне приложима (см. § 8).

Беря в основу постоянную $K = 0.8366 \cdot 10^{-5}$, по формуле (119) получено значение Шамесовского диаметра молекулы гелия $\varrho_0 = 2{,}546.10^{-8}$. см.

С этим по формуле (120) вычислена кривая величины b_0. На фиг. (7) представлена в виде кривой (*I*) величина $\frac{b_0}{v_k}$, (где v_k критический об'ем 1 грамма гелия) в функции от величины

$$\frac{1}{\mathfrak{R}t} = \left(\frac{pv}{RT}\right)_k \cdot \frac{T_k}{T} = \left(\frac{2{,}26 \cdot 57{,}7}{82{,}06 \cdot 5{,}19}\right) \cdot \frac{5{,}19}{T} = \frac{1{,}59}{T}.$$

Сделано это для того, чтобы облегчить сравнение с подобными же кривыми, вычисленными Л. Шамесом согласно его теории вн. трения газов[61]. При этом кривая *II* на том же рисунке представляет собой также приведенную величину $\frac{B}{v_k}$,

где B постоянная формулы

$$pv = A + Bp + Cp^2.$$

Значения B для различных температур взяты из вышеупомянутой работы Л. Шамеса, где приведена таблица вириальных

коэфициентов, составленная по данным Physik. Technische Reichsanstalt[62].

На фиг. 7 видно, что обе кривые, *I* и *II*, точно совпадают друг с другом при высоких температурах, что следует считать прекрасным подтверждением как вообще теории вн. трения, развитой в настоящей работе, так и мыслей, высказанных в предыдущем параграфе (§ 37).

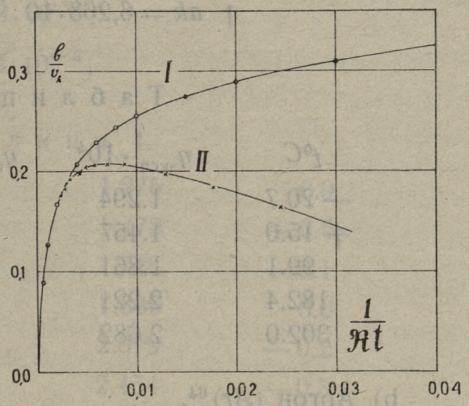

Рис. 7.

Таким образом можно считать теоретически и экспериментально доказанным, что значение численного коэфициента в формуле вн. трения одноатомных газов, в случае наиболее приближающемся к реальности — Шамесовской модели, равно 0,499, т. е. точно совпадает с числом теоретически выведенным Чепмен — Энскогом для модели эластичных — твердых шаров. Собственно говоря, результат этот, как чисто эмпирическое следствие, вытекает уже из вышеупомянутой работы Л. Шамеса, но там ему не отведено должного внимания, которого он по справедливости заслуживает.

В данном случае мы имеем полное подтверждение теории опытом — что является новой победой кинетической теории газов.

Заметим попутно, что вычислениями этими одновременно подтверждается также и Авогадрово число $6.03 \cdot 10^{23}$, взятое в основу вычислений наряду с вышеупомянутой постоянной.

§ 39. Кроме вышеразобранного случая нами была исследована приложимость формулы (115) также и к ряду других газов. В нижеследующих таблицах приведены результаты соответствующих вычислений

а) Углекислота (CO_2).

В основу вычислений положены данные Брейтенбаха[63].

Постоянные:

$$C = -\frac{\Phi_0}{k} = 104{,}6,$$

$$K = 1.038 \cdot 10^{-5},$$

$$\sqrt{ak} = 6{,}263 \cdot 10^{-3}.$$

Таблица 2.

t^0C	$\eta_{эксп.} \cdot 10^4$	$\eta_{выч.} \cdot 10^4$	$\Delta\%$
— 20.7	1.294	1.294	0.0
+ 15.0	1.457	1.472	— 1.0
99.1	1.861	1.861	0.0
182.4	2.221	2.214	— 0.3
302.0	2.682	2.682	0.0

b) Аргон $(Ar)^{64}$.

Постоянные:

$$C = -\frac{\Phi_0}{k} = 47{,}80,$$

$$K = 1.0724 \cdot 10^{-5},$$

$$\sqrt{ak} = 12{,}74 \cdot 10^{-3}.$$

Таблица 3.

t^0C	$\eta_{эксп.} \cdot 10^4$	$\eta_{выч.} \cdot 10^4$	$\Delta\%$
— 183.2	0.7356	0.7356	0.0
— 104.4	1.379	1.391	+ 0.9
— 78.8	1.575	1.580	+ 0.3
— 60.2	1.697	1.713	+ 0.9
— 40.2	1.854	1.852	— 0.1
— 20.3	1.987	1.987	0.0
— 0 21	2.116	2.120	+ 0.2
+ 13.17	2.207	2.207	0.0
+ 99.7	2.751	2.748	— 0.1
+ 183 3	3.243	3.243	0.0

c) Азот (N_2)[65].

Постоянные:

$$C = -\frac{\Phi_0}{k} = 55{,}8,$$

$$K = 1.099 \cdot 10^{-5},$$

$$\sqrt{ak} = 3.814 \cdot 10^{-3}.$$

Таблица 4.

—76.3	1.275	1.275	0.0
—37.9	1.465	1.472	+0.5
+16.1	1.728	1.726	—0.1
51.6	1.880	1.880	0.0
100.2	2.084	2.079	—0.2
200.0	2.461	2.454	—0.3
250.1	2.629	2.629	0.0

Итак, мы видим, что формула (115) удовлетворительно передает экспериментальные данные, несмотря на то, что исследованные газы обладают глубоко различной химической природой. В этом ее преимущество пред формулами Сутерленда — Рейнганума и Максвелля. Правда, она имеет на одну постоянную больше, чем эти формулы, однако, повидимому, по самому существу вопроса меньшим количеством индивидуальных постоянных при об'яснении внутр. трения газов обойтись нельзя.

§ 40. Рассматривая полученные нами постоянные, нетрудно заметить некоторую зависимость между постоянной C и критической температурой соответствующего вещества.

Таблица 5.

	C	T_k	$\frac{C}{T_k}$
He	3.27	5.2	0.629
N_2	55.8	126.0	0.443
Ar	47.8	150.7	0.317
CO_2	104.6	304.2	0.344

Правда, как показывает отношение $\frac{C}{T_k}$, колеблющееся в весьма широких пределах, дело не идет дальше простой параллельности, подобной тому, какая уже раньше замечена различными исследователями для сходной постоянной Сутерлендовской или Рейнганумовской формулы; однако, если сопоставить этот результат с формулой М. Траутца (форм. 22) и принять во внимание, что силовой закон (форм. 109), положенный в основу наших выводов, имеет лишь приближенный характер, то становится позволительным сделать некоторые более глубокие заключения о природе междумолекулярных сил.

Действительно, в формуле М. Траутца η оказывается функцией отношения $\left(\frac{T}{T_k}\right)$ и некоторой индивидуальной постоянной m_∞. В нашей формуле (115), если принять во внимание, что C приблизительно пропорционально критической температуре, повторяется то же самое. Но $C = -\frac{\Phi_0}{k}$, следовательно Φ_0 должно быть пропорционально критической температуре.

Если формула М. Траутца действительно так точна, как утверждает ее автор, это умозаключение весьма близко к действительности.

Вычисляя по формуле (119) с помощью постоянной К значение Шамесовского диаметра молекулы ϱ_0, мы получаем следующие результаты:

Таблица 6.

	ϱ_0	ϱ_{max}	
He	$2.546.10^{-8}$	$4.00.10^{-8}$	см
Ar	3.996 „	4.04 „	„
N_2	3.613 „	3.98 „	„
CO_2	4.162 „	4.06 „	„

Рядом приведены значения ϱ_{max} так называемого „верхнего предела“ диаметра молекул, получающиеся путем вычисления на основании плотности при температуре, близкой к абсолютному нулю, в предположении наиболее плотного (тетраэдрического) расположения молекул-шаров[66].

§ 41. Заканчивая главу об „идеальных“ газах, я считаю необходимым коснуться вопроса, который обыкновенно не затраги-

вается в литературе, а именно, о вн. трении газа при сверхвысоких температурах.

К сожалению, в нашем распоряжении имеются лишь немногие, недостаточно проверенные и довольно устарелые данные по этому вопросу, а именно, данные относительно водорода и воздуха при температурах до 1200° С[67].

Согласно этим данным, например, на кривой вн. трения водорода около ~ 500° С должен происходить перегиб, так что выше этой температуры кривая из выпуклой к оси температур становится вогнутой. Это соответствовало бы увеличению числа n Максвеллевской формулы (форм. 5). Если сравнить эти данные с результатом новейших опытов М. Траутца и Роберта Цинка[68], то подобное заключение становится сомнительным. Но, правда, в случае упомянутых опытов температура не превосходит 830° С и в столь близком соседстве к точке поворота установить этот факт трудно.

Интересно отметить, что из теоретических формул для коэф. вн. трения только наша формула указывает на возможность такого поворота. Так, например, вычисляя коэф. вн. трения гелия по формуле (115), с помощью вышеприведенных постоянных, мы получаем следующие значения:

Таблица 7.

T^0 Абс.	$\eta_{выч.} \cdot 10^4$	$\frac{\Delta\eta}{\Delta T} \cdot 10^7$
500	2.8573	
		3.9136
750	3.8357	
		3.7500
1000	4.7732	
		3.6696
1250	5.6906	
		3.6300
1500	6.5981	
		3.6152
1750	7.5019	
		3.6156
2000	8.4058	
		3.6224
2250	9.3114	
		3.6364
2500	10.2205	
—	—	—
30000	152.80	6.628
30250	154.46	

Рассматривая $\frac{\Delta \eta}{\Delta T}$, мы замечаем, что в этом случае перегиб кривой наступает при $1500 \sim 1750^0$ абс.

Если вычислить Максвеллевскую „постоянную" n в интервале $30000 - 30250^0$ абс., то получается

$$n = \frac{\Delta \lg \eta}{\Delta \lg T} = 1{,}30 .$$

Для водорода же, согласно вышеупомянутым данным (Ландольт и Бернштейн) между 1100 и 1200^0 С, мы вычисляем $n = 1{,}37$.

Предел, к которому стремится величина n при $T = \infty$, повидимому, равен 1,5. Действительно, рассматривая формулу (82), мы видим, что ее можно изобразить так:

$$\overline{\varrho^2} = \frac{1}{T} \int\limits_{\Phi_0}^{\infty} \varrho^2 e^{-\frac{\Phi_0}{kT}} \cdot d\frac{\Phi}{k},$$

откуда

$$\left(\overline{\varrho^2}\right)_\infty = \left(\frac{1}{T}\right)_\infty \cdot \text{пред.} \left[\int\limits_{\Phi_0}^{\infty} \varrho^2 e^{-\frac{\Phi}{kT}} \cdot d\frac{\Phi}{k}\right].$$

Принимая, что предел этого интеграла при $T = \infty$ равен интегралу предела, получим

$$\left(\overline{\varrho^2}\right)_\infty = \left(\frac{1}{T}\right)_\infty \cdot \int\limits_{\Phi_0}^{\infty} \varrho^2 \cdot d\frac{\Phi}{k} = \left(\frac{C}{T}\right)_\infty,$$

где С — некоторая постоянная, а это ведет к тому, что коэф. вн. трения любого газа при температуре, близкой к бесконечности, изменяется пропорционально $T^{\frac{3}{2}}$, т. е. $n_\infty = 1{,}5$.

Конечно, в действительности интеграл предела не обязательно равен пределу интеграла, — это зависит от свойств под'интегральной функции, т. е. в данном случае от вида формулы, которой выражается силовой закон. Так, например, как мы видели в случае силового закона, разобранного в § 34, $n_\infty =$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{n-1}$. В случае же принятого нами силового закона (форм. 109), повидимому, действительно $n_\infty = 1{,}5$.

Заметим попутно, что, согласно теории М. Траутца, перегиб на кривой трения, подобный только что рассмотренному, вообще невозможен и, следовательно, необ'ясним.

Таблица значений функции Ψ Таблица 8.

$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
0,00	1,00 000										175
	0,99	825	649	474	299	124	$\overline{948}$	$\overline{773}$	$\overline{598}$	$\overline{423}$	
0,01	0,98 247	076	$\overline{905}$	$\overline{733}$	$\overline{562}$	$\overline{391}$	$\overline{219}$	$\overline{048}$			171
	0,97								$\overline{876}$	$\overline{705}$	
0,02	0,96 534	366	199	031	$\overline{863}$	$\overline{696}$	$\overline{528}$	$\overline{361}$	$\overline{193}$	$\overline{026}$	168
	0,95										
0,03	0,94 858	694	530	366	202	039	$\overline{875}$	$\overline{711}$	$\overline{547}$	$\overline{383}$	164
0,04	0,93 219	059	$\overline{899}$	$\overline{738}$	$\overline{578}$	$\overline{418}$	$\overline{258}$	$\overline{097}$			160
	0,92								$\overline{937}$	$\overline{777}$	
0,05	0,91 616	460	303	146	$\overline{989}$	$\overline{833}$	$\overline{676}$	$\overline{519}$	$\overline{362}$	$\overline{205}$	157
0,06	0,90 049	$\overline{895}$	$\overline{742}$	$\overline{589}$	$\overline{435}$	$\overline{282}$	$\overline{129}$				153
	0,89							$\overline{975}$	$\overline{822}$	$\overline{668}$	
0,07	0,88 515	365	215	065	$\overline{915}$	$\overline{765}$	$\overline{615}$	$\overline{465}$	$\overline{315}$	$\overline{165}$	150
0,08	0,87 015	$\overline{868}$	$\overline{721}$	$\overline{575}$	$\overline{428}$	$\overline{281}$	$\overline{134}$				147
	0,86							$\overline{987}$	$\overline{841}$	$\overline{694}$	
0,09	0,85 547	403	260	116	$\overline{973}$	$\overline{829}$	$\overline{685}$	$\overline{542}$	$\overline{398}$	$\overline{254}$	144
0,10	0,84 111	$\overline{970}$	$\overline{830}$	$\overline{689}$	$\overline{549}$	$\overline{408}$	$\overline{268}$	$\overline{127}$			141
	0,83								$\overline{986}$	$\overline{846}$	
0,11	0.82 705	568	430	293	155	018	$\overline{880}$	$\overline{743}$	$\overline{605}$	$\overline{468}$	138
0,12	0,81,330	195	061	$\overline{926}$	$\overline{792}$	$\overline{657}$	$\overline{522}$	$\overline{388}$	$\overline{253}$	$\overline{118}$	135
	0,80										
0,13	0,79 984	852	720	589	457	325	193	061	$\overline{930}$	$\overline{798}$	132
0,14	0,78 666	537	408	279	150	021	$\overline{892}$	$\overline{763}$	$\overline{634}$	$\overline{505}$	129
0,15	0,77 376	250	124	$\overline{997}$	$\overline{871}$	$\overline{745}$	$\overline{619}$	$\overline{492}$	$\overline{366}$	$\overline{240}$	126
0,16	0,76 114	$\overline{990}$	$\overline{866}$	$\overline{743}$	$\overline{619}$	$\overline{496}$	$\overline{372}$	$\overline{248}$	$\overline{125}$	$\overline{001}$	124
	0,75										
0,17	0,74 878	756	635	514	393	272	151	030	$\overline{909}$	$\overline{788}$	121
0,18	0,73 667	549	430	312	193	074	$\overline{956}$	$\overline{837}$	$\overline{719}$	$\overline{600}$	119

$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	△
0,19	0,72 482	366	250	134	018	$\overline{901}$	$\overline{785}$	$\overline{669}$	$\overline{553}$	$\overline{437}$	116
0,20	0,71 321	207	094	$\overline{980}$	$\overline{866}$	$\overline{753}$	$\overline{639}$	$\overline{525}$	$\overline{412}$	$\overline{298}$	114
0,21	0,70 184	073	$\overline{962}$	$\overline{850}$	$\overline{739}$	$\overline{628}$	$\overline{516}$	$\overline{405}$	$\overline{293}$	$\overline{182}$	111
0,22	0,69 071	$\overline{962}$	$\overline{853}$	$\overline{744}$	$\overline{635}$	$\overline{526}$	$\overline{416}$	$\overline{307}$	$\overline{198}$	$\overline{089}$	109
	0,67 980										
0,23	0,66 912	873	767	660	553	446	339	232	125	019	107
0,24	0,65 865	807	702	598	493	388	284	179	074	$\overline{970}$	105
0,25	0,64 893	763	660	558	455	353	250	148	045	$\overline{943}$	103
0,26	0,64 839	738	638	537	437	336	236	135	035	$\overline{934}$	101
0,27	0,63 834	736	635	539	440	342	243	145	046	$\overline{948}$	98
0,28	0,62 850	754	637	561	464	368	271	175	078	$\overline{982}$	97
0,29	0,61 885	790	695	600	505	410	315	220	125	030	95
0,30	0,60 938										

ГЛАВА 5.

О „видимой“ скорости молекул движущегося флюида и принципе персистенции движения.

§ 42. Перед тем как приступить к исследованию явления внутреннего трения в „реальных“ или уплотненных газах, мы должны, прежде всего, рассмотреть вопрос о том, в какой мере и каким образом каждая отдельная молекула их участвует в движении газа как целого. При этом следует иметь в виду, что движение газа мы всегда будем предполагать ламинарным, лишенным вихрей. Так что поток газа мы будем представлять себе в виде системы плоских струй, движущихся параллельно некоторой плоскости, с различными, но вполне определенными скоростями.

Переходя от макро — к микроскопической картине потока, т. е. рассматривая движение отдельных молекул газа, мы прежде всего вправе спросить: какому слою потока соответствует „видимая скорость“ молекулы, т. е. та часть скоростной составляющей (параллельной потоку), которой она участвует в массовом движении. Конечно, не подлежит сомнению, что если мы определим среднее значение видимой скорости всех молекул, проходящих некоторую воображаемую плоскость, расположенную внутри газа и параллельную его движущимся слоям, то результат точно совпадает со скоростью потока в данной плоскости. Однако, очевидно это не может относиться к каждой из отдельных рассматриваемых молекул, так как — проходя указанную плоскость — они исходят из более или менее удаленных от нее слоев.

Если принять для газа в. д. Ваальсовскую модель, предполагающую движение молекул внутри газа прямолинейным и равномерным, перераспределение скоростей среди них возможно

лишь в момент их столкновения. В процессе столкновения происходит как бы некоторое усреднение „видимых скоростей“ и, следовательно, приближение их видимой скорости к видимой скорости того слоя, в котором находится центр молекулы в момент столкновения. Поэтому то авторы первых работ по теории внутреннего трения газов, Д. К. Максвелль и Л. Больтцман, приписывают отдельным молекулам „видимую скорость“, соответствующую той плоскости, в которой находился их центр в момент последнего столкновения. Повидимому Г. Егер впервые рассматривает этот вопрос более углубленно[69]. Принимая скорости молекул, в первом приближении, одинаковыми, он подсчитывает среднюю глубину слоя, из которого приходят молекулы, сталкивающиеся с данной. Она оказывается лежащей на 1/5 средней длины пути L глубже, чем точка столкновения (считая в направлении, противоположном движению молекулы). Но ударяющие ее молекулы в свою очередь приходят из слоев, лежащих на 1/5 L глубже, чем точка их последнего столкновения и т. д., поэтому в конце концов искомая общая глубина y определяется как сумма прогрессии

$$y = \frac{1}{5} L + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot L + \left(\frac{1}{5}\right)^3 L \ldots = 0.25\, L.$$

Исходя из положений Г. Егера, мы могли бы притти к тому-же результату и более простым способом, а именно, мы могли бы заранее предположить, что молекулы обладают состоянием движения более глубоких слоев, чем соответствует точке их последнего столкновения. Положим, например, что слой этот лежит на y глубже. Тогда, вычисляя аналогично Г. Егеру глубину слоя, из которого прилетают молекулы, мы получили бы вместо 1/5 L

$$\frac{1}{5} \cdot (L + y).$$

Но это и была бы искомая нами величина y Поэтому, из уравнения

$$y = \frac{1}{5} (L + y)$$

мы получили бы сразу

$$y = \frac{1}{4} L.$$

Прием этот проще Егеровского и мы применим его в дальнейшем, когда условия задачи будут более сложными.

