

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 304

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ
И АВТОМАТИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ
IX



Ср. 6.1

TALLINNA POLUTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 304

1971

УДК 621

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ
И АВТОМАТИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ
IX

10752

ТАЛЛИН 1971

С о д е р ж а н и е

	Стр.
1. Х.В. Силламаа. Свойства и взаимосвязи адмитансных многополюсных элементов.	3
2. Х.В. Силламаа. Структурные свойства гираторного элементор-пространства.	21
3. В.А. Кукк. К численному обращению матрицы проводимостей.	35
4. Г.Э. Якобсон. Общая декомпозиция конечных автоматов.	43
5. Я.Н. Олий. Об оптимальном расположении наблюдений для линейной динамической системы	53
6. О.А. Аарна. О математическом описании и оптимизации химико-технологических комплексов	63
7. О.А. Аарна. О структурном анализе химико-технологических комплексов.	73
8. Я.М. Вырк, К.А. Иьерс. Модифицированные передаточные функции с равноволновой АЧХ. . .	81
9. Я.М. Вырк. Последовательная частотная коррекция измерительных преобразователей	87
10. Х.А. Таммет. О действии обратной связи при измерении коэффициента шума полупроводниковых приборов.	97
11. Н.А. Варес, Г.К. Самолевский. Решение уравнений вторичного электромагнитного поля торцовой асинхронной машины.	103
12. И.В. Давыдов. Статика электропривода по системе МУ-Д с электрическим суммированием обратной связи по току.	111
13. Э.П. Калм. Производительность труда рабочих приборостроительного сборочного конвейера .	121



Ep. 10252

УДК 621.372.061.4

Х.В. Силламаа

СВОЙСТВА И ВЗАИМОСВЯЗИ АДМИТАНСНЫХ
МНОГОПОЛЮСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Синтез линейных цепей с заданными свойствами реализуется, как правило, при помощи надлежащим образом соединенной совокупности простейших элементов. Если синтезируемая цепь в целом описывается полюсной моделью — многополюсником (обычно неавтономным) —, то разумно требовать, чтобы каждый составной элемент в отдельности был бы реализуемым и соответствовал также модели многополюсника. При реализации чаще всего используются двухполюсники (для пассивных обратимых цепей), но иногда неизбежно применение многополюсных элементов, в частности трехполюсников (активные необратимые цепи). Для общего обозначения таких реализующих элементов (точнее, их моделей) в [1] введено понятие элемента. Роль элемента могут играть весьма различные многополюсники, свойства которых могут быть описаны единственным количественным параметром. В настоящей работе подробнее исследуются свойства и взаимные связи различных элементов. При этом мы ограничиваемся классом адмитансных многополюсников (многополюсники, обладающие матрицей узловых проводимостей).

В [1] показано, что любой адмитансный многополюсник может быть представлен через конечную сумму транзоров. Тем не менее, часто целесообразно применять другие классы элементов (например, реализация адмитора значительно проще, чем осуществление транзора, так как последний реализуется лишь на базе псевдолинейных цепей). Поэтому важно знать взаимосоотношения различных классов элементов и возможности их эквивалентной замены.

Так как любые адмитансные многополюсники могут быть получены как некоторая сумма транзоров, то целесообразно систематически проанализировать все возможности суммирования транзоров. Прежде всего рассмотрим суммы транзоров на трех полюсах. На трех заранее обозначенных полюсах транзор может быть размещен шестью способами, поэтому элементар-класс транзоров состоит из шести представителей [1]. В таблице 1 приведены различные характеристики (неопределенные матрицы узловых проводимостей, унитарные схемы замещения, матричные графы *) всех единичных транзоров, а некоторые дополнительные их свойства описаны в приложении 2. При этом следует учесть, что каждый из этих транзоров является фактически представителем целого бесконечного подкласса транзоров, отличающихся величиной параметра (для представляющего транзора параметр принят единичным). Характерной для каждого подкласса является структура расположения элементов в матрице проводимости (что эквивалентно способу нумерации полюсов транзора). В дальнейшем всюду под элементом подразумевается именно приведенный элемент с единичным значением параметра как представитель соответствующего класса.

Результаты суммирования и вычитания двух единичных транзоров на трех полюсах представлены в таблице 2. При этом порождается ряд новых элементар-классов:

$$1) \text{ адмиторы: } A_{ab} = A_{ba} = T_{abc} + T_{bac} = T_{cab} + T_{cba} \quad (1)$$

$$2) \text{ консилоры: } C_{abc} = T_{abc} + T_{cab} \quad (2)$$

$$3) \text{ инверторы иммитанса: } I_{abc} = I_{cba} = T_{abc} + T_{cba} \quad (3)$$

$$4) \text{ гираторы: } G_{abc} = G_{bca} = G_{cab} = T_{abc} - T_{cba} = T_{bca} - T_{acb} = T_{cab} - T_{bac} \quad (4)$$

$$5) \text{ диплоры: } D_{abc} = -D_{cba} = T_{bca} - T_{cab} = T_{acb} - T_{bac} \quad (5)$$

$$6) \text{ репульсоры напряжения: } RV_{abc} = -RV_{acb} = T_{abc} - T_{acb} \quad (6)$$

$$7) \text{ репульсоры тока: } RA_{abc} = -RA_{bac} = T_{abc} - T_{bac} \quad (7)$$

По-видимому, ряд представленных элементаров неизвестен в литературе, поэтому в приложении 2 дана более подробная характеристика всех названных элементар-классов (включая и символику). Типичные характеристики всех представителей каж-

* См. приложение 1.

Т а б л и ц а I

ТРАНЗОР				
Обо- значение	Матрица Y	Унисторная схема замещения	Матричный граф	Символ
T_{123}	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$			
T_{213}	$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}$			
T_{231}	$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$			
T_{321}	$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$			
T_{312}	$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$			
T_{132}	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$			

дого класса даны в таблицах 3а, 3б и 3в. Кроме того, в таблице 2 появляется также вырожденный элементор — изолятор [I] с нулевой матрицей проводимости (обозначение — 0).

Суммирование трех единичных транзоров дает еще 14 дополнительных элементор-классов, которые ввиду большей сложности представляют меньший интерес. Более элементарным из них оказывается лишь класс унаторов [1,2] с двумя различными представителями (табл. 3в). Унатор выражается через тран-

Т а б л и ц а 2

	T_{123}	T_{213}	T_{231}	T_{321}	T_{312}	T_{132}	$-T_{123}$	$-T_{213}$	$-T_{231}$	$-T_{321}$	$-T_{312}$	$-T_{132}$
T_{123}	$2T_{123}$	A_{12}	C_{231}	I_{123}	C_{123}	A_{23}	0	RA_{123}	D_{312}	G_{123}	$-D_{231}$	RV_{123}
T_{213}	A_{12}	$2T_{213}$	A_{13}	C_{213}	I_{213}	C_{132}	$-RA_{123}$	0	$-RV_{231}$	D_{231}	$-G_{123}$	$-D_{123}$
T_{231}	C_{231}	A_{13}	$2T_{231}$	A_{23}	C_{312}	I_{231}	$-D_{312}$	RV_{231}	0	RA_{231}	D_{123}	G_{123}
T_{321}	I_{123}	C_{213}	A_{23}	$2T_{321}$	A_{12}	C_{321}	$-G_{123}$	$-D_{231}$	$-RA_{231}$	0	$-RV_{312}$	D_{312}
T_{312}	C_{123}	I_{213}	C_{312}	A_{12}	$2T_{312}$	A_{13}	D_{231}	G_{123}	$-D_{123}$	RV_{312}	0	RA_{312}
T_{132}	A_{23}	C_{132}	I_{231}	C_{321}	A_{13}	$2T_{132}$	$-RV_{123}$	D_{123}	$-G_{123}$	$-D_{312}$	$-RA_{312}$	0

зоры следующей формулой:

$$U_{abc} = U_{bca} = U_{cab} = T_{abc} + T_{bca} + T_{bac}. \quad (8)$$

Суммирование более чем трех единичных транзоров, как и суммирование различных неединичных транзоров, дает уже значительно более сложные многополюсники, не представляющие интерес в роли элемента.

Значительно больше сочетаний, естественно, появляется при суммировании транзоров на четырех полюсах. Как известно [1], в этом случае каждый элементор-класс может содержать до $4! = 24$ элементоров. Анализ выявил ряд достаточно простых элементор-классов. Прежде всего следует указать на элементор-класс, представители которого соответствуют известным из литературы [3] трансакторам (точнее, трансакторам, управляемым напряжением). Класс трансакторов состоит из 6 представителей, свойства которых подробнее характеризуются в таблице 4 и в приложении 2. Связь с транзорами может быть в общем виде представлена уравнением

$$TA_{abcd} = TA_{badc} = T_{abd} - T_{abc} = T_{acd} - T_{bcd} = T_{bac} - T_{bad} = T_{bdc} - T_{adc}. \quad (9)$$

Так как трансактор, согласно (9), может быть получен алгебраическим суммированием двух транзоров различными способами, то отсюда вытекают взаимные связи между различными транзорами на любых четырех полюсах

$$T_{abc} = T_{abd} + T_{bcd} - T_{acd} = T_{abd} + T_{bad} - T_{bac} = T_{abd} + T_{adc} - T_{bdc}. \quad (10)$$

Т а б л и ц а 3а

Обо- значение	Матрица Y	Унисторная схема замещения	Матричный граф
АДМИТОР			
A_{12}	$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$		
A_{13}	$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$		
A_{23}	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$		
ГИРАТОР			
G_{123}	$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$		
ДИПЛОР			
D_{123}	$\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$		
D_{231}	$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}$		
D_{312}	$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$		

КОНСИЛОР			
C_{123}	$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$		
C_{231}	$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}$		
C_{312}	$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$		
C_{132}	$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix}$		
C_{213}	$\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}$		
C_{321}	$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$		
ИНВЕРТОР ИММИТАНСА			
I_{123}	$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$		
I_{231}	$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{matrix}$		
I_{312}	$\begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}$		

Т а б л и ц а 3в

РЕПУЛЬСОР НАПРЯЖЕНИЯ			
RV_{123}	0 0 0		
	-2 1 1		
	2 -1 -1		
RV_{231}	-1 2 -1		
	0 0 0		
	1 -2 1		
RV_{312}	1 1 -2		
	-1 -1 2		
	0 0 0		
РЕПУЛЬСОР ТОКА			
RA_{123}	-1 1 0		
	-1 1 0		
	2 -2 0		
RA_{231}	0 2 -2		
	0 -1 1		
	0 -1 1		
RA_{312}	1 0 -1		
	-2 0 2		
	1 0 -1		
УНАТОР			
U_{123}	1 0 -1		
	-1 1 0		
	0 -1 1		
U_{321}	1 -1 0		
	0 1 -1		
	-1 0 1		

ТРАНСАКТОР			
Обо- значение	Матрица Υ	Унисторная схема замещения	Матричный граф
TA_{1234}	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}$		
TA_{1342}	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$		
TA_{4132}	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$		
TA_{4321}	$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$		
TA_{2431}	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$		
TA_{2314}	$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}$		

Эти связи дополняют соотношения, которые могут быть получены для транзоров на трех полюсах из формулы (I) для адмитора в виде

$$T_{abc} = T_{abd} + T_{bad} - T_{bac} = T_{cab} + T_{cba} - T_{bac} = T_{dab} + T_{dba} - T_{bac} \quad (II)$$

Соответствующее исследование показало, что формулы (IO) и (II) вместе полностью (с избытком) описывают всевозможные связи между транзорами на четырех полюсах.

Таблица 5

УНИАКТОР			
Обозначение	Матрица Y	Унисторная схема замещения	Матричный граф
UA_{1234}	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$		
UA_{1342}	$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$		
UA_{4132}	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$		
UA_{4321}	$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$		
UA_{2431}	$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$		
UA_{2314}	$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$		

Трансактор является простейшим четырехполюсным адмитансным элементом и представляет собой четырехполюсный аналог транзора ("источник тока, управляемый напряжением"). Можно указать и на другие элементор-классы, имеющие аналоги среди трехполюсников. Среди них определенный интерес представляет класс униакторов, свойства которых указаны в таблице 5 и в приложении 2. Данный класс содержит 6 различных элементоров, подобных унаторам. Связь с транзорами может быть дана в виде:

$$\begin{aligned}
 UA_{abcd} &= T_{abc} + T_{bca} + T_{bac} + T_{cda} = \\
 &= T_{bcd} + T_{cdb} + T_{cbd} + T_{dab} = \\
 &= T_{cda} + T_{dac} + T_{dca} + T_{abc} = \\
 &= T_{dab} + T_{abd} + T_{adb} + T_{bcd}.
 \end{aligned} \tag{I2}$$

В этих формулах первые три транзора образуют соответствующий унатор (см. приложение 2).

В то время как униактор может быть представлен как сумма четырех единичных транзоров, существуют, конечно, и более простые элементар-классы на четырех полюсах, порождаемые суммированием двух транзоров. В качестве примера можно указать на элементар-класс (содержащий 12 представителей), один представитель которого имеет вид

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -I \\ -I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & I \end{bmatrix} = A_{14} - TA_{1342} = T_{312} + T_{341} = T_{342} + T_{412}. \tag{I3}$$

Однако целесообразность использования этого и других аналогичным образом получаемых классов многополюсников в качестве элемента при практической реализации цепей требует более детального анализа. Поэтому их дальнейшее перечисление не обосновано, тем более, что при необходимости для всех существует разложение на трехполюсные элементы (хотя это, как правило, не единственное).

Провести более подробный анализ элементов, порожденных суммированием транзоров на пяти или более полюсах, также не имеет особого смысла ввиду большей сложности таких классов многополюсников. Два трехполюсника на пяти полюсах имеют лишь один общий полюс и поэтому не образуют элементар-классов с существенно новыми свойствами (появляются цепочки простых элементов, подобно тому, как диглор соответствует цепочке двухполюсников). Поэтому на пяти полюсах существенно новыми могут оказаться лишь достаточно сложные элементар-классы, порождаемые тремя или большим количеством одинаковых элементов.

В итоге для адмитансных цепей наиболее существенными классами элементов следует считать трансформаторы, адмиторы, гираторы, унаторы и трансакторы, хотя не все они необходимы при элементорном представлении адмитансных цепей. Этим элементам характерно еще одно существенное свойство описывающих их матричных графов: все ребра графа образуют единственный замкнутый цикл. Данное свойство может быть принято за основу при разработке соответствующих алгоритмов при разложении данной цепи на элементы, исходя из заданного матричного графа (или от неопределенной матрицы проводимости).

При синтезе и реализации цепей часто находят применение и такие элементы, для которых адмитансное представление отсутствует (например, идеальный трансформатор, конвертор иммитанса и т.д.). Для таких элементов в [1] указана возможность получения адмитансного представления в результате введения дополнительных внутренних узлов, откуда следует также возможность их реализации с помощью трансформаторов (но при более сложной структуре соединения). Однако более подробное исследование этих проблем выходит за рамки данной статьи.

Л и т е р а т у р а

1. Х.В. С и л л а м а а. Систематика элементов в теории цепей. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 288, Таллин, 1970.
2. S. J. M a s o n. Topological analysis of linear nonreciprocal networks. Proc. IRE, 1957, v. 45, pp. 829-838.
3. G. E. S h a r p e. Transactors. Proc. IRE, 1957, v. 44, p. 692.
4. W. K. C h e n. Matrix graph and bipartite graphs. Trans. IEEE, CT-12, 1965, June, pp. 268-269.
5. А.Н. М и л я х, А.К. Ш и д л о в с к и й. Принцип взаимности и обратимость явлений в электротехнике. Наукова думка. Киев, 1967.
6. K. L. S u. Active network synthesis. Mc-Graw Hill, New York, 1965.
7. Y. C h o w, P. H. R o e. A note on matrix graphs. Trans. IEEE, CT-10, 1963, June, pp. 308-310.

Properties and mutual relations of
the admittant multipole elementors

Summary

The linear multipoles possessing the node-admittance matrix are named admittant multipoles. The representation of such multipoles by a connection of a set of some elementary multipoles called elementors is discussed. The properties of the most important elementor classes as admittors, transors, gyrators, diplers, transactors and some others are investigated and their principal characteristics tabulated. The complete system of equations is represented for an equivalent replacement of different elementors.

Матричный граф

Матричным графом [4,7] обычно называется сигнальный граф, представляющий определяемое данной матрицей преобразование векторов. В данной работе матричный граф соответствует неопределенной матрице узловых проводимостей цепи. Источники такого матричного (сигнального) графа соответствуют потенциалам всех полюсов цепи (изображены на фигурах как верхние вершины), а стокам (нижние вершины) соответствуют токи всех полюсов. Каждому ненулевому элементу матрицы Y_{ij} соответствует дуга графа от верхней вершины i к нижней вершине j с передачей Y_{ij} . Ввиду двойкой центрированности неопределенной матрицы проводимости сумма передач всех дуг, инцидентных данной вершине, равна нулю для всех вершин графа. Ввиду принятого способа изображения (все дуги направлены сверху вниз от источников к стокам) на фигурах стрелки опущены. Если ненулевые элементы матрицы отличаются лишь знаком (+I и -I), то знак веса дуги удобно различать способом начертания дуги (например, разноцветно) без прибавления величины весового коэффициента. В таблицах данной статьи положительные дуги при весе +I обозначены сплошной линией (при +2 двойной линией), а при весе -I - прерывистой линией (при -2 двукратной).

Матричные графы являются удобным способом анализа элементорных представителей адмитансных многополюсников ввиду легко обозримых топологических свойств графов, характерных каждому элементор-классу. Следует также указать на близость адмитансного матричного графа к известным унитарным схемам замещения [2]: совмещая вершины источника и стока, соответствующие каждому полюсу, опуская возникающиеся петли и перемня знаки всех передач оставшихся дуг на обратные, в итоге получим унитарную схему замещения.

Основные классы адмитансных элементов

Адмитор A_{ab} - двухполюсник, включенный к узлам a и b . Ввиду симметрии свойств адмитора, вытекающей из уравнений

$$i_a = -i_b = g(u_a - u_b), \quad (1П)$$

имеет место соотношение (инвариантность к переименованию зажимов)

$$A_{ab} = A_{ba}. \quad (2П)$$

Гиратор G_{abc} - трехполюсный элемент с кососимметрической матрицей узловых проводимостей. Ввиду симметрии имеют место соотношения

$$G_{abc} = G_{bca} = G_{cab} = -G_{acb} = -G_{bac} = -G_{cba}, \quad (3П)$$

выражающие инвариантность гиратора относительно циклического переименования полюсов. Положительным целесообразно считать гиратор, если индексы образуют четную перестановку (например G_{123} , G_{341} и т.д.). Свойства гиратора подробно описаны в литературе [2,5].

Диплор D_{abc} - трехполюсный элемент с симметрической матрицей проводимости. Может быть рассмотрен как цепочное соединение положительного и отрицательного адмиторов, имеющих один общий полюс, т.е.

$$D_{abc} = A_{bc} - A_{ab}. \quad (4П)$$

Очевидно

$$D_{abc} = -D_{cba}. \quad (5П)$$

Аналогично гиратору положительным целесообразно считать диплор при четной перестановке множества индексов.

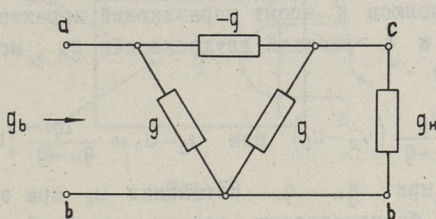
Инвертор иммитанса I_{abc} [6] - трехполюсный элемент с симметрической матрицей проводимости. Может быть выражен через адмиторы

$$I_{abc} = A_{ab} + A_{bc} - A_{ac}. \quad (6П)$$

Отсюда вытекает соотношение

$$I_{abc} = I_{cba}. \quad (7П)$$

Название элемента связано с его свойством, иллюстрируемым на фиг. 1П.



Фиг. 1П.

Если к определенным зажимам элемента включить дополнительную проводимость g_n (к зажимам b и c элемента I_{abc}), то входная проводимость между другой парой полюсов (пара a и b) равняется

$$g_{b \times (ab)} = -\frac{g^2}{g_n}. \quad (8П)$$

Консилор C_{abc} - трехполюсный элемент, характеризуемый уравнениями

$$\begin{aligned} i_a &= g(u_a - u_c) \\ i_b &= g(u_a - u_b) \\ i_a + i_b + i_c &= 0. \end{aligned} \quad (9П)$$

Элемент можно рассматривать как соединение гиратора и адмитора

$$C_{abc} = G_{abc} + A_{ab}, \quad (10П)$$

поэтому он является пассивным элементом. Характерный для консилора режим появляется при включении внешнего адмитора к зажимам b и c . Оказывается, что при этом входная проводимость между зажимами a и b не зависит от внешнего адмитора [5, стр. 147].

Регульсор. Этим наименованием объединены два сходных по уравнениям трехполюсных элементов-класса, включающих необратимые и активные элементы.

Регульсор напряжения RV_{abc} - элемент, характеризуемый уравнениями

$$i_b = -i_c = g(u_b + u_c - 2u_a); i_a = 0. \quad (I3П)$$

Потенциал полюса а носит управляющий характер. Включая к полюсам b и с внешний двухполюсник g_n , можем получить соотношения

$$u_b - u_c = \frac{2g}{g_n - g} (u_a - u_b) \quad \text{или} \quad u_b - u_c = \frac{2g}{g_n + g} (u_a - u_c). \quad (I2П)$$

Видно, что при $g_n = g$ потенциал u_c при заданном $u_a - u_b$ стремится к бесконечности, поэтому линейный режим сохраняется лишь при $u_a = u_b$. С другой стороны, при $g_n = 0$ ($i_b = i_c = 0$) имеем

$$u_a = \frac{u_b + u_c}{2}. \quad (I3П)$$

Из основных уравнений вытекает условие

$$RV_{abc} = -RV_{acb}. \quad (I4П)$$

Репульсор тока RA_{abc} - элементор, характеризуемый уравнениями

$$i_a = i_b = -\frac{1}{2}i_c = g(u_a - u_b). \quad (I5П)$$

Своеобразный элементор, который с одним или даже двумя внешними адмиторами не может обеспечить нормальный (линейный) режим работы. Имеет место соотношение

$$RA_{abc} = -RA_{bac}. \quad (I6П)$$

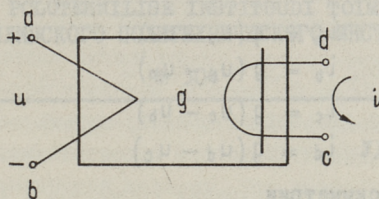
Транзор T_{abc} - трехполюсный элементор, соответствующий управляемому (напряжением) источнику тока и характеризуемый уравнениями

$$i_c = -i_b = g(u_a - u_b); i_a = 0. \quad (I7П)$$

Из полюсов а соответствует управляемому полюсу, а с (начальному) и b (конечному) полюсам источника тока. Является идеализацией пентода, полевого транзистора и т.д. (индексы-обозначения соответствуют последовательности сетка - катод - анод или затвор - исток - сток). Транзор является необратимым, активным элементором.

Трансактср TA_{abcd} - четырехполюсный элементор, соответствующий управляемому напряжением источнику тока (четыреполюсный аналог транзора). Описывается уравнениями

$$i_c = -i_d = g(u_b - u_a); i_a = i_b = 0. \quad (I8П)$$



Фиг. 2П

Элемент описан Шарпом [3]. Им же предложено обозначение фиг. 2П. Обладает симметрией, выражаемой соотношением

$$TA_{abcd} = TA_{badc} = -TA_{bacd} = -TA_{abdc}. \quad (19П)$$

Положительными целесообразно считать трансакторы с четной перестановкой множества индексов. Связи с другими элементами могут быть даны соотношениями

$$TA_{abcd} - TA_{dcba} = G_{cbd} + G_{acd} = G_{abd} + G_{acb} \quad (20П)$$

$$TA_{abcd} + TA_{dcba} = A_{ad} + A_{bc} - A_{ab} - A_{cd} = D_{cba} + D_{adc} = D_{dab} + D_{bcd}. \quad (21П)$$

Унатор U_{abc} - трехполюсный элемент, описанный Мэзоном [2]. Из основных уравнений

$$\begin{aligned} i_a &= g(u_a - u_c) \\ i_b &= g(u_b - u_a) \\ i_c &= g(u_c - u_b) \end{aligned} \quad (22П)$$

вытекает инвариантность унатора к циклическому переименованию полюсов

$$U_{abc} = U_{bcd} = U_{cab}. \quad (23П)$$

Связь с другими элементами можно давать в виде

$$U_{abc} = A_{ac} + T_{abc} = A_{ab} + T_{bca} = A_{bc} + T_{cab} \quad (24П)$$

$$U_{abc} - U_{cba} = G_{abc} \quad (25П)$$

$$U_{abc} + U_{cba} = A_{ab} + A_{bc} + A_{ac}. \quad (26П)$$

Униактор UA_{abcd} - четырехполюсный элемент, аналог унатора. Основные уравнения

$$\begin{aligned}
 i_a &= g(u_a - u_d) \\
 i_b &= g(u_b - u_a) \\
 i_c &= g(u_c - u_b) \\
 i_d &= g(u_d - u_c)
 \end{aligned}
 \tag{27П}$$

дают соотношения симметрии

$$UA_{abcd} = UA_{bcda} = UA_{cdab} = UA_{dabc},
 \tag{28П}$$

выражающие инвариантность униактора относительно циклического переименования полюсов. Связи с другими элементами могут быть даны соотношениями

$$UA_{abcd} = TA_{bdca} + A_{ab} + A_{cd} = A_{ad} + A_{bc} - TA_{acdb}
 \tag{29П}$$

$$UA_{abcd} = U_{abc} + T_{cda} = U_{bcd} + T_{dab} = U_{cda} + T_{abc} = U_{dab} + T_{bcd}
 \tag{30П}$$

$$UA_{abcd} + UA_{dcba} = A_{ab} + A_{bc} + A_{cd} + A_{da}
 \tag{31П}$$

$$UA_{abcd} - UA_{dcba} = G_{abc} + G_{acd} = G_{abd} + G_{bcd}.
 \tag{32П}$$

УДК 621.372.061

Х.В. Силламаа

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ГИРАТОРНОГО
 ЭЛЕМЕНТОР-ПРОСТРАНСТВА

В работе [1] было показано, что адмитансное элементар-пространство многополюсников естественным образом распадается на симметрическое и гираторное подпространства. Точками гираторного элементар-пространства тогда представляются многополюсники, обладающие кососимметрической матрицей узловых проводимостей

$$Y_g = [y_{ij}]; y_{ij} = -y_{ji}, i \neq j; y_{ii} = 0; i = 1 \dots n. \quad (1)$$

Такой многополюсник может быть представлен как некоторая схема соединения идеальных гираторов G_{ijk} с вершинами на полюсах i, j и k и с неопределенной матрицей узловых проводимостей

$$Y_G = \gamma_{ijk} \begin{matrix} & \dots & i & \dots & j & \dots & k & \dots & n \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & I & \dots & -I & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -I & \dots & 0 & \dots & I & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & I & \dots & -I & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] & \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ n \end{matrix} \end{matrix} \quad (2)$$

где γ_{ijk} - коэффициент гирации ("величина проводимости гиратора"). В дальнейшем часто будем пользоваться приведенным гиратором G_{ijk} , соответствующим единичному значению коэффициента гирации γ_{ijk} , т.е.

$$G_{ijk} = \gamma_{ijk} g_{ijk}. \quad (3)$$

Из матрицы узловых проводимостей непосредственно следует циклическая инвариантность гиратора

$$G_{ijk} = G_{jki} = G_{kij} = -G_{ikj} = -G_{jik} = -G_{kji}. \quad (4)$$

В связи с этим в дальнейшем положительными считаем гираторы, индексы которых образуют четную перестановку.

