

Ер. 6.7  
394

TALLINNA POLUTEHNILISE  
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 384

**ТРУДЫ  
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

**СБОРНИК СТАТЕЙ**

**УИ**

**ТАЛЛИН 1976**



Ep. 6-7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 394

1976

---

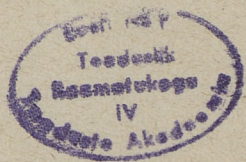
УДК 624

ТРУДЫ  
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

У II

Таллин 1976



## ХАРАКТЕРИСТИКИ НАДЕЖНОСТИ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

### 1. Общие положения

В статье рассматриваются некоторые характеристики надежности, вводимые для решения задачи проектирования систем с оптимальной надежностью. Исследуются пространство независимых конструктивных параметров и свойства характеристик надежности в нем. Расширяется задача оптимального проектирования до проектирования систем с оптимальной надежностью путем расширения пространства входных и выходных параметров, а также фазового пространства качества за счет введения пространства - время.

Надежность, в самом общем смысле, определяется как качество, развернутое во времени, где качеством называется некоторая совокупность свойств элемента или системы элементов, существенно определяющих его соответствие выбранному критерию качества.

Надежность в строительной механике определяется как совокупность безотказности и долговечности системы элементов (конструкции), где безотказность включает в себя требование прочности и (или) жесткости и (или) устойчивости элемента и всей системы в целом, а долговечность - требование безотказности в течение всего периода эксплуатации.

Оптимальная надежность в задаче проектирования оптимальных систем определяется как требуемая надежность, обеспечиваемая минимальными ресурсами. При этом функция качества конструкции развернута в фазовом пространстве конструктивные параметры - время.

Статически неопределенные системы, рассматриваемые в строительной механике, являются сложными системами много-

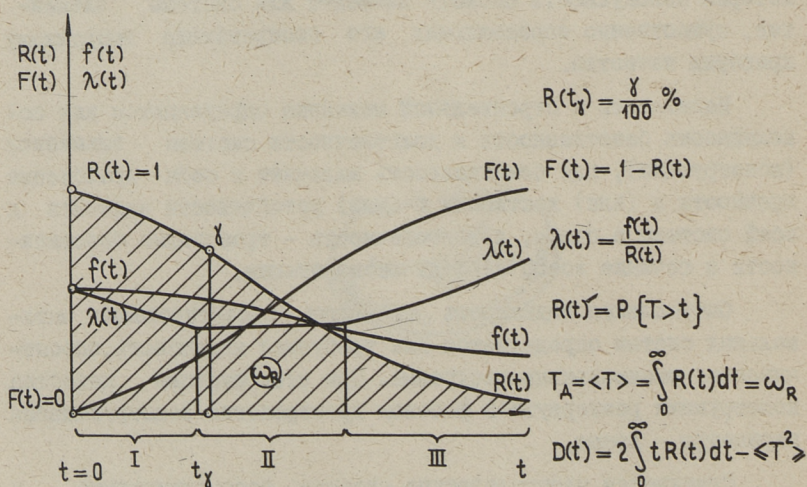
кратного действия с резервированием, обеспечиваемым наличием так называемых "лишних связей". При этом элементы, входящие в систему, рассматриваются, при оценке безотказности, как элементы, работающие до первого отказа без восстановления (здесь не учитывается восстановление отказа вследствие знакопеременной нагрузки).

Статически неопределенные системы, запроектированные как системы с оптимальной надежностью при минимальных затратах, являются системами с исчерпанным резервированием, при котором эффект действия "лишних связей" равен нулю. Оптимальные системы рассматриваются здесь как равнопрочные системы (в принятом смысле).

## 2. Вероятностные характеристики надежности

Время работы элемента (системы) до отказа ( $T$ ) рассматривается как случайная величина, имеющая функцию распределения  $F(t)$  как функцию ненадежности и функцию надежности  $R(t)$  как вероятностную характеристику, являющуюся дополнением к функции распределения (фиг. 1).

Вероятностные характеристики надежности имеют обычный смысл: плотность распределения  $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$



Фиг. 1. Характеристики надежности по времени -  $R(t)$ .

и интенсивность отказов  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$  связаны между собой известным образом  $f(t) = \lambda(t) \cdot e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$ .

В зависимости от характера изменения интенсивности отказов в жизни системы, с точки зрения надежности, различают три периода:

I период - "детский возраст", период приработки, где  $\lambda(t)$  убывает;

II период - "зрелый возраст", период работы в стационарном режиме, где  $\lambda(t) \cong \text{const}$ ;

III период - "старение", период накопления усталостных и прочих повреждений, где  $\lambda(t)$  увеличивается.

Таким образом, надежность системы полностью оценивается качественно, если известны  $R(t)$ ,  $F(t)$ ,  $f(t)$ ,  $\lambda(t)$ , из которых определяются и числовые характеристики надежности - долговечность, заданная надежность (в %) и разброс.

Долговечность системы ( $T_d$ ) оценивается как среднее время жизни конструкции, заданная надежность (в %) определяется как гамма-процентный ресурс в момент времени ( $t_\gamma$ ) и разброс времени отказа характеризуется дисперсией времени до отказа относительно среднего времени жизни.

### 3. Безотказность и долговечность в строительной механике

Под безотказностью системы ( $R_\xi$ ) понимается вероятность пребывания системы в допустимой области без отказов первого рода<sup>X</sup> в течение интервала времени  $0 < t < T_\xi$ , где  $T_\xi$  - время безотказности работы системы до первого отказа первого рода.

Под долговечностью системы ( $R_d$ ) понимается вероятность пребывания системы в допустимой области без отказов первого или второго рода<sup>XX</sup> в течение интервала времени  $T_\xi < t < T_d$ ,

<sup>X</sup> Отказ первого рода - внезапный отказ, связанный с перегрузкой.

<sup>XX</sup> Отказ второго рода - постепенные, накапливающиеся отказы (усталость, ползучесть, износ и пр.).

если  $T_0 < T_D$  (фиг. 2), где  $T_D$  — время долговечности работы системы до первого отказа первого или второго рода,  $t$  — возможное значение времени отказа, меняющееся в интервале  $0 \leq t \leq \infty$ .

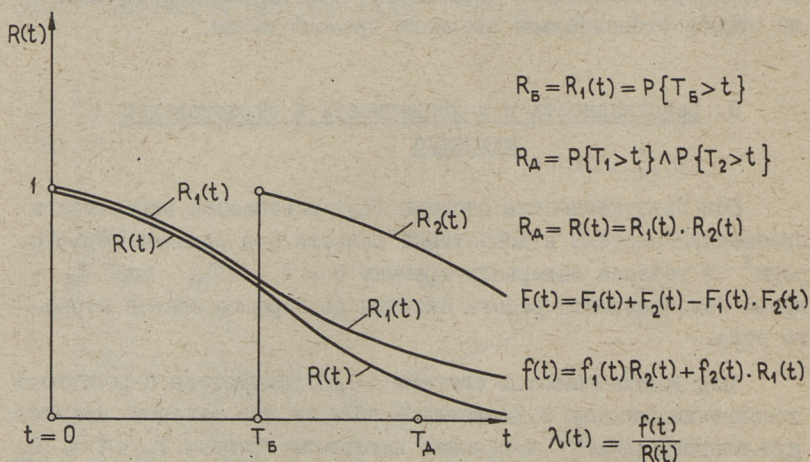
Для группы двух совместных, но независимых случайных событий — отказ первого и отказ второго рода, событие-отказ первого или второго рода рассматриваются как сумма двух случайных событий:  $T_1 + T_2 = T$ ,

где  $T$  — время работы до первого отказа (любого рода),

$T_1$  — время работы до первого отказа первого рода,

$T_2$  — время работы до первого отказа второго рода,

Если функция надежности для отказов первого рода  $R_1(t) = P\{T_1 > t\}$  и функция надежности для отказов второго рода  $R_2(t) = P\{T_2 > t\}$ , то полная функция надежности для суммы двух совместных независимых событий  $R(t)$  определится перемножением надежностей  $R_1(t) \cdot R_2(t) = R(t)$ . При этом вероятностные характеристики надежности — функция распределения  $F(t)$ , плотность распределения  $f(t)$  и суммарная интенсивность  $\lambda(t)$  найдутся обычным образом (фиг. 2).



Фиг. 2. Безотказность ( $R_0$ ) и долговечность ( $R_D$ ).



#### 4. Характеристики надежности в пространстве весовых параметров

Оценка надежности производится в отношении некоторого показателя качества конструкции как случайной функции в пространстве весовые параметры – время, которая может быть выбрана как функция напряжения, перемещения, объема, веса, потенциальной энергии, стоимости конструкции или др.

Для задачи проектирования систем с оптимальной надежностью функция качества ( $X$ ) будет являться функцией независимых переменных весовых параметров ( $q$ ) и функцией времени ( $t$ ). При этом влияние пространства параметров и времени может быть разделено:

$$X(q, t) = A(q) \cdot q(t).$$

Здесь  $X(q, t)$  – случайное значение функции качества,  
 $A(q)$  – оператор преобразования входных параметров  $q(t)$  в выходные параметры качества, соответствующие случайному плану ( $q$ ) в случайный момент времени ( $t$ ).

При этом оператор  $A(q)$  имеет физический смысл случайной величины  $X$ ;

$q(t)$  – нагрузка, как переменный коэффициент масштабирования на оси времени.

Нагрузка рассматривается как случайный стационарный процесс, вероятностные свойства которого не зависят от начала отсчета времени и для которого плотность вероятности во всех сечениях времени одинакова  $f_q(t) = f_q(q)$ .

Для процесса нагружения считаются известными вероятностные характеристики: среднее  $m_q$ , дисперсия  $D_q$ , спектральная плотность  $S_q(\omega)$ , одномерная плотность вероятности  $f_q(q)$ . В расчете могут рассматриваться как динамические нагрузки, так и статически переменные нагрузки, для которых частоты спектра нагрузки значительно меньше собственных частот системы. В этой статье ограничимся лишь учетом статически переменных нагрузок.

Вероятностные характеристики для случайной функции качества  $X(q, t)$ , полученной как произведение двух независимых

случайных величин  $A(q)$  и  $q(t)$ , определяются известным образом:

$$\text{математическое ожидание } m_x = m_a \cdot m_q,$$

$$\text{дисперсия } D_x = D_a D_q + m_q^2 D_a + m_a^2 D_q,$$

$$\text{совместная плотность распределения } f(a, q) = f_a(a) \cdot f_q(q),$$

где  $f_a(a)$ ,  $f_q(q)$ ,  $D_a$ ,  $D_q$ ,  $m_a$ ,  $m_q$  - маргинальные плотности вероятности, дисперсии и средние случайных величин  $A$  и  $q$ .

При этом полезно отметить, что если нагрузка  $q(t)$  имеет нормальный закон распределения, то для некоторой функции выходных параметров  $X(t)$ , связанных с входными параметрами  $q(t)$  некоторым линейным оператором преобразования, нормальный закон распределения остается устойчивым.

Так, если  $X(q, t) = A(q) \cdot q(t)$  на некотором плане будет иметь функциональную связь вида  $X(t) = Aq(t)$ , то

$$m_x = A m_q, \quad D_x = A^2 D_q,$$

$$f_x(x) = f_q[\psi(x)] \cdot |\psi'(x)|,$$

где

$$\psi(x) = \frac{x}{A}, \quad \psi'(x) = \frac{1}{A},$$

так что

$$f_x(x) = f_q\left(\frac{x}{A}\right) \cdot \frac{1}{A}$$

и если

$$f_q(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_q}} \cdot e^{-\frac{(q - m_q)^2}{2D_q}},$$

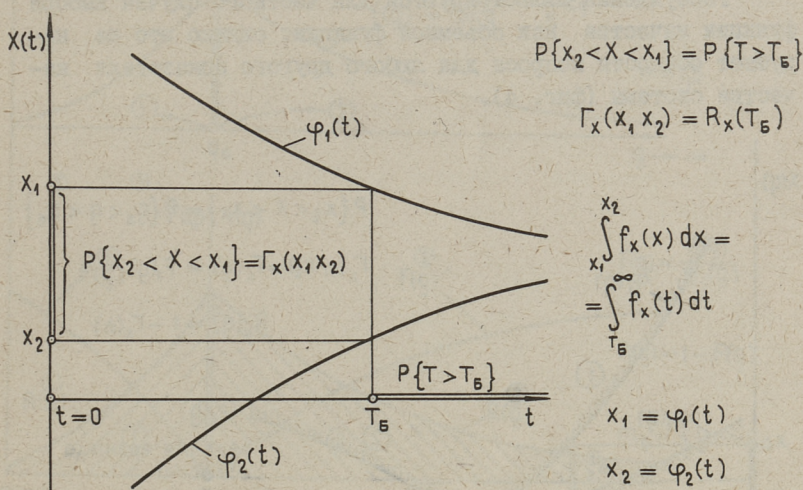
то

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \cdot e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2D_x}}.$$

### 5. Гарантия безотказности

В качестве количественной характеристики безотказности в строительной механике используется показатель гарантии безотказности как вероятность пребывания системы в допустимой области -  $\Gamma_x(X_1, X_2)$ , где  $X_1$  и  $X_2$  опасные пределы относительно процесса  $X(t)$ . Можно показать [1], что если существует функциональная связь  $X_1 = \varphi_1(t)$  и  $X_2 = \varphi_2(t)$ , то вероятность попадания случайной величины ( $X$ ) в интервал  $(X_1, X_2)$  равна вероятности попадания случайного времени до отказа ( $T$ ) на интервал  $(T_0, \infty)$ , иначе говоря, некоторому значению гарантии безопасности  $\Gamma(X_1, X_2)$  соответству-

ет время до отказа ( $T_0$ ). При этом верхний предел времени "жизни" системы не ограничивается и гарантия безотказности здесь тем выше, чем больше заданный интервал безотказности -  $X_1, X_2$  (фиг. 3).



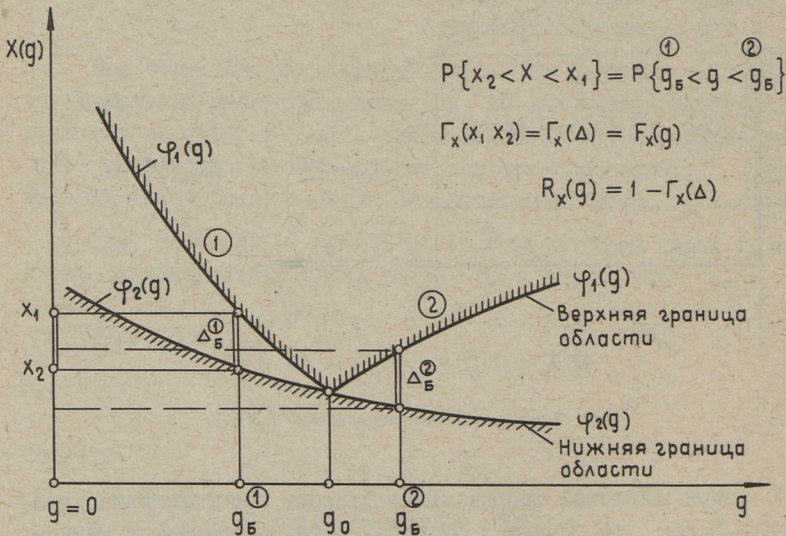
Фиг. 3. Гарантия безотказности -  $\Gamma_X(t)$ .

Если известна маргинальная функция распределения для  $X - F_X(x)$ , то гарантия безотказности определяется тривиально:  $\Gamma_X(X_1, X_2) = F_X(X_1) - F_X(X_2)$ .

Гарантия безотказности на оси весовых параметров ( $q$ ) для задачи проектирования систем с оптимальной надежностью вводится как вероятность пребывания системы в допустимой области, определенной в окрестности оптимального весового параметра  $q_0$ , минимизирующего функцию цели так, чтобы интервал безотказности ( $X_1, X_2$ ) не превосходил некоторой допустимой величины  $\Delta_5$ , определяя предельное значение "эффекта связей", отклоняющего систему от оптимальной и обеспечивающего при этом требуемую надежность. В силу ограниченности "времени жизни" системы (элемента системы) на оси модифицируемых весовых параметров гарантия безотказности тем выше, чем меньше заданный интервал безотказности ( $X_1, X_2$ ) =  $\Delta_5$ , при этом граница "времени жизни" соответству-

ет выходу на границу допустимой области, так что конец одной ветви "жизни" ① соответствует началу другой ветви ②, криволинейно отраженной от границы допустимой области в точке  $q_0$ , определяющей оптимальное решение.

Рассуждения иллюстрируются для частного случая выбора функции качества как объемной функции, однако это не нарушает общности вопроса для любого другого показателя качества системы (фиг. 4).

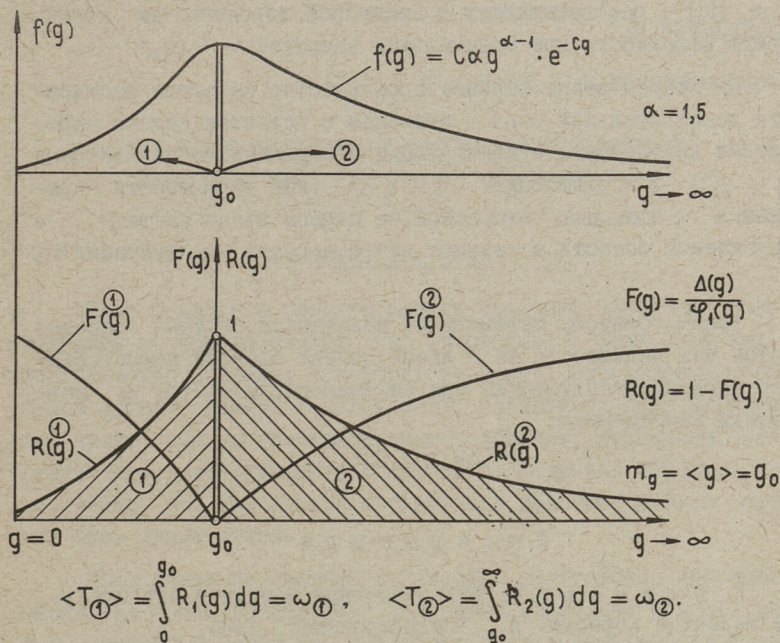


Фиг. 4. Гарантия безотказности -  $\Gamma_x(\Delta)$ .

