TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 334

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

X

ТАЛЛИН 1972

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 621

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ
X

Таллин 1972

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 621.372.061.4

Х.В. Силламаа

СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОР-ПРОСТРАНСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОГОПОЛЮСНЫХ ЦЕПЕЙ

В работе [1] было показано, что множество всех неавтономных адмитансных многополюсников (цепей, обладающих матрицей узловых проводимостей) может быть рассмотрено как некоторое векторное пространство, элементами (векторами) которого являются отдельные многополюсники. Ввиду существования базиса в любом векторном пространстве [2], каждый вектор-многополюсник может быть представлен как линейная комбинация некоторых более элементарных многополюсников, выбранных в качестве базиса пространства. Такие элементарные базисные многополюсники целесообразно называть элементорами, а все пространство – элементор-пространством. Задачей настоящей работы является уточнение структуры такого пространства.

Множество адмитансных многополюсников распадается на классы по количеству полюсов n. Согласно [1], размерность элементор-пространства n-полюсников равняется $(n-1)^2$ [1]. Там же была показана возможность всегда выбирать в качестве базисных элементоров трехполюсники (дополненные $n-3$ изолированными зажимами до n-полюсника). Поэтому целесообразно сначала рассматривать свойства элементор-пространства трехполюсников.

Трехполюсники

"Универсальным" элементором среди трехполюсников является транзор, через который можно представить любые трех-

[1] Это и вполне естественно, так как максимальное количество независимых элементов в матрице проводимости n-полюсника также равняется $(n-1)^2$.

полюсники [I]. Существует 6 различных транзоров на трех полюсах (их нормированные неопределенные матрицы узловых проводимостей представлены в таблице I) [I] Не все из них независимы ввиду существования т.н. адмиторных связей. Адмитор A_{ab} представляет собой вырожденный трехполюсник (соответствует двухполюснику между полюсами a и b, с дополнительным изолированным полюсом c (и может быть получен [I] суммированием двух транзоров двумя различными способами

$$A_{ab} = A_{ba} = T_{abc} + T_{bac} = T_{cab} + T_{cba}. \tag{I}$$

Таким образом три возможных адмитора на трех полюсах порождают следующие три связи между транзорами:

$$\begin{aligned} A_{12} &= T_{123} + T_{213} = T_{312} + T_{321} \\ A_{13} &= T_{213} + T_{231} = T_{132} + T_{312} \\ A_{23} &= T_{123} + T_{132} = T_{231} + T_{321}. \end{aligned} \tag{2}$$

Нетрудно убедиться, что среди уравнений (2) только два независимых и поэтому из 6 транзоров независимыми могут оказаться максимально четыре. Но так как размерность элементор-пространства трехполюсников - четыре, то, очевидно, ввиду существования транзорных базисов [I], независимых транзоров должно быть не менее, чем четыре. Поэтому соотношениями (2) исчерпываются все связи между транзорами трехполюсника.

Для более подробного анализа структуры пространства целесообразно введение определенной метрики. В дальнейшем рассматриваем случай введения обычной эвклидовой метрики [2], вводя обыкновенное скалярное произведение (символ $\langle a, b \rangle$) и норму (символ $\|a\| = \sqrt{\langle a,a \rangle}$) векторов. Далее, принимаем два естественных постулата:

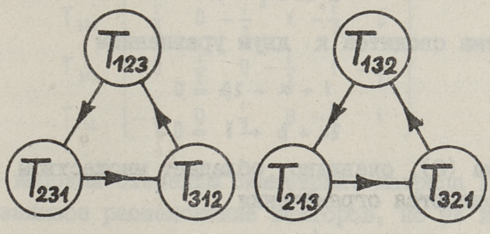
I - циклическое переименование полюсов не должно изменить метрических соотношений в пространстве (поэтому циклическому переименованию полюсов может соответствовать

[I] Точнее, транзор можно расположить шестью способами на трех ранее обозначенных полюсах.

лишь поворот векторов в пространстве).

II - многополюсники с одним общим полюсом или без общих полюсов считаем взаимно ортогональными (ввиду полной независимости процессов в них).

Для уточнения структуры элементор-пространства целесообразно сначала определить матрицу Грамма [2] системы векторов, соответствующих всем трансорам трехполюсника. Для этого необходимо уточнить скалярные произведения всех пар векторов. При этом исходные постулаты, а также уравнения (2) обуславливают некоторую симметрию матрицы Грамма.



Фиг. 1.

Циклическое переименование полюсов порождает два цикла среди трансоров, соответствующие четным и нечетным перестановкам индексов (фиг. I). Тогда на базе первого постулата можно написать

$$
\begin{aligned}
\langle T_{123}, T_{231} \rangle &= \langle T_{231}, T_{312} \rangle = \langle T_{312}, T_{123} \rangle = \alpha_1 \\
\langle T_{132}, T_{213} \rangle &= \langle T_{213}, T_{321} \rangle = \langle T_{321}, T_{132} \rangle = \alpha_2 .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Из второго постулата вытекает взаимная ортогональность всех адмиторов. С учетом системы (2), из условия $\langle A_{12}, A_{13} \rangle = 0$ можно получить 4 уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\langle T_{123}, T_{213} \rangle + \langle T_{123}, T_{231} \rangle + \langle T_{213}, T_{213} \rangle + \langle T_{213}, T_{231} \rangle = 0 \\
&\langle T_{123}, T_{132} \rangle + \langle T_{123}, T_{312} \rangle + \langle T_{213}, T_{132} \rangle + \langle T_{213}, T_{312} \rangle = 0 \\
&\langle T_{312}, T_{213} \rangle + \langle T_{312}, T_{231} \rangle + \langle T_{321}, T_{213} \rangle + \langle T_{321}, T_{231} \rangle = 0 \\
&\langle T_{312}, T_{132} \rangle + \langle T_{312}, T_{312} \rangle + \langle T_{321}, T_{132} \rangle + \langle T_{321}, T_{312} \rangle = 0 .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Из условий $\langle A_{12}, A_{23}\rangle = 0$ и $\langle A_{13}, A_{23}\rangle = 0$ можно получить еще 8 аналогичных уравнений (условия $\langle A_{12}, A_{12}\rangle = \langle A_{13}, A_{13}\rangle = \langle A_{23}, A_{23}\rangle$ не дают дополнительных независимых уравнений). Принимая нормы всех транзоров равными единице $|\langle T_{ijk}, T_{ijk}\rangle = 1|$ можно в результате решения всех I2 уравнений получить условия

$$\langle T_{123}, T_{132}\rangle = \langle T_{231}, T_{213}\rangle = \langle T_{312}, T_{321}\rangle = \langle T_{123}, T_{213}\rangle =$$
$$= \langle T_{231}, T_{321}\rangle = \langle T_{312}, T_{132}\rangle = \beta \qquad (5)$$
$$\langle T_{123}, T_{321}\rangle = \langle T_{231}, T_{132}\rangle = \langle T_{312}, T_{213}\rangle = \gamma$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

и вся система сводится к двум уравнениям

$$1 + \alpha + 2\beta = 0 \qquad (6)$$
$$2\alpha + \beta + \gamma = 0 .$$

Система (6), очевидно, обладает множеством решений, причем выполняются ограничения

$$-\frac{1}{3} < \alpha < 1$$
$$-1 < \beta < -\frac{1}{3} \qquad (7)$$
$$-1 < \gamma < 1 .$$

Так как в системе (6) никакие два коэффициента одновременно не могут равняться нулю, то отсюда вытекает следствие, что не может существовать ортогонального транзорного базиса в эвклидовом элементор-пространстве (с учетом вышеприведенных постулатов).

Для получения единственного решения системы (6) должны быть введены дополнительные ограничения. Одной естественной возможностью является постулирование нормы адмитора или гиратора, которые в общем виде выражаются

$$\| A_{ab} \| = 2(1+\beta) = 2(\alpha+\gamma) \qquad (8)$$
$$\| G_{abc} \| = 2(1-\gamma) = 2(\alpha-\beta).$$

Если требовать равенства норм адмитор-векторов и транзор-векторов (тогда им равным станет и норма гиратор-вектора), то получаются условия

$$\beta = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 0; \quad \gamma = \frac{1}{2}. \qquad (9)$$

Так как этот случай обладает также многими другими примечательными свойствами (например, $\alpha = 0$ означает взаимную ортогональность транзоров каждого цикла фиг.I), то именно этот случай будем подвергать дальнейшему анализу.

Теперь можем для последовательности транзор-векторов $T_{123}, T_{213}, T_{231}, T_{321}, T_{312}, T_{132}$ составить матрицу Грамма,

$$\begin{array}{c} T_{123} \\ T_{213} \\ T_{231} \\ T_{321} \\ T_{312} \\ T_{132} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{IO})$$

обладающую высокой степенью симметрии. Матрица Грамма определяет взаимное расположение векторов, но не их абсолютные координаты в пространстве. Если обозначать ортогональный базис координат в четырехмерном элементор-пространстве через $\{x, y, z, w\}$, то одна возможная система координат транзор-векторов, удовлетворяющая матрице Грамма (IO) представлена в таблице 2, а другие системы могут быть получены преобразованиями поворота [2].

Воспользуясь приведенными координатами, нетрудно вычислить координаты векторов, соответствующих любым адмитансным трехполюсникам, зная их представление через транзоры. Особый интерес представляют векторы, совпадающие с ортогональными осями координат. По данным таблицы 2 видно, что вдоль оси x направлен вектор $T_{123} + T_{213}$, что согласно уравнению (2) соответствует адмитору A_{12}. Аналогично нетрудно выявить, что вдоль оси y расположен адмитор A_{13}, а вдоль оси z адмитор A_{23}. Вектор вдоль оси w может быть представлен как разность $T_{123} - T_{321}$, что с учетом данных таблицы I можно распознавать как гиратор G_{123} [I]. Так как нормы всех этих векторов также равны единице, то в элементор-пространстве естественный ортонормированный векторный базис образуют три (возможных) адмитора A_{12}, A_{13}, A_{23} и гиратор G_{123} (единственный). Все пространство

Таблица 2

Вектор	Координаты			
	x	y	z	w
T_{123}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
T_{213}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
T_{231}	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
T_{321}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
T_{312}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
T_{132}	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Таблица 3

Вектор	Координаты			
	x'	y'	z'	w
T_{123}	$\frac{1}{\sqrt{12}}$	0	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2}$
T_{213}	$\frac{1}{\sqrt{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{2}$
T_{231}	$\frac{1}{\sqrt{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2}$
T_{321}	$\frac{1}{\sqrt{12}}$	0	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{2}$
T_{312}	$\frac{1}{\sqrt{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2}$
T_{132}	$\frac{1}{\sqrt{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{2}$

Таблица 1

Трансзоры			
T_{123}	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	T_{132}	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
T_{231}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	T_{213}	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
T_{312}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	T_{321}	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Таблица 4

n	Размерность пр.- ва $(n-1)^2$	Подпространства		Ко-во гираторов C_n^3
		Симметр. C_n^2	Гираторн. C_{n-1}^2	
2	1	1	0	0
3	4	3	1	1
4	9	6	3	4
5	16	10	6	10
6	25	15	10	20
7	36	21	15	35
8	49	28	21	56
9	64	36	28	84
10	81	45	36	120

распадается при этом на симметрическое (трехмерное) подпространство, образуемое базисом A_{12}, A_{13} и A_{23} и соответствующее симметрическим матрицам проводимости и на гираторное (одномерное) подпространство, соответствующее кососимметричным матрицам проводимости. Нетрудно получить представление трехполюсника соответствующим вектором на таком базисе ("адмиторный базис"). Для этого необходимо неопределенную матрицу проводимости Y разложить на сумму симметрической части (симметрическое подпространство)

$$Y_a = \frac{1}{2}(Y + Y^T) \tag{II}$$

и кососимметрической части (гираторное подпространство)

$$Y_g = \frac{1}{2}(Y - Y^T), \tag{I2}$$

где Y^T означает транспонированную матрицу.

Например,

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

дает представление

$$y = 4A_{12} + A_{13} + 2G_{123} \longleftrightarrow (4, 1, 0, 2).$$

В общем случае матрицы проводимости трехполюсника получается следующее представление в элементор-пространстве:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -(y_{11}+y_{12}) \\ y_{21} & y_{22} & -(y_{21}+y_{22}) \\ -(y_{11}+y_{21}) & -(y_{12}+y_{22}) & \left\{\begin{matrix} y_{11}+y_{12}+ \\ +y_{21}+y_{22} \end{matrix}\right\} \end{bmatrix} \longleftrightarrow -\frac{y_{12}+y_{21}}{2}A_{12} + \frac{2y_{11}+y_{12}+y_{21}}{2}A_{13} + \frac{2y_{22}+y_{12}+y_{21}}{2}A_{23} + \frac{y_{12}-y_{21}}{2}G_{123}, \tag{I3}$$

откуда для квадрата нормы вектора трехполюсника получается выражение:

$$\|y\|^2 = y_{11}^2 + y_{12}^2 + y_{21}^2 + y_{22}^2 + y_{12}y_{21} + (y_{11}+y_{12})(y_{12}+y_{21}). \tag{I4}$$

Такая норма, естественно, инвариантна относительно любых поворотов вектора в элементор-пространстве (включая и циклическое переименование полюсов).

Интересно отметить, что квадрат квадратичной нормы неопределенной матрицы проводимости $\|Y\|^2$ (сумма квадратов всех элементов матрицы) тесно связан с квадратом нормы соответствующего вектора $\|y\|^2$

$$\|Y\|^2 = 4\|y\|^2 + 2\Delta_Y, \tag{I5}$$

где $\Delta_Y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$ – определитель трехполюсника (алгебраическое дополнение любого элемента неопределенной матрицы проводимости).

Циклическому переименованию полюсов ("циклический поворот") трехполюсника соответствует преобразование координат соответствующего вектора, определяемое ортогональной матрицей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Pi^{-1} = \Pi^{T}, \tag{16}$$

оставляя гираторную координату без изменений (ввиду инвариантности гиратора относительно циклического поворота).

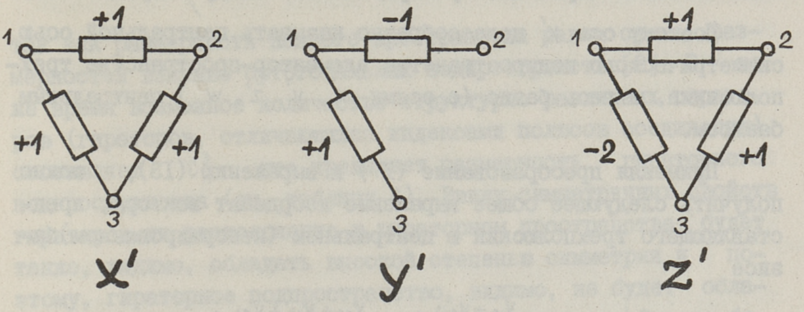
В симметрическом подпространстве существует также направление, инвариантное относительно циклического поворота (это, очевидно, соответствует собственному вектору матрицы 16). Если приложить преобразование поворота, определяемое матрицей

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M^{-1} = M^{T}, \tag{17}$$

к системе векторов из таблицы 2, то получается представление транзоров в новой ортонормированной системе координат (таблица 3). При этом гираторная координата не преобразуется, а новые координаты симметрического подпространства будут совпадать с векторами, соответствующими следующим матрицам проводимости

$$x' \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad y' \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad z' \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Этим матрицам будут соответствовать цепи, показанные на фиг. 2 (без учета скалярных коэффициентов перед матрицами в (18), обусловленных нормированием). Из них вектор вдоль направления y' соответствует диплору D_{123}, а вектор вдоль направления z' – разности диплоров $D_{312} - D_{231}$ [1]. Вектор, совпадающий с направлением координаты x', соответствует симметрическому трехполюснику, составленному из трех двухполюсников (сумма всех различных адмиторов). Со-



Фиг. 2.

вершенно очевидно, что этот трехполюсник инвариантен относительно циклического переименования полюсов и поэтому направление оси x' является инвариантным направлением симметрического подпространства относительно циклического поворота. Таким образом, при циклическом переименовании полюсов трехполюсника в итоге преобразуется лишь двухмерное подпространство, определяемое осями, соответствующими диплорам (оси y' и z'). Это подпространство поэтому целесообразно называть диплорной плоскостью.

Инвариантная ось x' в симметрическом подпространстве обладает еще рядом существенных свойств:

I) матрица

$$C_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (I9)$$

соответствующая вектору вдоль оси x' является алгебраической единицей в алгебре двояко-центрированных матриц третьего порядка [3]:

2) сумма всех адмиторов или трансзоров, унаторов и т.д. входящих в соответствующий элементор - класс [I] дает вектор, совпадающий с направлением оси x'. При этом все элементоры данного класса располагаются симметрично вокруг оси x', образуя равные углы с осью (для адмиторов угловой коэффициент равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$, для трансзоров $\frac{1}{\sqrt{12}}$ и т.д.),

3) проекция положительных элементоров на ось x' также положительная (проекция пропорциональна следу матрицы Y).

Поэтому ось x' целесообразно называть центральной осью симметрического подпространства элементор-пространства трехполюсника, а весь базис (с осями x', y', z', w) центральным базисом.

Применяя преобразование (I7) к выражению (I3), можно получить следующее общее выражение координат вектора, представляющего трехполюсник в центральном (ненормированном) базисе

$$
\begin{aligned}
y = &\left(y_{11} + y_{22} + \frac{y_{12}+y_{21}}{2}\right) C_3 + \frac{y_{22}+y_{12}+y_{21}}{2} D_{123} + \\
&+ \frac{y_{22}-y_{12}-y_{21}-2y_{11}}{6} \left(D_{312} - D_{231}\right) + \frac{y_{12}-y_{21}}{2} G_{123} .
\end{aligned} \tag{20}
$$

Многополюсники

Теперь нетрудно распространить принципы построения элементор-пространства на общий случай n -полюсника. Так как это пространство однозначно отображает множество неопределенных матриц узловых проводимостей n -полюсника, а любая матрица может быть разложена на симметрическую и кососимметрическую части (уравнения (II) и (I2)), то отсюда немедленно следует распадание элементор-пространства на симметрическое и гираторное подпространства. Симметрическое подпространство отображает множество симметрических матриц проводимости, которое всегда может быть разложено на конечную (не более $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$) сумму матриц, соответствующих адмиторам. Согласно нашему постулату I, все адмиторвекторы считаются ортогональными, и по аналогии со случаем трехполюсника они тогда образуют ортонормированный базис симметрического подпространства. В соответствии с максимальным количеством различных адмиторов $A_{ik} (i,k = 1 \ldots n;\ i \neq k;\ A_{ik} = A_{ki})$ размерность симметрического подпространства равняется $\frac{1}{2}n(n-1)$, что полностью согласуется с количеством независимых элементов в симметрической матрице проводимости n -полюсника. Так как размерность полного элементор-пространства равняется $(n-1)^2$, то размерность гираторного подпространства должна составлять

$$(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C^2_{n-1}, \qquad (21)$$

так как размерность полного пространства равна сумме размерностей взаимно ортогональных подпространств [2]. В то же время возможное количество структурно различных гираторов (гираторов, отличающихся индексами полюсов соединения) составляет C^3_n что превышает размерность гираторного подпространства (см. таблицу 4). Ввиду симметричных свойств гираторов их расположение в гираторном пространстве будет также, видимо, обладать высокой степенью симметрии и поэтому, гираторное подпространство, видимо, не будет обладать ортогональным базисом из гиратор-векторов. Однако более подробный анализ структуры и свойств этих подпространств в общем случае требует отдельного рассмотрения в самостоятельной статье.

Итоги

В работе показана возможность построения элементор-пространства как пространства всех многополюсных цепей, обладающих матрицей узловых проводимостей. Любой многополюсник отображается в таком пространстве вектором (точкой). Взаимные соотношения векторов определяются хорошо известной эвклидовой метрикой. Благодаря этому можно дать точную количественную характеристику многим новым свойствам цепей, как например "близость" (расстояние), "степень сходства" (угол) и т.п., для оценки которых подходящие методы в теории цепей в настоящее время отсутствуют. В элементор-пространстве непосредственно отражаются структурные свойства цепей, связанные с возможностью их представления через соответствующую схему соединения простейших многополюсников-элементоров (например, симметрическое подпространство порождается многополюсниками, которые могут быть получены соединением двухполюсников). Такие т.н. "элементор -реализации" многополюсников могут рассматриваться как представление данного вектора (соответствующего многополюснику(в различных базисах (необязательно ортогональных) элементор-пространства. Основным способом соединения является параллельное соединение (объединение) всех полюсов соединяемых многополюсников. В то же время соединение части полюсов сопровождается образованием новых ("внутренних") полюсов, что связано с увеличением размерности элементор-пространства и несколько затрудняет анализ. Таким образом метод элементор-пространства позволяет анализировать многополюсники и многополюсные цепи совершенно отвлеченно от прилагаемых им токов и напряжений, что отражает основное свойство линейных цепей - независимость их свойств от токов и напряжений.

В данной работе рассматривалось вещественное элементор-пространство, что предполагало наличие лишь вещественных коэффициентов в матрице проводимости. Однако не представляет трудности обобщить эти результаты на случай комплексных коэффициентов матрицы проводимости точно также, как вещественное эвклидово пространство обобщается на комплексное [2].

При практическом применении методов элементор-пространства к многополюсникам размерность пространства получается обычно значительной. Это может затруднить непосредственные расчеты координатным методом, даже при применении ЭВМ. Однако в практических схемах обычно многие координаты получаются нулевыми, и к тому же, расчеты могут быть упрощены также удачным выбором базиса пространства.

Но основной следует считать возможность учета структурных характеристик цепей, что, видимо, дает возможность развивать дальше многие методы теории синтеза и реализации цепей.

Литература

I. Х.В. Силламаа. Систематика элементов в теории цепей. Труды ТПИ, серия А, № 288, Таллин, 1970.

2. Г.Е. Шилов. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. Наука, М., 1969.

3. G.E. Sharpe, G.P.H. Styan. Circuit duality and the general network inverse, IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-12, March, 1965, pp. 22-27.

H. Sillamaa

The Structure and Properties of the Elementor Space Representation of Multi-Pole Networks

S u m m a r y

An effort of representing the structural characteristics of the multi-pole networks by the elementor space method is discussed. The elementor space is considered as a linear (vector) space on the set of all multi-poles having nodal admittance matrix representation. Every multi-pole corresponds to a vector of the space and the dimension of the space depends upon the number of poles. The essential subspaces and different bases of the elementor space are analysed and possibilities of introduction an euclidean metric in the space are considered.

Such an elementor space approach seems to be useful for extending network synthesis and realisation methods.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Л и т е р а т у р а

1. А.И. [illegible] Распределение элементов в [illegible] Труды [illegible] 1970.

2. [illegible] 1949.

3. [illegible]

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 334 1972

УДК 621.372.061

Х.В. Силламаа

ПСЕВДОЭВКЛИДОВАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕМЕНТОР-ПРОСТРАНСТВА МНОГОПОЛЮСНИКОВ

В работе [I] были исследованы свойства эвклидового элементор-пространства множества линейных адмитансных многополюсников введением скалярного произведения для пар элементоров. Определение скалярного произведения основывалось на двух естественных постулатах, связанных с инвариантностью скалярного произведения относительно способа нумерации полюсов, а также равенством нулю скалярного произведения (ортогональностью) для любых пар многополюсников, имеющих не более одного общего зажима. Кроме того, принималась равной единице вытекающая от скалярного произведения норма для простейших элементоров (адмитор, транзор, гиратор) с единичной проводимостью [2]. В результате была получена матрица Грамма для всех различных транзоров на трех полюсах, откуда оказалось уже возможным вывести метрические соотношения для любых адмитансных элементоров. Исследование показало, что полученная на базе описанных предположений структура элементор-пространства соответствует обыкновенной эвклидовой метрике.

Однако, если допустить существование в элементор-пространстве также изотропных векторов [3] (т.е. ненулевых векторов с нулевой длиною), то можно получить существенно иную структуру элементор-пространства. Ввиду того, что транзоры образуют универсальный базис элементор-пространства [I], и ненулевая норма транзоров вела к вышеописанной эвклидовой метрике, то целесообразно анализировать случай, когда все транзоры соответствуют изотропным векторам. В этом случае, в полном согласии с методикой работы [I] и при сохранении основных, принятых там постулатов, можно получить следующую матрицу Грамма транзоров трехполюсника:

$$\begin{array}{c} T_{123} \\ T_{213} \\ T_{231} \\ T_{321} \\ T_{312} \\ T_{132} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad (I)$$

Таблица I

	Координаты			
	x	y	z	w
T_{123}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$j\frac{\sqrt{3}}{2}$
T_{213}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-j\frac{\sqrt{3}}{2}$
T_{231}	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$j\frac{\sqrt{3}}{2}$
T_{321}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-j\frac{\sqrt{3}}{2}$
T_{312}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$j\frac{\sqrt{3}}{2}$
T_{132}	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Теперь уже нетрудно образовать некоторую систему векторов в четырехмерном элементор-пространстве с координатами $\{x, y, z, w\}$, удовлетворяющую матрице Грамма (I), откуда любые другие возможные системы таких векторов можно получить далее путем преобразования поворота [3]. Одна найденная система координат транзор-векторов представлена в таблице I, откуда видно, что нулевой модуль (изотропность) транзоров обуславливает наличие мнимых проекций на координатные оси.

Далее по данным таблицы I можно убедиться, что элементор-вектор, направленный вдоль оси x, можно получить как сумму двух транзоров $T_{123} + T_{213}$ (или $T_{321} + T_{312}$), что согласно [2] соответствует адмитору A_{12}. Аналогично можно выяснить, что направление оси y соответствует адмитору A_{13}, направление оси z – адмитору A_{23} и, наконец, направление оси w – гиратору G_{123}. При этом модули всех адмиторов окажутся вещественными и равными единице, а модуль гиратора мнимым и равным $j\sqrt{3}$. Следовательно, единичные векторы вдоль перпендикулярных осей адмиторов вещественны, а единичный вектор вдоль оси гираторов мнимый, поэтому мы приходим к псевдоэвклидовому [3] элементор-пространству трехполюсников, обладающему индексом пространства 3. При этом трехмерное подпространство, охватывающее все векторы с нулевой гираторной координатой, очевидно, совпадает с адмиторным подпространством [I], а одномерное подпространство вдоль оси w – с гираторным подпространством. Согласно свойствам псевдоэвклидового пространства [3], внутренняя структура каждого из названных подпространств полностью соответствует эвклидовой метрике.

Так как полное элементор-пространство распадается на прямую сумму адмиторного и гираторного подпространства (с размерами $\frac{1}{2}n(n-1)$ и $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ соответственно) при любом числе n полюсов многополюсника, то без осложнений можно расширить все рассмотренные рассуждения на случай n-полюсников. В таком общем случае по-прежнему подпространство векторов с вещественными координатами соответствует адмиторному подпространству, а все векторы с мнимыми координатами принадлежат к гираторному подпространству. Общие свойства этих подпространств в отдельности были исследованы ранее [2, 4].

Введение псевдо-эвклидовой метрики позволяет определить длину любого вектора, соответствующего некоторому n-полюснику в элементор-пространстве. Для этого целесообразно исходить из элементор-разложения данного многополюсника, обладающего неопределенной матрицей узловых проводимостей $Y = [y_{ij}]$, через адмиторно-гираторный базис [I]

$$y = \sum_{i,j=1}^{n} \left(-\frac{y_{ij}+y_{ji}}{2}\right) A_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j\neq p}}^{n} \frac{y_{ij}-y_{ji}}{2} G_{pij}\,, \quad j>i\,, \tag{2}$$

где A_{ij} – соответствуют всевозможным единичным адмиторам на n полюсах, а

G_{pij} – всевозможным гираторам с единичной проводимостью и с общим полюсом p.

Система адмиторов, как выяснилось ранее, образует ортогональную систему векторов в адмиторном подпространстве, однако в гираторном подпространстве, как показано в [4], естественная ортогональная система векторов отсутствует, что необходимо учесть при определении скалярных произведений. Поэтому для квадрата длины произвольного вектора-многополюсника y получим

$$\|y\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(y_{ij}+y_{ji})^2}{4} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j\neq p}}^{n} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k,l\neq p}}^{n} \langle G_{pij}, G_{pkl}\rangle \frac{(y_{ij}-y_{ji})(y_{kl}-y_{lk})}{4}, \quad \substack{j>i\ ,\ l>k\ ,} \tag{3}$$

где $\langle G_{pij}, G_{pkl}\rangle$ соответствует скалярному произведению единичных гираторов, равному с учетом [4]

$$\underset{j>i,\ l>k}{\langle G_{pij}, G_{pkl}\rangle} = \begin{cases} 3, & \text{если } i=k \text{ и } j=l, \\ 1, & \text{если } i=k,\ j\neq l,\ \text{или } i\neq k,\ j=l, \\ -1, & \text{если } i=l,\ j\neq k,\ \text{или } i\neq l,\ j=k, \\ 0, & \text{если } i\neq k,\ j\neq l,\ \text{или } i\neq l,\ j\neq k. \end{cases} \tag{4}$$

Совершенно аналогичной формулой можно пользоваться также для вычисления скалярного произведения любых двух векторов, соответствующих различным многополюсникам в псевдо-эвклидовом элементор-пространстве.

Области векторов псевдо-эвклидового элементор-пространства, характеризуемых чисто вещественными или мнимыми модулями, разделены множеством изотропных векторов, образуя т.н. изотропный конус [3]. Поэтому выявление изотропных векторов с нулевым модулем представляет особый интерес. Такие векторы можно найти анализом формулы (3). Например, для трехполюсных элементор-векторов можно получить следующую формулу для квадрата модуля вектора через соответствующие элементы неопределенной матрицы проводимости $Y = [y_{ij}]$

$$\|y\|^2 = y_{11}^2 + y_{22}^2 + 3y_{12}y_{21} + (y_{11}+y_{22})(y_{12}+y_{21}) =$$

$$= y_{12}^2 + y_{23}^2 + y_{31}^2 + (y_{21} - y_{12})(y_{12} + y_{23} + y_{31}). \quad (5)$$

Приравнением этого выражения нулю нетрудно проверить, кроме изотропности транзоров, еще и изотропность унаторов [2]. Подобным образом можно выяснить также, что изотропным векторам в элементор-пространстве четырехполюсников соответствуют элементор-классы, названные в [2] трансакторами и униакторами, а также ряд других классов. Таким образом получается, что многие элементоры, играющие существенную роль при образовании базисной структуры адмитансных многополюсников (транзоры, трансакторы), соответствуют изотропным векторам в псевдоэвклидовой модели элементор-пространства.

Как и в случае эвклидового элементор-пространства, длина вектора пропорциональна проводимости (абсолютной величине) элементора и неизменна для всех элементоров данного элементор-класса, образуя, таким образом, некоторую инвариантную характеристику рассматриваемого элементора. С другой стороны, соотношения длин векторов при эвклидовой метрике подчиняются известному условию треугольника [3], которое в псевдо-эвклидовом пространстве имеет место лишь внутри адмиторного и гираторного подпространств , но в общем случае теряет силу. Таким образом, в случае обратимых многополюсников, характеризуемых симметрическими матрицами узловых проводимостей, как эвклидовая, так и псевдо-эвклидовая модели элементор-пространства полностью совпадают и различие проявляется лишь для цепей, содержащих необратимые элементы. Это на практике чаще всего имеет место при анализе активных линеаризованных цепей. В этом случае концепция псевдо-эвклидового элементор-пространства позволяет ввести новые инвариантные характеристики многополюсников, могущие стать полезными при синтезе и реализации многополюсных цепей.

Литература

1. Х.В. Силламаа. Структура и свойства элементор-пространства представления цепей. См. наст. сб., стр.3.

2. Х.В. Силламаа. Свойства и взаимосвязи адмитансных многополюсных элементоров. Труды ТПИ, серия А, № 304, Таллин, 1971, стр. 3-20.

3. Б.А. Розенфельд. Многомерные пространства. Наука, М., 1966.

4. Х.В. Силламаа, Структурные свойства гираторного элементор-пространства. Труды ТПИ, серия А, № 304, Таллин, 1971, стр. 21-34.

H. Sillamaa

Pseudo-Euclidean Model of the Elementor Space of Multi-Poles

Summary

A possible version for introduction metric relations into the elementor space of multi-poles is analysed with transors as isotropic vectors. So a pseudo-euclidean structure of elementor space is obtained where the subspace of real vectors coincides with the admitor subspace and the subspace of imaginary vectors with the gyrator subspace. Formulas for calculating vector moduli are derived and some properties of such space considered.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 621.372.061.1

В.Р. Мяннама

О КОМПАКТНОСТИ RC – ТРЕХПОЛЮСНИКОВ

I. Свойства компактности Y(Z)-параметров

Пассивные RC-цепи являются составными частями большинства активных схем. В связи с быстрым развитием теории активных цепей особо актуальным является решение проблемы синтеза пассивных бестрансформаторных RC-многополюсников, в том числе трехполюсников. Хотя эта проблема являлась предметом многих исследований ([1,2,3,7,11][1] и др.), общее ее решение до сих пор отсутствует. Получены только некоторые частные результаты при дополнительных ограничениях на функции цепи (условия относительно симметрии [11], предельных параметров [2], количества полюсов [7] и т.д.). В то же время задаваемые функции цепи должны удовлетворять и общим требованиям: условию вычета, коэффициентов, вещественной части и некоторым другим условиям, равноценным приведенным [9].

При синтезе цепей одним из важнейших является условие вычета. Можно, например, показать, что из выполнения условия вычета следует и выполнение условия вещественной части. В то же время некоторые проблемы, связанные с условием вычета, в частности свойства компактности, мало исследованы.

В дальнейшем сделана попытка выяснить свойства компактности Y- и Z-параметров RC-трехполюсников.

---

[1] Литература приведена в конце следующей статьи: В.Р.Мяннама "О компактности RC-трехполюсников II. Связи компактности между Y- и Z-параметрами, стр.44-45.

Пусть задана матрица проводимостей обратимого RC-трехполюсника:

$$[Y]=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13}\\ y_{21} & y_{22} & y_{23}\\ y_{31} & y_{32} & y_{33}\end{bmatrix},\ \text{где}\ -y_{ij}=\frac{a^{(ij)}_{t_{ij}}\cdot s^{t_{ij}}+a^{(ij)}_{t_{ij}-1}\cdot s^{t_{ij}-1}+\ldots+a^{(ij)}_{0}}{s^{r_{ij}}+b^{(ij)}_{r_{ij}-1}\cdot s^{r_{ij}-1}+\ldots+b^{(ij)}_{0}}=$$

$$=\frac{k_{ij}\prod\limits_{f=1}^{v}\left(s-n^{(f)}_{ij}\right)\prod\limits_{f=v+1}^{w}\left[s^2+2\sigma^{(f)}_{ij}\cdot s+\left(\sigma^{(f)}_{ij}\right)^2+\left(\omega^{(f)}_{ij}\right)^2\right]}{\prod\limits_{g=1}^{r_{ij}}\left(s-s^{(g)}_{ij}\right)}\quad \text{и}$$

$$y_{ii}=\frac{a^{(ii)}_{t_{ii}}\cdot s^{t_{ii}}+a^{(ii)}_{t_{ii}-1}\cdot s^{t_{ii}-1}+\ldots+a^{(ii)}_{0}}{s^{r_{ii}}+b^{(ii)}_{r_{ii}-1}\cdot s^{r_{ii}-1}+\ldots+b^{(ii)}_{0}}=\frac{k_{ii}\prod\limits_{h=1}^{t_{ii}}\left(s-n^{(h)}_{ii}\right)}{\prod\limits_{e=1}^{r_{ii}}\left(s-s^{(e)}_{ii}\right)}.$$

Здесь $t_{ij},\ t_{ii},\ r_{ij},\ r_{ii}$ - натуральные числа, $i,j\in\{1,2,3\}$,

$$y_{ij}=y_{ji};\quad t_{ij}\leqslant r_{ij}+1;\quad r_{ii}\leqslant t_{ii}\leqslant r_{ii}+1;\quad t_{ij}=v+2(w-v);$$

$$n^{(f)}_{ij}\leqslant 0;\quad n^{(h)}_{ii}\leqslant 0;\quad s^{(g)}_{ij}<0;\quad s^{(e)}_{ii}<0;\quad \sigma^{(f)}_{ij}\gtreqless 0;\quad \omega^{(f)}_{ij}>0;$$

$$\left\{s^{(g)}_{ij}\right\}\subset\left\{s^{(e)}_{11}\right\}\cup\left\{s^{(e)}_{22}\right\}\cup\left\{s^{(e)}_{33}\right\}\equiv\left\{s^{(e)}\right\}\equiv\left\{s_e\right\};\quad e=1,2,3,\ldots,n.$$

Матрицу $[Y]$ можно выразить через матрицы вычета:

$$[Y]=\begin{bmatrix} k^{(0)}_{11} & -k^{(0)}_{12} & -k^{(0)}_{13}\\ -k^{(0)}_{21} & k^{(0)}_{22} & -k^{(0)}_{23}\\ -k^{(0)}_{31} & -k^{(0)}_{32} & k^{(0)}_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k^{(\infty)}_{11} & -k^{(\infty)}_{12} & -k^{(\infty)}_{13}\\ -k^{(\infty)}_{21} & k^{(\infty)}_{22} & -k^{(\infty)}_{23}\\ -k^{(\infty)}_{31} & -k^{(\infty)}_{32} & k^{(\infty)}_{33}\end{bmatrix}\cdot s+\sum_{e=1}^{n}\begin{bmatrix} k^{(e)}_{11} & -k^{(e)}_{12} & -k^{(e)}_{13}\\ -k^{(e)}_{21} & k^{(e)}_{22} & -k^{(e)}_{23}\\ -k^{(e)}_{31} & -k^{(e)}_{32} & k^{(e)}_{33}\end{bmatrix}\frac{s}{s-s_e},$$

где

$$k^{(0)}_{ij}=-y_{ij}\big|_{s=0};\quad k^{(\infty)}_{ij}=\lim_{s\to\infty}-y_{ij}/s;\quad k^{(e)}_{ij}=\operatorname*{Res}_{s_e}-y_{ij}/s;$$

$$k^{(0)}_{ii}=y_{ii}\big|_{s=0};\quad k^{(\infty)}_{ii}=\lim_{s\to\infty}y_{ii}/s;\quad k^{(e)}_{ii}=\operatorname*{Res}_{s_e}y_{ii}/s.$$

Коэффициенты $k^{(0)}_{ij}$ и $k^{(\infty)}_{ij}$ первых матриц вычета, характеризующие поведение параметра y_{ij} при $s=0$ и $s=\infty$ соответственно, называются предельными параметрами.

Как известно, условие вычета гласит [13]: все матрицы вычета должны быть положительно полуопределенными.

Матрица проводимостей (I-I) имеет три независимых параметра. Для дальнейшего анализа выбираем в качестве базовых параметры $Y_{12} = -y_{12}$; $Y_{23} = -y_{23}$; $Y_{13} = -y_{13}$, называя их базовыми параметрами RC-цепи. Базовые параметры имеют следующее представление через вычеты:

$$Y_{ij} = k_{ij}^{(0)} + k_{ij}^{(\infty)} \cdot s + \sum_{e=1}^{n} \frac{k_{ij}^{(e)} \cdot s}{s - s_e}, \text{ где } ij \in \{12, 23, 13\}. \qquad \text{(I-3)}$$

Условие вычета приобретает при этом форму:

$$\Delta k_y^{(e)} = k_{12}^{(e)} \cdot k_{13}^{(e)} + k_{12}^{(e)} \cdot k_{23}^{(e)} + k_{13}^{(e)} \cdot k_{23}^{(e)} \geq 0; \qquad \text{(I-4а)}$$

$$k_{12}^{(e)} + k_{13}^{(e)} \geq 0; \quad k_{12}^{(e)} + k_{23}^{(e)} \geq 0; \quad k_{13}^{(e)} + k_{23}^{(e)} \geq 0; \qquad \text{(I-4б)}$$

$$e = 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \infty.$$

Если условие (I-4а) выполняется при знаке равенства, то соответствующий полюс s_e называют компактным (сокр.К) [3,I2]. Ранг матрицы вычетов в (I-2) при этом равен единице.