§ 43. В вышеизложенной идее Г. Егера уже заложено, т. ск., зерно того принципа, который носит название принципа персистенции или сохранения движения и состоит, по существу,

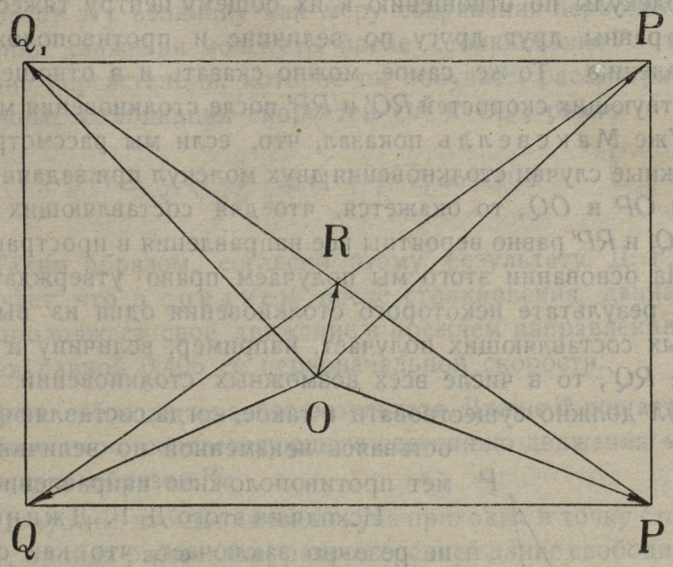

Рис. 8.

в утверждении, что в процессе столкновения первоначальное состояние движения молекулы не разрушается, но, хотя и частично, сохраняется за нею. Принцип этот впервые высказан Д. Г. Джинсом[70].

В виду того, что в дальнейшем мы будем пользоваться этим принципом при вычислении постоянных формулы вязкости, мы обязаны выяснить его подробнее. Для этого рассмотрим так наз. „пирамиду скоростей“: построение, позволяющее легко и быстро ориентироваться в механизме столкновения молекул — эластичных сфер. Пирамида эта, в случае, если массы молекул одинаковы, будет иметь вид, подобный изображенному на рис. (8). Основанием ее в этом случае будет прямоугольный четыреугольник ($QQ'PP'$). Стороны этого четыреугольника QQ' и PP' параллельны направлению линии центров

в момент столкновения. Вершина пирамиды — точка О. Скорости, которыми обладают молекулы до столкновения OP и OQ. Скорости тех-же молекул после столкновения, соответственно, OP' и OQ'. OR представляет собой скорость центра тяжести рассматриваемой пары молекул. Из чертежа видно, что скорости каждой молекулы по отношению к их общему центру тяжести (RQ и RP) равны друг другу по величине и противоположны по направлению. То-же самое можно сказать и в отношении соответствующих скоростей RQ' и RP' после столкновения молекул.

Уже Максвелль показал, что, если мы рассмотрим все возможные случаи столкновения двух молекул при заданных скоростях OP и OQ, то окажется, что для составляющих скоростей RQ' и RP' равно вероятны все направления в пространстве [71].

На основании этого мы получаем право утверждать, что если в результате некоторого столкновения одна из вышеупомянутых составляющих получает, например, величину и направление RQ', то в числе всех возможных столкновений данных молекул должно существовать и такое, когда составляющая эта, оставаясь неизменной по величине, примет противоположное направление.

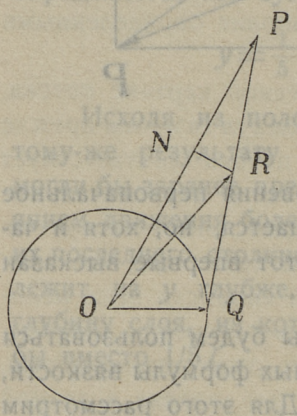

Рис. 9.

Исходя из этого Д. Г. Джинс вполне резонно заключает, что как средний результат всех мыслимых столкновений данной пары молекул от первоначальных скоростей их после столкновения сохраняется лишь составляющая OR, равная скорости их общего центра тяжести.

Рассмотрим теперь две сталкивающиеся молекулы, причем скорость одной из них OP оставляем неизменной по величине и направлению, скорость же другой OQ варьируем по направлению, оставляя неизменной ее величину.

Точка R лежит на средине PQ и потому OR есть скорость центра тяжести системы.

Составляющими скорости OR являются ON, — проэкция OR на направление OP, и NR — перпендикулярная этому направлению. Из чертежа можно непосредственно заключить, что

как средний результат подобного рода столкновений, составляющая NR пропадает, т. е. $\overline{NR}=0$ и, следовательно, остается лишь составляющая ON, направленная так же, как и OP. Отношение $\frac{\overline{ON}}{OP}=\Theta$ Д. Г. Джинс называет персистенцией скорости и рассматривает эту величину как меру сохранения первоначального состояния движения молекулы после столкновения[72]. Среднее значение персистенции, которое он получает, рассматривая все возможные комбинации скоростей OP и OQ, равно

$$\Theta=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{2}}ln(1+\sqrt{2})=0.406 \qquad (123)$$

Таким образом, согласно этому результату, Д. Г. Джинс заключает, что в среднем после столкновения данная молекула продолжает свое движение в прежнем направлении со скоростью, равной 0.406 ее первоначальной скорости.

§ 44. Исходя из этого результата, Джинс[73] решает вопрос о глубине слоя, соотвествующего состоянию движения молекул, следующим образом[74]:

Допустим, что данная молекула приходит в точку столкновения a_1, пройдя расстояние, равное средней длине свободного пути L со скоростью w. После столкновения от первоначальной скорости молекулы остается, согласно принципу персистенции, часть, равная $w\Theta$. В виду того, что промежуток времени τ между двумя столкновениями в среднем мы можем считать постоянным, под влиянием скорости $w\Theta$ к моменту, соответствующему следующему столкновению в точке a_2, молекулой будет пройден путь $\tau w\Theta=L\Theta$.

После столкновения в этой точке от скорости $w\Theta$ остается только скорость $w\Theta^2$, под влиянием которой к моменту следующего столкновения в точке a_3, молекула пройдет путь $\tau w\Theta^2=L\Theta^2$ и т. д.

Таким образом первоначальная скорость молекулы w сохранит свое влияние до глубины, равной

$$L+L\Theta+L\Theta^2+\ldots=L\cdot\frac{1}{1-\Theta}.$$

Процесс этот можно рассматривать и в обратном смысле. Поэтому, согласно Джинсу, можно думать, что молекула, вылетающая в направлении на a_0 после своего последнего столкновения в точке a_1, обладает состоянием видимого движения не этой точки, а точки, расположенной глубже на величину

$$y = \frac{\theta}{1-\theta} \cdot L \tag{124}$$

Однако, в окончательном результате, Джинс считает все же необходимым ввести поправку, а именно, вместо величины θ берет только $1/2\,\theta$, благодаря чему y получается равным почти тому же числу, какое получено Г. Егером (см. § 42).

$$y = \frac{\frac{1}{2}\theta L}{1-\frac{1}{2}\theta} = 0.255\,L \tag{125}$$

Поправка эта мотивирована Джинсом следующим образом: „... При каждом столкновении молекулы некоторая часть избытка ее количества движения перейдет к ударяемой молекуле. Из числа простейших гипотез наиболее вероятной будет та, которая предполагает, что при каждом столкновении избыток количества (видимого) движения, которым данная молекула обладает по сравнению с точкой, в которой произошло столкновение, распределяется так, что одна часть достается ударяемой молекуле, другая — первоначальной молекуле.“

Предполагая, что распределение это происходит поровну, он и получает вышеприведенный результат.

Нетрудно видеть, что мотивировка эта совершенно несостоятельна, ибо ею разрушается самый принцип вывода.

Действительно, согласно вышеизложенному, величина персистенции показывает, какая часть первоначальной скорости молекулы сохраняется у ней же, так что о распределении этой части между обоими молекулами при столкновении не может быть и речи.

Поэтому мнение Г. Егера[75], что вышеуказанная поправка найдена Д. Г. Джинсом лиш „с помощью его хорошего инстинкта“, по меньшей мере, не лишено основания.

Таким образом более или менее обоснованной можно считать формулу (124)

$$y = \frac{\theta}{1-\theta} L = 0.684\, L,$$

которая в лучшем случае дает лишь верхний предел для рассматриваемой величины.

По крайней мере к этому же результату приходит в конце концов и Г. Егер, следуя своему методу, при повторном и более точном исследовании вопроса [76].

§ 45. Между тем, в только что цитированной работе Г. Егер открывает по существу новый факт, состоящий в следующем:

Если спроэктировать скорость ударенной молекулы (C_2'), полученную ею после столкновения с молекулой ударяющей, на первоначальное направление скорости (C_1) последней, и затем найти среднее значение отношения этой проэкции ($C_2' \cos \chi$) к скорости C_1, то-есть

$$\overline{\frac{C_2'}{C_1} \cos \chi},$$

то получается число, точно равное по величине „средней персистенции" Джинса, то-есть 0.406.

Сказанное относится также и к средним значениям, составленным для отдельных комбинаций скоростей C_1 и C_2 — в этом случае получаются также в точности те же формулы, что найдены и Джинсом для „персистенции" в указанных случаях.

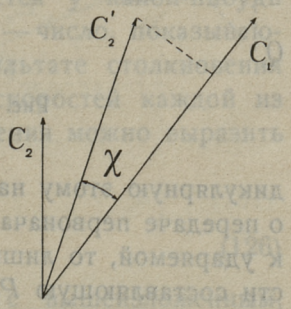

Рис. 10.

Интересно отметить, что Г. Егер прямо называет полученную им величину „персистенцией движения" в Джинсовском смысле, упуская из виду, что полученная им величина принципиально отлична по смыслу от Джинсовской. Действительно, $\overline{C_2 \cos \chi}$ можно рассматривать как ту часть скорости ударяющей молекулы (C_1), которая в среднем как бы переходит к ударяемой молекуле. Таким образом, если Г. Егеровская „персистенция движения" соответствует в какой-либо мере реальности —

она может характеризовать лишь передачу состояния движения молекулы ударяющей молекуле ударяемой, между тем как „Джинсовская персистенция“, как мы видели, характеризует сохранение движения за самой ударяющей молекулой. Замечательно то, что средние значения обоих этих величин равны друг другу.

§ 46. Среднее значение „Егеровской персистенции“ мы можем также найти и с помощью следующих соображений: Представим себе пару сталкивающихся молекул, расположенную так, что линия центров в момент столкновения и скорость ударяющей молекулы (1) находится в плоскости чертежа (см. рис. 11). При столкновении к молекуле ударяемой (2-ой) перейдет от молекулы ударяющей (1-й) составляющая $P_1Q_1 = PQ = c_1 \cdot \cos\beta$, где β — угол, образуемый скоростью c_1 ударяющей молекулы с линией центров. Составляющую эту можно, в свою очередь, разложить на составляющую R_1P_1, направленную так же, как и c_1 и на составляющую R_1Q_1, перпендикулярную этому направлению. Ясно, что если можно говорить о передаче первоначальной скорости от ударяющей молекулы к ударяемой, то лишь понимая под переданной частью скорости составляющую P_1R_1. Персистенцией (в смысле Г. Егера) в этом случае является величина

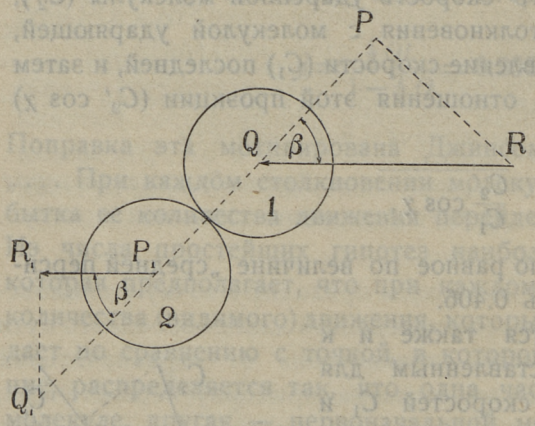

Рис. 11.

$$\frac{P_1R_1}{RQ} = \frac{P_1Q_1 \cdot \cos\beta}{RQ} = \cos^2\beta.$$

В виду того, что вероятность данного направления скорости $c_1 = RQ$ при данном положении линии центров определяется законом распределения траэкторий, — задача отыскания сред-

него значения $\overline{\cos^2\beta}$ решается способом, указанным в § 20. Конечно при этом получается результат тождественный Егеровскому (форм. 58).

§ 47. Рассматривая пирамиду скоростей, мы видели (см. § 2), что скорость движения центра тяжести сталкивающихся молекул до и после столкновения остается неизменной, естественно, что то же относится и к любым составляющим этой скорости, отнесенным к какой-нибудь координатной системе. Но любая из этих составляющих, в случае если массы молекул одинаковы, равна арифметическому среднему соответствующих составляющих скоростей сталкивающихся молекул. Поэтому, обозначая, например, составляющие первоначальных скоростей двух сталкивающихся молекул, параллельные некоторой оси U, через u_1 и u_2 и составляющие скоростей тех же молекул после столкновения u_1' и u_2', получим, принимая во внимание сохранение скорости центра тяжести,

$$u_1 + u_2 = u_1' + u_2'.$$

Рассмотрим теперь процесс столкновения с точки зрения персистенции движения.

Обозначим через ψ число, показывающее, какая часть первоначального состояния движения остается у какой-нибудь молекулы после столкновения, а через ω — число, показывающее, какая часть его передается в результате столкновения другой молекуле. Тогда составляющие скоростей каждой из сталкивающихся молекул после столкновения можно выразить таким образом:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1\psi + u_2\omega, \\ u_2' &= u_2\psi + u_1\omega. \end{aligned} \tag{126}$$

Откуда, как нетрудно видеть, в связи с вышеизложенным, получается

$$\psi + \omega = 1. \tag{127}$$

§ 48. Говоря о состоянии движения молекулы, мы при этом понимали его как органически слитое целое, состоящее из теплового и „видимого“, т. е. массового движения. Вследствие этого, все рассуждения о „персистенции“ движения должны

быть целиком приложимы также и к „видимому“ движению в отдельности от теплового. Только с этой точки зрения и можно понимать выводы величины y, изложенные в § 42 и § 44. Это же необходимо иметь в виду и для понимания нижеследующего вывода. Рассмотрим для простоты такой случай столкновения молекул, когда линия центров при столкновении перпендикулярна плоскости, параллельной движению флюида.

Положим, что молекула 1-я испытывает столкновение в плоскости, которой соответствует „видимая“ скорость потока — u_0. Тогда, предполагая линейное возрастание скорости слоев флюида в направлении оси W (см. рис. 12), находим, что видимая скорость этой молекулы до столкновения должна быть равна

$$u_1 = u_0 - (L_{c_1} + y_{c_1}) \cdot \cos\beta \cdot \frac{du}{dw}. \tag{128}$$

Точно также $u_2 = u_0 + [d + (L_{c_2} + y_{c_2}) \cos\beta_2] \frac{du}{dw}$. (129)

При этом L_{c_1} — средняя длина пути первой из молекул, соот-

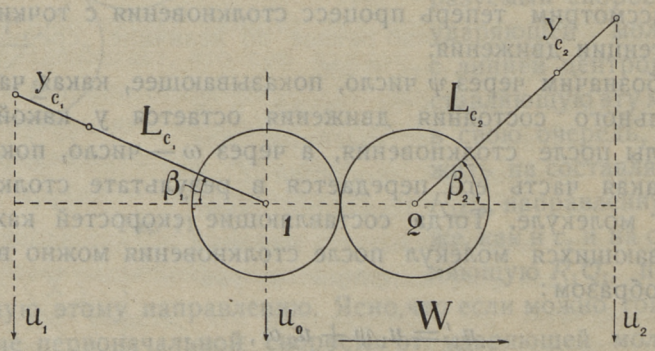

Рис. 12.

ветствующая (в Больтцмановском смысле)[77] ее скорости c_1, y_{c_1} — „глубина“ слоя (в Егеровском смысле), соответствующая видимому движению данной молекулы (см. § 2), по отношению к точке, в которой произошло ее последнее столкновение. L_{c_2} и y_{c_2} — имеют аналогичное значение, d — диаметр молекулы и $\frac{du}{dw}$ есть градиент видимой скорости в направлении оси W.

Согласно изложенному в § 47 мы можем написать

$$u_1' = \psi u_1 + \omega u_2 = u_0(\psi + \omega) +$$

$$+ \frac{du}{dw}\left\{-(L_{c_1} + y_{c_1})\cos\beta \cdot \psi + [d + (L_{c_2} + y_{c_2})\cos\beta_2]\,\omega\right\} =$$

$$= u_0 + \frac{du}{dw}\left\{d \cdot \omega - (L_{c_1} + y_{c_1})\cos\beta_1 +\right.$$

$$\left. + [(L_{c_1} + y_{c_1})\cos\beta_1 + (L_{c_2} + y_{c_2})\cos\beta_2]\,\omega\right\}.$$

Находя среднее значение этой величины, получим

$$\overline{u_1'} = u_0 + \frac{du}{dw}\left[\overline{\omega} d - \overline{(L_c + y_c)\cos\beta} + 2\,\overline{(L_c + y_c)\cos\beta \cdot \omega}\right]. \quad (130)$$

Но $\overline{u_1'}$ должно соответствовать средней глубине слоя молекул (первых), разлетающихся после столкновения. Если, для какой-нибудь из молекул (первых), уходящей после столкновения с некоторой скоростью c, соответствующее значение этой „глубины“ будет y_c', то, очевидно, для этой молекулы (см. рис. 13)

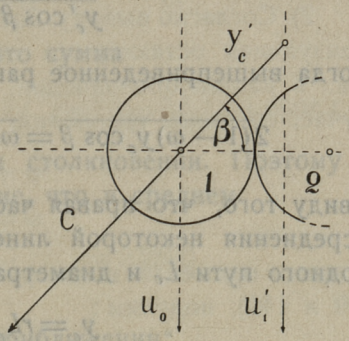

Рис. 13.

$$u_1' = u_0 + \frac{du}{dw} y_c' \cdot \cos\beta$$

и, следовательно,

$$\overline{u_1'} = u_0 + \frac{du}{dw}\,\overline{y_c'\cos\beta}. \quad (131)$$

Отсюда следует, что

$$\overline{y_c'\cos\beta} = \overline{\omega} d - \overline{(L_c + y_c)\cos\beta} + 2\,\overline{(L_c + y_c)\cos\beta \cdot \omega}.$$

Или

$$\overline{y_c'\cos\beta} + \overline{(1 - 2\omega)\,y_c\cos\beta} = \overline{L_c\cos\beta\,(2\omega - 1)} + \overline{\omega} \cdot d. \quad (132)$$

Величина y_c' зависит, или по крайней мере может зависеть, от угла β, образованного скоростью c данной молекулы с линией

центров при столкновении, однако, несомненно, что если мы образуем среднее значение y_c', придавая всевозможные положения линии центров при столкновении, т. е., меняя всеми возможными способами угол β при постоянном по величине и направлению c, мы очевидно получим просто y_c, т. е. „глубину", соответствующую молекулам данной скорости, так что

$$\overline{y_c'} = y_c. \tag{133}$$

К сожалению мы лишены возможности указать зависимость y_c' от β и, следовательно, не можем определить точного значения выражения $\overline{y_c' \cos\beta}$, но все же, несомненно, мы не очень удалимся от истины, если положим

$$\overline{y_c' \cos\beta} = \overline{y_c \cos\beta}. \tag{134}$$

Тогда вышеприведенное равенство превратится в уравнение:

$$2\overline{(1-\omega) y_c \cos\beta} = \overline{\omega} d + \overline{L_c \cos\beta (2\omega - 1)}. \tag{135}$$

Ввиду того, что правая часть этого уравнения есть результат усреднения некоторой линейной функции средней длины свободного пути L_c и диаметра молекулы d, мы вправе положить

$$y_c = rL_c + sd, \tag{139}$$

где r и s некоторые постоянные. Подставляя это в вышеприведенное уравнение, мы получим

$$2r\overline{(1-\omega) L_c \cos\beta} + 2s\overline{d(1-\omega)\cos\beta} = \overline{\omega} d + \overline{L_c \cos\beta (2\omega - 1)},$$

откуда методом сравнения получаем выражения для искомых численных коэфициентов:

Из уравнения

$$2s\overline{(1-\omega)\cos\beta} = \overline{\omega}$$

получается

$$s = \frac{\overline{\omega}}{2\overline{(1-\omega)\cos\beta}}, \tag{137}$$

а из уравнения

$$2\overline{r(1-\omega)L_c\cos\beta}=\overline{L_c\cos\beta\cdot(2\omega-1)}$$

получается

$$r=\frac{\overline{L_c\cos\beta(2\omega-1)}}{2\overline{(1-\omega)L_c\cos\beta}}. \qquad (138)$$

С помощью этих формул мы можем вычислить значения для s и r, более или менее близкие к истинным, что и будет сделано нами в следующем параграфе.