Каждому значению гарантии безотказности  $\Gamma_x(\Delta)$  соответствует значение параметра "до отказа"  $q_b$  (параметра безотказности), так что вероятность попадания случайной величины  $X$  (как объема конструкции) в интервал  $\Delta_b = (X_1, X_2)$  равна вероятности попадания случайного весового параметра  $q$  в интервал  $(q_b, q_0)$  слева или справа от  $q_0$ .

Функция надежности на оси весовых параметров вводится как дополнение к функции ненадежности  $F(q)$ , зависящей в свою очередь от меры "дефекта"  $\Delta(q) = \varphi_1(q) - \varphi_2(q)$ , и при этом описывается законом плотности вероятности по Вейбуллу, обобщающему экспоненциальный закон на случай двухпараметрического процесса, с математическим ожиданием  $m_q = q_0$ .

(фиг. 5). При этом все характеристики надежности по параметру ( $q$ ) имеют вид усеченных характеристик с началом координат (началом "жизни") в  $q = q_0$ .



Фиг. 5. Характеристики надежности по параметру. -  $R(q)$

## 6. Оптимальная надежность

Оптимальная надежность системы определяется как нормативная надежность, обеспечиваемая с минимальными затратами (см. [2]).

Показатель оптимальной надежности  $R(q_0)$  как показатель качества системы тем выше, чем выше гарантия безотказности по "дефекту"  $\Gamma_x(\Delta)$  как гарантия исчерпания внутренних резервов оптимизации в конструкции.

Задача проектирования системы с оптимальной надежностью распадается на два этапа:

На первом этапе рассматривается пространство качества в фиксированный момент времени ( $t = t_0$ ) с фиксированными па-

параметрами системы  $q = q(t_0)$  и воздействием  $q_v = q_v(t_0)$  и решается задача определения оптимальных параметров  $q_0 = q_0(t_0)$ , обеспечивающих с некоторой вероятностью нормативную надежность при минимальных затратах -  $R(q_0)$ .

На втором этапе фазовое пространство качества расширяется дополнительной осью - временем и решается задача определения долговечности конструкции с переменными параметрами  $q = q(t)$  и воздействием  $q_v = q_v(t)$  как вероятности пребывания оптимально выбранной на первом этапе системы в допустимой области в течение всего периода эксплуатации  $R(t)$ .

Таким образом, оптимальная надежность системы определяется как надежность ее в любой момент времени нормированного периода эксплуатации при минимальных затратах на возведении конструкции:

$$R_0 = R(q_0) \cdot R(t).$$

#### Л и т е р а т у р а

1. Е к и м о в В.В. Вероятностные методы в строительной механике корабля. Л., "Судостроение", 1966.

2. И е г и Э.М. Общая постановка задачи проектирования конструкции с оптимальной надежностью. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1975, № 375.

Е. Jõgi

#### Charakteristiken der Zuverlässigkeit in der Statik der optimalen Baukonstruktionen

#### Zusammenfassung

In der Abhandlung betrachtet man die Wahrscheinlichkeit der Charakteristiken der Baukonstruktionen zur Projektierung von Systemen mit optimaler Zuverlässigkeit. Die vorgeschlagene Methodik ermöglicht die zeitliche Veränderung der Charakteristiken zu berücksichtigen. Zur Formulierung der Aufgabe werden Termini der Zuverlässigkeitstheorie gebraucht.

УДК 624.041.2

Э.М.Иеги, Р.М.Нурмухамедова

РАСЧЕТ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ  
НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ РАМ СПОСОБОМ ЗВЕЗДОЧЕК

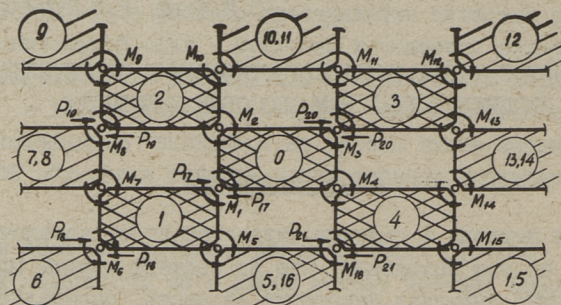
1. Общие положения

Идея подхода к решению задачи способом звездочек основывается на том положении, что из состава рамы (системы) всегда можно выделить некоторую её часть, определенным образом организованную в подсистему, заменив влияние окружающей части рамы на нее граничными условиями, заданными либо статически, либо кинематически, либо смешанным образом. Естественно, что информация о граничных условиях должна быть при этом достаточной.

Представление системы в качестве некоторого конечного множества взаимодействующих подсистем позволяет описать работу системы в целом как некоторую последовательность условий работы выделенных подсистем и тем точнее, чем меньше будет взаимодействие подсистемы с окружающей средой.

Если образовать расчетную схему рамы как систему, состоящую из жестких замкнутых контуров, шарнирно соединенных друг с другом в узлах, то такая основная система рамы содержит в качестве конечного элемента контуры-диски, обладающие достаточной замкнутостью свойств и автономностью работы. Если при этом выделяемая подсистема как организованная группа контуров с некоторым центральным контуром ( $n = 0$ ) и обрамляющими контурами ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) имеет структуру звездочки, то такая звездочка выступает как конечный элемент рамы и обладает при этом тем большей автономностью, чем выше порядок звездочки (в зависимости от числа контуров, входящих в звездочку, фиг. 1).

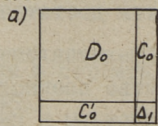
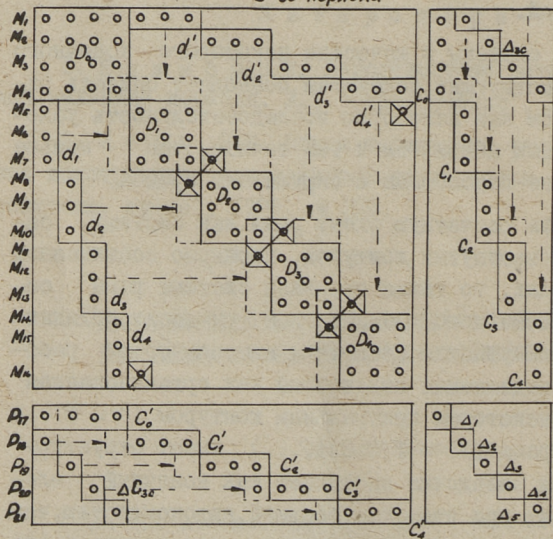
Способ звездочек разработан для статического расчета и оптимального проектирования сложных многоконтурных рам [1]



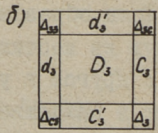
Образование звездочки 5-го порядка

Структура матрицы звездочки 5-го порядка

Структура матрицы звездочки 3-го порядка



а) центральный контур  $n=0$



б)  $n=3$

Условные обозначения:  
 /// - звездочка 5-го порядка  
 // - звездочка 3-го порядка  
 o - позиции ненулевых элементов

Фиг. 1. Образование звездочки и структура матрицы  $D_n$ .



и является одной из разновидностей метода конечных элементов, приспособленного для решения задачи оптимального проектирования дискретных стержневых систем.

Обоснованность способа звездочек вытекает из сущности как физической, так и математической моделей задачи: выбранная физическая (расчетная) модель задачи подчиняется принципу затухания взаимодействия контуров по мере увеличения их отдаленности, а соответствующая математическая модель расчета имеет структуру блочной матрицы, близкой к квазидиагональной матрице (фиг. I).

Метод звездочек позволяет свести задачу статического расчета и оптимального проектирования сложных многоконтурных рам в многомерном пространстве к решению последовательности задач на уровне звездочки, многократно понижая при этом размерность задачи. В этом смысле способ звездочек может, с одной стороны, рассматриваться как вычислительный процесс для раскрытия статической неопределенности сложных многократно статически (кинематически) неопределенных систем (что соответствует распаду квазидиагональной матрицы) и, с другой стороны, имеет самостоятельное значение для решения задачи оптимального проектирования сложных статически неопределенных систем, позволяя получить численное решение задачи об оптимальном распределении материала вдоль заданной геометрии осей. Точность статического расчета и оптимального решения рамы способом звездочек может быть сколь угодно увеличена путем повышения порядка звездочки. При этом для решения задачи в первом приближении используется звездочка низшего порядка, уточненное решение соответствует звездочке высшего порядка.

Расчет рам способом звездочек позволяет проводить оптимизацию рамы поэтапно так, что на первом этапе проводится оптимизация контура как конечного элемента звездочки, на втором этапе — оптимизация звездочки как конечного элемента рамы и на третьем — оптимизация рамы в целом, осуществляемое как итерационный процесс: контур — система контуров в звездочке — система звездочек в раме, с последовательным учетом взаимодействия элементов системы, найденного на  $(K)$ -ом шаге для оптимизации на  $(K+1)$ -ом шаге для каждого этапа.

## 2. Статический расчет рамы способом звездочек

Приближенный расчет рамы способом звездочек сводится к последовательности расчетов определенным образом перемещающихся расчетных моделей-звездочек. В статье приводится общая матричная формулировка статического расчета многоконтурных рам способом звездочек, приспособленного для оптимизации рам с постановкой задачи на ЭВМ. Алгоритм строится для метода сил, однако он в такой же степени справедлив и для метода перемещений (вплоть до совпадения степени статической и кинематической неопределенности подсистем на уровне звездочки).

Матрица сил взаимодействия контуров в раме ( $Y$ ) будет последовательно составляться из подматриц приближенных значений сил взаимодействия контуров в звездочке ( $Y_*$ ) с последующим уточнением их значений путем перехода от звездочки низшего порядка к звездочке высшего порядка. Математическая модель приближенного расчета звездочки (фиг. 2) определяет алгоритм образования матрицы коэффициентов канонических уравнений метода сил (метода перемещений) для звездочки любого порядка ( $D_*$ ) как квазидиагональной суперматрицы с элементами на главной диагонали, имеющими структуру матриц, соответствующих звездочке третьего (низшего) порядка ( $D_n$ ), где  $n$  - индекс контура, выступающего как центральный контур. Каждая матрица звездочки третьего порядка ( $D_n$ ) описывает взаимодействие некоторого центрального контура ( $n = 0$ ) со смежными контурами, примыкающими к  $(0)$ -му, и имеет вид квадратной матрицы, соответствующей силам (или перемещениям) взаимодействия со смежными контурами ( $Y_* = \{Y_i\}$ , для  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

Матрица коэффициентов - свободных членов для звездочки любого порядка ( $D_{p*}$ ) - образуется как суперматрица с элементами, имеющими структуру матриц, соответствующих звездочке третьего порядка ( $D_{(n)p}$ ), где  $n$  - индекс контура, выступающего как центральный контур. Каждая из матриц звездочки третьего порядка ( $D_{(n)p}$ ) имеет здесь смысл суммарной матрицы

$$(D_{(n)p}) = \bar{D}_{(n)p} + D_{(n)y},$$

где первая матрица  $\bar{D}_{(n)p} = \{\bar{\Delta}_{np}\}$ , для  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , содержит коэффициенты, учитывающие влияние внешней нагрузки,



приложенной к контурам звездочки без учета сил взаимодействия контуров (матрица нулевого приближения) и вторая матрица  $D_{(n)}y = \{\Delta_{ny}\}$ , для  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , содержит коэффициенты, учитывающие влияние сил взаимодействия контуров в звездочке ( $Y_*$ ) как поправки к матрице нулевого приближения, определяемой итерационно и на  $(K)$ -ом приближении имеющей смысл учета влияния внешних узловых сил взаимодействия контуров в звездочке, вычисленных на  $(K-1)$ -ом приближении ( $Y_*^{(K-1)}$ ).

Итерационный процесс проводится до совпадения значений сил взаимодействия для двух смежных приближений с заданной точностью

$$Y_*^{(K)} - Y_*^{(K-1)} \leq \varepsilon.$$

Таким образом, статический расчет рамы описывается последовательностью статических расчетов определенным образом перемещающихся звездочек третьего порядка. С учетом этого обстоятельства в дальнейшем изложение алгоритма статического расчета и оптимального проектирования рамы иллюстрируется для звездочки третьего порядка (фиг. 3).

Исходные матрицы статического расчета звездочки-матрицы усилий в контурах (статически возможные) от внешних нагрузок

$$\tilde{b}_p = \{\tilde{b}_{p(n)}\}, \quad \text{для } n = 0, 1, 2, 3, 4,$$

где  $n$  - индекс контура,

0 - центральный контур звездочки,

1, 2, 3, 4 - обрамляющие контуры звездочки третьего порядка,

(~) - признак статической определенности,

от единичных сил взаимодействия контуров ( $Y_i = 1$ )

$$\tilde{b}_i = \{\tilde{b}_{i(n)}\}, \quad \text{для } n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

где  $i$  - индекс неизвестной силы взаимодействия контуров.

Эти матрицы не зависят от параметров весовой функции и не модифицируются в процессе оптимизации.

Матрица податливости звездочки ( $F_*$ ) формируется как квазидиагональная суперматрица, на главной диагонали которой элементы имеют структуру матриц податливости контуров, обрамляющих звездочку ( $\bar{f}_{(n)}$ )

$$F_* = [\bar{f}_{(n)}], \quad \text{для } n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

В свою очередь матрицы податливостей контуров  $\bar{f}_{(n)}$  имеют структуру квазидиагональной матрицы податливостей элементов (стержней), образующих контур  $(f_s)$

$$\bar{f}_{(n)} = [\bar{f}_{s(n)}], \quad \text{для } s = 1, 2, 3, 4,$$

где  $s$  - индекс стержня, входящего в контур  $(n)$ . При этом матрица податливости каждого контура содержит в себе весовые параметры лишь для стержней, входящих в контур, так что вектор весовых параметров контура  $(n)$  -  $g_{(n)}$  будет содержать лишь весовые параметры стержней контура  $s_{(n)}$

$$g_{(n)} = \{g_{s(n)}\}, \quad \text{для } s = 1, 2, 3, 4,$$

где  $g_{s(n)} = \frac{l_{s(n)}}{l_{s(0)}}$  - безразмерный параметр жесткости  $s$ -го стержня в контуре  $(n)$ .

Матрица податливости звездочки содержит в себе кроме внутриконтурных весовых параметров  $g_{(n)}$  контуров, образующих звездочку ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ), и межконтурные весовые параметры, связывающие погонные жесткости элементов разных контуров  $(G_{(n)})$ . Гипервектор весовых параметров звездочки  $(G_*)$  будет содержать векторы внутриконтурных весовых параметров  $g_{(n)}$ , для  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  и вектор межконтурных весовых параметров  $G_{(n)}$  для  $n = 1, 2, 3, 4$ , где  $G_{(n)} = -\frac{l_{s(n)}}{l_{s(0)}}$ , так

что 
$$g_* = (g, G),$$

где 
$$g = \{g_{(n)}\}, \quad \text{для } n = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$G = \{G_{(n)}\}, \quad \text{для } n = 1, 2, 3, 4.$$

При этом матрица податливости звездочки может быть представлена как произведение двух матриц

$$F_* = F_{(g)} \cdot F_{(G)},$$

где матрица  $F_{(g)}$  является квазидиагональной матрицей податливостей контуров, входящих в звездочку и взятых раздельно

$$F_{(g)} = [f_{(n)}], \quad \text{для } n = 0, 1, 2, 3, 4,$$
 зависящей лишь от внутриконтурных весовых параметров  $g$ , матрица  $F_{(G)}$  является диагональной матрицей межконтурных весовых

параметров  $G$  для контуров, обрамляющих центральный контур звездочки

$$F_{(G)} = \left[ 1, \frac{1}{G_{(n)}} \right], \quad \text{для } n = 1, 2, 3, 4.$$

Матрица  $F_{(G)}$  появляется как результат взаимодействия контуров, объединенных в подсистему (звездочку).

Такое представление матрицы податливости позволяет решать задачу оптимального проектирования звездочки на двух уровнях: на уровне контура без учета взаимодействия контуров (нулевой уровень) и на уровне звездочки с учетом взаимодействия контуров в звездочке.

Матрицы расчетных усилий в контурах получаются известным образом [2], так что при выходе на уровень звездочки внутренняя неопределенность контура считается раскрытой.

### 3. Объемная функция звездочки

Объемная функция звездочки рассматривается как сумма объемных функций контуров, входящих в звездочку

$$V_* = \sum_n V_n, \quad \text{для } n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Здесь  $V_n$  — объемная функция контура, имеющая два смысла: значение объема контура на границе прочности  $[V_n]$  и значение объемной функции контура с учетом эффекта<sup>х)</sup> действия связей  $V_n(g_{(n)})$ .

Объемная функция звездочки также будет иметь два смысла: значение объема звездочки на границе прочности

$$[V^*] = \sum_n [V_n]$$

и значение объемной функции с учетом эффекта действия связей

$$V^*(g_*) = \sum_n V_n(g_*);$$

Вектор оптимальных весовых параметров, определяющий раму с минимальным расходом материала (объемом или весом), соответствует нулевому эффекту влияния связей, так что для

х) Эффект действия связей как эффект несоответствия объема закону распределения весовой функции.

$g_* = g_{*opt}$ . Объемная функция звездочки равна ее объему на границе прочности

$$[V^*] = V^*(g_{*opt}),$$

то есть вектор оптимальных весовых параметров, соответствующий минимуму объема, определяет равнопрочную систему (в принятой постановке – равнопрочная система для расчетного сечения в каждом стержне контура, звездочки, рамы).

Объемная функция с учетом эффекта связи зависит от значений критериев по весовым параметрам – внутриконтурным

$$K_p(g) = \frac{[g_s]}{g_s} \quad \text{и межконтурным} \quad K_p(G) = \frac{[G_s]}{G_s} -$$

устанавливающих меру эффекта связей и определяющих ветвь объемной функции контура или звездочки, соответственно, в пространстве весовых параметров.

Учитывая особенности структуры матрицы податливости звездочки с отделенными матрицами влияния внутриконтурных ( $g$ ) и межконтурных ( $G$ ) весовых параметров, вычисление объемной функции звездочки проводится в два этапа: на первом этапе вычисляется объемная функция каждого контура с учетом лишь весовых параметров самого контура и на втором – объемная функция звездочки как сумма объемных функций, входящих в звездочку, с учетом также и межконтурных весовых параметров.

