

Ep. 6.7
445

TALLINNA
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI
TOIMETISED

445

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

TALLINN

ТРИ
'78

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
И РЕГУЛИРОВАНИЕ
КАЧЕСТВА
ВОДЫ
ВОДОЕМОВ
И ИССЛЕДОВАНИЕ
МЕТОДОВ
ОЧИСТКИ
ПРИРОДНЫХ
И СТОЧНЫХ
ВОД



Сборник статей по санитарной
технике X11

Ep. 6.7

445

**ТРИ
'78**

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 628.34/532.621

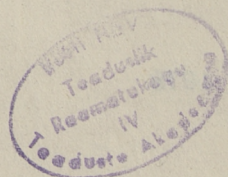
● ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
И РЕГУЛИРОВАНИЕ
КАЧЕСТВА
ВОДЫ
ВОДОЕМОВ
И ИССЛЕДОВАНИЕ
МЕТОДОВ
ОЧИСТКИ
ПРИРОДНЫХ
И СТОЧНЫХ
ВОД

Сборник статей по санитарной технике X11

Таллин 1978

С о д е р ж а н и е

1. Мельдер Х.А. Об оптимизации районных очистных сооружений на базе малых аэрационных установок, разработанных в Эстонской ССР.....	3
2. Эннет П.О., Мельдер Х.А. Электрохимический метод симультанного осаждения фосфора.....	13
3. Эннет П.О. Расчет при проектировании симультанного осаждения фосфора в процессе продленной аэрации.....	19
4. Вызу А.Г. Исследование кинетики осаждения взвеси при доочистке бытовых сточных вод с использованием сланцевой золы.....	25
5. Вызу А.Г., Мельдер Х.А. Использование золы в качестве реагента для очистки сточных вод.....	29
6. Кару Я.Я., Нааритс А.Э., Паулус О.П. Исследование механической очистки сточных вод гидролизного завода на лабораторной установке и опытном микрофилт্রে.....	35
7. Айнола Л.Я., Лийв У.Р. Об учете сжимаемости при неустановившемся движении жидкости в трубах.....	45
8. Айнола Л.Я., Лийв У.Р. Вариационные принципы и законы взаимности для нестационарных задач течения жидкости в трубах.....	53
9. Айнола Л.Я., Лийв У.Р. К методам интегрирования уравнений неустановившегося движения жидкости в трубах.....	63
10. Кирт Э.Э., Аннус А.А., Каллас Ю.И., Кийтам А.А., Уйбо Э.Э., Мигалов М.С. Оптимизация процесса выделения клеточного сока при производстве картофельного крахмала (на примере крахмального завода колхоза "Пахзи" ЭССР).....	73



УДК 628.35

Х.А. Мёльдер

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ РАЙОННЫХ ОЧИСТНЫХ СООРУЖЕНИЙ
НА БАЗЕ МАЛЫХ АЭРАЦИОННЫХ УСТАНОВОК, РАЗРАБОТАННЫХ
В ЭСТОНСКОЙ ССР

I. Введение

Экономичное решение проблемы защиты водоемов от загрязнения сточными водами в районе, имеющем несколько источников сточных вод (городов, промпредприятий и т.д.), возможно только на базе оптимизации районной системы канализации, где определяется количество очистных сооружений, их расположение и степень очистки сточных вод, исходя из минимума приведенных годовых затрат для всей системы при обеспечении нормативных показателей качества воды в районах водопользования водоемов.

В зарубежной литературе приводятся методики и примеры решения конкретных задач по оптимизации районных систем канализации с использованием ЭВМ [1, 2, 3]. Как правило, рассматриваются крупные системы, включающие не менее 7 ... 10 объектов с общим расходом сточных вод более 20000 м³/сутки.

Ниже излагаются некоторые результаты исследований по оптимизации малых районных систем канализации на базе компактных аэрационных установок ($Q < 1000$ м³/сут). Поскольку в Эстонской ССР к настоящему времени построено и работает более 700 малых аэрационных установок, проблемы их эксплуатации (увеличение надежности работы) имеют явную актуальность. Объединение отдельных близкорасположенных объектов в единую систему с устройством центральных очистных сооружений позволит снизить неравномерность поступления сточных

вод на сооружения в течение суток, а также обеспечить их более квалифицированную эксплуатацию.

