

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
MATEMAATIKAINSTITUUT

Eugen Paal

LINEAARALGEBRA

Veebiõpik

TALLINN

2006

Koduleht

Tiitelleht



Lk 1 ⊕ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Printversioon: Eugen Paal, Lineaaralgebra, TTÜ Kirjastus,
Tallinn, 2004, 208 lk. ISBN 9985-59-446-0

Viitenumber TTÜ Raamatukogu õpikute osakonnas: **512/P-01**

© Eugen Paal
ISBN 9985-59-506-8

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 2 ⊕ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Eessõna

Veebiõpik on koostatud autori loengute põhjal Tallinna Tehnikaülikooli üliõpilastele ning koosneb suhteliselt iseseisvatest peatükkidest. Seda võiks soovitada eeskätt neile, kes tutvuvad ainega esmakordselt. Mahtu piiravaks asjaoluks oli loengute ja harjutustundide arv (32+32 tundi).

Õpik sisaldab ka näiteid ja ülesandeid. Osa teoreetilist materjali on samuti vormistatud ülesannetena. Lõpus on ülesannete vastused ja aineregister.

Tekstis on kasutatud järgmisi lühendeid:

- LVS – lineaarvõrrandisüsteem,
- VS – vektorisüsteem,
- LK – lineaarkombinatsioon,
- LFS – lahendite fundamentaalsüsteem,
- \square – tõestuse või lahenduse lõpp.

Autor tänab kõiki, kes annavad teada leitud ebakohtadest.

Eugen Paal

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 3 ⊕ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

SISUKORD

SISUKORD	4
1 Determinandid	10
1.1 Determinandi mõiste	10
1.2 Arendusteoreemid ja arendusvalemid	13
1.3 Determinantide omadusi ja arvutamine	15
1.4 Ülesanded	17
2 Maatriksarvutus	21
2.1 Maatriksi mõiste ja elementaartehted	21
2.2 Maatrikstehete omadusi	25
2.3 Maatriksite korrutamine	27
2.4 Transponeerimine	34
2.5 Pöördmaatriks	37
2.6 Maatriksvõrrandid	42
2.7 Ülesanded	45
3 Maatriksi astak	50
3.1 Maatriksi miinorid	50
3.2 Astaku mõiste	51
3.3 Maatriksi elementaarteisendused	51
3.4 Juhtelement ja treppmaatriks	52
3.5 Astaku leidmine	53

Koduleht

Tiitelleht



Lk 4 ⊕ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

3.6	Ülesanded	54
4	Lineaarvõrrandisüsteemid	57
4.1	LVS ja tema lahend	57
4.2	LVS-i maatrikskuju	58
4.3	Homogeense LVS-i omadusi	60
4.4	Crameri valemid	61
4.5	Kroneckeri-Capelli teoreem	63
4.6	Üld- ja erilahend	64
4.7	Gaussi meetod	65
4.8	Ülesanded	71
5	Kompleksarvud	74
5.1	Kompleksarvu mõiste	74
5.2	Tehted kompleksarvudega	77
5.2.1	Liitmine ja lahutamine	79
5.2.2	Korrutamine	80
5.2.3	Korrutise üldvalem	82
5.3	Kaaskompleksarv ja kompleksne konjugeerimine	83
5.4	Maatriksid üle kompleksarvude	83
5.5	Moodul	86
5.6	Pöördarv	87
5.7	Jagamine	88
5.8	Arvutusseedused kompleksarvudega	90
5.9	Ruutvõrrand üle kompleksarvude	91

Koduleht

Tiitelleht



Lk 5 ⊕ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5.10	Kompleksarvu trigonomeetriline kuju	95
5.11	Euleri valemid ja kompleksarvu eksponentkuju	97
5.12	Algebra põhiteoreem ja ühejuured	100
5.13	Ülesanded	104
6	Vektorruumid	109
6.1	Korpuse mõiste	109
6.2	Vektorruumi mõiste	110
6.3	Vektorite omadusi	113
6.4	Lineaarne sõltuvus	119
6.5	Moodustajad ja baas	126
6.6	Mõõde	127
6.7	Homogeense lineaarvõrrandisüsteemi LFS	131
6.8	Koordinaadid ja koordinaatvektor	133
6.9	Baasiteisendused	135
6.10	Alamruum ja lineaarne kate	141
6.11	Vektorisüsteemi astak. Astakuteoreem	143
6.12	Lineaarse sõltuvuse uurimine	144
6.13	Kroneckeri-Capelli teoreem	148
6.14	Ülesanded	150
7	Skalaarkorrutis	155
7.1	Skalaarkorrutis reaalses vektorruumis	155
7.2	Skalaarkorrutis komplekssses vektorruumis	156
7.3	Vektori pikkus	157

Koduleht

Tiitelleht



Lk 6 ⊕ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

7.4	Cauchy-Schwarzi võrratus ja vektoritevaheline nurk	159
7.5	Kolmnurga võrratus	161
7.6	Ortogonaalsus ja ristbaas	162
7.7	Baasi ortogonaalimine	164
7.8	Ülesanded	167
8	Maatriksi omaväärtused ja omavektorid	171
8.1	Omaväärtuse ja omavektori mõiste	171
8.2	Omaväärtuste ja omavektorite omadusi	172
8.3	Omaväärtuste ja omavektorite leidmine	176
8.4	Ülesanded	181
9	Diagonaalimine	184
9.1	Diagonaaluvuse tunnused	184
9.2	Ortogonaalne diagonaalimine	189
9.3	Ruutvormi ortogonaalne diagonaalimine	193
9.4	Ülesanded	198
10	Maatriksfunktsioonid	200
10.1	Maatriksi astmed	200
10.2	Maatrikspolünoom	200
10.3	Cayley-Hamiltoni teoreem	201
10.4	Maatriksastmereal	204
10.5	Diagonaaluva maatriksi astmed	205
10.6	Diagonaaluva maatriksi funktsioonid	207
10.7	Maatriksfunktsiooni arvutamine	209

Koduleht

Tiitelleht



Lk 7 ⊕ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

10.8	Ülesanded	215
11	Lineaarkujutused	218
11.1	Lineaarkujutuse mõiste	218
11.2	Lineaarkujutuse tuum ja muutumispiirkond	227
11.3	Lineaarkujutuse astak	230
11.4	Singulaarne ja regulaarne lineaarkujutus	234
11.5	Isomorfism	235
11.6	Tehted lineaarkujutustega	242
11.7	Pöördkujutus	245
11.8	Maatrikskujutuse omadusi	248
11.9	Lineaarkujutuse maatriksesitus	250
11.10	Lineaarkujutuse maatriksesituse omadusi	254
11.11	Kompositsiooni maatriksesitus	256
11.12	Operaatoralgebra	258
11.13	Baasiteisendused	259
11.14	Ülesanded	262
A	Eksamitöö tüüpülesanded	267
B	Vastused	270
B.1	Determinandid	270
B.2	Maatriksarvutus	270
B.3	Maatriksi astak	271
B.5	Kompleksarvud	271
B.7	Skalaarkorrutis	272

Koduleht

Tiitelleht



Lk 8 ⊕ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

B.10 Matriksfunktsioonid	272
B.11 Linearkujutused	275
Kirjandus	277
Aineregister	279

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 9 ⊕ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

1. Determinandid

1.1. Determinandi mõiste

Idee selgitus

Algul defineerime *esimest järku determinandi*, siis esimest järku determinandi abil *teist järku determinandi*, seejärel teist järku determinandi abil *kolmandat järku determinandi* jne, n -järku determinandi defineerime $(n - 1)$ -järku determinandi kaudu. Sellist defineerimisviisi nimetatakse *induktiivseks* ja vastavat objekti *induktiivseks konstruktsiooniks*.

Eelnevalt on soovitatav põgusalt tutvuda (ruut)maatriksi mõistega (vt **2.1**).

Esimest järku determinant

Arvu a determinandi $|a|$ ehk *esimest järku determinandi* defineerime valemiga $|a| \doteq \det a \doteq a$.

Näide 1.1. $|-5| = -5$, $|\pi| = \pi$ jne.

Teist järku determinant

Olgu $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ arvud. *Teist järku determinandi* defineerime *arendusvalemiga*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &\doteq \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &\doteq a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 10 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 1.2. Arvutame teist järku determinandi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Kolmandat järku determinant

Olgu a_{ij} arvud ning indeksid $i, j = 1, 2, 3$. Kolmandat järku determinandi defineerime arendusvalemiga

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \doteq \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \doteq a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Näide 1.3. Arvutame kolmandat järku determinandi

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = 1(0 \cdot 6 + 1 \cdot 1) + 1(1 \cdot 6 + 1 \cdot 2) + 3(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) \\ = 12$$

Tähistusi

Samamoodi edasi toimides saame defineerida kõrgemat järku determinandid. Olgu a_{ij} arvud ning indeksid $i, j = 1, 2, \dots, n$. Tähistame n -järku ruutmatriksi A determinandi

Koduleht

Tiitelleht



Lk 11 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$\det A$ ehk (lühidalt öeldes) n -järku *determinandi* järgmiselt:

$$\det A \doteq \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \doteq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinandi $\det A$ ridade ja veergude all mõeldakse matriksi A ridu ja veerge.

Miinor ja alamdeterminant

Matriksi $A = (a_{ij})$ elemendi a_{ij} *miinoriks* M_{ij} nimetatakse determinanti, mille saame matriksi A determinandist i -nda rea ja j -inda veeru eemaldamisel. Elemendi a_{ij} *alamdeterminandiks* ehk *algebraiseks täiendiks* nimetatakse arvu $A_{ij} \doteq (-1)^{i+j} M_{ij}$. Suurust $(-1)^{i+j}$ nimetame elemendi a_{ij} ja alamdeterminandi A_{ij} *märgiteguriks*.

Determinandi (induktiivne) definitsioon

Defineerime n -järku *determinandi* ($n-1$)-järku determinantide kaudu *arendusvalemita*

$$\det A \doteq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \doteq a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 12 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Seega on \det funktsioon, mis seab igale ruutmaatriksile A arendusvalemi abil vastavusse kindla arvu, $A \xrightarrow{\det} \det A$. Teisiti öeldes on funktsiooni \det argumendiks *ruutmaatriks* ja väärtuseks *arv*.

Näide 1.4. Vastavalt determinandi definitsioonile

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Siin esinevad kolmandat järku determinandid on omakorda võimalik arvutada arendusvalemi abil. Determinandi väärtuse arvutamise jätame lugejale iseseisvaks ülesandeks.

1.2. Arendusteoreemid ja arendusvalemid

Kroneckeri sümbol

*Kroneckeri*¹ sümboli δ_{ij} defineerime valemiga

$$\delta_{ij} \doteq \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j \\ 0, & \text{kui } i \neq j \end{cases}$$

¹Leopold Kronecker (1823–1891), saksa matemaatik.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 13 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Arendusteoreemid

Teoreem 1.5. Olgu A ruutmaatriks ning A_{ij} elemendi a_{ij} alamdeterminant. Siis

$$\delta_{ij} \det A = \begin{cases} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} \end{cases}$$

Arendusvalemid

Võtame arendusteoreemides $j = i$. Saame nn *arendusvalemid*

$$\det A = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} \end{cases}$$

Esimene valem on determinandi arendus i -nda rea järgi ning teine valem on determinandi arendus i -nda veeru järgi. Esimesest arendusvalemist saame $i = 1$ korral determinandi definitsiooni.

Arendusvalemid võib kasutada ka determinandi arvutamiseks. Otstarbekas on kasutada arendusi eeskätt nende ridade ja veergude järgi, mis sisaldavad nulle.

Näide 1.6. Arendame kolmandat järku determinandi teise rea ja kolmanda veeru järgi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= +a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Võrduste kehtivuse kontrollimise jätame lugejale.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 14 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

1.3. Determinantide omadusi ja arvutamine

Arendusvalemid on determinantide arvutamiseks üldiselt liiga töömahukad. Mugavam on arvutada determinante alljärgnevate omaduste abil. Enne aga defineerime *kolmnurkse* determinandi.

Kolmnurkne determinant

Ütleme, et determinant on *kolmnurksel kujul* ehk *kolmnurkne*, kui tema peadiagonaalist allpool (ülalpool) asetsevad elemendid on nullid.

Determinantide omadusi

Teoreem 1.7. *Determinantidel on järgmised omadused.*

1. *Kolmnurkne determinant võrdub peadiagonaali elementide korrutisega.*
2. *Kui determinandis on kaks ühesugust rida (veergu), siis on determinant null.*
3. *Determinant ei muutu, kui tema read kirjutada ümber veergudena (loomulikust järjestusest).*
4. *Vahetame determinandis kaks rida (veergu). Tulemus võrdub esialgse determinandi vastand arvuga.*
5. *Korrutame determinandi mingit rida (veergu) arvuga. Tulemus võrdub esialgse determinandi ja arvu korrutisega. Teisiti öeldes võib determinandi rea või veeru ühise teguri tuua determinandi märkide ette.*
6. *Determinant ei muutu, kui reale (veerule) liita arvukordne teine rida (veerg).*

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 15 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

7. Olgu determinandi mingi rea (veeru) iga element kahe liidetava summa. Siis avaldub determinant kahe determinandi summana. Esimeses determinandis on vaadeldavas reas (veerus) esimesed liidetavad ja teise determinandi vaadeldavas reas (veerus) teised liidetavad. Ülejäänud read (veerud) on endised.

Determinantide arvutamine

Kasutades ülaltoodud determinantide omadusi, teisendame determinandi kolmnurkseks ning seejärel kasutame omadust 1 teoreemist 1.7.

Näide 1.8. Arvutame determinandi omaduste abil

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \leftrightarrow R_3 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3R_1 \\ -4R_1 \\ \end{matrix} \\
 & = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & -14 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_2 \\ -R_3 \end{matrix} \\
 & = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2R_3 \end{matrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
 & = -6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 2 = 24
 \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 16 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.4. Ülesanded

Arvutada determinandid.

Teist järku determinandid

$$1.4.1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 1.4.2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad 1.4.3 \begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$$

$$1.4.4 \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} \quad 1.4.5 \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad 1.4.6 \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

$$1.4.7 \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \quad 1.4.8 \begin{vmatrix} \sin \alpha + \sin \beta & \cos \beta + \cos \alpha \\ \cos \beta - \cos \alpha & \sin \alpha - \sin \beta \end{vmatrix}$$

$$1.4.9 \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} \quad 1.4.10 \begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{1-t^2} & \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$$

1.4.11 Kontrollida determinantide omadusi teist järku determinantide korral.

Kolmandat järku determinandid

$$1.4.12 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad 1.4.13 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad 1.4.14 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$1.4.15 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad 1.4.16 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \quad 1.4.17 \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 17 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.4.18} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{1.4.21} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{1.4.24} \quad \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} \\
 \mathbf{1.4.26} \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \mathbf{1.4.19} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{1.4.22} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{1.4.25} \quad \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \mathbf{1.4.20} \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{1.4.23} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}
 \end{array}$$

1.4.27 Kontrollida determinantide omadusi kolmandat järku determinantide korral.

Kõrgemat järku determinandid

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.4.28} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{1.4.30} \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \mathbf{1.4.29} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{1.4.31} \quad \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 18 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$1.4.32 \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.4.33 \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 9 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.4.34 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1.4.35 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$1.4.36 \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$1.4.37 \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$$

$$1.4.38 \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 19 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$1.4.39 \quad \begin{vmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

1.4.40 Arvutada *Vandermonde*'i determinant

$$V_n(x_1, \dots, x_n) \doteq \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 20 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

2. Maatriksarvutus

2.1. Maatriksi mõiste ja elementaartehted

Maatriksi mõiste

Maatriksiks nimetame (arvuliste elementidega) tabelit, mille elemendid on paigutatud ridadeks ja veergudeks.

Olgu a_{ij} arvud ning $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$. Need arvud paigutame maatriksisse A järgmiselt:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \doteq (a_{ij})$$

Elemendis a_{ij} näitab esimene indeks i rida (*reaindeks*), teine indeks j osutab veergu (*veeruindeks*), kus element a_{ij} asetseb. Arvupaari $k \times n \doteq (k, n)$ nimetatakse maatriksi A järguks. Selguse huvides võib maatriksi järku näidata ka tähistuses nt $(a_{ij})_{k \times n}$.

Kui $k = n$, siis öeldakse, et A on *ruutmaatriks*. Ruutmaatriksi järguks nimetame lihtsalt selle maatriksi ridade (ehk veergude) arvu. Elementide järjendit a_{11}, a_{22}, \dots nimetatakse (ruut)maatriksi A *peadiagonaaliks*.

Kõigi $k \times n$ -järku reaalarvuliste elementidega maatriksite hulka tähistame edaspidi $\text{Mat}_{k \times n} \doteq \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$.

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 21 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Aritmeetilised vektorid

Üherealisi ja üheveerulisi matrikseid nimetatakse ka (aritmeetilisteks) *vektoriteks*. Aritmeetilise vektori elemente nimetatakse tavaliselt *vektori koordinaatideks* ehk *komponentideks*. Aritmeetiliste vektorite hulkadeks on seega $\text{Mat}_{1 \times n}$ ja $\text{Mat}_{k \times 1}$.

Maatriksi ridadest moodustatud üherealisi matrikseid nimetatakse maatriksi *rea-vektoriteks*. Maatriksi veergudest moodustatud üheveerulisi matrikseid nimetatakse maatriksi *veeruvektoriteks*.

Maatriksite võrdsus

Õeldakse, et maatriksid $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ on *võrdsed* ja kirjutatakse $A = B$, kui

- 1) neil on ühesugused järgud,
- 2) nende vastavad elemendid on võrdsed, s.t $a_{ij} = b_{ij}$.

Maatriksite liitmine

Olgu $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ ühesuguste järkudega maatriksid. Maatriksite A ja B *summaks* $A + B$ nimetatakse maatriksit elementidega

$$(A + B)_{ij} \doteq a_{ij} + b_{ij}$$

Teiste sõnadega, maatriksite liitmisel liidame *vastavad* elemendid.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Lk 22 * 286

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Näide 2.1 (summa arvutamine). Arvutame maatriksite summa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+3 & 2-2 & 3+1 \\ 4-6 & 5+4 & 6-5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maatriksi korrutamine arvuga

Maatriksi $A = (a_{ij})$ ja arvu α korrutiseks αA nimetatakse maatriksit elementidega $(\alpha A)_{ij} \doteq \alpha a_{ij}$. Korrutis $A\alpha$ defineeritakse valemiga $(A\alpha)_{ij} \doteq a_{ij}\alpha$. Ilmselt $A\alpha = \alpha A$, sest (arvude korral) $a_{ij}\alpha = \alpha a_{ij}$.

Teiste sõnadega, maatriksi korrutamisel arvuga korrutame antud arvuga maatriksi kõik elemendid.

Näide 2.2 (korrutise arvutamine). Arvutame maatriksi ja arvu korrutise

$$\begin{aligned} 3 \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & -3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ -3 \cdot 6 & 3 \cdot 4 & -3 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -18 & 12 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} 3 \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 23 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Nullmaatriks

Maatriksit, mille *kõik* elemendid on *nullid*, nimetatakse *nullmaatriksiks* ehk *nulliks* ja tähistatakse

$$0 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \doteq (0_{ij})$$

Paneme tähele, et nullmaatriksi tähistamiseks kasutame arvu 0. Lugeja peab kontekstist mõistma, millal on tegemist arvuga 0 ja millal nullmaatriksiga. Seda mugavat kahemõttelist tähistust on tülikas vältida. Selguse huvides võib nullmaatriksi järku näidata ka tähistuses, nt $0_{k \times n}$ on $k \times n$ -järku nullmaatriks. Nullmaatriksi järku tavaliselt ei eksponeerita, see selgub kontekstist. Näiteks nullmaatriksi liitmisel mingi teise maatriksiga peavad summa eksisteerimiseks järgud olema ühesugused.

Lause 2.3 (nullmaatriksi neutraalsus). $A + 0 = A = 0 + A$

Tõestus. Tõepoolest

$$\begin{aligned} (A + 0)_{ij} &= a_{ij} + 0_{ij} = a_{ij} + 0 \\ &= a_{ij} \\ &= 0 + a_{ij} = 0_{ij} + a_{ij} \\ &= (0 + A)_{ij} \end{aligned}$$

□

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 24 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Vastandmaatriks

Maatriksi A *vastandmaatriksiks* nimetatakse maatriksit $-A \doteq (-1)A$. Teiste sõnadega, vastandmaatriksi elemendid on maatriksi elementide vastandarvud, s.t $(-A)_{ij} \doteq -a_{ij}$.

Lause 2.4. $A + (-A) = 0 = -A + A$

Tõestus. Tõepoolest

$$\begin{aligned} [A + (-A)]_{ij} &= a_{ij} + (-A)_{ij} = a_{ij} - a_{ij} \\ &= 0 = 0_{ij} \\ &= -a_{ij} + a_{ij} = (-A)_{ij} + a_{ij} \\ &= [-A + A]_{ij} \end{aligned}$$

□

2.2. Maatrikstehete omadusi

Elementaarsed omadused

Maatrikstehete lihtsamaid omadusi kirjeldame järgmiselt.

Teoreem 2.5 (maatrikstehete omadused). *Olgu A, B, C ühesuguste järkudega maatriksid ning α, β arvud. Siis*

- 1) $A + B = B + A$ (liitmise kommutatiivsus),
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (liitmise assotsiatiivsus),
- 3) $A + 0 = A = 0 + A$ (nullmaatriksi olemasolu),
- 4) $A + (-A) = 0 = -A + A$ (vastandmaatriksi olemasolu),

Koduleht

Tiitelleht



Lk 25 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- 5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (*distributiivsus*),
 6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (*distributiivsus*),
 7) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (*arvuga korrutamise assotsiatiivsus*),
 8) $1A = A$ (*unitaalsus*).

Tõestus. Me juba tõestasime omaduse 3) lausega 2.3 ja omaduse 4) lausega 2.4. Tõestame veel omaduse 5). Arvutame

$$\begin{aligned} [\alpha(A + B)]_{ij} &= \alpha(A + B)_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} \\ &= (\alpha A)_{ij} + (\alpha B)_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij} \end{aligned}$$

Ülejäänud omadused tõestatakse samamoodi. □

Maatriksite vahe

Maatriksite A ja B vahe $A - B$ defineeritakse valemiga

$$A - B \doteq A + (-B)$$

Maatrikstehete omadusi illustreerib hästi järgmise teoreemi tõestus.

Teoreem 2.6. *Võrrandi $A + X = B$ ainus lahend on $X = B - A$.*

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $B - A$ on võrrandi lahend

$$\begin{aligned} A + (B - A) &= A + B + (-A) = A + B + (-1)A \\ &= 1A + (-1)A + B = [1 + (-1)]A + B \\ &= 0A + B = 0 + B = B \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 26 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Olgu Y veel mingi lahend, s.t $A + Y = B$. Siis

$$\begin{aligned} Y &= 0 + Y = (-A + A) + Y = -A + (A + Y) \\ &= -A + B = B + (-A) = B - A \end{aligned}$$

mis ütlebki, et lahend $B - A$ on ainus. □

Järeldus 2.7. Võrrandi $A + X = A$ ainus lahend on nullmaatriks.

Seda omadust kasutatakse sageli nullmaatriksi defineerimiseks. Nullmaatriks defineeritakse siis kui võrrandi $A + X = A$ (ainus) lahend.

Järeldus 2.8. Võrrandi $A + X = 0$ ainus lahend on maatriksi A vastandmaatriks $-A$.

Seda omadust kasutatakse sageli vastandmaatriksi defineerimiseks. Maatriksi A vastandmaatriks $-A$ defineeritakse siis kui võrrandi $A + X = 0$ (ainus) lahend.

2.3. Maatriksite korrutamine

Aritmeetiliste vektorite skalaarkorrutis

Aritmeetiliste vektorite

$$u \doteq (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad v \doteq (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

skalaarkorrutiseks nimetatakse arvu

$$(u|v) \doteq u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{s=1}^n u_s v_s$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 27 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 2.9. Olgu $u = (2, -3, 4, -5)$ ja $v = (4, 5, 2, -3)$. Siis

$$(u|v) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 16$$

Maatriksite korrutamine

Olgu $A \in \text{Mat}_{k \times n}$ ja $B \in \text{Mat}_{n \times l}$. Maatriksite A ja B korrutiseks nimetatakse maatriksit $AB \in \text{Mat}_{k \times l}$, mille i -ndas reas ja j -indas veerus asetseb maatriksi A i -nda reavektori ja maatriksi B j -inda veeruvektori skalaarkorrutis

$$(AB)_{ij} \doteq a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}$$

Tähelepanek

1. Korrutise AB eksisteerimiseks peab maatriksi A veergude arv võrduma maatriksi B ridade arvuga. Seda korrutise eksisteerimise eeldust võib nimetada *tegurite järkude koosõla* tingimuseks.
2. Korrutises AB on sama palju ridu kui maatriksis A ja sama palju veerge kui maatriksis B .

Näide 2.10 (erinevat järku maatriksite korrutis). Vaatleme maatriksite korrutisi

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Lk 28 * 286

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ -1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Näide 2.11 (rea- ja veeruvektorite korrutised). Vaatleme rea- ja veeruvektorite korrutisi

$$(1, 2, 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6) = (32)$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} (1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \\ 6 \cdot 1 & 6 \cdot 2 & 6 \cdot 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Näide 2.12 (ruutmaatriksite korrutised). Vaatleme ruutmaatriksite korrutisi

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 29 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Maatrikskorrutise mittekommutatiivus

Õeldakse, et maatriksid A ja B *kommuteeruvad*, kui $AB = BA$. Eelmised näited ütlevad, et maatrikskorrutamine on üldiselt *mittekommutatiiвне* tehe, s.t $AB \neq BA$. Korrutamise on üldiselt mittekommutatiiвне ka siis, kui tegurid on ruutmaatriksid.

Avaldist $[A, B] \doteq AB - BA$ (kui leidub) nimetatakse maatriksite A ja B *kommutaatoriks* ehk *Lie korrutiseks*. Kommutaator on määratud vaid *ühesuguste järkudega ruutmaatriksite* korral. Kommutaatori omadusi vaatleme allpool (teoreem 2.18).

Näide 2.13. Arvutame

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}^2 \doteq \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \cdot 6 - 9 \cdot 4 & 6 \cdot 9 - 9 \cdot 6 \\ -4 \cdot 6 + 6 \cdot 4 & -4 \cdot 9 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tulemus ütleb, et leidub $A \neq 0$ nii, et korrutis $AA = 0$. Osutub, et korrutis AB võib olla null ($AB = 0$) ka siis, kui mõlemad tegurid on nullist erinevad ja $A \neq B$. Seda omadust nimetatakse *nullitegurite* olemasoluks.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 30 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 2.14 (nullitegurid). Vaatleme matriksite korrutist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nullitegur}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nullitegur}} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2}$$

Korrutades aga teises järjekorras, saame

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{2 \times 2}$$

Ühtlasi veendusime veelkord matrikskorrutise mittekommutatiiivsuses.

Ühikmatriks

Ruutmatriksit, mille *peadiagonaalil* on *ühed* ning mujal *nullid*, nimetatakse *ühikmatriksiks* ehk *ühikuks* ehk *üheks* ning tähistatakse

$$I \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \doteq (I_{ij}) \doteq (\delta_{ij})$$

Siin on δ_{ij} Kroneckeri sümbol. Ühikmatriksi tähistamiseks kasutatakse sageli ka arvu 1. Sellisel juhul peab kontekstist mõistma, millal on tegemist arvuga 1 ja millal ühikmatriksiga.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 31 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Ühikmaatriksi korrutamisel mingi teise maatriksiga peavad tegurite järgud olema kooskõlas. Selguse huvides võib ühikmaatriksi järku näidata ka tähistuses, nt I_n on n -järku ühikmaatriks. Ühikmaatriksi (nagu ka nullmaatriksi) järku tavaliselt ei eksponeerita, see selgub kontekstist.

Näide 2.15 (madalat järku ühikmaatriksid). Esimesed ühikmaatriksid on

$$I_1 \doteq (1), \quad I_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{jne}$$

Maatrikskorrutise omadusi

Võtame kokku maatrikskorrutise lihtsamad omadused.

Teoreem 2.16 (maatrikskorrutise omadused). *Olgu maatriksid A, B, C sellised, et allpool esinevad tehked on määratud ning olgu α arv. Siis*

- 1) $(AB)C = A(BC)$ (korrutamise assotsiatiivsus),
- 2) $(A \pm B)C = AC \pm BC$ (korrutamise distributiivsus),
- 3) $A(B \pm C) = AB \pm AC$ (korrutamise distributiivsus),
- 4) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$
(arvuga korrutamise assotsiatiivsus),
- 5) $IA = A = AI$ (unitaalsus),
- 6) $\det AB = \det A \cdot \det B$.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 32 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Tõestus. Tõestame näiteks omaduse 2)

$$\begin{aligned} [(A+B)C]_{ij} &= (A+B)_{i1}c_{1j} + \dots + (A+B)_{in}c_{nj} \\ &= (a_{i1} + b_{i1})c_{1j} + \dots + (a_{in} + b_{in})c_{nj} \\ &= \underbrace{a_{i1}c_{1j} + \dots + a_{in}c_{nj}}_{(AC)_{ij}} + \underbrace{b_{i1}c_{1j} + \dots + b_{in}c_{nj}}_{(BC)_{ij}} \\ &= (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC + BC)_{ij} \end{aligned}$$

mis tõestabki nõutava võrduse. Ülejäänud omadustest 1) – 5) tõestatakse samamoodi. Omadus 6) tõestatakse determinantide teoorias. \square

Ruutude vahe valem

Lause 2.17. Olgu A ja B ühesuguse järguga ruutmaatriksid. Siis

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - [A, B]$$

Tõestus. Tõepoolest

$$\begin{aligned} (A+B)(A-B) &= A(A-B) + B(A-B) \\ &= AA - AB + BA - BB \\ &= A^2 - B^2 - [A, B] \end{aligned} \quad \square$$

Viimasest lausest järeldub

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \iff [A, B] = 0$$

mis ütleb, et *ruutude vahe valemit* võib kasutada siis ja ainult siis, kui maatriksid A ja B kommuteeruvad.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 33 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lie-Poissoni algebra (kommutaatori omadused)

Teoreem 2.18 (kommutaatori omadused). Olgu A, B ja C ühesuguse järguga ruutmaatriksid ning olgu α arv. Siis

- 1) $[A, B] = -[B, A]$ (antisümmeetria),
- 2) $[A \pm B, C] = [A, C] \pm [B, C]$ (aditiivsus),
- 3) $[\alpha A, B] = [A, \alpha B] = \alpha[A, B]$ (homogeensus),
- 4) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ (Leibnizi valem),
- 5) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$ (Jacobi identsus).

Omadused 1) – 5) on nn *Lie-Poissoni algebra* definitsioonseosed. Neid algebraid kasutatakse laialdaselt mehhaanikas.

2.4. Transponeerimine

Transponeerimine

Maatriksi $A \in \text{Mat}_{k \times n}$ *transponeeritud* maatriksiks nimetatakse maatriksit $A^T \in \text{Mat}_{n \times k}$, mille veergudeks on maatriksi A read.

Näide 2.19. Transponeerime maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 2}$$

$$\Rightarrow (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A \in \text{Mat}_{2 \times 3}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 34 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 2.20. Transponeerime reavektori

$$a = (1, 2, 3, 4) \in \text{Mat}_{1 \times 4} \Rightarrow a^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 1}$$

$$\Rightarrow (a^T)^T = (1, 2, 3, 4) = a \in \text{Mat}_{1 \times 4}$$

Sümmeetria ja antisümmeetria

Maatriksit A nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui $A^T = A$, ning *antisümmeetriliseks*, kui $A^T = -A$.

Tähelepanek

Nii sümmeetrilised kui ka antisümmeetrilised maatriksid on *ruutmaatriksid*. Antisümmeetrilise maatriksi peadiagonaalil asetsevad nullid.

Näide 2.21. Selles näites on A sümmeetriline ja B antisümmeetriline maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 35 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Teoreem 2.22 (transponeerimise omadused). *transponeerimise omadusi*

Maatriksid A ja B olgu sellised, et allpool esinevad tehked on määratud ning olgu α arv. Siis

$$1) (A^T)^T = A$$

$$2) (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$3) (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

$$4) (AB)^T = B^T A^T$$

$$5) \det A^T = \det A$$

Paneme tähele tegurite järjekorra muutumist omaduses 4).

Lause 2.23. *Iga ruutmaatriksi A korral on maatriks $A + A^T$ sümmeetriline ja maatriks $A - A^T$ antisümmeetriline.*

Tõestus. Tõepoolest

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$$

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) \quad \square$$

Teoreem 2.24. *Iga ruutmaatriks on üheselt esitatav sümmeetrilise ja antisümmeetrilise maatriksi summana.*

Tõestus. Võrdus

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{sümmeetriline}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{antisümmeetriline}}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 36 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

koos lausega 2.23 ütleb, et selline esitus (avaldis) leidub. Ühesuse näitamiseks oletame, et $A = B + C$, kus B on *sümmeetriline* ja C *antisümmeetriline* maatriks. Siis ilmselt $A^T = B^T + C^T = B - C$. Võrranditest

$$\begin{cases} A = B + C \\ A^T = B - C \end{cases}$$

järeldub, et $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ja $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$. □

2.5. Pöördmaatriks

Pöördmaatriks

Ruutmaatriksi A *pöördmaatriksiks* nimetatakse sellist maatriksit B , mis rahuldab tingimust $AB = I = BA$.

Lause 2.25 (pöördmaatriksi ainsus). *Kui maatriksil on olemas pöördmaatriks, siis on ta määratud üheselt.*

Tõestus. Olgu B ja C maatriksi A pöördmaatriksid, s.t

$$AB = I = BA \quad \text{ja} \quad AC = I = CA$$

Arvutame, kasutades maatrikskorrutise assotsiatiivsust

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C \quad \square$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 37 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Pööratavus

Maatriksit nimetatakse *pööratavaks* ehk *regulaarseks*, kui tal leidub pöördmaatriks. Pööratava maatriksi A (ainsat) pöördmaatriksit tähistatakse $A^{-1} \doteq \frac{1}{A}$, s.t

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

Mittepööratavat maatriksit nimetatakse *singulaarseks*.

Pöördmaatriksi omadusi

Pöördmaatriksi omadusi kirjeldame kokkuvõtvalt.

Teoreem 2.26 (pöördmaatriksi omadused). *Olgu maatriksid A, B ning arv α sellised, et allpool esinevad tehked on määratud. Siis*

- 1) $I^{-1} = I$
- 2) $(A^{-1})^{-1} = A$
- 3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 4) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$
- 5) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- 6) $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

Tõestus. Tõestame näiteks omaduse 3). Arvutame

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 38 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

mis ütleb, et $B^{-1}A^{-1}$ on matriksi AB pöördmatriks. Ülejäänud omadustest 1) – 5) tõestatakse samamoodi. Omadus 6) järeldeb valemist $\det A \cdot \det B = \det AB$. \square

Paneme tähele tegurite järjekorra muutumist omaduses 3).

Pöördmatriksi olemasolu ja arvutamine

Definitsioon 2.27. Olgu A_{ij} matriksi $A = (a_{ij})$ elemendi a_{ij} alamdeterminant. Matriksit $\text{adj } A \doteq (A_{ij})^T$ nimetatakse matriksi A *adjungeeritud* matriksiks.

Teoreem 2.28. $A \text{adj } A = (\text{adj } A)A = |A|I$.

Tõestus. Need valemid järelduvad determinantide arendusteoreemidest (vt teoreem 1.5). \square

Siit järeldeb kergesti

Teoreem 2.29. *Ruutmatriks A on pööratav parajasti siis, kui $\det A \neq 0$. Pöördmatriksi olemasolu korral*

$$A^{-1} \doteq \frac{1}{A} = \frac{\text{adj } A}{\det A} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \quad (*)$$

Tõestus. \implies : Olgu matriks A pööratav. Siis seosest $AA^{-1} = I$ järeldeb

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1 \implies |A| \neq 0$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 39 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kuna $\det A \neq 0$, siis eelnenud teoreemis 2.28 antud valemi võime kirjutada kujul

$$A \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} A = I \quad (**)$$

Et pöördmaatriks on määratud üheselt, siis on ta antud valemiga (*).

\Leftarrow Kui $\det A \neq 0$, siis teoreemist 2.28 järeldeb valem (**), mis ütlebki, et ruutmaatriks A on pööratav ning maatriks $\operatorname{adj} A / \det A$ on maatriksi A pöördmaatriks. \square

Näide 2.30. Arvutame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriksi. Kõigepealt arvutame determinandi

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Nüüd leiame alamdeterminandid

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 40 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Siis saame

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Näide 2.31. Arvutame peast

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 41 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Maatriksite jagamisest

Maatriksite *mittekommutatiiivsuse* tõttu üldiselt

$$A^{-1}B \neq BA^{-1}, \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{A}B \neq B\frac{1}{A}$$

Siit järeldeb, et tähistus (jagatis) $\frac{B}{A}$ on *kahemõtteline*. Pööratava A korral on jagamistehteid üldiselt kaks, *parem- ja vasakpoolne*

$$B/A \doteq BA^{-1}, \quad A \setminus B \doteq A^{-1}B, \quad \det A \neq 0$$

Vaid *kommuteeruvate* maatriksite korral on jagatis *üheselt* defineeritud ning tähistus $\frac{B}{A}$ korrektne.

2.6. Maatriksvõrrandid

Maatriksvõrrandites on oluline tundmatu maatriksi asetus korrutistes. Vaatleme vaid lihtsamaid lineaarseid maatriksvõrrandeid.

