

p-6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
Серия А № 143 1958

---

Л. Ю. ПОВЕРУС

**К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ  
СТАДИИ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ МАЛОЙ  
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
ТАЛЛИН, 1958



Ер. 6.7

TALLINNA POLYTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
Серия А № 143 1958

---

Л. Ю. ПОВЕРУС

**К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ  
СТАДИИ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ МАЛОЙ  
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
ТАЛЛИН, 1958

Ep. 2323

~~P37847~~



В настоящей работе исследуется оболочка вращения малой положительной кривизны симметричного типа в послекритической стадии, находящаяся под воздействием больших внешних боковых давлений. Предполагается, что края оболочки присоединены к тонкостенным диафрагмам, жестким в своей плоскости, но гибким при изгибе плоскости. Основные соотношения и формулы выведены в работе [3]. В упомянутой работе решена задача об изменении потенциальной энергии при переходе оболочки от осесимметричного состояния равновесия в неосесимметричное относительно волнообразования оболочки в первом приближении, т. е. число волн в направлении окружности принималось постоянным и равным числу волн при критической нагрузке. Это предположение, упрощающее вычислительную работу, не соответствует действительности, так как после потери устойчивости увеличение перемещений срединной поверхности оболочки сопровождается уменьшением числа волн в направлении окружности оболочки. Настоящая работа устраняет вышеупомянутый недостаток работы [3], и изменение потенциальной энергии вычислено с учетом изменения числа волн в направлении окружности. Таким образом величина нагрузки, при которой оболочка может выпучиваться, определяется точнее.

В настоящей статье применяются те же обозначения, что и в работе [3]. Пусть  $t$  будет толщина оболочки,  $R_2$  — второй главный радиус кривизны срединной поверхности оболочки,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $\lambda = \frac{t}{R_2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}$  — малый параметр,  $R_1 \gg R_2 \lambda^{-0.5}$  — радиус меридиана срединной поверхности оболочки,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — внутренние координаты,  $A_1, A_2$  — параметры Ляме,  $w$  — функция перемещения в направлении нормали к срединной поверхности оболочки,  $T_2$  — нормальная сила

начального напряженного состояния,  $F$  — функция напряжения.

Изменение потенциальной энергии оболочки при переходе от осесимметричного напряженного состояния в несосемметричное состояние при определенной величине внешней нагрузки вычисляется по следующей формуле работы [3].

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{EtA_2^4} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2^2} \right)^2 + \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)A_2^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right)^2 + T_2 \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1)$$

Здесь  $l = \frac{L}{2R_{2,0}}$  — относительная полудлина оболочки

$L$  — длина оболочки

$R_{2,0}$  — второй главный радиус кривизны оболочки у средней параллели.

Функция прогиба оболочки  $w$  и функция напряжения  $F$  аппроксимируется следующими рядами

$$\begin{aligned} w(\alpha_1, \alpha_2) &= w_0(\alpha_1) + w_1(\alpha_1) \cos s\alpha_2 \\ F(\alpha_1, \alpha_2) &= F_0(\alpha_1) + F_1(\alpha_1) \cos s\alpha_2 + F_2(\alpha_1) \cos 2s\alpha_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь —  $s$  число волн в направлении окружности оболочки.

Для симметричной оболочки малой положительной кривизны вводились следующие обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2L}{\pi} \chi, \quad s^2 = k^2 \frac{\pi}{2L} \lambda^{-0.5}, \quad \frac{1}{R_1} = \rho \frac{\pi}{2L} \lambda^{0.5}, \\ T_2 &= Et \lambda^{1.5} \frac{\pi}{2L} \tau, \quad w_0 = \frac{2L}{\pi} \lambda^{0.5} \psi_0, \quad w_1 = \frac{2L}{\pi} \lambda^{0.5} \psi_1, \\ F_1 &= Et \frac{2L}{\pi} \lambda^{1.5} \varphi_1, \quad F_2 = Et \frac{2L}{\pi} \lambda^{1.5} \varphi_2, \quad A_1 = A_2 = R_2 = R_{2,0} = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

