TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 350

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

Сборник статей

XI

ТАЛЛИН 1973

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 350 1973

УДК 621

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

XI

Таллин 1973

74

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 350 1973

УДК 621.372.6

Х.В. Силламаа

КАНОНИЧЕСКИЕ ГИБРИДНЫЕ МАТРИЦЫ ОМОВСКИХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Многополюсник называется омовским [I], если уравнения многополюсника допускают представление в форме, где одну переменную каждого полюса можно принимать свободной, а другую - зависимой. Тем самым все множество полюсов распадается на множество ν полюсов со свободными полюсными токами и множество γ полюсов со свободными потенциалами. Уравнения линейного автономного многополюсника в этом случае можно представить в форме

$$\begin{bmatrix} V_\nu \\ I_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\nu\nu} & M_{\nu\gamma} \\ B_{\gamma\nu} & Y_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\nu \\ V_\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{\nu 0} \\ I_{\gamma 0} \end{bmatrix}, \qquad (I)$$

где V_i и I_i являются векторами потенциалов и полюсных токов соответствующих подмножеств полюсов, $V_{\nu 0}$ и $I_{\gamma 0}$ будут векторами автономных параметров многополюсника, а $Z_{\nu\nu}$, $M_{\nu\gamma}$, $B_{\gamma\nu}$ и $Y_{\gamma\gamma}$ являются блоками гибридной матрицы $\mathcal{H}$ многополюсника.

В общем случае уравнения (I) допускают представление при различном разбиении множества всех n полюсов на подмножества ν и γ. Каноническим называем такое представление уравнений многополюсника (I), где количество полюсов подмножества ν со свободными полюсными токами минимально. Соответствующую гибридную матрицу будем называть канонической гибридной матрицей. У многополюсника может быть много канонических гибридных матриц, соответствующих различным минимальным совокупностям полюсов в подмножестве ν. Лишь в случае т.н. адмитансных многополюсников, характеризуемых пустым подмножеством ν, единственная каническая гибридная матрица окажется неопределенной матрицей узловых проводимостей многополюсника [I].

Различные представления уравнений многополюсника (I) могут быть получены частичной переменой переменных между векторами свободных и зависимых переменных в системе (I). Такое преобразование уравнений названо А.В. Такером [2, 3] осевым преобразованием гибридной матрицы $\mathcal{H}$, где осью преобразования является регулярная квадратная подматрица, строки и столбцы которой соответствуют переменяемым переменным. Всевозможные осевые преобразования вокруг всех ненулевых миноров гибридной матрицы $\mathcal{H}$ формируют класс матриц, названных А.В. Такером комбинаторно эквивалентными с матрицей $\mathcal{H}$. Именно такой класс, содержащий не более $(2n)!$ матриц, охватывает всевозможные гибридные матрицы данного многополюсника. Из работ А.В. Такера [2, 4] вытекает, что любая гибридная матрица многополюсника может быть получена из некоторой исходной матрицы $\mathcal{H}$ преобразованием вокруг соответствующей оси (с точностью до следования строк и столбцов в матрице). Другими словами, каждая гибридная матрица однозначно соответствует некоторому ненулевому минору исходной матрицы $\mathcal{H}$.

При омовском многополюснике представляют интерес только осевые преобразования вокруг главных миноров[x] гибридной матрицы, так как лишь при этом одна переменная каждого полюса остается свободной, а другая - зависимой, т.е. сохраняется омовское представление уравнений многополюсника (I). В случае канонической формы гибридной матрицы, таким образом, должны отсутствовать возможности осевых преобразований, ведущих к уменьшению количества полюсов в подмножестве ν.

Очевидно, что осевое преобразование вокруг любого ненулевого главного минора блока $Z_{\nu\nu}$ в уравнении (I) ведет к уменьшению количества полюсов в подмножестве ν . Поэтому в канонической гибридной матрице блок $Z_{\nu\nu}$ должен обладать всеми нулевыми главными минорами.

---

x Осевые преобразования вокруг главных миноров матрицы образуют подгруппу в группе всех осевых преобразований матрицы [3].

Нетрудно убедиться, что канонической формой матрицы, обладающей всеми нулевыми главными минорами,[x] является верхняя (нижняя) треугольная матрица с нулевой главной диагональю, например

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_{21} & 0 & 0 & 0 \\ z_{31} & z_{32} & 0 & 0 \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ 0 & 0 & z_{23} & z_{24} & z_{25} \\ 0 & 0 & 0 & z_{34} & z_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Действительно, в таком случае любой главный минор содержит нулевую строку (столбец) и поэтому является нулевым. С другой стороны, замена в такой матрице любого нулевого элемента ненулевым сразу может образовать некоторый ненулевой главный минор. Разумеется, всевозможными перестановками строк и столбцов такой матрицы (одновременно!) можно получить всего $k!$ эквивалентных форм матриц с нулевыми главными минорами (k -размер матриц).

Однако наличие в блоке $z_{\nu\nu}$ всех нулевых миноров является лишь необходимым условием канонической формы гибридной матрицы. Количество полюсов во множестве ν можно далее уменьшить при наличии в гибридной матрице (I) таких ненулевых главных миноров, которые пересекают все блоки матрицы и содержат бо́льшее количество строк и столбцов, принадлежащих множеству ν, нежели множеству γ. В канонической форме гибридной матрицы все межблочные главные миноры также должны быть нулевыми.

Если рассматривать главные миноры третьего порядка, строки i и k которых принадлежат к множеству ν, а строка j - к множеству γ, то принимая $z_{\nu\nu}$ верхней наддиагональной матрицей, будем иметь общее выражение минора (точнее соответствующей подматрицы) в виде:

$$\begin{array}{c|ccc} & i & k & j \\ \hline i & 0 & z_{ik} & m_{ij} \\ k & 0 & 0 & m_{kj} \\ j & b_{ji} & b_{jk} & y_{jj} \end{array} \qquad (2)$$

[x] Пока пренебрегаем случаем, когда минор окажется нулевым, благодаря подходящим численным соотношениям между элементами матрицы.

Видно, что все миноры типа (2) при любых $i<k<j$ нулевые, если

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) при } b_{ji}\neq 0 \text{ имеется } m_{kj}=0 \text{ для всех } k>i \\ \text{б) при } m_{kj}\neq 0 \text{ имеется } b_{ji}=0 \text{ для всех } i<k \end{array}\right\} \qquad (3)$$

независимо от остальных элементов минора. Нетрудно убедиться, что условия (3) являются достаточными также для любых межблочных главных миноров большего размера, содержащих только одну строку из множества γ. В этом случае, при наличии ненулевого b_{jk} или m_{kj} все элементы строки j в блоке $B_{\gamma\nu}$ левее b_{jk} должны быть нулевыми, либо должны быть нулевыми все элементы столбца j в блоке $M_{\nu\gamma}$ ниже m_{kj}.

Могут существовать также межблочные миноры пятого порядка, охватывающие строки i, k, l из множества ν и строки j, p из множества γ и имеющие общий вид (с учетом условий (3))

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} i & k & l & j & p \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ k \\ l \\ j \\ p \end{array} & \left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & z_{ik} & z_{il} & m_{ij} & m_{ip} \\ 0 & 0 & z_{kl} & 0 & m_{kp} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{lp} \\ \hdashline b_{ji} & b_{jk} & b_{jl} & y_{jj} & y_{jp} \\ 0 & 0 & b_{pl} & y_{pj} & y_{pp} \end{array}\right] \end{array}, \; i<k<l<j<p. \qquad (4)$$

В выражении такого минора встречается лишь одно ненулевое произведение: $z_{ik}\, z_{kl}\, m_{lp}\, y_{pj}\, b_{ji}$. Так как в гибридной матрице многополюсника суммы элементов каждой строки блока $M_{\nu\gamma}$ должны равняться единице, а суммы каждого столбца блока $B_{\gamma\nu}$ минус единице [I], то в столбце i всегда можно выбирать строку так, чтобы $b_{ji}\neq 0$ и аналогично столбец p, где $m_{lp}\neq 0$. Нельзя также ставить ограничений на элементы блока $Y_{\gamma\gamma}$, так как в исходной форме минора (4) мы предполагали выполненность лишь предварительных осевых преобразований вокруг главных миноров блока $Z_{\nu\nu}$, откуда нулевые элементы блока $Y_{\gamma\gamma}$ не вытекают. В результате для равенства нулю минора (4) необходимо

$$z_{ik}=0, \quad \text{либо} \quad z_{kl}=0. \qquad (5)$$

Тем самым блок $Z_{\nu\nu}$ приобретает свойство, что строкам, содержащим ненулевые элементы, должны соответствовать нулевые столбцы и наоборот, ненулевым столбцам – нулевые строки. Можно также убедиться, что такое ограничение будет достаточным и для того, чтобы любые межблочные главные миноры бо́льшего размера гибридной матрицы, содержащие бо́льшее количество строк из ν, нежели из γ, равнялись бы нулю (при соблюдении, разумеется, условий (3)).

Тогда подходящим упорядочением строк и столбцов блок $Z_{\nu\nu}$ можно всегда представить в канонической форме

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \varkappa & \chi \end{array} \\ Z_{\nu\nu} = & \begin{bmatrix} 0 & Z_{\varkappa\chi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \varkappa \\ \chi, \end{array} \tag{6}$$

где $\varkappa$ соответствует множеству нулевых столбцов, а χ множеству нулевых строк. Тем самым множество ν распадается на два подмножества $\varkappa$ и χ.

Принимая теперь за основу каноническую форму (6) блока $Z_{\nu\nu}$, можно далее уточнить условия для элементов блоков $M_{\nu\gamma}$ и $B_{\gamma\nu}$, вытекающие из (3). Так как теперь в миноре (2) элемент $z_{ik} \neq 0$ лишь при $i \in \varkappa$ и $k \in \chi$, то условия (3) остаются в силе только при условии $i \in \varkappa$ и $k \in \chi$, иначе ввиду $z_{ik} = 0$ минор (2) окажется нулевым при любых b_{ji} и m_{kj}. Далее нетрудно убедиться, что эти условия окажутся достаточными и для равенства нулю миноров типа (4) и более сложных (ведь оттуда и было получено условие (5) для канонической формы). В результате мы приходим к канонической форме гибридной матрицы омовского многополюсника в виде

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \varkappa & \chi & \alpha & \beta \end{array} \\ \mathcal{H} = & \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & Z_{\varkappa\chi} & M_{\varkappa\alpha} & M_{\varkappa\beta} \\ 0 & 0 & 0 & M_{\chi\beta} \\ \hdashline B_{\alpha\varkappa} & B_{\alpha\chi} & Y_{\alpha\alpha} & Y_{\alpha\beta} \\ 0 & B_{\beta\chi} & Y_{\beta\alpha} & Y_{\beta\beta} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \varkappa \\ \chi \\ \alpha \\ \beta \end{array}, \tag{7}$$

где все множество полюсов распадается на четыре подмножества $\varkappa$, χ, α и β. Для отдельных канонических гибридных матриц многополюсника всем одноименным подмножествам могут соответствовать отличающиеся совокупности полюсов с различным их количеством. При этом отдельные канонические формы могут быть получены осевыми преобразованиями вокруг ненулевых главных миноров, содержащих равное количество полюсов как из ν, так и из γ.

Нетрудно убедиться, что гибридная матрица (7) действительно не обладает ненулевыми главными минорами, имеющими большее количество строк из множества $\nu = \varkappa \cup \chi$, нежели из множества $\gamma = \alpha \cup \beta$. Действительно, образуя минор типа

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varkappa' & \chi' & \alpha' & \beta' \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & Z_{\varkappa'\chi'} & M_{\varkappa'\alpha'} & M_{\varkappa'\beta'} \\ 0 & 0 & 0 & M_{\chi'\beta'} \\ B_{\alpha'\varkappa'} & B_{\alpha'\chi'} & Y_{\alpha'\alpha'} & Y_{\alpha'\beta'} \\ 0 & B_{\beta'\chi'} & Y_{\beta'\alpha'} & Y_{\beta'\beta'} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \varkappa' \\ \chi' \\ \alpha' \\ \beta' \end{array} \end{array} \qquad (8)$$

где $\varkappa'$, χ', α' и β' обозначают любые подмножества соответствующих множеств полюсов, можно выяснить, что столбцы $\varkappa'$ будут линейно независимыми лишь при условии $|\alpha'| \geq |\varkappa'|$ ($|\cdot|$ обозначает количество полюсов в соответствующем подмножестве), а строки χ' могут быть линейно независимыми лишь при $|\beta'| \geq |\chi'|$. Из полученных условий вытекает $|\alpha'|+|\beta'| \geq |\varkappa'|+|\chi'|$ или $|\gamma'| \geq |\nu'|$, поэтому минор типа (8) может оказаться ненулевым лишь при охвате строк из подмножества γ не в меньшей мере, нежели из подмножества ν. Тем самым доказана достаточность каноничности формы (7).

С другой стороны, при определенных численных соотношениях между элементами матрицы все вышерассмотренные миноры (в частности, миноры (3) и (4)) могут оказаться нулевыми даже при ненулевых значениях всех элементов. Поэтому при частных численных условиях любой нулевой элемент в канонической гибридной матрице (7) можно заменить ненулевым при сохранении каноничности. В таком случае указать канонических структур уже нельзя.

Алгоритм практического нахождения канонической гибридной матрицы заключается в поиске ненулевых миноров типа (2) или (3) в исходной гибридной матрице и в проведении осевого преобразования [2] системы уравнений многополюсника вокруг этих осей, с продолжением такой процедуры до получения канонической формы (7) гибридной матрицы. Ввиду большей сложности поиска и осевого преобразования вокруг минора (4) такой процесс может быть реализован в два этапа:

а) осевое преобразование вокруг неглавного (!) минора

$$\begin{array}{c|cc} & k & l \\ \hline i & z_{ik} & z_{il} \\ k & 0 & z_{kl} \end{array}, \quad i,k,l \in \nu; \tag{9}$$

б) осевое преобразование вокруг неглавного минора

$$\begin{array}{c|ccc} & i & j & p \\ \hline l & 0 & 0 & m_{lp} \\ j & b_{ji} & y'_{jj} & y'_{jp} \\ p & 0 & y_{pj} & y'_{pp} \end{array}, \quad l,i \in \nu; \; j,p \in \gamma, \tag{10}$$

где y' означает измененные на предыдущем этапе элементы матрицы. Легко проверить, что последовательные преобразования вокруг миноров (9) и (10) эквивалентны осевому преобразованию вокруг минора (4). Минор (9) в блоке $Z_{\nu\nu}$ легко обнаружить, а последующее обращение вокруг минора (10) восстанавливает омовское представление уравнений многополюсника. При этом строки j и p выбираются по условиям $b_{ji} \neq 0$ и $m_{lp} \neq 0$. Осевые преобразования вокруг миноров (9) и (10) можно продолжать до тех пор, пока кроме главных миноров в блоке $Z_{\nu\nu}$ станут равными нулю также все миноры, множества строк и столбцов которых имеют непустое пересечение ((9) является таким минором). Тогда после подходящего упорядочения столбцов и строк множества ν получается каноническая форма блока $Z_{\nu\nu}$, (6), а остальные блоки из-за преобразований вокруг (10) приобретают форму, соответствующую канонической матрице (7).

Каноническая форма гибридной матрицы полезна при классификации неадмитансных многополюсников и анализе их общих свойств. В частности, из канонической формы ясно видно, что уравнения неадмитансного многополюсника обязательно содержат уравнения, связывающие только потенциалы различных полюсов. В канонической гибридной матрице такие уравнения соответствуют множеству строк χ.

Литература

I. Ю.А. Р е х е п а п п, Х.В. С и л л а м а а. Матричное описание многополюсников. "Радиотехника", т.27, № I2, I972, стр. 26-3I.

2. A.W. T u c k e r. A combinatorial equivalence of matrices. Proc. Symp. in Appl. Math., v. X. Amer. Math. Soc. Providence. 1960, pp. 129-140.

3. A.W. T u c k e r. Principal pivot transforms of square matrices. SIAM Review, v. 5, No 4, 1963, p. 305.

4. R.J. D u f f i n, D. H a z o n y, N. M o r r i s o n. Network synthesis through hybrid matrices. SIAM Journ. Appl. Math., v. 14, No 2, 1966, pp. 390-413.

H. Sillamaa

Canonical Hybrid Matrices of Ohmian Multipoles

Summary

The problem of representing multipole equations in form consisting of a minimal number of free pole currents is considered. A canonical multipole hybrid matrix expression corresponding to these equations is obtained and a straightforward algorithm for finding the canonical hybrid matrix is developed.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 518.5:62-501.432

В.А. Кукк, Э.А. Рюстерн

НОВЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ВРЕМЕНИ ЧИСТОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ

I. Введение

В настоящей статье описывается метод идентификации времени чистого запаздывания, исходя из лагерровского разложения импульсной функции. Хотя предлагаемый метод по существу приближенный, он легко реализуется на ЦВМ и обеспечивает высокую точность. При этом следует отметить, что разработаны простые методы для вычисления лагерровских разложений, например, из уравнений состояния линейной системы [1, 2] и т.д.

В основе метода лежит алгоритм вычисления группового запаздывания, описанный в [3], где вычисление времени группового запаздывания сводится к суммированию степенного ряда

$$\tau(\omega) = -\operatorname{Re}\sum_{0}^{\infty} b_k z^k, \tag{1}$$

где

$$z = \frac{j\omega - \frac{1}{2}}{j\omega + \frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Коэффициенты b_k вычисляются из лагерровского разложения импульсной функции

$$h(t) = \sum_{0}^{\infty} a_k l_k(t), \tag{3}$$

где $l_k(t)$ функция Лагерра порядка k.

Время чистого запаздывания определяется как предел группового запаздывания при $\omega \to \infty$

$$\tau = \lim_{\omega \to \infty} \tau(\omega). \tag{4}$$

Так как в [3] предложен эффективный метод для вычисления $\tau(\omega)$ (т.е. суммирования степенного ряда (I)), то в этой статье рассматриваются только проблемы нахождения предела (4).

Идентификация времени чистого запаздывания сводится к вычислению предела от дробно-рациональной функции при $z \to 1$

$$\tau = \lim_{z\to 1} G(z), \tag{5}$$

где

$$G(z) = \frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m}{d_0 + d_1 z + \cdots + d_m z^m}$$

и коэффициенты которой c_i и d_i вычисляются из коэффициентов b_k. Из (4) следует, что предел от функции $G(z)$ следует вычислить по единичной окружности, т.е. $z = e^{-j\varphi}$, $\varphi \to 0$.

Идентификация τ позволяет выделить запаздывающий параметр $e^{-\tau s}$ из передачи, т.е. представить передачу в виде

$$F(s) = \frac{N_m(s)}{D_m(s)} e^{-\tau s}, \tag{6}$$

где $N_m(s), D_m(s)$ многочлены порядка m.

2. О вычислении τ.

В [3] выведено следующее выражение для $\tau(\omega)$

$$\tau(\omega) = -\mathrm{Re}\,\frac{\sum_0^\infty (k+1)(a_{k+1} - a_k) z^k}{\sum_0^\infty \left(\sum_{i=0}^k a_i\right) z^k}, \tag{7}$$

откуда для идентификации τ получим

$$\tau = \lim_{z\to 1}\left\{-\mathrm{Re}\,\frac{\sum_0^\infty (k+1)(a_{k+1} - a_k) z^k}{\sum_0^\infty \left(\sum_{i=0}^k a_i\right) z^k}\right\}. \tag{8}$$

Деление степенных рядов дает

$$\tau = \lim_{z\to 1}\left(-\mathrm{Re}\sum_0^\infty b_k z^k\right), \tag{9}$$

где коэффициент b_k зависит только от тех a_i, индексы которых не больше $k+1$.

В практических задачах имеется лишь конечное число коэффициентов ряда (9) $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_r$, а для нахождения предела от суммы степенного ряда необходимо определить и коэффициент $b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots$. При вычислении группового запаздывания в [3] для этого была применена гипотеза продолжения $R(p)$ [4,5,6,7], так как она обеспечивала наибольшую точность. В гипотезе $R(p)$ предлагается, что производящая функция $G(z)$ последовательности $b_0, b_1, \ldots, b_r, \ldots$ является дробнорациональной

$$G(z) = \sum_{0}^{\infty} b_k z^k = \frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m}{d_0 + d_1 z + \cdots + d_m z^m}, \tag{10}$$

где коэффициенты c_i и d_i вычисляются по заданным $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Итак, идентификация τ сведена к вычислению предела от дробно-рациональной функции $G(z)$. Если $G(z)$ является непрерывной в точке $z = 1$, то

$$\tau = \lim_{z \to 1} G(z) = G(1). \tag{11}$$

На практике обычно можно предполагать, что $G(z)$ является непрерывной в точке $z = 1$ и применять формулу (11) для вычисления τ. Однако при этом могут возникнуть следующие трудности:

- В некоторых случаях в $G(z)$ появляются диполи в точке $z = 1$ (т.е. одновременно появляются нули $z = 1$ как в числителе, так и в знаменателе). Эти диполи необходимо сократить. Данное действие легко выполнимо на коэффициентах многочленов числителя и знаменателя.

- Если в передаче имеется запаздывающий компонент $e^{-\tau s}$ с большим значением τ, то коэффициент b_0 разложения (9) является очень большим и, кроме того, коэффициенты b_k возрастают. При этом может возникнуть опасность переполнения разрядной сетки ЦВМ. Отсюда возникает необходимость нормирования параметров передачи. Желательно применять такую нормировку, чтобы $\tau \leq 1$.

- В случаях, если в $G(z)$ появляются диполи в точке $z = 1 \pm \varepsilon$ (где ε малое число), формула (11) не дает точных результатов. Тогда для определения τ необходимо применить формулу (5). Целесообразной является следующая схема: вычисляется $\tau(\omega_0)$ при большом значении ω_0 ($\omega_0 = 10^3 \div 10^5$) и для оценки точности при $10\,\omega_0$.

3. Выделение запаздывания из передачи

Из основного рекуррентного соотношения для многочленов Лагерра [8] следует, что коэффициенты c_k лагерровского разложения чистого запаздывания $e^{-\tau s}$ удовлетворяют уравнению

$$c_{k+1} = \frac{2k+1-\tau}{k+1} c_k - \frac{k}{k+1} c_{k-1},$$

при $k = 1, 2, 3, \dots$

где $c_0 = e^{-\frac{\tau}{2}}$ и $c_1 = (1-\tau) e^{-\frac{\tau}{2}}$.

Выделение $e^{-\tau s}$ из передачи сводится к делению лагерровского разложения передачи на разложение $e^{-\tau s}$. Если аппроксимировать результат этого действия дробно-рациональной функцией заданного порядка m, то получим передачу в виде (6). Выделение компонента $e^{-\tau s}$ позволяет существенно понизить порядок передаточной функции.

4. Примеры

Описанный метод идентификации τ реализован на ЦВМ "Минск-22". Следует отметить, что при вычислении $G(z)$ по заданным $b_0, b_1, b_2, \dots, b_r$ применен алгоритм, указанный в [9]. Некоторые результаты испытания программ представлены в следующих примерах.

Пример I. Результаты идентификации τ в случае различных тестовых передаточных функций представлены в таблице I. Эти результаты указывают на высокую точность алгоритма. Интересно отметить, что алгоритм дает отличные от нуля запаздывания для тестовых функций $e^{-\sqrt{s}}$ и $\frac{1}{ch\sqrt{s}}$ $-0{,}04158$ и $0{,}03029$ соответственно.

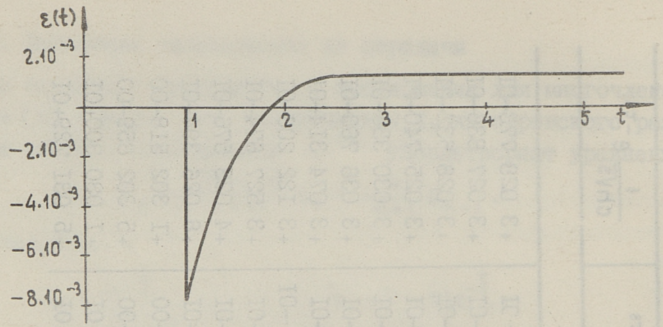
Пример 2. Из функции группового запаздывания

$$\tau(\omega) = 1 + \frac{1}{1+\omega^2}$$

с помощью алгоритма, описанного в [9] было получено лагерровское разложение A соответствующей передачи (количество коэффициентов $r = 128$). Далее, после идентификации τ ($\tau = 0.9999954$) и выделения запаздывающего компонента $e^{-\tau s}$, было получено разложение B, откуда с помощью R-метода [10] была вычислена переходная характеристика. Кривая абсолютной погрешности переходной характеристики представлена на фиг.I.

Таблица I

τ \ Тестовые функции	$\frac{1}{s+1} e^{-\tau s}$	$\frac{1}{s^2+0{,}02s+1} e^{-\tau s}$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+0{,}25}} e^{-\tau s}$	$e^{-\sqrt{s}} \cdot e^{-\tau s}$	$\frac{1}{ch\sqrt{s}} e^{-\tau s}$
	Вычисленные значения запаздывания				
+0 000 000-I9	+0 000 000-I9	+6 460 032-07	+3 725 290-08	+4 I58 052-0I	+3 028 773-0I
+I 000 000-05	+9 723 008-06	+9 842 000-06	+9 872 0I9-06	+4 I62 2I8-0I	+3 027 836-0I
+5 000 000-05	+5 0I2 378-05	+4 980 I9I-05	+4 984 40I-05	+4 I65 03I-0I	+3 028 532-0I
+I 000 000-04	+9 980 053-05	+I 000 799-04	+9 987 503-05	+4 I63 398-0I	+3 025 740-0I
+5 000 000-04	+5 00I 76I-04	+5 000 49I-04	+4 999 7I2-04	+4 I68 055-0I	+3 030 336-0I
+I 000 000-03	+9 999 I53-04	+9 999 052-04	+9 997 748-04	+4 I80 5I9-0I	+3 036 763-0I
+5 000 000-03	+5 00I 8I5-03	+4 999 925-03	+4 999 936-03	+4 2I6 429-0I	+3 074 3I4-0I
+I 000 000-02	+I 000 032-02	+I 000 070-02	+9 999 870-03	+4 255 676 -0I	+3 I22 206-0I
+5 000 000-02	+4 999 990-02	+5 000 000-02	+5 000 005-02	+4 667 093-0I	+3 527 674-0I
+I 000 000-0I	+9 999 985-02	+9 999 996-02	+9 999 990-02	+5 I62 940-0I	+4 023 576-0I
+5 000 000-0I	+5 000 000-0I	+4 999 999-0I	+4 999 998-0I	+9 I73 370-0I	+8 026 394-0I
+I 000 000-00	+I 000 000-00	+I 000 000-00	+I 000 000-00	+I 4I5 067-00	+I 302 5I8-00
+5 000 000-00	+5 000 000-00	+5 000 000-00	+5 000 000-00	+5 4I6 257-00	+5 302 859-00
+I 000 000+0I	+I 000 000+0I	+I 000 000+0I	+I 000 000+0I	+I 04I 592+0I	+I 030 300+0I
+5 000 000+0I	+4 999 997+0I	+4 999 969+0I	+4 999 992+0I	+5 053 369+0I	+5 03I 729+0I



Фиг. 1 . Погрешность переходной характеристики.

Литература

I. В. К у к к. К численному обращению матрицы проводимостей. Труды ТПИ, серия А, № 304, 1971, стр. 35-42.

2. V. K u k k. State variables and Laguerre series. Electronics Letters, v. 7, 1971, pp. 269-270.

3. V. K u k k, E. R ü s t e r n. Calculation of the group-delay from Laguerre series. TPI Toimetised, nr.334, 1972, lk. 91-96.

4. K. S t e i g l i t z. Rational transform approximation via the Laguerre spectrum. J.Franklin Inst., v. 280, 1965, pp. 387-394.

5. G. S a l o m o n s s o n. Linear network synthesis with Laguerre polynomials. Ericsson Technics, v. 27, 1971, pp. 83-109.

6. В. К у к к. Рациональная аппроксимация передаточной функции. Труды ТПИ, серия А, № 288, 1970, стр. 71-78.

7. В. К у к к. О продолжении числовых последовательностей. Труды ТПИ, № 334, 1972, стр. 77-81.

8. Е. Я н к е, Ф. Э м д е, Ф. Л е ш. Специальные функции. "Наука", М., 1968.

9. В. К у к к, Э. Р ю с т е р н. Нахождение передаточной функции по заданной функции группового запаздывания. В наст. сб., стр. 19.

10. В. К у к к. Численный расчет переходной функции. Труды ТПИ, № 334, 1972, стр. 83-89.

V. Kukk, E. Rüstern

A New Method for Identification of Pure Delay Time

Summary

An effective computer method for the identification of pure delay time of a transform given by its Laguerre series is presented. The computation of delay is reduced to the evaluation of the sum of a power series obtained from the given Laguerre coefficients. The results of computer experiments are presented.

V. Kukk, E. Rüstern

A New Method for Identification of Pure Delay Time

Summary

An effective computer method for the identification of pure delay time of a transform given by its Laguerre series is presented. The computation of delay is reduced to the evaluation of the sum of a power series obtained from the given Laguerre coefficients. The results of computer experiments are presented.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 350 1973

УДК 518.5:621.372.061.2

В.А. Кукк, Э.А. Рюстерн

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ ГРУППОВОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ

1. Введение

При синтезе линейных цепей часто ставится задача нахождения передаточной функции по заданной функции группового запаздывания. Из литературы известны методы для решения этой задачи, например, при помощи полиномов Бесселя [1], с применением разложения Маклорена [2] и т.д.

В настоящей статье описывается алгоритм построения передаточной функции по функции группового запаздывания, легко реализуемый на ЦВМ. Получаемые передаточные функции могут быть дробно-рациональными либо дробно-рациональными с запаздыванием.

Исходным является метод вычисления группового запаздывания, описанный в [3], где показано, что функцию группового запаздывания легко получить в виде разложения

$$\tau(\omega) = -\operatorname{Re}\sum_{0}^{\infty} b_k z^k, \tag{1}$$

где

$$z = \frac{j\omega - \frac{1}{2}}{j\omega + \frac{1}{2}}, \tag{2}$$

на основе лагерровского разложения импульсной функции

$$h(t) = \sum_{0}^{\infty} a_k l_k(t), \tag{3}$$

где $l_k(t)$ – функция Лагерра порядка k.

Так как проблемы построения дробно-рациональных передаточных функций, исходя из лагерровского разложения импульсной функции хорошо исследованы [4, 5, 6], то в данной статье рассматриваются вопросы вычисления коэффициентов b_k в разложении (I) и перехода к разложению (3).

Вычисления коэффициентов b_k разложения (I), согласно нижеследующему доказательству, сводятся к гармоническому анализу.

При переходе от разложения (I) к разложению (3) коэффициент a_k легко вычисляется через коэффициенты a_i и b_i, индекс которых меньше k. Это значит, что переход от разложения (I) к разложению (3) является точным (т.е. конечным).

2. Вывод алгоритма

Введя подстановку $\omega = \frac{1}{2}\tan\frac{u}{2}$ и обозначая $\tau(\frac{1}{2}\tan\frac{u}{2}) = \tau(u)$, получим из соотношения (I)

$$\tau(u) = -\sum_{0}^{\infty}(-)^k b_k \cos ku. \tag{4}$$

Таким образом, вычисление коэффициентов b_k сводится к гармоническому анализу:

$$b_0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\tau(u)\,du, \tag{5}$$

$$b_k = (-)^{k+1}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tau(u)\cos ku\,du, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Достаточная общность этих соотношений может быть получена, если рассматривать $\tau(\omega)$ как распределение [8, 9].

Обычно функция группового запаздывания дана в виде таблицы и при вычислении коэффициентов b_k обычные методы гармонического анализа (например, схема Рунге) являются достаточно эффективными, так как требуемое количество коэффициентов невелико (для определения передаточной функции порядка n следует найти $2n+1$ коэффициентов разложения (3)).

В [3] было получено следующее разложение для $\tau(\omega)$

$$\tau(\omega) = -\mathrm{Re}\,\frac{\sum_0^{\infty}(k+1)(a_{k+1}-a_k)z^k}{\sum_0^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right)z^k}. \tag{7}$$

Из (3) и (7) найдем

$$\sum_0^\infty b_k z^k = \frac{\sum_0^\infty (k+1)(a_{k+1}-a_k) z^k}{\sum_0^\infty \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) z^k}. \tag{8}$$

Чтобы выразить коэффициенты a_k через коэффициенты b_k необходимо фиксировать коэффициент a_0, поскольку передаточная функция определяется функцией группового запаздывания с точностью до постоянного множителя. Выбирая

$$a_0 = 1 \tag{9}$$

получаем из (8) рекуррентную формулу для перехода от разложения (I) к разложению (3),

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{i=0}^{k-j} a_i \right) b_j, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Отсюда непосредственно следует, что коэффициент a_{k+1} зависит от тех a_i и b_i, индексы которых не больше k.

3. Аппроксимация разложения (3)

Предложен ряд методов для построения дробно-рациональной передаточной функции на основе лагерровского разложения импульсной функции [5, 6], среди которых предпочтение следует отдать алгоритму, который попутно определяет и порядок передаточной функции (будет опубликовано отдельно).

Применение метода идентификации времени чистового запаздывания, описанного в [8], вместе с методом дробно-рациональной аппроксимации позволяет получить передаточные функции в виде

$$F(s) = \frac{N_m(s)}{D_n(s)} e^{-\tau s}, \tag{11}$$

где τ – время чистого запаздывания и $N_m(s), D_n(s)$ – полиномы порядка m и n соответственно. Выделение чистого запаздывания, которое имеется в разложении (3), понизит существенно порядок передаточной функции.

4. Примеры

Приведенный метод реализован на ЦВМ "Минск-22". Некоторые результаты испытания программ представлены в следующих примерах.

Пример I. В виде таблицы дана функция (количество значений = I28) группового запаздывания

$$\tau(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Легко доказать, что этой функции $\tau(\omega)$ соответствуют следующие передаточные функции

I) минимально-фазовая $F(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+1}$,

2) неминимально-фазовая $F(s) = \dfrac{-s+1}{s+1}$.

Сочетая изложенный метод с алгоритмом, указанным в п.3, была вычислена следующая передаточная функция (задан порядок $n = 2$)

$$F(s) = 0.0224999\ \frac{-0.7450567\text{x}10^{-8}s^2 - 0.3732734\text{x}10^{-5}s + 1}{0.9999908\ s^2 + 1.999993\ s + 1}.$$

Пример 2. Рассмотрим функцию группового запаздывания

$$\tau(\omega) = 1 + \frac{1}{1+\omega^2},$$

соответствующую передаточной функции

$$F(s) = \frac{1}{s+1}e^{-s}.$$

С помощью изложенного метода вместе с алгоритмами, описанными в [4,8], на ЦВМ была получена передаточная функция,

$$F(s) = 2.473088\ \frac{0.5861181\text{ x }10^{-5}\ s + 1}{1.000024\ s + 1}\cdot e^{-0,9999954\,s},$$

при количестве точек $p = 192$.

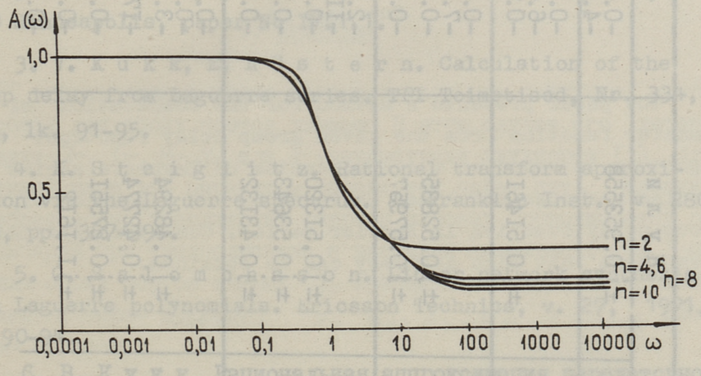
Пример 3. Предположим, что дана следующая функция группового запаздывания

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{если } \omega \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

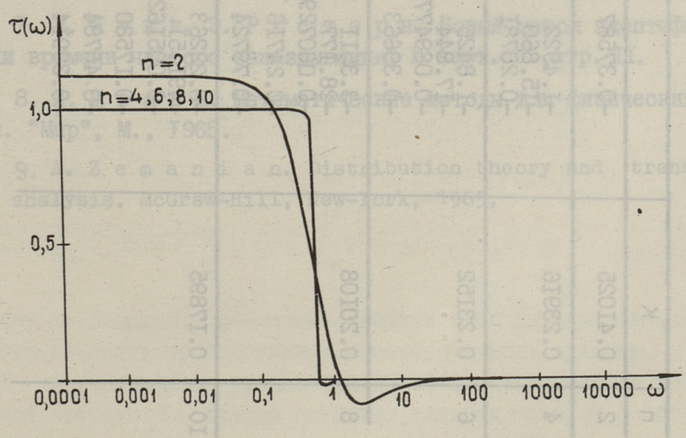
При количестве точек $p = 512$ получены дробно-рациональные передаточные функции в виде

$$F_n(s) = K\frac{\prod\limits_{i=1}^{m_1}(s+\alpha_{ni})\prod\limits_{j=1}^{m_2}\left[(s+\alpha_{nj})^2+\beta^2_{nj}\right]}{\prod\limits_{k=1}^{n_1}(s+\alpha_{pk})\prod\limits_{l=1}^{n_2}\left[(s+\alpha_{pl})^2+\beta^2_{pl}\right]},$$

которые представлены в таблице I. Соответствующие нормированные амплитудно-частотные характеристики и функции группового запаздывания представлены на фиг. I и фиг. 2. Из этих результатов следует, что оптимальной аппроксимацией является передаточная функция 4-го порядка, так как дальнейшее повышение порядка не улучшит частотных характеристик.



Фиг. 1 . Амплитудно-частотные характеристики.



Фиг. 2. Функции группового запаздывания.

Т а б л и ц а I

n	K	Нули		Полюсы	
2	0.4I025	-0.37587	± j 0.953558	-0.6I229	
				-4.8535	
4	0.239I6	-I.4922		-0.682I2	
		-I5.860		-6.3734	
		-0.2078I	± j 0.5I46I	-0.20497	± j 0.4875I
6	0.23I52	-I.8425		-0.85770	
		-I7.844		-7.3I85	
		-0,089477	± j 0.52835	-0.092443	± j 0.52367
		-0.39663	± j 0.57957	-0.39702	± j 0.5I586
8	0.20I08	-3.35II		-2.0I69	
		-28.I77		-II.785	
		-0.060729	± j 0,5I320	-0.06I6I0	± j 0.5III4
		-0.247I6	± j 0.53643	-0.24854	± j 0.5I362
		-0.79724	± j 0.43I32	-0.63625	± j 0.29925
I0	0.I7895	-0.22263		-0.I5594	
		-49I.5I		-0.9294I	
		-0.005I627	± j 0.48294	-3.4I73	
		-0.I7530	± j 0,42774	-I7.354	
		-0,46784	± j 0.2755I	-0.0065447	± j 0.34806
		+0.399I4	± j I,I6I2	-0.049I4I	± j 0,66I55
				-0.5472I	± j 0.60067

Литература

1. B.D. R a k o v i c h, D.M. R a b r e n o v i c h. Method of synthesis of phase-correcting network. Proc.IEEE, v. 11, 1969, pp. 57-67.

2. A.T. J o h n s o n, Jr., S.D. B e d r o s i a n. Delay approximation having maximally flat error. Proc. of the 13-th Midwest Symposium on Circuit Theory, May 7-8, 1970 Minneapolis, paper No IV.1.1.

3. V. K u k k, E. R ü s t e r n. Calculation of the group delay from Laguerre series. TPI Toimetised, Nr. 334, 1972, lk. 91-95.

