Tallinna Tehnikaülikool
Insenerigraafika keskus

KUJUTAVA GEOMEETRIA ÜLDKURSUS

ABIMATERJAL LOENGUTE KUULAMISEKS

Koostanud Edgar Kogermann

Tallinn
2001

SISSEJUHATUS

1. Kujutav geomeetria on geomeetria eriharu, milles käsitletakse

- objektidest tasandiliste kujutiste (jooniste) tuletamist;
- ruumigeomeetriliste ülesannete lahendamist kujutiste abil.

Tehnikakõrgkoolis moodustab kujutav geomeetria koos joonestamise kursusega tervikliku ainetsükli ja teenib järgmisi eesmärke:

1) annab teoreetilised alused jooniste valmistamiseks ja lugemiseks;
2) arendab ruumikujutlusvõimet;
3) õpetab ja evitab vajalikke oskusi jooniste korrektseks vormistamiseks.

Kujutava geomeetria kursuse korralik omandamine on seega oluliseks eelduseks tehniliste erialade õppimisel. Seda eriti ehitus- ja mehaanikaerialade õppimisel, kus joonistel on informatsiooni vahendajana eriline koht.

2. Kujutava geomeertia õppimisel on vaja teada mitmesuguseid elementaargeomeetriast tuntud tõsiasju. Olulisemaid neist meenutatakse allpool.

a) Kaks sirgjoont (samuti kaks tasandit), millest kumbki on paralleelne kolmandaga, on paralleelsed ka omavahel.
b) Kui paralleelsed sirged lõikavad nurga haarasid, siis lõigud, milleks paralleelid jaotavad nurga ühe haara, on võrdelised lõikudega, milleks nad jaotavad nurga teise haara.
c) Sirgjoon ja tasand on paralleelsed, kui tasandil leidub antud sirgega paralleelne sirge.
d) Kaks tasandit on paralleelsed, kui ühe tasandi kahel lõikuval sirgel on kummalgi oma paralleel teisel tasandil.
e) Sirgjoon ja tasand on teineteisega risti, kui tasandil leidub kaks lõikuvat sirget, mis on risti antud sirgega.
f) Iga punkti läbib üksainus antud tasapinna ristsirge, samuti üksainus sirgjoone risttasand.
g) Paralleelsete tasandite lõikamisel tasandiga tekivad paralleelsed lõikesirged.
h) Kahe kiivsirge vahelist nurka mõõdetakse tavalise nurgaga, mille haarad on nende kiivsirgetega paralleelsed.
i) Kahetahulist nurka mõõdetakse nurgaga, mille haarad asetsevad teine teisel tahul ning on risti tahkude lõikejoonega (kahetahulise nurga servaga).

3. Geomeetriliste elementide ja nende vastastikuste asendite kirjeldamiseks kasutatakse järgmisi üldisi tähiseid ja märke:

A,B,C,...;1,2,3,...		– ruumi punktid;
a,b,c, ...		– jooned;
$\alpha,\beta,\gamma,...$		– pinnad ja nurgad;
$a \parallel b$	$\parallel$	– paralleelsus (a on paralleelne b-ga);
$b \times c$	$\times$	– lõikumine (b lõikub c-ga);
$c \perp d$	$\perp$	– ristseis (c on risti d-ga);
$A \subset a$	$\subset$	– kuuluvus (punkt A kuulub joonele a);
$A' \equiv B'$	$\equiv$	– samasus, ühtimine (punktid A´ ja B´ ühtivad).

Erilist tähendust omavate geomeetriliste elementide tähised esitatakse tekstis vastavate mõistete selgitamise käigus.

1. PROJEKTEERIMINE

1.1 Projekteerimise olemus. Projektsiooni mõiste

Projekteerimine on geomeetriline toiming, milles osalevad

- kujutatav ese ehk objekt;
- projekteerivad kiired ehk kujutamiskiired;
- projektsioonitasand ehk ekraan.

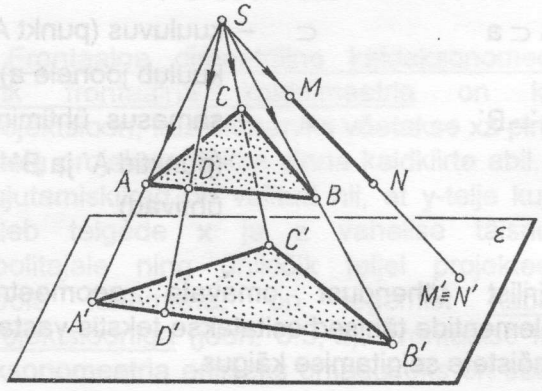
Toimingu praktilist valdamist raskendab tihti asjaolu, et kaks esimest elementi esinevad harilikult kujutletavatena.

Projekteerimise tulemuseks on projektsioon ehk kujutis, mida tuleb vaadelda kui objekti kõiki punkte läbivate kujutamiskiirte ja ekraani lõikepunktide kogumit. Tegelikult tuletatakse kujutised jooniste valmistamisel ainult teadlikult valitud punktide järgi, kasutades oskuslikult geomeetriliste elementide projektsioonilisi omadusi.

Projektsioone (kujutisi) liigitatakse kujutamiskiirte vastastikuse asendi põhjal tsentraal- ja paralleelprojektsiooniks.

1.2 Tsentraalprojektsioon

Tsentraalprojektsioon on saanud oma nimetuse sellest, et projekteerimisel kasutatakse tsentraalseid kujutamiskiiri. Tsentraalprojekteerimist selgitab piltlikult joonis 1.1.



Joon.1.1

Projekteerimis- ehk kujutamistsentrist S väljuvad kujutamiskiired läbivad antud kolmnurga tippe A, B ja C ning tekitavad ekraanil ε vastavate punktide kujutised. Saadud kolmnurk A′,B′,C′ on kolmnurga ABC tsentraalprojektsioon.

Eeltoodu põhjal võime sõnastada järgmised projektsioonide omadused.

1 Punkti kujutiseks ekraanil on seda punkti läbiva kujutamiskiire ja ekraani lõikepunkt ($A' \equiv SA \times \varepsilon$, joon. 1.1).

2 Sirgjoone projektsioon on üldjuhul sirge; erijuhul punkt, kui sirge ühtib kujutamiskiirega (MN, joon. 1.1).

3 Kui punkt on mingil joonel, siis tema kujutis on selle joone kujutisel (kui $D \subset AB$, siis $D' \subset A'B'$, joon. 1.1).

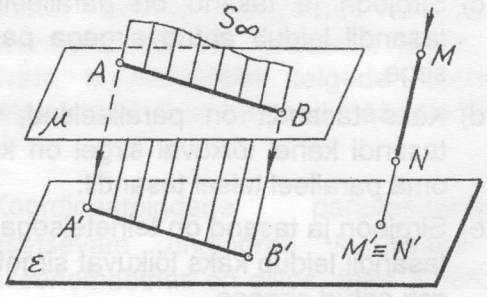
4 Objekti üksainus kujutis ilma lisaandmeteta ei määra seda objekti ruumis.

5 Kui tasandilist kujundit projekteerivad kiired asetsevad kõik kujundi tasandis, siis see kujund projekteerub sirglõiguks.

1.3 Paralleelprojektsioon

Paralleelprojekteerimisel on kujutamiskiired omavahel paralleelsed ja saadavat kujutist nimetatakse seetõttu paralleelprojektsiooniks. Et paralleelprojektsiooni võib vaadelda kui tsentraalprojektsiooni erijuhtu, kus kujutamistsenter S on viidud lõpmata kaugele, siis kehtivad siin eespool toodud laused 1...5. Neile lisaks on paralleelprojektsioonile omased järgmised seaduspärasused.

6 Kui sirglõik on paralleelne ekraaniga, siis tema parralleelprojektsioon sellel ekraanil on pikkuselt võrdne ja paralleelne lõigu enesega (kui $AB \parallel \varepsilon$, siis $AB \subset \mu$, kus $\mu \parallel \varepsilon$; parallelogrammi omaduste põhjal $A'B' = AB$ ja $A'B' \parallel AB$; joon. 1.2).

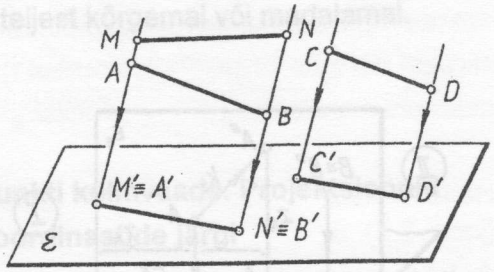


Joon.1.2

7 Kui tasandiline kujund on paralleelne ekraaniga, siis tema paralleelprojektsioon

on kongruentne kujundi enesega (järeldub lausest 6).

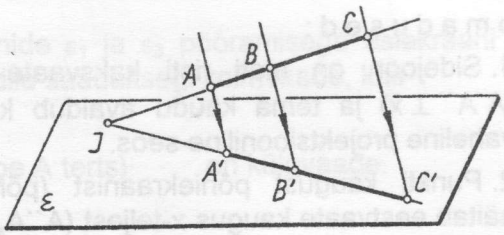
8 Paralleelsete sirgete paralleelprojektsioonid on üldjuhul jälle paralleelsed sirged; erijuhtudel punktikujulised või ühine joonkujutis (Kui AB ∥ CD, siis A´B´ ∥ C´D´. Vastupidine ei kehti, sest MN ∥ CD, ehkki M´N´ ∥ C´D´; joon.1.3).



Joon.1.3

9 Sirgjoone lõigud on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega

($\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ ja $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$, joon. 1.4).



Joon.1.4

Sirglõigu paralleelprojektsiooni pikkuse ja lõigu enda pikkuse suhet nimetatakse sirglõigu <u>moondeteguriks</u> (m)

$$\frac{A'B'}{AB}=m;\ A'B'=m\cdot AB.$$

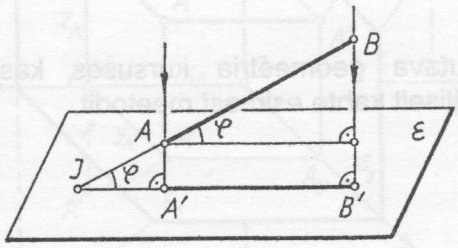
Paralleelprojekteerimisel võib lõigu moondetegur olla vahemikus $0 \le m < \infty$.

Paralleelprojektsioon jaguneb <u>kald- ja ristprojektsiooniks</u> vastavalt sellele, kas kiired langevad ekraanile kaldu või risti.

1.4 Ristprojektsioon

Et ristprojektsioon on paralleelprojektsiooni alaliik, siis kehtivad siin kõik eespool toodud laused 1...9. Lisaks sellele on ristprojektsioonil veel järgmised eriomadused.

10 Sirglõigu ristprojektsiooni pikkus võrdub lõigu enda pikkuse ja kaldenurga koosinuse korrutisega ($A'B' = AB\cdot\cos\varphi$; joon. 1.5).



Joon.1.5

<u>Sirgjoone kaldenurgaks</u> ekraani suhtes nimetatakse teravnurka ($0° \le \varphi \le 90°$) selle sirge ja tema ristprojektsiooni vahel.

Järelikult on ristprojekteerimisel lõigu moondetegur avaldatav nurgafunktsiooni kaudu

$m = \frac{A'B'}{AB} = \cos\varphi$. Et $\cos\varphi \le 1$, siis jääb ristprojekteerimisel lõigu moondetegur vahemikku $0 \le m \le 1$.

11 Täisnurk projekteerub ristprojekteerimisel täisnurgaks, kui tema üks haar asetseb ekraanil või on sellega paralleelne, teine haar aga pole ekraaniga risti.

Teravnurga ristprojektsioon võib nurga asendist tingitult olla piires 0° kuni 180°.

1.5 Projektsioonidele esitatavad nõuded

Valmistamise ja kasutamise seisukohalt on kujutisel kolm olulist omadust: <u>lihtsus</u>, <u>mõõdetavus</u> ja <u>piltlikkus</u>. Ühe või teise omaduse eelistatus sõltub kujutise kasutamise valdkonnast ja eesmärgist. Kujutavas geomeetrias

ja tehnikas peetakse oluliseks kujutiste lihtsust ja mõõdetavust, sest joonised siin peavad olema objekti määravad, s.o. üheselt määrama objekti kõik geomeetrilised omadused. Teatavasti üksainus kujutis lisaandmeteta ei suuda täita seda nõuet (lause 4). Seetõttu kasutatakse praktikas lisaandmete valikust olenevalt järgmisi objekti määravate jooniste saamise meetodeid.

1) Monge´i (loe: monž) meetod;
2) aksonomeetria meetod;
3) kvooditud ristprojektsiooni meetod.

Kujutava geomeetria kursuses kasutatakse põhiliselt kahte esimest meetodit.

2. MONGE´I MEETOD

2.1 Monge´i meetodi olemus. Punkti kaksvaade

Objektist tuletatakse mitu ristprojektsiooni ekraanidel, mis on üksteisega risti. Seejärel pööratakse ekraanid koos kujutistega ühele tasandile – joonisepinnale. Niiviisi saadud joonist, mis koosneb mitmest omavahel seotud ristprojektsioonist, nimetatakse mituvaateks.

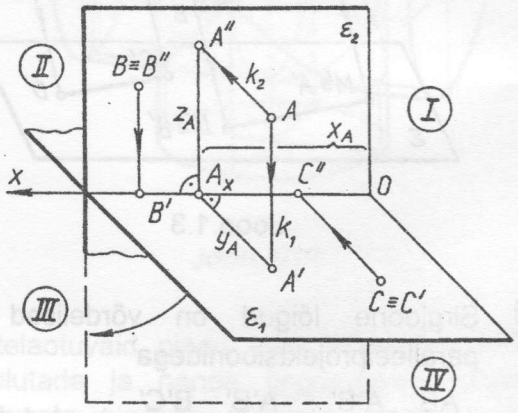
Meetodi võttis kasutusele prantsuse õpetlane ja insener Gaspard Monge (1746 - 1818).

Kaksvaate saamiseks võetakse kaks teineteisega risti olevat ekraani (joon. 2.1), kus

$\varepsilon_1 \equiv$ xy-tasand – põhiekraan;
$\varepsilon_2 \equiv$ xz-tasand – esiekraan;
$x \equiv \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ – kaksvaate telg;
k_1 ja k_2 – põhi- ja esikiir.

Näiteks pärast punkti A projekteerimist ekraanidele ja punkti kujutise A´ pööramist koos põhiekraaniga ümber x-telje ühtimiseni esiekraaniga saadaksegi joonis (kaksvaade), kus

A´ (loe: A prim) – punkti A pealtvaade;
A´´ (loe: A sekund) – punkti A eestvaade;
A´A´´ – sidejoon;
$A_x A'' = A'A$ – põhikvoot (kaugus ε_1-st);
$A_x A' = A'' A$ – esikvoot (kaugus ε_2-st).



Joon. 2.1

Kaksvaate tähtsamad omadused:

1. Sidejoon on alati risti kaksvaate teljega ($A'A'' \perp x$) ja tema kaudu avaldub kujutiste-vaheline projektsiooniline seos.

2. Punkti kaugust põhiekraanist (põhikvooti) näitab eestvaate kaugus x-teljest ($A''A_x = AA'$); punkti kaugust esiekraanist (esikvooti) aga näitab pealtvaate kaugus x-teljest ($A'A_x = A A''$).

3. Kui punkt on esiekraanil (nagu B), siis tema eestvaade ühtib punkti enesega, pealtvaade aga on x-teljel. Paikneb aga punkt põhiekraanil (nagu C), siis ühtib tema pealtvaade punkti enesega ja eestvaade on x-teljel.

12 Punkti kaksvaade määrab punkti asukoha ekraanide suhtes üheselt, joonisepinna suhtes aga kaheselt.

Nagu näha jooniselt 2.1, jaotavad ristuvad ekraanid kogu ruumi neljaks ruumiveerandiks (I, II, III, IV). Harilikult asetatakse kujutatav objekt esimesse ruumiveerandisse. Sel juhul saadakse kaksvaatel harjumuspärane kujutiste paiknemine – eestvaade teljest kõrgemal,

pealtvaade madalamal. Punkti asukoha määramiseks ruumis kaksvaate järgi peab teadma, et

1) punkt on ruumis esiekraani ees või taga vastavalt sellele, kas pealtvaade on teljest madalamal või kõrgemal;
2) punkt on ruumis põhiekraanist kõrgemal või madalamal vastavalt sellele, kas eestvaade on teljest kõrgemal või madalamal.

2.2 Punkti kolmvaade. Projektsioonid koordinaatide järgi

Kaksvaade määrab küll punkti asukoha ekraanide suhtes, kuid ei suuda ära määrata keerukamaid objekte, sest suure arvu punktide tähistamine joonisel pole võimalik. Objekti määrava joonise saamiseks võetakse siis kasutusele x-teljega risti asetsev kolmas ekraan (joon. 2.2)

$\varepsilon_3 \equiv$ yz-tasand – külgekraan.

Ekraanide ε_1 ja ε_3 pööramisega esiekraani ε_2 tasandile saadaksegi kolmvaade, kus

A´´´ (loe A terts) on külgvaade.

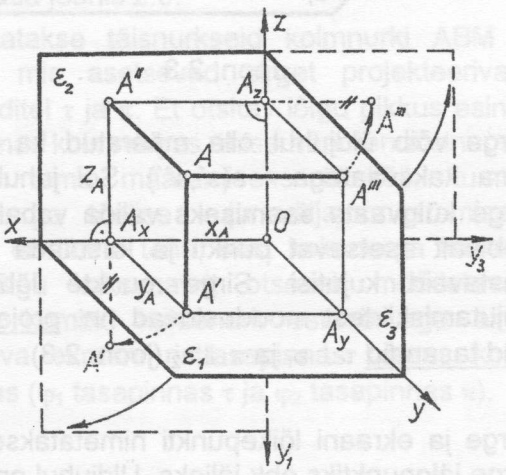
Sisuliselt koosneb kolmvaade kahest kaksvaatest, moodustatuna ekraanipaaridest $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ ja $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_3$. Et esiekraan esineb kummaski kaksvaates, siis nimetatakse siin esiekraani peaekraaniks, eestvaadet aga peakujutiseks. Eeltoodust tingitult esineb punkti esikvoot ehk peakvoot kolmvaates kaks korda – pealtvaate kaugusena x-teljest ja külgvaate kaugusena z-teljest (joon. 2.2):

$A_x A' = A_z A''' = A''A$.

Seda seost nimetatakse kolmvaate peaomaduseks ja ta on aluseks objekti kolmanda kujutise tuletamisel antud kaksvaate põhjal.

Kui punkt on antud oma koordinaatidega ja soovitakse saada tema kaks- või kolmvaadet, siis tuletatakse kujutised koordinaatlõikude abil (joon. 2.1 ja joon. 2.2).

x-koordinaatlõik (külgkvoot) $x_A = OA_X = A'''A$;
y-koordinaatlõik (esikvoot) $y_A = OA_y = A''A$;
z-koordinaatlõik (põhikvoot) $z_A = OA_z = A'A$.