После проведения вышеназванных изменений, ход которых подробно дан в работе [3], формула для изменения потенциальной энергии приобретает следующий вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \pi E t \frac{2L}{\pi} \lambda^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [k^4(\varphi_1^2 + 16\varphi_2^2 + \psi_1^2) + \tau k^2 \psi_1^2] dx \quad (4)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\psi_1''}{k^4} + \frac{\rho \psi_1}{k^2} + \frac{\psi_1 \psi_1'^2}{2} + \frac{\psi_1^2 \psi_1''}{2} \\ \varphi_2 &= \frac{1}{32} \left( -\frac{\psi_1'' \psi_1}{k^2} + \frac{\psi_1'^2}{k^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Форма выпученной образующей срединной поверхности оболочки аппроксимируется в первом приближении

$$\psi_1 = a \cos x \quad (6)$$

Из формулы (4) получим соотношение

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{\pi}{2} E t \lambda^2 l \left[ \left( \frac{1}{k^4} + k^4 + \tau k^2 + \rho^2 + \frac{2\rho}{k^2} \right) a^2 - \frac{30}{64} a^4 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} k^2 \rho a^4 + \frac{1}{8} k^4 a^6 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим

$$\Pi = \frac{\pi}{2} E t \lambda^2 l \bar{\Pi} \quad (8)$$

Из условия стационарности функционала  $\bar{\Pi}$   $\delta \bar{\Pi} = 0$  следуют уравнения

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial (k^4)} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a} = \tau k^2 + k^4 + \frac{1}{k^4} + \rho^2 + \frac{2\rho}{k^2} - \rho k^2 a^2 - \frac{15}{16} a^2 + \frac{6}{16} k^4 a^4 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial (k^4)} = \tau k^2 + 2k^4 - \frac{2}{k^4} - \frac{2\varrho}{k^2} - \frac{1}{2} \varrho k^2 \sigma^2 + \frac{4}{16} k^4 \sigma^4 = 0 \quad (10)$$

Система (9), (10) дает уравнение, связывающее  $\alpha$  и  $k^2$

$$-k^4 + \frac{3}{k^4} + \varrho^2 + \frac{4\varrho}{k^2} - \frac{1}{2} \varrho k^2 \sigma^2 - \frac{15}{16} \sigma^2 + \frac{1}{8} k^4 \sigma^4 = 0 \quad (11)$$

Численный пример решен при  $\zeta = 1$ . Тогда из уравнения (11) получим

$$\frac{1}{8} k^8 \sigma^4 - \left( \frac{1}{2} k^6 + \frac{15}{16} k^4 \right) \sigma^2 + (-k^8 + k^4 + 4k^2 + 3) = 0 \quad (12)$$

Решения уравнения (12) применим к соотношениям (7) и (9). Результаты вычислений представлены в таблице 1 и на фиг. 1 и 2.

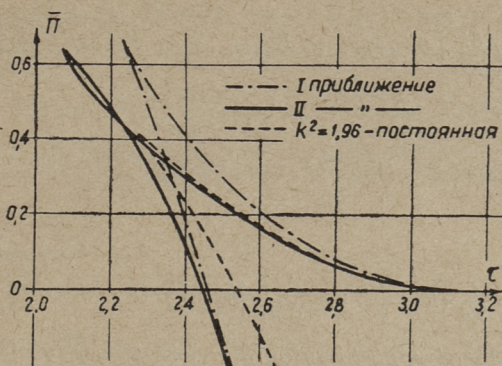
Таблица 1

$a$	0	0,09003	0,4250	0,750	1,0353	1,1848	1,3552	1,6222
$k^2$	1,96	1,95	1,90	1,80	1,70	1,65	1,60	1,55
$\tau$	3,124	3,1117	2,8795	2,5011	2,2532	2,2312	2,3616	3,0979
$\bar{\Pi}$	0	0,0000943	0,04100	0,29030	0,62542	0,66658	0,31437	-2,3315



Фиг. 1





Фиг. 2

Во втором приближении выпученная образующая срединной поверхности оболочки аппроксимируется в виде

$$\psi_1 = a \cos x + b \cos 3x \quad (13)$$

Подставляя решение (13) в выражение (4), получим

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{\pi}{2} E t \lambda^2 l \left[ \left( \frac{1}{k^4} + k^4 + \tau k^2 + g^2 + \frac{2g}{k^2} \right) a^2 + \left( \frac{81}{k^4} + k^4 + \tau k^2 + g^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{18g}{k^2} \right) b^2 - \frac{30}{64} a^4 - 6a^3b - \frac{774}{16} a^2b^2 - \frac{2430}{64} b^4 - \frac{1}{2} k^2 g a^4 - \right. \\ & \left. - 2k^2 g a^3b - 10k^2 g a^2b^2 - \frac{9}{2} k^2 g b^4 + \frac{k^4}{8} [a^6 + 15a^5b + \right. \\ & \left. + 105a^4b^2 + 138a^3b^3 + 345a^2b^4 + 81b^6] \right] \quad (14) \end{aligned}$$