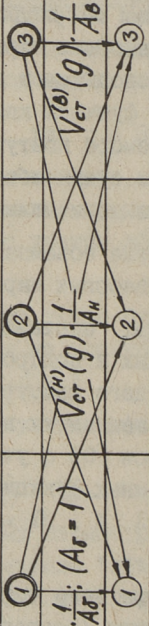
В такой постановке объемная функция звездочки в пространстве независимых весовых параметров ( $g = \{g_{(n)}\}$ ,

$G = \{G_{(n)}\}$ ) будет состояться из объемных функций контуров, определенных в подпространстве внутриконтурных весовых параметров каждого контура раздельно ( $g = \{g_{(n)}\}$ ), с последующим отображением их в подпространство межконтурных весовых параметров ( $G$ ) с учетом распределения  $G_{(n)}$  и суммированием объемных функций контуров, строго соответствующих  $g = \{g_{(n)}\}$  и  $G = \{G_{(n)}\}$  для каждого контура  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ .

Для звездочки третьего порядка, в общем случае, объемная функция каждого контура (составленного из 4-х элементов) будет определяться в пространстве трех независимых параметров ( $g_s$ ), а объемная функция звездочки (составленной из 5 элементов) – в пространстве четырех независимых параметров ( $G_n$ ). Для частного случая стержневой системы, обладающей для кон-

Объемная функция контура

$K_p(g)$	$V_g^{(n)} = V_{CT}^{(n)} \cdot \Phi_n$ , где $\Phi_n = a_B^{(n)} + 2 + a_H^{(n)}$	Общая форма
$V_{CT}^{(n)}(g)$	$[V_{CT}^{(n)}] \cdot \frac{1}{a_{CT}^{(n)}} \cdot (a_{CT} = 1)$	$\Phi_n = \sum_{\sigma} a_{\sigma}^{(n)}$ ( $a_{\sigma}^{(n)} = 1$ )
	$V_{(g)}^{(n)} = [V_{SO}] \cdot \frac{1}{a_{SO}^{(n)}} \cdot \sum_{\sigma} a_{\sigma}^{(n)}$	$V_{\sigma}^{(n)}(g) = [V_{SO}^{(n)}] \cdot \frac{1}{a_{SO}^{(n)}}$
	Объемная функция звездочки	$a_S^{(n)} = \sqrt{g_S^{(n)} \lambda_S^{(n)}}$ $g_S^{(n)} = \frac{l_S^{(n)}}{l_{\sigma}^{(n)}}$ $\lambda_S^{(n)} = \frac{l_{\sigma}^{(n)}}{l_{\sigma}^{(n)}}$
$K_p(G)$	$V_* = V_{CT}^{(n)}(G) \cdot \Phi_*$ , где $\Phi_* = 2A_B \Phi_B + \Phi_B + 2A_H \Phi_H$	$V_{\sigma}^{(\delta)}(G) = V_{\sigma}^{(n_0)}(g) \cdot \frac{1}{A_{n_0}}$
$V_{CT}^{(n)}(G)$	$[V_{CT}^{(n)}] \cdot \frac{1}{A_{\sigma}^{(n)}} \cdot (A_{\sigma} = 1)$	$\Phi_n$ - опорный контур $SO$ - опорный стержень в контуре
$K_p(g)$	$[V_{CT}^{(n_0)}] \cdot \frac{1}{a_{\sigma}^{(n_0)}} \cdot (a_{\sigma} = 1)$	$[V_{SO}^{(n_0)}] \cdot \frac{1}{a_{SO}^{(n_0)}}$
$V_{\sigma}^{(n_0)}(g)$	$V_* = V_{\sigma}^{(\delta)}(G) \cdot \Phi_*$ , где $V_{\sigma}^{(\delta)}(G) = V_{\sigma}^{(n_0)}(g) \cdot \frac{1}{A_{n_0}}$	$\delta$ - базисный контур в звездочке ( $G_n = G_{\sigma} = 1$ ) $\delta$ - базисный стержень контура ( $g_S = g_{\sigma} = 1$ ) $n$ - число контуров в звездочке
$\Phi_*$	$\Phi_* = \sum_{n=1}^n A_n \Phi_n$ ; $A_n = \sqrt{G_n \lambda_n^3}$ ; $\lambda_n = \frac{l_{\sigma}^{(n)}}{l_{\sigma}^{(n)}}$ ; $G_n = \frac{l_{\sigma}^{(n)}}{l_{\sigma}^{(n)}}$	$A_{n\sigma} = a_{\sigma}^{(n_0)} = 1$ ; $B_{SO}^{(n_0)} = a_{SO}^{(n_0)} \cdot A_{n_0}$
$V_*$	$V_* = [V_{SO}^{(n_0)}] \cdot \frac{1}{a_{SO}^{(n_0)}} \cdot A_{n_0} \cdot \Phi_* = [V_{SO}^{(n_0)}] \cdot \frac{1}{a_{SO}^{(n_0)}} \cdot \Phi_*$	





тура и звездочки осью упругой симметрии, число независимых внутриконтурных и межконтурных весовых параметров пространства понижается до двух:

$$q = (q_v, q_n), \quad G = (G_v, G_n),$$

где  $v, n$  — индекс верхнего, нижнего элемента, соответственно.

Общая схема счета объемной функции звездочки и контуров, входящих в звездочку, в зависимости от внутриконтурных ( $q$ ) и межконтурных ( $G$ ) весовых параметров звездочки  $q_* = (q, G)$  описывается в таблице I.

#### 4. Оптимальное проектирование рамы

Разрабатывается алгоритм оптимального проектирования рамы с показателем качества конструкции, выбранным как минимальный расход материала (объем, вес). При этом статический расчет и оптимизация рамы проводятся способом звездочек, позволяющим отобразить многомерную задачу в пространстве независимых весовых параметров в последовательность двумерных (в общем случае — трехмерных) задач в подпространствах, построенных на внутриконтурных и межконтурных весовых параметрах отдельно.

Оптимальное проектирование звездочки осуществляется на двух уровнях: первый уровень — это уровень оптимизации контура как конечного элемента звездочки и второй — уровень оптимизации звездочки в целом как конечного элемента рамы.

На первом уровне проводится оптимизация внутриконтурных весовых параметров ( $q = \{q_{(n)}\}$ ), минимизирующих объемную функцию каждого контура отдельно, а на втором — оптимизация межконтурных весовых параметров ( $G = \{G_{(n)}\}$ ), минимизирующих объемную функцию звездочки в целом. Поиск оптимального решения на уровнях контур — звездочка — рама осуществляется как итерационный процесс с внутренним циклом итерации для контура, средним циклом итерации для звездочки и внешним циклом итерации для рамы в целом.

Выбор направления модификации оптимизируемых параметров осуществляется из оценки критерия эффекта связей

$$K_p(\Delta) = \frac{V^*(g_*) - [V^*]}{[V^*]} = \frac{\Delta V^*(g_*)}{[V^*]},$$

где  $[V^*]$  — значение объема звездочки на границе прочности,

$V^*(g_*)$  — значение объемной функции звездочки в пространстве весовых параметров  $(g_*)$ .

При выборе направления учитывается, что для оптимального вектора весовых параметров  $g_* = g_{*opt}$  соответствует значение критерия эффекта связей, равное нулю:

$$K_p(\Delta) = \frac{\Delta V^*(g_{*opt})}{[V^*]} = 0.$$

Естественно, что вопрос об организации поиска, приводящего кратчайшим путем к решению, оптимизирующему выбранную функцию цели, представляет самостоятельный интерес и в этой статье не приводится.

Сходимость решения обеспечивается как сходимость итерационного процесса статического расчета с последовательным уточнением и учетом взаимного воздействия контуров в звездочке, а также последующим увеличением размеров звездочки для уточнения и учета взаимного воздействия контуров в раме. Таким образом, точность статического расчета, а следовательно, и точность оптимального решения может быть сколь угодно повышена.

Блок-схема алгоритма оптимального проектирования рам способом звездочек приводится на фиг. 4 (см. вкладку).

## Л и т е р а т у р а

1. Иег и Э.М. Оптимальное проектирование статически неопределенных рам, как проблема математического программирования. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1965, серия А, № 227.

2. Иег и Э.М., Нурмухамедова Р.М. К расчету и оптимальному проектированию контура. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1974, № 360.

Optimale Projektierung der Rahmen  
mittels Sternchenverfahren

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird ein Modell der statisch unbestimmten komplizierten Rahmen zur optimalen Projektierung mittels Sternchenverfahren vorgeschlagen. Das Modell ermöglicht die statische Berechnung und Optimierung der Rahmen im mehrdimensionalen Raum mit Berechnungen und Optimierungen der Sternchen in Teilräumen mit niedrigerer Dimension zu ersetzen. Man untersucht die Struktur der Sternchen und die betreffenden Matrixen. Der Algorithmus der optimalen, die Volumenfunktion des Sternchens (Rahmen) minimierenden Lösung ist beschrieben und das Blockschema der Berechnungen gegeben.



УДК 624.041.2

В.Б. Ганичев, Э.М. Иеги,  
Р.С. Мжаванадзе

### ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОКОНТУРНЫХ РАМ

В статье рассматривается общая модель задачи оптимального проектирования многоконтурных рам с учетом физической и геометрической нелинейности системы и топологического аспекта проблемы.

Задача формулируется в матричной форме с постановкой решения ее на ЭВМ. Общая модель иллюстрируется примером оптимального проектирования 9-контурной рамы.

Уровни решения задач оптимального проектирования в строительной механике весьма многообразны. Для частного вида стержневых конструкций—многоконтурных рам можно указать эти уровни следующим образом:

- уровень оптимизации поперечного сечения балки с конечным элементом — поперечное сечение прокатного профиля;
- уровень оптимизации балки — стержня с конечным элементом — отрезок стержня малой длины;
- уровень оптимизации простой рамы (частный вид контура) с конечным элементом балка — стержень;
- уровень оптимизации многоконтурной рамы с конечным элементом рама — контур;
- уровень оптимизации сложных многоконтурных рам с конечным элементом группа контуров — гиперконтур, звездочка или др.

На каждом уровне оптимизации принимается, что значения параметров конечного элемента этого уровня оптимальны, так же как и для условий работы в системе, оптимизируемой на

этом уровне. С целью уточнения решения допускается возвращение на уровень конечного элемента и доведение его параметров до оптимальных, с учетом его взаимодействия в системе.

В статье исследуется задача оптимизации на уровне сложных многоконтурных рам с конечным элементом контур или группа контуров.

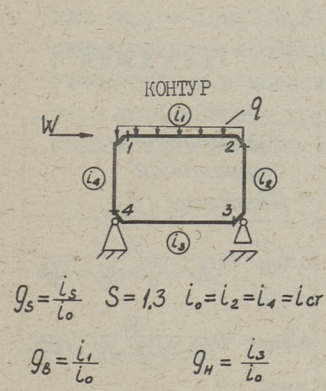
## I. Статический расчет многоконтурной рамы

Для раскрытия статической неопределенности многоконтурной рамы используется метод звездочек, позволяющий задачу статического расчета и оптимального проектирования рамы в многомерном пространстве свести к задаче расчета и оптимального проектирования конечного элемента на выбранном уровне, при этом многомерное пространство оптимизируемых параметров преобразуется во множество подпространств полученной размерностью. Возможности такого преобразования усматриваются в структуре матрицы канонических уравнений метода сил (или метода перемещений) для рамы, представленной как система контуров. Следует отметить, что выбором уровня расчета и оптимального проектирования, с соответствующим конечным элементом, мерность задачи может быть несдвоеннократно понижена.

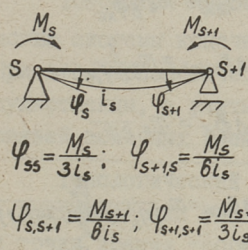
Статический расчет звездочки строится на аналогии с расчетом многопролетных неразрезных балок, при этом в качестве однопролетных разрезных балок, шарнирно соединенных в смежных пролетах в основной системе, выступают "однопролетные" контуры-диски, шарнирно соединенные друг с другом в смежных "пролетах". Статический расчет звездочки третьего порядка сводится при этом к раскрытию неопределенности пятой степени, если внутренняя неопределенность контура "пролета" считается разрешенной. Для звездочки, обладающей осью упругой симметрии, неопределенность ее понижается до трех.

Рассмотренный подход может быть с успехом применен и для раскрытия неопределенности системы методом перемещений.

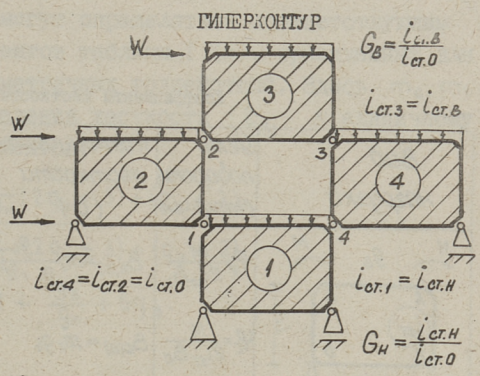
Матричная формулировка задачи расчета контура и группы контуров иллюстрируется на уровне конечных элементов - контуре и гиперконтуре, для которых приводятся матрицы податливости (фиг. I). Здесь матрица податливости гиперконтуре с



КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ СТЕРЖЕНЬ

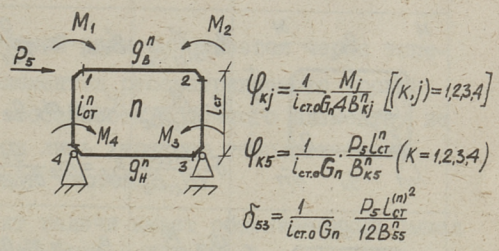


$$f_s = \frac{1}{G_s} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_s \\ M_{s+1} \end{matrix} \quad \bar{f}_n = \frac{1}{G_n}$$



КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

КОНТУР

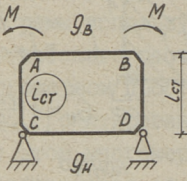
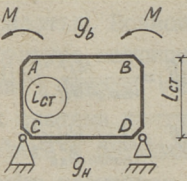
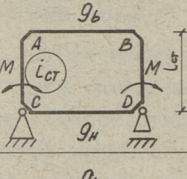
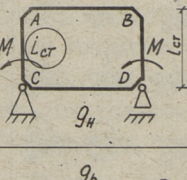
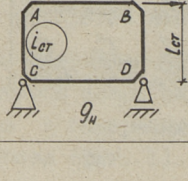


$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\delta_5$	
$\frac{1}{4B_{11}^n}$	$\frac{1}{4B_{12}^n}$	$\frac{1}{4B_{13}^n}$	$\frac{1}{4B_{14}^n}$	$\frac{l_{cr}^n}{12B_{15}^n}$	$M_1 = 1$
$\frac{1}{4B_{21}^n}$	$\frac{1}{4B_{22}^n}$	$\frac{1}{4B_{23}^n}$	$\frac{1}{4B_{24}^n}$	$\frac{l_{cr}^n}{12B_{25}^n}$	$M_2 = 1$
$\frac{1}{4B_{31}^n}$	$\frac{1}{4B_{32}^n}$	$\frac{1}{4B_{33}^n}$	$\frac{1}{4B_{34}^n}$	$\frac{l_{cr}^n}{12B_{35}^n}$	$M_3 = 1$
$\frac{1}{4B_{41}^n}$	$\frac{1}{4B_{42}^n}$	$\frac{1}{4B_{43}^n}$	$\frac{1}{4B_{44}^n}$	$\frac{l_{cr}^n}{12B_{45}^n}$	$M_4 = 1$
$\frac{l_{cr}^n}{12B_{51}^n}$	$\frac{l_{cr}^n}{12B_{52}^n}$	$\frac{l_{cr}^n}{12B_{53}^n}$	$\frac{l_{cr}^n}{12B_{54}^n}$	$\frac{l_{cr}^n}{12B_{55}^n}$	$\rho = 1$

Фиг. 1. Матрицы податливости контура и гиперконтура.

