

O. Rünk, N. Paluver, A. Talvik

KUJUTAV GEOMEETRIA

Neljas, täiendatud trükk

**Lubatud Eesti NSV Kõrg- ja Keskerihariduse Ministeeriumi poolt
kasutada õpikuna Eesti NSV kõrgkoolides
tehnilistel erialadel**

TALLINN, «VALGUS» 1986

515
R 98

Kaane kujundanud R. Eilsen

R $\frac{2104000000-121}{M 902(16)-86}$ 11—85

© Kirjastus «Valgus», 1977
© Kirjastus «Valgus», 1986,
täiendustega

EESSÕNA

Käesolev õpik on 1961. a. ilmunud samasisulise raamatu neljas trükk. Õpiku koostamisel on arvestatud NSV Liidu Kõrg- ja Keskerihariduse Ministeeriumi poolt 1981. a. välja antud õppeprogrammi nõuetega. Sellega seoses on õpikusse taaslülitatud teljelist afiinsust käsitlev paragrahv; samuti on lisatud projektiivse ruumi mõistet ja raali kasutamise võimalusi kujutava geomeetria ülesannete lahendamisel tutvustavad paragrahvid. Vähesel määral on kärbitud varjude konstrueerimist käsitlevat osa.

Õpiku varasemates trükkides kasutatud termini «originaalvorm» asemel on tarvitusele võetud «tõeline kuju», eesliite «puutuv-» asemel «puute-». Ka on ühtlustatud muid termineid õpiku ulatuses.

Peenkirjaga esitatud palad on mõeldud täiendusmaterjalina neile, kes soovivad ainega põhjalikumalt tutvuda. Selle materjali vahelejätmine ei raskenda õppeaine järgnevate osade mõistmist.

Õpik rahuldab põhilises osas Eesti NSV kõikide kõrgkoolide nõudeid. Erandiks on arhitektuurieriala üliõpilased, kellele perspektiiviõpetuse osa ja varjude osa jääb napiks.

Et õpiku põhiautorid dots. O. Rünk ja dots. N. Paluver on manalasse varisenud, siis palun kõik märkused õpiku kohta saata aadressil: Tallinn, Ehitajate tee 5, Tallinna Polütehniline Instituut, graafika kateeder.

Tallinnas, 31. 05. 82.

A. Talvik

TÄHISTUSED

Käesolevas õpikus kasutatakse järgmisi tähiseid.

1. Ruumipunkte tähistatakse ladina suurtähtedega $A, B, C, D, \dots$ ning araabia numbritega $1, 2, 3, 4, \dots$.

2. Jooni tähistatakse ladina väiketähtedega $a, b, c, d, \dots$.

3. Pindu ja nurki tähistatakse kreeka väiketähtedega, eelistades järgmisi tähti:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \xi, \mu, \pi, \rho, \sigma, \tau, \varphi, \psi, \omega$.

4. Ekraani (projektsioonitasandi) tähiseks on üldiselt kreeka väiketäht ε . Mitme ekraani kasutamisel eristatakse üksikuid ekraane järjekorraindeksitega; nii näiteks ristkoordinaatpindu kui ekraane tähistatakse järgmiselt:

põhiekraan $xy \equiv \varepsilon_1$,
esiekraan $xz \equiv \varepsilon_2$ ja
külgekraan $yz \equiv \varepsilon_3$.

Aksonomeetrias ja perspektiiviõpetuses on ekraani tähiseks ε_0 .

5. Geomeetrilise elemendi kujutist (projektsiooni) tähistatakse elemendi enda tähisega, millele lisatakse projektsiooni märk kooskõlas

kujutist kandva ekraani indeksiga. Näiteks punkti A projektsioone mitmesugustel ekraanidel tähistatakse järgmiselt:

ekraanil ε_0 — A_0 loe: (A null);
ekraanidel ε ja ε_1 — A' (loe: A prim);

ekraanil ε_2 — A'' (loe: A sekund);
ekraanil ε_3 — A''' (loe: A terts);
ekraanil ε_4 — A^{IV} (loe: A kvart).

Praktilise aksonomeetria ja perspektiivi puhul jäetakse projektsiooni märk ($\circ$) ära.

6. Eriliste punktide ja sirgete tähistamiseks kasutatakse järgmisi tähti:

P, E, K — sirgjoone põhi-, esi- ja külgjalg;

p, e, k — tasandi põhi-, esi- ja külgjalg;

h, f — horisontaal ja frontaal; perspektiiviõpetuses — horisont ja pagujoon;

l — langusjoon;

n — normaal;

d — kaugus, perspektiiviõpetuses — distants;

τ, π — projekteerivad pinnad;

S — silmapunkt (projekteerimistsenter);

T — tuumpunkt;
 F — pagupunkt;
 $Oxyz$ — ristteljestik alguspunk-
 tiga O ;
 t, u, v — mitmesugused muud
 teljed.

7. Pööramisega või muu liikumi-
 sega teise kohta viidud geomeetrilist
 elementi tähistatakse elemendi enda
 tähisega, millele lisatakse peale
 rõhtne kriipsukene (näit. $\overline{A}$; loe
 A kaetud).

8. Geomeetriliste elementide vas-
 tastikuste asendite määramiseks
 kasutatakse järgmisi märke:

$\parallel$ — paralleelsus;
 $\perp$ — lõikumine;
 $\dashv$ — ristseis;
 $\triangle$ — täisnurga märk geomeetri-
 listel joonistel;

$\in, \subset$ — kuulumine, näiteks $A' \in p$
 (punkt A' kuulub sirgele p),
 $h \subset \alpha$ (sirge h kuulub tasan-
 dile α).

$\equiv$ — identsus (samusus), ühti-
 mine, näiteks:

$A' \equiv B'$ (punktid A' ja B' ühtivad);
 $s \equiv \alpha \times \beta$ (s on tasandite α ja β
 lõikesirge).

Tavalist võrdsusmärki kasutatakse
 ainult suuruste võrdumise korral.

9. Punkti koordinaadid, samuti
 joone ja pinna määramisandmed kir-
 jutatakse vastava elemendi tähise
 juurde sulgudesse, näiteks:

$A(x, y, z); \quad s(A, B); \quad \alpha(A, j);$
 $\beta(A, B, C).$

Sulgudesse kirjutatakse ka punkti
 kõrgusarv kvooditud ristprojekt-
 siooni puhul, näiteks $A'(4)$.

I. SISSEJUHATUS

§ 1. KUJUTAVA GEOMEETRIA SISU JA EESMÄRK

1. Kujutava geomeetria sisu. Kujutav geomeetria on geomeetria erihar, milles käsitletakse põhiliselt järgmisi küsimusi:

1) objektidest tasandiliste kujutiste (jooniste) tuletamist;

2) ruumigeomeetriliste ülesannete lahendamist kujutiste abil.

Muudest geomeetria harudest erineb kujutav geomeetria eriti ülesannete lahendamiseviisi poolest. Kui geomeetria muudes harudes (stereomeetrias, analüütilises geomeetrias jm.) rakendatakse ülesannete lahendamisel põhiliselt arvutuslikke meetodeid, siis kujutavas geomeetrias lahendatakse kõik ülesanded graafiliselt. Seetõttu on joonisel kujutavas geomeetrias eriline tähtsus: joonis on siin selleks põhivahendiks, mille alusel ja mille peal toimub kogu ülesande lahendamine. Mujal matemaatikas, nagu teame, on joonistel ainult illustreeriv tähendus.

Joonis saab olla ainult siis ülesande lahendamise aluseks, kui ta

üheselt määrab kujutatud objekti kõik geomeetrilised omadused, s. o. tema kuju, suuruse ja üksikute osade vastastikuse asendi. Kui joonis seda nõuet täidab, siis nimetatakse teda **objekti määravaks jooniseks**. Objekti määravat joonist võib lugeda samaväärseks selle objekti mudeliga. Tavaliselt koosneb niisugune joonis objekti mitmest kujutisest. Kõige tähtsamateks objekti määravateks joonisteks on tehnilised joonised, mille järgi toimub toodete valmistamine või ehitiste püstistamine.

Objekti kuju, suuruse ja tema osade vastastikuse asendi kindlaks tegemist joonise järgi nimetatakse joonise **lugemiseks**.

2. Kujutava geomeetria eesmärk. Kujutava geomeetria esimeseks ja kõige olulisemaks eesmärgiks on teoreetiliste aluste andmine jooniste valmistamiseks ja lugemiseks. Sellega rajab kujutav geomeetria aluse tehnilisele joonestamisele. Samuti kasutavad kujutava geomeetria tulemusi kõik muud teaduse ja tehnika alad, kus on tegemist joonistega.

Joonise lugemisel tuleb kujutiste

järgi luua täielik ettekujutus joonisel esitatud objektist. See nõuab lugejalt arenenud ruumikujutluse olemasolu. Inimese ruumikujutluse arendamine ongi kujutava geomeetria teiseks tähtsaks eesmärgiks. Hästi väljaarenenud ruumikujutus on eriti tähtis konstruktoritel, arhitektidel ja inseneridel, kellele tuleb ettekujutuse järgi teha tulevaste ehitiste, masinate ja muude seadmete jooniseid.

Kujutava geomeetria praktilises osas õpitakse sisuliste küsimuste kõrval ka jooniste korrektset vormistamist. Sellel on omaette suur esteetiline ja kasvatuslik väärtus.

§ 2. ÕPPEMETOODILISI NÕUANDEID

Kogemused näitavad, et kujutava geomeetria õppimisel tekib üsna paljudel üliõpilastel tõsiseid raskusi. Seda arvestades tuleb selle õppeaine omandamisel algusest peale silmas pidada järgmisi nõuandeid.

1. Kujutav geomeetria on õppeaine, milles kõik järgnev õppematerjal tugineb eelnevale. Seepärast tuleb seda ainet õppida süstemaatiliselt, omandades materjali samm-sammult selles järjekorras, milles see on esitatud õpikus või ette kantud loengutel. Õppematerjali mõne osa vahelejätmine või puudulik omandamine põhjustab edasise materjali mittemõistmist. Seetõttu on kujutava geomeetria õppimisel väga tähtis järjekindlalt osa võtta loengutest ja harjutustundidest. Samuti on oluline, et igal loengul esitatud materjal töötataks enne järgnevat loengut või harjutustundi kodus põhjalikult läbi. Materjali läbitöötamisel on soovitatav, et õppi ja paralleelselt konspekti või õpiku lugemisega

teeks läbi ka enamiku kirjeldatavaist konstruktsioonidest. See kergendab tunduvalt vastavate mõttekäikude mõistmist ja meeldejätmist. Seejuures on soovitatav andmed oma joonise jaoks valida raamatu või konspekti andmetest mõnevõrra erinevalt.

2. Kujutava geomeetria teooria õppimisel ja ülesannete lahendamisel tuleb joonistel esitatud objekte ja kirjeldatavaid toiminguid elavalt kujutleda. Kujutlemisvaja duses peitubki selle õppeaine raskuspunkt. Kujutlemisraskuste ületamiseks on soovitatav valmistada ja kasutada mitmesuguseid lihtsaid mudeleid. Nii võib täisnurga all kokkumurtud paksemat paberilehte kasutada ekraanide mudelina, pliiatseid sirgetena, joonestuskolmnurki ja papitükke tasanditena jne. Paberist on hõlbus valmistada silindrite, koonuste ja hulktahukate mudeleid, plastiliinist aga võib voolida ka iga-suguste muude kehade mudeleid. Keerulisemaid mudeleid võib uurida kujutava geomeetria õppekabinetis.

3. Iga läbivõetud paragrahvi kinnistamiseks on vaja vastata kordamisküsimustele ja lahendada teatud hulk vastavaid harjutusülesandeid. Käesolevas õpikus on säärased küsimused ja ülesanded toodud paragrahvide lõpus. Harjutusülesanded tuleb lahendada joonestusriistade abil. Orienteerumise hõlbustamiseks tuleb joonisel olevaid punkte ja jooni korralikult tähistada, kasutades õpiku tähisteid.

Nagu hiljem selgub, koosnevad kõikide keerukamate ülesannete lahendused teatavatest lihtsatest põhikonstruktsioonidest, mille kogu arv ei ole kuigi suur. Need põhikonstruktsioonid on loetletud õpiku lõpus lk. 266 ja nad tuleb ära õppida erilise hoolega.

§ 3. LAUSEID ELEMENTAAR- GEOMEETRIAST

Kujutava geomeetria teooria ülesehitamisel ja ülesannete lahendamisel läheb vaja mitmesuguseid elementargeomeetriast tuntud tõsiasju. Tähtsaimad neist on järgmised.

a) Kaks sirgjoont, mis on paralleelsed kolmandaga, on paralleelsed ka omavahel.

b) Kui paralleelsed sirged lõikavad nurga haarasid, siis lõigud, milleks paralleelid jaotavad nurga ühe haara, on võrdelised lõikudega, milleks nad jaotavad nurga teise haara.

c) Sirgjoon ja tasand on paralleelsed, kui tasandil leidub antud sirgega paralleelne sirge.

d) Kaks tasandit on paralleelsed, kui ühe tasandi kahel lõikuval sirgel on kummalgi oma paralleel teisel tasandil.

e) Sirgjoon ja tasand on teineteisega risti, kui tasandil leidub kaks lõikuvat sirget, mis on risti antud sirgega.

f) Kaks tasandit, mis on paralleelsed kolmandaga, on paralleelsed ka omavahel.

g) Paralleelsete tasandite lõikamisel tasandiga tekivad paralleelsed lõikesirged.

h) Kolme tasandi lõikesirged on kas paralleelsed või lõikuvad kõik ühes punktis.

i) Tasandi normaal (ristsirge) on risti iga sirgega, mis asetseb sellel tasandil.

j) Igast punktist saab läbi panna üheainsa sirge, mis on risti antud tasandiga.

k) Igast punktist saab läbi panna üheainsa tasandi, mis on risti antud sirgega.

l) Iga tasand, mis läbib antud tasandi normaali, on selle antud tasandiga risti.

m) Kui sirge pole risti antud tasandiga, siis saab temast läbi panna üheainsa tasandi, mis on antud tasandiga risti. Selle risttasandi määrab antud sirge koos tasandi iga normaaliga, mis antud sirget lõikab.

n) Kahe kiivsirge vahelist nurka mõõdetakse tavalise nurgaga, mille haarad on nende kiivsirgetega paralleelsed.

p) Kahetahulist nurka mõõdetakse nurgaga, mille haarad asetsevad teine teisel tahul ning on risti tahkude lõikejoonega (kahetahulise nurga servaga). Kahetahulist nurka võib aga mõõta ka nurgaga nende tasandite normaalide vahel.

II. PROJEKTEERIMINE JA PROJEKTSIOONIDE LIIGID

§ 4. PROJEKTEERIMINE. TSENTRAAL- PROJEKTSIOONID

1. **Projekteerimine.** Kujutise saamiseks objektidest kasutatakse geomeetrilist toimingut, mida nimetatakse **projekteerimiseks**. Selgitame seda toimingut lähemalt.

Olgu ruumis antud tasand ε ja väljaspool seda punkt S (joon. 4-1). Kujutamiseobjektiks võtame näiteks kolmnurga ABC . Tipu A kujutise saamiseks tõmbame läbi punktide S ja A kiire kuni lõikumiseni tasandiga ε . Saadud lõikepunkt A' ongi punkti A kujutis ehk **projektsioon** tasandil ε . Analoogiliselt saame ka tippude B ja C kujutised B' ja C' ning seega kogu kolmnurga projektsiooni $A'B'C'$.

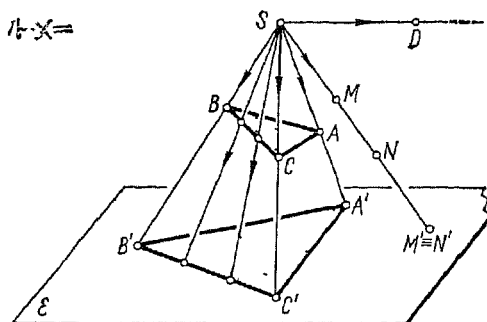
Tasandit ε , millel saadakse kujutis, nimetatakse **ekraaniks** ehk **projektsioonipinnaks**; punkti S , millest kiired lähtuvad — **projekteerimistsentriks** ehk **silmapunktiks** ning kiiri SA , SB ja SC — **kujutamiskiirteks** ehk **projekteerivateks kiirteks**.

2. **Tsentraalprojektsioon.** Et kirjeldatud projekteerimisel kiired lähtuvad kõik ühest punktist (tsentrist S), siis nimetatakse teda **tsentraalprojekteerimiseks** ning saadavat kujutist **tsentraalprojektsiooniks** ehk **perspektiiviks**. Seega kolmnurk $A'B'C'$ on kolmnurga ABC tsentraalprojektsioon.

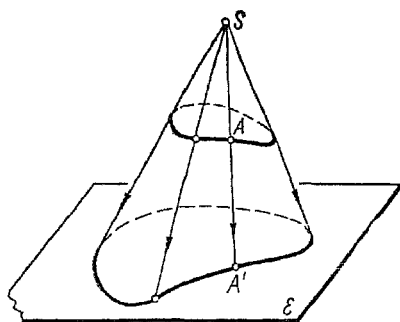
Üldjuhul saab tsentraalprojekteerimisega leida igale ruumipunktile vastava projektsiooni. Erandiks on vaid punktid, mis asetsevad tasandil, mis läbib silmapunkti S ja on paralleelne ekraaniga ε . Nimetatud tasandil asetseva punkti kujutamiskiir on paralleelne ekraaniga ning seetõttu sel punktil kujutist pole (õeldakse ka, et kujutis on lõpmatuses). Nii näiteks punkti D puhul on kiir $SD \parallel \varepsilon$ (joon. 4-1), mistõttu temal kujutist lõplikul kaugusel pole.

3. **Projektsioonide üldomadusi.** Vaatleme järgnevalt projektsioonide lihtsamaid omadusi. Projekteerimistoimingu käsitlemisel selgus, et

- (1) punkti projektsioon ekraanil on seda punkti läbiwa kujutamiskiire ja ekraani lõikepunkt.



Joonis 4-1



Joonis 4-2

Näiteks $A' \equiv SA \times \varepsilon$ (loe: A prim on kiire SA ja ekraani ε lõikepunkt; vt. «Tähistused»).

Arvesse võttes, et iga objekti võib vaadelda koosnevana punktidest, võime öelda, et

(2) mis tahes objekti projektsioon koosneb selle objekti punktide projektsioonidest.

Vastavalt sellele tuleb näiteks mingi kõverjoone kujutise saamiseks valida sellel joonel rida punkte, leida nende kujutised ning viimased lekaali abil ühendada.

Pinda, mis koosneb mingi joone punkte projekteerivatest kiirtest, nimetatakse seda joont **projekteerivaks pinnaks** ehk selle joone **kujutamiskiirte pinnaks**. Sirgjoont projekteeriv pind on alati tasand; kõverjoont projekteeriv pind aga osutub tsentraalprojekteerimisel kooniliseks pinnaks (joon. 4-2). Joone projektsioon on seega joont projekteeriva pinna ja ekraani lõikejoon.

(3) Sirgjoone projektsioon on üldjuhul jälle sirge,

sest teda võib vaadelda sirgjoont projekteeriva tasandi ja ekraani lõikesirgena. Nii näiteks joonisel 4-1 on projektsioon $A'B'$ sirgjoont AB pro-

jekteeriva tasandi SAB ja ekraani lõikesirge.

Erijuhul, kui sirgjoon ühtib projekteeriva kiirega (näiteks MN joonisel 4-1), siis tema projektsiooniks on üksainus punkt ($M' \equiv N'$).

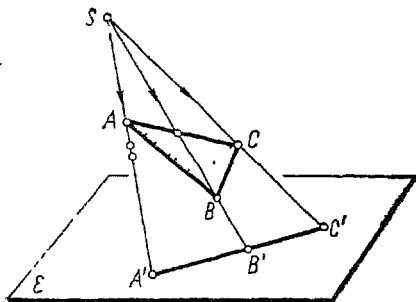
Endastmõistetavalt on õige järgmine väide:

(4) kui punkt on mingil joonel, siis selle punkti projektsioon on selle joone projektsioonil.

Nii näiteks asetseb joonisel 4-2 kõverjoonele kuuluva punkti A kujutis A' selle kõverjoone kujutisel.

Objekti projektsiooni kuju ja suurus ei sõltu üksnes objekti enda kujust ja suuruselt, vaid ka objekti asendist ekraani ja kiirte suhtes. Läbigu näiteks kolmnurga ABC tasapind silmapunkti S (joon. 4-3). Siis kolmnurga ABC punkte projekteerivad kiired asetsevad kõik kolmnurga tasapinnas ning seetõttu kolmnurk ei projekteeru enam kolmnurkaks, vaid sirglõiguks $A'C'$. Järelikult kõike kokku võttes võime öelda:

(5) kui tasandilist kujundit projekteerivad kiired asetsevad kõik kujundi tasandis, siis see kujund projekteerub sirglõiguks.



Joonis 4-3

Edaspidi nimetame tasandi sirgjoonelist projektsiooni lühemalt tasandi **sirgkujutiseks** ning sirgjoone punktikujulist projektsiooni — **sirgjoone punktikujutiseks**.

Objekti projektsiooni saamiseks on harilikult vaja leida ainult väike arv tema punktide projektsioone. Nii näiteks sirgjoone kujutise saamiseks tuleb leida sirgjoone kahe punkti kujutised, hulknurga ja hulktahu kujutiste saamiseks — tippude kujutised jne.

Kui on antud silmapunkt ja ekraan, siis üldiselt igale ruumipunktile vastab üksainus kujutis ekraanil, sest silmapunkt ja ruumipunkt määravad üheainsa kujutamiskiire. Kui aga on antud silmapunkt, ekraan ja ruumipunkti kujutis sel ekraanil, näiteks A' joonisel 4-3, siis vastav punkt A ruumis pole enam üheselt määratud: ta võib asetseda ükskõik kus kohal kiirel SA' . Et ka keerulisema objekti puhul ühegi tema punkti kujutis ei määra selle punkti asukohta ruumis, siis järeldame, et

(6) **objekti üksainus projektsioon ilma lisaandmeteta ei määra seda objekti ruumis.**

Tsentraalprojekteerimisel saadavad kujutised (perspektiivid) on üldiselt väga ilmekad, kuid nende

geomeetiline tuletamine on küllalt keeruline ja töömahukas. Seepärast kasutatakse tsentraalprojektsioone peamiselt ainult arhitektuuris, kus tihti peale on vaja väga ilmekaid, fotodega võrdväärsid piltkujutisi.

KÜSIMUSED

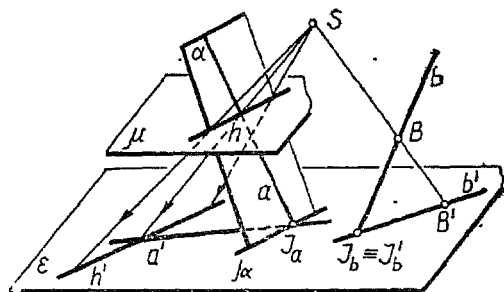
1. Kuidas saadakse punkti projektsioon ekraanil?
2. Missugustel ruumipunktidel pole tsentraalprojektsiooni lõplikul kaugusel?
3. Mis juhtumil sirge projekteerub punktiks?
4. Missugust pinda nimetatakse joont projekteerivaks pinnaks?
5. Mis juhtumil tasandiline kujund projekteerub sirglõiguks?

§ 5. NIVOOPIINNAD. NIVOOJOONED. JÄLJED.

Defineerime mõned mõisted, mis hõlbustavad edasise materjali esitamist.

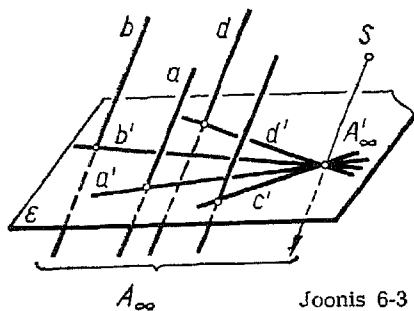
1. Ekraaniga paralleelseid tasandeid nimetatakse **nivoo-pindadeks** (tasand μ , joonis 5-1) selle ekraani suhtes. Ekraan ise on nullkõrgusega nivoo-pind. Pinna **nivoojoonteks** nimetatakse antud pinna ja nivoo-pindade lõikejooni.

2. **Tasandi nivoojoon** on sirge, mis saadakse lõikamisel nivoo-pinnaga ($h \equiv a \times \mu$, joonis 5-1). Nullkõrgusega

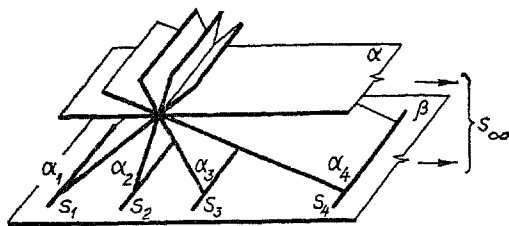


Joonis 5-1

3. Sirgjoone jälgpunktiks ehk jäljeks antud ekraanil ε nimetatakse sirgjoone ja ekraani lõikepunkti ($J_a \equiv a \times \varepsilon$, joonis 5-1). Tasandi sirgete jälgpunktid asuvad selle tasandi jälgsirjel (näiteks $J_a \in j_a$, joonis 5-1).



Joonis 6-3



Joonis 6-4

eeldame, et kiir SA'_{∞} ja sirge a lõikuvad lõpmata kauges punktis A'_{∞} . Punkti A_{∞} nimetataksegi sirge a ebapunktiks.

Analoogiliselt saame põhjendada punktile B_{∞} vastava punkti B'_{∞} leidmist (vrd. joonis 4-1). Et kaks sirget lõikuvad vaid ühes punktis, siis on igal sirgel vaid üks ebapunkt. Märkime, et ebapunkti lisamisega saame sirgetest a ja a' kinnised jooned (vt. joonis 6-2).

2. Olgu antud (joonis 6-2) paralleelsirgete parv a, b, c, d (joonis 6-3). Eeltoodu põhjal on igal sirgel olemas ebapunkt A_{∞} , millele vastab punkt A'_{∞} selle sirge tsentraalprojektsioonil (määratud antud sirgega paralleelse kiire SA'_{∞} kaudu). Jooniselt 6-3 nähtub, et paralleelsirgete parvel on ühine ebapunkt.

3. Antud tasandi kõikide sirgete ebapunktide geomeetiline koht on joon, mida nimetatakse selle tasandi lõpmata kaueks e. **ebasirgeks**. Tõepoolest, see joon saab lõikuda tasandi kõikide sirgetega ainult ühes punktis. Vastasel korral leiduks tasandil sirge, millel oleks rohkem kui üks ebapunkt (vrd. punkt 1). Järelikult on vaadeldav joon sirgjoon.

Sama mõistet saab selgitada ka lõikuvate tasandite kaudu. Nagu jooniselt 6-4 nähtub, kehtib järgmine seos:

$s_1 \equiv \alpha_1 \times \beta$; $s_2 \equiv \alpha_2 \times \beta$; $s_3 \equiv \alpha_3 \times \beta$ jne. Pidevustingimustest järeldame, et $s_{\infty} \equiv \alpha \times \beta$, kuigi eukleidilises ruumis on $\alpha \parallel \beta$. Sirge s_{∞} ongi tasandi α (ja tasandi β) lõpmata kaue sirge ehk ebasirge. Et kaks tasandit lõikuvad vaid mööda ühte sirget, siis järelikult on igal tasandil vaid üks ebasirge. Eelnevast selgub, et paralleeltasanditel on ühine ebasirge (vrd. punkt 2).

4. Antud ruumi ebapunktide ja ebasirgete geomeetiline koht on pind, mis peab lõikuma iga selle ruumi sirgega vaid ühes punktis ja iga selle ruumi tasandiga vaid mööda ühte sirget. Järelikult on tegemist tasandiga. Seda nimetatakse antud ruumi lõpmata kaueks e. **ebatasandiks**.

Olles niiviisi täiendanud eukleidi list ruumi tema ebaelementidega, olemegi saanud **projektiivse ruumi**. Märkime siinkohal, et eeltoodud rekonstruktsioon ei ole vastuolus eukleidilise ruumi kuulumistingimustega. Sõnastame nüüd uuesti laused $(a) \div (d)$, mis projektiivses ruumis on vabad erijuhtumitest.

- (a') Kaks sirget, mis asuvad samal tasandil, lõikuvad ühes punktis.
- (b') Kaks tasandit lõikuvad mööda ühte sirget.
- (c') Antud tasandil mitteasetsev sirge lõikab seda tasandit ühes punktis.

(d') Antud sirgel asuvad punktid A ja B jagavad selle sirge kaheks lõiguks

Sellega pürdume projektivse ruumi mõiste tutvustamisel. Projektivse ruumi omaduste uurimine ei kuulu kaesoleva õpiku raamidesse.*

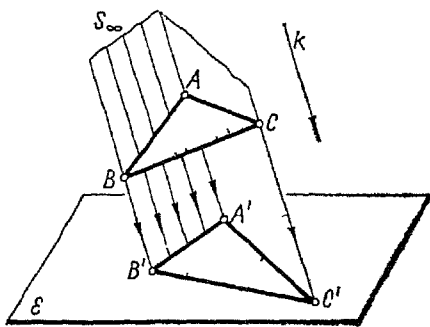
§ 7. PARALLEELPROJEKTSIOONID JA NENDE OMADUSED

1. Paralleelprojekteerimine. Kui kujutamisküred on omavahel paralleelsed, siis on tegemist **paralleelprojekteerimisega**, vastavat kujutist nimetatakse **paralleelprojektsiooniks**. Paralleelprojekteerimist võib vaadelda ka tsentraalprojekteerimise erijuhuna, kus silmapunkt on viidud lõpmata kaugele.

Silmapunkti S_∞ asemel antakse paralleelprojekteerimisel ette kujutamiskürte siht k (joon 7-1) Arusaadavalt ei tohi see siht olla paralleelne ekraaniga

Paralleelprojektsioonid jagunevad **kald- ja ristprojektsioonideks** vastavalt sellele, kas küred võetakse ekraani suhtes kaldu või risti Rist-

* Uksikasjalikumalt vt näit Н Ф Четверухин Проективная геометрия М., 1969



Joonis 7-1

projektsioone nimetatakse kirjanduses ka **ortogonaalprojektsioonideks**.

2. Paralleelprojektsioonide omadused. Punkti, joone ja mis tahes muu objekti paralleelprojektsioon tuletatakse üldiselt samadel alustel mis tsentraalprojektsioon. Seeparast on eelmises paragrahvis sõnastatud laused (1) . (6) kehtivad ka paralleelprojekteerimisel Lisaks nendele kehtivad paralleelprojekteerimisel veel järgmised laused (7) . (11)

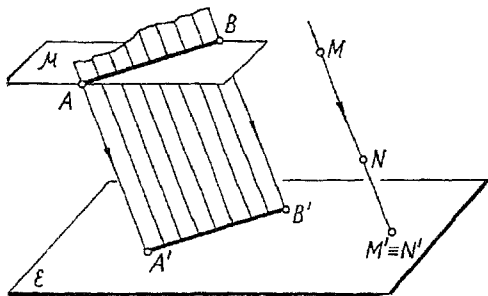
(7) Kui sirglõik on paralleelne ekraaniga, siis tema paralleelprojektsioon sellel ekraanil on pikkuselt võrdne ja paralleelne lõigu enesega.

Tõestus Olgu $A'B'$ lõigu AB paralleelprojektsioon (joon 7-2) Kui lõik AB on paralleelne ekraaniga, siis ta asetseb ekraani paralleeltasandil (μ) Et paralleelsete tasandite μ ja ε lõikamisel projekteeriva tasandiga $ABB'A'$ peavad tekkima paralleelsed lõikesirged, siis on $A'B' \parallel AB$ Kürte paralleelsuse tõttu aga on $AA' \parallel BB'$, seega nelinurk $ABB'A'$ osutub roopkulikuks ning viimase vastaskulgede võrdumise tõttu on $A'B' = AB$ Sellega on lause tõestatud.

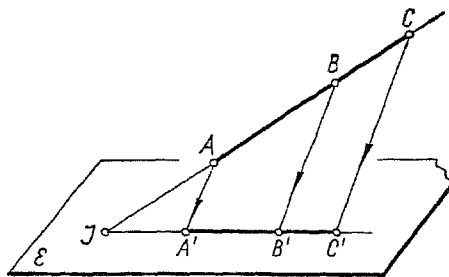
Kui sirglõik on paralleelne kujutamiskürtega, nagu MN joonisel 7-2, siis tema kujutiseks tuleb üksainus punkt ($M' \equiv N'$).

(8) Sirgjoone lõigud on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega.

Tõestus Sirgjoon AC ja tema paralleelprojektsioon $A'C'$ asetsevad ühel ja samal projekteerival tasandil (joon. 7-3) Seetõttu need sirged kas lõikuvad või on paralleelsed Joonisel on kujutatud lõikumise juhtum — jalgpunktiga J . Et projekteerivad küred AA' , BB' ja CC' on omavahel paralleelsed, siis lõikuvad nad nurga CJC' haaradest ara võrdelised lõi-



Joonis 7-2



Joonis 7-3

gud (§ 3, lause b). Selle põhjal võimegi kirjutada, et $AB:BC = A'B':B'C'$, nagu oli väidetud.

Suhet $AB:BC$ nimetatakse kolme punkti **lihtsuhteks**. Nagu eelmisest võrdest nähtub, jääb ta paralleelprojekteerimisel muutumatuks.

Lausest (8) saame teha kaks järgmist praktika seisukohalt tähtsat järeldust: 1) lõigu keskpunkt projekteerub sama lõigu kujutise keskpunktiks; 2) kolmnurga raskuskese (mediaanide lõikepunkt) projekteerub kujutiskolmnurga raskuskeskmeks.

Sirglõigu paralleelprojektsioon võib olla lõigust enesest lühem või pikem, võib aga ka võrdsuda lõigu enesega; see sõltub lõigu, kiirte ja ekraani vastastikusest asendist. Lõigu paralleelprojektsiooni pikkuse ja lõigu enda pikkuse suhet nimetatakse selle lõigu **moondeteguriks** (m). Näiteks lõigu AB moondetegur $m = A'B':AB$ (joon. 7-3).

Andes eespool saadud võrdele $AB:BC = A'B':B'C'$ kuju

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = m$$

näeme, et sirgjoone kõigil lõikudel on üks ja seesama moondetegur; seepärast võime rääkida ka sirgjoone moondetegurist.

Sirglõigu moondetegurit võib defineerida ka kui arvu, millega tuleb korrutada lõigu pikkust, et saada tema paralleelprojektsiooni pikkust. Näiteks lõigu AB puhul on

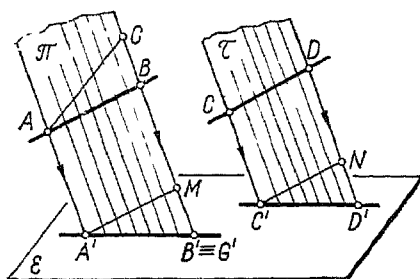
$$A'B' = m \cdot AB.$$

Pole raske veenduda, et kujutamiskiirte, ekraani ja lõigu vastastikuse asendi muutmisel võib lõigu paralleelprojektsiooni pikkus muududa vahemikus $0 \rightarrow \infty$. Sellest järeldame, et paralleelprojekteerimisel võib lõigu moondetegur m olla vahemikus $0 \leq m < \infty$.

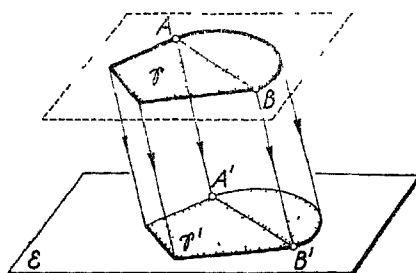
9) Paralleelsete sirgete paralleelprojektsioonid on üldjuhul jälle paralleelsed sirged.

Tõestus. Olgu sirged AB ja CD paralleelsed (joon. 7-4). Siis on paralleelsed ka nende sirgete kujutamiskiirte tasandid π ja τ , sest tasandi π kaks lõikuvat sirget on paralleelsed tasandi τ kahe sirgega: $AB \parallel CD$ ja $AA' \parallel CC'$. Seetõttu peavad tasandite π ja τ lõikamisel ekraaniga ε tekkima paralleelsed lõikesirged: $A'B' \parallel C'D'$. Sellega on lause tõestatud.

Erandjuhtumeid on kaks: 1) kui antud paralleelid on kujutamiskiirtega paralleelsed, siis nad projekteeruvad punktideks; 2) kui sirged, sõl-



Joonis 7-4



Joonis 7-5

tumata nende arvust, asetsevad kõik ühel ja samal tasandil, mis on kiirtega paralleelne, siis nad projekteeruvad üheksainsaks sirgeks.

Väga tähtis on teada, et lause (9) pole pööratav, s. t. sirgete paralleelprojektsioonide paralleelsusest ei või järeldada sirgete eneste paralleelsust, sest ka kiirsirgete paralleelprojektsioonid võivad olla paralleelsed. Nii näiteks joonise 7-4 järgi on sirgete AG ja CD paralleelprojektsioonid küll paralleelsed ($A'G' \parallel C'D'$), kuid need sirged ise on kiivsed.

(10) Paralleelsed sirglõigud on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega.

Tõestuseks tõmbame joonisel 7-4 kujutamiskiirte tasanditel π ja τ lõigud $A'M \parallel AB$ ja $C'N \parallel CD$. Saame samased kolmnurgad $A'B'M$ ja $C'D'N$, kus $A'M = AB$ ja $C'N = CD$. Neist kolmnurkadest leiamegi, et

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

Saadud võrde võime kirjutada ka kujul

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} = m,$$

kus m on kummagi sirglõigu moondetegur. Niisiis — paralleelsetel lõikudel (samuti sirgetel) on üks ja see sama moondetegur.

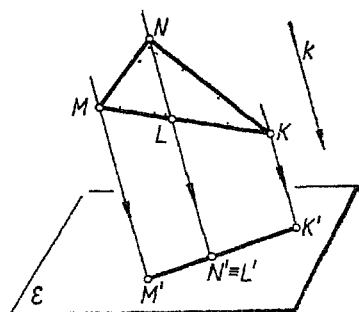
(11) Kui tasandiline kujund on paralleelne ekraaniga, siis tema paralleelprojektsioon on kongruentne kujundi enesega.

Tõestus. Olgu mingi tasandiline kujund γ paralleelne ekraaniga (joon. 7-5). Siis selle kujundi mis tahes mõõdulõik AB on paralleelne ekraaniga ning projekteerub lause (7) põhjal võrdsena lõigu enesega: $A'B' = AB$. Sellest järeldubki kujundite γ ja γ' kongruentsus. Kui aga kujundi tasand on paralleelne kujutamiskiirtega (vt. § 4, lause 5), siis tema paralleelprojektsiooniks tuleb sirglõik. Nii näiteks joonisel 7-6 on kolmnurk MNK paralleelne kiirtega k ning tema kujutiseks tuleb seetõttu sirglõik $M'K'$.

Joonisel on näidatud ka punkt L , milles punktist N tulev kujutamiskiir lõikab külge MK .

Võrreldes paralleelprojekteerimist tsentraalprojekteerimisega selgub, et esimesel on teise ees kaalukaid eeliseid.

1. Paralleelprojekteerimisel säilib sirgjoonte paralleelsus ja kolme punkti lihtsuhe (laused 8 ja 9). Nende omaduste tõttu näiteks trapets ja rööpkülilik projekteeruvad paralleelprojekteerimisel jälle trapetsiks ja rööpkülilikuks, tsentraalpro-



Joonis 7-6

jekteerimisel aga üldiselt mitte. Paralleelprojektsioonil on objekti mõõtmed ja mõõduvahekorrad tunduvalt vähem moonutatud kui tsentraalprojektsioonil.

2. Paralleelprojektsiooni tuletamine on tunduvalt lihtsam tsentraalprojektsiooni tuletamisest.

Need asjaolud ongi põhjuseks, miks tehnikas eelistatakse kasutada paralleelprojektsioone, eriti aga ristprojektsioone.

KÜSIMUSED

1. Mis vahe on tsentraal- ja paralleelprojekteerimisel?
2. Mille poolest erineb kaldprojekteerimine ristprojekteerimisest?
3. Mida olulist võib öelda ekraaniga paralleelse sirgjoone paralleelprojektsiooni kohta?
4. Mis on sirgjoone moondetegur?
5. Kui pikk on sirgjoon, kui tema paralleelprojektsioon on 6 cm ja moondetegur $m=0,5$?
6. Sõnastage lause paralleelsete sirgete paralleelprojektsioonide kohta.
7. Kas kahe krivsirge paralleelprojektsioonid võivad olla paralleelsed?
8. Sõnastage lause ekraaniga paralleelse tasandilise kujundi paralleelprojektsiooni kohta.
9. Mis kujundiks projekteerub paralleelprojekteerimisel ring, kui ta on: a) paralleelne kiirtega, b) paralleelne ekraaniga?

§ 8. TELJELINE AFIINSUS.

1. Kui tasandi α punktid projekteeritakse ekraanile (joonisepinnale) kahesuguste paralleelsete kiirtega (mis aga pole paralleelsed tasandiga α), siis igale ekraani punktile ühes projektsioonis vastab oma kindel punkt teises projektsioonis. Olgu antud kiired k_1 ja k_2 (joonis 8-1, a); punkti A vastavad projektsioonid olgu A' ja A'_1 , punkti B omad aga B' ja B'_1 . Sellega on punktile A' ekraanil ε seatud vastavaks punkt A'_1 , punktile B' punkt B'_1 jne. See vastavus on üksühene, s. t. punktile A' vastab ainult punkt A'_1 ja ümberpöörduvalt — punktile A'_1 vastab ainult punkt A' .

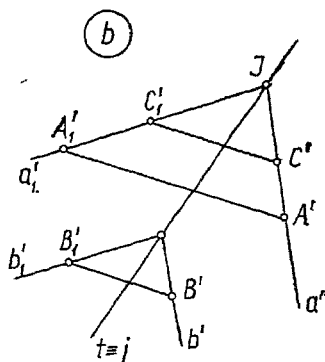
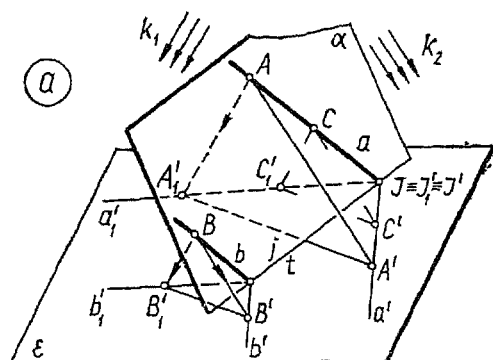
Toimingut, mis seab tasandi igale punktile vastavaks mingi teise punkti samal tasandil, nimetatakse tasandi punktteisenduseks e. punkttransformatsiooniks.

Tasandi (ekraani) punktteisendus, mis saadakse eespool kirjeldatud viisil kahesuguste paralleelsete kiirte abil, on tuntud teljelise afiinsuse nime all (lad. *affinitas* = sugulus).

Teineteisele vastavatest kujunditest võib ükskõik kumba lugeda primaarseks kujundiks ehk algupärandiks; teine kujund on siis selle algupärandi afiinne teisend.*

Projekteeritava tasandi jälje punktid (ja ainult need) langevad kummalgi projekteerimisel kokku oma kujutistega. Järelikult jälje punktid vastavad iseenestele, nad on nn.

* Analüütilises geomeetrias defineeritakse afiinne teisendus tasandi saarase punktteisendusena, milles teisendi koordinaadipaari $(X; Y)$ saadakse algupärandi koordinaadipaarist $(x; y)$ lineaarsete valemite kaudu. $X = ax + by + c$, $Y = lx + my + n$. Nüüsis, afiinne teisendus on lineaarne punktteisendus.



Joonis 8-1

kahekordsed punktid. Sirget, mille punktid affiinses teisenduses vastavad iseenele, nimetatakse affiinsusteljeks (sirge $t \equiv j$, joonis 8-1, a).

2. Teljelisel affiinsusel on järgmised tähtsamad omadused.

(12) Affiinselt vastavaid punkte ühendavad sirged (sidejooned) on omavahel paralleelsed.

Tõepoolest — näiteks sidejooned $A'A_1$ ja $B'B_1$ on paralleelsed, sest neid võib vaadelda paralleelsete sirgete AA' ja BB' paralleelprojektsioonidenä, kui projekteerimine teostatakse kiirtega k_1 .

(13) Sirgjoonelisus, sirgete paralleelsus ja paralleelsete lõikude (samuti lõigu osade) pikkuste suhe on affiinses teisenduse suhtes invariantne.

Teiste sõnadega: sirgjoone teisend on jälle sirge; paralleelsetel sirgetel on paralleelsed teisendid, paralleelsetel lõikudel ja nende teisenditel on sama pikkuste suhe. Nimetatud omaduste invariantust affiinses teisenduse suhtes on hõlbus põhjendada paralleelprojektsiooni omaduste najal: kui $a \parallel b$, siis lause (9) põhjal $a' \parallel b'$ ja $a'_1 \parallel b'_1$ (joonis 8-1, a). Sirgjooneli-

suse ja lõigu antud jaotussuhte invariantuse analoogilise põhjendamise jätame lugejale endale.

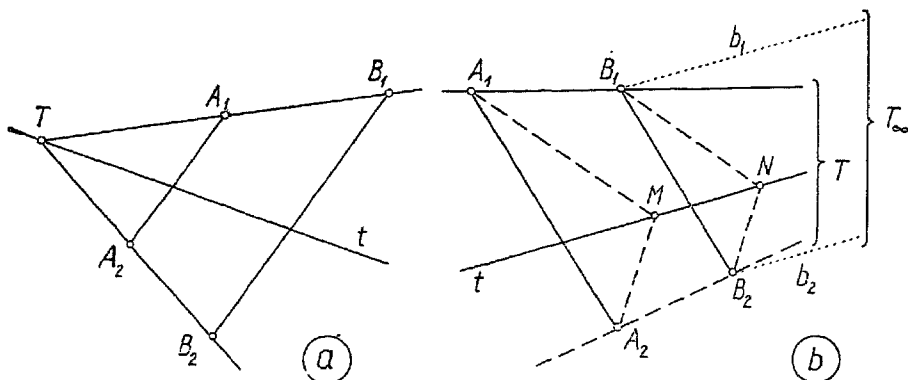
(14) Sirge ja tema teisend lõikuvad affiinsusteljel või on teljega paralleelsed.

See järeldub asjaolust, et tasandil α asetseva sirge a jälgpunkt I asetseb α jälgsirgel $j \equiv t$ ja langeb kokku oma iga projektsiooniga: $J \equiv J'_1 \equiv J'$.

3. Teljelise affiinsuse tähtsus kujutavas geomeetrias seisneb selles, et ta võimaldab asendada suhteliselt keerukaid ruumilisi konstruktsioone lihtsamate, tasandiliste konstruktsioonidega (vrd. jooniseid 8-1, a ja 8-1, b). Sel korral on sageli otstarbekas asendada projektsioonimärke tähistate juures indeksitega.

(15) Teljeline affiinsus on määratud teljega ja kahe teineteisele vastava punktiga.

Nimetatud andmete abil saab leida iga punkti affiinses teisendi antud affiinsuses. Vastav konstruktsioon on esitatud joonisel 8-2, a. Affiinsuse määramiseks on siin antud telg t , punkt A_1 ja selle teisend A_2 ; leitakse joonisepinnal vabalt võetud punkti B_1 teisend B_2 . Sirgjoone A_1B_1 lõike-



Joonis 8-2

punkti T tõmbame sirge TA_2 . See on sirge A_1B_1 teisend ja seetõttu peab kandma ka otsitavat punkti B_2 . Samal ajal peab B_2 asetsema sidejoonel, mis tõmmatakse punkti B_1 paralleelselt antud sidejoonega A_1A_2 . Seega $B_2 \equiv TA_2 \times B_1B_2$, kusjuures $B_1B_2 \parallel A_1A_2$.

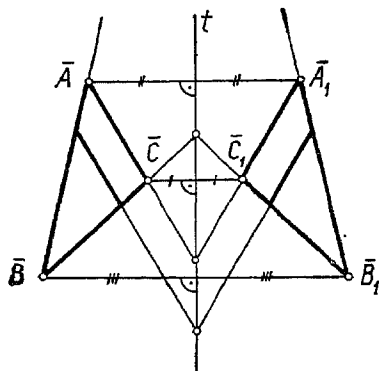
Kui punkt T pole joonisel kättesaadav (läheb üle jooniselehe ääre), siis võib kasutada sirgete paralleelsuse invariantust. Võtame teljel vabalt punkti M , tõmbame $B_1N \parallel A_1M$ ja $NB_2 \parallel MA_2$ (lause 13). Otsitav punkt B_2 peab nüüd asetsema sellel sidejoonel, mis läbib punkti B_1 (joonisel 8-2, b on see konstruktsioon esitatud kriipsjoontega). Juhime tähelepanu sellele, et kui antud sirge on teljega paralleelne, s. t. tema lõikepunkt teljega on selle sirge ebapunkt (T_∞ , joonis 8-2, b), siis on teljega paralleelne ka tema teisend (lause 14, vt. ka § 6, p. 2).

Kui punkt ja selle teisend antud anfiinsuses asetsevad teine teisel pool telge, siis on see nii ka kõigi teiste vastavate punktide puhul selles afiinsuses. Kui aga üks paar vastavaid punkte on ühelt pool telge, siis on ka kõik teised vastavate punktide paarid ühelt pool telge.

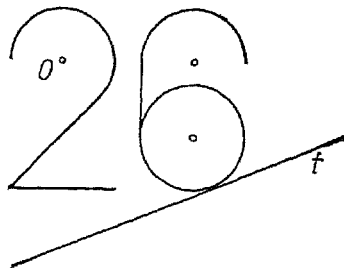
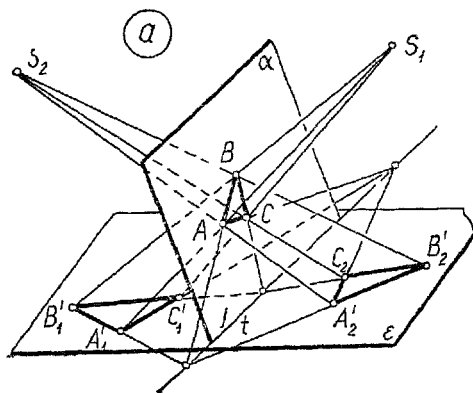
4. Elementargeomeetriast tuttav

teljelise sümmeetria on teljelise afiinsuse erijuhtum. Tõepoolest, kui võtta sidejoonte siht teljega risti ja vastavad punktid teine teisel pool telge võrdsetel kaugustel teljest, siis ongi tegemist teljelise sümmeetriaga (joonis 8-3).

5. Kui tasandi α punktide projekteerimiseks ekraanile ε kasutatakse paralleelkiirte asemel kaheksuguseid tsentraalkiiri (joonis 8-4), siis eespool näidatud üksühene vastavus nende punktide projektsioonide vahel säilib. Nagu jooniselt näha, lõikuvad kolmnurkade $A'_1B'_1C'_1$ ja $A'_2B'_2C'_2$ vastavate külgede pikendused omavahel tasapinna α jäljel



Joonis 8-3



O_1

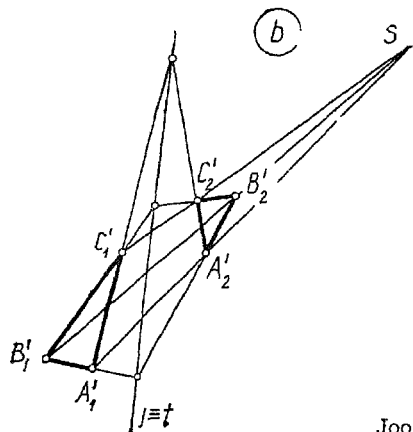
Joonis 8-5

$l \equiv t$ Tõepoolest, A_1B_1 osutub tasandi S_1AB jalgjooneks ekraanil ε , aga $AB \equiv \alpha \times S_1AB$ Jarelikult l, AB ja A_1B_1 kui kolme tasandi (S_1AB ; α ; ε) lõikesirged lõikuvad ühes punktis. Analooiline mõttekaik on rakendatav sirgete AB ja A_2B_2 kohta. Samal viisil saame põhjendada eespool mainitud kolmnurkade ülejäänud küljepaaride lõikumise.

Nuud võime kolmnurkade $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ kohta sõnastada Desargues'i* teoreemi poordlause, mille esitame siin tõestuseta.

(16) Kui antud kolmnurkade vastavate külgede pikendused

* Gerard Desargues (1593—1662), prantsuse matemaatik, projektiivse ja kuju tava geometria rajaja. D₁ teoreem on üks projektiivse geometria põhilauseid (1639)



Joonis 8 4

lõikuvad kolmes punktis, mis asuvad ühel sirgel, siis nende kolmnurkade vastavaid tippe ühendavad sirged lõikuvad ühes punktis.

Nagu jooniselt 8-4 nahtub, rahuldavad eelnimetatud kolmnurkade küljepaarid A_1B_1 ja A_2B_2 ; A_1C_1 ja A_2C_2 , B_1C_1 ja B_2C_2 lauses (16) esitatud tingimust, lõikudes sirgel $l \equiv t$, tippe ühendavad sirged A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 aga lõikuvad punktis S .

Näisuguste omadustega kolmnurki nimetatakse **homoloogilisteks**, sirget $l \equiv t$ **homoloogiateljeks** ja punkti S **homoloogiatsentriks**. Võrreldes joonist 8-4 joonisega 8-1 selgub, et teljelme afiinsus on vaadeldav homoloogia erijuhtumina, mille puhul homoloogiatsenter S on ekraani ε lõpmata kauge punkt e ebapunkt.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

- 1 Mida nimetatakse tasandi punktteisenduseks?
- 2 Missuguste andmetega on teljeline afiinsus määratud?
- 3 Tuletada joonisel 8 5 antud numbriest 2 ja 6 koosneva kujundi afiinne teisend telje t suhtes, kui number 2 kaare keskpunkti O teisendiks on punkt O_1

§ 9. RISTPROJEKTSIOONID JA NENDE OMADUSED

Kui kujutamiskiired on ekraaniga risti, siis objektist saadavat kujutist nimetatakse selle objekti ristprojektsiooniks. Et ristprojektsioonid kuuluvad paralleelprojektsioonide hulka, siis kehtivad nende kohta ka kõik eespool toodud laused (1...11). Ristprojektsioonidel on aga veel eriomadusi, mida kald- ja tsentraalprojektsioonidel pole. Seesugustest eriomadustest vaatleme kõigepealt neid, mis on seotud sirglõigu ja nurga projekteerimisega.

Sirgjoone kaldenurgaks ekraani suhtes nimetatakse teravnurka (kaasa arvatud 0° ja 90°) selle sirgjoone ja tema ristprojektsiooni vahel.

Olgu $A'B'$ sirglõigu AB ristprojektsioon ekraanil ε (joonis 9-1). Siis nurk φ sirgete AB ja $A'B'$ vahel ongi sirge AB kaldenurk; nurga tipuks on sirgjoone jälgpunkt J , mis arusaadavalt ühtib oma ristprojektsiooniga J' .

1. Sirglõigu ristprojektsioon. Uriime, kuidas lõigu ristprojektsiooni pikkus sõltub lõigu enda pikkusest ja kaldenurgast. Tõmbame joonisel 9-1 abihoone $A'M \parallel AB$. Tekkinud täisnurksest kolmnurgast $A'B'M$ saame, et $A'B' = A'M \cdot \cos \varphi$. Et aga $A'M = AB$, siis

$$A'B' = AB \cdot \cos \varphi. \quad (1)$$

Sellega on tõestatud, et

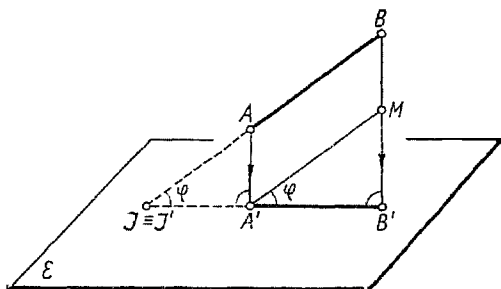
(17) sirglõigu ristprojektsiooni pikkus võrdub sirglõigu enda pikkuse ja kaldenurga koosnuse korrutisega.

Seosest (1) järeldame, et sirglõigu ristprojektsioon ei saa olla lõigust enesest pikem (sest $\cos \varphi \leq 1$). Samast seosest nähtub, et kui $\varphi = 0$, s. t. kui $AB \parallel \varepsilon$, siis $A'B' = AB$; kui aga $\varphi = 90^\circ$, s. t. kui $AB \perp \varepsilon$, siis $A'B' = 0$.

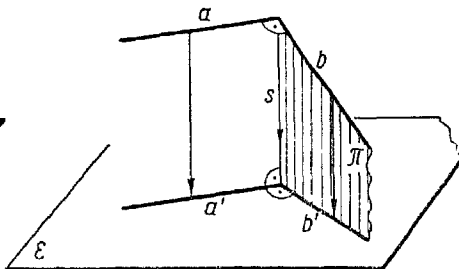
Andes seosele (1) kuju $A'B' : AB = \cos \varphi$ ning teades, et suhe $A'B' : AB$ tähendab sirglõigu AB moondetegurit m , järeldame, et ristprojektsiooni puhul $m = \cos \varphi$. Siit näeme ka, et ristprojektsiooni puhul jääb sirglõigu moondetegur alati vahemikku $0 \leq m \leq 1$.

2. Nurga ristprojektsioon. Sõltuvalt nurga tasandi asendist ekraani ja kiirte suhtes on nurga ristprojektsioon nurgast enesest kas suurem või väiksem või võrdub nurga enesega.

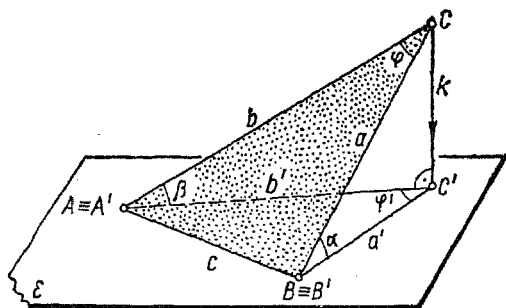
Kui nurga tasand on ekraaniga risti, siis nurga ristprojektsiooni suuruseks tuleb kas 0° või 180° — vastavalt sellele, kas haarad projektee-ruvad sama- või vastandsuunalisteks poolsirgeteks. Kui aga nurga tasand on ekraaniga paralleelne, siis lause



Joonis 9-1



Joonis 9-2



Joonis 9-3

(11) põhjal nurga ristprojektsioon võrdub nurga enesega. Saab tõestada, et nurga ristprojektsioon võib võrrelda nurga enesega ka nurga tasandi teatud kaldasendi puhul ekraani suhtes.

Erilist tähtsust omab täisnurga täisnurgaks projekteerumise tingimus, mille sõnastame järgmiselt:

(18) täisnurk projekteerub ristprojekteerimisel täisnurgaks, kui tema üks haar asetseb ekraanil või on sellega paralleelne, teine haar aga pole selle ekraaniga risti.

Tõestus. Olgu a ja b täisnurga haarad ning a' ja b' nende ristprojektsioonid ekraanil ε (joon. 9-2). Eelduste kohaselt olgu $a \parallel \varepsilon$. Siis haar a on risti nurga tippu projekteeriva kiirega s (sest $s \perp \varepsilon$ aga $a \parallel \varepsilon$). Peale selle on eelduste kohaselt $a \perp b$. Seega sirge a on risti projekteeritava tasandiga π , sest ta on risti selle tasandi kahe lõikuva sirgaga s ja b . Lause (7) põhjal on $a' \parallel a$ (sest $a \parallel \varepsilon$). Järelikult on ka $a' \perp \pi$; seetõttu a' peab olema risti iga sirgega tasandil π , sealhulgas ka sirgega b' . Sellega on lause tõestatud.

Kui täisnurga teine haar b oleks risti ekraaniga ε , siis täisnurk projekteeruks üheksainsaks poolsirgeks;

seepärast on see juhtum lausest (18) välja jäetud.

Õige on ka lause (18) järgmine pöördlause:

(18a) nurk, mille üks haar asetseb ekraanil või on ekraaniga paralleelne ning mille ristprojektsioon on täisnurk, on ka ise täisnurk.

Seose nurga ja tema ristprojektsiooni vahel saab hõlpsasti tuletada järgmiselt. Olgu $\varphi' (a', b')$ nurga $\varphi (a, b)$ ristprojektsioon ekraanil ε ning α ja β nurga φ haarade a ja b kaldenurgad (joon. 9-3). Kolmnurkadest ABC ja $AC'B$ saame koosinuse lause põhjal seosed:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi, \\ c^2 &= (a')^2 + (b')^2 - 2a'b' \cos \varphi'. \end{aligned}$$

Esimesest võrdusest teist lahutades saame:

$$a^2 - (a')^2 + b^2 - (b')^2 - 2ab \cos \varphi + 2a'b' \cos \varphi' = 0.$$

Täisnurksetest kolmnurkadest BCC' ja ACC' leiame, et

$$a^2 - (a')^2 = k^2 = b^2 - (b')^2.$$

Neid võrdusi eelmises seoses kasutades, saame:

$$2k^2 - 2ab \cos \varphi + 2a'b' \cos \varphi' = 0$$

ehk

$$\frac{k^2}{ab} - \cos \varphi + \frac{a'b'}{ab} \cos \varphi' = 0.$$

Et aga $k/a = \sin \alpha$, $k/b = \sin \beta$, $a'/a = \cos \alpha$ ja $b'/b = \cos \beta$, siis saame seose kirjutada kujul:

$$\sin \alpha \sin \beta - \cos \varphi + \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi' = 0.$$

Siit leiame, et

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad (2)$$

kus $0 < \varphi < 180^\circ$ ja $0 \leq \alpha, \beta \leq 90^\circ$.

Sellest seosest järeldub ka täisnurga täisnurgaks projekteerimise tingimus (lause 18). Tõepoolest, kui $\varphi = 90^\circ$ ja $\alpha = 0$ (s. t. kui täisnurga üks haar on ekraaniga paralleelne), siis seosest (2) saame, et $\cos \varphi' = 0$, s. t. $\varphi' = 90^\circ$. Samuti järeldub seosest (2) ka pöördlause (18 a).

Ristprojektsioonide muid omadusi õpime tundma kursuse järgnevatel peatükkides.

Ristprojektsioone kasutatakse laialdaselt tehnilises joonestamises. Muude projektsiooniliikidega võrreldes on nende suureks eeliseks võimalus hõlpsasti otsustada objekti mõõtmete üle. Seda omadust tuleb tehnikas lugeda primaarseks.

KÜSIMUSED

1. Millisesse vahemikku jäävad sirglõigu moondeteguri väärtused: a) kaldprojekteerimisel, b) ristprojekteerimisel?
2. Mis on sirglõigu kaldenurk tasandi (ekraani) suhtes?
3. Kuidas avaldub sirglõigu ristprojektsiooni pikkus sirglõigu enda pikkuse ja kaldenurga kaudu?
4. Missugustel tingimustel täisnurk projekteerub ristprojekteerimisel täisnurgaks?

§ 10. PROJEKTSIOONIDELE ESITATAVAD NÕUDED

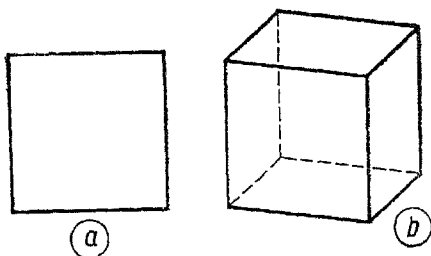
Praktikas nõutakse kujutistelt kolme omadust: lihtsust, mõõdetavust ja piltlikkust. Selgitame neid omadusi lähemalt.

Kujutis on seda lihtsam, mida vähem jooni ta sisaldab ja mida lihtsamad need jooned on; lihtsat kujutist on kerge joonestada. Kujutis on seda piltlikum, mida hõlpsamalt me tema järgi objekti ära tunneme. Lõpuks, kujutis on mõõdetavuselt seda parem, mida rohkem objekti tasandilisi kujundeid on projekteerunud moondevabalt.

Kujutise keerukus sõltub mitte ainult objekti kujust, vaid ka projekteerimisviisist (tsentraal- või paralleelprojekteerimine) ning objekti asendist kiirte ja ekraani suhtes. Lihtsa kujutise saamiseks tuleb valida kõige lihtsam projekteerimisviis — ristprojekteerimine. Peale selle tuleb objekt seada kiirte ja ekraani suhtes eriasendisse, s. o. asendisse, mille puhul võimalikult palju objekti servi ja tahke on kiirtega paralleelsed. Siis need servad ja tahud projekteeruvad vastavalt punktideks ja sirglõikudeks ning kujutis tuleb lihtne. Nii näiteks tahuga ekraanile (joonisepinna) toetuva kuubi ristprojektsiooniks saame ainult ruudu (joon. 10-1, a), s. o. lihtsa, kuid ilmetu (mittepiltliku) kujutise. See ei anna ettekujutust vastavast ruumilisest objektist (mis võib olla isegi nelinurk!). Samal ajal on aga sellel kujutisel hea mõõdetavus — temale on kerge märkida kuubi külje pikkust, sest kuubi ülemine ja alumine tahk on projekteerunud moondevabalt.

Piltkujutise saamiseks tuleb paralleelprojekteerimisel objekt seada kiirte ja ekraani suhtes üldasendisse, s. o. asendisse, mille puhul võimalikult palju objekti servi ja tahke on kiirte suhtes kaldu. Siis need servad ja tahud ei saa projekteeruda punktideks ja sirglõikudeks, mistõttu kujutis tuleb palju piltlikum. Nii näiteks kui kuup seada üldasendisse nii, et ükski tema serv ja tahk ei ole risti ekraaniga, siis tema ristprojektsioon tuleb märksa keerukam (joonterohkem, pikkusi ja nurki moondav), kuid seevastu tunduvalt piltlikum (joon. 10-1, b). Selle kujutise järgi saame juba teataval määral otsustada ruumis oleva objekti kuju üle.

Eriti piltlike kujutiste saamiseks



Joonis 10-1

tuleb kasutada tsentraalprojekteerimist. Seda tehaksegi näiteks arhitektuuris.

Nagu eespool selgus, nõuab kujutise lihtsus ja mõõdetavus objekti eriasendit kiirte ja ekraani suhtes, piltlikkus aga üldasendit. Seepärast ei saa ühelt ja samalt kujutiselt nõuda, et ta oleks korraga nii piltlik kui ka lihtne ja hõlpsasti mõõdetav. Et tehnilises joonestamises on primaarseteks nõueteks lihtsus ja mõõdetavus, siis kasutataksegi seal peamiselt lihtsaid ristprojektsioone.

KÜSIMUSED

1. Missuguseid omadusi nõutakse praktikas kujutistelt?
2. Missugust objekti asendit kiirte ja ekraani suhtes nimetatakse: a) eriasendiks, b) üldasendiks?
3. Missuguseid omadusi nõutakse kujutistelt tehnilises joonestamises?

§ 11. OBJEKTI MÄÄRAVATE JOONISTE SAAMISE MEETODID

Kujutavas geomeetrias ja tehnikas vajatakse jooniseid, mis üheselt määraksid objekti kõik geomeetrilised omadused. Sääraseid jooniseid nimetasime eespool objekti määravateks joonisteks. Samas selgitasime ka, et

üksainus kujutis ei määra objekti ruumis üheselt. Seepärast tuleb objekti määrava joonise saamiseks tema kujutist täiendada mõnesuguste lisaandmetega. Sõltuvalt lisaandmete erinevast valikust kujunevad ka erinevad meetodid objekti määravate jooniste saamiseks. Tähtsamad neist meetoditest on järgmised: 1) **Monge'i*** meetod, 2) **kvooditud ristprojektsiooni meetod** ja 3) **aksonomeetria meetod**.

Monge'i meetodi puhul kitsamas mõttes kasutatakse objekti määramiseks selle objekti kahte ristprojektsiooni teineteisega ristuvatel ekraanidel. Seda meetodit tuntakse harilikult **kaksvaate** nimetuse all ja ta on tehnilises joonestamises valitsevaks meetodiks.

Kvooditud ristprojektsiooni puhul antakse objekti ristprojektsioon horisontaalsel ekraanil ning täiendatakse seda objekti oluliste punktide või horisontaalsete joonte kaugustega (kõrgustega) ekraanist. Et punkti ristprojektsioon koos punkti kaugusega ekraanist määrab punkti asukoha ruumis üheselt, siis järeldame, et ka mis tahes objekt on üheselt määratud, kui on teada tema punktide või joonte kvooditud ristprojektsioonid.

Aksonomeetria meetodi puhul seotakse objekt ristteljestikuga ning konstrueeritakse esialgu teljestiku rist- või kaldprojektsioon. Teljestiku kujutise baasil tuletatakse objekti kujutis, kasutades objekti punktide koordinaate. Saadav kujutis võimaldab määrata objekti, kui on teada projekteerimisviis ja koordinaattelgede moondetegurid.

* Gaspard Monge (loe: monž, 1746—1818), prantsuse õpetlane ja insener. Raamatus «Géométrie descriptive» (1799) andis ta kokkuvõetavalt ristprojektsioonide meetodi ning rajas sellele kogu kujutava geomeetria teooria.

III. MONGE'I MEETOD. PUNKTI, SIRGJOONE JA TASANDI KÄSITLUS MONGE'I MEETODIL

§ 12. PUNKTI KAKSVAADE

Kui kujutamisel on eesmärgiks objekte nende kujutise abil määrata, siis rakendatakse harilikult Monge'i meetodit. Selle meetodi olemus on lühidalt järgmine.

Objektist tuletatakse kaks ristprojektsiooni ekraanidel, mis on teineteisega risti. Seejärel pööratakse ekraanid koos kujutistega ühele tasandile — joonisepinnale. Praktikalistel kaalutlustel, eriti keerukamate tehniliste objektide kujutamisel, tuletatakse objektist veel täiendavaid ristprojektsioone, mis samuti pööratakse joonisepinnale. Niiviisi saadud joonist, mis koosneb mitmest omavahel seotud ristprojektsioonist, nimetatakse **mituvaateks**.

1. Punkti kaksvaate saamine. Monge'i meetodi lähemat tundmaõppimist alustame punkti kui lihtsaima objekti käsitlemisest. Olgu märgitud, et õppijal tuleb luua endale just punkti käsitlesest igati selged kujutlused, et panna sel-

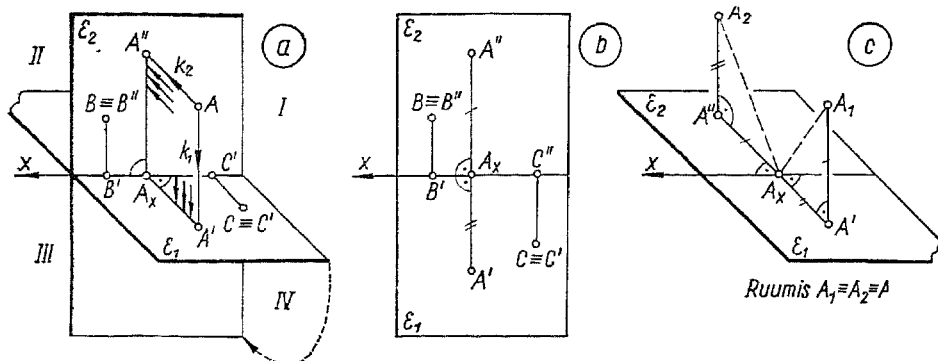
lega kindel alus kogu järgneva kursuse mõistmisele.

Olgu antud kaks teineteisega ristuvat ekraani ε_1 ja ε_2 (joon. 12-1, a). Ekraan ε_1 võetakse horisontaalne ning teda nimetatakse **põhiekraaniks**; teine ekraan ε_2 on siis vertikaalne ning teda nimetatakse **esiekraaniks**. Ekraanide lõikesirget x nimetatakse **teljeks**.

Tuletame mingi ruumpunkti A ristprojektsioonid ekraanidel ε_1 ja ε_2 . Projekteeriv kiir k_1 ehk **põhikiir** ($k_1 \perp \varepsilon_1$) annab punkti A ristprojektsiooni A' põhiekraanil, kiir k_2 ehk **esikiir** ($k_2 \perp \varepsilon_2$) aga punkti A ristprojektsiooni A'' esiekraanil. Ristprojektsioone A' ja A'' nimetatakse vastavalt ka punkti A **pealtvaateks** (horisontaalprojektsiooniks) ja **eestvaateks** (frontaalprojektsiooniks).

Punkti A kaugust põhiekraanist mõõdab lõik AA' ning tema kaugust esiekraanist lõik AA'' .

Kahel ristaval ekraanil asetsevaid kujutisi ei saa vaadelda joonisena. Et neist kujutistest saada ühel tasan-



Joonis 12-1

dil paiknevat joonist, pööratakse põhiekraan koos punkti A pealtvaatega A' ümber x -telje esiekraanile nii, et põhiekraani eesmine osa ühtib esiekraani alumise osaga (vt. kaarjat noolt joonisel 12-1, a). Pärast pöörast paiknevad punkti A mõlemad projektsioonid ühtinud ekraanide tasandil, mille võtamegi joonisepinaks. Niiviisi saadud joonist, mis koosneb punkti A kahest teineteisega seotud vaatest A' ja A'' , nimetatakse punkti **kaksvaateks** (joon. 12-1, b). Projektsioone ühendavat sirget $A'A''$ nimetatakse punkti A **sidejooneks**, telge x aga **kaksvaate teljeks**.

Joonise 12-1 osade a , b ja c võrdleval vaatlemisel selguvad punkti kaksvaate järgmised omadused.

1. Projektsioone ühendav sidejoon on alati risti kaksvaate teljega. Tõepoolest, jooniselt 12-1, a nähtub, et lõigud $A'A_x$ ja $A''A_x$ asetsevad x -telje risttasapinnal $AA'A_xA''$. Seetõttu jäävad nad x -teljega risti ka pärast põhiekraani pööramist esiekraanile, s. t. $A'A'' \perp x$.

2. Punkti kaugust põhiekraanist mõõdab kaksvaatel selle punkti eestvaate kaugus x -teljest:

$A'A_x = AA'$; punkti kaugust esiekraanist aga mõõdab pealtvaate kaugus x -teljest: $A'A_x = AA''$.

3. Kui punkt on esiekraanil (nagu B), siis tema eestvaade ühtib punkti enesega ($B'' = B$), pealtvaade (B') aga on x -teljel. Paikneb aga punkt põhiekraanil (nagu C), siis tema pealtvaade ühtib punkti enesega ($C' = C$), eestvaade (C'') aga on x -teljel.

4. Kaksvaate puhul võib joonisepinda tõlgendada soovi kohaselt kas põhi- või esiekraanina, nii nagu see joonise lugemisel parajasti otstarbekohaseks osutub.

Näitame nüüd, et kehtib järgmine põhilise tähtsusega lause, mis on aluseks kogu edaspidisele teooriale.

(19) Punkti kaksvaade määrab punkti asukoha ristuvate ekraanide suhtes üheselt, joonisepinna suhtes aga kahelele.

Tõestus. Joonisel 12-1, c on joonisepind ja punkti A kaksvaade $A(A', A'')$ esitatud piltlikult. Kui joonisepind lugeda põhiekraaniks, siis asetseb punkt A ruumis kohal A_1 , mille saame, kui tõmbame läbi

pealtvaate A' joonisepinna normaali ning mõõdame sellele punkti A kauguse põhiekraanist: $A'A_1 = A''A_x = AA'$. Lugeses aga joonisepinna esiekraaniks, leiaksime punkti A kohalt A_2 , mille saame, tõmmates joonisepinna normaali läbi eestvaate A'' ning mõõtes sellele punkti A kauguse esiekraanist: $A''A_2 = A'A_x = AA''$. Kui murrame joonisepinna koos normaalidega $A'A_1$ ja $A''A_2$ kaksvaate telje kohalt täisnurga all kokku, s.t. kui taastame ekraanide esialgse ristseisu, siis langevad punktid A_1 ja A_2 kokku üheksainsaks punktiks A , mida me projekteerisime. Sellega on lause tõestatud.

Niisiis, teljega varustatud kaksvaade osutub punkti määravaks jooniseks. Kui punkt A on antud oma kaksvaatega, siis kirjutame seda järgmiselt: $A(A', A'')$.

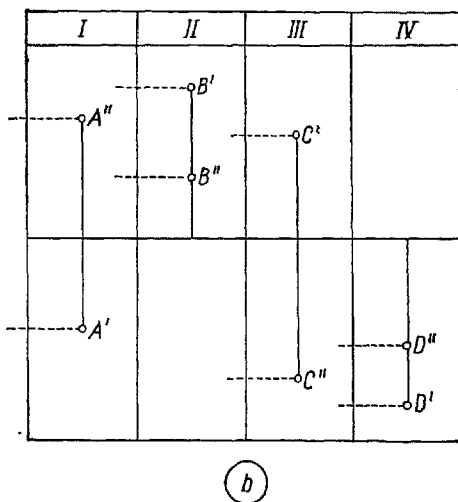
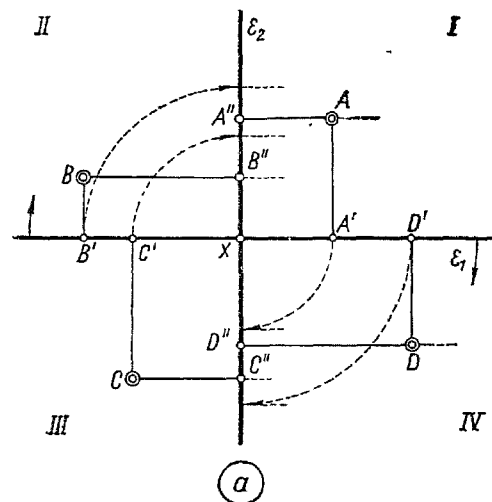
On tähtis silmas pidada, et joonisepinna valitud punktid A' ja A'' saavad ainult siis olla ühe ja sama

ruumipunkti A pealt- ja eestvaateks, kui neid ühendav sidejoon $A'A''$ on risti x -teljega. Vastasel korral saame väärkaksvaate, mis ei määra mingisugust punkti (võrdle omadusega 1).

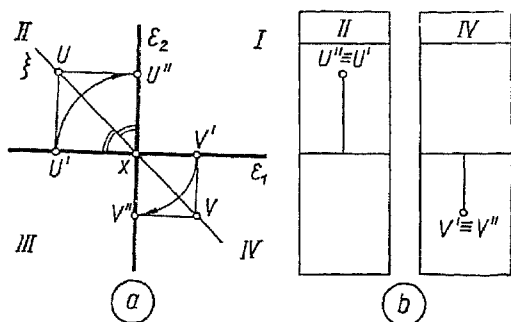
2. Punkti kaksvaate ruumiveerandite järgi. Ristuvad ekraanid ε_1 ja ε_2 jaotavad kogu ruumi neljaks ruumiveerandiks ehk ruumikvadrantideks. Ruumiveerandeid I, II, III ja IV nummerdatakse kokkuleppeliselt nii, nagu on näidatud joonisel 12-1, a. Esimene ruumiveerand asetseb esiekraani ees ja põhiekraanist ülevalpool, teine ruumiveerand esiekraani taga ja põhiekraanist ülevalpool jne.

Jälgime nüüd punkti kaksvaate saamist vastavalt ruumiveerandile, milles punkt asub. Selleks on joonisel 12-2, a ekraanid ε_1 ja ε_2 esitatud serviti nähtuna nii, et x -telg suundub joonisepinna vaatele poole; põhiekraani pöörmissuunda näitab kaarjas nool.

Esimeses ruumiveerandis oleva punkti A kaksvaate saamine on juba



Joonis 12-2



Joonis 12-3

tuttav jooniselt 12-1. Teises veerandis paikneva punkti B eestvaade B'' on x -teljest kõrgemal ja pealtvaade B' satub pärast pööramist samuti x -teljest kõrgemale. Seega teise veerandi punkti kaksvaatele on iseloomulik, et mõlemad vaated on x -teljest kõrgemal (joon. 12-2, b). Kolmanda ruumiveerandi punkti C pealtvaade tuleb x -teljest kõrgemale, eestvaade aga — madalamale. Neljanda veerandi punkti D mõlemad vaated tulevad x -teljest madalamale. Nii selgub, et antud kaksvaate järgi ruumipunkt asetseb:

1) esiekraani ees või taga vastavalt sellele, kas pealtvaade on teljest madalamal või kõrgemal;

2) põhiekraanist kõrgemal või madalamal vastavalt sellele, kas eestvaade on teljest kõrgemal või madalamal.

Teise veerandi punkti mõlemad vaated on teljest kõrgemal, neljanda veerandi punkti omad aga madalamal. Kui teises või neljandas veerandis asetseva punkti kaugused põhija esiekraanist on võrdsed, siis tema projektsioonid kaksvaatel langevad kokku. Niisuguse omadusega punktid asetsevad tasandil (§), mis läbib x -telge ning poolitab teise ja neljanda veerandi (joon. 12-3, a). Joo-

nisel 12-3, b näeme tasandil § asetsevate punktide U ja C kaksvaateid; punkt U on võetud II veerandis, punkt V aga IV veerandis.

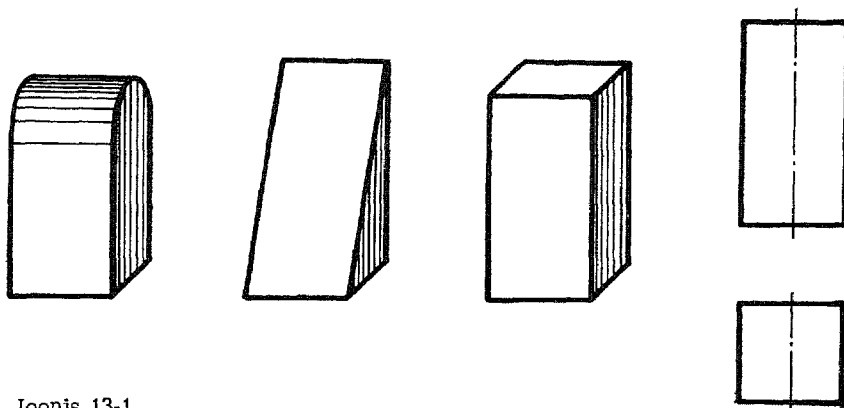
Märgime lõpuks, et praktilisel kaksvaate tuletamisel paigutatakse objekt alati esimesse ruumiveerandisse, harilikult toetuvana põhiekraanile.

KUSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missugust joont punkti kaksvaatel nimetatakse sidejooneks?
2. Kus asub punkt A , kui $A \equiv A''$; kus kohal sidejoonel on selle punkti pealtvaade?
3. Kus asetsevad ruumipunktid, mille projektsioonid kaksvaatel ühtivad?
4. Punkt A asub esimeses ruumiveerandis 20 mm kaugusel põhiekraanist ja 30 mm kaugusel esiekraanist; tuletada selle punkti kaksvaade.

§ 13. PUNKTI KOLMVAADE

1. Täiendavate projektsioonide vajadus. Eelmises paragrahvis selgus, et punkti kaksvaade määrab selle punkti asukoha ekraanide suhtes üheselt. Keerukamate objektide üheks määramiseks kaksvaate abil tuleb aga tähistada nii paljude punktide projektsioone, et tähistate mahuamine joonisele pole enam võimalik. Pealegi ei soodusta suure hulga tähistate kasutamine joonise lugemist, vaid vastupidi — muudab joonise kirjuks ja ebaülevaatlikuks. See pärast on praktikas (näiteks tehnilises joonestamises) üldse loobutud punktide projektsioonide tähistamisest. Tähisteta kaksvaade aga ei tarvitse enam määrata objekti üheselt. Nii näiteks joonisel 13-1 esitatud lihtsa kaksvaate annavad paljude teiste võimalike objektide hulgas ka kõik kolm piltlikult kujutatud objekti. Põhjuseks on asjaolu, et



Joonis 13-1

tähiste puudumisel ei saa kaksvaate järgi eristada punkte, mille projektioonid on sattunud ühele ja samale sidejoonele.

Kui tähisteta kaksvaade ei määra objekti, siis antakse praktikas kahele vaatele lisaks uusi ristprojektsioone (lisavaateid) lisaekraanidel, samuti muud informatsiooni nii, et kõik kokku määraksid objekti üheselt.

2. Punkti kolmvaate saamine. Esimene täiendav ekraan ε_3 võetakse harilikult risti x -teljega, s. o. risti nii põhi- kui ka esiekraaniga; teda nimetatakse **külgekraaniks** (joon. 13-2, a). Külgekraan lõikab põhi- ja esiekraani mööda telgsirgeid y ja z . Objekti ristprojektsiooni külgekraanil nimetatakse **külgvaateks** ehk **vasakultvaateks** (profiilprojektsiooniks).

Tuletades mingi ruumpunkti A ristprojektsioonid ekraanidel ε_1 , ε_2 ja ε_3 , saame tema pealtvaate A' , eestvaate A'' ja külgvaate A''' . Punkti A kaugus külgekraanist on võrdne lõiguga AA''' .

Ekraanide lõikesirged x , y , z (koos nende ühise punktiga O) võime võtta ristkoordinaatide teljestikuks $Oxyz$, kus punkt O on koordinaatide algus.

Siis ekraanid esinevad koordinaatpindadena ($\varepsilon_1 \equiv xy$; $\varepsilon_2 \equiv xz$; $\varepsilon_3 \equiv yz$) ning punkti A kaugused ekraanidest võrduvad sama punkti koordinaatlõikudega x_0 , y_0 ja z_0 :

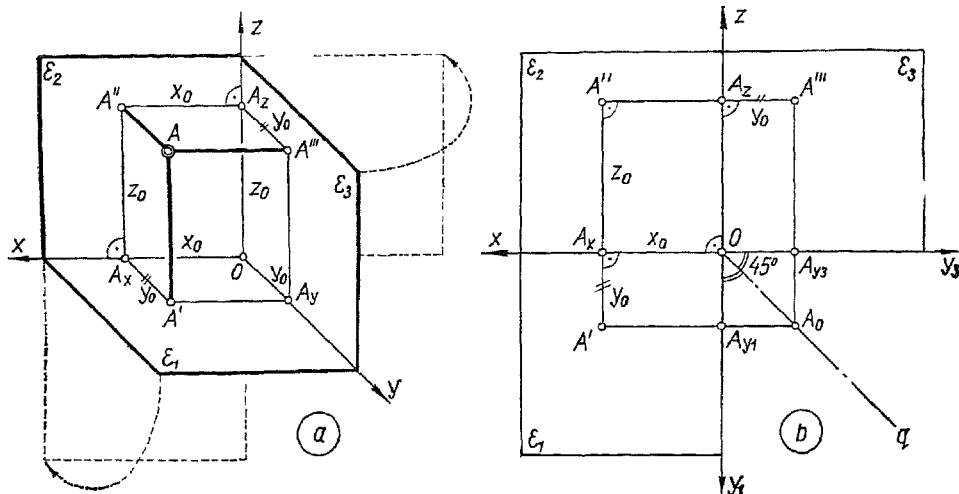
x -koordinaatlõik $x_0 = OA_x = A'''A$;

y -koordinaatlõik $y_0 = OA_y = A''A$;

z -koordinaatlõik $z_0 = OA_z = A'A$.

Arve, mis saadakse punkti koordinaatlõikude mõõtmisel mingi ühe ja sama pikkusühikuga, nimetatakse selle punkti **koordinaatideks**. Punkti koordinaadid kirjutatakse sulgudesse punkti tähise järele järjekorras x -, y - ja z -koordinaat. Näiteks punkti $A(2; 5; 3)$ puhul on x -koordinaat 2, y -koordinaat 5 ja z -koordinaat 3. Punkt on teljestiku suhtes üheselt määratud, kui on antud tema koordinaadid ja pikkusühik koordinaatlõikude mõõtmiseks.

Kujutiste ruumiliselt süsteemilt tasandilisele süsteemile üleminekuks pöörame põhiekraani ümber x -telje ning külgekraani ümber z -telje esiekraanile nii, nagu on näidatud joonisel 13-2, a. Saadud joonist, mis koosneb punkti A kolmest omavahel seotud ristprojektsioonist, nimetatakse punkti A **kolmvaateks** (joon. 13-2, b).



Joonis 13-2

Joonise 13-2 osade *a* ja *b* võrdlemisel selgub, et kolmvaatel on projektsioone A' ja A'' ühendav sirge — nn. püstsidejoon risti x -teljega, projektsioone A'' ja A''' ühendav sirge — rõhtsidejoon aga risti z -teljega:

$$A'A'' \perp x; A''A''' \perp z.$$

Jooniselt 13-2 selgub ka, et külgebraade A''' kaugus z -teljest võrdub pealtvaate A' kaugusega x -teljest, sest kumbki kaugus võrdub punkti A kaugusega esiekraanist, s. o. koordinaatlõiguga y_0 :

$$A_2A''' = A_xA' = A''A = y_0.$$

Seda omadust nimetatakse ka kolmvaate **peaomaduseks**. Koordinaatlõikude x_0 ja z_0 pikkusi esindavad kolmvaatel järgmised lõigud:

$$\begin{aligned} OA_x &= A_zA'' = x_0; \\ OA_z &= A_xA'' = z_0. \end{aligned}$$

Kolmvaate puhul on tähtis silmas pidada, et y -telg sattus pööramistel kahte erinevasse kohta: koos põhi-

ekraaniga pöördus tema positiivne suund alla ning pööratud telg y_1 ühtis vastandsuunaliselt z -teljega; koos külgeekraaniga aga pöördus tema positiivne suund paremale ning pööratud telg y_3 ühtis vastandsuunaliselt x -teljega.

Punkti A kolmvaate sümboliseks kirjutusviisiks on (A', A'', A''') . Kolmvaadet (A', A'', A''') võib vaadelda koosnevana kahest kaksvaatest: eestvaade A'' koos pealtvaatega A' moodustab ühe kaksvaate; eestvaade A'' koos külgebraatega A''' aga teise kaksvaate. Et eestvaade esineb kummaski kaksvaates, siis loetakse teda kolmvaate kõige tähtsamaks vaateks.

3. Kolmanda vaate tuletamine. Punkti mis tahes kaks projektsiooni kolmvaatel määravad üheselt kolmanda projektsiooni. Praktikas on harilikult antud üks eespoolnimetatud kaksvaateist, kas (A'', A') või (A'', A''') , ning nõutakse tema täiendamist kolmvaateks. Jooniselt 13-2, *b* selgub, et pealt- ja eestvaate järgi

leime külgsaate A''' järgmiselt: läbi eestvaate A'' tõmbame rõhtsidejoone ning mõõdame sellele z-teljest arvates lõigu y_0 , mille võtame lähtekaksvaatelt (A'' , A'):

$$A_z A''' = y_0 = A_x A' \quad (\text{kolmvaate peaomadus}).$$

Kui aga on antud punkti eest- ja külgsaate, siis pealtvaate saamiseks tõmbame läbi eestvaate A'' püstsidejoone ning mõõdame sellele lõigu y_0 , mille võtame lähtekaksvaatelt (A'' , A'''):

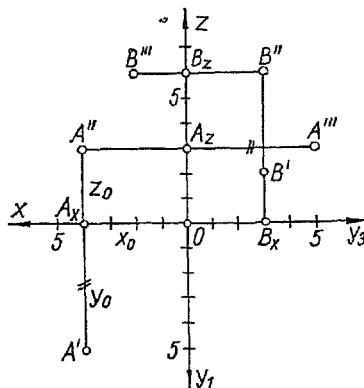
$$A_x A' = y_0 = A_z A'''.$$

Muudes ruumiveerandites paiknevate punktide puhul tuleb talitada analoogiliselt, pidades hoolega silmas koordinaatlõigu y_0 märki: negatiivne y_0 mõõdetakse kolmvaatel x-teljest ülespoole ja z-teljest vasakule.

Punkti kolmanda vaate leidmiseks kahe antud vaate järgi võib kasutada ka abisirget q , mis poolitab telgede y_1 ja y_3 vahelist täisnurka (joon. 13-2, b). Selle põhjal toimuks punkti A külgsaate leidmine, lähtudes antud kaksvaatest (A'' , A'), järgmiselt. Läbi eestvaate A'' tõmbame rõhtsidejoone ning läbi pealtvaate A' rõhtsirge kuni lõikumiseni nurgapoolitajaga q punktis A_0 . Punktist A_0 tõmbame z-telje paralleeli, mis lõikabki sidejoont otsitavas külgsaates A''' . Nii tekib riskülik, mille kaheks tipuks on antud vaated, kolmas tipp asetseb abisirgel q , neljandaks tipuks aga on otsitav vaade.

Kui punkti pealt- ja eestvaate asemel on antud eest- ja külgsaate, siis muutub konstruktsioonis ainult risküliku külgede joonestamise järjekord.

Kui kaheks antud vaateks on pealtvaate ja külgsaate, siis eest-



Joonis 13-3

vaade on leitav läbi antud vaadete tõmmatud püst- ja rõhtsidejoone lõikepunktina.

4. Punkti projektsioonid koordinaatide järgi. Kui punkt on antud oma koordinaatidega ning soovitakse saada tema kaks- või kolmvaadet, siis võib üksikud projektsioonid joonisele märkida vastavate koordinaatide abil, pidades silmas telgede suundi igal ekraanil.

Näide. Tuletame punktide A (4; 5; 3) ja B (-3; -2; 6) kolmvaated, kasutades koordinaatilõikude pealekandmisel telgedel näidatud pikkusühikut (joon. 13-3).

Tuletame esmalt punkti A kolmvaate. Punkti A pealtvaate asetseb põhiekraanil, mille määravad joonisepinnal teljed x ja y_1 , positiivsete suundadega vastavalt vasakule ja allapoole. Et punkti A x- ja y-koordinaadid on mõlemad positiivsed, siis pealtvaate A' saamiseks joonestame koordinaatmurdjoone $OA_x A'$, võttes $OA_x = x_0 = 4$ ja $A_x A' = y_0 = 5$.

Esiekraani määravad teljed x ja z positiivsete suundadega vastavalt vasakule ja ülespoole. Järelikult eestvaate A'' koordinaatmurdjoone joonestamisel võtame $OA_x = x_0 = 4$ ja $A_x A'' = z_0 = 3$.

Külgekraani määravad joonisepinnaal teljed z ja y_3 positiivsete suundadega vastavalt ülespoole ja paremale. Järelikult punkti A külgsaate A''' saamiseks joonestame koordinaatmurdjoone OA_zA''' nii, et $OA_z = z_0 = 3$ ja $A_zA''' = y_0 = 5$.

Analoogiliselt leiame ka punkti $B(-3; -2; 6)$ projektsioonid. Selleks joonestame koordinaatmurdjooned järgmiselt:

punkti B' saamiseks ekraanil $e_1 \equiv xy_1$ lõik $OB_x = -3$ ja $B_xB' = -2$;

punkti B'' saamiseks ekraanil $e_2 \equiv xz$ lõik $OB_x = -3$ ja $B_xB'' = 6$;

punkti B''' saamiseks ekraanil $e_3 \equiv zy_3$ lõik $OB_z = 6$ ja $B_zB''' = -2$.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Kuidas tõmmatakse kolmvaatel telgede suhtes: a) püstsidejoon, b) rõhtsidejoon?
2. Kuidas tõmmatakse abisirge q ?
3. Missuguse koordinaatlõiguga võrdub punkti külgsaate kaugus z -teljest?
4. Tuletada punktide $A(20; 0; 40)$ ja $B(10; 40; -30)$ kolmvaated (ühik—1 mm). Kui kaugel on punkt A esiekraanist? Mitmendal ruumi veerandis on punkt B ?

§ 14. SIRGJOONE KAKSVAATE

1. Sirgjoone projektsioonid. Sirgjoon on määratud oma kahe punktiga, iga punkt aga oma kaksvaatega; järelikult sirgjoon on määratud oma kahe punkti kaksvaatega.

Olgu antud punktid $A(A', A'')$ ja $B(B', B'')$. Siis sirgjoone AB pealtvaateks on $A'B'$ ja eestvaateks $A''B''$ (joon. 14-1). Sellele sirgele mingi punkti M märkimiseks on vaja projektsioonid M' ja M'' valida vastavalt sirge AB pealt- ja eestvaatel nii, et sidejoon $M'M''$ oleks risti x -teljega.

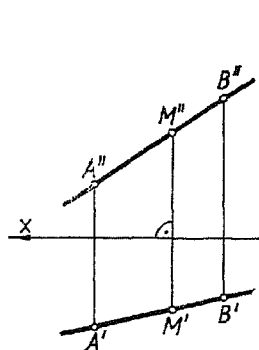
Üldjuhul on sirge s määratud ka

oma niisuguse kaksvaatega (s', s''), millel pole fikseeritud selle sirge ühegi punkti projektsioone (joon. 14-2, a). Tõepoolest — pealtvaade s' määrab projekteeeriva tasandi $\tau \perp e_1$, eestvaade s'' aga teise projekteeeriva tasandi $\pi \perp e_2$; tasapindade τ ja π lõikejoon aga ongi sirge s (vt. piltkujutist 14-2, b). Erandiks on külgekraaniga paralleelne sirge, mille puhul mõlemad projekteeerivad tasandid ühtivad; säärast sirget käsitleme üksikasjalikumalt järgmises paragrahvis.

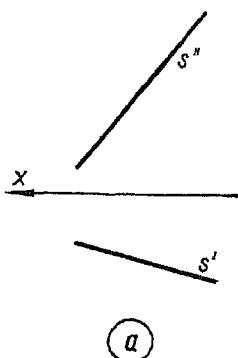
Kaksvaatega (s', s'') antud sirge s külgsaate s''' saamiseks valime sellel sirgel vabalt kaks punkti M ja N ning tuletame nende külgsaated M''' ja N''' (joon. 14-3). Seda teeme eelmisest paragrahvist tuntud viisil, s.o. tõmbame läbi eestvaadete M'' ja N'' rõhtsad sidejooned ning mõõdame neile punktide M ja N kaugused esiekraanist ($M_zM''' = M_xM'$ ja $N_zN''' = N_xN'$). Saadud punktide ühendussirge $M'''N'''$ ongi otsitav külgsaate s''' .

Kui sirge s on tasandil ξ , mis poolitab ekraanide vahelist nurka teises ja neljandas ruumiveerandis, siis tema iga punkti pealt- ja eestvaade ühtivad (vt. § 12). Järelikult seesuguse sirge kaksvaateks tuleb üksainus kahekordselt loetav sirge $s' \equiv s''$ (joon. 14-4).

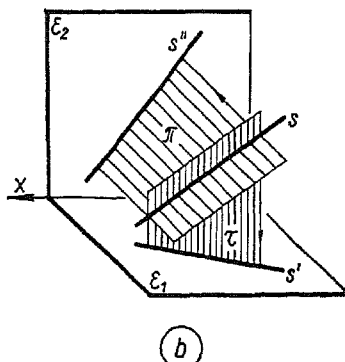
Sirgjoone projektsioonid kaksvaatel võib üldiselt joonestada vabalt. Kitsendused esinevad ainult järgmistel juhtudel: 1) kui sirgjoone üheks projektsiooniks on punkt, peab teiseks projektsiooniks olema x -telje ristsirge, 2) kui üheks projektsiooniks on x -telje ristsirge, peab teiseks projektsiooniks olema kas punkt või samuti x -telje ristsirge (lähemalt vt. § 15). Seejuures ei tohi kuidagi rikkuda projektsioonilist sidet. Neid asjaolusid mitte arvestades saame



Joonis 14-1



Joonis 14-2

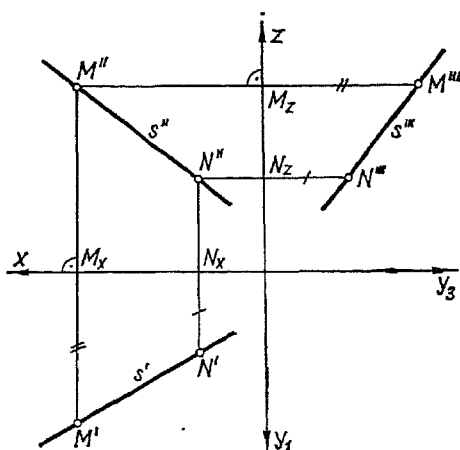


väärkaksvaate, millele vastavat sirget ruumis polegi olemas.

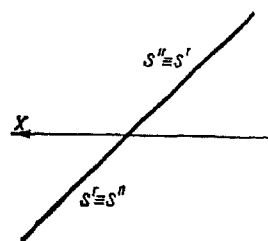
2. Sirglõigu jaotamine antud vahekorras. Sirgjoone lõigud on teatavasti võrdelised oma paralleelprojektsioonidega (§ 7, lause 8). Seda asjaolu saab kasutada kaksvaatega antud sirglõigu jaotamiseks etteantud vahekorras.

Näide. Olgu vaja jaotada sirglõik AB punktiga M vahekorras $AM:MB=3:2$ (joon. 14-5).

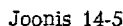
Lause (8) põhjal võime lõigu AB asemel jaotada vahekorras $3:2$ ühe tema projektsiooni, näiteks pealtvaate $A'B'$. Selleks tõmbame lõigu $A'B'$ ühest otspunktist, näiteks punktist A' , vaba sihiga sirge g ning möödame sellele punktist A' viis võrdset lõiku. Viimase punkti 5 ühendame punktiga B' ning läbi kolmanda jaotuspunkti tõmbame sirge paralleelselt lõiguga $5B'$. See paralleel lõikab pealtvaadet $A'B'$ punktis M' , mis ongi otsitava punkti M



Joonis 14-3



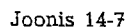
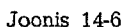
Joonis 14-4

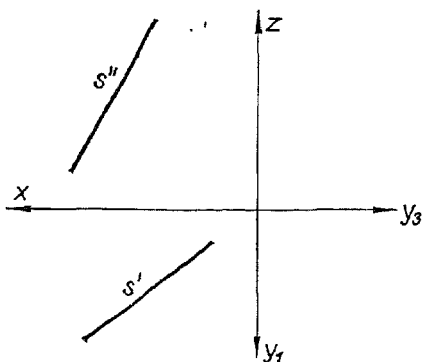


3. Sirgjoone jälgpunktid. Sirgjoone ja ekraani lõikepunkti nimetatakse selle sirgjoone **jälgpunktiks** (ehk lihtsalt jäljeks). Kui sirge s pole ühegi ekraaniga paralleelne, siis on tal kolm jälgpunkti: **põhijälg** $P \equiv s \times \varepsilon_1$, **esijälg** $E \equiv s \times \varepsilon_2$ ja **küljälg** $K \equiv s \times \varepsilon_3$.

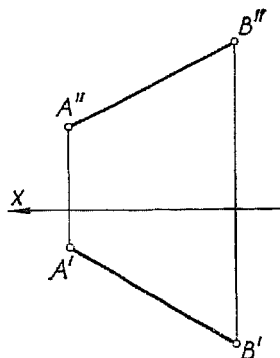
Et põhijalg P asetseb ühtaegu põhiekraanil ja sirgel s , siis peab tema eestvaade P'' asetsema x -teljel ja sirge eestvaatel (vt. ka piltkujutist 14-6, b). Järelikult põhijälje eestvaade P'' on x -telje ja eestvaate s'' lõikepunkt: $P'' \equiv x \times s''$. Tõmmates läbi punkti P'' sidejoone, leiame sirge pealtvaatelt s' ka punkti P pealtvaate P' , mis arusaadavalt langeb ühte punkti P enesega.

Joonisel 14-7 esitatud juhul asetseb sirgjoone b esijalg E põhiekraanist madalamal. Lugejale soovitame teha vastava piltkujutise ja veenduda, et jälgpunktide leidmine toimub eespool toodud mõttekäigu alusel.





Joonis 14-8



Joonis 14-9

KÜSIMUSED JA ULESANDED

1. Mis on sirgjoone jälgpunkt?
2. Märkida sirge s kaksvaatele punkti M projektsioonid nii, et punkt M asetseks sirgel s ja oleks põhiekraanist 15 mm kaugusel (joon. 14-8). Tuletada sirge s külgevaade.
3. Leida sirglõigu AB poolituspunkti M projektsioonid (joon. 14-9); tuletada sirge AB jälgpunktide P ja E projektsioonid.

§ 15. ERIASENDILISED SIRGED

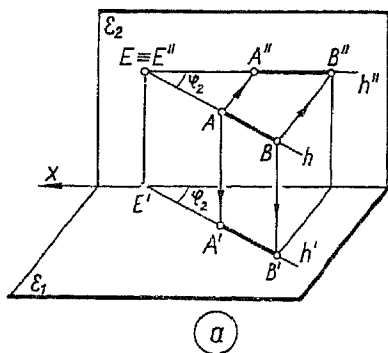
Sirge võib ekraanikolmiku suhtes olla kas üldasendis või eriasendis. Üldasendiline sirge pole ühegi ekraaniga paralleelne ega asetse ühelgi ekraanil, eriasendiline sirge aga on mõne ekraaniga paralleelne või asetseb mõnel neist. Ekraaniga paralleelset sirget nimetatakse ka **nivoosirgeks** selle ekraani suhtes. Nivoosirgetel on järgmised erinimetused: põhiekraaniga paralleelset sirget nimetatakse **horisontaaliks** (h), esiekraaniga paralleelset sirget — **frontaaliks** (f) ja külgekraaniga paralleelset sirget — **profiilsirgeks** (s).

1. **Horisontaal** h on esitatud pilt-

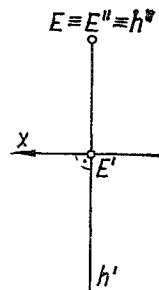
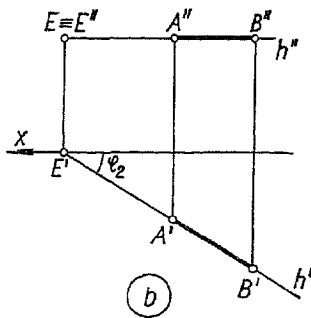
likult joonisel 15-1, a ning kaksvaates joonisel 15-1, b . Horisontaali eestvaade h'' on paralleelne x -teljega (või erandlikult punkt), sest horisontaali kõik punktid on põhiekraanist võrdsel kaugusel. Et horisontaal on paralleelne põhiekraaniga, siis lause (7) põhjal tema iga lõik AB projekteerub põhiekraanile tõelises pikkuses: $A'B' = AB$. Tõelises suurus projekteerub põhiekraanile ka horisontaali esikaldenurk φ_2 (ehk kaldenurk esiekraani suhtes), sest selle nurga tasand on põhiekraaniga paralleelne. Horisontaali kaldenurk põhiekraani suhtes ehk põhikaldenurk arusaadavalt võrdub nulliga.

Punkt E joonisel 15-1 on horisontaali esijälg, põhijälg temal aga puudub. Kui horisontaal on risti esiekraaniga, siis tema pealtvaade on risti x -teljega ning eestvaateks tuleb punkt; see punkt on ühtlasi ka horisontaali esijälg $E \equiv h''$ (joon. 15-2).

2. **Frontaal** f on piltlikult kujutatud joonisel 15-3, a ja kaksvaates joonisel 15-3, b . Frontaali pealtvaade f' on paralleelne x -teljega (või erandlikult punkt), sest frontaali kõikidel punktidel on esiekraanist üks ja



Joonis 15-1



Joonis 15-2

sama kaugus. Frontaali mis tahes lõik AB , ja põhikaldenurk φ_1 kui esiekraaniga paralleelsed kujundid projekteeruvad esiekraanile tõelises suurus: $A''B'' = AB$; $\varphi_1 = \varphi_1(f, f') = \varphi_1(f'', x)$.

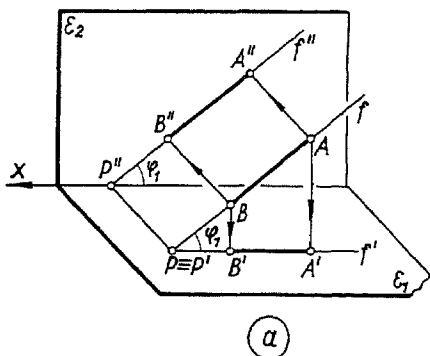
Frontaalil puudub esijalg, tema põhijäljeks aga on punkt $P(P'', P')$. Kui frontaal on risti põhiekraaniga, siis tema eestvaade on risti x -teljega ning pealtvaateks tuleb punkt; see punkt on siis ühtlasi frontaali põhijalg $P \equiv f'$ (joon. 15-4).

Kui sirge s on paralleelne niihasti põhi- kui ka esiekraaniga, siis on ta

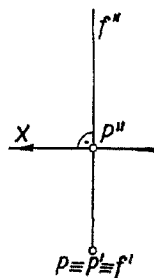
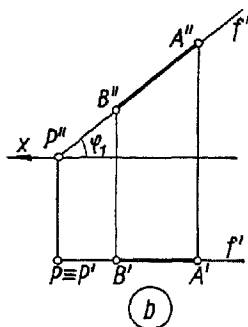
ühtaegu nii horisontaal kui ka frontaal: $s \equiv h \equiv f$ (joon. 15-5). Niisugune sirge on paralleelne x -teljega ja risti külgekraaniga, tema külgvaateks on punkt.

3. Profiilsirge s pealt- ja eestvaade on üldjuhul sirged, mis on risti x -teljega ning asetsevad ühel ja samal sidejoonel. See jäeldub asjaolust, et profiilsirge punktide kaugused külgekraanist on võrdsed (joon. 15-6, a). Erandlikult võib profiilsirge üks projektsioonidest olla ka punkt.

Kui profiilsirge s kaksvaatel (s' , s'') pole fikseeritud selle sirge kahe



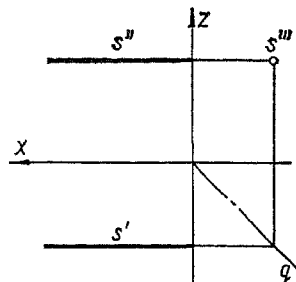
Joonis 15-3



Joonis 15-4

punkti projektsioone, siis see kaks-
vaade ei määra profiilsirget üheselt.
Tõepoolest, projekteerivad tasandid
 $\tau(s, s')$ ja $\pi(s, s'')$, mis iga muu sirge
puhul lõikuvad, langevad profiilsirge
puhul kokku üheks tasandiks $\tau \equiv \pi$
ega määra seetõttu mingit lõikesir-
get (joon. 15-6, b). Nii jääb sirge s
asend tasandil $\tau \equiv \pi$ lahtiseks, s. t.
selle tasandi iga juhuslik sirge m
võib olla sirgeks s . Erandiks on pro-
fiilsirged, mis on risti põhi- või esi-
ekraaniga. Niisuguste sirgete üks
projektsioon on punkt ning nende
asend ruumis on täiesti määratud
juba ainuüksi selle punktkujutisega
(vt. jooniseid 15-2 ja 15-4, kus sirged
 $h \perp \varepsilon_2$ ja $f \perp \varepsilon_1$ on ühtlasi profiilsirge-
teks).

Üldjuhtumil on profiilsirge ühe-
seks määramiseks vaja fikseerida
tema kahe punkti A ja B projekt-
sioonid (joon. 15-7, a). Arusaadavalt
on profiilsirge s üheselt määratud
ka oma teise kaksvaatega (s'', s''').
Sellel kaksvaatel on sidejooned risti
 z -teljega ja lõikavad sirge eest- ja
külgsaadet, võimaldades seega fik-
seerida sirgjoone punkte (joon.
15-7, b). Seda asjaolu saab tihtipeale



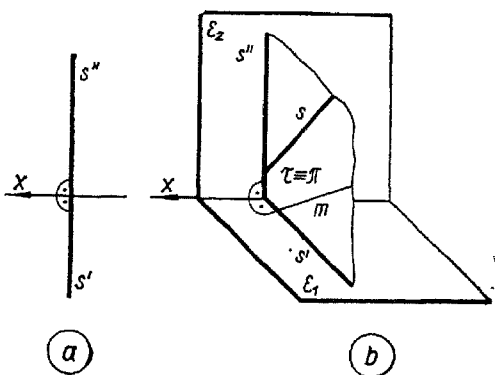
Joonis 15-5

kasutada mitmesuguste ülesannete
lahendamiseks.

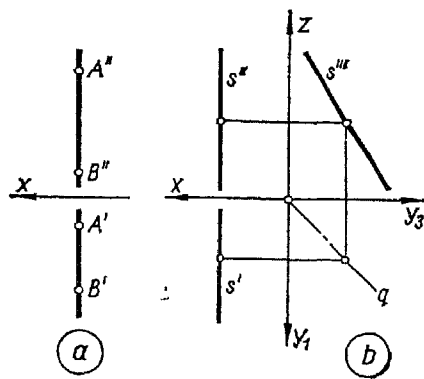
Näide. Olgu profiilsirge AB
antud oma pealt- ja eestvaatega ning
olgu teada temal asetseva punkti M
eestvaade M'' (joon. 15-8, a). Leiame
punkti M pealtvaate M' .

Puuduvat vaadet M' püstsideoone
abil leida ei saa, sest see ühtib sirge
pealtvaatega. Tuletades aga esmalt
sirge AB külgsaade, leiame sellelt
rõhtsidejoone abil punkti M külgs-
saade M''' ning seejärel kolmvaate
peaomaduste põhjal ka punkti M
pealtvaate M' ($M_x M' = M_z M'''$).

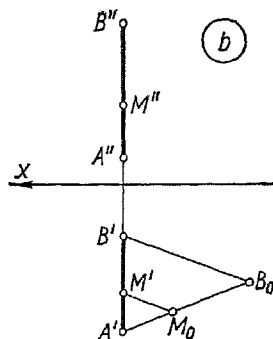
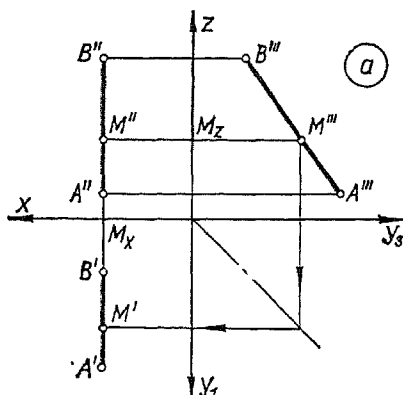
Sama ülesannet saab lahendada ka
mõnevõrra lihtsamalt (joon. 15-8, b).



Joonis 15-6



Joonis 15-7



Joonis 15-8

Et sirglõigu osad on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega, siis peab punkt M' jaotama lõigu $A'B'$ samas vahekorras nagu punkt M'' jaotab lõigu $A''B''$. Lõigu $A'B'$ jaotamiseks vahekorras $A''M'' : M''B''$ kasutame tuntud tõsiasja, et paralleelsed sirged lõikavad nurga haaradest ära võrdelised lõigud. Konstruktsioon on nüüd järgmine: punktist A' mõõdetakse vabalt valitud sihis lõigud $A'B_0 = A''B''$ ja $A'M_0 = A''M''$; seejärel tõmmatakse läbi punkti M_0 sirge $M_0M' \parallel B_0B'$, mis annabki otsitava pealtvaate M' .

Viimati kirjeldatud konstruktsiooni on otstarbekohane rakendada ka neil juhtumel, kus sirge projektsioonid kaksvaatel moodustavad sidejoontega väga väikesi nurki, mistõttu sidejoonte abil ühelt vaate teiselt minnes võivad tekkida suured ebatäpsused.

KÜSIMUSED JA ULESANDED

1. Missugust sirget nimetatakse üldasendiliseks?
2. Missugust sirget nimetatakse: a) horisontaalsirge, b) frontaalsirge?
3. Sirge s on risti põhiekraaniga ja paikneb

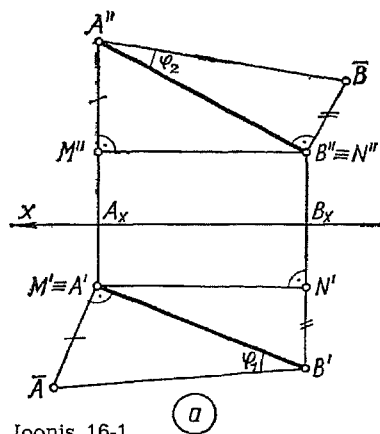
esiekraanist 20 mm kaugusel. Joonestada selle sirge kaksvaade.

4. Horisontaalsirge läbib punkti $A(10; 30; 5)$ ja moodustab esiekraaniga nurga 30° . Esitada selle sirge kaksvaade. Mitu lahendit on ülesandel?

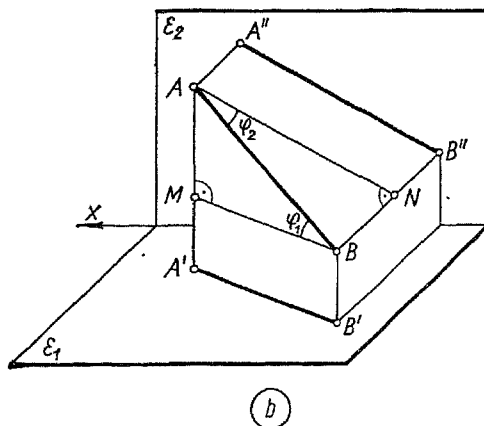
§ 16. ÜLDASENDILISE SIRGLÕIGU PIKKUS JA KALDENURGAD

Eelmises paragrahvis selgus, et eriasendilise sirglõigu pikkus ja kaldenurgad ekraanide suhtes esinevad mituvaate mõnes vaates oma tõelises suurus. Üldasendilise sirglõigu projektsioonid põhi-, esi- ja külgekraanil aga on sirglõigust enesest lühemad. Ka üldasendilise sirgjoone kaldenurgad ei esine üheski vaates tõelises suurus. Seepärast vajab üldasendilise sirglõigu pikkuse ja kaldenurkade leidmine erikäsitlust.

