

Er. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
PUBLICATIONS FROM THE TALLINN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Seeria A nr. 28

1948

Н. А. АЛУМЯЭ

РАВНОВЕСИЕ ТОНКОСТЕННЫХ  
УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК  
В ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

— 48

7022

ENSV Teaduste Akadeemia  
Keskrakendite osakogu



ГИЗ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“  
ТАРТУ, 1948



## Введение.

Знаменитый Л. Эйлер, член Петербургской Академии Наук, первым определил критическую нагрузку центрально сжатого прямого стержня. Он же исследовал поведение стержня в выпученном состоянии, — в т. н. послекритической стадии. В конце прошлого и в начале настоящего столетия разными исследователями определялись критические нагрузки наиболее простых тонкостенных упругих пластинок и оболочек. Однако, поведение этих систем в послекритической стадии не изучалось, несмотря на крайне серьезное значение этого вопроса. Не имея сведений о поведении системы в послекритической стадии, мы не можем заранее, без опыта, сказать, будет ли критическая нагрузка одновременно также и предельной нагрузкой. Наоборот, на основании анализа состояний равновесия в послекритической стадии легко показать, что, например: (1) при центрально сжатых прямых стержнях критическая нагрузка является практически и предельной нагрузкой, (2) сжатые плоские пластинки могут без разрушения нести нагрузку, во много раз бóльшую, чем критическая, но (3) в случае центрально сжатой осевой силой круглоцилиндрической трубы, предельная нагрузка значительно меньше критической [14].\* Поэтому определение состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек является особенно важной задачей, решение которой позволяет уточнить расчёт при проектировании конструкций из тонкостенных оболочек.

Целью настоящей работы является вывод основных дифференциальных уравнений, выражающих состояния равновесия после потери устойчивости основной формы равновесия. Попутно выводится система дифференциальных уравнений для определения нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости основной формы равновесия.

---

\* Цифры в квадратных скобках обозначают номер по списку литературы, приложенному в конце работы.

Мы вводим следующие допущения: (1) напряжённое состояние основной формы равновесия безмоментно, (2) деформация оболочки остаётся малой, несмотря на конечные перемещения точек оболочки в послекритической стадии, (3) кинематическая гипотеза Кирхгофа о деформации оболочки применима, (4) условия равновесия элемента оболочки удовлетворяются не в конечном, деформированном состоянии, а в положении „после вращения“ (см. § 1, р. 4).

Мы будем пользоваться обычной тензорной символикой и придерживаться обозначений, применяемых А. Л. Гольденвейзером и А. И. Лурье в обзорной статье „О математической теории равновесия упругих оболочек“ [1].

## § 1. Деформация срединной поверхности оболочки при конечных перемещениях.

1. **Обозначения геометрических величин недеформированной срединной поверхности.** Срединная поверхность оболочки предполагается отнесённой к внутренним координатам  $x^1, x^2$ . В дальнейшем будут употребляться следующие обозначения:

$\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $(x^1, x^2)$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$ ;

$\mathbf{r}_i$  — координатные векторы,  $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i$ ;

$a_{ij}$  — компоненты основного метрического тензора, они же компоненты вектора,  $a_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$ ;

$a$  — дискриминант основного метрического тензора,

$$a = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21};$$

$c_{ij}$  — компоненты дискриминантного тензора,  $c_{ii} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}$ ;

$\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали,  $2\mathbf{n} = \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta$ ;

$b_{ij}$  — компоненты второго метрического тензора,  $b_{ij} = \mathbf{n} \cdot \partial^2 \mathbf{r} / \partial x^i \partial x^j$ .

В этой работе тензоры 2-й валентности часто будут представлены в диадной форме [2], [3], т. е. в форме инварианта. Основная метрическая диада обозначена через  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{J} = a_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j. \quad (1.1.1)$$

Метрическая диада не преобразует поверхностных векторов; поэтому, если  $d\mathbf{r}$  — элементарный вектор поверхности, то

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \mathcal{J}. \quad (1.1.2)$$

2. **Диада перемещения.** Если  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки до деформации поверхности,  $\mathbf{v}$  — вектор перемещения той же точки, а  $\mathbf{r}^*$  — её радиус-вектор после деформации, то

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{v}, \quad (1.2.1)$$

полагая при этом, что внутренние координаты  $x^1, x^2$  рассматриваемой точки не изменяются.

Преобразование линейного элемента поверхности  $d\mathbf{r}$  при деформации в  $d\mathbf{r}^*$  можно представить однородным аффинным преобразованием бесконечно малой окрестности:

$$d\mathbf{r}^* = d\mathbf{r} + d\mathbf{v} = d\mathbf{r} \cdot (\mathcal{J} + \mathcal{V}), \quad (1.2.2)$$

где  $\mathcal{V}$  — диада перемещения

$$\mathcal{V} = \mathbf{r}^i \partial \mathbf{v} / \partial x^i. \quad (1.2.3)$$

Если разложить вектор перемещения

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{r}^i + v_n \mathbf{n}, \quad (1.2.4)$$

то легко можно выразить компоненты диады  $\mathcal{V}$  через компоненты вектора перемещения

$$\mathcal{V} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j (v_{ji} - b_{ij} v) + \mathbf{r}^i \mathbf{n} (v_i + b_i^\alpha v_\alpha), \quad (1.2.5)$$

где  $v_{ji}$  — обозначение Леви-Чивита для ковариантной производной поверхностного вектора  $v_j$  по  $x^i$ ; в частности  $v_i = \partial v / \partial x^i$ .

**3. Диада деформации.** Пусть  $\bar{\mathcal{V}}$  будет диада, сопряжённая с диадой  $\mathcal{V}$ . Тогда квадрат длины линейного элемента  $d\mathbf{r}^*$  определяется, очевидно, следующим образом:

$$d\mathbf{r}^* \cdot d\mathbf{r}^* = d\mathbf{r} \cdot (\mathcal{J} + \mathcal{V}) \cdot (\mathcal{J} + \bar{\mathcal{V}}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.3.1)$$

Изменение квадрата длины линейного элемента  $d\mathbf{r}$  при деформации будет

$$d\mathbf{r}^* \cdot d\mathbf{r}^* - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot (\mathcal{J} \cdot \bar{\mathcal{V}} + \mathcal{V} \cdot \mathcal{J} + \mathcal{V} \cdot \bar{\mathcal{V}}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.3.2)$$

поэтому оказывается целесообразным назвать диадой деформации  $\mathcal{E}$  симметричную диаду

$$2\mathcal{E} = \mathcal{J} \cdot \bar{\mathcal{V}} + \mathcal{V} \cdot \mathcal{J} + \mathcal{V} \cdot \bar{\mathcal{V}}, \quad (1.3.3)$$

ковариантные компоненты которой обозначим через  $e_{ij}$ :

$$\mathcal{E} = e_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j. \quad (1.3.4)$$

Так как

$$\bar{\mathcal{V}} = \mathbf{r}^j \mathbf{r}^i (v_{ji} - b_{ij} v) + \mathbf{n} \mathbf{r}^i (b_i^\alpha v_\alpha + v_i), \quad (1.3.5)$$

то из выражения (1.3.5) получим

$$\begin{aligned} 2e_{ij} = & v_{ji} + v_{ij} - 2b_{ij} v \\ & + (v_{\alpha i} - b_{i\alpha} v) (v_{ij}^\alpha - b_j^\alpha v) + (v_i + b_i^\alpha v_\alpha) (v_j + b_j^\beta v_\beta). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

**4. Вращение и чистая деформация.** Рассмотренное в рубр. 2 преобразование линейных элементов в окрестности некоторой точки поверхности можно разложить на вращение без деформации поверхности и на последующее симметричное преобразование относительно основного базиса  $\mathbf{r}_i, \mathbf{n}$  после вращения, скажем,  $\mathbf{p}_i, \mathbf{m}$  [4].