Таблица I

Коэффициенты жесткости

Вид нагрузки	Углы поворота смещения	Коэффициенты жесткости (а)	Коэффициенты приращения жесткости (б)
	$\varphi_A = \frac{M}{2L_{cr}B_A}$ $\varphi_C = \frac{M}{2L_{cr}B_C}$	$B_{A(b)} = m_1 \frac{g_b}{g_H + 2}$ $B_{C(D)} = m_1 g_b$	$\Delta B_{A(b)} = m_1 \frac{g_b}{(g_H + 3) \frac{\varphi_{bc}}{2} + (g_H + 1) \frac{\varphi_{bc}}{2}}$ $\Delta B_{C(D)} = m_1 \frac{g_b}{(g_H + 3) \frac{\varphi_{bc}}{2} - (g_H + 1) \frac{\varphi_{bc}}{2}}$
	$\varphi_A = \frac{M}{6L_{cr}B'_A}$ $\varphi_C = \frac{M}{6L_{cr}B'_C}$ $\delta = \frac{ML_{cr}}{12L_{cr}B'_\delta}$	$B'_{A(b)} = m_2 \frac{g_H}{6g_H + 1}$ $B'_{C(D)} = m_2 g_H$ $B'_\delta = m_2 \frac{g_H}{6g_H + 2}$	$\Delta B'_{A(b)} = m_2 \frac{1}{6\varphi_{bc}}$ $\Delta B'_{C(D)} = m_2 \frac{1}{6\varphi_{bc}}$ $\Delta B'_\delta = m_2 \frac{1}{6\varphi_{bc}}$
	$\varphi_A = \frac{M}{2L_{cr}B_A}$ $\varphi_C = \frac{M}{2L_{cr}B_C}$	$B_{A(b)} = m_0 g_H$ $B_{C(D)} = m_0 \frac{g_H}{g_b + 2}$	$\Delta B_{A(b)} = m_0 \frac{g_H}{(g_b + 3) \frac{\varphi_{bc}}{2} - (g_b + 1) \frac{\varphi_{bc}}{2}}$ $\Delta B_{C(D)} = m_0 \frac{g_H}{(g_b + 3) \frac{\varphi_{bc}}{2} + (g_b + 1) \frac{\varphi_{bc}}{2}}$
	$\varphi_A = \frac{M}{6L_{cr}B'_A}$ $\varphi_C = \frac{M}{6L_{cr}B'_C}$ $\delta = \frac{ML_{cr}}{12L_{cr}B'_\delta}$	$B'_{A(b)} = m_2 g_H$ $B'_{C(D)} = m_2 \frac{g_H}{6g_b + 1}$ $B'_\delta = m_2 \frac{g_H}{6g_b + 2}$	$\Delta B'_{A(b)} = m_2 \frac{g_H}{g_b} \frac{1}{6\varphi_{bc}}$ $\Delta B'_{C(D)} = m_2 \frac{g_H}{g_b} \frac{1}{6\varphi_{bc}}$ $\Delta B'_\delta = m_2 \frac{g_H}{g_b} \frac{1}{6\varphi_{bc}}$
	$\varphi_A = \frac{DL_{cr}}{12L_{cr}B'_A}$ $\varphi_C = \frac{PL_{cr}}{12L_{cr}B'_C}$ $\delta = \frac{PL_{cr}}{12L_{cr}B'_\delta}$	$B'_{A(b)} = m_2 \frac{g_H}{3g_H + 1}$ $B'_{C(D)} = m_2 \frac{g_H}{3g_b + 1}$ $B'_\delta = m_2 \frac{g_H}{1 + 2g_H + 2g_b + 3g_b g_b}$	$\Delta B'_{A(b)} = m_2 \frac{g_H}{(3g_H + 1) \varphi_{bc}}$ $\Delta B'_{C(D)} = m_2 \frac{g_H}{(3g_b + 1) \varphi_{bc}}$ $\Delta B'_\delta = m_2 \frac{g_H}{(2g_H + g_b + 3g_b g_b) \varphi_{bc}}$



конечным элементом контура описывается с помощью приведенных коэффициентов жесткости ( $B_{kj}$ ), соответствующих поворотам узлов контура ( $\varphi$ ) и горизонтальному сдвигу ( $\delta$ ) от единичных воздействий, причем коэффициенты жесткости ( $B_{kj}$ ) для  $k, j = 1, 2, 3, 4, 5$  могут определяться соответствующим суммированием коэффициентов таблицы I (а), приведенных для симметричных и кососимметричных воздействий. Здесь  $m_0, m_1, m_2$  — коэффициенты приведения жесткости  $B_{kj}$  к единичному воздействию узловых моментов:

$$m_0 = \frac{1}{g_n} (2g_b + 3) + (g_b + 2)$$

$$m_1 = \frac{1}{g_b} (2g_n + 3) + (g_n + 2)$$

$$m_2 = 1 + \frac{g_b}{g_n} + 6g_b.$$

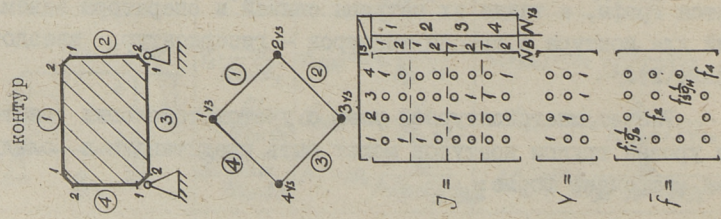
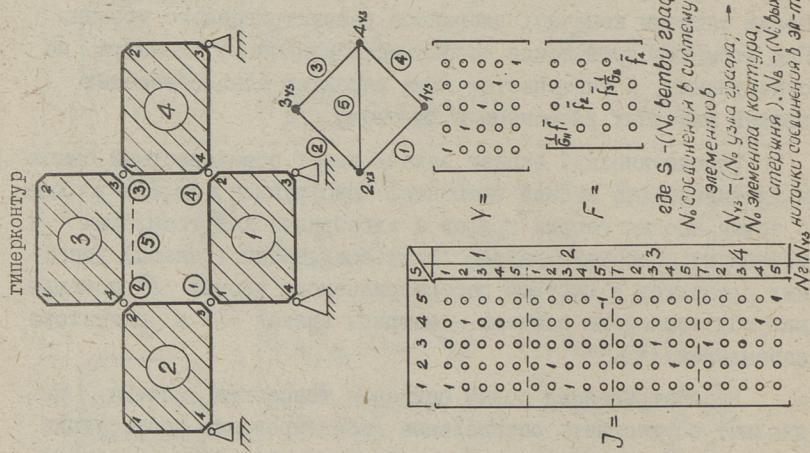
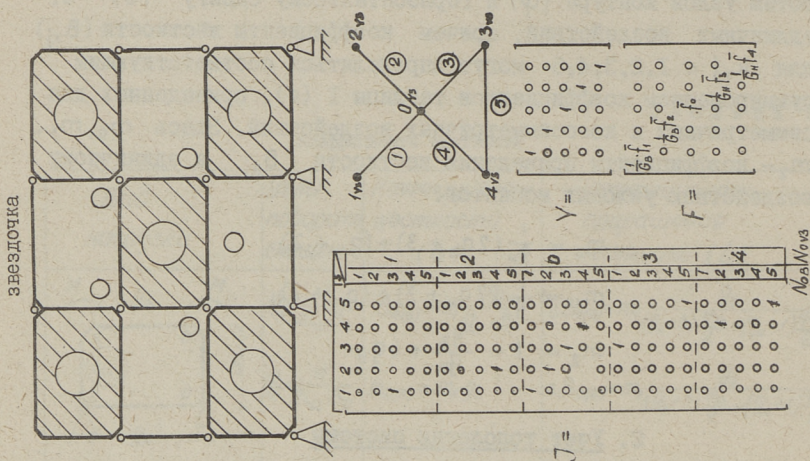
## 2. Учет топологии системы

Топология многоконтурной рамы описывается через топологию системы конечных элементов рассматриваемого уровня. При этом топологические особенности конечного элемента не существенны, а учитывается лишь характер топологических связей конечных элементов в системе.

Топологический аспект задачи имеет общеизвестный смысл и учитывает тип связей элементов конструкции и характер опор с точки зрения теории графов и алгебраической топологии и позволяет описать характер (вид) соединений (связей) конечных элементов в системе рассматриваемого уровня с помощью матрицы топологии системы — матрицы связей ( $J$ ) и оператора заземлений ( $\Upsilon$ ).

Рассматриваемая форма описания топологии системы позволяет осуществить оптимальное проектирование конструкции и в смысле выбора ее оптимальной топологии. В статье приводятся графы, а также их матрицы связей и операторы заземлений для контура и группы контуров — гиперконтур, звездочка (фиг. 2).

Расчет многоконтурной рамы с учетом топологии системы на уровне группы контуров может быть представлен в следующей матричной форме:



Фиг. 2. Графы, матрицы связей (J), операторы элементов (Y).

$$b = b_p + JY^*(YJ^*FJY^*)^{-1}(YJ^*Fb_p). \quad (2.1)$$

где матрицы имеют следующий смысл:

$b$  – вектор внешних воздействий, приведенных к узловым, в узлах заданной системы:

$$b = \{b_n\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4; \quad b_n = \{u_1, u_2, u_3, u_4, P_5\}.$$

$b_p$  – вектор внешних воздействий в узлах основной системы;

$F$  – матрица податливости группы контуров

$$F = \{\bar{f}_n\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$J$  – матрица связей контуров в системе,

$Y$  – оператор заземления топологической схемы.

Введение топологических данных в матричной форме позволяет в процессе оптимального проектирования варьировать и их: менять соединения элементов, врезать шарниры или вводить заземления, менять количество и расположение опор, добиваясь тем самым оптимальной топологической схемы конструкции.

### 3. Учет геометрической нелинейности

С целью уточнения параметров оптимальной системы на заключительных этапах оптимального проектирования целесообразно проводить статический расчет с учетом геометрической нелинейности системы.

В данной работе геометрическая нелинейность учитывается в смысле оценки влияния на несущую способность системы эффекта уменьшения изгибной жесткости – отпорности элементов вследствие их обжатия (расчет на устойчивую прочность). Растяжения, увеличивающие изгибную жесткость элементов, улучшают условия их работы и поэтому влияние растяжений на изгибную жесткость элементов не рассматривается.



В работе [1] предлагается учет увеличения податливостей элементов с помощью функций Жуковского, непосредственно вводимых в матрицу податливости элемента. Для упрощения статического расчета на устойчивую прочность и уменьшения затрат времени вычислительного процесса целесообразно увеличение по-

датливости элемента учитывать как добавочную матрицу податливости  $\Delta f$ , что возможно в случае, если функции Жуковского в матрице податливости аппроксимировать в виде ряда  $(I + \dots)$ . При работе элемента в области, близкой к исчерпанию несущей способности по устойчивой прочности, для получения достаточной точности необходимо удерживать большое число членов ряда (иногда свыше 10-ти), что довольно затруднительно.

Рассматривая статические и физические условия работы сжато-изогнутого стержня, получены функции устойчивой прочности в виде  $\varphi(\alpha) = 1 + \Delta\varphi(\alpha)$ , которые приводятся для частного случая шарнирно опертого стержня (фиг. 3).

Т а б л и ц а 2

Коэффициенты устойчивости

<i>Схема деформирования</i> <i>Вид нагрузки</i>	<i>симметричная</i> $\varphi(\alpha)$	<i>косо-</i> <i>симметричная</i> $\varphi(\alpha)$
	$\varphi_{sc} = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}$	$\varphi_{sk} = 1 + \frac{\alpha}{2(4-\alpha)}$
	$\varphi_{kc} = 1 + \frac{4\alpha}{1-4\alpha}$	$\varphi_{kk} = 1 + \frac{9\alpha}{9-4\alpha}$

Эти функции удобно использовать отдельно для симметричных и кососимметричных схем деформирования, поэтому для шарнирноопертых и консольных стержней приводятся функции устойчивой прочности  $\varphi(\alpha)$  отдельно для симметричных и кососимметричных воздействий (табл. 2). Изменения податливости конечного элемента — контура, вследствие обжатия его стоек в матричной форме, приводятся на фиг. 3. Матрица изменений по-



$$\delta_{ij} = \sum_0^L \int \frac{m_i m_j}{EJ_k} ds = \frac{L^3}{6EJ_0} [2(\bar{M}_1^i M_1^j + \bar{M}_2^i M_2^j) \varphi_1(\alpha) + (\bar{M}_1^i M_2^j + M_2^i \bar{M}_1^j) \varphi_2(\alpha)]$$

$$\varphi_1(\alpha) = 1 + 0,59\alpha \left[ \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{2(4-\alpha)} \right] \quad \alpha = \frac{N_3}{N_0} \quad N_3 - \text{сила сжатия}$$

$$\varphi_2(\alpha) = 1 + 1,18\alpha \left[ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2(4-\alpha)} \right] \quad N_0 = \frac{P^2 E J}{L^2}$$

ЗВЕЗДОЧКА

КОНТУР

$$f_n^{(L)} = \frac{1}{6n} \begin{bmatrix} \frac{1}{4B_{11}} & \frac{1}{4B_{12}} & \frac{1}{4B_{13}} & \frac{1}{4B_{14}} & \frac{L}{12B_{15}} & \frac{L}{4\Delta B_{15}} & \frac{1}{4\Delta B_{14}} & \frac{1}{4\Delta B_{13}} & \frac{1}{4\Delta B_{12}} & \frac{L^2}{12\Delta B_{15}} \\ \frac{1}{4B_{21}} & \frac{1}{4B_{22}} & \frac{1}{4B_{23}} & \frac{1}{4B_{24}} & \frac{L}{12B_{25}} & \frac{L}{4\Delta B_{25}} & \frac{1}{4\Delta B_{24}} & \frac{1}{4\Delta B_{23}} & \frac{1}{4\Delta B_{22}} & \frac{L^2}{12\Delta B_{25}} \\ \frac{1}{4B_{31}} & \frac{1}{4B_{32}} & \frac{1}{4B_{33}} & \frac{1}{4B_{34}} & \frac{L}{12B_{35}} & \frac{L}{4\Delta B_{35}} & \frac{1}{4\Delta B_{34}} & \frac{1}{4\Delta B_{33}} & \frac{1}{4\Delta B_{32}} & \frac{L^2}{12\Delta B_{35}} \\ \frac{1}{4B_{41}} & \frac{1}{4B_{42}} & \frac{1}{4B_{43}} & \frac{1}{4B_{44}} & \frac{L}{12B_{45}} & \frac{L}{4\Delta B_{45}} & \frac{1}{4\Delta B_{44}} & \frac{1}{4\Delta B_{43}} & \frac{1}{4\Delta B_{42}} & \frac{L^2}{12\Delta B_{45}} \\ \frac{L^2}{12B_{51}} & \frac{L^2}{12B_{52}} & \frac{L^2}{12B_{53}} & \frac{L^2}{12B_{54}} & \frac{L^2}{12B_{55}} & \frac{L^2}{12\Delta B_{52}} & \frac{L^2}{12\Delta B_{53}} & \frac{L^2}{12\Delta B_{54}} & \frac{L^2}{12\Delta B_{55}} \end{bmatrix} + \frac{1}{6n}$$

$$f_n^{(L)} = \frac{1}{6n} (f_n^{(L)} + \Delta f_n^{(L)})$$

$$f_s^{(L)} = \frac{1}{9s} (f_s^{(L)} + \Delta f_s^{(L)})$$

Фиг. 3. Учет геометрической нелинейности.

датливости для конечного элемента - контура описывается с помощью коэффициентов изменения жесткости  $(\Delta B_{kj})$ , которые получаются соответствующим суммированием коэффициентов таблицы I (в), приведенных для симметричных и кососимметричных воздействий.

Использование матрицы изменения податливости  $\Delta f$  позволяет, не меняя величин членов основной матрицы податливости, проводить оценку увеличения податливости от обжатия и, более того, значительно сократить вычислительный процесс - на последующих этапах перерасчета не проводить обращение матрицы перемещений от единичных сил  $(YJ^*FJY^*)$ , так как это сделано на первом шаге. В последующем достаточно лишь определять перемещения, возникающие от изменения податливостей элементов, то есть члены матрицы  $(YJ^*\Delta F_i b)$ , и умножением ее на обращенную на первом шаге матрицу  $(YJ^*FJY^*)^{-1}$  определять изменение внутренних усилий. Расчет осуществляется по формуле:

$$b_i = b + JY^*(YJ^*FJY^*)^{-1}(YJ^*\Delta F_i b), \quad (3.1)$$

где  $b = b_p + JY^*(YJ^*FJY^*)^{-1}(YJ^*F b_p)$ ,

$b$  - решение первого шага;

$b_i$  - решение с учетом геометрической нелинейности первого шага;

$\Delta F_i$  - матрица изменений податливости элементов на  $i$ -ом шаге,

и продолжается до тех пор, пока величина поправки изменения внутренних усилий не станет пренебрежимо малой.

#### 4. Учет физической нелинейности

Дальнейшие уточнения решения задачи оптимального проектирования связаны с учетом изменения соотношений погонных жесткостей элементов системы, возникающих вследствие работы элементов за пределом упругости.

Изменение жесткости-отпорности сечения элемента, работающего за пределом упругости, удобно оценивать по А.В.Геммерлингу [2], вводя методику первого расчетного сечения, со-

ответствующего упругой части площади поперечного сечения, для которого определяется площадь ( $F_n$ ), статический момент ( $S_n$ ) и момент инерции ( $J_n$ ) относительно смещенных осей (фиг. 4). Геометрические характеристики упругого ядра ( $a$ ), верхней зоны текучести ( $c_b$ ) и нижней зоны текучести ( $c_n$ ) устанавливаются для материала с заданными физическими свойствами ( $\sigma, \varepsilon$ ) из условий равновесия сечения с возникшим состоянием текучести. Для материала, физические свойства которого описываются диаграммой Прандтля:

$$a = \sqrt{\frac{3h^2}{4} \cdot \frac{\sigma_T - \sigma_N}{\sigma_T} \left(2 - \frac{\sigma_T - \sigma_N}{\sigma_T}\right) - \frac{3M}{B\sigma_T}},$$

$$c_b = \frac{\sigma_T + \sigma_N}{\sigma_T} \cdot \frac{h}{2} - a, \quad \sigma_N = \frac{N}{F},$$

$$c_n = \frac{\sigma_T - \sigma_N}{\sigma_T} \cdot \frac{h}{2} - a,$$

где  $M$  — изгибающий момент,  
и  $N$  — продольная сила в сечении,  
 $\sigma_T$  — пределы текучести.

Для определения изменений погонной жесткости стержня, работающего за пределами упругости, он разбивается на требуемое число участков (мы ограничились 9-ю), для которых вычисляется новое значение жесткости-отпорности сечения; при этом погонная жесткость такого составного стержня получится как обратная величина суммы податливостей всех участков: матрица изменения податливости элементов  $\Delta f$  получится как разность матриц податливостей для ( $k$ )-го и первого этапов загрузки (фиг. 4).

Использование матрицы изменения податливости  $\Delta f$  позволяет и учет физической нелинейности проводить по итерационной формуле на каждом этапе загрузки:

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k)} + JY^*(YJ^*F^{(k-1)}JY^*)^{-1}(YJ^*\Delta F_i^{(k-1)}b_i^{(k)}), \quad (4.1)$$

$$\text{где } b_i^{(k)} = b_p + JY^*(YJ^*F^{(k-1)}JY^*)^{-1}(YJ^*F^{(k-1)}b_p),$$

$b_i^{(k)}$  — решение первого шага  $k$ -го этапа загрузки,  
 $b_i^{(k)}$  — решение с учетом изменения податливости  $i$ -го шага приближения  $k$ -го этапа загрузки,





- $F^{(k-1)}$  - матрица податливости системы, полученная на (k-1)-ом этапе загрузки,
- $\Delta F_i^{(k-1)}$  - матрица изменения податливости системы на (k-1)-ом шаге приближения для k-го этапа загрузки, по отношению к (k-1)-му этапу.

## 5. Модель задачи оптимального проектирования многоконтурных рам

Задача оптимального проектирования включает в себя, с одной стороны, задачу прямого расчета и, с другой, - задачу поиска оптимальной конструкции, наилучшим образом удовлетворяющей выбранному критерию оптимальности.