4. K. S t e i g l i t z. Rational transform approximation via the Laguerre spectrum. J. Franklin Inst., v. 280, 1965, pp. 387-394.

5. G. S a l o m o n s s o n. Linear network synthesis with Laguerre polynomials. Ericsson Technics, v. 27, 1971, pp. 90-94.

6. В. К у к к. Рациональная аппроксимация передаточной функции. Труды ТПИ, серия А, № 288, 1970, стр. 71-78.

7. В. К у к к, Э. Р ю с т е р н. Новый метод идентификации времени чистого запаздывания. В наст.сб., стр. 11.

8. Л. Ш в а р ц. Математические методы для физических наук. "Мир", М., 1965.

9. A. Z e m a n i a n. Distribution theory and transform analysis. McGraw-Hill, New-York, 1965.

V. Kukk, E. Rüstern

Determination of a Transfer Function from the Given Group Delay Function

Summary

The paper presents a method for the computation of a transfer function from the given group delay function. The algorithm is based on the application of Laguerre series of impulse response which may be found by the expansion of the group delay function in Fourier series. Computer experiments have shown that high accuracy can be obtained.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 621.372.061.1

В.Р. Мяннама

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ НУЛЯХ В АДЬЮНКТАХ МАТРИЦЫ RC-ТРЕХПОЛЮСНИКА

I. Введение

RC-трехполюсник часто рассматривают как двухпорт, имеющий общую для обоих портов клемму. В этом случае его характеризуют Z-, G-, H-, Y- или F-параметрами двухпорта [I]. Для обратимой цепи эти параметры выражаются через пять адьюнкт (алгебраических дополнений) матрицы узловых проводимостей цепи. Выбирая при трехполюснике с внешними клеммами 1, 2 и 3 общей для обоих портов клемму 3, приведенные выше параметры выражаются через адьюнкты Δ, Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12} и Δ_{1122} следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&Z_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}; \quad Z_{22}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta}; \quad Z_{12}=Z_{21}=\frac{-\Delta_{12}}{\Delta}; \quad \Delta Z=\frac{\Delta_{1122}}{\Delta};\\
&G_{11}=\frac{\Delta}{\Delta_{11}}; \quad G_{22}=\frac{\Delta_{1122}}{\Delta_{11}}; \quad G_{12}=-G_{21}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}; \quad \Delta G=\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}};\\
&H_{11}=\frac{\Delta_{1122}}{\Delta_{22}}; \quad H_{22}=\frac{\Delta}{\Delta_{22}}; \quad H_{12}=-H_{21}=\frac{-\Delta_{12}}{\Delta_{22}}; \quad \Delta H=\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}};\\
&Y_{11}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{1122}}; \quad Y_{22}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{1122}}; \quad Y_{12}=Y_{21}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{1122}}; \quad \Delta Y=\frac{\Delta}{\Delta_{1122}};\\
&A=\frac{-\Delta_{11}}{\Delta_{12}}; \quad B=\frac{-\Delta_{1122}}{\Delta_{12}}; \quad C=\frac{-\Delta}{\Delta_{12}}; \quad D=\frac{-\Delta_{22}}{\Delta_{12}}; \quad \Delta F=1.
\end{aligned}
\tag{I}
$$

Поэтому исследование различных свойств этих параметров можно часто заменять исследованием соответствующих адьюнкт. При RC-цепи последние представляют собой многочлены от комплексной частоты s, причем адьюнкты главных миноров могут иметь только неположительные вещественные, в общем случае кратные нули. Если такой нуль содержится во всех пяти адъюнктах и следовательно сокращается во всех параметрах трехполюсника, то будем называть его <u>общим нулем</u> трехполюсника. Аналогично можно определить понятие общего нуля и для T-полюсника при $T \neq 3$.

Кратность нуля $-s_e$ в различных адъюнктах, в общем случае, разная. Этим обуславливается различие свойств компактности параметров трехполюсника [2].

В данной статье рассматриваются различные возможные комбинации кратности нуля $-s_e$ (ККН) в адъюнктах Δ, Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12} и Δ_{1122}, их связи со свойствами компактности параметров и условия их реализации при наличии общего нуля, исходя из понятия уравновешенной согласованной цепи (УС-цепи) [3].

2. Комбинации кратности нуля и свойства компактности

Обозначим кратности нуля $-s_e$ в адъюнктах Δ, Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{1122} и Δ_{12} через a, b, c, d и α соответственно. Так как

$$Z_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}; \quad Z_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}; \quad Y_{11} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{1122}}; \quad Y_{22} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{1122}}$$

представляют собой входные параметры RC - цепи, то

$$(a-b) \in L; \quad (a-c) \in L; \quad (b-d) \in L; \quad (c-d) \in L, \tag{2}$$

где

$$L = \{-1,\ 0,\ 1\}.$$

С другой стороны, адъюнкты связаны между собой через формулу Якоби:

$$\Delta_{11} \cdot \Delta_{22} - \Delta \cdot \Delta_{1122} = \Delta_{12}^2 . \tag{3}$$

Следовательно, одну адъюнкту, например Δ_{12}, можно считать зависимой от остальных. Учитывая (3), выражаем кратность нуля $-s_e$ в Δ_{12} через кратности нуля в остальных адъюнктах следующим образом:

$$\alpha = \begin{cases} t^{\otimes}; \ \geq (t+1)^{\otimes\otimes}, & \text{если } a+d = b+c = 2t; \\ (t+1)^{\otimes}; \ \geq (t+2)^{\otimes\otimes}, & \text{если } a+d = b+c = 2t+1; \\ t^{\otimes}, & \text{если } a+d \neq b+c \text{ и } \min(a+d, b+c) = 2t; \\ -^{\otimes\otimes\otimes}, & \text{если } a+d \neq b+c \text{ и } \min(a+d, b+c) = 2t+1. \end{cases} \tag{4}$$

где $t = 0, 1, 2, \ldots,$

$\otimes$ – кратность α без дополнительных условий на Δ, Δ_{11}, Δ_{22} и Δ_{1122};

$\otimes\otimes$ – кратность α при дополнительных условиях на Δ, Δ_{11}, Δ_{22} и Δ_{1122};

$\otimes\otimes\otimes$ – отсутствие (невозможность существования) соответствующей ККН $a\,b\,c\,d\,\alpha$.

Из выражений (3) и (4) следует, что при $a+d=b+c=2t+1$ имеем:

$$^*\left(\frac{\Delta_{11}\cdot\Delta_{22}}{\Delta\cdot\Delta_{1122}}\right)=1;\ {}^*Y_{11}\cdot{}^*Z_{11}=1;\ {}^*Y_{22}\cdot{}^*Z_{22}=1, \qquad (5)$$

Таблица I

№	$a'\,b'\,c'\,d'\,\alpha'$	Свойства компактности
I	0 0 0 0 $\geqslant$0	———
2	I 0 0 0 0	Z – параметры имеют компактный полюс
3	0 I 0 0 0	G – " " " "
4	0 0 I 0 0	H – " " " "
5	0 0 0 I 0	Y – " " " "
6	I 0 0 I 0	Z- и Y – параметры имеют компактный полюс
7	0 I I 0 0	G- и H- " " " "
8	I I 0 0 $\geqslant$I	Z- и G – параметры имеют псевдокомпактный полюс
9	I 0 I 0 $\geqslant$I	Z- и H – " " "
I0	0 I 0 I $\geqslant$I	G- и Y- " " "
II	0 0 I I $\geqslant$I	H- и Y- " " "
I2	2 I I 0 $\geqslant$I	Z – параметры имеют некомпактный полюс
I3	I 2 0 I $\geqslant$I	G – " " " "
I4	I 0 2 I $\geqslant$I	H – " " " "
I5	0 I I 2 $\geqslant$I	Y – " " " "

где $$^{*}f = f(s)\big|_{s=-s_e}.$$

Учитывая (4), получим для кратности общего нуля выражение:

$$N = \min(a,b,c,d,e) = \min(a,b,c,d). \qquad (6)$$

После вычитания из a, b, c, d и α кратности общего нуля N получим т.н. редуцированные кратности нуля, которые можно определить, исходя из параметров цепи. Обозначим их через

$$a'=a-N;\ b'=b-N;\ c'=c-N;\ d'=d-N;\ \alpha'=\alpha-N, \qquad (7)$$

а для ККН воспользуемся следующими равноценными обозначениями:

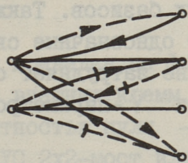
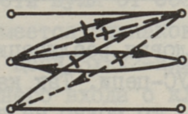
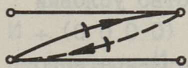
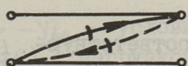
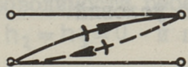
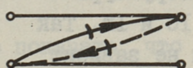
$$(a\,b\,c\,d\,\alpha)=(a'+N,\ b'+N,\ c'+N, d'+N, \alpha'+N)=(a'b'c'd'\alpha')+N. (8)$$

Для простоты можно из выражения ККН опустить кратность нуля в зависимой адъюнкте Δ_{12}. Согласно формулам (2) и (4) можно в случае RC-трехполюсника различить 15 различных ККН, которые внесены в таблицу 1.

ККН, отличающиеся только величиной N, считаем эквивалентными, поэтому в таблице 1 приведены только редуцированные кратности a', b', c', d' и α'.

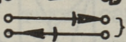
В таблице 1 представлены также свойства компактности параметров при различных ККН, причем понятия компактности, псевдокомпактности и некомпактности, введенные в [2], расширены на G- и H-параметры цепи. Оказывается, что Z-, G-, H- и Y-параметры являются совершенно равноценными относительно свойств компактности. Так как F-параметры имеют существенное отличие от упомянутых систем параметров (F-параметры RC-цепи могут иметь и комплексные полюсы), то для них свойства компактности не определяются. Рассмотренные свойства компактности определены в случае симметричного базиса параметров (Y_{12}, Y_{23}, Y_{13}) [2]. Для переноса понятий компактности, псевдокомпактности и некомпактности на приведенный случай использовались связи между ККН базисов адъюнкт Δ, Δ_{13}, Δ_{23}, Δ_{12}, Δ_{1122} (базис I - соответствует симметричному представлению трехполюсника) и Δ, Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12}, Δ_{1122} (базис II - соответствует представлению трехполюсника в виде двухпорта). Эти связи представлены в таблице 2. Номер в скобках при каждой ККН в таблице 2 является порядковым номером этой ККН в таблицах 2 из [2] (базис I)и 1 (базис II). Для более точного определения связей некоторые

Таблица 2

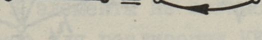
Номер части графа	ККН базиса I ($\Delta,\Delta_{13},\Delta_{23},\Delta_{12},\Delta_{1122}$)	Граф связей	ККН базиса II ($\Delta,\Delta_{11},\Delta_{22},\Delta_{12},\Delta_{1122}$)
I			0 I I 0 0 (7)
	0 0 0 0 0 (I3)		0 0 0 0 0 (Iа)
	0 0 0>I 0 (I2)		0 0 0>I 0 (Iб)
			0 I 0 0 0 (3)
2	I 0 0 0 I (II)		I 0 0 0 I (6)
	I 0 I I I (I0)		I 2 0 I I (I3а)
	I 0 2>2 I (9)		I 2 0>2 I (I3б)
3	I 0 0 0 0 (4)		I 0 0 0 0 (2)
	I 0 I>I 0 (3)		I I 0>I 0 (8)
4	0 0 0 0 I (8)		0 0 0 0 I (5)
	0 0 I>I I (7)		0 I 0>I I (I0)
5	2 I I I 0 (I)		2 I I I 0 (I2а)
	2 I I>2 0 (2)		2 I I>2 0 (I2б)
6	0 I I I 2 (5)		0 I I I 2 (I5а)
	0 I I>2 2 (6)		0 I I>2 2 (I5б)

Обозначения в таблице 2:

A  B — ККН A соответствует ККН B;

 — соответствие имеет место при перемене адъюнкт Δ_{12}, Δ_{23} и Δ_{13} базиса I;

 — соответствие имеет место при дополнительных условиях на адъюнкты исходного базиса;

 .

ККН базиса II (№ I, I2, I3 и I5) разложены на части а и б; в то же время опущены ККН № 4, 9, II и I4, так как из-за формальной симметрии между Δ_{11} и Δ_{22} достаточно рассматривать ККН № 3, 8, I0 и I3.

Как видно из таблицы 2, граф связей распадается на компоненты (части), поэтому отсутствуют связи между ККН отдельных групп обоих базисов. Также оказывается, что в общем случае отсутствуют однозначные связи между ККН различных базисов, однако это не затрудняет определения свойств компактности Z-, G-, H- и Y-параметров.

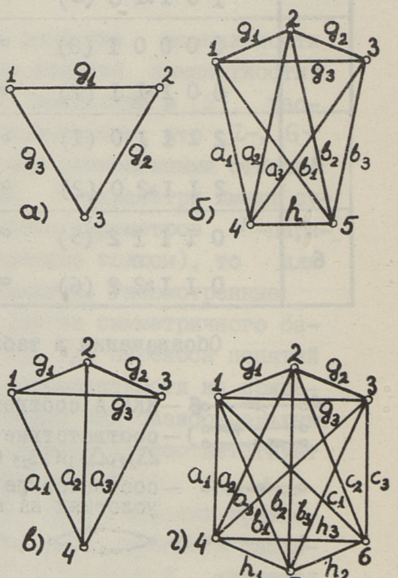
3. Условия реализации ККН при наличии общего нуля

Рассмотрим условия реализации ККН $(a'b'c'd')+N$ базиса II, исходя из понятия УС-цепи. Так как исследуется RC-цепь на частоте $s=-s_e$, то можно ее заменить $\pm R$-цепью.

Найдем количество условий для реализации ККН $(0\ 0\ 0\ 0)+N$, т.е. для реализации N-кратного общего нуля.

а) $N=0$. Пример соответствующей $\pm R$-структуры приведен на фиг. Iа. Количество условий реализации $H'=0$.

б) $N=I$. Примеры структуры приведены на фиг. Iб и Iв. Так как кратность нуля не зависит от соединения внешних клемм, последние должны образовать вход моста, имеющий равновесие при $s=-s_e$. Ввиду того, что $N=I$, в данном случае имеем дело с 3x2-мостом [3], причем клеммы I, 2 и 3 образуют один вход моста, а другой вход образуется, например, клеммами (узлами) 4 и 5 (фиг. Iб) или I и 4 (фиг. Iв). В то же время двухклеммный вход должен быть согласован с нагрузкой.



Фиг. 1.

При структуре Iб имеем следующие условия:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \text{ – условия равновесия;}$$

$$h = -y_{45} \text{ – условие согласованности;}$$

где y_{45} – входная проводимость клеммной пары (порта) 4 и 5 при $h = 0$.

Итак, $H' = 3$

в) $N = 2$. Пример структуры приведен на фиг. Iг. В данном случае после закорачивания внешних клемм I, 2 и 3 должна образоваться УС-цепь с кратностью нуля $-s_e$ в определителе цепи, равной 2, т.е. УС 2x2-мост или УС 3x0-мост. Учитывая независимость кратности нуля от соединения внешних клемм (во всех адъюнктах имеется одинаковая кратность нуля), имеем, следовательно, в цепи 3x2x2-или 3x3-мост, все входы которого, кроме внешнего входа с клеммами I,2,и 3, согласованы с нагрузкой. Для структуры фиг. Iг имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}; \\ &\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3}, \end{aligned}\right\} \text{– условия равновесия 3x3-моста}$$

$h_1 = -y_{45}$; $h_2 = -y_{56}$; $h_3 = -y_{46}$ – условия согласования входа моста (клеммы 4, 5 и 6) с нагрузкой.

Здесь y_{45}, y_{56} и y_{46} – проводимости ребер между соответствующими клеммами при $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ и при исключении клемм I, 2 и 3.

Следовательно, $H' = 7$.

Аналогичным способом можно показать, что при кратности общего нуля, равной N, имеем дело с $N+1$ -входным уравновешенным 3x2x2x...x2-мостом, все N двухклеммных входов которого согласованы с нагрузкой (В примере с $N = 2$ согласованный со стороны одного входа уравновешенный 3x3-мост также заменим 3x2x2-мостом [3]). Последний, в свою очередь, можно рассматривать как УС-цепь с первоначальной кратностью нуля $N + 2$, у которой расстроены элементы (дисторы) между тремя внешними клеммами, т.е. соответствующие 3 элемента не согласованы с входом. Следовательно, требуемое для реализации ККН (0 0 0 0) + N количество условий будет:

$$H_0' = H - 3 = \frac{(N+2)(N+3)}{2} - 3 = \frac{N(N+5)}{2}. \tag{9}$$

Количество условий в приведенных примерах согласуется с выражением (9). Таким же путем можно найти количество условий реализации для других ККН из таблицы I. Оказывается, что по количеству условий реализации все ККН делятся на 4 группы:

$$
\begin{aligned}
&\text{I) ККН № I;} && H' = H_0'; \\
&\text{2) ККН № } 2 \div 5; && H' = H_0' + 1; \\
&\text{3) ККН № } 6 \div \text{II}; && H' = H_0' + 2; \\
&\text{4) ККН № I2} \div \text{I5}; && H' = H_0' + 3.
\end{aligned}
\tag{IO}
$$

Анализ показывает, что для реализации общего нуля кратности N требуется выполнение $H_0' = N(N+S)/2$ условий, независимо от того, имеется ли в параметрах нуль или полюс $s_в$ т.е. независимо от ККН. Чтобы реализовать компактный полюс в Z-, G-, H- или Y-параметрах, требуется, независимо от кратности общего нуля, кроме выполнения условий реализации последнего и выполнение одного дополнительного условия. Для реализации компактного полюса одновременно в двух параметрах (Z и Y или G и H) следует выполнить два дополнительных условия. Также реализуется при выполнении двух дополнительных условий псевдокомпактный полюс в Z-, G-, H- и Y-параметрах, а для реализации некомпактных полюсов в этих параметрах требуется выполнение трех дополнительных условий.

При увеличении кратности общего нуля количество условий по (9) быстро растет. Обозначив количество условий H_0' при кратности N общего нуля через $H_{0,N}'$, получим прирост количества условий при увеличении кратности общего нуля на единицу равным

$$\Delta H_0' = H_{0,N+1}' - H_{0,N}' = N + 3. \tag{II}$$

Здесь уместно коротко остановиться на общем случае, т.е. на случае Т-полюсника ($T \geq 2$). Аналогично рассмотренному случаю трехполюсника оказывается, что при наличии общего нуля кратности N внешние Т-клеммы образуют вход уравновешенного моста, так что при согласовании этого входа с нагрузкой (т.е. при соответствующем выборе проводимостей между Т внешними клеммами) образуется УС-цепь с кратностью нуля $N+T-1$. Для реализации такой цепи требуется выполнение

$$H_{N+T-1} = \frac{(N+T)(N+T-1)}{2}$$

условий.

Так как для создания общего нуля согласование рассмотренного входа не требуется, реализуется N-кратн... общий нуль Т-полюсника при выполнении

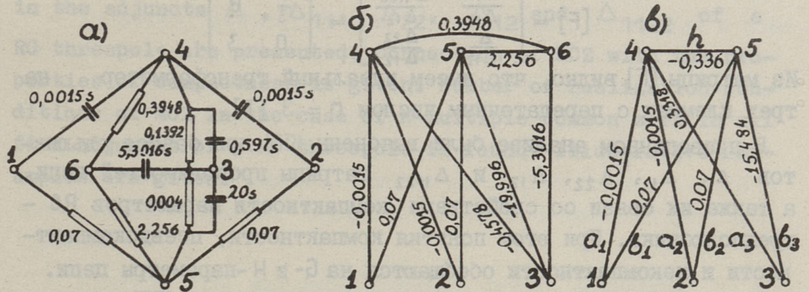
$$H'_o = H'_{o,N} = H_{N+T-1} - T(T-1)/\ \ \ )/2 \qquad (I2)$$

условий, причем

$$\Delta H'_o = H_{N+T} - H_{N+T-1} = N + T. \qquad (I3)$$

Заменяя в формуле (I3) Т = 3, получим выражение (II).

Пример I. Рассмотрим RC-трехполюсник из [4] с ККН (0 0 0 0) + I при $s = -I$. Проверим выполнение условий равновесия и согласования. Структура цепи приведена на фиг. 2а.



Фиг. 2.

Соответствующая $\pm R$-цепь для частоты $s = -I$ приведена на фиг. 2б (цифры обозначают проводимости ребер при $s = -I$). Исключая узел 6, получим приведенную на фиг. 2в структуру. Аналогично приведенной на фиг. Iб цепи получим:

а) условия равновесия

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{-0{,}0015}{0{,}07} = -0{,}02143; \qquad \frac{a_3}{b_3} = \frac{0{,}3318}{-15{,}484} = -0{,}02143,$$

следовательно условия равновесия удовлетворены;

б) условие согласования

$$h = -y_{45}$$

$$y_{45} = \frac{(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)}{a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3} = \frac{0{,}3288\,(-15{,}344)}{0{,}3288 - 15{,}344} = 0{,}336.$$

Так как $h = -0{,}336$, выполняется и условие согласования нагрузки.

Пример 2. Рассмотрим реализацию ККН (I 0 0 I) + 0, приняв за основу $\pm R$ - структуру фиг. Iв.

Условия реализации:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ g_1 = -y_{12} \end{cases}$$

где y_{12} - входная проводимость порта I2 при $g_1 = 0$; следовательно

$$y_{12} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1 a_2 (g_2 + g_3) + a_3 (a_1 g_2 + a_2 g_3)}{(a_1 + a_2) a_3}.$$

Выберем $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $g_2 = I$, $g_3 = I$, тогда по приведенным выражениям $a_1 = -9$ и $g_1 = -7$. Для полученных численных значений имеем:

$$\Delta = 0; \quad \Delta_{11} = -9; \quad \Delta_{22} = -81; \quad \Delta_{12} = -27; \quad \Delta_{1122} = 0.$$

Z- и Y-матрицы, следовательно, в данном случае не существуют. Выпишем F-матрицу цепи (базис клеммы 3):

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} & \frac{\Delta_{1122}}{\Delta_{12}} \\ \frac{\Delta}{\Delta_{12}} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Из матрицы $[F]$ видно, что имеем идеальный трансформатор на трех клеммах с передаточным числом $n = 3$ [I].

В приведенном анализе были выяснены ККН при базисе адъюнктов Δ, Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12} и Δ_{1122} матрицы проводимостей цепи, а также их связи со свойствами компактности параметров RC - трехполюсника. При этом понятия компактности, псевдокомпактности и некомпактности обобщаются на G- и H-параметры цепи. Найдено количество условий для реализации любых ККН, следовательно и свойств компактности параметров, при наличии общего нуля с кратностью N. Некоторые результаты обобщены на случай Т-полюсника ($T \geq 2$).

Литература

I. Л. д е П и а н. Теория линейных активных цепей. "Энергия", М.-Л., 1967.

2. В.Р. М я н н а м а. Свойства компактности RC-трехполюсников II. Труды ТПИ, № 334, 1972, стр. 31-45.

3. В.Р. М я н н а м а. Кратные нули в определителе RC-цепи. В наст.сб., стр. 39.

4. A. F i a l k o w. A limitation of the series-parallel structure. IEEE Trans. Circuit Theory, 1968, v. CT-15, No 2, pp. 124-132.

V. Mãnnama

On the Real Zeros in the Adjuncts of RC Threepoles

Summary

Possible multiplicity combinations of a real zero (MCZ) in the adjuncts Δ, Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12} and Δ_{1122} of a RC threepole are presented. Connection of MCZ with the properties of compactness is given. Number of realization conditions of MCZ in the case of N-multiple common zero in all five adjuncts of a RC threepole is found. Illustrative examples are given.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 621.372.061.1

В.Р. Мяннама

КРАТНЫЕ НУЛИ В ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ RC-ЦЕПИ

Разность кратностей нуля в многочленах числителя и знаменателя выражений входных параметров RC-цепи не превышает, как известно, единицу [1]. Входные параметры выражаются как отношения двух определителей матриц проводимостей [2], соответствующих холостому ходу (XX) и короткому замыканию (КЗ) входных клемм, причем эти определители могут иметь неположительные вещественные нули с кратностью и выше единицы.

Кратные нули являются одной из причин появления т.н. общих нулей, которые сокращаются во всех параметрах цепи [3], причем реализация RC-цепи по таким параметрам без учета общих нулей может оказаться невозможной [4].

В данной статье рассматриваются условия возникновения кратных нулей в определителе матрицы проводимостей RC-цепи (в определителе RC-цепи) и возможности их реализации, исходя из основных свойств обратимых RC-цепей.

I. Общие понятия

Пусть определитель RC-цепи содержит кроме других N-кратный нуль s_e. Такое свойство определителя Δ отмечаем следующим образом [5]:

$$\Delta \simeq (s+s_e)^N. \tag{I}$$

Закорачивая клеммы k' и k элемента цепи (дистора) x_k, получим:

$$\Delta(kk') \simeq (s+s_e)^{N+\alpha}. \tag{2}$$

Так как

$$Y_{kk'} = \frac{\Delta}{\Delta(kk')} \tag{3}$$

представляет собой входную проводимость цепи, то:

$$\alpha \in \left\{-1,\ 0,\ 1\right\}. \tag{4}$$

Следовательно, при изменении проводимости одного дистора кратность нуля определителя цепи может измениться максимально на единицу, т.е. измениться может только один из N одинаковых нулей, а остальные N – I нулей не зависят от x_k.

Ввиду того, что емкости RC-цепи представляют собой при $s=-s_e$ отрицательные проводимости $-s_e C_i$, можем при частоте $-s_e$ рассматривать RC-цепь как $\pm R$-цепь.

Предположим, что $\Delta \simeq (s+s_e)^1$. Обозначая для любой функции от s

$$f(s)\Big|_{s=-s_e} = {}^*f, \tag{5}$$

можем написать:

$${}^*\Delta = {}^*(x_k \cdot \Delta(kk') + \Delta(\overline{kk'})) = {}^*x_k \cdot {}^*\Delta(kk') + {}^*\Delta(\overline{kk'}) = 0, \tag{6}$$

где ${}^*x_k$ – проводимость дистора x_k между клеммами k и k' при $s=-s_e$;

${}^*\Delta(kk')$ – определитель цепи при КЗ клемм k и k' при $s=-s_e$.

${}^*\Delta(\overline{kk'})$ – определитель цепи при XX клемм k и k' при $s = -s_e$.

Условиями реализации $\Delta \simeq (s+s_e)^1$ будут:

$${}^*x_k = -\frac{{}^*\Delta(\overline{kk'})}{{}^*\Delta(kk')} = -{}^*Y_{kk'}, \tag{7}$$

либо

$${}^*\Delta(kk') = 0 \quad \text{и} \quad {}^*\Delta(\overline{kk'}) = 0. \tag{8}$$

Итак, однократный нуль $-s_e$ реализуется при разных системах условий (7) и (8), причем количество условий в этих системах также разное. Можно показать, что многократные нули имеют такое же свойство. Системы условий, гарантирующие реализацию нуля с данной кратностью и содержащие минимальное количество условий H, будем называть <u>минимальными системами условий</u>. В данном случае минимальным является условие (7), в котором величина ${}^*Y_{kk'}$ представляет собой входную проводимость цепи на клеммах k и k' дистора x_k при $x_k = 0$ и $s=-s_e$. Выбирая ${}^*x_k$ равной величине $-{}^*Y_{kk}$, реализуем в цепи свойство $\Delta \simeq (s+s_e)^1$. Такую настройку дистора x_k называем <u>согласованием нагрузки</u>.

Рассмотрим условия реализации $\Delta \simeq (s+s_e)^2$. Учитывая (3) и (4), получим из разложения (6)

$$^*\Delta(\overline{kk'})=0;\quad ^*\Delta(kk')=0;\quad ^*x_k=-^*\!\left(\frac{\Delta(\overline{kk'})}{\Delta(kk')}\right)=-^*Y_{kk'},\tag{9}$$

либо

$$\Delta(\overline{kk'})\simeq(s+s_e)^2;\ \Delta(kk')\simeq(s+s_e)^1;\ ^*x_k=0\cdot\tag{I0}$$

В системе (9) количество условий Н = 3, а в системе (I0) Н > 3, так как эта система охватывает кроме условий реализации $\Delta(\overline{kk'})\simeq(s+s_e)^2$ (для этого требуется по (9) 3 условия) и другие условия. Нетрудно написать и остальные возможные системы условий для реализации $\Delta\simeq(s+s_e)^2$ и показать, что аналогично системе (I0) и в этих системах Н > 3. Поэтому (9) представляет собой минимальную систему условий.

Разложив $\Delta(kk')$ и $\Delta(\overline{kk'})$ по другому элементу цепи x_l, получим из (9):

$$\begin{aligned}^*\Delta(kk')&={}^*x_l\cdot{}^*\Delta(kk',ll')+{}^*\Delta(kk',\overline{ll'})=0;\\ ^*\Delta(\overline{kk'})&={}^*x_l\cdot{}^*\Delta(\overline{kk'},ll')+{}^*\Delta(\overline{kk'},\overline{ll'})=0,\end{aligned}\tag{II}$$

откуда

$$^*x_l=-\frac{^*\Delta(kk',\overline{ll'})}{^*\Delta(kk',ll')}=-\frac{^*\Delta(\overline{kk'}\,\overline{ll'})}{^*\Delta(\overline{kk'},ll')}=-^*Y_{ll'}\cdot\tag{I2}$$

Выражение из (I2)

$$\frac{\Delta(kk',\overline{ll'})}{\Delta(kk',ll')}=\frac{\Delta(\overline{kk'},\overline{ll'})}{\Delta(\overline{kk'},ll')}\tag{I3}$$

представляет собой условие равновесия моста, входами которого являются клеммные пары (порты) kk' и ll' элементов x_k и x_l, а выражения из (9) и (I2)

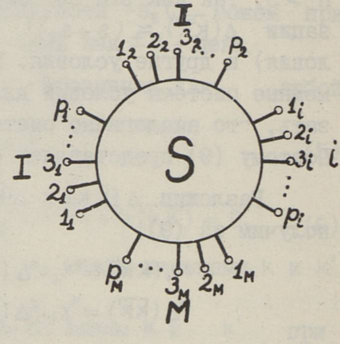
$$^*x_k=-^*Y_{kk'};\quad ^*x_l=-^*Y_{ll'}\tag{I4}$$

являются условиями согласования нагрузок с входами kk' и ll' (дисторы x_k и x_l рассматриваются как нагрузки остальной цепи). Аналогично можно показать наличие трехкратного нуля s_e в определителе Δ, если цепь представляет собой уравновешенный при $s=-s_e$ мост с тремя портами, с которыми согласованы нагрузки. Такую цепь будем в последующем называть <u>уравновешенной согласованной цепью</u> или <u>мостом</u> (<u>УС-цепь</u> или <u>УС-мост</u>). Покажем, что в случае $\Delta\simeq(s+s_e)^N$ цепь является при $s=-s_e$ УС-мостом.

2. Уравновешенные мостовые цепи

Рассмотрим обобщенную мостовую цепь с М входами, причем вход i ($i = I,2\ldots, M$) состоит из p_i клемм ($p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_M$ -мост) (фиг. I).

Уравновешенным при $s=-s_e$ М-входным мостом будем называть цепь, любые параметры любого из М входов которой не зависят при частоте $s=-s_e$ от параметров нагрузок остальных входов. Можно показать, что необходимым и достаточным условием для равновесия М-входного моста является равновесие всех 2Х2-мостов, портами которых являются независимые порты разных входов. Так как



Фиг. 1.

для равновесия 2х2-моста требуется выполнение условия (I3), т.е. одного условия, то общее количество условий равновесия М-входного моста будет:

$$P = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{M} p_i' p_j' , \tag{I5}$$

где $p_i' = p_i - 1$ ($i=1,2,\ldots,M$) равно количеству независимых портов входа i. В частном случае $p_I=p_2=\ldots p_M=2$ (М-порт-мост) получим:

$$P = \frac{M(M-1)}{2}. \tag{I6}$$

Рассмотрим случай 2х2-моста. Представим условие равновесия (I3) в виде:

$$^*\Delta(kk', \overline{ll'}) \cdot {}^*\Delta(\overline{kk'} \cdot ll') = {}^*\Delta(\overline{kk'}, \overline{ll'}) \cdot {}^*\Delta(kk', ll'). \tag{I7}$$

Для обратимых цепей:

$$\Delta(kk', \overline{ll'}) \cdot \Delta(\overline{kk'}, ll') - \Delta(\overline{kk'}, \overline{ll'}) \cdot \Delta(kk, ll') = \Delta^2(kl, k'l'), \tag{I8}$$

где $\Delta(kl, k'l') = \Delta_{kl,k'l'}$ - адъюнкта матрицы узловых проводимостей цепи.

Учитывая (I7) и (I8), при равновесии моста получим:

$$\Delta(kl, k'l') = 0. \tag{I9}$$

Выражение (I9) является, следовательно, также условием равновесия 2х2-моста. Напишем теперь множители левой стороны выражения (I7) формально:

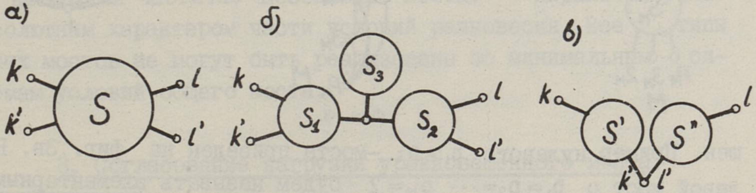
$$ {}^{*}\Delta(kk',\overline{ll'}) = \Delta_1(kk')\cdot\Delta_2(\overline{ll'})\cdot\Delta_3; \quad {}^{*}\Delta(\overline{kk'}ll') = \Delta_1(\overline{kk'})\cdot\Delta_2(ll')\cdot\Delta_3. \quad (20) $$

Из выражения (I7) получим:

$$ \Delta(\overline{kk'},\overline{ll}) = \Delta_1(\overline{kk'})\cdot\Delta_2(\overline{ll'})\cdot\Delta_3; \quad \Delta(kk',ll') = \Delta_1(kk')\cdot\Delta_2(ll')\cdot\Delta_3. \quad (2I) $$

Входные параметры выражаются на основе (20) и (2I) в виде:

$$ {}^{*}Y_{kk'} = \frac{\Delta_1(\overline{kk'})}{\Delta_1(kk')}; \quad {}^{*}Y_{ll'} = \frac{\Delta_2(\overline{ll'})}{\Delta_2(ll')}. \quad (22) $$



Фиг. 2.

Следовательно, можно уравновешенный мост (фиг. 2а) условно рассматривать как цепь, состоящую из трех частей, которые соединены в одном узле (фиг. 2б), причем:

$\Delta_1(kk')$ – определитель цепи s_1 при КЗ клемм и при $s=-s_e$

$\Delta_1(\overline{kk'})$ – определитель цепи s_1 при ХХ клемм и при $s=-s_e$

$\Delta_2(ll')$ – определитель цепи s_2 при КЗ клемм и при $s=-s_e$

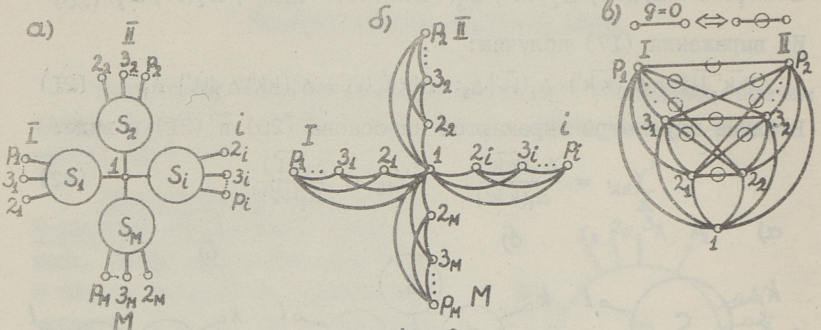
$\Delta_2(\overline{ll'})$ – определитель цепи s_2 при ХХ клемм и при $s=-s_e$

Δ_3 – определитель цепи s_3

Общим для частей можно формально выбрать любой узел. Поэтому можно цепь фиг. 2б представить в виде фиг. 2в, где общим узлом является одна из клемм обоих портов (части s_1 и s_3 образуют s', а $s''=s_2$).

Аналогично можем уравновешенный при $s=-s_e$. М-входной мост (фиг.I) представить в виде фиг. 3а, где части $s_1 \dots s_M$ связаны через общую для всех входов клемму. Исключив из этих этих частей все внутренние узлы, получим структуру фиг. 3б.

Рассмотрим теперь М-входной нулевой мост, определяя его как цепь с М входами i (i = I,2,..., М), которые состоят из p_i клемм (одна клемма является общей для всех входов), причем проводимости всех дисторсв, находящихся между клеммами разных входов, равны нулю при $s=-s_e$ (внутренние узлы отсутствуют). Следовательно, при $s=-s_e$ мост уравнове-



Фиг. 3.

шен. Пример нулевого $p_1 \times p_2$ -моста приведен на фиг. 3в. Нулевой мост с $p_1 = p_2 = \cdots p_M = 2$ будем называть элементарным М-входным мостом. Найдем количество условий равновесия нулевого моста. Общее количество ребер в структуре нулевого моста

$$Q = \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} p_i' + 1\right) \cdot \sum_{i=1}^{M} p_i'}{2}. \tag{23}$$

Количество ребер между клеммами входа i :

$$Q_{вх}^{i} = \frac{p_i'(p_i'+1)}{2}. \tag{24}$$

Общее количество входных ребер:

$$Q_{вх} = \sum_{i=1}^{M} \frac{p_i'(p_i'+1)}{2}.$$

Количество нулевых ребер в структуре моста:

$$Q_0 = Q - Q_{bx} = \sum_{i,j=1}^{M} p_i' \cdot p_j' = P. \tag{25}$$

Итак, количество нулевых ребер, следовательно и количество условий равновесия нулевого моста равно количеству условий равновесия общего моста. Очевидно нулевой мост является разновидностью общего моста.

Частным случаем уравновешенного моста является абсолютно уравновешенный мост, равновесие которого не зависит от частоты s . Следовательно,

$$\Delta(kl, k'l') \equiv 0 \tag{26}$$

для всех независимых портов kk' и ll' разных входов.

Так как в общем случае

$$\Delta(kl, k'l') = s^m a_m + s^{m-1} a_{m-1} + \ldots + s_1 a_1 + a_0, \tag{27}$$

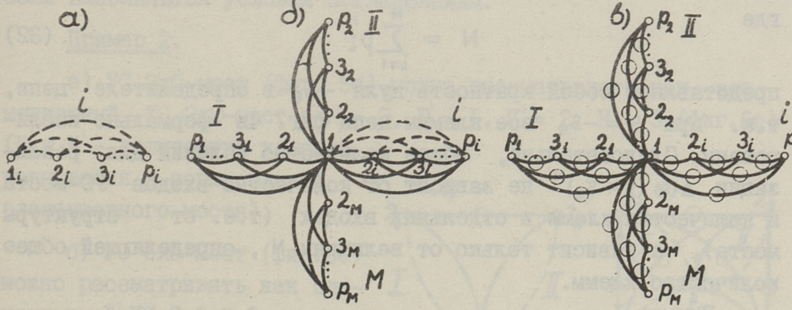
то по выражению (26)

$$a_0 = 0;\ a_1 = 0, \ldots, a_{m-1} = 0;\ a_m = 0, \tag{28}$$

т.е. количество условий будет на m больше, чем в случае общего моста для таких же портов (см. выражение (19)). Следовательно, для реализации абсолютного моста требуется выполнение большего количества условий, чем для реализации общего уравновешенного моста. Между общими и абсолютными мостами вмещаются частично абсолютные мосты, характеризуемые абсолютным характером части условий равновесия. Все типы таких мостов не могут быть реализованы по минимальным системам условий общего моста.