Пусть линейный элемент  $d\mathbf{r}$  при вращении преобразуется в линейный элемент  $d\mathbf{p}$ . При помощи диады вращения  $\mathcal{P}$  это можно представить как однородное аффинное и изометрическое преобразование бесконечно малой окрестности

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{r} \cdot (\mathcal{J} + \mathcal{P}). \quad (1.4.1)$$

Полагая, что диада вращения  $\mathcal{P}$  преобразует только поверхностные векторы, представляем диаду  $\mathcal{P}$  в виде шестичленной суммы:

$$\mathcal{P} = p_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j + p_i \mathbf{r}^i \mathbf{n}. \quad (1.4.2)$$

Как частный случай, из (1.4.1) получаем векторы нового базиса  $\mathbf{p}_i, \mathbf{m}$ :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \cdot (\mathcal{J} + \mathcal{P}) = (a_i^\alpha + p_i^\alpha) \mathbf{r}_\alpha + p_i \mathbf{n}, \quad (1.4.3)$$

$$2\mathbf{m} = c^{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \times \mathbf{p}_\beta. \quad (1.4.4)$$

По определению вращения имеем

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad (1.4.5)$$

откуда, на основании (1.4.3), найдём в инвариантной форме условие

$$\mathcal{J} \cdot \overline{\mathcal{P}} + \mathcal{P} \cdot \mathcal{J} + \mathcal{P} \cdot \overline{\mathcal{P}} = 0, \quad (1.4.6)$$

где  $\overline{\mathcal{P}}$  — диада, сопряжённая с диадой  $\mathcal{P}$ . Для компонентов  $\mathcal{P}$  имеем 4 условия

$$p_{ij} + p_{ji} + p_{i\alpha} p_j^\alpha + p_i p_j = 0. \quad (1.4.7)$$

Чистая деформация даётся симметричным аффинным преобразованием бесконечно малой окрестности после вращения

$$d\mathbf{r}^* = d\mathbf{p} \cdot (\mathcal{J}^* + \mathcal{D}), \quad (1.4.8)$$

где

$$\mathcal{J}^* = a_{ij} \mathbf{p}^i \mathbf{p}^j, \quad \mathcal{D} = \varepsilon_{ij} \mathbf{p}^i \mathbf{p}^j. \quad (1.4.9)$$

Диада  $\mathcal{D}$  — симметрична ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ) по определению; назовём её первым тензором деформации срединной поверхности.

Квадрат длины линейного элемента  $d\mathbf{r}^*$  выражается квадратичной формой

$$d\mathbf{r}^* \cdot d\mathbf{r}^* = (a_{ij} + \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} + \varepsilon_{i\alpha} \varepsilon_j^\alpha) dx^i dx^j. \quad (1.4.10)$$

Из выражений (1.3.1) и (1.3.3) следует, что

$$d\mathbf{r}^* \cdot d\mathbf{r}^* = (a_{ij} + 2e_{ij}) dx^i dx^j. \quad (1.4.11)$$

Таким образом, для одной и той же величины мы имеем две различные формы. Однако, при малой деформации можно пренебречь членом  $\varepsilon_{i\alpha} \varepsilon_j^\alpha$ ; в таком случае сравнение (1.4.10) и (1.4.11) показывает, что

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}. \quad (1.4.12)$$

Разложение диадного уравнения

$$\mathcal{I} + \mathcal{V} = (\mathcal{I} + \mathcal{P}) \cdot (\mathcal{I}^* + \mathcal{D}) \quad (1.4.13)$$

даёт в компонентах шесть уравнений:

$$u_{ij} = p_{ij} + \varepsilon_{ij} + \varepsilon_i^\alpha p_{\alpha j}, \quad (1.4.14)$$

$$u_i = p_i + \varepsilon_i^\alpha p_\alpha, \quad (1.4.15)$$

где ради краткости для компонентов диады перемещения введены обозначения

$$u_{ij} = v_{ji} - b_{ij} v, \quad u_i = v_i - b_i^\alpha v_\alpha \quad (1.4.16)$$

см. (1.2.5).

При малой деформации можно пренебречь членами типа  $\varepsilon_{i\alpha} \varepsilon_j^\alpha$ , поэтому из (1.4.14), (1.4.15) легко можно выразить компоненты диады вращения в явном виде

$$p_{ij} = u_{ij} - \varepsilon_{ij} - \varepsilon_i^\alpha u_{\alpha j}, \quad (1.4.17)$$

$$p_i = u_i - \varepsilon_i^\alpha u_\alpha; \quad (1.4.18)$$

мы не будем развёртывать их по компонентам вектора перемещения.

Единичный вектор нормали деформированной срединной поверхности  $\mathbf{m}$  определяется векторным произведением

$$2\mathbf{m} = c^{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \times \mathbf{p}_\beta. \quad (1.4.19)$$

Если вставить сюда  $\mathbf{p}_\alpha$ ,  $\mathbf{p}_\beta$  по формуле (1.4.3), то найдём

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = \mathbf{n} (1 + a^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} p_{\alpha\gamma} p_{\beta\varrho} / 2) \\ - \mathbf{r}^\varrho (p_\varrho + c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} p_{\alpha\gamma} p_\beta). \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

**5. Второй тензор деформации.** Ковариантные компоненты второго тензора деформации поверхности  $\mu_{ij}$  определяются равенствами

$$b_{ij} - \mu_{ij} = \mathbf{m} \cdot \partial \mathbf{p}_i / \partial x^j. \quad (1.5.1)$$

Тензор  $\mu_{ij}$  несимметричен, так как, вообще говоря,

$$\partial \mathbf{p}_i / \partial x^j \neq \partial \mathbf{p}_j / \partial x^i. \quad (1.5.2)$$

На основании (1.4.20) и (1.4.3) можно представить (1.5.1) в развёрнутом виде:

$$b_{ij} - \mu_{ij} = (b_{ij} + p_{ij} + b_j^\alpha p_{i\alpha}) (1 + a^{\beta\gamma} p_{\beta\gamma} + c^{\beta\gamma} c^{\sigma\tau} p_{\beta\sigma} p_{\gamma\tau}) + (b_{j\alpha} p_i - p_{i\alpha j}) (p^\alpha + c^{\beta\gamma} c^{\sigma\alpha} p_{\beta\sigma} p_\gamma). \quad (1.5.3)$$

Компоненты симметричного второго метрического тензора деформированной поверхности  $b_{ij}^*$  вычисляются по обычной формуле дифференциальной геометрии

$$b_{ij}^* = \mathbf{n}^* \cdot \partial \mathbf{r}_i^* / \partial x^j = b_{ji}^*; \quad (1.5.4)$$

нетрудно получить соотношения

$$b_{ij}^* = (b_{\alpha j} - \mu_{\alpha j}) (a_i^\alpha + \varepsilon_i^\alpha), \quad (1.5.5)$$

так как

$$\mathbf{r}_i^* = \mathbf{p}_i + \varepsilon_i^\alpha \mathbf{p}_\alpha, \quad \mathbf{n}^* = \mathbf{m}. \quad (1.5.6)$$

Изменения компонентов второго метрического тензора при деформации, скажем  $\beta_{ij} = b_{ij}^* - b_{ij}$ , суть

$$\beta_{ij} = -\mu_{ij} + \varepsilon_i^\alpha (b_{\alpha j} - \mu_{\alpha j}), \quad (1.5.7)$$

причём

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}. \quad (1.5.8)$$

**6. Условия совместности деформации.** По определению  $\mu_{ij}$  имеем

$$b_{ij} - \mu_{ij} = \mathbf{m} \cdot \partial \mathbf{p}_i / \partial x^j,$$

поэтому разложение

$$\partial \mathbf{p}_i / \partial x^j = (b_{ij} - \mu_{ij}) \mathbf{m} + (\Gamma_{ij}^\alpha + \xi_{ij}^{\cdot\cdot\alpha}) \mathbf{p}_\alpha, \quad (1.6.1)$$

где  $\Gamma_{ij}^\alpha$  — символы Кристоффеля 2-го рода, и

$\xi_{ij}^{\cdot\cdot\alpha}$  — пока неизвестные компоненты разложения,

не противоречит выражению (1.5.1).

Величину  $\xi_{ij}^{\dots\alpha}$  можно найти из условия интегрируемости

$$c^{ij} \partial \mathbf{r}_i^* / \partial x^j = 0, \quad (1.6.2)$$

где

$$\mathbf{r}_i^* = (a_i^\alpha + \varepsilon_i^\alpha) \mathbf{p}_\alpha. \quad (1.6.3)$$

Это векторное уравнение даёт нам три уравнения совместности деформации ( $i = 1, 2$ ):

$$c^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha i | \beta} + c^{\alpha\beta} (a_\alpha^\gamma + \varepsilon_\alpha^\gamma) \xi_{\gamma \beta i} = 0, \quad (1.6.4)$$

$$c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} - \varepsilon_\alpha^\gamma (b_{\gamma\beta} - \mu_{\gamma\beta}) c^{\alpha\beta} = 0; \quad (1.6.5)$$

впрочем, последнее уравнение выражает симметричность тензора  $\beta_{ij}$ :

$$c^{\alpha\gamma} \beta_{\alpha\gamma} = 0. \quad (1.6.6)$$

Далее, дифференцированием по  $x^k$  равенства (1.4.5)

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$$

нетрудно показать антисимметричность величин  $\xi_{ijk}$  относительно индексов  $i, k$ :

$$\xi_{ijk} = -\xi_{kij}. \quad (1.6.7)$$

Введя новое обозначение

$$\xi_{ijk} = -c_{ik} \xi_j, \quad (1.6.8)$$

мы можем в случае малой деформации из уравнений (1.6.4) легко определить  $\xi_i$ :

$$\xi_i = c^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha i | \beta}. \quad (1.6.9)$$

