ISSN 0136-5549
0203-9745

TALLINNA
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI
TOIMETISED
507

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

TPI '81

ДВУМЕРНОЕ ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ СИСТЕМЫ

TPI '81

507

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.041

ДВУМЕРНОЕ ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ СИСТЕМЫ

Строительная механика XII

Таллин 1981

№ 507

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.041

Э.М. Иеги, П.И. Коппель, А.А. Сарап

ВЛИЯНИЕ ОРТОТРОПНОСТИ МАТЕРИАЛА НА СИЛОВОЕ И НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БАЛКИ-СТЕНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Проводится анализ силового и напряженного состояния ортотропной балки-стенки переменной толщины, описываемой линейным уравнением $h_1 = a + by$ или $h_1 = nh_0$ в зависимости от соотношения коэффициентов Пуассона ($\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x}$) и соотношения жесткостей ($e = \frac{E_y}{E_x}$). Влияние параметра ортотропности (e) исследуется в интервале e = I/5, I, 5, влияние коэффициента Пуассона – для $\bar{\nu} = 0$, I, ∞. Рассматриваются два вида воздействий в форме симметричной и асимметричной нагрузки.

Статический расчет балки-стенки проводится методом сеток из общего уравнения Сен-Венана (см. табл. I) для балки-стенки с линейным законом изменения толщины по высоте так, что в сеточном уравнении принимается $\Theta_x = \Theta_{xx} = \Theta_{xy} = 0$; $\Theta_y = \text{const}$.

Состояние балки-стенки оценивается по двум критериям:

I) отклонение экстремальных значений усилий и главных напряжений от некоторых базисных значений, выбранных определенным образом и

2) среднеквадратические отклонения, как дисперсия распределения внутренних сил и напряжений.

В качестве базисного состояния балки-стенки выбирается состояние, соответствующее единичному значению факторов ($\bar{\nu}, e, n$), влияние которого на силовое и напряженное состояние пластинки исследуется.

Общая форма сеточного уравнения Сен-Венана для точки (i)

$$A_1 + A_2 \cdot e + A_3 \cdot f(e) = 0, \quad \text{где} \quad f(e) = 1 + e + \nu_x + \nu_y \cdot e$$

Таблица 1

	A_1	$A_2 \cdot e$	$A_3 \cdot f(e)$
	$\frac{\varphi_s - 4\varphi_k + 6\varphi_i - 4\varphi_l + \varphi_t}{\lambda_x^4} -$ $-\nu_x \frac{4\varphi_i - 2(\varphi_k + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n) + \varphi_o + \varphi_p + \varphi_q + \varphi_r}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}$	$\frac{\varphi_n - 4\varphi_m + 6\varphi_i - 4\varphi_n + \varphi_r}{\lambda_y^4} -$ $-\nu_y \frac{4\varphi_i - 2(\varphi_k + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n) + \varphi_o + \varphi_p + \varphi_q + \varphi_r}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}$	$\frac{4\varphi_i - 2(\varphi_k + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n) + \varphi_o + 4\varphi_p + \varphi_q + \varphi_r}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}$
$-\theta_x = -\frac{h_l - h_k}{2\lambda_x} \cdot \frac{1}{h_i}$ $-\theta_y = -\frac{h_n - h_m}{2\lambda_y} \cdot \frac{1}{h_i}$	$2\left(\frac{-\varphi_s + 2\varphi_k - 2\varphi_l + \varphi_t}{2\lambda_x^3} - \nu_x \frac{2(\varphi_k - \varphi_l) - \varphi_o + \varphi_p - \varphi_q + \varphi_r}{2\lambda_x \lambda_y^2}\right)$	$2\left(\frac{-\varphi_u + 2\varphi_m - 2\varphi_n + \varphi_v}{2\lambda_y^3} - \nu_y \frac{2(\varphi_m - \varphi_n) - \varphi_o + \varphi_p + \varphi_q - \varphi_r}{2\lambda_x^2 \lambda_y}\right)$	$\frac{2(\varphi_k - \varphi_l) - \varphi_o + \varphi_p - \varphi_q - \varphi_r}{2\lambda_x \lambda_y^2}$ $\frac{2(\varphi_m - \varphi_n) - \varphi_o + \varphi_o + \varphi_q - \varphi_r}{2\lambda_x^2 \lambda_y}$
$2\theta_x^2 = \frac{(h_l - h_k)^2}{2\lambda_x^2} \cdot \frac{1}{h_i^2}$ $2\theta_y^2 = \frac{(h_n - h_m)^2}{2\lambda_y^2} \cdot \frac{1}{h_i^2}$ $2\theta_x\theta_y = \frac{(h_l - h_k)(h_n - h_m)}{2\lambda_x \lambda_y} \cdot \frac{1}{h_i^2}$	$\frac{\varphi_k - 2\varphi_i + \varphi_l}{\lambda_x^2} - \nu_x \frac{\varphi_m - 2\varphi_i + \varphi_n}{\lambda_y^2}$	$\frac{\varphi_m - 2\varphi_i + \varphi_n}{\lambda_y^2} - \nu_y \frac{\varphi_k - 2\varphi_i + \varphi_l}{\lambda_x^2}$	$\frac{\varphi_o + \varphi_p - \varphi_q - \varphi_r}{4\lambda_x \lambda_y}$
$-\theta_{xx} = -\frac{h_k - 2h_i + h_l}{\lambda_x^2} \cdot \frac{1}{h_i}$ $-\theta_{yy} = -\frac{h_m - 2h_i + h_n}{\lambda_y^2} \cdot \frac{1}{h_i}$ $-\theta_{xy} = -\frac{h_o + h_p - h_q - h_r}{4\lambda_x \lambda_y} \cdot \frac{1}{h_i}$	$\frac{\varphi_k - 2\varphi_i + \varphi_l}{\lambda_x^2} - \nu_x \frac{\varphi_m - 2\varphi_i + \varphi_n}{\lambda_y^2}$	$\frac{\varphi_m - 2\varphi_i + \varphi_n}{\lambda_y^2} - \nu_y \frac{\varphi_k - 2\varphi_i + \varphi_t}{\lambda_x^2}$	$\frac{\varphi_o + \varphi_p - \varphi_q - \varphi_r}{4\lambda_x \lambda_y}$

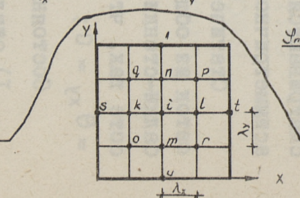
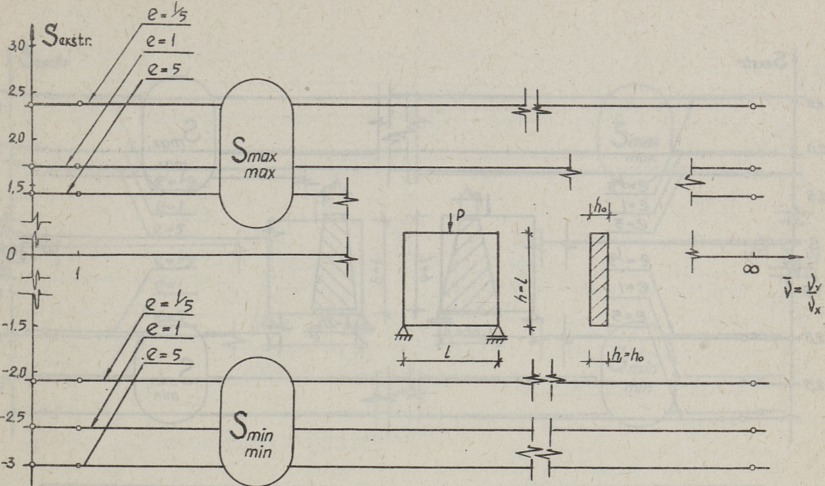


Табл. 1. Общее уравнение Сен-Венана в сеточной форме.



$D_{S_{max\,max}} / \bar{\nu}=1$ (Δ)

e / $\bar{\nu}$	0	1	∞
0,2	0	0	0
1	0	0	0
5	0	0	0

$D_{S_{max\,max}} / \bar{\nu}=1,\ e=1$ (Δ)

e / $\bar{\nu}$	0	1	∞
0,2	0,4189 (37,53%)	0,4189 (37,53%)	0,4189 (37,53%)
1	0	0	0
5	0,0792 (16,32%)	0,0792 (16,32%)	0,0792 (16,32%)

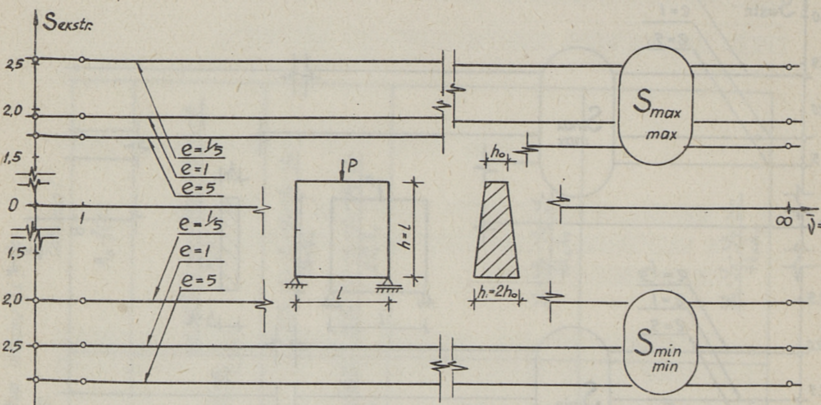
$D_{S_{min\,min}} / \bar{\nu}=1$ (Δ)

e / $\bar{\nu}$	0	1	∞
0,2	0	0	0
1	0	0	0
5	0	0	0

$D_{S_{min\,min}} / \bar{\nu}=1,\ e=1$ (Δ)

e / $\bar{\nu}$	0	1	∞
0,2	0,2507 (19,26%)	0,2507 (19,26%)	0,2507 (19,26%)
1	0	0	0
5	0,1631 (15,53%)	0,1631 (15,53%)	0,1631 (15,53%)

Фиг. 1 а. Изменение внутренних сил от симметричной нагрузки в пространстве параметров ортотропности (e, $\bar{\nu}$) для $n = \frac{h_1}{h_0} = 1$.



$D_{s_{\max\max}/\bar{\nu}=1}$ (Δ)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
e=0,2	0,0008 (1,09%)	0	0,0007 (1,08%)
e=1	0,0012 (1,82%)	0	0,0012 (1,79%)
e=5	0,0021 (2,71%)	0	0,0020 (2,66%)

$D_{s_{\max\max}/\bar{\nu}=1,\ e=1}$ (Δ)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
e=0,2	0,3950 (32,58%)	0,3611 (31,15%)	0,3290 (29,73%)
e=1	0,0012 (1,82%)	0	0,0012 (1,79%)
e=5	0,0335 (9,49%)	0,0525 (11,88%)	0,0753 (14,22%)

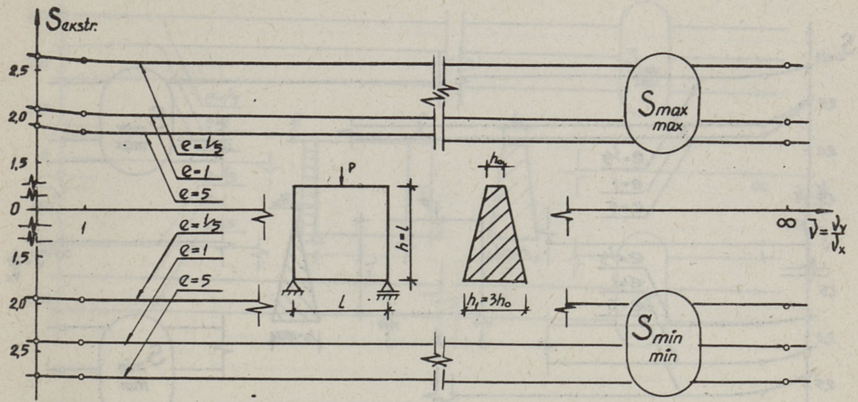
$D_{s_{\min\min}/\bar{\nu}=1}$ (Δ)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
e=0,2	0,0003 (0,82%)	0	0,0003 (0,81%)
e=1	0,0004 (0,80%)	0	0,0004 (0,78%)
e=5	0,0004 (0,71%)	0	0,0004 (0,70%)

$D_{s_{\min\min}/\bar{\nu}=1,\ e=1}$ (Δ)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
e=0,2	0,2391 (19,76%)	0,2233 (19,09%)	0,2081 (18,44%)
e=1	0,0004 (0,80%)	0	0,0004 (0,78%)
e=5	0,1329 (14,73%	0,1481 (15,55%)	0,1639 (16,36%)

Фиг. 1 б. Изменение внутренних сил от симметричной нагрузки в пространстве параметров ортотропности ($e, \bar{\nu}$) для $n = \frac{h_1}{h_0} = 2$.



$D_{s_{max\,max}} / \bar{\nu} = 1$ (Δ)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
e = 0.2	0,0019 (1,68%)	0	0,0018 (1,64%)
e = 1	0,0038 (3,05%)	0	0,0036 (2,97%)
e = 5	0,0076 (4,76%)	0	0,0071 (4,60%)

$D_{s_{max\,max}} / \bar{\nu} = 1,\ e = 1$ (Δ)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
e = 0.2	0,3834 (30,54%)	0,3312 (28,38%)	0,2838 (26,27%)
e = 1	0,0038 (3,05%)	0	0,0036 (2,97%)
e = 5	0,0134 (5,71%)	0,0410 (9,99%)	0,0821 (14,13%)

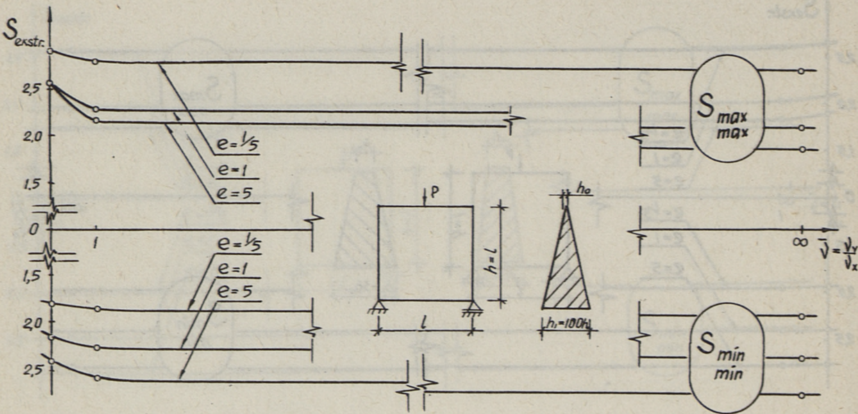
$D_{s_{min\,min}} / \bar{\nu} = 1$ (Δ)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
e = 0.2	0,0007 (1,31%)	0	0,0006 (1,29%)
e = 1	0,0011 (1,42%)	0	0,0011 (1,40%
e = 5	0,0015 (1,37%)	0	0,0014 (1,36%)

$D_{s_{min\,min}} / \bar{\nu} = 1,\ e = 1$ (Δ)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
e = 0.2	0,2340 (20,02%)	0,2098 (18,95%)	0,1872 (17,91%)
e = 1	0,0011 (1,42%)	0	0,0011 (1,40%)
e = 5	0,1121 (13,86%)	0,1391 (15,44%)	0,1688 (17,00%)

Фиг. 1 в. Изменение внутренних сил от симметричной нагрузки в пространстве параметров ортотропности ($e, \bar{\nu}$) для $n = \frac{h_1}{h_0} = 3$.



$D_{s_{\substack{max\\max}}}/_{\bar{\nu}=1}$ (Δ)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
e=0,2	0,0123 (3,95%)	0	0,0111 (3,76%)
e=1	0,0500 (9,70%)	0	0,0419 (8,88%)
e=5	0,1412 (17,16%)	0	0,1075 (14,98%)

$D_{s_{\substack{max\\max}}}/_{\substack{\bar{\nu}=1\\e=1}}$ (Δ)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
e=0,2	0,3608 (26,37%)	0,2474 (21,57%)	0,1537 (17,00%)
e=1	0,0500 (9,70%)	0	0,0419 (8,88%)
e=5	0,0673 (11,25%)	0,0135 (5,05%)	0,1974 (19,27%)

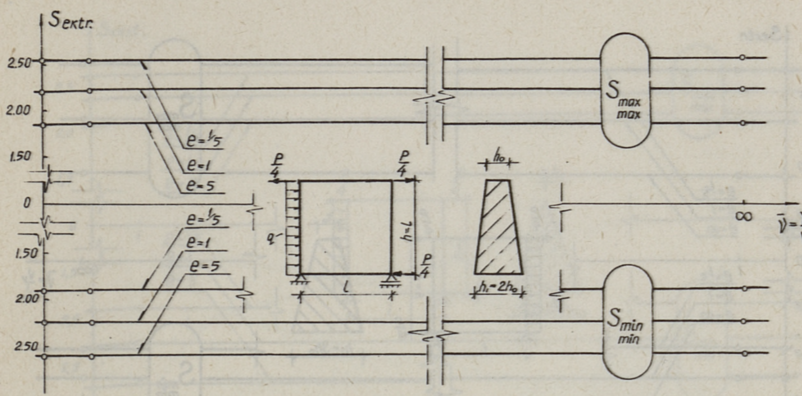
$D_{s_{\substack{min\\min}}}/_{\bar{\nu}=1}$ (Δ)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
e=0,2	0,0039 (3,38%	0	0,0036 (3,25%)
e=1	0,0148 (5,38%)	0	0,0129 (5,03%)
e=5	0,0281 (6,51%)	0	0,0246 (6,09%)

$D_{s_{\substack{min\\min}}}/_{\substack{\bar{\nu}=1\\e=1}}$ (Δ)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
e=0,2	0,2263 (21,08%)	0,1708 (18,32%)	0,1248 (15,65%)
e=1	0,0148 (5,38%)	0	0,0129 (5,03%)
e=5	0,0223 (6,62%)	0,1004 (14,04%)	0,2244 (20,99%)

Фиг. 1 г. Изменение внутренних сил от симметричной нагрузки в пространстве параметров ортотропности (e, $\bar{\nu}$) для $n = \frac{h_1}{h_0} = 100$



$D_{S^{max}_{max}/\bar{\nu}=1}$ (Δ%)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0 (0,7%)	0	0 (0,07%)
1	0 (0,16%)	0	0 (0,16%)
5	0,0001 (0,34%)	0	0,0001 (0,34%)

$D_{S^{max}_{max}/\bar{\nu}=1,\ e=1}$ (Δ%)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0,1046 (14,57%)	0,1059 (14,65%)	0,10 (14,74%)
1	0 (0,16%)	0	0 (0,16%)
5	0,1325 (16,39%)	0,1279 (16,10%)	0,1233 (15,82%)

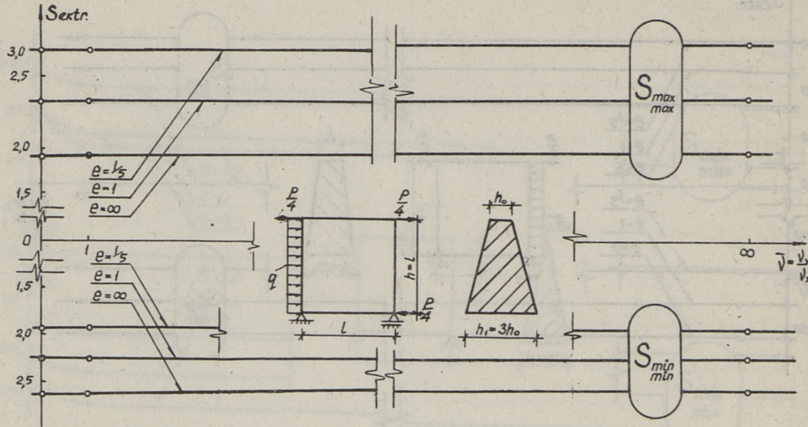
$D_{S^{min}_{min}/\bar{\nu}=1}$ (Δ%)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0 (0,05%)	0	0 (0,05%)
1	0	0	0
5	0 (0,14%)	0	0 (0,13%)

$D_{S^{min}_{min}/\bar{\nu}=1,\ e=1}$ (Δ%)

e \ $\bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0,1102 (14,71%)	0,1108 (14,75%)	0,1114 (14,79%)
1	0 (0,09%)	0	0 (0,09%)
5	0,1254 (15,69%)	0,1228 (15,53%)	0,1203 (15,37%)

Фиг. 2 а. Изменение внутренних сил от асимметричной нагрузки в в пространстве параметров ортотропности (e, $\bar{\nu}$) для $n = \frac{h_1}{h_0} = 2$



$D_{S^{max}_{max}} / \bar{\nu}=1$ (Δ%)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0 (0,12%)	0	0 (0,12%)
1	0,0001 (0,28%)	0	0,0001 (0,28%)
5	0,0002 (0,64%)	0	0,0001 (0,63%)

$D_{S^{max}_{max}} / \bar{\nu}=1,\ e=1$ (Δ%)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0,0930 (13,55%)	0,0949 (13,68%)	0,0967 (13,82%)
1	0,0001 (0,28%)	0	0,0001 (0,28%)
5	0,1229 (15,58%)	0,1144 (15,03%)	0,1064 (14,49%)

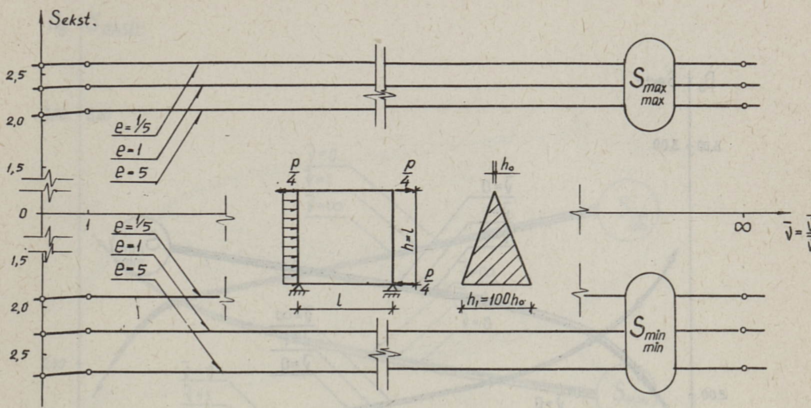
$D_{S^{min}_{min}} / \bar{\nu}=1$ (Δ%)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0 (0,10%)	0	0 (10,09%)
1	0 (0,18%)	0	0 (0,17%)
5	0,0001 (0,28%)	0	0,0001 (0,27%)

$D_{S^{min}_{min}} / \bar{\nu}=1,\ e=1$ (Δ%)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0,1129 (14,90%)	0,1142 (14,98%)	0,1153 (15,06%)
1	0 (0,18%)	0	0 (0,17%)
5	0,1423 (16,72%)	0,1368 (16,40%)	0,1316 (16,08%)

Фиг. 2 б. Изменение внутренних сил от асимметричной нагрузки в пространстве параметров ортотропности ($e, \bar{\nu}$) для $n = \frac{h_1}{h_0} = 2$



$D_{S_{max\,max}/\bar{\nu}=1}$ (Δ %)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0,0001 (0,28%)	0	0,0001 (0,27%)
1	0,0004 (0,82%)	0	0,0003 (0,79%)
5	0,015 (1,85%)	0	0,0014 (1,75%)

$D_{S_{max\,max}/\bar{\nu}=1,\, e=1}$ (Δ %)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0,0610 (10,55%)	0,0646 (10,86%)	0,0682 (11,15%)
1	0,0004 (0,82%)	0	0,0003 (0,79%)
5	0,0842 (12,40%)	0,0633 (10,74%)	0,0461 (9,17%)