Tundmatu maatriks X on korrutises paremal

Lause 2.32. Pööratava maatriksi A korral on võrrandi $AX = B$ ainus lahend $X = A^{-1}B$.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $A^{-1}B$ on võrrandi $AX = B$ lahend. Tõepoolest

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 42 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Olgu Y veel mingi lahend, s.t $AY = B$. Siis

$$Y = IY = (A^{-1}A)Y = A^{-1}(AY) = A^{-1}B$$

Siit järeldub, et $A^{-1}B$ on võrrandi $AX = B$ ainus lahend. \square

Seega peame matriksi X avaldamiseks võrrandist $AX = B$ seda võrrandit korrutama matriksiga A^{-1} vasakult.

Järgnevad laused tõestatakse samamoodi.

Tundmatu matriks X on korrutises vasakul

Lause 2.33. Pööratava matriksi A korral on võrrandi $XA = B$ ainus lahend $X = BA^{-1}$.

Seega peame matriksi X avaldamiseks võrrandist $XA = B$ seda võrrandit korrutama matriksiga A^{-1} paremalt.

Tundmatu matriks X on korrutises keskel

Lause 2.34. Kui A ja B on pööratavad, siis on võrrandi $AXB = C$ ainus lahend $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Seega peame matriksi X avaldamiseks võrrandist $AXB = C$ seda võrrandit korrutama matriksiga A^{-1} vasakult ja matriksiga B^{-1} paremalt.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Lk 43 * 286

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Näide 2.35. Lahendada maatriksvõrrand

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Tundmatu maatriks X on korrutises *paremal*. Kasutame lauset 2.32. Maatriksi $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriksi arvutasime eespool. Seega

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lahendi kontrollimiseks arvutame

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 11 + 2 \cdot 9 - 2 \cdot 13 \\ 2 \cdot 11 - 1 \cdot 9 - 1 \cdot 13 \\ 1 \cdot 11 - 0 \cdot 9 - 1 \cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 44 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

2.7. Ülesanded

Elementaartehted maatriksitega

2.7.1 Lahendada lineaarne maatriksvõrrandite süsteem ja kontrollida lahendit.

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ -4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.7.2 Lahendada lineaarne maatriksvõrrandite süsteem ja kontrollida lahendit.

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ -4X + Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.7.3 Kontrollida maatrikstehete omadusi aritmeetiliste vektorite korral.

2.7.4 Kontrollida maatrikstehete omadusi teist järku ruutmaatriksite korral.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 45 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Maatriksite korrutamine

2.7.5 Arvutada AB ja BA , kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7.6 Arvutada AB ja BA , kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

2.7.7 Veenduda, et $(AB)C = A(BC)$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.7.8 Arvutada $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$

2.7.9 Arvutada $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$

2.7.10 Leida $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

2.7.11 Leida $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 46 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

2.7.12 Leida $D(\alpha)D(\beta)$, $D^{-1}(\alpha)$ ja $D^n(\alpha)$ ($n \in \mathbb{N}$), kui

$$D(\alpha) \doteq \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Veenduda, et $D(\alpha)$ on ortogonaalmaatriks (vt alapunkt ??).

2.7.13 Ruutmaatriksi A jälg $\text{tr } A$ on tema peadiagonaali elementide summa. Tõestada, et teist järku ruutmaatriks A rahuldab ruutvõrrandit

$$x^2 - (\text{tr } A)x + \det A = 0$$

Maatrikskorrutise omadusi

2.7.14 Kontrollida maatrikskorrutise omadusi teist järku ruutmaatriksite korral.

2.7.15 Kontrollida transponeerimise omadusi teist järku ruutmaatriksite korral.

2.7.16 Kontrollida pöördmaatriksi omadusi teist järku ruutmaatriksite korral.

2.7.17 Tõestada Lie-Poissoni algebra definitsioonseosed.

Pöördmaatriks ja maatriksvõrrandid

2.7.18 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 47 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

2.7.19 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2.7.20 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

2.7.21 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

2.7.22 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2.7.23 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 48 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

2.7.24 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

2.7.25 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

2.7.26 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

2.7.27 Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

2.7.28 Tõestada pöördmaatriksi arvutusvalem teoreemis **2.29**.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 49 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

3. Matriksi astak

3.1. Matriksi miinorid

Matriksi *miinorid* on selle matriksi ridade ja veergude eemaldamise teel moodustatud determinandid.

Näide 3.1. Leiame matriksi

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

miinoreid. *Esimest järku* miinorid moodustuvad matriksi elementidest nt 2, 7, 1 jne. *Teist järku* miinorid on näiteks

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \text{ jne}$$

Kolmandat järku miinorid on näiteks

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ jne}$$

Kolmest kõrgemat järku miinorid antud matriksil puuduvad.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 50 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

3.2. Astaku mõiste

Maatriksi *astak* on selle maatriksi *nullist erinevate* miinorite *kõrgeim* järk. Teisiti öeldes, maatriksi astak on r , kui sellel maatriksil

- 1) leidub vähemalt üks *nullist erinev* r -järku miinor,
- 2) puuduvad *nullist erinevad* r -ist kõrgemat järku miinorid.

Kui maatriksitel A ja B on ühesugused järgud ning astakud, siis nimetame neid *ekvivalentseteks* ja kirjutame $A \sim B$.

Maatriksi A astakut tähistame $\text{rank } A$ või $r(A)$.

Ekvivalentsi omadusi

- 1) Refleksiivsus. $A \sim A$.
- 2) Sümmeetria. Kui $A \sim B$, siis $B \sim A$.
- 3) Transitiiivsus. Kui $A \sim B$ ja $B \sim C$, siis $A \sim C$.

Kasutades neid ekvivalentsi omadusi, saab maatriksi astakut ökonoomselt leida maatriksi nn *elementaarteisenduste* abil.

3.3. Maatriksi elementaarteisendused

Maatriksi *esimest liiki elementaarteisenduseks* nimetatakse maatriksi mis tahes rea (või veeru) korrutamist *nullist erineva* arvuga.

Maatriksi *teist liiki elementaarteisenduseks* nimetatakse maatriksi mingile reale (veerule) *arvkordse* sama maatriksi mõne teise rea (veeru) liitmist.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 51 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Maatriksi elementaarteisenduseks nimetame ka maatriksi ridade (veergude) järjekordest muutmist. See teisendus ei ole aga sõltumatu, vaid on realiseeritav esimest ja teist liiki elementaarteisenduste kompositsioonina. Näiteks

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} -R_1 &\implies \begin{pmatrix} a \\ b-a \end{pmatrix} +R_2 \implies \begin{pmatrix} b \\ b-a \end{pmatrix} -R_1 \implies \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \cdot (-1) \\ &\implies \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Näeme, et read vahetusid. Samamoodi toimime veergudega.

Teoreem 3.2. *Maatriksi elementaarteisendused ei muuda selle maatriksi astakut ja järku.*

Tõestus. Selles saab veenduda determinantide omaduste abil. □

3.4. Juhtelement ja treppmaatriks

Juhtelement

Maatriksi rea *juhtelemendiks* nimetatakse selle rea (vasakult) esimest nullist erinevat elementi.

Treppmaatriks

Ütleme, et maatriks on *treppikujuline* ehk *treppmaatriks*, kui

- 1) read, mis koosnevad nullidest, on maatriksi põhjas (all),

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 52 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

- 2) mis tahes rea juhtelemendite asetus *rangelt vasakul* temale järgneva rea juhtelemendide (kui leidub).

Treppmaatriksi astak

Teoreem 3.3. *Treppmaatriksi astak võrdub selle maatriksi juhtelemendide arvuga.*

Tõestus. Eemaldame need read ja veerud, mis *ei sisalda* juhtelemendeid. Saame kolmnurkse determinandi, mille peadiagonaalil asetsevad juhtelemendid. See determinant on ilmselt nullist erinev. \square

3.5. Astaku leidmine

Kasutades elementaarteisendusi, teisendame maatriksi treppmaatriksiks, seejärel kasutame teoreemi 3.3 treppmaatriksi astakust.

Näide 3.4. Leida maatriksi

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

astak.

Lahendus. Kasutades elementaarteisendusi, arvutame

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1, -3R_2} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & -10 \end{pmatrix} \leftrightarrow R_2$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 53 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{aligned}
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & -10 \end{pmatrix} -2R_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & -10 \end{pmatrix} +R_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{11} & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tulemus ütleb, et antud matriksi astak on 2. Viimase matriksi juhtelemendid on raamitud.

3.6. Ülesanded

Leida matriksi astak.

$$3.6.1 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3.6.2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.6.3 \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

$$3.6.4 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 54 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$3.6.5 \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

$$3.6.6 \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$$

Uurida maatriksi astaku sõltuvust parameetrist λ .

$$3.6.7 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 3.6.8 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.6.9 \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \quad 3.6.10 \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$3.6.11 \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

$$3.6.12 \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 55 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Koduleht

Tiitelleht



Lk 56 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lahendi mõiste

Arvude järjendit nimetatakse võrrandisüsteemi *lahendiks*, kui

- 1) järjendi elementide arv võrdub süsteemi tundmatute arvuga,
- 2) järjendi elementide asendamine (loomulikus järjestuses) süsteemi mis tahes võrrandisse tundmatute asemele muudab selle võrrandi samasuseks.

Lahenduvusega seotud mõisteid

Võrrandisüsteemi nimetatakse *kooskõlaliseks*, kui tal leidub *vähemalt üks* lahend. Õeldakse, et süsteem on *määratud*, kui tal leidub *parajasti üks* lahend. Süsteemi nimetatakse *vasturääkivaks*, kui tal *puuduvad* lahendid.

Näide 4.1. Võrrand $0x = 0$ on kooskõlaline (lõpmata palju lahendeid). Võrrand $2x = 6$ on määratud (parajasti üks lahend). Võrrand $0x = 1$ on vasturääkiv (lahendid puuduvad).

4.2. LVS-i maatrikskuju

Defineerime maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 58 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Siis on LVS 4.1 samaväärne maatriksvõrrandiga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Samaväärsuses võib veenduda maatriksarvutuse reeglite abil. Korrutades maatriksid A ja x , saame maatriksvõrduse

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

mille vastavate elementide võrdsustamine annabki süsteemi 4.1 võrrandid.

Seega saab LVS-i kompaktselt esitada maatrikskujul maatriksvõrrandina $Ax = b$. Võrrandi $Ax = b$ lahendi all mõistame sellist aritmeetilist (veeru)vektorit, mille asendamisel võrrandisse saame samasuse.

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 59 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.3. Homogeense LVS-i omadusi

Homogeenne LVS

LVS-i nimetatakse *homogeenseks*, kui vabaliikmed on *nullid*, s.t $b_1 = \dots = b_k = 0$. Seega on homogeenne LVS on järgmine:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Homogeenne LVS on samaväärne maatriksvõrandiga $Ax = 0$.

Kooskõlalikus

Lause 4.2. *Homogeenne LVS on kooskõlaline.*

Tõestus. Tõepoolest, homogeense LVS-i üheks lahendiks on nn *triviaalne lahend* $x = 0$ (nullvektor). □

Triviaalne lahend ja mittetriviaalsed lahendid

Homogeense LVS-i $Ax = 0$ lahendit $x = 0$ nimetatakse *triviaalseks* lahendiks. Homogeense LVS-i ülejäänud lahendeid (kui leiduvad) nimetatakse *mittetriviaalseteks*.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 60 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lahendite omadusi

Teoreem 4.3. *Olgu a ja b homogeense LVS-i $Ax = 0$ lahendid, s.t $Aa = 0 = Ab$. Siis on $a + b$ ja αa samuti lahendid.*

Tõestus. Tõepoolest, kasutades maatrikstehete omadusi, saame

$$1) A(a + b) = Aa + Ab = 0 + 0 = 0$$

$$2) A(\alpha a) = (A\alpha)a = (\alpha A)a = \alpha(Aa) = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \square$$

Seega on homogeense LVS-i lahendihulk (kui aritmeetilise vektorruumi alamhulk) kinnine liitmise ja arvuga korrutamise suhtes.

Kui tundamatute arv = võrrandite arv ($n = k$)

Kui $n = k$ ja $\det A \neq 0$, siis leidub homogeensel LVS-il vaid triviaalne lahend. Kui $n = k$, siis peab *mittetriviaalse* lahendi olemasoluks $\det A = 0$.

Tõestus. Tõepoolest, kui $n = k$, siis on regulaarse A korral võrrandil $Ax = 0$ parajasti üks lahend, selleks on $x = A^{-1}0 = 0$. □

4.4. Crameri valemid

Crameri peajuht

Õeldakse, et LVS-i korral on tegemist *Crameri*² peajuhuga, kui

²Gabriel Cramer (1704–1752), šveitsi matemaatik.

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 61 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.5. Kroneckeri-Capelli teoreem

LVS-i kooskõllalisust kirjeldab nn *Kroneckeri-Capelli*³ teoreem.

Teoreem 4.5 (Kroneckeri-Capelli teoreem, astakutingimus). *LVS on kooskõllaline parajasti siis, kui tema matriksi astak võrdub laiendatud matriksi astakuga.*

Tõestus. Tõestus on esitatud alapunktis 6.13. □

Ülesanne. Näidata, et süsteem

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

on *kooskõllaline*.

Ülesanne. Näidata, et süsteemil

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 4 \\ 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 10 \end{cases}$$

puuduvad lahendid. Uurida (selgitada) põhjust.

³Alfredo Capelli (1855–1910), itaalia matemaatik.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 63 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lahendite arvust

Teoreem 4.6. *Kooskõlalisel LVS-il 4.1 on*

- 1) *parajasti üks lahend, kui $n = r(A)$,*
- 2) *lõpmata palju lahendeid, kui $n > r(A)$.*

4.6. Üld- ja erilahend

Üld- ja erilahendi mõiste

LVS-i *üldlahend* on selline parameetritest sõltuv lahend, mis rahuldab järgmist tingimust: parameetritele arvvaartuste omistamise teel on võimalik saada antud LVS-i *kõik* lahendid.

Lahendeid, mis saadakse üldlahendist parameetritele (kõigile või osale neist) arvvaartuste omistamise teel, nimetatakse LVS-i *erilahenditeks*.

Vabad tundmatud

Osutub, et LVS-i üldlahendi parameetreid saab valida tundmatute hulgast. Tundmatuid, mis on valitud üldlahendi parameetriteks, nimetatakse *vabadeks tundmatuteks*.

LVS-i vabade tundmatute arvu (*v.t.a.*) leidmiseks võib kasutada järgmist teoreemi.

Teoreem 4.7. *Kooskõlalise LVS-i maatriksi astak võrdub tundmatute arvu (*t.a.*) ja vabade tundmatute arvu (*v.t.a.*) vahega.*

Seega on meil lihtne valem

$$v.t.a. = t.a. - r$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 64 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Kui süsteemil on vähemalt üks vaba tundmatu, siis on tal ilmselt lõpmata palju lahendeid.

Homogeense LVS-i mittetriviaalse lahendi olemasolu

Teoreem 4.8. *Kui homogeensel LVS-il on tundmatute arv suurem võrrandite arvust, siis leidub tal mittetriviaalne lahend.*

Tõestus. Olgu LVS 4.1 homogeenne ning olgu tundmatute arv suurem võrrandite arvust, s.t $n > k$. Olgu r sellise süsteemi maatriksi astak. Ilmselt $r \leq k$, $r \leq n$ ning

$$v.t.a. = n - r = (n - k) + (k - r) > 0$$

Seega on teoreemi eeldustel LVS-i üldlahendis vähemalt üks vaba tundmatu. Siit järeldubki, et antud juhul leidub LVS-il mittetriviaalseid lahendeid. \square

4.7. Gaussi meetod

Nüüd selgitame LVS-ide lahendamist elementaarteisendustega, mida kirjanduses tuntakse ka *Gaussi*⁴ *meetodi* nime all.

LVS-ide ekvivalentsus

Õeldakse, et LVS-id on *ekvivalentsed* ehk *samaväärsed*, kui neil on ühesugused lahendihulgad, s.t esimese LVS-i iga lahend on teise LVS-i lahendiks ja vastupidi, teise LVS-i iga lahend on esimese LVS-i lahendiks.

LVS-ide ekvivalentsuse tähistamiseks kasutame sümboleid \sim .

⁴Carl Friedrich Gauss (1777–1855), saksa matemaatik.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 65 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Ekvivalentsi omadusi

1. Refleksiivsus. Iga LVS on ekvivalentne iseendaga, s.t $LVS \sim LVS$.
2. Sümmeetria. Kui $LVS(1) \sim LVS(2)$, siis $LVS(2) \sim LVS(1)$.
3. Transitiiivsus. Kui $LVS(1) \sim LVS(2)$ ja $LVS(2) \sim LVS(3)$, siis $LVS(1) \sim LVS(3)$.

LVS-i elementaarteisendused

LVS-i *esimest liiki elementaarteisenduseks* nimetatakse LVS-i mis tahes võrrandi läbi-korrumist *nullist erineva* arvuga.

LVS-i *teist liiki elementaarteisenduseks* nimetatakse LVS-i mingile võrrandile sama süsteemi mõne teise *arvkordse* võrrandi liitmist.

LVS-i elementaarteisenduseks nimetatakse ka LVS-i võrrandite *järjestuse* muutmist. See elementaarteisendus ei ole aga sõltumatu, vaid on realiseeritav esimest ja teist liiki elementaarteisenduste kompositsioonina (samamoodi maatriksi ridade järjestuse muutmisega).

Teoreem 4.9. *LVS-i elementaarteisendused ei muuda LVS-i lahendihulka.*

Tõestus. Soovitav tõestada iseseisva harjutusena. □

Trepikujuline LVS

Ütleme, et LVS on *trepikujuline*, kui tema kordajate maatriks on treppmaatriks.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 66 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Gaussi meetodi idee

Gaussi meetod on lineaarvõrrandisüsteemide ökonoomne lahendusmeetod elementaar-teisenduste abil. Meetodi aluseks on tähelepanek, et LVS-i elementaar-teisendusi võib sooritada maatriksesituses, kasutades LVS-i laiendatud maatriksi (peamiselt ridade) elementaar-teisendusi. LVS teisendatakse elementaar-teisenduste abil ekvivalentsele trepp-kujule. Meetod võimaldab

- 1) leida LVS-i maatriksi ja tema laiendatud maatriksi astakud,
- 2) kontrollida astakutingimust (kooskõllalisust),
- 3) selekteerida välja vabad tundmatud (kui leiduvad),
- 4) kooskõllalisuse korral leida LVS-i kõik lahendid, olemasolu korral üldlahend.

Gaussi meetod (LVS-i lahendamine)

1. Kirjutame välja LVS-i laiendatud maatriksi, eraldades selgelt vabaliikmete veeru.
2. Kasutades ridade elementaar-teisendusi, teisendame LVS-i laiendatud maatriksi *ekvivalentsele* treppkujule. Veergude elementaar-teisendustest on lubatud veergude järjestuse muutmine, sellega kaasneb tundmatute järjestuse muutmine.
3. Leiame LVS-i maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud ning kontrollime astaku-tingimust.
4. Kooskõllalisuse korral leiame LVS-i *vabade tundmatute arvu*.
5. Kirjutame välja LVS-i ekvivalentse treppkuju.
6. Tundmatud selekteerime *juhtivateks* ja (olemasolu korral) *vabadeks*. Juhttundma-
tud asetsevad treppmaatriksi juhtelementide kõrval.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Lk 67 * 286

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

7. LVS-i ekvivalentsest treppkujust avaldame *juhttundmatud* vabaliikmete ja (olemasolu korral) vabade tundmatute kaudu. Kasutada saab
- asendusmeetodit,
 - Crameri valemeid,
 - pöördmaatriksit.
8. Kirjutame välja üldlahendi, näidates ära vabad tundmatud.
9. Kahtluse korral kontrollime lahendit. Üldlahendi asendamisel LVS-i võrranditesse peavad vabad tundmatud *koonduma*.

Gaussi meetodi kokkuvõte

LVS teisendatakse ekvivalentsele treppkujule nii, et eralduksid juhttundmatud ja vabad tundmatud. Tulemus kuulutatakse üldlahendiks ja lahendamine lõpetatuks. Juhttundmatute avaldamine vabade tundmatute kaudu on vaid mugavuse küsimus.

Näide 4.10. Lahendada LVS

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Lahendus. Selle süsteemi laiendatud maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & \mathbf{6} \\ 3 & 5 & 2 & 2 & \mathbf{4} \\ 9 & 4 & 7 & 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 68 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Ridade elementaarteisendustega leidsime, et maatriksiga A *ekvivalentne* treppmaatriks on

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vahetades nüüd (murdude vältimiseks järgnevates arvutustes) *teise ja kolmanda veeru*, saame

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 11 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ilmselt $r(A) = 2$ ja süsteemi *v. t. a.* = $4 - 2 = 2$. Kirjutame välja esialgse LVS-iga *ekvivalentse* süsteemi

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_3 - 2x_2 - 1x_4 = -2 \\ 0x_1 - 1x_3 + 11x_2 + 5x_4 = 10 \\ 0x_1 + 0x_3 + 0x_2 + 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Triviaalsed liikmed ja võrrandid eemaldame ning *juhttundmatud raamime*. Siis saame

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_3 - 2x_2 - x_4 = -2 \\ -\boxed{x_3} + 11x_2 + 5x_4 = 10 \end{cases}$$

Vabadeks (parameetriteks) loeme tundmatud x_2 ja x_4 . Nüüd avaldame juhttundmatud x_1, x_3 vabaliikmete ja vabade tundmatute x_2, x_4 kaudu. Seda on mugav teha nii, et

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 69 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

kõigepealt avaldame x_3 teisest võrrandist. Saame

$$x_3 = -10 + 11x_2 + 5x_4$$

Edasi arvutame esimesest võrrandist

$$\begin{aligned}x_1 &= -2 - \boxed{x_3} + 2x_2 + x_4 \\ &= -2 - (-10 + 11x_2 + 5x_4) + 2x_2 + x_4 \\ &= 8 - 9x_2 - 4x_4\end{aligned}$$

Üldlahend on

$$\begin{cases}x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_4 \\ x_3 = -10 + 11x_2 + 5x_4 \\ x_2, x_4 - \text{vabad tundmatud}\end{cases}$$

Kahtluse korral kontrollime lahendit. Üldlahendi asendamisel süsteemi võrranditesse peavad vabad tundmatud *koonduma*. Kontrollime üldlahendit näiteks *esimese* võrrandiga

$$\begin{aligned}2x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 3x_4 &= 2(8 - 9x_2 - 4x_4) + 7x_2 \\ &\quad + (-10 + 11x_2 + 5x_4) + 3x_4 \\ &= 6 \implies 6 = 6\end{aligned}$$

Ülejäänud võrranditega kontrollitakse lahendit samamoodi. \square

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 70 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

4.8. Ülesanded

Lahendada Crameri valemite abil LVS ja kontrollida lahendit.

$$4.8.1 \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} \quad 4.8.2 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Lahendada Gaussi meetodiga LVS ja kontrollida lahendit.

$$4.8.3 \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$4.8.4 \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$4.8.5 \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

$$4.8.6 \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 71 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$$4.8.7 \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$$

$$4.8.8 \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$4.8.9 \quad X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad 4.8.10 \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$4.8.11 \quad X \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad 4.8.12 \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$4.8.13 \quad X \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 4.8.14 \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.8.15 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4.8.16 \quad X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 72 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Leida kõik matriksid, mis kommuteeruvad antud matriksiga ja kontrollida tulemuse kommuteerumist selle matriksiga.

$$4.8.17 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 4.8.18 \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad 4.8.19 \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$4.8.20 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

4.8.21 Tõestada, et LVS-i elementaarteisendused jätavad lahendihulga samaks.

4.8.22 Kontrollida Crameri valemeid teist järku determinantide korral.

4.8.23 Kontrollida Crameri valemeid kolmandat järku determinantide korral.

4.8.24 Tõestada Crameri valemid.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 73 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

5. Kompleksarvud

5.1. Kompleksarvu mõiste

Kompleksarvuks nimetatakse reaalarvuliste elementidega teist järku ruutmaatriksit, milles

- 1) peadiagonaali elemendid on võrdsed,
- 2) kõrvaldiagonaalil asetsevad teineteise vastandarvud.

Kõigi kompleksarvude hulka tähistame \mathbb{C} ja nimetame *kompleksarvude korpuseks*.

Tähistusi

Seega maatriks $z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$, kui

- 1) $z_{11} = z_{22} \in \mathbb{R}$
- 2) $z_{12} = -z_{21} \in \mathbb{R}$

Mugav on tähistada

$$z_{11} = z_{22} = a \in \mathbb{R}, \quad z_{12} = -z_{21} = -b \in \mathbb{R}$$

Avaldist

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

nimetame kompleksarvu z *maatrikskujuks* ehk *maatriksesituseks*.

Näide 5.1. Kerge on näha, et

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} -\pi & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} \notin \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} \notin \mathbb{C}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 74 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Reaal- ja imaginaarosa

Arvu $a \in \mathbb{R}$ nimetatakse kompleksarvu $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ *reaalosaks* ja tähistatakse $a = \operatorname{re} z$. Arvu $b \in \mathbb{R}$ nimetatakse kompleksarvu $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ *imaginaarosaks* ja tähistatakse $b = \operatorname{im} z$.

Ühik, imaginaarühik ja null

Kompleksarvu

$$I \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \doteq 1$$

s.t teist järku ühikmaatriksit nimetatakse *ühikuks* ehk *üheks*. Kompleksarvu

$$i \doteq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nimetatakse *imaginaarühikuks*. Kompleksarvu

$$0 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nimetatakse *nulliks*.

Lause 5.2. Iga kompleksarv $z \in \mathbb{C}$ avaldub üheselt ühiku ja imaginaarühiku lineaarkombinatsioonina

$$z = (\operatorname{re} z)I + (\operatorname{im} z)i \in \mathbb{C}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 75 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Tõestus. Tõepoolest

$$\begin{aligned}(\operatorname{re} z)I &= (\operatorname{re} z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{re} z & 0 \\ 0 & \operatorname{re} z \end{pmatrix} \\ (\operatorname{im} z)i &= (\operatorname{im} z) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{im} z \\ \operatorname{im} z & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Liites saame

$$\begin{aligned}(\operatorname{re} z)I + (\operatorname{im} z)i &= \begin{pmatrix} \operatorname{re} z & 0 \\ 0 & \operatorname{re} z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{im} z \\ \operatorname{im} z & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{re} z & -\operatorname{im} z \\ \operatorname{im} z & \operatorname{re} z \end{pmatrix} = z\end{aligned}$$

mis tõestabki nõutava võrduse. Ühesus järeldeb kergesti maatriksite võrdsuse definitsioonist. \square

Märkus

Korrutamist ühikuga (ühega) I tavaliselt ei eksponeerita. Seega kirjutatakse

$$z = \operatorname{re} z + (\operatorname{im} z)i = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z$$

Kompleksarvu algebraalne kuju

Avaldist

$$z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z = a + ib$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 76 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

nimetatakse kompleksarvu z *algebraliseks kujuks*.

Arvutusi kompleksarvudega sooritamegi mitte maatrikskujul, vaid eelistatavalt algebralisel kujul.

Kompleksarvude võrdsuse tunnus

Lause 5.3. *Kompleksarvud on võrdsed parajasti siis, kui*

- 1) *on võrdsed nende reaalosad,*
- 2) *on võrdsed nende imaginaarosad.*

Tõestus. Kasuta maatriksite võrdsuse definitsiooni. □

Kompleksarvu geomeetriline tõlgendus

Et kompleksarv $z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z$ sõltub kahest *reaalarvulisest* parameetrist ($\operatorname{re} z$ ja $\operatorname{im} z$), on kompleksarv reaalarvu *tasandiline* üldistus. Piltlikult öeldes ongi kompleksarv *tasandiline* (ehk *2-mõõtmeline*) arv. Piltlikustamiseks võib kasutada xy -tasandit (**joonis 1**), kus kompleksarvu z x -koordinaat on $\operatorname{re} z$ ning y -koordinaat on $\operatorname{im} z$. Sellises tõlgenduses nimetatakse xy -tasandit *komplekstasandiks*, x -telge nimetatakse *reaalteljeks* ja y -telge *imaginaarteljeks*. Kompleksarvu võib kujutada komplekstasandi punktina.

5.2. Tehted kompleksarvudega

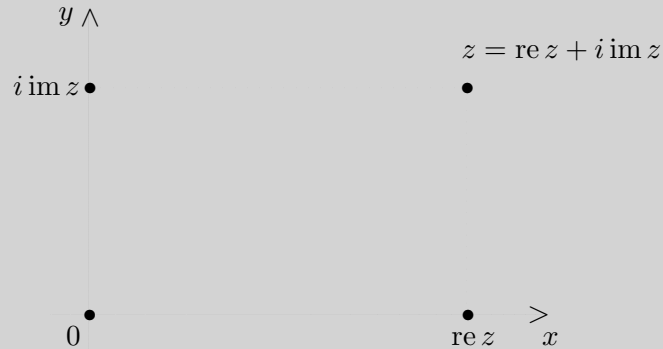
Idee selgitus

Kompleksarve nimetatakse *arvudeks* ehk *skalaarideks* eeskätt sellepärast, et nendega saab sooritada *aritmeetilisi* tehteid: liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist. Teh-

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Lk 77 * 286

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)



Joonis 1: Komplekstasand

ted saab defineerida maatrikstehetena. Osutub, et tehete tulemuseks on samuti kompleksarvud, s.t \mathbb{C} on *kinnine* aritmeetiliste tehete suhtes.

Tehete definitsioon

Kompleksarvude liitmine, lahutamine ja korrutamine defineeritakse kui maatriksite liitmine, lahutamine ja korrutamine. Kompleksarvu pöördarvuks (kui leidub) on tema pöördmaatriks. Jagamine defineeritakse pöördarvu abil, seda selgitame hiljem.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Lk 78 * 286

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

5.2.1. Liitmine ja lahutamine

Summa ja vahe

Kompleksarvude summa ja vahe defineeritakse kui maatriksite summa ja vahe.

Kinnitus

Lause 5.4. \mathbb{C} on kinnine liitmise ja lahutamise suhtes, s.t kompleksarvude summa ja vahe on samuti kompleksarv. Kompleksarvude liitmisel (lahutamisel) liidame (lahutame) reaali- ja imaginaarosad eraldi

$$(a_1 + b_1i) \pm (a_2 + b_2i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

Tõestus. Tõepoolest, kasutades (vaikimisi) maatrikstehete omadusi, arvutame

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i) \pm (a_2 + b_2i) &= a_1 + b_1i \pm a_2 \pm b_2i \\ &= a_1 \pm a_2 + b_1i \pm b_2i \\ &= (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i \in \mathbb{C} \quad \square\end{aligned}$$

Näide 5.5 (summa ja vahe arvutamine). Arvutame summa

$$\begin{aligned}(2 - 5i) + (-1 + 7i) &= 2 - 5i - 1 + 7i = 2 - 1 - 5i + 7i \\ &= (2 - 1) + (-5 + 7)i = 1 + 2i\end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 79 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Arvutame vahe

$$\begin{aligned}(2 - 5i) - (-1 + 7i) &= 2 - 5i + 1 - 7i = 2 + 1 - 5i - 7i \\ &= (2 + 1) - (5 + 7)i = 3 - 12i\end{aligned}$$

5.2.2. Korrutamine

Korrutise mõiste

Kompleksarvude korrutamine defineeritakse kui maatriksite korrutamine. Korrutamistehtet võimaluse korral ei eksponeerita, s.t $z_1 z_2 \doteq z_1 \cdot z_2$.

Korrutamist illustreerime kõigepealt näidetega.

Näide 5.6 (imaginaarühiku ruut). Kasutades maatrikskorrutist, arvutame

$$\begin{aligned}i^2 \doteq ii &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -1I = -I = -1\end{aligned}$$

kus viimaste võrduste väljakirjutamisel arvestasime seda, et korrutamist *ühikutega* (tavaliselt) ei eksponeerita. Ühikute mitteeksponeerimine on heas kooskõlas tähistusega $I = 1$.

Märkus 5.7 (imaginaarühiku mõistest). Seost

$$i^2 = -1$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 80 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

loetakse sageli imaginaarühiku definitsiooniks ja kirjutatakse

$$i \doteq \sqrt{-1}$$

Imaginaarühik $\sqrt{-1}$ ei ole tõlgendatav reaalarvuna (sest reaalarvude ruudud on *mitte-negatiivsed*), küll aga spetsiifilise teist järku ruutmaatriksina, nagu eespool veendusime. Korrektne on näiteks kirjutada

$$\sqrt{-1} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Leidub ka teisi tõlgendusi (esitusi).

Näide 5.8 (imaginaarühiku pöördarv). Võrduse $i^2 = -1$ korrutame arvuga -1 ja kirjutame tulemuse kujul

$$i(-i) = 1 = (-i)i$$

See valem ütleb, et imaginaarühiku pöördarv avaldub kujul

$$\frac{1}{i} \doteq i^{-1} = -i$$

Näide 5.9 (korrutise arvutamine). Kasutades vaikimisi maatrikstehete omadusi, arvutame

$$(2 - 5i)(-4 + 3i) = -2 \cdot 4 + 2(3i) + (5i)4 - (5i)(3i)$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 81 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{aligned}
 &= -8 + (2 \cdot 3)i + (5 \cdot 4)i - (5 \cdot 3)i^2 \\
 &= (-8 + 15) + (6 + 20)i = 7 + 26i
 \end{aligned}$$

Muutes tegurite järjekorda, saame

$$\begin{aligned}
 (-4 + 3i)(2 - 5i) &= -4 \cdot 2 + 4(5i) + (3i)2 - (3i)(5i) \\
 &= -8 + (4 \cdot 5)i + (3 \cdot 2)i - (3 \cdot 5)i^2 \\
 &= (-8 + 15) + (20 + 6)i = 7 + 26i
 \end{aligned}$$

5.2.3. Korrutise üldvalem

Korrutise üldvalemi esitame järgmise lause tõestuses.

Lause 5.10. \mathbb{C} on kinnine korrutamise suhtes, s.t kompleksarvude korrutis on ka kompleksarv. Korrutamine on kommutatiivne.

Tõestus. Kasutades maatrikstehete omadusi, arvutame korrutise

$$\begin{aligned}
 z_2 z_1 &= (a_2 + b_2 i)(a_1 + b_1 i) \\
 &= a_2 a_1 + a_2 (b_1 i) + (b_2 i) a_1 + (b_2 i)(b_1 i) \\
 &= a_2 a_1 + (a_2 b_1) i + (b_2 a_1) i + (b_2 b_1) i^2 \\
 &= (a_2 a_1 - b_2 b_1) + (a_2 b_1 + b_2 a_1) i \in \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

Muutes tegurite järjekorda, saame kommutatiivsuse

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i = z_2 z_1$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 82 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

See on ka korrutise $z_1 z_2$ üldvalem. □

5.3. Kaaskompleksarv ja kompleksne konjugeerimine

Kaaskompleksarvu mõiste

Kompleksarvu $z = a + bi$ kaaskompleksarv on $z^* \doteq a - bi$. Funktsiooni $z \mapsto z^*$, s.t kaaskompleksarvu leidmist nimetatakse (kompleksseks) *konjugeerimiseks*.

Näide 5.11. Kerge on näha, et

$$(2 + 3i)^* = 2 - 3i, \quad (-2 - 3i)^* = -2 + 3i \quad \text{jne}$$

Tõlgendus

Geomeetriliselt on kaaskompleksarv antud kompleksarvu peegeldus reaaltelje suhtes. Maatriksesituses ilmselt $z^* = z^T$.

Kompleksse konjugeerimise omadusi

- 1) $(z^*)^* = z$
- 2) $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$
- 3) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$
- 4) $\operatorname{re} z = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \operatorname{im} z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

5.4. Maatriksid üle kompleksarvude

Kõigi $k \times n$ -järku kompleksarvuliste elementidega maatriksite hulka tähistame $\operatorname{Mat}_{k \times n}(\mathbb{C})$.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 83 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Hermiitiline konjugeerimine

Maatriksi $A \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{C})$ hermiitiliselt⁵ konjugeeritud kaasmaatriks A^\dagger defineeritakse valemiga

$$A^\dagger \doteq (A^*)^T = (A^T)^* \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{C})$$

Näide 5.12. Ilmselt

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2+i & 6 \\ 5i & 3-2i \end{pmatrix} &\implies A^\dagger = \begin{pmatrix} 2-i & -5i \\ 6 & 3+2i \end{pmatrix} \\ &\implies (A^\dagger)^\dagger = \begin{pmatrix} 2+i & 6 \\ 5i & 3-2i \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Teoreem 5.13 (hermiitilise konjugeerimise omadusi). *Olgu maatriksid A ja B sellised, et allpool esinevad tehked on määratud ning $\alpha \in \mathbb{C}$. Siis*

- 1) $(A^\dagger)^\dagger = A$
- 2) $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$
- 3) $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- 4) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

Hermiitiline ja antihermiitiline maatriks

Maatriksit A nimetatakse *hermiitiliseks*, kui $A^\dagger = A$ ja *antihermiitiliseks*, kui $A^\dagger = -A$.

⁵Charles Hermite (1822–1901), prantsuse matemaatik.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 84 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 5.14. Järgnev maatriks on hermiitiline

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Näide 5.15. Järgnev maatriks on antihermiitiline

$$\begin{pmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix}^\dagger = - \begin{pmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1+i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Antihermiitilise maatriksi peadiagonaalil asetsevad puhtimaginaarsed arvud või nullid.