Компактный полюс, согласно выражениям (I-4а) и (I-4б), может иметь следующие вычеты:

$$k_{ij}^{(e)} > 0; \quad k_{jk}^{(e)} = 0; \quad k_{ik}^{(e)} = 0; \qquad \text{(I-5а)}$$

$$k_{ij}^{(e)} > 0; \quad k_{jk}^{(e)} > 0; \quad k_{ik}^{(e)} = -\frac{k_{ij}^{(e)} \cdot k_{jk}^{(e)}}{k_{ij}^{(e)} + k_{jk}^{(e)}} < 0, \qquad \text{(I-5б)}$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$; $ij = ji$; $jk = kj$; $ik = ki$; $i \neq j \neq k \neq i$.

Полюс, имеющий тройку вычетов типа (I-5а), называем псевдокомпактным (сокр. ПК). Если условие (I-4а) выполняется при знаке неравенства, то соответствующий полюс s_e называем некомпактным (сокр. НК). По выражениям (I-4а) и (I-4б) вычеты некомпактных конечных полюсов могут иметь значения:

$$k_{ij}^{(e)} > 0; \quad k_{jk}^{(e)} > 0; \quad k_{ik}^{(e)} > 0; \qquad \text{(I-6а)}$$

$$k_{ij}^{(e)} > 0; \quad k_{jk}^{(e)} > 0; \quad k_{ik}^{(e)} = 0; \tag{I-6б}$$

$$k_{ij}^{(e)} > 0; \quad k_{jk}^{(e)} > 0; \quad 0 > k_{ik}^{(e)} > -\frac{k_{ij}^{(e)} \cdot k_{jk}^{(e)}}{k_{ij}^{(e)} + k_{jk}^{(e)}}. \tag{I-6в}$$

Ввиду того, что предельные параметры пассивной бестрансформаторной RC -цепи не могут быть отрицательными [I2], полюсы Y_{ij}/S при нуле и в бесконечности могут иметь следующие тройки вычетов:

$$k_{ij}^{(f)} > 0; \quad k_{jk}^{(f)} > 0; \quad k_{ik}^{(f)} > 0; \tag{I-7a}$$

$$k_{ij}^{(f)} > 0; \quad k_{jk}^{(f)} > 0; \quad k_{ik}^{(f)} = 0; \tag{I-7б}$$

$$k_{ij}^{(f)} > 0; \quad k_{jk}^{(f)} = 0; \quad k_{ik}^{(f)} = 0, \quad \text{где } f = 0, \infty. \tag{I-7в}$$

Следовательно, такие полюсы могут быть или некомпактными (по (I-7а) и (I-7б), или же псевдокомпактными (по (I-7в)).

Если все вычеты какого-либо полюса равны нулю, то данный полюс в системе Y -параметров отсутствует.

Рассмотрим некоторые важные свойства компактности Y -параметров:

I. Некомпактную тройку (вектор) вычетов, а тем самым и тройку членов разложения по вычетам Y -параметров типа

$$\left\{ \frac{k_{ij}^{(e)} \cdot S}{S - S_e}; \; \frac{k_{jk}^{(e)} \cdot S}{S - S_e}; \; \frac{k_{ik}^{(e)} \cdot S}{S - S_e} \right\},$$

можно всегда (неоднозначно) представлять в виде суммы двух или более компактных троек.

Пользуясь разложением на компактную и псевдокомпактную части, получим (исходя из выражений (I-6а); (I-6б) и (I-6в)):

$$\left\{ k_{ij}^{(e)}; \, k_{jk}^{(e)}; \, k_{ik}^{(e)} \right\} = \left\{ k_{ij}^{(e)}; \, k_{jk}^{(e)}; \, -k_{ik}^{(e)'} \right\} + \left\{ 0; \; 0; \; k_{ik}^{(e)''} \right\}; \tag{I-8a}$$

$$\left\{ k_{ij}^{(e)};\ k_{jk}^{(e)};\ 0 \right\} = \left\{ k_{ij}^{(e)};\ k_{jk}^{(e)};\ -k_{ik}^{(e)'} \right\} + \left\{ 0;\ 0;\ k_{ik}^{(e)'} \right\}; \qquad (\text{I-8б})$$

$$\left\{ k_{ij}^{(e)};\ k_{jk}^{(e)};\ -k_{ik}^{(e)} \right\} = \underbrace{\left\{ k_{ij}^{(e)};\ k_{jk}^{(e)};\ -k_{ik}^{(e)'} \right\}}_{\text{к}} + \underbrace{\left\{ 0;\ 0;\ k_{ik}^{(e)''} \right\}}_{\text{пк}}. \qquad (\text{I-8в})$$

2. Компактные тройки вычетов также разлагаются на две (или более) компактные части:

$$\left\{ k_{ij}^{(e)};\ k_{jk}^{(e)};\ -k_{ik}^{(e)} \right\} = \left\{ a k_{ij}^{(e)};\ a k_{jk}^{(e)};\ -a k_{ik}^{(e)} \right\} + \left\{ b k_{ij}^{(e)};\ b k_{jk}^{(e)};\ -b k_{ik}^{(e)} \right\}; \qquad (\text{I-9а})$$

$$\left\{ k_{ij}^{(e)};\ 0;\ 0 \right\} = \left\{ a k_{ij}^{(e)};\ 0;\ 0 \right\} + \left\{ b k_{ij}^{(e)};\ 0;\ 0 \right\}, \qquad (\text{I-9б})$$

где $a \geqslant 0;\ \ b \geqslant 0;\ \ a + b = 1.$

Возможность разложения компактных и некомпактных троек вычетов на компактные составляющие играет важную роль при реализации функций цепи.

П р и м е р.

Пусть реализуемые Y-параметры имеют вид:

$$Y_{12} = \frac{s^2 - s + 1}{s + 3} = \frac{1}{3} + s + 0 + \frac{-\frac{13}{3}s}{s + 3};$$

$$Y_{23} = \frac{2(5s^2 + 6s)}{(s+1)(s+3)} = 0 + 0 + \frac{s}{s+1} + \frac{9s}{s+3};$$

$$Y_{13} = \frac{2(5s^2 + 6s)}{(s+1)(s+3)} = 0 + 0 + \underset{(\text{нк})}{\frac{s}{s+1}} + \underset{(\text{нк})}{\frac{9s}{s+3}}.$$

Пользуясь разложением на компактные части, получим:

$$Y_{12} = \frac{1}{3} + \frac{-\frac{1}{2}s}{s+1} + \frac{\frac{1}{6}s}{s+3} + s + \frac{\frac{1}{2}s}{s+1} + \frac{\frac{9}{2}s}{s+3};$$

$$Y_{23} = 0 + \frac{s}{s+1} + 0 + 0 + 0 + \frac{9s}{s+3};$$

$$Y_{13} = 0 + \underset{(\text{к})}{\frac{s}{s+1}} + \underset{(\text{пк})}{0} + \underset{(\text{пк})}{0 + 0} + \underset{(\text{к})}{\frac{9s}{s+3}}.$$

Части I и II легко реализуемы в виде лестничной RC-цепи, состоящей из пяти элементов. Параллельное их соединение дает искомую цепь.

Учитывая свойства компактности различных конечных полюсов, можно разложению базовых параметров по вычетам дать следующую общую форму:

$$
\begin{aligned}
Y_{12} = {} & \left[k_{12}^{(0)} + k_{12}^{(\infty)} \cdot s \right] + \left[\sum_{\alpha} \frac{k_{12}^{(\alpha)} \cdot s}{s - s_{\alpha}} + \sum_{\beta} \frac{-k_{12}^{(\beta)} \cdot s}{s - s_{\beta}} + \sum_{\gamma} \frac{k_{12}^{(\gamma)} \cdot s}{s - s_{\gamma}} + \sum_{\delta} \frac{k_{12}^{(\delta)} \cdot s}{s - s_{\delta}} + \sum_{\eta} \frac{k_{12}^{(\eta)} \cdot s}{s - s_{\eta}} + \sum_{\varphi} \frac{k_{12}^{(\varphi)} \cdot s}{s + s_{\varphi}} + 0 \right] + \\
& + \left[\sum_{\mu} \frac{k_{12}^{(\mu)} \cdot s}{s - s_{\mu}} + 0 + 0 + \sum_{\varepsilon} \frac{-k_{12}^{(\varepsilon)} \cdot s}{s - s_{\varepsilon}} + \sum_{\lambda} \frac{k_{12}^{(\lambda)} \cdot s}{s - s_{\lambda}} + \sum_{\pi} \frac{k_{12}^{(\pi)} \cdot s}{s - s_{\pi}} \right]; \\
Y_{23} = {} & \left[k_{23}^{(0)} + k_{23}^{(\infty)} \cdot s \right] + \left[\sum_{\alpha} \frac{k_{23}^{(\alpha)} \cdot s}{s - s_{\alpha}} + \sum_{\beta} \frac{k_{23}^{(\beta)} \cdot s}{s - s_{\beta}} + \sum_{\gamma} \frac{-k_{23}^{(\gamma)} \cdot s}{s - s_{\gamma}} + \sum_{\delta} \frac{k_{23}^{(\delta)} \cdot s}{s - s_{\delta}} + \sum_{\eta} \frac{k_{23}^{(\eta)} \cdot s}{s - s_{\eta}} + 0 + \sum_{\psi} \frac{k_{23}^{(\psi)} \cdot s}{s - s_{\psi}} \right] + \\
& + \left[0 + \sum_{\nu} \frac{k_{23}^{(\nu)} \cdot s}{s - s_{\nu}} + 0 + \sum_{\varepsilon} \frac{k_{23}^{(\varepsilon)} \cdot s}{s - s_{\varepsilon}} + \sum_{\lambda} \frac{-k_{23}^{(\lambda)} \cdot s}{s - s_{\lambda}} + \sum_{\pi} \frac{k_{23}^{(\pi)} \cdot s}{s - s_{\pi}} \right]; \qquad \text{(I-10)} \\
Y_{13} = {} & \underbrace{\left[k_{13}^{(0)} + k_{13}^{(\infty)} \cdot s \right]}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\left[\sum_{\alpha} \frac{k_{13}^{(\alpha)} \cdot s}{s - s_{\alpha}} + \sum_{\beta} \frac{k_{13}^{(\beta)} \cdot s}{s - s_{\beta}} + \sum_{\gamma} \frac{k_{13}^{(\gamma)} \cdot s}{s - s_{\gamma}} + \sum_{\delta} \frac{-k_{13}^{(\delta)} \cdot s}{s - s_{\delta}} + 0 + \sum_{\varphi} \frac{k_{13}^{(\varphi)} \cdot s}{s - s_{\varphi}} + \sum_{\psi} \frac{k_{13}^{(\psi)} \cdot s}{s - s_{\psi}} \right]}_{\mathrm{II}} + \\
& + \underbrace{\left[0 + 0 + \sum_{\xi} \frac{k_{13}^{(\xi)} \cdot s}{s - s_{\xi}} + \sum_{\varepsilon} \frac{k_{13}^{(\varepsilon)} \cdot s}{s - s_{\varepsilon}} + \sum_{\lambda} \frac{k_{13}^{(\lambda)} \cdot s}{s - s_{\lambda}} + \sum_{\pi} \frac{-k_{13}^{(\pi)} \cdot s}{s - s_{\pi}} \right]}_{\mathrm{III}},
\end{aligned}
$$

где множества индексов $\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\eta\}, \{\varphi\}, \{\psi\}, \{\mu\}, \{\nu\}, \{\xi\}, \{\varepsilon\}, \{\lambda\}, \{\pi\}$ непересекающиеся. Выражение (I-10) состоит из трех основных частей:

I – предельные параметры,

II – некомпактная часть,

III – компактная часть

Пользуясь выражениями (I-7) можно некомпактную часть II разложить на две или несколько компактных частей. Ввиду того, что такое разложение произвольно, целесообразно выяснить, в каком случае такие разложенные части вместе с первоначальной компактной частью и с предельными параметрами реализуются в виде RC-цепей, параллельным соединением которых получается искомая цепь. Если существует несколько реализуемых разложений, то следует определить наилучшее из них. Решение таких проблем ведет к решению проблемы реализации RC – трехполюсников в целом, если исходной является общая форма Y – параметров.

Вводим ограничение $Y_{13} = n Y_{23}$ (a-вещественный), тогда выражение (I-10) существенно упрощается. Получим:

$$
\begin{array}{rl|l|l|}
Y_{12} = & k_{12}^{(0)} + k_{12}^{(\infty)}\cdot s & + \sum\limits_{\alpha} \frac{k_{12}^{(\alpha)}\cdot s}{s-s_\alpha} & + \sum\limits_{\beta} \frac{-k_{12}^{(\beta)}\cdot s}{s-s_\beta} + 0 & + \\
Y_{23} = & k_{23}^{(0)} + k_{23}^{(\infty)}\cdot s & + \sum\limits_{\alpha} \frac{k_{23}^{(\alpha)}\cdot s}{s-s_\alpha} & + \sum\limits_{\beta} \frac{k_{23}^{(\beta)}\cdot s}{s-s_\beta} + \sum\limits_{\psi} \frac{k_{23}^{(\psi)}\cdot s}{s-s_\psi} & + \\
Y_{13} = & a\cdot k_{23}^{(0)} + a k_{23}^{(\infty)}\cdot s & + \sum\limits_{\alpha} \frac{a k_{23}^{(\alpha)}\cdot s}{s-s_\alpha} & + \sum\limits_{\beta} \frac{a k_{23}^{(\beta)}\cdot s}{s-s_\beta} + \sum\limits_{\psi} \frac{a k_{23}^{(\psi)}\cdot s}{s-s_\psi} & + \\
 & \mathrm{I} & & \mathrm{II} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|}
+ & \sum\limits_{\mu} \frac{k_{12}^{(\mu)}\cdot s}{s-s_\mu} + \sum\limits_{\varepsilon} \frac{k_{12}^{(\varepsilon)}\cdot s}{s-s_\varepsilon} \\
+ & 0 + \sum\limits_{\varepsilon} \frac{k_{23}^{(\varepsilon)}\cdot s}{s-s_\varepsilon} \\
+ & 0 + \sum\limits_{\varepsilon} \frac{a k_{23}^{(\varepsilon)}\cdot s}{s-s_\varepsilon} \\
 & \mathrm{III}
\end{array}
\qquad (I\text{-}II)
$$

Такая тройка базовых Y – параметров реализуется методом Озаки [II]. В некоторых частных случаях решение проблемы реализации ведет к разложению общей формы Y – параметров (I-I0) на части типа выражения (I-II).

Переходим на рассмотрение свойств компактности Z-параметров. Выбираем в качестве базовых параметры Z_{12}, Z_{23} и Z_{13}. Далее воспользуемся аналогичным разложением по вычетам:

$$Z_{ij} = k_{\infty}^{(ij)} + k_{0}^{(ij)} \cdot \frac{1}{s} + \sum_{e=1}^{m} \frac{k_e^{(ij)}}{s-s_e}; \qquad \text{(I-I2)}$$

$$k_{\infty}^{(ij)} = \lim_{s\to\infty} Z_{ij}; \quad k_0^{(ij)} = Z_{ij}\cdot s\Big|_{s=0}; \quad k_e^{(ij)} = \operatorname*{Res}_{s_e} Z_{ij}; \; s_e<0; \; ij\in\{12,13,23\}.$$

При условии учета специфики разложения (I-I2) выражения (I-4) до (I-I0) действительны и относительно Z -параметров.

Общие формы представления Y- и Z - параметров типа (I-I0) с учетом (I-7) позволяют легко провести декомпозицию данных функций цепи, не нарушая при этом важного условия вычета. Однако обычно на первом этапе разложения трудно найти реализуемые части Y- и Z- параметров, поэтому нередко целесообразно преобразовать полученные компоненты Y - параметров на Z - параметры или наоборот. В таком случае важно знать, как связаны свойства компактности $Y(Z)$-параметров со свойствами компактности $Z(Y)$ - параметров. Эти проблемы исследуются в следующей статье.

V. Männama

Über die Kompaktheit von RC-Dreipolen I. Kompaktheitseigenschaften der Y(Z)-Parameter

Zusammenfassung

Es werden Trios von Residen betrachtet, die den kompakten, pseudokompakten und nichtkompakten endlichen Polstellen der Y- und Z-Parameter des RC-Dreipols entsprechen. Eine Möglichkeit der Dekomposition der nichtkompakten und kompakten Trios von Residen in kompakte Trios wird gezeigt. Eine allgemeine Formel für die Partialbruchzerlegung der Y-Parameter wird gebracht, wo die Kompaktheitseigenschaften der endlichen Polstellen in Betracht gezogen sind. Ein Beispiel wird angeführt.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 621.372.061.1

В.Р. Миннама

О КОМПАКТНОСТИ RC– ТРЕХПОЛЮСНИКОВ II.

Связи компактности между Y- и Z-параметрами

Вместе с рассмотренным в первой части разложением по вычетам при синтезе цепей часто пользуются и полюс-нуль-представлением Y(Z)-параметров (I-I). Поэтому целесообразно понятие компактности (а тем самым и условие вычета) перенести на упомянутый случай.

Рассмотрим неопределенную Y-матрицу RC-цепи, имеющей t полюсов. Пусть между каждыми двумя полюсами существует проводимость $a+bs$; $a \geqslant 0$; $b \geqslant 0$. Выбирая в качестве внешних полюсов I,2 и 3 и находя из Y-матрицы порядка t алгебраические дополнения $D_{11}=D_{22}=D_{33}=\Delta$; $D_{1233}=\Delta_{12}$; $D_{1123}=\Delta_{23}$; $D_{1223}=\Delta_{13}$; $D_{112233}=\Delta_{1122}$; сможем Y- и Z-параметры полученного трехполюсника представить в виде:

$$Y_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{1122}};\quad Y_{23}=\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{1122}};\quad Y_{13}=\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1122}};\tag{2-Ia}$$

$$Z_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta};\quad Z_{23}=\frac{\Delta_{23}}{\Delta};\quad Z_{13}=\frac{\Delta_{13}}{\Delta}.\tag{2-Iб}$$

Используя известное соотношение [4]:

$$\Delta_{pq}\cdot\Delta_{rs}-\Delta_{ps}\cdot\Delta_{rq}=\Delta\cdot\Delta_{pqrs},\tag{2-2}$$

получим

$$\Delta_{11}\cdot\Delta_{22}-\Delta_{12}^{2}=\Delta\cdot\Delta_{1122}.\tag{2-3}$$

Так как

$$\Delta_{11}=\Delta_{12}+\Delta_{13} \text{ и } \Delta_{22}=\Delta_{12}+\Delta_{23},$$

то имеет место соотношение:

$$\Delta_{\Delta} = \Delta_{12}\cdot\Delta_{23} + \Delta_{12}\cdot\Delta_{13} + \Delta_{13}\cdot\Delta_{23} = \Delta\cdot\Delta_{1122}. \qquad (2\text{–}4)$$

Эта формула связывает между собой все алгебраические дополнения из выражений (2–Iа) и (2–Iб). С помощью выражений (2–Iа), (2–Iб) и (2–4) легко получить связь между Y- и Z-параметрами трехполюсника:

$$Z_{12} = \frac{Y_{12}}{\Delta Y}; \quad Z_{23} = \frac{Y_{23}}{\Delta Y}; \quad Z_{13} = \frac{Y_{13}}{\Delta Y}; \qquad (2\text{–}5а)$$

$$Y_{12} = \frac{Z_{12}}{\Delta Z}; \quad Y_{23} = \frac{Z_{23}}{\Delta Z}; \quad Y_{13} = \frac{Z_{13}}{\Delta Z}, \qquad (2\text{–}5б)$$

где

$$\Delta Y = Y_{12}\cdot Y_{23} + Y_{12}\cdot Y_{13} + Y_{13}\cdot Y_{23} = \Delta/\Delta_{1122} = 1/\Delta Z; \qquad (2\text{–}6а)$$

$$\Delta Z = Z_{12}\cdot Z_{23} + Z_{12}\cdot Z_{13} + Z_{13}\cdot Z_{23} = \Delta_{1122}/\Delta = 1/\Delta Y. \qquad (2\text{–}6б)$$

Полученные выражения представляют собой т.н. преобразования треугольник–звезда и звезда–треугольник. Считая первичными $Y(Z)$-параметры можно с помощью выражений (2–6а) и (2–6б) получить дополнительную информацию относительно алгебраических дополнений реализуемой цепи.

Алгебраические дополнения матрицы RC-цепи Δ и Δ_{1122} могут иметь только отрицательные нули, в том числе и кратные. В то же время параметры Y_{ij} и Z_{ij} могут иметь только простые вещественные полюсы [I3]. Поэтому выражение вычета в полюсе s_e можно представить в виде:

$$k_{ij}^{(e)} = \operatorname*{Res}_{s_e} Y_{ij}/s = \frac{(s-s_e)\Delta_{ij}}{s\cdot\Delta_{1122}}\bigg|_{s\to s_e}. \qquad (2\text{–}7)$$

С учетом выражений (2–4) и (2–7) условие вычета (I–4а) принимает вид

$$\Delta k_y^{(e)} = \frac{(s-s_e)^2\Delta}{s^2\cdot\Delta_{1122}}\bigg|_{s\to s_e} = \frac{(s-s_e)^2}{s^2}\cdot\Delta Y\,\bigg|_{s\to s_e} \geqslant 0. \qquad (2\text{–}8а)$$

Аналогично можно получить условие вычета для Z-параметров:

$$\Delta k_z^{(e)} = \frac{(s-s_e)^2\Delta_{1122}}{\Delta}\bigg|_{s\to s_e} = (s-s_e)^2\cdot\Delta Z\,\bigg|_{s\to s_e} \geqslant 0. \qquad (2\text{–}8б)$$

Выражения (2-8а) и (2-8б) применимы для выявления свойств компактности Y- и Z-параметров при полюс-нуль-представлении.

Однократность полюсов Y- и Z-параметров и возможность наличия кратных нулей у Δ и Δ_{1122} показывает, что и Δ_{ij} $\left(ij \in \{13,\ 23,\ 12\}\right)$ может иметь кратные нули.

Пусть

$$\Delta_{1122} = (s - s_e)^{\alpha} \cdot \Delta'_{1122}; \quad \Delta_{ij} = (s - s_e)^{\beta_1} \cdot \Delta'_{ij};$$
$$\Delta_{jk} = (s - s_e)^{\beta_2} \cdot \Delta'_{jk}; \quad \Delta_{ik} = (s - s_e)^{\beta_3} \cdot \Delta'_{ik}; \quad \Delta = (s - s_e)^{\gamma} \cdot \Delta', \tag{2-9}$$

где

$$\Delta'_{1122}\Big|_{s=-s_e} \neq 0; \quad \Delta'_{ij}\Big|_{s=-s_e} \neq 0; \quad \Delta'_{jk}\Big|_{s=-s_e} \neq 0; \quad \Delta'_{ik}\Big|_{s=-s_e} \neq 0; \quad \Delta'\Big|_{s=-s_e} \neq 0.$$

Все полюсы Y- и Z-параметров простые, поэтому

$$\alpha \leqslant \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + 1; \tag{2-10}$$

$$\gamma \leqslant \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + 1. \tag{2-11}$$

Пусть

$$\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_3 \ \text{и} \ \beta_1 = \beta; \quad \beta_2 = \beta + \varepsilon; \quad \beta_3 = \beta + \lambda. \tag{2-12}$$

Учитывая (2-9) и (2-12), получим из (2-4)

$$\Delta_\Delta = \Delta_{ij}(\Delta_{jk} + \Delta_{ik}) + \Delta_{jk} \cdot \Delta_{ik} = (s - s_e)^{2\beta+\varepsilon} \Big[\Delta'_{ij}(\Delta'_{jk} +$$
$$+ (s - s_e)^{\lambda-\varepsilon} \cdot \Delta'_{ik}) + (s - s_e)^{\lambda} \cdot \Delta'_{jk} \cdot \Delta'_{ik} = (s - s_e)^{\alpha+\gamma} \cdot \Delta' \cdot \Delta'_{1122}. \tag{2-13}$$

Из выражения 2-13 получим:

$$\alpha + \gamma \geqslant 2\beta + \varepsilon, \ \text{если} \ \lambda = \varepsilon; \tag{2-14а}$$

$$\alpha + \gamma = 2\beta + \varepsilon, \ \text{если} \ \lambda > \varepsilon. \tag{2-14б}$$

Выражения (2-9) до (2-14) создают условия для определения кратности нуля s_e в алгебраических дополнениях Δ_{1122}, Δ_{ij}, Δ_{jk}, Δ_{ik}, Δ:

$$1. \quad \beta + \varepsilon - 1 \leqslant \alpha \leqslant \beta + 1; \tag{2-15а}$$

$$2\beta+\varepsilon-\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta+1, \text{ если } \lambda=\varepsilon; \tag{2-15б}$$

$$2)\ \beta+\varepsilon-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta+1; \tag{2-16а}$$

$$\gamma = 2\beta+\varepsilon-\alpha, \quad \text{если } \lambda>\varepsilon, \tag{2-16б}$$

где $$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2.$$

Полученные выражения (2-15) и (2-16) являются основой для дальнейшего анализа. Все возможные комбинации значений величин α и γ, соответствующие различным значениям ε и λ, приведены в таблице I.

Введем дополнительные обозначения:

$$\varphi = \min(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma); \tag{2-17а}$$

$$\psi = \min(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3); \tag{2-17б}$$

$$\mu = \min(\gamma, \beta_1, \beta_2, \beta_3); \tag{2-17в}$$

$$\nu = \min(\alpha, \gamma). \tag{2-17г}$$

Величина $(s-s_e)^{\varphi}$ выпадает (сокращается) как из Y-параметров, так и из Z-параметров. Согласно формулам (2-8а) и (2-8б) такой множитель в алгебраических дополнениях не влияет на свойства компактности Y и Z-параметров. Величины $(s-s_e)^{\psi}, (s-s_e)^{\mu}$ и $(s-s_e)^{\nu}$ соответственно выпадают из Y-параметров, Z-параметров и из выражения $\Delta Y(\Delta Z)$.

Далее обозначим:

$$\alpha' = \alpha-\varphi; \quad \beta_1'=\beta_1-\varphi; \quad \beta_2'=\beta_2-\varphi; \quad \beta_3'=\beta_3-\varphi; \quad \gamma'=\gamma-\varphi; \tag{2-18а}$$

$$\alpha'' = \alpha-\psi; \quad \beta_1''=\beta_1-\psi; \quad \beta_2''=\beta_2-\psi; \quad \beta_3''=\beta_3-\psi; \tag{2-18б}$$

$$\gamma''' = \gamma-\mu; \quad \beta_1'''=\beta_1-\mu; \quad \beta_2'''=\beta_2-\mu; \quad \beta_3'''=\beta_3-\mu; \tag{2-18в}$$

$$\grave{\alpha} = \alpha-\nu; \quad \grave{\gamma} = \gamma-\nu. \tag{2-18г}$$

Исходя из таблицы I, были найдены значения для указанных выше величин, которые внесены в таблицу 2. Там же указываются свойства компактности Y- и Z-параметров, имеющие s_e в качестве полюса. Кратности величины $(s-s_e)$ в

Таблица I

Кратность / №	α	β_1	β_2	β_3	γ	Примечания
1	$\beta+1$	β	β	β	$\beta-1$	$\lambda=\varepsilon=0$
2	$\beta+1$	β	β	β	β	
3	$\beta+1$	β	β	β	$\beta+1$	
4	β	β	β	β	$\beta+1$	
5	β	β	β	β	β	
6	$\beta-1$	β	β	β	$\beta+1$	
7	$\beta+1$	β	β	$\geqslant\beta+1$	$\beta-1$	$\lambda>\varepsilon=0$
8	β	β	β	$\geqslant\beta+1$	β	
9	$\beta-1$	β	β	$\geqslant\beta+1$	$\beta+1$	
10	$\beta+1$	β	$\beta+1$	$\beta+1$	β	$\lambda=\varepsilon=1$
11	$\beta+1$	β	$\beta+1$	$\beta+1$	$\beta+1$	
12	β	β	$\beta+1$	$\beta+1$	$\beta+1$	
13	$\beta+1$	β	$\beta+1$	$\geqslant\beta+2$	β	$\lambda>\varepsilon=1$
14	β	β	$\beta+1$	$\geqslant\beta+2$	$\beta+1$	
15	$\beta+1$	β	$\beta+2$	$\beta+2$	$\beta+1$	$\lambda=\varepsilon=2$
16	$\beta+1$	β	$\beta+2$	$\geqslant\beta+3$	$\beta+1$	$\lambda>\varepsilon=2$

Т а б л и ц а 2

№	α'	β'_1	β'_2	β'_3	γ'	Y				Z				ΔY	Компактность		Примечания
						α''	β''_1	β''_2	β''_3	γ'''	β'''_1	β'''_2	β'''_3	$\grave{\gamma}/\grave{\alpha}$	Y	Z	
I	2	3	4	5	6	7				8				9	I0	II	I2
I.	2	I	I	I	0	I	0	0	0	0	I	I	I	0/2	НК(6а,6в)	–	х
2.	2	I	I	≥2	0	I	0	0	≥I	0	I	I	≥2	0/2	НК (6б)	–	х
3.	I	0	I	≥I	0	I	0	I	≥I	0	0	I	≥I	0/I	ПК	–	х
4.	I	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0/I	К	–	х
5.	0	I	I	I	2	0	I	I	I	I	0	0	0	2/0	–	НК(6а,6б)	х
6.	0	I	I	≥2	2	0	I	I	≥2	I	0	0	≥I	2/0	–	НК(6б)	х
7.	0	0	I	≥I	I	0	0	I	≥I	I	0	I	≥I	I/0	–	ПК	х
8.	0	0	0	0	I	0	0	0	0	I	0	0	0	I/0	–	К	х
9.	I	0	2	≥2	I	I	0	2	≥2	I	0	2	≥2	0/0	ПК	ПК	х
I0.	I	0	I	I	I	I	0	I	I	I	0	I	I	0/0	ПК	ПК	
II.	I	0	0	0	I	I	0	0	0	I	0	0	0	0/0	К	К	
I2.	0	0	0	≥I	0	0	0	0	≥I	0	0	0	≥I	0/0	–	–	
I3.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0/0	–	–	

Примечания: I) Обозначения в скобках указывают номер формулы, в которой приведен данный тип тройки вычетов. 2) "х" указывает на возможность обнаружения компактных свойств Z(Y)-параметров, исходя из Y(Z)-параметров. 3) "–" указывает на отсутствие полюса s_e.

числителе и знаменателе выражений Y_{ij} , Z_{ij} и $\Delta Y(\Delta Z)$ приведены в столбцах 7, 8 и 9 таблицы 2. Для большей наглядности изменен (по сравнению с таблицей I) порядок строк, причем некоторые из них, не отличающиеся по свойствам компактности, объединены (I0–I3, I2–I4, I5–I6).

На основании таблицы 2 можно сделать следующие выводы:

I. Некомпактность Y-параметров в полюсе s_e обусловлена наличием в выражении Δ_{1122} нуля s_e кратности 2 или выше (согласно (2–I7а) и (2–I8а)), причем кратность нуля s_e в Δ на 2 меньше, чем в Δ_{1122}, а в Δ_{ij}, Δ_{jk} и Δ_{ik} на I меньше, чем в Δ_{1122} (тип некомпактности соответствует (I–6а) и (I–6в), или кратность s_e в двух из Δ_{ij}, Δ_{jk} и Δ_{ik} на I меньше и в третьем из них равна или выше кратности s_e в Δ_{1122} (тип некомпактности согласно (I–6б)) (см. строки I и 2 таблицы 2).

Аналогичный вывод относительно Z-параметров можно сделать по строкам 5 и 6 таблицы 2.

Тем самым в выводе I даны необходимые и достаточные условия существования некомпактных полюсов $Y(Z)$-параметров RC-трехполюсников и таким образом обобщается теорема Слепиана-Вейнберга о некомпактности [I2], где доказаны необходимые условия.

2. Y-параметры имеют псевдокомпактный полюс s_e тогда и только тогда, если: а) кратность s_e в Δ_{1122} на I выше, чем в одном из Δ_{ij}, Δ_{jk} и Δ_{ik}; б) кратность s в остальных двух алгебраических дополнениях из трех приведенных равна или выше кратности s_e в Δ_{1122} причем кратность s_e у одного из них не может превышать кратность s_e в Δ_{1122} на I (строки 3, 9 и I0 таблицы 2). Аналогичный вывод для Z-параметров следует из строк 7, 9 и I0 таблицы 2.

3. Y-параметры имеют компактный полюс s_e тогда и только тогда, если Δ_{1122} имеет нуль s_e кратности I или выше, причем Δ_{ij}, Δ_{jk} и Δ_{ik} имеют кратность s_e на I меньше, чем Δ_{1122}; алгебраическое дополнение Δ имеет кратность s_e на I меньше, чем Δ_{1122} (строка 4 таблицы 2) – Z-параметры не имеют полюса s_e – или равную с Δ_{1122} кратность (строка II таблицы 2) – Z-параметры имеют компактный полюс s_e.

Аналогичный вывод относительно Z-параметров можно дать по строкам 8 и II таблицы 2.

4. Общий для алгебраических дополнений Δ_{1122}; Δ_{ij}; Δ_{jk}; Δ_{ik} и Δ множитель может иметь нули, совпадающие с нулями и полюсами Y- и Z-параметров (строки I до I2 таблицы 2) или не совпадающие с ними (строка I3 таблицы 2) (см. также (2-I7а) и (2-I8а)).

Приведенными условиями установлена связь между свойствами компактности $Y(Z)$-параметров и кратностью нуля s_e в алгебраических дополнениях Δ_{1122}, Δ_{ij}, Δ_{jk}, Δ_{ik} и Δ. Дальше можно по данным таблицы 2 сделать вывод относительно связей свойств компактности между Y- и Z-параметрами (по столбцам 7 до I2 таблицы 2). При этом предполагаем, что $Y(Z)$-параметры имеют общий знаменатель.

5. Z-параметры имеют некомпактный полюс s_e тогда и только тогда, если все Y-параметры имеют однократный нуль s_e (тип некомпактности соответствует (I-6а) или (I-6в)), или если два из Y-параметров имеют однократный нуль s_e, а третий - нуль s_e кратности 2 или выше (тип некомпактности соответствует (I-6б)).

6. Z-параметры имеют псевдокомпактный полюс s_e, если один из Y-параметров имеет нуль s_e кратности нуль, второй - кратности I и третий - кратности I или выше, причем Y-параметры не имеют полюса s_e, или если один из Y-параметров имеет нуль s_e кратности нуль, второй - кратности 2 и третий - кратности 2 или выше, причем Y-параметры имеют полюс s_e.

7. Если Y-параметры имеют псевдокомпактный полюс s_e, причем один из параметров имеет нуль s_e кратности I, а второй - кратности 2 или выше, то Z-параметры не имеют полюса s_e.

8. Некомпактный полюс Y-параметров s_e не может быть полюсом Z-параметров и наоборот.

Аналогичные выводы можно сделать, исходя из Z-параметров.

Из данных таблицы 2 выясняются и некоторые общие свойства $Y(Z)$-параметров.

9. Нуль s_e кратности выше двух может иметь только один из $Y(Z)$-параметров, выше единицы - два из них.

10. Если только один из $Y(Z)$-параметров имеет нуль s_e, то s_e не является полюсом $Z(Y)$-параметров.

Полученные результаты позволяют определить необходимый минимальный порядок реализуемой RC-цепи, т.е. порядок алгебраического дополнения матрицы RC-цепи [I] N_{min}. Учитывая столбец 9 таблицы 2, получим из (2-6а):

$$\Delta Y = \frac{\Delta}{\Delta_{1122}} = \frac{K_1 \cdot A^2 \cdot R}{K_2 \cdot B^2 \cdot T}, \tag{2-I9}$$

где

$$A = (s - s_{z1})(s - s_{z2}) \cdot \ldots \cdot (s - s_{z\lambda}); \quad R = (s - s_{z(\lambda+1)})(s - s_{z(\lambda+2)}) \cdot \ldots \cdot (s - s_{zn});$$

$$B = (s - s_{y1})(s - s_{y2}) \cdot \ldots \cdot (s - s_{y\delta}); \quad T = (s - s_{y(\delta+1)})(s - s_{y(\delta+2)}) \cdot \ldots \cdot (s - s_{y\eta});$$

K_1, K_2 - постоянные,

$s_{z1}, s_{z2}, \ldots, s_{z\lambda}$ - некомпактные полюсы Z-параметров,

$s_{z(\lambda+1)}, s_{z(\lambda+2)}, \ldots, s_{zn}$ - компактные полюсы Z-параметров,

$s_{y1}, s_{y2}, \ldots, s_{y\delta}$ - некомпактные полюсы Y-параметров,

$s_{y(\delta+1)}, s_{y(\delta+2)}, \ldots, s_{y\eta}$ - компактные полюсы Y-параметров.

В выражениях $A \cdot R$ и $B \cdot T$ все нули однократные.

Из выражения (2-I9) следует, что:

$$N_{min} = \lambda + \pi; \tag{2-20а}$$

$$\delta + \eta \leq N_{min} \leq \delta + \eta + 2. \tag{2-20б}$$

При реализации цепи порядок N_{min} может оказаться недостаточным, т.е. данные $Y(Z)$-параметров имеют только такие цепи, порядок которых выше N_{min} [6]. Это связано с наличием общего множителя в соответствующих алгебраических дополнениях (см. вывод 4). Определение достаточного (минимального) порядка N, который должна иметь реализуемая цепь, требует дальнейшего анализа.

Как уже показано в первой части, физической причиной некомпактности Y-параметров может быть параллельное соединение цепей (у Z-параметров - последовательное соединение цепей). Соединив, например, параллельно две RC-цепи с компактными Y-параметрами; получим:

$$Y_{ij} = Y^{a}_{ij} + Y^{b}_{ij} = \frac{\Delta^{a}_{ij}\cdot\Delta^{b}_{1122} + \Delta^{b}_{ij}\cdot\Delta^{a}_{1122}}{\Delta^{a}_{1122}\cdot\Delta^{b}_{1122}}. \tag{2-21}$$

Пусть Y^{a}_{ij} и Y^{b}_{ij} имеют компактные полюсы соответственно s'_{e} и s''_{e}. Изменяем в первой цепи параметры так, чтобы полюс s'_{e} совпадал с полюсом s''_{e}. Тогда:

$$Y_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{1122}} = \left.\frac{\Delta^{a}_{ij}(s-s''_{e})\cdot\Delta'^{b}_{1122} + \Delta^{b}_{ij}(s-s'_{e})\Delta'^{a}_{1122}}{(s-s'_{e})(s-s''_{e})\cdot\Delta'^{a}_{1122}\cdot\Delta'^{b}_{1122}}\right|_{s'_{e}\to s''_{e}} = \frac{(s-s''_{e})\cdot\Delta'_{ij}}{(s-s''_{e})^{2}\cdot\Delta'_{1122}}; \tag{2-22}$$

$$\Delta Y = \frac{\Delta}{(s_{e}-s_{e}'')^{2}\cdot\Delta'_{1122}}. \tag{2-23}$$

где Δ в общем случае не имеет нуля s''_{e} (нуль s''_{e} в Δ получается в частном случае - см. (I-9)). Следовательно получен некомпактный полюс s''_{e}.

Исходя из вышеприведенного, можно сделать вывод, что все полюсы Y- и Z-параметров любой RC-цепи принципиально компактные, причем т.н. некомпактный полюс возникает при совпадении значений компактных полюсов разных частей цепи. В случае Y-параметров эти части соединены параллельно, в случае Z-параметров последовательно.

В приведенном анализе мы ограничивались конечными полюсами. Некоторые полученные выше результаты справедливы и для полюсов Y_{ij}/s и Z_{ij} при нуле и в бесконечности, однако ввиду специфических свойств этих полюсов (см. I-7)) целесообразно их рассматривать отдельно.