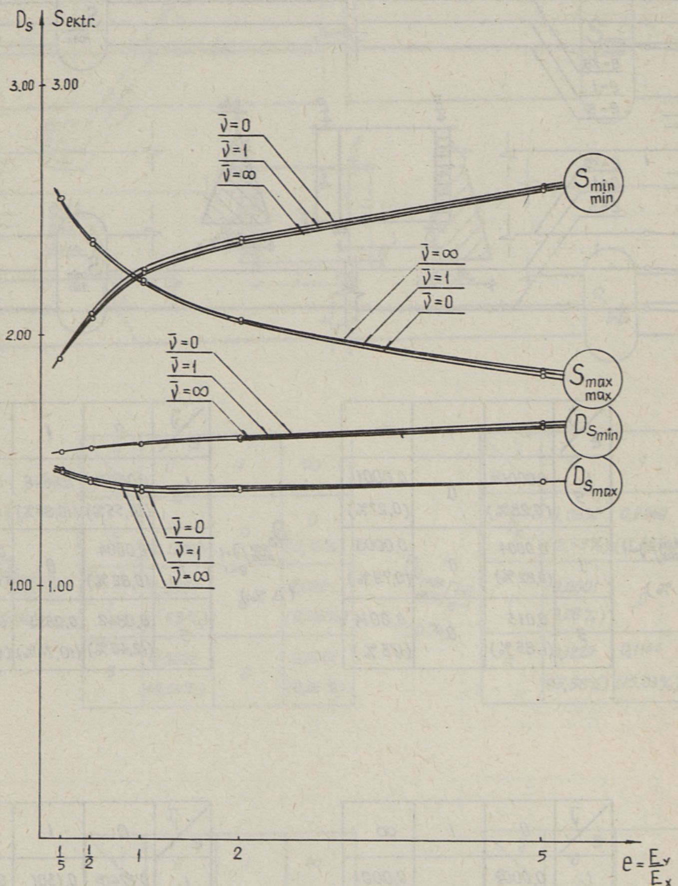
$D_{S_{min\,min}/\bar{\nu}=1}$ (Δ%)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0,0001 (0,44%)	0	0,0001 (0,39%)
1	0,0004 (0,84%)	0	0,0003 (0,75%)
5	0,0018 (1,56%)	0	0,0014 (1,38%)

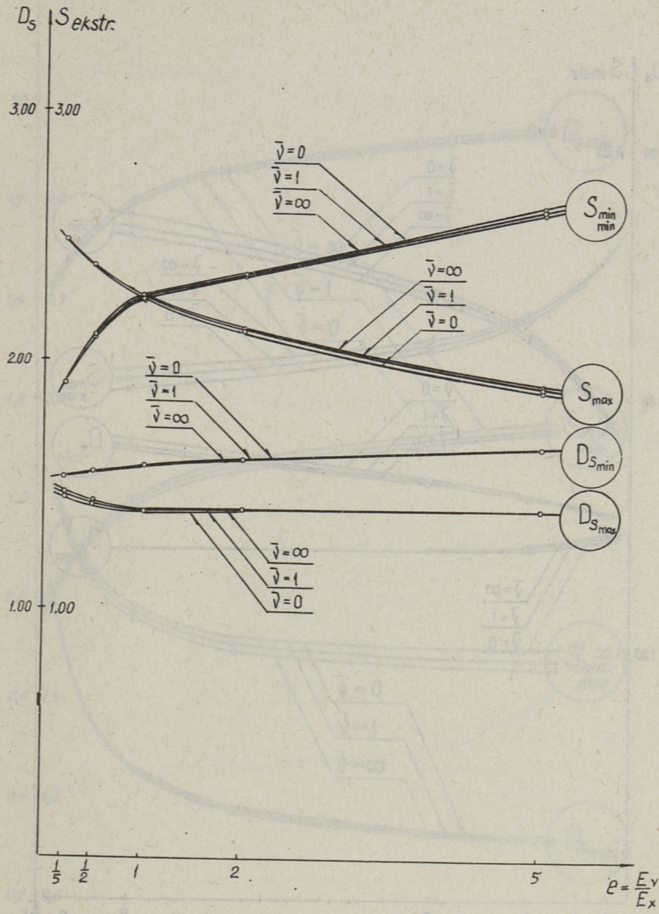
$D_{S_{min\,min}/\bar{\nu}=1,\, e=1}$ (Δ%)

$e \backslash \bar{\nu}$	0	1	∞
1/5	0,1240 (15,52%)	0,1301 (15,90%)	0,1355 (16,22%)
1	0,0004 (0,84%)	0	0,0003 (0,75%)
5	0,2249 (20,90%)	0,1866 (19,04%)	0,1557 (17,39%)

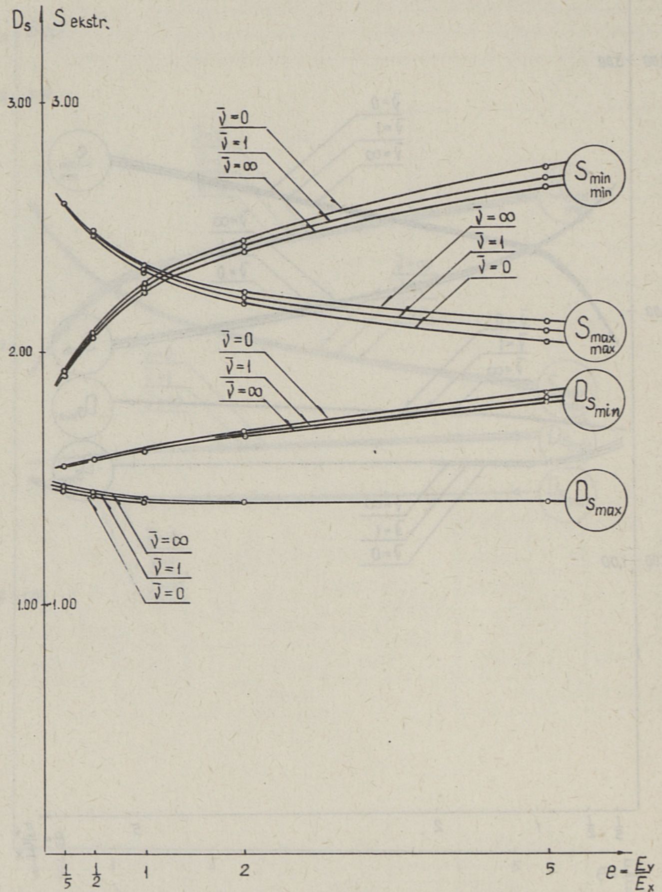
Фиг. 2 в. Изменение внутренних сил от асимметричной нагрузки в пространстве параметров ортотропности ($e, \bar{\nu}$) для $n = \frac{h_1}{h_0} = 3$.



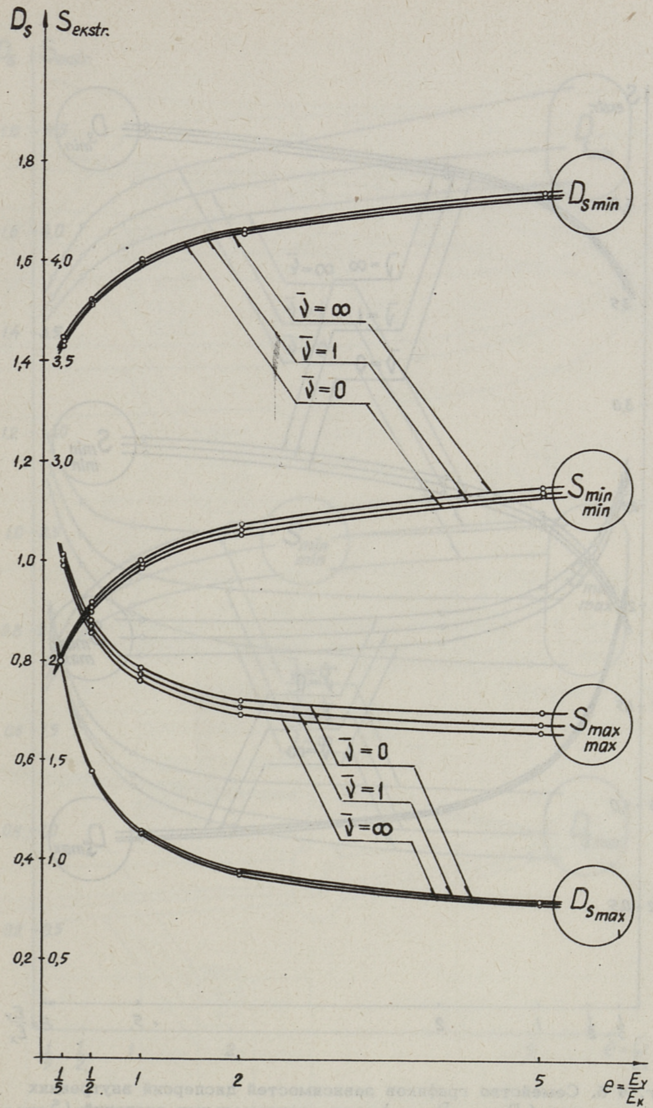
Фиг. 3 а. Семейство графиков зависимостей дисперсий внутренних сил ($D_{S_{max}}, D_{S_{min}}$) и их экстремальных значений ($S_{\substack{max\\max}}$, $S_{\substack{min\\min}}$) от соотношения жесткостей $e = \frac{E_y}{E_x}$ при фиксированных значениях безразмерного коэффициента Пуассона $\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x} = 0{,}1, \infty$ в балке-стенке с перепадом толщины $n = \frac{h_1}{h_0} = 2$ для симметричной нагрузки.



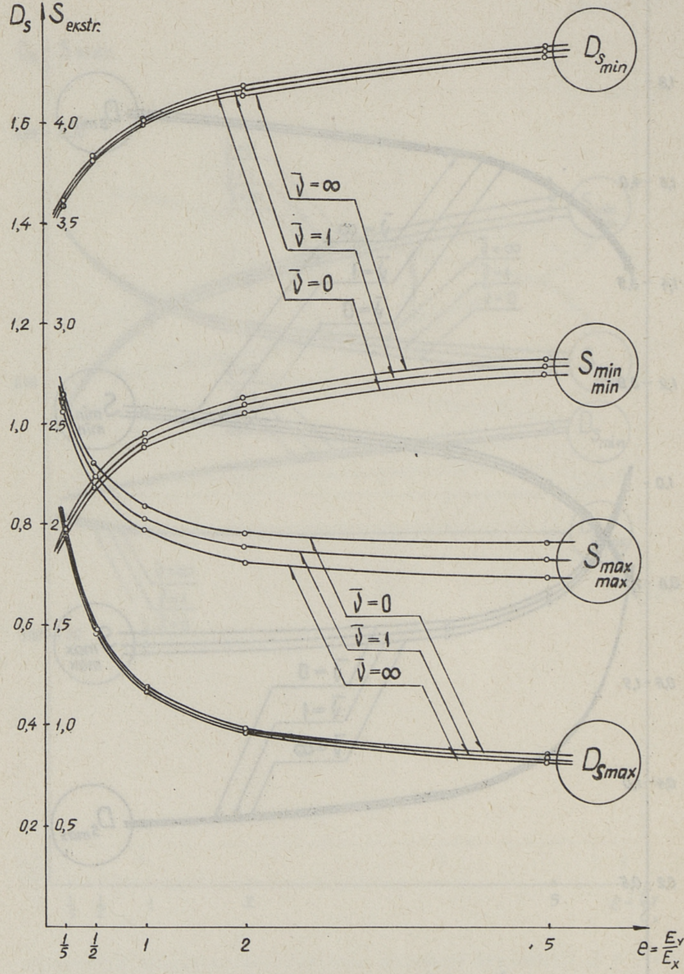
Фиг. 3 б. Семейство графиков зависимостей дисперсий внутренних сил ($D_{s_{max}}, D_{s_{min}}$) и их экстремальных значений ($S_{\substack{max\\max}}, S_{\substack{min\\min}}$) от соотношения жесткостей $e = \frac{E_y}{E_x}$ при фиксированных значениях безразмерного коэффициента Пуассона $\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x} = 0,1,\infty$ в балке-стенке с перепадом толщины $n = \frac{h_1}{h_0} = 3$ для симметричной нагрузки.



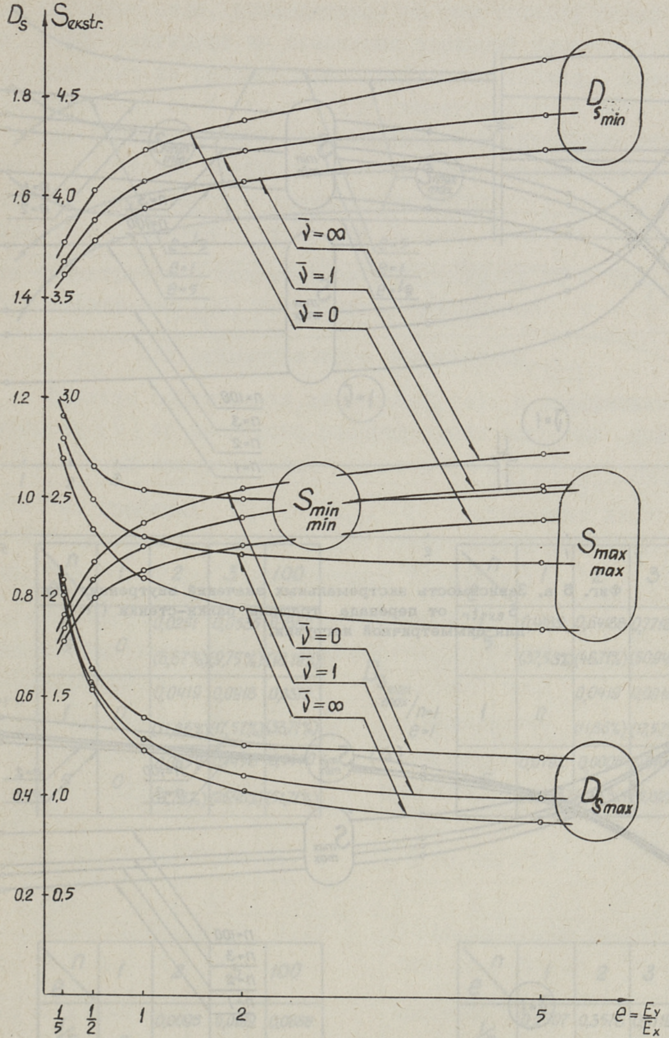
Фиг. 3 в. Семейство графиков зависимостей дисперсий внутренних сил ($D_{s_{max}}, D_{s_{min}}$) и их экстремальных значений ($S_{\substack{max\\max}}, S_{\substack{min\\min}}$) от соотношения жесткостей $e = \frac{E_y}{E_x}$ при фиксированных значениях безразмерного коэффициента Пуассона $\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x} = 0{,}1{,}\infty$ в балке-стенке с перепадом толщины $n = \frac{h_1}{h_0} = 100$ для симметричной нагрузки.



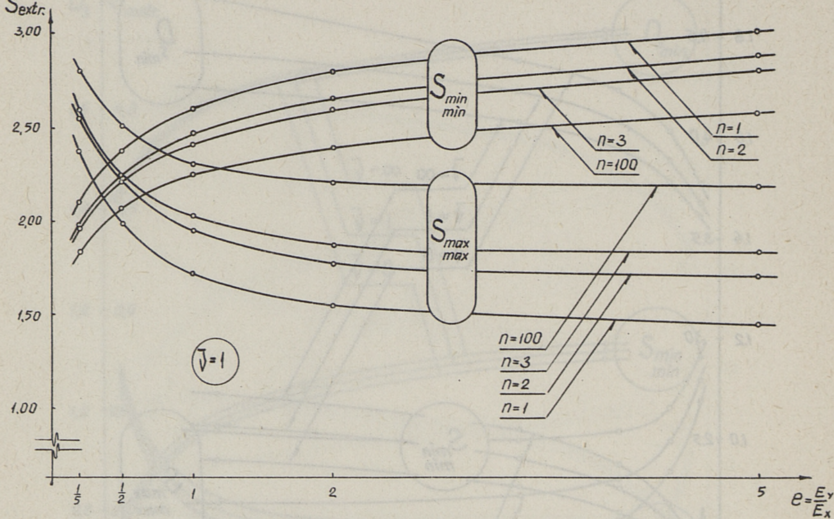
Фиг. 4 а. Семейство графиков зависимостей дисперсий внутренних сил ($D_{s_{max}}, D_{s_{min}}$) и их экстремальных значений ($S_{\substack{max\\max}}, S_{\substack{min\\min}}$) от соотношения жесткостей $e = \frac{E_y}{E_x}$ при фиксированных значениях безразмерного коэффициента Пуассона $\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x} = 0{,}1$, ∞ в балке-стенке с перепадом толщины $n = \frac{h_1}{h_0} = 2$ для асимметричной нагрузки.



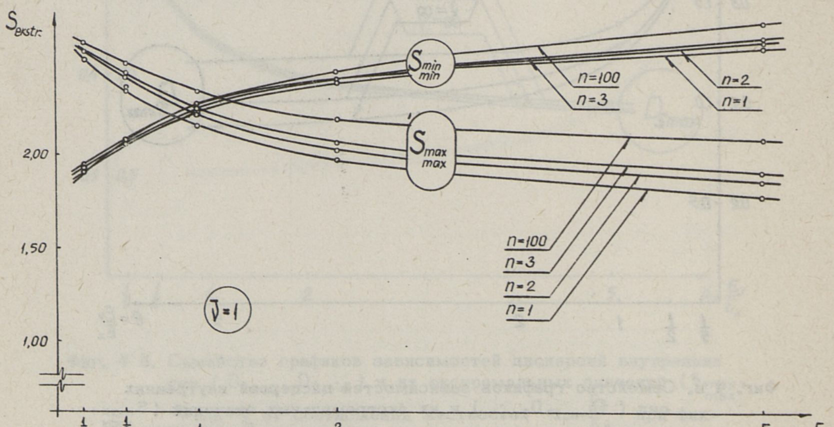
Фиг. 4 б. Семейство графиков зависимостей дисперсий внутренних сил ($D_{S_{max}}$, $D_{S_{min}}$) и их экстремальных значений ($S_{\substack{max\\max}}$, $S_{\substack{min\\min}}$) от соотношения жесткостей $e = \frac{E_y}{E_x}$ при фиксированных значениях безразмерного коэффициента Пуассона $\nu = \frac{\nu_y}{\nu_x} = 0{,}1$, ∞ в балке-стенке с перепадом толщины $n = \frac{h_1}{h_0} = 3$ для асимметричной нагрузки.



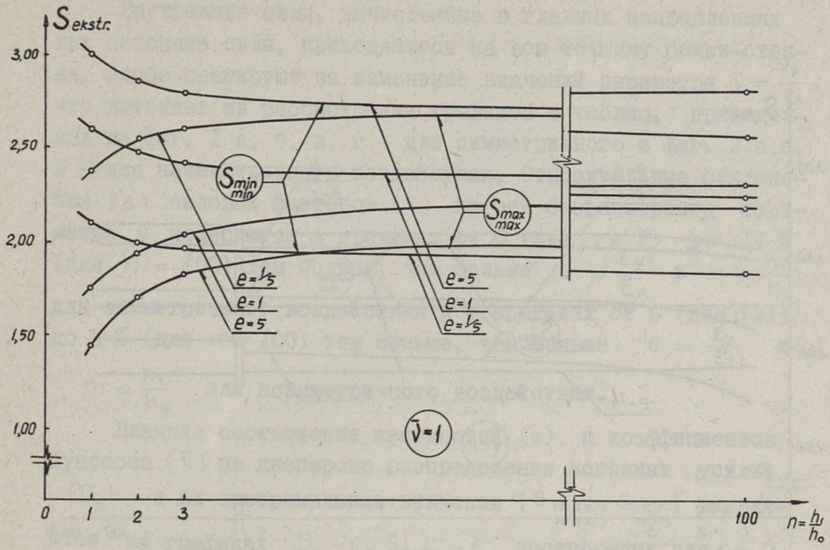
Фиг. 4 в. Семейство графиков зависимостей дисперсий внутренних сил ($D_{s_{max}}, D_{s_{min}}$) и их экстремальных значений ($S_{\substack{max\\max}}$, $S_{\substack{min\\min}}$) от соотношения жесткостей $e = \frac{E_y}{E_x}$ при фиксированных значениях безразмерного коэффициента Пуассона $\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x} = 0{,}1\ ,\infty$ в балке-стенке с перепадом толщины $n = \frac{h_1}{h_0} = 100$ для асимметричной нагрузки.



Фиг. 5 а. Зависимость экстремальных значений внутренних сил S_{exstr} от перепада толщины балки-стенки (n) для симметричной нагрузки.



Фиг. 5 б. Зависимость экстремальных значений внутренних сил S_{exstr} от перепада толщины балки-стенки (n) для асимметричной нагрузки.



$D_{S_{max}\,max/n=1}$ (Δ)

e \ n	1	2	3	100
1/5	0	0,0251 (6,67%)	0,0535 (9,75%)	0,1862 (18,19%)
1	0	0,0419 (11,86%)	0,0918 (17,57%)	0,3379 (33,71%)
5	0	0,0659 (17,79%)	0,1458 (25,46%)	0,5570 (51,71%)

$D_{S_{max}\,max/n=1,\ e=1}$ (Δ)

e \ n	1	2	3	100
1/5	0,4189 (37,53%)	0,64188 (46,71%)	0,7718 (50,94%)	1,1636 (62,55%)
1	0	0,0419 (11,86%)	0,0918 (17,57%)	0,3379 (33,71%)
5	0,0792 (15,32%)	0,0006 (1,43%)	0,0101 (5,82%)	0,2161 (26,96%)

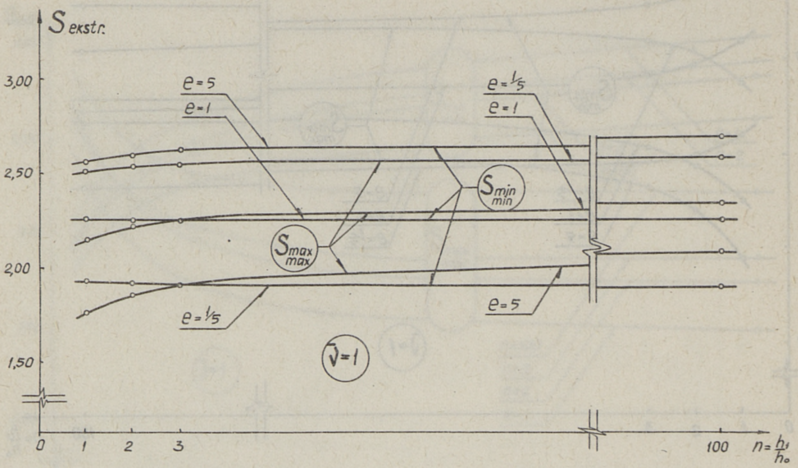
$D_{S_{min}\,min/n=1}$ (Δ)

e \ n	1	2	3	100
1/5	0	0,0095 (4,63%)	0,0199 (6,72%)	0,0656 (12,20%)
1	0	0,0158 (4,83%)	0,0338 (7,07%)	0,1180 (13,21%)
5	0	0,0009 (4,81%)	0,0461 (7,15%)	0,1853 (14,33%)

$D_{S_{min}\,min/n=1,\ e=1}$ (Δ)

e \ n	1	2	3	100
1/5	0,2507 (19,26%)	0,3576 (23,00%)	0,4119 (24,62%)	0,5727 (29,11%)
1	0	0,0158 (4,83%)	0,0338 (7,07%)	0,1180 (13,21%)
5	0,1631 (15,53%)	0,0672 (9,972%)	0,0358 (7,28%)	0,0007 (1,02%)

Фиг. 6 а. Зависимость экстремальных значений внутренних сил S_{exstr} от параметра жесткости (e) для симметричной нагрузки.