Общее количество приведенных гираторов с различными вершинами на n полюсах составляет C_n^3 . В то же время размерность гиратор-пространства выражается как C_{n-1}^2 [1]. Поэтому не все гираторы независимы, а между ними должны существовать определенные связи. На базе матриц узловых проводимостей нетрудно убедиться в справедливости следующей зависимости между приведенными гираторами (на четырех полюсах i, j, k и p)

$$G_{ijk} = G_{pjk} + G_{ipk} + G_{ijp}, \quad (5)$$

где индексы гираторов на правой стороне равенства образуются введением индекса четвертого полюса поочередно вместо каждого из исходных индексов. Это соотношение позволяет заменить любой гиратор G_{ijk} ($i, j, k \neq p$) суммой гираторов, соединенных с полюсом p и, таким образом, любой гираторный многополюсник может быть представлен суммой всевозможных гираторов, соединенных с заранее выбранным полюсом p . Общее количество таких гираторов составляет ровно C_{n-1}^2 . Нетрудно убедиться во взаимной независимости всех таких гираторов G_{pij} ($i, j = 1 \dots n, i, j \neq p; j > i$) и, следовательно, в том, что они составляют базис гираторного элементар-пространства ("полюсный базис"). Отсюда же, с другой стороны, вытекает, что соотношения (5) описывают все связи между гираторами. Поэтому анализ структуры гираторного элементар-пространства может базироваться лишь на соотношениях типа (5).

Гираторное элементар-пространство четырех-полюсников

Для уточнения структуры пространства целесообразно начинать с рассмотрения простейшего случая четырехполюсника, при котором имеются четыре различных (с точки зрения структуры) гиратора $G_{123}, G_{124}, G_{134}, G_{234}$. Соотношение (5) дает для них уравнение связи

$$g_{123} + g_{134} - g_{124} - g_{234} = 0. \quad (6)$$

Для определения расположения гиратор-векторов в трехмерном элементар-пространстве исходим из основных постулатов элементар-пространства [1]. Согласно первому постулату метрические соотношения между векторами независимы от циклического переименования полюсов. Это позволяет получить для скалярных произведений гиратор-векторов равенства

$$\begin{aligned} \langle g_{123}, g_{124} \rangle &= \langle g_{234}, g_{123} \rangle = \langle g_{134}, g_{234} \rangle = \langle g_{124}, g_{134} \rangle = \alpha \\ \langle g_{123}, g_{234} \rangle &= \langle g_{234}, g_{124} \rangle = \beta. \end{aligned} \quad (7)$$

Из условий (7) и (6) можно получить еще следующее условие

$$1 + \beta = 2\alpha, \quad (8)$$

которое обеспечивает равенство нулю определителя Грамма системы векторов $g_{123}, g_{124}, g_{134}, g_{234}$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (1-\beta)^2 [(1+\beta)^2 - 4\alpha^2], \quad (9)$$

необходимое ввиду связи (6) между гираторами. В то же время для любых сочетаний векторов по три получается, с учетом (8), величина определителя Грамма $4\alpha(1-\alpha)^2$. Как видно, параметр α (или β) можно выбирать произвольно. Наиболее естественным будет значение $\alpha = \frac{1}{3}$ (тогда $\beta = -\frac{1}{3}$), обеспечивая максимальное значение определителя Грамма для трех векторов (любых) и одновременно совершенно симметрическое расположение векторов $g_{123}, -g_{124}, g_{134}, -g_{234}$ в трехмерном пространстве. Соответствующая матрица Грамма для векторов будет

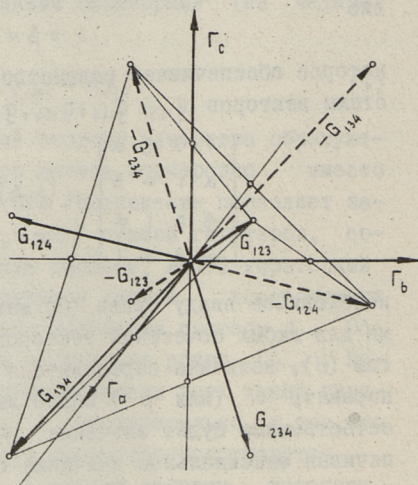
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Направляя одну ось ортогональной координатной системы вдоль вектора g_{123} , можем получить следующие координаты приведенных гиратор-векторов (называемая далее кумулятивной системой координат, см. приложение)

$$\begin{aligned} g_{123} &\longleftrightarrow (1, 0, 0) \\ g_{124} &\longleftrightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right) \\ g_{134} &\longleftrightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ g_{234} &\longleftrightarrow \left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right). \end{aligned} \quad (II)$$

Для практических расчетов такая система векторов ввиду сложности выражений координат малоудобна. Более приемлемая координатная система может быть получена, если учесть, что ввиду совершенно симметричного расположения векторов $g_{123}, -g_{124}, g_{134},$

g_{234} их концы расположены в вершинах правильного тетраэдра. Тетраэдр обладает тремя перпендикулярными осями симметрии, проходящими через середины противоположных ребер. Эти оси и подходят для естественной прямоугольной системы координат (фиг. 1).



Фиг. 1

Тогда наиболее простые выражения получаются в том случае, если длины приведенных гиратор-векторов принимать равными $\sqrt{3}$. Тогда имеем (фиг. 1)

$$\begin{aligned} g_{123} &\longleftrightarrow (1, 1, 1) \\ g_{124} &\longleftrightarrow (1, -1, 1) \\ g_{134} &\longleftrightarrow (1, -1, -1) \\ g_{234} &\longleftrightarrow (1, 1, -1). \end{aligned} \quad (I2)$$

Векторы, направленные вдоль координатных осей (осей симметрии), могут быть вычислены

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= g_{123} + g_{134} = g_{124} + g_{234} \longleftrightarrow (2, 0, 0) \\ \Gamma_b &= g_{123} - g_{124} = g_{234} - g_{134} \longleftrightarrow (0, 2, 0) \\ \Gamma_c &= g_{123} - g_{234} = g_{124} - g_{134} \longleftrightarrow (0, 0, 2). \end{aligned} \quad (13)$$

Этим векторам соответствуют следующие матрицы узловых проводимостей

$$\Gamma_a \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_b \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_c \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Полученную координатную систему (определяемую векторами Γ_a , Γ_b и Γ_c) целесообразно называть центральной координатной системой. Для получения представления гираторного многополюсника в этой координатной системе по заданной матрице узловых проводимостей целесообразно сначала найти представление в какой-либо полюсной системе координат (например, g_{123} , g_{124} , g_{134}), а потом воспользоваться для перехода соотношениями (12). При заданных коэффициентах неопределенной матрицы узловых проводимостей y_{ij} представление через полюсный базис получается в виде

$$G = y_{23} g_{134} + y_{24} g_{124} + y_{34} g_{134} = y_{34} g_{234} + y_{31} g_{231} + y_{41} g_{241} = \dots \quad (15)$$

или в общем виде

$$G = \sum_{i,j=1}^n y_{ij} g_{p_{ij}}, \quad i, j \neq p; \quad j > i. \quad (16)$$

Переход от одного полюсного базиса к другому может быть реализован соответствующим матричным преобразованием, однако проще всего по известным коэффициентам данного полюсного разложения (согласно (15)) составить неопределенную матрицу узловых проводимостей, на основе чего могут быть легко получены координаты для любого полюсного базиса.

В общем случае можно для нахождения представления в центральной координатной системе четырехполюсника получить выражение

$$G = \frac{Y_{23} - Y_{14}}{2} \Gamma_a + \frac{Y_{23} + Y_{14}}{2} \Gamma_b + \frac{Y_{12} + Y_{43}}{2} \Gamma_c. \quad (I7)$$

Пример: При заданной кососимметрической матрице узловых проводимостей

$$Y_G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ -5 & -2 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

полные представления получаются в виде

$$G = 2g_{123} - 3g_{124} + 7g_{134} = 5g_{213} - 4g_{214} + 7g_{234} = \\ = -1g_{312} - 4g_{314} - 3g_{324} = -1g_{412} + 5g_{413} + 2g_{423}.$$

Подставляя сюда выражения (I2)

$g_{123} = \frac{1}{2}[\Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c]$; $g_{214} = \frac{1}{2}[\Gamma_a - \Gamma_b + \Gamma_c]$; $g_{134} = \frac{1}{2}[\Gamma_a - \Gamma_b - \Gamma_c]$, получим представление в центральной координатной системе

$$G = 3\Gamma_a - \Gamma_b - 4\Gamma_c \leftrightarrow (3, -1, -4).$$

Общий случай гираторного n -полюсника

В случае n -полюсника структура C_{n-1}^2 -размерного пространства с C_n^3 различными приведенными гиратор-векторами может быть также определена матрицей Грамма. В случае четырехполюсников встречались скалярные произведения гираторов с двумя общими вершинами. Начиная с пятиполюсников будут встречаться также пары гираторов с одним общим полюсом, а с шестиполюсников еще и гираторные пары без общих полюсов. Согласно второму основному постулату элементар-пространства [I], скалярные произведения таких пар гиратор-векторов следует принимать равными нулю (ортогональные векторы). Таким образом, матрица Грамма для любых гираторов n -полюсника полностью определяется следующими соотношениями

$$\langle g_{ijk}, g_{ijk} \rangle = 1 \\ \langle g_{ijk}, g_{ijm} \rangle = \frac{1}{3}, \quad k \neq m \quad (I8)$$

$$\langle g_{ijk}, g_{imn} \rangle = 0, \quad j \neq k \neq m \neq n$$

$$\langle g_{ijk}, g_{mnp} \rangle = 0, \quad i \neq k \neq j \neq m \neq n \neq p.$$

Например, в случае пятиполюсников, при котором имеется 10 различных приведенных гиратор-векторов, получается для последовательности векторов $g_{123}, g_{124}, g_{125}, g_{135}, g_{145}, g_{245}, g_{345}, g_{134}, g_{234}, g_{235}$ следующая матрица Грамма

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Матрица раскрывает высокую степень симметрии расположения приведенных гиратор-векторов. На фиг. 2 представлена модель взаимного расположения векторов пятиполюсника (сплошными линиями объединены пары со скалярным произведением $\frac{1}{3}$, а пунктирной линией — произведения $-\frac{1}{3}$). На фигуре ясно виден пятеричный характер симметрии с образованием двух циклов ($g_{123}, g_{234}, g_{345}, g_{45}, g_{125}$ и $g_{124}, g_{235}, g_{134}, g_{245}, g_{135}$), соответствующих циклическому переименованию полюсов. Подобная, но еще более сложная структура встречается у шести-полюсников, семиполюсников и т.д. Практическое значение исследования свойств симметрии гираторного пространства заключается в выяснении возможности связывания с осями симметрии естественных координатных систем пространства данного n -полюсника (подобно осям Γ_a, Γ_b и Γ_c в трехмерном гираторном пространстве четырехполюсника).

Исследование свойств симметрии в общем случае показало, что гираторное элементар-пространство обладает двумя основными осями симметрии. Из них одна — главная ось симметрии Γ_a — получается в результате суммирования всех приведенных гиратор-векторов n -полюсника

$$\Gamma_a^{(n)} = \sum_{i,j,k=1}^n g_{ij} k, \quad k > j, i. \quad (20)$$

Она же может быть получена также в результате суммирования главных осей симметрии $\Gamma_{ai}^{(n-1)}$ всех частичных $(n-1)$ -полюсников, входящих в состав данного n -полюсника (i — номер полюса, не входящего в состав данного частичного $(n-1)$ -полюсника).

$$\Gamma_a^{(n)} = \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n \Gamma_{ai}^{(n-1)}. \quad (21)$$

Все гиратор-векторы, имеющие величину углового коэффициента между гиратор-векторами и осью $\Gamma_a^{(n)}$, в общем случае равную $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (где $n = C_{n-1}^2$ — размерность пространства), симметрически располагаются относительно данной оси симметрии. С ростом размерности угол асимптотически приближается к перпендикулярному. Нетрудно получить также выражения матриц узловых проводимостей, соответствующих векторам главной оси $\Gamma_a^{(n)}$. Например, для пяти-, шести- и семиполюсников она имеет вид

$$\Gamma_a^{(5)} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_a^{(6)} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_a^{(7)} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ -5 & 0 & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ -3 & -5 & 0 & 5 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -5 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & -5 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

откуда хорошо видна структура матрицы для общего случая (элементы верхнего ряда образуют последовательность: $0, n-2, n-4, n-6, \dots, 2-n$).

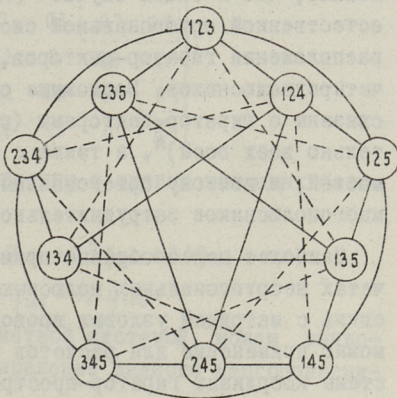
Вторая основная ось симметрии $\Gamma_b^{(n)}$ получается аналогично суммированием соответствующих осей симметрии $\Gamma_{bi}^{(n-1)}$ всех частичных $(n-1)$ -полюсников, входящих в состав данного n -полюсника

$$\Gamma_b^{(n)} = \sum_{i=1}^n \Gamma_{bi}^{(n-1)} \quad (23)$$

Связь с гиратор-векторами в общем случае намного сложнее. Лишь в случае пятиполюсников связь немного проще

$$\Gamma_b^{(5)} = g_{123} + g_{234} + g_{345} + g_{145} + g_{125} - (g_{124} + g_{235} + g_{134} + g_{245} + g_{135}), \quad (24)$$

т.е. осевой вектор получается как разность сумм векторов вышеупомянутых пятеричных циклов гиратор-векторов пятиполюсника (фиг.2). Относительно данной оси гиратор-векторы расположены тоже симметрично (угловой коэффициент относительно оси $\Gamma_b^{(5)}$ гиратор-векторов первого цикла равен $\frac{1}{\sqrt{6}}$, а второго цикла $-\frac{1}{\sqrt{6}}$). В то же время ось Γ_b располагается перпендикулярно относительно главной оси симметрии Γ_a . Можно получить также выражения матриц узловых проводимостей, соответствующие векторам оси симметрии $\Gamma_b^{(n)}$. Их общая структура также значительно сложнее. Для пяти-, шести- и семи-полюсников получаются выражения



Фиг. 2

$$\Gamma_b^{(5)} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \Gamma_b^{(6)} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 & 0 & 8 & -4 \\ -4 & 0 & 4 & -8 & 0 & 8 \\ 8 & -4 & 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 & 4 & -8 \\ -8 & 0 & 8 & -4 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 0 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}; \Gamma_b^{(7)} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 & -4 & 4 & 7 & -5 \\ -5 & 0 & 5 & -7 & -4 & 4 & 7 \\ 7 & -5 & 0 & 5 & -7 & -4 & 4 \\ 4 & 7 & -5 & 0 & 5 & -7 & -4 \\ -4 & 4 & 7 & -5 & 0 & 5 & -7 \\ -7 & -4 & 4 & 7 & -5 & 0 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & 4 & 7 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Гиратор-пространство четырехполюсников обладало еще третьей осью симметрии Γ_0 . Однако соответствующая ей ось симметрии в общем случае n -полюсника отсутствует, так как уже суммирование всех осей $\Gamma_{c_i}^{(4)}$ частичных четырехполюсников в случае пятиполюсника дает в итоге 0. Такое явление по существу отражает переход от четверичной симметрии в трехмерном гиратор-пространстве четырехполюсников к пятеричной симметрии в шестимерном гиратор-пространстве пятиполюсников.

Исследование свойств симметрии гиратор-пространства показало, что в общем случае n -полюсника не удается найти естественной ортогональной системы координат для описания расположения гиратор-векторов, подобной системе (13) для четырехполюсников. Возможные ортогональные системы сложно связаны с гиратор-векторами (отсутствие симметрии относительно всех осей)*, а также с матрицей узловых проводимостей, и поэтому ортогональными базисами для гираторных многополюсников затруднительно пользоваться.

Наиболее целесообразно применение при практических расчетах неортогональных полюсных базисов, имеющих простую связь с матрицей узловых проводимостей, согласно (16). Возможно применение для расчетов также т.н. кумулятивной системы координат гиратор-пространства, более подробно описанного в приложении.

Пример: Шестиполюсник составлен из следующих гираторов: $G_{123} = 4,5$ мсим; $G_{134} = 0,5$ мсим; $G_{145} = 1,0$ мсим; $G_{236} = 2,6$ мсим; $G_{245} = 1,2$ мсим; $G_{246} = -3,5$ мсим; $G_{345} = -0,2$ мсим.

Так как с полюсом 4 соединено максимальное количество гираторов, целесообразно представить гираторный многополюсник в полюсном базисе 4. Пользуясь (5) и (4), получим

$$G_{123} = 4,5 g_{123} = 4,5 g_{423} - 4,5 g_{413} + 4,5 g_{412} ;$$

$$G_{236} = 2,6 g_{236} = 2,6 g_{436} - 2,6 g_{426} + 2,6 g_{423} ;$$

* Например, в случае пятиполюсников расположение шести ортогональных осей не согласуемо с пятеричной симметрией расположения гиратор-векторов.

$$G_{245} = -1,2 g_{425}; \quad G_{145} = -1,0 g_{415}; \quad G_{345} = 0,2 g_{435};$$

$$G_{134} = 0,5 g_{413}; \quad G_{246} = 3,5 g_{426}.$$

Тогда

$$G = 4,5 g_{412} - 4,0 g_{413} - 1,0 g_{415} + 0,9 g_{416} + 7,1 g_{423} - 1,2 g_{425} +$$

$$+ 0,9 g_{426} + 0,2 g_{435} + 2,6 g_{436} + 0,9 g_{456},$$

на основе чего можем написать неопределенную матрицу узловых проводимостей

$$Y_G = \begin{bmatrix} 0 & 4,5 & -4,0 & 0,5 & -1,0 & 0 \\ -4,5 & 0 & 7,1 & -2,3 & -1,2 & 0,9 \\ 4,0 & -7,1 & 0 & 0,3 & 0,2 & 2,6 \\ -0,5 & 2,3 & -0,3 & 0 & 2,0 & -3,5 \\ 1,0 & 1,2 & -0,2 & -2,0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9 & -2,6 & 3,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь легко получить представления в других полюсных базах, например в базисе I,

$$G = 7,1 g_{123} - 2,3 g_{124} - 1,2 g_{125} + 0,9 g_{126} + 0,3 g_{134} +$$

$$+ 0,2 g_{135} + 2,6 g_{136} + 2,0 g_{145} - 3,5 g_{146}.$$

Пользуясь кумулятивной координатной системой, можем вычислить следующее координатное выражение данного многополюсника

$$G = \left(5,2; -\frac{1,75}{\sqrt{2}}; \frac{2,75}{\sqrt{6}}; -\frac{0,05}{\sqrt{30}}; \frac{2,883}{\sqrt{10}}; \frac{2,167}{\sqrt{5}}; \frac{0,9}{\sqrt{5}}; \frac{4,3}{\sqrt{15}}; -\frac{14}{\sqrt{30}}; 0 \right).$$

Л и т е р а т у р а

И. Х. В. С и л л а м а а. Структура и свойства элементарного пространства представления цепей. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 288, Таллин, 1970.

Structural properties of the
gyrator elementor space

Summary

Starting from the representation of the set of linear multipoles as a vector space (called the elementor space), some structural properties of the gyrator subspace are discussed. The general formula for the dependence of possible gyrators in a four-pole is introduced and some useful bases in the three-dimensional gyrator space of four-poles are presented. The existence of two main orthogonal axes of symmetry is indicated in general (n -pole) case, while the use of nonorthogonal co-ordinate systems (the pole bases) is shown to be preferable for practical calculations.

Кумулятивная система координат является развитием координатной системы (II) для гираторных четырехполюсников. При ее образовании необходимо исходить из одного полюсного базиса (например, базиса I). Первую ось перпендикулярной системы направляем вдоль вектора g_{123} (имеющего тогда лишь одну ненулевую координату). Направление следующей оси выбираем так, чтобы следующий базисный вектор g_{124} имел две ненулевые координаты, третий вектор g_{134} три ненулевые координаты и так далее. При этом должны быть выполнены условия (18), накладываемые матрицей Грамма относительно длин векторов и скалярных произведений. При практических расчетах первые координаты всех векторов определяются из условий заданных скалярных произведений с вектором g_{123} , вторые координаты получаются из аналогичных условий относительно вектора g_{124} и так далее. Последняя ненулевая координата находится из условия единичной длины вектора. Таким образом, расчеты координат векторов могут быть продолжены неограниченно, давая в итоге все желанные векторы данного полюсного базиса. Небазисные векторы легко могут быть рассчитаны с помощью уравнения (5).

При добавлении n -полюснику одного дополнительного полюса размерность пространства растет на $n-1$. При этом все гиратор-векторы, не соединенные с этим полюсом, получают $n-1$ новых нулевых координат и поэтому рост ненулевых координат точно соответствует количеству условий, вытекающих из матрицы Грамма (18).

Кумулятивная система координат может быть построена на любом полюсном базисе, предварительно задавая последовательность базисных векторов. В таблице I представлены все векторы первого полюсного базиса до семиполюсника включительно (общая размерность пространства 15).

Таблица I

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
G_{123}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G_{124}	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G_{134}	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G_{125}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{5}{\sqrt{30}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G_{135}	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{6}}$	$\frac{5}{2\sqrt{30}}$	$\frac{5}{2\sqrt{10}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G_{145}	0	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{6}}$	$\frac{5}{2\sqrt{30}}$	$\frac{5}{6\sqrt{10}}$	$\frac{5}{3\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G_{126}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{30}}$	0	0	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0	0	0	0
G_{136}	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2\sqrt{10}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{3}{\sqrt{15}}$	0	0	0	0	0	0	0
G_{146}	0	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2\sqrt{30}}$	$\frac{1}{6\sqrt{10}}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	$\frac{4}{\sqrt{30}}$	0	0	0	0	0	0
G_{156}	0	0	0	$-\frac{2}{\sqrt{30}}$	$-\frac{2}{3\sqrt{10}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	$\frac{1}{\sqrt{30}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0
G_{127}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{30}}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{5}}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	0	0	0	0
G_{137}	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2\sqrt{10}}$	0	$\frac{1}{6\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2\sqrt{15}}$	0	0	$\frac{\sqrt{7}}{6}$	$\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$	0	0	0
G_{147}	0	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2\sqrt{30}}$	$\frac{1}{6\sqrt{10}}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}}$	$\frac{1}{6\sqrt{5}}$	$\frac{1}{6\sqrt{15}}$	$\frac{2}{3\sqrt{30}}$	0	$\frac{\sqrt{7}}{6}$	$\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{6}}$	0	0
G_{157}	0	0	0	$-\frac{2}{\sqrt{30}}$	$-\frac{2}{3\sqrt{10}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{5}}$	$\frac{1}{6\sqrt{5}}$	$\frac{1}{6\sqrt{15}}$	$\frac{1}{6\sqrt{30}}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{7}}{6}$	$\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{6}}$	$\frac{5\sqrt{7}}{6\sqrt{10}}$	0
G_{167}	0	0	0	0	0	0	$-\frac{5}{6\sqrt{5}}$	$-\frac{5}{6\sqrt{15}}$	$-\frac{5}{6\sqrt{30}}$	$-\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{7}}{6}$	$\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{6}}$	$\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{10}}$	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$

УДК 621.372.061.1

В.А. Кукк

К ЧИСЛЕННОМУ ОБРАЩЕНИЮ МАТРИЦЫ ПРОВОДИМОСТЕЙ

При анализе линейных стационарных цепей часто стоим перед задачей решения системы линейных уравнений, матрица которой состоит из функций. В случае цепей типа RC эти функции суть рациональные дроби (передаточные функции). При машинном анализе обращение матрицы (или решение системы) с такими элементами приводит к весьма быстрому росту памяти и времени с повышением порядка матрицы. Поэтому сделан ряд предложений для обхода этой операции, как непосредственное вычисление коэффициентов результата [1], расчет по точкам в частотной области, численное интегрирование во временной области и т.д. [2]. Также известен ряд недостатков, присущих вообще представлению параметров цепи в виде полиномов или дробей (лапласовых изображений) [2,3].

В настоящей статье описывается метод решения вышеуказанной задачи, по существу приближенный, но легко реализуемый на ЭВМ. В основе метода лежит лагерровское представление параметров цепи.

Мы рассмотрим задачу в следующем виде. Дана матрица узловых проводимостей и задающие токи, требуется определить напряжения. Подробнее рассматриваем цепи типа RC. В этом случае цепь характеризуется матричным уравнением

$$(G + C \frac{d}{dt}) U(t) = I(t), \quad (1)$$

где G и C - числовые матрицы (соответственно проводимостей и емкостей).

Очевидно, этим охватываются любые электронные RC-схемы (во всяком случае низкочастотные). Отметим, что симметрия матриц не требуется (хотя на практике C всегда симметрична).

Сигналы-матрицы $I(t)$ и $U(t)$ мы рассматриваем при $t \geq 0$; в частности, если в матрице $I(t)$ одна компонента равна $\delta(t)$, а остальные нулю, то $U(t)$ будет матрицей импульсных реакций.

Все сигналы разлагаем в ряд по функциям Лагерра [5,6]

$$l_k(t) = Y(t) e^{-\frac{t}{2}} L_k(t),$$

где

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases},$$

$L_k(t)$ - многочлен Лагерра [6].

Функция $h(t)$, определенная на $[0, \infty]$, разлагается в ряд Фурье [6] по функциям Лагерра

$$h(t) = \sum_0^{\infty} a_k l_k(t),$$

где a_k определяется из соотношения

$$a_k = \int_0^{\infty} h(t) l_k(t) dt. \quad (2)$$

Это распространяется и на умеренные распределения [7]; тогда

$$a_k = \langle h, \hat{l}_k(t) \rangle,$$

где $\hat{l}_k(t)$ - продолжение $l_k(t)$ на $t < 0$ такое, что $\hat{l}_k(t)$ принадлежит основному пространству, $\langle h, \varphi(t) \rangle$ - обозначает значение распределения h на основной функции $\varphi(t)$.