1. Täisnurkse kolmnurga võte. Olgu vaja leida kaksvaatega antud üldasendilise sirglõigu AB pikkus ning kaldenurgad φ_1 ja φ_2 vastavalt põhi- ja esiekraani suhtes (joon. 16-1, a). Tõmbame vastaval piltkujutisel 16-1, b lõigu $BM \parallel A'B'$. Siis lõik



Joonis 16-1



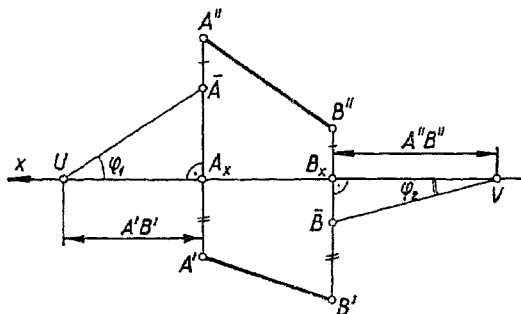
AB osutub hüpoteenuusiks täisnurkses kolmnurgas ABM , mille üks kaatet MB võrdub lõigu AB pealtvaatega ($MB = A'B'$), teine kaatet AM aga võrdub lõigu AB otspunktide kauguste vahega põhiekraanist ($AM = AA' - BB'$). Ühtlasi esineb selles kolmnurgas ka lõigu AB põhikaldenurk φ_1 . Niisiis konstrueerime kaksvaatel (joon. 16-1, a) täisnurkse kolmnurga, võttes üheks kaatetiks lõigu AB pealtvaate $A'B'$, teiseks kaatetiks $A'A$ aga punktide A ja B kauguste vahe põhiekraanist: $A'A = A'A_x - B'B_x = A'M'$. Saadud kolmnurga $A'B'A$ hüpoteenuus ongi võrdne lõigu AB pikkusega: $AB = \overline{AB'}$. Ühtlasi saame ka põhikaldenurga $\varphi_1 = \angle A'B'A$.

Analoogilist mõttekäiku võime rakendada ka esiekraani suhtes. Tõepoolest, tõmmates joonisel 16-1, b lõigu $AN \parallel A''B''$ näeme, et lõik AB on hüpoteenuusiks täisnurkses kolmnurgas ABN , mille üks kaatet AN võrdub lõigu AB eestvaatega, teine kaatet BN aga lõigu AB otspunktide kauguste vahega esiekraanist. Võttes joonisel 16-1, a

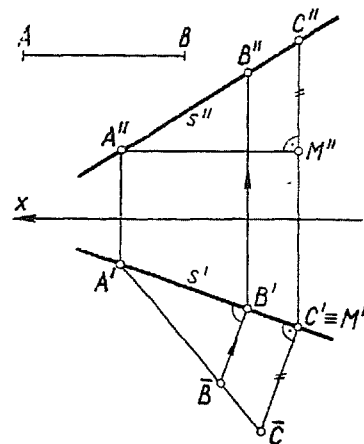
lõigu AB eestvaate $A''B''$ täisnurkse kolmnurga üheks kaatetiks, teiseks kaatetiks $B''B$ aga punktide B ja A kauguste vahe esiekraanist ($B''B = B''B_x - A'A_x = N'B'$), saame teistkordselt lõigu AB pikkuse ($AB = \overline{A''B}$) ja ühtlasi ka sirglõigu esikaldenurga φ_2 .

Kirjeldatud võtet sirglõigu pikkuse ja kaldenurkade leidmiseks tuntakse täisnurkse kolmnurga võtte nime all.

2. Sirklivõte. Sirglõigu pikkuse leidmine muutub tunduvalt lihtsamaks, kui täisnurkse kolmnurga konstrueerimisel kasutada ära mõni joonisel leiduv täisnurk, näiteks täisnurk x -telje ja sidejoone vahel (joon. 16-2). Konstruktsioon on nüüd järgmine: möödame x -teljele lõigu $A_xU = A'B'$ ja sidejoonele lõigu $A''A = B''B_x$. Siis kaatet A_xA on võrdne punktide A ja B kauguste vahega põhiekraanist ning sirglõigu pikkus $AB = \overline{AU}$. Kogu konstruktsiooni läbiviimisel vajatakse nüüd ainult sirklit. Seepärast nimetatakse täisnurkse kolmnurga võtte seegust rakendust ka **sirklivõtteks**.



Joonis 16-2



Joonis 16-3

Rakendades sirklivõtet esiekraani suhtes, on lõigu AB pikkus joonisel 16-2 leitud veelkordselt lõiguna $\bar{B}V$; seejuures $B'\bar{B} = A'A_x$.

Käsitletud võtete olemuse võib lühidalt sõnastada järgmiselt:

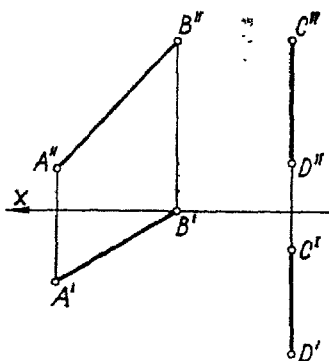
- (20) sirglõigu pikkus võrdub hüpotenuusiga täisnurkses kolmnurgas, mille kaatetiteks on lõigu pealtvaate pikkus ja lõigu otspunktide kauguste vahe põhiekraanist või siis

lõigu eestvaate pikkus ja lõigu otspunktide kauguste vahe esiekraanist.

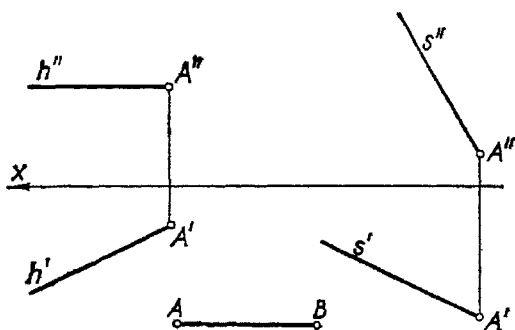
Näide. Rakendusnäitena sirglõigu pikkuse leidmise kohta lähendame järgmise ülesande.

Antud on üldasendiline sirge s ja temal asetsev punkt A (joon. 16-3). Vaja on mõõta sellele sirgele punktist A alates antud pikkusega lõik AB ning leida selle projektsioonid.

Valime sirgel s vabalt punkti C

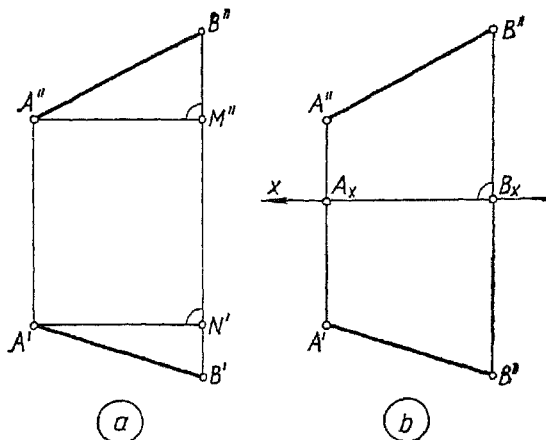


Joonis 16-4



Joonis 16-5

ning leiame lõigu AC pikkuse. Selleks konstrueerime täisnurkse kolmnurga $A'C'\bar{C}$, mille kaatetiteks on lõigu pealtvaade ning punktide A ja C kauguste vahe põhiekraanist ($C'\bar{C} = C''M''$). Jargnevalt mõõdame lõigu AC tõelisele pikkusele $A'\bar{C}$ antud pikkuse AB ($A'\bar{B} = AB$). Punkti B pealtvaate B' saamiseks tõmbame läbi B sirge $\bar{B}B' \perp s'$. Eestvaate B'' leiame sidejoone abil eestvaatelt s'' . Sellega on uhtlasi leitud ka lõigu AB projektsioonid.



Joonis 17.1

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Millega võrduvad sirglõigu pikkuse leidmiseks konstrueeritava täisnurkse kolmnurga kaatetid, kui kolmnurk joonestatakse a) pealtvaatele b) eestvaatele?
2. Leida sirglõikude AB ja CD pikkused ning kaldenurgad ekraanide suhtes (joon 16-4)
3. Leida punktide $A(0 \ 20, \ 10)$ ja $B(30 \ 20 \ 40)$ vaheline kaugus
4. Mõõta sirgetele h ja s alates punktist A antud sirglõik AB ning leida punkti B projektsioonid (joon 16.5)

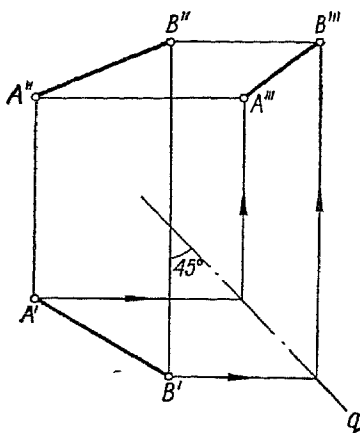
§ 17. TELJEVABA KAKSVAADE

Puume selgusele jõuda, kas kaksvaate telg on joonisel alati vajalik. Kui mingi objekti, näiteks sirglõigu AB kaksvaatel puudub x -telg (joon 17-1, a), siis pole võimalik mõõta objekti punktide kaugusi põhi- ja esiekraanist, saab aga alati kindlaks teha punktide kauguste vahesid ekraanidest. Tõepoolest, tõmmates antud teljevabal kaksvaatel lõigud $A''M''$ ja $A'N'$ risti sidejoontega, näeme, et punktide B ja A kauguste vahe põhiekraanist võrdub lõiguga $M''B''$, kauguste vahe esiekraanist aga lõiguga $N'B'$.

Kui lõigu AB teljevabal kaksvaatel tõmmata vabalt valitud kohas x -telg risti sidejoontega (joon. 17-1,

b), siis saavad kõik selle lõigu punktid endale kindlad kaugused ekraanidest. Sellega on aga lõigu AB ja ekraanide vastastikune asend ruumis täiesti määratud ja me saame leida ka sirge AB jalgpunktid Järelikult, kui ulesande lahendamisel laheb vaja ainult objekti projektsioone ja punktide kauguste vahesid ekraanidest, siis pole kaksvaate telje asukohta joonisel vaja fikseerida, s. t. võib kasutada teljevaba kaksvaadet. Kui aga ulesandes kasutatakse või kasutakse kaugusi ekraanidest või objekti ja ekraanide ühiseid elemente (näiteks sirgjoone jalgpunkte), siis on kaksvaate telg joonisel vajalik. Edaspidi kasutame kaksvaadet võimalikult tema teljevabal kujul.

Tehniliste jooniste valmistamisel ja kasutamisel pole vaja teada punktide kaugusi ekraanidest ega objekti sirgete jalgpunkte. Seeparast kasutatakse tehnilises joonestamises mituvaateid eranditult teljevabal kujul. Seejuures peetakse ainult silmas, et pealt- ja eestvaadet ühendavad sidejooned oleksid vertikaalsed, eest- ja

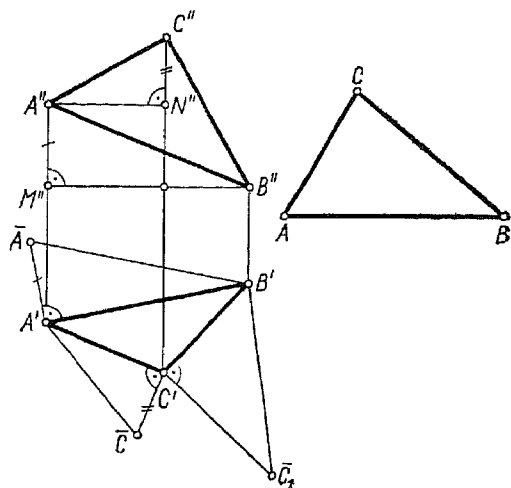


Joonis 17-2

külgvaadet ühendavad sidejooned aga horisontaalsed.

Kui teljevaba kaksvaate järgi on vaja tuletada objekti külgvaade, siis võib enne tõmmata x- ja z-telje ning seejärel tuletada objekti külgvaate harilikul viisil (§ 13). Seejuures võib x-teljeks võtta iga sirge, mis on risti püstsidejoontega, z-teljeks aga iga sirge, mis on risti rõhtsidejoontega.

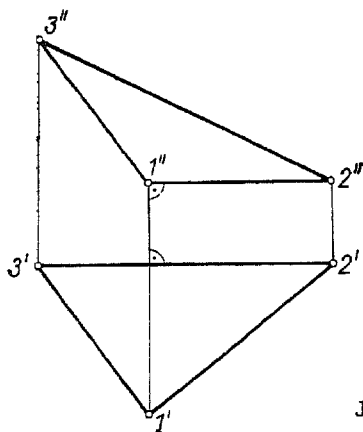
Teist võimalust objekti külgvaate tuletamiseks teljevaba kaksvaate järgi näeme joonisel 17-2. Siin on



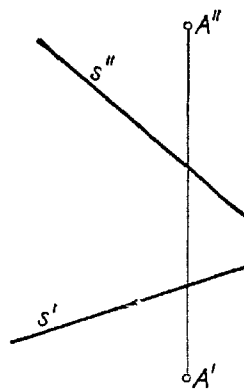
Joonis 17-3

sirglõigu AB külgvaate konstrueerimisel kasutatud abisirget q, mis on tõmmatud vabas kohas 45° nurga all sidejoonte suhtes. Vastav konstruktsioon punkti puhul on tuttav paragrahvist 13.

Üheks olulisemaks ülesandeks kujutavas geometrias on tasapinnalise kujundi **tõelise kuju** ja **suuruse** tuletamine kujundi projektsioonide järgi. Et koos tõelise kujuga saadakse ka kujundi suurus, siis räägime edaspidi ainult tõelisest kujust.



Joonis 17-4



Joonis 17-5

Näide. Tuletada kolmnurga ABC tõeline kju selle kolmnurga teljevaba kaksvaate järgi (joon. 17-3).

Leiame kõigepealt kolmnurga ABC kõigi külgede pikkused eelmises paragrahvis käsitletud võtteil. Et saada punktide A , B ja C kauguste vahesid põhiekraanist, tõmbame sirged $A''N''$ ja $B''M''$ risti sidejoontega. Seejärel konstrueerime pealtvaatel lause (20) põhjal täisnurksed kolmnurgad, mille hüpotenuusid annavadki kolmnurga ABC külgede pikkused. Näiteks külje AB pikkus on võrdne hüpotenuusiga $B'A$ täisnurkses kolmnurgas $A'B'A$, mille kaatet $A'A = M''A''$. Pärast külgede pikkuste leidmist on kõrval konstrueeritud nõutud tõeline kju ABC , millel $AB = B'A$, $AC = A'C$ ja $BC = B'C_1$.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Mis juhtumel on telg kaksvaatel tingimata vajalik?
2. Tuletada kolmnurga 123 tõeline kju (joon. 17-4).
3. Leida punkti A kaugus d sirgest s (joon. 17-5). Juhis: võtta sirgel s vabalt punktid M ja N , tuletada kolmnurga AMN tõeline kju ning leida kaugus d kolmnurga AMN kõrgusena

§ 18. KAHE SIRGJOONE VASTASTIKUSED ASENDID

Kaks sirgjoont võivad olla paralleelsed, lõikuvad või kiivsed. Teeme kindlaks tunnused, mis võimaldavad kaksvaate järgi otsustada sirgete vastastikuse asendi üle ruumis.

1. Paralleelsed sirged projekteeruvad üldiselt igale ekraanile paralleelseteks sirgeteks (§ 7, lause 9). Järelikult paralleelsete sirgete a ja b samanimelised projektsioonid

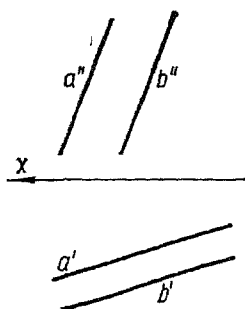
kaksvaatel on paralleelsed, s. t. $a' \parallel b'$ ja $a'' \parallel b''$ (joon. 18-1). Üldjuhul on õige ka vastupidine väide, s. t. kui sirgete a ja b samanimelised projektsioonid kaksvaatel on paralleelsed, siis ka sirged a ja b on paralleelsed. Erandiks on vaid profiilsirged, sest neil on ka kiivse vastastikuse asendi puhul paralleelsed pealt- ja eestvaated. Profiilsirgete a ja b vastastikuse asendi üle saab otsustada nende külgvaadete a'' ja b'' järgi: kui külgvaated on paralleelsed, nagu joonisel 18-2, a , siis ka sirged a ja b on paralleelsed; kui aga külgvaated lõikuvad, nagu joonisel 18-2, b , siis sirged a ja b on kiivsed.

Kokkuvõttes saame järgmise sirgjoonte paralleelsuse tunnuse:

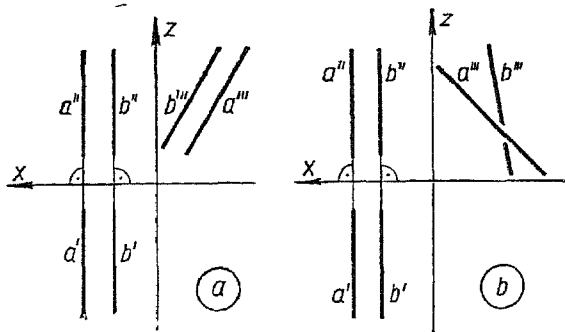
- (21) kui sirgete samanimelised projektsioonid on omavahel paralleelsed, kuid pole risti kaksvaate teljega, siis need sirged on ruumis paralleelsed.

2. Lõikuvad sirged a ja b läbivad nende lõikepunkti L . Järelikult sirgete a ja b pealtvaated a' ja b' peavad läbima lõikepunkti pealtvaadet L' , eestvaated a'' ja b'' aga lõikepunkti eestvaadet L'' (joon. 18-3). Et punkti L pealt- ja eestvaade asetsevad ühel ja samal sidejoonel, siis järeldame, et kahe lõikuva sirge samanimeliste projektsioonide lõikepunktid asetsevad ühel ja samal x -telje ristsirgel. Õige on ka järgmine pöördlause, mis ongi kahe sirge lõikumise tunnuseks kaksvaatel.

- (22) Kui kahe sirge samanimeliste projektsioonide lõikepunktid asetsevad ühel ja samal sidejoonel ning kummagi sirge mõlemad projektsioonid pole risti x -teljega, siis need sirged ruumis lõikuvad.



Joonis 18-1



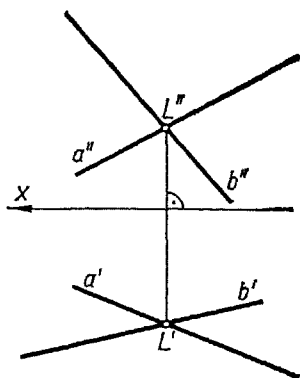
Joonis 18-2

Kui ühe antud sirge mõlemad projektsioonid on risti x -teljega, s. t. kui see sirge on profiilsirge, siis võib esineda nii lõikumise kui ka kiivsuse juhtum. Joonisel 18-4 näiteks on sirged AB ja CD kiivsed, kuigi nende samanimeliste projektsioonide lõikepunktid M' ja M'' asetsevad ühel ja samal sidejoonel. Tõepoolest, sirged AB ja CD ei saa olla paralleelsed, sest nende samanimelised projektsioonid lõikuvad. Aga sirged AB ja CD ei saa ka lõikuda, sest lõikumise korral peaks nende külgsaadete lõikepunkt asetsema rõhtsal sidejoonel, mis läbib

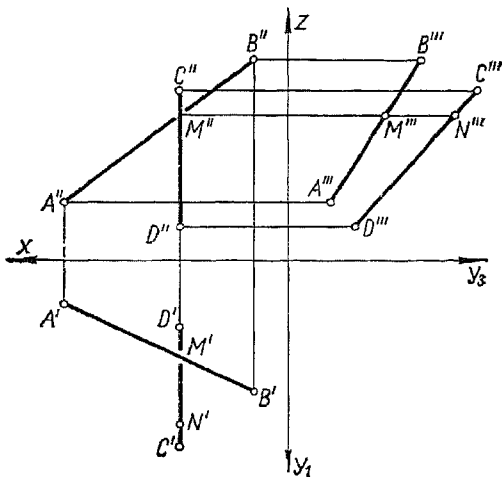
punkti M'' . Järelikult sirged AB ja CD on kiivsed.

3. Kiivsirged ei lõiku ega ole paralleelsed. Järelikult kiivsirgete kaksvaade ei tohi rahuldada lõikumise ega paralleelsuse tunnust; see ongi kiivsuse tunnuseks.

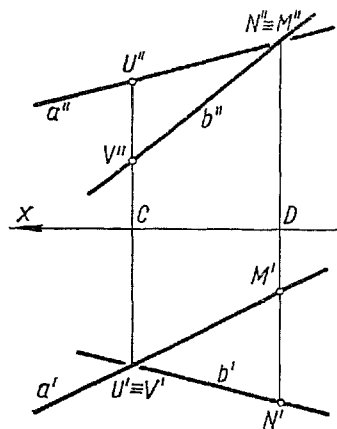
Praktikas on sageli vaja kiivsirgete korral otsustada, kumb sirge läheb teisest üle, kui neid vaadelda ülevalt põhikiirte suunas, ning kumb sirge läheb teise eest läbi, kui neid vaadelda eestpoolt, s. o. esikiirte suunas. Lahendame selle nn. nähtavuse küsimuse näiteks kiivsirgete a ja b kohta joonisel 18-5. Et otsustada, kumb sirge läheb teisest üle, vaatleme sirgete a ja b neid punkte U ja V , mis asetsevad ühel ja samal põhikiirel. Nende punktide ühiseks pealtvaateks on sirgete a ja b pealtvaadete lõikepunkt $U' \equiv V'$. Tõmmates sidejoone läbi selle punkti, näeme eestvaatelt, et sirgel a asetsev punkt U on kõrgemal kui sirgel b asetsev punkt V , sest $U''C > V''C$. Järelikult ülalt vaadates on punkt U vaatlejale lähemal kui punkt V ; seetõttu läheb sirge a sirgest b üle. Selle asjaolu märkimiseks on joonisel sirge b pealtvaade katkestatud.



Joonis 18-3



Joonis 18-4



Joonis 18-5

Analoogiliselt otsustame, kumb sirge läheb teise eest läbi. Nüüd vaatleme sirgete a ja b neid punkte M ja N , mille ühiseks eestvaateks on sirgete a ja b eestvaadete lõikepunkt $M'' \equiv N''$. Tõmmates sidejoone läbi selle punkti, selgub pealtvaatelt, et sirgel b asetseva punkti N kaugus esiekraanist on suurem sirgel a asetseva punkti M omast, sest $N'D > M'D$. Järelikult on punkt N eestpoolt vaadates vaatlejale lähemal kui punkt M , s. t. sirge b läheb sirge a eest läbi. Seepärast on sirge a eestvaade joonisel katkestatud.

Uhise projektsiooniga punktide kohta tekib alati küsimus, kumb on ekraanist kaugemal. Seepärast nimetatakse sääraseid punkte ka **konkureerivateks punktideks**. Nii on joonisel 18-5 punktid U ja V konkureerivateks punktideks pealtvaates, punktid M ja N aga eestvaates.

KUSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Mis on sirgete paralleelsuse tunnuseks kaksvaate järgi?
2. Mis on sirgete lõikumise tunnuseks kaksvaate järgi?
3. Missuguseid punkte nimetatakse konkureerivateks punktideks?
4. Joonestada kahe kiivsirge m ja n kaksvaade ning lahendada nende nähtavuse küsimus.

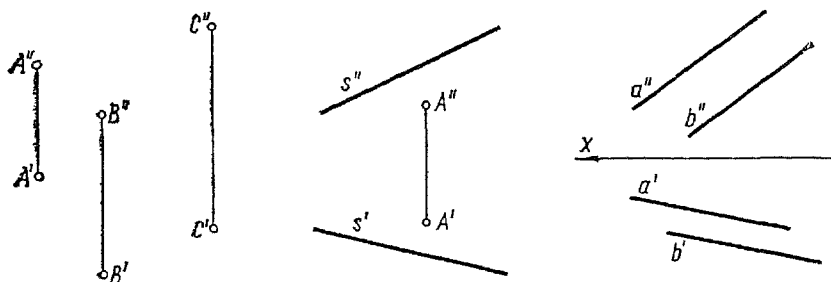
§ 19. TASANDI KUJUTAMINE

1. Tasandi määramisandmed. Tasandi määravad:

- a) kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel;
- b) punkt ja sirge, mis ei läbi seda punkti;
- c) kaks lõikuvat sirget;
- d) kaks paralleelset sirget.

Tasand on määratud ka mis tahes tasandilise kujundiga, näiteks kolmnurgaga, ringiga jne.

Tasandi ühtedelt määramisandmetelt saab alati üle minna teistele. Kui näiteks tasand on antud kolme punkti



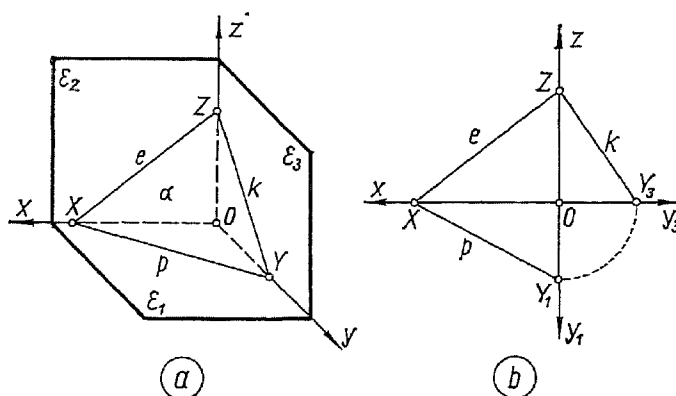
Joonis 19-1

tiga, siis tõmmates läbi kahe punkti sirgjoone, saame lähteandmeteks punkti ja sirge; tõmmates aga sirged kahest paarist punktidest läbi, saame lõikuvad sirged jne. Vastupidi — kui tasand on antud näiteks kahe paralleelse sirgega, siis valides ühel sirgel mingi punkti, saame lähteandmeteks sirge ja punkti; valides aga ühel sirgel kaks punkti ja teisel ühe, saame lähteandmeteks kolm punkti jne.

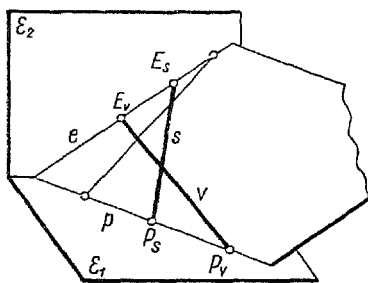
Tasandi kujutamiseks kaksvaatel on vaja anda seda tasandit määravate elementide mõlemad vaated. Joonisel 19-1 on näiteks tasand antud kolmel viisil: 1) kolme punktiga A,

B ja C, 2) punktiga A ja sirgega s ning 3) paralleelsete sirgetega a ja b.

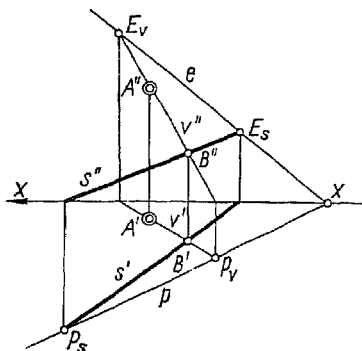
Kujutavas geometrias võetakse tasandi määramisandmeteks sageli tema **jälgsirged**, s. o. sirged, mida mööda tasand lõikab ekraane. Üldjuhul, kui tasand α pole paralleelne ühegi ekraaniga, on tal ekraanikolmikus ka kolm jälgsirget (ehk lihtsalt jälge). Neid nimetatakse ja tähistatakse järgmiselt (joon. 19-2, a): põhijälg $p \equiv \alpha \times \varepsilon_1$; esijälg $e \equiv \alpha \times \varepsilon_2$; küljjälg $k \equiv \alpha \times \varepsilon_3$. Jäljed lõikuvad paarikaupa telgedel x, y ja z punktides X, Y ja Z; neid nimetatakse tasandi **telgpunktideks**.



Joonis 19-2



Joonis 19-3



Joonis 19-4

Kaks jälge (välja arvatud teljega ühtinud jäljepaar) määravad tasandi üheselt. Nendega on üheselt määratud ka tasapinna kolmas jälg, kui see on olemas.

Pöörates ekraanid ühele tasandile, saame tasapinna α jälgede kolmvaate (joon. 19-2, b). Telgpunkt Y nagu y -telgi esineb kolmvaatel kahes kohas: Y_1 on saadud pööramisel koos põhiekraaniga ja Y_3 pööramisel koos külgekraaniga. Seejuures muidugi $OY_1 = OY_3$.

Tasandi iga jälg asetseb ühel ekraanil, järelikult ta ühtib seal oma projektsiooniga; tema teised projektsioonid aga langevad telgedele. Need asjaolud võimaldavad tasandi jälgsirgete esitamisel mituvaates piirduda vaid jälgede eneste tähiste märkimisega, jättes projektsioonid tähistamata (joon. 19-2, b). Tasandi määramine jälgjoonte abil on samaväärne tasandi määramisega kahe lõikuva või paralleelse sirge abil.

2. Tasandi jälgede tuletamine. Kui tasand on antud mitte jälgedega, vaid mingite muude määramisandmetega, siis on vajaduse korral jälgi hõlbus leida, pidades silmas asjaolu, et tasandil asetsevate sirgete jälgpunktid on selle tasandi jälgsirgeil

(vaata näiteks sirgete s ja v jälgpunkte joonisel 19-3). Niisiis, tasandis tahes kahe sirge jälgpunktid määravad selle tasandi jälgsirged.

Näide. Leida tasandi α (A, s) esi- ja põhijälg, kui punkt A ja sirge s on antud oma kaksvaatega (joon. 19-4).

Tasandi α üheks sirgeks on antud sirge s . Teise vajaliku sirge v saame näiteks nii, et ühendame sirgel s vabalt võetud punkti B antud punktiga A . Leides paragrahvis 14 kirjeldatud viisil sirgete s ja v põhijäljed P_s ja P_v ning esijäljed E_s ja E_v , saamegi tasandi põhijälje $p \equiv P_s P_v$ ja esijälje $e \equiv E_s E_v$. Tulemuse täpsust võimaldab kontrollida asjaolu, et jäljed p ja e peavad lõikuma x -teljel telgpunktis $X \equiv p \times e$. Kui kontrollimine pole vajalik, siis võib piirduda kolme jälgpunkti leidmisega ning joonestada tasandi teise jälje läbi telgpunkti.

Kokkuvõttes saame järgmise juhise tasandi jälgsirgete tuletamiseks.

- (23) Tasandi jälgede saamiseks on vaja leida kahe sel tasandil asetseva sirge jälgpunktid ning samanimelised jälgpunktid ühendada.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Nimetage kõik tasandi määramisvõimalused.
2. Mis on tasandi jälgjoon?
3. Tuletada punkte $A(50; 20; 50)$, $B(40; 50; 10)$ ja $C(0; 10; 10)$ läbiva tasandi jälgjooned p , e ja k .

§ 20. ERIASENDILISED TASANDID

Tasandit nimetatakse **eriasendiliseks**, kui ta on risti ekraanikolmiku mõne ekraaniga, ning **üldasendiliseks**, kui ta pole risti ühegi ekraaniga. Üldasendilist tasandit võime näha näiteks joonisel 19-2.

Et tasandi ulatus on lõpmatu, siis üldasendilise tasandi punktide projektsioonid ekraanikolmiku mingil ekraanil katavad kogu selle ekraani. Eriasendilise tasandi ristprojektsiooniks sellel ekraanil, millega ta on risti, tuleb aga sirgjoon (lõpliku suurusega tasandilise kujundi puhul muidugi sirg lõik). Sellel tõsiasi on

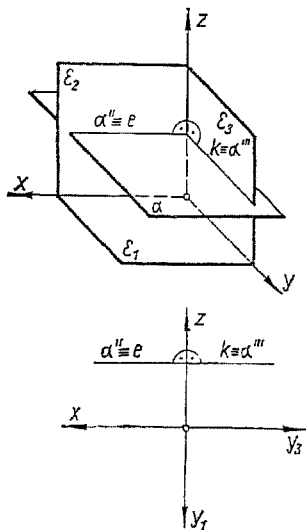
kujutamise praktikas erakordselt suur tähtsus. Õige on ka vastupidine väide:

- (24) kui tasandi ristprojektsiooniks mingil ekraanil on sirgjoon, siis see tasand on selle ekraaniga risti.

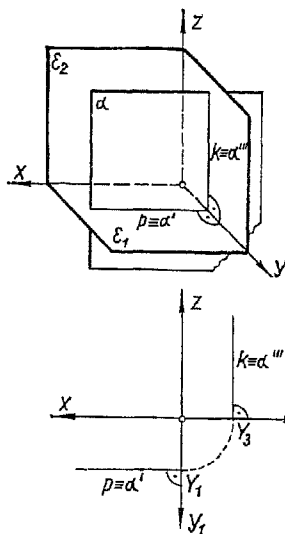
See lause võimaldab kergesti otsustada mis tahes eriasendilise tasandi asendi üle ekraanide suhtes.

1. Nivoopinnad. Käsitleme kõigepealt neid eriasendilisi tasandeid, mis on paralleelsed ühe ekraaniga, s. t. risti kahe ülejäänud ekraaniga. Niisuguseid tasandeid nimetatakse üldiselt **nivoopindadeks**. Ekraanide järgi eristatakse nivoopindu järgmiselt: põhiekraani paralleeltasandit nimetatakse **horisontaalpinnaks**, esi-ekraani paralleeltasandit — **frontaalpinnaks** ja külgekraani paralleeltasandit — **profiilpinnaks**.

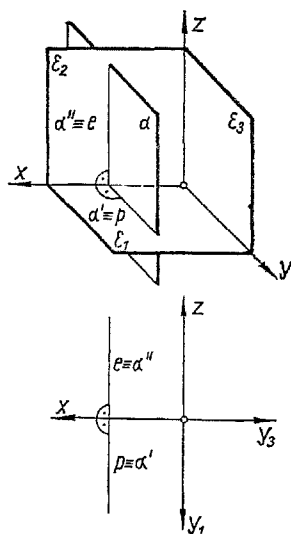
Horisontaalpind α on esitatud piltlikult joonisel 20-1 ülal, all aga näeme tema jälgede kolmvaadet.



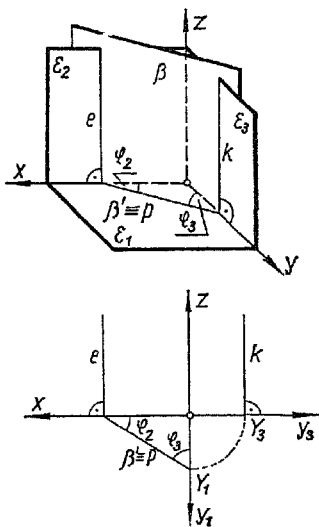
Joonis 20-1



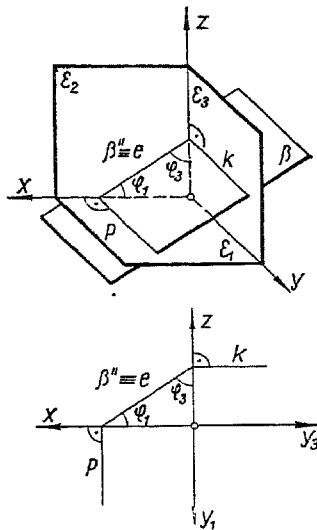
Joonis 20-2



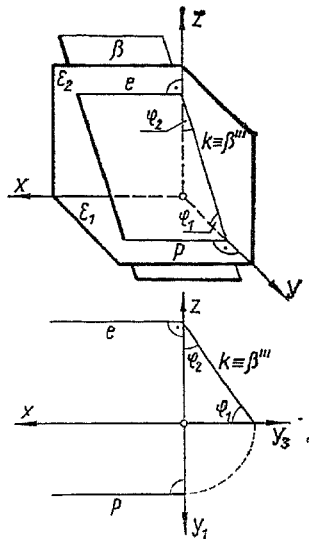
Joonis 20-3



Joonis 20-4



Joonis 20-5



Joonis 20-6

Et horisontaalpind on risti nii esi- kui ka külgekraaniga, siis tema eestvaade ühtib esijäljega ($\alpha'' \equiv e$), külgvaade aga külgjäljega ($\alpha''' \equiv k$). Seejuures on iseloomulik, et mõlemad nimetatud jäljed-projektsioonid on kolmvaatel risti z -teljega: $e \equiv \alpha'' \perp z$, $k \equiv \alpha''' \perp z$. Põhijälge horisontaalpinnal pole.

Lause (24) põhjal on horisontaalpind määratud, kui kaksvaatel on antud tema tähistatud eestvaade α'' , mis muidugi peab olema paralleelne x -teljega. Horisontaalpinna määramisel jälgedega tuleb anda tema mõlemad jäljed e ja k , sest üks jälg tasapinda ei määra.

Frontaalpind α on risti põhija külgekraaniga (joon. 20-2). Seejärest tema pealtvaade ühtib põhijäljega ($\alpha' \equiv p$) ja külgvaade külgjäljega ($\alpha''' \equiv k$). Esijälge frontaalpinnal pole. Säärase tasandi iseloomulikeks tunnusteks kolmvaatel on: $p \equiv \alpha' \parallel x$ ja $k \equiv \alpha''' \parallel z$. Frontaalpinda

saab kaksvaatel esitada tema tähistatud pealtvaatega $\alpha' \parallel x$.

Profiilpind α on risti põhija esiekraaniga, mistõttu $\alpha' \equiv p$ ja $\alpha'' \equiv e$ (joon. 20-3). Külgjälge sel tasandil pole. Kolmvaatel iseloomustab profiilpinda asjaolu, et tema mõlemad jäljed-projektsioonid on risti x -teljega: $p \equiv \alpha' \perp x$, $e \equiv \alpha'' \perp x$. Kaksvaatel on profiilpind määratud tema tähistatud pealtvaatega $\alpha' \perp x$ või tähistatud eestvaatega $\alpha'' \perp x$.

2. Üheainsa ekraaniga ristuvad tasandid. Järgnevalt käsitleme eriasendilisi tasandeid, mis on risti ainult ühe ekraaniga.

Põhiekraani ristsand β (joon. 20-4) projekteerub sirgjooneks ainult põhiekraanile ($p \equiv \beta'$). Tema esi- ja külgjälge on kolmvaatel alati paralleelsed z -teljega ($e \parallel z$; $k \parallel z$), põhijälge siht aga oleneb selle tasandi ja esiekraani vahelise nurga (esikaldenurga) φ_2 suurusest. Põhiekraani ristsandit saab kaksvaatel

esitada kas tema tähistatud pealtvaatega β' või siis põhi- ja esijäljega. Seejuures ei tohi unustada, et esijalg tuleb alati tõmmata risti x -teljega ($e \perp x$). Märgime ka, et põhiekraani risttasandi kaldenurgad φ_2 ja φ_3 vastavalt esi- ja külgekraani suhtes paistavad pealtvaates tõelises suurus.

Esiekraani risttasandi β (joon. 20-5) iseloomulikuks tunnuseks kolmvaatel on see, et tema põhi- ja esijalg on risti x -teljega ($p \perp x$), külj- ja esijalg aga risti z -teljega ($k \perp z$). Kaks-vaatel on esiekraani risttasandi esitamiseks vaja anda kas tema eestvaade β'' või põhi- ja esijalg, kusjuures põhi- ja esijalg peab tingimata olema risti x -teljega. Esiekraani risttasandi kaldenurgad φ_1 ja φ_3 vastavalt põhi- ja külgekraani suhtes paistavad eestvaates tõelises suurus.

Külgekraani risttasandi β (joon. 20-6) projekteerub sirgjooneks külgekraanile ($k \equiv \beta''$). Tema põhi- ja esijalg on paralleelsed x -teljega ($p \parallel x$, $e \parallel x$), seda tasandit saab kaksvaatel esitada põhi- ja esijälje abil. Külgekraani risttasandi kaldenurgad φ_1 ja φ_2 vastavalt põhi- ja esiekraani suhtes paistavad külgvaates tõelises suurus.

Ekraani risttasapinda võib nimetada ka **projekteerivaks tasandiks** selle ekraani suhtes, millega ta on risti, sest ta koosneb selle ekraaniga risti olevatest kujutamiskirtest. Nii näiteks sirgjoont põhiekraanile projekteeriv tasand koosneb põhikiirtest ning seetõttu ta on põhiekraaniga risti.

KUSIMUSED JA ÜLESANDED

- Missugust tasandit nimetatakse:
 - a) üldasendiliseks, b) eriasendiliseks?
- Esitada kaksvaatel tähistatud projektsiooniga:
 - a) horisontaalpind α , mille kaugus

põhiekraanist on 25 mm, b) frontaalpind β , mille kaugus esiekraanist on 30 mm.

- Põhiekraani risttasandi kaldenurk esiekraani suhtes on 60° . Esitada selle tasandi jälgede kolmvaade.

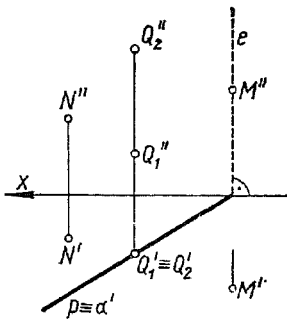
§ 21. PUNKT JA JOON TASANDIL

1. Punkt ja joon eriasendilisel tasandil. Selgitame esmalt, mis tingimustel punkt või joon asetseb mingil eriasendilisel tasandil. Joonisel 21-1 on põhiekraani risttasand α antud oma pealtvaatega α' (joonisel on punktjoonega näidatud ka selle tasandi esijalg $e \perp x$). Asjaolust, et tasandi α mis tahes punkti pealtvaade tuleb sirgele α' , järeldame, et punkt või joon asetseb põhiekraani risttasandil, kui selle punkti või joone pealtvaade asetseb selle tasandi pealtvaatel. Nii näiteks punktid Q_1 ja Q_2 joonisel 21-1 asetsevad tasandil α , punktid M ja N aga mitte, sest viimaste pealtvaated M' ja N' pole tasandi α pealtvaatel α' .

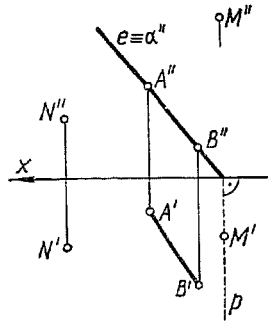
Analoogiliselt veenduaksime ka, et punkt või joon asetseb esiekraani risttasandil, kui selle punkti või joone eestvaade asetseb selle tasandi eestvaatel. Joonisel 21-2 on esiekraani risttasand α antud oma eestvaatega α'' (punktjoonega on näidatud ka tasandi α põhijalg $p \perp x$). Sirglõik AB asetseb sellel tasandil, punktid M ja N aga mitte, sest viimaste eestvaated M'' ja N'' pole tasandi α eestvaatel α'' .

Selleks et punkt või joon asetseks külgekraani risttasandil, peab muidugi selle punkti või joone küljvaade olema selle tasandi küljvaatel.

2. Punkt ja joon üldasendilisel tasandil. Üldasendilisel tasandil asetsevate punktide ja sirgjoonte pro-



Joonis 21-1



Joonis 21-2

jekttsioone saab kaksvaatel leida järgmiste, stereomeetriast tuntud lausete alusel:

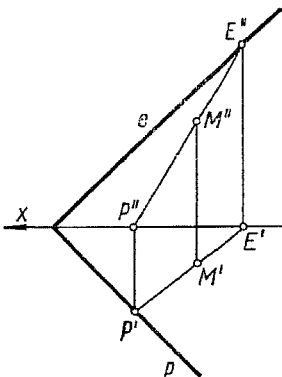
- (25) punkt on tasandil, kui ta asetseb selle tasandi mingil sirgel.
- (26) Sirge on tasandil: 1) kui tema kaks punkti on sellel tasandil või 2) kui ta läbib tasandi punkti ning on paralleelne tasandil asetseva sirgega.

Joonisel 21-3 on antud üldasendiline tasand α oma jälgedega p ja e . Mingi sirge saamiseks sellel tasandil valime põhijäljel p juhusliku punkti $P(P', P'')$ ja esijäljel e juhusliku punkti $E(E', E'')$. Ühendades nende

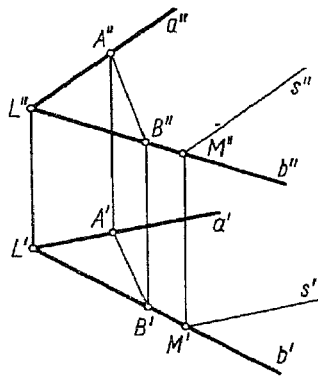
punktide samanimelised projektsioonid, saame sirge PE kaksvaate. See sirge asetseb tasandil α , sest ta läbib selle tasandi kahte punkti P ja E . Arusaadavalt asetseb tasandil α ka iga punkt M , mis on võetud sirgel PE .

Joonisel 21-4 on tasand α antud lõikuvate sirgetega a ja b . Võttes vabalt sirgel a punkti $A(A', A'')$ ning sirgel b punkti $B(B', B'')$, saame sirge AB , mis kuulub tasandile α , sest tal on selle tasandiga kaks ühist punkti A ja B .

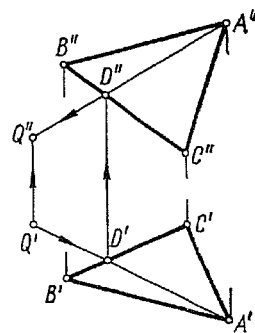
Kui võtame sirgel b mingi punkti M ning tõmbame läbi tema vaadete M' ja M'' sirge s projektsioonid $s' \parallel \alpha'$



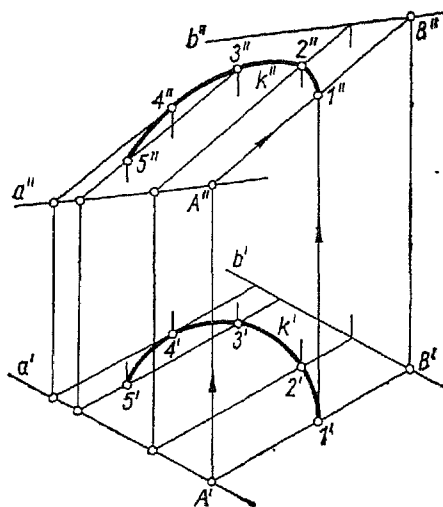
Joonis 21-3



Joonis 21-4



Joonis 21-5

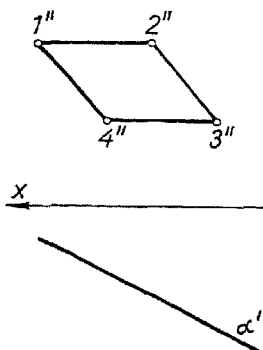


Joonis 21-6

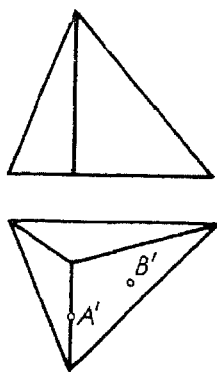
ja $s'' \parallel a''$, siis sirge s asetseb samuti tasandil α , sest ta läbib selle tasandi punkti M ning on paralleelne sel tasandil asetseva sirgega a .

Näidetena lausete (25) ja (26) rakendamise kohta lahendame järgmised ülesanded.

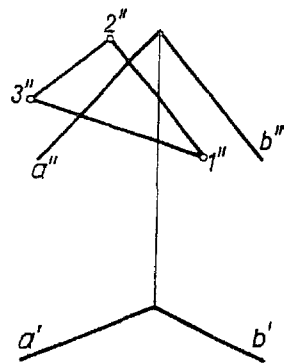
Näide 1. Antud on tasand α (A, B, C) ja temal asetseva punkti Q pealtvaade Q' ; leida eestvaade Q'' (joon. 21-5).



Joonis 21-7



Joonis 21-8



Joonis 21-9

Et punkt Q asetseb tasandil α , siis peab ta kuuluma selle tasandi mingile sirgele ning tema pealtvaade Q' järelikult selle sirge pealtvaatele. Seda tingimust rahuldab näiteks sirge AD , mille pealtvaade $A'D'$ ühtib sirgega $A'Q'$ ($D' \equiv A'Q' \times B'C'$). Sirge AD eestvaate saamiseks leiame sidejoone abil punkti D eestvaate, mis asetseb sirge BC eestvaatel $B''C''$. Sirge AD on tasandil α , sest ta läbib selle tasandi kahte punkti A ja D . Järelikult, kui punkti Q eestvaate Q'' määrgime sidejoone abil sirge AD eestvaatele $A''D''$, siis ka punkt Q peab asetsema tasandil α .

Näide 2. Konstrueerida kõverjoone k eestvaade k'' , kui on antud tema pealtvaade k' ja on teada, et see kõver asetseb tasandil α , mis on antud paralleelsete sirgetega a ja b (joon. 21-6).

Otsitava eestvaate k'' saame tuledata punkthaaval. Selleks määrgime kõverjoone pealtvaatele k' rea punkte $1', 2', 3' \dots$ ning leiame neile vastavad eestvaated $1'', 2'', 3'' \dots$ eelmise näite eeskujul. Nii näiteks punkti 1 eestvaate saamiseks tõmbame läbi pealtvaate $1'$ vabalt valitud sihiga sirge $A'B'$ ning leiame temale vastava eestvaate $A''B''$,

arvestades tingimust, et sirge AB peab asetsema tasandil $\alpha(a, b)$. Punkti 1 eestvaate leiame nüüd sidejoone abil sirge AB eestvaatelt $A''B''$. Teiste punktide eestvaadete saamiseks on otstarbekohane tõmmata vastavate abisirgete pealtvaated paralleelselt sirgega $A'B'$, sest siis tulevad paralleelsed ka abisirgete eestvaated, mistõttu töömaht tundubki väheneb. Läbi punktide $1'', 2'', 3'' \dots$ tõmmatud ladus kõverjoon osutubki otsitavaks eestvaateks k'' .

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Mis tingimustel punkt asetseb tasandil?
2. Mis tingimustel sirge kuulub tasandile?
3. Tuletada tasandil $\alpha(a \perp \varepsilon_1)$ asetseva nelinurga 1234 pealtvaade (joon. 21-7).
4. Leida püramidi kulgpinnal asetsevate punktide A ja B eestvaated (joon. 21-8).
5. Tuletada tasandil $\alpha(a, b)$ asetseva kolmnurga 123 pealtvaade (joon. 21-9).

§ 22. TASANDI NIVOOSIRGED

Paragrahvis 15 käsitlesime nivoosirgeid kui sirgeid omaette, mis ei kuulunud ühelegi konkreetsele tasandile. Nüüd aga vaatleme nivoosirgeid,

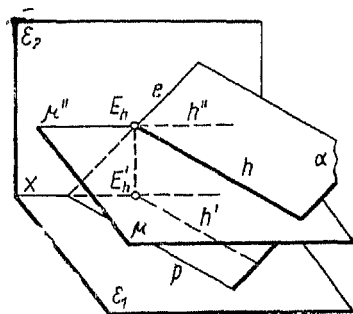
mis asetsevad mingil etteantud tasandil.

1. **Tasandi horisontaal (h)** on sirge, mis asetseb sellel tasandil ning on paralleelne põhiekraaniga. Tasandi horisontaali võime saada ka tasandi lõikamisel horisontaalse tasandiga. Joonisel 22-1, a on näidatud tasandi α horisontaali h tekkimine lõikamisel horisontaalpinnaga μ , joonisel 22-1, b aga on esitatud sama tasandi jälgede ja horisontaali h kaksvaade.

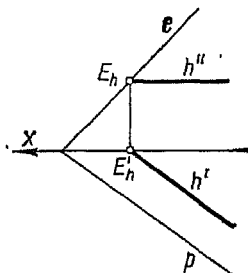
Tasandil on lõpmata palju horisontaale, mis kõik on omavahel paralleelsed kui sirged, mis tekitavad tasandi lõikamisel paralleelsete tasanditega (§ 3, lause g). Et tasandi α põhijalg p on ka üks horisontaal (nullhorisontaal), siis eelöeldu põhjal on $h \parallel p$. Seetõttu on paralleelsed ka sirgete h ja p samanimelised projektsioonid: $h' \parallel p'$ ja $h'' \parallel p''$. Et aga $p' \equiv p$ ja $p'' \equiv x$, siis on $h' \parallel p$ ja $h'' \parallel x$. Niisiis:

(27) **üldasendilise tasandi horisontaali eestvaade on paralleelne kaksvaate teljega, pealtvaade aga on paralleelne tasandi põhijalgjega.**

Pole raske veenduda, et esikraani risttasandi horisontaali

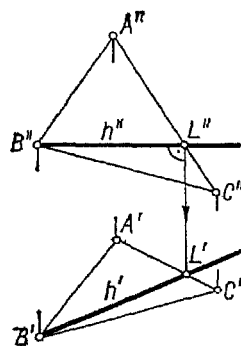


(a)

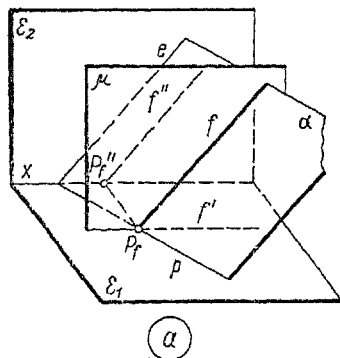


(b)

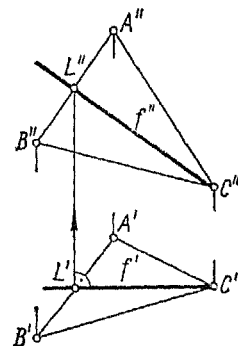
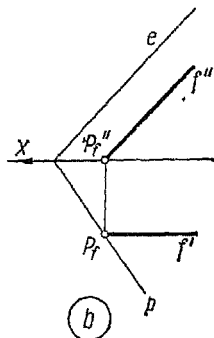
Joonis 22-1



Joonis 22-2



Joonis 22-3



Joonis 22-4

eestvaade on punkt, põhiekraani risttasandi horisontaali pealtvaade aga ühtib selle tasandi põhijäljega.

Tasandi horisontaali esijalg E_h asetseb selle tasandi esijäljel e , pealtvaade E'_h aga kaksvaate teljel.

Kui horisontaal tuleb tõmmata tasandil, mis on antud muude andmetega, mitte jälgedega, siis jälgi ei tuletata, vaid tõmmatakse kohe horisontaali eestvaade paralleelselt x -teljega (või risti sidejoontega) ning leitakse siis horisontaali pealtvaade tingimusest, et horisontaal peab asetsema tasandil.

Näide 1. Tõmmata tasandil α (A, B, C) horisontaal h läbi punkti B (joon. 22-2).

Tõmbame kõigepealt horisontaali eestvaade h'' läbi punkti B'' risti sidejoontega; see lõikab sirge AC eestvaadet $A''C''$ punktis L'' . Leides sidejoone abil punkti L pealtvaade L' sirgelt $A'C'$, saame ka horisontaali pealtvaade $h' \equiv B'L'$. Sellega ongi ülesanne lahendatud. Et konstrueeritud horisontaal h läbib tasandi α kahte punkti B ja L , siis ta asetseb sellel tasandil.

2. Tasandi frontaal (f) on sirge, mis asetseb sellel tasandil ning on

paralleelne esiekraaniga. Tasandi frontaali võib vaadelda ka kui sirget, mis saadakse selle tasandi lõikamisel frontaalse tasandiga. Joonisel 22-3, a on näidatud tasandi α frontaali f saamine lõikamisel frontaalpinnaga μ , joonisel 22-3, b aga näeme vastavat kaksvaadet.

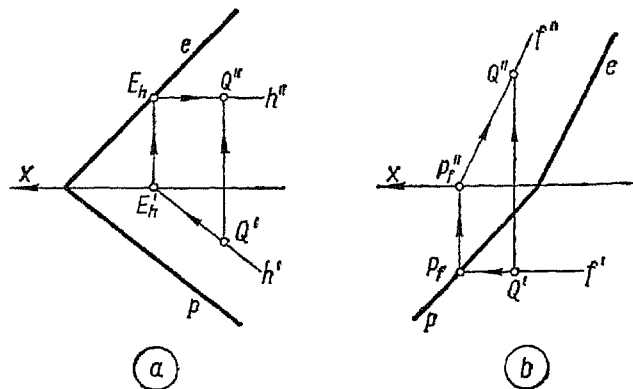
Uhe ja sama tasandi frontaalid on nagu horisontaalidki kõik omavahel paralleelsed. Et tasandi α esijalg e on ka frontaal (nullfrontaal), siis on $f \parallel e$ ja järelikult $f' \parallel x$ ning $f'' \parallel e$ (sest $e' \equiv x$ ja $e'' \equiv e$). Tulemuse võime sõnastada järgmiselt:

(28) üldasendilise tasandi frontaali pealtvaade on paralleelne kaksvaate teljega, eestvaade aga on paralleelne esijäljega.

Eriasendiliste tasandite kohta märgime, et põhiekraani risttasandi frontaali pealtvaade on punkt, esiekraani risttasandi frontaali eestvaade aga ühtib selle tasandi esijäljega.

Tasandi frontaali põhijalg P_f asetseb tasandi põhijäljel p , eestvaade P_f'' aga kaksvaate teljel.

Kui frontaal tuleb tõmmata tasandil, mis on antud muude andmetega, mitte jälgedega, siis tõmmatakse



Joonis 22-5

esmalt frontaali pealtvaade paralleelselt x -teljega (või risti sidejoontega) ning tuletatakse siis frontaali eestvaade nii, et frontaal asetseks antud tasandil.

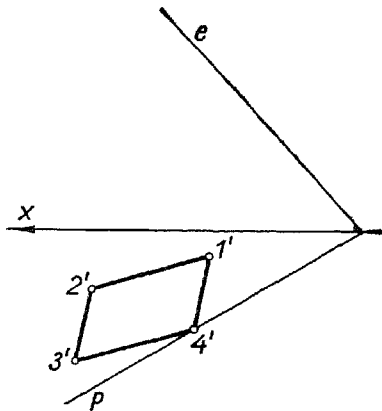
Näide 2. Tõmmata tasandil α (A, B, C) frontaal f läbi punkti C (joon. 22-4).

Tõmbame esmalt frontaali pealtvaate f' läbi punkti C' risti sidejoontega; saame punkti $L' \equiv f' \times A'B'$. Seejärel leiame sirgete AB ja f lõikepunkti L eestvaate L'' sirgelt $A''B''$. Nõutud frontaali f eestvaade on $f'' \equiv C''L''$. Arusaadavalt asetseb

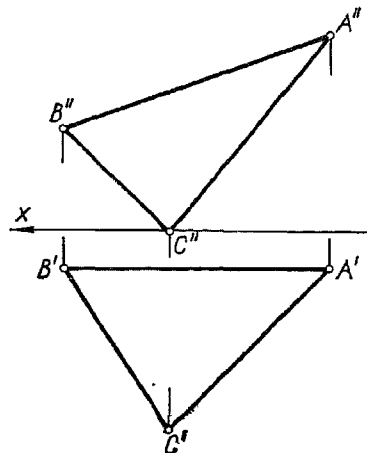
frontaal f antud tasandil, sest tal on selle tasandiga kaks ühist punkti C ja L .

Tasandi sirged, mis on paralleelsed külgekraaniga (tasandi profiilsirged) esinevad rakendustes harva, seepärast me neid ei käsitle.

Tasandi nivoosirgeid — horisontaale ja frontaale kasutatakse väga sageli mitmesuguste ülesannete lahendamisel, sest projektsioonide tuletamine on nivoosirgete puhul mõnevõrra lihtsam kui tasandi muude sirgete puhul. Lahendame näiteks järgmise ülesande.



Joonis 22-6



Joonis 22-7

Näide 3. Leida tasandil $\alpha(p, e)$ asetseva punkti Q eestvaade Q'' , kui on teada pealtvaade Q' (joon. 22-5).

Ülesanne on lahendatud kahel viisil. Variandis a on läbi punkti Q' tõmmatud horisontaali pealtvaade h' paralleelselt põhijäljega kuni lõikumiseni x -teljega punktis E'_h , mis osutub horisontaali h esijälje pealtvaateks. Horisontaali esijälje E_h enda leiame sidejoone abil tasandi esijäljelt e . Horisontaali eestvaade h'' läbib punkti E_h ning on paralleelne x -teljega. Punkti Q otsitava eestvaade Q'' saame lõpuks sidejoone abil horisontaali eestvaatelt h'' .

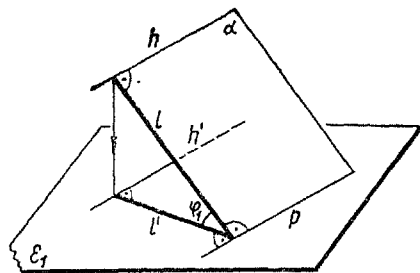
Variant b on lahendatud frontaali abil. Läbi pealtvaate Q' on tõmmatud frontaali pealtvaade f' paralleelselt x -teljega ning siis on leitud frontaali põhijalg $P_f \equiv f' \times p$. Frontaali eestvaade f'' läbib punkti P_f eestvaadet P''_f , ning on paralleelne tasandi esijäljega e . Punkti Q otsitav eestvaade Q'' leitakse sidejoone abil sirgelt f'' .

KUSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missugust joont nimetatakse: a) tasandi horisontaaliks, b) tasandi frontaaliks?
2. Kasutades horisontaale või frontaale, tuleb tasandi $\alpha(p, e)$ asetseva rõõpkülili 1234 eestvaade, kui on antud pealtvaade (joon. 22-6).
3. Leida tasandi $\alpha(ABC)$ punkt M nii, et ta asetseks esimeses ruumiveerandis 20 mm kaugusel põhiekraanist ja 10 mm kaugusel esiekraanist (joon. 22-7).

§ 23. TASANDI LANGUSJOONED JA KALDENURGAD

1. Tasandi langusjooned on sel tasandil asetsevad sirged, mis on risti selle tasandi vastavate nivoosirgetega. Iga ekraani suhtes on tasandil oma langusjoonte süsteem. Langusjooni, mis on risti tasandi horisontaalidega (ühtlasi põhijäljega)



Joonis 23-1

nimetatakse **põhilangusjoonteks** (l), langusjooni aga, mis on risti tasandi frontaalidega (samuti esijäljega) — **esilangusjoonteks** (g).

Olgu h tasandi α horisontaal, p — põhijalg ja l — põhilangusjoon (joon. 23-1). Vastavalt põhilangusjoone definitsioonile on siis $l \perp h$ (ühtlasi ka $l \perp p$). Et aga täisnurgal sirgete l ja h vahel on haar h paralleelne põhiekraaniga, siis lause (18) põhjal peab see täisnurk projekteeruma põhiekraanile täisnurgaks; järelikult on $l' \perp h'$ (ja ühtlasi ka $l' \perp p$, sest $h' \parallel p$). Niisiis on selgunud, et

(29) tasandi põhilangusjoone pealtvaade on risti selle tasandi iga horisontaali pealtvaatega, ühtlasi risti tasandi põhijäljega.

Analoogiliselt on täisnurgal, mille moodustavad esilangusjoon g ja frontaal f , haar f paralleelne esiekraaniga, mistõttu see nurk peab projekteeruma esiekraanile täisnurgaks, s. t. $g'' \perp f''$ (ja ühtlasi ka $g'' \perp e$, sest $f'' \parallel e$). Niisiis:

(30) tasandi esilangusjoone eestvaade on risti selle tasandi iga frontaali eestvaatega, ühtlasi risti tasandi esijäljega.

Põhilangusjoone eestvaate l'' , samuti esilangusjoone pealtvaate g' konstrueerimisel tuleb arvestada nõuet, et vastav sirge ruumis asetseks antud tasandil.

2. Tasandi kaldenurgad. Langusjoonte abil saab leida tasandi kaldenurki ekraanide suhtes.

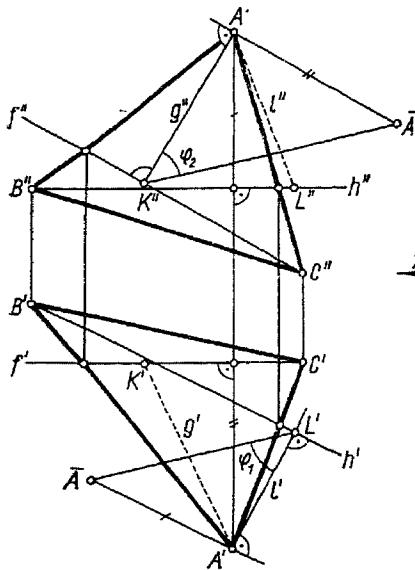
Tasandi kaldenurgaks põhiekraani suhtes loetakse nurka selle tasandi põhilangusjoone ja tema pealtvaate vahel, s. o. põhilangusjoone põhikaldenurka (φ_1 joonisel 23-1). Analoogiliselt loetakse tasandi kaldenurgaks esiekraani suhtes selle tasandi esilangusjoone esikaldenurka (φ_2).

Näide 1. Tõmmata tasandil α (A, B, C) läbi punkti A põhi- ja esilangusjoon ning leida nende abil tasandi α kaldenurgad φ_1 ja φ_2 (joon. 23-2).

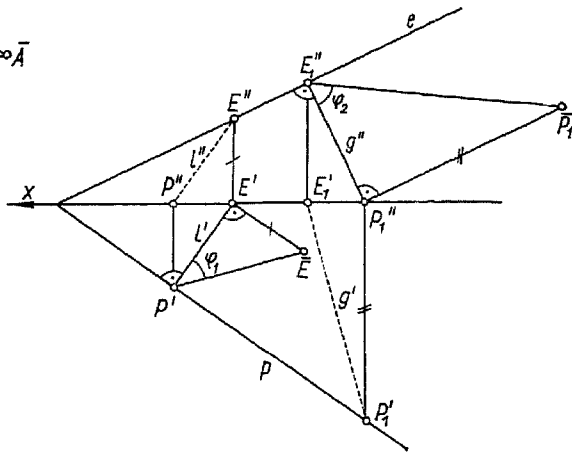
Joonestame kõigepealt eelmises paragrahvis selgitatud viisil tasandi α mingi horisontaali, näiteks horisontaali h läbi punkti B ($h'' \perp A'A''$, $h' \equiv$

$B'L'$). Seejärel tõmbame läbi punkti A' põhilangusjoone pealtvaate $l' \perp h'$. Punkt $L' \equiv l' \times h'$ on horisontaali ja langusjoone lõikepunkti L pealtvaade. Leides sidejoone abil vastava eestvaate L'' sirgel h'' , saame joonestada ka langusjoone eestvaate $l'' \equiv A''L''$. Sellega on põhilangusjoon l määratud. Kasutades täisnurkse kolmnurga võtet (§ 16), leiame langusjoone l lõigu AL põhikaldenurga φ_1 ; see mõõdabki tasandi α nõutud põhikaldenurka.

Tasandi α esilangusjoone g ning esikaldenurga φ_2 saamiseks toimime analoogiliselt. Tuletame esmalt tasandi α mingi frontaali projektsioonid, näiteks punkti C läbiva frontaali f omad. Seejärel tõmbame läbi punkti A'' esilangusjoone eestvaate $g'' \perp f''$. Langusjoon g lõikab frontaali f punktis K , mille eestvaade on $K'' \equiv g'' \times f''$. Leides sidejoone abil punkti K pealtvaate frontaali pealtvaatelt f' , saame tõmmata ka esilangus-



Joonis 23-2



Joonis 23-3

gusjoone pealtvaate $g' \equiv A'K'$. Sellega ongi esilangusjoone g mõlemad projektsioonid leitud.

Tasandi α esikaldenurka esindab joonisel langusjoone g lõigu AK esikaldenurk φ_2 , mille leidmine on juba tuttav paragrahvist 16.

Kui tasand on antud oma jälgedega, siis tema kaldenurkade leidmisel jääb ära horisontaali ja frontaali tõmbamine, sest neid asendavad tasapinna jäljed.

Näide 2. Leida tasandi $\alpha(p, e)$ kaldenurgad φ_1 ja φ_2 (joon. 23-3).

Põhikaldenurga φ_1 leidmiseks võtame tasandi esijäljel e vabalt punkti $E(E', E'')$ ning tõmbame läbi pealtvaate E' põhilangusjoone pealtvaate $I' \perp p$. Punkt $P' \equiv I' \times p$ on langusjoone põhijälje P pealtvaade.

Leides sidejoone abil x -teljel punkti P eestvaate, saame langusjoone eestvaateks sirge $I'' \equiv P'E''$. Järgnevalt leiame täisnurkse kolmnurga võtte abil langusjoone lõigu PE põhikaldenurga φ_1 , mis ongi ka tasandi α põhikaldenurgaks.

Tasandi α esilangusjoon g on tõmmatud läbi põhijäljel p vabalt valitud punkti $P_1(P'_1, P''_1)$. Esmalt on tõmmatud langusjoone eestvaade $g'' \perp e$ ning seejärel pealtvaade $g' \equiv P'_1E'_1$. Tasandi esikaldenurk on võrdne esilangusjoone lõigu P_1E_1 esikaldenurgaga φ_2 .

Nagu selgus, on langusjoonte projektsioonid I'' ja g' kaldenurkade leidmisel tarbetud ning need võib jätta joonestamata (joonistel 23-2 ja 23-3 on need näidatud punktjoonena).

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

- 1 Mis on tasandi: a) põhilangusjoon, b) esilangusjoon?
- 2 Millega on risti põhilangusjoone pealtvaade?
- 3 Leida kolmnurga ABC tasandi põhi- ja esikaldenurk (joon. 23-7).

§ 24. SIRGJOONE JA TASANDI NING KAHE TASANDI LÕIKUMISE ERIJUHTUMID

Sirgjoone ja tasandi lõikepunkti leidmine ning kahe tasandi lõikesirge leidmine on kujutavas geometrias põhilise tähtsusega ülesanded. Need ülesanded lahenevad kaksvaate alusel üsna lihtsalt siis, kui üks antud elementidest (sirge või tasand) on ühe ekraaniga risti. Sääraste erijuhtumite hulka kuuluvad:

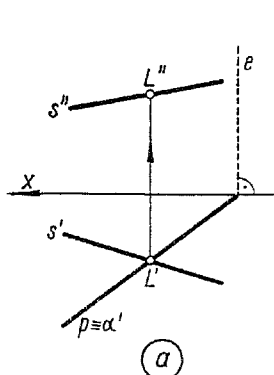
- 1) mis tahes sirgjoone lõikumine ekraani risttasandiga;
- 2) ekraani ristsirge lõikumine mis tahes tasandiga;
- 3) mis tahes tasapinna lõikumine ekraani risttasandiga.

1. Sirgjoone lõikumine ekraani risttasandiga. Mis tahes sirgjoone lõikumisel ekraani risttasandiga võtame arvesse, et ekraani risttasand projekteerub sellele ekraanile sirgjooneks. Sellele sirgkujutisele satub arusaadavalt ka antud sirgjoone ja tasandi lõikepunkti üks projektsioon; teise projektsiooni aga leiame lihtsalt sidejoone abil.

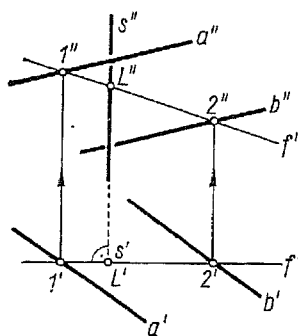
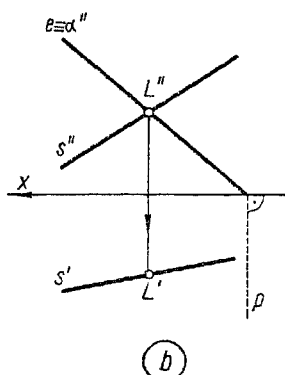
Näide 1. Leida sirgjoone s ja põhiekraani risttasandi $\alpha(\alpha')$ lõikepunkt L (joon. 24-1, a).

Et lõikepunkt L asetseb korraga sirgel s ja tasandil α , siis peab tema pealtvaade L' asetsema nii sirge s kui ka tasandi α pealtvaatel; järelikult L' on sirgete s' ja α' lõikepunkt ($L' \equiv s' \times \alpha'$). Lõikepunkti eestvaate L'' leiame sidejoone abil sirge s eestvaatelt. Sellega on ülesanne lahendatud.

Analoogiliselt võib leida ka sirge s ja esiekraani risttasandi $\alpha(\alpha'')$ lõikepunkti L (joon. 24-1, b). Siin saame esmalt kätte lõikepunkti eestvaate $L'' \equiv s'' \times \alpha''$ ning seejärel sidejoone abil ka lõikepunkti pealtvaate L' sirge s pealtvaatelt.



Joonis 24-1



Joonis 24-2

Kui tasand oleks kirjeldatud juhtumel antud jälgedega (joonisel 24-1 on jäljed näidatud), siis esitatud lahenduskäigus midagi ei muutuks.

2. Ekraani ristsirge lõikumine tasandiga. Teisel juhtumil, s. o. ekraani ristsirge ja mis tahes tasandi lõikepunkti leidmisel peame silmas, et lõikepunkti üks projektsioon ühtib ekraani ristsirge punktujutisega. Lõikepunkti teise projektsiooni saame leida tingimusest, et lõikepunkt kuulub antud tasandile.

Näide 2. Leida põhiekraani ristsirge s ja tasandi α ($a \parallel b$) lõikepunkt L (joon. 24-2).

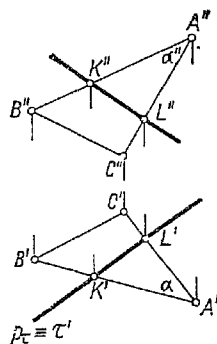
Et otsitav lõikepunkt L asetseb sir-

gel s , peab tema pealtvaade L' ühtima sirge s pealtvaatega: $L' \equiv s'$. Eestvaate L leidmisel võtame arvesse, et punkt L asetseb tasandil α (§ 18). Vajaliku abisirgena on joonisel kasutatud tasandi α frontaali f .

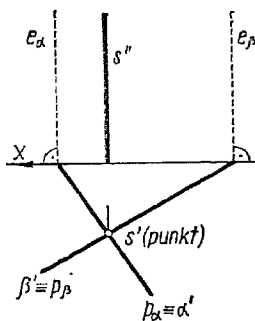
3. Tasandi lõikumine ekraani ristsasandiga. Kolmas juhtum, s. o. mis tahes tasandi ja ekraani ristsasandi lõikesirge leidmine taandub esimesele juhtumile.

Näide 3. Leida tasandi α (A, B, C) ja põhiekraani ristsasandi τ (τ') lõikejoon (joon. 24-3).

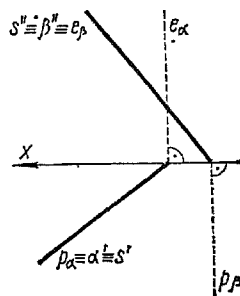
Otsitav lõikesirge on määratud punktidega K ja L , milles kolmnurga küljed AB ja AC lõikuvad tasandiga



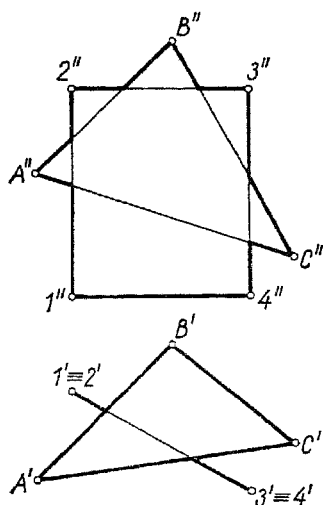
Joonis 24-3



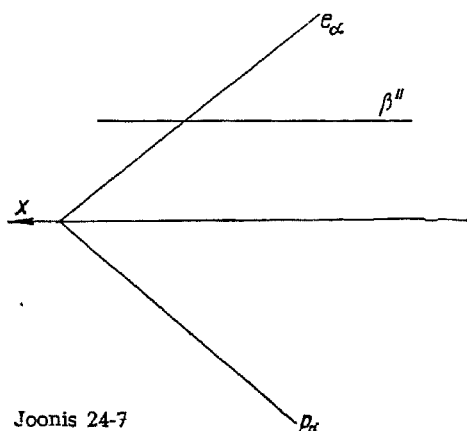
Joonis 24-4



Joonis 24-5



Joonis 24-6



Joonis 24-7

τ . Et viimane on risti põhiekraaniga, siis $K' \equiv A'B' \times \tau'$ ja $L' \equiv A'C' \times \tau'$ (võrdle joonisega 24-1, a). Lõikepunktide eestvaated K'' ja L'' leitakse sidejoonte abil vastavalt sirgete AB ja AC eestvaateilt. Sirge KL osutubki otsitavaks lõikesirgeks.

Analoogilise ülesande kolmnurga tasandi lõikamise kohta esiekraani risttasandiga võib lugeja lahendada iseseisvalt.

Kui ühe ekraani risttasand on teise ekraaniga paralleelne, siis osutub ta nivoopinnaks selle teise ekraani suhtes. Nagu selgus paragrahvis 22, lõikab nivoopind mis tahes muud tasandit mööda viimase nivoo-sirget (vt. jooniseid 22-1 ja 22-3).

Lõpuks esitame paar niisugust näidet tasandite lõikumise kohta, kus mõlemad tasandid on eriasendilised. Kui mõlemad lõikuvad tasandid on risti ühe ja sama ekraaniga, siis ka nende lõikesirge on risti sellesama ekraaniga ning projekteerub seetõttu sellele ekraanile punktiks. Nii näiteks joonisel 24-4 on tasandid α (α') ja β (β') risti põhiekraaniga. Seetõttu nende lõikesirge pealtvaateks on punkt $s' \equiv \alpha' \times \beta'$; lõikesirge eestvaade s'' aga ühtib sidejoonega.

Joonisel 24-5 lõikuvad põhiekraani risttasand α (α') ja esiekraani risttasand β (β''). Et lõikesirge s asetseb tasandil α , siis tema pealtvaade s' peab ühtima tasandi α sirgjoonelise pealtvaatega: $s' \equiv \alpha'$. Analoogiliselt peab lõikesirge s eestvaade ühtima tasandi β sirgjoonelise eestvaatega ($s'' \equiv \beta''$), sest lõikesirge asetseb ka tasandil β . Sellega ongi lõikesirge projektsioonid leitud.

ÜLESANDED

1. Tuletada kolmnurga ABC ja nelinurga 1234 lõikesirge; määrata mõlema kujundi külgede nähtavus (joon. 24-6).
2. Tuletada tasandite α ja β lõikesirge (joon. 24-7).

§ 25. TASANDITE LÕIKUMINE JA PARALLEELSUS ÜLDJUHTUMIL

1. Tasandite lõikumise üldjuhtum. Kahe tasandi lõikesirge saamiseks on vaja leida selle sirge kaks punkti. Üldjuhtumil leitakse need punktid

nn. abitasandite võttega, mille olemust selgitab piltkujutis 25-1. Olgu vaja leida tasandite α ja β lõikesirge s . Lõikame need tasandid läbi kahe abitasandiga π ja τ ning tuletame sirged, mida mööda need tasandid lõikavad antud tasandeid. Joonisel on nendeks sirgeteks 12 ja 34 ning 56 ja 78. Ilmselt on sirgete 12 ja 34 lõikepunkt L otsitava lõikesirge s üheks punktiks ning sirgete 56 ja 78 lõikepunkt M tema teiseks punktiks. Punktidega L ja M aga ongi lõikesirge s määratud.

Abitasanditena on otstarbekohane kasutada eriasendilisi tasandeid (eriti nivoopindu), sest need võimaldavad ülesannet taandada eelmises paragrahvis käsitletud lihtsatele erijuhtumitele.

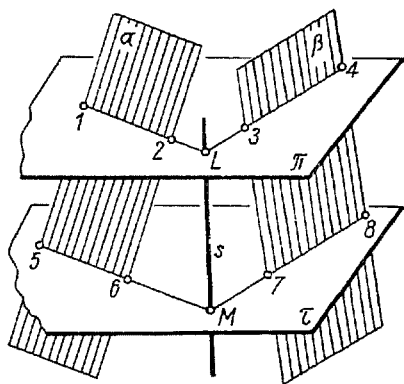
Näide 1. Leida tasandite α (a, b) ja β (c, d) lõikesirge s (joon. 25-2).

Lõikame antud tasandid läbi näiteks frontaalsete abitasanditega τ ja π . Tasand τ lõikab tasandeid α ja β vastavalt mööda sirgeid 12 ja 34, mis leitakse eelmises paragrahvis lahendatud näite 3 eeskujul (sest $\tau \perp e_1$). Sirgete 12 ja 34 lõikepunkt L ongi otsitava lõikesirge s üks punkt. Esmalt saame kätte punkti L eest-

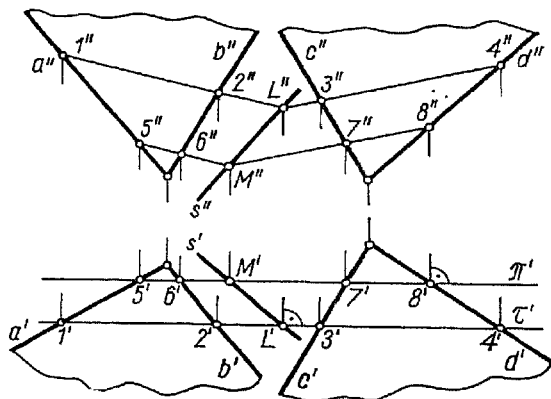
vaate ($L'' \equiv 1''2'' \times 3''4''$) ja seejärel sidejoone abil sirgelt τ' ka tema pealtvaate L' . Analoogiliselt leiame tasandi π abil lõikesirge s teise punkti $M \equiv 56 \times 78$. Sellega ongi käes otsitava lõikesirge s projektsioonid: $s' \equiv L'M'$, $s'' \equiv L''M''$.

Näide 2. Tuletada kolmnurkade ABC ja FGH lõikejoon s (joon. 25-3).

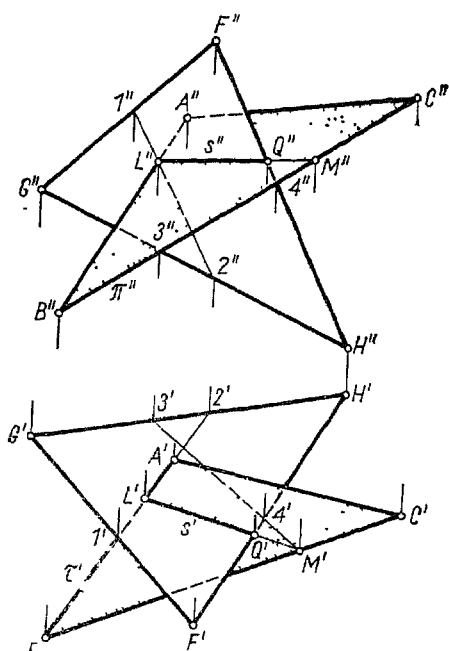
Võtame üheks abitasandiks näiteks põhiekraani ristasandi τ läbi külje AB ($\tau' \equiv A'B'$). Tasand τ lõikab kolmnurka FGH mööda sirget 12, kolmnurka ABC aga arusaadavalt mööda külgsirget AB . Sirgete 12 ja AB lõikepunkt L on otsitava lõikesirge s üheks punktiks. Joonisel on teiseks abitasandiks võetud esiekraani ristasand π läbi külje BC ($\pi'' \equiv B''C''$). Tasand π lõikab kolmnurka FGH mööda sirget 34, kolmnurka ABC aga muidugi mööda külgsirget BC . Sirgete 34 ja BC lõikepunkt M on otsitava lõikesirge teiseks punktiks. Seega saame lõikesirge s projektsioonideks $s' \equiv L'M'$ ja $s'' \equiv L''M''$. Joonisel on kontuurjoonega esitatud ainult see osa lõikesirgest (LQ), mis kuulub mõlemale kolmnurgale. Konstruktsiooni täpsust saab kontrollida sellega, et



Joonis 25-1



Joonis 25-2



Joonis 25-3

külje FH ja kolmnurga ABC lõikepunkti Q projektsioonid peavad olema ühel ja samal sidejoonel.

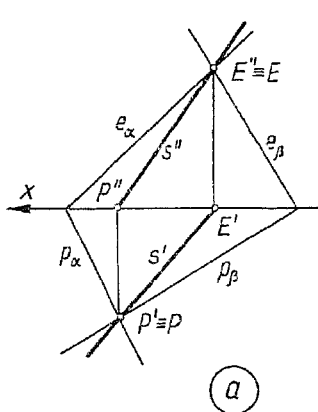
Tasandite lõikesirge leidmine on mõnevõrra lihtsam kui tasandid on

antud oma jälgedega. Sel juhtumil on lõikesirge kaks punkti tegelikult juba teada: nendeks on tasandite samanimeliste jälgede lõikepunktid.

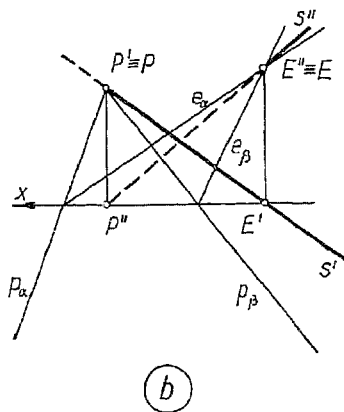
Näide 3. Leida jälgedega antud tasandite α ja β lõikesirge s (joon. 25-4, a).

Otsitava lõikesirge üheks punktiks on ilmselt tasandite põhijälgede lõikepunkt $P \equiv P' \equiv p_\alpha \times p_\beta$, teiseks punktiks aga esijälgede lõikepunkt $E \equiv E' \equiv e_\alpha \times e_\beta$. Need punktid on ühtlasi ka otsitava lõikesirge s jälgpunktideks. Punktide P ja E teised projektsioonid P'' ja E' leiame sidejoonte abil x -teljelt. Ühendades jälgpunktide samanimelised projektsioonid, saamegi lõikesirge s projektsioonid $s' \equiv P'E'$ ja $s'' \equiv P''E''$.

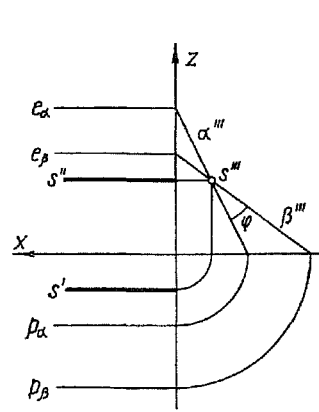
Joonisel 25-4, b on tasandite α ja β lõikumisülesanne lahendatud jälgjoonte teistsuguse asetuse puhul. Põhijälgede lõikepunkt $P \equiv P'$ tuleb siin x -teljest kõrgemale, s. t. ta asetseb esiekraani taga. Joonisel on kriipsjoonega tõmmatud lõikesirge s pealtvaate see osa, mis vastab põhiekraani all olevale sirge s osale, samuti eestvaate see osa, mis vastab esiekraani taga olevale sirge osale.



a

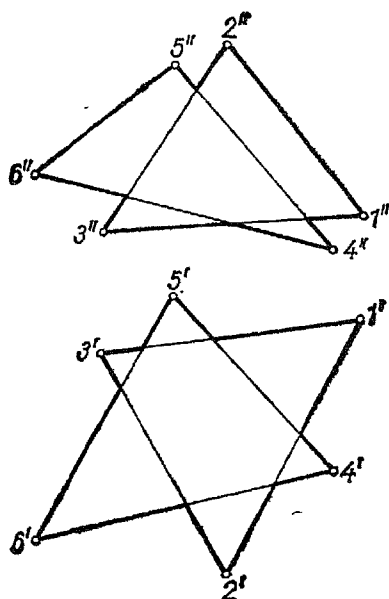


b

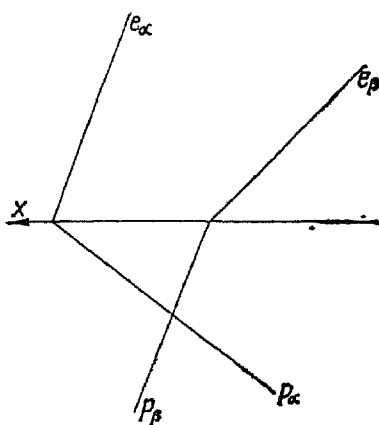


Joonis 25-5

Joonis 25-4



Joonis 25-7



Joonis 25-8

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Mis tingimusel on kaks tasandit paralleelsed?
2. Tuletada kolmnurkade 123 ja 456 lõikejoon (joon. 25-7).
3. Tuletada tasandite α ja β lõikesirge (joon. 25-8).

§ 26. SIRGJOONE JA TASANDI LÕIKUMINE NING PARALLEELSUS ÜLDJUHTUMIL

1. Sirge ja tasandi lõikepunkti leidmine. Üldjuhtumil võime sirgjoone s ja tasandi α lõikepunkti leida järgmiselt (joon. 26-1). Paneme läbi sirge s abitasandi* β ning tuletame tasandite α ja β lõikesirge m . Siis sirgete m ja s lõikepunkt on ühtlasi otsitavaks lõikepunktiks $L \equiv s \times \alpha$. Põhimõtteliselt võib abitasandiks võtta ükskõik millise tasapinna läbi antud sirge, kuid konstruktsioonid kaksvaatel on lihtsamad, kui abitasand on risti ühe ekraaniga. Niisiis kujuneb sirge ja tasandi lõikumisülesande lahenduskäik järgmiseks:

- (31) sirge ja tasandi lõikepunkti leidmiseks 1) paneme läbi antud sirge abitasandi risti põhi- või esiekraaniga, 2) leiame antud tasandi ja abitasandi lõikesirge ning 3) leiame selle lõikesirge ja antud sirge lõikepunkti, mis ongi antud tasandi ja sirge lõikepunkt.

See eeskiri sirge ja tasandi lõikepunkti leidmiseks on rakendatav tasandi mis tahes määramisandmete puhul. Kumba projekteeritavat pinda abitasandina kasutada, see sõltub andmete iseloomust. Kui näiteks andmed on niisugused, et põhiekraani risttasandi kasutamisel kipub konstruktsioon jooniselehel välja, siis tõenäoliselt osutub sobivaks esiekraani risttasand — ning ümberpöörduvalt.

Näide 1. Leida sirge s ja

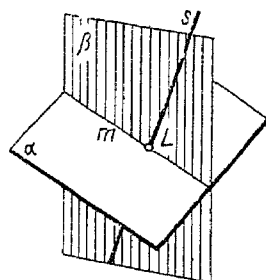
* Väljend «panna tasand läbi sirge» tähendab tasandi paigutamist nii, et sirge asetseks selles tasandil.

tasandi α (1, 2, 3) lõikepunkt L (joon. 26-2, a).

Teostame järgemisi need kolm operatsiooni, mis on ette nähtud sirge ja tasandi lõikumisülesande üldises lahenduseeskirjas (31). Pane me esiteks läbi antud sirge s abitasandi τ , näiteks risti põhiekraaniga. Et sirge s asetseb tasandil $\tau \perp \varepsilon_1$, siis peavad s ja τ pealtvaated ühtima: $\tau' \equiv s'$; sellega ongi tasand τ määratud.

Teiseks leiame tasandite α ja τ lõikesirge m . See ülesanne kuulub paragrahvis 24 lahendatud erijuhtumite hulka. Lõikesirge m on määratud punktidega 4 ja 5, milles sirged 12 ja 13 lõikavad tasandit τ ; sirge m projektsioonid on $m' \equiv 4'5'$ ja $m'' \equiv 4''5''$.

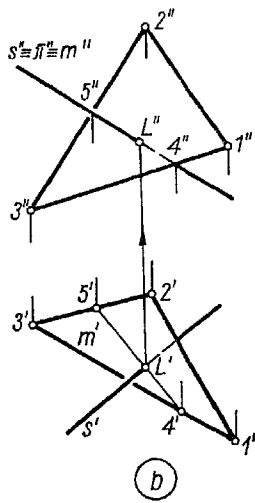
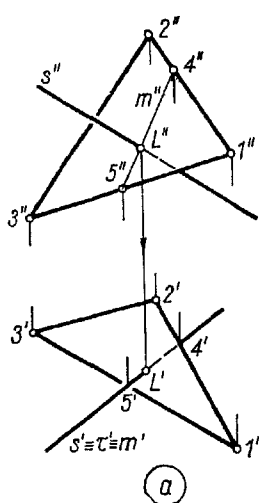
Kolmandaks leiame sirgete m ja s lõikepunkti L . Et nende sirgete pealtvaated ühtivad, siis esmalt saame kätte otsitava lõikepunkti eestvaate $L'' \equiv m'' \times s''$. Seejärel leiame sidejoone abil sirgelt $s' \equiv m'$ ka vastava pealtvaate L' .



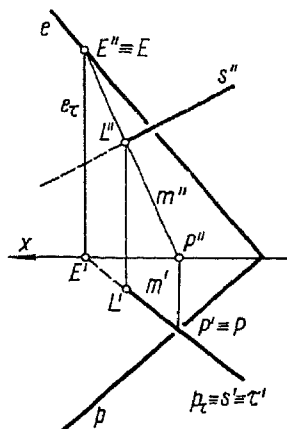
Joonis 26-1

Joonisel 26-2, b on sama ülesande lahendamisel kasutatud esiekraani ristasandit π läbi sirge s ; nüüd $\pi \equiv s''$. Tasandite α ja π lõikesirge m on määratud punktidega 4 ja 5, milles sirged 13 ja 23 lõikavad tasandit π . Niisiis $m'' \equiv 4''5''$ ja $m' \equiv 4'5'$. Sirgete m ja s lõikepunkti L pealtvaade on nüüd kohe käes: $L' \equiv m' \times s'$; vastav eestvaade L'' aga leitakse sidejoone abil sirgete s ja m ühtinud eestvaatelt $s'' \equiv m''$.

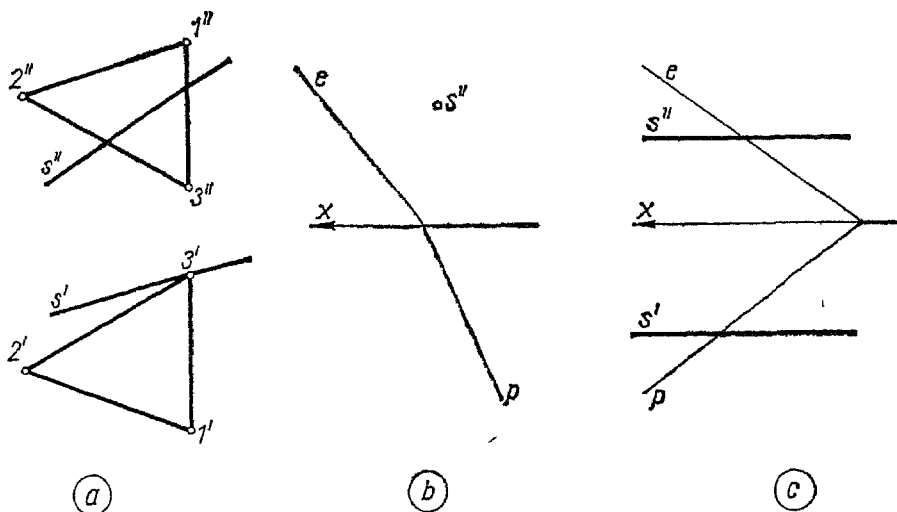
Üldine eeskiri sirgjoone ja tasandi lõikepunkti leidmiseks on rakenda-



Joonis 26-2



Joonis 26-3



Joonis 26-4

tav ka neil juhtumel, kus tasand on antud jälgedega.

Näide 2. Leida sirge s ja tasandi $\alpha(p, e)$ lõikepunkt L (joon. 26-3).

Paneme läbi sirge s abitasandi τ näiteks risti põhiekraaniga. Tasand τ on siis määratud oma pealtvaatega $\tau' \equiv s'$; tema jäljed aga on $p \equiv s'$ ja $e \perp X$. Tasandite α ja τ lõikesirge m on määratud nende tasandite samanimeliste jälgede lõikepunktidega P ja E , mis annavad sirge m projektsioonideks $m' \equiv P'E' \equiv s'$ ja $m'' \equiv P''E''$ (vt. § 25, näide 3). Otsitava lõikepunkti L eestvaade on $L' \equiv s' \times m'$, pealtvaade L'' aga leitakse sidejoone abil sirgelt s'' .

2. Sirge ja tasandi paralleelsus. Kui sirgjoone s ja tasandi α lõikepunkti toetamisel selgub, et abitasandi ja antud tasandi lõikesirge m on antud sirgega s paralleelne, siis otsitav lõikepunkt puudub, s. t., et sirge s ja tasand α on paralleelsed. Tõepoolest, sel juhul on rahuldatud sirgjoone ja tasandi paralleelsuse

tunnus (§ 3, lause e); tasandil α leidub sirge m , mis on paralleelne antud sirgega s .

Kui läbi antud punkti on vaja tõmmata sirge paralleelselt antud tasandiga, siis tuleb vaid sirge projektsioonid tõmmata paralleelselt sel tasandil asetseva mis tahes sirge vastavate projektsioonidega. On selge, et sellel ülesandel on lõpmata palju lahendeid.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missugune on sirge ja tasandi lõikumis-ülesande lahendamise käik?
2. Leida tasandi ja sirge s lõikepunkt joonisel 26-4 esitatud juhtumel.

§ 27. SIRGJOONE JA TASANDI RISTSEIS

Teeme kindlaks, mis tingimusi peavad rahuldama sirgjoone projektsioonid, et see sirge oleks risti antud tasandiga.

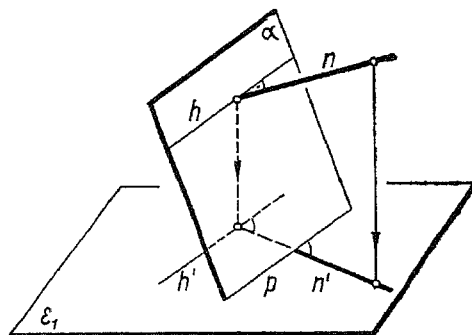
Teame, et tasandi normaal (rist-

sirge) on risti selle tasandi kõigi sirgetega, sealhulgas ka tasandi horisontaalidega ja frontaalidega. Olgu h tasandi α horisontaal, p — tema põhijalg ja n — normaal (joon. 27-1). Et täisnurgal, mille horisontaal h moodustab normaali n , on haar h paralleelne põhiekraaniga, siis see täisnurk projekteerub põhiekraanile täisnurgaks (§ 9, lause 18). Järelikult on $n' \perp h'$ ja ühtlasi $n' \perp p$, sest $h' \parallel p$.

Analoogiliselt saame kindlaks teha tasandi normaali eestvaate sihi. Selleks vaatleme täisnurka normaali n ja tasandi frontaali f vahel (vastava piltkujutuse võiks lugeja valmistada ise). Et sel täisnurgal haar f on paralleelne esiekraaniga, siis ta projekteerub sellele ekraanile täisnurgaks. Seega on $n'' \perp f''$ ja ühtlasi $n'' \perp e$ (kus e tähendab tasandi esijälge).

Tulemused võime kokkuvõtlikult sõnastada järgmiselt:

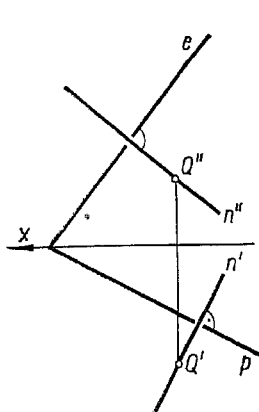
- (32) tasandi normaali pealtvaade on risti selle tasandi horisontaali pealtvaatega (ja põhijalgjega), eestvaade aga on risti tasandi frontaali eestvaatega (ja esijalgjega).



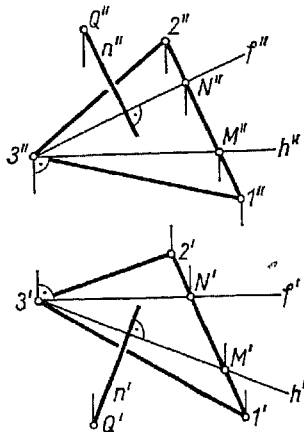
Joonis 27-1

Selle lause pöördlause (teatud kitsendusega) on sirgjoone ja tasandi ristseisu tunnuseks kaksvaatel:

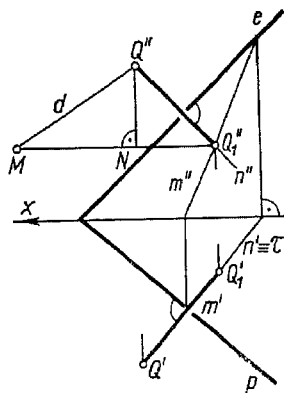
- (33) sirgjoon ja tasand on teineteisega risti, kui sirgjoone pealtvaade on risti tasandi horisontaali pealtvaatega ning sirgjoone eestvaade on risti tasandi frontaali eestvaatega; seejuures sirgjoone projektioonid ei tohi olla risti x -teljega.



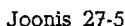
Joonis 27-2



Joonis 27-3

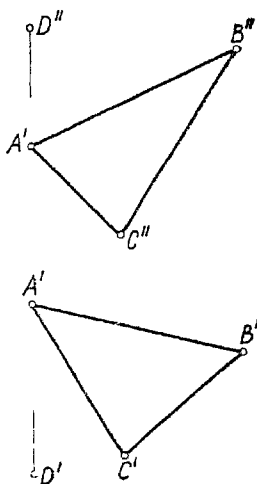


Joonis 27-4

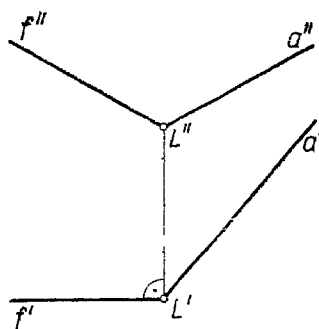


Tasandi normaali projektsioonide joonestamisel vajame selle tasandi mingi horisontaali pealtvaadet ja mingi frontaali eestvaadet. Tõmbame

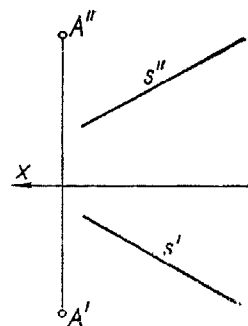
Läbi punkti Q saame kohe tõmata konstrueeritava tasandi horisontaali h ja frontaali f (joon. 27-5, a). Arvestades sirge s ja tasandi α ristseisu tingimust, peab olema $h' \perp s'$ ja $f'' \perp s''$. Sirgete h ja f teised projektsioonid h'' ja f' aga on teatavasti risti sidejoontega. Lõikuvate



Joonis 27-6



Joonis 27-7



Joonis 27-8

sirgetega h ja i ongi otsitav tasand määratud.

Joonisel 27-5, b on sama ülesanne lahendatud eeldusel, et kaksvaate telg on fikseeritud. Sel juhul võib otsitava risttasandi jäljed p ja e saada üheainsa nivoosirge, näiteks horisontaali h abil, mille tõmbame läbi punkti $Q(h' \perp s', h'' \perp x)$. Sirge s ja tasandi α ristseisu tõttu peab olema $e \perp s''$ ja $p \perp s'$. Seejuures peab esijalg e läbima horisontaali esijälje E_h , põhijalg p aga telgpunkti X .

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Millega peab olema risti tasandi normaali pealtvaade ja millega risti normaali eestvaade?
2. Leida punkti D kaugus tasandist ABC (joon. 27-6).
3. Konstrueerida tasand β , mis oleks paralleelne tasandiga α (f, a) ja asetseks viimast 20 mm kaugusel; tasand β määrata lõikuvate sirgetega (joon. 27-7).
4. Tuletada tasand α (p, e), mis läbib punkti A ja on risti sirgega s (joon. 27-8).

§ 28. RISTSIRGED JA RISTTASANDID

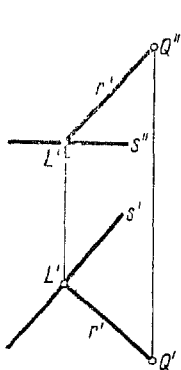
1. Ristsirged. Antud sirgele ristsirge konstrueerimine kaksvaatel on eriti lihtne siis, kui antud sirge on eriasendiline.

Näide 1. Tõmmata läbi punkti Q sirge r nii, et ta oleks risti antud horisontaalse sirgega s ning lõikaks teda (joon. 28-1).

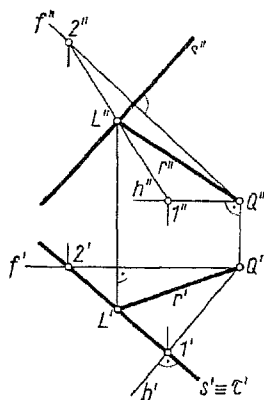
Et täisnurgal sirgete s ja r vahel on haar s paralleelne põhiekraaniga, siis see täisnurk projekteerub põhiekraanile jälle täisnurgaks. Järelikult sirge r pealtvaade tuleb tõmmata läbi punkti Q' risti sirge s pealtvaatega: $r' \perp s'$. Ristsirge r eestvaateks on sirge $Q''L''$, kus L'' on sirgete s ja r lõikepunkti L eestvaade. Analoogiliselt laheneb ülesanne juhtumil, kui sirge s on frontaalne.

Tunduvalt keerulisem on ristsirge konstrueerimine antud üldasendilisele sirgele.

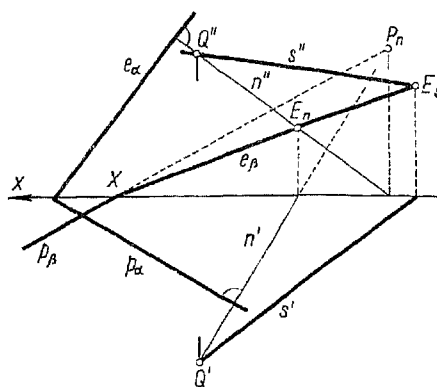
Näide 2. Olgu vaja tõmmata



Joonis 28-1



Joonis 28-2



Joonis 28-3

läbi punkti Q sirge r nii, et ta oleks risti antud üldasendilise sirgega s ning lõikaks teda (joon. 28-2).

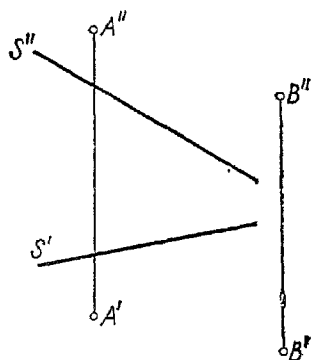
Otsitav ristsirge r peab asetsema tasandil, mis läbib punkti Q ning on risti sirgega s . Seetõttu kujuneb ülesande lahenduskäik järgmiseks: 1) paneme läbi punkti Q tasandi α risti sirgega s ; 2) leiame sirge s ja tasandi α lõikepunkti L . Sirge QL osutubki otsitavaks ristsirgeks r .

Joonisel on risttasand α määratud oma nivoosirgetega h ja f läbi punkti Q (vt. § 27, näide 4). Tasandi α (h, f) ja sirge s lõikepunkti L leidmisel on asitasandina kasutatud

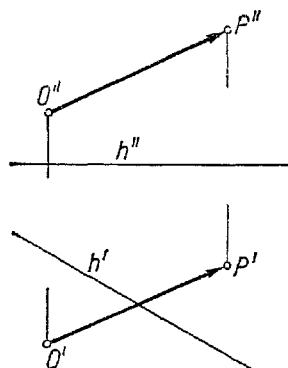
põhiekraani risttasandit τ läbi sirge s . Tasand τ lõikab tasandit α (h, f) mööda sirget 12. Sirged s ja 12 lõikuvad punktis L , mis koos punktiga Q määrabki nõutud sirge r .

Kui eelmises kahes ülesandes oleks küsitud ka punkti Q kaugust sirgest s , siis tulnuks joonistel 28-1 ja 28-2 leida lisaks veel lõigu QL tõeline pikkus.

2. Risttasandid. Antud tasandiga α ristuva tasandi β konstrueerimiseks on põhimõtteliselt kaks võimalust: 1) panna tasand β läbi tasandi α normaali; 2) panna tasand β risti sirgega, mis asetseb tasandil α (või on



Joonis 28-4



Joonis 28-5

temaga paralleelne). Kummalgi juhul on võimalikke ristasandeid muidugi lõpmata palju; mõnesuguseid lisatimgimusi rakendades aga muutub ülesanne üheseks.

Näide 3. Konstrueerida tasandi α (p_α, e_α) ristasand β nii, et ta läbiks antud sirget s (joon. 28-3).

On selge, et tasand β on üheselt määratud ainult siis, kui sirge s pole tasandi α normaal; meie joonisel, nagu näha, on see tingimus täidetud. Ülesande lahendamiseks valime sirgel s vabalt punkti Q ning tõmbame sellest tasandi α normaali n ($n' \perp p_\alpha, n'' \perp e_\alpha$). Siis sirge s ja normaal n koos määravadki otsitava tasandi β . Joonisel on lisaks leitud ka tasandi β jälgsirged p_β ja e_β , mis läbivad sirgete s ja n vastavaid jälgpunkte ($e_\beta = E_s E_n$ ja $p_\beta = P_n X$, kus X on tasandi telgpunkt).

ÜLESANDED

1. Antud on sirge s ning punktid A ja B väljaspool seda sirget (joon. 28-4). Leida punkt K sel sirgel nii, et $AK=BK$. Juhis: kasutada lõigu AB keskristtasandit.
2. Tuletada vektori $\vec{OP}$ ristprojektsioon horisontaalil h , kasutades kiiri, mis on risti sirgega h (joon. 28-5).

§ 29. NURGAD SIRGETE JA TASANDITE VAHEL

Käesolevas paragrahvis käsitleme nurga suuruse leidmist 1) kahe sirgjoone vahel; 2) kahe tasandi vahel; 3) sirgjoone ja tasandi vahel. Kõiki neid ülesandeid saab lahendada järgmise mõttekäigu alusel. Kasutades ülesande andmeid, püüame saada niisuguse abikolmnurga, mille üheks nurgaks oleks otsitav nurk. Seejärel tuletame abikolmnurga tõelise kuju, millest leiamegi otsitava nurga tõelise suuruse.

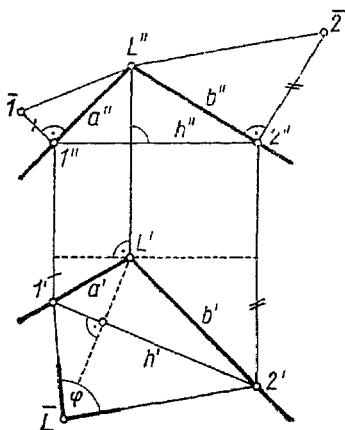
1. Nurk kahe sirge vahel. Raken-dame seda mõttekäiku kõigepealt nurga leidmiseks kahe lõikuva sirge vahel. See ülesanne väärib erilist tähelepanu, sest ülejäänud kaks ülesannet taanduvad ka sellele.

Näide 1. Olgu vaja leida nurk φ lõikuvate sirgete a ja b vahel (joonis 29-1).

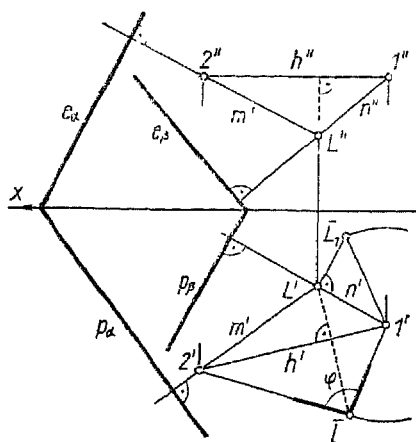
Võtame abikolmnurga üheks tipuks sirgete a ja b lõikepunkti L , teise tipu 1 valime sirgel a , kolmanda tipu 2 aga sirgel b . Punktid 1 ja 2 võib sirgetel a ja b valida üldiselt vabalt, kuid konstruktioonide lihtsustamiseks on soovitatav võtta need tasandi (a, b) mingil nivoosirgel. Joonisel on näiteks tipud 1 ja 2 võetud tasandi (a, b) suvaliselt valitud horisontaali h ($h'' \perp L'L''$). Edasi leiame kolmnurga $12L$ külgede pikkused. Et külg 12 on meie valiku tõttu paralleelne põhiekraaniga, siis on ta pikkuselt võrdne oma pealtvaatega: $12=1'2'$. Külgede $1L$ ja $2L$ pikkused on leitud hüpoteenuusidena täisnurksetes kolmnurkades $1''\bar{1}L''$ ja $2''\bar{2}L''$. Külgede tõeliste pikkuste järgi konstrueerime lõpuks kolmnurga $12L$ tõelise kuju $1'2'\bar{L}$ ($1'\bar{L}=1\bar{L}'$, $2'\bar{L}=2\bar{L}'$). Otsitav nurk φ võrdub nurgaga $1'\bar{L}2'$.

Kui küsitakse nurka kiivsirgete vahel, siis valitakse suvaliselt ühel antud sirgel punkt, tõmmatakse sellest sirge paralleelselt teise kiivsirgega ning leitakse saadud lõikuvate sirgete vaheline nurk äsja kirjeldatud viisil (vt. ka § 3, lause n).

2. Nurk kahe tasandi vahel. Nurga leidmist kahe tasandi vahel soodustab asjaolu, et see nurk võrdub nurgaga nende tasandite normaalide vahel (§ 3, lause p). Ülesande lahenduskäik on üldjuhul järgmine. Valime ruumis vabalt mingi punkti ning



Joonis 29-1



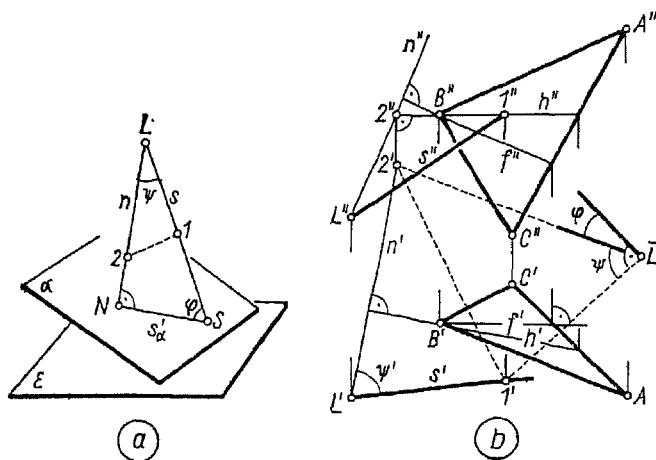
Joonis 29-2

tõmbame sellest kummalegi antud tasandile normaali. Need normaaliid on kaks lõikuvat sirget ning nurk nende vahel on leitav näite 1 eeskujul.

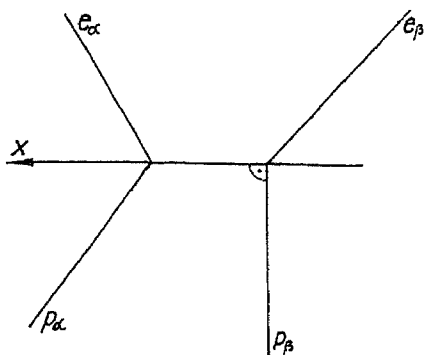
Näide 2. Tasandid α ja β on antud oma jälgedega. Leida nende tasandite vaheline nurk φ (joon. 29-2).

Vabalt valitud ruumpunktist L tõmbame tasandi α normaali m ($m' \perp p_\alpha$, $m'' \perp e_\alpha$) ning tasandi β

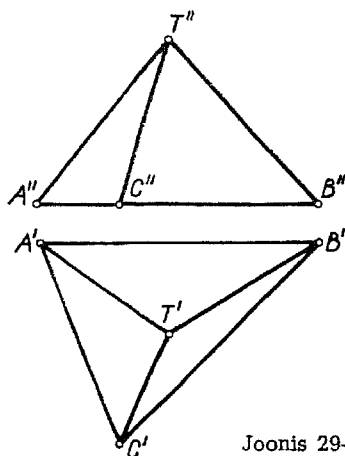
normaali n ($n' \perp p_\beta$, $n'' \perp e_\beta$). Lõikuvate normaalide m ja n vaheline nurk φ on joonisel leitud kolmnurga $12L$ abil, mille tipud 1 ja 2 on võetud tasandi (m , n) suvalisel horisontaalil h (vt. näide 1). Selle kolmnurga külje $1L$ pikkus on leitud täisnurkse kolmnurga $1'L'L_1$ hüpotenuusina, külje $2L$ pikkus aga on leitud sirklivõttega. Külgede pikkuste järgi on konstrueeritud kolmnurga $12L$ tõeline kuju $1'2'L$; nurk φ tipu L



Joonis 29-3



Joonis 29-4



Joonis 29-5

juures võrdubki nurgaga tasandite α ja β vahel.