Экономическое сравнение возможных вариантов отведения и очистки сточных вод от нескольких объектов проводится по общеизвестной методике нахождения минимума приведенных годовых затрат (Π — тыс.руб.):

$$\Pi = \mathcal{E} + E_H K, \quad (I)$$

где \mathcal{E} — годовые эксплуатационные затраты, тыс.руб.;

E_H — нормативный коэффициент эффективности капиталовложений (0,12);

K — капитальные вложения, тыс.руб.

При этом для сравниваемых вариантов должны вычисляться капиталовложения и эксплуатационные затраты для комплексов очистных сооружений и канализационных напорных трубопроводов. Строительная стоимость насосной станции перекачки (тип 902-I-4I) как общая для всех объектов — источников сточных вод — в сопоставлении не учитывается. Затраты на электроэнергию при перекачке сточных вод включаются в эксплуатационные затраты напорных трубопроводов.

Рассмотрим ниже более подробно формирование отдельных статей затрат.

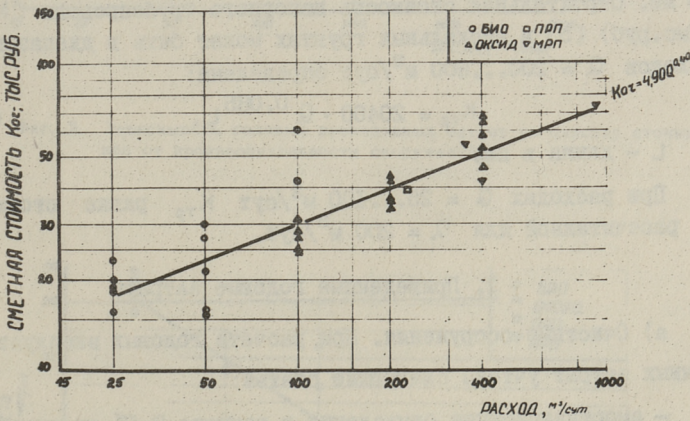
2. Капвложения

а) Очистные сооружения. В Эстонской ССР наиболее хорошо зарекомендовали себя малые аэрационные установки типа аэротенка-отстойника с пневматической аэрацией (БИО, Оксид) и окислительные блоки как с пневматической, так и механической аэрацией (МРП-300, ПРП-300, МРП-1000). Основные проектные параметры их даны в таблице [4]. Сооружения, работающие в режиме продленной аэрации, обеспечивают полную биологическую очистку со снижением БПК сточных вод на 90%.

При определении капвложений на строительство очистных сооружений учитывается стоимость решеток, аэрируемых очистных установок, подсобных зданий (воздуходувки, хлораторная), прудов для доочистки, благоустройства (дороги, озеленение, ограда), а также площадочных коммуникаций.

Таблица I

Тип установки	Расход (м ³ /сутки)		Нагрузка (кг БПК ₅ /сут)	
	пределы	средний	пределы	средний
БИО-25	15...35	25	5...11	8
БИО-50	40...75	50	10...22	16
БИО-100	80...150	100	17,5...39	32
Оксид - 45	72...105	100	16,2...24,3	22,5
Оксид - 90	144...210	200	32,4...48,6	45
Оксид - 180	288...420	200	65...97	90
МРП (ПРП)-300	100...650	340	57...190	120
МРП - 1000	4800	800...		
		1000	206...620	365



Фиг. 1. Зависимость сметной стоимости очистных сооружений от производительности.

Анализ смет 3I проекта, выполненного ГПИ "Эстгипросель-строём" и "Эстпромпроект" в 1969...1975 годах, позволил установить, что при очистке бытовых и близких к ним по составу сточных вод в объеме $Q = 25...900$ м³/сут капвложения на строительство очистного комплекса ($K_{0ч}$ - тыс.руб.) могут

быть вычислены по формуле:

$$K_{оч} = 4,90 Q^{0,40} \quad (2)$$

Из графика (фиг. I) видно, что отклонения капвложений от этой зависимости на отдельных объектах не превышают $\pm 25 \dots 30\%$.