Kerge on näha, et iga ruutmaatriks on (üheselt) esitatav hermiitilise ja antihermiitilise maatriksi summana

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) + \frac{1}{2}(A - A^\dagger)$$

Unitaarne maatriks

Ruutmaatriksit A nimetatakse *unitaarseks*, kui

$$AA^\dagger = A^\dagger A = I \implies A^{-1} = A^\dagger$$

Reaalne unitaarne maatriks on ilmselt ortogonaalmaatriks.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 85 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5.5. Moodul

Mooduli mõiste

Kompleksarvu $z = a + bi$ moodul $|z|$ defineeritakse valemiga

$$|z| \doteq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Moodul on ilmselt *mittenegatiivne* reaalarv.

Näide 5.16. Ilmselt

$$|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

Tõlgendus

Geomeetriliselt on moodul kompleksarvu kaugus koordinaatide alguspunktist kompleks-tasandil. Matriksesituses $|z| = \sqrt{\det z}$.

Ruutude summa valem

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Tõestus. Tõepoolest, kasutades matrikstehete omadusi, arvutame

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= aa - abi + bia - bibi \\ &= a^2 - abi + bai - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

□

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 86 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Mooduli omadusi

- 1) $zz^* = |z|^2 = z^*z$
- 2) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

Tõestus. Esimene valem on ruutude summa valem. Teine valem jäägu iseseisvaks harjutuseks. \square

5.6. Pöördarv

Pöördarvu mõiste

Kompleksarvu $z \in \mathbb{C}$ pöördarv (kui leidub) on tema pöördmaatriks z^{-1} . Teisiti öeldes

$$zz^{-1} = 1 = z^{-1}z$$

Pöördarvu omadusi

- 1) $(z^{-1})^{-1} = z$
- 2) $(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1}$

Pöördarvu olemasolu ja arvutamine

Teoreem 5.17. Igal $0 \neq z \in \mathbb{C}$ leidub parajasti üks pöördarv $z^{-1} \in \mathbb{C}$ ning see avaldub valemiga

$$z^{-1} \doteq \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} z^* = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1z^*}{zz^*}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 87 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tõestus. Et $z \neq 0$, siis $|z| \neq 0$ ning $\frac{z^*}{|z|^2}$ on määratud. Tuleb kontrollida pöördarvu (pöördmaatriksi) definitsioonseost

$$z \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{z z^*}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

Samamoodi kontrollitakse võrdust $\frac{z^*}{|z|^2} z = 1$. Pöördarvu ainsus järeldub maatriksi pöördmaatriksi ainsusest. \square

Näide 5.18 (imaginaarühiku pöördarv). Leiame i^{-1}

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$$

Näide 5.19. Leiame i^{-99} , arvestades seost $i^4 = 1$

$$i^{-99} = \frac{1}{i^{99}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 24 + 3}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 24} \cdot i^3} = \frac{1}{(i^4)^{24} \cdot i^2 \cdot i} = -\frac{1}{i} = i$$

Näide 5.20 (pöördarvu arvutamine). Leiame $2 - 5i$ pöördarvu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 - 5i} &= \frac{1(2 + 5i)}{(2 - 5i)(2 + 5i)} = \frac{2 + 5i}{4 - (5i)^2} = \frac{2 + 5i}{4 - 25i^2} = \frac{2 + 5i}{4 + 25} \\ &= \frac{2 + 5i}{29} \end{aligned}$$

5.7. Jagamine

Et kompleksarvude korrutamine on *kommutatiivne*, siis on jagamistehe üheselt määratud.

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 88 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Jagatise mõiste

Kompleksarvude z_1 ja z_2 *jagatis* defineeritakse valemiga

$$\frac{z_1}{z_2} \doteq z_1 \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_2} z_1, \quad z_2 \neq 0$$

Jagatise arvutamine

Pöördmaatriksi arvutamise asemel on otstarbekam kasutada valemit

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

Tõestus. Tõepoolest, kasutades maatrikskorrutise omadusi, saame

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2} = z_1 \frac{z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} \quad \square$$

Jagatis algebralisel kujul

Näitame, kuidas jagatist algebralisele kujule teisendada. Kasutades maatrikstehete omadusi, arvutame

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + b_1 a_2 - b_1 b_2 i}{a_2^2 - b_2^2 i^2} \end{aligned}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 89 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i
\end{aligned}$$

Näide 5.21 (jagamine). Arvutame jagatise

$$\begin{aligned}
\frac{2 + 3i}{3 - 4i} &= \frac{(2 + 3i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{6 + 8i + 9i + 12i^2}{9 - 16i^2} = \frac{6 - 12 + 17i}{9 + 16} \\
&= \frac{-6 + 17i}{25} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i
\end{aligned}$$

5.8. Arvutusseadused kompleksarvudega

Teoreem 5.22. Olgu $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Siis kehtivad järgmised arvutusseadused:

- 1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (liitmise kommutatiivsus),
- 2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (liitmise assotsiatiivsus),
- 3) $\exists 0 \in \mathbb{C}$ nii, et $z + 0 = z = 0 + z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (nulli 0 olemasolu),
- 4) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists -z \in \mathbb{C}$ nii, et $z + (-z) = 0 = -z + z$
(vastandarvu $-z$ olemasolu),
- 5) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (korrutamise assotsiatiivsus),
- 6) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (distributiivsus),
- 7) $\exists 1 \in \mathbb{C}$ nii, et $1z = z$ (unitaalsus),

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 90 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- 8) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (korrumatamise kommutatiivsus),
 9) $\forall 0 \neq z \in \mathbb{C} \quad \exists z^{-1} \in \mathbb{C}$ nii, et $z z^{-1} = 1 = z^{-1} z$
 (pöördarvu z^{-1} olemasolu).

Tõestus. Kompleksarvud defineerisime kui erikujulised teist järku ruutmaatriksid. Tehete omadused 1)–7) järelduvad maatrikstehete vastavatest omadustest. Kommutatiivsuse (omadus 8) ja pöördarvu olemasolu (omadus 9) tõestasime eespool. \square

Märkus 5.23 (korpuse mõistest). Omadused 8) ja 9) maatriksite korral üldiselt ei kehti. Arvutusseadused 1)–9) kehtivad ka *ratsionaalarvude* ja *reaalarvude* korral. Need arvutusseadused võetakse aluseks abstraktse *korpuse* defineerimisel. Seda käsitleme hiljem.

5.9. Ruutvõrrand üle kompleksarvude

Idee selgitus

Osutub, et ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendusvalemi

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

tuletamisel kasutatakse vaid (korpuse) omadusi 1)–9) (vt teoreem 5.22) ja *ruutjuure* mõistet. Defineerides ruutjuure kompleksarvude jaoks, võime seda lahendusvalemit kasutada ka kompleksarvuliste kordajate a, b, c korral.

Kompleksarvu ruutjuur

Kompleksarvu $z \in \mathbb{C}$ *ruutjuur* \sqrt{z} defineeritakse valemiga

$$(\sqrt{z})^2 = z$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 91 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 5.24 (ruutjuure arvutamine). Leiame $\sqrt{-15 - 8i}$.

Lahendus. Tähistame

$$\sqrt{-15 - 8i} = \alpha + \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Vastavalt ruutjuure definitsioonile

$$(\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i + \beta^2 i^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = -15 - 8i$$

Reaal- ja imaginaarosad peavad olema vastavalt võrdsed

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -15 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases}$$

Mõlemad võrrandid tõstame ruutu

$$\begin{cases} (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 225 \\ (2\alpha\beta)^2 = 64 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = 225 \\ 4\alpha^2\beta^2 = 64 \end{cases}$$

Liidame saadud võrrandid

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 4\alpha^2\beta^2 &= 225 + 64 \implies (\alpha^2 + \beta^2)^2 = 289 \\ &\implies \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{289} = 17 \end{aligned}$$

Teine juur (-17) ei kõlba, sest $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$. Moodustame uue süsteemi

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -15 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 17 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 92 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Liidame ja lahutame kaks esimest võrrandit. Saame

$$\begin{cases} 2\alpha^2 = -15 + 17 = 2 \\ 2\beta^2 = 17 + 15 = 32 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ \beta^2 = 16 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \beta = \pm 4 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{cases}$$

Et $2\alpha\beta = -8$ (*negatiivne*), siis saame kaks lahendit

$$\begin{cases} \alpha_1 = +1, & \beta_1 = -4 \\ \alpha_2 = -1, & \beta_2 = +4 \end{cases}$$

ning võrrand $2\alpha\beta = -8$ on rahuldatud. Kokku võttes on ruutjuurel kaks väärtust

$$\sqrt{-15 - 8i} = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 i \\ \alpha_2 + \beta_2 i \end{cases} = \begin{cases} 1 - 4i \\ -1 + 4i \end{cases} = \pm(1 - 4i)$$

Kontrollime tulemust. Tõepoolest

$$[\pm(1 - 4i)]^2 = (1 - 4i)^2 = 1 - 8i + 16i^2 = 1 - 16 - 8i = -15 - 8i$$

Näide 5.25 (ruutvõrrandi lahendamine). Lahendada ruutvõrrand

$$x^2 - (3 - 2i)x + (5 - i) = 0$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 93 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lahendus. Kasutades ruutvõrrandi lahendusvalemit, saame

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 - 2i \pm \sqrt{(3 - 2i)^2 - 4(5 - i)}}{2} \\ &= \frac{3 - 2i \pm \sqrt{9 - 12i + 4i^2 - 20 + 4i}}{2} \\ &= \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm (1 - 4i)}{2} \end{aligned}$$

Siin kasutasime ruutjuure $\sqrt{-15 - 8i}$ väärtusi näitest 5.24. Nüüd saame

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3 - 2i + (1 - 4i)}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i \\ x_2 &= \frac{3 - 2i - (1 - 4i)}{2} = \frac{3 - 2i - 1 + 4i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \end{aligned}$$

Kontrollime esimest juurt. Arvutame

$$\begin{aligned} (2 - 3i)^2 - (3 - 2i)(2 - 3i) + 5 - i \\ &= 4 - 12i + 9i^2 - 6 + 9i + 4i - 6i^2 + 5 - i \\ &= (4 - 9 - 6 + 6 + 5) + (-12 + 9 + 4 - 1)i = 0 + 0i = 0 \end{aligned}$$

Teist juurt kontrollime samamoodi

$$\begin{aligned} (1 + i)^2 - (3 - 2i)(1 + i) + 5 - i \\ &= 1 + 2i + i^2 - 3 - 3i + 2i + 2i^2 + 5 - i \\ &= (1 - 1 - 3 - 2 + 5) + (2 - 3 + 2 - 1)i = 0 + 0i = 0 \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 94 * 286

Tagasi

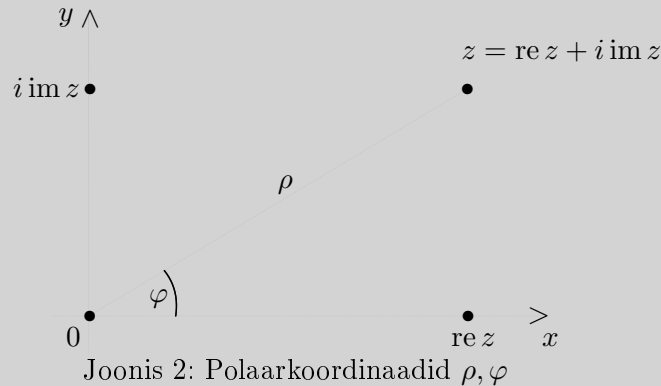
Täisekraan

Lahku failist

5.10. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Tähistusi ja mõisteid

Olgu $z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z \in \mathbb{C}$. Vastavalt kompleksarvu geomeetrilisele tõlgendusele on reaalosa $\operatorname{re} z$ ja imaginaarosa $\operatorname{im} z$ kompleksarvu z ristkoordinaadid komplekstasandil. Lähme üle *polaarkoordinaatidele* (joonis 2).



Olgu ρ kompleksarvu z kaugus koordinaatide alguspunktist (*polaarkaugus*) ning φ *polaarnurk*. Lepime kokku: kui nurka φ mõõdame reaaltelje positiivsest poolest *vas-tupäeva*, siis $\varphi > 0$, kui mõõdame reaaltelje positiivsest poolest *päripäeva*, siis $\varphi < 0$.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 95 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Üleminekuvalemid ristkoordinaatidelt polaarkoordinaatidele ρ, φ on järgmised:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(\operatorname{re} z)^2 + (\operatorname{im} z)^2} = |z| \\ \operatorname{re} z = \rho \cos \varphi = |z| \cos \varphi \\ \operatorname{im} z = \rho \sin \varphi = |z| \sin \varphi \end{cases}$$

Ilmselt

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{im} z}{\operatorname{re} z}$$

Kasutades üleminekuvalemuid polaarkoordinaatidele, saame

$$z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Avaldist

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

nimetatakse kompleksarvu z *trigonomeetriliseks* kujuks (ehk esituseks). Polaarnurka φ nimetatakse kompleksarvu z *argumendiks* ning tähistatakse $\varphi \doteq \operatorname{Arg} z$.

Punkti z asukoht kompleksitasandil ei muutu, kui polaarnurka φ muuta mingi täisarvu korda 2π võrra. Seega on kompleksarvu argument määratud vaid 2π täisarvulise kordseni. Polaarnurga väärtust $\arg z$, mis rahuldab võrratust

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

nimetatakse *argumendi peaväärtuseks*. Seega avaldub kompleksarvu argument oma peaväärtuse kaudu valemiga

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 96 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Sageli võetakse $\arg z$ muutumispiirkonnaks vahemik $[0, 2\pi)$.

Kompleksarvude võrdsuse tunnus trigonomeetrilises esituses

Lause 5.26. *Kompleksarvud on võrdsed parajasti siis, kui*

- 1) nende moodulid on võrdsed,
- 2) nende argumentide vahe on 2π kordne.

Näide 5.27. Esitame lihtsad näited.

$$\begin{aligned} 1 &= 1(\cos 0 + i \sin 0), & i &= 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ -1 &= 1(\cos \pi + i \sin \pi), & -i &= 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

5.11. Euleri valemid ja kompleksarvu eksponentkuju

Euleri funktsioon

Funktsiooni

$$e^{i\varphi} \doteq \cos \varphi + i \sin \varphi$$

nimetame *Euleri*⁶ *funktsiooniks*. Maatriksesituses ilmselt

$$e^{i\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

⁶Leonhard Euler (1707–1783), šveitsi matemaatik.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 97 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Euleri funktsiooni seost *eksponentfunktsiooniga* selgitatakse matemaatilises analüüsis.

Kompleksarvu eksponentkuju

Avaldist

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

kus φ on kompleksarvu z polaarnurk, nimetatakse kompleksarvu z *eksponentkujuks* (eksponentesituseks).

Näide 5.28. Ilmselt

$$1 = e^{i0}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi}$$

Euleri valemid

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

Tõestus. Kasuta Euleri funktsiooni definitsiooni. □

Euleri funktsiooni omadusi

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 98 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Tõestus. Kasuta Euleri funktsiooni definitsiooni ja trigonomeetriliste funktsioonide omadusi. \square

De Moivre'i valem

Järgnev valem kannab de Moivre ⁷ nime

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Tõestus. Kasuta matemaatilise induktsiooni meetodit. \square

Korrutamise ja jagamise eksponentsituses

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Näide 5.29. Arvutame

$$\begin{aligned} \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i)}{1 - i\sqrt{3}} &= \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{11}{12}\pi} \\ &= \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{11}{12}\pi\right) \right] \end{aligned}$$

⁷Abraham de Moivre (1667–1754), prantsuse matemaatik.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 99 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5.12. Algebra põhiteoreem ja ühejuured

Polünoom

n -astme polünoom $P_n(x)$ ehk hulkliige defineeritakse valemiga

$$P_n(x) \doteq a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

kus $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0 \neq a_n \in \mathbb{C}$ on polünoomi $P_n(x)$ kordajad, n on polünoomi $P_n(x)$ aste, x on polünoomi $P_n(x)$ muutuja (parameeter).

Polünoomi juur

Arvu $x_0 \in \mathbb{C}$ nimetame polünoomi $P_n(x)$ r -kordseks juureks, kui

- 1) $P_n(x_0) = P'_n(x_0) = \cdots = P_n^{(r-1)}(x_0) = 0$
- 2) $P_n^{(r)}(x_0) \neq 0$

Näide 5.30. Arv $x_0 = 1$ on polünoomi

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

2-kordne juur, sest

- 1) $p(1) = p'(1) = 0$
- 2) $p''(1) = 2 \neq 0$

Teoreem 5.31. Kui polünoomi kordajad on reaalsed ning $x_0 \in \mathbb{C}$ on selle polünoomi r -kordne juur, siis ka x_0^* on sama polünoomi r -kordne juur.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 100 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Algebra põhiteoreem

Teoreem 5.32. Igal kompleksarvuliste kordajatega n -astme polünoomil leidub parajasti n kompleksarvulist juurt (kordsused kaasa arvatud).

Ühejuured

Polünoomi $x^n - 1$ kompleksarvulisi juuri nimetatakse n -järku ühejuurteks. Kõigi n -järku ühejuurte hulka tähistatakse $\sqrt[n]{1}$.

Ühejuurte arvutamine

$$\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \doteq \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Tõestus. Tähistame $\varepsilon_k \doteq e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Kasutades de Moivre'i valemit, arvutame

$$\begin{aligned} (\varepsilon_k)^n - 1 &= \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^n - 1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}n} - 1 = e^{i2k\pi} - 1 \\ &= \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Et trigonomeetrilised funktsioonid \cos ja \sin on *perioodilised*, siis rohkem juuri pole. \square

Koduleht

Tiitelleht



Lk 101 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Ühejuurte geomeetriline tõlgendus

Osutub, et n -järku ühejuured asetsevad komplekstasandil korrapärase hulknurga tippudes. Hulknurga tipud asetsevad ühikringjoonel, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis.

Näide 5.33. Leiame $\sqrt[2]{1}$.

Lahendus. Arvutame

$$\begin{aligned}\sqrt[2]{1} &= \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{2}}, \quad k = 0, 1 \right\} = \left\{ e^{ik\pi}, \quad k = 0, 1 \right\} = \{ e^{i0}, e^{i\pi} \} \\ &= \{ 1, -1 \} = \pm 1\end{aligned}$$

Näide 5.34. Leiame $\sqrt[3]{1}$.

Lahendus. Teame, et

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2 \right\}$$

Arvutame

$$k = 0: \quad \varepsilon_0 = e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: \quad \varepsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: \quad \varepsilon_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Seega

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ 1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 102 !\[\]\(2cf6801d0ea3db56ed897b0c35d9ff86_img.jpg\) 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Kolmandat järku ühejuured paiknevad korrapärase kolmnurga tippudes. Kolmnurga tipud asetsevad ühikringjoonel, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis. Joonise koostamine jäägu iseseisvaks harjutuseks.

Kompleksarvu juurimine

Polünoomi $x^n - a$ kõigi kompleksarvuliste juurte hulka tähistatakse $\sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[n]{a}$ arvutamine

Teoreem 5.35. Olgu $a = |a|e^{i\varphi}$. Siis

$$\sqrt[n]{a} = \left\{ \sqrt[n]{|a|} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

kus $\sqrt[n]{|a|}$ tähistab polünoomi $x^n - |a|$ ainsat mittenegatiivset reaalarvulist juurt.

Tõestus. Samasugune ühejuurte valemi tõestusega. □

Näide 5.36. Leiame $\sqrt[n]{i}$.

Lahendus. Et $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$, siis

$$\sqrt[n]{i} = \left\{ e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 103 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Võtame näiteks $n = 3$. Saame

$$\sqrt[3]{i} = \left\{ e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2 \right\}$$

Leiame $\sqrt[3]{i}$ elemendid trigonomeetrilisel ja algebralisel kujul.

$$k = 0: \quad x_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k = 1: \quad x_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k = 2: \quad x_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

Tulemuseks saame

$$\sqrt[3]{i} = \left\{ \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}, -i \right\}$$

5.13. Ülesanded

Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul

5.13.1 Esitada kompleksarvud algebralisel kujul.

(1) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$

(2) $(2 + i)(3 + 7i) - (1 + 2i)(5 + 3i)$

(3) $(4 + i)(5 + 3i) - (3 + i)(3 - i)$ (4) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 104 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$(5) \frac{(5+i)(3+5i)}{2i} \quad (6) \frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2} \quad (7) \frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$$

$$(8) \frac{(3-i)(1-4i)}{2-i} \quad (9) (2+i)^3 + (2-i)^3$$

$$(10) (3+i)^3 - (3-i)^3 \quad (11) \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} \quad (12) \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

5.13.2 Arvutada imaginaarühiku i astmed.

$$(1) i^{77} \quad (2) i^{-76} \quad (3) i^{98} \quad (4) i^{-97} \quad (5) i^{57} \quad (6) i^{-58}$$

$$(7) i^{33} \quad (8) i^{-31}$$

5.13.3 Arvutada determinandid.

$$(1) \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & e^2 \\ e^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5.13.4 Lahendada LVS ja kontrollida lahendit.

$$(1) \begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 105 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$(3) \begin{cases} (1-i)z_1 - 3z_2 = -i \\ 2iz_1 + (-1+3i)z_2 = -3+5i \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i \\ (2+4i)z_1 - 5iz_2 = 2-i \end{cases}$$

Kompleksse konjugeerimise omadusi

5.13.5 Tõestada valemid.

$$(1) (z^*)^* = z \quad (2) (z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^* \quad (3) (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$(4) \operatorname{re} z = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad (5) \operatorname{im} z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

Hermiitilise konjugeerimise omadusi

5.13.6 Kontrollida teist järku ruutmatriksite korral matriksite omadused.

$$(1) (A^\dagger)^\dagger = A \quad (2) (\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger \quad (3) (A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$(4) (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Ruutvõrrand üle kompleksarvude

5.13.7 Lahendada ruutvõrrand ja kontrollida lahendit.

$$(1) z^2 = -24 - 10i \quad (2) z^2 = 3 - 4i \quad (3) z^2 = 5 - 12i$$

$$(4) z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0 \quad (5) iz^2 - 5iz - 10 + 4i = 0$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 106 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$(6) \quad iz^2 - (2 + 7i)z + 1 + 13i = 0$$

$$(7) \quad z^2 - (5 + i)z + 12 + 5i = 0$$

Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju

5.13.8 Lahendada võrrand ja kontrollida lahendit.

$$(1) \quad |z| + z = 8 + 4i \quad (2) \quad |z| - z = 8 + 12i$$

5.13.9 Tõestada valem $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

5.13.10 Tõestada Euleri valemid.

5.13.11 Tõestada valemid

$$(1) \quad e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (2) \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

5.13.12 Leida kompleksarvude trigonomeetrilised ja eksponentkujud. Kujutada joonisel. Kontrollida tulemust.

$$(1) \pm 3 \quad (2) \pm 5 \quad (3) \pm 3i \quad (4) \pm 1 \pm i$$

$$(5) \pm 1 \pm \sqrt{3}i \quad (6) \pm \sqrt{3} \pm i$$

Kompleksarvu astendamine ja juurimine

5.13.13 Tõestada de Moivre'i valem.

5.13.14 Astendada.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 107 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$(1) (1+i)^{1000} \quad (2) (1+i\sqrt{3})^{150} \quad (3) (\sqrt{3}+i)^{30}$$

$$(4) \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12} \quad (5) \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$$

5.13.15 Juurida ja kontrollida tulemust astendamisega.

$$(1) \sqrt[4]{1} \quad (2) \sqrt[3]{i} \quad (3) \sqrt[6]{i} \quad (4) \sqrt[3]{1+i}$$

$$(5) \sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})} \quad (6) \sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}$$

Trigonomeetriliste funktsioonide omadusi

5.13.16 Esitada järgmised funktsioonid $\sin x$ ja $\cos x$ astmete kaudu.

$$(1) \sin 3x \quad (2) \cos 3x \quad (3) \sin 4x \quad (4) \cos 4x$$

$$(5) \sin 5x \quad (6) \cos 5x$$

5.13.17 Esitada järgmised funktsioonid $\sin nx$ ja $\cos nx$ kaudu.

$$(1) \sin^3 x \quad (2) \cos^3 x \quad (3) \sin^4 x \quad (4) \cos^4 x$$

$$(5) \sin^5 x \quad (6) \cos^5 x$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 108 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

6. Vektorruumid

6.1. Korpuse mõiste

Hulka $\mathbb{K} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ nimetatakse *korpuseks*, kui hulgal \mathbb{K} on defineeritud elementide *liitmine* ja *korrutamise* nii, et on täidetud järgmised tingimused (korpuse arvutusseadused):

- 1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
(liitmise kommutatiivsus),
- 2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
(liitmise assotsiatiivsus),
- 3) $\exists 0 \in \mathbb{K}$ nii, et $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$
(nulli $0 \in \mathbb{K}$ olemasolu),
- 4) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \exists -\alpha \in \mathbb{K}$ nii, et $\alpha + (-\alpha) = 0 = -\alpha + \alpha$
(vastandelemendi $-\alpha$ olemasolu),
- 5) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
(korrutamise assotsiatiivsus),
- 6) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
(distributiivsus),
- 7) $\exists 1 \in \mathbb{K}$ nii, et $1\alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$
(unitaalsus),
- 8) $\alpha\beta = \beta\alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
(korrutamise kommutatiivsus),
- 9) $\forall 0 \neq \alpha \in \mathbb{K} \quad \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ nii, et $\alpha\alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1}\alpha$
(pöördelemendi α^{-1} olemasolu).

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 109 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Korpuse elemente nimetatakse *skalaarideks* ehk *arvudeks*. Lisaks eeldatakse, et \mathbb{K} on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes, s.t skalaaride summad ja korrutised kuuluvad samuti korpusesse \mathbb{K} .

Näide 6.1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

6.2. Vektorruumi mõiste

Vektorruumi mõiste

Hulka $V = \{a, b, c, \dots\}$ nimetatakse *vektorruumiks* üle korpuse \mathbb{K} , kui on defineeritud hulga V elementide *liitmine* ja hulga V elementide *korrutamine* korpuse \mathbb{K} skalaaridega nii, et on täidetud järgmised tingimused (vektorruumi arvutusseadused):

- 1) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in V$
(liitmise kommutatiivsus),
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in V$
(liitmise assotsiatiivsus),
- 3) $\exists o \in V$ nii, et $a + o = a = o + a \quad \forall a \in V$
(nullvektori $o \in V$ olemasolu),
- 4) $\forall a \in V \quad \exists -a \in V$ nii, et $a + (-a) = o = -a + a$
(vastandvektori $-a$ olemasolu),
- 5) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall a, b \in V$
(distributiivsus),
- 6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall a \in V$
(distributiivsus),

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 110 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

- 7) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall a \in V$
(skalaariga korrutamise assotsiatiivsus),
- 8) $1a = a \quad \forall a \in V$
(unitaalsus).

Vektorruumi elemente nimetatakse *vektoriteks*. Lisaks eeldatakse, et V on kinnine vektorite liitmise ja skalaaridega korrutamise suhtes, s.t vektorite summad ja vektorite korrutised skalaaridega kuuluvad vektorruumi V .

Edaspidi eeldame vaikumisi, et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ või \mathbb{C} . Vastavat vektorruumi nimetatakse *ratsionaalseks*, *reaalseks* või *kompleksseks*.

Vektorruumi nullvektori tähistamiseks kasutatakse ka arvu 0. Lugeja peab kontekstist mõistma, millal on tegemist arvuga 0 ja millal nullvektoriga. Selguse huvides võib kasutada ka tähistust 0_V .

Näide 6.2 (nullruum). *Nullruumiks* nimetatakse vektorruumi $O \doteq \{o\}$, milles on üksainus element – nullvektor o . Nullruumi tähistamiseks võib kasutada jällegi arvu 0. Nullruumi nimetatakse ka *triviaalseks* vektorruumiks. Nullruume üle erinevate korpuste tuleb lugeda erinevateks.

Näide 6.3 (korpused). Iga korpus on vektorruum üle iseenda.

Näide 6.4 (maatriksruumid). $\text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$ on vektorruum üle \mathbb{K} . Arvutusoperatsioonid defineerisime 2. peatükis.

Näide 6.5 (aritmeetilised vektorruumid). Aritmeetilised vektorid on üherealised ja üheveerulised maatriksid elementidega korpusest \mathbb{K} . Aritmeetilised vektorruumid on

$$\mathbb{K}^n \doteq \text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 111 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{aligned}
 &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\} && \text{reavektorite ruum} \\
 {}^r\mathbb{K}^n &\doteq \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{K}) \\
 &= \{(x_1, \dots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{K}\} && \text{veeruvektorite ruum}
 \end{aligned}$$

Tehted aritmeetiliste vektoritega toimuvad maatriksarvutuse reeglite kohaselt.

Näide 6.6 (geomeetrilised vektorid). *Geomeetiline vektor* on suunatud sirglõik. Vektorite liitmine defineeritakse rööpküliku reegluga. Korrutamine arvuga defineeritakse lõigu pikendamise või lühendamise teel ja negatiivsete arvude korral veel lisaks suuna muutmise

Näide 6.7 (funktsiooniruum). Olgu $C[a, b]$ kõigi lõigus $[a, b]$ pidevate reaalarvuliste väärtustega funktsioonide hulk. Olgu $f, g \in C[a, b]$ ning $\alpha \in \mathbb{R}$. Tehted defineerime järgmiselt:

- 1) $(f + g)(x) \doteq f(x) + g(x) \quad \forall x \in [a, b],$
- 2) $(\alpha f)(x) \doteq \alpha f(x) \quad \forall x \in [a, b],$
- 3) $o(x) \doteq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{nullfunktsioon}),$
- 4) $(-f)(x) \doteq -f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{vastandfunktsioon}).$

Ülaltoodud tehete suhtes on $C[a, b]$ vektorruum üle \mathbb{R} (matemaatilise analüüsi teoreem). Samamoodi defineeritakse *diferentseeruvate* ja *siledate* funktsioonide ruumid.

Näide 6.8 (homogeense LVS-i lahendiruum). Kirjutame homogeense LVS-i maatrikskuul $Ax = 0$. Ilmselt on nullvektor o lahend (nn triviaalne lahend), sest $Ao = o$. Olgu a ja b lahendid, s.t $Aa = o = Ab$. Siis on $a + b$ ja αa samuti lahendid, sest maatrikstehete omaduste järgi

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 112 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- 1) $A(a + b) = Aa + Ab = o + o = o$
- 2) $A(\alpha a) = (A\alpha)a = (\alpha A)a = \alpha(Aa) = \alpha o = o$

Seega homogeenne LVS-i lahendihulk (kui aritmeetilise vektorruumi alamhulk) on kinni-
ne liitmise ja arvuga korrutamise suhtes. Siit järeldub, et homogeenne LVS-i lahendiruum
on vektorruum.

6.3. Vektorite omadusi

Esimest liiki lineaarne vektorvõrrand

Lause 6.9. Võrrandil $\alpha x = v$ leidub $\forall 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ ja $v \in V$ korral parajasti üks lahend.
Selleks lahendiks on vektor

$$x = \frac{v}{\alpha} \doteq \alpha^{-1}v \in V$$

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $\alpha^{-1}v$ on võrrandi $\alpha x = v$ lahend. Tõepoolest

$$\alpha(\alpha^{-1}v) = (\alpha\alpha^{-1})v = 1v = v$$

Olgu y veel mingi lahend, s.t $\alpha y = v$. Siis ilmselt

$$y = 1y = (\alpha^{-1}\alpha)y = \alpha^{-1}(\alpha y) = \alpha^{-1}v$$

Tulemus ütleb, et $\alpha^{-1}v$ on võrrandi $\alpha x = v$ ainus lahend. □

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 113 ⊛ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Nullvektori ainsus

Lause 6.10. *Vektorruumis on parajasti üks nullvektor.*

Tõestus. Olgu o' samuti nullvektor. Siis

$$\begin{cases} o' + o = o \\ o + o' = o' \end{cases} \quad \begin{matrix} o' + o \xrightarrow{=} o + o' \\ \xrightarrow{=} o' \end{matrix} \quad o' = o \quad \square$$

Koondamisreegel

Lause 6.11 (koondamisreegel). *Olgu a, u, v vektorruumi V vektorid.*

$$\text{Kui } a + u = a + v, \text{ siis } u = v$$

Tõestus. Ilmselt

$$-a + (a + u) = -a + (a + v)$$

Kasutades kõigepealt liitmise assotsiatiivsust, seejärel vastandvektori ja nullvektori definitsiooni, saame viimasest võrdusest

$$(-a + a) + u = (-a + a) + v \implies o + u = o + v \implies u = v \quad \square$$

Vastandvektori ühesus

Lause 6.12. *Igal vektoril on parajasti üks vastandvektor.*

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 114 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Tõestus. Olgu $b \in V$ samuti vektori $a \in V$ vastandvektor, s.t $a + b = o$. Et $a + (-a) = o$, siis ilmselt

$$a + b = o = a + (-a)$$

Kasutades koondamisreeglit (lauset 6.11), saame $b = -a$. □

Vahevektor

Vektorite a ja b vahe $a - b$ defineeritakse valemiga

$$a - b \doteq a + (-b)$$

Teist liiki lineaarne vektorvõrrand

Lause 6.13. Võrrandil $a + x = b$ leidub $\forall a, b \in V$ korral parajasti üks lahend. Selleks lahendiks on $x = b - a \in V$.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $b - a$ on võrrandi $a + x = b$ lahend. Tõepoolest

$$a + (b - a) = a + b - a = (a - a) + b = o + b = b$$

Olgu y veel mingi lahend, s.t $a + y = b$. Siis ilmselt

$$a + y = b = a + (b - a)$$

Kasutades koondamisreeglit (lauset 6.11), saame $y = b - a$, s.t $b - a$ on võrrandi $a + x = b$ ainus lahend. □

Näide 6.14. Võrrandi $a + x = a$ ainus lahend on $x = a - a = o$, s.t *nullvektor*.

Näide 6.15. Võrrandi $a + x = o$ ainus lahend on $x = o - a = -a$, s.t vektori a vastandvektor.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 115 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Vektori korrutamine nulliga

Lause 6.16. $0a = o \quad \forall a \in V$

Tõestus. Tõepoolest

$$o + 0a = 0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

millest koondamisreegli (lause 6.11) põhjal $0a = o$. □

Nullvektori korrutamine skalaariga

Lause 6.17. $\alpha o = o \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Tõestus. Tõepoolest

$$o + \alpha o = \alpha o = \alpha(o + o) = \alpha o + \alpha o$$

millest koondamisreegli põhjal $\alpha o = o$. □

Vastandvektori arvutamine

Lause 6.18. $-a = (-1)a \quad \forall a \in V$

Tõestus. Tõepoolest

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a = o = a + (-a)$$

millest koondamisreegli (lause 6.11) põhjal $(-1)a = -a$. □

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 116 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Vektori korrutamine vastandarvuga

Lause 6.19. $(-\alpha)a \stackrel{(A)}{=} -(\alpha a) \stackrel{(B)}{=} \alpha(-a) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall a \in V$

Tõestus. Tõestame kõigepealt võrduse (A). Peame näitama, et $(-\alpha)a$ on vektori αa vastandvektor. Tõepoolest

$$\alpha a + (-\alpha)a = (\alpha - \alpha)a = 0a = o \quad \implies \quad (-\alpha)a = -(\alpha a)$$

Nüüd arvutame

$$(-\alpha)a = (-\alpha 1)a = [\alpha(-1)]a = \alpha[(-1)a] = \alpha(-a)$$

mis viib nõutud võrduseni (B). □

Nullitegurite puudumine vektorruumis

Lause 6.20. *Vektorruumis puuduvad nullitegurid, s.t*

$$\alpha a = o \iff \alpha = 0 \quad \text{või} \quad a = o$$

Tõestus. \implies : Olgu $\alpha a = o$. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad nullitegurid, s.t $\alpha \neq 0$ ja $a \neq o$. Siis $\exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ ning

$$a = 1a = (\alpha^{-1}\alpha)a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1}o = o$$

mis on vastuolus oletusega, et $a \neq o$. Tulemus (vastuolu) ütleb, et korrutises $\alpha a = o$ peab vähemalt üks teguritest olema 0.

\longleftarrow : Olgu $\alpha = 0$ või $a = o$. Siis $\alpha a = o$ eespool tõestatud lausete 6.16 ja 6.17 põhjal. □

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 117 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 6.21. Avaldada vektorid x, y vektorite a, b kaudu, kui

$$\begin{cases} x - 4y = a \\ 2x + 3y = b \end{cases}$$

Lahendus. Esitame süsteemi maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Olgu $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Siis $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3a + 4b \\ -2a + b \end{pmatrix}$$

Seega

$$\begin{cases} x = +\frac{3}{11}a + \frac{4}{11}b \\ y = -\frac{2}{11}a + \frac{1}{11}b \end{cases}$$

Kahtluse korral kontrollime lahendit. Kontrollime lahendit näiteks esimese võrrandiga

$$\begin{aligned} x - 4y &= \frac{3}{11}a + \frac{4}{11}b - 4\left(-\frac{2}{11}a + \frac{1}{11}b\right) \\ &= \frac{3}{11}a + \frac{4}{11}b + \frac{8}{11}a - \frac{4}{11}b = a \end{aligned}$$

Samamoodi kontrollitakse lahendit teise võrrandiga.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 118 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

6.4. Lineaarne sõltuvus

Lineaarkombinatsioonid

Vektorite $v_1, \dots, v_n \in V$ *lineaarkombinatsiooniks* (LK-ks) kordajatega $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ nimetatakse avaldist (vektorit)

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$$

Selle vektori kohta öeldakse ka, et ta on *avaldatud* (*arendatud*) lineaarselt vektorite v_1, \dots, v_n kaudu.