В частности, для δ имеем

$$a_k = \langle \delta, \hat{l}_k(t) \rangle = l_k(0) = 1,$$

т.е.

$$\delta = \sum_0^{\infty} l_k(t).$$

Если имеет место (2) и, кроме того,

$$\frac{d}{dt} h(t) = \sum_0^{\infty} b_k l_k(t),$$

нетрудно показать, что

$$b_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad (3)$$

$$b_k = b_{k-1} + \frac{1}{2}(a_k + a_{k-1}), \text{ при } k > 0.$$

Разлагая $I(t)$ и $U(t)$ в лаггерровский ряд и используя (3), придаем уравнению (1) следующий вид:

$$G(U_k - U_{k-1}) + \frac{1}{2}C(U_k + U_{k-1}) = I_k - I_{k-1},$$

откуда

$$U_0 = Q I_0,$$

$$U_k = R U_{k-1} + Q(I_k - I_{k-1}), \quad (4)$$

где

$$R = (G + \frac{1}{2}C)^{-1}(G - \frac{1}{2}C),$$

$$Q = (G + \frac{1}{2}C)^{-1}.$$

Простое рекуррентное соотношение (4) позволяет последовательно вычислить сколько угодно членов последовательности U_0, U_1, U_2, \dots , т.е. коэффициентов ряда

$$U(t) = \sum_0^{\infty} U_k \cdot l_k(t).$$

Пример I. Рассмотрим цепь на фиг. 1, для которой

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad R = Q(G - \frac{1}{2}C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Если задающий ток $i(t) = \delta(t)$, то

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, I_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$$

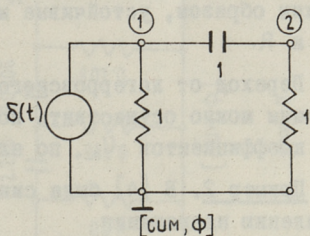
и

$$U_0 = Q I_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$U_1 = R U_0 + Q(I_1 - I_0) = R U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$U_2 = R U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

и т.д. Вторая компонента в рекуррентных соотношениях выпадает, так как $I_k = I_{k-1}$. В итоге:



Фиг. 1

$$u_1(t) = \frac{3}{4} l_0(t) + \frac{1}{2} l_1(t) + \frac{1}{2} l_2(t) + \dots,$$

$$u_2(t) = \frac{1}{4} l_0(t) + \frac{1}{2} l_1(t) + \frac{1}{2} l_2(t) + \dots$$

Если число вычисляемых членов в два раза превышает порядок цепи, то имеется принципиальная возможность перейти к любому другому представлению, получив точный результат [5]. Но порядок цепи не может превышать порядка матрицы C .

Изложенное выше имеет смысл лишь тогда, когда существует $(G + \frac{1}{2}C)^{-1}$. Так как

$$G + \frac{1}{2}C = Y(s) \Big|_{s=\frac{1}{2}},$$

где $Y(s)$ - операторная матрица узловых проводимостей, то Q существует тогда и только тогда, когда $Y(s)$ не имеет нуля в точке $s = \frac{1}{2}$.

Таким образом, устойчивые многополюсники обладают матрицами Q и R .

Переход от лагерровского разложения к лапласовым изображениям можно осуществить после того, как найдено достаточное количество коэффициентов U_k , по алгоритму, описанному в [5].

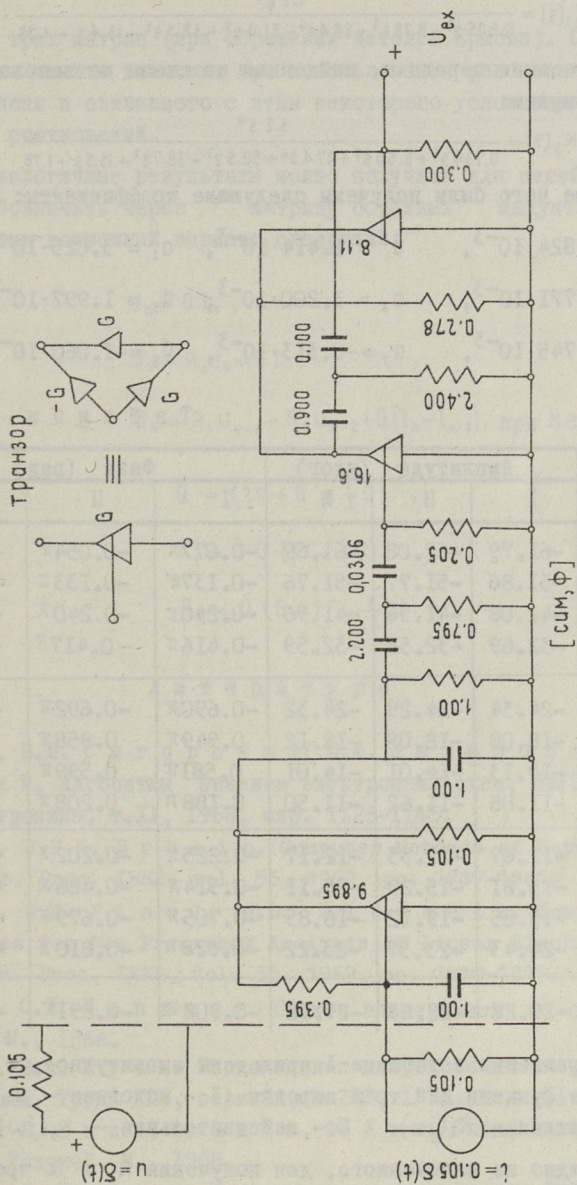
Пример 2. В [4] была синтезирована цепь по заданному усилению напряжения

$$K_1(s) = \frac{1,2 s^4}{s^6 + 9,8 s^5 + 30,8 s^4 + 53,7 s^3 + 39,4 s^2 + 13,8 s + 1,8}$$

Полученная цепь показана на фиг. 2, где единичный источник напряжения и резистор с проводимостью $G = 0,105$ сим мы заменили на схему Нортона (чтобы можно было применить методику настоящей статьи). Затем с помощью изложенного метода были найдены матрицы R и Q и вычислены первые 17 коэффициентов лагерровских разложений всех напряжений. Для выходного напряжения U_{ex} было найдено:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.825 \cdot 10^{-3}, & a_1 &= 1.400 \cdot 10^{-3}, & a_2 &= 2.975 \cdot 10^{-3} \\ a_3 &= 3.662 \cdot 10^{-3}, & a_4 &= 3.040 \cdot 10^{-3}, & a_5 &= 1.821 \cdot 10^{-3} \\ a_6 &= 0.593 \cdot 10^{-3}, & a_7 &= -0.414 \cdot 10^{-3}, & a_8 &= -1.105 \cdot 10^{-3} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

С помощью алгоритма (и программы), описанного в [5], была вычислена передаточная функция:



[сум, ф]

Фиг. 2

$$K_2(s) = \frac{1.2 s^4}{0.805 s^6 + 8.78 s^5 + 28.4 s^4 + 51.0 s^3 + 38.7 s^2 + 13.4 s + 1.76}$$

Действительная передача, найденная из схемы по топологическим формулам:

$$K_3(s) = \frac{1.2 s^4}{0.734 s^6 + 8.50 s^5 + 27.4 s^4 + 50.5 s^3 + 38.7 s^2 + 13.5 s + 1.76}$$

на основе чего были получены следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.824 \cdot 10^{-3}, & a_1 &= 1.414 \cdot 10^{-3}, & a_2 &= 3.025 \cdot 10^{-3}, \\ a_3 &= 3.771 \cdot 10^{-3}, & a_4 &= 3.200 \cdot 10^{-3}, & a_5 &= 1.997 \cdot 10^{-3}, \\ a_6 &= 0.745 \cdot 10^{-3}, & a_7 &= -0.313 \cdot 10^{-3}, & a_8 &= -1.060 \cdot 10^{-3} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Т а б л и ц а I

Частота, (рад/сек)	Амплитуда (длог)			Фаза (рад)		
	I	II	III	I	II	III
0.03162	-61.79	-62.08	-61.69	-0.077π	-0.054π	-0.076π
0.05623	-51.86	-51.77	-51.76	-0.137π	-0.133π	-0.136π
0.1000	-42.08	-41.96	-41.96	-0.240π	-0.240π	-0.240π
0.1778	-32.69	-32.58	-32.59	-0.416π	-0.417π	-0.416π
0.3162	-24.34	-24.29	-24.32	-0.690π	-0.692π	-0.690π
0.5623	-18.08	-18.08	-18.12	0.949π	0.958π	0.962π
1.000	-14.13	-14.01	-14.01	0.581π	0.599π	0.609π
1.778	-11.88	-11.62	-11.50	0.188π	0.208π	0.220π
3.162	-12.67	-12.33	-12.17	-0.225π	-0.202π	-0.194π
5.623	-15.81	-15.29	-15.11	-0.514π	-0.486π	-0.475π
10.00	-19.85	-19.12	-18.85	-0.705π	-0.679π	-0.667π
17.78	-24.43	-23.57	-23.22	-0.828π	-0.810π	-0.800π
31.62	-29.28	-28.63	-27.98	-0.902π	-0.891π	-0.884π

Для сравнения в таблице I приведены амплитудно- и фазо-частотные функции для трех передач (I - исходная - $K_1(j\omega)$, II - расчетная - $K_2(j\omega)$, III - действительная - $K_3(j\omega)$).

Как видно из изложенного, для получения R и Q требуется две операции сложения, одно обращение и умножение матриц. Для реализации этих операций достаточно памяти в раз-

мере трех матриц (при обращении методом Ершова). Сокращение объема памяти возможно при использовании разбиения матриц на блоки и связанного с этим некоторого усложнения рекуррентных соотношений.

Аналогичные результаты можно получить для цепей RLC. Если обозначить через Γ матрицу обратных индуктивностей, то один возможный вариант следующий:

$$\begin{aligned} U_0 &= Q I_0, \\ U_1 &= R_1 U_0 + Q I_1, \\ U_k &= R_1 U_{k-1} + R_2 U_{k-2} + Q(I_k - I_{k-1}), \text{ при } k \geq 2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$Q = (2\Gamma + G + \frac{1}{2}C)^{-1},$$

$$R_1 = 2 \cdot Q \cdot (2\Gamma - \frac{1}{2}C),$$

$$R_2 = Q (G - 2\Gamma - \frac{1}{2}C).$$

Л и т е р а т у р а

1. В.П. С и г о р с к и й, Ю.М. К а л н и б о л о т - с к и й. Алгоритмы анализа электронных схем, ИВУЗ, Радиоэлектроника, т. XI, 1968, стр. II25-II45.
2. J.F.H. B r a n i n. Computer Methods of Network Analysis. Proc. IEEE, vol. 55, 1967, pp. 1787-1801.
3. J.F. P i n e l, M.L. B l o s t e i n. Computer Techniques for the Frequency Analysis of Linear Electrical Networks. Proc. IEEE, vol. 55, 1967, pp. 1810-1819.
4. О.Л. Б а н д м а н. Синтез электронных RC-схем. "Наука", М., 1966.
5. В.А. К у к к. Рациональная аппроксимация передаточной функции. Труды ТПИ, серия А, № 288, 1970, стр. 71-78.
6. Е. Я н к е, Ф. Э м д е, Ф. Л е ш. Специальные функции. "Наука", М., 1968.
7. Л. Ш в а р ц. Математические методы для физических наук. "Мир", М., 1965.

On the numerical inversion
of a node-admittance matrix

Summary

A method to solve the node equations of a multipole, based on the expansion of network parameters in series of Laguerre functions, is presented. The coefficients of the expansion of response (voltage) may be computed by the simple recursion formulas. In the case of RC-network,

$$U_k = RU_{k-1} + Q(I_k - I_{k-1}),$$

where matrices R and Q may be simply obtained from the node-admittance matrices of the multipole.

УДК 62-507

Г.Э. Якобсон

ОБЩАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

I. Введение

В [1] введено понятие СП-разбиения на множестве состояний автомата и показано, что наличие одного нетривиального СП-разбиения является необходимым и достаточным условием существования для автомата A последовательной декомпозиции $A(\pi) \circ \bar{A}(\pi)$, а наличие двух нетривиальных СП-разбиений π_1 и π_2 при этом $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$ — для параллельной декомпозиции $A(\pi_1) \otimes A(\pi_2)$. Общая декомпозиция заданного автомата состоит в его реализации в виде множества автоматов, соединенных между собой при помощи функции связи как последовательно, так и параллельно. Поставленная задача может быть решена поэтапно. Пусть, например, на первом этапе автомат A реализуется декомпозицией $A_1 \otimes A_2$. На втором этапе проверяется возможность разложения автоматов A_1 или A_2 . В случае существования декомпозиции $A_3 \circ A_4$ для автомата A_1 , заданный автомат A реализуется уже декомпозицией $(A_3 \circ A_4) \otimes A_2$. Далее, проверяется возможность разложения автоматов A_3 или A_4 и т.д. Описанный метод обладает недостатком, а именно: мы лишены возможности сразу, до построения декомпозиции, судить о внутренней структуре декомпозиции, ибо она поэтапно вырисовывается по мере разложения полученных автоматов. В настоящей работе показано, что внутренняя структура декомпозиции (характеризуемая графом декомпозиции) может быть немедленно установлена по графу СП-решетки автомата.

Приведем вкратце результаты по последовательной и параллельной декомпозиции [1], а также некоторые понятия, используемые нами позже.

Пусть задан автомат без выхода $A = (X, S, \delta)$. Разбиение π на множестве состояний автомата A называется СП-разбиением, если и только если для любого блока $Q \in \pi$ и входной буквы $x \in X$ найдется блок $Q' \in \pi$ такой, чтобы

$$\delta [Q, x] \in Q'. \quad (I)$$

Автоматы $A(\pi)$ (для последовательной и параллельной декомпозиции) и $\bar{A}(\pi)$ (для последовательной декомпозиции) строятся следующим образом:

$$1. \quad A' = A(\pi) = (X', S', \delta'). \quad X' = X; \quad S' = \pi;$$

$$\delta' [Q, x] = Q' \iff \delta [Q, x] \in Q'.$$

Здесь $Q, Q' \in \pi, x \in X'$.

$$2. \quad A'' = \bar{A}(\pi) = (X'', S'', \delta''). \quad X'' = X \times I'', \quad I'' = \pi; \quad S'' = \bar{\pi};$$

$$\delta'' [P, (Q, x)] = P' \iff \delta [P \cap Q, x] \in P'.$$

Здесь $\bar{\pi}$ - наибольшее разбиение такое, что $\pi \cdot \bar{\pi} = 0$, $Q \in \pi, P, P' \in \bar{\pi}, x \in X$.

Входной алфавит X'' автомата A'' разбит на две части: внешняя - X и внутренняя - I'' .

Известно [2], что разбиения, упорядоченные отношением \leq , образуют решетку L . Мы будем единицу (1^i) решетки L ; всегда отождествлять с целым разбиением, а нуль (0^i) - с элементарным разбиением. Под высотой $d[x]$ элемента x в решетке L понимается максимум "длины" d цепей $0 < x_1 < \dots < x_d = x$ в решетке L ; под длиной $d[L]$ решетки L понимается максимум длин цепей в L . Факт, что элемент a в решетке L покрывает элемент b , обозначим $(a)^i = b$ или $(b) = a$. Элемент, покрывающий нуль решетки, называется атомом решетки (очевидно, высота атома всегда 1). Пусть $a \in L$, тогда $m(a) = \prod (b_i)$, где $b_i > a$. Если a покрыто одним элементом b , то $m(a) = b$; если же a покрыто более чем одним элементом, то $m(a) = a$. При фиксированном элементе $a \in L$ подрешетка $L' \subset L$, состоящая из элементов $b \in L$ таких, что $b \geq a$, называется подрешеткой, порожденной элементом a , и обозначается $L' = L(a)$.

Общую декомпозицию заданного автомата будем строить из автоматов без выходов, называемых далее ячейками C . Граф декомпозиции строится так: каждой ячейке, а также внешнему входному алфавиту X соответствует одна вершина графа. Из

вершины i направляется дуга в вершину j , если и только если ячейка C_i непосредственно предшествует ячейке C_j ; из вершины, соответствующей алфавиту χ , направляется дуга в вершины, соответствующие которым ячейки не следуют ни за какими другими ячейками.

2. Факторные разбиения

Определение 1. Пусть на множестве S для двух разбиений π_i и π_j $\pi_i \geq \pi_j$. Разбиение $\pi = \pi_i / \pi_j$ на разбиении π_j называется факторным разбиением, если и только если для любого блока $R \in \pi$ $R = \{a/a \in P\}$; $a \in \pi_j$, $P \in \pi_i$. Например, если $\pi_i = \{1, 3, 5; 2, 4, 6\}$ и $\pi_j = \{1, 3; 2; 5; 4, 6\}$, то $\pi = \pi_i / \pi_j = \{\overline{1, 3, 5}; \overline{2}; \overline{5}; \overline{4, 6}\}$.

О построении факторного разбиения $\pi = \pi_i / \pi_j$ будем говорить как о делении разбиения π_i на разбиение π_j .

Лемма 1. Пусть на множестве S $\pi_i, \pi_j, \pi_k \geq \pi_l$.

1. $\pi_i / \pi_l \geq \pi_j / \pi_l \iff \pi_i \geq \pi_j$ (деление сохраняет порядок);
2. $\pi_i / \pi_l = (\pi_j / \pi_l) \cdot (\pi_k / \pi_l) \iff \pi_i = \pi_j \cdot \pi_k$;
3. $\pi_i / \pi_l = (\pi_j / \pi_l) + (\pi_k / \pi_l) \iff \pi_i = \pi_j + \pi_k$.

Справедливость пунктов 1-3 непосредственно следует из определения 1.

Пусть π_k^i один из атомов в решетке разбиений L_i . Для любого $\pi_v^i \in L_i$, $\pi_v^i \geq \pi_k^i$ найдем факторное разбиение $\pi_v^k = \pi_v^i / \pi_k^i$. Множество, состоящее из факторных разбиений π_v^k образует решетку $L_k = L_i / \pi_k^i$ (говорим: L_k есть результат деления L_i на π_k^i). На основе леммы 1 имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Решетка факторных разбиений $L_k = L_i / \pi_k^i$ изоморфна подрешетке $L_i(\pi_k^i) \subset L_i$.

Если в некоторой решетке L_i $\pi_k^i = \pi_l^i + \pi_m^i$, где π_l^i и π_m^i атомы в L_i , то возможно строить решетки $L_l = L_i / \pi_l^i$, $L_m = L_i / \pi_m^i$ и далее $L'_k = L_l / \pi_k^l$, $L''_k = L_m / \pi_k^m$.

В то же время из леммы 2 следует изоморфность решеток L'_k и L''_k . Ввиду этого примем $L_k = L'_k = L''_k$.

Операция деления разбиений позволяет строить различные решетки факторных разбиений, среди которых мы будем рассматривать только те, которые являются результатом деле-

ния заданной решетки на ее атомы. Приняв полученные решетки факторных разбиений за исходные, процесс деления (генерирования) решеток на их атомы можем повторять до тех пор, пока не получится решетка, состоящая только из нуля и единицы.

Пусть решетка L_0 служит основой для генерирования множества решеток факторных разбиений. Учитывая лемму 2, трудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 3. Решетка L_9 изоморфна подрешетке $L_0(\pi_9^0) \subseteq L_0$.

Остановимся на одном свойстве факторных разбиений.

Теорема I. Факторное разбиение $\pi = \pi_1/\pi_2$ на множестве состояний автомата $A' = A(\pi_2) = (X', S', \delta')$ является СП-разбиением, если и только если разбиение π_1 на множестве состояний автомата $A = (X, S, \delta)$ является СП-разбиением.

Доказательство. Учитывая определение I, а также способ построения функции δ' автомата $A(\pi_2)$, можем написать

$$\delta'[R, x] = \delta'[\{Q/Q \in P\}, x] = \{Q'/Q' = \delta'[Q, x], Q \in P\}. \quad (2)$$

Функция δ' на паре (Q, x) однозначно определяет следующее состояние $Q' \in \pi_2$. В то же время, какое бы ни было Q в пределах одного блока $P(Q \in P)$, из того, что π_1 является СП-разбиением и $\pi_1 \geq \pi_2$, следует, что Q' всегда остается подмножеством некоторого блока $P' \in \pi_1$. Учитывая это, из (2) следует

$$\delta'[R, x] = \{Q'/Q' = \delta'[Q, x], Q \in P\} \subseteq \{Q'/Q' \in P'\}. \quad (3)$$

Так как по определению I $\{Q'/Q' \in P'\} = R'$, то $\delta'[R, x] \in R'$, т.е. разбиение π_1/π_2 является СП-разбиением. Это и следовало доказать.

Положение теоремы I легко может быть распространено и на всю решетку факторных разбиений.

Следствие I. Решетка факторных разбиений $L_k = L_i/\pi_k^i$ на множестве состояний автомата $A_k = A_i(\pi_k^i)$ является СП-решеткой, если и только если подрешетка $L_i(\pi_k^i) \subseteq L_i$ на множестве состояний автомата A_i является СП-решеткой.

3. Теорема общей декомпозиции

Теорема 2. Наличие на множестве состояний автомата $A_0 = (X_0, S_0, \delta_0)$ СП-решетки L_0 является необходимым и достаточным условием существования для автомата A_0 общей декомпозиции D , строящейся следующим образом:

1) разбиению $\pi_j^0 \in L_0$ соответствует ячейка

$$\begin{cases} C_j = \bar{A}_j(\pi_j^0), & \text{если и только если } m(\pi_j^0) = \pi_i^0 \neq 1^0; \\ C_j = A_k(\pi_j^0), & \text{если и только если } m(\pi_j^0) = 1^0, (\pi_j^0)' = \pi_k^0; \end{cases}$$

2) ячейка C_j связывается с непосредственно предшествующими ей ячейками при помощи функции связи γ_j

$$\gamma_j : \Pi(I_i \cdot S_i) \rightarrow I_j,$$

где I_i и S_i - внутренний входной алфавит и множество состояний ячейки C_i , принадлежащей множеству ячеек, непосредственно предшествующих ячейке C_j ;

3) граф декомпозиции D изоморфен графу СП-решетки L_0 .

Доказательство. Справедливость теоремы докажем индукцией по длине $n = d[L_0]$ решетки L_0 .

I. Рассмотрим в решетке L_0 разбиения высоты I. Наличие только одного такого разбиения π_j^0 является необходимым и достаточным условием существования последовательной декомпозиции $A_0(\pi_j^0) \circ \bar{A}_0(\pi_j^0)$. Если $n = 2^l$, т.е. $m(\pi_j^0) = 1^0$, $m(\pi_i^0) = \pi_j^0$ и $(\pi_j^0)' = \pi_i^0 = 0^0$ (π_j^0 тем самым является единственным нетривиальным разбиением), ставим ячейку $C_0 = \bar{A}_0(\pi_j^0)$ в соответствие разбиению π_i^0 , а ячейку $C_j = A_0(\pi_j^0)$ в соответствие разбиению π_j^0 .

Наличие двух разбиений высоты I π_i^0 и π_j^0 (для простоты взято два разбиения, очевидно, их может быть и больше; нетрудно заметить, $\pi_i^0 \cdot \pi_j^0 = 0^0$) является необходимым и достаточным условием для существования параллельной декомпозиции $A_0(\pi_j^0) \otimes A_0(\pi_i^0)$. Ячейку $C_0 = \bar{A}_0(\pi_i^0)$ ставим в соответствие разбиению π_i^0 , ячейку $C_i = A_0(\pi_i^0)$ - разбиению π_i^0 и ячейку $C_j = A_0(\pi_j^0)$ - разбиению π_j^0 .

Назовем полученные декомпозиции декомпозициями автомата A_0 относительно разбиений высоты I и обозначим через D^I .

2. Предположим, что декомпозиция D^{u-1} автомата A_0 относительно разбиений высоты $u-1$ построена ($n-1 \leq u \leq 2$). Пусть $C_j = A_k(\pi_j^k)$ некоторая ячейка в D^{u-1} , не следующая ни за какой другой ячейкой. Напомним, что разбиение π_j^k принадлежит СП-решетке L_k , которая на основе леммы 3 изоморфна подрешетке $L_0(\pi^k) \subseteq L_0$. Ввиду этого разбиению π_j^k высоты I соответствует разбиение π_j^0 высоты $u-1$ в решетке L_0 . Из следствия 1 и леммы 3 следует, что на множество состояний $S_j = \pi_j^k$ ячейки C_j существует СП-решетка $L_j = L_k / \pi_j^k$, изоморфная подрешетке $L_0(\pi_j^0) \subseteq L_0$. Наличие одного разбиения $\pi_i^j \in L_j$ высоты I или, что то же самое, разбиения $\pi_i^0 \in L_0$ высоты u , является необходимым и достаточным условием существования для автомата A_j последовательной декомпозиции $A_j(\pi_i^j) \circ \bar{A}_j(\pi_i^j)$. При построении декомпозиции D^u ячейка C_j в декомпозиции D^{u-1} заменяется ее декомпозицией $A_j(\pi_i^j) \circ \bar{A}_j(\pi_i^j)$. Ячейку $C_j = \bar{A}_j(\pi_i^j)$ ставим в соответствие разбиению π_j^0 , а если $u = n-1$ (т.е. $m(\pi_i^0) = 1^0$), то ячейку $C_i = A_j(\pi_i^j)$ ставим в соответствие разбиению π_i^0 .

Наличие двух СП-разбиений $\pi_i^j, \pi_h^j \in L_j$ высоты I (им соответствуют разбиения высоты u $\pi_i^0, \pi_h^0 \in L_0$, причем $\pi_i^0 \cdot \pi_h^0 = \pi_j^0$) является необходимым и достаточным условием существования для ячейки C_j декомпозиции $A_j(\pi_i^j) \otimes A_j(\pi_h^j)$. В данном случае, когда $m(\pi_j^0) = \pi_j^0$, разбиению π_j^0 ставится в соответствие ячейка $C_j = \bar{A}_j(\pi_j^0)$; в случае же, если $u = n-1$, ячейка $C_i = A_j(\pi_i^j)$ ставится в соответствие разбиению π_i^0 , а ячейка $C_h = A_j(\pi_h^j)$ — разбиению π_h^0 . Обратим внимание на то, что ячейка $C_j = \bar{A}_j(\pi_j^0)$ является тривиальным автоматом, множество состояний которого состоит из одного элемента. Действительно, $S_j = \bar{\pi}_j^j = \bar{0}^j = 1^j$.

Пусть ячейке $C_j = \bar{A}_j(\pi_j^0)$ непосредственно предшествует одна ячейка $C_i = \bar{A}_i(\pi_i^0)$. По способу построения ячеек декомпозиции $I_j = \pi_i^j, I_i = \pi_h^i$ и $S_i = \pi_h^i$. Так как $L_i = L_j / \pi_i^j$, то $\pi_i^i = \pi_i^j / \pi_i^j = \pi_i^j$ *). Учитывая это,

* Мы не будем делать различия между разбиением π_i^j и факторным разбиением π_i^j / π_i^j .

$I_j = \pi_i^j = \pi_i^i = \pi_h^i \cdot \bar{\pi}_h^i = I_i \cdot S_i$. Эта операция осуществляется вводимой в общую декомпозицию функцией связи $\gamma_j: I_i \cdot S_i \rightarrow I_j$. Предположим, что ячейке $C_j = \bar{A}_j(\pi_j^j)$ предшествуют две ячейки $C_i = \bar{A}_i(\pi_h^i)$ и $C_l = \bar{A}_l(\pi_k^l)$. В решетке L_0 этому соответствует, что $(\pi_i^i)' = \pi_j^j$ и $(\pi_l^l)' = \pi_j^j$, то есть $m(\pi_j^j) = \pi_i^i \cdot \pi_l^l = \pi_j^j$. В связи с этим $L_h = L_i / \pi_h^i$, $L_i = L_j / \pi_i^i$ и $L_k = L_l / \pi_k^l$, $L_l = L_j / \pi_l^l$. Из способа построения ячеек следует, что $I_i = \pi_h^i$, $S_i = \bar{\pi}_h^i$, $I_l = \pi_k^l$, $S_l = \bar{\pi}_k^l$, $I_j = \pi_j^j$. Учитывая вышесказанное, $I_j = \pi_j^j = \pi_i^i \cdot \pi_l^l = (\pi_h^i / \pi_h^i) \cdot (\pi_k^l / \pi_l^l) = \pi_i^i \cdot \pi_l^l = (\pi_h^i \cdot \bar{\pi}_h^i) \cdot (\pi_k^l \cdot \bar{\pi}_k^l) = (I_i \cdot S_i) \cdot (I_l \cdot S_l)$.