3. Nurk sirgjoone ja tasandi vahel on nurk selle sirge ja tema ristprojektsiooni vahel sellel tasandil. Olgu s'_α sirge s ristprojektsioon tasandil α (joon. 29-3, a). Siis nurk sirge s ja tasandi α vahel võrdub nurgaga $\varphi(s, s'_\alpha)$. Selle nurga võib leida järgmiselt. Valime sirgel s vabalt punkti L ning tõmbame sellest tasandi α normaali n . Seejärel leiame sirge n ja tasandi α lõikepunkti N . Leiame ka sirge s ja tasandi α lõikepunkti S . Punktidega N ja S on määratud sirge s ristprojektsioon s'_α tasandil α . Tuletades kolmnurga LNS tõelise kuju, leiame sealt nurga φ tõelise suuruse.

Kirjeldatud lahenduskäiku saab aga tunduvalt lihtsustada, arvestades asjaolu, et kolmnurk LNS on täisnurkne. Seetõttu $\varphi = 90^\circ - \psi$, kus ψ on nurk sirge s ja normaali n vahel. Seetõttu võime esmalt leida nurga ψ ning konstrueerida siis nurga $90^\circ - \psi$. Seesuguse lahendusviisi puhul väldime küllalt tülikat sirge s ristprojektsiooni tuletamist tasandil α . Selgita-me nüüd näite abil ülesande tegelikku lahendamist kaksvaatel.

Näide 3. Leida nurk φ sirge s

ja tasandi α (A, B, C) vahel (joon. 29-3, b).

Võtame sirgel s suvalise punkti L ning tõmbame sealt tasandi α normaali n . Selleks joonestame esmalt tasandi α horisontaali h ja frontaali f projektsioonid ning tõmbame siis $n' \perp h'$ ja $n'' \perp f''$ (§ 27, näide 2). Järgnevalt leiame näite 1 eeskujul nurga ψ sirgete n ja s vahel. Selleks on moodustatud abikolmnurk $12L$, mille tipud 1 ja 2 on võetud vastavalt sirgetel s ja n (lihtsuse mõttes ühekõrgusel tasandi α horisontaaliga h).

Abikolmnurga tõeline kuju $1'2'\bar{L}$ on joonisel esitatud punktjoonega; tema konstrueerimisel vajalikud küljepikkused on leitud sirklivõttega.

Kolmnurga $1'2'\bar{L}$ nurk tipu L juures võrdubki nurgaga ψ . Tõmmates läbi tipu L sirge risti küljega $1'\bar{L}$, saame lõpuks otsitava nurga $\varphi = 90^\circ - \psi$.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missuguse nurgaga võrdub nurk: a) kahe tasandi vahel, b) sirge ja tasandi vahel?
2. Leida nurk tasandite α ja β vahel (joon. 29-4).
3. Leida nurk püramiidi serva AT ja tahu BCT vahel (joon. 29-5).

IV. LISAPROJEKTSIOONIDE TULETAMINE JA KASUTAMINE

§ 30. LISAPROJEKTSIOONIDE TULETAMISE VIISID

Objekti antud projektsioonid ei tarvitse alati olla kõige sobivamad mingi nõutud ülesande lahendamiseks või objektist õige kujutluse saamiseks. Nii näiteks üldasendilise kolmnurga ristprojektsiooni külgede pikkused ja nurgad ei võrdu vastavate suurustega ruumis ning seetõttu ei saa niisuguselt projektsioonilt kolmnurga elemente otseselt mõõta. Seevastu on aga nivoopinnal asetseva kolmnurga paralleelprojektsioon moondevaba ning sobib kolmnurga kõigi elementide otseseks mõõtmiseks.

Projektsiooni kuju sõltub teatavasti objekti, ekraani ja kujutamiskiirte vastastikusest asendist. Objekti eriasend ekraani ja kiirte suhtes võimaldab saada lihtsama kujutise ning soodustab objekti mõõtmist kujutise järgi. Seevastu objekti üldisem asend ekraani ja kujutamiskiirte suhtes aga suurendab kujutise piltlikkust.

Eeltoodust selgub, et antud üles-

ande lihtsamaks lahendamiseks või objektist piltlikuma kujutise saamiseks võib tekkida vajadus tuletada objekti antud projektsioonide järgi mõnesugust lisaprojektsiooni (uut või abiprojektsiooni), mis vastaks objekti üldisemale või erilisemale asendile kujutamiskiirte ja ekraani suhtes. Kujutamise praktikas kasutatakse lisaprojektsioonide tuletamiseks järgmisi võtteid.

1. Muudetakse objekti asendit paigalejäävate ekraanide ja kiirte suhtes, pöörates selleks objekti ümber sobivalt valitud telje. Seda võtet nimetatakse **objekti pööramisvõtteks**.

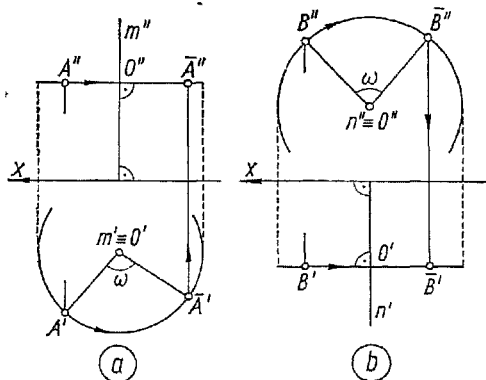
2. Muudetakse ekraani ja vastavate kiirte asendit paigalejääva objekti suhtes. Seda võtet nimetatakse **lisaekraani võtteks**. Teda kasutatakse peamiselt uute ristprojektsioonide tuletamiseks kaksvaate järgi.

3. Objekti ja ekraani vastastikune asend jäetakse muutmata, kuid muudetakse kujutamiskiirte sihti; näiteks ekraaniga risti olevad kiired asendatakse kald- või tsentraalkiir-

tega. Seda võtet nimetatakse **uute kujutamiskiirte võtteks**. Teda kasutatakse objekti kald- või tsentraalprojektsiooni tuletamiseks kaksvaate ühel ekraanil.

Olgu märgitud, et objekti, ekraani ja kiirte ühe ja sama uue vastastikuse asendi võime saada kahel viisil: 1) muutes objekti asendit paigalejääva ekraani ja kiirte suhtes; 2) muutes ekraani ja kiirte asendit paigalejääva objekti suhtes. Kui need asendite muutmised on vastavalt koordineeritud, saame mõlemal juhul lõpptulemuseks objektist ühe ja sama kujutise. Seetõttu on objekti pööramisvõte ja lisaekraani võte kujutise seisukohalt samaväärsed, rakendusviisilt aga osutuvad nad erinevaks.

Ülesannete lahendamisel lisaprojektsioonide abil püütakse kujutamiskiirte, objekti ja ekraani vastastikust asendit muuta nii, et lisaprojektsioon tuleks võimalikult lihtne. Nii võib üldasendilise tasandi muuta projekteerivaks tasandiks või üldasendilise sirge — projekteerivaks kiireks; siis tasand projekteerub sirgjooneks, sirgjoon aga punktiks.



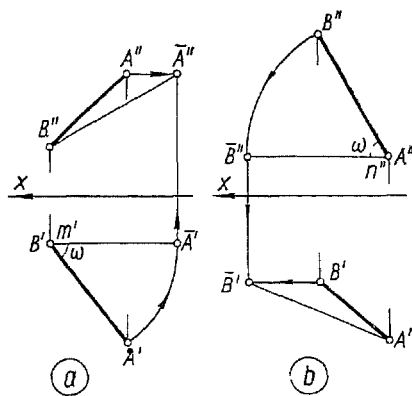
Joonis 31-1

§ 31. OBJEKTI PÖÖRAMISVÕTE

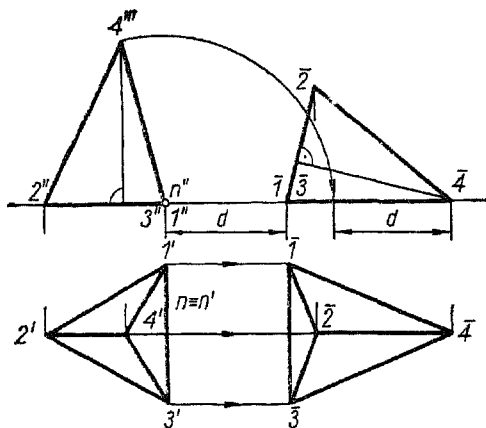
Objekti pööramisel võetakse pöördeteljeks harilikult ekraani normaal või nivoosirge. Üldasendilist sirget pöördeteljena ei kasutata, sest vastav pööramine nõuaks liiga keerulisi konstruktsioone. Pööramisega uude asendisse viidud geomeetrilist elementi nimetame edaspidi selle elemendi **pöörendiks**.

1. Pööramine ümber ekraani normaali. Objekti pööramisel uude asendisse on vaja osata pöörata ainult ühte tema punkti, sest iga muu punktiga võib siis talitada analoogiliselt. Seepärast alustamegi pööramisvõtte käsitlemist punkti pööramisest.

Pöörame punkti $A(A', A'')$ näiteks ümber põhiekraani normaali m nurga $\omega = 95^\circ$ võrra vastupäeva ja tuletame punkti A pöörendile $\bar{A}$ vastava uue kaksvaate (joon. 31-1, a). Pööramisel liigub punkt ruumis mööda ringjoont, mille tasand on paralleelne põhiekraaniga ning risti esiekraaniga. Järelikult see ringjoon projekteerub põhiekraanile ringjooneks, esiekraanile aga sirglõiguks, mis on paralleelne kaksvaate teljega.



Joonis 31-2



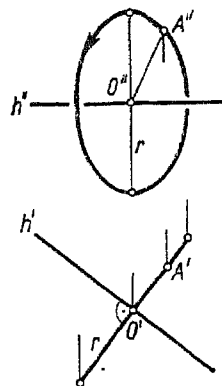
Joonis 31-3

Selle ringjoone keskpunkt O on pöördeteljel, raadiuseks aga on punkti A kaugus pöördeteljest. Nii-siis punkti pöörämisel ümber põhi-ekraani normaali liigub tema pealt-vaade mööda ringjoont, mille kesk-punktiks on pöördetelje punktikuju-tis, eestvaade aga liigub paralleel-selt kaksvaate teljega.

Pööratud punkti pealtvaate A' saa-miseks joonestame kesknurga $A'O'A' = \omega = 95^\circ$, eestvaate $\bar{A}''$ aga leiame sidejoone abil pöördering-joone sirgjooneliselt eestvaatelt.

Analoogiliselt võib kirjeldada punkti B pöörämist ümber esiekraani normaali n (joon. 31-1, b). Sel juhul on pöördering paralleelne esiekraa-niga ning risti põhiekraaniga. Järe-likult punkti pöörämisel ümber esi-ekraani normaali liigub tema eest-vaade mööda ringjoont, mille kesk-punktiks on pöördetelje punktikuju-tis, pealtvaade aga liigub paralleel-selt kaksvaate teljega.

Punkti pöörendi eestvaate $\bar{B}''$ saa-miseks joonestame kesknurga $B''O''\bar{B}'' = \omega$ (kus ω tähendab pööorde-nurga suurust), pealtvaate $\bar{B}'$ aga



Joonis 31-4

leiame sidejoone abil pöörderingjoone sirgjooneliselt pealtvaatelt.

Kui objekt koosneb rohkem kui ühest punktist, siis pöörämisel tema kõik punktid pöörduvad sama nurga võrra. Väga tähtis on teada, et objekti ristprojektsioon sellel ekraanil, millega pöördetelg on risti, muu-dab pöörämisel vaid oma asendit, jäädes iseendaga kongruentseks. Objekti projektsioonid muudel ek-raanidel aga muutuvad pöörämisel ka kuju poolest.

Näide 1. Tuletada üldasendilise lõigu AB pikkus, kasutades pööra-mist ümber ekraani normaali (joon. 31-2).

Pöörame lõigu AB paralleelseks ühe ekraaniga ning tuletame tema uue projektsiooni sellel ekraanil; see projektsioon ongi siis pikkuselt võrdne lõiguga AB . Lõigu pöörami-sel paralleelseks põhiekraaniga tuleb pöördetelg võtta risti esiekraaniga, pöörämisel paralleelseks esiekraa-niga aga peame telje võtma risti põhiekraaniga. Otstarbekohane on võtta pöördetelg läbi lõigu ühe ots-punkti — siis tuleb konstrueerimisel pöörata vaid lõigu teist otspunkti.

Joonisel 31-2, *a* on pöördetelg *m* võetud läbi otspunkti *B* risti põhiekraaniga ning lõik *AB* on pööratud frontaalseks (s. t. paralleelseks esiekraaniga). Pööramisel jääb punkt *B* paigale, otspunkt *A* aga liigub mööda ringjoont. Pöördenuk ω on määratud sellega, et pööratud lõigu pealtvaade peab saama paralleelseks *x*-teljega: $B'A' \parallel x$. Leides sidejoone abil pööratud punkti $\bar{A}$ eestvaate $\bar{A}'$ pöörderingjoone eestvaatelt, saame lõigu *AB* uueks eestvaateks $B'\bar{A}'$; see ongi pikkuselt võrdne lõiguga *AB*.

Joonisel 31-2, *b* on pöördetelg *n* võetud läbi punkti *A* risti esiekraaniga ning lõik *AB* on pööratud horisontaalseks. Esmalt on tuletatud lõigu uus eestvaade $A'B' \parallel x$ ning seejärel lõigu uus pealtvaade $A'\bar{B}'$, mis annabki lõigu *AB* tõelise pikkuse.

Näide 2. Pöörata püramiid 1234 uude asendisse nii, et tahk 134 satuks põhiekraanile (joon. 31-3).*

Püramiidi põhiserv 13 asetseb põhiekraanil ning on risti esiekraaniga; selle serva võtamegi pöördeteljeks *n*. Püramiidi uue eestvaate, mis peab olema kongruentne vana eestvaatega, saame vana eestvaate ümberjoonestamise teel nii, et tahu 134 uus eestvaade ühtiks *x*-teljega. Joonisel on uus kaksvaade selguse mõttes nihutatud pikkuse *d* võrra tegelikust asukohast paremale. Uue pealtvaate saame uue eestvaate järgi sidejoonte abil. Seejuures võtame arvesse, et pööramisel ümber esiekraani normaali punktide kaugused esiekraanist ei muutu.

2. Pööramine ümber nivoosirge.
Kui punkt *A* pöörduv ümber hori-

* Joonisel 31-3 ja mitmel pool mujal on lihtsuse mõttes punktide tähistes juures projektsioonid märgid ära jäetud.

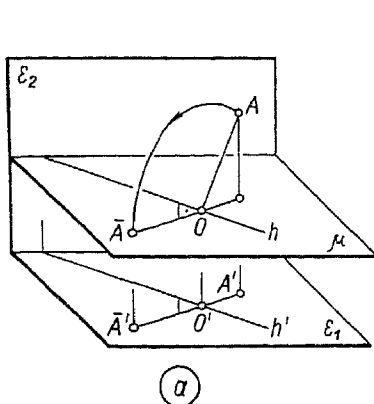
sontaali *h*, siis pöörderingi tasapind on risti pöördeteljega *h* ja ühtlasi risti ka põhiekraaniga. Pöörderingi pealtvaateks tuleb sirglõik pikkusega $2r$, kus *r* on punkti *A* kaugus sirgest *h* (joon. 31-4). Pöörderingi eestvaateks aga tuleb ellips, sest ringi tasand on esiekraani suhtes kaldu (vt. ka joonist 31-5, *a*).

Analoogiliselt võib kirjeldada punkti pööramist ümber frontaali. Sel juhul saame pöörderingjoone eestvaateks sirglõigu, mis on frontaali eestvaatega risti, pealtvaateks aga ellipsi. Vastava joonisena võib lugeja kasutada joonist 31-4, võttes selle tagurpidi ette ning muutes vajalikul viisil sümboleid*.

Rakendustes on sageli vaja antud punkt pöörata ümber mingi nivoo-sirge nivoopinnaale, mis seda nivoo-sirget kannab.

Olgu antud punkti *A* ja horisontaali *h* kaksvaade (joon. 31-5, *b*). Vaja on punkt *A* pöörata ümber horisontaali *h* horisontaalpinnaale μ , mis läbib pöördetelge *h* ning leida pöörendi $\bar{A}$ projektsioonid. Piltkujutiselt 31-5, *a* selgub, et otsitava pöörendi pealtvaade $\bar{A}'$ tuleb pöördkaare raadiuse *OA* kaugusele tsentri *O* pealtvaatest O' ($O'A' = OA$), sest $O\bar{A} = OA$ ja $O\bar{A} \parallel \varepsilon_1$. Järelikult tuleb kaksvaatel punkti $\bar{A}'$ saamiseks leida lõigu *OA* pikkus. Selleks leiame kõigepealt lõigu *OA* projektsioonid. Et tingimuse $h \parallel \varepsilon_1$ tõttu täisnurk sirgete *OA* ja *h* vahel projekteerub põhiekraanile täisnurgaks, siis tuleb lõigu *OA* pealtvaade tõmmata risti horisontaali pealtvaatega: $O'A' \perp h'$. Leides nüüd sidejoone abil punkti *O* eestvaate sirgel h'' , saame kätte ka lõigu *OA* eestvaate. Lõigu *OA* pik-

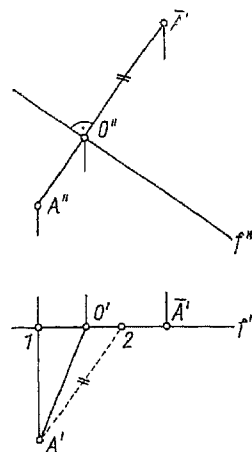
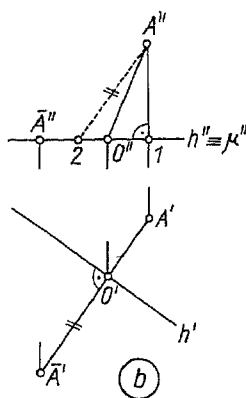
* Seesugune võte on Monge'i meetodi puhul alati kasutatav.



Joonis 31-5

kus on leitud hüpotenuusina $A''2$ täisnurksest kolmnurgast $12A''$, mille kaatetiteks on lõigu AO pealtvaate pikkus ($12=A'O'$) ning lõigu otspunktide kauguste vahe $A''1$ põhiekraanist. Kandes nüüd sirgele $A'O'$ lõigu $O'A'=A''2$, saamegi otsitava pöörendi pealtvaate $\bar{A}'$. Vastava eestvaate leiame sidejoone abil nivoo pinna μ eestvaatelt $\mu''=h''$.

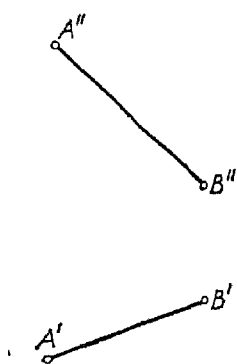
Analoogiliselt toimub ka punkti A pööramine frontaalpinnale ümber antud frontaali f (joon. 31-6). Sel



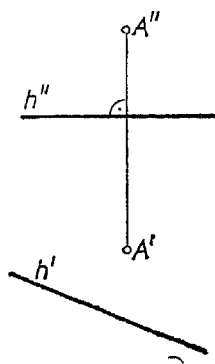
Joonis 31-6

juhul tuleb punkti pöörendi eestvaade $\bar{A}''$ frontaali eestvaate f'' rist-sirgele, pöördekaare raadiuse kaugusele tsentri eestvaatelt O'' . Raadiuse AO pikkus on leitud hüpotenuusina $A'2$ kolmnurgast $12A'$, mille kaatet $12=A'O''$. Mõõtes sirgele $A''O''$ lõigu $O''\bar{A}''=A'2$, saamegi punkti A pöörendi eestvaate $\bar{A}''$. Pealtvaate $\bar{A}'$ leiame sidejoone abil sirgelt f' .

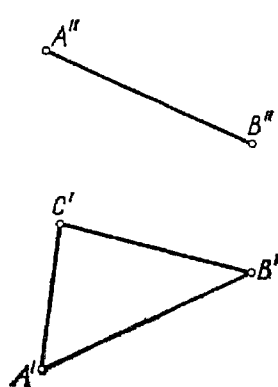
Juhime lõpuks tähelepanu sellele, et pööratava punkti kaugus nivoojoonest kui pöördeteljest tähendab



Joonis 31-7



Joonis 31-8



Joonis 31-9

punktiga ja nivoojoonega määratud tasandi langusjoone lõiku.

Kirjeldataud konstruksioonid keh-tivad muidugi ka neil juhtudel, kui pöördetelg on ühel või teisel ekraa-nil, näiteks tasandi punkti pöörami-sel ekraanile ümber selle tasandi jälgsirge.

ULESANDED

1. Leida sirglõigu AB pikkus pööramisega paralleelseks: 1) põhiekraaniga, 2) esi-ekraaniga (joon 31-7).
2. Leida x -teljel punktid M ja N nii, et kum-magi kaugus punktist A (0; 20; 40) oleks 50 mm.
3. Antud on punkt A ja horisontaalne sirge h (joon. 31-8). Pöörata punkt A 45° võrra ümber sirge h . Esitada mõlema võimaliku pöörendi kaksvaade.
4. Antud on võrdhaarse kolmnurga ABC pealtvaade ja aluse AB eestvaade (joon. 31-9). Tuletada kolmnurga ABC eestvaade.

§ 32. TASANDILISE KUJUNDI TÕELISE KUJU TULETAMINE PÖÖRAMISE TEEL

Punkti pööramist ümber nivoosirge saab kasutada tasandiliste kujundite tõelise kuju ja nurkade suuruse tule-tamiseks. Selleks pööratakse tasandi-line kujund ümber tema horisontaali paralleelseks põhiekraaniga (või üm-ber frontaali paralleelseks esiekraa-niga) ning tuletatakse kujundi uus projektsioon sellel ekraanil. See pro-jektsioon on siis moondevaba ning seega samaväärne kujundi tõelise kujuga.

Eriti lihtne on pööramise teel tule-tada tasandilise kujundi tõelist kuju siis, kui kujundi tasand on ühe ekraaniga risti.

Näide 1. Tuletada esiekraani risttasandil $\alpha(p, e)$ asetseva neli-nurga $ABCD$ tõeline kuju (joon. 32-1).

Näitame kahte lahendusviisi: va-riandis a on nelinurk pööratud üm-

ber põhijälje p põhiekraanile, va-riandis b aga ümber esijälje e esi-ekraanile.

Variandis a on kasutatud asjaolu, et nelinurga tippude kaugused pöör-deteljest p on paralleelsed esiekraa-niga ning projekteeruvad sinna see-tõttu õiges pikkuses. Nii näiteks punkti A ja jälje p vaheline kaugus $OA = O''A''$. Kandes selle pikkuse

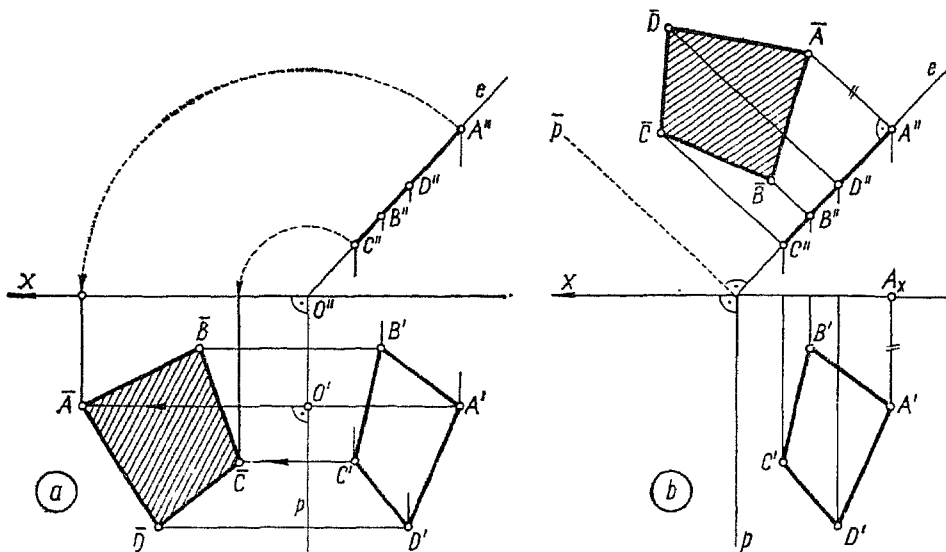
jälje p ristsirgele $A'O'$ ($O'A = O''A''$), saame punkti A pöörendi $\bar{A}$. Leides analoogiliselt ka teiste tip-pude pöörendid, saamegi nelinurga tõelise kuju $\bar{ABCD}$. Et siin pööorde-telg p on risti esiekraaniga, siis võib kirjeldatud toimingut tõlgendada ka objekti pööramisena ümber esi-ekraani normaali.

Variandis b on kasutatud asjaolu, et tippude kaugused pöördeteljest e on võrdsed nende tippude kaugus-tega esiekraanist. Viimaseid esijälje ristsirgele üle kandes ($A''\bar{A} = A'A_x$ jne.) saadaksegi antud nelinurga tõe-line kuju $\bar{ABCD}$. Joonisel on punkt-joonega esitatud ka põhijälje pöö-rend $p \perp e$. Et lähteandmed mõlema variandi puhul olid ühesugused, siis on tuletatud tõelised kujud omavahel kongruentsed.

Näide 2. Tuletada tasandilise nelinurga $ABCD$ tõeline kuju pööra-misega ümber nivoosirge (joon. 32-2).

Nelinurga tasandilisust garanteerib antud juhul tema diagonaalide lõiku-mine (joonisel on diagonaalid esita-tud punktjoonega).

Nelinurga $ABCD$ tõelise kuju saa-miseks pöörame ta paralleelseks näi-teks esiekraaniga, võttes pöördetel-jeks tema tasandi mingi fron-taali, näiteks frontaali f läbi tipu C ($f' \perp C'C''$; $f'' \equiv C''L''$, kus $L \equiv f \times \times AB$). Pöörame nüüd punkti A joo-



Joonis 32-1

nise 31-6 eeskujul frontaalpinnale, mis läbib frontaali f . Selleks tõmbame pöördekaare raadiuse OA eestvaate risti frontaali eestvaatega ($O''A'' \perp f''$) ning leiame täisnurkse kolmnurga võtte abil raadiuse OA pikkuse ($AO = A'2$). Kandes selle pikkuse sirgele $O''A''$ ($O''\bar{A}'' = A'2$), saamegi punkti A pöörendi eestvaate $\bar{A}''$. Talitades analoogiliselt ka ülejäänud tippudega (joonisel seda tehtud pole), saaksime otsitavaks tõeliseks kujuks viirutatud nelinurga. Kui kirjeldatud tuletamisviisil kõik vajalikud lõigupikkused leida sirklivõtte abil, siis abijoonte hulk joonisel kahaneb miinimumini.

Samal joonisel on näidatud teine võimalus tippude B , C ja D uute eestvaadete saamiseks, kui punkti A uus eestvaade $\bar{A}''$ on juba leitud. Selleks on kasutatud asjaolu, et tasandi pööramisel jäävad pöördeteljel asetsevad punktid paigale. See võimaldab näiteks punkti B uue eestvaate $\bar{B}''$ saada järgmiselt. Leiame

sirge AB ja pöördetelje f lõikepunkti L . Et punkt L jääb pööramisel paigale, punkt $\bar{A}''$ aga on juba teada, siis saame kohe joonestada sirgjoone AB pöörendi eestvaate $\bar{A}''L''$. Punkti $\bar{B}''$ saamiseks sirgel $\bar{A}''L''$ on vaja vaid tõmmata sidejoon $B''\bar{B}'' \perp f''$. Punkti $\bar{D}''$ saamiseks on kasutatud abisirget $DK \parallel AL$, kus K on selle abisirge ja pöördetelje f lõikepunkt. Arusaadavalt on siis omavahel paralleelsed ka sirgete DK ja AL pöörendid ning samuti viimaste eestvaated ($K''\bar{D}'' \parallel L''\bar{A}''$). Tõmmates $D''\bar{D}'' \perp f''$, saame ka punkti $\bar{D}''$ sirgel $K''\bar{D}''$. Tipp C kui pöördeteljel asetsev punkt jääb pööramisel paigale.

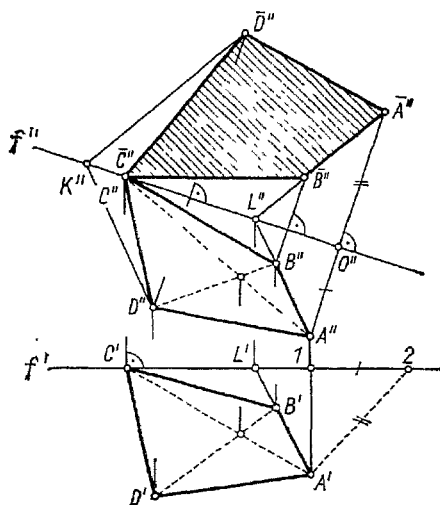
Pööramist ümber nivoosirge kasutatakse ka niisuguste objektide kujutamisel, mille kuju, suuruse või asendi kohta on üles seatud teatavad tingimused.

Näide 3. Tuletada tasandil α (p, e) asetseva võrdkülgse kolmnurga ABC kaksvaade, kui on antud selle

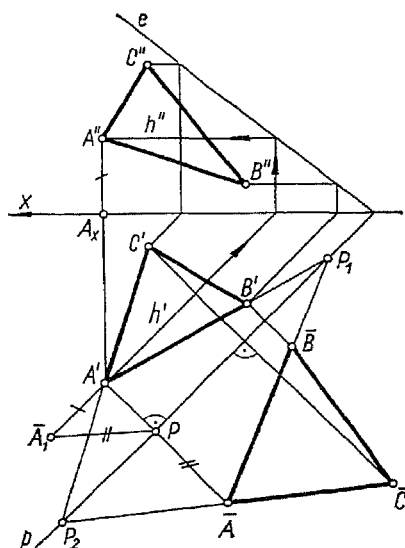
Kujutamisobjektile on siin ette kirjutatud tema kuju ja asend. Ülesande saame põhimõtteliselt lahendada järgmiselt. Pöörame tasandi α koos lõiguga AB näiteks põhiekraanile ümber põhijälje p . Seal joonestame külje AB pöörendi külge võrdkülgse kolmnurga ning pöörame siis tasandi α koos joonestatud kolmnurgaga tagasi ruumi — endisse asendisse.

nuusina $\bar{A}_1P$ kolmnurgas $A'\bar{A}_1P$, mille kaatet $A'\bar{A}_1$ võrdub punktide A ja P kauguste vaheliga põhiekraanist ($A'\bar{A}_1 = A''A_x$, sest punkt P on põhiekraanil). Mõõtes sirgele $A'P$ lõigu $P\bar{A}_1$, saamegi vajaliku pöörendi $\bar{A}$. Analoogiliselt võiks talitada ka punktiga B . Joonisel aga on pöörendi $\bar{B}$ leidmisel kasutatud asjaolu, et tasandi α pööramisel jäävad põhi-
jälje p punktid paigale. Vastavalt sellele leiame esmalt sirgjoone AB põhi-
jälgpunkti P_1 ($P_1 = A'B' \times p$) ning tõmbame sealt sirgjoone P_1A (ühtlasi AB) pöörendi P_1A . Joonestades nüüd läbi punkti B' ristjoone pöördeteljele p , leiamegi sirgelt P_1A vajaliku pöörendi $\bar{B}$.

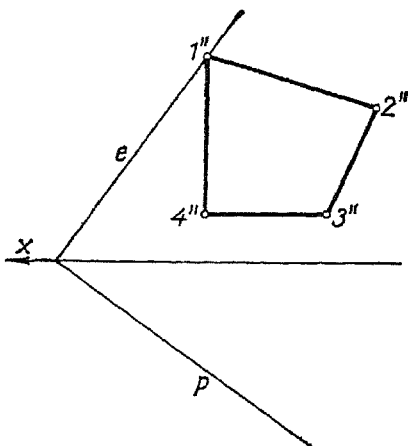
Järgnevalt konstrueerime kolmnurga pöörendi, s. o. võrdkülgse kolmnurga $\overline{ABC}$ ning pöörame ta pöhiakraanilt koos tasandiga α tagasi ruumi. Punktide A ja B pealtvaated satuvad sellega oma endistele



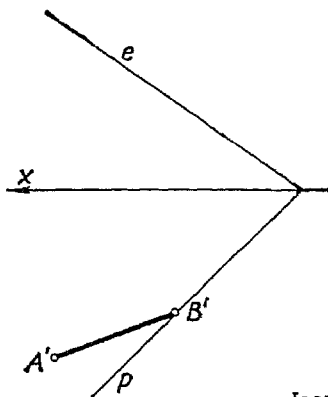
Joonis 32-2



Joonis 32-3



Joonis 32-4



Joonis 32-5

kohtadele, punkti C pealtvaade aga saadakse järgmiselt. Leiame pöörendi $\overline{AC}$ järgi sirgjoone AC põhi- jälje $P_2 \equiv \overline{AC} \times p$. Et punkt P_2 jääb pööramisel paigale, siis sirgjoone P_2A (ühtlasi AC) pealtvaateks saame sirge P_2A' . Sellel aga asetsebki pealtvaade C' , kusjuures tema täpse asukoha juhatab kätte jäljele p tõmmatud ristsirge läbi $\overline{C}$. Leidnud horisontaali abil ka punkti C eestvaate C'' , on meil kolmnurga ABC mõlemad projektsioonid käes ning sellega kogu ülesanne lahendatud.

Märgime lõpuks, et ülesandel on kaks lahendit, sest kolmnurga $\overline{ABC}$ võime joonestada ka küljest $\overline{AB}$ teisele poole.

ÜLESANDED

1. Antud on tasandi α (p, e) asetseva nelinurga 1234 eestvaade (joon. 32-4). Tuletada selle nelinurga tõeline kuju pööramisega ümber tasandi põhi- või esijälje.
2. Antud on korrapärase kuusnurga tasandi jäljed p ja e ning ühe külje AB pealtvaade (joon. 32-5). Tuletada kuusnurga kaksvaade.

§ 33. LISA EKRAANI VÕTE

Lisaekraani võtte kasutamisel tuletakse objekti antud kaksvaate järgi selle objekti ristprojektsioon uuel ekraanil (lisaekraanil), mis on seatud sobivasse asendisse paigalejääva objekti suhtes. Lisaekraan võetakse alati risti ühe antud ekraaniga. Pärast lisaekraani pööramist temaga risti olevale ekraanile tekib uus kaksvaade, mis koosneb objekti antud vaatest ja tuletatud lisavaatest. Kui lisaekraani asend objekti suhtes valitakse otstarbekohaselt, siis uuel kaksvaatel võib ülesanne laheneda lihtsamalt kui lähtekaksvaatel.

Lisaekraani asendi valiku kohta ühtset reeglit anda ei saa, sest see valik sõltub täiesti ülesande tingimustest. Lisaekraani võtte kasutamisel on harilikult eesmärgiks näha mõnda antud sirget või tasandit lisaekraani suhtes eriasendis. Järelikult tuleb lisaekraan valida selle sirge või tasandiga risti või paralleelselt.

Lisaekraani võtte kasutamisel piisab harilikult ühest lisaekraanist.

Esineb aga ka ülesandeid, mille lahendamisel on otstarbekohane kasutada järjestikku kahte lisaekraani.

1. Punkti projekteerimine lisaekraanile. Lisaekraani võtte puhul on põhiliseks konstruktsiooniks punkti ristprojektsiooni tuletamine lisaekraanil. Vaatleme kahte juhtumit: 1) lisaekraan on risti põhiekraaniga; 2) lisaekraan on risti esiekraaniga.

Olgu antud punkt A ja lisaekraan (uus ekraan) ε_3 , mis on risti põhiekraaniga (vt. piltkujutist 33-1, a). Ekraanide ε_1 ja ε_3 lõikesirge u nimetame uueks teljeks. Suunates läbi punkti A projekteeriva kiire risti ekraaniga ε_3 , saame viimasel punkti A uue vaate (lisavaate) A''' . Selle vaate kaugus uuest teljest u ilmselt võrdub punkti A kaugusega põhiekraanist: $A_u A''' = A' A = A_x A''$. Pöörates ekraani ε_3 ümber telje u põhiekraanile, satub punkt A''' uuele sidejoonele, mis läbib pealtvaadet A' ning on risti teljega u . Seejuures punkti A''' kaugus teljest u ei muutu. Nii saame ekraanide süsteemis ($\varepsilon_1, \varepsilon_3$) punkti A uue kaksvaate (A', A''').

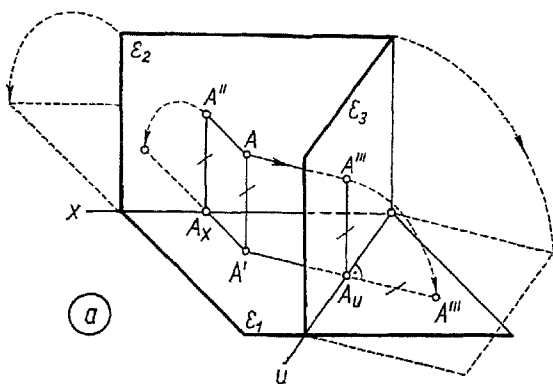
Läheme nüüd joonise 33-1, b juur-

de. Siin on punkt A antud oma kaksvaatega (A', A''), lisaekraani $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$ asukoht aga on määratud uue teljega u . Vaja on leida punkti A vaade A''' ekraanil ε_3 .

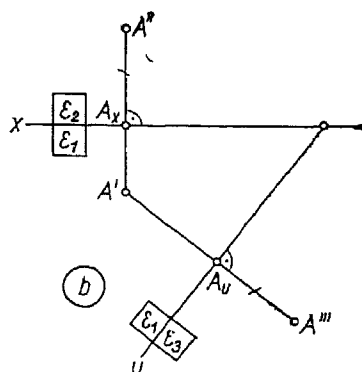
Piltkujutiselt selgus, et punkti A uue vaate A''' saamiseks tuleb läbi pealtvaate A' tõmmata uus sidejoon risti teljega u ning kanda sellele u -teljest arvates punkti A kaugus põhiekraanist: $A_u A''' = A_x A''$. Nii saadud uus vaade A''' moodustab koos pealtvaatega A' punkti A uue kaksvaate teljega u .

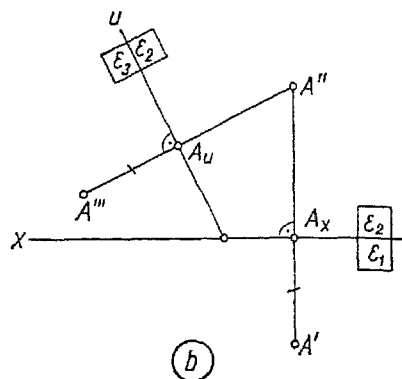
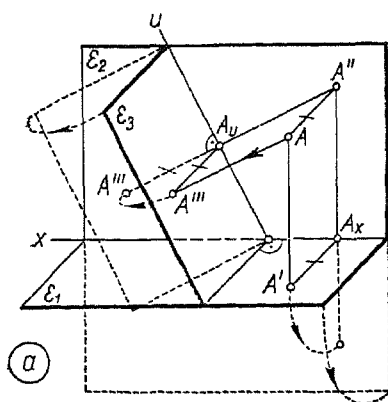
Lisaekraani pööramisel põhiekraanile on soovitatav pööramissuund valida nii, et projektsioonid A' ja A''' tuleksid uuel kaksvaatel teine teisele poole u -telge, nagu lähtekaksvaate projektsioonid A' ja A'' harilikult on teine teisel pool x -telge. Telgede x ja u juurde on selguse mõttes soovitatav kirjutada ka ekraanide tähised; seejuures kirjutatakse lisaekraani ε_3 tähis teljest u sennapoole, kuhu see ekraan pööramisel satub. Uue kaksvaate lugemise hõlbustamiseks võib jooniselehe laual pöörata asendisse, milles uus telg u on rõhtne.

Kui uus ekraan ε_3 on võetud risti



Joonis 33-1





Joonis 33-2

esiekraaniga, siis uueks teljeks u on ekraanide ε_2 ja ε_3 lõikesirge (joon. 33-2, a). Punkti A ristprojektsioon A''' tuleb nüüd u -teljest kaugusele, mis on võrdne punkti A kaugusega esiekraanist: $A_u A''' = A'' A = A_x A'$. Pärast ekraani ε_3 pööramist esiekraanile saadakse uus kaksvaade (A'' , A'''), mille sidejoon $A'' A'''$ on risti uue teljega u .

Punkti A uue vaate A''' tuletamine lähtekaksvaate (A' , A'') ja sellel antud uue telje u järgi toimub nüüd järgmiselt (joon. 33-2, b). Läbi eestvaate A'' tõmbame uue sidejoone

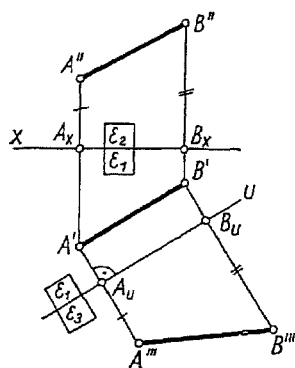
risti teljega u ning kanname sellele u -teljest arvates punkti A kauguse esiekraanist: $A_u A''' = A_x A'$. Nii saame uue vaate A''' , mis koos eestvaatega A'' annab punkti A uue kaksvaate teljega u .

Antud kaksvaade koos uue vaatega moodustavad nn. üldistatud kolmvaate. Harilikust kolmvaatest (§ 13), mille puhul kõik kolm ekraani on omavahel risti, erineb üldistatud kolmvaade selle poolest, et siin uus ekraan on risti ainult ühe antud ekraaniga. Harilik kolmvaade osutub seega üldistatud kolmvaate erijuhtumiks, milles uus ekraan ε_3 on risti esiekraaniga ε_2 ning uus telg $u \perp x$.

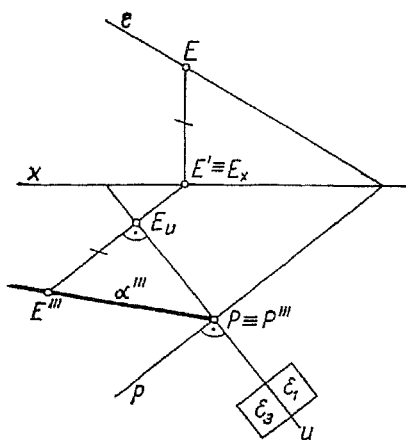
Lahendame nüüd mõned ülesanded, mille puhul on otstarbekohane kasutada lisaekraani.

Näide 1. Leida kaksvaatega antud üldasendilise sirglõigu AB pikkus, kasutades lisaekraani võtet (joon. 33-3).

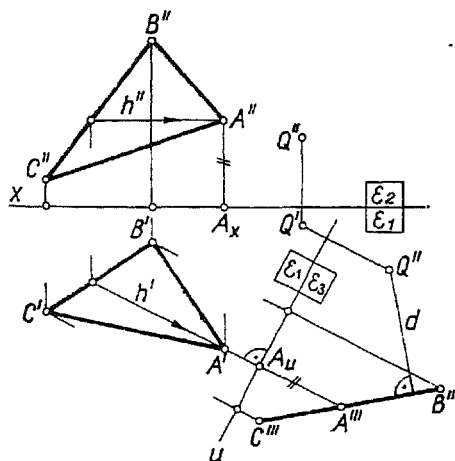
Asetame uue ekraani ε_3 paralleelselt lõiguga AB ning risti ühe antud ekraaniga, näiteks risti põhiekraaniga. Siis lõik AB projekteerub uuele ekraanile moondevabalt. Et



Joonis 33-3



Joonis 33-4



Joonis 33-5

lõik AB oleks paralleelne ekraaniga ε_3 , tuleb uus telg u tõmmata paralleelselt lõigu AB pealtvaatega $A'B'$ (seejuures kauguse sellest pealtvaatest võib valida vabalt). Tõmmates nüüd läbi A' ja B' sidejooned risti teljega u ning kandes neile punktide A ja B kaugused põhiekraanist ($A_u A''' = A_x A''$; $B_u B''' = B_x B''$), saame lõigu AB uue projektsiooni $A'''B'''$; see projektsioon ongi pikku-selt võrdne lõiguga AB .

2. Tasandi muutmine ekraani rist-tasandiks. Mitmed tasandiga seotud ruumigeomeetrilised ülesanded lahenevad Monge'i meetodiga väga lihtsalt, kui tasand on ühe ekraaniga risti. Seetõttu võib ülesannete lahendamisel tekkida vajadus muuta antud üldasendilise tasandi lisaekraani risttasandiks.

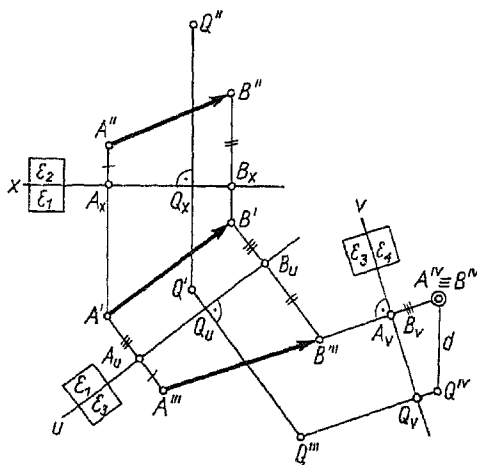
Üldasendilise tasandi puhul saab uue ekraani valida alati nii, et ta on risti selle tasandiga ning ühtlasi risti ka ühe antud ekraaniga. Selleks on vaja vaid uus ekraan võtta risti antud tasandi mingi nivoojoonega (või jäljega). Kuidas seda teha, selgub järgmisest näitest.

Näide 2. Võtta uus ekraan ε_3 risti antud üldasendilise tasandiga $\alpha(p, e)$ ning tuletada tasandi α uus projektsioon (joon. 33-4).

Uus ekraan peab olema risti tasandiga α ja risti ka ühe antud ekraaniga, näiteks risti põhiekraaniga. Mõlemad tingimused on rahuldatud, kui võtame uue ekraani risti tasandite α ja ε_1 lõikesirgega, s. o. põhijäljega p . Järelikult uus telg u tuleb tõmmata risti jäljega p . Et tasand α projekteerub uuele ekraanile sirgjooneks, siis on vaja tuletada vaid tema kahe punkti projektsioonid. Kõige lihtsam on võtta projekteeritavad punktid P ja E vastavalt tasandi põhi- ja esijäljel. Kui punktiks P võtta sirgete p ja u lõikepunkt, siis $P''' = P$. Punkti E uue projektsiooni E''' saame aga eespool kirjeldatud viisil: $E'E''' \perp u$; $E_u E''' = E_x E$. Tasandi α projektsiooniks saame sirgjoone $\alpha''' = P'''E'''$.

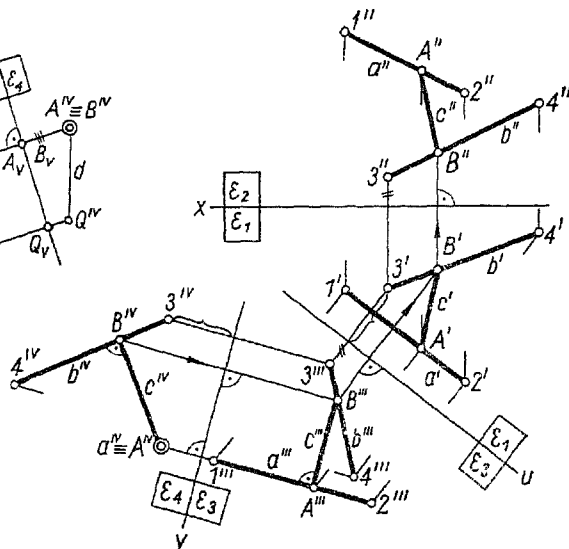
Näide 3. Leida punkti Q kaugus d üldasendilisest tasandist α (A, B, C) (joon. 33-5).

Et otsitav kauguslõik kui tasandi α normaal projekteeruks uuele ekraa-



Joonis 33-6

Joonis 33-7



nile moondevabalt, peab uus ekraan olema risti tasandiga α . Selle saavutamiseks tõmbame kõigepealt tasandil α mingi nivoosirge, näiteks horisontaali h läbi punkti A , ning võtame siis uue ekraani ε_3 selle horisontaaliga risti, s. t. joonestame uue telje $u \perp h'$. Nii võetud ekraan ε_3 ongi risti niihästi ekraaniga ε_1 kui ka tasandiga α . Uue ekraani ja tasandi α ristseis järeldub sellest, et horisontaal h on ekraani ε_3 normaaliks, tasand α aga läbib seda normaali. Tasandi α ristprojeksiooniks ekraanil ε_3 saadakse sirgjoon $A''B''C''$. Punktide kolmandad projektsioonid leitakse eespool selgitatud viisil (näiteks punkti A''' saamisel $A_u A''' = A_x A''$). Punkti Q otsitavat kaugust tasandist α näitab nüüd lõik d , mis on tõmmatud punktist Q''' risti tasandi α sirgkujutisega.

Kui tasandi määramisandmeteks on jäljed, siis jääb konstruktsioonis

ära horisontaali tõmbamine, sest viimast asendab tasandi põhijalg.

3. Sirgjoone muutmine ekraani normaaliks. Lahendame nüüd mõned tähtsad ruumigeomeetrilised ülesanded, kus lisaekraani võtet tuleb rakendada kaks korda järjest. Kõigis neis ülesannetes tekib vajadus muuta üldasendiline sirge lisaekraani normaaliks.

Näide 4. Leida punkti Q kaugus üldasendilisest sirgest AB (joon. 33-6).

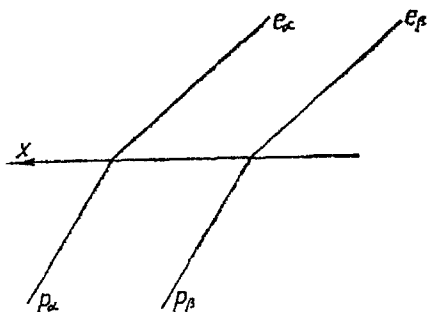
Otsitav kauguslõik projekteerub tõelises pikkuses ekraanile, mis on risti sirgega AB . Et aga sirge AB on üldasendiline, siis tema risttasandit otsekohe uueks ekraaniks võtta ei saa, sest see ekraan poleks risti ei põhie- ega esiekraaniga. Olukord laheneb kahe lisaekraani rakendamisega järjestikku. Esimese lisaekraani ε_3 võtame paralleelselt sirgega AB ning risti ühe antud ekraaniga, näi-

teks põhiekraaniga. Seega uus telg u tuleb tõmmata paralleelselt pealtvaatega $A'B'$. Järgnevalt tuletame sirgjoone AB uue (kolmanda) projektsiooni $A''B''$ ($A_u A'' = A_x A''$; $B_u B'' = B_x B''$). Et saadud kaksvaate järgi ekraanide süsteemis ($\varepsilon_1, \varepsilon_3$) on sirge AB paralleelne ekraaniga ε_3 , siis on nüüd juba võimalik asetada teine lisaekraan ε_4 risti sirgega AB ning ühtlasi risti ekraaniga ε_3 . Selleks tuleb teine uus telg v tõmmata risti projektsiooniga $A''B''$. Punktide A ja B uued (neljandad) projektsioonid A^{IV} ja B^{IV} ekraanil ε_4 leiame endisel viisil, kuid lähtudes vahepeal saadud kaksvaatest süsteemis ($\varepsilon_1, \varepsilon_3$). Selleks tõmbame projektsioonidest A'' ja B'' uued sidejooned risti teljega v (joonisel on need ühtinud) ning kanname neile punktide A ja B kaugused ekraanist ε_3 , s. o. punktide A' ja B' kaugused teljest u ($A_v A^{IV} = A_u A'$; $B_v B^{IV} = B_u B'$). Et $A_u A' = B_u B'$, siis saame sirge AB kujutiseks ekraanil ε_4 punkti $A^{IV} \equiv B^{IV}$, s. t. sirge AB osutub ekraani ε_4 normaali. Järelikult otsitav kauguslõik on paralleelne ekraaniga ε_4 ning projekteerub sinna tõelises pikkuses. Jääb vaid leida punkti Q neljas vaade Q^{IV} , mille saame sa-

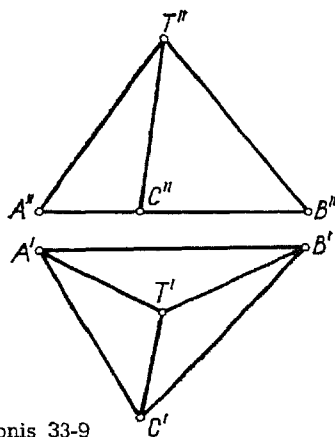
muti nagu punktide A ja B neljandad vaated: esmalt leiame vaate Q''' ($Q_u Q''' = Q_x Q''$) ning seejärel vaate Q^{IV} ($Q_v Q^{IV} = Q_u Q'$). Otsitav kaugus d võrdub lõiguga $Q^{IV} A^{IV}$.

Näide 5. Leida kiivsirgete a ja b vaheline kaugus d ning nende sirgete ühine ristlõikaja c (joon. 33-7).

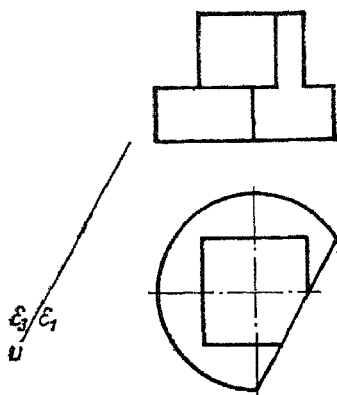
Kahe kiivsirge vahelist kaugust mõõdetakse teatavasti mööda nende sirgete ühist ristlõikajat. Järelikult kui lisaekraan on risti ühe antud kiivsirgega, siis otsitav kauguslõik projekteerub sellele lisaekraanile tõelises pikkuses. Tuletame otsitava kauguslõigu (ühtlasi ka ristlõikaja c) projektsiooni lisaekraanil, mis on risti näiteks sirgega a . Et sirge a on üldasendiline, peame kasutama vahepealset lisaekraani ε_3 , võttes selle paralleelselt sirgega a ning risti näiteks põhiekraaniga (telg $u \parallel a'$). Sirgete a ja b kolmandate vaadete a''' ja b''' saamiseks valime kummalgi sirgel vabalt kaks punkti (punktid 1 ja 2 sirgel a ning 3 ja 4 sirgel b) ning tuletame nende kolmandad vaated. Teine lisaekraan ε_4 on võetud risti sirgega a , seega ühtlasi risti ekraaniga ε_3 (telg $v \perp a'''$). Sirgete a ja b projektsioonideks ekraanil ε_4 saame vastavalt punkti a^{IV} ja sirge



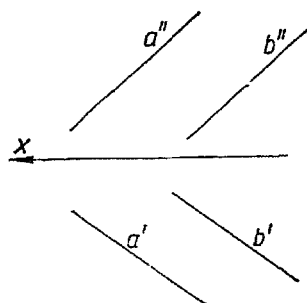
Joonis 33-8



Joonis 33-9



Joonis 33-10



Joonis 33-11

b^{IV} . Et ristlõikaja c on paralleelne ekraaniga ε_4 (sest $c \perp a$ ja $a \perp \varepsilon_4$), siis peab täisnurk sirgete b ja c vahel projekteeruma ekraanile ε_4 jälle täisnurgaks, s. t. $c^{IV} \perp b^{IV}$. Ekraanil ε_4 saame projektsioonis kätte ka punktid A ja B , milles sirge c lõikab antud kiivsirgeid. Otsitav kaugus $d = A^{IV}B^{IV}$.

Ristlõikaja c projektsioonid lähtekaksvaatel on leitavad tagasikäiguga, alustades neljandast vaatest. Kõigepealt leiame sidejoone $B^{IV}B''' \perp v$ abil sirgelt b''' projektsiooni B''' . Sealt tõmbame ristlõikaja c projektsiooni $c''' \perp a'''$ (sest täisnurgal sirgete a ja c vahel on haar $a \parallel \varepsilon_3$); sellega saame ühtlasi projektsiooni A''' sirgel a''' . Punktide A''' ja B''' järgi leiame sidejoonte abil esmalt pealtvaated A' ja B' ning seejärel ka vastavad eestvaated. Sellega ongi ristlõikaja c üle kantud lähtekaksvaatele.

Tehnilises joonestamises kasutatakse lisaekraani võtet lisavaate saamiseks objektidest.

Märgime lõpuks, et praktikas ei lähe vaja rohkem kui kahe lisaekraani järjestikust rakendamist,

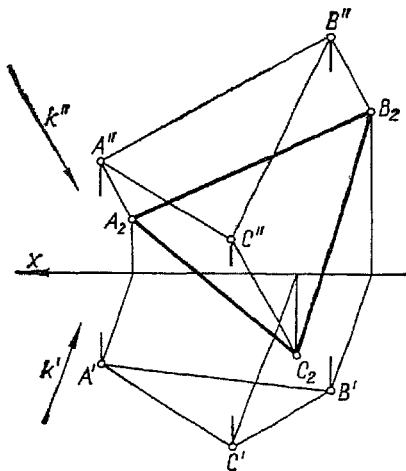
sest kahe lisaekraani rakendamisega on iga objekt viidav igasse mõeldavas asendisse teise lisaekraani suhtes.

KÜSIMUSED JA ULESANDED

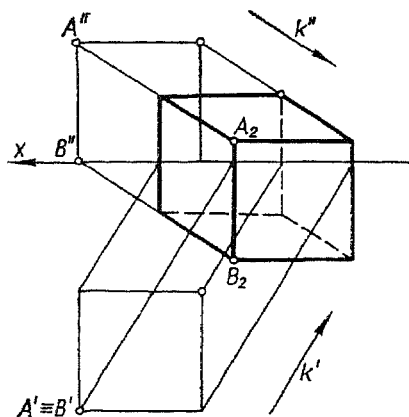
1. Kuidas valitakse lisaekraan ühe antud ekraani suhtes?
2. Kuidas tuleb võtta lisaekraan, et üldasendiline tasand projekteeruks temale sirgjooneks?
3. Leida paralleelsete tasandite α ja β vaheline kaugus (joon. 33-8).
4. Leida püramiidi tipu A kaugus tahust BCT (joon. 33-9).
5. Tuletada joonis 33-10 antud objekti lisa-vaade ekraanil $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$.
6. Leida paralleelsete sirgete a ja b vaheline kaugus (joon. 33-11).

§ 34. UUTE KUJUTAMISKIRTE VÕTE

Objekti uue projektsiooni tuletamiseks antud kaksvaate järgi saab kasutada ka sobivalt valitud kald- või tsentraalkiiri (§ 30). Sel puhul võetakse ekraaniks harilikult põhi- või esiekraan. Seda, nn. uute kaju-



Joonis 34-1



Joonis 34-2

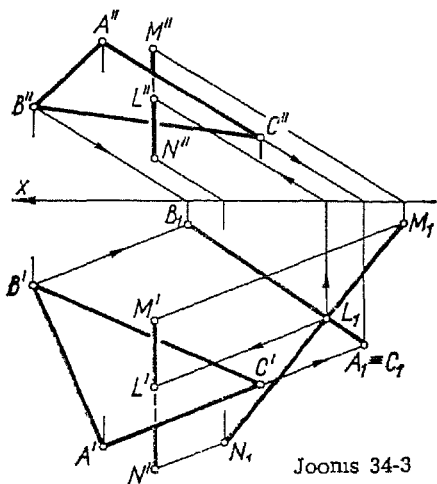
tamiskiirte võtet saab edukalt kasutada ruumigeomeetriliste ülesannete lahendamiseks ja piltkujutiste tuletamiseks.

Näide 1. Tuletada kaksvaatega antud kolmnurga ABC kaldprojektsioon esiekraanil kaldkiirtega k (joon. 34-1).

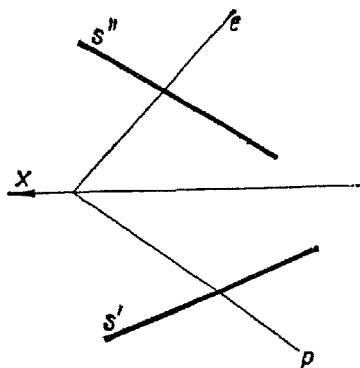
Juhime läbi kolmnurga tippude kiirega k paralleelsed kaldkiired

ning leiame nende lõikepunktid esiekraaniga, s. o. kiirte esijäljed, tähistades neid A_2 , B_2 ja C_2 (indeksid on kooskõlas esiekraani tähise indeksiga). Saadud kolmnurk $A_2B_2C_2$ ongi kolmnurga ABC otsitavaks kaldprojektsiooniks.

Analoogiliselt on joonisel 34-2 tuletatud kuubi piltlik kaldprojektsioon esiekraanil.



Joonis 34-3



Joonis 34-4

Näide 2. Antud on üldasendiline tasand ABC ja profiilsirge MN ; leida nende lõikepunkt L (joon. 34-3).

Sirge ja tasandi lõikepunkti leidmise tavaline viis (§ 26) antud kaksvaatel sihile ei vii (miks?). Otsitava lõikepunkti saame aga hõlpsasti leida, kasutades sobivalt valitud kaldkiiri. Sobivaiks osutuvad siin kõik niisugused kiired, mis on antud tasandiga paralleelsed, näiteks sirge AC sihilised. Niisuguste kaldkiirtega projekteerimisel näiteks põhiekraanile saadakse kolmnurga kaldprojektsiooniks sirglõik (§ 4, lause 5). Kaldprojektsioonide saamiseks juhitakse läbi antud punktide kaldkiired paralleelselt sirgega AC ning leiame

nende põhijäljed. Nii saame tasandi ABC ja sirgjoone MN uuteks projektsioonideks A_1B_1 ja M_1N_1 , mis lõikuvad punktis L_1 . Viimane osutub otsitava lõikepunkti L kaldprojektsiooniks. Tõmmates nüüd punkti L_1 läbiva kaldkiire pealt- ja eestvaate, leiame tagasikäiguga lõikepunkti L enda projektsioonid L' ja L'' sirge MN projektsioonidelt.

KÜSIMUSED JA ULESANDED

1. Nimetage lisaprojektsioonide saamise viisid.
2. Kasutades sobivalt valitud kaldkiiri, leida sirge s ja tasandi $\alpha(p, e)$ lõikepunkt (joon. 34-4).

V. HULKTAHUKAD

§ 35. HULKTAHUKATE TÄHTSAMAD LIIGID

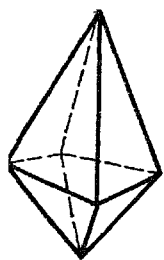
Hulktahukas (polüeeder) ehk lihtsalt **tahukas** on tasandiliste hulknurkade (tahkudega) piiratud keha. Tahuka all kitsamas mõttes mõeldakse ainult tema pealispinda (tahustikku).

Tahukas on kumer, kui ta jääb iga oma tahu tasandist tervenisti ühele poole; vastasel korral on tahukas nõgus. Näiteks joonisel 35-1 esitatud tahukatest on vasakpoolne kumer, parempoolne aga nõgus. Kumera tahuka iga tasandiline lõige on kumer hulknurk.

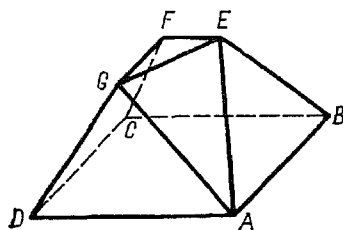
1. Lihtsamad hulktahukad. Tuntumad hulktahukad on prisma ja püra-

miid, nendest mõlemast üldisem on prismatoid. Eirühma moodustavad korrapärased tahukad (sealhulgas ka ideaaltahukad).

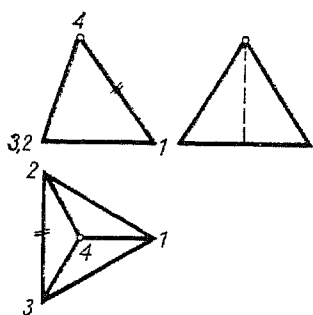
Prismatoidiks nimetatakse tahukat, millel on kaks paralleelset tahku (põhja) ning millel pole muid tippe peale põhjatippude. Joonisel 35-2 näiteks on esitatud prismatoid, mille põhjadeks on rõõpkülik $ABCD$ ja kolmnurk EFG . Prismatoidi tippude koguarv peab olema vähemalt 4. **Püramiid** on prismatoid, mille teine põhi on kidunud üheksainsaks punktiks — püramiidi tipuks. **Prisma** on prismatoid, mille põhjad on teineteise paralleelprojektsioonid. Prismatoidi kumbki põhi võib esineda ka



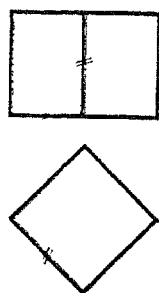
Joonis 35-1



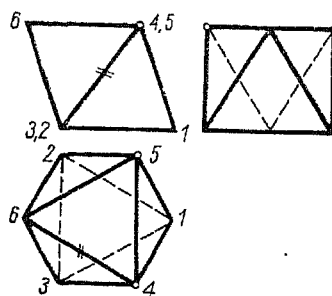
Joonis 35-2



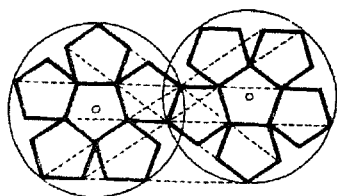
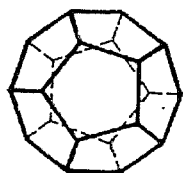
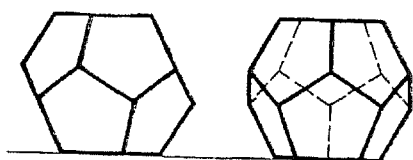
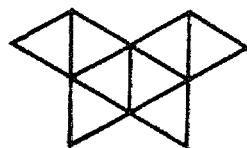
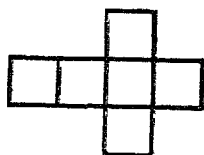
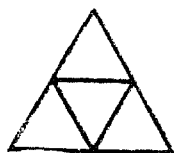
Joonis 35-3



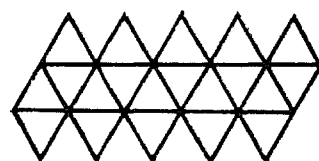
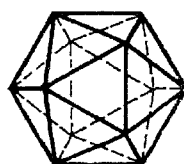
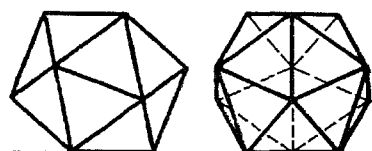
Joonis 35-4



Joonis 35-5



Joonis 35-6

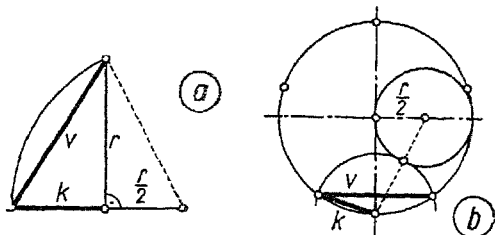


Joonis 35-7

sirglõiguna. Prismatoidi külgservad ühendavad kummagi põhja tippe; seejuures võivad külgtahud olla kolmnurgad, parallelogrammid, ristkülikud ja trapetsid.

2. Ideaal tahukad. Korrapäraseid tahukaid, mille kõik tahud on korrapäraseid ja võrdsed hulknurgad, nimetame **ideaaltahukateks**. Ideaaltahuka kõik hulk tahksed nurgad tippude juures on võrdsed. Kumeraid ideaaltahukaid ehk Platoni* tahukaid on viis, nõgusaid ideaaltahukaid ehk nn. **tähttahukaid** aga neli. Viimaseid kui vähemtähtsaid me ei käsitlen.

Et kumeraid ideaaltahukaid ei saa olla rohkem kui viis, selgub järgmisest arutelust. Iga tipu juurest lähtub vähemalt kolm tahku; seejuures tasanurkade summa iga tipu juures peab olema väiksem kui 360° . Korrapärase kolmnurga sisenurk on 60° , nelinurgal 90° ja viisnurgal 108° . Järelikult saab korrapäraseid kolmnurkadest moodustada ruuminurki kolmel viisil: $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$ ja $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$; korrapäras-



Joonis 35-8

test nelinurkadest — ühelainsal viisil: $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$; ja korrapäraseid viisnurkadest — samuti ühelainsal viisil: $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$. Nii saame kokku ainult viis võimalust.

Kumerate ideaaltahukate nimetused ja olulisemad andmed on koondatud alljärgnevasse tabelisse. Nende tahukate mituvaated ja vähendatud pinnalaotused on esitatud joonistel 35-3 kuni 35-7.

Dodekaeedri pealtvaate ja pinnalaotuse puhul on vaja osata joonestada korrapäraseid viisnurka ja kümmenurka. Joonisel 35-8 on näidatud kaks konstruktsiooni korrapärase kõõlviisnurga külje v ja kõõlkümnenurga külje k leidmiseks ümberringjoone antud raadiuse r järgi. Mõlemates konstruktsioonides kasutatakse niisuguse täisnurkse kolmnurga hüpoteenuusi, mille kaatetiteks on r ja $0,5r$.

* Platon (427—347 e m a), vanakreeka filosoof.

Kumerate ideaaltahukate tabel

Jrk. nr.	Tahuka nimetus	Joonise nr.	Tahu kuju	Servade arv	Tippude arv
1.	Tetraeeder (4-tahk)	35-3	võrdkülgne kolmnurk	6	4
2.	Heksaeeder (6-tahk) ehk kuup	35-4	ruut	12	8
3.	Oktaeeder (8-tahk)	35-5	võrdkülgne kolmnurk	12	6
4.	Dodekaeeder (12-tahk)	35-6	korrapärane viisnurk	30	20
5.	Ikosaeeder (20-tahk)	35-7	võrdkülgne kolmnurk	30	12

§ 36. TAHUKA LÕIKUMINE TASANDIGA JA SIRGEGA

Kahe kujundi lõige on nende kujundite ühiste punktide hulk (ühisosa). Nii on joone ja pinna lõikeks punkt (lõikepunkt), kahe pinna lõikeks — joon (lõikejoon) ning pinna ja keha lõikeks — pinnatükk.

Tahuka ja tasandi lõikejooneks on hulknurk, mille tippudeks on lõikava tasandi ja tahuka servade lõikepunktid, külgedeks aga lõikava tasandi ja tahkude lõikesirged. Lõikehulknurga saamiseks võib leida kas tema tipud, lahendades selleks korduvalt sirgjoone ja tasandi lõikumisülesannet (§ 26), või tema küljed, lahendades korduvalt kahe tasandi lõikumisülesannet (§ 25). Praktikas kasutatakse mõlemaid viise harilikult kombineeritult.

1. Tahuka lõikumine eriasendilise tasandiga. Eriti lihtsalt lahenevad lõikumise need juhtumid, kus lõikav tasand on risti põhi- või esiekraaniga. Siis lõikejoone üheks projektsiooniks tuleb sirglõik, teine projektsioon aga saadakse esimese järgu lihtsalt sidejoonte abil.

Näide 1. Leida kaksvaatega antud hulktahu ja esiekraani risttasandi $\alpha(p, e)$ lõikejoone projektsioonid ja lõikejoone tõeline kuju (joon. 36-1).

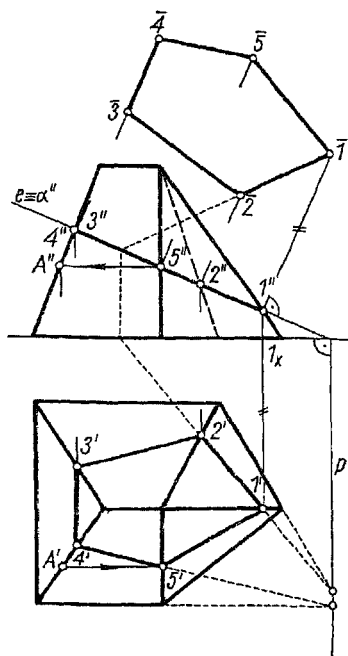
Et tasand α on risti esiekraaniga, siis lõikehulknurga eestvaateks tuleb sirglõik, mis ühtib tasandi eestvaatega α'' . Seejuures lõikehulknurga 12345 tippude eestvaated asetsevad tahuka vastavate servade eestvaadetel. Lõikejoone pealtvaate saamiseks tõmbame tippude eestvaadetest sidejooned kuni lõikumiseni tahuka vastavate servade pealtvaadetega. Et tipp 5 asetseb serval, mis on risti kaksvaate teljega, siis tuleb ta pealtvaate leidmiseks kasutada abisirget,

näiteks trapetsikujulise eesmise tahu horisontaali 5A. Lõikejoone tõeline kuju 12345 on saadud tasandi α pööramisega esiekraanile ümber jälgsirge $e(1''1' = 1'1_x$ jne., vt. § 32, näide 1). Tulemuste kontrollimiseks võib kasutada lõikehulknurga külgede jälgpunkte (vaata joonisel punktjoonega esitatud konstruktisioone; nende lahtimõtestamise oleme jätnud lugeja hooleks).

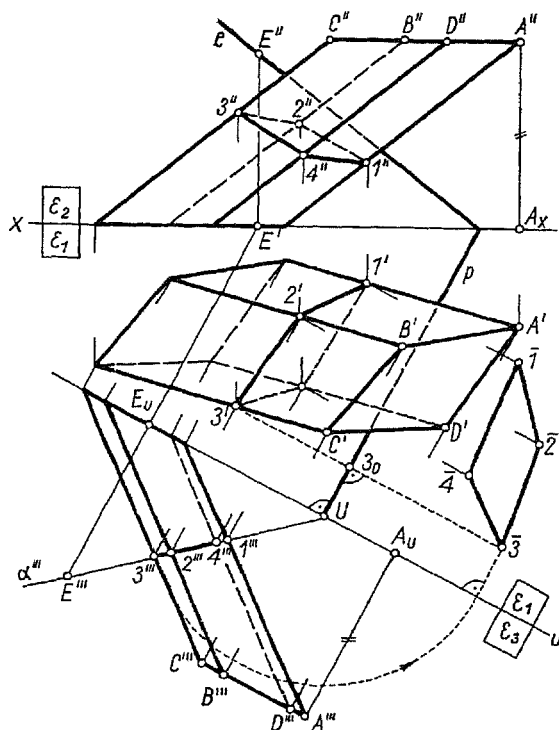
2. Tahuka lõikumine üldasendilise tasandiga. Kui lõikav tasand on üldasendiline, siis on otstarbekohane kasutada projekteerimist uuele ekraanile, mis võetakse risti lõikava tasandiga. Nii saadaval uuel kaksvaatel saab ülesannet lahendada juba eelmises punktis kirjeldatud viisil.

Näide 2. Olgu vaja tuletada nelinurkse kaldprisma ja üldasendilise tasandi $\alpha(p, e)$ lõikejoone kaksvaade ja lõikejoone tõeline kuju (joon. 36-2).

Võtame uue ekraani ε_3 risti tasandi α põhijäljega p (telg $u \perp p$). Siis ekraan ε_3 on risti põhiekraaniga ja ühtlasi risti ka tasandiga α . Prisma uue vaate tuletame harilikul viisil, kandes tippude kaugused põhiekraanist üle uutele sidejoontele (näiteks $A'''A_u = A''A_x$). Tasand α projekteerub ekraanile ε_3 sirgjooneks α''' , mille määravad punkt $U = u \times p$ ja esijäljel vabalt valitud punkti E uus projektsioon E''' ($E'''E_u = E''E'$). Et tasand α on risti uue ekraaniga, siis lõikejoon projekteerub sellele ekraanile sirglõiguks $1'''3'''$, mis ühtib tasandi α projektsiooniga α''' . Lõikejoone uue vaate järgi tuletatakse sidejoonte abil lõikejoone pealtvaade ja viimase järgi ka lõikejoone eestvaade. Tulemuse täpsuse kontrollimiseks võib kasutada asjaolu, et lõikehulknurga tippude eestvaadete



Joonis 36-1



Joonis 36-2

kaugused x -teljest peavad võrduma uute vaadete kaugustega u -teljest. Sama asjaolu võib tarbe korral kasutada ka lõikejoone eestvaate otseks tuletamiseks uue vaate järgi vahepealseid sidejooni kasutamata.

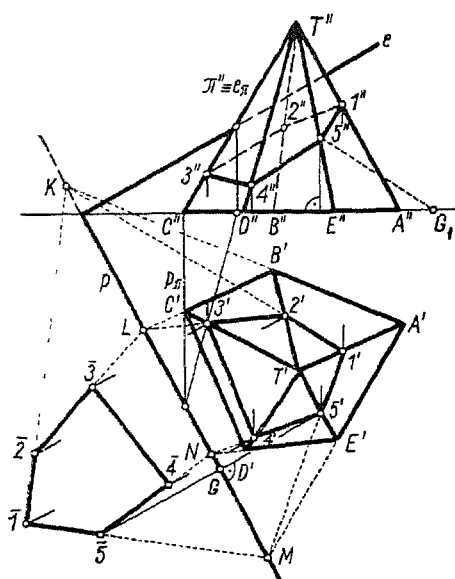
Lõikejoone tõeline kuju 1234 on tuletatud uue kaksvaate järgi tasandi α pööramisega põhiekraanile ümber jälje p . Niisugusel pööramisel satub näiteks punkti 3 pöörend $\bar{3}$ jäljest p kaugusele $3_0\bar{3} = U3'''$ (§ 32, näide 1). Analoogiliselt on leitud lõikejoone teiste tippude pöörendid.

Tahuka ja üldasendilise tasandi lõikejoone võib tuletada ka otseselt lähtekaksvaatel, s. t. lisaakraani kasutamata.

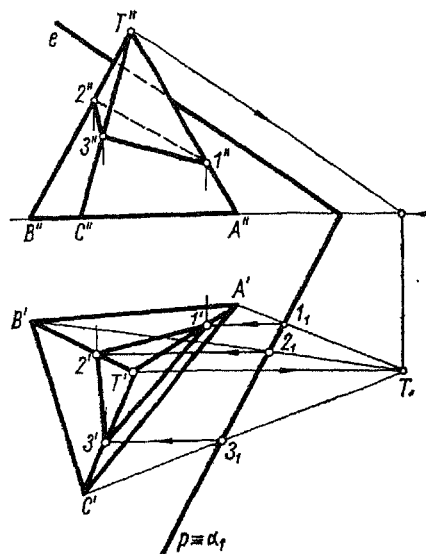
Näide 3. Olgu vaja tuletada

püramiidi $TABCDE$ ja tasandi $\alpha(p, e)$ lõikejoone kaksvaate ja lõikejoone tõeline kuju (joon. 36-3).

Leiame kõigepealt püramiidi ühe külgserva, näiteks serva CT ja tasandi α lõikepunkti 3 ; seejuures abitasandi π läbi serva CT võtame risti esiekraaniga. Nii leitud punkt 3 on otsitava lõikehulknurga üheks tipuks. Analoogiliselt saaksime leida ka lõikehulknurga ülejäänud tipud. Joonisel on aga tehtud teisiti: nimelt on tippu 3 ära kasutades tuletatud lõikehulknurga küljed, kui tahkude ja tasandi α lõikejooned. Et punkt 3 asetseb serval CT , siis on ta tahu BCT ja tasandi α lõikesirge üheks punktiks. Selle lõikesirge teiseks punktiks on tasandite BCT ja α põhijälgedes $B'C'$ ja p lõikepunkt L (üht-



Joonis 36-3



Joonis 36-4

lasi lõikesirge põhijälg). Sirge $L3$ määrab lõikehulknurga külje tahul BCT ning ühtlasi lõikehulknurga järgmise tipu 2 serval BT . Selle mõttekäigu kohaselt pealtvaatel tõmmatud sirge $L3'$ lõikab serva BT pealtvaadet punktis $2'$. Edasi leiame analoogiliselt tahul ABT asetseva lõikesirge põhijälje $K \equiv A'B' \times p$, mille ühendamisel punktiga $2'$ saame lõikehulknurga järgmise külje ja ühtlasi tipu 1 pealtvaate serva AT pealtvaatel. Samal viisil, kasutades põhijälgpunkte $M \equiv A'E' \times p$ ja $N \equiv E'D' \times p$, on leitud ka lõikehulknurga külgede 15 ja 54 pealtvaated. Lõikejoone eestvaade saadakse sidejoonte abil lõike pealtvaate järgi.

Lõikejoone tõelise kuju 12345 võib konstrueerida lõikehulknurga külgede ja diagonaalide järgi, leides nende pikkused kaksvaate alusel. Lõikejoone võib aga ka pöörata ühele ekraanile, näiteks põhiekraanile, na-

gu on tehtud joonisel. Selleks on leitud tipu 5 kaugus põhijäljest (lõiguna $5''G_1$ eestvaatel) ning selle abil tipu 5 pöörend $\bar{5} (5'5' \perp p; G\bar{5} = 5''G_1)$. Lõikehulknurga tõelise kuju kõik muud elemendid saadakse juba lihtsamalt, nimelt külgede jälgpunktide K, L, M ja N abil, mis jäävad pööramisele paigale (§ 32).

Tahuka tasandilise lõikejoone tuletamisel võib edukalt rakendada ka uute kujutamiskiirte võtet, kasutades kaldkiiri, mis on paralleelsed lõikava tasandiga.

Näide 4. Tuletada püramiidi $ABCT$ ja tasandi $\alpha (p, e)$ lõikejoone kaksvaade, kasutades sobivalt valitud kaldkiiri (joon. 36-4).

Projekteerime püramiidi ja tasandi põhiekraanile kaldkiirtega, mis on paralleelsed näiteks tasandi α frontaalidega. Siis tasand α projekteerub sirgjooneks α_1 , mis ühtib põhijäljega p . Püramiidi kaldprojektsiooni saa-

miseks leiame tipu T kaldprojektsiooni T_1 (s. o. tippu läbiva kaldkiire põhijälje) ning ühendame selle punktidega A' , B' ja C' , sest tipud A , B ja C , asetsedes põhiekraanil ühtivad seal oma kaldprojektsioonidega. Püramiidi servade kaldprojektsioonide ja tasandi α sirgkujutise α_1 lõikepunktid 1_1 , 2_1 ja 3_1 osutuvad nüüd lõikehulknurga tippude kaldprojektsioonideks. Tõmmates nendest kaldkiirte pealtvaated, leiame tagasikäiguga ka tippude 1 , 2 ja 3 pealtvaated püramiidi vastavate servade pealtvaadetel. Lõikejoone eestvaate leiame sidejoonte abil pealtvaate järgi.

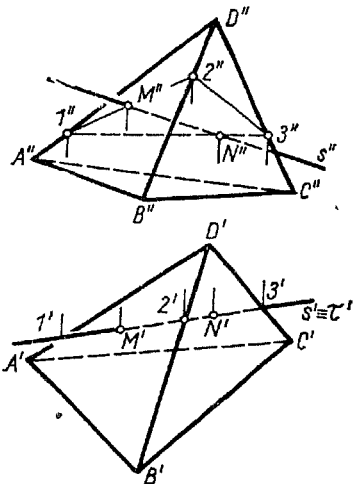
3. Tahuka lõikumine sirgega. Tahuka ja sirgjoone lõikumisel on tarvis leida need punktid, kus sirgjoon lõikab tahuka pinda. Kui on ette teada, millistel tahkudel otsitavad punktid asetsevad, siis võib need leida otseselt sirgjoone ja vastavate tahkude lõikepunktidenä. Kui need tahud aga pole ette teada, siis kasutatakse lõikepunktide leidmiseks järgmist üldist võtet. Läbi antud sirge pannakse abitasand risti ühe

antud ekraaniga, tuletatakse selle tasandi ja tahuka lõikehulknurk ning leitakse punktid, milles sirge lõikab hulknurga külgi; need ongi siis otsitavad lõikepunktid.

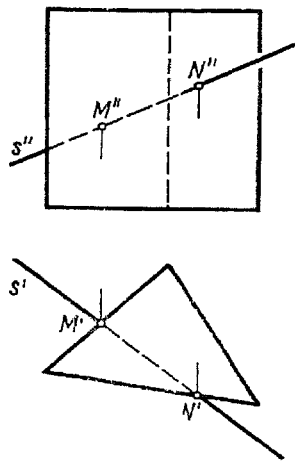
Näide 5. Leida nelitahu $ABCD$ ja sirge s lõikepunktid (joon. 36-5).

Rakendades üldist võtet, paneme läbi antud sirge asitasandi τ risti näiteks põhiekraaniga. Siis tahuka ja tasandi τ lõikejoon projekteerub põhiekraanile sirglõiguks $1'3'$, esiekraanile aga kolmnurgaks $1''2''3''$. Viimase leiame sidejoonte abil lõike pealtvaate järgi. Punktid M'' ja N'' , milles sirge s eestvaade lõikab kolmnurga 123 eestvaadet, on otsitavate lõikepunktide M ja N eestvaadeteks. Pealtvaated M' ja N' leiame sidejoonte abil sirge s pealtvaatelt.

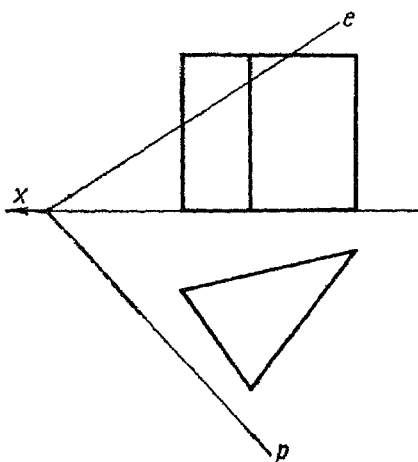
Teeme kindlaks ka sirgjoone s osade nähtavuse. Punkt M on nähtav nii pealt- kui ka eestvaates, sest ta asetseb tahul ABD , mis on mõlemas vaates nähtav. Kontrollides kiivsirgete s ja AD nähtavust pealtvaates, selgub, et sirge s läheb sirgest AD üle (§ 18). Järelikult sirge s vasakpoolne osa kuni punktini M on pealt-



Joonis 36-5



Joonis 36-6



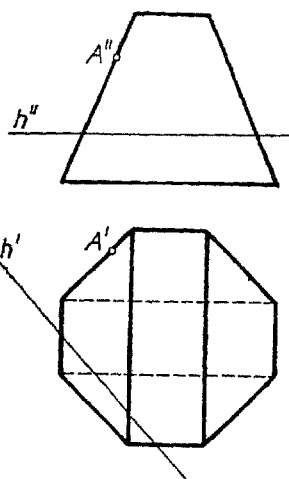
Joonis 36-7

vaates nähtav. Eestvaates läheb sirge s sirge AD eest läbi; järelkult sirge s vasakpoolne osa on ka eestvaates nähtav. Lõik MN , mis asetseb tahuka sees, on arusaadavalt mõlemas vaates varjatud. Punktist N edasi jääb osa sirgest kummaski vaates tahuka varju ning on seetõttu esitatud kriipsjoonega.

Näide 6. Leida prisma ja sirge s lõikepunktid (joon. 36-6).

Sirge s ja prisma lõikepunktid M ja N asetsevad siin ilmselt kahel külgtahtul, mis on risti põhiekraaniga. Seepärast on punktide M ja N pealtvaadeteks sirge s pealtvaate ja tahkude sirgkujutiste lõikepunktid M' ja N' . Lõikepunktide eestvaated M'' ja N'' leiame sidejoonte abil sirge s eestvaatelt. Sirge osade nähtavuse kindlakstegemine ühes ja teises vaates on siin üsna lihtne ega vaja seletusi.

Kirjeldatud konstruktsioon on tõlgendatav ka üldise võtte rakendusena eeldusel, et abitasand läbi sirge on võetud risti esiekraaniga.



Joonis 36-8

KUSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Mis on kahe kujundi lõige?
2. Tuletada prisma ja tasandi $\alpha(p, e)$ lõikejoone kaksvaade ja lõikejoone tõeline kuju (joon. 36-7).
3. Tuletada joonisel 36-8 antud tahuka ja tasapinna $\alpha(A, h)$ lõikejoone kaksvaade ja lõikejoone tõeline kuju.

§ 37. KAHE TAHUKA OMAVAHELINE LÕIKUMINE

Kahe tahuka pindade (tahustike) lõikejoon võib koosneda ühest või mitmest kinnisest murdjoonest. Tema tuletamiseks on põhiliselt kaks teed: 1) leitakse kummagi tahuka servade lõikepunktid teise tahuka tahkudega — nii saadakse kõik lõikejoone tipud; 2) leitakse ühe ja teise tahuka tahkude vajalikud lõikesirged — nii saadakse kõik lõikejoone küljed. Praktikas rakendatakse neid võimalusi harilikult kombineeritult.

Näide 1. Olgu tarvis leida kolmnurkse püstprisma ja püramiidi pindade lõikejoon (joon. 37-1).

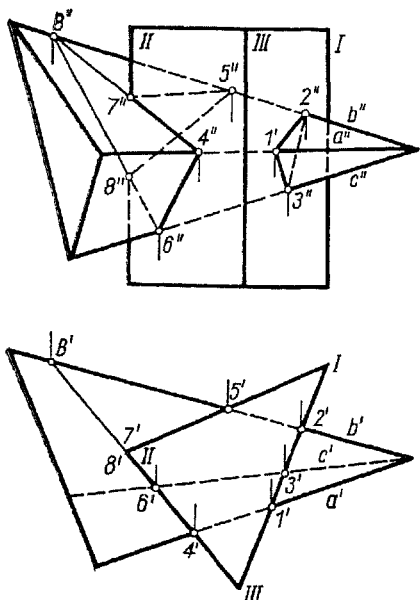
Püramiidi servad a , b ja c lõikavad prisma külgtahke punktides, mille pealtvaated $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ ja $6'$ on kohe leitavad: nad asetsevad prisma külgtahkude sirgkujutistel. Vastavad eestvaated leitakse püramiidi servade eestvaateilt sidejoonte abil. Pealtvaatelt nähtub, et püramiidi ülejäänud kolm serva on üleni väljaspool prisma ega saa seetõttu lõikepunkte anda.

Järgnevalt tuleb leida prisma servade lõikepunktid püramiidi tahkudega. Kaksvaateilt nähtub, et prisma servadest lõikab püramiidi tahkusi ainult külgserv II . Vastavate lõikepunktide 7 ja 8 pealtvaated ühtivad serva II punktikujutisega. Punktide 7 ja 8 eestvaadete saamiseks lõikame püramiidi tasandiga (II , III). Lõikes tekib kolmnurk $B46$, mille külgede $B4$ ja $B6$ eestvaadetel asetsevadki punktid $7''$ ja $8''$. Sellega on kõik

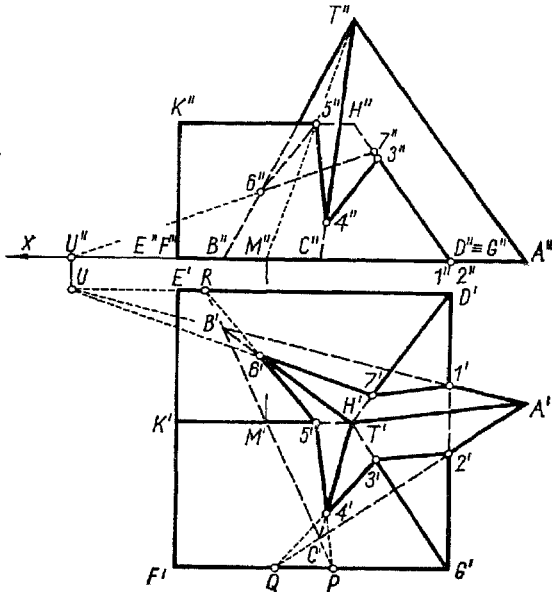
lõikejoone tipud leitud. Tippude ühendamisel sirglõikudega tuleb silmas pidada, et ühendada tohib ainult kahte niisugust punkti, mis asetsevad ühteaegu nii ühe kui ka teise tahuka mingil ühel ja samal tahul. Käesoleval juhtumil ei või ühendada näiteks punkte 6 ja 7 , sest kuigi need asetsevad ühel ja samal prisma tahul, ei asetse nad ühel ja samal püramiidi tahul. Kui ühendaksime punktid 6 ja 7 , saaksime lõigu, mis on püramiidi sees; seetõttu ei saa see lõik olla tahukate pindade lõikejooneks.

Tippude õigel ühendamisel saame antud juhul kaks teineteisest eraldatud hulknurka: kolmnurga 123 ja ruumilise viisnurga 46857 .

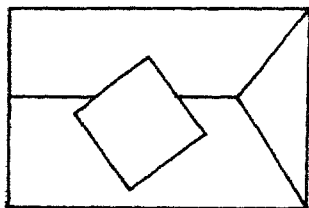
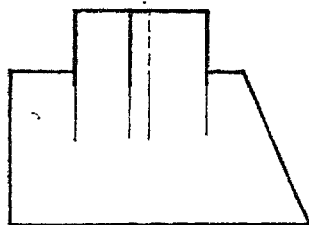
Kahest lõikuvast kehast või pinnast koosneva liitmudeli kujutamisel tuleb kontuurjoonte esitamise seisukohalt silmas pidada järgmisi võimalusi.



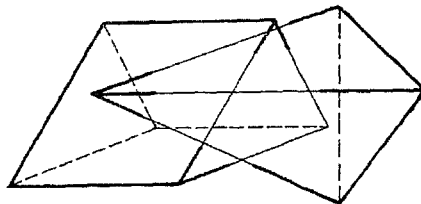
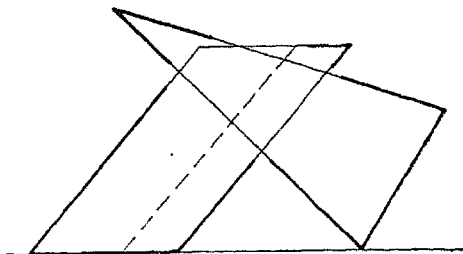
Joonis 37-1



Joonis 37-2



Joonis 37-3



Joonis 37-4

1. Võib eeldada, et liitmudel koosneb kahest kehas, millest üks on terve, teisel aga on väljalõige (ava), millesse esimene keha on sisse lükatud. Niisugusel juhtumil arusaadavalt ei või joonisel esitada väljalõigatud osade kontuure. Sama on kehtiv ka juhtumil, kui liitmudelit vaadeldakse koosnevana kahest pinnast, millest ühel on väljalõige, teine aga on terve.

2. Liitmudelit võib vaadelda ka ühtse massiivse kehana. Sel juhtumil ei esitata joonisel ühtki niisugust kontuuritükki, mis on jäänud liitkeha sisepiirkonda. Sama nõuet tuleb täita ka siis, kui liitmudelit vaadeldakse koosnevana kahest pinnast, kusjuures kummastki pinnast on kõrvaldatud see osa, mis jääb teise sisepiirkonda.

3. Lõpuks võib eeldada ka, et liitmudel koosneb kahest pinnast, millest mõlemad on tervikulised. Sel juhtumil esitatakse joonisel mõlema pinna kõik kontuurid. Liitmudeli seesugusel tõlgendusel pole aga

praktilist tähtsust, sest tegelikkuses taolist olukorda vaevalt esineb.

Kui ülesandest ei selgu, millisele seisukohale tuleb liitmudeli tõlgendamisel asuda, siis teeb joonise valmistaja ise vastava oletuse ning hoolitseb selle eest, et liitmudeli kõik projektsioonid oleksid kooskõlas tehtud oletusega. Joonisel 37-1 näiteks on oletatud, et püramiid on terve, prisma aga on ava, millesse püramiid on sisse lükatud. Selle oletuse kohaselt on prisma külgserva tükk 78 välja lõigatud, mistõttu tema eestvaade on tõmbamata jäetud.

Sageli on lõikuvate tahukate ühed tahud (põhjad) samal tasandil. Niisugusel juhul on lõikumisülesande lahendamine lihtsam, eriti siis, kui tahukate põhjad on ühel ja samal ekraanil, näiteks põhiekraanil.

Näide 2. Tuletada püramiidi $ABCT$ ja katusekujulise hulktahu (prisma) $DEFGKH$ pindade lõikejoon (joon. 37-2; punkt H on juhuslikult sattunud püramiidi kõgussirgele).

Ilma konstruktsioonita leiame lõikejoone tipud 1 ja 2, milles põhiekraanil asetsev prisma serv DG lõikab samal ekraanil asetsevaid püramiidi servi AB ja AC . Edasi leiame näiteks prisma serva KH ja püramiidi külgtahu BCT lõikepunkti 5. Selleks on läbi sirge KH pandud abitasand risti põhiekraaniga ning leitnud tahu BCT ja abitasandi lõikejoon TM . Sirgete KH ja TM eestvaadete lõikepunkt ongi otsitava punkti 5 eestvaade; pealtvaade 5' leitakse sidejoone abil sirgelt $K'H'$. Punkt 5 on tahkude BCT ja $KHFG$ lõikesirge üks punkt, sest ta asetseb mõlemal nimetatud tahul. Lõikesirge teiseks punktiks on tahkude BCT ja $KHFG$ põhijälgede $B'C'$ ja $F'G'$ lõikepunkt P (ühtlasi lõikesirge põhijälg). Ühendades punktid P ja 5', saame otsitava lõikesirge pealtvaate ning ühtlasi järgmise tipu 4 pealtvaate serva CT pealtvaatel. Projektsiooni 4' saab omakorda kasutada tahkude ACT ja $KHFG$ lõikejoone pealtvaate 4'3' tuletamiseks. Selleks leiame nende tahkude põhijälgede $A'C'$ ja $F'G'$ lõikepunkti Q (mis osutub otsitava lõikesirge põhijäljeks) ning ühendame selle punktiga 4'. Sel teel saame tipu 3 pealtvaate serva GH pealtvaatel. Leides analoogiliselt jälgpunktid R ja U , saame tuletada ka lõikejoone tippude 6 ja 7 pealtvaated ($6' \equiv R5' \times B'T'$; $7' \equiv U6' \times D'H'$). Sellega on tahukate pindade lõikejoone pealtvaade tuletatud; vastav eestvaade saadakse sidejoonte abil pealtvaate järgi. Tulemusi võib kontrollida ja täpsustada tahkude lõikejoonte põhijälgede eestvaadete abil: näiteks sirge 6"7" peab minema läbi punkti U'' .

Liitmuldel on sel joonisel erandlikult kujutatud pindmuldelina, mis koosneb mõlemate tahukate terviklikest pindadest.

ULESANDED

1. Tuletada joonisel 37-3 kujutatud prismade lõikejoon.
2. Tuletada prisma ja püramiidi lõikejoon (joon. 37-4).

§ 38. TAHUKATE PINNALAOTUSTE TULETAMINE

Tahuka pinnalaotus on tasandiline kujund, mis on koostatud selle tahuka tahkude tõelistest kujudest, kusjuures on arvestatud ka tahkude omavahelist paigutust. Kolmnurga tõelise kuu saab teatavasti konstrueerida tema kolme külje tõeliste pikkuste järgi. Seda silmas pidades võime mis tahes tahuka pinnalaotuse tuletada järgmisel üldisel viisil:

1) kõik tahud, mis pole kolmnurgad, tükeldame diagonaalidega kolmnurkadeks; siis koosneb kogu tahuka pind ainult kolmnurkadeks;

2) leiame kõigi kolmnurkade külgede tõelised pikkused (soovitav sirkli-võttega);

3) konstrueerime kolmnurkade tõelised kujud üksteise külge selles järjestuses, milles kolmnurgad ise asetsevad tahukal; tulemuse väljajoonestamisel jätame tahkude diagonaalid muidugi ära.

Kui tahuka üks tahk (põhi) asetseb ekraanil, siis võib naabertahkude tõelised kujud leida pööramise teel sellele ekraanile. Märgime, et tahukate pinnalaotuste tuletamisel kaksvaate järgi läheb vaja ainult sirglõigu pikkuse leidmist ja tasandi pööramist. Mõlemad nimetatud operatsioonid on aga eespoolt hästi tutavad.

Vigade vältimiseks pinnalaotusel tuleb tahuka tipud tingimata tähistada ning hoolega jälgida, et tippude

tähised pinnalaotusel vastaksid tähistele tahukal (kaksvaatel).

Praktikas on kõige sagedamini vaja tuletada prismade ja püramiidide pinnalaotusi.

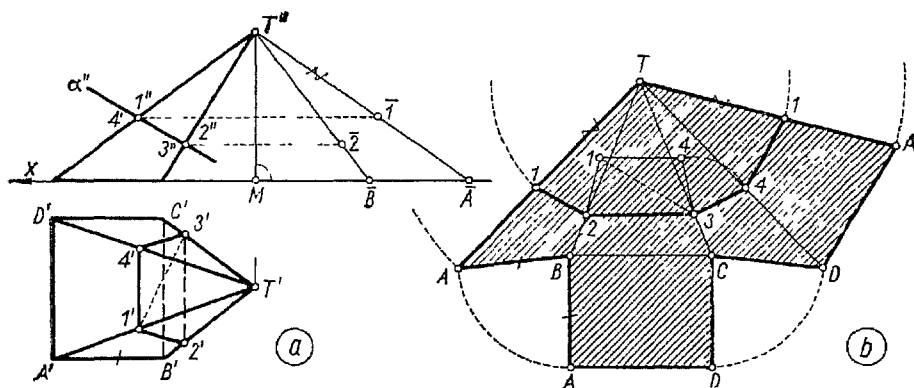
Näide 1. Olgu vaja tuletada joonisel 38-1, a kujutatud kaldpüramiidi täielik pinnalaotus ning püramiidi ja tasapinna α lõikejoone laotusjoon.

Püramiidi põhjaks on ristkülik, mis asetseb põhiekraanil. Seega on meil juba teada ühe tahu (põhja) tõeline kuju ($A'B'C'D'$) ning kõigi külgtahkude ühed küljed. Veel on vaja leida külgservade tõelised pikkused. Kõigi külgservade otspunktide kauguste vahe põhiekraanist on võrdne lõiguga $T''M$. Kandes külgservade pealtvaadete pikkused x-teljele, alustades punktist M ($MA = T'A'$ jne.), saame külgservade tõelisteks pikkusteks hüpoteenuusid $T''A$ ja $T''B$ (sest külgservad on paarikaupa võrdsed). Servade tõeliste pikkuste järgi konstrueerime tahkude tõelised kujud pinnalaotusel ($TA = T''A$; $TB = T''B$; $AB = A'B'$ jne., joon. 38-1, b).

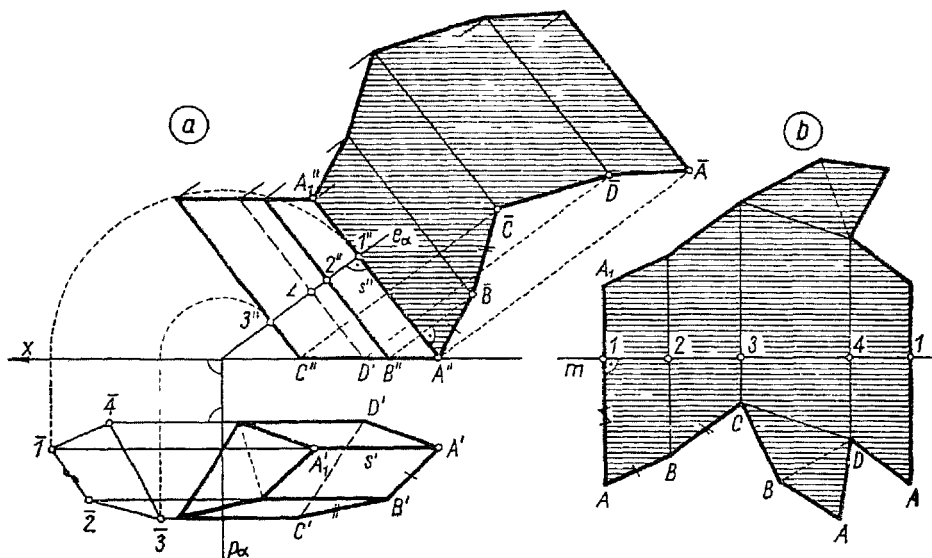
Püramiidi lõikamisel tasandiga $\alpha \perp s_2$ tekib nelinurk 1234, mille laotusjooneks tuleb murdjoon. Selle murdjoone tippude märkimiseks pinnalaotusele on vaja teada külgservade osade tõelisi pikkusi. Viimaste saamiseks on joonisel punktidest $1''$ ja $2''$ tõmmatud x-telje paralleelid kuni lõikumiseni külgservade tõeliste pikkustega. Et sirgjoone lõigud on võrdelised oma eestvaadetega, siis saadud lõigud $\bar{A}1$ ja $\bar{B}2$ ongi külgservade osade tõelisteks pikkusteks. Kandes need pikkused pinnalaotusele ($A1 = \bar{A}1$; $B2 = \bar{B}2$ jne.), saame murdjoone tipud 1, 2 jne. Arusadav, et külgservade ja nende osade tõelised pikkused oleksime võinud leida ka sirklivõtete abil, kuid siis poleks jäänud joonisele jälgi teostatud konstruktsioonidest.

Pinnalaotusele on peene joonega joonestatud ka lõikenelinurga tõeline kuju 1234. Tema küljed võrduvad lõikejoone laotuse vastavate lülidega, diagonaali pikkus aga on leitud kaksvaate järgi sirklivõttega. Tõeline kuju 1234 koos pinnalaotuse alumise osaga moodustab püramiidi tüviosa pinnalaotuse.

Kui prisma külgservad on paralleelsed ühe ekraaniga, siis võib tema pinnalaotuse tuletamiseks peale üld-



Joonis 38-1



Joonis 38-2

võtte rakendada ka erivõtteid: 1) külpinna lahtirullimist nivoopin-nale või 2) pinnalaotuse tuletamist prisma ristlõike abil.

Näide 2. Tuletada joonisel 38-2, a kujutatud nelinurkse kald-prisma pinnalaotus.

Kujutatud asendis on prisma põh-jad horisontaalsed, külgservad aga frontaalsed. Seetõttu projekteeruvad kõik põhjade servad tõelises pikkuses põhiekraanile, külgservad aga tõelises pikkuses esiekraanile. Kül-pinna laotuse saamiseks rullime külpinna lahti frontaalpinna, mis läbib eestvaate järgi äärmist külgserva $AA_1 \equiv s$. Lahtirullimisel jääb siis serv s paigale. Ulejäänud külgservad aga liiguvad paralleelselt ise-endaga nii, et nende otspunktid jäävad tasanditele, mis on risti külgservadega ning seega risti ka esiekraaniga. Järelikult peavad külgservade otspunktid pinnalaotusel (punktid $\bar{B}$, $\bar{C}$ jne.) sattuma nende tasandite sirg-

kujutistele, s. o. sirgetele, mis läbi-vad prisma tippude eestvaateid ning on risti projektsiooniga s'' . Külgservade otspunktid pinnalaotusel märke-takse sirgjoone s'' ristsirgeile põh-jaservade tõeliste pikkuste abil: $A''\bar{B} = A'B'$; $\bar{B}\bar{C} = B'C'$ jne. Külgservad pinnalaotusel tõmmatakse mui-dugi paralleelselt sirgega s'' .

Teisiti võib külpinna laotuse saa-da prisma mingi ristlõike abil. Pris-ma, samuti silindri ristlõike saame lõikamisel tasandiga, mis on risti prisma külgservadega või silindri moodustajatega. Joonisel 38-2, a on näiteks kasutatud ristlõiget 1234, mis tekib lõikamisel tasandiga $\alpha \perp s$ ($e \perp s''$, $p \perp x$). Ristlõike tõeline kuju $\overline{1234}$ on tuletatud tasandi α pööra-misega põhiekraanile. Tõmmates vabalt sirge m (joon. 38-2, b) ning mõõtes sellele ristlõike külgede pikkused $12 = \overline{12}$, $23 = \overline{23}$ jne., saame prisma külgtahkude laiused pinna-laotused. Prisma külgservad pinna-

laotusel läbivad punkte 1, 2, 3, ... ning on risti sirgega m . Mõõtes servjoontele külgservade osade tõelised pikkused ($1A=1''A''$; $1A_1=1''A''_1$ jne.), saame pinnalaotuse tipud A , A_1 , B jne. Joonisel on prisma põhjad pinnalaotusele üle kantud ümberjoonestamise teel pealtvaatelt. Seejuures on kasutatud ka diagonaale, sest nelinurk pole oma külgede pikkustega üheselt määratud.

Kui prisma külgservad pole esi-

ekraaniga paralleelsed, siis on otsustavkohane tuletada tema uus vaade ekraanil ε_3 , mis on paralleelne prisma külgservadega.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Mis on prisma ristlõige?
2. Tuletada joonisel 36-4 kujutatud püramidi pinnalaotus koos lõikejoonega.
3. Tuletada joonisel 36-8 esitatud hulktahu pinnalaotus.

VI. KÕVERJOONED JA KÕVERPINNAD

§ 39. JOONED JA NENDE PROJEKTSIOONILISED OMADUSED

1. **Joonte liigitamine.** Joont võib vaadelda kas liikuva punkti trajektoorina või kahe pinna lõikena. Kujult võib joon olla sirge või kõver. Kõverjooned (ehk lihtsalt kõverad) jagunevad **tasandilisteks** ja **ruumilisteks** kõverjoonteks vastavalt sellele, kas joon asetseb üleni ühel tasandil või mitte. Tasandilisi kõverjooni nimetame lühidalt **tasakõverateks**, ruumilisi kõverjooni — **ruumikõverateks**.

Iga pinna tasandiline lõige, samuti punkti iga trajektoor tasandil osutub **tasakõveraks** (erijuhul sirgeks). Tuntuim **tasakõver** on ringjoon.

Kahe kõverpinna lõikejoon, samuti punkti trajektoor kõverpinnal on üldjuhul **ruumikõver** (erijuhul **tasakõver**, sealhulgas sirge). Tuntuim **ruumikõver** on kruvijoos.

Nii tasandilise kui ka ruumilise joone iga projektsioon tasandil (ekraanil) on tasandiline joon.

Kõverjooni, mille puudub kindel seaduspärasus ja mida saab esitada ainult graafiliselt (näiteks katseand-

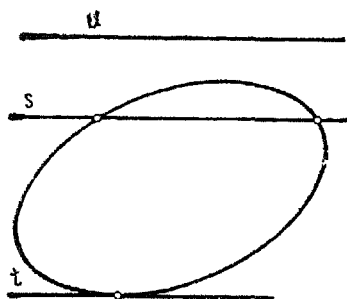
metest saadud kõver) nimetatakse **graafilisteks** kõverateks.

Võrranditega määratavaid jooni nimetatakse **analüütilisteks** joonteks. Viimaseid jaotatakse **algebralisteks** ja **transsendentseteks** vastavalt sellele, kas nad on ristkoordinaadistikus esitatavad algebraliste või transsendentsete võrranditega. Nii näiteks võrrand $y^2 + 2x^2 - 3 = 0$ esitab algebralist kõverjoont, võrrand $y = x \sin x$ aga transsendentset kõverat.

Algebraliste joonte puhul kasutatakse nn. järgu mõistet. Algebralise **tasakõvera järk** on võrdne selle kõverjoone võrrandi astmega. Näiteks võrrandiga $x^2y + 2x - 5 = 0$ määratud joon on kolmandat järku kõver. Geomeetrilises tõlgenduses tähendab algebralise **tasakõvera järk** selle joone ja sirgjoone lõikepunktide arvu. Seejuures lõikepunktide hulka tuleb arvata nii reaalsete kui ka imaginaarsete koordinaatidega punktid.

Algebralise **ruumikõvera järku** määrab selle kõvera ja tasandi lõikepunktide arv.

Ellips näiteks on teist järku joon, sest tal saab olla sirgega ülimalt



Joonis 39-1

kaks ühist punkti. Ellipsi võrrand on teiseastmeline. Selle võrrandi lahendamisel koos sirgjoone võrrandiga saadakse süsteemile kaks lahendit, mis sisuliselt tähendavad joonte lõikepunktide koordinaate. Kui mõlemad lahendid on reaalsed ja teineteisest erinevad, siis sirge lõikab ellipsit (nagu sirge s joonisel 39-1); kui lahendid on reaalsed ja võrdsed, siis sirge osutub ellipsi puutujaks (t); kui aga reaalsed lahendid puuduvad, siis sirge möödub ellipsist (nagu sirge u joonisel 39-1).

Kõrgemas matemaatikas tõestatakse, et kaks algebralist tasakõverat järkudega m ja n võivad lõikuda ülimalt mn punktis. Nii võib näiteks teist järku joon lõigata kolmandat järku joont ülimalt $2 \cdot 3 = 6$ punktis.

Sirgjoon on ainus esimest järku joon.

2. Joonte projektsioonilised omadused. Mis tahes tasakõvera g (joon. 39-2) ja selle tasandil asetseva sirgjoone s igale lõikepunktile ($1, 2, 3$) vastab üksainus nende joonte kujutiste s' ja g' lõikepunkt ($1', 2', 3'$). Sellest järeldame, et algebralise tasakõvera g ja tema kujutise g' järgud on võrdsed. Joonis 39-2 näitab seda asjaolu paralleelprojekteerimisel, kuid see jääb kehtima ka tsent-

raalprojekteerimisel. Erandlikuks osutub juhtum, kus kujutamiskiired asetsevad kõverjoone tasandil. Siis saame joone kujutiseks alati sirgjoone, sõltumata kõvera järgust. Seda erandjuhtumit välja jättes võime öelda, et

(34) algebralise tasakõvera järk on projekteerimise suhtes invariantne,

s. t. sõltumata projekteerimise liigist projekteerub esimest järku joon jälle esimest järku jooneks, teist järku joon — teist järku jooneks jne.

Juhul kui kujutamiskiired asetsevad kõverjoone tasandil, tuleb tema sirgjoonset kujutist mõnikord mõista mitmekordsena (kas üleni või osaliselt). Näiteks kui ringjoone tasand on ekraaniga risti, siis ringjoone ristprojektsiooniks tuleb diameetri pikkune kahekordselt loetav sirglõik.

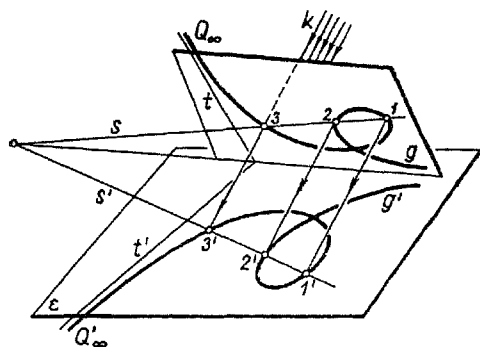
Kõverjoonel võib olla lõpmatusse ulatuvaid harusid ja lõpmata kaugel punkte ehk **ebapunkte**. Viimaste kohta on kehtiv lause:

(35) tasakõvera ebapunktid projekteeruvad paralleelprojekteerimisel selle joone kujutise ebapunktideks.

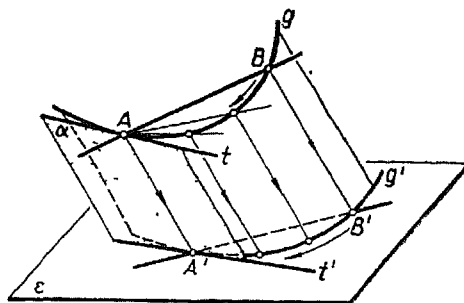
Tõepoolest, kui punkt Q hakkab kõvera g haru mööda eemalduma lõpmatusse (Q_∞) (joon. 39-2), siis ka tema kujutis Q' eemaldub kujutiskõvera g' haru mööda lõpmatusse (Q'_∞).

Olgu tähendatud, et tsentraalprojekteerimisel võib joone ebapunkt projekteeruda kujutisjoone harilikuks punktiks ning ümberpöörduvalt — joone harilik punkt kujutisjoone ebapunktiks.

Kõverjoone g puutujat t punktis A (ehk puutujat puutepunktiga A) defineeritakse kui lõikaja AB piir-



Joonis 39-2



Joonis 39-3

seisu punkti B tõkestamatul lähene-misel punktile A mööda kõverat g (joon. 39-3). Kõverjoone g ja temale punktis A tõmmatud puutuja t projekteerimisel saame kujutiseks tasa-kõvera g' ja temale punktis A' tõm-matud puutuja t' . Tõepoolest — punkti B lähenemisel punktile A mööda kõverat g läheneb ka punkt B' punktile A' mööda kujutiskõverat g' . Seejuures puutujat t projekteeriv tasand α osutub kõverjoont g projek-teeriva pinna puutetasandiks, puute-punkti läbiv kiir AA' aga puutesir-geks.

Üheks erandiks on siin kõver-joone niisugune puutuja, mis on ise kujutamiskiireks — säärase puutuja kujutiseks tuleb punkt. Teise erandi moodustab tasakõver, mille puhul kujutamiskiired ühtivad selle joone tasandiga. Niisuguse kõvera iga puu-tuja kujutis langeb ühte kõvera enda sirgjoonelise kujutisega. Toodud erandeid välja jättes võib öelda, et

- (36) kõverjoone puutuja ja puute-punkt projekteeruvad vasta-valt joone kujutise puutujaks ja puutepunktiks.