3. Согласование нагрузки уравновешенного моста

Нагрузкой уравновешенного моста для входа i, состоящего из p_i клемм, является RC-цепь с p_i внешними клеммами. Так как согласование нагрузки имеет место при $s = -s_e$ (особым случаем является абсолютное согласование нагрузки на всех частотах), то нагрузку можно также рассматривать как $\pm R$-цепь.



Фиг. 4.

Представим уравновешенный мост в виде фиг. 3б, а нагрузку входа i в приведенном на фиг. 4а виде (исключены внутренние узлы). Нагрузку считаем согласованной с входом i, если при соединении ее с входом возникают между всеми его клеммами ребра, имеющие при $s = -s_e$ нулевую проводимость (фиг. 4б).

Условия согласования для входа i:

$$^{*}X^{i}_{jk} = -{}^{*}Y^{i}_{jk};\quad j, k = 1, 2, \ldots, p_i;\ j < k, \tag{29}$$

где ${}^{*}Y^{i}_{jk}$ и ${}^{*}X^{i}_{jk}$ – проводимости ребер между клеммами j_i и k_i входа i и его нагрузки соответственно при $s=-s_e$ (по фиг. 3в и 4а).

Количество условий согласования нагрузки входа i равно количеству ребер между входными клеммами (выражение (24)). Общее количество условий согласования K будет по (27):

$$K = Q_{bx} = \sum_{i=1}^{M} \frac{p_i'(p_i'+1)}{2}. \tag{30}$$

Формально можно по (30) определить количество условий согласования и для $p_1 \times 0$ -моста, т.е. для неуравновешенной цепи, имеющей p_1 внешних клемм. Сущность такого определения относительно УС-цепей выяснится в последующем.

4. Некоторые свойства УС-цепей

Пусть для M входов мостовой цепи выполняются все условия равновесия и согласования (фиг. 4в). Тогда общее количество условий

$$H = P + K = \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} p_i' + 1\right)\sum_{i=1}^{M} p_i'}{2} = \frac{N(N+1)}{2}, \tag{31}$$

где

$$N = \sum_{i=1}^{M} p_i' \tag{32}$$

представляет собой кратность нуля $-s_e$ в определителе цепи, т.к. при $s=-s_e$ все клеммы цепи фиг. 4в формально изолированы. Следовательно, общее количество условий для реализации $\Delta \simeq (s+s_e)^N$ не зависит от количества входов УС-моста и количества клемм в отдельных входах (т.е. от структуры моста), а зависит только от величины N, определяющей общее количество клемм.

Пример I.

а) УС 2х2-мост. $N=\sum p_i' = 2$; $P=1$; $K=2$; $H=3$ (фиг. 5а);

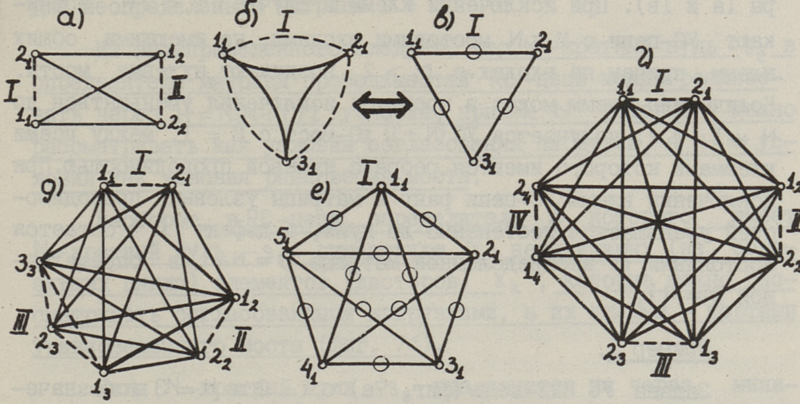
б) УС 3х0-мост. $N=2$; $P=0$; $K=3$; $H=3$ (фиг. 5б,в);

в) УС 2х2х2х2-мост. $N=4$; $P=6$; $K=4$; $H=10$ (фиг. 5г);

г) УС 2х2х3-мост. $N=4$; $P=5$; $K=5$; $H=10$ (фиг. 5д);

д) УС 5х0-мост. $N=4$; $P=0$; $K=10$; $H=10$ (фиг. 5е).

По внешнему виду в примерах Iб и Iд уравновешенный мост отсутствует, так как $P = 0$. Но, исходя из понятия нулевого



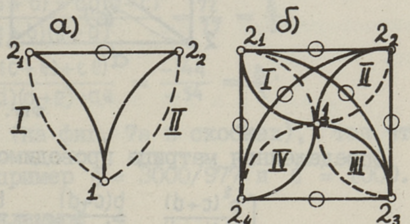
Фиг. 5.

моста, можем одну часть из условий согласования рассматривать как условия равновесия нулевого, например, элементарного моста, а другую – как условия согласования нагрузки этого моста. Следовательно, в данном случае возникает уравновешенный мост при соединении двух неуравновешенных цепей, если выполняются условия согласования.

<u>Пример 2</u>.

а) УС 3х0–мост (фиг. 5б) можно рассматривать как элементарный УС 2х2–мост с $N = 2$, $P' = I$, $K' = 2$, $H = 3$ (фиг.6а) (P' и K' – количества условий равновесия и согласования элементарного моста).

б) УС 5х0–мост (фиг.5е) можно рассматривать как элементарный УС 2х2х2х2–мост с $N = 4$, $P' = 6$, $K' = 4$, $H = I0$ (фиг. 6б).



Фиг. 6.

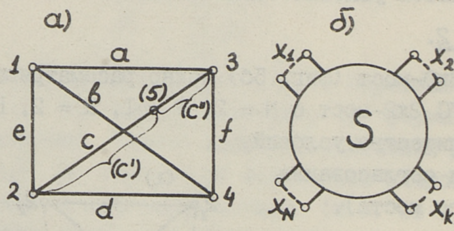
На входе i уравновешенного моста при условии $p_i > 2$ после согласования нагрузки возникает p'_i–входной элементарный мост, так как, согласно вышеприведенному, часть цепи, связанную с входом i, можно рассматривать как $p_i \times 0$–цепь. Поэтому УС-цепь рассматривается как уравновешенный мост с $\sum_{i=1}^{M} p'_i = N$ портами. Если количество внешних клемм $T \geq 2N$, то можно найти N мостовых портов, не имеющих общих клемм (общий УС N–порт-мост – примеры Iа и Iв). При исключении клемм в случае $T < 2N$ возникают УС-цепи с $M < N$ мостовыми входами, не имеющими общих клемм, причем на входах с $p_i > 2$ возникают нулевые мосты. Количество клемм может в процессе исключения уменьшаться до $N + 1$, т.е. получается УС $(N+1)$ x0-мост с $M = 1$, между всеми клеммами которого имеются ребра с нулевой проводимостью. При исключении клемм УС-цепи ранг A матрицы узловых проводимостей уменьшается постепенно до нуля, а дефект D остается постоянным (в неопределенной матрице $D = N+1$, в определенной $D = N$).

Пример 3.

Задана УС 2х2-цепь (фиг. 7а) с $N = 2$ и $H = 3$ (обозначения на фиг. 7.а, приведенные в скобках, не учитываются). Следовательно, 3 ребра (например a, e и f) являются зависимыми, а остальные 3, т.е. b, c, d – независимыми (буквы обозначают также проводимости ребер). Зависимые ребра:

$$a = bc/d \quad \text{– условие равновесия;}$$

$$e = -\frac{b(c+d)}{b+d} \quad \text{и} \quad f = -\frac{c(b+d)}{c+d} \quad \text{– условия согласования.}$$



Фиг. 7.

Определенная матрица проводимостей (базис-клемма 4)

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{b^2(c+d)}{d(b+d)} & \frac{b(c+d)}{b+d} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{b(c+d)}{b+d} & \frac{d(c+d)}{b+d} & -c \\ -\frac{bc}{a} & -c & \frac{c^2(b+d)}{d(b+d)} \end{bmatrix}; \quad A = 1;\ D = N = 2.$$

После исключения любой из клемм I, 2 и 3

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A = 0; \quad D = 2.$$

Для неопределенной матрицы $D = 3$.

Из вышеприведенного следует, что N -кратный нуль $-s_e$ в определителе матрицы проводимостей RC-цепи можно реализовать через $H = N(N+1)/2$ условий, причем N условий можно рассматривать как условия согласования нагрузки, а $H-N$ условий как условия равновесия моста.

Наоборот, в RC-цепи, определитель Δ которого имеет N-кратный нуль $-s_e$, существуют N независимых (не образующих цикла) элементов (дисторов) x_k, которые можно рассматривать согласованными нагрузками, а их клеммы - портами уравновешенного моста (фиг. 7б).

Если N-кратный нуль $-s_e$ реализуется не через минимальную систему условий, то в цепи может находиться уравновешенный при $s = -s_e$ мост с количеством портов $M > N$, причем согласованную нагрузку имеют N из них. Такие цепи можно рассматривать как частично расстроенные УС-цепи.

Пример 4.

Задана УС 2х2-цепь с $\Delta \simeq (s+1)^2$ (фиг.7а). Пусть $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 9/4\,s = -9/4$, $f = 8/3\,s = -8/3$. Удаляем из цепи элемент f и находим входную проводимость порта 34 при различных условиях.

а) $e = \infty$; $\quad {}^*Y_{34} = \dfrac{(a+c)(b+d)}{a+c+b+d} = \dfrac{32}{12} = \dfrac{8}{3}$;

б) $e = 0$; $\quad {}^*Y_{34} = \dfrac{ac(b+d)+bd(a+c)}{(a+b)(c+d)} = \dfrac{72}{27} = \dfrac{8}{3}$;

в) $b = 0$; $\quad {}^*Y_{34} = \dfrac{d(a(c+e)+ce)}{(c+d)(a+e)+ae} = \dfrac{-144}{-54} = \dfrac{8}{3}$.

Пусть ребро c имеет узел 5 (на фиг. 7а в скобках), так что $\dfrac{c' \cdot c''}{c'+c''} = c = 3$. Выбираем, например $c' = 3000/977$ и $c'' = 1000$.

г) Закоротим узел 5 с клеммой 4

$$ {}^*Y_{34} = c'' + \frac{a((e+b)(c'+d)+eb)}{(a+b+e)(c'+d)+(a+b)\cdot e} = 1000 - \frac{26927}{27} = \frac{8}{3}. $$

Следовательно, клеммные пары рассмотренных элементов, а также клеммная пара 45 вместе с клеммами 3 и 4 образуют уравновешенные 2х2-мосты. Также можно показать наличие уравновешенного моста при $s = -s_e$ в случае $\Delta \simeq (s+s_e)^N$.

По приведенному в работе анализу можно сделать следующие выводы:

I. Кратные нули в определителе матрицы проводимостей RC-цепи возникают из-за УС-структуры цепи при $s = -s_e$.

2. При наличии N-кратного нуля в определителе Δ в цепи найдется уравновешенный при $s = -s_e$ M-порт-мост с $M \geq N$.

3. Общее количество условий H для реализации N-кратного нуля $-s_e$ в определителе Δ зависит только от кратности N, т.е. $H = N(N+1)2$.

Полученные результаты относительно кратности нуля в определителе RC-цепи не зависят от количества внешних клемм Т. Вопрос кратности нуля в адъюнктах матрицы проводимостей Т-полюсника с Т = 3 рассматривается в другой статье.

Литература

I. Н. Балабанян. Синтез электрических цепей. М.-Л., ГЭИ, I96I.

2. В.П. Сигорский. Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами. Изд. АН УССР, Киев, I958.

3. В.Р. Мяннама. О компактности RC-трехполюсников II. Труды ТПИ, № 334, I972, стр. 3I-45.

4. A. Fialkow. A limitation of the series-parallel structure. IEEE Trans. Circuit Theory, 1968, v. CT-15, No 2, pp. 124-132.

5. A. Fialkow. The matrix of a transformerless network. Quart. Appl. Math., 1964, v. 22, No 1, pp. 57-70.

V. Mannama

Multiple Zeros in the Determinant of RC-Circuit

Summary

Conditions for realization of N-multiple zeros in the determinant of an RC-circuit are considered and the total number of conditions in the minimal system of conditions is given. It is established that by existence of an N-multiple zero in the determinant Δ the RC-circuit represents at frequence $s = -s_e$ a balanced N-port bridge, the ports of which are matched with a load. The concept of a general M-input bridge is introduced and the total number of balance conditions is found. Illustrative examples are given.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 62-50

А.Э. Кээваллик, Г.Э. Якобсон

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ АВТОНОМНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АВТОМАТОВ

I. Введение

Одно из центральных мест в структурной теории автоматов занимает задача декомпозиции автоматов. В отличие от декомпозиции детерминированных автоматов (ДА), для которых в настоящее время существует ряд серьезных результатов [I, 2], методы декомпозиции вероятностных автоматов (ВА) находятся в стадии интенсивного развития. Большинство методов декомпозиции ВА, например [3], исходят из непосредственного разложения стохастических матриц ВА. В настоящей работе предложен несколько иной способ декомпозиции ВА, заключающийся в представлении заданного ВА в виде детерминированного бернуллиевского автомата (ДБА), декомпозиции ДБА и наконец, в построении декомпозиции ВА на основе полученной декомпозиции ДБА. Предлагаемый способ позволяет для декомпозиции ВА в большей мере использовать существующие методы декомпозиции ДА. Метод используется для последовательной декомпозиции автономного ВА без выхода, но может быть распространен и на другие виды декомпозиции любых ВА.

2. Основные понятия

Вероятностный автомат есть система ВА $= (X, S, Y, \mathcal{M}(X), \lambda)$, где X, S, Y - соответственно, входной алфавит, множество состояний, выходной алфавит; $\mathcal{M}(X) = \{M(x)/x \in X\}$ - множество стохастических матриц; $\lambda : S \times X \to Y$ - функция выходов. В случае отсутствия Y и λ автомат называется автоматом без выхода, а в случае $X = \{x\}$ - автономным.

Пусть заданы два ВА:

$ВА_I = (X_1, S_1, \mathcal{M}_1)$, у которого $S_1 = \{s_1, \ldots, s_m\}$,
$\mathcal{M}_1 = \{M_1(x) / x \in X_1\}$, $M_1(x) = \| p_{ij} \|_1^m$;
$ВА_2 = (X_2, S_2, \mathcal{M}_2)$, у которого $X_2 = X_1 \times S_1$, $S_2 = \{t_1, \ldots, t_n\}$,
$\mathcal{M}_2 = \{M_2(x, s) / x \in X_1, s \in S_1\}$, $M_2(x, s) = \| q_{kl} \|_1^n$.

Последовательной композицией автоматов $ВА_I$ и $ВА_2$ называется автомат $ВА = ВА_I \cdot ВА_2 = (X, S, \mathcal{M})$, где $X = X_I$, $S = S_1 \times S_2$, а стохастические матрицы строятся следующим образом:

$$\mathcal{M} = \{M(x) / x \in X\}$$

$$M(x) = M_1(x) \cdot \{M_2(x, s) / s \in S_1\} = \| r_{ik,jl} \|_1^{mn}$$

$$r_{ik,jl} = p_{ij} \cdot q_{kl};\ p_{ij} \in M_1(x),\ q_{kl} \in M_2(x, s_i).$$

Автомат $ВА = ВА_I \cdot ВА_2$ называется последовательной декомпозицией автомата ВА', если у ВА существует изоморфный автомату ВА' подавтомат.

Вполне аналогично вышеприведенному формулируется понятие последовательной декомпозиции для ДА. Последовательная композиция $ДА = ДА_I \cdot ДА_2 = (X, S, \delta)$ строится следующим образом. Пусть $ДА_I = (X_1, S_1, \delta_1)$ и $ДА_2 = (X_2, S_2, \delta_2)$, причем $X_2 = X_1 \times S_1$. Здесь $\delta_1 : S_1 \times X_1 \to S_1$ и $\delta_2 : S_2 \times X_2 \to S_2$ – функции переходов автоматов $ДА_I$ и $ДА_2$. Как и для ВА $X_2 = X_I$ и $S = S_1 \times S_2$, а для функции δ справедливо $\delta((s,t), x) = (\delta_1(s, x), \delta_2(t, (s, x)))$; $(s, t) \in S$, $x \in X$.

3. Последовательная декомпозиция ДБА

ДБА представляет из себя детерминированный автомат, у которого буквы входного алфавита $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ поступают из бернуллиевского генератора с распределением вероятностей появления букв $P(X) = (p(x_1), \ldots, p(x_k))$. Формально под ДБА без выхода будем понимать систему $ДБА = (X, S, \delta, P(X))$.

В [I] показано, что необходимым и достаточным условием существования для $ДА = (X, S, \delta)$ последовательной декомпозиции $ДА_I \cdot ДА_2$ является наличие на множестве состояний т.н. СП-разбиения π (разбиения с подстановочным свойством). Для СП-разбиения характерно, что все состояния, в которые автомат ДА переходит из состояний, входящих в один блок разбиения π, тоже входят в некоторый один блок разбиения π. Автоматы $ДА_I = (X_1, S_1, \delta_1)$ и $ДА_2 = (X_2, S_2, \delta_2)$ строятся следующим образом: $X_I = X$, $S_1 = \pi$, $X_2 = \pi \times X$, $S_2 = \rho$, где ρ – любое разбиение на множестве S такое, что $\pi \cdot \rho = 0$; $\delta_1(P, x) = P'$, если и только если $\delta(P, x) \subseteq P'$; $P, P' \in \pi$; $\delta_2(Q, (P, x)) = Q'$, если и только если $\delta(Q \cap P, x) \in Q'$; $Q, Q' \in \rho$.

Прежде чем перейти к декомпозиции ДБА, поясняем понятие независимости двух разбиений. Пусть задан ДБА $= (X, S, \delta, P(X))$. Зная $P(X)$, можно вычислить величину $p(s, E)$ – вероятность перехода ДБА из состояния $s \in S$ во множество состояний $E \subseteq S$:

$$p(s, E) = \sum_{x \in X'} p(x); \quad X' = \{x \in X / \delta(s, x) \in E\}.$$

Разбиения π и ρ на множестве состояний ДБА называются независимыми, если

$$p(s, E) \cdot p(s, F) = p(s, E \cap F)$$

для любого $s \in S$ и любых $E \in \pi$, $F \in \rho$.

<u>Теорема I</u>. ДБА $= (X, S, \delta, P(x))$ разложим на последовательную декомпозицию ДБА$_I$ · ДБА$_2$, если и только если разложим автомат ДА $= (X, S, \delta)$ и разбиения π, ρ, на основе которых строится декомпозиция для ДА, являются независимыми.

В необходимости условия независимости разбиений не трудно убедиться. Так как $\pi \cdot \rho = 0$, то всегда либо $E \cap F = r$, $r \in S$ либо $E \cap F = \emptyset$. Тем самым вероятность перехода ДБА из состояния $s \in S$ в некоторое состояние, принадлежащее как множеству E, так и множеству F, равна вероятности перехода из состояния s в состояние r.

Для построения ДБА $= (X_1, S_1, \delta_1, P(X_1))$ и ДБА$_2$ $= (X_2, S_2, \delta_2, P(X_2))$ необходимо построить автоматы ДА$_I$ $= (X_1, S_1, \delta_1)$ и ДА$_2$ $= (X_2, S_2, \delta_2)$ как при декомпозиции автомата без бернуллиевского генератора. Так как $X_I = X$, то $P(X) = P(X_1)$. По отношению к автомату ДА$_2$, автомат ДА$_I$ с бернуллиевским генератором на входе может быть рассмотрен как некоторый новый бернуллиевский генератор на входе у автомата ДА$_2$. Учитывая, что $X_2 = S_1 \times X$, получаем $P(X_2) = P(S_1) \cdot P(X)$. Здесь $P(S_1) = (p(s_1), \cdots, p(s_m))$ – распределение вероятностей нахождения автомата ДБА$_I$ в состояниях множества S_1. Для вычисления $P(S_1)$ необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} p(s_1) = \sum\limits_{i=1}^{m} (p(s_i) \cdot p(s_i, s_1)) \\ \text{-------------------------------} \\ p(s_{m-1}) = \sum\limits_{i=1}^{m} (p(s_{m-1}) \cdot p(s_i, s_{m-1})) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p(s_i) = 1 \end{cases}$$

m – число состояний ДБА.

4. Представление автономного ВА в виде ДБА

Любой автономный ВА может быть рассмотрен как ДА с бернуллиевским генератором на входе, т.е. как ДБА. Такое представление ВА сводится к разложению стохастической матрицы ВА в сумму простых матриц. Пусть задан автономный вероятностный автомат $ВА = (X, S, \mathcal{M})$, у которого $X = \{x\}$ и $\mathcal{M} = \{M(x)\}$. Представим матрицу в следующем виде:

$$M(x) = p_1 M_1 + \ldots + p_h M_h = \sum_{u=1}^{h} p_u M_u \,, \qquad (2)$$

где $M_u = \| \alpha_{ij}^{u} \|_1^m$ – простая матрица, и $\sum_{u=1}^{h} p_u = 1$.

Каждая матрица M_u в (2) соответствует матрице переходов автономного ДА. Совокупность матриц M_u определяет детерминированный автомат $ДА = (I, S, \delta)$, у которого число букв входного алфавита $I = (\varkappa_1, \cdots, \varkappa_h)$ равно числу простых матриц M_u. Бернуллиевский генератор на входе ДА задает распределение $P(I) = (p(\varkappa_1), \ldots, p(\varkappa_h))$, где $p(\varkappa_u) = p_u$, $u = 1, \ldots, h$. Таким образом, автомату $ВА = (X, S, \mathcal{M})$ соответствует автомат $ДБА = (I, S, \delta, P(I))$.

В настоящее время существует несколько алгоритмов разложения стохастических матриц, разработанных для задач синтеза ВА [4,5].

Ниже приводится описание алгоритма, предложенного в [5].

Пусть задана стохастическая матрица автономного ВА $M(x) = \| p_{ij} \|_1^m$.

1. Определяем $\max p_{ij}$ $(j = 1, \cdots, n)$ матрицы $M(x)$ по всем i;

2. Определяем $\min \max p_{ij}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$.

3. Строим простую матрицу M_I порядка m, у которой в i-той строке стоит единица в точности в том месте, где в исходной матрице $M(x)$ находится $\max p_{ij}$.

4. Строим матрицу $M' = M(x) - p_1 M_1$, где $p_1 = \min \max p_{ij}$.

5. Принимаем матрицу M' за исходную и переходим к п. I.

Указанный алгоритм сходим, так как каждое однократное применение алгоритма превращает в нуль не меньше одного элемента исходной матрицы. В процессе применения алгоритма могут встречаться случаи, когда в одной строке матрицы имеется несколько одинаковых максимальных элементов, что дает некоторую произвольность в выборе очередной простой матрицы. Ввиду этого применение алгоритма неоднозначно сопоставляет заданному автономному ВА соответствующий ему ДБА.

5. Последовательная декомпозиция автономного ВА

Теорема 2. Автономный вероятностный автомат $ВА=(X,S,M)$ разложим на последовательную декомпозицию $ВА_I \cdot ВА_2$, если и только если существует соответствующий ему ДБА, разложимый на последовательную декомпозицию.

Справедливость теоремы 2 непосредственно следует из теоремы I и существования алгоритма перевода автономного ВА к ДБА.

Построение автоматов $ВА_I$ и $ВА_2$ на основе автоматов $ДБА_I$ и $ДБА_2$, образующих последовательную декомпозицию автомата ДБА, происходит следующим образом.

Пусть, например, $ДБА_I = (I_1, S_1, \delta_1, P(I_1))$. Разложим автомат $ДБА_I$ по буквам входного алфавита $I=\{\varkappa_1,\dots,\varkappa_n\}$ на совокупность автономных $ДБА_{\varkappa_i}$; $i=1,\dots n$ и представим каждый автомат $ДБА_{\varkappa_i}$ своей матрицей переходов $M_{\varkappa_i}$. Стохастическая матрица M_I автомата $ВА_I$ строится на основе матриц $M_{\varkappa_i}$:

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} (p(\varkappa_i)\cdot M_{\varkappa_i}).$$

Аналогичным образом строится стохастическая матрица M_2 автомата $ВА_2$.

Пример. Автономный ВА задан следующей стохастической матрицей $M(x)$:

$$M(x)=\begin{vmatrix} 0,18 & 0,42 & 0,12 & 0,28 \\ 0,54 & 0,06 & 0,36 & 0,04 \\ 0,06 & 0,14 & 0,24 & 0,56 \\ 0,18 & 0,02 & 0,72 & 0,08 \end{vmatrix}.$$

При помощи алгоритма, приведенного в п. 4, получено следующее разложение $M(x)$:

$$M(x) = 0{,}42\begin{vmatrix}0I00\\I000\\000I\\00I0\end{vmatrix} + 0{,}24\begin{vmatrix}000I\\00I0\\00I0\\00I0\end{vmatrix} + 0{,}I2\begin{vmatrix}I000\\I000\\0I00\\I000\end{vmatrix} + 0{,}08\begin{vmatrix}00I0\\00I0\\000I\\000I\end{vmatrix} +$$

$$+0{,}06\begin{vmatrix}I000\\0I00\\I000\\I000\end{vmatrix} + 0{,}04\begin{vmatrix}00I0\\00I0\\000I\\00I0\end{vmatrix} + 0{,}02\begin{vmatrix}000I\\000I\\000I\\00I0\end{vmatrix} + 0{,}02\begin{vmatrix}000I\\000I\\0I00\\0I00\end{vmatrix}$$

На основе этого разложения построен ДБА (фиг. I).

P(I)	0,42	0,24	0,12	0,08	0,06	0,04	0,02	0,02
I	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$	$\varkappa_4$	$\varkappa_5$	$\varkappa_6$	$\varkappa_7$	$\varkappa_8$
1	2	4	1	3	1	3	4	4
2	1	3	1	3	2	3	4	4
3	4	3	2	4	1	4	4	2
4	3	3	1	4	1	3	3	2

Фиг. 1.

На множестве состояний автомата ДБА существует СП-разбиение $\pi = (\overline{12};\ \overline{34})$. Выбираем разбиение $\rho = (\overline{13};\ \overline{24})$. Нетрудно проверить, что разбиения π и ρ независимы. Автоматы ДБА$_I$ и ДБА$_2$, составляющие последовательную декомпозицию ДБА приведены, соответственно, на фиг. 2 и фиг. 3. Решение системы уравнений (2) для автомата ДБА$_I$ дает следующее распределение вероятностей для двух состояний $A = \overline{12}$ и $B = \overline{34}$: $p(A) = \frac{1}{3}$ и $p(B) = \frac{2}{3}$. По автомату ДБА$_I$ вычисляем стохастическую матрицу M_I автомата ВА$_I$:

$$M_I = 0{,}42\begin{vmatrix}I0\\0I\end{vmatrix} + 0{,}24\begin{vmatrix}0I\\0I\end{vmatrix} + 0{,}I2\begin{vmatrix}I0\\I0\end{vmatrix} + 0{,}08\begin{vmatrix}0I\\0I\end{vmatrix} + 0{,}06\begin{vmatrix}I0\\I0\end{vmatrix} +$$

$$+0{,}04\begin{vmatrix}0I\\0I\end{vmatrix} + 0{,}02\begin{vmatrix}0I\\0I\end{vmatrix} + 0{,}02\begin{vmatrix}0I\\I0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\0{,}2 & 0{,}8\end{vmatrix}$$

Аналогично строится матрица M_2 автомата ВА$_2$

$$M_2 = \begin{vmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\0{,}9 & 0{,}I\end{vmatrix}$$

P(I$_1$)	0,42	0,24	0,12	0,08	0,06	0,04	0,02	0,02
I$_1$	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$	$\varkappa_4$	$\varkappa_5$	$\varkappa_6$	$\varkappa_7$	$\varkappa_8$
$\overline{1,2}$=A	A	B	A	B	A	B	B	B
$\overline{3,4}$=B	B	B	A	B	A	B	B	A

Фиг. 2.

p(I$_2$)	0,14	0,28	0,08	0,16	0,04	0,08	0,027	0,053	0,02	0,04	0,013	0,027	0,007	0,013	0,007	0,013
I$_2$	$\varkappa_1$ A	$\varkappa_1$ B	$\varkappa_2$ A	$\varkappa_2$ B	$\varkappa_3$ A	$\varkappa_3$ B	$\varkappa_4$ A	$\varkappa_4$ B	$\varkappa_5$ A	$\varkappa_5$ B	$\varkappa_6$ A	$\varkappa_6$ B	$\varkappa_7$ A	$\varkappa_7$ B	$\varkappa_8$ A	$\varkappa_8$ B
$\overline{1,3}$=C	D	D	D	C	C	D	C	D	C	C	C	D	D	D	D	D
$\overline{2,4}$=D	C	C	C	C	C	C	C	D	D	C	C	C	D	C	D	D

Фиг. 3.

Литература

1. J. Hartmanis, R.E. Stearns. Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.Y., 1966.

2. K.B. Krohn, R. Mateasian, J.L. Rhodes. Methods of the algebraic theory of machines. Journal of Computer and System Science, No 1, 1967.

3. G. Bacon. The decomposition of stochastic automata. Information and Control, No 3, v. 7, 1964.

4. Д.А. Поспелов. Вероятностные автоматы, "Энергия", М., 1970.

5. В.М. Ченцов. Об одном методе синтеза автономного стохастического автомата, "Кибернетика" 1968, № 3.

A. Keevallik, G. Jacobson

A Decomposition Method of Autonomous Stochastic Automata

A method permitting to transfer a decomposition problem of autonomous stochastic automata to decomposition of deterministic automata with Bernoully input symbols generator is described.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 350 1973

УДК 62-50

А.Э. Кээваллик

О КЛАССИФИКАЦИИ ЗАДАЧ ДЕКОМПОЗИЦИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

В связи с ростом размерностей синтезируемых автоматов задача декомпозиции приобретает первостепенное значение. Разбиение сложной задачи синтеза на множество взаимосвязанных менее сложных задач открывает возможность использовать уже имеющиеся оптимальные алгоритмы синтеза, которые при непосредственном синтезе исходных сложных автоматов практически неприменимы.

В последние годы в технологии дискретных интегральных схем обнаруживается стремление к разработке стандартных модулей. Отсюда возникает вторая практически важная задача декомпозиции - реализация заданного автомата на базе выбранных автоматов-модулей. Вышеприведенным и можно объяснить тот интерес, который наблюдается к задачам декомпозиции автоматов.

К настоящему времени предложен целый ряд различных определений задач декомпозиции [1,2,3,4,5,6]. Чаще всего под декомпозицией понимают представление заданного сложного автомата в виде совместной работы множества более простых автоматов. В данной статье дается определение задачи декомпозиции автомата в общем случае, заключающейся в представлении исходного автомата абстрактной сетью компонентных автоматов, и на основе введения ограничений на сеть, определяются различные виды декомпозиции. При этом ранее известные виды декомпозиции окажутся определенными частными случаями приводимого общего понятия задачи декомпозиции.

Пусть задан конечный автомат $A=(I,S,O,\delta,\lambda)$, где

I - входной алфавит,

S – множество внутренних состояний,
O – выходной алфавит,
δ – функция переходов,
Λ – функция выходов.

При постановке задачи декомпозиции автоматов мы воспользуемся понятием абстрактной сети автоматов [I]. Абстрактная сеть автоматов является алгебраической системой для описания совместной работы множества автоматов.

Определение I. Абстрактная сеть автоматов $N=(I, \{A_i\}, O, \{f_i\}, g)$ состоит из следующих объектов:

I) I – входной алфавит;

2) $\{A_i = (I_i, S_i, \delta_i)\}$, $1 \leq i \leq n$ – множество компонентных автоматов;

3) O – выходной алфавит;

4) $\{f_i : (\times S_j) \times I \longrightarrow I_i\}$, $1 \leq i, j \leq n$ – функции соединения компонентных автоматов;

5) $g : (\times S_j) \times I \longrightarrow O$, $1 \leq j \leq n$ – функция выходов.

Каждая абстрактная сеть N определяет автомат A_N. Назовем A_N результирующим автоматом абстрактной сети N.

Определение 2. Результирующим автоматом абстрактной сети называется автомат $A_N = (I_N, S_N, O_N, \delta_N, \Lambda_N)$,
где
$$I_N = I,$$
$$S_N = \times S_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$O_N = O,$$
$$\delta_N : S_N \times I_N \longrightarrow S_N:$$
$$\delta_N[(s_1, s_2, \ldots, s_n), x] = \times \delta_i [s_i, f_i(s_1, s_2, \ldots, s_n, x)], \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$s_i \in S_i, \quad x \in I,$$
$$\Lambda_N : S_N \times I_N \longrightarrow O_N,$$
$$\Lambda_N[(s_1, s_2, \ldots, s_n), x] = g(s_1, s_2, \ldots, s_n, x).$$

Абстрактную сеть автоматов можно рассматривать как общую модель совместной работы автоматов. Она общая в том смысле, что в ней нет ограничений на выбор компонентных автоматов и на характер взаимосвязей между ними. Действительно, не заданы ни количество внутренних состояний компонентного автомата A_i, ни какие-либо другие его свойства, и любой компонентный автомат может быть связан произвольным образом с другими компонентными автоматами.

Назовем множества $\{A_i\}$ и $\{f_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, соответственно базисом и структурой абстрактной сети N.

Отметим, что заданием понятия результирующего автомата абстрактной сети N, мы по существу решаем задачу композиции автоматов в общем случае.

Введем понятие реализации автомата:

Определение 3. Автомат A' называется реализацией автомата A (пишем: $R(A)=A'$), если существует подавтомат автомата A', который изоморфен автомату A.

Пользуясь понятием абстрактной сети автоматов и его результирующего автомата, даем определение задачи декомпозиции автомата в общем случае:

Определение 4. Под декомпозицией автомата A в общем случае понимается построение абстрактной сети автоматов N так, чтобы $R(A) = A_N$.

1) заданы ограничения на базис $\{A_i\}$,

2) заданы ограничения на структуру $\{f_i\}$.

Отметим, что при декомпозиции автомата базис и структура взаимосвязаны, т.е. изменения в базисе (в структуре) влекут за собой изменения в структуре (в базисе). Учитывая различные сочетания возможных ограничений на базис и на структуру, можно выделить следующие четыре основных класса задач декомпозиции.

Однако во многих случаях нас не удовлетворяет любая реализующая заданный автомат A абстрактная сеть автоматов N, а такая, которая удовлетворяет каким-то дополнительным условиям. Эти условия по их характеру можно разделить на два класса:

I. Ограничений на выбор базиса и структуры нет.

Ставится общая задача о реализации заданноно автомата абстрактной сетью автоматов N. Этот класс задач имеет чисто теоретическое значение. В данном случае не исключено даже, что у компонентных автоматов больше внутренних состояний, чем у декомпонируемого автомата.

П. Определены ограничения на выбор базиса, на структуру ограничений не дано.

Перечислим некоторые подзадачи рассматриваемого класса задач.

I) заданы требования на сложность компонентных автоматов,

а) $|S_i|<|S|$, $1\le i\le n$, т.е. у всех компонентных автоматов меньше внутренних состояний, чем у исходного [I,2,3,4,6];

б) $|S_1|=|S_2|=\ldots=|S_n|=p$, т.е. у каждого компонентного автомата p внутренних состояний [I,3];

в) $\prod_{i=1}^{n}|S_i|=|S|$, т.е. количество внутренних состояний результирующего автомата абстрактной сети автоматов N равняется количеству внутренних состояний исходного автомата [6];

г) $|I_i|\cdot|S_i|\le|I|\cdot|S|$, т.е. сложность автоматов определяется размерами таблиц переходов.

2) задан класс элементов базиса,

а) $A_i\in\{A^1, A^2, \ldots, A^m\}$, $1\le i\le n$.

Компонентные автоматы A_i выбираются из определенного множества автоматов. При этом автомат A^j, $1\le j\le m$ может встречаться в сети N неоднократно;

б) $A_i=A$, $1\le i\le n$.

Ставится задача реализации заданного автомата на базе автомата A. Это задача сводится к задаче реализации автомата в однородной среде с модулем A [3];

в) определяется класс базисных автоматов в том смысле, что заданы некоторые свойства функции переходов базисных автоматов. Можно, например, требовать, чтобы все или некоторые компонентные автоматы были бы линейными, пермутационными, автономными и т.д. [I,2].

Ш. Определены ограничения на структуру, на выбор базиса ограничений не дано.

I) определен класс структуры:

а) параллельная структура [I,3,6];

б) последовательная структура [I,3,6];

в) параллельно-последовательная структура [I,2,3,6];

г) итеративные структуры [4];

д) структура с обратными связями [I,4].

2) структура задана жестко, т.е. задан требуемый граф структуры [6].

IУ. Определены ограничения как на базис, так и на структуру.

Отдельные подзадачи рассматриваемого класса можно получить, сочетая задачи П-го и Ш-го класса. Например: реализовать заданный автомат А последовательно-параллельной сетью автоматов при условии, что все компонентные автоматы имели бы меньше внутренних состояний, чем исходный автомат А и т.д.

Отметим, что к четвертому классу относится и задача решения так называемых декомпозиционных уравнений [5,6], состоящая в том, что при некоторых заданных элементах базиса и при заданной структуре всей абстрактной сети найти отсутствующие элементы базиса.

Очевидно не все перечисленные задачи декомпозиции имеют в настоящее время одинаковое практическое значение, тем более, что практическая ценность одной или другой задачи декомпозиции может измениться. Так, например, задача реализации автомата в однородной среде выдвигалась в качестве практически важной в последние годы в связи с успехами в технологии интегральных схем.

Большинство задач декомпозиции, представляющих практический интерес, относится к четвертому классу задач.

Поскольку задачи декомпозиции имеют в общем случае неоднозначные решения, то, естественно, возникают различные задачи оптимизации [I,3,4], представляющие большой практический интерес.

По предлагаемой классификации задач декомпозиции удобно судить о применяемости и широте одной или другой теории декомпозиции. Так, например, алгебраическую теорию декомпозиции, разработанную Ю. Хартманисом и Р.Э. Стирнзом [I], можно назвать структурной теорией декомпозиции, так как в ней решаются задачи с ограничениями на структуру. Точнее - решаются задачи а,б,в,г, с Ш-го класса задач при условии, что у компонентных автоматов меньше внутренних состояний, чем у исходного автомата. Сравнительно слабым местом названной теории декомпозиции можно считать недостаточную гибкость при определении свойств базиса.

В другой известной алгебраической теории декомпозиции [2], построенной на основе полугрупповой формы представления автомата, главное внимание уделяется определению свойств элементов базиса. В рамках этой теории решается вопрос о том, какими свойствами должны обладать элементы базиса, чтобы реализовать любой заданный автомат. Таким образом, основные задачи, решаемые в рамках этой теории, относятся ко второму классу задач декомпозиции.

Литература

1. J.H a r t m a n i s, R.E. S t e a r n s. Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice-Hall, Inc. Engelwood Cliffs, N.Y., 1966.

2. A. G i n z b u r g. Algebraic theory of automata. Academic Press, N.Y., London, 1968.

3. А.Н. М е л и х о в. Ориентированные графы и конечные автоматы. "Наука", Москва, 1971.

4. T.L. B o o t h. Sequential machines and automata. J.Wiley and Sons, N.Y., London, 1968.

5. А.К. Г р и г о р я н. Метод декомпозиции конечных автоматов с выделением выходного и входного автоматов. "Автоматика и телемеханика", 1965, № 1.

6. Г.Э. Я к о б с о н. Декомпозиционный метод синтеза дискретных управляющих устройств. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Таллин, 1971.