Аналогичная зависимость существует между капвложениями и нагрузкой ($БК_5$ - кг/сут):

$$K_{оч} = 7,55 БК_5^{0,43} \quad (3)$$

Пределы $БК_5$ при этом 8...400 кг/сут.

Во всех случаях принят единый процент накладных расходов, равный 19,3%.

б) Напорные трубопроводы. Согласно СНиП приняты асбестоцементные напорные трубопроводы в 2 нитки диаметром 100 ... 150 мм. Строительная стоимость напорного трубопровода ($K_{тр}$ - тыс.руб) [5] в нескольких грунтах может быть в диапазоне расходов $Q = 200 \dots 800 \text{ м}^3/\text{сут}$ определена:

$$K_{тр} = 20400 \cdot Q^{0,085} L, \quad (4)$$

где L -- длина в км.

При расходах $Q = 25 \dots 100 \text{ м}^3/\text{сут}$ $K_{тр}$ равна стоимости, рассчитанной для $Q = 200 \text{ м}^3/\text{сут}$.

3. Приведенные годовые затраты

а) Очистные сооружения. При расчете годовых эксплуатационных затрат учтены следующие статьи:

- амортизационные отчисления в размере 7,5% от сметной стоимости;

- заработная плата при $Q = 25 \dots 400 \text{ м}^3/\text{сут}$ - 755 руб/год (0,5 штатной единицы), при $Q = 800 \text{ м}^3/\text{сут}$ - 1510 руб/год (1 штатная единица) с добавкой на соцстрах - 4,9%;

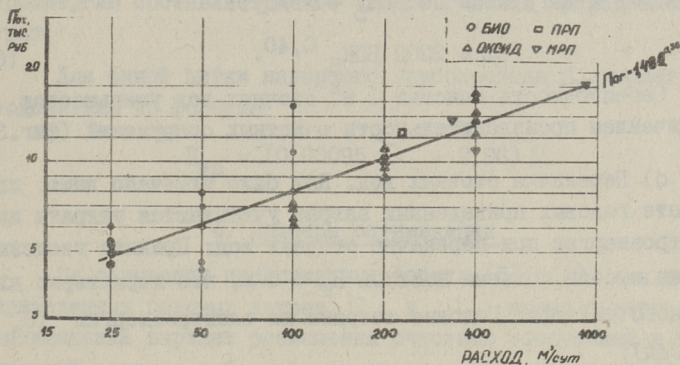
- расход электроэнергии по максимальной потребляемой мощности (тариф $S = 1 \text{ коп/квтч}$);

- текущий ремонт - 2,5% от сметной стоимости;

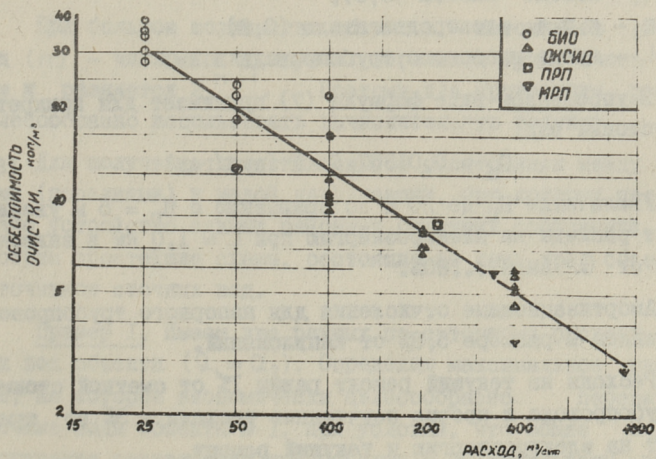
- вспомогательные материалы - 3% от расходов на электроэнергию.