Далее очевидно, что разложение (1.6.1) должно удовлетворять условиям интегрируемости

$$c^{\alpha\beta} \partial^2 \mathbf{p}_i / \partial x^\alpha \partial x^\beta = 0. \quad (1.6.10)$$

Вначале, однако, заметим, что дифференцированием равенств

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$$

получаем:

$$\partial \mathbf{m} / \partial x^j = -(b_{\alpha j} - \mu_{\alpha j}) \mathbf{p}^\alpha. \quad (1.6.11)$$

Теперь нетрудно развернуть векторное уравнение (1.6.10), которое даёт нам три скалярных уравнения совместности деформации ( $i = 1, 2$ ):

$$c^{\gamma\alpha} c^{\beta\mu} \mu_{\gamma\alpha|\beta} - c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} (b_\beta^i - \mu_\beta^i) \varepsilon_{\gamma\alpha|\varrho} = 0, \quad (1.6.12)$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} (2b_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta} - \mu_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta} - 2\varepsilon_{\gamma\alpha|\varrho\beta}) = 0. \quad (1.6.13)$$

В этих уравнениях не учтены сами собою разумеющиеся условия Кодацци и Гаусса для недеформированной поверхности:

$$c^{\alpha\beta} b_{m\alpha|\beta} = 0, \quad R_{ijkm} = b_{ki} b_{mj} - b_{im} b_{jk}, \quad (1.6.14)$$

где  $R_{ijkm}$  — компоненты риманова тензора кривизны.

К уравнениям совместности деформации (1.6.12) (1.6.13) присоединяется ещё уравнение совместности деформации (1.6.5). В случае малых перемещений в этих уравнениях можно пренебречь членами, нелинейными относительно компонентов первого и второго тензора деформации. В таком случае уравнения (1.6.12), (1.6.13), (1.6.5) совпадают с уравнениями, опубликованными А. Л. Гольденвейзером [5].

## § 2. Деформация тонкостенной оболочки при конечных перемещениях.

**1. Геометрия недеформированной оболочки.** Дополним систему координат на поверхности  $x^1, x^2$  третьей, пространственной координатой  $z$ , направленной по нормали к поверхности. Положение точки оболочки, находящейся на расстоянии  $z$  от срединной поверхности в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$ , задаётся радиусом-вектором  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{n}. \quad (2.1.1)$$

Очевидно, что производные от  $\mathbf{R}$  по этим координатам будут:

$$\mathbf{R}_i = \partial\mathbf{R}/\partial x^i = \mathbf{r}_i - zb_i^\alpha \mathbf{r}_\alpha, \quad (2.1.2)$$

$$\mathbf{R}_3 = \partial\mathbf{R}/\partial z = \mathbf{n}, \quad (2.1.3)$$

и поэтому компоненты метрического тензора оболочки суть

$$g_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = a_{ij} - 2zb_{ij} + z^2 b_{i\alpha} b_{j\alpha}, \quad (2.1.4)$$

$$g_{i3} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_3 = 0, \quad g_{33} = \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_3 = 1. \quad (2.1.5)$$

**2. Геометрия деформированной оболочки.** Мы будем применять кинематическую гипотезу Кирхгофа о деформации оболочки, так как установлено [6], что эта гипотеза вполне применима к тонкостенным оболочкам.

По этой гипотезе положение точки  $\mathbf{R}$  оболочки после деформации определяется радиусом-вектором  $\mathbf{R}^*$ :

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{r}^* + z\mathbf{m}. \quad (2.2.1)$$

Координатными векторами деформированной оболочки имеем

$$\mathbf{R}_i^* = \mathbf{r}_i^* - zb_i^{\alpha*} \mathbf{r}_\alpha^*, \quad \mathbf{R}_3^* = \mathbf{m}. \quad (2.2.2)$$

Ковариантные компоненты основного метрического тензора деформированной оболочки  $g_{ij}^*$  вычисляем по обычным правилам, так что

$$g_{ij}^* = \mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{R}_j^* = a_{ij}^* - 2zb_{ij}^* + z^2 b_{i\alpha}^* b_{j\alpha}^*, \quad (2.2.3)$$

$$g_{i3}^* = \mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{m} = 0, \quad g_{33}^* = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1, \quad (2.2.4)$$

где по (1.4.11), в случае малой деформации,

$$a_{ij}^* = \mathbf{r}_i^* \cdot \mathbf{r}_j^* = a_{ij} + 2e_{ij} = a_{ij} + 2\varepsilon_{ij}. \quad (2.2.5)$$

Для ковариантных компонентов тензора деформации оболочки введём обозначение  $\gamma_{ij}$ :

$$g_{ij}^* = g_{ij} + 2\gamma_{ij}. \quad (2.2.6)$$

Выразим тензор деформации оболочки через первый и второй тензоры деформации срединной поверхности. Имеем:

$$2\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} - 2z\beta_{ij} + z^2(b_i^\alpha \beta_{j\alpha} + b_j^\alpha \beta_{i\alpha} + \beta_i^\alpha \beta_{j\alpha}), \quad (2.2.7)$$

$$\gamma_{i3} = 0, \quad \gamma_{33} = 0, \quad (2.2.8)$$

где по (1.5.7)

$$\beta_{ij} = -\mu_{ij} + \varepsilon_i^\alpha (b_{\alpha j} - \mu_{\alpha j}). \quad (2.2.9)$$

Однако, в пределах точности гипотезы Кирхгофа мы можем принять, что при пологих оболочках

$$\varepsilon_i^\alpha (a_{\alpha j} - zb_{\alpha j} + z\mu_{\alpha j} + \dots) \sim \varepsilon_{ij} \quad (2.2.10)$$

$$\mu_{\alpha\beta} (2a_i^\alpha a_j^\beta - zb_i^\alpha a_j^\beta - za_i^\alpha b_j^\beta + za_i^\alpha \mu_j^\beta) \sim 2\mu_{ij}, \quad (2.2.11)$$

значит,

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} + z\mu_{ij}. \quad (2.2.12)$$

### 3. Элемент оболочки после вращения срединной поверхности.

Рассматривая элемент оболочки, отделённый от смежных элементов, можем вращать его вместе с срединной поверхностью, не деформируя его при этом. Вращение происходит в указанном в § 1, р. 4 виде.

До вращения точка оболочки  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{n}$  имела координатные векторы, определяемые выражениями (2.1.2), (2.1.3). При вращении они, конечно, изменяются; обозначим их в новом положении через  $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_3$ . Очевидно, что

$$\mathbf{P}_i = (a_i^\alpha - zb_i^\alpha) \mathbf{P}_\alpha, \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{m}. \quad (2.3.1)$$

Элементарные площадки на координатных поверхностях  $x^1 = const.$ ,  $x^2 = const.$  до деформации будут соответственно

$$do^1 = |\mathbf{R}_2 dx^2 \times \mathbf{n} dz| = \sqrt{g} |\mathbf{R}^1| dx^2 dz = \sqrt{gg^{11}} dx^2 dz \quad (2.3.2)$$

и

$$do^2 = \sqrt{gg^{22}} dx^1 dz;$$

здесь:  $g$  — дискриминант основного метрического тензора оболочки  $g_{ij}$ ; компоненты  $g_{ij}$  являются также и компонентами вектора для образования  $g^{kn}$ ,  $\mathbf{R}^k$ .

Если разложить  $g^{ij}$  по степеням  $z$ , то получим

$$g^{ij} = a^{ij} + 2z(2Ha^{ij} - h^{ij}) + \dots \quad (2.3.3)$$

где  $2H = a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$ ,  $h^{ij} = B^{ij}/a$ , а  $B^{ij}$  — минор элемента  $b_{ij}$  в определителе  $|b_{ij}|$ .

При вращении элемента оболочки величины площадок не изменяются.

### § 3. Статика оболочек.

**1. Напряжённое состояние оболочки.** В отличие от линейной теории оболочек, мы будем исследовать равновесия элементов оболочки в положении „после вращения“. Так как это положение в случае малой деформации близко к конечному, деформированному положению, то, в целях упрощения геометрической стороны анализа, такое упрощение допустимо.