$D_{S_{max\ max}/n=1}$ (Δ)

e \ n	1	2	3	100
1/5	0	0,0007 (1,06%)	0,0016 (1,57%)	0,0057 (3,01%)
1	0	0,0037 (2,82%)	0,0083 (4,22%)	0,0328 (8,39%)
5	0	0,0082 (5,12%)	0,0196 (7,90%)	0,1005 (17,89%)

$D_{S_{max\ max}/n=1,\ e=1}$ (Δ)

e \ n	1	2	3	100
1/5	0,1293 (16,65%)	0,1493 (17,89%)	0,1593 (18,48%)	0,1896 (20,16%)
1	0	0,0037 (2,82%)	0,0083 (4,22%)	0,0328 (8,39%)
5	0,1500 (17,93%)	0,0880 (13,73%)	0,0611 (14,45%)	0,0049 (3,26%)

$D_{S_{min\ min}/n=1}$ (Δ)

e \ n	1	2	3	100
1/5	0	0,0002 (0,78%)	0,0004 (1,08%	0,0009 (15,7%)
1	0	0 (0,19%)	0 (0,23%)	0,0001 (0,35%)
5	0	0,0013 (1,38%)	0,0029 (2,11%)	0,0168 (5,04%)

$D_{S_{min\ min}/n=1,\ e=1}$ (Δ)

e \ n	1	2	3	100
1/5	0,1038 (14,25%)	0,1138 (14,92%)	0,1178 (15,18%)	0,1244 (15,60%)
1	0	0 (0,19%)	0 (0,23%)	0,0001 (0,35%)
5	0,0963 (13,73%)	0,1197 (15,30%)	0,1329 (16,13%)	0,1936 (19,46%)

Фиг. 6 б. Зависимость экстремальных значений внутренних сил S_{extr} от параметра жесткости (e) для асимметричной нагрузки.

Внутренние силы, вычисленные в главных направлениях как погонные силы, приходящиеся на всю толщину балки-стенки, слабо реагируют на изменение значений параметра $\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x}$, что вытекает из рассмотрения графиков и таблиц, приведенных на фиг. I а, б, в, г – для симметричного и фиг. 2 а,б, в – для асимметричного воздействия. Относительные отклонения (Δ) силовых факторов (S) на оси безразмерного параметра $\bar{\nu}$ колеблются в пределах от 0 (для $n = I$) до I7 % (для $n = 100$) тем больше, чем больше $e = \frac{E_y}{E_x}$ и $n = \frac{h_1}{h_0}$ для симметричного воздействия и в пределах от 0 (для $n=I$) до 2 % (для $n = 100$) тем меньше, чем меньше $e = \frac{E_y}{E_x}$ и $n = \frac{h_1}{h_0}$ для асимметричного воздействия.

Влияние соотношения жесткостей (e) и коэффициентов Пуассона ($\bar{\nu}$) на дисперсию распределения погонных усилий (D_S) и их экстремальные значения ($S_{\underset{max}{max}}$, $S_{\underset{min}{min}}$) выявляются на графиках $D_S - e$, $S_{extr.} - e$, построенных для $n = 2$, 3, I00 (см. фиг. 3 а, б, в для симметричной нагрузки и фиг. 4 а, б, в для асимметричной нагрузки).

Влияние соотношения жесткостей (e) на отклонение экстремальных значений напряжений ($\Delta_{\sigma\, extr.}$) приводится в табличной форме:

а) для симметричной нагрузки

$\Delta_{\sigma \underset{max}{max}} / \bar{\nu} = 1$, $e = 1$ (%)

e \ n	I	2	3	I00
I/5	37,53	3I,I4	28,40	2I,74
I	0	0	0	0
5	I6,32	II,88	9,99	5,22

$\Delta_{\sigma \underset{min}{min}} / \bar{\nu} = 1$, $e = 1$ (%)

e \ n	I	2	3	I00
I/5	I9,26	23,84	30,62	37,33
I	0	0	0	0
5	I5,53	I9,98	I8,5I	29,47

б) для асимметричной нагрузки

$\Delta_{\sigma max \atop max} / \bar{\nu} = 1,\ e = 1$ (%)

e \ n	I	2	3	I00
I/5	I6,65	26,60	28,30	39,38
I	0	0	0	0
5	I7,93	25,07	25,I3	3I,38

$\Delta_{\sigma min \atop min} / \bar{\nu} = 1,\ e = 1$ (%)

e \ n	I	2	3	I00
I/5	I4,25	I4,75	I4,99	29,73
I	0	0	0	0
5	I3,73	I5,54	I6,39	34,32

Семейство функций $S_{extr.}(n)$ на оси параметра е (см. фиг. 5 а, б) обладает такими же свойствами, что и семейство функций $S_{extr.}(e)$ по оси параметра n (см. фиг. 6 а,б). При этом следует отметить, что для заданного параметра n отклонение $\Delta_{S_{extr.}}$ от базисного (е = I) в сторону увеличивающихся е не превышает 20 %, достигая ~ 40 % при уменьшении е.

Анализ силового и напряженного состояния ортотропной балки-стенки переменной толщины позволяет сделать следующие выводы:

I) силовое и напряженное состояние ортотропных пластин переменной толщины с достаточной достоверностью описывается в предположении $\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x} = 1$;

2) силовое состояние ортотропных пластин слабо реагирует на изменение безразмерного параметра жесткостей $(e = \frac{E_y}{E_x})$ так, что отклонения их от базисного (с е = I) колеблются в интервале 20-40 % тем больше, чем меньше интенсивность перепада толщины (n), что позволяет считать силовое состояние стенки с е = I достаточно достоверным первым приближением для проведения оптимизации параметров балки-стенки (e, n);

3) напряженное состояние ортотропных пластин переменной толщины существенно реагирует на изменение соотношения жесткостей $(e = \frac{E_y}{E_x})$ и перепада толщины ее $(n = \frac{h_1}{h_0})$;

4) при оптимальном проектировании ортотропных пластин переменной толщины с двумя параметрами управления (e, n) в качестве начального значения e может быть принято оптимальное решение ($e_{опт}$) для пластин с постоянной толщиной, с последующим итерационным перерасчетом, после установления оптмального параметра n;

5) выборы оптимальных параметров (e, n) осуществляются на некотором интервале значений e и n в области, устанавливаемой из прочностных характеристик материала ($[\sigma]_{\oplus}$, $[\sigma]_{\ominus}$).

E. Jõgi,
P. Koppel,
A. Sarap

Influence of Material Orthotropy on the Force State of Variable Thickness Wall Beam

Summary

The paper studies the influence of orthotropy characteristics upon the force state of orthotropic wall beam with variable thickness for two moods of loading (symmetrical and skew symmetrical loads).

Functions of links between indices of qualitative states of system in the space of nondimensional characteristics ($e = E_y/E_x$, $\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x}$) are obtained. Herewith it is manifested that the influence on the force state of the characteristic (e) is important and the influence of the characteristic ($\bar{\nu}$) is unimportant. So the average characteristics are fixed on the first iteration step by the determination of wall beam measurements.

№ 507

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.04I

П.И. Коппель

ОПТИМАЛЬНЫЕ БАЛКИ-СТЕНКИ КАК РАВНОПРОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

Выбор критериев оптимальности при проектировании ортотропной балки-стенки переменной толщины может быть осуществлен неоднозначно и зависит от поставленной цели.

В статье рассматриваются результаты оптимального проектирования балки-стенки как равнопрочной системы. Равнопрочная балка-стенка представляется как равнопрочная структура в узлах расчетной сетки, аппроксимирующей силовое состояние пластины. При этом учитываются свойства материала в смысле различного сопротивления растяжению и сжатию $[\sigma]_{\oplus} = \kappa [\sigma]_{\ominus}$), а также исследуется влияние сдвигающих напряжений на структуру равнопрочной балки-стенки.

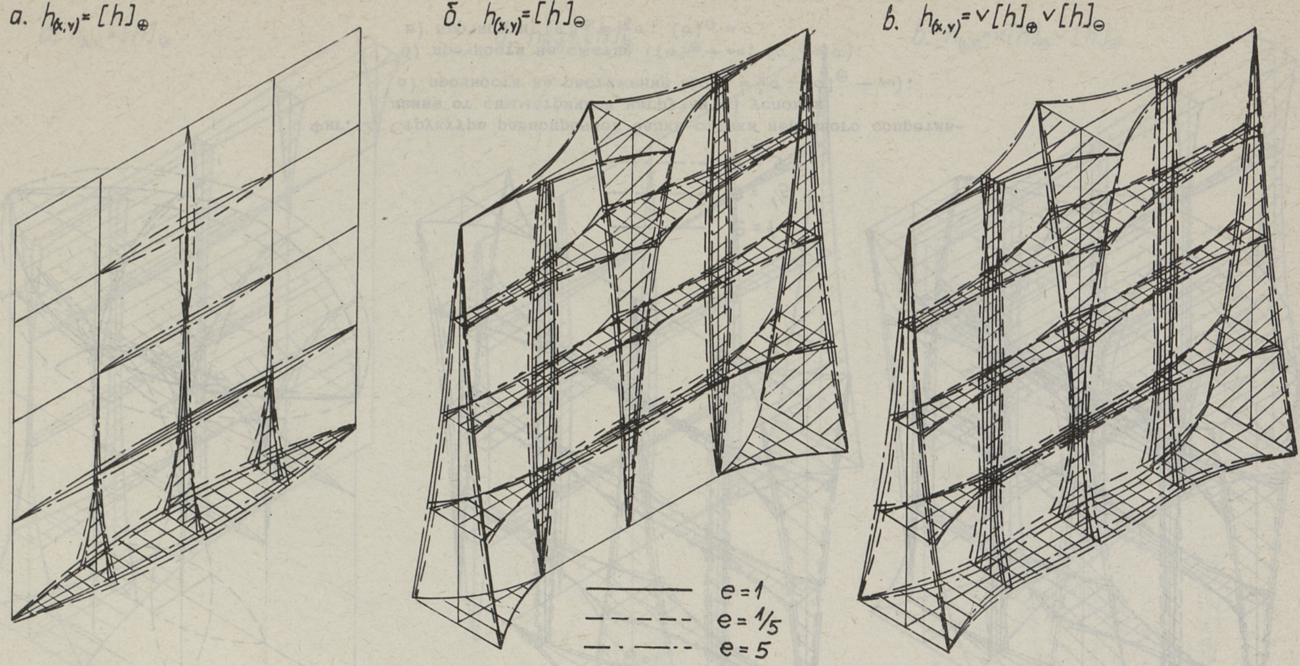
Теоретические основы оптимизации ортотропных пластин переменной толщины вытекают из анализа силового состояния балки-стенки в пространстве параметров ортотропности $(\bar{\nu}, e)$ [I]. Здесь выявляются малые изменения силового поля заданного воздействия на оси безразмерного параметра Пуассона $\bar{\nu} = \frac{\nu_y}{\nu_x}$ (при $n \leq 10$ в интервале отклонений до 10 % от базисного поля с $\bar{\nu} = 1$) и не слишком большие изменения силового поля на оси параметра ортотропности $e = \frac{E_y}{E_x}$ (в интервале отклонений от 20 до 40 % при $n = 1$ от базисного поля с $e = 1$ в зависимости от характера воздействия - асимметричное или симметричное - соответственно). Из этого вытекает возможность достаточно достоверного описания силового поля от заданных воздействий для некоторой базисной балки-стенки ($\bar{\nu} = 1$, $e = 1$), считая это приближение неким усредненным силовым полем балки-стенки переменной толщины с интенсивностью перепада $n = 3$, для которой интервал отклонения составляет < 20 %.

В статье приводятся равнопрочные структуры для симметричного воздействия (сила P на верхней кромке), полученные в условиях различных прочностных характеристик материала (а. $\sigma_{\ominus} \to \infty$, б. $\sigma_{\oplus} \to \infty$, в. $\sigma_{\oplus} = к[\sigma]_{\ominus}$) так, что прочные толщины стенки определяются из условий а) $h = [h]_{\oplus}$; б) $h = [h]_{\ominus}$ и в) $h = \vee [h]_{\oplus} \vee [h]_{\ominus}$ из расчета $h = \vee \frac{S_{\oplus}}{[\sigma]_{\oplus}} \vee \frac{S_{\ominus}}{[\sigma]_{\ominus}}$,

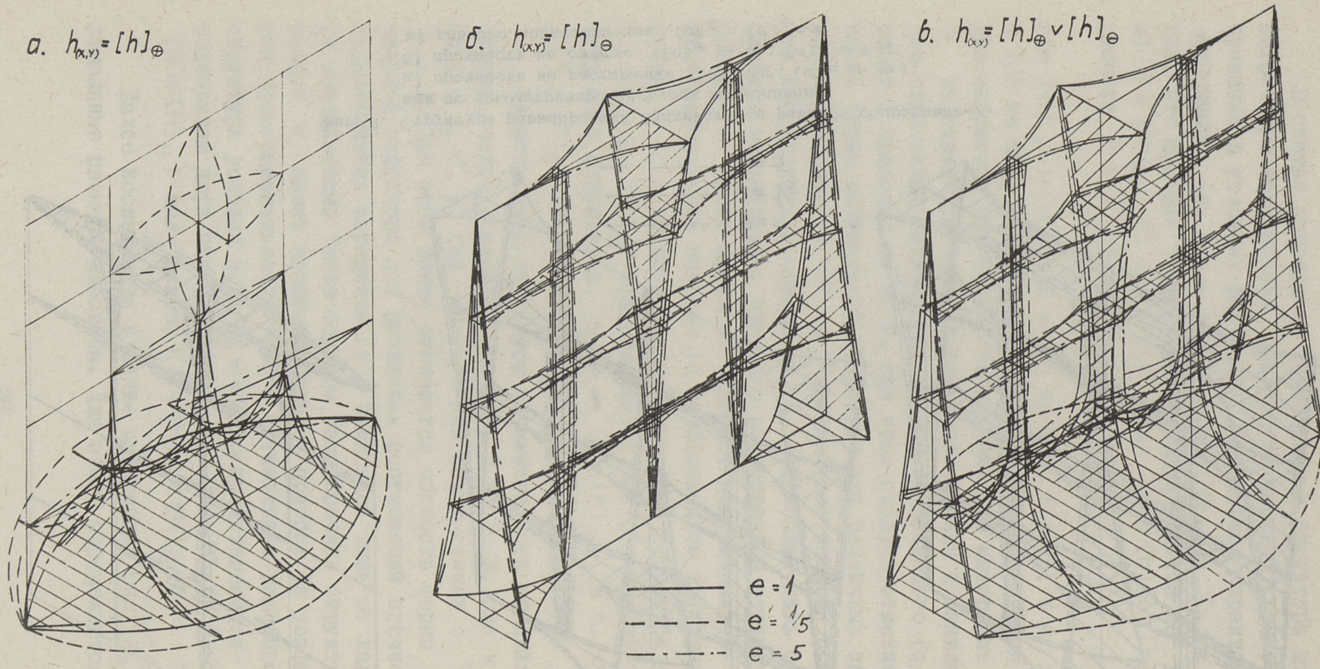
где $[\sigma]_{\oplus} = к[\sigma]_{\ominus}$ для $к = I$ на фиг. I а, б, в и для $к = I/5$ на фиг. 2 а, б, в. На фиг. I, 2 исследуется влияние параметра ортотропности материала в интервале $e = I/5 - 5$ на структуру оптимальной балки-стенки и выявляется, что отклонения оптимальных толщин от базисного (с $e = I$) лежат в пределах до 40 %. При этом следует отметить общность формы оптимальной структуры для различных параметров ортотропности (e) и различных соотношений прочностных характеристик материала ($к$), зависящей лишь от характера воздействия. Так, что равнопрочная структура для разных e имеет аффинное подобие, для разных $к$ имеет пропорциональное подобие (с коэффициентом пропорциональности $к$), а оптимальная равнопрочная структура условия в. $[\sigma]_{\oplus} = к[\sigma]_{\ominus}$ представляется как объемлющая структура двух структур а. $\sigma_{\ominus} \to \infty$ ($h = [h]_{\oplus}$) и б. $\sigma_{\oplus} \to \infty$ ($h = [h]_{\ominus}$) так, как в $h = \vee [h]_{\oplus} \vee [h]_{\ominus}$.

Равнопрочную структуру асимметричного воздействия (ветер слева) приводится на фиг. 3 а, б, в, где $к = I$ и фиг. 4 а, б, в, где $к = I/5$ для балки-стенки с $\bar{\gamma} = I$, $e = I$. При этом также отмечается общность формы оптимальной структуры для различных соотношений прочностных характеристик материала ($к$), зависящей лишь от характера воздействия. Таким образом, равнопрочная структура для разных $к$ имеет пропорциональное подобие (с коэффициентом пропорциональности $к$), а оптимальная равнопрочная структура условия в. $[\sigma]_{\oplus} = к[\sigma]_{\ominus}$ представляется как объемлющая двух структур а. $\sigma_{\ominus} \to \infty$ ($h = [h]_{\oplus}$) и б. $\sigma_{\oplus} \to \infty$ ($h = [h]_{\ominus}$) так как в. $h = \vee [h]_{\oplus} \vee [h]_{\ominus}$.

Далее исследуется влияние сдвигающих сил (X_y) на оптимальные размеры пластины. Для этого определяются внут-



Фиг. 1. Структура равнопрочной балки-стенки равного сопротивления от симметричной нагрузки из условия
а) прочности на растяжение ($[\sigma]_{\oplus} = \sigma$; $[\sigma]_{\ominus} \to \infty$);
б) прочности на сжатие ($[\sigma]_{\oplus} \to \infty$; $[\sigma]_{\ominus} = \sigma$);
в) равного сопротивления $[\sigma]_{\oplus} = [\sigma]_{\ominus} = \sigma$.

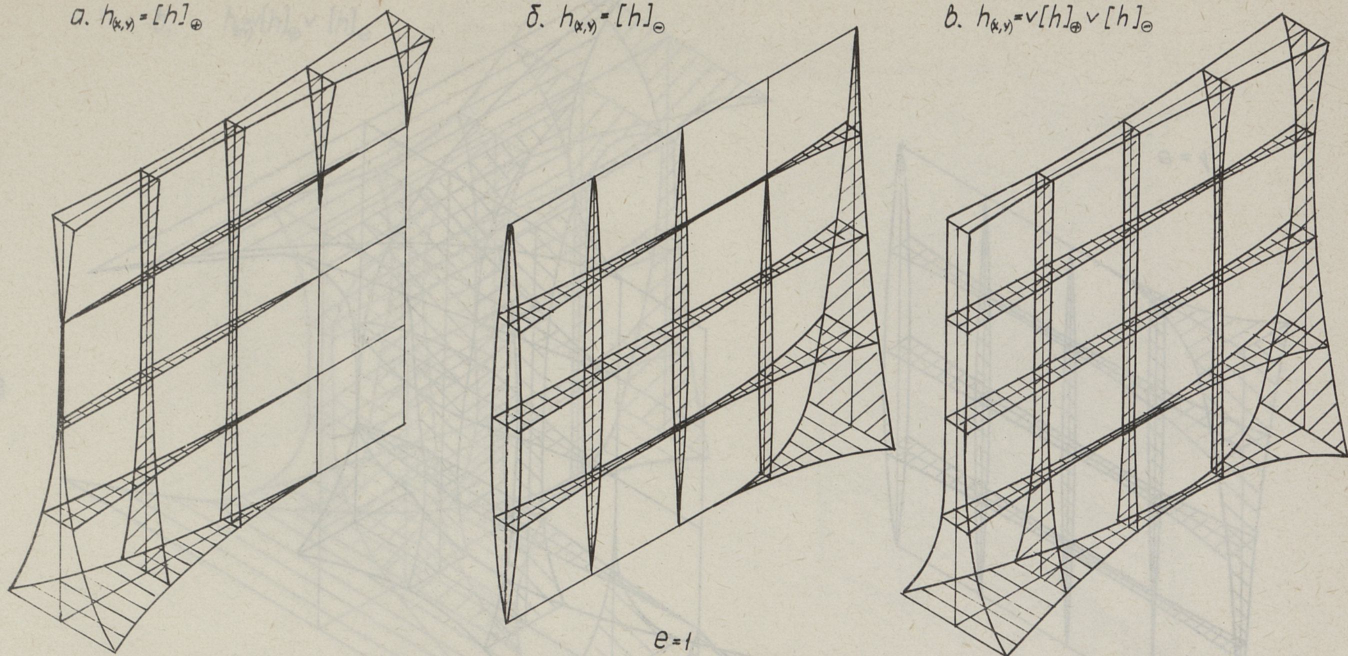


Фиг. 2. Структура равнопрочной балки-стенки неравного сопротивления от симметричной нагрузки из условия

а) прочности на растяжение ($[\sigma]_{\oplus}=\frac{1}{5}\sigma$; $[\sigma]_{\ominus}\to\infty$);

б) прочности на сжатие ($[\sigma]_{\oplus}\to\infty$; $[\sigma]_{\ominus}=\sigma$);

в) прочности $[\sigma]_{\oplus}=\frac{1}{5}\sigma$; $[\sigma]_{\ominus}=\sigma$.

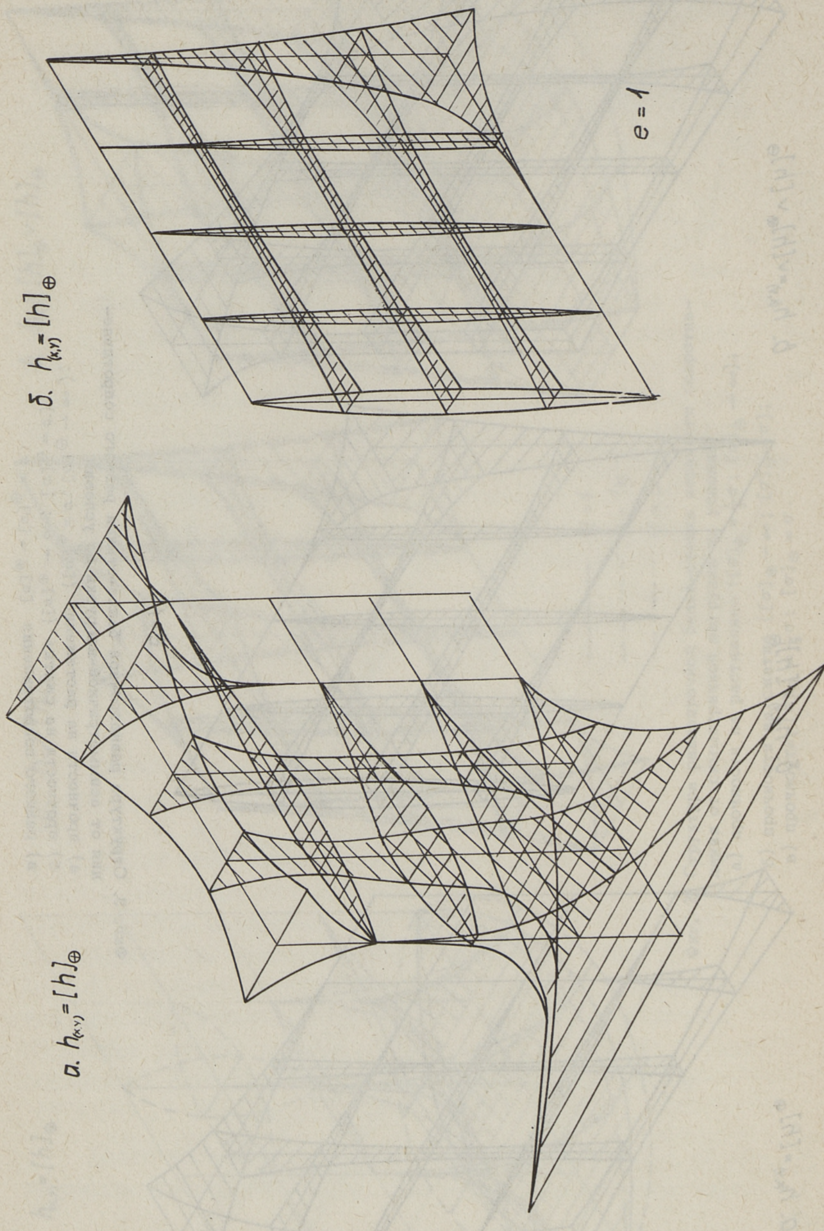


Фиг. 3. Структура равнопрочной балки-стенки равного сопротивления от асимметричной нагрузки из условия

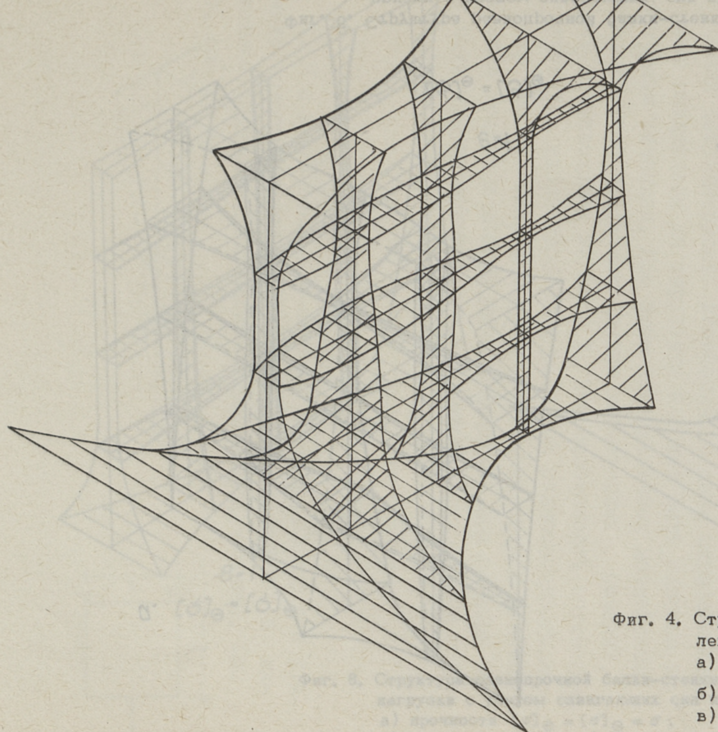
а) прочности на растяжение $([\sigma]_{\oplus} = \sigma;\ [\sigma]_{\ominus} \to \infty)$;

б) прочности на сжатие $([\sigma]_{\oplus} \to \infty;\ [\sigma]_{\ominus} = \sigma)$;

в) равного сопротивления $[\sigma]_{\oplus} = [\sigma]_{\ominus} = \sigma$.