<u>Полюсы Y_{ij}/s и Z_{ij} при $s = 0$.</u>

Аналогично выражению (2I) обозначим:

$$\Delta_{1122} = s^{\alpha}\cdot\Delta'_{1122};\ \Delta_{ij} = s^{\beta_1}\cdot\Delta'_{ij};\ \Delta_{jk} = s^{\beta_2}\cdot\Delta'_{jk};\ \Delta_{ik} = s^{\beta_3}\cdot\Delta'_{ik};\ \Delta = s^{\gamma}\cdot\Delta'. \tag{2-24}$$

Предполагая, что условие (2-I2) выполняется, получим из (2-4):

$$2\beta + \varepsilon = \alpha + \gamma . \qquad (2\text{-}25)$$

Y_{ij} не может иметь полюса при $s = 0$, поэтому

$$\alpha \leqslant \beta . \qquad (2\text{-}26)$$

Z_{ij} может иметь при $s = 0$ однократный полюс, следовательно

$$\gamma \leqslant \beta + 1 . \qquad 2\text{-}27)$$

Из выражений (2-24) до (2-27) вытекает:

$$\begin{cases} \beta + \varepsilon - 1 \leqslant \alpha \leqslant \beta ; \\ \gamma = 2\beta - \alpha + \varepsilon ; \\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1 . \end{cases} \qquad (2\text{-}28)$$

Аналогично выражениям (2-I7) находим величины φ и μ. Так как нас интересует полюс выражения Y_{ij}/s, то определяем:

$$\psi = \min(\alpha + 1, \beta_1, \beta_2, \beta_3) . \qquad (2\text{-}29)$$

Дальше по аналогии с (2-I8) вводим величины, отмеченные индексами $'''$, а величины с индексом $''$ вводим по принципу:

$$\alpha'' = \alpha - \psi + 1 ; \quad \beta_1'' = \beta_1 - \psi ; \quad \beta_2'' = \beta_2 - \psi ; \quad \beta_3'' = \beta_3 - \psi . \qquad (2\text{-}30)$$

Варьируя величинами ε и λ (см. (2-I2)), получаем различные значения редуцированных параметров, на основе которых аналогично таблицы 2) составлена таблица 3.

Таблица 3

№	α'	β_1'	β_2'	β_3'	γ'	Y/s				Z				Компактность	
						α'	β_1''	β_2''	β_3''	γ'''	β_1'''	β_2'''	β_3'''	Y/s	Z
I.	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	НК(7а)	-
2.	0	0	0	I	0	I	0	0	I	0	0	0	I	КН(7б)	-
3.	0	I	I	I	2	0	0	0	0	I	0	0	0	-	НК(7а)
4.	0	I	I	2	2	0	0	0	I	I	0	0	I	-	НК(7б)
5.	0	0	I	I	I	I	0	I	I	I	0	I	I	ПК(7в)	ПК(7в)

Полюсы Y_{ij}/s и Z_{ij} при $s = \infty$

Обозначим

$$\Delta_{1122} = \sum_{t=0}^{\alpha} a_t s^t; \quad \Delta_{ij} = \sum_{t=0}^{\beta_1} b_{1t} \cdot s^t; \tag{2-31}$$

$$\Delta_{jk} = \sum_{t=0}^{\beta_2} b_{2t} \cdot s^t; \quad \Delta_{ik} = \sum_{t=0}^{\beta_3} b_{3t} \cdot s^t; \quad \Delta = \sum_{t=0}^{\gamma} c_t \cdot s^t.$$

Пусть

$$\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \beta_3; \quad \beta_1 = \beta; \quad \beta_2 = \beta - \varepsilon; \quad \beta_3 = \beta - \lambda. \tag{2-32}$$

По выражениям (2-4), (2-31) и (2-32), а также по свойствам Y- и Z-параметров получим

$$\alpha + \gamma = 2\beta + \varepsilon \tag{2-33}$$

$$\alpha \geqslant \beta - 1; \quad \gamma \geqslant \beta.$$

откуда
$$\begin{cases} \beta - 1 \leqslant \alpha \leqslant \beta - \varepsilon; \\ \gamma = 2\beta - \alpha - \varepsilon; \\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1. \end{cases} \tag{2-34}$$

В данном случае редуцирование параметров, аналогично (2-17) и (2-18), невозможно. Разные варианты наивысших степеней s в алгебраических дополнениях Δ_{1122}, Δ_{ij}, Δ_{jk}, Δ_{ik} и Δ приведены в таблице 4. Там же указываются свойства компактности полюсов Y_{ij}/s и Z_{ij} в бесконечности.

Таблица 4

№	α	β_1	β_2	β_3	γ	Y/s				Z				Компактность	
						$\alpha+1$	β_1	β_2	β_3	γ	β_1	β_2	β_3	Y/s	Z
1	$\beta-1$	β	β	β	$\beta+1$	β	β	β	β	$\beta+1$	β	β	β	НК(7а)	—
2	$\beta-1$	β	β	$\leqslant\beta-1$	$\beta+1$	β	β	β	$\leqslant\beta-1$	$\beta+1$	β	β	$\leqslant\beta-1$	НК(7б)	—
3	β	β	β	β	β	$\beta+1$	β	β	β	β	β	β	β	—	НК(7а)
4	β	β	β	$\leqslant\beta-1$	β	$\beta+1$	β	β	$\leqslant\beta-1$	β	β	β	$\leqslant\beta-1$	—	НК(7б)
5	$\beta-1$	β	$\beta-1$	$\leqslant\beta-1$	β	β	β	$\beta-1$	$\leqslant\beta-1$	β	β	$\beta-1$	$\leqslant\beta-1$	ПК(7в)	ПК(7в)

По данным таблиц 3 и 4 связи свойств компактности для полюсов функций Y_{ij}/s и Z_{ij} при $s=0$ и $s=\infty$ одинаковы:

II. Некомпактному полюсу функции Y_{ij}/s соответствует отсутствие полюса у функции Z_{ij} (см. также вывод 8).

I2. Отсутствию полюса у функции Y_{ij}/s соответствует наличие некомпактного полюса у функции Z_{ij}.

I3. Псевдокомпактному полюсу Y_{ij}/s соответствует псевдокомпактный полюс у Z_{ij}.

Аналогичные связи получаются, исходя из Z-параметров.

По условиям, приведенным в таблицах 3 и 4 можно различать и разные типы некомпактности. Также можно сделать некоторые общие выводы относительно Y и Z-параметров.

I4. Только один из Y-параметров при $s=0$ может иметь нуль кратности выше двух и только один из Z-параметров кратности выше единицы.

I5. Порядок числителя может быть: а) только у одного из Y-параметров меньше порядка знаменателя и б) только у одного из Z-параметров более чем на единицу меньше порядка знаменателя.

Уточним выражение (2-20б), пользуясь таблицей 4:

$N_{min} = \delta + \eta + 2$, если полюс Y-параметров при $s=\infty$ НК;

$N_{min} = \delta + \eta + 1$, если полюс Y-параметров при $s=\infty$ ПК; (2-35)

$N_{min} = \delta + \eta$, если полюс Y-параметров при $s=\infty$ отсутствует.

Полученные выводы относительно свойств компактности конечных полюсов и предельных параметров могут оказаться полезными при синтезе RC-цепей на основе Y- или Z-параметров, особенно при пользовании как Y- так и Z-параметрами.

Основные результаты анализа, проведенного в данной работе следующие:

1. Исходя из матрицы проводимостей реальной RC-цепи определяются необходимые и достаточные условия для существования некомпактных, псевдокомпактных и компактных полюсов у Y- и Z-параметров.

2. Получены правила для определения некоторых свойств компактности Z(Y)-параметров, исходя из Y(Z)-параметров.

3. Определяется минимальный порядок определителя матрицы проводимостей, реализуемой RC-цепью.

4. Определяются некоторые общие свойства Y- и Z-параметров, необходимые для их реализации RC-цепями.

Ряд проблем, связанных с реализуемостью заданных функций цепи, требуют дальнейшего анализа.

Литература

1. K.M. Adams. On the synthesis of three-terminal networks composed of two kinds of elements - "Philips Res. Repts", 1958, vol. 13, pp. 201-264.

2. S. Darlington. Some properties of multiterminal RC networks - "IRE Intern. Conv. Rec.", 1962, 2, pp. 36-48.

3. B.J. Dasher. Synthesis of RC transfer functions as unbalansed two-terminal pair networks - "MIT Research Lab. Electronics Tech. Rept.", 1952.

4. A. Fialkow. The matrix of a transformerless network. - "Quart. Appl. Math.", 1964, vol. 22, No. 1, pp. 57-70.

5. A. Fialkow. Series-parallel grounded two-ports. - "Quart. Appl. Math.", 1966, vol. 24, No. 3, pp. 195-213.

6. A. Fialkow. A limitation of the series-parallel structure. "IEEE Trans. Circuit Theory", 1968, vol. CT-15, No. 2, pp. 124-132.

7. A. Fialkow. One-pole admittance functions. - "IEEE Trans. Circuit Theory", 1970, vol. CT-17, No. 3, pp. 414-417.

8. A. Fialkow, I. Gerst. The transfer function of general two-terminal pair RC networks. - "Quart. Appl. Math.", 1952, vol. 10, No. 2, p. 113-127.

9. T.S. Huang. Bounds on two-element-kind impedance functions. - "Electronics Letters", 1965, vol. 1, No. 2, pp. 29-30.

10. H.M. L u c a l. Synthesis of three-terminal RC-networks. - "IRE Trans. Circuit Theory", 1955, vol. CT-2, No. 4, pp. 308-316.

11. H. O z a k i. Synthesis of RC 3-terminal network without ideal transformer. - "Osaka Univ., Tech. Rept.", 1953, No. 3.

12. P. S l e p i a n, L. W e i n b e r g. Necessary conditions of the matrix of an RC grounded quadripole. - "IRE Trans. Circuit Theory", 1958, vol. CT-5, No. 2, pp. 89-95.

13. Н. Б а л а б а н я н. Синтез электрических цепей. М.-Л., ГЭИ, 1961.

14. Е.А. Г и л л е м и н. Синтез пассивных цепей. М., Связь, 1970.

V. Männama

Über die Kompaktheit von RC-Dreipolen II
Verbindung zwischen den Kompaktheitseigenschaften der Y- und Z-Parameter

Zusammenfassung

Ausgehend von der möglichen Ordnung des Faktors $(s - s_\varrho)$ in den algebraischen Komplementen Δ, Δ_{ij}, Δ_{jk}, Δ_{ik}, und Δ_{1122} der Leitwertmatrix eines RC-Dreipols werden die nötigen und ausreichenden Bedingungen zur Existenz der kompakten, pseudokompakten und nichtkompakten Polstellen der Y- und Z-Parameter bestimmt. Es wird eine Verbindung zwischen den Kompaktheitseigenschaften der Y- und Z-Parameter sowohl für die endlichen Polstellen als auch in bezug auf die Grenzparameter gefunden. Minimaler Grad des Determinanten der Leitwertmatrix, die mit Hilfe eines RC-Dreipols realisierbar ist, wird gezeigt.

10. [illegible] synthesis of [illegible] RC-net-works". "IRE Trans. Circuit Theory", vol. [illegible], pp. [illegible].

11. L. O z a k i. Synthesis of RC-[illegible] network [illegible] transformers. - "Osaka Univ. Tech. Rep.", 1963 [illegible].

12. P. S l e p i a n, L. W e i n b e r g. Necessary conditions of the matrix of an RC-grounded quadripole. - "IRE Trans. Circuit Theory", 1958, vol. CT-5, No. 4, pp. [illegible].

13. Н. Б а л а б а н я н. Синтез электрических цепей. М.-Л., ГЭИ, 1961.

14. Э.А. Г и л л е м и н. Синтез пассивных цепей. М., Связь, 1970.

V. Mannama

Über die Kompaktheit von RC-Dreipolen II

Verbindung zwischen den Kompaktheitsbedingungen der Y- und Z-Parameter

Zusammenfassung

Ausgehend von der möglichen Ordnung des Faktors $(s - s_0)$ in den algebraischen Komplementen Δ, Δ_{ik} und Δ_{ik} der Leitwertmatrix eines RC-Dreipols werden die notwendigen und ausreichenden Bedingungen zur Existenz der kompakten, gemeinsam kompakten und nichtkompakten Polstellen der Y- und Z-Parameter bestimmt. Es wird eine Verbindung zwischen den Kompaktheitsbedingungen der Y- und Z-Parameter sowohl für die endlichen Polstellen als auch in bezug auf die Grenzparameter gefunden. Minimaler Grad der Determinanten der Leitwertmatrix, die mit Hilfe eines RC-Dreipols realisierbar ist, wird gezeigt.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 621.372.5

Г.И. Шифф

О КОМПЕНСИРУЕМОСТИ НЕИДЕАЛЬНЫХ КОНВЕРТОРНЫХ ДВУХПОРТОВ

При синтезе активных RC -цепей нашли применение сравнительно в большом количестве различные активные элементы (АЭ), как например, усилители тока или напряжения, конверторы иммитанса и другие. В таблице 2 приведены модели т.н. идеальных АЭ конверторного типа, нашедшие наиболее широкое применение. Как видно, под идеальным конвекторным АЭ подразумевается двухпорт, характеризующийся нулевыми значениями параметров боковой диагонали цепной матрицы F [17].

При практической же реализации их параметры часто оказываются недостаточно близкими к идеальным, откуда и возникают проблемы определения (измерения) первоначальных параметров реализованных АЭ и подгонки (компенсации) их к параметрам, соответствующим идеальным моделям АЭ [1÷8] Итак под компенсацией будем подразумевать процедуру, в результате которой все параметры какого-либо компенсируемого АЭ приобретают значения, соответствующие параметрам принятой идеальной модели. Естественно, что параметры компенсированного АЭ ограничены свойствами компенсируемого АЭ и принятой идеальной моделью АЭ.

В цитированных работах показаны возможности компенсации неидеальных преобразователей отрицательного сопротивления пассивными цепями, но отсутствуют критерии компенсации для общего случая. Целью данной работы является вывод общих критериев компенсируемости неидеальных АЭ рассматриваемого класса. При этом ограничиваемся рассмотрением АЭ, характеризуемых лишь действительными параметрами.

Идеальным АЭ конверторного типа характерны безразмерные параметры, поэтому их описание с помощью систем Y- и Z- параметров невозможно. По той же причине использование систем Y- и Z-параметров [I9] для анализа компенсируемости неидеальных АЭ данного типа не является целесообразным. В данной работе для описания АЭ используется т.н. цепная матрица F двухпорта, связывающая напряжение и ток одного порта с теми же переменными другого порта.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}, \text{ где } F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ и } \Delta F = AD - BC.$$

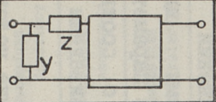
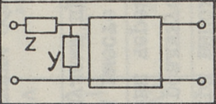
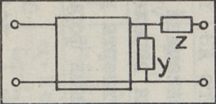
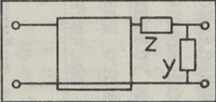
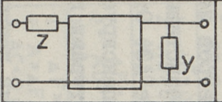
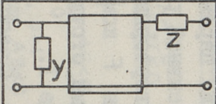
Так как параметры матрицы F компенсируемых АЭ принимались вещественными, то при определенных значениях параметров матрицы F компенсация осуществима пассивными (положительными) резистивными элементами [I,8,I3]. Любые двухпорты, составленные из резисторов, являются обратимыми и пассивными, следовательно, определитель их матрицы F всегда равняется единице и при каскадном соединении таких компенсирующих двухпортов к компенсируемому двухпорту, определитель результирующей цепи не меняется. Это обусловливает удобство применения цепной матрицы.

Таким образом, компенсируемые АЭ рассматриваются как двухпорты и компенсация проводится путем каскадного включения пассивных резистивных двухпортов к неидеальному АЭ. Прежде всего встает вопрос о необходимом количестве элементов в компенсирующей структуре. При каскадном включении любой одноэлементной (резистивной) структуры с компенсируемым АЭ, изменяются по крайней мере два параметра, находящиеся на различных диагоналях матрицы F. Следовательно, для компенсации параметров главной диагонали требуется двухэлементная структура. Из-за постоянства определителя, компенсация параметров главной диагонали влечет за собой и компенсацию по крайней мере одного из параметров боковой диагонали. Третий элемент компенсирующей структуры требуется в общем случае для компенсации второго параметра боковой диагонали матрицы F.

В итоге для компенсации неидеального компенсируемого АЭ каскадным включением пассивных резистивных цепей, до-

Таблица I

№	ПАРАМЕТРЫ ΔF	A	B	C	D
1	>0	>0	<0	<0	>0
2	>0	<0	≥0	≥0	<0
3	<0	>0	≥0	≤0	<0
4	<0	<0	≤0	≥0	>0
5	<0	>0	≤0	≥0	<0
6	<0	<0	≥0	≤0	>0
7	*	*	≥0	≥0	<0
8			≤0	≤0	>0
9	*	>0	≤0	≤0	*
10		<0	≥0	≥0	

СТРУКТУРЫ	Расчетные формулы
	$Z = -\frac{B}{D}$ $Y = -\frac{CD}{\Delta F}$
	$Z = -\frac{BA}{\Delta F}$ $Y = -\frac{C}{A}$
	$Z = -\frac{BD}{\Delta F}$ $Y = -\frac{C}{D}$
	$Z = -\frac{B}{A}$ $Y = -\frac{CA}{\Delta F}$
	$Z = -\frac{B}{D}$ $Y = -\frac{C}{D}$
	$Z = -\frac{B}{A}$ $Y = -\frac{C}{A}$

* Значения параметров не ограничены

статочное количество элементов (резисторов) равно трем, это на I больше числа компенсируемых элементов на главной диагонали матрицы F неидеального АЭ. Естественно, что при отсутствии надобности компенсации параметров главной диагонали, количество элементов в компенсирующей структуре будет равно числу фактически компенсируемых параметров в матрице F[I].

В первую очередь представляет интерес определение условий параметров неидеального АЭ, при выполнении которых пассивной резистивной компенсацией реализуемы идеальные конверторные АЭ. Эти условия выражены через параметры матрицы F компенсируемого двухпорта и вместе с соответствующими структурами и расчетными формулами приведены в таблице I.

Суммируя данные таблицы I, получим общие условия, определяющие потенциальный конверторный двухпорт:

I. Хотя бы два параметра матрицы F должны иметь противоположные знаки,

2. В зависимости от знаков параметров боковой диагонали матрицы F должно выполняться одно из двух условий:

а) при наличии параметров боковой диагонали одного и того же знака по крайней мере один параметр главной диагонали отличается от нуля,

б) при наличии параметров боковой диагонали противоположных знаков определитель цепной матрицы должен быть отрицательным.

Продолжая исследование компенсируемости неидеальных АЭ к различным идеальным активным элементам конверторного типа, сформулируем (таблица 2) необходимые и достаточные условия компенсируемости при каждом конверторном идеальном элементе. Необходимость и достаточность условий компенсируемости при каждом конкретном идеальном элементе можно показать совершенно аналогично способу, приведенному в приложении.

[I] Необходимое количество элементов зависит от выбранной модели идеального АЭ и от параметров матрицы F исходного неидеального АЭ.

В качестве примера были рассмотрены параметры цепных матриц некоторых элементов из литературы [16-18, 19] схем реализации конверторов иммитанса (таблица 2), и для всех рассмотренных схем выполняются вышеприведенные условия компенсируемости, следовательно они являются компенсируемыми.

Таблица 2

.	Наименование элемента	Сокращения	Уравнения	P	Условия компенсируемости
1	Усилитель тока	CII	$v_1=0$ $i_2=-ki_1$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & k^{-1}\end{bmatrix}$	1 $\Delta F=0$ 2 $AD>0,\ D\neq 0$ 3 $BD<0$ или $CD<0$
2	Усилитель напряжения	CVV	$v_2=ki_1$ $i_2=0$	$\begin{bmatrix}k^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	1 $\Delta F=0$ 2 $AD>0,\ A\neq 0$ 3 $AB<0$ или $AC<0$
3	Идеальный трансформатор	IT	$v_2=k^{-1}v_1$ $i_2=-ki_1$	$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k^{-1}\end{bmatrix}$	1 $\Delta F=1$ 2 $AD>1$ 3 $AB<0$ или $AC<0$
4	Конвертор напряжения	VC	$v_2=k^{-1}v_1$ $i_2=-i_1$	$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	1 $\Delta F>0$ 2 $A>\Delta F,\ D>1$ 3 $AC<0$ или $AB<0$
5	Конвертор тока	IC	$v_2=v_1$ $i_2=-k^{-1}i_1$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$	1 $\Delta F>0$ 2 $A>1,\ D>\Delta F$ 3 $AB<0$ или $AC<0$
6	Конвертор мощности	PC	$v_2=k^{-1}v_1$ $i_2=-k^{-1}i_1$	$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$	1 $\Delta F>0$ 2 $A>\sqrt{\Delta F},\ D>\sqrt{\Delta F}$ 3 $AB<0$ или $AC<0$
7	Конвертор иммитанса (инверсия напряжения): Общая модель	VNIC	$v_2=-k_1^{-1}v_1$ $i_2=-k_2i_1$	$\begin{bmatrix}-k_1 & 0\\ 0 & k_2^{-1}\end{bmatrix}$	I $\Delta F<0$ 2 Выполнение по крайней мере одного из двух а $A<0$ при $B>0$ или $C>0$ б $D>0$ при $B<0$ или $C<0$
8	Симметрическая модель	VNIC	$v_2=-k^{-1}v_1$ $i_2=-ki_1$	$\begin{bmatrix}-k & 0\\ 0 & k^{-1}\end{bmatrix}$	I $\Delta F=-1$ 2 Выполнение по крайней мере одного из двух а $A<0$ при $B>0$ или $C>0$ б $D>0$ при $B<0$ или $C<0$
9	Несимметрическая модель	VNIC	$v_2=-k^{-1}v_1$ $i_2=-i_1$	$\begin{bmatrix}-k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	I $\Delta F<0$ 2 Выполнение по крайней мере одного из двух а $A<\Delta F$ при $B>0$ или $C>0$ б $D>1$ при $B<0$ или $C<0$
10	Конвертор иммитанса (инверсия тока): Общая модель	INIC	$v_2=k_1^{-1}v_1$ $i_2=k_2i_1$	$\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & -k_2^{-1}\end{bmatrix}$	I $\Delta F<0$ 2 Выполнение по крайней мере одного из двух а $A>0$ при $B<0$ или $C<0$ б $D<0$ при $B>0$ или $C>0$
11	Симметрическая модель	INIC	$v_2=k^{-1}v_1$ $i_2=ki_1$	$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & -k^{-1}\end{bmatrix}$	I $\Delta F=-1$ 2 Выполнение по крайней мере одного из двух а $A>0$ при $B<0$ или $C<0$ б $D<0$ при $B>0$ или $C>0$
12	Несимметрическая модель	INIC	$v_2=v_1$ $i_2=ki_1$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k^{-1}\end{bmatrix}$	I $\Delta F<0$ 2 Выполнение по крайней мере одного из двух а $A>1$ при $B<0$ или $C<0$ б $D<\Delta F$ при $B>0$ или $C>0$

В качестве примера были рассмотрены параметры цепных матриц некоторых известных из литературы [9÷12, 18] схем реализации конверторов иммитанса (таблица 3) и для всех рассмотренных схем выполняются вышеприведенные условия компенсации, следовательно они являются компенсируемыми.

Таблица 3

Источник	A	B	C	D	ΔF
[12]	+1,000001	-1,328425	-0,4948768 x 10^{-8}	-1,200863	-1,200864
[11]	+1,000066	-0,9901325 x 10^{-3}	+0,3867705 x 10^{-5}	-1,000001	-1,000067
[18, фиг.1.34а]	-1,001280	-0,1453013	-0,1316416 x 10^{-5}	+0,9995509	-1,000830
[18, фиг.1.34б]	-1,000626	-0,6753021 x 10^{-1}	-0,5796164 x 10^{-6}	+0,9995872	-1,000213
[9 фиг.13]	-0,7918524	-0,6843444 x 10^{2}	+0,4176386 x 10^{-4}	+0,9973187	-0,7868711
[9 фиг.11]	-1,005806	-0,1629032 x 10^{3}	+0,2866147 x 10^{-5}	+0,9927189	-0,9980158
[10]	+0,9991743	-5,616682	+0,1044881 x 10^{-5}	-0,9999506	-0,9991190

В итоге можно заключить, что исследование компенсируемости трансактансных неидеальных активных элементов показало, что в общем случае возможно сформулировать необходимые и достаточные условия компенсируемости, которые могут быть использованы при практических реализациях активных элементов рассмотренного типа.

Литература

1. A.I. Larky. Negative-impedance converter. IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT-4, 1957, September, pp.124-131.

2. L.P. H u e l s m a n. Circuits, Matricex and linear vector spaces. McGraw-Hill, New-York, 1963.

3. L.P. H u e l s m a n. The compensation of negative immittance converters. Proc. IEEE, vol. 54, 1966, July, pp. 1015-1016.

4. C.K. K u o, K.L. S u. The nonideal NIC and its compensation. Proc. IEEE, vol. 55, 1967, No. 11, pp. 2027-2028.

5. C.K. K u o, K.L. S u. On the compensation of the nonideal NIC. Proc. IEEE, vol. 56, 1968, No. 1, pp 69.

6. N. B a l a b a n i a n. Compensating negative converters. Proc. IEEE, vol. 56, 1968, April, pp. 773-774.

7. C.K. K u o, K.L. S u. Compensating negative converters. Proc. IEEE, vol. 56, 1968, April, pp. 773-774.

8. C.K. K u o, K.L. S u. Some new four-terminal NIC circuits. IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-16, 1969, No.3, pp. 379-380.

9. I.G. L i n v i l l. RC-active filters. Proc. IRE, vol. 42, 1954, No. 3, pp. 555-564.

10. A.I. D r e w, I. G o r s k i - P o p i e l. Directly coupled negative impedance converter. Proc. IEE Electronics Record, vol. 111, 1964, No. 7, p. 1282.

11. L.O. C h u a. Synthesis of new nonlinear network elements. Proc. IEEE, vol. 56, 1968, No. 8, pp. 1325-1340.

12. L. d e P i a n, A. M e l t z e r. Approaching the ideal NIC. Electronics, vol. 41, 1968, No. 19, pp. 105-108.

13. I.M. H o r o w i t z. Negative impedance converters. IRE Transactions on component parts, vol. CP-9, 1962, No.1, pp. 33-38.

14. I.M. S i p r e s s. Synthesis of active RC networks. IRE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-8, September, 1961, pp. 260-269.

15. I.G. L i n v i l l. A new RC filter employing active elements. Proc. N.E.C., vol. 9, 1963, pp. 342-352.

16. I.G. L i n v i l l. RC active filters. Proc. IRE, vol. 42, 1964, March, pp. 555-564.

17. А.М. И в а н и ц к и й, М.М. З е л и н с к и й. Классификация трехполюсных идеальных преобразователей. Труды учебных институтов связи, вып. 49, 1970, стр. 121-129.

18. Б.Я. Л у р ь е. Проектировниие транзисторных усилителей с глубокой обратной связью. "Связь". М., 1965.

19. М.М. З е л и н с к и й. К вопросу компенсации неидеальностей трехполюсных конверторов сопротивления. Труды учебных институтов связи, вып. 48, 1970, стр. 136-143.

G. Schiff

On the Compensation of Nonideal Convertor-Type Two-Ports

S u m m a r y

A lot of ideal active elements as NICs, controlled sources etc. are known to be useful in the theory of active RC networks. At the same time the physical circuits are always nonideal in the sense that some undesired parameters are inherent. The problems of compensating these parasitic parameters are considered in this article. The two-ports under consideration are represented in terms of chain matrix parameters. The general criteria are derived for convertor-type two-ports to be compensated by using passive two-poles (resistors) only. The useful guidelines for the design of active RC networks are outlined.

Исследование компенсируемости неидеального АЭ к идеальному конвертору иммитанса

Рассмотрим вопрос компенсируемости неидеального АЭ на примере конвертора иммитанса с инверсией напряжения, идеальная модель которого имеет описание

$$F = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ где } k > 0. \qquad (I)$$

Конвертор иммитанса описанного типа нашел широкое применение при синтезе активных RC цепей [I4,I5,I6]. По существу, это является частным случаем общей модели VNIC (элемент № 7 в таблице 2), при $k_1 = -\Delta F\ (\Delta F < 0)$, $k_2 = 1$.

Выясним условия, которым должны удовлетворять параметры исходного компенсируемого АЭ, позволяющие пассивной компенсацией добиться выражения (I).

Теорема. Необходимыми и достаточными условиями компенсируемости неидеального АЭ к несимметрической модели идеального конвертора иммитанса с инверсией напряжения являются:

I. $\Delta F < 0$.

2. Выполнение по крайней мере одного из двух условий:

а) $A \leqslant \Delta F$ при $B > 0$ или $C > 0$,

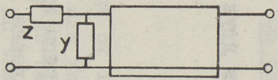
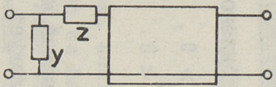
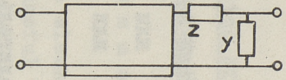
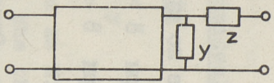
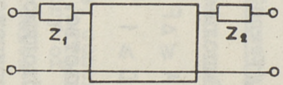
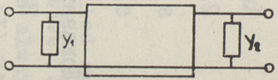
б) $D \geqslant 1$ при $B < 0$ или $C < 0$.

Доказательство.

Необходимость. Определитель цепной матрицы идеального АЭ (I) отрицателен, откуда сразу следует условие I теоремы. Для компенсации параметров главной диагонали, как отмечалось выше, требуется в общем случае двухэлементная структура из положительных пассивных резисторов (см. таблицу 4).

Из необходимости приведения параметров A' и D' к требуемым значениям $(A' = \Delta F,\ D' = 1)$ при положительных элементах в любой структуре таблицы 4 заключается необходимость выполнения по крайней мере одного из условий 2 теоремы. На-

Таблица 4

№	Структура	Матричное описание
1		$\begin{bmatrix} A+z(yA+C) & B+z(yB+D) \\ yA+C & yB+D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_1 & B'_1 \\ C'_1 & D'_1 \end{bmatrix}$
2		$\begin{bmatrix} zC+A & zD+B \\ C+y(zC+A) & D+y(zD+B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_2 & B'_2 \\ C'_2 & D'_2 \end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} A+y(zA+B) & zA+B \\ C+y(zC+D) & zC+D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_3 & B'_3 \\ C'_3 & D'_3 \end{bmatrix}$
4		$\begin{bmatrix} yB+A & B+z(yB+A) \\ yD+C & D+z(yD+C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_4 & B'_4 \\ C'_4 & D'_4 \end{bmatrix}$
5		$\begin{bmatrix} z_1C+A & B+z_1D+z_2(z_1C+A) \\ C & z_2C+D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_5 & B'_5 \\ C'_5 & D'_5 \end{bmatrix}$
6		$\begin{bmatrix} y_2B+A & B \\ C+y_1A+y_2(y_1B+D) & y_1B+D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_6 & B'_6 \\ C'_6 & D'_6 \end{bmatrix}$

пример, при структуре № 6 потребуется выполнение равенств

$$A + y_2 B = \Delta F \quad \text{и} \quad D + y_1 B = 1.$$

Ввиду положительности элементов

$$y_1 = \frac{1-D}{B} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{\Delta F - A}{B}$$

следует, что при $B > 0$ должны выполняться условия $D \leq 1$ и $A \leqslant \Delta F$ и при $B < 0$ условия $D \geqslant 1$ и $A \geqslant \Delta F$. Тем самым доказана необходимость выполнения условия 2 теоремы в обоих случаях.

Достаточность. Будем различать три основных случая в зависимости от исходных значений параметров неидеальных АЭ. Покажем возможность постепенного перехода от одного случая к другому при помощи подключения пассивных положительных резистивных цепей до полной компенсации неидеального АЭ.

Случай I. В данном случае рассмотрим неидеальные АЭ, исходные параметры которых удовлетворяют условиям теоремы, за исключением равенства в условии 2. Рассматриваемое здесь множество неидеальных АЭ можно представить в виде трех подмножеств, исходные параметры АЭ которых удовлетворяют, помимо условия I теоремы, одному из следующих условий:

I. $A < \Delta F$ и $D < 1$ при $B > 0$ или $C > 0$, (2)

2. $A > \Delta F$ и $D > 1$ при $B < 0$ или $C < 0$, (3)

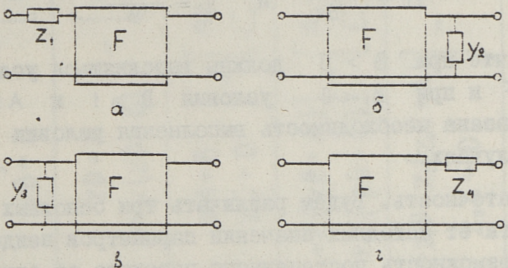
3. $A < \Delta F$ и $D > 1$. (4)

Компенсацию одного из параметров главной диагонали матрицы F можно выполнить, согласно схемам фиг. I в зависимости от компенсируемого параметра и параметров боковой диагонали.

Компенсирующие элементы выражаются формулами

$$z_1 = \frac{\Delta F - A}{C}, \quad y_2 = \frac{\Delta F - A}{B}, \quad y_3 = \frac{1-D}{B}, \quad z_4 = \frac{1-D}{C}. \tag{5}$$

Из требования их положительности следует, что схема Iа используется при условиях (2) и (4) при значениях $C > 0$ и условии (3) при значениях $C < 0$, схема Iб – при условиях (2) и (4) при $B > 0$ и условии (3) при $B < 0$, схема Iв – при условиях (3) и (4) при $B < 0$ и условии (2) при $B > 0$, схема Iг – при условиях (3) и (4) при $C < 0$ и условии (2) при $C > 0$.



Фиг. 1

В зависимости от использования схем фиг. I матричное описание результирующих АЭ приобретает одну из четырех приводимых форм:

$$F = \begin{bmatrix} \Delta F & \dfrac{\Delta F(D-1)}{C} \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (6)$$

при схеме Iа, где

$A' = \Delta F,\ D<1,\ B'>0,\ C>0,\ \Delta F<0$ при условии (2), (7)

$A' = \Delta F,\ D>1,\ B'>0,\ C<0,\ \Delta F<0$ при условии (3), (8)

$A' = \Delta F,\ D>1,\ B'<0,\ C>0,\ \Delta F<0$ при условии (4); (9)

$$F = \begin{bmatrix} \Delta F & B \\ \dfrac{\Delta F(D-1)}{B} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B \\ C' & D \end{bmatrix} \qquad (10)$$

при схеме Iб, где

$A' = \Delta F,\ D<1,\ B>0,\ C'>0,\ \Delta F<0$ при условии (2),

$A' = \Delta F,\ D>1,\ B<0,\ C'>0,\ \Delta F<0$ при условии (3),

$A' = \Delta F,\ D>1,\ B>0,\ C'<0,\ \Delta F<0$ при условии (4);

$$F=\begin{bmatrix} A & B \\ \frac{A-\Delta F}{B} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C' & D' \end{bmatrix} \qquad (11)$$

при схеме Iв, где

$D'=1,\ A<\Delta F,\ B>0,\ C'<0,\ \Delta F<0$ при условии (2), (12)

$D'=1,\ A>\Delta F,\ B<0,\ C'<0,\ \Delta F<0$ при условии (3), (13)

$D'=1,\ A<\Delta F,\ B<0,\ C'>0,\ \Delta F<0$ при условии (4); (14)

$$F=\begin{bmatrix} A & \frac{A-\Delta F}{C} \\ C & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B' \\ C & D' \end{bmatrix} \qquad (15)$$

при схеме Iг, где

$D'=1,\ A<\Delta F,\ B'<0,\ C>0,\ \Delta F<0$ при условии (2),

$D'=1,\ A>\Delta F,\ B'<0,\ C<0,\ \Delta F<0$ при условии (3),

$D'=1,\ A<\Delta F,\ B'>0,\ C<0,\ \Delta F<0$ при условии (4).

Анализируя параметры результирующих элементов, видим, что образовалось шесть новых подмножеств неидеальных АЭ, параметры которых удовлетворяют условиям (7) по (9) и (12) по (14) которые, в свою очередь, согласуются с условиями теоремы, включая равенство в условии 2 теоремы.

Случай 2. Теперь за исходное принимаем подмножество неидеальных конверторов иммитанса, параметры первоначальной матрицы F которых удовлетворяют одному из условий (7) по (9) или (12) по (14).

Компенсации параметра A в (11) и (15) можно добиться согласно схемам Iа и Iб, а параметра D в (6) и (10), согласно схемам Iв и Iг, где компенсирующие элементы выражаются по-прежнему формулами (5). Ввиду положительности компенсирующих элементов схема Iа используема при АЭ, параметры которых удовлетворяют условиям (13) или (14), схема Iб - при (12) или (13), схема Iв - при (7) или (9), схема Iг - при (7) или (8).

После этого цепные матрицы приобретают вид (16) или (17),

$$F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

где $A = \Delta F,\ D = 1,\ C \neq 0$ и $A = \Delta F,\ D = 1,\ B \neq 0$ соответственно.

Случай 3. Теперь исходными считаем четыре подмножества неидеальных конверторов иммитанса, обладающих матрицами (I6) и (I7) при следующих условиях:

$$\Delta F < 0,\ A = \Delta F,\ D = 1,\ B = 0,\ C > 0;$$

$$\Delta F < 0,\ A = \Delta F,\ D = 1,\ B = 0,\ C < 0;$$

$$\Delta F < 0,\ A = \Delta F,\ D = 1,\ B > 0,\ C = 0;$$

$$\Delta F < 0,\ A = \Delta F,\ D = 1,\ B < 0,\ C = 0.$$

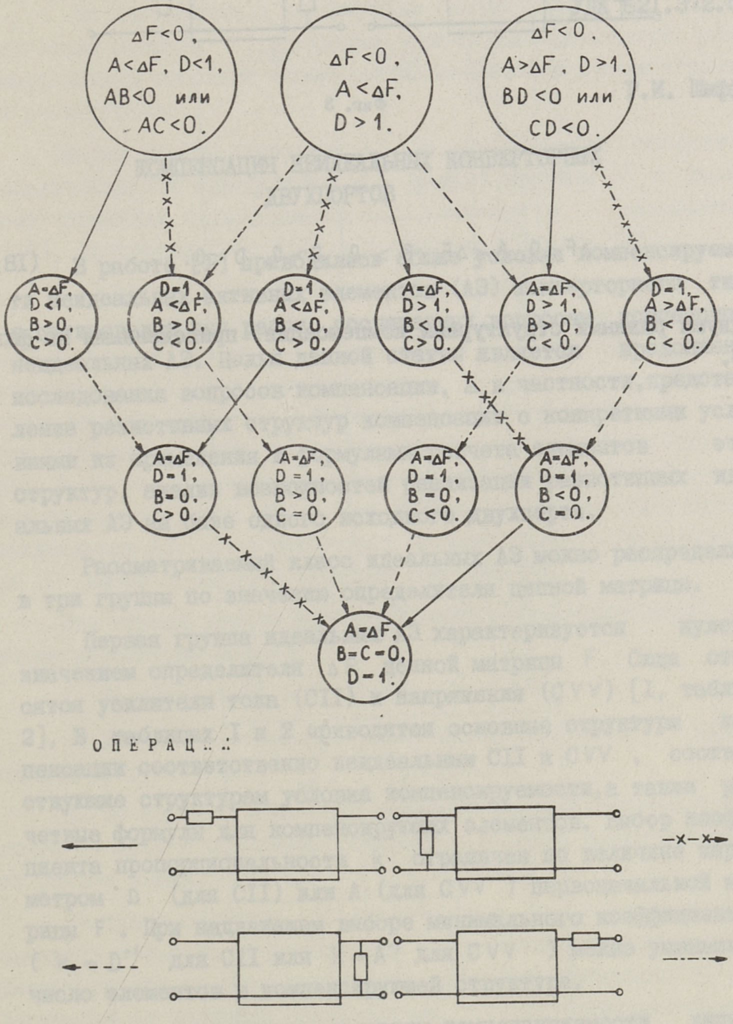
Нетрудно убедиться в том, что компенсация параметра C осуществима схемой Iв при $C > 0$ и схемой Iб при $C < 0$, а параметра B - схемой Iг при $B > 0$ и схемой Iа при $B < 0$, где элементы компенсирующей цепи выражаются соответственно формулами:

$$z_1 = -B,\quad y_2 = -C,\quad y_3 = -\frac{C}{\Delta F},\ z_4 = -\frac{B}{\Delta F}.$$

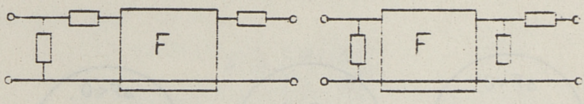
В итоге получается двухпорт, описание которого совпадает с (I) и следовательно неидеальные АЭ типа (I6) и (I7) компенсированы. Тем самым показана возможность постепенного перехода от общего случая к случаю 3 при выполнении соответствующих условий согласующихся с условиями теоремы. Теорема доказана.

На фиг. 2 приведены выше рассмотренные подмножества компенсируемых конверторов иммитанса с соответствующими параметрами и связь между ними.