A. Keevallik

Classification of the Decomposition Problems of Finite Automata

Summary

Using the concept of abstract network of automata a general form of the decomposition problem is formulated and a new classification of the decomposition problems is presented.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 350 1973

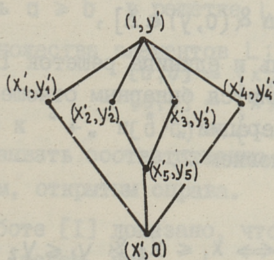
УДК 62-50

А.Э. Кээваллик

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ РЕШЕТОК ПАР РАЗБИЕНИЙ

Алгебраическая теория декомпозиции конечных автоматов [I] строится в основном на базе различных информационных решеток, т.е. решеток разбиений и покрытий на множествах входов, выходов и внутренних состояний. Особенно важными с точки зрения практических вычислений являются решетки пар разбиений, обобщением которых является алгебраическая система, названная алгеброй пар.

Вычисление решеток пар разбиений представляет трудоемкий вычислительный процесс, и уже для автоматов, имеющих более 5-6 внутренних состояний, вручную практически не осуществимо. При этом с увеличением количества внутренних состояний объем вычислений резко повышается.



$$(1,y') = (1,1)$$
$$(x'_1,y'_1) = (\overline{1,2};\overline{3};\overline{4},\overline{1,2};\overline{3,4})$$
$$(x'_2,y'_2) = (\overline{1,3,4};\overline{2},\overline{1,3,4};\overline{2})$$
$$(x'_3,y'_3) = (\overline{1,4};\overline{2,3},\overline{1,2,3};\overline{4})$$
$$(x'_4,y'_4) = (\overline{1};\overline{2,4};\overline{3},\overline{1,2,4};\overline{3})$$
$$(x'_5,y'_5) = (\overline{1,4};\overline{2};\overline{3},\overline{1,3};\overline{2};\overline{4})$$
$$(x',0) = (0,0)$$

Фиг. 1. Решетка Мm-пар разбиений.

Как показано в работе [I], при вычислении решеток пар разбиений целесообразно исходить из соответствующей Mm-решетки, элементы которой образуют подмножество решетки пар разбиений и содержат информацию для определения решетки пар разбиений в целом. Часто Mm - решетку называют скелетом решетки пар разбиений. Так как размерность Mm -решетки в общем случае намного меньше размерности соответствующей решетки пар разбиений и вычисление Mm-решетки достаточно просто, то предложенный в работе [I] метод вычисления решетки пар разбиений намного эффективнее по сравнению с вычислением непосредственно по функции переходов автомата.

В настоящей статье исследуются некоторые вопросы, связанные с повышением эффективности вычисления решетки пар разбиений. Путем модифицирования алгоритма, предложенного в работе [I], достигается дальнейшее упрощение вычислений.

Поскольку в статье рассматривается задача вычисления элементов алгебры пар, то достигнутые в работе результаты распространимы на различные решетки пар разбиений и пар покрытий.

Исходным для предлагаемого алгоритма является ряд определений и положений из [I].

<u>Определение I</u>.

Пусть L_1 и L_2 конечные решетки. $\Delta \subseteq L_1 \times L_2$ называется алгеброй пар в множестве $L_1 \times L_2$, если и только если

$$1)\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Delta \Longrightarrow (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2), (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \Delta ,$$

$$2)\ \forall x \in L_1\ \forall y \in L_2 [(x, 1) \in \Delta \ \&\ (0, y) \in \Delta] ,$$

где 0 и 1 соответственно нуль и единица решеток L_1 и L_2. Таким образом, алгебра пар является бинарным отношением, которое замкнуто по отношению операции „ · " и „ + " и содержит все элементы, определенные условием 2.

<u>Определение 2</u>.

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2 \ \&\ y_1 \leq y_2 .$$

Отметим, что алгебра пар Δ с отношением частичного порядка „ ≤ " образует решетку, нулем единицей которой являются соответственно пары (0, 0) и (1, 1).

Определение 3.

Пусть Δ - алгебра пар в $L_1 \times L_2$. Тогда:

$$m(x) = \Pi \{y_i/(x, y_i) \in \Delta\},$$
$$M(y) = \sum \{x_i/(x_i, y) \in \Delta\}.$$

Определение 4.

Элемент (x, y) в алгебре пар Δ называется Mm парой, если и только если

$$y = m(x) \quad \text{и} \quad x = M(y).$$

Отметим, что множество всех Mm пар в Δ образует решетку Q_Δ, в которой

$$\inf[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = [x_1 \cdot x_2, m(x_1 \cdot x_2)],$$
$$\sup[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = [M(y_1 + y_2), y_1 + y_2].$$

Определение 5.[2]

Будем говорить, что „a покрывает b" в решетке L, если и только если $a \geq b$ и условие $a \geq x \geq b$ не выполняется ни для какого $x \in L$.

Определение 6. [2]

Любое линейно-упорядоченное подмножество решетки L назовем цепью.

Определение 7.

Пусть $a \geq b$ в решетке L.

Подмножества элементов L:

$$[a, b] = \{x / b \leq x \leq a\},$$
$$(a, b] = \{x / b \leq x < a\},$$
$$[a, b) = \{x / b < x \leq a\}.$$

будем называть соответственно интервалом, открытым слева и интервалом, открытым справа.

В работе [I] доказано, что если $(x, y) \in \Delta$, то существует $(x', y') \in Q_\Delta$ такая, что $x' \geq x$ и $y' \leq y$.

Другими словами - все пары из $L_1 \times L_2$, первые компоненты которых меньше или равны x' и вторые компоненты которых больше или равны y', являются элементами алгебры пар Δ.

Будем говорить, что любой элемент (x', y') решетки Q_Δ генерирует множество пар $G(x', y')$, причем:

$$G(x', y') = \{x / x \leq x'\} \times \{y / y \geq y'\}.$$

В работе [I] предложен следующий алгоритм вычисления алгебры пар Δ:

I) вычислить множества $G(x'_i, y'_i)$, $1 \leq i \leq n$, $n = |Q_\Delta|$,

2) найти множество $\bigcup_{i=1}^{n} G(x'_i, y'_i) = \Delta$.

Но так как множества $G(x'_i, y'_i)$, $1 \leq i \leq n$ являются пересекающимися, то следуя приведенному алгоритму, совокупность элементов из Δ вычисляется неоднократно. Это является причиной снижения эффективности вычислений.

Доказанные ниже теоремы позволяют определить совокупность элементов из Δ, покрытых множествами $G(x'_i, y'_i)$, $1 \leq i \leq n$, неоднократно и служат основой при построении более эффективного алгоритма вычисления.

Теорема I.

Если $(x'_1, y'_1) \in Q_\Delta$ и $(x'_2, y'_2) \in Q_\Delta$, то

$$G(x'_1, y'_1) \cap G(x'_2, y'_2) = G(x'_1 \cdot x'_2,\ y'_1 + y'_2).$$

Доказательство.

Из определения оператора G непосредственно следует, что

$$G(x'_1, y'_1) \subseteq G(x'_2, y'_2) \Longleftrightarrow x'_1 \leq x'_2 \ \&\ y'_1 \geq y'_2. \qquad (I)$$

Поскольку $x'_1 \cdot x'_2 \leq x'_1$, $x'_1 \cdot x'_2 \leq x'_2$, $y'_1 + y'_2 \geq y'_1$ и $y'_1 + y'_2 \geq y'_2$, то

$$G(x'_1 \cdot x'_2,\ y'_1 + y'_2) \subseteq G(x'_1, y'_1)$$

$$G(x'_1 \cdot x'_2,\ y'_1 + y'_2) \subseteq G(x'_2, y'_2).$$

Следовательно:

$$G(x'_1 \cdot x'_2,\ y'_1 + y'_2) \subseteq G(x'_1, y'_1) \cap G(x'_2, y'_2). \qquad (2)$$

Покажем теперь, что

$$G(x'_1 \cdot x'_2,\ y'_1 + y'_2) \supseteq G(x'_1, y'_1) \cap G(x'_2, y'_2). \qquad (3)$$

Из определения оператора G следует, что если

$$(x, y) \in \{G(x'_1, y'_1) \cap G(x'_2, y'_2)\},$$

то

$$x \leq x'_1,\ y \geq y'_1,\ x \leq x'_2 \text{ и } y \geq y'_2.$$

Но следствие последней импликации равносильно тому, что

$$x \leqslant x_1' \cdot x_2' \text{ и } y \geqslant y_1' + y_2'.$$

Поэтому справедливо, что

$$(x, y) \in G(x_1' \cdot x_2', y_1' + y_2').$$

Доказанная импликация определяет отношение включения множеств:

$$G(x_1' \cdot x_2', y_1' + y_2') \supseteq G(x_1', y_1') \cap G(x_2', y_2'). \qquad (3)$$

Из отношений включения (2) и (3) вытекает, что

$$G(x_1' \cdot y_1') \cap G(x_2', y_2') = G(x_1' \cdot x_2', y_1' + y_2').$$

Теорема доказана.

Следствие I.

Если $(x_1', y_1') \geqslant (x_2', y_2')$ в Q_Δ, то $G(x_1', y_1') \cap G(x_2', y_2') = G(x_2', y_1')$, так как

$$x_1' \geqslant x_2' \iff x_1' \cdot x_2' = x_2'$$

и

$$y_1' \geqslant y_2' \iff y_1' + y_2' = y_1'.$$

Образуем множество F:

$$F = \{(x_j', y_i') / (x_i', y_i') \text{ покрывает } (x_j', y_j') \text{ в } Q_\Delta\}.$$

Обобщим оператор G на случай, когда операндом является множество пар из Q_Δ:

$$G(\{(x_1', y_1'), (x_2', y_2'), \ldots, (x_n', y_n')\}) = \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i', y_i').$$

Теперь можем написать, что

$$G(Q_\Delta) = \Delta.$$

Обозначим через R множество всех пар из Δ, покрытых множествами $G(x_i', y_i')$, $1 \leqslant i \leqslant n$, неоднократно:

$$R = \cup \{G(a) \cap G(b) / (a, b) \in Q_\Delta \times Q_\Delta, \ a \neq b\}.$$

Теорема 2. $\quad G(F) = R.$

Доказательство.

Выделим произвольную цепь C из Q_Δ. Пусть $C = \{(x_i, y_i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ и

$$(x_1', y_1') \geqslant (x_2', y_2') \geqslant \ldots \geqslant (x_{i-1}', y_{i-1}') \geqslant (x_i', y_i') \geqslant \ldots \geqslant (x_m', y_m').$$

При этом (x_{i-1}', y_{i-1}') покрывает x_i', y_i', $2 \leqslant i \leqslant m$. Исследуем, какие элементы из Δ покрываются неоднократно путем вычисления оператора $G(c)$. Для этого определяем попарные пересечения следующих множеств (см. следствие I):

$$G(x_1', y_1') \cap G(x_i', y_i') = G(x_i', y_1'),$$

$$G(x_2', y_2') \cap G(x_i', y_i') = G(x_i', y_2'),$$
$$\vdots$$
$$G(x_{i-1}', y_{i-1}') \cap G(x_i', y_i') = G(x_i', y_{i-1}').$$

Но так как $y_1' \geq y_2' \geq \dots \geq y_{i-1}'$, то с учетом [I] можно написать:

$$G(x_i', y_i) \subseteq G(x_i', y_2') \subseteq \dots \subseteq G(x_i', y_{i-1}'). \qquad (4)$$

Очевидно выражение (4) справедливо для всех i от I до m. Поэтому для нахождения множества R_C всех элементов из Δ, генерируемых неоднократно элементами цепи C, достаточно учитывать только те пары элементов из C, одна из которых покрывает другую:

$$R_C = \bigcup \left\{ G(x_i', y_{i-1}') / (x_{i-1}', y_{i-1}') \text{ покрывает } (x_i', y_i') \in C \right\}. \qquad (5)$$

Пусть $$A = \left\{ (a, b) / (a, b) \in Q_\Delta \times Q_\Delta,\ a \neq b \right\}.$$

Разбиваем A на два подмножества A_1 и A_2:

$$A_1 = \left\{ (a, b) / (a, b) \in A \text{ и } a \text{ сравнима}^{1)} \text{ с } b \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (a, b) / (a, b) \in A \text{ и } a \text{ несравнима}^{2)} \text{ с } b \right\}.$$

Известно [2], что любые два элемента решетки, которые сравнимы между собой, принадлежат некоторой цепи решетки. Поэтому, учитывая (5), можно написать:

$$R_{A_1} = \bigcup \left\{ G(x_i', y_{i-1}') / (x_{i-1}', y_{i-1}') \text{ покрывает } (x_i', y_i') \text{ в } Q_\Delta \right\},$$

где R_{A_1} – множество неоднократно определенных элементов из Δ при вычислении $G(A_1)$.

Пусть $[(x_i', y_i'), (x_j', y_j')] \in A_2$. Вследствие замкнутости первых компонентов пар из Q_Δ относительно операции „$\cdot$", а также вторых компонентов относительно операции „$+$", найдутся единственные пары

$$(x_i' \cdot x_j', y) \in Q_\Delta \quad \text{и} \quad (x, y_i' + y_j') \in Q_\Delta$$

такие, что $y \leq y_i' + y_j'$ и $x \geq x_i' \cdot x_j'$.

Нетрудно видеть, что пары $(x_i' \cdot x_j', y)$ и $(x, y_i' + y_j')$ сравнимы между собой и, следовательно, принадлежат множеству A_1.

С другой стороны, согласно теореме I:

$$G(x_i' \cdot x_j', y) \cap G(x, y_i' + y_j') = G(x_i' \cdot x_j', y_i' + y_j').$$

---

1) a сравнима с $b \iff a \geq b \vee a \leq b$

2) a несравнима с $b \iff a \ngeq b \ \&\ a \nleq b$

Таким образом, любой паре $[(x'_i, y'_i), (x'_j, y'_j)] \in A_2$ можно сопоставить пару $[(x'_i \cdot x'_j, y), (x, y'_i + y'_j)] \in A_1$ так, чтобы

$$G(x'_i, y'_i) \cap G(x'_j, y'_j) = G(x'_i \cdot x'_j, y) \cap G(x, y'_i + y'_j)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$R = R_{A_1}.$$

Или, что то же самое:

$$G(F) = \cup \left\{ G(x'_i, y'_{i-1}) / (x'_{i-1}, y'_{i-1}) \text{ покрывает } (x'_i, y'_i) \text{ в } Q_\Delta \right\} = K.$$

Теорема доказана.

Опираясь на результаты, полученные в теоремах 2 и 3, можно предложить способ вычисления алгебры пар Δ, который позволяет существенно повысить эффективность вычислений.

Пусть $(x', 0)$ и $(1, y')$ - нуль и единица решетки Q_Δ.

Обозначаем через X_n и Y_n, $0 \le n \le l+1$ соответственно интервалы на решетках L_1 и L_2.

Этапы предложенного нами способа вычисления алгебры пар Δ следующие:

I. Образуем интервалы

$$X_0 = (x', 1], \; Y_0 = [y', 1].$$

2. Образуем множество K:

$K = \{ [(x'_i, y'_i), (x'_j, y'_j)] / (x'_i, y'_i)$ покрывает (x'_j, y'_j) в Q_Δ и $(x'_j, y'_j) = (x', 0) \}$.

Пусть $|K| = l$.

Каждой паре $[(x'_i, y'_i), (x'_j, y'_j)] \in K$ ставим в соответствие интервалы $X_m = (x'_i, x'_j]$, $Y_m = [y'_j, y'_i)$, $1 \le m \le l$.

3. Образуем интервалы

$$X_{l+1} = [0, x'], \; Y_{l+1} = [0, 1].$$

4. Вычисляем множество

$$\bigcup_{m=0}^{l+1} Z_m,$$

где

$$Z_m = X_m \times Y_m.$$

Остается показать, что $\bigcup_{m=0}^{l+1} Z_m = \Delta$.

Можно убедиться, что интервалы X_m и Y_m, $0 \le m \le l+1$ удовлетворяют следующим требованиям:

$$\forall (x, y) \in Z_m \exists (x'_i, y'_i) \in Q_\Delta [(x, y) \in G(x'_i, y'_i)], \quad 0 \le m \le l+1, \tag{6}$$

$$\forall x \leqslant x_i' \ \forall y \geqslant y_i' \ \exists z_m [(x,y) \in z_m]. \qquad (7)$$
$$1 \leqslant i \leqslant n.$$

Выражение (6) равносильно тому, что

$$\bigcup_{m=0}^{l+1} z_m \subseteq \Delta. \qquad (8)$$

Однако из выражения (7) следует, что

$$\forall (x_i', y_i') \in Q_\Delta \Big[G(x_i', y_i') \subseteq \bigcup_{m=0}^{l+1} z_m\Big]$$

или, что то же самое

$$\bigcup_{i=1}^{n} G(x_i', y_i') = \Delta \subseteq \bigcup_{m=0}^{l+1} z_m. \qquad (9)$$

Сочетая (8) и (9) получаем, что

$$\bigcup_{m=0}^{l+1} z_m = \Delta.$$

Пример.

Пусть задана Mm -решетка пар разбиений Q_Δ (рис. I). Вычисляем решетку пар разбиений, соответствующую Mm -решетке Q_Δ.

1. $X_0 = [0,1], \ Y_0 = [1,1].$

2. $K = \{[(1,y'), (x_1', y_1')], [(1,y'), (x_2', y_2')], [(1,y'), (x_3', y_3')],$
$[(1,y'), (x_4', y_4')], [(x_2', y_2'), (x_5', y_5')], [(x_3', y_3'), (x_5', y_5')]\}.$

$X_1 = (0, \overline{1,2}; \overline{3}; \overline{4}], \ Y_1 = [\overline{1,2}; \overline{3,4}, 1],$

$X_2 = (0, \overline{1,3,4}; \overline{2}], \ Y_2 = [\overline{1,3,4}; \overline{2}, 1],$

$X_3 = (0, \overline{1,4}; \overline{2,3}], \ Y_3 = [\overline{1,2,3}; \overline{4}, 1],$

$X_4 = (0, \overline{1}; \overline{2,4}; \overline{3}], \ Y_4 = [\overline{1,2,4}; \overline{3}, 1],$

$X_5 = (0, \overline{1,4}; \overline{2}; \overline{3}], \ Y_5 = [\overline{1,3}; \overline{2}; \overline{4}, \overline{1,3,4}; \overline{2}],$

$X_6 = (0, \overline{1,4}; \overline{2}; \overline{3}], \ Y_6 = [\overline{1,3}; \overline{2}; \overline{4}, \overline{1,2,4}; \overline{3}],$

3. $X_7 = [0,0], \ Y_7 = [0,1].$

4. $X_0 = \{\overline{1,2}; \overline{3}; \overline{4}, \overline{1,3}; \overline{2}; \overline{4}, \overline{1,4}; \overline{2}; \overline{3}, \overline{1}; \overline{2,3}; \overline{4}, \overline{1}; \overline{2}; \overline{3,4},$
$\overline{1,2}; \overline{3,4}, \overline{1,2,3}; \overline{4}, \overline{1,3}; \overline{2,4}, \overline{1,2,4}; \overline{3}, \overline{1,3,4}; \overline{2}, \overline{1,4}; \overline{2,3},$
$\overline{1}; \overline{2,3,4}, 1\}.$

$Y_0 = \{1\}.$

$X_1 = \{\overline{1,2}; \overline{3}; \overline{4}\}, Y_1 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4}\},$

$X_2 = \{\overline{1,3}; \overline{2}; \overline{4}, \overline{1,4}; \overline{2}; \overline{3}, \overline{1}; \overline{2}; \overline{3,4}, \overline{1,3,4}; \overline{2}\}, Y_2 = \{\overline{1,3,4}; \overline{2}\},$

$$X_3=\{\overline{1,4};\ \overline{2};\ \overline{3},\ \overline{1};\ \overline{2,3};\ \overline{4},\ \overline{1,4};\ \overline{2,3}\},\quad Y_3=\{\overline{1,2,3};\ \overline{4}\},$$

$$X_4=\{\overline{1};\ \overline{2,4};\ \overline{3}\},\quad Y_4=\{\overline{1,2,4};\ \overline{3}\},$$

$$X_5=\{\overline{1,4};\ \overline{2};\ \overline{3}\},\quad Y_5=\{\overline{1,3};\ \overline{2};\ \overline{4}\},$$

$$X_6=\{\overline{1,4};\ \overline{2};\ \overline{3}\},\quad Y_6=\Phi,$$

$$X_7=\{0\},\quad Y_7=\{0\}\cup X_0.$$

Ради простоты в данном примере не определены прямые произведения $X_m \times Y_m$, $0 \leq m \leq 7$, и не найдено множество $\bigcup\limits_{m=0}^{7} = \Delta$.

Отметим лишь, что в данной задаче все элементы Δ (из 37) вычисляются однократно. Используя же алгоритм, предложенный в работе [I], придется вычислить 66 элементов, т.е.

$$\sum_{i=1}^{7} |G(x_i', y_i')| = 66.$$

Литература

1. J. Hartmanis, R.E. Stearns. Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.Y., 1966.

2. Г. Биркгоф. Теория структур. Изд. ИЛ, М., 1952.

A. Keevallik

A Method for Generating Partition Pair Lattices

Summary

Problems of generating partition pair lattices are considered. An effective algorithm for computation of the partition pair lattices from the given Mm-lattices is obtained.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 350 1973

УДК 681.32

А.А. Вийлуп, П.А. Китсник, Р.Р. Убар

ОБ ИНТЕРПРЕТАТИВНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕИСПРАВНОСТЕЙ В КОМБИНАЦИОННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМАХ

В последнее время в диагностике неисправностей логических схем широкое распространение получил метод диагностических таблиц [1]. Последние обычно составляются моделированием поведения схемы в исправном состоянии и при введении в него заданной совокупности неисправностей.

Существует два основных подхода к моделированию неисправностей - интерпретативный подход и метод компилирования [2]. В первом случае имеет место сложный алгоритм для определения того, насколько далеко следует проходить в обратном направлении от выхода каждого элемента [2]. Во втором случае моделирование выполняется компилированием программы, эквивалентной моделируемой логике. Используя в качестве входных данных комбинации каждого теста, можно моделировать ошибку в каждом элементе схемы изменением одной команды в выполняемой программе [3-4].

Преимущество метода компилирования заключается в том, что с его помощью можно осуществлять моделирование параллельно для r различных тестов [3] или же - для r различных неисправностей [4], где r - разрядность машинного слова моделирующей ЦВМ.

Имеются разработки, позволяющие устанавливать все обнаруживаемые заданным тестом неисправности за один проход модели [5,6]. По сути дела эти методы относятся к интерпретативному подходу. Хотя они являются более мощными, чем обычные методы параллельного моделирования [3,4], недостатком их является невозможность одновременного анализа нескольких тестов.

В настоящей работе предлагается новый подход интерпретативного моделирования, обеспечивающий возможность параллельного анализа различных тестов.

Для получения p строк диагностической таблицы требуется два прохода модели. Первым проходом устанавливаются состояния схемы для всех p входных тестовых сигналов при условии исправной работы схемы. Затем, следующим обратным проходом с выходов в направлении к входам определяются по состояниям элементов все обнаруживаемые неисправности.

Пусть задана некоторая комбинационная схема (КС) на базисе И, И-НЕ, ИЛИ, ИЛИ-НЕ. В качестве дополнительного условного элемента рассмотрим точку разветвления. Это даст нам возможность идентифицировать каждый элемент со своим выходным значением.

Представим КС в виде направленного графа $G(X,\Gamma)$, где множество узлов $X=\{x_i\}, i=\overline{1,n}$ определяет элементы КС, а отображение Γ-связи между элементами.

Пусть $X^M=\{x_{ij}\}$ – матрица значений узлов для исправной КС, $x_{ij}\in\{0,1\}, i=\overline{1,n}; j=\overline{1,p}$, где p – количество одновременно моделируемых тестов. Строка матрицы X_i представляет собой вектор значений узла $x_i \in X$ при всех p тестовых комбинациях, а столбец X^j – вектор значений узлов при j-том тесте. Некоторая часть матрицы X^M относится к входам и выходам схемы. Так, $T^j\subset X^j=\{x_i | i:\Gamma^{-1}x_i=\phi\}$ – представляет собой j-й тест, т.е. j-ю комбинацию входных сигналов, а $F^j\subset X^j=\{x_i | i:\Gamma x_i=\phi\}$ – выходное состояние схемы.

В качестве неисправностей рассмотрим, аналогично работам [I-6], класс одиночных неисправностей типа "устойчиво I" ($x_i\equiv$ I) и "устойчиво 0" ($x_i \equiv 0$).

<u>Определение I.</u> Тест T^j чувствителен к неисправности $x_i\equiv e$, $e\in\{0,1\}$ тогда, когда влияние этой неисправности распространяется на выход схемы.

Введем понятие матрицы чувствительности $S^M=\{s_{ij}\}$, $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,p}$, значения элементов которой определяются следующим образом:

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } F^j \sqcap F^j(x_i \equiv e) = F^j; \\ 1, & \text{если } F^j \sqcap F^j(x_i \equiv e) \neq F^j, \end{cases} \qquad (I)$$

где $F^j(x_i \equiv e)$ – значение выходов для теста T^j при неисправности $x_i \equiv e$.

Определение 2. Чувствительность относительно неисправностей выходных узлов не зависит от теста:

$$(\forall_{i,j})\, i: \Gamma x_i = \emptyset, \quad j = \overline{1,p}\,(s_{ij} = 1). \qquad (2)$$

Пусть задана i-я строка матрицы чувствительности S_i, характеризующая чувствительность тестов T^j, $j = \overline{1,p}$ к неисправностям элемента x_i. Тогда, согласно понятию активизированного пути [5] и определению I, чувствительность тестов распространяется на входы данного элемента следующим образом:

I) для элементов И, И-НЕ

$$\forall j, j: x_j \in \Gamma^{-1} x_i, \; S_j = \bigcap_{k:\, x_k \in \Gamma^{-1} x_i \setminus x_j} X_k \;\; \sqcap S_i; \qquad (3)$$

2) для элементов ИЛИ, ИЛИ-НЕ

$$\forall j, j: x_j \in \Gamma^{-1} x_i, \; S_j = \bigcup_{k:\, x_k \in \Gamma^{-1} x_i \setminus x_j} \overline{X_k} \;\; \sqcap S_i. \qquad (4)$$

Этими формулами фиксируется распространенге чувствительности к неисправностям от выходов к входам для всех p тестов одновременно. В дальнейшем не будем обращать внимание на тип элементов (И или ИЛИ) и используем язык обобщенных значений элементов: $x_i = 0$ – запрещающее, и $x_i = I$ – незапрещающее. В этом случае для определения чувствительности достаточно лишь выражения (3).

Пример I. Пусть заданы векторы значений при 4-х тестах для некоторого 3-входового элемента И: $X_1 = IOII$, $X_2 = IOIO$, $X_3 = OOOI$. Пусть вектором чувствительности выхода является $S_4 = IIII$. По формуле (3) получим:

$$S_1 = X_2 \sqcap X_3 \sqcap S_4 = 0000,$$
$$S_2 = X_1 \sqcap X_3 \sqcap S_4 = 0001,$$
$$S_3 = X_1 \sqcap X_2 \sqcap S_4 = 1010.$$

Начиная со строк, характеризующих выходные узлы схемы, и, учитывая определение 2, конструируем обратным ходом всю матрицу чувствительности S^M. Одновременно можно получить и диагностическую таблицу:

$$\forall i,j:\ c^{e}_{ij} = x_{ij}\, s_{ij}\,\bar{e} \vee \bar{x}_{ij}\, s_{ij}\, e = s_{ij}(x_{ij} \oplus e), \qquad (5)$$
$$i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,p};$$

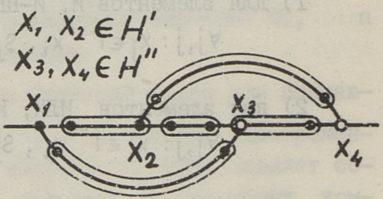
где c^{e}_{ij} – элемент таблицы, имеющий следующую интерпретацию:

$$c^{e}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если тест } T_j \text{ обнаруживает неисправность } x_i \equiv e, \\ 0, & \text{если не обнаруживает.} \end{cases}$$

Сложности при определении векторов чувствительности возникают в случаях контуров, если несколько путей, разветвляющихся от некоторой точки ветвления, затем вновь сходятся в одной точке.

Пусть H' – множество узлов разветвления, относящихся к контурам, и H'' – множество узлов, в которые сходятся два или более путей из одинаковых точек ветвления.

<u>Определение 3.</u> Элементарный путь (ЭП) – это путь графа КС $l_k(x_i, x_j)$, начинающийся в узле x_i, для которого $\Gamma^{-1} x_i \in H'$ или $x_i \in H''$, и оканчивающийся в узле x_j, для которого $\Gamma x_j \in H''$ или $x_j \in H'$ (см. фиг. 1).



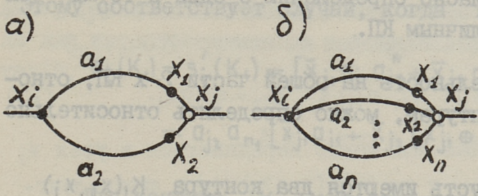
Фиг. 1. Элементарные пути.

В дальнейшем будем рассматривать части КС с контурами в виде упрощенной топологической модели – графа элементарных путей. При этом связь некоторого ЭП l_k с остальной частью КС учитывается параметром активизированности – a_k. Элементарный путь $l_k(x_i, x_j)$ называется активизированным, если активизированы все узлы $x_h \in \hat{\Gamma} x_i \cap \hat{\Gamma}^{-1} x_j$.

<u>Определение 4.</u> Контурные пути (КП) – это пути графа КС $l_k(x_i, x_{jk})$, исходящие из одного и того же узла $x_i \in H'$ и сходящиеся в один и тот же узел $x_j = \Gamma x_{jk} \in H''$, образуя контур $K(x_i, x_j)$. Любой КП представляет собой ЭП (или последовательность ЭП). Кратностью контура называется количество КП, образующих контур. Контурный путь характеризуется двумя параметрами: 1) значением его конечного узла $x_j \in H''$ и 2) активизированностью a_k. Этими параметрами определяется распространение чувствительности вне контура, левее точки ветвления.

Вектор чувствительности внутри контура, по контурным путям, определяется по формуле (3).

Рассмотрим особенности определения чувствительности вне контура.



x_1	x_2	a_1	a_2	S_i
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

Фиг. 2. Простые контуры. Табл. 1.

Случай I. Простые контуры. Контуры называются простыми, если соответствующие КП представляют собой ЭП.

Рассмотрим контуры с кратностью 2 (см. фиг.2а). Простой анализ 16-ти вариантов относительно значений параметров КП показывает, что имеется лишь 4 возможности (см.таблицу I) для распространения чувствительности левее контура. Следует обратить внимание на ту особенность, что КП могут быть активизированными, но этого недостаточно, чтобы чувствительность через них распространялась.

По таблице I можно получить выражение для чувствительности в точке x_i относительно узла x_j (фиг. 2а):

$$s_i = S(x_1, x_2; a_1, a_2) = x_1 x_2 a_1 a_2 + \bar{x}_1 a_1 (x_2 \oplus a_2) + \bar{x}_2 a_2 (x_1 \oplus a_1). \qquad (6)$$

Учитывая условия активизированности узла x_j, обобшаем выражение (6) для случая простого контура кратности n относительно выходных узлов:

$$s_i = S(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_n) \prod_r x_r \cdot s_j =$$

$$= \Big[\prod_{k=1}^{n} x_k a_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k a_k \prod_{l=1,\, l\neq k} (x_l \oplus a_l)\Big] \prod_r x_r \cdot s_j . \qquad (7)$$

$$r:\ x_r \in \Gamma^{-1} x_j,\quad (\forall k)\ k = \overline{1,n}\ \big[H(x_k) \cap H(x_r) = \varnothing\big],$$

где $H(x_k) \subset H'$ - множество точек ветвления, из которых имеются пути в узел x_k.

Обобщение формул (6) и (7) для случая параллельного моделирования p тестов сводится к соответствующим операциям алгебры логики над булевскими векторами с p компонентами.

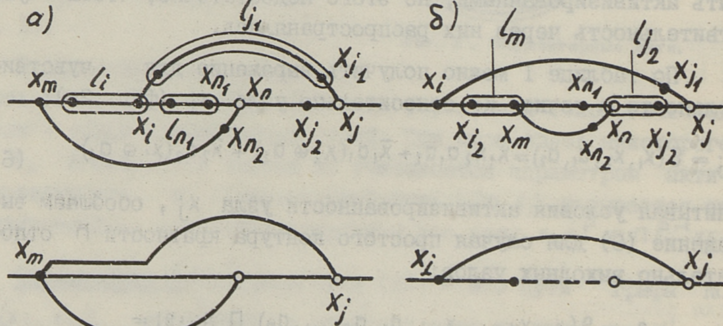
Случай 2. Сложные контуры. Контуры являются сложными, если соответствующие КП представляют собой последовательности ЭП. При этом, согласно определению 3 одни и те же ЭП могут относиться к различным КП.

Лемма I. Чувствительность на общей части 2-х КП, относящихся к различным контурам, можно определить относительно любого контура.

Доказательство. Пусть имеются два контура $K_1(x_i, x_j)$ и $K_2(x_m, x_n)$, имеющие общий ЭП l_{n_1} (см. фиг. 3а). По формуле (3) для обоих контуров получим соответственно $s_{n_1}(K_1) = x_{j_1} a_{j_2} s_j$, $s_{n_1}(K_2) = x_{n_2} s_n$.

Так как $s_n = x_{j_1} a_{j_2} s_j$ и из условия определения a_{j_2} следует $a_{j_2} \to x_{n_2}$, то $s_{n_1}(K_1) = s_{n_2}(K_2)$.

Лемма 2. Если два контура, имеющие различные точки разветвления, касаются, то чувствительность пути между этими точками определяется относительно контура, имеющего более правый узел схождения.



Фиг. 3.

Доказательство. Рассмотрим те же контуры K_1 и K_2 на фиг. 3а. Покажем, что достаточно определить чувствительность s_i относительно контура $K_1(x_i, x_j)$:

$$s_i(K_1) = [x_{j_1} x_{j_2} a_{j_1} a^*_{j_2} + \bar{x}_{j_1} a_{j_1}(x_{j_2} \oplus a^*_{j_2}) + \bar{x}_{j_2} a^*_{j_2}(x_{j_1} \oplus a_{j_1})] s_j, \quad (8)$$

где $a^*_{j_2} = a_{j_2} a_{n_1}$. Нетрудно убедиться, что $s_i(K_1) \neq s_i(K_2)$. Однако, если путь к x_{j_2} не активизирован, но $x_{j_2} = 1$, то чувствительность определяется лишь активизированностью путей l_i и l_{j_1}, и контур K_2 никакой роли не играет. Следовательно, достаточно показать, что $s_i(K_1) \to s_i(K_2)$ в том случае, когда чувствительность распространяется по общей части контуров. Этому соответствует случай, когда $x_{j_2} = 0$, $a_{j_2}^* = 1$. Тогда

$$s_i(K_1) = s_i'(K_1) = [\bar{x}_{j_1} a_{j_1} a_{j_2}^* + \bar{x}_{j_2} a_{j_2}^* (x_{j_1} \oplus a_{j_1})] s_j =$$

$$= a_{j_2} a_{n_1} [\bar{x}_{j_1} a_{j_1} + \bar{x}_{j_2} (x_{j_1} \oplus a_{j_1})] s_j . \qquad (9)$$

Для контура K_2 относительно x_n имеем:

$$s_i(K_2) = x_{n_2} a_{n_1} . \qquad (10)$$

Так как $a_{j_2} \to x_{n_2}$, то из формул (9) и (10) следует, что $s_i'(K_1) \to s_i'(K_2)$.

Теорема. Для определения чувствительности левее сложного контура любой конфигурации правомерно рекуррентное применение оператора $S(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Доказательство. Рассмотрим семейство касающихся простых контуров, представляющее собой подграф исходного графа КС с одним выходным узлом (самый правый узел схождения) и одним входным узлом (самая левая точка разветвления). Покажем, что любой такой граф приводится к эквивалентному простому контуру с кратностью n, для которого непосредственно применим оператор $S(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Всевозможные варианты касания двух контуров можно свести к следующим случаям:

1. Контурный путь проходит через другой контур (см.рис. 3б). Необходимыми условиями для того, чтобы изменение сигнала в точке x_i или левее, передавалось в узел x_{j_2}, являются активизированность путей l_m, l_{j_2} и чувствительность в точке x_m относительно контура $K(x_m, x_n)$, т.е. чтобы

$$a_{j_2}^* = a_{j_2} s_m a_m' = a_{j_2} S(x_{n_1}, x_{n_2}; a_{n_1}, a_{n_2}) a_m = 1, \qquad (11)$$

где $a_{j_2}^*$ - эквивалентная активность контурного пути $L(x_{i_2}, x_{j_2})$.

Следовательно, для определения чувствительности в точке x_i можно рассмотреть некоторый эквивалентный простой контур $K'(x_i, x_j)$ с кратностью 2 и параметрами активности a_{j_1}, $a_{j_2}^*$

и применить оператор S

$$s_i = S(x_i, x_j;\ a_{j_1}, a_{j_2} S(x_{n_1}, x_{n_2};\ a_{n_1}, a_{n_2}) a_m) \cdot s_j. \quad (12)$$

2. Контурный путь имеет точку разветвления (см.рис.3а). По леммам I и 2 можно определить чувствительность s_i и активность a_i, не обращая внимания на контур $K(x_m, x_n)$:

$$s_i = S(x_{j_1}, x_{j_2};\ a_{j_1}, a^*_{j_2})\, s_j,\ a^*_{j_2} = a_{j_2} a_{n_1}. \quad (13)$$

Изменение сигнала в точке x_m может передаваться в узел x_j двумя путями: по $l_1(l_i, l_{j_1})$ и по $l_2(K(x_m, x_n), l_{j_2})$ с эквивалентными активизированностями соответственно $a^*_1 = a_i a_{j_1}$ и $a^*_2 = S(x_{n_1}, x_{n_2};\ a_{n_1} a_{n_2}) \cdot a_{j_2}$. Следовательно, для определения чувствительности в точке x_m можно также рассмотреть некоторый эквивалентный простой контур $K'(x_m, x_j)$ с кратностью 2, параметрами активизированности a^*_1, a^*_2, и применить оператор $S: s_m = S(x_{j_1}, x_{j_2};\ a_i a_{j_1}, S(x_{n_1}, x_{n_2};\ a_{n_1}, a_{n_2}) a_{j_2}) \cdot s_j$.

Из вышеизложенного следует, что над исходным сложным графом применимы два типа преобразований: I) замещение контура эквивалентным путем (рис. 3б), и 2) совмещение смежных точек разветвления (рис. 3а). Нетрудно заметить, что при последовательном применении таких преобразований, можно привести сколь угодно сложный контур к эквивалентному простому контуру, для которого применим оператор S.

<u>Следствие</u>. Теорема приводит к следующему алгоритму. По формулам (3)-(5), с продвижением от выходов к входам КС, последовательно строятся матрица чувствительности S^M и диагностическая таблица C. По контурным путям дополнительно (в случае отсутствия чувствительности на них) проверяется активизированность. В узлах разветвления устанавливается соответствующий контур, анализируются до конца его КП и по формуле (7) вычисляется чувствительность. Узлы разветвления, не относящиеся или относящиеся к контурам, приводящим к различным выходным узлам, рассматриваются по обычной методике, учитывая, что левее узла ветвления чувствительности разветвляющихся путей логически суммируются. Последнее утверждение очевидным образом вытекает из независимости выходных узлов.

В заключение отметим, что если при параллельном моделировании p тестов и m неисправностей на ЦВМ с разрядностью p , требуется m проходов модели [3,4], а при использовании интерпретативного подхода, предложенного в работах [5, 6] требуется p проходов, то по предложенному здесь методу требуется лишь два прохода. При этом трудоемкость обратного интерпретативного прохода соизмерима с трудоемкостью прохода для интерпретативного моделирования, описанного в работах [5, 6].