б. $h_{(x,y)} = [h]_{\oplus}$
a. $h_{(x,y)} = [h]_{\oplus}$
e = 1

в. $h_{(x,y)} = \vee [h]_{\oplus} \vee [h]_{\ominus}$

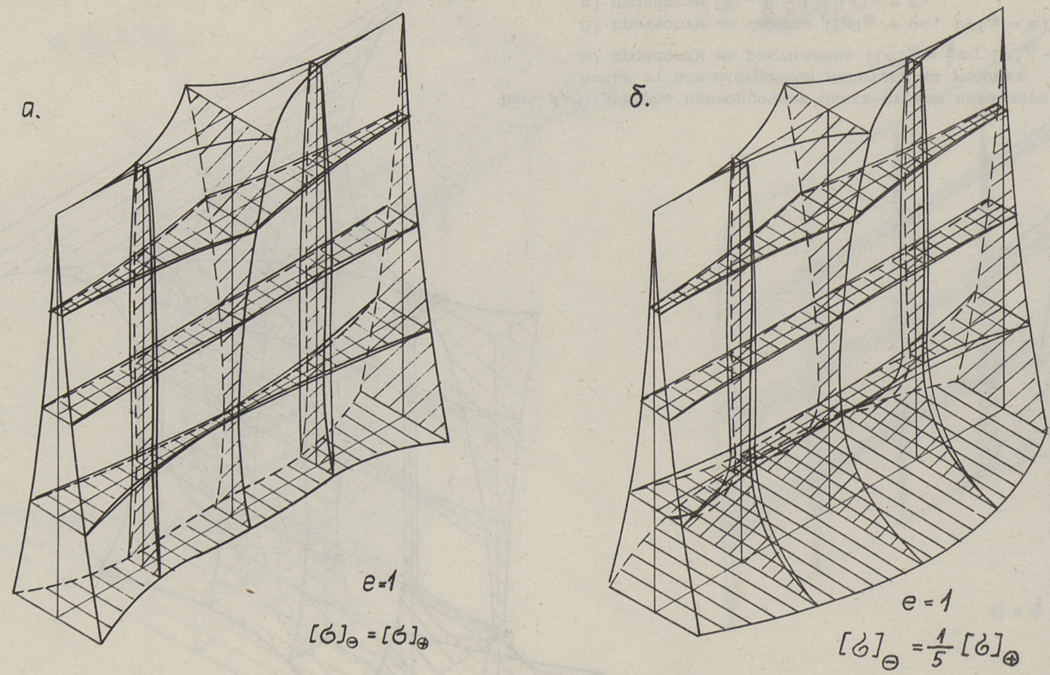


Фиг. 4. Структура равнопрочной балки-стенки неравного сопротивления от асимметричной нагрузки из условия

а) прочности на растяжение ($[\sigma]_{\oplus} = \frac{1}{5}\sigma$; $[\sigma]_{\ominus} \to \infty$);

б) прочности на сжатие ($[\sigma]_{\oplus} \to \infty$; $[\sigma]_{\ominus} = \sigma$);

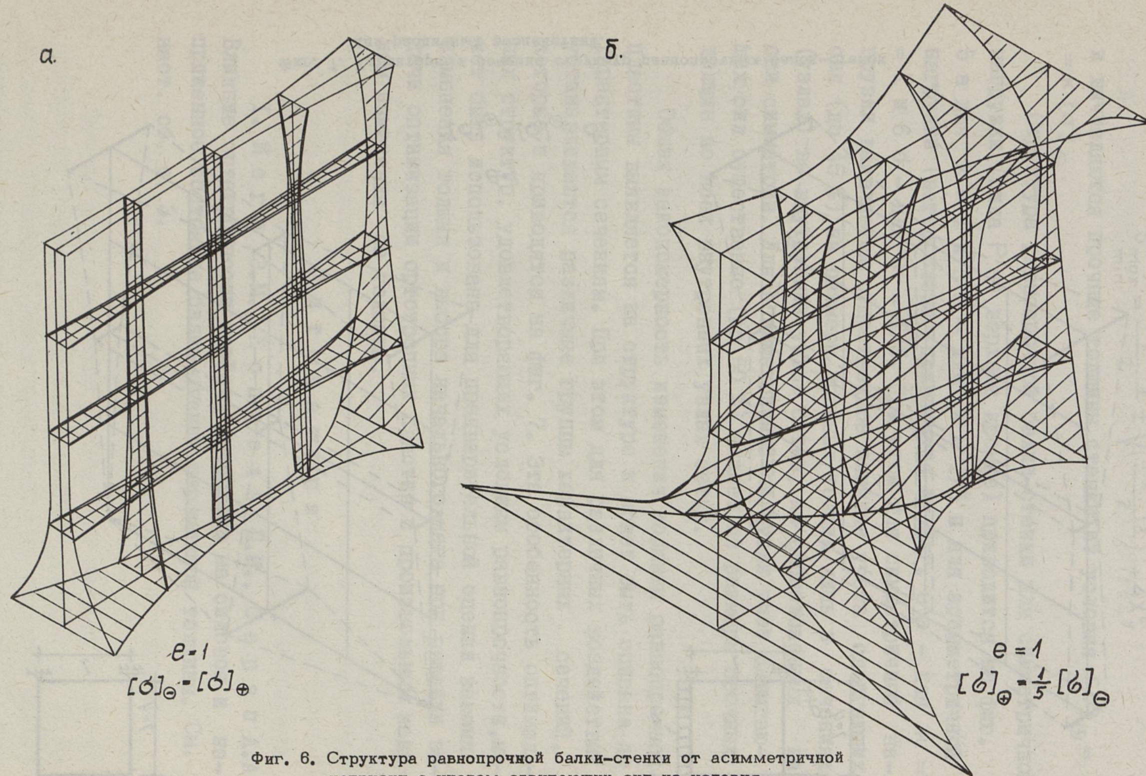
в) прочности $[\sigma]_{\oplus} = \frac{1}{5}\sigma$; $[\sigma]_{\ominus} = \sigma$.



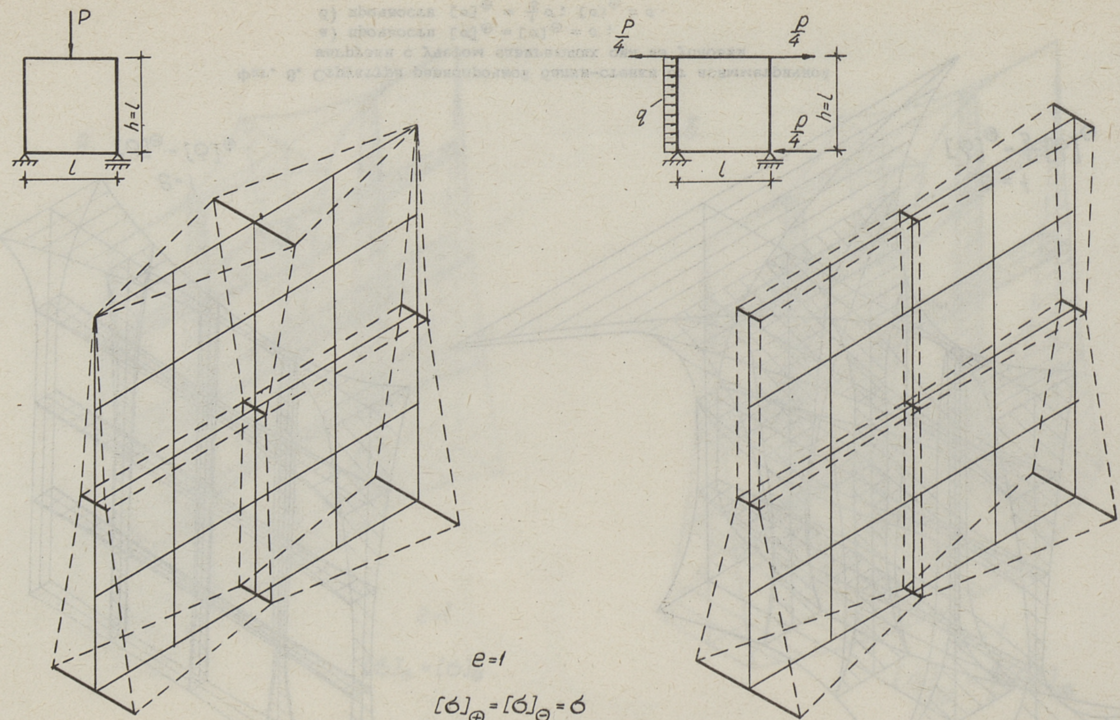
Фиг. 5. Структура равнопрочной балки-стенки от симметричной нагрузки с учетом сдвигающих сил из условия

а) прочности $[\sigma]_\oplus = [\sigma]_\ominus = \sigma$;

б) прочности $[\sigma]_\oplus = \frac{1}{5}\sigma$; $[\sigma]_\ominus = \sigma$.



Фиг. 6. Структура равнопрочной балки-стенки от асимметричной нагрузки с учетом сдвигающих сил из условия
а) прочности $[\sigma]_\oplus = [\sigma]_\ominus = \sigma$;
б) прочности $[\sigma]_\oplus = \frac{1}{5}\sigma$; $[\sigma]_\ominus = \sigma$.



Фиг. 7. Характерные сечения структур равнопрочных балок-стенок для различных воздействий.

ренние силы $(S_{\substack{max\\min}})$ в главных направлениях как погонные силы, приходящиеся на всю толщину балки-стенки:

$$S_{\substack{max\\min}} = \frac{X_x+Y_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{X_x-Y_y}{2}\right)^2+4X_y^2}$$

и вычисляются прочные толщины стенки из условия $[\sigma]_{\oplus} = к[\sigma]_{\ominus}$.

Структура равнопрочной балки-стенки для симметричной нагрузки (сила P на верхней кромке) приводится на фиг. 5 а для $к = I$ и 5 б - для $к = I/5$ и для асимметричной нагрузки (ветер слева) приводится на фиг. 6 а - для $к = I$ и 6 б - для $к = I/5$. При этом для симметричной нагрузки выявляется существенное влияние учета сдвигающих сил (до 45 %) на размеры прочных толщин лишь в сечениях (узлах) во внутренних узлах сетки, не расположенных на оси симметрии. Для асимметричной нагрузки учет сдвигающих сил существенно (до 50 %) влияет на размеры прочных толщин во всех внутренних узлах сетки.

Общая закономерность изменения толщины равнопрочной пластины выявляется на структуре и может быть описана по характерным сечениям. При этом для различных воздействий устанавливаются различные группы характерных сечений, которые и приводятся на фиг. 7. Эта особенность оптимальных структур, удовлетворяющих условиям равнопрочности, может быть использована для предварительной оценки закона изменения толщин и выбора начального шага при решении задачи оптимизации ортотропных пластин с произвольным законом изменения ее толщины.

Литература

I. Иеги Э.М., Коппель П.И., Сарап А.А. Влияние ортотропности свойств материала на силовое и напряженное состояние балки-стенки переменной толщины. См. наст. сб. с. 3.

P. Koppel

Optimal Wall Beams as Uniform Strength Structures

Summary

In the paper the results of optimisation of thin walled short beams as structures of uniform strength under different moods of loading are given. Various strength properties are studied as well as the influence of shear stresses on uniform strength structure.

Structures of uniform strength under the certain load are determined so that different nondimensional characteristics of orthotropy (e) correspond to affined similarity, while different ratios of strength characteristics of material give proportional similarity.

Thickness variations of uniform strength plate are given in the characteristic sections. The section selections are fixed in the event of loading state on the plate.

№ 507

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.04I

В.Ю. Компус, О.Т. Роотс

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ФРОНТА НАГРУЗКИ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

I. Введение

При проектировании элементов конструкций часто применяются упрощенные расчетные схемы, в которых распределение нагрузок и внутренних сил довольно приближенно соответствует истинному положению. Бывают случаи (особенно в строительных конструкциях), когда условия работы конструкции точно не учтены. Например, рассчитываются обычные несущие балки как простые, а на самом деле жесткие опоры уменьшают максимальный изгибающий момент. В то же время не учитываются температурные напряжения, которые возникают в такой балке из-за ее статической неопределимости. Иногда не выясняются причины и влияние концентрации напряжений, неравномерно распределенное напряжение заменяется его усредненным значением и т.д.

В настоящей работе рассматриваются некоторые задачи плоского напряженного состояния путем исследования влияния характера нагрузки на распределение напряжений в балке-стенке. Параллельно с математической моделью поля напряжений для выявления основных закономерностей используется упрощенная электрическая аналоговая модель.

2. Теории информации о нагруженности конструкции

При загрузке элементов конструкций из упругих и упруговязких материалов в них возникают деформации и напряжения. Внешним, зримым проявлением их являются перемещения отдельных точек конструкции и изменение ее формы.

За счет работы внешних сил накопляется в загруженной детали определенное количество потенциальной энергии. Для оценки количества и закономерностей распределения этой энергии используются различные теории информации о загруженности конструкций. Накопление энергии – процесс негэнтропический. Каждому состоянию загрузки соответствует присущая ей форма негэнтропии.

Эту равномерность можно описать одним из способов:

а) через накопляемую работу:

$$\Pi = \Pi_1 |\sigma, \varepsilon|,$$

б) на основании напряжений:

$$\Pi = \Pi_2 |\sigma^2|,$$

в) при помощи деформаций:

$$\Pi = \Pi_3 |\varepsilon^2|.$$

Какую из приведенных теорий следует применить, зависит от того, какая из них проще определяет искомую величину.

При экспериментальном исследовании напряженного состояния применяется тензометрирование. Ввиду того, что деформации и перемещения связаны дифференциальной зависимостью, поле деформаций можно определить также путем замера перемещений.

В последнее время много внимания обращается на создание оборудования, позволяющего прямо замерять напряжения. Успешные исследования в этом направлении проводятся в НИИ строительства Госстроя Эстонской ССР.

Наряду с испытанием на физических моделях и несмотря на широкое развитие цифровой вычислительной техники аналоговые модели имеют определенное значение. Целесообразность их применения выявляется при сравнении общих свойств различных потенциальных полей.

3. Аналогия потенциальных полей

В области техники нам известно много потенциальных величин, которые между собой связаны дифференциальными или интегральными зависимостями. Один, более длинный ряд таких связей в линейной задаче теории упругости составляют следующие величины:

интенсивность нагрузки q,
поперечная сила Q,
изгибающий момент M,
угол поворота φ,
прогиб w,

где каждая следующая величина является "объемом" предыдущего (количество потенциальной величины на рассматриваемом отрезке), каждая предыдущая является "долей" следующей (изменение потенциальной величины в пределах рассматриваемого отрезка). Для получения "объемов" этих величин надо производить суммирование по длине, а для получения "доли" определять градиент поля.

При рассмотрении некоторых других физических величин для получения потенциальной величины низшего или высшего разряда (той, которую удобнее замерять, или которая имеет большую значимость) используется понятие "обобщенной длины", например, у поля электрических напряжений такой "обобщенной длиной" является электрическое сопротивление участка.

Неравномерное распределение потенциальных величин вызывает процессы, которые можно рассматривать как явления течения, как это, например, более наглядно выражается в электрических и температурных полях. Причиной течения является разность потенциалов, градиент. На интенсивность течения влияет кроме градиента еще проводимость рассматриваемой среды. Таким образом местная сила тока в потенциальном поле является относительно потенциала дифференциальной величиной, количество тока ("объем") - интегральной. Указанные связи обусловливают, что при математическом моделировании потенциального поля (плоская задача) применяются уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \Pi = 0 \tag{3.I}$$

или Пуассона

$$\nabla^2 \Pi = p. \tag{3.2}$$

Символ П обозначает потенциальную величину. Уравнение (3.I) относится к полям, в которых притоки (или стоки) находятся только на границе. В уравнении (3.2) соответствует местному значению притока величина p.

Более известными физическими потенциальными полями, которые описываются уравнением Лапласа, являются:

а) стационарное температурное поле $\nabla^2 T = 0$ (3.3)

б) стационарное поле диффузии $\nabla^2 S = 0$ (3.4)

в) стационарное поле электрического напряжения $\nabla^2 U = 0$. (3.5)

В строительной механике и сопротивлении материалов встречается также ряд задач, процессы которых можно интерпретировать этими же уравнениями. Например:

а) мембрана

$$\nabla^2 w = -\frac{q}{t}, \tag{3.6}$$

где w – вертикальное перемещение,
q – нагрузка,
t – растягивающее напряжение в мембране.

б) плоская задача (сумма нормальных напряжений действующих перпендикулярно потенциалу)

$$\nabla^2 \Sigma\sigma = 0$$
$$\Sigma\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_u + \sigma_v = const \tag{3.7}$$

при действии объемных сил

$$\nabla^2 \Sigma\sigma = Y; \tag{3.8}$$

в) пластинка

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}, \tag{3.9}$$

где q – нагрузка,
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$,
E – нормальный модуль упругости,
h – толщина пластинки,
μ – коэффициент Пуассона.

Уравнение (3.9) можно заменить двумя уравнениями Пуассона:

$$\nabla^2 w = \frac{M}{w}, \tag{3.10}$$

где

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\mu}$$

$$\nabla^2 M = -q. \tag{3.11}$$

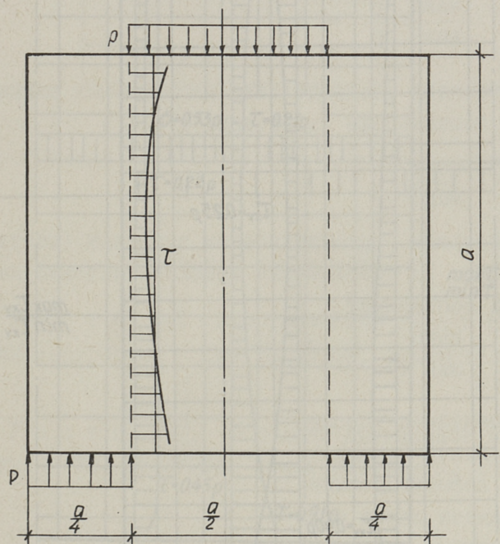
Представление плоской задачи (3.7) в виде двух полей перемещений, связанных между собой трансформативными связями сдвига

$$\nabla^2 u = 0$$
$$\nabla^2 v = 0 \qquad (3.12)$$

описано в [1] и [2].

4. Некоторые решения плоской задачи

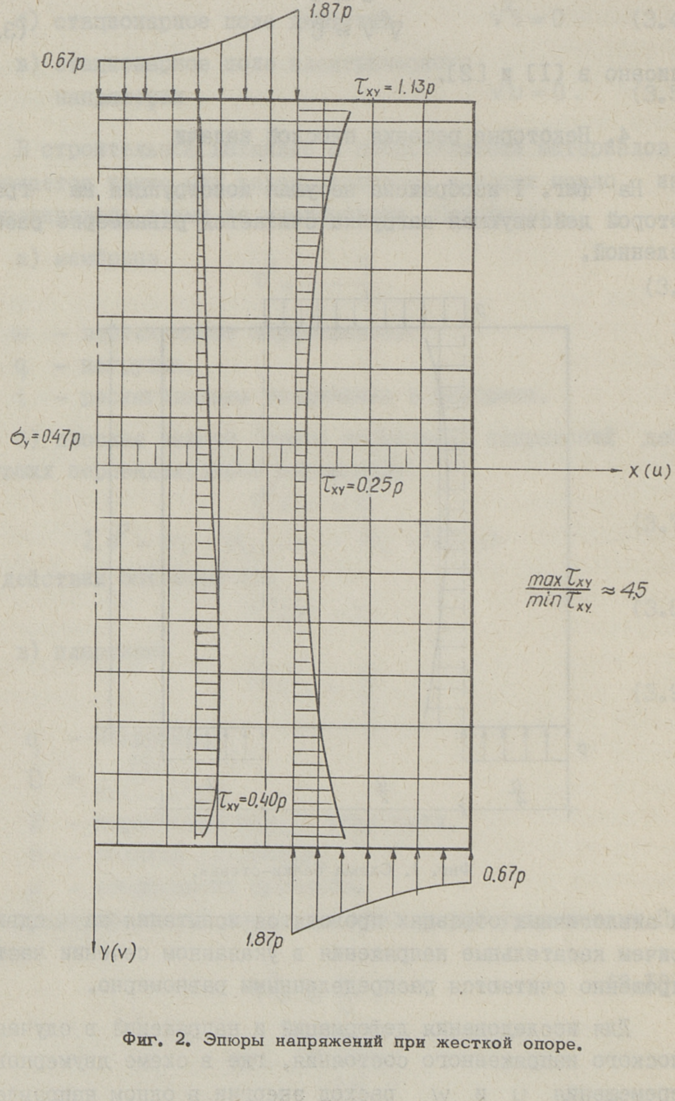
На фиг. I изображена несущая конструкция на гранях которой действующая нагрузка считается равномерно распределенной.



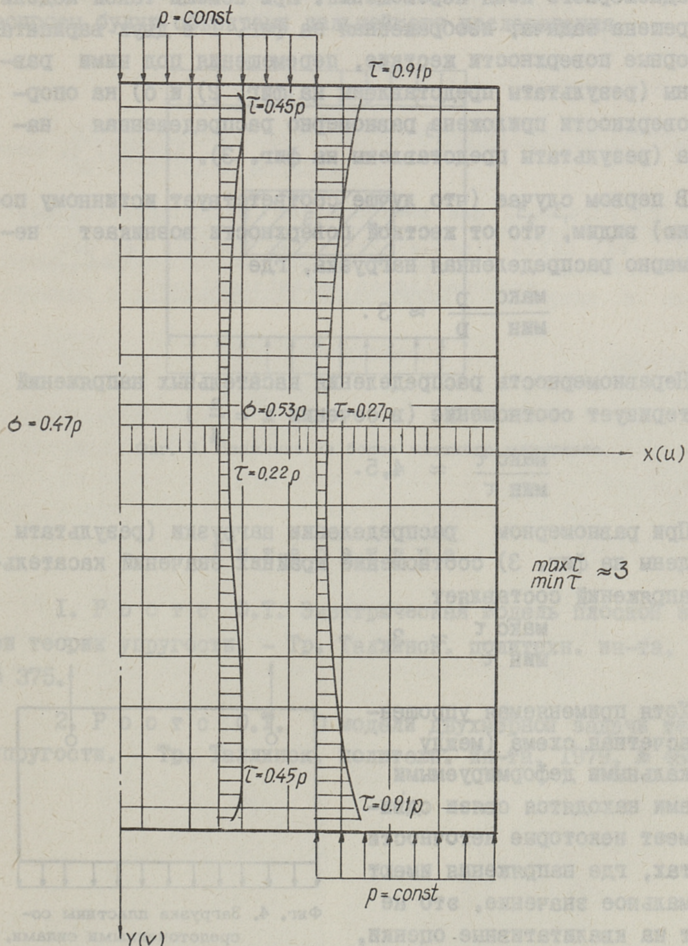
Фиг. 1. Схема балки-стенки.