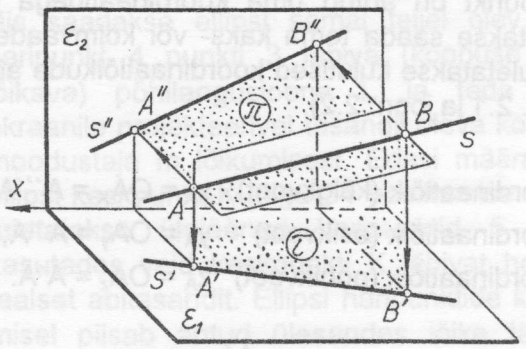
Joon. 2.2

Et koordinaatlõigud on suunatud suurused, s.o. positiivsed ja negatiivsed, tuleb kujutiste märkimisel igale ekraanile hoolikalt jälgida telgede suundi. Ei tohi unustada, et telg y_1 kuulub põhiekraani ja y_3 külgekraani juurde. Seega märgitakse y-koordinaatlõik pealtvaate tuletamisel y_1 ja külgvaate tuletamisel y_3 järgi.

Praktiliselt seisneb näiteks punkti A(x; y; z) kolmvaate tuletamine järgmiselt koostatud murdjoonte joonestamises (joon. 2.2):
pealtvaate A´(x,y) jaoks lõikudest OA_x ja A_xA';
eestvaate A´´(x,z) jaoks lõikudest OA_x ja A_xA'';
külgvaate A´´´(y,z) jaoks lõikudest OA_z ja A_zA'''.

2.3 Sirgjoone kaksvaade. Sirge jälgpunktid

Sirgjoon on määratud oma kahe punktiga, iga punkt aga oma kaksvaatega; järelikult sirgjoon on määratud oma kahe punkti kaksvaatega (joon. 2.3). Lühidalt s(A;B), kus A(A´,A´´) ja B(B´B´´).



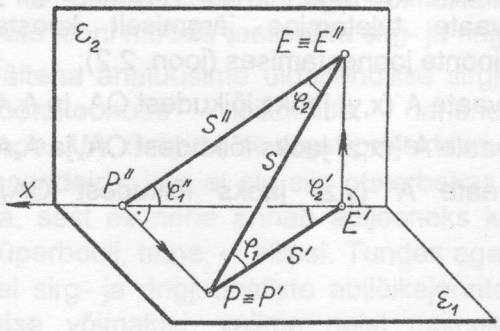
Joon. 2.3

Sirge võib üldjuhul olla määratud ka lihtsalt oma kaksvaatega – s(s′,s″). Sel juhul tuleb sirge külgvaate saamiseks valida vabalt kaks sobivalt asetsevat punkti ja kasutada nende vastavaid kujutisi. Sirge punkte läbivatest kujutamiskiirtest moodustuvad nn. projekteerivad tasandid $\tau \perp \varepsilon_1$ ja $\pi \perp \varepsilon_2$ (joon. 2.3).

Sirge ja ekraani lõikepunkti nimetatakse selle sirge jälgpunktiks ehk jäljeks. Üldjuhul on sirgel kolm jälgpunkti (joon. 2.4):

põhijälg (ka põhijälgpunkt)	$P \equiv s \times \varepsilon_1$;
esijälg (esijälgpunkt)	$E \equiv s \times \varepsilon_2$;
külgjälg (külgjälgpunkt)	$K \equiv s \times \varepsilon_3$.

Sirge põhi- ja esijälje tuletamisel peab juhinduma asjaolust, et $P'' \equiv s'' \times x$, $P' \subset s'$ ja $E' \equiv s' \times x$, $E'' \subset s''$.



Joon 2.4

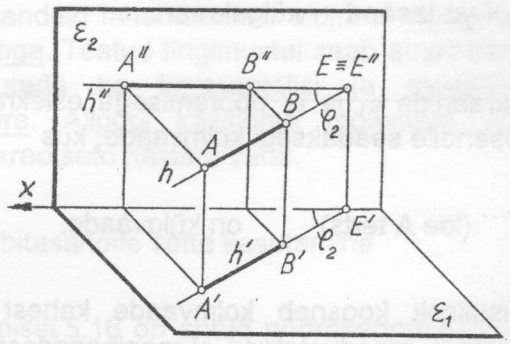
2.4 Eriasendilised sirged

Kui sirge pole ühegi ekraaniga paralleelne ega asetse ühelgi ekraanil, siis nimetatakse seda sirget üldasendiliseks. Vastasel korral on sirge eriasendiline. Üldasendilise sirge kõik kolm projektsiooni on telgede suhtes kaldu; eriasendilisel sirgel on kolmest kujutisest kaks mõne teljega paralleelsed või sellega ühtivad.

Ekraaniga paralleelset sirget nimetatakse nivoosirgeks selle ekraani suhtes. Seega esineb kolmesuguseid nivoosirgeid:

põhiekraani paralleelsirge	– horisontaal h;
esiekraani paralleelsirge	– frontaal f;
külgekraani paralleelsirge	– profiilsirge r.

1. Horisontaalile ($h \parallel \varepsilon_1$) on iseloomulik (joon. 2.5), et
   - kujutis esiekraanil on üldjuhul x-teljega paralleelne sirge ($h'' \parallel x$); erijuhul punkt, kui $h \perp \varepsilon_2$ ($h'' \equiv E'' \equiv E$);
   - lõigud horisontaalil projekteeruvad põhiekraanile tõelises pikkuses ($A'B' = AB$);
   - esikaldenurk φ_2 projekteerub põhiekraanile tõelises suuruses, sest $\varphi(h,h'') = \varphi(h',x)$.

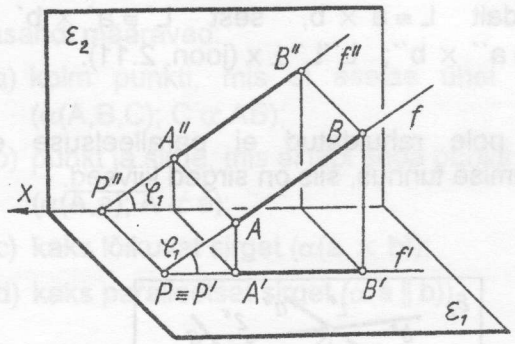


Joon. 2.5

2. Frontaalile ($f \parallel \varepsilon_2$) on iseloomulik (joon. 2.6), et
   - kujutis põhiekraanil on üldjuhul x-teljega paralleelne sirge ($f' \parallel x$); erijuhul punkt, kui $f \perp \varepsilon_1$ ($f' \equiv P' \equiv P$);
   - lõigud frontaalil projekteeruvad esiekraanile tõelises pikkuses ($A''B'' = AB$);
   - põhikaldenurk φ_1 projekteerub esiekraanile tõelises suuruses, sest $\varphi(f,f') = \varphi(f'',x)$.

Üheaegselt mõlema ekraaniga paralleelne sirge on nii horisontaal kui ka frontaal ($a \parallel x$; $a \equiv h \equiv f$). Taoline sirge on risti ekraaniga ε_3 ja

seda nimetatakse projekteerivaks sirgeks külgekraani suhtes.

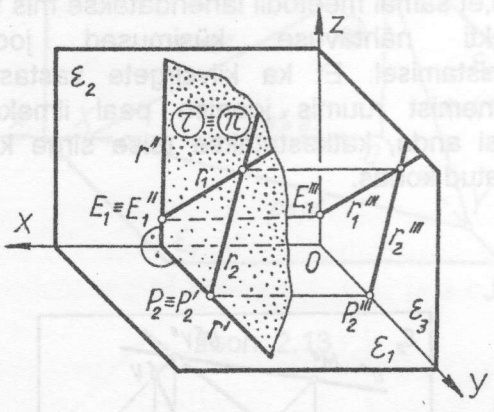


Joon. 2.6

3. Profiilsirge ($r \parallel \varepsilon_3$) on kaksvaate jaoks eriline, sest tema pealt- ja eestvaade osutuvad üldjuhul x-teljega risti olevateks sirgeteks ($r' \perp x$, $r'' \perp x$). Profiilsirgel on seega mõlema ekraani suhtes ühine projekteerivate kiirte tasand ($\tau \equiv \pi$; joon. 2.7). Siit järeldub, et profiilsirge ei ole oma pealt- ja eestvaate kaudu määratud. Profiilsirge üheseks määramiseks on kaks võimalust:

1) fikseerida tema kahe punkti kaksvaade, või

2) täpsustada asendit ruumis kujutisega külgekraanil.



Joon. 2.7

Järeldused:

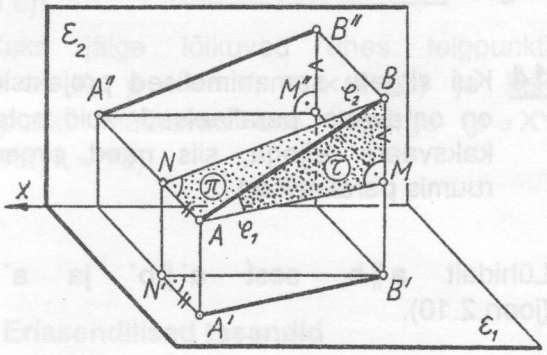
1. Sirgjoone kaksvaade ei määra sirget alati üheselt (näiteks f′ ja f‴; h″ ja h‴; r′ ja r″).

2. Punktkujutis määrab sirge üheselt.

2.5 Sirglõigu pikkus ja kaldenurgad

Eriasendilise sirglõigu pikkus ja kaldenurgad ekraanide suhtes esinevad kolmvaates oma tõelises suuruses. Üldasendilise sirglõigu pikkus ja kaldenurgad projekteeruvad ekraanidele moonutatult (joon. 2.4 ja joon. 2.8). Nende tegelik suurus määratakse täisnurkse kolmnurga võttega. Kõnesoleva võtte olemust aitab selgitada joonis 2.8.

Kasutatakse täisnurkseid kolmnurki ABM ja ABN, mis asetsevad sirget projekteerivatel tasanditel τ ja π. Et otsitav lõigu pikkus esineb mõlemas kolmnurgas ühise hüpotenuusina, siis piisab tema määramiseks ükskõik kumma kolmnurga tõelise kuju väljajoonestamisest. Seda on lihtne teha, sest kolmnurga kaatetid on lõigu kaksvaatelt otseselt mõõdetavad. Lõigu kumbki kaldenurk esineb aga ainult vastava ekraani risttasapinnas olevas kolmnurgas (φ_1 tasapinnas τ ja φ_2 tasapinnas π).



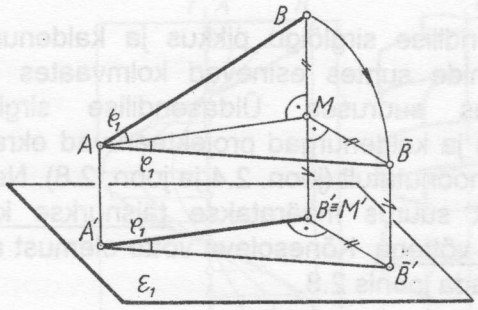
Joon. 2.8

Juhis lõigu pikkuse praktiliseks määramiseks:

13 Sirglõigu pikkus võrdub hüpotenuusiga täisnurkses kolmnurgas, mille kaatetiteks on kas lõigu pealtvaate pikkus ja lõigu otspunktide põhikvootide vahe või lõigu eestvaate pikkus ja lõigu otspunktide esikvootide vahe.

Kolmnurga tõeline kuju joonisel saadakse tavaliselt kujundi ekraani paralleeltasandile pööramise ja seejärel vastavale ekraanile projekteerimise teel, nii nagu näha joonisel 2.9.

B (loe: B kaetud) – punkti B pöörend.



Joon. 2.9

Sirgjoone kaldenurka ekraani suhtes näitab joonisel nurk sirge pöörendi ja vastava projektsiooni vahel.

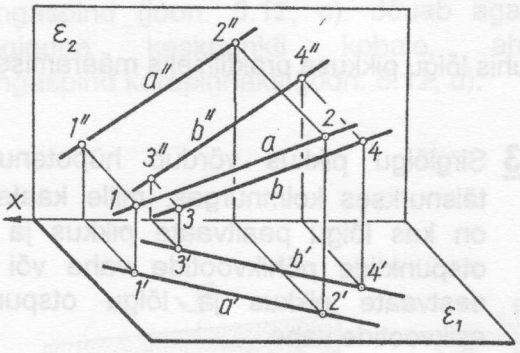
2.6 Kahe sirge vastastikused asendid

Kaks sirget võivad olla kas paralleelsed, lõikuvad või kiivsed.

Sirgete paralleelsuse tunnus:

14 Kui sirgete samanimelised projektsioonid on omavahel paralleelsed, kuid pole risti kaksvaate teljega, siis need sirged on ruumis paralleelsed.

Lühidalt $a \parallel b$, sest $a' \parallel b'$ ja $a'' \parallel b''$ (joon 2.10).



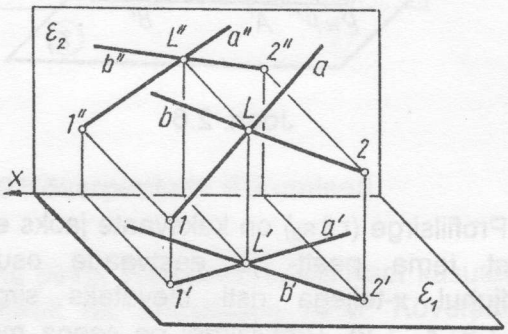
Joon. 2.10

Sirgete lõikumise tunnus:

15 Kui kahe sirge samanimeliste projektsioonide lõikepunktid asetsevad ühel ja samal sidejoonel ning kummagi sirge mõlemad vaated pole risti x-teljega, siis need sirged ruumis lõikuvad.

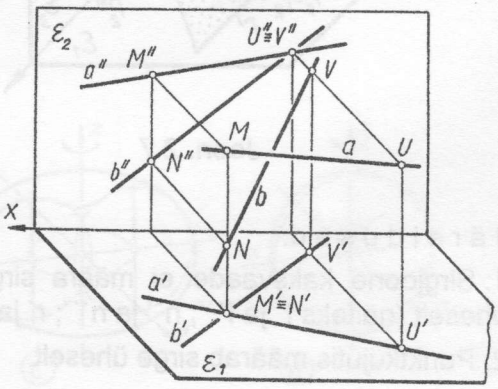
Lühidalt $L \equiv a \times b$, sest $L' \equiv a' \times b'$ ja $L'' \equiv a'' \times b''$; $L''L' \perp x$ (joon. 2.11).

Kui pole rahuldatud ei paralleelsuse ega lõikumise tunnus, siis on sirged kiivsed.



Joon. 2.11

Kiivsirged asetsevad ruumis alati nii, et üks sirge läheb teise pealt või eest läbi, varjates teist vastaval vaatel (joon. 2.12). Seda, nn. varjumise probleemi lahendatakse kaksvaatel ühisel kujutamiskiirel asetsevate konkureerivate punktide (joonisel 2.12 M ja N; U ja V) võrdlemise teel. Suurema kvoodiga punkt määrab varjava sirge. On oluline meelde jätta,et samal meetodil lahendatakse mis tahes objekti nähtavuse küsimused jooniste valmistamisel. Et ka kiivsirgete vastastikust paiknemist ruumis joonise peal ilmekamalt edasi anda, katkestatakse teise sirge kujutis varjatud kohas.



Joon. 2.12

2.7 Tasandi kujutamine Monge´i meetodil. Tasandi jälgsirged

Tasandi määravad:

a) kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel ($\alpha(A,B,C)$; $C \not\subset AB$);

b) punkt ja sirge, mis ei läbi seda punkti ($\alpha(A,a)$; $A \not\subset a$);

c) kaks lõikuvat sirget ($\alpha(a \times b)$);

d) kaks paralleelset sirget ($\alpha(a \parallel b)$).

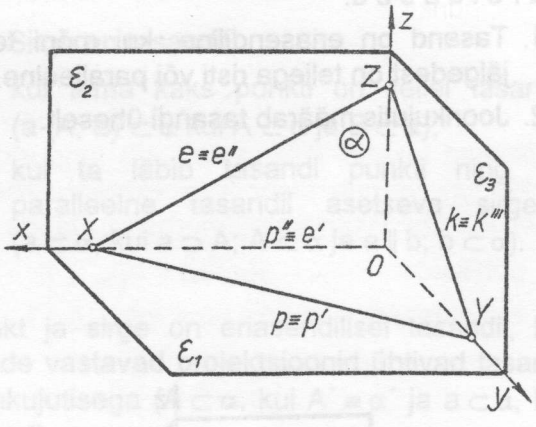
Tasandi ja ekraani lõikesirget nimetatakse selle tasandi jälgsirgeks ehk jäljeks.

Kui tasand pole ühegi ekraaniga risti, siis on ta üldasendiline, vastasel korral eriasendiline. Üldasendilisel tasandil on kolm jälgsirget ja kolm telgpunkti (joon. 2.13):

põhijälg(sirge) $p \equiv \alpha \times \varepsilon_1$; x-telgpunkt $X \equiv \alpha \times x$;

esijälg(sirge) $e \equiv \alpha \times \varepsilon_2$; y-telgpunkt $Y \equiv \alpha \times y$;

külgjälg(sirge) $k \equiv \alpha \times \varepsilon_3$; z-telgpunkt $Z \equiv \alpha \times z$.

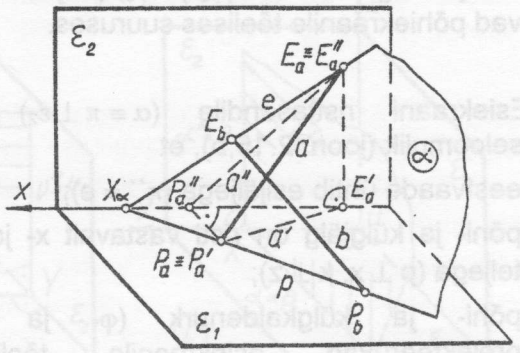


Joon. 2.13

Tasandi jälgkolmnurgaks nimetatakse kolmnurka, mille tippudeks on telgpunktid ja külgedeks jälgsirgete lõigud (joon. 2.13).

Teades sirge ja tasandi jälje olemust, võime väita:

16 Tasandil asetsevate sirgete jälgpunktid on selle tasandi vastavatel jälgsirgetel (joon. 2.14).



Joon. 2.14

See lause on aluseks tasandi jälgede tuletamisel, sest tasandi mis tahes kahe sirge jälgpunktid määravad selle tasandi jälgsirged. Sealjuures on hõlpsasti kasutatavad ka tasandi telgpunktid.

Järeldused:

1. Kaks jälgsirget määravad tasandi üheselt ($\alpha(p,e)$).

2. Kaks jälge lõikuvad ühes telgpunktis ($p \times e \equiv X$; $p \times k \equiv Y$; $e \times k \equiv Z$) ja kaks telgpunkti määravad ühe jälgsirge ($p \equiv XY$; $e \equiv XZ$; $k \equiv YZ$).

2.8 Eriasendilised tasandid

Eriasendiline tasand on kolmvaate järgi kergesti tuntav, kui rakendada järgmist lauset.

17 Kui tasandi ristprojektsiooniks mingil ekraanil on sirgjoon, siis see tasand on selle ekraaniga risti.

Ekraani risttasandit nimetatakse ka projekteerivaks tasandiks selle ekraani suhtes.

1. Põhiekraani risttasandile ($\alpha \equiv \tau \perp \varepsilon_1$) on iseloomulik (joon. 2.15,a), et
   - pealtvaade ühtib põhijäljega ($\tau' \equiv p$);
   - esi- ja külgjälg on risti vastavalt x- ja y-teljega ($e \perp x$; $k \perp y$) ehk paralleelsed z-teljega ($e \parallel k \parallel z$);

– esi- ja külgkaldenurk (φ_2 ja φ_3) projekteeruvad põhiekraanile tõelises suuruses.

2. Esiekraani risttasandile ($\alpha \equiv \pi \perp \varepsilon_2$) on iseloomulik (joon. 2.15,b), et
   – eestvaade ühtib esijäljega ($\pi'' \equiv e$);
   – põhi- ja külgjälg on risti vastavalt x- ja z-teljega ($p \perp x$; $k \perp z$);
   – põhi- ja külgkaldenurk (φ_1 ja φ_3) projekteeruvad esiekraanile tõelises suuruses.