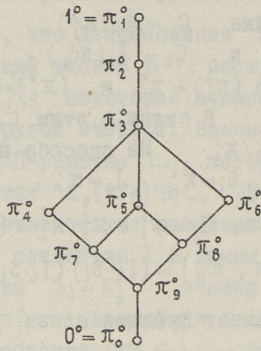
Эти операции осуществляет функция связи $\gamma_j: (I_i \cdot S_i) \cdot (I_l \cdot S_l) \rightarrow I_j$. В общем случае: $\gamma_j: \Pi(I_i \cdot S_i) \rightarrow I_j$, где C_i принадлежит множеству ячеек, непосредственно предшествующих ячейке C_j .

Из приведенного способа построения общей декомпозиции следует, что ячейка, соответствующая разбиению π_j^j , непосредственно следует за ячейкой, соответствующей разбиению π_i^i , если и только если разбиение π_i^i покрывает разбиение π_j^j . Ввиду этого граф общей декомпозиции изоморфен графу СП-решетки. Этим теорема доказана.

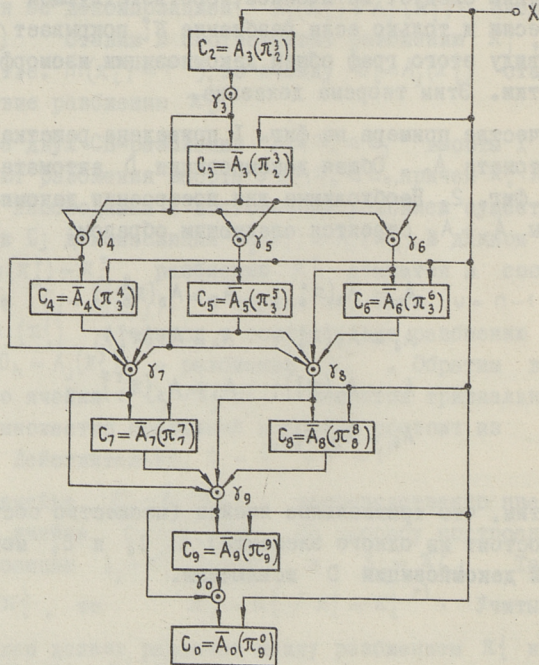
В качестве примера на фиг. 1 приведена решетка СП-разбиений автомата A_0 . Общая декомпозиция D автомата A_0 приведена на фиг. 2. Необходимые для построения декомпозиции D автоматы $A_3 \div A_9$ строятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_9 &= A_0(\pi_9^9); & A_5 &= A_8(\pi_5^8); \\
 A_8 &= A_9(\pi_8^9); & A_4 &= A_7(\pi_4^7); \\
 A_7 &= A_9(\pi_7^9); & A_3 &= A_5(\pi_3^5). \\
 A_6 &= A_8(\pi_6^8);
 \end{aligned}$$

Заметим, что тривиальные ячейки (множество состояний которых состоит из одного элемента) C_7 , C_8 и C_9 могут быть из общей декомпозиции D исключены.



Фиг. 1. Решетка СП-разбиений автомата А.



Фиг. 2. Общая декомпозиция автомата А.

Л и т е р а т у р а

1. J. H a r t m a n i s, R. E. S t e a r n e s. Algebraic Theory of Sequential Machines. Prentice Hall Inc., N.Y., 1966.

2. Г. Б и р г к о ф . Теория структур. Изд. ИЛ, М., 1952.

G. Jakobson

General decomposition of finite automata

Summary

A method of finding general decomposition of finite automata based on the concept of factoral partition on the set of states of automata is given. It is shown that the existence of a lattice of the SP-partition on the set of states is a necessary and sufficient condition for general decomposition.

УДК 62-505-17

Я.Н. Олль

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ НАБЛЮДЕНИЙ
ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫI. Введение

При решении задач об управлении производственными процессами со сложными и дорогостоящими наблюдениями необходимо наряду с потерями управления учитывать и стоимость наблюдений. Так как наблюдения в разные моменты времени содержат разное количество информации об объекте, то при такой постановке задачи кроме оптимальной стратегии управления следует найти также оптимальную стратегию наблюдения. В работах [1 и 2] исследуется оптимальное расположение наблюдений при оптимальном стохастическом управлении конечным состоянием линейной динамической системы. В [3] при помощи теории дуального управления формулируется и решается задача управления и контроля, однако сложность выведенных функциональных уравнений затрудняет применение полученных результатов. В данной работе при помощи методики [3] исследуется процесс управления и контроля линейной динамической системой при квадратичной функции потерь и гауссовом распределении помех. Эти ограничения позволяют получить более сильные результаты для данной системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель системы следующего вида:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Cw_k, \quad (2.1)$$

где $k = 0, 1, \dots$ дискретный индекс момента времени, x - n -мерный вектор состояния, w - p -мерный вектор возмущений, u - r -мерный вектор управления, A, B и C суть известные мат-

рицы размеров $n \times n$, $n \times r$ и $r \times r$ соответственно. Имеющиеся в модели (2.1) случайные векторы имеют следующие статистические характеристики:

$$\begin{aligned} E\{w_k\} &= 0, \quad E\{w_k w_l^T\} = \begin{cases} Q & \text{при } k=l \\ 0 & \text{при } k \neq l \end{cases} \\ E\{x_0\} &= \alpha, \quad E\{(x_0 - \alpha)(x_0 - \alpha)^T\} = \Sigma_0, \\ E\{w_k x_0^T\} &= 0, \quad w_k \sim N(0, Q), \\ x_0 &\sim N(\alpha, \Sigma_0), \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $E\{\cdot\}$ - оператор математического ожидания, $N(\cdot)$ обозначает многомерный нормальный закон распределения, Σ_0 и Q - известные ковариационные матрицы, α - известный n -мерный вектор.

Пусть в отличие от обычной задачи стохастического управления алгоритм обладает способностью в каждый дискретный момент времени $k = 0, 1, \dots$ принимать решение z_k о наблюдении системы:

- а) наблюдать: $z_k = 1$;
- б) не наблюдать: $z_k = 0$.

При $z_k = 1$ производятся наблюдения по закону:

$$y_k = Hx_k + \varphi_k, \quad (2.3)$$

где H - матрица размера $m \times n$, y - m -мерный вектор измеренных значений вектора Hx_k , φ - m -мерный вектор ошибок измерений, имеющий следующие статистические характеристики:

$$\begin{aligned} E\{\varphi_k\} &= 0, \quad E\{\varphi_k \varphi_l^T\} = \begin{cases} R & \text{при } k=l \\ 0 & \text{при } k \neq l \end{cases}, \\ E\{\varphi_k w_l^T\} &= 0, \quad \varphi_k \sim N(0, R), \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

и k, l пробегает все дискретные моменты времени, где производятся наблюдения.

Пусть задана удельная функция потерь в виде:

$$W_k = \|x_k\|_V^2 + \|u_{k-1}\|_T^2 + \alpha \cdot z_{k-1}, \quad (2.5)$$

$k = 1, 2, \dots, N$, где V и T - симметричные положитель-

но определенные матрицы размера $\lambda \times \lambda$ и $\gamma \times \gamma$ соответственно, d — стоимость наблюдения, N — общее число тактов управления и $\|x\|_V^2$, $\|u\|_T^2$ обозначают квадратичные формы $x^T V x$ и $u^T T u$ соответственно. Ставится задача нахождения регулярных стратегий контроля и управления:

$$x_k^* = x_k^*(x^{k-1}, u^{k-1}, y^{k-1}), \quad (2.6)$$

$$u_k^{1*} = u_k^{1*}(x_k = 1, x^{k-1}, u^{k-1}, y^k), \quad (2.7)$$

$$u_k^{0*} = u_k^{0*}(x_k = 0, x^{k-1}, u^{k-1}, y^{k-1}), \quad (2.8)$$

таких, чтобы минимизировался общий риск

$$R = E \left\{ \sum_{k=1}^N W_k \right\}. \quad (2.9)$$

Заметим, что верхний индекс k обозначает совокупность величин до k -го момента времени:

$$y^k = (y_0, y_1, \dots, y_k).$$

Таким образом, в каждый дискретный момент времени $k = 0, 1, \dots, N-1$ принимается решение x_k о наблюдении системы, при $x_k = 1$ производится наблюдение по (2.3), а затем вычисляется оптимальное управляющее воздействие.

3. Определение оптимальной оценки состояния системы

Образуем обобщенные наблюдения:

$$y_k = H x_k + \varphi_k^i, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.1)$$

где при $x_k = 1$; $\varphi_k^i = \varphi_k$, поэтому в моментах времени, когда наблюдается система, обобщенные наблюдения совпадают с наблюдениями по (2.3), но в моментах времени, когда $x_k = 0$, компоненты φ_k^i имеют бесконечные дисперсии и обобщенные наблюдения не содержат информации о состоянии системы x_k .

Таким образом:

$$E \{ \varphi_k^i \} = 0, \quad E \{ \varphi_k^i \varphi_l^{i T} \} = \begin{cases} R_k & \text{при } k=l \\ 0 & \text{при } k \neq l \end{cases}$$

$$R_k = \begin{cases} R & \text{при } z_k = 1 \\ \infty \cdot R & \text{при } z_k = 0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

$$\varphi_k^l \sim N(0, R_k), \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Для оптимального стохастического управления линейной динамической системой следует найти выражение для оптимальной оценки состояния системы x_k на основе наблюдений y^k и известной совокупности входных величин u^{k-1} . Так как наша система линейная и случайные помехи распределены нормально, то оптимальную оценку μ_k для x_k можно получить на выходе фильтра Калмана. Ее описывают следующие рекуррентные соотношения [4]:

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} &= A\mu_k + Bu_k + P_{k+1} H^T R_{k+1}^{-1} \cdot \\ &\cdot [y_{k+1} - H(A\mu_k + Bu_k)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$P_{k+1} = [(AP_k A^T + CQC^T)^{-1} + H^T R_{k+1}^{-1} H]^{-1}. \quad (3.4)$$

При $z_{k+1} = 0$ $R_{k+1}^{-1} = 0$

и получим:

$$\mu_{k+1} | z_{k+1} = 0 = A\mu_k + Bu_k, \quad (3.5)$$

$$P_{k+1} | z_{k+1} = 0 = AP_k A^T + CQC^T. \quad (3.6)$$

Здесь мы видим, что обобщенные наблюдения с бесконечными дисперсиями ошибки для оценки x_k не понадобятся, однако облегчают анализ системы. Таким образом:

$$\mu_{k+1} | z_{k+1} = 0 = E\{x_{k+1} | y^k\}, \quad (3.7)$$

$$P_{k+1} | z_{k+1} = 0 = E\{(x_{k+1} - \mu_{k+1})(x_{k+1} - \mu_{k+1})^T | y^k\}. \quad (3.8)$$

При $z_{k+1} = 1$ $\mu_{k+1} | z_{k+1} = 1$ и $P_{k+1} | z_{k+1} = 1$ вычисляем по

(3.3) и (3.4), учитывая, что $R_{k+1} = R$.

4. Определение оптимальных регулярных стратегий управления и контроля

Для нахождения оптимальных регулярных стратегий управления и контроля воспользуемся методом динамического программирования.

Условный риск в момент времени N :

$$\begin{aligned} r_N = E \left\{ W_N \mid y^{N-2} \right\} &= \int W_N(x_N, u_{N-1}, z_{N-1}) p(x_N, \\ u_{N-1} \mid y^{N-2}) d\Omega(x_N, u_{N-1}) &= \int W_N(x_N = Ax_{N-1} + \\ + Bu_{N-1} + Cw_{N-1}, u_{N-1}, z_{N-1}) p(w_{N-1}) p(x_{N-1} \mid y^{N-1}) \cdot \\ \cdot p(y_{N-1} \mid y^{N-2}) d\Omega(y_{N-1}, x_{N-1}, w_{N-1}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

При $z_{N-1} = 1$ получим после преобразований:

$$r_N^1 = r_N \Big|_{z_{N-1}=1} = \alpha + \int \alpha_N p(y_{N-1} \mid y^{N-2}) \Big|_{z_{N-1}=1} dy_{N-1}, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_N = \int \left[\| Ax_{N-1} + Bu_{N-1} + Cw_{N-1} \|_V^2 + \| u_{N-1} \|_T^2 \right] \cdot \\ \cdot p(w_{N-1}) p(x_{N-1} \mid y^{N-1}) \Big|_{z_{N-1}=1} \cdot d\Omega(w_{N-1}, x_{N-1}). \end{aligned}$$

Оптимальное значение управляющего воздействия u_{N-1}^{1*} , которое минимизирует r_N^1 , получим из условия минимума α_N по u_{N-1} , что согласно [4] дает

$$u_{N-1}^{1*} = -\Lambda_{N-1} u_{N-1} \Big|_{z_{N-1}=1}, \quad (4.3)$$

где

$$\Lambda_{N-1} = [T + B^T V B]^{-1} B^T V A, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha_N^* = \min_{u_{N-1}} \alpha_N = E \left\{ x_{N-1}^T J_1 x_{N-1} \mid y^{N-1} \right\} \Big|_{z_{N-1}=1} + \\ + \text{tr}(C^T V C Q) + \text{tr}(\pi_1 P_{N-1}^1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $J_1 = A^T V A - \pi_1$, $\pi_1 = A^T V B \Lambda_{N-1}$, $P_{N-1}^1 = P_{N-1} \Big|_{z_{N-1}=1}$.

Минимум условного риска при наблюдении системы в момент времени $N-1$ выражается теперь в виде:

$$r_N^{1*} = \min_{u_{N-1}} r_N^1 = \alpha + E \left\{ \alpha_N^* | y^{N-2} \right\} = \alpha + E \left\{ x_{N-1}^T J_1 x_{N-1} | y^{N-2} \right\} + \text{tr}(C^T V C Q) + \text{tr}(\pi_1 P_{N-1}^1). \quad (4.6)$$

При ненаблюдении системы в момент времени $N-1$ условное распределение x_{N-1} и u_{N-1} в (4.1) не зависит от y_{N-1} (см. (3.7) и (3.8)), поэтому условный риск в момент N выражается следующим образом:

$$r_N^0 = \int \left[\| A x_{N-1} + B u_{N-1} + C w_{N-1} \|_V^2 + \| u_{N-1} \|_T^2 \right] p(w_{N-1}) p(x_{N-1} | y^{N-2}) d\Omega(w_{N-1}, x_{N-1}). \quad (4.7)$$

Согласно [3] u_{N-1}^{0*} , которое минимизирует r_N^0 :

$$u_{N-1}^{0*} = -\Lambda_{N-1} \mu_{N-1} |_{\mathcal{E}_{N-1}=0}, \quad (4.8)$$

$$r_N^{0*} = \min_{u_{N-1}} r_N^0 = E \left\{ x_{N-1}^T J_1 x_{N-1} | y^{N-2} \right\} + \text{tr}(C^T V C Q) + \text{tr}(\pi_1 P_{N-1}^0), \quad (4.9)$$

если $P_k^0 = P_k |_{\mathcal{E}_{k=0}}$ при всех $k = 1, 2, \dots, N-1$. \mathcal{E}_{N-1} выбирает из условия минимума:

$$\min_{\mathcal{E}_{N-1}} \left\{ \begin{array}{l} r_{N-1}^{1*} \\ r_{N-1}^{0*} \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Так как ковариационные матрицы ошибок оценивания $x_k P_k^1$ и P_k^0 при всех $k = 1, 2, \dots$ не зависят от u^{k-1} и y^{k-1} (см. (3.4) и (3.6)), а зависят от \mathcal{E}^{k-1} :

$$P_k^0 = P_k(\mathcal{E}_k = 0, \mathcal{E}^{k-1}), \quad P_k^1 = P_k(\mathcal{E}_k = 1, \mathcal{E}^{k-1}),$$

то разность:

$$r_N^{1*} - r_N^{0*} = \alpha + \text{tr} \left\{ \pi_1 \left[P_{N-1}^1(\mathcal{E}^{N-2}) - P_{N-1}^0(\mathcal{E}^{N-2}) \right] \right\}, \quad (4.11)$$

при неотрицательности которого выбираем $\mathcal{E}_{N-1} = 0$, тоже не зависит от u^{N-2} и y^{N-2} , а зависит от \mathcal{E}^{N-2} . Таким образом,

$$x_{N-1}^* = x_{N-1}^*(x^{N-2}). \quad (4.12)$$

Выпишем минимум r_N по x_{N-1} и u_{N-1}

$$r_N^{**} = \min_{x_{N-1}} \min_{u_{N-1}} r_N = E \left\{ x_{N-1}^T J_1 x_{N-1} \mid y^{N-2} \right\} + \varphi_{N-1}(x^{N-2}), \quad (4.13)$$

где

$$\varphi_{N-1}(x^{N-2}) = \text{tr}(C^T V C Q) + x_{N-1}^*(x^{N-2}) \alpha + \text{tr}[\pi_1 P_{N-1}(x_{N-1}^*, x^{N-2})].$$

С применением метода динамического программирования можно выписать для условного риска на $N-k$ -ом такте управления r_{N-k} при всех $k = 1, 2, \dots, N-1$ следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} r_{N-k} &= E \left\{ W_{N-k} \mid y^{N-k-2} \right\} + E \left\{ r_{N-k+1}^{**} \mid y^{N-k-2} \right\} = \\ &= E \left\{ \|x_{N-k}\|_V^2 + \|u_{N-k-1}\|_T^2 + \alpha x_{N-k-1} \mid y^{N-k-2} \right\} + \\ &+ E \left\{ \|x_{N-k}\|_{J_k}^2 \mid y^{N-k-2} \right\} + \varphi_{N-k}(x^{N-k-1}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{N-k}(x^{N-k-1}) &= \varphi_{N-k+1}(x_{N-k}^*, x^{N-k-1}) + \alpha x_{N-k}^*(x^{N-k-1}) + \\ &+ \text{tr}[C^T(V + J_{k-1})CQ] + \text{tr}[\pi_k P_{N-k}(x_{N-k}^*, x^{N-k-1})], \end{aligned}$$

$$J_k = A^T(V + J_{k-1})A - \pi_k, \quad J_0 = 0, \quad \varphi_N = 0,$$

$$\pi_k = A(V + J_{k-1})B \Lambda_{N-k}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\Lambda_{N-k} = [T + B^T(V + J_{k-1})B]^{-1} B^T(V + J_{k-1})A,$$

$$\begin{aligned} r_{N-k}^{i*} &= \min_{u_{N-1}} r_{N-k} \mid x_{N-k-1} = 1 = E \left\{ x_{N-k-1}^T J_{k+1} x_{N-k-1} \mid \right. \\ &\left. y^{N-k-2} \right\} + \text{tr}[C^T(V + J_k)CQ] + \text{tr}[\pi_{k+1} \cdot \\ &\cdot P_{N-k-1}^1(x^{N-k-2})] + \alpha + \varphi_{N-k}(x_{N-k-1} = 1, x^{N-k-2}), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$r_{N-k}^{0*} = \min_{u_{N-1}} r_{N-k} | x_{N-k-1} = 0 = E \left\{ x_{N-k-1}^T J_{k+1} x_{N-k-1} \right. \\ \left. y^{N-k-2} \right\} + \text{tr} [C^T (V + J_k) C Q] + \text{tr} [\pi_{k+1} P_{N-k-1}^0 (x^{N-k-2})] + \\ + \varrho_{N-k} (x_{N-k-1} = 0, x^{N-k-2}). \quad (4.16)$$

Если выбираем $x_{N-k} = 1$, то оптимальное значение управляющего воздействия в этот момент времени будет равно:

$$u_{N-k}^{1*} = -\Lambda_{N-k} \mu_{N-k} | x_{N-k} = 1, \quad (4.17)$$

а если принимаем решение не наблюдать систему $x_{N-k} = 0$, то следует применять управляющее воздействие:

$$u_{N-k}^{0*} = -\Lambda_{N-k} \mu_{N-k} | x_{N-k} = 0. \quad (4.18)$$

Образует разность: $k = 1, 2, \dots, N$,

$$r_{N-k}^{1*} - r_{N-k}^{0*} = a + \text{tr} \left\{ \pi_{k+1} [P_{N-k-1}^1 (x^{N-k-2}) - \right. \\ \left. - P_{N-k-1}^0 (x^{N-k-2})] \right\} + \varrho_{N-k} (x_{N-k-1} = 1, x^{N-k-2}) - \varrho_{N-k} (x_{N-k-1} = 0, x^{N-k-2}). \quad (4.19)$$

Так как x_{N-k-1} выбираем по знаку разности (4.19), которая не зависит от u^{N-k-2} и y^{N-k-2} , то:

$$x_k^* = x_k^* (x^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.20)$$

Здесь мы видим, что оптимальное расположение наблюдений не зависит от текущих наблюдений, поэтому его можно определить на основе априорных данных о системе. Заметим, что для более частного случая управления и контроля линейной динамической системой это свойство было отмечено в [1]. Этот результат можно легко обобщить и для линейной динамической системы с переменными коэффициентами.

Обозначим через $R(x^{N-1})$ общий риск, соответствующий какому-то фиксированному до управления системой расположению наблюдений x^{N-1} . Выражение для $R(x^{N-1})$ легко получить на основе рекуррентных формул (4.14 - 16), опуская минимизацию по x :

$$R(x^{N-1}) = \alpha^T J_N \alpha + \text{tr} (J_N \Sigma_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ x_k a + \right.$$

$$+ \operatorname{tr}[\pi_{N-k} P_k(x^k)] + \operatorname{tr}[C^T(V + J_{N-k-1}) C Q] \} . \quad (4.21)$$

Оптимальное расположение наблюдений получаем, минимизируя по x^{N-1} часть общего риска, зависящую от x^{N-1} :

$$R_1(x^{N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ x_k a + \operatorname{tr}[\pi_{N-k} P_k(x^k)] \right\}, \quad (4.22)$$

учитывая матричные ограничения:

$$P_k = [(A P_{k-1} A^T + C Q C^T)^{-1} + x_k H^T R^{-1} H]^{-1},$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$P_0 = [\Sigma_0^{-1} + x_0 H^T R^{-1} H]^{-1}$$

и целочисленность переменных x_i :

$$x_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Л и т е р а т у р а

1. Н. К у ш н е р. On the optimum timing of observations for linear control systems with unknown initial state. IEEE Transactions on Automatic Control, 1964, No.2, pp. 144-150.

2. М. А о к и, Л. М. Т у н г. Optimal discrete time control system with cost for observation. IEEE Transactions on Automatic Control, 1969, No. 2, pp. 165-175.

3. Е. П. М а с л о в. Управление случайным процессом и контроль I и II. Автоматика и телемеханика. 1969, № 4, стр. 183-193, № 6, стр. 191-196.

4. М. А о к и. Optimization of stochastic systems. N.Y., 1967.

On the optimum location of observations for linear
dynamic system

Summary

Using the tools of dual control theory, the optimum location of observations is determined for linear dynamic control system with gaussian noise, which minimizes the expected value of the loss function, which is quadratic in the control and position error and takes into account the cost of observations. For the cases considered, the location can be determined a priori, and do not depend on the values of previous observations.

УДК 66.012:62-505.7

О.А. Аарна

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ И ОПТИМИЗАЦИИ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Переход от математического описания (МО) и оптимизации отдельных технологических аппаратов к оптимизации сложных химико-технологических комплексов (ХТК) ставит задачу разработки общих методов их МО. ХТК можно отнести к большим системам [1], МО которых состоит из трех основных элементов: моделей подсистем, модели связей между подсистемами и модели внешней среды [2]. Специфика ХТК должна отражаться на специфике элементов их МО.

Подсистемой может быть любой функционально самостоятельный элемент ХТК: технологический аппарат или часть аппарата, установка, цех и т.д. Связи между подсистемами осуществляются через материальные и энергетические потоки, а структура связей задается технологической схемой ХТК. Выбор модели внешней среды зависит от природы решаемой задачи (проектирование, оперативное управление и т.п.). Характерными особенностями ХТК являются непрерывность (или кусочная непрерывность) процессов в подсистемах и многокомпонентность материальных потоков.

Вычислительным аспектам статической оптимизации сложных ХТК посвящено значительное количество работ [3,4,5,6 и др.]. Меньше внимания уделено вопросам динамической оптимизации ХТК [7,8] и специфике математического моделирования ХТК [9,10]. Можно отметить тенденцию применения понятий и методов теории графов для формализации технологических схем [11,12], а также для упорядочения этапов вычислений при оптимизации ХТК [4,6,13].

В настоящей статье исследованы общие вопросы МО непрерывного ХТК с многокомпонентными потоками (в частности, являющимися сложными смесями) и обсуждены проблемы оптимизации таких комплексов. Предлагаемая методика МО ХТК обобщает подход, развитый в [12], введением многокомпонентного представления потоков.

По физической природе потоки ХТК можно разделить на однокомпонентные (потоки энергии и чистых веществ) и многокомпонентные. Но имеется важный класс потоков, куда входят нефть, а также многие продукты переработки нефти, газа и твердых топлив, которые, хотя являются многокомпонентными (с числом компонентов ν порядка сотен или тысяч), имеют, однако, настолько сложный состав, что их рассмотрение как многокомпонентных смесей индивидуальных веществ не представляется возможным. Такие смеси принято называть сложными [14,15], и они сами являются объектами моделирования. Применение нашли два типа моделей сложных смесей: дискретная, в которой компоненты исходной смеси объединяются в группы или фракции, являющиеся обобщенными компонентами с числом $n \ll \nu$, и непрерывная с множеством компонентов мощности континуума. В обоих случаях модели характеризуются существенно меньшим числом параметров, подлежащих определению на основе экспериментальных данных, чем моделируемая сложная смесь. Точность модели сложной смеси зависит в первую очередь от точности экспериментальных данных, используемых при оценке параметров модели и поэтому предпочтение следует отдать модели, которая при заданной точности проще реализуема. Поскольку реализация МО ХТК, как правило, происходит на ЭЦВМ, то дискретные модели потоков по своей природе более удобны. Ниже при изложении методики МО ХТК за основу принята дискретная модель потоков, хотя полученные уравнения можно обобщить и на случай непрерывной модели потоков.

Можно дать следующую классификацию моделей потоков ХТК:

1) скалярная (однокомпонентная), характеризуемая интенсивностью потока $u(t)$, где t - время;

2) дискретная (многокомпонентная), характеризуемая интенсивностью потока и вектором состава $\bar{\omega}(t) = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n)$:

$$W(t) = u(t) \cdot \bar{\omega}(t), \quad (I)$$

причем

$$\sum_{i=1}^n \omega^i = 1, \quad \omega^i \geq 0; \quad (2)$$

3) непрерывная, характеризуемая интенсивностью потока и функцией распределения (ФР) состава $\omega(\alpha, t)$:

$$W(\alpha, t) = u(t) \cdot \omega(\alpha, t), \quad (3)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\alpha, t) d\alpha = 1, \quad \omega(\alpha, t) \geq 0. \quad (4)$$

Если ФР $\omega(\alpha, t)$ рассматривать как обобщенную функцию и (4) заменить соответствующим интегралом Стильтеса, то первые два типа моделей приводимы к последнему с ФР в виде δ -функции (1^0) или их взвешенной суммы (2^0). Для случая уравнений процесса, линейных и однородных относительно ФР, соответствующие МО для дискретной и непрерывной моделей потоков формально совпадают с заменой суммирования на интегрирование [14].

Формализация технологической схемы ХТК

Универсальная модель ХТК строится в процессе формализации технологической схемы комплекса на уровне потоков между подсистемами. Технологической схеме поставим в соответствие направленный граф $G = \{S, K\}$, узлами (вершинами) $i \in S$ которого являются подсистемы, а дугами $(i, j) \in K$ — потоки между подсистемами. Полученный граф можно назвать технологическим графом [11]. Предположим, что между каждой парой узлов i, j имеется не более одной дуги $(i, j) \in K$ и отсутствуют петли $(i, i) \in K$. Сделанные предположения не являются ограничивающими и вызваны специальной структурой множеств индексов, которые будут введены ниже. При необходимости можно добавить нужное количество фиктивных резервуаров (см. ниже).