Lineaarkombinatsiooni nimetatakse *triviaalseks*, kui kõik tema kordajad on nullid. Lineaarkombinatsiooni nimetatakse *mittetriviaalseks*, kui tal leidub vähemalt üks *nullist erinev* kordaja.

Näide 6.22. Toome järgmised lihtsad näited:

- 1) $1a, 1o, 1o + 0a$ on mittetriviaalsed LK-d,
- 2) $0a$ ja $0o$ on triviaalsed LK-d.

Lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Vektorisüsteemi (VS-i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ nimetatakse *lineaarselt sõltuvaks*, kui antud süsteemi vektorite mingi *mittetriviaalne* LK võrdub nullvektoriga. Vastasel juhul, s.t kui nullvektoriga võrduvat mittetriviaalset lineaarkombinatsiooni ei leidu, nimetatakse VS-i *lineaarselt sõltumatuks*.

Sageli räägitakse vektorisüsteemi lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse asemel (süsteemi kuuluvate) vektorite lineaarsest sõltuvusest ja sõltumatusest.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 119 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Siit järeldub, et

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Tulemus ütleb, et VS $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ on lineaarselt sõltumatu.

Kui vektorisüsteem koosneb ühest vektorist

Lause 6.25. *VS, mis koosneb ainult nullvektorist, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Tõepoolest, siis leidub nullvektoriga võrduv mittetriviaalne LK: $1o = o$. \square

Lause 6.26. *Ühest vektorist koosnev VS on lineaarselt sõltumatu parajasti siis, kui see vektor ei ole nullvektor.*

Tõestus. \implies : Olgu $\{v\}$ lineaarselt sõltumatu. Siis $v \neq o$, sest $\{o\}$ oleks lineaarselt sõltuv, mis on vastuolus eeldusega.

\impliedby : Kui $v \neq o$, siis võrdusest $\alpha v = o$ järeldub (nullitegurite puudumise tõttu) $\alpha = 0$. Seega ei leidi nullvektoriga võrduvat mittetriviaalset lineaarkombinatsiooni, s.t VS $\{v \neq o\}$ peab olema lineaarselt sõltumatu. \square

Lause 6.27. *Ühest vektorist koosnev VS on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui see vektor on nullvektor.*

Tõestus. \implies : Olgu VS $\{v\}$ lineaarselt sõltuv. Kui v ei ole nullvektor, siis eelnenud lause põhjal on see VS lineaarselt sõltumatu, mis on vastuolus eeldusega. Seega peab $v = o$.

\impliedby : $\{o\}$ on ilmselt lineaarselt sõltuv, sest $1o = o$. \square

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 121 \$\otimes\$ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Kui vektorisüsteem sisaldab nullvektorit

Lause 6.28. *VS, mis sisaldab nullvektorit, on linearselt sõltuv.*

Tõestus. Olgu $\{o, v_1, \dots, v_n\}$ vaadeldav VS. Siis

$$\underbrace{1o + 0v_1 + \dots + 0v_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

millest järeldub nõutav lineaarne sõltuvus. □

Kui vektorisüsteem sisaldab vastandvektoreid

Lause 6.29. *VS, mis sisaldab koos mingi vektoriga ka selle vektori vastandvektorit, on linearselt sõltuv.*

Tõestus. Olgu $\{v, -v, v_1, \dots, v_n\}$ vaadeldav VS. Siis

$$\underbrace{1v + (-v) + 0v_1 + \dots + 0v_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

millest järeldub nõutav lineaarne sõltuvus. □

Kui vektorisüsteem sisaldab ühesuguseid vektoreid

Lause 6.30. *VS, mis sisaldab ühesuguseid vektoreid, on linearselt sõltuv.*

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 122 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Tõestus. Olgu $\{v, v, v_1, \dots, v_n\}$ vaadeldav VS. Siis

$$\underbrace{1v + (-1)v + 0v_1 + \dots + 0v_n}_\text{mittetriviaalne LK} = o$$

millest järeldub nõutav lineaarne sõltuvus. \square

Kui vektorisüsteem sisaldab lineaarselt sõltuvat alamsüsteemi

Lause 6.31. *VS, mis sisaldab lineaarselt sõltuvat alamsüsteemi, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Olgu $\{v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_k\}$ selline vektorisüsteem, et alamsüsteem $\{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaarselt sõltuv. Siis leidub nullvektoriga võrduv *mittetriviaalne* LK

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n}_\text{mittetriviaalne LK} = o$$

Siit järeldub, et

$$\underbrace{\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n}_\text{mittetriviaalne LK} + 0v'_1 + \dots + 0v'_k}_\text{mittetriviaalne LK} = o$$

seega VS $\{v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_k\}$ on lineaarselt sõltuv. \square

Lineaarselt sõltumatu vektorisüsteemi alamsüsteemidest

Lause 6.32. *Lineaarselt sõltumatu vektorisüsteemi iga alamsüsteem on lineaarselt sõltumatu.*

Tõestus. Järeldub lausest **6.31**. \square

Koduleht

Tiitelleht



Lk 123 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lineaarselt sõltumatu vektorisüsteemi laiendamisest

Teoreem 6.33. Kui VS $\{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaarselt sõltumatu ning VS $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ on lineaarselt sõltuv, siis avaldub vektor v vektorite v_1, \dots, v_n LK-na.

Tõestus. VS-i $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ lineaarse sõltuvuse tõttu

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha v}_{\text{mittetriviaalne LK}} = o$$

Viimases seoses peab $\alpha \neq 0$, sest vastasel juhul oleksid kõik kordajad nullid. Vektor v avaldub siis ilmselt vektorite v_1, \dots, v_n LK-na

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} v_n \quad \square$$

Lineaarse sõltumatuse tunnus

Teoreem 6.34. VS $\{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaarselt sõltumatu parajasti siis, kui võrdusest

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = o \quad \text{järeldub} \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Tõestus. \implies : Olgu VS $\{v_1, \dots, v_n\}$ lineaarselt sõltumatu. Peame näitama, et võrdusest

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = o \quad \text{järeldub} \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Oletame vastuväiteliselt, et vähemalt üks kordajatest tuleb nullist erinev. Siis oleks VS $\{v_1, \dots, v_n\}$ lineaarselt sõltuv, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult peab $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 124 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

\Leftarrow : Kui võrdusest

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad \text{järeldub} \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

siis *ei leidu* nullvektoriga võrduvat *mittetriviaalset* lineaarkombinatsiooni. Seega VS $\{v_1, \dots, v_n\}$ on linearselt *sõltumatu*. \square

Lineaarse sõltuvuse tunnus

Teoreem 6.35. *VS, mis sisaldab vähemalt kahte vektorit, on linearselt sõltuv parajasti siis, kui süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänute LK-na.*

Tõestus. \Rightarrow : Olgu VS $\{v_1, \dots, v_{n \geq 2}\}$ linearselt sõltuv. Siis leidub nullvektoriga võrduv mittetriviaalne LK

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n}_{\text{mittetriviaalne LK}} = 0$$

Olgu näiteks $\alpha_1 \neq 0$. Arvutame

$$\alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n$$

Korrutame nüüd arvuga α_1^{-1} vasakult, siis saame

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

mis ütleb, et v_1 avaldub ülejäänud vektorite LK-na.

\Leftarrow : Avaldugu v_1 ülejäänud vektorite LK-na

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 125 \$\otimes\$ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Siit saame

$$\underbrace{1v_1 - \beta_2v_2 - \dots - \beta_nv_n = 0}_{\text{mittetriviaalne LK}}$$

s.t VS $\{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaarselt *sõltuv*. □

6.5. Moodustajad ja baas

Moodustajad

VS-i nimetatakse vektorruumi V *moodustajate süsteemiks*, kui V iga vektor on avaldatav selle süsteemi vektorite LK-na. Moodustajate süsteemi vektoreid nimetatakse vektorruumi *moodustajateks*.

Näide 6.36. Iga vektorruum on iseenda moodustajate süsteem, sest $v = 1v$. Et iga vektorruum sisaldab nullvektorit, siis see näide ütleb, et vektorruumi moodustajate süsteemid võivad olla lineaarselt *sõltuvad*.

Baas

Õeldakse, et vektorisüsteem B on vektorruumi $V \neq 0$ *baas* ehk *koordinaatsüsteem*, kui

- 1) B on V moodustajate süsteem,
- 2) B on lineaarselt *sõltumatu*.

Kui vektorruum on nullruum, siis võib tema baasiks defineerida tühihulga (see on teatavasti lineaarselt *sõltumatu*). Seega oleks nullruumi baasis 0 vektorit.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 126 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Lõplikumõõtmelised ruumid

Vektorruumi nimetatakse *lõplikumõõtmeliseks*, kui tal leidub *lõplik* baas, s.t baas, mis sisaldab lõpliku arvu vektoreid. Vektorruumi nimetatakse *lõpmatumõõtmeliseks*, kui ta ei ole lõplikumõõtmeline.

Näide 6.37. Tõestame, et VS

$$\{e_i \doteq \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\}$$

on aritmeetilise vektorruumi \mathbb{K}^n baas (seda nimetatakse *standardbaasiks*).

Tõestus. Näitest 6.24 teame, et VS $\{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$ on lineaarselt sõltumatu. Peame näitama, et ta on ka vektorruumi \mathbb{K}^n moodustajate süsteem. Olgu $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Paneme tähele, et

$$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

s.t $\forall a \in \mathbb{K}^n$ avaldub (lineaarselt sõltumatute) vektorite e_1, \dots, e_n LK-na. Siit järeldub, et VS $\{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$ on vektorruumi \mathbb{K}^n baas. \square

6.6. Mõõde

Esimene fundamentaallemma

Lemma 6.38. Vektorid b_1, \dots, b_n avaldugu vektorite a_1, \dots, a_k linearkombinatsioonidena. Kui $n > k$, siis VS $\{b_1, \dots, b_n\}$ on lineaarselt sõltuv.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 127 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

(avame sulud ja rühmitame liidetavad ümber)

$$\begin{aligned}
 &= + (\alpha_{11}\lambda'_1 + \alpha_{12}\lambda'_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda'_n)a_1 \\
 &\quad + (\alpha_{21}\lambda'_1 + \alpha_{22}\lambda'_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda'_n)a_2 \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &\quad + (\alpha_{k1}\lambda'_1 + \alpha_{k2}\lambda'_2 + \cdots + \alpha_{kn}\lambda'_n)a_k \\
 &= 0a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_k \\
 &= o
 \end{aligned}$$

Näitasime, et leidub vektorite b_1, \dots, b_n nullvektoriga võrduv mittetriviaalne LK. Järelikult peab VS $\{b_1, \dots, b_n\}$ olema lineaarselt sõltuv. \square

Teine fundamentaallemma

Lemma 6.39. *Olgu VS $\{b_1, \dots, b_n\}$ lineaarselt sõltumatu ning VS $\{a_1, \dots, a_k\}$ olgu V moodustajate süsteem. Siis $n \leq k$.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $n > k$. Siis peaks vektorisüsteem $\{b_1, \dots, b_n\}$ esimese fundamentaallemma 6.38 põhjal olema lineaarselt sõltuv, mis on vastuolus eeldusega. \square

Teoreem vektorite arvust baasides

Teoreem 6.40. *Lõplikumõõtmelise vektorruumi kõikides baasides on ühepalju vektoreid.*

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 129 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tõestus. Olgu $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ja $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ lõplikumõõtmelise vektorruumi V baasid. Peame näitama, et $k = n$. Paneme tähele, et

$$\begin{cases} B = \{b_1, \dots, b_n\} & \text{on lineaarselt sõltumatu,} \\ A = \{a_1, \dots, a_k\} & \text{on } V \text{ moodustajate süsteem.} \end{cases}$$

Lemma 6.39 põhjal $n \leq k$. Samamoodi, kui A ja B vahetavad kohad, saame $k \leq n$. Kokku võttes $k = n$. \square

Mõõde

Lõplikumõõtmelise vektorruumi *mõõtmeks* ehk *dimensiooniks* nimetatakse vektorite arvu selle vektorruumi baasis. Vektorruumi V mõõdet tähistatakse $\dim V$.

Nullruum on 0-mõõtmeline, s.t $\dim O = 0$ (nullruumi baas on tühihulk).

Märkus 6.41. Selle definitsiooni korrektsus on garanteeritud teoreemiga 6.40.

Näide 6.42. Eespool toodud näite 6.37 põhjal $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Kui vektorisüsteemis on rohkem kui $\dim V$ vektorit

Teoreem 6.43. *VS, milles on rohkem kui $\dim V$ vektorit, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Tähistame $\dim V = k$. Olgu

$$\begin{cases} \{a_1, \dots, a_k\} & \text{vektorruumi } V \text{ baas} \\ \{b_1, \dots, b_{n>k}\} & \text{mingi VS} \end{cases}$$

Lemma 6.38 põhjal on VS $\{b_1, \dots, b_{n>k}\}$ lineaarselt sõltuv. \square

Koduleht

Tiitelleht



Lk 130 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Vektorite arvust moodustajate süsteemis

Teoreem 6.44. *Vektorruumi V igas moodustajate süsteemis on vähemalt $\dim V$ vektorit.*

Tõestus. Tähistame $\dim V = n$. Olgu

$$\begin{cases} \{b_1, \dots, b_n\} & \text{vektorruumi } V \text{ baas} \\ \{a_1, \dots, a_k\} & \text{vektorruumi } V \text{ moodustajate süsteem} \end{cases}$$

Peame näitama, et $k \geq n$. Paneme tähele, et $\{b_1, \dots, b_n\}$ on lineaarselt sõltumatu (baas). Lemma 6.39 põhjal $n \leq k$. \square

6.7. Homogeense lineaarvõrrandisüsteemi LFS

LFS-i mõiste

Homogeense LVS-i lahendiruum on teatavasti vektorruum. Homogeense LVS-i lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS-iks) nimetatakse selle süsteemi lahendiruumi baasi.

Homogeense süsteemi lahendiruumi mõõtmest

Teoreem 6.45. *Olgu homogeense LVS-i tundmatute arv n ja süsteemi maatriksi astak r . Siis on süsteemi lahendiruum $(n - r)$ -mõõtmeline.*

See teoreem ütleb, et homogeense süsteemi lahendite fundamentaalsüsteem koosneb $n - r$ vektorist. Homogeense süsteemi üldlahend avaldub (vektoresituses) LFS-i vektorite lineaarkombinatsioonina, kusjuures kordajateks on suvalised konstandid (üldlahendi parameetrid).

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 131 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

LFS-i leidmine

LFS-i saame, kui vabadele tundmatutele (mille arv on $(n - r)$) omistame sobivalt arv-
väärtusi 1 ja 0.

Näide 6.46. Leiame homogeenese süsteemi

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

lahendite fundamentaalsüsteemi.

Lahendus. Süsteemi üldlahend on

$$\begin{cases} x_1 = -9x_2 - 4x_4 \\ x_3 = 11x_2 + 5x_4 \\ x_2, x_4 - \text{vabad tundmatud} \end{cases}$$

Üldlahend vektorestituses on

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9x_2 - 4x_4 \\ x_2 \\ 11x_2 + 5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 132 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Süsteemi LFS sisaldab $4 - 2 = 2$ vektorit. Vabadele tundmatutele x_2 ja x_4 omistame nüüd arvvaartusi 1 ja 0. Saame erilahendid

$$v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Süsteemi *üldlahend* avaldub lahendite fundamentaalsüsteemi vektorite lineaarkombinatsioonina, kusjuures kordajateks on *suvälised konstandid* (vabad tundmatud)

$$x = x_2v_1 + x_4v_2$$

6.8. Koordinaadid ja koordinaatvektor

Olgu $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vektorruumi V baas, siis $\dim V = n$. Eelnevast teame, et iga vektor $a \in V$ on avaldatav baasi vektorite LK-na

$$a = \alpha_1b_1 + \dots + \alpha_nb_n$$

Selle lineaarkombinatsiooni kordajaid $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nimetatakse vektori $a \in V$ *koordinaatideks* baasis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Vektori a kohta öeldakse, et ta on *avaldatud* baasi B järgi. Vektori a *koordinaatvektoriks* baasis B nimetame üheveerulist maatriksit

$$C_B(a) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Põhjus, miks kasutame veergu rea asemel, selgub hiljem.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 133 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Lause 6.47 (koordinaatvektori omadusi). Olgu B vektorruumi V baas. Siis

$$1) C_B(v_1 + v_2) = C_B(v_1) + C_B(v_2)$$

$$2) C_B(\alpha v) = \alpha C_B(v)$$

Tõestus. Soovitav tõestada iseseisva harjutusena. □

Vektori koordinaatide ühesus antud baasis

Teoreem 6.48. Vektori koordinaadid antud baasis on määratud üheselt.

Tõestus. Olgu $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vektorruumi V baas ning

$$a = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = \alpha'_1 b_1 + \dots + \alpha'_n b_n$$

Võrdusest $a - a = o$ saame

$$\begin{aligned} \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n - (\alpha'_1 b_1 + \dots + \alpha'_n b_n) \\ = (\alpha_1 - \alpha'_1) b_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) b_n = o \end{aligned}$$

Baasi B lineaarse sõltumatus tõttu peab

$$\alpha'_i = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$$

mis tähendabki koordinaatide ühesust baasis B . □

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 134 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Vektorite võrdsuse tunnus

Teoreem 6.49. *Vektorid on võrdsed parajasti siis, kui on võrdsed nende vastavad koordinaadid (koordinaatvektorid) mingis baasis.*

Tõestus. Olgu $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vektorruumi V baas ning $a, c \in V$. Siis

$$a = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \quad \text{ja} \quad c = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n$$

Arvutame

$$\begin{aligned} a - c &= \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n - (\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n) \\ &= (\alpha_1 - \gamma_1) b_1 + \dots + (\alpha_n - \gamma_n) b_n \end{aligned}$$

\implies : Võrdsusest $a = c$ järedub, et $\alpha_i = \gamma_i$ ($i = 1, \dots, n$), sest B on lineaarselt sõltumatu.

\impliedby : Võrdustest $\alpha_i = \gamma_i$ ($i = 1, \dots, n$) järedub ilmselt, et $a = c$. □

6.9. Baasiteisendused

Üleminekumatriks

Vektorruumi baas ei ole üldiselt üheselt määratud, s.t vektorruumis võib olla rohkem kui üks baas. Olgu $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ja $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ n -mõõtmelise vektorruumi V kaks baasi, vektorite arv neis on teatavasti ühesugune (vt teoreem 6.40). Arendame

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 135 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$$\begin{aligned}
&= \lambda'_1(\alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \cdots + \alpha_{n1}b_n) \\
&\quad + \lambda'_2(\alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \cdots + \alpha_{n2}b_n) \\
&\quad \dots\dots\dots \\
&\quad + \lambda'_n(\alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \cdots + \alpha_{nn}b_n)
\end{aligned}$$

(avame sulud ja rühmitame liidetavad ümber)

$$\begin{aligned}
&= + (\alpha_{11}\lambda'_1 + \alpha_{12}\lambda'_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda'_n)b_1 \\
&\quad + (\alpha_{21}\lambda'_1 + \alpha_{22}\lambda'_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda'_n)b_2 \\
&\quad \dots\dots\dots \\
&\quad + (\alpha_{n1}\lambda'_1 + \alpha_{n2}\lambda'_2 + \cdots + \alpha_{nn}\lambda'_n)b_n
\end{aligned}$$

Vektori arendus baasi järgi on ühene. Järelikult

$$\begin{cases}
\lambda_1 = \alpha_{11}\lambda'_1 + \alpha_{12}\lambda'_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda'_n \\
\lambda_2 = \alpha_{21}\lambda'_1 + \alpha_{22}\lambda'_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda'_n \\
\dots\dots\dots \\
\lambda_n = \alpha_{n1}\lambda'_1 + \alpha_{n2}\lambda'_2 + \cdots + \alpha_{nn}\lambda'_n
\end{cases}$$

mis on vektori v koordinaatide teisenemisvalemid baasilt B' baasile B . Tulemuse võime ilmselt kirjutada maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

□

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 137 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 6.51. Leida vektori $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ koordinaadid baasis

$$B' = \{b'_1 = (1, 1, 0), \quad b'_2 = (1, 0, 1), \quad b'_3 = (0, 1, 0)\}$$

Lahendus. Baasiks B on standardbaas

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)\}$$

Siis

$$v = (1, 2, 3) = 1e_1 + 2e_2 + 3e_3 \quad \Longrightarrow \quad C_B(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Leiame üleminekumaatriksi $P_{B \leftarrow B'}$. Paneme tähele, et

$$\begin{cases} (1, 1, 0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\ (1, 0, 1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\ (0, 1, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad P_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nüüd paneme tähele, et

$$C_B(v) = P_{B \leftarrow B'} C_{B'}(v) \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_{B'}(v)$$

Siit saame

$$C_{B'}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 138 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kontrollides saame

$$\begin{aligned}
 v &= -2b'_1 + 3b'_2 + 4b'_3 \\
 &= -2(1, 1, 0) + 3(1, 0, 1) + 4(0, 1, 0) \\
 &= (-2, -2, 0) + (3, 0, 3) + (0, 4, 0) \\
 &= (1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

Üleminekumaatriksi omadusi

Lemma 6.52. Olgu $\dim V = n$ ning $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vektorruumi V baas. Kui A on $n \times n$ -maatriks, siis

$$A[C_B(v)] = o \quad \forall v \in V \implies A = 0$$

Tõestus. Tõepoolest, $A[C_B(b_i)] (= o)$ on maatriksi A i -s veerg, sest $C_B(b_i)$ on ühikmaatriksi I_n i -s veerg. \square

Teoreem 6.53. Olgu B, B' ja B'' vektorruumi V kolm baasi. Siis

- 1) $P_{B \leftarrow B} = I$
- 2) $P_{B \leftarrow B'}^{-1} = P_{B' \leftarrow B}$ (pööratavus)
- 3) $P_{B'' \leftarrow B'} P_{B' \leftarrow B} = P_{B'' \leftarrow B}$ (transitiivsus)

Tõestus. Esimese omaduse jätame iseseisvaks harjutuseks.

Teine omadus järeldub esimesest ja kolmandast. Võttes kolmandas omaduses $B'' = B$, saame esimese omaduse põhjal

$$P_{B \leftarrow B'} P_{B' \leftarrow B} = P_{B \leftarrow B} = I$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 139 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Samamoodi, kui B ja B' vahetavad kohad, siis

$$P_{B' \leftarrow B} P_{B \leftarrow B'} = P_{B' \leftarrow B'} = I$$

Seega on üleminekumaatriks pööratav ja teine omadus (valem) kehtib järeldusena esimesest ja kolmandast. Jääb üle tõestada kolmas omadus.

Kasutades teoreemi 6.50, võime iga $v \in V$ korral kirjutada

$$C_{B'}(v) = P_{B' \leftarrow B} C_B(v), \quad C_{B''}(v) = P_{B'' \leftarrow B'} C_{B'}(v)$$

Asendades viimasest võrduses $C_{B'}(v)$, saame

$$C_{B''}(v) = P_{B'' \leftarrow B'} P_{B' \leftarrow B} C_B(v)$$

Kuid jällegi teoreemi 6.50 tõttu võime kirjutada

$$C_{B''}(v) = P_{B'' \leftarrow B} C_B(v)$$

Seega lahutades eelviimasest võrdusest viimase, saame

$$(P_{B'' \leftarrow B'} P_{B' \leftarrow B} - P_{B'' \leftarrow B}) C_B(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Kolmas omadus järeldub nüüd lemma 6.52 kaasabil. □

Teoreem 6.54. Üleminekumaatriksi astak on $\dim V$, s. t

$$\det P_{B \leftarrow B'} \neq 0 \neq \det P_{B' \leftarrow B}$$

Tõestus. Arvutame (ülemineku)maatriksite determinantide korrutise

$$\begin{aligned} \det P_{B \leftarrow B'} \cdot \det P_{B' \leftarrow B} &= \det(P_{B \leftarrow B'} P_{B' \leftarrow B}) = \det P_{B \leftarrow B} \\ &= \det I = 1 \end{aligned}$$

Kuna korrutis erineb nullist, siis ei ole tegurid nullid. □

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 140 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

6.10. Alamruum ja lineaarne kate

Alamruum

Vektorruumi V *alamruumiks* nimetatakse tema sellist mittetühja osahulka $V' \subseteq V$, mis rahuldab järgmist tingimust:

$$a, b \in V' \implies \alpha a + \beta b \in V' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Näide 6.55. Vektorruum V on iseenda alamruum. Nullruum $O = \{o\}$, mis koosneb teatavasti vaid vektorruumi V nullvektorist o , on V alamruum. Neid alamruume nimetatakse vektorruumi V *triviaalseteks* alamruumideks. Kõiki ülejäänud alamruume (kui leiduvad) nimetatakse *mittetriviaalseteks*.

Näide 6.56. Defineerime $V' \subset \mathbb{K}^2$ järgmiselt:

$$V' \doteq \{(x, -x) \in \mathbb{K}^2 \mid x \in \mathbb{K}\}$$

Kontrollime alamruumi tingimust. Olgu $(a, -a), (b, -b) \in V'$, siis

$$\begin{aligned} \alpha(a, -a) + \beta(b, -b) &= (\alpha a, -\alpha a) + (\beta b, -\beta b) \\ &= (\alpha a + \beta b, -(\alpha a + \beta b)) \in V' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Tulemus ütleb, et V' on tõepoolest aritmeetilise vektorruumi \mathbb{K}^2 alamruum.

Näide 6.57 (alamruume funktsiooniruumis). Toome mõned alamruumide näited funktsiooniruumis.

1. Diferentseeruvad funktsioonid moodustavad alamruumi pidevate funktsioonide ruumis.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 141 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

2. Siledad funktsioonid moodustavad alamruumi diferentseeruvate funktsioonide ruumis.

Lause 6.58. *Vektorruumi iga alamruum on samuti vektorruum (üle sama korpuse).*

Tõestus. Sest kehtivad vektorruumi aksioomid. □

Lineaarne kate

VS-i $\{v_1, \dots, v_n\}$ *linearseks katteks* $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ nimetatakse selle süsteemi vektorite kõigi LK-de hulka

$$\text{Lin}\{v_1, \dots, v_n\} \doteq \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

Sageli öeldakse, et $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ on vektorite v_1, \dots, v_n lineaarne kate.

Teoreem 6.59. $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ on vektorruumi V alamruum.

Tõestus. Kontrolli alamruumi tingimust. □

Teoreem 6.60. *VS on linearselt sõltumatu parajasti siis, kui ta on oma lineaarse katte baas.*

Tõestus. \implies : Olgu VS linearselt sõltumatu. See süsteem on ka oma lineaarse katte moodustajate süsteem. Järelikult on tegemist (lineaarse katte) baasiga.

\impliedby : Kui VS on (oma lineaarse katte) *baas*, siis peab ta ilmselt olema linearselt sõltumatu. □

Definitsioon 6.61. Matriksi A reavektorite lineaarset katet nimetatakse selle matriksi *reavektorite ruumiks* ja tähistatakse $\text{Row } A$. Matriksi A veervektorite lineaarset katet nimetatakse selle matriksi *veervektorite ruumiks* ja tähistatakse $\text{Col } A$.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)


Lk 142 * 286

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

6.11. Vektorisüsteemi astak. Astakuteoreem

Baasalamsüsteem

VS-i *baasalamsüsteem* on tema selline alamsüsteem, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- 1) baasalamsüsteem on lineaarselt *sõltumatu*,
- 2) täiendavate vektorite lisamine vektorisüsteemist baasalamsüsteemi muudab saadud (laiendatud) süsteemi lineaarselt *sõltuvaks*.

Lühidalt öeldes on VS-i baasalamsüsteem selle süsteemi *maksimaalne* lineaarselt sõltumatu alamsüsteem.

Teoreem 6.62 (lineaarse katte baasist). *VS-i baasalamsüsteem on selle VS-i lineaarse katte baas.*

Tõestus. Teoreemi 6.33 põhjal avaldub VS-i iga vektor oma baasalamsüsteemi vektorite LK-na. Järelikult on VS-i baasalamsüsteem selle VS-i lineaarse katte moodustajate süsteem. Baasalamsüsteemi lineaarse sõltumatus tõttu on tegemist baasiga. \square

Teoreem 6.63 (vektorite arv baasalamsüsteemides). *Vektorisüsteemi kõikides baasalamsüsteemides on ühepalju vektoreid.*

Tõestus. Teame, et VS-i lineaarne kate on vektorruum. Väide järeldub teoreemidest 6.62 ning 6.40. \square

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 143 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Vektorisüsteemi astak

VS-i *astakuks* nimetatakse vektorite arvu tema baas-alam-süs-tee-mis.

Märkus 6.64. Selle definitsiooni korrektsus on garanteeritud teoreemiga 6.63.

Teoreem 6.65. *VS-i astak võrdub selle süsteemi lineaarse katte mõõtmega*

$$\text{rank } S = \dim \text{Lin } S$$

Tõestus. Järeldub teoreemist 6.62. □

Teoreem 6.66 (astakuteoreem). *VS-i astak võrdub selle süsteemi vektorite koordinaatide matriksi astakuga.*

Astakuteoreemi on mugav kasutada VS-i astaku leidmiseks. Selle teoreemi tõestame järgmises alapunktis.

Teoreem 6.67. *Maatriksi A reavektorite süsteemi astak võrdub maatriksi A astakuga ning tema veervektorite süsteemi astak võrdub samuti maatriksi A astakuga. Kuna VS-i astak võrdub tema lineaarse katte mõõtmega, siis*

$$\dim \text{Row } A = \text{rank } A = \dim \text{Col } A$$

6.12. Lineaarse sõltuvuse uurimine

Kirjeldame, kuidas leida VS-i baasalamsüsteemi ja tõestame astakuteoreemi.

Ülesanne. Olgu $\dim V = k$. Uurida VS-i $\{v_1, \dots, v_n\}$ lineaarset sõltuvust.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 144 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

(avame sulud ja rühmitame liidetavad ümber)

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n)b_1 \\
 &\quad + (\alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n)b_2 \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &\quad + (\alpha_{k1}\lambda_1 + \alpha_{k2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{kn}\lambda_n)b_k \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Et baas B on lineaarselt sõltumatu, peavad kordajad olema *nullid*

$$\begin{cases}
 \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n = 0 \\
 \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n = 0 \\
 \dots\dots\dots \\
 \alpha_{k1}\lambda_1 + \alpha_{k2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{kn}\lambda_n = 0
 \end{cases}$$

Paneme tähele, et selle LVS-i maatriksi on vektorite v_1, \dots, v_n koordinaatide maatriksi $A = (\alpha_{ij})$. Olgu r maatriksi A astak. Kasutades Gaussi meetodit, lahendame viimase LVS-i, mis on homogeensuse tõttu kooskõlaline. Vabade tundmatute arv on teatavasti $n - r$. Olgu $\lambda'_1, \dots, \lambda'_r$ *juhttundmatud* ning $\lambda'_{r+1}, \dots, \lambda'_n$ *vabad tundmatud*. *Juhttundmatud avalduvad lineaarselt vabade tundmatute kaudu (kui leiduvad)*. Selekteerime ka vektorid *vabadeks* ja (olemasolu korral) *juhtivateks*. Vektorit, mis asetseb LK-s vaba tundmatu kõrval, nimetame *juhtvektoriks*. Vektorit, mis asetseb LK-s juhttundmatu

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 146 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

kõrval, nimetame *vabaks vektoriks*. Siis võime kirjutada

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \underbrace{\lambda'_1 v'_1 + \cdots + \lambda'_r v'_r}_{\text{vabad vektorid}} + \underbrace{\lambda'_{r+1} v'_{r+1} + \cdots + \lambda'_n v'_n}_{\text{juhtvektorid}} = 0$$

Juhtvektorid (kui leiduvad) avalduvad vabade vektorite lineaarkombinatsioonidena, kui vabadele tundmatutele omistada sobivalt arvvaartusi 1 ja 0. Seega on vabad vektorid antud vektorisüsteemi moodustajad. Näitame, et vabad vektorid on lineaarselt sõltumatud. Seega moodustavad vabad vektorid VS-i baasalamsüsteemi. See tõestabki, et vektorisüsteemi $\{a_1, \dots, a_n\}$ astak on r .

Tõepoolest, olgu $\{v'_1, \dots, v'_r\}$ vabad vektorid ja avaldugu v'_1 vastuväiteliselt ülejäänud vabade vektorite LK-na

$$v'_1 = \beta_2 v'_2 + \cdots + \beta_r v'_r$$

Siis avalduvad ka juhtvektorid v'_{r+1}, \dots, v'_n vektorite v'_2, \dots, v'_r lineaarkombinatsioonidena

$$\begin{cases} v'_{r+1} &= \beta_{2,r+1} v'_2 + \beta_{3,r+1} v'_3 + \cdots + \beta_{r,r+1} v'_r \\ v'_{r+2} &= \beta_{2,r+2} v'_2 + \beta_{3,r+2} v'_3 + \cdots + \beta_{r,r+2} v'_r \\ \dots & \\ v'_n &= \beta_{2n} v'_2 + \beta_{3n} v'_3 + \cdots + \beta_{rn} v'_r \end{cases}$$

Lausest 6.47 järeldub, et matriksi A veeruvektorite $C_B(v'_j)$ jaoks kehtivad seosed

$$\begin{cases} C_B(v'_1) = \sum_{i=2}^r \beta_i C_B(v'_i) \\ C_B(v'_j) = \sum_{i=2}^r \beta_{ij} C_B(v'_i), \quad j = r+1, \dots, n \end{cases} \quad (**)$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 147 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Defineerime veeruvektorid

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \dots, \quad a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

LVS-i (1) saab samaväärselt esitada vektorkujul

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b \quad (2)$$

Kroneckeri-Capelli teoreem

Teoreem 6.68 (astakutingimus). *LVS (1) on kooskõlaline parajasti siis, kui VS-ide $\{a_1, \dots, a_n\}$ ja $\{a_1, \dots, a_n, b\}$ astakud on võrdsed.*

Tõestus. \implies : Olgu LVS (1) kooskõlaline. See tähendab, et süsteemil (1) leidub mingi lahend $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$. Siis kehtib aga vektorvõrdus (2)

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \quad (3)$$

Olgu $r = \text{rank}\{a_1, \dots, a_n\}$. Siis sisaldavad VS-i $\{a_1, \dots, a_n\}$ baasalamsüsteemid r vektorit. Olgu näiteks a_1, \dots, a_r lineaarselt sõltumatud, siis avalduvad ülejäänud $n - r$ vektorit a_{r+1}, \dots, a_n vektorite a_1, \dots, a_r lineaarkombinatsioonidena. Võrdusest (3) järeldub, et ka vektor b avaldub vektorite a_1, \dots, a_r LK-na. Laiendatud vektorisüsteemi $\{a_1, \dots, a_n, b\}$ baasalamsüsteem on seega samuti $\{a_1, \dots, a_r\}$. Siit järeldub, et $\text{rank}\{a_1, \dots, a_n, b\} = r$.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 149 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

⇐: Olgu

$$\text{rank}\{a_1, \dots, a_n\} = \text{rank}\{a_1, \dots, a_n, b\} = r$$

Siis VS-i $\{a_1, \dots, a_n\}$ baasalamsüsteemid sisaldavad r vektorit. Olgu näiteks vektorid a_1, \dots, a_r lineaarselt sõltumatud. Vaatleme laiendatud VS-i $\{a_1, \dots, a_r, b\}$. Kuna $\text{rank}\{a_1, \dots, a_n, b\} = r$ ja vektorid a_1, \dots, a_r on lineaarselt sõltumatud, siis VS $\{a_1, \dots, a_r, b\}$ on lineaarselt sõltuv. Kui $b = 0$, siis avaldub vektor b vektorite a_1, \dots, a_r *triviaalse* LK-na. Kui $b \neq 0$, siis peab vektor b avalduma vektorite a_1, \dots, a_r LK-na (kasutame teoreemi 6.33). Seega leiduvad sellised skalaarid $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, et

$$b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r$$

ehk

$$b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r + 0a_{r+1} + \dots + 0a_n$$

See aga tähendab, et

$$x_1 = \alpha_1, \dots, x_r = \alpha_r, \quad x_{r+1} = \dots = x_n = 0$$

on LVS-i (1) lahend. □

6.14. Ülesanded

Linearkombinatsioonid

6.14.1 Arendada vektor $v = (1, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$ vektorite

$$b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 2, 3), \quad b_3 = (2, -1, 1)$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)


Lk 150 ⊗ 286

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

6.14.2 Arendada vektor $v = (2, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ vektorite

$$b_1 = (1, -3, 2), \quad b_2 = (2, -4, -1), \quad b_3 = (1, -5, 7)$$

lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

6.14.3 Arendada vektor $v = (7, 14, -1, 2)$ vektorite

$$\begin{cases} b_1 = (1, 2, -1, -2), & b_2 = (2, 3, 0, -1) \\ b_3 = (1, 2, 1, 4), & b_4 = (1, 3, -1, 0) \end{cases}$$

lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

6.14.4 Arendada maatriks M maatriksite A, B, C lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6.14.5 Arendada polünoom $p = t^2 + 4t - 3$ polünoomide

$$p_1 = t^2 - 2t + 5, \quad p_2 = 2t^2 - 3t, \quad p_3 = t + 1$$

lineaarkombinatsioonina. Kontrollida arendust.

Moodustajad ja lineaarne kate

6.14.6 Näidata, et vektorid

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 2, 3), \quad v_3 = (1, 5, 8)$$

on vektorruumi \mathbb{R}^3 moodustajad.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 151 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Lineaarne sõltuvus

6.14.7 Tõestada, et funktsioonisüsteem $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x \mid x \in \mathbb{R}\}$ on lineaarselt sõltuv.