В статье излагается модель задачи оптимального проектирования многоконтурных рам, достаточно полно учитывающая физические условия работы конструкции и материала, позволяющая при этом определить оптимальную топологию и распределение весовых параметров вдоль заданной геометрии осей, определяющих раму минимального объема (веса).

Поиск оптимального вектора весовых параметров  $(q, g)$  для соответствующей топологической схемы рамы осуществляется на уровне конечного элемента - звездочка. При этом метод звездочек как разновидность метода конечных элементов позволяет свести многопараметрическую задачу оптимизации рамы в целом (где число параметров соответствует числу элементов, входящих в раму) к последовательности задач оптимизации группы контуров - звездочек (где число параметров может быть понижено до двух).

Задача оптимального проектирования сложной многоконтурной рамы в такой постановке может быть доведена до численных результатов. Для функции качества конструкции, выбранной как функция объема (веса), минимуму ее соответствует отсутствие эффекта влияния связей, при котором значение объема на границе прочности  $[V]$  совпадает со значением объема, вычисленного с учетом распределения весовой функции  $V(q)$ .

Если ввести критерий по весовым параметрам для контура

$K_p(q_s)^{(j)} = \frac{[q_s]^{(j)}}{q_s^{(j)}}$ , где  $[q_s]^{(j)} = \frac{[l_s]}{[l_\delta]}$  вычисляется на границе прочности  $s$ -го стержня на  $j$ -ом шаге,

$q_s^{(j)}$  - исходный весовой параметр  $s$ -го стержня на  $j$ -ом шаге

и для звездочки  $K_p(G_n) = \frac{[G_n]^{(j)}}{G_n^{(j)}}$ ,

где  $[G_n]^{(j)} = \frac{[i_{\text{ст.н}}(g)]^{(j)}}{[i_{\text{ст.}\delta}(g)]^{(j)}}$  вычисляется на границе прочности, с учетом закона распределения объема по контуру,

$G_n^{(j)}$  - исходный весовой параметр  $n$ -го контура на  $j$ -ом шаге,

то вычисление объемной функции контура может проводиться по схеме, показанной на фиг. 5. При этом выбор формулы для вычисления объемной функции контура или ①, или ②, или ③ зависит от значений критериев  $K_p(q_s)$  и  $K_p(q_n)$  для контура, обладающего вертикальной осью упругой симметрии. Вычисление объемной функции звездочки, обладающей вертикальной осью упругой симметрии, проводится по той же схеме, при этом выбор формул для вычисления объемной функции звездочки или ①, или ②, или ③ зависит от значений критериев  $K_p(G_s)$  и  $K_p(G_n)$  для контуров с предварительно вычисленными значениями приведенных объемов стоек  $V_{\text{ст}}^n(g)$ .

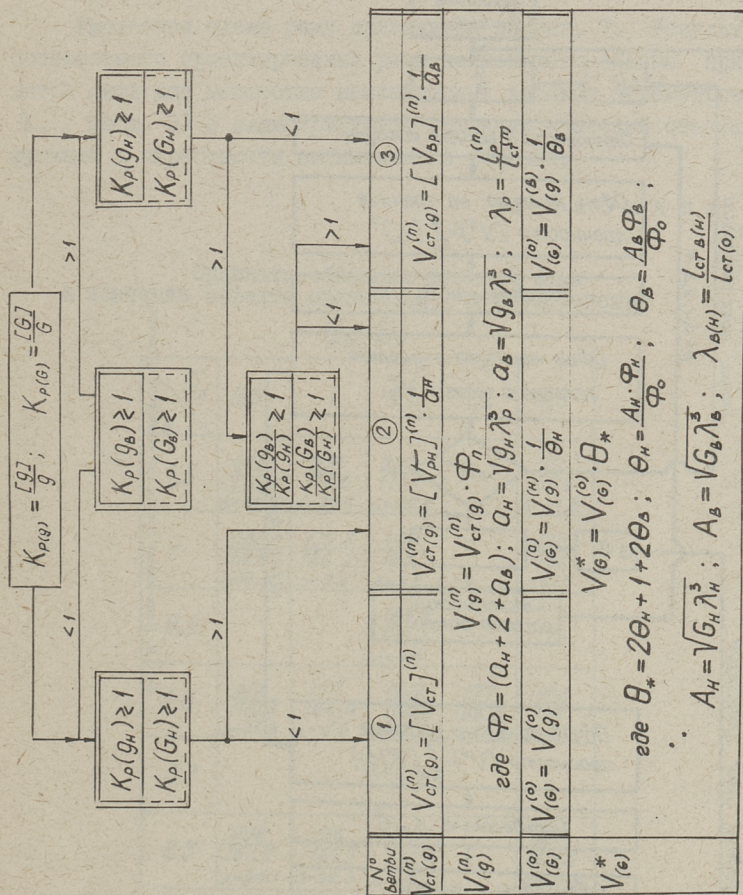
Вычисление объемных функций проводится через ядровые моменты (позволяющие учесть действие изгибающих моментов и продольных сил) для составного двутаврового поперечного сечения без ребер жесткости, с отношением  $\frac{h}{d} = 100$ ,

где  $h$  - высота стенки,  
 $d$  - толщина стенки и полки,  
 $b$  - ширина полки.

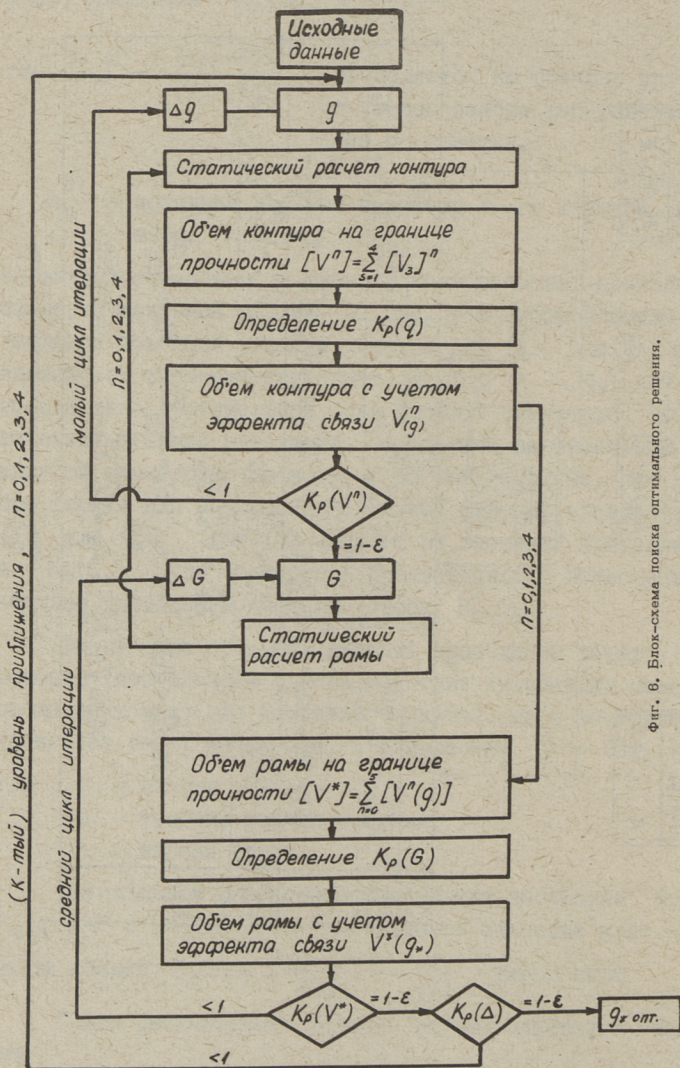
Оптимальное решение соответствует значениям критериев  $K_p(g) = 1$  и  $K_p(G) = 1$ , для которых значение критерия эффекта связей  $K_p(\Delta) = \frac{V(g) - [V]}{[V]} = \frac{V}{[V]}$  равно нулю.

Поиск оптимального решения осуществляется в направлении

$$K_p(g) \rightarrow 1, \quad K_p(G) \rightarrow 1, \quad \text{а} \quad K_p(\Delta) \rightarrow 0.$$



Фиг. 5. Объемная функция контура (звездочки).



Фиг. 6. Блок-схема поиска оптимального решения.

Алгоритм поиска оптимального решения иллюстрируется укрупненной блок-схемой счета (фиг. 6).

### 6. Оптимальное проектирование 9-контурной рамы

9-контурная рама рассчитывается по методу звездочек, ограничиваясь звездочками третьего порядка, обладающими при этом осью упругой симметрии.

Расчетная схема рамы приводится на фиг. 7. Результаты оптимального проектирования рамы наименьшего объема приводятся лишь для множества межконтурных весовых параметров ( $G_B$ ,  $G_H$ , табл. 3) и иллюстрируются уравнениями значений объемных функций в окрестности оптимального решения.

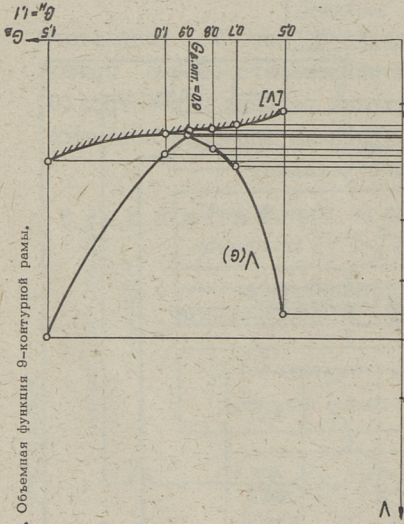
Т а б л и ц а 3

Ординаты объемных функций рамы  
и значение эффекта связей ( $\Delta$ ) в пространстве

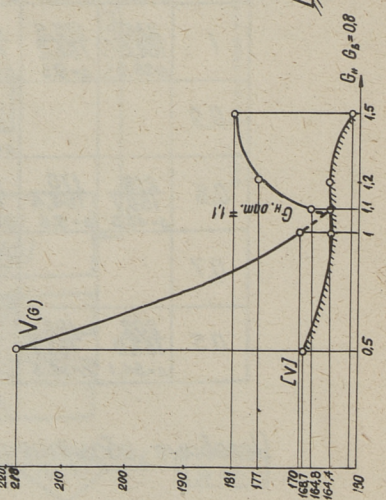
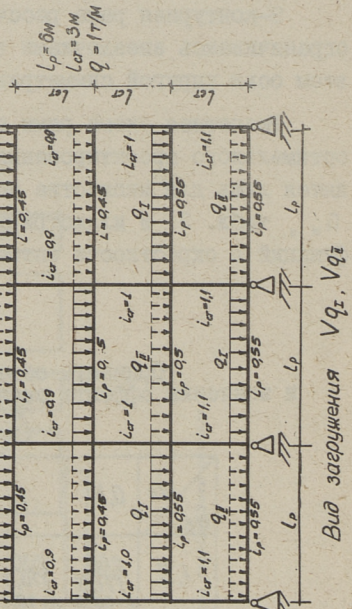
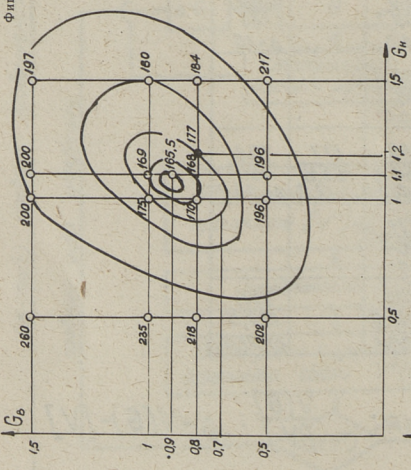
$G_B, G_H$

$G_H \backslash G_B$	0,5	1	1,1	1,2	1,5
1,5	$\frac{260}{771,5}$ $\Delta=58,5$	$\frac{200}{770,6}$ $\Delta=29,4$	$\frac{200}{770,1}$ $\Delta=29,9$		$\frac{197}{765,2}$ $\Delta=31,8$
1	$\frac{235}{768,8}$ $\Delta=66,2$	$\frac{175,5}{766,2}$ $\Delta=9,3$	$\frac{169}{765,7}$ $\Delta=3,3$		$\frac{180}{764}$ $\Delta=16$
0,9			$\frac{165,5}{765,7}$ $\Delta=0,4$		
0,8	$\frac{218}{769,7}$ $\Delta=48,3$	$\frac{170}{764,4}$ $\Delta=5,6$	$\frac{168}{764,8}$ $\Delta=3,2$	$\frac{177}{768,8}$ $\Delta=12,2$	$\frac{184}{761}$ $\Delta=23$
0,7			$\frac{171}{764}$ $\Delta=7$		
0,5	$\frac{202}{767,9}$ $\Delta=34,1$	$\frac{196}{763,7}$ $\Delta=32,3$	$\frac{198}{761,9}$ $\Delta=34,1$		$\frac{217}{759,5}$ $\Delta=97,5$

Условные обозначения:  $\frac{V(G)}{[V]}$ ;  $\Delta = V(G) - [V]$



Фиг. 7. Объемная функция 9-колонной рамы.



## Л и т е р а т у р а

1. И е г и Э.М. Общая задача синтеза оптимальной конструкции. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1967, серия А, № 257.

2. Г е м м е р л и н г А.В. Расчет стержневых систем. М., Стройиздат, 1974.

V. Ganitschew, E. Jögi, R. Mshavanadze

### Allgemeine Aufgabe der Optimierung der vielfeldrigen Rahmen

#### Zusammenfassung

Ein allgemeines Modell zur Projektierung der optimalen vielfeldrigen Rahmen wird vorgeschlagen, wobei auch die geometrische und physikalische Nichtlinearität der Systeme sowie der topologische Aspekt des Problems berücksichtigt wird. Die Optimierung der Rahmen wird in Matrixen als Aufgabe der Rahmen mit minimalem Volumen (Gewicht) formuliert. Das Blockschema des Algorithmus der optimalen Lösung ist gegeben. Die Ergebnisse der Berechnung eines optimalen neunfeldrigen Rahmens werden angeführt.





Х.Х. Кяэрд, Л.Ю. Поверус

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СКЛАДЧАТЫХ  
КОНСТРУКЦИЯХ МЕТОДОМ ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК И  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследованию распространения нестационарных упругих волн в складчатых конструкциях посвящено немного работ. В статье [1] рассматривается распространение волн в прямо-угольном соединении балок методом характеристик. Численные результаты работы сравниваются с данными эксперимента, при этом отмечается хорошее совпадение. Задачи, подобные решаемым в [1], рассматриваются в статьях [2] и [3].

Работа [4] посвящена исследованию распространения упругих волн в балке с ломаной осью и в складчатой конструкции, которые нагружены кратковременной нагрузкой. В этом исследовании используются связано теория Тимошенко для волн изгиба и элементарная теория для продольных волн. При численной реализации работы на ЭВМ использован прямой численный вариант метода конечных элементов, в котором основные физические законы, кинематические соотношения и зависимости, отражающие упругие свойства материала, применяются непосредственно к системе. Угловой элемент конструкции рассматривается как точечная масса. При численных расчетах задачи особое внимание уделяется поведению внутренних силовых факторов около углового элемента. Рассматриваются разные углы наклона между прямолинейными элементами.

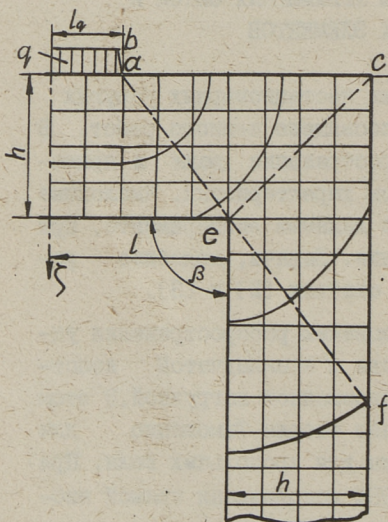
Настоящая работа посвящена исследованию переходных волновых процессов в складчатых конструкциях на основе двумерной теории упругости. В работе рассматриваются симметричные относительно оси  $\xi$  складчатые конструкции, которые нагружены кратковременными нагрузками и находятся в плоском деформированном состоянии.

Первый вариант решения задачи базируется на уравнениях теории упругости, которые интегрируются методом трехмерных сеток [6, 7, 8].

Уравнения движения конструкции (фиг. 1) в декартовых координатах и в безразмерных переменных будут следующие

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (I)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}.$$



Здесь  $u = u_1/h$ ,  $w = w_1/h$  — безразмерные составляющие перемещений в направлении осей  $\xi$  и  $\zeta$  соответственно,  $\xi = x/h$ ,  $\zeta = z/h$  — безразмерные координаты,  $\tau = c_1 t/h$  — безразмерное время,  $E, \nu, \rho$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно,  $c_1 = \sqrt{(1-\nu)E/(1-2\nu)(1+\nu)\rho}$ ,  $c_2 = \sqrt{E/2(1+\nu)\rho}$  — скорости распространения волны расширения и волны сдвига,  $\kappa^2 = c_2^2/c_1^2$ .  
Безразмерные напряжения

Фиг. 1. Складчатая конструкция.

$$\sigma_{\xi} = (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{\zeta} = \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + (1-\nu) \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad (2)$$

$$\tau_{\xi\zeta} = \frac{1}{2}(1-2\nu) \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \right),$$

при этом

$$\sigma_{\xi} = \frac{\nu}{\lambda} \sigma_x, \quad \sigma_{\zeta} = \frac{\nu}{\lambda} \sigma_z, \quad \tau_{\xi\zeta} = \frac{\nu}{\lambda} \tau_{xz} \quad (3)$$

и  $\lambda = (1+\nu)(1-2\nu)/E$ , где  $\sigma_x, \sigma_z$  и  $\tau_{xz}$  — размерные напряжения.

При интегрировании системы уравнений (I) приходится удовлетворять описанные ниже условия. На верхней поверхности конструкции нормальные напряжения равняются внешней нагрузке. Касательное напряжение равно нулю. На остальных поверхностях как нормальное, так и касательное напряжение приравняется нулю. В плоскости симметрии перемещение  $u$  и касательное напряжение равны нулю. Все вышеизложенные условия выражаются в перемещениях. Кроме того, на фронте волны расширения, положение которого определяется в соответствии с законами геометрической оптики, перемещения  $u$  и  $w$  равняются нулю.