Пусть  $s^i do^i$  будет элементарная сила, действующая на элементарную площадку  $do^i$  координатной поверхности  $x^i = const.$ ; очевидно, что  $s^i$  — вектор напряжения;

$\mathbf{T}^{(1)} dx^2$ ,  $\mathbf{T}^{(2)} dx^1$  — главные векторы сил, действующие на элементы оболочки на координатных поверхностях  $x^1 = const.$ ,  $x^2 = const.$  соответственно,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(1)} dx^2 &= dx^2 \int_{-t/2}^{+t/2} \mathbf{s}^1 \sqrt{g^{11}g} dz, \\ \mathbf{T}^{(2)} dx^1 &= dx^1 \int_{-t/2}^{+t/2} \mathbf{s}^2 \sqrt{g^{22}g} dz; \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$\mathbf{M}^{(1)} dx^2$ ,  $\mathbf{M}^{(2)} dx^1$  — главные моменты сил, действующие на элемент оболочки на координатных поверхностях  $x^1 = const.$ ,  $x^2 = const.$  соответственно, относительно некоторой точки на срединной поверхности,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(1)} dx^2 &= dx^2 \int_{-t/2}^{+t/2} z \mathbf{m} \times \mathbf{s}^1 \sqrt{g^{11}g} dz, \\ \mathbf{M}^{(2)} dx^1 &= dx^1 \int_{-t/2}^{+t/2} z \mathbf{m} \times \mathbf{s}^2 \sqrt{g^{22}g} dz. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Разложим вектор напряжения по координатным векторам  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{m}$ ; пусть

$$\mathbf{s}^i = (s^{i\alpha} \mathbf{P}_\alpha + s^{i3} \mathbf{m}) / \sqrt{g^{ii}}. \quad (3.1.3)$$

Исходя из уравнений равновесия, нетрудно обычным способом доказать, что  $s^{ij}$  являются компонентами поверхностного тензора, т. н. тензора напряжения, а  $s^{i3}$  — компонентами поверхностного вектора ( $i, j = 1, 2$ ).

Пусть две грани элементарной трёхгранной призмы совпадают соответственно с двумя координатными поверхностями  $x^1 = const.$ ,  $x^2 = const.$ , основания — с поверхностями  $z = const.$ ,  $z + dz = const.$ , а третья грань призмы характеризуется единичной нормалью  $\mathbf{u}$ . Если площадь третьей грани равняется  $do$ , то из замкнутости поверхности призмы следует, что

$$\sum_{i=1}^2 do^i \mathbf{P}^i / \sqrt{g^{ii}} = \mathbf{u} do, \tag{3.1.4}$$

и поэтому

$$do^i = \sqrt{g^{ii}} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{u} do. \tag{3.1.5}$$

Условие равновесия призмы требует

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{s}^i do^i = \mathbf{s}^u do; \tag{3.1.6}$$

подставляя сюда (3.1.3) и (3.1.5), найдём

$$\mathbf{s}^u = \mathbf{u} \cdot (s^{ij} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j + s^{i3} \mathbf{P}_i \mathbf{m}); \tag{3.1.7}$$

таким образом оказывается, что выражение

$$s^{ij} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j + s^{i3} \mathbf{P}_i \mathbf{m} = \mathcal{S} \tag{3.1.8}$$

представляет собою инвариант, следовательно,  $s^{ij}$  — являются компонентами тензора, а  $s^{i3}$  — компонентами вектора;  $\mathcal{S}$  — конечно, диада напряжения.

Условия равновесия элементарного параллелепипеда требуют

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{P}_i dx^i \times \mathbf{s}^i do^i = 0, \tag{3.1.9}$$

а это возможно лишь в том случае, если

$$s^{ij} = s^{ji}, \tag{3.1.10}$$

т. е., тензор напряжения должен быть симметричным.

Разложим  $\mathbf{T}^{(1)}$ ,  $\mathbf{T}^{(2)}$  и  $\mathbf{M}^{(1)}$ ,  $\mathbf{M}^{(2)}$  по векторам  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{T}^{(i)} = \sqrt{a} (T^{i\alpha} \mathbf{p}_\alpha + N^i \mathbf{m}), \tag{3.1.11}$$

$$\mathbf{M}^{(i)} = \sqrt{a} c_\beta^\alpha M^{i\beta} \mathbf{p}_\alpha \tag{3.1.12}$$

Нетрудно найти, что

$$T^{ij} = \int_{-t/2}^{+t/2} (s^{ij} - z s^{i\alpha} b_j^\alpha) \sqrt{g/a} dz, \quad (3.1.13)$$

$$N^i = \int_{-t/2}^{+t/2} s^{i3} \sqrt{g/a} dz \quad (3.1.14)$$

$$M^{ij} = \int_{-t/2}^{+t/2} z (s^{ij} - z s^{i\alpha} b_j^\alpha) \sqrt{g/a} dz. \quad (3.1.15)$$

Отсюда также видно, что  $T^{ij}$ ,  $M^{ij}$  — контравариантные компоненты тензоров, скажем, тензоров тангенциальных сил и моментов, а  $N^i$  — контравариантные компоненты вектора поперечных сил.

**2. Условия равновесия.** Рассмотрим элемент оболочки, ограниченной координатными поверхностями  $x^i$ ,  $x^i + dx^i = const.$  и внешними поверхностями  $z = \pm t/2$ .

Обозначим через  $\mathbf{X} dx^1 dx^2$  главный вектор всех внешних сил, действующих на этот элемент оболочки; пусть будет

$$\mathbf{X} = \sqrt{a} (X^\alpha \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{Xm}); \quad (3.2.1)$$

далее, обозначим через  $\mathbf{M} dx^1 dx^2$  главный момент всех внешних сил, действующих на рассматриваемый элемент оболочки, и пусть будет

$$\mathbf{M} = \sqrt{a} M^\alpha \mathbf{p}_\alpha. \quad (3.2.2)$$

Следуя Гольденвейзеру [5], введём для удобства вычислений новые обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(1)} &= \mathbf{T}_2, & \mathbf{T}^{(2)} &= -\mathbf{T}_1, \\ \mathbf{M}^{(1)} &= \mathbf{M}_2, & \mathbf{M}^{(2)} &= -\mathbf{M}_1. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Из (3.1.11) и (3.1.12) теперь находим, что

$$\mathbf{T}_i = c_{\alpha i} (T^{\alpha\beta} \mathbf{p}_\beta + N^\alpha \mathbf{m}), \quad \mathbf{M}_i = c_{\alpha i} c_j^\beta M^{\alpha\gamma} \mathbf{p}_\beta. \quad (3.2.4)$$

Условия равновесия оболочки требуют

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{(1)}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{T}^{(2)}}{\partial x^2} + \mathbf{X} \right) \equiv c^{ij} \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{X} = 0, \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{\partial \mathbf{M}^{(1)}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{M}^{(2)}}{\partial x^2} + \mathbf{p}_1 \times \mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{p}_2 \times \mathbf{T}^{(2)} + \mathbf{M} \right) \\ & \equiv c^{ij} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x^i} + c^{ij} \mathbf{p}_i \times \mathbf{T}_j + \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{M} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

В развёрнутом виде получим уравнения

$$T_{\dots/\alpha}^{\alpha i} - c_{\gamma}^i T^{\alpha\gamma} c^{\beta\varrho} \varepsilon_{\beta\alpha/\varrho} - N^{\alpha} (b_{\alpha}^i - \mu_{\alpha}^i) + X^i = 0, \quad (3.2.7)$$

$$T^{\alpha\beta} (b_{\beta\alpha} - \mu_{\beta\alpha}) + N_{\dots/\alpha}^{\alpha} + X = 0, \quad (3.2.8)$$

$$M_{\dots/\alpha}^{\alpha i} - c_{\beta}^i M^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} \varepsilon_{\gamma\alpha/\varrho} - N^i - c_{\beta}^i M^{\beta} = 0, \quad (3.2.9)$$

$$- c_{\gamma}^{\beta} M^{\alpha\gamma} (b_{\beta\alpha} - \mu_{\beta\alpha}) + c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.2.10)$$

В дальнейшем за начальное положение оболочки примем положение, предшествующее потере устойчивости оболочки. Условимся, что начальное напряжённое состояние — безмоментное. Конечно, оно должно быть также и состоянием равновесия: поэтому, если мы обозначим тензор тангенциальных сил в этом состоянии через  $T_{(0)}^{ij}$ , а компоненты главного вектора внешних сил — через  $X_{(0)}^i$ ,  $X_{(0)}$ , то должны быть соблюдены условия

$$\begin{aligned} T_{(0)\dots/\alpha}^{\alpha i} + X_{(0)}^i &= 0, \\ T_{(0)}^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} &= 0, \quad c_{\alpha\beta} T_{(0)}^{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

После потери устойчивости начального состояния равновесия оболочки возникает некоторое смешанное напряжённое состояние, характеризующееся внутренними усилиями  $T^{ij} = T_{(0)}^{ij} + S^{ij}$ ,  $M^{ij}$ ,  $N^i$  и вызванное полем внешних сил  $X^i = X_{(0)}^i + Y^i$ ,  $X = X_{(0)} + Y$ .