На фиг. 2 так же хорошо видно, что при определенных значениях параметров первоначальной матрицы F имеется возможность варьирования структуры компенсации. Например, компенсация неидеального АЭ, параметры которого удовлетворяют условиям (I8), возможна


ΔF<0, A<ΔF, D<1, AB<0 или AC<0.
ΔF<0, A<ΔF, D>1.
ΔF<0, A>ΔF, D>1. BD<0 или CD<0.
A=ΔF, D<1, B>0, C>0.
D=1, A<ΔF, B>0, C<0.
D=1, A<ΔF, B<0, C>0.
A=ΔF, D>1, B<0, C>0.
A=ΔF, D>1, B>0, C<0.
D=1, A>ΔF, B<0, C<0.
A=ΔF, D=1, B=0, C>0.
A=ΔF, D=1, B>0, C=0.
A=ΔF, D=1, B=0, C<0.
A=ΔF, D=1, B<0, C=0.
A=ΔF, B=C=0, D=1.

Фиг. 2.



Фиг. 3

$$\Delta F < 0,\ A < \Delta F,\ B > 0,\ C > 0,\ D < 0. \tag{I8}$$

двумя равными структурами компенсации, приведенными на фиг. 3.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 334 1972

УДК 621.372.5

Г.И. Шифф

КОМПЕНСАЦИЯ НЕИДЕАЛЬНЫХ КОНВЕРТОРНЫХ ДВУХПОРТОВ

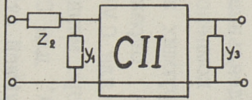
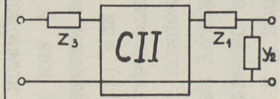
В работе [I] приводились общие условия компенсируемости неидеальных активных элементов (АЭ) конверторного типа и цитировался ряд работ, посвященных вопросам компенсации неидеальных АЭ. Целью данной статьи является продолжение исследования вопросов компенсации, а в частности, представление резистивных структур компенсации с конкретными условиями их применения и формулами расчета элементов этих структур, анализ возможностей реализации разнотипных идеальных АЭ на базе одного исходного двухпорта.

Рассматриваемый класс идеальных АЭ можно распределить в три группы по значению определителя цепной матрицы.

Первая группа идеальных АЭ характеризуется нулевым значением определителя ΔF цепной матрицы F. Сюда относятся усилители тока (CII) и напряжения (CVV) [I, таблица 2], В таблицах I и 2 приводятся основные структуры компенсации соответственно неидеальным CII и CVV, соответствующие структурам условия компенсируемости, а также расчетные формулы для компенсирующих элементов. Выбор коэффициента пропорциональности k ограничен по величине параметром D (для CII) или A (для CVV) первоначальной матрицы F. При надлежащем выборе минимального коэффициента k ($k = D^{-1}$ для CII или $k = A^{-1}$ для CVV) можно уменьшить число элементов в компенсирующей структуре.

По представленным условиям компенсируемости видно, что идеальные управляемые источники обоих типов (CII и CVV) можно реализовать на основе двухпорта, параметры матрицы которого отличаются от нуля и удовлетворяют следующим условиям:

Таблица I

№	Структура	Формулы расчета элементов	Условия компенсируемости	
			$k>0$	$k<0$
1		$Y_1=\frac{1-kD}{kB}$, $Y_3=-\frac{A}{B}$, $Z_2=-kB$	$A\geq 0$, $B<0$, $C\leq 0$, $D>0$; $kD\geq 1$, $\Delta F=0$	$A\leq 0$, $B>0$, $C>0$, $D<0$; $kD>1$, $\Delta F=0$
2		$Z_1=\frac{1-kD}{kC}$, $Z_3=-\frac{A}{C}$, $Y_2=-kC$	$A\geq 0$, $B\leq 0$, $C<0$, $D>0$; $kD\geq 1$, $\Delta F=0$	$A\leq 0$, $B\geq 0$, $C>0$, $D<0$; $kD>1$, $\Delta F=0$

I. Нулевой определитель – $\Delta F = 0$,

2. Параметры вдоль одной диагонали имеют одинаковый знак, а вдоль строк или столбцов разные знаки.

Из двухпортов с параметрами разных знаков на одной диагонали матрицы F идеальные управляемые источники рассматриваемым способом (компенсация пассивными резисторами) не реализуются

Вторая группа идеальных АЭ характеризуется свойством положительности определения ΔF цепной матрицы F и включает идеальный трансформатор (IT), конвертор напряжения (VC), конвертор тока (IC) и конвертор мощности (PC).

В таблицах 3 по I0 приведены условия компенсации при разных структурах, а также расчетные формулы для элементов компенсирующих цепей при идеальных АЭ типа IT, VC, IC и PC соответственно. Всем компенсируемым АЭ этой группы свойственно наличие нескольких возможных структур компенсации. Так при выполнении общих условий компенсируемости [I, таблица 2, пос. 3 по пос.6] и отсуствии нулевых параметров в матрице F, все восемь структур могут быть использованы для компенсации неидеальных АЭ, а при некоторых нулевых параметрах в матрице F выбор ограничен четырьмя структурами.

Эта группа компенсируемых АЭ имеет следующие общие условия параметрам матрицы F :

I. Положительный определитель – $\Delta F > 0$.

2. Ненулевые параметры вдоль одной диагонали имеют один и тот же знак.

3. По крайней мере один параметр боковой диагонали отличен от нуля и параметры главной и боковой диагонали имеют разные знаки.

Учитывая свойства АЭ данной группы, целесообразно рассмотреть возможности реализации разных типов идеальных АЭ данной группы на базе некоторого исходного двухпорта в зависимости от величины определителя ΔF первоначальной матрицы F .

I. $0 < \Delta F < 1$.

Если параметры главной диагонали матрицы F неидеального АЭ удовлетворяют условиям $A \geq 1$ и $D \geq 1$, то идеальные

Таблица 2

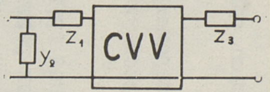
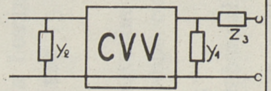
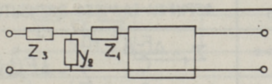
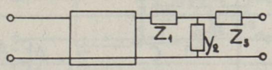
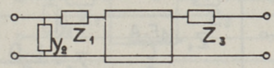
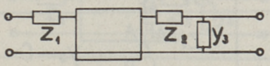
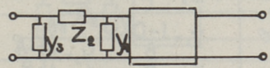
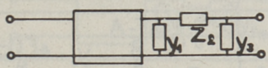
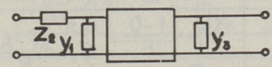
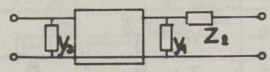
№	Структура	Формулы расчета элементов	Условия компенсируемости: $k > 0$		Условия компенсируемости: $k < 0$	
1		$Z_1 = \frac{1-kA}{kC}$ $Z_3 = -\frac{D}{C}$ $Y_2 = -kC$	$A>0$ $B\leqslant 0$ $C<0$ $D\geqslant 0$	$kA\geqslant 1$ $\Delta F = 0$	$A<0$ $B\geqslant 0$ $C>0$ $D\leqslant 0$	$kA\geqslant 1$ $\Delta F = 0$
2		$Y_1 = \frac{1-kA}{kB}$ $Z_3 = -kB$ $Y_2 = -\frac{D}{B}$	$A>0$ $B<0$ $C\leqslant 0$ $D\geqslant 0$	$kA\geqslant 1$ $\Delta F = 0$	$A<0$ $B>0$ $C\geqslant 0$ $D\leqslant 0$	$kA\geqslant 1$ $\Delta F = 0$

Таблица 3

№	СТРУКТУРА	ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ
1		$Z_1=\frac{k-A}{C}$ $Y_2=-\frac{C}{k}$ $Z_3=\frac{k(1-kD)}{C}$
2		$Z_1=\frac{1-kD}{kC}$ $Y_2=-kC$ $Z_3=\frac{k-A}{k^2C}$
3		$Z_1=\frac{k-A}{C}$ $Y_2=-\frac{C}{k}$ $Z_3=\frac{1-kD}{kC}$
4		$Z_1=\frac{k-A}{C}$ $Z_2=\frac{1-kD}{kC}$ $Y_3=-kC$
5		$Y_1=\frac{1-kD}{kB}$ $Z_2=-kB$ $Y_3=\frac{k-A}{k^2B}$
6		$Y_1=\frac{k-A}{B}$ $Z_2=-\frac{B}{k}$ $Y_3=\frac{k(1-kD)}{B}$
7		$Y_1=\frac{1-kD}{kB}$ $Z_2=-kB$ $Y_3=\frac{k-A}{B}$
8		$Y_1=\frac{k-A}{B}$ $Z_2=-\frac{B}{k}$ $Y_3=\frac{1-kD}{kB}$

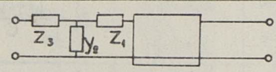
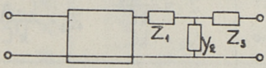
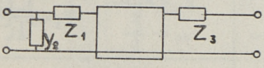
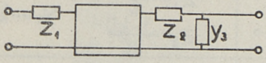
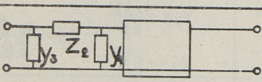
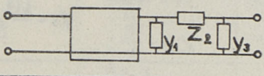
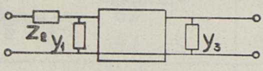
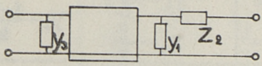
Структуры компенсации и формулы расчета элементов цепей компенсации неидеальных трансформаторов.

Таблица 4

	Структура	Условия компенсируемости		Структура	Условия компенсируемости
$k>0$	1÷4	$A>0$, $B<0$, $C<0$, $D>0$; $\Delta F=1$, $k<A$, $kD>1$	$k<0$	1÷4	$A<0$, $B>0$, $C>0$, $D<0$; $\Delta F=1$, $k>A$, $kD>1$
	5÷8	$A>0$, $B<0$, $C<0$, $D>0$; $\Delta F=1$, $k<A$, $kD>1$		5÷8	$A<0$, $B>0$, $C>0$, $D<0$; $\Delta F=1$, $k>A$, $kD>1$

Условия компенсируемости неидеальных трансформаторов.

Таблица 5

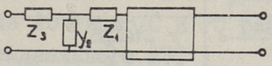
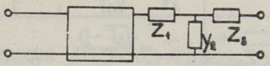
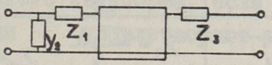
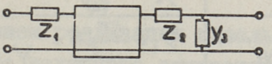
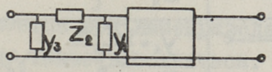
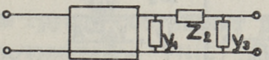
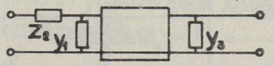
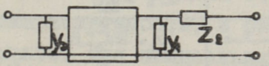
№	СТРУКТУРА	ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ
1	 	$Z_1=\frac{\Delta F-A}{C}$ $Y_2=-\frac{C}{\Delta F}$ $Z_3=\frac{\Delta F(1-D)}{C}$
2	 	$Z_1=\frac{1-D}{C}$ $Y_2=-C$ $Z_3=\frac{\Delta F-A}{\Delta F\,C}$
3	 	$Z_1=\frac{\Delta F-A}{C}$ $Y_2=-\frac{C}{\Delta F}$ $Z_3=\frac{1-D}{C}$
4	 	$Z_1=\frac{\Delta F-A}{C}$ $Z_2=\frac{1-D}{C}$ $Y_3=-C$
5	 	$Y_1=\frac{1-D}{B}$ $Z_2=-B$ $Y_3=\frac{\Delta F-A}{\Delta F\,B}$
6	 	$Y_1=\frac{\Delta F-A}{B}$ $Z_2=-\frac{B}{\Delta F}$ $Y_3=\frac{\Delta F(1-D)}{B}$
7	 	$Y_1=\frac{1-D}{B}$ $Z_2=-B$ $Y_3=\frac{\Delta F-A}{B}$
8	 	$Y_1=\frac{\Delta F-A}{B}$ $Z_2=-\frac{B}{\Delta F}$ $Y_3=\frac{1-D}{B}$

Структуры компенсации и формулы расчета элементов цепей компенсации неидеальных конверторов напряжения.

Таблица 6

	Структура	Условия компенсируемости
$k-\Delta F>0$	1÷4	$A>0$ $B<0$ $C<0$ $D\geq 1$ $A\geq\Delta F$
	5÷8	$A>0$ $B<0$ $C\leq 0$ $D\geq 1$ $A\geq\Delta F$

Условия компенсируемости неидеальных конверторов напряжения.

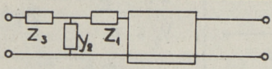
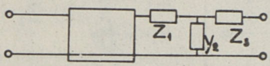
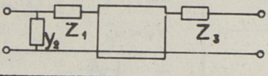
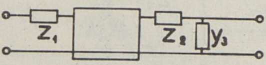
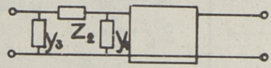
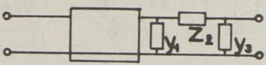
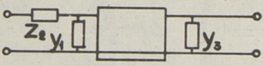
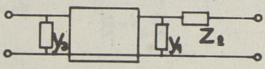
№	Структура	Формулы расчета элементов	
1		$Z_1 = \frac{1-A}{C}$, $Y_2 = -C$	$Z_3 = \frac{\Delta F - D}{\Delta F C}$
2		$Z_1 = \frac{\Delta F - D}{C}$, $Y_2 = -\frac{C}{\Delta F}$	$Z_3 = \frac{\Delta F(1-A)}{C}$
3		$Z_1 = \frac{1-A}{C}$, $Y_2 = -C$	$Z_3 = \frac{\Delta F - D}{C}$
4		$Z_1 = \frac{1-A}{C}$, $Z_2 = \frac{\Delta F - D}{C}$	$Y_3 = -\frac{C}{\Delta F}$
5		$Y_4 = \frac{\Delta F - D}{B}$, $Z_2 = -\frac{B}{\Delta F}$	$Y_3 = \frac{\Delta F(1-A)}{B}$
6		$Y_1 = \frac{1-A}{B}$, $Z_2 = -B$	$Y_3 = \frac{\Delta F - D}{\Delta F B}$
7		$Y_1 = \frac{\Delta F - D}{B}$, $Z_2 = -\frac{B}{\Delta F}$	$Y_3 = \frac{1-A}{B}$
8		$Y_1 = \frac{1-A}{B}$, $Z_2 = -B$	$Y_3 = \frac{\Delta F - D}{B}$

Структуры компенсации и формулы расчета элементов цепей компенсации неидеальных конверторов тока.

	Структура	Условия компенсируемости	
$k = \Delta F > 0$	1÷4	$A \geq 1$ $B < 0$ $C < 0$ $D > 0$	$D \geq \Delta F$
	5÷8	$A \geq 1$ $B < 0$ $C \leq 0$ $D > 0$	$D \geq \Delta F$

Условия компенсируемости неидеальных конверторов тока.

Таблицы 9 и 10

№	Структура	Формулы расчета элементов	
1		$Z_1 = \frac{\sqrt{\Delta F} - A}{C}$ $Y_2 = -\frac{C}{\sqrt{\Delta F}}$	$Z_3 = \frac{\sqrt{\Delta F} - D}{C}$
2		$Z_1 = \frac{\sqrt{\Delta F} - D}{C}$ $Y_2 = -\frac{C}{\sqrt{\Delta F}}$	$Z_3 = \frac{\sqrt{\Delta F} - A}{C}$
3		$Z_1 = \frac{\sqrt{\Delta F} - A}{C}$ $Y_2 = -\frac{C}{\sqrt{\Delta F}}$	$Z_3 = \frac{\sqrt{\Delta F} - D}{C}$
4		$Z_1 = \frac{\sqrt{\Delta F} - A}{C}$ $Z_2 = \frac{\sqrt{\Delta F} - D}{C}$	$Y_3 = -\frac{C}{\sqrt{\Delta F}}$
5		$Y_1 = \frac{\sqrt{\Delta F} - D}{B}$ $Z_2 = -\frac{B}{\sqrt{\Delta F}}$	$Y_3 = \frac{\sqrt{\Delta F} - A}{B}$
6		$Y_1 = \frac{\sqrt{\Delta F} - A}{B}$ $Z_2 = -\frac{B}{\sqrt{\Delta F}}$	$Y_3 = \frac{\sqrt{\Delta F} - D}{B}$
7		$Y_1 = \frac{\sqrt{\Delta F} - D}{B}$ $Z_2 = -\frac{B}{\sqrt{\Delta F}}$	$Y_3 = \frac{\sqrt{\Delta F} - A}{B}$
8		$Y_1 = \frac{\sqrt{\Delta F} - A}{B}$ $Z_2 = -\frac{B}{\sqrt{\Delta F}}$	$Y_3 = \frac{\sqrt{\Delta F} - D}{B}$

Структуры компенсации и формулы расчета элементов цепей компенсации неидеальных конверторов мощности.

	Струк-тура	Условия компенсируемости
$k - \sqrt{\Delta F} > 0$	1÷4	$A > \sqrt{\Delta F}$ $B < 0$ $C < 0$ $D > \sqrt{\Delta F}$
	5÷8	$A > \sqrt{\Delta F}$ $B < 0$ $C < 0$ $D > \sqrt{\Delta F}$

Условия компенсируемости неидеальных конверторов мощности.

АЭ типа VC, IC и PC реализуемы на базе этого исходного элемента, при выполнении условий $\sqrt{\Delta F} \leqslant A < 1$ и $D \geqslant 1$ - идеальные АЭ типа VC и PC реализуемы и при $A \geqslant 1$ и $\sqrt{\Delta F} \leqslant D < 1$ - идеальные АЭ типа IC и PC реализуемы на базе одного исходного неидеального АЭ.

2. $\Delta F = 1$.

Идеальные АЭ всех типов данной группы реализуемы на базе исходного двухпорта, если параметры главной диагонали его матрицы F удовлетворяют условиям $A \geqslant 1$ и $D \geqslant 1$.

3. $\Delta F > 1$.

Условием реализации идеальных АЭ типа VC, IC и PC на базе одного исходного двухпорта является $A \geqslant \Delta F$ и $D \geqslant \Delta F$.

Разумеется все вышеприведенные общие условия должны по-прежнему также выполняться.

Третью группу составляют различные модели идеальных конверторов иммитанса (NIC) с инверсией напряжения (VNIC) или тока (INIC), которые характеризуются отрицательным значением определителя ΔF.

В таблице II приведены структуры, соответствующие условиям компенсируемости, и расчетные формулы компенсирующих элементов для неидеальных VNIC и INIC при общей модели идеального АЭ [I, таблица 2, пос. 7 и пос.IO], где верхний знак в формулах расчета соответствует VNIC, а нижний - INIC. При симметрической модели идеального NIC в формулах следует учесть условие $\Delta F = -1$.

Аналогичные данные для несимметрической модели идеального NIC приведены в таблице I2. Отличие в общих условиях компенсируемости при VNIC и INIC состоит лишь во втором условии [I, таблица 2], где ограничения для параметров главной диагонали матрицы F просто обменялись местами. Поэтому в дальнейшем рассмотрим лишь реализацию разных моделей VNIC так как результаты легко переносимы на случай идеального элемента типа INIC.

Для реализации разных моделей идеальных АЭ типа VNIC общими условиями, кроме отрицательности определителя, являются еще либо отрицательность параметра A, либо положительность параметра D, а также наличие по крайней мере

Таблица II

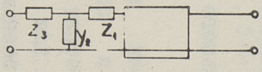
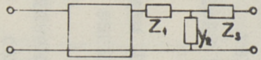
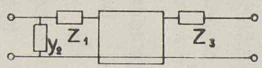
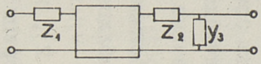
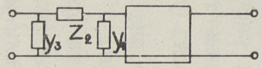
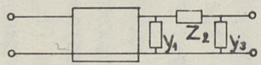
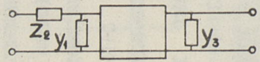
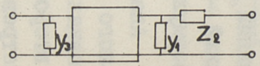
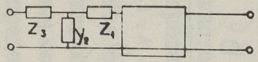
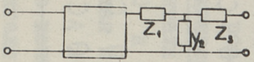
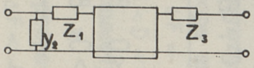
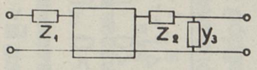
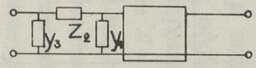
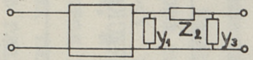
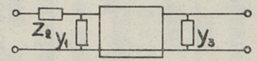
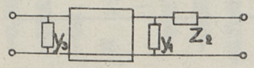
	Структура	Формулы расчета элементов	Условия компенсируемости VNIC		Условия компенсируемости INIC	
1		$Z_1=\frac{\mp k-A}{C}$ $y_2=\pm\frac{C}{k}$ $Z_3=\frac{\mp k(\Delta F\pm kD)}{\Delta F C}$	$A<0$ $C>0$	$k\leqslant -A$ $kD\geqslant -\Delta F$	$A>0$ $C<0$	$k\leqslant A$ $kD\leqslant \Delta F$
2		$Z_1=\frac{\Delta F\pm kD}{\mp kC}$ $y_2=\pm\frac{kC}{\Delta F}$ $Z_3=\frac{\Delta F(\mp k-A)}{k^2 C}$	$A<0$ $C<0$	$k\leqslant -A$ $kD\geqslant -\Delta F$	$A>0$ $C>0$	$k\leqslant A$ $kD\leqslant \Delta F$
3		$Z_1=\frac{\mp k-A}{C}$ $y_2=\pm\frac{C}{k}$ $Z_3=\frac{\Delta F\pm kD}{\mp kC}$	$A<0$ $C>0$	$k\leqslant -A$ $kD\leqslant -\Delta F$	$A>0$ $C<0$	$k\leqslant A$ $kD>\Delta F$
4		$Z_1=\frac{\mp k-A}{C}$ $Z_2=\frac{\Delta F\pm kD}{\mp kC}$ $y_3=\pm\frac{kC}{\Delta F}$	$C<0$ $D>0$	$k>-A$ $kD\geqslant -\Delta F$	$C>0$ $D<0$	$k>A$ $kD\leqslant \Delta F$
5		$y_1=\frac{\Delta F\pm kD}{\mp kB}$ $Z_2=\pm\frac{kB}{\Delta F}$ $y_3=\frac{\Delta F(\mp k-A)}{k^2 B}$	$A<0$ $B<0$	$k\leqslant -A$ $kD\geqslant -\Delta F$	$A>0$ $B>0$	$k\leqslant A$ $kD\leqslant \Delta F$
6		$y_1=\frac{\mp k-A}{B}$ $Z_2=\pm\frac{B}{k}$ $y_3=\frac{\mp k(\Delta F\pm kD)}{\Delta F B}$	$A<0$ $B>0$	$k<-A$ $kD\geqslant -\Delta F$	$A>0$ $B<0$	$k<A$ $kD\leqslant \Delta F$
7		$y_1=\frac{\Delta F\mp kD}{kB}$ $Z_2=\pm\frac{kB}{\Delta F}$ $y_3=\frac{\mp k-A}{B}$	$B<0$ $D>0$	$k\geqslant -A$ $kD\geqslant -\Delta F$	$B>0$ $D<0$	$k\geqslant A$ $kD\leqslant \Delta F$
8		$y_1=\frac{\mp k-A}{B}$ $Z_2=\pm\frac{B}{k}$ $y_3=\frac{\Delta F\pm kD}{\mp kB}$	$A<0$ $B>0$	$k\leqslant -A$ $kD\leqslant -\Delta F$	$A>0$ $B<0$	$k\leqslant A$ $kD\geqslant \Delta F$

Таблица I2

№	Структура	Формулы расчета элементов		Условия компенсируемости	
		VNIC	INIC	VNIC	INIC
1		$Z_1=\frac{\Delta F-A}{C}$ $Z_3=\frac{\Delta F(1-D)}{C}$ $Y_2=-\frac{C}{\Delta F}$	$Z_1=\frac{1-A}{C}$ $Z_3=\frac{\Delta F-D}{\Delta F C}$ $Y_2=-C$	$A<\Delta F$ $D>1$ $C>0$	$A>1$ $D<\Delta F$ $C<0$
2		$Z_1=\frac{1-D}{C}$ $Z_3=\frac{\Delta F-A}{\Delta F C}$ $Y_2=-C$	$Z_1=\frac{\Delta F-D}{C}$ $Z_3=\frac{\Delta F(1-A)}{C}$ $Y_2=-\frac{C}{\Delta F}$	$A<\Delta F$ $D>1$ $C<0$	$A>1$ $D<\Delta F$ $C>0$
3		$Z_1=\frac{\Delta F-A}{C}$ $Z_3=\frac{1-D}{C}$ $Y_2=-\frac{C}{\Delta F}$	$Z_1=\frac{1-A}{C}$ $Z_3=\frac{\Delta F-D}{C}$ $Y_2=-C$	$A<\Delta F$ $D<1$ $C>0$	$A>1$ $D>\Delta F$ $C<0$
4		$Z_1=\frac{\Delta F-A}{C}$ $Y_3=-C$ $Z_2=\frac{1-D}{C}$	$Z_1=\frac{1-A}{C}$ $Y_3=-\frac{C}{\Delta F}$ $Z_2=\frac{\Delta F-D}{C}$	$A>\Delta F$ $D>1$ $C<0$	$A<1$ $D<\Delta F$ $C>0$
5		$Y_1=\frac{1-D}{B}$ $Y_3=\frac{\Delta F-A}{\Delta F B}$ $Z_2=-B$	$Y_1=\frac{\Delta F-D}{B}$ $Y_3=\frac{\Delta F(1-A)}{B}$ $Z_2=-\frac{B}{\Delta F}$	$A<\Delta F$ $D>1$ $B<0$	$A>1$ $D<\Delta F$ $B>0$
6		$Y_1=\frac{\Delta F-A}{B}$ $Y_3=\frac{\Delta F(1-D)}{B}$ $Z_2=-\frac{B}{\Delta F}$	$Y_1=\frac{1-A}{B}$ $Y_3=\frac{\Delta F-D}{\Delta F B}$ $Z_2=-B$	$A<\Delta F$ $D>1$ $B>0$	$A>1$ $D<\Delta F$ $B<0$
7		$Y_1=\frac{1-D}{B}$ $Y_3=\frac{\Delta F-A}{B}$ $Z_2=-B$	$Y_1=\frac{\Delta F-D}{B}$ $Y_3=\frac{1-A}{B}$ $Z_2=-\frac{B}{\Delta F}$	$A>\Delta F$ $D>1$ $B<0$	$A<1$ $D<\Delta F$ $B>0$
8		$Y_1=\frac{\Delta F-A}{B}$ $Y_3=\frac{1-D}{B}$ $Z_2=-\frac{B}{\Delta F}$	$Y_1=\frac{1-A}{B}$ $Y_3=\frac{\Delta F-D}{B}$ $Z_2=-B$	$A<\Delta F$ $D<1$ $B>0$	$A>1$ $D>\Delta F$ $B<0$

одного ненулевого параметра боковой диагонали матрицы F. Последнее условие относится лишь к несимметрической модели конвертора иммитанса. В данном случае при наличии обоих нулевых параметров боковой диагонали матрицы F следует дополнительным элементом (резистором) ввести ненулевой параметр боковой диагонали так, чтобы выполнялись общие условия компенсируемости конвертора иммитанса.

Следовательно, при $A > 0$ и $D < 0$ (одновременно) идеальный АЭ типа VNIC не может быть реализован рассматриваемым способом.

Рассмотрим возможность реализации идеального VNIC, при нескольких разных моделях [I, таблица 2, пос. 7 по пос.9], на базе одного исходного неидеального АЭ в зависимости от значения определителя ΔF.

I. $-1 < \Delta F < 0$.

Из общих условий компенсируемости [I, таблица 2] следует, что при $\Delta F < A < 0$ или $0 < D < 1$ реализуема лишь

Таблица I3

МОДЕЛЬ	УСЛОВИЯ КОМПЕНСИРУЕМОСТИ
ОБЩАЯ	$\Delta F < 0$ $A<0,\ D<0,\ B>0,\ C>0$ или $A>0,\ D>0,\ B<0,\ C<0$.
СИММЕТРИЧЕСКАЯ	$\Delta F = -1$ $A<0,\ D<0,\ B>0,\ C>0$ или $A>0,\ D>0,\ B<0,\ C<0$.
НЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ	$\Delta F < 0$ $A \leq \Delta F,\ D \leq \Delta F,\ B>0,\ C>0$ или $A \geq 1,\ D \geq 1,\ B<0,\ C<0$.

общая модель идеального VNIC, а при $A \leqslant \Delta F$ или $D \geqslant 1$ реализуемы как общая так и несимметрическая модели идеального VNIC.

2. $\Delta F = -1$.

При значениях параметров главной диагонали $-1 < A < 0$ или $0 < D < 1$ реализуемы общая и симметрическая модели, а при $A \leqslant -1$ или $D \geqslant 1$ реализуемы все три модели идеального VNIC.

3. $\Delta F < -1$.

Общая модель идеального АЭ реализуется при значениях параметров главной диагонали $-1 < A < 0$ или $0 < D < 1$, а общая и несимметрическая модели при $A \leqslant -1$ или $D \geqslant 1$.

Представляет интерес, конечно, выяснение значений параметров исходного неидеального АЭ, при которых реализуемы конверторы иммитанса обеих (VNIC и INIC) типов. Такие условия приведены в таблице 13 для разных моделей идеального конвертора иммитанса.

Из данных таблицы 13 следует, что при значениях определителя $-1 < \Delta F < 0$ и параметров главной диагонали $\Delta F < A < 0$ и $\Delta F < D < 0$ или же $0 < A < 1$ и $0 < D < 1$ реализуется общая модель, а при $A \leqslant \Delta F$ и $D \leqslant \Delta F$ или же $A \geqslant 1$ и $D \geqslant 1$ реализуются общая и несимметрическая модели идеального конвертора иммитанса обоих типов, при значениях определителя $\Delta F = -1$ и параметров главной диагонали $-1 < A < 0$ и $-1 < D < 0$ или же $0 < A < 1$ и $0 < D < 1$ реализуются общая и симметрическая модели, а при $A \leqslant -1$ и $D \leqslant -1$ или же $A \geqslant 1$ и $D \geqslant 1$ реализуются все три модели идеального конвертора иммитанса обоих типов, при значениях определителя $\Delta F < -1$ и параметров главной диагонали $-1 < A < 0$ и $-1 < D < 0$ или же $0 < A < 1$ и $0 < D < 1$ реализуется общая модель, а при $A \leqslant -1$ и $D \leqslant -1$ или же $A \geqslant 1$ и $D \geqslant 1$ реализуются общая и несимметрическая модели идеального конвертора иммитанса обоих типов.

В заключение можно сказать, что приведенные результаты дают возможность, при выполнении общих условий компенсируемости АЭ, в каждом конкретном случае выбрать и рассчитать подходящую резистивную структуру компенсации. Доказывается возможность реализации (при помощи пассивных резистивных цепей) разнотипных идеальных АЭ на базе одного исходного двухпорта (неидеального АЭ), параметры матрицы F которого выполняют определенные условия.

Литература

I. Г.И. Шифф. О компенсируемости неидеальных конверторных двухпортов. Настоящий сборник, стр.47-62.

G. Schiff

Compensation of Nonideal Convertor-Type Two-Port

Summary

Structures of compensating the parasitic parameters of specific nonideal active elements are presented with special conditions of their use. Formulas to calculate the resistors of these compensating structures are derived.

On the ground of general criteria of compensation the possibility of realizing many different types of ideal active elements on the basis of a two-port and resistors is shown.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 334 1972

УДК 517.52:62-501.41

В.А. Кукк

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

При анализе систем и цепей часто удается как сигналы, так и параметры (передачи) представить рядами, в первую очередь тригонометрическими, рядами Тейлора или рядами функций Легерра и Эрмита [1-4]. В приближенных расчетах при этом могут быть использованы лишь начальные отрезки (конечной длины) этих рядов. Иногда можно почти весь расчет провести с использованием лишь определенного количества первых коэффициентов соответствующего ряда (последовательности).

Однако в расчетах с последовательностями встречаются и такие операции, которые в принципе выполнимы лишь при наличии всей (бесконечной) последовательности. Отсюда возникает задача отображения конечных наборов чисел $a^{(n)} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ (ниже n-векторов) в множество бесконечных последовательностей, (ниже - векторов). При этом естественно требовать, чтобы первые $(n+1)$ членов изображения совпадали с исходными. Назовем такое отображение <u>продолжением</u> последовательности.

Обозначим множество всех n-векторов через S_n, а всех векторов - S. Продолжение определяется некоторой функцией $H_n : S_n \to S$, которую назовем частичной <u>гипотезой продолжения</u>. Введем отображение $\mathcal{P}_n : S \to S_n$ следующим образом

$$\mathcal{P}_n\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}.$$

Тогда частичная гипотеза может быть задана также композицией $\mathcal{H}_n = H_n \circ \mathcal{P}_n$, действующей из S в S (т.е. $\mathcal{H}_n(a) = H_n(\mathcal{P}_n a)$). Нетрудно видеть, что $\mathcal{H}_n$ является проектором.

Выбор гипотезы продолжения означает выдвижение определенных предположений о рассматриваемом параметре или всей системе. Некоторая дополнительная информация для этого практически всегда имеется. Кроме того, использование продолжения позволяет также испытывать разные предположения о свойствах исследуемого объекта. Примерами дополнительной информации могут быть, например, следующие предположения : система описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, система устойчива, система является цепью без потерь и др.

На практике весьма широко используется следующая гипотеза: последовательность продолжается нулями. Однако, эта гипотеза крайне слабая в том смысле, что совершенно не учитывает характер исходной последовательности.

Рассмотрим некоторые общие свойства гипотез. Если дана последовательность частичных гипотез $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, H_{\alpha_3}, \ldots$, где $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \ldots$, то <u>гипотезой продолжения</u> H мы назовем функцию, которая n-вектору $a^{(n)}$ ставит в соответствие вектор $H_n(a^{(n)})$ (конечно, n равно некоторому α_i). Функция (гипотеза) $\mathcal{H}$ тогда, по определению, ставит элементу $a \in S$ в соответствие последовательность $\mathcal{H}_{\alpha_1}(a)$, $\mathcal{H}_{\alpha_2}(a), \ldots$. Естественно требовать от гипотезы, чтобы она <u>согласовывалась</u> с топологией в S (или в подмножестве, где действует $\mathcal{H}$) т.е., чтобы последовательность $\mathcal{H}_{\alpha_1}(a), \mathcal{H}_{\alpha_2}(a), \ldots$ сходилась.

Очевидно, если $\alpha_i \leqslant \alpha_j$ то $\mathcal{H}_{\alpha_i} \circ \mathcal{H}_{\alpha_j} = \mathcal{H}_{\alpha_i}$. Если $\mathcal{H}_{\alpha_i} \circ \mathcal{H}_{\alpha_j} = \mathcal{H}_{\min(\alpha_i, \alpha_j)}$ при любых α_i, α_j, то назовем гипотезу <u>телескопической</u>. В случае телескопической гипотезы каждому n-вектору соответствует единственное продолжение (повторное применение частичных гипотез с $\alpha_i \geqslant n$ не влияет на результат продолжения).

С практической точки зрения представляет интерес непрерывность гипотезы: гипотеза H_n является <u>непрерывной</u> (в точке a), если соответствующее отображение $\mathcal{H}_n$ непрерывно (в точке a). В S_n естественно ввести факторпологию, тогда непрерывность $\mathcal{H}_n$ эквивалентна непрерывности H_n .

Приведем некоторые простые гипотезы.

Гипотеза Z : $Z_n(\{a_0, a_1, \dots, a_n\}) = \{a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots\}$.

Гипотеза C : $C_n(\{a_0, a_1, \dots, a_n\}) = \{a_0, a_1, \dots, a_n, a_n, a_n, \dots\}$.

Гипотезы Z и C определяются последовательностями Z_0, $Z_1, Z_2, \dots$ и $C_0, C_1, C_2, \dots$, соответственно. (Гипотеза C применяется в [6]).

Гипотеза P^p:

$$P^p_n(\{a_0, a_1, \dots, a_{n-p}, \dots, a_n\}) = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-p}, \dots, a_n, a_{n-p}, \dots, a_n, a_{n-p}, \dots\}.$$

Здесь $0 \leq p \leq n$ (явно $P^0_n = C_n$). Гипотеза P^p определяется последовательностью $P^p_p, P^p_{p+1}, P^p_{p+2}, \dots$

Гипотеза R : в случае R_{2n-1} предполагается, что члены результата продолжения удовлетворяют разностному уравнению [5]

$$\sum_{i=0}^{n} d_k a_{k-i} = 0, \quad \text{при} \quad k \geq n.$$

Коэффициенты d_k определяются из исходного $(2n-1)$ -вектора, (гипотеза определена лишь для тех $(2n-1)$ -векторов, для которых соответствующая система уравнений разрешима). Гипотеза R определяется последовательностью $R_1, R_3, R_5, \dots$

Для этих гипотез нетрудно указать общие формы производящих функций для результатов продолжения:

Гипотеза Z : $\quad P_1(z)$,

Гипотеза C : $\quad \dfrac{P_2(z)}{1-z}$,

Гипотеза P^p: $\quad \dfrac{P_3(z)}{1-z^p}$,

Гипотеза R : $\quad \dfrac{P_4(z)}{Q(z)}$,

где $P_i(z)$ и $Q(z)$ суть многочлены. Телескопичность всех этих гипотез очевидна.

В качестве примера рассмотрим теперь пространство $st \subset S$ последовательностей медленного роста: $|a_k| \leq P(k)$, где $P(k)$ – некоторый многочлен, зависящий от a. Топологию σ в st определяем полунормами

$$p(a) = \left| \sum_0^\infty a_k \alpha_k \right|,$$

где $$|\alpha_k| \leq K(r)(k+1)^{-r}$$

и положительные числа r и $K(r)$ не зависят от k.

Гипотезы Z, C и P^p очевидно, определены в st; легко видеть, что они согласованы с топологией σ. Нетрудно доказать и непрерывность всех этих гипотез.

Множество значений гипотезы R, однако, не содержится в st. Даже если для некоторого $a^{(n)}$ $R(a^{(n)}) \in st$, гипотеза может не быть непрерывной в этой точке, а иногда никакая окрестность точки $R(a^{(n)})$ не содержится в st.

Телескопические гипотезы продолжения могут быть сравнены, например, следующим образом. Обозначим через F множество неподвижных точек гипотезы $\varkappa$ (a является неподвижной точкой, если существует α такая, что $\varkappa_\alpha(a) = a$). Тогда, по определению, гипотеза $\varkappa'$ мощнее гипотезы $\varkappa''$, если $F' \supset F''$ (обозначим $\varkappa' > \varkappa''$). Отношение $>$, очевидно, есть частичный порядок.

Нетрудно видеть, что $R > P^p > C > Z$. С практической точки зрения лучше воспользоваться более мощными гипотезами, но это приводит к ухудшению других качеств (потеря непрерывности). Поэтому в конкретных случаях следует выбирать подходящую гипотезу - достаточно мощную, но и с достаточно хорошими свойствами непрерывности.

Разумеется, для оценки гипотез в определенных условиях (дополнительная информация об объекте, способность гипотезы распознавать определенные свойства и т.д.) потребуется более сложные методы. Наконец и алгебраическая структура, которой снабжено S, может иметь значение при оценке гипотезы.

Более детальное исследование общих свойств гипотез продолжения и характеристик конкретных гипотез будет опубликовано отдельно.

Литература

1. M. Schetzen. Power-series equivalence of some functional series with applications. IEEE Transactions, CT-17, 1970, pp. 305-313.

2. M. S c h e t z e n. Asymptotic optimum Laguerre series. IEEE Transactions, CT-18, 1971, pp. 493-500.

3. G. S a l o m o n s s o n. Linear network synthesis with Laguerre polynomials. Ericsson Technics, 1971, No. 2, pp. 83-109.

4. V. K u k k. State variables and Laguerre series. Electronics Letters, vol. 7, 1971, pp. 269-270.

5. В. К у к к, Рациональная аппроксимация передаточной функции, Труды ТПИ, серия А, № 288. 1970, серия А, № 288, стр. 71-78.

6. В. К у к к. Численный расчет переходной функции. Труды ТПИ, № 334, 1972, стр.