Учитывая обозначения (8), вводится условие  $\delta \bar{\Pi} = 0$  в уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a} = & \left( \frac{1}{k^4} + k^4 + \tau k^2 + g^2 + \frac{2g}{k^2} \right) - \frac{15}{16} a^2 - 9ab - \frac{387}{8} b^2 - k^2 g a^2 - \\ & - 3k^2 g ab - 10k^2 g b^2 + \frac{k^4}{16} [6a^4 + 65a^3b + 420a^2b^2 + 414ab^3 + \\ & + 690b^4] = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial b} = & \left( \frac{81}{k^4} + k^4 + \tau k^2 + \varrho^2 + \frac{18\varrho}{k^2} \right) b - 3a^3 - \frac{387}{8} a^2 b - \frac{1215}{16} b^3 - \\ & - k^2 \varrho a^3 - 10k^2 \varrho a^2 b - 9k^2 \varrho b^3 + \frac{k^4}{16} \left[ 13a^5 + 210a^4 b + \right. \\ & \left. + 414a^3 b^2 + 1380a^2 b^3 + 486b^5 \right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial k^4} = & \left[ -\frac{1}{k^4} + k^4 + \frac{1}{2} k^2 \tau - \frac{\varrho}{k^2} \right] a^2 + \left[ -\frac{81}{k^4} + k^4 + \frac{1}{2} k^2 \tau - \frac{9\varrho}{k^2} \right] b^2 - \\ & - \frac{1}{4} k^2 \varrho a^4 - k^2 \varrho a^3 b - 5k^2 \varrho a^2 b^2 - \frac{9}{4} k^2 \varrho b^4 + \frac{k^4}{8} \left[ a^6 + 13a^5 b \right. \\ & \left. + 105a^4 b^2 + 138a^3 b^3 + 345a^2 b^4 + 81b^6 \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Выражаем  $\tau k^2$  из уравнений (15) и подставляем в уравнения (16) и (17). Таким образом из этих уравнений исключается  $\tau$  и получаются следующие два уравнения относительно  $a$ ,  $b$  и  $k^2$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{80}{k^4} + \frac{16\varrho}{k^2} \right) b - 3a^3 - \frac{759}{16} a^2 b + 9ab^2 - \frac{441}{16} b^3 - k^2 \varrho a^3 - 9k^2 \varrho a^2 b + \\ + 3k^2 \varrho ab^2 + k^2 \varrho b^3 + \frac{k^4}{16} \left[ 13a^5 + 204a^4 b + 349a^3 b^2 + 960a^2 b^3 - \right. \\ \left. - 414ab^4 - 204b^5 \right] = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{3}{2k^4} + \frac{k^4}{2} - \frac{\varrho^2}{2} - \frac{2\varrho}{k^2} + \frac{15}{32} a^2 + \frac{9}{2} ab + \frac{387}{16} b^2 + \frac{k^2 \varrho a^2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} k^2 \varrho ab + 5k^2 \varrho b^2 - \frac{k^4}{32} \left[ 6a^4 + 65a^3 b + 420a^2 b^2 + 414ab^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 690b^4 \right] \right] a^2 + \left[ -\frac{163}{2k^4} + \frac{k^4}{2} - \frac{\varrho^2}{2} - \frac{10\varrho}{k^2} + \frac{15}{32} a^2 + \frac{9}{2} ab + \frac{387}{16} b^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k^2 \varrho a^2 + \frac{3}{2} k^2 \varrho ab + 5k^2 \varrho b^2 - \frac{k^4}{32} \left[ 6a^4 + 65a^3 b + 420a^2 b^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 414ab^3 + 690b^4 \right] \right] b^2 - \frac{1}{4} k^2 \varrho a^4 - k^2 \varrho a^3 b - 5k^2 \varrho a^2 b^2 - \frac{9}{4} k^2 \varrho b^4 + \\ + \frac{k^4}{8} \left[ a^6 + 13a^5 b + 105a^4 b^2 + 138a^3 b^3 + 345a^2 b^4 + 81b^6 \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

С помощью уравнений (18) и (19) вычисляются  $\zeta = 1$  зависимости

$$b = b(a); k^2 = k^2(a)$$

Далее, из уравнения (15) отыскивается

$$\tau = \tau(a, b, k^2)$$

и из уравнения (14):

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(a, b, \tau, k^2)$$

Результаты вычислений представлены в следующей таблице 2 и на фиг. 1 и 2.