3. Külgekraani risttasandile ($\alpha \perp \varepsilon_3$) on iseloomulik (joon. 2.15,c), et
   – külgvaade ühtib külgjäljega ($\alpha''' \equiv k$);
   – põhi- ja esijälg on paralleelsed x-teljega ($p \parallel e \parallel x$);
   – põhi- ja esikaldenurk (φ_1 ja φ_2) projekteeruvad külgekraanile tõelises suuruses.

Tasandeid, mis on risti üheaegselt kahe ekraaniga, s.o. paralleelsed kolmanda ekraaniga, nimetatakse nivoopindadeks viimase suhtes.

Ekraani järgi eristatuna:

põhiekraani paralleeltasand - horisontaalpind μ;

esiekraani paralleeltasand - frontaalpind ν;

külgekraani paralleeltasand - profiilpind.

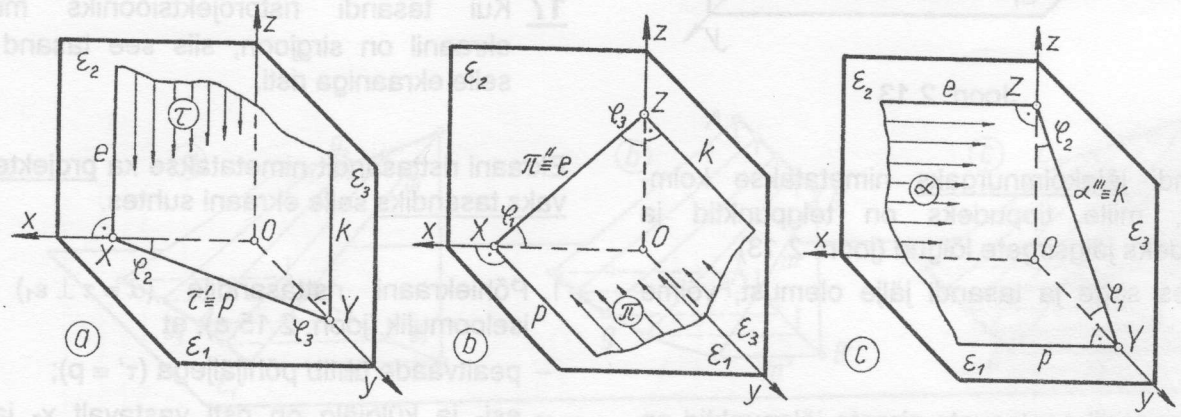
4. Horisontaalpinnale ($\alpha \equiv \mu \parallel \varepsilon_1$) on iseloomulik (joon. 2.16,a), et
   – eestvaade ühtib esijäljega ($\mu'' \equiv e$) ja on paralleelne x-teljega ($\mu'' \parallel x$);
   – külgvaade ühtib külgjäljega ($\mu''' \equiv k$) ja on paralleelne y-teljega ($\mu''' \parallel y_3$).

5. Frontaalpinnale ($\alpha \equiv \nu \parallel \varepsilon_2$) on iseloomulik (joon. 2.16,b), et
   – pealtvaade ühtib põhijäljega ($\nu' \equiv p$) ja on paralleelne x-teljega ($\nu' \parallel x$).
   – külgvaade ühtib külgjäljega ($\nu''' \equiv k$) ja on paralleelne z-teljega ($\nu''' \parallel z$).

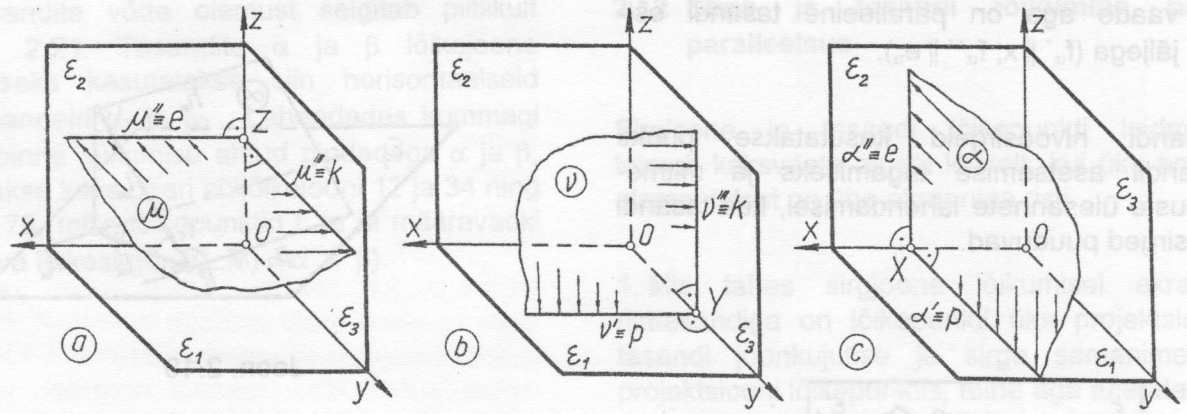
6. Profiilpinnale ($\alpha \parallel \varepsilon_3$) on iseloomulik (joon. 2.16,c), et
   – pealtvaade ühtib põhijäljega ($\alpha' \equiv p$) ja on risti x-teljega ($\alpha' \perp x$);
   – eestvaade ühtib esijälgedega ($\alpha'' \equiv e$) ja on samuti risti x-teljega ($\alpha'' \perp x$).

J ä r e l d u s e d:

1. Tasand on eriasendiline, kui mõni tema jälgedest on teljega risti või paralleelne.
2. Joonkujutis määrab tasandi üheselt.



Joon. 2.15



Joon. 2.16

2.9 Punkt ja sirge tasandil. Tasandi nivoosirged

Üldasendilisel tasandil asetsevate punktide ja sirgjoonte projektsioone saab kaksvaatel leida järgmiste lausete alusel:

18 Punkt on tasandil, kui ta asetseb selle tasandi mingil sirgel ($A \subset \alpha$, kui $A \subset a$; $a \subset \alpha$).

19 Sirge on tasandil,

1) kui tema kaks punkti on sellel tasandil ($a\ (A, B) \subset \alpha$ kui $A \subset \alpha$ ja $B \subset \alpha$);
2) kui ta läbib tasandi punkti ning on paralleelne tasandil asetseva sirgega ($a \subset \alpha$, kui $a \supset A$; $A \subset \alpha$ ja $a \parallel b$; $b \subset \alpha$).

Punkt ja sirge on eriasendilisel tasandil, kui nende vastavad projektsioonid ühtivad tasandi joonkujutisega ($A \subset \alpha$, kui $A' \equiv \alpha'$ ja $a \subset \alpha$, kui $a' \equiv \alpha'$).

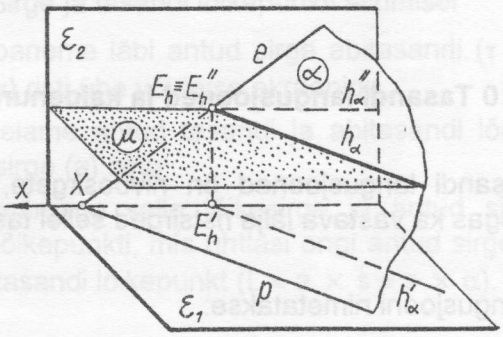
Nivoosirged, mis kuuluvad konkreetsele tasandile, nimetatakse selle tasandi nivoosirgeteks. Praktiliselt tekivad tasandi nivoosirged tasandi lõikumisel vastavate nivoopindadega.

Seega

tasapinna α horisontaal $h_\alpha \equiv \alpha \times \mu$, kus $\mu \parallel \varepsilon_1$;

tasapinna α frontaal $f_\alpha \equiv \alpha \times \nu$, kus $\nu \parallel \varepsilon_2$.

1. Tasandi horisontaaliks nimetatakse sirget, mis asetseb sellel tasandil ning on paralleelne põhiekraaniga ($h_\alpha \subset \alpha$ ja $h_\alpha \parallel \varepsilon_1$; joon. 2.17).



Joon. 2.17

Tasandi horsontaali tunnus kaksvaatel:

20 Üldasendilise tasandi horisontaali eestvaade on paralleelne kaksvaate teljega, pealtvaade aga on paralleelne tasandi põhijäljega ($h_\alpha'' \parallel x$; $h_\alpha' \parallel p_\alpha$).

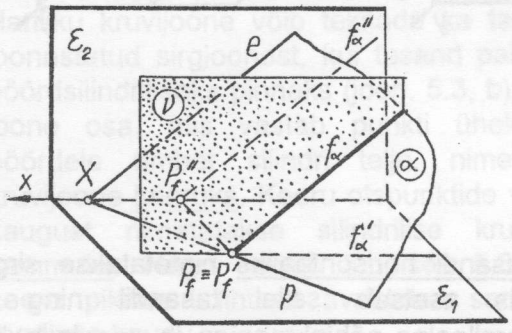
2. Tasandi frontaaliks nimetatakse sirget, mis asetseb sellel tasandil ning on paralleelne esiekraaniga ($f_\alpha \subset \alpha$ ja $f_\alpha \parallel \varepsilon_2$; joon. 2.18).

Tasandi frontaali tunnus kaksvaatel:

21 Üldasendilise tasandi frontaali pealtvaade on paralleelne kaksvaate teljega, eest-

vaade aga on paralleelne tasandi esijäljega ($f_\alpha' \parallel x$; $f_\alpha'' \parallel e_\alpha$).

Tasandi nivoosirgeid kasutatakse punkti tasandil asetsemise tagamiseks ja mitmesuguste ülesannete lahendamisel, kus tasandi jälgsirged puuduvad.



Joon. 2.18

2.10 Tasandi langusjooned ja kaldenurgad

Tasandi langusjooned on nivoosirgete, sealhulgas ka vastava jälje ristsirged sellel tasandil.

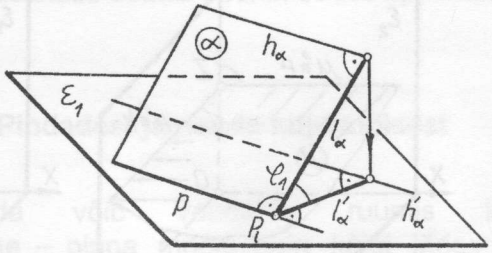
Langusjooni nimetatakse:

põhilangusjoon $l_\alpha \subset \alpha$ ja $l_\alpha \perp h_\alpha$;

esilangusjoon $g_\alpha \subset \alpha$ ja $g_\alpha \perp f_\alpha$.

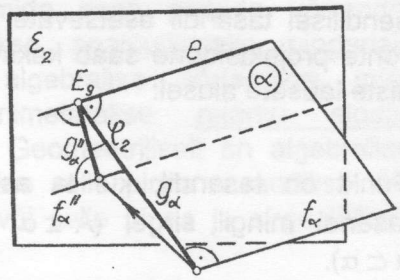
Täisnurga projektsioonilistest omadustest tingituna (lause 11) on langusjoontel kaksvaates järgmised tunnused.

22 Tasandi põhilangusjoone pealtvaade on ristis selle tasandi iga horisontaali pealtvaatega, ühtlasi tasandi põhijäljega ($l_\alpha' \perp h_\alpha'$; $l_\alpha' \perp p_\alpha$; joon 2.19).



Joon. 2.19

23 Tasandi esilangusjoone eestvaade on risti selle tasandi iga frontaali eestvaatega, ühtlasi tasandi esijäljega ($g_\alpha'' \perp f_\alpha''$; $g_\alpha'' \perp e_\alpha$; joon.2.20).



Joon. 2.20

Et langusjoon ja tema ristprojektsioon on mõlemad tasandi jäljega risti, siis langusjoone kaldenurk võrdub tasandi ja ekraani vahelise nurgaga ehk tasandi kaldenurgaga. Seega

põhikaldenurk $\varphi_1 = \varphi(\alpha, \varepsilon_1) = \varphi(l_\alpha, l_\alpha')$;

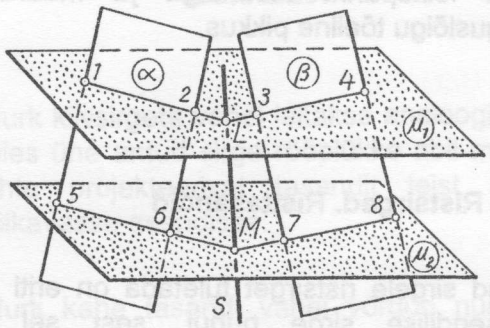
esikaldenurk $\varphi_2 = \varphi(\alpha, \varepsilon_2) = \varphi(g_\alpha, g_\alpha'')$.

2.11 Tasandite lõikumine ja paralleelsus

Kui lõikuvatest tasanditest üks on eriasendiline, s.t. ekraaniga risti, siis lõikejoone üks projektsioon ühtib selle tasandi joonkujutisega, teine aga tuletatakse nagu tasandil asetseva sirge puuduv vaade.

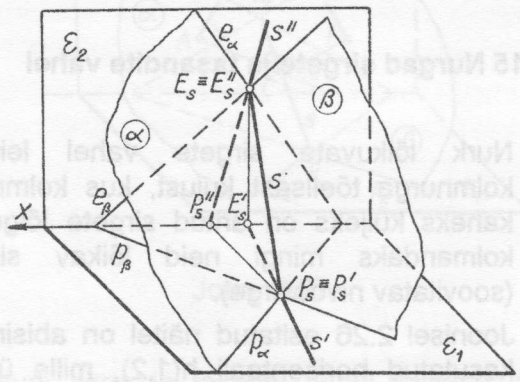
Üldasendiliste tasandite lõikesirge tuletatakse kahe punkti kaudu, mis üldiselt leitakse nn. abitasandite võttega. Abitasanditena kasutatakse eriasendilisi pindu, eriti nivoopindu.

Abitasandite võtte olemust selgitab piltlikult joonis 2.21. Tasandite α ja β lõikejoone leidmiseks kasutatakse siin horisontaalseid abitasandeid μ_1 ja μ_2 . Lahendades kummagi nivoopinna lõikumise antud pindadega α ja β, saadakse kaks paari abilõikejooni 12 ja 34 ning 56 ja 78, mille lõikepunktid L ja M määravadki otsitava lõikesirge ($s(L,M) \equiv \alpha \times \beta$).



Joon. 2.21

Tasandite lõikejoone tuletamine osutub märgatavalt lihtsamaks, kui tasandid on antud jälgedega, sest tasandite samanimeliste jälgede lõikepunktid on nende tasandite lõikejoone jälgpunktideks. Viimaste järgi leitakse lõikejoone projektsioonid (joon. 2.22).



Joon. 2.22

Kaks tasandit on teatavasti paralleelsed, kui ühe tasandi kaks lõikuvat sirget on vastavalt paralleelsed teise tasandi kahe sirgega.

Järelikult on tasandid paralleelsed ka siis, kui nende põhijäljed on omavahel paralleelsed ja esijäljed on omavahel paralleelsed, kuid lõikavad põhijälgi.

2.12 Sirge ja tasandi lõikumine ning paralleelsus

Sirgjoone ja tasandi lõikepunkti leidmine toimub kaksvaate alusel lihtsalt, kui üks antud elementidest on ühe ekraaniga risti.

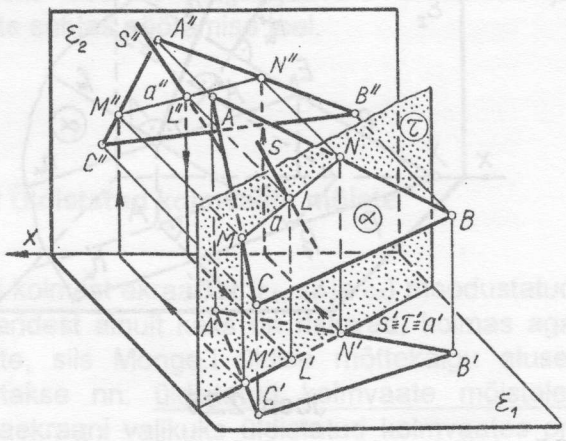
1. Mis tahes sirgjoone lõikumisel ekraani risttasandiga on lõikepunkti üks projektsioon tasandi joonkujutise ja sirge samanimelise projektsiooni lõikepunktis, teine aga tuletatakse nagu sirgel asetseva punkti puuduv vaade.

2. Ekraani ristsirge lõikumisel mis tahes tasandiga ühtib lõikepunkti üks projektsioon sirge punktkujutisega, teine aga tuletatakse nagu tasandil asetseva punkti puuduv vaade.

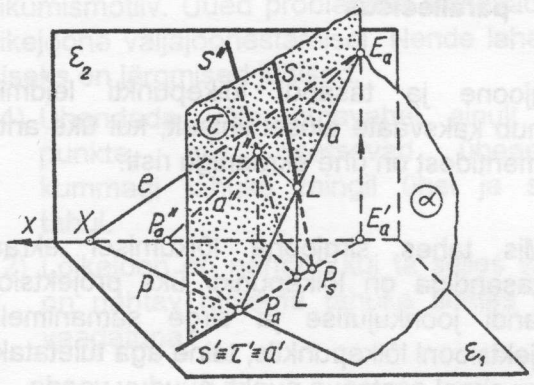
Üldjuhtumil kujuneb sirge ja tasandi lõikumisülesande lahenduskäik järgmiseks (joon. 2.23 ja joon. 2.24):

24 Sirge ja tasandi lõikepunkti leidmisel

1) paneme läbi antud sirge abitasandi (τ või π) risti ühe või teise ekraaniga,
2) leiame antud tasandi ja abitasandi lõikesirge (a) ning
3) märgime selle lõikesirge ja antud sirge lõikepunkti, mis ühtlasi ongi antud sirge ja tasandi lõikepunkt ($L \equiv a \times s \equiv s \times \alpha$).



Joon. 2.23

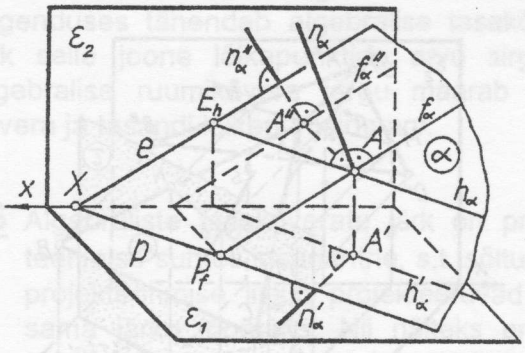


Joon. 2.24

Kui sirgjoone ja tasandi lõikepunkti leidmisel selgub, et abisirge (s.o. sirget läbiva tasandi ja antud tasandi lõikesirge) on antud sirgega paralleelne või ühtib temaga, siis on sirge ja tasand kas paralleelsed või teineteisele kuuluvad.

2.13 Tasandi normaal. Sirge ja tasandi ristseis

Tasandi normaal on sirge, mis on risti iga sirgega sellel tasandil, sealhulgas ka tasandi nivoojoontega (horisontaaliga h ja frontaaliga f). Normaali tunnus kaksvaatel selgub jooniselt 2.25.



Joon. 2.25

25 Tasandi normaali pealtvaade on risti selle tasandi horisontaali pealtvaatega, ühtlasi põhijäljega, eestvaade aga on risti tasandi frontaali eestvaatega, ühtlasi esijäljega ($n_\alpha' \perp h_\alpha'$ ühtlasi $n_\alpha' \perp p_\alpha$ ja $n_\alpha'' \perp f_\alpha''$ ühtlasi $n_\alpha'' \perp e_\alpha$).