V. Kukk

On the Continuation of the Sequences of Real Numbers

S u m m a r y

The concept of the continuation of real number sequences is introduced. A continuation hypothesis is defined as a function H_n:

$$H_n\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}.$$

Some properties of such functions used in linear system analysis are discussed.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 334 1972

УДК 518.5:62-501.2

В.А. Кукк

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ

В настоящей статье описывается метод суммирования разложения импульсной характеристики по функциям Лагерра к переходной характеристике. Такие разложения могут быть получены с помощью различных методов, как например, решением уравнений состояния линейной системы [1,2], обработкой временных, частотных или передаточных функций [3] и т.д.

Предположим, что переходная функция $g(t)$ является функцией с ограниченным изменением на $[0, \infty]$ (т.е. система устойчива). При этом в разложении импульсной функции

$$h(t) = \sum_{0}^{\infty} a_k l_k(t) \tag{1}$$

коэффициентами a_k являются числа

$$a_k = \int_{0}^{\infty} l_k(t)\, dg(t),$$

где $l_k(t) = H(t)\, e^{\frac{t}{2}} \frac{d^k}{dt^k}\left(e^{-t} \frac{t^k}{k!}\right)$ – функция Лагерра ($H(t)$ – функция Хевисайда)

От разложения (1) можно легко перейти к разложению переходной функции (см. приложение 1):

$$g(t) = \sum_{0}^{\infty} b_k l_k(t). \tag{2}$$

Этот ряд суммируется относительно слабыми методами (возможно, что достаточно метода арифметических средних). Но здесь возникают следующие трудности. Так как функции Лагерра весьма быстро стремятся к нулю при $t \to \infty$, то для суммирования переходной характеристики, для которой $\lim_{t \to \infty} g(t) \neq 0$, требуется весьма много членов ряда (2) (и тем больше, чем больше значение t). В то же время, как правило, в распоряжении вычислителя имеется лишь небольшое количество коэффициентов ряда (нахождение коэффициентов разложения (I) обычно связано со значительной затратой вычислительной работы).

Поэтому используем продолжение, т.е. определяем неизвестные коэффициенты, используя известные [4]. Описываемый метод базируется на одной из наиболее простых (но достаточно мощной в данном случае) гипотез - все последующие коэффициенты предполагаются равными последнему известному коэффициенту.

Итак, если имеется отрезок из $(n+1)$ чисел

$$\left\{a_0, a_1, \ldots, a_n\right\},$$

то он заменяется на бесконечную последовательность

$$\left\{a_0, a_1, \ldots, a_n, a_n, a_n, \ldots\right\},$$

т.е. предполагается, что искомая импульсная характеристика имеет разложение

$$h_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k l_k(t) + \sum_{k=n}^{\infty} a_n l_k(t). \tag{3}$$

При этом, конечно,

$$h_n(t) = \frac{dg_n(t)}{dt}$$

(в смысле теории распределений).

Далее, из (3) получим

$$\frac{dg_n(t)}{dt} = a_0 \sum_0^{\infty} l_k(t) + (a_1 - a_0)\sum_1^{\infty} l_k(t) + \ldots + (a_n - a_{n-1})\sum_n^{\infty} l_k(t)$$

и обозначая

$$R_k(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{i=k}^{\infty} l_i(\tau)\, d\tau,$$

имеем

$$g_n(t) = a_0 R_0(t) + \sum_1^n (a_k - a_{k-1}) R_k(t). \tag{4}$$

Эта формула и дает искомый метод (R -метод) суммирования.

Так как $R_k(t) \to (-1)^k$ при $t \to \infty$, то трудность, возникшая при суммировании ряда Лагерра, преодолена.

Алгоритм легко реализуется, так как R – функции связаны простыми рекуррентными соотношениями (см. приложение 2):

$$R_{k+1}(t) = R_{k-1}(t) - \frac{t}{k+1} S_k(t),$$

$$R_0(t) = H(t), \quad R_1(t) = H(t)\left(2e^{-\frac{t}{2}} - 1\right),$$

где

$$S_k(t) = S_{k-1}(t) + \left[R_{k-1}(t) + R_k(t)\right],$$

$$S_0(t) = 0.$$

Можно показать, что $|R_k(t)| \leqslant 1$ при всех $k \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ и даже $R_k(t) \to 0$ при фиксированном $t > 0$ и $k \to \infty$. Поэтому ряд типа (4) сходится, например, если норма

$$\| a \| = |a_0| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$$

конечна (при этом имеет место равномерная сходимость). Этому условию удовлетворяют многие импульсные функции устойчивых систем. Но ряд (4) сходится (может быть, неравномерно) и при более слабых условиях.

Опыт показал, что при применении более сильного метода арифметических средних, ряд R – функций суммируется эффективно для любых характеристик устойчивых систем. Некоторые примеры приведены на фиг. I и фиг. 2.

<u>Приложение I</u>.

Имеем

$$l_k(t) = H(t)\, e^{-\frac{t}{2}} L_k(t),$$

где $L_k(t)$ – многочлен Лагерра [5,6]. Далее, так как [5]

$$\frac{d}{dt}\left[L_{k-1}(t) - L_k(t)\right] = L_k(t),$$

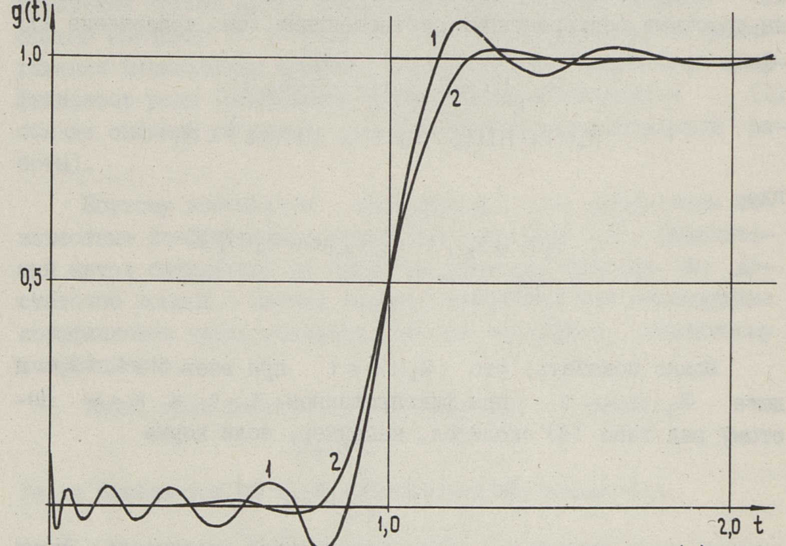
то

$$\frac{d}{dt}\left[l_k(t) - l_{k-1}(t)\right] = -\frac{1}{2}\left[l_k(t) - l_{k-1}(t)\right] - l_{k-1}(t) = \qquad (5)$$

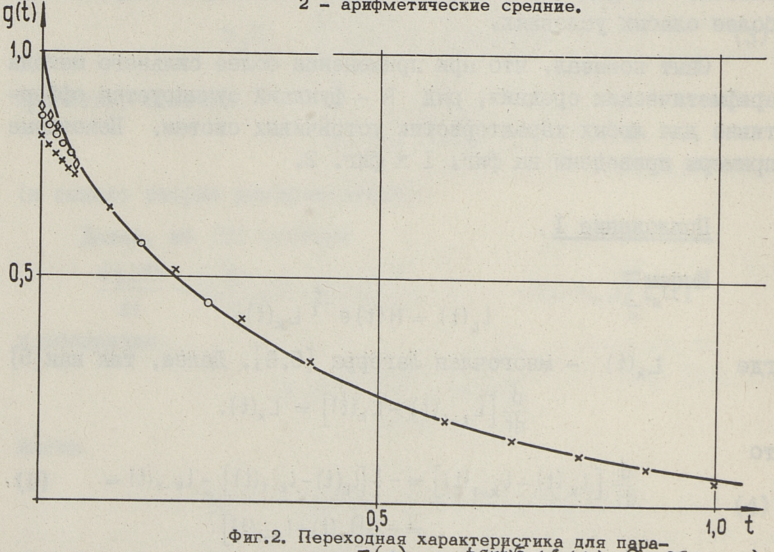
$$= -\frac{1}{2}\left[l_k(t) + l_{k+1}(t)\right].$$

Если теперь

$$g(t) = \sum_{0}^{\infty} b_k l_k(t)$$



Фиг.1. Переходная функция для параметра $F(s) = e^{-s}$ (чистое запаздывание). R -метод, $n = 256$
1 – обычная сумма,
2 – арифметические средние.



Фиг.2. Переходная характеристика для параметра $F(s) = 1 - \frac{\tanh\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$ $(h(t) = \delta - \vartheta_2(0, \pi t))$.
R – метод, обычная сумма:
$\times - n = 7$, $o - n = 15$, $\lozenge - n = 23$.

и

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \sum_{0}^{\infty} a_k l_k(t),$$

где

$$b_k = \int_0^\infty g(t)\, l_k(t)\, dt,$$

$$a_k = \int_0^\infty l_k(t)\, dg(t),$$

то

$$a_k - a_{k-1} = \int_0^\infty [l_k(t) - l_{k-1}(t)]\, dg(t).$$

Интегрируя по частям, получим

$$a_k - a_{k-1} = [l_k(t) - l_{k-1}(t)]\, g(t)\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}\int_0^\infty [l_k(t) + l_{k-1}(t)]\, g(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}(b_k + b_{k-1}),$$

так как $l_i(0) = 1$ и $l_i(\infty) = 0$ при всех $i \geq 0$. Таким образом, имеем рекуррентные соотношения:

$$b_0 = 2a_0,$$

$$b_k = -b_{k-1} + 2(a_k - a_{k-1}).$$

Приложение 2.

Отметим без доказательства, что

$$\sum_0^\infty l_k(t) = \delta(t).$$

Поэтому

$$R_0(t) = H(t)$$

и

$$R_1(t) = \int_{-\infty}^{t} [\delta(\tau) - l_0(\tau)]\, d\tau = H(t) - \int_{-\infty}^{t} H(\tau)\, e^{-\frac{\tau}{2}}\, d\tau =$$

$$= H(t) - 2H(t)\left[1 - e^{-\frac{t}{2}}\right] = H(t)\left[2e^{\frac{t}{2}} - 1\right] = 2l_0(t) - R_0(t). \tag{6}$$

Далее инверсией соотношения (5), получим

$$R_{k+1}(t) - R_{k-1}(t) = -\int_{-\infty}^{t} [l_{k-1}(\tau) + l_k(\tau)]\, d\tau =$$

$$= 2[l_k(t) - l_{k-1}(t)]. \tag{7}$$

Теперь из (6) и (7) индукцией найдем

$$R_{k+1}(t) + R_k(t) = 2l_k(t).$$

Используя теперь формулу (5)

$$l_{k+1}(t) - l_k(t) = -\frac{t}{k+1}\sum_{0}^{k} l_i(t)$$

и обозначая

$$S_k(t) = 2\sum_{0}^{k} l_i(t),$$

найдем

$$R_{k+1}(t) = R_{k-1}(t) - \frac{t}{k+1} S_k(t),$$

$$S_{k+1}(t) = S_k(t) + 2l_{k+1}(t) = S_k(t) + R_{k+1}(t) + R_k(t).$$

Литература

I. V. Kukk. State variables and Laguerre series. Electronics Letters, vol. 7, 1971, pp. 269-270.

2. В.А. Кукк. К численному обращению матрицы проводимостей. Труды ТПИ, серия А, № 304, I97I, стр. 35-42.

3. G. Salomonsson. Linear Network Synthesis with Laguerre Polynomials. Ericsson Technics, 1971, No. 2, pp. 83-109.

4. В.А. Кукк. О продолжении числовых последовательностей. Труды ТПИ, № 334, I972, стр. 77-8I.

5. Г. Бейтмен, А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции, т. 2. "Наука", М., I966.

6. Е. Янке. Ф. Эльде, Ф, Леш. Специальные функции. "Наука", М., I968.

V. Kukk

Numerical computation of the step response

Summary

A method for computation of the step response from the given Laguerre series

$$h(t) = \sum_{0}^{\infty} a_k l_k(t)$$

of the impulse response $h(t)$ is described. The procedure is based upon the following continuation hypothesis: the vector

$$\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

is replaced by the infinite sequence

$$\{a_0, a_1, \dots, a_n, a_n, a_n, \dots\}.$$

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 62-501.432

V. Kukk, E. Rüstern

CALCULATION OF THE GROUP DELAY FROM LAGUERRE SERIES

1. Introduction

This paper presents a method for numerical evaluation of group delay. The method is quite simple and high accuracy can be obtained easily.

The transmittance to be analysed is assumed to be represented by its Laguerre spectrum $\{a_0, a_1, \dots\}$, i.e. when $h(t)$ denotes the corresponding impulse response then

$$h(t) = \sum_0^\infty a_k l_k(t) \tag{1}$$

where $l_k(t)$ is the Laguerre function of the k-th order. It will be shown in the following that the group delay can be expanded in a series

$$\tau(\omega) = -\mathrm{Re} \sum_0^\infty b_k z^k \tag{2}$$

where

$$z = \frac{j\omega - \frac{1}{2}}{j\omega + \frac{1}{2}} \tag{3}$$

and coefficients b_k can be computed simply from the given coefficients a_k. It should be noted that a coefficient a_k depends upon the coefficients a_i with $i \leqslant k+1$ only. It follows that a finite set of b_k-s can be evaluated exactly when one knows only a finite number of the coefficients.

So computation of the group delay can be reduced to the evaluation of the sum of a power series. The use of proper methods for summation makes possible the obtaining of very high accuracy as shown in examples below.

In the well known methods of group delay analysis, usually transmittances are supposed to be represented by poles and zeroes [3-5]. But in computer-aided analysis it is much more simple to obtain Laguerre series than transfer functions and their poles and zeroes.

Recently some methods have been presented which permit one to obtain Laguerre series directly from the system equations [1,2]. Combining these algorithms with the present one, efficient procedures for group delay analysis can be obtained. Obviously, these methods may be used for evaluation of the pure delay time.

2. Derivation of the formula (2)

Taking Fourier transforms of both sides of eqn. (1), we get

$$V(\omega)=\sum_0^\infty a_k\frac{(j\omega-\frac{1}{2})^k}{(j\omega+\frac{1}{2})^{k+1}} \tag{4}$$

where $V(\omega)$ denotes the frequency response (spectrum). Using eqn. (3) we obtain a more simple expression

$$V(\omega)=(1-z)\sum_0^\infty a_k z^k. \tag{5}$$

Group delay is defined by [5]

$$\tau(\omega)=-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \tag{6}$$

where $\varphi(\omega)$ denotes the phase response (argument of $V(\omega)$). Since

$$\varphi(\omega)=\operatorname{Im}\log V(\omega)$$

we have

$$\tau(\omega)=-\operatorname{Im}\frac{d(\log V(\omega))}{d\omega}=-\operatorname{Im}\frac{1}{V(\omega)}\frac{dV(\omega)}{d\omega}. \tag{7}$$

Using expansion of eqn. (5), we obtain

$$\frac{dV(\omega)}{d\omega}=\frac{dV}{dz}\frac{dz}{d\omega}=\frac{j}{(j\omega+\frac{1}{2})^2}\left[-\sum_0^\infty a_k z^k+(1-z)\sum k a_k z^{k-1}\right]=$$

$$=j(1-z)^2\sum_0^\infty (k+1)(a_{k+1}-a_k)z^k. \tag{8}$$

Eqn. (7) becomes

$$\tau(\omega)=-\operatorname{Im} j\frac{(1-z)^2\sum_0^\infty (k+1)(a_{k+1}-a_k)z^k}{(1-z)\sum_0^\infty a_k z^k}=$$

$$=-\operatorname{Re}\frac{\sum_0^\infty (k+1)(a_{k+1}-a_k)z^k}{\sum_0^\infty \left(\sum_{i=0}^k a_i\right)z^k}. \tag{9}$$

Table 1

$\log \omega$	$\frac{1}{s^2+0{,}02s+1}$		$\frac{1}{\sqrt{s^2+0{,}25}}$		$\frac{1}{s+1}\cdot e^{-s}$	
	Exact	Computed	Exact	Computed	Exact	Computed
-10000000+01	+2061006-03	+2061767-03	+0000000-19	+3586352-08	+1990099+01	+1990099+01
-70000000-00	+8979726-03	+8980541-03	+0000000-19	+2180584-08	+1961714+01	+1961714+01
-50000000-00	+2715915-02	+2716003-02	+0000000-19	+2573230-08	+1909091+01	+1909091+01
-20000000-00	+3071434-01	+3071431-01	+0000000-19	+6942888-08	+1715253+01	+1715253+01
-10000000-00	+1508396-00	+1508394-00	+0000000-19	+5278979-08	+1613137+01	+1613137+01
-70000000-01	+3277765-00	+3277757-00	+0000000-19	+3874876-08	+1579900+01	+1579900+01
-50000000-01	+6688560-00	+6688547-00	+0000000-19	+2083136-08	+1557312+01	+1557312+01
-20000000-01	+4301953+01	+4301947+01	+0000000-19	+2356499-08	+1523010+01	+1523010+01
-10000000-01	+1550883+02	+1550882+02	+0000000-19	+9864372-08	+1511511+01	+1511511+01
-70000000-02	+2735120+02	+2735119+02	+0000000-19	+0000000-19	+1508058+01	+1508058+01
-50000000-02	+4251149+02	+4251149+02	+0000000-19	+2525042-08	+1505756+01	+1505756+01
-20000000-02	+8212477+02	+8212491+02	+0000000-19	+7685540-08	+1502303+01	+1502303+01
-10000000-02	+9474688+02	+9474703+02	+0000000-19	+2574363-08	+1501151+01	+1501151+01
-70000000-03	+9731100+02	+9731119+02	+0000000-19	+0000000-19	+1500806+01	+1500806+01
-50000000-03	+9857837+02	+9857855+02	+0000000-19	+2580669-08	+1500576+01	+1500576+01
-20000000-03	+9974244+02	+9974258+02	+0000000-19	+2584468-08	+1500230+01	+1500230+01
-10000000-03	+9992400+02	+9992417+02	+0000000-19	+0000000-19	+1500115+01	+1500115+01
+10000000-03	+9992400+02	+9992417+02	+0000000-19	+0000000-19	+1499885+01	+1499885+01
+20000000-03	+9974244+02	+9974258+02	+0000000-19	+2584468-08	+1499769+01	+1499769+01
+50000000-03	+9857837+02	+9857855+02	+0000000-19	+2580669-08	+1499424+01	+1499424+01
+70000000-03	+9731100+02	+9731119+02	+0000000-19	+0000000-19	+1499194+01	+1499194+01
+10000000-02	+9474688+02	+9474703+02	+0000000-19	+2574363-08	+1498849-01	+1498849+01
+20000000-02	+8212477+02	+8212491+02	+0000000-19	+7685540-08	+1497697+01	+1497697+01
+50000000-02	+4251149+02	+4251149+02	+0000000-19	+2525042-08	+1494244+01	+1494244+01
+70000000-02	+2735120+02	+2735119+02	+0000000-19	+0000000-19	+1491942+01	+1491942+01
+10000000-01	+1550883+02	+1550882+02	+0000000-19	+9864372-08	+1488489+01	+1488489+01
+20000000-01	+4301953+01	+4301947+01	+0000000-19	+2356499-08	+1476990+01	+1476990+01
+50000000-01	+6688560+00	+6688547-00	+0000000-19	+2083136-08	+1442688+01	+1442688+01
+70000000-01	+3277765-00	+3277757-00	+0000000-19	+3874876-08	+1420100+01	+1420100+01
+10000000-00	+1508396-00	+1508394-00	+0000000-19	+5278979-08	+1386863+01	+1386863+01
+20000000-00	+3071434-01	+3071431-01	+0000000-19	+6942888-08	+1284747+01	+1284747+01
+50000000-00	+2715915-02	+2716003-02	+0000000-19	+2573230-08	+1090909+01	+1090909+01
+70000000-00	+8979726-03	+8980541-03	+0000000-19	+2180584-08	+1038287+01	+1038287+01
+10000000+01	+2061006-03	+2061767-03	+0000000-19	+3586325-08	+1009901+01	+1009901+01

Dividing the series in the right hand side of eqn. (9) as formal power series, we obtain eqn. (2). It is apparent that the division is possible when $a_0 \neq 0$ (it follows the transfer function $F(s)$ must not have a zero at $s = \frac{1}{2}$). Such a condition is not restrictive in practice as $a_0 = 0$ may appear very rarely and, if needed, a little change of normalisation may be introduced to obtain the desired situation ($a_0 \neq 0$).

It follows immediately from eqn. (9) that in the corresponding power series (2) a coefficient b_k is a function of $a_0, a_1, \ldots, a_{k+1}$.

3. Evaluation of $\tau(\omega)$.

In practical analysis it is possible to find directly a finite number of terms $b_0, b_1, \ldots, b_r$ in (2), of course. To evaluate the sum of the series (2) one must determine all additional coefficients $b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots$ For this purpose, a continuation hypothesis should be applied [6]. Then, using a proper method of summation, the needed values of $\tau(\omega)$ can be computed.

The results of high accuracy have been obtained by the use of the following hypothesis $R(p)$ [6,7,8,9]: the generating function $G(z)$ of the series $b_0, b_1, b_2 \cdots$ is assumed to be a rational one:

$$G(z) = \sum_0^{\infty} b_k z^k = \frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m}{d_0 + d_1 z + \ldots + d_n z^n}$$

(c_i-s and d_i-s to be calculated from the given $b_0, b_1, \ldots, b_r$).

Having obtained $G(z)$, one must substitute

$$z = \frac{j\omega - \frac{1}{2}}{j\omega + \frac{1}{2}}$$

and take the real part of the result.

4. Examples

A program based on the method of Section 3 has been written for "Minsk-22" computer. Some of the results obtained by this program are shown in Table 1.

One may notice the errors be very small. The reason is that group delay functions may be approximated accurately by rational functions in ω. For example, any rational and many irrational transfer functions produce rational group delay functions.

R e f e r e n c e s

1. V. K u k k. State variables and Laguerre series. Electronics Letters, vol. 7, 1971, pp. 269-270.

2. В.А. К у к к. К численному обращению матрицы проводимостей. Труды ТПИ, серия А, № 304, 1971, стр. 35-42.

3. D.A. C a l a h a n. Modern network synthesis, Hayden, New-York, 1964. Русский перевод: Д.А.Калахан. Современный синтез цепей. Москва-Ленинград, "Энергия", 1966, стр. 10-13.

4. F.F. K u o and J.F. K a i s e r. System analysis by digital computer. Wiley, New-York, 1966, pp. 23-25.

5. L. Z a d e h and C. D e s o e r. Linear system theory - the state space approach. McGraw-Hill, New-York, San Francisco - Toronto - London, 1963, pp. 441-444; русский перевод: Л.Заде и Ч.Дезоер. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. Москва, "Наука", 1970, стр. 507-510.

6. В.А. К у к к. О продолжении числовых последовательностей. Труды ТПИ, № 334, 1972, стр. 77-81.

7. В.А. К у к к. Рациональная аппроксимация передатсчной функции. Труды ТПИ, серия А, № 288, 1970, стр. 71-78.

8. G. S a l o m o n s s o n. Linear Network Synthesis with Laguerre polynomials. Ericsson Technics, vol. 27, 1971, pp. 83-84.

9. K. S t e i g l i t z. Rational transform approximation via the Laguerre spectrum. J. Franklin Inst., vol. 280, 1965, pp. 387-394.

В. Кукк, Э. Рюстерн

Вычисление времени группового запаздывания при помощи последовательностей Лагерра

Рассматривается метод вычисления времени группового запаздывания, исходя из лагерровского разложения импульсной функции

$$h(t) = \sum_{0}^{\infty} a_k l_k(t),$$

где $l_k(t)$ -функция Лагерра k -го порядка. Вычисление времени группового запаздывания сводится к суммированию степенного ряда

$$\tau(\omega) = -\operatorname{Re} \sum_{0}^{\infty} b_k z^k,$$

где

$$z = \frac{j\omega - \frac{1}{2}}{j\omega + \frac{1}{2}},$$

коэффициенты которого легко вычисляются через коэффициенты разложения импульсной функции.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 621.39.519.28

О.Э. Кангур

ОБ ОЦЕНКЕ ЧАСТОТЫ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

Постановка задачи. На вход измерительного устройства в течение времени T поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t; A, \omega_0, \varphi) + n(t), \tag{1}$$

синусоидального сигнала с неизвестной амплитудой и частотой и случайной начальной фазой

$$s(t; A, \omega_0, \varphi) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{2}$$

и стационарного нормального белого шума $n(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$B(t_1 - t_2) = \frac{G_0}{2}\delta(t_1 - t_2). \tag{3}$$

Предполагается, что начальная фаза сигнала распределена равномерно в интервале от 0 до 2π.

По наблюдаемой реализации требуется определить с наивысшей точностью частоту ω_0.

При этом встает задача нахождения статистических характеристик оптимальной оценки. В ряде работ, например [1÷3] основное внимание уделяется вычислению ее дисперсии, при сравнительно больших отношениях сигнал/шум. Целью настоящей работы является вычисление вероятности ошибки, превышающей определенный интервал. Исследуется также случай, когда на входе присутствуют несколько сигналов вида (2), один из которых является полезным, а другие - мешающими.

Алгоритм оптимальной оценки. Будем применять оценку максимального правдоподобия. Известно [1], что если существует несмещенная эффективная оценка, то это оценка максимального правдоподобия. Таким образом, задача сводится к определению точки ω_m в которой функция правдоподобия $L(\omega)$ принимает свое наибольшее значение

$$L(\omega_m) = \max\max L(\omega) \qquad (4)$$

$$\omega \in [\omega_{o\,min}, \omega_{o\,max}],$$

где $\omega_{o\,min}$ и $\omega_{o\,max}$ – граничные частоты диапазона возможных значений ω_o.

Функция правдоподобия для данного случая равна [I,2]

$$L(\omega) = const\cdot I_o[R(\omega)], \qquad (5)$$

где $I_o(X)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка,

$R(\omega)$ – огибающая на выходе линейного фильтра.

Ее можно представить в виде [2]

$$R(\omega) = \left| \frac{2}{G_o}\int_0^T x(t)\cdot s(t; A, \omega_o, \varphi)\,dt \right| =$$

$$= \frac{2A}{G_o}\left|\int_0^T x(t)\cdot \exp\left\{j(\omega t + \varphi)\right\}dt\right|. \qquad (6)$$

Поскольку функция $I_o(X)$ – монотонна, то

$$R(\omega_m) = \max\max R(\omega) \qquad (7)$$

$$\omega \in [\omega_{o\,min}\ \omega_{o\,max}].$$

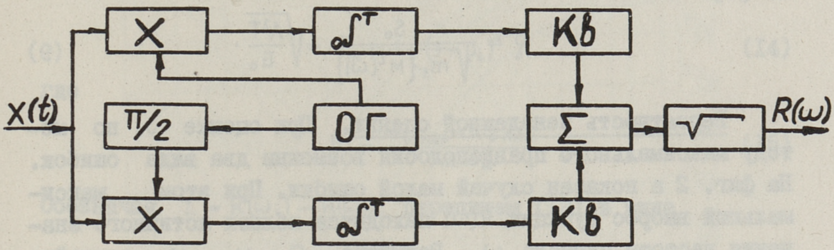
Следовательно, оптимальное устройство для получения оценки частоты по методу максимального правдоподобия состоит из множества блоков (фиг. I), каждый из которых вычисляет функцию $R(\omega)$ в одной точке (параллельный анализ) или одного такого блока, в котором функция $R(\omega)$ вычисляется последовательно во времени для всех значений $\omega \in [\omega_{o\,min}, \omega_{o\,max}]$ (последовательный анализ).

Можно показать [3÷5], что функция $R(\omega)$ представляема в виде

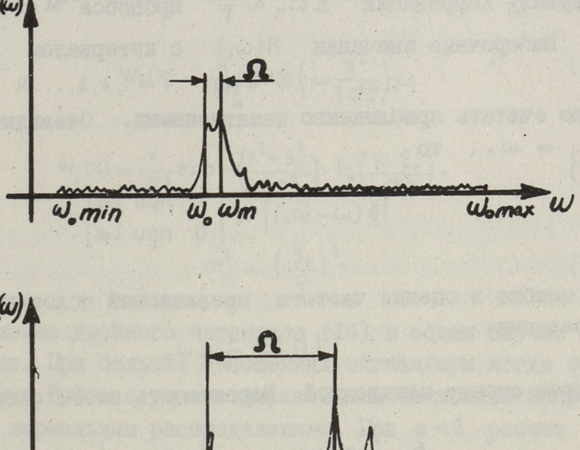
$$R(\omega) = \left| S(\omega - \omega_o) + M(\omega) \right|, \qquad (8)$$

где $S(\omega-\omega_o)$ – некоторая регулярная функция,

$M(\omega)$ – стационарный случайный гауссовский процесс с нулевым средним значением.



Фиг. 1. Элемент оптимального устройства для оценки частоты.
ОГ–опорный генератор, КВ–квадратор.



Фиг. 2. Реализация функции R(ω) а) случай малой ошибки;
б) случай грубой ошибки.

Модуль $|S(\omega-\omega_0)|$ симметричен относительно точки ω_0 и принимает в ней свое максимальное значение S_0.

Отношение сигнал/шум на выходе линейного фильтра равно [4]:

$$\rho = \frac{S_0}{\sqrt{m_1\{M^2(\omega)\}}} = \sqrt{\frac{A^2T}{G_0}}. \tag{9}$$

<u>Вероятность ненадежной оценки.</u> При оценке ω_0 по методу максимального правдоподобия возможны два вида ошибок. На фиг. 2 а показан случай малой ошибки. При этом максимальный выброс функции $R(\omega)$ находится вблизи истинного значения частоты сигнала ω_0. Величина $\Omega = \omega_m - \omega_0$ случайна и ее дисперсия характеризует точность измерения частоты. На фиг. 2б показан случай грубой ошибки. При этом частоты ω_m и ω_0 значительно удалены друг от друга.

Можно показать [3,5], что модуль $|S(\omega-\omega_0)|$ существенно отличен от нуля в интервале частот, равном удвоенному интервалу корреляции $\Delta\omega_K \approx \frac{\pi}{T}$ процесса $M(\omega)$.

Выборочные значения $R(\omega_i)$ с интервалом

$$\omega_{i+1} - \omega_i \geqslant \Delta\omega_K; \quad i = 1,2,3,\ldots N$$

можно считать приближенно независимыми. Очевидно, что если $\omega_j \approx \omega_0$, то

$$|S(\omega-\omega_0)| \approx \begin{cases} S_0 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j. \end{cases} \tag{10}$$

При ошибке в оценке частоты, превышающей половину интервала корреляции

$$|\Omega| > \frac{1}{2}\Delta\omega_K$$

назовем оценку ненадежной. Вероятность этого события равна

$$P_N = P\left\{R(\omega_j) < \max_{i\neq j} R(\omega_i)\right\}. \tag{11}$$

Рассматривая интервал $\left[\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega_K,\ \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega_K\right]$ как доверительный, можем связать вероятность P_N с коэффициентом доверия γ [I]

$$P_N = 1 - \gamma. \tag{12}$$

Обозначая

$$p_i = P\left\{R(\omega_j) < R(\omega_i)\right\}, \tag{I3}$$

и используя независимость $R(\omega_i)$, представим (II) в виде

$$P_N = 1-(1-p_i)^{N-1}, \tag{I4}$$

где

$$N = \frac{\omega_{0\,max} - \omega_{0\,min}}{\Delta\omega_к}. \tag{I5}$$

Обозначая $z = R(\omega_i) - R(\omega_j)$, перепишем (I3) в виде

$$p_i = P\left\{z>0\right\} = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty W_i(z+x)\cdot W_j(x)\,dx\,dz\,, \tag{I6}$$

где $W_i(x)$ - распределение величины $R(\omega_i)$ при $i \neq j$;
$W_j(x)$ - распределение величины $R(\omega_j)$.

Для схемы фиг. I распределения $W_i(x)$ и $W_j(x)$ представляют собой распределения Релея и Райса, соответственно равны:

$$W_i(x) = \frac{x}{\sigma_м^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_м^2}\right); \tag{I7}$$

$$W_j(x) = \frac{x}{\sigma_м^2}\exp-\left(\frac{x^2+S_0^2}{2\sigma_м^2}\right)\cdot I_0\left(\frac{x\,.\,S_0}{\sigma_м^2}\right), \tag{I8}$$

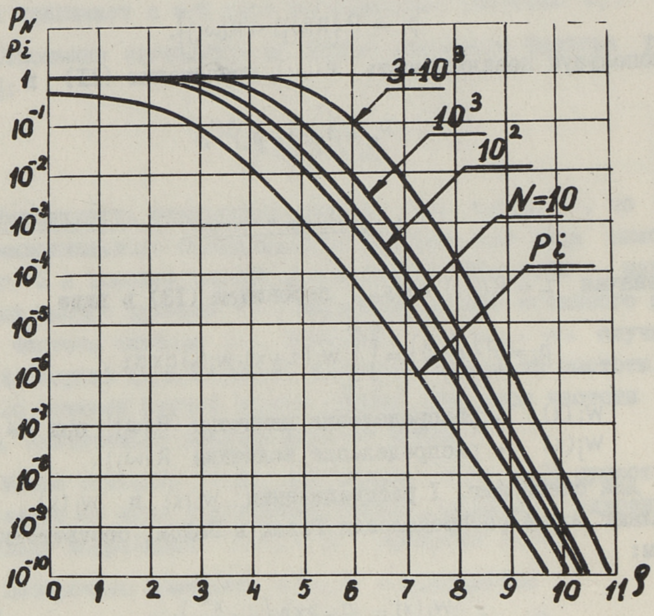
где

$$\sigma_м^2 = \left(\frac{S_0}{\rho}\right)^2. \tag{I9}$$

Вычисление двойного интеграла (I6) в общем случае затруднительно. При больших отношениях сигнал/шум когда $\rho > 3$, распределение Райса с удовлетворительной точностью аппроксимируется нормальным распределением. При $\rho < 3$ расчет p_i выполняется численными методами.

График зависимости $p_i(\rho)$ приведен на фиг. 3. Там же приведены графики зависимостей $P_N(\rho)$ для некоторых значений N.

Возможен случай, когда на входе измерительного устройства кроме полезного сигнала и белого шума, присутствует мешающий синусоидальный сигнал с частотой ω', удовлетворяющей условию $\left(|\omega' - \omega_0| > \frac{1}{2}\Delta\omega_к\right)$, и с амплитудой $A' < A$.



Фиг. 5. Зависимость вероятностей P_i и P_N от отношения сигнал/шум ρ

В этом случае увеличивается вероятность того, что ω_m будет находиться вблизи ω'.

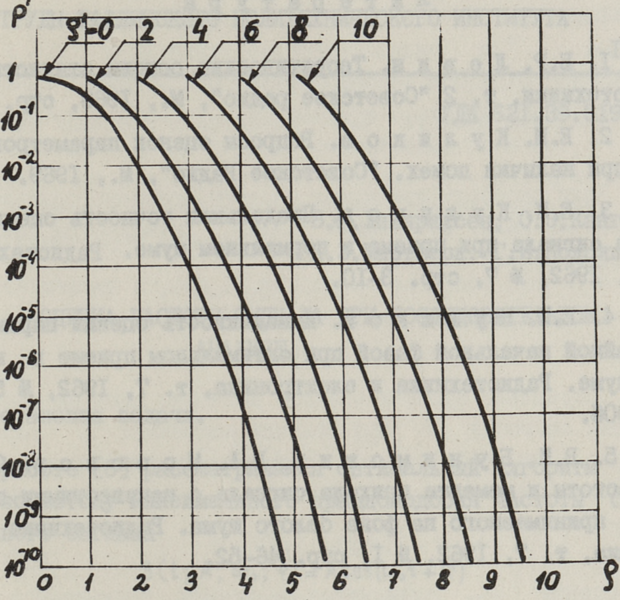
Обозначая эту вероятность p', находим ее по формуле (16), где вместо $W_i(x)$ следует подставить распределение (18) с параметрами $\sigma_м^2$ и $S_0' = \rho' \sigma_м$ (см. фиг. 4). Величина ρ' представляет собой отношение сигнал/шум для мешающего сигнала.

$$\rho' = \sqrt{\frac{(A')^2 \cdot T}{G_0}}. \tag{20}$$

Общая вероятность ненадежной оценки в этом случае подсчитывается по формуле

$$P_{0}\delta = 1-(1-P_{N-1})(1-p'). \tag{21}$$

Аналогично определяется вероятность ненадежной оценки в случае присутствия нескольких мешающих сигналов с различными частотами.



Фиг. 4. Зависимость $P'(\mathcal{S}'\mathcal{S}')$.

Заключение. Задача оценки частоты синусоидального сигнала со случайной, равномерно распределенной фазой на фоне белого шума эквивалентна задаче о распределении положения максимума огибающей суммы регулярной функции $S(\omega-\omega_0)$ и стационарного гауссовского процесса $M(\omega)$.

При ошибке в оценке частоты, превышающей половину интервала корреляции процесса $M(\omega)$ оценка может быть названа ненадежной.

Полученные зависимости позволяют определить вероятность ненадежной оценки (или коэффициент доверия) при известных значениях времени наблюдения и мощностей сигнала и шума или определить требуемое время наблюдения по заданному коэффициенту доверия. В случае присутствия мешающих сигналов коэффициент доверия всегда остается меньше единицы.

Литература

1. Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, т. 2 "Советское радио", М., 1968, стр. 107-124.

2. Е.И. Куликов. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. "Советское Радио", М., 1969.

3. Е.И. Куликов. Предельная точность оценки параметра сигнала при приеме в нормальном шуме. Радиотехника, т.17, 1962, № 7, стр. 3-10.

4. Е.И. Куликов. Ненадежность оценки параметра со случайной начальной фазой при оптимальном приеме в нормальном шуме. Радиотехника и электроника, т. 7, 1962, № 5, стр. 904-905.

5. В.И. Бунимович, В.А. Морозов. Об оценке частоты и момента прихода сигнала с неизвестными параметрами, принимаемого на фоне белого шума. Радиотехника и электроника, т. 7, 1962, № 1, стр. 46-52.

O. Kangur

On the Estimation of a Sinusoidal Signal Frequency in the Presence of White Noise

Summary

The problem of estimating the frequency of a sinusoidal signal with random uniformly distributed phase in the presence of white noise is equivalent to the problem of the maximum maximorum position distribution of a regular and a random function sum envelope. Two kinds of errors are possible. The probability of errors exceeding a definite interval is being considered. The case of interfering signals is being investigated. The results of numerical computations are displayed.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 621.39.519.28

В.Р.Хейнрихсен, О.Э.Кангур,
П.Э.Мартверк, Г.И.Подольская

ОЦЕНКА ЧАСТОТЫ СИГНАЛА ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

Постановка задачи.

В работе [6] рассматривался оптимальный алгоритм для оценки по методу максимального правдоподобия частоты синусоидального сигнала

$$S(t;A;\omega_0;\varphi) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{1}$$

со случайной, равномерно распределенной фазой и неизвестной амплитудой на фоне нормального белого шума, вычислялась вероятность ошибок, превышающих определенный интервал. Настоящая работа придерживается терминологии и обозначений, введенных в [6]. Целью ее является исследование зависимостей между вероятностью ненадежной оценки скоростью и временем последовательного анализа по частоте оптимального устройства.

Оптимальное устройство вычисляет функцию $R(\omega)$ [1-3,6]

$$R(\omega) = const\cdot\left|\int_0^T x(t)\cdot\exp\{j(\omega t+\varphi)\}\,dt\right|. \tag{2}$$

За оценку принимается частота ω_m, в которой

$$R(\omega_m) = \max\max R(\omega);\ \omega\in[\omega_{0min};\omega_{0max}]. \tag{3}$$

Оптимальное устройство в строгом смысле нереализуемо, поскольку для точного определения $R(\omega)$ во всех точках требуется либо бесконечное количество блоков, выполняющих операцию (2), при параллельном анализе, либо бесконечное время при последовательном анализе.

Допуская малую, но конечную ошибку в определении функции $R(\omega)$, рассмотрим вариант последовательного анализа с непрерывным линейным изменением частоты опорного генератора

$$\omega(t) = \omega_1 + \beta t. \tag{4}$$

При этом частота $\omega(t)$ меняется в пределах от ω_1 до ω_2.