6.14.8 Tõestada, et funktsioonisüsteem $\{\sin x, \cos x \mid x \in \mathbb{R}\}$ on lineaarselt sõltumatu.

6.14.9 Olgu VS $\{a, b\}$ lineaarselt sõltumatu. Tõestada, et siis on ka VS $\{a + b, a - b\}$ lineaarselt sõltumatu.

6.14.10 Tõestada, et funktsioonisüsteem $\{e^{i\varphi}, e^{-i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$ on lineaarselt sõltumatu.

Lineaarse sõltuvuse uurimine

6.14.11 Leida VS-i astak ja mingi baasalamsüsteem, juhtvektorid arendada baasalamsüsteemi järgi. Kontrollida arendusi.

$$\begin{cases} v_1 = (1, 0, 0, -1), & v_2 = (2, 1, 1, 0) \\ v_3 = (1, 1, 1, 1), & v_4 = (1, 1, 3, 4), & v_5 = (0, 1, 2, 3) \end{cases}$$

6.14.12 Uurida VS-i

$$\begin{cases} v_1 = (6, 3, 3, 9), & v_2 = (4, 2, 2, 6), & v_3 = (5, 4, -2, 1) \\ v_4 = (2, 1, 1, 3), & v_5 = (3, 2, 0, 2), & v_6 = (1, 3, -7, 2) \end{cases}$$

lineaarset sõltuvust. Leida astak ja mingi baasalamsüsteem. Juhtvektorid arendada baasalamsüsteemi järgi. Kontrollida arendusi.

6.14.13 Uurida VS-i

$$\begin{cases} v_1 = (1, 2, 3, 4), & v_2 = (2, 3, 4, 5) \\ v_3 = (3, 4, 5, 6), & v_4 = (4, 5, 6, 7) \end{cases}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 152 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

lineaarset sõltuvust. Leida astak ja mingi baasalamsüsteem. Juhtvektorid arendada baasalamsüsteemi järgi. Kontrollida arendusi.

6.14.14 Uurida VS-i

$$\begin{cases} v_1 = (1, 1, 1, 1), & v_2 = (1, 2, 3, 2) \\ v_3 = (2, 5, 6, 4), & v_4 = (2, 6, 8, 5) \end{cases}$$

lineaarset sõltuvust. Leida astak ja mingi baasalamsüsteem. Juhtvektorid arendada baasalamsüsteemi järgi. Kontrollida arendusi.

Baasiteisendused

6.14.15 Leida vektori $v = (5, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$ koordinaadid baasis

$$(1, -1, 0), \quad (1, 1, 0), \quad (0, 1, 1)$$

Kontrollida arendust.

6.14.16 Leida vektori $v = (-2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ koordinaadid baasis

$$(5, 2, 1), \quad (-2, 0, 1), \quad (0, 4, -3)$$

Kontrollida arendust.

6.14.17 Leida vektori $v = (5, 5, -3) \in \mathbb{R}^3$ koordinaadid baasis

$$(4, -2, 1), \quad (-7, 3, -1), \quad (0, -8, 6)$$

Kontrollida arendust.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 153 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Homogeense LVS-i lahendite fundamentaalsüsteem

Leida homogeense LVS-i lahendite fundamentaalsüsteem. Üldlahend arendada baasivektorite järgi. Kontrollida lahendit.

6.14.18

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

6.14.19

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

6.14.20

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$$

6.14.21

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 9x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 154 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

7. Skalaarkorrutis

7.1. Skalaarkorrutis reaalses vektorruumis

Olgu V vektorruum üle \mathbb{R} .

Skalaarkorrutise mõiste

Õeldakse, et reaalses vektorruumis V on defineeritud *skalaarkorrutis*, kui igale kahele vektorile $a, b \in V$ on vastavusse seatud reaalarv $(a|b) \in \mathbb{R}$ nii, et on täidetud järgmised tingimused:

- 1) $(a|b) = (b|a)$ (sümmeetria),
- 2) $(a + b|c) = (a|c) + (b|c)$ (aditiivsus),
- 3) $(\alpha a|b) = \alpha(a|b) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (homogeensus),
- 4) kui $V \ni a \neq o$, siis $(a|a) > 0$ (positiivsus).

Reaalset skalaarkorrutisega vektorruumi nimetatakse *eukleidiliseks* vektorruumiks.

Näide 7.1 (skalaarkorrutis nullvektoriga). Skalaarkorrutise omaduse 3) põhjal ilmselt

$$(o|a) = (0o|a) = 0(o|a) = 0 \quad \forall a \in V$$

Siit järeldub, et ka $(o|o) = 0$.

Näide 7.2 (skalaarkorrutis reaalses aritmeetilises vektorruumis). Olgu

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 155 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Skalaarkorrutise defineerime valemiga

$$(a|b) \doteq \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n \in \mathbb{R}$$

Näide 7.3 (skalaarkorrutis funktsiooniruumis). Olgu f ja g lõigul $[a, b]$ pidevad funktsioonid, s.t $f, g \in C[a, b]$. Skalaarkorrutise defineerime valemiga

$$(f|g) \doteq \int_a^b f(x)g(x) dx \in \mathbb{R}$$

7.2. Skalaarkorrutis komplekssses vektorruumis

Olgu V vektorruum üle \mathbb{C} .

Skalaarkorrutise mõiste

Õeldakse, et komplekssses vektorruumis V on defineeritud *skalaarkorrutis*, kui igale kahele vektorile $a, b \in V$ on vastavusse seatud kompleksarv $(a|b) \in \mathbb{C}$ nii, et on täidetud järgmised tingimused:

- 1) $(a|b) = (b|a)^*$ (unitaarne sümmeetria),
- 2) $(a + b|c) = (a|c) + (b|c)$ (aditiivsus),
- 3) $(\alpha a|b) = \alpha(a|b) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ (homogeensus),
- 4) kui $V \ni a \neq o$, siis $(a|a) > 0$ (positiivsus).

Kompleksset skalaarkorrutisega vektorruumi nimetatakse *unitaarseks* vektorruumiks.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 156 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Näide 7.4 (skalaarkorrutis komplekssses aritmeetilises vektorruumis). Kui

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{ja} \quad b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$$

siis defineerime skalaarkorrutise valemiga

$$(a|b) \doteq ab^\dagger = \alpha_1\beta_1^* + \alpha_2\beta_2^* + \dots + \alpha_n\beta_n^* \in \mathbb{C}$$

Näide 7.5 (skalaarkorrutis komplekssses funktsiooniruumis). Olgu f, g pidevad kompleksarvuliste väärtustega reaalmuutuja funktsioonid lõigul $[a, b]$. Skalaarkorrutise defineerime valemiga

$$(f|g) \doteq \int_a^b f(x)g^*(x) dx \in \mathbb{C}$$

7.3. Vektori pikkus

Vektori pikkuse mõiste

Vektori $a \in V$ *pikkus* ehk *norm* $|a| \doteq \|a\|$ defineeritakse valemiga $|a| \doteq \sqrt{(a|a)}$. Vektori pikkus on ilmselt *mittenegatiivne* reaalarv.

Näide 7.6 (aritmeetilise vektori pikkus). Aritmeetilise vektori

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$$

pikkus on

$$|a| \doteq \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 157 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Näide 7.7 (funktsiooni norm). Funktsiooni $f \in C[a, b]$ norm on

$$\|f\| \doteq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

Teoreem 7.8 (homogeensus). $|\alpha a| = |\alpha||a| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall a \in V$

Tõestus. Tõepoolest, arvutame

$$|\alpha a| = \sqrt{(\alpha a)(\overline{\alpha a})} = \sqrt{\alpha \alpha^* (a \overline{a})} = \sqrt{|\alpha|^2 \sqrt{(a \overline{a})}} = |\alpha||a| \quad \square$$

Ühikvektor

Vektorit pikkusega 1 nimetatakse *ühikvektoriks*. Ühikvektori kohta öeldakse, et ta on *normeeritud*.

Näide 7.9. Vektorid

$$e_i \doteq (\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$$

on ühikvektorid (ehk normeeritud).

Lause 7.10 (vektori normeerimine). *Olgu $a \neq o$. Siis on vektor $\frac{a}{|a|}$ ühikvektor.*

Tõestus. Tõepoolest, arvutame

$$\left| \frac{a}{|a|} \right| = \left| \frac{1}{|a|} a \right| = \frac{1}{|a|} |a| = 1 \quad \square$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 158 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

7.4. Cauchy-Schwarzi võrratus ja vektoritevaheline nurk

Cauchy-Schwarzi võrratus

Teoreem 7.11. *Olgu V unitaarne vektorruum. Siis kehtib nn Cauchy-Schwarzi⁸ võrratus*

$$|(a|b)| \leq |a||b| \quad \forall a, b \in V$$

Tõestus. Kui $a = o$ või $b = o$, siis on Cauchy-Schwarzi võrratus ilmne. Olgu $a \neq o$ ja $b \neq o$. Iga $\alpha \in \mathbb{C}$ korral kehtib võrratus

$$|\alpha a - b|^2 \geq 0$$

Kasutades skalaarkorrutise omadusi, saame

$$\begin{aligned} |\alpha a - b|^2 &= (\alpha a - b|\alpha a - b) \\ &= \alpha\alpha^*(a|a) - \alpha(a|b) - \alpha^*(b|a) + (b|b) \geq 0 \end{aligned}$$

Nüüd võtame

$$\alpha = \frac{(a|b)^*}{(a|a)}$$

Saame

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^*(a|a) - \alpha(a|b) - \alpha^*(b|a) + (b|b) &= \\ = \frac{(a|b)^*(a|b)}{(a|a)(a|a)}(a|a) - \frac{(a|b)^*}{(a|a)}(a|b) - \frac{(a|b)}{(a|a)}(a|b)^* + (b|b) \end{aligned}$$

⁸Augustin Louis Cauchy (1789–1857), prantsuse matemaatik.
Karl Hermann Schwarz (1843–1921), saksa matemaatik.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 159 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$= -\frac{|(a|b)|^2}{(a|a)} + (b|b) \geq 0$$

Korrutame saadud võrratust *positiivse* arvuga $(a|a)$. Tulemuseks saame

$$\begin{aligned} (a|a)(b|b) - |(a|b)|^2 \geq 0 &\implies |(a|b)|^2 \leq |a|^2|b|^2 \\ &\implies |(a|b)| \leq |a||b| \end{aligned} \quad \square$$

Näide 7.12 (Cauchy-Schwarzi võrratus aritmeetilises vektorruumis). Kui

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{ja} \quad b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$$

siis on Cauchy-Schwarzi võrratus

$$|\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n| \leq \sqrt{|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2} \sqrt{|\beta_1|^2 + \dots + |\beta_n|^2}$$

Näide 7.13 (Cauchy-Schwarzi võrratus funktsiooniruumis). Olgu $f, g \in C[a, b]$. Siis on Cauchy-Schwarzi võrratus

$$\left| \int_a^b f(x)g^*(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

Vektoritevaheline nurk

Olgu V unitaarne vektorruum. Olgu $V \ni a \neq o$ ja $V \ni b \neq o$. Vektorite a ja b vaheline nurk φ defineeritakse valemiga

$$\cos \varphi \doteq \frac{(a|b)}{|a||b|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 160 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Märkus 7.14. Selle definitsiooni korrektsus on ilmselt garanteeritud Cauchy-Schwarzi võrratusega.

7.5. Kolmnurga võrratus

Teoreem 7.15. *Olgu V unitaarne vektorruum. Siis*

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in V$$

Tõestus. Kasutades Cauchy-Schwarzi võrratust, arvutame

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b|a + b) = (a|a) + (a|b) + (b|a) + (b|b) \\ &= (a|a) + (a|b) + (a|b)^* + (b|b) \\ &= (a|a) + 2\operatorname{re}(a|b) + (b|b) \\ &\leq (a|a) + 2|\operatorname{re}(a|b)| + (b|b) \\ &\leq (a|a) + 2|(a|b)| + (b|b) \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \implies |a + b| \leq |a| + |b| \quad \square \end{aligned}$$

Näide 7.16 (kolmnurga võrratus aritmeetilises vektorruumis). Olgu

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{jä} \quad b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$$

Siis on kolmnurga võrratus

$$\begin{aligned} \sqrt{|\alpha_1 + \beta_1|^2 + \dots + |\alpha_n + \beta_n|^2} &\leq \sqrt{|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2} \\ &\quad + \sqrt{|\beta_1|^2 + \dots + |\beta_n|^2} \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 161 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 7.17 (kolmnurga võrratus funktsiooniruumis). Kui $f, g \in C[a, b]$, siis on kolmnurga võrratus

$$\sqrt{\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} + \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

7.6. Ortogonaalsus ja ristbaas

Ortogonaalsus

Öeldakse, et unitaarse vektorruumi V vektorid $a, b \in V$ on *ortogonaalsed* ehk *risti*, kui $(a|b) = 0$. VS-i nimetatakse *ortogonaalseks*, kui süsteemi iga kaks *erinevat* vektorit on ortogonaalsed. VS-i nimetatakse *ortonormeerituks*, kui

- 1) ta on ortogonaalne,
- 2) süsteemi vektorid on ühikvektorid, s.t *normeeritud*.

Näide 7.18. Nullvektor on ortogonaalne unitaarse vektorruumi iga vektoriga, kaasa arvatud iseendaga.

Teoreem 7.19. *Ortogonaalne VS, mis ei sisalda nullvektorit, on lineaarselt sõltumatu.*

Tõestus. Olgu VS $\{a_1, \dots, a_n\}$ ortogonaalne, s.t

$$(a_i|a_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Peame näitama, et

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0 \implies 0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 162 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Arvutame

$$\begin{aligned} 0 &= (o|a_j) = (\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n | a_j) \\ &= \alpha_1 (a_1 | a_j) + \cdots + \alpha_j (a_j | a_j) + \cdots + \alpha_n (a_n | a_j) \\ &= \alpha_j (a_j | a_j) \end{aligned}$$

Et $a_j \neq o$, siis $(a_j | a_j) \neq 0$. Järelikult $\alpha_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$). □

Ristbaas

Unitaarse vektorruumi baasi, mis on ortogonaalne, nimetatakse *ortogonaalbaasiks*. Unitaaarse vektorruumi *ortonormeeritud* baasi nimetatakse ka *ristbaasiks*. Ristbaasi $\{e_1, \dots, e_n\}$ korral

$$(e_i | e_j) = \delta_{ij}$$

Teoreem 7.20. *Unitaarse ruumi ortogonaalne moodustajate süsteem, mis ei sisalda nullvektorit, on baas.*

Tõestus. Järeldub teoreemist 7.19. □

Teoreem 7.21. *Unitaarse vektorruumi ortonormeeritud moodustajate süsteem on ristbaas.*

Teoreem 7.22. *Olgu $\{e_1, \dots, e_n\}$ unitaarse vektorruumi V ristbaas. Siis kehtib arenduse*

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \in V$$

jaoks $\alpha_i = (a | e_i)$.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 163 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tõestus. Tõepoolest, arvutame

$$\begin{aligned}
 (a|e_i) &= (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n | e_i) \\
 &= (\alpha_1 e_1 | e_i) + \cdots + (\alpha_i e_i | e_i) + \cdots + (\alpha_n e_n | e_i) \\
 &= \alpha_1 (e_1 | e_i) + \cdots + \alpha_i (e_i | e_i) + \cdots + \alpha_n (e_n | e_i) \\
 &= \alpha_i (e_i | e_i) = \alpha_i |e_i|^2 = \alpha_i
 \end{aligned}$$

mis tõestabki võrduse. □

7.7. Baasi ortogonaalimine

Lemma 7.23. *Olgu $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormaalne VS unitaarses vektorruumis V . Siis on iga vektori u korral vektor*

$$u' \doteq u - \sum_{i=1}^n (u|v_i)v_i$$

ortogonaalne iga vektoriga v_i ($i = 1, \dots, n$).

Tõestus. Arvutame vektori u' skalaarkorrutise vektoriga v_j

$$\begin{aligned}
 (u'|v_j) &= (u|v_j) - \sum_{i=1}^n (u|v_i)(v_i|v_j) \\
 &= (u|v_j) - \sum_{i=1}^n (u|v_i)\delta_{ij} \\
 &= (u|v_j) - (u|v_j) = 0
 \end{aligned}$$
□

Koduleht

Tiitelleht



Lk 164 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Grami-Schmidti ortogonaalimismeetod

Olgu $\{u_1, \dots, u_n\}$ unitaarse vektorruumi V baas. Siis lineaarse sõltumatus tõttu ilmselt $u_i \neq 0$ ning $|u_i| > 0$ iga i korral. Näitame, kuidas konstrueerida ortonormeeritud baasi $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Olgu $v_1 \doteq u_1/|u_1|$. Lemma 9.2 põhjal on vektor

$$u'_2 \doteq u_2 - (u_2|v_1)v_1$$

ortogonaalne vektoriga v_1 . Võttes $v_2 \doteq u'_2/|u'_2|$, saame ortonormaalse vektorisüsteemi $\{v_1, v_2\}$. Edasi näeme, et vektor

$$u'_3 \doteq u_3 - (u_3|v_1)v_1 - (u_3|v_2)v_2$$

on ortogonaalne vektoritega v_1 ja v_2 . Võttes $v_3 \doteq u'_3/|u'_3|$, saame ortonormaalse süsteemi $\{v_1, v_2, v_3\}$. Nii jätkates saamegi ortonormeeritud süsteemi $\{v_1, \dots, v_n\}$. Selle süsteemi iga vektor on vektorite u_1, \dots, u_n lineaarkombinatsioon.

Kuna ortonormeeritud vektorisüsteem on lineaarselt sõltumatu, siis on $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorruumi V ortonormeeritud baas.

Ülal kirjeldatud vektorisüsteemi ortogonaalimismeetodit nimetatakse *Grami-Schmidti*⁹ *ortogonaalimismeetodiks*.

Näide 7.24. Ortonormeerida vektorisüsteem

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (2, 1, 0), \quad u_3 = (1, 1, 1)$$

⁹ Jørgen Pedersen Gram (1850–1916), taani matemaatik.
Erhardt Schmidt (1876–1959), saksa matemaatik.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 165 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Lahendus. Vektorisüsteem $\{u_1, u_2, u_3\}$ on vektorruumi \mathbb{R}^3 baas (veenduda). Arvutame

$$|u_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \implies v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}}$$

Vektorisüsteem $\{v_1\}$ moodustab ilmselt ortonormeeritud süsteemi ja me võime kasutada lemmat 9.2

$$\begin{aligned} u'_2 &= u_2 - (u_2|v_1)v_1 = (2, 1, 0) - \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(1, -1, 0)}{2} \end{aligned}$$

Nüüd arvutame

$$\begin{aligned} |u'_2| &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies v_2 = \frac{u'_2}{|u'_2|} = \sqrt{2} \cdot \frac{(1, -1, 0)}{2} \\ &= \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Vektorisüsteem $\{v_1, v_2\}$ moodustab ilmselt ortonormeeritud süsteemi ja me võime kasutada lemmat 9.2

$$\begin{aligned} u'_3 &= u_3 - (u_3|v_1)v_1 - (u_3|v_2)v_2 \\ &= (1, 1, 1) - \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \\ &\quad - \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 166 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$$= (0, 0, 1) - (0, 0, 0) = (0, 0, 1)$$

Lõpuks arvutame

$$|u'_3| = \sqrt{1} = 1 \implies v_3 = \frac{u'_3}{|u'_3|} = (0, 0, 1)$$

Seega $\text{Lin}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathbb{R}^3$ ortonormeeritud baas on

$$v_1 = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \quad v_2 = \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}, \quad v_3 = (0, 0, 1)$$

Need baasivektorid rahuldavad seoseid $(v_i|v_j) = \delta_{ij}$ (veenduda).

7.8. Ülesanded

7.8.1 Olgu

$$a = (1, 2, 4), \quad b = (2, -3, 5), \quad c = (4, 2, -3) \quad \in \mathbb{R}^3$$

Leida

$$(a|b), \quad (a|c), \quad (b|c), \quad (a+b|c), \quad |a|, \quad |b||c|$$

ning normeerida a, b ja c .

7.8.2 Olgu

$$f(t) = t + 2, \quad g(t) = 3t - 2, \quad h(t) = t^2 - 2t - 3$$

Defineerime $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Arvutada

$$(f|g), \quad (f|h), \quad |f|, \quad |g|$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 167 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Normeerida f ja g .

7.8.3 Kontrollida skalaarkorrutise omadusi aritmeetilises vektorruumis.

7.8.4 Kontrollida skalaarkorrutise omadusi funktsiooniruumis.

7.8.5 Kontrollida Cauchy-Schwarzi ja kolmnurga võrratust ülesandes **7.8.1** antud vektorite korral.

7.8.6 Kontrollida Cauchy-Schwarzi ja kolmnurga võrratust ülesandes **7.8.2** antud funktsioonide korral.

7.8.7 Tõestada rööpküliku reegel

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$$

7.8.8 Leida $(a|b)$, kui $|a| = 4$, $|b| = 12$ ja $|a - b| = 10$.

7.8.9 Leida $|a - b|$, kui $|a| = 23$, $|b| = 11$ ja $|a + b| = 20$.

7.8.10 Leida $|a + b|$, kui $|a| = 19$, $|b| = 13$ ja $|a - b| = 22$.

7.8.11 Olgu

$$a = (1, 2, 3, -1, 2), \quad b = (2, 4, 7, 2, -1) \in \mathbb{R}^5$$

Leida alamruumi $(\text{Lin}\{a, b\})^\perp$ baas.

7.8.12 Koosnegu VS S vektorruumi \mathbb{R}^4 järgmistest vektoritest:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0, -1), & v_2 &= (1, 2, 1, 3) \\ v_3 &= (1, 1, -9, 2), & v_4 &= (16, -13, 1, 3) \end{aligned}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 168 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Näidata, et S on vektorruumi \mathbb{R}^4 ortogonaalne baas. Leida vektori $a = (1, 2, 3, 4)$ koordinaadid baasis S . Kontrollida arendust.

7.8.13 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi \mathbb{R}^4 järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 1, 2, 4), \quad u_3 = (1, 2, -4, -3)$$

Leida $\text{Lin } S$ ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.14 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi \mathbb{R}^4 järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (1, 2, 2, -1), \quad u_2 = (1, 1, -5, 3), \quad u_3 = (3, 2, 8, -7)$$

Leida $\text{Lin } S$ ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.15 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi \mathbb{R}^4 järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (1, 1, -1, 2), \quad u_2 = (5, 8, -2, -3), \quad u_3 = (3, 9, 3, 8)$$

Leida $\text{Lin } S$ ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.16 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi \mathbb{R}^4 järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (1, 1, -1, -1), \quad u_2 = (3, 2, 0, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1, 0)$$

Leida $\text{Lin } S$ ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.17 Koosnegu vektorisüsteem S vektorruumi \mathbb{R}^4 järgmistest vektoritest:

$$u_1 = (2, 1, 3, -1), \quad u_2 = (7, 4, 3, -3)$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 169 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

$$u_3 = (1, 1, -6, 0), \quad u_4 = (5, 7, 7, 8)$$

Leida Lin S ortonormeeritud baas. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

7.8.18 Ortonormeerida polünoomisüsteem $\{1, x, x^2, x^3\}$ lõigul $[0, 1]$. Kontrollida valikuliselt tulemuse ortonormeeritust.

7.8.19 Ortonormeerida ülesandes **7.8.2** antud polünoomisüsteem lõigul $[0, 1]$. Kontrollida tulemuse ortonormeeritust.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 170 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

8. Maatriksi omaväärtused ja omavektorid

8.1. Omaväärtuse ja omavektori mõiste

Omaväärtusülesanne

Olgu A n -järku ruutmaatriks. Maatriksvõrrandid

$$Av = \lambda v, \quad v \neq o$$

nimetatakse *omaväärtusülesandeks*. Arvu λ nimetatakse maatriksi A *omaväärtuseks* ja (aritmeetrilist) veeruvektorit $v \neq o$ nimetatakse (omaväärtusele λ vastavaks) *omavektori*ks. Võrrandi $Av = \lambda v$ lahendiruumi E_λ nimetatakse omaväärtusele λ vastavaks *omaruumiks*. Omaruumi E_λ mõõdet nimetatakse omaväärtuse λ *geomeetriliseks kordsuseks*.

Lause 8.1. *Kui v on omaväärtusele λ vastav omavektor, siis on αv samuti omaväärtusele λ vastav omavektor.*

Tõestus. Tõepoolest, korrutades võrrandit $Av = \lambda v$ vasakult arvuga α , saame

$$\alpha Av = \alpha \lambda v \implies (A\alpha)v = A(\alpha v) = \lambda(\alpha v) \quad \square$$

Karakteristlik võrrand

Omaväärtusülesande võib kirjutada kujul

$$(A - \lambda I)v = o, \quad v \neq o$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 171 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

See on homogeenne LVS vektori v komponentide määramiseks. Mittetriviaalne lahend leidub parajasti siis, kui

$$|A - \lambda I| = 0$$

Kerge on näha, et $|A - \lambda I|$ on polünoom λ suhtes, mille järk võrdub maatriksi A järguga. Seda polünoomi nimetatakse maatriksi A *karakteristlikuks polünoomiks*. Võrrandit $|A - \lambda I| = 0$ nimetatakse maatriksi A *karakteristlikuks võrrandiks*. Maatriksi A omaväärtusteks on ilmselt karakteristliku polünoomi juured. Juurte arv võrdub ruutmaatriksi A järguga, need võivad olla kompleksarvulised ja korduda. Karakteristliku polünoomi juure kordsust nimetatakse omaväärtuse *algebraiseks kordsuseks*. Maatriksi A kõigi omaväärtuste hulka nimetatakse maatriksi A *spektri*ks.

8.2. Omaväärtuste ja omavektorite omadusi

Olgu maatriksi A karakteristliku polünoomi juured $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, viimased võivad olla kompleksarvulised ja korduda. Siis

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n \\ &= (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

Siit järeldub, et $a_n = (-1)^n$ ning

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n &= a_0 = \det A \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \operatorname{tr} A \end{aligned}$$

Seega saame omaväärtuste järgmised kaks tähtsat omadust:

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 172 ⊛ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

- 1) omaväärtuste korrutis võrdub maatriksi determinandiga,
- 2) omaväärtuste summa võrdub maatriksi jäljega.

Esimesest omadusest järeldub, et maatriks on regulaarne parajasti siis, kui tema omaväärtused erinevad nullist. Teisiti öeldes, maatriks on singulaarne parajasti siis, kui üks tema omaväärtustest võrdub nulliga.

Omavektorite lineaarne sõltumatus

Teoreem 8.2. *Erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on lineaarselt sõltumatud.*

Tõestus. Olgu vektorid x_1, \dots, x_k maatriksi A erinevatele omaväärtustele $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vastavad omavektorid. Siis

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (1)$$

Oletame vastuväiteliselt, et VS x_1, \dots, x_k on lineaarselt sõltuv. Olgu r ($< k$) suurim selline täisarv, mille korral VS x_1, \dots, x_r on lineaarselt sõltumatu. Siis VS x_1, \dots, x_{r+1} on lineaarselt sõltuv. Siis peab leiduma nullvektoriga võrduv *mittetriviaalne* LK

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{r+1} x_{r+1}}_{\text{mittetriviaalne LK}} = 0 \quad (2)$$

Korrutades vasakult maatriksiga A ja kasutades (1), saame

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1} x_{r+1} = 0 \quad (3)$$

Korrutades (2) arvuga λ_{r+1} ja lahutades tulemuse seosest (3), saame

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})x_1 + \dots + a_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})x_r = 0$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 173 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Kuna VS x_1, \dots, x_r on linearselt sõltumatu ja omaväärtused on erinevad, siis

$$a_1 = \dots = a_r = 0$$

Seosest (2) järeldub nüüd $\alpha_{r+1}x_{r+1} = 0$. Et $x_{r+1} \neq 0$, peab $\alpha_{r+1} = 0$. Saime vastuolu eeldusega, et vähemalt üks kordajatest α_i erineb nullist. \square

Sarnaste maatriksite omaväärtused ja omavektorid

Teoreem 8.3. Olgu $B \doteq P^{-1}AP$. Siis on maatriksitel A ja B ühesugused omaväärtused. Kui x on maatriksi A mingile omaväärtusele vastav omavektor, siis on $P^{-1}x$ maatriksi B samale omaväärtusele vastav omavektor.

Tõestus. Olgu x maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor. Siis $Ax = \lambda x$. Korru-tades seda võrrandit vasakult maatriksiga P^{-1} , saame

$$\begin{aligned} P^{-1}Ax = \lambda P^{-1}x &\implies P^{-1}Aix = \lambda P^{-1}x \\ &\implies P^{-1}APP^{-1}x = \lambda P^{-1}x \\ &\implies B(P^{-1}x) = \lambda(P^{-1}x) \end{aligned}$$

Seega on λ samuti maatriksi B omaväärtus ja vastav omavektor on $P^{-1}x$. \square

Diagonaalmaatriksi omaväärtused ja omavektorid

Diagonaalmaatriksi omaväärtusteks on selle maatriksi peadiagonaalil asetsevad elemendid. Omavektoriteks on standardbaasi vektorid.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 174 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Hermiitilise maatriksi omaväärtused ja omavektorid

Teoreem 8.4. *Hermiitilise maatriksi omaväärtused on reaalsed.*

Tõestus. Olgu λ hermiitilise maatriksi A omaväärtus ning x vastav omavektor. Siis

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

Seda võrrandit hermiitiliselt konjugeerides arvestusega $A^\dagger = A$, saame

$$x^\dagger A = \lambda^* x^\dagger \quad (2)$$

Korrutame (1) vasakult vektoriga x^\dagger ja võrrandit (2) paremalt vektoriga x . Saame

$$x^\dagger Ax = \lambda x^\dagger x, \quad x^\dagger Ax = \lambda^* x^\dagger x$$

Võrreldes viimaseid seoseid, saame

$$(\lambda - \lambda^*)x^\dagger x = 0$$

Aga $x \neq 0$ tõttu peab $x^\dagger x \neq 0$. Seega $\lambda = \lambda^*$. □

Teoreem 8.5. *Hermiitilise maatriksi erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed.*

Tõestus. Olgu x_1 ja x_2 erinevatele omaväärtustele λ_1 ja λ_2 vastavad omavektorid. Siis

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad (1)$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 \quad (2)$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 175 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Korrutame võrrandit (1) vasakult vektoriga x_2^\dagger ja võrrandit (2) vasakult vektoriga x_1^\dagger

$$x_2^\dagger Ax_1 = \lambda_1 x_2^\dagger x_1 \quad (3)$$

$$x_1^\dagger Ax_2 = \lambda_2 x_1^\dagger x_2 \quad (4)$$

Konjugeerides võrrandit (3) arvestusega $A^\dagger = A$ ja $\lambda^* = \lambda$, saame

$$x_1^\dagger Ax_2 = \lambda_1^* x_1^\dagger x_2 = \lambda_1 x_1^\dagger x_2 \quad (5)$$

Võrreldes valemeid (4) ja (5), saame

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x_1^\dagger x_2 = 0$$

Et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, siis peab skalaarkorrutis $(x_2|x_1) = x_1^\dagger x_2 = 0$. \square

Teoreem 8.6. *Olgu A reaalne sümmeetriline maatriks. Siis*

- 1) *on maatriksi A omaväärtused reaalsed,*
- 2) *on maatriksi A erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid ortogonaalsed.*

Tõestus. Kuna reaalne sümmeetriline maatriks on hermiitiline, siis järelduvad need väited eelnenud teoreemidest. \square

8.3. Omaväärtuste ja omavektorite leidmine

Näide 8.7. Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

omaväärtused ja omaruumide normeeritud baasivektorid.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 176 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lahendus. Karakteristlik võrrand on

$$\begin{aligned}|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0\end{aligned}$$

Seega on omaväärtused $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 6$. Mõlema omaväärtuse algebraalne kordsus on 1.

Omaväärtusele $\lambda_1 = 1$ vastavad omavektorid leiame võrrandist

$$\begin{pmatrix} 5 - 1 & 4 \\ 1 & 2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ehk

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_1 = -x_2$$

mis annab omavektoriks

$$\begin{aligned}v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies |v_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ &\implies \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Viimane vektor on omaväärtusele 1 vastava omaruumi normeeritud baasivektor. Omaväärtuse 1 geomeetriline kordsus on 1.

Omaväärtusele $\lambda_2 = 6$ vastavad omavektorid leiame võrrandist

$$\begin{pmatrix} 5 - 6 & 4 \\ 1 & 2 - 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 177 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

ehk

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_1 = 4x_2$$

mis annab omavektoriks

$$\begin{aligned} v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} &\implies |v_2| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \\ &\implies \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Viimane on omaväärtusele 6 vastava omaruumi normeeritud baasivektor. Omaväärtuse 6 geomeetriline kordsus on 1.

Näide 8.8. Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

omaväärtused ja omaruumide normeeritud baasivektorid.

Lahendus. Kõigepealt leiame omaväärtused. Karakteristlik polünoom on

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} -R_3 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & -2 + \lambda \\ 2 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 178 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$$\begin{aligned}
&= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda - 2) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 4 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda - 2)[(4 - \lambda)(6 - \lambda) - 8] \\
&= -(\lambda - 2)[\lambda^2 - 10\lambda + 16] = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 8)
\end{aligned}$$

Näeme, et juure $\lambda_1 = 2$ algebraalne kordsus on 2 ja juure $\lambda_1 = 8$ algebraalne kordsus on 1.

Omapäätusele $\lambda_1 = 2$ vastava omaruumi leiame LVS-ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Saame vaid ühe võrrandi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \implies x_1 = -x_2 - x_3$$

LVS-i vabade tundmatute arv on $3 - 1 = 2$. Vabadeks tundmatuteks võtame x_2 ja x_3 . Lahendite fundamentaalsüsteem koosneb kahest vektorist, s.t omapäätuse $\lambda_1 = 2$ geomeetriline kordsus on 2. Omapäätusele $\lambda_1 = 2$ vastava omaruumi baasivektorid on

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 179 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Omväärtusele 2 vastava omaruumi normeeritud baasivektorid on

$$\frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Omväärtusele $\lambda_2 = 8$ vastava omaruumi leiame LVS-ist

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lahendame Gaussi meetodil

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} &\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +R_1 \\ +R_1 \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +R_2 \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot (-1) \\ \cdot \frac{-1}{3} \\ \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 180 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

LVS-i maatriks on nüüd treppkujul. Vastav LVS on

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \implies x_1 = x_2 = x_3$$

LVS-i vabade tundmatute arv on $3 - 2 = 1$. Lahendite fundamentaalsüsteem koosneb antud juhul ühest vektorist, s.t omaväärtuse $\lambda_2 = 8$ geomeetiline kordsus on 1. Selleks vektoriks võtame

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies |u_3| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\implies \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Viimane vektor on omaväärtusele 8 vastava omaruumi normeeritud baasivektor.

8.4. Ülesanded

Leida alljärgnevate maatriksite omaväärtused ja omaruumide normeeritud baasivektorid, samuti omaväärtuste algebralised ja geomeetrilised kordsused. Kontrollida omaväärtusvõrrandi lahendit.

$$8.4.1 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad 8.4.2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 8.4.3 \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad 8.4.4 \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 181 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$$8.4.5 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 8.4.6 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 8.4.7 \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$8.4.8 \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad 8.4.9 \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad 8.4.10 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$8.4.11 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 8.4.12 \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$8.4.13 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$8.4.14 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8.4.15 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8.4.16 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 182 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

8.4.17 Tõestada, et diagonaalmaatriksi omaväärtusteks on selle maatriksi peadiagonaalil asetsevad elemendid. Omavektoriteks on standardbaasi vektorid.

8.4.18 Tõestada teist ja kolmandat järku ruutmaatriksite korral, et omaväärtuste summa võrdub maatriksi jäljega.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 183 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

9. Diagonaalimine

9.1. Diagonaaluvuse tunnused

Ruutmaatriksit nimetatakse *diagonaalmaatriksiks*, kui tema väljaspool peadiagonaali asetsevad elemendid on nullid. Öeldakse, et ruutmaatriks A on *digonaaluv*, kui leidub selline pööratav maatriks P , et $P^{-1}AP$ on diagonaalmaatriks.

Teoreem 9.1. *Kui A on n -järku ruutmaatriks, siis järgmised tingimused on samaväärsed.*

1. *Maatriks A on diagonaaluv.*
2. *Maatriksil A leidub n lineaarselt sõltumatut omavektorit.*
3. *Maatriksi A omaväärtuste algebralised kordsused võrduvad nende geomeetriliste kordsustega.*

Teoreem 9.2. *Kui n -järku ruutmaatriksil A leidub n vektorist koosnev lineaarselt sõltumatu omavektorite süsteem ja P on maatriksi A omavektoritest moodustatud maatriks, siis*

$$D = P^{-1}AP$$

on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil asetsevad maatriksi A omaväärtused. Maatriksi P veergudeks on maatriksi A omavektorid.