Введение вспомогательных множеств индексов:

"перед i " $B(i) = \{j : (j, i) \in K, i \in S, j \in S\}$,

"после i " $A(i) = \{j : (i, j) \in K, i \in S, j \in S\}$,

компонентов $M = \{1, 2, \dots, n\}$ и компонентов потока

$W_{ij}: M_{ij} \subset M$ позволяет разбить множество S на пять непересекающихся подмножеств:

1) источники: $S_1 = \{i: B(i) = \emptyset\},$

2) стоки: $S_2 = \{i: A(i) = \emptyset\},$

3) резервуары (промежуточные емкости):

$$S_3 = \{i: M_{ki} = M_{ij}, k \in B(i), j \in A(i)\},$$

входящие и выходящие потоки которых изменяются во времени независимо. Предположим наличие в резервуарах режима идеального перемешивания:

$$\bar{w}_{ij}(t) = \bar{w}_i(t), i \in S_3, j \in A(i); \quad (5)$$

4) аллакторы (название заимствовано из [II] и означает преобразование), входящие и выходящие потоки которых имеют в общем несовпадающие множества компонентов $M_{ki} \neq M_{ij}$ и функционально связаны через оператор F_i :

$$F_i(W_{ki}, W_{ij}, u_i, v_i, t) = 0, \quad (6)$$

$$i \in S_4, k \in B(i), j \in A(i),$$

где u_i - управляющие воздействия (кроме интенсивностей входящих потоков), а v_i - возмущающие воздействия (кроме составов входящих потоков), приложенные к i -му аллактору. В принципе управления u_i , которыми могут быть различные параметры технологического режима (температуры, давления и т.п.), приводимы к эквивалентным потокам материалов или энергии $u_{ki}, i \in S_4, k \in B(i)$ [16].

5) фиктивные резервуары:

$$S_5 = \left\{ i: \sum_{k \in B(i)} W_{ki}(t) = \sum_{j \in A(i)} W_{ij}(t) \right\}.$$

Источники и стоки представляют с точки зрения рассматриваемого ХТК "внешнюю среду". Сюда же относятся возмущения и критерий оптимальности комплекса. Узлы $i \in S_1 \cup S_2$ можно назвать внешними, а $i \in S_3 \cup S_4 \cup S_5$ соответственно внутренними узлами ХТК.

Состояние узлов $i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ полностью определяется заданием их векторных потенциалов:

$$X_i(t) = \int_0^t \left[\sum_{k \in B(i)} W_{ki}(\tau) - \sum_{j \in A(i)} W_{ij}(\tau) \right] d\tau + X_i(0), \quad (7)$$

где $X_i(0)$ - начальный векторный потенциал i -го узла.
Аналогично потоку векторный потенциал можно выразить в виде:

$$X_i(t) = x_i(t) \cdot \bar{\omega}_i(t), \quad (8)$$

где x_i - скалярный потенциал или просто потенциал i -го узла, удовлетворяющий уравнению:

$$x_i(t) = \int_0^t \left[\sum_{k \in B(i)} u_{ki}(\tau) - \sum_{j \in A(i)} u_{ij}(\tau) \right] d\tau + x_i(0), \quad (9)$$

где $x_i(0)$ - начальный потенциал i -го узла.

Универсальная модель ХТК состоит из системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_i}{dt} = \begin{cases} -\sum_{j \in S_3 \cup S_4 \cup S_5} W_{ij} & , \text{ если } i \in S_1 \\ \sum_{j \in S_3 \cup S_4 \cup S_5} W_{ji} & , \text{ если } i \in S_2 \\ \sum_{j \in S_1 \cup S_4 \cup S_5} W_{ji} - \sum_{j \in S_2 \cup S_4 \cup S_5} W_{ij} & , \text{ если } i \in S_3 \end{cases} \quad (10)$$

которая вместе с операторными уравнениями (6) и вектором начальных условий $\bar{X}(0)$ описывает состояние технологического графа; ограничений на область управления:

$$u_{ki}, u_{ij} \in \Omega_u, \quad k \in B(i), \quad (11)$$

$$\sum_{k \in B(i)} W_{ki}(t) = \sum_{j \in A(i)} W_{ij}(t), \quad i \in S_5; \quad (12)$$

ограничений на потенциалы узлов:

$$0 \leq x_i \leq h_i, \quad i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3, \quad (13)$$

где h_i - емкость i -го узла ($0 < h_i \leq \infty$);

ограничений на составы выходящих потоков:

$$\bar{\omega}_{ij} \in \Omega_\omega, \quad j \in A(i) \cap S_2, \quad i \in S_3 \cup S_4 \cup S_5; \quad (14)$$

критерия оптимальности комплекса (и быть может аллакторов). Во многих случаях часть ограничений (I4) может быть заменена на более слабые условия вида

$$\bar{\omega}_i(t_l) \in \Omega_{\omega}, i \in S_3, \quad (I5)$$

где t_l — конечные моменты интервалов времени, в течение которых $u_{ij} = 0, i \in S_3, j \in A(i) \cap S_2$.

Приведенная модель может служить основой для создания систем оперативного управления и оптимизации ХТК. В зависимости от вида упрощений, принятых относительно характера возмущений и потоков, а также типа операторов F_i , модель применима при решении различных задач краткосрочного планирования, оптимизации технологических режимов аллакторов, оптимального использования резервуарного парка и проектирования ХТК (сравнение различных вариантов технологической схемы на основе заданного критерия оптимальности и выбор наилучшего решения по результатам модельных испытаний). Учитывая высокую размерность системы (IO) и сложность идентификации операторов F_i в ближайшем будущем применение могут найти модели ХТК со статическими операторами аллакторов. В таком случае идентификация операторов F_i происходит на основе балансных экспериментов.

Допустим, что уравнения (6), описывающие некоторые обобщенные балансные соотношения между входящими и выходящими потоками, разрешимы относительно выходящих потоков:

$$w_{ij} = F_i^{kj}(w_{ki}, u_i, v_i, t) \quad (I6)$$

$$i \in S_4, j \in A(i), k \in B(i).$$

В случае линейности относительно входящих потоков операторами F_i^{kj} являются матрицы размерности $n_i \times n_{kj}$, элементы которых зависят (в общем, нелинейно) от u_i, v_i и t как параметров. Система уравнений (IO) принимает после подстановки F_i^{kj} следующий вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \begin{cases} -\sum_{j \in S_3 \cup S_4 \cup S_5} w_{ij} & , \text{если } i \in S_1 \\ \sum_{j \in S_3 \cup S_5} w_{ji} + \sum_{j \in S_4 \cap B(i)} F_j^{ki}(u_j, v_j, t) w_{ki} & , \text{если } i \in S_2 \\ \sum_{j \in S_1 \cup S_5} w_{ji} - \sum_{j \in S_2 \cup S_5} w_{ij} + \sum_{j \in S_4 \cap B(i)} F_j^{ki}(u_j, v_j, t) w_{ki} & , \text{если } i \in S_3 \end{cases} \quad (I7)$$

При решении некоторых задач краткосрочного планирования и проектирования ХТК целесообразно использовать упрощенную форму уравнений (I7), записанную для скалярной модели потоков.

Оптимизация ХТК

Задачи оптимального управления и проектирования отличаются лишь различной природой управлений, поэтому их можно объединить под названием задач оптимизации (ЗО). Ниже будут рассмотрены только те ЗО, которые сформулированы на базе моделей ХТК со статическими операторами F_{ij}^{kj} . Состояние технологического графа описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = F(\bar{u}, \bar{v}, t), \quad (I8)$$

где \bar{x} — фазовый вектор, фазовыми координатами которого являются потенциалы узлов $i \in S_1, S_2, S_3$ (в случае скалярной модели потоков) или потенциалы компонентов в этих узлах,

\bar{u} — вектор управлений, координатами которого являются $u_i, i \in S_4$ и интенсивности независимых потоков

$$u_{ij}, i \in S_1, S_3, S_5, j \in A(i);$$

\bar{v} — вектор возмущений.

Характерной особенностью системы (I8) является независимость функций F от фазовых координат, что существенно упрощает их решение. В силу ограничений (I3) ЗО ХТК относятся к задачам с ограниченными фазовыми координатами. Хотя на основе принципа максимума выведены необходимые условия оптимальности для ЗО с ограничениями на фазовые координаты [I7], аналитическое решение конкретных задач, даже умеренной размерности, на их базе чрезвычайно трудное. Для численного решения ЗО с ограниченными фазовыми координатами разработаны методы, использующие вариации в фазовом пространстве [I8]. При применении названных методов исходная динамическая ЗО сводится к некоторой общей задаче нелинейного планирования дискретизацией пространства и времени, причем полученную задачу можно сформулировать как задачу нахождения кратчайшего пути в графе. Основным в названной группе методов является понятие элементарной операции (ЭО) P_{st}^n , переводящей изображающую точку оптимально в смысле заданного критерия

оптимальности из точки фазового пространства \bar{x}_s в точку \bar{x}_t за время $\tau^r = t^{r+1} - t^r$.

Разобьем планируемый период времени $[0, T]$ на интервалы длительности τ^r . Если для каждого τ^r функции F стационарны, а возмущения постоянны (хотя меняются от интервала к интервалу случайным образом)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = F^r(\bar{u}), \quad t \in (t^r, t^{r+1}), \quad (19)$$

то на основе принципа максимума [19] ЭО реализуется при $\bar{u}^r = \text{const}$, а соответствующие фазовые траектории прямые. В силу (2), (8) и (13) допустимая область фазового пространства Ω_x является выпуклой. Отсюда следует, что при $\bar{x}_s \in \Omega_x$ и $\bar{x}_t \in \Omega_x$ вся фазовая траектория ЭО P_{st}^r принадлежит Ω_x . Это исключает надобность в проверке выполнения условия $\bar{x} \in \Omega_x$.

В [16] введено понятие числа степеней свободы ХТК, зависящего от размерностей вектора управлений Π_u и фазового вектора Π_x , а также числа линейно независимых уравнений баланса m , связывающих входящие и выходящие потоки аллакторов. Возможны следующие три случая: 1) $f = 0$, 2) $f > 0$, 3) $f < 0$. При $f = 0$ вектор управлений \bar{u}^r , реализующий ЭО P_{st}^r , находится из разностной формы уравнений (19), содержащей только независимые уравнения:

$$\frac{\bar{x}_{\Pi_x - m}^{r+1} - \bar{x}_{\Pi_x - m}^r}{\tau^r} = F_{\Pi_x - m}^r(\bar{u}), \quad (21)$$

где $\Pi_x - m$ означает размерность векторов.

При задании точек \bar{x}_s и \bar{x}_t независимо могут быть выбраны лишь $\Pi_x - m$ координат. Случай $f > 0$ сводится к первому понижением размерности системы (21) еще на величину f и соответствующим уменьшением числа независимо задаваемых координат \bar{x}_s и \bar{x}_t . При выборе исключаемых фазовых координат желательно в первую очередь брать те, на которые не наложено ограничений (13). Случай $f < 0$ соответствует несовместимой системе уравнений (19) и практически может встречаться при описании ХТК на уровне скалярной модели потоков. В данном случае f координат вектора управлений не могут быть рассмотрены в качестве независимых (но становятся ими при более детальном уровне дискретной модели потоков).

Л и т е р а т у р а

1. Н.М. Жаворонков и др. Теоретические основы хим.технол., 4, № 2, 152 (1970).
2. А.Я. Лернер. Сб. Автоматическое оперативное управление производственными процессами. Наука, М., 1965.
3. R. A g r i s, G.L. N e m h a u s e r, D.J. W i l d e. A.I.Ch.E.Journal, 10, No. 6, 913 (1964).
4. D.M. Н и м м е л б л а u. Chem. Eng. Sci., 21, No. 5, 425 (1966); 22, No. 6, 883 (1967).
5. Т.А. Бережинский, Ю.М. Волин, Г.М. Островский. Теоретические основы хим. технол., 1, № 5, 699 (1967).
6. Ю.М. Волин, Г.М. Островский. Теоретические основы хим. технол., 3, № 6, 893 (1969).
7. М.Ф. Нагиев, Л.Г. Плискин. Докл. АН СССР, 183, № 4, 891 (1968).
8. Л.Г. Плискин. Автоматика и телемеханика, №3, 172 (1968), № 4, 193 (1969).
9. Л.Г. Плискин. Автоматика и телемеханика, №1, 75 (1967).
10. М.Ф. Нагиев и др. Азерб. хим. журн., №2, 13 (1967).
11. М. К о р а х, Л. Г а ш к о. Теоретические основы хим. технол., 2 № 3, 346 (1968).
12. Ю.А. З а к. Сб. Системы промышленной кибернетики. Тр. семинара, вып. 2, Киев, 1967.
13. W.L e e, J.H. C h r i s t e n s e n, D.F. R u d d. A.I.Ch.E.Journal, 12, No. 6, 1104 (1966).
14. J.R. В о w s h a n. Ind.Eng.Chem., 41, No. 9, 2004 (1949).
15. В.И. Астахов, Е.В. Всемирнов, Д.Д. Зыков. Нефть и газ, № 6, 65 (1967).
16. О.А. А а р н а. О структурном анализе химико-технологических комплексов, Настоящий сб., стр. 73.

17. Р.В. Г а м к р е л и д з е. Изв. АН СССР, Серия математическая 24, № 3, 315 (1960).

18. Н.Н. М о и с е е в. Кибернетика, № 3, I (1966).

19. Л.С. П о н т р я г и н и др. Математическая теория оптимальных процессов. Изд. "Наука", М., 1969.

O. Aarna

On mathematical description and optimization of complex chemical plants

Summary

Mathematical description of continuous complex chemical plant with multicomponent streams has been discussed. Using graph theory terms complex chemical plant flowsheet formalization procedure has been proposed. Application of approaches using variations in the state space for the plant dynamic optimization problems has been discussed.

УДК 66.012:658.5.012.1

О.А. Аарна

О СТРУКТУРНОМ АНАЛИЗЕ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
 КОМПЛЕКСОВ

В процессе формализации технологической схемы химико-технологического комплекса (ХТК) четко выделяется структура взаимосвязей между подсистемами, что значительно облегчает их анализ. Введенные в [1] понятия оказываются полезными при структурном анализе ХТК.

Определение 1.

Химико-технологическим комплексом является любая конечная совокупность узлов S , которой соответствует ненулевой технологический граф $G = \{S, K\}$ с непустыми подмножествами источников S_1 , стоков S_2 и аллакторов S_4 .

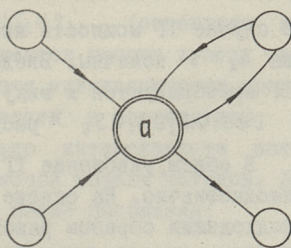
Далее ХТК отождествляется с его технологическим графом (ТГ).

Определение 2.

Технологический граф, в котором S_4 состоит из единственного элемента $S_4 = \{a\}$, называется минимальным (фиг. 1).

В графическом изображении выделим аллакторы двумя concentric circles.

Для облегчения дальнейшего изложения приведем определения некоторых понятий теории графов [2]. Локальными степенями G в i : $\varphi(i)$ и $\varphi'(i)$ называются числа дуг, соответственно выходящих из узла i и



Фиг. 1

и входящих в i . Два подграфа G_1 и G_2 не пересекаются по дугам, если $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. G есть прямая (по дугам) сумма $G = G_1 \oplus G_2$, если G_1 и G_2 не пересекаются по дугам. Понятие прямой суммы можно распространить на произвольные семейства подграфов $\{G_\alpha\}$. Два узла называются смежными, если между ними имеется дуга $(i, j) \in K$ и/или $(j, i) \in K$.

Определение 3.

Источник (сток) ТГ i называется простым, если $\varphi(i) = 1$ ($\varphi'(i) = 1$).

Из определения фиктивного резервуара и уравнений (10) [1] следует, что узлы $i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_5$ представимы как суперпозиции простых источников и стоков. Обратную операцию иногда называют расщеплением узла [3]. Очевидно, что узел i расщепим не более чем на $\varphi(i)$ источников и не более чем на $\varphi'(i)$ стоков. Суперпозиции могут подвергаться только узлы, инцидентные которым потоки имеют совпадающие множества компонентов. Пусть $G = \bigoplus_{\alpha} G_{\alpha}$. При образовании суммы и при разбиении ТГ на подграфы происходит соответственно суперпозиция и расщепление узлов.

Теорема I.

Любой ТГ можно разбить на прямую сумму своих минимальных ТГ: $G = \bigoplus_{\alpha} G_{\alpha \min}$, применяя расщепление узлов $i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_5$.

Доказательство: Выделим в множестве K подмножество дуг, соединяющее смежные аллакторы:

$$K_1 = \{(i, j) : i \in S_4, j \in S_4\}.$$

В случае ТГ мощность множества K_1 : k и мощность множества S_4 : s конечны. Введением k фиктивных резервуаров $i \in S_5$ ТГ преобразуется к виду, который расщеплением узлов $i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_5$ распадается на s минимальных ТГ.

В общем, разбиение ТГ на минимальные ТГ осуществляется неоднозначно. На основе теоремы I произвольный ТГ можно подходящим образом разбить на минимальные ТГ (анализ ТГ). Справедливо и обратное утверждение о синтезе ТГ.

Теорема 2.

Любой ТГ можно синтезировать из минимальных ТГ суперпозиций узлов $i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_5$.

При анализе структуры ХТК основным понятием берем ч и с л о с т е п е н е й с в о б о д ы (ЧСС):

$$f = n_x - n_u - m, \quad (I)$$

где n_x — число фазовых координат,
 n_u — число управлений,
 m — число линейно независимых уравнений баланса, связывающих входящие и выходящие потоки аллакторов, причем в минимальном ТГ

$$m \leq \min [\varphi(i), \varphi'(i)], i \in S_4.$$

Определение 4.

Преобразования ТГ, инвариантные относительно ЧСС, называются эквивалентными.

Нетрудно проверить, что к эквивалентным относятся следующие преобразования ТГ:

- 1) прибавление и удаление фиктивного резервуара;
- 2) объединение (агрегирование) смежных аллакторов и расщепление аллактора с раскрытием его внутренней структуры;
- 3) замена приложенного к аллактору управляющего воздействия u_i^t реализующим его материальным или энергетическим потоком W_{ki} , в частности рециркулирующим через фиктивный резервуар.

В математической модели ХТК, построенной по методике [1] фазовыми координатами, в зависимости от постановки задачи, могут быть потенциалы узлов $i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (скалярная модель потоков) или потенциалы компонентов потока в этих узлах (дискретная модель потоков). Хотя эквивалентными преобразованиями все управления можно свести к реализующим их потокам, управлениями являются только интенсивности потоков. Поэтому n_u не зависит от выбора модели потоков. Для определения n_u отметим следующие общие положения:

- 1) управлениями не могут быть выходящие потоки аллакторов;
- 2) если локальные степени фиктивного резервуара равны

$\varphi(i)$ и $\varphi'(i)$, то число управляющих (независимых) потоков, инцидентных узлу $i \in S_5$, удовлетворяет неравенству:

$$n_{u_i} \leq \varphi(i) + \varphi'(i) - 1, \quad (2)$$

которое следует из определения фиктивного резервуара [1].

Очевидно, суперпозиция и расщепление узлов не относятся к эквивалентным преобразованиям ТГ. Поэтому представляет интерес, в каком соотношении находятся ЧСС ТГ и ЧСС составляющих его минимальных ТГ. Справедлива следующая

Теорема 3

Если ТГ представима в виде прямой суммы своих минимальных ТГ: $G = \oplus_{\alpha} G_{\alpha, \min}$ и ЧСС минимальных ТГ f_{α} , то ЧСС ТГ удовлетворяет неравенству

$$f \leq \sum_{\alpha} f_{\alpha}, \quad (3)$$

причем равенство может быть достигнуто только, если все образовавшиеся при суперпозиции узлы суть простые фиктивные резервуары.

Для доказательства достаточно проанализировать случаи суперпозиции одной пары простых узлов, которые могут произойти по следующим трем взаимоисключающим схемам:

- 1) источник + источник = источник,
- 2) сток + сток = сток,
- 3) источник + сток = резервуар или фиктивный резервуар.

Анализ показывает, что в реальных схемах ХТК чаще всего $n_x > n_u$. Особенно это относится к случаю дискретной модели потоков. Линейная система типа (10) [1] с $n_x > n_u$ является неуправляемой в смысле Калмана [4]. В работах [5, 6], где исследованы задачи, которые по терминологии [1] можно назвать задачами управления (в частности, оптимального управления) резервуарным парком ХТК при линейных стационарных аллаторах, предложено назвать такие системы с $n_x > n_u$ частично управляемыми. При этом система является частично управляемой, если в течение некоторого интервала времени $[0, T]$ фазовые координаты удается удержать в допустимой области Ω_x с заданной вероятностью. Для анализа управляемости ХТК в случае статических моделей аллак-

торов, определение частичной управляемости целесообразно несколько видоизменить, учитывая, что в силу балансных ограничений типа

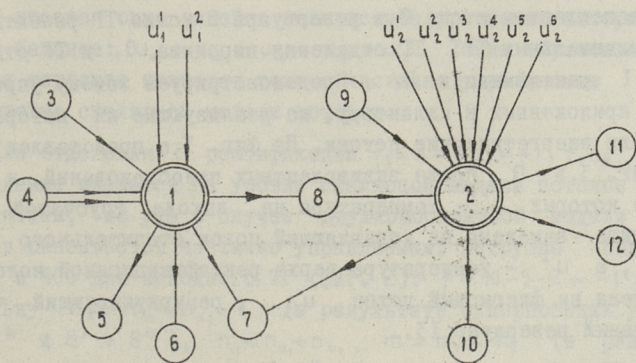
$$\sum_{k \in B(i)} u_{ki} = \sum_{j \in A(i)} u_{ij}, \quad i \in S_4 \quad (4)$$

изображающая точка может передвигаться только в $(n_x - m)$ -мерном гиперпространстве фазового пространства.

Определение 5.

ХТК называется частично управляемым в смысле статистики аллаторов, если $f > 0$, и управляемым, если $f \leq 0$.

На основе теоремы 3 можно сделать заключение, что при прочих равных условиях ХТК с резервуарами более гибкий, с точки зрения управляемости, ввиду меньшего ЧСС. Неравенство (3) показывает, что, в общем, свойства комплекса не аддитивны относительно свойств его составных частей.

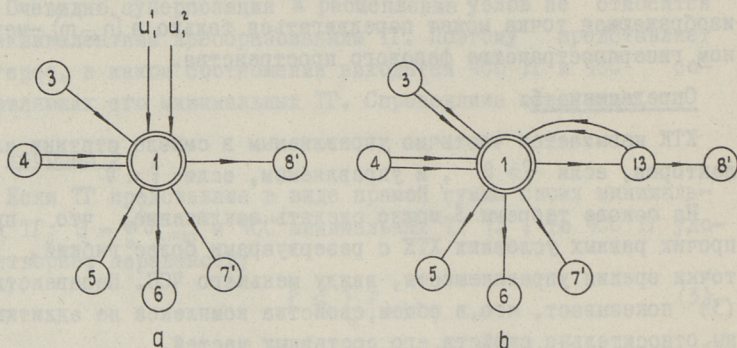


Фиг. 2.

1 - отделение пиролиза, 2 - отделение ректификации, 3 - источник отопительного газа, 4 - источник сырья пиролиза, 5 - сток остатка эвалпоратора, 6 - сток гидравлической смолы, 7 - сток пирогаза, 8 - резервуар пиролизата, 9 - источник технологического пара, 10 - сток ксялевой фракции, 11 - сток сырого бензена, 12 - сток сырого толуэна

Пример

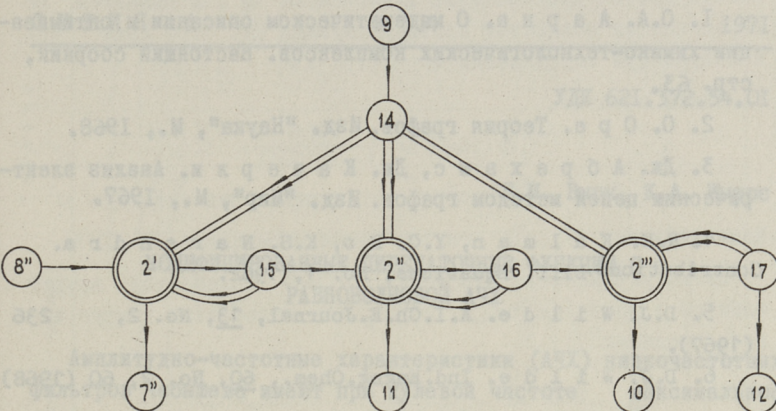
Проиллюстрируем применение вышеприведенных понятий на конкретном примере. На фиг. 2 изображена часть ТТ установки пиролиза газбензина. Двойные дуги соответствуют независимым потокам, являющимся управлениями. Стрелки u_l^l ($l = 1, 2$) являются управлениями, приложенными к аллактору.



Фиг. 3

Расщеплением стока 7 и резервуара 8 можно ТТ разбить на два минимальных ТТ: ТТ отделения пиролиза G_1 и ТТ отделения I ректификации G_2 . Продемонстрируем замену управлений, приложенных к аллактору, на реализующие их материальные или энергетические потоки. На фиг. 3, а представлен G_1 , на фиг. 3, б — G_1 после эквивалентных преобразований, в процессе которых u_1^1 — температура на выходе трубчатой печи пиролиза — заменена на управляющий поток отопительного газа $u_{3,1}$, а u_2^2 — температура верха ректификационной колонны — заменена на флегмовый поток $u_{13,1}$, рециркулирующий через фиктивный резервуар 13.

На фиг. 4 представлен G_2 после расщепления аллактора 2 (отделение I ректификации), с раскрытием более детальной технологической схемы, и замены управлений u_l^l ($l = 1, 2, \dots, 6$) на соответствующие управляющие потоки технологического пара $u_{14,2}^1, u_{14,2}^2, u_{14,2}^3$ и флегмовые потоки $u_{15,2}^1, u_{16,2}^2, u_{17,2}^3$.



Фиг. 4.
 2' - ректификационная колонна отбора низкокипящей фракции,
 2'' - ректификационная колонна отбора сырого бензена,
 2''' - ректификационная колонна отбора сырого толуэна,
 14, 15, 16, 17 - фиктивные резервуары

ЧСС отделения пиролиза $f_1 = 2$, поскольку $n_x = 6, n_u = 3, m = 1$, т.е. имеется одно линейно независимое уравнение материального баланса: $u_{41} = u_{15} + u_{16} + u_{17} + u_{18}$. Таким образом, отделение пиролиза является только частично управляемым даже на уровне скалярной модели потоков.

Для отделения I ректификации $f_2 = 6 - 6 - 1 = -1$, т.е. это отделение является на уровне скалярной модели потоков управляемым, но уже в случае двухкомпонентной модели потоков оказывается частично управляемым. Нетрудно подсчитать и ЧСС для исходного ТГ (фиг. 2): $f = 10 - 9 - 2 = -1$, поскольку $n_x = n_{x_1} + n_{x_2} - 2$ (в результате суперпозиции узлов $7' + 7''$ и $8' + 8''$), $n_u = n_{u_1} + n_{u_2}$, $m = m_1 + m_2$ (в результате суперпозиции узлов $8' + 8''$ образуется резервуар). Таким образом, $f < f_1 + f_2 = 1$ и комплекс из двух минимальных ТГ, один из которых управляемый, а другой частично управляемый (на уровне скалярной модели потоков), оказался управляемым в смысле статистики аллакторов.