Если скорость изменения частоты опорного генератора β бесконечно мала, то функция $R(\omega)$ вычисляется совершенно точно, но время анализа

$$T_{ан} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\beta} \tag{5}$$

будет при этом бесконечно большим.

Сокращение времени анализа возможно лишь за счет увеличения скорости β. При больших значениях β переходный процесс в линейном фильтре, соответствующем выражению (2), искажает регулярную составляющую $S(\omega - \omega_0)$ функции

$$R(\omega) = |S(\omega - \omega_0) + M(\omega)|.$$

Оценка ω_m становится смещенной, уменьшается отношение сигнал/шум, т.е. увеличиваются дисперсия оценки и вероятность ненадежной оценки [6].

Эти явления аналогичны случаю воздействия синусоидального сигнала с линейно изменяющейся частотой на резонансную систему [4,5].

Влияние скорости изменения частоты на характеристики оценки

Считая, что в качестве интегратора используется некоммутируемая RC-цепь, приводим без вывода выражение для модуля $|S(\omega - \omega_0)|$:

$$|S(\xi)| = \exp\left(-\frac{m+\xi}{\mu}\right) \cdot \left| \int_0^{\frac{m+\xi}{\mu}} \exp\left\{(1 - jm)\cdot x + j\frac{\mu x^2}{2}\right\} dx \right|, \tag{6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}; \\ \alpha &= \frac{1}{RC} << \omega_{0\,min}; \\ m &= \frac{\omega_0 - \omega_1}{\alpha}; \ \mu = \frac{\beta}{\alpha^2} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

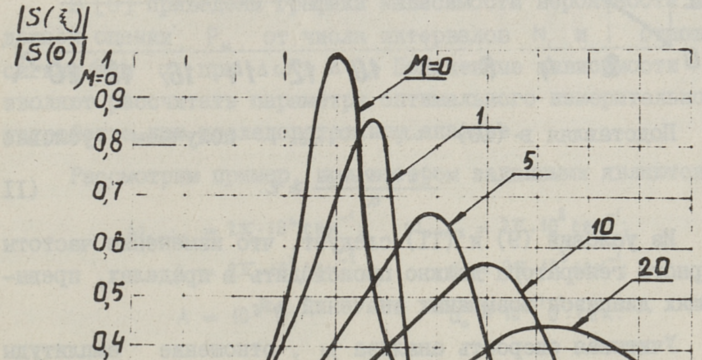
Переходный процесс в линейном фильтре состоит из двух составляющих. Первая обусловлена включением системы в момент $t = 0$ и затухает пропорционально $e^{-\alpha t}$, вторая обусловлена линейным изменением частоты опорного генератора и представляет собой стационарную составляющую переходного процесса. Наличие первой составляющей означает, что непосредственно после включения система работает в неоптимальном режиме и оценку частоты можно производить лишь, начиная с некоторого момента t_{min}.

Практически первая составляющая затухает при $\alpha t > 5$. Учитывая выражение (7), данное условие можно привести к виду

$$m > 5\mu \tag{8}$$

или

$$\omega_1 \leq \omega_{0\,min} - 5\alpha\mu. \tag{9}$$



Фиг. 1.

Интеграл (6) не выражается в элементарных функциях.

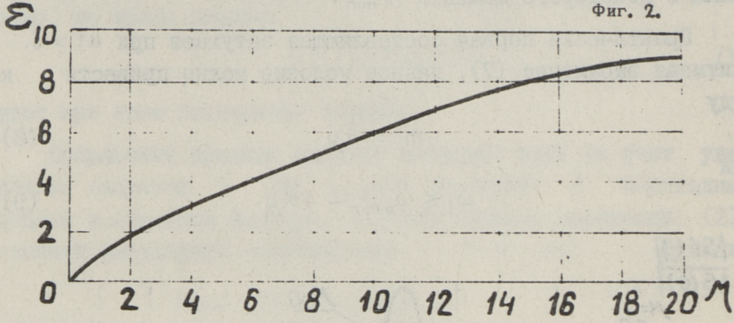
На фиг. I приведены графики нормированного модуля $|S(\xi)| / |S(0)|_{\mu=0}$ при некоторых значениях μ, полученные численными методами.

Определим нормированное смещение оценки частоты в виде

$$\varepsilon = \frac{m_1\{\omega_m\} - \omega_0}{\alpha}, \tag{10}$$

где $m_1\{\omega_m\}$ является математическим ожиданием оценки определяемой из (3). Результат численного решения нормированного смещения частоты представлен на фиг. 2 в зависимости от нормированной скорости μ.

Фиг. 2.



Подставляя в (10) $\omega_0 = \omega_{0\,max}$, получаем условие

$$\frac{\omega_2 - \omega_{0\,max}}{\alpha} \geqslant \varepsilon. \tag{11}$$

Из условий (9) и (11) следует, что изменение частоты опорного генератора должно происходить в пределах, превышающих диапазон возможных значений ω_0.

Учитывая скорость анализа μ, отношение амплитуды сигнала к среднеквадратичному значению шума на выходе линейного фильтра примет вид

$$\rho(\mu) = \rho(0)\cdot l(\mu), \tag{12}$$

где $\rho(0)$ – отношение сигнала к шуму при бесконечно малой скорости анализа, равное

$$\rho(0) = \sqrt{\frac{2A^2}{\alpha G_0}} \tag{13}$$

$l(\mu)$ – функция, учитывающая конечную скорость анализа и определяемая из выражения

$$l(\mu) = \sqrt{\pi}\cdot\frac{|S(\varepsilon)|}{\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|S(\xi)|^2 d\xi}}. \tag{14}$$

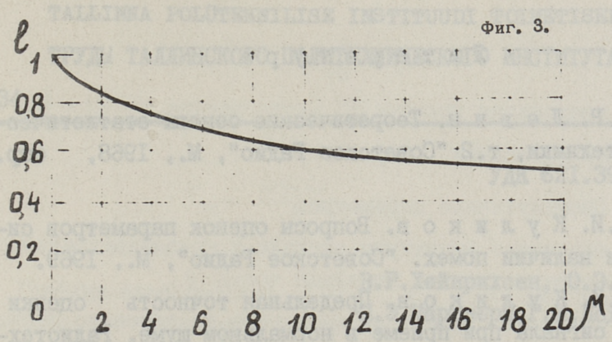


График функции $l(\mu)$ приведен на фиг. 3. Выражение для интервала корреляции при RC -интеграторе может быть приведено к виду

$$\Delta\omega_{\kappa}(\mu) = \frac{\pi\alpha}{2l^2(\mu)}. \tag{I5}$$

В [6] приведены графики зависимости вероятности ненадежной оценки P_N от числа интервалов N и отношения сигнал/шум ρ при $\Delta\omega \geq \Delta\omega_{\kappa}$. Полученные зависимости позволяют рассчитать параметры оптимального измерительного устройства при последовательном анализе.

Рассмотрим пример, при котором заданными являются:

$$\omega_{o\,min} = 2\pi\cdot 10^4\,\text{сек}^{-1}; \quad \omega_{o\,max} = 2\pi\cdot 10^6\,\text{сек}^{-1};$$

$$\beta = 2\pi\cdot 10^6\,\text{сек}^{-2}; \quad \alpha = 2\pi\cdot 10^2\,\text{сек}^{-1};$$

$$A = 10^{-6}\,b; \quad G_o = 10^{-17}\,b^2\cdot\text{сек}.$$

Определим величину доверительного интервала. Для этого с начала находим по (7): μ = I5,9 и определяем по графикам фиг. 2 и 3 величины ε = 8,25, l = 0,56. По формулам (I2) и (I5) находим: ρ = I0, $\Delta\omega_{\kappa} = 3{,}I5\cdot I0^3\,\text{сек}^{-I}$.

Выбираем минимальный доверительный интервал $\Delta\omega = \Delta\omega_{\kappa}$ и находим число интервалов $N = \frac{\omega_{o\,max} - \omega_{o\,min}}{\Delta\omega}$ = 2020. Далее по графикам [6, фиг. 3] определяем вероятность ненадежной оценки: $P_N = 5\cdot I0^{-8}$.

Определим время анализа. Для этого сначала находим по (9) и (II): $\omega_1 = 2\pi\cdot 2{,}05\cdot I0^3$ сек$^{-I}$, $\omega_2 = 2\pi\cdot I{,}0008\cdot I0^6$ сек$^{-I}$ и определяем по (5): $T_{aн}$ = I сек.

Литература

1. Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, т.2 "Советское Радио", М., 1968, стр. 100-272.

2. Е.И. Куликов. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. "Советское Радио", М., 1969.

3. Е.И. Куликов. Предельная точность оценки параметра сигнала при приеме в нормальном шуме. Радиотехника, т. 17, 1962, № 7, стр. 3-10,

4. А.А. Харкевич. Спектры и анализ. Физматгиз, М., 1962, стр. 137-148.

5. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы, т. I, "Советское Радио", М., 1967, стр.280-286.

6. О.Э. Кангур. Об оценке частоты синусоидального сигнала на фоне белого шума. В наст. сборнике, стр. 97-104.

V. Heinrichsen, O. Kangur,
P. Martverk, G. Podolskaya

Estimating the Signal Frequency by Sequential Analysis

Summary

The interrelations between the parameters of the sequential analysis device for estimating the frequency of a sinusoidal signal in the presence of white noise by the maximum likelihood method have been obtained. A calculation example is given.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 334 1972

УДК 621.39.519.28

В.Р.Хейнрихсен, О.Э. Кангур,
П.Э.Мартверк, Г.И.Подольская

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ УСТРОЙСТВА ДЛЯ ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ СИГНАЛА ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

Постановка задачи

В [1,2] рассматривалась работа устройства для оценки по методу максимального правдоподобия частоты гармонического сигнала с неизвестной начальной фазой на фоне белого шума при последовательном анализе. Были получены соотношения между параметрами, позволяющие определить качество работы заданного устройства. Данная работа является продолжением [2] и ставит обратную задачу: определить параметры устройства при заданной структуре по требованиям к качеству его работы.

Параметры устройства

Функциональная схема устройства приведена на фиг. 1. Все параметры, характеризующие данное устройство, можно разбить на 4 группы [2].

1. Входные параметры:

а) амплитуда входного сигнала A;

б) спектральная плотность белого шума G_o;

в) диапазон возможных значений частоты сигнала

$$\Delta\omega_o = \omega_{o\,max} - \omega_{o\,min}\,.$$

2. Внутренние параметры:

а) скорость изменения частоты опорного генератора

$$\beta = \frac{d\omega}{dt};$$

б) постоянная времени RC -интегратора $\tau = RC = \frac{1}{\alpha}$;

в)нормированная скорость μ.

3. Промежуточные параметры:

а) отношение амплитуды сигнала к среднеквадратичному значению шума на выходе линейной части ρ;

б) интервал корреляции выходного процесса по частоте $\Delta\omega_к$;

в) нормированное смещение оценки частоты ω_m: ε;

г) пределы изменения частоты опорного генератора ω_1 и ω_2.

4. Параметры качества:

а) доверительный интервал $\Delta\omega$ или количество интервалов N;

б) время последовательного анализа $T_{ан}$;

в) вероятность ненадежной оценки P_N.

В [2] показано, что 3-я группа параметров однозначно определяется параметрами I-ой и 2-ой группы, а все нормированные параметры однозначно определяются нормированной скоростью μ.

Приводим сводку формул, полученных в [I,2] и связывающих между собой различные параметры устройства.

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha^2}, \tag{I}$$

$$\rho(\mu) = \sqrt{\frac{2A^2}{G_0\alpha}} \cdot l(\mu), \tag{2}$$

$$\Delta\omega_к(\mu) = \frac{\pi\alpha}{2l^2(\mu)}, \tag{3}$$

$$\varepsilon(\mu) = \frac{m_1\{\omega_m\} - \omega_0}{\alpha}, \tag{4}$$

$$\omega_1 = \omega_{0\,min} - 5\mu\alpha, \tag{5}$$

$$\omega_2 = \omega_{o\,max} + \varepsilon(\mu)\cdot\alpha, \qquad (6)$$

$$N = \frac{\Delta\omega_o}{\Delta\omega}, \qquad (7)$$

$$T_{aн} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\beta}. \qquad (8)$$

Графики зависимостей $l(\mu)$ и $\varepsilon(\mu)$ для $\mu = 0 \div 20$ и $P_N(\rho, N)$ приведены в [I,2].

При $\mu > 20$ в регулярной составляющей функции $R(\omega)$ появляются дополнительные ложные максимумы сравнимые по величине с основным максимумом и оценка становится неоднозначной. При прочих равных условиях желательно выбирать минимальное значение μ.

Полученные формулы и графики действительны при следующих ограничениях:

$$\alpha << \omega_{o\,min}, \qquad (9)$$

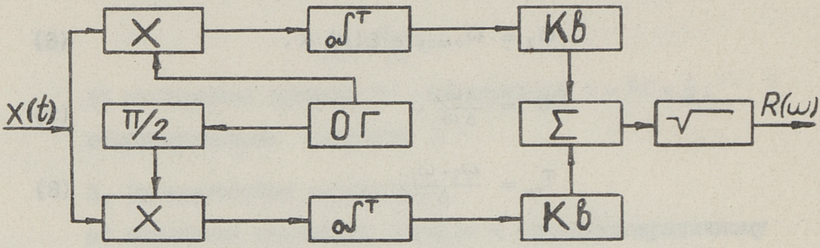
$$\Delta\omega \geqslant \Delta\omega_K. \qquad (I0)$$

Хотя выбор доверительного интервала с учетом (I0) произволен, при прочих равных условиях желательно обеспечить минимальный интервал $\Delta\omega$, т.е. максимальную точность оценки. Как правило входные параметры заданы. Задача, в которой заданы кроме того, внутренние параметры и определяются параметры 3-ей и 4-ой группы [2], решается однозначно.

Задачей синтеза является определение внутренних и промежуточных параметров по заданным входным параметрам и параметрам качества. Естественно стремление повысить точность, т.е. уменьшить доверительный интервал,уменьшить вероятность ненадежной оценки и время анализа. Очевидно, эти требования противоречивы. Кроме того, данная задача не решается при произвольном выборе значений параметров $\Delta\omega$, $T_{aн}$ и P_N. Будем задавать требования к допустимым параметрам качества в виде неравенств $\Delta\omega \leqslant \Delta\omega_{доп}$, $T_{aн} \leqslant T_{aн\,доп}$, $P_N \leqslant P_{N\,доп}$.

При этом независимо могут бнть заданы только 2 параметра.

Сформулируем теперь окончательно поставленную задачу.



Фиг. 1. Функциональная схема устройства для оценки частоты.

Заданы входные параметры A, G_o, $\omega_{o\,min}$, $\omega_{o\,max}$ и требования к двум из трех параметров качества. Требуется выбрать такие значения внутренних и промежуточных параметров, которые, удовлетворяя заданным требованиям, оптимизировали бы третий параметр качества.

Задача имеет три варианта, которые рассмотрим отдельно.

I. Минимизация времени анализа. Заданы $\Delta\omega_{доп}$, $P_{Nдоп}$.

По (7) находим N и по графикам [I, фиг. 3] зависимостей $P_N(\rho, N)$ определяем ρ_{min} для которого

$$P_N(\rho_{min}, N) = P_{Nдоп}.$$

Подставляем (I), (5), (6) в (8) и получаем

$$T_{ан} = \frac{[\varepsilon(\mu) + 5\mu]\cdot\alpha + \Delta\omega_o}{\alpha^2\mu}. \tag{II}$$

Определим связь между α и μ которая удовлетворяла бы заданным требованиям. Из (2) получаем условие

$$\alpha \leqslant \frac{2A^2 l^2(\mu)}{G_o\,\rho^2_{min}}. \tag{I2}$$

Подставляя (3) в (I0), получаем второе условие

$$\alpha \leqslant \frac{2\Delta\omega_{доп}}{\pi}\cdot l^2(\mu). \tag{I3}$$

Объединяя (I2) и (I3), получаем

$$\alpha \leqslant D \cdot l^2(\mu), \tag{I4}$$

где

$$D = \min\left\{ \frac{2A^2}{G_0 \rho^2_{min}},\ \frac{2\Delta\omega_{доп}}{\pi} \right\}. \tag{I5}$$

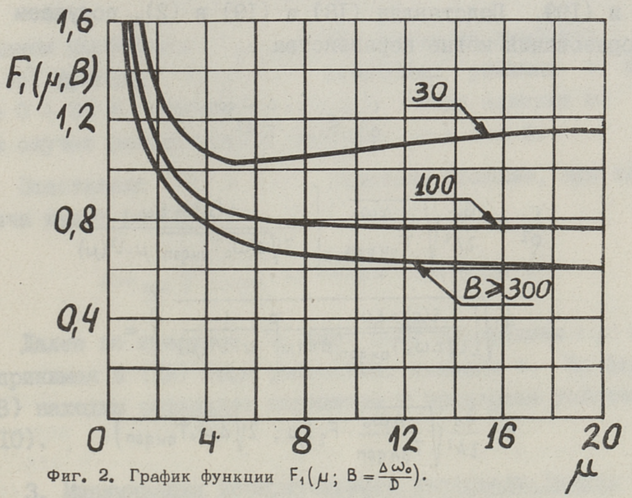
Подставляем (I4) в (II) и получаем

$$T_{aн} \geqslant \frac{\Delta\omega_0}{D^2}\left[\frac{\varepsilon(\mu)+5\mu}{\frac{\Delta\omega_0}{D}\mu\, l^2(\mu)} + \frac{1}{\mu \cdot l^4(\mu)}\right] =$$

$$= \frac{\Delta\omega_0}{D^2} \cdot F_1\left(\mu;\ \frac{\Delta\omega_0}{D}\right). \tag{I6}$$

или

$$T_{aн\,min} = \frac{\Delta\omega_0}{D^2} \cdot \min F_1\left(\mu;\ \frac{\Delta\omega_0}{D}\right). \tag{I7}$$



Фиг. 2. График функции $F_1(\mu;\ B = \frac{\Delta\omega_0}{D})$.

Графики функции $F_1(\mu; \Delta\omega_0 = B)$ приведены на фиг. 2. Они показывают зависимость $T_{aн}(\mu)$ при условии (I4), т.е. при заданных постоянных $\Delta\omega_{доп}$ и $P_{N\,доп}$. Как видно из графиков, при $B \geqslant 100$, $T_{aн}$ монотонно убывает на интервале 0÷20, и, начиная от $\mu \approx 8$ мало зависит от μ. В этом случае рекомендуется выбирать μ = 8 ÷ I0.

Далее по графикам [2, фиг. 2,3] определяем $\varepsilon(\mu)$ и $l(\mu)$ и, принимая в (I4) знак равенства, находим α. По формулам (I ÷ 8) находим остальные параметры и проверяем условия (9) и (I0).

2. Минимизация вероятности ненадежной оценки. Заданы $\Delta\omega_{доп}$, $T_{ан\,доп}$.

По (7) находим N. Для минимизации P_N при заданном N достаточно максимизировать ρ. Определяем связь между α и μ которая удовлетворяет заданным требованиям. Из (3) и (II)

$$\alpha \leqslant \frac{2\Delta\omega_{доп}}{\pi}\cdot l^2(\mu), \tag{I8}$$

$$\alpha \geqslant \frac{\varepsilon(\mu)+5\mu+\sqrt{[\varepsilon(\mu)+5\mu]^2+4\mu\Delta\omega_0 T_{ан\,доп}}}{2\mu T_{ан\,доп}}. \tag{I9}$$

Задача имеет решение только при выполнении обоих неравенств (I8) и (I9). Подставляя (I8) и (I9) в (2), получаем после преобразований новые неравенства

$$\frac{1}{\rho^2} \leqslant \frac{G_0\Delta\omega_{доп}}{\pi A^2} \tag{20}$$

$$\frac{1}{\rho^2} \geqslant \frac{G_0}{2A^2}\sqrt{\frac{\Delta\omega_0}{T_{ан\,доп}}}\cdot\left\{\frac{\varepsilon(\mu)+5\mu}{2\sqrt{\Delta\omega_0 T_{ан\,доп}}\cdot\mu\cdot l^2(\mu)}+\right.$$

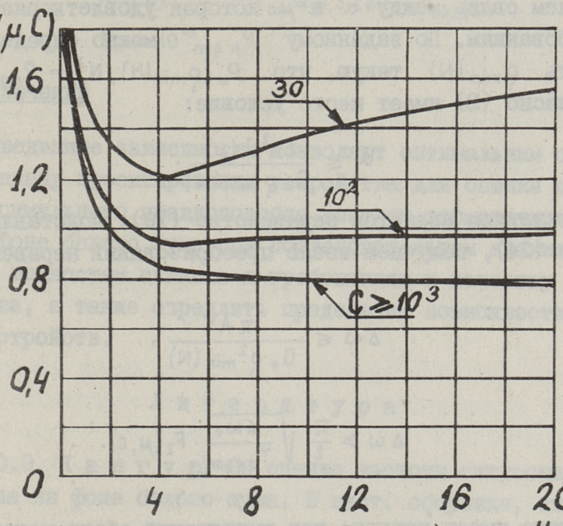
$$\left.+\sqrt{\left[\frac{\varepsilon(\mu)+5\mu}{2\sqrt{\Delta\omega_0 T_{ан\,доп}}\,\mu l^2(\mu)}\right]^2+\frac{1}{\mu\cdot l^4(\mu)}}\right\} =$$

$$= \frac{G_0}{2A^2}\sqrt{\frac{\Delta\omega_0}{T_{ан\,доп}}}\cdot F_2\left(\mu;\ 2\sqrt{\Delta\omega_0 T_{ан\,доп}}\right), \tag{2I}$$

или

$$\frac{1}{\rho^2_{max}} = \frac{G_0}{2A^2}\sqrt{\frac{\Delta\omega_0}{T_{ан\,доп}}}\cdot\min F_2\left(\mu;\ 2\sqrt{\Delta\omega_0 T_{ан\,доп}}\right). \tag{22}$$

Графики функции $F_2\left(\mu;\ 2\sqrt{\Delta\omega_0 T_{ан\,доп}}\right) = F_2(\mu, c)$ приведены на фиг. 3. Они показывают зависимость величины $\frac{1}{\rho^2}$ от μ при



Фиг. 3. График функции $F_2(\mu;\ C = 2\sqrt{\Delta\omega_0 T_{ан\,доп}})$.

заданном постоянном $T_{ан\,доп}$. Как видно из графиков, при $C \geq 10^3$ функция $F_2(\mu, C)$ монотонно убывает в интервале $0 \div 20$ и, начиная с $\mu \approx 6$, мало зависит от μ. В этом случае рекомендуется выбирать $\mu = 6 \div 8$.

Подставляя (22) в (20), получаем условие, при котором задача имеет решение

$$\Delta\omega_{доп} \cdot \sqrt{T_{ан\,доп}} \geq \frac{\pi\sqrt{\Delta\omega_0}}{2} \cdot \min F_2(\mu, C). \qquad (23)$$

Далее по графикам [2, фиг. 2,3] определяем $\varepsilon(\mu)$ и $l(\mu)$ и, принимая в (I9) знак равенства, находим α. По формулам (I÷8) находим остальные параметры и проверяем условия (9) и (I0).

3. Минимизация доверительного интервала. Заданы $T_{ан\,доп}$, $P_{н\,доп}$.

Выбираем минимальный доверительный интервал по условию (I0)

$$\Delta\omega = \Delta\omega_к = \frac{\pi\alpha}{2l^2(\mu)}. \qquad (24)$$

Определяем связь между α и μ которая удовлетворяет заданным требованиям. По заданному $P_{N\,доп}$ можно определить зависимость $\rho_{min}(N)$ такую, что $P_N[\rho_{min}(N), N] = P_{N\,доп}$. Тогда, согласно (2) имеет место условие:

$$\alpha \leqslant \frac{2A^2 l^2(\mu)}{G_0 \rho^2_{min}(N)}. \tag{25}$$

Вторым условием является неравенство (I9). Подставляя (25) и (I9) в (24), получаем после преобразований неравенства

$$\Delta\omega \leqslant \frac{\pi A^2}{G_0 \rho^2_{min}(N)}, \tag{26}$$

$$\Delta\omega \geqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\Delta\omega_0}{T_{ан\,доп}}} \cdot F_2(\mu, c). \tag{27}$$

Задача имеет решение при выполнении обоих условий (26) и (27). Проверка (26) возможна только в конце расчета, так как при заданном $\Delta\omega_0$ величина $\rho_{min}(N)$ определяется интервалом $\Delta\omega$. Дальнейший ход расчета аналогичен варианту 2. После определения N проверяется выполнение условия (26)

Для иллюстрации приводим пример расчета для второго варианта.

Пример. Заданными являются $\omega_{0\,min} = 2\pi\cdot 10^4$ сек$^{-1}$,

$\omega_{0\,max} = 2\pi\cdot 10^6$ сек$^{-1}$, $A = 10^{-6}$ b,

$G_0 = 10^{-17}$ b$^2\cdot$сек, $\Delta\omega_{доп} = \pi\cdot 10^3$ сек$^{-1}$,

$T_{ан\,доп} = 0{,}3$ сек.

Находим $2\sqrt{\Delta\omega_0 T_{ан\,доп}} = 2740$ и проверяем (23), получаем I720 < 3I40, т.е. задача не имеет решения при заданных условиях. Изменяя требования, принимаем $\Delta\omega_{доп} = 10^4$ сек$^{-1}$ и проверяем (23). Получаем 5500 > 3I40, т.е. условие (23) выполняется. Выбираем $\mu = 7$ и находим $l(7) = 0{,}68$, $\varepsilon(7) = 4{,}65$.

Определяем $\alpha = 1720$ сек$^{-1}$, $\Delta\omega_к = 5870$ сек$^{-1}$. Так как условия (9) и (I0) выполняются, находим остальные параметры:

$\beta = 2{,}09\cdot 10^7$ сек$^{-2}$, $\rho = 7{,}3$;

$\omega_1 = 7\cdot 10^3$ сек$^{-1}$; $\omega_2 = 2\pi\cdot 10^6$ сек$^{-1}$;

$$N = 622; \quad T_{ан} = 0{,}3 \text{ сек} = T_{ан\,доп};$$
$$P_н = 10^{-3}.$$

Заключение

Приведенные зависимости позволяют оптимальным образом решить задачу проектирования устройства для оценки по методу максимального правдоподобия частоты гармоничного сигнала на фоне белого шума при последовательном анализе по заданным мощностям сигнала и требованиям к качеству работы устройства, а также опредлить предельные возможности подобных устройств.

Литература

I. О.Э. Кангур. Об оценке частоты синусоидального сигнала на фоне белого шума. В наст. сборнике, стр. 97-104.

2. В.Р. Хейнрихсен, О.Э. Кангур, П.Э. Мартверк, Г.И. Подольская. Оценка частоты сигнала при последовательном анализе. В наст. сборнике, стр. 105-110.

V. Heinrichsen, O. Kangur,
P. Martverk, G. Podolskaya

The Optimum Synthesis of the Sequential Analysis Device for Estimating Frequency

Summary

Three various types of the optimum synthesis problem of the sequential analysis device for estimating the frequency of a sinusoidal signal in the presence of white noise are considered. The signal and noise powers and the quality parameters are supposed to be given. The calculation example is shown.

Определим ... $M = 832$ ... $T_{пр} = 0,1$ сек ... [illegible]

[illegible]

Заключение

Приведенные зависимости позволяют оптимальным образом решить задачу проектирования устройства для оценки (по методу максимального правдоподобия) частоты гармонического сигнала на фоне белого шума при последовательном анализе. Это позволяет [illegible] сигнала в [illegible] и качество работы устройства, а также определить предельные возможности подобных устройств.

Литература

1. О.Э. Кангур. Об оценке частоты синусоидального сигнала на фоне белого шума. В наст. сборнике, стр. 97-104.
2. В. Хейнрихсен, О.Э. Кангур, Л.А. Матвеев, Г.Ч. Подольская. Оценка частоты сигнала при последовательном анализе. В наст. сборнике стр. 105-[illegible]

V. Heinrichsen, O. Kangur,
L. Matveev, G. Podolskaya

The Optimum Synthesis of the Sequential Analysis Device for Estimating Frequency

Summary

Three various types of the optimum synthesis problem of sequential analysis device for estimating the frequency of a sinusoidal signal in the presence of white noise are considered. The signal and noise powers and the quality parameters are supposed to be given. The calculation example is given.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

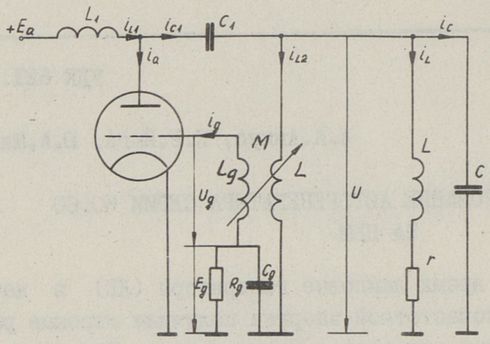
УДК 621.365.52

А.А.Аннус, К.Р.Йыги, Ю.А.Микомяги

МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОГЕНЕРАТОРА СЕРИИ ИО.60 НА ЦВМ

В настоящее время ламповые генераторы (ЛГ) в качестве источников высокочастотной энергии получили широкое распространение во многих отраслях промышленности. При этом все серийные отечественные ЛГ для электротермии являются автогенераторами (АГ), Для разработки систем автоматического управления (САУ) режимами АГ необходимы характеристики его как звена САУ. Учитывая кратковременность переходных процессов в АГ, для расчета САУ можно ограничиться только характеристиками стационарных режимов. Расчет этих характеристик производится при различных режимах работы генераторной лампы (ГЛ) в АГ. По имеющимся данным не существует строгой методики расчета режимов АГ. Существующие методы разработаны для генераторов с независимым возбуждением, когда выходная ступень ЛГ работает на настроенную, т.е. активную нагрузку [1].

При расчете АГ [2] делается допущение , что ГЛ работает в АГ также на настроенную нагрузку, как и в генераторе с независимым возбуждением. Но, исходя из условия баланса фаз самовозбуждающегося генератора, нагрузка АГ всегда расстроенная [3]. Основной причиной появления расстройки является низкая добротность колебательных контуров АГ, работающих на электротермическую нагрузку. Кроме того, в промышленных АГ в целях плавного регулирования выходной мощности используется индуктивная обратная связь, что в свою очередь увеличивает расстройку, В итоге нагрузка АГ становится комплексной - появляется дополнительный сдвиг фазы между сеточным напряжением и напряжением на аноде ГЛ. Максимальное значение напряжения на сетке не совпадает с минимальным напряжением на аноде, как полагается при расчете ГЛ по [2]. Следовательно, и максимальное значение импульса анодного тока не совпадает с минимальным напряжением на аноде и потери мощности на



Фиг. 1. Принципиальная электрическая схема автогенератора серии ИО.60

ГЛ – генераторная лампа ГУ-22А

L – индуктивность колебательного контура $45 \cdot 10^{-6}$ г;

С – емкость колебательного контура $0{,}02\ 10^{-6}$ Ф;

r – сопротивление потерь колебательного контура 1 Ом;

L_1 – индуктивность анодно-разделительного дросселя $8000 \cdot 10^{-6}$ г;

C_1 – емкость анодно-разделительного конденсатора $0{,}01 \cdot 10^{-6}$ Ф;

L_2 – индуктивность первичной обмотки трансформатора обратной связи $1500 \cdot 10^{-6}$ г;

L_g – индуктивность вторичной обмотки трансформатора обратной связи $270 \cdot 10^{-6}$ г;

М – взаимная индуктивность катушек $30 \cdot 10^{-6}$... ...$300 \cdot 10^{-6}$ г;

R_g – сопротивление утечки 1000...2500 Ом;

С – емкость утечки $0{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ф;

E_a – анодное напряжение 3 ... 10 кВ;

i_a – ток анода;

i_g – ток сетки ;

i_{L_1} – ток анодно-разделительного дросселя;

i_a – ток анодно-разделительного конденсатора;

i_{L_2} – ток первичной обмотки трансформатора обратной связи;

i_c – ток емкостной ветви колебательного контура;

i_L – ток индуктивной ветви колебательного контура;

E_a – напряжение сеточного смещения;

U_g – напряжение вторичной обмотки трансформатора обратной связи;

аноде увеличиваются. Таким образом, расчет режима ГЛ в АГ для электротермии по существующим методам не дает достоверных результатов.

Выход из положения можно найти в моделировании процесса установления стационарных колебаний. Это приводит к решению системы уравнений, описывающих работу АГ, и осуществимо в разумные сроки только с применением вычислительной техники.

В данной работе решено провести моделирование АГ на цифровой вычислительной машине (ЦВМ), поскольку моделирование генераторной лампы на аналоговой вычислительной машине (АВМ) затруднительно.

Не нарушая общности, в дальнейшем для примера рассмотрим АГ серии ИО.60 (фиг. I). Для этого генератора на основе законов Кирхгофа и Ома составлены уравнения, для мгновенных значений переменных, описывающих его работу во всех режимах работы, при следующих допущениях:

I) АГ работает на постоянную нагрузку, которая определяется параметрами L, C и r;

2) реакцией тока сетки на вторичную обмотку трансформатора обратной связи пренебрегают;

3) имея в виду, что АГ работает на длинноволновом участке частотного диапазона, пренебрегают межэлектродными емкостями ГЛ и ГЛ описывается своими статическими характеристиками.

Получены две системы уравнений. Первая система описывает работу АГ в ту часть периода высокочастотных колебаний, когда сеточный ток отсутствует, а вторая - при наличии сеточного тока. Обозначения элементов, токов и напряжений, используемые при составлении уравнений приведены на схеме АГ (фиг. I).

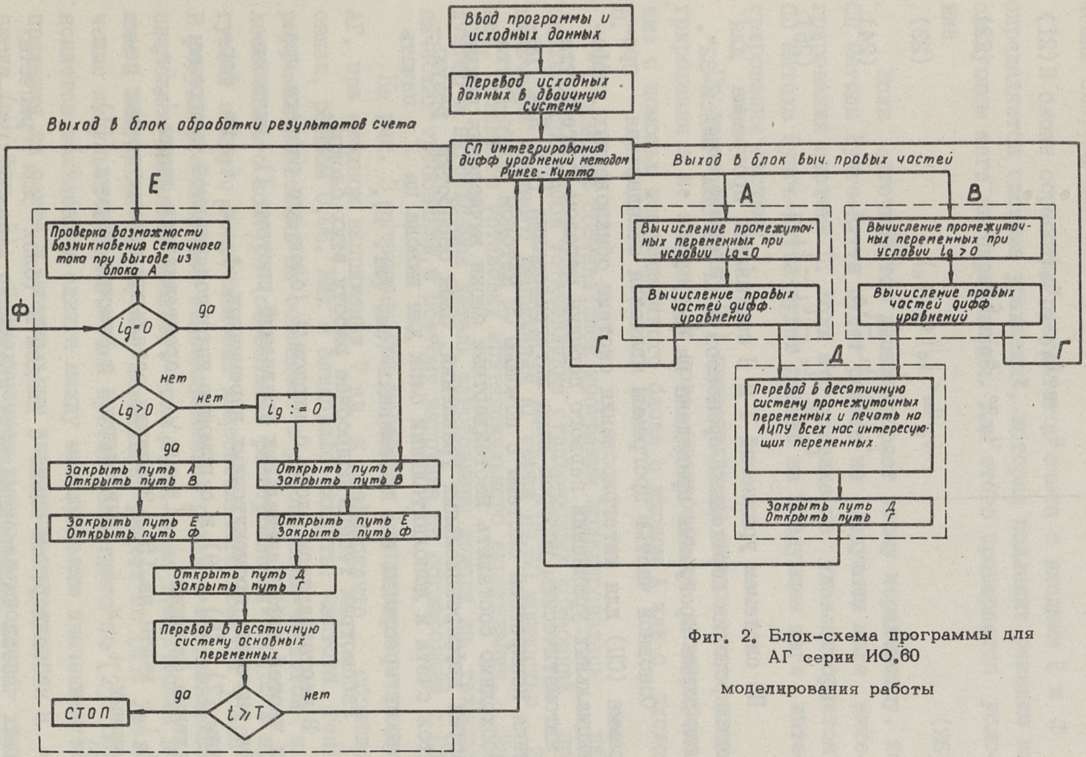
$$\frac{du_{c_1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_{c_1} \tag{I}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C} i_c \tag{2}$$

$$\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{1}{L_1}\left(E_a - u_{c_1} - u\right) \tag{3}$$

$$
\mathrm{I}\left\{
\begin{array}{lr}
\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L}(u - r i_L) & (4)\\[2ex]
\dfrac{di_{L_2}}{dt} = \dfrac{1}{L_2}u & (5)\\[2ex]
\dfrac{dE_g}{dt} = -\dfrac{1}{C_g}\dfrac{E_g}{R_g} & (6)\\[2ex]
e_a = u_{c_1} + u & (7)\\[2ex]
u_g = -\dfrac{M}{L_2}u & (8)\\[2ex]
e_g = u_g + E_g & (9)\\[2ex]
i_a = i_a(e_a, e_g) & (10)\\[2ex]
i_{c_1} = i_{L_1} - i_a & (11)\\[2ex]
i_c = i_{c_1} - i_{L_2} - i_L & (12)
\end{array}
\right.
$$

$$
\mathrm{II}\left\{
\begin{array}{lr}
\dfrac{di_g}{dt} = -\dfrac{1}{L_g}\left(u_g + \dfrac{M}{L_2}u\right) & (13)\\[2ex]
\dfrac{du_{c_1}}{dt} = \dfrac{1}{C_1}i_{c_1} & (14)\\[2ex]
\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{C}i_c & (15)\\[2ex]
\dfrac{di_{L_1}}{dt} = \dfrac{1}{L_1}(E_a - u_{c_1} - u) & (16)\\[2ex]
\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L}(u - r i_L) & (17)\\[2ex]
\dfrac{di_{L_2}}{dt} = \dfrac{1}{L_2}u & (18)\\[2ex]
\dfrac{dE_g}{dt} = -\dfrac{1}{C_g}\left(i_g + \dfrac{E_g}{R_g}\right) & (19)
\end{array}
\right.
$$



Фиг. 2. Блок-схема программы для моделирования работы АГ серии ИО.60

$$
\left\{
\begin{aligned}
e_a &= u_{c_1} + u && (20)\\
e_g &= e_g(i_g, e_a) && (21)\\
u_g &= e_g - E_g && (22)\\
i_a &= i_a(e_g, e_a) && (23)\\
i_{c_1} &= i_{L_1} - i_a && (24)\\
i_c &= i_{c_1} - i_{L_2} - i_L . && (25)
\end{aligned}
\right.
$$

По системам уравнений I и II составлена программа для моделирования переходных процессов в АГ на ЦВМ "Минск-32". Блок-схема программы приведена на фиг. 2.

Основной частью программы является стандартная программа (СП) для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага интегрирования [4]. Для решения конкретной системы с помощью СП методом Рунге-Кутта необходимо составить нестандартные блоки вычисления правых частей дифференциальных уравнений, блок обработки результатов счета и дополнительный блок для вывода на печать всех интересующих нас переменных (см. фиг. 2).

Рассмотрим теперь подробнее работу этих блоков.

В нестандартном блоке с входом А (блок для расчета правых частей дифферанциальных уравнений системы I) вычисляются значения промежуточных переменных e_a, u_g, e_g по формулам (7), (8), (9) и с помощью интерполяционной программы значение функции $i_a(e_a, e_g)$ Характеристики лампы $i_a(e_a, e_g)$ взяты из [5]. Значения остальных промежуточных переменных i_a и i_c вычисляются с помощью формул (II) и (I2).

В нестандартном блоке с входом В (блок для расчета правых частей дифференциальных уравнений системы I) вычисляется значение переменной e_a по формуле (20) и с помощью интерполяционной программы значения функций $e_g(e_a, i_g)$ и $i_a(e_g, e_a)$ [5].Затем вычисляются значения остальных промежуточных переменных u_g, i_a и i_c по формулам (22), (24), (25) и значения правых частей дифференциальных уравнений системы П.