Таблица 2

a	0	0,3	0,6	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,4
b	0	0,005148	0,0515	0,0990	0,1112	0,116	0,1148	0,1068	0,0568
k <sup>2</sup>	1,96	1,927	1,846	1,732	1,665	1,597	1,539	1,495	1,492
$\tau$	-3,124	-2,985	-2,475	-2,111	-2,074	-2,114	-2,219	-2,369	-2,667
$\bar{\Pi}$	0	0,01230	0,2366	0,5717	0,6383	0,6042	0,4557	0,1909	-0,5295

Из полученных результатов следует, что у тонкой упругой оболочки вращения малой положительной кривизны при больших значениях бокового давления потенциальная энергия выпученного состояния равновесия меньше потенциальной энергии первоначального осесимметричного состояния начиная с нагрузки:

- 1)  $q > 0,784 q_{кр}$  — при  $\zeta = 1$  и втором приближении решения;
- 2)  $q > 0,788 q_{кр}$  — при  $\zeta = 1$  и первом приближении решения;
- 3)  $q > 0,813 q_{кр}$  — при  $\zeta = 1$  и постоянном значении  $k^2 = 16,66$ .

Критическое значение бокового давления определяется следующей формулой работы [4]

$$q_{кр} = \frac{\pi E t^{2,5}}{[12(1-\mu^2)]^{0,75} R_{20}^{1,5} L} \tau_{кр}$$

Как следует из результатов работы [2] у цилиндрической оболочки при больших значениях бокового давления потенциальная энергия выпученного состояния равновесия меньше потенциальной энергии первоначального состояния при нагрузках

$$q > 0,74 q_{кр}$$

Относительные энергетические барьеры, разделяющие устойчивые состояния равновесия при докритических давлениях, являются при оболочках малой положительной кривизны и цилиндрических оболочках величинами одного порядка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н. А. Об определении состояний равновесия круговой оболочки при осесимметричной нагрузке. ПИМ т. XVII, 1953.
2. Оллик К. К. Устойчивость упругой круговой цилиндрической оболочки при больших внешних боковых давлениях. Труды ТПИ. Серия А № 65. 1955.
3. Поверус Л. Ю. Исследование состояний равновесия в послекритической стадии упругой оболочки вращения малой положительной кривизны, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления. Труды ТПИ. Серия А № 82 1956 г.
4. Поверус Л. Ю. Устойчивость оболочки вращения с малой положительной кривизной под действием равномерно распределенного внешнего давления. Труды ТПИ. Серия А № 65. 1955 г.



Л. Ю. Поверус

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ  
УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ МАЛОЙ  
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

\*

Издательство  
Таллинского Политехнического Института

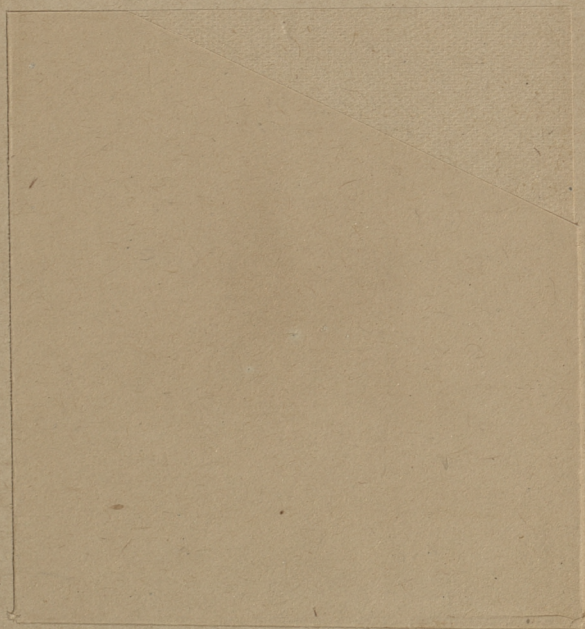
Редактор О. Роотс  
Технический редактор А. Тамм  
Корректор К. Оллик

---

Подписано к печати 20. VI 1958. Бумага  $54 \times 84^{1/16}$ . Печатных  
листов 0,75. По формату  $60 \times 92$  печатных листов 0,63. Учетно-изда-  
тельских листов 0,3. Тираж 800. Заказ № 471. МВ-04862.

Типография Управления Делами СМ ЭССР, Таллин





Цена 25 коп.