С учетом изложенного, а также величины коэффициента $E_H = 0,12$ и производительности сооружений (Q), годовые приведенные затраты (Π_{04} - тыс.руб.) могут быть определены:

$$\Pi_{04} = 1,48 \cdot Q^{0,38} \quad (5)$$



Фиг. 2. Зависимость годовых приведенных затрат на очистку сточных вод от производительности сооружений.



Фиг. 3. Зависимость себестоимости очистки сточных вод от производительности сооружений.

Из графика (фиг. 2) видно, что отклонения затрат от зависимости на отдельных объектах не превышают $\pm 20 \dots 25\%$.

Отметим, в частности, что приведенные годовые затраты составляют 30% от капложений.

Аналогичная зависимость существует и между годовыми затратами и нагрузкой по БПК₅ - кг/сут:

$$П_{0ч} = 2200 \text{ БПК}_5^{0,40}. \quad (6)$$

Себестоимость очистки 1 м³ сточных вод уменьшается с увеличением производительности очистных сооружений (фиг. 3).

б) Перекачка сточных вод. Как было отмечено выше, при расчете годовых приведенных затрат учитываются затраты на электроэнергию при перекачке сточных вод. Принята геодезическая высота подъема насосов $H_T = 5$ м, что характерно для плоского рельефа. Годовые затраты на электроэнергию ($C_э$ - руб/год):

$$C_э = \frac{2,72}{\eta_1 \eta_2} \cdot 365 \cdot Q \cdot H \cdot 0,001 \cdot 0,01 S, \quad (7)$$

где

H - полная высота подъема насосов $H = I, I5 i L + H_T$;

i - гидравлический уклон;

η_1 - к.п.д. насоса (0,6);

η_2 - к.п.д. электродвигателя (0,9);

L - длина напорного трубопровода в км.

В упрощенном виде формула (7) принимает для конкретных условий вид:

$$C_э = 0,01807 \cdot Q \cdot H \text{ (руб/год)}. \quad (8)$$

Увеличение H_T до 20 м по сравнению с $H_T = 5$ м увеличивает расходы на электроэнергию при $L = 1,0$ км в зависимости от Q на 67...80%.

Амортизационные отчисления для напорного трубопровода приняты в размере 5,8% от капложений.

Расходы на текущий ремонт равны 1% от сметной стоимости трубопровода и прочие неучтенные расходы - 3% от суммы затрат на электроэнергию и текущий ремонт.

С учетом изложенного, годовые приведенные затраты ($П_{гр}$

-- тыс. руб.) на перекачку сточных вод могут быть подсчитаны по следующей формуле:

$$\Pi_{\text{тр}} = (0,00143 \cdot Q + 5,833) \cdot L. \quad (9)$$

Эти расходы составляют в среднем 18,5...20,3% от сметной стоимости напорного трубопровода. Доля затрат на электроэнергию составляет менее 4% от годовых приведенных затрат.

Для одной нитки напорного трубопровода $\Pi_{\text{тр}}$ может быть подсчитана по формуле

$$\Pi_{\text{тр}} = (0,00095 \cdot Q + 2,96) L. \quad (10)$$

4. Примеры оптимизации

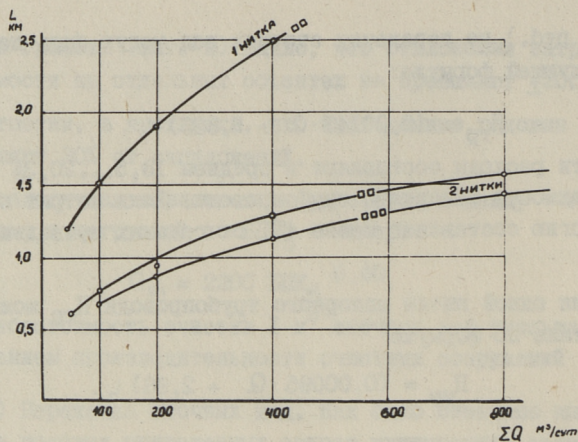
На основании предложенных формул (5) и (9) для расчета приведенных годовых затрат $\Pi_{\text{оч}}$ и $\Pi_{\text{тр}}$ можно быстро найти оптимальный вариант размещения очистных сооружений в конкретной системе районной канализации, для которого $\Pi_{\text{оч}} + \Pi_{\text{тр}}$ будет минимальной.