§ 49. Приближенные вычисления величин s и r мы произведем тремя способами, соответственно трем возможным воззрениям на распределение движения при столкновении между сталкивающимися молекулами.

1) Мы видели выше (§ 47), что сумма

$$\psi+\omega=1$$

остается постоянной при каждом столкновении. Поэтому не лишено вероятности предположение, что в среднем

$$\overline{\psi}=\overline{\omega}=\frac{1}{2}$$

и поэтому, принимая в „первом приближении“,

$$r=\frac{\overline{L_c\cos\beta(2\omega-1)}}{2\overline{(1-\omega)L_c\cos\beta}}=\frac{\overline{L_c\cos\beta}\cdot\overline{(2\omega-1)}}{2\overline{(1-\omega)}\cdot\overline{L_c\cos\beta}}=\frac{2\overline{\omega}-1}{2(1-\overline{\omega})}=0 \qquad (139)$$

и

$$s=\frac{\overline{\omega}}{2\overline{(1-\omega)\cos\beta}}=\frac{\overline{\omega}}{2(1-\overline{\omega})\overline{\cos\beta}}=\frac{1}{2\overline{\cos\beta}}=\frac{3}{2\sqrt{2}} \qquad (140)$$

(так как согласно § 20 гл. 2-й $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{3}$).

Таким образом, согласно этому предположению,

$$y_c=\frac{d}{2\overline{\cos\beta}} \qquad (141)$$

и, следовательно,

$$\overline{y_c \cos\beta} = \frac{d}{2}.$$

Таким образом, мы приходим в данном случае к результату, который можно выразить так: сталкивающиеся молекулы, в среднем, после столкновения обладают видимой скоростью их общего центра тяжести в момент столкновения. Это, в случае „идеального“ газа, равносильно первоначальному Максвелль — Больтцмановскому положению, что молекулы обладают видимой скоростью той точки, в которой произошло их последнее столкновение, так как глубина $y_c = \frac{3}{2\sqrt{2}}\, d$ в этом случае исчезающе мала по сравнению с длиной свободного пути.

2) Согласно выводу Джинса, средняя персистенция, характеризующая остающуюся после столкновения часть движения, т. е., в нашем обозначении, величина $\psi = 0.406$. Но в таком случае, согласно уравнению

$$\overline{\psi} + \overline{\omega} = 1,$$

$$\overline{\omega} = 0.594.$$

С этим, применяя вышеприведенные приближенные формулы (139 и 140), получим:

$$r = \frac{2\overline{\omega} - 1}{2(1 - \overline{\omega})} = 0.232$$

и

$$s = \frac{\overline{\omega}}{2(1 - \overline{\omega})\,\overline{\cos\beta}} = 1{,}552.$$

И, следовательно,

$$y_c = 0.232\, L_c + 1{,}552\, d. \qquad (142)$$

3) Если следовать Егеровскому пониманию „персистенции“ или, что по существу то же самое, представлениям, изложенным в § 46, то можно положить, что в случае каждого отдельного столкновения

$$\omega = \cos^2\beta.$$

Поэтому (принимая во внимание результаты вычисления средних величин, приведенные в § 20 главы 2-й) получим:

$$\overline{\omega} = \overline{\cos^2 \beta} = 0.406\,,$$

$$2\,\overline{(1-\omega)\cos\beta} = 2\,\overline{\cos\beta} + 2\,\overline{\cos^3\beta} = \frac{4\sqrt{2}}{15}\,,$$

так что согласно формуле (137)

$$s = \frac{\overline{\omega}}{2\,\overline{(1-\omega)\cos\beta}} = \frac{0.406 \cdot 15}{4\sqrt{2}} = 1{,}077.$$

Далее:

$$\overline{L_c \cos\beta\,(2\omega - 1)} = 2\,\overline{L_c \cos^3\beta} - \overline{L_c \cos\beta} = \frac{\sqrt{2}}{15} \cdot 1{,}0508\,L.$$

Кроме того

$$2\,\overline{(1-\omega)\,L_c \cos\beta} = 2\,\overline{L_c \cos\beta} - 2\,\overline{L_c \cos^3\beta} = \frac{4\sqrt{2}}{15} \cdot 1{,}0508\,L.$$

Откуда по формуле (138)

$$r = \frac{\overline{L_c \cos\beta\,(2\omega - 1)}}{2\,\overline{(1-\omega)\,L_c \cos\beta}} = \frac{\sqrt{2}}{15} \cdot \frac{15}{4\sqrt{2}} = 0.2500.$$

Итак, в результате

$$y_c = 0.250\,L_c + 1{,}077\,d. \qquad (143)$$

§ 50. Результат этот в отношении разреженных газов аналогичен Егеровскому. Действительно, как мы видели выше, в этом случае Г. Егер получает

$$y = 0.25L\,.$$

Усредняя полученную нами величину (пренебрегая членом, содержащим d), мы получим несколько большее число

$$y = \overline{y_c} = 0{,}25\overline{L_c} = 0.25 \cdot 1{,}0508L = 0.2627L\,. \qquad (144)$$

Согласно этому, в общеизвестной формуле коэф. вн. трения газов

$$\eta = \frac{1}{3} nm\overline{c}L\,,$$

вместо средней длины пути L, следовало бы подставить величину

$$\overline{L_c + y_c} = 1{,}0508L + 0.2627L = 1{,}3135L\,,$$

так что численный коэфициент этой формулы получился бы равным

$$\frac{1}{3} \cdot 1{,}3135 = 0.438\,,$$

между тем как точное его значение[78] равно 0.499 (см. § 2 гл. 1). Итак, мы видим, что, исходя из идеи о персистенции движения, мы можем добиться удовлетворительных результатов в отношении численных коэфициентов и не прибегая вовсе к сомнительным натяжкам, подобным Джинсовской. Важнейшим же результатом настоящего исследования является то, что искомая „глубина“ слоя, соответствующего „видимому“ движению молекул движущегося флюида, оказывается линейной функцией не только свободной длины пути, как это нашел еще Г. Егер, но и диаметра молекулы. Последнее обстоятельство особенно важно для теории вн. трения сжатых газов и жидкостей.

ГЛАВА 6.

Реальные газы.

§ 51. Реальными газами мы будем называть газы настолько уплотненные, что состояние их уже не может быть выражено формулой

$$pv = RT,$$

а должно выражаться уравнением следующего вида:

$$(p+P)(v-b) = RT.$$

Относительно величин P и b нам пока еще мало что известно. Одно можно сказать с полной определенностью: как одна, так и другая должны быть функциями об'ема и температуры. В нижеследующем выводе мы будем пользоваться в. д. Ваальсовской моделью газа, т. е. будем представлять себе молекулы в виде эластичных сфер, причем движение их внутри газа будем принимать прямолинейным и равномерным.

§ 52. Перейдем теперь к выводу формулы коэфициента внутреннего трения реального газа. Вывод этот мы проведем аналогично тому, как мы это сделали выше в отношении термического давления флюида (см. § 27), так как и в том и другом случае мы имеем дело с одним и тем же по существу явлением: переносом движения. Таким образом, нам придется подсчитать отдельно ту часть направленного движения, которая переносится от одной части движущегося флюида к другой его части сквозь квадратный сантиметр плоскости раздела, в секунду, молекулами, непосредственно проходящими эту плоскость, а также ту часть, которая передается путем столкнове-

ний, происходящих так, что линия центров пересекает указанную плоскость, т. е. так, что сталкивающиеся молекулы, или вернее их центры, в момент столкновения оказываются принадлежащими к различным областям флюида. Займемся сначала той частью движения, назовем ее R_1, которая переносится непосредственно. Для этого рассмотрим, как и прежде (см. рис. 14), элемент об'ема толщиной dw, ограниченный с боков плоскостями в 1 см² и расположенный на некотором расстоянии w от плоскости раздела AB (последняя параллельна слоям движущегося флюида, скорость видимого движения которого в плоскости AB равна u_0, причем скорость слоев представляем себе возрастающей в направлении оси W, перпендикулярной плоскости AB, т. е. слева направо).

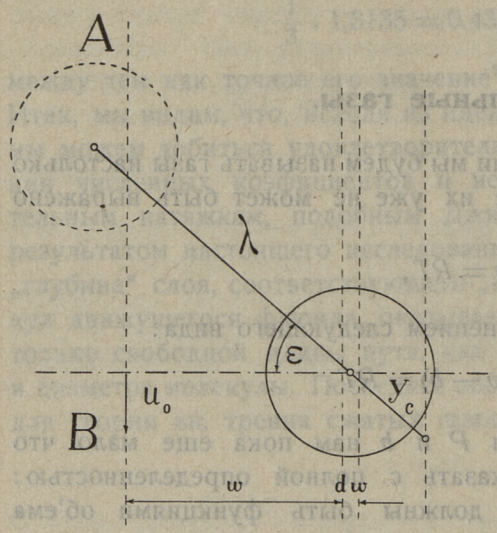

Рис. 14

В рассматриваемом элементе находится $nW(c)dw$ центров молекул скорости c, каждая из этих молекул совершает в течение секунды $\frac{c}{L_c}$ столкновений, поэтому из рассматриваемого элемента в течение секунды вылетает

$$\frac{ncW(c)}{L_c} \cdot dw \text{ молекул.} \tag{145}$$

Здесь попрежнему $W(c)$ — представляет собой Максвеллевскую вероятность данной скорости (форм. 51), а L_c — среднюю длину пути молекул данной скорости (см. форм. 63). Если обозначить вероятность того, что молекула скорости c обладает длиной свободного пути λ, через $W_c(\lambda)$, то число молекул, вылетающих из данного элемента в секунду, обладающих

скоростью c, длиной свободного пути λ и направлением траэктории, образующим с осью W угол ε, будет равно

$$\frac{1}{2}\frac{ncW(c)}{L_c}\cdot W_c(\lambda)\cdot \sin\varepsilon\cdot d\varepsilon\cdot dw\,, \tag{146}$$

так как все направления траэкторий для этих молекул равно вероятны. Согласно вышеизложенному, скорость видимого движения этих молекул будет соответствовать не тому слою, в котором расположен данный элемент, а слою, расположенному дальше от него на расстоянии $y_c \cos\varepsilon$, так что скорость эта выразится формулой

$$u = u_0 + \frac{du}{dw}(w + y_c\cos\varepsilon)\,.$$

Поэтому каждая из молекул, вылетающих из данного элемента, если только она проходит сквозь плоскость AB, изменяет количество „видимого" движения той области газа, в которую залетает на

$$mu_0 + m\frac{du}{dw}(w + y_c\cos\varepsilon)\,.$$

С другой стороны, каждая молекула, вылетающая в зеркально симметричных условиях из элемента, расположенного по другую сторону плоскости AB, изменяет количество направленного движения рассматриваемой области на

$$mu_0 - m\frac{du}{dw}(w + y_c\cos\varepsilon)\,.$$

В результате, каждая пара таких молекул причинит изменение направленного движения данной области, равное разности этих количеств:

$$2m\frac{du}{dw}(w + y_c\cos\varepsilon)\,. \tag{147}$$

Число таких пар будет очевидно выражаться также формулой (146), поэтому, умножая выражение (146) на (147) и суммируя полученное выражение при всех значениях входящих в него

переменных, мы и получим искомую сумму направленного движения, передаваемого путем прямого переноса:

$$R_1 = \frac{du}{dw} mn \int \frac{c(Wc)}{L_c} \cdot W_c(\lambda) \cdot (w + y_c \cos \varepsilon) \cdot \sin \varepsilon \cdot d\varepsilon \cdot dw. \quad (148)$$

Ввиду того, что плоскость AB пройдут лишь те молекулы, для которых

$\cos \varepsilon \geqslant \frac{w}{\lambda}$, интегрирование по ε проводим в пределах от $\cos \varepsilon = \frac{w}{\lambda}$ до $\cos \varepsilon = 1$, после чего интегрируем по w от $w = \lambda$ до $w = o$, причем получается

$$R_1 = \frac{du}{dw} \cdot mn \int \frac{c\, W(c)}{L_c} \cdot W_c(\lambda) \cdot \left(\frac{\lambda^2}{6} + \frac{y_c \cdot \lambda}{3}\right). \quad (149)$$

Вероятность молекуле скорости c пройти путь λ должна выражаться формулой Клаузиуса

$$W_c(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{L_c}} \cdot d\frac{\lambda}{L_c},$$

где однако L_c представляет собой среднюю длину свободного пути молекулы данной скорости, так как Клаузиусовский закон очевидно только в такой форме и можно приложить к газу с Максвеллевским распределением скоростей. Подставляя это выражение в формулу (149) и интегрируя по λ от ∞ до 0, получим:

$$R_1 = \frac{du}{dw} \frac{mn}{3} \int c\, W(c)(L_c + y_c). \quad (150)$$

Подобно тому, как средняя длина свободного пути любой молекулы выражается формулой $L = \frac{\bar{c}}{\bar{z}}$, так и средняя длина пути молекулы скорости c будет $L_c = \frac{c}{\bar{z}_c}$, где $\bar{z}_c$ число столкновений в секунду молекулы данной скорости.

Отсюда следует

$$L_c = \frac{c}{\bar{c}} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}_c} \cdot L.$$

Но отношение чисел столкновений при всяком сгущении вещества можно заменить отношением средних относительных скоростей [79], поэтому

$$L_c = \frac{c}{\bar{c}} \cdot \frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_{oc}} \cdot L = \sqrt{2}\,\frac{c}{\bar{c}_{oc}} \cdot L. \qquad (151)$$

Здесь $\bar{c}_0$ — средняя относительная скорость молекулы, а $\bar{c}_{0c}$ — средняя относительная скорость молекулы, обладающей скоростью c, равная, согласно Л. Больтцману [80]

$$\bar{c}_{oc} = \frac{ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \varphi(x), \qquad (152)$$

где $\varphi(x)$ выражается формулой (64), $x = \frac{c}{a}$ и $a = \sqrt{\frac{2}{3}\,\overline{c^2}}$.

Подставляя это значение $\bar{c}_{oc}$ в формулу (151), мы получим среднюю длину свободного пути молекул данной скорости в виде формулы (63).

Подставляя y_c из форм. (136) в формулу (150), затем подставляя туда же L_c из формулы (63), приводя все выражение к переменной x и интегрируя по x от ∞ до 0, получим

$$R_1 = \frac{du}{dw} \cdot \frac{mn\bar{c}L}{3}\left[(1+r)\,2\sqrt{2\pi}\int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x^2} \cdot dx}{\varphi(x)} + s \cdot \frac{d}{L}\right] \qquad (153)$$

Согласно вычислению Больтцмана [80]

$$2\sqrt{2\pi}\int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x^2} \cdot dx}{\varphi(x)} = 1{,}050813. \qquad (154)$$

Таким образом, для той части направленного движения, которая передается непосредственно, получается:

$$R_1 = \frac{du}{dw} \cdot \frac{mn\bar{c}L}{3}\left[(1+r) \cdot 1{,}050813 + s \cdot \frac{d}{L}\right]. \qquad (155)$$

Подставляя сюда численные значения для r и s, вычисленные в разделе 3-м § 49, получим:

$$R_1 = \frac{du}{dw} \cdot \frac{m_{n\bar{c}}L}{3}\left[1{,}3135 + 1{,}0766 \cdot \frac{d}{L}\right]. \qquad (156)$$

§ 53. Для того, чтобы найти ту часть „видимого" движения, которая передается путем столкновений, определим, прежде всего, каково в среднем изменение направленного движения молекулы при тех ее столкновениях, при которых в момент столкновения линия центров занимает некоторое определенное положение в пространстве. Для этого обратимся к выводу, изложенному в § 48. В разобранном там случае мы видели, что молекула 1-я до столкновения в среднем обладает „видимой" скоростью, равной

$$\bar{u}_1 = u_0 - \overline{(L_c + y_c)\cos\beta} \cdot \frac{du}{dw}. \qquad (128)$$

После же столкновения ее скорость в среднем равнялась

$$\overline{u_1'} = u_0 + \frac{du}{dw}\left[\bar{\omega}d - \overline{(L_c + y_c)\cos\beta} + 2\,\overline{(L_c + y_c)\cos\beta \cdot \omega}\right]. \qquad (130)$$

Поэтому среднее изменение скорости ее „видимого" движения после столкновения, очевидно, будет равно разности этих выражений:

$$\overline{u_1' - u_1} = \left[\bar{\omega} \cdot d + 2\,\overline{(L_c + y_c)\cos\beta \cdot \omega}\right] \cdot \frac{du}{dw}, \qquad (157)$$

т. е. разность эта будет соответствовать разности „видимых" скоростей двух слоев газа, расположенных, если измерять по направлению центровой линии, на расстоянии

$$l = \bar{\omega}d + 2\,\overline{(L_c + y_c)\cos\beta \cdot \omega}. \qquad (158)$$

Отсюда следует, если исходить из принципа персистенции[81]:

$$l = d \cdot \overline{\cos^2\beta} + 2\overline{(L_c + y_c)\cos^3\beta} = d\,\overline{\cos^2\beta} + 2\,\overline{(L_c + sd + rL_c)\cos^3\beta} =$$

$$= d\,(\overline{\cos^2\beta} + 2s \cdot \overline{\cos^3\beta}) + 2\,(1 + r)\,\overline{L_c\cos^3\beta}, \qquad (159)$$

что, после подстановки постоянных r и s[82], а также средних, выведенных в § 20, приводит к выражению

$$l = 1{,}0145d + 0.7430L\,. \tag{160}$$

Рассмотрим теперь снова, как и при выводе числа столкновений, элемент об'ема толщиною dw, ограниченный с боков плоскостями, в 1 см² каждая, и расположенный на расстоянии w (меньшем чем диаметр молекулы d) от плоскости AB, делящей флюид на две части и параллельной его движущимся слоям (см. рис. 15). Обозначим попрежнему:

n — число молекул в единице об'ема,

$\bar{z}$ — среднее число столкновений молекулы в секунду,

ε — угол, образуемый линией центров с осью W, перпендикулярной плоскости раздела AB.