Литература

I. Д.М. Гробман. Программный контроль и диагностика неисправностей вычислительных машин. В сб. "Диагностика неисправностей вычислительных машин". Изд. "Наука", М., 1965.

2. K. Maling, E.L. Allen. A computer organisation and programming system for automated maintenance. IEEE Trans., EC-12, No 6, 1963.

3. Г.А. Голубева и др. Автоматизация программного контроля ЦВМ. В сб. "Диагностика неисправностей вычислительных машин". Изд. "Наука", М., 1965.

4. Г. Чжен и др. Диагностика отказов цифровых вычислительных систем. Изд. "Мир", М., 1972.

5. J.P. Roth a.o. Programmed algorithms to compute tests to detect and distinguish between failures in logic circuits. IEEE Trans., EC-16, No 10, 1967.

6. D.B. Armstrong. A deductive method for simulating faults in logic circuits. IEEE Trans., C-21, No 5, 1972.

A. Viilup, P. Kitsnik, R. Ubar

An Interpretative Fault Simulation Method for Combinational Logic Networks

Summary

An efficient method for generating fault tables is presented. At the first step the state vectors of correct logic are computed for N tests in parallel, where N is the length of computer word. The next step will trace back from output to input and find all sensitized faults for N tests at the same time. It is shown that we can transform any complicated fan-out configuration into a simple basic form. The formalized algorithm to compute sensitivity in fan-out logic is also presented.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 681.32

А.А. Вийлуп, Р.Р. Убар, У.Р. Хейтер

ДИАГНОСТИКА КРАТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЕЙ В КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМАХ

Типичным допущением при разработке систем генерирования тестов для диагностики комбинационных схем (КС) является предположение об одиночных неисправностях. Такое допущение может быть обоснованным до какой-то степени в условиях эксплуатации, но ни в коем случае при производственном испытании КС. Поэтому в настоящее время вопросам диагностики КС с кратными неисправностями уделяется большое внимание.

Расширение области применения известных методов диагностики КС с одиночными неисправностями непосредственно на случай кратных неисправностей невозможно. Причиной является необходимость рассмотрения всех возможных сочетаний неисправностей. Если КС содержит N линий, то в ней можно различить $2N$ одиночных неисправностей типа "устойчиво 0" и "устойчиво I", но в случае кратных неисправностей количество различимых сочетаний достигается уже 3^N-1. С другой стороны, неоднократно показано, что система тестов, обнаруживающая все одиночные неисправности, не гарантирует обнаружение их сочетаний [I,2].

Для диагностики КС с кратными неисправностями разрабатываются специальные методы. Так, например, предложен метод проверки всех различных путей в КС при помощи системы обобщенных тестов [3]. На основании результатов прохождения всей системы тестов можно установить перечень возможных неисправностей в КС. Недостатком метода является избыточность системы тестов с точки зрения обнаружения кратных неисправностей.

Методы, основывающиеся на применении булевских разностей [4] или на использовании эквивалентных нормальных форм совместно с картами Карно [5], позволяют получить более экономные системы тестов, которые, однако, хотя и гарантируют обнаружение всех сочетаний кратных неисправностей, не обладают свойством локализации их.

С этой точки зрения представляет интерес проблема интерпретации результатов некоторой системы тестов с целью локализации кратных неисправностей, если они есть.

В данной статье предлагается метод списков условных отрицаний неисправностей. Идея метода заключается в постепенном расширении множества неисправностей, для которых установлено их отсутствие. На основе каждого удачно прошедшего теста определяются две группы неисправностей: I) неисправности, для которых установлено их отсутствие, и 2) неисправности, которые отсутствуют при выполнении некоторых условий относительно существования других неисправностей. Совместный анализ таких групп для нескольких тестов позволяет установить выполнение условий для неисправностей второй группы с тем, чтобы перенести их в первую группу и сузить множество подозреваемых неисправностей.

Класс рассматриваемых неисправностей – "устойчиво 0" и $(x_i \equiv 0)$ и "устойчиво I" $(x_i \equiv 1)$.

Представим КС в виде направленного графа $G(X, \Gamma)$, где $X = \{x_i\}$ – множество вершин в графе, соответствующих логическим элементам или точкам разветвления КС, и Γ – отношение порядка во множестве X, интерпретирующее совокупность связей между элементами КС.

Вершины x_i характеризуются логическими значениями, интерпретирующими состояния выходов логических элементов КС для некоторого теста. При этом рассматриваем т.н. обобщенные состояния (запрещенные и незапрещенные) [6], чтобы не делать различия между элементами И и ИЛИ. Если x_k является элементом И, то для $x_i \in \Gamma^{-1}x_k$ "$x_i = 0$" является запрещающим и "$x_i = 1$" незапрещающим состояниями. Для элементов ИЛИ имеет место противоположное.

Любой тест T_j основывается на организации в КС (и соответственно на графе G) одного или нескольких активизированных путей [6]. Активизированным путем L_{i_1,i_n} на графе G назовем последовательность вершин $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, так что

$$\Gamma^{-1} x_{i_1} = \Gamma x_{i_n} = \varnothing, \quad x_{i_k} = \Gamma x_{i_{k-1}},$$
$$(\forall k)_{k \neq 1} \left(\prod_i x_i = 1,\ x_i \in \Gamma^{-1} x_{i_k} \setminus x_{i_{k-1}}\right). \tag{I}$$

В дальнейшем будем рассматривать одновыходные КС, так как результаты, полученные для одновыходных КС, могут быть распространены на многовыходные КС.

Пусть тест T_j активизирует некоторый путь L_{i_1,i_n} до выходного узла x_{i_n}, $\Gamma x_{i_n} = \varnothing$ и значение x_{i_n} выражает эталонную реакцию исправной КС на тест T_j и $x^*_{i_n}$ реакцию КС на тест T_j в реальном контролирующем эксперименте. Тогда действительны следующие утверждения:

<u>Утверждение I. Пусть</u> $x_{i_n}(T_j) = x^*_{i_n}(T_j)$. Тогда для любого узла x_{i_k}, $x_{i_k} \in L_{i_1,i_n}$, $x_{i_k} \neq x_{i_n}$ имеем:

I) если $x_{i_{k+1}} = x_{i_k} = 0$, то $(x_{i_{k+2}} \neq 0) \rightarrow (x_{i_{k+1}} \neq 1)$,

если $k = \overline{1, n-2}$; $x_{i_{k+1}} \neq 1$, (2)

$$\text{если } k = n-1; \tag{3}$$

$$(x_{i_{k+1}} \neq 0) \prod (x_m \neq 0) \rightarrow (x_{i_k} \neq 1); \quad m: x_m \in \Gamma^{-1} x_{i_{k+1}} \setminus x_{i_k} \tag{4}$$

2) если $x_{i_{k+1}} = x_{i_k} = 1$, то $(x_{i_{k+2}} \neq 1) \rightarrow (x_{i_{k+1}} \neq 0)$,

$$\text{если } k = \overline{1, n-2}; \tag{5}$$

$$x_{i_{k+1}} \neq 0 \quad \text{если } k = n-1; \tag{6}$$

$$\forall x_m, x_m \in \Gamma^{-1} x_{i_{k+1}} : (x_{i_{k+1}} \neq 1) \rightarrow (x_m \neq 0). \tag{7}$$

<u>Замечание</u>. Если узел $x_{i_{k+1}}$ интерпретирует инвертор, то выражение $x_{i_{k+1}} \neq e$ изменяется на $x_{i_{k+1}} \neq \bar{e}$, где $e \in \{0, 1\}$.

<u>Утверждение 2</u>. Пусть $x_{i_n}(T_j) \neq x^*_{i_n}(T_j)$. Тогда

$$x_{i_n} \neq \bar{e}. \tag{8}$$

Приведенные утверждения вытекают из анализа таблиц функций логических элементов типа И и ИЛИ. При этом узлы, соответствующие точкам разветвления, соответствуют частному случаю любого из этих элементов.

Каждому тесту соответствует система высказываний (2)-(8) - список условных отрицаний неисправностей. Из выражений (3), (6) и (8) следует, что в этом списке существует всегда по крайней мере одно безусловное отрицание неисправности.

Обозначим $X_j=\{x^e_{j1}, x^e_{j2},\dots,x^e_{jn}\}$ – множество неисправностей, для которых устанавливается условное отрицание тестом T_j с положительным результатом, с $H^e_{jk}=\{x^{\bar e}_{m_1}, x^{\bar e}_{m_2},\dots, x^{\bar e}_{m_k}\}$ - множество неисправностей, конъюнкция отрицаний которых является условием отсутствия неисправности $x_{jk}\equiv e$, так что

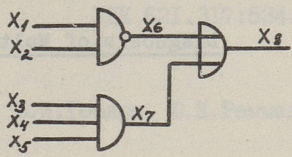
$$\prod_{m=m_1}^{m_k}(x_m\neq\bar e)\longrightarrow(x_{jk}\neq e),\quad k=\overline{1,n}\,. \tag{9}$$

По существу высказывания (2)-(8) для заданного теста при заданном результате образуют систему булевских уравнений. Совместное решение системы этих уравнений для всей системы тестов дает в качестве решения два множества: $H_1 = \{x^e_i \mid i : H^e_i = \emptyset\}$ - множество безусловных отрицаний неисправностей, и $H_2=\{x^e_i\mid i : H^e_i = \emptyset\}$ - множество условных отрицаний неисправностей. Если H - множество всех неисправностей, то $H^*(T)=H\setminus(H_1\cup H_2)$ - представляет собой совокупность неисправностей, таких, что $\bigcup_i H^e_i\subseteq H^*(T)$, и информация о которых полностью отсутствует. Множество $H^*(T)\cup H_2$ - представляет собой совокупность подозреваемых неисправностей.

После теста T_1	После теста T_2	После тестов T_1, T_2
$x_8\neq 0$	$x_8\neq 1$	$(x_5\neq 0)\to(x_1\neq 0)$
$(x_6\neq 1)(x_8\neq 1)\to$	$(x_8\neq 0)\to(x_6\neq 1)$	$(x_6\neq 0)\to(x_2\neq 0)$
$\to(x_7\neq 0)$	$(x_8\neq 0)\to(x_7\neq 1)$	$x_8\neq 0,\quad x_8\neq 1$
$(x_7\neq 1)\to(x_3\neq 0)$	$(x_6\neq 0)\to(x_1\neq 0)$	$x_7\neq 0,\quad x_6\neq 1$
$(x_7\neq 1)\to(x_4\neq 0)$	$(x_6\neq 0)\to(x_2\neq 0)$	$x_3\neq 0,\quad x_7\neq 1$
$(x_7\neq 1)\to(x_5\neq 0)$	$(x_4\neq 0)(x_5\neq 0)(x_7\neq 0)\to$	$x_4\neq 0,\quad x_3\neq 1$
	$\to(x_3\neq 1)$	$x_5\neq 0$

Табл. 1.

Учитывая результаты, полученные в работе [6], можно вышеизложенное распространить на общий случай КС со сходящимися разветвлениями. В этом случае, в зависимости от тестовых комбинаций, простые неравенства в системе высказываний (2)-(7) могут становиться конъюнкциями и дизъюнкциями неравенств.



Фиг. 1.

Пример. Пусть задана КС на рис. I. После успешно прошедших тестов T_1 = IIIII и T_2 = IIOII на основе системы высказываний в табл. I можно установить следующие множества подозреваемых неисправностей $H^*(T)=\{x_1^1, x_2^1, x_4^1, x_5^1, x_6^0\}$ и $H_2=\{x_1^0, x_2^0\}$. При этом, если $x_6 \not\equiv 0$, то множество H_2 условных неисправностей становится пустым.

Литература

1. D.C. Bossen, S.J. Hong. Cause-effect analysis for multiple fault detection in combinational networks. IEEE Trans., C-20, No 11, 1971.

2. В.П. Чипулис. О проверке схем при сочетании неисправностей. "Автоматика и телемеханика" 1972, № 9.

3. Г.А. Шейкина. Диагностика комбинационных схем с кратными неисправностями. Труды МИИТ, вып. 410, 1972.

4. S.S. Yau, Y.S. Tang. An efficient algorithm for generating complete test sets for combinational logic circuits. IEEE Trans., C-20, No 11, 1971.

5. I. Kohavi, Z. Kohavi. Detection of multiple faults in combinational logic networks. IEEE Trans., C-21, No 6, 1972.

6. А.А. Вийлуп, П.А. Китсник, Р.Р. Убар. Об интерпретативном моделировании неисправностей в комбинационных логических схемах. В наст. сборнике, стр. 79.

A. Viilup, R. Ubar, U. Heiter

Diagnosis of Multiple Faults in Combinational Networks

Summary

The multiple fault location problem is considered. A method for interpreting the results of correctly passed tests is described and used for fault localisation. Each correctly passed test increases the set of missing faults taking into account their dependence upon the other faults.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 350 1973

УДК 621.317:534.6

Л.К.Эйнер, Б.И.Гордон, Ю.К.Реммель

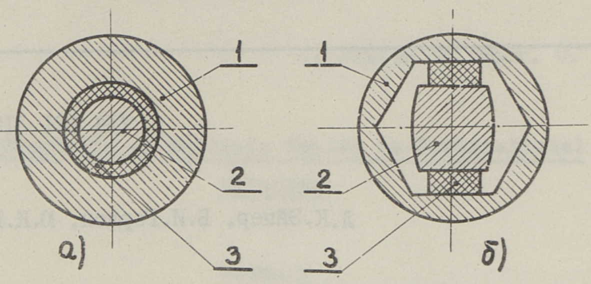
О ТЕОРИИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДАТЧИКОВ

Введение

Наиболее распространенными колебательными приборами для исследования вязкоупругости широкого класса материалов (полимеров, компаундов, клеев и др.) являются приборы типа Фитцджеральда-Ферри [1...5], позволяющие определить динамический модуль сдвига и динамическую вязкость образцов в режиме малоамплитудного колебательного сдвигового деформирования. Схема испытания образца, присущая этим приборам, приведена на фиг. 1. Цилиндрический образец (или два образца, имеющие форму таблетки) испытывает деформацию сдвига между колеблющейся внешней трубкой и свободно подвешенной массой, которая остается неподвижной благодаря своей большой инерции.

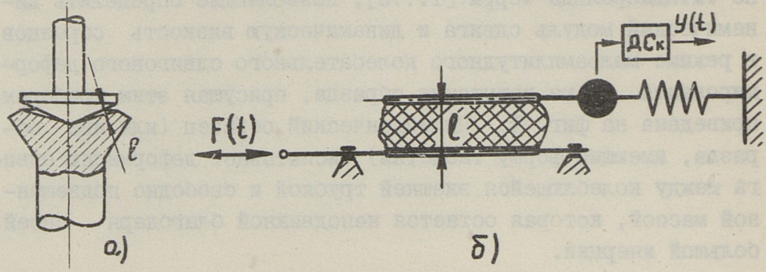
При выводе расчетных формул и калибровке приборов этого типа из ряда дополнительных факторов, определяющих в конечном итоге точность и согласуемость результатов измерения, в первую очередь, рассматриваются влияние подвеса и инерции "плавающей" массы (при измерении жестких образцов на низких частотах) и влияние размеров и инерционности образцов.

Вторым прибором, выгодно отличающимся среди описанных в литературе, является крутильный вискозиметр Винцельберга [5], созданный для исследования высоковязких жидкостей. Этим прибором можно измерять скорость и фазу демпфированного колебательного движения в вязкой жидкости при помощи пассивного колебательного преобразователя. Измерительная головка



Фиг. 1. Схема испытания, присущая приборам типа Фитцджеральда–Ферри:
а) – цилиндрический образец,
б) – два образца в виде "таблетки",
1 – внешняя подвижная труба,
2 – инертная масса,
3 – образец.

прибора имеет форму конус–конус (фиг. 2, а). Нижний конус совершает крутильные колебания с заданной амплитудой и частотой, а верхний упругоподвешенный конус является приемным.



Фиг. 2. Схема вискозиметра Винцельберга:
а) – измерительная головка,
б) – эквивалентная схема прибора,
l – размер рабочей щели,
F(t) – сила возбуждения сдвиговых колебаний,
У(t) – выходной сигнал,
ДСк – датчик колебательной скорости.

Механическая колебательная система вискозиметра схематически изображена на фиг. 2,б. Теория вискозиметра [7] содержит два существенных упрощения: инерционностью измеряемой жидкости и активными потерями в приемном преобразователе пренебрегают. Выведенные зависимости недействительны в некотором интервале частоты $\Delta\omega$ вокруг резонанса приемного преобразователя. Для минимизации $\Delta\omega$ необходимо минимизировать размер рабочей щели l (фиг. 2).

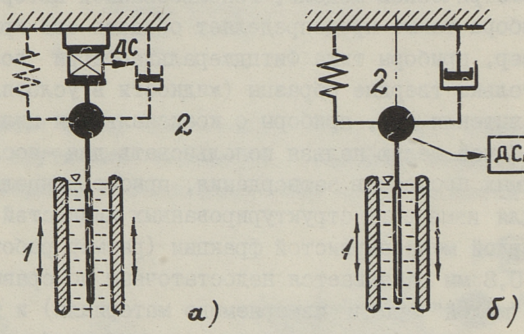
Большая часть из остальных приборов, предложенных для исследования вязкоупругости, использовались только их авторами. Основным фактором, препятствующим сопоставлению и обобщению полученных результатов, несомненно является разнообразие и сложность приборов с точки зрения геометрии опыта. Усложнение формы прибора (например, использование концентрических цилиндров, работающих по типу насоса) затрудняет учет граничных условий. Иногда это вообще не удается, и фактические напряжения деформации в образце не соответствуют геометрической модели, использованной автором. Геометрия прибора также предопределяет область его применения. Так, например, приборы типа Фитцджеральда-Ферри позволяют измерять только твердые образцы (жидкости в условиях фиг.I, очевидно, вытекли бы), приборы с коаксиальными цилиндрами и с малой рабочей щелью нельзя использовать для исследования невозвратимых процессов затвердения, прибор Винцельберга не подходит для измерения структурированных жидкостей с содержанием твердой мелкозернистой фракции (размер рабочей щели l = 0,2...0,8 мм оказывается недостаточным по сравнению с размером "малой" части измеряемого материала) и т.д. Усложенение геометрии опыта приводит к сужению области использования прибора. Отсюда следует естественный вывод: для создания прибора с широкой областью применения следует исходить из простейшей геометрической формы проведения опыта, т.е. использовать плоскопараллельную форму измерительной камеры. Ведь в принципе корректный сдвиговый эксперимент получается только при деформировании достаточно тонкого слоя жидкости или тонкого образца между большими пластинами. Это требование для твердых образцов выполнено, например, в работе [4].

Нами поставлена задача создания прибора для исследования характеристик вязкоупругих и вязкопластичных жидкотекучих материалов одним прибором, который при необходимости можно использовать и для измерения "твердых" образцов с невысокой упругостью. Отсюда, на наш взгляд, вытекают следующие исходные условия для проведения теоретического анализа, выбора механической конструкции и электрической схемы прибора:

- использование плоскопараллельной формы измерительной камеры (для достижения максимальной универсальности прибора;

- использование "большой" рабочей щели между пластинами (для исследования вязкопластичных структурированных жидкостей и процессов их твердения, а также для измерения"твердых" образцов);

- учет влияния собственных потерь и инерционности измерительного преобразователя (необходимо для измерения малых вязкостей).



Фиг. 3. Схема прибора с плоским зондом и плоскопараллельной измерительной камерой:
а) – измерение усилий в стержне зонда (ДС – датчик силы);
б) – измерение колебательной скорости зонда (ДСк – датчик скорости);
1 – колеблющиеся стенки "камеры";
2 – колебательная система с принимающим зондом.

Не претендуя на полноту анализа, приводим основные зависимости для колебательных преобразователей с плоскопараллельной геометрией опыта, принцип действия которых схематически изображен на фиг. 3.

I. Влияние характеристического размера измерительной камеры

Когда характеристический размер плоскопараллельной камеры равен l (фиг. 3), то удельный входной импеданс измеряемой среды на поверхности колеблющейся пластинки равен:

$$Z_{bx} = Z_{ву} \cdot cth(\gamma_{ву} \cdot l), \tag{I}$$

где- $Z_{ву}$ - характеристический сдвиговой импеданс (волновое сопротивление) среды (рассматривается вязкоупругая среда),

$\gamma_{ву}$ - постоянная распространения плоской сдвиговой волны.

Ограничение анализа условием:

$$l < \pi / |\gamma_{ву}| , \tag{2}$$

что практически достаточно, позволяет расчетную зависимость для вычисления нагрузочного импеданса Z_{bx} представить на базе степенного разложения cth в виде:

$$Z_{ву,bx} = \frac{1}{l}\eta^* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k} l^{2k-1}}{(2k)!} \cdot \eta^* \left(\frac{j\omega\rho}{\eta^*}\right)^k, \tag{3}$$

где η^* - комплексная сдвиговая вязкость,

B_{2k} - числа Бернулли,

K - I, 2, 3, 4, ...

Уравнение (3) можно преобразовать в подходящую для автоматизированных вычислений форму, удобную для отдельного определения активного и реактивного компонентов удельного импеданса:

$$Z_{ву,bx} = \frac{\eta' - j\eta''}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k} l^{2k-1}}{(2k)!} \cdot \frac{(-\omega\rho)^k}{|\eta|^{2k-1}} \left\{ H^{(1)}_{k-1}(\eta'', -\eta') - j H^{(0)}_{k-1}(\eta'', -\eta') \right\}. \tag{4}$$

В (4) $H^{(1)}_k(x,y)$ и $H^{(0)}_k(x,y)$ гармонические многочлены [8], определяемые как мнимая и действительная части функции Z^k, где $Z = X + jY$. В данном случае

$$H^{(1)}_k(\eta'', -\eta') = Im\left[\left\{-j(\eta' - j\eta'')\right\}^k\right]; \quad H^{(0)}_k(\eta'', -\eta') = Re\left[\left\{-j(\eta' - j\eta'')\right\}^k\right].$$

Суммарный механический импеданс нагруженного преобразователя равен:

$$Z(\omega) = Z_o(\omega) + Z_н(\omega) = Z_o(\omega) + S.Z_{bxву}(\omega), \tag{5}$$

где $Z_0(\omega)$ – механический импеданс ненагруженного преобразователя,

$Z_{бх}(\omega)$ – удельный механический импеданс нагрузки.

Далее, когда выполнено условие

$$l^2 << 3|\eta^*| / \omega\rho, \tag{6}$$

в вычислениях можно ограничиться только первыми членами ряда (4). Например, когда $l^2 \leqslant 3|\eta^*|/100\omega\rho$, погрешность из-за пренебрежения слагаемыми под знаком суммирования практически не превышает I %, а при учете двух первых членов (4) порядок величины допускаемой относительной погрешности не превышает 10^{-4}. Условие (6), таким образом, позволяет частично или полностью, в зависимости от требуемой точности расчета, пренебречь массовыми силами в измеряемой среде.

Здесь же необходимо напомнить одно важное обстоятельство. Нельзя забывать, что в классической механике сплошных сред изучаемое вещество рассматривается практически непрерывным и однородным, т.е. свойства наименьших частей, на которые мы можем мыслить вещество разделенным, являются такими же, как и свойства всей массы. Такое же предположение делается при трактовке макроскопических явлений в вязкоупругих материалах, однако "малая часть" среды теперь больше чем "малая часть" классической жидкости или твердой чисто-упругой среды [10]. Естественно, что для "усредненного" описания исследования многокомпонентных растворов и механических смесей надо еще раз увеличить размеры "малой части" и, следовательно, необходимо выполнить дополнительное условие:

$$l >> l_\mu, \tag{7}$$

где l_μ – предполагаемый размер "малой части" измеряемого материала.

2. Измерение силы

Так как скорость перемещения поверхности зонда, связанной с силоизмерительным преобразователем (фиг. 3,а), практически равна нулю, то выражение передаточного импеданса жидкости на I $см^2$ поверхности зонда получается в виде известного отношения:

$$\tau_{ml}/v_{m0} = Z_n = Z_{ву}/sh(\gamma_{ву} l). \tag{8}$$

После степенного разложения функции $1/\mathrm{sh}\gamma_{ву} l = \mathrm{csch}\gamma_{ву} l$ и введения гармонических многочленов получаем:

$$Z_n = \frac{\eta^*}{l} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2^{2k-1}-1)B_{2k} l^{2k-1} (\omega\rho)^k}{(2k)!\,|\eta^*|^{k-1}} \left[-H^{(1)}_{k-1}(-\eta'',\eta') + jH^{(0)}_{k-1}(-\eta'',\eta')\right]. \quad (9)$$

При $|\gamma l| < 1$ ряд быстро сходится и учет первых трех членов под знаком суммирования ($k =$ I,2,3) обеспечивает точность вычисления не хуже 0,2 %.

Из уравнений (8) и (9) получаем базовые зависимости для вычисления активного ("вязкого") и реактивного("упругого") компонентов комплексной динамической вязкости измеряемого материала:

$$\left.\begin{aligned} \eta' + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2^{2k-1}-1)B_{2k}(\omega\rho l)^{2k}}{(2k)!\,|\eta^*|^{k-1}} \cdot H^{(1)}_{k-1}(-\eta'',\eta') &= \frac{l}{V_{m0}} \mathrm{Re}\left[\tau_{ml}\right] \\ \eta'' - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2^{2k-1}-1)B_{2k}(\omega\rho l)^{2k}}{(2k)!\,|\eta^*|^{k-1}} \cdot H^{(0)}_{k-1}(-\eta'',\eta') &= \frac{l}{V_{m0}} \mathrm{Im}\left[\tau_{ml}\right] \end{aligned}\right\} . \quad (\mathrm{I0})$$

3. Измерение скорости

Принципиальная механическая схема преобразователя изображена на фиг. 3,б. Учитывая дополнительное краевое условие - баланс сил на приемной стенке

$$\tau_{ml} = v_{ml} \cdot \bar{Z}_2 , \quad (\mathrm{II})$$

где $\bar{Z}_2$ - приведенный на единицу поверхности механический импеданс приемной (колебательной) системы, получаем передаточную функцию для скорости

$$W_v(\omega) = \frac{v_{ml}}{v_{m0}} = \frac{1}{\mathrm{ch}\gamma_{ву} l + \frac{\bar{Z}_2}{Z_{ву}} \mathrm{sh}\gamma_{ву} l} . \quad (\mathrm{I2})$$

После степенного разложения функции $\mathrm{ch}\gamma_{ву} l$ и $\mathrm{sh}\gamma_{ву} l$ при помощи известных преобразований находим:

$$\frac{1}{W_v} = 1 + \frac{\bar{Z}_2 l}{\eta^*} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma_{ву} l)^{2k}}{(2k)!} \cdot \left(1 + \frac{l^{2k+1}}{2k+1} \cdot \frac{\bar{Z}_2}{\eta^*}\right), \quad (\mathrm{I3})$$

где $\kappa = 1, 2, 3 \ldots$

Уравнение преобразователя скорости в наиболее удобной для использования форме имеет вид:

$$\frac{1-W_v(\omega)}{W_v(\omega)} = \frac{Z_{ву}(ch\gamma_{ву} l - 1) + \bar{Z}_2 sh\gamma_{ву} l}{Z_{ву}} =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{l^{2\kappa}(j\omega\rho)^{\kappa}\cdot(\eta'+j\eta'')^{\kappa}}{(2\kappa)!\,|\eta^*|^{2\kappa}} + \frac{\bar{Z}_2}{j\omega\rho}\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{l^{2\kappa-1}(j\omega\rho)^{\kappa}\cdot(\eta'+j\eta'')^{\kappa}}{(2\kappa-1)!\,|\eta^*|^{2\kappa}}. \quad (14)$$

При $|\gamma_{ву} l| \leq \pi/2$ и $|\bar{Z}_2| < |\eta^*|$ полученные ряды быстро сходятся и учет первых четырех слагаемых под знаком суммирования ($\kappa = 1,2,3,4$) обеспечивает относительную погрешность порядка 10^{-4}.

После введения в (14) гармонических многочленов получаем в конечной форме:

$$\frac{1-W_v}{W_v} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{l^{2\kappa}(\omega\rho)^{\kappa}}{(2\kappa)!\,|\eta^*|^{2\kappa}} \cdot \left[H_{\kappa}^{(0)}(-\eta'',\eta') + jH_{\kappa}^{(1)}(-\eta'',\eta')\right] +$$

$$+ \frac{\bar{Z}_2}{j\omega\rho}\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{l^{2\kappa-1}(\omega\rho)^{\kappa}}{(2\kappa-1)!\,|\eta^*|^{2\kappa}} \cdot \left[H_{\kappa}^{(0)}(-\eta'',\eta') + jH_{\kappa}^{(1)}(-\eta'',\eta')\right]. \quad (15)$$

Представленные уравнения являются общими (в смысле учета собственных потерь измерительного преобразователя) и не требуют ограничений по рабочей частоте системы. Относительная сложность выведенных зависимостей по нашему мнению компенсируется применением подходящей для автоматизированных вычислений формы. Расчетные формулы первого приближения для ручного вычисления можно получить, ограничиваясь первыми членами ($\kappa = 1$ или $\kappa = 1,2$) слагаемых рядов в (15), а также в (10) и (4). Получаемые выражения обеспечивают относительную погрешность вычисления порядка 5 %.

Рассмотрим два частных случая, имеющих практическое значение:

1. Когда приемный преобразователь имеет достаточно высокую добротность, его собственными потерями можно пренебречь. Тогда импеданс колебательного преобразователя $\bar{Z}_2 = j X_2(\omega)$ во всем интервале частот, исключая узкую ре-

зонансную зону $\omega_p \pm \Delta\omega_p$ (ω_p – собственная частота измерительного преобразователя). Подставляя в уравнение (I5)

$$\frac{\bar{Z}_2(\omega)}{j\omega\rho} = -\frac{\bar{M}_2}{\rho}\cdot\frac{1-\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2}, \tag{I6}$$

где $\bar{\omega}_p = \omega/\omega_p$ и $\bar{M}_2$ – приведенная масса преобразователя [9], получаем после необходимых преобразований (учитывая только первые слагаемые в (I5)) формулы для вычисления $\eta'(\omega)$ и $\eta''(\omega)$:

$$\left.\begin{aligned}
\eta'(\omega) &= \frac{\omega_p l^2}{2}\bar{\omega}\rho\left(1+\frac{2\bar{M}_2(1-\bar{\omega}^2)}{l\rho\bar{\omega}^3}\right)\cdot\frac{|W_v|^2\cdot(|W_v|^2+\mathrm{Im}[W_v])}{(|W_v|^2-\mathrm{Re}[W_v])^2+|W_v|^2+\mathrm{Im}[W_v]}\\
\eta''(\omega) &= \frac{\omega_p l^2}{2}\bar{\omega}\rho\left(1+\frac{2\bar{M}_2(1-\bar{\omega}^2)}{l\rho\bar{\omega}^3}\right)\cdot\frac{|W_v|^2-\mathrm{Re}\,[W_v]}{2(|W_v|^2+\mathrm{Im}\,[W_v]-\mathrm{Re}|W_v|)+1}
\end{aligned}\right\} \tag{I7}$$

Практически измерение η' и η'' может быть реализовано при помощи измерения скоростей v_{m0} и v_{ml} и сдвига фаз между ними в установившемся режиме вынужденных колебаний. Необходимая точность полученных формул может быть обеспечена уменьшением l до долей миллиметра (аналогично случаю, анализирсванному Павловским [6]). Когда такая мера в практике нежелательна, формулы (I7) применимы для первичной оценки результатов измерения (или для ориентировочных расчетов преобразователя).

2. В случае, когда частота возбуждения сдвиговых колебаний в жидкости равна собственной частоте приемного преобразователя или очень мало отличается от последней, уравнение (I5) можно преобразовать в систему уравнений в виде:

$$\left.\begin{aligned}
1-\frac{\mathrm{Re}\,[W_v]}{|W_v|^2} &= \frac{\eta''}{|\eta^*|^2}\cdot\frac{\omega_p l^2}{2}\rho\left(1-\frac{2\bar{M}_2}{Q_2 l\rho}\cdot\frac{\eta'}{\eta''}\right)\\
1+\frac{\mathrm{Im}\,[W_v]}{|W_v|^2} &= \frac{\eta'}{|\eta^*|^2}\cdot\frac{\omega_p l^2}{2}\rho\left(1+\frac{2\bar{M}_2}{Q_2 l\rho}\cdot\frac{\eta''}{\eta'}\right)
\end{aligned}\right\}, \tag{I8}$$

где Q_2 – добротность измерительного преобразователя.

В (I8) также учтены только первые слагаемые суммируемых рядов в (I5) (т.е. K = I).

$$\left.\begin{aligned}
\eta'(\omega) &= -\frac{\bar{M}_2\omega_p l}{2Q_2}\left(1+\frac{Q_2 l}{2\bar{M}_2}\rho A\right)\cdot\frac{|W_v|^2-\mathrm{Re}\,[W_v]}{(|W_v|^2+\mathrm{Im}\,[W_v]-\mathrm{Re}\,[W_v])+1}\\
\eta''(\omega) &= \frac{\omega_p l \rho}{2}\left(1-\frac{2\bar{M}_2}{Q_2 l\rho}A\right)\cdot\frac{|W_v|^2-\mathrm{Re}\,[W_v]}{(|W_v|^2+\mathrm{Im}\,[W_v]-\mathrm{Re}\,[W_v])+1}
\end{aligned}\right\}. \qquad (19)$$

При этом $\qquad A = \left(|W_v|^2+\mathrm{Im}\,[W_v]\right)/\left(|W_v|^2-\mathrm{Re}\,[W_v]\right).$

Таким образом, в случае незаторможенной приемной поверхности определение $\eta'(\omega)$ и $\eta''(\omega)$ сводится к измерению скорости возбуждающей и приемной поверхностей и сдвига фазы между ними.

Литература

1. Дж. Ферри (J.D.Ferry). Вязкоупругие свойства полимеров. Москва, 1963.

2. Г.В. Виноградов, Ю.Г. Яновский. Заводская лаборатория, XXXI, 1965, № 1.

3. Ю. Г. Яновский, Г.В. Виноградов. Механика полимеров, 1965, № 4, 106.

4. И. П. Бриедис, Л. А. Файтельсон. Механика полимеров, 1966, № 1, 130.

5. B. Winzelberg. Rheologica Acta, Bd. 3, 1963, Heft 1.

6. J. Pawlowski. Rheologica Acta, Bd. 3, 1963, Heft. 1.

7. В. Филиппов, в кн. "Свойства полимеров и нелинейная акустика", гл. 1 (серия "Физическая акустика", под ред. У.Мэзона, т.II, часть Б), "Мир", Москва, 1969.

8. Л.П. Люстерник, О.А. Червоненкис, А.Р. Янпольский. Математический анализ (вычисление элементарных функций) СМБ, ГИФМЛ. Москва, 1963.

9. Г. Ламб (G.Lamb). Гидродинамика, Гостехиздат, Москва, 1967.

10. Д. Б л е н д (D.R.Bland). Теория линейной вязкоупругости. Москва, 1965.

11. Л. Э й н е р. Исследование колебательных вискозиметров и датчиков вязкостных свойств жидкотекучих материалов. Автореферат диссертации. Таллин, 1971.

L. Einer, B. Gordon, Ü. Remmel

Über die Theorie der planparallelen Viskositätsschwingungsgeber

Zusammenfassung

Es wird die Anwendbarkeit von niederfrequenten Schwingungsgebern für Viskositätsmessungen von flüssigen Polymeren und anderen viskoelastischen Flüssigkeiten erörtert. An Hand eines linearen Modells mit verteilten viskoelastischen Parametern sind die wichtigsten Berechnungsunterlagen für Schwingungsgeber mit Plansonden und planparalleler Meßkammer abgeleitet. Es wird eine Lösung gegeben, die es gestattet, bei Scherschwingungsmessungen in viskoelastischen Substanzen die Komponenten des dynamischen Viskositätskoeffizienten mit Hilfe eines passiven Schwingungsempfängers zu bestimmen.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК:621.317.534.6

Г.Х.Вяльямяэ, А.А.Мартинс, Ю.К.Реммель, С.А. Сеппель, Л.К. Эйнер

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЙ ВИСКОЗИМЕТР ДЛЯ ШЛАКОВ

Введение

Колебательный (вибрационный) метод измерения вязкости жидкостей относится к числу методов, особенно рекомендуемых для измерения вязкости расплавов металлов и солей при высоких температурах (1,2,3,4,5). Сравнение теоретических обоснований, конструкций и экспериментальных результатов, описанных в упомянутых работах, приводит к следующим выводам:

1) метод регистрации свободных возвратно-поступательных или крутильных колебаний зонда, как правило, обеспечивает более высокую точность измерения, но метод не позволяет работать в непрерывном режиме; в случае применения зондов с простейшей конфигурацией (плоский тонкий диск) можно провести строгий математический анализ свободного движения зонда в измеряемой жидкости и создать прибор для абсолютных измерений;

2) метод измерения параметров вынужденных колебаний зонда (автоколебательные вискозиметры и приборы с ручной подстройкой на резонанс) позволяет работать в непрерывном режиме; из-за сложности анализа и расчета вискозиметры этой группы обычно предназначены для сравнительных измерений.

Все вискозиметры, описанные в (1...5), предназначены для измерения малых вязкостей (порядка 0,5...50 сПз) при повышенных давлениях. Поэтому основной конструктивной задачей при создании этих приборов было сведение к минимуму демпфирования со стороны воздуха или газа, окружающего непогруженную часть зонда и другие колеблющиеся части системы.

Задача исследования вязкости шлаков сланца при температурах от 1000° до 1500 °C представляет конструкцию вискозиметра с требованиями, в значительной мере отличающимися от рассмотренных в упомянутых выше работах. Высокая агрессивность расплавленных шлаков позволяет поместить в высокотемпературную зону установки только зонд вискозиметра. Упругий элемент системы, возбудитель и преобразователь для измерения амплитуды колебаний зонда должны находиться вне зоны агрессивных паров расплава.

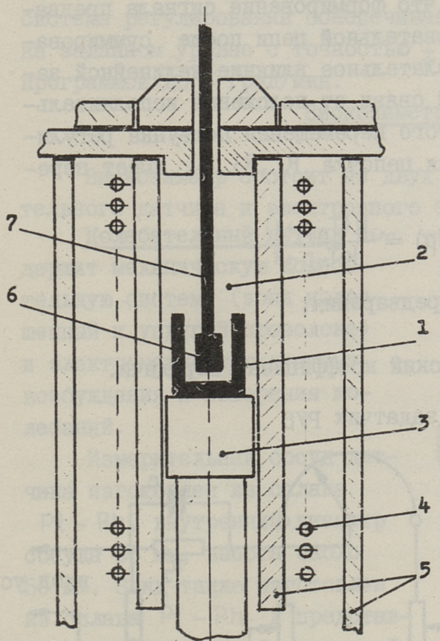
Относительно высокая вязкость (порядка десятков и сотен пуаз) и структурная неоднородность жидких шлаков требуют использования измерительного сосуда, поперечный размер которого существенно превышает размер зонда. Датчик амплитуды зонда, устанавливаемый на значительном расстоянии от сосуда со шлаком, не должен реагировать на неизбежные и изменяющиеся несоосности зонда и сосуда. По перечисленным причинам нами построен описываемый ниже вискозиметр новой конструкции, для измерения вязкости по крайней мере до 200 пуаз при температурах свыше 1000 °C.

Высокотемпературная установка

Конструкция и размеры высокотемпературной установки во многом предрешают конструкцию измерительного преобразователя вискозиметра, поэтому приводим ее краткое описание.