Tõestus. Olgu x_1, \dots, x_n maatriksi A lineaarselt sõltumatud omavektorid, mis vastavad omaväärtustele $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Siis

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 184 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Maatriks P on

$$P = (x_1 \ \cdots \ x_n)$$

Kuna maatriksi P veeruvektorid on lineaarselt sõltumatud, siis on ta regulaarne ja P^{-1} eksisteerib. Arvutame

$$\begin{aligned} AP &= A(x_1 \ \cdots \ x_n) = (Ax_1 \ \cdots \ Ax_n) = (\lambda_1 x_1 \ \cdots \ \lambda_n x_n) \\ &= (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD \end{aligned}$$

Korrutades vasakult maatriksiga P^{-1} , saame

$$P^{-1}AP = P^{-1}PD = D$$

□

Näide 9.3. Diagonaalida maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Omaväärtused on $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 6$ ning omavektorid on

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonaaliv maatriks on

$$P = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 185 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kerge on näha, et

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Seega

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Näide 9.4. Diagonaalida matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Matriksi A karakteristlik võrrand on

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

Matriksi A omaväärtused on seega

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \text{ja} \quad \lambda_3 = 5$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 186 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Omapäärtuse 1 algebraalne kordsus on 2 ja omapäärtuse 5 algebraalne kordsus on 1. Omapäärtusele 1 vastavad omavektorid leiame LVS-ist $(A - I)u = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Viimase LVS-i vabade tundmatute arv on $3 - 1 = 2$, s.t. omapäärtuse 1 geomeetriline kordsus on samuti 2. Vabadeks tundmatuteks võtame näiteks x_2 ja x_3 . Omapäärtusele 1 vastava omaruumi baasivektorid on selle LVS-i lahendite fundamentaalsüsteem

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Omapäärtusele 5 vastavad omavektorid leiame LVS-ist $(A - 5I)u = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lahendame Gaussi meetodil. LVS-i maatriks on

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +3R_1 \\ -R_1 \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +R_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 187 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LVS-i saame kujul

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \implies x_1 = x_2 = x_3$$

Viimase LVS-i vabade tundmatute arv on 1, s.t omaväärtuse 5 geomeetriline kordsus on samuti 1. Omaväärtusele 5 vastava omaruumi baasivektoriks võtame vektori

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maatriks A diagonaalub seega maatriksiga

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ning

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 188 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

9.2. Ortogonaalne diagonaalimine

Ortogonaalmaatriks

Ruutmaatriksit P nimetatakse *ortogonaalmaatriksiks*, kui

$$P^{-1} = P^T$$

Teoreem 9.5. *Ruutmaatriks on ortogonaalmaatriks parajasti siis, kui tema reavektorid (veeruvektorid) moodustavad orthonormeeritud süsteemi.*

Tõestus. Olgu P ruutmaatriks reavektoritega p_1, \dots, p_n . Tema transponeeritud maatriksi P^T veeruvektorid on samuti p_1, \dots, p_n . Maatriksite korrutamise reegli kohaselt

$$(PP^T)_{ij} = (p_i|p_j)$$

See valem ütlebki, et

$$P^T = P^{-1} \iff (p_i|p_j) = \delta_{ij} \quad \square$$

Ortogonaalne diagonaaluvus

Õeldakse, et ruutmaatriks A on *ortogonaalselt diagonaaluv*, kui leidub ortogonaalmaatriks P nii, et maatriks

$$D = P^{-1}AP = P^TAP$$

on diagonaalmaatriks.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 189 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Ortogaalse diagonaaluuse tunnused

Teoreem 9.6. *Olgu A n -järku ruutmaatriks. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:*

- 1) *maatriks A on ortogonaalselt diagonaaluv,*
- 2) *maatriksil A leidub n ortonormaalset omavektorit,*
- 3) *maatriks A on sümmeetriline.*

Tuletame meelde, et teoreemi 8.6 järgi on sümmeetrilise maatriksi omaväärtused reaalsed ning erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed.

Sümmeetrilise maatriksi ortogonaalne diagonaalimine

Olgu A sümmeetriline maatriks. Ortogonaalne diagonaalimine koosneb järgmistest samudest:

- 1) leia maatriksi A iga omaruumi baas,
- 2) ortonormeeri need baasid,
- 3) moodusta maatriks P , mille veergudeks on eespool leitud ortonormeeritud baasivektorid,
- 4) moodusta diagonaalmaatriks D , mille peadiagonaalil asetsevad maatriksi A omaväärtused. Kahtluse korral kontrolli tulemust valemiga $D = P^T A P$.

Näide 9.7. Leida ortogonaalmaatriks, mis diagonaalib maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 190 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Lahendus. Omaväärtused ja omavektorid leidsime näites 8.8. Omaväärtuse $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ algebraalne kordsus on 2 ja omaväärtuse $\lambda_3 = 8$ algebraalne kordsus on 1. Vastavad geomeetrilised kordsused on samasugused, seega on maatriks A diagonaaluv.

Omaväärtusele $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ vastav omaruum on kahemõõtmeline ning selle baasivektorid on

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortogonaalime need vektorid alapunktis 7.7 näidatud viisil. Arvutame

$$|u_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Seega

$$v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on normeeritud vektor. Edasi arvutame

$$(u_2|v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2|u_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(-1)(-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Siis saame

$$u'_2 = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 191 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Leiame

$$|u'_2| = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [(-1)(-1) + (-1)(-1) + 2 \cdot 2]} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Normeerime vektori u'_2

$$v_2 = \frac{u'_2}{|u'_2|} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektorid v_1, v_2 moodustavad ortonormeeritud süsteemi, omaväärtusele $\lambda_1 = 2$ vastava omaruumi ristbaasi.

Omaväärtusele $\lambda_3 = 8$ vastav omaruum on ühemõõtmeline ja selle baasivektor on

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normeerides saame

$$v_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{u_3}{\sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorid v_1, v_2, v_3 moodustavad *ortonormeeritud* süsteemi. Maatriksit A diagonaaliv ortogonaalmaatriks on seega

$$P = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 192 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Defineerime vektori x ja ruutvormi maatriksi A järgmiselt:

$$x \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Siis võime kirjutada

$$Q(x) = x^T A x$$

Üldsust kitsendamata võib eeldada, et $a_{ij} = a_{ji}$, s.t maatriks A on sümmeetriline.

Näide 9.8. Näiteks ruutvormi

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_1 + 3x_2^2$$

saab esitada kujul

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 3x_2^2$$

Mõlemad ruutvormid on võrdsed järgmisega:

$$x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 194 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Ruutvormi ortogonaalne diagonaalimine

Kui ruutvormi maatriks on diagonaalmaatriks, siis öeldakse, et ruutvorm on diagonaalkujul ehk kanoonilisel kujul.

Olgu ruutvormi maatriks A sümmeetriline. Teatavasti on sümmeetriline maatriks ortogonaalselt diagonaaluv, s.t leidub ortogonaalmaatriks P nii, et

$$D = P^{-1}AP = P^T AP$$

on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil asetsevad maatriksi A omaväärtused. Siis

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

ning asendades viimase seose ruutvormi $Q(x) = x^T Ax$ avaldisse, saame

$$Q(x) = x^T PDP^T x$$

Defineerime vektori y seosega

$$y = P^T x = P^{-1} x \quad \implies \quad y^T = x^T P$$

Ruutvormi $Q(x)$ saame nüüd esitada diagonaalkujul

$$Q(x) = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \doteq Q'(y)$$

Näide 9.9. Diagonaalida teist järku joon

$$Q(x) = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 195 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Lahendus. Olgu

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{pmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{pmatrix}$$

Siis $Q(x) = x^T A x$. Matriksi A omaväärtused on $\lambda_1 = 2$ ja $\lambda_2 = 32$ ning vastavad normeeritud omavektorid on (veenduda)

$$v_1 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad v_2 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriksit A diagonaaliv ortogonaalmatriks on

$$P = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \implies \quad P^T = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ortogonaalteisenduse valem on

$$y = P^T x = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lahti kirjutatult

$$\begin{cases} y_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ y_2 = (-x_1 + x_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

Ruutvormi $Q(x)$ diagonaalkuju on

$$Q(x) = (y_1 \ y_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + 32y_2^2$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 196 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Uutes muutujates on teist järku joone võrrand kujul

$$2y_1^2 + 32y_2^2 = 128$$

Pärast lihtsustamist saame

$$\frac{y_1^2}{8^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1$$

Tulemus ütleb, et tegemist on ellipsiga, mille pikem pooltelg on 8 ja lühem pooltelg on 2.

Näide 9.10. Diagonaalida ruutvorm

$$Q(x) = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

Lahendus. Ruutvormi maatriks on ilmselt

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mille diagonaalisime näites 9.7 ortogonaalmaatriksiga

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Maatriksi A diagonaalkuju on

$$D = P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 197 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Toome sisse uue vektori $y = P^T x$, s.t

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lahti kirjutatult saame valemid

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_3 \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \end{cases}$$

Ruutvormi $Q(x)$ diagonaalkuju on seega

$$Q(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 8y_3^2$$

9.4. Ülesanded

Diagonaalida ortogonaalmaatriksiga järgmised maatriksid ja ruutvormid. Kontrollida tulemust.

$$9.4.1 \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad 9.4.2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad 9.4.3 \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 198 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$9.4.4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 9.4.5 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$9.4.6 \quad 4x_1^2 + 8x_1x_2 - 11x_2^2$$

$$9.4.7 \quad 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2$$

$$9.4.8 \quad Q(x) \doteq 5x_1^2 + 12x_1x_2$$

$$9.4.9 \quad 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$$

$$9.4.10 \quad 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$$

$$9.4.11 \quad 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$9.4.12 \quad x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3$$

$$9.4.13 \quad 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

$$9.4.14 \quad 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

$$9.4.15 \quad x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 199 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

10. Maatriksfunktsioonid

10.1. Maatriksi astmed

Olgu A ruutmaatriks ja k *positiivne* täisarv. Maatriksi A aste A^k defineeritakse valemiga

$$A^k \doteq \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ korda}}$$

Kui A on regulaarne maatriks, siis leidub pöördmaatriks A^{-1} . Maatriks A^{-k} defineeritakse valemiga

$$A^{-k} \doteq (A^{-1})^k = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ korda}}$$

Kui $k = 0$, siis $A^0 \doteq I$.

10.2. Maatrikspolünoom

Avaldist kujul

$$p(A) \doteq b_0I + b_1A + \cdots + b_kA^k$$

kus k on mittenegatiivne täisarv, nimetatakse *maatrikspolünoomiks*. Samuti öeldakse, et maatrikspolünoom $p(A)$ on polünoomi

$$p(x) \doteq b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$$

väärtus kohal $x = A$.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)


Lk 200 ⊗ 286

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

10.3. Cayley-Hamiltoni teoreem

Definitsioon 10.1. Defineerime n -järku ruutmaatriksi A *karakteristliku polünoomi* valemiga

$$p(\lambda) \doteq |A - \lambda I| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$$

Teoreem 10.2 (Cayley-Hamiltoni ¹⁰ teoreem). *Iga ruutmaatriks A on oma karakteristliku polünoomi juur, s.t*

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n = 0$$

Tõestus. Olgu $B \doteq \text{adj}(A - \lambda I)$ maatriksi $A - \lambda I$ alamdeterminantide maatriksi transponeering (*adjungeeritud* maatriks). Siis maatriksi B elemendid on $(n - 1)$ -astme polünoomid ning

$$B = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}$$

Teoreemi 2.28 abil näeme, et

$$(A - \lambda I)B = |A - \lambda I|I$$

Seega

$$(A - \lambda I)(B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n)I$$

Parameetri λ erinevate astmete ees seisvaid kordajaid võrreldes saame seosed

$$AB_0 = a_0I$$

¹⁰ Artur Cayley (1821-1895), inglise matemaatik

William Rowan Hamilton (1805-1865), inglise matemaatik

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 201 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$$\begin{aligned}
 AB_1 - B_0 &= a_1 I \\
 AB_2 - B_1 &= a_2 I \\
 &\dots\dots\dots \\
 AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I \\
 -B_{n-1} &= a_n I
 \end{aligned}$$

Korrutame nüüd neid seoseid vasakult vastavalt maatriksitega I, A, A^2, \dots, A^n ning liidame. Tulemuseks saame

$$0 = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n \quad \square$$

Märkus 10.3. Kui $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ on maatriksi A karakteristliku polünoomi $p(\lambda)$ juured, siis võib maatriksi A karakteristliku polünoomi teatavasti esitada kujul

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

ning Cayley-Hamiltoni valemi saab esitada kujul

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_n I) = 0$$

Näide 10.4. Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

karakteristlik polünoom ja kontrollida Cayley-Hamiltoni teoreemi.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 202 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Esimene lahendus. Matriksi A karakteristlik polünoom on

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$$

Vastavalt Cayley-Hamiltoni teoreemile peab olema

$$A^2 + A - 6I = 0$$

Tõepoolest, arvutame

$$\begin{aligned} A^2 + A - 6I &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6+0-6 & -2+2+0 \\ -3+3+0 & 7-1-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teine lahendus. Matriksi A karakteristliku polünoomi juured on

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -3$$

Seega

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 203 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Vastavalt Cayley-Hamiltoni teoreemile peab olema

$$(A - 2I)(A + 3I) = 0$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned}(A - 2I)(A + 3I) &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 + 6 & -4 + 4 \\ 9 - 9 & 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

10.4. Maatriksastmereal

Olgu antud (koonduv) astmerida

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad |x| < r \quad (\text{koonduvusraadius})$$

Sellele reale seame vastavusse *maatriksastmerea*

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k A^k$$

ning ütleme, et $f(A)$ on funktsiooni $f(x)$ väärtus kohal $x = A$.

Seega arendame (kui võimalik) funktsiooni $f(x)$ koonduvasse astmeritta, seejärel asendame muutuja x maatriksiga A .

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 204 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Näide 10.5. Mõnele elementaarfunktsioonile vastavad maatriksread

$$\begin{aligned}
 e^A &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \\
 \sin A &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 \cos A &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!} \\
 \ln(I+A) &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{n+1}}{n+1} \\
 (I-A)^{-1} &\doteq \frac{1}{I-A} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} A^n
 \end{aligned}$$

Teoreem 10.6. Maatriksrida $f(A)$ koondub parajasti siis, kui vastav astmerida $f(\lambda)$ koondub maatriksi A iga omaväärtuse λ korral.

Teoreem 10.7. Kui $f(A)$ koondub ning λ on A omaväärtus, siis $f(\lambda)$ on maatriksi $f(A)$ omaväärtus.

10.5. Diagonaaluga maatriksi astmed

Olgu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ diagonaaluga n -järku ruutmaatriksi A omaväärtused. Siis leidub maatriks P^{-1} nii, et

$$A = PDP^{-1}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 205 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

kus

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil asetsevad maatriksi A omaväärtused. Arvutame

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

Samamoodi saame iga positiivse täisarvu k jaoks

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Maatriks D^k on diagonaalmaatriks elementidega

$$(D^k)_{ij} = \lambda_i^k \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Näide 10.8. Leida A^{50} , kui

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 4$$

ning omavektorid on

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 206 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Seega on diagonaaliv matriiks

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ning

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Seega

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{50} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{50} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & 4^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{50} & -2^{50} \\ 4^{50} & 4^{50} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^{50} + 4^{50} & -2^{50} + 4^{50} \\ -2^{50} + 4^{50} & 2^{50} + 4^{50} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.6. Diagonaaluva matriksi funktsioonid

Nüüd arvutame

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k PD^k P^{-1}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 207 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k \right) P^{-1} = P f(D) P^{-1}$$

Diagonaalmaatriksi $f(D)$ elemendid arvutame valemiga

$$(f(D))_{ij} = f(\lambda_i) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Näide 10.9. Leida e^A , kui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 2$$

ning vastavad omavektorid on

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diagonaaliv maatriks on

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Seega

$$e^A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e - e^2 & 2e - 2e^2 \\ -e + e^2 & -e + 2e^2 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 208 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

10.7. Maatriksfunktsiooni arvutamine

Kui maatriks pole diagonaaluv, siis ei sobi eespool kirjeldatud meetod maatriksfunktsiooni arvutamiseks. Sellisel juhul võib kasutada Cayley-Hamiltoni teoreemi

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + (-1)^n A^n = 0$$

Maatriksi A^n avaldame nüüd eelnevate astmete lineaarkombinatsioonina

$$(-1)^n A^n = -a_0I - a_1A - a_2A^2 - \cdots - a_{n-1}A^{n-1}$$

Funktsioonile $f(x)$ vastavas maatriksastmereichas

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i A^i$$

seda valemit korduvalt kasutades, saame

$$f(A) = \alpha_0I + \alpha_1A + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} \doteq \phi(A)$$

kus $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ on (tundmatud) skalaarsed kordajad, n on aga maatriksi A järk. Kui maatriksi A omaväärtuse λ_i algebraalne kordsus on k_i , siis kordajate α_i määramiseks on LVS

$$\begin{cases} f(\lambda_i) = \phi(\lambda_i) \\ f'(\lambda_i) = \phi'(\lambda_i) \\ f''(\lambda_i) = \phi''(\lambda_i) \\ \dots\dots\dots \\ f^{(k_i-1)}(\lambda_i) = \phi^{(k_i-1)}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 209 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Näide 10.10. Leida e^A , kui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Matriksi A omaväärtused on

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 2$$

Matriksi järk on 2 ning matriksit e^A võib otsida kujul

$$f(A) = e^A = \phi(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A \quad \implies \quad \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

Arvutame

$$\begin{cases} e^{\lambda_1} = \phi(\lambda_1) \\ e^{\lambda_2} = \phi(\lambda_2) \end{cases} \implies \begin{cases} e = \alpha_0 + \alpha_1 \\ e^2 = \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_0 = 2e - e^2 \\ \alpha_1 = e^2 - e \end{cases}$$

Seega

$$\begin{aligned} e^A &= (2e - e^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^2 - e) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e - e^2 & 2e - 2e^2 \\ -e + e^2 & -e + 2e^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vastus langeb kokku ülesande 10.9 vastusega.

Näide 10.11. Leida $\ln A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 210 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -2$$

Karakteristliku polünoomi aste on 2 ning maatriksit $\ln A$ võib otsida kujul

$$f(A) = \ln A = \phi(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A \quad \implies \quad \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

Arvutame

$$\begin{aligned} \begin{cases} \ln \lambda_1 = \phi(\lambda_1) \\ \ln \lambda_2 = \phi(\lambda_2) \end{cases} &\implies \begin{cases} \ln 2 = \alpha_0 + 2\alpha_1 \\ \ln(-2) = \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \alpha_0 = (\ln 2 + \ln(-2))/2 \\ \alpha_1 = (\ln 2 - \ln(-2))/4 \end{cases} \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} \ln A &= \frac{\ln 2 + \ln(-2)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\ln 2 - \ln(-2)}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \ln 2 + 3 \ln(-2) & 3 \ln 2 - 3 \ln(-2) \\ \ln 2 - \ln(-2) & 3 \ln 2 + \ln(-2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kompleksarvu $\ln(-2)$ (peaväärtuse) arvutame järgmiselt:

$$\ln(-2) = \ln(2e^{i\pi}) = \ln 2 + \ln e^{i\pi} = \ln 2 + i\pi \ln e = \ln 2 + i\pi$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 211 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 10.12. Leida $\cos A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Matriksi A omaväärtused on $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = 4$. Arvutame

$$\begin{aligned} \cos A = \phi(A) &= \alpha_0 I + \alpha_1 A = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_0 + 2\alpha_1 & 4\alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{pmatrix} \implies \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda \end{aligned}$$

Tundmatud kordajad α_0 ja α_1 arvutame järgmiselt:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos \lambda_1 = \phi(\lambda_1) \\ \cos \lambda_2 = \phi(\lambda_2) \end{cases} &\implies \begin{cases} \cos 0 = \alpha_0 + 0\alpha_1 \\ \cos 4 = \alpha_0 + 4\alpha_1 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \alpha_0 = \cos 0 = 1 \\ \alpha_1 = (\cos 4 - 1)/4 \end{cases} \end{aligned}$$

Tulemuseks saame

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(\cos 4 + 1) & 4(\cos 4 - 1) \\ \cos 4 - 1 & 2(\cos 4 + 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,173178 & -1,653644 \\ -0,413411 & 0,173178 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Näide 10.13. Leida e^{At} , kui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 212 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lahendus. Maatriksi $B = At$ omaväärtused on

$$\lambda_1 = 2t \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -4t$$

Maatriksi B järk on 2 ning maatriksit e^B võib otsida kujul

$$e^B = \phi(B) = \alpha_0 I + \alpha_1 B \quad \Longrightarrow \quad \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

Arvutame

$$\begin{aligned} \begin{cases} e^{\lambda_1} = \phi(\lambda_1) \\ e^{\lambda_2} = \phi(\lambda_2) \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} e^{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2t \\ e^{-4t} = \alpha_0 - \alpha_1 \cdot 4t \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{3}(2e^{2t} - e^{-4t}) \\ \alpha_1 = \frac{1}{6t}(e^{2t} - e^{-4t}) \end{cases} \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{3}(2e^{2t} - e^{-4t}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6t}(e^{2t} - e^{-4t})t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Näide 10.14. Leida e^{-A} , kui

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 213 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lahendus. Maatriksi A omaväärtused on (veenduda)

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{ja} \quad \lambda_{2,3} = 2$$

Omaväärtuse 2 algebraalne kordsus on 2. Maatriksit e^{-A} võime otsida kujul

$$e^{-A} = \phi(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 \quad \Longrightarrow \quad \phi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2$$

Kordajad $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ arvutame järgmiselt:

$$\begin{cases} e^{-\lambda_1} = \phi(\lambda_1) \\ e^{-\lambda_2} = \phi(\lambda_2) \\ (e^{-\lambda})'|_{\lambda=\lambda_2} = \phi'(\lambda_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{-1} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ e^{-2} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \\ -e^{-2} = \alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -5e^{-2} + 4e^{-1} \\ \alpha_1 = 7e^{-2} - 4e^{-1} \\ \alpha_2 = -2e^{-2} + e^{-1} \end{cases}$$

Nüüd saame arvutada

$$e^{-A} = (-5e^{-2} + 4e^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (7e^{-2} - 4e^{-1}) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (-2e^{-2} + e^{-1}) \begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \\ 10 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 214 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$= \begin{pmatrix} -2e^{-2} + e^{-1} & e^{-2} - e^{-1} & e^{-2} \\ -2e^{-2} & e^{-2} & e^{-2} \\ -6e^{-2} + 2e^{-1} & 2e^{-2} - 2e^{-1} & 3e^{-2} \end{pmatrix}$$

10.8. Ülesanded

Leida maatriksi karakteristlik polünoom ja kontrollida Cayley-Hamiltoni teoreemi 10.2.

$$10.8.1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 10.8.2 \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \quad 10.8.3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$10.8.4 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Arvutada maatriksfunktsioonid.

$$10.8.5 \quad A^{100}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad 10.8.6 \quad A^{50}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10.8.7 \quad 3A^{57} + 2A^{18}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$10.8.8 \quad \sin A, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10.8.9 \quad \sin A, \quad A = \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$$

$$10.8.10 \quad \cos A, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 215 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$10.8.11 \quad \sin At, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10.8.12 \quad \ln A, \quad \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10.8.13 \quad \sqrt{A}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad 10.8.14 \quad \sqrt{A}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Järgnevat es ülesannetes arvutada e^A .

$$10.8.15 \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad 10.8.16 \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad 10.8.17 \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10.8.18 \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Arvutada e^{At} .

$$10.8.19 \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad 10.8.20 \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad 10.8.21 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10.8.22 \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \quad 10.8.23 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 10.8.24 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -8 \end{pmatrix}$$

$$10.8.25 \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \quad 10.8.26 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 10.8.27 \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 216 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$10.8.28 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 10.8.29 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 217 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

11. Lineaarkujutused

Olgu V ja U vektorruumid üle ühe ja sama korpuse \mathbb{K} .

11.1. Lineaarkujutuse mõiste

Kujutust $F: V \rightarrow U$ nimetatakse *lineaarkujutuseks* e *lineaarteisenduseks*, kui

- 1) $F(a + b) = F(a) + F(b) \quad \forall a, b \in V$ (aditiivsus),
- 2) $F(\lambda a) = \lambda F(a) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall a \in V$ (homogeensus).

Kõigi lineaarkujutuste hulka vektorruumist V vektorruumi U kordajatega korpusest \mathbb{K} tähistatakse $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$. Kui $U = V$, siis nimetatakse lineaarkujutust F ka *linearseks operaatoriks* e *lineaaroperaatoriks*.

Võttes $\lambda = 0$ tingimuses 2), saame $F(0) = 0$. Seega kujutab lineaarkujutus nullvektori nullvektoriks.

Ülaltoodud kaks tingimust võib kokku võtta ühe tingimusena

$$F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall a, b \in V$$

Siit järeldub (matemaatilise induktsiooniga) üldisem omadus skalaaride $\alpha_i \in \mathbb{K}$ ja vektorite $a_i \in V$ korral

$$F(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k) = \alpha_1 F(a_1) + \cdots + \alpha_k F(a_k)$$

Teiste sõnadega, lineaarkujutus teisendab (kujutab) lineaarkombinatsiooni lineaarkombinatsiooniks.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 218 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Näide 11.1. Defineerime kujutuse $F: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3$ valemiga

$$F \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - 2\beta \\ 3\alpha \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$$

Näitame, et F on lineaarkujutus.

Lahendus. Olgu

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$$

Arvutame

$$\begin{aligned} F \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \right] &= F \begin{pmatrix} \alpha + \alpha_1 \\ \beta + \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \alpha_1) + (\beta + \beta_1) \\ (\alpha + \alpha_1) - 2(\beta + \beta_1) \\ 3(\alpha + \alpha_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - 2\beta \\ 3\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_1 - 2\beta_1 \\ 3\alpha_1 \end{pmatrix} \\ &= F \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Niisamuti

$$F \left[\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right] = F \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha + \lambda\beta \\ \lambda\alpha - 2\lambda\beta \\ 3\lambda\alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - 2\beta \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \lambda F \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Tulemus ütleb, et F on lineaarkujutus.

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 219 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 11.2 (projekteerimine). Defineerime projekteeriva kujutuse $F: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ valemiga

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, 0)$$

Näitame, et F on lineaarkujutus.

Lahendus. Olgu

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3 \quad \text{ja} \quad b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{K}^3$$

Arvutame

$$\begin{aligned} F(a+b) &= F(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, 0) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, 0) + (\beta_1, \beta_2, 0) = F(a) + F(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\lambda a) &= F(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, 0) = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, 0) \\ &= \lambda F(a) \end{aligned}$$

Seega on F lineaarne.

Näide 11.3 (diferentseerimine). Olgu $C^\infty(a, b)$ vahemikus (a, b) siledate funktsioonide ruum. Defineerime kujutuse $D: C^\infty(a, b) \rightarrow C^\infty(a, b)$ valemiga

$$D(f) = f', \quad f \in C^\infty(a, b)$$

Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$(f+g)' = f' + g', \quad (cf)' = cf'$$

Seega

$$D(f+g) = D(f) + D(g), \quad D(cf) = cD(f)$$

mis ütleb, et kujutus D on lineaarne.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)


Lk 220 * 286

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Näide 11.4 (integreerimine). Olgu $C(a, b)$ vahemikus (a, b) pidevate funktsioonide ruum. Defineerime kujutuse $J: C(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ valemiga

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx, \quad f \in C(a, b)$$

Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b cf(x)dx &= c \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Seega

$$J(f + g) = J(f) + J(g), \quad J(cf) = cJ(f)$$

mis ütleb, et kujutus J on lineaarne.

Näide 11.5 (nullkujutus). Defineerime kujutuse $F: V \rightarrow U$ valemiga $F(a) = 0$ iga vektori $a \in V$ korral. Siis

$$F(a + b) = 0 = 0 + 0 = F(a) + F(b), \quad F(\alpha a) = 0 = \alpha 0 = \alpha F(a)$$

mis ütleb, et F on lineaarne. Seda kujutust nimetatakse *nullkujutuseks* ja tähistatakse 0.

Näide 11.6 (samasuskujutus). Defineerime kujutuse $\text{id}_V: V \rightarrow V$ valemiga $\text{id}_V a = a$ iga $a \in V$ korral. Siis

$$\text{id}_V(a + b) = a + b = \text{id}_V(a) + \text{id}_V(b), \quad \text{id}_V(\alpha a) = \alpha a = \alpha \text{id}_V(a)$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 221 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

mis ütleb, et kujutus id_V on lineaarne. Seda kujutust nimetatakse vektorruumi V *samasuskujutuseks*. Samasuskujutust tähistatakse ka 1_V .

Näide 11.7 (maatrikskujutus). Olgu $A \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$. Defineerime *maatrikskujutuse* $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$ valemiga

$$L_A(v) = Av \quad \forall v \in \mathbb{K}^n$$

Siis järeldub maatriksarvutuse seadustest, et

$$\begin{aligned} L_A(a + b) &= A(a + b) = Aa + Ab = L_A(a) + L_A(b) \\ L_A(\lambda a) &= A(\lambda a) = (A\lambda)a = (\lambda A)a = \lambda(Aa) = \lambda L_A(a) \end{aligned}$$

mis ütleb, et maatrikskujutus L_A on lineaarkujutus.

Maatrikskujutust nimetatakse sageli ka *maatriksteisenduseks* ja *maatriksi toimeks*.

Kujutuste võrdsus

Kui $F(v) = G(v)$ iga $v \in V$ korral, siis ütleme, et kujutused F ja G on *võrdsed* ning kirjutame $F = G$.

Teoreem 11.8. Olgu $F: V \rightarrow U$ ja $G: V \rightarrow U$ lineaarkujutused ning

$$V = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_n\}$$

Kui $F(v_i) = G(v_i)$ iga $i = 1, \dots, n$ korral, siis $F = G$.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 222 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Tõestus. Esitades $v \in V$ kujul

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

arvutame

$$\begin{aligned} F(v) &= F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) \\ &= \alpha_1 G(v_1) + \cdots + \alpha_n G(v_n) \\ &= G(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = G(v) \end{aligned} \quad \square$$

Teoreem 11.9. *Olgu vektorisüsteem $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorruumi V baas ning olgu $u_1, \dots, u_n \in U$ suvalised vektorid. Siis leidub parajasti üks lineaarkujutus $F: V \rightarrow U$ nii, et*

$$F(v_1) = u_1, \quad \dots, \quad F(v_n) = u_n$$

Tõestus. Tõestuse jagame kolmeks sammuks.

1. Defineerime kujutuse $F: V \rightarrow U$ nii, et $F(v_i) = u_i$ iga $i = 1, \dots, n$ korral.
2. Näitame, et F on lineaarne.
3. Näitame, et F on üheselt määratud.

1. Olgu $v \in V$. Kuna $\{v_1, \dots, v_n\}$ on V baas, siis leiduvad *üheselt* skalaarid $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ nii, et

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Defineerime kujutuse $F: V \rightarrow U$ valemiga

$$F(v) \doteq \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 223 ⊛ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kuna skalaarid α_i on üheselt määratud, on kujutus F korrektselt defineeritud. Nüüd paneme tähele, et

$$v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$$

Seega

$$F(v_i) = 0u_1 + \cdots + 1u_i + \cdots + 0u_n = u_i$$

Tõestuse esimene samm on läbitud.

2. Olgu

$$a = \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n \quad \text{ja} \quad b = \beta_1v_1 + \cdots + \beta_nv_n$$

Siis ilmselt

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n$$

ning iga $\lambda \in \mathbb{K}$ jaoks

$$\lambda a = \lambda\alpha_1v_1 + \cdots + \lambda\alpha_nv_n$$

Vastavalt kujutuse F definitsioonile

$$F(a) = \alpha_1u_1 + \cdots + \alpha_nu_n, \quad F(b) = \beta_1u_1 + \cdots + \beta_nu_n$$

Seega

$$\begin{aligned} F(a + b) &= (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)u_n \\ &= (\alpha_1u_1 + \cdots + \alpha_nu_n) + (\beta_1u_1 + \cdots + \beta_nu_n) \\ &= F(a) + F(b) \\ F(\lambda a) &= \lambda(\alpha_1u_1 + \cdots + \alpha_nu_n) = \lambda F(a) \end{aligned}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 224 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Tulemus ütleb, et kujutus F on lineaarne.

3. Olgu $G: V \rightarrow V$ veel üks lineaarne kujutus ning $G(v_i) = u_i$, $i = 1, \dots, n$. Olgu

$$a = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Siis

$$\begin{aligned} G(a) &= G(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 G(v_1) + \dots + \alpha_n G(v_n) \\ &= \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = F(a) \end{aligned}$$

Kuna $G(a) = F(a)$ iga $a \in V$ korral, peab $G = F$. Seega on kujutus F üheselt määratud. \square

Näide 11.10. Lineaarkujutus $F: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ on antud valemitega

$$\begin{cases} F(1, 2) = (-2, 1) \\ F(-1, 1) = (5, -7) \end{cases}$$

Leida $F(\alpha, \beta)$.

Lahendus. Tähistame

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$$

Siis

$$\begin{aligned} (1, 2) &= e_1 + 2e_2, & (-2, 1) &= -2e_1 + e_2 \\ (-1, 1) &= -e_1 + e_2, & (5, -7) &= 5e_1 - 7e_2 \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 225 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

ning

$$\begin{aligned} \begin{cases} F(e_1 + 2e_2) = -2e_1 + e_2 \\ F(-e_1 + e_2) = 5e_1 - 7e_2 \end{cases} &\implies \begin{cases} F(e_1) + 2F(e_2) = -2e_1 + e_2 \\ -F(e_1) + F(e_2) = 5e_1 - 7e_2 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} F(e_1) = -4e_1 + 5e_2 \\ F(e_2) = e_1 - 2e_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Nüüd saame arvutada

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= F(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha F(e_1) + \beta F(e_2) \\ &= \alpha(-4e_1 + 5e_2) + \beta(e_1 - 2e_2) \\ &= (-4\alpha + \beta)e_1 + (5\alpha - 2\beta)e_2 = (-4\alpha + \beta, 5\alpha - 2\beta) \end{aligned}$$

Lause 11.11. Olgu lineaarkujutus $F: V \rightarrow U$ selline, et kujutisvektorid $F(v_1), \dots, F(v_k)$ on linearselt sõltumatud. Siis on ka originaalid $v_1, \dots, v_k \in V$ linearselt sõltumatud.

Tõestus. Oletame, et leiduvad skalaarid $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ nii, et

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

Siis

$$0 = F(0) = F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_k F(v_k)$$

Kuna $F(v_1), \dots, F(v_k)$ on linearselt sõltumatud, peab $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Tulemus ütleb, et v_1, \dots, v_k on linearselt sõltumatud. \square

Koduleht

Tiitelleht



Lk 226 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

11.2. Lineaarkujutuse tuum ja muutumispiirkond

Lineaarkujutuse tuum

Lineaarkujutuse $F: V \rightarrow U$ tuum $\text{Ker } F \subseteq V$ koosneb vektorruumi V sellistest vektoritest, mis kujutuvad vektorruumi U nullvektoriks

$$\text{Ker } F \doteq \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

Lineaarkujutuse muutumispiirkond

Lineaarkujutuse $F: V \rightarrow U$ muutumispiirkond $\text{Im } F \subseteq U$ koosneb vektorruumi U sellistest vektoritest, millele leiduvad originaalid vektorruumis V

$$\text{Im } F \doteq F(V) \doteq \{F(v) \in U \mid v \in V\}$$

Lause 11.12. Olgu $F: V \rightarrow U$ lineaarkujutus. Siis

- 1) $\text{Ker } F$ on vektorruumi V alamruum,
- 2) $\text{Im } F$ on vektorruumi U alamruum.

Tõestus. 1) Kuna $F(0) = 0$, siis $0 \in \text{Ker } F$. Olgu $a, b \in \text{Ker } F$ ning $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Siis $F(a) = 0$ ja $F(b) = 0$ ning

$$\begin{aligned} F(\alpha a + \beta b) &= \alpha F(a) + \beta F(b) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 + 0 = 0 \\ \implies \alpha a + \beta b &\in \text{Ker } F \end{aligned}$$

2) Kuna $F(0) = 0$, siis $0 \in \text{Im } F$. Olgu $u, u' \in \text{Im } F$ ning $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Siis leiduvad $v, v' \in V$ nii, et $F(v) = u$ ja $F(v') = u'$ ning

$$F(\alpha v + \beta v') = \alpha F(v) + \beta F(v') = \alpha u + \beta u' \in \text{Im } F \quad \square$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 227 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Lause 11.13. Olgu $\{v_1, \dots, v_m\}$ vektorruumi V moodustajate süsteem ning olgu $F: V \rightarrow U$ lineaarkujutus. Siis $\{F(v_1), \dots, F(v_m)\}$ on ruumi $\text{Im } F$ moodustajate süsteem.

Tõestus. Olgu $u \in \text{Im } F$. Siis leidub $v \in V$ nii, et $F(v) = u$. Kuna $\{v_1, \dots, v_m\}$ on vektorruumi V moodustajate süsteem, siis leiduvad $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ nii, et

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

Seega

$$u = F(v) = F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_m F(v_m)$$

Tulemus ütlebki, et VS $\{F(v_1), \dots, F(v_m)\}$ on ruumi $\text{Im } F$ moodustajate süsteem. \square

Näide 11.14 (maatrikskujutuse tuum ja muutumispiirkond). Vaatleme näiteks 3×4 -järku maatriksit A ning vektorruumi \mathbb{K}^4 standardbaasi

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maatriksit A võib teatavasti vaadelda lineaarkujutusena $L_A: \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$. Ilmselt

$$L_A e_1 = A e_1, \quad L_A e_2 = A e_2, \quad L_A e_3 = A e_3, \quad L_A e_4 = A e_4 \in \text{Im } L_A$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 228 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kuna standardbaasi vektorid on vektorruumi \mathbb{K}^4 moodustajate süsteem, siis on vektori-süsteem $\{Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4\}$ lineaarkujutuse L_A muutumispiirkonna $\text{Im } L_A$ moodusta-jate süsteem. Kuid vektorid Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4 on parajasti maatriksi A veeruvektorid

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad Ae_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad Ae_4 = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Maatriksi A veeruvektorite lineaarset katet tähistasime $\text{Col } A$. Maatriksi A veeruvektorid on seega vektorruumi $\text{Col } A$ moodustajad. Seega ühtib $\text{Im } L_A$ parajasti maatriksi A veeruvektorite lineaarse kattega, s.t $\text{Im } L_A = \text{Col } A$.