Очевидно, в состоянии равновесия (если  $M^i = 0$ )

$$\begin{aligned} S_{\dots/\alpha}^{\alpha i} - c_{\gamma}^i (T_{(0)}^{\alpha\gamma} + S^{\alpha\gamma}) c^{\beta\varrho} \varepsilon_{\beta\alpha/\varrho} - (b_{\alpha}^i - \mu_{\alpha}^i) M_{\dots/\beta}^{\beta\alpha} + \\ + (b_{\alpha}^i - \mu_{\alpha}^i) c_{\beta}^{\alpha} M^{\sigma\beta} c^{\gamma\sigma} \varepsilon_{\gamma\sigma/\varrho} + Y^i = 0, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} - (T_{(0)}^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) \mu_{\beta\alpha} + M_{\dots/\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \\ - c_{\beta}^{\sigma} c^{\gamma\varrho} (M^{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\alpha/\varrho})_{/\sigma} + Y = 0, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$- c_{\gamma}^{\beta} M^{\alpha\gamma} (b_{\beta\alpha} - \mu_{\beta\alpha}) + c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0; \quad (3.2.14)$$

из этих уравнений вектор поперечных сил  $N^i$  исключён при помощи (3.2.9).

## § 4. Законы упругости.

1. **Связь между деформациями и напряжениями.** По определению, для идеально упругого изотропного тела имеет место физическое соотношение, выражающее линейную зависимость между тензором напряжения и тензором деформации. Если  $g_{ij}$  — компоненты метрического тензора,  $g_{ij} + 2\gamma_{ij}$  — компоненты метрического тензора после деформации, а  $s^{ij}$  — компоненты тензора напряжений, то, по крайней мере, в случае малых деформаций,

$$s_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \gamma_{(3)} g_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \gamma_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.1.1)$$

где

$$\gamma_{(3)} = g^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}, \quad (4.1.2)$$

а  $E$  — модуль Юнга, и  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Выражение (4.1.1) является обобщённым законом Гука сплошной среды в криволинейных координатах.

Однако, в случае деформации тонкостенной оболочки на основании гипотезы Кирхгофа получено, что

$$\gamma_{ij} \neq 0, \quad (i = 1, 2) \quad (2.2.12)$$

$$\gamma_{i3} = 0, \quad \gamma_{33} = 0; \quad (2.2.8)$$

поэтому из закона упругости (4.1.1) выводится невероятное при деформации тонкостенных оболочек следствие, что

$$s_{33} = 0. \quad (4.1.3)$$

Для избежания этого следствия обыкновенно изменяется вторая часть гипотезы Кирхгофа, и  $\gamma_{33}$  определяется из условия  $s_{33} = 0$ . В таком случае, в качестве закона упругости деформации тонкостенных оболочек, получается

$$s_{ij} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \gamma g_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \gamma_{ij}, \quad (4.1.4)$$

где

$$\gamma = g^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}, \quad (4.1.5)$$

а индексы  $i, j, \alpha, \beta$  имеют теперь значения 1, 2.

При вычислении контравариантных компонентов  $s^{ij}$  тензора напряжения необходимо вспомнить, что вектором преобразования компонентов  $s_{ij}$  и  $\gamma_{ij}$  является ковариантный метрический тензор  $g_{ij}$ . Поэтому:

$$s^{ij} = \frac{E}{1-\nu^2} \{ \nu g^{\alpha\beta} g^{ij} + (1-\nu) g^{i\alpha} g^{j\beta} \} \gamma_{\alpha\beta}. \quad (4.1.6)$$

Если разложить  $s^{ij}$  по степеням  $z$ , применяя (2.3.3), и ограничиться только первыми членами разложения, (так как большая точность, ввиду применения гипотезы Кирхгофа, не обоснована), то получим

$$s^{ij} = \frac{E}{1-\nu^2} (a^{i\alpha} a^{j\beta} + \nu c^{i\alpha} c^{j\beta}) (\varepsilon_{\alpha\beta} + z \mu_{\alpha\beta}). \quad (4.1.7)$$

**2. Связь между деформациями и внутренними усилиями.** Допустим, что оболочка, находящаяся в безмоментном напряжённом состоянии, перед потерей устойчивости имеет тензор тангенциальных сил  $T_{(0)}^{ij}$ .

После потери устойчивости тензор тангенциальных сил имеет значение

$$T^{ij} = T_{(0)}^{ij} + S^{ij}, \quad (4.2.1)$$

причём

$$S^{ij} = \int_{-t/2}^{+t/2} (s^{ij} - z s^{i\alpha} b_{\alpha}^j) \sqrt{g/a} dz \quad (4.2.2)$$

представляет прирост тензора тангенциальных сил после потери устойчивости.

Вставляя (4.1.7) в (4.2.2), получим в пределах точности гипотезы Кирхгофа соотношения

$$S^{ij} = B E^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad M^{ij} = D E^{ij\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}, \quad (4.2.3)$$

где

$$B = Et / (1 - \nu^2), \quad D = Et^3 / 12 (1 - \nu^2) \quad (4.2.4)$$

и

$$E^{ijmn} = a^{im} a^{jn} + \nu c^{im} c^{jn}. \quad (4.2.5)$$

Отсюда легко получить также обратные соотношения

$$\varepsilon_{ij} = B' P_{ij\alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \quad \mu_{ij} = D' P_{ij\alpha\beta} M^{\alpha\beta}, \quad (4.2.6)$$

где

$$B' = 1 / Et, \quad D' = 12 / Et^3 \quad (4.2.7)$$

и

$$P_{ijmn} = a_{im} a_{jn} - \nu c_{im} c_{jn}. \quad (4.2.8)$$

## § 5. Определение критической нагрузки.

1. **Основные уравнения.** В состоянии равновесия, бесконечно близком к начальному положению, но качественно отличающемся от него,  $S^{ij}$ ,  $M^{ij}$ ,  $N^i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  будут бесконечно малыми величинами. В уравнениях равновесия (3.2.12) — (3.2.14) и в уравнениях совместности деформации можно поэтому пренебречь их произведениями. Тогда уравнения равновесия получают вид

$$S^{..|\alpha} - c_{\gamma}^i T_{(0)}^{\alpha\gamma} c^{\beta\varrho} \varepsilon_{\beta\alpha|\varrho} - b_{\alpha}^i M^{..|\beta} = 0, \quad (5.1.1)$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} - T_{(0)}^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + M^{..|\alpha\beta} = 0, \quad (5.1.2)$$

$$-c^{\beta}_{\gamma} M^{\alpha\gamma} b_{\beta\alpha} + c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0, \quad (5.1.3)$$

а уравнения совместности деформации ничем не отличаются от таковых в линейной теории оболочек, — из (1.6.12), (1.6.13), (1.6.5) получим

$$c^{i\gamma} c^{\alpha\beta} \mu_{\gamma\alpha|\beta} - c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} b_{\beta}^i \varepsilon_{\gamma\alpha|\varrho} = 0, \quad (5.1.4)$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} (b_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta} - \varepsilon_{\gamma\alpha|\varrho\beta}) = 0, \quad (5.1.5)$$

$$c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} - c^{\alpha\beta} b_{\beta}^{\gamma} \varepsilon_{\alpha\gamma} = 0; \quad (5.1.6)$$

физические соотношения (4.2.3) или (4.2.6) останутся неизменными.

Таким образом, для определения 16 неизвестных  $S^{ij}$ ,  $M^{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  имеем 16 уравнений, однородных относительно этих неизвестных. Если также и граничные условия однородны относительно неизвестных, то отличное от нуля решение возможно только при определённых значениях тензора тангенциальных сил  $T_{(0)}^{ij}$ . Качественный вид тензора  $T_{(0)}^{ij}$  зависит от внешней нагрузки, которая всегда конкретно задана. Напряжённое состояние, отвечающее тензору  $T_{(0)}^{ij}$ , мы принимаем в качестве начального напряжённого

состояния. Метрические тензоры  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  также относятся к этому начальному состоянию.

Значение внешней нагрузки, при которой возможны различные формы равновесия, называется критической нагрузкой.

**2. Классификация оболочек.** Некоторые статические свойства оболочек определяют значения трёх геометрических параметров:  $t$  — толщина оболочки,  $R$  — наименьший радиус кривизны,  $L$  — наименьшее простираение оболочки.

Оболочка называется тонкостенной, если соотношение

$$t/L = \lambda \quad (5.2.1)$$

— малая величина. В случае тонкостенной оболочки возможно применение гипотезы Кирхгофа, имеющей погрешность порядка  $t/L$ .

Пологость оболочки характеризуется соотношением  $L/R$ ; пусть будет

$$L/R = \lambda^r. \quad (5.2.2)$$

Пологими принято считать оболочки, для которых  $r > 0^*$ ; случай  $r = \infty$  соответствует плоской пластинке.

**3. Характеристика состояния равновесия при критической нагрузке.** Отнесём срединную поверхность оболочки к координатной системе, обладающей свойством, что  $a_{ij} \sim 1$ . Такое временное ограничение осуществимо при пологих оболочках, каковые только и будут предметом дальнейшего рассмотрения. Это ограничение удобно при анализе основных уравнений, представленных в § 5, р. 1. Так как порядок величины  $L$  нами принят за единицу, то наибольший из  $b_{ij} \sim \lambda^r$ .