Puutepunktiks võib võtta ka tasa-kõvera ebapunkti; seejuures vastav

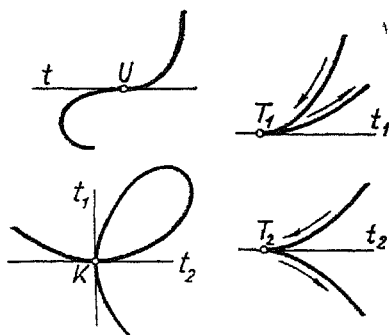
puutuja ei tarvitse olla lõpmata kau-gel täies ulatuses, vaid võib osaliselt tulla ka joonisele. Kui paralleelsete kujutamiskiirte siht säärase puutuja sihiga ei ühti, siis projekteeruvad kõvera ebapunkt ja puutuja kujutis-kõvera ebapunktiks ja puutujaks. Nii näiteks joonisel 39-2 saadakse kõ-vera g ebapunkti Q_∞ kujutiseks kõvera g' ebapunkt Q'_∞ ning punk-tis Q_∞ tõmmatud puutuja t kujuti-seks kõvera g' puutuja t' punktis Q'_∞ .

3. Joonte iseärased punktid. Pea-le ebapunktide võib kõrgemat järku joontel olla veel mitmesuguseid ise-äraseid punkte*, mida projekteerimi-sel tuleb silmas pidada; nendest kõi-ge olulisemad on järgmised (joon. 39-4).

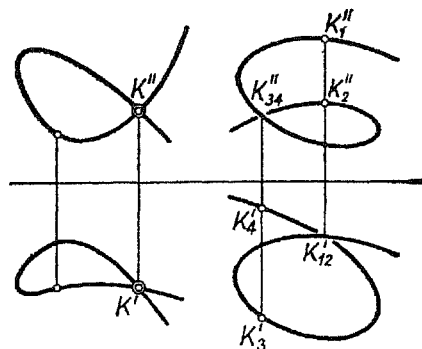
Käänupunkt (U) — see on punkt, millest läbiminekul kõver muutub kas nõgusast kumeraks või ümber-pöördukt. Puutuja (t) käänupunkt on ühtlasi kõvera lõikajaks.

Sõlmpunkt (K) on punkt, milles kõver lõikab iseennast. Seetõttu on

* Lähemalt iseärase punktide kohta vt. U. Lumiste Diferentsiaalgeomeetria. Tallinn, 1963, lk. 34.



Joonis 39-4



Joonis 39-5

kõveral selles punktis kaks erinevat puutujat (t_1 ja t_2).

Tagasipöördepunkt (T_1 , T_2) on punkt, kus kõver muudab oma suuna vastandsuunaliseks, s. t. liikumisel mööda kõverat tuleb seal jääda seisma ning pöörata tagasi. Tagasipöördepunktis on kõvera mõlemal harul ühine puutuja. Seejuures võivad harud olla kas mõlemad samal pool ühist puutujat, nagu puutuja t_1 puhul, või teine teisel pool, nagu puutuja t_2 korral.

Tasakõvera iseärane punkt projekteerub üldiselt kujutisjoone samanimeliseks iseäraseks punktiks; tasakõvera kõik harilikud punktid aga projekteeruvad jälle harilikeks punktideks.

Teistsuguseid tulemusi võib saada ruumikõverate projekteerimisel. Joonisel 39-5 on kaksvaates kujutatud kaks ruumikõverat. Esimesel leidub ruumis sõlmpunkt K , mis projekteerub sõlmpunktiks joone kummalegi vaatele (punktid K' ja K''). Teisel ruumikõveral endal iseäraseid punkte pole, kuid ta kummalgi kujutiskõveral on sõlmpunkt (punktid K'_{12} ja K''_{34}). Viimased osutuvad kõvera harilike, kuid konkureerivate punktide K_1 ja K_2 ning K_3 ja K_4 kujutis-

teks (§ 18). Nii selgub, et ruumikõveral iseärase punkti olemasolu väljaselgitamiseks on vaja hoolega võrrelda joone mituvaate üksikuid projektisioone.

Kui ruumikõvera puutuja on ühtlasi kujutamiskiireks, siis ta punkt-kujutis osutub kujutiskõvera tagasipöördepunktiks või käänupunktiks.

Üldiselt tuleb ruumikõverate projekteerimisel silmas pidada järgmisi tõsiasju:

- 1) ruumikõvera iga punkt võib projekteeruda kujutiskõvera mingiks iseäraseks punktiks;
- 2) ruumikõvera kujutiseks ei saa tulla sirge.

KÜSIMUSED

1. Mille poolest erineb tasandiline kõver ruumilisest kõverast?
2. Mis on algebralise joone järk?
3. Kas algebralise tasakõvera järk võib projekteerimisel muutuda?
4. Kas ruumikõver võib projekteeruda sirgeks?

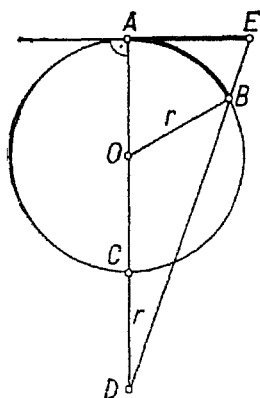
§ 40. KÕVERJOONE LIGIKAUDNE SIRGESTAMINE

1. Ringjoone ligikaudne sirgestamine. Kõverjoone kaare graafilise sirgestamise all mõeldakse selle kaare pikkuse esitamist sirglõiguna. Praktikas omab erilist tähtsust ringjoone kaare sirgestamine. Täppiskonstruktsiooni ringjoone kaare sirgestamiseks joonlaua ja sirkli abil olla ei saa. Küll on aga olemas häid lähiskonstruktsioone; neist üks lihtsam on esitatud joonisel 40-1. Sirgestatava ringjoone kaare AB otspunktist A tõmmatakse ringjoone puutuja ja diameeter AC , mida pikendatakse raadiuse võrra ($CD=r$). Punktist D tõmmatakse sirge läbi kaare teise otspunkti B . Lõigaku sirge DB puutujat punktis E ; siis lõik AE annabki kaare AB sirgestatud pikkuse. Joonestamisel võib seda lähiskonstruktsiooni kasutada kaarte sirgestamiseks, mis pole suuremad kui 60° (viga jääb siis veel paratamatute joonestusvigade piiresse). Kaar suurusega üle 60° tuleb jagada võrdseteks osadeks nii, et osad ei ületa 60° ; osakaar sirgestatakse ja tulemus mitmekordistatakse. Näiteks ringjoone ümbermõõdu saamiseks on otstarbekohane sirgestada

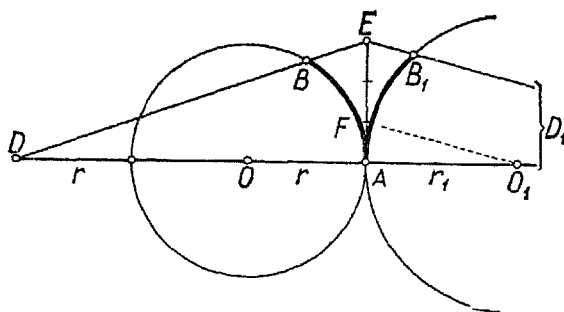
$\frac{1}{6}$ ringjoonest, s. o. 60° -line kaar ning tulemus kuuekordistada.

Kirjeldatud konstruktsioon on pööratav, s. t. ta võimaldab ka antud sirglõiku AE painutada antud raadiusega ringjoone kaareks AB . Sel puhul lõikab sirge ED ringjoont otsitavas punktis B . Nii selgub, et seda konstruktsiooni kord päripidi, kord vastupidi rakendades saab ühe ringjoone kaare üle kanda teisele, raadiused erinevale ringjoonele (joon. 40-2). Kui punkt D_1 pole seejuures paberilehe piiratud tõttu leitav ($AD_1=3r_1$), siis jaotame antud kaare AB sirgestatud pikkuse AE kolmeks võrdseks osaks, saades sellega lõigul AE punkti F nii, et $AF=(1/3)AE$. Nüüd tõmbame läbi punkti E sirge paralleelselt sirgega FO_1 . See paralleelsirge suundubki siis punkti D_1 (miks?) ja lõikab ringjoont (O_1, r_1) punktis B_1 nii, et kaar AB_1 tuleb pikkuselt võrdne kaarega AB (sest neil on ühine sirgestatud pikkus AE).

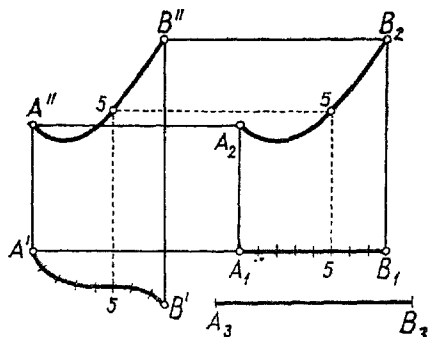
2. Mis tahes kõvera ligikaudne sirgestamine. Mis tahes tasandilist või ruumilist kõverjoont saab ligikaudselt sirgestada järgmiselt. Mõõtesirkli samm seatakse nii väikeseks, et sellega kõverat mööda «käies» kõõlud ja neile vastavad kaared ühe



Joonis 40-1



Joonis 40-2



Joonis 40-3

sammu piirides enam tunduvalt ei erine. Mida kõveram on joon, seda väiksem tuleb võtta sirkli samm. Loendame sirkli sammud sirgestatava kaare ulatuses ja teeme samal arvul samme sirgjoonel. Nii saamegi sirglõigu, mis pikkuselt ligikaudu võrdub sirgestatava kaarega.

Kui antud joonel on kongruentseid osi (nagu ellipsil, mida teljed jaotavad neljaks võrdseks veerandiks), siis on kirjeldatud peentöö vajalik ainult ühe osa ulatuses.

Et kõõl on temale vastavast kaarest pisut lühem, siis selle võtte abil saadav kaare pikkus osutub mõnevõrra väiksemaks kaare tõelisest pikkusest.

Samasugust võtet võib rakendada ka antud kõvera ülekandmisel teisele kõverale. Sel puhul vead üldiselt kompenseeruvad ja seda paremini, mida vähem antud joonte kõverused erinevad.

Konkreetselt kõverjoone pikkust saab hea eduga mõõta ka painduva mõõtelindi või nõõri abil, mida järgult kõvera järgi seatakse.

Lõpuks mainime veel kurvimeetrit kui kartograafide spetsiaalset instrumenti kõverjoonte pikkuste mõõtmiseks gloobusel või maakaardil. Kur-

vimeetri olulisteks osadeks on ham-buline rattake ja selle pöörete loendaja. Veeretades rattakest mööda kõverat, saab näitajalt kohe lugeda kaarepikkusi.

Erikäsitlust nõuab kaksvaatega antud ruumikõvera graafiline sirgestamine. Olgu antud mingi ruumikõvera kaare AB projektsioonid (joon. 40-3). Sirgestame ühe nendest, näiteks pealtvaate, kasutades mõõtmist väikese sirkლისammuga. Nii saame rõhtsa lõigu A₁B₁, mis sisuliselt tähendab kõverjoone kaare põhi-kiirte pinna (silindrilise pinna) ristlõike pikkust. Jaotuspunktidest tõmbame vertikaalsed sirged, millele kanname vastavate punktide kõrgused eestvaatelt (joonisel on näidatud vajalikud jooned ainult jaotuspunkti 5 jaoks). Püstitõikude otspunktide sujuval ühendamisel saame tasakõvera kaare A₂B₂. Viimast omakorda eespool kirjeldatud viisil sirgestades, saame lõpuks ruumikõvera kaare pikkuse lõiguna A₃B₃. Viimasel sirgestamisel tehtud tükeldust pole joonisel näidatud.

§ 41. TEIST JÄRKU JOONED JA NENDE PROJEKTSIOONILISED OMADUSED

Teist järku joone üldvõrrand tasan-dilises ristkoordinaadistikus on

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3)$$

Kui jätta kõrvale erijuhtumid, kus joon on imaginaarne või lagub sirgete paariks, saab võrrandit (3) koordinaatide teisendamisega lihtsustada nii, et ta võtab ühe järgmistest kujudest:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5)$$

$$y^2 = 2px. \quad (6)$$

Võrranditele (4), (5) ja (6) vastavad kõverjooned on **ellips**, **hüperbool** ja **parabool**. Neid jooni defineeritakse harilikult järgmiselt:

(37) **ellips** on tasandiline joon, mille igast punktist kuni joone tasandi kahe kindla punktini (joonte fookusteni) mõõdetud kauguste summa on jääv;

(38) **hüperbool** on tasandiline joon, mille igast punktist kuni joone tasandi kahe kindla punktini (joone fookusteni) mõõdetud kauguste vahe on jääv;

(39) **parabool** on tasandiline joon, mille iga punkti kaugused sama tasandi kindla punktini (fookuseni) ja kindla sirgeni (juhtjooneni) on võrdsed.

Ellips, mille poolteljed on võrdsed ($a=b$), osutub ringjooneks; ringjoone võrrand on

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (4')$$

Hüperbooli, mille poolteljed on võrdsed ($a=b$), nimetatakse risthüperbooliks; risthüperbooli võrrand on

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (5')$$

Hüperbooli iseärasuseks on tema **asümptoodid**, s. o. sirged, millele hüperbooli harud piiramatult lähevad. Hüperbooli asümptootide võib vaadelda ka kui puutujaid ebapunktides, milliseid hüperboolil on kaks. Risthüperbooli asümptoodid on teineteisega risti.

Paraboolil on üksainus ebapunkt. Ellipsil ebapunkte pole.

Paragrahvis 39 selgus, et algebraalse tasakõvera järk projekteerimisel ei muutu ning et paralleelprojekteerimisel tasakõvera ebapunktid projekteeruvad kujutisjoone ebapunktideks. Nii näiteks kahe ebapunktiga teist järku joone (hüperbooli) paralleelprojektsiooniks saame jälle kahe ebapunktiga teist järku joone, s. o. hüperbooli. Nii selgub, et kui kiired pole joone tasandiga paralleelsed, siis

(40) **teist järku joone paralleelprojektsiooniks on samanimeline teist järku joon**,

s. t. ellips projekteerub ellipsiks, hüperbool hüperbooliks ja parabool parabooliks.

Hüperbooli asümptoodid kui puutujad ebapunktides projekteeruvad kujutisjoone asümptootideks.

Ellipsil ja hüperboolil on kaks teineteisega ristuvat sümmeetriatelge, mis lõikuvad joone keskpunktis. Paraboolil on üksainus sümmeetriatelg.

Teist järku joone **diameeter** on kõõl, mis läbib keskpunkti. Kaks diameetrit, millest kumbki poolitab teisega paralleelseid kõõle, on teineteise **kaasdiameetrid**. Et kaasdiameetrite selles definitsioonis mainitud omadused — sirgete paralleelsus ja lõigu poolitumine — on paralleelprojekteerimise suhtes invariantid, siis järeldame, et

(41) **paralleelprojekteerimisel teist järku joone kaasdiameetrid projekteeruvad kujutisjoone kaasdiameetriteks**.

Teist järku joone teljed paralleelprojekteerimisel üldiselt ei projekteeru kujutisjoone telgedeks. Telgede telgedeks projekteerumise tingimus on analoogiline täisnurga täisnurgaks projekteerumise tingimu-

sega, sest telgedevaheline nurk on täisnurk. Ristprojekteerimise puhul võime lause (18) põhjal öelda, et

- (42) kui teist järku joone üks telg on ekraaniga paralleelne, siis telgede ristprojektsioonid osutuvad kujutisjoone telgedeks.

KÜSIMUSED

1. Kuidas defineeritakse: a) ellipsit, b) parabooli, c) hüperbooli?
2. Kas ellips saab projekteeruda paralleelprojekteerimisel parabooliks?
3. Mitu ebapunkti on: a) paraboolil, b) hüperboolil, c) ellipsil?

§ 42. ELLIPS

1. Ellips ringjoone paralleelprojektsioonina. Ellips ja ringjoon (kui ellipsi erijuhtum) on rakendustes kõige sagedamini esinevad kõverjooned. Projekteerimise seisukohalt võib ellipsit vaadelda ringjoone paralleelprojektsioonina (joon. 42-1). Neil juhtudel, kus ringjoone tasand on paralleelne ekraaniga, tuleb ringjoone kujutiseks jälle ringjoon. Seega ringjoon on ellipsi üheks äärmiseks vormiks. Kui kiired on ringi tasandiga paralleelsed, siis saadakse ringjoone kujutiseks kahekordne sirglõik; säärane sirglõik on ellipsi teiseks äärmiseks vormiks.

Rakendades paralleelprojekteerimise kohta kehtivaid lauseid ringjoone puhul, saame tuletada terve rea ellipsi kui ringjoone kujutise omadusi.

Ellipsil on keskpunkt, s. t. punkt, mis poolitab kõiki seda punkti läbivaid ellipsi kõõle. Tõepoolest, ringi keskpunkt poolitab kõiki teda läbivaid diameetreid. Järelikult peab

ka ringi keskpunkti projektsioon poolitama kõiki ringi diameetrite projektsioone, s. o. ellipsi diameetreid. Seega ringi keskpunkti O paralleelprojektsioon O' osutubki ellipsi keskpunktiks (joon. 42-1).

Ringi diameetreid võib korraldada paarideks nii, et igale antud diameetritele vastab tema ristdiameeter. Igal niisugusel paaril on see omadus, et kumbki diameeter poolitab teisega paralleelsed kõõlud. Nii näiteks diameeter AC poolitab kõõlu KL , mis on paralleelne diameetriga BD , samuti diameeter BD poolitab kõõlu KM , mis on paralleelne diameetriga AC . See ringi ristdiameetrite omadus on paralleelprojekteerimise suhtes invariantne, sest ta väljendub invariantide — sirgete paralleelsuse ja lõigu jaotussuhte kaudu. Järelikult ringi ristdiameetritest saadakse paralleelprojekteerimisel paar ellipsi kaasdiameetreid, millel on sama omadus, s. t. kumbki neist poolitab teisega paralleelsed kõõlud. Näiteks kaasdiameetritest $A'C'$ ja $B'D'$ diameeter $A'C'$ poolitab kõõlu $K'L'$ || $B'D'$. Järelikult

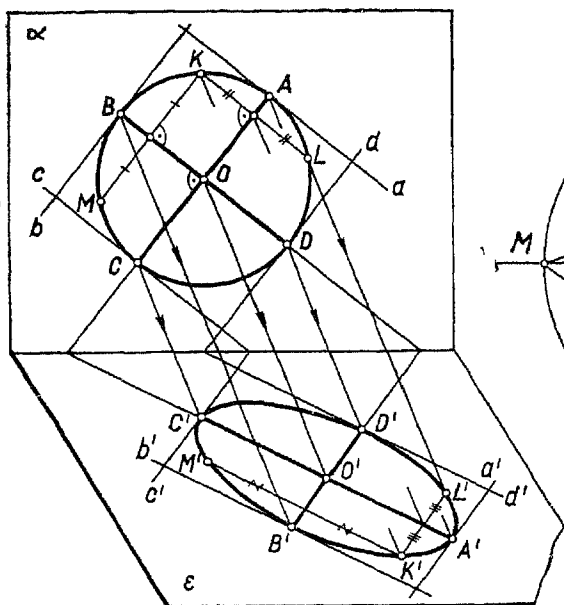
- (43) ringjoone iga kaks ristuvat diameetrit projekteeruvad paralleelprojekteerimisel ellipsi kaasdiameetriteks.

See lause on eelmises paragrahvis sõnastatud lause (41) erijuhtum.

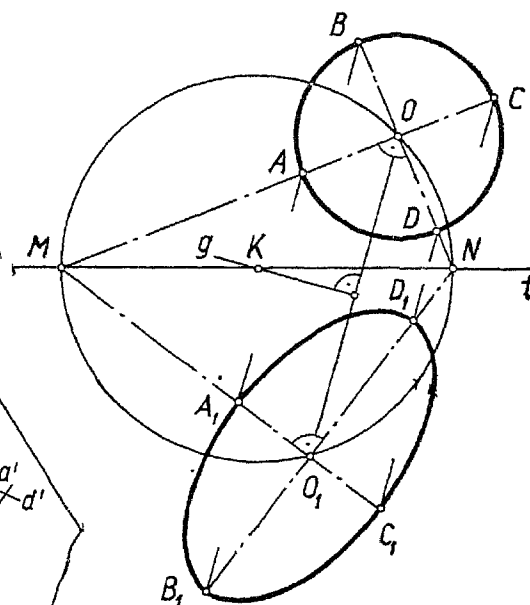
Täisnurga paralleelprojektsioon pole üldiselt täisnurk, järelikult ellipsi kaasdiameetrid pole üldiselt teineteisega risti. Saab tõestada, et ellipsil on ka paar ristuvaid kaasdiameetreid*; viimaseid nimetatakse ellipsi telgedeks.

Ringjoone ristuvate diameetrite otspunktidest tõmmatud puutujad

* vt. näiteks O. Rünk, N. Paluver. Kujutatav geomeetria, Tln., 1961, lk. 52.



Joonis 42-1



Joonis 42-2

moodustavad puuteruudu, mille küljed on diameetritega paralleelsed ja poolitatakse puutepunktide poolt (puutujad a, b, c ja d joonisel 42-1). Selle puuteruudu paralleelprojeksiooniks tuleb ellipsi puuteparallelogramm, mille vastasküljed on kaadiameetritega paralleelsed ja poolitatakse puutepunktide poolt (ellipsi puutujad a', b', c' ja d'). Niisugust puuteparallelogrammi on sobiv kasutada «raamina» ellipsi joonestamisel.

Esitame järgnevalt mõned sagedamini kasutatavad ellipsi konstruktsioonid.

2. Ellips ringjoone afiinse teisendina. Paragrahv 8 põhjal on teada, et tasandilise kujundi kaks paralleelprojeksiooni ekraanil on teineteise afiinsed teisendid kujundi tasandi jälje suhtes. Kuna joonisepinnal antud ringjoont võib alati vaadelda

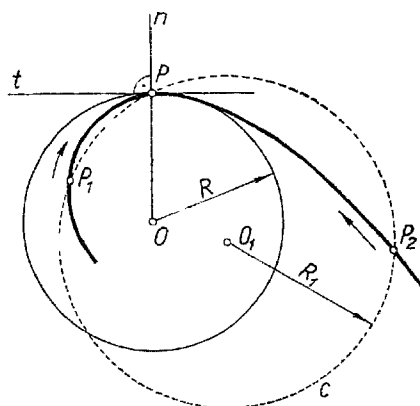
mingi ruumis asetseva ringjoone paralleelprojeksioonina, siis ruumis asetseva ringjoone mis tahes teine paralleelprojeksioon — üldjuhul ellips — osutub antud ringjoone afiinseks teisendiks.

Olgu joonisepinnal antud ringjoon keskpunktiga O , afiinsuse telg t ja punkti O teisend O_1 (joonis 42-2); nõutakse selle ringjoone afiinset teisendit (ellipsit). Ülesande lahendamiseks võiks võtta ringjoonel rea punkte ja leida § 8, p. 3 põhjal nende afiinsed teisendid, mis osutuksid otsitava ellipsi punktideks. Joonestustehnilistel kaalutlustel on aga tähtis teada ka ellipsi telgi, sest ellips on oma telgede suhtes sümmeetriline.

Ellipsi telgede saamiseks tuleb leida antud ringis niisugune paar ristdiameetreid, mille teisendid olek-

Ellipsi iga leitud punkti võib peegeldada niihästi telgede kui ka keskpunkti suhtes, sest ellipsi teljed on ühtlasi tema sümmeetriatelgedeks, keskpunkt aga sümmeetriakeskpunktiks.

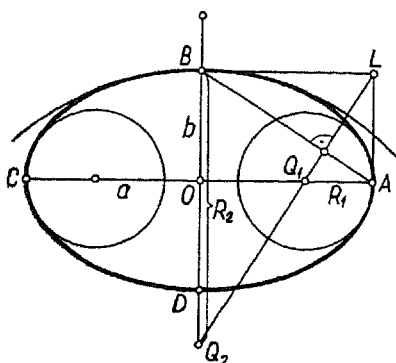
Joonestame ringjoone, mille diameetriks on üks antud kaasdiameetreist, näiteks $A'C'$, ning tõmbame ringjoone teise diameetri $BD \perp A'C'$. Kujutleme nüüd, et see ringjoon on pööratud mingi nurga võrra joonise-pinnalt ruumi ümber diameetri $A'C'$. Siis võime konstrueeritavat ellipsit pidada ruumipööratud ringjoone kaldprojektsiooniks ning ellipsi kaasdiameetreid $A'C'$ ja $B'D'$ järelikult ruumipööratud ringjoone ristdiameetrite $AC \equiv A'C'$ ja BD kaldprojektsioonideks. Sirge $A'C' \equiv j$ on sel juhul ringi tasandi jälg joonise-pinnal. Et paralleelsetel sirgetel on paralleelsed kaldprojektsioonid, siis ringjoone kõõlud, mis on paralleelsed diameetriga BD , projekteeruvad ellipsi kõõludeks, mis on paralleelsed kaasdiameetriga $B'D'$. Seejuures kõigil nimetatud kõõludel on üks ja seesama moondetegur, mis on võrdne diameetri BD moondeteguriga $m = B'D'/BD$ (§ 7, lause 10). Neid asjaolusid arvestades saame ellipsi



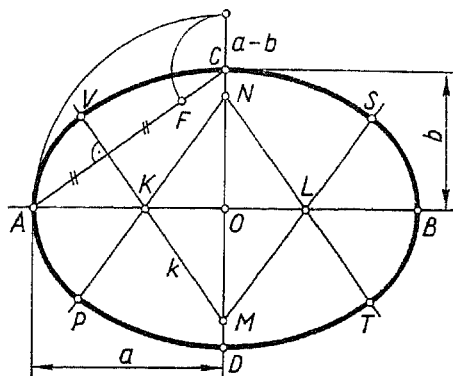
punkte leida järgmiselt. Tõmbame ringjoone mingi kõõlu $MN \parallel BD$ ning joonestame tema kaldprojektsiooni $M'N' \parallel B'D'$ läbi kõõlu jälgpunkti K . Moondeteguri $m = B'D'/BD$ arvestamiseks tõmbame läbi punktide M ja N sirged paralleelselt sirgega BB' kuni lõikumiseni projektsiooniga $M'N'$. Saadud lõikepunktid M' ja N' ongi ellipsi punktid, mis vastavad ringjoone punktidele M ja N . Niisiis ellipsi punktide saamiseks tuleb vaid joonestada sarnaseid kolmnurki, mille küljed on paralleelsed kolmnurga $OB'B'$ vastavate külgedega.

Joonisel on konstrueeritud ka ellipsi puutuja punktis M' . Selleks on tõmmatud ringjoone puutuja $MJ \perp MO$ ning märgitud tema jälgpunkt J jälgsirgel j . Et punkt J ühtib oma kaldprojektsiooniga, siis sirge JM' ongi ellipsi puutuja (§ 39, lause 36).

8*



Joonis 42-6



Joonis 42-7

malust pakuvad kõverusringjooned ellipsi **haripunktides**, s. o. telgede otspunktides.

Selgitame kõigepealt kõverusringjoone ja kõveruse mõisteid. Võtame kõverjoonel kolm punkti P , P_1 ja P_2 (joon. 42-5). Need punktid määravad ringjoone c (O_1 , R_1). Lastes punktidel P_1 ja P_2 läheneda punktile P , muutuvad pidevalt ka ringjoone c raadius R_1 ja tsenter O_1 .

Kõverjoone kolme punkti P , P_1 ja P_2 läbiva ringjoone piirseisu punktide P_1 ja P_2 tõkestamatul lähenemisel kõverat mööda punktile P nimetatakse **kõverusringjooneks** kõvera punktis P . Kõverusringjoone tsentrit O ja raadiust R nimetatakse vastavalt **kõverustsentriks** ja **kõverusraadiuseks** kõvera punktis P , kõverusraadiuse pöördväärtust aga kõverjoone **kõveruseks** k punktis P ($k=1/R$).

Kõverusringjoonel ja kõveral on puutepunktis P ühine puutuja t ja ühine normaal $n \perp t$.

Ringjoonel raadiusega R on igas tema punktis üks ja sama kõverus $k=1/R$; sirgjoone puhul aga $k=0$, sest sirgjoont võib vaadelda lõpmata suure raadiusega ringjoonena.

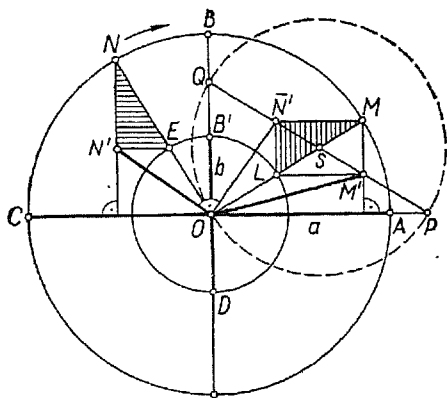
Saab tõestada*, et ellipsi kõverusraadiused haripunktides A ja B on vastavalt

$$R_1 = \frac{b^2}{a} \text{ ja } R_2 = \frac{a^2}{b},$$

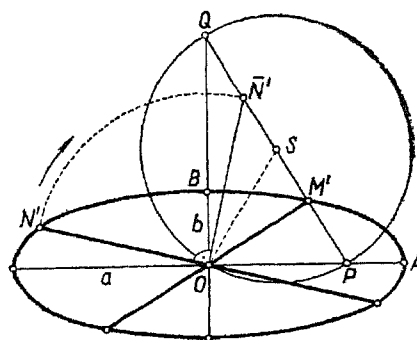
kus a ja b on ellipsi poolteljed (joon. 42-6). Vastavad kõverusringjoonte tsentrid Q_1 ja Q_2 leiame järgmiselt. Tõmbame haripunktide A ja B sirged paralleelselt telgedega ning nende lõikepunktist L sirge risti lõiguga AB . See ristsirge lõikab ellipsi telgsirgeid otsitavates kõveruskeskpunktides Q_1 ja Q_2 , kusjuures $AQ_1=R_1$ ja $BQ_2=R_2$. Tõestuseks tarvitseb lugejal vaid kirjutada välja sarnaste kolmnurkade AQ_1L , OBA ja BLQ_2 vastavate kaatetite suhted.

Ellipsi saamiseks joonestame haripunktide ümbruses paraja pikkusega kõverusringjoonte kaared raadiustega R_1 ja R_2 , ellipsi vahepealsed tükid kaarte vahel aga tõmbame lekaali abil. Joonestamisel tuleb silmas pidada, et kirjeldatud konstruktsioon on lähiskonstruktsioon; kõverusring-

* Vt. näiteks O. Rünk, N. Paluver. Kujutav geomeetria, Tln., 1961, lk. 145.



Joonis 42-8



Joonis 42-9

joonte kaared haripunktide ümbruses ainult lähendavad ellipsi kaari, kuid ei ühti nendega. Väiksemate kõverusringjoonte kaared jäävad ellipsi sisse, suuremate omad aga ellipsist väljapoole.

6. Ellipsit lähendav ovaal. Ellipseid võib asendada ka ovaalidega, s. o. kõveratega, mis koosnevad sujuvalt ühendatud ringikaartest. Ühe lihtsama ellipsit asendava ovaali konstruktsioon on järgmine.

Olgu antud ellipsi teljed AB ja CD , siis $OA=a$ ja $OC=b$ (joon. 42-7). Tõmbame kõõlu AC ning eraldame sellest lõigu CF , mis võrdub pooltelgede vahega $a-b$. Edasi konstrueerime jääklõigu AF keskrist-sirge k ; lõigaku see telgsirgeid punktides K ja M . Viimased koos telgede suhtes sümmeetriliste punktidega L ja N võtamegi ringjoonte tsentriteks. Tõmmates nende ümber ringikaared raadiustega KA ja MC , saame ovaali, mis küllalt hästi lähendab ellipsit. Ringikaared liituvad sujuvalt tsentrite sirgeil MK , NK , LM ja LN punktides V , P , S ja T .

7. Ellipsi telgede leidmine kaasdiameetrite järgi. Ringjoonest või ellipsist paralleelprojekteerimisel tekkiva kujutiselipsi määramis-andmeiks saadakse üldjuhul kaasdiameetrite paar. Kui kaasdiameetrite järgi on vaja ellips täpselt välja joonestada, siis on soovitatav enne leida ellipsi teljed.

Telgede leidmine antud kaasdiameetrite järgi on võimalik joonisel 42-8 näidatud konstruktsioonide alusel. Lähtume antud poolkaasdiameetritest OM' ja ON' , mis on konstrueeritud joonise 42-3 eeskujul kui mingite ristraadiuste OM ja ON ristprojektsioonid. Pole raske veenduda, et seejuures tekkinud täisnurksed kolmnurgad $MM'L$ ja $EN'N$ on võrdsed. Pöörates nüüd kolmnurka ONN' joonisepinnal täisnurga võrra päripäeva ümber tipu O , läheb ta kohale OMN' nii, et viirutatud täisnurkne kolmnurk $LN'M$ koos võrdse kolmnurgaga $MM'L$ moodustab ristküliku $MN'LM'$; selle ristküliku küljed on ellipsi telgedega paralleelsed. Olgu S saadud ristküliku diagonaalide lõikepunkt. Piken-dame diagonaali $M'N'$ kuni lõikumiseni ellipsi telgsirgetega punktides P ja Q . Jooniselt on nüüd kerge välja lugeda, et $SO=SP=SQ$, $PM'=OL=b$ ja $QM'=OM=a$. Nii selgub, et punktid O , P ja Q asetsevad ringjoonel (S , SO) ning et selle ringjoone diameeter PQ on jääva pikkusega $a+b$; seejuures alati $PM'=b$ ja $QM'=a$. Järelikult seda ringjoont saabki kasutada ellipsi telgede leidmisel antud kaasdiameetrite järgi.

Konstruktsiooni käiku jälgime joonisel 42-9, kus OM' ja ON' on antud poolkaas-

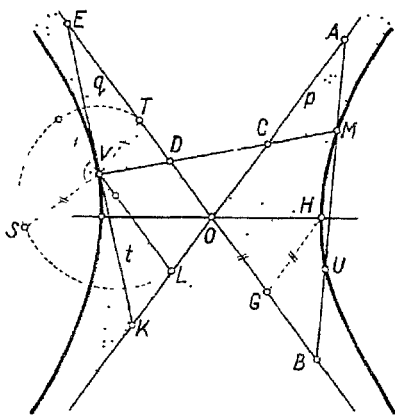
diameetrid. Pöörates ühte neist, näiteks lõiku ON' , täisnurga võrra ümber punkti O , saame pöörendi $\overline{ON'}$. Tõmbame sirge $M'N'$ ning leiame lõigu $M'N'$ keskpunktina vajaliku tsentri S . Ringjoon (S, OS) lõikab sirget $M'N'$ punktides P ja Q ; neid läbivadki ellipsi otsitavad telgsirged. Uhtlasi on nüüd käes ka ellipsi pooltelgede pikkused: $b=PM'$ ja $a=QM'$. Kandes need pikkused tsentrist O alates telgsirgetele nii, et lühem telg läheb kaasdiameetrite vahelisse nürinurka, saame lõpuks ka ellipsi haripunktid B ja A ($OB=b=PM'$ ja $OA=a=QM'$).

§ 43. HÜPERBOOLI JA PARABOOLI KONSTRUKTSIOONE

Hüperbooli määramisandmetena kasutatakse harilikult kas tema pooltelgi (a ja b) või asümptootide ühte punkti. Et teljed uldselt ei projekteeru telgedeks, asümptoodid aga projekteeruvad alati asümptootideks, siis tuleb kujutavas geomeetrias eelistada määramisandmetena just asümptootide koos hüperbooli ühe punktiga. Nende andmete järgi saab hüperbooli teisi punkte leida järgmise lause alusel, mis tõestatakse analüütilises geomeetrias:

hüperbooli lõikaja lõigud, mis asetsevad hüperbooli ja tema asümptootide vahelises piirkonnas, on võrdsed.

Lauses nimetatud piirkond on joonisel 43-1 täpitatud.



Joonis 43-1

Olgu p ja q hüperbooli antud asümptoodid ja M üks hüperbooli punkt (joon. 43-1). Hüperbooli uue punkti U saamiseks lõikajal, mis läbib punkti M , on vaja märkida selle lõikaja ja asümptootide lõikepunktid — olgu need A ja B — ning märkida siis punkt U nii, et $BU=AM$. Et saada punkti V hüperbooli teisel harul, leiame asümptootidel punktid D ja C ning nende järgi punkti V nii, et $DV=CM$.

Et lõikajast tekib lõikepunktide ühtelange-misel puutuja, siis kandub hüperbooli lõikaja omadus üle puutujale järgmisel kujul: puutuja lõigud puutepunktist asümptootideni on võrdsed. Punkti V läbiva puutuja t näiteks leiame järgmiselt: tõmbame $VL \parallel q$ ja võtame $LK=LO$; siis VK ongi puutuja t , sest $VK=VE$ (kuna VL on kolmnurga EOK kesklõik).

Joonist 43-1 on täiendatud veel haripunkti H konstruktsiooniga (esitatud punktjoonega). Konstruktsioon tugneb järgmisele analüütilises geomeetrias tõestatavale lausele:

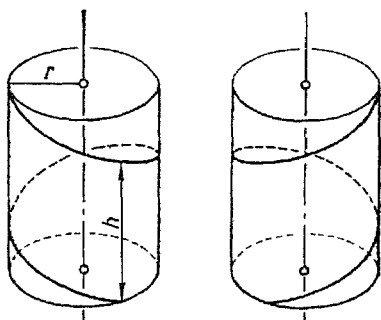
hüperbooli punktist asümptootidega paralleelselt tõmmatud sirged moodustavad koos asümptootidega paralleelogrammi, mille kahe lähiskülje korrutis on jääv.

Lauses nimetatud paralleelogramm muutub haripunkti kohal rombiks, mille kulg peab olema paralleelogrammi lähiskülgede keskmine võrdeline. Joonisel on leitud näiteks punktile V vastava paralleelogrammi $VLOt$ lähiskülgede keskmine võrdeline (lõik VS) ning kasutatud seda haripunkti H leidmisel ($OG=GH=VS$).

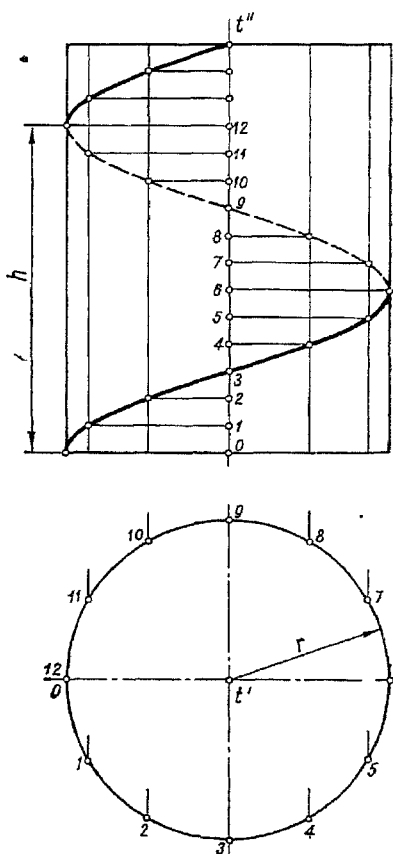
Hüperbooli joonestamist hõlbustavad tunduvalt tema sümmeetriateljed, s. o. asümptootidevaheliste nurkade poolitajad, ning kõverusringjooned haripunktides.

Hüperbooli kõverusraadius haripunktis väljendub pooltelgede a ja b kaudu täpselt samuti nagu ellipsi kõverusraadius pikema telje otspunktis: $R=b^2:a$. Kui hüperbool on antud asümptootidega p ja q ning haripunktiga H fokaalteljel (joon. 43-2), siis $OH=a$ ja $HL=b$, kus L on haripuutuja ja asümptooti lõikepunkt ($HL \perp OH$). Otsitava kõverusringjoone keskpunkti Q fokaalteljel saame nüüd sirge abil, mis tõmmatakse punktist L risti asümptootiga q . Tõepoolest — täisnurgast kolmnurgast OLQ saame kirjutada, et $b^2=aR$, millest $R=b^2:a$.

Joonisel 43-2 on selgitatud ka hüperbooli fookuste F_1 ja F_2 leidmist, kui hüperbooli määramisandmeiks on endiselt asümptoodid ja haripunkt. Fookuse kaugus keskpunktist avaldub pooltelgedele a ja b kaudu järgmiselt: $OF_1=OF_2=\sqrt{a^2+b^2}$; järelikult fookuse kaugus keskpunktist võrdub lõiguga OL .



Joonis 44-1



Joonis 44-2

kruvijoone teljeks, silindri raadiust aga kruvijoone raadiuseks (r) (joon. 44-1). Kruvijoone osa, mis vastab punkti ühele täispöördele ümber kruvijoone (silindri) telje, nimetatakse kruvijoone **keeruks**. Keeru otspunktide vahelist kaugust (s. o. keeru kõrgust) nimetatakse kruvijoone **sammuks** (h).

Kruvijooni liigitatakse parema- ja vasakukäelisteks. Kui kruvijoone telje sihis vaatlemisel punkti eemaldumine kruvijoont mööda toimub pöörlemisega päripäeva, siis on tegemist paremakäelise kruvijoonega, vastasel korral aga vasakukäelise kruvijoonega. Joonisel 44-1 on vasakul esitatud vasakukäeline, paremal aga paremakäeline silindriline kruvijoone.

Kruvijoone on täiesti määratud, kui on teada tema raadius r , samm h ja käelisus (parema- või vasakukäeline).

Kruvijoone projektatsioonide tuletamisel võetakse tema telg harilikult risti põhiekraaniga (joon. 44-2). Siis kruvijoone pealtvaateks tuleb ringjoon raadiusega r , eestvaate aga saame tuletada järgmise mõttekäigu alusel.

Kruvijoone definitsiooni põhjal võib punkti liikumist mööda kruvijoont vaadelda liitliikumisenä, mis koosneb 1) pöörlemisest mööda silindri põhja ringjoont ja 2) sirgliikumisest silindri moodustajate sihis. Et mõlemad liikumised on ühtlased, siis liikuva punkti kaugused silindri põhja tasapinnast kasvavad võrdeliselt põhja ringjoone kaarte pikkustega. Selle põhjal saame kruvijoone eestvaate konstrueerida järgmiselt.

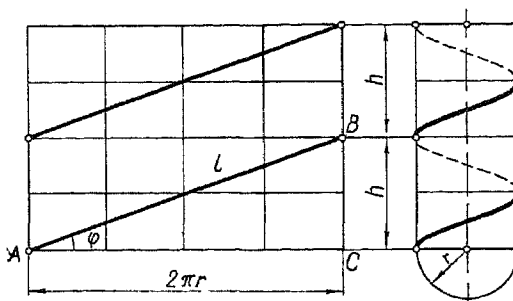
Jaotame silindri põhja ringjoone (mis on ühtlasi kruvijoone pealtvaateks) ja sammu h samaks arvaks võrdseteks osadeks, näiteks 12 osaks.

Joonestame ringjoone jaotuspunkte läbivate moodustajate eestvaated. Tõmmates nüüd eestvaatel sammu h jaotuspunktidest horisontaalsed sirged kuni lõikumiseni vastavate moodustajatega, saamegi kruvijoone eestvaate punktid. Tõepoolest, kui punkt alustab põhiekraanilt liikumist moodustajalt 0, siis peab ta jõudma moodustajale 1 ühe kaheteistkümnendiku sammu kõrgusel, moodustajale 2 kahe kaheteistkümnendiku sammu kõrgusel jne. Täispöörde järel jõuab punkt lähtemoodustajale tagasi terve sammu h kõrgusel, olles moodustanud kruvijoone ühe keeru. Joonisel 44-2 on kruvijoonest esitatud $1\frac{1}{4}$ keerdu. Konstrueeritud kruvijoone on paremakäeline.

Saab tõestada, et silindrilise kruvijoone ristprojektsioon telje paralleeltasapinnal on siinusjoon (meie juhul on selleks eestvaade, sest telg $t \parallel e_2$).

Silindri pinnalaotusel saame hariliku kruvijoone igast keerust sirglõigu, mis on kaldu pinnalaotuse alusjoone AC suhtes (joon. 44-3). See järeldub asjaolust, et kruvijoont mööda liikuva punkti kaugused silindri põhja tasandist suurenevad võrdeliselt põhja ringjoone kaarte pikkustega. Et põhja ringjoonest tekib pinnalaotusel sirglõik $AC=2\pi r$, siis järelikult ühe keeru laotusjooneks saame joone, mille punktide kaugused sirgest AC kasvavad võrdeliselt sirge AC lõikudega, s. t. saame sirgjoone.

Niisiis harilikku kruvijoont võib defineerida ka kui joont, mis tekib tasandile joonestatud sirgest, kui tasand painutatakse pöörsilindriliseks pinnaks. Siit selgub ka, et harilik kruvijoone (kaasa arvatud sirge ja ringjoone) osutub kõige lühemaks teeks kahe punkti vahel silindri pinnal.



Joonis 44-3

Jooniselt 44-3 saame täisnurksest kolmnurgast ABC välja kirjutada järgmise valemi kruvijoone ühe keeru pikkuse $AB=l$ arvutamiseks:

$$l = \sqrt{h^2 + (2\pi r)^2}, \quad (7)$$

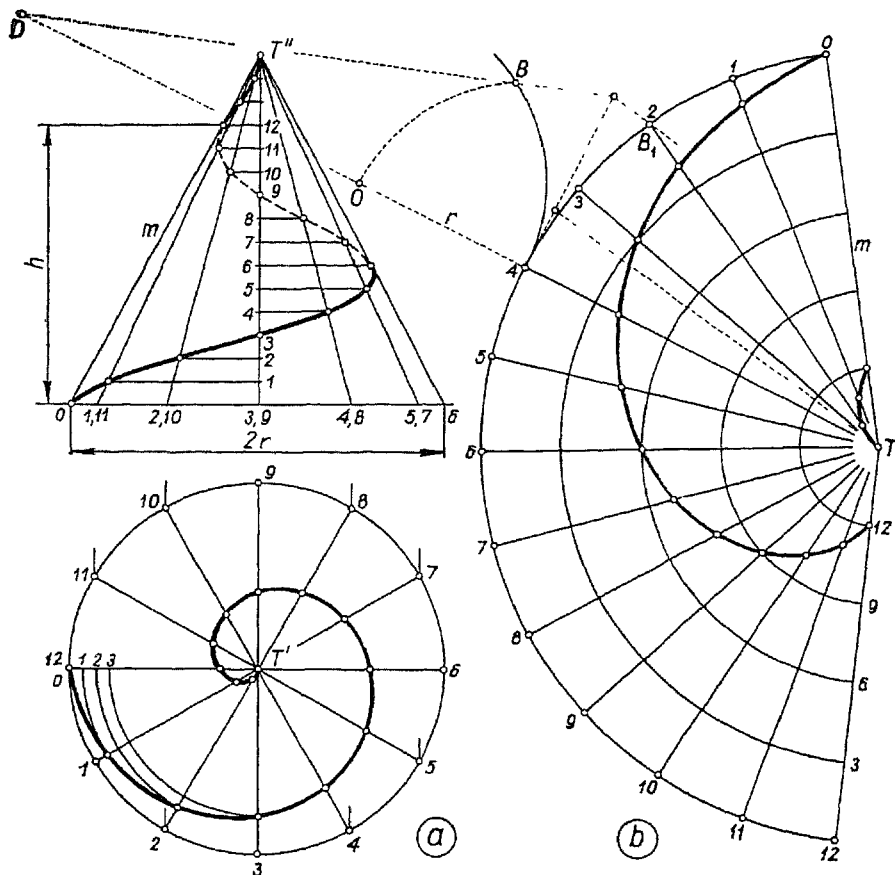
kus h ja r on vastavalt kruvijoone samm ja raadius.

Laotussirge AB kaldenurk φ alusjoone AC suhtes on võrdne kruvijoone puutujate kaldenurgaga silindri põhja tasandi suhtes; seda nurka nimetatakse **kruvijoone tõusunurgaks**. Kolmnurgast ABC saame tõusunurga φ arvutamiseks järgmise valemi:

$$\tan \alpha = \frac{h}{2\pi r}. \quad (8)$$

Kui kruvijoone samm $h=0$, siis kruvijoone koondub ringjooneks, kui aga samm $h=\infty$, siis kruvijoone muutub sirgjooneks. Seega ringjoone ja sirge on kruvijoone äärmised vormid.

Harilikul kruvijooneel (kaasa arvatud tema äärmised vormid — sirgjoone ja ringjoone) on järgmine spetsiifiline omadus, mis igal muul jooneel puudub: hariliku kruvijoone kõik võrdse pikkusega tükid on kongruentsed. Sellest omadusest järeldub, et harilik kruvijoone võib libiseda ise-



Joonis 44-4

ennast mööda ilma igasuguse deformatsioonita.

2. **Kooniline kruvijoon** on pöördkoonuse moodustajat mööda ühtlaselt liikuva punkti trajektoor, kui koonus pöörleb ühtlaselt ümber oma telje. Koonilise kruvijoone keerddefineeritakse analoogiliselt silindrilise kruvijoone keeruga. Sammuks loetakse siin keeru otspunktide kõrguste vahet.

Koonilise kruvijoone kujutamisel kaksvaates võetakse koonuse telg

harilikult risti põhiekraaniga (joon. 44-4, a). Jaotame koonuse pinna moodustajatega võrdseteks osadeks, näiteks 12 osaks; samaks arvuks võrdseteks osadeks jaotame ka sammu h . Kandes eestvaatel sammu jaotuspunktide kõrgused üle vastavatele moodustajatele, saamegi rea punkte joone eestvaate jaoks. Nende punktide pealtvaated võib leida kas sidejoonte abil eestvaate järgi või moodustajate pealtvaadete jaotamisega 12 võrdseks osaks.

Koonilise kruvijoone ristprojektsioon koonuse telje risttasandil (meie juhul pealtvaade) osutub Archimedese spiraaliks; spiraali alguspunktiks on koonuse tipu pealtvaade T' .

Archimedese spiraal on tasandiline joon, mille tekitab sirgel ühtlaselt liikuv punkt, kui sirge pöörleb ühtlaselt ümber oma ühe punkti.

Pöördkoonuse pinnalaotuseks saame ringi sektori, mille raadius võrdub koonuse moodustajaga m (joon. 44-4, b). Sektori kaare pikkus on võrdne koonuse põhjaringjoone pikkusega. Sektori kaare pikkuse saamiseks on kasutatud ringjoone kaare teisele ringjoonele ülekandmise konstruktsiooni (§ 40). Koonuse põhjaringjoonest (O, r) on eraldatud $1/6$ osa (kaar $4B$) ning see on üle kantud ringjoonele (T, m), saades kaare $4B_1$. Selle kaare kuuekordistamisega saamegi sektori kaare pikkuse.

Kruvijoone laotusjoone saamiseks koonuse pinnalaotusel võib leida vastavate moodustajate lõikude originaalpikkused. Koonilise kruvijoone laotusjoon on samuti Archimedese spiraal.

KÜSIMUSED

1. Kuidas tekib silindriline kruvijoone?
2. Mis on silindrilise kruvijoone samm?
3. Millised parameetrid määravad silindrilise kruvijoone?
4. Kuidas avaldub silindrilise kruvijoone uhe keeru pikkus raadiuse ja sammu kaudu?
5. Kuidas tekib kooniline kruvijoone?
6. Mis on Archimedese spiraal?

§ 45. PINNAD

1. Pindade liigitamine. Pinna võib tekitada joone — **pinna moodustaja** pideva liikumisega ruumis mingi eeskirja järgi. Pind on määratud, kui on

teada tema moodustaja kuju ja liikumise eeskiri. Joone liikumisega tekitatud pindu nimetatakse **kinemaatilisteks pindadeks**.

Sageli on ühte ja sedasama pinda võimalik moodustada mitmel viisil. Nii võib näiteks pöördsilindri saada sirgjoone pöörlemisega ümber telje, mis on selle sirgega paralleelne, aga ka hariliku kruvijoone pöörlemisega ümber tema telje. Sama silindri võib saada ka mis tahes sellele silindrile joonestatud kõverjoone (ringjoone, kruvijoone jne.) rööplükkega silindri telje sihis.

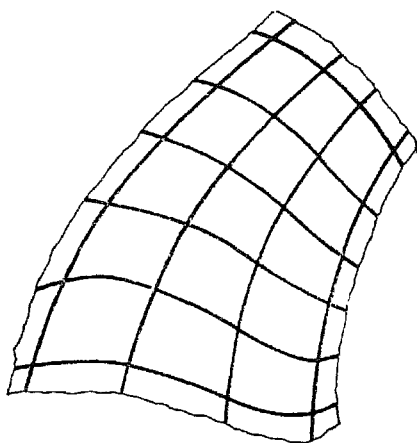
Leidub pindu, mida kindlakujulise moodustaja liikumisega tekitada ei saa. Niisuguste pindade hulka kuulub näiteks **topograafiline pind** (maapind). Niisuguste pindade määramiseks antakse ette selle pinna **karkass** (kandesõrestik), s. o. teatav süsteem sellele pinnale kuuluvaid jooni (joon. 45-1).

Pindu, mida saab esitada võrrandite abil, nimetatakse **analüütilisteks pindadeks**. Pinda, mille võrrand $F(x, y, z) = 0$ ristkoordinaatides on n -astme algebraline võrrand, nimetatakse **n -järku algebraliseks pinnaks**. Geomeetriselt on algebralise pinna järk võrdne selle pinna ja tasandi lõikejoone järguga (§ 39) või selle pinna ja sirgjoone lõikepunktide arvuga (kaasa arvatud lõikepunktid imaginaarsete koordinaatidega). Tasand on ainus esimest järku pind.

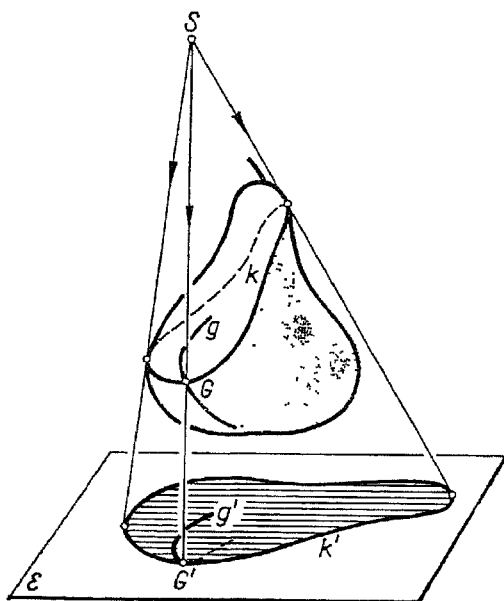
Pindasid liigitatakse **klassideks** järgu, moodustaja kuju, moodustaja liikumise seaduse ja muude aluste järgi. Tehnikas rakendatakse peamiselt järgmisi pindade klasse:

1) pöördpinnad (tekivad joone pöörlemisel ümber paigalseisva telje);

2) üldised teist järku pinnad (ellipsoidid, hüperboloidid, paraboloidid jt.);



Joonis 45-1



Joonis 45-2

3) joonpinnad (tekivad sirgjoone liikumisel);

4) krüvipinnad (tekivad joone krüvijoonelisel liikumisel);

5) karkasspinnad (määratakse pinnale kuuluva karkassiga).

Iga konkreetne pind võib sõltuvalt liigitamise alusest kuuluda ühtaegu mitmesse klassi. Arvesse võttes näiteks pöördsilindri moodustumise mitmesuguseid võimalusi, võime öelda, et pöördsilinder on ühtaegu pöördpind, teist järku pind ja ka joonpind.

2. Pindade kujutamine. Kõverpinna kujutise saamiseks on vaja tuletada selle pinna oluliste punktide ja joonte kujutised. Pinna kui terviku kujutise kontuur (piirjoon) saadakse niisuguste kujutamiskiirte abil, mis pinda puutuvad. Vastavad puutepunktid moodustavad **pinna kontuuri** (ehk pinna näiva äärjoone); viimase projektsioonina saadaksegi pinna kujutise kontuur. Nii näiteks joonisel 45-2 on tsentraalprojekteerimisel pirnikujulise pinna kontuuriks joon k , kujutise kontuuriks aga tema tsentraalprojektsioon k' . Pinna kontuur oleneb pinna ja kujutamiskiirte vastastikusest asendist ning kiirte liigist. Nii näiteks kerapinna kontuuriks paralleelkiirte korral on alati üks kera suurringjoon, tsentraalkiirte korral aga sellest väiksem ringjoon.

Arusaadavalt ei saa pinna ühegi punkti kujutis sattuda pinna kujutise kontuurist väljapoole.

Kui kõverpinnal olev joon g (joon. 45-2) lõikab pinna kontuuri k punktis G , minnes pinna nähtavalt poolelt varjatud poolele või ümberpöörduvalt, siis selle joone kujutis g' jõuab kujutise kontuurini k' , puutub seda (punkt G') ning pöörduv sis tagasi pinna kujutise piirkonda.

KÜSIMUSED

1. Mis on pinna moodustaja?
2. Missugust pinda nimetatakse algebraliseks pinnaks?
3. Mis on algebralise pinna järk?
4. Mis on: a) pinna kontuur, b) pinna kujutise kontuur?

§ 46. PÖÖRDPINNAD

1. Pöördpind ja tema kujutamine. Pöördpind tekib mis tahes joone (moodustaja) pöörlemisel ümber kindla sirgjoone, mida nimetatakse **pöördpinna teljeks**. Pöörlemisel moodustaja iga punkt liigub mööda ringjoont, mille tsenter on pöördpinna teljel ja mille tasand on risti pöördpinna teljega. Neid ringjooni nimetatakse **pöördpinna paralleelideks**. Paralleele võib vaadelda ka kui pöördpinna lõikejooni telje risttasanditega. Suurima ja väikseima raadiusega paralleeli nimetatakse vastavalt pöördpinna **ekvaatoriks** ja **kaelaks**. Kahe paralleeliga piiratud pöördpinna osa nimetatakse **pöördpinna vööks**.

Pöördpind on sümmeetriline iga tasandi suhtes, mis läbib tema telge. Kui pöördpinda lõigata telge läbivate tasanditega, siis saadakse kongruentsed lõikejooned, mida nimetatakse **meridiaanideks**. Iga meridiaani võib lugeda selle pöördpinna moodustajaks.

Pöördsilinder ja pöördkoonus on ainsad sirge meridiaaniga pöördpinnad.

Kõvera meridiaaniga pöördpinna kujutamisel kaksvaates võetakse pinna telg harilikult risti põhiekraaniga (joon. 46-1). Sel juhul on pinna paralleelid põhiekraaniga paralleelsed, mistõttu nende eestvaadeteks saame sirglõigud, pealtvaadeteks aga kontsentrilised ringjooned. Seejuures ek-

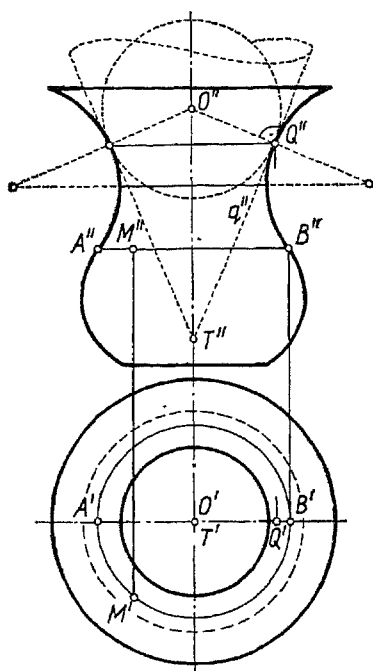
vaator projekteerub pinna pealtvaate kontuuriks. Pinna eestvaate kontuuriks tuleb frontaalse (esiekraaniga paralleelse) meridiaani moondevaba eestvaade. Meridiaanid projekteeruvad põhiekraanile sirglõikudeks.

Olgu vaja leida pöördpinnal asetseva punkti M pealtvaade, kui on teada tema eestvaade M'' (joon. 46-1). Ülesande lahendamiseks tõmbame läbi punkti M'' pöördpinna paralleeli eestvaate $A''B''$ ning joonestame sama paralleeli pealtvaate, s. o. ringjoone diameetriga $A'B' = A''B''$. Läbi punkti M'' tõmmatud sidejoon lõikab seda ringjoont otsitavas punktis M' . Kui punkt M on pinna tagaküljel, siis tuleb tema pealtvaateks valida sidejoone ja ringjoone teine lõikepunkt.

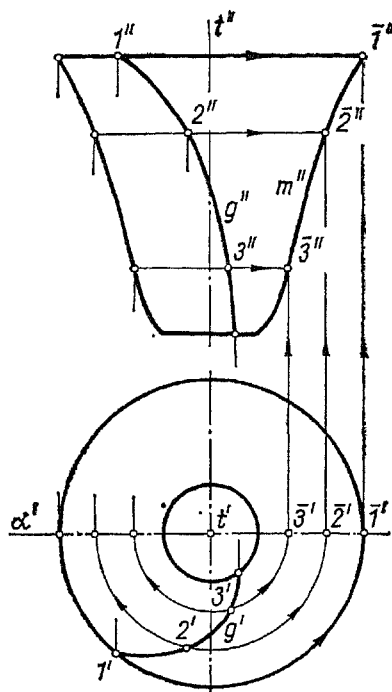
Kui aga on antud punkti M pealtvaade ja tuleb leida vastav eestvaade, siis saame esmalt tõmmata paralleeli pealtvaate läbi punkti M' ning seejärel sama paralleeli eestvaate $A''B''$, millel punkt M'' peabki olema.

Võtame frontaalsel meridiaanil punkti Q ning tõmbame sealt meridiaanile puutuja q . Selle puutuja pöörlemisel ümber pöördpinna telje tekib pöördkoonus, mis puutub pöördpinda mööda paralleeli, millel asetseb puutepunkt Q . Koonuse tipp T on pinna teljel. Säärast pöördkoonust nimetatakse pöördpinna **puutekoonuseks** antud paralleeli kohal. Ekvaatori kohal muutub puutekoonus **puutesilindriks**.

Tõmbame frontaalsel meridiaanil asetsevast punktist Q ristsirge puutujale q ; lõigaku see pinna telge punktis O . Siis punkt O on keskpunktiks ja lõik OQ raadiuseks sfäärile (kerapinnale), mis puutub pöördpinda mööda paralleeli, millel asetseb puutepunkt Q . Säärast sfääri



Joonis 46-1



Joonis 46-2

nimetatakse pöördpinna antud paral-leelile vastavaks **puutesfääriks**.

Pöördpinna määramisandmeteks on tema telg ja moodustaja.

Näide. Tuletada pöördpinna kaksvaade, kui on antud telg t ja moodustaja g (joon. 46-2).

Moodustaja g ei saa antud juhul olla meridiaaniks, sest tema pealt-vaade pole sirglõik, mis läbib telje pealtvaadet t' . Pöördpinna eestvaate (frontaalse meridiaani) saamiseks va-lime moodustajal g vabalt rea punkte $1, 2, 3, \dots$ ning pöörame need ümber telje t frontaalsele tasandile α , mis läbib telge t . Siis pööratud punktide $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots$ eestvaated, mis asetsevad pöörderingjoonte eestvaa-detel, määravadki frontaalse meri-diaani eestvaate m'' . Pöördpinna

pealtvaade koosneb antud juhul ainult kahest ringjoonest.

2. Pöördpinna võrrand. Olgu antud tasan-dis Oxz asetseva meridiaani m võrrand $f(x, z)=0$ (joon. 46-3). Pöörame meridiaani vabalt valitud punkti $P(x, z)$ ümber z -telje asendisse $\bar{P}$, mille koordinaadid olgu $\bar{x}, \bar{y}$ ja $\bar{z}$. Punkt $\bar{P}$ on ilmselt pöördpinna punkt. Joo-niselt näeme, et punkti P koordinaadid aval-duvad punkti $\bar{P}$ koordinaatide kaudu järgmi-selt:

$$z = \bar{z}; \quad x = O_1P = O_1\bar{P} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}.$$

Et punkt P asetseb meridiaanil m , siis peavad tema koordinaadid x ja z rahuldama võrran-dit $f(x, z)=0$, s. t.

$$f(\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \bar{z}) = 0.$$

See ongi pöördpinna võrrand. Et ülemised kriipsukesed võime ära jätta, siis võrrandi lõplik kuju on

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (9)$$

Näis, et saada meridiaani võrrandist $f(x, z)=0$ poordpinna võrrandit, tuleb meridiaani võrrandis muutuva x asemel kirjutada formaalselt $\sqrt{x^2+y^2}$.

Näitena tuletame rõngaspinna võrrandi Poorelgu ümber z -telje Oxz -tasandis asetseva rõngajooni (O_1, r), mille tsentri kaugus koordinaatide alguspunktist olgu $R=OO_1$ (joon 46-4). Selle rõngajooni võrrand on

$$(x-R)^2+z^2=r^2.$$

Pannes sellesse x asemele $\sqrt{x^2+y^2}$, saame.

$$x^2+y^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+R^2+z^2=r^2.$$

Lihtsustades, saame lõplikult.

$$(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2=4R^2(x^2+y^2).$$

Nagu näha, on see neljandat järku pind

3. Teist järku pöördpinnad. Teist järku pöördpind tekib teist järku joone pöörlemisel ümber oma sümmeetriatelje. Et peale ellipsi, hüperbooli ja parabooli tuleb teist järku joonte hulka arvata ka kaks lõikuvat sirget ja kaks paralleelset sirget (teist järku joone lagunud vormid), siis saame järgmised teist järku pöördpinnad (joon. 46-5).

Pöördellipsoid tekib ellipsi pöörlemisel ümber oma telje. Sõltuvalt sellest kas pöörlemiseljeks võetakse pikem või lühem telg, on pöördellipsoid piklik või lapik. Ringjoone pöörlemisel ümber oma diameetri

saadakse ellipsoidi erijuhtum — sfäär (kerapind).

Pöördparaboloid tekib parabooli pöörlemisel ümber oma sümmeetriatelje.

Kahekatteline pöördhüperboloid tekib hüperbooli pöörlemisel ümber fokaaltelje; hüperbooli kumbki haru tekitab selle pinna ühe poole ehk kätte, mis on teise haru poolt tekitatud kattedest eraldatud.

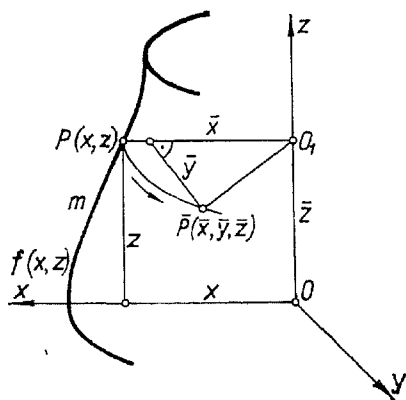
Ühekatteline pöördhüperboloid tekib hüperbooli pöörlemisel ümber kaastelje.

Pöördsilinder tekib kahe paralleelse sirge pöörlemisel ümber nende sümmeetriatelje.

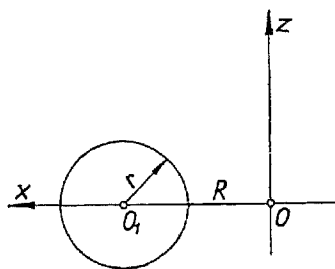
Pöördkoonus tekib kahe lõikuva sirgjoone pöörlemisel ümber nende sümmeetriatelje. Sirgete lõikepunkt jaab pöördkoonuse tipuks, s. o. punktiks, mis ühendab pinna kahte lõpmatut katet (lehtrit). Need katted on sümmeetrilised tasandi suhtes, mis läbib tippu ja on pinna teljega risti.

Nende pindade mõnevõrra üldisemad vormid on mituvaates esitatud joonisel 47-1 (§ 47).

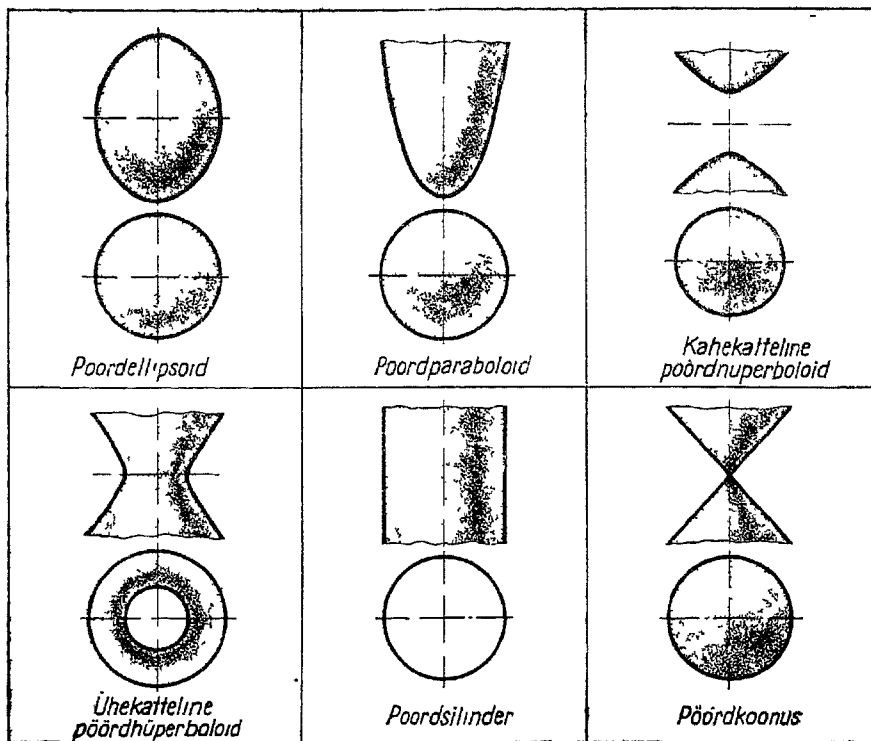
Analüütilises geomeetrias näidatakse, et ühekattelist pöördhüperboloidi saab tekitada ka sirgjoone



Joonis 46-3



Joonis 46-4

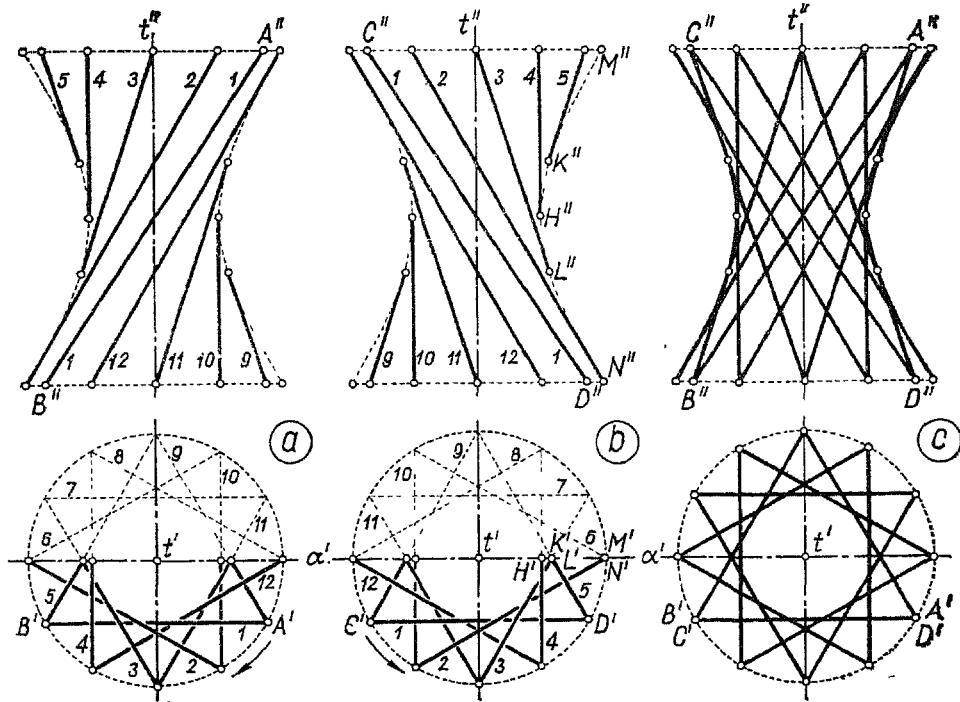


Joonis 46-5

pöörlemisega ümber telje, mis on selle sirge suhtes kiivne. Selgitame seda lähemalt.

Olgu telg t risti põhiekraaniga ning selle telje suhtes kiivne moodustaja AB lähteasendis frontaalne (joon. 46-6, *a*). Poolitagu telje eestvaade moodustaja lõigu AB eestvaadet. Pöörlemisel liiguvad siis punktid A ja B mööda võrdsete raadiustega paralleelseid ringjooni, mis langevad pealtvaates kokku. Joonisel on esitatud moodustaja lõigu 12 erinevat asendit vastavalt täispöörde kaheteistkümnendikele. Joonise selguse huvides on näidatud vaid moodustajate neid osi, mis on telge läbi-

vast frontaalpinnast eespool. Et telge t läbiv profiiltasand on pöördpinna üheks sümmeetriatasandiks, siis peab igale moodustajale vastav sümmeetriline moodustaja selle tasandi suhtes asetsema samuti pöördpinnal (joon. 46-6, *b*). Järelikult on tekkiv pöördpind kaetud kahe parve sirgete moodustajatega (joon. 46-6, *c*). Pinna iga punkti läbib kaks moodustajat, teine teisest parvest. Moodustaja ühest parvest ei löika ühtki moodustajat samast parvest, kuid lõikab kõiki moodustajaid teisest parvest. Analüütilises geometrias tõestatakse, et saadud pöördpinna meridiaaniks on hüperbool, järelikult



Joonis 46-6

osutub pind tõepoolest ühekatteli-seks pöördhüperboloidiks.

Pinna eestvaate kontuuri, s. o. hüperbooli saame tuletada joonise 46-2 eeskujul. Selleks vaatleme moodustajate neid punkte H , K , L , M ja N , mis asetsevad pinna telge läbival frontaalpinnal α . Nende punktide pealtvaated asetsevad sirgel α' . Leides punktide H , K , L , ... eestvaated vastavate moodustajate eestvaadetest, saamegi joonestada pinna eestvaate kontuuri.

Punkte H , K , L , ... läbivate moodustajate eestvaated osutuvad kontuurihüperbooli puutujateks; frontaalsete moodustajate AB ja CD eest-

vaated aga on kontuurihüperbooli asümptootideks.

Pöördkoonus ja pöördsilinder on ühekattelise pöördhüperboloidi äärmised vormid. Silindri puhul on pinna moodustaja paralleelne teljega, pöördhüperboloidi puhul on see telje suhtes kiivne, pöördkoonuse puhul aga lõikab telge.

Teist järku pöördpinnad on tasan-di järel kõige lihtsamad pinnad. Seepärast rakendatakse neid laialdaselt tehnika kõige erinevates harudes. Nii näiteks koosnevad masinate detailide pinnad põhiliselt just teist järku pöördpindadest ja tasapindadest. Neid kasutatakse ka ehitiste,

kattekonstruktsioonide, tornide jt. põhivormidena.

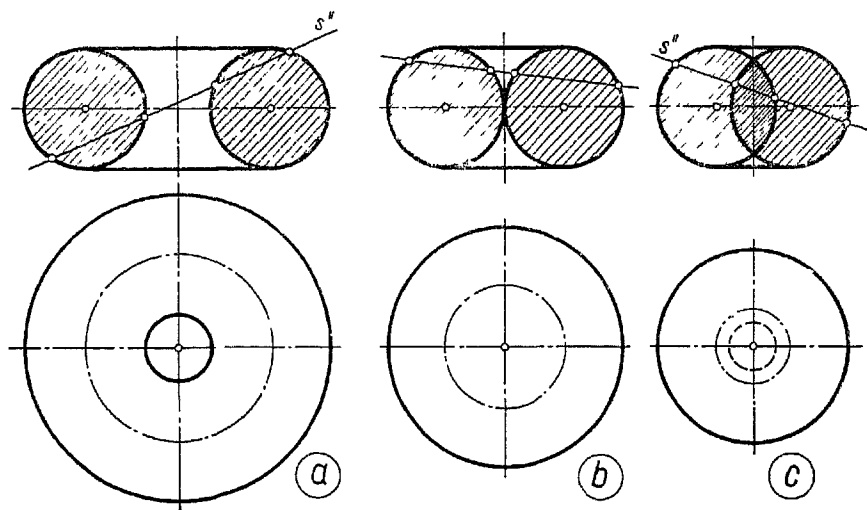
4. Rõngaspind. Teist järku joone pöörlemisel ümber telje, mis ei ühti selle joone sümmeetriateljega, tekib 4. järku pind. Neljandat järku pindadest esineb tehnikas kõige sagedamini rõngaspind. Rõngaspind tekib ringjoone pöörlemisel ümber telje, mis asetseb ringjoone tasandis, kuid ei läbi ringjoone tsentrit.

Rõngaspinna kuju sõltub suurel määral pöörlemistelje asukohast meridiaanringjoone suhtes. Kui telg ringjoonest möödub, siis tekib auguga rõngaspind (joon. 46-7, a); kui telg puutub ringjoont, siis rõngaspind puutub iseennast (joon. 46-7, b) ning kui telg lõikab ringjoont, kuid ei läbi keskpunkti, siis rõngaspind lõikab iseennast (joon. 46-7, c).

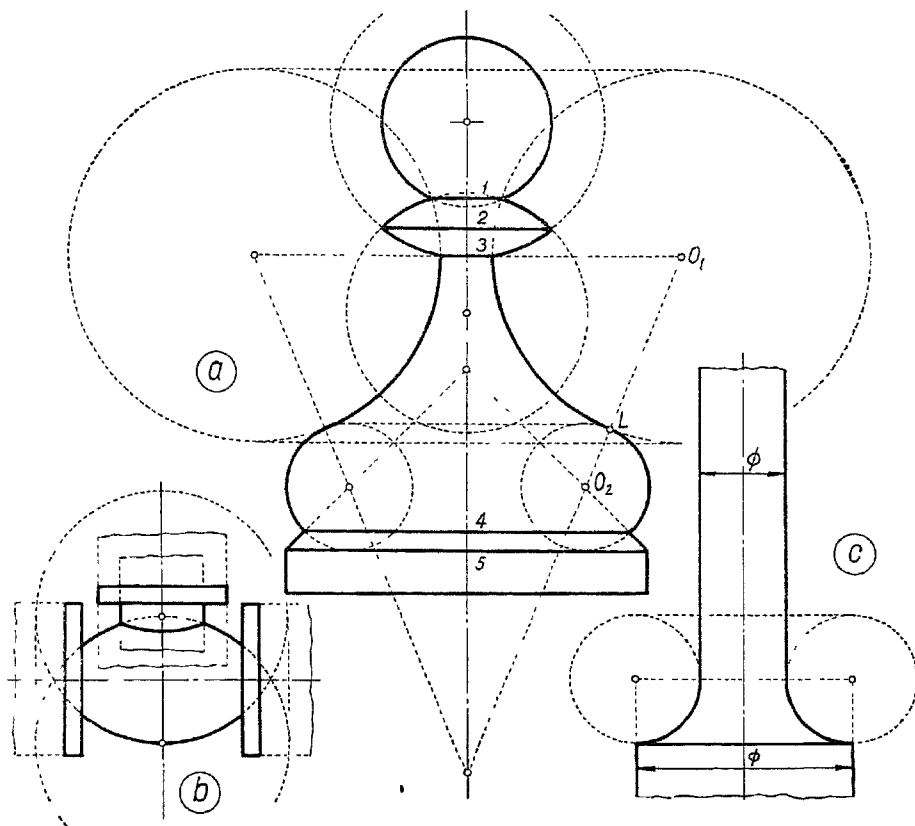
Rõngaspinnaga piiratud keha nimetatakse **rõngaks**. Joonisel 46-7 näiteks on kujutatud rõngas, mitte rõngaspind; seejuures rõnga telglõige (lõige pöörlemistelje läbiva tasa-

pinnaga) on viirutatud. Lõikepinnal tõmmatud sirge s näitab, et sirgel saab rõngaspinnaga olla 4 lõikepunkti; järelikult rõngaspind on tõe-poolest neljandat järku pind.

Kui soovitakse saada komplitseerituma kujuga pöördpinda, siis on otstarbekohane koostada see mitmesugustest silindrite, koonuste, sfääride ja rõngaspindade vöödest; meridiaan koosneb sel juhul ainult sirge ja ringjoonelistest osadest. Üks niisugune näide (ettur) on esitatud joonisel 46-8, a. Kohtades, kus meridiaani osad liituvad nurga all, saadakse pöördpinnal servjooned (joonisel 46-8, a paralleelid 1, 2, 3, 4 ja 5). Kohtades, kus meridiaani osad liituvad sujuvalt, s. t. kaarte liitekoht on tsentrite joonel, servjoont ei teki (näiteks sirgel O_1O_2 asuva punkti L kohal). Etturi pind joonisel 46-8, a koosneb ülalt alla lugedes järgmistest pindadest: kolm sfääri, kaks auguga rõngaspinda, pöördkoonus ja pöördsilinder.



Joonis 46-7



Joonis 46-8

Ventiili kere (joon. 46-8, b) põhi-osa on piiratud iseennast lõikava rõngaspinna seismise kattega, kael ja äärikud aga osutuvad pöördtsilindriteks.

Üleminekukoht kepsu sääre ja pea vahel (joon. 46-8, c) osutub auguga rõngaspinna vööks.

KÜSIMUSED

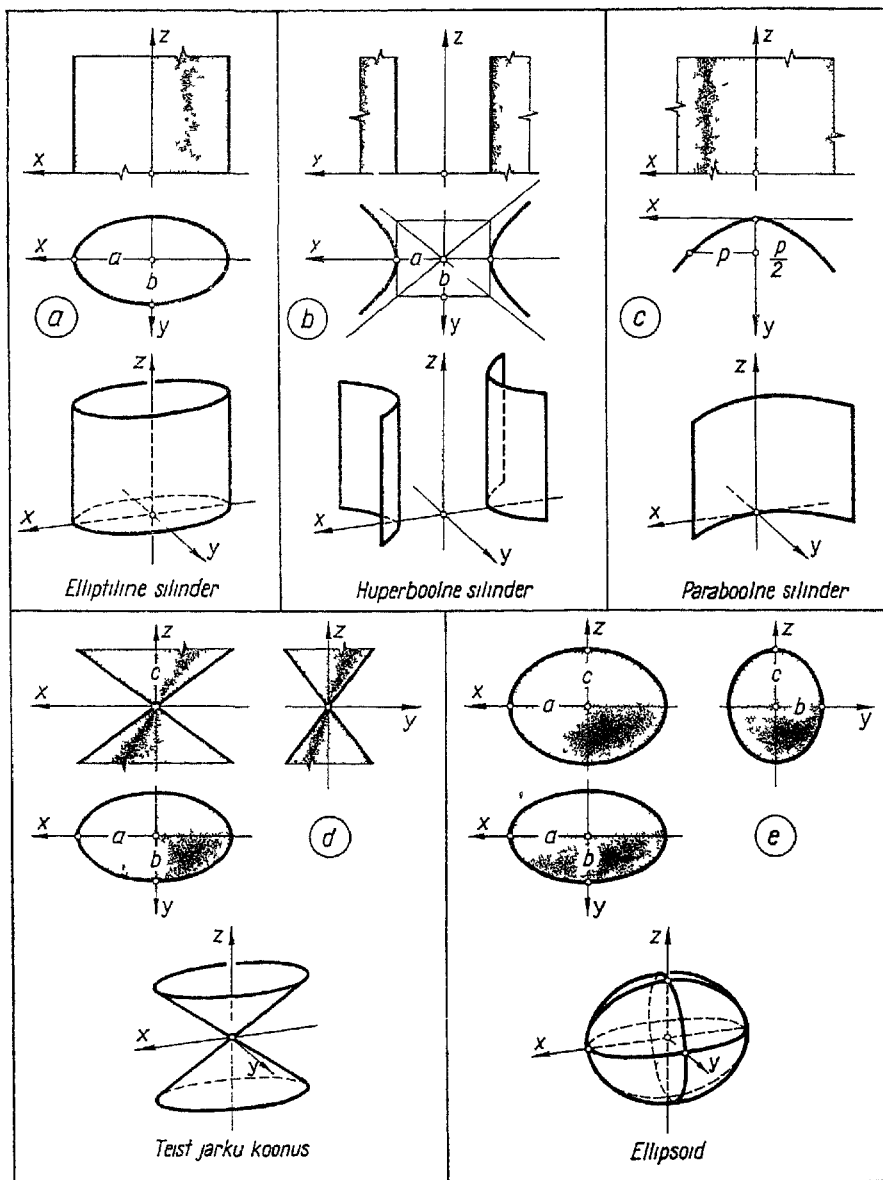
1. Kuidas defineeritakse: a) üldkujuiline pöördpind, b) teist järku pöördpind, c) rõngaspinna?
2. Mis on algebralise pinna järk?

3. Nimetage kõik teist järku pöördpinnad.
4. Mis on pöördpinna: a) paralleel, b) meridiaan?
5. Kuidas tekib sirgjoone liikumisega ühekatteline pöördhüperboloid?

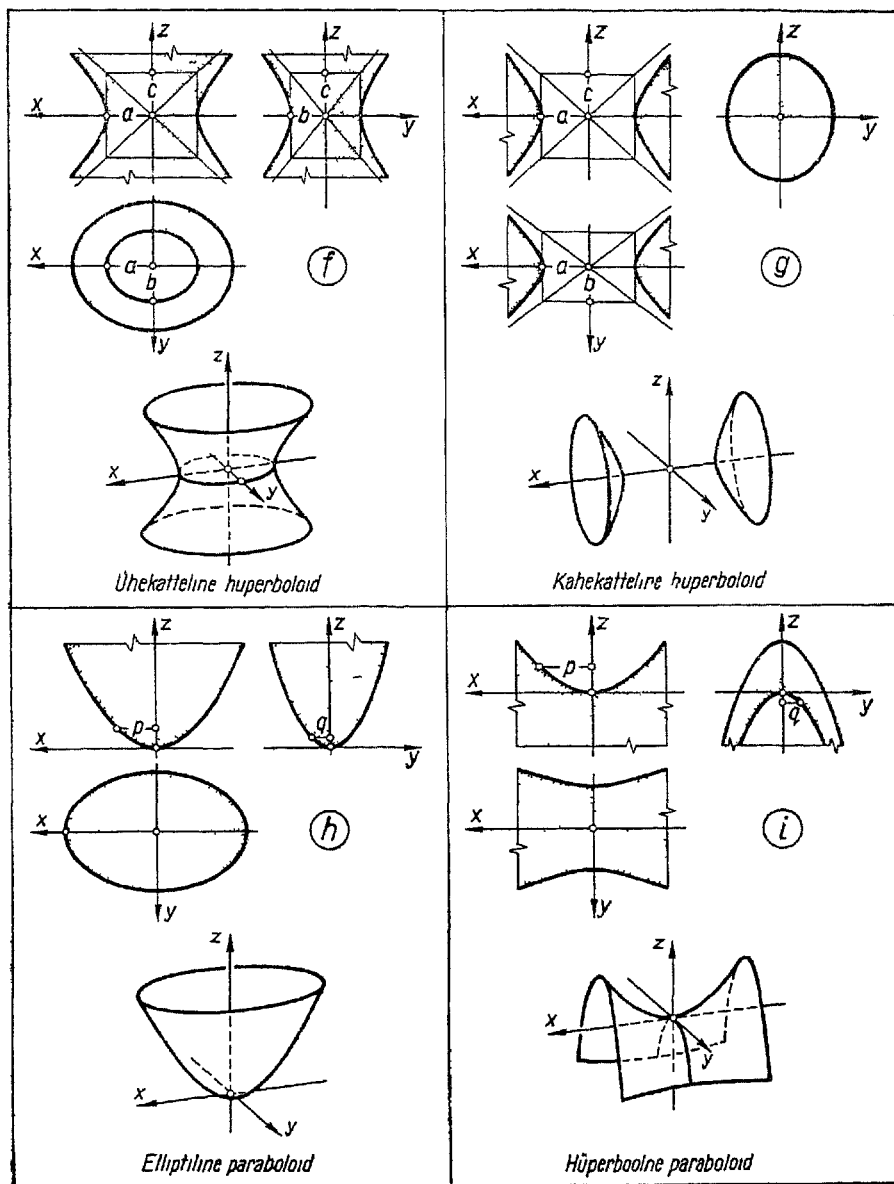
§ 47. ÜLDISED TEIST JÄRKU PINNAD

Teist järku pinna üldvõrrand ristkoordinaatides on

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0 \quad (10)$$



Joonis 47-1



Kui jätta vaatluse alt välja teist järku pinna äärmised vormid (tasandite paar, üks sirgjoon, üks punkt, ühtegi reaalselt punkti), siis lihtsustub võrrand (10) koordinaatide teisendamiseks üheks alljärgnevaks teist järku pinna võrrandiks:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elliptiline silinder} \\ \text{(joon. 47-1, a);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{hüperboolne silinder} \\ \text{(joon. 47-1, b);}$$

$$x^2 = 2py \quad \text{paraboolne silinder} \\ \text{(joon. 47-1, c);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{teist järku koonus} \\ \text{(joon. 47-1, d);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ellipsoid} \\ \text{(joon. 47-1, e);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ühekatteline hüperboloid} \\ \text{(joon. 47-1, f);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{kahekatteline hüperboloid} \\ \text{(joon. 47-1, g);}$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{elliptiline paraboloid} \\ \text{(joon. 47-1, h);}$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{hüperboolne paraboloid} \\ \text{(joon. 47-1, i).}$$

Joonisel 47-1 on kõik need pinnad kujutatud ülal kaks- või kolmvaates, all aga on antud nende aksonomeetriselised kujutised. Joonistel on näidatud ka võrrandis esinevate konstantide tähendus.

Väga oluline on tunda teist järku pindade sümmeetriat. Elliptiline silinder ja hüperboolne silinder on sümmeetriselised xz - ja yz -pinna suhtes; peale selle on nad sümmeetriselised iga tasandi suhtes, mis on paralleelne xy -pinnaga. Paraboolne silinder on sümmeetriselise yz -pinna suhtes ja iga tasandi suhtes, mis on paralleelne xy -pinnaga. Elliptilisel

paraboloidil ja hüperboolsel paraboloidil on kaks sümmeetriapinda: xz - ja yz -pind. Kõigil ülejäänud teist järku pindadel on kolm sümmeetriapinda — nendeks on telgede tasandid.

Teist järku pinna iga tasandiline lõikejoon osutub teist järku jooneks või selle lagunud vormiks. Lõikeid sümmeetriatasanditega nimetatakse pindade **pealõigeteks**. Joonisel 47-1 on pindade pealõiked ühes või teises vaates projekteerunud moondevabalt.

Eelmises paragrahvis nägime, et enamik teist järku pindu võib esineda ka pöördpinnalises vormis. Pöördpinnaline vorm puudub ainult hüperboolsel silindril, paraboolsel silindril ja hüperboolsel paraboloidil. Nimetatud kolmel pinnal ei ole ka ringjoonelisi lõikeid. Kõikide teiste üldkujuliste teist järku pindade igast punktist saab aga läbi panna tasandi nii, et lõikes tekib ringjoon.*

Järgnevas paragrahvis selgub, et teist järku pindadest kuuluvad joonpindade hulka peale teist järku koonuse ja kolme silindri (elliptiline, hüperboolne ja paraboolne) veel ühekatteline hüperboloid ja hüperboolne paraboloid.

Teist järku jooni ja teist järku pindu nimetatakse ühiselt ka **kvadrikuteks**.

KUSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Skitseerige hüperboolne paraboloid kolmvaates.
2. Mitu sümmeetriatasapinda on: a) teist järku koonusel, b) hüperboolsel paraboloidil?
3. Mitmendat järku jooned tekivad teist järku pindade lõikamisel tasandiga?
4. Missugustel üldistel teist järku pindadel on ringjoonelisi lõikeid?

* Vt. U. Lumiste, K. Ariva. Analüütiline geometria. Tallinn, 1973, lk. 377.

§ 48. JOONPINNAD

Joonpinnaks nimetatakse pinda, mida saab tekitada sirgjoone liikumisega. Sirgjoone liikumisvabadust piiratakse harilikult sellega, et ta peab lõikama ühte või mitut antud paigalseisvat joont — nn. **juhtjoont**. Sõltuvalt juhtjoonte süsteemist ja muudest moodustaja liikumist kitsendavatest tingimustest võib saada väga mitmesuguseid joonpindu. Et joonpinna moodustaja (sirgjoon) on lõpmata pikk, siis on ka iga joonpinna ulatus lõpmatu. Iga säärase pinna kujutamisel tuleb piirduda vaid pinna kõige iseloomulikuma tüki esitamisega.

Allpool käsitleme mõningaid tähtsamaid joonpindu üksikasjalisemalt.

1. Laotuvad joonpinnad. Pinda, mida saab deformeerida tasandiks painutamise teel, nimetatakse **laotuvaks** ehk **tasanduvaks** pinnaks. Seejuures mõistetakse painutamise all niisugust deformeerimist, mille juures pind ei veni ega tõmbu kokku, ei rebene ega lähe volti. Pindu, mida ei saa painutada tasandiks, nimetatakse **mittelaotuvateks** pindadeks.

Diferentsiaalgeomeetrias tõestatakse, et kõikidest kõverpindadest osutuvad laotuvateks ainult koonilised ja silindrilised pinnad ning puutujatepinnad.*

1) Kooniline pind tekib sirgjoone liikumisel, kui sirgjoon igas oma asendis lõikab antud juhtjoont ja läbib antud punkti (pinna tippu). Koonilise pinna tipp ühendab selle pinna kahte lõpmata ulatuslikku katet, mis on teineteisega sümmeetrilised tippu suhtes. Koonilise pinna määramisandmeteks on tipp (T) ja

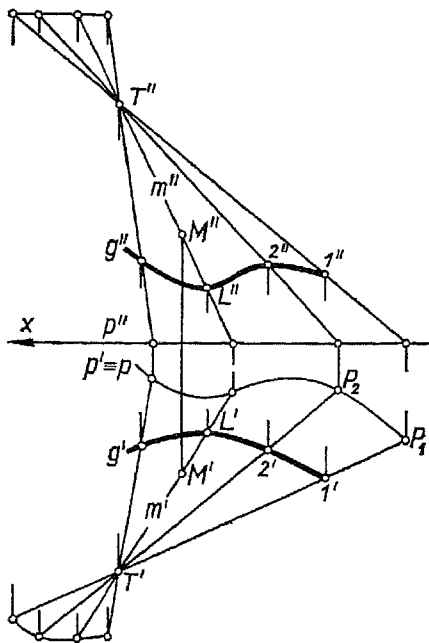
juhtjoon (g). Joonisel 48-1 on nende andmete põhjal tuletatud koonilise pinna punkti M eestvaade antud pealtvaate M' järgi. Selleks on läbi punkti M' tõmmatud moodustaja pealtvaade m' , mis lõikab juhtjoone pealtvaadet punktis L' (ruumis $L \equiv m \times g$). Läbi punkti L eestvaate L'' on tõmmatud moodustaja eestvaade m'' , millel ongi punkti M otsitav eestvaade M'' . Samal joonisel on tuletatud koonilise pinna põhijalg p ; see läbib moodustajate põhijälgi P_1, P_2 jne.

Koonilise pinna juhtjooneks võib võtta tema iga tasandilise lõikejoone, sealhulgas ka lõikejoone ekraaniga, s. o. jälgjoone. Kui juhtjooneks võetakse teist järku joon, siis saadakse teist järku koonus (erijuhtumil pöördkoonus). Kui koonilise pinna juhtjooneks võetakse aga murdjoon, siis saadakse **püramiidiline pind**.

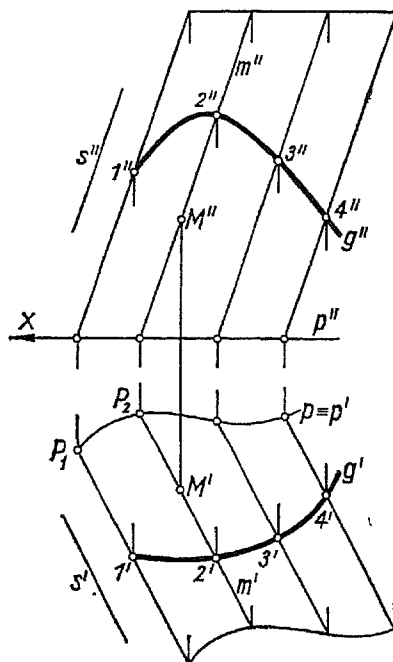
2) Silindriline pind tekib sirgjoone liikumisel, kui sirgjoon igas oma asendis lõikab antud juhtjoont ja jääb paralleelseks antud sirgega — nn. **sihisirgega**. Olgu silindrilise pinna määramisandmeiks juhtjoon g ja sihisirge s (joon. 48-2). Fikseerime juhtjoonel rea punkte ja tõmbame neist läbi moodustajad paralleelselt antud sihisirgega s . Moodustajate põhijäljed $P_1, P_2 \dots$ määravad silindrilise pinna põhijälje p . Arusaadavalt tuleb juhusliku ruumikõvera g asemel eelistada pinna juhtjoonena tasandilist jälgjoont p ; viimase eestvaade on sirge, mis langeb kokku x -teljega.

Punkti märkimisel silindrilisele pinnale tuleb kaksvaates hoolitseda selle eest, et punkti projektsioonid satuksid sama moodustaja projektsioonidele. Nii näiteks asetseb punkt M silindrilisel pinnal (g, s), sest ta on selle pinna moodustajal m , mis lõikab juhtjoont g punktis 2.

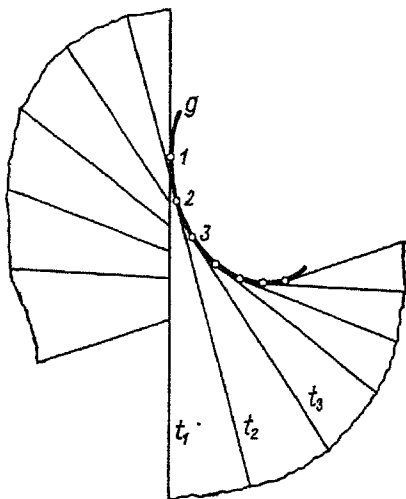
* Vt. U. Lumiste. Diferentsiaalgeomeetria. Tallinn, 1963, lk. 115.



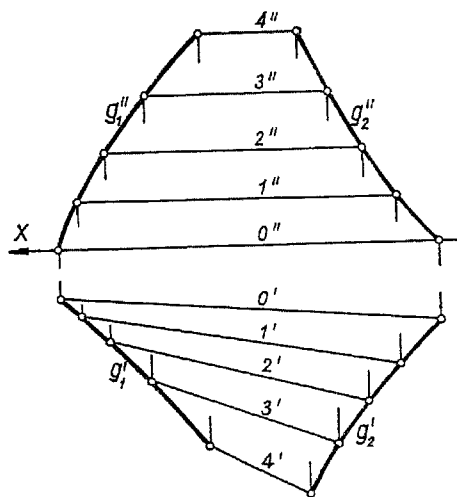
Joonis 48-1



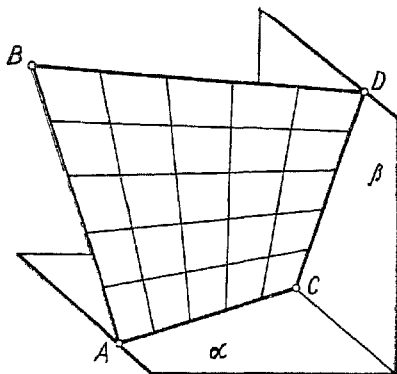
Joonis 48-2



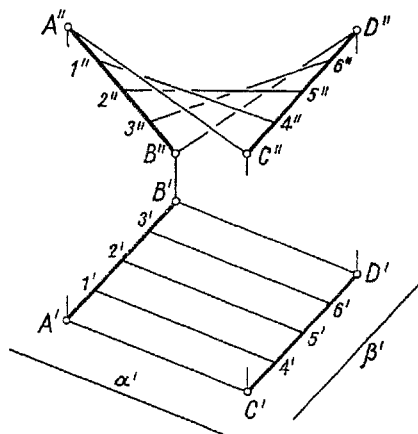
Joonis 48-3



Joonis 48-4



Joonis 48-6



Joonis 48-7

sel 48-5 näeme konoidi, mille juhtkõveraks on frontaalne poolring g , juhtsirgeks põhiekraani ristsirge s ning juhtpinnaks põhiekraan. Juhtkõver (poolring) g on jaotatud kaheksaks võrdseks osaks ning läbi jaotuspunktide on tõmmatud moodustajad. Kaksvaatel (joon. 48-5, a) on moodustajate eestvaated paralleelsed x -teljega, pealtvaated aga läbivad juhtsirge punktkujutist s' . Joonisel 48-5, b näeme sama konoidi aksonomeetrilist kujutist. Kirjeldatud konoidi kohta on huvitav märkida, et tema juhtringiga paralleelne tasandiline lõikejoon (näiteks lõikejoon f) on ellips.

Kui silindroidi juhtjoonteks võtta kaks kiivsirget, siis silindroid osutub hüperboolseks paraboloidiks, s. o. teist järku pinnaks. Järelikult **hüperboolset paraboloidi** võib defineerida joonpinnana, mis tekib kahte kiivsirget lõikava sirgjoone liikumisel, kui see sirgjoon jääb paralleelseks mingi etteantud tasandiga (juhtpinnaga).

Hüperboolse paraboloidi tekkimist

selgitab joonis 48-6. Olgu juhtjoonteks kiivsirged AB ja CD ning juhtpinnaks tasand α . Lastes moodustajal BD liikuda mööda juhtjooni AB ja CD paralleelselt tasandiga α , saamegi hüperboolse paraboloidi. Sama pinna saame aga ka siis, kui võtame juhtjoonteks kiivsirged BD ja AC (kaks endist moodustajat) ning laseme sirgel AB liikuda paralleelselt teise juhtpinnaga β . Nii selgub, et hüperboolsel paraboloidil on kaks parve moodustajaid ja kaks juhtpinda. Kõik ühte ja samasse parve kuuluvad moodustajad on omavahel kiivsed, kuid lõikavad kõiki teise parve moodustajaid. Mis tahes kaks sirget ühest parvest võivad olla juhtjoonteks ja mis tahes sirge teisest parvest pinna moodustajaks.

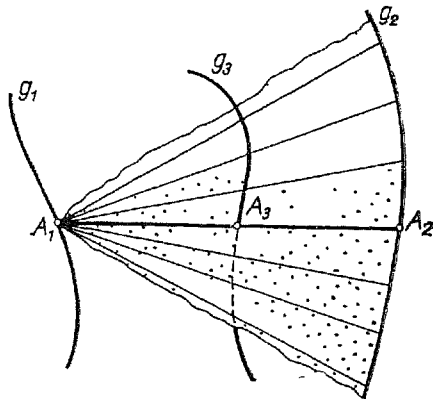
Joonisel 48-7 on tuletatud hüperboolse paraboloidi kaksvaade. Juhtjoonteks on kiivsirged AB ja CD ning juhtpinnaks tasand α ($\alpha \perp \varepsilon_1$). Moodustajate pealtvaated $A'C'$, $1'4'$ jne. on tõmmatud paralleelselt juhtpinna sirgkujutisega α' ; moodustajate eestvaated aga on määratud

punktide 1, 4, 2, 5 jne. eestvaadetega. Sama pinna võiksime tuletada ka nii, et võtame juhtjoonteks kiivsirged AC ja BD ning tõmbame moodustajate pealtvaated paralleelselt teise juhtpinna β sirgkujutisega β' .

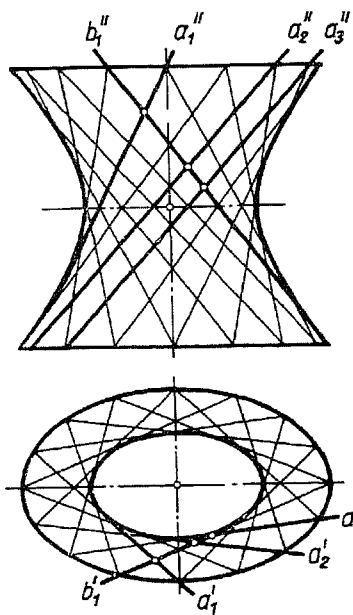
Hüperboolset paraboloidi kasutatakse mõnikord eriliiki katuste põhivormina. Näiteks katuse pool, mille hari ja räästas on horisontaalsed kiivsirged, osutub hüperboolseks paraboloidiks.

2) Kolme juhtjoonega joonpind tekib sirgjoone liikumisel, kui sirgjoon igas oma asendis lõikab kolme etteantud juhtjoont. Näitame, et selle pinna moodustaja asendid on juhtjoontega juba täiesti määratud. Olgu ruumis antud kolm juhtjoont g_1, g_2 ja g_3 (joon. 48-8). Valime esimesel neist punkti A_1 . See punkt koos teise juhtjoonega g_2 määrab ühe koonilise pinna. Lõigaku see kolmandat juhtjoont punktis A_3 . Sirge A_1A_3 kui nimetatud koonilise pinna moodustaja lõikab muidugi sama koonilise pinna juhtjoont g_2 , näiteks punktis A_2 . Järelikult sirge A_1A_3 on antud juhtjoonte üks ühine lõikaja, seega nende juhtjoontega määratud joonpinna moodustaja. Muutes punkti A_1 asukohta joonel g_1 , võime saada sama mõttekäigu alusel kui tahes palju moodustajaid.

Kolme juhtjoonega joonpindadest vaatleme ainult pinda, mille juhtjoonteks on kolm üksteise suhtes kiivset sirget. Saab tõestada, et niisugune joonpind osutub üldiselt ühekatteliseks hüperboloidiks, erijuhul aga hüperboolseks paraboloidiks. Paragrahvis 46 selgus, et ühekattelisel pöördhüperboloidil on kaks parve sirgjoonelisi moodustajaid. Samuti on ka üldisel ühekattelisel hüperboloidil kaks parve sirgeid moodustajaid (joon. 48-9). Mis tahes kolm moodustajat a_1, a_2, a_3 samast



Joonis 48-8



Joonis 48-9

parvest võivad olla ühekattelise hüperboloidi juhtsirgeiks. Nende kiivsete juhtsirgete kõik ühised lõikajad $b_1, b_2 \dots$ osutuvad ühekatte-

lise hüperboloidi moodustajateks teisest parvest.

Kruvipindu käsitleme eraldi järgmises paragrahvis.

KÜSIMUSED

1. Mis on joonpind?
2. Kuidas tekib: a) kooniline pind, b) silindriline pind, c) puutujatepind?
3. Kuidas tekib silindroid?
4. Kuidas tekib sirgjoone liikumisega hüperboolne paraboloid?
5. Kuidas tekib sirgjoone liikumisega üldine ühekatteline hüperboloid?

§ 49. KRUVIPINNAD

Objekti niisugust liikumist, mille puhul kõik tema punktid kulgevad mööda silindrilisi kruvijooni, millel on ühine telg ja võrdne samm, nimetatakse **kruvijooneeliseks liikumiseks**. Kruvijooneelisel liikumisel on objekti iga punkti trajektoorigil (kruvijooneel) oma raadius, mis võrdub selle punkti kaugusega teljest.

Pinda, mis tekib joone (moodustaja) kruvijooneelisel liikumisel, nimetatakse **kruvipinnaks**. Kui moodustaja kruvijooneelisel liikumisel samm $h=0$, siis kruvipind taandub pöördpinnaks, kui aga $h=\infty$, siis silindriks. Seega pöördpinda ja silindrilist pinda võib vaadelda kruvipinna äärmiste vormidena.

Kruvipinna määramisandmeteks üldjuhul on tema telg (t), moodustaja (m) ja samm (h).

Tehnikas omavad suurt tähtsust sirgjooneelise moodustajaga kruvipinnad,* eriti aga normaalkruvipind (ehk harilik kruvipind), kaldkruvipind (ehk Archimedese kruvipind) ja kruvijoone puutujatepind. Vaat-

leme neid pindu koos nende rakendustega üksikasjalisemalt.

1. Normaalkruvipind (harilik kruvipind) tekib sirgjoone kruvijooneelisel liikumisel, kui sirgjoon igas oma asendis lõikab pinna telge täisnurga all. See pind on lõpmata ulatuslik nii telje kui moodustaja sihis. Ta ei lõika iseennast, sest tema moodustaja on igas oma asendis kiivne võrreldes eelmise asendiga. Joonisel 49-1 on kaksvaates kujutatud selle pinna teljelähedane riba, mille tekitab moodustaja lõik $a \perp t$. Riba servadeks on lõigu otspunktide poolt kujundatud kruvijooned. Ribast on esitatud üks keerd, s. o. tükk kõrgusega üks samm (h). Kujutise ilmekuse suurendamiseks on näidatud ka lõigu a kahe jaotuspunkti trajektoore ja moodustaja asendid täispöörde iga kaheteistkümnendiku järel.

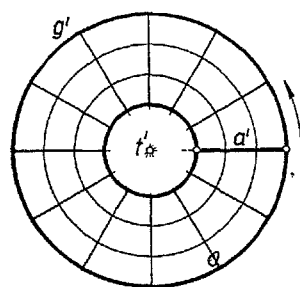
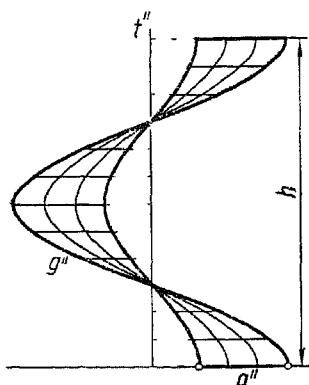
Normaalkruvipind kuulub koonoidide klassi (§ 48), sest telgsirget t ja kruvijoont g võib vaadelda juhtjoontena, telje risttasandit aga juhtpinnana.

Normaalkruvipinna rakendusena nimetame **ruutkeerret**, s. o. keha, mis tekib ruudu kruvijooneelisel liikumisel, kui ruudu kaks külgsirget on telje ristlõikajad (joon. 49-2). Tavaliselt toetub liikuva ruudu külg mitte teljele, vaid ühe pöördsilindri (südamik) pinnale. Tegelikult keermetamisel lõigatakse südamikust jämedama silindri kehasse keermega kongruentne soon, mis ulatub südamiku pinnani.

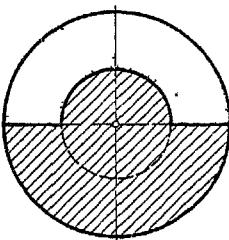
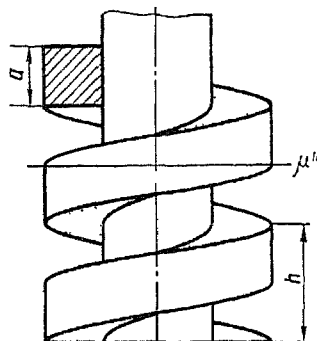
Keermega varustatud silindrilisi ja koonilisi kehi nimetatakse **kruvideks**. Keha, mille silindrilises avas on kruvi keermega kongruentne soon, nimetatakse **mutriks**. Keermed jagunevad nagu kruvijoonedki vasaku- ja paremakäelisteks.

Ruutkeermes moodustamisel ruudu need küljed, mis on teljega risti,

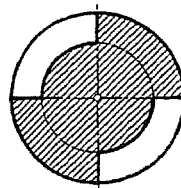
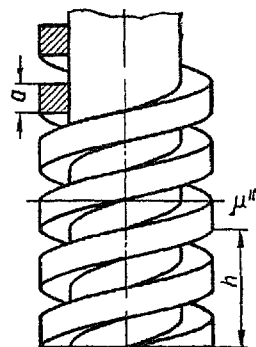
* Sirgjooneelise moodustajaga kruvipindu nimetatakse ka **helikoidideks**.



Joonis 49-1



Joonis 49-2



Joonis 49-3

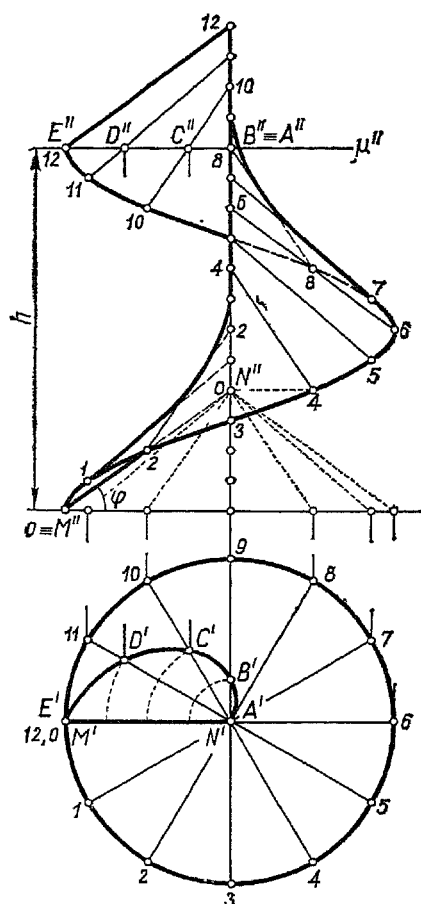
tekitavad normaalkruvipindu (joonisel 49-2 on need pinnad täpitatud), teljega paralleelsed küljed aga pöördsilindrite pindu. Üheainsa ruudu kruvijooneisel liikumisel tekib ühekäiguline (ühesooneiline) keere. Sel puhul kruvijoonte samm $h=2a$, kus a on ruudu külje pikkus. Kui kruvijooneisel liikumisest võtab osa korraga kaks ruutu, millede vaheline kaugus telje sihis on võrdne ruudu küljega a , siis saadakse kahekäiguline (kahesooneiline) keere (joon. 49-3). Sel puhul kruvijoonte samm $h=4a$. Analoogiliselt võib saada kolmekäigulise keermee.

Keermee tasandilist lõiget, mis läbib pöördetelge, nimetatakse **keermee profiiliks**. Näiteks ruutkeermee profiiliks on seda keeret tekitav ruut.

Lõigates ühe- ja kahekäigulist ruutkeeret tema telje risttasandiga μ , saame vastavalt joonistel 49-2 ja 49-3 esitatud kujutised.

2. Kaldkruvipind tekib sirgjoone kruvijooneisel liikumisel, kui sirgjoon igas oma asendis lõikab pinna telge ühe ja sama teravnurga all. See pind lõikab iseennast lõpmata palju kordi.

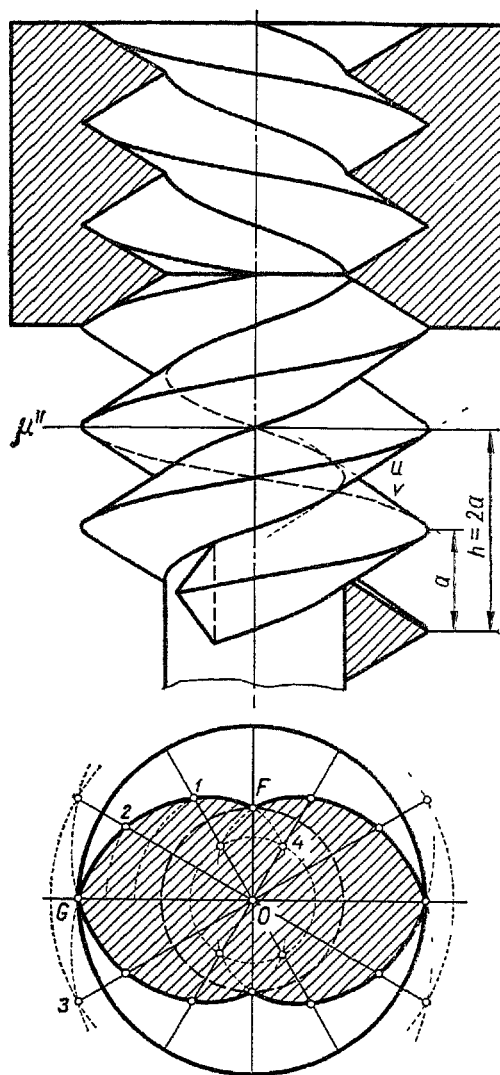
Joonisel 49-4 on kujutatud kaldkruvipinna riba, mille moodustajaks on lõik MN — põhikaldenurgaga ϕ . Pinna riba joonestamist alustame punkti M liikumisel tekkiva kruvijoone projektsioonide tuletamisest. Selleks on samm h ja pealtvaate kontuur (ringjoon) jaotatud 12 võrdseks osaks. Lõigu MN pöördumisel ringjoone ühe jaotuse võrra nihkub otspunkt N teljel sammu ühe jaotuse



Joonis 49-4

võrra. Seega moodustajate joonestamiseks kruvipinnale tuleb vaid kruvijoone punktid 1, 2, 3, ... ühendada sammu vastavate jaotuspunktidega teljel.

Moodustajate joonestamisel võib aga kasutada ka niisugust pöördkoo-



Joonis 49-5

nust, nn. **kaldekoonust**, mille moodustajate kaldenurk põhiekraani suhtes on φ . Kruvipinna moodustajad osutuvad siis paralleelseteks kaldekoonuse vastavate moodustajatega. Joonisel 49-4 on kaldekoonuse tipuks punkt N; vajalikud moodus-

tajad koonusel on tõmmatud punktjoonega.

Pinnariba eestvaate kontuur koosneb servjoonte projektsioonidest ja moodustajate projektsioonide mähisjoontest.