На аналогичных образцах проводятся испытания на сдвиг, причем касательные напряжения в указанном сечении часто упрощенно считаются распределенными равномерно.

Для исследования деформаций и напряжений в случаях плоского напряженного состояния, где в схеме двумерного перемещения u и w расход энергии в одном направлении очень мал, влияние изгиба незначительно и материал



Фиг. 2. Эпюры напряжений при жесткой опоре.



Фиг. 3. Эпюры напряжений при равномерно распределенной нагрузке.

имеет сравнительно небольшой коэффициент Пуассона (как это при строительных материалах часто бывает), можно для исследования данного вопроса использовать электрическую модель одномерного поля перемещений. При помощи такой модели была решена задача, изображенная на фиг. I в двух вариантах: а) опорные поверхности жесткие, перемещения под ними равномерны (результаты представлены на фиг. 2) и б) на опорные поверхности приложена равномерно распределенная нагрузка (результаты представлены на фиг. 3).

В первом случае (что лучше соответствует истинному положению) видим, что от жесткой поверхности возникает неравномерно распределенная нагрузка, где

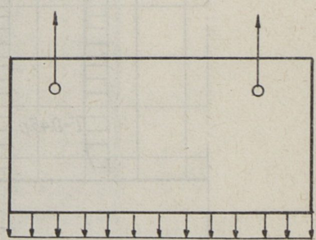
$$\frac{\text{макс } p}{\text{мин } p} \approx 3 .$$

Неравномерность распределения касательных напряжений характеризует соотношение (в сечении $x = \frac{a}{4}$)

$$\frac{\text{макс } \tau}{\text{мин } \tau} \approx 4{,}5 .$$

При равномерном распределении нагрузки (результаты приведены на фиг. 3) соотношение крайних значений касательных напряжений составляет

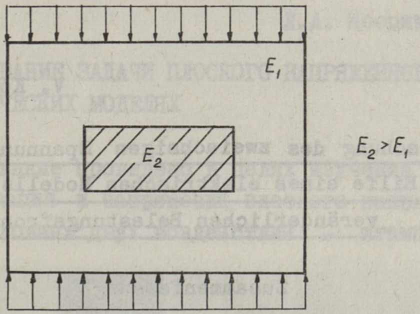
$$\frac{\text{макс } \tau}{\text{мин } \tau} \approx 3 .$$



Фиг. 4. Загрузка пластины сосредоточенными силами.

Хотя применяемая упрощенная расчетная схема (между вертикальными деформируемыми полосами находятся связи сдвига) имеет некоторые неточности в местах, где напряжения имеют максимальное значение, это не влияет на квалитативные оценки, полученные на электрической модели.

Значительне концентрации напряжений возникают и в таких конструкциях, где возмущения вызваны местными сосредоточенными силами (фиг. 4) или при наличии в поле напряжений вложений из материала, имеющего отличающуюся от основного материала упругость (фиг. 5). В таких полях напряжений можно на основании аналогии течения увеличением местной "проводимости" уменьшить возмущения и содействовать этим более равномерному распределению напряжений. Эти вопросы будут объектами дальнейшего исследования.



Фиг. 5. Вложение из более жесткого материала.

Литература

1. Роотс О.Т. Электрическая модель плоской задачи теории упругости. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1975, № 375.

2. Роотс О.Т. О модели двухмерной задачи теории упругости. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1979, № 468.

V. Kompus, O. Roots

Die Forschung des zweiachsigen Spannungszustandes mit Hilfe eines elektrischen Modells bei der veränderlichen Belastungsfront

Zusammenfassung

In der Abhandlung werden theoretische Grundlagen für ein elektrisches Modell des zweiachsigen Spannungszustandes gegeben. Das Modell erlaubt den zweiachsigen Spannungszustand in den Platten von verschiedener Dicke und Steifigkeit bei der veränderlichen Belastungsfront zu forschen.

Das Modell ist zum Tragbalken von beständiger Dicke bei der Stanzbelastung mit verschiedenen Flächen angewandt.

Die Forschungsangaben sind der mathematischen Berechnung gegenübergestellt.

№ 507

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

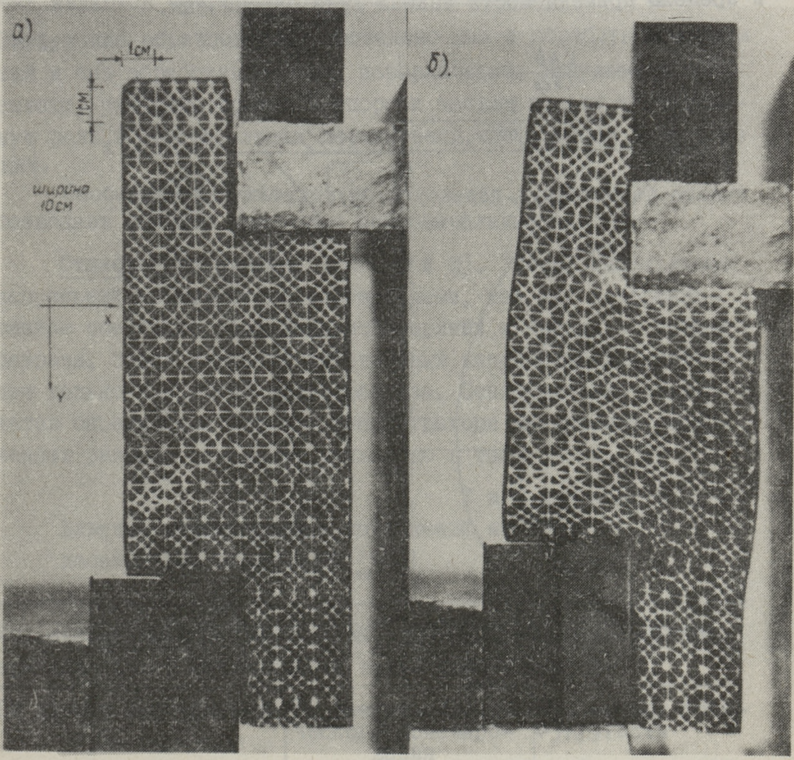
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.041

Л.А. Иооритс, Л.И. Руга

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

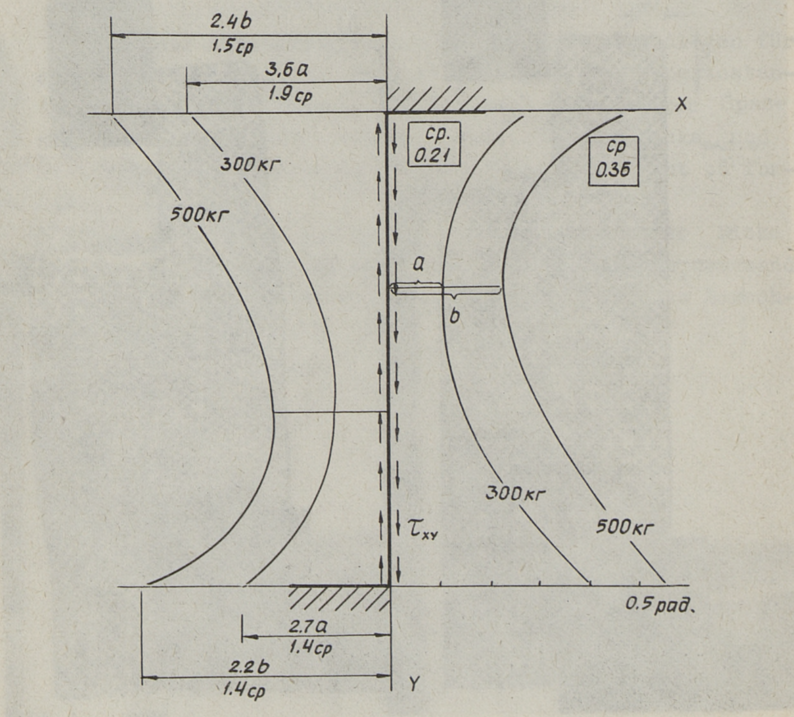
Исследование проведено в целях изучения поля перемещений, деформаций и напряжений плоского напряженного состояния в условиях двух воздействий - штампа и стыка,



Фиг. 1. Поле перемещений при стыковом нагружении:
а) образец без нагрузки,
б) образец под нагрузкой 500 кГ.

работающих на срез. Особое внимание обращено на возмущения поля касательных напряжений в плоскостях среза.

В качестве материала моделей выбрана резина, являющаяся материалом с резко выраженной способностью к высокоэластической деформации. В отличие от других материалов резина дает весьма значительные по величине упругие деформации при сравнительно низких напряжениях. Это позволяет измерять перемещения и линейные деформации простыми механическими и оптическими инструментами и получать хорошие качественные иллюстрации для всех исследуемых полей. Качественный анализ полученных данных до известной степени затруднен, так как зависимость между напряжениями и деформациями при больших упругих деформациях оказывается нелинейной и пределы применяемости закона Гука ограничены.



Фиг. 2. Эпюры угла сдвига γ_{xy} в плоскости среза.

Из специально изготовленной резины вырезаны образцы толщиной I0 см (фиг. I и 3). На боковые поверхности была накатана делительная сетка в виде кругов и квадратов. В процессе деформации круги преображаются в эллипсы, главные оси которых совпадают с направлениями главных осей деформации [I].

При исследовании деформированного состояния в каждой точке на поверхности образца определялись путем прямого измерения относительные удлинения в трех направлениях, составляющих углы в 45^{0}. По трем замеренным удлинениям рассчитывался угол сдвига по формуле $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45^{\circ}} - \varepsilon_x - \varepsilon_y$, а $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$.

Определение упругих характеристик резины показало, что они являются почти постоянными до напряжения < 6 кГ/см^2. Нагружение образцов было проведено как с обработкой маслом так и без обработки опорных поверхностей. Результаты показывают, что силы трения в опорных частях играют значительную роль в распределении перемещений, деформаций и напряжений.

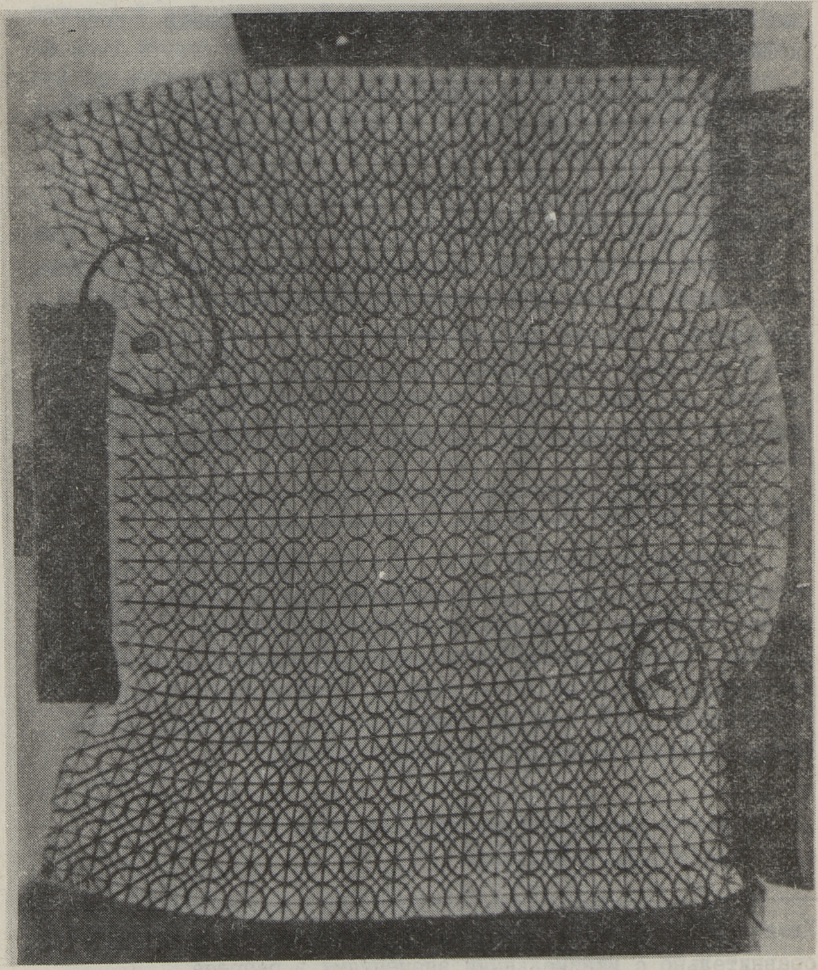
Обобщение результатов исследования в настоящей стадии позволяет сделать некоторые первоначальные выводы:

Стыковое нагружение (фиг. I и 2). Эпюры касательных напряжений не являются симметричными, так как деформированное состояние неодинаково в верхних и нижних точках разреза. Закон парности касательных напряжений действителен только в средней части разреза. Сопоставление результатов определения влияния концентратора напряжений, полученных разными методами, приведено в табл. I [2, 3].

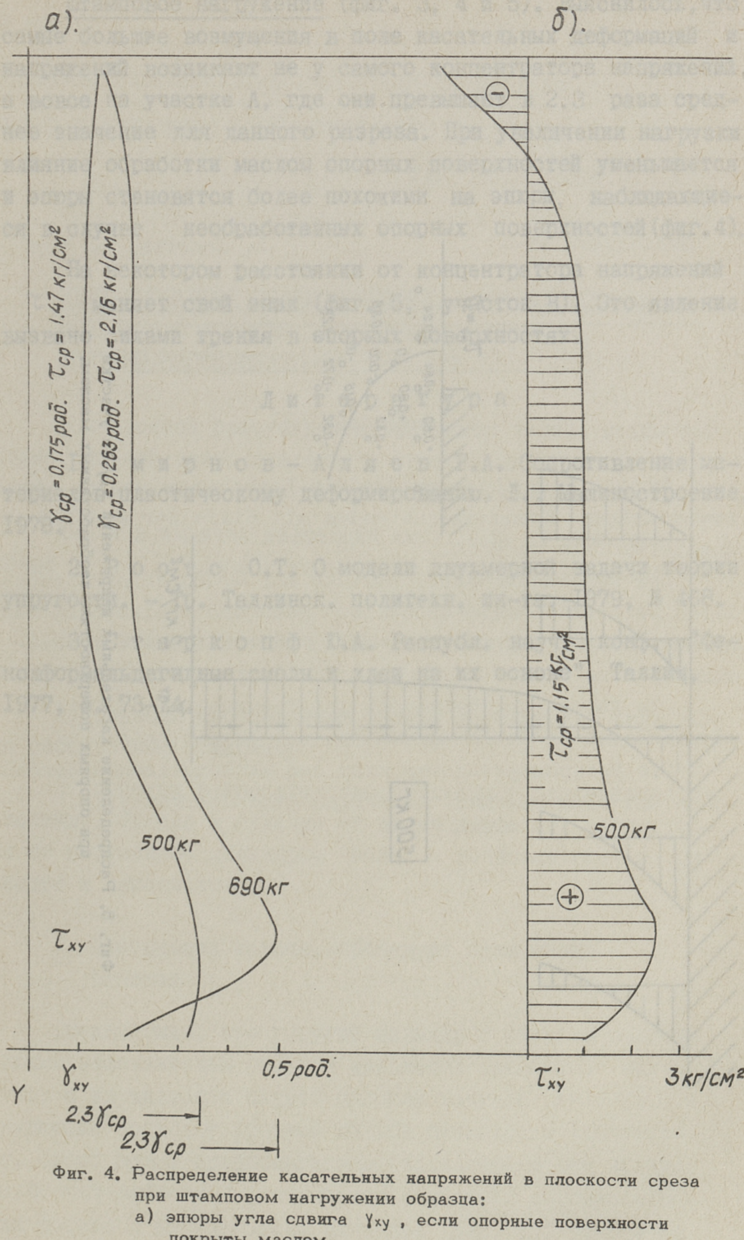
Таблица I

Влияние концентратора напряжений на поле касательных напряжений

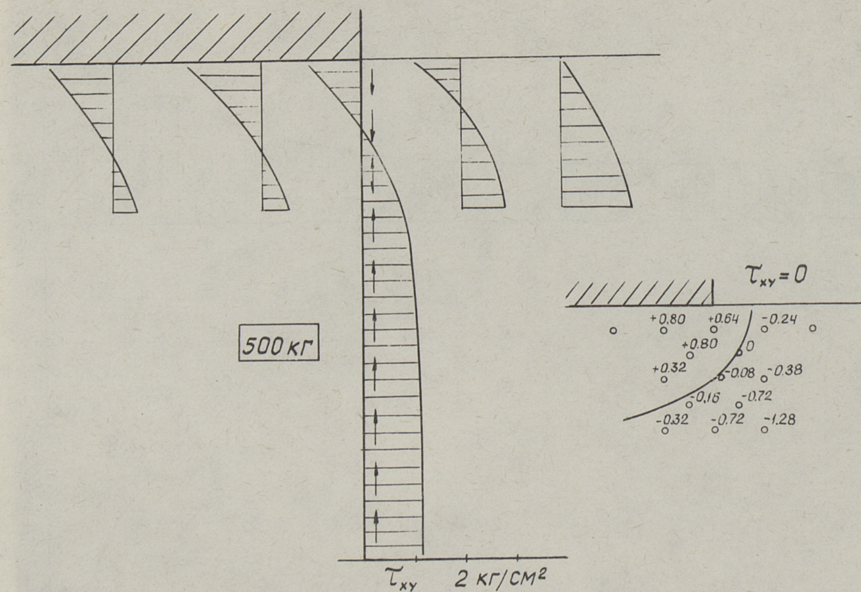
Увеличение местных напряжений у концентратора напряжений сравнительно с минимальными значениями в разрезе		
По данным эксперимента	По данным электрического моделирования	По методу фотоупругости
2,2-3,6	3,8	3,5



Фиг. 3. Поле перемещений при штамповом нагружении образца с нагрузкой 690 кГ.



Фиг. 4. Распределение касательных напряжений в плоскости среза при штамповом нагружении образца:
а) эпюры угла сдвига γ_{xy}, если опорные поверхности покрыты маслом,
б) эпюры τ_{xy}, если опорные поверхности маслом не обработаны.



Фиг. 5. Распределение касательных напряжений τ_{xy} на участке при опорных поверхностях, необработанных маслом.

Штамповое нагружение (фиг. 3, 4 и 5). Выяснилось, что самые большие возмущения в поле касательных деформаций и напряжений возникают не у самого концентратора напряжений, а вовсе на участке А, где они превышают в 2,3 раза среднее значение для данного разреза. При увеличении нагрузки влияние обработки маслом опорных поверхностей уменьшается и эпюры становятся более похожими на эпюры, наблюдающиеся в случае необработанных опорных поверхностей (фиг.4).

На некотором расстоянии от концентратора напряжений τ меняет свой знак (фиг. 5, участок В). Это явление вызвано силами трения в опорных поверхностях.

Литература

I. Смирнов-Аляев Г.А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Л., Машиностроение, 1978.

2. Роотс О.Т. О модели двухмерной задачи теории упругости. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1979, № 468.

3. Старкопф Ю.А. Республ. науч. конф. "Фенолформальдегидные смолы и клеи на их основе", Таллин, 1977, с. 73-74.

L. Joorits, L. Ruga

Die Forschung des zweiachsigen Spannungszustandes mit Hilfe der physikalischer Modelle

Zusammenfassung

In der Abhandlung werden die Forschungsangaben des zweiachsigen Spannungszustandes mit Hilfe der Modelle aus Gummielastikum gegeben.

Der angewandte Stoff erlaubt auf Grund seiner besonderen Deformationseigenschaften genügend vollständig den Spannungs- und Deformationszustand des Körpers zu veranschaulichen.

Die Abhandlung behandelt den Spannungs- und Deformationszustand in Falle der Stanz- und Schnittbelastung.

Die Forschungsangaben sind den mathematischen Berechnungen und elektrischen Messungen gegenübergestellt.

№ 507

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 539.3,533.6.013.42

В.М. Корсунский

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА С УПРУГИМ ЦИЛИНДРОМ, СОДЕРЖАЩИМ УПРУГИЙ ЗАПОЛНИТЕЛЬ

В настоящей работе рассматривается задача взаимодействия плоской волны давления с упругим цилиндром, содержащим коаксиальный упругий цилиндрический заполнитель.

Как и в задачах дифракции импульсов на цилиндре и сфере [I , 2] здесь используется следующая стандартная процедура:

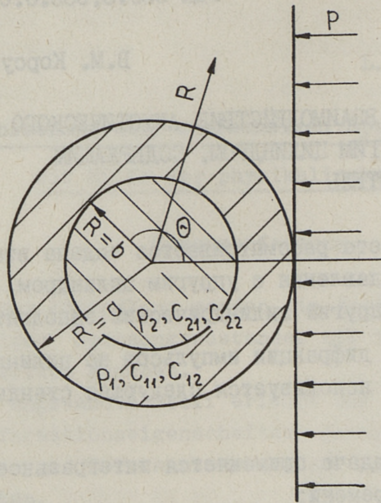
I) к исходной задаче применяется интегральное преобразование Фурье по времени;

2) решение изображающей задачи находится в виде ряда по собственным функциям;

3) переход в пространство оригиналов осуществляется численно. Однако в отличие от задач дифракции исследуется не рассеянное цилиндром поле, а волновые поля в цилиндре и заполнителе.

I. Постановка задачи, процедура нахождения решения

Предположим, что упругий цилиндр с упругим коаксиальным заполнителем окружен идеальной сжимаемой жидкостью, и из жидкости падает плоский импульс давления, возбуждающий волновой процесс внутри цилиндра и заполнителя. Фронт волны предполагается параллельным оси цилиндра. Отсчет времени t начинается с момента соприкосновения фронта с поверхностью цилиндра (фиг. I). Требуется определить волновые поля в цилиндре и заполнителе. Введем следующие обозначения: R, θ - радиальная и угловая координаты; a, b - наружный и внутренний радиусы цилиндра; ρ_1 - плотность; C_{11}, C_{21} - скорости продольных и поперечных волн в цилиндре (ρ_2, C_{12}, C_{22} - плотность и скорости упругих волн в заполнителе); ρ - плотность жидкости, c - скорость звука в жидкости.



Фиг. 1. Сечение оболочки в момент соприкосновения с фронтом плоского импульса давления.

Используем безразмерные переменные

$$r = \frac{R}{a}, \quad \tau = ct/a, \quad \beta = b/a.$$

Пусть падающая волна имеет вид

$$p_i = p_* f(\delta), \quad \delta = \tau - (1 - r\cos\theta), \tag{I}$$

где p_* - константа, имеющая размерность давления,
$f(\delta)$ - функция, описывающая закон изменения давления

Математически задача о распространении волн в упругом цилиндре с упругим заполнителем сводится к нахождению решения системы пяти волновых уравнений, одно из которых описывает движение жидкости, остальные - движение упругого цилиндра и его заполнителя (по два уравнения для каждого) связанных между собою семью условиями контакта на цилиндрических поверхностях. Предполагается, что в начальный момент все искомые функции и их первые производные по времени равны нулю. На границе раздела между жидкостью и упругой средой имеют место три условия контакта: непрерывны радиальные напряжения и перемещения, отсутствуют тангенциальные напряжения. На границе раздела упругих сред имеют место четыре условия контакта: непрерывны радиальные и тангенциальные напряжения и перемещения. Полагается, что все искомые функции ограничены в областях определения.