В рассматриваемом элементе произойдет в течение секунды $n\bar{z}dw$ столкновений. Так как все направления линии центров при этих столкновениях равно вероятны, число случаев, когда она образует с осью W угол ε, будет равно

$$\frac{1}{2}\,n\bar{z}\cdot\sin\varepsilon\cdot d\varepsilon\cdot dw\,.$$

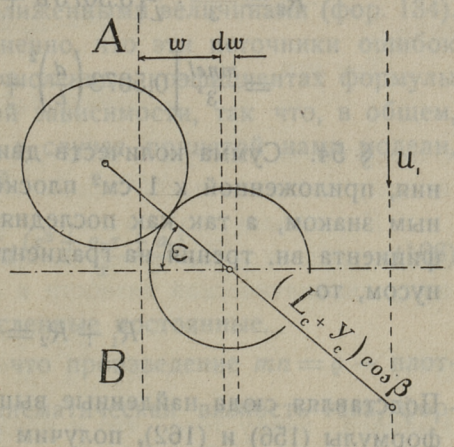

Рис. 15.

При каждом из этих столкновений количество видимого движения ударенных молекул будет в среднем изменено на

$$ml\cdot\cos\varepsilon\cdot\frac{du}{dw}, \tag{161}$$

т. е. на произведение из массы молекулы на разность видимых скоростей слоев флюида, расположенных друг от друга на расстоянии l по направлению линии центров или на расстоянии $l\cos\varepsilon$ по направлению оси W. Поэтому все подобные столкно-

вения изменят количество направленного движения области 2-й на

$$\frac{1}{2} nm\bar{z}l \cdot \frac{du}{dw} \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\varepsilon \cdot d\varepsilon \cdot dw.$$

Интегрируя это выражение по ε от $\cos\varepsilon = \frac{w}{d}$ до $\cos\varepsilon = 1$ и затем по w от $w = d$ до $w = 0$, получаем полное изменение видимого движения рассматриваемой области флюида, происходящее в результате столкновений молекул:

$$R_2 = \frac{1}{6} nm\bar{z}d \cdot l \cdot \frac{du}{dw} = \frac{mn\bar{c}}{3} \cdot \frac{d}{L} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{du}{dw}.$$

Подставляя сюда значение l из формулы (160), получим

$$R_2 = \frac{mn\bar{c}}{3} \cdot \frac{d}{L}\left(0.5073\, d + 0{,}3715\, L\right) \cdot \frac{du}{dw} =$$

$$= \frac{mn\bar{c}L}{3}\left[0{,}5073\left(\frac{d}{L}\right)^2 + 0.3715\,\frac{d}{L}\right] \cdot \frac{du}{dw}. \qquad (162)$$

§ 54. Сумма количеств движения R_1 и R_2 равна силе трения, приложенной к 1 см² плоскости раздела, взятой с обратным знаком, а так как последняя равна произведению из коэфициента вн. трения на градиент видимой скорости тоже с минусом, то

$$R_1 + R_2 = \eta \cdot \frac{du}{dw}. \qquad (163)$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для R_1 и R_2 из формулы (156) и (162), получим после преобразований:

$$\eta = 0.4378\, mn\bar{c}d \cdot \frac{\left[\left(\frac{L}{d}\right)^2 + 1{,}1025\,\frac{L}{d} + 0.3862\right]}{\frac{L}{d}}. \qquad (164)$$

Принимая во внимание, что согласно формуле (89)

$$\frac{L}{d} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{v-b}{b}, \qquad (165)$$

и обозначая

$$\frac{v-b}{b} = x, \qquad (166)$$

можем переписать формулу (164) так:

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 0{,}4378 \cdot mn\bar{c}d \frac{(x^2 + 2{,}3388x + 1{,}7379)}{x}. \qquad (167)$$

Конечно, численные коэфициенты этой формулы следует рассматривать как первое приближение к истинным их значениям, так как

1) в основу вычислений нами положен простой Максвеллевский закон распределения скоростей, который, как было уже упомянуто, в случае флюида, находящегося в состоянии движения, неприложим (см. § 2).

2)) При вычислениях мы пользовались принципом персистенции, носящим аппроксимативный характер.

3) При некоторых выводах (формулы 137 и 138) мы принуждены были пользоваться приближенными величинами (фор. 134).

Во всяком случае, несомненно, что эти источники ошибок могли отразиться только на численных коэфициентах формулы (167), а не на функциональной зависимости, так что, в общем, коэфициент вн. трения газа, в случае принятой нами модели, должен выражаться формулой

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 mn\bar{c}d \frac{(x^2 + a_1 x + a_2)}{x}, \qquad (168)$$

где a_0, a_1 и a_2 некоторые численные постоянные.

Принимая во внимание, что произведение $mn = \varrho$ — плотность газа и что $\frac{\eta}{\varrho} = \nu$ — кинематическая вязкость газа, формулу (168) удобнее представить в таком виде:

$$\nu = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d \cdot \frac{(x^2 + a_1 x + a_2)}{x}. \qquad (169)$$

Из этой формулы видно, что с возрастанием плотности вещества и, следовательно, с уменьшением длины свободного пути (а также и величины x, ей пропорциональной) кинематическая вязкость газа ν должна проходить чрез некоторый минимум, так как при $x = \infty$ и $x = 0$ величина ν стнановится бесконечно большой. И действительно, на экспериментальных изотермах кинематической вязкости, выраженной в функции давления,

наблюдается минимум[83]. Кроме того, экспериментальные данные указывают на то, что и сама критическая точка тоже принадлежит к точкам минимума кинематической вязкости.

Полагая, что принятая нами модель отвечает всем свойствам реального газа, пользуясь вышеописанным явлением минимума, мы можем заменить постоянные формулы (169) другими, имеющими определенный физический смысл.

Действительно, дифференцируя ур-е (169), получаем

$$d\nu = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d \cdot \frac{x^2 - a_2}{x^2} \cdot dx. \tag{170}$$

В случае минимума величины ν, $d\nu = o$, а так как dx не может равняться нулю, ибо длина свободного пути с увеличением плотности вещества постоянно уменьшается, то, следовательно,

$$x^2 - a_2 = o.$$

Так что

$$a_2 = x_m^{\,2}. \tag{171}$$

(Индексом m мы будем отмечать величины, относящиеся к минимуму кинематической вязкости.)

Подставляя это значение в формулу (170) и интегрируя ее в пределах от произвольного значения x до x_m, получим формулу кинематической вязкости в следующем виде:

$$\nu - \nu_m = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d \frac{(x - x_m)^2}{x}. \tag{172}$$

Наконец, ввиду того, что в пределе, при давлении близком к 0 и, следовательно, при весьма большом об'еме,

$$\nu_0 = \frac{\eta_0}{\varrho_0} = \eta_0 v_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d \cdot x_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a_0 \bar{c}d \cdot \frac{v_0}{b_0},$$

получается

$$\frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d = \eta_0 b_0. \tag{173}$$

Вследствие чего формула кинематической вязкости принимает такой вид:

$$\nu - \nu_m = \eta_0 b_0 \frac{(x - x_m)^2}{x}. \tag{174}$$

Мы видим, что все без исключения величины, входящие в эту формулу, имеют физический смысл и, как будет показано впоследствии, более или менее доступны для определения.

§ 55. С помощью постоянных формулы внутреннего трения газа мы можем вычислить отношение $\frac{b}{v}$, соответствующее точке минимума кинематической вязкости, а следовательно и критической точке, а также вывести формулу для вычисления диаметра молекулы.

Действительно, согласно формуле (171)

$$x_m = \left(\frac{v-b}{b}\right)_m = \sqrt{a_2}, \tag{175}$$

откуда

$$\left(\frac{b}{v}\right)_m = \frac{1}{1+\sqrt{a_2}}. \tag{176}$$

Далее, из формул (169) и (171) получается

$$\nu_m = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c} d \left(2\sqrt{a_2} + a_1\right),$$

откуда, принимая во внимание, что $\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$,

$$d = \frac{\nu_m \sqrt{\frac{M}{RT}}}{\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot a_0 \left(2\sqrt{a_2} + a_1\right)}. \tag{177}$$

Подставляя в полученные формулы (175), (176) и (177) значения постоянных из формулы (167), получим

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{b}{v}\right)_m &= 0{,}431 \\ x_m &= 1{,}318 \\ d &= \frac{\nu_m \sqrt{\frac{M}{RT}}}{1{,}64} \end{aligned}\right\} \tag{178}$$

§ 56. Как было упомянуто выше (§ 12), в одной из ранее опубликованных работ, при первоначальном анализе вопроса,

автор пришел к следующему выражению для коэфициента вн. трения газа:

$$\eta = a_0 nm\bar{c}L \cdot \left(\frac{v}{v-b}\right)^2, \tag{179}$$

где a_0 приближенно $= 1/3$.

Нетрудно показать, что в данном случае мы имеем дело, по существу, с той же функциональной зависимостью, что получена нами выше (см. форм. 172). Действительно, формулу (179) можно переписать так:

$$\nu = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d \cdot \frac{v-b}{b}\left(1+\frac{b}{v-b}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d \cdot \frac{(x+1)^2}{x}. \tag{180}$$

Дифференцируя это выражение по x, получим

$$d\nu = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d \cdot \frac{x^2-1}{x^2} \cdot dx,$$

откуда видно, что в случае минимума кинематической вязкости $x_m^2 = 1$. Поэтому можно это переписать так:

$$d\nu = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d \cdot \frac{x^2 - x_m^2}{x^2} \cdot dx.$$

Интегрируя это в пределах от ν до ν_m, получим снова вышеприведенную формулу (172).

При этом, из условия

$$x_m = 1 \text{ вытекает, что } \left(\frac{b}{v}\right)_m = \frac{1}{2}.$$

Далее, из формулы (180) следует, что

$$\nu_m = \frac{4\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c}d,$$

откуда, при $a_0 = \frac{1}{3}$:

$$d = \frac{\nu_m \sqrt{\frac{M}{RT}}}{1{,}00}. \tag{181}$$

§ 57. Легко убедиться также и в том, что и Энскоговская формула кинематической вязкости (форм. 26) также приводится к формуле (172).

В самом деле, сравнивая уравнение состояния Больтцман — — Клаузиуса (отнесенное к 1 гр. вещества)

$$p + a\varrho^2 = R_1 T(1 + b_0 \varrho\chi) \tag{28}$$

с принятым нами типом уравнения состояния

$$(p + P)(v - b) = R_1 T,$$

мы видим, что в нашем обозначении

$$\frac{1}{1 + b_0\varrho\chi} = v - b$$

и, следовательно,

$$b_0\varrho\chi = \frac{b}{v - b} = \frac{1}{x}. \tag{182}$$

Поэтому формулу Энскога можно переписать так:

$$\nu = \frac{\nu_m}{2{,}545} \cdot \frac{(x^2 + 0{,}8\,x + 0.7614)}{x}. \tag{183}$$

Дифференцируя это по x, получим

$$d\nu = \frac{\nu_m}{2{,}545} \cdot \frac{x^2 - 0.7614}{x^2} \cdot dx,$$

откуда

$$x_m{}^2 = 0.7614. \tag{184}$$

Следовательно ур-ие (181) может быть переписано так:

$$\nu - \nu_m = \frac{\nu_m}{2{,}545} \cdot \frac{(x - x_m)^2}{x}. \tag{185}$$

Переходя к пределу, при (теоретически) бесконечном разрежении газа получим (как при выводе форм. 173):

$$\eta_0 = \frac{\nu_m}{2{,}545} \cdot \frac{1}{b_0},$$

так что

$$\frac{\nu_m}{2{,}545} = \eta_0\, b_0, \tag{186}$$

благодаря чему ур-ие (185) принимает вид уравнения

$$\nu - \nu_m = \eta_0\, b_0 \frac{(x - x_m)^2}{x}. \tag{174}$$

Принимая во внимание, что в случае модели эластичных сфер формула (90) дает

$$\eta_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m\bar{c}}{\pi d^2},$$

причем в уравнении (28)

$$b_0 = \frac{2}{3}\frac{\pi d^3}{m},$$

получим, перемножая эти величины,

$$\eta_0 b_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c} d \cdot \tag{187}$$

Если подставить это в форм. (174), мы придем к формуле (172). Сравнивая формулы (186) и (187), получим

$$\frac{v_m}{2{,}545} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a_0 \bar{c} d, \tag{188}$$

откуда, принимая во внимание, что согласно Чепмен-Энскогу $a_0 = 0.499$, а также, что $\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, получим формулу Энскога для диаметра молекулы:

$$d = \frac{v_m \cdot \sqrt{\frac{M}{RT}}}{0.955}. \tag{189}$$

Заметим попутно, что, хотя „Энскоговским диаметром" молекулы обычно называется величина, вычисляемая именно по этой формуле, мы расширяем это понятие и называем этим именем величину d, входящую в формулу (91), имеющую более общее значение, чем формула (189).

Принимая во внимание формулу (188), мы можем представить формулу (183) в таком виде:

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 0.499 \cdot mn\bar{c}d \cdot \frac{(x^2 + 0.8x + 0.7614)}{x}, \tag{190}$$

что позволяет нам непосредственно сравнить Энскоговский результат с полученной нами формулой (167).

Ко всему вышеизложенному нам остается добавить еще, что из уравнения (184)

$$\left.\begin{aligned} x_m &= \left(\frac{v-b}{b}\right)_m = 0.8726 \\ \text{и, следовательно,} \quad \left(\frac{b}{v}\right)_m &= 0.534 \end{aligned}\right\} \tag{191}$$

§ 58. Считаем уместным заметить, что формула Д. Энскога (26) стала известна нам в начале 1940 г. благодаря книге С. Чепмена „The Mathematical Theory of non-uniform Gases“ (1939), когда настоящая работа, в главных своих чертах, была уже закончена. Ввиду того, что вывод Энскога базируется на точном методе Максвелль-Больтцмана (см. § 1 и 2), несомненно, в отношении численных коэфициентов, следует отдать предпочтение Энскоговскому результату. Численные коэфициенты, полученные нами, следует рассматривать только в смысле первого приближения. Однако и наш вывод сохраняет до известной степени свое значение, так как мы пользовались методом, отличным от Энскоговского, а именно, методом средней длины пути. В итоге подтвердился не только Энскоговский результат в смысле функциональной зависимости, но одновременно и наша формула средней длины пути (форм. 89).

При этом, что также весьма важно, вполне подтвердилась также и приложимость метода средней длины пути к исследованию явлений в „реальных газах“. Это последнее обстоятельство дает нам право сделать еще один шаг вперед и применить этот метод к модели флюида более сложной и более приближающейся к реальности, чем в. д. Ваальсовская, а именно такой, в которой будет допущено вращение молекул, а также учтена криволинейность их движения. Что касается численного значения постоянных в формулах, получающихся для этих новых моделей, то, принимая во внимание вышесказанное, при вычислении их, в дальнейшем, мы будем исходить уже из постоянных формулы Д. Энскога (форм. 190), а не из формулы (167).

§ 59. Прежде всего рассмотрим вопрос о влиянии вращения молекул на коэфициент внутреннего трения газа. Для простоты мы будем пользоваться моделью сферических „шероховатых“ молекул (см. § 2). При этом нам нет необходимости доводить наше исследование до численных результатов, — достаточно, если мы выясним характер тех изменений, которые произойдут в окончательной формуле вследствие особенности новой модели.

Ввиду того, что механизм обмена количествами движения между отдельными частями движущегося газа остается таким

же, как и в случае простых сферических молекул, выводы величин R_1 и R_2 (§ 52 и 53 настоящей главы) не потерпят никакого изменения. Однако, вследствие того, что сам механизм столкновения „шероховатых“ молекул иной, чем простых сферических, перераспределение количеств движения при столкновениях будет иное. Правда, закон сохранения скорости центра тяжести (см. § 47), а вместе с тем и формула

$$\psi + \omega = 1 \tag{127}$$

имеют место и в случае новой модели, но сами величины ψ и ω будут зависеть от новой постоянной

$$K = \frac{4I}{md^2}, \tag{192}$$

значение которой таково же, как и в формуле Пиддака (форм. 3). Для доказательства этого рассмотрим поближе процесс столкновения „шероховатых“ молекул, причем молекулы до столкновения полагаем невращающимися. За центр координат возьмем общий центр тяжести сталкивающихся молекул. В этом случае скорости обеих молекул (c) будут равны и симметрично расположены по отношению к линии центров в момент столкновения. Разлагая эти скорости, каждую на две составляющих, одну в направлении линии центров (v), другую перпендикулярно этому направлению (u), легко понять (см. рис. 16), что первая из них (v), совсем как в случае простых сферических молекул, так сказать, переходит от ударяющей молекулы к ударяемой, так что в этом отношении разницы между старой и новой моделью не будет. Напротив, составляющая, перпендикулярная линии центров (u), вследствие шероховатости молекул потерпит изменение, которое можно подсчитать следующим образом:

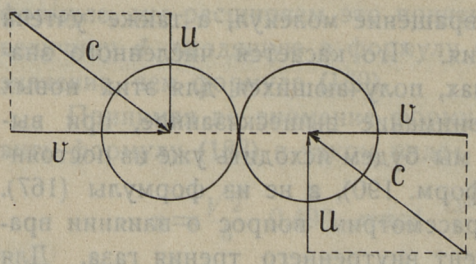

Рис. 16.

Если u — величина этой составляющей до столкновения,
u_1 — „ „ „ после „ ,
ω — угловая скорость вращения молекулы, приобретаемая ею в результате столкновения,
d — диаметр и r — радиус молекулы,
$J = \Sigma m_i r_i^2$ — осевой момент инерции молекулы,
$m = \Sigma m_i$ — масса молекулы,
то, ввиду того, что изменение энергии поступательного движения, соответствующего рассматриваемой составляющей (u), будет равно приросту энергии вращения, можно написать

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mu_1^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2}. \tag{193}$$

С другой стороны, разность моментов соответствующих количеств поступательного движения относительно центра тяжести, — или что то же самое —, относительно точки соприкосновения молекул при столкновении, должна быть равна изменению момента количества вращательного движения. То-есть,

$$mur - mu_1 r = \Sigma (r_i \omega m_i) r_i = \omega \Sigma m_i r_i^2 = \omega J. \tag{194}$$

Из этих двух уравнений получается

$$u_1 = u \cdot \frac{1-K}{1+K}. \tag{195}$$

Итак, мы видим, что, в конечном счете, скорость молекул после столкновения будет зависеть от K, а вместе с тем и величины ψ и ω, так же как и все средние, зависящие от них. Но это отразится только на численных коэфициентах в окончательных формулах для R_1 и R_2 (форм. 156 и 162) и потому выражение для коэф. вн. трения газа, в случае новой модели, будет отличаться от полученного нами ранее (форм. 169) лишь величиной постоянных a_0, a_1 и a_2.