Высокотемпературная установка представляет собой переоборудованную лабораторную молибденовую печь типа ВТ-40/400. Печь установлена на станину в вертикальном положении. Внутренняя часть печи схематически изображена на фиг. I. Цилиндрический сосуд I (изготовленный из сплава Pt – Rh) с исследуемым шлаком вводится в рабочее пространство 2 печи снизу при помощи керамического упора 3. Механизм подъема и опускания упора (на фиг. I не показан) обеспечивает всегда одинаковое расположение пробы в печи. На внутреннюю трубу намотан нагревательный элемент 4 из I мм молибденовой проволоки. Пространство между двумя электрокорундовыми трубами

5 во время работы продувается защитным газом. Цилиндрический зонд 6 вискозиметра и стержень зонда 7 также изготовлены из сплава Pt – Rh. Стержень зонда выводится из рабочего пространства через верхние заглушки огнеупорных патрубков.



Фиг. 1.
Схематический разрез высокотемпературной установки:
1 – измерительный сосуд,
2 – рабочее пространство печи,
3 – упор,
4 – нагреватель,
5 – трубок электрокорундовый,
6 – зонд,
7 – стержень зонда.

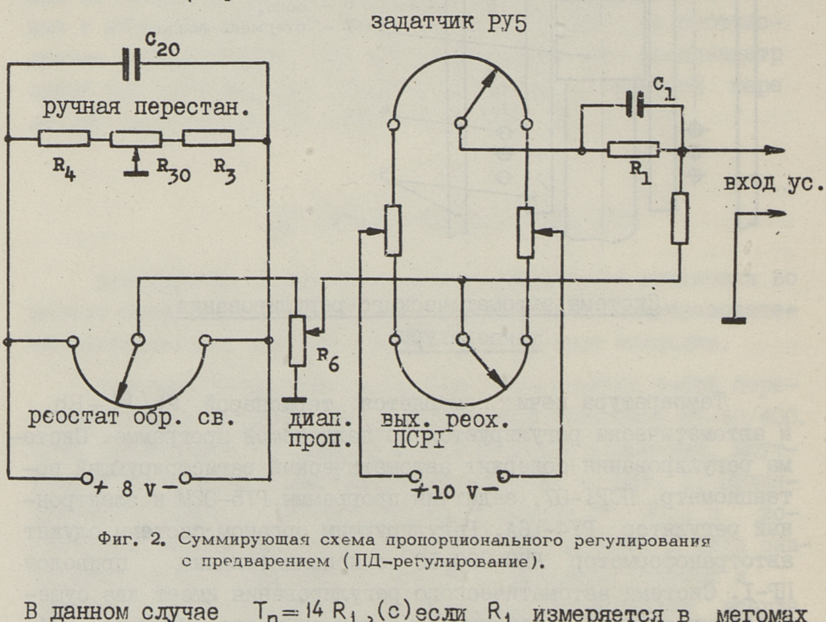
Система автоматического регулирования температуры

Температура печи измеряется термопарой Pt/Pt – Rh и автоматически регулируется по задаваемой программе. Система регулирования содержит автоматический регистрирующий потенциометр ПСР1-07, задатчик программы РУ5-02М и электронный регулятор РУ4-16А. Регулирующим органом системы служит автотрансформатор РНО-250-10 с исполнительным приводом ПР-1. Система автоматического регулирования имеет два существенных отличия по сравнению с типовыми системами на РУ4-16А и РУ5-02М. Во-первых, потенциометр ПСР1-07 для повышения чувствительности канала измерения перенастроен на диапазон I000...I600 ^{o}C. Во-вторых, изменена суммирующая схема регулятора РУ4-I6А с целью более четкого формирования сигнала по производной (сигнала предварения), необходимого для качественного регулирования при резких изменениях задания. Принципиальное различие выбранной схемы (фиг. 2)от типовой заключается в том,что формирование сигнала предварения происходит в последовательной цепи после суммирования. Этим исключается нежелательное влияние нелинейной зависимости сигнала обратной связи от положения исполнительного механизма и прерывистого перемещения ползунка регулирующего органа. Формирующая цепочка R_1, R_2, C_1 имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{k(T_n p+1)}{kT_n p+1},$$

где $T_n = R_1 C_1$ – время предварения;

$$k = \frac{R_2}{R_1+R_2}$$ – статический коэффициент передачи.



Фиг. 2. Суммирующая схема пропорционального регулирования с предварением (ПД-регулирование).

В данном случае $T_n = 14 R_1$,(с)если R_1 измеряется в мегомах и C_1 = I4 мкФ. Пропорциональная составляющая регулирующего сигнала вырабатывается, как и ранее, в цепи обратной связи.

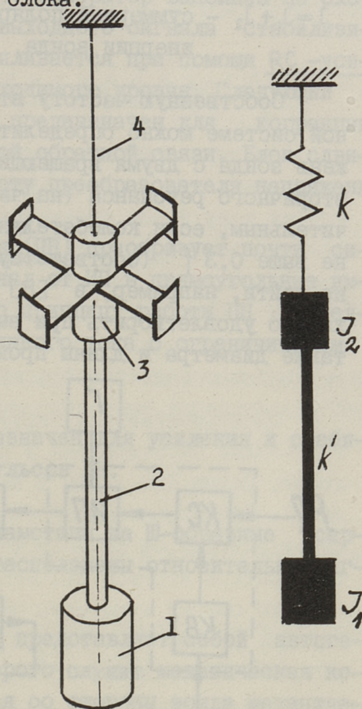
При установке требуемого диапазона пропорционального регулирования (статизма) необходимо учесть, что фактический диапазон пропорциональности при переделанной суммирующей схеме будет в $(R_1 + R_2)/R_2$ раз меньше значения, указанного в заводской инструкции регулятора. Благодаря таким изменениям, система регулирования обеспечивает стабилизацию температуры на заданном уровне с точностью $\pm$ 6 ^{o}C и скорость слежения программой до 5 град/мин.

Вискозиметр

Вискозиметр состоит из двух отдельных блоков; колебательного датчика и электронного блока.

Колебательный датчик содержит механическую колебательную систему (зонд подвешенный к упругой проволоке) и электромагнитную систему возбуждения и измерения колебаний.

Измерительный сосуд датчика изготовлен из сплава Pt – Rh, внутренний диаметр сосуда 35 мм, высота около 50 мм. Зонд также изготовлен из сплава Pt – Rh и представляет собой сплошной цилиндр I (фиг. 3а) с внешним диаметром около I0 мм и высотой 20 мм. Стержень 2 имеет диаметр около 3 мм и прикреплен к цилиндрическому сердечнику 3 электромагнитной системы. Сердечник подвешен на тонкой бронзовой или стальной проволоке 4. К сердечнику 3 также прикреплен крестообразный магнитопровод, изготовленный из тонкого 0,2 мм пермаллоя.



Фиг. 3. Колебательная система датчика:
1 – цилиндрический зонд,
2 – стержень,
3 – сердечник,
4 – упругая проволока.

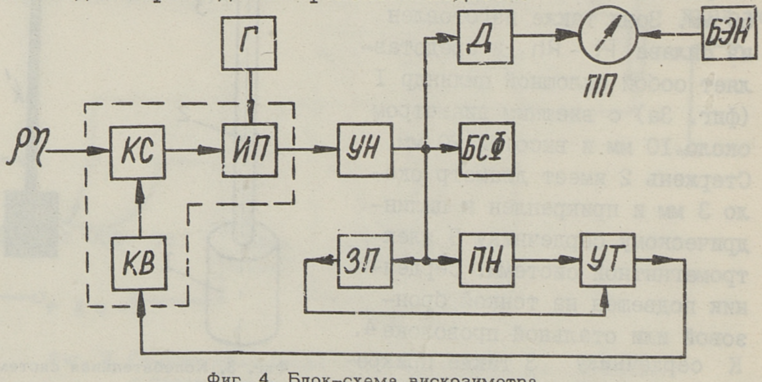
В теории низкочастотных колебательных датчиков механическая колебательная система рассматривается как система с одной степенью свободы [6, 7]. Использованная в данном случае конструкция колебательной системы обязательно требует проверки роли второй упругости в системе, т.е. упругости стержня зонда k' (фиг.3б). Эта проверка практически сводится к определению влияния вторичного резонанса, частота которого определяется упругостью стержня зонда k' и инерционными моментами зонда и сердечника. Как известно, частота крутильных колебаний в системе с одной степенью свободы равна:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J}},$$

где k – угловая упругость проволоки;

$J = J_1 + J_2$ – суммарный полярный момент инерции (J_1 – момент инерции зонда, J_2 – то же сердечника).

Собственную частоту вторичного резонанса в колебательной системе можно определить, рассматривая отдельно стержень зонда с двумя вращающимися концевыми массами. Влияние вторичного резонанса (на частоте f'') можно считать незначительным, если колебательная система возбуждается частотой не выше $0{,}3\,f''$ (соответствующие теоретические выкладки можно найти, например, в [8] и [9]). Условие $f < 0{,}3 \cdot f''$ необходимо удовлетворить при выборе диаметра стержня зонда, а также диаметра и длины проволоки подвеса.



Фиг. 4. Блок-схема вискозиметра.

Блок-схема вискозиметра приведена на фиг. 4. Назначение и принцип работы основных узлов следующие:

Колебательная система (КС) является воспринимающим элементом вискозиметра. Основы расчета ее изложены в работах [6] и [7]. Амплитуда угловых колебаний зонда, колеблющегося на резонансной частоте нагруженной системы, нелинейна, но однозначно определяется динамической вязкостью и плотностью измеряемой жидкости. Амплитуда колебаний измеряется индуктивным преобразователем.

Индуктивный преобразователь (ИП) представляет собой преобразователь малых угловых перемещений, выполняемый по дифференциальной схеме с нагрузкой по постоянному току. Индукционный преобразователь питается от генератора (Г) постоянной частоты (около 10 кГц). Генератор выполнен по схеме мультивибратора, амплитуда выходного сигнала стабилизирована. Сигнал на выходе ИМ усиливается при помощи RC-усилителя напряжения (УН) до необходимого уровня. Следующий блок - блок сдвига фазы (БСФ) предназначен для коррекции сдвига фазы в цепи положительной обратной связи. Блок сдвига фазы также обеспечивает работу преобразователя напряжения.

Преобразователь напряжения (ПН) преобразует почти синусоидальный измерительный сигнал от ИП в прямоугольные импульсы со скважностью $q = 2$. По принципу работы ПН представляет собой усилитель постоянного тока с ограничителем выходного напряжения.

Усилитель тока (УТ) предназначен для усиления и стабилизации амплитуды выходных импульсов ПН.

Катушки возбуждения (КВ) намотаны на Ш-образные сердечники, которые диаметрально расположены относительно магнитопровода сердечника.

Таким образом, вискозиметр представляет собой автогенератор, селективным узлом которого служит механическая колебательная система, нагруженная со стороны зонда механическим импедансом измеряемой жидкости. Колебания системы возбуждаются по цепи положительной обратной связи (ПН-УТ-КВ) импульсным током постоянной (в пределах одного диапазона измерения) интенсивности. На выход усилителя напряжения УН подключен измерительный детектор Д. Сила постоянного тока на выходе детектора измеряется показывающим микроамперметром (ПП). Последний получает 100 %-е смещение стрелки от блока эталонного напряжения (БЭН). Благодаря смещению, вискозиметр имеет прямую шкалу (зависимость амплитуды зонда от вязкости жидкости обратностепенная). Вискозиметр защищен от перегрузки показывающего прибора и обмоток возбуждения.

Блок защиты от перегрузки (ЗП) срабатывает при неправильном выборе диапазона измерения (т.е. когда вязкость среды меньше допустимой для выбранного поддиапазона).

Техническая характеристика вискозиметра

Электронный блок вискозиметра выполнен в обыкновенном исполнении для щитового утопленного монтажа. Внутренний монтаж всех узлов блока выполнен на печатных платах. Внешние габаритные размеры прибора равны 330 x 287 x 424 мм. Электронный блок предназначен для работы в нормальных условиях (температура 20 $\pm$5 $^{\circ}$C, относительная влажность окружающего воздуха 30...80 %). Питание прибора от сети переменного тока 220 В 50 Гц.

Электромагнитная система (узлы ИП и КВ) колебательного датчика вмонтирована в прямоугольный корпус, размеры которого равны 120 x 140 x 45 мм (без зонда и упругой провологи). Требуется защита (экранировка) установленного над печью датчика от прямого теплового излучения. Повышение температуры корпуса датчика выше 25 $^{\circ}$C вызывает дополнительную ошибку измерения до 0,025 %/град при температуре корпуса до 100 $^{\circ}$C. Повышение температуры корпуса датчика выше 100 $^{\circ}$C не допускается.

Общий диапазон измерения вискозиметра подгоняется при настройке и тарировке вискозиметра и может быть выбран от 0...200 Пз до 0...500 Пз. Общий диапазон измерения разбивается на три поддиапазона. Для градуирования вискозиметра использованы растворы канифолия в касторовом масле, изготовленные по указаниям, приведенным в [10]. Вязкость тарировочных жидкостей измерялась шариковым вискозиметром Гэпплера с классом точности I,0.

Основная погрешность прибора, определяемая при нормальной температуре, не превышала 2,5 % от верхнего предела для контролируемого поддиапазона измерения. Для автоматической регистрации результатов измерения вискозиметр имеет выход детектированного сигнала для подключения серийного самопишущего потенциометра постоянного тока со шкалой I0 мВ.

Литература

I. Ю.С. Малинин, З.Б. Энтин. Журнал физической химии, т.36, 399 (I962, № 2).

2. А.Б. Каплун, О.П. Макарова, А.Н. Соловьев. Заводская лаборатория, т. 30, I00 (I964 , № I).

3. R.D. Reeves, G.J. Janz. Trans. Faraday Soc., 61, 2300, 2305, 1965.

4. M.S. White, C. Solomons. Review Scientific Instrumentum, 40, No 2, 1969, pp. 339-345.

5. M.K. Nagarjan. Canadian Journal of Chemistry, 46, 1969, No 12, 1968.

6. Л. Эйнер. Технические средства автоматики (Труды IУ Всесоюзного совещания по автоматическому управлению), "Наука", М., I97I (стр. 398).

7. В.Н. Крутин, И. Б. Смирницкий. Заводская лаборатория, т. 33, (I967, № 4).

8. С.П. Тимошенко. Колебания в инженерном деле ГИФМЛ, М., I959.

9. Г.П. Нуберт. Измерительные преобразователи неэлектрических величин. "Энергия", Л., I970.

I0. Т.И. Сорокоумова, Н.А. Чесноков. Труды ВНИИМ и Комитета Стандартов СССР, вып. 68 (I28), I963, стр. 80.

G. Väljamäe, A. Martins, Ü. Remmel,
S. Seppel, L. Einer

Schwingungsviskosimeter für hochtemperaturige Schlacken

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Meßeinrichtung für Viskositätsmessungen von Schlacken bei Temperaturen über 1000°C mittels eines niederfrequenten Torsions-Schwingungsviskosimeters beschrieben. Die benötigte Temperatur wird in einem Molübdenofen, der mit einer Zeitplanregelungsvorrichtung versehen ist, erzeugt und kann in einem Bereiche von 1000 bis 1450°C mit einer Folgegeschwindigkeit bis 5°C/Min und einer Fehlergrenze von ±6°C geregelt werden.

Der Schwingungsviskosimeter arbeitet im Unterhörfrequenzbereich (ca 10 Hz), hat Meßbereiche von 0...200 und 0...500 P und eine Fehlergrenze von 2,5%.

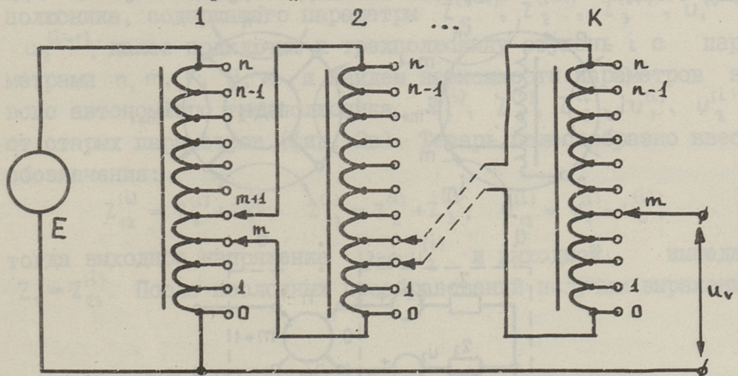
TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 621.317.727.1.

Р.Р. Иыерс

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ИНДУКТИВНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЯ

Требование изменить переменное напряжение с достаточной плавностью при помощи индуктивных делителей напряжения (ИДН) решается применением многоступенчатых ИДН. Существует много схем соединений ступеней ИДН, среди которых наиболее распространенным и точным является соединение по схеме Кельвина-Варлея (фиг. 1).



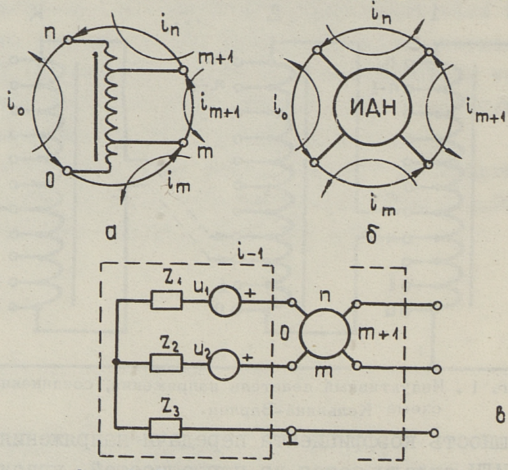
Фиг. 1. Индуктивный делитель напряжения, соединенный по схеме Кельвина-Варлея.

Погрешность коэффициента передачи напряжения многоступенчатого ИДН складывается из погрешностей, присущих отдельным ступеням ИДН и обусловленных конструктивным и электрическим неравенством отдельных секций, процессами в обмотке и в сердечнике, а также из погрешностей, возникающих при соединении отдельных ступеней в многоступенчатую схему и обусловленных влиянием секций.

Известны точные и упрощенные методы [1] для расчета схем с сильной индуктивной связью, пригодные для вывода уравнений многоступенчатых ИДН. В данной статье рассмотрен расчет параметров многоступенчатых ИДН, соединенных по схеме Кельвина-Варлея при следующих упрощениях: для описания ступеней используем низкочастотную схему замещения, не учитывающую емкость между проводами обмотки, нелинейность ступеней и неравномерность параметров секций (в пределах ступени).

I. Рекуррентные соотношения многоступенчатых ИДН

В схемном отношении ступень ИДН представляет собой индуктивный автотрансформатор, имеющий n идентичных секций (с клеммами $0, 1 \ldots n$), которые включены последовательно (каскадно) согласно фиг. 2а. Входное напряжение подается на клеммы 0 и n и выходное напряжение снимается с клемм 0 и m, коэффициент деления равен $\varkappa = m/n$. В многоступенчатом варианте соединения Кельвина-Варлея напряжение секции $m+1$ подается на вход следующей ступени ИДН.



Фиг. 2. Схемы замещения ступеней ИДН.

Каждую ступень (с номером i) можно характеризовать следующими параметрами одинаковых секций: числом секций n_i, активным сопротивлением секций r_i, индуктивностью рассеяния секций L_i и взаимной индуктивностью любых двух секций M_i (их расчет см. [2]). Предполагаем, что ступени размещены на отдельных магнитно не связанных сердечниках. Тогда для каждой ступени ИДН (фиг. 2а и 2б) можно написать Z -матрицу контурных токов (таблица I), где для сокращения введены обозначения $F = r + sL$ - импеданс секции и $H = sM$ - взаимный импеданс, а также в данном пункте пущен индекс номера ступени i для величин n, F, H, m, $\varkappa$.

Таблица I

	0	m	m+1	n
0	$n(F+nH)$	$-m(F+nH)$	$-(F+nH)$	$-(n-m-1)(F+nH)$
m	$-m(F+nH)$	$m(F+mH)$	mH	$m(n-m-1)H$
m+1	$-(F+nH)$	mH	$F+H$	$(n-m-1)H$
n	$-(n-m-1)(F+nH)$	$m(n-m-1)H$	$(n-m-1)H$	$(n-m-1)(F+(n-m-1)H$

Рассмотрим в многоступенчатом делителе предыдущие ступени относительно данной ступени i в виде автономного трехполюсника, содержащего параметры $Z_1^{(i-1)}$, $Z_2^{(i-1)}$, $Z_3^{(i-1)}$, $u_1^{(i-1)}$, $u_2^{(i-1)}$, далее подключим к трехполюснику ступень i с параметрами n, m, F, H, $\varkappa$ и найдем зависимости параметров нового автономного трехполюсника $Z_1^{(i)}$, $Z_2^{(i)}$, $Z_3^{(i)}$, $u_1^{(i)}$, $u_2^{(i)}$ от старых параметров (фиг. 2в). Теперь целесообразно ввести обозначения:

$$Z_{12}^{(i)} = Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)}; \quad Z_{23}^{(i)} = Z_2^{(i)} + Z_3^{(i)}; \quad u_{12}^{(i)} = u_1^{(i)} - u_2^{(i)},$$

тогда выходное напряжение $u_v = u_2^{(i)}$ и выходной импеданс $Z_v = Z_{23}^{(i)}$. После несложных преобразований получим выражения:

$$Z_{12}^{(i)} = \frac{F(F+nH)(n-1) + Z_{12}^{(i-1)}(F+H)}{n(F+nH) + Z_{12}^{(i-1)}}$$

$$Z_2^{(i)} = \frac{F(F+nH)m - Z_{12}^{(i-1)} mH + Z_2^{(i-1)}(F+nH)}{n(F+nH) + Z_{12}^{(i-1)}}$$

$$Z_{23}^{(i)} = \frac{F(F+nH)m(n-m) + Z_{12}^{(i-1)} m(F+mH) + Z_{23}^{(i-1)} n\cdot(F+nH) - Z_2^{(i-1)} 2m(F+nH) + Z_{12}^{(i-1)}\cdot Z_{23}^{(i-1)} - (Z_2^{(i-1)})^2}{n(F+nH) + Z_{12}^{(i-1)}} \qquad (I)$$

$$u_{12}^{(i)} = \frac{F+nH}{n(F+nH)+Z_{12}^{(i-1)}} \cdot u_{12}^{(i-1)}$$

$$u_2^{(i)} = u_2^{(i-1)} + \frac{m(F+nH)+Z_2^{(i-1)}}{n(F+nH)+Z_{12}^{(i-1)}} \cdot u_{12}^{(i-1)}. \qquad (I)$$

Формулы (I) точны при синусоидальном режиме питания ($s = j\omega$), на рабочих частотах обычно $H >> F$, $Z_{12}^{(i)}$, $Z_2^{(i)}$ и формулы (I) упрощаются

$$
\begin{aligned}
Z_{12}^{(i)} &= \frac{n-1}{n}F + \frac{1}{n^2}Z_{12}^{(i-1)} \\
Z_2^{(i)} &= \frac{1}{n}(\varkappa nF - \varkappa Z_{12}^{(i-1)} + Z_2^{(i-1)}) \\
Z_{23}^{(i)} &= Z_{23}^{(i-1)} + \varkappa(1-\varkappa)nF + \varkappa^2 Z_{12}^{(i-1)} - 2\varkappa Z_2^{(i-1)} \\
u_{12}^{(i)} &= \frac{1}{n}(1 - Z_{12}^{(i-1)}/n^2H)\,u_{12}^{(i-1)} \\
u_2^{(i)} &= u_2^{(i-1)} + \varkappa u_{12}^{(i-1)}(1 - Z_{12}^{(i-1)}/n^2H) + Z_2^{(i-1)}u_{12}^{(i-1)}/n^2H.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Если ИДН питается от генератора с напряжением E и с внутренним сопротивлением Z_0, то параметрами начального трехполюсника для формул (I) и (2) являются:

$$Z_{12}^{0} = Z_0;\ Z_2^{(0)} = 0;\ Z_{23}^{(0)} = 0,\ u_{12}^{(0)} = E;\ u_2^{(0)} = 0.$$

Параметры многоступенчатых ИДН можно найти последовательным (рекуррентным) вычислением по формулам (I) или (2). Многоступенчатый ИДН в целом можно рассматривать как трехполюсник с параметрами:

K_u – коэффициент передачи напряжения;

Z_v – выходной импеданс ИДН;

Z_s – входной импеданс ИДН.

Из них точное значений Z_s многоступенчатого ИДН обычно несущественно (оно приблизительно равно Z_s первой ступени). Уточним далее зависимости Z_v и K_u от коэффициентов деления $\varkappa_i$ и параметров секции r_i, L_i, M_i всех ступеней (i = I, 2, ..., K).

2. Выходной импеданс ИДН

Используя первые три выражения формулы (2) можно рекуррентно рассчитать Z_v. Для одноступенчатого ИДН:

$$Z_v^{(1)} = \varkappa_1(1-\varkappa_1)n_1F_1 + Z_0\varkappa_1^2,$$

в случае двухступенчатого ИДН

$$Z_v^{(2)} = \varkappa_1(1-\varkappa_1)n_1F_1 + \varkappa_2(1-\varkappa_2)n_2F_2 + \varkappa_2^2\frac{n_1-1}{n_1}F_1 - 2\varkappa_1\varkappa_2F_1 + Z_0(\varkappa_1+\frac{1}{n_1}\varkappa_2)^2.$$

Общее выражение для Z_v довольно громоздкое, но с достаточной точностью можно написать:

$$Z_v^{(k)} = \sum_{i=1}^{k}\varkappa_i(1-\varkappa_i)n_iF_i + Z_0\varkappa^2, \tag{3}$$

где $\varkappa$ – коэффициент деления многоступенчатого ИДН.

$$\varkappa = \varkappa_i + \frac{1}{n_1}\varkappa_2 + \dots + \frac{1}{n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{k-1}}\varkappa_k. \tag{4}$$

Рассмотрим максимальное выходное сопротивление $Z_{v\,max}^{(k)}$ для случая $Z_0 = 0$. Максимумы вещественной и мнимой частей Z_v совпадают и имеют место при

$$\varkappa_i = \frac{n_i-1}{2n_i};\quad i=1,2,\dots,k-1;\quad \varkappa_k = \frac{1}{2}.$$

При этих значениях $\varkappa_i$ максимальный выходной импеданс точно равен:

$$Z_{v\,max}^{(k)} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{4}(n_i-1)F_i + \frac{1}{4}n_kF_k. \tag{5}$$

3. Погрешности коэффициента передачи напряжения на средних частотах

Выходное напряжение многоступенчатого ИДН, содержащего к ступеней согласно формулам (2) равно:

$$U_2^{(k)} = \sum_{i=1}^{k}\left(\varkappa_i U_{12}^{(i)}n_i + \frac{Z_2^{(i-1)}}{n_i^2H_i}U_{12}^{(i-1)}\right). \tag{6}$$

Для раскрытия выражения (6) целесообразно ввести понятие коэффициента нагрузки:

$$P_{(j)}^{(i)} = \frac{F_i}{n_j^2H_j}.$$

Это отношение параметров рассеяния ступени i к полному входному сопротивлению некоторой следующей ступени j. Величина $P_j^{(i)}$ в нормальных делителях очень мала (модуль порядка 10^{-6}), поэтому в формулах членами, содержащими произведения этих величин, можно всегда пренебречь. При синусоидальном входном сигнале

$$P_{(j)}^{(i)} = \beta_{L(j)}^{(i)} - j\,\frac{\beta_{R(j)}^{(i)}}{\omega\tau_j},$$

где

$\beta_{L(j)}^{(i)} = \dfrac{L_i}{n_j^2 M_j}$ – коэффициент индуктивной нагрузки;

$\beta_{R(j)}^{(i)} = \dfrac{r_i}{n_j r_j}$ – коэффициент активной нагрузки;

$\tau_j = \dfrac{n_j M_j}{r_j}$ – постоянная времени ИДН.

На средних частотах справедливо

$\beta_{L(j)}^{(i)} \gg \dfrac{\beta_{R(j)}^{(i)}}{\omega\tau_j}$ и, следовательно, $P_{(j)}^{(i)} \approx \beta_{L(j)}^{(i)}$.

Целесообразно обозначить взвешенную сумму коэффициентов нагрузки от ступени j до конца делителя через

$$Q_j = P_{(j+1)}^{(j)} + \frac{1}{n_{j+1}^2} P_{(j+2)}^{(j)} + \ldots + \frac{1}{n_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}^2} P_{(k)}^{(j)} \qquad (7)$$

при $1 \leq j \leq k-1$ и $Q_k = 0$.

Из формулы (6) можно теперь получить выражение передачи напряжения в виде:

$$K_u = \frac{U_2^{(k)}}{E} = \varkappa_1(1+\gamma_1) - \varkappa_2 \frac{1}{n_1}(1+\gamma_2) + \ldots + \varkappa_k \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}}(1+\gamma_k),$$

где γ_i характеризует погрешность K_u в отношении $\varkappa_i$

$$\gamma_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{n_j - 1}{n_j} Q_j + \frac{1}{n_i} Q_i . \qquad (8)$$

При известных γ_i можно рассчитать абсолютную погрешность коэффициента передачи напряжения K_u

$$\delta = K_u - \varkappa = \varkappa_1\gamma_1 + \frac{1}{n_1}\varkappa_2\gamma_2 + \ldots + \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_{k-1}}\varkappa_k\gamma_k \qquad (9)$$

и относительную погрешность K_u:

$$\Delta = \delta / \varkappa .$$

Для примера рассмотрим 7-ступенчатый ИДН для входных напряжений 9,9 В. Первый делитель имеет фиксированный коэффициент деления $\varkappa_1 = 1/9$, второй можно регулировать в пределах $\varkappa_2 = 1/11 \ldots 10/11$ и остальные в пределах от 0 до 9/10. Таким образом, выходное напряжение можно регулировать в пределах от 0,100 000 до 1,099 999 В. Параметры отдельных ступеней следующие:

$$r_1 = 0{,}35 \text{ Ом}, \quad L_1 = 0{,}9 \text{ мкГ}, \quad n_1^2 M_1 = 5 \text{ Г},$$

$$r_2 = 0{,}41 \text{ Ом}, \quad L_2 = 0{,}42 \text{ мкГ}, \quad n_2^2 M_2 = 5 \text{ Г},$$

$$r_{3\ldots7} = 0{,}4 \text{ Ом}, \quad L_3 \ldots L_7 = 0{,}45 \text{ мкГ}, \quad n_{3\ldots7}^2 M_{3\ldots7} = 5 \text{ Г}.$$

Используя уравнения (7,8) получим:

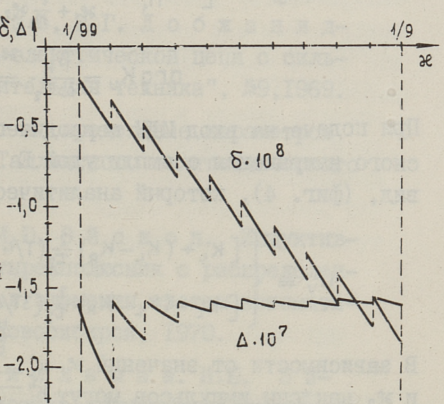
$\gamma_1 = 0{,}020$, $\gamma_2 = -0{,}153$,

$\gamma_3 = -0{,}230$, $\gamma_4 = -0{,}303$,

$\gamma_5 = -0{,}376$, $\gamma_6 = -0{,}449$,

$\gamma_7 = -0{,}522$.

Зависимость абсолютной и относительной погрешностей K_u от коэффициента деления $\varkappa$ приведена на фиг. 3. Общая характеристика погрешностей K_u многоступенчатого ИДН с вполне достаточной точностью определена первыми 2–3 ступенями, относительная доля последующих ступеней (если они изготовлены с приближенно одинаковыми параметрами) несущественна.



Фиг. 3. Ошибки ИДН.

4. Точный расчет погрешностей двухступенчатого ИДН

Для выявления передаточной функции и анализа частотной погрешности необходимо исходить из точных формул (1). Передаточная функция двухступенчатого ИДН получается в виде:

$$K_u(s) = K_R \frac{1 + s\frac{K_L}{K_R}\tau_2}{1 + s\tau_2}, \qquad (10)$$

где

$$K_L = \varkappa_1 + \frac{1}{n_1}\varkappa_2 + \varkappa_1 \frac{1}{n_1}\beta_L - \frac{1}{n_1}\varkappa_2 \frac{n_1 - 1}{n_1}\beta_L$$

– коэффициент передачи индуктивностей (K_u на рабочих частотах);

$$K_R = \varkappa_1 + \frac{1}{n_1}\varkappa_2 + \varkappa_1 \frac{1}{n_1}\beta_R - \frac{1}{n_1}\varkappa_2 \frac{n_1 - 1}{n_1}\beta_R$$

– коэффициент передачи сопротивления (K_u на нулевой частоте);

τ_2 – постоянная времени второй ступени ИДН.

При питании ИДН синусоидальным сигналом модуль и фаза K_u на малых частотах представляются формулами

$$|K_u| = \varkappa\left[1 + \frac{1}{n_1}\cdot\frac{\varkappa_1 - \frac{n_1-1}{n_1}\varkappa_2}{\varkappa_1 + \frac{1}{n_1}\varkappa_2}\left(\beta_L + \beta_R\left(\frac{1}{\omega\tau_2}\right)^2\right)\right]$$

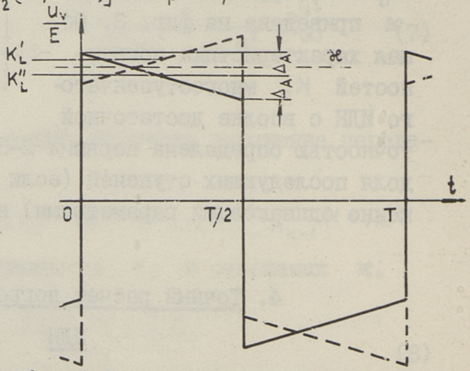
$$\arg K_u = \frac{\beta_R}{\omega\tau_2}\cdot\frac{\varkappa_1 - \frac{n_1-1}{n_1}\varkappa_2}{\varkappa_1 + \frac{1}{n_1}\varkappa_2}. \qquad \text{(II)}$$

При подаче на вход ИДН периодического прямоугольного импульсного напряжения с амплитудой E выходное напряжение имеет вид, (фиг. 4), который аналитически определяется формулой:

$$u_v = \begin{cases} \left[K_L + (K_L - K_R)\frac{2}{\tau_2}(T/4 - t)\right]E & \text{при } 0 < t < T/2 \\ \left[-K_L - (K_L - K_R)\frac{2}{\tau_2}(3T/4 - t)\right]E & \text{при } T/2 < t < T. \end{cases}$$

В зависимости от значений $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ наклоны импульсов могут иметь разный знак, соответственно и K_L может быть больше или меньше величины $\varkappa$ (фиг. 4). Относительную амплитуду наклона (относительно K_L) обозначим через

$$\Delta_A = \frac{K_L - K_R}{K_L}\cdot\frac{T}{2\tau_2}.$$



Фиг. 4. Выходное напряжение при работе с импульсным сигналом.

Если нас интересует амплитуда выходного сигнала, то максимальная погрешность определяется формулой:

$$\Delta_{max} = |\Delta_A| + |K_L - \varkappa|.$$

Если нас интересует эффективное значение выходного сигнала, то максимальная погрешность равна:

$$\Delta_{ef.} = \frac{1}{6}\Delta_A^2 + |K_L - \varkappa|.$$

По полученным результатам можно определить погрешности многоступенчатых ИДН при разных параметрах отдельных ступеней, обусловленных их взаимным влиянием. При делении синусоидального напряжения результаты пригодны до частот, когда необходимо учитывать емкость между проводами [3], при делении импульсного сигнала - после затухания переходного процесса [4].

Литература

1. Л.Н. Тавдгиридзе, Н.Г. Лобжанидзе. Схема замещения и расчет электрической цепи с сильной индуктивной связью. "Измерительная техника", №9, 1969.

2. Р.Р. Инерс. Расчет и определение параметров мультифилярных обмоток. Труды Таллинского политехнического института, № 334, 1972.

3. Х.В. Силламаа, И.Ю. Эйскоп. Индуктивный делитель напряжения как четырехполюсник с распределенными параметрами. "Устройства и элементы систем автоматизации научных экспериментов". Новосибирск, 1970.

4. Р.Р. Инерс, Х.В. Силламаа. И.Ю. Эйскоп. Переходная характеристика индуктивных делителей напряжения. Известия вузов, "Приборостроение", № 7, 1970.

R. Jõers

Voltage Division Errors of a Multi-Stage Inductive Voltage Divider

Summary

This paper deals with the accuracy of the multi-stage Kelvin-Varley inductive voltage divider (i.v.d.). Voltage ratio error and output impedance of an i.v.d. are found in the case, when interwinding capacitances are not taken into account.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 621.317.384

А.Э. Ярвальт

ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ДАТЧИКА МГНОВЕННОЙ МОЩНОСТИ

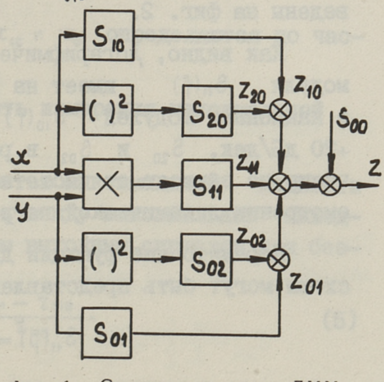
Датчик мгновенной мощности (ДММ) выполняет перемножение сигналов от датчиков напряжения и тока. Статическая точность ДММ зависит от принципа действия и широко освещается в литературе [1, 2]. Во многих технических задачах применения встречается необходимость оценки динамической погрешности. Ниже приводится метод оценки динамической погрешности по параметрам структурной схемы, которые могут быть определены экспериментально.

1. Определение параметров структурной схемы ДММ

Разложив описывающую функцию ДММ в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми членами ряда получим:

$$z = F(x,y) \approx S_{00} + S_{11}xy + S_{10}x + S_{01}y + S_{20}x^2 + S_{02}y^2. \qquad (1)$$

Соответствующая (1) структурная схема показана на фиг. 1. Комплексные коэффициенты S_{11}, S_{10}, S_{01}, S_{20}, S_{02} могут быть определены экспериментально, измерив составляющие выходного сигнала с основной и двойной частотами при трех комбинациях гармонического и постоянного сигналов на входах. Выражения для определения модулей и аргументов приведены в таблице 1.



Фиг. 1. Структурная схема ДММ.