Подробнее с постановкой задачи можно ознакомиться в монографии [2].

Для решения задачи применим к уравнениям движения и условиям контакта преобразование Фурье по времени (F - преобразование). Решение в пространстве изображений ищем в виде рядов по собственным функциям, коэффициенты которых определяются из изображений условий контакта, путем решения системы семи алгебраических уравнений (по числу условий контакта для каждого индекса суммирования).

Переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью обратного преобразования Фурье.

Радиальные напряжения в цилиндре выражаются формулой:

$$\sigma_r(r,\theta,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[G_1^F(r,\theta,\omega)\cos\omega\tau + G_2^F(r,\theta,\omega)\sin\omega\tau\right]d\tau, \quad (2)$$

где

$$\begin{gathered} G^F(r,\theta,\omega) = G_1^F(r,\theta,\omega) + i\,G_2^F(r,\theta,\omega) \\ G^F(r,\theta,\omega) = f^F(\omega)\,g^F(r,\theta,\omega) \\ g^F(r,\theta,\omega) = -p_* \sum \varepsilon_n (-1)^n D_{1n} / D_n \\ \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2, \quad n \geqslant 1. \end{gathered} \quad (3)$$

D_{1n}, D_n - определители седьмого порядка.

Функцию $g^F(r,\theta,\omega)$ назовем частотной зависимостью. Аналогичные формулы можно выписать для касательных напряжений и перемещений в цилиндре.

2. Алгоритм расчетов

Для расчета радиальных напряжений в цилиндре при фиксированной точке $\theta = \theta_0, r = r_0$ вычислялась частотная зависимость (3), результаты вычислений записывались на магнитный диск; далее при заданном виде падающего импульса вычислялся интеграл (2), причем частотная зависимость читалась с магнитного диска.

Бесконечный интервал интегрирования в формуле (2) заменялся конечным интервалом от 0 до 60, разделенным на равные отрезки длиной 10. На каждом отрезке вычислялся интеграл с помощью процедуры Ромберга с шагом по частоте 10/256, результаты вычислений суммировались. Для оценки точности интегрирования было предпринято восстановление заданной функции по ее изображению; для синусоидальной функции

$$f(\tau) = \sin \omega_* \tau \left[H(\tau) - H(\tau - \tau_*) \right], \tag{4}$$

где $\omega = 9{,}84$ - частота заполнения,

$\lambda_* = 2\pi/\omega_*$ - длина волны,

$\tau_* = 3\lambda_*$ - длительность,

погрешность не превышала одного процента.

В связи с тем, что функция (4) в начальной и конечной точках имеет разрыв в первой производной, численно восстановленная функция подвержена эффекту Гиббса. Наибольшая погрешность вычисления (порядка 5 %) имеет место в начале процесса (в первой четверти периода синусоиды). После первого максимума эффект Гиббса практически не ощутим. Для оценки погрешности, внесенной усечением интегрирования в формуле (2), исследовался вклад интегралов по каждому из отрезков. Наибольшим оказался вклад второго интеграла, вклады последующих интегралов уменьшались с увеличением номера отрезка. При временах больших четверти периода синусоиды вклад шестого интеграла колеблется в пределах двух-трех процентов. Для меньших времен длина отрезка интегрирования явно недостаточна - погрешность достигает двадцати процентов.

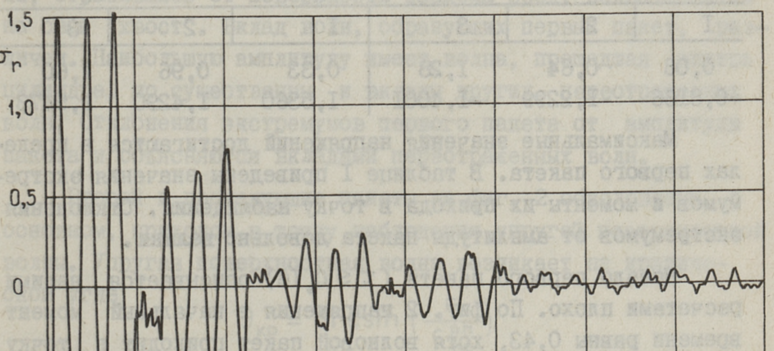
Хотя при описанной организации вычислений расчет частотной зависимости выполняется лишь один раз, затраты времени на него велики – на расчет частотной зависимости в области от 0 до 60 уходит более часа времени процессора ЭВМ ЕС-1033. Затраты машинного времени сильно увеличиваются с ростом частоты.

3. Численные результаты

Были проведены расчеты радиальных напряжений в стальном цилиндре, погруженном в воду, с упругим заполнителем из кремния при следующих параметрах

$$C = 1493 \text{ м/с}, \quad \rho = 1 \text{ г/см}^3, \quad \beta = 0{,}68138,$$
$$C_{11} = 5960 \text{ м/с}, \quad c_{12} = 3240 \text{ м/с}, \quad \rho_1 = 7{,}7 \text{ г/см}^3,$$
$$C_{21} = 5968 \text{ м/с}, \quad c_{22} = 3764 \text{ м/с}, \quad \rho_2 = 2{,}2 \text{ г/см}^3.$$

Давление в падающем импульсе выражалось формулой (4). На фиг. 2 приведен график зависимости радиального напряжения σ_r от времени в фиксированной точке $\tau = 0{,}9$, $\Theta = 0$.



Фиг. 2. Зависимость радиального напряжения σ_r от времени в фиксированной точке $\tau = 0{,}9$, $\Theta = 0$.

На графике отчетливо различаются четыре волновых пакета, в каждом пакете можно выделить перевернутый синусоидальный импульс, частота которого совпадает с частотой падающего импульса. Назовем амплитудой пакета А среднее значение величин всех экстремумов в пределах пакета, а искаженностью пакета – отношение наибольшего отклонения от амплитуды к величине амплитуды.

Амплитуда первого пакета имеет величину порядка I,4, а амплитуды последующих пакетов образуют затухающую последовательность:

номер пакета	I	2	3	4
амплитуда	I,370	0,599	0,302	0,I94

Таблица I

Величины экстремумов первого пакета и моменты их прихода в точку наблюдения

Минимумы			Максимумы		
I	2	3	I	2	3
0,08	0,64	I,28	0,33	0,96	I,60
-0,8I66	-I,2299	-I,400I	I,5360	I,4290	I,5473

Максимальные значения напряжений достигаются в пределах первого пакета. В таблице I приведены значения экстремумов и моменты их прихода в точку наблюдения. Отклонения экстремумов от амплитуды пакета довольно велики.

Начало первого пакета ($\tau \leq 0,I6$) описывается нашими расчетами плохо. По фиг. 2 напряжения в начальный момент времени равны 0,43, хотя волновой пакет приходит в точку наблюдения только в момент времени $\tau = 0,025$. Такая погрешность объясняется разрывом первой производной в падающем импульсе, а также небольшим интервалом интегрирования.

4. Анализ результатов

Известно, что напряжения в упругом теле обусловлены процессами переотражения и трансформации продольных и поперечных волн, а также распространением волн. Из фиг. 2 видно, что процесс радиальных напряжений по времени имеет волновой характер. Некоторые закономерности этого процесса могут быть объяснены в терминах распространения волн.

Первый из волновых пакетов на фиг. 2 обусловлен волной, прошедшей внутрь цилиндра, и волнами многократно переотразившимися от его внутренних поверхностей. Разделить отдельные волны, образующие первый пакет, не удается по следующим причинам. Во-первых, следует учесть, что каждый импульс, приходящий к внутренней поверхности, порождает четыре новых импульса, поэтому число импульсов резко возрастает с ростом числа переотражений. Во-вторых, при выбранных параметрах сред длина продольной волны в цилиндре равна 2,56, т.е. превышает длину диаметра. При переотражениях на криволинейных поверхностях длинноволновые импульсы заметно искажаются.

В-третьих, скорость распространения волн в материале цилиндра велика, и при выбранной длительности "голова" волны, отразившись от поверхности раздела сред, накладывается на свой "хвост". Вклад волн, образующих первый пакет, различен. Наибольшую амплитуду имеет волна, прошедшая внутрь цилиндра, но существенны и вклады других, переотраженных волн. Отклонения экстремумов первого пакета от амплитуды пакета и объясняются вкладами переотраженных волн.

Второй и последующие пакеты на фиг. 2 обусловлены, в основном, приходом в точку наблюдения упругой поверхностной волны. Упругая поверхностная волна возникает на критическом угле

$$\Theta_{кр} = \arcsin\left(\frac{c}{c^{ph}_{кр}}\right)$$

и движется по часовой стрелке и против нее с фазовой скоростью $c^{ph}_{кр}$, совершая обороты вокруг цилиндра и непрерывно излучая в окружающую жидкость.

При нулевом угле наблюдения ($\Theta = 0$) импульсы, обегающие цилиндр по часовой стрелке и против нее, приходят в точку наблюдения одновременно и суммируются.

Второй пакет на фиг. 2 образуется за счет поверхностных волн, не успевших совершить ни одного полного пробега вокруг цилиндра, а последующие пакеты - за счет волн, совершающих полные обороты. По разнице между моментами прибытия максимумов (или минимумов) в очередных волновых пакетах удается найти фазовую скорость поверхностной волны $C_{кр}^{ph} = 2{,}11$.

Стрелками на фиг. 2 помечены моменты прибытия волновых пакетов, рассчитанные по фазовой скорости. Число рядом со стрелкой означает количество полных оборотов, совершенных упругой поверхностной волной.

Вследствие непрерывного излучения в окружающую среду поверхностная волна затухает. Затухание проявляется в уменьшении амплитуд последовательных пакетов, однако,темп его невысок: при времени $\tau = 16$ (падающая волна прошла восемь диаметров)напряжения все еще составляют шесть процентов от максимальных.

Литература

I. Нигуль У.К., Метсавээр Я.А., Векслер Н.Д., Кутсер М.Э. Эхо-сигналы от упругих объектов. Таллин, Б.И., 1974, т. 2. 345 с.

2. Векслер Н.Д. Рассеяние импульсов на упругих цилиндрах. Таллин, Валгус. 1980. 180 с.

V.Korsunski

Transient Interaction of a Plane Acoustical Wave on an Elastic Cylinder with Elastic Filler

Summary

The strain field solution generated by a plane acoustical wave incident upon an elastic cylinder with elastic filler is presented. The Fourier transform technique is used. The numerical examples are evaluated by computer.

№ 507
TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

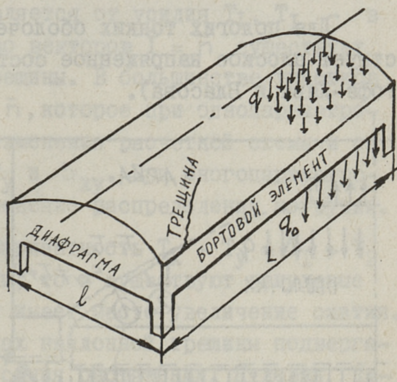
УДК 624.074.4.621.031

Ю.А. Тярно

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В УГЛОВЫХ ЗОНАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ С ТРЕЩИНАМИ

В статье рассматриваются напряженные состояния в угловых зонах в железобетонных оболочках средней длины, в упругой стадии и в стадии с наклонными трещинами (фиг. I). Оболочки имеют продольные бортовые элементы с действительными краевыми условиями и торцевые диафрагмы с краевыми условиями Навье.

Наклонные трещины, которые в железобетонных оболочках всегда существуют [I], в зависимости от нагрузки, геометрических параметров и армирования угловых зон, имеют различные свойства, которые влияют на распределение внутренних сил. При образовании, развитии и раскрытии наклонных трещин наблюдаются следующие основные этапы: I) развивающаяся по длине трещина, при которой существует контакт между противоположными поверхностями трещины. Обе разделенные трещиной части имеют одинаковую геометрию; 2) развивающаяся по длине трещина имеет зоны, на протяжении которых полный контакт между противоположными поверхностями отсутствует. Геометрия разделенных частей несущественно изменяется; 3) полностью раскрывающаяся трещина, при которой контакт между противо-

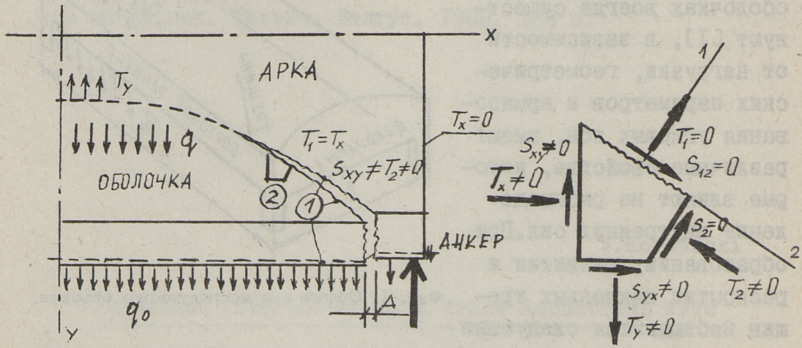


Фиг. 1. Общий вид исследуемого объекта.

положными поверхностями отсутствует. Существенно изменяется геометрия разделенных трещиной частей. У рассматриваемых цилиндрических оболочек внутренняя часть оболочек становится более пологой. Происходят перемещения краев трещин в направлении нормали криволинейной части и в горизонтальном направлении.

Интерес вызывают величины и распределение главных усилий T_I и T_2 до и после образования наклонной трещины. Так как материал исследуемой железобетонной оболочки хрупкий, то существенную роль при образовании наклонной трещины играет главное растягивающее усилие T_I. Индикаторами напряженного состояния в микробетонных моделях являются образующиеся и раскрывающиеся трещины. Трещины образуются поперек векторов главных растягивающих усилий T_I. Эквивалентные напряжения можно получить по различным теориям прочности плоского напряженного состояния (теории Мора, Баландина, Миролюбова).

Для пологих тонких оболочек предполагается, что существует плоское напряженное состояние (предположения Кирхгофа-Лява и Власова).



Фиг. 2. Схема трещин и внутренних сил в угловой зоне с наклонными трещинами
① – одноосное напряженное состояние,
② – плоское напряженное состояние.

Передача нагрузки от тонкостенной криволинейной части к бортовым элементам и к торцевым диафрагмам производится главными силами T_I и T_2. На главных поверхностях с векторами нормалей $\bar{I}$ и $\bar{2}$ действует условие для сдвигающих сил $S_{12} = S_{21} = 0$. Образование трещин в неармированных зонах устраняет возможность передачи всяких усилий через т.н. нулевые трещины (нулевая трещина - неармированная трещина, которая не имеет арматуры, дающей проекцию на нормаль трещины).

Так как усилие $T_n = 0$ (T_n - нормальное усилие в поверхности наклонной трещины) остается выше, чем главное усилие сжатия $T_2 < 0$, то усилие $T_n = T_I^*$ остается главным усилием и поворот векторов I и 2 не состоится. Постоянство уравнения

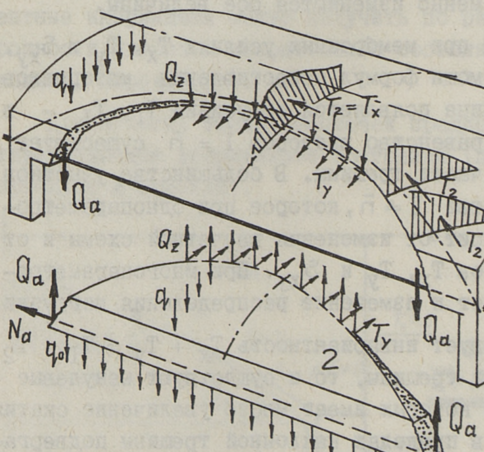
$$\tan\alpha_1 = \frac{T_1 - T_x}{S_{xy}} = \frac{0 - T_x}{S_y}$$

можно создать при помощи изменения величин T_x или S_{xy}. В оболочках одновременно изменяются обе величины.

Главные усилия при мембранных усилиях T_x, T_y и S_{xy}, определяются при помощи формул сопротивления материалов. Если наклонная трещина появляется от усилия T_I, T_I - в упругой стадии, то равенство векторов $\bar{I} = \bar{n}$ существует только в начальной части трещины. В большинстве участков существует неравенство $\bar{I} \neq \bar{n}$, которое при однопараметровом нагружении зависит от изменения расчетной схемы и от изменения компонентов T_x, T_y и S_{xy}. При многопараметровом нагружении влияет и изменение распределения нагрузки.

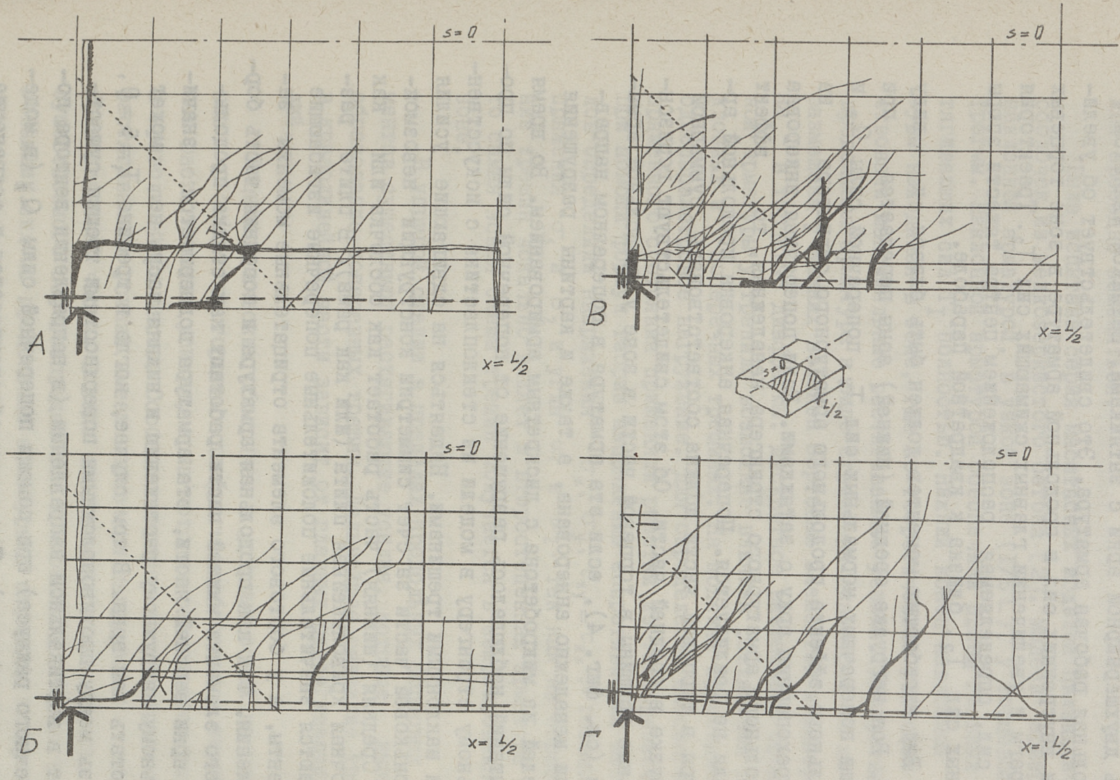
Так как существует инвариантность $T_x + T_y = T_I + T_2$ в пределах наклонной трещины, то и существуют ненулевые усилия T_x и T_y, при которых имеет место увеличение сжатия. Определенные части в пределах наклонной трещины подвергаются сжатию или уменьшают усилия растяжения. Нулевая линия от продольных нормальных сил T_x перемещается вниз к бортовому элементу, уменьшает плечо внутренних сил и тем самым увеличивает усилия в продольных стрингерах. Представленное перераспределение усилий препятствует дальнейшему образованию и развитию поперечных трещин в средних зонах железобетонных оболочек. Такое перераспределение отмечается на моделях оболочек из микробетона и стеклопластика. При полной передаче основных внутренних сил через трещины при помощи арматуры такого влияния наклонной трещины на внутренние усилия не отмечается.

Максимальные сдвигающие усилия (макс. S) при плоском напряженном состоянии занимают место на поверхностях под углом 45^{0} относительно главных поверхностей. В рассматриваемых оболочках максимальные сдвигающие усилия занимают место почти в вертикальных поверхностях и могут уравновешивать нагрузки в вертикальных единичных полосках. Максимальные сдвигающие усилия определяются при помощи формулы макс $S = \frac{T_1 - T_2}{2}$. После образования нулевой наклонной трещины($T_1^* = 0$ главные растягивающие усилия после образования трещины) сдвигающие усилия главных усилий $|T_1^* - T_2^*| = |T_1 - T_2|$. Таким образом, начальные главные усилия сжатия T_2 должны увеличиться и получить значение $T_2^* = T_1 - T_2$.



Фиг. 3. Расчетная схема оболочки с нулевыми наклонными трещинами. 1 – верхняя часть, работает как арка, 2 – нижняя часть, работает как оболочка или плита.

Если в наклонных трещинах нет рабочей арматуры, то трещины не имеют возможности передать усилия и схема пространственной работы конструкции значительно изменяется. Рассмотрим две принципиально разные зоны оболочки: торцевая (верхняя) зона, которая остается между наклонной трещиной и торцевой диафрагмой и средняя зона, которая остается между наклонными трещинами.



Фиг. 4. Обобщенные наклонные трещины в угловых зонах в цилиндрических оболочках с разными высотами бортовых элементов

А – b_0 = 15,8 см, Б – b_0 = 11,0 см, В – b_0 = 6,6 см,
Г – b_0 = 6,6 см.

Распределительная линия (нулевая наклонная трещина) образуется в зонах, где главные растягивающие усилия имеют максимальные значения. Торцевая зона работает как опорная часть двухшарнирной арки с затяжками. Затяжкой является продольная рабочая арматура. Это свидетельствует об увеличении внутренних сил в продольной арматуре в зоне торцевых диафрагм и увеличении главных сжимающих сил T_2. Траектория этих сил, определяемая расположением центра тяжести эпюры главных сил T_2, близка к квадратной параболе.

Вид изгибающих моментов должен быть близок к виду арки. Вся нагрузка средней (нижней) зоны передается при помощи поперечных нормальных сил T_y, поперечной силы Q_z и дюбельного эффекта продольного арматурного стрингера на четырехопорную арку с затяжками. Если поперечная анкеровка продольного арматурного стрингера ненадежная, то эффект дюбеля не реализуется. Поперечная анкеровка продольной арматуры в торцевой части должна соответствовать суммарной нагрузке в средней части. Об этом свидетельствуют горизонтальные трещины в торцевой части в зоне у продольной арматуры (см. фиг. 4), если эта арматура в поперечном направлении ненадежно анкерована, а также и картины разрушения моделей из микробетона с дискретным армированием. Во время испытаний наблюдалось разрушение от поперечной силы по продольному стрингеру в модели из стеклопластика с искусственными наклонными трещинами. Надеяться на сдвигающие усилия у коньковой части за счет симметрии конструкции невозможно. Средняя (нижняя) часть работает как оболочка или как балочная криволинейная плита (или как рама). В плите развиваются значительные положительные поперечные изгибающие моменты, а у бортового элемента отрицательные моменты защемления. Так как продольная арматура и соседняя часть бортового элемента нижней части работают как стяжка продольной арки верхней части, эта арматура подвергается значительному нагружному растяжению и нижняя часть не может работать как арка. В том случае, когда в трещине $T_1 = S = 0$, связь между противоположными поверхностями трещин существует в вертикальном направлении (в направлении вектора поперечного радиуса) при помощи поперечной силы Q_z (в модели из микробетона). Тем самым обеспечивается и сохранение формы криволинейной части. При нулевой наклонной трещине (искусственная трещина) поперечная сила Q_z не действует и форма криволинейной части в отдельных краях трещины может свободно изменяться.