Sama lause on kasutatav ka üldiselt sirge ja tasandi ristseisu tunnusena, välja arvatud juhtum, kus sirge kujutised on x-teljega risti (profiilsirge).

Normaali kasutatakse ülesannetes, kus on tegu kauguse määramisega tasandist. Näiteks punkti kauguse saamiseks tasandist võetakse antud punkti läbiv tasandi normaal, leitakse tema lõikepunkt tasandiga ja määratakse kauguslõigu tõeline pikkus.

2.14 Ristsirged. Risttasandid

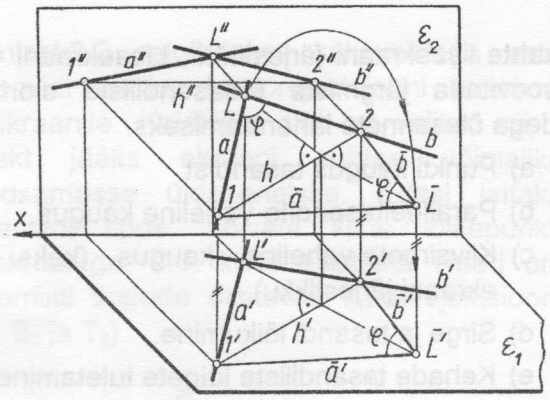
Antud sirgele ristsirget tuletada on eriti lihtne eriasendilise sirge puhul, sest sel juhul projekteerub täisnurk ühes vaates täisnurgaks. Üldasendilisele sirgele ristsirge konstrueerimisel kasutatakse antud sirge risttasandit läbi antud punkti. Sirge ja risttasandi lõikepunkt ongi otsitav ristsirgete lõikepunkt.

Antud tasapinna risttasandi tuletamiseks kasutatakse järgmist tõsiasja. Iga tasapind, mis läbib antud tasandi normaali, on selle antud tasandiga risti.

2.15 Nurgad sirgete ja tasandite vahel

1. Nurk lõikuvate sirgete vahel leitakse kolmnurga tõelisest kujust, kus kolmnurga kaheks küljeks on antud sirgete lõigud ja kolmandaks mingi neid lõikav sirglõik (soovitatav nivoosirge).

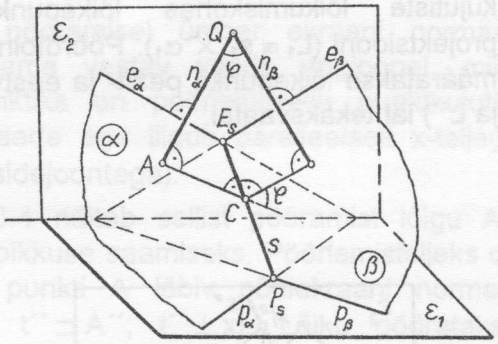
   Joonisel 2.26 esitatud näitel on abisirgena kasutatud horisontaali h(1,2), mille ümber toimub ka kolmnurga 12L pööramine põhiekraani paralleeltasandile. Siit järgnev projektsioon põhiekraanile annabki kolmnurga tõelise kuju 1´ 2´ L´ ja nurga φ tegeliku suuruse.



Joon. 2.26

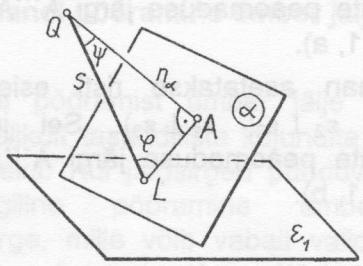
Nurk kiivsirgete vahel leitakse analoogiliselt, viies ühe antud sirge rööplükke abil mööda ühte projekteerivat tasandit teist sirget lõikavasse asendisse.

2. Nurk kahe tasandi vahel võrdub nurgaga nende tasandite normaalide vahel. Seega taandub ülesanne suvaliselt valitud punkti läbivate antud tasandite normaalide joonestamisele ja nendevahelise nurga määramisele (joon. 2.27).



Joon. 2.27

3. Nurk sirge ja tasandi vahel leitakse selle sirge ja antud tasandi normaali vahelise nurga kaudu, sest viimane täiendab täisnurgani otsitavat sirge ja tasandi vahelist nurka $\varphi = 90° - \psi$ (joon. 2.28).



Joon. 2.28

3. LISAPROJEKTSIOONID

3.1 Lisaprojektsioonide tuletamise viisid

Üldasendiliste elementidega antud ülesande lihtsamaks lahendamiseks või objektist piltlikuma kujutise saamiseks võib antud projektsioonide järgi tuletada lisaprojektsioone. Praktikas kasutatakse järgmisi lisaprojektsioonide tuletamise võtteid.

1 Lisaekraani võte, kus muudetakse ekraani ja vastavate kiirte asendit paigalejääva objekti suhtes.

2. Uute kujutamiskiirte võte, kus objekti ja ekraani vastastikune asend jäetakse muutmata, kuid muudetakse kujutamiskiirte sihti.

3. Objekti pööramise võte, kus muudetakse objekti asendit paigalejäävate ekraanide ja kiirte suhtes pööramise teel.

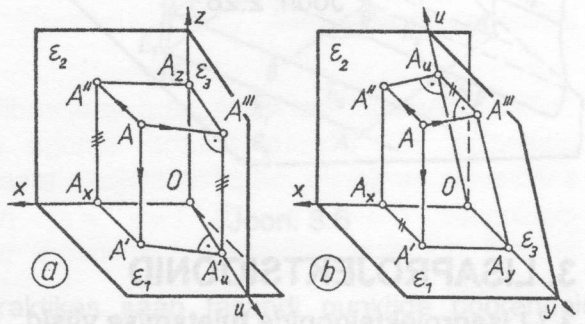
3.2 Üldistatud kolmvaate mõiste

Kui kolmest ekraanist (ε_1, ε_2 ja ε_3) moodustatud paaridest ainult kaks on ristuvad, kolmas aga mitte, siis Monge´i üldise mõttekäigu alusel jõutakse nn. üldistatud kolmvaate mõistele. Lisaekraani valikuks üldistatud kolmvaates on seega kaks võimalust.

1. Lisaekraan asetatakse risti põhiekraaniga ($\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$; $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$; $\varepsilon_2 \not\perp \varepsilon_3$). Sel juhul on

kolmvaate peaomaduse järgi $A'''A_u = A''A_x$ (joon. 3.1, a).

2. Lisaekraan asetatakse risti esiekraaniga ($\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$; $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_3$; $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$). Sel juhul on kolmvaate peaomaduse järgi $A'''A_u = A'A_x$ (joon. 3.1, b).



Joon. 3.1

3.3 Lisaekraani praktiline kasutamine

Sobivalt valitud lisaekraani kasutamisega saab sirget ja tasandit muuta eriasendiliseks järgmisel viisil.

1. Üldasendiline sirge muutub nivoosirgeks lisaekraani suhtes, mis on võetud paralleelsena antud sirgega. Selleks tõmmatakse kaksvaatel lisaekraani määrav telg u paralleelselt sirge ühe kujutisega ($u \parallel s'$ või $u \parallel s''$).
2. Nivoosirge muutub projekteerivaks sirgeks lisaekraani suhtes, mis on võetud risti antud sirgega ($u \perp h'$ või $u \perp f''$).
3. Üldasendiline tasand muutub projekteerivaks tasandiks lisaekraani suhtes, mis on võetud risti selle tasandi ühe jälgsirgega või nivoojoonega ($u \perp p_\alpha$ või $u \perp e_\alpha$; $u \perp h'_\alpha$ või $u \perp f''_\alpha$).
4. Projekteeriv tasand muutub nivoopinnaks lisaekraani suhtes, mis on võetud paralleelsena antud tasandiga ($u \parallel \tau'$ või $u \parallel \pi''$).

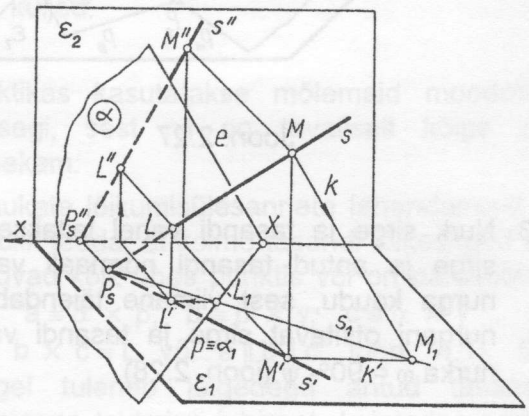
Siit järeldub, et on rida ülesandeid, kus lisaekraani kasutamine oluliselt lihtsustab lahendamist. Mõnel juhul tuleb kasutada isegi kahte lisaekraani järjestikku. Lisaekraani võiks soovitada järgmiste üldasendiliste elementidega ülesannete lahendamiseks.

a) Punkti kaugus tasandist.
b) Paralleeltasandite-vaheline kaugus.
c) Kiivsirgete-vaheline kaugus (kaks lisaekraani järjestikku).
d) Sirge ja tasandi lõikumine.
e) Kehade tasandiliste lõigete tuletamine.

3.4 Uute kujutamiskiirte võte

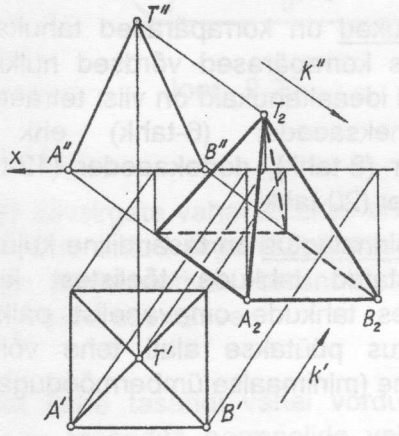
Uute kujutamiskiirte võtet saab edukalt kasutada nii ruumigeomeetriliste ülesannete lahendamisel, kui ka piltkujutiste (piltlik kujutis) tuletamisel.

Joonisel 3.2 on näidatud sirge ja tasandi lõikepunkti leidmise käik uute kujutamiskiirte abil. Antud juhul kasutatakse tasandi esijäljega paralleelseid kujutamiskiiri ($k \parallel e$; $k \parallel \alpha$). Nii kujuneb tasandi kaldprojektsiooniks põhiekraanil põhijäljega ühtiv sirge ($\alpha_1 \equiv p$). Tuletanud ka sirge kaldprojektsiooni s_1, kasutades selleks jälgpunkti P_s ja sirgel vabalt valitud punkti M, saamegi sirge ja tasandi kujutiste lõikumiskohas lõikepunkti kaldprojektsiooni ($L_1 \equiv s_1 \times \alpha_1$). Pöördtoimingu abil määratakse lõikepunkti pealt- ja eestvaade (L' ja L'') lähtekaksvaatel.



Joon. 3.2

Joonisel 3.3 selgitatakse kaksvaatega antud püramiidi piltliku kaldprojektsiooni tuletamist esiekraanile. Kaldkiirte siht on valitud nii, et objekt jääks ekraani suhtes võimalikult soodsamasse üldasendisse. Edasi leitakse püramiidi tippe läbivate kiirte lõikepunktid esiekraaniga, s.o. kiirte esijäljed. Need ongi püramiidi tippude otsitavad kaldprojektsioonid (A_2, B_2 ja T_2).

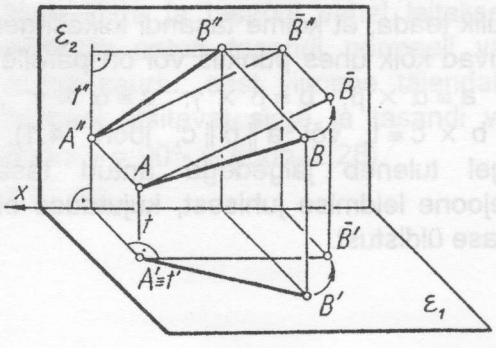


Joon. 3.3

3.5 Objekti pööramine ümber ekraani normaali

Punkti pööramisel ümber ekraani normaali liigub tema vastav vaade ringjoonel, mille keskpunktiks on pöörlemistelje punktkujutis, teine vaade aga liigub paralleelselt x-teljega (s.o. ⊥ sidejoontega).

Joonis 3.4 näitab sellist pööramist lõigu AB tõelise pikkuse saamiseks. Pöörlemisteljeks on valitud punkti A läbiv põhiekraani normaal ($t' \equiv A'$; $t'' \supset A''$; $t'' \perp x$). Lõiku pööratakse ümber telje t, kuni ta muutub paralleelseks esiekraaniga ($A'B' \parallel x$). Pöörendi eestvaatel on lõik siis tõelises pikkuses ($AB = A''B''$).



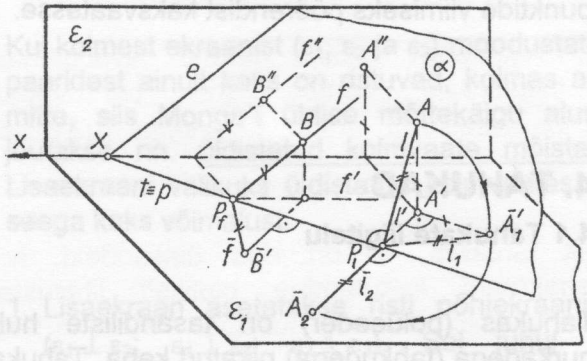
Joon. 3.4

3.6 Tasandi pööramine ümber jälje

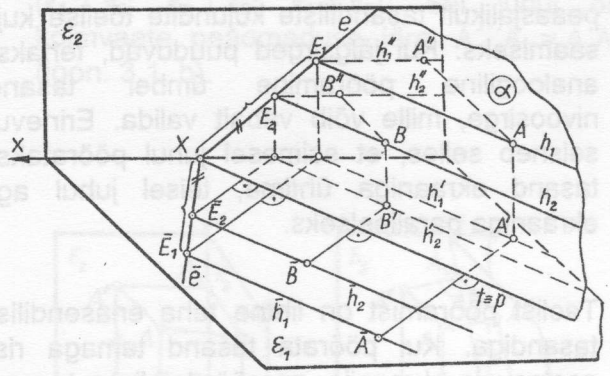
Tasandi pööramist ümber jälje kasutatakse peaasjalikult tasandiliste kujundite tõelise kuju saamiseks. Kui jälgsirged puuduvad, tehakse analoogiline pööramine ümber tasandi nivoosirge, mille võib vabalt valida. Erinevus seisneb selles, et esimesel juhul pööratakse tasand ekraaniga ühtima, teisel juhul aga ekraaniga paralleelseks.

Taolist pööramist on lihtne teha eriasendilise tasandiga. Kui pöörata tasand temaga risti asetsevale ekraanile, on pöördeteljeks tasandi joonkujutis ($t \equiv \alpha' \equiv p$ või $t \equiv \alpha'' \equiv e$) ning tasandi punktide pöörendid märgitakse telje ristsirgetel nende vastavate kvootide kaugusele. Vajalikku kvooti näitab aga teatavasti punkti kujutise kaugus kaksvaate teljest teisel ekraanil. Eriasendilise tasandi pööramine ümber kaksvaate teljega risti oleva jälje on samaväärne eelmises punktis (3.5) kirjeldatud pööramisega ümber ekraani normaali ja toimub seal antud juhise järgi.

Üldasendilise tasandi pööramine ümber jälje või nivoosirge on tülikam, sest punkti pöörendi märkimiseks vajalik kauguslõik tuleb täiendava konstruktsiooniga määrata. Tasandi punkti pöörend leitakse siis tavaliselt punktist pöördeteljeni viiva langusjoone või nivoosirge lõigu abil nii, nagu näha joonisel 3.5. Kui pööramisele tulevaid punkte on palju, siis kasutatakse pöörendite märkimiseks neid punkte läbivaid nivoosirgeid. Nivoosirgete pöörendid aga leitakse jälgpunktide kaudu, rakendades joonte paralleelsust. Joonisel 3.6 horisontaalide abil tuletatud punktide pöörendeid põhiekraanil võib sama edukalt leida ka punkte läbivaid frontaale kasutades.

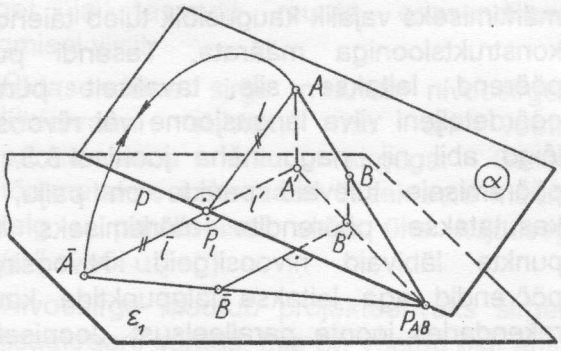


Joon. 3.5



Joon. 3.6

Praktikas saab tasandi punktide pöörendeid leida ka mis tahes asendis kahte punkti ühendava sirge vahendusel, kui selle sirge jälgpunkt asub joonise piires. Näiteks on joonisel 3.7 punkti B pöörend märgitav punkti A pöörendi ja paigalejääva jälgpunkti P_{AB} kaudu määratud sirge AB pöörendile.



Joon. 3.7

Väärib rõhutamist, et joonistel 3.6 ja 3.7 esitatud võtted on hõlpsasti kasutatavad ka punktide viimiseks pöörendist kaksvaatesse.

4. TAHUKAD

4.1 Tahukate liigitelu

Tahukas (polüeeder) on tasandiliste hulknurkadega (tahkudega) piiratud keha. Tahukas on kumer, kui ta jääb iga oma tahu tasandist tervenisti ühele poole; vastasel korral nõgus. Kumera tahuka iga tasandiline lõige on kumer hulknurk.

Prismatoidiks nimetatakse tahukat, mille tipud asetsevad kahel paralleelsel tasapinnal (põhjatahul). Prismatoidi kumbki põhi võib esineda ka sirglõiguna. Prisma ja püramiid on prismatoidi kõige levinumad vormid.

Ideaaltahukad on korrapärased tahukad, kus tahkudeks korrapärased võrdsed hulknurgad. Kumeraid ideaaltahukaid on viis: tetraeeder (4-tahk), heksaeeder (6-tahk) ehk kuup, oktaeeder (8-tahk), dodekaeeder (12-tahk) ja ikosaeeder (20-tahk).

Tahuka pinnalaotus on tasandiline kujund, mis on koostatud tahkude tõelistest kujudest, arvestades tahkude omavahelist paiknemist. Pinnalaotus püütakse alati teha võimalikult kompaktne (minimaalse ümbermõõduga).

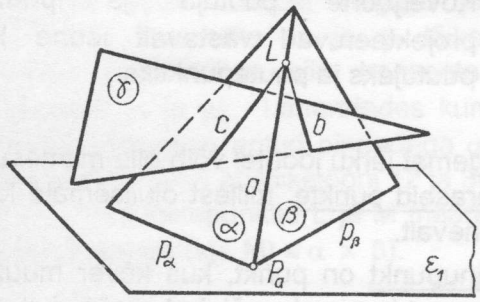
4.2 Tahukate lõikumised

1. Tahuka tasandiline lõige on hulknurk, mille tippudeks on tahuka servade lõikepunktid lõikava tasandiga, külgedeks aga tahkude ja lõikava tasandi lõikesirged. Järelikult on lõike määramiseks kaks teed:

1) Sirge ja tasandi lõikumisülesande korduva lahendamisega leitakse lõikehulknurga tipud;
2) Kahe tasandi lõikumisülesande korduva lahendamisega leitakse lõikehulknurga küljed.