Пусть величины в выражениях (5.1.1) — (5.1.6) имеют следующие порядки:

$$\mu_{ij} \sim \mu, \quad \varepsilon_{ij} \sim \mu \lambda^e, \quad T_{(0)}^{ij} \sim E \lambda^{e+1}, \quad (5.3.1)$$

где  $\mu$  остаётся неопределённой малой величиной, ввиду однородности этих уравнений, а  $e$  и  $s$  пока неизвестны. На основании (4.2.3) и (5.3.1)

$$S^{ij} \sim E \mu \lambda^{e+1}, \quad M^{ij} \sim E \mu \lambda^3. \quad (5.3.2)$$

\* Рейснер считает сферическую оболочку полой, если  $L/R < 1$ , см. [7].

Далее, пусть при ковариантном дифференцировании изменяется порядок величин, характеризующих деформации, в  $\lambda^{-k}$  раз, так что, например,

$$\mu_{ij/m} \sim \mu \lambda^{-k}, \quad \varepsilon_{ij/m} \sim \mu \lambda^{e-k}, \quad (5.3.3)$$

где  $k$  — также пока неопределённая величина.

Нетрудно найти физическое значение  $k$ : длина волны выпущенной стенки оболочки  $l \sim \lambda^k L$ .

Будем различать два вида деформации при потере устойчивости основной формы равновесия.

(а) Мы скажем, что изгиб оболочки при потере устойчивости сопровождается сжатием-растяжением срединной поверхности, если в уравнении (5.1.5) главные члены обеих сумм

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} b_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta}, \quad c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} \varepsilon_{\gamma\alpha|\varrho\beta}$$

— величины одинакового порядка. Тогда имеет место равенство

$$e - 2k = r. \quad (5.3.4)$$

(б) Мы скажем, что изгиб оболочки сопровождается бесконечно малой деформацией первого порядка, если

$$e - 2k = 1 + r. \quad (5.3.5)$$

**4. Пологие оболочки ( $r \sim 0$ ).** (а) *Изгиб оболочки сопровождается сжатием-растяжением срединной поверхности.* Качественный анализ уравнения (5.1.2) показывает, что критическая нагрузка будет наименьшая, если  $e = 2k = 1$ . В таком случае  $c$  принимает значение 1.

На основании анализа относительно порядка разных величин в уравнениях (5.1.1) — (5.1.6) в них можно пренебречь несущественными членами. Оказывается, что при определении критической нагрузки достаточно рассмотреть уравнения

$$S^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} = 0, \quad (5.4.1)$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} - T_{(0)}^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + M^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0, \quad (5.4.2)$$

$$c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.4.3)$$

в качестве уравнений равновесия и уравнения

$$c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha|\beta} = 0, \quad (5.4.4)$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} b_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta} - c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} \varepsilon_{\gamma\alpha|\varrho\beta} = 0, \quad (5.4.5)$$

$$c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} = 0 \quad (5.4.6)$$

в качестве уравнений совместности деформации, причём отброшенные члены имеют порядок  $\lambda$  по сравнению с удерживаемыми членами. К этим уравнениям присоединяются физические соотношения (4.2.3).

(б) *Изгиб оболочки сопровождается бесконечно малой деформацией первого порядка.* Анализ уравнения (5.1.2) показывает, что  $c$  будет максимальным при  $e = 1,5$ , причём  $2k = 0,5$ . Легко проверить, что в уравнениях равновесия (5.4.1), (5.4.3) отброшенные члены имеют теперь в сравнении с удерживаемыми членами порядок  $\lambda^{0,5}$ ; в уравнениях совместности деформации (5.4.4), (5.4.6) отброшенные члены имеют в данном случае порядок  $\lambda^{1,5}$ , а уравнение (5.4.5) можно написать в виде

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} b_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta} = 0. \quad (5.4.7)$$

Таким образом, критическое состояние оболочки определяется достаточно точно уравнениями (5.4.1) — (5.4.6) за исключением уравнения (5.4.5), которое заменяется упрощённым уравнением (5.4.7).

**5. Весьма пологие оболочки ( $r \sim 1$ ).** (а) *Изгиб оболочки сопровождается сжатием-растяжением срединной поверхности.* Качественный анализ показывает, что деформация оболочки характеризуется значениями  $k = 0$ ,  $e = 1$ , а параметр, определяющий критическую нагрузку,  $c = 2$ . Критическое состояние определяется уравнениями (5.4.1) — (5.4.6), причём отброшенные члены теперь имеют порядок  $\lambda^2$ .

(б) *Изгиб оболочки сопровождается бесконечно малой деформацией первого порядка.* Критическую нагрузку можно определить из уравнения

$$-T_{(0)}^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + M_{\dots|\alpha\beta}^{\alpha\beta} = 0;$$

здесь отброшенный член имеет порядок  $\lambda$ . Легко убедиться, что в данном случае  $c = 2$ ,  $k = 0$ .

В заключение отметим, что анализ, проведённый в р. 4 и р. 5, касается бесконечно малой области оболочки; следовательно, полученные результаты имеют общий для всей оболочки характер, если деформация качественно однородна по всей оболочке. Обыкновенно в краевой зоне оболочек, из-за краевых закреплений, изгиб оболочки сопровождается деформацией, вследствие чего в тех случаях, где изгиб внутренней части оболочки сопровождается только малой деформацией, критическая нагрузка увеличивается за счёт более жёстких зон у краёв.

**6. Введение функции перемещения и напряжения.** Из изложенного в предыдущей рубрике следует, что наиболее общей системой дифференциальных уравнений для определения критической нагрузки являются уравнения (5.4.1) — (5.4.6). Дадим этой системе удобную для интегрирования форму.

Компоненты второго тензора деформации можно выразить через одну скалярную функцию перемещения  $W$ :

$$\mu_{ij} = W_{|ij} \quad (5.6.1)$$

Действительно, уравнение (5.4.6) удовлетворяется тождественно, а уравнения (5.4.4) удовлетворяются с допустимой точностью, какая бы ни была функция  $W$ , так как в выражении

$$c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha|\beta} = c^{\alpha\beta} W_{|\alpha\beta} = -K c_i^{\cdot\alpha} W_{|\alpha},$$

как показал анализ, проведённый в § 5, р. 4, 5,

$$W_{|\alpha\beta} \gg K W_{|\gamma};$$

(при гауссовой кривизне срединной поверхности  $K \ll 1$  будут  $W_{|\alpha\beta} \sim \mu\lambda^{-0.5}$ ,  $K W_{|\gamma} \sim \mu\lambda^{0.5}$ ) поэтому

$$c^{\alpha\beta} W_{|\alpha\beta} = 0.$$

Этот вывод остаётся верным также и для весьма пологих оболочек — хотя и там  $k=0$ , но зато гауссова кривизна  $K$  — величина порядка  $\lambda^{2r}$ .

Аналогично можно показать, что уравнения (5.4.1) и (5.4.3) удовлетворяются тождественно при тонкостенных оболочках с достаточной точностью, если

$$S^{ij} = c^{i\alpha} c^{j\beta} F_{|\beta\alpha}, \quad (5.6.2)$$

где  $F$  — произвольная скалярная функция, т. н. функция напряжения.

Функции перемещения  $W$  и напряжения  $F$  определяются из уравнений (5.4.2) и (5.4.5). Выражая  $\varepsilon_{ij}$  через  $F$  и  $M^{ij}$  через  $W$ , при помощи физических соотношений (4.2.6) и (4.2.3), получим два уравнения

$$D a^{\alpha\gamma} a^{\beta\varrho} W_{|\varrho\gamma\alpha\beta} - T_{(0)}^{\alpha\beta} W_{|\beta\alpha} + c^{\alpha\gamma} c^{\beta\varrho} b_{\beta\alpha} F_{|\varrho\gamma} = 0, \quad (5.6.3)$$

$$-c^{\alpha\gamma} c^{\beta\varrho} b_{\beta\alpha} W_{|\varrho\gamma} + B' a^{\alpha\gamma} a^{\beta\varrho} F_{|\varrho\gamma\alpha\beta} = 0. \quad (5.6.4)$$

При выводе этих уравнений мы пренебрегали несущественными членами, возникающими при изменении порядка дифференцирования.

Общие уравнения (5.6.3), (5.6.4) в ортогональной системе координат впервые опубликованы Власовым [8].