Была испытана серия масштабных моделей цилиндрических оболочек из мелкозернистого бетона [2]. Модели армировали наклонной арматурой, в узкой зоне (I/6 L), у торцевой диафрагмы. Наклонной арматурой обеспечили прием главных растягивающих сил T_I полностью. Нижний конец наклонной арматуры находился в зоне, где по теоретическим расчетам существовали максимальные растягивающие усилия. Дискретная продольная арматура в виде стрингера диаметром I0 мм была размещена у нижних волокон бортовых элементов и анкерована в торцевые диафрагмы. Дискретное размещение продольной арматуры устранило возможные влияния растяжения в наклонных и поперечных трещинах. На моделях применялось однопараметровое нагружение. Для определения плоского напряженного состояния применяли розетки из тензорезисторов. При помощи формул теории напряжений сопротивления материалов определили напряжения σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau_{xx}$, главные напряжения σ_1 и σ_2 и углы α_1 и α_2. Так как на образование трещин локально влияет и второстепенная арматура [3], то самая ясная схема трещин получается в неармированной зоне.

В упругой стадии в пределах продольных бортовых элементов существуют растягивающие усилия, которые вызывают образование поперечных трещин. Дальнейшее развитие трещины в криволинейной части зависит от главных растягивающих усилий.

В цилиндрических оболочках в углевых зонах на расстоянии $x \simeq L/4$ от торцевых диафрагм, наблюдаются значительные растягивающие усилия, зона которых развивается глубоко в криволинейную часть. Особенно широкое распространение растягивающих усилий имеет место при нагружении только криволинейной части. В ходе экспериментов выяснилось, что существенного перераспределения компонентов главных растягивающих сил на продольный арматурный стрингер не происходит и модели разрушаются по наклонным трещинам, которые развиваются далеко в тонкостенную криволинейную часть. Наклонные трещины, по которым происходило разрушение, начали образовываться и открываться в зонах, где началось армирование угловой зоны. В армированных зонах наклонные трещины раскрывались незначительно. На всех четырех моделях разрушение произошло от образования и раскрытия наклонных трещин при невысоких нагрузках (5-6 кН/м^2). Разрушение произошло в момент, когда наклонные трещины дошли до неармированной зоны. При оболочках из микробетона намечалось разрушение лавиной, что указывает на отсутствие эффекта дюбеля в трещине.

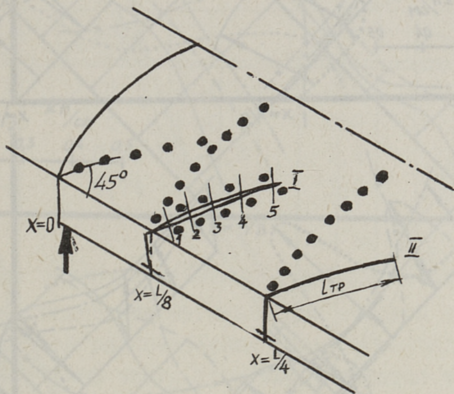
Таблица I

Распределение усилий в продольных арматурных стрингерах в моделях А,Б,В и Г из цементного раствора. Модели имеют поперечные и наклонные трещины.

Модель	f/h	$q_0/\bar{q}$	$x = L/2$		$x = L/4$		$x = L/8$	
			N_a %	K^{TA}	N_a %	K^{TA}	N_a %	K^{TA}
А	0,55	0,32	I00	0,79	77	0,77	58	0,59
Б	0,64	0,25	I00	0,80	77	0,78	62	0,55
В	0,73	0,I6	I00	0,83	62	0,86	32	I,I5
Г	0,73	0,I6	I00	0,85	79	0,82	6I	0,62

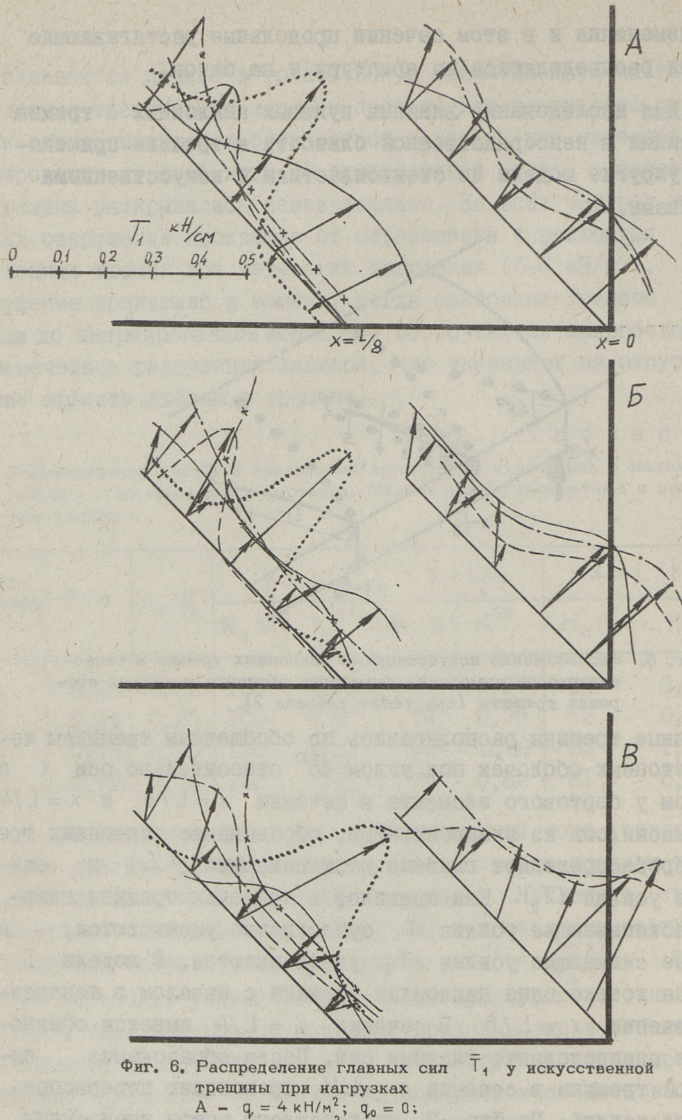
Образование трещины в неармированной зоне создает условия для перераспределения усилий на концы трещины и тем самым на дальнейшее развитие трещин. Наклонные трещины существенно открываются (0,5-2 мм) и происходит разрушение. Сравнение безразмерных параметров $K^{TA} = \frac{M(x)}{N_a \cdot h}$ (h - высота оболочки) усилий в продольных арматурных стрингерах N_a в трех поперечных сечениях представлено в таблице I. В поперечном сечении $x = L/4$ на арматурный стрингер передается около 77 % от усилий на поперечном сечении в середине оболочки. Плечо продольных нормальных сил в обеих сечениях почти одинаковое (параметры K^{TA} имеют величины в середине оболочки 0,82, у четверти оболочки 0,8I). Так как поперечное сечение $x = L/8$ находится между принципиальной наклонной трещиной и торцевой диафрагмой, в этом сечении происходит относительное увеличение продольных сил в арматурных стрингерах. Параметры K^{TA} имеют в среднем значение 0,59. В модели В основная трещина находится не на сечении изменения и в этом сечении продольные растягивающие усилия распределяются на арматуру и на бетон.

Для исследования влияния нулевых наклонных трещин на усилия в непосредственной близости к трещине применялись упругие модели из стеклопластика и искусственными трещинами.



Фиг. 5. Расположение искусственных наклонных трещин и тензорезисторов, изменение геометрии оболочки в разных сторонах трещины (см. также таблица 2).

Наклонные трещины располагались по обобщенным трещинам железобетонных оболочек под углом 45° относительно оси x с началом у бортового элемента в сечении $x = L/8$ и $x = L/4$. Как выяснилось из экспериментов, образование наклонных трещин перераспределяет главные растягивающие (T_1) и сжимающие усилия (T_2). Как правило, в пределах трещины главные растягивающие усилия T_1 существенно уменьшаются, а главные сжимающие усилия T_2 увеличиваются. В модели I имеется только одна наклонная трещина с началом в поперечном сечении $x = L/8$. В сечении $x = L/4$ имеется обыкновенное распределение главных сил. После образования наклонной трещины в сечении $x = L/4$ происходит перераспределение усилий. На фиг. 7 представлены эпюры внутренних сил при разных нулевых трещинах. Эксперименты были произведены с разными отношениями нагрузки на криволинейную часть и на бортовой элемент, чтобы выяснить самое неблагоприятное распределение внутренних сил и условия для дальнейшего развития трещины. Изменяется геометрия края трещин (см. табл. 2).



Фиг. 6. Распределение главных сил $\bar{T}_1$ у искусственной трещины при нагрузках

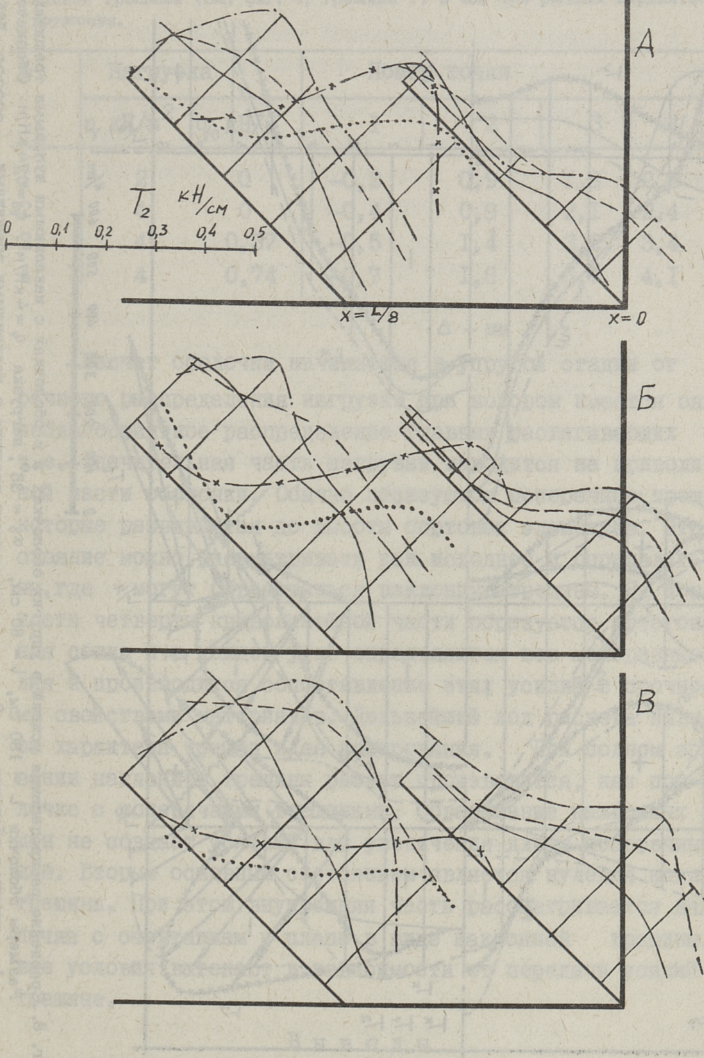
А – $q = 4$ кН/м^2; $q_o = 0$;

Б – $q = 4$ кН/м^2; $q_o = 0{,}37$ кН/м;

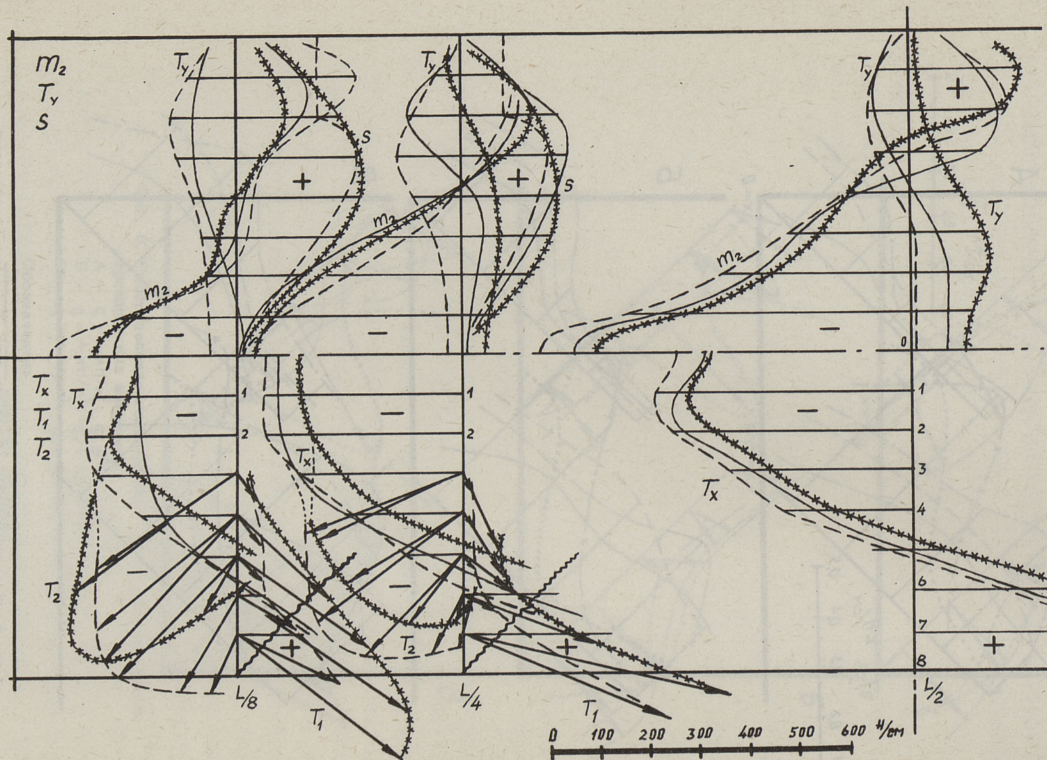
В – $q = 4$ кН/м^2; $q_o = 0{,}74$ кН/м.

Обозначения:

- ———————— упругая оболочка;
- – – – – – – наклонная трещина длиной $0{,}5\ l_т$ у наружного края трещины,
- .... у внутреннего края трещины,
- наклонная трещина длиной $1{,}0\ l_т$
- —.—.—.—.— у наружного края трещины,
- —x—x—x—x у внутреннего края трещины.



Фиг. 7. Распределение главных сил T_2 у искусственной трещины. Обозначения и нагрузки см. на фиг. 6.



Фиг. 8. Сравнение распределения усилий в упругих оболочках и в оболочках с наклонными нулевыми трещинами. Размеры оболочки L = 180 см, l = 60 см, α_0 = 35°, нагрузка $q_v = 4$ кН/м², $q_0 = 0{,}74$ кН/м. Обозначения: 1 упругая оболочка, 2 поперечная трещина с наклонными трещинами, наклонные трещины.

Т а б л и ц а 2

Относительные перемещения противоположных кромок искусственной наклонной трещины (см. фиг. 4, трещина 1) в мм при разных вариантах нагружения.

№	Нагрузка		Номер точки				
	q кН/м^2	q_0 кН/м	I	2	3	4	5
I	2	0	-0,2	0,9	I,6	2,2	0,5
2	4	0	-0,4	0,9	2,I	2,4	0,6
3	4	0,37	-0,5	I,4	3,2	3,4	0,9
4	4	0,74	-0,7	I,8	3,7	4,I	I,0

Δ – мм

Расчет оболочки начинается в упругой стадии от поперечного распределения нагрузки при котором имеется самое неблагоприятное распределение главных растягивающих сил, т.е. значительная часть нагрузки находится на криволинейной части оболочки. Обычно образуются поперечные трещины, которые развиваются до высоты бортовых элементов. Это состояние можно рассматривать как исходное и определить зоны,где могут образоваться наклонные трещины. На поверхности четверти криволинейной части образуется ортогональная сетка и в каждом угле определяются все мембранные усилия и производится сопоставление этих усилий с прочностными свойствами материалов. Дальнейший ход расчета зависит от характера трещин и ее армирования. При полном армировании наклонной трещины расчет производится, как при оболочке с поперечными трещинами. Образование наклонных трещин не создает условий для увеличения длины поперечных трещин. Вторым основным состоянием является нулевая наклонная трещина. При этом внутренняя часть рассматривается как оболочка с очертанием в плане в виде наклонной трещины.Краевые условия вытекают в зависимости от передачи усилий в трещине.

Выводы

I. В неармированной угловой зоне, как правило, развиваются наклонные трещины, имеющие способность перераспределять главные растягивающие усилия T_1 на конце трещин в криволинейной части и тем самым создаются условия для дальнейшего развития трещин. Только незначительная часть усилий перераспределяется на продольные стрингера в бортовых элементах.

2. В пределах неармированной наклонной трещины сдвигающие усилия между сторонами трещины равняются нулю.

3. Передача всех усилий через наклонные трещины производится только при помощи рабочей арматуры. Если эта арматура отсутствует, то трещина чрезмерно расширяется и это ведет к разрушению конструкции.

Литература

1. Т я р н о Ю.А. Обобщенные схемы образования трещин в железобетонных оболочках средней длины. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1979, № 467.

2. Т я р н о Ю.А. Исследование цилиндрических железобетонных оболочек в стадии с трещинами. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1978, № 443.

3. Х р у б а н К., Х р у б а н Н. Работа арматуры в двух направлениях в плитах и оболочках. Международная конференция ИАСС, Алма-Ата, 1977. Доклады. М., Стройиздат, 1977.

Ü. Tärno

The Stress State in the Corner Zones of the Medium Length Cylindrical Shells

Summary

Some problems of the stress state in corner zones of the shells with reinforced and unreinforced diagonal cracks are presented. Some fiberglass plastic models with handmade diagonal cracks are used. For the investigation of membrane inner forces and bending moments near the diagonal cracks special tensoresistor systems are made use of. In the state of zero diagonal crack there are two different parts in the shell. The lower part (part 2) has the contribution of inner forces close to plate. The upper part (part 1) has the contribution of inner forces close to arch. Four discrete reinforced concrete models for testing the theoretical aspects are presented. A conclusion is drawn that the essential overchanges of the principal internal force T_1 caused by the longitudinal forces T_x do not take place. The failure of the shell may be caused by the appearance of unreinforced diagonal cracks. These cracks start evolution on the unreinforced zones and travel farther into the cylindrical part of the shell. We can draw a conclusion that the transfer of the principal internal force T_1 by the unreinforced diagonal cracks is not possible. All these forces must be transferred by the special reinforcement.

№ 507

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 539.3

Л.Ю. Поверус

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ОДНОСЛОЙНЫХ И СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНАХ

Представляемый в данной работе метод исследования распространения упругих волн основан на решении уравнений теории упругости с применением дискретной математической модели конечных разностей. При этом удовлетворяются соответствующие начальные, граничные и фронтовые условия. Настоящая работа будет главным образом посвящена определению расположения и форме волновых фронтов, так как уравнения движения и остальные условия решения задач довольно подробно описаны в наших ранних работах.

Приложение фронтовых условий происходит согласно с законами геометрической оптики и заключается в проведении лучей, построении соответствующих волновых фронтов, а также в составлении соответствующих фронтовых условий.

Хотя метод геометрической оптики или лучевой метод главным образом применялся для исследования сейсмологических проблем, его можно использовать, как показывает ряд работ [I, 3] также для исследования технических проблем. Приведем ниже некоторые основные черты этого метода с уклоном на практическое приложение, как это изложено в работе [3].

При исследовании динамики изотропного линейно-упругого тела вектор перемещения $\bar{u}$ можно представить с помощью скалярного потенциала φ и векторного потенциала ψ в следующем виде

$$\bar{u} = \nabla\varphi + \nabla\times\psi, \tag{I}$$

где функции φ и ψ удовлетворяют волновым уравнениям

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho \tag{2}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \; c_2^2 = \mu/\rho \tag{3}$$

и скалярный потенциал φ является решением волнового уравнения, которому соответствует большая волновая скорость, чем в случае векторного потенциала ψ. Когда волна движется в направлении невозмущенной среды, область, прилегающая к волновому фронту первой волны, соответствует нулевому значению векторного потенциала. Следовательно, за волновым фронтом $u = \nabla\varphi$. Таким образом, задача сводится к исследованию акустических волн, имеющих одну единственную скорость распространения c_1. Условия непосредственно за волновым фронтом могут быть определены методами геометрической акустики или оптики, состоящими в проведении лучей и построении соответствующих волновых фронтов для скалярного волнового уравнения.

Расположение и геометрию волновых фронтов можно определить путем интегрирования уравнения эйконала, но все-таки проще это сделать, как и в настоящем исследовании, используя принцип Ферми.

Протекание волнового процесса наблюдается на поперечном сечении пластины, которое проходит через ось симметрии нагрузки. Возмущенная область определяется на поперечном сечении пластины следом волновой поверхности. Следуя методике исследования работы [2] определим волновую поверхность трансверсально изотропной пластины в случае плоской деформации и точечного источника.

Модули упругости для трансверсально-изотропного материала по П. Бехтереву выражаются через технические постоянные в следующем виде:

$$A_{11} = \frac{(1-\nu^2 k_1)E'}{(1+\nu')(1-\nu'-2\nu^2 k_1)}, \quad A_{13} = \frac{(1-\nu^2 k_1)E}{1-\nu^2-2\nu^2 k_1}$$

$$A_{33} = \frac{E(1-\nu')}{1-\nu'-2\nu^2 k_1}, \quad A_{44} = G. \tag{4}$$

В формулах (4) использованные технические постоянные, характеризующие свойства трансверсально изотропного материала, подробно описаны в работе [4]. Уравнения движения в случае плоской деформации имеют вид

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial z}+A_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}=\rho^*\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$A_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z}+A_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}=\rho^*\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \tag{5}$$

где x - координата, параллельная свободной поверхности пластины, а z - в направлении толщины пластины. u_1 и u_3 - перемещения в направлении x и z соответственно, а ρ^* - плотность материала.

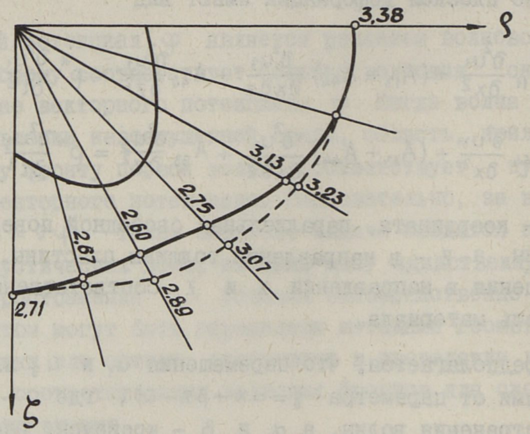
Предполагается, что перемещения u_1 и u_3 являются функциями от параметра $\gamma=\alpha x+\beta z-ct$, где c - скорость распространения волны, а α и β - косинусы, рассматриваемого направления распространения волны относительно осей x и z.

Из уравнения движения (5), используя параметр γ, выводится следующее уравнение для определения скорости распространения волны в зависимости от направления распространения волны

$$\rho^{*2}c^4-(A_{11}\alpha^2+A_{44}\alpha^2+A_{44}\beta^2+A_{33}\beta^2)\rho^*c^2+$$
$$+A_{11}A_{44}\alpha^4+A_{44}A_{33}\beta^4+(A_{11}A_{33}-2A_{13}A_{44}-A_{13}^2)\alpha^2\beta^2=0. \tag{6}$$

Если рассматривать линейно-точечный источник возмущения, действующий на полупространстве, и зафиксировать какой-то момент времени, то концы векторов скоростей образуют волновые поверхности волны искажения и расширения. В случае изотропного материала эти волновые поверхности сферические, а в случае анизотропного материала они имеют более сложную форму.

В данной работе предполагается, что внешняя нагрузка возрастает во времени плавно и в качестве дополнительных условий может принять, что на фронте волны расширения производные от перемещений по координатам равняются нулю. Такие мягкие фронтовые условия не требуют особенно точного определения расположения фронта и волновая поверхность аппроксимируется в виде эллипсоида, полуоси которой есть скорости c_{1x} и c_{1z}, умноженные на рассматриваемый промежуток времени.



Фиг. 1. Волновые фронты в трансверсально-изотропном теле.