Производительность локальных и районных очистных сооружений, с учетом типовых решений компактных аэрационных установок (см. таблицу), следует принимать равной 25, 50, 100, 200, 400 или 800 м³/сут.

При большом количестве объектов - источников сточных вод (n) - число конкурирующих вариантов будет очень большим и равняется 2^{n-1} . Поэтому для проведения расчетов целесообразно использовать вычислительную технику.

Для получения представления о расстояниях между объектами (поселками) в малой канализации, при которых целесообразно устройство единых районных очистных сооружений, рассмотрим простейшие схемы, состоящие из двух-трех объектов - источников сточных вод.

Пример I. Имеем два равных по суточному расходу сточных вод объекта ($Q_1 = Q_2$). Определим максимальное расстояние, на которое экономически целесообразно перекачивать сточные воды объекта № I, при условии, что общие очистные сооружения расположены при объекте № 2. Результаты расчета изображены в виде кривых $L = f(\Sigma Q)$, где $\Sigma Q = Q_1 + Q_2$



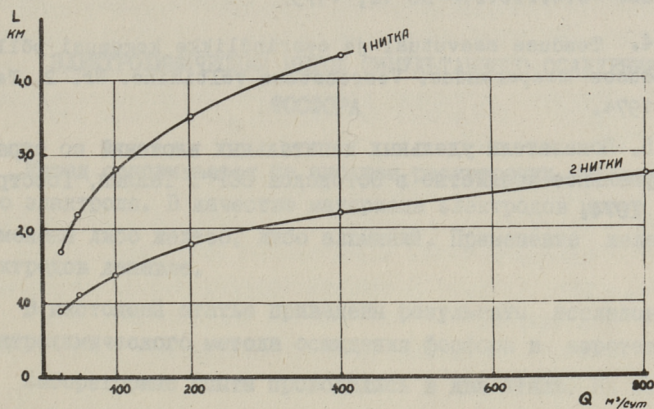
Фиг. 4. Максимальное экономичное расстояние между объектами для устройства общих очистных сооружений.

(см. фиг. 4). Видно, что для напорного трубопровода в одну нитку расстояние может быть в два раза больше, чем при двух нитках, однако тогда необходимо устройство аварийного выпуска, что не всегда возможно.

Пример 2. Имеем 3 объекта с суточными расходами Q_1, Q_2 и Q_3 . При этом $Q_1 = Q_2 = 0,5 Q_3$; и $\Sigma Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Районные очистные сооружения располагаются при объекте № 3, а объекты № 1 и 2 удалены от общих очистных сооружений на одинаковое расстояние — L . Анализ вариантов дает нам и здесь максимальное расстояние L , где еще экономически целесообразно объединение очистных сооружений (см. график на фиг. 4).

Пример 3. В примерах 1 и 2 предполагалось, что эффект очистки сточных вод во всех рассматриваемых вариантах одинаков и равен 90%. На практике, однако, могут быть случаи, когда с изменением створа выпуска сточных вод в водоем меняется требуемая степень их очистки. Рассмотрим предельный случай, когда при перекачке сточных вод объекта на расстояние можно отказаться от затрат на очистку вообще. Такой случай имеет место, например, при расположении малых объектов — источников сточных вод — недалеко от крупного города, имеющего очистные сооружения. Тогда направление сточных вод малого

объекта в городскую систему канализации практически не увеличивает стоимость обработки стоков на общегородских сооружениях. Максимальное экономическое расстояние перекачки L определяется здесь исходя из условия $\Pi_{оч} = \Pi_{тр}$. Для разных расходов сточных вод это расстояние (при одной и двух нитках трубопровода) показано на графике (фиг. 5).



Фиг. 5. Максимальное экономическое расстояние перекачки сточных вод в зависимости от расхода сточных вод.