Л и т е р а т у р а

1. О.А. А а р н а. О математическом описании и оптимизации химико-технологических комплексов. Настоящий сборник, стр. 63.

2. О. О р е. Теория графов. Изд. "Наука", М., 1968.

3. Дж. А б р а х а м с, Дж. К а в е р л и. Анализ электрических цепей методом графов. Изд. "Мир", М., 1967.

4. Р.Е. К а л м а н, У.С. Н о, К.С. Н а г е н д р а. Contributions Diff. Equations, No. 1, 1962.

5. D.J. W i l d e. A.I.Ch.E. Journal, 13, No. 2, 236 (1967).

6. D.J. W i l d e. Ind. Engng. Chem., 60, No. 2, 60 (1968).

O. Aarna

On structural analysis of complex chemical plants

Summary

Formal definitions of the terms: technological graph (TG), minimal TG, freedom degrees number of TG and equivalent transformations of TG have been introduced. Three theorems on splitting TG into minimal TGs, synthesizing TG from minimal TG and interrelation of freedom degrees number of TG and its minimal TGs have been given. An example illustrates the usage of terms introduced above.

УДК 621.372.54.01

Я.М. Вырк, К.А. Иверс

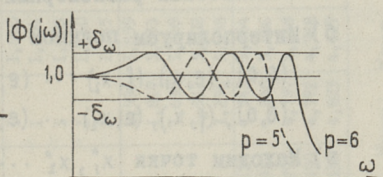
МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ С
 РАВНОВОЛНОВОЙ АЧХ

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) низкочастотных фильтров Чебышева имеют при нулевой частоте максимальное отклонение (в полосе пропускания) от требуемого значения (значение, около которого колеблется АЧХ) [1,2]. Если при нулевой частоте не допускается отклонение АЧХ от требуемого значения, то применение передаточных функций (ПФ) фильтров Чебышева нецелесообразно. Целесообразно, очевидно, применить и в этом случае ПФ с АЧХ, требуемое значение которой равно значению, около которого колеблется АЧХ. В данной статье дается алгоритм определения корней и коэффициентов таких ПФ и приводятся результаты вычислений.

Итак, поставим задачу определить корни и коэффициенты ПФ со всеми нулями в бесконечности, с нормированным свободным членом и коэффициентом при старшем члене в знаменателе

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^p + \varphi_{p-1} s^{p-1} + \dots + \varphi_1 s + 1}$$

АЧХ которой имеет отклонения $\pm \delta_\omega$ от единицы (требуемое значение АЧХ) в p точках, см. фиг. 1. Заметим, что ПФ низкочастотных фильтров Чебышева имеют отклонения в $p+1$ точках, дополнительно при нулевой частоте [1,2].



Фиг. 1

Получить аналитические выражения для ПФ данного типа затруднительно, поэтому определим ПФ численно.

Как известно, квадрат модуля минимально-фазовой ПФ является дробно-рациональной функцией от ω , и заданием ее определяется полностью соответствующая ПФ. Этот факт используем при определении ПФ $\Phi(s)$.

Таким образом,

$$|\Phi(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + R_p(\omega^2)},$$

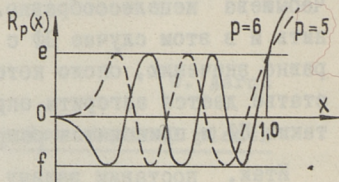
где $R_p(\omega^2)$ — полином p -го порядка относительно ω^2 .

Если найдена $R_p(\omega^2)$, то тем самым определена и $\Phi(s)$.

Легко установить, что если $|\Phi(j\omega)|$ колеблется вокруг единицы в пределах $\pm \delta_\omega$, то $R_p(\omega^2)$ колеблется вокруг нуля в пределах

$$e = \frac{2\delta_\omega - \delta_\omega^2}{1 - 2\delta_\omega + \delta_\omega^2} > 0 > f = -\frac{2\delta_\omega + \delta_\omega^2}{1 + 2\delta_\omega + \delta_\omega^2}.$$

Чтобы использовать для определения $R_p(\omega^2)$ алгоритм, предложенный в [3], нормируем частоту (принимая полосу пропускания равной единице). Для простоты записи введем обозначение $\omega^2 = x$. Требуется определить $R_p(x)$ при заданных e , f и порядке p (общий вид $R_p(x)$ дан на фиг. 2).



Фиг. 2

В итоге $\Phi(s)$ определяем в следующей последовательности:

- I. а) Выбираем произвольно точки $0 < x_1 < \dots < x_p = 1$ (нами использован равномерный шаг).
- б) Интерполируем полином $R_p(x)$ через p точек:
 - $(0, 0), (e, x_1), (f, x_2) \dots (e, 1)$ — при p -нечетном,
 - $(0, 0), (f, x_1), (e, x_2) \dots (e, 1)$ — при p -четном.
- в) Находим точки $x_1^*, x_2^* \dots x_{p-1}^*$ с экстремальными значениями $R_p(x)$.
- г) Повторяем б), где $x_1^*, x_2^* \dots x_{p-1}^*$ — новые значения аргумента.

Процесс повторяем до тех пор, пока в экстремальных точках значения $R_p(x)$ не отличаются от e и f больше допу-

Модифицированные ПФ Ф(s) с равновоной АИХ (статистический коэффициент передачи - единица)

p	δ_ω	Коэффициенты ПФ						ПОЛОСЫ	$S_{нл} = -\sigma_{нл} \pm j\omega_{нл}$	$\omega_{нл001}$	$\omega_{нл002}$	$\omega_{нл003}$	$\omega_{нл004}$	$\omega_{нл010}$	
		φ_6	φ_5	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1								φ_0
1	0,01						I	I	-1,000		0,14	0,20	0,25	0,33	0,48
	0,02						I	I	-0,656±j0,755		0,58	0,62	0,65	0,71	0,80
	0,03						I	I	-0,633±j0,774			0,69	0,72	0,76	0,85
	0,05						I	I	-0,617±j0,787				0,77	0,80	0,88
	0,10						I	I	-0,590±j0,807					0,87	0,94
2	0,01						I	I	-0,540±j0,842		0,90	0,92	0,94	0,97	1,08
	0,02						I	I	-0,819	-0,401±j1,030		1,01	1,02	1,05	1,10
	0,03						I	I	-0,775	-0,374±j1,073			1,08	1,10	1,14
	0,05						I	I	-0,746	-0,355±j1,102				1,18	1,21
	0,10						I	I	-0,699	-0,326±j1,151					1,34
3	0,01						I	I	-0,626	-0,278±j1,233	1,10	1,12	1,13	1,16	1,20
	0,02						I	I	-0,655±j0,486	-0,266±j1,198		1,20	1,21	1,23	1,26
	0,03						I	I	-0,604±j0,502	-0,243±j1,250			1,26	1,28	1,31
	0,05						I	I	-0,571±j0,512	-0,228±j1,284				1,35	1,37
	0,10						I	I	-0,524±j0,525	-0,206±j1,333					1,47
4	0,01						I	I	-0,449±j0,542	-0,172±j1,411	1,25	1,26	1,27	1,28	1,31
	0,02						I	I	-0,632	-0,496±j0,805		1,34	1,35	1,36	1,38
	0,03						I	I	-0,580	-0,443±j0,837			1,39	1,40	1,42
	0,05						I	I	-0,547	-0,418±j0,858				1,47	1,48
	0,10						I	I	-0,502	-0,374±j0,888					1,57
5	0,01						I	I	-0,432	-0,307±j0,937	1,35	1,36	1,37	1,38	1,40
	0,02						I	I	-0,538±j0,365	-0,384±j1,022		1,43	1,43	1,44	1,46
	0,03						I	I	-0,486±j0,375	-0,344±j1,060			1,48	1,50	1,50
	0,05						I	I	-0,453±j0,380	-0,318±j1,084				1,54	1,55
	0,10						I	I	-0,408±j0,388	-0,284±j1,118					1,63
6	0,01						I	I	-0,340±j0,396	-0,232±j1,167					
	0,02						I	I							
	0,03						I	I							
	0,05						I	I							
	0,10						I	I							

$\omega_{нл001}$; $\omega_{нл002}$; $\omega_{нл003}$; $\omega_{нл004}$; $\omega_{нл010}$ - полюсы пропусканий при $\delta = 0, 01$ 0,02 0,03 0,05 0,10 δ -допустимая ошибка, см, [2]

стимой величины (нами использована точность $\pm 2\%$).

2. а) Находим корни $\xi_i, i=1 \dots p$ полинома $T(x)=1+R_p(x)$, откуда в свою очередь (с учетом, что $\omega^2=x$ и $s=j\omega$)

$$s_i = \pm j\sqrt{\xi_i}.$$

Из s_i выделяем p корней на левой полуплоскости комплексной плоскости.

б) Производим нормирование частоты так, чтобы

$$\prod_{i=1}^p s_{ni} = 1.$$

Получаем

$$\Phi(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^p (s + s_{ni})},$$

причем $|\Phi(j\omega)|$ имеет искомый (фиг. 1) вид.

Задача была запрограммирована на языке "Малгол" и решена на ЭЦВМ Минск-22. Результаты были затем округлены до трех значащих цифр после запятой и даны в таблице I. Из-за округления точность АЧХ в экстремальных точках падает, оставаясь все-таки в пределах $\pm 10\%$ от δ_ω .

Сравнение модифицированных ПФ с равноволновой АЧХ с другими видами ПФ по величине полосы пропускания [2] показало, что данные ПФ уступают только незначительно ПФ фильтров Чебышева (ПФ с равноволновой АЧХ). Незначительно меньше также скорость спада АЧХ в полосе задержания (по сравнению с фильтрами Чебышева). Поэтому модифицированные ПФ с равноволновой АЧХ можно применить при тех же случаях, что и ПФ фильтров Чебышева, а особенно тогда, когда при нулевой частоте не допускается ошибка в АЧХ (отклонение АЧХ от ее требуемого значения).

Л и т е р а т у р а

1. Н. Б а л а б а н я н. Синтез электрических цепей. Госэнергоиздат, М.-Л. 1961.

2. Я.М. В ы р к. Последовательная частотная коррекция измерительных преобразователей. См. настоящий сборник, стр. 87.

3. W.F. M c G e e. Numerical Approximation Technique for Filter Characteristic Functions. IEEE Transactions on Circuit Theory, 13, No. 1, 1967, 92-94.

J. Vörk, K. Jöers

Modified transfer functions with equiripple
gain-frequency characteristic

Summary

The normalized transfer functions with gain-frequency characteristic, approximating the constant value in prescribed equiripple manner, and differing from the well-known Chebyshev equiripple transfer-functions, are derived. Some properties of these transfer functions are discussed briefly.

УДК 62-501.455

Я.М. Вырк

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТНАЯ КОРРЕКЦИЯ
 ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Предполагаем, что нам известна передаточная функция (ПФ) измерительного преобразователя (ИП)

$$W_g(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad a_0 = b_0 = 1, \quad n > m. \quad (1)$$

Поставим задачу определить ПФ корректирующего устройства (КУ)

$$W_k(s) = K_k \frac{C(s)}{D(s)} = K_k \frac{\sum_{i=0}^r c_i s^i}{\sum_{i=0}^n d_i s^i}, \quad r \geq n, \quad (2)$$

включенного последовательно с ИП, при заданных r ($r > n$, если $W_k(s)$ должен обладать свойствами низкочастотного фильтра) и коэффициенте коррекции γ [1],

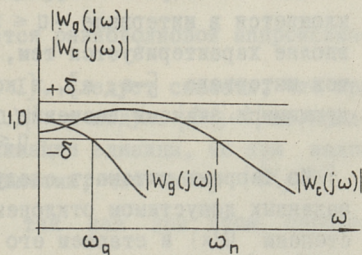
$$\gamma = \max_i \frac{c_i}{d_i} \geq 1 \quad (3)$$

так, чтобы полоса пропускания скорректированного ИП с ПФ

$$W_c(s) = W_g(s) W_k(s)$$

была бы максимальной. Не теряя общности, принимаем, что

$K_k = 1$ и что полоса пропускания определяется допустимым от-



Фиг. 1. δ - допустимая относительная ошибка, ω_g - полоса пропускания ИП, ω_n - полоса пропускания скорректированного ИП

носителем отклонением δ амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) от единицы (фиг. 1).

При больших значениях коэффициента коррекции γ общий вид ПФ КУ, очевидно, целесообразно выбрать [1] по ПФ ИП в виде

$$W_k(s) = \frac{A(s)}{B(s)F(s)}, \quad (4)$$

где

$$F(s) = \sum_{i=0}^{r-m} f_i s^i.$$

Тогда

$$W_c(s) = \frac{1}{F(s)}. \quad (5)$$

Так как заданием значения γ задается и значение некоторого коэффициента f_i , то далее придется по известному коэффициенту f_i определить все остальные коэффициенты (или корни) многочлена $F(s)$ так, чтобы ω_n была максимальной.

Рассмотрим сперва случай, где известен старший коэффициент $F(s)$.

На основе [2] можно сформулировать следующую теорему: многочлен p -ой степени

$$Q(x) = \sum_{i=0}^p q_i x^i$$

с заданным старшим коэффициентом q_p , который наименее отклоняется в интервале $-a \leq x \leq a$ от нуля, единственен и вполне характеризуется тем, что число последовательных точек интервала $[-a, a]$, в которых $Q(x)$ принимает с чередующимися знаками значение $\max_{-a \leq x \leq a} |Q(x)|$, не меньше чем $p+1$.

Из теоремы вытекает следующее следствие: при заданных допустимом отклонении от нуля δ многочлена p -ой степени $Q(x)$ и старшем его коэффициенте q_p , максимальный интервал $[-a, a]$, где $\max_{-a \leq x \leq a} |Q(x)| \leq \delta$, имеет многочлен, который принимает в интервале $[-a, a]$ с чередующимися знаками значения $\max_{-a \leq x \leq a} |Q(x)| = \delta$ не меньше чем в $p+1$ точках интервала $-a \leq x \leq a$, причем многочлен единственен.

Действительно, по теореме, при предположении следствия, δ является наименьшим отклонением в интервале $-a \leq x \leq a$ для полиномов с заданным старшим коэффициентом φ_p . Если теперь предполагать, что существует многочлен с интервалом $[-b, b] \supset [-a, a]$ (т.е. интервал $[-b, b]$ включает интервал $[-a, a]$), то получим противоречие с теоремой, так как тогда должны существовать два многочлена с равными старшими коэффициентами в интервале $[-a, a]$ с наименьшим отклонением. Значит, интервал $[-a, a]$ максимальный и многочлен единственный.

Из вышесказанного становится ясным, что при заданном старшем члене многочлена $F(s)$, для получения максимальной полосы пропускания, $\frac{1}{F(s)}$ должен обладать свойствами низкочастотного фильтра Чебышева [3], для определения коэффициентов которого используются многочлены Чебышева, наименее отклоняющиеся от нуля.

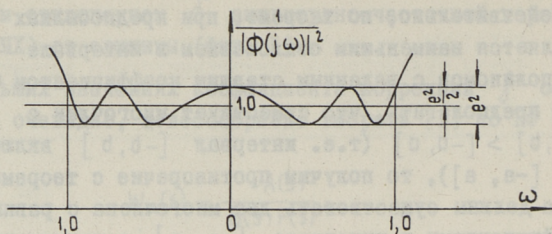
Для дальнейших выкладок рассмотрим несколько ближе нормированные ПФ (полоса пропускания равна единице) фильтров Чебышева.

Если квадрат модуля нормированной ПФ $\phi(s)$ порядка p со всеми нулями в бесконечности определяется из условия [3]

$$|\phi(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{e^2}{2} T_{2p}(\omega)},$$

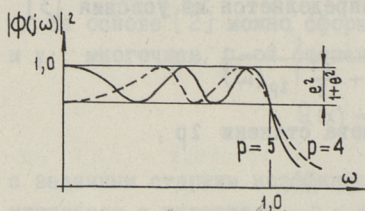
где $T_{2p}(\omega)$ — многочлен Чебышева степени $2p$,
 $\frac{e^2}{2}$ — см. фиг. 2,

то многочлен $\frac{1}{|\phi(j\omega)|^2}$ является равноволновой аппроксимацией единицы в интервале $[-1, 1]$. Следует сказать, что при этом уже квадрат модуля $|\phi(j\omega)|^2$ и модуль $|\phi(j\omega)|$ не представляют равноволновой аппроксимации единицы, но при малом e^2 разница незначительна. Заметим, что выбор $|\phi(j\omega)|^2 = 1 + \frac{e^2}{2} T_{2p}(\omega)$ не подходит, так как при этом определяются только нули ПФ (все полюсы в бесконечности). Невозможно непосредственное представление модуля $|\phi(j\omega)|$ с помощью полиномов Чебышева, ибо модуль дробно-рациональной ПФ не является многочленом от ω .

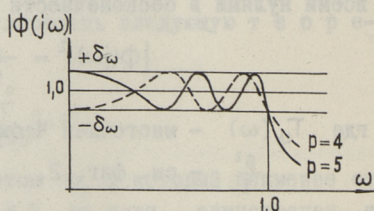


Фиг. 2

Для минимально-фазовых систем квадрат модуля ПФ определяет полностью соответствующую ПФ, квадрат старшего коэффициента которой является старшим коэффициентом квадрата модуля. Поэтому, зная $|\Phi(j\omega)|^2$, можем определить ПФ $\Phi(s)$. Так как интервалы колебаний $\frac{1}{|\Phi(j\omega)|^2}$ и $|\Phi(j\omega)|$ около единицы однозначно связаны (с возрастанием первых возрастает и последние), то при заданном старшем коэффициенте ПФ $\Phi(s)$ и отклонении модуля $|\Phi(j\omega)|$ от единицы (оба определяются e^2 , см. фиг. 2) полоса пропускания $\omega_n = 1$ является максимальной.



Фиг. 3



Фиг. 4

Для облегчения расчетов при определении расположения полюсов и коэффициентов ПФ $\Phi(s)$ порядка p исходят из условия [3]

$$|\Phi(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + e^2 T_p^2(\omega)}, \quad (6)$$

где $T_p(\omega)$ - многочлен Чебышева порядка p ,

e^2 - см. фиг. 3.

Чтобы получить ПФ $\Phi(s)$ с модулем, изображенным на фиг.4, т.е. со средним значением, равным единице, преобразуем (6) в

$$|\Phi(j\omega)|^2 = \frac{1}{A^2 [1 + e^2 T_p^2(\omega)]}, \quad (7)$$

где

$$A = \frac{1}{1 + \delta\omega}, \quad (8)$$

$$e^2 = \frac{4\delta\omega}{1 - 2\delta\omega + \delta\omega^2}. \quad (9)$$

При малых $\delta\omega$

$$e^2 \approx 4\delta\omega,$$

$$A \approx 1 - \delta\omega.$$

Формулы для вычисления полюсов ПФ $\Phi(s)$ по (6) или (7) известны [3]. С тем, задавая $\delta\omega$, можем определить и коэффициенты ПФ с равноволновой АЧХ $\Phi(s)$ по (7)

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sum_{i=0}^p \varphi_i s^i}. \quad (10)$$

Заметим, что статический коэффициент передачи ПФ $\Phi(s)$ не равен единице, т.е. $\varphi_0 \neq 1$ (см. фиг. 4).

При переходе от нормированной ПФ $\Phi(s)$ к действительной ПФ $W_c(s)$ порядка $r-m$ (см. (5)), для которой известен ее какой-нибудь коэффициент f_i , с учетом того, что статические коэффициенты передачи для $\Phi(s)$ и $W_c(s)$ одинаковы ($\varphi_0 = f_0$), получим [4]

$$f_j = \varphi_j \left(\frac{f_i}{\varphi_i} \right)^{\frac{1}{i}}, \quad i \neq 0, \quad j = 0 \dots r-m$$

$$r-m = p, \quad (II)$$

$$s_j = s_{nj} \left(\frac{\varphi_i}{f_i} \right)^{\frac{1}{i}}, \quad i \neq 0, \quad j = 1 \dots r-m,$$

где s_j - полюс ПФ $W_c(s)$,

s_{nj} - полюс ПФ $\Phi(s)$.

Выше была показана оптимальность ПФ $\Phi(s)$ только для случая, когда известен старший коэффициент ПФ $\Phi(s)$. Однако при коррекции он не всегда известен. Поэтому возникает задача: определить ПФ порядка p со всеми нулями в бесконечности, с заданным коэффициентом f_i , $i < p$ так, чтобы полоса пропускания была максимальная. Доказать оптимальность ПФ с равноволновой АЧХ не удалось. Поэтому были взяты под рас-

смотрение различные законы распределения полюсов (приведенные в [5], распределения полюсов с монотонной АЧХ - по Баттсворту [3] и [6,7], модифицированные ПФ с равноволновой АЧХ [8]). Соответствующим нормированием [4] преобразовали рассматриваемые ПФ к виду

$$\Phi'(s) = \frac{1}{\varphi'_p s^p + \dots + \varphi'_{i+1} s^{i+1} + \varphi'_i s^i + \varphi'_{i-1} s^{i-1} + \dots + 1}, \quad i < p, \quad i \neq 0,$$

где φ'_i - коэффициент ПФ $\Phi(s)$ по (7).

Для различных значений p, i и допустимых ошибок δ были вычислены полосы пропускания. Оказалось, что при тех же значениях p, i и δ , при постоянном значении φ'_i , максимальной полосой пропускания обладают ПФ с равноволновой АЧХ (при этом было выбрано $\delta = \delta_\omega$). Поэтому можно сделать вывод: среди ПФ порядка p , со всеми нулями в бесконечности и числителем, равным единице, наибольшей полосой пропускания (определяется допустимым отклонением АЧХ от единицы) при заданном одном, i -том ($i \leq p, i \neq 0$) коэффициенте, обладают ПФ с равноволновой АЧХ (при этом $\delta = \delta_\omega$).

То же сравнение различных распределений полюсов позволяет сделать и другой вывод: среди ПФ порядка p , со всеми нулями в бесконечности, с числителем и статическим коэффициентом передачи, равными единице, наибольшей полосой пропускания (определяется допустимым отклонением АЧХ от единицы, т.е. от статического коэффициента передачи) при заданном одном, i -том ($i \leq p, i \neq 0$) коэффициенте, обладают модифицированные ПФ с равноволновой АЧХ. При этом $\delta_\omega = \delta$ (δ_ω см. [8]).

Сравнение ПФ с равноволновой АЧХ и модифицированных ПФ с равноволновой АЧХ показало, что при тех же значениях p, φ'_i и δ_ω полоса пропускания модифицированной ПФ с равноволновой АЧХ лишь незначительно (в пределах 1 %) меньше полосы пропускания ПФ с равноволновой АЧХ.

Подведя итоги, получим следующую последовательность определения ПФ КУ.

Общий вид ПФ КУ определим по (4). Сравнивая (2), (3) и (4), установим

$$C(s) = A(s), \quad D(s) = B(s) F(s),$$

$$\gamma = \max_i \frac{a_i}{\sum_{q=0}^l b_q f_{i-q}}. \quad (I2)$$

Коэффициенты многочлена $F(s)$ в ПФ $W_c(s)$ (см. (5)), найдем по нормированным ПФ. Если значение АЧХ скорректированного ИП при нулевой частоте должен быть равным требуемому значению АЧХ (т.е. постоянная составляющая сигнала должна воспроизводиться после коррекции без относительной погрешности δ), то определим $F(s)$ по модифицированным ПФ с равноволновой АЧХ [8]. Если при воспроизведении постоянной составляющей сигнала допускается относительная погрешность δ , то можно $F(s)$ определить и по нормированным ПФ с равноволновой АЧХ (7) (получается некоторое увеличение полосы пропускания по сравнению с модифицированными ПФ). В обоих случаях $\delta_\omega \leq \delta$, а коэффициенты $F(s)$ определяются с учетом формул (II) и (I2).

При этом, если $B(s) \neq 1$, прямое определение коэффициента f_i затруднено (см. (I2)). Поэтому здесь лучше использовать метод последовательных приближений. Задаемся значением какого-то коэффициента $F(s)$, а по (I2) определим значение γ . Затем изменим f_i . Процесс повторим, пока γ не получена с требуемой точностью.

Если $B(s) = 1$, то при больших значениях γ обычно

$$\gamma = \frac{a_n}{f_n}, \quad (I3)$$

т.е. известен коэффициент f_n ($i=n$). Остальные коэффициенты $F(s)$ вычисляются по (II), где $i=n, m=0$.

Полоса пропускания после коррекции

$$\omega_n = \omega_{пн} \left(\frac{\varphi_i}{f_i} \right)^{\frac{1}{t}}, \quad i \neq 0, \quad (I4)$$

где $\omega_{пн}$ — полоса пропускания нормированной ПФ (при равноволновой АЧХ $\omega_{пн} = 1$, при модифицированных ПФ с равноволновой АЧХ значения $\omega_{пн}$ даны в [8]).

Следует отметить, что при постоянном γ с возрастанием порядка ПФ КУ (т.е. с возрастанием r , см. (2)) полоса пропускания скорректированного ИП возрастает.

Таблица I

r	ω_n	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0
2	0,87	—	—	—	—	1,0	1,18	1,0
3	1,37	—	—	—	0,637	1,0	1,62	1,0
4	2,26	—	—	0,127	0,311	1,0	1,27	1,0
5	2,76	—	$4,32 \cdot 10^{-2}$	0,124	0,574	1,0	1,56	1,0
6	3,68	$5,415 \cdot 10^{-3}$	$2,05 \cdot 10^{-2}$	0,147	0,367	1,0	1,29	1,0

Рассмотрим пример. Пусть

$$W_g(s) = \frac{1}{(10s+1)(s+1)} = \frac{1}{10s^2+11s+1}; \quad \gamma = 10; \quad \delta = 0,05.$$

Легко установить, используя данные [8] и (II), что при $r = 2 \dots 6$ (см. (4) при $m = 0$) и $\delta_\omega = 0,05$

$$\gamma = \frac{a_2}{f_2}, \quad \text{откуда} \quad f_2 = \frac{10}{10} = 1,0,$$

т.е. действительна формула (I3). Некоторые остальные результаты вычислений по (II), (I4) и [8] даны в таблице I. Хорошо видно увеличение полосы пропускания при возрастании порядка ПФ КУ.

В заключение можно сказать, что на основе понятия коэффициента коррекции дана методика определения передаточных функций корректирующих устройств, включаемых последовательно с измерительными преобразователями, исходя из максимума полосы пропускания. Выявлены нормированные передаточные функции с максимальной полосой пропускания.

Л и т е р а т у р а

1. Я.М. В ы р к. Последовательная электрическая коррекция динамических характеристик датчиков. Труды ТПИ, серия А, № 288, 1970, стр. III-122.
2. Н.И. А х и е з е р. Лекции по теории аппроксимации. Изд. "Наука", М., 1965.
3. Н. Б а л а б а н я н. Синтез электрических цепей. Госэнергоиздат, М.-Л., 1961.
4. А.А. В о р о н о в. Основы теории автоматического управления. Часть I, Изд. "Энергия", М.-Л., 1965.
5. Я.М. В ы р к, К.А. Х я р м а с т е. Исследование влияния расположения полюсов на длительность переходной характеристики. Труды ТПИ, серия А, № 288, 1970.
6. A. P a r o u l i s. Optimum Filters with Monotonic Response. Proceedings IRE, 46, No. 3, 1958, pp. 606-609.
7. P. H. H a l p e r n. Optimum Monotonic Low-Pass Filters. IEEE Transactions on Circuit Theory, No.2, 1969, pp. 240-242.
8. Я.М. В ы р к, К.А. И ы е р с. Модифицированные передаточные функции с равноволновой АЧХ. См. настоящий сборник стр. 81.