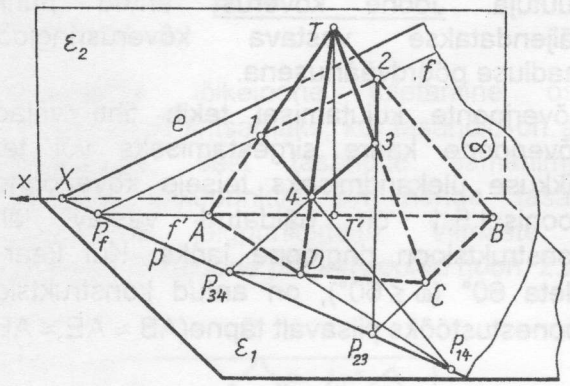
Praktikas kasutatakse mõlemaid mooduseid läbisegi, sest nii on tavaliselt kõige otstarbekam.

Tahukate lõikumisülesannete lahendamisel on kasulik teada, et kolme tasandi lõikesirged kas lõikuvad kõik ühes punktis või on paralleelsed (kui $a \equiv \alpha \times \beta$; $b \equiv \beta \times \gamma$; $c \equiv \alpha \times \gamma$, siis $a \times b \times c \equiv L$ või $a \parallel b \parallel c$; joon. 4.1). See reegel tuleneb jälgedega antud tasandite lõikejoone leidmise juhisest, kujutades endast viimase üldistust.

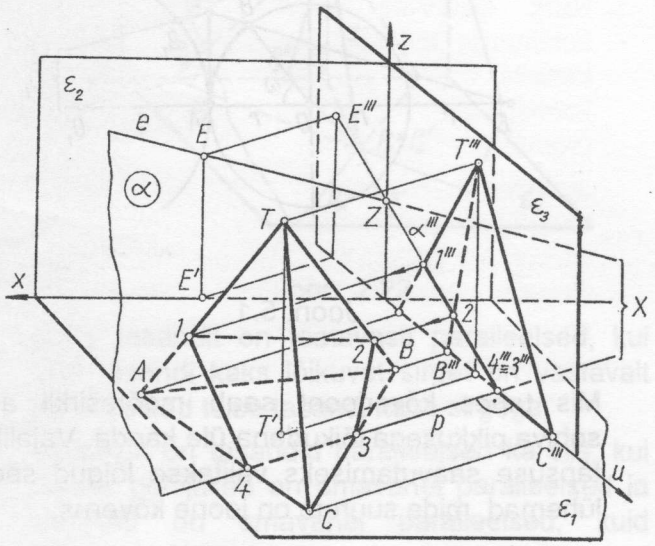


Joon. 4.1

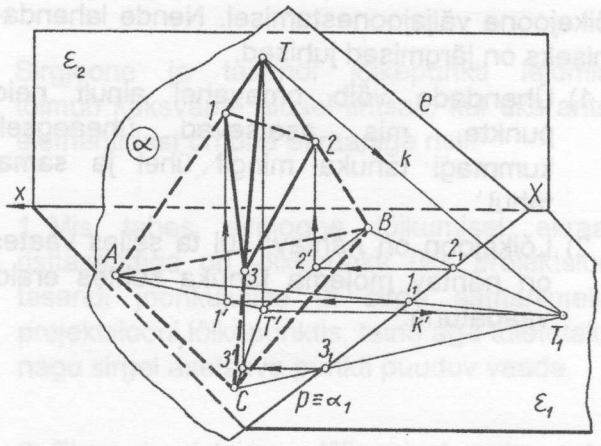
Näide püramiidi ja tasandi lõikumisest on toodud joonisel 4.2. Lahendamise muudab antud juhul lihtsaks püramiidi eriasendiline tahk ABT, sest lõikejoon sellel tahul osutub lõikava tasandi frontaaliks. Edasine lahenduskäik on taolistele ülesannetele tüüpiline. Et tahk ABCD paikneb põhiekraanil, saab lõikehulknurga ülejäänud küljed leida lõikesirgete jälgpunktide abil.



Joon. 4.2



Joon. 4.3

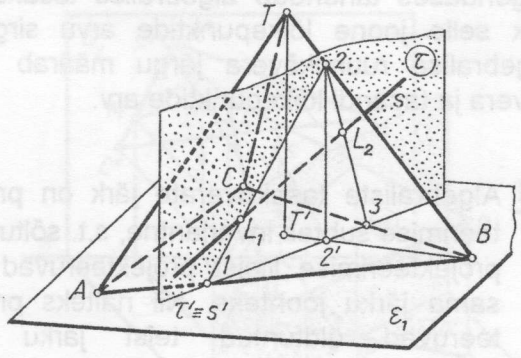


Joon. 4.4

Joonistel 4.3 ja 4.4 on näidatud analoogilise ülesande lahendamine vastavalt lisaekraani ja uute kujutamiskiirte võttega. Mõlemal juhul seatakse eesmärgiks projekteerida lõiget tekitav tasand ekraanile sirgeks ning määrata lõikehulknurga tipud uue projektsiooni kaudu.

Sealt kantakse lõikejoone punktid juba püramiidi ülejäänud kujutistele.

2. Tahuka ja sirge lõikumisel leitakse lõikepunktid sirge ja tasandi lõikumisülesande lahendamise põhimõtet rakendades. Tavaliselt võimaldab üks sobivalt valitud sirget projekteeriv abitasand määrata kõik lõikepunktid (joon.4.5).



Joon. 4.5

3. Kahe tahuka lõikejoone tuletamine ei erine oluliselt tahuka ja tasandi lõikumisülesande lahendamisest, sest ka siin esineb korduvalt

sirge ja tasandi ning kahe tasandi lõikumismotiiv. Uued probleemid ilmnevad aga lõikejoone väljajoonestamisel. Nende lahendamiseks on järgmised juhised.

1) Ühendada võib omavahel ainult neid punkte, mis asetsevad üheaegselt kummagi tahuka mingil ühel ja samal tahul.
2) Lõikejoon on nähtav, kui ta selles vaates on nähtav mõlema tahuka suhtes eraldi vaadatuna.

5. KÕVERJOONED JA KÕVERPINNAD

5.1 Joonte projektsioonilised omadused

Joont võib vaadelda

- liikuva punkti trajektoorina;
- kahe pinna lõikena.

Jooni liigitatakse:

1) sirg- ja kõverjoonteks;
2) tasa- ja ruumikõverateks;
3) graafilisteks ja analüütilisteks.

Analüütilised jooned on võrranditega määratavad, jaotudes võrrandi liigi järgi algebralisteks ja transtsendentseteks.

Algebralise tasakõvera järk on võrdne selle joone võrrandi astmega. Geomeetrilises tõlgenduses tähendab algebralise tasakõvera järk selle joone lõikepunktide arvu sirgega. Algebralise ruumikõvera järgu määrab selle kõvera ja tasandi lõikepunktide arv.

26 Algebraliste tasakõverate järk on projekteerimise suhtes invariantne, s.t. sõltumata projekteerimise liigist projekteeruvad nad sama järku joonteks. Nii näiteks projekteeruvad üldtuntud teist järku jooned – ellips, hüperbool ja parabool – üldiselt samanimelisteks kujutisteks.

Kõverjoonte kujutamise seisukohalt on oluline ka järgmine seaduspärasus.

27 Kõverjoone puutuja ja puutepunkt projekteeruvad vastavalt joone kujutise puutujaks ja puutepunktiks.

Kõrgemat järku joontel võib olla mitmesuguseid iseäraseid punkte, millest olulisemaid loetleme järgnevalt.

Käänupunkt on punkt, kus kõver muutub kas nõgusast kumeraks või ümberpöördult. Puutuja käänupunktis on ühtlasi kõvera lõikajaks.

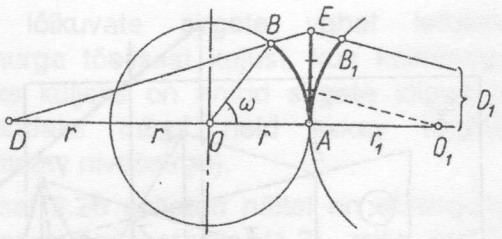
Sõlmpunkt on punkt, kus kõver lõikab iseennast. Kõveral on selles punktis kaks erinevat puutujat.

Tagasipöördepunkt on punkt, kus kõver muutub oma suunalt vastassuunaliseks. Selles punktis on kõvera mõlemal harul ühine puutuja.

Haripunkt on ekstremaalse kõverusega koht antud joonel.

Kõverat kindlas kohas kõige paremini lähendavat ringjoont nimetatakse kõverusringjooneks joone antud punktis. Kõveral ja tema kõverusringjoonel on selles punktis ühine puutuja. Joone kõverust antud punktis väljendatakse vastava kõverusringjoone raadiuse pöördväärtusena.

Kõverjoonte kujutamisel tekib tihti vajadus kõverjoone kaare sirgestamiseks või tema pikkuse ülekandmiseks teisele kõverjoonele. Joonisel 5.1 on näidatud vastav lähiskonstruktsioon ringjoone jaoks. Kui kaar ei ületa 60° ($\omega \leq 60°$), on antud konstruktsioon joonestustööks piisavalt täpne($AB \approx AE \approx AB_1$).



Joon. 5.1

Mis tahes kõverjoont saab mõõtesirkli abil sobiva pikkusega lõikudena üle kanda. Vajaliku täpsuse saavutamiseks valitakse lõigud seda lühemad, mida suurem on joone kõverus.

5.2 Ellips

Projekteerimise seisukohalt võib ellipsit vaadelda ringjoone paralleelprojektsioonina. Sel juhul osutub ringi keskpunkti projektsioon kujutisellipsi keskpunktiks, ringjoone ristuvad diameetrid projekteeruvad aga ellipsi kaasdiameetriteks.

Diameeter on kõõl, mis läbib keskpunkti. Kaks diameetrit, millest kumbki poolitab teisega paralleelseid kõõle, on teineteise kaasdiameetrid. Ellipsit defineeritakse harilikult järgmiselt.

28 Ellips on tasandiline joon, mille igast punktist kuni joone tasandi kahe kindla punktini (fookuseni) mõõdetud kauguste summa on jääv.

Sellel definitsioonil põhineb ka ellipsi niitkonstruktsioon. Praktilises joonestustöös vajatakse järgmisi ellipsi konstruktsioone.

1. Ellipsi konstrueerimine telgede järgi.

Levinum meetod selleks on nn. telgringjoonte võte, mis oma nimetuse on saanud telgringjoonte kasutamisest ellipsi punktide tuletamisel (joon. 5.2, a).Selle konstruktsiooniga saadud ellipsit võib vaadelda kui ekraani suhtes kaldu asetatud suurema telgringjoone ristprojektsiooni. Lühema telje ja vastavate kõõlude moondetegurid on siis

$$m = \frac{OB'}{OB} = \frac{LN'}{LN}$$

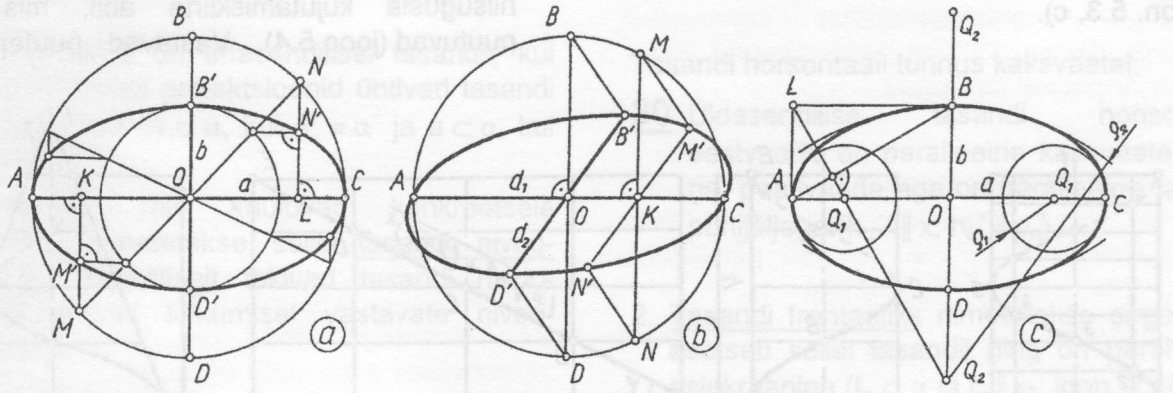
2. Ellipsi konstrueerimine kaasdiameetrite järgi.

Joonisel 5.2, b on esitatud üks võimalikest konstruktsioonidest ellipsi punktide tuletamiseks, lähtudes kaasdiameetritest d_1 ja d_2 . Siin võime konstrueeritavat ellipsit pidada ruumipööratud ringjoone kaldprojektsiooniks ning ellipsi kaasdiameetreid selle ringjoone ristdiameetrite kaldprojektsioonideks. Diameetriga paralleelsed ringjoone kõõlud projekteeruvad seega vastava kaasdiameetri suhtes paralleelseteks ellipsi kõõludeks moondeteguriga

$$m = \frac{B'D'}{BD} = \frac{M'N'}{MN}$$

3. Ellipsi joonestamine kõverusringjoonte abil.

Kui ellipsi suhtes ei olda eriti nõudlikud, võib tema joonestamisel piirduda ka ainult haripunktides asetsevate kõverusringjoonte kasutamisega (joon. 5.2, c). Jooniselt selgub kõverustsentrite Q_1 ja Q_2 ning kõverusraadiuste ρ_1 ja ρ_2 saamine. Selle konstruktsiooni eelduseks on, et joonestajal oleks kasutada niisuguse kujuga lekaalid, mis võimaldaksid kõverusringjooni sujuvalt ühendavaid ellipsi osi lekaali ühe asendiga haarata.



Joon. 5.2

5.3 Kruvijooned

Tehnikas esinevatest ruumikõveratest omavad erilist kohta kruvijooned. Tähtsamad neist on silindriline ja kooniline kruvijoon.

1. Silindriline ehk harilik kruvijoon on joon, mille tekitab pöördsilindri moodustajat mööda ühtlaselt liikuv punkt, kui silinder samaaegselt pöörleb ühtlaselt ümber oma telje (joon. 5.3, a). Hariliku kruvijoone võib tekitada ka tasandile joonestatud sirgjoonest, kui tasand painutada pöördsilindriliseks pinnaks (joon. 5.3, b). Kruvijoone osa, mis vastab punkti ühele täispöördele ümber silindri telje, nimetatakse kruvijoone keeruks. Keeru otspunktide vahelist kaugust nimetatakse silindrilise kruvijoone sammuks. Nagu selgub jooniselt 5.3, b, on keeru pikkus l lihtsalt avaldatav sammu ja raadiuse kaudu.

Kruvijooni liigitatakse parema- ja vasakukäelisteks. Kruvijoon on paremakäeline, kui telje sihis vaatlemisel punkti eemaldumine kruvijoont mööda toimub pöörlemisega päripäeva, vastasel korral aga vasakukäeline (joonised 5.3,a ja 5.3,b).

Hariliku kruvijoone kõik võrdse pikkusega tükid on kongruentsed. Järelikult harilik kruvijoon võib libiseda mööda iseennast.

2. Koonilist kruvijoont defineeritakse analoogiliselt silindrilise kruvijoonega; siin on eelduseks, et punkt liigub pöördkoonuse moodustajal. Koonilise kruvijoone sammuks on keeru otspunkte läbivate telje risttasandite vahekaugus (joon. 5.3, c).

Koonilise kruvijoone ristprojektsioon telje risttasandile osutub Archimedese spiraaliks.

5.4 Pindadest ja nende kujutamisest

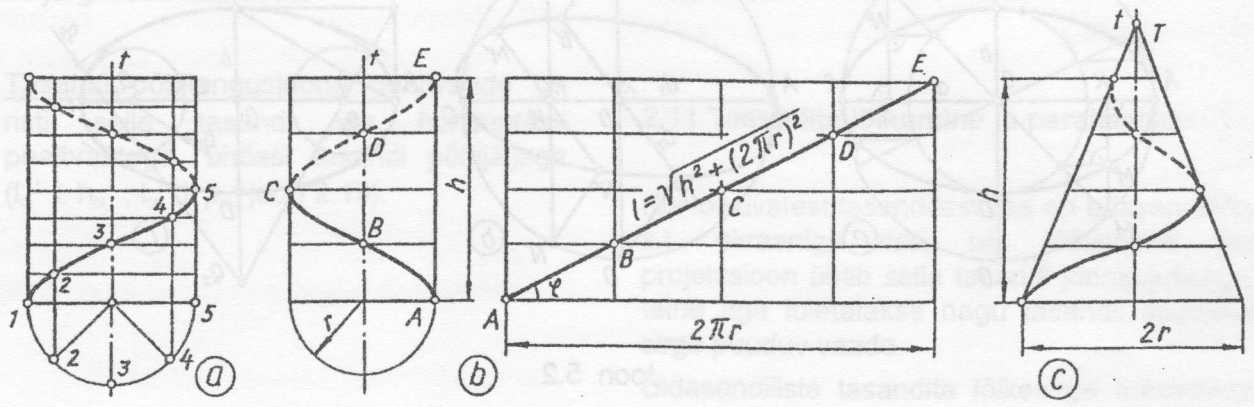
Pinda võib vaadelda ruumis liikuva joone – pinna moodustaja kõigi järjestikuste asendite koguna. Pind on määratud, kui on antud tema moodustaja kuju ja liikumise tingimused. Joone liikumisega tekitatavaid pindu nimetatakse kinemaatilisteks pindadeks.

Leidub pindu, mis pole tekitatavad joone liikumisega. Selle tüüpiliseks näiteks on topograafiline pind (maapind). Et niisuguste pindade määramiseks antakse ette karkass, nimetatakse neid pindu karkasspindadeks.

Pindu, mida saab esitada võrrandite abil, nimetatakse analüütilisteks pindadeks. N-astme algebralise võrrandiga määratavat pinda nimetatakse n-järku algebraliseks pinnaks. Geomeetriliselt on algebralise pinna järk võrdne selle pinna tasandilise lõikejoone järguga või selle pinna ja sirge lõikepunktide arvuga.

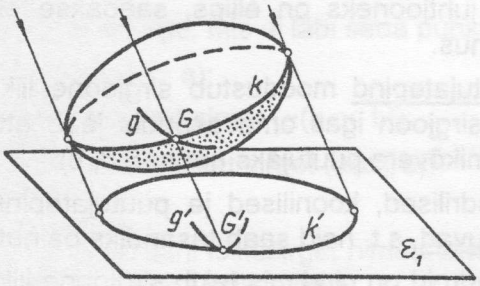
Pindasid liigitatakse klassideks järgu, moodustaja kuju, moodustaja liikumise tingimuste ja muude aluste järgi. Tehnikas rakendatakse peamiselt järgmisi pindade klasse: pöördpinnad, joonpinnad, üldised teist järku pinnad, kruvipinnad ja tsüklilised pinnad.

Pinna kujutamisel saadakse kujutise kontuur k´ niisuguste kujutamiskiirte abil, mis pinda puutuvad (joon 5.4). Vastavad puutepunktid



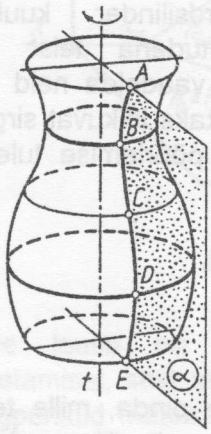
Joon. 5.3

aga moodustavad pinna kontuuri k. Kõverpinnal oleva joone g pinna kontuuril olev punkt G projekteerub joone kujutise g´ ja pinna kujutise kontuuri k´ puutepunktiks G´.