Одно из интересных следствий, вытекающих отсюда — то, что величина x_m и следовательно отношение $\frac{b}{v}$ в критической точке для различных газов, в общем, должна быть не постоянной величиной, как этого требует формула в. д. Ваальса, а является функцией K, т. е. зависит от распределения масс в

молекуле, что является повидимому одной из причин несовершенства теории соответственных состояний. Но в общем, повидимому, влияние вращения молекул на $\left(\frac{b}{v}\right)_k$ незначительно, так как значения этой величины для различных многоатомных веществ лишь немного отличаются от теоретического (форм. 191). Также сравнительно незначительно влияние это и на коэфициент a_0. Согласно Пиддаку (форм. 3) мы должны были бы вследствие вращения молекул умножить Чепмен-Энскоговский коэфициент $a_0 = 0.499$ на

$$\frac{(1+K)^2}{1+\frac{13}{6}K}.$$

Если положит, что масса сферической молекулы распределена равномерно по ее об'ему

$$J = \frac{2}{5} r^2 m = \frac{d^2 m}{10} \tag{196}$$

и, следовательно,

$$K = \frac{4J}{md^2} = 0{,}4, \tag{197}$$

то

$$\frac{(1+K)^2}{1+\frac{13}{6}K} = 1{,}050 \tag{198}$$

и, следовательно, для „шероховатых" молекул

$$a_{0ш} = 0.499 \cdot 1{,}050 = 0.523. \tag{199}$$

§ 60. Рассмотрим теперь предел, к которому стремится выражение кинематической вязкости (форм. 172) в случае очень сильного сгущения вещества, когда x близко к нулю и, следовательно, модель флюида становится равнозначной модели „идеальной жидкости" Г. Егера (см. § 13).

Нетрудно видеть, что в этом случае получается

$$\nu = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c} d \cdot \frac{x_m^2}{x} = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c} d \cdot x_m^2 \cdot \frac{b}{v-b}.$$

Принимая во внимание, что $\nu = \eta v$ (где v об'ем 1 гр. вещества) и что в этом случае можно положить $b = v$, получим:

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c} d \cdot \frac{x_m^2}{v-b}. \tag{200}$$

Ввиду того, что формула вязкости для „шероховатых“ молекул будет совершенно подобна формуле (172), и в этом случае мы будем иметь также:

$$\eta_ш = \frac{\sqrt{2}}{3} a_{0_ш} \cdot \bar{c}d \cdot \frac{x^2_{mш}}{v - b_ш}. \tag{201}$$

Отсюда

$$\frac{\eta_ш}{\eta} = \frac{a_{0ш}}{a_0} \left(\frac{x_{mш}}{x_m}\right)^2 \frac{v - b}{v - b_ш}.$$

В пределе, при $v = b$ величина $b = b_ш$ и поэтому для „идеальной жидкости“

$$\eta_ш = \eta \cdot \frac{a_{0ш}}{a_0} \left(\frac{x_{mш}}{x_m}\right)^2. \tag{202}$$

Согласно выводу Р. О. Герцог и Г. К. Кудар[84] для модели, подобной Пиддаковской, коэфициент вн. трения может рассматриваться как сумма коэфициента η_{trans} (соответствующего формуле 200), обусловленного поступательным движением молекул и η_{rot} — обусловленного вращательным движением. В нашем обозначении $\eta_ш$ и будет этой суммой, т. е.

$$\eta_ш = \eta \left(1 + \frac{K_{\text{rot}}}{K_{\text{trans}}}\right). \tag{203}$$

В случае принятой нами модели молекул — „шероховатых“сфер, вышеупомянутые авторы получают

$$\frac{K_{\text{rot}}}{K_{\text{trans}}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r}{\varrho}, \tag{204}$$

где r — радиус молекулы, ϱ — радиус сферической поверхности с массой, равной массе молекулы, осевой момент инерции которой равен моменту инерции молекулы.

Ввиду того, что момент инерции шаровой поверхности, если масса m равномерно распределена на ней, равен $\frac{2}{3} m\varrho^2$, а

момент инерции шара, равномерно наполненного массой, $\frac{2}{5} mr^2$, получается

$$\frac{2}{5} r^2 m = \frac{2}{3} m\varrho^2 .$$

Откуда

$$\varrho = r\sqrt{\frac{3}{5}} \tag{205}$$

и, следовательно,

$$\frac{\eta_ш}{\eta} = 1 + \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{5}{3}} = 2{,}014 . \tag{206}$$

С другой стороны, как мы видели (форм. 199),

$$\frac{a_{0ш}}{a_0} = 1{,}050 .$$

Кроме того, согласно Д. Энскогу,

$$x_m = 0.8726 . \tag{191}$$

Подставляя эти числа в формулу (202), получим

$$x_{mш} = 0.8726\sqrt{\frac{2{,}014}{1{,}050}} = 1{,}209 \tag{207}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{b}{v}\right)_{mш} = 0.453 . \tag{208}$$

В результате, формулу кинематической вязкости в случае рассматриваемой модели можно написать так:

$$\nu - \nu_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 0{,}523 \cdot \bar{c}d \cdot \frac{(x - 1{,}209)^2}{x} \tag{209}$$

Конечно, формула, выражающая диаметр молекулы, и в этом случае будет подобна формуле (177), но значение знаменателя этой формулы в данном случае остается неизвестным, так как вышеизложенный вывод не позволяет нам вычислить a_1.

§ 61. В. д. Ваальсовская модель газа предполагает, что молекулы внутри газа в промежутках между столкновениями движутся так, как если бы на них не действовали никакие силы,

т. е. прямолинейно и равномерно. Конечно, в действительности это не так. В действительности, силы, действующие между пространственно сближенными друг с другом молекулами, не вполне уравновешиваются, что превращает движение их в криволинейное. Отсюда вытекает, что и средняя длина свободного пути молекул реального флюида есть длина дуги некоторой кривой. Хорду, стягивающую концы этой дуги, мы будем называть средним перемещением молекулы и обозначим ее — P.

Отношение среднего перемещения к средней длине пути мы обозначим чрез φ, так что

$$\varphi = \frac{P}{L}. \tag{210}$$

Величина эта, по всей вероятности, зависит от степени сгущения газа. В случае разреженных газов, когда длина свободного пути велика по сравнению с размерами молекул и силы притяжения между молекулами играют еще сравнительно незначительную роль, φ можно принять равным 1. То же можно предполагать и в случае сильного сгущения вещества, например, в жидкости, когда длина свободного пути значительно меньше размеров самих молекул. В промежуточных состояниях она очевидно меньше единицы. Есть основание утверждать, как будет показано ниже, что φ проходит чрез минимум в точках, соответствующих минимуму кинематической вязкости. Нетрудно понять, что в явлении вн. трения реального флюида определяющая роль должна принадлежать не длине свободного пути, а перемещению молекулы, так что, если мы хотим подойти еще ближе к реальности, мы должны пересмотреть наши выводы именно в этом смысле.

Ввиду сложности модели, для облегчения выводов, мы принуждены допустить некоторые упрощения. Так мы будем принимать скорости всех молекул одинаковыми, длину свободного пути — равной средней длине пути L и, соответственно, число столкновений молекулы — равным среднему секундному числу столкновений.

Прежде всего рассмотрим вывод величины y, т. е. глубины слоя, соответствующей видимому движению молекулы (см. § 48). Легко видеть, что вывод этот в основном не изменится, только

величина L_c будет заменена величиной P, причем угол β будет теперь углом между P и линией центров. Конечно, закон распределения углов может быть теперь иным, чем выведенный нами выше, но это теперь для нас не имеет никакого значения, так как величина численных коэфициентов нас сейчас не интересует. Величину y мы представляем себе расположенной на продолжении P, да это и не может быть иначе, так как дуги, соответствующие путям молекул,очевидно расположатся симметрично вокруг линии перемещения. В результате, в чем не трудно убедиться, мы придем к следующему выражению:

$$y = rP + sd, \tag{211}$$

аналогичному формуле (136), где r и s попрежнему представляют собой постоянные, определяемые механизмом столкновений, т. е., в конечном счете, молекулярной моделью.

Переходя теперь к выводу коэф. вн. трения, мы, прежде всего, должны заметить, что основные условия и смысл вывода останутся прежними (см. § 52).

Для того, чтобы найти ту часть силы трения (R_1), которая обусловливается прямым переносом направленного движения сквозь плоскость раздела, найдем прежде всего число молекул, вылетающих в секунду из элемента $d\omega$ так, что направление среднего перемещения для них образует с осью w угол ε. Нетрудно убедиться, что это число будет равно

$$\frac{1}{2} nz \sin\varepsilon \cdot d\varepsilon \cdot dw, \tag{212}$$

так как равновероятность всех направлений перемещения не нуждается в доказательстве.

Соответственно этому, следуя рассуждению, аналогичному вышеприведенному, мы получим

$$R_1 = \frac{du}{dw} \cdot mn \int z (w + y \cos\varepsilon) \sin\varepsilon \cdot d\varepsilon \cdot dw. \tag{213}$$

Ввиду того, что плоскость раздела (AB) из числа этих молекул пройдут лишь те, для которых $\cos\varepsilon \geqslant \frac{w}{P}$, мы должны интегрировать это выражение сначала по ε от $\cos\varepsilon = \frac{w}{P}$ до $\cos\varepsilon = 1$

и затем по w от $w=P$ до $w=0$, причем, после подстановки величины y (из форм. 211), получим

$$R_1=\frac{mnzP^2}{6}\left[\left(1+2r\right)+2s\cdot\frac{d}{P}\right]\frac{du}{dw}. \tag{214}$$

Или, принимая во внимание, что

$$z=\frac{\bar{c}}{L}=\frac{\varphi\bar{c}}{P}, \tag{215}$$

можно привести это к такому виду:

$$R_1=\varphi\cdot\frac{mn\bar{c}d}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}+r\right)\left(\frac{P}{d}\right)^2+s\cdot\frac{P}{d}}{\frac{P}{d}}\cdot\frac{du}{dw}. \tag{216}$$

Для вывода той части силы трения, которую мы обозначили через R_2, мы следуем опять-таки прежнему методу (см. § 53), т. е. вычисляем прежде всего то изменение в „видимом" движении молекулы, которое получается в результате столкновений. Это изменение оказывается теперь соответствующим разности в скоростях слоев газа, расположенных, если измерять по направлению линии центров, на расстоянии

$$l=\overline{\omega}d+2\overline{(P+y)\,\omega\cdot\cos\beta}, \tag{217}$$

что после подстановки значения y дает

$$l=\tau P+hd, \tag{218}$$

где τ и h некоторые постоянные. Подставляя это в выражение для R_2, которое, как легко убедиться, не потребует изменений, получим после преобразований

$$R_2=\frac{mn\bar{c}}{3}\cdot\frac{d}{L}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{du}{dw}=\varphi\cdot\frac{mn\bar{c}d}{3}\cdot\frac{\left(\frac{\tau}{2}\cdot\frac{P}{d}+\frac{h}{2}\right)}{\frac{P}{d}}\cdot\frac{du}{dw}. \tag{219}$$

Таким образом, полная сила трения получается равной

$$R_1+R_2=\varphi\cdot a_0mn\bar{c}d\cdot\frac{\left(\frac{P}{d}\right)^2+a_1'\frac{P}{d}+a_2'}{\frac{P}{d}}\cdot\frac{du}{dw}.$$

Поэтому, принимая во внимание, что

$$\frac{P}{d}=\frac{\varphi L}{d}=\frac{\sqrt{2}}{3}\varphi\cdot\frac{v-b}{b}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\varphi x, \tag{220}$$

получим следующее выражение для коэфициента внутр. трения флюида:

$$\eta=\varphi\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot a_0 mn\bar{c}d\cdot\frac{(\varphi x)^2+a_1\varphi x+a_2}{\varphi x} \tag{221}$$

и для кинематической вязкости:

$$\nu=\varphi\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot a_0\bar{c}d\cdot\frac{(\varphi x)^2+a_1\varphi x+a_2}{\varphi x}. \tag{222}$$

§ 62. Исследуем теперь полученное выражение в связи с явлением минимума кинематической вязкости.

Обозначим $\varphi x=z$,

а также $$\frac{z^2+a_1 z+a_2}{z}=f. \tag{223}$$

Тогда, в случае минимума величины ν, получим:

$$d\nu=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot a_0\bar{c}d\,(\,.\,f\,d\varphi+\varphi\,.\,df)=o$$

или

$$f\cdot d\varphi+\varphi\cdot df=o, \tag{224}$$

что можно переписать так:

$$f\cdot d\varphi+\varphi\cdot\frac{df}{dz}(\varphi\cdot dx+x d\varphi)=o$$

или

$$\left(f+z\frac{df}{dz}\right)d\varphi+\varphi^2\cdot\frac{df}{dz}\cdot dx=o. \tag{225}$$

Если $d\varphi$ и dx оба не равны нулю, то должны существовать уравнения

$$\left.\begin{aligned} f+z\frac{df}{dz}&=o\\ \text{и одновременно}\quad \frac{df}{zd}&=o\end{aligned}\right\} \tag{226}$$

Отсюда $f = o$, т. е. кинематическая вязкость в точке минимума должна быть равна нулю, что не соответствует опыту. Остается предположить, что либо dx, либо $d\varphi$ равны нулю. Но величина x пропорциональна средней длине пути молекулы, которая, как можно полагать [85], постоянно уменьшается с увеличением плотности. Поэтому $dx \neq o$.

Если же это так, то должно существовать уравнение

$$\frac{df}{dz} = o,$$

а так как при этом f и вместе с тем

$$f + z\frac{df}{dz}$$

не может равняться нулю, то остается принять, что $d\varphi = 0$. Из этого следует, что отношение между перемещением молекулы и длиной ее пути, то-есть величина φ, достигает минимума одновременно с кинематической вязкостью. Иными словами, именно в этой точке криволинейность движения молекул достигает своего максимума.

Ввиду того, что

$$\frac{df}{dz} = \frac{z^2 - a_2}{z^2} = 0,$$

получается

$$a_2 = z_m^{\ 2},$$

вследствие чего

$$f - f_m = \frac{(z - z_m)^2}{z}.$$

Это приводит нас к следующей формуле кинематической вязкости:

$$\frac{\nu}{\varphi} - \left(\frac{\nu}{\varphi}\right)_m = \frac{\sqrt{2}}{3} a_0 \bar{c} d \frac{[\varphi x - (\varphi x)_m]^2}{\varphi x} = \eta_0 b_0 \frac{[\varphi x - (\varphi x)_m]^2}{\varphi x}. \quad (227)$$

Как нетрудно видеть, формула (221) переходит в формулу (168) при $\varphi = 1$, поэтому численные коэфициенты этих формул, должны быть тождественны. А это значит, что величина $(\varphi x)_m$ должна быть тождественно равна величине x_m формулы (172), т. е.,

принимая во внимание результаты Энскога (форм. 191), для „гладких“ сферических молекул

$$(\varphi x)_m = 0.8726, \tag{228}$$

и, следовательно, кинематическая вязкость, в случае модели „гладких“ сферических молекул, выразится так:

$$\frac{\nu}{\varphi} - \left(\frac{\nu}{\varphi}\right)_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 0{,}499\, \bar{c}d\, \frac{(\varphi x - 0.8726)^2}{\varphi x}. \tag{229}$$

И, соответственно, в случае модели „шероховатых“ молекул (см. форм. 209):

$$\frac{\nu}{\varphi} - \left(\frac{\nu}{\varphi}\right)_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 0{,}523\, \bar{c}d \cdot \frac{(\varphi x - 1{,}209)^2}{\varphi x}. \tag{230}$$

Вообще, в случае гладких молекул формула Энскога (форм. 190) должна становиться идентичной формуле (221) при замене в ней величины η на $\frac{\eta}{\varphi}$ и величины x на φx, поэтому, аналогично формулам (189) и (186), в рассматриваемом случае должны иметь место следующие зависимости:

$$d = \frac{\nu_m \sqrt{\frac{M}{RT}}}{\varphi_m\, 0{,}955} = \frac{\nu_m\, x_m \sqrt{\frac{M}{RT}}}{0.8726 \cdot 0{,}955} = \frac{\nu_m\, x_m \sqrt{\frac{M}{RT}}}{0.833}, \tag{231}$$

а также

$$\eta_0 b_0 = \frac{\nu_m}{\varphi_m \cdot 2{,}545} = \frac{\nu_m x_m}{2{,}221}. \tag{232}$$

Из выражения (228) можно заключить, что величина x_m, соответствующая точкам минимума кинематической вязкости, а, следовательно, и критической точке, в случае модели гладких сферических молекул, должна быть равна или больше теоретического числа 0.8726, так как

$$\varphi_m = \frac{0.8726}{x_m} \leqslant 1, \text{ тоесть } x_m \geqslant 0.8726 \tag{233}$$

и следовательно

$$\left(\frac{b}{v}\right)_m \leqslant 0.534. \tag{234}$$

В случае модели „шероховатых“ молекул (см. форм. 230)

$$\varphi_m = \frac{1{,}209}{x_m} \leqslant 1\,, \tag{235}$$

то-есть

$$\left.\begin{aligned} x_m &\geqslant 1{,}209\,, \\ \text{а также} \quad \left(\frac{b}{v}\right)_m &\leqslant 0.453\,. \end{aligned}\right\} \tag{236}$$

Как мы увидим впоследствии, экспериментальные данные подтверждают это заключение.

§ 63. Обсуждая полученные результаты, мы видим, что в конечном счете коэф. вн. трения или, соответственно, кинематическая вязкость газа оказывается зависящей, помимо об'ема, еще и от величин b и φ, о которых нам мало что известно. Поэтому проверка полученных формул на экспериментальном материале может быть только частичной и условной. Так, прежде всего, пренебрегая величиной φ и считая b за постоянную, мы можем привести нашу формулу (227) к следующему виду:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_m}\right)^2}{1 - \beta \cdot \frac{\varrho}{\varrho_m}} + \frac{\eta_m}{\eta_0} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_m}\,, \tag{237}$$

где η_0 — коэф. вн. трения разреженного газа,

ϱ — плотность газа,

$\beta = \left(\frac{b}{v}\right)_m$ — отношение b к об'ему в точке минимума кинематической вязкости,

ϱ_m и η_m — плотность и вязкость газа в точке минимума.

Ввиду того, что теория в этом случае требует постоянства $\left(\frac{b}{v}\right)_m$, а также того, что критическая точка тоже относится к точкам, в которых наступает минимум кинематической вязкости[86], можно попробовать принять ϱ_m равным ϱ_k, т. е. критической плотности, и отношение $\frac{\eta_m}{\eta_0}$, постоянство которого

также следует из теории, считать равным $\frac{\eta_k}{\eta_{0k}}$. Постоянная β при этом определится при интерполировании, как эмпирическая величина.

§ 64. В качестве первого примера приложения формулы (237) рассмотрим коэф. вн. трения углекислоты. В основу вычислений берем данные Филлипса[87].

Критическую плотность углекислоты принимаем равной

$$\varrho_k = 0.460,$$

что близко к среднему значению величин, представленных в нижеследующей таблице[88]:

Кальетэ и Матиас (1886)	— 0.462
Амага (1892)	— 0.464
Кеезом (1903)	— 0.446
Дорсман (1908)	— 0.451

Постоянную $\frac{\eta_k}{\eta_{0k}}$ вычисляем следующим образом:

Пренебрегая возможными незначительными изменениями эффективного диаметра d и величины φ от температуры, мы можем согласно формуле (231) заключить, что ν_m пропорционально $\sqrt{T}$.