Maatrikskujutuse L_A tuum koosneb sellistest vektoritest $v \in \mathbb{K}^4$, mis rahuldavad tingimust $Av = 0$, s.t $\text{Ker } L_A$ on homogeense LVS-i $Av = 0$ lahendiruum. Seda ruumi nimetatakse maatriksi A nullruumiks ja sageli tähistatakse $\text{Ker } A \doteq \text{Ker } L_A$.

Näide 11.15. Defineerime kujutuse $F : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ valemiga $F(A) \doteq A - A^T$ iga ruutmaatriksi $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ korral. Siis F on lineaarkujutus (veenduda) ning

- a) $\text{Ker } F$ elementideks on parajasti kõik sümmeetrilised maatriksid,
- b) $\text{Im } F$ elementideks on parajasti kõik antisümmeetrilised maatriksid.

Tõestus. Lause a) tõestamiseks paneme tähele, et $A \in \text{Ker } F$ parajasti siis, kui

$$F(A) = A - A^T = 0 \quad \implies \quad A^T = A$$

Lause b) tõestamiseks paneme tähele, et vektorruum $\text{Im } F$ koosneb maatriksitest $F(A)$, kus $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, kusjuures iga selline maatriks $F(A)$ on antisümmeetriline, sest

$$F(A)^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -F(A)$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 229 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Teisest küljest, kui Q on antisümmeetriline maatriks (s.t $Q^T = -Q$), siis $Q \in \text{Im } F$. Tõepoolest,

$$Q = \frac{1}{2}(Q + Q) = \left(\frac{1}{2}Q\right) - \left(\frac{1}{2}Q\right)^T = F\left(\frac{1}{2}Q\right) \quad \square$$

11.3. Lineaarkujutuse astak

Lineaarkujutuse $F: V \rightarrow U$ *astakuks* nimetatakse vektorruumi $\text{Im } F$ mõõdet.

Teoreem 11.16. *Olgu V lõplikumõõtmeline vektorruum ning olgu $F: V \rightarrow U$ lineaarkujutus. Siis*

$$\dim V = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$$

Tõestus. Olgu $\dim(\text{Ker } F) = r$ ning $\{w_1, \dots, w_r\}$ vektorruumi $\text{Ker } F$ baas. Olgu $\dim(\text{Im } F) = s$ ning $\{u_1, \dots, u_s\}$ vektorruumi $\text{Im } F$ baas. Lausest **11.13** järeldub, et $\text{Im } F$ on lõplikumõõtmeline. Kuna $u_j \in \text{Im } F$, siis peavad leiduma vektorid $v_1, \dots, v_s \in V$ nii, et

$$F(v_1) = u_1, \quad \dots, \quad F(v_s) = u_s$$

Me tõestame, et vektorisüsteem

$$B \doteq \{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\}$$

on vektorruumi V baas, s.t

- 1) B on vektorruumi V moodustajate süsteem,
- 2) B on lineaarselt sõltumatu.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 230 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Kui 1) ja 2) on tõestatud, siis ilmselt

$$\dim V = r + s = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$$

Tõestame 1). Olgu $v \in V$. Siis $F(v) \in \text{Im } F$. Kuna vektorisüsteem $\{u_1, \dots, u_s\}$ on vektorruumi $\text{Im } F$ baas, siis peavad leiduma sellised skalaarid $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ nii, et

$$F(v) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s$$

Olgu

$$\hat{v} \doteq \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s - v$$

Siis

$$\begin{aligned} F(\hat{v}) &= F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s - v) \\ &= \alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_s F(v_s) - F(v) \\ &= \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s - F(v) = 0 \end{aligned}$$

Seega $\hat{v} \in \text{Ker } F$. Kuna $\{w_1, \dots, w_r\}$ on vektorruumi $\text{Ker } F$ baas, siis peavad leiduma skalaarid β_1, \dots, β_r nii, et

$$\hat{v} = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_r w_r = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s - v$$

Seega

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s - \beta_1 w_1 - \dots - \beta_r w_r$$

ning B on tõepoolest vektorruumi V moodustajate süsteem.

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)


Lk **231** ⊗ **286**

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Tõestame 2). Olgu

$$x_1 w_1 + \cdots + x_r w_r + y_1 v_1 + \cdots + y_s v_s = 0 \quad (1)$$

kus $x_i, y_i \in \mathbb{K}$. Siis

$$\begin{aligned} 0 &= F(0) = F(x_1 w_1 + \cdots + x_r w_r + y_1 v_1 + \cdots + y_s v_s) \\ &= x_1 F(w_1) + \cdots + x_r F(w_r) + y_1 F(v_1) + \cdots + y_s F(v_s) \end{aligned} \quad (2)$$

Kuid $F(w_i) = 0$, sest $w_i \in \text{Ker } F$, ning $F(v_j) = u_j$. Asendades valemisse (2), saame

$$y_1 u_1 + \cdots + y_s u_s = 0$$

millest vektorite u_j lineaarse sõltumatus tõttu järelduvad $y_1 = \cdots = y_s = 0$. Need võrdused asendame nüüd omakorda valemisse (1). Siis saame

$$x_1 w_1 + \cdots + x_r w_r = 0$$

Kuna vektorid w_i on lineaarselt sõltumatud, siis $x_1 = \cdots = x_r = 0$. Seega on B lineaarselt sõltumatu. \square

Näide 11.17. Lineaarkujutus $F: \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$ on defineeritud valemiga

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, \\ &\quad 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4) \end{aligned}$$

Leida

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 232 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- 1) $\text{Im } F$ baas ja mõõde,
- 2) $\text{Ker } F$ baas ja mõõde

ning kontrollida teoreemi 11.16.

Lahendus. Kõigepealt leiame \mathbb{K}^4 standardbaasi vektorite kujutised

$$\begin{aligned} F(1, 0, 0, 0) &= (1, 2, 3), & F(0, 1, 0, 0) &= -(1, 2, 3) \\ F(0, 0, 1, 0) &= (1, 3, 4), & F(0, 0, 0, 1) &= (1, 4, 5) \end{aligned}$$

Nüüd kasutame lauset 11.13: ülaltoodud vektorid on ruumi $\text{Im } F$ moodustajate süsteem. Moodustame koordinaatide maatriksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seega moodustavad vektorid $(1, 2, 3)$ ja $(0, 1, 1)$ vektorruumi $\text{Im } F$ baasi ning $\dim \text{Im } F = 2$.

Et leida $\dim \text{Ker } F$, olgu $F(v) = 0$, kus $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 233 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Vabadeks tundmatuteks võtame x_2 ja x_4 . Seega $\dim \text{Ker } F = 2$. Leiame $\text{Ker } F$ baasi. Selleks on ülaltoodud LVS-i lahendite fundamentaalsüsteem.

1. Olgu $x_2 = 1, x_4 = 0$, siis saame lahendivektoriks $(1, 1, 0, 0)$.
2. Olgu $x_2 = 0, x_4 = 1$, siis saame lahendivektoriks $(1, 0, -2, 1)$.

Vektorid $(1, 1, 0, 0)$ ja $(1, 0, -2, 1)$ moodustavadki $\text{Ker } F$ baasi. Nüüd on kerge kontrollida teoreemi 11.16

$$\dim \text{Im } F + \dim \text{Ker } F = 2 + 2 = 4$$

11.4. Singulaarne ja regulaarne lineaarkujutus

Olgu $F: V \rightarrow U$ lineaarkujutus. Tuletame meelde, et $F(0) = 0$. Öeldakse, et F on *singulaarne*, kui leidub vektor $0 \neq v \in V$ nii, et $F(v) = 0$. Kui $\text{Ker } F = \{0\}$, siis nimetatakse lineaarkujutust F *regulaarseks* ehk *mittesingulaarseks*.

Teoreem 11.18. *Regulaarne lineaarkujutus kujutab lineaarselt sõltumatu vektorisüsteemi lineaarselt sõltumatuks vektorisüsteemiks.*

Tõestus. Olgu $F: V \rightarrow U$ regulaarne lineaarkujutus ning vektorid $v_1, \dots, v_n \in V$ lineaarselt sõltumatud. Peame tõestama, et vektorid $F(v_1), \dots, F(v_n) \in \text{Im } F$ on samuti lineaarselt sõltumatud. Olgu

$$\alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_n F(v_n) = 0$$

kus $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Kuna F on lineaarne, siis

$$F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0 \implies \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \text{Ker } F$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 234 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kuid F on regulaarne, s.t $\text{Ker } F = \{0\}$. Seega

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

Kuna vektorid v_i on lineaarselt sõltumatud, peab $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Tulemus ütlebki, et vektorisüsteem $F(v_1), \dots, F(v_n) \in \text{Im } F$ on lineaarselt sõltumatu. \square

11.5. Isomorfism

Pealekujutus, üksühene kujutus ja bijektiivne kujutus

Olgu $F: V \rightarrow U$ lineaarkujutus. Öeldakse, et

- 1) F on üksühene e injektiivne, kui võrdusest $F(a) = F(b)$ järelneb $a = b$,
- 2) F on pealekujutus e surjektiivne, kui $\text{Im } F = U$,
- 3) F on bijektiivne, kui ta on üksühene pealekujutus, s.t ta on injektiivne ja surjektiivne.

Lause 11.19. *Lineaarkujutus on üksühene parajasti siis, kui ta on regulaarne.*

Tõestus. \implies : Olgu lineaarkujutus $F: V \rightarrow U$ üksühene. Siis ilmselt $\text{Ker } F = \{0\}$ ning seega on F regulaarne.

\impliedby : Olgu F regulaarne ning $F(a) = F(b)$. Siis järelneb lineaarsusest, et

$$F(a - b) = F(a) - F(b) = 0 \implies a - b = 0 \implies a = b$$

mis ütleb, et F on üksühene. \square

Koduleht

Tiitelleht



Lk 235 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 11.20. Vaatleme lineaarteisendusi

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & F(x_1, x_2, x_3) &\doteq (x_1 + x_2, x_1 - x_2) \\ G: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & G(x_1, x_2) &\doteq (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1) \end{aligned}$$

Näidata, et

- 1) F on pealekujutus, kuid ei ole üksühene,
- 2) G on üksühene, kuid ei ole pealekujutus.

Lahendus. 1) F ei ole üksühene, sest $(0, 0, 1) \in \text{Ker } F$, kuid on pealekujutus, s.t $\text{Im } F = \mathbb{R}^2$. Tõepoolest, olgu $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Peame näitama, et leidub $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ nii, et

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \end{cases}$$

2) G on üksühene, sest

$$\text{Ker } G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = x_1 - x_2 = 0\} = \{(0, 0)\}$$

s.t $\text{Ker } G$ koosneb vaid nullvektorist. Kuid G ei ole pealekujutus. Näiteks puudub vektoril $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ originaal vektorruumis \mathbb{R}^2 . Tõepoolest

$$(0, 0, 1) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1) \implies \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Viimane süsteem on aga vasturääkiv (lahendid puuduvad). □

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 236 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Isomorfism

Öeldakse, et linearkujutus $F: V \rightarrow U$ on *isomorfism*, kui ta on bijektiivne. Kui leidub isomorfism $F: V \rightarrow U$, siis öeldakse, et vektorruumid V ja U on isomorfsed ning kirjutatakse $V \cong U$.

Näide 11.21 (samasusukujutus). Samasusukujutus $1_V: V \rightarrow V$ on isomorfism iga vektorruumi V korral.

Näide 11.22 (transponeerimine). Defineerime kujutuse

$$F: \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{K})$$

valemiga $F(A) = A^T$. Kujutus F on linearsus järeltub teoreemist ???. Näitame, et F on isomorfism ning seega

$$\text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K}) \cong \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{K})$$

Tõepoolest, F on ilmselt pealekujutus, sest iga maatriks on mingi maatriksi transponeeritud maatriks. Kujutus F on ilmselt ka üksühene, sest võrdusest $F(A) = A^T = 0$ järeltub $(A^T)^T = A = 0$. \square

Näide 11.23 (koordinaatisomorfism). Olgu $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vektorruumi V baas. Vektori

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \quad (*)$$

*koordinaatvektori*s baasis B nimetasime teatavasti üheveerulist maatriksit

$$C_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 237 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Näitame, et kujutus $C_B: V \rightarrow \mathbb{K}^n$ on isomorfism. Seda kujutust nimetatakse *koordinaat-isomorfismiks*.

Kujutuse C_B lineaarsus järeldub lausest 6.47. Kontrollime, et C_B on üksühene. Tõepoolest, olgu

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n, \quad u = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n$$

kaks vektorit vektorruumis V . Võrdus $C_B(v) = C_B(u)$ tähendab, et

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \implies \alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, \dots, n \implies u = v$$

Jääb üle näidata, et C_B on pealekujutus. Olgu $x \doteq (\alpha_1 \dots \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n$ mingi veeruvektor. Defineerime vektori $v \in V$ valemiga (*). Siis ilmselt $x = C_B(v)$, st C_B on tõepoolest pealekujutus. \square

Teoreem 11.24 (isomorfismi kriteerium). *Olgu V ja U lõplikumõõtmelised vektorruumid ning $F: V \rightarrow U$ lineaarkujutus. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:*

- 1) F on isomorfism,
- 2) kui $\{v_1, \dots, v_n\}$ on vektorruumi V suvaline baas, siis vektorisüsteem $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on vektorruumi U baas,
- 3) vektorruumis V leidub baas $\{v_1, \dots, v_n\}$ nii, et vektorisüsteem $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on vektorruumi U baas.

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 238 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tõestus. 1) \implies 2) Olgu $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorruumi V baas. Vaatleme võrdust

$$\alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_n F(v_n) = F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

kus $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Kuna F on isomorfism, siis $\text{Ker } F = \{0\}$. Seega

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

millest vektorite v_i lineaarse sõltumatus tõttu järeljub, et $\alpha_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Vektorisüsteem $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on seega lineaarselt sõltumatu.

Jääb üle näidata, et $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on vektorruumi U moodustajate süsteem. Olgu $u \in U$. Kuna F on pealekujutus, siis peab leiduma $v \in V$ nii, et $u = F(v)$. Kirjutades

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

saame

$$\begin{aligned} u = F(v) &= F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_n F(v_n) \end{aligned}$$

mis ütleb, et $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on tõepoolest U moodustajate süsteem.

2) \implies 3) Ilmne.

3) \implies 1) Olgu $F(v) = 0$. Kirjutame

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Saame

$$0 = F(v) = F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 239 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$= \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n)$$

millest tingimuse 3) tõttu järeldub $\lambda_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Seega $v = 0$ ja $\text{Ker } F = \{0\}$, millest omakorda järeldub, et F on üksühene. Jääb üle näidata, et F on pealekujutus.

Olgu $u \in U$ suvaline vektor. Tingimusest 3) järeldub, et

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 F(v_1) + \cdots + \beta_n F(v_n) \\ &= F(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \end{aligned}$$

mis ütlebki, et F on pealekujutus. □

Tähelepanek 11.25. *Vektorruumide isomorfism kujutab baasi baasiks.*

Teoreem 11.26 (isomorfismi kriteerium). *Olgu V ja U lõplikumõõtmelised vektorruumid. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:*

- 1) $V \cong U$
- 2) $\dim V = \dim U$

Tõestus. 1) \implies 2) Olgu $V \cong U$ ning $F: V \rightarrow U$ olgu isomorfism. Kui $\{v_1, \dots, v_n\}$ on vektorruumi V baas, siis teoreemi 11.24 põhjal $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on vektorruumi U baas. Seega

$$\dim V = n = \dim U$$

2) \implies 1) Olgu $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorruumi V baas ja $\{u_1, \dots, u_n\}$ vektorruumi U baas. Teoreemi 11.9 põhjal leidub selline linearkujutus $F: V \rightarrow U$, et

$$F(v_i) = u_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Kuna $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ on baas, siis teoreemi 11.24 põhjal on F isomorfism. □

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 240 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Näide 11.27. Kuna

$$\text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K}) \cong \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{K})$$

siis on nendel ruumidel ühesugune mõõde

$$\dim \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K}) = \dim \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{K})$$

Näide 11.28. Kuna $\dim \text{Row } A = \dim \text{Col } A$ (vt teoreemi 6.67), siis on need ruumid isomorfsed, s.t $\text{Row } A \cong \text{Col } A$.

Teoreem 11.29. Olgu V ja U lõplikumõõtmelised ning $\dim V = \dim U$. Lineaarkujutus $F: V \rightarrow U$ on isomorfism parajasti siis, kui ta on regulaarne.

Tõestus. \implies : Kui F on isomorfism, siis on ta üksühene ja seega $\text{Ker } F = \{0\}$, millest järgneb regulaarsus.

\impliedby : Olgu F regulaarne. Siis on ta üksühene ning $\dim(\text{Ker } F) = 0$. Teoreemist 11.16 järgneb, et

$$\dim U = \dim V = \dim(\text{Im } F)$$

Siit järgneb eelneva teoreemi 11.26 põhjal, et $\text{Im } F \cong U$. See tulemus ütleb, et F on ka pealekujutus. Kuna F on kokkuvõttes bijektiivne, on ta isomorfism. \square

Isomorfismi omadusi

Vektorruumide isomorfism on *ekvivalentsirelatsioon*, s.t tal on järgmised omadused.

1. Refleksiivsus. $V \cong V$.
2. Sümmeetria. Kui $V \cong U$ siis $U \cong V$.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 241 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

3. Transitiiivsus. Kui $V \cong U$ ja $U \cong W$, siis $V \cong W$.

Lõplikumõõtmeliste vektorruumide korral järelduvad need omadused kergesti teoreemi 11.26 abil.

11.6. Tehted lineaarkujutustega

Lineaarkujutuste kombineerimisega on võimalik saada uusi lineaarkujutusi ning hulk $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ osutub vektorruumiks üle \mathbb{K} .

Lineaarkujutuste liitmine ja korrutamine arvuga

Olgu $F, G \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Summa $F + G$ ja korrutis λF defineeritakse valemitega

$$(F + G)(v) \doteq F(v) + G(v), \quad (\lambda F)(v) \doteq \lambda F(v) \quad \forall v \in V$$

Lause 11.30. *Lineaarkorrutiste summa ja korrutis arvuga on samuti lineaarkujutused.*

Tõestus. Olgu $a, b \in V$. Arvutame

$$\begin{aligned} (F + G)(\alpha a + \beta b) &= F(\alpha a + \beta b) + G(\alpha a + \beta b) \\ &= \alpha F(a) + \beta F(b) + \alpha G(a) + \beta G(b) \\ &= \alpha[F(a) + G(a)] + \beta[F(b) + G(b)] \\ &= \alpha(F + G)(a) + \beta(F + G)(b) \end{aligned}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 242 * 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

ning

$$\begin{aligned}(\lambda F)(\alpha a + \beta b) &= \lambda F(\alpha a + \beta b) = \lambda[\alpha F(a) + \beta F(b)] \\ &= \alpha \lambda F(a) + \beta \lambda F(b) = \alpha(\lambda F)(a) + \beta(\lambda F)(b)\end{aligned}$$

Tulemus ütleb, et $F + G \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ ja $\lambda F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$. □

Teoreem 11.31. $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ on vektorruum üle \mathbb{K} .

Tõestus. Vektorruumi aksioomide kontrolli jätame lugejale iseseisvaks ülesandeks. □

Teoreem 11.32. Olgu V ja U lõplikumõõtmelised. Siis

$$\dim[\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)] = \dim V \cdot \dim U$$

Tõestus. Tõestuse esitame hiljem, vt teoreem 11.48 ning sellele järgnev järeldus. □

Lineaarkujutuste kompositsioon

Olgu $F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ ja $G \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$

$$V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W$$

Kompositsiooni $G \circ F: V \rightarrow W$ defineerime valemiga

$$(G \circ F)(v) \doteq G(F(v)) \quad \forall v \in V$$

Märkus 11.33. Sageli kompositsiooni märki \circ ei eksponeerita. Seega kirjutatakse $GF \doteq G \circ F$.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 243 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lause 11.34. Olgu $F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ ja $G \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$. Siis on $G \circ F$ samuti linearkujutus ning $G \circ F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$

Tõestus. Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ning $a, b \in V$. Siis

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\alpha a + \beta b) &= G(F(\alpha a + \beta b)) = G(\alpha F(a) + \beta F(b)) \\ &= \alpha G(F(a)) + \beta G(F(b)) \\ &= \alpha(G \circ F)(a) + \beta(G \circ F)(b)\end{aligned}$$

Tulemus ütlebki, et $G \circ F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. \square

Teoreem 11.35 (kompositsiooni omadusi). Olgu V, U, W vektorruumid üle \mathbb{K} ning olgu järgmised kujutused lineaarsed:

$$F: V \rightarrow U, \quad F': V \rightarrow U \quad \text{ja} \quad G: U \rightarrow W, \quad G': U \rightarrow W$$

Siis

- 1) $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$
- 2) $(G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F$
- 3) $\lambda(G \circ F) = (\lambda G) \circ F = G \circ (\lambda F), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Tõestus. Nende valemite kontrolli jätame lugajale iseseisvaks ülesandeks. Kasutada kompositsiooni definitsiooni. \square

Teoreem 11.36 (kompositsiooni omadusi). Olgu

$$V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W \xrightarrow{H} Z$$

linearkujutused. Siis

Koduleht

Tiitelleht



Lk 244 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- 1) $F \circ 1_V = F$ ja $1_U \circ F = F$
- 2) $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$

Tõestus. Nende valemite kontroll jääb iseseisvaks ülesandeks. Kasutada kompositsiooni definitsiooni. \square

11.7. Pöördkujutus

Pöördkujutuse mõiste

Lineaarkujutuse $F: V \rightarrow U$ pöördkujutuseks nimetatakse kujutust $F^{-1}: U \rightarrow V$, mis rahuldab tingimusi $F^{-1} \circ F = 1_V$ ja $F \circ F^{-1} = 1_U$. Kujutust nimetatakse *pööratavaks*, kui tal leidub pöördkujutus.

Teoreem 11.37. *Bijektiivse lineaarkujutuse (isomorfismi) pöördkujutus on samuti lineaarne.*

Tõestus. Olgu $F: V \rightarrow U$ bijektiivne lineaarkujutus (isomorfism) ning $u, u' \in U$. Siis leiduvad üheselt määratud vektorid $v, v' \in V$ nii, et $F(v) = u$ ja $F(v') = u'$. Kuna F on lineaarne, siis

$$F(v + v') = F(v) + F(v') = u + u' \quad \text{ja} \quad F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda u$$

Kuna F^{-1} on pöördkujutus, siis

$$\begin{aligned} F^{-1}(u) &= v, & F^{-1}(u') &= v' \\ F^{-1}(u + u') &= v + v', & F^{-1}(\lambda u) &= \lambda v \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 245 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Siis aga

$$\begin{aligned} F^{-1}(u + u') &= v + v' = F^{-1}(u) + F^{-1}(u') \\ F^{-1}(\lambda u) &= \lambda v = \lambda F^{-1}(u) \end{aligned}$$

mis ütlebki, et F^{-1} on lineaarne. \square

Teoreem 11.38. Olgu V ja U vektorruumid ja $F: V \rightarrow U$ lineaarkujutus. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:

- 1) F on isomorfism,
- 2) F on pööratav.

Kujutuse F pöördkujutus G on isomorfism ning üheselt määratud kujutusega F : kui $U \ni b = F(a)$, siis $G(b) = a$.

Tõestus. Esitame tõestuse vaid sellise olukorra jaoks, kus V ja U on lõplikumõõtmelised.

1) \implies 2): Kui $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ on V baas, siis on teoreemi 11.24 järgi $D = \{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ vektorruumi U baas. Defineerime kujutuse $G: U \rightarrow V$ valemiga

$$G[F(v_i)] = (G \circ F)(v_i) = v_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

Teoreemi 11.8 kasutades saame seose $G \circ F = 1_V$. Rakendades kujutust F valemile (*), saame

$$F[G[F(v_i)]] = (F \circ G)(F(v_i)) = F[v_i], \quad i = 1, \dots, n$$

mis annab teoreemi 11.8 tõttu $F \circ G = 1_U$.

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 246 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

2) \implies 1): Kui $F(a) = F(b)$, siis $G[F(a)] = G[F(b)]$. Kuna $G \circ F = 1_V$, saame $a = b$. Siit järeldub, et F on üksühene. Kui $b \in U$, siis seos $F \circ G = 1_U$ tähendab, et $b = F[G(b)]$. Seega on F pealekujutus.

Kujutus G on üheselt määratud seosega $G \circ F = 1_V$, sest sellest seosest järeldub (*). G on isomorfism, sest ta teisendab baasi D baasiks B . Lõpuks saame etteantud $b \in U$ esitada kujul

$$b = \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = F(a)$$

kus

$$a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Siis ilmselt $G(b) = a$. □

Teoreem 11.39. Olgu V, U ja W vektorruumid.

1. $1_V^{-1} = 1_V$.
2. Kui linearkujutus $F: V \rightarrow U$ on pööratav, siis ka $F^{-1}: U \rightarrow V$ on pööratav ning kehtib $(F^{-1})^{-1} = F$.
3. Kui $V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W$ on pööratavad linearkujutused, siis on kujutus $G \circ F: V \rightarrow W$ samuti pööratav ning $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Teoreem 11.40. Isomorfismi pöördkujutus on samuti isomorfism. Isomorfismide kompositsioon on samuti isomorfism.

Tõestus. See järeldub eelnenud teoreemidest. □

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 247 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

11.8. Maatrikskujutuse omadusi

Eespool näitasime, et iga maatriks defineerib ühe (sellele maatriksile vastava) lineaarkujutuse. Olgu $A \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$. Kujutuse $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$ defineerisime valemiga $L_A(v) = Av$ iga $v \in \mathbb{K}^n$ korral. Järgmine teoreem näitab selle konstruktsiooni pööratavust.

Teoreem 11.41. *Olgu $F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$ lineaarkujutus. Esitame vektorruumide \mathbb{K}^n ja \mathbb{K}^k vektorid veeruvektoritena.*

1. *Leidub $k \times n$ -järku maatriks A nii, et $F(v) = Av$ iga vektori $v \in \mathbb{K}^n$ korral.*
2. *Maatriksi A veergudeks on vastavalt vektorid $F(e_1), \dots, F(e_n)$, kus $\{e_1, \dots, e_n\}$ on vektorruumi \mathbb{K}^n standardbaas*

$$A = (F(e_1) \quad \dots \quad F(e_n))$$

Tõestus. Olgu $\{e_1, \dots, e_n\}$ on vektorruumi \mathbb{K}^n standardbaas ning kirjutame

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad F(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad F(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

Siis on $A = (a_{ij})$ $k \times n$ -järku maatriks, mille j -is veerg on $F(e_j)$. Olgu $v \in \mathbb{K}^n$. Siis

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

Arvutame

$$F(v) = \alpha_1 F(e_1) + \alpha_2 F(e_2) + \dots + \alpha_n F(e_n)$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 248 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Standardmaatriksi võib arvutada ka standardvektorite e_1, e_2, e_3 abil. Maatriksi A veerudeks on vektorid $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$.

Teoreem 11.44 (maatrikskujutuse omadusi). *Olgu A ja B maatriksid ning allpool olevad tehted määratud. Siis*

- 1) Kui $L_A = L_B$, siis $A = B$
- 2) $L_I = 1_{\mathbb{K}^n}$
- 3) $L_A \circ L_B = L_{AB}$
- 4) $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$
- 5) $\text{Im } L_A = \text{Col } A$ ning $\text{rank } L_A = \text{rank } A$.

11.9. Linearkujutuse maatriksesitus

Olgu $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ vektorruumi V baas ning $D = \{u_1, \dots, u_k\}$ vektorruumi U baas. Vektorid

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V \quad \text{ja} \quad u = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k \in U$$

võime teatavasti esitada veeruvektorina

$$C_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad C_D(u) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

Kujutused $C_B: V \rightarrow \mathbb{K}^n$ ja $C_D: U \rightarrow \mathbb{K}^k$ on teatavasti isomorfismid, seega on nad pööratavad. Paneme tähele, et veeruvektor $C_B(v_j)$ on ühikmaatriksi j -is veerg.

Koduleht

Tiitelleht



Lk 250 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Olgu $F: V \rightarrow U$ lineaarkujutus. Lineaarkujutusele F vastav maatriks A on üheselt defineeritud kommutatiivse diagrammiga

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & U \\ C_B \downarrow & & \downarrow C_D \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{K}^k \end{array}$$

Maatriksi A ühesus järeldub implikatsioonist

$$L_A = L_{A'} \implies A = A'$$

Selle diagrammi kohaselt

$$C_D \circ F = L_A \circ C_B$$

Lineaarkujutus $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$ toimib veeruvektoritele järgmiselt:

$$L_A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Seega

$$C_D[F(v)] = L_A[C_B(v)] = AC_B(v) \quad \forall v \in V$$

See tingimus määrabki maatriksi $A \doteq M_{DB}(F)$, s.t

$$C_D[F(v)] = M_{DB}(F)C_B(v), \quad \forall v \in V$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)


Lk **251** ⊗ **286**

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Maatriksi A arvutamiseks esitame A veeruvektorite a_1, \dots, a_n kaudu

$$A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

Kuna veeruvektor $C_B(v_j)$ on ühikmaatriksi j -is veerg, siis saame

$$C_D[F(v_j)] = AC_B(v_j) = a_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Tulemuseks saame

$$A \doteq M_{DB}(F) = (C_D[F(v_1)] \ C_D[F(v_2)] \ \dots \ C_D[F(v_n)])$$

Seda maatriksit nimetatakse *linearkujutuse* $F: V \rightarrow U$ maatriksiks baasides B ja D . Valem defineerib kujutuse

$$M_{DB} : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \rightarrow \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$$

mille omadusi vaatleme järgmises alapunktis.

Näide 11.45. Defineerime $F: P_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^2$ valemiga

$$F(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) = (\alpha_0 + 2\alpha_2, \alpha_0 + 3\alpha_1 + 4\alpha_2)$$

Baasid valime järgmiselt:

$$B \doteq \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2\}, \quad D \doteq \{u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1)\}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)


Lk 252 * 286

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Leiame $M_{DB}(F)$.

Lahendus. Kõigepealt arvutame

$$F(v_1) = (1, 1) = u_1 + u_2$$

$$F(v_2) = (0, 3) = 3u_2$$

$$F(v_3) = (2, 4) = 2u_1 + 4u_2$$

Seega

$$\begin{aligned} M_{DB}(F) &\doteq (C_D[F(v_1)] \quad C_D[F(v_2)] \quad \dots \quad C_D[F(v_n)]) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sama tulemuseni jõuame ka teisel viisil. Kuna

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = \alpha_0 v_1 + \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3$$

siis

$$\begin{aligned} F(v) &= \alpha_0 F(v_1) + \alpha_1 F(v_2) + \alpha_2 F(v_3) \\ &= \alpha_0(u_1 + u_2) + \alpha_1(3u_2) + \alpha_2(2u_1 + 4u_2) \\ &= (\alpha_0 + 2\alpha_2)u_1 + (\alpha_0 + 3\alpha_1 + 4\alpha_2)u_2 \end{aligned}$$

Seega

$$C_D[F(v)] = \begin{pmatrix} \alpha_0 + 2\alpha_2 \\ \alpha_0 + 3\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 253 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

$$= M_{DB}(F)C_B(v) \implies M_{DB}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Näide 11.46 (maatrikskujutuse esitus). Olgu $A \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$ ning $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$ maatrikskujutus, mis on defineeritud valemiga $L_A(v) = Av$ iga $v \in \mathbb{K}^n$ korral. Olgu B ja D vektorruumide \mathbb{K}^n ja \mathbb{K}^k vastavad standardbaasid. Siis $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ning $C_D(u) = u$ iga $u \in \mathbb{K}^k$ korral. Seega

$$\begin{aligned} M_{DB}(L_A) &= (C_D[L_A(e_1)] \quad C_D[L_A(e_2)] \quad \cdots \quad C_D[L_A(e_n)]) \\ &= (L_A(e_1) \quad L_A(e_2) \quad \cdots \quad L_A(e_n)) \\ &= (Ae_1 \quad Ae_2 \quad \cdots \quad Ae_n) = A \end{aligned}$$

Teiste sõnadega, lineaarkujutuse L_A maatriksiks on parajasti maatriks A .

Näide 11.47. $M_{BB}(1_V) = I$, $M_{DB}(0) = 0$

11.10. Lineaarkujutuse maatriksesituse omadusi

Teoreem 11.48. *Olgu V ja U vektorruumid ning $\dim V = n$ ja $\dim U = k$. Olgu B ja D vektorruumide V ja U vastavad baasid. Siis kujutus*

$$M_{DB}: \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \rightarrow \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$$

on vektorruumide isomorfism.

Tõestus. Kõigepealt tõestame kujutuse M_{DB} lineaarsuse. Olgu $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ vektorruumi V baas. Etteantud $F, G \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ korral on maatriksi $M_{DB}(F + G)$ j -is veerg

$$C_D[(F + G)(v_j)] = C_D[F(v_j) + G(v_j)] = C_D[F(v_j)] + C_D[G(v_j)]$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 254 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

sest C_D on lineaarne. Viimase valemi parem pool on maatriksite $M_{DB}(F)$ ja $M_{DB}(G)$ j -indate veergude summa, seega

$$M_{DB}(F + G) = M_{DB}(F) + M_{DB}(G)$$

Nüüd arvutame maatriksi $M_{DB}(\lambda F)$ j -inda veeru

$$C_D[(\lambda F)(v_j)] = C_D[\lambda F(v_j)] = \lambda C_D[F(v_j)]$$

sest C_D on lineaarne. Viimase valemi parem pool on aga maatriksi $\lambda M_{DB}(F)$ j -is veerg. Seega

$$M_{DB}(\lambda F) = \lambda M_{DB}(F)$$

Näitame, et kujutus M_{DB} on üksühene. Piisab, kui näitame, et tuum $\text{Ker } M_{DB} = \{0\}$. Kui $M_{DB}(F) = 0$, siis $C_D[F(v_j)] = 0$ iga $j = 1, \dots, n$ korral. Kuid C_D on üksühene, seega $F(v_j) = 0$ iga j korral. Kuna vektorid v_j moodustavad baasi, siis peab $F = 0$.

Näitame, et kujutus M_{DB} on pealekujutus. Olgu $A \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$. Konstrueerime lineaarkujutuse $F: V \rightarrow U$ nii, et $M_{DB}(F) = A$. See tähendab, et $C_D[F(v_j)]$ oleks maatriksi A j -is veerg. Kui $D = \{u_1, \dots, u_k\}$, siis peab olema

$$F(v_j) = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{kj}u_k \quad \text{iga } j \text{ korral}$$

Kuid teoreemi 11.9 põhjal selline lineaarkujutus leidub. □

Järeldus 11.49. $\dim \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) = \dim V \cdot \dim U$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 255 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

11.11. Kompositsiooni maatriksesitus

Teoreem 11.50. Olgu $V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W$ lineaarkujutused ning olgu B, D ja E vektorruumide V, U ja W vastavad baasid. Siis

$$M_{EB}(G \circ F) = M_{ED}(G)M_{DB}(F)$$

Tõestus. Tähistame

$$X = M_{DB}(F), \quad Y = M_{ED}(G), \quad Z = M_{EB}(G \circ F)$$

Peame näitama, et $Z = YX$. Olgu n, k ja l vektorruumide V, U ja W vastavad mõõtmed. Maatriksid X, Y ja Z on üheselt määratud järgmiste kommutatiivsete diagrammidega:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{F} & U & \xrightarrow{G} & W \\ C_B \downarrow & & C_D \downarrow & & C_E \downarrow \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_X} & \mathbb{K}^k & \xrightarrow{L_Y} & \mathbb{K}^l \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{GF} & W \\ C_B \downarrow & & C_E \downarrow \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_Z} & \mathbb{K}^l \end{array}$$

Nende diagrammide kohaselt (kompositsiooni märki \circ ei eksponeeri)

$$C_DF = L_X C_B, \quad C_E G = L_Y C_D, \quad C_E G F = L_Z C_B$$

Nüüd arvutame nende valemite abil

$$C_E G F = (C_E G) F = (L_Y C_D) F = L_Y (C_D F) = L_Y (L_X C_B)$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 256 ⊛ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$= (L_Y L_X) C_B = L_{YX} C_B$$

Võrreldes seda tulemust valemiga $C_E G F = L_Z C_B$, saamegi maatriksi Z ühesusest tulenevalt $Z = YX$. \square

Teoreem 11.51. *Olgu $F: V \rightarrow U$ lineaarkujutus ning $\dim V = \dim U$. Siis on järgmised tingimused samaväärsed:*

- 1) kujutus F on isomorfism,
- 2) maatriks $M_{DB}(F)$ on pööratav vastavalt iga V ja U baasi B ja D korral,
- 3) maatriks $M_{DB}(F)$ on pööratav vastavalt mingi V ja U baasi B ja D korral.

Kehitib valem $M_{DB}(F)^{-1} = M_{BD}(F^{-1})$.