Kaldkrüvipinna tasandiline lõige risti teljega osutub Archimedese spiraaliks, sest moodustaja krüvijoonelisel liikumisel tema lõikepunkt telje risttasandiga (näiteks niivoopinnaga μ) eemaldub teljest võrdeliselt pöördnurraga. Moodustaja asendite 8...12 puhul on lõikepinnale μ jõudnud moodustaja punktid A, B, C, D ja E . Lõikepinna ja põhiekraani paralleelsuse tõttu projekteerub spiraal põhiekraanile moondevabalt spiraaliks, mis läbib punkte A', B', C', D' ja E' .

Teades, et punktid $A', B', C', \dots$ kuuluvad Archimedese spiraalile, saab neid leida ka sõltumatult eestvaatest. Selleks on vaid vaja lõik $M'N' \equiv A'E'$ jaotada neljaks võrdseks osaks ning viia jaotuspunktid ringikaartega vastavatele jaotuskiirtele (joonisel 49-4 on need kaared tõmmatud punktjoonega).

Kaldkrüvipinna rakendusena vaatleme kolmnurkkeeret, s. o. keha, mis tekib võrdhaarse kolmnurga krüvijoonelisel liikumisel ümber telje, mis asetseb kolmnurga tasandis ning on kolmnurga alusega paralleelne. Kolmnurga kumbki haar moodustab siis ühe kaldkrüvipinna.

Ühekäigulise kolmnurkkeermesamm võetakse võrdne kolmnurga alusega a ; kahe- ja kolmekäigulise kolmnurkkeermes puhul aga võetakse krüvijoonete samm vastavalt 2a ja 3a.

Joonisel 49-5 on esitatud kahekäigulise kolmnurkkeermega krüvi koos vastava mutriga. Eestvaates joonestatakse kõigepealt kolmnurkade tippude trajektooriid (krüvijooned). Krüvipindadest tekkiv kontuur

joonestatakse eestvaatel harilikult sirgjoontega, mis puutuvad suurema ja väiksema raadiusega krüvijooni (vaata näiteks kontuure u ja v). Kaldkrüvipinna eestvaate kontuur on tegelikult küll kõverjoon, mis kergelt paindub telje poole (vaata joonist 49-4), kuid tema asendamist sirgega kolmnurkkeermes joonestamisel õigustab tema küllalt väike kõverus vaadeldavas piirkonnas.

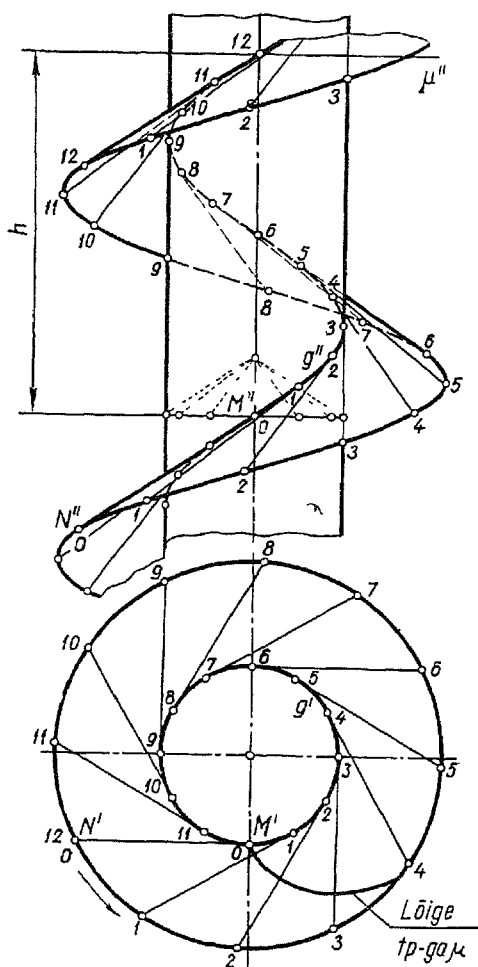
Kahekäigulise kolmnurkkeermega poldi ristlõiget piiravad neli Archimedese spiraali (vaata tasandiga μ saadud kujutist joonisel 49-5). Iga spiraali kaare joonestamiseks on lisaks kaare otspunktidele leitud veel kaks vahepealset punkti, kaare FG puhul näiteks punktid 1 ja 2. Need punktid on konstrueeritud Archimedese spiraali definitsiooni põhjal (§ 44) nurga FOG ning raadiuste OG ja OF vahe jaotamise teel kolmeks võrdseks osaks. Et soodustada spiraali vajaliku kaare FG väljajoonestamist, võib leida spiraali mõned punktid ka selle kaare pikendustel (nagu punktid 3 ja 4 joonisel 49-5).

Mutri kujutisel näeme tema ava tagaseinas olevat keeret — see jäljendab poldi keeret poldi tagaküljelt.

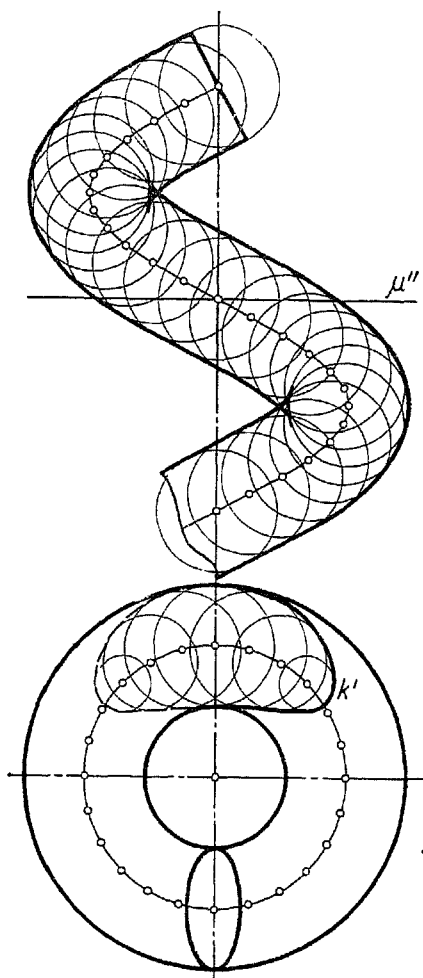
Ruudu ja kolmnurga kõrval esinevad keermeprofiilidena ka ristkülik ja trapets. Vastavaid keermesid joonestatakse ruut- ja kolmnurkkeermes eeskujul.

Tehnilistel joonistel kasutatakse keermetatud detailide kujutamisel leppelisi standardiseeritud kujutamiskiise; neid me siin aga ei käsitle.

3. Krüvijoones puutujatepind. Krüvijoones puutujatepinna moodustavad antud krüvijoones puutujad (vaata ka § 48). Sama pind tekib telje suhtes kiivselt kaldu asetseva sirgjoone krüvijoonelisel liikumisel.



Joonis 49-6



Joonis 49-7

Kruvijoone puutujatepind lõikab korduvalt iseennast.

Joonisel 49-6 näeme puutujatepinna riba, mille tekitab kruvijoone g puutuja lõik MN , kui otspunkt M jääb lõigu igas asendis puutepunkti. Selle riba kaksvaate joonestamist alustame punkti N poolt kujundatava kruvijoone ja kruvijoone g vaadete tuletamisest. Seejuures pea-

me silmas, et mõlemal kruvijooneel on võrdne samm h . Need kruvijooneid jäävad pinnariba äärteks. Kujutise ilmekuse tõstmiseks on riba varustatud moodustajatega täispöörde kaheteistkümnendike järel. Moodustajate mõlemad vaated saame kruvijoonte vaadete vastavate punktide ühendamise teel.

Et kruvijoone kõigil puutujatel on

uks ja seesama põhikaldenurk, siis võib nende joonestamisel kasutada niisugust kaldekoonust, mille moodustajate põhikaldenurk võrdub lõigu MN põhikaldenurgaga. Joonisel on see kaldekoonus esitatud punktjoonega.

Kruvijoone puutujatepinna lõige risti teljega (joonisel 49-6 lõige tasandiga μ) osutub kruvijoont kandva silindri ristlõike (ringjoone) evolvendiks. **Ringjoone evolvent** on tasandiline joon, mille tekitab sirgjoone punkt, kui sirgjoon veereb ümber ringjoone (näiteks ringjoonelt lahtikeritava pingule tõmmatud niidi otsa trajektoori).

Kruvijoone puutujatepinda rakendatakse spetsiaalsete tiguülekannete juures.

4. Torukruvipind tekib püsiva raadiusega ringjoone liikumisel nii, et ringjoone tšenter liigub mööda silindrilist kruvijoont, ringi tasand aga jääb igas oma asendis risti kruvijoonega (s. o. risti kruvijoone puutujaga ringjoone tsentris). Üht niisugust pinda näeme joonisel 49-7. Selle pinna sees võib veereda sfäär (puutesfäär), mille raadius võrdub moodustajaringjoone raadiusega.

Torukruvipinna projektsioonide saamiseks joonestame kõigepealt tema juhtkruvijoone projektsioonid. Seejärel valime juhtkruvijoonele rea tsentreid puutesfääride jaoks ning joonestame puutesfääride eestvaated, s. o. ringjooned, mille raadius võrdub pinna moodustaja raadiusega. Et torukruvipinda võib vaadelda oma puutesfääride mähispinnana, siis tema eestvaate kontuuriks tulevad järelikult puutesfääride eestvaadete mähisjooned. Torukruvipinna pealtvaate kontuuriks aga saame kaks kontsentrilist ringjoont.

Lõigates torukruvipinda tema telje ristasandiga, saame kinnise neeru-

kujulise kõverjoone, mis joonisel on näha moondevabal kujul (k').

Torukruvipind esineb praktikas näiteks ümartraadist tehtud silindrilise keerdvedru pealispinnana.

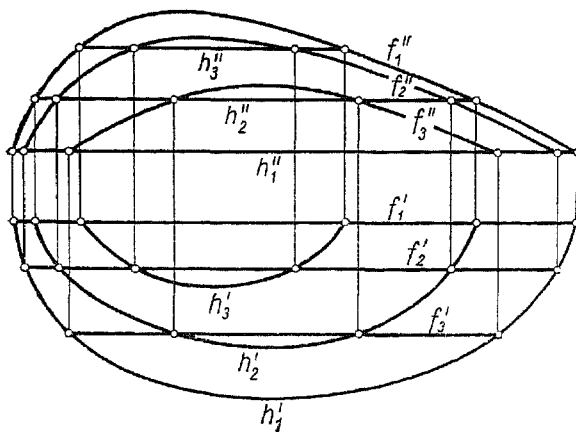
Torukruvipind, kõik pöördpinnad ja üldised teist järku pinnad, millel on ringjoonelisi lõikeid, kuuluvad nn. tsükliliste pindade hulka. **Tsükliliseks pinnaks** nimetatakse pinda, mis tekib püsiva või muutuva raadiusega ringjoone suvalisel liikumisel. Tsüklilise pinna igast punktist saab läbi panna tasandi nii, et ta lõikab seda pinda ringjoont mööda.

KÜSIMUSED

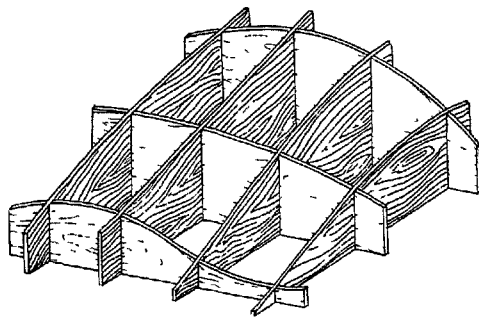
1. Kuidas tekib: a) normaalkruvipind, b) kaldkruvipind?
2. Missuguste pindadega on püritud: a) ruutkeere, b) kolmnurkkeere?
3. Missugune joon tekib kaldkruvipinna liikumisel tema telje ristasandiga?
4. Kuidas tekib kruvijoone puutujatepind?
5. Mis pinnaks taandub torukruvipind, kui tema samm $h=0$?

§ 50. KARKASSPINNAD

Praktikas tuleb kujutada ka pindu, mis ei allu mingisugustele matemaatilistele seaduspärasustele (näiteks maapind) või mida saab matemaatilisel esitada vaid ligikaudselt. Niisuguste pindade määramiseks antakse joonisel ette teatav hulk sellele pinnale kuuluvaid jooni, mis moodustavad selle pinna kandesõrestiku ehk **karkassi**. Praktistel kaalutlustel modustatakse pinna karkass kahest lõikuvate joonte parvest. Seda tehakse nii, et ühe parve jooned antakse ette, teise parve jooned aga konstrueeritakse esimese parve järgi. Tavaliselt võetakse karkassjoonteks pinna nivoojooned, s. t. üldiselt kõverjoonelised horisontaa-



Joonis 50-1



Joonis 50-2

lid ja frontaalid, mis tekivad pinna lõikamisel horisontaalsete ja frontaalsete tasapindadega.

Ühe konkreetse karkasspinna tüki kaksvaadet näeme joonisel 50-1. Selle pinna karkassjoonte üheks parveks on võetud pinna horisontaalid $h_1, h_2, \dots$ ning teiseks parveks neid lõikavad pinna frontaalid $f_1, f_2, \dots$. Joonestamisel on ühe parve jooned võetud lähteandmeteks, teine parv aga on konstrueeritud nende järgi.

Joonisel 50-2 on kujutatud ühe pinnatüki karkassi mudel. See koosneb karkassjoonte järgi välja lõigatud laudadest, mis on üksteisega ühendatud sisselõigete abil. Kui niisugune karkass üle tõmmata (või üle lüüa) mingi lehtmaterjaliga, saamegi sellele karkassile vastava pinna. See-sugust pinna saamise võtet kasutatakse auto-, lennuki- ja laevaehituses ning mujal.

Karkasspind erineb kinemaatilistest ja analüütilistest pindadest selle poolest, et tema punkte ja jooni, mis ühti karkassjoontega, saab konstrueerida ainult ligikaudselt. Seetõttu karkass ei määra pinda ma-

temaatilises mõttes täpselt, s. t. üks ja seesama karkass võimaldab saada üksteisest vähesel määral erinevaid pindu.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missuguste andmetega määratakse karkasspind?
2. Mille poolest karkasspind erineb kinemaatilistest pindadest?
3. Võtke ette joonisel 50-1 antud karkasspinna horisontaalid ning konstrueerige nende järgi selle pinna frontaalid.

§ 51. KÕVERPINNA PUUTETASAND

Kõverpinna kaks ühise puutepunktiga puutujat määravad tasandi, millel asetsevad selle kõverpinna kõik sama puutepunktiga puutujad; seda tasandit nimetatakse **kõverpinna puutetasandiks**. Kui kõverpinnal tõmmata läbi punkti M kõverad g_1 ja g_2 ning samas punktis konstrueerida neile puutujad t_1 ja t_2 , siis need puutujad määravadki kõverpinna puutetasandi τ punktis M (joon.

51-1). Puutetasandi konstrueerimisel tuleb joonteks g_1 ja g_2 kõverpinnal võtta võimalikult lihtsad jooned, esmajoones tasandilised jooned. Pöördpinna puhul näiteks sobivad nendeks joonteks kõige paremini paralleel ja meridiaan läbi antud puutepunkti.

Kõverpinna puutetasandi normaal läbi puutepunkti on ühtlasi kõverpinna normaaliks (n) selles punktis (joon. 51-1).

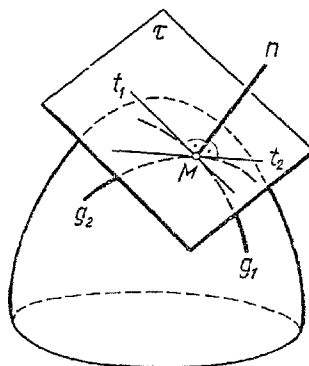
Mõnede pindade puhul on pinna normaal hõlpsasti leitav. Nii näiteks laheb sfääri iga normaal läbi sfääri keskpunkti, pöördsilindri iga normaal on silindri telje ristlõikaja, pöördkoonuse normaal antud punktis aga lõikab koonuse telge ning on risti seda punkti läbiva moodustajaga. Sääraste pindade puhul on puutetasandit otstarbekohane konstrueerida normaali ristasandina läbi puutepunkti.

Puutetasand võib kõverpinna puutada ka mööda joont. Näiteks kõigi laotuvate pindade, s. o. silindriliste, kooniliste ja puutujatepindade puhul toimub puutumine mööda sirgjoont*. Nii näiteks joonisel 51-2 puutub tasand τ silindrilist pinda mööda moodustajat m . Kui rõngas lamab rõhtsal tasandil, siis on see tasand rõngaspinna puutetasandiks, kusjuures puutejooneks on ringjoon. Puutetasand võib kõverpinna ka lõigata, nagu näiteks silindrilise pinna puhul joonisel 51-2.

Kõverpindadel võib esineda punkte, kus puutetasand pole määratud. Niisugusteks punktideks on näiteks koonilise pinna tipp, iga punkt puutujatepinna servjoonel jm.

Esitame järgnevalt mõned näited puutetasandite konstrueerimise kohta.

* Mittelaotuvate joonpindade puhul puutumine ei toimu sirget mööda.

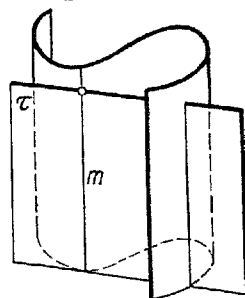


Joonis 51-1

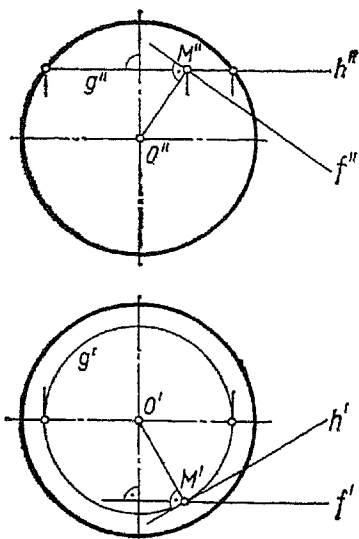
Näide 1. Olgu vaja konstrueerida sfääri puutetasand τ , kui on antud puutepunkti M eestvaade M'' (joon. 51-3).

Leiame kõigepealt puutepunkti pealtvaade M' , näiteks horisontaalse paralleeli g abil ning joonestame raadiuse OM projektsioonid. Puutetasandi τ saame nüüd konstrueerida raadiuse OM (kui kerapinna normaali) ristasandina läbi punkti M . Analoogilise ülesande oleme varem juba lahendanud (§ 27, näide 4). Tõmbame läbi punkti M tasandi τ horisontaali h ja frontaali f . Arvestades tingimust $OM \perp \tau$, peab olema $h' \perp OM'$ ja $f'' \perp OM''$. Sirgete h ja f teised projektsioonid on risti sidejoontega. Lõikuvate sirgetega h ja f ongi tasand τ määratud.

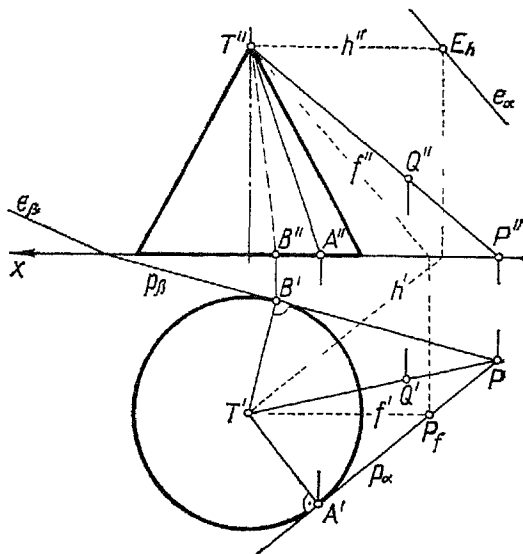
Ülesannet saab lahendada ka normaali kasutamata. Sel puhul tõmba-



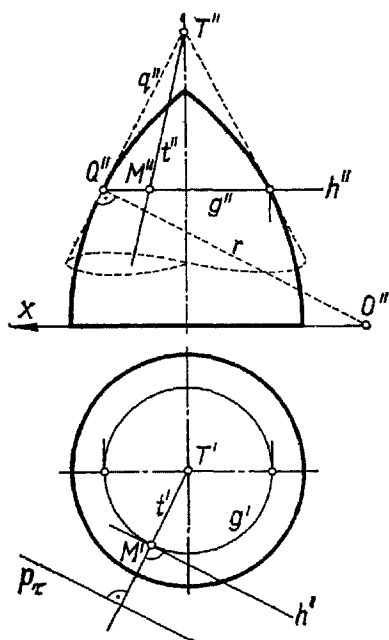
Joonis 51-2



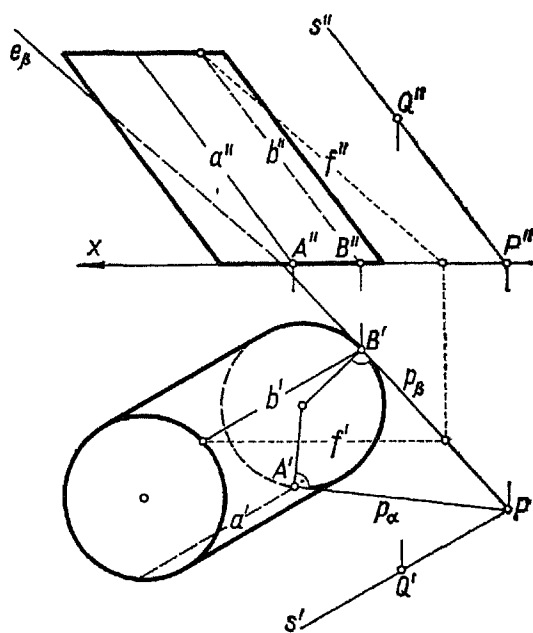
Joonis 51-3



Joonis 51-4



Joonis 51-5



Joonis 51-6

me sfääril läbi punkti M kaks ringjoont — horisontaalse ja frontaalse — ning joonestame nende puutujad punktis M . Need puutujad määravadki otsitava puutetasandi. Soovitame lugejal endal lahendada ülesande selle mõttekäigu alusel ning veenduda, et nii saadavad puutujad on endised sirged h ja f .

Näide 2. Leiame pöördkoonuse niisugused puutetasandid α ja β , mis läbivad väljaspool koonust olevat punkti Q (joon. 51-4).

Pole raske veenduda, et punkti Q koonuse tipuga T ühendav sirge TQ peab olema otsitavate puutetasandite lõikesirge. Järelikult puutetasandite põhijäljed peavad läbima sirgjoone TQ põhijälje P . Teiselt poolt peab kummagi puutetasandi põhijalg puutuma koonuse põhjaringjoont. Sellega on otsitavate tasandite põhijäljed p_α ja p_β leitud. Need jälgsirged koos puutepunktidest A ja B tõmmatud puutemoodustajatega AT ja BT määravadki otsitavad puutetasandid α ja β .

Joonisel on punktjoonega näidatud ka puutetasandi α esijälje e_α tuletamine. Et telgpunkt $p_\alpha \times x$ läks joonise piirkonnast välja, siis on selle asemel kasutatud tasandi α nivoojooni h ja f läbi koonuse tipu T : jälgsirge e läbib horisontaali h esijälgpunkti E_h ning on paralleelne frontaali eestvaatega f'' .

Kõvera meridiaaniga pöördpinna puutetasand määratakse harilikult puutepunkti läbiva paralleeli ja meridiaani puutujatega.

Näide 3. Leiame rõngaspinna puutetasandi τ , kui on antud puutepunkti M eestvaade M'' (joon. 51-5).

Joonisel esitatud kuhjakujuline pind on iseenest lõikava rõngaspinna sisemise osa üks pool. Pinna moodustaja (ringjoone kaare) raadius

on r . Puutepunkti pealtvaate M' leiame tavalisel viisil — punkti M läbiva paralleeli (g) abil. Selle paralleeli puutuja punktis M osutub puutetasandi horisontaaliks h . Punkti M läbiva meridiaani puutuja t on aga puutekoonuse moodustajaks ning läbib järelikult puutekoonuse tippu T . Viimane leitakse frontaalse meridiaani puutuja q abil, mis on risti selle meridiaani raadiusega OQ ($q'' \perp O''Q''$). Otsitav tasand τ on määratud puutujatega h ja t . Joonisel on esitatud ka tasandi τ põhijalg p_τ .

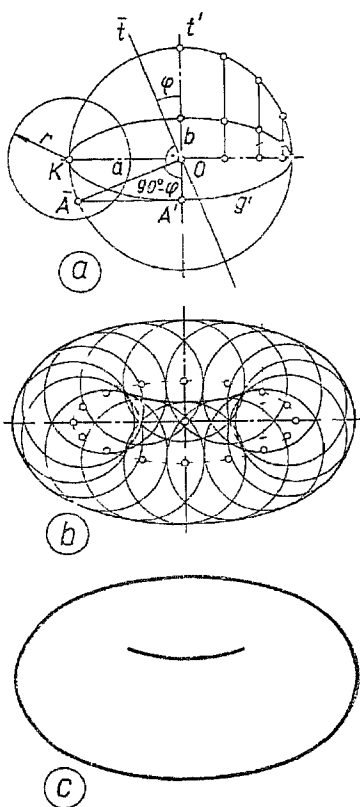
Näide 4. Leiame ringpõhjaga kaldsilindri (elliptilise silindri) puutetasandid α ja β läbi antud punkti Q (joon. 51-6).

Otsitavad puutetasandid lõikuvad mööda sirget s , mis läbib punkti Q ning on paralleelne silindri moodustajatega. Puutetasandite α ja β põhijäljed p_α ja p_β läbivad sirge s põhijälje P ning puutuvad silindri põhjaringjoont. Need jälgsirged koos puutepunktidest A ja B tõmmatud puutemoodustajatega a ja b määravadki tasandid α ja β . Tasandi β frontaali f abil on joonisel punktjoonega leitud ka selle tasandi esijalg $e_\beta \parallel f''$.

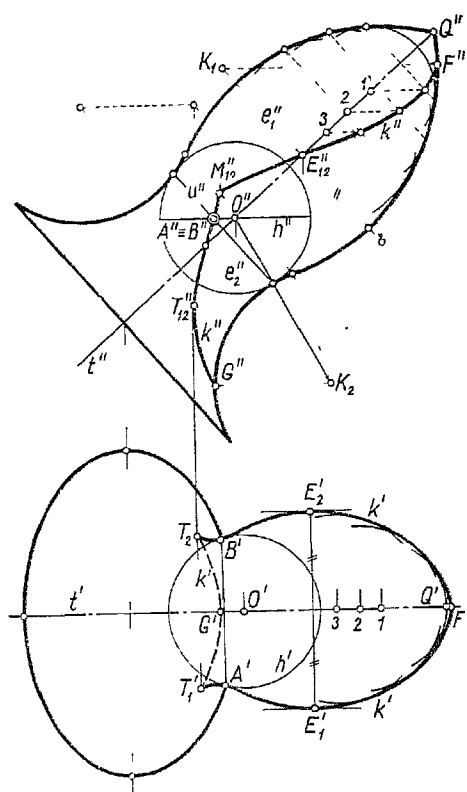
§ 52. PÖÖRDPINNA RISTPROJEKTSIOON PINNA TELJE KALDASENDI PUHUL

Pöördpinnast ilmekama ristprojektsiooni saamiseks võib pinna telje võtta ekraani suhtes kaldu. Kujutise kontuur on siis leitav pöördpinna niisuguste puutesfääride abil, mis puutuvad pöördpinda mööda ringjooni. Et pöördpind on selliste sfääride mähispinnaks, siis osutub pöördpinna kontuur nende sfääride ristprojektsioonide (ringjoonte) mähiskõveraks.

Näide 1. Tuletame puutesfääride abil hariliku rõngaspinna ristprojektsiooni, kui pinna moodustaja (ringjoone) raadius on r , juhtringjoone (g) raadius a ning pinna telje t kaldenurk joonisepinna suhtes φ (joon. 52-1, a).



Joonis 52-1



Joonis 52-2

Rõngaspinna juhtringjoone tasandi kalde-nurk on siis $90^\circ - \varphi$. Selle ringjoone ristprojektsiooniks saame ellipsi, mille lühem pooltelg $b = a \cos(90^\circ - \varphi) = a \sin \varphi$. Telgede järgi on see ellips hõlpsalt konstrueeritav (§ 42). Joonisel on ringjoon jaotatud 16 võrdseks osaks, saades nii ka ellipsil 16 punkti. Järgnevalt on joonestatud puutesfäärade ristprojektsioonid, s.o. ringid, mille tsentriteks on ellipsi jaotuspunktid ja raadiuseks rõngaspinna moodustaja raadius r (joon. 52-1, b). Nende ringjoonte mähiskõver annabki rõngaspinna kujutise kontuuri (joon. 52-1, b, c). On tähelepanuväärne, et rõngaspinna kujutise kontuur koosneb antud juhul kahest osast — välimisest kinnisest kõverast (see meenutab ellipsit, kuigi ta seda pole) ning sisemisest lahtisest kõverast.

Vaatamata sellele, et kujutise kontuuri

tuletamisel mähiskõverana ei konstrueerita joone uhtki kindlat punkti, on tulemust ometi võimalik joonestada väga täpselt.

Kui pöördpinna ristprojektsiooni kontuuri soovitakse tuletada punkthaaval, siis tuleb kasutada puutesfääre, mis puutuvad pöördpinna mõõda paralleelele (§ 46).

Näide 2. Olgu vaja tuletada pöördpinna pealtvaade, kui pinna telg t on paralleelne esiekraaniga, kuid kaldu põhiekraani suhtes; pinna eestvaade on antud (joon. 52-2).

Valime vabalt paralleeli $u(u'')$ ning joonestame sellele vastava puutesfääri. Selle keskpunkt O on hõlpsasti leitav, sest meridiaan koosneb käesoleval juhtumil ringjoonte kaartest. Paralleelil u leidub üldiselt kaks niisugust punkti A ja B , mis on samaaegselt ka pöördpinna kontuuri k punktideks, s.t. punktideks, milles põhikiired puutuvad pöörd-

pinda. Järelikult just need paralleeli u punktid projekteeruvad pealtvaate kontuurile. Punktide A ja B asukohad paralleelil u määrab tingimus, et neid punkte labivad põhikiired peavad puutuma ka sfääri, sest pöördpinna ja puutesfääril on nende ühise paralleeli igas punktis ühine puutetasand. Et põhikiired saavad sfääri puutuda ainult mööda horisontaalset suuringjoont $h(h'' \perp O'O'')$, siis on otsitavateks punktideks A ja B järelikult ringjoonte u ja h lõikepunktid. Nisus $A'' = B'' = u'' \times h''$. Pöördpinna pealtvaate kontuuri k' punktid A' ja B' leitakse sidejoonte abil sfääri suuringjoone h moondevabalt pealtvaatelt h' . Kontuuri k' puutujaks punktis A' on ringjoone h' puutuja. Analooiliselt saab leida kui tahes palju kontuuri punkte, muutes vaid lähteparalleeli u asukohta.

Olgu nimetatud, et kontuuri punktide leidmisel võib puutesfääride asemel kasutada ka puutekoonuseid. Et aga konstruktsioon koonustega on mõnevõrra keerulisem, siis jätame selle siin esitamata. Pealegi on puutesfääridel veel see eelis, et nende abil on poordpinna pealtvaate kontuuri võimalik joonestada sfääride projektsioonide mähisjoonena. Nii on tehtud ka vaadeldava pöördpinna ülemise osa puhul, kus on kasutatud puutesfääre keskpunktidega 1, 2 ja 3.

Pinna kontuur k on sümmeetriline pinna telge läbiva frontaaltasandi suhtes. Sel kontuuril on kaks murdekohta M_1 ja M_2 (ühine eestvaade M''_{12}), mis asuvad sellel paralleelil, mille kohal meridiaani kaar tsentriga K_1 läheb üle kaareks tsentriga K_2 . Joone k kõrgeim punkt F ja madalaim punkt G asuvad vastavalt frontaalse meridiaani kaarte tsentrite K_1 ja K_2 kõrgusel. Ekvaatorit e_1 ületab kontuur k punktides E_1 ja E_2 , mille ühine eestvaade E''_{12} asetseb pinna telje t eestvaatel. Et punktid E_1 ja E_2 on ekvaatori e_1 horisontaalse diameetri otspunktid, siis nende pealtvaated E'_1 ja E'_2 asuvad telje t pealtvaatest ekvaatori raadiuse kaugusel. Joone k pealtvaate k' puutujad punktides E'_1 ja E'_2 on paralleelsed telje pealtvaatega t' . Analooiliselt saadakse ekvaatorile e_2 vastavad pealtvaate kontuuri punktid.

Käesoleval juhtumil on kõveral k' ka tagasipöördpunktid T'_1 ja T'_2 ; need leitakse sidejoonte-sihilise puutuja tõmbamisega kõverale k'' .

§ 53. LIHTSAMATE TEIST JÄRKU PINDADE TASANDILISED LÕIKEJOONED

1. Sfääri ja pöördsilindri lõiked.
Teist järku pindade tasandiliste lõikejoonte kujutamisel on tähtis meelles pidada, et

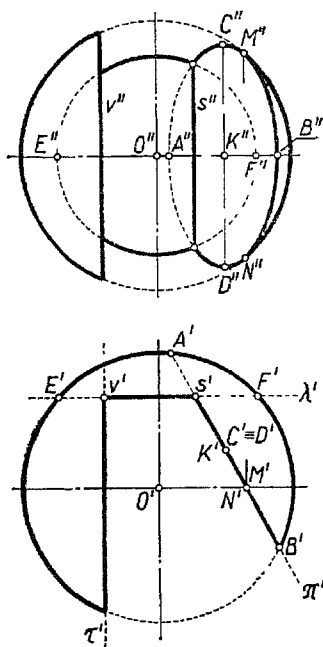
(45) teist järku pindade kõik tasandilised lõikejooned on teist järku jooned.

Kerapinna iga tasandiline lõikejoon on ringjoon. Selle ringjoone ja tema ristprojektsiooni määramiseks piisab lõikava tasandi kaldenurga, ringi keskpunkti ja raadiuse teadmisest.

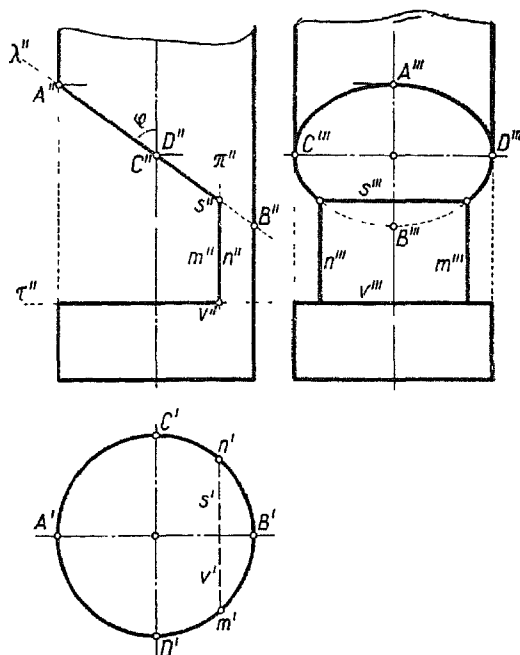
Näide 1. Keral on väljalõige, mida piiravad põhiekraani risttasandid τ , π ja λ (joon. 53-1). On vaja joonestada selle kera järelejäänud osa eestvaade.

Tasandi τ ja kerapinna lõikeringjoon projekteerub esiekraanile sidejoonega ühtivaks sirglõiguks, sest tasand τ on risti esiekraaniga.

Lõikav tasand λ , olles esiekraaniga paralleelne, lõikab kerapinda mööda ringjoont, mille diameeter võrdub lõiguga $E'F'$. See ringjoon projekteerub esiekraanile moondevabalt; tema eestvaatest vajame ainult faktilisele väljalõikele vastavat osa. Tasand π lõikab kerapinda mööda ringjoont, mille diameetriks on lõik $A'B'$. Selle ringjoone eestvaateks tuleb ellips, mille lühemaks teljeks on ringi horisontaalse diameetri AB eestvaade $A''B''$, pikemaks teljeks aga ringi vertikaalse diameetri CD eestvaade $C''D'' = A'B'$. Selle ellipsi võib konstrueerida näiteks telgringjoonte abil. Olgu märgitud, et haripunktid C'' ja D'' ei asetse kera eestvaate kontuuril. Ellipsist kasutame ainult seda osa, mis vastab faktilisele väljalõikele.



Joonis 53-1



Joonis 53-2

Ellipsi ja kera eestvaate kontuuri puutepunktid M'' ja N'' saadakse pealtvaate $M' \equiv N'$ järgi, mis asetsevad kera frontaalse suurringjoone pealtvaatel.

Joonisel on esitatud ka väljalõike vertikaalsed servad s ja v . Neid servi ei esineks, kui lõigatavaks objektiks oleks kera kui keha asemel kerapind.

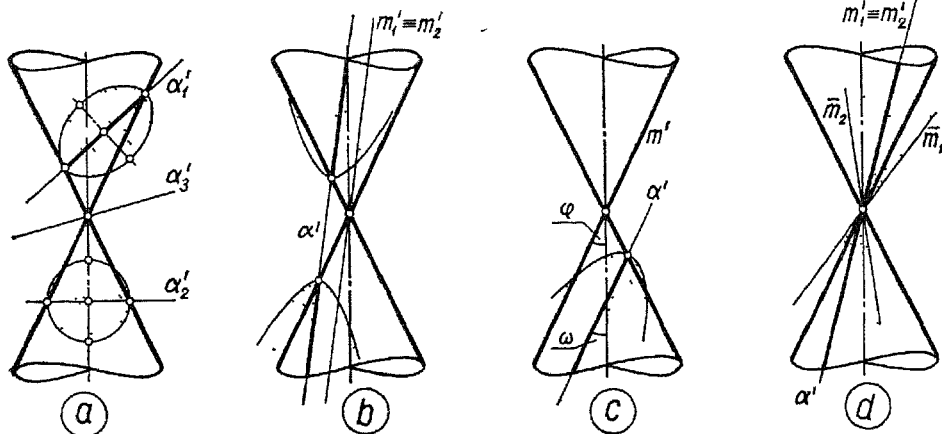
(46) Pöördsilindrilise pinna lõikamisel tasandiga saame kas ringjoone, kaks paralleelset sirget või ellipsi — vastavalt sellele, kas tasand asetseb silindri telje suhtes risti, paralleelselt või kaldu.

Viimasel juhtumil osutub lõikejoon ellipsiks seetõttu, et seda võib vaadelda silindri paralleelringjoone

paralleelprojektsioonina lõikaval tasandil. Selle ellipsi ja tema mis tahes paralleelprojektsiooni määramiseks piisab kaaside meetrite paarist.

Näide 2. Pöördsilindril on väljalõike, mida piiravad esiekraani ristasandid π , τ ja λ (joon. 53-2). Tuletada selle silindri külgvaade.

Tasapind π lõikab silindri pinda mööda moodustajaid m ja n , mille punktikujuliste pealtvaadete m' ja n' järgi saab leida ka külgvaated m'' ja n'' . Tasandiga λ saadav lõikejoon osutub ellipsiks, mille pikemaks teljeks on lõik $AB \equiv A''B''$ ja lühemaks teljeks $CD \equiv C'D'$. Selle ellipsi eestvaade on kahekordselt loetav sirglõik, pealtvaade — ringjoon, külgvaade aga jälle ellips. Lõikeellipsi teljed AB ja CD projekteeruvad külgvaateellipsi telgedeks, sest



Joonis 53-3

telg CD on külgekraaniga paralleelne (§ 41, lause 42). Et aga tasandi λ ja silindri telje vaheline nurk φ on võetud suurem kui 45° , siis projekteerub lõikeellipsi pikem telg AB külgvaateellipsi lühemaks teljeks $A''B''$. Kui nurk φ oleks 45° , siis saaksime lõikeellipsi külgvaateks võrdsete pooltelgedega ellipsi, s. o. ringjoone. Joonisel tuleb esitada ka väljalõike servad s ja v .

2. Pöördkoonuse lõiked. Pöördkoonuse tasandiliste lõikejoonte käsitlemisel eeldame, et koonuse telg on ekraanil (joonisepinnal) ning et lõikav tasand α on ekraaniga risti (joon. 53-3). Lõikejoonte tõelised kujud on leitud lõikava tasandi pööramisega joonisepinnale (lõikejoonega piiratud tasandi osa on täpitud).

- (47) Kui tasand lõikab pöördkoonuse kõiki moodustajaid, kuid ei läbi koonuse tippu, siis lõikejoon on ellips (sealhulgas ringjoon).

Tõepoolest, sel puhul koonuse kõiki moodustajate ja tasandi (α_1) lõike-

punktid on lõplikul kaugusel, mistõttu lõikejoon on kinnine kõver (joon. 53-3, a). Et see kõver peab olema teist järku, siis saab ta olla ainult ellips (sealhulgas ka ringjoon).

Ringjoonelise lõike saame juhul, kui lõikav tasand (α_2) on pöördkoonuse teljega risti.

Kui tasand (α_3) lõikab kõiki moodustajaid ja läbib koonuse tippu, siis lõikejoon kidub üheksainsaks punktiks.

- (48) Kui lõikav tasand on paralleelne pöördkoonuse kahe moodustajaga, kuid ei läbi koonuse tippu, siis lõikejoon on hüperbool.

Tõepoolest, kui tasand α on paralleelne koonuse kahe moodustajaga m_1 ja m_2 , siis ta lõikab koonusepinna mõlemat katet (joon. 53-3, b) ning lõikejoon koosneb seetõttu kahest eraldiseisvast osast. Et seejuures moodustajad m_1 ja m_2 on tasandiga α paralleelsed, siis on lõikejoonel järelikult kaks ebapunkti. Nii selgub, et lõikejooneks saab olla ainult

hüperbool. Asjaolust, et hüperbooli asümptoodid suunduvad ebapunkti-
desse samuti nagu sirged m_1 ja m_2 ,
järeltame, et hüperbooli asümptoo-
did on paralleelsed moodustajatega
 m_1 ja m_2 .

**(49) Kui lõikav tasand on paral-
leelne pöördkoonuse üheainsa
moodustajaga, kuid ei läbi
koonuse tippu, siis lõikejoon
on parabool.**

Tõepoolest, sel juhtumil tasand α
lõikab koonuse kõiki moodustajaid
peale moodustaja m , millega ta on
paralleelne (joon. 53-3, c). Sellest
järeltame, et lõikejoon on ühe eba-
punktiga teist järku joon, s. o. para-
bool. Arusaadavalt jätab paraboolne
lõige koonuse teise katte terveks.
Kui tasand läbib koonuse tippu, siis
parabool kidub poolsirgeks (puute-
moodustajaks).

Lõpuks võib tasand α lõigata koo-
nust ka kahte moodustajat m_1 ja m_2
mööda, läbides siis ühtlasi ka koo-
nuse tippu (joon. 53-3, d). Neid kahte
lõikemoodustajat võib lugeda ka
kidunud hüperbooliks.

Olgu ω nurk lõikava tasandi ja
koonuse telje vahel ning φ nurk koo-
nuse moodustaja ja telje vahel (joon.
53-3, c). Siis saab koonuse tasandilise
lõikejoone nimetuse kergesti kind-
laks teha ka järgmiste tunnuste põh-
jal, mis järelduvad lausetest (47),
(48) ja (49):

1 kui $\omega > \varphi$, siis lõikejoon on
ellips;

2) kui $\omega < \varphi$, siis lõikejoon on
hüperbool;

3) kui $\omega = \varphi$, siis lõikejoon on
parabool.

Laused (47), (48) ja (49) on keh-
tivad mitte üksnes pöördkoonuse,
vaid iga teist järku koonuse puhul.

Et teist järku koonuse lõikamisel

tasandiga võib saada kõiki teist jär-
ku jooni, siis nimetatakse ellipsit,
hüperbooli ja parabooli ühiselt ka
koonuselõigeteks.

KUSIMUSED

1. Mis juhtumil tasand lõikab pöördsilindrit:
a) ellipsit mööda, b) paralleelseid sirgeid
mööda?
2. Kas pöördsilindrit saab lõigata tasandiga
parabooli või hüperbooli mööda?
3. Mis juhtumil tasand lõikab pöördkoonust:
a) ellipsit mööda, b) parabooli mööda,
c) hüperbooli mööda, d) kahte sirget
mööda?

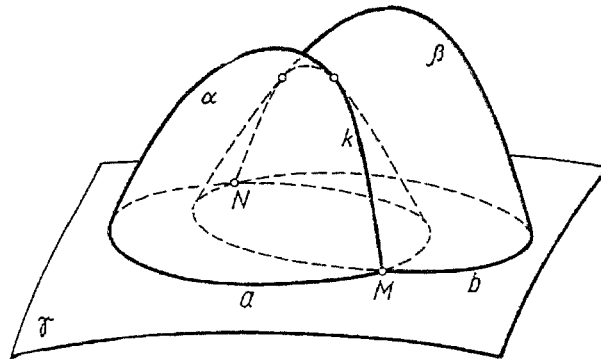
§ 54. PINDADE LÕIKUMISÜLESANNETE LAHENDAMISE VÕTTED

Üheks olulisemaks probleemiks ku-
jutavas geomeetrias on kahe pinna
lõikejoone konstrueerimine. Prakti-
kas vajatakse pindade lõikejoonte
tuletamist ja kujutamist eriti tehnilis-
es joonestamises.

Kahe pinna lõikejoone tuletamisel
kasutatakse harilikult nn. **abipindade
võtet**. Selle võtte olemus seisneb
järgnevas (joon. 54-1). Olgu vaja
leida pindade α ja β lõikejoon k .
Lõikame need pinnad läbi abipin-
naga γ ning joonestame lõikejooned
 a ja b , mida mööda abipind γ lõikab
pindu α ja β . On ilmne, et joonte a
ja b lõikepunktid M ja N kuulu-
vadki pindade otsitavale lõikejoo-
nele k , sest mõlemad punktid asetse-
vad nii pinnal α kui ka pinnal β .
Võttes uusi abipindu $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ kõr-
gemal või madalamal abipinnast γ ,
võime saada kui tahes palju lõike-
joone k punkte.

Abipinnad tuleb kuju ja asendi
poolest valida võimalikult nii, et nad
lõikaksid antud pindu mööda lihtsaid
jooni (sirgjooned, ringjooned) ning
et nende joonte projektsioonid kaks-

Joonis 54-1



vaatel oleksid kergesti konstrueeritavad. Neid tingimusi saab rahuldada ainult siis, kui kummalgi antud pinnal leidub süsteem sirg- või ringjoonelisi lõikeid ja kui pindade vastastikune asend ning paigutus ekraanide suhtes sobivad abipindade kasutamiseks. Juhul kui lõikuvatel pindadel sirg- või ringjoonelisi lõikeid pole, osutub lõikejoone konstrueerimine üsna tülikaks või täpsel viisil koguni võimatuks; sageli tuleb siis leppida mõnesuguste lähiskonstruktsioonidega.

Abipindadena kasutatakse praktikas sõltuvalt andmeist kas tasandeid või sfääre. Vastavalt kasutatud abipindade liigile nimetatakse ka võtet kas **abitasandite võtteks** või **abisfääride võtteks**. Abitasandite rakendamise võimalused on praktikas üsna avarad, abisfääre saab aga kasutada ainult tsükliliste pindade puhul. Olgu märgitud, et abitasandite võtet oleme juba rakendanud paragrahvis 25 kahe tasandi lõikejoone tuletamisel. Näiteid abitasandite võtte ja abisfääride võtte kasutamise kohta esitame järgnevides paragrahvides.

Silindriliste ja kooniliste pindade puhul on võimalik rakendada ka nn. **uute kujutamiskiirte võtet**. Selle võtte olemus on lühidalt järgmine.

Võetakse siisugused uued kiired, mis projekteerivad ühe antud pinna tema jälgjooneks kaksvaate ühel ekraanil. Teise pinna sirgjoonelist moodustajate uued kujutised lõikavad siis esimese pinna joonkujutist (jälge) punktides, mis on antud pindade lõikejoone punktide uuteks kujutisteks. Viimaste järgi saab leida ka lõikejoone punktid kaksvaatel.

Koonilist pinda saab projekteerida tema jälgjooneks tsentraalkiirte abil, mis lähtuvad koonuse tipust, silindrilist pinda aga paralleelkiirte abil, mis on paralleelsed silindri moodustajatega.

Uute kujutamiskiirte võtte abil saab lahendada ka siisuguseid lõikumisülesandeid, kus ainult üks antud pindadest on silindriline või kooniline, teine aga on mingi muu joonpind (ühekatteline hüperboloid, hüperboolne paraboloid, silindroid vm.).

Konkreetsel lõikumisülesande lahendamisel on oluline leida kõigepealt lõikejoone ja tema kujutiste erilised punktid, nagu ekraanidest kõige kaugemal või neile kõige lähemal olevad punktid, lõikejoonte ja kontuurjoonte puutepunktid, isärased punktid (§ 39) jt.

KÜSIMUSED

1. Missuguseid pindu kasutatakse abipindadena kahe pinna lõikejoone tuletamisel?
2. Kuidas valitakse abipinnad asendi ja kuju poolest kahe pinna lõikejoone tuletamisel?
3. Missuguste kiirte abil saab koonilise pinna projekteerida tema jälgjooneks?

§ 55. KÕVERPINNA JA TASANDI LÕIKUMINE

Paljudel kõverpindadel leidub süsteem lihtsaid tasandilisi lõikejooni — ring- või sirgjooni. Näiteks pöördpindade lõiked pinna telje risttasandiga on ringjooned, joonpindade lõiked moodustajaid läbiva tasandiga aga sirgjooned. Sääraste lihtsate tasandiliste lõikejoonete olemasolu korral saab kõverpinna ja mis tahes asendiga tasandi lõikejoone leidmiseks alati kasutada abitasandite võtet. Esitame mõned sellekohased näited.

Näide 1. Olgu vaja tuletada joonisel 55-1 esitatud pöördpinna (rõngaspinna osa) ja üldasendilise tasandi $\alpha(p, e)$ lõikejoone projektsioonid ja lõikejoone tõeline kuju.

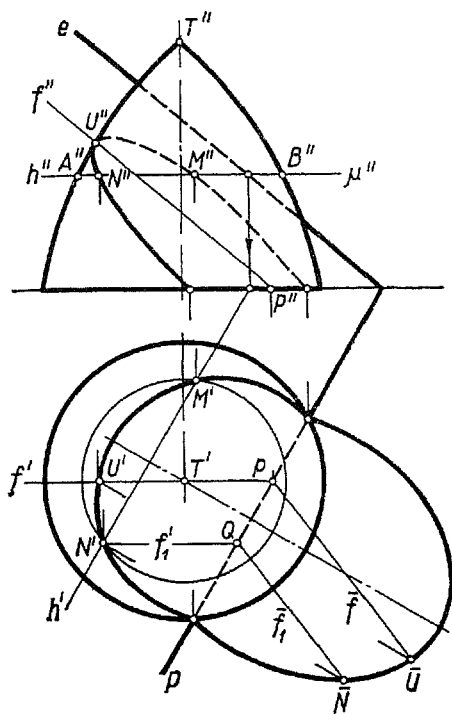
Lõikejoone projektsioonid saame tuletada horisontaalsete abitasandite abil järgmiselt. Olgu μ juhuslikul kõrgusel valitud horisontaalne abitasand. See lõikab tasandit α mööda horisontaali $h(h'' \equiv \mu'', h' \parallel p)$, pöördpinda aga mööda paralleeli. Viimane projekteerub esiekraanile sirglõiguks $A''B''$, põhiekraanile aga ringjooneks, mille diameeter võrdub lõiguga $A''B''$. Horisontaali ja paralleelringjoone pealtvaadete lõikepunktid M' ja N' ongi otsitava lõikejoone kahe punkti M ja N pealtvaated. Vastavad eestvaated leiame sidejoonte abil abitasandi sirgkujutiselt μ'' . Korrates konstruktsioonide tsüklit teistsugustel kõrgustel valitud abitasanditega, saame küllaldase arvu punkte lõikejoone projektsioo-

nide joonestamiseks. Tööd soodustab asjaolu, et lõikejoon on sümmeetriline tasandi α selle põhilangusjoone suhtes, mis lõikab pinna telge.

Lõikejoone eestvaate joonestamisel on tähtis teada seda punkti U , kus lõikejoon ületab frontaalse meridiaani, minnes pinna esiküljelt tagaküljele. Punkt U asetseb ühtlasi tasandi α selle frontaalil f , mis lõikab pinna telge. Niisiis, tõmmates f' läbi punkti T' ning tuletades $f'' \parallel f$, leiame punkti U eestvaate frontaalse meridiaani eestvaatel. Pealtvaade U' leitakse sidejoone abil frontaali pealtvaatelt f' . Punkt U'' on lõikejoone eestvaate ja pinna eestvaate kontuuri puutepunkt; siit alates tuleb lõikejoone eestvaade tõmmata kriipsjoonega.

Lõikejoone tõelise kuju saamiseks pöörame tasandi α koos lõikejoonega ümber põhijälje p põhiekraanile. Selleks valime lõikejoonel rea punkte ning tuletame nende pöörendid. Joonisel on punktide pöörendite saamiseks kasutatud asjaolu, et kõik ühe ja sama tasandi frontaalid on omavahel paralleelsed ja et frontaalide lõigud projekteeruvad esiekraanile moondevabalt. Nii näiteks

punkti U pöörend $\bar{U}$ tuleb jälje p ristsirgele läbi punkti U' nii, et $P\bar{U} = P''U''$. Teiste punktide pöörendid saame nüüd leida eestvaadet kasutamata. Näiteks punkti N pöörendi $\bar{N}$ saame järgmiselt. Tõmbame läbi punkti N' tasapinna α frontaali f_1 pealtvaate f'_1 . Selle frontaali pöörend $\bar{f}_1$ läbib jälgpunkti Q ning on paralleelne pöörendiga $\bar{f}$. Tõmmates nüüd läbi punkti N' jälje p ristsirge, leiamegi pöörendil $\bar{f}_1$ punkti $\bar{N}$. Lõikejoone tõeline kuju saadakse leitud punktide ühendamisel lekaaliga.

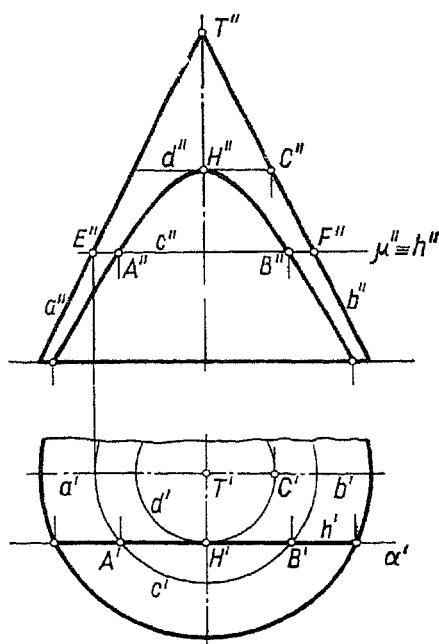


Joonis 55-1

Lõikejoone punktide pöörendid võib saada ka sel teel, et leitakse nende punktide kaugused põhijäljest p (näiteks sirklivõttega) ning kantakse need kaugused jälje p vastavatele ristsirgetele (§ 32). Sel juhul väheneb konstruktsioonijoonte hulk miinimumini.

Näide 2. Tuletada pöördkoonuse ja frontaalse tasandi α lõikejoon (joon. 55-2).

Et tasand α on paralleelne koonuse kahe moodustajaga a ja b , siis saame lõikejooneks hüperbooli. Hüperbooli punktide saamiseks võib kasutada horisontaalseid abitasandeid. Need tasandid lõikavad koonust mööda ringjooni, tasandit α aga mööda niusuguseid horisontaale, mille pealtvaated ühtivad sirgega α' . Nii näi-

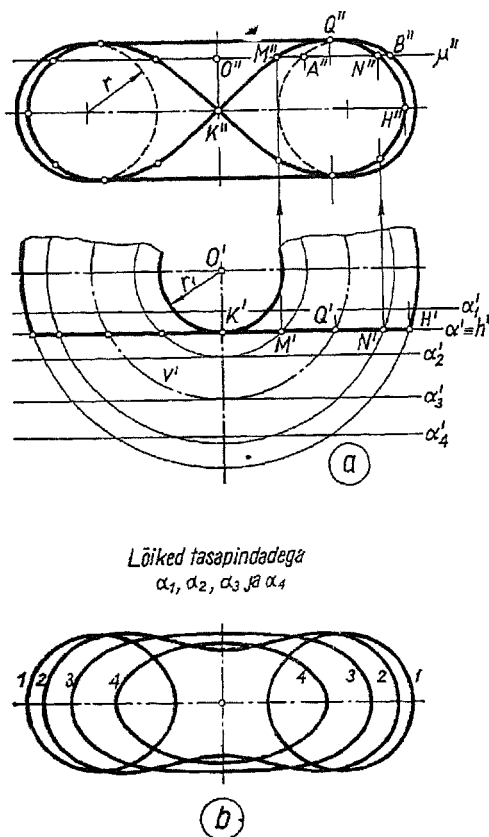


Joonis 55-2

teks abitasand μ lõikab koonust mööda ringjoont c , mille diameeter on võrdne lõiguga $E''F''$, tasandit α aga mööda horisontaali h . Joonte c ja h pealtvaadete lõikepunktid A' ja B' on hüperbooli punktide pealtvaated. Vastavad eestvaated A'' ja B'' leiame sidejoonte abil sirgelt μ'' . Muutes tasandi μ kõrgust, võib analoogiliselt leida kui tahes palju hüperbooli punkte. Hüperbooli haripunkt H on koonuse sellel paralleelil d , mis puutub lõikavat tasandit α . Selle paralleeli eestvaade d'' on leitud pealtvaate d' järgi punkti C abil.

Näide 3. Olgu vaja tuletada rõngaspinna ja frontaalse tasandi α lõikejoon (joon. 55-3, a).

Rõngaspinna telg on joonisel risti põhiekraaniga, lõikava tasandi α



Joonis 55-3

kaugus pinna teljest aga võrdub pinna ava raadiusega r_1 . Nii võetud lõikav tasand osutub ühtlasi rõngaspinna puutetasandiks ning seetõttu on lõikejoonel puutepunkti kohal sõlmepunkt (kahekordne punkt) K . Joone muud erilised punktid leiame järgmiselt. Äärmine parempoolne punkt H asetseb rõnga välimisel ekvaatoril, seega pealtvaate kontuuril. Kõrgeim punkt Q aga asetseb pinna kõige kõrgemal paralleelil (raadiusega $r_1 + r$), mille pealtvaade langeb kokku rõnga telgringjoone v pealtvaatega.

Lõikejoone teiste punktide leidmisel kasutame horisontaalseid abitasandeid. Näiteks tasand μ lõikab rõngaspinna mööda paralleelringjooni, mille raadiuste pikkused on vastavalt $O''A''$ ja $O''B''$. Põhiekraanile projekteeruvad need ringjooned moondevabalt ringjoonteks keskpunktiga O' . Abitasand μ lõikab antud tasandit α mööda horisontaali h , kusjuures $h' \equiv \alpha'$. Horisontaali h ning lõikeringjoonte lõikepunktid M ja N ongi otsitava lõikejoone kaheks punktiks. Joonisel saadakse enne pealtvaated M' ja N' ning nende järgi sidejoonte abil ka eestvaated M'' ja N'' sirgel μ'' .

Asjaolu, et lõikejoonel on kaks sümmeetriatelge, võimaldab märkida joone punktideks kohe ka need punktid, mis on leitud punktidega M ja N sümmeetrilised. Vajaduse korral võib lõikejoone punkte juurde saada uute nivoopindadega lõikamise teel.

Kui rõngaspinna määravad raadiused r ja r_1 on võrdsed, siis pinna teljega paralleelne ja pinda puutuv tasand annab lõikejooneks **Bernoulli lemniskaadi**.

Rõngaspinna muid teljega paralleelseid lõikeid, mis on saadud tasanditega $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ja α_4 , näeme joonisel 55-3, *b*.

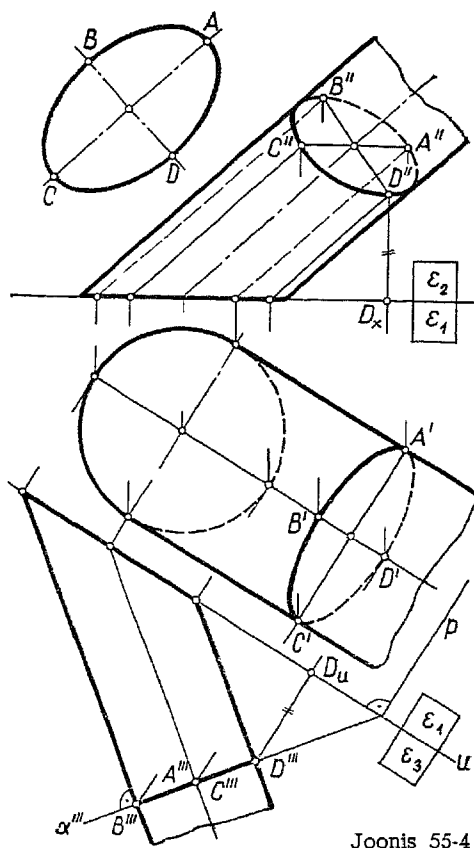
Näide 4. Tuletada ringpõhjaga kaldsilindri (elliptilise silindri) ristlõike projektsioonid ja ristlõike tõeline kuju (joon. 55-4).

Ulesannet saab lahendada mitmel viisil. Üks võimalus on järgmine. Tõmbame lõikava tasandi α jäljed risti silindri moodustajate vastavate projektsioonidega ning kasutame horisontaalseid abitasandeid. Viimased lõikavad silindrit mööda ringjooni, tasandit aga mööda horisontaale; ringjoon ja horisontaal, mis asetsevad ühel ja samal abitasandil,

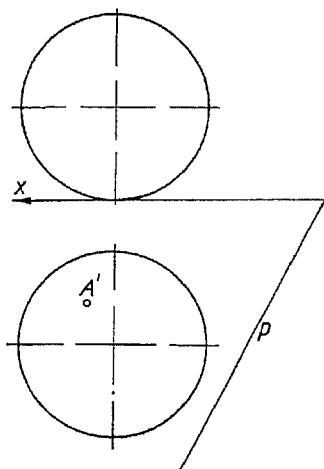
annavadki lõikumisel otsitava lõikejoone punkte.

Lihtsamalt laheneb ülesanne lisa-projektsiooni kasutamisega. On ette teada, et otsitavaks ristlõikeks on ellips; tarvis on tuletada vaid selle ellipsi määramisandmed — soovitatav teljed. Selleks kasutame niisugust uut ekraani $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$, mis on paralleelne silindri moodustajatega. Silindri ristprojektsioon uuel ekraanil on kergesti tuletatav mingi ühe moodustaja, näiteks punkti D läbiva moodustaja abil: $D_u D''' = D_x D''$ (§ 33).

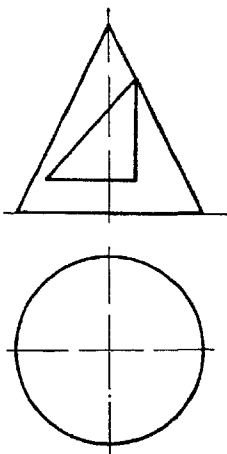
Kaksvaates ($\varepsilon_1, \varepsilon_3$) on tasand α projekteerivaks pinnaks ekraani ε_3 suhtes. Niisuis saame tasandist α kolmandas vaates sirgkujutise α''' , mis tuleb joonestada risti silindri moodustajatega samas vaates. Sellega aga ongi käes lõikeellipsi teljed BD ja AC — esimene neist võrdub silindri kolmanda vaate laiussega, teine aga silindri pealtvaate laiussega: $BD = B''' D'''$; $AC = A' C'$. Lõikeellipsi tõeline kuju $ABDC$ on telgede järgi eraldi välja joonestatud silindri eestvaatest vasakul. Joonisel on lõikeellips esitatud ka lähtekaksvaates;



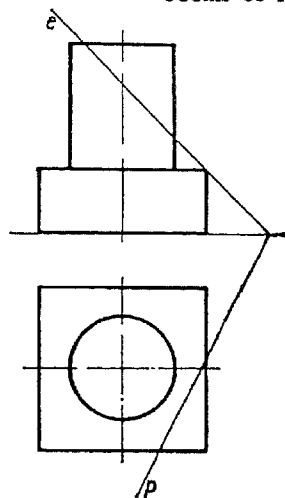
Joonis 55-4



Joonis 55-5



Joonis 55-6



Joonis 55-7

tema telgede pealtvaated on pealtvaateellipsi telgedeks, telgede eestvaated aga eestvaateellipsi kaasdiameetrite paariks.

ULESANDED

1. Tuletada kerapinna ja tasandi lõikejoone kaksvaade, kui tasand on antud põhijalgaga p ja kerapinnal asetseva punktiga A (joon. 55-5).
2. Esitada kolmvaates joonisel 55-6 kujutatud massiivne poordkoonus, millesse on esikraani risttasanditega tehtud prismaline auk.
3. Tuletada joonisel 55-7 kujutatud objekti ja tasandi $\alpha(p, e)$ lõikejoone kaksvaade ja lõikejoone tõeline kuju

§ 56. KÕVERPINNA JA SIRGJOONE LÕIKUMINE

Kõverpinna ja sirgjoone lõikepunktide leidmise eeskiri on analoogiline paragrahvis 26 vaadeldud eeskirjaga tasandi ja sirgjoone lõikepunkti leidmiseks. Siingi tuleb võtta läbi sirge mingi abitasand, tuletada abitasandi ja kõverpinna lõikejoon ning leida viimase lõikepunktid antud sirgega — need osutuvadki antud kõverpinna ja sirge lõikepunktideks.

Abitasand läbi sirge püütakse valida nii, et tema lõikejoon kõverpinna naga annaks joonisel lihtsaid projektsioone — sirge ja ringjooni. Lihtsamate võimaluste puudumisel võetakse abitasandiks sirget projektee-riv tasand.

Silindriliste ja kooniliste pindade lõikumisel sirgega võib hea eduga kasutada ka niisugust abiprojekteerimist, mille puhul antud pinna moodustajad on kujutamiskiirteks.

Näide 1. Olgu vaja leida kõvera meridiaaniga pöördpinna ja sirge s lõikepunktid (joon. 56-1).

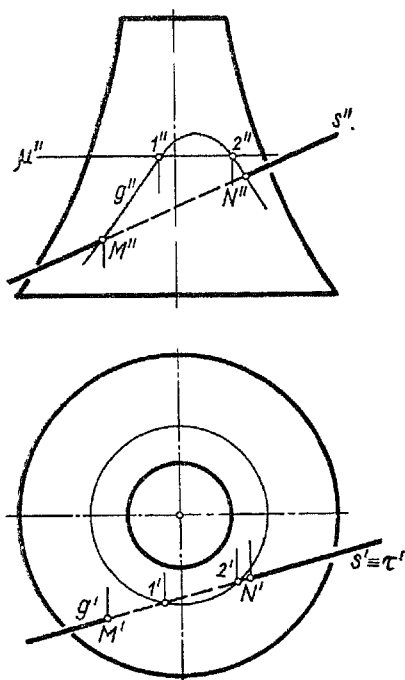
Paneme läbi sirge s abitasandi τ risti põhiekraaniga ning tuletame eelmisest paragrahvist tuttavalt viisil

pöördpinna ja tasandi τ lõikejoone g . Kõvera g punktide saamiseks kasutame horisontaalseid abitasandeid; need lõikavad pöördpinda mööda ringjooni. Joonisel on näidatud lõikejoone g kahe punkti 1 ja 2 saamine tasandi μ abil. Sirgjoone s ja kõvera g ühised punktid M ja N ongi sirge s ja pöördpinna otsitavad lõikepunktid. Ülesande lahendamise pole kõverat g vaja tuletada terviklikult — piisab tema tükikestest arvatavate lõikepunktide ümbruses.

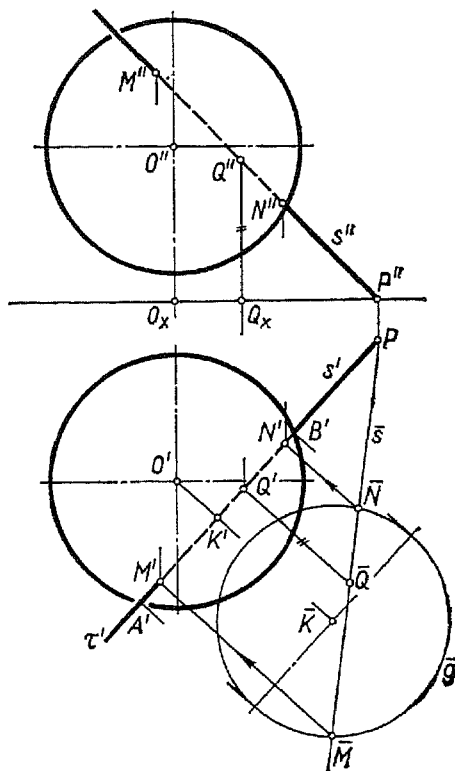
Näide 2. Leida kerapinna ja sirge s lõikepunktid M ja N (joon. 56-2).

Võtame abitasandiks põhiekraani risttasandi τ läbi sirge s . See tasand lõikab kerapinda mööda ringjoont g , mille diameeter võrdub lõiguga $A'B'$. Otsitavad punktid M ja N on sirge s ja ringjoone g lõikepunktid. Need punktid saame kõige lihtsamalt leida sel teel, et pöörame tasandi τ põhiekraanile koos joontega g ja s . Et ringjoone g tsenter K ja kerapinna tsenter O asetsevad põhiekraanist võrdsel kaugusel, siis ringjoone pöörendi $\bar{g}$ tsentri $\bar{K}$ saamiseks võtame $K'\bar{K} = O_\alpha O''$. Sirgjoone s pöörend $\bar{s}$ on leitud põhijälje P ja sirgel vabalt valitud punkti Q järgi ($Q'\bar{Q} = Q_\alpha Q''$). Pöörendite $\bar{g}$ ja $\bar{s}$ ühised punktid $\bar{M}$ ja $\bar{N}$ osutuvad otsitavate lõikepunktide pöörenditeks. Tagasikäiguga on nende järgi leitud esmalt pealtvaated M' ja N' ning seejärel ka eestvaated M'' ja N'' .

Pöörendilt $\bar{g}$ näeme, et punkt M on kera ülemisel, punkt N aga alumisel poolel. Vastavalt sellele kujuneb joonisel sirge s osade nähtavus pealtvaates. Pealtvaatelt omakorda nähtub, et punkt M on kera esiküljel, punkt N aga tagaküljel; sellega



Joonis 56-1



Joonis 56-2

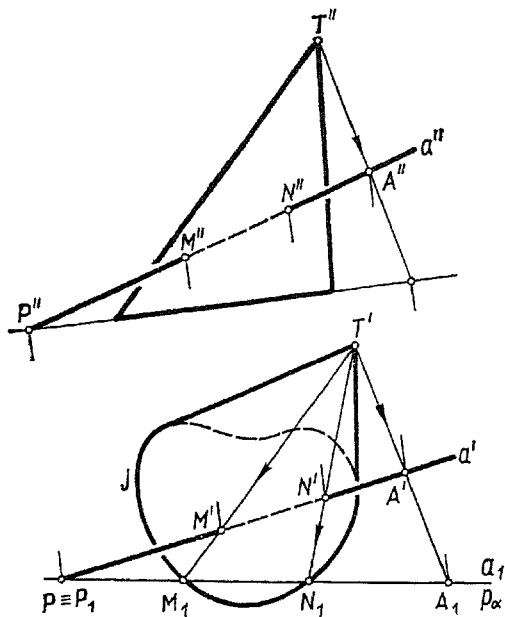
on määratud sirge s osade nähtavus eestvaates.

Näide 3. Antud on kooniline pind tipuga T ja põhijäljega (juhtjoonega) j ning sirge a (joon. 56-3). Leida koonilise pinna ja sirge a lõikepunktid M ja N .

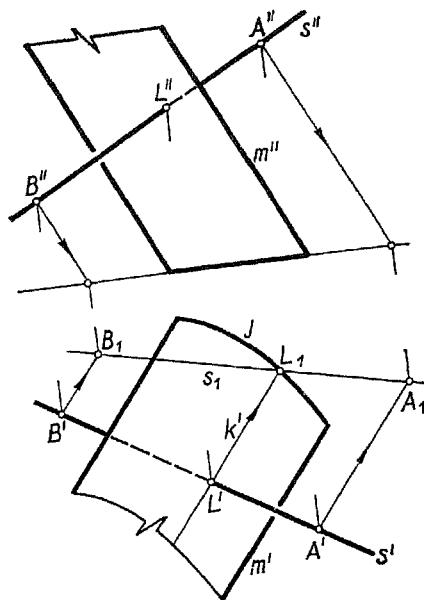
Lahendame ülesande uute kujutamiskiirte võtte abil (§ 54). Lõikepunktide leidmiseks projekteerime sirge a ja koonilise pinna põhiekraanile tsentraalkiirtega, mis väljuvad koonuse tipust T . Sel puhul tuleb koonilise pinna tsentraalprojektsiooniks tema jäljjoon j , millel peavad asetsema ka sirge a ja koonilise pinna lõikepunktide tsentraalprojektsioonid. Teiselt poolt aga peavad

nende lõikepunktide tsentraalprojektsioonid olema sirge a tsentraalprojektsioonil $a_1 \equiv PA_1$, kus punkt P on sirge a põhijälg ja A_1 sirgjoonel vabalt võetud punkti A tsentraalprojektsioon (ehk kiire TA põhijälg). Kujutiste a_1 ja j ühised punktid M_1 ja N_1 ongi otsitavate lõikepunktide M ja N tsentraalprojektsioonid. Järelikult punktidesse M_1 ja N_1 tõmmatud tsentraalkiired peavad lõikama sirget a just otsitavates punktides M ja N .

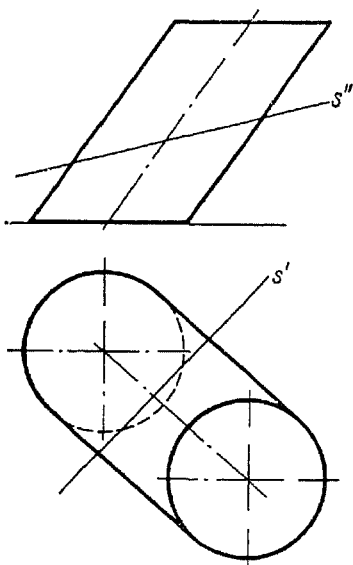
Kirjeldatud konstruktsioonile võib anda ka teistsuguse tõlgenduse. Koonuse tippu T ja sirget a läbiv abitasand α lõikab koonilist pinda mööda moodustajaid, mille lõikepunktid



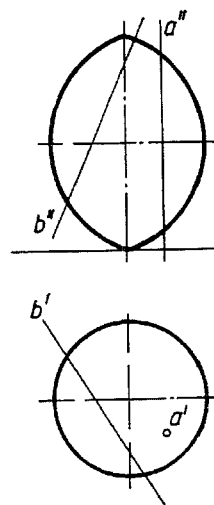
Joonis 56-3



Joonis 56-4



Joonis 56-5



Joonis 56-6

sirgega α ongi otsitavad punktid M ja N . Sirge α_1 osutub nüüd abitasandi α põhijäljeks p .

Näide 4. Silindrilise pind, mis on määratud juhtjoonega (põhijäljega) j ja moodustajaga m , lõikub sirgega s ; leida lõikepunkt L (joon. 56-4).

Lõikepunkti leidmiseks projekteerime silindrilise pinna ja sirge s põhiekraanile, kasutades kujutamiskii-ri, mis on paralleelsed moodustajaga m . Silindrilise pinna kaldprojektsiooniks osutub siis tema põhijalg j . Sirge s kaldprojektsiooni s_1 leidmiseks tuletame sirgel vabalt valitud punktide A ja B kaldprojektsioonid A_1 ja B_1 . Lõikepunkti L kaldprojektsiooniks saame punkti L_1 , milles sirge s_1 lõikab juhtjoont j . Tõmmates nüüd läbi punkti L_1 kaldkiire k pealtvaate $k' \parallel m'$ kuni lõikumiseni sirgega s' , saame otsitava lõikepunkti pealtvaate L' . Punkti L eestvaate leiame sidejoone abil sirgelt s'' .

Kirjeldataud konstruksiooni võib tõlgendada ka järgmiselt. Läbi sirge s on pandud abitasand paralleelselt silindrilise pinna moodustajatega ning on leitud selle tasandi ja silindrilise pinna lõikejoon k . Viimane, lõikudes sirgega s annabki otsitava lõikepunkti L . Sirge s kaldprojektsioon s_1 tähendab selles tõlgenduses abitasandi põhijäljel.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missugune on sirgjoone ja kõverpinna lõikumisülesande üldine lahenduskäik?
2. Tuletada elliptilise silindri ja sirge s lõikepunktid (joon. 56-5).
3. Leida punktid, milles sirged a ja b lõikavad rõngaspinda (joon. 56-6).

§ 57. ABITASANDITE KASUTAMINE PINDADE LÕIKEJOONTE TULETAMISEL

Esitame järgnevalt rea näiteid abitasandite võtte kasutamise kohta kahe pinna lõikejoone tuletamisel.

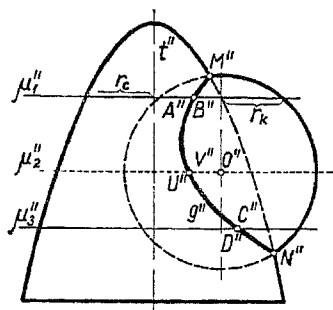
Näide 1. Olgu vaja tuletada pöördparaboloidi ja sfääri lõikejoon g , kui sfääri tsenter O ei asetse paraboloidi teljel t (joon. 57-1).

Et paraboloidi telg t on risti põhiekraaniga, siis abitasanditeks sobivad horisontaalpinnad. Need lõikavad mõlemat antud pinda mööda ringjooni, mis projekteeruvad esiekraanile sirglõikudeks, põhiekraanile aga (sirgjoonteks. Nii näiteks horisontaalpind μ_1 lõikab paraboloidi mööda ringjoont c ja sfääri mööda ringjoont k . Nende ringjoonte raadiused r_c ja r_k saame esiekraanilt. Ringjoonte c ja k pealtvaadete lõikepunktid A' ja B' on otsitava lõikejoone g kahe punkti pealtvaadeteks. Vastavad eestvaated A'' ja B'' leiame sidejoonte abil sirgelt μ''_1 . Analoogiliselt on leitud nivoo pinna μ_3 abil lõikejoone punktid C ja D .

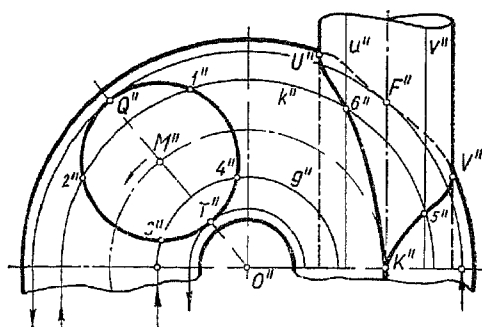
Lõikejoone erilisteks punktideks on tema kõrgeim punkt M , madalaim punkt N ning sfääri pealtvaate kontuurile projekteeruvad punktid U ja V . Viimased asetsevad paraboloidi paralleelil, mille tasand μ_2 läbib sfääri tsentrit O . Punktid U ja V lahutavad pealtvaates kõvera g nähtavat osa mittenähtavast osast. Eestvaates on aga kõvera g mittenähtav osa nähtava osa varjus.

Näide 2. Joonisel 57-2 on esitatud harilik rõngaspind, mida lõikavad kaks pöördsilindrit; on vaja tuletada vastavad lõikejooned.

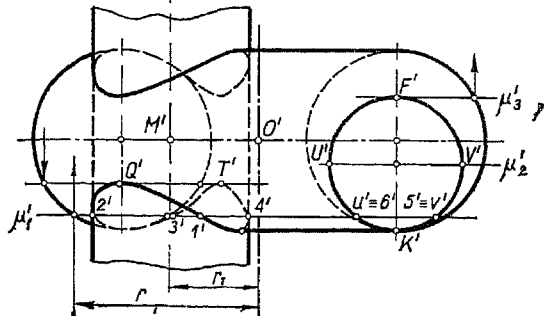
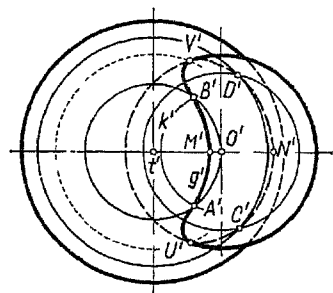
Pinnakolmiku asend ekraanide suhtes on valitud nii, et rõngaspinna



Joonis 57-1



Joonis 57-2



telg ja vasakpoolse silindri telg on risti esiekraaniga, parempoolse silindri telg aga risti põhiekraaniga. Säärane objektide paigutus võimaldab korraga leida mõlemaid lõikejooni, kasutades ühte ja sedasama frontaalsete abitasandite süsteemi. Tõepoolest, frontaalsed abitasandid lõikavad kõiki antud pindu mööda sirg- või ringjooni ning nende joonte projektsioonid on samuti sirg- või ringjooned. Selgitame lõikejoonte punktide saamist näiteks abitasandiga μ_1 . See tasand lõikab rõngaspinda mööda ringjooni k ja g , mis projekteeruvad esiekraanile moondevabalt; nende ringjoonte raadiused r ja r_1 saadakse pealtvaatelt. Tasand μ_1 lõikab rõhtsilindrit mööda ringjoont, mille eestvaade ühtib selle silindri ringjoonelise eestvaatega, püstsilindrit aga mööda moo-

dustajaid u ja v , mille eestvaated leitakse nende punktikujuliste pealtvaadete järgi. Ringjoonte k ja g eestvaated lõikavad rõhtsilindri eestvaadet punktides $1''$, $2''$, $3''$ ja $4''$, mis on otsitava vasakpoolse lõikejoone nelja punkti eestvaadeteks. Punktide 1 , 2 , 3 ja 4 pealtvaated leiame sidejoonte abil sirgelt μ'_1 . Püstsilindri moodustajate u ja v eestvaated u'' ja v'' , lõikudes ringjoone k eestvaatega, annavad otsitava parempoolse lõikejoone kahe punkti eestvaated $5''$ ja $6''$ (ringjoon g püstsilindrit ei lõika). Punktide 5 ja 6 pealtvaated asetsevad sirgel μ'_1 , ühtides seal moodustajate u ja v pealtvaadetega. Võtet uute frontaalpindadega korrates võib saada kumagi lõikejoone kui tahes palju punkte.

Joonisel on näidatud ka lõikejoon-

te mõningate eriliste punktide leidmine. Vasakpoolse lõikejoone punktid Q ja T , mis asuvad rõnga telgringjoone tasandile kõige lähemal, leitakse eestvaates sirge $O''M''$ abil silindri ringjooneliselt eestvaatelt. Raadiuste $O''Q''$ ja $O''T''$ abil saab joonestada rõngaspinna vastavate paralleelringjoonte sirgjooneliselt pealtvaated, millel asetsevadki punktid Q' ja T' . Joonisel on punktide Q ja T kaugused esiekraanist võrdsed seetõttu, et silindri telg lõikab rõnga telgringjoont (lõikepunkt on M).

Parempoolse lõikejoone punkt F , mille kaugus rõnga telgringjoone tasandist on maksimaalne, leitakse püstsilindrit puutuva frontaalpinna μ_3 abil rõngaspinna vastavalt paralleelilt. Punktid U ja V , kus lõikejoon läheb silindri esiküljelt tagaküljele ja muutub eestvaates mittenähtavaks, asetsevad rõngaspinna sellel paralleelil, mille tasand μ_2 läbib silindri telge. Silindri ja rõngaspinna puutepunkt K on lõikejoone kahekordne punkt.

Lõpuks juhime tähelepanu sellele, et vasakpoolne lõikejoon on sümmeetriline rõnga telgringjoone tasandi suhtes, parempoolne aga rõnga telge läbiva horisontaaltasandi suhtes.

Kooniliste ja silindriliste pindade, sealhulgas ka nende erivormide — püramiidiliste ja prismaliste pindade — lõikumisülesannete lahendamisel saab alati abitasandeid valida nii, et nad lõikavad antud pindu sirgjooni (moodustajaid) mööda. Selleks tuleb abitasandid võtta olenevalt lõikuvatest pindadest järgmiselt:

1) kahe koonuse puhul — läbi koonuste tippe ühendava sirge;

2) koonuse ja silindri puhul — läbi sirge, mis on paralleelne silindri

moodustajatega ja läbib koonuse tippu;

3) kahe silindri puhul — paralleelselt kummagi silindri moodustajatega.

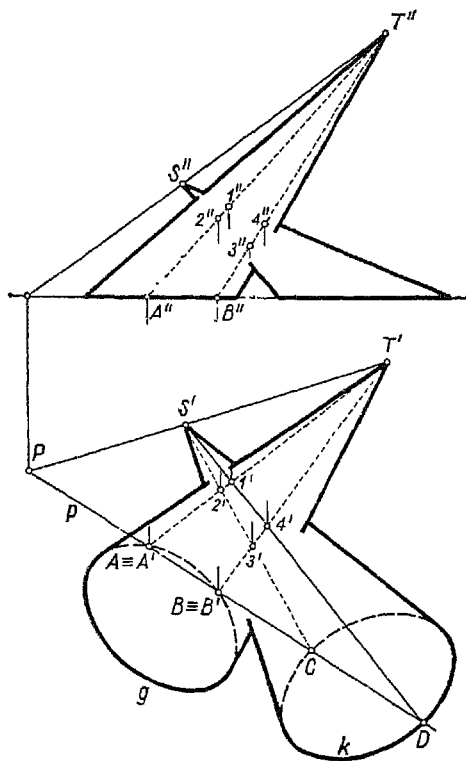
Nimetatud lõikumisülesannete lahendamisel on vajalik, et lõikuvate pindade jäljed ühel ekraanil oleksid antud või eelnevalt konstrueeritud. Vaatleme mõningaid näiteid.

Näide 3. Joonisel 57-3 on antud kaks lõikuvat koonust tippudega S ja T ning põhijalgjoontega k ja g ; on vaja näidata lõikejoone punktide saamist.

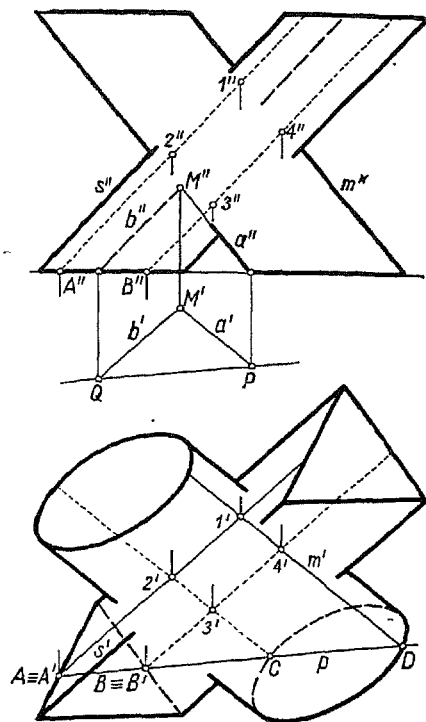
Abitasandid võtame nii, et nad kõik läbiksid koonuste tippe ühendavat sirget ST . Seesugused tasandid lõikavad kumbagi koonust mööda moodustajaid. Leiame kõigepealt sirge ST põhijälje P . Et kõik abitasandid läbivad sirget ST , siis peavad nende põhijäljed läbima punkti P . Joonisel ongi läbi punkti P tõmmatud ühe abitasandi (α) põhijalg p . See jälgsirge lõikab koonuste põhijalgjooni punktides A , B , C ja D , millest algavadki need moodustajad, mida mööda tasand α lõikab koonuseid. Moodustajate pealtvaadete lõikepunktid $1'$, $2'$, $3'$ ja $4'$ on otsitava lõikejoone pealtvaate punktideks. Punktide 1 , 2 , 3 , 4 eestvaated on leitud sidejoonte abil vastavate moodustajate eestvaadetelt. Lõikejoone uusi punkte saab leida uute abitasandite rakendamisega, s. t. jälgsirge p pööramisega uude asendisse ümber punkti P . Lõikejoon on joonisel jäetud esitamata.

Näide 4. Leida joonisel 57-4 esitatud prisma ja silindri lõikejoone mõned punktid.

Lõikame antud pindu siisuguste abitasanditega, mis on paralleelsed nii prisma külgservadega kui ka silindri moodustajatega. Abitasandite põhijalggede sihi saamiseks valime



Joonis 57-3



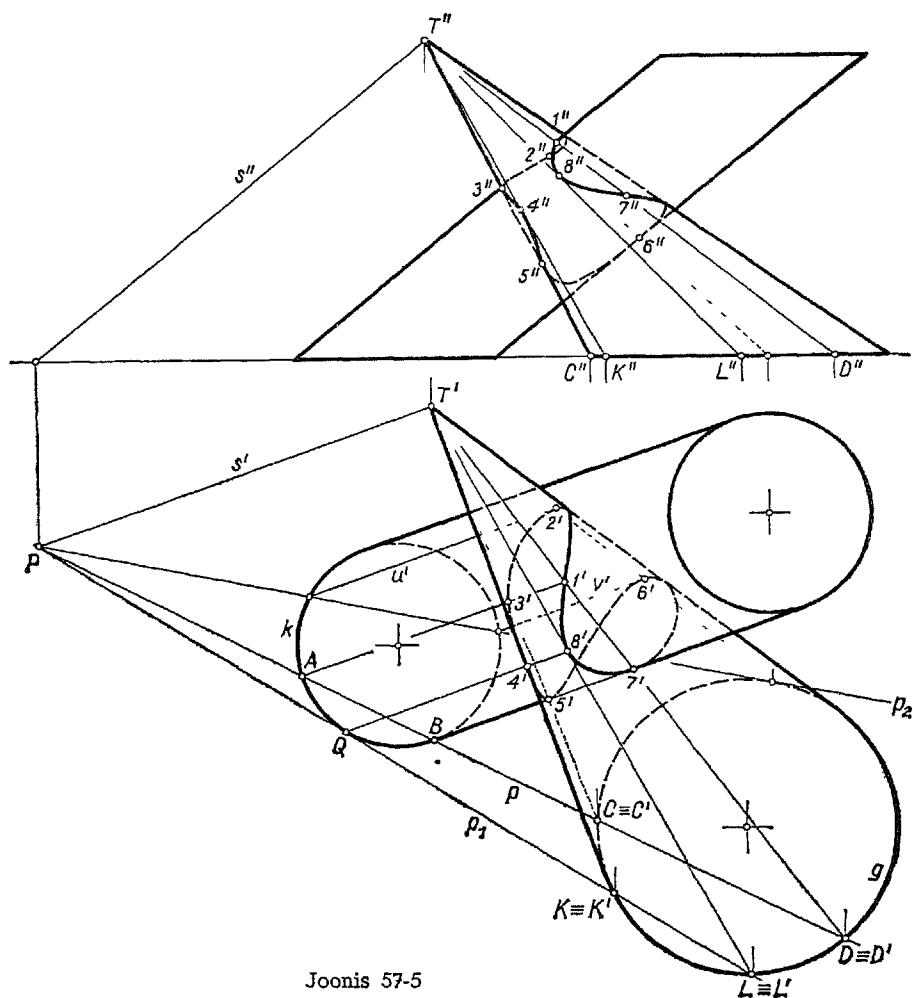
Joonis 57-4

vabalt punkti M (M' , M'') ning tõmbame sellest sirged a ja b , millest esimene on paralleelne silindri moodustajatega ja teine — prisma külgservadega: $a \parallel m$; $b \parallel s$. Tasandi (α , b) põhijalg PQ näitabki sobivate abitasandite põhijalgede sihti. Tõmbame nüüd ühe abitasandi (α) põhijälje $p \parallel PQ$. Lõigaku see antud pindade põhijälgi punktides A , B , C ja D . Nendest punktidest lähtuvad moodustajad on siis tasandi α ja antud pindade lõikesirged. Nende moodustajate pealtvaadete lõikepunktid $1'$, $2'$, $3'$ ja $4'$ on otsitava lõikejoone pealtvaate punktideks. Punktide 1 , 2 , 3 , 4 eestvaated saadakse sidejoonte abil vastavate moodustajate eest-

vaadetelt. Korrates konstruktsioonide tsüklit uute abitasanditega, mille põhijäljed on tõmmatud paralleelselt jälgisirgega p , võime saada kui tahes palju lõikejoone punkte. Joonisel on lõikejoon jäetud esitamata.

Näide 5. Olgu vaja konstrueerida koonilise ja silindilise pinna lõikejoon (joon. 57-5).

Võtame abitasandid läbi sirge s , mis on paralleelne silindri moodustajatega ja läbib koonuse tippu T . Iga säärane tasand lõikab antud pindu mööda moodustajaid. Arusadavalt peab iga abitasandi põhijalg läbima sirge s põhijälge P . Tõmbame näiteks abitasandi α põhijälje p läbi

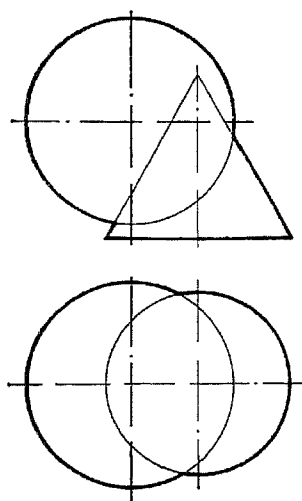


Joonis 57-5

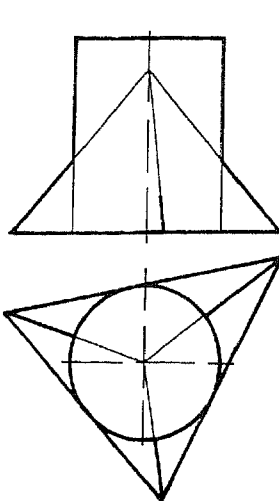
punkti P . Lõigaku see antud pindade põhijälgi k ja g punktides A, B, C ja D . Neist punktidest algavadki moodustajad, mida mööda abitasand $\alpha(s, p)$ lõikab antud pindu. Nende moodustajate ühised punktid 1, 3, 5 ja 7 on otsitava lõikejoone neljaks punktiks. Esmalt leiame nende punktide pealtvaated ning seejärel koosseostavate moodustajatel ka eestvaated.

Joonisel on näidatud veel eriliste

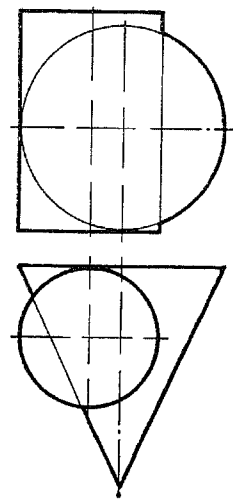
punktide 2, 4, 6 ja 8 saamine. Punktide 4 ja 8 on lõikejoone äärmised punktid, kus lõikejoon puutub koosseostavate moodustajate KT ja LT . Nende punktide leidmiseks võtame abitasandi (s, p_1) nii, et tema põhijalg p_1 puutub silindri põhijälge k . Puutepunkti Q läbiv silindri moodustaja ning lõikepunkte K ja L läbivad koosseostavate moodustajate lõikuvadki punktides 4 ja 8. Analoogiliselt on koosseostavate puutuva tasandi (s, p_2) abil lei-



Joonis 57-6



Joonis 57-7



Joonis 57-8

tud lõikejoone äärmised punktid 2 ja 6. Nendes punktides lõikejoon puutub silindri moodustajaid u ja v .

Lõikejoone osade nähtavuse määramiseks lõikejoone punktide nähtavus; lõikejoone punkt aga on ühes või teises vaates nähtav ainult siis, kui ta selles vaates on ühtaegu nähtav mõlematel lõikuvatel pindadel. Punktis 8 näiteks on lõikejoon pealtvaates nähtav, sest see punkt asetseb kummagi pinna nähtaval moodustajal $Q8$ ja $L8$. Punktis 3 aga pole lõikejoon pealtvaates nähtav, sest see punkt asub koonuse varjatud moodustajal $C3$. Analoogiliselt saab lõikejoone nähtavust kindlaks määrata ka eestvaates.

Sama ülesande lahendus uute kujutamiskiirte võtte abil oleks järgmine (joon. 57-5). Projekteerime antud pinnad põhiekraanile kiirtega, mis on paralleelsed silindri moodustajatega. Siis saame silindri kaldprojektsiooniks tema põhja ringjoone, koonuse tipp aga projekteerub punktiks

P . Joonisel näidatud abitasandite jäljed osutuvad koonuse moodustajate kaldprojektsioonideks. Pindade lõikejoone punktide leidmiseks tõmbame koonuse mingi moodustaja kaldprojektsiooni. See lõikab silindri kaldprojektsiooni (põhja ringjoont) punktides, mis osutuvad otsitava lõikejoone punktide kaldprojektsioonideks. Viimastesse suunduvate kaldkiirte abil saab leida otsitavad lõikepunktid koonuse vastavalt moodustajalt — enne pealtvaates ja siis eestvaates.

Nii selgub, et uute kujutamiskiirte võtte rakendamisel esinevad kõik samad konstruktsioonijooned mis abitasandite võtte puhulgi, kuid neil on siin teine tähendus.

ÜLESANDED

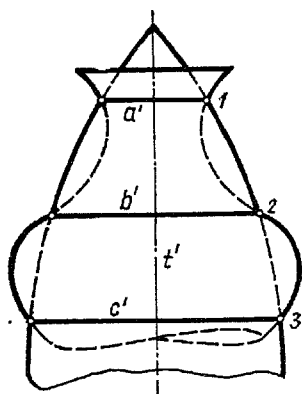
1. Tuletada sfaari ja pöördkoonuse lõikejoon (joon 57-6).
2. Konstrueerida puramudi ja silindri lõikejoon (joon. 57-7).
3. Tuletada silindri ja koonuse lõikejoon (joon. 57-8)

§ 58. ABISFÄÄRIDE KASUTAMINE PINDADE LÕIKEJOONTE TULETAMISEL

Ühise teljega pöördpinnad saavad lõikuda ainult mööda ringjooni, kusjuures lõikeringjoonte arv võrdub poolmeridiaanide lõikepunktide arvuga. Näiteks joonisel 58-1 esitatud pöördpindadel on kolm lõikeringjoont a , b ja c . Et pindade ühine telg t on võetud paralleelne joonisepinnaga, siis need ringjooned projekteeruvad sirglõikudeks a' , b' ja c' .

Kui üheks antud pinnaks on sfäär, mille tsenter O asetseb mingi teise pöördpinna teljel t , siis toimub lõikumine samuti mööda ringjooni, sest pöördpinna telg on siis ühtlasi sfääri teljeks (joon. 58-2, ringjooned a ja b). Vähendades sfääri raadiust r kindla suuruseni r_2 , saaksime kahe lõikeringjoone asemel üheainsa puuteriingjoone c . Raadiuse edasisel vähendamisel aga jääks sfäär juba üleni pöördpinna sisse ning seetõttu temal pöördpinnaga ühiseid punkte enam ei ole (vt. sfääri raadiusega r_1).

Asjaolu, et sfääriga saab pöördpinda lõigata mööda ringjooni, ongi aluseks abisfääride võttele.

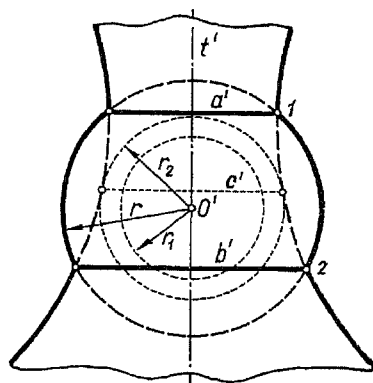


Joonis 58-1

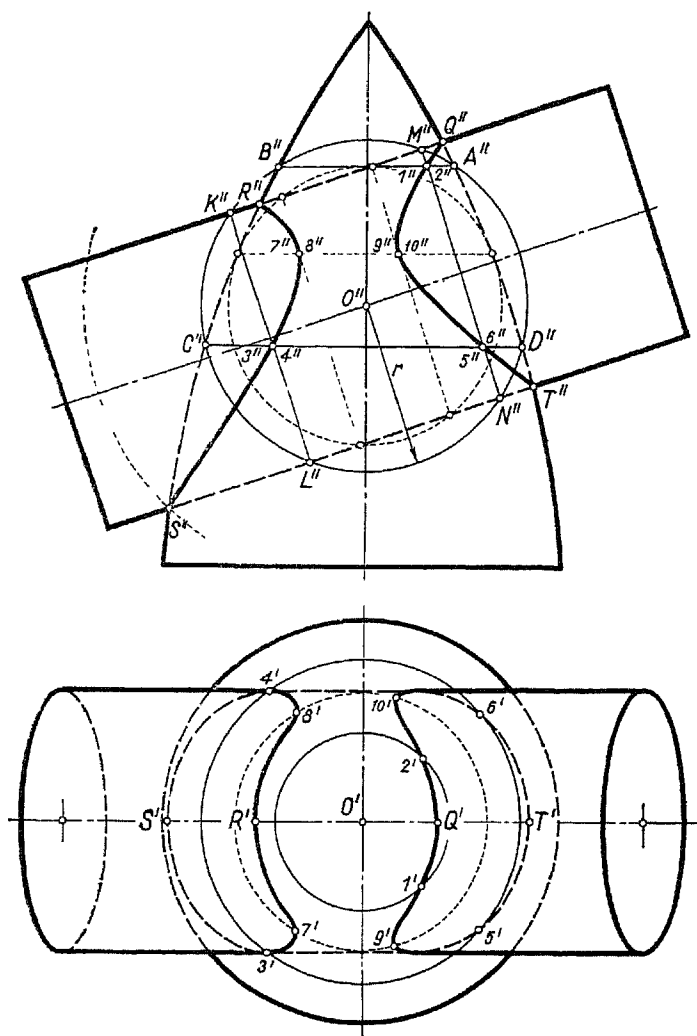
1. Kontsentrilised abisfäärid. Kui kahe pöördpinna teljed lõikuvad ning telgede tasand on ühe ekraaniga paralleelne, siis laheneb lõikumisülesanne kontsentriliste (s. t. ühise tsentriga) sfääride abil. Võtte olemust selgitame järgmise näite varal.

Näide 1. Olgu vaja tuletada pöördsilindri ja kõverjoonelise meridiaaniga pöördpinna lõikejoon, kui pindade teljed lõikuvad ja on paralleelsed esiekraaniga (joon. 58-3).

Telgede lõikepunkti O võtame abisfääride tsentriks, raadiusele aga anname vajaduse piires vabalt väärtusi. Jälgime mõttekäiku näiteks abisfääri puhul, mille raadius on r . Selle sfääri eestvaateks on ring tsentriga O'' ja raadiusega r . Et sfääri tsenter asetseb kummagi antud pöördpinna teljel, siis sfäär lõikab neid pindu mööda ringjooni. Need lõikeringjooned projekteeruvad esiekraanile sirglõikudeks, sest nende tasandid on telgede frontaalasendi tõttu esiekraaniga risti. Püstteljega pöördpinna ja sfääri lõikeringjoonte eestvaadeteks on sirglõigud $A''B''$ ja $C''D''$, silindril asetsevate lõikeringjoonte eestvaadeteks aga $K''L''$ ja



Joonis 58-2



Joonis 58-3

$M''N''$. Lõikeringjoonte eestvaadete lõikumisest järeldame, et vastavad ringjooned sfääril samuti lõikuvad. Ringjoonte eestvaadete lõikepunktid $1'' \equiv 2''$, $3'' \equiv 4''$ ja $5'' \equiv 6''$ ongi otsitava lõikejoone eestvaate punktideks. Iga kahe lõikeva ringjoone mõlemad lõikepunktid langevad eestvaates kokku seetõttu, et need punktid asetsevad sümmeetriliselt

pindade telgede tasandi suhtes. Lõikepunktide 1, 2, 3... pealtvaated leitakse sidejoonte abil püstteljega pöördpinna paralleelide pealtvaadetelt, s.o. ringjoonelt, mille diameetrid võrduvad lõikudega $A''B''$ ja $C''D''$. Muutes abisfääri raadiust ja korrates konstruktsioonide tsüklit, võib saada kui tahes palju lõikejoone punkte.

Juhime tähelepanu sellele, et lõikejoone eestvaate tuletamisel me ei kasutanud pöördpindade pealtvaateid. Asjaolu, et abisfääride võtte võimaldab lõikejoont tuletada ühesaainsas ristprojektsioonil ekraanil, mis on paralleelne pindade telgede tasandiga, ongi abisfääride võtte eriliseks väärtuseks.

Vähimaks sfääriks, mille abil saab lõikejoone punkte leida, on sfäär, mis ühte antud pinda puutub ja teist lõikab. Joonisel 58-3 on vähima sfääri eestvaade ja vastavad konstruktioonid näidatud punktjoonega. Selle sfääri abil on leitud lõikejoone erilised punktid 7, 8, 9 ja 10, s. o. punktid, mis asetsevad silindri nendel paralleelidel, mida lõikejoon puutub.

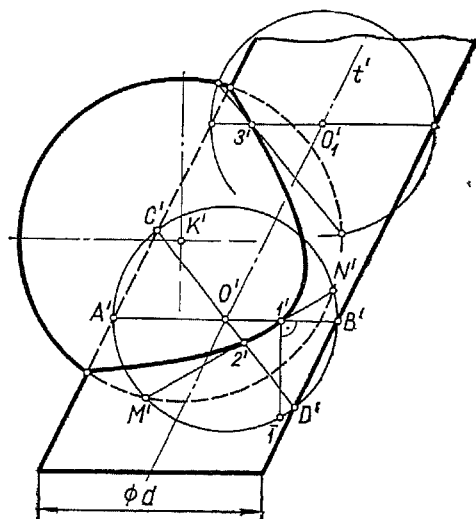
Suurimaks sfääriks, mille abil saab lõikejoone punkte leida, on antud juhul sfäär raadiusega $O''S''$. See annab lõikejoone punkti S, s. o. ühe nendest punktidest Q, R, S ja T, kus lõikuvad frontaalsed meridiaanid.

Märgime lõpuks, et abisfääride võtte rakendamine võib tulla kõne alla ka siis, kui pöördpindade telgede tasand pole ekraaniga paralleelne. Sel juhul tuleks kõigepealt rakendada niisugust uut ekraani, mis oleks paralleelne telgede tasandiga, ning siis lahendada lõikumisülesanne uues ristprojektsioonis.

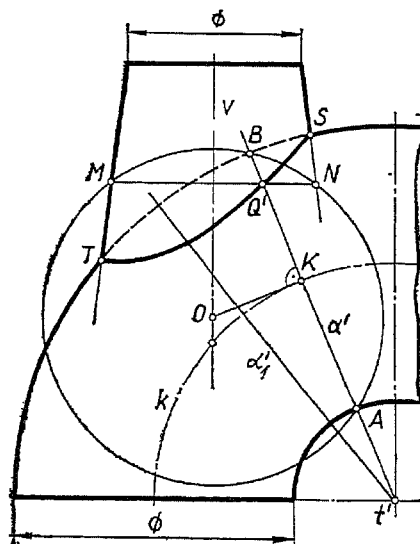
2. Ekstsentrilised abisfäärid. Abisfääre saab kasutada ka mõningail niisuguseil juhtumel, kus antud pöördpindade teljed ei lõiku või kus üheks antud pinnaks on pöördpinna üldisem tsükliline pind. Kasutamisele tulevad abisfäärid on neil puhkudel ekstsentrilised, s. t. erinevate tsentritega. Vaatleme mõnda sellekohast näidet.

Näide 2. Olgu vaja tuletada sfääri ja ringjoonelise põhjaga elliptilise silindri lõikejoon eeldusel, et tasand, mis läbib sfääri keskpunkti K ja silindri telge t , on paralleelne joonisepinnaga (joon. 58-4).

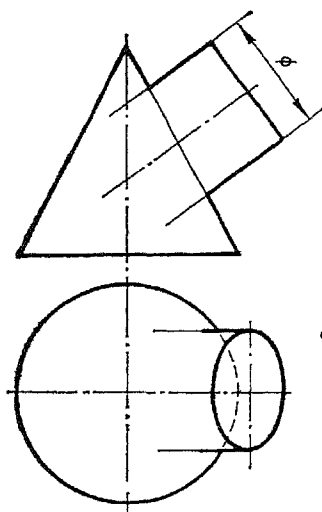
Lõikame antud pindu abisfääriga,



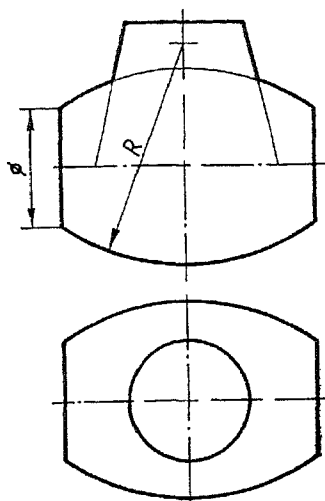
Joonis 58-4



Joonis 58-5



Joonis 58-6



Joonis 58-7

mille tsenter O on silindri teljel ja diameeter võrdub silindri põhja diameetriga d . See sfäär lõikab silindrit mööda kahte ringjoont: üks neist on paralleelne silindri põhjaga ja tema ristprojektsiooniks tuleb lõik $A'B'$; teise ringjoone ristprojektsiooniks aga tuleb lõik $C'D'$. Teine lõige osutub ringjooneks seetõttu, et ta on sümmeetriline esimese lõikega silindri ja abisfääri ühise sümmeetria-tasandi suhtes, mis läbib punkti O ning on risti teljega t .

Et tsentrite O ja K kaugused joonisepinnast on võrdsed, siis antud sfääri ja abisfääri lõikeringjoone tasand on joonisepinnaga risti ning seetõttu lõikeringjoon projekteerub sfääride kujutiste ühiseks kõõluks $M'N'$. Viimane lõikab silindril asetsevate ringjoonte projektsioone $A'B'$ ja $C'D'$ punktides $1'$ ja $2'$, mis kuuluvadki otsitava lõikejoone projektsioonile.

Valides teljel t uusi abisfääride tsentreid ja korrates konstruktsioone, võime saada kui tahes palju lõikejoone punkte. Joonisel on näidatud

veel lõikejoone punkti 3 saamine abisfääriga, mille tsentriks on punkt O_1 .

Et antud pindadest koosnev pinna-paar on sümmeetriline nivoopinna (K, t) suhtes ning et pindade lõikejoon peab olema sümmeetriline sama tasandi suhtes, siis osutub lõikejoone projektsioon kahekordseks jooneks, s. t. lõikejoone mittenähtav pool jääb täpselt nähtava joone varju. Saab tõestada, et lõikejoone ristprojektsioon antud juhul on parabool.

Lõikejoone mingi punkti kauguse saamiseks nivoopinna (K, t) tuleb seda punkti kandev abiringjoon pöörata sellele tasandile. Nii on joonisel leitud näiteks punkti 1 kaugus nivoo-pinnast (K, t) lõiguna $1'1$.

Näide 3. Tuletada rõngaspinna ja pöördkoonuse lõikejoon eeldusel, et koonuse telg v asetseb rõngaspinna telgringjoone k tasandis, kuid ei lõika rõngaspinna telge t (joon. 58-5).

Asetsegu rõngaspinna telgringjoon k ja koonuse telg v joonisepinnal. Ilma konstruktsioonideta on käes

lõikejoone punktid S ja T kui joonisepinnal olevate meridiaanide lõikepunktid. Lõikejoone teisi punkte saab leida järgmiselt. Lõikame rõngaspinda ekraani ristasandiga α , mis läbib telge t . Lõikes tekib ringjoon tsentriga K ja diameetriga AB . Tasandi α normaal läbi tsentri K lõikab koonuse telge v punktis O . Viimase võtame abisfääri tsentriks, abisfääri raadius aga võrdugu lõiguga OA . Nii saadud abisfäär lõikab antud pindu mööda ringjooni. Nende ringjoonte projektsioonideks tulevad lõigud AB ja MN ; viimaste lõikepunkt Q' ongi otsitava lõikejoone ühe sümmeetrilise punktipaari ristprojektsiooniks.

Pöörates tasandi α ümber telje t uude asendisse α_1 , saame tuletada uue abisfääri, mille tsenter ja raadius tulevad endisest erinevad. Iga uus abisfäär annab konstruktsioonide tsükli kordamisel lõikejoone uue punktipaari projektsiooni. Niiviisi võime leida kui tahes palju lõikejoone punkte.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Mis jooni mööda lõikuvad kaks ühise teljega pöördpinda?
2. Mis joont mööda lõikuvad kaks sfääri?
3. Mis juhtumel sfäär lõikab pöördpinda ringjooni mööda?
4. Tuletada abisfääride võttega koonuse ja pöördsilindri lõikejoon (joon. 58-6) ning rõngaspinna ja tüvikoonuse lõikejoon (joon. 58-7).

§ 59. TEIST JÄRKU PINDADE LÕIKUMISE ERIJUHTUMID

1. Ühise sümmeetriatasandiga teist järku pinnad. Kahe teist järku pinna lõikejoon on üldjuhul neljandat järku ruumikõver, tema projektsioon aga neljandat järku tasakõver. Eri-

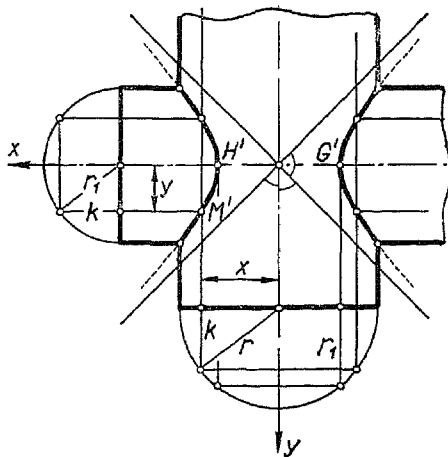
juhtumel lagub neljandat järku lõikejoon kaheks teist järku jooneks.

Kui lõikuvatel teist järku pindadel on ühine sümmeetriatasand, siis kehtib nende lõikejoone kohta järgmine lause.

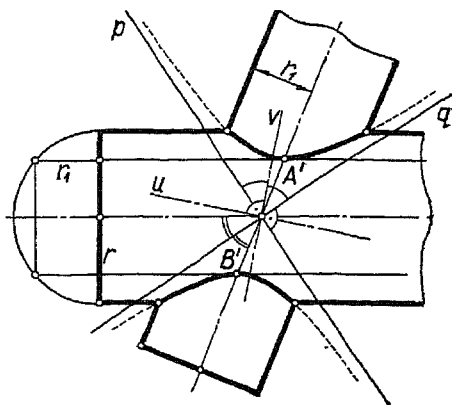
(50) Kui kahel teist järku pinnal on ühine sümmeetriatasand, siis nende pindade lõikejoone ristprojektsiooniks sümmeetriatasandil tuleb teist järku joon (kahekordne).

Tõestus. Olgu kahel lõikuval teist järku pinnal ühine sümmeetriatasand σ . Siis on ka nende pindade lõikejoon g sümmeetriline tasandi σ suhtes ning seetõttu tema ristprojektsiooniks sümmeetriatasandil tuleb kahekordne joon. Lõikame kõverat g tasandiga α , mis on sümmeetriatasandiga risti. Saame üldjuhtumil 4 lõikepunkti, mis on paarikaupa sümmeetrilised tasandi σ suhtes. Kõvera g ja tasandi α ristprojektsiooniks tasandil σ saame vastavalt tasakõvera g' ja sirgjoone α' . Viimane lõikab kõverat g' kahes punktis — sümmeetriliste lõikepunktide ühiskujutistes. Et kõver g' , kui algebralise kõvera g projektsioon, lõikub sirgega kahes punktis, peab ta olema teist järku joon (ellips, hüperbool või parabool). Sellega on lause tõestatud.

Selgitame seda lauset näiteks lõikuvate telgedega pöördsilindrite puhul. Telgede tasand on siis ühtlasi silindrite ühiseks sümmeetriatasandiks. Lõikejoone ristprojektsioon sel tasandil osutub risti hüperbooliks, sõltumata telgedevahelisest nurgast ja raadiuste vahekorast. Näitame, et väide on õige ristuvate telgedega silindrite puhul. Selleks kasutame lõikejoone punkti M , mis on leitud nivoopinna abil, mille kaugus telgede tasandist (ekraanist) on



Joonis 59-1



Joonis 59-2

k (joon. 59-1). Võtame silindrite teljed koordinaattelgedeks ning tähistame punkti M' koordinaadid tähtedega x ja y . Silindrite põhjade pöörenditelt ekraanil leiame nüüd, et

$$x^2 = r^2 - k^2 \text{ ja } y^2 = r_1^2 - k^2,$$

kus r ja r_1 on silindrite raadiused. Võrduste lahutamisel saamegi risthüperbooli võrrandi (§ 41, võrrand 5'):

$$x^2 - y^2 = r^2 - r_1^2 = \text{const.}$$

Arusaadavalt kuulub lõikejoone projektsioonile ainult see osa hüperboolist, kus $|x| \leq r$.