Для CO_2 при 40^0C по данным Филлипса нами вычислено $\nu_m = 6{,}78 \cdot 10^{-4}$, так что, принимая $t_k = 31{,}4^0C$, получим

$$\nu_k = 6{,}78 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{304{,}5}{313{,}1}\right)^{\frac{1}{2}} = 6{,}69 \cdot 10^{-4},$$

откуда

$$\eta_k = \nu_k \varrho_k = 6{,}69 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}460 = 3{,}08 \cdot 10^{-4}.$$

А так как можно принять, что $\eta_{0k} = 1{,}53 \cdot 10^{-4}$, то

$$\frac{\eta_k}{\eta_{0k}} = \frac{3{,}08}{1{,}53} = 2{,}0.$$

С этим по точке на изотерме, соответствующей 40^0C

$$p = 85 \text{ атм.}; \ \varrho = 0.385, \ \eta = 2{,}69 \cdot 10^{-4},$$

вычисляем, пользуясь формулой (237),

$$\beta = 0.367.$$

С помощью этих постоянных вычислены значения коэф. трения углекислоты, приведенные наряду с экспериментальными данными, в нижеследующей таблице:

Таблица 9.

p атм.	ϱ гр./см^3	$\eta_{эксп.} \cdot 10^4$	$\eta_{выч.} \cdot 10^4$		
Изотерма 20° С					
83	0,835	8,23	8,32	жидкость	+ 1,1%
72	0,812	7,71	7,69	жидкость	— 0,3%
59	0,768	6,97	6,66	жидкость	— 4,4%
56	0,190	1,86	1,82		— 2,2%
50	0,145	1,77	1,72		— 2,8%
40	0,100	1,66	1,63		— 1,8%
20	0,036	1,56	1,53		— 1,9%
1	0,00183	1,48	1,48		0,0%
Изотерма 30° С					
110,5	0,795	7,70	7,51	жидкость	— 2,5%
104	0,781	7,33	7,17	жидкость	— 2,2%
96	0,760	6,93	6,71	жидкость	— 3,2%
90	0,743	6,43	6,36	жидкость	— 1,1%
82	0,716	5,92	5,87	жидкость	— 0,8%
80	0,706	5,65	5,70	жидкость	+ 0,9%
76	0,680	5,29	5,29	жидкость	0,0%
74	0,664	4,95	5,06	жидкость	+ 2,2%
73	0,653	4,78	4,91		+ 2,7%
72	0,635	4,58	4,67		+ 2,0%
70	0,287	2,29	2,19		— 4,4%
60	0,177	1,87	1,85		— 1,1%
40	0,092	1,68	1,67		— 0,6%
20	0,0353	1,59	1,58		— 0,6%
1	0,00177	1,53	1,53		0,0%
Изотерма 40° С					
112	0,699	5,71	5,73		+ 0,4%
108	0,682	5,40	5,46		+ 1,1%
100	0,636	4,83	4,81		— 0,4%
94	0,582	4,14	4,18		+ 1,0%
85	0,385	2,69	2,69		0,0%
80	0,291	2,18	2,26		+ 3,7%
70	0,204	2,00	1,97		— 1,5%
60	0,153	1,87	1,84		— 1,6%
40	0,083	1,76	1,70		— 3,4%
23,8	0,0408	1,69	1,63		— 3,6%
1	0,00173	1,57	1,57		0,0%

Результаты вычислений можно признать удовлетворительными, если принять во внимание, что ошибка эксперимента сама составляет 2% и что формула (237) содержит только одну эмпирическую постоянную (β). Однако, необходимо отметить, что формула Егера-Планка (форм. 24) (содержащая, правда, три эмпирических постоянных) точнее и потому более пригодна для практического применения.

Вообще же надо полагать, что наша формула (237) вряд ли может быть применима в широких температурных интервалах, так как ϱ_m повидимому увеличивается с температурой, что хорошо видно на примере азота, разбираемом в следующем параграфе.

§ 65. Рассматривая в качестве второго примера приложимости формулы (237) вязкость азота, мы пользуемся данными Мичельс и Джибсен[89].

Приблизительные значения ϱ_m и $\frac{\eta_m}{\eta_0}$, соответствующие отдельным изотермам, таковы:

t	p атм.	ϱ_m гр./см^3	$\frac{\eta_m}{\eta_0}$
25° C	348.2	0.4354	2.047
50° C	352.6	0.4409	1.997
75° C	362.8	0.4537	2.008
—147,13° C	33.49	0.3110	—

В их число включены также данные, относящиеся к критической точке[90], которая также относится к точкам минимума кинематической вязкости.

Таблица эта с несомненностью показывает возрастание ϱ_m с температурой, однако отношение $\frac{\eta_m}{\eta_0}$ оказывается практически постоянным и равным в среднем 2,02, что, в пределах ошибок, совпадает с подобным же числом, найденным нами выше для углекислоты.

Для вычисления постоянной β мы пользуемся изотермой 75° C, причем принимаем, помимо постоянных, приведенных в таблице, согласно данным авторов $\eta_0 = 2.000.10^{-4}$. Точка

изотермы, использованная при этом, соответствует $p = 412{,}1$ атм. В результате получается:

$$\beta = 0.6509.$$

Пользуясь этой постоянной, совместно с вышеупомянутыми значениями ϱ_m и $\frac{\eta_m}{\eta_0}$, вычисляем значения коэф. вн. трения, приведенные, наряду с экспериментальными данными, в следующей таблице:

Таблица 10.

p атм.	ϱ гр./см.^{3}	$\eta_{\text{эксп.}} \cdot 10^4$	$\eta_{\text{выч.}} \cdot 10^4$	Δ %
15.37	0.01505	2.022	2.044	+ 1.1
57.61	0.05591	2.088	2.17	+ 3.7
104.5	0.09970	2·175	2.30	+ 5.9
212.4	0.1902	2.408	2.61	+ 8.4
320.3	0.2659	2.746	2.91	+ 5.9
430.2	0.3287	3.079	3.40	+ 10.3
541.7	0.3806	3.426	3.48	+ 1.7
630.3	0.4158	3.701	3.72	+ 0.4
742.0	0.4537	4.016	4.02	0.0
854.1	0.4867	4.362	4.34	— 0.4
965.7	0.5153	4.703	4.70	0.0

В рассматриваемом случае расхождение между экспериментальными и вычисленными величинами далеко выходит за пределы ошибок опыта, что вполне об'яснимо приближенностью формулы (237).

§ 66. Разумеется, что результаты вышеприведенных вычислений не решают еще вопроса о правильности нашей теории, так как формула (237) представляет собой лишь весьма грубое упрощение полученного нами выражения (227).

Большего можно ожидать от формулы (174), если пользоваться величинами $x = \frac{v-b}{b}$, вычисленными с помощью изохор по формуле

$$x = \frac{1}{\frac{1}{R_1\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - 1}. \tag{238}$$

Поступая таким образом, мы пренебрегали бы только криволинейностью движения молекул ($\varphi = 1$), причем все постоянные были бы получены непосредственно из данных эксперимента. Правда, и при этом способе вычисления все же остается некоторая неуверенность, а именно, в отношении величины x, так как в основе вывода формулы (238) лежит предположение о независимости „постоянных" уравнения состояния в. д. Ваальса от температуры. Для примера, пользуемся изотермой вязкости Азота при 50° С, полученной Мичельс и Джибсен [91].

Пользуясь величинами ϱ и $\frac{1}{R_1\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - 1$, приведенными в вышеупомянутой работе, мы вычисляем x и b. Полученные таким образом значения, наряду с плотностью ϱ и кинематической вязкостью ν, даны в нижеследующей таблице:

Таблица 11.

p атм.	ϱ гр./см³	ν	x	b см³/гр.
15.37	0.01623	0.01179	32.26	1.853
58.60	0.06049	0.003274	8.403	1.758
104.5	0.1083	0.001928	4.651	1.634
212.4	0.2067	0.001148	2.037	1.593
320.4	0.2875	0.000952	1.395	1.452
430.2	0.3528	0.000887	1.087	1.358
531.7	0.4053	0.000866	0.9001	1.299
630.4	0.4409	0.000859	0.8019	1.259
742.1	0.4786	0.000870	0.7077	1.224
854.1	0.5117	0.000889	0.6345	1.194
965.8	0.5404	0.000909	0.5774	1.173

Согласно этим данным построена кривая величины b, показанная на рис. (17).

Экстраполируя в точку $p = 0$, получим $b = 1{,}86$ см³/гр. А так как согласно Мичельс и Джибсен при 50° и 1 атм. $\eta = 1{,}896.10^{-4}$, то можно принять

$$\eta_0 b_0 = 1{,}86 \cdot 1{,}896.10^{-4} = 3{,}52 \cdot 10^{-4}.$$

Величина ν, как функция x, в окрестностях точки минимума, изображена на рисунке (18):

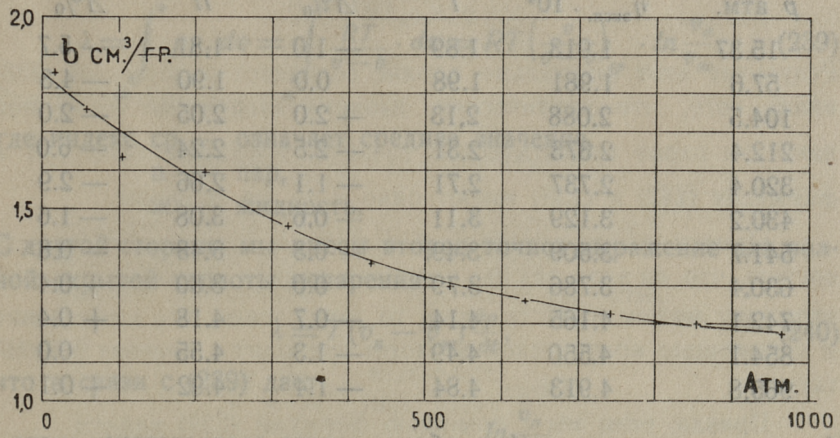

Рис. 17.

Как видно, минимум кинематической вязкости наступает вблизи значения $x_m = 0.820$, причем $\nu_m = 8{,}59 \cdot 10^{-4}$.

Пользуясь полученными таким образом постоянными, мы вычисляем по формуле (174) кривую величины η, данную в столбце *I* нижеследующей таблицы (12). Там же, наряду с экспериментальными значениями η, дана и кривая (*II*), вычисленная Мичельс и Джибсен по формуле Д. Энскога (см. § 57 наст. главы).

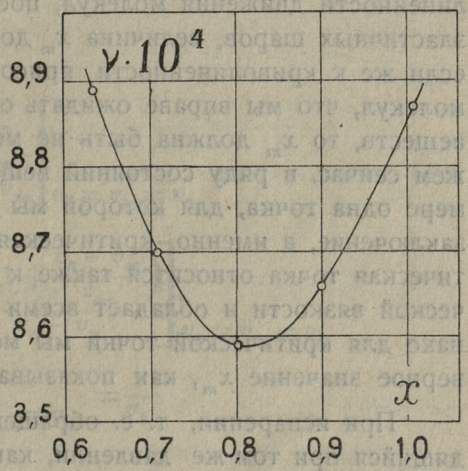

Рис. 18.

Таблица 12.

p атм.	$\eta_{эксп.} \cdot 10^4$	$\eta_{выч.} \cdot 10^4$			
		I	$\Delta\%$	II	$\Delta\%$
15.37	1.913	1.89	— 1.0	1.81	— 5.7
57.6	1.981	1.98	0.0	1.90	— 4.3
104.5	2.088	2,13	+ 2.0	2.05	— 2.0
212.4	2.373	2.31	— 2.5	2.24	— 6.0
320.4	2.737	2.71	— 1.1	2.66	— 2.9
430.2	3.129	3.11	— 0.6	3.08	— 1.6
541.7	3.509	3.49	— 0.3	3.48	— 0.8
630.4	3.786	3.79	0.0	3.80	+ 0.4
742.1	4.165	4.14	— 0.7	4.18	+ 0.4
854.1	4.550	4.49	— 1.3	4.55	0.0
965.8	4.913	4.84	— 1.4	4.92	+ 0.1

Мы видим, что кривая (I) в общем лучше соответствует эксперименту, чем (II), однако расхождение все же еще сравнительно велико. Причина этого повидимому лежит в приблизительности значений x, а также в пренебрежении криволинейностью движения молекул [92].

§ 67. Нами было выяснено в § 62, что вследствие криволинейности движения молекул, поскольку они отвечают модели эластичных шаров, величина x_m должна быть не меньше 0.8726, если же к криволинейности присоединяется еще и вращение молекул, что мы вправе ожидать от большинства многоатомных веществ, то x_m должна быть не меньше 1.209. Как мы покажем сейчас, в ряду состояний вещества существует по крайней мере одна точка, для которой мы в состоянии проверить это заключение, а именно, критическая точка. Как известно, критическая точка относится также к точкам минимума кинематической вязкости и обладает всеми свойствами этих точек. Однако для критической точки мы можем получить более достоверное значение x_m, как показывает следующее рассуждение.

При испарении, т. е. обращении жидкости в пар, находящийся при том же давлении, как и жидкость, производится работа изотермического расширения, равная по величине полной скрытой теплоте испарения λ. Работа эта сводится к ра-

боте термического давления, понимаемого как сумма внешнего и внутреннего давления флюида $p_t = p + P$, так что

$$\lambda = \int_{ж}^{n} p_t \cdot dv = \int_{ж}^{n} \frac{RT}{v-b} \cdot dv = RT\left(\frac{v}{v-b}\right)_{ср} \cdot ln\frac{v_n}{v_ж}, \qquad (239)$$

где индекс ср — означает среднее значение,
п — пар,
ж — жидкость.

С другой стороны мы имеем второе точное выражение для полной скрытой теплоты испарения:

$$\lambda = T(v_n - v_ж)\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad (240)$$

что в связи с (239) дает

$$\left(\frac{v-b}{v}\right)_{ср} = R\frac{\partial t}{\partial p} \cdot \frac{ln\frac{v_n}{v_ж}}{v_n - v_ж}.$$

При приближении к критической точке пределы интегрирования в вышеуказанном интеграле сближаются и величина $\left(\frac{v-b}{v}\right)_{ср}$ стремится к значению этой величины в критической точке, т. е. $\left(\frac{v-b}{b}\right)_k$.

С другой стороны

$$\text{предел}\left[\frac{ln\frac{v_n}{v_ж}}{v_n - v_ж}\right]_{v_n = v_ж = v_k} =$$

$$= \text{пред.}\left[\frac{ln\left(1 + \frac{v_n - v_ж}{v_ж}\right)}{v_n - v_ж}\right]_{v_n = v_ж = v_k} =$$

$$= \text{пред.}\left[\frac{1}{v_ж}\right]_{v_ж = v_k} = \frac{1}{v_k}.$$

Откуда следует

$$\left(\frac{v-b}{v}\right)_k = \frac{R}{v_k}\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right)_k \qquad (241)$$

и, следовательно,

$$x_k = \left(\frac{v-b}{b}\right)_k = \frac{1}{\frac{1}{R_1 \varrho_k}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_k - 1}, \tag{242}$$

Результат этот формально вполне совпадает с формулой (238) ввиду того, что критическая изохора касательна к кривой давления паров в критической точке и, следовательно, $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)$ в формулах (242) и (238) имеют одно и то же значение.

Однако вышеприведенный вывод показывает с несомненностью, что на этот раз мы получаем точное значение x_k; и из этого мы можем вывести лишь то заключение, что вычисление x с помощью критической изохоры приводит к точному результату.

Правда, если мы с помощью формулы (239) найдем

$$\left(\frac{v-b}{v}\right)_{cp} = \frac{RT}{\lambda} ln \frac{v_n}{v_ж}, \tag{243}$$

то экстраполяция полученной кривой обыкновенно не совпадает с результатом вычисления по формуле (242), но причина этого, по нашему мнению, вряд ли заключается в чем-нибудь ином кроме неточности величин λ, v_n и $v_ж$, обусловленной трудностями эксперимента вблизи критической точки.

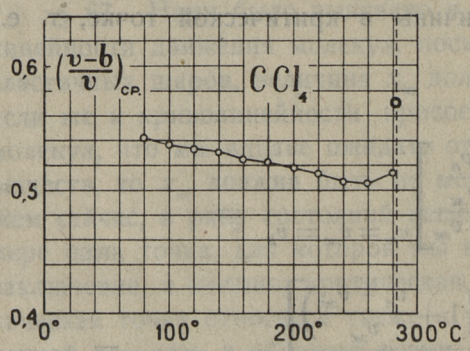

Рис. 19.

§ 68. В качестве первого примера рассмотрим случай четыреххлористого углерода[93]. На рисунке (19) изображена кривая $\left(\frac{v-b}{v}\right)_{cp}$, вычисленная по формуле (243). Двойным кружком отмечена точка, вычисленная по кривой давления паров (форм. 241), вернее по ее отрезку вблизи критической точки:

t^0C	p мм Hg
260	25 530
270	29 000
280	32 800
283,15	34 200

Способ вычисления таков:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{34200 - 29000}{13{,}15 \cdot 760} = 0.521 \text{ атм./}1^0\text{C}$$

Критическая плотность $CCl_4 = 0.5576$ гр./см.^{3},
молекулярный вес $= 153{,}83$,
газовая постоянная $R = 82{,}06$ см.^{3} атм.,

так что

$$\left(\frac{v-b}{v}\right)_k = \frac{82{,}06 \cdot 0.5576}{153{,}83 \cdot 0.521} = 0.57,$$

чему соответствует $x_k = 1.33$.

Экстраполируя кривую, полученную по теплоте испарения (форм. 243), мы ни в коем случае не можем получить столь высокое предельное значение $\left(\frac{v-b}{v}\right)_k$, гораздо более вероятным в данном случае будет число 0,52 или 0.53, чему соответствует

$$x_k = 1.08 \sim 1.13.$$

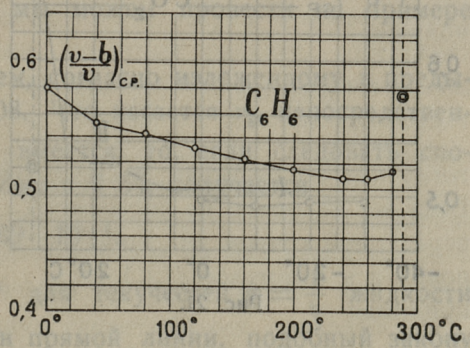

Рис. 20.

2) Подобные же результаты получены нами и в случае бензола (см. рис. 20). По кривой давления паров (форм. 241)

$$\left(\frac{v-b}{v}\right)_k = 0.57$$

и, следовательно, $x_k = 1.33$.

Экстраполяцией кривой, вычисленной по формуле (243), получается $\left(\frac{v-b}{v}\right)_k = 0{,}52$, откуда $x_k = 1{,}08$.

3) В случае углекислоты, точка, отмеченная кружком на рис. (21), вычислена по кривой давления паров (форм. 241), причем мы пользовались весьма точной формулой [94]. При этом мы принимали

$$T_k = 273{,}1^0 + 31{,}1^0 = 304.2^0,$$

$$p_k = 72{,}95 \text{ атм.},$$

$$v_k = 2{,}155 \text{ см.}^3/\text{гр.}$$

(пределы приложимости формулы — 56,6° до 31,1° С).

Вычисление это дает

$$\left(\frac{v-b}{v}\right)_k = 0{,}52,$$

откуда

$$x_k = 1{,}08.$$

Что касается кривой, вычисленной по теплоте испарения, форм. (243), то она в этом случае не позволяет притти ни к какому определенному результату.

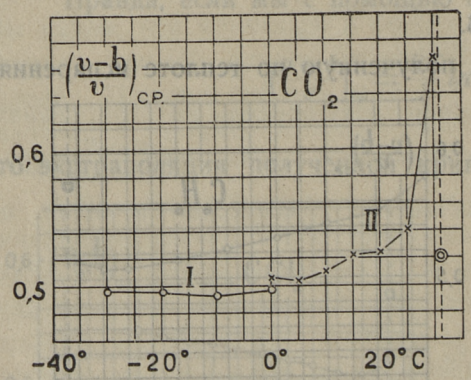

Рис. 21.

Участок (*I*) этой кривой вычислен по данным Артур В. Смит [95], а участок (*II*) по данным К. Бриджмен [96].