На фиг. I изображены скорости волн расширения и искажения в зависимости от направления распространения. Скорости рассчитаны по формуле (6) и соответствуют данным трансверсально изотропного материала:

$$E' = 3{,}0 \cdot 10^5 \ \frac{кГ}{см^2}, \quad \nu' = 0{,}25, \quad E = 2{,}0 \cdot 10^5 \ \frac{кГ}{см^2}$$

$$\nu = 0{,}125, \quad G = 0{,}5 \cdot 10^5 \ \frac{кГ}{см^2}, \quad \rho^* = 2{,}92 \cdot 10^{-3} \ \frac{кГ}{см^3}.$$

Пунктирной линией показаны скорости волны расширения в случае, когда волновая поверхность аппроксимируется в виде эллипсоида.

Ошибка расчета, связанная с неточным определением волнового фронта, является, как уже предполагалось, небольшой, но она оказывает более существенное влияние в начале движения, промежуток времени, когда фронт волны расширения движется к нижней поверхности пластины и немного дальше.

В случае осесимметричной задачи трансверсально-изотропной пластины, если равномерно распределенная нагрузка действует на круговой области с радиусом ρ_a, безразмерные координаты точек следа фронта на поперечном сечении пластины, в криволинейной части можно определить при помощи формул

$$\zeta = \sqrt{\tau^2 - \frac{(\rho - \rho_a)^2}{K_2^2}}, \quad \rho = \rho_a + K_2\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}, \tag{7}$$

где τ-безразмерное время, а $K_2 = c_{1\rho}/c_{1\zeta}$-отношение скоростей волны расширения в направлении безразмерной координаты ρ, параллельной свободной поверхности пластины и в направлении толщины ζ. В случае изотропного материала K_2=I и тогда описываемый след фронта будет дугой окружности.

Волновая поверхность, криволинейная часть которой описывается формулами (7), имеет довольно сложную форму, состоящую в начале движения из плоской поверхности и из поверхности в виде части тора. Чтобы решить уравнения движения и другие дифференциальные зависимости методом конечных разностей, нужно выбрать шаги сетки в направлениях ρ, ζ и τ. Обозначим их через l_ρ, l_ζ и l_τ. На поперечном сечении пластины можем изобразить сетку при помощи координатных линий, которые находятся друг от друга на расстоянии l_ρ и l_ζ. Координаты точек сетки определяются величинами

$$\rho = i l_\rho, \quad \zeta = j l_\zeta, \tag{8}$$

где i и j обозначают номера вертикальных и горизонтальных координатных линий.

Безразмерное время τ определяет время истечения волнового процесса, информация о котором фиксируется через отдельные дискретные промежутки времени. Это значит, что расчет ведется по отдельным слоям по времени. В записи $\tau = n l_\tau$, n обозначает номер слоя по времени.

В следующем разделе определяется расположение фронта волны расширения, при этом используется только что изложенный метод координатных линий.

Если определить область под нагрузкой условием $\rho \leq \rho_a$, то расстояние фронта волны расширения от верхней поверхности в этой же области определяется формулой

$$\zeta = \zeta_z + f_y = j l_z + f_y, \tag{9}$$

при этом через $z = 0, I, II$ обозначается индекс поверхности раздела, а через y = I, 2, 3 номер слоя. Если фронт волны расширения находится в первом слое, получим

$$\zeta = \zeta_0 + f_1$$

$$\zeta_0 = 0 \tag{10}$$

$$f_1 = n l_\tau \frac{c_{1I}}{c_{1max}} = n l_\tau \kappa_{1I},$$

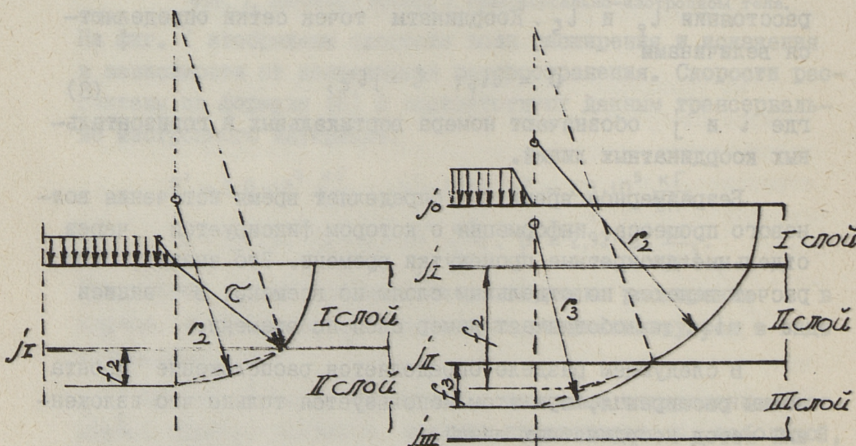
где c_{1I}, c_{1max} – скорости волны расширения в первом слое и в слое, где она максимальная – используется при определении безразмерного времени.

Расстояние фронта волны расширения от поверхности раздела во втором слое будет следующее

$$f_2 = \left(n l_\tau - j_I l_\zeta \frac{c_{1max}}{c_{1I}}\right) = n l_\tau \frac{c_{1II}}{c_{1max}} - j l_\zeta \frac{c_{1II}}{c_{1max}} \tag{11}$$

и в третьем слое

$$f_3 = n l_\tau - j l_\zeta \frac{c_{1max}}{c_{1I}} - (j_{II} - j_I) l_\zeta \frac{c_{1max}}{c_{1II}}. \tag{12}$$



Фиг. 2. Волновые фронты в сечении слоистой пластины.

Как явствует из вышеприведенных рассуждений, фронт в области пластины под нагрузкой является плоским. Вне упомянутой области волновая поверхность является кривой. Расположение волновой поверхности можно определить, как это было высказано раньше, законами геометрической оптики, при помощи принципа Ферми. Для практических расчетов такое точное определение волнового фронта является все-таки излишним, и в настоящей работе волновая поверхность определяется приближенным методом. След волновой поверхности аппроксимируется в виде дуги окружности, идея определения которой представлена на фиг. 2.

В криволинейной части фронта ($\rho > \rho_a$) на горизонте j расстояние фронта (ρ_j) от оси симметрии определяется следующей формулой

$$\rho_i = \rho_a + \sqrt{r_y^2 - [\, r_y - f_y + l_\xi (j - j_z)]^2}\,, \qquad (13)$$

в которой r_y – радиус кривизны волнового фронта соответственно для слоев $y = 1,\ 2,\ 3$.

Ниже представляются r_y и $r_y - f_y$ для всех слоев:

$$1)\ y = 1,\quad z = 0,\quad r_1 = f_1 = n\, l_\tau\, \kappa_{1\mathrm{I}} \qquad (14)$$

$$2)\ y = 2,\quad z = 1$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\kappa_2^2 (n\, l_\tau \kappa_{1\mathrm{I}} + j_{\mathrm{I}}\, l_\xi)\, \kappa_{1\mathrm{I}}}{\kappa_{1\mathrm{II}}} + \frac{1}{2}\left(n\, l_\tau - j_{\mathrm{I}}\, l_\xi\, \frac{1}{\kappa_{1\mathrm{I}}}\right) \kappa_{1\mathrm{II}} \qquad (15)$$

$$r_2 - f_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\kappa_2^2 (n\, l_\tau \kappa_{1\mathrm{I}} + j_{\mathrm{I}}\, l_\xi)\, \kappa_{1\mathrm{I}}}{\kappa_{1\mathrm{II}}} - \frac{1}{2}\left(n\, l_\tau - j_{\mathrm{I}}\, l_\xi\, \frac{1}{\kappa_{1\mathrm{I}}}\right) \kappa_{1\mathrm{II}} \qquad (16)$$

$$3)\ y = 3\quad z = \mathrm{II}\quad r_3 = \frac{1}{2}\left(\rho_{\mathrm{II}}^2 / f_3 + f_3\right) \qquad (17)$$

$$\rho_{\mathrm{II}} = \sqrt{r_2^2 - [\, l_\xi (j_{\mathrm{II}} - j_{\mathrm{I}}) + (r_2 - f_2)]^2} \qquad (18)$$

$$f_3 = n\, l_\tau - j_{\mathrm{I}}\, l_\xi \cdot \frac{1}{\kappa_{1\mathrm{I}}} - (j_{\mathrm{II}} - j_{\mathrm{I}})\, l_\xi \cdot \frac{1}{\kappa_{1\mathrm{II}}}\,. \qquad (19)$$

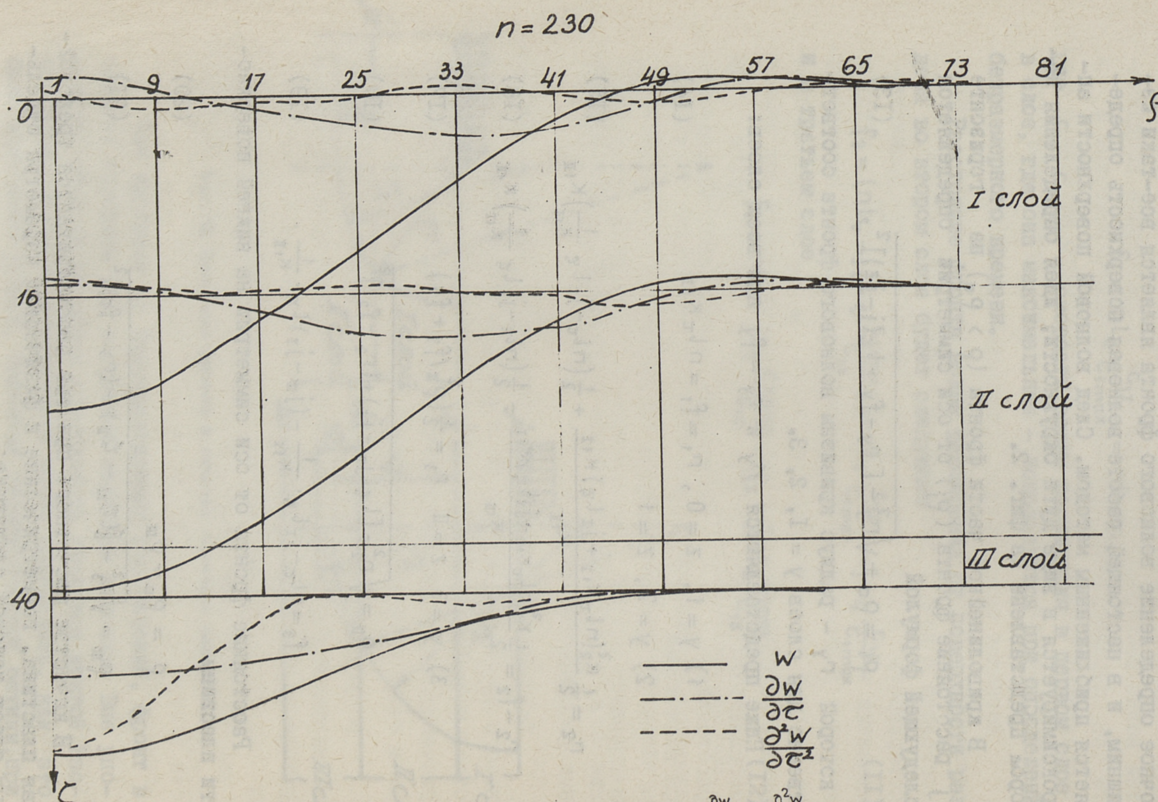
Расстояние фронта от оси симметрии на нижней поверхности пластины

$$\rho = \rho_a + \rho_{\mathrm{III}} \qquad (20)$$

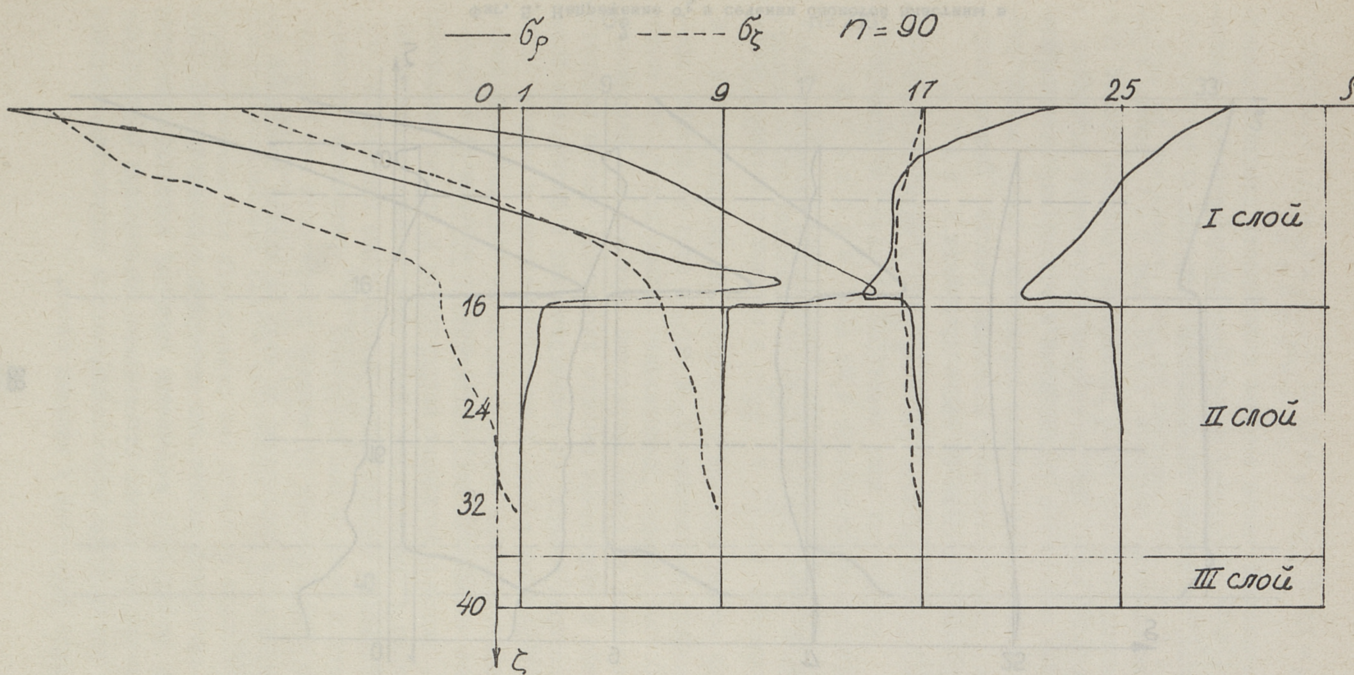
$$\rho_{\mathrm{III}} = \sqrt{r_3^2 - [(\xi_{\mathrm{III}} - \xi_{\mathrm{II}}) + (r_3 - f_3)]^2}\,. \qquad (21)$$

В качестве расчетного примера рассматривается трехслойная пластина, геометрические и физические параметры отдельных слоев которой следующие:

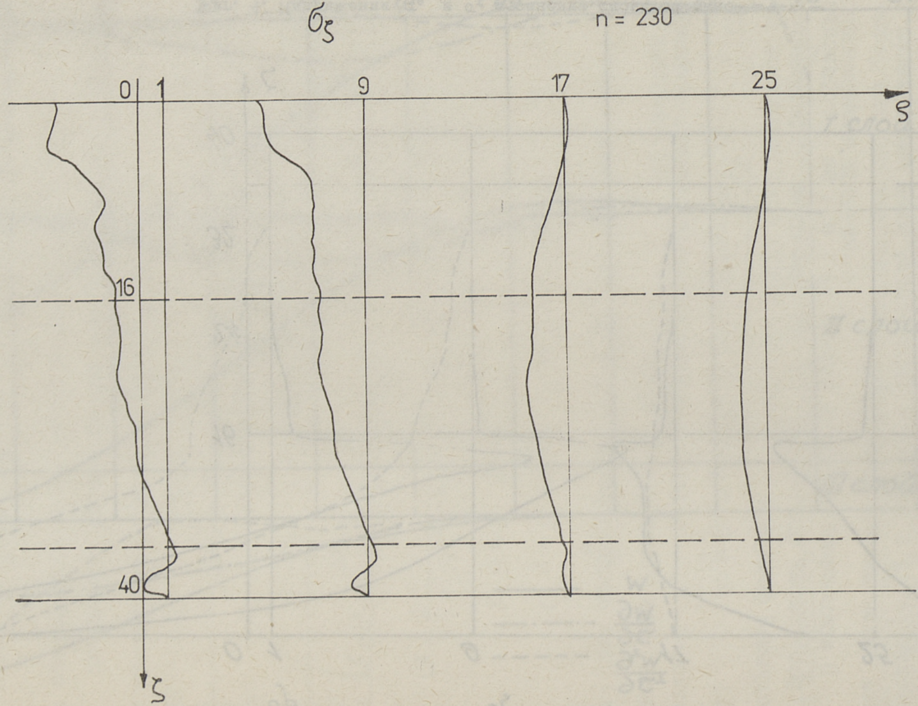
$$h_{\mathrm{I}} / h_{\mathrm{III}} = 4,\quad h_{\mathrm{II}} / h_{\mathrm{III}} = 5,\quad \gamma_{\mathrm{I}} = \gamma_{\mathrm{III}} = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кГ}}{\text{см}^3},\quad \gamma_{\mathrm{II}} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кГ}}{\text{см}^3}$$



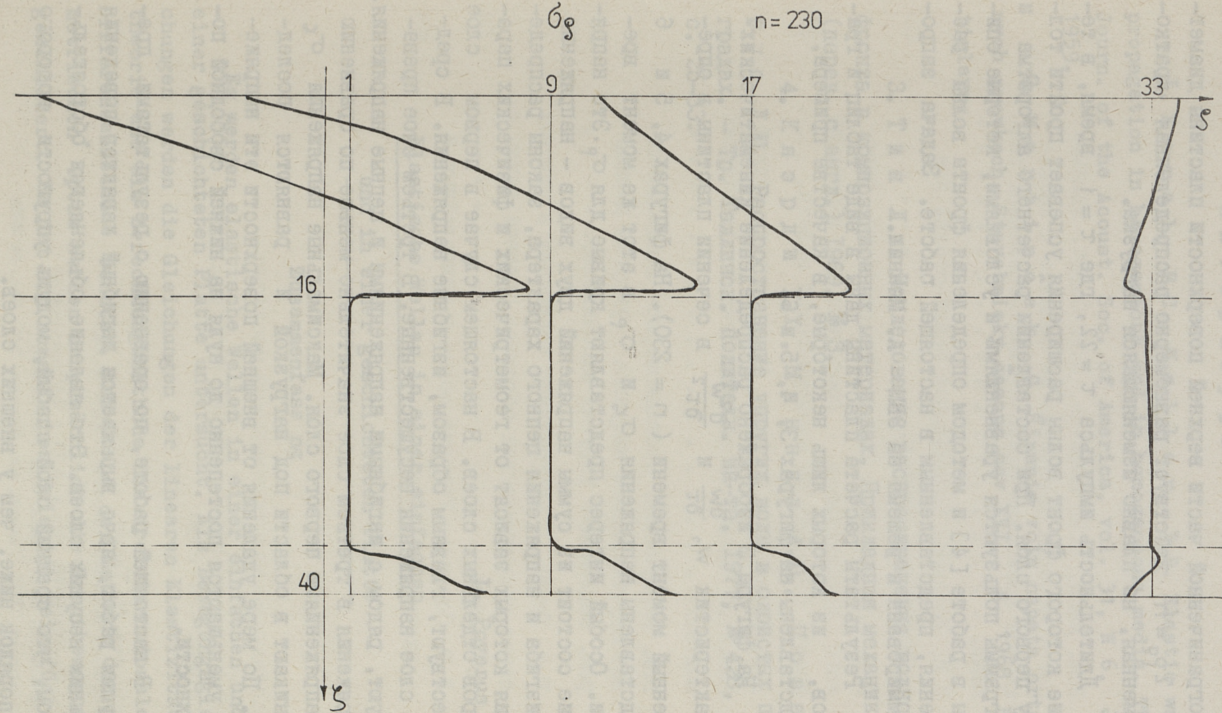
Фиг. 3. Кинематические характеристики w, $\frac{\partial w}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ в сечении слоистой пластины в момент времени $n = 230$.



Фиг. 4. Напряжения σ_ρ и σ_ζ в сечении слоистой пластины в момент времени $n = 90$.



Фиг. 5. Напряжение σ_ζ в сечении слоистой пластины в момент времени n = 230.



Фиг. 6. Напряжение σ_ρ в сечении слоистой пластины в момент времени $n = 230$.

$$E_I = E_{III} = 2{,}1 \cdot 10^6 \frac{кГ}{см^2},\ E_{II} = 2{,}0 \cdot 10^5 \frac{кГ}{см^2},\ \nu_I = \nu_{III} = 0{,}3,\ \nu_{II} = 0{,}125.$$

На ограниченной части верхней поверхности пластины диаметром $2\rho_a = h$ действует равномерно распределенная кратковременная, но плавно изменяющаяся нагрузка.

Длительность импульса $\tau = 22$, где $\tau = 1$ время, в течение которого фронт волны расширения успевает пройти толщину первого слоя. При составлении расчетного алгоритма и программы пользуются уравнениями и условиями, которые описаны в работе [4] и методом определения фронта волны расширения, представленным в настоящей работе. Задача запрограммирована и решена на ЭВМ А. Мяннил.

Результаты расчета пластины даны в виде таблиц и графиков, из которых лишь некоторые, в качестве примера, представлены на фигурах 3, 4, 5 и 6.

На фигуре 3 изображено распределение кинематических характеристик w, $\frac{\partial w}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}$ в сечении пластины в определенный момент времени (n = 230). На фигурах 4, 5 и 6 представлены напряжения σ_ζ и σ_ρ в этот же момент времени. Особый интерес представляют кривые для σ_ρ. Это напряжение состоит из суммы напряжений двух видов - напряжения от изгиба и напряжения цепного характера, законы распределения которых зависят от геометрических и физических параметров отдельных слоев. В настоящем случае в первом слое существуют, главным образом, изгибные напряжения. В среднем слое напряжения несущественные. В третьем слое превалируют, рядом с изгибными напряжениями и цепные напряжения. Напряжения в третьем слое значительно меньше по сравнению с напряжениями первого слоя. Максимальные напряжения σ_ζ возникают в области под нагрузкой и равняются последней. По мере удаления от внешней поверхности эти напряжения уменьшаются постепенно до нуля на нижней свободной поверхности.

В настоящей работе, по сравнению с результатами предыдущих работ, ярче выражается изгибный характер поведения внешних несущих слоев. Это явление объясняется обстоятельством, что средний слой слабый, модуль упругости которого на порядок ниже, чем у внешних слоев.

Литература

I. Karal, F.C., Keller, I.B. Elastic wawe propagation in homogeneons and in homogeneous media. The Journ. of the Acoust. Soc. of America, vol. 31, N 6, June 1959.

2. Martinĉek, G. Ŝirenie voln napata ortotropnych provkoch. Stavebnicky ĉasops sav XVI, 4, 1968, Bratislava.

3. Тин Ли. Исследование распространения волнового фронта в композиционных материалах. Прикладная механика (перев. с англ.), I969, № 3.

4. Кяэрди Х.Х., Мяннил А.Ю., Поверус Л.Ю. Распространение упругих волн в слоистых преградах. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, I977, № 428, с. 25-33.

L. Poverus

Elastische Wellen in einer einfachen und in einer geschichteten Platte

Zusammenfass ng

Es werden elastische Wellen in einer einfachen und in einer geschichteten Platte untersucht. Als Bewegungsgleichungen werden die Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie und als Berechnungsmethode die dreidimensionale Differenzenmethode benutzt. Auf Grund der Methode der geometrischen Optik werden hauptsächlich die Frontbewegungen geschildert. Es ist ein numerisches Beispiel beigefügt.

Содержание

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Труды № 507
ДВУМЕРНОЕ ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ СИСТЕМЫ
Строительная механика XII

Редактор Р. Эек
Техн. ред. М. Тамме
Сборник утвержден коллегией ТПИ 20.02.81
Подписано к печати 28.08.81
Бумага 60х90/16. Печ.л. 5,75 + 0,5 приложение
Уч.-изд. л. 6,6. Тираж 300. МВ-02398.
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Зак. № 536.
Цена руб. 1.00.

Цена 1 руб.