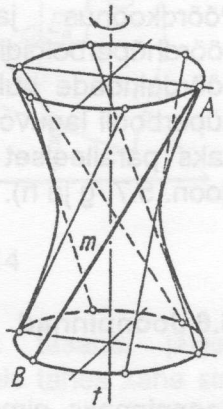


Joon. 5.4

moodustaja telje suhtes kiivne, tekib tema pöörlemisest ühekatteline pöördhüperboloid (joon. 5.6).



Joon. 5.5



Joon. 5.6

5.5 Pöördpinnad

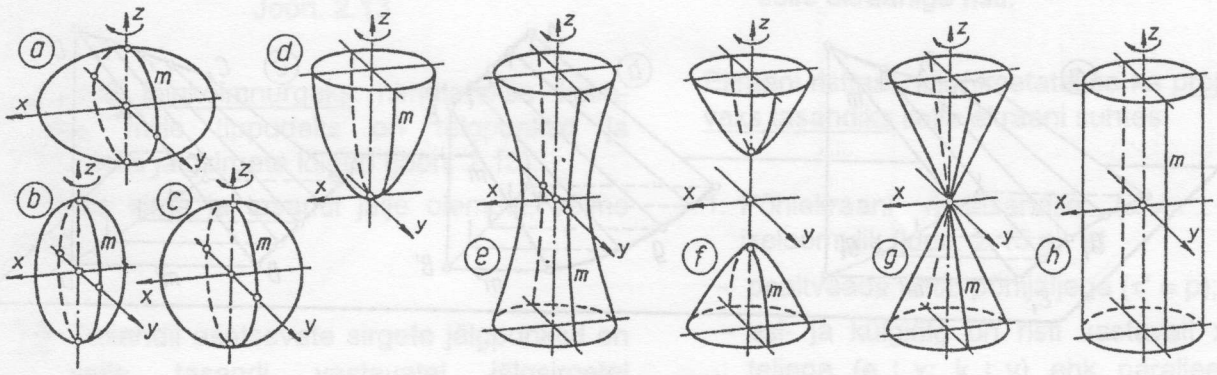
Pöördpind tekib mis tahes joone (moodustaja) pöörlemisel ümber sirgjoone kui telje (joon. 5.5). Pöördpinna teljega risti olevaid lõikeid nimetatakse pöördpinna paralleelideks. Suurima ja väikseima raadiusega paralleele nimetatakse vastavalt pöördpinna ekvaatoriks ja kaelaks. Kahe paralleeliga piiratud pöördpinna osa nimetatakse pöördpinna vööks. Pöördpinna lõikamisel telge läbiva tasandiga (joonisel α) saadakse pöördpinna meridiaan.

Kõige sagedamini kohtame praktikas sirge moodustajaga pöördpindu – pöördsilindrit ja pöördkoonust. Neid pindu saab tekitada vastavalt telje paralleelsirge ja telje kaldlõikaja pööramisega ümber selle telje. On aga

Teist järku joone (ellipsi, hüperbooli ja parabooli) pöörlemisel ümber oma sümmeetriatelje tekkivaid pindu nimetatakse teist järku pöördpindadeks. Need kõik on piltlikult kujutatud joonisel 5.7.

Pöördellipsoid tekib ellipsi pöörlemisel ümber oma telje. Saadakse lapik või piklik pöördellipsoid olenevalt sellest, kas pöörlemine toimub ümber lühema või pikema telje (joon. 5.7, a ja b). Sfääri tuleb vaadelda kui ellipsoidi erijuhtu (joon. 5.7, c).

Pöördparaboloid tekib parabooli pöörlemisel ümber oma sümmeetriatelje (joon. 5.7, c).



Joon. 5.7

Ühekatteline pöördhüperboloid tekib hüperbooli pöörlemisel ümber kaastelje (joon. 5.7, e).

Kahekatteline pöördhüperboloid tekib hüperbooli pöörlemisel ümber fokaaltelje (joon. 5.7, f).

Pöördkoonus ja pöördsilinder kuuluvad pöördhüperboloidi erijuhtudena teist järku pöördpindade hulka, kui vaadelda neid nagu hüperbooli laguvormide (kaks lõikuvat sirget ja kaks paralleelset sirget) pöörlemise tulemust (joon. 5.7, g ja h).

5.6 Joonpinnad

Joonpinnaks nimetatakse pinda, mille tekitab kindlate tingimuste kohaselt liikuv sirgjoon (moodustaja). Neist tähtsamad on loetletud allpool.

Silindriline pind tekib sirgjoone liikumisel, kui sirgjoon igas oma asendis lõikab antud juhtjoont p ja jääb paralleelseks antud sihisirgega s (joon. 5.8, a). Kui juhtjooneks on teist järku joon, siis on tegemist teist järku silindriga (elliptiline, hüperboolne või paraboolne).

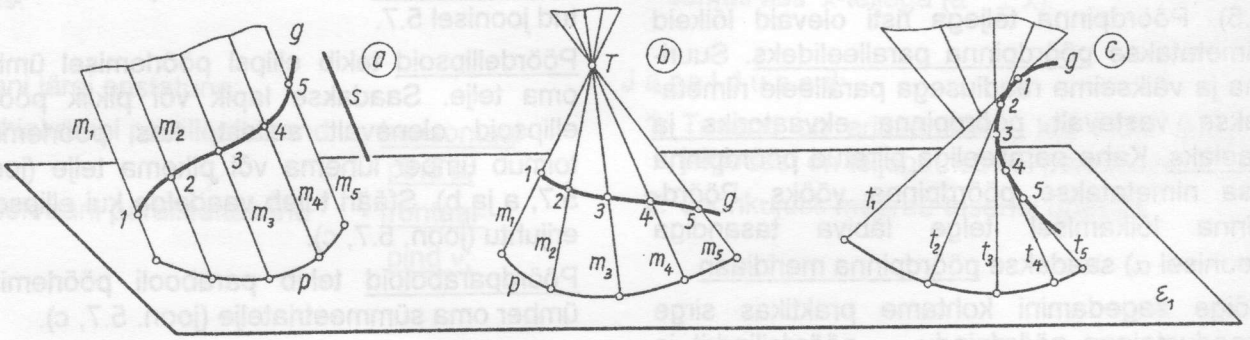
Kooniline pind tekib sirgjoone liikumisel, kui sirgjoon igas oma asendis lõikab antud juhtjoont p ja läbib antud punkti T (joon. 5.8, b). Kui juhtjooneks on ellips, saadakse elliptiline koonus.

Puutujatepind moodustub sirgjoone liikumisel, kui sirgjoon igas oma asendis jääb etteantud ruumikõvera puutujaks (joon. 5.8, c).

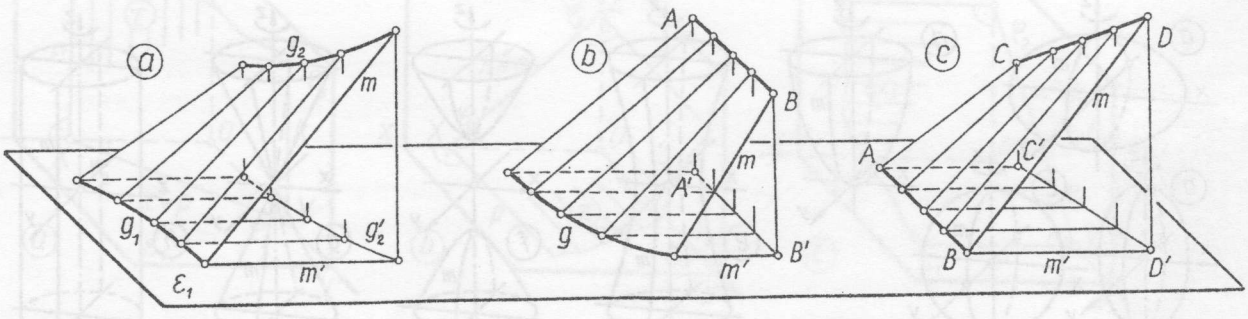
Silindrilised, koonilised ja puutujatepinnad on laotuvad, s.t. neid saab tasandiks painutada.

Silindroid on pind,mis tekib sirgjoone liikumisel, kui sirgjoon igas oma asendis lõikab kahte antud juhtjoont (g_1 ja g_2) ja jääb paralleelseks antud juhtpinnaga (näiteks ε_2, nagu joon. 5.9, a).

Silindroidi, mille üks juhtjoon on sirge, nimetatakse konoidiks (joon. 5.9, b). Kui silindroidi juhtjoonteks on kaks kiivsirget, siis saadakse hüperboolne paraboloid (joon. 5.9, c).



Joon. 5.8



Joon. 5.9

Ühekatteline hüperboloid on joonpind, mille juhtjoonteks on kolm üksteise suhtes kiivset sirget.

5.7 Üldised teist järku pinnad

Joonisel 5.10 on antud kõigi üldiste teist järku pindade aksonomeetrilised kujutised. Nagu selgub, kuulub suurem osa pindu üheaegselt mitmesse pindade klassi. Üldiste teist järku pindade loetelus on taoliste seoste näitamiseks kasutatud järgmist märgistust:

× – on ühtlasi joonpind, st tekib sirgjoone liikumisel;

○ – esineb ka pöördpinnaline vorm.

a) elliptiline silinder ⊗;
b) hüperboolne silinder ×;
c) paraboolne silinder ×
d) elliptiline koonus ⊗;
e) ellipsoid ○;
f) ühekatteline hüperboloid ⊗;
g) kahekatteline hüperboloid ○;
h) elliptiline paraboloid ○;
l) hüperboolne paraboloid ×.

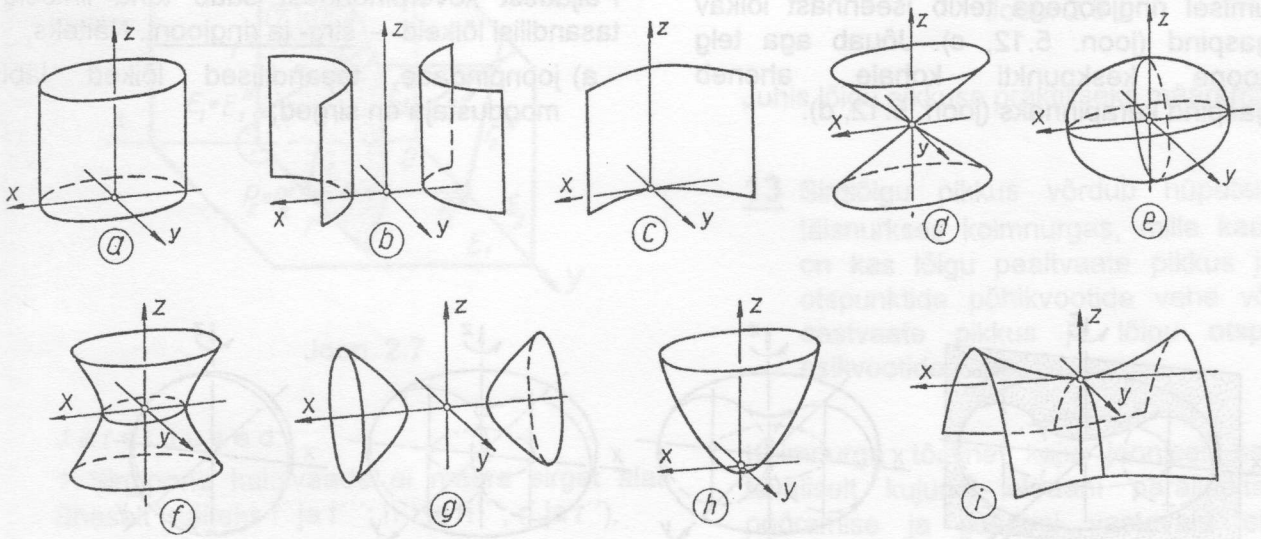
5.8. Kruvipinnad

Objekti liikumist, mille puhul kõik tema punktid liiguvad mööda niisuguseid silindrilisi kruvijooni, millel on ühine telg ja võrdne samm, nimetatakse kruvijooneliseks liikumiseks.

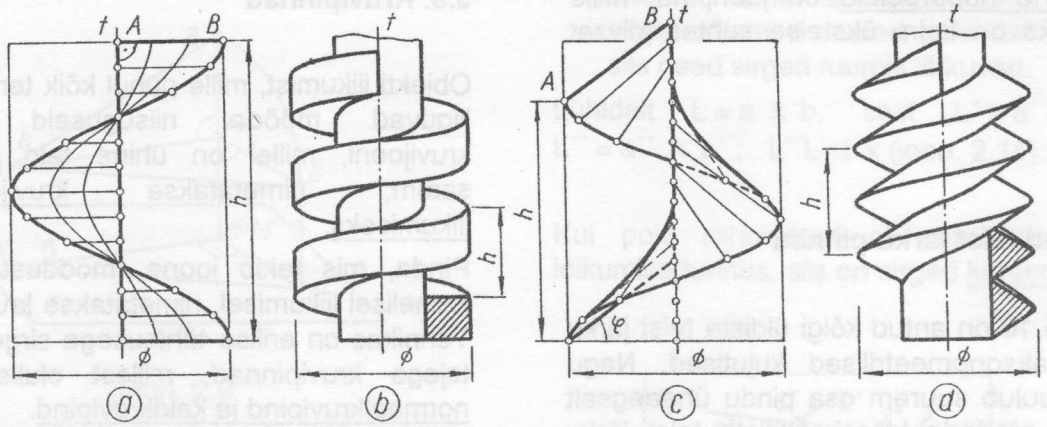
Pinda, mis tekib joone (moodustaja) kruvijoonelisel liikumisel, nimetatakse kruvipinnaks. Tehnikas on erilise tähtsusega sirge moodustajaga kruvipinnad, millest olulisemad on normaalkruvipind ja kaldkruvipind.

Normaalkruvipind tekib telje ristlõikaja kruvijoonelisel liikumisel. Ta kuulub ühtlasi joonpindade klassi konoidide rühma, sest telgsirget ja kruvijoont võib vaadelda juhtjoontena, telje risttasandit aga juhtpinnana (joon. 5.11, a). Normaalkruvipinna rakendusena võiks nimetada ruutkeeret, s.o. keha, mis tekib ruudu kruvijoonelisel liikumisel, kui ruudu kaks külge on telje ristlõikajad (joon. 5.11, b).

Kaldkruvipind tekib telje kaldlõikaja kruvijoonelisel liikumisel (joon. 5.11, c). Kaldkruvipind leiab rakendamist kolmnurkkeermе juures. Taoline keermekeha tekib võrdhaarse kolmnurga kruvijoonelisel liikumisel ümber kolmnurga tasandis asetseva telje nii, et alus on teljega paralleelne ja haarad on kruvipindade moodustajad. Joonisel 5.11, d on kujutatud kahekäiguline kolmnurkkeere.



Joon. 5.10



Joon. 5.11

5.9 Tsüklilised pinnad

Tsükliline pind tekib püsiva või muutuva raadiusega ringjoone liikumisel. Järelikult saab tsüklilise pinna iga punkti kohalt teha tasandilise lõike, mille kuju on ringjoon.

Tsüklilist pinda, mis tekib püsiva raadiusega ringjoone pöörlemisel ümber selle ringjoone tasandil asuva telje, nimetatakse rõngas-pinnaks. Seega kuulub see pind üheaegselt nii tsüklilise kui ka pöördpindade klassi. Rõngaspind on neljandat järku pind.

Joonisel 5.12 on kujutatud rõngaspinda ja tema võimalikke erivorme. Kõige üldisemas tähenduses on rõngaspind auguga, s.t. telg asetseb väljaspool ringjoont (joon. 5.12, a). Kui telg puutub ringjoont, saadakse iseennast puutuv rõngaspind (joon. 5.12, b). Telje lõikumisel ringjoonega tekib iseennast lõikav rõngaspind (joon. 5.12, c). Jõuab aga telg ringjoone keskpunkti kohale, aheneb rõngaspind kerapinnaks (joon. 5.12, d).

5.10 Kõverpindade lõikumised

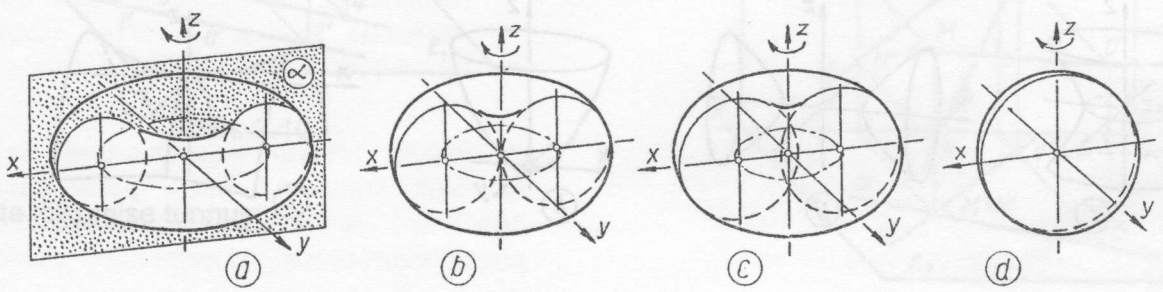
Kahe pinna lõikejoone tuletamisel kasutatakse harilikult nn. abipindade võtet. Kõverpindade korral avaldub selle võtte olemus järgmises lauses.

29 Antud pinnapaari lõigatakse niisuguste lihtsate abipindadega (tasandid, sfäärid), mis lõikuvad kummagi antud pinnaga mööda lihtsaid jooni (sirg- ja ringjooni); iga abipinna kaudu saadud lihtsad abilõiked omavahel lõikudes annavadki antud pindade lõikejoone punkte.

Olenevalt valitud abipindade süsteemist, nimetatakse lõikumisülesande lahendamise võtet kas abitasandite või abisfääride võtteks.

Paljudest kõverpindadest saab teha lihtsaid tasandilisi lõikeid – sirg- ja ringjooni. Näiteks,

a) joonpindade tasandilised lõiked läbi moodustaja on sirged;



Joon. 5.12

b) pöördpindade tasandilised lõiked risti teljega on ringjooned.

Neid tähelepanekuid tuleb osata kasutada kõverpindade lõikumiste lahendamisel.

5.10.1 Kõverpinna ja tasandi lõikumine

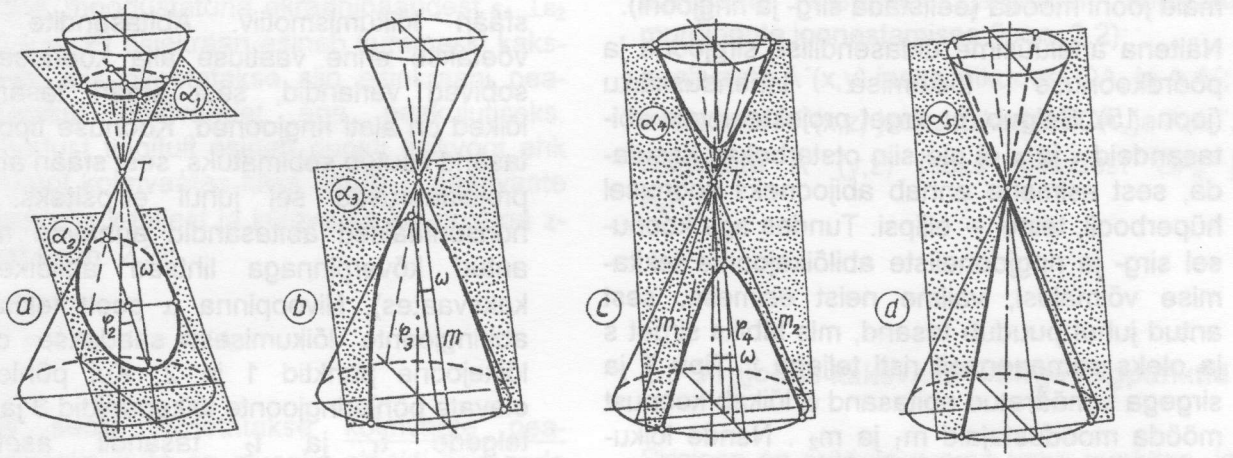
Kõverpinna ja mis tahes asendis tasandi lõikejoone tuletamisel kasutatakse abitasandite võtet. Abitasandid valitakse kõverpinnast lähtudes nii,et tekiksid lihtsad abilõikejooned (sirg- ja ringjooned). Tasapinna suhtes ei oma abitasandi asend erilist tähtsust, sest siit tekkiv teine abilõikejoon on alati sirgjoon.