Для определения перемещений используются конечно-разностные уравнения. Безразмерные шаги сетки по координатам  $\xi$ ,  $\zeta$  и  $\tau$  обозначаются  $l_\xi$ ,  $l_\zeta$  и  $l_\tau$ . При этом выбирается  $l_\xi = l_\zeta$  и для обеспечения устойчивости расчетной процедуры  $l_\tau = 0,5 l_\xi$ . Точки сетки определяются при помощи координат  $\xi = i l_\xi$ ,  $\zeta = j l_\xi$  и  $\tau = n l_\tau$ . Перемещения в этих точках обозначаются  $u_{ijn}$  и  $w_{ijn}$ .

Внутренними точками сеток называются точки, которые не находятся на внешних поверхностях конструкции и на плоскости симметрии, а также не следуют непосредственно за фронтом. Последние называются прифронтными точками. Перемещения во внутренних точках определяются, используя явную схему типа креста, при помощи формул, выведенных из системы (I), в которой производные заменяются конечно-разностными соотношениями в первом приближении.

Упомянутые формулы получают следующий вид:

$$u_{ijn} = 2u_{ijn-1} - u_{ijn-2} + l_\tau^2 [k^2 l_\zeta^{-2} (u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) + l_\xi^{-2} (u_{i+j} - 2u_{ij} + u_{i-j}) + (1-k^2)(4l_\xi l_\zeta)^{-1} (w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1})]_{n-1} \quad (4)$$

$$w_{ijn} = 2w_{ijn-1} - w_{ijn-2} + l_\tau^2 [l_\zeta^{-2} (w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}) + k^2 l_\xi^{-2} (w_{i+j} - 2w_{ij} + w_{i-j}) + (1-k^2)(4l_\xi l_\zeta)^{-1} (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})]_{n-1}$$

После определения перемещений для внутренних точек неопределенными остаются перемещения точек оси симметрии, точек на свободных поверхностях и перемещения прифронтных точек.

Эти перемещения определяются применением соответствующих граничных условий. При этом производные в последних заменяются конечно-разностными соотношениями — большинство из них односторонние.

Условия на свободных поверхностях требуют составления систем уравнений, которые решаются при помощи рекуррентных формул.

При определении перемещений в прифронтных точках нужно в первую очередь через индексы  $i$  и  $j$  определить положение прифронтной точки и после этого приложить формулы для определения перемещений.

Рассмотрим в качестве примера определения перемещения прифронтной точки на прямом участке фронта под нагрузкой.

Индекс  $j$  прифронтной точки находится при помощи неравенства

$$\zeta/l_{\zeta} - 1 \leq j \leq \zeta/l_{\zeta}. \quad (5)$$

Формула для определения составляющих перемещений в прифронтной точке получается, если производная по  $\zeta$  заменяется односторонней трехточечной формулой в конечных разностях

$$w_{ijn} = \left( \frac{\alpha_{jn}}{1 + \alpha_{jn}} \right)^2 w_{ij-1n} - l_{\zeta} \frac{\alpha_{jn}}{1 + \alpha_{jn}} \frac{\partial w}{\partial \zeta}. \quad (6)$$

В формуле (6) последний член приравняется нулю, так как предполагается, что перемещение около фронта возрастает плавно и, следовательно,  $\frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0$ . Таким образом,

$$w_{ijn} = \left( \frac{\alpha_{jn}}{1 + \alpha_{jn}} \right)^2 w_{ij-1n}. \quad (7)$$

Здесь через  $\alpha_{jn}$  обозначаются отношения расстояния прифронтной точки от фронта к длине шага сетки  $l_{\zeta}$  в направлении координаты  $\zeta$ . Прямой участок фронта (на чертеже прямая линия) существует, совместно с кривым участком, на некотором начальном этапе движения, до момента, пока фронт не дошел до нижней поверхности пластины. После этого момента фронт будет только криволинейный (на чертеже часть окружности).

В зависимости от времени распространения волны расширения  $\tau$  криволинейный фронт описывается, в согласии с законами геометрической оптики, тремя различными участками.

Первый участок, при  $\tau \leq \tau_e$ , определяется частью окружности, центр которой находится в точке  $d$  (фиг. 1). В этом случае индекс  $i$  точки на горизонте  $j$  и другие величины, которые нужны для вычисления перемещений, определяются методикой, разработанной для расчета трансверсально изотропной толстой пластины [8].

На втором участке, где  $\tau_e < \tau < \tau_f$ , фронт описывается двумя окружностями следующим образом: выше линии тени  $e - f$  при помощи окружности с радиусом из центра  $d$  и ниже линии тени при помощи окружности с радиусом из центра  $e$ .

Третий участок криволинейного фронта  $\tau > \tau_e$  описывается при помощи окружности с радиусом из центра  $e$ .

Что касается определения положения прифронтной точки и определения перемещений в этой точке на втором и третьем участках криволинейного фронта, то здесь нет принципиального различия по сравнению с методикой расчета на первом участке. Остальные детали расчетного алгоритма описаны более подробно в работах [7] и [8].

Задачу запрограммировала в языке ФОРТРАН А.Мянил.

Вторым вариантом решения задачи применяется прямой численный вариант метода конечных элементов [5]. Среда разбивается на конечное число макроскопических элементов, которые рассматриваются без промежуточного перехода к дифференциальным уравнениям и от них обратно к конечным элементам. Физические законы и кинематические соотношения применяются в определенной последовательности непосредственно к каждому элементу, причем учитываются начальные и граничные условия.

Решается смешанная задача в скоростях и напряжениях.

Пластины разделены на квадратные конечные элементы, размеры которых выбираются  $\Delta x = \Delta y = c_1 \Delta t$ . Если в боковой пластине повернуть координатные оси так, чтобы ось  $x$  была направлена параллельно и  $y$  перпендикулярно свободным поверхностям, то расчетные схемы остаются до и после поверхности  $se$  аналогичными.

Если воображаемая соединительная поверхность  $se$  между лицевой и боковой пластиной пересекает квадратный эле-

мент, то за поверхностью ее охватываются дополнительные точки (вершины квадратных элементов), вследствие чего образуются конечные элементы в форме произвольных четырехугольников. Оказывается, что в окрестности угла возможны шесть различных положений конечных элементов. Принципиальной трудности не представляет применение произвольных четырехугольников во всей протяженности конструкции. Таким образом, алгоритм стал бы более общим. Но в связи с малой мощностью применяемой ЭВМ "Минск-22" оказалось более экономичным (с точки зрения использования памяти ЭВМ и машинного времени) несколько ограничить возможности программы и ввести особые элементы только в окрестности угла и даже заранее выяснить их возможные конфигурации. Расчетные формулы для квадратных конечных элементов выведены прямо на основе физических законов. Вычисление конечных величин для произвольных четырехугольников базируется на формуле Грина [5, 9].

На свободных поверхностях, а также во внутреннем и внешнем углах вводятся воображаемые конечные элементы, в которых напряжения считаются нулевыми. Ось симметрии  $\zeta^*$  рассматривают как твердую гладкую стену, вдоль которой среда может скользить.

Далее приводятся некоторые численные результаты, которые получены прямым численным методом. Угол между пластинами  $\beta = 90^\circ$ . Отметим, что в статье [5] приведены также результаты для примера, где  $\beta = 135^\circ$ .

На фиг. 2 представлены безразмерные напряжения при  $\tau = 2,5$ . Поскольку волна быстро рассеивается, то деформации, скорости и напряжения в боковой пластине остаются сравнительно малыми. Только в окрестности внутреннего угла ( $\xi = \eta = 1$ ,  $\zeta = h$ ) наблюдаются концентрации напряжений (фиг. 2).

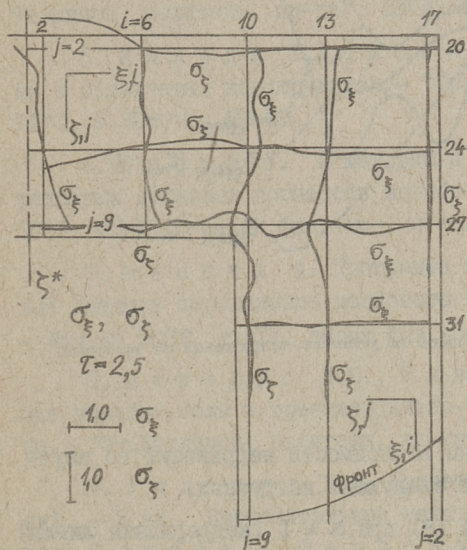
Зависимости напряжений во внутреннем углу от характера изменения нагрузки во времени при  $\tau = 2,5$  представлены на фиг. 3. Исследовано влияние воздействия на концентрацию напряжений во внутреннем углу двух типов равномерно распределенных нагрузок при  $l_q = 0,5h$ :

#### 1. Разрывная нагрузка

$$q_1 = \exp(-\alpha\tau), \quad \alpha = 0; 0,4; 1; 2; 5. \quad (8)$$

## 2. Плавная нагрузка

$$q_2 = \frac{\tau}{\tau_{\max}} \exp\left(1 - \frac{\tau}{\tau_{\max}}\right), \quad \tau_{\max} = 0,25; 0,5; 0,75; 1. \quad (9)$$



Фиг. 2. Поле напряжений в складчатых конструкциях.

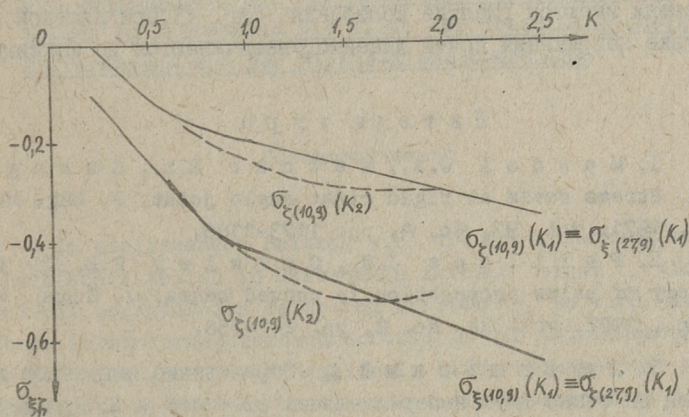
нагрузках величины напряжений остаются близкими друг другу (фиг. 3).

На горизонтальной оси фиг. 3 представлен суммарный импульс нагрузки  $K$  в интервале времени  $\tau = 0+2,5$

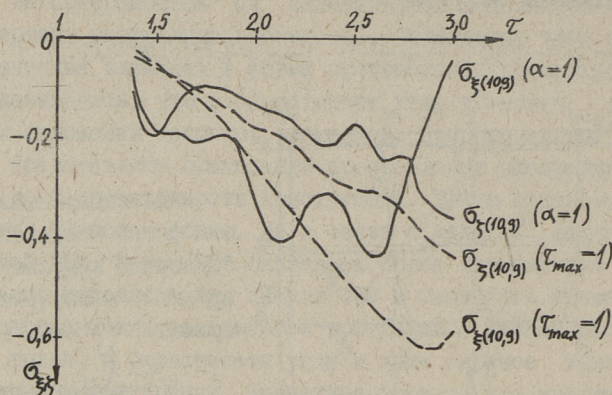
$$K_{1,2} = 2L \int_0^{2,5} q_{1,2} dt, \quad (10)$$

( $\alpha \neq 0$  или  $\tau_{\max} \neq 0$ ).

Исследования показывают (фиг. 3), что при нагрузке (8) в интервале  $0,75 < K_1 \leq 2,5$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ) напряжения во внутреннем углу почти линейно зависят от  $K_1$ . При разрывной (8) и плавной (9)



Фиг. 3. Графики зависимостей угловых напряжений от  $K_1$  и  $K_2$ .



Фиг. 4. Графики зависимостей угловых напряжений от времени.

На фиг. 4 представлены зависимости напряжений во внутреннем углу от времени при следующих нагрузках.

1. Разрывная нагрузка (8) при  $\alpha = 1$  (непрерывная линия)
2. Плавная нагрузка (9) при  $\tau_{\max} = 1$  (заштрихованная линия).

При  $\tau = 2,7$  первая отраженная волна от внешней поверхности боковой пластины доходит до внутреннего угла. В случае разрывной нагрузки в зависимостях напряжений от времени имеются гладкие колебания (фиг. 4). При плавной нагрузке напряжения почти линейно увеличиваются до максимума.

#### Л и т е р а т у р а

1. Mandel J.A., Mathur R.K., Chang J.C. Stress waves at rigid right angle joint. J. Eng. Mech. Div. 1971, vol. 97, No. 4, pp. 1173-1186.

2. Phillips J.W., Crowley F.B. On the theory of pulse propagation in curved beams. J. Sound and Vibr., 1972, vol. 24, No. 2, pp. 247-258.

3. Ли, Кольский Х. Образование импульсов давления на стыке двух непараллельных стержней. - Ж. "Прикладная механика", М., "Мир", 1972, № 3, с. 174-179.



4. К я э р д и Х.Х., П о в е р у с Л.Ю. Исследование распространения упругих волн в угловых соединениях балок и складчатых конструкциях методом конечных элементов. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1974, № 360, с. 49-55.

5. К я э р д и Х.Х., П о в е р у с Л.Ю. Упругие волны в складчатых конструкциях. - "Тр.Таллинск. политехн.ин-та", 1974, № 360, с. 57-69.

6. Н и г у л У. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. - Изв. АН ЭССР, т. XIV, серия физ.-мат. и техн. наук, 1965, № 3.

7. М я н н и л А. Программа метода трехмерных сеток для анализа переходного волнового процесса деформации плиты. - Изв.АН ЭССР, т. XIV, серия физ.-мат. и техн.наук, 1965, № 3.

8. П о в е р у с Л.Ю., Р я я м е т Р.К. Распространение упругих волн в трансверсально-изотропной толстой пластине. - "Тр.Таллинск. политехн. ин-та", 1970, серия А, № 296.

9. У и л к и н с М.Л. Расчет упруго-пластических течений. - В кн. Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. О л д е р а Б., Ф е р н б а х а С., Р о т е н б е р г а М. М., "Мир", 1967, с. 212-263.

H. Käerdi, L. Poverus

Die Untersuchung der Fortpflanzung von elastischen Wellen in Faltwerken mit Hilfe der dreidimensionalen Differenzen- und der Finite-Element-Methode

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird die Fortpflanzung von elastischen Wellen in Faltwerken infolge einer sich schnell verändernden Belastung betrachtet. Es wird der ebene Formänderungszustand erforscht. Als Untersuchungsmethode wird die dreidimensionale Differenzenmethode und die Finite-Element-Methode benutzt. Die numerischen Resultate werden mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine ermittelt.



УДК 624.074.4:534.014.1

Л.Ю. Поверус

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ  
ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ МАЛОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ  
КРИВИЗНЫ

В настоящей работе исследуются неосесимметричные собственные колебания оболочек вращения малой положительной кривизны. Выводятся формулы для определения собственных частот и даются зависимости для определения собственных форм.

Здесь под оболочкой вращения малой положительной кривизны подразумевается оболочка, у которой радиус кривизны меридианной линии  $R_1$  в каждой точке срединной поверхности значительно больше, чем второй главный радиус кривизны  $R_2$  (а именно,  $R_1 \geq R_{20} \lambda^{-0,5}$ ), в которой  $\lambda = \delta / R_{20} \sqrt{12(1-\nu^2)}$  малый параметр. Здесь  $\delta$  — толщина оболочки,  $R_{20}$  — средний, второй главный радиус кривизны,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Оболочки малой положительной кривизны образуются в случаях, когда конструкциям придадут обтекаемую форму. Такие оболочки часто применяются в кораблестроении, в авиационном и в летательных аппаратах.

Граничным случаем оболочки малой положительной кривизны является оболочка нулевой кривизны, то есть цилиндрическая и коническая оболочки. Поэтому можно результаты, полученные в настоящей работе, сравнивать с результатами исследования вышеупомянутых оболочек. Неосесимметричными колебаниями конических и цилиндрических оболочек занимались основополагающим образом М.Стретт [1], А.Урк и Т. Хут [2], В.Е. Бреславский [4], Э.И. Григолик [6] и И.И.Трапезин [9]. Позже, применяя полубезмоментную теорию оболочек и

метод асимптотического интегрирования, продолжались исследование в работах [3, 10 и 11].

### I. Вывод уравнений колебания

Уравнения колебания выводятся аналогичным образом в работе [3]. Для этого используется упрощенная система, состоящая из трех уравнений равновесия и трех уравнений совместности деформаций и полученная из общей системы дифференциальных уравнений оболочек в соответствии с положениями полубезмоментной теории. Обоснование упрощений подробно изложено в работах [7 и 8]. Учитывая общую погрешность упрощения уравнений в качестве грузовых членов, в уравнениях равновесия приняты инерционные силы в направлении нормали и касательной к образующей окружности срединной поверхности оболочки. Полученная система дифференциальных уравнений колебания оболочки вращения малой положительной кривизны будет следующей:

$$(BS_\alpha)' + AS' = 0 \quad (I.1)$$

$$AS'_\beta + (BS)' + B'S - \kappa_\beta AG'_\beta - AB \left( \frac{\gamma\delta}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nu_\beta \right) = 0 \quad (I.2)$$

$$\kappa_\alpha S_\alpha + \kappa_\beta S_\beta + \frac{1}{B^2} G_\beta'' - \frac{\gamma\delta}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = 0 \quad (I.3)$$

$$(B\kappa_\beta)' - A\tau'' = 0 \quad (I.4)$$

$$A\kappa'_\alpha - (B\tau)' - B'\tau - \kappa_\beta A \varepsilon'_{\alpha T} = 0 \quad (I.5)$$

$$\kappa_\alpha \kappa_\beta + \kappa_\beta \kappa_\alpha + \frac{1}{B^2} \varepsilon''_\alpha = 0. \quad (I.6)$$

Здесь  $(\dots)' = \frac{\partial}{\partial \alpha}(\dots)$ ,  $(\dots)'' = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}(\dots)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  - внутренние координаты оболочки в направлении меридиана и параллельного круга,  $A, B$  - параметры Ляме в направлении  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно,  $\kappa_\alpha = \frac{1}{R_1}$  - первая главная кривизна оболочки,  $\kappa_\beta = \frac{1}{R_2}$  - вторая главная кривизна оболочки,  $S_\alpha, S_\beta, S$  - тангенциальные усилия,  $G_\beta$  - изгибающий момент,  $\varepsilon_\alpha$  - относительное удлинение срединной поверхности оболочки в направлении  $\alpha$ ,  $\kappa_\alpha, \kappa_\beta$  и  $\tau$  - изменение главных кривизн и кручение

срединной поверхности оболочки,  $v_\beta, w$  - составляющие перемещения в направлении  $\beta$  и нормами оболочки,  $\gamma$  - объемный вес материала оболочки,  $g$  - гравитационное ускорение,  $\delta$  - толщина оболочки,  $t$  - время.