В блоке обработки результатов счета с входами Е и Ф определяется система уравнений, которая подлежит решению на следующем шаге интегрирования. Для этого проверяется условие

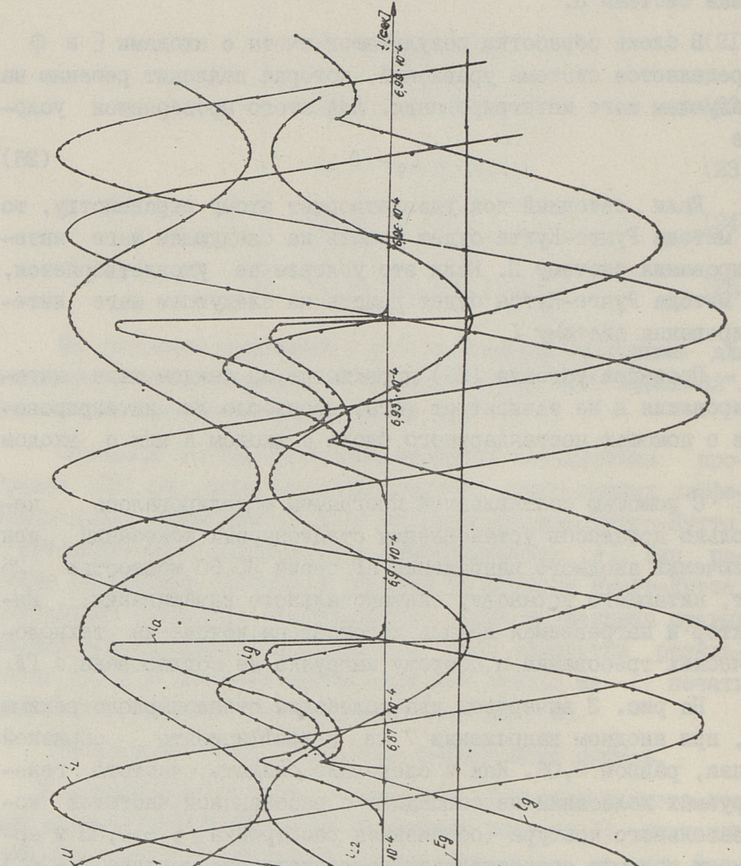
$$i_g > 0. \qquad (26)$$

Если сеточный ток удовлетворяет этому неравенству, то СП метода Рунге-Кутта будет решать на следующем шаге интегрирования систему П. Если это условие не удовлетворяется, СП метода Рунге-Кутта будет решать на следующем шаге интегрирования систему I.

Проверка условия (26) происходит на каждом шаге интегрирования и не зависит от того, произошло ли интегрирование с помощью нестандартного блока с входом А или с входом В.

С помощью составленной программы моделировалось несколько процессов установления стационарных колебаний при включении анодного напряжения АГ серии ИО.60 мощностью 25 квт, питающего установку эпитаксиального наращивания. Индуктор и нагреваемая деталь изготовлены, исходя из технологических требований, и поэтому нагрузка не согласована с ГЛ.

На рис. 3 вычерчены два колебания стационарного режима АГ, при анодном напряжении 7 кв и коэффициенте обратной связи, равном 0,06. Как и следовало ожидать, частота генерируемых колебаний не совпадает с резонансной частотой колебательного контура (обобщенная расстройка $\xi = 0,53$ и аргумент полного сопротивления колебательного контура $\varphi = 28^{0}$) В результате получаем недонапряженный режим с максимальным значением импульса анодного тока 9,7А, а не критический режим с импульсом 3,7 А, как показывает расчет по [2]. Увеличение импульса анодного тока против расчетного по [2] объясняется появлением сдвига между максимальным значением напряжения на сетке и минимальным значанием напряжения на аноде (см. фиг. 3). С увеличением импульса анодного тока увеличивается и подводимая к генератору мощность, но полезная мощность генератора уменьшается из-за уменьшения тока контура. Расчеты по [2] дают в данном случае амплитудное значение контурного тока I30 А. Моделирование такого же



Фиг. 3. Напряжения и токи стационарного режима АГ серии ИО.60 при E = 7 кВ; к = 0,06; R_g = 1 кОм.

режима на ЦВМ дает I20 А. Уменьшение контурного тока вызвано уменьшением напряжения на контуре при расстройке.

Одновременное увеличение подводимой мощности и уменьшение полезной мощности приводит к резкому увеличению потерь на аноде и несоответствию режима с расчетным по [2] Этим подтверждается, что при расчете режима ГЛ, работающей в АГ, надо учитывать расстройку анодной нагрузки. Это возможно при использовании разработанной в настоящей работе цифровой модели АГ. Такая модель позволяет рассчитывать достаточно точные характеристики стационарных режимов для любых значений управляемых параметров (анодное напряжение, коэффициент обратной связи и т.д.). Для расчета стационарного режима АГ на ЦВМ "Минск-32" потребуется 8 - 10 минут машинного времени.

На базе проделанной работы можно сделать еще ряд выводов:

1. По нашему мнению, разработанная в настоящей работе цифровая модель АГ полезна при проектировании нагрузочных сопротивлений для одноконтурных автогенераторов, т.к. это позволяет учитывать расстройку анодной нагрузки. Неучет расстройки может привести к тому, что проектируемая нагрузка не позволит получить от АГ требуемой мощности. Это объясняется тем, что АГ работает в недонапряженном режиме на границе допустимых потерь мощности на аноде, хотя расчет по [2] проведен для критического режима.

2. С помощью подобной модели на ЦВМ можно рассчитывать характеристики стационарных режимов всех серийно выпускаемых одноконтурных АГ. Для этого надо составить уравнения конкретного генератора.

3. Необходимо более точно определить сеточные характеристики ГЛ, так как точность расчета во многом зависит от достоверности сеточных характеристик (особенно у ГЛ с катодами из торированного карбидированного вольфрама). Ссылки на это можно найти уже в [6].

4. Результаты данной работы могут быть полезны при проектировании и разработке новых одноконтурных АГ для электротермии, а также при настройке существующих АГ и при проектировании САУ. для них.

Л и т е р а т у р а

1. С.И. Е в т я н о в. Ламповые генераторы, "Связь",М., 1967.

2. Н.Н. Ш т е й н. Автогенераторы гармонических колебаний, "Госэнергоиздат", М.-Л., 1070.

3. С.А. Д р о б о в, С.И. Б ы ч к о в. Радиопередающие устройства, "Советское радио", М., 1969.

4. Библиотека стандартных программ для ЦВМ "Минск-2" АН ЭССР Институт Кибернетики, Таллин, 1964.

5. Б.В. К а н ц е л ь с о н, А.С. Л а р и о н о в, А.М. К а л у г и н. Электровакуумные электронные и ионные приборы "Энергия", М., 1970.

6. В.А. Х а ц к е л е в и ч. Расчет режимов новых генераторных триодов, "Связьиздат", М., 1961.

A. Annus, K. Jõgi, J. Mikomägi

Digital model of a self-oscillator ИО.60

Summary

The results of modelling a onecircuit valve self-oscillator on a digital computer "Minsk-22" are presented. The object of modelling has been to study the functioning of the self-oscillator under various conditions.

Differential equations of the self-oscillator ИО.60 are derived and a program for computation of the characteristics of stationary conditions for the self-oscillator is worked out.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 681.325

К.Я. Мятик

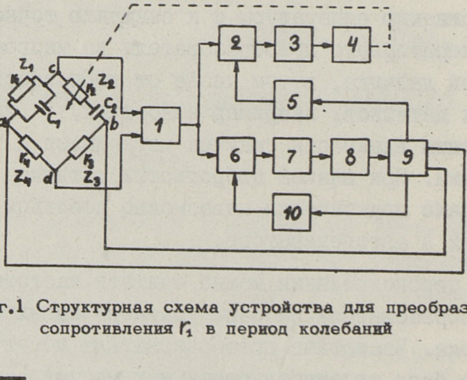
УСТРОЙСТВО ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ИНДУКТИВНОСТИ ИЛИ ЕМКОСТИ В ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ

В настоящее время в связи с развитием техники централизованного контроля и управления все большее значение имеют датчики с унифицированным выходным сигналом. Одним из наиболее перспективных видов унифицированного сигнала является выходной сигнал в виде напряжения переменного тока, частота которого зависит от измеряемой величины. Известны частотные датчики, в которых используются автогенераторы, частота которых зависит от величины преобразуемого параметра [I]. Зависимость частоты выходного напряжения автогенератора от величины преобразуемого параметра существенно нелинейна. Необходимость последующей линеаризации приведет к усложнению аппаратуры и к снижению точности. Качество автогенераторного преобразователя во многом зависит от параметров датчика, в том числе от добротности. Добротность многих датчиков, например емкостных, используемых для определения влажности сыпучих материалов и т.д., относительно низка. При низкой добротности датчика затруднительно или даже практически невозможно добиться устойчивых автоколебаний в автогенераторе.

Весьма перспективными можно считать частотные измерительные преобразователи на базе уравновешенных мостов переменного тока. Частотные преобразователи могут быть построены и на базе квазиуравновешенных мостов переменного тока, но метрологические показатели таких измерительных преобразователей хуже из-за известных недостатков квазиуравновешенных мостов. Уравновешивание моста переменного тока в общем случае производится изменением двух параметров, одним из которых может быть и частота питающего мост напряжения.

Для измерения одной величины (сопротивления, емкости или индуктивности) можно создать мосты переменного тока, уравновешивание которых производится изменением одной лишь частоты питающего мост напряжения [2]. При изменении величины только одного элемента в одном плече моста и при уравновешивании моста путем изменения одной лишь частоты питания получить пропорциональную (или обратно пропорциональную) зависимость периода колебаний от величины преобразуемого параметра принципиально невозможно [2]. Предложено устройство[1] для преобразования сопротивления, емкости или индуктивности в период электрических колебаний при помощи уравновешенного моста переменного тока, позволяющее получить пропорциональную зависимость между периодом питающего мост напряжения и величиной преобразуемого параметра.

Уравновешивание моста производят изменением частоты питания моста и подстройкой величины одного элемента в одном плече моста. Управляющие сигналы для автоматизации процесса уравновешивания получают при помощи фазочувствительных выпрямителей.



Фиг.1 Структурная схема устройства для преобразования сопротивления r_1 в период колебаний

---

1) Положительное решение Комитета по делам изобретений и открытий № 1470387/18-24 от 31 августа 1971 года о выдаче авторского свидетельства.

Предложенный способ может быть реализован с помощью различных мостовых схем. Для примера на фиг. I приведена мостовая схема для преобразования сопротивления r_1 в период колебаний, уравновешивание которой производится при помощи изменения частоты питания моста ω и подстройки сопротивления r_2. Условие равновесия такой схемы имеет вид:

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{1}{C_1 r_1 C_2 r_2} \\ C_2 r_2 r_4 + C_1 r_1 r_4 - C_2 r_3 r_1 = 0. \end{cases}$$

Если преобразуемый параметр r_1 отклоняется от значения, соответствующего равновесию, то будут нарушены оба приведенные условия равновесия. Второе условие равновесия может быть удовлетворено теперь подстройкой сопротивления r_2, а первое условие можно выполнить путем соответствующего изменения частоты питания моста. Конечное значение параметра r_2 для выполнения условия равновесия будет пропорционально параметру r_1.

$$r_2 = \frac{C_2 r_3 - C_1 r_4}{C_2 r_4} r_1 = k r_1.$$

Поэтому при таком способе уравновешивания из первого условия равновесия для состояния равновесия получим:

$$\omega^2 = \frac{1}{C_1 C_2 k r_1^2}$$

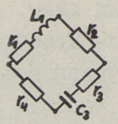
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 k}} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

Отсюда искомый период колебаний составляет:

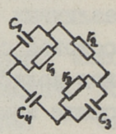
$$T = 2\pi \sqrt{C_1 C_2 k} \cdot r_1.$$

Следовательно, в положении равновесия период питающего мост напряжения будет пропорционален преобразуемому параметру r_1. При использовании в схеме фиг. I других параметров (C_1, C_2, r_3 или r_4) в качестве подстраиваемого параметра зависимость периода питающего напряжения от r_1 в состоянии равновесия будет нелинейной.

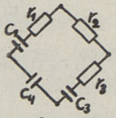
На фиг. 2,3,4 и 5 показаны схемы, которые также дают возможность получить пропорциональную зависимость между периодом колебаний и преобразуемым параметром, если уравновешивание моста произвести при помощи изменения частоты питающего напряжения и построй-ки одного элемента в определенном плече моста. В таблице I для каждой схемы приведен преобразуемый и подстраиваемый элемент и функция преобразования. В любой схеме преобразуемый элемент может быть использован в качестве подстраиваемого и подстраиваемый в качестве преобразуемого.



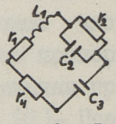
Фиг.2



Фиг. 3



Фиг.4



Фиг.5

Таблица I

Фиг. №	Преобразуемый элемент	Подстраиваемый элемент	Условие равновесия	Функция преобразования
2	L_1	C_3	$\begin{cases}\omega^2 L_1 C_3 r_3 - r_1 = 0\\ L_1 + r_3 C_3 r_1 - r_2 r_4 C_3 = 0\end{cases}$	$\omega=\sqrt{\frac{r_1(r_2 r_4 - r_1 r_3)}{r_3}}\cdot\frac{1}{L_1}$
3	C_1	r_3	$\begin{cases}\omega^2 r_1 r_3 C_1 C_3 - 1 = 0\\ r_1 r_3 C_4 - r_2 r_3 C_3 - \\ - r_1 r_2 C_1 = 0\end{cases}$	$\omega=\sqrt{\frac{r_1 C_4 - r_2 C_3}{r_1^2 r_2 C_3}}\cdot\frac{1}{C_1}$
4	C_1	r_3	$\begin{cases}\omega^2 C_1 r_1 C_3 r_3 - 1 = 0\\ C_1 C_4 r_1 + C_3 r_3 C_4 - \\ - C_1 C_3 C_2 = 0\end{cases}$	$\omega=\sqrt{\frac{C_4}{r_1(C_3 r_2 - r_1 C_4)}}\cdot\frac{1}{C_1}$
5	L_1	r_2	$\begin{cases}\omega^2 L_1 r_2 C_2 - r_1 = 0\\ r_1 r_2 C_2 + L_1 - \\ - r_2 r_4 C_3 = 0\end{cases}$	$\omega=\sqrt{\frac{r_1(r_4 C_3 - r_1 C_2)}{C_2}}\cdot\frac{1}{L_1}$

Автоматическое уравновешивание моста можно реализовать следующим образом (см. фиг. I). Сигнал с измерительной диагонали моста после усиления усилителем I подается на фазочувствительные выпрямители (ФЧВ) 2 и 6. Опорное напряжение для ФЧВ 2 получается от управляемого генератора 9 через фазовращатель 5, а для ФЧВ 6 через фазовращатель IO. Выходные напряжения ФЧВ подаются через фильтры низких частот 3 и 7 на усилители постоянного тока 4 и 8 соответственно. Входной сигнал усилителя 4 используется для подстройки сопротивления r_2. В качестве последнего можно использовать инерционные управляемые резисторы, например, фоторезистор (вместе с источником света), термистор косвенного подогрева и т.д. Выходной сигнал усилителя 8 управляет частотой генератора 9. Напряжение, полученное с генератора 9, используется для питания измерительного моста (и для опорных напряжений ФЧВ).

При отклонении величины r_1, r_2 или ω от значения, соответствующего равновесию моста, на измерительной диагонали появится напряжение, величину и фазу которого можно определить из соотношения: $\dot U_{cd} = \dot U_{ab} \dfrac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}$.

Отклонение различных величин по-разному влияет на величину и фазу выходного напряжения. Это дает возможность определить при помощи ФЧВ необходимое направление изменения величин, при помощи которых производится уравновешивание моста [2]. В данной схеме этими величинами являются ω и r_2 . Фазо-частотные характеристики фазовращателей должны быть такими, чтобы во всем диапазоне изменения r_1, r_2 и ω выходные сигналы ФЧВ изменяли соответственно r_2 и ω в сторону уравновешивания моста.

Определим составляющую статической погрешности, обусловленную конечным значением коэффициента усиления и выбранными фазовыми соотношениями между опорными напряжениями и напряжением небаланса моста.

Напряжение на измерительной диагонали моста вблизи точки равновесия выражается формулой:

$$\dot U_{cd} = \dot S_\omega \Delta\omega + \dot S_r \Delta r_2 ,$$

где через $\Delta\omega$ и Δr_2 обозначены отклонения ω и r_2 от значений, соответствующих равновесию, а

$$\dot S_\omega = \frac{\partial \dot U_{cd}}{\partial \omega} \quad \text{и} \quad \dot S_r = \frac{\partial \dot U_{cd}}{\partial r_2}$$

обозначают абсолютные чувствительности моста по ω и r_2 в точке равновесия. Напряжения на выходах обоих ФЧВ в общем случае зависит как от $\Delta\omega$, так и от Δr_2.

В установившемся режиме

$$\begin{cases} \omega = K_\omega U_{cd} \cos(\varphi_\omega - \psi) + \Omega \\ r_2 = K_r U_{cd} \cos(\varphi_r - \psi) + R_2 . \end{cases}$$

Здесь K_ω и K_r – коэффициенты усиления каналов управления частотой ω и подстройки сопротивления r_2.

Ω и R_2 – соответственно значения ω и r_2 при отсутствии сигнала на входе усилителя I,

ψ – аргумент вектора выходного напряжения измерительного моста.

Здесь и в дальнейшем аргумент вектора выходного напряжения управляемого генератора считается равным нулю.

φ_ω – аргумент вектора опорного напряжения ФЧВ 6.

φ_r – аргумент вектора опорного напряжения ФЧВ 2.

Учитывая зависимость выходного напряжения моста U_{cd} от $\Delta\omega$ и Δr_2, получим для ω и r_2 в установившемся режиме следующее выражение:

$$\begin{cases} \omega = K_\omega S_\omega \cos(\varphi_\omega - \Theta_\omega)\Delta\omega + K_\omega S_r \cos(\varphi_\omega - \Theta_r)\Delta r_2 + \Omega \\ r_2 = K_r S_\omega \cos(\varphi_r - \Theta_\omega)\Delta\omega + K_r S_r \cos(\varphi_r - \Theta_r)\Delta r_2 + R_2 , \end{cases}$$

где Θ_ω – аргумент составляющей выходного напряжения моста, обусловленной $\Delta\omega$,

Θ_r – то же для Δr_2.

Из этой системы уравнений можно определить погрешность частоты $\Delta\omega$, зная которую можно определить относительную погрешность преобразования.

$$\Delta\omega = \frac{(\omega-\Omega)K_r S_r \cos(\varphi_r-\theta_r)-(r_2-R_2)K_\omega S_r \cos(\varphi_\omega-\theta_r)}{K_\omega S_\omega \cos(\varphi_\omega-\theta_\omega)K_r S_r \cos(\varphi_r-\theta_r)-K_r S_\omega \cos(\varphi_r-\theta_\omega)K_\omega S_r \cos(\varphi_\omega-\theta_r)}.$$

Контуры автоматического управления ω и r_2 получаются в общем случае взаимосвязанными. Взаимосвязь между контурами нежелательна, так как она ухудшает динамическую устойчивость системы. Для обеспечения динамической устойчивости приходится уменьшать коэффициенты усиления контуров, что приведет к увеличению статической погрешности.

Взаимосвязь между контурами будет отсутствовать, если на входе ФЧВ 6, находящейся в контуре управления частотой, составляющая напряжения сигнала, обусловленная отклонением r_2 от значения, соответствующего равновесию, находится в квадратуре с опорным напряжением ФЧВ 6. Точно так же напряжение на входе ФЧВ 2 (в контуре управления r_2) обусловленное отклонением ω от значения, соответствующего равновесию, должно быть в квадратуре с опорным напряжением ФЧВ 2. Следовательно, должны быть выполнены условия

$$\varphi_\omega - \theta_r = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_r - \theta_\omega = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Точно выполнить эти условия в диапазоне частот практически не удается. Исследование выражения для выходного напряжения измерительного моста показывает, что в любой точке равновесия как θ_ω, так и θ_r остаются постоянными. Поэтому для полного устранения взаимосвязи между контурами в положении равновесия надо было бы иметь фазовращатели, которые дали бы постоянный, наперед заданный фазовый сдвиг в диапазоне частот. Проблемы создания таких фазовращателей в литературе подробно изучены [3].

Так как монотонному изменению величины какого-либо параметра в мосте соответствует и монотонное изменение фазы выходного напряжения, то экстремальные значения фазы соответствуют и экстремальным значениям параметров. Рассмотрев все комбинации экстремальных значений изменяющихся параметров моста, можно выяснить, в каких пределах изменяется фаза выходного напряжения моста и в каких пределах может измняться фаза опорных напряжений, чтобы обеспечивалась статическая устойчивость системы. Гораздо более сложным является исследование динамической устойчивости, особенно если учесть, что как статистические, так и динамические характеристики простейших управляемых элементов (термисторов косвенного подогрева, фоторезисторов и т.д.) являются нелинейными. Эти проблемы подробнее изучены в [2].

Литература

I. П.В. Новицкий, В.Г. Кнорринг. В.С. Гутников. Цифровые приборы с частотными датчиками. "Энергия", Ленинградское отделение, 1970.

2. В.Ю. Кнеллер. Автоматическое измерение составляющих комплексного сопротивления, "Энергия", Москва-Ленинград, 1967.

3. Б.Б. Штейн, Н.А. Черняк. Однополосная модуляция с помощью фазовых схем. "Связьиздат", Москва, 1959.

K. Mätik

Resistance, Inductance or Capacitance to Frequency Converters

Summary

In this paper the R, L or C to frequency converters are described. An AC bridge is balanced by means of changing the frequency and controlling the value of a certain parameter in the bridge network. The necessary directions of changing the frequency and controlling the parameter are determined by means of phase-sensitive detectors. It is possible to obtain linear dependence between the period of AC and the value of the converted parameter.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 334 1972

УДК 621.317.727.1

Р.Р. Ымерс

РАСЧЕТ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МУЛЬТИФИЛЯРНЫХ ОБМОТОК

Использование мультифилярных обмоток для получения тесной индуктивной связи в трансформаторных мостах и индуктивных делителях напряжения [1] приводит к частотной погрешности на высоких частотах, обусловленной процессами в обмотке.

Мультифилярная обмотка представляет собой скрученный жгут (длиной l) из нескольких (n) проводов. Каждый провод жгута можно характеризовать сопротивлением r и индуктивностью рассеяния L. Среднюю емкость между любыми двумя проводами обозначаем через C. Вышеуказанные величины являются распределенными параметрами и их удобно выражать через величину на единицу длины жгута (1 м) и обозначать r_1, L_1, C_1.

Жгут обычно наматывают на тороидальный сердечник из ферромагнитного материала. В индуктивных делителях напряжения (ИДН) все n проводов жгута включают последовательно образуя обычный автотрансформатор с выходом с провода m . Известно [2], что передаточная функция и выходной импеданс ИДН определяется по следующим формулам:

$$K_u = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\operatorname{sh}(2\varkappa-1)\,z/2}{\operatorname{sh} z/2}\right] \tag{1}$$

$$z_v = \frac{nl(r_1 + pL_1)}{z}\left[\operatorname{ch} z/2 - \operatorname{ch}(2\varkappa-1)\,z/2\right], \tag{2}$$

где l – длина жгута,

n – количество проводов в жгуте,

$\varkappa = m/n$ – геометрический коэффициент передачи.

$z = nl\sqrt{(r_1 + pL_1)pnC_1}$ – вспомогательный параметр,

r_1, L_1, C_1 – параметры провода жгута.

Отсюда модуль частотной характеристики и выходной импеданс на малых частотах:

$$|K_u| \approx \varkappa\left[1 - \frac{(1-\varkappa)(1-2\varkappa)}{12} L_1 C_1 l^2 n^3 \omega^2\right] \tag{3}$$

$$z_v \approx \varkappa(1-\varkappa)nl(r_1 + j\omega L_1). \tag{4}$$

Из уравнения (3) видно, что частотная погрешность обусловлена только параметрами жгута (конечно при предположениях однородности жгута и сердечника, использованных при выводе уравнений (I)).

I. Параметры реального жгута на низких частотах и их распределения

I-I. Активное сопротивление провода r можно легко рассчитать и измерить. Разброс величин сопротивлений отдельных проводов обусловлен колебанием диаметра и неодинаковыми длинами проводов. Типичная гистограмма распределения показана на фиг. I а. Погрешность, обусловленную неодинаковостью величин сопротивлений проводов ИДН на низких частотах, можно легко вычислить [3].

I-2. Индуктивность рассеяния всегда определена в отношении другого провода (или контура). Рассмотрим два произвольных провода в жгуте; индуктивность такой двухпроводной линии можно измерить или рассчитать по формуле:

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\ln\frac{D_{ij}}{R} + \frac{1}{4}\right), \tag{5}$$

где D_{ij} – расстояние между осями проводов,

R – радиус сечения провода.

С другой стороны L_{ij} связана с собственными индуктивностями проводов и их взаимной индуктивностью следующим соотношением:

$$L_{ij} = L_i + L_j - 2M_{ij}.$$

Отсюда индуктивность рассеяния каждого провода определяется:

$$L = L_i - M_{ij} = \frac{1}{2} L_{ij}.$$

Вычисляя среднюю индуктивность всех пар двухпроводных линий в жгуте из n проводов, как

$$L_0 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} L_{ij}, \qquad (6)$$

получаем среднюю индуктивность рассеяния одного провода в отношении других в жгуте:

$$L = \frac{1}{2} L_0.$$

Фиг. 1. Гистограмма статистического распределения параметров обмотки 10 х 0,8 мм ПЭВ-2 l = 3,44 м.

На фиг. 1 б приведена измеренная гистограмма распределения L_{ij}. При коротких жгутах и при намотке жгута механическими приспособлениями смешивания отдельных проводов нет (взаимное расположение проводов не меняется), и измеренное распределение L_{ij} хорошо совпадает с вычисленными при помощи уравнения (5) значениями, исходя из картины взаимного расположения проводов фиг. 2.

I-3. Емкости между любыми двумя проводами жгута можно измерить разными общеизвестными способами, а среднюю межпроводную емкость вычислить аналогично уравнению (6). На фиг. I в приведена измеренная гистограмма распределения C_{ij} откуда видно, что существуют три группы емкости, которым соответствуют в жгуте емкости между внешними соседними проводами, внутренними соседними проводами и несоседними проводами (см. фиг. 2). Вследствие смешения проводов в жгуте распределение C_{ij} выравнивается.

Результаты измерений r_{10}, C_{10}, L_{10} (средние значения, приведенные на I м жгута измеренные на низких частотах) жгута из n = I0 проводов при разных диаметрах провода d приведены в таблице I.

Таблица I

d мм	r_{10} Ом/м	C_{10} пФ/м	L_{10} мкГ/м
0,4I	0,I290	32,0	0,300
0,69	0,0455	35,6	0,3I9
I,00	0,02I6	28,I	0,348

2. Степень смешения проводов жгута

Разброс параметров L_{ij} и C_{ij} обуславливает и определенный разброс частотных характеристик ИДН при разных последовательностях включения проводов и тем самым уменьшает эффективность возможных коррекций частотной характеристики. Эффективной мерой уменьшения разброса параметров является смешение проводов. Кроме этого, смешение проводов уменьшает основную погрешность ИДН, поэтому необходимы количественные характеристики степени смешения.

Исходными данными для оценки степени смешения являются измеренные распределения L_{ij} или C_{ij}. При их сравнении с расчетными можно определить степень смешения. Более удобным для расчета и нечувствительным к другим влияниям, кроме расположения проводов, является распределение L_{ij}.

Рассмотрим процесс смешения проводов жгута как некоторый вероятностный процесс, состоящий из отдельных последовательных событий, которыми являются перемены месторасположения двух или более соседних проводов так, чтобы общее сечение жгута осталось прежним.

Пусть у нас дана матрица (множество) индуктивностей всех двухпроводных линий $\| L_{ij} \|$ (элементы которого можно рассчитать по уравнению (5), исходя из сечения жгута, фиг. 2). Нас интересует, как меняется статистическое распределение всего жгута от количества событий (степени смешения) в жгуте.

Процесс смешения можно приближенно рассматривать как цепь Маркова и моделировать на ЭЦВМ. Из взаимного расположения проводов (фиг. 2), следует вероятность перехода провода i на место провода j P_{ij} в виде матрицы $\| P_{ij} \|$ (для случая 10 проводов)

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{matrix} \right\|$$

После s событий вектор вероятности расположения проводов $p(s)$ связан с их начальным вектором вероятности $p(0)$ уравнением

$$p(s) = \left(\| P_{ij} \|' \right)^s p(0),$$

где штрих обозначает транспонированную матрицу.

Если задавать компоненты вектора вероятности как

$$p_k(0) = \begin{cases} 1/n & \text{при} \quad k = i \\ 0 & \text{при} \quad k \neq i \end{cases}$$

(событие считается равновероятным для всех проводов), то получим $p(s)$ как вероятности перехода провода i в другие места после s событий.

Вероятность возникновения пары k и l p_{kl} (после s событий) из пары i и j в начале жгута приближенно равна

$$p_{kl} = p'_k \frac{p_l}{1-p''_l} + p''_k \frac{p'_l}{1-p'_l},$$

где p' – вероятность перехода провода i, а
p'' – вероятность перехода провода j в положение k или l.

Ожидаемая средняя индуктивность между проводами i и j (после s событий) определяется соотношением

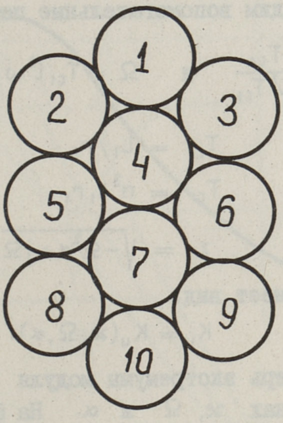
$$L_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} p_{kl} L_{kl}.$$

Величину L_{ij} нужно рассчитать для всех пар при каждом событии. Длина жгута между событиями считается постоянной и полученные L_{ij} соответственно суммируют. Из суммы L_{ij} после каждого события вычисляют среднюю арифметическую L_k, дисперсию σ^2 и отношение σ/L_k. Зависимость σ/L_k от количества событий s указана на фиг.3. На основе этого можно решить и обратную задачу – найти вероятное количество событий в жгуте, если известны характеристики распределения L_{ij}. Измеренные данные некоторых жгутов с нахождением количества событий s в них приведены в таблице 2.

Таблица 2

№	Жгут	l м	L_k мкГ	σ^2 мкГ^2	σ/L_k	s
I.	I0 X 0,5I	2,6	I,964	0,I70	0,2I00	I0
2	I0 x 0,69	3,44	2,I47	0,0I0	0,0465	55
3	I0 x 0,4I	5,I4	3,269	0,025	0,0484	52

Жгут № I намотан с помощью механического направляющего приспособления для проводов. Жгут получился однородным, что подтвердилось измерением. При изготовлении жгутов № 2 и 3 провода их перед закруткой смешали, количество событий на метр длины получилось в 3–4 раза больше.



Фиг. 2. Сечение жгута.

3. Определение частотной зависимости параметров обмотки

При повышении частоты параметры жгута L_1 и r_1 начинают зависеть от нее, тем самым в уравнениях (3 и (4) появляются добавочные зависимости от частоты $L_1(\omega)$ и $r_1(\omega)$. Эти зависимости исследовались лишь экспериментально.

Для этого изготовленные жгуты были намотаны на тороидальный сердечник из немагнитного материала, а провода соединены последовательно (по схеме ИДН). При $\varkappa < 0,5$ частотная зависимость модуля коэффициента передачи напряжения (фиг. 4), согласно (I), имеет сперва минимум, затем максимум и т.д. Для определения параметров ИДН удобно воспользоваться измеренными значениями экстремумов частотной характеристики K_u откуда окажется возможным нахождение параметров жгута.

Для уменьшения количества независимых переменных в уравнении (I) вводим вспомогательные параметры

$$\alpha = \frac{T_{L1}}{l^2 T_{c1}} \quad \text{и} \quad \Omega = T_{c1} l^2 \omega ,$$

где

$$T_{L1} = L_1 / r_1$$

$$T_{c1} = n^3 C_1 r_1 ,$$

тогда

$$z = \sqrt{-\Omega^2 \alpha + j\Omega}$$

и уравнение (I) имеет вид:

$$K_u = K_u(\varkappa, \Omega, \alpha).$$

Вычислим теперь экстремумы модуля K_u (уравнение (I)) при разных величинах $\varkappa$, Ω и α. На фиг. 5 представлены параметры Ω и α при $\varkappa = 0{,}1$, $0{,}2$, $0{,}3$ в зависимости от величины первого минимума коэффициента передачи $|K_u|$ обозначенной M_1.

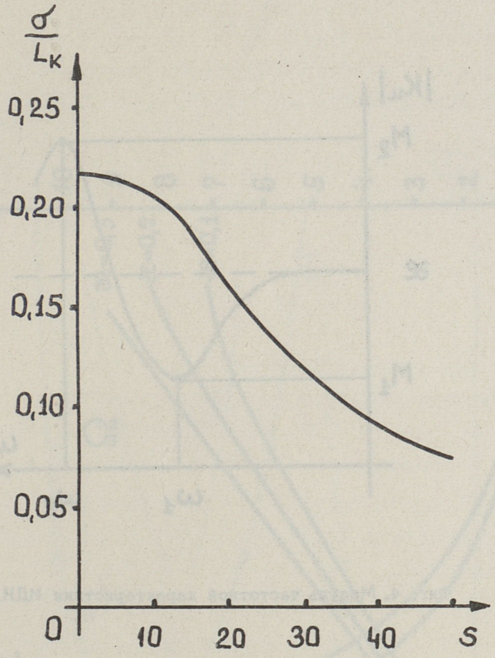
Теперь из экспериментально полученных данных M_1 и ω_1 можно определить α и Ω и вычислить

$$T_{c1} = \frac{\Omega}{\omega_1 l^2} \qquad T_{L1} = \alpha \cdot T_{c1} l^2.$$

Полученные таким образом значения параметров T_{c1} и T_{L1} соответствуют частоте ω_1.

Варьируя длиной жгута l и измеряя $|K_u|$ при разных величинах коэффициента деления $\varkappa$, получим значения величин T_{c1} и T_{L1} в зависимости от частоты. При измерениях общая длина жгута дошла до 100 м. Для усреднения результатов измерения проводились при разных последовательностях включения проводов.

Экспериментальные данные для жгута 10 х 0,41 мм из провода ПЭВ – 2 приведены на фиг. 6.



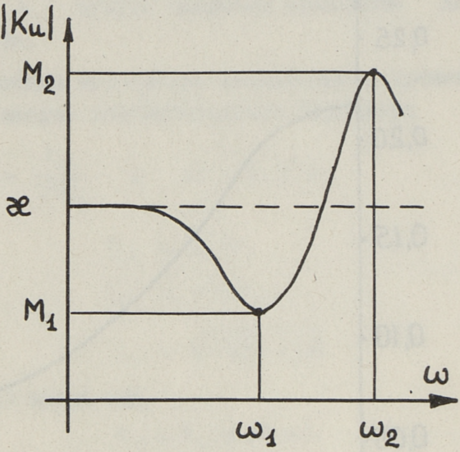
Фиг. 3. Коэффициент вариации индуктивностей двух проводов жгута от количества событии в жгуте.

Диэлектрическая проницаемость ε изоляции провода ПЭВ (винифлекс) меняется от 3,7 при частоте 50 Гц до 3,0 при частоте I мГц [4], но считаем что на более низких (рабочих) частотах ε и следовательно C_1 не зависит от частоты, тогда можно рассчитать частотную зависимость активного сопротивления и индуктивности рассеяния провода жгута по формулам:

$$r_1(\omega) = \frac{1}{n^3 \cdot C_1} T_{C1}(\omega)$$

$$L_1(\omega) = T_{L1}(\omega) \cdot r_1(\omega).$$

Чтобы узнать, как влияет на частотную зависимость параметров диаметр провода, серии измерения были повторены на жгутах с диаметрами проводов 0,4I, 0,69 и I,0 мм.

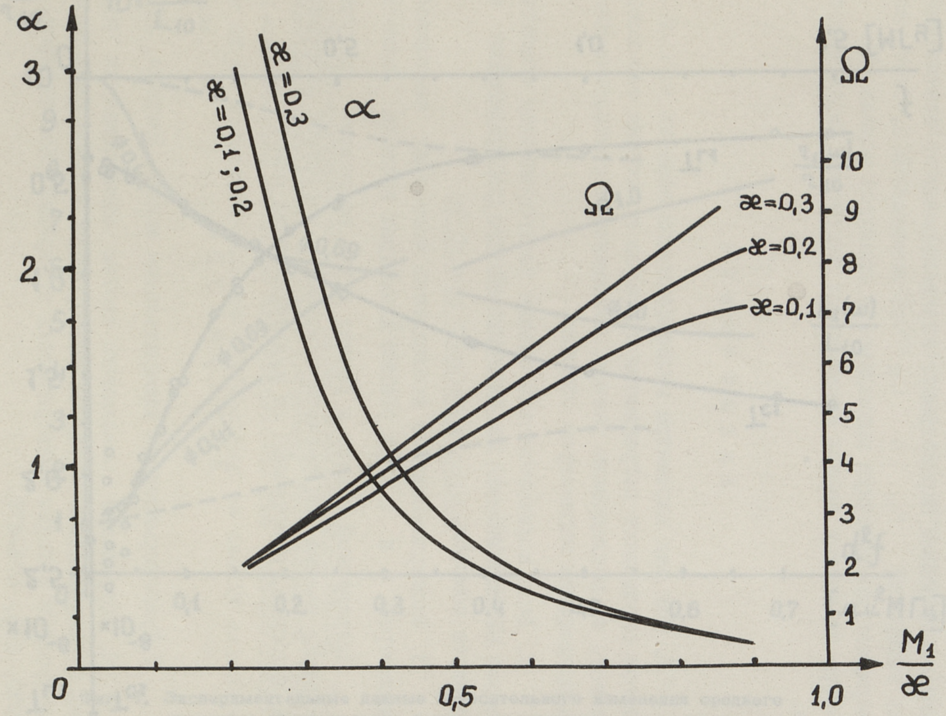


Фиг. 4. Модуль частотной характеристики ИДН.

Представим данные об изменении $L_1(\omega)$ и $r_1(\omega)$ отношениями к величинам L_{10} и r_{10} измеренным в п.2. Полученные результаты целесообразно изобразить в зависимости от величины d^2f (где d – диаметр провода и f – частота). Результаты приведены на фиг. 7, откуда можно сделать следующие выводы:

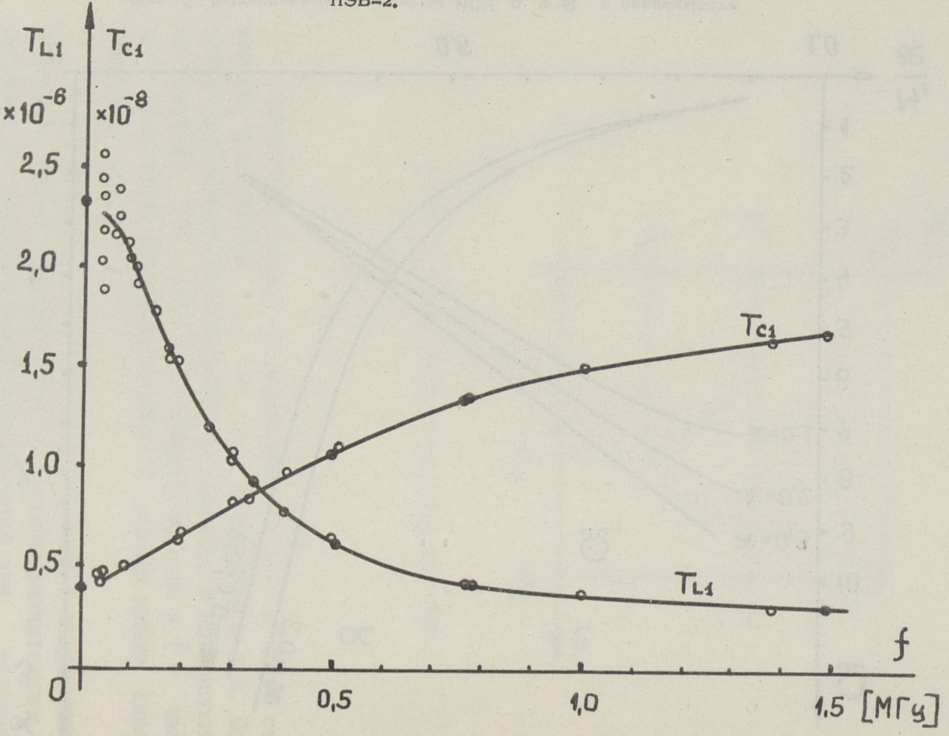
– Зависимость активного сопротивления и индуктивности рассеяния одного провода жгута от частоты значительно отличаются от соответствующих зависимостей для отдельного прямого провода круглого сечения [5], приведенных на фиг.7 пунктиром.