Taoliste ülesannete lahendamine muutub tunduvalt lihtsamaks ja täpsemaks, kui oskame ette näha, mis joon konkreetsest lõikumisest tekib. Selleks on vaja teada järgmisi seaduspärasusi.

1. Kerapinna iga tasandiline lõige on ringjoon.
2. Pöördsilindrilise pinna tasandiline lõige on üldjuhul ellips, erijuhul ringjoon ($\alpha \perp t$) või kaks paralleelset sirget ($\alpha \parallel t$).
3. Pöördkoonuse tasandiline lõige on
   - ringjoon, kui $\alpha_1 \perp t$ või $\varphi_1 = 90^0$ (joon. 5.13, a);
   - ellips, kui $\alpha_2 \times \Sigma m$ või $\varphi_2 > \omega$ (joon. 5.13, a);
   - parabool, kui $\alpha_3 \parallel m$ või $\varphi_3 = \omega$ (joon.5.13, b);
   - hüperbool, kui $\alpha_4 \parallel \begin{cases} m_1 \\ m_2 \end{cases}$ või $\varphi_4 < \omega$ (joon 5.13, c);
   - kaks lõikuvat sirget, kui $\alpha_5 \supset T$ ja $\varphi_5 < \omega$ (joon. 5.13, d).

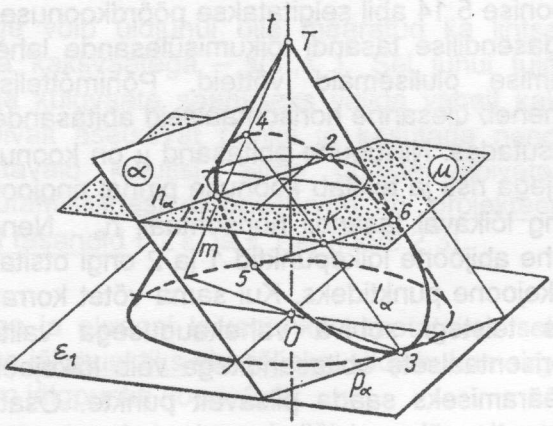
Märkus: φ - nurk lõikava tasandi ja telje vahel;
ω - nurk koonuse moodustaja ja telje vahel.

Joonise 5.14 abil selgitatakse pöördkoonuse ja üldasendilise tasandi lõikumisülesande lahendamise olulisemaid võtteid. Põhimõtteliselt laheneb ülesanne horisontaalseid abitasandeid kasutades. Niisugune abitasand μ on koonuse teljega risti ja tekitab koonuse pinnal ringjoone ning lõikaval tasandil horisontaali h_α . Nende kahe abijoone lõikepunktid 1 ja 2 ongi otsitava lõikejoone punktideks. Kui sama võtet korrata, siis teistegi sobiva vahekaugusega valitud horisontaalsete abitasanditega võib lõikejoone määramiseks saada piisavalt punkte. Osates aga ette näha, et lõikejooneks kujuneb ellips, püütakse kõigepealt leida lõikeellipsi haripunktid. Et üheks haripunktiks on lõikava tasandi põhijälje p_α ja põhiekraanil paikneva koonuse põhiringjoone puutepunkt 3,



Joon. 5.13

siis saadakse ellipsi samal teljel olev teine haripunkt 4 punkti 3 läbiva (koonuse telge lõikava) põhilangusjoone l_α ja teda põhiekraanile projekteerival tasandil oleva koonuse moodustaja m lõikumisest. Edasi määratakse ellipsi keskpunkt K lõigu 34 poolitamise teel ja tuletatakse ülejäänud haripunktid 5 ja 6, kasutades vaid keskpunkti K läbivat horisontaalset abitasandit. Ellipsi haripunktide kasutamisel piisab antud ülesandes lõike täpseks määramiseks vaid kolmest abitasandist.

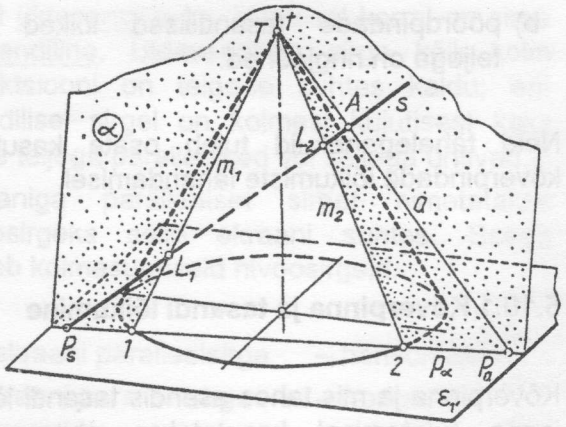


Joon. 5.14

5.10.2 Kõverpinna ja sirge lõikumine

Sirgjoone ja kõverpinna lõikumine lahendatakse analoogiliselt sirge ja tasandi lõikumisega. Sirget läbiv tasand on soovitatav valida nii, et ta lõikuks kõverpinnaga võimalikult lihtsamaid jooni mööda (eelistada sirg- ja ringjooni).

Näitena analüüsime üldasendilise sirgjoone ja pöördkoonuse lõikumise lahenduskäiku (joon. 15). Selgub, et sirget projekteerivaid abitasandeid τ ja π ei ole siin otstarbekas kasutada, sest esimene annab abijooneks koonusel hüperbooli, teine – ellipsi. Tundes aga koonusel sirg- ja ringjooneliste abilõikejoonte tekitamise võimalusi, valime neist esimese, sest antud juhul puudub tasand, mis läbiks sirget s ja oleks samaaegselt risti teljega t. Tipu T ja sirgega s määratud abitasand α lõikab koonust mööda moodustajaid m_1 ja m_2 . Nende lõikumisest sirgega s saadakse lõikepunktid L_1 ja L_2. Abisirged m_1 ja m_2 leitakse tasandi α põhijälje



Joon. 5.15

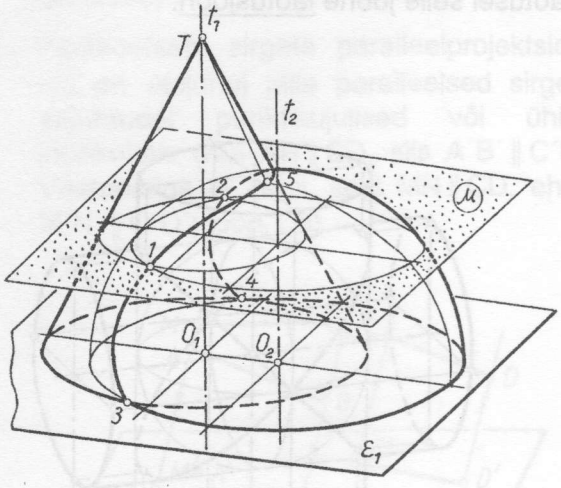
p_α ja koonuse põhjaringjoone (koonuspinna põhijälje) lõikepunktide 1 ja 2 kaudu. Tasandi põhijälje tuletamiseks kasutatakse sellel tasandil vabalt võetud sirget a(A, T).

5.10.3 Kõverpindade omavaheline lõikumine

Kõverpindade omavahelise lõikumise ülesandeid lahendatakse üldjuhul abitasandite võttega. Teatud tingimustel saab abipindadena kasutada ka kontsentrilisi ja ekstsentrilisi sfääre. Allpool käsitleme mõlemaid võtteid konkreetsete näidete varal.

1. Abitasandite võtte kasutamine

Joonisel 5.16 on antud pöördkoonuse ja poolsfääri lõikumismotiiv. Abitasandite valikul võetakse enne vaatluse alla koonuse jaoks sobivad variandid, sest sfääri tasandilised lõiked on alati ringjooned. Koonuse tippu läbiv tasand osutub sobimatuks, sest sfääri abilõiked projekteeruvad sel juhul ellipsiteks. Ainult horisontaalsed abitasandid annavad mõlema antud kõverpinnaga lihtsad abilõiked (ka kaksvaates). Nivoopinna μ poolt tekitatavate abiringjoonte lõikumisest saadakse otsitava lõikejoone punktid 1 ja 2. Kui põhiekraanil olevate põhjaringjoonte lõikepunktid 3 ja 4 ning telgede t_1 ja t_2 tasandil asetsevate moodustajate lõikepunkt 5 eelnevalt fikseerida, pole raske teha lõikejoone täpseks määramiseks sobiv abitasandite jaotus.

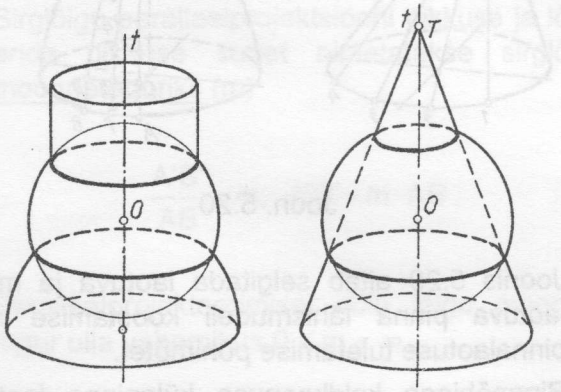


Joon. 5.16

2. Abisfääride võtte kasutamine

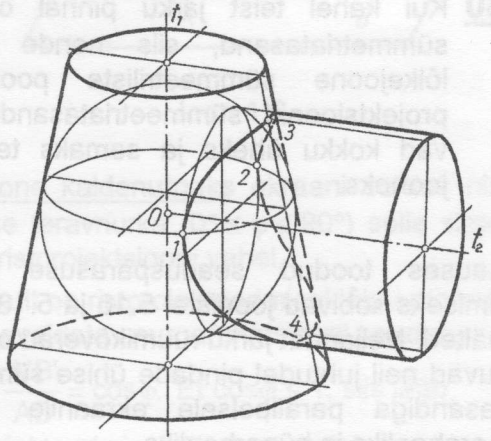
Ühise teljega pöördpinnad saavad lõikuda ainult mööda ringjooni, mille tasand on risti pöördpindade teljega. Järelikult ka sfäär, mille keskpunkt asetseb pöördpinna teljel, annab pöördpinnaga lõikumisel ringjoone (joon. 5.17). Mainitud asjaolu ongi abisfääride võtte aluseks. Kontsentrilisi (ühise tsentriga) abisfääre saab kasutada lõikumisülesande lahendamisel, kui on täidetud järgmised tingimused:

1) mõlemad pinnad on pöördpinnad;
2) nende pöördpindade teljed lõikuvad;
3) telgede tasand on ekraaniga paralleelne.



Joon. 5.17

Joonisel 5.18 on kujutatud pöördkoonuse ja pöördsilindri lõikumine. Lahendamisel saab kasutada kontsentrilisi abisfääre, sest sellekohased nõuded on täidetud. Et abisfäär lõikaks mõlemat pöördpinda mööda ringjooni, peab tsenter asetsema mõlemal teljel, s.t. telgede lõikepunktis. Lahendamist alustatakse sfääriga, mis suuremat pinda puutub ja väiksemat lõikab. Ühel ja samal sfääril olevate ringjoonte lõikepunktid 1 ja 2 osutuvadki lõikejoone punktideks. Korrates sama konstruktsiooni suuremate sfääridega, saab lõikejoone määramiseks leida piisaval arvul punkte. Vahemik, mille piires on abisfääridega vaja punkte tuletada, määratakse telgede t_1 ja t_2 tasandil asetsevate moodustajate lõikepunktidega 3 ja 4.



Joon. 5.18

Abisfääride võtet saab kasutada ka mõningate pöörd- ja tsükliliste pindade lõikumiste korral. Sel juhul tuleb iga sfääri tsenter ja raadius tuletada tsüklilisel pinnal valitud abiringjoonest lähtudes. Taolised ülesanded moodustavadki ekstsentriliste sfääride kasutamise valdkonna.

Kõverpindade lõikumiste lahendamisel on mõeldav ka lisaekraani ja uute kujutamiskiirte võtte rakendamine. Need võtted on aga efektiivsed ainult kitsalt spetsiifiliste ülesannete korral.

J ä r e l d u s e d:

1. Lõikejoone väljajoonestamisel tuleb lõikejoone punktid ühendada vastavate pindade paiknemise järjekorras. Ühe vaate järgi määratud punktide ühendamise järjekord kehtib kõigi ülejäänud vaadete joonestamisel.

2. Lõikejoone osad on mingis vaates nähtavad, kui tema punktid on selles vaates nähtavad mõlema pinna suhtes eraldi vaadatuna, vastasel korral on need mittenähtavad.

3. Abisfääride võte võimaldab lõikejoont tuletada ühesainsas ristprojektsioonis ekraanil, mis on paralleelne pöörlemistelgede tasandiga.

5.11 Teist järku pindade lõikumise erijuhtumid

Allpoòl vaatleme ainult praktikas enamesinevaid teist järku pindade lõikumise erijuhtumeid.

30 Kui kahel teist järku pinnal on ühine sümmetriatasand, siis nende pindade lõikejoone sümmeetriliste poolte ristprojektsioonid sümmeetriatasandil langevad kokku üheks ja samaks teist järku jooneks.

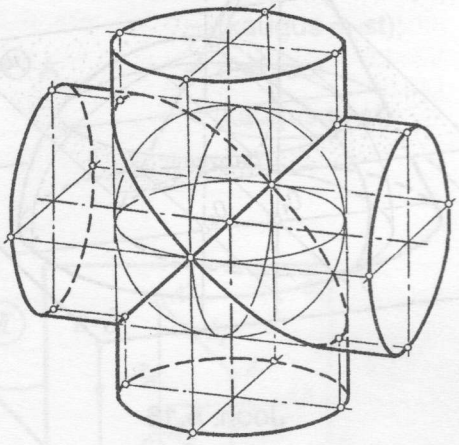
Lauses toodud seaduspärasuse illustreerimiseks sobivad joonistel 5.16 ja 5.18 esitatud näited. Neljandat järku ruumikõverad projekteeruvad neil juhtudel pindade ühise sümmeetriatasandiga paralleelsele ekraanile vastavalt parabooliks ja hüperbooliks.

31 Kui kaks teist järku pinda puudutavad ühte ja sama kolmandat teist järku pinda jooni mööda, siis need kaks pinda lõikuvad kahte teist järku joont mööda, mille tasandid läbivad puutejoonte tasandite lõikesirget (Monge´i teoreem).

Selle teoreemi olemust selgitab joonis 5.19. Ühise puutesfääriga (võrdse läbimõõduga) silindrite lõikejoon lagub kaheks ellipsiks.

5.12 Kõverpindade laotused

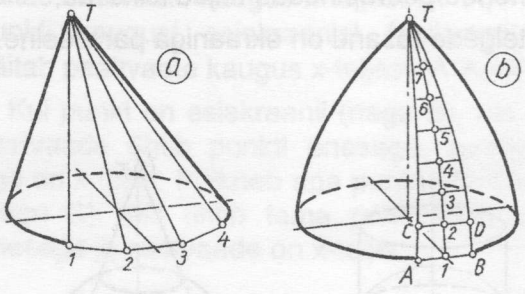
Kujundit, mis saadakse laotuva pinna koolutamisel tasandiks, nimetatakse selle pinna laotuseks. Pinnale kuuluvast joonest saadakse laotusel selle joone laotusjoon.



Joon. 519

Mittelaotuvaid pindu pole võimalik tasandiks koolutada ja nende tinglaotused saadakse laotuvate pindade osadest koostatud lähismudelite laotusena.

Praktiliselt tuletatakse aga ka laotuvate pindade laotusi lähismudelite järgi. Selleks asendatakse antud kõverpind niisuguse tahukaga, mille tahkude arv on küllalt suur ja tahud küllalt kitsad. Nii saadud tahuka laotus osutub antud kõverpinna ligikaudseks laotuseks.



Joon. 5.20

Joonis 5.20 aitab selgitada laotuva ja mittelaotuva pinna lähismudeli koostamise ning pinnalaotuse tuletamise põhimõtet.

Ringpõhjaga kaldkoonuse külgpinna laotuse saamiseks asendatakse koonus püramiidiga (joon. 5.20, a). Püramiidi kolmnurksete tahkude tõelistest kujudest kokku pandud laotusel

ühendatakse püramiidi põhja tipud (koonuse moodustajate otspunktid) 1, 2, 3 jne. lekaalkõveraga ja saadakse koonuse külgpinna ligikaudne laotus.

Kuhjakujulise pöördpinna tinglaotuse saamiseks asendatakse pöördpind silindrilise pinna ribadest moodustatud lähismudeliga (joon. 5.20, b). Kogu pind jaotatakse võrdseteks sobiva laiusega ribadeks nii, et silindrilise pinna juhtjooneks kujuneb riba keskkohal olev meridiaan, kusjuures moodustajad on juhtjoonega risti. Nende moodustajate otspunkid asetsevad ribasid üksteisest eraldavatel meridiaantasanditel. Tinglaotuse saamiseks piisab ühe taolise riba tõelise kuju väljajoonestamisest. Sama pöördpinna tinglaotuse saaks teha ka antud pinna vöösid asendavatest pöördkoonuse vöödest kokkupandud lähismudeli vahendusel.

6. AKSONOMEETRIA

6.1 Aksonomeetria üldiseloomustus ja liigid

Aksonomeetriaks nimetatakse niisugust kujutamisviisi, milles kujutis konstrueeritakse objekti punktide ristkoordinaatide järgi teljestiku kujutise baasil. Sel viisil valmistatud kujutisi nimetatakse aksonomeetrilisteks kujutisteks.

Aksonomeetrilise kujutise tuletamiseks on vaja

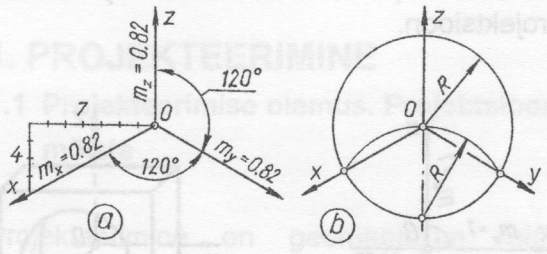
- siduda kujutatav objekt ristteljestikuga;
- joonestada teljestiku kujutis ja täpsustada moondetegurid telgedel;
- tuletada objekti kujutis, kasutades punktide märkimiseks koordinaatlõikude murdjooni.

Aksonomeetria põhiliseks probleemiks on seega õigete ja sobivate projektsioonide tuletamine teljestikust kui omaette kujutamisobjektist. Põhiliselt kasutatakse aksonomeerias paralleelprojekteerimist. Sõltuvalt sellest, kas teljestikust tehakse rist- või kaldprojektsioon, liigitatakse ka aksonomeetriat vastavalt rist- ja kaldaksonomeetriaks. Aksonomeetriliste kujutiste konstrueerimisel tuleb arvestada telgede asendist tingitud moondetegureid (ühiklõigu kujutise ja tõelise pikkuse suhe). Teljestiku ja temaga seotud objekti aksonomeetrilisi kujutisi liigitatakse telgede moondetegurite vahekorra alusel järgmiselt.