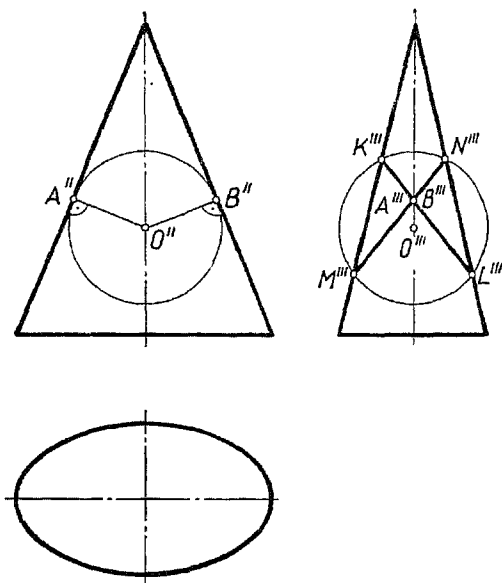
Hüperbooli haripunktideks H' ja G' projekteeruvad lõikejoone punktid H ja G , milles lõikuvad ekraanist kaugusel r_1 asetsevad silindrite moodustajad.

Joonisel 59-2 on tegemist juhtumiga, kus silindrite teljed küll lõikuvad, kuid pole teineteisega risti. Lõikejoone ristprojektsiooniks telgede tasapinnal tuleb siin samuti risthüperbool. Selle hüperbooli asümptootid

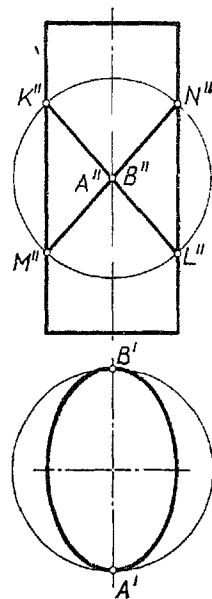
toodid p ja q poolitavad silindrite telgede vahelisi nurki. Hüperbooli sümmeetriateljed u ja v poolitavad aga omakorda asümptootidevahelisi nurki. Joonisel on selgitatud ka hüperbooli eriliste punktide A' ja B' saamist. Lõikejoone vastavad punktid A ja B osutuvad sääraste moodustajate lõikepunktideks, mille kaugus pindade telgede tasandist (ekraanist) on r_1 .

Esitatud näiteile lisaks vaatleme veel joonist 58-4 (§ 58), kus on samuti tegemist teist järku pindade lõikumisega. Et lõikejoone ristprojektsioon on tuletatud pinnapaari sümmeetriatasandil, siis osutub ta teist järku jooneks, nimelt parabooliks. Ka joonisel 57-1 esitatud pöördparaboloidi ja sfääri lõikejoone eestvaade on parabool.

2. Teist järku pindade lõikejoone lagumine. Praktikas on erilise tähtsusega juhtumid, kus teist järku pindade lõikejoon neljandat järku joonena koosneb kahest teist järku joonest. Niisuguseid juhtumeid haarab järgmine lause.



Joonis 59-6



Joonis 59-7

riatasandi σ suhtes, mis läbib sfääri keskpunkti O ning on risti silindri teljega t . Mõlema ringjoone ühiseks ristprojektsiooniks tasandil σ on ellips pooltelgedega a ja b , s. o. silindri elliptiline ristlõige.

Joonisel 59-5 lõikuvad sfäär ja teist järku koonus. Koonuse juhtjooneks on võetud sfääri suurringjoon (diameetriga AB), mille tasand on risti ekraaniga ε (A, B, T). Sfääri ja koonuse teise ühise ringjoone diameetrigs on joonisepinnal asuv lõik CD . Mõlema ringjoone lõikepunktid K ja L on üldlõikejoone kahekordsed punktid; mõlemas punktis on pindadel ühine puutetasand.

Tsükliliste teist järku pindade (§ 49) ringjooneliste lõigete leidmine tugineb järgmisele lausele, mille esitame tõestuseta*.

* Lause tõestuse võib leida raamatust: O. Rünk, N. Paluver. Kujutav geomeetria. Tallinn, 1961, lk. 211.

(53) Kui kaks lõikuvat teist järku pinda ühtlasi puutuvad teineteist kahes punktis, siis koosneb nende lõikejoon kahest teist järku joonest, mis lõikuvad nels puutepunktides.

Rakendame seda lauset teist järku koonuse ringjooneliste lõigete leidmiseks. Koonus olgu kujutatud kolmvaates (joon. 59-6). Lõikame teda sfääriga, mis puutub koonust näiteks punktides A ja B ning mille tšenter O on koonuse teljel. Esmalt saame joonestada sfääri eestvaate, siis külgsaate. Lause (53) põhjal peavad sfäär ja koonus lõikuma mööda kahte teist järku joont, mis läbivad punkte A ja B . Et need lõikejooned asetsevad sfääril, siis on nad ringjooned. Need lõikeringjooned projekteeruvad külgekraanile sirglõikudeks, sest nende ühine kõõl AB on külgekraaniga risti. Arusaadavalt on

pinnakontuuride lõikepunktid K , L , M ja N pindade lõikejoone punktideks. Nii selgub, et $KALB$ ja $MANB$ on koonuse kaks ringjoonelist lõiget. Kõik nendega paralleelsed lõiked on samuti ringjooned.

Joonisel 59-7 on leitud elliptilise silindri ringjoonelist lõiked $MANB$ ja $KALB$. Selleks on kasutatud sfääri, mis puutub silindrit ristlõikeellipsi pikema telje otspunktides A ja B .

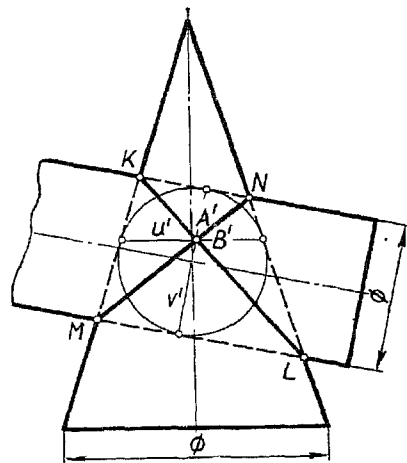
Analoogiliselt saab leida ka ellipsoidi, elliptilise paraboloidi ning ühe- ja kahekattelise hüperboloidi ringjoonelisi lõikeid.

Järgmine teoreem, mille esitame tõestuseta, on tuntud Monge'i teoreemi nime all.

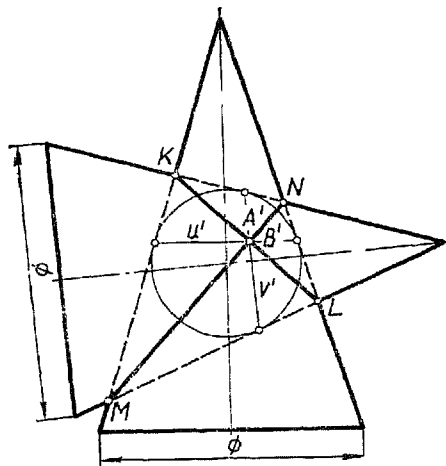
- (54) Kui kaks teist järku pinda puutuvad kolmandat teist järku pinda jooni mööda*, siis nende kahe pinna lõikejoon lagub kaheks teist järku jooneks, mille tasandid läbivad puutejoonte tasandite lõikesirget**.

Praktika seisukohalt on Monge'i teoreemil suur tähtsus teist järku pöördpindade lõikumiste erijuhtumite lahendamisel. Esitame mõned illustreerivad näited.

Joonisel 59-8 on kujutatud kaks pöördkoonust, mis rahuldavad Monge'i teoreemi tingimusi. Sfäär, mille tsentriks on koonuste telgede lõikepunkt, puutub koonuseid mööda paralleelele u ja v . Nende paralleelide tasandid lõikuvad mööda sirget AB



Joonis 59-8

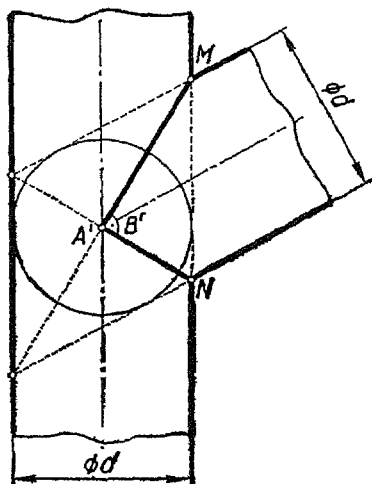


Joonis 59-9

* Kahe teist järku pinna puutejoon on teist järku joon. Vaata näiteks Н. В. Четверухин и др., Курс начертательной геометрии, Гостехиздат, М., 1956, стр. 319.

** G. Monge tõestas selle teoreemi analüütiliselt. Teoreemi sünteetilise tõestuse võib leida kogumikust: Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. М., 1958, стр. 97...100.

($A' \equiv B'$). Koonuste lõikejoon koosneb kahest ellipsisist, mille tasandid läbivad samuti sirget AB . Ellipsite projektsioonideks koonuste telgede tasandil (joonisepinnal) on lõigud KL ja MN , mille otspunktid K , M , L ja N on joonisepinnal olevate moodustajate lõikepunktid.

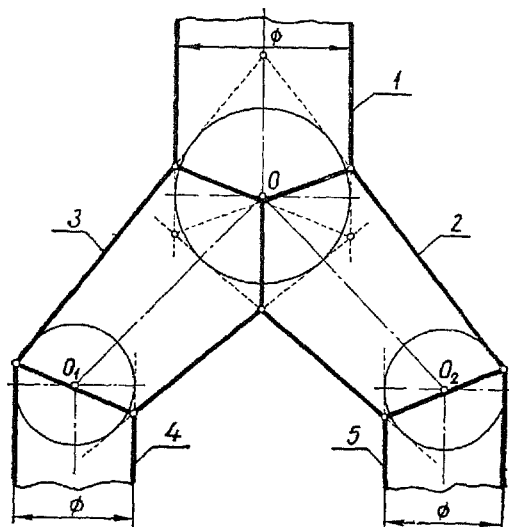


Joonis 59-10

Joonisel 59-9 on analoogiliselt lahendatud pöördkoonuse ja pöörd-silindri lõikumisülesanne juhtumil, kui mõlemad pinnad puutuvad ühte ja sama sfääri. Lõikejoon koosneb jälle kahest ellipsist, mille projekt-sioonideks pindade telgede tasandil on lõigud KL ja MN .

Joonisel 59-10 näeme võrdsete läbimõõdudega pöörd-silindritest koosnevat torukolmikut. Võrdsete läbimõõdude tõttu on silindritel ühine puutesfäär. Lõikejoon koosneb kahest ellipsist, mille tasandid on teineteisega risti; torukolmikus esinevad nende ellipsite pooled AMB ja ANB . Joonis on tehtud ristprojektsioonina telgede tasandil.

Joonisel 59-11 on esitatud venti-latsioonitorustiku sõlme konstrukt-sioon. Sfäär tsentriga O on puute-sfääriks pöörd-silindrilisele torule 1 ning pöördkoonilistele torudele 2 ja 3. Sfäärid tsentritega O_1 ja O_2 aga on puutesfäärideks vastavalt toru-



Joonis 59-11

dele 3, 4 ja 2, 5. Torude lõikejooned on ellipsid või nende osad. Et kõi-kide torude teljed asetsevad ühes ja samas tasandis, siis lõikeellipsid pro-jekteeruvad telgede tasandile (joo-nisepinnale) sirglõikudeks. Torustiku ehitamine kirjeldatud viisil võimal-dab vältida torude keerulisi lõikeid.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Mitu ühist sümmeetriatasandit on: a) kahel suvaliselt paikneval sfääril, b) sfääril ja tema suhtes suvaliselt paikneval lõpmata pikal silindril?
2. Mis tingimustel tuleb kahe teist järku pinna lõikejoone ristprojektsiooniks teist järku joon?
3. Milliseks teist järku jooneks projekteerub kahe pöörd-silindri lõikejoon nende silind-rite ühisele sümmeetriatasandile?
4. Mis juhtumil kahe teist järku pinna lõike-joon lagub kaheks teist järku jooneks (Monge'i teoreem)?
5. Esitada kolmvaates ellipsoid, mille pool-teljed on $a=30$ mm, $b=25$ mm ja $c=15$ mm ning leida tema ringjoonelised lõiked.

§ 60. KÕVERPINDADE LAOTUSED

Paragrahvist 48 teame, et laotuvat (tasanduvat) pinda saab deformeerida tasandiks painutamise teel ning et ainsateks laotuvateks pindadeks on silindrilised pinnad, koonilised pinnad ja puutujatepinnad.

Kujundit, mis saadakse laotuva pinna painutamisel tasandiks, nimetatakse selle pinna **laotuseks**. Pinnale kuuluvast joonest saadakse laotusel selle joone **laotusjoon**; viimane võib olla joonest enesest tunduvalt keerulisema kujuga.

Laotaval pinnal asetsevate joonte ja pindkujundite mitmed omadused jäävad püsima ka laotusel. Tähtsamad neist omadustest on järgmised:

- 1) laotusjoone lõik on pikkuselt võrdne vastava joonlõiguga pinnal;
- 2) sirgjoone laotusjoon on sirge;
- 3) paralleelsete sirgete laotusjooned on paralleelsed sirged;
- 4) kinnine joon pinnal ja vastav joon pinnalaotusel piiravad võrdseid pindalasid;

5) laotusjoonte vaheline nurk võrdub vastavate joonte vahelise nurgaga pinnal*.

Esimene omadus järeldub otseselt asjaolust, et painutamisel pind ei veni ega tõmbu kokku, mistõttu pinnal olevad joonlõigud ei saa pikkuks muutuda. Viimased neli omadust aga järelduvad kõik esimesest omadusest.

Pöördsilindri külpinna laotuseks on riskülik, mille üks külj võrdub silindri moodustajaga, teine aga silindri põhja ümbermõõduga.

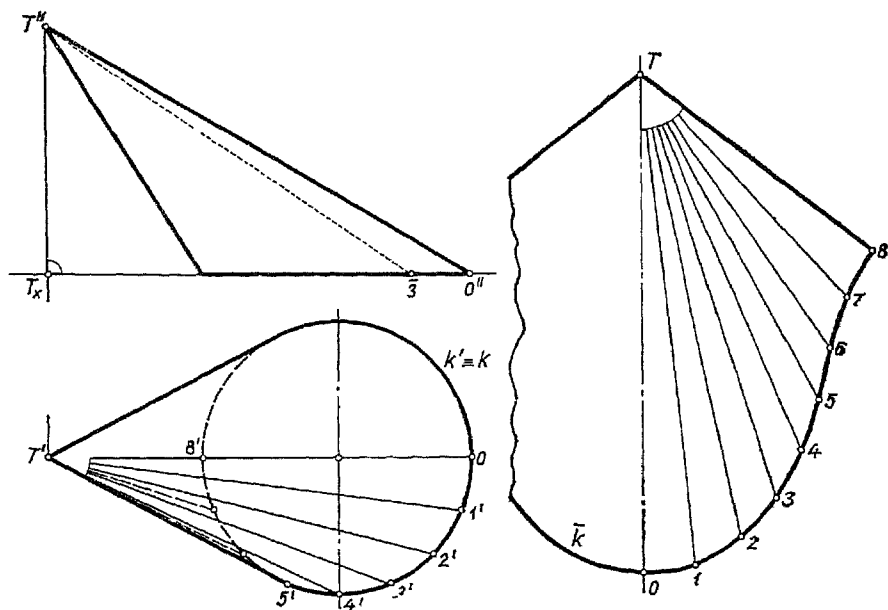
* Eranditeks on: 1) koonilise pinna puhul nurgad, mille tipuks on koonuse tipp; 2) puutujatepinna puhul nurgad, mille tipp on pinna servjoonel. Näiteks koonuse moodustajate vahelised nurgad ruumis ei võrdu vastavate nurkadega pinnalaotusel.

Selle ümbermõõdu võime kas arvutada läbimõõdu järgi või leida graafiliselt ringjoone sirgestamise lähiskonstruktsiooni abil (§ 40).

Pöördkoonuse külpinna laotuseks on ringi sektor, mille raadiuseks on koonuse moodustaja m , kaare pikkus aga võrdub koonuse põhja ümbermõõduga $2\pi r$. Sektori kaare võib saada kas vastava kesknurga α arvutamise teel ($\alpha = \frac{r}{m} \cdot 360^\circ$) või joonisel 44-4, b antud lähiskonstruktsiooni abil.

Keerukamate laotuvate pindade, näiteks üldkujuliste kooniliste ja üldkujuliste silindriliste pindade laotusi ei saa alati konstrueerida täpselt, vaid tuleb leppida lähislaotusega. Lähislaotuse saamiseks asendatakse antud kõverpind teda küllalt hästi lähendava hulktahulise pinnaga. Seejärel tuletatakse paragrahvist 38 vaadeldud viisil hulktahu pinnalaotus, mis võetaksegi antud kõverpinna lähislaotuseks. Tulemust parandatakse sellega, et hulktahu pinnalaotusel saadavad murdjooned, mis täppislaotusel tegelikult peavad olema kõverjooned, asendatakse sujuva kõveraga läbi murdjoone tipude.

Kõverpinda asendava lähismudeliga kasutamise idee on rakendatav ka mittelaotuvate pindade puhul, kuigi neil puudub laotus harilikus mõttes. Nimelt võib iga konkreetse mittelaotuva pinna asendada mingi niisuguse lähismudeliga, mis koosneb laotuvate pindade osadest. Säärase lähismudeli osade laotustest koosnevat kujundit nimetatakse antud mittelaotuva pinna **tinglikuks laotuseks** (lühemalt — tinglaotuseks). Näiteks suurele silindrilisele reservuaarile sfäärilise põhja ehitamisel lehtmaterjalist vajame sfääri mingit tinglaotust. Olgu märgitud, et



Joonis 60-1

mittelaotuva pinna saamisel tema tinglaotusest tuleb viimase osi mitte ainult painutada, vaid ka kohati kokku suruda või venitada.

Esitame mõned näited pinnalaotuste tuletamise kohta.

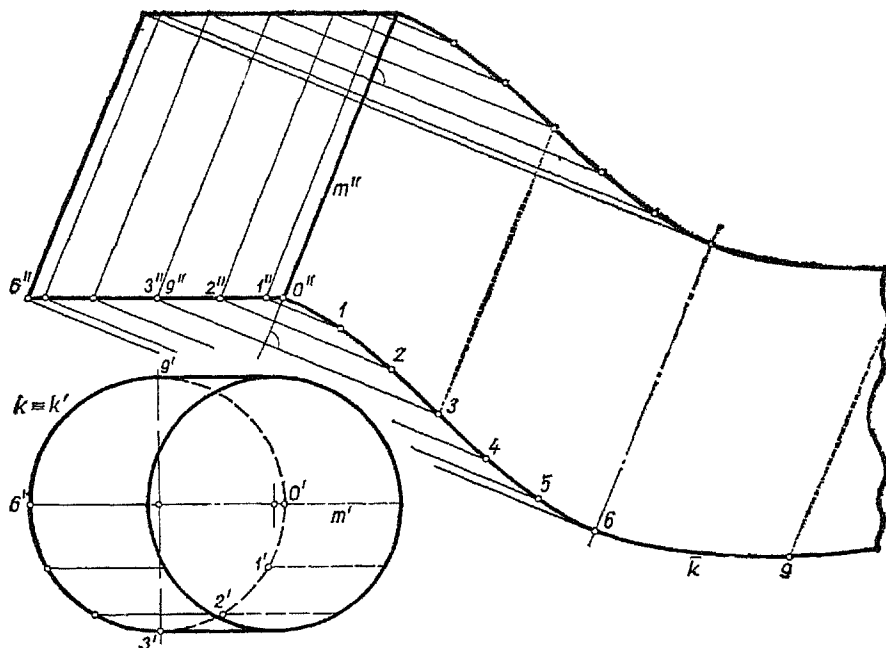
Näide 1. Olgu vaja tuletada ringpõhjaga kaldkoonuse külgpinna laotus (joon. 60-1).

Jaotame koonuse põhjaringjoone k küllalt suureks arvuks võrdseteks osadeks, näiteks 16 osaks ($0'1' = 1'2'$ jne.) ning asendame koonuse tema sisse kujundatud 16-nurkse püramiidiga. Et koonus on sümmeetriline tippu T läbiva frontaaltasandi suhtes, siis on joonisel jaotused tehtud ainult poole ringjoone ulatuses. Püramiidi külgpinna laotuse saamiseks leiame püramiidi külgservade (koonuse moodustajate) tõelised pikkused ning konstrueerime üksteise külge tahkude (kolmnurkade)

tõelised kujud. Iga tahu tõelise kuju üheks küljeks on põhjaringjoone jaotusele vastava kõõlu pikkus ($01 = 0'1', \dots$), teiste külgede pikkused aga on leitavad sirklivõttega. Külje $T3$ pikkus näiteks on saadud järgmiselt: $T_x\bar{3} = T'3'$; $T3 = T''\bar{3}$. Ühendades pinnalaotusel saadud punktid $0, 1, 2, \dots$ sujuva kõveraga $\bar{k}$, saamegi küllalt hea lähenduse koonuse külgpinna laotusele. See laotus on sümmeetriline telje OT suhtes.

Näide 2. Tuletada ringpõhjaga kaldsilindri külgpinna laotus (joon. 60-2).

Silindri kaksvaade on joonestatud nii, et moodustajad on paralleelsed esiekraaniga. Silindri põhjaringjoon on jaotatud 12 võrdseks osaks ja silinder ise asendatud tema sisse kujundatud 12-nurkse prismaga. Prisma külgpinna laotuse tuletamisel



Joonis 60-2

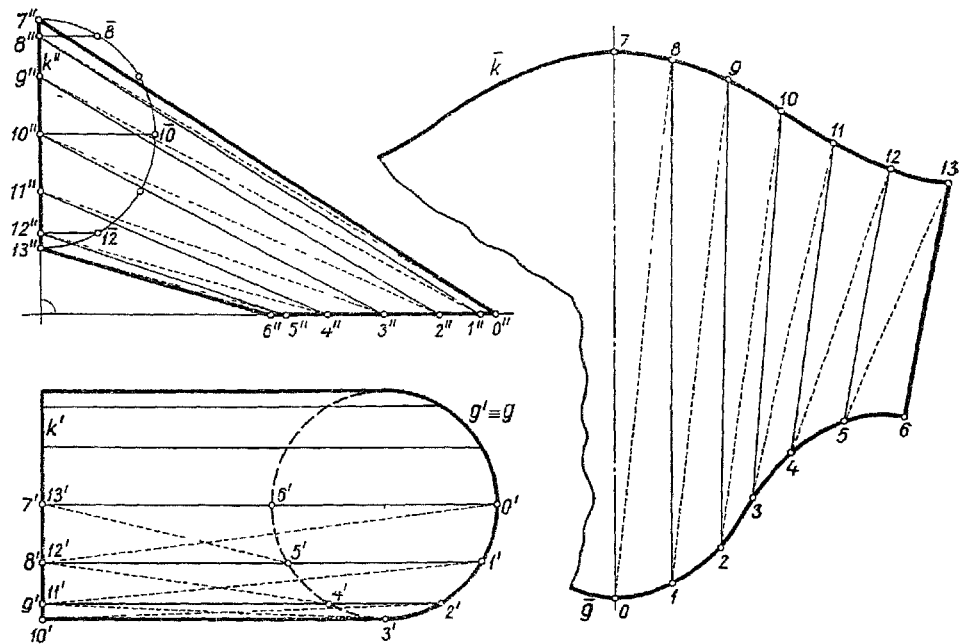
kordame joonisel 38-2 (§ 38) näidatud konstruktsioone, rullides külgepinna lahti frontaalpinna, mis läbib serva m . Selleks tõmbame punktidest $1'', 2'', 3'', \dots$ sirged risti sirgega m'' ning võtame $0''1 = 0'1', 12 = 1'2'$ jne. Ühendades punktid $1, 2, 3, \dots$ sujuva kõveraga, saame silindri põhjaringjoone k laotusjoone lähiskõvera k . Silindri ülemise põhjaringjoone laotusjoon on kongruentne kõveraga k . Laotus on sümmeetriline telje suhtes, mis vastab moodustajale numbriga 6. Tulemus osutub praktiliselt küllalt heaks lähislaotuseks.

Näide 3. Tuletada joonisel 60-3 esitatud torukujulise silindroidi tinglaotus.

Silindroidi juhtjoonteks on võrdsete läbimõõtudega ringjooned k ja g , mille tasandid on teineteisega risti ning ühtlasi risti esiekraaniga. Ring-

joon g on horisontaalne, tsentreid ühendav sirge — frontaalne. Silindroidi juhtpinnaks on võetud esiekraan.

Jaotame ringjooned üheks ja samaks arvuks võrdseteks osadeks, näiteks 12 osaks nii, et mõlemate ringjoonte vastavate jaotuspunktide kaugused esiekraanist oleksid võrdsed. Tõmmates läbi vastavate jaotuspunktide silindroidi moodustajad 07, 18, 29 jne., tükeldub kogu silindroid 12 ribaks (kõverpinnaliseks nelinurgaks). Tõmmates diagonaalsirged 08, 19 jne., võime iga riba lähendada kahe kolmnurgaga, mille tipud ühtivad riba tippudega. Et silindroidi naabermoodustajad on kiivsed, siis riba asendavad kolmnurgad ei asetse ühes tasandis, vaid moodustavad lameda kahetahulise nurga. Nii viisi saame kogu silindroidi asendada



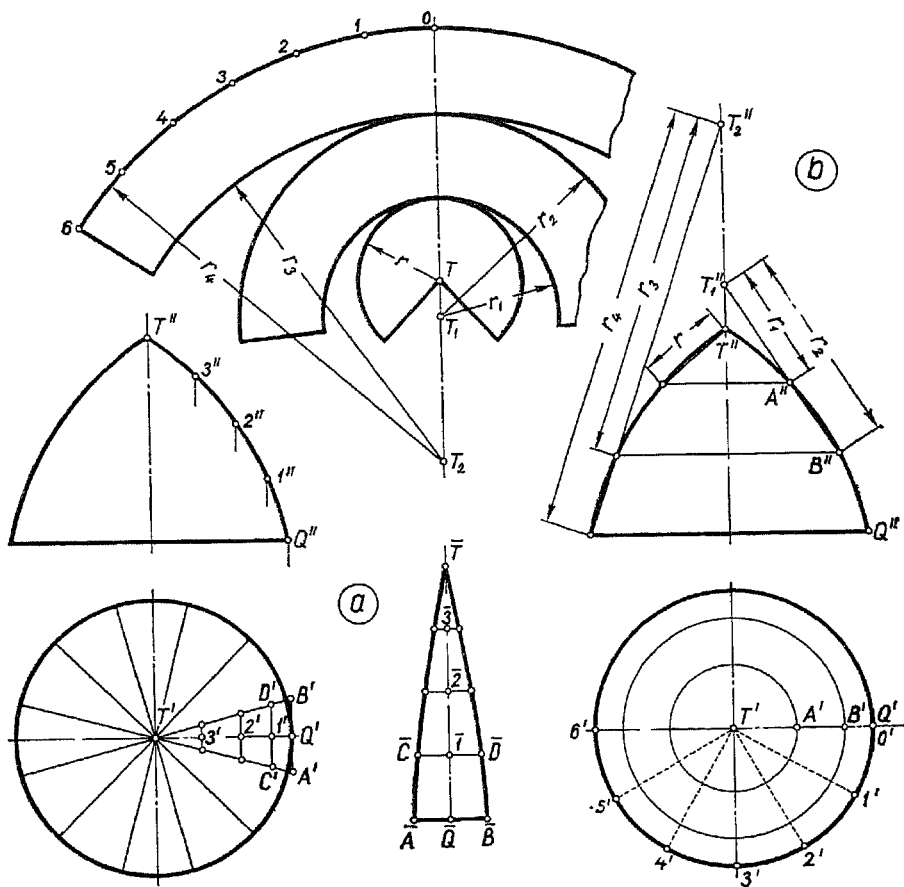
Joonis 60-3

tahukaga, mille tahustik koosneb ainult kolmnurkadest. Selle tahuka pinnalaotuse saamiseks leiame kõigi kolmnurkade külgede tõelised pikkused ning konstrueerime üksteise külge kolmnurkade tõelised kujud nende õiges järjestuses. Et mõlema juhtringjoone jaotused on pikkuselt võrdsed ($0'1' = 7''8''$), siis kolmnurkade tõelistes kujudes on ühe külje pikkuseks jäävalt kõõlu $0'1'$ pikkus; teiste külgede pikkused aga on joonisel leitud sirklivõttega. Ühendades tahuka pinnalaotusel punktid 0, 1, 2, ... ning 7, 8, 9, ... sujuvate kõveratega $\bar{g}$ ja $\bar{k}$, saamegi silindroidi tinglaotuse. Et silindroid on antud juhul sümmeetriline frontaaltasandi (0, 6, 7) suhtes ning et pind on lahti lõigatud mööda sümmeetriatasandil

olevat moodustajat 6—13, siis saadud tinglaotus on sümmeetriline moodustaja 07 suhtes.

Näide 4. Tuletada joonisel 60-4 esitatud kuhjakujulise pöördpinna tinglaotus.

Joonisel 60-4, a on pöördpind jaotatud meridiaanidega 12 ribaks. Asendame iga riba niisuguse silindrilise pinna tükiga, mis puutub riba mööda keskmist meridiaani ning mille moodustajad on selle meridiaaniga risti. Nende moodustajate otspunktid asetsegu pöördpinna riba piirideks olevate meridiaanide tasanditel. Võtame vaatluse alla riba, mille keskmine meridiaan QT on frontaalne. Vastava silindrilise pinna tüki moodustajad on siis risti esiekraaniga ning projekteeruvad põhiekraanile moondevabalt sirge $Q'T'$

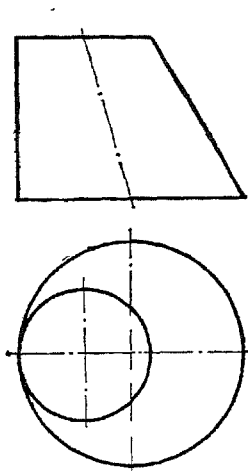


Joonis 60-4

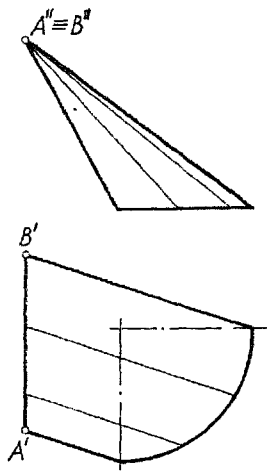
ristlõikudeks. Silindrilise pinna tüki laotuse leidmiseks jaotame frontaalse meridiaani punktidega $1''$, $2''$, ... osadeks ning kanname osade pikkused järjestikku sirgele $\overline{QT}$ pinnalaotusel ($\overline{Q1} = Q''1''$; $\overline{12} = 1''2''$ jne.). Punktidest 1 , 2 , ... tõmbame sirged risti telgsirgega $\overline{QT}$ ning kanname neile silindri moodustajate pikkused pealtvaatelt: $\overline{AB} = A'B'$, $\overline{CD} = C'D'$ jne. Tõmmates läbi saadud lõikude

otspunktide sujuvad kõverad, saame pöördpinna riba tinglaotuse. Kogu pöördpinna tinglaotus koosneb 12 säärasest tükist.

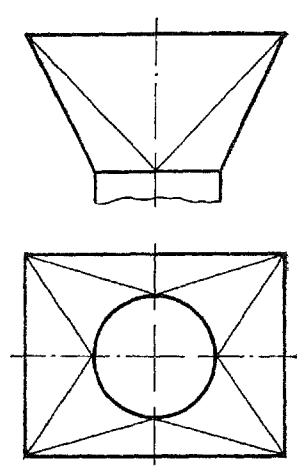
Joonisel 60-4, b on tuletatud sama pöördpinna teistsugune tinglaotus, kasutades kuhja paralleelringjoonte vaheliste vööde asendamist pöördkoonuste vöödega. Ulevaatlükuma joonise saamiseks on pöördpind jaotatud vaid kolmeks vööks (vööde arv peaks olema mõnevõrra suurem, kui soovitakse saada täpsemat lao-



Joonis 60-5



Joonis 60-6



Joonis 60-7

tust). Pöördkoonuste tipud T , T_1 ja T_2 määratakse eestvaatel kõõlude $A''T''$, $B''A''$ ja $Q''B''$ pikendamisega kuni lõikumiseni telgsirgega. Sellega saadakse ühtlasi kõik vajalikud raadiused koonuste vööde laotuste joonestamiseks. Kaarte pikkused võib laotusel saada vastavate lähiskonstruktsioonide abil (§ 40). Arusaadavalt on tinglaotuse kaared, mille raadiusteks on r ja r_1 , pikkuse poolest võrdsed; samuti on pikkuselt võrdsed kaared raadiustega r_2 ja r_3 .

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missugust pinda nimetatakse laotuvaks pinnaks?
2. Nimetage kõik laotuvate pindade klassid.
3. Missuguste pindade osadega asendatakse lähislaotuse saamiseks: a) silindriline pind, b) kooniline pind, c) pöördpind?
4. Tuletada koonilise torutüki ühe sümmeetrilise poole pinnalaotus (joon. 60-5).
5. Tuletada joonisel 60-6 esitatud konoidi tinglaotus.
6. Joonisel 60-7 kujutatud plekist kolu ülemine osa koosneb kolmnurkadest ja koonilistest pindadest, mis puutuvad üksteist. Tuletada selle kolu ühe veerandi pinnalaotus.

VII. AKSONOMEETRIA

§ 61. AKSONOMEETRIA KUI KUJUTAMISMEETODI TEOREETILISED ALUSED

1. **Põhimõisted.** Praktikas läheb sageli vaja objektide piltlikke kujutisi, mille järgi oleks võimalik määrata ka objekti mõõtmeid. Niisuguseid kujutisi saab hõlpsasti tuletada erilise kujutamismeetodi abil, mida nimetatakse **aksonomeetriaks**.* Selle meetodi puhul konstrueeritakse kujutis objekti punktide ristkoordinaatide järgi teljestiku kujutise baasil. Aksonomeetria meetodiga tuletatud kujutist nimetatakse **aksonomeetriliseks kujutiseks** (projektsiooniks). Sõna «aksonomeetriline» ei määra siin projektsiooni liiki (rist-, kald-, paralleelprojektsioon), vaid viitab ainult koordinaatide kasutamisele kujutise konstrueerimisel.

Objekti aksonomeetrilise kujutise tuletamise käik on lühidalt järgmine:

1) objekt seotakse ruumilise ristteljestikuga, mille tulemusel objekti

iga punkt saab endale kindlad koordinaadid;

2) joonestatakse esmalt teljestiku (kui objekti «kondikava») kujutis, kasutades konstruktsioone, mis antakse aksonomeetria teoorias;

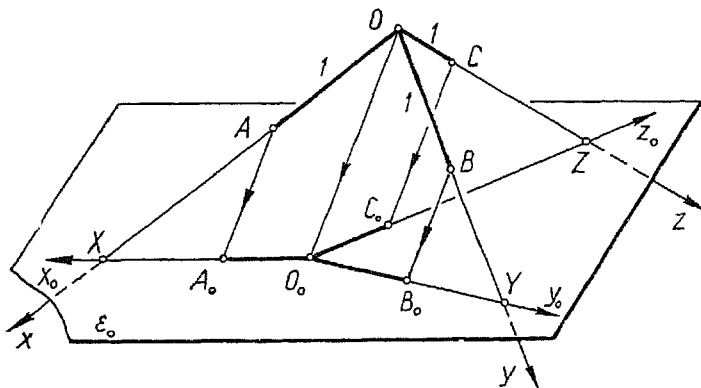
3) konstrueeritakse objekti enda kujutis teljestiku kujutise baasil, kasutades objekti punktide koordinaate (või koordinaatlõikusi).

Aksonomeetria teooria tegeleb esmajoones teljestikuga kui omaette kujutamisobjektiga, varieerides selle asendit ekraani suhtes ning tuletades temast mitmesuguseid projektsioone.

Aksonomeetrilise kujutise piltlikkus saavutatakse sellega, et teljestik paigutatakse projekteerivate kiirte suhtes asendisse, mille puhul ükski koordinaatpind pole kiirtega paralleelne ega projekteeru seetõttu sirgjooneks.

Teljestiku projektsiooni liiki määravad sõnu (rist-, kald-, paralleel-, tsentraal-) kasutatakse ka aksonomeetrilise kujutise liigi määramisel, ühtlasi aksonomeetria kui meetodi enda liigitamisel. Kui objekti kujutise tuletamisel võetakse aluseks teljestiku paralleelprojektsioon, siis aksonomeetria nimetatakse **parallelaksonomeetriaks**, kui aga teljes-

* Nimetus «aksonomeetria» tuleneb kreeka keelsetest sõnadest *akson* — telg ja *metreo* — mõõdan; seega termini tähendus tõlkes kõlaks «telgi mõõda mõõtmine».



Joonis 61-1

tiku tsentraalprojektsioon, siis **tsentraalaksonomeetriaks**. Paralleelaksonomeetriat liigitatakse **ristaksonomeetriaks** ja **kaldaksonomeetriaks**, vastavalt sellele kas kujutise tuletamisel võetakse aluseks teljestiku rist- või kaldprojektsioon. Käesolevas õpikus tegeleme ainult paralleelaksonomeetriaga, eriti ristaksonomeetriaga.

Käsitleme nüüd teljestiku projekteerimisega seotud mõisteid. Olgu ruumis antud risteteljestik $Oxyz$, mille telgede mõõtühikud on võrdsed: $OA=OB=OC=1$ (joon. 61-1). Mõõtühikud telgedel moodustavad teljestiku **ühikkolmiku**, mida tähistame $OABC$. Projekteerime selle teljestiku vabalt valitud sihiga paralleelsete kiirte abil ekraanile ϵ_0 . Et ühikkolmik ilmselt määrab kogu teljestiku ja tema asendi ekraani suhtes, siis teljestiku projektsioon $O_0x_0y_0z_0$ on määratud punktide O , A , B ja C projektsioonidega O_0 , A_0 , B_0 ja C_0 . Punktid X , Y ja Z , milles teljed x , y ja z lõikavad ekraani, on telgede jälgpunktid.

Aksonomeetrias omavad erilist tähtsust telgede x , y ja z **moondetegurid** m_x , m_y ja m_z , mis võime avaldada järgmiselt (§ 7):

$$m_x = \frac{O_0A_0}{OA}; \quad m_y = \frac{O_0B_0}{OB};$$

$$m_z = \frac{O_0C_0}{OC}.$$

Et mõõtühikute OA , OB ja OC asendid ekraani ϵ_0 ja kiirte suhtes on üldiselt erinevad, siis on üldjuhul pikkuselt erinevad ka nende paralleelprojektsioonid O_0A_0 , O_0B_0 ja O_0C_0 . Seetõttu on üldjuhul ka telgede moondetegurid suuruse poolest erinevad. Ainult juhul kui mõnede mõõtühikute kujutised on pikkuselt võrdsed, on võrdsed ka vastavate telgede moondetegurid, sest moondetegurite avaldistes on kõik nimetajad võrdsed.

Iga telje (näiteks x -telje) moondeteguri valemist

$$m_x = \frac{O_0A_0}{OA}$$

võime selle telje mõõtühiku kujutise pikkuse avaldada ühiku tõelise pikkuse ja moondeteguri korrutisena

$$O_0A_0 = m_x \cdot OA.$$

Niisugusel kujul rakendame valemit juhul, kui on vaja konstrueerida antud objekti järgi tema kujutist.

Seevastu kujutise järgi objekti taas-
tamisel, kus kujutisel esinevate pik-
kuste ja moondeteguri järgi tuleb
leida tõelisi pikkusi, opereerime
sama valemiga kujul

$$OA = \frac{O_o A_o}{m_x}.$$

Arusaadavalt tuleb analoogiliselt
talitada ka teiste telgede ühikutega
ning kõigi koordinaatlõikudega.

Teljestiku ja temaga seotud
objekti aksonomeetrilisi kujutisi lii-
gitatakse telgede moondetegurite va-
hekorra alusel järgmiselt.

1) Kui moondetegurid on kõik
võrdsed ($m_x = m_y = m_z$), siis aksono-
meetrilist kujutist nimetatakse **iso-
meetriliseks** (võrdmõõduliseks); sel
juhul on võrdsed ka mõõtühikute
kujutised ($O_o A_o = O_o B_o = O_o C_o$).

2) Kui kaks moondetegurit on
võrdsed, kolmas aga neist erinev
(näiteks $m_x = m_z$, $m_y \neq m_x$), siis
aksonomeetrilist kujutist nimetatakse
dimeetriliseks (kahemõõduliseks);
sel juhul on võrdsed ka vastavate
mõõtühikute kujutised ($O_o A_o =$
 $= O_o C_o$).

3) Kui moondetegurid on kõik
erinevad ($m_x \neq m_y \neq m_z$), siis aksono-
meetrilist kujutist nimetatakse **tri-
meetriliseks** (kolmemõõduliseks); sel
juhul on suuruselt erinevad ka
mõõtühikute kujutised.

Teljestiku ja temaga seotud mis
tahes objekti iso-, di-, trimeetrilisi
kujutisi nimetatakse lühemalt **iso-**

**meetriaks, dimeetriaks ja trimeet-
riaks.** Paralleelprojektsiooni liiki näi-
tava sõna (rist- või kald-) lisamisega
neile terminitele saame kokku kuus
aksonomeetriliste kujutiste liiki: **rist-
isomeetria, ristdimeetria, risttrimeet-
ria, kaldisomeetria, kalddimeetria ja
kaldtrimeetria.** Trimeetrilisi kujutisi
praktilises harilikult ei kasutata.

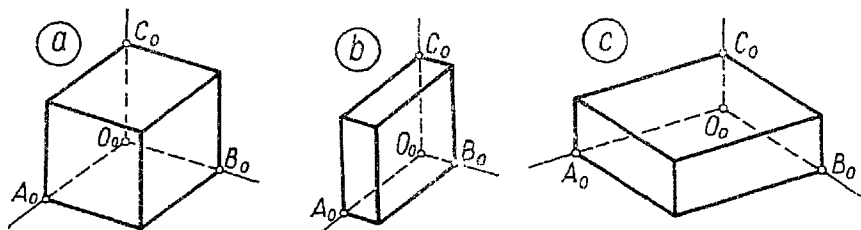
2. Aksonomeetria põhiteoreem.
Teljestiku Oxyz asendi ja projektee-
rivate kiirte sihi muutmise ekrää-
ni suhtes võib saada lõpmata palju
selle teljestiku kujutisi (joon. 61-1).
Tekib küsimus, kas teljestiku paral-
leelprojektsiooni joonestamisel võib
telgede ja mõõtühikute kujutised
võtta vabalt või mitte. Vastuse sel-
lele küsimusele andis saksa matemaat-
ik Karl Wilhelm Pohlke, kes aastal 1853 sõnastas järgmise
teoreemi, mis nüüd on tuntud Pohl-
ke teoreemi ehk aksono-
meetria põhiteoreemi nime
all:

(55) Tasandile joonestatud kolme
lõiku, mis algavad kõik ühest
punktist, kuid ei asetse ühel
sirgel, võib alati vaadelda
ristteljestiku ühikkolmiku pa-
ralleelprojektsioonina*,

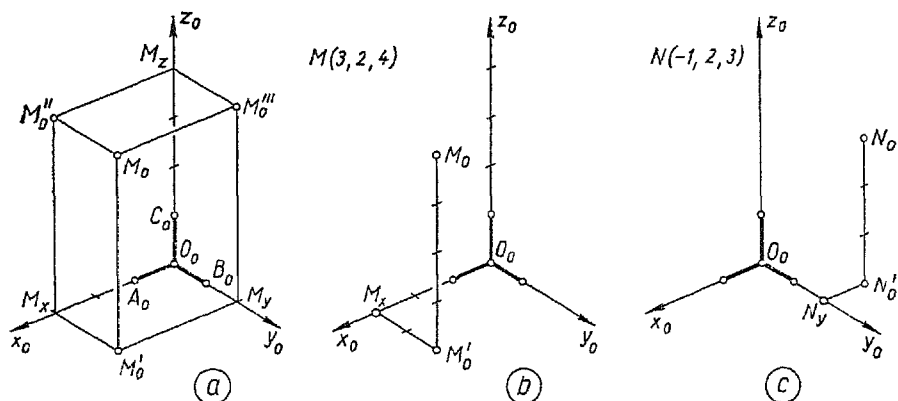
s. t. ühikkolmiku vabalt joonestatud
kujutisega on juba määratud nii-

* Teoreemi tõestuse võib leida raamatust:
O. Rünk, N. Paluver. Kujutav geometria.
Tln., 1961, lk. 226.

Teoreemis mainitud ühikkolmiku kohta tuleb
eeldada, et ühiku pikkus ruumis pole ette
antud.



Joonis 61-2



Joonis 61-3

sugune kindel paralleelkiirte siht, teljestiku asend ekraani suhtes ning mõõtühiku pikkus, mis kõik kokku just etteantud kujutise võimaldavad.

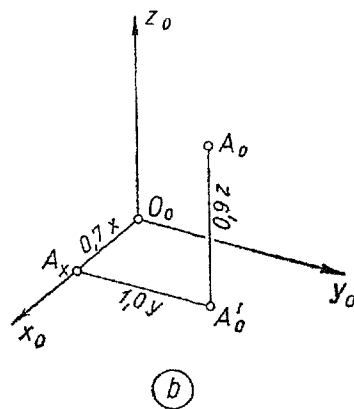
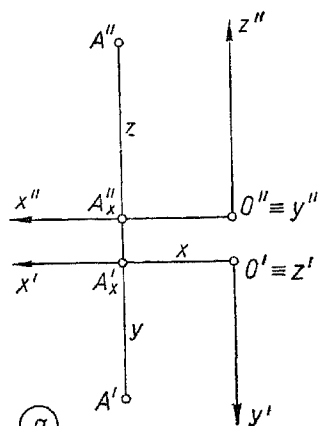
Selle teoreemi alusel võib teljestiku ühikkolmiku paralleelprojeksiooni joonestada vabalt, ainsa kitsendusega, et kogu teljestiku kujutis ei asetseks ühel sirgel.

Joonisel 61-2 on näiteks esitatud teljestiku ja temaga seotud ühikkolmiku mõnesugused vabalt joonestatud paralleelprojeksioonid: isomeetria (a), dimeetria (b) ja trimeetria (c).

Kui seatakse lisatingimusi, näiteks kui nõutakse, et teljestiku kujutis peab olema nimelt ristprojeksioon, siis arusaadavalt tekivad olulised kitsendused ühikkolmiku kujutise joonestamisel. Niisuguste kitsendustega puutume kokku ristaksonomeetria käsitlemisel.

Märgime veel, et samal ajal kui teljestiku ühikkolmiku kujutise võib Pohlke teoreemi põhjal ette anda vabalt, ei saa vabalt ette anda telgede moondetegureid.

3. Punkti aksonomeetrilise kujutise tuletamine. Objekti aksonomeetrilise kujutise tuletamisel on üheks põhiliseks konstruktsiooniks punkti aksonomeetrilise kujutise tuletamine selle punkti koordinaatide järgi või kaksvaate järgi. Olgu vaja näiteks tuletada punkti $M(3;2;4)$ aksonomeetriline kujutis teljestiku ühikkolmiku antud kujutise $O_0A_0B_0C_0$ baasil (joon. 61-3, a). Kandes telgede kujutistele x_0 , y_0 ja z_0 koordinaatlõigud $O_0M_x=3 \cdot O_0A_0$, $O_0M_y=2 \cdot O_0B_0$ ja $O_0M_z=4 \cdot O_0C_0$, saab teljeparalleelide abil konstrueerida koordinaatristtahuka kujutise. Viimase tipud M'_0 , M''_0 ja M'''_0 on vastavalt punkti M pealt-, eest- ja külgsuhte aksonomeetrilised kujutised ehk punkti M teistkordsed projeksioonid; tipp M_0 aga punkti M enda aksonomeetriline kujutis. Arusaadavalt pole punkti M_0 saamiseks vaja välja joonestada kogu koordinaatristtahuka kujutist, piisab juba mingi ühe koordinaatmurdjoone kujutisest, näiteks kujutisest $O_0M_1M'_0M_0$, mis joonisel 61-3, b on näidatud eraldi. Märkime, et erinevaid koordinaatmurdjooni, milledest igatüki viib koordinaatide



Joonis 61-4

algusest ruumpunkti juurde, on kokku kuus.

Negatiivse koordinaadi korral tuleb koordinaatmurdjoone vastav lüli kujutisel võtta negatiivne. Nii näiteks joonisel 61-3, c näeme punkti $N(-1; 2; 3)$ kujutise N_0 saamist koordinaatmurdjoone $O_0N_yN'_0N_0$ abil, mille x -lüli on negatiivne.

Praktikas toimub objekti aksonomeetrilise kujutise konstrueerimine harilikult teljestiku niisuguse kujutise baasil, milles mõõtühikute kujutised puuduvad, selle asemel aga on teada telgede moondetegurid. Sel juhul toimub punkti aksonomeetrilise kujutise tuletamine järgmiselt. Olgu punkt A ja temaga seotud teljestik $Oxyz$ antud kaksvaates nii, et xy -tasand on horisontaalne, xz -tasand aga frontaalne (joon. 61-4, a). Paremal on antud teljestiku paralleelprojektsioon $O_0x_0y_0z_0$; teada on ka telgede moondetegurid*, näiteks $m_x=0,7$, $m_y=1,0$ ja $m_z=0,9$. Leiame kõigepealt kaksvaatelt punkti A

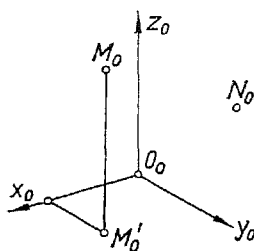
koordinaatlõigud: $x=O'A'_x$; $y=A'_xA'_y$; $z=A''_xA''_z$. Vastava koordinaatmurdjoone aksonomeetrilise kujutise saame nüüd järgmiselt: $O_0A_x=0,7x$; $A_xA'_0=1,0y$; $A'_0A_0=0,9z$. Nii jõuamegi punkti A aksonomeetrilisse kujutisse A_0 .

Ümberpöörduvalt, kui aksonomeetrilise kujutise järgi on vaja määrata punkti A koordinaatlõigud, siis peab olema antud tema aksonomeetriline kujutis (A_0) ja üks teistkordsetest projektsioonidest (A'_0 , A''_0 või A'''_0). Siis saab välja joonestada koordinaatmurdjoone aksonomeetrilise kujutise ning teades telgede moondetegureid (antud juhul $m_x=0,7$; $m_y=1,0$; $m_z=0,9$) arvutada ka punkti A koordinaatlõigud valemitest:

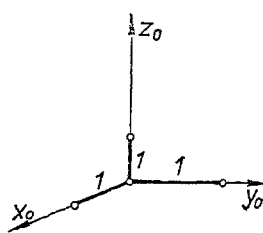
$$x = \frac{O_0A_x}{m_x}; \quad y = \frac{A_xA'_0}{m_y}; \quad z = \frac{A'_0A_0}{m_z}.$$

Koordinaatlõikudega on aga punkti asukoht teljestiku suhtes üheselt määratud. Nii selgub, et juhul kui objekti aksonomeetrilisel kujutisel on olemas objekti punktide koordinaatmurdjooned (või kui neid saab leida) ning kui on teada telgede moondetegurid, siis aksonomeetri-

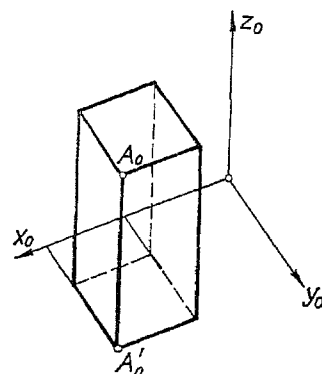
* Praktikas ei kasutata 1-st suuremaid moondetegureid, kuigi niisugused on paralleelaksonomeetrias võimalikud. Küsimust, kas näites kasutatud moondetegurid on antud teljestiku kujutisega kooskõlas, me siin ei analüüsi.



Joonis 61-5



Joonis 61-6



Joonis 61-7

line kujutis määrab objekti täielikult.

Juhime tähelepanu veel sellele, et kõigi moondetegurite korrutamisel sama arvuga $k > 1$, saame k korda suurendatud kujutise. Seda võimalust kasutatakse praktikas nii, et sobiva k valikuga muudetakse vähemalt üks tegelik moondetegur arvuks 1, mistõttu kujutise konstrueerimine tunduvalt lihtsustub.

Märgime lõpuks, et paralleelaksonomeetria puhul tuleb kujutiste tuletamisel silmas pidada kõiki paralleelprojeksioonide kohta kehtivaid lauseid (§ 7).

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Mis vahe on projekteerimise seisukohalt rist- ja kaldaksonomeetria vahel?
2. Kuidas liigitatakse aksonomeetrilisi kujutisi telgede moondetegurite vahetavate alusel?
3. Antud on punktide M ja N aksonomeetrilised kujutised M_0 ja N_0 ning punkti M pealtvaate kujutis M'_0 (joon. 61-5). Joonestada: a) punkti M koordinaatmurdjoon (kas seda saab teha ka punkti N puhul?); b) punkti M kaksvaade, kui kõikide telgede moondetegurid on 1.
4. Antud on teljestiku aksonomeetriline kujutis koos mõõtühikute kujutistega (joon. 61-6). Tuletada punktidega $A(3; 0; 4)$ ja

$B(-1; 3; -2)$ määratud sirglõigu aksonomeetriline kujutis.

5. Arvutada joonisel 61-7 kujutatud risttahuka tegelikud mõõtmed ja ühu A koordinaatlõigud (mm), kui telgede moondetegurid on $m_x=1$, $m_y=0,4$ ja $m_z=2$. Joonestada risttahuka kaksvaade.

§ 62. RISTAKSONOMEETRIA

1. Teljestiku jälgkolmnurk. Käesolevas paragrahvis käsitleme tähtsaimaid küsimusi, mis on seotud teljestiku ristprojektsiooni tuletamisega.

Olgu $O_0x_0y_0z_0$ ristteljestiku $Oxyz$ ristprojektsioon ekraanil ε_0 (joon. 62-1). Kolmnurga XYZ , mille tippudeks on telgede jälgpunktid, külgedeks aga koordinaatpindade jälgsirged, nimetatakse teljestiku jälgkolmnurgaks. Tõestame, et

(56) ristteljestiku telgede ristprojektsioonid on jälgkolmnurga kõrgussirgeteks.

Näitame esiteks, et $x_0 \perp YZ$. Selleks võtame arvesse, et x -telg on tasandi OYZ normaaliks, YZ aga on selle tasandi jälgsirgeks. Et aga tasandi normaali ristprojektsioon on risti selle tasandi jäljega (§ 27, lause

32), siis järeldamegi, et $x_o \perp YZ$. Analoo-
giliselt saab põhjendada, et
 $y_o \perp XZ$ ja $z_o \perp XY$.

Jälgkolmnurga kõrguste lõike-
punktiks on teljestiku alguse rist-
projektsioon O_o . Pole raske veen-
duda, et kui ükski telg pole ekraa-
niga paralleelne, siis punkt O_o tuleb
alati jälgkolmnurga sisse. Seega
asetsevad ka kõik jälgkolmnurga
kõrgused jälgkolmnurga sees. Sellest
omakorda järeldame, et ristteljestiku
jälgkolmnurk on teravnurkne.

2. Seos moondetegurite vahel.
Joonisel 62-1 on α , β ja γ vastavalt
telgede x , y ja z kaldenurgad ning
 φ , ψ ja ω nurgad, mis kiir $OO_o \perp \varepsilon_o$
moodustab telgedega x , y ja z (vek-
tori suunanurgad). Võttes arvesse, et
kolmnurgad OO_oX , OO_oY ja OO_oZ
on täisnurksed, saame telgede moon-
detegurid m_x , m_y ja m_z avaldada
järgmiselt:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{O_oX}{OX} = \cos \alpha; \\ m_y &= \frac{O_oY}{OY} = \cos \beta; \\ m_z &= \frac{O_oZ}{OZ} = \cos \gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Tõestame järgmise lause:

**(57) ristprojektsiooni puhul on tel-
gede moondetegurite ruutude
summa võrdne 2.**

Väite põhjendamiseks tõestame
kõigepealt, et mis tahes vektori OA
suunanurkade φ , ψ ja ω koosinuste
ruutude summa võrdub 1-ga (joon.
62-2). Tõepoolest, kui punkti A
koordinaadid on a , b ja c , siis vas-
tava koordinaatistahuka ruumdia-
gonaali OA pikkus d avaldub nende
koordinaatide kaudu järgmiselt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2;$$

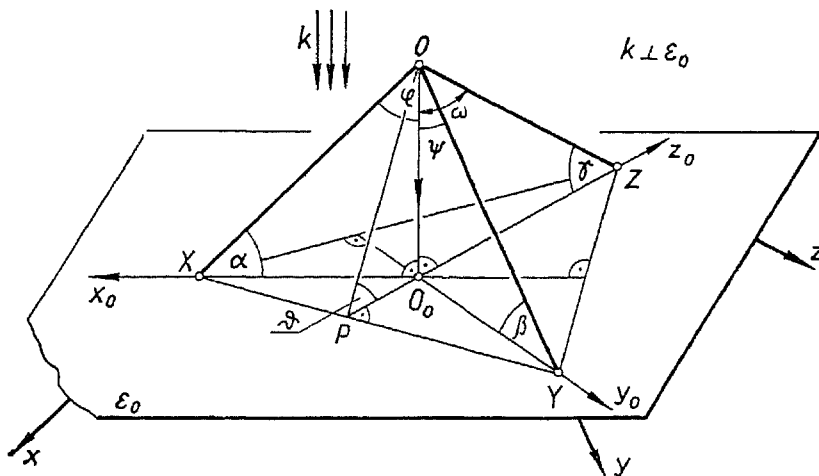
siit

$$\frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} + \frac{c^2}{d^2} = 1$$

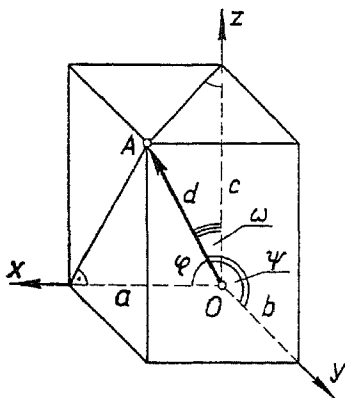
$$\text{ehk } \cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \omega = 1. \quad (12)$$

Pöördume nüüd tagasi joonise 62-1
juurde, kust näeme, et vektori OO_o
suunanurgad φ , ψ ja ω täiendavad
telgede x , y ja z kaldenurki α , β ja γ
täisnurkadeni:

$$\varphi = 90^\circ - \alpha, \quad \psi = 90^\circ - \beta \quad \text{ja} \quad \omega = 90^\circ - \gamma.$$



Joonis 62-1



Joonis 62-2

Järelikult seose (12) võime kirjutada kujul:

$$\cos^2(90^\circ - \alpha) + \cos^2(90^\circ - \beta) + \cos^2(90^\circ - \gamma) = 1$$

$$\text{ehk } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$$

$$\text{ehk } (1 - \cos^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \beta) + (1 - \cos^2 \gamma) = 1,$$

kust $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$. (13)
Kasutades nüüd võrdusi (11), saame lõpuks seose

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2. \quad (14)$$

Sellega on lause tõestatud.

Tuletatud seos moondegurite vahel võimaldab arvutada kolmanda telje moondeguri, kui kahe telje moondegurid on ette antud. Seejuures ei tohi ühegi moondeguri väärtus olla suurem kui 1, sest nurga koosinuse väärtus ei saa olla üle ühe. Nii näiteks, kui võtta $m_x = 0,5$ ja $m_y = 0,7$, saame seosest (14), et $m_z = 1,12 > 1$, mis on ristaksonomeetrias võimatu.

Saab tõestada, et kaldaksonomeetrias valitseb telgede moondegurite vahel järgmine üldisem seos:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2 + \cot^2 \vartheta, \quad (15)$$

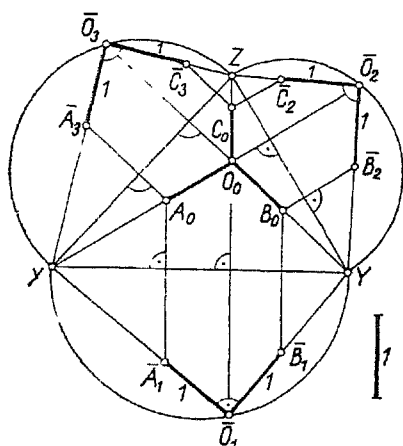
kus ϑ on kiirte kaldenurk ekraani suhtes*. Võttes arvesse, et $\cot^2 \vartheta$ on positiivne suurus, peab telgede moondegurite ruutude summa kaldprojektsiooni korral olema suurem kui 2.

Võttes seoses (15) $\vartheta = 90^\circ$, s. t. minnes kaldkiirtelt üle kiirtele, mis on ekraaniga risti, saame seose (14), sest $\cot 90^\circ = 0$.

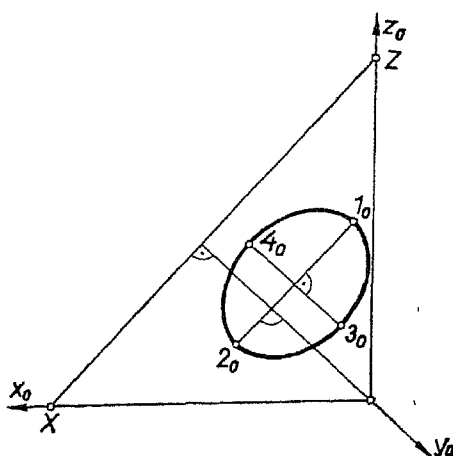
Valemist (15) järeldame, et telgede moondegurite ruutude summa sõltub ainult kiirte kaldenurgast ekraani suhtes, ei sõltu aga teljestiku ja ekraani vastastikusest asendist.

3. Teljestiku ristprojektsiooni saamine. Teljestiku ristprojektsiooni saab tuletada lähtudes vabalt joonestatud teravnurksest jälgkolmnurgast XYZ (joon. 62-3). Et jälgkolmnurga kõrgussirged on telgede ristprojektsioonideks, siis kõrguste lõikepunkt O_0 tähendab teljestiku alguspunkti projektsiooni. Pöörame koordinaatpinnad OXY, OYZ ja OZX ekraanile vastavalt ümber jälgsirgete XY, YZ ja ZX. Alguspunkti pöörendit tuleb seejuures otsida vastava pöördetelje ristsirgelt ja nii kaugelt, et saadav tahu pöörend oleks parajasti täisnurkne kolmnurk. Järelikult peavad pöörendid $\overline{O_1}$, $\overline{O_2}$ ja $\overline{O_3}$ asetsema ringjoontel, mille diameetrid on vastavalt XY, YZ ja ZX. Pööramistel satub iga telg ekraanile kahel korral, näiteks x-telje pöörenditeks on sirged $\overline{O_1X}$ ja $\overline{O_3X}$. Telgede pöörendid varustame märgikestega uhiku kaugusel algusest (näiteks $\overline{O_1A_1} = 1$) ja seejärel pöörame koordinaatpinnad ruumi tagasi oma endistele asukohadele: $\overline{A_1A_0} \perp XY$; $\overline{A_3A_0} \perp XZ$ jne.

* Selle seose tuletamise võib leida raamatust: O. Rünk, N. Paluver. Kujutav geomeetria. Tln., 1961, lk. 229.



Joonis 62-3



Joonis 62-4

Nii saame telgede x , y ja z ühiklõikude kujutised O_0A_0 , O_0B_0 , O_0C_0 . Sellega oleme tuletanud teljestikust igati õige ristprojektsiooni, mille võib võtta baasiks objekti kujutise joonestamisel punktide koordinaatide järgi.

4. Ringjoonte ristaksonomeetrised kujutised. Mis tahes liiki aksonomieetria kasutamisel tuleb erilist rõhku panna ellipsite kui ringjoonte projektsioonide väljajoonestamisele. Ristaksonomeetrias tuleb seejuures silmas pidada järgmist juhust:

(58) kahe koordinaattelje tasandil (või selle paralleeltasandil) asetseva ringjoone ristaksonomeetriselise kujutise (ellipsi) pikem telg on risti kolmanda koordinaattelje kujutisega.

Lause põhjendamiseks märgime, et ellipsi kui ringjoone ristprojektsiooni pikemaks teljeks projekteerub ringjoone see diameeter, mis on ekraaniga paralleelne. See diameeter asetseb ringi tasandi nivoojoonel ja on järelikult paralleelne ringi tasandi jälgisirgega. Et aga tasandi normaali ristprojektsioon on risti selle tasandi jälgisirgega (§ 27, lause 32),

siis järeldame, et ellipsi pikem telg peab olema risti ringi tasandi normaali ristprojektsiooniga. Oletame nüüd, et ringjoon asetseb näiteks xz -tasandil või selle paralleeltasandil (joon. 62-4). Siis ringi tasandi normaalsiks on kolmas telg y ning ellipsi kui ringjoone ristprojektsiooni pikem telg 1_02_0 peab olema järelikult risti y -telje projektsiooniga y_0 (ühtlasi $1_02_0 \parallel XZ$, kus XZ on koordinaatpinna Oxz jälgisirge). Seega ellipsi pikem telg on tõepoolest risti kolmanda telje (y) kujutisega. Ellipsi lühem telg 3_04_0 on arusaadavalt paralleelne teljega y_0 . Teiste koordinaatpindadega paralleelsete ringjoonte puhul on tõestus analoogiline.

Avaldame koordinaatpindadega paralleelsete ringjoonte ristprojektsioonide (ellipsite) telgede pikkused koordinaattelgedele moondetegurite kaudu. Olgu ringjoone raadius r ja ringi tasandi kaldenurk ϑ . Siis selle ringjoone ristprojektsiooniks tuleb ellips, mille pikem pooltelg $a=r$ ja lühem pooltelg $b=r \cos \vartheta$. Kui ringjoon on paralleelne näiteks koordinaatpinnaga Oxy , siis tema tasandi

kaldenurk on võrdne tasandi Oxy kaldenurgaga. Täisnurksest kolmnurgast POZ joonisel 62-1 näeme aga, et koordinaatpinna Oxy kaldenurk $\vartheta = 90^\circ - \gamma$, kus γ on z-telje kaldenurk. Seda arvestades saame kirjutada, et

$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= \sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \\ &= \sqrt{1 - m_z^2},\end{aligned}$$

sest võrduste (11) põhjal $\cos \gamma = m_z$. Järelikult koordinaatpinnaga Oxy paralleelsele ringjoonele vastava ellipsi lühem pooltelg b_{xy} avaldub kujul

$$b_{xy} = r \cos \vartheta = r \sqrt{1 - m_z^2}.$$

Analoogiliselt saab avaldada ellipsite lühemad poolteljed ka kahe ülejäänud koordinaatpinna puhul. Ellipsite pikemad poolteljed (a) on aga kõigi kolme koordinaatpinna puhul võrdsed ringjoone raadiusega r . Nii saame, et koordinaatpindadega Oxy, Oxz ja Oyz paralleelsete ringjoonte ristprojektsioonide (ellipsite) poolteljed on vastavalt

$$\begin{aligned}a &= r; \quad b_{xy} = r \sqrt{1 - m_z^2}; \\ b_{xz} &= r \sqrt{1 - m_y^2}; \\ b_{yz} &= r \sqrt{1 - m_x^2}.\end{aligned}\quad (16)$$

Kera kujutise kontuuriks on ristaksonomeetria puhul alati ringjoon, kaldaksonomeetria puhul aga ellips. See on tingitud sellest, et esimesel juhul lõikab ekraan kera puutuvate kiirte pöördasilindrit risti, teisel juhul aga kaldu silindri telje suhtes.

Ristaksonomeetrilistest kujutistest kasutatakse tehnilises joonestamises ristosomeetriat ja niisugust ristdimetriat, kus $m_y = m_z = 2m_x$. Neid nn. standardseid aksonomeetrilisi kujutisi vaatlemegi lähemalt järgmistes paragrahvides.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missugusteks jälgkolmnurga elementideks on telgede projektsioonid ristaksonomeetrias?
2. Missugune seos valitseb telgede moonde-tegurite vahel ristaksonomeetrias?
3. Telgede x ja y moonde-tegurid ristaksonomeetrias on vastavalt 0,75 ja 0,85. Leida z-telje moonde-tegur.
4. Ring on paralleelne Oyz-pinnaga. Missuguse koordinaateltje kujutisega on risti selle ringi ristprojektsiooni (ellipsi) pikem telg?
5. Missuguseks kujundiks projekteerub kera: a) ristaksonomeetrias, b) kaldaksonomeetrias?

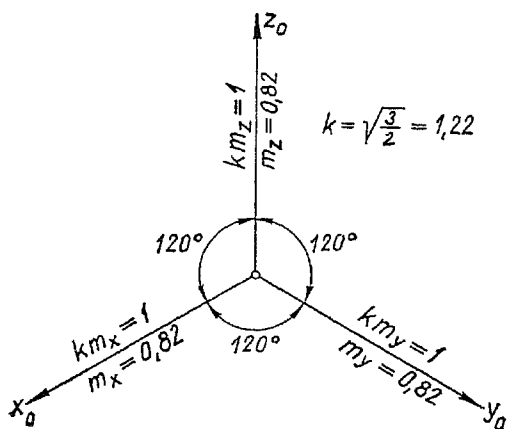
§ 63. RISTISOMEETRIA

1. Ristosomeetriline teljestik. Teljestiku ristprojektsioon tuleb isomeetriline, kui telgede kaldenurgad α , β ja γ on võrdsed. Sel puhul on võrdsed ka kõik telgede moonde-tegurid: $m_x = m_y = m_z$. Seda arvestades, võime eelmises paragrahvis tuletatud põhiseose (14) kirjutada kujul $3m_x^2 = 2$,

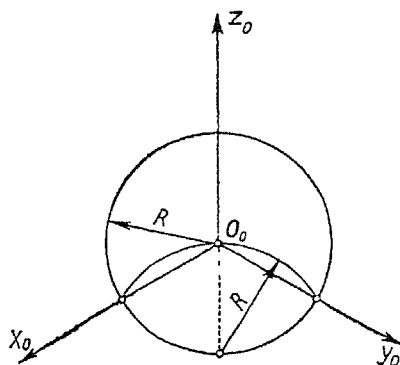
$$\text{kust } m_x = m_y = m_z = \sqrt[3]{2/3} \approx 0,82.$$

Silmas pidades võrdusi (11), on $\cos \alpha = m_x = \sqrt[3]{2/3}$, kust $\alpha = \beta = \gamma = 35^\circ 16'$. Niisiis ristosomeetria saame siis, kui kõigil telgedel on sama kaldenurk suurusega $35^\circ 16'$ ning sama moonde-tegur suurusega 0,82.

Kujutise konstrueerimisel oleks äärmiselt ebamugav korrutada objekti punktide koordinaate murdarvulise moonde-teguriga 0,82. Seepärast kasutatakse praktikas nn. **taandatud**, s. o. suurendatud moonde-tegureid 1. Sel juhul kantakse kõik koordinaatlõigud kujutisele oma tõelises suuruses ning objektist saadakse suurendatud kujutis suurendusteguriga $k = 1:0,82 \approx 1,22$. Niisiis küsimus taandub lihtsalt joonise mõõtkava



Joonis 63-1



Joonis 63-2

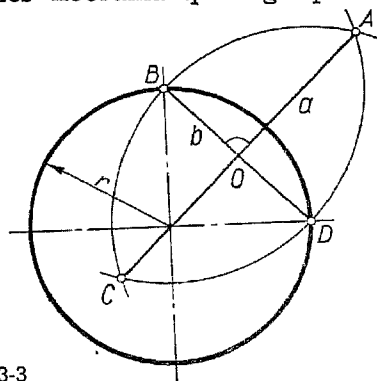
muutmisele. Näiteks kui objekti kaksvaatel on mõõtsuhe 1:100 ning selle järgi tehakse $k=1,22$ korda suurendatud isomeetriline kujutis, siis selle mõõtsuhteks (objektiga võrreldes) tuleb kirjutada 1:82 (vt. näiteks joonist 63-4).

Jooniselt 62-1 (§ 62) selgub, et juhul kui $\alpha=\beta=\gamma$, siis püramiid OXYZ on korrapärane ($OX=OY=OZ$) ning jälgkolmnurk XYZ järelikult võrdkülgne. Seetõttu on nurgad telgede kujutiste vahel kõik võrdsed, s. t. suurusega 120° . Teljestiku kujutist koos moondeteguritega ja praktikas nende asemel kasutatavate taandatud moondeteguritega näeme joonisel 63-1.

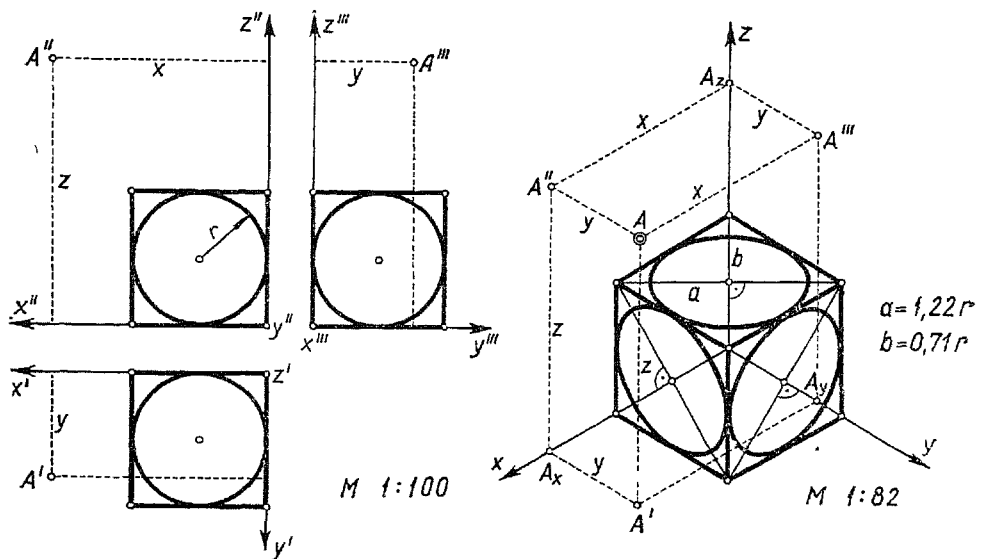
Teljestiku ristsomeetrilise kujutise saame joonestada järgmiselt (joon. 63-2). Tõmbame koordinaatide alguspunkti O_0 ümber vabalt valitud raadiusega R ringjoone ning määrame temale kummalegi poole z_0 -telge 60° -liste kaarte otspunktid. Ühendades need punktid alguspunktiga O_0 , saamegi telgede kujutised.

2. Ringjoonte ristsomeetrilised kujutised. Tähtis on osata õigesti

kujutada koordinaatpindadel või nende paralleeltasanditel asetsevaid ringjooni. Iga niisuguse ringjoone ristprojektsiooniks saame ellipsi, mille pikem pooltelg a võrdub ringjoone raadiusega r , lühem pooltelg b aga on arvutatav valemist (16). Võttes arvesse tingimust $m_x=m_y=m_z$, saame, et $b=r\sqrt{1-m^2_x}=r\sqrt{1/3}$, olenemata koordinaatpinnast, millega ringjoon on paralleelne. Kui kasutatakse taandatud moondetegureid suurendusega $k=1,22$ korda, siis saadaval suurendatud kujutisel tuleb mis tahes koordinaatpinnaga paral-



Joonis 63-3



Joonis 63-4

leelse ringjoone ristisomeetriliseks kujutiseks ellips pooltelgedega $a = kr = r\sqrt[3]{2} \approx 1,22r$ ja $b = kr\sqrt[3]{1/2} = r\sqrt[3]{1/2} \approx 0,71r$. Ellipsite telgede sihid määrab eelmises paragrahvis tõestatud lause (58).

Konstruktiivselt saab ellipsi pooltelgi $a = r\sqrt[3]{2}$ ja $b = r\sqrt[3]{1/2}$ teoreetiliselt täpselt leida järgmiselt (joon. 63-3). Ellipsi lühemaks teljeks osutub antud ringjoone veerandile vastava kõõlu pikkus: $BD = 2b$, kust $b = BD : 2$. Pikemaks poolteljeks aga on sellele kõõlule kui küljele konstrueeritud võrdkülgse kolmnurga BDA kõrgus: $OA = a$. Konstruktiooni põhjendamine antud joonise järgi ei tekita raskusi.

Joonisel 63-4 on kuubi kolmvaate järgi tuletatud selle kuubi ja tema tahkudel asetsevate ringjoonte ristisomeetrilised kujutised, kasutades taandatud moondetegureid. Samas on näidatud ka punkti $A(x, y, z)$ akso-

nomeetrilise kujutise saamise võimalusi mituvaate järgi mitmesuguste koordinaatmurdjoonte abil.

Nagu juba märkisime, jäetakse praktikas aksonomeetrilistel kujutistel tähistele juurde kuuluvad projektiooni märgid ära. Nii on tehtud ka joonisel 63-4 ja real järgnevatel joonistel.

Märgime lõpuks, et moondetegurite k -kordsete suurenduste kasutamisel tuleb kera ristisomeetriliseks kujutiseks ring, mille raadius on kera raadiuse k -kordne. Näiteks kui kera raadius on r ja $k = 1,22$ (nagu tavaliselt), siis kera kujutise raadius $R = 1,22r$.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Miks kasutatakse praktikas taandatud moondetegureid?
2. Konstrueerige teljestiku ristisomeetriline kujutis.
3. Kera raadius $r = 30$ mm. Kui suur on selle kera ristisomeetrilise kujutise raadius taandatud moondetegurite kasutamisel?

§ 64. STANDARDNE RISTDIMEETRIA

1. Ristdimeetriline teljestik. Samal ajal kui teljestiku ristsomeetrilisi kujutisi on üksainus, saab teljestiku ristdimeetrilisi kujutisi konstrueerida lõpmata palju. Neist kõige lihtsam ja kõige sagedamini kasutatav on standardne ristdimeetria moonndetegurite vahekorraga $m_y = m_z = 2m_x$ (või $m_x = m_z = 2m_y$). Arvutame, kui suured on sel juhul moonndetegurite väärtused.

Võttes põhiseoses (14) $m_y = 2m_x$ ja $m_z = 2m_x$, saame, et $9m_x^2 = 2$, kust $m_x = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0,47$. Järelikult $m_y = m_z = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0,94$.

Praktikas välditakse murdarvuliste moonndetegurite 0,47 ja 0,94 kasutamist sellega, et kõik moonndetegurid korrutatakse teguriga $k=1$: $m_y = \frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1,06$. Nii saadakse taandatud moonndetegurid.

$$km_x = \frac{1}{2} \text{ ja } km_y = km_z = 1,$$

mis võetaksegi aluseks kujutise konstrueerimisel. Kujutis suureneb sel puhul $k=1,06$ korda.

Arvutame nurgad telgede kujutiste vahel. Et $m_y = m_z$, siis on võrdsed ka kaldenurgad β ja γ , mistõttu lõik $OY = OZ = l$ (joon. 64-1). Sellest järeldame, et täisnurksed kolmnurgad OXY ja OXZ on kongruentsed ning jälgkolmnurk XYZ järelikult võrdhaarne ($XY = XZ$). Seetõttu x -telje kujutis x_o , kui jälgkolmnurga kõrgussirge, osutub ühtlasi vastaskülje poolitajaks ($KY = KZ$). Täisnurksest kolmnurgast KYO_o saame, et

$$\sin \delta = \frac{KY}{YO_o} = \frac{YZ}{2 \cdot YO_o},$$

$$\text{kus } \delta = \angle KO_oY = \angle KO_oZ.$$

Avaldame YZ ja YO_o lõigu l kaudu.

$$\text{Et } \frac{YO_o}{l} = m_y = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ siis } YO_o = \frac{2\sqrt{2}}{3} l.$$

Täisnurksest kolmnurgast OYZ aga leiame, et $YZ = l\sqrt{2}$. Pannes saadud avaldised $\sin \delta$ avaldisse, saame:

$$\sin \delta = \frac{l\sqrt{2}}{2} : \frac{2l\sqrt{2}}{3} = \frac{3}{4},$$

$$\text{kust } \delta = 48^\circ 35'.$$

Nurgad telgede kujutiste vahel on nüüd järgmised:

$$\angle(x_o, y_o) = \angle(x_o, z_o) = 180^\circ - \delta = 131^\circ 25';$$

$$\angle(y_o, z_o) = 2\delta = 97^\circ 10'.$$

Siit selgub kohe, et teljed x_o ja y_o moodustavad telje z_o ristsihiga nurgad $41^\circ 25'$ ja $7^\circ 10'$ (joon. 64-2).

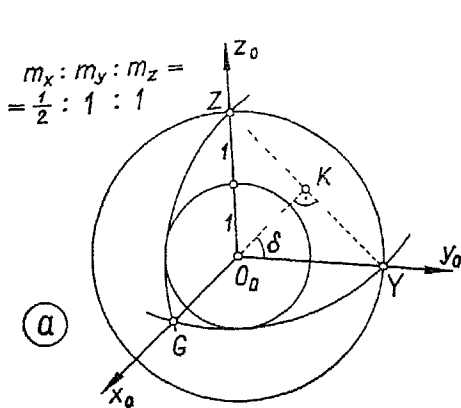
Võttes arvesse, et $\tan 41^\circ 25' \approx \frac{7}{8}$ ja $\tan 7^\circ 10' \approx \frac{1}{8}$, võime need nurgad konstrueerida ka tangensite järgi. Nii saame järgmise, praktiliseks kasutamiseks küllalt täpse lähiskonstruktsiooni teljestiku ristdimeetrilise kujutise joonestamiseks.

Tõmbame läbi alguspunkti O_o abisirge risti teljega z_o ning kanname sellele punktist O_o kummalegi poole pikkuse 8 ühikut (joon. 64-3). Saadud ühest punktist mõõdame allapoole 7 ühikut ja teisest 1 ühiku, saades nii punktid M ja N . Siis x -telje ja y -telje kujutised on vastavalt O_oM ja O_oN .

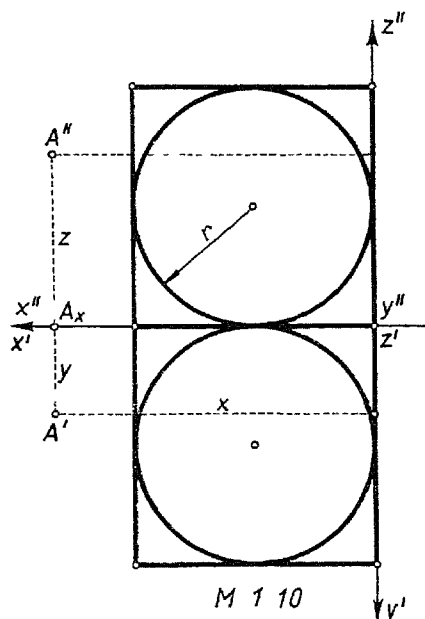
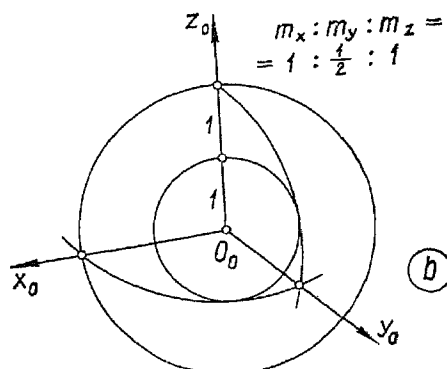
Telgede ühiklõikude kujutised mõõdetakse telgede kujutistele, arvestades moonndetegurite vahekorda, nii et $O_oB_o = O_oC_o = 2 \cdot O_oA_o$.

Lähtudes seosest $\sin \delta = \frac{3}{4}$, saame järgmise täppiskonstruktsiooni teljestiku standardse ristdimeetrilise kujutise joonestamiseks.

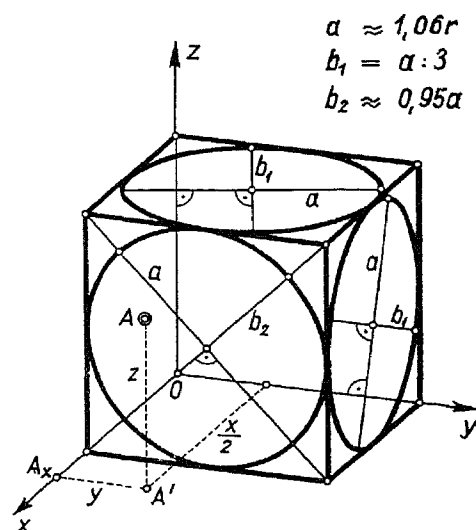
Valime vertikaalsel z_o -teljel vabalt koordinaatide alguspunkti O_o ning tõmbame selle ümber ringjooned



Joonis 64-4



Joonis 64-5

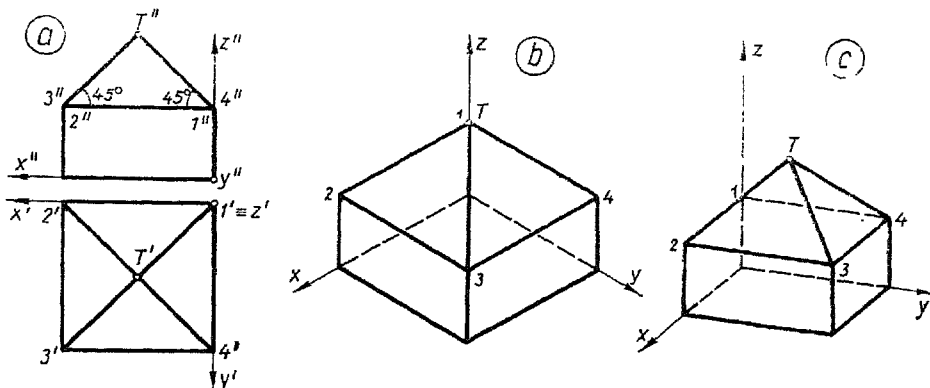


M 1:9,4

saadakse ellipsid pooltelgedega $a = 1,06r$ ja $b_1 = kr\sqrt{1-m_y^2} = 1,06r\sqrt{1/9} \approx 0,35r$ (suhe $b_1:a$ on täpselt 1:3). Ringjooned aga, mis asetsevad Oyz-pinna paralleeltasandil, projekteeruvad ellipsiteks pooltelgedega

$$a = 1,06r \text{ ja } b_2 = kr\sqrt{1-m_x^2} = 1,06r\sqrt{7/9} \approx 0,95r.$$

Ellipsite pooltelgede ja nende suhete arvutamisel oleme siin arvestanud, et x-telje (mitte y-telje) moondetegur on $1/2$. Ellipsite telgede sihid määrab lause (58).



Joonis 64-6

Vastavaid ellipseid näeme joonisel 64-5, kus kuup ja tema tahkude siseriingid on vasakul kujutatud kaksvaates, paremal aga standardses ristdimeetrias. Joonisel on näidatud ka juhusliku ruumipunkti $A(x; y; z)$ aksonomeetrilise kujutise tuletamine koordinaatmurdjoone $OA_xA'A$ abil. Selle murdjoone esimese lüli pikkus võrdub poolega x -koordinaadist, teiste lülide pikkused aga võrduvad vastavalt y - ja z -koordinaadiga.

Kera ristdimeetriliseks kujutiseks taandatud moondefegurite kasutamisel on ring, mille raadius $R = 1,06r$, kus r on kera raadius.

3. Ristisomeetria ja ristdimeetria võrdlus. Selgitame lõpuks küsimuse, miks on tehnikas võetud tarvitusele kaks erinevat standardset ristaksonomeetrilist kujutist. Kas ei piisaks ainult ristisomeetriast? Vastus sellele küsimusele peitub kujutise piltlikkuses.

Joonisel 64-6, a on kaksvaates kujutatud hoone, mille püramiidse katuse tahkude kaldenurgad on 45° . Selle hoone ristisomeetriat näeme joonisel 64-6, b ja ristdimeetriat joo-

nisel 64-6, c. Märkame, et isomeetrilisel juhul serv $1T$ projekteerub punktiks ning seetõttu katuse tahud $12T$ ja $14T$, mis mõlemad on ekraaniga risti, projekteeruvad sirglõikudeks. Hoone kujutis on ilmetu. Tunduvalt piltlikum on ristdimeetria; seal on sirglõiguks projekteerunud ainult tahk $12T$.

Praktikas on tähtis igal konkreetisel juhul valida niisugune kujutamiseviis, mis ei kahjusta oluliselt kujutise piltlikkust. Kujutamiseviisi valikul tuleb eriti ettevaatlik olla juhtudel, kus objekti domineerivate tahkude hulgas esineb koordinaatpindade suhtes 45° -lise kaldenurgaga tahkused.

KUSIMUSED JA ULESANDED

1. Konstrueerige ristdimeetriline teljestik, kasutades: a) lähiskonstruktsiooni, b) täpiskonstruktsiooni.
2. Kui suured on taandatud moondefegurid ristdimeetria puhul?
3. Miks vajatakse ristisomeetria kõrval ka ristdimeetriat?

§ 65. KALDAKSONOMEETRIA TÄHTSAMAD LIIGID

Ristaksonomeetria puhul me ei saa kasutada teljestiku niisuguseid asendeid ekraani suhtes, milles mõni telg on ekraaniga paralleelne, sest sel juhul on vähemalt üks koordinaatpind ekraaniga risti (ehk kiirtega paralleelne) ning projekteerub seetõttu sirgjooneks. Sellega aga kaotab teljestiku ja objekti kujutis oma piltlikkuse.

Kaldprojektsioonile üle minnes pole enam vaja vältida teljestiku nimetatud lihtsaid eriasendeid ekraani suhtes, sest koordinaatpindade ja kiirte paralleelsust saab nüüd ära hoida kaldkiirte sihi sobiva valikuga. Seepärast eelistatakse praktilises kaldaksonomeetrias teljestiku ja ekraani kõige lihtsamat vastastikust asendit, milles kaks telge asetsevad vahetult ekraanil (s. t. ekraaniks võetakse üks koordinaatpind). Kolmas telg on siis ekraaniga risti.

Arvestades asjaolu, et enamikul objektidel (hooned, mööbel, masinad, aparaadid jm.) on raskusväljas oma kindel loomulik asend, mida tuleb ka kujutamisel arvestada, on otstarbekohane siduda teljestik nende objektidega nii, et üks telg (tavaliselt z-telg) oleks vertikaalne; teised kaks telge (x- ja y-telg) on siis horisontaalsed. Iga ruumipunkti kõrgus horisontaalse xy-pinna suhtes mõõdub sel juhul z-koordinaadiga.

1. Frontaalne kaldaksonomeetria. Võttes ekraaniks vertikaalse koordinaatpinna Oxz , mis tava kohaselt on paigutatud paralleelselt objekti fassaadpinnaga, saame teljestikust ja objektist nn. **frontaalse kaldaksonomeetria** (vt. piltkujutist 65-1). Et ekraanil olevad teljed x ja z ühtivad oma kaldprojektsioonidega, siis nende moonde tegurid võrduvad 1-ga

($m_x = m_z = 1$), y-telje moonde tegur m_y aga võrdub kiirte kaldenurga φ kootangensiga:

$$m_y = \frac{OB^\circ}{OB} = \cot \varphi.$$

Muutes kaldkiirte sihti, muutub ka moonde tegur m_y ja nurk ω , mille y-telje projektsioon y_0 moodustab x-telje projektsiooniga $x_0 \equiv x$.

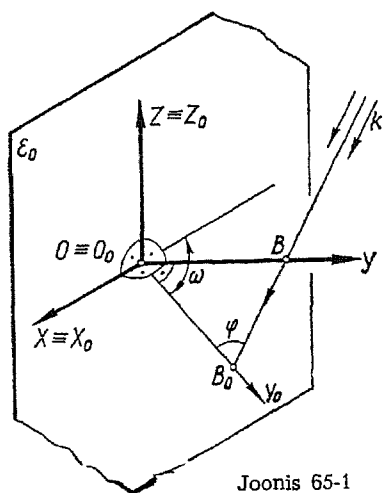
Valides kaldkiirte sihi nii, et moonde tegur $m_y \equiv 0,5$, saame frontaalse kaldaksonomeetria erijuhtumit — **frontaalse kalddimeetria**. Sel juhul kiirte kaldenurk $\varphi \approx 63^\circ$. Frontaalse kalddimeetria teljestikku näeme joonisel 65-2. Kui aga kiirte siht valida nii, et $m_y = 1$, saame **frontaalse kaldisomeetria** (sel juhul $\varphi = 45^\circ$).

Mõlemal erijuhtumil soovitab standard kasutada tehnilises joonestamises nurga ω väärtusena esijoones 45° , vajaduse korral aga ka 30° või 60° .

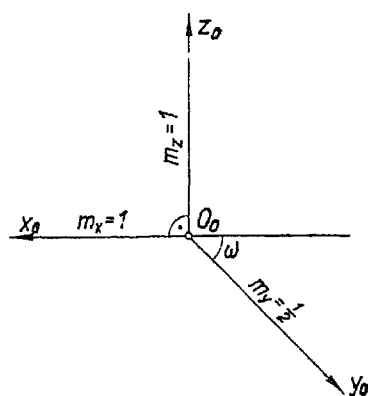
Praktikas kasutatakse kõige sagedamini frontaalse kalddimeetria erijuhtumit, mille puhul $\omega = 45^\circ$; seda tuntakse ka **kabinetprojektsiooni** nimetuse all.

Frontaalse kaldaksonomeetria eriliseks omaduseks on see, et kõik tasandilised kujundid, mis on paralleelsed xz-pinnaga kui ekraaniga, projekteeruvad moondevabalt. See lihtsustab suurel määral kujutise joonestamist, eriti siis, kui objektil on palju xz-pinnaga paralleelseid ringilisi elemente. Joonisel 65-3 on näiteks esitatud teljestiku, kuubi ja viimase nähtavatel tahkudel asetsevate ringjoonte kabinetprojektsioonid; kaks ringjoont on projekteerinud ellipsiteks, xz-pinnaga paralleelne ringjoon aga moondevabalt ringjooneks.

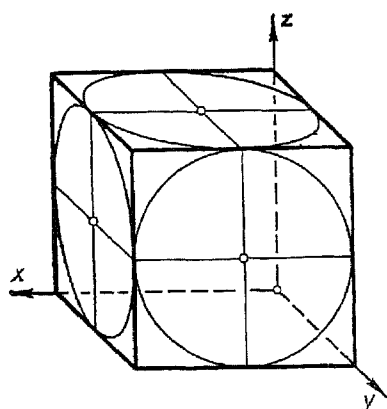
Joonisel 65-4 kujutatud objektil on palju paralleelsetes tasandites olevaid ringjooni. Et need ringjooned



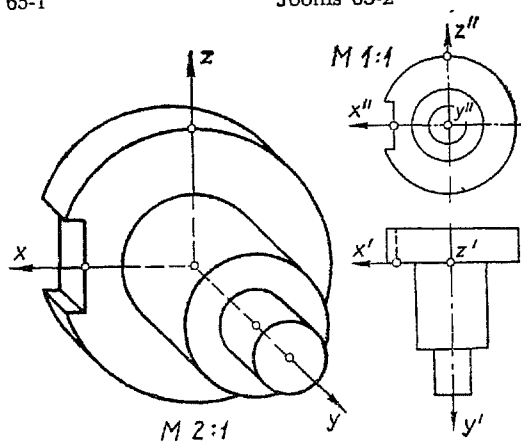
Joonis 65-1



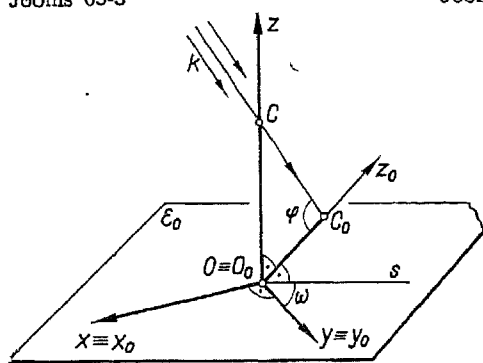
Joonis 65-2



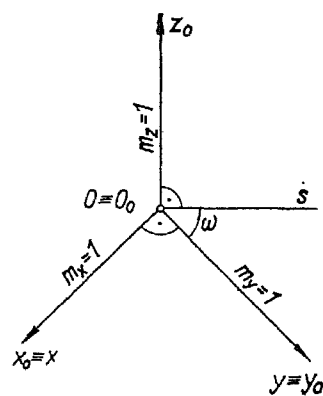
Joonis 65-3



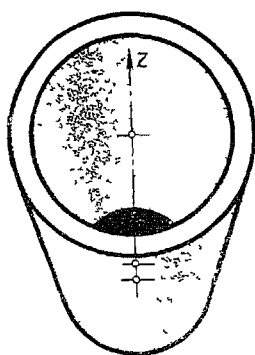
Joonis 65-4



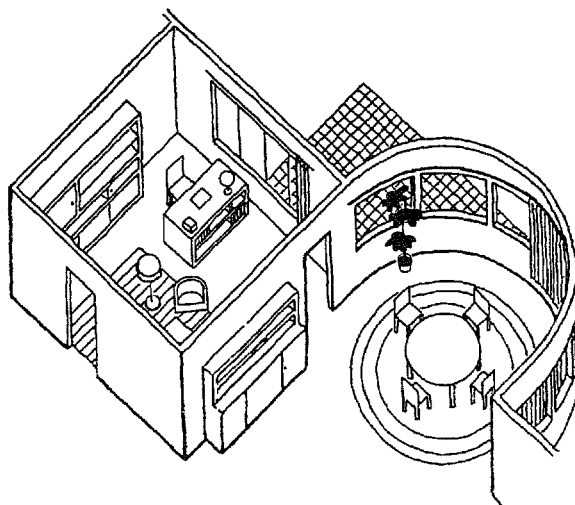
Joonis 65-5



Joonis 65-6



Joonis 65-7



Joonis 65-8

projekteeruksid mis tahes liiki frontaalses kaldaksonomeetrias ringjoonteks, on vaja objekt siduda teljestikuga nii, et ringid oleksid paralleelsed xz -pinnaga. Antud juhul on objektist tuletatud kaks korda suurendatud kabinetprojektsioon.

2. Horisontaalne kaldaksonomeetria. Kui ekisaaniks ε_0 võetakse horisontaalne xy -pind, siis saadakse teljestikust ja objektist nn. **horisontaalne kaldaksonomeetria** (vt. piltkujutist 65-5). Sel juhul nii x - kui ka y -telg ühtib oma kaldprojektsiooniga ning seetõttu kummagi telje moondetegur võrdub 1-ga ($m_x = m_y = 1$); z -telje moondetegur m_z aga võrdub kiirte kaldenurga φ kootangensiga:

$$m_z = \frac{OC_0}{OC} = \cot \varphi.$$

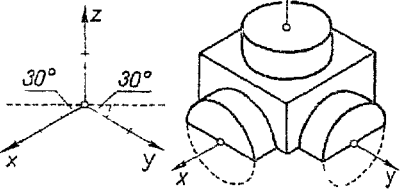
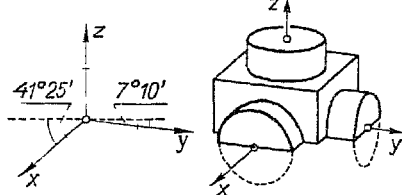
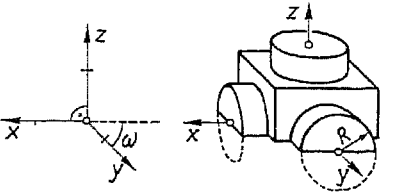
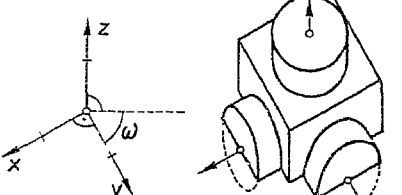
Kiirte sihi muutmisel muutub ka moondetegur m_z ja z -telje kaldprojektsiooni z_0 siht. Viimasega koos

muutub aga ka nurk ω sirge s ($s \perp z_0$) ja y -telje projektsiooni y_0 vahel. Kui kiirte kaldenurk $\varphi = 45^\circ$, siis $m_z = 1$ (sest $\cot 45^\circ = 1$) ja me saame praktikas kõige sagedamini kasutatava horisontaalse kaldaksonomeetria erijuhtumi — **horisontaalse kaldisomeetria***. Vastavat teljestiku kujutist näeme joonisel 65-6. Tehnilises joonestamises soovitab standard horisontaalse kaldisomeetria puhul kasutada nurga ω väärtustena nurka 30° , kuid lubatakse kasutada ka 45° ja 60° .

Horisontaalse kaldisomeetria puhul projekteeruvad moondevabalt objekti kõik horisontaalsed tahud ja lõiked, sealhulgas ka põhiplaan (sest ekraaniks on rõhtne xy -pind). Ka objekti kõrgused esinevad horisontaalsel kaldisomeetrial tegelikus suurus. Kõik see hõlbustab objekti kujutise tuletamist, eriti siis, kui

* Horisontaalset kaldisomeetria nimetatakse ka «milttaarperspektiiviks».

ANDMEID TAIITSAMATE AKSONOMEETRILISTE KUJUTISTE KOHTA

Aksonomeetrilise kujutise liik, teljestiku kujutis, naise eseme kujutisest ning mõõturiha taandatud moondetegurite kasutamisel	Praktikas kasutatavad taandatud moondetegurid ja suurendustegur (k)				Ellipsite kui koordinaatpindade olevate ringjoonte kujutiste poolteljed a ja b
	km_x	km_y	km_z	k	
Ristisomeetria M1,22:1 	1	1	1	1,22	$a \approx 1,22R$ $b \approx 0,71R$ R - ringjoone raadius
Standardne ristisomeetria M1,06:1 	$\frac{1}{2}$	1	1	1,06	$a \approx 1,06R$ $b_1 \approx 0,35R$ $b_2 \approx 0,95R$
Frontaalne kaldisomeetria M1:1 	1	$\frac{1}{2}$	1	—	Ellipsite poolteljed sõltuvad nurgast ω (ω = 45°, 30°, 60°)
Horisontaalne kaldisomeetria M1:1 	1	1	1	—	Ellipsite poolteljed sõltuvad nurgast ω (ω = 30°, 45°, 60°)

Joonis 65-9

objektil on palju rõhtsaid ringilisi elemente (vt. topi horisontaalset kaldisomeetriaat joonisel 65-7). Eriti otstarbekohaseks osutub aga horisontaalse kaldisomeetria kasutamine niisugustel arhitektuurilistel joonistel, kus on tähtis säilitada põhiplaanid nende õigel kujul. Joonisel 65-8 on näitena esitatud korteri ja sisustuse horisontaalne kaldisomeetria, mille puhul nurk ω on võetud 45° .

Andmed tähtsamate aksonomeetrialiste kujutiste kohta on koondatud juuresolevasse tabelisse. Tabeli abil on hõlbus igal konkreetisel juhul valida kujutamiseviis, mis kõige paremini rahuldab kujutisele esitatavaid erinevusi.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Nimetage kaldaksonomeetria tähtsamad liigid.
2. Konstrueerige: a) frontaalne kalddimeetriaalne teljestik, b) horisontaalne kaldisomeetriaalne teljestik.
3. Missuguseks kujundiks projekteerub ringjoon frontaalses kalddimeetrias, kui ta on paralleelne: a) xy -pinnaga, b) xz -pinnaga?

§ 66. NÄITED

Aksonomeetriaalsete kujutiste konstrueerimisel püütakse teljestiku ja objekti vastastikune asend valida nii, et objekti punktide koordinaatide väljalugemine ja kujutiste konstrueerimine oleks võimalikult lihtne. Sel eesmärgil seotakse teljestik objektiga harilikult nii, et üksikud teljed ühtivad objekti põhiliste servadega, või nii, et koordinaatpinnad ühtivad objekti sümmeetriapindadega. Järgnevates näidetes on seda põhimõtet igal pool silmas peetud.

Näide 1. Leida ristisomeetrias punktidega $A(2,5; 1; 4,5)$ ja $B(1; 2;$

$2,5)$ määratud sirge lõikepunktid koordinaatpindadega.

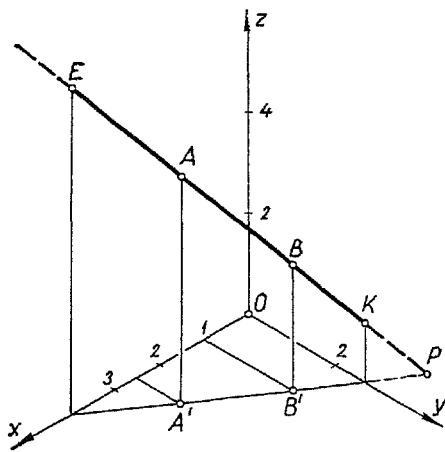
Joonestame teljestiku isomeetriaalsete kujutiste ning valime vabalt ühiklõigu pikkuse koordinaatlõikude pealekandmiseks (joon. 66-1; elemendid on kujutisel tähistatud nii nagu ruumis). Kanname x -teljele punktide x -koordinaatlõigud ning viimaste lõpupunktidest paralleelselt y -teljega y -koordinaatlõigud; nii saame antud punktide pealtvaadete kujutised A' ja B' . Kandes viimastest z -telje paralleelidele z -koordinaatlõigud, saamegi punktide aksonomeetriaalsete kujutised A ja B .

Sirge AB ja tasandi (x, y) lõikepunkti (s. o. põhijalgpunkti) kujutiseks saame punkti $P \equiv AB \times A'B'$. Punktide E ja K (esijalg ja küljalg), asetsevad z -telje paralleelidel, mida mööda projekteeriv tasand $ABB'A'$ lõikab koordinaatpindu (x, z) ja (y, z) . Nimetatud paralleelid läbivad punkte, millest pealtvaade $A'B'$ lõikab telgi x ja y .

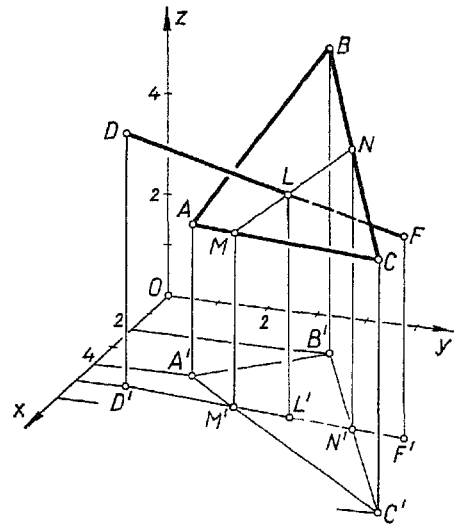
Näide 2. Lahendame sirgjoone ja tasandi lõikumisülesande ristisomeetrias, kui tasand läbib punkte $A(4; 2; 3)$, $B(2; 4; 6)$ ja $C(10; 8; 5)$ ning sirgjoon punkte $D(5; 1; 5)$ ja $F(6; 7; 4)$.

Konstrueerime teljestiku kujutise vastavalt joonisele 64-3 ja 64-4, a ning tuletame koordinaatide abil enne punktide pealtvaadete ning siis punktide eneste kujutised (joon. 66-2). Seejuures võtame arvesse, et ühik x -telje kujutisel on kaks korda lühem kui ühikud teiste telgedes kujutistel.

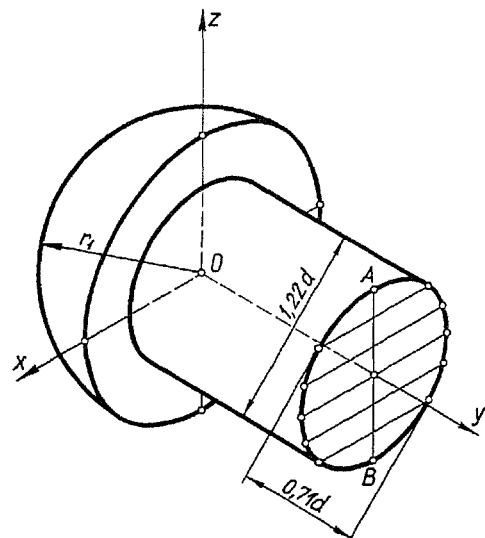
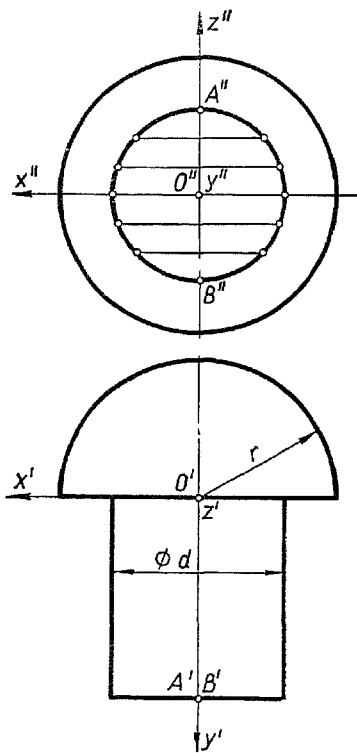
Otsitava lõikepunkti saame mõttekäigu alusel, mis on tuttav 26. paragrahvist (lause 31); kasutame sirget DF koordinaatpinnale (x, y) projekteerivat tasandit $DDF'D'$. Lõigaku see tasand antud tasandit ABC mööda sirget $MN (M'N' \equiv D'F')$; siis sir-



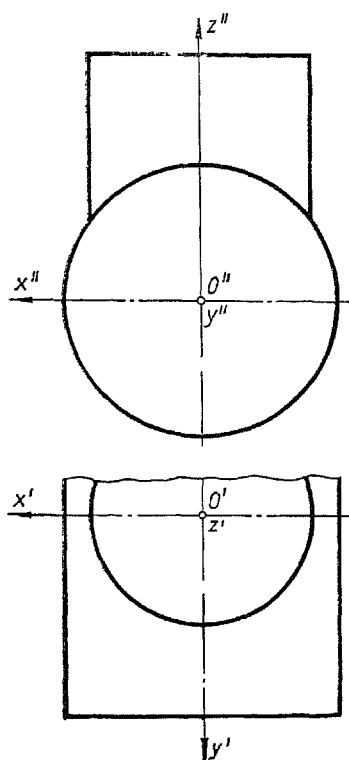
Joonis 66-1



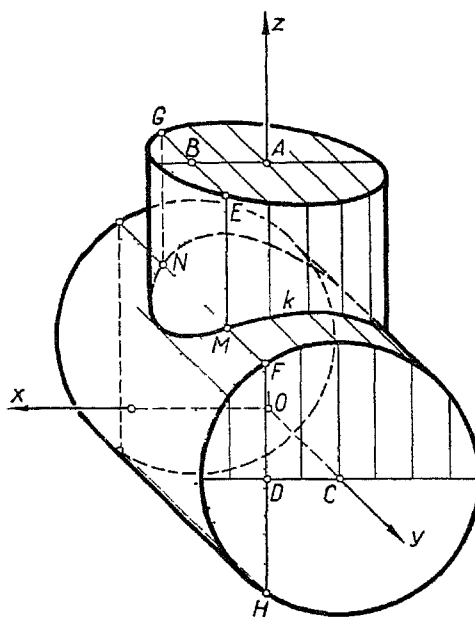
Joonis 66-2



Joonis 66-3



Joonis 66-4

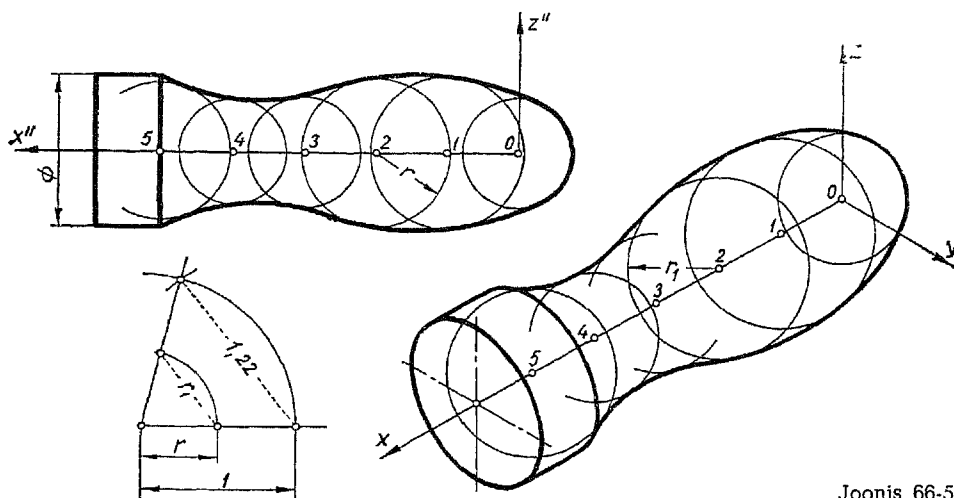


gete MN ja DF ühine punkt L ongi otsitavaks lõikepunktiks.

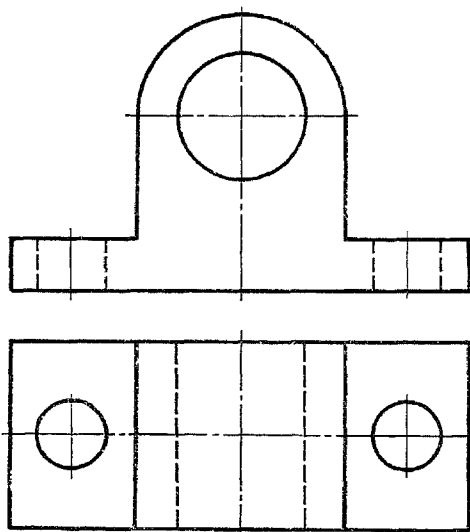
Näide 3. Joonisel 66-3 on tulestatud needi ristisomeetiline kujutis, lähtudes vasakul antud kaksvaatest. Teljestiku alguspunkt O on viidud needi pea (poolkera) keskpunkti, y -telg aga on suunatud piki needi telge.

Aksonomeetrilise kujutise tuletamisel kasutame koordinaatlõike nende tõelises pikkuses, saades nii 1,22 korda suurendatud kujutise. Needi pea aksonomeetrilise kujutise kontuuriks tuleb seega poolringjoon, mille raadius $r_1 = 1,22r$, kus r on poolkera raadius, mis mõõdetakse kaksvaateelt.

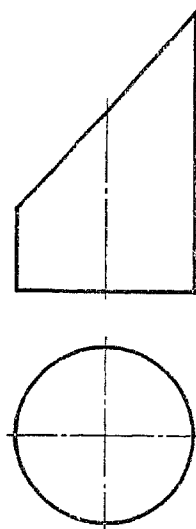
Ringjoone aksonomeetrilisi kujutisi (ellipseid) võib konstrueerida kaasdiameetrite järgi (s. o. ringide ristdiameetrite kujutiste järgi) või arvutatud pooltelgede järgi: $a = 1,22R$; $b = 0,71R$, kus R on ringjoone raadius. Võib aga kasutada ka kõõle, mis on paralleelsed mingi ühe koordinaatteljega. Näites ongi kõõlude abil joonestatud needi otsringjoone aksonomeetriline kujutis. Selleks on kaksvaatel tõmmatud rida x -telje sihilisi kõõle (soovitav võrdsete vahede järel), mille pikkused ja vahed on kaksvaateelt kantud aksonomeetrilisele kujutisele. Kõõlude kujutiste otspunktid ongi ellipsi punktid.



Joonis 66-5



Joonis 66-6



Joonis 66-7

Näide 4. Joonisel 66-4 on tule-
tatud kahe pöördsilindri pindade
lõikejoon otseselt frontaalses kald-
dimeetrias (kabinetprojeksioonis,
sest $\omega=45^\circ$). Et y-telg on ruumis

suunatud piki rõhtsilindri telge, siis
selle silindri põhjad on paralleelsed
ekraaniga $\varepsilon_0(x, z)$, mistõttu nad pro-
jekteeruvad moondevabalt. Püst-
silindri põhja kujutise saab joones-

tada kas kaasdiameetrite järgi või paralleelsete kõõlude abil, nagu on tehtud eelmisel joonisel.

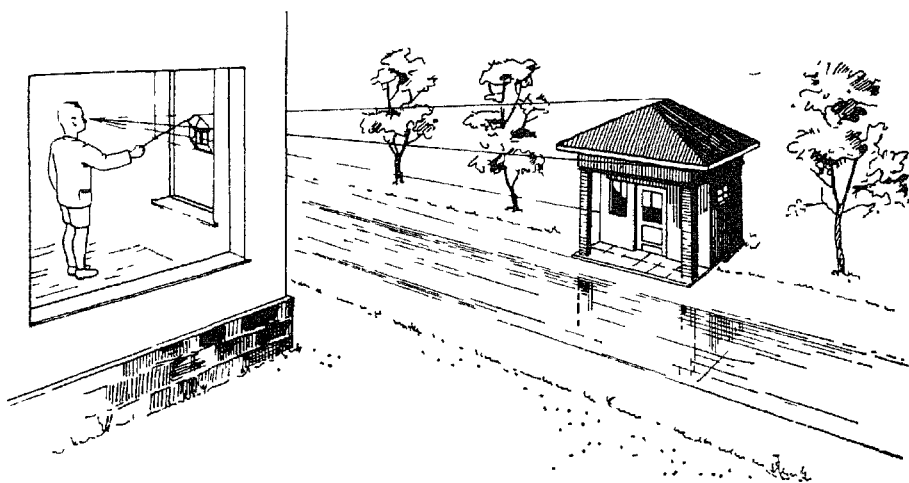
Lõikejoone tuletamiseks lõikame silindreid abitasanditega, mis on paralleelsed kummagi silindri moodustajatega, s.t. paralleelsed tasandiga (z, y) . Niisugused tasandid lõikavad silindreid mööda moodustajaid, mille lõikepunktid ongi otsitava lõikejoone punktideks. Täpitatud abitasandi saamiseks on joonisel võetud $AB=CD$, $BE\parallel y$ ja $DF\parallel z$ ning läbi punktide E ja G ning F ja H on tõmmatud moodustajad. Nende moodustajate ühised punktid M ja N on otsitava lõikejoone k kaheks punktiks.