J. Vörk

Serial transducer frequency response correction

Summary

Using the notion of coefficient of correction, the rules for the choice of rational transfer functions of serial frequency response correction circuits are given. The normalized transfer functions with maximum cutoff frequency are found out.

УДК 621.317.346:621.382.3

Х.А. Таммет

О ДЕЙСТВИИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ
КОЭФФИЦИЕНТА ШУМА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ

Измерение коэффициента шума полупроводниковых приборов

$$N = \frac{\bar{U}_{\text{вых}}^2}{K_0^2 4kTR_g \Delta f}, \quad (I)$$

где $\bar{U}_{\text{вых}}^2$ - суммарное напряжение шума на выходе измерительного устройства,

Δf - эквивалентная полоса измерительного устройства,

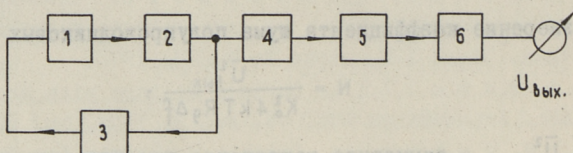
$R_g = 1/g_g$ - эквивалентное сопротивление генератора,

прямым методом [1] требует либо измерения, либо стабилизации коэффициента усиления по напряжению измерительного устройства K_0 . Одним способом стабилизации коэффициента усиления является охват всех усилительных каскадов отрицательными обратными связями, в том числе и испытываемого транзистора. Приведенные в литературе [2,3] данные об увеличении коэффициента шума усилительных каскадов при введении обратной связи поднимают вопрос о достоверности результатов измерения коэффициента шума по указанному способу. Поэтому рассматриваем здесь погрешности измерения коэффициента шума, вызываемые шумами цепи обратной связи и влиянием ее на шумы исследуемого полупроводникового прибора.

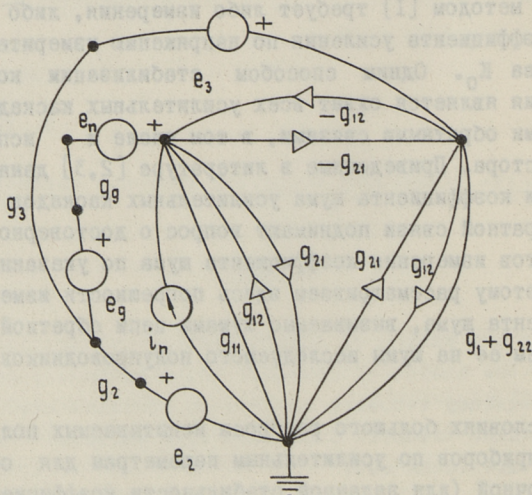
В условиях большого разброса испытываемых полупроводниковых приборов по усилительным параметрам для обеспечения достаточной (для заданной стабильности коэффициента усиления) глубины отрицательной обратной связи необходимо охватить одной петлей обратной связи 3 испытываемый транзис-

тор I и предварительный усилитель 2 (фиг. I). Из четырех возможных видов отрицательных обратных связей [4] явно наилучшей является параллельная обратная связь по напряжению, так как цепь параллельной обратной связи соединяется со слаботочными входными цепями испытываемого транзистора. Усилители измерителя (блок 4 на фиг. I) являются обычно усилителями напряжения.

При анализе действия обратной связи мы можем ограничиться рассмотрением только трех первых блоков измерителя (фиг. I), если не учитывать действие собственных шумов и



Фиг. 1. Блок-схема измерителя коэффициента шума по прямому методу: 1 - испытываемый транзистор, 2 - предварительный усилитель, 3 - цепь обратной связи, 4 - усилитель, 5 - полосовой фильтр, 6 - детектор



Фиг. 2. Эквивалентная схема входной части измерителя (блоков 1, 2 и 3)

нелинейностей последующих блоков (при условии достаточно высоких коэффициентов усиления блоков 1 и 2). При этом целесообразно на топологической эквивалентной схеме [5] блоков 1, 2 и 3 (фиг. 2) блоки 1 и 2 изобразить одним эквивалентным четырехполюсником с проводимостями g_{11} , g_{12} , g_{21} и g_{22} . Цепь обратной связи (в данном случае пассивная) состоит из проводимостей g_1 , g_2 и g_3 . Между входом транзистора и цепью обратной связи подключается проводимость эквивалентного генератора g_g .

Шумы испытываемого транзистора выражаются эквивалентами генератора e_n , i_n и коэффициентом корреляции с [6]. Термощумы проводимостей g_g , g_2 и g_3 определены формулой Найквиста, например

$$\bar{e}_g^2 = 4kT\Delta f/g_g.$$

На основе фиг. 2 определяем суммарное шумовое напряжение на выходе блока 2

$$\bar{U}_2^2 = T_{e_n}^2 \bar{e}_n^2 + T_{i_n}^2 \bar{i}_n^2 + 2CT_{e_n} T_{i_n} \sqrt{\bar{e}_n^2 \bar{i}_n^2} + T_g^2 \bar{e}_g^2 + T_2^2 \bar{e}_2^2 + T_3^2 \bar{e}_3^2, \quad (2)$$

где передачи от соответствующих генераторов к выходу

$$T_{i_n} = [-g_{21}(g_g + g_3 + g_2) + g_g g_3] / \Delta,$$

$$T_{e_n} = T_g = -g_g [g_{21}(g_2 + g_3) + g_{11} g_3] / \Delta,$$

$$T_2 = g_2 [g_3(g_{11} + g_g) - g_g g_{21}] / \Delta,$$

$$T_3 = g_3 [g_2(g_{11} + g_g) + g_g (g_{21} + g_{11})] / \Delta$$

и определитель графа

$$\Delta = (g_1 + g_{12}) [g_{11}(g_g + g_3 + g_2) + g_g (g_3 + g_2)] + g_3 [g_g (g_{12} + g_{21}) + g_{11} + g_2] + g_{11} g_2 - g_{12} g_{21} (g_g + g_3 + g_2).$$

При помощи (1) и (2) можно показать, что при очень большом коэффициенте усиления блоков 1 и 2 (т.е. $k(g_{12} + g_{11} + g_3) \approx \approx g_{21} \rightarrow \infty$) выражение коэффициента шума имеет вид

$$N_1 = 1 + \frac{\bar{e}_n^2 + \bar{i}_n^2 R_1^2 + 2CR_1 \sqrt{\bar{e}_n^2 \bar{i}_n^2}}{4kTR_1 \Delta f}, \quad (3)$$

где

$$R_1 = \frac{g_3 + g_3 + g_2}{g_3 (g_3 + g_2)} \quad (4)$$

Коэффициент усиления блоков 1-2-3 при этом

$$K_1 = \frac{g_2 + g_3}{-g_3 + g_{12} (g_3 + g_2) / g_3} \quad (5)$$

Выражение (3) показывает, что измерение коэффициента шума полупроводникового прибора, охваченного отрицательной обратной связью, дает точный результат при бесконечно большой глубине обратной связи, причем эквивалентное сопротивление генератора и коэффициент усиления входного усилителя определяются выражениями (4) и (5). При конечной величине усиления блоков 1 и 2 возникает относительная погрешность измерения коэффициента шума (I), если прибор градуирован на основе (3), (4) и (5)

$$\delta N = \frac{N - N_1}{N_1} = \frac{\bar{U}_2^2 - \bar{U}_{21}^2}{U_{21}^2} \quad (6)$$

где U_{21} — выходное напряжение шума при идеальном случае ($g_{21} \rightarrow \infty$ (2)).

Поскольку выражение погрешности δN (6) с учетом (2) получится сложной функцией от всех параметров четырехполюсника, цепи обратной связи и шумовых источников, то расчет ее целесообразно проводить отдельно для каждого конкретного случая, например, при помощи ЭЦВМ. В случае измерения коэффициента шума полевых транзисторов, у которых параметры g_{11} и g_{12} имеют очень маленькие значения, удается формулу (6) с учетом (2) представить в упрощенном виде

$$\delta N \approx \frac{g_3 g_3}{g_{21}^2 N} \quad (7)$$

Например, при $N=2$, $R_1=10^6$ Ом, $g_2=10^{-2}$ см, $g_3=10^{-4}$ см, $g_{11}=10^{-9}$ см, $g_{12}=10^{-9}$ см и $g_{21}=10^{-2}$ см на основе (7) получим $\delta N=5 \cdot 10^{-7}$ вместо $\delta N=4,94 \cdot 10^{-7}$ по (6).

Выражение (7) показывает, что в реальных условиях, уменьшая g_3 и увеличивая g_{21} , при заданной g_3 удается получить довольно маленькие погрешности измерения коэффициента шума измерением по прямому методу с использованием отрицательной обратной связи для стабилизации коэффициента усиления предварительного усилителя и испытываемого транзистора.

Л и т е р а т у р а

1. Р.А. В а л и т о в и др. Измерение параметров полупроводниковых приборов. Харьковский гос. университет, Харьков, 1960.

2. Г.А. Л о з е н с к а. Влияние обратной связи на коэффициент шума транзисторов. Материалы научно-технической конференции ЛЭИС, 1969, вып. I, стр. 154.

3. И.А. Л ы с ы х. Влияние параллельной обратной связи на отношение сигнал/шум транзисторного видеоусилителя. Вопросы электросвязи. Изд. "Техника", Киев, 1968, стр. 48.

4. И.Г. М а м о н к и н. Усилительные устройства. Изд. "Связь" М., 1966.

5. С. М э з о н, Г. Ц и м м е р м а н. Электронные цепи, сигналы и системы. ИЛ., М., 1963.

6. H. R o t h e, W. D a h l k e. Theory of noisy fourpoles. Proceedings of the IRE. vol. 44, 1956, No. 6, p. 811.

H. Tammet

On the use of feedback at noise factor measurement

Summary

Measuring the noise factor of a transistor by direct method the negative feedback is used for the gain stabilization of amplifiers including the transistor to be tested. The dependence of the measurement result on the feedback is analyzed and the measurement error formula is derived.

УДК 621.318.38

Н.А. Варес. Г.К. Самолевский

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВТОРИЧНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО
ПОЛЯ ТОРЦОВОЙ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ

При условии, что магнитная проницаемость пакетов статора считается равной бесконечности, то есть магнитная цепь асинхронной машины состоит из линейных элементов, можно электромагнитное поле в немагнитном зазоре рассматривать в виде суммы двух полей:

1) первичное электромагнитное поле, вызванное токами обмоток пакетов статора в воздушном зазоре при удаленном роторе;

2) вторичное электромагнитное поле, вызванное индуктированными токами ротора.

Данная статья посвящается решению уравнений вторичного электромагнитного поля.

Задача решается при следующих допущениях:

1) между одинаковыми пакетами статора 1 и 2 (фиг.1) находится немагнитный дисковый ротор 3, наружный диаметр которого больше и внутренний диаметр меньше соответственно наружного и внутреннего диаметров пакетов статора. Толщина ротора равна немагнитному зазору между пакетами статора;

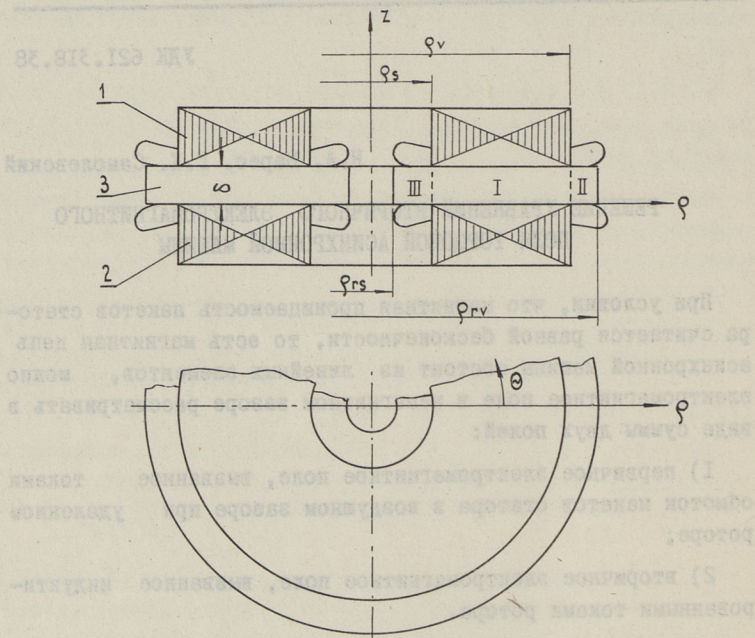
2) магнитная система не насыщена. Абсолютная магнитная проницаемость ротора считается равной μ . (Ротор из парамагнитных материалов);

3) рассматривается только первая гармоническая электромагнитного поля;

4) вторичное электромагнитное поле считается плоскопараллельным (не изменяющимся в направлении координаты z);

5) задача решается в цилиндрической координатной системе, вращающейся со скоростью вращения ротора;

6) краевые эффекты первичного поля не учитываются.



Фиг. 1

Вторичное поле описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E'' &= -\frac{\partial B''}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} H'' &= J' + J''; \\ \operatorname{div} B'' &= 0; \\ \operatorname{div} E'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} B'' &= \mu_0 H''; \\ J'' &= \gamma E''; \\ J' &= \gamma E'. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь E , B , H , J , γ , t обозначают соответственно напряженность электрического поля, индукцию, напряженность магнитного поля, плотность тока, удельную электрическую проводимость материала ротора, время.

Одним штрихом обозначены составляющие первичного поля, двумя штрихами составляющие вторичного поля.

Решение уравнений первичного поля выполнено при следующих допущениях [1]:

$$\left. \begin{aligned} E'_\theta &= 0; & J'_\theta &= 0; \\ E'_z &= 0; & J'_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Предполагаем, что в роторе контуры токов располагаются только на плоскостях $\varphi = \Theta$. Тогда

$$E''_z = 0; \quad J''_z = 0. \quad (4)$$

В цилиндрической системе координат получаем после сложных преобразований из системы (1) уравнение для нормальной составляющей напряженности вторичного магнитного поля

$$\frac{\partial^2 H''_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H''_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H''_z}{\partial \Theta^2} - \gamma \mu_0 \frac{\partial H''_z}{\partial t} = \gamma \mu_0 \frac{\partial H'_z}{\partial t}. \quad (5)$$

Предполагаем, что электромагнитное поле меняется по синусоидальному закону во времени и по координате Θ . В том случае, прибегая к комплексной форме записи

$$\left. \begin{aligned} H''_z &= \dot{H}''_{mz} e^{j(\omega st - p\Theta)}; \\ H'_z &= \dot{H}'_{mz} e^{j(\omega st - p\Theta)}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где ω — угловая частота тока статора,

p — число пар полюсов,

s — скольжение,

уравнение (5) приобретает вид

$$\frac{d^2 \dot{H}_{mz}''}{d\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{d \dot{H}_{mz}''}{d\varphi} - \left(j\omega s \mu_0 \gamma + \frac{p^2}{\varphi^2} \right) \dot{H}_{mz}'' = j\omega s \mu_0 \gamma \dot{H}_{mz}' \quad (7)$$

Заменяем

$$\lambda^2 = j\omega s \mu_0 \gamma \quad (8)$$

Распределение комплексной амплитуды нормальной составляющей напряженности вторичного магнитного поля в зоне I (фиг. 1) между пакетами статора описывается неоднородным уравнением:

$$\frac{d^2 \dot{H}_{mz}''}{d\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{d \dot{H}_{mz}''}{d\varphi} - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{\varphi^2} \right) \dot{H}_{mz}'' = \lambda^2 \dot{H}_{mz}' \quad (9)$$

а в зонах II и III, где принимаем $\dot{H}_{z'} = 0$, соответствующим однородным уравнением

$$\frac{d^2 \dot{H}_{mz}''}{d\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{d \dot{H}_{mz}''}{d\varphi} - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{\varphi^2} \right) \dot{H}_{mz}'' = 0 \quad (10)$$

Выражение для нормальной составляющей напряженности вторичного магнитного поля в зоне I будет

$$\begin{aligned} H_{zI}'' = & \left[C_1 I_p(\lambda\varphi) + C_2 K_p(\lambda\varphi) + \lambda^2 \dot{H}_{mz}' I_p(\lambda\varphi) \int_{\varphi_s}^{\varphi} K_p(\lambda\varphi) d\varphi - \right. \\ & \left. - \lambda^2 \dot{H}_{mz}' K_p(\lambda\varphi) \int_{\varphi}^{\varphi_s} I_p(\lambda\varphi) d\varphi \right] e^{j(\omega st - p\theta)} \end{aligned} \quad (11)$$

То же в зонах II и III

$$H_{zII}'' = \left[C_3 I_p(\lambda\varphi) + C_4 K_p(\lambda\varphi) \right] e^{j(\omega st - p\theta)} \quad (12)$$

$$H_{zIII}'' = \left[C_5 I_p(\lambda\varphi) + C_6 K_p(\lambda\varphi) \right] e^{j(\omega st - p\theta)} \quad (13)$$

В этих выражениях I_p и K_p - модифицированные функции Бесселя p -го порядка соответственно первого и второго рода, а $C_1 \dots C_6$ - постоянные интегрирования.

Комплексная амплитуда нормальной составляющей первичного магнитного поля \dot{H}_{mz}' определяется решением уравнений первичного магнитного поля [1]. Во вращающейся системе координат, в комплексной форме записи и в несколько модифицированном виде по сравнению с приведенным в [1]:

$$\dot{H}'_{mz} = -\frac{p}{\varrho} \dot{F}'_{m\varrho} \frac{\operatorname{ch}\left[\left(z - \frac{\delta}{2}\right) \frac{p}{\varrho}\right]}{\operatorname{sh} \frac{p}{2\varrho} \delta}, \quad (14)$$

где $\dot{F}'_{m\varrho}$ — комплексная амплитуда магнитодвижущей силы пакета статора ($F'_\varrho = \dot{F}'_{m\varrho} e^{j(\omega st - p\theta)}$).

Толщина ротора δ_r в действительности всегда меньше ширины немагнитного зазора δ за счет воздушных промежутков δ_p между ротором и пакетами статора ($\delta = 2\delta_p + \delta_r$). При расчете вторичного магнитного поля для \dot{H}'_{mz} можно принимать среднее по толщине ротора значение

$$\dot{H}'_{mzcp} = \frac{1}{\delta_r} \int_{\delta_p}^{\delta_p + \delta_r} \dot{H}'_{mz} dz = -\frac{2\dot{F}'_{m\varrho}}{\delta_r} \frac{\operatorname{sh} \frac{\delta_p p}{2\varrho}}{\operatorname{sh} \frac{\delta p}{2\varrho}}. \quad (15)$$

Граничные условия для определения постоянных интегрирования следующие:

— радиальные составляющие плотности тока на внутреннем и наружном диаметрах ротора равны нулю;

— на границах зон I — II и I — III тангенциальные и радиальные составляющие плотности тока непрерывны.

Математическое выражение граничных условий будет следующее:

$$1) H''_{zr} |_{\varrho = \varrho_{rv}} = 0; \quad (16)$$

$$2) H''_{z\pi} |_{\varrho = \varrho_{rs}} = 0; \quad (17)$$

$$3) H''_{z\varrho} |_{\varrho = \varrho_v} = H''_{z\varrho} |_{\varrho = \varrho_v}; \quad (18)$$

$$4) H''_{zr} |_{\varrho = \varrho_s} = H''_{z\pi} |_{\varrho = \varrho_s}; \quad (19)$$

$$5) \frac{\partial H''_{zr}}{\partial \varrho} |_{\varrho = \varrho_v} = \frac{\partial H''_{z\pi}}{\partial \varrho} |_{\varrho = \varrho_v}; \quad (20)$$

$$6) \frac{\partial H_{zI}''}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_s} = \frac{\partial H_{zIII}''}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_s} \quad (21)$$

В результате решения системы уравнений (16) - (21), с учетом (11), (12), (13), выражения для постоянных интегрирования после упрощения записи приобретают вид

$$C_1 = C_5 = \lambda^2 \dot{H}'_{mz} \Big|_{\varphi=\varphi_v} K_p(\lambda \varphi_{rs}) \frac{U}{T}; \quad (22)$$

$$C_2 = C_6 = -\lambda^2 \dot{H}'_{mz} \Big|_{\varphi=\varphi_v} I_p(\lambda \varphi_{rs}) \frac{U}{T}; \quad (23)$$

$$C_3 = \lambda^2 \dot{H}'_{mz} \Big|_{\varphi=\varphi_v} K_p(\lambda \varphi_{rv}) \frac{V}{T}; \quad (24)$$

$$C_4 = -\lambda^2 \dot{H}'_{mz} \Big|_{\varphi=\varphi_v} I_p(\lambda \varphi_{rv}) \frac{V}{T}, \quad (25)$$

где

$$U = K_p(\lambda \varphi_{rv}) \int_{\varphi_s}^{\varphi_v} \varphi I_p(\lambda \varphi) d\varphi - I_p(\lambda \varphi_{rv}) \int_{\varphi_s}^{\varphi_v} \varphi K_p(\lambda \varphi) d\varphi; \quad (26)$$

$$V = K_p(\lambda \varphi_{rs}) \int_{\varphi_s}^{\varphi_v} \varphi I_p(\lambda \varphi) d\varphi - I_p(\lambda \varphi_{rs}) \int_{\varphi_s}^{\varphi_v} \varphi K_p(\lambda \varphi) d\varphi; \quad (27)$$

$$T = I_p(\lambda \varphi_{rv}) K_p(\lambda \varphi_{rs}) - K_p(\lambda \varphi_{rv}) I_p(\lambda \varphi_{rs}). \quad (28)$$

Радиальная и тангенциальная составляющие плотности тока определяются из соотношений

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial H_z''}{\partial \theta} = J_{\varphi}'' + J_{\vartheta}''; \quad (29)$$

$$-\frac{\partial H_z''}{\partial \varphi} = J_{\theta}'' \quad (30)$$

Итак, в первой зоне

$$J'_{\varphi I} + J''_{\varphi I} = -\frac{jP}{\varphi} \left[C_1 I_p(\lambda \varphi) + C_2 K_p(\lambda \varphi) + \lambda^2 \dot{H}'_{mz} I_p(\lambda \varphi) \int_{\varphi_s}^{\varphi} \varphi K_p(\lambda \varphi) d\varphi - \right. \\ \left. - \lambda^2 \dot{H}'_{mz} K_p(\lambda \varphi) \int_{\varphi_s}^{\varphi} \varphi I_p(\lambda \varphi) d\varphi \right] e^{j(\omega st - p\theta)}; \quad (31)$$

$$J''_{\theta I} = -\left\{ C_1 I'_p(\lambda \varphi) + C_2 K'_p(\lambda \varphi) + \lambda^2 \dot{H}'_{mz} \left[I'_p(\lambda \varphi) \int_{\varphi_s}^{\varphi} \varphi K_p(\lambda \varphi) d\varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - K'_p(\lambda \varphi) \int_{\varphi_s}^{\varphi} \varphi I_p(\lambda \varphi) d\varphi \right] \right\} e^{j(\omega st - p\theta)}. \quad (32)$$

Соответственно во второй и в третьей зонах ротора

$$J''_{\varphi II} = -\frac{jP}{\varphi} \left[C_3 I_p(\lambda \varphi) + C_4 K_p(\lambda \varphi) \right] e^{j(\omega st - p\theta)}; \quad (33)$$

$$J''_{\theta II} = -\left[C_3 I'_p(\lambda \varphi) + C_4 K'_p(\lambda \varphi) \right] e^{j(\omega st - p\theta)}; \quad (34)$$

$$J''_{\varphi III} = -\frac{jP}{\varphi} \left[C_1 I_p(\lambda \varphi) + C_2 K_p(\lambda \varphi) \right] e^{j(\omega st - p\theta)}; \quad (35)$$

$$J''_{\theta III} = -\left[C_1 I'_p(\lambda \varphi) + C_2 K'_p(\lambda \varphi) \right] e^{j(\omega st - p\theta)}. \quad (36)$$

В выражениях (32), (34) и (36) I'_p и K'_p обозначают производные модифицированных функций Бесселя I_p и K_p .

Из рассмотрения выражений составляющих вторичного магнитного поля и составляющих плотностей тока ротора следует, что расчет по этим формулам для торцовых асинхронных машин с конкретными параметрами целесообразно проводить на ЭЦВМ. При этом постоянные интегрирования могут быть вычислены по формулам (22)–(28), либо определены они путем решения системы из шести уравнений с одновременным вычислением кривых $H''_z = f(\varphi)$.

Л и т е р а т у р а

И. Г. К. Самолевский, Н. А. Варес. О распределении магнитного поля в воздушном зазоре торцовой электрической машины переменного тока. Труды ТПИ, серия А, №264, 1968, стр. 51–57.

N. Vares, G. Samolevski

Das Lösen der Gleichungen des sekundären
elektromagnetischen Feldes der asynchro-
nischen Maschine mit achsialem Fluß

Zusammenfassung

Der Artikel behandelt die theoretische Forschung des sekundären elektromagnetischen Feldes der asynchronischen Maschine mit achsialem Fluß, also die Forschung der Ströme des Feldes des Rotors.

Ausgehend von den Gleichungen Maxwells sind die Formeln der normalen Komponente des sekundären magnetischen Feldes geäußert. Ebenso sind die Zusammenhänge für die Radial- und Tangentialkomponenten der Stromdichte des Rotors geäußert.

УДК 621.34

И.В. Давыдов

СТАТИКА ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПО СИСТЕМЕ МУ-Д
 С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СУММИРОВАНИЕМ ОБРАТНОЙ
 СВЯЗИ ПО ТОКУ

Из известных схем электрического суммирования обратной связи по току в настоящей статье рассматривается схема, в которой суммирующее сопротивление включено последовательно с задатчиком. По этой схеме в СССР выпускаются электроприводы серии ПМУ-М, поэтому ее можно считать распространенной схемой.

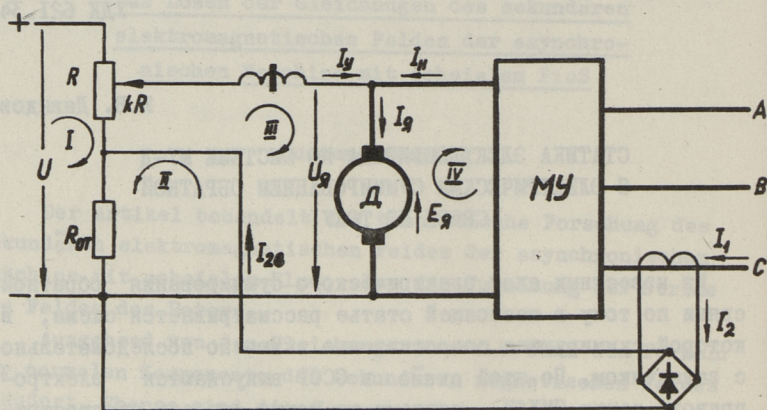
Методики точного аналитического расчета электропривода по системе МУ-Д не существует. Объяснить это можно невозможностью рассчитать характеристики управления МУ, сердечники которого изготовлены из материала с непрямоугольной петлей гистерезиса. Либо заменяют МУ линейризованным дросселем [4,5], а двигатель сопротивлением [1], либо применяют вольт-амперные и др. характеристики.