1) Isomeetrilised ehk võrdmõõdulised ($m_x = m_y = m_z$).
2) Dimeetrilised ehk kahemõõdulised ($m_x = m_z$; $m_x \neq m_y$).
3) Trimeetrilised ehk kolmemõõdulised ($m_x \neq m_y \neq m_z$).

Vastavalt kasutatud projektsiooni liigile ja moondetegurite vahekorrale saavad aksonomeetria liigid ka oma nimetuse. Järgnevalt tutvustame rist- ja kaldaksonomeetria olulisemaid liike.

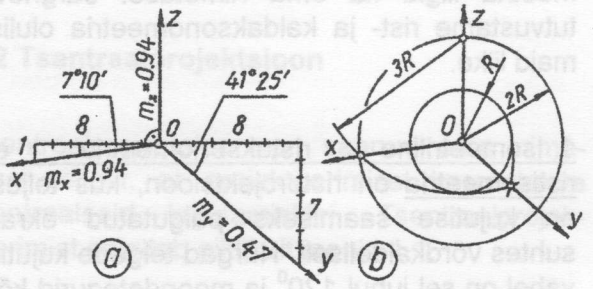
1. Isomeetriline ristaksonomeetria ehk ristisomeetria on ristprojektsioon, kus teljestik on kujutise saamiseks paigutatud ekraani suhtes võrdkaldeliselt. Nurgad telgede kujutiste vahel on sel juhul 120^0 ja moondetegurid kõigil telgedel $\sqrt{2/3} \approx 0{,}82$ (joon. 6.1, a). Praktikas kantakse kõik koordinaatlõigud vastavate telgede kujutiste sihis tõelises suuruses ja objektist saadakse suurendatud kujutis. Seega kasutatakse tegelikus joonestamistöös nn. taandatud moondetegureid 1 ja suurendustegur $k = \frac{1}{0{,}82} \approx 1{,}22$. Joonisel 6.1, b on näidatud ristisomeetria teljestiku kujutise konstruktsioon.



Joon. 6.1

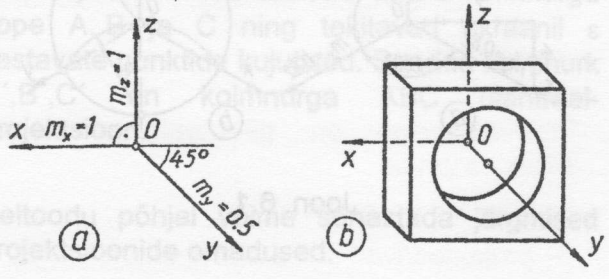
2. Dimeetriline ristaksonomeetria ehk ristdimeetria on ristprojektsioon, kus teljestiku kujutamisel kaks telge asetsevad ekraani suhtes võrdse nurga all. Kui telgede kaldenurgad on valitud nii, et ühe telje ühiku kujutis

tuleb kahe ülejäänud telje omast kaks korda lühem, on tegemist nn. standardse ristdimeetriaga (joon. 6.2, a). Sel juhul on moondetegurid kahel teljel 2/3 $\sqrt{2} \approx 0{,}94$ ja kolmandal teljel $1/3\sqrt{2} \approx 0{,}47$. Kasutades taandatud moondetegureid 1 ja 0,5, on kujutise suurendustegur $k = \frac{1}{0{,}94} \approx 1{,}06$. Joonisel 6.2, b on antud konstruktsioon standardse ristdimeetria teljestiku pildi joonestamiseks.



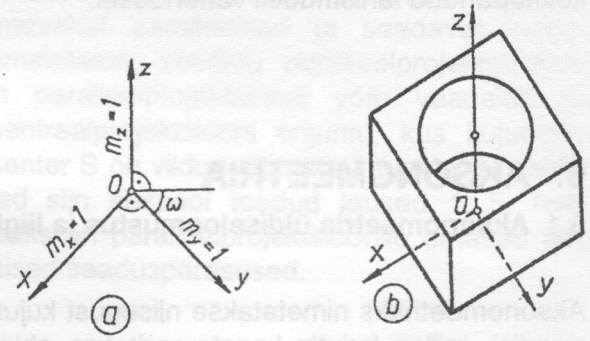
Joon. 6.2

3. Frontaalne dimeetriline kaldaksonomeetria ehk frontaalne kalddimeetria on kaldprojektsioon, kus ekraaniks võetakse xz-pind ja y-telg projekteeritakse sinna kaldkiirte abil. Kui kujutamiskiired on valitud nii, et y-telje kujutis tuleb telgede x ja z vahelise täisnurga poolitajale ning ühiklõik teljel projekteerub poole lühemana, on tegemist kabinetprojektsiooniga (joon. 6.3, a). Frontaalse kaldaksonomeetria eriliseks omaduseks on see, et kõik xz-pinnaga paralleelsed tasandilised kujundid projekteeruvad moondevabalt. Joonisel 6.3, b on antud lihtsa objekti kabinetprojektsioon.



Joon. 6.3

4. Horisontaalne isomeetriline kaldaksonomeetria ehk horisontaalne kaldisomeetria on kaldprojektsioon, kus ekraaniks võetakse xy-pind ja kujutamiskiirte kaldenurk ekraani suhtes on 45° (joon. 6.4). Et horisontaalse kaldisomeetria korral projekteeruvad kõik horisontaalsed tasandilised kujundid moondevabalt, kasutatakse seda aksonomeetria liiki sageli arhitektuurilistel joonistel ruumide sisustuse näitamiseks. Taolise joonise suur eelis seisneb selles, et ruumide plaanid säilitavad aksonomeetrias oma õige kuju ja kõik kõrgused on näha tõelises suuruses. Piltkujutise ilmekuse ja selguse suurendamise eesmärgil lubatakse telgede x ja y kujutiste asendit muuta nurga ω varieerimisega 30°, 45° ja 60°. Joonisel 6.4, b on kujutatud sama silindrilise auguga klots horisontaalses kaldisomeetrias.



Joon. 6.4

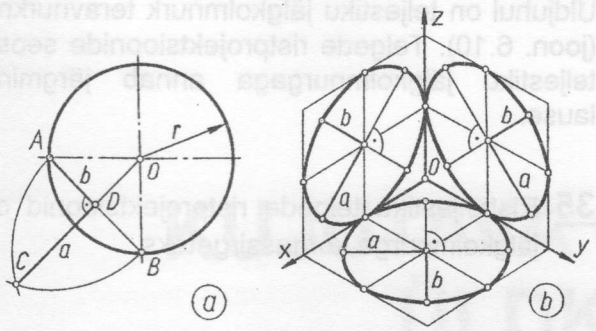
6.2 Koordinaatpindade paralleeltasanditel asetsevate ringjoonte kujutamine aksonomeetrias

Koordinaatpindadel või nendega paralleelsetel tasanditel olevate ringjoonte kujutamine ristaksonomeetrias on suhteliselt lihtne, sest vastavate kujutisellipsite telgede asend ja pooltelgede pikkus on kergesti määratavad.

32 Koordinaatpindade paralleeltasanditel asetsevate ringjoonte kujutiseks ristaksonomeetrias on ellips, mille lühem telg on ringi tasandiga risti oleva koordinaattelje kujutise sihiline, pikem telg aga sellega risti.

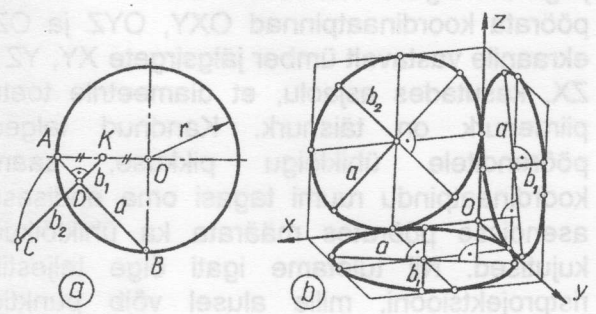
Joonisel 6.5, a on antud taandatud moondeteguritega ristisomeetria jaoks konstruktsioon mis tahes koordinaatpinna paralleeltasandil

oleva ringjoone kujutisellipsi pooltelgede a = 1,22r ja b = 0,71r graafiliseks määramiseks. Joonis 6.5, b aga näitab sama aksonomeetria liigi korral kõigil koordinaatpindadel asetsevate ringjoonte kujutisellipseid, joonestatuna koordinaattelgedega paralleelsete kaasdiameetrite ja pooltelgede järgi. Ellipsi kuju täpsustamiseks saab kasutada kaasdiameetrite otspunktides olevaid ellipsi puutujaid, mis ühendatuna moodustavad rombi.

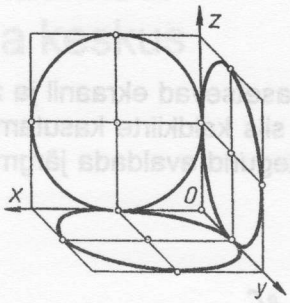


Joon. 6.5

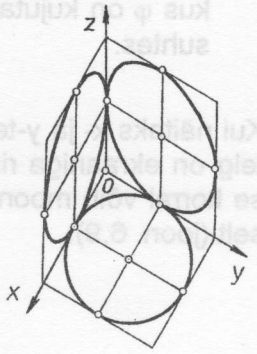
Analoogiline konstruktsioon pooltelgede graafiliseks määramiseks taandatud moondeteguritega ristdimeetria jaoks ja koordinaatpindade paralleeltasanditel olevate ringjoonte võimalikud kujutisellipsid on toodud joonisel 6.6, a ja b. Et tegemist on dimeetrilise teljestikuga, esineb siin kahesuguse kujuga ellipseid, kus pikem pooltelg a = 1,06r on kõigil võrdne, lühem pooltelg aga vastavalt $b_1 = a : 3$ ja $b_2 = 0,9a$. Ellipsi telgede orienteerimisel on ka siin aluseks lause 32.



Joon. 6.6



Joon. 6.7



Joon. 6.8

Joonistel 6.7 ja 6.8 on näidatud koordinaatpindadel olevate ringjoonte kujutised frontaalses kalddimeetrias ja horisontaalses kaldisomeetrias ($\omega = 30°$).

6.3 Aksonomeetria põhiteoreem

33 Ekraanile joonestatud kolme lõiku, mis algavad kõik ühest punktist, kuid ei asetse ühel sirgel, võib alati vaadelda ristteljestiku ühikkolmiku paralleelprojektsioonina.

Selle teoreemiga tõestatakse, et alati leidub niisugune paralleelkiirte siht, teljestiku asend ja ühiku pikkus, mis võimaldab saada konkreetse vabalt ette antud ühikkolmiku kujutise. Antud kujutisele vastava teljestiku ja kujutamiskiirte sihi leidmise ülesannet nimetatakse paralleelaksonomeetria põhiülesandeks. Kirjeldatud teoreemi tuntakse ka Pohlke teoreemina, vastavalt selle sõnastaja saksa matemaatiku Karl Wilhelm Pohlke nimele.

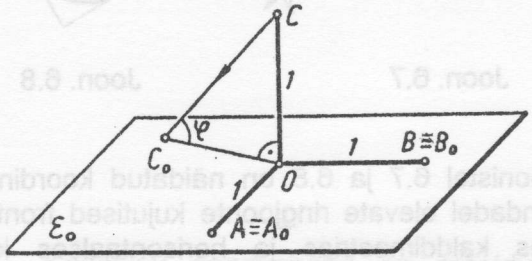
6.4 Seos moondetegurite vahel

Ristteljestiku telgede moondetegurid on omavahel seotud järgmise teoreemi alusel.

34 Paralleelprojektsiooni korral on ristteljestiku telgede moonetegurite ruutude summa jääv suurus, väärtusega $2 + \cot^2 \varphi$,

kus φ on kujutamiskiirte kaldenurk ekraani suhtes.

Kui näiteks x- ja y-telg asetsevad ekraanil ja z-telg on ekraaniga risti, siis kaldkiirte kasutamise korral võib moondetegurid avaldada järgmiselt (joon. 6.9):



Joon. 6.9

$m_x = 1$; $m_y = 1$ ja $m_z = OC_0 : OC = \cot\varphi$.

Seega telgede moondetegurite ruutude jääva summa valem ongi antud juhul

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2 + \cot^2 \varphi .$$

Et ristprojektsiooni korral kiirte kaldenurk $\varphi = 90°$ ning $\cot^2 \varphi = 0$, siis ristprojektsiooni puhul telgede moondetegurite ruutude summa võrdub kahega. Seega

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2.$$

Kui tähistada telgede x, y ja z kaldenurki ekraani suhtes vastavalt α, β ja γ, avalduvad moondetegurid järgmiselt (joon. 6.10):

$$m_x = \cos\alpha \; ; \; m_y = \cos\beta \; ; \; m_z = \cos\gamma .$$

Tehes eelmises valemis asendused, saame

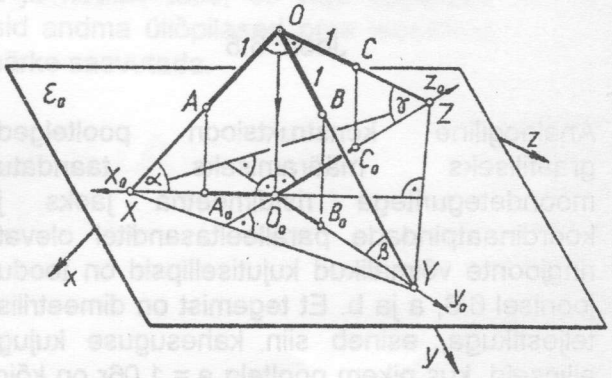
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2 .$$

Nii võib väita ka, et telgede kaldenurkade koosinuste ruutude summa võrdub kahega.

6.5 Teljestiku ristprojektsiooni saamine

Kolmnurka, mille tippudeks on telgede jälgpunktid ja külgedeks koordinaatpindade jälgsirged, nimetatakse teljestiku jälgkolmnurgaks. Üldjuhul on teljestiku jälgkolmnurk teravnurkne (joon. 6.10). Telgede ristprojektsioonide seose teljestiku jälgkolmnurgaga annab järgmine lause.

35 Ristteljestiku telgede ristprojektsioonid on jälgkolmnurga kõrgussirgeteks.



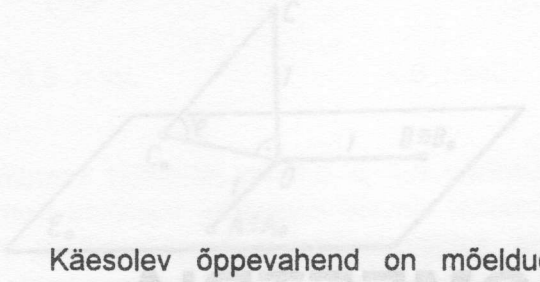
Joon. 6.10

Siit järeldub, et teljestiku ristprojektsiooni saab tuletada vabalt joonestatud teravnurksest jälgkolmnurgast lähtudes. Selleks on vaja pöörata koordinaatpinnad OXY, OYZ ja OZX ekraanile vastavalt ümber jälgsirgete XY, YZ ja ZX, kasutades asjaolu, et diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk. Kandnud telgede pöörenditele ühiklõigu pikkuse, saame koordinaatpindu ruumi tagasi oma endisesse asendisse pöörates määrata ka ühiklõikude kujutised. Nii tuletame igati õige teljestiku ristprojektsiooni, mille alusel võib punktide koordinaatide järgi joonestada objekti kujutist.

SISUKORD

Sissejuhatus

1. **Projekteerimine** ... 3
1.1 Projekteerimise olemus. Projektsiooni mõiste ... 3
1.2 Tsentraalprojektsioon ... 4
1.3 Paralleelprojektsioon ... 4
1.4 Ristprojektsioon ... 5
1.5 Projektsioonidele esitatavad nõuded ... 5
2. **Monge´i meetod** ... 6
2.1 Monge´i meetodi olemus. Punkti kaksvaade ... 6
2.2 Punkti kolmvaade. Projektsioonid koordinaatide järgi ... 7
2.3 Sirgjoone kaksvaade. Sirge jälgpunktid ... 7
2.4 Eriasendilised sirged ... 8
2.5 Sirglõigu pikkus ja kaldenurgad ... 9
2.6 Kahe sirge vastastikused asendid ... 10
2.7 Tasandi kujutamine Monge´i meetodil. Tasandi jälgsirged ... 11
2.8 Eriasendilised tasandid ... 11
2.9 Punkt ja sirge tasandil. Tasandi nivoosirged ... 13
2.10 Tasandi langusjooned ja kaldenurgad ... 14
2.11 Tasandite lõikumine ja paralleelsus ... 14
2.12 Sirge ja tasandi lõikumine ning paralleelsus ... 15
2.13 Tasandi normaal. Sirge ja tasandi ristseis ... 16
2.14 Ristsirged. Risttasandid ... 16
2.15 Nurgad sirgete ja tasandite vahel ... 16
3. **Lisaprojektsioonid** ... 17
3.1 Lisaprojektsioonide tuletamise viisid ... 17
3.2 Üldistatud kolmvaate mõiste ... 17
3.3 Lisaekraani praktiline kasutamine ... 18
3.4 Uute kujutamiskiirte võte ... 18
3.5 Objekti pööramine ümber ekraani normaali ... 19
3.6 Tasandi pööramine ümber jälje ... 19
4. **Tahukad** ... 20
4.1 Tahukate liigitelu ... 20
4.2 Tahukate lõikumised ... 20
5. **Kõverjooned ja kõverpinnad** ... 22
5.1 Joonte projektsioonilised omadused ... 22
5.2 Ellips ... 23
5.3 Kruvijooned ... 24
5.4 Pindadest ja nende kujutamisest ... 24
5.5 Pöördpinnad ... 25
5.6 Joonpinnad ... 26
5.7 Üldised teist järku pinnad ... 27
5.8 Kruvipinnad ... 27
5.9 Tsüklilised pinnad ... 28
5.10 Kõverpindade lõikumised ... 28
5.10.1 Kõverpinna ja tasandi lõikumine ... 29
5.10.2 Kõverpinna ja sirge lõikumine ... 30
5.10.3 Kõverpindade omavaheline lõikumine ... 30
5.11 Teist järku pindade lõikumise erijuhtumid ... 32
5.12 Kõverpindade laotused ... 32
6. **Aksonomeetria** ... 33
6.1 Aksonomeetria üldiseloomustus ja liigid ... 33
6.2 Koordinaatpindade paralleeltasanditel asetsevate ringjoonte kujutamine aksonomeetrias ... 34
6.3 Aksonomeetria põhiteoreem ... 35
6.4 Seos moondetegurite vahel ... 35
6.5 Teljestiku ristprojektsiooni saamine ... 36



Käesolev õppevahend on mõeldud Tallinna Tehnikaülikooli üliõpilastele abimaterjaliks kujutava geomeetria loengute kuulamisel ja läbitöötamisel. Taolise materjali koostamise tingis õppeaine tundide arvu oluline vähendamine 1991/92. õppeaastast kehtestatatud õppeplaanides. Et uutes tingimustes tagada kujutava geomeetria õpetamisel vajalik maht ja nõutav tase, oli vaja õppetööd intensiivistada. Põhilise panuse selleks peaksid andma üliõpilased oma iseseisva tööga. Loodame, et siinpakutu aitab neid eesmärke saavutada.

Kaane kujundas K.Gilts
Vastutav toimetaja J.Riives
© TTÜ insenerigraafika keskus