Näide 5. Joonisel 66-5 on tuletatud käepideme (pöördkeha) antud vaate järgi ristisomeetriline kujutis. Käepideme silindrilise osa kujutise tuletame eestpoolt tuttavate võetega. Ulejäänud osa kujutise kontuuri saamiseks võtame pöördkeha teljel (antud vaates) rea tsentreid $(0, 1, 2, \dots)$ ning joonestame vastavad puutesfäärid. Tsentrid kanname

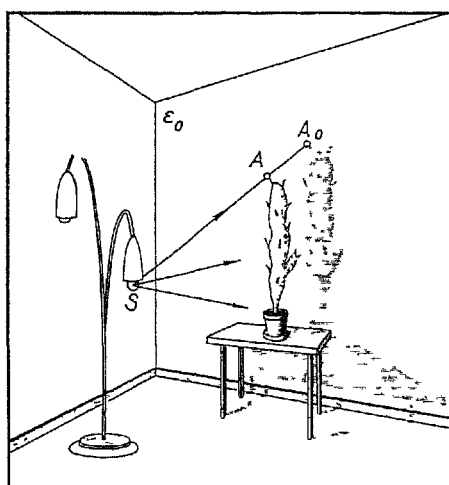
üle aksonomeetrilisele kujutisele ning joonestame sfääride aksonomeetrilised kujutised (ringid). Et käesoleval juhtumil on koordinaatlõigud kantud aksonomeetrilisele kujutisele nagu tavaliselt (s. o. tõelises pikkuses), siis puutesfääride kujutiste raadiuste saamiseks on vaja tegelikud raadiused korrutada teguriga 1,22. Korrutamist on otstarbekohane teostada graafiliselt, nagu on näidatud lisajoonisel, kus sarnaste võrdhaarsete kolmnurkade abil on raadiusest r saadud $r_1=1,22r$. Käepideme aksonomeetrilise kujutise kontuur joonestatakse lõpuks sfääride kujutiste mähisköverana.

ÜLESANDED

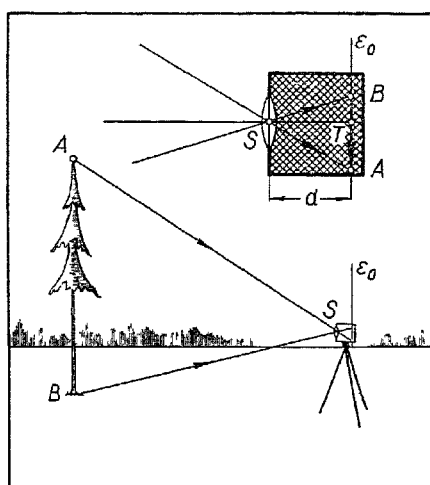
1. Tasand läbib punkte $A(5; 0; 0)$, $B(-2; 4; 0)$ ja $C(1; 1; 2)$. Tuleta selle tasandi ja koordinaatpindade lõikejooned (jälgi) ristisomeetrias.
2. Tuletada joonisel 66-6 esitatud detaili kujutis: a) ristisomeetrias, b) standardses ristisomeetrias ja c) frontaalses kalddimeetrias, võttes $\omega=30^\circ$.
3. Tuletada joonisel 66-7 esitatud kaldu lõigatud pöördsilindri ristisomeetriline kujutis.



Joonis 67-2



Joonis 67-3



Joonis 67-4

punktide kaugusi pildiekraanist — **sügavusteks**.

Pildiekraani ja põhiekraani lõike-sirget p , s. o. pildiekraani põhijälge, nimetatakse pildi **põhisirgeks**; arusaadavalt on $p \parallel h$.

Praktiliselt võib eseme perspektiiviga sarnaneva kujutise saada järgmistel viisidel.

1) Vaatleja silmast lähtuvate «vaatekiirtega» jälgitakse eset läbi läbi-paistva ekraani (klaasi) ning joonis-

tatakse sellele eseme nähtavate kontuuride kujutised (joon. 67-2). Säärasest toimingust pärinebki nimetus «perspektiiv» (lad.k. *per spicere* = läbi vaatama).

2) Punktikujulisest valgusallikast S lähtuvate valguskiirtega tekitatakse pildiekraanil ε_0 (näiteks seinal, joon. 67-3) eseme heitevari, mis on samane selle eseme perspektiiviga.

3) Esemelt tulevate ja fotoaparaadi objektiivi läbivate valguskiirtega tekitatakse valgustundlikul ekraanil ε_0 (filmilindil) eseme ümberpööratud kujutis (joon. 67-4); seejuures objektiivi optilise tsentri S kaugus filmilindist ε_0 osutub distantiks d . Analooiliselt tekib kujutis ka silma võrkkestal.

Kõik need esemest perspektiivi saamise viisid eeldavad selle eseme tegelikku olemasolu. Kuid praktikas, eriti arhitektuuris, läheb vaja ka niisuguste objektide perspektiive, mida polegi veel olemas, mida alles kavatakse ehitada. Neil puhkudel tuleatakse perspektiiv geomeetriliste konstruksioonidega, lähtudes objekti kaksvaatest. Seesuguseid konstrueerimisvõtteid käsitleme järgnevatel paragrahvides.

Märgime lõpuks, et perspektiiv annab objektist õige (loomutruu) mulje ainult siis, kui teda vaadeldakse ühe silmaga sellest punktist, mis perspektiivi valmistamisel oli silmapunktiks.

KÜSIMUSED

1. Kuidas valitakse harilikult pildiekraan põhiekraani suhtes?
2. Mis on pildi tuumpunkt?
3. Mis on distant?
4. Mis on horisont?
5. Mis on pildi põhisirge?

§ 68. PERSPEKTIIVÕPETUSE ALUSED

1. **Sirgjoonte perspektiivid.** Olgu antud pildiekraan ε_0 , silmapunkt S ja sirge a (joon. 68-1). Sirgjoone a perspektiivi a_0 saamiseks võib valida sel sirgel vabalt kaks punkti A ja B ning leida nende perspektiivid A_0 ja B_0 , s. o. kiirte SA ja SB lõikepunktid pildiekraaniga. Siis $a_0 \equiv A_0B_0$.

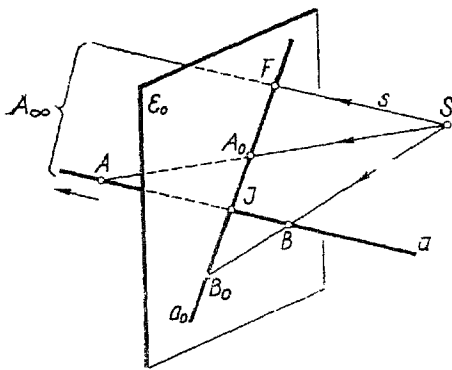
Praktika seisukohalt ei ole aga otstarbekas tuletada sirgjoone perspektiivi selle sirge kahe juhusliku punkti järgi. Otstarbekohasem on kasutada sel eesmärgil sirge kahte erilist punkti — sirgjoone jälgpunkti pildiekraanil ja sirge ebapunkti (lõpmata kauget punkti). Sirge a jälgpunkt on $J \equiv a \times \varepsilon_0$; see ühtib pildiekraanil oma perspektiiviga. Sirgjoone a ebapunkti A_∞ perspektiivi saame aga järgmiselt. Laseme punktil A kaugeneda sirget a mööda lõpmatusse. Siis piirseisus kiir SA muutub paralleelseks sirgega a ($s \equiv SA_\infty \parallel a$). Kiire s ja pildiekraani lõikepunkt F ongi sirge a ebapunkti A_∞ perspektiiv: $F \equiv s \times \varepsilon_0$.

Sirgega paralleelset tsentraalkiirt s nimetatakse selle sirge **sihikiireks**, sihikiire ja pildiekraani lõikepunkti F aga sirgjoone **pagupunktiks**.

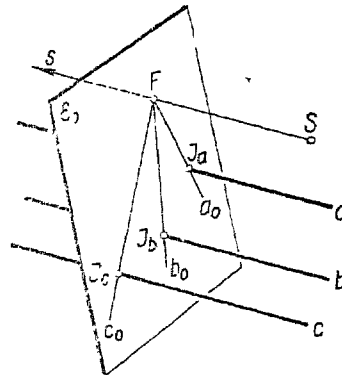
Niisiis sirgjoone a perspektiiv on $a_0 \equiv JF$, s. t. et

(59) sirgjoone perspektiiv on määratud selle sirge jälgpunkti ja pagupunktiga.

Joonisel 68-2 on antud pildiekraan ε_0 , silmapunkt S ja paralleelsed sirged $a \parallel b \parallel c$. Et nendel sirgetel on ühine sihikiir $s \parallel a$, siis on neil ka ühine pagupunkt $F \equiv s \times \varepsilon_0$. Sellega tõestasime praktika seisukohalt tähtsa lause:



Joonis 68-1



Joonis 68-2

(60) paralleelsetel sirgetel on ühine pagupunkt,

s. t. paralleelsete sirgete perspektiivid lõikuvad kõik ühes punktis — nende sirgete ühisel pagupunktis. Joonisel on sirgete a , b ja c jälgpunktid J_a , J_b ja J_c ning nende sirgete perspektiivid järelikult $a_o \equiv J_a F$, $b_o \equiv J_b F$ ja $c_o \equiv J_c F$.

Et pildiekraani normaalide sihikiireks on peakiir, mis lõikab pildiekraani tuumpunktis T (vt. joonist 67-1), siis järeldame, et

(61) pildiekraani normaalide pagupunkti on tuumpunkt.

Iga rõhtsirge sihikiir asetseb horisontpinnal μ ning seetõttu kas lõikab horisonti h või on sellega paralleelne. Järelikult

(62) rõhtsirgete pagupunktid on horisondil.

Olgu sirge a paralleelne pildiekraaniga e_o (joon. 68-3). Siis sellel sirgel pole jälgpunkti. Kuid tema pole ka pagupunkti, sest tema sihikiir s on samuti paralleelne pildiekraaniga. Niisuguse sirge perspektiiv on paralleelne sirge enesega: $a_o \parallel a$. Tõepoolest — sirged a ja a_o ei

saa olla kiivsed, sest nad asetsevad ühel ja samal projekteerival tasandil SAB . Kuid need sirged ei saa ka lõikuda eelduse $a \parallel e_o$ tõttu. Niisiis

(63) pildiekraaniga paralleelsel sirgel pole ei jälgpunkti ega pagupunkti, niisuguse sirge perspektiiv on paralleelne sirge enesega.

Sellest lausest järeldub, et

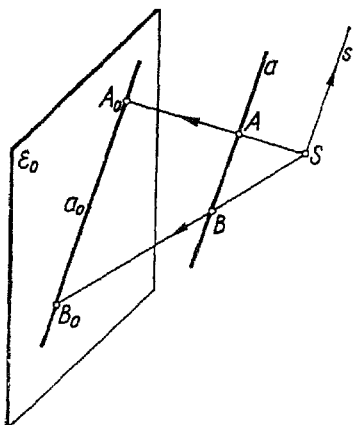
(64) kui paralleelsed sirged on ühtlasi paralleelsed ka pildiekraaniga, siis on paralleelsed ka nende perspektiivid,

sest iga sirge perspektiiv on sel juhul paralleelne sirge enesega ning sirgete paralleelsuse tõttu paralleelne ka teiste sirgete perspektiividega.

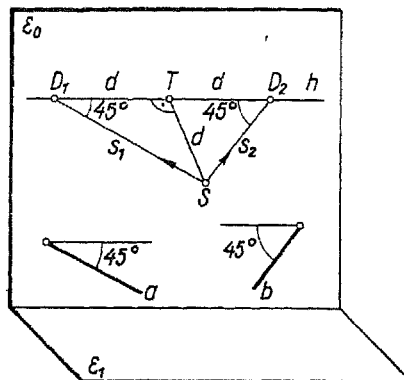
Vertikaalsed sirged ja vertikaalne pildiekraan on omavahel paralleelsed. Järelikult lause (63) põhjal võime öelda, et

(65) vertikaalse pildiekraani puhul on vertikaalsete sirgete perspektiivid ka vertikaalsed sirged.

Kui sirged a ja b on horisontaalsed ning moodustavad pildiekraa-



Joonis 68-3



Joonis 68-4

niga nurga 45° (joon. 68-4), siis ka nende sihikiired $s_1 \parallel a$ ja $s_2 \parallel b$ moodustavad pildiekraaniga sama nurga. Seetõttu kolmnurgad STD_1 ja STD_2 on täisnurksed ja võrdhaarsed. Järelikult sirgete a ja b pagupunktid D_1 ja D_2 asetsevad horisondil h distantisi d kaugusel tuumpunktist T ($D_1T = D_2T = d$). Punkte D_1 ja D_2 nimetatakse **distantspunktideks**. Niisiis

(66) pildiekraani suhtes 45° all kaldu olevate rõhtsirgete pagupunktideks on distantspunktid.

Toodud lausete illustreerimiseks on joonisel 68-5 esitatud horisontaalse maastiku, sirge raudtee ja teda lõikava sirge maantee perspektiiv. Et raudteerööpad ja nendega paralleelsed telefonitraadid on horisontaalsed, siis nende ühine pagupunkt F asetseb horisondil h . Maantee ja temaga paralleelsete liinitraatide pagupunkt F_1 asetseb samuti horisondil. Pildiekraan on ilmselt vertikaalne, sest telefonipostide perspektiivid on vertikaalsed.

2. Tasandite perspektiivid. Olgu antud pildiekraan ε_0 , silmapunkt S ja tasand α (joon. 68-6).

Tasandit τ , mis läbib silmapunkti S ja on paralleelne antud tasandiga α , nimetatakse tasandi α **seisuleheks**, seisulehe lõikesirget f pildiekraaniga aga tasandi α **pagusirgeks**.

Et tasandid τ ja α on paralleelsed, siis pildiekraan lõikab neid paralleelseid sirgeid mööda, s. t. $f \parallel j$, kus j on tasandi α jälgsirge. Niisiis

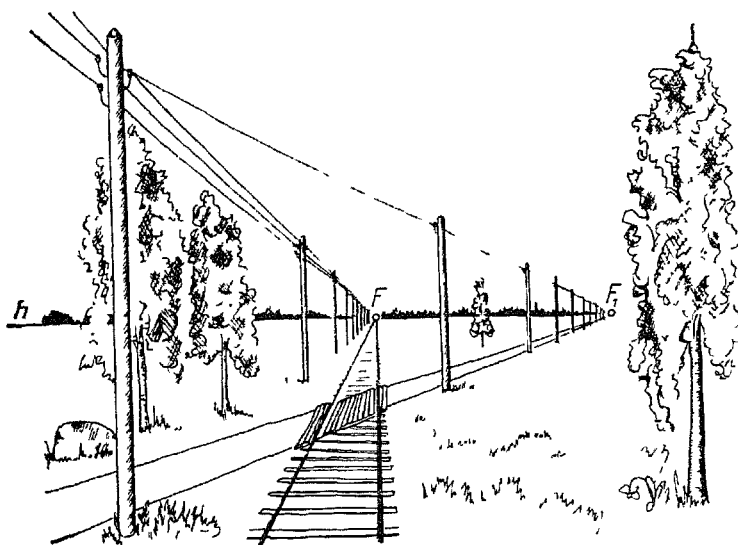
(67) tasandi jälgsirge ja pagusirge on paralleelsed.

Võttes arvesse, et paralleelsetel tasanditel on ühine seisuleht, järeldame, et

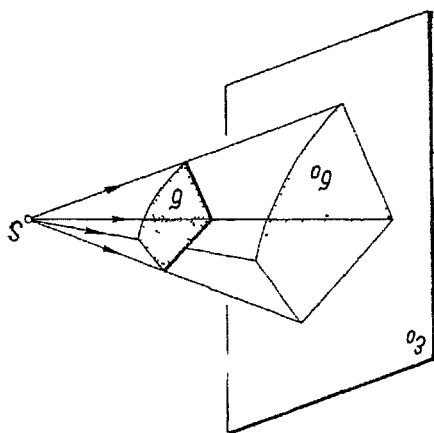
(68) paralleelsetel tasanditel on ühine pagusirge.

Kui tasand α läbib silmapunkti, siis ta on ühtlasi oma seisuleheks ning seetõttu $f \equiv j$.

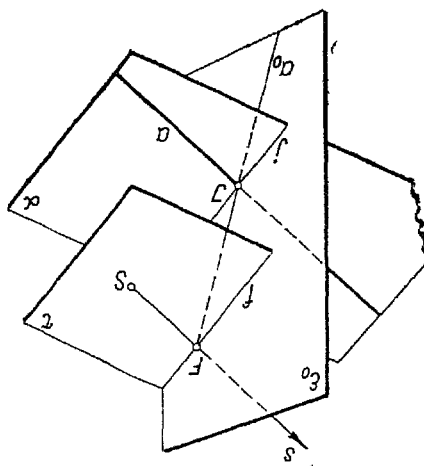
Kui mingi sirgjoon a asetseb tasandil α või on sellega paralleelne, siis ta sihikiir s on tasandi α seisulehel τ (joon. 68-6). Seetõttu sihikiire



Joonis 68-5



Joonis 68-6



Joonis 68-7

ja pildiekraani lõikepunkt F asetseb pagusirgel f . Seega

(69) tasandil asetseva või sellega paralleelse sirgjoone pagupunkt on selle tasandi pagusirgel.

Sirge a jälgpunkt J asetseb endastmõistetavalt tasandi a jälgsirgel j ning sirge a perspektiiv on $a_0 \equiv JF$.

Olgu tasandiline kujund $\sigma \parallel \varepsilon_0$ (joon. 68-7). Siis seda kujundit ja tema perspektiivi σ_0 võib vaadelda projekteeriva koonilise pinna kahe

paralleelse lõikena. Et misugused lõiked on sarnased, siis võime öelda, et

(70) kui tasandiline kujund on paralleelne pildiekraaniga, siis tema perspektiiv on sarnane kujundi endaga.

KÜSIMUSED

1. Mis on sirgjoone: a) sihikur, b) pagupunkt?
2. Missuguste punktidega määratakse harilikult sirgjoone perspektiiv?
3. Mis juhtumil paralleelsete sirgete perspektiivid lõikuvad ja mis juhtumil nad on paralleelsed?
4. Missugusel sirgel asetsevad horisontaalsete sirgete pagupunktid?
5. Missugune punkt on pildiekraani normaalse pagupunktiks?
6. Mis on distantspunktid?
7. Mis on tasandi: a) seisuleht, b) pagusirge?
8. Missugusel sirgel asetsevad mingile tasandile kuuluvate sirgjoonte pagupunktid?
9. Mis kujund on pildiekraaniga paralleelse a) ruudu perspektiiv, b) nngi perspektiiv?

§ 69. PERSPEKTIIVI TULETAMINE PUNKTIDEMEETODIGA

Praktikas läheb perspektiivi tuletamist kõige sagedamini vaja mitmesuguste ehitiste (hoonete, sildade jt.) välisvaadete ja ruumide sisevaadete saamiseks. Tuletamisel lähtutakse harilikult objekti põhiplaani ja vaadetest.

Põhilisteks konstruktsioonideks perspektiivi tuletamisel on punkti ja sirgjoone perspektiivi tuletamine kaksvaate järgi. Olenevalt kasutatavast põhikonstruktsioonist tuntakse kolme oluliselt erinevat perspektiivi tuletamise meetodit: 1) **punktidemeetodit**, 2) **sirgetemeetodit** ehk **arhitektide meetodit** ja 3) **võrgumeetodit**. Praktikas kasutatakse neid meetodeid tavaliselt kombineeritult.

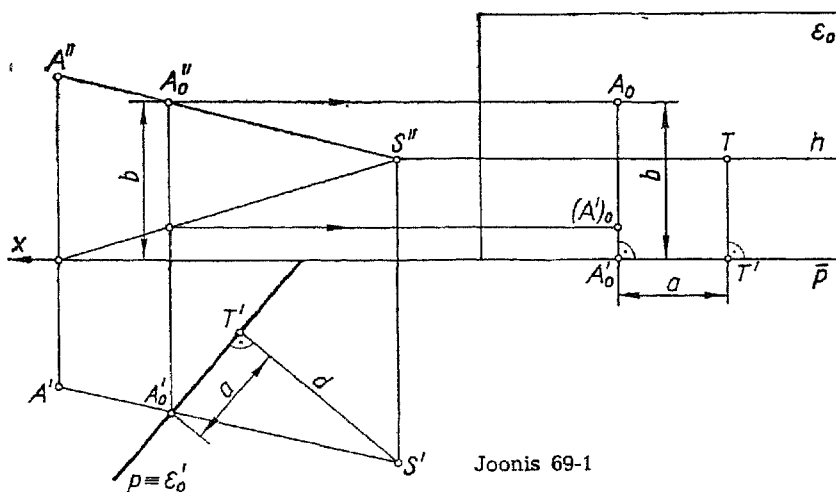
1. Punkti perspektiivi tuletamine.

Punktidemeetodi puhul leitakse punkti perspektiiv seda punkti läbi-va tsentraalkiire ja pildiekraani lõikepunktina. Joonisel 69-1 on näitena tuletatud punkti A perspektiiv. Punkt $A(A', A'')$ ja silmapunkt $S(S', S'')$ on antud vasakul kaksvaatega. Põhiekraaniga ristuva pildiekraani asukoht kaksvaatel on määratud põhisirgega (põhijäljega) $p \equiv \equiv e'_o$.

Tõmbame kõigepealt peakiire ST' pealtvaate $S'T' \perp p$; siis lõik $S'T'$ võrdub distantiga d . Horisont h ja tuumpunkt T asetsevad põhiekraanist silmapunkti S kõrgusel. Punkti A perspektiivi saamiseks tõmbame tsentraalkiire $SA(S'A', S''A'')$ ning leiame tema lõikepunkti A_o pildiekraaniga. Pildiekraani eriasendi tõttu on lõikepunkti pealtvaade kohe käes: $A'_o \equiv S'A' \times p$, eestvaate A''_o leiame aga kiire SA eestvaatelt. Sellega on kõik vajalikud konstruktsioonid kaksvaatel tehtud.

Leitud perspektiiv A_o asetseb pildiekraanil tuumpunktist T vasakul (silmapunktist vaadatuna) püstisirgel, mille kaugus punktist T' on $a \equiv \equiv T'A'_o$. Punkti A_o kaugus b pildi põhisirgest p võrdub eestvaate A''_o kaugusega x -teljest.

Et perspektiiv ei satuks objekti kaksvaatele, tõstetakse pildiekraan pärast konstruktsioonide lõpetamist kaksvaatel oma asukohast välja ja paigutatakse joonisepinna vabale kohale, ühtinuna joonisepinna. Joonisel 69-1 on väljatõstetud pildiekraan paigutatud kaksvaatest paremale nii, et põhisirge $\bar{p}$ ühtib x -teljega. Põhisirgele $\bar{p}$ märgitakse sobivalt punkt T' ning kantakse kaksvaatelt üle lõik $a \equiv T'A'_o$. Perspektiiv A_o asetseb nüüd punkti A'_o läbi-



Joonis 69-1

val püstsirgel lõigu b kaugusel põhisirgest $\bar{p}$.

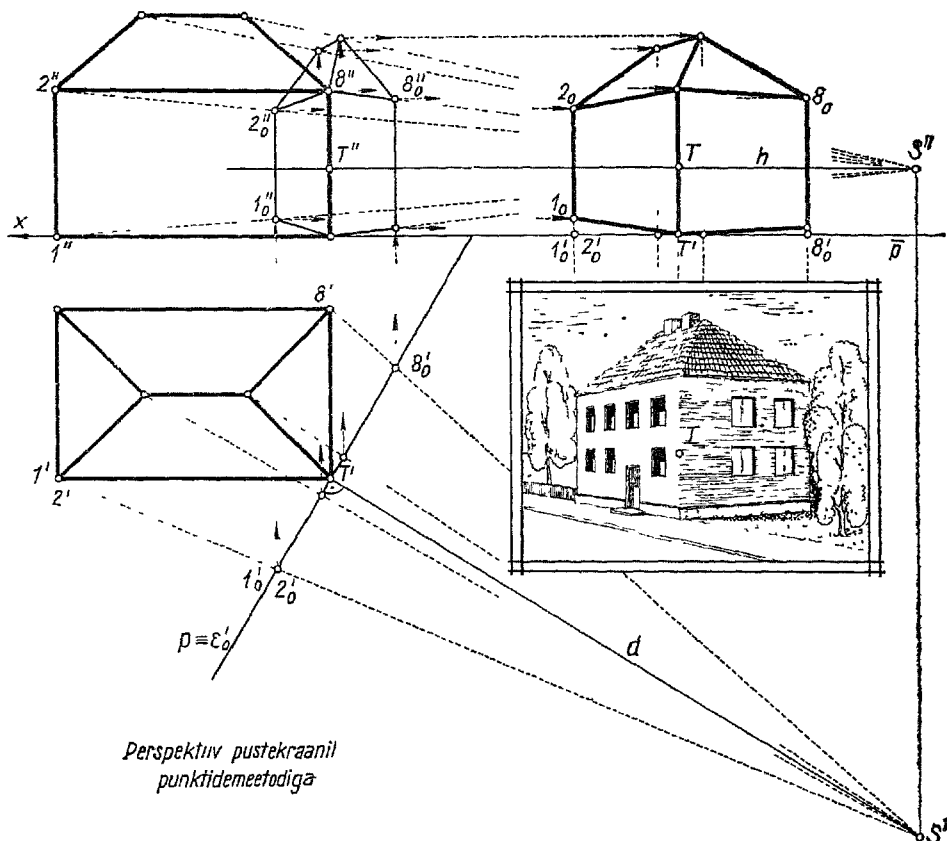
Analoogiliselt on kaksvaatel ja väljatõstetud pildiekraanil tuletatud ka punkti A pealtvaate A' perspektiiv $(A')_o$. Et põhikiir AA' on vertikaalne ja seega paralleelne pildiekraaniga, siis lause (65) põhjal asetsevad punkti perspektiiv ja selle punkti pealtvaate perspektiiv ühel ja samal püstsirgel: $A_o(A')_o \perp \bar{p}$.

2. Objekti perspektiivi tuletamine. Mingi objekti perspektiivi saamiseks punktidemeetodiga, leitakse eelmise joonise eeskujul kõigi selle objekti oluliste punktide perspektiivid ning ühendatakse need objektile vastavate joontega.

Näide 1. Tuletame joonisel 69-2 vasakul esitatud hoone perspektiivi. Lihtsuse pärast paigutame pildiekraani läbi hoone eesmise püstserva. Silmapunkt $S(S', S'')$ püütakse üldiselt valida nii, et peakiir suunduks umbkaudu objekti keskosale. Antud juhul on peakiir suunatud täpselt hoone eesmisele püstservale (silmapunkti ja pildiekraani asukoha

valiku kohta vt. § 72). Perspektiivi konstruktsioon on nüüd järgmine. Joonestame kaksvaatel tsentraalkiiridel $S1, S2, \dots, S8$ läbi hoone nende punktide, mis on silmapunktist nähtavad ning leiame nende lõikepunktide $1_o, 2_o, \dots, 8_o$ tasandiga ϵ_o . Et pildiekraan on esiekraani suhtes kaldu, siis saadud perspektiivi eestvaade on võrreldes tõelise perspektiiviga x -telje sihis kokku surutud ning katab osaliselt hoone eestvaadet. Moondevaba perspektiivi saamiseks on pildiekraan välja tõstetud ning paigutatud joonisepinnale nii, et uues kohas põhisirge $\bar{p} \equiv x$. Lõikepunktide pealtvaated $1'_o \equiv 2'_o, \dots, 8'_o$ ja punkt T' kantakse pabeririba abil kaksvaatele üle põhisirgele $\bar{p}$. Punktide perspektiivide $1_o, 2_o, \dots, 8_o$ kaugused sirgest p saadakse perspektiivi eestvaatele. Tulemus on allpool esitatud ka pildina, mida on meelevaldselt täiendatud uste, akende ja korstnatega.

Kui soovitakse saada k korda (näiteks $k=2$ korda) suuremat perspektiivi, tuleb k korda suurendada kõik



Perspektiiv püstekraanil
punktidemeetodiga

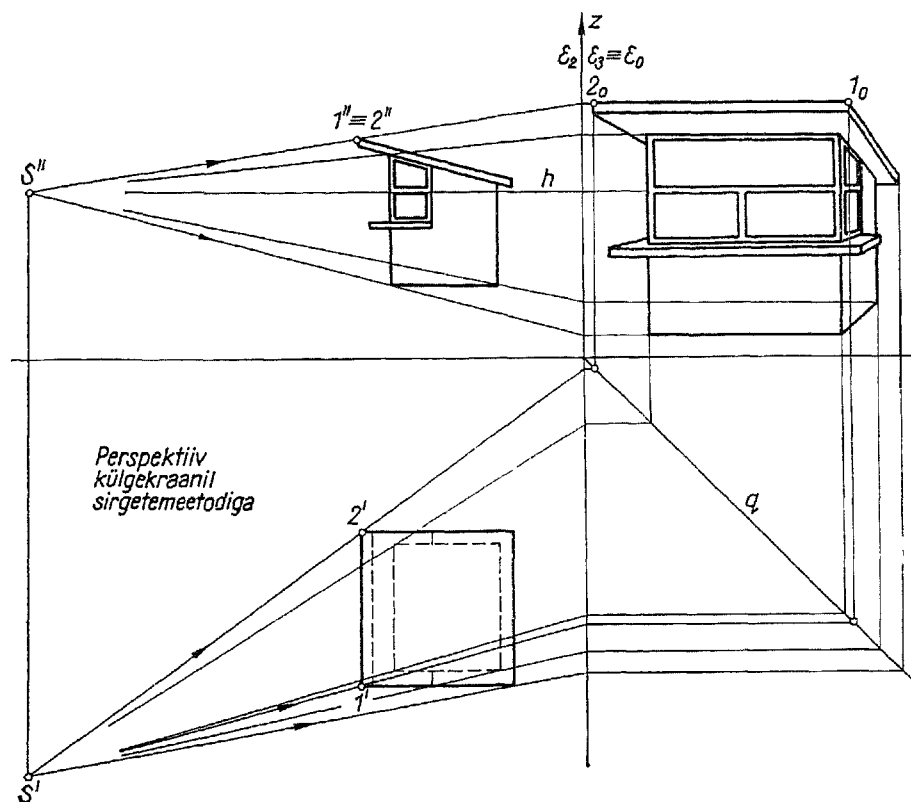
Joonis 69-2

lõigud, mis kantakse üle sirgelt p sirgele $\bar{p}$. Samuti tuleb sel juhul suurendada k korda horisondi kõrgus ja kõik teised ülekantavad kõrgused.

Näide 2. Joonisel 69-3 on punktide meetodiga tuletatud kioski perspektiiv külgekraanil $\varepsilon_3 \equiv \varepsilon_0$. Punktide perspektiivid on leitud kui neid punkte läbivate tsentraalkiirte küljäljed. Näitena on esitatud tippude 1 ja 2 perspektiivide 1_0 ja 2_0 saamine. Perspektiivi tuletamist käesoleval juhul hõlbustab asjaolu, et kõikide külgekraanidega paralleel-

sete servade perspektiivid on ruumis paralleelsed servade enestega.

Punktide meetodi hüveks on põhimõtteline lihtsus ja konstruktsioonide kompaktsus, s. t. konstruktsioonijooned jäävad üldiselt andmete piiresse. Seda meetodit sobib kasutada siis, kui objekti perspektiivi saab joonestada juba väheste oluliste punktide abil. Niisugune olukord tekib näiteks siis, kui pildiekraan paigutatakse paralleelselt objekti kahe paralleelsete servade parvega (kioski puhul näiteks olid püstservad ja üks rõhtservade parv



Joonis 69-3

paralleelsed külgekraaniga). Keerulise objektide puhul aga läheb paljude üksikute punktide perspektiivide tuletamine punktidemeetodiga tülikaks. Seepärast on neil juhtudel otstarbekohasem kasutada sirgetemeetodit või võrgumeetodit.

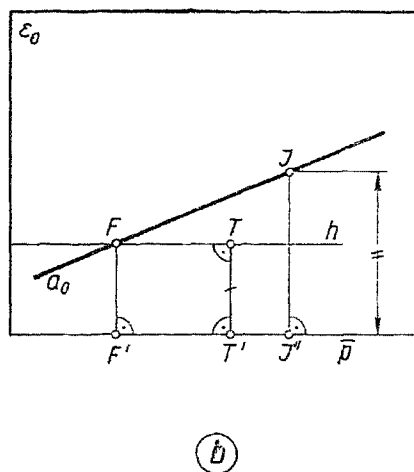
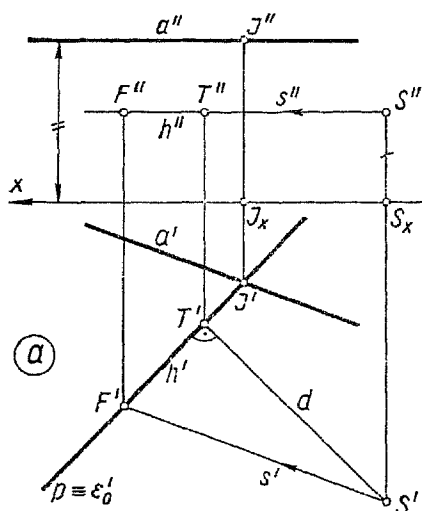
KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Kuidas leitakse põhimõtteliselt punkti perspektiiv punktidemeetodiga?
2. Missugustel juhtudel sobib kasutada punktidemeetodit?

3. Joonestada korrapärase nelinurkse püramiidi kaksvaade ning tuletada tema perspektiiv punktidemeetodiga. Pildiekraan võtta läbi püramiidi põhja ühe tipu kaldu esiekraani suhtes.

§ 70. PERSPEKTIIVI TULETAMINE SIRGETEMEETODIGA

Sirgetemeetodi puhul objekti perspektiiv konstrueeritakse sirgete järgi ja pagupunktide abil. Selle meetodi kasutamist soodustab suurel määral asjaolu, et perspektiivis kujutami-



Joonis 70-1

sele tulevate ehitiste servastik koosneb harilikult kolmest paralleelsirgete parvest: horisontaalsetest pikkus- ja laiussirgetest ning vertikaalsetest kõrgussirgetest. Pikkus- ja laiussirgete perspektiive saab hõlpsasti tuletada nende jälg- ja pagupunktide kaudu, sest vertikaalne pildiekraan paigutatakse harilikult nii, et ta pikkus- ja laiussirgeid lõikab. Konstrueerimist hõlbustab tunduvalt asjaolu, et paralleelsetel sirgetel on ühine pagupunkt (lause 60). Kõrgussirgetel pole vertikaalse pildiekraani korral jälg- ega pagupunkti — nende sirgete perspektiivid on sirgete enestega paralleelsed püstsirged (lause 65). Et viimaste asukohad pildil, nagu hiljem näeme, on väga kergesti leitavad, siis jääb sirgetemeetodi kasutamisel põhiliselt elementaarkonstruksiooniks horisontaalse sirge perspektiivi tuletamine jälg- ja pagupunkti kaudu. Käsitleme seda konstruksiooni üksikasjalikult.

1. Rõhtsirge perspektiivi tuletamine. Olgu kaksvaatel antud juhuslik horisontaalne sirge a , silmapunkt S ja vertikaalne pildiekraan ε_0 ($p \equiv \varepsilon'_0$); vaja on leida sirge a perspektiiv a_0 ekraanil ε_0 (joon. 70-1, a).

Leiame sirgjoone a pagupunkti F ja jälgpunkti J ekraanil ε_0 esmalt kaksvaatel. Pagupunkti F saamiseks tõmbame läbi silmapunkti S sirgjoone a sihikiire $s \parallel a$ ($s' \parallel a'$, $s'' \parallel a''$) ning leiame tema lõikepunkti ekraaniga ε_0 ; see lõikepunkt osutubki otsitavaks pagupunktiks F .

Jälgpunkti $J \equiv a \times \varepsilon_0$ leidmine ei vaja selgitust. Märgime vaid, et vertikaalse pildiekraani korral asetseb horisontaalse sirge jälgpunkt alati sirge enda kõrgusel põhisirgest p . Töö kaksvaatel lõpetame peakiire ST tõmbamisega risti ekraaniga ε_0 ($S'T' \perp p$).

Leiame nüüd sirgjoone a perspektiivi väljatõstetud ekraanil ε_0 (joon. 70-1, b). Selleks märgime põhisirgele p vabalt punkti T' ning kanname

kaksvaatele üle lõigud $T'F'$ ja $T'J'$. Tuumpunkt T , pagupunkt F ja jälgpunkt J asetsevad püstsirgetel, mis läbivad vastavalt punkte T' , F' ja J' ; nende kõrgusteks põhisirgest $\bar{p}$ on $T'T = F'F = S_x S''$ ja $J'J = J_x J''$. Sirgjoone a otsitav perspektiiv on nüüd $a_o \equiv FJ$. Sirge $TF \parallel \bar{p}$ osutub pildi horisondiks h .

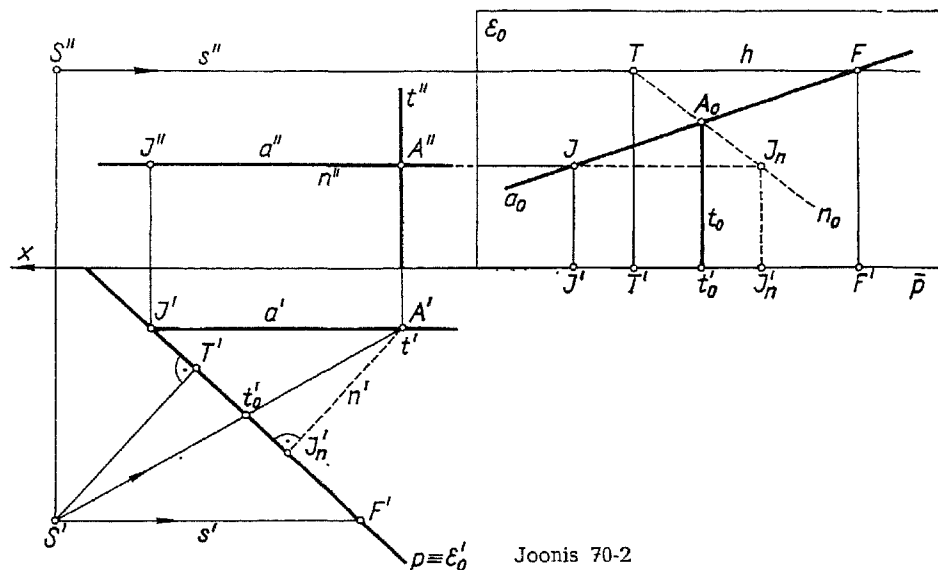
2. Punkti perspektiiv sirgetemethodiga. Punkti perspektiivi tuletamiseks sirgetemethodiga tõmmatakse läbi selle punkti kaks sirget — üks harilikult vertikaalne, teine horisontaalne. Seejärel konstrueeritakse mõlema sirge perspektiivid ning punkti perspektiiv saadakse sirgete perspektiivide lõikepunktina.

Joonisel 70-2 on kaksvaatel (vasakul) antud punkt A , silmapunkt S ja pildiekraan ε_0 ; nõutakse punkti A perspektiivi A_o .

Tõmbame läbi punkti A kaks sirget — vertikaalse sirge t ja horisontaalse sirge a . Konkreetse objekti

puhul on otstarbekohane sirge a tõmmata paralleelselt objekti pikkus- või laiussirgetega. Joonisel on $a \parallel \varepsilon_2$. Vertikaalse sirge t perspektiivi t_o asukoha pildiekraanil saame kätte kiire SA tõmbamisega: $t'_o \equiv S'A' \times p$; rõhtsirge a perspektiivi a_o aga leiame joonise 70-1 eeskujul. Kandes punktid T' , J' , t'_o ja F' kaksvaatele üle väljatõstetud pildiekraani põhisirgele $\bar{p}$, saame joonestada sirgete t ja a perspektiivid $t_o \perp \bar{p}$ ja $a_o \equiv JF$. Punkti A otsitav perspektiiv on $A_o \equiv a_o \times t_o$.

Samal joonisel on punktjoontega näidatud punkti A perspektiivi saamine ka juhul, kui rõhtsirgena läbi punkti A on kasutatud pildiekraani normaali n ($n' \perp p$, $n'' \equiv a''$). Kandes sirgele $\bar{p}$ ka normaali jälgpunkti J_n pealtvaate J'_n ning võttes arvesse, et normaali pagupunktiks on tuumpunkt T (lause 61), saame tõmmata normaali perspektiivi $n_o \equiv TJ_n$. See- ga punkti A perspektiiv on $A_o \equiv n_o \times t_o$.



Joonis 70-2

3. Ehitiste perspektiivide tuletamine. Kogu vajalik eeltöö ehitise perspektiivi tuletamisel tehakse kaksvaatel (põhiplaani ja eestvaatel). Seal valitakse silmapunkti ja pildiekraani asukoht, leitakse pikkus- ja laiussirgete pagupunktid ning püstsirgete perspektiivide asukohad jm. Esialgu konstrueeritakse ainult ehitise üldvormi perspektiiv. Ehitise detailide (uksed, aknad jt.) perspektiivid konstrueeritakse hiljem juba valminud üldvormi perspektiivil. Seejuures kasutatakse sageli mitmesuguseid erikonstruktsioone.

Näide 1. Tuletame sirgetemee-
todiga joonisel 70-3, a kujutatud
hoone perspektiivi.

Pildiekraan ϵ_0 on joonisel valitud nii, et ta lõikab hoonet. Peakir ST on suunatud hoone keskmisele osale. Silmapunkti kõrgus põhiekraanist (maapinnast) on võetud normaalsest (natuuris umbes 1,6 m) mõnevõrra suurem, et saada hoone põhiplaani vähem kokkusurutud perspektiivi. Joonise mahutamiseks raamatulehe väikesele pinnale on tulnud distants d võtta liiga väike.

Hoone rõhtsirged ja olulised punktid asetsevad viiel erineval kõrgusel, mis joonisel on märgitud numbritega 0, I, II, III ja IV; nullkõrguseks on võetud põhiekraani kõrgus.

Leiame kaksvaatel kõigepealt hoone paralleelsete servade pagupunktid. Pikkussirgete (AB jt.) ühise pagupunkti F_1 saame sihikiire $s_1 \parallel AB$ abil ($F'_1 \equiv s'_1 \times p$). Analoogiliselt leiame ka laiussirgete (BC jt.) pagupunkti F_2 sihikiire $s_2 \parallel BC$ abil ($F'_2 \equiv s'_2 \times p$). Järgnevalt leiame hoone kolme nähtava püstserva (silmapunkti vaataduna kahe äärmise ja keskmise) perspektiivide pealtvaated, s. o. punktid 2, 5 ja 7, milles punkti S' püstservade pealtvaadetesse tõmmatud kiired lõikavad põhisir-

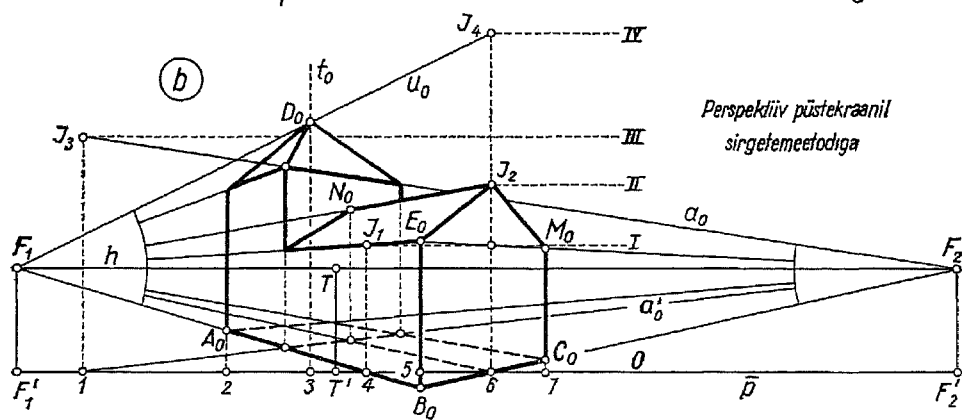
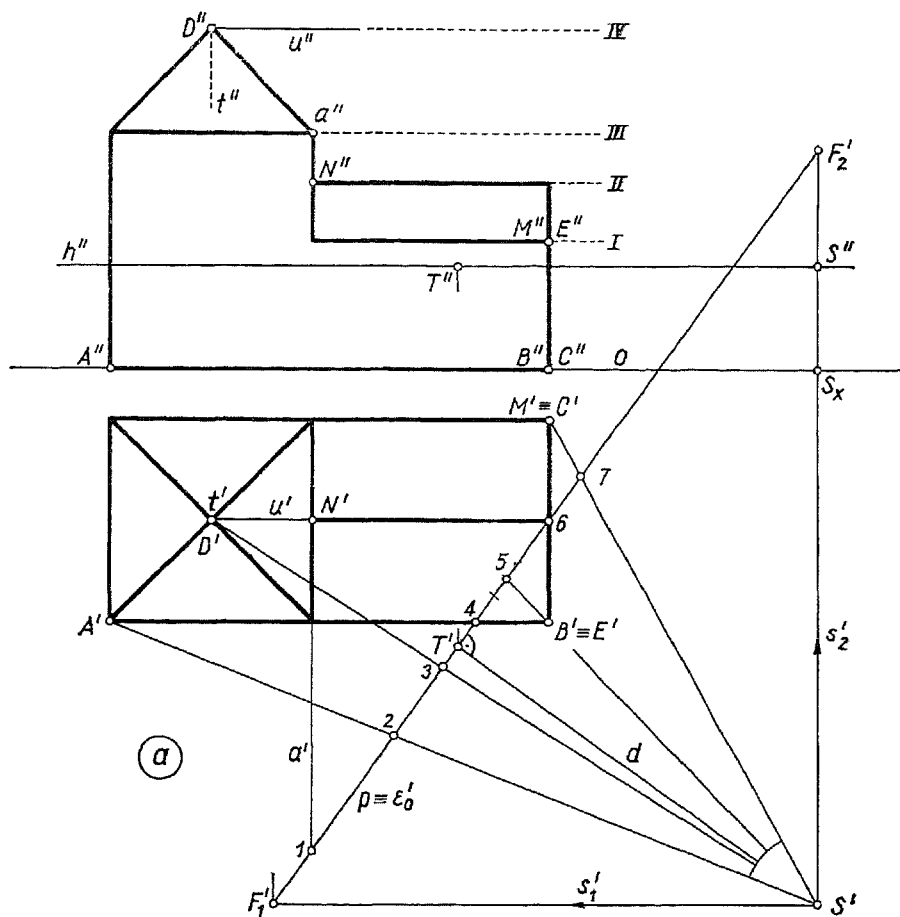
get p . Torni tipu D perspektiivi saamiseks kasutame joonise 70-2 eeskujul kahte sirget u ja t . Vertikaalse sirge t perspektiivi pealtvaate 3 leiame kiire SD abil.

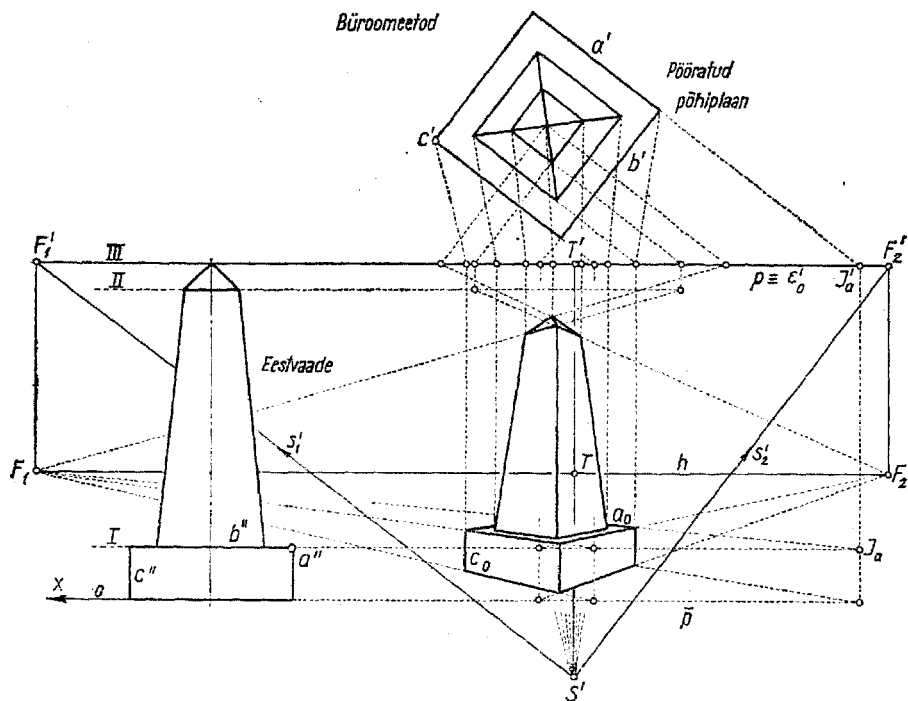
Põhiekraanil asetsevate sirgete jälgpunktidest vajame ainult pikkussirge AB jälgpunkti 4, laiussirge BC jälgpunkti 6 ja torni serva a pealtvaate a' jälgpunkti 1. Kõik need jälgpunktid asetsevad nulkõrgusel, s. t. põhisirgel p .

Hoone perspektiivi konstrueerimisel väljatõstetud pildiekraanil (joon. 70-3, b) tõmbame kõigepealt põhisirge $\bar{p}$ ning kanname sellele pabeririba abil kaksvaatelt punktid $F'_1, 1, 2, \dots, F'_2$. Seejärel märgime püstsirgele läbi T' tuumpunkti T ($TT' \equiv S''S_x$) ning tõmbame temast läbi horisondi $h \parallel \bar{p}$. Pagupunktid F_1 ja F_2 kanname üle horisondile. Järgnevalt tõmbame läbi punktide 2, 3, 5 ja 7 püstsirgete perspektiivid.

Tuletame nüüd hoone põhiplaani perspektiivi. Ühendades jälgpunktid 4 ja 6 vastavalt pagupunktidega F_1 ja F_2 , saame hoone servade AB ja BC perspektiivid A_0B_0 ja B_0C_0 . Seejuures punktid A_0, B_0 ja C_0 saadakse kui sirgete A_0B_0 ja B_0C_0 lõikepunktide vastavate püstservade perspektiividega. Põhiplaani varjatud külgede perspektiivid suunduvad punktidest A_0 ja C_0 pagupunktidesse F_2 ja F_1 . Ühendades jälgpunkti 1 pagupunktiga F_2 , saame torni serva a pealtvaate perspektiivi a'_0 ning ühtlasi ka torni seina pealtvaate pildil. Sellelega on hoone põhiplaani perspektiiv konstrueeritud.

Hoone madalama osa nähtava räästajoone jälgpunkt J_1 asetseb punkti 4 läbival püstsirgel kõrgusel I. Selle räästajoone perspektiiv J_1F_1 lõikab hoone eesmist püstserva punktis E_0 . Tõmmates sirge E_0F_2 ,





Joonis 70-4

leiame ka teise räästa tipu M_0 hoone parempoolsel püstserval. Katuse harja jälgpunkt J_2 asetseb punkti 6 läbival püstsirgel kõrgusel II ; ta on ühtlasi harja üks otspunkt. Harja teine otspunkt N_0 leitakse harjajoone perspektiivil J_2F_1 püstsirge abil, mis läbib punkti, milles sirge a'_0 lõikab harjajoone pealtvaate perspektiivi $6F_1$. Torni kahe püstserva perspektiivid läbivad punkte, milles sirge a'_0 lõikab põhiplaani perspektiivi. Torni serva a jälgpunkt J_3 asetseb punkti 1 läbival püstsirgel kõrgusel III ; selle servjoone perspektiiv on $a_0 \equiv J_3F_2$. Torni tippu D läbiva rõhtsirge u jälgpunkt J_4 asetseb punkti 6 läbival püstsirgel kõrgusel IV . Punkti D perspektiiv $D_0 \equiv u_0 \perp t_0$. Hoone perspektiivi konstrueerimise

lõpetame katuste kaldservade tõmbamisega.

Märgime lõpuks, et madalal asetseva silmapunkti korral lõikuvad põhiplaani pikkus- ja laiussirged pildil teravate nurkade all ega võimalda seetõttu saada püstsirgete perspektiive küllaldase täpsusega. Sel juhul on vaja kaksvaatel leida kõikide püstsirgete perspektiivide pealtvaated.

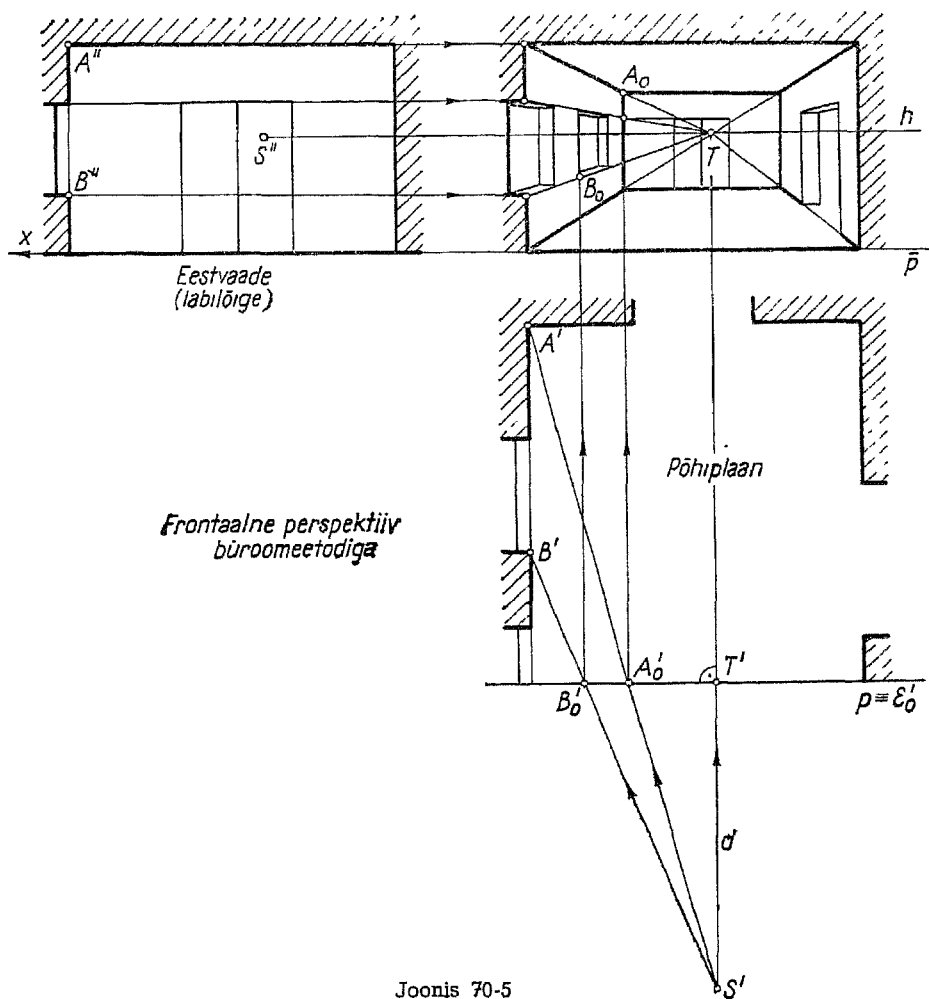
4. Büroomeetod. Praktikas kasutatakse sageli sirgetemeetodi niisugust varianti — nn. **büroomeetodit** —, mille puhul objekti pealtvaade eraldatakse eestvaatest ning paigutatakse sobivasse asendisse perspektiivi tuletamiseks. Selgitame vastavaid konstruktsioone näite abil.

Näide 2. Joonisel 70-4 on bü-

roomeetodiga tuletatud nelinurkse obeliski perspektiiv. Põhiplaan on omalt kohalt tõstetud eestvaatest kõrgemale ja tublisti paremale nii, et allapoole jääks küllaldaselt vaba pinda perspektiivi joonestamiseks. Pildiekraan võetakse paralleelselt esiekraaniga, s. t. põhisirge $p \equiv \varepsilon'_0$ tõmmatakse horisontaalsena. Uues kohas objekti põhiplaan pööratakse sobiva nurga võrra vastavalt sellele, missuguseid objekti külgi soovitakse

perspektiivil näha. Väljatõstetud pildiekraani põhisirge $\bar{p} \parallel p$ võetakse ühtivana x-teljega. Horisondi $h \parallel \bar{p}$ kõrgus põhisirgest $\bar{p} \equiv x$ valitakse objekti eestvaate järgi.

Edasised konstruksioonid on tuttavad jooniselt 70-3. Kõigepealt leitakse sihikiirte $s_1 \parallel a$ ja $s_2 \parallel b$ abil pikus- ja laiussirgete a ja b pagupunktid F_1 ja F_2 ning kantakse need üle



Joonis 70-5

horisondile h . Püstsirgete asukohad pildil tehakse kindlaks kiirte tõmbamisega punktist S' püstsirgete pealtvaadetes (põhiplaanel). Näiteks püstsirve c perspektiiv c_0 tuleb vertikaalile, mis läbib punkti, kus sirge $S'c'$ lõikab põhisirget p . Rõhtsirgete perspektiivid joonestatakse jälg- ja pagupunktide abil. Näiteks rõhtsirve a perspektiivi a_0 saamiseks leitakse kõigepealt jälgpunkt J_a . See asetseb vertikaalil, mis läbib punkti $J'_a \equiv a' \times p$ kõrgusel I põhisirgest p . Sirge a perspektiiv on $a_0 \equiv J_a F_1$.

Büroomeetodi eriliseks hüveks on see, et püstsirged pildil saab tõmmata otseselt nende õigetel kohtadel; langeb ära punktide ülekandmise vajadus pabeririba abil sirgelt p sirgele $\bar{p}$.

5. Frontaalne perspektiiv. Perspektiivi nimetatakse **frontaalseks**, kui pildiekraan on paigutatud paralleelselt objekti ühe olulise tahuga ning risti suurema osa ülejäänud tahudega.

Näide 3. Joonisel 70-5 on näitena büroomeetodiga tuletatud ruumi sisevaate frontaalne perspektiiv. Pildiekraan ϵ_0 on võetud paralleelselt ruumi tagaseinaga, mistõttu külgeinad, lagi ja põrand on pildiekraaniga risti. Ruumi põhiplaanel on omalt kohalt nihutatud paremale sel määral, et üles eestvaate kõrvale jääks parasjagu vaba pinda perspektiivi jaoks. Väljatõstetud pildiekraani põhisirge $\bar{p} \parallel p$ ühtib x -teljega. Pildiekraaniga ristuvate ruumi servade pagupunktiks on tuumpunkt T (lause 61). Tagaseina perspektiiv on sarnane selle seina eestvaatega (lause 70). Perspektiivi konstrueerimine selgub jooniselt ega vaja täiendavaid seletusi. Täielikult on näidatud vaid punktide A ja B perspektiivide A_0 ja B_0 tuletamine.

Pildiekraani frontaalset asendit saab kasutada ruumide, tänavate ning harvemini üksikute ehitiste perspektiivide tuletamiseks.

KUSIMUSED

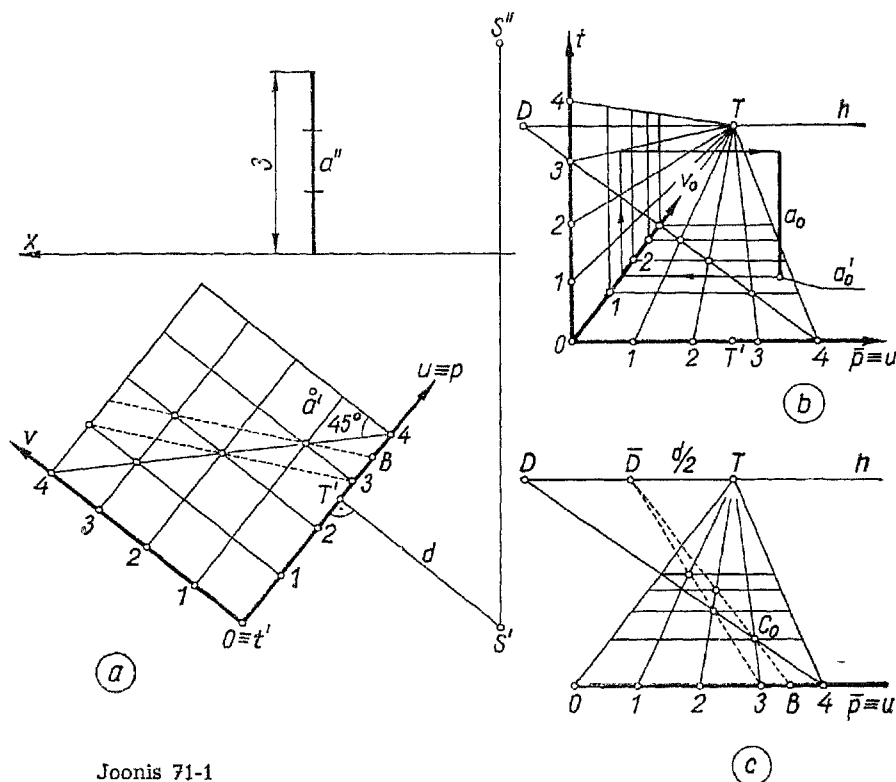
1. Missuguste geomeetriliste elementide järgi konstrueeritakse objekti perspektiiv sirgetemeetodi puhul?
2. Kuidas tuletatakse põhimõtteliselt punkti perspektiiv sirgetemeetodiga?
3. Milles seisneb büroomeetodi eripära?
4. Kuidas paigutatakse pildiekraan frontaalse perspektiivi saamiseks?

§ 71. VÕRGUMEETOD

1. Ruutvõrgu perspektiiv. Võrgumeetodi puhul objekti perspektiiv konstrueeritakse ruutvõrgu perspektiivi baasil.

Joonisel 71-1, a on antud pildiekraani ϵ_0 , silmapunkti S ja vertikaalse tulba a kaksvaade. Näitame, kuidas konstrueeritakse ruutvõrgu perspektiiv ning kuidas selle abil saab tuletada tulba a perspektiivi.

Võtame abiks ristteljestiku $Ouv't$, mille alguspunkti O paigutame põhisirgel p vabalt valitud punkti, telje u suuname mööda põhisirget p , telje t aga vertikaalselt üles. Siis teljed u ja t asetsevad pildiekraanil, telg v aga on pildiekraaniga risti. Valime koordinaattelgedel mingi mõõtühiku ning joonestame pealtvaatel ruutvõrgu (koordinaatvõrgu), võttes ruudu külje pikkuseks mõõtühiku pikkuse. Ruutvõrgu perspektiivi konstrueerime väljatõstetud pildiekraanil (joon. 71-1, b). Selleks kanname telgedele $u \equiv p$ ja t jaotuspunktid $1, 2, \dots, 4$, märgime kaksvaate järgi õigele kohale punktid T' ja T ning tõmbame horisondi h . Et telg v ja temaga paralleelsed võrgu-



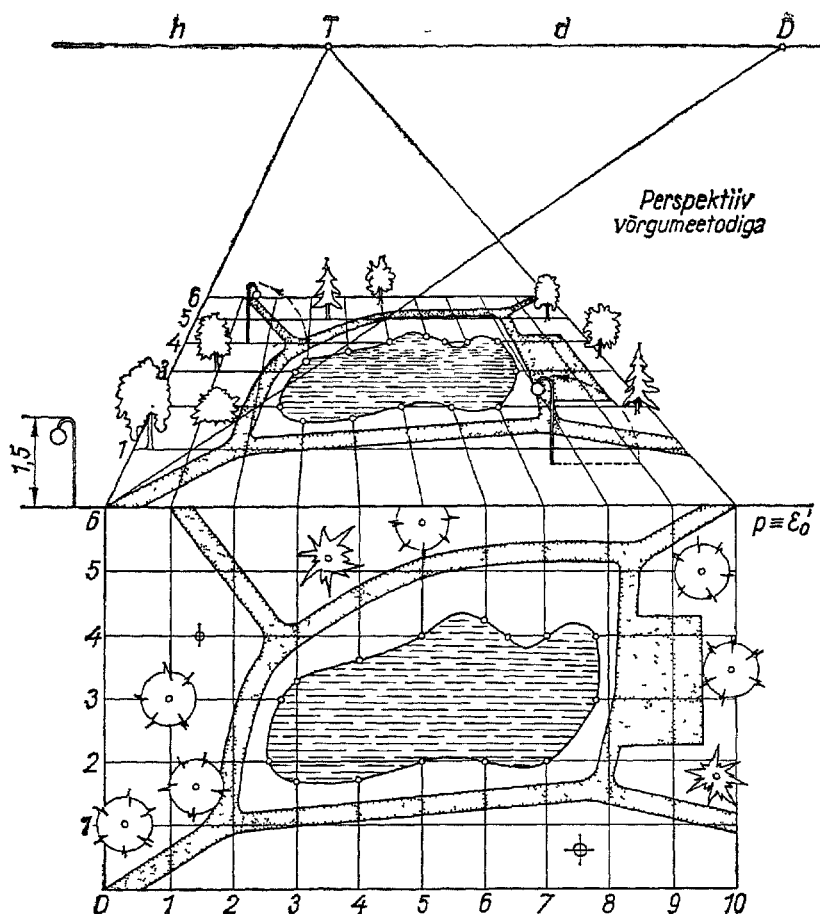
Joonis 71-1

sirged on pildiekraaniga risti, siis nende pagupunktiks on tuumpunkt T , nende jälgpunktid aga ühtivad punktidega $0, 1, \dots, 4$. Nii saame kohe joonestada kõikide nimetatud sirgete perspektiivid.

Teljel v olevate jaotuspunktide vahekaugused ei tule perspektiivil enam võrdsed. Nende saamiseks võtame arvesse, et ruutvõrgu diagonaalsirge 44 moodustab pildiekraaniga 45° nurga (joon. 71-1, a). Järelikult lause 61 põhjal on selle sirge pagupunktiks distantpunkt D ($TD = d$). Selle diagonaali perspektiiv $4D$ lõikabki uv tasandis olevate võrgusirgete perspektiive $OT \equiv v_0, 1T, \dots, 4T$ võrgu sõlmpunktides. Tõmmates läbi nende sõlmpunktide

u -telje paralleelid, saame u -teljega paralleelsete võrgusirgete perspektiivid ning ühtlasi ka jaotuspunktide $1, 2, \dots, 4$ kujutised v -telje perspektiivil v_0 . Sellega on rõhtsa ruutvõrgu perspektiiv valmis. Püstsirgete tõmbamisega läbi v -telje perspektiivil olevate jaotuspunktide lõpetame ka vt tasandis oleva ruutvõrgu perspektiivi joonestamise.

Tulba a perspektiivi saamiseks märgime kaksvaate järgi ruutvõrgu perspektiivi vastavasse silma tulba pealtvaate perspektiivi a' . Punktist a'_0 tõmbame u -telje paralleeli kuni lõikumiseni teljega v_0 . Sealt edasi tõmbame püstsirge kuni kolmanda võrgusirgeni tasandil vt (sest tulba kõrgus on 3 ühikut). Nii saadud



Joonis 71-2

tulba perspektiivi kõrguse kanname üle tulba perspektiivile a_0 .

Võrgumeetod kuulub ligikaudsete meetodite hulka, sest tulba pealtvaate perspektiivi märkisime võrgusilma perspektiivile silmamõõdu järgi.

Kui distantpunkt D läheb jooniselehelte välja, võib ruutvõrgu perspektiivi konstrueerimiseks kasutada pooldistantpunkti $\bar{D}$ ($T\bar{D} = 0,5d$). Vastavad konstruktsioonid on joonistel 71-1, a ja c näidatud punktjoontega. Nimetatud juhul tu-

leb kasutada kahte paralleelset diagonaalsirget: üks neist lähtub punktist B , mis poolitab lõiku 34, teine aga punktist 3. Nagu nähtub kaksvaatelt, annavad mõlemad diagonaalid ruutvõrgu sõlmpunkte üle ühe.

Et sirge $B\bar{D}$ (samuti ka sirge $3\bar{D}$) annavad joonisel 71-1, c ruutvõrgu sõlmpunktide õigeid perspektiive, järeldub kolmnurkade $34C_0$ ja DTC_0 sarnasusest. Sirge $B\bar{D}$ poolitab nende kolmnurkade vastavaid külgi. Järelikult ta lõikab sirget $3T$ samas

punktis C_0 , milles lõikuvad sirged $3T$ ja $4D$.

Ühtlase jaotusega mõõtkavad telgedel u ja t joonisel 71-1, b võimaldavad koos ruutvõrgu perspektiividega teha objekti perspektiivil mõõtmisi laiuti (s. o. paralleelselt põhisirgega p) ja püstsihis. Seepärast nimetatakse neid mõõtkavasid vastavalt laiuste ja kõrguste mõõtkavaks. Telje v kujutisel v_0 olev perspektiivne mõõtkava (ühtlase mõõtkava perspektiiv) aga võimaldab teha mõõtmisi sügavuti, s. o. risti pildiekraaniga. Seepärast nimetatakse seda mõõtkava sügavuste mõõtkavaks.

2. Objekti perspektiivi tuleamine. Võrgumeetodit kasutatakse keeruliste põhiplaanidega objektide perspektiivide tuletamiseks, mille puhul punktide- ja sirgetemeetod osutuvad ebaratsionaalseteks. Niisuguste objektide hulka kuuluvad näiteks vaba planeerimisega hoonete rühmad, väljakud ja pargid, millel on kõveraid teid ja veekogusid jt. Objekti perspektiivi tuleamine toimub neil juhtudel järgmiselt.

Objekti põhiplaanile kantakse pildiekraani ja silmapunkti projektsioonid ning plaanile joonestatakse ruutvõrk (või pannakse plaanile kalka valmis ruutvõrguga). Seejärel tuletatakse ruutvõrgu perspektiiv ning joonestatakse sellesse põhiplaanil olevate joonte kujutised. Objekti oluliste punktide kõrgused perspektiivil saadakse tavaliselt kõrguste mõõtkava abil.

Näide. Joonisel 71-2 on all esitatud osa pargi plaanist, üleval aga sama pargiosa perspektiiv. Distant $d=TD$, horisondi h kõrgus ja tuumpunkt T on valitud nii, et perspektiiv ei tuleks liiga kokkusurutud. Plaanile on kantud ruutvõrk ning

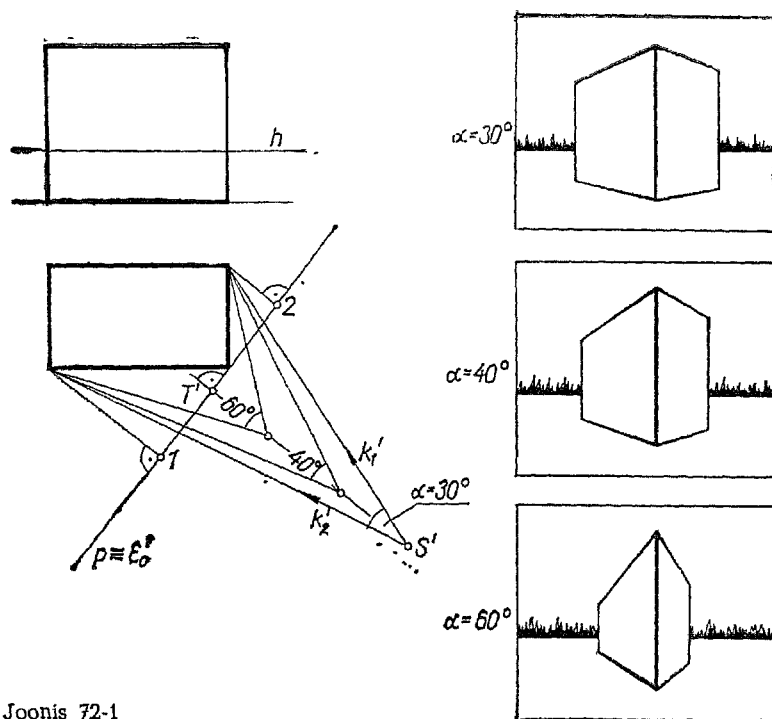
selle perspektiivi sisse on joonestatud teede ja veekogu piirjooned, jälgendades joonte kulgu läbi võrgusilmade plaanil. Valgustuspostide kõrguseks on võetud ruudu külje 1,5-kordne pikkus. Postide kõrguste saamiseks perspektiivil on kasutatud asjaolu, et pildiekraaniga paralleelsed rõht- ja püstlõigud, mis on pikkuselt võrdsed ja pildiekraanist samal kaugusel, on ka perspektiivil pikkuselt võrdsed (järeldub lausest 70, võrdle ka u - ja t -teljega paralleelseid lõike joonisel 71-1, b). Arusaadavalt oleksime võinud kõrguste saamiseks kasutada ka kõrguste mõõtkava. Puud ja põõsad on pildil joonistatud küll õigetele kohtadele, kuid suuruselt ja kujult meelevaldsetena.

§ 72. SILMAPUNKTI JA PILDIEKRAANI ASUKOHA VALIK

Perspektiivilt nõutakse, et tema vaatlemisel tekiks inimesel umbes samasugune mulje nagu objekti enda vaatlemisel. Niisuguse perspektiivi saamiseks tuleb silmapunkti ja pildiekraani asukoha valikul arvestada järgmisi soovitusi ja kitsendusi.

1) Silmapunkt asetsegu kohas, kust objekti olulised iseärasused paistavad kõige selgemini. Suurema piltlikkuse saavutamiseks peab tahuliste objektide (hooned jt.) puhul silmapunktist nägema vähemalt kahte objekti külge (joon. 72-1, vt. ka jooniseid 69-3, 70-3 ja 70-4).

2) Peakir ST peab suunduma objekti keskosale nii, et kui lõik 12 jaotada kolmeks võrdseks osaks, siis tuumpunkti pealtvaade T' satuks selle lõigu keskmise kolmandiku piiridesse (joon. 72-1). Seejuures 1 ja 2



Joonis 72-1

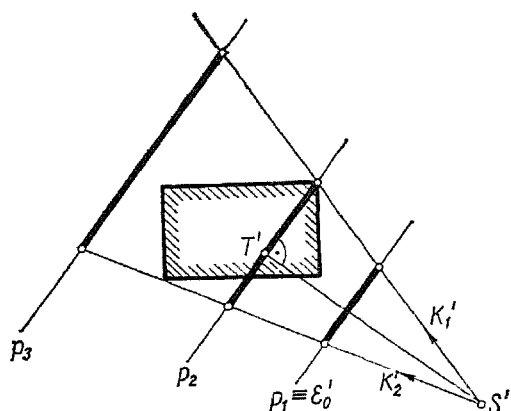
on punktid, kus põhiplaani äärmisest punktidest tõmmatud põhisirge p normaalid lõikavad põhisirget.

3) Et objekt oleks vaatega korraga haaratav, tuleb silmapunkti kaugus objektist (mitte ära segada distanttsiga!) valida nii suur, et horisontaalne vaatenurk α objekti äärmistesse punktidesse minevate kiirte pealtvaadete k'_1 ja k'_2 vahel oleks 20° kuni 40° . Optimaalseks loetakse nurka $\alpha = 30^\circ$. Sama on kehtiv ka vertikaalse vaatenurga kohta.

Joonisel 72-1 on näidatud vaatenurga α mõju perspektiivile horisondi ühe ja sama kõrguse puhul. Nagu näeme, on $\alpha = 30^\circ$ ja $\alpha = 40^\circ$ puhul objekti perspektiiv silmale enam-vähem vastuvõetav, $\alpha = 60^\circ$ puhul aga tundub perspektiiv juba liiga moonutatuna.

4) Silmapunkti normaalkõrguseks põhiekraanist (maapinnast, põrandast) loetakse seisva inimese silma kõrgust (160...170 cm), muidugi andmete mõõtkavas. Vajaduse korral võib aga silmapunkti valida normaalsest ka kõrgemale või madalamale. Nii näiteks kui tahetakse saada head ülevaadet tehase territooriumil paiknevatest ehitistest ja seadmetest, on otstarbekohane võtta silmapunkt ehitistest kõrgemal. Kui aga soovitakse kujutada künka peal olevat maja nii nagu see paistab orust, tuleb silmapunkt valida vastavalt madalamal.

5) Pildiekraani võib paigutada kas objekti ette (p_1), objekti taha (p_3) või nii, et ta objekti lõikab (p_2) (joon. 72-2). Perspektiivi tuletamise hõlpsuse seisukohalt tuleb eelistada



Joonis 72-2

objekti lõikavat või puutuvat pildiekraani. Sel juhul on perspektiivi konstrueerimine üldiselt lihtsam, sest osa objekti jooni on otseselt pildiekraanil.

Pildiekraani paralleelnihutusega saab muuta perspektiivi suurust, sest sel juhul jäävad perspektiivid kõik üksteisega sarnaseks. Suurema perspektiivi saamiseks tuleb pildiekraan paigutada objekti taha (p_3). Joonisel 72-2 on perspektiivide pealtvaated, s. o. perspektiivide tegelikud laiused kiirte k'_1 ja k'_2 vahel näidatud jämedate lõikudega.

KÜSIMUSED

1. Kuidas suunatakse objektile peaküür?
2. Missugustes piirides on soovitatav võtta horisontaalse vaatenurga suurus?
3. Missugune on silmapunkti normaal kõrgus põhiekraanist?

§ 73. RINGJOONE PERSPEKTIIV

Mingi kõverjoone perspektiivi saamiseks on vaja tuletada selle joone üksikute punktide ja võimaluse korral ka puutujate tsentraalprojekt-

sioonid ning kasutada neid siis kujutisjoone väljajoonestamisel. Siin käsitleme ainult ringjoone perspektiivi ja sedagi üsna elementaarsel kujul.*

Kui ringjoone tasand ei läbi silmapunkti, siis ringjoont projekteeriv pind on teist järku koonus. Selle koonuse lõikamisel pildiekraaniga saadakse lõikejooneks (ringjoone perspektiiviks) mingi teist järku joon, kas ellips (erijuhul ringjoon), parabool või hüperbool (§ 53).

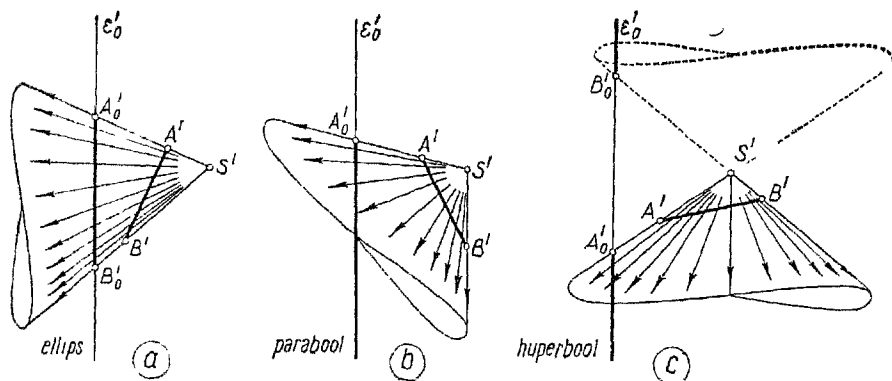
Joonisel 73-1 on $A'B'$ projekteeritava ringjoone ristprojektsioon joonisepinnal, e'_0 ja S' aga pildiekraani ja silmapunkti ristprojektsioonid. Kui pildiekraan lõikab kõiki projekteeritava koonuse moodustajaid, siis ringjoone perspektiiv (ristprojektsioon $A'B'_0$) on ellips (a) või erijuhul ringjoon. Kui pildiekraan on paralleelne koonuse üheainsa moodustajaga, siis perspektiiv on parabool (b), ning kui pildiekraan on paralleelne koonuse kahe moodustajaga, siis perspektiiv on hüperbool (c).

Erijuhul kui ringjoone tasand läbib silmapunkti, projekteerub ringjoon kas sirglõiguks või sirgjooneks.

Ringjoone perspektiivi saab kõige hõlpsamalt tuletada punkttaaval sirgetemeetodiga. Seejuures punktide fikseerimiseks ringjoonel lõikuvate sirgete abil on otstarbekohane kasutada pildiekraani normaale ja paralleele (§ 70).

Näide 1. Joonisel 73-2, a on kaksvaatega antud põhiekraanil olev ringjoon, pildiekraan e_0 ja silmapunkt S . Ringjoone perspektiivi tuletamisel joonestame kõigepealt ringjoone ümber puuteruudu, mille kaks

* Üksikasjalikuma käsitluse ringjoone perspektiivist võib leida raamatust: A. Humal, O. Rünk, A. Garšnek. Kujutatav geometria, III. Tln., 1949, lk. 106.



Joonis 73-1

külge on risti põhisirgega p . Järgnevalt tõmbame puuteruudu diagonaali ning diagonaali ja ringjoone lõikepunktidest sirged paralleelselt ruudu külgedega. Tõmbame ka ruudu külgedega paralleelsed ringjoone diameetrid AB ja CD . Nii on 8 ringjoone punkti fikseeritud lõikuvate sirgetega — pildiekraani normaalide ja paralleelidega.

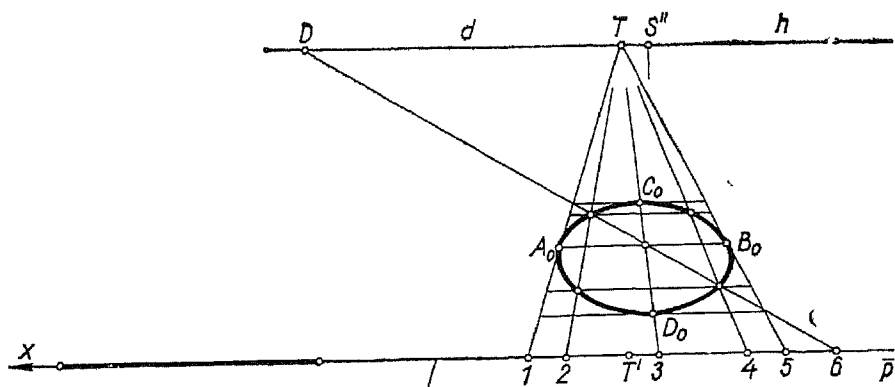
Sirgete jälgpunktid $1, 2, \dots, 6$ ja punkti T' kanname kaksvaatelt üle põhisirgele $\bar{p}$ (joon. 73-2, b). Märjime horisondile ka tuumpunkti T ja distantspunkti D . Pildiekraani normaalide pagupunktiks on tuumpunkt T , diagonaali pagupunktiks aga distantspunkt D . Diagonaali perspektiiv δD lõikab pildiekraani normaalide perspektiive punktides, mida läbivad pildiekraani paralleelide perspektiivid. Vastavate sirgete lõikepunktid perspektiivil on ringjoone perspektiivi (antud juhul ellipsi) punktid. Nagu näeme, projekteerus ringjoone puuteruut ellipsi puutetrapetsiks. Viimane kergendab ellipsi väljajoonestamist.

Analoogiliselt saab tuletada vertikaaltasandis asetseva ringjoone perspektiivi.

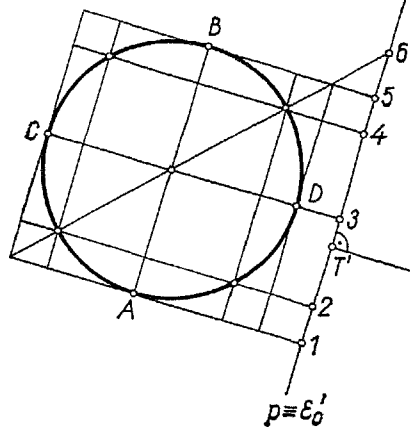
Näide 2. Tuletame büroomeetodiga joonisel 73-3 esitatud lauakella perspektiivi.

Pildiekraan on paigutatud läbi kella korpuse eesmise püstserva ja silmapunkti kõrgus (s. o. horisondi h ja põhisirge $\bar{p}$ vaheline kaugus) on võetud kella kõrgusest mõnevõrra suuremana. Kella mingi numbr, näiteks 7 perspektiiv leitakse vastava püstsirge abil, mille asukoha pildil määrab punkt, kus sirge $S'7'$ lõikab pildiekraani põhisirget p . Teiselt poolt peab see perspektiiv olema punkti 7 läbiva pikkussirge perspektiivil, mis läbib jälgpunkti J ning suundub pagupunkti F_1 . Analoogiliselt on joonisel leitud numbrilaua kõigi ülejäänud punktide perspektiivid. Vajaduse korral võib leitud punktides tõmmata ka puutujad, jälgendades pildil konstruktsioone, mis on näidatud eestvaatel punktide 4 ja 5 juures.

Silmapunktist vaadeldava kera näivaks kontuuriks on väkeringjoon, mida mööda kiirtest moodustuv pöördkoonus puutub kera. Kera perspektiivi kontuuriks tuleb selle puuteringjoone tsentraalprojeksioon — järelikult ellips, hüperbool

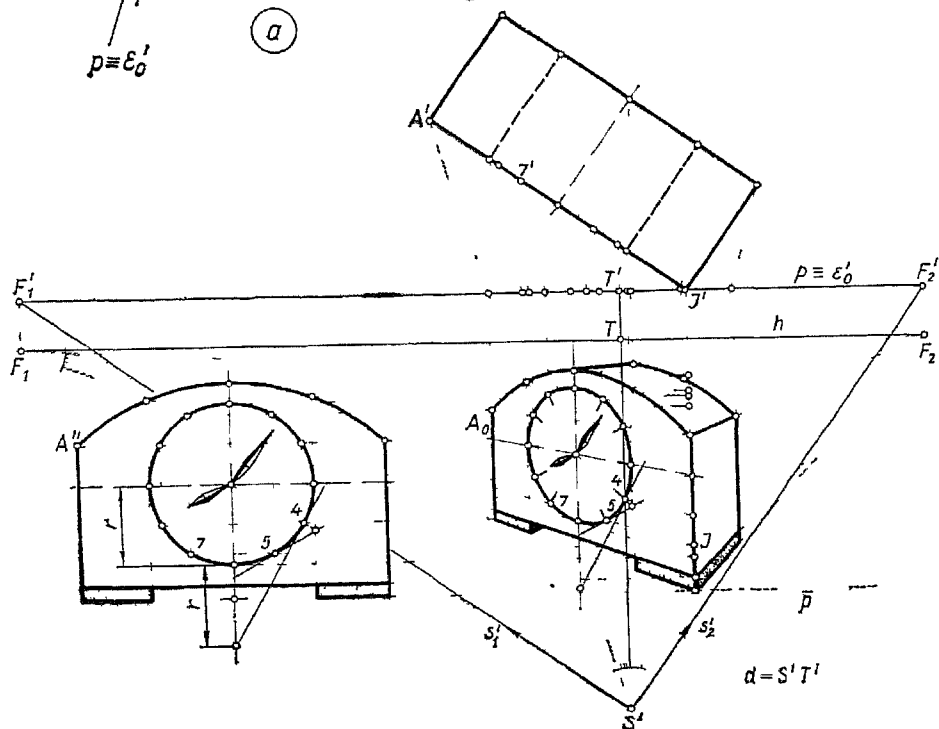


(b)



(a)

Joonis 73-2



Joonis 73-3

või parabool — vastavalt sellele, kuidas pildiekraan lõikab kujutamiskiirte koonust.

KUSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missugused jooned võivad olla ringjoone perspektiiviks?
2. Mis juhtumil ringjoone perspektiiv on sirglõik ja mis juhtumil sirgjoon?
3. Tuletada vertikaalse teljega pöördsilindri perspektiiv büroomeetodiga. Esitada ka paralleelringjooned, mis jaotavad silindri külgsinna neljaks võrdseks vööks.

§ 74. KONSTRUKTSIOONE PERSPEKTIIVIL

1. Sirglõigu jaotamine perspektiivil etteantud vahekorras. Sirglõigu AB tavalisel jaotamisel osadeks vahekorras $a:b:c$ tõmmatakse punktist A vabalt abisirge s ning kantakse sellele lõigud a , b ja c (joon. 74-1, a). Sirgjoone $3B$ paralleelide abil jaotubki lõik AB nõutud vahekorras.

Sirglõigu jaotamine perspektiivil etteantud vahekorras toimub joonisel 74-1, a näidatud konstruktsiooni ülekandmisega perspektiivi.

Olgu vaja jaotada vertikaalse sirglõigu AB perspektiiv A_0B_0 osadeks, mille tegelikud pikkused ruumis suhtuksid nagu $a:b:c$ (joon. 74-1, b). Et lõik AB on paralleelne pildiekraaniga, siis tema osade perspektiivid suhtuvad nii nagu lõigu enda osad. Järelikult lõigu A_0B_0 jaotamine nõutud vahekorras toimub samal viisil nagu joonisel 74-1, a , s. o. tõmbame punktist A_0 vabalt sirge s , kanname sellele lõigud a , b , c jne.

Samal viisil saab jaotada nõutud vahekorras iga sirglõigu perspektiivi, kui sirglõik on pildiekraaniga paralleelne.

Kui A_0B_0 on horisontaalse

sirglõigu perspektiiv, siis tema jaotamine osadeks vahekorras $a:b:c$ toimub järgmiselt (joon. 74-1, c). Tõmbame punktist A_0 abisirge s paralleelselt põhisirgega $\bar{p}$. Siis sirget s võime lugeda pildiekraanil olevaks horisontaalseks sirgeks. Järelikult lõigud a , b ja c võime sirgele s peale kanda nende tegelikus pikkuses. Et sirged AB ja s on horisontaalsed, siis on horisontaalne ka sirge $3B$, mistõttu tema pagupunkt F peab olema horisondil h ($F \equiv 3B_0 \times h$). Tõmmates ka teiste ülekandesirgete perspektiivid, saamegi lõigu AB jaotuspunktide perspektiivid 1_0 ja 2_0 .

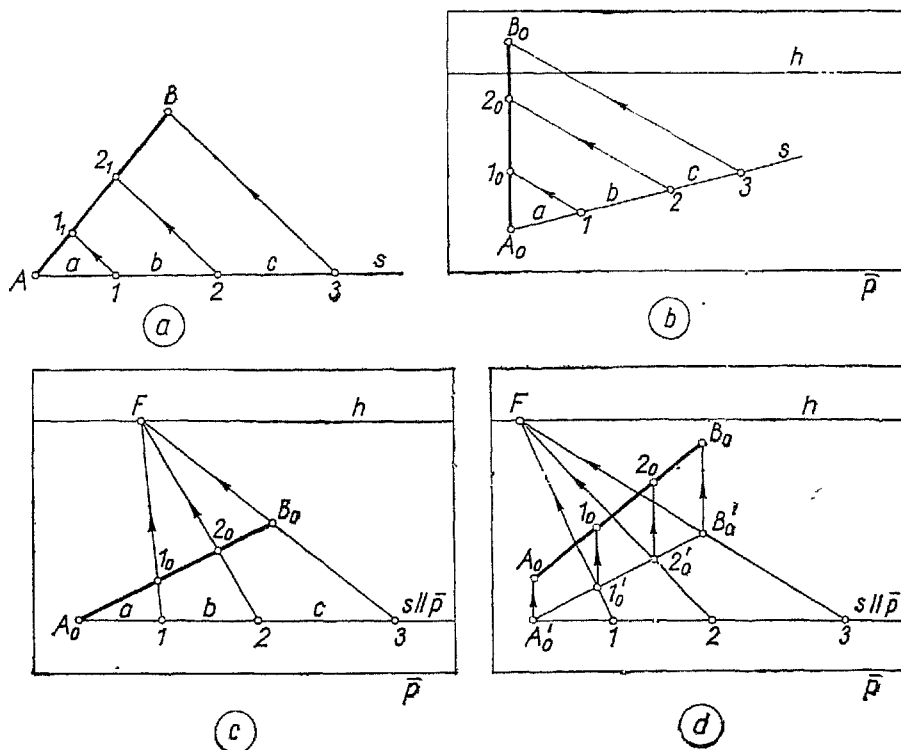
Kui A_0B_0 on üldasendilise sirglõigu perspektiiv (joon. 74-1, d), siis tema jaotamiseks vahekorras $a:b:c$ tuleb enne jaotada samas vahekorras selle lõigu pealtvaate perspektiiv $A'_0B'_0$. Et lõigu pealtvaade on horisontaalne sirge, siis tema jaotamine toimub joonisel 74-1, c eeskujul. Perspektiiv A_0B_0 jaotub nõutud vahekorras punktidest $1'_0$ ja $2'_0$ tõmmatud püstsirgete abil.

Kui sirglõik on perspektiivil vaja jaotada n osaks nii, et osade pikkused ruumis oleksid võrdsed, siis tuleb abisirgel s ära kanda n võrdset lõiku: $a=b=c=\dots$

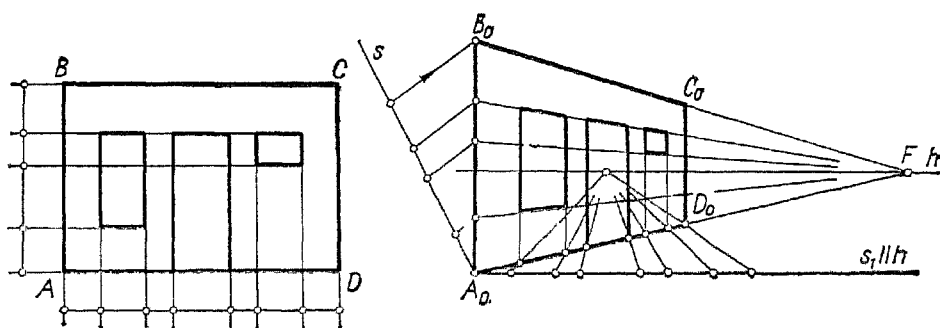
Esitatud konstruktsioonide raken-
dusnäitena on joonisel 74-2 tuletatud maja esiseina $ABCD$ perspektiiv. Sein, ukse ja akende kõrgused on eestvaatelt kantud vabasihiliselt abisirgele s ja sealt püstlõigu AB perspektiivile A_0B_0 . Pikkused on eestvaatelt kantud abisirgele $s_1 \parallel h$.

Tavalise kujuga hoone perspektiivi joonestamisel on tähtis silmas pidada veel järgmisi tõsiasju ja võimalusi.

1) Hoone välisseinte pagusirgeiks pildil on püstsirged f_1 ja f_2 , mis läbivad pagupunkte F_1 ja F_2 (joon. 74-3),



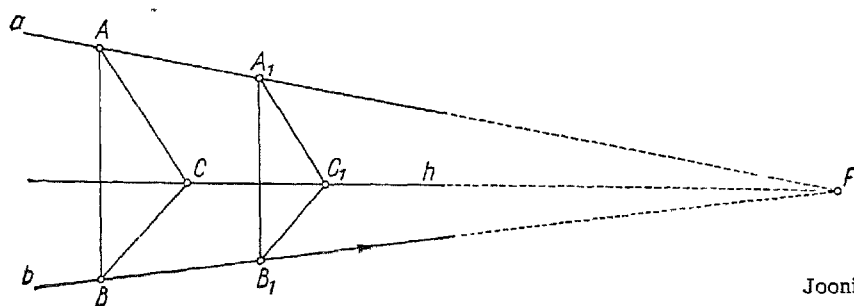
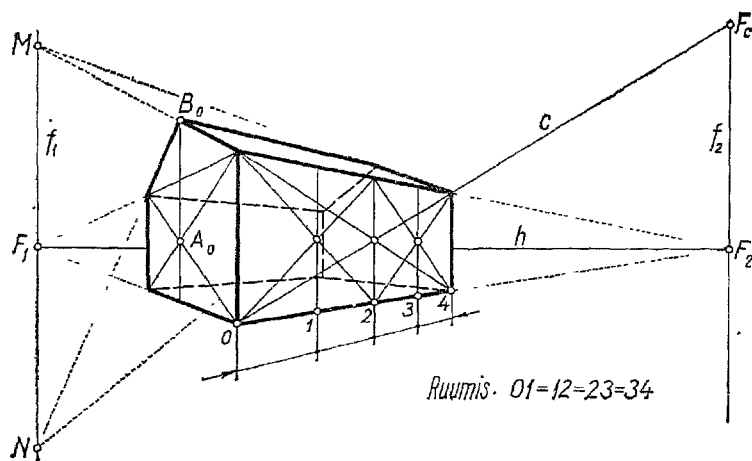
Joonis 74-1



Joonis 74-2

Otsaseinte pagusirgel f_1 asetsevad ka katuse kaldservade pagupunktid M ja N . Saab näidata, et kui katuse poolte kaldenurgad on võrdsed, siis $MF_1 = NF_1$.

2) Nagu ruumis, nii peab ka pildil viilu tipp B_0 asetsema otsaseina diagonaale läbival vertikaalil: $A_0B_0 \perp h$.
3) Pindu, mis ruumis on riskülikujulised, saab otse perspektiiv-



sel kujutisel korduva diagonaalide tõmbamisega hõlpsasti jaotada kaheks, neljaks, kaheksaks jne. võrdseks osaks. Näiteks joonisel 74-3 on hoone fassaad jaotatud neljaks võrdse laiusega ribaks ainult diagonaalide abil. Joonisel on märgitud ka diagonaalsirge c pagupunkt F_c , mis asetseb fassaadseina pagusirgel f_2 .

2. **Sirge tõmbamine kättesaamatusse pagupunkti.** Perspektiivi tuletamisel võib juhtuda, et üks või teine pagupunkt läheb jooniselehelte välja. Sel juhul saab sirgeid kättesaamatusse pagupunkti tõmmata tingimusel, kui joonisel on olemas kaks

sirget, mis suunduvad sellesse punkti.

Joonisel 74-4 on antud horisont h ja sirge a , mis suunduvad pagupunkti F . Vaja on tõmmata läbi punkti B sirge b , mis samuti suunduks pagupunkti F . Joonestame vabalt kolmnurga BAC , mille tipud A ja C on sirgetel a ja h . Kui nüüd sirgel a võtta punkt A_1 ning joonestada kolmnurk $A_1B_1C_1$, mis on sarnane kolmnurgaga ABC , siis sirge b läbib ka punkti B_1 ($b \equiv BB_1$).

Konstruksiooni õigsus selgub punktjoontega täiendatud jooniselt.

IX. VARJUD

§ 75. PÕHIMÕISTED

Kui soovitakse tõsta objekti kujutise piltlikkust, siis kantakse kujutisele varjud, mis tekiksid objekti teatud valgustatuse korral. Valgustus valitakse kas tsentraalne või paralleelne; esimesel juhul väljuvad valguskiired lõplikul kaugusel valitud valguspunktist, teisel juhul aga on valguskiired omavahel paralleelsed (s. t. valguspunkt on siis lõpmata kaugel). Päikeselt ja Kuult tulev valgus, millega me igapäevases elus kokku puutume, annab praktiliselt paralleelvalgustuse.

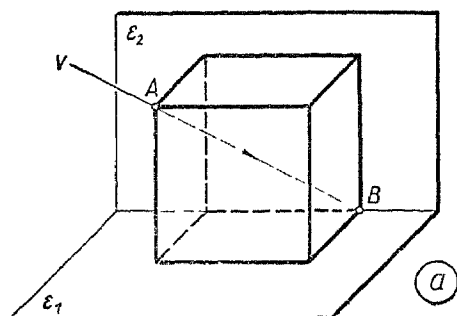
Valguspunkti asukoht või paralleelkiirte siht püütakse valida nii, et tekkivad varjud teeksid kujutise võimalikult piltlikuks. Arhitektuuriliste objektide kujutamisel mituvaa-tes on kujunenud tavaks võtta valguskiirte siht paralleelne kuubi diagonaaliga AB eeldusel, et kuup toetub tahkudega vastu ekraane ε_1 ja ε_2 (joon. 75-1, a). Nii valitud nn. **hariliku paralleelvalgustuse** sihi $v \equiv AB$ projektsioonid v' ja v'' (samuti v''') moodustavad kaksvaate teljega nurga 45° (joon. 75-1, b). Viimane asjaolu soodustab tunduvalt varjude konstrueerimist.

Kui ruumis on ainult valguspunkt ja mingi pinna küllalt väike osa, siis selle pinnatüki üks külg on valgustatud, teine aga mitte. Pinnatüki valgustamata küljel olevat varju, mille põhjustab pinna läbipaistmatus, nimetatakse pinna **omavarjuks**. Varju aga, mille üks objekt heidab teisele objektile või objekti üks osa sama objekti teisele osale, nimetatakse **heitevarjuks**. Kokkuleppeliselt esitatakse joonistel heitevarjud veidi tumedamalt kui omavarjud. Käesolevas õpikus on omavarjualad joonistel täpitatud, heitevarjualad aga viirutatud.

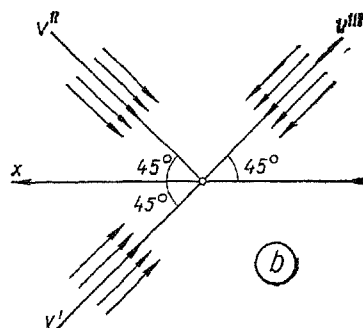
Objektist mingile ekraanile heituvat varju võib vaadelda objekti projektsioonina sellel ekraanil. Tema tuletamisel võib rakendada kõiki projektsiooniõpetusest tuttavaid lauseid.

Punktil, samuti joonel omavarju ei ole. Küll aga võib rääkida punkti ja joone heitevarjust mingil pinnal:

(71) punkti heitevari mingil pinnal on seda punkti läbiva valguskiire ja selle pinna lõikepunkt,



Joonis 75-1



Seega punkti heitevarju leidmine mingil pinnal taandub selle pinna ja sirgjoone (valguskiire) lõikepunkti leidmisele. Punkti heitevarju leidmine ekraanil tähendab lihtsalt valguskiire jälgpunkti leidmist sellel ekraanil.

Joone punkte läbivad valguskiired moodustavad selle joone valguskiirtepinna. Kõverjoone puhul on see pind paralleelvalgustuse korral silindriline, tsentraalvalgustuse korral aga kooniline. Sirgjoone valguskiirtepinna on alati tasand.

(72) Joone heitevari mingil pinnal on selle joone valguskiirtepinna ja antud pinna lõikejoon.

Joone heitevari ekraanil muidugi langeb sisuliselt ühte joone valguskiirtepinna jälgjoonega sellel ekraanil.

KÜSIMUSED

1. Kuidas võetakse tavaliselt paralleelsete valguskiirte siht varjude konstrueerimisel mituvaatel?
2. Mis on pinna omavari?
3. Mis on heitevari?

§ 76. NÄITEID VARJUDE KONSTRUEERIMISE KOHTA KAKSVAATEL

Näide 1. Tuletada kolmnurga ABC varjud paralleelvalgustusel, kiirte sihiga v (joon. 76-1).

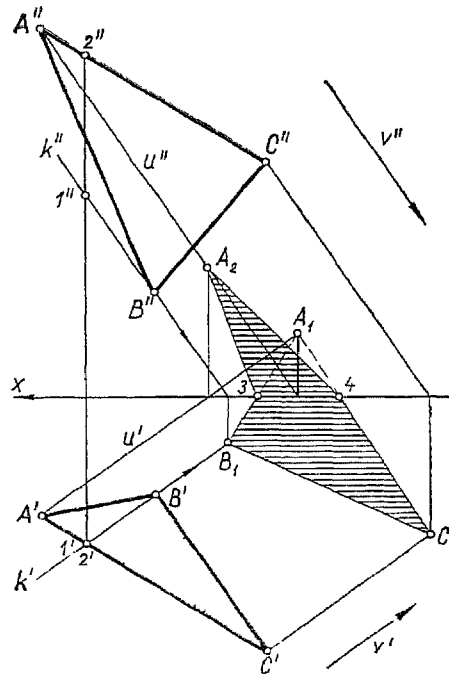
Kolmnurga omavarju määramiseks kasutame valguskiirt, mis läbib kolmnurga ühte tippu, näiteks kiirt k läbi punkti B . Võrreldes kiivsirgetel k ja AC asetsevate ning pealtvaates konkureerivate punktide 1 ja 2 kaugusi põhiekraanist, selgub, et kiir k läheb külje AC alt läbi. Seetõttu kolmnurga omavarjus olev külg on pealpool, valgustatud külg aga allpool. Omavari on pealtvaatel esitatud täpitatult. Eestvaatel näeme kolmnurga valgustatud külge.

Kolmnurga heitevarju saamiseks põhiekraanil leiame tippe läbivate kiirte põhijäljed A_1 , B_1 ja C_1 . Selgub, et heitevarjuks põhiekraanil osutub kolmnurga $A_1B_1C_1$ see osa $B_1C_1A_2$, mis asetseb esiekraani ees. Et tippu A läbiv kiir u peaks enne punkti A_1 jõudmist läbima esiekraani, siis heitub punkti A vari tegelikult esiekraanile. Leides kiire u esijälge A_2 ning ühendades selle punktidega 3 ja 4, saamegi esiekraanile sattuva heitevarju osa $3A_2$.

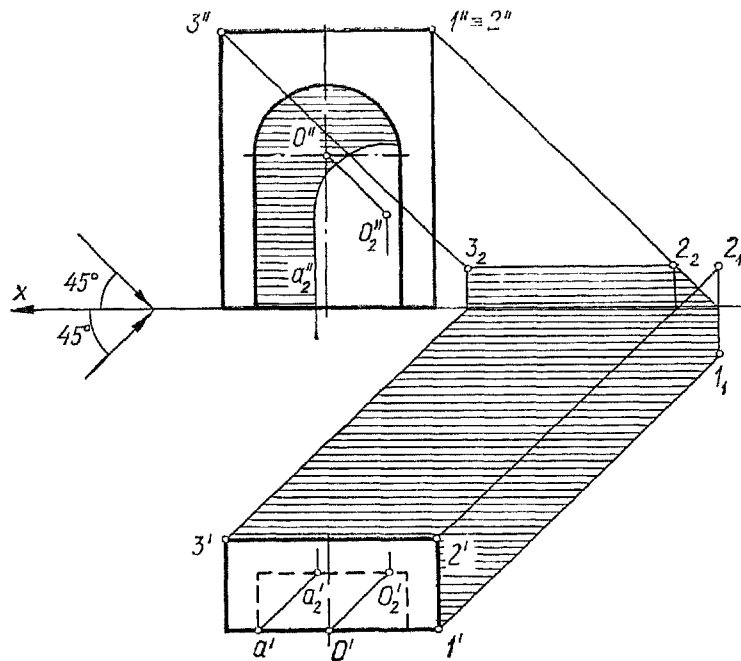
Naide 2. Tuletada objekti varjud harilikul paralleelvalgustusel (joon. 76-2).

Antud objekti omavarjus olevad tahud on eriasendilised, mistõttu ülesanne taandub heitevarjude tuletamisele.

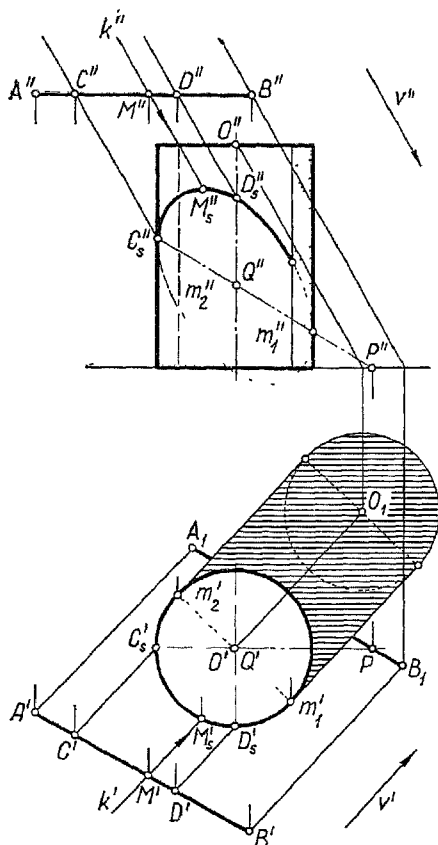
Risttahuka püstservade varjud põhiekraanil on neid servi läbivate valguskiirte tasandite põhijäljed. Seetõttu on nad kiirte pealtvaadete sihilised. Horisontaalserva 12 vari põhiekraanil $1_1 2_1$ on lause (7) põhjal paralleelne serva enesega. Et jälgpunkt 2_1 asub esiekraani taga, siis heitub punkti 2 vari tegelikult esiekraanile. Serva 12 vari murdub kaksvaate teljel ja suundub kiirte eestvaadete sihis jälgpunkti 2_2 . Serva 23 vari esiekraanil $2_2 3_2$ on samuti paralleelne serva enesega. Punktist 3_2 edasi laskub vari vertikaalselt alla (miks?) kuni kaksvaate teljeni. Niši püstesiserv heidab niši tagasei-



Joonis 76-1



Joonis 76-2



Joonis 76-3

nale varju a_2 , mis on samuti paralleelne serva enesega. Esmalt leiame heitevarju pealtvaate a'_2 , seejärel sidejoonel eestvaate a''_2 . Silindrivõlvi poolringikujuline esiserv heidab lause (11) põhjal niši tagaseinale sama raadiusega ringikaare kujulise varju, mille keskpunktiks on O''_2 . Viimase saamiseks määrame esmalt pealtvaatel punkti O'_2 . Punkti O'_2 leiame nüüd sidejoone abil punkti O läbiva kiire eestvaatel.

Näide 3. Konstrueerida pöörd-silindri ja rõhtsa sirglõigu AB varjud paralleelvalgustusel (joon. 76-3).

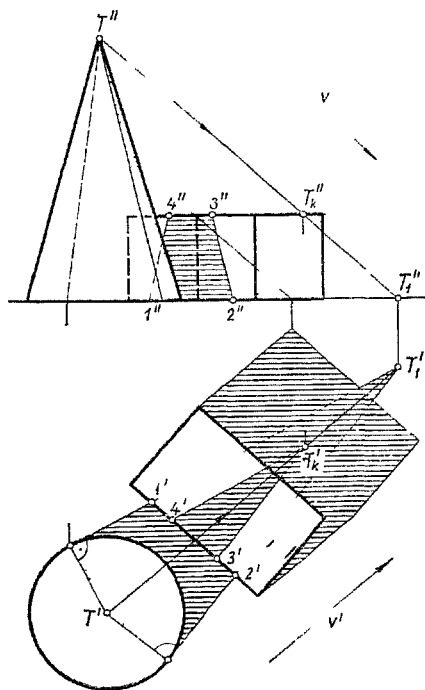
Kui paralleelvalgustus pole paralleelne pöördsilindri teljega, siis on pöördsilindrilisest pinnast täpselt pool omavarjus. Silindri heitevarju piirjoon põhiekraanil koosneb silindri külgpinda puutuvate valguskiirte tasandite põhijälgedest ja poolringjoonest, mille tsentriks on silindri ülemise põhja tsentri vari O_1 põhiekraanil. Silindri omavarju piirjoon koosneb silindri põhjade kahest poolringjoonest ja nendest kahest moodustajast m_1 ja m_2 , mida mööda valguskiirte tasandid puutuvad silindri külgpinda.

Sirglõigu AB heitevari A_1B_1 põhiekraanil on paralleelne selle lõigu pealtvaatega, sest $AB \parallel e_1$.

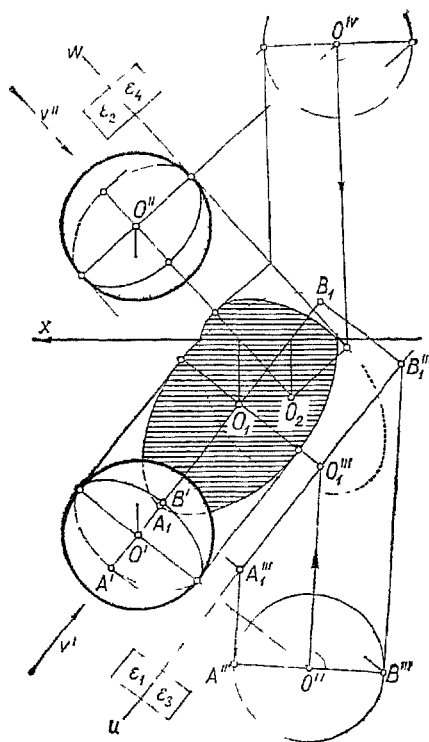
Sirglõigu heitevari silindri külgpinnal osutub ellipsiks, sest sirget AB läbiv valguskiirte tasand on silindri telje suhtes kaldu. Varjuellips projekteerub esiekraanile jälle ellipsiks. Selle saab konstrueerida punkthaaval, võttes valguskiiri läbi lõigul AB vabalt valitud punktide ning leides nende lõikepunktid silindri külgpinnaga. Nii näiteks kiir k läbi punkti M lõikab silindri külgpinda punktis M_s , mille pealtvaade asetseb külgpinna pealtvaatel, eestvaade M''_s aga kiire k eestvaatel. Sel viisil võib leida kui tahes palju varjuellipsi eestvaate punkte.

Joonisel on leitud varjuellipsi eestvaate poolkaasdiameetrid C''_sQ'' ja D''_sQ'' , kasutades valguskiiri, mille pealtvaated suunduvad varjuellipsi pealtvaate (ringjoone) kahe ristuva raadiuse otspunktidesse C'_s ja D'_s . Ellipsi keskpunkt Q on silindri telje ja diameetersirge C_sP lõikepunkt (kus P on diameetersirge põhijalg, mis asetseb lõigu AB heitevarjul A_1B_1).

Näide 4. Tuletada pöördkoonuse ja risttahuka varjud paralleelvalgustusel (joon. 76-4).



Joonis 76-4



Joonis 76-5

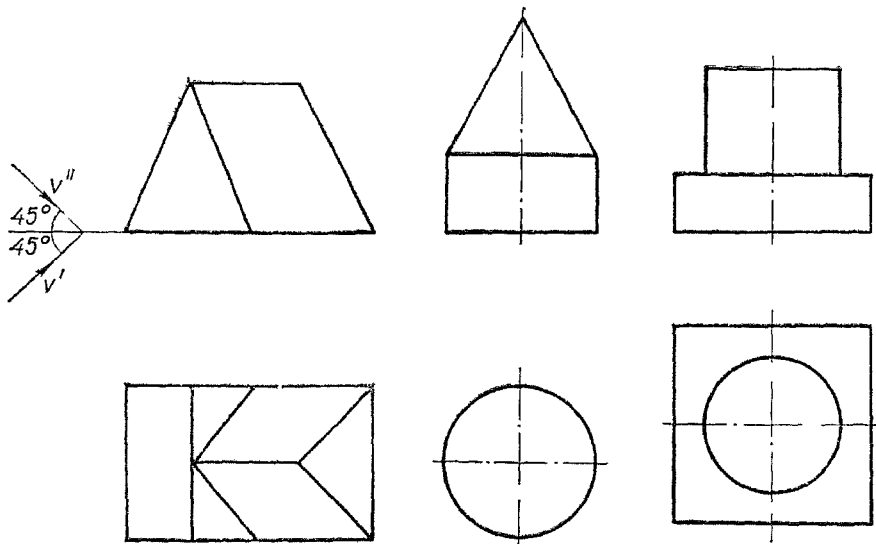
Koonuse varjude saamiseks leiame koonuse tipu T heitevarju T_1 põhiekraanil ning tõmbame sellest puutujad koonuse põhjaringjoonele. Need puutujad on koonuse heitevarju piirjooneks põhiekraanil; puutepunktidest lähtuvad moodustajad on aga koonuse omavarju piirjooned. Koonuse heitevarju saamiseks risttahuka ülemisel tahul leiame tipu T varju T_h selle tahu tasandil ning tõmbame siis $T'_h3' \parallel T'_12'$ ja $T'_h4' \parallel T'_11'$. Paralleelsuste põhjendamiseks märgime, et koonust puutuvad valguskiirte tasandid lõikavad põhiekraani ja temaga paralleelset tahku paralleelseid sirgeid mööda. Koonuse

heitevari risttahuka püsttahul on trapets 1234.

Risttahuka varjude tuletamine ei vaja selgitamist.

Näide 6. Tuletada kera varjud paralleelvalgustusel (joon. 76-5).

Kera omavarju piirjooneks paralleelvalgustusel on kera suurringjoon, mille tasand on risti tsentrit läbiva valguskiirega. Et kera puutuvad valguskiired moodustavad pöördsilindri, mille telg on põhi- ja esiekraani suhtes kaldu, siis osutub kera heitevarju piirjoon kummalgi ekraanil ellipsiks. Põhiekraanile heituva varjuellipsi keskpunktiks on kera keskpunkti O vari O_1 . Ellipsi



Joonis 76-6

pooltelgede hõlpsamaks määramiseks tuletatakse kera ja valguskiirte uus ristprojektsioon ekraanil ε_3 , mis on põhiekraaniga risti ning valguskiirtega paralleelne (uus telg $u \parallel v'$).