Следует отметит, что Э. Нейсер [97], путем интерполяции чрез малые промежутки, пользуясь критической изотермой, получил для b в критической точке следующее значение:

$$\left.\begin{aligned} b_k &= 0.0365 \\ \text{и одновременно} \quad v_k &= 0.076 \end{aligned}\right\} \text{ в литрах на гр. мол.}$$

Согласно этому

$$\left(\frac{b}{v}\right)_k = 0.48$$

и, следовательно, $x_k = 1.08$,

что совпадает с полученным нами результатом.

4) В случае азота, принимая формулу Кроммелина[98] для давления паров, а также

$$\varrho_k = 0.311 \text{ гр./см.}^3,$$
$$p_k = 33{,}3 \text{ атм.},$$
$$M = 28.016,$$

вычисляем по формуле (241)

$$\left(\frac{v-b}{v}\right)_k = 0.5758\,.$$

Откуда

$$x_k = 1.357\,.$$

Как мы видим, во всех рассматриваемых случаях величина $x_m > 0.8726$, а в случае азота даже больше чем 1.209, в чем можно видеть подтверждение нашей теории.

§ 69. Зная x_k и ν_k, мы можем, пользуясь формулой (231), вычислить более точное значение Энскоговского диаметра молекулы, чем это позволяет формула Энскога (189).

Подобное вычисление мы можем провести на примере углекислоты.

В этом случае мы можем, согласно изложенному в предыдущем §-е, принять $x_k = 1.08$. Что касается ν_k, непосредственных измерений которого не имеется, то, если следовать способу вычисления, приведенному в § 64, получается

$$\nu_k = 6{,}69 \cdot 10^{-4}.$$

Согласно Р. Планк[26] для текучестей $\varphi = \frac{1}{\eta}$ жидкости и пара осуществляется закон прямой линии, подобный закону Е. Матиас для плотностей, так что

$$\frac{\varphi_п + \varphi_ж}{2} = \alpha - \beta t\,. \tag{244}$$

Для CO_2 по Планку $\alpha = 3{,}305 \cdot 10^5$; $\beta = 0{,}0065 \cdot 10^5$ (здесь φ выражено в технических единицах $= \frac{м^2}{кг.\ сек.}$). Принимая $t_k = 31{,}35^0$C, вычисляем по этой формуле

$$\varphi_k = 10^5\,(3{,}305 - 0{,}0065 \cdot 31{,}35) = 3{,}101 \cdot 10^5\,.$$

Откуда

$$\eta_k = 3{,}225 \cdot 10^{-6} \frac{кг.\ сек.}{м^2} = \frac{3{,}225 \cdot 10^{-6}}{0{,}0102} = 3{,}16 \cdot 10^{-4} \text{ абс. ед.}$$

Принимая критическую плотность $\varrho_k = 0.460$, получим

$$\nu_k = \frac{3{,}16 \cdot 10^{-4}}{0.460} = 6{,}87 \cdot 10^{-4}.$$

Ввиду того, что закон прямой Р. Планка теоретически еще мало обоснован, у нас нет основания предпочесть одно из полученных таким образом значений другому, поэтому за истинное значение ν_k мы принимаем среднее:

$$\frac{6{,}69 + 6{,}87}{2} \cdot 10^{-4} = 6{,}78 \cdot 10^{-4}.$$

С этим, по формуле (231), принимая во внимание, что

$$\sqrt{\frac{M}{RT}} = \sqrt{\frac{44}{8{,}316 \cdot 10^7 \cdot 304{,}5}} = 4{,}169 \cdot 10^{-5},$$

получим

$$d = \frac{6{,}78 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}08 \cdot 4{,}169 \cdot 10^{-5}}{0.833} = 3{,}66 \cdot 10^{-8} \text{ см.},$$

тогда как по формуле Энскога (189) получается $2{,}96 \cdot 10^{-8}$ см. Если же исходить из постоянных, полученных с помощью температурной кривой вн. трения CO_2 при 1 ат. (см. § 39 и 40), то, пользуясь формулой (121),
принимая

$$\varrho_0 = 4{,}162 \cdot 10^{-8} \text{ см.},$$

$$\Psi = \Psi(\sqrt{akT}) = \Psi(0{,}1093) = 0{,}82804,$$

$$J = \left(\frac{3}{2}\sqrt{akT}\right) = \Psi(0{,}1639) = 0.75631,$$

получим

$$d = \varrho_0 \cdot \frac{J}{\Psi} = 3{,}80 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Мы видим, что результат, полученный по нашей формуле (231),

лучше совпадает с этим, чем результат, полученный по формуле Энскога. Одновременно это указывает также на то, что модель „гладких“ молекул в случае CO_2, повидимому, удовлетворительно соответствует опыту.

Отметим попутно, что[99] диаметр молекулы CO_2, вычисленный по в. д. Ваальсу $\left(\frac{1}{8}\frac{RT_k}{P_k}\right)$ равен $3{,}22 \cdot 10^{-8}$ см.,

по Воолю — 3,62 . „

и полученный по движению медленных

электронов — 3,66 „.

Это хорошо согласуется с нашими числами.

Зная x_k, мы можем также вычислить φ_m — число, характеризующее „кривизну пути“ молекулы в критической точке (см. форм. 210, а также 228). Очевидно

$$\varphi_k = \frac{0.8726}{1{,}08} = 0.808,$$

т. е. среднее линейное перемещение молекулы в промежутках между двумя столкновениями, по этому расчету, составляет около 81% средней длины пути, пройденного ею в то же время.

При этом это значение φ для данной температуры будет минимальным так, что при плотностях больших или меньших, чем критическая, φ будет возрастать, стремясь к 1.

§ 70. Аналогичная проверка теории в случае азота связана с некоторыми затруднениями. Одно из них заключается в том, что нам неизвестно значение ν_k. Величину эту мы можем вычислить только на основании теоретических соображений.

Как мы видели выше, (см. § 65), среднее значение отношения $\frac{\eta_m}{\eta_0}$ в случае исследованных Мичельс и Джибсен изотерм равняется 2,02. Предполагая, что это отношение будет существовать также и в случае критической изотермы (что весьма вероятно, так как теория, в чем не трудно убедиться, требует постоянства этого отношения), мы можем вычислить величину критической вязкости по формуле

$$\eta_k = 2{,}02 \cdot \eta_{0k}.$$

Пользуясь постоянными, полученными по температурной кривой вн. трения (см. § 39), и принимая $t_k = -147{,}13^0\text{C} = 126.0^0$ абс. по формуле (115), вычисляем

$$\eta_{0k} = 0{,}854 \cdot 10^{-4}$$

и отсюда

$$\eta_k = 2{,}02 \cdot 0{,}854 \cdot 10^{-4} = 1{,}725 \cdot 10^{-4}.$$

Поэтому, принимая критическую плотность равной 0.3110, значение кинематической вязкости в критической точке получается равным

$$\nu_k = 5{,}55 \cdot 10^{-4}.$$

С другой стороны, как не трудно убедиться, пренебрегая возможной изменчивостью φ_m согласно формуле (231), получим

$$\frac{\nu_k}{\nu_m} = \left(\frac{T_k}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d_k}{d}, \tag{245}$$

где d и ν_m относятся к некоторой произвольной температуре T. Согласно формуле (121)

$$\frac{d_k}{d} = \left(\frac{J}{\Psi}\right)_k \cdot \left(\frac{\Psi}{J}\right)_T,$$

поэтому

$$\nu_k = \nu_m \left(\frac{T_k}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{J}{\Psi}\right)_k \cdot \left(\frac{\Psi}{J}\right)_T. \tag{246}$$

При $50^0\,\text{C} = 323{,}1^0$ абс. согласно данным Мичельс и Джибсен

$$\nu_m = 8{,}59 \cdot 10^{-4}.$$

Так что, принимая,

$$T_k = 126.0^0$$

и пользуясь постоянной $\sqrt{ak}$, полученной выше (см. § 39), вычисляем с помощью таблицы функции Ψ

$$J_k = 0.89404$$
$$\Psi_k = 0.92769$$
$$J_T = 0.83712$$
$$\Psi_T = 0.88736$$

С этими числами по формуле (246) вычисляем

$$\nu_k = 5{,}48 \cdot 10^{-4}.$$

Ввиду того, что оба полученные нами значения ν_k лишь незначительно отличаются друг от друга, в основу дальнейших вычислений принимаем их среднее

$$\nu_k = 5{,}51 \cdot 10^{-4}.$$

Выше нами было получено для азота (§ 68)

$$x_k = 1.357\,.$$

Пользуясь этими величинами и принимая во внимание, что в этом случае

$$\sqrt{\frac{M}{RT_k}} = 5{,}171 \cdot 10^{-5}\,,$$

по формуле (231) вычисляем

$$d = 4{,}64 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

При этом Энскоговская формула в этом случае дает

$$d = 2{,}98 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Рассчитывая (по формуле 121) подобно тому, как это сделано нами в предыдущем § для углекислоты, Энскоговский диаметр при критической температуре на основании констант, полученных по температурной кривой вязкости (см. §§ 39 и 40), получим

$$d = \varrho_0 \cdot \frac{J}{\Psi} = 3{,}48 \cdot 10^{-8}\,.$$

Мы видим, что и на этот раз, как и в случае CO_2, Энскоговская формула дает слишком низкий результат, но результат, полученный по формуле (231) слишком высок.

Очевидно об'яснить этот результат возможно только вращением молекул. Действительно, в случае вращающихся молекул без учета криволинейности их движения знаменатель формулы (188) должен быть больше чем 2,545, так как при одном и том же значении d, $\bar{c}$ и ϱ_m коэф. вн. трения „шероховатых“

молекул должен быть больше, чем коэф. вн. тр. „гладких". Поэтому для первых формулу (189) можно переписать так:

$$d < \frac{v_m \sqrt{\frac{M}{RT}}}{0.955}. \tag{247}$$

Если принять во внимание еще и криволинейность движения молекул, то

$$d < \frac{v_m x_m \sqrt{\frac{M}{RT}}}{(\varphi x)_m \cdot 0{,}955}.$$

А так как для „шероховатых" молекул $(\varphi x)_m = 1.209$, то в результате получим

$$d < \frac{v_m x_m \sqrt{\frac{M}{RT}}}{1{,}154}. \tag{248}$$

Прилагая это к нашему случаю, вычисляем

$$d < \frac{5{,}51 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}357 \cdot 5{,}17 \cdot 10^{-5}}{1{,}154} = 3{,}35 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

То-есть, модель „шероховатых" молекул приводит к значению Энскоговского диаметра, меньшему, чем вычислено нами по температурной кривой $(3{,}48 \cdot 10^{-8})$.

Полученный результат естественно об'ясним тем, что молекулы не идеально „шероховаты", но что столкновения их сопровождаются скольжением.

В общем вычисления эти подтверждают теорию, показывая одновременно, что наиболее вероятные значения Энскоговского диаметра получаются только с помощью температурной кривой вязкости газов при обыкновенном давлении.

ГЛАВА 7.

Жидкости.

§ 71. Как мы уже говорили (§ 15), можно полагать, что механизм внутреннего трения в жидкостях вряд ли значительно отличается от такового же в газах. Поэтому естественно требовать, чтобы формула вн. трения жидкостей вытекала бы из соответствующей формулы, выведенной для реальных газов.

Как известно, в основу первой теории вязкости жидкостей, принадлежащей Г. Егеру, положена модель т. наз. „идеальной жидкости". Модель эта по существу не отличается от в. д Ваальсовской и предполагает только, что „свободный об'ем" предоставленный для движения молекул внутри жидкости, столь мал, что величина $(v-b)$ близка к нулю.

Обращаясь к формуле кинематической вязкости (227), мы видим, что при $(v-b)$ и, следовательно, x, близком к нулю, мы можем переписать ее (пренебрегая малыми величинами), в следующем виде:

$$\nu = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a_0 \bar{c} d \cdot \frac{(\varphi x)^2{}_m}{x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a_0 \bar{c} d \cdot (\varphi x)^2{}_m \cdot \frac{b}{v-b}.$$

А так как при этом

$$\nu = \eta v = \eta b,$$

то в результате получается

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a_0 (\varphi x)^2{}_m \cdot \frac{\bar{c} d}{v-b}. \tag{249}$$

Ввиду того, что уравнение состояния жидкости (для 1 гр. вещества) можно представить так:

$$P(v-b) = R_1 T,$$

где P — термическое давление, равное сумме внутреннего и внешнего давлений и величина

$$R_1 T = \frac{\overline{c^2}}{3} = \frac{\pi}{8} (\bar{c})^2$$

(см. форм. 73), получим:

$$v - b = \frac{R_1 T}{P} = \frac{\pi}{8} \frac{(\bar{c})^2}{P}, \tag{250}$$

что после подстановки в формулу (249) дает:

$$\eta = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \cdot a_0 (\varphi x)^2_m \cdot \frac{Pd}{\bar{c}} = A \frac{Pd}{\bar{c}}. \tag{251}$$

Легко убедиться, что полученное выражение вполне подобно формуле Г. Егера (форм. 33), причем, однако, численный коэфициент ее

$$A = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \cdot a_0 (\varphi x)^2_m, \tag{252}$$

без сомнения, теоретически более обоснован, чем коэфициент Егеровской формулы, представляющей собой результат приближенного подсчета.

Как мы знаем, в случае „гладких“ сферических молекул $a_0 = 0.499$, причем согласно формуле (228)

$$(\varphi x)_m = 0.8726.$$

Итак, в этом случае получается

$$A = \frac{8\sqrt{2}}{8\pi} \cdot 0{,}499 \cdot 0{,}8726^2 = 0{,}456. \tag{253}$$

В случае „шероховатых“ молекул, по формулам (199) и (235),

$$a_0 = 0.523,$$
$$(\varphi x)_m = 1.209,$$

откуда получается

$$A = 0.918. \tag{254}$$

Первое из этих чисел (0.456) должно быть применимо только к одноатомным жидкостям (как например Hg), в случае же многоатомных жидкостей, молекулы которых вследствие способности к вращению уподобляются до некоторой степени „ше-

роховатым“ молекулам Пиддака, значение A, по всей вероятности, должно быть равно или меньше чем 0.918. Последнее можно ожидать потому, что столкновения молекул, вероятно, всегда в большей или меньшей степени сопровождаются „скольжением“.

§ 72. Вывод Г. Егера предполагает крайне „идеализированную“ модель жидкости. В действительности, обычно, в случае реальных жидкостей величина $v-b$ составляет от 5% до 25% об'ема, что необходимо иметь ввиду при обращении с Егеровской формулой. Можно предполагать поэтому, что точность формулы может быть значительно повышена, если внести в нее соответствующую поправку.

Поправка эта, как нетрудно убедиться, естественно вытекает из формулы (222). Действительно, формулу эту (полагая $\varphi=1$) легко привести к следующему виду:

$$\eta = A \cdot f \cdot \frac{Pd}{c}, \tag{255}$$

где

$$f = 1 + \frac{a_1 - a_2}{a_2} \cdot \frac{v-b}{v} + \frac{1}{a_2} \cdot \frac{v}{b} \cdot \left(\frac{v-b}{v}\right)^2 \tag{256}$$

и A представляет собой численный коэфициент, выражаемый формулой (252).

Пользуясь Энскоговскими значениями численных коэфициентов (см. форм. 190)

$$a_2 = 0.7614,$$
$$a_1 = 0.8000,$$

соответствующими модели „гладких“ сферических молекул, по формуле (256) мы вычисляем следующую таблицу значений величины f.

Таблица 13.

$\frac{v-b}{v}$	f
5%	1.006
10%	1.020
15%	1.042
20%	1.076
25%	1.122

В случае „шероховатых“ молекул $a_2 = 1{,}209^2 = 1{,}46$ (см. форм. 209). Величина a_1 при этом остается пока неизвестной, но по всей вероятности мы сделаем незначительную ошибку, если, исходя из формулы (256), вычислим коэфициент $f_ш$ в этом случае по формуле

$$f_ш = (f - 1) \cdot \frac{0.761}{1{,}46} + 1 = 1 + 0{,}521\,(f - 1). \qquad (257)$$

При этом получается:

Таблица 14.

$\frac{v-b}{v}$	$f_ш$
5%	1.003
10%	1.010
15%	1.022
20%	1.040
25%	1.064

§ 73. В качестве примера рассмотрим коэфициент вн. трения ртути — вещества, которое, как можно было бы ожидать, остается одноатомным и в жидком состоянии.

В нижеследующей таблице (15) приведены значения диаметра молекулы d, вычисленные по формуле

$$d = \frac{1}{0.456} \cdot \frac{\eta \bar{c}}{Pf}, \qquad (258)$$

вытекающей из формулы (255). Наряду с этим приведены и другие величины, нужные для вычисления.

При этом величина P — внутреннее давление, вычислена по известной формуле [100]

$$P = T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v = -T \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t}, \qquad (259)$$

вытекающей из уравнения в. д. Ваальса в предположении независимости ее „постоянных“ от температуры.

Значения $\frac{v-b}{v}$ вычислены с помощью значений P и соответствующие им значения f вычислены с помощью линейной интерполяции по таблице (13).

Значения коэфициента внутреннего трения, представленные в таблице, вычислены по формуле

$$\eta = \varrho\, T^{\frac{1}{2}} \left(\frac{23{,}2}{T^{2{,}31}} + 2{,}01 \cdot 10^{-5}\right), \qquad (260)$$

где ϱ — плотность.

Формула эта вычислена нами и хорошо передает экспериментальные данные[101] в пределах от — 20° до 35° C.

Таблица 15.

$t^0 C$	$\eta \cdot 10^2$	$P \cdot 10^4$ атм.	$\left(\frac{v-b}{v}\right)^0/_0$	f	$d \cdot 10^8$ см.
22,8	1,53	1,41	11,6	1.027	4,03
52,8	1,37	1,51	11,9	1.028	3,54
84,8	1,25	1,61	12,2	1.030	3,16
110,0	1,18	1,68	12,4	1.030	2 96
150,3	1,09	1,73	13,3	1.035	2,78
191,8	1,02	1,81	13,8	1.037	2,60

Если исходить из плотности твердой ртути при — 38, 85°, то в предположении наиболее плотного (тетраэдрического) расположения ее молекул (шаров), получим:

$$d = 10^{-8} \sqrt[3]{2{,}345 \cdot \frac{M}{\varrho}} = 10^{-8} \sqrt[3]{2{,}345 \cdot \frac{200{,}6}{14{,}193}} = 3{,}21 \cdot 10^{-8} \text{ см.} \quad (261).$$

(Формула эта легко выводима. При выводе ее Авогадрово число принято равным $6{,}03.10^{23}$.)

Как мы видим, значения d, приведенные в таблице, при температурах до 52,8° C, превышают эту величину.

Этот факт находится в противоречии с теорией, так как величина d формулы Г. Егера представляет собой Энскоговский диаметр, являющийся наименьшим из эффективных диаметров молекулы, тогда как величина, получаемая по формуле (261), должна быть близка к Шамесовскому диаметру и,

следовательно, представляет собой высший предел рассматриваемой величины.

Об'яснение этому, как мы думаем, следует, прежде всего, искать в том, что при умеренных температурах, под влиянием в. д. Ваальсовских сил, значительная часть молекул жидкой ртути образует комплексы, сгустки, число и частичный вес которых естественно увеличивается с понижением температуры. Вследствие этого средний молекулярный вес кинетически самостоятельных частиц жидкой ртути, при этих условиях, больше 200,6 — числа, принятого нами в основу расчета, а, следовательно, скорость их $\bar{c}$ соответственно меньше.

Разумеется также, что средний эффективный диаметр этих частиц при этом больше, чем диаметр отдельного атома.