Следуя Галёркину, в основных уравнениях (5.6.3), (5.6.4) можно выразить функции перемещения  $W$  и напряжения  $F$  через произвольную функцию  $\Phi$ . В самом деле, если

$$W = a^{\alpha\gamma} a^{\beta\varrho} \Phi_{|\varrho\gamma\alpha\beta} \equiv \nabla_e^4 \Phi \quad (5.6.5)$$

и

$$F = Et c^{\alpha\gamma} c^{\beta\varrho} b_{\beta\alpha} \Phi_{|\varrho\gamma} \equiv Et \nabla_k^2 \Phi, \quad (5.6.6)$$

где  $\nabla_e^4$ ,  $\nabla_k^2$  — символы дифференциальных операторов, то уравнение (5.6.4) будет удовлетворено тождественно с погрешностью, свойственной уравнениям (5.6.3), (5.6.4), а уравнение (5.6.3) получает вид

$$Et \nabla_k^2 \nabla_k^2 \Phi - T_{(0)}^{\alpha\beta} (\nabla_e^4 \Phi)_{|\beta\alpha} + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \nabla_e^4 \nabla_e^4 \Phi = 0. \quad (5.6.7)$$

В частном случае круглоцилиндрической оболочки этим типом уравнения пользовался Ониашвили [9] для вычисления критических сил в некоторых видах нагрузок.

В заключение следует упомянуть, что при весьма пологих оболочках, в тех случаях, где изгиб срединной поверхности при потере устойчивости происходит с бесконечно малой деформацией высшего порядка, уравнения (5.6.3), (5.6.4) или (5.6.7) оказываются недостаточно точными для определения критической нагрузки.

## § 6. Равновесие оболочки в послекритической стадии.

1. **Введение.** Состояния равновесия оболочки после потери устойчивости основного (безмоментного) состояния равновесия определяются уравнениями равновесия (3.2.12) — (3.2.14) и уравнениями совместности деформации (1.6.12), (1.6.13), (1.6.5); при этом компоненты тензоров деформации и компоненты тензоров внутренних усилий связаны физическими соотношениями (4.2.3) или (4.2.6). Однако, эта система довольно сложна для проведения вычислений, и мы постараемся при помощи качественного анализа послекритической стадии удержать в этих уравнениях только существенные члены.

Рассмотрим некоторое состояние равновесия оболочки в послекритической стадии. Пусть будут в этом состоянии

$$\varepsilon_{ij} \sim \lambda^e, \quad \mu_{ij} \sim \lambda^m, \quad (6.1.1)$$

тогда

$$S^{ij} \sim E\lambda^{e+1}, \quad M^{ij} \sim E\lambda^{m+3}. \quad (6.1.2)$$

Величины  $e$  и  $m$  ограничены снизу, так как напряжения должны быть в пределах упругости. Обозначим через  $\sigma_p$  — предел пропорциональности и пусть

$$\sigma_p/E = \lambda^s; \quad (6.1.3)$$

физические соотношения (4.2.3), (4.2.6) применимы до тех пор, пока

$$e > s, \quad m + 1 > s, \quad (6.1.4)$$

как это следует из (4.1.7). Ради простоты возьмём  $s = 1$ , — ход анализа при этом не изменяется.

Мы видели в § 5, р. 3, что после потери устойчивости, но при малых перемещениях, ковариантное дифференцирование увеличивает порядок неизвестных величин, вообще говоря, в  $\lambda^{-k}$  раз. Нельзя, однако, допустить, чтобы при развитии деформации в послекритической стадии это свойство численно изменялось хотя бы даже

и немного, так как это требует качественного изменения поля перемещений. Нагрузка, при которой произошло бы такое качественное изменение поля перемещений, вполне обоснованно называлась бы тогда второй критической нагрузкой.\* Мы будем рассматривать равновесия оболочки в стадии между двумя первыми критическими нагрузками.

Классификацию состояний оболочек основываем на свойствах уравнения совместности (1.6.13). Назовём деформацию срединной поверхности оболочки жёсткой (относительно больших перемещений, поле которых качественно определяется при потере устойчивости основной формы равновесия), если в уравнении (1.6.13) главные члены сумм

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} b_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta} \quad \text{или} \quad c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} \mu_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta} \quad (a)$$

и

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} \varepsilon_{\gamma\alpha|\varrho\beta} \quad (b)$$

величины одинакового порядка. При такой деформации, следовательно,

$$r + m \sim e - 2k, \quad \text{если } r < m, \quad (6.1.5)$$

$$2m \sim e - 2k \quad \text{если } m < r. \quad (6.1.6)$$

Деформацию срединной поверхности оболочки будем называть нежёсткой, если

$$r + m \gtrsim e - 2k - 1, \quad \text{если } r < m, \quad (6.1.7)$$

$$2m \gtrsim e - 2k - 1, \quad \text{если } m < r; \quad (6.1.8)$$

в этом случае главные члены суммы (б) имеют порядок  $\lambda$  по сравнению с главными членами сумм (а).

2. **Полгие оболочки** ( $r \sim 0$ ). (1) *Жёсткая деформация срединной поверхности.* Предположим вначале, что изгиб оболочки при потере устойчивости сопровождается сжатием-растяжением срединной поверхности. Мы видели в § 5, р. 3, что тогда при критической нагрузке компоненты тензора тангенциальных усилий  $T_{(0)}^{ij}$  имеют порядок  $E\lambda^2$ , т. е.  $T_{(0)}^{ij} \sim E\lambda^2$ , а  $2k = 1$ .

\* Вторая критическая нагрузка иногда достигается при сжатии плоских пластинок, где первая критическая нагрузка мала ввиду того, что изгиб пластинок при нормальных перемещениях происходит без деформации срединной поверхности.

Из условия (6.1.4) заключаем, что при больших перемещениях  $m \rightarrow 0$ ; в то же время при жёсткой деформации срединной поверхности  $e \rightarrow 1$ . Сравнение отдельных величин в основных уравнениях показывает, что в (1.6.12), (1.6.5) можно пренебречь членами, содержащими компоненты первого тензора деформации с точностью  $\lambda$  по сравнению с единицей. Уравнения совместности деформации получают после этого вид

$$c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} = 0, \quad (6.2.1)$$

$$c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha i/\beta} = 0, \quad (6.2.2)$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\epsilon} (2b_{\gamma\alpha} \mu_{\epsilon\beta} - \mu_{\gamma\alpha} \mu_{\epsilon\beta} - 2\epsilon_{\gamma\alpha/\epsilon\beta}) = 0. \quad (6.2.3)$$

Уравнения равновесия (3.2.12) — (3.2.14) при той же точности приобретают вид

$$S^{\alpha i}_{\cdot\cdot/\alpha} + Y^i = 0, \quad (6.2.4)$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} - S^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta}_{(0)} \mu_{\beta\alpha} + M^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot/\alpha\beta} + Y = 0, \quad (6.2.5)$$

$$c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0. \quad (6.2.6)$$

Предположим теперь, что изгиб оболочки при потере устойчивости сопровождается бесконечно малой деформацией первого порядка. Тогда

$$T^{\alpha\beta}_{(0)} \sim E \lambda^{1.5}, \quad 2k = 0,5.$$

В данном случае уместно рассмотреть не жёсткую, а полужёсткую деформацию срединной поверхности, определяя её условием

$$m \sim e - 2k - 0,5.$$

При больших перемещениях  $m \rightarrow 0$ ,  $e \rightarrow 1$ . Качественный анализ основных уравнений показывает, что для сохранения точности  $\lambda$  по сравнению с единицей состояния равновесия следует определять уравнениями (6.2.1) — (6.2.6).

(2) *Нежёсткая деформация срединной поверхности.* Опять предположим сперва, что изгиб оболочки при потере устойчивости сопровождается сжатием-растяжением срединной поверхности. Тогда имеем  $T^{\alpha\beta}_{(0)} \sim E \lambda^2$ ,  $2k = 1$ .

При больших перемещениях  $m \rightarrow 0$ ,  $e \rightarrow 2$ . Сохраняя точность  $\lambda$  по сравнению с единицей получаем для определения состояния равновесия уравнения:

$$c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} = 0, \quad (6.2.7)$$

$$c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha|\beta} = 0, \quad (6.2.8)$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} (2b_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta} - \mu_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta}) = 0, \quad (6.2.9)$$

$$-T_{(0)}^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + M_{|\alpha\beta}^{\alpha\beta} + Y = 0. \quad (6.2.10)$$

Так как  $M^{\alpha\beta}$  зависит только от компонентов второго тензора деформации  $\mu_{ij}$ , то для определения четырёх величин  $\mu_{ij}$  имеем пять уравнений (6.2.7) — (6.2.10), если только  $Y^i \ll E\lambda^3$ .

Эти же уравнения применимы и при полужёсткой деформации, но тогда с точностью  $\lambda^{0.5}$ , по сравнению с единицей.