Уравнения (I.1) и (I.4) тождественно удовлетворяются, если допустить следующие соотношения:

$$B \kappa_\beta = \psi', \quad A \tau = \psi', \quad B S_\alpha = \varphi', \quad A S = -\varphi', \quad (I.7)$$

где  $\psi$  - угол поворота срединной поверхности оболочки в направлении  $\beta$ ,  $\varphi$  - функция напряжения. Далее применяются следующие упрощенные соотношения упругости

$$G_\beta = -D \kappa_\beta, \quad \varepsilon_\alpha = \frac{1}{E \delta} S_\alpha, \quad (I.8)$$

где  $D = E \delta^3 / 12 (1 - \nu^2)$  - цилиндрическая жесткость оболочки,  $E$  - модуль упругости,  $\nu$  - коэффициент Пуассона. Используя соотношения (I.7) и (I.8), можно уравнения (I.2), (I.3), (I.5) и (I.6) преобразовать в следующие два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{AD}{\kappa_\beta B^3} \psi'''' + \frac{\kappa_\beta AD}{B} \psi'' - \frac{A \kappa_\alpha}{B \kappa_\beta} \varphi'' - \left( \frac{B}{A} \varphi' \right)' - \frac{B'}{A} \varphi' + \frac{A \gamma \delta}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{\kappa_\beta} w' - B v \right] = 0 \\ - \frac{A}{E \delta \kappa_\beta B^3} \psi'''' - \frac{A \kappa_\alpha}{B \kappa_\beta} \psi'' - \left[ \frac{B}{A} \psi' \right]' - \frac{B'}{A} \psi' - \frac{\kappa_\beta}{E \delta} \frac{A}{B} \varphi'' = 0. \end{aligned} \quad (I.9)$$

Между элементами деформации и составляющими перемещения получаются следующие соотношения:

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{B} v' - \kappa_\beta w, \quad \psi = \frac{1}{B} w' + \kappa_\beta v. \quad (I.10)$$

Решения системы (I.9) отыскиваются в виде:

$$\begin{aligned} v(\alpha, \beta) = \bar{v}(\alpha) \sin n \beta \sin \omega t, \quad w(\alpha, \beta) = \bar{w}(\alpha) \cos n \beta \sin \omega t \\ \varphi(\alpha, \beta) = \bar{\varphi}(\alpha) \sin n \beta \sin \omega t, \quad \psi(\alpha, \beta) = \bar{\psi}(\alpha) \sin n \beta \sin \omega t \\ \varepsilon_\beta(\alpha, \beta) = \bar{\varepsilon}_\beta(\alpha) \cos n \beta \sin \omega t. \end{aligned} \quad (I.11)$$

Используя соотношения (I.10) и решения (I.11), получим, аналогично [3], с точностью, присущей полубезмоментной теории,

$$\frac{1}{\kappa_\beta} w' - B v \approx \sin n \beta \frac{n^2 + \kappa_\beta^2 B^2}{n^2 - \kappa_\beta^2 B^2} \frac{B}{\kappa_\beta} \bar{\psi}. \quad (I.12)$$

Применяя решения (I.II) и соотношения (I.I2), представим систему (I.9) в следующем виде:

$$\frac{AD}{\kappa_{\beta} B^3} n^2 (n^2 - \kappa_{\beta}^2 B^2) \bar{\psi} - \frac{1}{AB} (B^2 \bar{\psi}')' + \frac{A}{B} \frac{\kappa_{\alpha}}{\kappa_{\beta}} n^2 \bar{\psi} - \frac{n^2 + \kappa_{\beta}^2 B^2}{n^2 - \kappa_{\beta}^2 B^2} \frac{AB}{\kappa_{\beta}} \frac{\gamma \delta}{g} \omega^2 \bar{\psi} = 0 \quad (I.I3)$$

$$\bar{\psi} = - \frac{E \delta \kappa_{\beta} B^2}{A^2 n^2 (n^2 - \kappa_{\beta}^2 B^2)} (B^2 \bar{\psi}')' + \frac{E \delta \kappa_{\alpha}}{(n^2 - \kappa_{\beta}^2 B^2)} B^2 \bar{\psi}.$$

Из системы (I.I3) получим уравнение относительно  $\bar{\psi}$

$$\frac{E \delta \kappa_{\beta} B}{A^3 n^2 (n^2 - \kappa_{\beta}^2 B^2)} \left\{ B^2 [B (B^2 \bar{\psi}')']' \right\}' - \frac{E \delta \kappa_{\alpha}}{A (n^2 - \kappa_{\beta}^2 B^2)} \left\{ [B^2 (B^2 \bar{\psi}')']' \right\} +$$

$$+ B^2 (B^2 \bar{\psi}')' \left. \right\} + \frac{A E \delta \kappa_{\alpha}^2 n^2}{\kappa_{\beta} (n^2 - \kappa_{\beta}^2 B^2)} B^2 \bar{\psi} +$$

$$+ \frac{AD}{\kappa_{\beta} B^2} n^2 (n^2 - \kappa_{\beta}^2 B^2) \bar{\psi} - \frac{n^2 + \kappa_{\beta}^2 B^2}{n^2 - \kappa_{\beta}^2 B^2} \frac{AB^2}{\kappa_{\beta}} \frac{\gamma \delta}{g} \omega^2 \bar{\psi} = 0. \quad (I.I4)$$

Полученные уравнения используем в дальнейшем для решения оболочек малой положительной кривизны двух типов, а именно — оболочек типа конуса и оболочек типа цилиндра (симметричные).

При исследовании оболочек упомянутых выше типов, предполагается, что края оболочки опираются на тонкостенные или толстостенные диафрагмы. В случае тонкостенной диафрагмы опирание называется шарнирным и решение уравнения (I.I4) должно удовлетворять краевым условиям

$$\text{или} \quad \begin{aligned} \bar{\psi} &= 0, \quad S_{\alpha} = 0 \\ \bar{\psi} &= 0, \quad (B^2 \bar{\psi}')' = 0. \end{aligned} \quad (I.I5)$$

При опирании же краев оболочки на толстостенную диафрагму способ закрепления называется жесткой заделкой и краевые условия будут следующие:

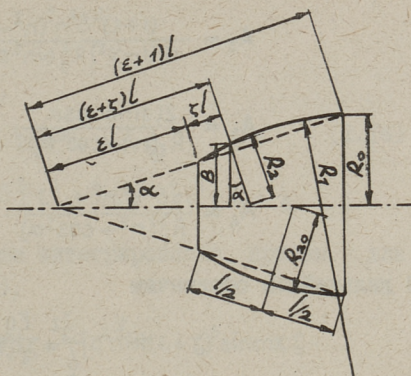
$$\bar{\psi} = 0, \quad \bar{\psi}' = 0. \quad (I.I6)$$

## 2. Определение собственных частот для оболочек малой положительной кривизны типа конуса

Рассматривается оболочка типа усеченного и, в частном случае, замкнутого конуса, которая представлена на фиг. I.

Для определения формы оболочки нужны следующие величины:  $R_0$  - радиус большого основания,  $l$  - длина хорды образующей,  $\alpha$  - угол между осью оболочки и хордой образующей,  $R_1$  - радиус кривизны образующей, определяемый формулой

$$R_1 \geq R_{20} \lambda^{-0,5} = \frac{R_{20}^{\frac{3}{2}} [12(1-\nu^2)]^{\frac{1}{4}}}{\delta^{\frac{1}{2}}} \quad (2.1)$$



Фиг. 1. Оболочка типа конуса.

Радиус большого основания  $R_0$ , второй средний главный радиус кривизны  $R_{20}$  и длина хорды образующей связаны между собой следующими формулами:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_{20} \cos \alpha + \frac{1}{2} l \sin \alpha \\ R_{20} &= \frac{R}{\cos \alpha} - \frac{1}{2} l \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Длину хорды образующей  $l$  можно выражать через  $R_0$ ,  $\alpha$  и  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - отношение радиуса малого основания к разности радиусов оснований усеченного конуса. Вводим в направлении образующей безразмерную координату  $\zeta$ , начало которой отсчитывается от малого основания конуса. Учитывая вышеизложенное, получим для геометрических параметров зависимости

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_\beta} &= R_2, \quad R_2 = (\varepsilon + \zeta) l \operatorname{tg} \alpha, \quad B = R_2 \cos \alpha = (\varepsilon + \zeta) l \sin \alpha, \\ k_\beta B &= \cos \alpha, \quad A = l, \end{aligned} \quad (2.3)$$

а интегрируя уравнение (I.I4) методом Галеркина с учетом краевых условий (I.I5) и (I.I6), получаем следующую вариационную формулу для определения собственных частот для оболочки типа конуса

$$\omega^2 = \min \frac{Eg}{\delta l^2} \left\{ \frac{A_1 \int_0^1 (\varepsilon + \zeta) [(\varepsilon + \zeta)^2 \bar{\psi}']^2 d\zeta + A_2 \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \zeta} \bar{\psi}^2 d\zeta - A_3 \int_0^1 (\varepsilon + \zeta)^2 [(\varepsilon + \zeta)^2 \bar{\psi}'] \bar{\psi} d\zeta}{\int_0^1 (\varepsilon + \zeta)^3 \bar{\psi}^2 d\zeta} + A_4 \right\}, \quad (2.4)$$

в которой

$$A_1 = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{n^2 (n^2 + \cos^2 \alpha)}, \quad (2.5)$$

$$A_2 = \frac{(1+\varepsilon)^2 \delta^2 n^2 (n^2 - \cos^2 \alpha)^2}{12(1-\nu^2) R_0^2 \sin^2 \alpha (n^2 + \cos^2 \alpha)}, \quad (2.6)$$

$$A_3 = \frac{2l \sin \alpha \cos \alpha}{R_1 (n^2 + \cos^2 \alpha)}, \quad (2.7)$$

$$A_4 = \frac{l^2 n^2}{R_1^2 (n^2 + \cos^2 \alpha)}. \quad (2.8)$$

В дальнейшем обозначим

$$\omega^2 = \omega_*^2 \frac{Eg}{\gamma l^2} \quad (2.9)$$

и определяем собственные формы и частоты.

I. Оболочка опирается на тонкостенные диафрагмы. Функция  $\bar{\psi}$  аппроксимируется в виде:

$$\bar{\psi} = a(\varepsilon + \zeta)^k \sin m\pi \zeta. \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) подставляется в выражение (2.4). После интегрирования получается для определения собственных частот следующая формула:

$$\omega_*^2 = \min \left\{ \frac{A_1 k_1 + A_2 k_7 - A_3 k_{11}}{k_4} + A_4 \right\}. \quad (2.11)$$

Здесь  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  находятся при помощи формул (2.5)–(2.8). Коэффициенты  $k_1, k_4, k_7$  и  $k_{11}$  определяются интегрированием и зависят от параметра  $k$ , т.е. от собственной формы, которая зависит еще от параметра  $m$ . Нужно при заданном значении  $n$  отыскивать такие значения  $m$  и  $k = 0, 1, 2$ , которые дадут наименьшую частоту собственных колебаний.

а) Если  $k = 0$ , то аппроксимирующая функция имеет форму:

$$\bar{\psi} = a \sin m\pi \zeta. \quad (2.12)$$

Коэффициенты  $k_1, k_4$  и  $k_7$  определены в работе [3] при помощи формул:

$$k_1 = \frac{1}{2} m^4 \pi^4 C_5 + 3 \frac{1}{2} m^2 \pi^2 C_3 + \frac{3}{4} C_1 \quad (2.13)$$

$$k_4 = \frac{1}{2} C_3 - \frac{3}{4} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.14)$$

$$k_7 = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \zeta} \sin^2 m\pi \zeta d\zeta \quad (2.15)$$



в которых

$$\begin{aligned} C_1 &= \varepsilon + \frac{1}{2}, \\ C_3 &= \varepsilon^3 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{4}, \\ C_5 &= \varepsilon^5 + 2\frac{1}{2}\varepsilon^4 + 3\frac{1}{3}\varepsilon^3 + 2\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{6}, \\ C_7 &= \varepsilon^7 + 3\frac{1}{3}\varepsilon^6 + 7\varepsilon^5 + 8\frac{3}{4}\varepsilon^4 + 7\varepsilon^3 + 3\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{8}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\kappa_{11}$  — определяется при помощи интегрирования, причем для  $\bar{\psi}$ , используя формулу (2.12),

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \int_0^1 (\varepsilon + \zeta)^2 [(\varepsilon + \zeta)^2 \bar{\psi}'] \bar{\psi} d\zeta = \int_0^1 [a^2 m \pi (\varepsilon + \zeta)^3 \sin m \pi \zeta - \\ &- a^2 m^2 \pi^2 (\varepsilon + \zeta)^4 \sin^2 m \pi \zeta] d\zeta = -\frac{a^2 m^2 \pi^2}{2} C_4, \end{aligned} \quad (2.17)$$

в которой

$$C_4 = \varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{2}. \quad (2.18)$$

б) В случае  $\kappa = 1$  получим в качестве аппроксимирующей функции

$$\bar{\psi} = a(\varepsilon + \zeta) \sin m \pi \zeta. \quad (2.19)$$

Коэффициенты будут следующие

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} m^4 \pi^4 C_7 + 12 \frac{3}{4} m^2 \pi^2 C_5 + 2 \frac{1}{4} C_3 - 3 \frac{3}{8} C_1 / m^2 \pi^2 \quad (2.20)$$

$$\kappa_4 = \frac{1}{2} C_5 - 2 \frac{1}{2} C_3 / m^2 \pi^2 + 3 \frac{3}{4} C_1 / m^4 \pi^4 \quad (2.21)$$

$$\kappa_7 = \frac{1}{2} C_1 \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \int_0^1 a^2 \left\{ (\varepsilon + \zeta)^4 (1 - \cos 2m \pi \zeta) + 2m \pi (\varepsilon + \zeta)^5 \sin 2m \pi \zeta - \right. \\ &- \left. \frac{m^2 \pi^2}{2} (\varepsilon + \zeta)^6 (1 - \cos 2m \pi \zeta) \right\} d\zeta = \\ &= -\frac{m^2 \pi^2}{2} C_6 - \frac{1}{4} C_4 + \frac{3}{4 m^2 \pi^2} C_2 - \frac{3}{8 m^4 \pi^4}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где

$$C_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad C_6 = \varepsilon^6 + 3\varepsilon^5 + 5\varepsilon^4 + 5\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{7}. \quad (2.24)$$

2. Оболочка опирается на толстостенные диафрагмы. Для определения параметра собственных частот используем опять-таки формулу (2.11). Аппроксимируем функцию  $\bar{\psi}$  так, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$\bar{\Psi} = a(\varepsilon + \zeta)^k (1 - \cos 2m\pi \zeta). \quad (2.25)$$

Здесь, как и при тонкостенных диафрагмах, рассматриваются два случая

а)  $k = 0$

$$\bar{\Psi} = a(1 - \cos 2m\pi \zeta), \quad (2.26)$$

$$K_1 = 8m^4 \pi^4 C_5 + 2m^2 \pi^2 C_3 - \frac{3}{4} C_1, \quad (2.27)$$

$$K_4 = 1\frac{1}{2} C_3 - 2\frac{13}{16} C_1 / m^2 \pi^2, \quad (2.28)$$

$$K_7 = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \zeta} (1 - \cos 2m\pi \zeta)^2 d\zeta, \quad (2.29)$$

$$K_{11} = -2m^2 \pi^2 C_4 + 6C_2 - \frac{3}{m^2 \pi^2}. \quad (2.30)$$

б)  $k = 1$

$$\bar{\Psi} = a(\varepsilon + \zeta)(1 - \cos 2m\pi \zeta), \quad (2.31)$$

$$K_1 = 8m^4 \pi^4 C_7 - 3m^2 \pi^2 C_5 + 21\frac{3}{4} C_3 - 35\frac{5}{32} C_1 / m^2 \pi^2, \quad (2.32)$$

$$K_4 = 1\frac{1}{2} C_5 - 9\frac{3}{8} C_3 / m^2 \pi^2 + 14\frac{49}{64} C_1 / m^4 \pi^4, \quad (2.33)$$

$$K_7 = 1\frac{1}{2} C_1, \quad (2.34)$$

$$K_{11} = -2m^2 \pi^2 C_6 - 5,75 C_4 + \frac{17,81}{m^2 \pi^2} C_2 - 8\frac{125}{128} \frac{1}{m^4 \pi^4}. \quad (2.35)$$

### 3. Свободные колебания симметричной оболочки малой положительной кривизны

Симметричная оболочка малой положительной кривизны изображена на фиг. 2. Будем исходить из уравнения (I.I4), которое решим методом Галеркина. Вводим следующие обозначения:  $\xi$  - безразмерная переменная в направлении меридиана,  $R$  - радиус параллельного круга оболочки,  $R_1$  - радиус меридиана оболочки,  $L$  - длина оболочки,  $\delta$  - толщина оболочки,  $A = 1$ ,  $B = R$ ,  $K_\beta = \frac{1}{R}$ ,  $K_\alpha = \frac{1}{R_1}$ .

Радиус кривизны меридиана определяется зависимостью:

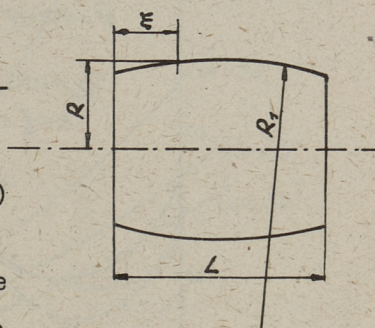
$$R_1 \geq R^2 \delta^{-\frac{1}{2}} [12(1 - \nu^2)]^{\frac{1}{4}}. \quad (3.1)$$

В первую очередь рассматривается случай, когда оболочка опирается на тонкие диафрагмы, т.е. закреплена шарнирно. Решение для  $\bar{\psi}$  имеем в форме

$$\bar{\psi} = a \sin \frac{m\pi R}{L} \xi. \quad (3.2)$$

Применим, как и в случае оболочки типа конуса, обозначение

$$\omega^2 = \omega_*^2 \frac{Eg}{\gamma R^2}. \quad (3.3)$$



Фиг. 2. Симметричная оболочка.