В электроприводе по системе МУ-Д магнитный усилитель работает на активное сопротивление, индуктивность и противо-э.д.с. Такая нагрузка существенно сказывается на работе МУ, что при правильном расчете электропривода необходимо учесть. Поэтому в настоящей статье за основы приняты характеристики управления МУ при постоянном значении противо-э.д.с.

По приведенной на фиг. I схеме для контуров I и III можно написать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= (R + R_{от}) i_1 + R_{от} i_2 - (kR + R_{от}) i_3 - U, \\ -E_A &= -(kR + R_{от}) i_1 - R_{от} i_2 + (kR + R_{от} + R_y + R_A) i_3 - R_A i_4, \end{aligned} \quad (I)$$

где i_1 и i_3 - контурные токи контуров I и III;
 R_y - сопротивление обмотки управления МУ;
 R_A - сопротивление якоря двигателя;
 k - коэффициент, определяющий положение движка задатчика ($0 \leq k \leq 1$).



Фиг. 1. Принципиальная схема привода

Ток контура II равен вторичному выпрямленному току трансформатора тока:

$$i_2 = I_{2B} = \frac{k_2}{k_1 k_T} I_H, \quad (2)$$

где $k_1 = \frac{I_H}{I_1}$, $k_2 = \frac{I_{2B}}{I_2}$, $k_T = \frac{I_1}{I_2}$.

Ток контура IV $i_4 = -I_H$ (остальные обозначения системы уравнений указаны на фиг. I).

После решения (I) получим, что ток управления

$$I_y = k_3 U - k_{03} E_A + k_{0T} I_H, \quad (3)$$

где

$$k_3 = \frac{kR + R_{от}}{R(1-k)(kR + R_{от}) + (R_y + R_A)(R + R_{от})}, \quad (4)$$

коэффициент обратной связи по э.д.с.

$$k_{03} = \frac{R + R_{от}}{R(1-k)(kR + R_{от}) + (R_y + R_{я})(R + R_{от})}, \quad (5)$$

коэффициент обратной связи по току

$$k_{от} = \frac{(1-k) \frac{k_2}{k_1 k_T} R R_{от} - (R + R_{от}) R_{я}}{R(1-k)(kR + R_{от}) + (R_y + R_{я})(R + R_{от})}, \quad (6)$$

В числителе последнего выражения первый член выражает внешнюю положительную, а второй - внутреннюю отрицательную обратную связь по току нагрузки магнитного усилителя.

Коэффициенты обратных связей не являются постоянными во всем диапазоне регулирования скорости вращения. В особенно широких пределах изменяется коэффициент обратной связи по току $k_{от}$. С увеличением коэффициента k , коэффициент $k_{от}$ резко падает, далее падение уменьшается, при

$$k = k_0 = 1 - \frac{k_1 k_T (R + R_{от}) R_{я}}{k_2 R R_{от}} \quad (7)$$

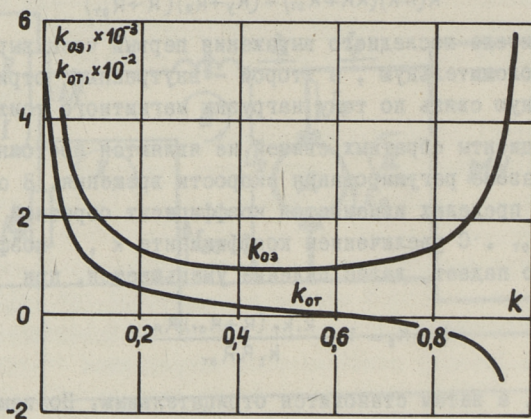
$k_{от} = 0$, а затем становится отрицательным. Поэтому необходимо выбрать рабочий диапазон в пределах $k_m \leq k \leq k_n$, в которых коэффициент $k_{от}$ не слишком сильно изменяется и не становится отрицательным. При этом минимальная скорость будет при $k = k_m$, а максимальная при $k = k_n$. В таком случае и коэффициент k_{03} будет изменяться весьма мало. На фиг. 2 приведены кривые $k_{от} = f(k)$ и $k_{03} = f(k)$, рассчитанные по данным опытной установки.

Необходимо отметить, что значение коэффициента k_0 должно быть возможно большим. Чем больше k_0 , тем ниже будет напряжение на узле сравнения U .

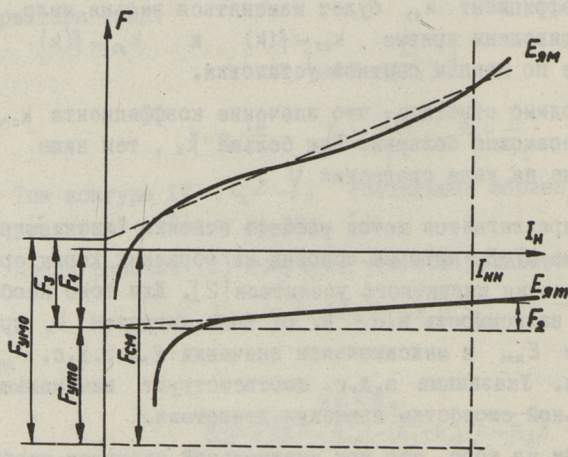
Ниже предлагается метод расчета статик электропривода по системе МУ-Д, который основан на обратных характеристиках управления магнитного усилителя [2]. Для того необходимо иметь зависимость н.с. МУ от тока нагрузки I_n при минимальном $E_{ям}$ и максимальном значении $E_{ям}$ э.д.с. якоря двигателя. Указанные э.д.с. соответствуют минимальной и максимальной скоростям вращения двигателя.

Исходим из того, что при минимальной скорости необходимо получить практически горизонтальную механическую харак-

теристику. Имеем при этом в виду, что принципиально невозможно получить горизонтальных механических характеристик в диапазоне высоких скоростей, поскольку увеличению установленной скорости сопутствует ослабление обратной связи по току.



Фиг. 2. Коэффициенты обратных связей



Фиг. 3. К расчету статки привода

При минимальной скорости и идеальном холостом ходе МУ н.с., создаваемая обмоткой управления:

$$F_{y_{mo}} = I_{y_{mo}} w_y = (k_{3m} U - k_{o3} E_{яm}) w_y, \quad (8)$$

где $I_{y_{mo}}$ — ток управления при минимальной скорости двигателя и идеальном холостом ходе МУ [из (3)];

w_y — число витков обмотки управления;

k_{3m} — коэффициент по (4) при $k = k_m$;

k_{o3m} — коэффициент обратной связи по (5) при $k = k_m$.

Если скорость вращения двигателя будет постоянной, то и н.с. $F_{y_{mo}} = \text{const}$. Обратная связь по току должна обеспечить необходимый прирост н.с. при минимальной скорости вращения. Поэтому можно написать (фиг. 3):

$$F_2 = k_{отm} I_{нн} w_y, \quad (9)$$

где $k_{отm}$ — коэффициент обратной связи по (6) при $k = k_m$;

$I_{нн}$ — ток нагрузки МУ, при котором определяется н.с. F_2 (может равняться номинальному току).

При максимальной скорости вращения двигателя и идеальном холостом ходе магнитного усилителя обмоткой управления создается н.с.

$$F_{y_{mo}} = I_{y_{mo}} w_y = (k_{3m} U - k_{o3m} E_{яm}) w_y = F_{y_{mo}} + F_3, \quad (10)$$

где $I_{y_{mo}}$ — ток управления при указанных условиях;

k_{3m} — коэффициент по (4) при $k = k_m$;

k_{o3m} — коэффициент обратной связи по (5) при $k = k_m$.

Намагничивающая сила F_3 определяется по характеристикам фиг. 3.

Значения величин R , $R_{от}$, k_m и k_m необходимо выбрать, значения остальных величин должны быть известны, за исключением напряжения U , коэффициента трансформации k_T и тока смещения $I_{см}$.

Заменяя в (10) н.с. $F_{y_{mo}}$ из (8), можем написать

$$(k_{3m} U - k_{o3m} E_{яm}) w_y = (k_{3m} U - k_{o3m} E_{яm}) w_y + F_3,$$

откуда напряжение на узле сравнения

$$U = \frac{k_{03m} E_{яm} - k_{03m} E_{яm} + \frac{F_3}{W_y}}{k_{3m} - k_{3m}} \quad (II)$$

Коэффициент трансформации трансформатора тока определяется из (6) и (9):

$$k_T = \frac{(1 - k_m) \frac{k_2}{k_1} R R_{от}}{\frac{F_2}{I_{нн} W_y} [R(1 - k_m)(k_m R + R_{от}) + (R_y + R_{я})(R + R_{от})] + (R + R_{от}) R_{я}} \quad (I2)$$

Намагничивающая сила смещения

$$F_{см} = F_{yто} + F_1, \quad (I3)$$

где н.с. $F_{yто}$ определяется по (8), а F_1 по характеристикам фиг. 3.

Внешняя обратная связь по току должна компенсировать внутреннюю и покрыть подъем характеристики $F = f(I_n)$ при $E_{я} = \text{const}$. Внутренняя отрицательная обратная связь по току зависит от k . Поэтому следует так выбрать k_m , чтобы внутренняя обратная связь в рабочем диапазоне мало изменялась. Этим избегается чрезмерно сильная обратная связь по току в диапазоне средних скоростей.

Характеристики $F = f(I_n)$ при $E_{я} = \text{const}$ могут быть получены в лаборатории. Вместо указанных характеристик при $E_{яm}$ и $E_{яm}$ можно воспользоваться характеристикой при $E_{яm} = 0$ и точкой холостого хода на характеристике $F = f(I_n)$ при $E_{яm}$. Для снятия первой необходимо затормозить якорь двигателя и измерить токи управления I_y и нагрузки I_n магнитного усилителя. Для снятия точки холостого хода следует изменением тока управления МУ разогнать двигатель до требуемой максимальной скорости и измерить токи I_y и I_n при этой скорости. Далее, пересчитать ток I_y в н.с. F , построить характеристику $F = f(I_n)$, нанести точку холостого хода и спроектировать ее на ось ординат. От этой проекции отсчитывается н.с. F_3 . Этим можно намного упростить эксперимент.

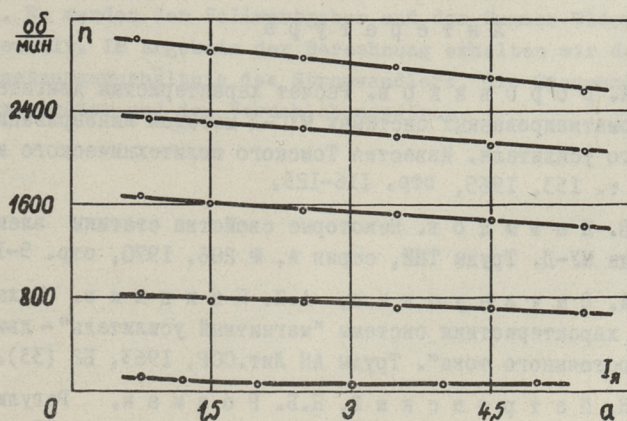
Ход расчета статики электропривода по системе МУ-Д может вкратце быть следующим.

I. Выбрать сопротивление задатчика R и суммирующее сопротивление $R_{от}$.

2. Выбрать k_m в пределах от 0,1 до 0,2.
3. Рассчитать коэффициент трансформации k_T .
4. Выбрать $k_m \approx k_0$, предварительно рассчитав k_0 .
5. Рассчитать напряжение U на узле сравнения.
6. Рассчитать ток смещения.
7. Рассчитать трансформатор тока.

Нами определены основные этапы расчета привода. Подробный расчет, в том числе и расчет силовой цепи, выходит за рамки настоящей статьи.

Опытная установка собрана из трехфазного магнитного усилителя УМ.ЭП.20.20.21 с номинальным напряжением 220 в и двигателя П-12М с номинальным напряжением 220 в, номинальной мощностью 0,95 квт и скоростью вращения 3000 об/мин. Привод питается от сети 3х380 в через трансформатор ТС-1,5 380/220 в (на фиг. 1 не показан). На этой установке были сняты характеристики управления МУ и получены характеристики $F = f(I_m)$. По ним определены намагничивающие силы $F_1 = 28,5$ а; $F_2 = 10$ а и $F_3 = 23,5$ а. Далее, были выбраны сопротивления $R = 4000$ ом и $R_{от} = 80$ ом, при том $R_{я} = 3,4$ ом, $R_{у} = 24$ ом, $w_y = w_{см} = 400$. При $k_m = 0,2$ расчетное значение коэффициента трансформации $k_T = 5,93$, фактическое значение 5,53. Напряжение $U = 383$ в, расчетный ток смещения 161 ма, фактический 172 ма.



Фиг. 4. Экспериментальные характеристики привода

На фиг. 4 приведены экспериментальные механические характеристики. Получена минимальная устойчивая скорость вращения 50 об/мин. В верхней части диапазона регулирования относительное изменение скорости вращения не более 11,1 % при изменении тока якоря от 1,25 до 5 а. При $k = k_m$ (самая верхняя характеристика) скорость холостого хода равна 3000 об/мин, т.е. соответствует принятому в расчете значению. Сопротивление регулируемой части задатчика 2360 ом, наибольший ток по нему 0,23 а. Вторичная мощность трансформатора тока не более 28 вт.

В ы в о д ы

1. Все коэффициенты обратных связей зависят от установленной скорости вращения. Необходимо так выбрать параметры системы, чтобы в рабочем диапазоне коэффициенты обратных связей изменялись возможно мало.

2. Коэффициент обратной связи по току может изменить свой знак. Если требуются жесткие механические характеристики в верхней части диапазона регулирования, то следует выбрать $k_m < k_0$.

3. Ввиду ослабления положительной обратной связи по току, при увеличении установленной скорости, невозможно получить во всем диапазоне регулирования механических характеристик с одинаковой жесткостью.

Л и т е р а т у р а

1. М.А. Б о р о в и к о в. Расчет характеристик двигателя в автоматизированных системах МУС-Д методом линеаризации магнитного усилителя. Известия Томского политехнического института, т. 153, 1965, стр. 116-123.

2. И.В. Д а в ы д о в. Некоторые свойства статики электропривода МУ-Д. Труды ТПИ, серия А, № 286, 1970, стр. 9-15.

3. М.А. П а у л а у с к а с, А.И. Я н и ц к и с. Механические характеристики системы "магнитный усилитель" - двигатель постоянного тока". Труды АН Лит.ССР, 1963, Б2 (33).

4. А.Я. П е т р о в с к и й, Я.Б. Р о з м а н. Регулируемый электропривод с магнитными усилителями. Изд. "Энергия", М.-Л., 1964.

5. Электроавтоматика прецизионных станков. Электроавтоматика станков, Коллектив авторов. Изд. "Машиностроение", М., 1968.

I. Davôdov

Statische Verhältnisse des Transduktorantriebs
mit elektrischer Addition der Stromrückkopplung

Zusammenfassung

Die im ersten Teil des Aufsatzes durchgeführte Analyse der Rückkopplungsfaktoren zeigt, daß die Werte aller benannten Koeffizienten vom Sollwert der Motordrehzahl abhängen. Der Strom-Rückkopplungsfaktor kann sein Vorzeichen ändern. Es ist unmöglich, über den gesamten Regelbereich Drehmoment-Kennlinien mit derselben Steigung zu erhalten.

Im zweiten Teil des Aufsatzes wird eine Berechnungsmethode für die statischen Verhältnisse vorgeschlagen, die auf der inversen Steuerkennlinie des Magnetverstärkers beruht. Es werden der Sollwertgeber und der Summen-Widerstand ausgewählt. Im Ergebnis der Berechnung erhalten wir das Übersetzungsverhältnis des Stromwandlers, die Spannung am Sollwertgeber und den Verschiebungsstrom.

УДК 658.511.6

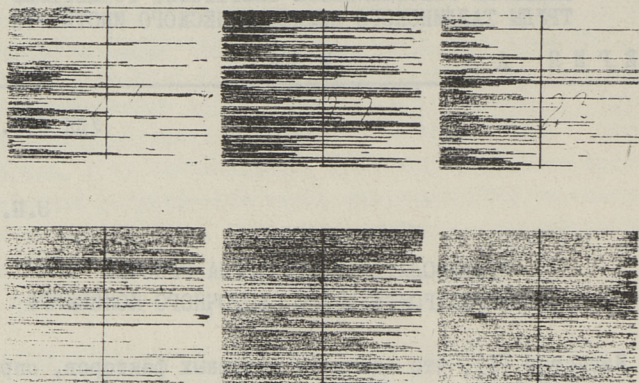
Э.П. Калм

ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА РАБОЧИХ
ПРИБОРОСТРОИТЕЛЬНОГО СБОРОЧНОГО КОНВЕЙЕРА

Известно [1], что одним из основных факторов, определяющих производительность приборостроительных сборочных конвейеров (СК) в мелко- и среднесерийном производстве с большой номенклатурой продукции, является производительность труда рабочих. Объясняется это тем, что степень механизации и автоматизации приборостроительных СК низка — из общей трудоемкости сборки приборов на ручной труд приходится до 70%.

В данной статье приводятся основные результаты анализа экспериментальных данных о производительности труда рабочих одной монтажной линии электронных измерительных приборов с пульсирующим ритмом и числом рабочих мест — 40. Данные получены при помощи устройства централизованного контроля и управления СК (УКУ) [2]. При анализе результатов экспериментов за основу были приняты данные примерно 20 рабочих, которые по рабочему стажу разделялись на две основные группы: с рабочим стажем до 1 года (12 рабочих) и выше 10 лет (4 рабочего). Испытания в течение 2 месяцев дали ряд новых сведений, которые представлены в настоящей работе.

Используемое в экспериментах устройство (УКУ) осуществляет полный хронометраж длительностей операций всех рабочих в течение всей смены. Данные хронометража выдаются в графическом виде. Для этого каждому рабочему на диаграммной ленте отводится квадрат, куда рисуется диаграмма (фиг.1) его производительности труда.



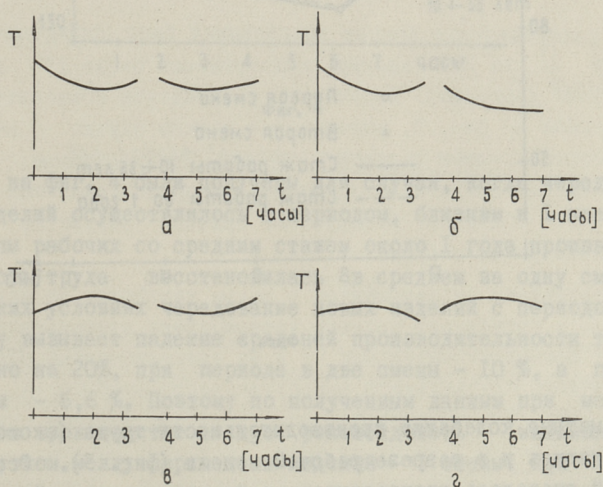
Фиг. 1

Диаграмма получается в виде горизонтальных линий, сдвинутых одна относительно другой по вертикали (их число равняется числу циклов в смене). Местонахождение концов горизонтальных линий относительно вертикальной прямой, являющейся среднеарифметической длительностью операций всех рабочих, определяет (с учетом масштаба времени) производительность труда данного рабочего, то есть индивидуальную дисперсионную диаграмму длительностей операций рабочего. Эти диаграммы рабочих являются основными источниками информации, на основе которых можно судить о конкретной производственной ситуации.

На дисперсионной диаграмме длительностей операций отражаются как индивидуальные качества рабочего, так и неполадки на рабочем месте. Если изделие является технологичным, производство ритмичным, тогда дисперсия $D[t(A_i)]$ длительности $t(A_i)$ A_i -той операции зависит от квалификации, навыков, психо-физиологического состояния, трудовой дисциплины и других качеств рабочего. Статистико-вероятностный анализ по [3] показал, что и у самых квалифицированных рабочих наблюдается заметная дисперсия длительностей операций. Например, при доверительной вероятности 0,9 она составляет примерно 30 % от средней длительности операции, причем зависимость от стажа работы практически отсутствует. Таким

образом, при заданном такте конвейера всегда существует некоторая минимальная дисперсия $D[t(A_i)]_{\min}$, являющаяся той границей, относительно которой можно оценивать индивидуальные качества самого рабочего и обнаруживать неполадки в производстве. Резкое увеличение $D[t(A_i)]$, продолжающееся в течение длительного времени, видимо, свидетельствует о производственных неполадках. Случайные резкие отклонения $t(A_i)$, как правило, являются признаками того, что недостатки следует искать у рабочего.

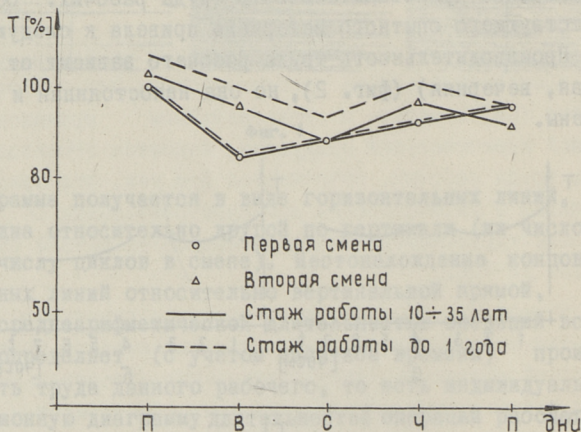
Из дисперсионных диаграмм длительностей операций также видна динамика производительности труда рабочих. Обработка соответствующего опытного материала привела к следующим выводам. Производительность труда рабочего зависит от смены (дневная, вечерняя) (фиг. 2), но она непостоянная и в течение смены.



Фиг. 2

В разные дни недели в одинаковых условиях производительность труда того же самого рабочего имеет разный характер. В первой смене наиболее типичными графиками являются фиг. 2а, б, соответствующие и литературным данным [4]. Однако в первой смене иногда встречались и графики, приведенные на фиг. 2в, которые, вообще говоря, характерны для второй смены.

Полученные нами результаты показали, что, как правило, отличительным признаком второй смены является максимум производительности труда в начале смены (фиг. 2в, г). На основе полученных данных не удалось окончательно выяснить причины такого явления. Можно предпологать, что здесь существенную роль играют психо-физиологические факторы. Колебания производительности труда в течение как первой, так и второй смены составляли 10...15 % от максимального значения.

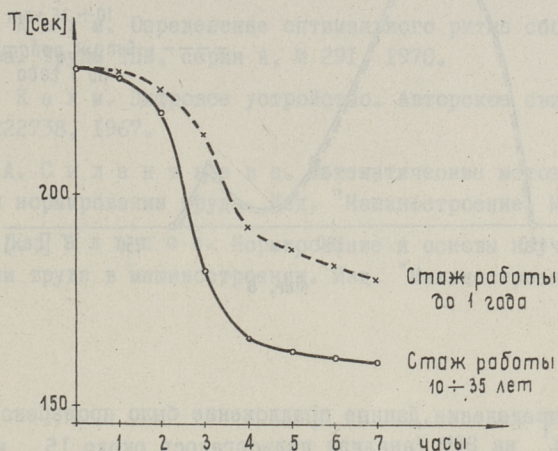


Фиг. 3

Заметные колебания производительности труда (около 15%) наблюдались и в разрезе рабочей недели (фиг. 3). Особенно низкой оказалась производительность труда в первой смене понедельника. Видимо, частично это объясняется недостаточной трудовой дисциплиной и недостатками в организации труда, однако при составлении планов выпуска изделий эту неравномерность производительности труда целесообразно учитывать.

Важным показателем в мелкосерийном производстве является скорость восстановления производительности труда при повторном выпуске изделий (с промежутком до одного месяца). Измерения показали, что у рабочих с ростом рабочего стажа

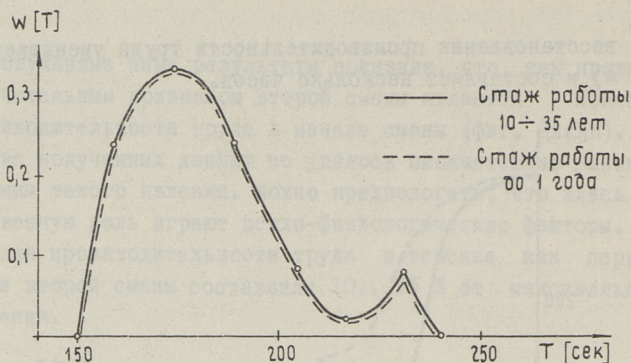
время восстановления производительности труда уменьшается (фиг. 4) и составляет несколько часов.



Фиг. 4

Данные на фиг. 4 были получены для случая, когда чередование изделий осуществлялось с периодом, близким к I месяцу. У группы рабочих со средним стажем около I года производительность труда восстановилась в среднем за одну смену. При таких условиях чередование новых изделий с периодом в I смену вызывает падение средней производительности труда примерно на 20%, при периоде в две смены — 10%, а после 3 смены — 6,6%. Поэтому по полученным данным при мелкосерийном производстве следует рекомендовать минимальным промежутком между переменами изделий — 3 смены. При более редком чередовании изделий восстановление производительности труда рабочих не является основной тормозящей силой при повышении производительности многопредметных СК. В таком случае более существенными являются недостатки в решении вопросов в организации труда и управлении СК.

На основе дисперсионной диаграммы длительностей операций легко определяется закон распределения вероятностей длительностей операций. Полученные из экспериментальных данных законы распределения длительностей операций (фиг. 5) в ближайшей окрестности максимума приближаются к нормальному за-



Фиг. 5

кону распределения. Данное предположение было проверено по критерию χ^2 на ЭВМ (анализу подвергалось около 15 индивидуальных диаграмм). Полученное расхождение объясняется вторым пиком на фиг. 5, вызванным в данном случае неполной подготовленностью деталей к сборке. Таким образом, как графическое представление закона распределения, так и расчет χ^2 облегчают обнаружение причины нарушения нормального ритма сборки.

Результаты экспериментов в целом указывают на целесообразность проведения полного хронометража длительностей операций приборостроительных СК и их автоматической обработки при помощи специального вычислительного устройства, например, типа УКУ. Эффективное использование данного устройства существенно зависит от того, насколько оплата труда приведена в соответствие с действительной производительностью труда рабочих.

Полагаем, что анализ полученных данных способствует усовершенствованию организации труда СК и в других аналогичных случаях.

Л и т е р а т у р а

1. Э. К а л м. Определение оптимального ритма сборочного конвейера. Труды ТПИ, серия А, № 291, 1970.
2. Э. К а л м. Цифровое устройство. Авторское свидетельство № 222738, 1967.
3. Н.А. С и л а н т ь е в а. Математические методы в техническом нормировании труда. Изд. "Машиностроение", М., 1966.
4. А.Д. Г а л ь ц о в. Нормирование и основы научной организации труда в машиностроении. Изд. "Машиностроение", М., 1967.

Е. Kalm

Die Arbeitsleistung werkzeuglicher Montagefließbänder

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden experimentelle Angaben angeführt über die Arbeitsleistung eines werkzeuglichen Montagefließbandes im Verlauf einer Schicht, in verschiedenen Schichten (I, II), im Verlauf einer Arbeitswoche und nochmaliger Produktion von Werkstücken; die Angaben wurden mit Hilfe einer speziellen Einrichtung zur zentralisierten Kontrolle und Leitung von Montagefließbändern erhalten.



ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

Сборник статей 1X

Таллинский политехнический институт

Редактор Г. Вяльямяэ

Технический редактор Л. Лоспер

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 5 ноября 1970.

Сдано в набор 10/XI 1970, Подписано к печати 10/III 1971.
Бумага 60x90/16. Печ. л. 8,0 + приложение. Уч.-изд. л. 6,4.
Тираж 400, МВ-00853, Зак. №273, Ротапринт ТПИ, Таллин,
ул. Коскла, 2/3. Цена 64 коп.

T 2480



Цена 64 коп.