Таблица I

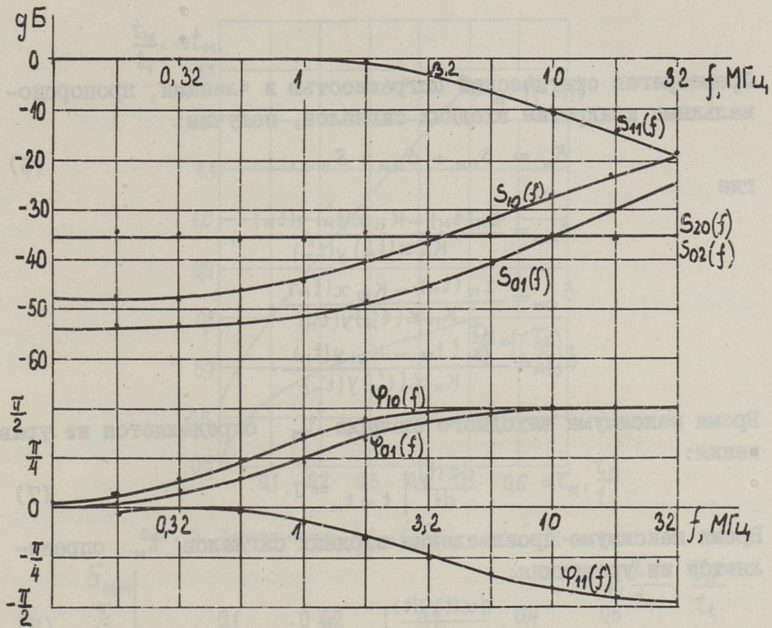
Входные сигналы	Переменная составляющая выходного сигнала	Модули и аргументы комплексных коэффициентов
$x = A\sin\omega t$ $y = 0$	$z_1 = Z_1'\sin(\omega t+\varphi_1') +$ $+ Z_1''\sin(2\omega t+\varphi_1'')$	$S_{10}(\omega) = \frac{Z_1'}{A}$ $\varphi_{10}(\omega) = \varphi_1'$ $S_{20}(2\omega) = \frac{2Z_1''}{A^2}$ $\varphi_{20}(2\omega) = \frac{3}{2}\pi - \varphi_1''$
$x = 0$ $y = A\sin\omega t$	$z_2 = Z_2'\sin(\omega t+\varphi_2') +$ $+ Z_2''\sin(2\omega t+\varphi_2'')$	$S_{01}(\omega) = \frac{Z_2'}{A}$ $\varphi_{01}(\omega) = \varphi_2'$ $S_{02}(2\omega) = \frac{2Z_2''}{A^2}$ $\varphi_{02}(2\omega) = \frac{3}{2}\pi - \varphi_2''$
$x = A\sin\omega t$ $y = B$	$z_3 = Z_3'\sin(\omega t+\varphi_3') +$ $+ Z_3''\sin(2\omega t+\varphi_3'')$	$S_{11}(\omega) = \frac{1}{AB}\sqrt{Z_3'^2 + S_{10}^2 - 2Z_3S_{10}\cos(\varphi_3-\varphi_{10})}$ $\varphi_{11}(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Z_3'\sin\varphi_3' - S_{10}\sin\varphi_{10}}{Z_3'\cos\varphi_3' - S_{10}\cos\varphi_{10}}$.

Экспериментально снятые логарифмические частотные характеристики модулей и аргументов коэффициентов аналогового умножителя с последовательным токораспределением [4] приведены на фиг. 2.

Как видно, логарифмическая частотная характеристика модуля $S_{11}(f)$ имеет на высоких частотах наклон -20дБ/дек, а наклонами модулей $S_{10}(f)$ и $S_{01}(f)$ является +20 дБ/дек, S_{20} и S_{02} в рассматриваемом диапазоне практически не зависят от частоты и ими можно пренебречь при рассмотрении динамической погрешности.

Передаточные функции динамических звеньев структурной схемы могут быть представлены в виде:

$$S_{11}(p) = \frac{K_{11}}{p\tau_{11}+1}, \qquad (2)$$



Фиг. 2. Экспериментальные логарифмические характеристики модулей и аргументов коэффициентов описывающей функции.

$$S_{10}(p) = K_{10}(p\tau_{10} + 1), \tag{3}$$

$$S_{01}(p) = K_{01}(p\tau_{01} + 1), \tag{4}$$

где параметры K_{11}, K_{10}, K_{01}, τ_{11}, τ_{10} и τ_{01} определяются по частотным характеристикам.

2. Динамическая погрешность измерения максимальной мощности одиночных импульсов.

Под динамической погрешностью максимальной мощности понимаем относительную разность между максимальным выходным сигналом $z_м$ и максимальным выходным сигналом для безынерционного ДММ $z_{м0}$

$$\delta_м = \frac{z_м - z_{м0}}{z_{м0}}. \tag{5}$$

Пренебрегая статической погрешностью и членами, пропорциональными квадратам входных сигналов, получим:

$$\delta_м = \delta_{11м} + \delta_{10м} + \delta_{01м}, \tag{6}$$

где

$$\delta_{11м} = \frac{z_{11}(t_м) - K_{11}x(t'_м)\,y(t'_м)}{K_{11}x(t'_м)\,y(t'_м)},$$

$$\delta_{10м} = \frac{z_{10}(t_м) - K_{10}x(t_м)}{K_{11}x(t'_м)\,y(t'_м)},$$

$$\delta_{01м} = \frac{z_{01}(t_м - K_{01}y(t_м)}{K_{11}x(t'_м)\,y(t'_м)}.$$

Время максимума выходного сигнала $t_м$ определяется из уравнения:

$$\left.\frac{dz(t)}{dt}\right|_{t=t_м} = 0. \tag{7}$$

Время максимума произведения входных сигналов $t'_м$ определяется из уравнения:

$$\left.\frac{dx(t)\,y(t)}{dt}\right|_{t=t'_м} = 0. \tag{8}$$

3. Динамическая погрешность измерения максимальной мощности рассеяния переключающих приборов.

Временные зависимости напряжения и тока при включении или выключении переключающих приборов можно аппроксимировать прямыми:

$$x = A\frac{t}{t_1} \tag{9}$$

$$y = A\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \tag{10}$$

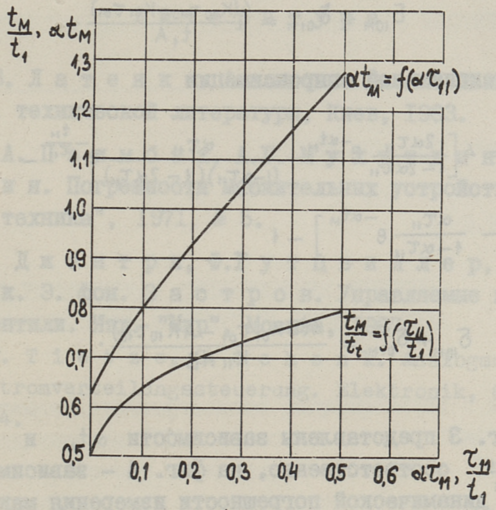
или экспонентами

$$x = Ae^{-\alpha t} \tag{11}$$

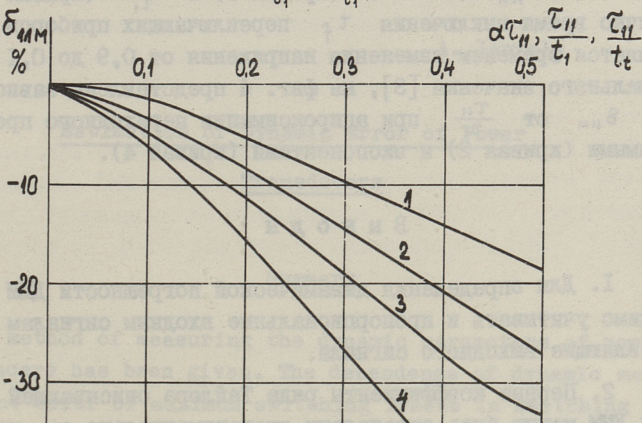
$$y = B\left(1 - e^{-\alpha t}\right). \tag{12}$$

При аппроксимации переходного процесса по (9) и (10) составляющие погрешности максимальной мощности

$$\delta_{11м} = \frac{\tau_{11}}{t_1}\left[\left(1 + \frac{2\tau_{11}}{t_1}\right)\left(\frac{t_м}{\tau_{11}} - 1 - e^{-\frac{t_м}{\tau_{11}}}\right) - \frac{t_м^2}{t_1\tau_{11}}\right] - 1 \tag{13}$$



Фиг. 3. Зависимости $\frac{t_M}{t_1} = f\left(\frac{\tau_{11}}{t_1}\right)$ и $\alpha t_M = f(\alpha \tau_{11})$.



Фиг. 4. Составляющая динамической погрешности максимальной мощности δ_{11M} . $1 - \delta_{11M} = f(\alpha \tau_{11})$, $2 - \delta_{11M} = f\left(\frac{\tau_{11}}{t_f}\right)$ при линейной аппроксимации переходного процесса, $3 - \delta_{11M} = f\left(\frac{\tau_{11}}{t_1}\right)$, $4 - \delta_{11M} = f\left(\frac{\tau_{11}}{t_f}\right)$ при экспоненциальной аппроксимации переходного процесса.

$$\delta_{10м} + \delta_{01м} = \frac{4(K_{10}\tau_{10} - K_{01}\tau_{01})}{t_1 A}. \qquad (14)$$

При экспоненциальной аппроксимации

$$\delta_{11м} = 4\left[\frac{2\alpha\tau_{11}}{1-2\alpha\tau_{11}} e^{-\alpha t_м} - \frac{\alpha\tau_{11}}{(1-\alpha\tau_{11})(1-2\alpha\tau_{11})} e^{-\frac{t_м}{\tau_{11}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha\tau_{11}}{1-\alpha\tau_{11}} e^{-\alpha t_м}\right] - 1 \qquad (15)$$

$$\delta_{10м} + \delta_{01м} = \frac{4(BK_{01}\tau_{01} - AK_{10}\tau_{10})}{K_{11}AB}. \qquad (16)$$

На фиг. 3 представлены зависимости $\alpha t_м$ и $\frac{t_м}{t_1}$ от $\alpha\tau_{11}$ и $\frac{\tau_{11}}{t_1}$ соответственно, на фиг. 4 - зависимости составляющей динамической погрешности измерения максимальной мощности $\delta_{11м}$ от $\alpha\tau_{11}$ (кривая I) и $\frac{\tau_{11}}{t_1}$ (кривая 3). Обычно время выключения t_f переключающих приборов определяется временем изменения напряжения от 0,9 до 0,I максимального значения [3], на фиг. 4 представлены зависимости $\delta_{11м}$ от $\frac{\tau_{11}}{t_f}$ при аппроксимации переходного процесса прямыми (кривая 2) и экспонентами (кривая 4).

Выводы

I. Для определения динамической погрешности ДММ необходимо учитывать и пропорциональные входным сигналам составляющие выходного сигнала.

2. Первые коэффициенты ряда Тейлора описывающей функции ДММ могут быть определены экспериментально с помощью трех измерений.

3. Оценка погрешности измерения максимальной мощности рассеяния переключающих приборов будет более строгой при аппроксимации переходного процесса экспонентами, чем при линейной аппроксимации.

Литература

I..И.В. Латенко. Аналоговые множительные устройства. Изд. технической литературы, Киев, 1963.

2. Т.А. Палмбах, А.Г. Мухутдинов, В.С. Егоркин. Погрешности множительных устройств. "Измерительная техника", 1971, № 5.

3. Ф. Джентри, Ф.Гутцвиллер, Н. Голоньяк. Э. фон. Застров. Управляемые полупроводниковые вентили. Изд. "Мир", Москва, 1967.

4. U. Tietze, C. Schenk. Analogmultiplizierer mit Stromverteilungssteuerung. Elektronik, 6, 1971, S. 189-194.

A. Järvalt

Estimation of Dynamic Error of Power Transducers

Summary

A method of measuring the dynamic parameters of power transducers has been given. The dependence of dynamic measurement error of maximum switching losses in switching devices on dynamic parameters has been derived.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 62-504:621.376.54.001.2

Э.Э. Велмре

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОГО МОДУЛЯТОРА ВТОРОГО РОДА

В системах автоматического регулирования с широтно-импульсным модулятором (ШИМ) возможны автоколебания с периодом, кратным тактовому интервалу модулятора. Исследованию таких колебаний методом гармонического баланса посвящены работы [1-3]. Однако эквивалентные передаточные характеристики, необходимые для выявления возможности существования указанных автоколебаний в этих работах представлены лишь в общих чертах и мало пригодны для практического применения. В настоящей работе приводятся результаты машинного расчета отрицательных обратных эквивалентных передаточных функций однополярного ШИМ второго рода с модуляцией заднего фронта импульса. Указаны также возможности расширения полученных результатов на некоторые другие разновидности ШИМ второго рода.

При гармонической линеаризации ШИМ предполагается, что в системе реализуются симметричные колебания с $N = 2,3,4...$ Отношение частот N определяется следующим образом:

$$N = \frac{\Omega}{\omega},$$

где Ω - тактовая частота ШИМ;

ω - частота периодических колебаний.

Последовательность выходных импульсов рассматриваемого модулятора описывается следующими соотношениями:

$$y(\bar{t}) = \begin{cases} k_и, & n \le \bar{t} \le n + \gamma_n, \\ 0, & n + \gamma_n < \bar{t} < n + 1, \end{cases}$$

где
$$\gamma_n = \begin{cases} \varkappa x(n+\gamma_n), & 0 \leq x(n+\gamma_n) \leq \frac{1}{\varkappa}; \\ 1, & x(n+\gamma_n) > \frac{1}{\varkappa}; \\ 0, & x(n+\gamma_n) < 0 \end{cases}$$

и $k_и$ - высота импульсов;

$\varkappa$ - чувствительность модулятора;

$\bar{t} = t/T$ - относительное время;

T - тактовый период модулятора;

γ_n - относительная длительность n-го импульса.

В дальнейшем принимаем $k_и = 1$ и $\varkappa = 1$. Действительные значения $k_и$ и $\varkappa$ учитываются в приведенной передаточной функции линейной части
$$W(j\omega) = k_и \varkappa W_\Lambda(j\omega),$$
где $W_\Lambda(j\omega)$ - передаточная функция линейной части системы.

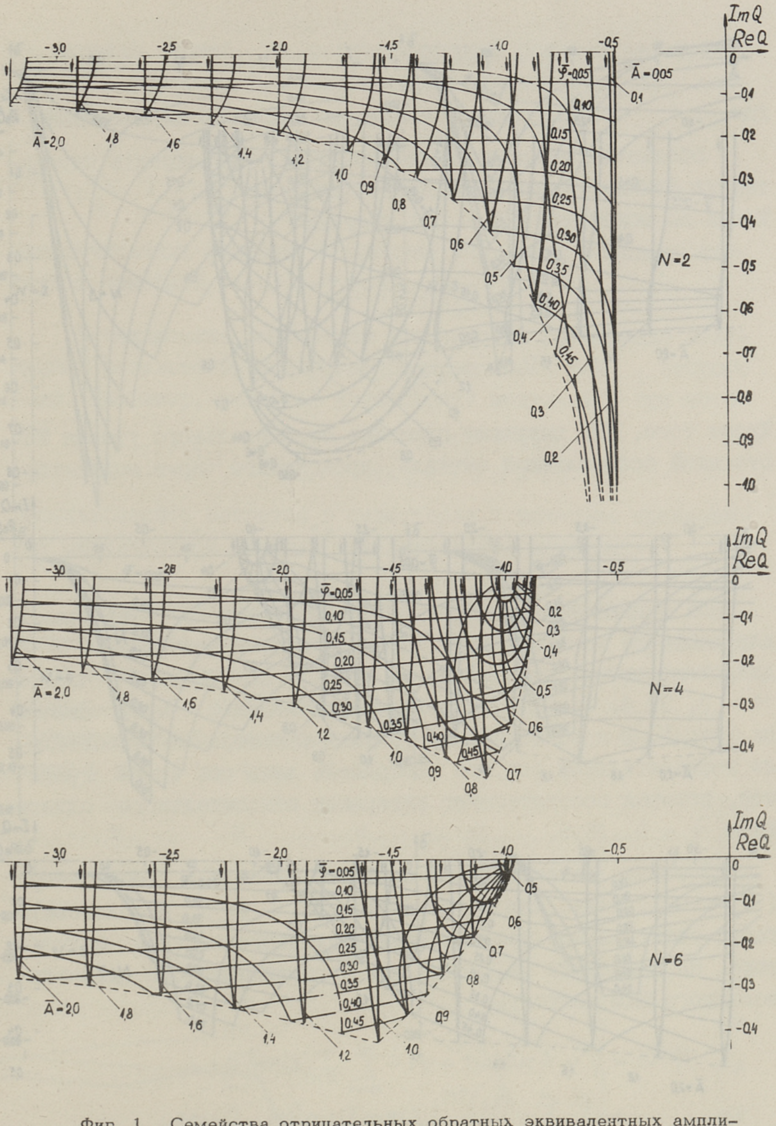
Входной сигнал ШИМ состоит в общем случае из постоянной и переменной составляющей:
$$x = x^\circ + A\sin\frac{2\pi}{N}(k + \bar{t} + \bar{\varphi}),$$
где $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

x° = постоянная составляющая входного сигнала модулятора.

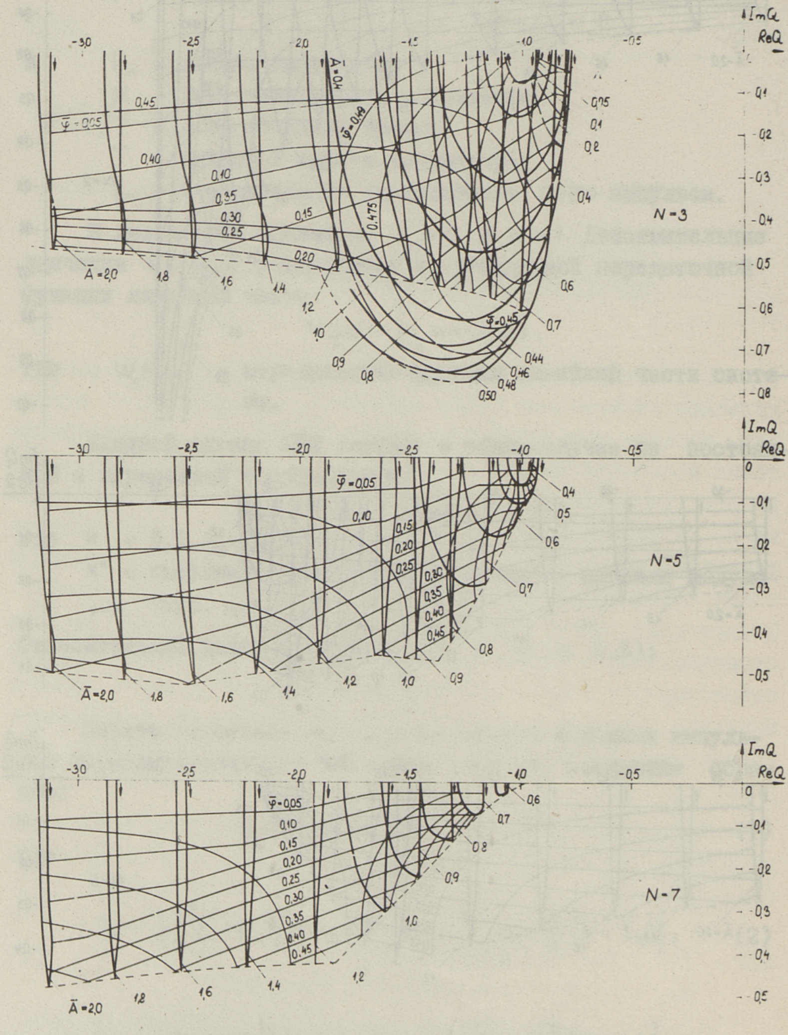
Относительный фазовый сдвиг ($-0{,}5 \leq \bar{\varphi} \leq 0{,}5$):
$$\bar{\varphi} = \frac{N}{2\pi}\varphi.$$

Первую гармонику последовательности выходных импульсов нормализированного ШИМ можно записать следующим образом:
$$\bar{y}_1(\bar{t}) = a_1 \sin\frac{2\pi}{N}\bar{t} + b_1 \cos\frac{2\pi}{N}\bar{t}, \tag{I}$$
где
$$a_1 = -\frac{1}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\cos\frac{2\pi}{N}(k + \varepsilon_k + \gamma_k) - \sum_{k=0}^{N-1}\cos\frac{2\pi}{N}(k + \varepsilon_k)\right], \tag{2}$$
$$b_1 = \frac{1}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\sin\frac{2\pi}{N}(k + \varepsilon_k + \gamma_k) - \sum_{k=0}^{N-1}\sin\frac{2\pi}{N}(k + \varepsilon_k)\right]. \tag{3}$$

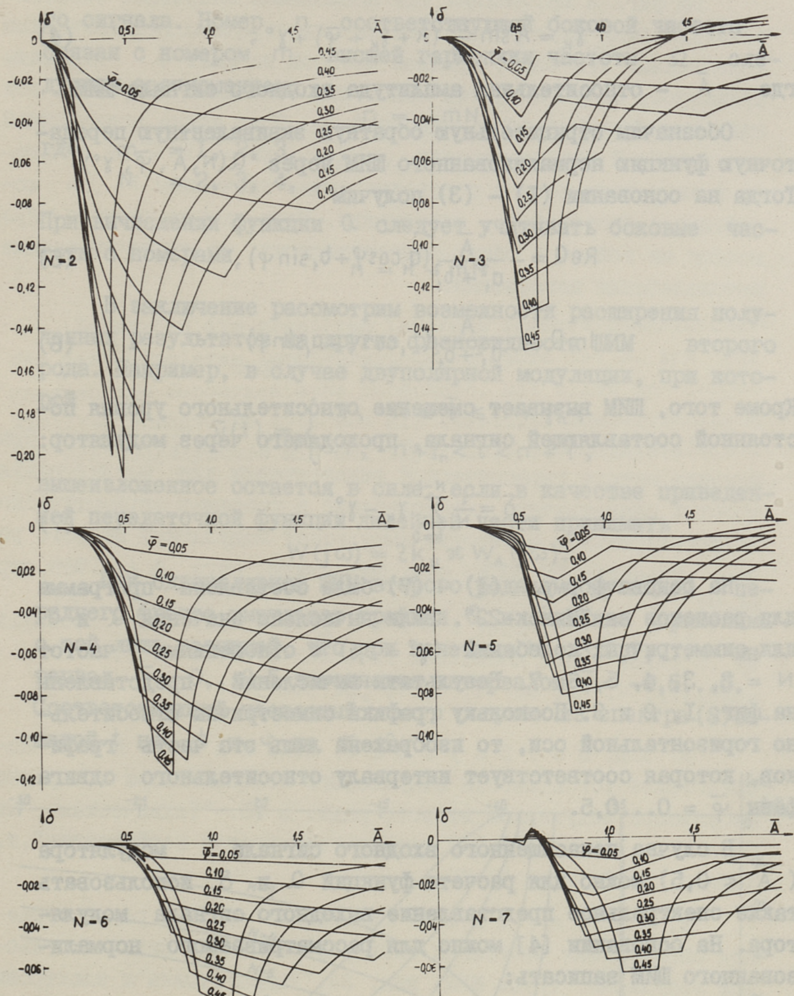
Относительный сдвиг переднего фронта k-го импульса ε_k обычно равняется нулю. Входящие в формулы (2) и (3) относительные длительности импульсов определяются из трансцендентного уравнения



Фиг. 1 . Семейства отрицательных обратных эквивалентных амплитудно-фазовых характеристик ШИМ второго рода для $N = 2, 4, 6$.



Фиг. 2. Семейства отрицательных обратных эквивалентных амплитудно-фазовых характеристик ШИМ второго рода для N = 3,5,7.



Фиг. 3. Семейства кривых относительного смещения уровня постоянной составляющей сигнала на выходе ШИМ второго рода.

$$\gamma_k = \bar{A}\sin\frac{2\pi}{N}(k+\gamma_k+\bar{\varphi})+\gamma^\circ, \qquad (4)$$

где $\bar{A}$ - относительная амплитуда входного сигнала ШИМ.

Обозначим отрицательную обратную эквивалентную передаточную функцию нормализованного ШИМ через $Q(N,\bar{A},\bar{\varphi},\gamma^\circ)$. Тогда на основании (I) - (3) получим

$$\operatorname{Re}Q = -\frac{\bar{A}}{a_1^2+b_1^2}(a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi), \qquad (5)$$

$$\operatorname{Im}Q = \frac{\bar{A}}{a_1^2+b_1^2}(b_1\cos\varphi-a_1\sin\varphi). \qquad (6)$$

Кроме того, ШИМ вызывает смещение относительного уровня постоянной составляющей сигнала, проходящего через модулятор:

$$\delta = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k - \gamma^\circ. \qquad (7)$$

На основе формул (I) - (7) была составлена программа для расчетов на "Минск-22". Были вычислены значения Q и δ для симметричных колебаний ($\gamma^\circ = 0{,}5$) с отношениями частот N = 2, 3, 4, 5, 6, 7. Результаты вычислений представлены на фиг. I, 2 и 3. Поскольку графики симметричны относительно горизонтальной оси, то изображена лишь эта часть графиков, которая соответствует интервалу относительного сдвига фазы $\bar{\varphi}$ = 0...0,5.

В случае ненасыщенного входного сигнала модулятора ($\bar{A}$ < 0,5) можно для расчета функций Q и δ использовать также спектральное представление выходного сигнала модулятора. На основании [4] можно для рассматриваемого нормализованного ШИМ записать:

$$\bar{y}(t) = \gamma^\circ + \bar{A}\sin(\omega t+\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi m}\sin m\Omega t +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi m}J_n(2\pi m\bar{A})\sin\Big[\Big(m+\frac{n}{N}\Big)\Omega t +$$
$$+ n\cdot\varphi - 2\pi m\gamma^\circ\Big]. \qquad (8)$$

Из формулы (8) видно, что смещение δ обусловлено наложением определенных левых боковых частот высших гармоник тактовой частоты Ω на постоянную составляющую выходного сигнала. Номер n соответствующей боковой частоты связан с номером m высшей гармоники частоты Ω следующим соотношением:

$$n = -mN,$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$

$N = 2, 3, 4, \ldots$

При вычислении функции Q следует учитывать боковые частоты с номерами

$$n = 1 - mN.$$

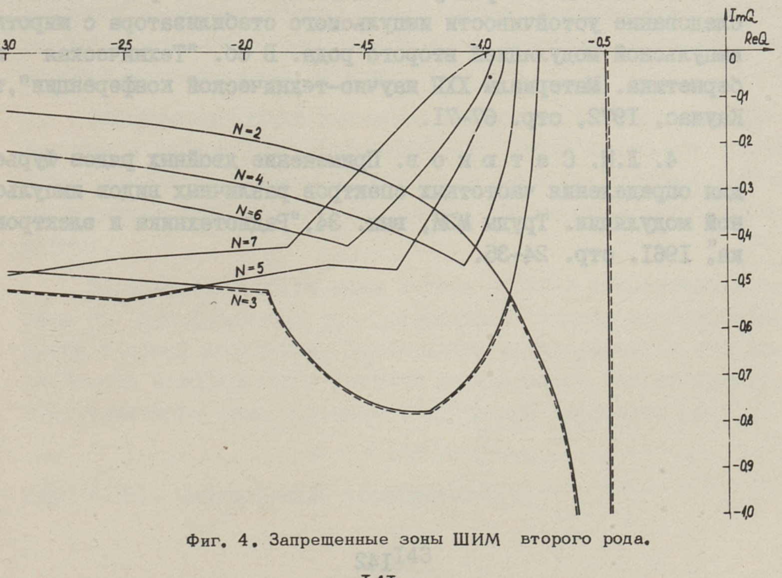
В заключение рассмотрим возможности расширения полученных результатов на другие разновидности ШИМ второго рода. Например, в случае двуполярной модуляции, при которой

$$\bar{y}(\bar{t}) = \begin{cases} 1, & n \le \bar{t} \le n + \gamma_n; \\ -1, & n + \gamma_n < \bar{t} < n + 1, \end{cases}$$

вышеизложенное остается в силе, если в качестве приведенной передаточной функции линейной части принимать

$$W(j\omega) = 2k_{и}\varkappa W_{\Lambda}(j\omega).$$

При однополярном ШИМ второго рода с модуляцией переднего фронта импульсов графики Q и δ также применимы с той лишь разницей, что при нечетных $N = 3, 5, 7, \ldots$ интервал $\bar{\varphi} = 0,..0,5$ заменяется интервалом $\bar{\varphi} = -0,5...0$. Соответствующий частотный спектр получим из спектра (8) заменой t на $-t$ и φ на $\pi - \varphi$.



Фиг. 4. Запрещенные зоны ШИМ второго рода.

На фиг. 4 изображена так называемая запретная зона, соответствующая всем рассмотренным симметричным гармоническим колебаниям. Эта зона, границы которой на фиг. 4 показаны пунктиром, получена путем наложения отдельных запретных зон, найденных для различных значений N. Если точка приведенной передаточной характеристики $W(j\omega)$ при $\omega = \Omega/N$ не попадает в запретную зону с соответствующим значением N, то колебания с частотой ω невозможны. Если характеристика $W(j\omega)$ вообще не войдет в общую запретную зону, то любые указанные автоколебания невозможны.

Литература

I. А.В. Балтрушевич, Б.В. Куранов. Применение метода гармонической линеаризации для исследования простых симметричных автоколебаний в системах автоматического регулирования с широтно-импульсной модуляцией второго рода. Известия АН БССР, сер. физ.-техн. наук, № 4, 1969, стр. 65-72.

2. G. Thè, S.G. Furmage. Subharmonic instability in pulse width modulated feedback system. Proc. IREE Austral., v. 32, No 10, 1971, pp. 366-372.

3. Э.М. Петраускас. Н.И. Эзерскис. Исследование устойчивости импульсного стабилизатора с широтно-импульсной модуляцией второго рода. В сб. "Техническая кибернетика. Материалы ХХП научно-технической конференции", т.4, Каунас, 1972, стр. 67-71.

4. Л.И. Сетюков. Применение двойных рядов Фурье для определения частотных спектров различных видов импульсной модуляции. Труды МЭИ, вып. 34, "Радиотехника и электроника", 1961. стр. 24-35.

E. Velmre

Harmonische Linearisierung des Impulsbreitenmodulators der 2. Art

Zusammenfassung

Es werden die negativen inversen Beschreibungsfunktionen des unipolaren Impulsbreitenmodulators der 2. Art für ganzzahlige Subharmonische berechnet. Mit Hilfe der dargestellten Nomogramme kann man die Stabilitätsuntersuchungen der Regelungssysteme mit der Impulsbreitenmodulation durchführen.

На рис. 4 [illegible] зон,со-
[illegible] гармоническими
[illegible] на рис. 4 показаны
[illegible] запретных зон,
[illegible] определенной
[illegible] не попада-
[illegible] W ,то ко-
[illegible] Если характеристика $W(j\omega)$
[illegible] то линии указанные
[illegible]

[illegible] Лит-
[illegible] автоматическо-
[illegible] второго ро-
да. [illegible] № 4, 1969,стр.
[illegible]
[illegible] instabili-
[illegible]
[illegible]

2. [illegible] с. Ис-
[illegible] с широко-
[illegible] "Технические ки-
[illegible] конференции".т.4,
[illegible]

3. [illegible] Фурье
[illegible] импуль-
[illegible] и электрони-
ка, [illegible]

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 621.382.13.015.5

Э.Э. Велмре

РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЯ СТЕПЕНИ В ФОРМУЛЕ МИЛЛЕРА

Как известно, в случае достаточно интенсивной ударной ионизации коэффициент лавинного умножения электронов и дырок в германиевых и кремниевых $p-n$ переходах хорошо аппроксимируется формулой Миллера [I]:

$$M = \left[1 - \left(\frac{U}{U_B}\right)^n\right]^{-1},$$

где U_B - напряжение лавинного пробоя, при котором $M \to \infty$.

Применение этой простой и наглядной формулы, к сожалению, затруднительно ввиду неопределенности показателя степени n, которая для данного полупроводникового материала не является постоянной величиной, а зависит от величины напряжения лавинного пробоя U_B, закона распределения напряженности электрического поля в $p-n$ переходе, а также от условий возникновения лавины.

Экспериментальные значения показателя степени n, приводимые в литературе, например [I-3], очень неточны. Более того, данные о показателе степени n для $p-n$ переходов с напряжением пробоя свыше нескольких сот вольт совсем отсутствуют.

Поэтому была поставлена задача расчета показателя степени n для различных $p-n$ переходов, исходя из коэффициентов ударной ионизации. При анализе предполагается, что зависимость коэффициентов ударной ионизации от напряженности электрического поля описывается формулой Чайновета [4]:

$$\alpha = A \exp\left(-\frac{B}{E}\right),$$

где A, B - эмпирические коэффициенты.

Для упрощения выкладок вводим понятие приведенного коэффициента лавинного умножения [5]:

$$\Phi = 1 - \frac{1}{M} = \left(\frac{U}{U_B}\right)^n. \qquad (I)$$

Продифференцировав выражение (I) и подставляя $U = U_B$, получим:

$$n = U_B \left(\frac{d\Phi}{dU}\right)_{U_B}. \qquad (2)$$

Поскольку $d\Phi / dU$ зависит от условий возникновения лавины, рассмотрим раздельно случаи, когда, во-первых, инициаторами лавины являются электроны и дырки, инжектированные в запорный слой и, во-вторых, когда инициаторами являются электронно-дырочные пары, генерируемые в запорном слое.

Инжекция носителей заряда в запорный слой

В случае одновременной инжекции электронов и дырок можно на основании [5] записать

$$M_m = \frac{e^{-\psi(w)} + k}{(1+k)\left(1 - e^{-\psi(w)} \int_0^w \alpha_n e^{\psi(x)} dx\right)}, \qquad (3)$$

где $\psi(w) = \int_0^w (\alpha_n - \alpha_p)\, dx$

и $k = j_n / j_p$ - коэффициент инжекции.

Здесь j_n / j_p - плотности токов неосновных электронов и дырок, инжектированных в запорный слой. При инжекции только электронов $k \to \infty$, а в случае инжекции только дырок $k = 0$.

Для аналитического решения интеграла в формуле (3) предположим, что отношение коэффициентов ударной ионизации электронов и дырок имеет постоянную величину, то есть

$$\gamma = \frac{\alpha_p}{\alpha_n} = \mathrm{const}. \qquad (4)$$

Соотношение (4) является, по существу, довольно грубым приближением, особенно в случае кремния, у которого отношение α_p / α_n в зависимости от величины напряженности E электрического поля может измениться в десятки раз [5]. Однако, учитывая характер зависимости коэффициентов α_n и α_p от напряженности электрического поля и принимая значение γ, соответствующее максимальной величине напряженности E_m электрического поля в $p-n$ переходе, ошибка приближения (4) при расчете, например, напряжения пробоя $p-n$ переходов с различным распределением электрического поля не превышает нескольких процентов [6].

Итак, принимая $\gamma = \gamma(E_m) = \mathrm{const}$, при смешанной инжекции из формулы (3) получим:

$$\Phi_m = \frac{k+\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{e^{\Psi(w)}-1}{k e^{\Psi(w)}+1}, \tag{5}$$

где $$\Psi(w) = (1-\gamma)\int_0^w \alpha_n dx.$$

Исходя из выражения (2), после некоторых преобразований получим формулу показателя степени n_m в следующем виде:

$$n_m = U_B \frac{\gamma(1+k)}{\gamma+k}\left(\frac{d}{dU}\int_0^w \alpha_n dx\right)_{U_B}. \tag{6}$$

Генерация носителей заряда в запорном слое

Если инициаторами лавины являются электронно-дырочные пары, генерируемые внутри запорного слоя, то коэффициент лавинного умножения [7] определяется по формуле

$$M_g = \frac{\frac{1}{W} e^{-\Psi(w)} \int_0^w e^{\Psi(x)} dx}{1 - e^{-\Psi(w)} \int_0^w \alpha_n e^{\Psi(x)} dx}, \tag{7}$$

где $\Psi(x) = \int_0^x (\alpha_n - \alpha_p)\, dx$.

Предполагая $\gamma = \mathrm{const}$, из (7) получим:

$$\Phi_g = 1 + \frac{\frac{1}{1-\gamma}\left(\gamma e^{\Psi(w)} - 1\right)}{\frac{1}{W}\int_0^w e^{\Psi(x)} dx}.$$

После несложных преобразований получим формулу показателя степени n_g в следующем виде:

$$n_g = U_B \frac{w_B}{\int_0^{w_B} e^{\Psi(x)} dx}\left(\frac{d}{dU}\int_0^w \alpha_n dx\right)_{U_B}. \tag{8}$$

Сравнивая формулы (6) и (8), можно записать наиболее общую формулу показателя степени в формуле Миллера, охватывающую оба рассмотренные механизмы возбуждения лавины:

$$n = U_B F \left(\frac{d}{dU} \int_0^W \alpha_n dx \right)_{U_B}. \qquad (9)$$

В случае смешанной инжекции $n = n_m$

и

$$F = F_m = \frac{\gamma(1+k)}{\gamma + k},$$

при генерации электронно-дырочных пар в запорном слое $n = n_g$

и

$$F = F_g = \frac{W_B}{\int_0^{W_B} e^{\psi(x)} dx}. \qquad (11)$$

Следовательно, основной задачей при расчете показателя степени n является нахождение производной от интеграла коэффициента ударной ионизации при различных законах распределения напряженности электрического поля в $p-n$ переходе. Ниже эта задача решена для трех разновидностей $p-n$ перехода.

$p^+ - i - n^+$ переход

Здесь решение задачи несложно, так как напряженность электрического поля в слое умножения $(W = W_i = const)$ имеет постоянную величину $E = E_m = const$. Также $\alpha_n = \alpha_n(E_m) = const$. Следовательно, можно написать

$$\int_0^W \alpha_n dx = \alpha_n(E_m) W_i.$$

Далее:

$$\left(\frac{d}{dU} \int_0^W \alpha_n dx \right)_{U_B} = \alpha_n(E_{kr}) \frac{B_n W_i}{E_{kr} U_B}, \qquad (12)$$

где E_{kr} – наибольшая величина напряженности электрического поля в $p-n$ переходе в режиме лавинного пробоя.

Подставляя (12) в (9), получим:

$$n_m = F_m \alpha_n(E_{kr}) W_i \frac{B_n}{E_{kr}}. \qquad (13)$$

Нетрудно показать, что при условии $\gamma = const$

$$\alpha_n(E_{kr}) W_i = \frac{\ln \gamma}{\gamma - 1}. \qquad (14)$$

Учитывая (I4), можно (I3) переписать в следующем виде:

$$n_m = F_m \frac{\ln\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{B_n}{E_{кр}}.$$

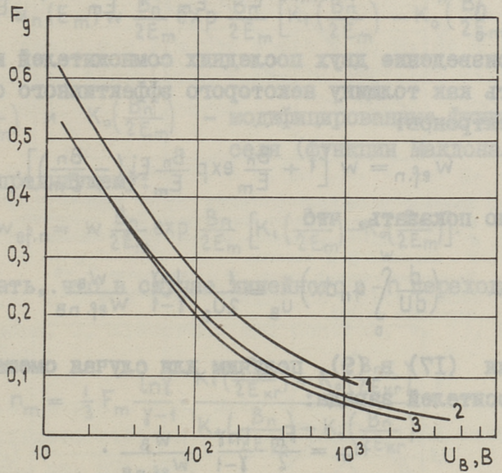
Вычисление интеграла в формуле (II) не представляет трудностей. Из условия пробоя $M_g \longrightarrow \infty$ получим:

$$\int\limits_0^{w_B} \alpha_n e^{\psi(x)}\, dx = e^{\psi(w_B)} = \frac{1}{\gamma},$$

откуда с учетом соотношения (I4) и факта, что $w_B = w_i$,

$$F_g = \gamma \alpha_n (E_{кр})\, w_i = \frac{\gamma \ln\gamma}{\gamma - 1}. \qquad (I5)$$

Значения F_g, вычисленные с использованием значений γ из [5], изображены кривой I на фиг. I.



Фиг. 1 . Зависимость коэффициента F_g от напряжения пробоя для различных типов кремниевых p-n переходов. 1 – p^+-i-n^+ переход; 2 – резкий p^+-n или n^+-p переход; 3 – линейный p-n переход.

Подстановка (I2) в (9) дает:

$$n_g = F_g \alpha_n (E_{кр})\, w_i \frac{B_n}{E_{кр}}. \qquad (I6)$$

Учитывая (I4) и (I5), можно формуле (I6) придать другой вид:

$$n_g = \gamma \left(\frac{\ln\gamma}{\gamma-1}\right)^2 \frac{B_n}{E_{кр}}.$$

<u>Резкий p^+-n или n^+-p переход</u>

В сильно несимметричных резких p-n переходах запорный слой практически полностью расположен в полупроводнике с меньшей концентрацией примеси. Если этот полупроводник легирован однородно, то распределение электрического поля в $p-n$ переходе линейно и описывается формулой:

$$E = E_m\left(1 - \frac{x}{w}\right).$$

Для ширины запорного слоя имеем

$$w = a\sqrt{U},$$

где a - некоторая постоянная, зависящая от полупроводникового материала и концентрации примеси.