Формула (I.I4) дает после решения следующую формулу для параметра собственных частот

$$\begin{aligned} \omega_*^2 = & \left(\frac{m\pi R}{L}\right)^4 \frac{1}{n^2(n^2+1)} + 2 \left(\frac{m\pi R}{L}\right) \frac{R}{R_1} \frac{1}{n^2+1} + \\ & + \frac{R}{R_1^2} \frac{n^2}{n^2+1} + \frac{\delta^2}{R^2} \frac{n^2(n^2-1)}{12(1-\nu^2)(n^2+1)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если оболочка опирается на толстые диафрагмы, примем для решения

$$\bar{\psi} = a(1 - \cos \frac{2m\pi}{L} \xi). \quad (3.5)$$

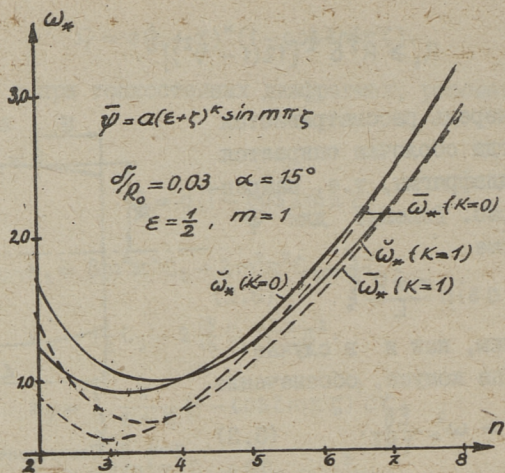
Получим после решения следующую формулу

$$\begin{aligned} \omega_*^2 = & \frac{16}{3} \left(\frac{m\pi R}{L}\right)^4 \frac{1}{n^2(n^2+1)} + \frac{8}{3} \left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 \frac{R}{R_1(n^2+1)} + \\ & + \frac{R^2 n^2}{R_1^2(n^2+1)} + \frac{\delta^2 n^2(n^2-1)}{12(1-\nu^2)R^2(n^2+1)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

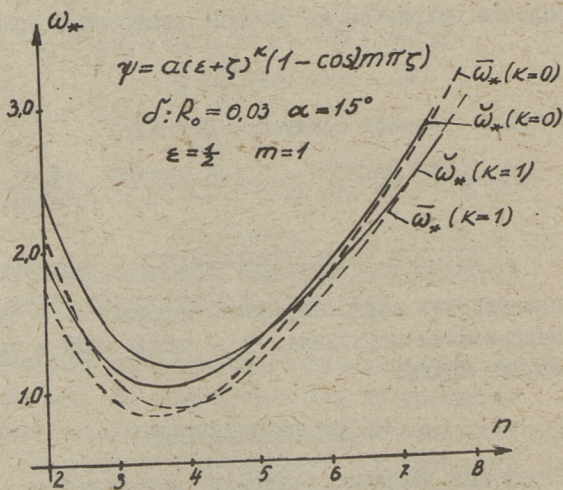
В приведенных формулах, как и раньше,  $m$  - число полу-волн в направлении меридиана,  $n$  - число волн в направлении параллельного круга.

#### 4. Числовые примеры

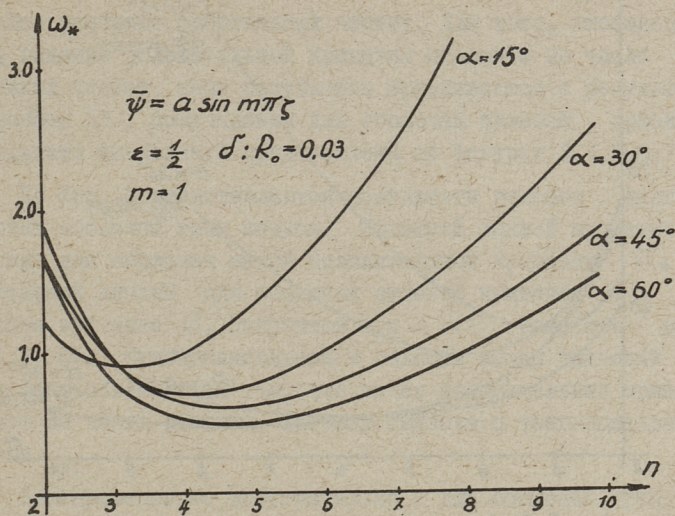
В следующих числовых примерах определяются собственные частоты для оболочек малой положительной кривизны типа усеченного конуса и типа цилиндра (симметричная оболочка). Собственные частоты определяются в зависимости от числа волн  $n$  в направлении параллельного круга. Отыскивается наи-



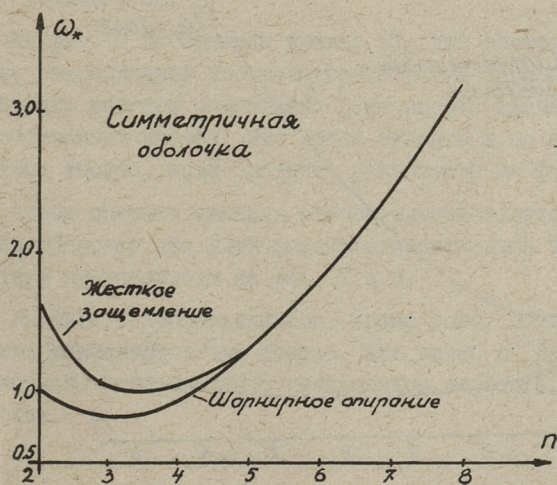
Фиг. 3. Графики зависимости для  $n$ ,  $\check{\omega}_*$ ,  $\bar{\omega}_*$  при шарнирном опирании оболочки.



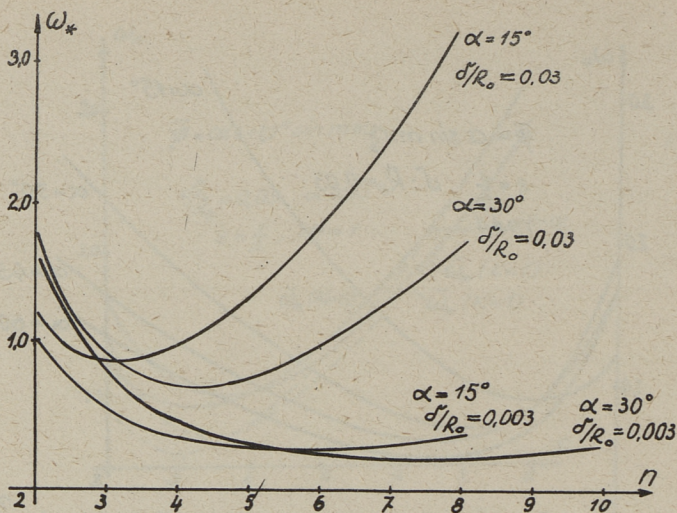
Фиг. 4. Графики зависимости для  $n$ ,  $\check{\omega}_*$ ,  $\bar{\omega}_*$  при защемлении краев оболочки.



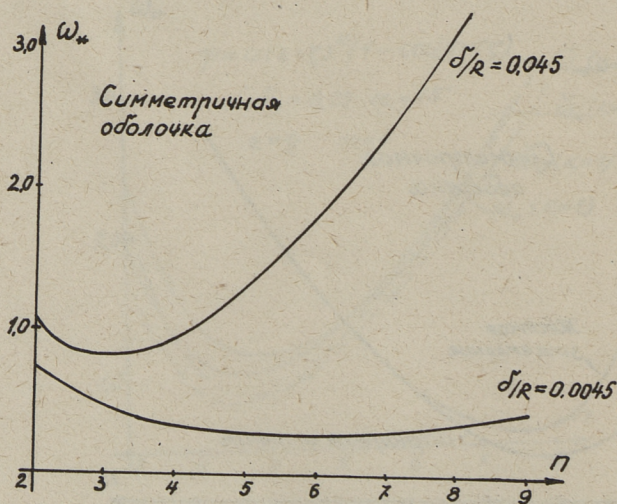
Фиг. 5. Графики зависимости для  $\omega_*$ ,  $n$  и  $\alpha$ .



Фиг. 6. Графики зависимости для  $\omega_*$  и  $n$  для симметричной оболочки.



Фиг. 7. Графики  $\omega_*$  в зависимости от  $n$ ,  $\alpha$  и  $\delta/R_0$ .



Фиг. 8. Графики  $\omega_*$  в зависимости от  $n$  и  $\delta/R$  для симметричной оболочки.

меньшее значение собственных частот. Для того, чтобы оценить влияние положительной кривизны оболочки на число собственных частот, наши результаты сравниваются с результатами работы [3], полученными для оболочек нулевой кривизны. Результаты вычислений представлены на фигурах 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

На фиг. 3 представляются результаты решения шарнирно опертых оболочек типа конуса. Сплошной линией представлены решения для оболочек малой положительной кривизны  $\check{\omega}_*$ , а пунктирной линией для оболочек нулевой кривизны  $\bar{\omega}_*$ . Наименьшее значение  $\check{\omega}_*$  получится при  $\kappa = 0$ . Разность между  $\check{\omega}_*$  и  $\bar{\omega}_*$  будет наибольшая в области малых значений  $n$ . Этот факт объясняется тем, что малая положительная кривизна влияет на часть решения, которая связана с тангенциальными силами.

Вышеприведенное действительно и для оболочек, края которых жестко защемлены. Результаты решения этих оболочек представлены на фиг. 4.

На фиг. 5 представлены кривые для собственных частот при четырех разных углах раствора конуса. Из этих кривых явствует, что при увеличении угла раствора конуса значения  $\check{\omega}_*$  уменьшаются.

На фиг. 6 изображены кривые  $\check{\omega}_*$  для симметричной оболочки, закрепленной соответственно двумя способами. Естественно, что жесткое защемление дает высшее значение для числа собственных частот. Это можно сказать и по поводу оболочек типа конуса, если сравнить результаты на фигурах 3 и 4.

Чтобы оценить влияние относительной толщины на  $\bar{\omega}_*$ , решены оболочки при двух разных относительных толщинах. Результаты представлены на фиг. 7 и 8.

На фиг. 7 представляются, кроме того, оболочки с двумя разными углами раствора конуса. Как видно из графиков,  $\check{\omega}_*$  значительно уменьшается с уменьшением относительной толщины оболочки.

#### Л и т е р а т у р а

1. S t r u t t H.O.J. Eigenschwingungen einer Kegelschale. Annalen der Physik. 5. Folge. Bd. 17, Heft 7, S.729-735, 1933.

2. U r k A.Th. van, H u t G.B. Messung der Radial-schwingungen von Aluminium-Kegelschale. Annalen der Physik. 5. Folge, Bd. 17, Heft 8, S. 915-920, 1933.

3. П о в е р у с Л.Ю., Р я я м е т Р.К. Малые несимметричные собственные колебания упругих тонких конических и цилиндрических оболочек. - "Тр.Таллинск. политехн. ин-та", 1958, серия А, № 147.

4. Б р е с л а в с к и й В.Е. Некоторые основные случаи свободных колебаний конических оболочек.-Труды института, 1954, Вып. 27, с. 107-123.

5. Б р е с л а в с к и й В.Е. О колебаниях цилиндрических оболочек. Инженерный сборник, 1953, т. 16, с. 109-118.

6. Г р и г о л ь к Э.И. О малых колебаниях упругих конических оболочек. Известия Академии наук СССР, ОТН, 1956, № 6, с. 35-43.

7. Г о л ь д е н в е й з е р А.Л. О приближенных методах расчета тонких оболочек нулевой гауссовой кривизны. "Прикладная математика и механика", 1947, т. XI, с. 409-422.

8. Г о л ь д е н в е й з е р А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Госиздат ТТЛ, 1953.

9. Т р а п е з и н И.И. О колебаниях круговой тонкостенной конической оболочки. Сб. "Расчеты на прочность", №4, М., Машгиз, 1959.

10. М а л к и н а Р.Л., Г о д з е в и ч В.Г. Свободные колебания оболочек нулевой кривизны. Известия высших учебных заведений. Серия: Авиационная техника, 1963, № 1.

11. М а л к и н а Р.Л. Применение метода асимптотического интегрирования к задачам оболочек вращения, близких по форме к сферическим. Известия высших учебных заведений. Серия: Авиационная техника, 1964, № 2.



Nichtachsensymmetrische Eigenschwingungen der elastischen  
dünnen Rotationschalen mit kleiner positiver Krümmung

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden die Eigenschwingungen der elastischen dünnen Rotationschalen mit kleiner positiver Krümmung untersucht. Es wird das System der vereinfachten Differentialgleichungen der sogenannten Gleichungen der Semimomenttheorie benutzt. Diese Gleichungen werden mit Hilfe der Galerkin-Methode gelöst und damit endliche Formeln für Eigenschwingungen ermittelt. Hierbei sind auch einige numerische Beispiele zugefügt.

## С о д е р ж а н и е

1. Э.М.Иеги. Характеристики надежности в строительной механике оптимальных систем..... 3
2. Э.М.Иеги, Р.М.Нурмухамедова. Расчет и оптимальное проектирование статически неопределенных рам способом звездочек..... 13
3. В.Б.Ганичев, Э.М.Иеги, Р.С.Мжаванадзе. Общая задача оптимального проектирования многоконтурных рам..... 27
4. Х.Х.Кязрди, Л.Ю.Поверус. Исследование упругих волн в складчатых конструкциях методом трехмерных сеток и методом конечных элементов..... 47
5. Л.Ю.Поверус. Неосесимметричные собственные колебания упругих тонких оболочек вращения малой положительной кривизны..... 57



Таллинский политехнический институт

Труды ТПИ № 394

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ. Сборник статей УИ

Редактор А. Юргенсон

Технический редактор Л. Лоопер

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 19 июня 1975 года

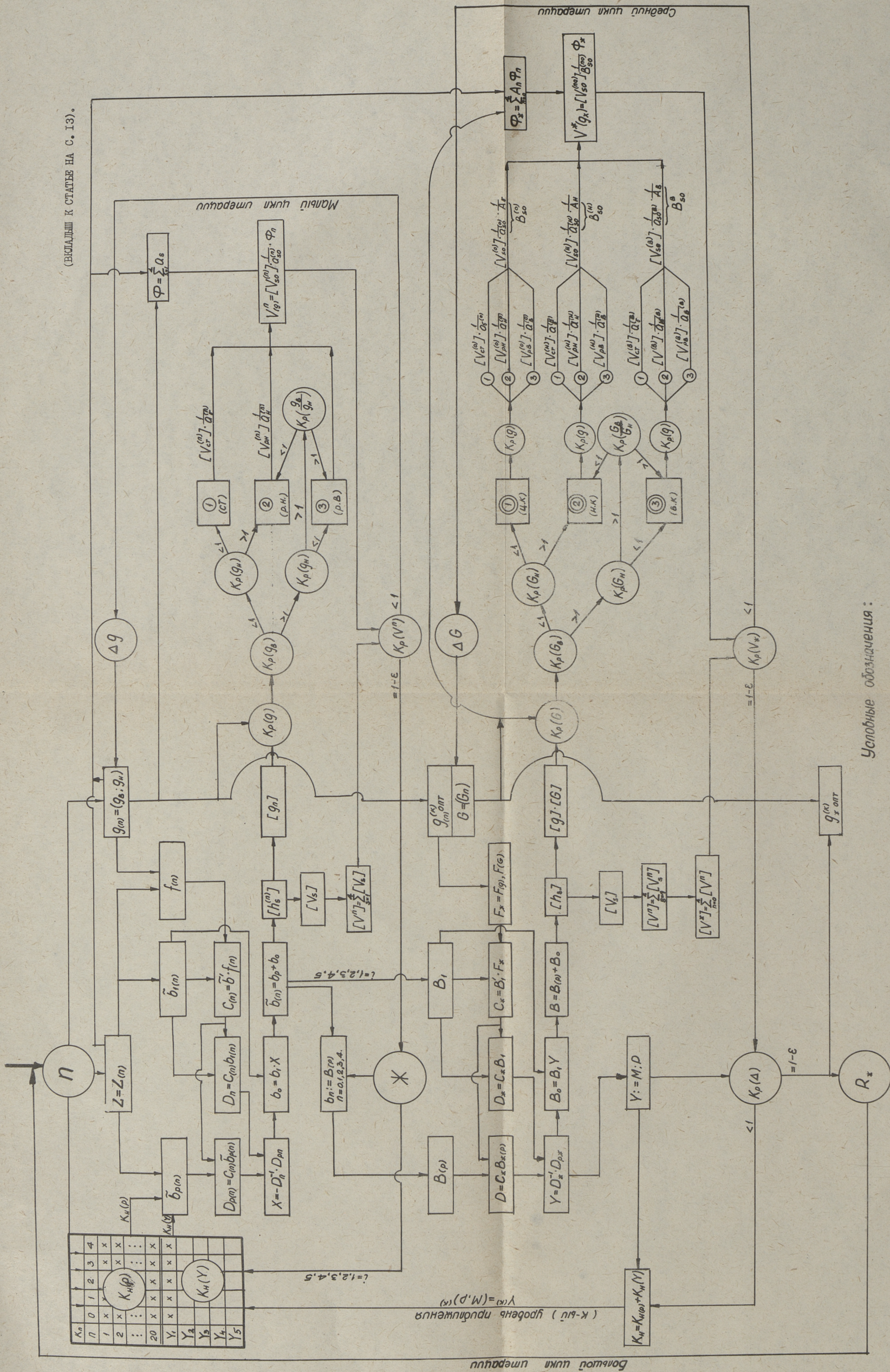
Подписано к печати 11 марта 1976 года

Бумага 60x90/16. Печ. л. 4,5+0,25 прилож. Уч.-изд. л. 4,1

Тираж 350. МВ-01848. Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9

Зак. № 377. Цена 41 коп.





Фиг. 4. БЛОК-СХЕМА АЛГОРИТМА.

Цена 41 коп.

25.

30

11