Kera tsentrit läbiva valguskiire projektsiooniks uuel ekraanil saame sirge $O'''O'''_1$. Sirglõik $A'''B'''$, mis läbib punkti O''' ning on risti valguskiire projektsiooniga $O'''O'''_1$, osutub kera omavarju piirjoone (suuringjoone) uueks projektsiooniks. Tõmmates läbi punktide A''' ja B''' valguskiirte kolmandad projektsioonid $A'''A'''_1$ ja $B'''B'''_1$ paralleelselt sirgega $O'''O'''_1$, leiame põhiekraanil heitevarju ellipsi pikema telje $A_1B_1 = A'''_1B'''_1$. Selle ellipsi lühem telg võrdub kera läbimõõduga.

Kera omavarju piirjoone pealtvaateks tuleb samuti ellips; selle ellipsi haripunktid A' ja B' leitakse punktidest A''' ja B''' tulevate sidejoonte abil.

Analoogiliselt saab tuletada ka kera heitevarju esiekraanil ning kera omavarju piirjoone eestvaate. Selleks leitakse kõigepealt kera tsentri vari O_2 esiekraanil; see jääb esiekraanile heituva varjuellipsi keskpunktiks. Seejärel tuletatakse kera uus projektsioon ekraanil ε_4 ($\varepsilon_4 \perp \varepsilon_2$, $\varepsilon_4 \parallel v''$), jäljendades konstruktsioone ekraanil ε_3 . Kera tegelik heitevari koosneb antud juhul kummagi varjuellipsi osast.

ÜLESANDED

1. Tuletada joonisel 76-6 kujutatud objektide oma- ja heitevarjud (ka ekraanidel) hariliku paralleelvalgustuse puhul.

§ 77. ERIMEETODEID ÜLDISTE PÖÖRDPINDADE VARJUDE KONSTRUEERIMISEKS

1. Vastandkiirte meetod. Et objekti omavarju piirjoon ja heitevarju piirjoon on teineteisega projektsiooniliselt seoses, siis võib neist esimesena tuletada selle piirjoone, mida on lihtsam leida, ning kasutada seda teise piirjoone leidmisel.

Kui üldkujutise (kövermeridiaaniga) pöördpinna telg on nagu tavaliselt kaksvaate ühe ekraaniga risti, siis on tema heitevarju piirjoont sellel ekraanil hõlbus leida paralleelringjoonte heitevarjude mähisjoonena. Omavarju piirjoon leitakse seejärel heitevarju piirjoone punktidest valguskiiri mööda valgusallika poole tagasi minnes. Niisugust varjude tuletamise meetodit nimetatakse **vastandkiirte meetodiks** (ka mähisjoone võtteks).

Näide 1. Tuletada vastandkiirte meetodiga joonisel 77-1 kujutatud pöördpinna varjud paralleelvalgustel.

Tõmbame pöördpinnal rea paralleelringjooni ning leiame nende heitevarjud põhiekraanil. Need varjud on ringjoonte enestega kongruentsed ning nende joonestamiseks piisab tsentrite varjude leidmisest (näiteks ülemise paralleeli c tsentri O heitevarjuks tuleb punkt O_1). Pöördpinna heitevarju piirjoon koosneb paralleelringjoonte heitevarjude mähisjoontest (k), silindrilise osa ülemise äärjoone heitevarju tükikestest (eespoolses osas A_1B_1), silindri omavarju piirjoonteks olevate moodustajate varjudest (eespoolses osas $B'B_1$) ning paralleeli c osa heitevarjust c_1 .

Edasi määratakse võimalikult täpselt mähiskõvera k ja varjuringjoonte puutepunktid. Selleks seatakse joonlaua äär kõvera k ja vastava

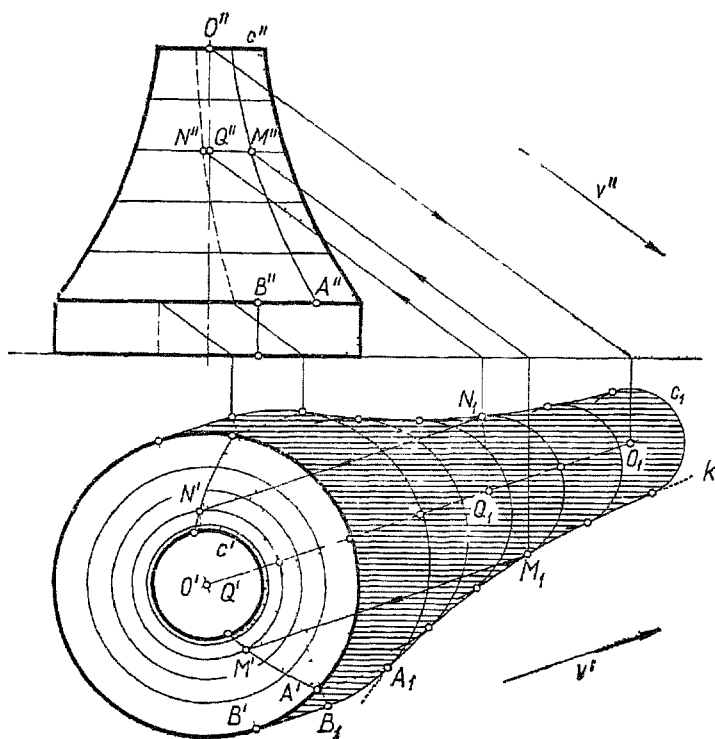
ringjoone ühise puutuja asendisse ning tõmmatakse ringjoone raadius risti selle puutujaga. Puutepunkti minnakse valguskiirt mööda objekti suunas tagasi (vastandkiir) kuni objekti vastava paralleelringjooneni, millelt leitaksegi omavarju piirjoone punkt. Joonisel on näidatud omavarju piirjoone punktide M ja N saamine, lähtudes heitevarju piirjoone punktidest M_1 ja N_1 . Töö täpsustamise huvides on soovitatav leida omavarju piirjoone punktid kummaski vaates eraldi; kontrolliks vaadatakse, kas tulemused asetsevad samadel sidejoontel. Lisaks sellele peab näiteks punkti M puhul rahuldatud olema tingimus $Q'M \parallel Q_1M_1$.

Vastandkiirte meetodi puuduseks on asjaolu, et varjuringjoonte ja mähiskõvera puutepunktide leidmine ei toimu puhtkonstruktiivselt, vaid siin, nagu nägime, kasutatakse ka proovimist.

2. Puutekoonuste meetod. Puhtkonstruktiivselt saab üldkujulise pöördpinna omavarju piirjoont leida **puutekoonuste meetodiga**. Selle meetodi puhul tuletatakse pöördpinna paralleelidele vastavad puutekoonused (§ 46) ning leitakse nende omavarju piirjoonteks olevad moodustajad. Need moodustajad lõikavad vastavaid paralleele pöördpinna omavarju piirjoone punktides.

Näide 2. Leida üldkujulise pöördpinna varjud paralleelvalgustel (joon. 77-2).

Pöördpinna meridiaan koosneb antud juhul kahe ringjoone sujuvalt ühendatud kaartest tsentritega O_1 ja O_2 . Tõmbame mingi paralleelringjoone g (g'' , g') ning konstrueerime pöördkoonuse, mis puutub pöördpinda mööda seda ringjoont. Puutekoonuse tipu T leidmiseks tõmbame läbi punkti U'' pöördpinna eestvaate kontuuri puutuja

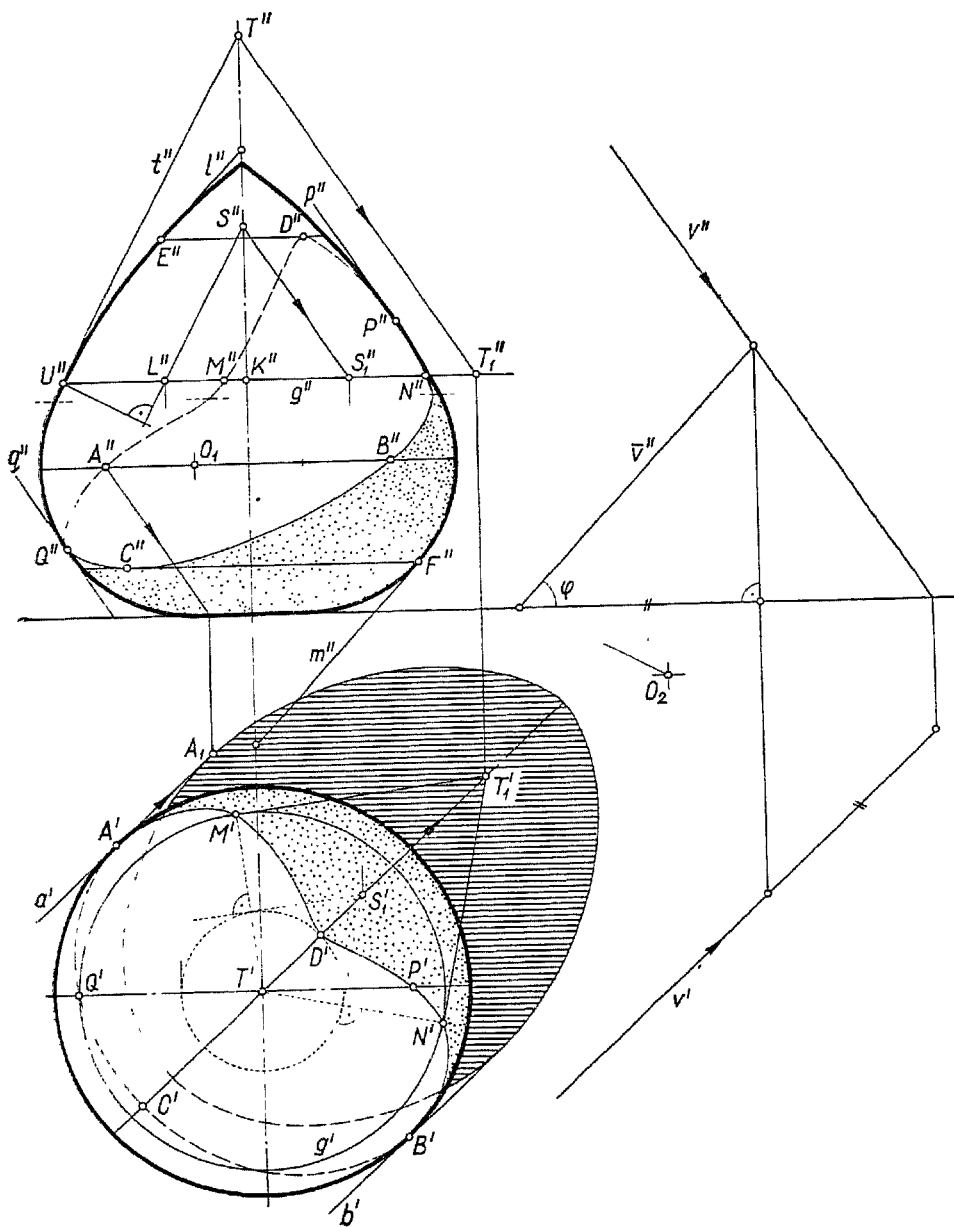


Joonis 77-1

$t'' \perp U''O_2$. See puutuja lõikabki pöördpinna telje eestvaadet otsitavas punktis T'' . Kui nüüd leida puutekoonuse omavarju piirjoone (moodustajate) need punktid, mis asetsevad puuteriingjoonel g , siis samad punktid kuuluvad ka antud pöördpinna omavarju piirjoonele, sest koonust puutuvad valguskiirte tasandid on puutetasanditeks ka antud pöördpinnale. Ringjoonel g asetsevaid koonuse omavarju piirjoone punkte M ja N saab aga hõlpsasti leida joonise 76-4 eeskujul. Selleks leitakse koonuse tipu T vari T_1 paralleeli g tasandil ($T''T''_1 \parallel v''$) ning tõmmatakse pealtvaatel punktist T''_1 puutujad ringjoonele g' . Puutepunktid M' ja N' ongi otsitavate punktide

M ja N pealtvaated; vastavad eestvaated aga asetsevad paralleeli g eestvaatel.

Juhul kui koonuse tipu eestvaade T'' läheb joonise lehelt välja, võib kasutada abikoonust, mis on puutekoonusest väiksem, kuid viimasega sarnane. Abikoonuse tipu S valime siis joonise piires pöördpinna teljel vabalt, moodustaja eestvaate $S''L''$ aga tõmbame paralleelselt puutujaga t'' , s. o. risti sirgega $U''O_2$. Abikoonuse põhja võtame ringjoone g tasandil; põhja ringjoone raadius võrdub siis lõiguga $K''L''$. Leides tipu S varju S_1 , paralleeli g tasandil, saame pealtvaatel punktist S''_1 tõmmata puutujad abikoonuse põhjaringjoonele. Koonuste sarnasuse tõttu pea-



Joonis 77-2

vad punktist T'_1 lähtuvad ringjoone g' puutujad olema paralleelsed punktist S'_1 tõmmatud puutujatega. Seetõttu tuleb punktide M' ja N' saamiseks tõmmata ringjoone g' raadiused risti punktist S'_1 lähtuvate puutujatega.

Analoogiliselt punktide M ja N leidmisega saab leida kui tahes palju omavarju piirjoone punkte. On arusaadav, et seejuures osa puutekoonuseid tuleb tippudega allapoole.

Leiame ka omavarju piirjoone erilised punktid A ja B ning P ja Q , millest esimesed kaks asetsevad ekvaatoril, teised frontaalsel meridiaanil. Ekvaatori põhikiirte pind osutub pöördpinna puutesilindriks. Järelikult punktid A ja B on lihtsalt silindri omavarju piirjooneks olevate moodustajate ja ekvaatori lõikepunktid. Seega nende punktide pealtvaated saadakse puutujate $a' \parallel b' \parallel v'$ abil. Ka frontaalset meridiaani projekteerivad esikiired moodustavad silindrilise pinna. Seetõttu tulevad punktide P ja Q eestvaadeks need punktid, kus sirgega v'' paralleelsed puutujad p'' ja q'' puutuvad frontaalse meridiaani eestvaadet.

Omavarju piirjoone ekstreemalse kõrgusega punktid C ja D asetsevad pöördpinna telge läbival valguskiirte tasandil ja nad leitakse valguskiirte abil, mis puutuvad sel tasandil asetsevat meridiaani. Selleks on joonisel paremal eraldi leitud valguskiirte põhikaldenurk φ kiire v frontaalseks pööramise teel. Tõmmates eestvaate kontuurile puutujad m'' ja l'' paralleelselt pööratud kiire eestvaatega $\bar{v}''$, saamegi puutepunktid, mida läbivad need paralleelid, millel asetsevadki punktid C ja D .

Pöördpinna heitevarju piirjoon põhiekraanil on hõlpsasti leitav

punkthaaval omavarju piirjoone varjuna. Joonisel on näitena esitatud ainult punkti A varju A_1 konstruksioon.

Kogu joonise kujundamist ja täpsuse kontrollimist soodustab asjaolu, et pealtvaade on sirge $T'T'_1$ suhtes sümmeetriline.

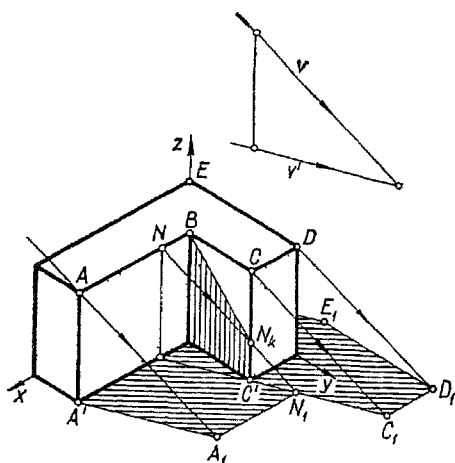
§ 78. VARJUD AKSONOMEETRILISTEL KUJUTISTEL

Varjude konstrueerimine aksonomeetrilistel kujutistel allub kõigile neile üldistele põhimõtetele, millega oleme tutvunud II ja VII peatükis. Valgustuse määramiseks tuleb aksonomeetrilisele kujutisele anda veel selle kiire ühe vaate, tavaliselt pealtvaate, aksonomeetriline kujutis.

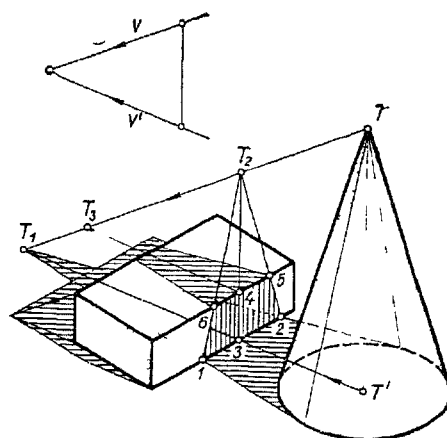
Toome mõned näited ristisomeetriast, kasutades paralleelvalgustust.

Näide 1. Joonisel 78-1 näeme xy -pinnale toetuvat detaili ristisomeetrias. Paralleelvalgustuse siht on antud oma aksonomeetrilise kujutisega v ja pealtvaate kujutisega v' . Vaja on tuletada selle detaili varjud.

Mis tahes punkti, näiteks punkti A heitevarju A_1 saamiseks xy -pinnal tõmbame läbi punktide A ja A' valguskiire kujutised $AA_1 \parallel v$ ja $A'A_1 \parallel v'$ ning leiame nende lõikepunkti; see ongi otsitav heitevari. Heitevarju piirjoone tuletamine lihtsustub, kui võtta arvesse, et xy -pinnaga paralleelsete servade varjud tulevad servade enestega paralleelsed ja pikkukselt nendega võrdsed (näiteks $C_1D_1 \parallel CD$ ja $C_1D_1 = CD$). Püstservade varjud aga tulevad paralleelsed valguskiire v pealtvaate kujutisega v' . Serva AB heitevari tahul BCC' leitakse valguskiire abil, mis läbib servade AB ja CC' heitevarjude lõikepunkti N_1 xy -pinnal. See valguskiir



Joonis 78-1



Joonis 78-2

osutub nimetatud servade (kiivsirgete) lõikajaks ja määrab heitevarju piirjoone punkti N_k serval CC' .

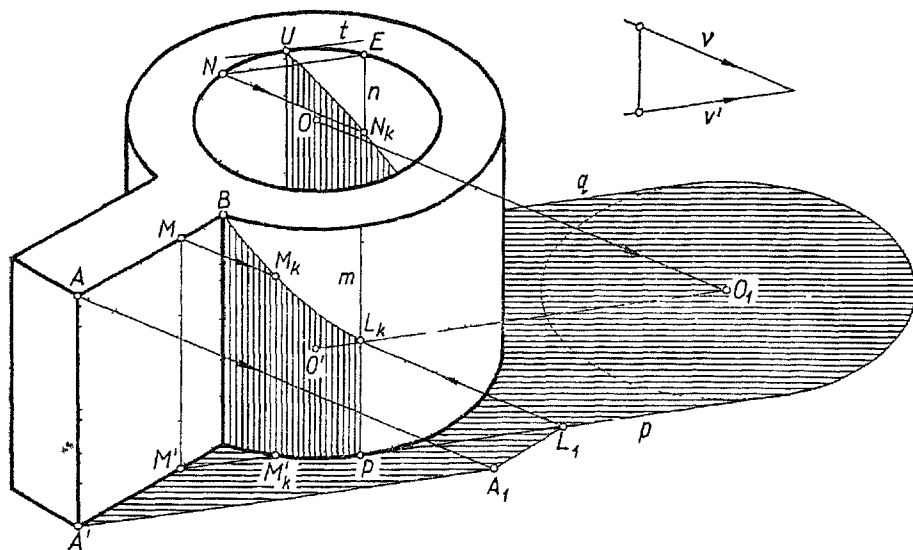
Näide 2. Tuletada xy -pinnal asetseva pöördkoonuse ja risttahuka varjud ristsomeetrias (joon. 78-2).

Leiame koonuse tipu T varju xy -pinnal ning tõmbame sellest puutujad koonuse põhjale. Nii saame koonuse heitevarju piirjoone xy -pinnal ning omavarju piirjooneks olevad moodustajad — need läbivad puutepunkte. Ühtlasi oleme aga saanud ka punktid 1 ja 2, kus heitevari murdub üles risttahuka valgustatud külgtahule. Koonuse telje heitevarjuks samal külgtahul on püstsirge $3T_2 \parallel TT'$, ülemisel rõhtsal tahul aga sirge $4T_3 \parallel V'$. Ühendades punktid 1 ja 2 punktiga T_2 ning punktid 5 ja 6 punktiga T_3 , saame koonuse heitevarju piirjoone risttahukal. Risttahuka enese varjude tuletamine ei vaja selgitusi.

Näide 3. Tuletada joonisel 78-3 ristsomeetrias kujutatud detaili varjud kiirega v määratud paralleelvalgustuse puhul.

Et silindri ülemine põhi on xy -pinnaga paralleelne, siis selle põhja heitevarjuks tuleb ellips, mis on põhja enda kujutisega (ellipsiga) kongruentne. Heitevarju (ellipsi) konstrueerimiseks on vaja leida vaid tsentri O vari O_1 . Heitevarju piirjoone konstrueerimise lõpetame silindri põhjajoone puutujate p ja q tõmbamisega paralleelselt sirgega V' . Puutuja p puutepunkt P määrab ühtlasi moodustaja m , mis on omavarju piirjooneks silindri külgsinna nähtaval osal.

Serva AB heitevarju silindri pinnal võib konstrueerida punkthaaval. Selleks tuleb serval valida vabalt punkte ning leida nende heitevarjud. Joonisel on esitatud punkti M varju M_k tuletamine; punktist M' on tõmmatud valguskiire pealtvaate kujutis kuni lõikumiseni silindri põhjaringjoone kujutisega punktis M'_k . Tõmmates viimasest silindri moodustaja kuni lõikumiseni punktist M tuleva valguskiirega, saamegi punkti M_k . Äärmise punkti L_k , mis asetseb omavarju piirjoonel m , leia-



Joonis 78-3

me punkti L_1 läbiva kiire abil. Konstrueeritud heitevari osutub ellipsi kaareks nii objektil kui ka kujutisel.

Silindrilise ava servjoone heitevari ava sisepinnal osutub samuti ellipsiks (§ 59; lause 51). Selle ellipsi saame konstrueerida punkthaaval samuti nagu leidsime serva AB heitevarju. Silindri alumise põhja asemel on siin otstarbekohasem kasutada ülemist põhja. Valime ava servjoonel näiteks punkti N ning tõmbame temast läbi sirge $NE \parallel v'$. Siis punktist N tulev valguskiir, lõikudes punkti E läbiva moodustajaga n , annabki punkti N heitevarju N_k ava siseseinal. Äärmise punkti U määrab põhja (joonisel ellipsi) puutuja t , mis on tõmmatud paralleelselt sirgega v' . Punktist U algab ka oma-varju piirjoon ava siseseinal.

§ 79. VARJUD PERSPEKTIIVIS

Objekti varjude tuletamisel perspektiivis kasutatakse samuti paralleelvalgustust. Seejuures eristatakse kolme juhtumit: 1) päike asub vaatleja ees (eestvalgus), 2) päike asub vaatleja taga (tagantvalgus) ja 3) valguskiired on paralleelsed pildiekraaniga (kõlgvalgus).

1) Eestvalguse puhul on valguskiirte pagupunkt L horisondist h kõrgemal, sest valguskiirte sihiikiir $s \parallel v$ lõikab pildiekraani s_0 ülalpool horisonti (joon. 79-1, a). Valguskiirte pealtvaadete pagupunkt L' asetseb horisondil ühel ja samal vertikaalil pagupunktiga L , sest vertikaalse tasandi (v, v') pagujoon LL' peab olema vertikaalne sirge ($LL' \perp h$, vt. ka joonist b paremal).

Varjude tuletamine perspektiivis on analoogiline varjude tuletamisega aksonomeetrias. Erinevus seisneb vaid selles, et paralleelsetel valgus-

kiirtel on perspektiivis ühine pagupunkt. Valguskiirte sihi määramiseks peab perspektiivis ette andma pagupunktid L ja L' .

Joonisel 79-1, *b* on näitena tuletatud ühe servaga maapinnale (põhiekraanile) toetuva ristkülikulise plaadi $ABB'A'$ varjud eestvalguse juhtumil. Punktist A maapinnale heituvat varju A_1 saamiseks tõmbame pildil valguskiire k läbi punkti A ning kiire k pealtvaate k' läbi punkti A' ; sirgete k ja k' lõikepunkt A_1 ongi otsitav heitevari. Analoogiliselt leiame ka punkti B varju B_1 . Et sirge AB on maapinnaga paralleelne, siis ruumis on vari $A_1B_1 \parallel AB$. Seetõttu peab pildil vari A_1B_1 suunduma sirge AB pagupunkti F . Joonisel on nähtav plaadi omavarjus olev külg.

2) Tagantvalguse korral on valguskiirte pagupunkt L horisondist h madalamal, sest valguskiirte sihikiir $s \parallel v$ löikab sel juhul pildiekraani allpool horisonti (joon. 79-2, *a*). Valguskiirte pealtvaadete pagupunkt L' asetseb horisondil nii, et $LL' \perp h$.

Plaadi heitevarju tuletamine joonisel 79-2, *b* on analoogiline varju tuletamisega joonisel 79-1, *b*. Pildil on näha plaadi valgustatud külg.

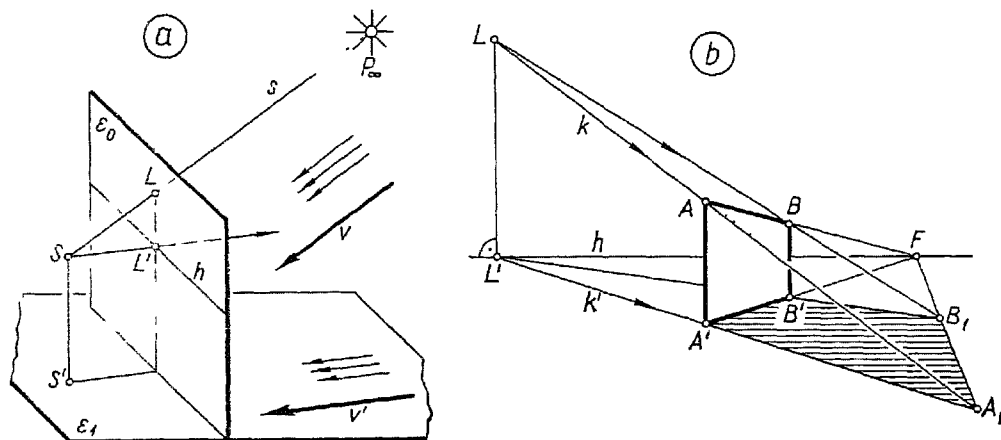
3) Külgsvalguse juhul puudub pagupunkt niihästi valguskiirtel kui ka nende pealtvaadetes (joon. 79-3, *a*). Kiirte kujutised tulevad nüüd omavahel paralleelsed; kiirte pealtvaadete kujutised on aga paralleelsed horisondiga ($v' \parallel h$, joon. 79-3, *b*). Plaadi varjude tuletamine selgub jooniselt.

Valguskiirte sihi määramiseks tuleb külgsvalguse puhul ette anda ühe kiire perspektiiv v ja selle kiire pealtvaate perspektiiv $v' \parallel h$.

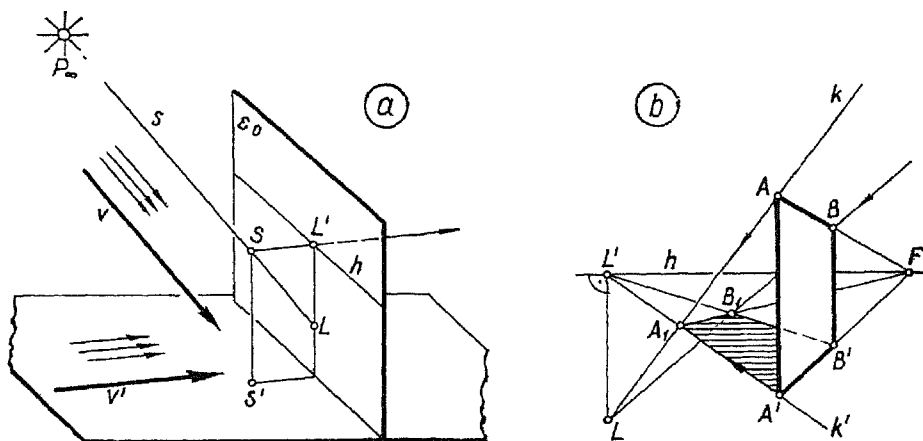
Kujutamise praktika seisukohalt tuleb eelistada külgs- ja tagantvalguse kasutamist, sest nende puhul objekti kujutisel varjualad vahelduvad valgustatud aladega, mistõttu kujutis on piltlikum. Eestvalguse puhul tulevad objekti oma- ja heitevarjud esiplaanile, mistõttu suurem osa pildist on tume ja ilmetu.

Esitame mõned näited varjude tuletamise kohta perspektiivis.

Näide 1. Tuletada vertikaalse



Joonis 79-1



Joonis 79-2

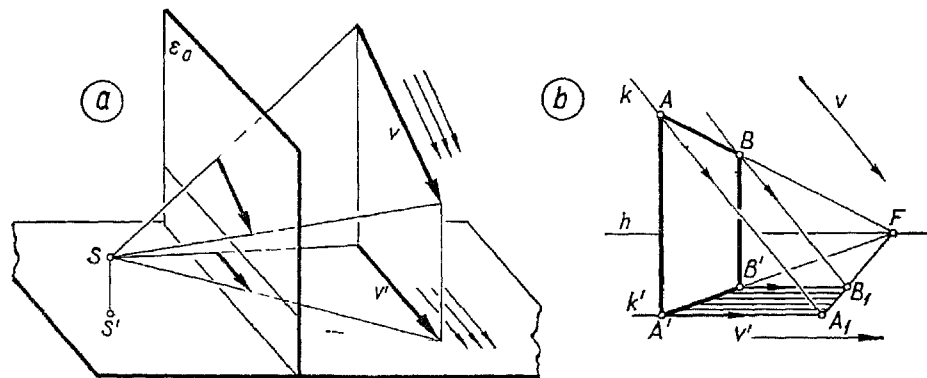
tulba AA' ja vertikaalse plaadi $122'1'$ varjud tagantvalguse (L, L') puhul (joon. 79-4).

Tulba heitevari algab punktist A' ning kulgeb esialgu maapinda mööda kuni punktini A'_2 , siis murdub ja läheb vertikaalselt plaati mööda üles kuni lõikumiseni valguskiirega AL ; lõikepunkt A_2 on punkti A vari plaadil. Sirgete AA' ja $A_2A'_2$ perspektiivide paralleelsus järgeldub sellest, et

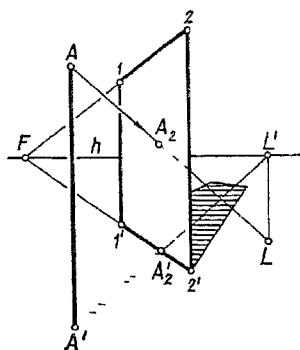
need sirged ruumis on vertikaalsed ning seetõttu pildiekraaniga paralleelsed. Joonisel on esitatud ka plaadi heitevari maapinnal.

Näide 2. Tuletada antud perspektiivsel pildil korstna heitevari katusel tagantvalguse (L, L') puhul (joon. 79-5).

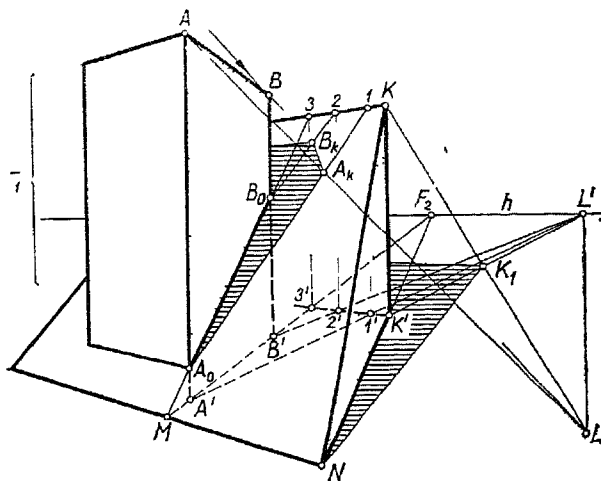
Maapinna asemel on põhiekraaniks võetud nivoopind, mis läbib räästajoont MN . Korstna seina



Joonis 79-3



Joonis 79-4



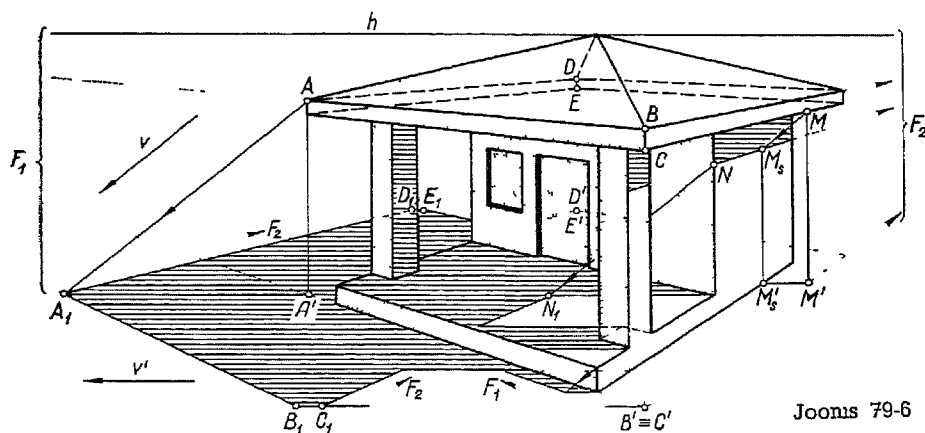
Joonis 79-5

ABB_oA_o ja katusepinna lõikejooneks on sirge $A_oB_o \equiv M3$. Selle sirge pealtvaatel $M3'$, mis suundub pagupunkti F_2 , asetsevad punktide A ja B pealtvaated A' ja B' .

Punkti A heitevarju leidmiseks katusepinnal lõikame katuse läbi valguskiirte tasandiga, mis läbib püstsirget AA' . See tasand lõikab põhiakraani mööda kiire AL pealtvaadet $A'L'$, katust aga mööda sirget A_0l .

(seejuures $1' \equiv A'L' \times 3'K'$ ja $1'1' \parallel KK'$). Kiire AL ja sirge A_01 lõikepunkt A_h ongi punkti A varjuks katusepinnal. Analoogiliselt leiame ka punkti B varju B_h . Et ruumis katuse harja sihilise korstnaserva vari katusel on paralleelne harjaga, siis varju piirjoon pildil suundub punktist B_h pagupunkti F_1 .

Joonisel on konstrueeritud ka punkti K heitevari $K_1 \equiv K'L' \times KL$.



Joons 79-6

Sellega on pildil nähtavad heitevarjud täielikult määratud.

Näide 3. Tuletada väikese busijaamahoone perspektiivil varjud külvalguse puhul, kasutades valguskiirte antud sihti v (joon. 79-6).

Räästajoone heitevarju saamiseks seinal valime räästa alumisel serval vabalt mingi punkti M . Selle pealtvaade M' asetseb räästa servjoone pealtvaatel (joonisel punktjoonega). Punkti M vari M_s saadakse harilikul viisil, s. o. punktist M' minnakse valguskiire pealtvaate sihis kuni seinani ($M'M'_s \parallel v'$) ja siis seina mööda vertikaalselt üles kuni kiireni $MM_s \parallel v$. Et ruumis räästa äär on seinaga paralleelne, siis on ka räästa heitevari seinal paralleelne räästa endaga. Järelikult heitevarju piirjoon seinal (ja postil) läbib punkti M_s ning suundub pagupunkti F_2 . Punkt N seina äärel on see punkt, millest alates räästa heitevari satub põrandale; punkti N varju N_1 leidmine selgub jooniselt. Räästa heitevari

põrandal läbib punkti N_1 ning suundub pagupunkti F_2 . Posti ja seina püstservade heitevarjud põrandal ja maapinnal on paralleelsed horisondiga — nende leidmine ei vaja selgitamist. Räästa punkti A heitevarju A_1 saamine maapinnal on näidatud joonisel. Samal viisil võib saada ka punktide B, C, D ja E heitevarjud B_1, C_1, D_1 ja E_1 . Vari A_1B_1 peab suunduma pagupunkti F_1 , vari A_1D_1 aga pagupunkti F_2 . Punktist C_1 suundub räästa heitevari pagupunkti F_2 , punktist E_1 aga pagupunkti F_1 .

KÜSIMUSED

1. Kuidas asetsevad perspektiivil valguskiirte pagupunkt L ja valguskiirte pealtvaadete pagupunkt L' : a) eestvalguse puhul, b) tagantvalguse puhul?
2. Mis peab ette andma valguskiirte sihi määramiseks perspektiivil: a) eest- ja tagantvalguse puhul, b) külvalguse puhul?
3. Miks eestvalgus ei sobi varjude tuletamiseks?

X. KVOODITUD RISTPROJEKTSIOON

§ 80. PUNKTI JA SIRGJOONE KVOODITUD RISTPROJEKTSIOON

Lihtsaim viis objekti kujutise saamiseks on selle objekti ristprojektsiooni tuletamine ühel ekraanil. Et objekti punktide asukohad ekraani suhtes oleksid üheselt määratud, tuleb peale ristprojektsioonide anda ka punktide kaugused ekraanist. Kujutist, millel lisaks objekti punktide ristprojektsioonidele on antud ka nende punktide kaugused ekraanist, nimetatakse **kvooditud* ristprojektsiooniks**. Kvooditud ristprojektsiooni puhul võetakse ekraan (ε) harilikult rõhtne ning punktide kaugusi (kõrgusi) ekraanist ülespoole loetakse positiivseteks, allapoole aga negatiivseteks (vt. punkte A , B ja C joonisel 80-1). Kõrgused ekraanist mõõdetakse mingi ühikuga ning kirjutatakse arvudena sulgudesse vastavate punktide ristprojektsioonide tähistate juurde (joon. 80-1, b). Kui punktide tähistamine pole vajalik, siis kõrgusarvud kirjutatakse lihtsalt

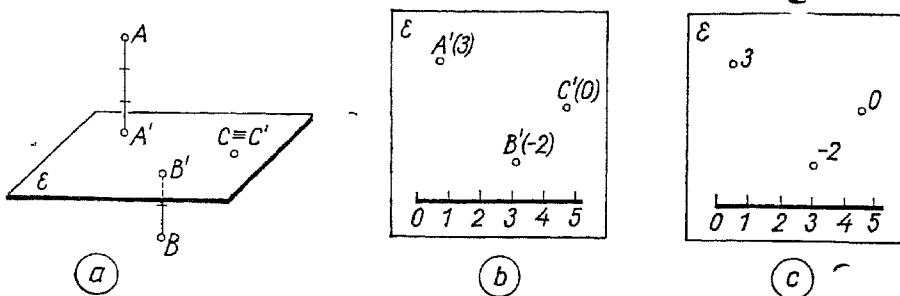
vastavate punktide ristprojektsioonide juurde (joon. 80-1, c). Lisaks antakse ka ühik või skaala (mõõtkava) kõrguste mõõtmiseks.

Joonisel 80-1 on punkt A kolme ühiku kaugusel ekraanist ülevalpool, punkt B kahe ühiku kaugusel allpool, punkt C aga asetseb ekraanil.

Iga ruumpunkt on määratud oma kvooditud ristprojektsiooniga, kaks punkti määravad aga sirgjoone. Käsitleme sirgjoonega seotud küsimusi konkreetseil andmeil.

Olgu antud sirgjoon s punktide A ja B kvooditud ristprojektsioonidega A' (5) ja B' (2) ning skaalaga kõrguste mõõtmiseks (joon. 80-2, a). Leiame nende andmete põhjal sirgjoone s jälgpunkti J , kaldenurga φ ja lõigu AB tõelise pikkuse. Selleks pöörame sirget AB projekteeriva pinna τ ekraanile ümber sirge s' (vt. selgitavat joonist 80-2, b). Täisnurkne trapets $ABB'A'$ satub siis ekraanile trapetsina $\overline{ABB'A'}$, mis laseb ennast külje $A'B'$ ning kõrguste AA' ja BB' järgi ekraanil järgmiselt konstrueerida: $A'\overline{A}\perp s'$, $A'\overline{A}=5$, $B'\overline{B}\perp s'$, $B'\overline{B}=2$ (joon. 80-2, a). Sellega olemegi leidnud kõik vajaliku: sirgjoone jälgpunkti $J\equiv$

* Tuleneb ladinakeelsest sõnast «quot» = «kui palju».



Joonis 80-1

$\equiv s' \times \bar{s}$, kaldenurga $\varphi = \varphi(s', \bar{s})$ ja lõigu AB tõeline pikkus $\overline{AB}$.

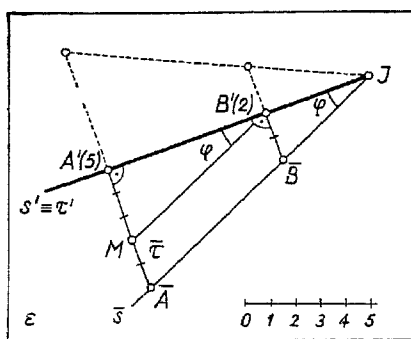
Lõigu AB pikkuse ja kaldenurga φ (mitte aga jälgpunkti J) leidmist saab mõnevõrra lihtsustada, konstrueerides täisnurkse kolmnurga $A'B'M$, mille kaatet $A'M$ võrdub punktide A ja B kauguste vahega ekraanist, s. o. antud juhul 3 ühikuga; siis $AB = B'M$.

Ekraanile pööramise võtte, mida äsja rakendasime, on kvooditud ristprojektsiooni kasutamisel põhiliseks võtteks ülesannete lahendamisel.

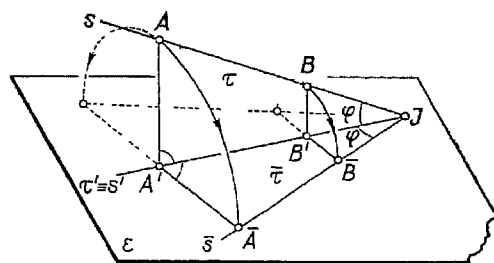
Tasandi pööramisel ekraanile tuleb silmas pidada, et pööramise suunda võib valida kahel viisil. Joonisel 80-2 on punktjoonega esitatud ka teises suunas pööramise tulemus. Joonestaja valib niisuguse suuna, mille puhul pöörend satub joonise vähemkoormatud osale.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1. Missuguste andmetega määratakse punkti asukoht ruumis kvooditud ristprojektsiooni puhul?
2. Missugusel juhul loetakse punkti kaugust ekraanist negatiivseks?



(a)



(b)

Joonis 80-2

3. Antud on punktide A ja B kvooditud ristprojektsioonid $A'(2)$ ja $B'(-3)$. Leida sirge AB jälgpunkt J , kaldenurk φ ja lõigu AB tõeline pikkus (punktide ristprojektsioonid joonisel ja mõõtühik valida vabalt).

§ 81. TASANDITE LÕIKUMINE. KATUSED

1. Tasandite lõikesirge leidmine. Kahe tasandi lõikesirge leidmiseks on kõige sobivam kasutada kahte nivoopinda, millest üks võib olla ka ekraan. Kumbki nivoopind lõikab mõlemat antud tasandit mööda horisontaali (ekraan muidugi mööda jälgjoont). Samal nivoopinnal olevate horisontaalide lõikepunkt ongi otsitava lõikesirge üheks punktiks. Näiteks joonisel 81-1 saame tasandid α ja β lõikesirge s järgmiselt:

$$J = j_\alpha \times j_\beta; H \equiv h_\alpha \times h_\beta; s \equiv HJ \equiv \alpha \times \beta.$$

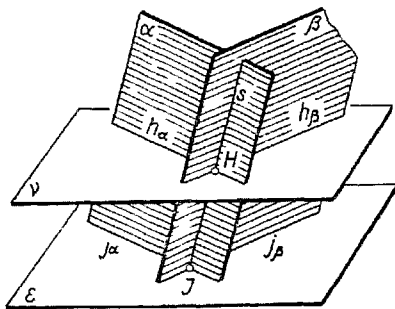
Rakendame seda mõttekäiku nüüd tasandite $\alpha [A'(3), j_\alpha]$ ja $\beta [B'(2), j_\beta]$ kohta, lähtudes andmete kvooditud ristprojektsioonidest (joon. 81-2). Kohe võime leida otsitava lõikesirge jälgpunkti $J \equiv j_\alpha \times j_\beta$. Lõikesirge teise punkti saamiseks võtame abiks nivoopinna, näiteks läbi punkti

A . See nivoopind lõikab tasandit α mööda horisontaali h_α , mille ristprojektsioon h'_α läbib punkti A' ning on paralleelne jäljega j_α .

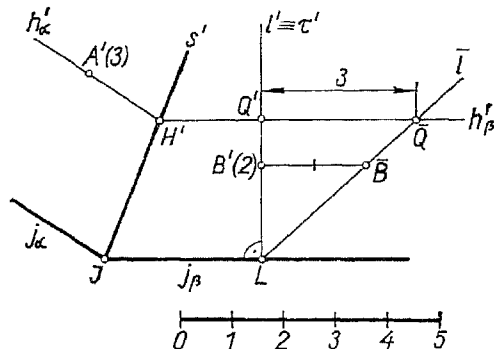
Tasandi β sama kõrgusega horisontaali h_β leidmiseks tõmbame langusjoone l läbi punkti $B (l' \perp j_\beta)$ ning pöörame ekraanile ta kujutamiskiirte pinna τ . Saame $\bar{l} \equiv \bar{B}L$, millel

märgime punkti $\bar{Q}$ nii, et ta kaugus sirgest l' oleks võrdne punkti A kõrgusega, s. o. kolme ühikuga. Vastav ruumpunkt Q asub siis tasandi β otsitaval horisontaalil; joonisel tõmbame läbi Q' horisontaali ristprojektsiooni $h'_\beta \parallel j_\beta$. Konstruktsioon joonisel jätkub nii: $H' \equiv h'_\alpha \times h'_\beta$; $s' \equiv H'J$. Ruumis on vastavalt $s \equiv HJ$.

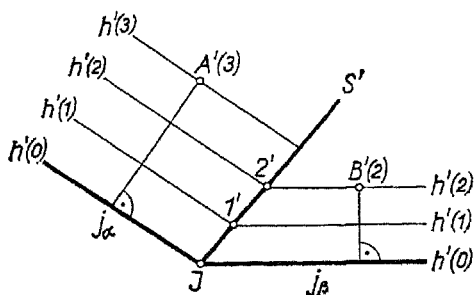
Sama ülesande võime lahendada ka järgmiselt (joon. 81-3). Punkti A ja jälgjoone j_α vahel saame tasandil α tõmmata kolm horisontaali kõrgustel 1, 2 ja 3 ühikut (jälgjoon on nullhorisontaal). Et nende horisontaalide vahekaugused tasandil α on võrdsed, siis on võrdsed ka nende ristprojektsioonidevahelised kaugused. Järelikult horisontaalide ristprojektsioonide tõmbamiseks tuleb kauguslõik punkti A' ja sirge j_α vahel jagada kolmeks võrdseks osaks.



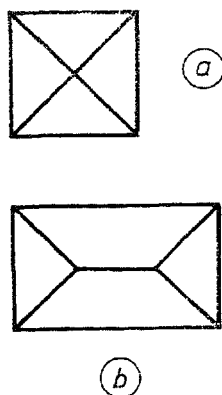
Joonis 81-1



Joonis 81-2



Joonis 81-3



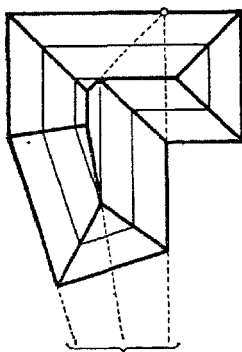
Joonis 81-4

Analoogiliselt saame tasandil β tõmmata punkti B ja jälgjoone j_β vahel kaks horontaali kõrgustel 1 ja 2 ühikut.

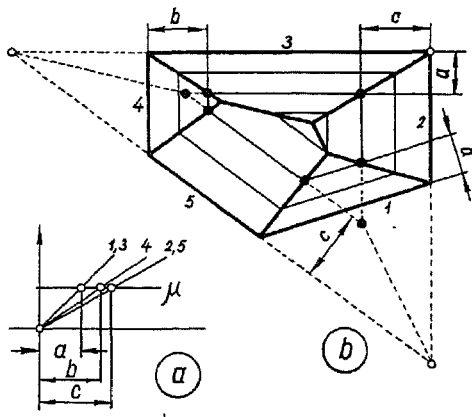
Samadel kõrgustel tõmmatud tasandite α ja β horisontaalide lõikepunktid J , 1 ja 2 määravadki otsitava lõikesirge s ($s' \equiv J2'$).

2. Katused. Tasandite lõikesirge leidmise üheks praktiliseks rakenduseks on katuste lahendamine. Katuste lahendamiseks nimetatakse antud hulknurgakujulise

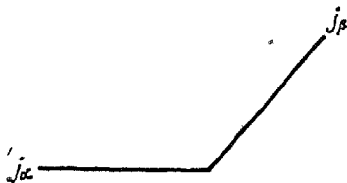
räästajoone ja katusekõlgede (tahkude) kohta seatud tingimuste alusel kogu katuse konstrueerimist. Ülesanne ei ole raske, kui räästajooneks on ruut või ristkülik ja tahkude kaldenurgad on võrdsed: katus osutub siis kas püramiidiks (joon. 81-4, a) või kahest otsast kaldu lõigatud kolmnurkseks prismaks (joon. 81-4, b). Seejuures naabertahkude lõikejoonte ristprojektsioonid räästa tasandil on vastavate räästa külgede vaheliste nurkade poolitajateks, sõl-



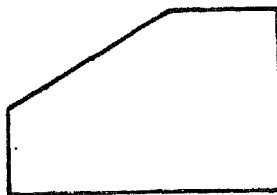
Joonis 81-5



Joonis 81-6



Joonis 81-7



Joonis 81-8

tumata tahkude võrdse kaldenurga tegelikust suurusest.

Ka siis, kui räästajooneks on kee-
rulisema kujuga hulknurk, kuid tah-
kude kaldenurgad jäävad endiselt
võrdseteks, saab katust lahendada
räästa külgedevaheliste nurkade
poolitajate abil. Viimased osutuvad
tahkude lõikejoonte ristprojektsioo-
nideks, sest võrdsete kaldenurkade
tõttu projekteeruvad sama kõrgu-
suga horisontaalid võrdsetele kau-
gustele räästajoonest (joon. 81-5).

Kui tahkude kaldenurgad on eri-
nevad, siis on kasulik rakendada
nn. kallete graafikut, mil-
les üksikute tahkude kaldenurgad
horisontaalse tasandi suhtes on joo-
nestatud ühise rõhtsa haaraga ja
ülestikku (joon. 81-6, a). Lõigates
nurkade kaldhaarasid vabal kõrgu-
sel võetud nivoo-pinnaga μ , leiame
kui kaugele jäljest projekteerub iga
tahu tasandi horisontaal. Nii saame
kallete graafikul kaugused a , b ja c
(tahkudel 1 ja 3, samuti tahkudel 2
ja 5 on kaldenurgad võrdsed). Neil
kaugustel vastavatest räästakülge-
dest kui tahkude jälgedest joonestat-
akse horisontaalide projektsioonid
ning märgitakse nende lõikepunktid
(mustad nullikesed joonisel 81-6, b).
Iga tahupaari lõikejoon asetseb siis
sirgel, mis läbib räästakülgede lõi-
kepunkti ning vastavate horisontaa-
lide lõikepunkti.

Võrdsete kõrgusvahede järel võe-
tud horisontaalid projekteeruvad

seda tihedamalt, mida suurem on
katuse tahu kaldenurk. Näiteks tahu
1 kujutisel on horisontaalide parv
tihedam kui tahu 2 kujutisel.

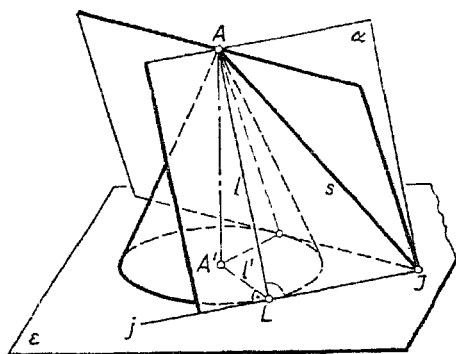
Mainime veel, et praktikas juhin-
dutakse katuste lahendamisel sageli
nõudest, et erinevate laiustega hoo-
neosade katuste harjajooned oleksid
rõhtsad ja ühekõrgused; sel puhul
tuleb vastavalt sobitada tahkude kal-
denurki.

ULESANDED

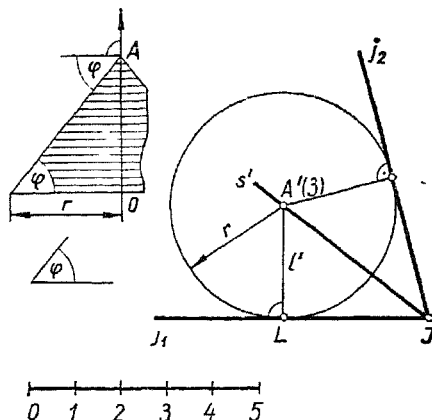
1. Tasapinnad α ja β on antud jälgisirgetega
 $j\alpha$ ja $j\beta$ ning kaldenurkadega $\varphi = 45^\circ$
ja $\varphi = 60^\circ$ (joon. 81-7). Tuletada nende
tasandite lõikesirge ristprojektsioon.
2. Täiendada joonisel 81-8 esitatud räästa-
joone plaani katuse tahkude lõikejoontega
eeldusel, et kõikidel tahkudel on sama
kaldenurk.

§ 82. ANTUD KALDENURGAGA TASAND LÄBI ANTUD SIRGE NING SELLE RAKENDUSI

Muldehitiste kavandamisel tuleb sa-
geli lahendada ülesanne: panna
antud kaldenurgaga (φ) tasand läbi
antud sirge (s). Ülesande lahendami-
sel kasutatakse asjaolu, et pöörd-
koonuse kõigi moodustajate kalde-
nurgad põhja suhtes on võrdsed.
Koonuse iga puutetasand (α) puutub
koonust mööda moodustajat (l), mis
on ühtlasi puutetasandi langusjoo-
neks (joon. 82-1). Järelikult puute-



Joonis 82-1



Joonis 82-2

tasandi jälg j on ühtlasi risti puute-moodustajaga l ja tema ristprojekt-siooniga l' . Nii saame ülesande lahendamiseks järgmise võimaluse: võtame antud sirge s ühe punkti, näiteks punkti A , tipuks pöördkoon-nusele, nn. **kaldekoonusele**, mille moodustaja kaldenurk on võrdne otsitava tasandi α kaldenurgaga φ . Tasandi α jälgsirge j on nüüd koon-nuse põhjaringi puutujaks ja läbib antud sirge jälgpunkti J . Ülesande lahendite arv on 0, 1 või 2 olenevalt sellest, kas punkt J jääb kaldekoon-nuse põhjaringi sisse, on ringjoone peal või jääb sellest väljapoole.

Jälgime nüüd sama ülesande lahendamist kvooditud ristprojekt-siooni andmeil. Olgu sirge s antud punkti A kvooditud ristprojektsiooniga $A'(3)$ ja jälgpunktiga J (joon. 82-2). Otsitav tasand läbige seda sirget nii, et ta kaldenurk võrduks antud nurgaga φ . Joonestame kalde-koonuse telglõike nii, et moodustaja kaldenurk on φ ja koonuse kõrgus $OA=3$ (joonisel on telglõike viiurutatud). Telglõikelt saame kaldekoon-nuse põhja raadiuse r , mis võimal-

dab joonestada koonuse põhja ring-joone keskpunktiga A' . Selle ring-joone mõlemad puutujad läbi sirg-joone jälgpunkti J osutuvad otsitava tasandi jälgedeks — vastavalt tasandi ühele või teisele võimalikule asendile. Niisiis antud juhul on üles-andel 2 lahendit:

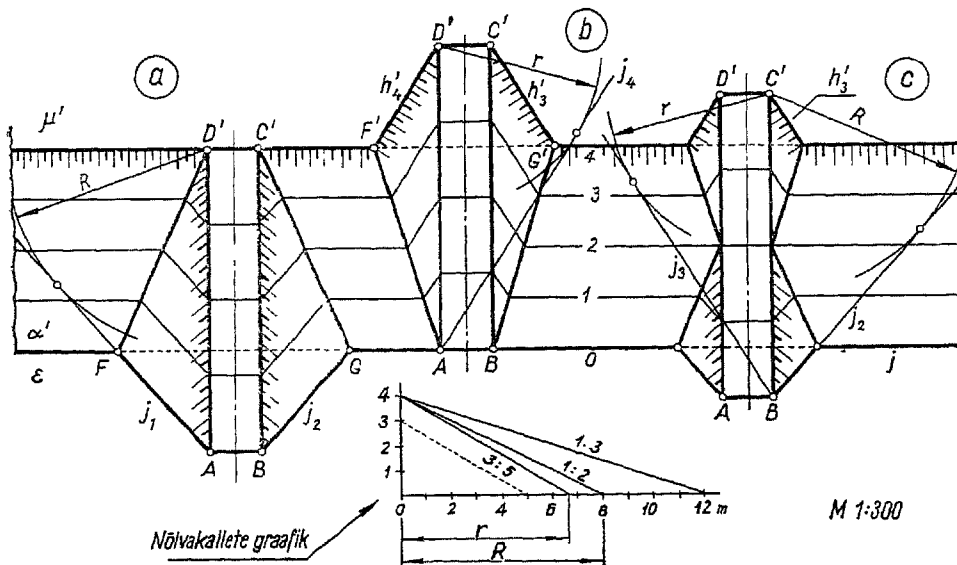
$$\alpha_1(A, j_1) \text{ ja } \alpha_2(A, j_2).$$

Praktikas antakse tasandi ja sirg-joone kaldenurga (φ) asemel sageli **kalle** (i), s. o. kaldenurga tangens ($i=\tan \varphi$).

Esitame nüüd praktilise näite, kus tuleb kasutada etteantud kaldega tasandit läbi antud sirge.

Näide. Nullkõrgusega rõhtsalt maapinnalt (ekraanilt ϵ) viib kald-pinnaline nõlv α teisele rõhtsale maa-alale (nivoopinnale μ) kõrgu-sega 4. Nõlva kalle $i=1:2$. Liikle-mise hõlbustamiseks tuleb ehitada rõhtsaid tasandeid ühendav kaldtee, näiteks laiussega 2 m ja kaldega 1:3 (joon. 82-3). Tee telg võib nõlva horisontaalide suhtes olla kas risti või kaldu.

Vaatleme esmalt juhtumit, kus tee



Joonis 82-3

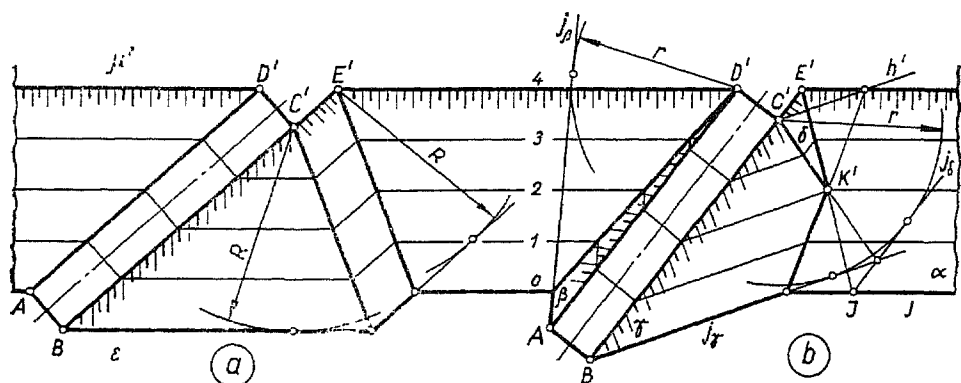
telg on nõlva horisontaalidega risti. Siin võib esineda kolm varianti.

1. Tee ülemine ots DC on nõlva kõige kõrgemal horisontaalil; sel juhul tuleb tee jaoks ehitada muldkeha, vedades selleks mulda mujalt juurde (joon. 82-3, a).
2. Tee alumine ots AB on nõlva kõige madalamal horisontaalil (jäljel). Sel juhul tungib tee pinnasesse ja tema jaoks tuleb kaevata süvend, vedades tee kohalt mulda ära (joon. 82-3, b).
3. Teelõigu keskkohht võetakse näiteks nõlva keskmisel horisontaalil. Nüüd kulgeb tee ülemine osa süvendis ja alumine osa täitel; süvendamisel saadava mulla võib ära kasutada täiteks (joon. 82-3, c).

Jälgime ülesande lahendust esimese variandi puhul (joon. 82-3, a). Tee nõlvade kalle olgu ette-

dikteeritult võrdne nõlva α kaldega, s. o. 1 : 2. Seejuures nõlvad kui antud kaldega tasandid peavad läbima tee ääri DA ja CB. Seega nende nõlvade jälgjoonte leidmine taandub paragrahvi alguses käsitletud ülesande lahendamisele. Nii näiteks vasakpoolse nõlva jälg j_1 on leitav kaldekoonuse abil, mille tipuks on punkt D, põhjaringi keskpunktiks D' ja raadiuseks $R=8$ m; j_1 on selle koonuse põhjaringi puutuja läbi punkti A. Analoogiliselt on leitav tee parempoolse nõlva jälg j_2 . Jäljed j_1 ja j_2 lõikavad jälge j punktides F ja G, mis koos punktidega D ja C määravad nõlvade lõikejooned DF ja CG. Saadud muldkeha, vaadelduna geomeetrilise kehana, osutub prismatoidiks, mille alumiseks põhjaks on trapeets ABGF, ülemiseks põhjaks aga sirglõik CD.

Teises variandis, üleni süvendis kulgeva tee puhul, on tee nõlva



Joonis 82-4

kaldeks võetud 3:5 (joon. 82-3, b). Tee kummagi nõlva horisontaalide siht on leitav jällegi vastava kaldekoonuse abil ($r=4:0,6=6,7$ m; $h'_4 \parallel j_4$). Süvend osutub prismatoidiks, mille ülemiseks põhjaks on trapets CDFG, alumiseks põhjaks aga sirg-lõik AB.

Kolmandas variandis on tee nõlvad võetud süvendi ja täite juures kalde poolest erinevad: süvendis on kaldeks 3:5, täitev aga 1:2. Lahendus kujuneb nüüd kombinatsiooniks kahest eelmisest variandist (joon. 82-3, c; $h'_3 \parallel j_3$).

Kõiki kolme kirjeldatud varianti kasutatakse praktikas. Kui näiteks α on raudteetammi nõlv ja μ — tammi ülemine tasand, siis tuleks ülesõidu ehitamisel kasutada varianti (1), sest raudteetammi sisse süvendit teha ei või, nagu see oleks paratamatu variantide (2) ja (3) puhul. Kui aga raudtee kulgeks mööda pinda ε (s. t. süvendis nõlvaga α), siis tuleks kasutada varianti (2). Segavarianti (3) saab kasutada ainult siis, kui süvend ja täide on mõlemad tegelikult võimalikud ja lubatavad.

Kui ühendustee telg võib nõlva α

horisontaalide suhtes olla kaldu, siis saab tee sihi valida nii, et teelõigu pikkus sobib parajasti nõlva α jäljjoone ja kõrgeima horisontaali vahel. Näiteks joonisel 82-4, a kujutatud ühendustee puhul on nii tehtudki; seejuures on kasutatud tekstis varem toodud andmeid ja võtteid ning kõikidele nõlvadele on antud võrdne kalle 1:2 (vaata kallete graafikut joonisel 82-3).

Joonisel 82-4, b on tee telg valitud nii, et tee algus AB pole enam kokkupuutes nõlva α jäljega j . Muldkehal on nüüd kolm nõlva: β , γ ja δ . Nende jäljed j_β , j_γ ja j_δ on leitavad kaldekoonuste abil tippudega C ja D ning põhja raadiusega r ; antud juhul raadius r vastab kaldele 3:5 (vaata kallete graafikut joonisel 82-3). Nõlvade lõikejooned läbivad muidugi vastavaid jälgsirgete lõikepunkte, näiteks lõikejoon EK läbib jälgede j ja j_δ lõikepunkti J. Eksistuste vältimiseks olgu mainitud, et kolmnurk CDE joonistel 82-4, a ja 82-4, b asetseb ruumis nivoopinnal μ ; tee äär BCE on aga murdjoon.

Muldehitiste plaanidel märgitakse nõlvade ülemised servjooned lan-

gekriipsudega nagu on näidatud joonistel 82-3 ja 82-4. Langekriipsud tõmmatakse servjoonest nõlva languse poole risti nõlva horisontaalidega.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

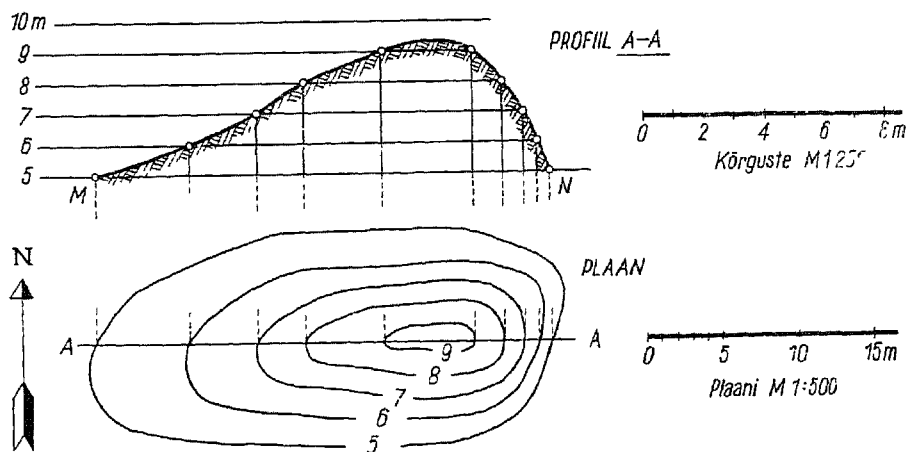
1. Mis on sirgjoone või tasandi kalle?
2. Kui suur on tasandi kaldenurk, kui tema kalle $i=1$?
3. Sirgjoone kaldenurk on 60° . Mitu tasandit kaldenurgaga 45° saab sellest sirgest läbi panna?

§ 83. TOPOGRAAFILINE PIND

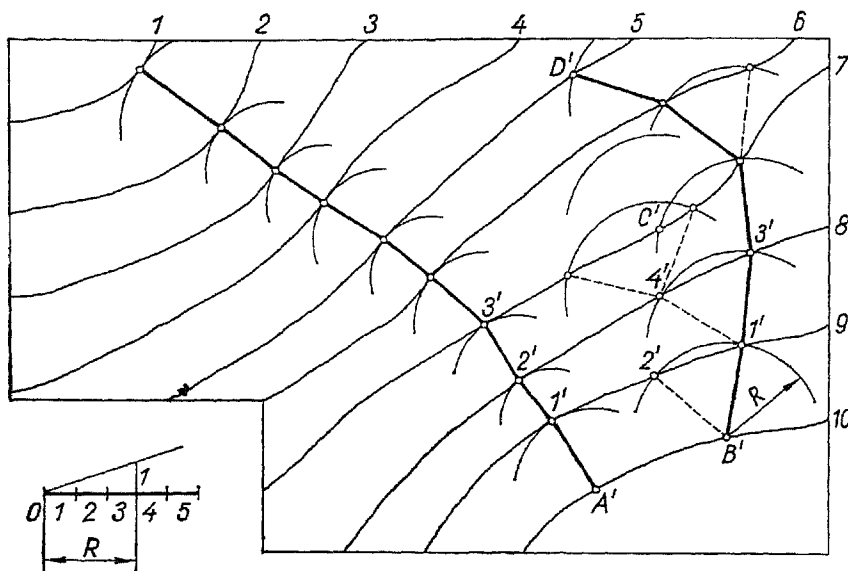
1. Topograafilise pinna kujutamine. Topograafilise pinna (maapinna) kuju esiletoomiseks plaanil või kaardil kasutatakse selle pinna horisontaale (kõrgusjooni), s. o. jooni, mis saadakse topograafilise pinna mõttelisel läbilõikamisel horisontaalsete tasanditega. Horisontaalid võetakse võrdsete kõrgusvahede järel ja varustatakse vastavate kõrgusarvudega. Joonisel 83-1 on näiteks kujutatud

küngas horisontaalide abil, mis on võetud meetriliste kõrgusvahede järel. Künka horisontaalide ristprojektsioonid moodustavadki künka plaani. Horisontaalide projektsioonide tiheduse järgi antud kohas saab otsustada künka nõlva kalde suuruse üle selles kohas: näiteks künka idapoolne nõlv on tunduvalt järsem kui läänepoolne.

Topograafilise pinna **profiiliks** nimetatakse selle pinna lõiget vertikaalse tasandiga (üldjuhul vertikaalse silindrilise pinnaga). Joonisel 83-1 on näidatud künka ühe profiili tuletamine. Selleks kantakse profiili antud sihi A-A ja horisontaalide projektsioonide lõikepunktid plaanilt üle mingile rõhtsale sirgele MN (ülekandeks on sobiv kasutada pabeririba). Sirge MN tegelikku kõrgust (5) on otstarbekohane lugeda fiktiivseks nullkõrguseks. Sirge MN ristsirgetele kantakse vastavate horisontaalide kõrguste ja fiktiivse nullkõrguse (5) vahed. Saadud punktid ühendatakse ladusa joonega. Kui profiil on plaaniga seostatud joonise 83-1 eeskujul, siis võib kogu joonist



Joonis 83-1



Joonis 83-2

tõlgendada kaksvaatena, millel eestvaadet asendab profiil.

Topograafilised pinnad on üldiselt väga lameda profiiliga. Nende reljeefsemaks esitamiseks kasutatakse kõrguste osas harilikult suuremat mõõtsuhet kui plaanil; nii on tehtud ka joonisel 83-1.

2. Langusjooned. Topograafilise pinna **langusjoon** on üldjuhul ruumiline kõver, mis asetseb sellel pinnal ning millel pinna antud punktis on suurim kaldenurk. Seejuures kaldenurka langusjoone mingis punktis mõõdetakse nurgaga, mille langusjoone puutuja selles punktis moodustab oma ristprojektsiooniga.

Langusjoone ristprojektsiooni topograafilise pinna plaanil saab joonestada vaid teatava täpsusega. Võtame langusjoone alguspunktiks näiteks punkti A horisontaalil kõrgusarvuga 10 (joon. 83-2). Joonestame punkti A' kui tsentri ümber ringjoone kaare nii, et see puutuks hori-

sontaali h (9) projektsiooni. Puutepunkti 1' võtame tsentriks uuele kaarele, mis puutub horisontaali h (8) projektsiooni jne. Kui nüüd oletada, et maapind on punktide A ja 1 vahel tasandiline (see on maastiku rahuliku reljeefi puhul täiesti lubatav), siis langusjoone lõik A1 osutub sirglõiguks. Sama oletuse puhul on sirged ka lõigud 12, 23 jne. Seega langusjoone ristprojektsiooni lähendiks saame murdjoone. Mida lühem on selle murdjoone mõni lüli, seda suurem on langusjoone kaldenurk selles piirkonnas. Langusjoon ise osutub ruumis muidugi ruumiliseks kõverjooneks. Sujuva langusjoone ristprojektsiooni saamiseks tuleb läbi murdjoone tippude A, 1', 2'... tõmmata sujuv kõverjoon. Tuleb aga silmas pidada, et ka see joon esindab langusjoone projektsiooni vaid ligikaudselt.

3. Samakaldejooned. Topograafilise pinna **samakaldejoon** on ruumi-

line kõver, mis asetseb sellel pinnal ning millel on tema igas punktis üks ja seesama kalle (s. t. ka sama kalde-nurk). Ka samakaldejoont ei saa konstrueerida täpselt.

Joonisel 83-2 on tuletatud sama-kaldejoone ristprojektsioon, mis algab punktist B' . Joone kaldeks on võetud 1:3 (vt. lisajoonist vasakul). Selle samakaldejoone ristprojekt-siooni lülide pikkused horisontaalide vahel peavad plaanil võrduma kõik kolme ühikuga. Konstruktsioon on järgmine. Joonestame ümber punkti B' kaare raadiusega $R=3$. See kaar lõikab horisontaali $h(9)$ projekt-siooni punktides $1'$ ja $2'$. Võttes vii-mased tsentriteks uutele kaartele raadiusega $R=3$, saame horisontaali $h(8)$ projektsioonil uued lõikepunk-tid $3'$ ja $4'$. Nagu näeme, hakkab samakaldejoon iga uue kaare tõmba-misel hargnema, mistõttu ülesandel on palju lahendeid. Mingi konk-reetse lahendi, näiteks lahendi $B'1'3' \dots D'$ saamiseks tuleb üles seada lisatingimusi. Näiteks võib nõuda, et samakaldejoonel ei tohi olla järske suunamuutusi või et ta peab lõppema teatava punkti lähedu-ses. Ka samakaldejoone puhul võib murdjoone tipud ühendada sujuva kõveraga.

Kui kaar antud raadiusega R ei lõika naaberhorisontaali projektsioo-ni (nagu kaar tsentriga C'), siis tähendab see seda, et maapinna kalle selles kohas on väiksem kui 1:3.

Samakaldejooni läheb vaja ühtlase tõusuga teeosade kavandamisel mä-gisel maastikul.

KÜSIMUSED

1. Mis on topograafilise pinna horisontaalid?
2. Mis on topograafilise pinna langusjooned?
3. Milliseid jooni nimetatakse topograafilise pinna samakaldejoonteks?

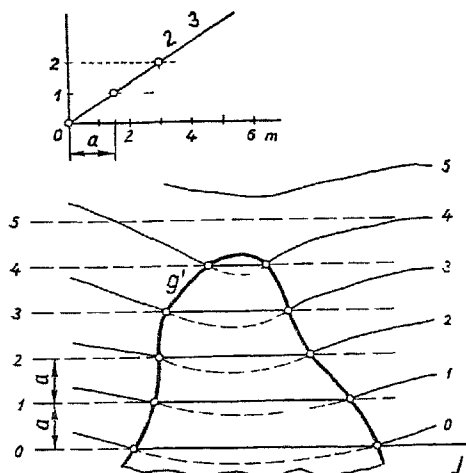
§ 84. TOPOGRAAFILISE PINNA LÕIKUMINE TEISTE PINDADEGA

Topograafilise pinna lõikamisel kald-tasandiga või mingi muu pinnaga (pöördkoonus, sfäär) on vaja lõikav pind varustada horisontaalidega, mille kõrgused vastavad topograafi-lise pinna horisontaalide kõrgustele. Võrdsete kõrgusarvudega horison-taalide lõikepunktid ongi siis antud pindade lõikejoone punktideks.

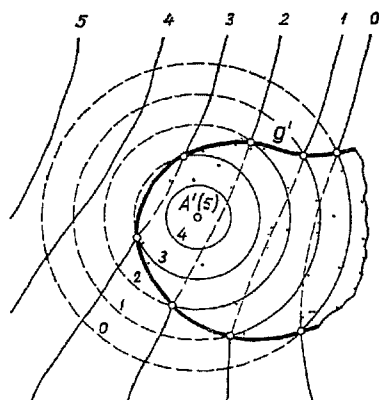
Näide 1. Joonisel 84-1 on tule-tatud horisontaalidega antud topo-graafilise pinna ja tasandi α ($j, i = 2:3$) lõikejoon g . Selleks on kõi-gepealt leitud tasandi α horisontaa-lide projektsioonide vaheline kaugus α , mis vastab topograafilise pinna horisontaalide antud kõrgusvahele 1 m; käesoleval juhul $\alpha=1,5$ ühikut (vt. abijoonist). Seda arvestades on joonestatud tasandi α horisontaalid paralleelselt jäljega j . Lõikejoone ristprojektsioon g' ühendab sujuvalt võrdsete kõrgusarvudega horisontaa-lide projektsioonide lõikepunkte.

Näide 2. Joonisel 84-2 on tule-tatud antud topograafilise pinna ja pöördkoonuse lõikejoon g . Koonus on antud oma põhjaringjoonega (mis asub ekraanil) ja tipu A kvooditud ristprojektsiooniga $A'(5)$. Koonuse-pinna horisontaalide projektsioonid osutuvad kontsentrilisteks ringjoon-teks, mille vahekaugused võrduvad viiendikuga põhjaringi raadiusest. Lõikejoone ristprojektsioon g' ühen-dab sujuvalt võrdsete kõrgusarvu-dega horisontaalide projektsioonide lõikepunkte. Maapinnast väljaulatuv koonusepinna osa on joonisel täpi-tatud.

Näide 3. Rakendusnäitena la-hendame järgmise praktilise üles-ande. Horisontaalidega antud kalla-



Joonis 84-1



Joonis 84-2

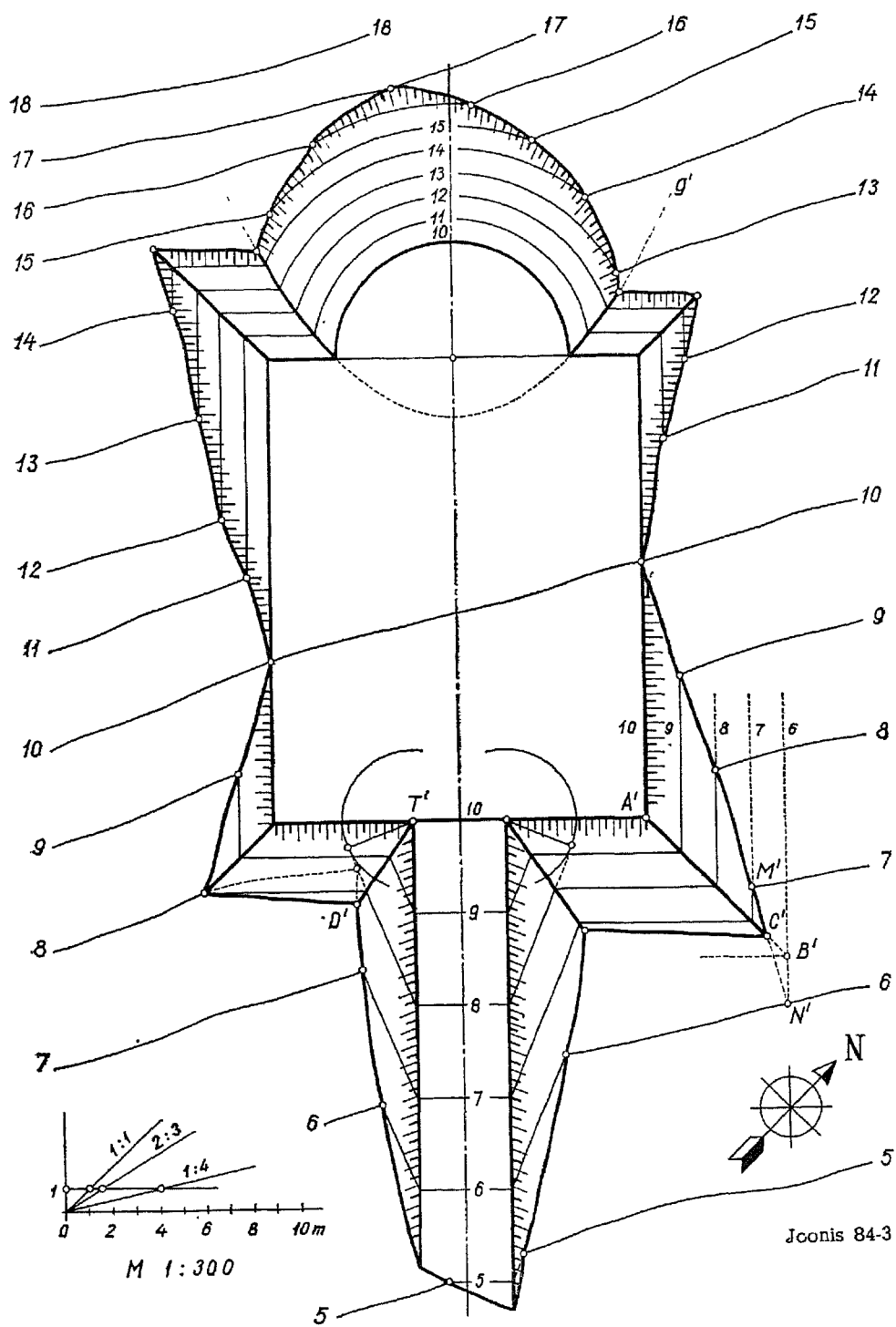
kule maastikule on vaja ehitada rõhtne tasane väljak, mis koosneb riskülikust 16×20 m ja poolringist raadiusega 5 m. Juurdepääsuks väljakule nähakse ette kaldtee laiusena 4 m (joon. 84-3). Väljaku kõrgus valida nii, et süvendist saadav muld kasutataks ära täiteks. Kohapealne pinnas dikteerigu muldehitise nõlvade kalleteks süvendi osas 1:1 ja täite osas 2:3; tee kalle olgu 1:4.

Et mullatööd oleksid ligikaudu tasakaalus, peame väljaku kõrguseks võtma 10 m, sest horisontaal kõrgusarvuga 10 jaotab väljaku umbkaudu pooleks, kusjuures horisontaalide tihedus kogu väljaku piirkonnas on enam-vähem ühtlane.

Iga nõlva horisontaalide projektioonide omavahelised kaugused saame kallete graafikult vastavalt plaani mõõtsuhtele 1:300. Need kaugused naturis on: süvendi osas 1 m, täite osas 1,5 m ja tee osas 4 m; joonisel aga vastavalt 3,3 mm, 5,0 mm ja 13,3 mm. Horisontaalide siht tee kummalgi nõlval on leitud

kaldekoonuse abil (vt. § 82): koonuse tipp T on tee ääre ülemises otspunktis, seega kõrgusel 10, põhi aga on võetud nivoopinnal kõrgusega 8. Koonuse põhja raadiuseks joonisel on järelikult $2 \cdot 5,0 = 10$ mm. Tee nõlva horisontaalid on paralleelsed kaldekoonuse põhjaringjoone puutujaga, mis on tõmmatud tee horisontaali $h(8)$ otspunktist.

Mullatööde piirjooned, s. o. muldehitise nõlvade ja maapinna lõikejooned, on leitud käesoleva paragrahvi eelmistes näidetes kirjeldatud viisil. Joonisel on punktjoontega näidatud ka servjoonel AB asetseva tipu C saamine. Selleks on horisontaalide $h(7)$ projektsoonide lõikepunktidele M' lisaks margitud veel järgmiste horisontaalide $h(6)$ projektsoonide lõikepunkt N' , mis tuleb servjoone projektsoonist $A'B'$ juba teisele poole; tipp C' on siis joonte $A'B'$ ja $M'N'$ lõikepunkt. Analoomiliselt on leitavad piirjoone kujutise ulejaanud tipud; joonisel on näidatud veel ainult tipu D' saamine.



Horisontaal kõrgusarvuga 10 on mullatööde nulljooneks; temast lääne pool asub süvend ja ida pool täide. Joon *g*, mida mööda ringnõlv (kui koonusepind) lõikub tasandilise nõlvaga, osutub § 53 põhjal parabooliks (nii natuuris kui ka projektsioonil; joonisel punktjoonega). Tegelike lõikejoontena esinevad vaid selle parabooli kaks kaart.

LISA I

KUJUTAVA GEOMEETRIA PÕHIKONSTRUKTSIOONID

1. Punkti kaksvaate ja kolmvaate tuletamine koordinaatide järgi.
2. Sirgjoone jälgpunktide leidmine.
3. Sirglõigu pikkuse ja kaldenurkade leidmine.
4. Eriasendiliste sirgete ja eriasendiliste tasandite projektsioonide joonestamine.
5. Tasandil asetseva punkti ja sirgjoone projektsioonide tuletamine.
6. Tasandi horisontaalide, frontaalide ja langusjoonte projektsioonide joonestamine.
7. Tasandi normaali projektsioonide joonestamine.
8. Kahe tasandi lõikesirge tuletamine.
9. Sirgjoone ja tasandi lõikepunkti tuletamine.
10. Punkti ristprojektsiooni tuletamine lisakraanil.
11. Punkti pööramine ümber ekraani normaali.
12. Punkti pööramine ümber nivoosirge (sealhulgas ümber tasandi jälje).
13. Ellipsi konstruktsioonid.
14. Abisfääride valik ja kahe pöördpinna lõikejoone punktide tuletamine ühe abisfääriga.
15. Abitasandite valik ja kahe pinna lõikejoone punktide tuletamine ühe abitasandipinna abil.
16. Praktikas kasutatavate aksonomeetriliste teljestike joonestamine.

17. Punkti aksonomeetrilise kujutise tuletamine punkti koordinaatide või kaksvaate järgi.
18. Punkti perspektiivi tuletamine punktide meetodiga.
19. Sirgjoone perspektiivi tuletamine sirgete meetodiga.
20. Antud kaldega tasand läbi antud sirgekvooditud ristprojektsioonis.

LISA II

RAALI KASUTAMISEST KUJUTAVA GEOMEETRIA ÜLESANNETE LAHENDAMISEL

Arvutustehnika levik kõige erinevamatele elualadele on tingitud raali võimest sooritada väga palju lihtsaid tehteid väga lühikese ajaga. Ülesande lahendamiseks raali abil tuleb koostada algoritm ja «tõlkida» see raalile arusaadavasse keelde. Seejuures võib antud probleemi tõlgendada kahel erineval viisil.

Esimene tugineb asjaolul, et kujutava geomeetria põhivahendiks on joonis. Joonise valmistamisel on olenevalt viimase keerukusest vajadusest või sooritada palju ühetahelisi operatsioone — koordinaatlõikude ja punktide märkimine, sidejoonte tõmbamine jms. Raali kasutamine on siin kõigiti põhjendatud ja võimaldab lihtsa, ent aeganõudva töö automatiseerimist. Selleks on vaja siduda joonis mingi koordinaatide süsteemiga, välja selgitada vajalikud operatsioonid ning koostada neile vastavad arvutusekvivalendid. Arvutusekvivalent on masinlahenduse aluseks. Alljärgnevalt on vaadeldud mõningate tüüpoperatsioonide kirjeldamist*. Eeldame, et lähteandmed kuuluvad mingile projektsioonipinnale ε , mis on seotud ristkoordinaadistikuga u ; v .

1. Sirgjoone (lõigu) joonestamine. Antud

* Uksikasjalikumalt vt. näiteks И. И. Котов и др. Алгоритмы машинной графики. М., 1977.

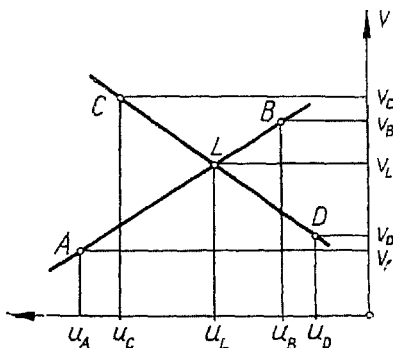
punkte $A(u_A; v_A)$ ja $B(u_B; v_B)$ läbiva sirge võrrand on esitatav kujul

$$\frac{u-u_A}{v-v_A} = \frac{u_B-u_A}{v_B-v_A}.$$

Toodud võrrandi järgi vajaliku pikkusega lõigu joonestamise tähistame operatsioonina $SI(A; B)$.

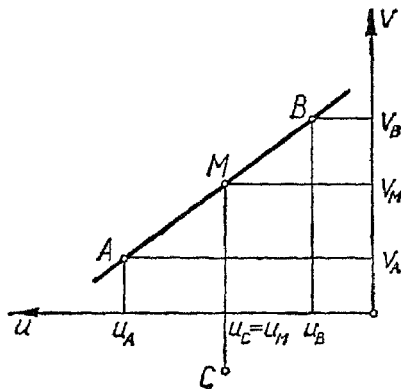
2. Kahe sirge lõikepunkti leidmine (joonis II-1). Olgu sirged AB ja CD antud vastavalt koordinaatidega $A(u_A; v_A)$; $B(u_B; v_B)$; $C(u_C; v_C)$; $D(u_D; v_D)$. Sirgete lõikepunkti L leidmise operatsioonina tähistame $L = P1(AB; CD)$. Lahendades süsteemi sirgete AB ja CD võrranditest, saame punkti L jaoks

$$\left. \begin{aligned} u_L &= \frac{(u_D - u_C)(u_A v_B - u_B v_A) - (u_D - u_C)(v_B - v_A) - (u_B - u_A)(u_C v_D - u_D v_C)}{(u_D - u_C)(v_B - v_A) - (u_B - u_A)(v_D - v_C)} \\ v_L &= \frac{(v_D - v_C)(u_A v_B - u_B v_A) - (v_D - v_C)(v_B - v_A) - (v_B - v_A)(u_C v_D - u_D v_C)}{(u_D - u_C)(v_B - v_A) - (u_B - u_A)(v_D - v_C)} \end{aligned} \right\}$$



Joonis II-1

3. Punkti märkimine antud sirgel sidejoone abil (joonis II-2). Kui üldjuhul on sirge kirjeldamiseks joonisel vaja teada kahte tema punkti, siis sidejoone kirjeldamiseks piisab ühest punktist. Tähistame punkti määramise



Joonis II-2

antud sirgel vertikaalsidejoone abil $M = PV(AB; C)$, horisontaalsidejoone abil $M = PH(AB; C)$. Joonise II-2 põhjal on esimesel juhul

$$\left. \begin{aligned} u_M &= u_C \\ v_M &= \frac{u_A - u_C}{u_A - u_B} (v_B - v_A) + v_A \end{aligned} \right\}$$

Analoogia põhjal on teisel juhul

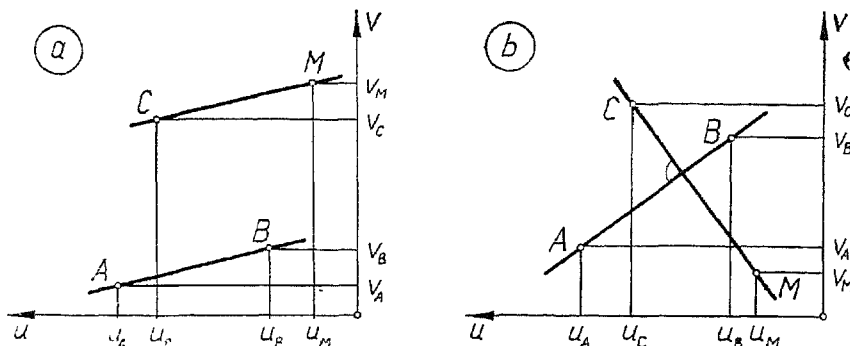
$$\left. \begin{aligned} u_M &= \frac{v_A - v_C}{v_A - v_B} (u_B - u_A) + u_A \\ v_M &= v_C \end{aligned} \right\}$$

Siin toodud seosed sobivad ka vastava nivoojoone projektsiooni kirjeldamiseks.

4. Antud punktist C antud sirgele AB paralleel (või rist-)sirge tõmbamine.

Olgu antud punktid $A(u_A; v_A)$; $B(u_B; v_B)$; $C(u_C; v_C)$ (joonis II-3). Punkti M leidmise nii, et $AB \parallel CM$, tähistame $M = P2(AB; C)$. Tuletamiskäigu lihtsustamiseks anname kitsenduse, et $AB = CM$. Siis (joonis II-3, a)

$$\left. \begin{aligned} u_M &= u_B - u_A + u_C \\ v_M &= v_B - v_A + v_C \end{aligned} \right\}$$



Joonis II-3

Punkti M leidsime nii, et $AB \perp CM$, tähistame $M = P3(AB; C)$. Vastavalt sirgete ristseisu tunnusele

$$\frac{V_B - V_A}{U_B - U_A} = - \frac{U_M - U_C}{V_M - V_C}.$$

Lahendi üheseks määramiseks olgu (joonis II-3, b)

$$U_M = V_B - V_A + U_C.$$

Siis

$$V_M = V_C - U_B + U_A.$$

Kui ülesanne on eeltoodud näidetega analoogselt jaotatud üksikoperatsioonideks, järgneb tööprogrammi koostamine. Iga eeltoodud valem on üleskirjutatav operatsioonina ja vormistatav alamprogrammina. Koordinaadid u_i ja v_i esinevad alamprogrammides formaalsete parameetritena.

Joonisepind on vastavalt vajadusele vaadeldav kas põhi-, esi-, kül- või lisaekraanina. Tegelikult ülesande lahendamisel vaadeldakse ekraane ε_1 , ε_2 ja ε_3 eraldi, omistades koordinaatidepaarile u_i , v_i vastavalt x_i , y_i ; x_i , z_i või y_i , z_i . Üleminekuks ühelt ekraanilt teisele tuleb ette näha tüüpopereatsioon (P5), mis teisendab näiteks ekraani ε_1 punkti ekraani ε_2 punktiks ja vastupidi:

$$A_1(x_A; y_A) \rightarrow A_2(x_A; z_A = -y_A);$$

$$B_2(x_B; z_B) \rightarrow B_1(x_B; y_B = -z_B).$$

Lahendi väljatrükkimise hõlbustamiseks on välja töötatud rida tüüpopereasioone (alamprogramme), nagu näiteks punkti kujutise joonestamine antud koordinaatide järgi (tähis PA) koos tähistamisega tähegeneraatori abil, ringjoone (kaare) joonestamine antud keskpunkti ja raadiuse järgi, koordinaatteljestiku joonestamine jms. Raalist edastatakse sobivalt töödeldud numbriline informatsioon rullplotterile (joonis vormistatakse rullpaberile) või tasaplotterile (joonis vormistatakse tasandilisele lehele).

Kui esimese tõlgendusviisi puhul toimub lahendamine analoogselt käsitsitööga ning raal viib läbi samu operatsioone, mis joonestaja, siis teine tõlgendusviis on matemaatilisem. Ülesanne lahendatakse kolmemõõtmelises ruumis analüütilise geomeetria võrrandite abil. Nii näiteks tuleb sirgjoone DE ja tasandi ABC lõikepunkti leidmiseks lahendada võrrandisüsteem

$$\left. \begin{aligned} & \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix} (x - x_A) - \begin{vmatrix} x_A & z_A \\ x_B & z_B \end{vmatrix} (y - y_A) + \\ & \quad + \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} (z - z_A) = 0 \\ & \frac{(x - x_D)(y_E - y_D)}{(y - y_D)(x_E - x_D)} - 1 = 0 \\ & \frac{(z - z_D)(x_E - x_D)}{(x - x_D)(z_E - z_D)} - 1 = 0 \end{aligned} \right\} ..$$

Lahend projekteeritakse ekraanidele ε_1 (võrrand $z=0$), ε_2 ($y=0$) ja ε_3 ($x=0$); lahendi kujutiste punktid on määratud vastavalt koordinaadipaaridega $x_i, y_i; x_i, z_i$ ja y_i, z_i . Nii-sugune lahendusviis on sobiv positsiooniülesannete ja meetriliste ülesannete puhul.

Eespool toodud materjali illustreerimiseks esitame ühe kujutava geomeetria põhikonstruktsiooni — sirgjoone ja tasandi lõikepunkti

leidmise — tööprogrammid mõlema tõlgendusviisi järgi. Lähteandmeteks on tasand ABC ja sirge DE ; leitakse nende lõikepunkt L . Programmide tekst on koostatud algoritmilises keeles FORTRAN ja ära toodud lihtsustatud kujul.

Esimene programmidest on koostatud graafilise, teine aga matemaatilise tõlgendusviisi järgi.

REAL XA, YA, ZA, XB, YB, ZB, XC, YC, ZC, XD, YD, ZD, XE, YE, ZE, XL, YL, ZL, XF, YF, ZF, XG, YG, XG,	}	muutujate ja massiivide kirjeldamine
DIMENSION A1 (2), B1 (2), C1 (2), D1 (2), E1 (2), F1 (2), G1 (2), L1 (2), A2 (2), B2 (2), C2 (2), D2 (2), E2 (2), F2 (2), G2 (2), L2 (2)		
READ XA, YA, ZA, XB, YB, ZB, XC, YC, ZC, XD, YD, ZD, XE, YE, ZE		
CALL KO		
CALL PA (A1)	}	punktide A', B', C' joonestamine
CALL PA (B1)		
CALL PA (C1)		
CALL S1 (A1, B1)	}	sirgete $A'B'; B'C'$ joonestamine
CALL S1 (B1, C1)		
CALL PA (D1)	}	punktide D' ja E' joonestamine
CALL PA (E1)		
CALL S1 (D1, E1)		sirge $D'E'$ joonestamine
CALL PA (A2)	}	sama, eestvaatel
CALL PA (B2)		
CALL PA (C2)		
CALL S1 (A2, B2)		
CALL S1 (B2, C2)		
CALL PA (D2)		
CALL PA (E2)		
CALL S1 (D2, E2)		
CALL P1 (A1, B1, D1, E1, F1)		lõikepunkti $F' = A'B' \times D'E'$ leidmine
CALL PA (F1)		punkti F' joonestamine
CALL P5 (F1)		punkti F' muutmine ekraanile kuuluvaks
		punkti F'' leidmine sirgel $A''B''$ vertikaalse sidejoone abil
CALL PV (A2, B2, F1, F2)		punkti F'' joonestamine
CALL PA (F2)		
CALL P1 (B1, C1, D1, E1, G1)	}	sama, punkti G jaoks
CALL PA (G1)		
CALL P5 (G1)		
CALL PV (B2, C2, G1, G2)		
CALL PA (G2)		
CALL S1 (F2, G2)		abisirge $F''G''$ joonestamine
CALL P1 (D2, E2, F2, G2, L2)		lõikepunkti $L'' = D''E'' \times F''G''$ leidmine

```

CALL PA (L2)
CALL P5 (L2)
CALL PV (D1, E1, L2, L1)
CALL PA (L1)
STOP
END

```

punkti L'' joonestamine
 punkti L'' muutmine ekraanile ε_1 kuuluvaks
 punkti $L' \subset D'E'$ leidmine sidejoone abil
 punkti L' joonestamine

```

REAL XA, YA, ZA, XB, YB, ZB, XC, YC, ZC,
XD, YD, ZD, XE, YE, ZE, XF, YF, ZF, XG,
YG, ZG, XL, YL, ZL

```

```

DIMENSION A1 (2), B1 (2), C1 (2), D1 (2),
E1 (2), F1 (2), G1 (2), L1 (2), A2 (2), B2 (2),
C2 (2), D2 (2), E2 (2), F2 (2), G2 (2), L2 (2)

```

```

READ XA, YA, ZA, XB, YB, ZB, XC, YC, ZC,
XD, YD, ZD, XE, YE, ZE

```

```

CALL KO
CALL PA (A1)
CALL PA (B1)
CALL PA (C1)
CALL S1 (A1, B1)
CALL S1 (B1, C1)
CALL PA (D1)
CALL PA (E1)
CALL S1 (D1, E1)
CALL PA (A2)
CALL PA (B2)
CALL PA (C2)
CALL S1 (A2, B2)
CALL S1 (B2, C2)
CALL PA (D2)
CALL PA (E2)
CALL S1 (D2, E2)

```

kommentaand vt. eelmine programm

```
EXT F
```

parameeter-protseduuri kirjeldamine
 (võrrandisüsteem)

```
CALL SYST (F, A1, B1, C1, D1, E1, L1, A2, B2, C2, D2, E2, L2)
```

võrrandisüsteemi lahendav alam(tüüp)-
 programm

```
CALL PA (L1)
CALL PA (L2)
```

} lõikepunkti $L = DE \times ABC$ projektsioonide
 } joonestamine

```
STOP
```

```
END
```

```
SUBROUTINE F
```

võrrandisüsteemi kirjeldav alamprogramm

AINEREGISTER

- abipindade võte 154
- abitasandite võte 61, 155, 163
- abisfääride võte 155, 169
- afünne teisend 17
- afünsustelg 18
- aksonomeetria 24, 185
 - põhiteoreem 187
- algebraalne joon 105
 - pind 123
- analüütiline joon 105
 - pind 123
- Archimedese spiraal 123
- arhitektide meetod 216
- asumptoodid 111
- Bernoulli lemniskaat 158
- buroomeetod 224
- diaameeter 111
- dumeetria 187
- distsants 210
- dodekaeeder 93
- ebapunkt 12, 106
- ebasirge 12
- ebatasand 12
- eestvaade 25
- ehitiste perspektiivide tuletamine 222
- ekraan 9
- ekraani ristsirge lõikumine tasandiga 59
- ekstsentrilised abisfaarid 171
- ellips 111, 112, 153
 - ringjoone paralleelprojektsioonina 112
- ellipsi haripunkt 114
 - konstrueerimine kaasdiametrite jargi 115
 - konstrueerimine telgede jargi 114
 - lahiskõver kõverusringjoontest 115
 - teljed 112
 - telgede leidmine kaasdiametrite jargi 117
- ellipsit lahendav ovaal 117
- ellipsoid 134
- elliptiline paraboloid 134
 - silinder 134
- eriasendiline sirge 35
 - tasand 48
- esiekraan 25
- esiekraani risttasand 50
- esijalg 46
- esikur 25
- esilangusjoon 56
- fookus 111
- frontaal 35
- frontaalpind 48
- frontaalprojektsioon 25
- frontaalne kaldaksonomeetria 201, 204
 - kaldumeetria 201
 - kaldisomeetria 201
 - perspektiiv 226
- graafiline kõver 105
- harilik krüvijoone 119
- heitvari 237
- heksaeeder 93
- homoloogiategelg 20
- homoloogiatsenter 20
- horisont 210
- horisontpind 210
- horisontaal 35
- horisontaalpind 48
- horisontaalprojektsioon 25
- horisontaalne kaldaksonomeetria 203
 - kaldisomeetria 203, 204
- hulktahukas 91
- hüperbool 111, 153
- hüperbooli konstruktsioon 118
- hüperboolne paraboloid 134, 138
 - silinder 134

ideaaltahukas 93
 ikosaeder 93
 isomeetria 187

 joone järk 105
 joonpind 124, 135
 joonte iseäraseid punktid 107
 — projektsioonilised omadused 106
 juhtjoon 135
 juhtpind 137
 jälgjoon 12
 jälgpunkt 12, 34
 jälgsirged 46

kaasdiameetrid 111
 kabinetprojektsioon 201
 kahe tahuka lõikumine 98
 kahekatteline poordhüperboloid 127
 kaksvaade 24, 26
 kaksvaate telg 26
 kaldaksonomeetria 186, 201
 kaldekoonus 258
 kaldkrüüpind 141
 kaldprojektsioon 14
 karkasspind 124, 145
 keeme profiil 141
 kiivsirged 44
 kinemaatiline pind 123
 kolmnurkkeere 143
 kolmvaade 29
 kolmvaate peaomadus 30
 konkureerivad punktid 45
 konoid 137
 kontsentrilised abisfäärid 169
 kooniline krüüjoon 122
 — pind 135
 koonuselõiked 153
 koordinaat 29
 krüüjoon 119
 krüüjoone keerd 120
 — puutujatepind 143
 — samm 120
 — tõusunurk 121
 krüüjooneline liikumine 140
 krüüpind 140
 kujutamiskiir 9
 kujutamiskiirte pind
 kurvimeeter 110
 kuup 93
 kvadrikud 134
 kvooditud ristprojektsioon 24, 253
 kõvera järk 105
 — ligikaudne sirgestamine 109
 kõverus 116
 kõverusraadius 116
 kõverusringjoon 116
 kõveruscenter 116
 kõverpinna normaal 147
 — puutetasand 146
 — ja sirgjoone lõikumine 160

— ja tasandi lõikumine 156
 kõverpindade laotused 279
 kaanupunkt 107
 kulgekraan 29
 kulgekraani risttasand 50
 kulgjalg 34, 46
 kulgvaade 29

laotuv joonpind 135
 lisaekraani võte 74, 82
 lõige 94
 lõigu moondetegur 15
 lõikuvad sirged 43

militaarperspektiiv 203
 mituvaade 25
 mittelaotuv pind 135
 Monge'i meetod 24, 25
 — teoreem 177
 moondetegur 15, 186, 191

nivoojoon 11
 nivooipind 11, 48
 nivooirge 35
 normaalkrüüpind 140
 nurga ristprojektsioon 21
 nurk kahe sirge vahel 71
 — kahe tasandi vahel 71
 — sirgjoone ja tasandi vahel 73

objekti perspektiivi tuletamine 217
 — pööramisvõte 74, 75
 oktaeder 93
 omavar 237
 ortogonaalprojektsioon 14
 ovaal 117

pagupunkt 212
 parabool 111, 154
 parabooli konstruktsioone 119
 paraboolne silinder 134
 paralleelaksonomeetria 185
 paralleelprojekteerimine 14
 paralleelprojektsioon 14
 paralleelprojektsioonide omadused 14
 paralleelsed sirged 43
 peakiir 210
 pealtvaade 25
 peavertikaal 210
 perspektiiv 9, 210
 pildiekraan 210
 pildi põhisirge 211
 pindade kujutamine 124
 pinna kontuur 124
 — moodustaja 123
 Platoni tahukas 93
 prisma 91
 prismaline pind 137
 prismatoid 91
 profiilpind 48, 49

profiilprojektsioon 29
 profiilsirge
 projekteerimine 9
 projekteerimistsenter 9
 projekteeriv kiir 9
 — pind 10
 projektivne ruum 13
 projektsioon 9
 projektsioonipind 9
 projektsioonide uldomadused 9
 punkt ja joon eriasendilisel tasandil 50
 — — — uldasendilisel tasandil 50
 punkti aksonomeetriline kujutus 188
 — kaksvaade 25
 — kolmvaade 28
 — perspektiiv sirgetemeetodiga 221
 — perspektiivi tuletamine 216
 — projekteerimine lisaekraanile 83
 punktide meetod 216
 puutuja 106
 puutujatepind 137
 puutekoonuste meetod 243
 põhiekraan 25
 põhiekraani risttasand 49
 põhjalg 34, 46
 põhikiir 25
 põhilangusjoon 56
 pooramine ümber ekraani normaali 75
 — — nivoosirge 77
 poordellipsoid 127
 poordkoonus 127
 poordkoonuse lõiked 153
 poordparaboloid 127
 poordpind 125
 poordpinna ekvaator 125
 — kael 125
 — meridiaan 125
 — paralleel 125
 — puutekoonus 125
 — puutesfaar 126
 — puutesilinder 125
 — telg 125
 — võrrand 126
 — voo 125
 poordsilindri lõiked 151
 poorend 75
 puramud 91
 puramudiline pind 135

 ringjoon 111
 ringjoone evolvent 145
 — ligikaudne sirgestamine 109
 — perspektiiv 231
 ringjoonte ristaksonomeetriselised kujutised 193
 — ristlõike meetriselised kujutised 198
 — ristsomeetriselised kujutised 195
 ristaksonomeetria 186, 190
 ristlõike meetria 187, 197, 204
 ristlõike meetrilise teljestik 197
 risthuperbool 111

ristsomeetria 187, 194, 204
 ristsomeetriline teljestik 194
 ristprojektsioon 14, 21
 ristsirged 69
 risttasandid 70
 ruumiline kõverjoon 105
 ruumiveerand 27
 ruutvõrgu perspektiiv 226
 rõhtsirge perspektiivi tuletamine 220
 rõngaspind 130

 samakaldejooned 262
 seos moonde tegurite vahel 191
 sfaari ja poordsilindri lõiked 151
 sidejoon 26
 sihikiir 212
 silindrilise kruijoon 119
 — pind 135
 silindroid 137
 silmapunkt 210, 230
 sirge ja tasandi lõikepunkt 64
 — — — paralleelsus 66
 — — — ristseis 66
 — tõmbamine kattesaamatusse pagupunkti 236
 sirgetemeetod 216, 219
 sirgjoone jalgpunkt 34
 — kaldenurk 21
 — lõikumine ekraani risttasandiga 58
 — moonde tegur 15
 — muutmine ekraani normaaliiks 86
 — punkt kujutus 11
 sirgjoonte perspektiivid 212
 sirglõigu jaotamine antud vahekorras 33
 — — perspektiivil antud vahekorras
 — ristprojektsioon 21
 sirklivõte 39
 sõlmpunkt 107
 sugavus 211
 sugavusjoon 210

 taandatud moonde tegur 194
 tagasipoorde punkt 108
 tahukas 91
 tahuka lõikumine eriasendilise tasandiga 94
 — — sirgega 97
 — — uldasendilise tasandiga 94
 — pinnalaotus 101
 tasandite lõikumise ulduhtum 80
 — paralleelsus 62
 — perspektiivid 214
 tasandi jälgede tuletamine 47
 — frontaal 54
 — horisontaal 53
 — kaldenurgad 57
 — langusjooned 56
 — lõikumine ekraani risttasandiga 59
 — muutmine ekraani risttasandiks 85
 — maaramisandmed 45
 — nivoosirged 53
 — pagusirge 214

— seisuleht 214
— sirgkujutis 11
— telgpunktid 46
tasandiline kõverjoon 105
teist järku pindade lõikejoone lagumine 174
— — pöördpinnad 127
teljeline afliinsus 17
teljeline sümmeetria 19
teljevaba kaksvaade 41
teljestiku jälgkolmnurk 190
— ristprojektsiooni saamine 192
— ühikkolmik 186
tetraeeder 93
topograafiline pind 123, 264
topograafilise pinna langusjoon 262
— — profiil 261
— — samakaldejoon 262
torukruvipind 145
transtsendentne joon 105
trimeetria 187
tsentraalaksonomeetria 186

tsentraalprojektsioon 9, 210
tsukiline pind 145
tuumpunkt 210
tõeline kuju 42, 72
tõeline pikkus 38
tähttahukas 93
täisnurkse kolmnurga võte 38
uute kujutamiskiirte võte 75, 88

varjud 237
— aksonomeetrias 246
— perspektiivis 248
vastandkiirte meetod 243
võrgumeetod 216, 226

ühekatteline pöördhüperboloid 127
ühise sümmeetriatasapinnaga teist järku pinnad 173
üldasendiline sirge 35
— tasand 48
üldistatud kolmvaade 84

SISUKORD

- Eessõna 3
- Tahistused 4
- I. Sissejuhatus 6**
- § 1 Kujutava geomeetria sisu ja eesmärk 6
- § 2 Õppemetoodilis- nõuandeid 7
- § 3 Lauseid elementaargeomeetriast 8
- II. Projekteerimine ja projektsioonide liigid 9**
- § 4 Projekteerimine Projektsioonide liigid 9
- § 5 Nivoo-pinnad Nivoojooned Jaljed 11
- § 6 Projektivse ruumi mõiste 12
- § 7 Paralleelprojektsioonid ja nende omadused 14
- § 8 Teljelne afinsus 17
- § 9 Ristprojektsioonid ja nende omadused 21
- § 10 Projektsioonidele esitatavad nõuded 23
- § 11 Objekti maaravate jooniste saamise meetodid 24
- III. Monge'i meetod. Punkti, sirgjoone ja tasandi kasitlus Monge'i meetodil 25**
- § 12 Monge'i meetod Punkti kaksvaade 25
- § 13 Punkti kolmvaade 28
- § 14 Sirgjoone kaksvaade 32
- § 15 Eriasendilised sirged 35
- § 16 Uldasendilise sirglõigu pikkus ja kaldenurgad 38
- § 17 Teljevaba kaksvaade 41
- § 18 Kahe sirgjoone vastastikused asendid 43
- § 19 Tasandi kujutamine 45
- § 20 Eriasendilised tasandid 48
- § 21 Punkt ja joon tasandil 50
- § 22 Tasandi nivoosirged 53
- § 23 Tasandi langusjooned ja kaldenurgad 56
- § 24 Sirgjoone ja tasandi ning kahe tasandi lõikumise enjuhtumid 58
- § 25 Tasandite lõikumine ja paralleelsus ulduhtumil 60
- § 26 Sirgjoone ja tasandi lõikumine ning paralleelsus ulduhtumil 64
- § 27 Sirgjoone ja tasandi ristseis 66
- § 28 Ristsirged ja risttasandid 69
- § 29 Nurgad sirgete ja tasandite vahel 71
- IV. Lisaprojektsioonide tuletamine ja kasutamine 74**
- § 30 Lisaprojektsioonide tuletamise viisid 74
- § 31 Objekti pooramisvõte 75
- § 32 Tasandilise kujundi tõelise kuju tuletamine pooramise teel 79
- § 33 Lisaakraani võte 82
- § 34 Uute kujutamiskurte võte 88
- V. Hukktahukad 91**
- § 35 Hukktahukate tahtsamad liigid 91
- § 36 Tahuka lõikumine tasandiga ja sirgega 94
- § 37 Kahe tahuka omavaheline lõikumine 98
- § 38 Tahukate pinnalaotuste tuletamine 101
- VI. Kõverjooned ja kõverpinnad 105**
- § 39 Jooned ja nende projektsioonilised omadused 105
- § 40 Kõverjoone lühikaudne sirgestamine 109
- § 41 Teist jarku jooned ja nende projektsioonilised omadused 110
- § 42 Ellips 112
- § 43 Hüperbool ja parabooli konstruktsioonid 118
- § 44 Kruvi-jooned 119
- § 45 Pinnad 123
- § 46 Poordpinnad 125
- § 47 Uldised teist jarku pinnad 131
- § 48 Joonpinnad 135
- § 49 Kruvipinnad 140
- § 50 Karkasspinnad 145
- § 51 Kõverpinna puutetasand 146
- § 52 Poordpinna ristprojektsioon pinna telje kaldasendi puhul 149

- § 53. Lihtsamate teist järku pindade tasan-
dilised lõiked 151
- § 54. Pindade lõikumisülesannete lahendami-
se võtted 154
- § 55. Kõverpinna ja tasandi lõikumine 156
- § 56. Kõverpinna ja sirgjoone lõikumine 160
- § 57. Abitasandite kasutamine pindade lõi-
kejoonte tuletamisel 163
- § 58. Abisfäärade kasutamine pindade lõike-
joonte tuletamisel 169
- § 59. Teist järku pindade lõikumise erijuh-
tumid 173
- § 60. Kõverpindade laotused 179
- VII. Aksonomeetria** 185
- § 61. Aksonomeetria kui kujutamismeetodi
teoreetilised alused 185
- § 62. Ristaksonomeetria 190
- § 63. Ristisomeetria 194
- § 64. Standardne ristdimeetria 197
- § 65. Kaldaksonomeetria tähtsamad liigid 201
- § 66. Näited 205
- VIII. Tsentraalprojektsioon (perspektiiv)** 210
- § 67. Põhimõisted 210
- § 68. Perspektiiviõpetuse alused 212
- § 69. Perspektiivi tuletamine punktidemeeto-
diga 216
- § 70. Perspektiivi tuletamine sirgetemeetodi-
ga 219

- § 71. Võrgumeetod 226
- § 72. Silmapunkti ja pildiekraani asukoha
valik 229
- § 73. Ringjoone perspektiiv 231
- § 74. Konstruksioone perspektiivil 234

IX. Varjud 237

- § 75. Põhimõisted 237
- § 76. Näiteid varjude konstrueerimise kohta
kaksvaatel 238
- § 77. Erimeetodeid üldiste pöördpindade var-
jude konstrueerimiseks 243
- § 78. Varjud aksonomeetrilistel kujutistel 246
- § 79. Varjud perspektiivis 248

X. Kvooditud ristprojektsioon 253

- § 80. Punkti ja sirgjoone kvooditud ristpro-
jektsioon 253
- § 81. Tasandite lõikumine. Katused 255
- § 82. Antud kaldenurgaga tasand läbi antud
sirge ning selle rakendusi 257
- § 83. Topograafilise pind 261
- § 84. Topograafilise pinna lõikumine teiste
pindadega 263
- Lisa 1. Kujutava geomeetria põhikonstrukt-
sioonid 266
- Lisa II. Raali kasutamisest kujutava geomeet-
ria ülesannete lahendamisel 267
- Aineregister 271

Отт Рюнк, Николай Палувер, Андрес
Тальвик.
Начертательная геометрия.
4-е издание, исправленное. На эстонском
языке. Художник-оформитель Р. Эйлсен.
Таллин, «Валгус».
Toimetaja U. Alas. Kunstiline toimetaja
H. Puзанov. Tehniline toimetaja K. Ehte.
Korrektorid I. Nurm, I. Pikner.

ИБ № 4096.
Laduda antud 20. 06. 85. Trükkida antud
5. 02. 86. Formaati 70×90/16. Trükipaber
nr. 1. Kiri Baltika. Kõrgtrükk. Tingtrükipoog-
naid 20,18. Tingvärvitõmmiseid 20,63. Arves-
tuspoognaid 19,91. Trükiarv 4000. Tellimuse
nr. 3883. Hind 85 kop. Kirjastus «Valgus»,
200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10. Trükikoda
«Kommunist», 200001 Tallinn, Pikk t. 2.