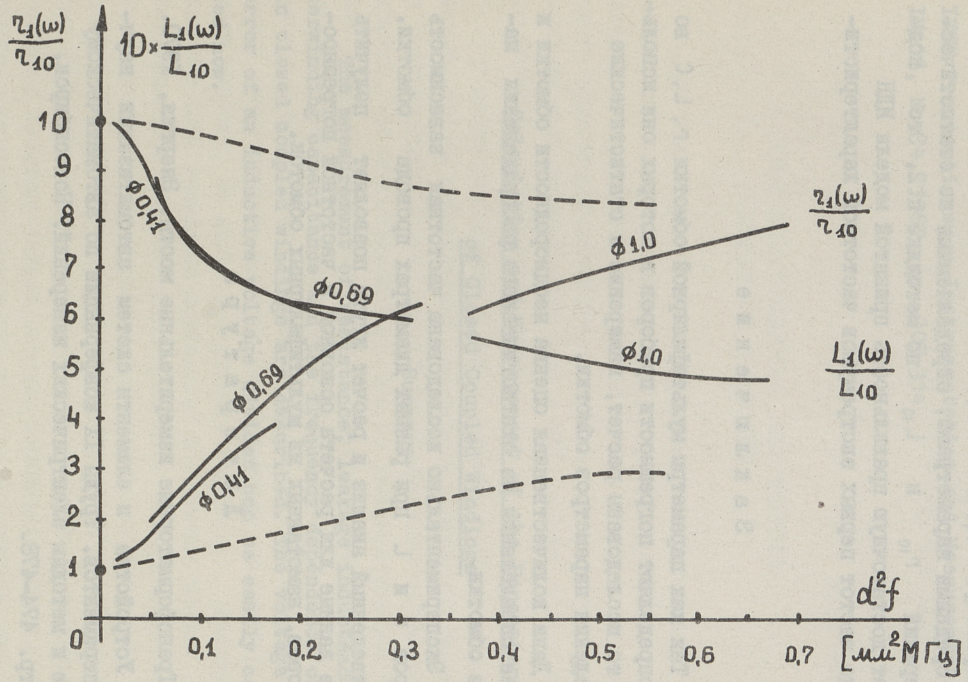
– Изменения относительных параметров $r_1(\omega)/r_{10}$ и $L_1(\omega)/L_{10}$ при разных диаметрах проводов d относительно координаты d^2f совпадают.



Фиг. 5. Вычисленные параметры ИДН α и Ω в зависимости от коэффициента передачи напряжения M_1 на частоте ω_1

Фиг. 6. Экспериментальные данные для жгута проводов 10 х 0,41 мм ПЭВ-2.





Фиг. 7. Экспериментальные данные относительного изменения среднего активного сопротивления и индуктивности рассеяния одного провода в жгуте проводов при разных частотах и диаметрах провода.

– Так как частотный диапазон работы ИДН обычно не превышает 100 кГц начальный участок частотной зависимости $r_1(\omega)$ можно аппроксимировать прямой, а $L_1(\omega)$ параболой.

– Параметры $r_1(\omega)$ и $L_1(\omega)$ на низких частотах совпадают со средними параметрами, определяемыми из статистических измерений r_{10} и L_{10} по методике п.2. Это подтверждает достаточную правильность принятой модели ИДН вплоть до частот первых экстремумов частотной характеристики.

Заключение

1. Так как параметры мультифилярной обмотки r, L, C во многом определяют погрешности приборов в которых они используются, то исследованы расчет, измерение и статистические распределения параметров обмотки.

2. Дана количественная оценка неоднородности обмотки и способ ее определения из статистического распределения параметров обмотки.

3. Экспериментально исследована частотная зависимость параметров r и L при разных диаметрах провода обмотки.

Приведенный анализ и расчет жгута позволяет получить исходные данные для расчета основной и частотной погрешности приборов, намотанных из мультифилярных обмоток.

Литература

1. Трансформаторные измерительные мосты. Энергия, 1970.

2. Устройства и элементы систем автоматизации научных экспериментов. Труды IX конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений. Новосибирск, 1970, стр. 474–478.

3. В.М. Байков. Анализ погрешностей трансформаторных делителей напряжения. Труды метрологических институтов СССР, вып. 98 (158), 1968. стр. 125–143.

4. Материалы в приборостроении и автоматике. Справочник, Машиностроение, 1969.

5. Л.Р. Нейман, П.Л. Калантаров. Теоретические основы электротехники Ш. Госэнергоиздат, 1959.

6. A.J. Binnie, T.R. Foord. Leakage industance and interwinding capacitance in toroidal ratio transformers. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. Vol. IM-16, No. 4, 1967, pp. 307-314.

R. Jõers

Calculation and Measurement of the Parameters of Closed Coupled Windings

Summary

The measurement of resistance, leakage inductance, interwinding capacitance and the frequency dependence of them in closed coupled windings are described. The voltage ratio error of an inductive voltage divider can be easily calculated now.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 334 1972

УДК 537.32:621.318.5

Я.В. Петерсон

ТЕРМОЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА МАГНИТОУПРАВЛЯЕМЫХ КОНТАКТОВ

При коммутации магнитоуправляемыми контактами (МУК) слабых сигналов постоянного тока, в первую очередь в различной измерительной аппаратуре, очень большое значение имеет термоэлектродвижущая сила (т.э.д.с.) контактов. В существующих конструкциях реле с МУК уровень т.э.д.с. часто достигает сотни микровольт.

С целью уменьшения т.э.д.с. иногда предлагается изготовить МУК со специальными покрытиями контактных переходов и соответствующей технологией дифундирования материалов покрытий. Это обусловлено тем, что, по распространенному мнению, т.э.д.с. возникает главным образом в контактных переходах. В действительности же основная часть т.э.д.с. возникает в выходах МУК на местах спайки с остальной схемой, ввиду существования значительной разности температур в этих спайках. На месте контактного перехода температура язычков (при замкнутых контактах) достаточно хорошо уравновешивается. В то же время градиенты температур вдоль относительно длинных и тонких контактных язычков могут быть значительными из-за разности температур между спайками выводов МУК. Причинами появления этой разности температур в основном являются нагрев катушки управления МУК, а также разные посторонние источники тепла в аппаратуре, где вмонтировано реле с МУК. Неодинаковый нагрев выводов МУК вызван в первую очередь несимметричностью расположения МУК относительно температурного поля катушки управления, а также неравномерностью намотки самой катушки, влиянием отражательных экранов и т.д.

Для исследования причин появления и методов уменьшения т.э.д.с. была построена специальная измерительная установка, где можно было при помощи двух нагревательных элементов установить желаемые значения температуры t_1 и t_2 выводам МУК, создав между выводами разность температур Δt. Контактные выводы МУК были закреплены к массивным медным полюсам, разделенным на две части тонкой шайбой из окиси бериллия, обеспечивающей электрическую изоляцию и тепловой контакт между термопарами для определения температурного режима (t_1 , t_2 и Δt) медных полюсов и выводами МУК. Температуры полюсов t_1 , t_2 и их разность Δt можно было регулировать при помощи реостатов в цепи нагревательных элементов. Напряжения от термопар и т.э.д.с. МУК измерялись потенциометром Р-306 (температуры входных зажимов последнего были тоже уравновешены). При определении Δt была допущена погрешность не более I %, основной частью которой (0,8 %) является перепад температуры в медных полюсах между точками измерения Δt и присоединения выводов МУК. Срабатывание МУК осуществлялось постоянным магнитом (от фиксированного расстояния) для полного исключения влияния температурного поля катушки реле. Весь измерительный комплекс был охвачен внешними экранами для исключения посторонних термических воздействий.

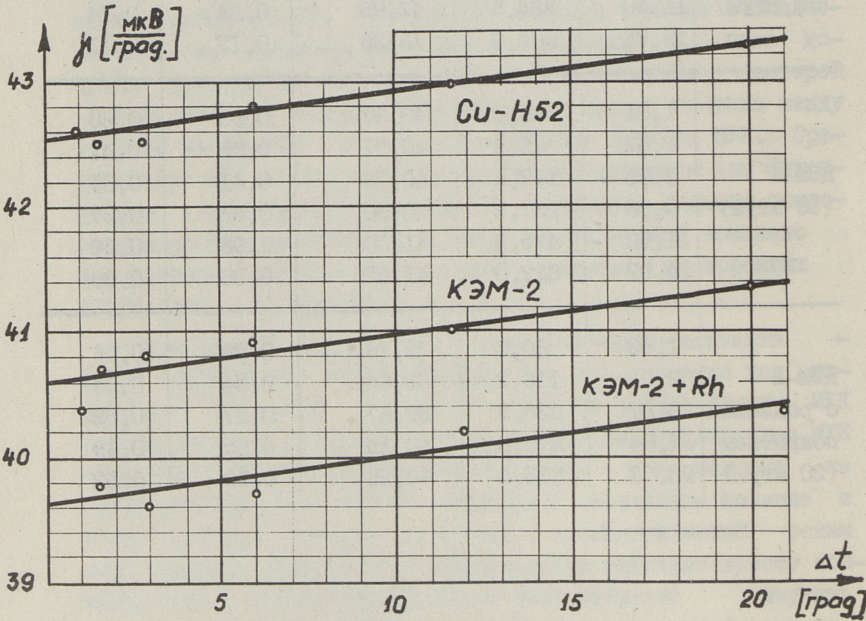
Для определения т.э.д.с. пары "материал контакта – медь" были прежде всего измерены т.э.д.с. в цепи так называемых "идеальных контактов" . В этом случае вместо МУК в измерительную установку вставили образцы, аналогичные МУК типа КЭМ-2, но без контактного перехода – т.е. полоски из сплошного материала Н52 (6 образцов в стеклянном баллоне и 6 без баллона). Размеры, материал и технологический режим этих образцов полностью соответствовали действительному контакту КЭМ-2. Таким образом можно было отдельно изучить т.э.д.с. выводных спаек в условиях, близких к действительным режимам работы МУК. Вторая группа измерений проводилась с серийными МУК, используя случайно выбранную партию контактов КЭМ-2 в количестве 38 штук. Для сравнения были еще испытаны 20 образцов таких же контактов типа КЭМ-2 с родиевым покрытием контактных поверхностей.

Для всех образцов на нескольких уровнях Δt определили значение т.э.д.с.. Некоторые отличия в значениях Δt у

Таблица I

Характер образцов	Ср. разница температуры $\Delta t = \lvert t_2 - t_1 \rvert$	Ср. знач. т.э.д.с. МУК E_T	Ср. арифм. знач. удельной т.э.д.с. $\bar{\gamma}$	Ср. квадр. знач. удельной т.э.д.с. σ_γ	Ср. арифм. отклонение удельной т.э.д.с. $\Delta\gamma$
	град	мкВ	мкВ/град	мкВ/град	мкВ/град
Медь – Н 52 (I2 штук)	0,85	36,2	42,6I	0,23	0,I8
	I,46	62,I	42,50	0,24	0,I7
	2,75	II6,9	42,50	0,55	0,33
	5,93	254,0	42,83	0,I4	0,I0
	II,50	494,5	42,95	0,24	0,I4
	I9,96	865,0	43,26	0,I3	0,II
КЭМ-2 (38 штук)	I,0I	40,4	40,37	0,96	0,68
	I,62	65,9	40,7I	0,55	0,4I
	2,88	II7,5	40,79	0,4I	0,3I
	5,80	237,2	40,90	0,45	0,37
	II,60	475,6	4I,00	0,98	0,46
	I9,97	827,0	4I,35	0,38	0,38
КЭМ-2 с родиевым покрытием (20 штук)	I,53	60,8	39,76	0,79	0,56
	2,93	II6,2	39,64	0,54	0,38
	5,97	236,8	39,67	0,67	0,52
	II,84	475,8	40,I9	0,65	0,49
	20,73	835,0	40,28	0,69	0,52

разных образцов были вызваны небольшими изменениями теплового режима при смене контакта. На основе Δt и т.э.д.с. E_T рассчитана удельная т.э.д.с. γ (мкВ/град) при разных значениях Δt ($\Delta t = t_2 - t_1$; $t_1 = 23°C$). Для удельной т.э.д.с. γ были определены среднеарифметическое значение $\bar{\gamma}$, среднеквадратичное значение σ_γ и среднеарифметическое отклонение Δ_γ, которые приведены в таблице I. Для характеризации результатов измерений на фиг.I представлены графики средних значений удельных т.э.д.с. для испытанных типов контактов. Наличие баллона у сплошных образцов никакого значения не имело.

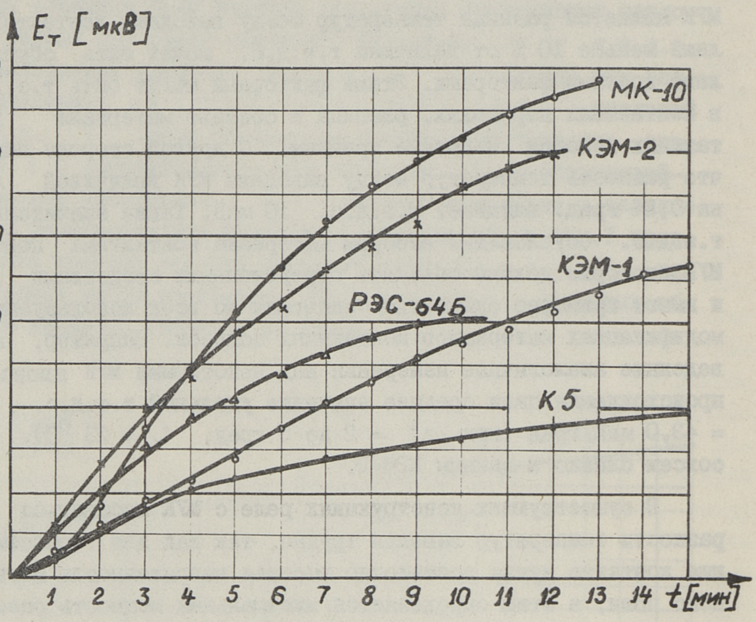


Фиг. 1. Удельные т.э.д.с. ($\Delta t = t_2 - t_1$; $t_1 = 23°C$)

Эти графики наглядно показывают, что разница удельной т.э.д.с. для КЭМ-2 и так называемых "идеальных контактов" составляет приблизительно 4,5 % и контактов с родиевым покрытием около 7 %.

Отсюда совершенно ясно, что основной причиной т.э.д.с. МУК является разница температур между выводами контактов и лишь меньше 10 % от величины т.э.д.с. может быть обусловлено другими факторами. Этими факторами могут быть т.э.д.с. в контактных переходах, разница в составе материала контактных полосок и прочие причины. С другой стороны видно, что разность температур между выводами МУК величиной лишь на 0,24 град. вызывает т.э.д.с. 10 мкВ. Такие значительные т.э.д.с. обусловлены выбором материала контактных полосок МУК, которые должны обладать определенными свойствами [1] и имеют примерно одинаковые значения во всех используемых модификациях материалов контактных полосок. Например, проведенные аналогичные измерения над некоторыми МУК японского происхождения дали среднее значение удельной т.э.д.с. $\bar{\gamma}$ = = 43,0 мкВ/град (при Δt = 2 до 5 град, t_1 = 23 °С), что совсем близко к данным КЭМ-2.

В существующих конструкциях реле с МУК избавиться от разности температур выводов трудно, так как для срабатывания контакта нужна достаточно высокая напряженность магнитного поля, а этим определяется минимальная мощность рассеяния обмотки. В результате нагрев обмотки реле доходит до десятков градусов, вызывая и неодинаковый нагрев выводов МУК. Для характеризации действительных процессов возникновения т.э.д.с. в существующих конструкциях реле с МУК проводились измерения динамики роста т.э.д.с. в нескольких типах реле. На фиг. 2 приведены зависимости т.э.д.с. от времени t, считая с момента включения катушки, для разных типов реле, построенных с использованием МУК. При этом контакты МК-10 и КЭМ-2 были вставлены в цилиндрические катушки управления ($U_п$ = 12 В, $R_{об}$ = 1300 Ом, длина 35 мм, внешний диаметр 16 мм). Для управления контактов КЭМ-1 были катушки такой же формы ($U_п$ = 6 В, $R_{об}$ = 22,8 Ом, длина 50 мм, внешний диаметр 22 мм). Коэффициент запаса был выбран равным двум и результаты измерений соответствуют средним значениям партии из 10 реле. Кроме названных реле на фиг. 2 представлена динамика роста т.э.д.с. при номинальном напряжении для стандартных реле РЭС-64Б и реле фирмы Хюлет-Паккард К5 (основывается на МУК близких к КЭМ-2). У реле фирмы ITT "Стандарт" (Италия) т.э.д.с. доходит до 80 мкВ (с постоянной времени около 3 мин).



Фиг. 2. Динамика роста т.э.д.с. для реле на основе МУК.

В результате проведенных испытаний можно дать некоторые рекомендации для конструирования реле на основе МУК с низким уровнем т.э.д.с.:

I) разработать и использовать магнитные материалы, которые в паре с медью дают меньшее значение т.э.д.с., причем коэффициент термического расширения, свариваемость со стеклом и др. параметры остались бы близкими к применяемым материалам.

2) добиться минимального градиента температуры между выводами реле при помощи:

а) термического экранирования,

б) однородности обмотки управления,

в) расположения МУК относительно катушки,

г) взаимного расположения выводов реле,

3) применять принцип работы реле, при котором магнитопровод МУК не является токопроводящей частью, а служит лишь для управления контактной группой из материала, имеющего минимальную т.э.д.с. в паре с медью.

В настоящее время разработка автоматических (цифровых) измерительных приборов для измерения постоянных напряжений в области микровольт задерживается из-за отсутствия подходящего реле. Т.э.д.с. этих реле в эксплуатационных условиях должна быть меньше долей микровольта.

Выводы

I. Основным источником т.э.д.с. МУК является не контактный переход, а выводы контактов, которые присоединены к деталям внешней схемы. Роль остальных факторов не превышает 5-10 %.

2. Разность температур между выводами МУК (или реле) вызвана неизбежным нагревом катушкой управления МУК. В меньшей степени влияют разные посторонние источники тепла в аппаратуре.

Литература

I. Я.М. Диковский, И.И. Капралов. Магнитоуправляемые контакты. Изд. "Энергия", М., 1970.

J. Peterson

Thermoelectromotive Force of Dry Reed Sealed Contacts

Summary

Applications of dry reed sealed contacts for switching electrical circuits of very low voltage are detained because of the thermoelectromotive force in contacts.

It is shown that the source of the t.e.m.f. is not the contact transition but the soldering of nickel alloy spring contact outlets with copper. As it turned out the primary reason of t.e.m.f. is the temperature field gradient between the outlets of wire spring contacts.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 334 1972

УДК 621.374.335.2

О. Пикков

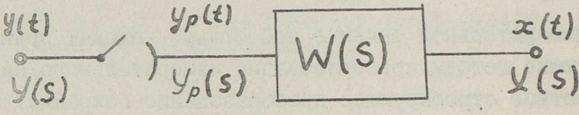
АНАЛИЗ НЕОБХОДИМОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ СТРОБИРУЮЩЕГО ИМПУЛЬСА

В измерительной технике все больше находят применение стробирующие методы преобразования измерительного сигнала. Некогерентное стробирующее преобразование сохраняет метрологические параметры измерительного сигнала, но сужает его спектр и позволяет провести дальнейшую обработку в низкочастотном диапазоне с более простой аппаратурой и большой точностью.

Наиболее важным узлом стробирующего преобразователя является стробирующий ключ, от четкой работы которого зависят основные качественные показатели преобразования.

Анализу работы стробирующего ключа посвящено несколько специальных исследований [1, 2, 3]. К сожалению до настоящего времени нет еще удовлетворительной ясности в вопросе о выборе длительности стробирующего импульса. Широко распространено мнение, что повышение верхней границы частотного диапазона стробирующего преобразования требует соответственно уменьшения длительности стробирующего импульса. Без должного основания пытаются связывать выбор необходимой длительности стробирующего импульса с принципом известного соотношения скорости протекания процесса и ширины его спектра. Этому ошибочному толкованию способствует также тривиальное принятие описания идеализированного действия импульсного ключа в дискретных системах [4], как основу работы реального устройства. В результате существует стремление сократить длительность стробирующего импульса до технически реализуемого предела.

Более правильным является рассмотрение стробирующего преобразователя как дискретной системы с конечным временем замыкания ключа, или дискретной системой второго типа, так как в нем на выходе ключа существует дискретный сигнал с импульсной модуляцией второго типа. Следовательно, стробирующий преобразователь является дискретным фильтром с одинаковыми интервалами дискретности и с конечным временем замыкания ключа. Под дискретным фильтром подразумевается обычный непрерывный фильтр, на который воздействует сигнал с импульсной модуляцией второго типа. На схеме (фиг.I) такой фильтр изображается в виде последовательного соединения ключа и непрерывного фильтра.



Фиг.1. Функциональная схема стробирующего преобразователя.

Для определения реакции на выходе фильтра в общем случае необходимо найти p-преобразование [4] входного сигнала $Y_p(s)$ и затем вычислить преобразование Лапласа для выходного сигнала по формуле:

$$X(s) = Y_p(s)\, W(s). \tag{I}$$

Далее при помощи таблиц обратных p-преобразований или z-преобразований с запаздыванием определяется выходной сигнал как функция времени $x(t)$ соответствующий формуле (I), [4].

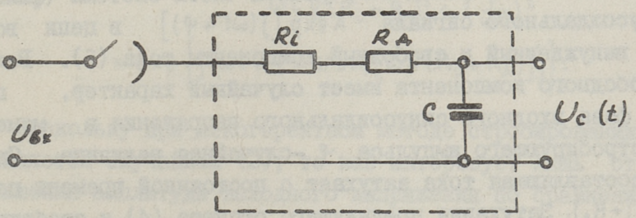
Исследованию некогерентного способа стробирования гармонического сигнала вышеуказанным методом препятствует случайность момента приложения стробирующего импульса по отношению к входному сигналу. Сигнал на выходе ключа (при гармоническом входном сигнале)

$$Y_p(t) = \begin{cases} A\exp\left[j(\omega t + \varphi)\right] & \text{при } iT \leqslant t < (i+h)T \\ 0 & \text{при } (i+h)T < t < (i+1)T, \end{cases} \tag{2}$$

где φ – фаза гармонического входного сигнала является случайной величиной с равномерным законов распределения в интервале $[0 \div 2\pi]$.

Кроме того, в качестве непрерывной части системы(фильтром) некогерентного стробирующего преобразователя является простое инерционное звено первого порядка (фиг. 2). В этой схеме:

R_i – внутреннее сопротивление источника сигнала,
$R_д$ – дифференциальное сопротивление стробирующего моста выходному сигналу.



Фиг.2. Принципиальная схема стробирующего преобразователя.

Эти обстоятельства позволяют применить для анализа работы некогерентного стробирующего преобразователя более простой метод.

При анализе работы преобразователя необходимо учитывать, что в момент замыкания ключа $t = iT$ на выходе фильтра имеэтся напряжение от предыдущего отсчета.

$$U_c(-0) = U_c[(i-1+h)T]. \tag{3}$$

Поэтому в течение существования очередного стробирующего импульса (hT) протекают одновременно два процесса: затухание (разряд) предыдущего отсчета и установление стационарного процесса от текущего входного сигнала. Если параметры цепи линейные, то оба эти процесса протекают самостоятельно. Поскольку непрерывная часть стробирующего преобразователя представляет собой простую RC-цепь (на фиг. 2 обведена пунктиром), то первый процесс затухает экспоненциально.

$$U_c(t) = U_c\left[(i-1+h)T\right]\exp\left[-\frac{t}{C(R_i+R_д)}\right]. \qquad (4)$$

К концу i-ого стробирующего импульса (к моменту размыкания ключа) при $t=(i+h)T$ напряжение этого компонента

$$U_c(t)\Big|_{t=(i+h)T} = U_c\left[(i+h)T\right] = U_c\left[(i-1+h)T\right]\exp\left[-\frac{ht}{C(R_i+R_д)}\right]. \qquad (5)$$

Установление стационарного процесса от текущего входного сигнала протекает следующим образом. При включении в момент $t=iT$ на выход непрерывной части системы (фильтра) синусоидального сигнала $A\exp\left[j(\omega t+\varphi)\right]$ в цепи возникают вынужденный и свободный компоненты тока (5). Величина свободного компонента имеет случайный характер, поскольку фаза входного синусоидального напряжения в момент подачи стробирующего импульса φ –случайная величина. Свободная составляющая тока затухает с постоянной времени цепи $\tau = C(R_i+R_д)$. Затухания предыдущего отсчета (4) и свободного компонента входного сигнала имеют совершенно одинаковый характер. Поэтому мы вправе рассматривать эти процессы совместно. В совокупности они представляют результирующий свободный компонент сигнала во время существования стробирующего импульса

$$U'_c(t)_{рез} = \left[U_m\sin\varphi - U_c(iT)\right]\exp\left[-\frac{t}{C(R_i+R_д)}\right]. \qquad (6)$$

Для обеспечения необходимой точности соответствия очередного остаточного значения напряжения $U_c\left[(i+h)T\right]$ запоминающего конденсатора C текущему значению приложенного сигнального напряжения $U_{вх}(t)$ в момент выключения стробирующего импульса $t=(i+h)T$, свободный компонент сигнала $U'_c(t)_{рез}$ (6) к этому времени должен уменьшаться до некоторой заданной малой относительной величины

$$\varepsilon = \exp\left[-\frac{hT}{C(R_i+R_д)}\right]. \qquad (7)$$

Отсюда находим минимальную необходимую длительность стробирующего импульса

$$hT = C(R_i+R_д)\ln\frac{1}{\varepsilon}. \qquad (8)$$

Задавшись некоторой относительной остаточной величиной ε можно получить минимальную необходимую длительность стробирующего импульса, например:

$$\varepsilon = 0{,}01; \quad hT = 4{,}6\, C(R_i + R_Д)$$

$$\varepsilon = 0{,}001; \quad hT = 6{,}9\, C(R_i + R_Д)$$

и т.д.

Если длительность стробирующего импульса выбрана согласно (8), то к концу стробирующего импульса $t = hT$, $U'_c(t)_{рез} \approx 0$ и на выходе фильтра имеется практически лишь напряжение установившегося процесса

$$U''_c(t) = U''_c(hT) = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{(R_i + R_Д)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{j\left(\omega t + \varphi - \operatorname{arctg}\left[\omega C(R_i + R_Д)\right]\right)\right\}. \tag{9}$$

Поскольку при некогерентном методе стробирования фаза φ является случайной (2), то нас интересует лишь степень уменьшения амплитуды выходного напряжения по сравнению с амплитудой напряжения U_m на входе преобразователя. Коэффициент передачи сигнала преобразователя:

$$K(\omega) = \frac{U_c(hT)_m}{U_m} = \frac{1}{\omega C\sqrt{(R_i + R_Д)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} =$$
$$= \cos\left\{\operatorname{arctg}\left[\omega C(R_i + R_Д)\right]\right\} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\omega C(R_i + R_Д)\right]^2}}. \tag{10}$$

Некоторые значения коэффициента передачи стробирующего преобразователя $K(\omega)$, вычисленные по формуле (10) приводятся в таблице I.

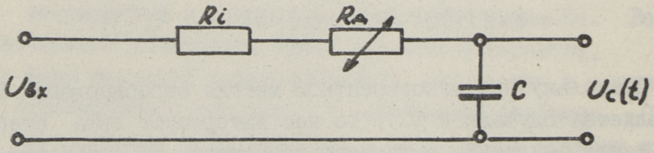
Таблица I

$\omega C(R_i + R_Д)$	Дополнительный фазовый сдвиг $\operatorname{arctg}\left[\omega C(R_i + R_Д)\right]$	$K(\omega)$
0,3280	18° 10'	0,95
0,2035	11° 35'	0,98
0,1405	8°	0,99
0,0992	5° 40'	0,995

Приведенные в таблице I значения $K(\omega)$ действительны при соблюдении условия (8) по длительности стробирующего импульса и при мгновенном выключении ключа в конце стробирующего импульса при $t = hT$.

Представление о мгновенном выключении входного сигнала ключом является в известной степени идеализацией. В действительности выключение входного сигнала в конце стробирующего импульса происходит с конечной скоростью и является непрерывным параметрическим процессом.

Выключение входного сигнала достигается непрерывным изменением (увеличением) сопротивления стробирующего элемента $R_Д$ (фиг. 3).



Фиг.3. Схема непрерывного выключения сигнала.

Заметим, что дифференциальное сопротивление диодного стробирующего моста входному сигналу зависит от I_c. При небольших значениях управляющего тока I_c эта зависимость может быть выражена довольно просто [6] (для идеального диода):

$$R_Д \approx \frac{\varphi_T}{I_c}, \tag{II}$$

где φ_T - температурный потенциал, $\varphi_T = \frac{T}{11600}$,

T - абсолютная температура.

Из-за конечной скорости выключения входного сигнала происходит растягивание заднего фронта стробирующего импульса, и имеет место также некоторое изменение заряда запоминающего конденсатора.

$$\Delta q = \int\limits_{t=(i+h)T}^{t=(i+1)T} \frac{\Delta U_{вх}(t)}{R_Д(t)} dt. \tag{I2}$$

Вследствие изменения заряда происходит и соответствующее дополнительное изменение напряжения U_c запоминающего конденсатора

$$U_c = \frac{\Delta q}{C} = \frac{1}{C}\int\limits_{t=(i+h)T}^{t=(i+1)T} \frac{\Delta U_{вх}(t)}{R_д(t)}\,dt. \qquad (13)$$

Согласно (12) и (13), дополнительное изменение напряжения запоминающего конденсатора зависит от скорости и направления изменения входного напряжения, потому что

$$\Delta U_{вх}(t) = U_{вх}(t) - U_c''(t)\Big|_{t=(i+h)T}, \qquad (14)$$

а также от закономерности изменения $R_д(I_c)$ в процессе выключения входного сигнала.

$$R_д(t) = \frac{\varphi_т}{I_c(t)}. \qquad (15)$$

Задавшись функциями (14) и (15) можно определить дополнительное изменение напряжения запоминающего конденсатора (13).

В некоторых случаях может оказаться полезным также представление о непрерывном изменении передаточного коэффициента $K(\omega)$ в течение всего процесса непрерывного выключения входного сигнала в конце стробирующего импульса. Задаваясь в (10) законом изменения $R_д(t)$ (15), с уменьшением управляющего тока $I_c(t)$ получим уменьшение со временем коэффициента передачи $K(\omega)$ и

$$K(\omega) = K(\omega, t).$$

Когда, вследствие уменьшения управляющего тока $R_д$ увеличивается уже настолько, что $\omega C[R_i + R_д(I_c)] >> 1$, тогда единицей в знаменателе (10) можно пренебречь и дальше зависимость упрощается

$$K(\omega) \approx \frac{1}{\omega C[R_i + R_д(I_c)]}. \qquad (16)$$

При дальнейшем уменьшении управляющего тока $R_д(I_c) >> R_i$ и величиной R_i тоже можно пренебречь. Тогда согласно (11)

$$K(\omega, t) \approx \frac{I_c(t)}{\omega C \varphi_т}. \qquad (17)$$

В ы в о д ы

I. Во избежание дополнительной погрешности от свободной составляющей входного сигнала и остаточного напряжения на запоминающем конденсаторе, стробирующий импульс некогерентного стробирующего преобразователя должен иметь некоторую определенную минимальную длительность.

2. Необходимо обеспечить возможно более короткую продолжительность выключения входного сигнала в конце стробирующего импульса.

3. Нет никакой необходимости специально разряжать запоминающий конденсатор перед очередным стробирующим импульсом. Новое значение выходного напряжения устанавливается с достаточной точностью в течение стробирующего импульса.

Л и т е р а т у р а

I. Ю.А. Р я б и н и н. Принципы расчета переходной характеристики стробоскопического осциллографа. Радиотехника, 4, I970.

2. А.В. И о ч и с, Е.М. Я н к у н а с. Анализ амплитудной характеристики мостового смесителя стробоскопического прибора. Труды научно-технической конференции. Радиоэлектроника, том 7, Изд. Каунасского политехнического института, г.Каунас, I97I.

3. А.В. И о ч и с, Е.М. Я н к у н а с. Анализ преобразования сигнала в стробоскопических векторных вольтметрах. Труды научно-технической конференции. Радиоэлектроника, том 6, Изд. Каунасского политехнического института, г. Каунас, I970.

4. Л.Т. К у з и н. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, I962.

5. Л.А. Б е с с о н о в. Теоретические основы электротехники. Высшая школа. I967.

6. И.П. С т е п а н е н к о. Основы теории транзисторов и транзисторных схем. Энергия, I967.

O. Pikkov

Calculation of Necessary Duration of the Sampling Pulse

Summary

The high frequency response of sampling devices really depends only on the length of the trailing edge, but not on the whole duration of the sampling pulse.

It is shown that for decreasing of some error components in sampling devices to a negligible level a certain duration of sampling pulse is needed. The common formula for error component depending on the length of the sampling pulse trailing edge is given.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№334 1972

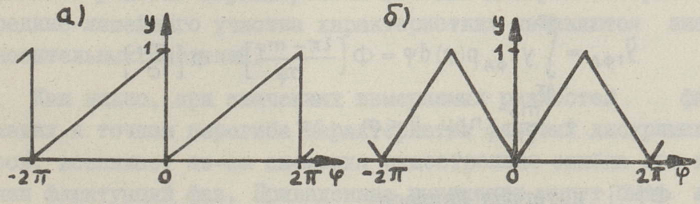
УДК 621.317.77

А.Э. Ярвальт

НЕЛИНЕЙНОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФАЗОИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ ПРИ НАЛИЧИИ ФЛЮКТУАЦИИ ФАЗ

Необходимость измерения разности фаз сигналов при наличии флюктуации фаз возникает во многих областях измерительной техники. Из-за нелинейности характеристики фазовых дискриминаторов в широком диапазоне фаз, при наличии флюктуации возникает нелинейность измерительной характеристики на линейном участке характеристики фазового дискриминатора.

В литературе [I] рассматривается нелинейность фазоизмерительной цепи с косинусоидальной характеристикой при наличии флюктуации. Ниже будут рассмотрены нелинейности, возникающие при флюктуации фаз на линейном участке характеристики фазового дискриминатора с перемножением сигналов (ФДП) и триггерного фазового дискриминатора (ТФД), которые имеют линейную характеристику в диапазоне фаз π и 2π соответственно (фиг. I).



Фиг. 1. Характеристики фазовых дискриминаторов.
а) характеристика ТФД, б) характеристика ФДП.

Считаем, что флюктуации фаз двух сигналов имеют нулевое среднее значение, распределены по нормальному закону вероятности со средним квадратическим значением σ_φ и не коррелированы.

Тогда разность фаз имеет тоже нормальное распределение [3]:

$$p(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\varphi} e^{-\frac{(\varphi - m_\varphi)^2}{2\sigma_\varphi^2}},$$

где m_φ – разность фаз без флюктуации.

Примем

$$\sigma_\varphi << \pi .$$

Тогда можем не учитывать флюктуации разности фаз, превышающих π и ограничимся описанием выходного сигнала ФДП в диапазоне от -2π до 2π

$$y_{фдп} = \frac{1}{\pi}\varphi\left\{1_0[|\varphi|] - 1_0[|\varphi| - \pi]\right\},$$

где $1_0[\ ]$ единичная функция и выходного сигнала ТФД в диапазоне от -4π до 4π

$$y_{тфд} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\varphi\, 1_0[\varphi] - 1_0[\varphi - 2\pi] & при\ 0 < \varphi < 4\pi \\ 1 + \frac{1}{2\pi} 1_0[|\varphi|] + 1_0[|\varphi| - 2\pi] & при\ -4\pi < \varphi < 0. \end{cases}$$

Усредненные выходные сигналы при наличии флюктуации разности фаз получаются как математические ожидания на выходах фазовых дискриминаторов.

$$\bar{y}_{фдп} = \int_{-2\pi}^{2\pi} y_{фдп}\, p(\varphi)\, d\varphi = \frac{2\sigma_\varphi}{\sqrt{2\pi}\,\pi}\left(e^{-\frac{m_\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}} - e^{-\frac{(\pi - m_\varphi)^2}{2\sigma_\varphi^2}}\right) + \frac{m_\varphi}{\pi} \quad при\ 0 < m_\varphi < \pi$$

$$\bar{y}_{тфд} = \int_{-4\pi}^{4\pi} y_{тфд}\, p(\varphi)\, d\varphi = \Phi\left[\frac{2\pi - m_\varphi}{\sigma_\varphi}\right] - \Phi\left[\frac{m_\varphi}{\sigma}\right] + \frac{m_\varphi}{2\pi} \quad при\ 0 < m_\varphi < 2\pi,$$

где $\Phi[\ ]$ интеграл Лапласа.

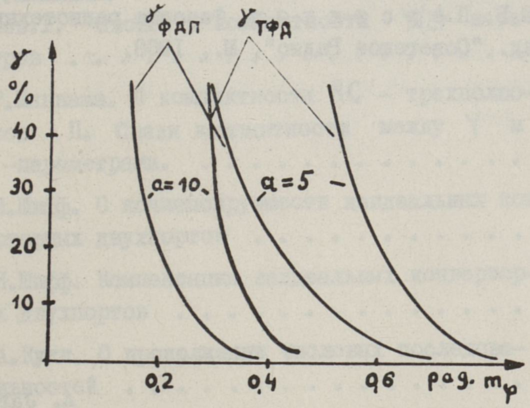
При некоррелированных флюктуациях и при равных в каналах измерения отношениях сигнала к шуму $a > 5$ среднеквадратичное значение флюктуации разности фаз [3]:

$$\sigma_\varphi = \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Относительное смещение усредненных сигналов фазовых дискриминаторов:

$$\gamma_{ФДП} = \frac{\bar{Y}_{ФДП} - Y_{ФДП}}{Y_{ФДП}} = \frac{2}{m_\varphi a\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{(m_\varphi a)^2}{4}} - e^{-\frac{(\pi - m_\varphi)^2 a^2}{4}}\right]$$

$$\gamma_{ТФД} = \frac{\bar{Y}_{ТФД} - Y_{ТФД}}{Y_{ТФД}} = \frac{2\pi}{m_\varphi}\left\{\Phi\left[\frac{(2\pi - m_\varphi)a}{\sqrt{2}}\right] - \Phi\left[\frac{m_\varphi a}{\sqrt{2}}\right]\right\}.$$



Фиг.2. Относительные смещения выходных сигналов фазовых дискриминаторов.

На фиг. 2 приведены зависимости относительных смещений выходных сигналов при отношениях сигнала к шуму 5 и I0 в начальном участке характеристик фазовых дискриминаторов. В середине линейного участка характеристики изменяются знаки относительных смещений.

Как видно, при значениях измеряемых разностей фаз, близких к точкам перегиба характеристик фазовых дискриминаторов, возникает из-за смещения существенная ошибка при наличии флюктуаций фаз. Приведенные выражения могут быть использованы для увеличения точности измерения разностей фаз при известных отношениях сигнала к шуму.

Л и т е р а т у р а

1. B. L e s k o v a r. Phase sensitive detector nonlinearity at the presence of noise. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. IM-16, 1967, pp. 285-294.

2. А.М. Т у р и ч и н. Электрические измерения неэлектрических величин. Изд. "Энергия", М.-Л. 1966.

3. В.Б. П е р с т я к о в. Фазовые радиотехнические системы. Изд. "Советское Радио", М., 1968.

A. Järvalt

Phasediscriminators Nonlinearities in Presence of Fluctuations

Summary

This paper describes distortions in phasediscriminators due to random fluctuations of phases.

An analysis for phasediscriminators with saw-toothed and triangular characteristics is given.

С о д е р ж а н и е

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ
Сборник статей X

Таллинский политехнический институт
Редактор Г. Вяльямяэ
Технический редактор Е. Ракеева

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 29/У1 1972

Подписано к печати 27/XI 1972. Бумага 60x90/16.
Печ. л. 11,25 + прилож. 0,75. Учетно-изд. л. 10,0.
Тираж 350. МВ-09353. Зак. № 804. Ротапринт ТПИ,
Таллин, ул, Коскла, 2/9.

Цена 1.- руб.

Цена рбл.I.-