Помимо того следует иметь ввиду также и неточность формулы (259), на основании которой вычислено внутреннее давление P. Странным является тот факт, что величина P оказывается возрастающей с температурой, тогда как следовало бы ожидать обратного.

В итоге мы вправе сказать, что теория жидкого состояния все еще не настолько разработана, чтобы дать вполне определенный, количественный ответ на затронутые выше вопросы.

Kokkuvõte.

1) Käesolevas töös on antud lühike kokkuvõte ühtlaste ainete sisehõõrumise probleemi ajaloolisest arengust ja tänapäevasest seisust.

2) On tuletatud ja katseliste andmetega võrreldud sisehõõrumise valem (115) mõõdukalt hõrendatud gaasidele.

3) Arvestades molekulide roteerimisega ja nende liikumise kõverjoonelisusega on tuletatud „reaalsete gaaside sisehõõrumise ja kinemaatilise viskoosuse valemid (227). Sfääriliste „siledate“ molekulide puhul tuletub valem (229) ja „krobeliste“ molekulide puhul — valem (230).

4) Ülaltähendatud valemite alusel on parandatud Jägeri valem vedelikkude sisehõõrumise kohta.

Zusammenfassung.

1) Es wird eine kurze Übersicht über die historische Entwicklung und den zeitweiligen Stand der Frage über die innere Reibung der einheitlichen Stoffe gegeben.

2) Es wird die Formel für den Koeffizienten der inn. Reibung der mässig verdünnten Gase (115) abgeleitet und mit Experimentaldaten verglichen.

3) Die Rotation der Moleküle in Betracht ziehend, ebenfalls die Ungeradlinigkeit ihrer Bewegung, sind die Formeln des Koeffizienten d. i. R. und kinematischen Viscosität der „realen Gase“ (227) abgeleitet. Im Falle der „glatten“ sphärischen Moleküle gelangt man zur Formel (229) und im Falle der „rauhen Moleküle“ zur Formel (230). Die Formeln sind mit Experimentaldaten geprüft.

4) Auf Grund der obenangeführten Formeln ist die Jägersche Formel der i. R. der Flüssigkeiten verbessert worden.

Литература и примечания.

[1] I. Cl. Maxwell. On the Viscosity of Internal Friction of air and other gases. Phil. Trans. 156. 1860. 249—268.

[2] I. Cl. Maxwell. Phil. Trans. 156. 1866. 249. O. E. Meyer. Pogg. Ann. 125. 1865. 202; 127. 1866. 257; 148. 1873. 1 u. 233; Boyl — смотри Poynting and Thomson, Properties of Matter. 218.

[3] I. Cl. Maxwell. Phil. Trans. 156. 1866; on the dynamical Theory of gases; Phyl. Trans. 157. 1867. 49; Phyl. Mag. (4) 35. 1868. 129, 185; Scientific Papers II, 26—78.

[4] L. Boltzmann. Wiener Ber. (2) 66, 324. f. f. 1872; Wiss. Abh. I. 361—369; Vorlesungen über Gastheorie I, 98—115, 184—190, Leipzig 1896.

[5] I. Cl. Maxwell. On Stresses in rarefied gases etc. Sc. Papers II, 681—712; Boltzmann. Zur Theorie der Gasreibung Wien. Ber. 81. 1880. 117—158; 84. 1881. 40—135; 84. 1881. 1230—1263; Wiss. Abhandl. II. 388—556. Zur Theorie der Gasdiffusion, Wien. Ber. 86. 1882. 63—99; 88. 1883. 835—860; Wiss. Abhandl. III. 3—63.

[6] S. Chapman. Phil. Trans. (A) 211. 1912. 433; Phil. Trans. (A). 216. 1916. 279; D. Enskog. Phys. ZS. 12. 1911. 56—60; Phys. ZS. 12. 1911. 533—539; „Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen“ Inaugural-Dissertation. 1917; Ark. f. Mat. Astr. och Fysik 16. 1921. № 16.

[7] Proc. Roy. Soc. (A). 1922. 101.

[8] Модель эта предложена Брайэном: Bryan. Brit. Assoc. Reparts. 1894. 83.

[9] Π — Гаусовское обозначение Γ функции, так что $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$. $A_2^{(\nu)}$ постоянная, зависящая от ν. В случае Максвеллевских молекул с $\nu = 5$, получается $A_2^{(5)} = \frac{3}{2\pi} \cdot A_2 = 0.6543$, где A_2 постоянная, вычисленная Максвеллем и равная 1,3682.

[10] Proc. Roy. Soc. 66. 68; I. H. Ieans. Theorie Dynamique des gaz. Paris 1925. § 379.

[11] Phil. Mag. (5) 36. 1893. 507.

[12] S. Chapman & T. Cowling. The Mathematical Theory of non-uniform gases. Cambridge 1939. 224—225.

[13] M. Reinganum. Phys. ZS. 2. 1901. 421; Ann. d. Phys. (4) 10. 1903. 334.

[14] Цитировано выше (см. сноску 12). 181.

[15] I. E. (Lennard-)Iones. Proc. Roy. Soc. (A). 106. 1924. 441. Смотри также С. Чепмен (сноска 12). 184—187.

[16] L. Schames. Phys. ZS. 29. 1928. 91—94.

[17] Автор принимает приближенно $0.499 \approx \frac{1}{2}$.

[18] N. Gerasimov. Phys. ZS. 34. 1933. 387.

[19] В оригинале численный коэфициент a_0 принят равным Больтцмановскому числу 0.35028, однако правильнее было бы оставить вопрос о численном значении этой постоянной открытым, ибо, как это вытекает из вышеупомянутых исследований Максвелль-Больтцмана и др., величина эта в конечном счете зависит от формы силового закона.

[20] Uehling. Phys. Rev. 46. 1934. 917.

[21] Massay and Mohr, Proc. Roy. Soc. (A). 144. 1934. 188.

[22] Подробнее смотри у С. Чепмена, (сноска 12) в главе 17.

[23] M. Trautz, Ann. d. Phys. 11. 1931. 190.

[24] Цитирую по Р. Планк. Über die Zähigkeit von Gasen und Dämpfen. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Zeitschrift Technische Mechanik u. Thermodynamik. 4. № 1. 1933. 1—7.

[25] G. Jäger, Über den Einfluss des Molekularvolumens auf die innere Reibung der Gase. Wien. Ber. 108. Abt. 2. 1899; 109; Abt. II. 1900. Нижеприведенная цитата взята из последней работы. 79.

[26] Цитировано выше (сноска 24).

[27] P. Phillips, Proc. Roy. Soc. London. 87. 1912. 48.

[28] H. Speyerer, V. D. I. — Forschungsheft 273, Berlin 1925.

[29] D. Enskog, Kinetic theory of thermal conduction, viscosity, and self-diffusions in certain dense gases and liquids.

Svansk. Akad. Handl. 63. № 4. 1922. Цитирую эту работу по книге С. Чепмена (сноска 12). 273—294.

[30] Warburg & Babo. Wied. Ann. 17. 1882. 390.

Michels and Gibson. Proc. Roy. Soc. (A). 134. 1931. 288.

[31] N. Gerasimov, Über die freie Weglänge des Moleküls und den Koeffizienten der inneren Reibung in fluiden Stoffen. Phys. ZS. 29. 1928. 575—584.

[32] G. Jäger, Wien. Ber. II a. 105. 1896. 15—21; ZS. f. phys. Chem. 93 1919. 276.

[33] N. Gerasimov, Die innere Reibung und der Zustand des fluiden Stoffes. Phys. ZS. 32. 1931. 444—450.

[34] Neusser, Bemerkungen zur Van der Waalsschen Gleichung. Phys. ZS. 31. 1930. 1041—1051.

[35] G. Jäger. Wien. Ber. 3. 1902. 697. Drud. Ann. 11. 1903. 1077. Kinetische Gastheorie. 1919.

[36] R. O. Herzog, Zur kinetischen Theorie der Flüssigkeiten. ZS. f. phys. Chem. Abt. B. 10. 1930. 337—346.

[37] Batschinski. ZS. f. phys. Chem. 84. 1913. 643.

[38] R. O. Herzog u. H. C. Kudar, Zur kinetischen Theorie der Flüssigkeit. ZS. f. Phys. 80. 1933. 217—231.

[39] ZS. f. Phys. 83. 1933. 28—42.

[40] Смотри теорию Броуновского движения Эйнштейна. Ann. d. Phys. (4). 17. 1905. 549; 19. 1906. 371; ZS. f. Elektrochem. 13. 1907. 41; 14. 1908. 235.

Эйнштейновский вывод формулы коэф. диффузии приведен также у К. Еллинек, Lehrbuch der phys. Chemie 5. 1937. 56.

Формула Эйнштейна применима не только к микроскопическим, но и к частицам молекулярных размеров (смотри E. Cohen u. H. R. Bruins, ZS. f. phys. Chem. 103. 1923. 404), что подтверждает допустимость применения гидродинамического метода в молекулярной физике.

[41] Близка по мысли к теории Егера также и теория Е. Л. Ледерера. Kolloid-Beih. 34. 1931. 270—338.

[42] E. N. da C. Andrade. Nature 125. 1930. 309—310; S. E. Sheppard. Nature 125. 1930. 489—490; 125. 1930. 709. Journ. Rheology 1. 1930. 349—71.

M. P. Venkatarama Iyer. Indian Journ. Phys. 5. 1930. 371—383.

[43] Смотри также работы А. Г. Вэрд. Word. Trans. Faraday Soc. 33. 1936. 88—97 u. G. Hugel. Ann. Office nat. Combustibles liquides 11. 1936. 433—444.

[44] Frenkel. ZS. Physik. 35. 1926. 664.

[45] D. B. Macleod. Trans. Faraday Soc. 32. 1936. 872—876.

[46] Между прочим, одним из главных аргументов Андрадэ, который он выдвигает против теории столкновений, является, что $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_v$ для всех жидкостей отрицательная величина, тогда как теория столкновений будто бы приводит к положительному значению этой величины. Однако возражение это легко опровержимо, если принять во внимание изменьчивость величины b ур-я состояния с температурой, а также явления ассоциации (подробнее смотри § 72 настоящей работы).

[47] Смотри С. Чепмен (сноска 12). 228—229.

[48] L. Schames, Über den direkten Zusammenhang von Zustandsgleichung und innerer Reibung. Phys. ZS. 32. 1931. 16—20.

[49] За меру телесного угла принимаем величину соответствующей ему части шаровой поверхности радиуса, равного единице.

[50] d — диаметр молекулы,

a — вероятнейшая скорость, определяемая, как известно, формулой

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}\overline{c^2}}.$$

[51] См. сноску 80.

[52] См. сноску 18.

[53] В нашем случае, при рассмотрении процесса столкновений, разность потенциальных энергий между I и II зоной (то-есть $\Phi_I - \Phi_{II} = \triangle \Phi$) имеет отрицательное значение, поэтому $-\triangle\Phi = d\Phi$ — положительно.

[54] См. сноску 31.

[55] Следует заметить, что уже ван дер Ваальс пришел к подобной же формуле средней длины свободного пути. В книге Г. Егера „Die Kine-

tische Theorie der Gase und Flüssigkeiten" (Handbuch d. Phys. H. Geiger u. K. Scheel. 9.) формула эта дана в следующем виде:

$$L = \frac{1 - b_1}{n\pi d^2} \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{c}_0}.$$

Здесь b, есть учетверенный об'ем молекул в 1 см^3 газа. Если обозначим об'ем граммолекулы газа чрез v и Авогадрово число N, то получим $b_1 = \frac{b}{v}$, а также $n = \frac{N}{v}$, с чем формула в. д. Ваальса перепишется так:

$$L = \frac{v - b}{N\pi d^2} \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{c}_0} = \frac{\sqrt{2}}{3} d \cdot \frac{v - b}{b}.$$

Полученная формула, как мы видим, вполне подобна нашей, однако величина b в ней обозначает учетверенный об'ем молекул одной граммолекулы газа, тогда как значение ее в нашей формуле (89) гораздо более широкое. Так, если исходить даже только из в. д. Ваальсовской модели текучего вещества и принять

$$v - b = \frac{}{1 + \frac{b_0}{v} + \frac{5}{8}\left(\frac{b_0}{v}\right)^2 + 0.2869\left(\frac{b_0}{v}\right)^3}$$

[смотри Егер. Wien. Ber. 105. Abt. II. a. 1896. 15—21, а также K. Iellinek, Lehrb. d. Physik. Chemie. 1928. I. 722], где b_0 учетверенный об'ем молекул, то получается

$$L = \frac{1}{\pi\sqrt{2} \cdot nd^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{8}\frac{b_0}{v} + 0.2869\left(\frac{b_0}{v}\right)^2}.$$

Формула эта представляет собой развитие формулы Г. Егера (Wien. Ber. 105. Abt. II a. 1896. 97), чем подтверждается правильность ее. Напротив, формулу Е. А. Гольм [Ann. d. Phys. 4. 51. 1916. 766 — цитирую по вышеупомянутой книге К. Еллинек. I. 761.]

$$L = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\, nd^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b_0}{v} + \frac{5}{8}\left(\frac{b_0}{v}\right)^2 + 0.2869\left(\frac{b_0}{v}\right)^3}$$

следует признать неправильной.

[56] A. B. Van Gleave u. O. Maas. Canad. I. Res. 13. Sekt. B. 1935. 140—148.

[57] Этот корень будет решением в интересующей нас области, т. е. где $\varrho < \varrho_0$. Отметим попутно, что формула, выражающая величину Φ, имеет некоторое сходство с известной формулой Morse.

[58] Число это принято согласно A. Eucken, Lehrbuch der Chem. Physik. I. 1938. 77. В этой книге дан исчерпывающий обзор современного положения вопроса об Авогадровом числе.

[59] Согласно С. Чепмену, см § 2.

[60] Com. of the Leiden Lab. 134 b. 1913, цитирую по Л. Шамес. Phys. ZS. 29. 1928. 91—94.

[61] L. Schames, Über den direkten Zusammenhang von Zustandsgleichung und innerer Reibung. Phys. ZS. 32. 1931. 16.

[62] Кривая эта идентична кривой, вычисленной этим же способом Л. Шамесом в вышеупомянутой работе.

[63] Ann. d. Phys. 6. 168.

[64] Данные взяты из книги С. Чепмена (сноска 12). 228.

[65] Данные взяты из того же источника, как в предыдущем случае.

[66] Данные эти взяты из книги Джинса. (Théorie Dynamique des gaz. Paris. 1925. § 435).

[67] Landolt u. Börnstein, Tabellen, 1894. 301.

[68] M. Trautz u. R. Zink. Ann. d. Phys. 7. 1930. 427.

[69] Работа цитирована выше (сноска 25). 452.

[70] Jeans. Phil. Mag. (6). 8. 1904. 700. Смотри также Jeans, Théorie Dynamique des gaz. Paris 1925. § 371.

[71] I. Cl. Maxwell Collected Works I. 378, а также Jeans, Théorie Dynamique etc. § 354.

[72] Jeans, Théorie Dynamuque etc. § 355.

[73] Jeans, Théorie Dynamique etc. § 371.

[74] С целью сделать вывод более понятным, мы излагаем его несколько иначе, чем это делает автор.

[75] Выраженное им в статье „Zur kinetischen Theorie der inneren Reibung der Gase". Wien. Ber. Abt. II. a. 127. 1918. 21.

[76] Цитировано выше (сноска 75). 22.

[77] см. § 20 формулы 63 и 64.

[78] см. § 2 гл. 1.

[79] так как при всех прочих равных условиях различие в числах столкновений будет зависеть только лишь от различия в средних относительных скоростях.

[80] Цитировано выше: G. Jäger, Die kin. Theorie usw. 412.

[81] Согласно его оформлению, изложенному в § 46, а также в разделе 3-м § 49-го.

[82] См. 3-й раздел § 49-го.

[83] См. цитированную выше работу (сноска 33).

[84] R. O. Herzog u. H. Kudar ZS. f. Phys. 80. 1933. 217, а также ZS. f. Phys. 83. 1933. 28. См. также § 14 настоящей работы.

[85] Утверждение это доступно до некоторой степени прямой проверке. Действительно, если в точках, соответствующих минимуму кинематической вязкости,

$$dx = d\frac{v-b}{b} = d\frac{v}{b} = 0,$$

то при этом должно быть

$$\frac{db}{dv} = \frac{b}{v} \approx 0.5\,.$$

Для углекислоты при 40^0 минимум этот наступает около 89 атм. Пользуясь изотермами величины b, вычисленными Нейсером (Phys. ZS. 31. 1930 1041), с помощью ур-я в. д. Ваальса, мы вычисляем для этой точки приближенно $\frac{db}{dp} = -0{,}0012 \frac{\text{литр.}}{\text{атм.}}$ (для граммолекулы).

С другой стороны, по изотермам об'ема, вычисляем в тех же единицах $\frac{dv}{dp} = -0{,}00445$, откуда

$$\frac{db}{dv} = 0{,}27 .$$

Так что равенство $dx = 0$, повидимому, не имеет места.

[86] См. сноску 33.

[87] В отношении зависимости вязкости газов от давления мы имеем сравнительно мало экспериментальных работ. Перечислить известнейшие из них нетрудно:

[1] E. Warburg & L von Babo. Wied. Ann. 17. 1882. 390.

[2] P. Phillips. Proc. Roy. Soc. (A). 87. 1912. 48.

[3] Max Wildhagen. Z. Angew. Math. Mechanik, 3. 1923. 181.

[4] H. Speyerer. V. D. I. — Forschungsheft 273, Berlin 1925.

[5] I. H. Boyd, Phys. Rev. 35. 1930. 1284.

[6] A. Michels & R. O. Gibson, Proc. Roy. Soc. (A). 84. 1932. 288.

Первые из этих работ посвящены изучению вязкости углекислоты, третья — воздуха, четвертая — перегретого водяного пара, пятая — азота, водорода и их смесей, последняя — азота. Наиболее подходящими для нас, в смысле контроля теории, являются работы П. Филлипса и А. Мичельс и Р. О. Джибсена, как наиболее современные и рассматривающие вязкость однородных газов в сравнительно широких интервалах давления и температуры.

[88] Согласно Нейсер, смотри сноску 34.

[89] См. сноску 87,

[90] Kam. Onnes, Darsman, Holst, Crommelin. Comm. Leiden. № 145b. 1914.

[91] См. сноску 87.

[92] Возможно, что если бы пользоваться при вычислении x не изохорами, а изотермами, результаты были бы несколько лучше. Смотри относительно этого работу Э. Нейсер (сноска 34).

[93] Экспериментальные данные для вычислений в этом случае, так же как и в нижеследующих, взяты из Int. Crit. Tables, а также из таблиц Ландольт-Бэрнштейна.

[94] Формула приведена в Intern. Crit. Tables. 3. 235.

[95] Int. Crit. Tables. 5. 138.

[96] См. сноску 95.

[97] Цитировано выше (сноска 34). 1050—1051.

[98] Land. Börnstein. 2. 1336.

[99] Смотри Ланд. Бэрнштейн. I Erg. B. 69.

[100] Данные для вычислений взяты из таблиц Ландольт-Бэрнштейна.

[101] Int. Crit. Tables 5. 7.

Содержание.

		Стр.
	Предисловие	3
Глава 1.	Исторический обзор	7
Глава 2.	Статистика столкновений	21
Глава 3.	Среднее число столкновений и длина свободного пути молекулы	38
Глава 4.	Умеренно разреженные газы	46
Глава 5.	О „видимой“ скорости молекул движущегося флюида и принципе персистенции движения	71
Глава 6.	Реальные газы	87
Глава 7.	Жидкости	131
	Kokkuvõtte	137
	Zusammenfassung	137
	Литература и примечания	138

Teaduste Akadeemia

3-