Tõestus. 1) \implies 2) Olgu $\dim V = \dim U = n$. Vaatleme kujutuste kompositsiooni

$$V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{F^{-1}} V$$

Seega saame eelmise teoreemi põhjal

$$M_{BD}(F^{-1})M_{DB}(F) = M_{BB}(F^{-1}F) = M_{BB}(1_V) = I_n$$

Samamoodi $M_{DB}(F)M_{BD}(F^{-1}) = I_n$, millega tingimus 2) ja viimane väide on tõestatud.

2) \implies 3) Ilmne.

3) \implies 1) Olgu $M_{DB}(F)$ pööratav mingite baaside B ja D korral. Kirjutame mugavuse huvides $A = M_{DB}(F)$. Siis $C_D F = L_A C_B$. Kuna C_D on isomorfism, siis saame $F = C_D^{-1} L_A C_B$. Kuna F on isomorfismide C_D^{-1}, L_A ja C_B kompositsioon, siis peab ta samuti olema isomorfism. \square

Koduleht

Tiitelleht

◀▶

◀▶

Lk 257 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Teoreem 11.52. Olgu V ja U lõplikumõõtmelised vektorruumid vastavate baasidega B ja D . Olgu $F : V \rightarrow U$ lineaarne kujutus. Siis $\text{rank } F = \text{rank } M_{DB}(F)$.

Tõestus. Tähistame mugavuse huvides $A \doteq M_{DB}(F)$ ning $n \doteq \dim V$. Näitest 11.14 teame, et $\text{Col } A = \text{Im } L_A = \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\} \doteq W$, s.t maatriksi A veeruruum ühtib lineaarkujutuse L_A muutumispiirkonnaga. Astakuteoreemi põhjal $\text{rank } A = \dim W$. Kuna $\text{rank } F = \dim \text{Im } F$, siis piisab mingi isomorfismi $S : \text{Im } F \rightarrow W$ konstrueerimisest.

Paneme tähele, et iga vektor $u \in \text{Im } F$ esitub kujul $u = F(v)$ ning vektor $C_D[F(v)] = AC_B(v) \in W$. Defineerime kujutuse $S : \text{Im } F \rightarrow W$ valemiga

$$S[F(v)] \doteq C_D[F(v)] \quad \forall F(v) \in \text{Im } F$$

Kuna C_D on lineaarne üksühene kujutus, peab seda olema ka S . Jääb üle vaid näidata, et S pealekujutus. Olgu $Ax \in W$ mingi vektor, kus $x \in \mathbb{K}^n$. Kuna C_B on pealekujutus, siis $x = C_B(v)$ mingi vektori $v \in V$ korral. Seda arvestades saame

$$Ax = AC_B(v) = C_D[F(v)] = S[F(v)]$$

seega F on pealekujutus. Kokkuvõttes saame, et S on isomorfism. \square

11.12. Operaatoralgebra

Vaatleme hulka $A(V) \doteq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$. Hulga $A(V)$ elemente nimetatakse *lineaaroperaatoriteks*, aga ka *lineaarteisendusteks*. Kui $\dim V = n$, siis $\dim A(V) = n^2$. Hulk $A(V)$ on vektorruum üle \mathbb{K} ning on *kinnine* kompositsiooni suhtes

$$F, G \in A(V) \quad \implies \quad FG \doteq F \circ G \in A(V)$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 258 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kompositsiooni $\circ: A(V) \times A(V) \rightarrow A(V)$ võib vaadelda operaatorite korrutamisenä. Hulka $A(V)$ nimetatakse seepärast *operaatoralgebraks*. Peale vektorruumi omaduse kehivad operaatoralgebras veel järgmised arvutusseadused iga $F, G, H \in A(V)$ ja iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral:

- 1) $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$ (assotsiatiivsus),
- 2) $H \circ (F + G) = H \circ F + H \circ G$ (distributiivsus),
- 3) $(F + G) \circ H = F \circ H + G \circ H$ (distributiivsus),
- 4) $(\lambda G) \circ F = \lambda(G \circ F) = G \circ (\lambda F)$ (arvuga korrutamise assotsiatiivsus),
- 5) $1_V \circ F = F = F \circ 1_V$ (unitaalus).

Üldiselt on kompositsioon aga mittekommutatiivne, s.t $F \circ G \neq G \circ F$.

11.13. Baasiteisendused

Uurime nüüd lineaarsete operaatorite käitumist baasiteisendusel.

Olgu $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ja $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ vektorruumi V baasid ning olgu $F: V \rightarrow V$ lineaarkujutus. Tähistame $M_B(F) \doteq M_{BB}(F)$. Üleminekumaatriks baasilt B baasile B' on

$$P \doteq P_{B' \leftarrow B} = (C_{B'}(b_1) \quad C_{B'}(b_2) \quad \cdots \quad C_{B'}(b_n))$$

Vektori $v \in V$ koordinaadid baasides B ja B' on seotud valemiga

$$C_{B'}(v) = P_{B' \leftarrow B} C_B(v) \quad \forall v \in V \quad \iff \quad C_{B'} = P_{B' \leftarrow B} C_B$$

Me teame, et

$$C_B F = M_B(F) C_B, \quad C_{B'} F = M_{B'}(F) C_{B'}$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 259 * 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Korrutades vasakpoolset valemit vasakult üleminekumaatriksiga P , saame

$$\begin{aligned} PM_B(F)C_B &= PC_B F = C_{B'} F = M_{B'}(F)C_{B'} \\ &= M_{B'}(F)PC_B \end{aligned}$$

Nüüd korrutame saadud valemit paremalt lineaarkujutusega C_B^{-1} . Saame

$$PM_B(F) = M_{B'}(F)P$$

millest

$$M_B(F) = P_{B' \leftarrow B}^{-1} M_{B'}(F) P_{B' \leftarrow B}$$

Saadud valem seobki lineaaroperaatori F maatriksid baasides B' ja B .

Näide 11.53. Lineaaroperaator $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, \quad x_2 + x_3, \quad -3x_1 + x_3)$$

Leida maatriksesitused baasides

$$\begin{aligned} B' &= \{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{standardbaas} \\ B &= \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Lahendus. Kõigepealt arvutame

$$\begin{cases} F(e_1) = F(1, 0, 0) = (2, 0, -3) \\ F(e_2) = F(0, 1, 0) = (-1, 1, 0) \\ F(e_3) = F(0, 0, 1) = (0, 1, 1) \end{cases}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 260 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Siis

$$\begin{aligned} M_{B'}(F) &= (C_{B'}[F(e_1)] \quad C_{B'}[F(e_2)] \quad C_{B'}[F(e_3)]) \\ &= (C_{B'}(2, 0, -3) \quad C_{B'}(-1, 1, 0) \quad C_{B'}(0, 1, 1)) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nüüd leiame üleminekumaatriksi $P_{B' \leftarrow B}$. Paneme tähele, et

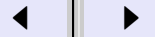
$$\begin{cases} (1, 1, 0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\ (1, 0, 1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\ (0, 1, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 \end{cases} \implies P_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jäab üle vaid arvutada

$$\begin{aligned} M_B(F) &= P_{B' \leftarrow B}^{-1} M_{B'}(F) P_{B' \leftarrow B} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 261 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

11.14. Ülesanded

Lineaarkujutuse mõiste

11.14.1 Defineerime kujutuse $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ valemiga

$$F(x, y) = (x + y, x)$$

Näidata, et F on lineaarne.

11.14.2 Defineerime kujutuse $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ valemiga

$$F(x, y, z) = (x + y + z, 2x - 3y + 4z)$$

Näidata, et F on lineaarne.

11.14.3 Olgu V fikseeritud järguga ruutmaatriksite vektorruum. Olgu M mingi maatriks vektorruumist V . Defineerime kujutuse $F: V \rightarrow V$ valemiga $F(A) = AM + MA$. Näidata, et F on lineaarne.

11.14.4 Olgu V fikseeritud järguga ruutmaatriksite vektorruum. Olgu M mingi maatriks vektorruumist V . Defineerime kujutuse $F: V \rightarrow V$ valemiga $F(A) = AM - MA$. Näidata, et F on lineaarne.

11.14.5 Defineerime lineaarkujutuse $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ valemitega

$$F(1, 2) = (2, 3), \quad F(0, 1) = (1, 4)$$

Leida $F(x, y)$.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 262 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Lineaarkujutuse tuum ja muutumispiirkond

11.14.6 Lineaarkujutus $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$F(x, y, z, t) = (x - y + z + t, \quad x + 2z - t, \quad x + y + 3z - 3t)$$

Leida $\text{Im } F$ ja $\text{Ker } F$ baasid ja dimensioonid.

11.14.7 Lineaarkujutus $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$F(x, y, z) = (x + 2y - z, \quad y + z, \quad x + y - 2z)$$

Leida $\text{Im } F$ ja $\text{Ker } F$ baasid ja dimensioonid.

11.14.8 Olgu $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ maatrikskujutus, kus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Leida $\text{Im } A$ ja $\text{Ker } A$ baasid ja dimensioonid.

Regulaarne ja singulaarne lineaarkujutus

11.14.9 Uurida kas alljärgnevad lineaarkujutused on singulaarsed. Singulaarsuse korral leida vektor $v \neq o$, mille kujutis on o .

(1) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga $F(x, y) = (x - y, x - 2y)$

(2) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga

$$F(x, y) = (2x - 4y, 3x - 6y)$$

[Koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 263 ⊗ 286](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Tehted lineaarkujutustega

11.14.10 Lineaarkujutused $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemitega

$$F(x, y, z) = (2x, y + z) \quad \text{ja} \quad G(x, y, z) = (x - z, y)$$

Leida (1) $F + G$, (2) $3F$, (3) $2F - 5G$.

11.14.11 Lineaarkujutused $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemitega

$$F(x, y, z) = (y, x + z) \quad \text{ja} \quad G(x, y, z) = (2z, x + y)$$

Leida (1) $F + G$ (2) $3F - 2G$.

11.14.12 Defineerime lineaarkujutuse $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ valemiga $H(x, y) = (y, 2x)$ ning defineerime F, G nagu ülesandes 11.14.11. Leida

- (1) $H \circ F$ ja $G \circ H$
- (2) $F \circ H$ ja $G \circ H$
- (3) $H \circ (F + G)$ ja $H \circ F + H \circ G$

11.14.13 Lineaaroperaatorid F ja G on defineeritud valemitega

$$F(x, y) = (y, x) \quad \text{ja} \quad G(x, y) = (0, x)$$

Leida (1) $F + G$ (2) $2F - 3G$ (3) FG (4) GF (5) F^2 (6) G^2

11.14.14 Lineaarkujutus $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga

$$F(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 264 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Leida pöördkujutus F^{-1} .

11.14.15 Linearkujutus $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$F(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$$

Leida pöördkujutus F^{-1} .

11.14.16 Lineaaroperaator $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on defineeritud valemiga

$$F(x, y, z) = (x + z, x - y, y)$$

Leida F^{-1} . **11.14.17** Tõestada teoreemis **11.35** esitatud kompositsiooni omadused.

Linearkujutuse maatriksesitus

11.14.18 Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

esitus baasis

$$B = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1, 0, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}$$

11.14.19 Linearkujutus $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga

$$F(x, y) = (2x + 3y, 4x - 5y)$$

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 265 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

Leida kujutuse F maatriksesitus baasis

$$B = \{u_1, u_2\} = \{(1, -2), (2, -5)\}$$

11.14.20 Lineaaroperaator $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on defineeritud valemiga

$$F(x, y) = (5x - y, 2x + y)$$

Olgu antud kaks baasi

$$E = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}, \quad B = \{u_1, u_2\} = \{(1, 4), (2, 7)\}$$

Leida **(1)** üleminekumaatriks $P_{B \leftarrow E}$, **(2)** kujutuse F maatriksesitus baasis E , **(3)** kujutuse F maatriksesitus baasis B .

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 266 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

A. Eksamitöö tüüpülesanded

- 1) Arvutada determinant.
Näide 1.8.
- 2) Tehted maatriksitega (+, −, korrutamine arvuga, korrutamine).
Näited 2.1, 2.2, 2.10, 2.11, 2.12.
- 3) Tehted aritmeetiliste vektoritega (liitmine, lahutamine, skalaariga korrutamine).
- 4) Leida pöördmaatriks ja kontrollida tulemust.
Näide 2.30.
- 5) Lahendada maatriksvõrrand ja kontrollida lahendit.
Näide 2.35.
- 6) Leida maatriksi astak.
Näide 3.4.
- 7) Lahendada LVS ja kontrollida lahendit.
Näide 4.10.
- 8) Leida homogeenise LVSi üldlahend ja kontrollida lahendit.
Näide 6.46.
- 9) Leida homogeenise LVSi lahendite fundamentaalsüsteem. Kontrollida lahendit.
Näide 6.46.
- 10) Tehted kompleksarvudega algebralisel, trigonomeetrilisel ja eksponentkujul. Astendamise ja juurimine. Ühejuurte arvutamine.
Näited 5.5, 5.9, 5.20, 5.21, 5.27, 5.28, 5.29, 5.33, 5.34, 5.36.
- 11) Lahendada ruutvõrrand üle kompleksarvude ja kontrollida lahendit.
Näide 5.25.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 267 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

- 12) Leida vektori koordinaadid etteantud baasis ja kontrollida arendust.
Tene sõnastus: leida vektori arendus etteantud baasis.
- 13) Uurida vektorisüsteemi lineaarset sõltuvust: leida vektorisüsteemi astak, juhtvektorid arendada vabade kaudu. Kontrollida arendusi.
Vihje: kasuta astakuteoreemi 6.66 ja uuri alapunkti 6.12.
- 14) Leida vektori koordinaadid baasis B' kui on teada vektori koordinaadid baasis B .
Kontrollida arendust.
Näide 6.51.
- 15) Ortonormeerida vektorisüsteem ja kontrollida tulemuse ortonormeeritust.
Näide 7.24.
- 16) Leida maatriksi omaväärtused ja omaruumide baasivektorid. Kontrollida tulemust omaväärtusvõrrandiga.
Näide 8.7, 8.8.
- 17) Leida ruutmaatriksi karakteristik polünoom ja kontrollida Cayley-Hamiltoni teoreemi.
Näide 10.4.
- 18) Diagonaalida maatriks ja kontrollida tulemust.
Näited 9.3, 9.3.
- 19) Diagonaalida ruutvorm/sümmeetriline maatriks ortogonaalteisendusega ja kontrollida tulemust.
Näited 9.9, 9.10.
- 20) Arvutada maatriksfunktsioon.
Näited 10.8, 10.9, 10.10, 10.11, 10.12, 10.13, 10.14.
- 21) Kontrollida kujutuse linearsust.
Näide 11.1.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 268 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

- 22) Lineaarkujutuse konstrueerimine.
Näide 11.10.
- 23) Leida $\text{Im } F$ ja $\text{Ker } F$.
Näited 11.14, 11.15.
- 24) Leida $\text{Im } F$ baas ja mõõde. Leida $\text{Ker } F$ baas ja mõõde.
Näide 11.17.
- 25) Leida lineaarkujutuse maatriks etteantud baasis.
Näited 11.43, 11.45.
- 26) Leida lineaarkujutuse maatriks baasis B' kui on teada tema maatriks baasis B .
Näide 11.53

Koduleht

Tiitelleht



Lk 269 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

B. Vastused

B.1. Determinandid

1.4.1 -2 1.4.2 -1 1.4.3 -1 1.4.4 $4ab$ 1.4.5 1
 1.4.6 $\sin(\alpha - \beta)$ 1.4.7 $\cos(\alpha + \beta)$ 1.4.8 0 1.4.9 1
 1.4.10 1 1.4.12 40 1.4.13 -3 1.4.14 100 1.4.15 -5
 1.4.16 0 1.4.17 1 1.4.18 1 1.4.19 2 1.4.20 4
 1.4.21 -8 1.4.22 0 1.4.23 $3abc - a^3 - b^3 - c^3$
 1.4.24 $2x^3 - (a + b + c)x^2 + abc$ 1.4.25 $(ab + bc + ca)x + abc$
 1.4.26 $\sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta)$ 1.4.28 -8
 1.4.29 -3 1.4.30 -9 1.4.31 18 1.4.32 -10 1.4.33 150 1.4.34 5 1.4.35
 52 1.4.36 1932 1.4.37 100 1.4.38 -336 1.4.39 10 1.4.40 $\prod_{k>i}(x_k - x_i)$

B.2. Maatriksarvutus

$$2.7.5 \quad AB = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$2.7.6 \quad AB = 0, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 0 & 30 & -36 \\ 0 & 25 & 30 \end{pmatrix} \quad 2.7.8 \quad \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$$

$$2.7.9 \quad \begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix} \quad 2.7.10 \quad \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.7.11 \quad \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$$2.7.12 \quad D(\alpha)D(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix},$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 270 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$D^n(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

B.3. Maatriksi astak

3.6.1 2 **3.6.2** 3 **3.6.3** 3 **3.6.4** 3 **3.6.5** 3 **3.6.6** 2

3.6.7 $\lambda = 0$ korral on astak 2, $\lambda \neq 0$ korral 3.

3.6.8 $\lambda = 3$ korral on astak 2, $\lambda \neq 3$ korral 3.

3.6.9 $\lambda = 2$ korral on astak 1, $\lambda = 8$ korral 2, $\lambda \neq 2, 8$ korral 3.

3.6.10 $\lambda = 1$ korral on astak 1, $\lambda = 5$ korral 2, $\lambda \neq 1, 5$ korral 3.

3.6.11 $\lambda = 2$ korral on astak 1, $\lambda = -1$ korral 2, $\lambda \neq -1, 2$ korral 3.

3.6.12 $\lambda = 0, -2, -4$ korral on astak 3, $\lambda \neq 0, -2, -4$ korral 4.

B.5. Kompleksarvud

5.13.1 (1) $1 + 18i$ (2) $4i$ (3) $7 + 17i$ (4) $10 - 11i$
 (5) $14 - 5i$ (6) $5 + i$ (7) $\frac{13}{2} - \frac{1}{2}i$ (8) $\frac{11}{5} - \frac{27}{5}i$ (9) 4
 (10) $52i$ (11) 2 (12) 1

5.13.2 (1) i (2) 1 (3) -1 (4) $-i$ (5) i (6) -1
 (7) i (8) i

5.13.3 (1) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ (2) -2 (3) 0

5.13.8 (1) $3 + 4i$ (2) $5 - 12i$

5.13.14 (1) 2^{50} (2) 2^{150} (3) -2^{30} (4) -2^6 (5) $2^{15}i$

5.13.16 (1) $3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$ (2) $\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 271 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

(3) $4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$

(4) $\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$

(5) $5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$

(6) $\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x - 5 \cos x \sin^4 x$

5.13.17 (1) $\frac{1}{4}(-\sin 3x + 3 \sin x)$ (2) $\frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x)$

(3) $\frac{1}{8}(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$

(4) $\frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$ (5) $\frac{1}{16}(\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$

(6) $\frac{1}{16}(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)$

B.7. Skalaarkorrutis

7.8.1 $(a|b) = 16$, $(a|c) = -4$, $(b|c) = -13$, $(a + b|c) = -17$, $|a| = \sqrt{21}$, $|b| = \sqrt{38}$,
 $|c| = \sqrt{29}$ 7.8.2 $(f|g) = -1$, $(f|h) = -\frac{37}{4}$, $|f| = \frac{\sqrt{57}}{3}$, $|g| = 1$, $\frac{f}{|f|} = \frac{3(t+2)}{\sqrt{57}}$, $\frac{g}{|g|} = 3t - 2$

7.8.8 $(a|b) = 30$ 7.8.9 $|a - b| = 30$ 7.8.10 $|a + b| = 24$

B.10. Maatriksfunktsioonid

10.8.5 $\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}$ 10.8.6 $2^{50} \begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$

10.8.7 $\begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$

10.8.8 $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \sin 5 + 2 \sin(-1) & 2 \sin 5 - 2 \sin(-1) \\ 4 \sin 5 - 4 \sin(-1) & 2 \sin 5 + 4 \sin(-1) \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} -0,919773 & -0,039151 \\ -0,078302 & -0,880622 \end{pmatrix}$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 272 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$10.8.9 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$10.8.10 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \cos 1 - 2 \cos(-1) & -2 \cos 1 + 2 \cos(-1) \\ 4 \cos 1 - 4 \cos(-1) & -2 \cos 1 + 4 \cos(-1) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0,540302 & 0 \\ 0 & 0,540302 \end{pmatrix}$$

$$10.8.11 \begin{pmatrix} \sin 2t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 2t & t \cos 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 3t \end{pmatrix}$$

$$10.8.12 \begin{pmatrix} 3 + 2\pi in & -15 & 6 \\ 1 & -5 + 2\pi in & 2 \\ 1 & -5 & 2 + 2\pi in \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}$$

$$10.8.13 \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \quad 10.8.14 \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10.8.15 \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^5 + 2e^{-1} & 2e^5 - 2e^{-1} \\ 4e^5 - 4e^{-1} & 2e^5 + 4e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99,0647 & 49,3484 \\ 98,6969 & 49,7263 \end{pmatrix}$$

$$10.8.16 \begin{pmatrix} 4e - 3 & 2 - 2e \\ 6e - 6 & 4 - 3e \end{pmatrix} \quad 10.8.17 \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10.8.18 \begin{pmatrix} 3e - 1 & e & -3e + 1 \\ 3e & e + 3 & -3e - 3 \\ 3e - 1 & e + 1 & -3e \end{pmatrix} = (e - 2)A^2 + A + I$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 273 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$10.8.19 \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \quad 10.8.20 \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -2e^t + 2e^{-t} & -2e^t + 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$10.8.21 \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$10.8.22 \begin{pmatrix} \cos 2t + 2 \sin 2t & \frac{5}{2} \sin 2t \\ -2 \sin 2t & \cos 2t - 2 \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$10.8.23 \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$10.8.24 \frac{e^{-4t}}{3} \begin{pmatrix} 3 \cos 3t + 4 \sin 3t & \sin 3t \\ -25 \sin 3t & 3 \cos 3t - 4 \sin 3t \end{pmatrix}$$

$$10.8.25 \frac{e^{3t}}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} \sqrt{15} \cos \sqrt{15}t + \sin \sqrt{15}t & -2 \sin \sqrt{15}t \\ 8 \sin \sqrt{15}t & \sqrt{15} \cos \sqrt{15}t - \sin \sqrt{15}t \end{pmatrix}$$

$$10.8.26 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 10.8.27 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10.8.28 \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9e^{-t} & -3e^{-t} + 3e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} + 3te^{2t} \\ 0 & 9e^{2t} & 9te^{2t} \\ 0 & 0 & 9e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$10.8.29 \begin{pmatrix} 1 & -2 + 2 \cos t + \sin t & -5 + 5 \cos t \\ 0 & \cos t - 2 \sin t & -5 \sin t \\ 0 & \sin t & \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 274 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

B.11. Linearkujutused

$$11.14.5 \quad F(x, y) = (y, -5x + 4y)$$

$$11.14.6 \quad \dim \operatorname{Im} F = 2, \quad \dim \operatorname{Ker} F = 2$$

$$11.14.7 \quad \dim \operatorname{Im} F = 2, \quad \dim \operatorname{Ker} F = 1$$

$$11.14.8 \quad \dim \operatorname{Im} F = 2, \quad \dim \operatorname{Ker} F = 2$$

11.14.9 (1) Ei ole singulaarne (2) Singulaarne

$$11.14.10 \quad (1) \quad (F + G)(x, y, z) = (x - z, y)$$

$$(2) \quad (3F)(x, y, z) = (6x, 3y + 3z)$$

$$(3) \quad (2F - 5G)(x, y, z) = (-x + 5z, -3y + 2z)$$

$$11.14.11 \quad (1) \quad (F + G)(x, y, z) = (y + 2z, 2x - y + z)$$

$$(2) \quad (2F - 5G)(x, y, z) = (3y - 4z, x + 2y + 3z)$$

$$11.14.12 \quad (1) \quad (H \circ F)(x, y, z) = (x + y, 2y),$$

$$(H \circ G)(x, y, z) = (x - y, 4z)$$

(2) ei ole määratud

$$(3) \quad (H \circ (F + G))(x, y, z) = (H \circ F + H \circ G)(x, y, z) = \\ = (2x - y + z, 2y + 4z)$$

$$11.14.13 \quad (1) \quad (F + G)(x, y) = (y, 2x)$$

$$(2) \quad (2F - 3G)(x, y) = (2y, -x)$$

$$(3) \quad (FG)(x, y) = (x, 0) \quad (4) \quad (GF)(x, y) = (0, y) \quad (5) \quad F^2 = I$$

$$(6) \quad G^2 = 0$$

$$11.14.14 \quad F^{-1}(x, y) = (2x - y, -3x + 2y)$$

$$11.14.15 \quad F^{-1}(x, y, z) = (x + 3y + 14z, y - 4z, z)$$

$$11.14.16 \quad F^{-1}(x, y, z) = (y + z, y, x - y - z)$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 275 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$11.14.18 \begin{pmatrix} 11 & 21 & 17 \\ -5 & -14 & -8 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$11.14.19 \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$$

$$11.14.20 \text{ (1) } P_{B \leftarrow E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ (2) } \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (3) } \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Koduleht

Tiitelleht



Lk 276 * 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kirjandus

- [1] H. Anton and C. Rorres. Elementary Linear Algebra: Applications Versions. 8th Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000
- [2] C. W. Curtis. Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984.
- [3] W. Greub. Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.
- [4] G. Kangro. Kõrgem algebra. Eesti Riiklik Kirjastus. Tallinn, 1962.
- [5] M. Kilp. Algebra I, II. Tartu, 1998.
- [6] S. Lang. Introduction to Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1994.
- [7] S. Lang. Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1993.
- [8] C. D. Lay. Linear Algebra and Its Applications. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1993.
- [9] S. Lipschutz and M. Lipson. Schaum's Outline of Linear Algebra. McGraw-Hill, New York-London-Tokyo, 2001.
- [10] A. Lõhmus, I. Petersen, H. Roos. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu. Valgus. Tallinn, 1982.
- [11] W. K. Nicholson. Elementary Linear Algebra with Applications. PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1990.

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 277 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

- [12] P. Puusemp. Lineaaralgebra. Avita, Tallinn, 2000.
- [13] R. J. Valenza. Linear Algebra. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London, 1993.

Koduleht**Tiitelleht**

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 278 ⊗ 286

Tagasi**Täisekraan****Lahku failist**

Aineregister

adjungeeritud maatriks, 39, 201

alamdeterminant, 12

alamruum, 141

 mittetriviaalne, 140

 triviaalne, 141

algebra põhiteoreem, 101

algebraalne kordsus, 172

algebraalne täiend, 12

arendusteoreemid, 14

arendusvalemid, 14

aritmeetiline vektor, 22

 komponendid, 22

 koordinaadid, 22

 skalaarkorrutis, 27

aritmeetiline vektorruum, 111

astakuteoreem, 144

astakutingimus, 63

baas, 126

baasiteisendused, 135, 259

Capelli, Alfredo, 63

Cauchy, Augustin Louis, 159

Cauchy-Schwarzi võrratus, 159

Cayley, Artur, 201

Cayley-Hamiltoni teoreem, 201

Cramer, Gabriel, 61

Crameri peajuht, 61

Crameri valemid, 61

de Moivre, Abraham, 99

de Moivre'i valem, 99

determinant

n -järku, 12

 alamdeterminant, 12

 arendusteoreemid, 14

 arendusvalemid, 14

 arvutamine, 16

 esimest järku, 10

 kolmandat järku, 11

 kolmnurkne, 15

 miinor, 12

 omadused, 15

 teist järku, 10

 Vandermonde'i, 20

diagonaalimine, 184

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 279 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

ortogonaalne, 189
diagonaalmaatriks, 174, 184
diagonaaluvus
 ortogonaalne, 189
dimensioon, 130
ekvivalents, 51, 66
ekvivalentsi omadused
 refleksiivsus, 51, 66
 sümmeetria, 51, 66
 transitiivsus, 51, 66
ekvivalentsirelatsioon, 241
elementaarteisendused, 51, 66
 esimest liiki, 51, 66
 teist liiki, 51, 66
erilahend, 64
Euler, Leonhard, 97
Euleri funktsioon, 97
Euleri valemid, 98
fundamentaallemma
 esimene, 127
 teine, 129
funktsiooniruum, 112
Gauss, Carl Friedrich, 65

Gaussi meetod, 65, 67
 idee, 67
 kokkuvõte, 68
geomeetiline kordsus, 171
geomeetiline vektor, 112
Gram, Jørgen Pedersen, 165
Grami-Schmidti ortogonaalimismeetod, 165
Hamilton, William Rowan, 201
hermiitiline konjugeerimine, 84
Hermite, Charles, 84
homogeenne LVS
 mittetriviaalne lahend, 60
 lahendite omadused, 61
 triviaalne lahend, 60
isomorfism, 235, 237
isomorfismi kriteerium, 238, 240
juhtelement, 52
juhtvektor, 146
karakteristlik
 polünoom, 172
 võrrand, 172
kolmnurga võrratus, 161

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 280 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

kommutaator, 30
kompleksarv, 74
 algebraalne kuju, 77
 argumendi peaväärtus, 96
 argument, 96
 arvutusseadused, 90
 eksponentkuju, 98
 imaginaarühik, 75
 imaginaarühiku pöördarv, 88
 imaginaarosa, 75
 jagamine, 88
 jagatis, 89
 jagatis algebraisel kujul, 89
 juurimine, 103
 kaaskompleksarv, 83
 kompleksne konjugeerimine, 83
 korpus, 74
 korrutamine, 78, 80
 korrutise üldvalem, 82
 lahutamine, 78
 liitmine, 78
 maatrikskuju, 74
 moodul, 86
 mooduli omadused, 87
 polaarkoordinaadid, 95
 pöördarv, 78, 87
 pöördarvu arvutamine, 87
 pöördarvu olemasolu, 87
 pöördarvu omadused, 87
 reaalosa, 75
 ruutjuur, 91
 summa, 79
 tehted, 77
 trigonomeetriline kuju, 96
 vahe, 79
komplekstasand, 77
 imaginaartelg, 77
 reaaltelg, 77
kompositsioon, 243
 maatriksesitus, 256
 omadused, 244
koondamisreegel, 114
koordinaadid, 133
koordinaatide teisenemisvalemid, 137
koordinaatisomorfism, 238
koordinaatvektor, 133
korpus, 91, 109, 111
 arvutuseadused, 109
 kompleksarvude korpus \mathbb{C} , 110
 ratsionaalarvude korpus \mathbb{Q} , 110

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 281 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

- reaalarvude korpus \mathbb{R} , 110
- Kronecker, Leopold, 13
- Kroneckeri sümbol, 13
- Kroneckeri-Capelli teoreem, 63, 148
- kujutus, 218
- kujutuste võrdsus, 222
- lahendite fundamentaalsüsteem, 131
- Lie korrutis, 30
- lineaarkombinatsioon, 119
 - mittetriviaalne, 119
 - triviaalne, 119
- linearkujutus, 218
 - aditiivsus, 218
 - astak, 230
 - bijektiivne, 235
 - homogeensus, 218
 - injektiivne, 235
 - kompositsioon, 243
 - korrutamise arvuga, 242
 - maatriks, 252
 - maatriksesitus, 250
 - maatriksesituse omadused, 254
 - mittesingulaarne, 234
 - muutumispiirkond, 227
 - pealekujutus, 235
 - regulaarne, 234
 - singulaarne, 234
 - summa, 242
 - sürjektiivne, 235
 - tuum, 227
 - üksühene, 235
- lineaarne
 - sõltumatus, 119
 - sõltuvus, 119
- lineaarne kate, 141, 142
- lineaarne operaator, 218
- lineaaroperaator, 218
- lineaarse sõltumatuse tunnus, 124
- lineaarse sõltuvuse tunnus, 125
- lineaarteisendus, 218
- lineaarvõrrandisüsteem, 57
 - (kordajate) maatriks, 57
 - ekvivalentsus, 65
 - erilahend, 64
 - homogeenne, 60
 - homogeense LVS-i lahendiruum, 112
 - kooskõlaline, 58
 - laiendatud maatriks, 57
 - määratud, 58

Koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 282 ⊗ 286

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- maatrikskujude, 58
- samaväärsus, 65
- trepikujuline, 66
- vasturääkiv, 58
- üldlahend, 64
- maatriks, 21
 - adjungeeritud, 39, 201
 - antihermiitiline, 84
 - antisümmeetriline, 35
 - astak, 51
 - astaku leidmine, 53
 - astmed, 200
 - astmerida, 204
 - diagonaalmaatriks, 184
 - diagonaaluv, 184
 - hermiitiline, 84, 175
 - juhtelement, 52
 - kommuteeruvus, 30
 - maatriksi järk, 21
 - maatriksi ja arvu korrutis, 23
 - maatriksite jagamine, 42
 - maatriksite korrutamise, 28
 - maatriksite summa, 22
 - maatriksite võrdsus, 22
 - maatriksite vahe, 26
 - maatrikskorrutise mittekommutatiivsus, 30
 - maatrikskorrutise omadused, 32
 - maatrikskujutus, 222
 - maatriksruum, 111
 - maatrikstehete omadused, 25
 - maatriksvõrrandid, 42
 - miinorid, 50
 - nullmaatriks, 24
 - ortogonaalmaatriks, 189
 - polünoom, 200
 - pööratav, 38
 - pöördmaatriks, 37
 - reaindeks, 21
 - reavektor, 22
 - regulaarne, 38
 - ruutmaatriks, 21
 - ruutmaatriksi peadiagonaal, 21
 - sümmeetriline, 176
 - singulaarne, 38
 - sümmeetriline, 35
 - toime, 222
 - transponeerimine, 34
 - transponeerimise omadusi, 36

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 283 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

- trepikujuline, 52
treppmaatriks, 52
treppmaatriksi astak, 53
vahe, 26
vastandmaatriks, 25
veeruindeks, 21
veeruvektor, 22
ühikmaatriks, 31
maatriksastmerida, 204
maatriksfunktsioon, 200
maatrikskujutus, 222
 maatriksesitus, 254
 muutumispiirkond, 228
 omadused, 248
 tuum, 228
maatrikspolünoom, 200
maatrikstehete omadused, 25
 arvuga korrutamise assotsiatiivsus, 26, 32
 distributiivsus, 26
 korrutamise assotsiatiivsus, 32
 korrutamise distributiivsus, 32
 liitmise assotsiatiivsus, 25
 liitmise kommutatiivsus, 25
 nullmaatriksi olemasolu, 25
 unitaalsus, 26, 32
 vastandmaatriksi olemasolu, 25
maatriksteisendus, 222
mõõde, 127, 130
märgitegur, 12

nullitegurid, 30
nullmaatriksi neutraalsus, 24
nullruum, 111, 229

omaruum, 171
omavektor, 171
omaväärtus, 171
omaväärtusülesanne, 171
operaatoralgebra, 258
 arvutusseadused, 259
ortogonaalbaas, 163
ortogonaalimine, 164
ortogonaalmaatriks, 189
ortogonaalsus, 162

Poissoni-Lie algebra, 34
polünoom, 100
 juur, 100
polaarkaugus, 95
polaarnurk, 95

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 284 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

- pöördkujutus, 245
pöördmaatriks, 37
 ainsus, 37
 arvutamine, 39
 olemasolu, 39
 omadused, 38
- reavektorite ruum, 142
ristbaas, 162, 163
ruutude summa valem, 86
ruutude vahe valem, 33
ruutvõrrand üle kompleksarvude, 91
ruutvorm, 193
 diagonaalimine, 193
 maatriks, 194
 ortogonaalne diagonaalimine, 195
- samasuskujutus, 222
sarnased maatriksid, 174
Schmidt, Erhard, 165
Schwarz, Karl Hermann, 159
skalaar, 110
skalaarkorrutis
 kompleksses vektorruumis, 156
 reaalses vektorruumis, 155
skalaarkorrutise omadused
- aditiivsus, 155, 156
homogeensus, 155, 156
positiivsus, 155, 156
sümmeetria, 155, 156
- spekter, 172
standardbaas, 127, 138
- toime, 222
transponeerimine, 34
 omadused, 36
treppmaatriks, 52
triviaalne vektorruum, 111
- vaba vektor, 147
vabad tundmatud, 64
vahevektor, 115
vastandmaatriks, 25
veeruvektorite ruum, 142
vektor, 111
 juhtiv (juhtvektor), 146
 norm, 157
 normeeritud, 158
 pikkus, 157
 vaba, 146
 ühikvektor, 158
vektorisüsteem

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Lk 285 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

- astak, 143, 144
- baasalamsüsteem, 143
- ortogonaalne, 162
- ortonormeeritud, 162
- vektorite omadused, 113
- koondamisreegel, 114
- nullitegurite puudumine vektorruumis, 117
- nullvektori ainsus, 114
- nullvektori korrutamine skalaariga, 116
- vastandvektori ühesus, 114
- vastandvektori arvutamine, 116
- vektori korrutamine nulliga, 116
- vektori korrutamine vastandarvuga, 117
- vektorite võrdsuse tunnus, 135
- vektoritevaheline nurk, 160
- vektorruum, 110
 - alamruum, 141
 - aritmeetiline, 111
 - arvutusseadused, 110
 - baas, 126
 - baasiteisendused, 135
 - dimensioon, 130
 - eukleidiline, 155
 - lõplikumõõtmeline, 127
 - moodustajate süsteem, 126
 - mõõde, 127, 130
 - unitaarne, 156
- vektorvõrrand
 - esimest liiki, 113
 - teist liiki, 115
- ühejuured, 101
 - geomeetiline tõlgendus, 102
- üldlahend, 64
- üleminekumaatriks, 136
- üleminekumaatriksi omadused, 139
 - pööratavus, 139
 - transitiivsus, 139

[Koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 286 ⊗ 286](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)