Решение интеграла коэффициента ударной ионизации при вышеуказанном распределении поля дано в [8] и записывается в следующем виде:

$$\int\limits_0^w \alpha_n dx = \alpha_n(E_m)\, w \left[1 + \frac{B_n}{E_m} \exp\frac{B_n}{E_m}\, Ei\left(-\frac{B_n}{E_m}\right)\right].$$

Здесь произведение двух последних сомножителей можно рассматривать как толщину некоторого эффективного слоя умножения электронов:

$$w_{ef.n} = w\left[1 + \frac{B_n}{E_m} \exp\frac{B_n}{E_m}\, Ei\left(-\frac{B_n}{E_m}\right)\right].$$

Можно показать, что

$$\left(\frac{d}{dU}\int\limits_0^w \alpha_n dx\right)_{U_B} = \frac{1}{2U_B}\cdot\frac{\ln\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{w_B}{w_{ef.nB}}. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (9), получим для случая смешанной инжекции носителей заряда:

$$n_m = \frac{F_m}{2}\cdot\frac{\ln\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{w_B}{w_{ef.nB}}. \qquad (18)$$

Формула для расчета n_g отличается от выражения (18) только относительно коэффициента F - вместо F_m будет F_g. График F_g, найденный методом численного интегрирования с использованием значений α_n и α_p из [5], приведен на фиг.1 (кривая 2).

Плавный (линейный) $p-n$ переход

В случае линейного $p-n$ перехода запорный слой расположен симметрично относительно плоскости металлургического перехода, где координата x принята равной нулю. Распределение напряженности электрического поля параболическое и описывается формулой

$$E = E_m \left[1 - \left(\frac{2x}{w}\right)^2\right].$$

Для ширины запорного слоя имеем

$$w = b\sqrt[3]{U},$$

где b – некоторая постоянная, зависящая от полупроводникового материала и градиента концентрации примеси.

Решение интеграла коэффициента ударной ионизации в случае параболического поля дано в [9] и записывается в следующем виде:

$$\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \alpha_n dx = \alpha_n(E_m)\, w\, \frac{B_n}{2E_m} \exp\frac{B_n}{2E_m}\left[K_1\left(\frac{B_n}{2E_m}\right) - K_0\left(\frac{B_n}{2E_m}\right)\right],$$

где $K_1\left(\frac{B_n}{2E_m}\right)$ и $K_0\left(\frac{B_n}{2E_m}\right)$ – модифицированные функции Бесселя (функции Макдональда).

Аналогично предыдущему:

$$w_{ef.n} = w\,\frac{B_n}{2E_m}\exp\frac{B_n}{2E_m}\left[K_1\left(\frac{B_n}{2E_m}\right) - K_0\left(\frac{B_n}{2E_m}\right)\right].$$

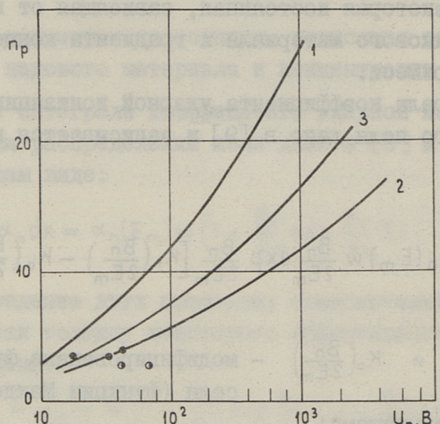
Можно показать, что в случае линейного $p-n$ перехода

$$n_m = \frac{1}{3} F_m \frac{\ln\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{K_1\left(\frac{B_n}{2E_{kr}}\right) + K_0\left(\frac{B_n}{2E_{kr}}\right)}{K_1\left(\frac{B_n}{2E_{kr}}\right) - K_0\left(\frac{B_n}{2E_{kr}}\right)}. \qquad (19)$$

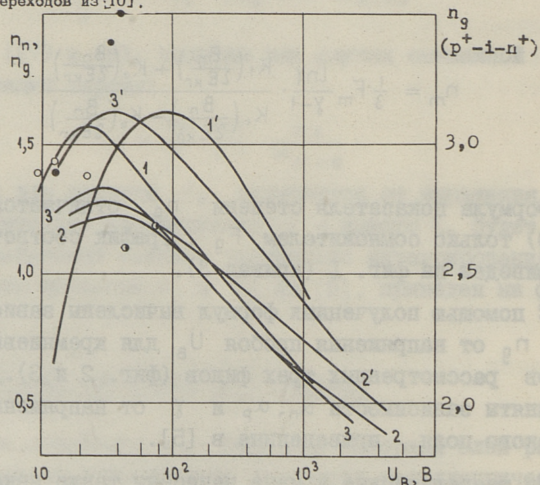
Формула показателя степени n_g отличается от формулы (19) только сомножителем F_g. График соответствующего F_g приведен на фиг. I (кривая 3).

С помощью полученных формул вычислены зависимости n_p, n_n и n_g от напряжения пробоя U_B для кремниевых $p-n$ переходов рассмотренных трех фидов (фиг. 2 и 3). При расчете приняты зависимости α_n, α_p и γ от напряженности электрического поля, приведенные в [5].

На теоретические кривые нанесены также некоторые экспериментальные точки, полученные из работ [I, 5, I0]. Экспериментальные и теоретические результаты согласуются удовлетворительно.



Фиг. 2. Зависимость показателя степени n_p от напряжения пробоя для различных типов кремниевых p-n переходов. 1 – p^+-i-n^+ переход; 2 – резкий p^+-n переход; 3 – линейный p-n переход. Экспериментальные точки: ● – для резких p^+-n переходов из [1] ; ◑ – для диффузионных p-n переходов из [10].



Фиг. 3. Зависимости показателей степени n_n (кривые 1 , 2, 3) и n_g (1', 2', 3') от напряжения пробоя для различных типов кремниевых p-n переходов. 1, 1' – p^+-i-n^+ переход: 2, 2' – резкий n^+-p переход; 3, 3' – линейный p-n переход. Экспериментальные точки: ● – для резких n^+-p переходов из [1]; ◑ – для диффузионных p-n переходов из [10]; О – для диффузионных p-n переходов из [5].

Л и т е р а т у р а

1. S.L. M i l l e r. Ionization rates for holes and electrons in silicon. Phys. Rev., v. 105, No 4, 1957, pp. 1246-1249.

2. А.Ф. Т р у т к о. Методы расчета транзисторов. Изд-во "Энергия", Москва, 1971.

3. С.А. Г а р я и н о в, И.Д. А б е з г а у з. Полупроводниковые приборы с отрицательным сопротивлением. Изд-во "Энергия", Москва, 1970.

4. A.G. C h y n o w e t h. Ionization rates for electrons and holes in silicon. Phys. Rev., v. 109, No 5, 1958, pp. 1537-1540.

5. R. van O v e r s t r a e t e n, H. de M a n . Measurement of the ionization rates in diffused silicon P-N junctions. Sol.-St. Electron., v. 13, No 5, 1970, pp. 583-608.

6. J.L. M o l l, J.L. S u, A.C.M. W a n g. Multiplication in collector junctions of silicon n-p-n and p-n-p transistors. IEEE Trans., v. ED-17, No 5, 1970, pp. 420-423.

7. N.R. H o w a r d. Avalanche multiplication in silicon junctions. J. Electron. and Control, v. 13, No 6, 1962, pp. 537-544.

8. R.A. K o k o s a, R.L. D a v i e s. Avalanche breakdown of diffused silicon p-n junctions. IEEE Trans., v. ED-13, No 12, 1966, pp. 874-881.

9. J.A. R i n g o, P.O. L a u r i t z e n. The integral for multiplication factor M with single or equal ionization coefficients. IEEE Trans., v. ED-18, No 1, 1971, pp. 73-74.

10. Б.М. В у л, А.П. Ш о т о в. В сб. "Физика твердого тела", т. I, стр. 150. Изд-во АН СССР, М.-Л., 1959.

E. Velmre

Berechnung des Exponenten in der Millergleichung

Zusammenfassung

Es werden die Formeln für die Berechnung des Exponenten in der Millergleichung für abrupte, lineare und p-i-n Germanium- und Siliziumübergänge hergeleitet. Die berechneten Exponenten für die Siliziumübergänge werden mit den experimentellen Ergebnissen anderer Autoren verglichen.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 350 1973

УДК 621.317.727.1

Я.В. Петерсон

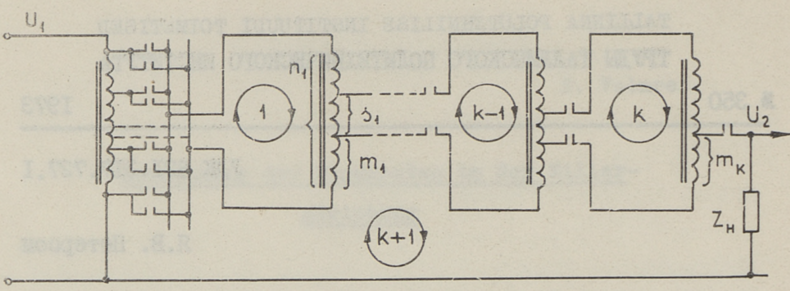
ПОГРЕШНОСТИ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ИНДУКТИВНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЯ ОТ ПЕРЕХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КОММУТАЦИОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Индуктивные делители напряжения (ИДН) применяются в электронных цифровых вольтметрах, измерительных мостах и калибраторах, как весьма точные делители (порядок погрешностей 10^{-7} до 10^{-9}) переменных напряжений синусоидальной и прямоугольной форм [1, 2, 3]. В автоматических приборах для коммутирования ступеней ИДН используется множество коммутационных элементов [4], переходное сопротивление которых вызывает дополнительные погрешности. Принцип работы ИДН позволяет использовать только последовательные схемы включения и поэтому для коммутирования ИДН целесообразно применять электромеханические реле или магнитоуправляемые контакты, так как бесконтактные ключи имеют ряд недостатков при работе в цепях последовательных делителей [5].

Целью данной статьи является исследование дополнительных погрешностей ИДН, вызванных переходным сопротивлением коммутационных элементов. Рассматривается низкочастотная модель (до 1 кГц) ИДН, при которой не учитываются паразитные емкости, изменение индуктивности рассеяния и активного сопротивления от частоты [6]. Включение многоступенчатой ИДН провели по известной схеме Кельвина-Варлея (фиг. 1).

1. Выходное сопротивление ИДН

Погрешности нагруженной ИДН в прямой зависимости от выходного импеданса $Z_{вых}$, величина которого того же по-



Фиг. 1. Схема включения многоступенчатого ИДН.

рядка с переходным сопротивлением контактов R. Каждая ступень ИДН (фиг. I) состоит из n секций, причем выход снимается с секций m и сигнал к следующей ступени с секций s. Секция ИДН характеризуется сопротивлением r, индуктивностью L и взаимной индуктивностью между двумя секциями М.

Параметром секции i-й ступени является

$$Z_i = r_i + j\omega(L_i - M_i) = r_i + j\omega\beta_i M_i , \tag{I}$$

где $\beta = \frac{L-M}{M}$ - коэффициент рассеяния,

ω - угловая частота.

Выходное сопротивление k-ступенчатого ИДН можно определить на основе квадратной матрицы $(k+1)$ порядка. Элементами этой матрицы являются импедансы контуров согласно фиг. I:

$$Z_{ii} = n_i Z_i + \gamma_{i-1} n_{i-1} Z_{i-1} + 2R , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$Z_{k+1,k+1} = \sum_{i=1}^{k} (\varkappa_i n_1 Z_i + R),$$

$$Z_{i,i+1} = Z_{i+1,i} = -\gamma_i n_i Z_i , \quad i = 1, 2, \ldots, k-1$$

$$Z_{i,k+1} = -(\varkappa_i n_i Z_i + R),$$

$$Z_{i,i+2 \ldots} = 0 ,$$

где $\gamma_i = \frac{s_i}{n_i}$ - коэффициент порядка i-й ступени,

$\varkappa_i = \frac{m_i}{n_i}$ - геометрический коэффициент передачи i-й ступени.

Например, выходной импеданс двухступенчатого ИДН, при условии, что первая ступень подключена к источнику напряжения без контактных переходов, выражается:

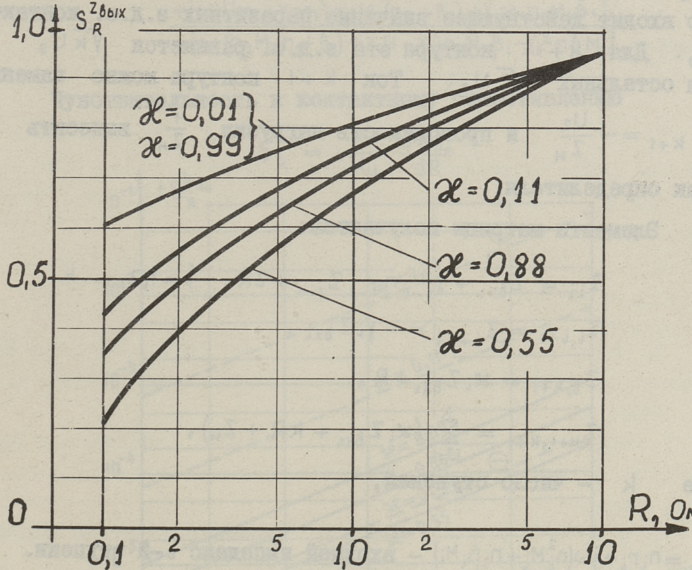
$$Z^{(2)}_{вых} = \frac{[n_2 Z_2(1-æ_2) + n_1 Z_1 \gamma_1 (1-æ_1-\gamma_1) + R][n_2 Z_2 æ_2 + n_1 Z_1 \gamma_1 æ_1 + R]}{n_2 Z_2 + n_1 Z_1 \gamma_1 (1-\gamma_1) + 2R} +$$

$$+ [n_1 Z_1 æ_1 (1-æ_1-\gamma_1) + R]. \qquad (2)$$

Влияние контактов на выходной импеданс лучше характеризует коэффициент чувствительности:

$$S_R^{Z_{вых}} = \frac{R}{Z_{вых}} \cdot \frac{dZ_{вых}}{dR}. \qquad (3)$$

Соответствующие характеристики для двухступенчатого ИДН при $\gamma_1 = 0{,}1$, $r_1 = r_2 = 0{,}1$ Ом, $n_1 = n_2 = 10$, $M_1 = M_2 = 0{,}01$ Г, $\beta_1 = \beta_2 = 10^4$, $\omega = 1000$ приведены на фиг. 2.



Фиг. 2. Чувствительность выходного импеданса ИДН к сопротивлению контактов при разных коэффициентах передачи.

Чувствительность минимальная при $æ_г = 0{,}55$, т.е. при максимальной $Z_{вых}$. Коэффициент передачи по напряжению нагруженного ИДН выражается:

$$K_u = \frac{K_{u_0}}{1 + \frac{Z_{вых}}{Z_н}} \approx æ_г\left(1 - \frac{Z_{вых}}{Z_н}\right), \qquad (4)$$

где K_{u_0} – коэффициент передачи ненагруженного ИДН,

$Z_н$ – импеданс нагрузки,

$\varkappa_г$ – геометрический коэффициент передачи,

причем

$$\varkappa_г = \varkappa_1 + \sum_{j=i+1}^{k} \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i \varkappa_j =$$

$$= \varkappa_1 + \gamma_1 \varkappa_2 + \gamma_1 \gamma_2 \varkappa_3 + \ldots + \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i \varkappa_k .$$

С другой стороны, принимая меры для уменьшения выходного импеданса, увеличивается чувствительность к контактному сопротивлению.

2. Коэффициент передачи по напряжению

Составляя контурные уравнения для k-ступенчатого ИДН, получим матричное уравнение $k+1$ порядка. В каждый контур входит действующее значение паразитных э.д.с. контактов $U_э$. Для $k+1$ контура эта э.д.с. равняется $\sqrt{k}\,U_э$ и для остальных $\sqrt{2}\,U_э$. Ток $k+1$ контура можно заменить $I_{k+1} = -\frac{U_2}{Z_н}$ и проводимость нагрузки $\frac{1}{Z_н}$ выносить за знак определителя.

Элементы матрицы получаются:

$$Z_{ii} = Z_{вхi} + \gamma_{i-1} n_{i-1} Z_{i-1} + 2R , \quad i = 1,2,\ldots k$$

$$Z_{i,i+1} = Z_{i+1,i} = -\gamma_i Z_{вхi} ,$$

$$Z_{i,k+1} = \varkappa_i Z_{вхi} + R ,$$

$$Z_{k+1,k+1} = \sum_{i=1}^{k} \left(\varkappa_i Z_{вхi} + kR + Z_н \right) ,$$

где k – число ступеней,

$Z_{вхi} = n_i r_i + j\omega (n_i^2 M_i + n_i \beta_i M_i)$ – входной импеданс i-й ступени.

Погрешности многоступенчатого ИДН в основном определяются первыми каскадами и поэтому достаточно рассмотреть коэффициент передачи двухступенчатого ИДН.

$$K_u = \frac{A_1 + \frac{\sqrt{2}\,U_э}{U_1} A_2}{A_3 + \frac{A_4}{Z_н}} , \tag{5}$$

где

$$A_1 = (\varkappa_1 + \gamma_1 \varkappa_2) Z_{\text{вх}2} + \gamma_1 \varkappa_1 n_1 Z_1 + (\gamma_1 + 2\varkappa_1) R,$$

$$A_2 = (1 - \varkappa_2) Z_{\text{вх}2} + \gamma_1 n_1 Z_1 - \gamma_1(\varkappa_1 + \gamma_1) Z_{\text{вх}1} + 3R,$$

$$A_3 = Z_{\text{вх}2} + \gamma_1 n_1 Z_1 - \gamma_1^2 Z_{\text{вх}1} + 2R,$$

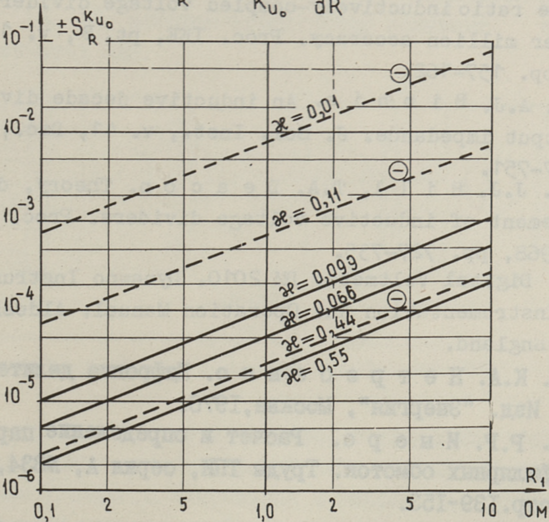
$$A_4 = (\varkappa_1 Z_{\text{вх}1} + R)(Z_{\text{вх}2} - \gamma_1^2 Z_{\text{вх}1} + R) + (\gamma_1 n_1 Z_1 + R)\left[\varkappa_1(1-\varkappa_1) Z_{\text{вх}1} + \varkappa_2 Z_{\text{вх}2} + R\right] + (\varkappa_2 Z_{\text{вх}2} + R)\left[(1-\varkappa_2) Z_{\text{вх}2} - (\gamma_1 + \varkappa_1)^2 Z_{\text{вх}1}\right].$$

Коэффициент передачи двухступенчатого ИДН на холостом ходу, не учитывая паразитной э.д.с. контактов

$$K_{u_0} = \frac{\left[(\varkappa_1 + \gamma_1 \varkappa_2) n_2 r_2 + \gamma_1 \varkappa_1 n_1 r_1 + (\gamma_1 + 2\varkappa_1) R\right] + j\omega\left[(\varkappa_1 + \gamma_1 \varkappa_2) n_2 M_2 (n_2 + \beta_2) + \gamma_1 \varkappa_1 n_1 M_1 \beta_1\right]}{\left[n^2 r_2 + \gamma_1(1-\gamma_1) n_1 r_1 + 2R\right] + j\omega\left[n_2 M_2 (n_2 + \beta_2) + \gamma_1(1-\gamma_1) n_1 M_1 \beta_1 - \gamma_1^2 n_1^2 M_1\right]}. \qquad (6)$$

Чувствительность к контактному сопротивлению

$$S_R^{K_{u_0}} = \frac{R}{K_{u_0}} \cdot \frac{dK_{u_0}}{dR} \qquad (7)$$



Фиг. 3. Чувствительность коэффициента передачи по напряжению к переходному сопротивлению контактов ($S_R^{K_{u_0}}$ для пунктирных кривых является отрицательной).

является комплексной величиной, модуль которой приведен на фиг. 3. При значении $\varkappa_r$ около 0,5 (симметричный выход)

$$S_R^{K_{u_0}} = 0.$$

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{\varkappa_r - K_u}{\varkappa_r} \qquad (8)$$

двухступенчатого ИДН, принятого в п. I, составляет порядка 10^{-5} до 5.10^{-4}, если $\alpha = 0,I...I0$, где

$$\alpha = \frac{R}{r}.$$

Влияние коммутационных элементов еще больше, если и первая ступень является коммутируемой при помощи реле.

Выражения выходного импеданса (2) и коэффициента передачи (5) намного упрощаются, если не учитывать контактов [7].

ИДН обладают очень высокой точностью и во многих случаях их погрешности от коммутационных элементов несколько порядков больше.

Литература

I. J.J. Hill, A.P. Miller. A seven-decade adjustable ratio inductively-coupled voltage divider with 0,1 part per million accuracy. Proc. IEE, pt. B, v. 109, March, 1962, pp. 157-162.

2. A.J. Binnie. An inductive decade divider of low output impedance. J. Sci. Inst., v. 41, Dec., 1964, pp. 747-751.

3. J.J. Hill, T.A. Deacon. Theory, design and measurement of inductive voltage dividers. Proc. IEE, v. 115, May, 1968, pp. 727-735.

4. Digital Voltmeter DM 2010. Dynamco Instruments Limited. Instrumentation and Operation Manual. Aldeshot, Hampshire, England.

5. К.А. Нетребенко. Цифровые делители напряжения. Изд. "Энергия", Москва,1970.

6. Р.Р. Инерс. Расчет и определение параметров мультифилярных обмоток. Труды ТПИ, серия А, №334,Таллин, 1972, стр.139-153.

7. Р.Р. Инерс. Низкочастотные погрешности многоступенчатых делителей напряжения. В наст. сб. стр. II7.

J. Peterson

Errors of a Multi-Stage Inductive Voltage Divider Caused by Contact Resistance of Switching Elements

Summary

It is shown that the contact resistance of switching relays influences the output impedance and voltage ratio error of a multi-stage Kelvin-Varley inductive voltage divider. The problems of sensitivity to the effective resistance of contact transition are considered in this paper. Dependences are found in the low-frequency case.

J.Peterson

Errors of a Multi-Stage Inductive Voltage Divider Caused by Contact Resistance of Switching Elements

Summary

It is shown, that the contact resistance of switching relays influences the output impedance and voltage ratio error of a multi-stage Kelvin-Varley inductive voltage divider. The problems of sensitivity to the effective resistance of contact transition are considered in this paper. Dependences are found in the low-frequency case.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

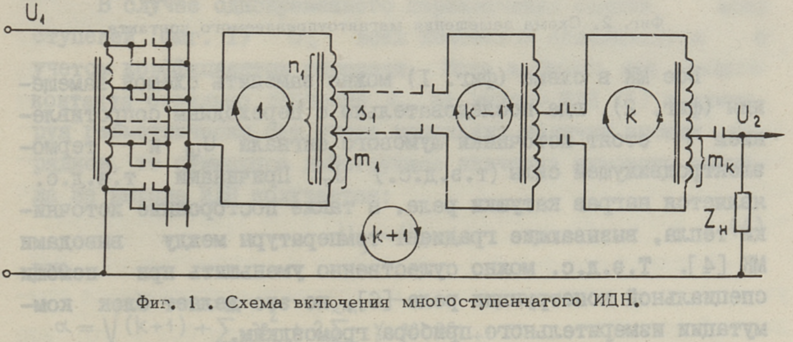
№ 350 1973

УДК 621.317.727.1

Я.В. Петерсон

КОММУТАЦИОННЫЕ ПОГРЕШНОСТИ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ИНДУКТИВНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЯ

Индуктивные делители напряжения (ИДН) часто используются как сверхточные делители эталонного прямоугольного напряжения в калибраторах [1] и вольтметрах [2], причем сравнение происходит по действующему значению в термопреобразователе или по амплитудному значению прямоугольных импульсов. В автоматических приборах для коммутирования ступеней ИДН самыми подходящими являются магнитоуправляемые контакты(МК). В процессе коммутирования на выводах МК появляются паразитные э.д.с. [3, 4], которые существенно понижают точность многоступенчатых ИДН.



Фиг. 1 . Схема включения многоступенчатого ИДН.

Целью настоящей статьи является определение погрешностей ИДН, вызванных магнитоуправляемыми контактами при коммутации прямоугольного напряжения и выяснение технических требований к МК при заданной погрешности.

За основу принято распространенное включение ступеней ИДН по схеме Кельвина-Варлея (фиг. 1). Одна ступень ИДН состоит из n последовательно включенных секций, причем выход снимается с секции m и сигнал следующей ступени с секции s [5]. Общий геометрический коэффициент передачи для k-ступенчатого ИДН:

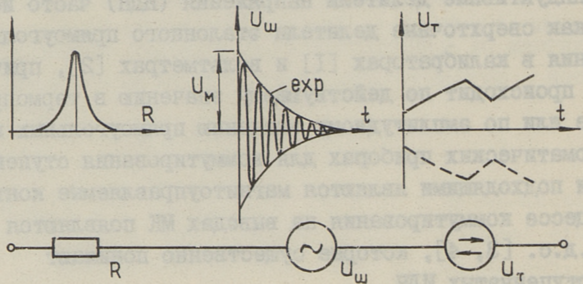
$$\varkappa_{г} = \varkappa_1 + \gamma_1 \varkappa_2 + \gamma_1 \gamma_2 \varkappa_3 + \cdots + \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i \varkappa_k , \qquad (I)$$

где k – число ступеней,

$\varkappa_i = \dfrac{m_i}{n_i}$ – геометрический коэффициент передачи i-й ступени,

$\gamma_i = \dfrac{s_i}{n_i}$ – коэффициент порядка i-й ступени.

I. Свойства коммутационных элементов



Фиг. 2. Схема замещения магнитоуправляемого контакта.

Все МК в схеме (фиг. I) можно заменить схемой замещения (фиг. 2), где последовательно с переходным сопротивлением R стоят источники шумового сигнала $U_ш$ и термоэлектродвижущей силы (т.э.д.с.) $U_т$. Причинами т.э.д.с. является нагрев катушки реле, а также посторонние источники тепла, вызывающие градиент температуры между выводами МК [4]. Т.э.д.с. можно существенно уменьшить при помощи специальной конструкции реле [6], но это делает блок коммутации измерительного прибора громоздким.

Срабатывание МК сопровождается шумовым сигналом в виде высокочастотных затухающих колебаний, основной причиной которого является магнитострикция. Задача состоит в определении действующего значения шумового сигнала, так как сложение с эталонным сигналом и воздействие в термопреобразователе происходят по действующим значениям.

Высокочастотный шумовой сигнал можно заменить действующим значением

$$U_ш(t) = \frac{U_м}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (2)$$

где $U_м$ – максимальное амплитудное значение первого полупериода,

τ – постоянная времени затухания шумового сигнала.

Промежутки между включениями $T \gg \tau$ и практически можно принимать, что к началу следующего срабатывания $U_ш = 0$.

Действующее значение шумового сигнала одного МК:

$$U_к = \sqrt{\frac{U_м^2}{2}\int_0^T e^{-\frac{2t}{\tau}} dt} = \frac{U_м}{2}\sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{U_м}{2}\sqrt{\tau \cdot f}, \qquad (3)$$

где $f = \frac{1}{T}$ – частота срабатывания реле.

Амплитудное значение $U_м$ является статистической величиной и по экспериментальным данным среднеквадратичное отклонение $\sigma_ш \approx 0,5\, U_м$.

2. Коммутация ИДН

В случае одновременного переключения секции всех ступеней (фиг. I) $U_к$ всех контактов складываются с учетом коэффициентов передачи. Если выписать для каждого контакта отдельно значение U_k на выходе ИДН (I) и суммируя геометрически без учета маленьких величин высших порядков, то суммарное действующее значение шумового сигнала на выходе ИДН получается:

$$U_g = U_к \cdot \alpha, \qquad (4)$$

где

$$\alpha = \sqrt{(k+1) + \sum_{i=1}^{k} \varkappa_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i \varkappa_i \varkappa_{i+1}} =$$

$$= \sqrt{(k+1) + (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots + \varkappa_k^2) + 2(\gamma_1 \varkappa_1 \varkappa_2 + \gamma_2 \varkappa_2 \varkappa_3 + \ldots + \gamma_{k-1} \varkappa_{k-1} \varkappa_k)}.$$

Таблица I

k	q	$\varkappa_г$			
		0	0,II...I	0,55...5	0,99...9
6	I	I,0	I,005	I,I42	I,407
	3	2,0	2,008	2,202	2,598
	6	2,64	2,658	2,958	3,443
3	I	I,0	I,005	I,I42	I,407
	3	2,0	2,008	2,202	2,598

Если первая ступень непосредственно соединена с источником сигнала, то суммирование начинается с $i = 2$. Когда алгоритм управления переключений предусматривает коммутирование ступеней поочередно, то в (4) остаются только γ и $\varkappa$ переключающихся ступеней. В этом случае

$$\alpha = \alpha_o = \sqrt{1 + \varkappa_i^2 + 2\gamma_i \varkappa_i \varkappa_{i+1}},$$

где i – номер коммутируемой ступени.

Изменение коэффициента α характеризует таблица I при $\gamma = 0,I$ (k – число ступеней ИДН, q – число одновременно переключаемых ступеней).

На основе законов изменения α и таблицы I можно сделать вывод, что действующее значение шумового сигнала на выходе ИДН не зависит от числа ступеней, а зависит лишь от количества одновременно переключаемых контактов (ступеней), то есть от алгоритма переключений в процессе уравновешивания.

Максимальная т.э.д.с. на выходе k-ступенчатого ИДН, учитывая и падение напряжения на выходном сопротивлении предыдущей степени:

$$E_{т\,макс} = U_т \cdot \beta, \tag{5}$$

где

$$\beta = (k+1) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\varkappa_i}{1 + \gamma_{i-1}}.$$

Действительная т.э.д.с. меньше максимальной, так как приходится учитывать вероятностные направления $U_т$ отдельных контактов.

Кроме дополнительных погрешностей (E_T может достичь до 0,5 мв), т.э.д.с. влияет на магнитные свойства сердечников ИДН. Благодаря малым импедансам постоянному току происходит предварительное намагничивание сердечников, что вызывает насыщение сердечника во время одного полупериода измерительного сигнала.

3. Выбор параметров контакта

Амплитуда шумового сигнала U_M и постоянная времени затухания являются статистическими величинами. Известна практическая постановка задачи: дано число ступеней k, входное напряжение U_1, максимальная частота переключений f и допустимые погрешности Δ. Требуется определить параметры контактов, чтобы не превышать допустимых погрешностей.

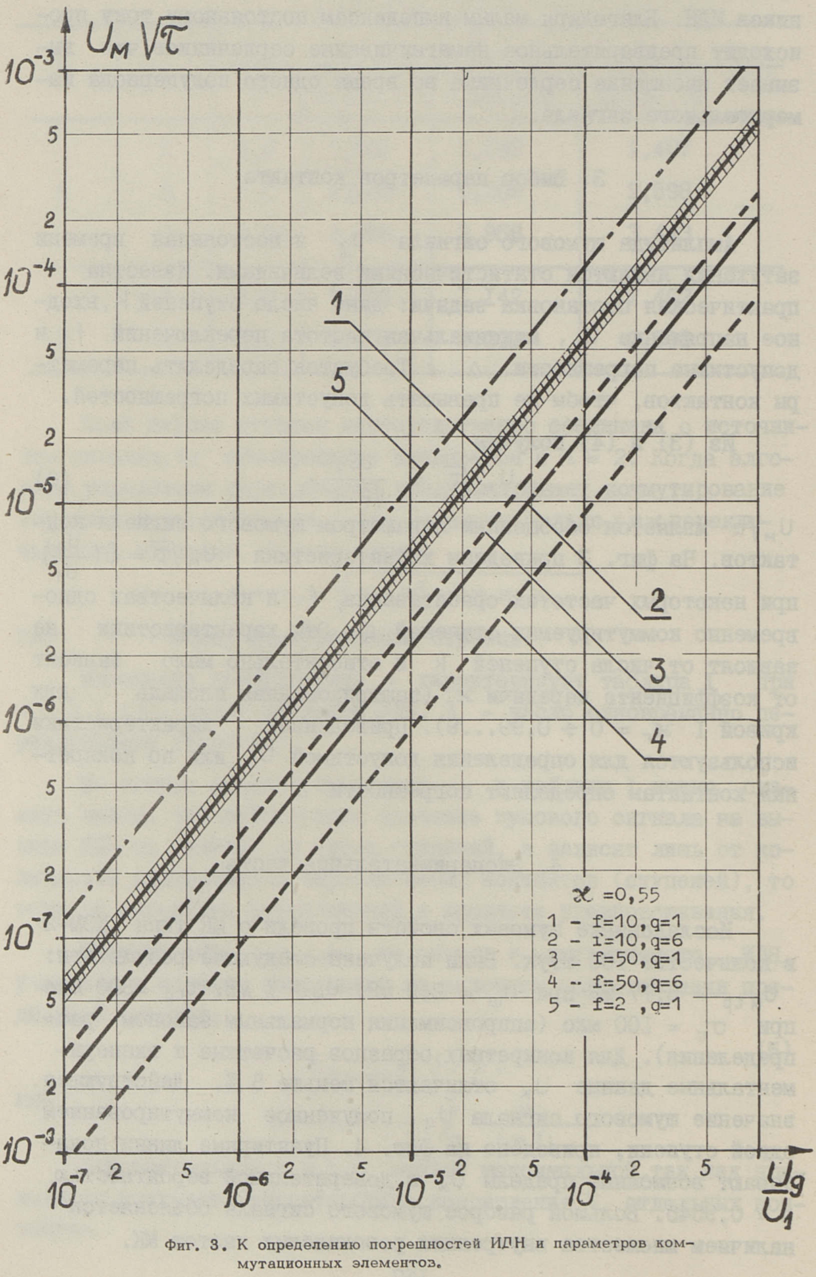
Из (3) и (4) получим

$$U_M\sqrt{\tau} = \frac{2U_g}{\sqrt{f}\cdot\alpha}. \quad (6)$$

$U_M\sqrt{\tau}$ является обобщенным параметром шумового сигнала контактов. На фиг. 3 приведены характеристики $U_M\sqrt{\tau} = f\left(\frac{U_g}{U_1}\right)$ при некоторых частотах срабатывания f и количествах одновременно коммутируемых ступеней q. Эти характеристики не зависят от числа ступеней k и относительно мало зависят от коэффициента передачи $\varkappa_r$ (заштрихованная площадь для кривой I $\varkappa_r = 0 \div 0{,}99...9$). Приведенные характеристики используются для определения допустимой U_M или по конкретным контактам определяют погрешности Δ.

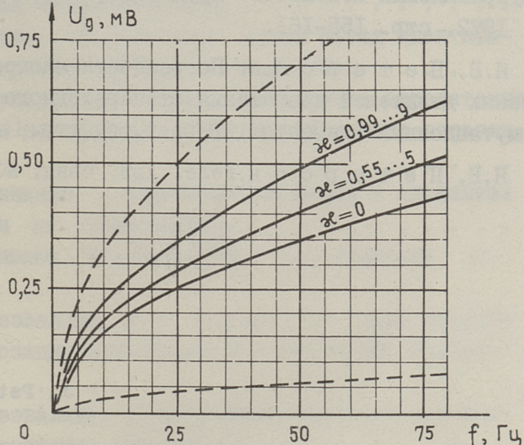
4. Экспериментальная часть

Исследование шумовых свойств провели с МК типа КЭМ-2 в количестве I00 штук. Были получены следующие результаты: $U_{M\,cp}$ - 5,77 мВ при $\sigma_ш$ = 2,9 мВ, U_M > I мВ, τ_{cp} =300 мкс при σ_τ = I00 мкс (аппроксимация нормальным законом распределения). Для конкретных образцов расчетные и экспериментальные данные U_K отличаются меньше 5 %. Действующее значение шумового сигнала U_g, полученное коммутированием одной ступени, приведено на фиг. 4. Пунктирные линии показывают возможные пределы U_K с доверительной вероятностью p = 0,9545. Большой разброс шумового сигнала объясняется наличием множества внутренних резонансных частот МК.



Фиг. 3. К определению погрешностей ИДН и параметров коммутационных элементоз.

В качестве примера рассмотрим ИДН с $k = 6$, $n = 10$, $U_1 = 1$ В, переключаемый контактами КЭМ-2 по одной ступени. Выбираем $\frac{U_g}{U_1} \leq 10^{-7}$, т.е. 10 % от последнего разряда. Учитывая, что $\sqrt{\tau} = 3.10^{-2}$, получим допустимое $U_м \leq 2,5$ мкВ при $f = 10$ Гц, что недостигаемая величина для контактов типа КЭМ-2.



Фиг. 4. Действующее значение шумового сигнала контакта в зависимости от частоты срабатывания.

Исходя из реальных контактов, можно лишь получить $\frac{U_g}{U_1} \geq 1,6.10^{-4}$. В этом случае, три последние ступени теряют всякое значение.

Выводы

Коммутационные элементы в цепи ИДН при автоматическом переключении могут вызвать погрешности, превышающие на несколько порядков погрешности самих ИДН.

При проектировании автоматических измерительных приборов с ИДН, следует учитывать очень высокие требования к коммутационным элементам.

Литература

1. Калибратор 745А. Проспект фирмы Hewlett Packard.

2. Digital Voltmeter DM 2010. Dynamco Instruments Limited. Instrumentation and Operation Manual. Aldeshot, Hampshire, England.

3. Я.М. Д и к о в с к и й, И.И. К а п р а л о в. Магнитоуправляемые контакты. Изд. "Энергия", М., 1970.

4. Я.В. П е т е р с о н. Термоэлектродвижущая сила магнитоуправляемых контактов. Труды ТПИ, серия А, № 334, Таллин, 1972, стр. 155-161.

5. Я.В. П е т е р с о н. Погрешности многоступенчатых индуктивных делителей напряжения от переходного сопротивления коммутационных элементов. В наст.сб., стр. 155.

6. Я.В. П е т е р с о н. Реле. Авт. свид. №377912, 1973.

J. Peterson

Switching Errors of a Multi-Stage Inductive Voltage Dividers

Summary

The noise and the thermoelectromotive force of dry reed sealed contacts for switching the ratios of inductive voltage dividers cause additional errors. The estimations of these errors and conditions for choice of the contacts are given.

Содержание

Стр.

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ. Сборник статей XI. Таллинский политехнический институт. Редактор Г. Вяльямяэ. Технический редактор М. Ыэсте. Утвержден коллегией Трудов ТПИ 25/У 1973. Подписано к печати 20/XI 1973. Бумага 60х90/16. Печ. л. 10,75+0,75 приложение. Уч.-изд. л. 8,62. Тираж 350. МВ-07693. Заказ №604. Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Цена 86 коп.

Цэна 36 коп.