Предположим теперь, что изгиб оболочки при потере устойчивости сопровождается бесконечно малой деформацией первого порядка. Тогда  $T_{(0)}^{ij} \sim E\lambda^{1.5}$ ,  $2k = 0.5$ . Нетрудно показать, что уравнения (6.2.7) — (6.2.9) можно применять как уравнения совместности деформации, а уравнения (6.2.4) — (6.2.6) — как уравнения равновесия, причём отброшенные члены имеют, по крайней мере, порядок  $\lambda^{0.5}$  по сравнению с единицей. В случае полужёсткой деформации срединной поверхности точность этих уравнений увеличивается до порядка  $\lambda$ .

**3. Весьма пологие оболочки ( $r \sim 1$ ).** (1) *Жёсткая деформация срединной поверхности.* Проведённый в § 5, р. 3, анализ показал, что  $T_{(0)}^{ij} = E\lambda^3$ ,  $k = 0$ . При больших перемещениях из уравнения (1.6.13) следует, что  $e \gg 1$  при  $m \gg 0.5$ .

Пренебрегая в уравнениях совместности деформации малыми членами порядка  $\lambda^{0.5}$ , можно представить их в виде (6.2.1), (6.2.2) и уравнением

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\varrho} (\mu_{\gamma\alpha} \mu_{\varrho\beta} + 2\varepsilon_{\gamma\alpha|\varrho\beta}) = 0. \quad (6.3.1)$$

Сохраняя ту же точность, условия равновесия можно выразить уравнениями (6.2.4), (6.2.6) и уравнением

$$-S^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + Y = 0. \quad (6.3.2)$$

Эти уравнения выражают условия равновесия мембраны при больших перемещениях. Однако, ввиду пологости оболочки мембран-

ное состояние вряд ли достигается, — раньше происходит вторая потеря устойчивости. При малых же перемещениях состояния равновесия определяются системой (6.2.1) — (6.2.6).

(2) *Нежесткая деформация срединной поверхности.* Условия совместности деформации можно представить уравнениями (6.2.1), (6.2.2) и уравнением

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\delta} \mu_{\gamma\alpha} \mu_{\delta\beta} = 0, \quad (6.3.3)$$

если деформация срединной поверхности нежесткая. Условия равновесия выражаются уравнениями (6.2.4), (6.2.6) и уравнением

$$-S^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} - T_{(0)}^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + M_{\cdot\cdot/\alpha\beta}^{\alpha\beta} + Y = 0. \quad (6.3.4)$$

**4. Введение функции перемещения и напряжения.** Предыдущий анализ показал, что равновесие как пологих, так и весьма пологих оболочек в послекритической стадии при жесткой деформации срединной поверхности описывается одинаковыми дифференциальными уравнениями (6.2.1) — (6.2.6). Эта система уравнений является наиболее общей из всех вариантов, которые встречались в двух предыдущих рубриках. Именно, все остальные варианты получаются из этой системы отбрасыванием некоторых несущественных членов, а не добавлением новых.

Практически приходится всегда пользоваться системой (6.2.1) — (6.2.6), потому что при решении конкретных задач мы пока не в состоянии сказать заранее, будет ли деформация срединной поверхности при больших перемещениях жесткой или нет.

Характер деформации в послекритической стадии (или же малая гауссова кривизна пологих оболочек) допускает введение функций перемещения  $W$  и напряжения  $F$  точно так же, как в § 5, р. 4. Действительно, уравнения (6.2.1), (6.2.2) и (6.2.4), (6.2.6) остались линейными и поэтому допускают применение методов линейной теории оболочек. Итак, полагаем, что

$$\mu_{ij} = W_{,ij}, \quad S^{ij} = c^{i\alpha} c^{j\beta} F_{|\beta\alpha}; \quad (6.4.1)$$

тогда уравнения (6.2.1), (6.2.2) и (6.2.4), (6.2.6) при  $Y^i = 0$  будут удовлетворены тождественно для тонкостенных оболочек с достаточной точностью, а уравнения (6.2.3) и (6.2.5) получают вид

$$2B' a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} F_{|\delta\gamma\beta\alpha} - c^{\alpha\gamma} c^{\beta\delta} (2b_{\beta\alpha} W_{|\delta\gamma} - W_{|\alpha\beta} W_{|\delta\gamma}) = 0, \quad (6.4.2)$$

$$c^{\alpha\gamma} c^{\beta\delta} (b_{\beta\alpha} F_{|\delta\gamma} - W_{|\alpha\beta} F_{|\delta\gamma}) + Da^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} W_{|\delta\gamma\alpha\beta} - T_{(0)}^{\alpha\beta} W_{|\beta\alpha} + Y = 0. \quad (6.4.3)$$

Эти уравнения являются основными дифференциальными уравнениями для определения состояния равновесия в послекритической стадии оболочек, если касательный компонент внешней нагрузки  $Y^i = 0$  повсеместно.

В частном случае плоской пластинки основные уравнения (6.4.2), (6.4.3) ничем не отличаются от уравнений теории плоских пластинок Кармана [10].

Эти уравнения для случая круглой цилиндрической оболочки вывел впервые Donnell [11], а затем Н. Tsien [12]. Наконец, эти уравнения получены W. Chien [13] как частный случай (SS 12) при исследовании тонкостенных пластинок и оболочек.

**5. Замечание.** Мы ограничивались в этом параграфе рассмотрением состояния равновесия в послекритической стадии при больших перемещениях, поле которых качественно определяется при потере устойчивости основной формы равновесия. Таким образом, длина волны выпученной стенки оболочки определяется уже при критической нагрузке.

Однако, в послекритической стадии могут существовать и другие формы равновесия, у которых поле перемещений качественно отличается от рассмотренных. У этих форм, прежде всего, длина волны выпученной стенки иная, и поэтому нельзя утверждать, что уравнения (6.4.2), (6.4.3) достаточно полны для определения данных форм равновесия.

## Литература.

1. Гольденвейзер, А. Л., Лурье, А. И. — О математической теории равновесия упругих оболочек. ПММ\*). 1947. Т. XI. Вып. 5.
2. Лагалли, М. — Векторное исчисление. 1936.
3. Кутилин, Д. И. — Теория конечных деформаций. 1947.
4. Biot, M. A. — Non-linear theory of elasticity and the linearised case for a body under initial stress, Philosophical Magazine. 1939. n<sup>o</sup> 183. 7-th series.
5. Гольденвейзер, А. Л. — Качественное исследование напряжённого состояния тонкой оболочки. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 6.
6. Новожилов, В. В., Финкельштейн, Р. — О погрешности гипотезы Кирхгофа в теории оболочек. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 5.
7. Reissner, E. — Stresses and small displacements of shallow spherical shells I. Journ. Math. and Phys. 1946. Vol. XXV, n<sup>o</sup> 1.
8. Власов, В. З. — Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 2.
9. Ониашвили, О. Д. — О вычислении критических сил для некоторых случаев потери устойчивости цилиндрических оболочек. Сообщения АН Грузинской ССР. 1947. Т. VIII. № 4.
10. Папкович, П. Ф. — Строительная механика корабля. Часть II, 1941, стр. 494.
11. Donell, L. H. — Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. 1934. Vol. 56.
12. Tsien, H., Kármán, Th. — The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. Journ. Aeronautical Sciences. 1941. Vol. 8, n<sup>o</sup> 8.
13. Chien, W. — The intrinsic theory of thin plates and shells. Quarterly of Applied Mathematics. 1944. Vol. I n<sup>o</sup> 4. Vol. II n<sup>o</sup> 1, vol. II n<sup>o</sup> 2.
14. Kármán, Th., Tsien, S., Dunn, L. G. — The influence of curvature on the buckling characteristics of structures. Journ. Aeronautical Sciences. 1940. Vol. 7, n<sup>o</sup> 7.

\*) ПММ = Прикладная Математика и Механика.





## Оглавление.

	Стр.
Введение . . . . .	3
§ 1. Деформация срединной поверхности оболочки при конечных перемещениях . . . . .	5
§ 2. Деформация тонкостенной оболочки при конечных перемещениях . . . . .	12
§ 3. Статика оболочек . . . . .	15
§ 4. Законы упругости . . . . .	19
§ 5. Определение критической нагрузки . . . . .	21
§ 6. Равновесие оболочки в послекритической стадии . . . . .	27
Литература . . . . .	33

*Vastutav toimetaja*  
*A. Garšnek.*

*Tehniline toimetaja*  
*H. Kohu.*

Ladumisele antud 3. VIII 48.  
Trükkimisele antud 1. XI 48.  
Paberi kaust 67×95. 1/16. Trü-  
kipoognaid 2/4. Autoripoog-  
naid 1,6. Arvestuspoognaid 1,61.  
MB 04657. Laotihetus trpg.  
39000. Tiraaz 1160. Trükikoja  
tellimus nr. 1518. Trükikoda  
„Hans Heidemann“, Tartu,  
Vallikraavi tän. 4.