5. В ы в о д ы

Предложены формулы для расчета приведенных годовых затрат при оптимизации районных систем канализации на базе компактных аэрационных сооружений.

При производительности районных очистных сооружений $\Sigma Q = 50 \dots 800$ м³/сут объединение отдельных объектов ($n = 2 \dots 3$) экономически обосновано при расстояниях не более 0,6 ... 1,5 км.

Перекачка сточных вод мелких пригородных объектов ($Q = 25 \dots 800$ м³/сут) в общегородскую сеть канализации выгодна при расстояниях до 0,9 ... 2,7 км.

Л и т е р а т у р а

1. W a n i e l i s t a, M. P., B a u e r, C. S. Centralization of waste treatment facilities. "J.W.P.C.F." No 12, 1972.

2. De in i n g e r, R.A., S u, S.Y. Modelling regional waste water treatment systems. "Water Research" No 4, 1973.

3. M c C o n a g h a, D.L., C o n v e r s e, A.O. Design and cost allocation algorithm for waste treatment systems. "J.W.P.C.F." No 12, 1973.

4. Teaduse saavutusi ja eesrindlikke kogemusi põllumajanduses. Maaparandus. Veereostuse vältimine. Nr. 2. Tallinn 1974.

5. Показатели удельных капитальных вложений по отрасли "Коммунальное хозяйство в Эстонской ССР". Таллин, Госстрой ЭССР, 1974.

H. Mölder

Optimization of Small Wastewater Treatment
Plants on the Basis of Packaged Aeration Tanks

Summary

The creation of regional wastewater systems with a smaller number of purification plants in certain cases permits savings of total costs and increases the reliability in service of plants.

As a result of this investigation the method of optimization of small regional wastewater systems has been worked out. Joint treatment of wastes from 2...3 sources ($Q = 50...800 \text{ m}^3/\text{d}$) is profitable if the distance from each source to the central plant is not more than 0.6...1.5 km.

УДК 628.34:628.35

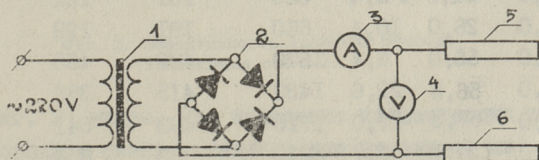
П.О.Эннет, Х.А.Мельдер

ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИЙ МЕТОД СИМУЛЬТАННОГО ОСАЖДЕНИЯ ФОСФОРА

Метод основывается на анодном растворении металлического электрода. В качестве материала электродов могут быть применены либо железо, либо алюминий. Применение железных электродов дешевле.

В настоящей статье приведены результаты исследований электрохимического метода осаждения фосфора в аэротенках.

Лабораторные опыты проводились в два этапа. На первом этапе проводились контактные опыты в стеклянных цилиндрах объемом 3 литра. Чтобы имитировать условия процесса симультанного осаждения, в качестве исходной воды использовалась смесь активного ила. Целью контактных опытов было определение количества выделяемого анодом металла в условиях симультанного осаждения фосфора и определение требуемого количества реагента в зависимости от начальной концентрации фосфора и от концентрации растворенного кислорода в смеси активного ила. В качестве электродов применялись железные пластины размерами 50x50x4 мм, расстояние



Фиг. 1. Электрическая схема опытной установки:
1 - трансформатор; 2 - выпрямитель;
3 - амперметр; 4 - вольтметр; 5 - анод;
6 - катод.

между электродами 10 мм. Электрическая схема опытной установки показана на фиг. I.

Определение количества выделяемого анодом железа проводилось при напряжении между электродами 2,0; 5,0 и 10,0 вольт. Сила тока была при этом от 21 до 134 мА и плотность тока — от 8,4 до 53,6 А/м². Начальное количество железа в смеси активного ила в расчетах было принято равным условному нулю. Концентрацию общего железа в растворе определяли через каждый час. Одна опытная серия продолжалась 7 часов. Коэффициент выделения анодом металла можно определить по формуле

$$\eta = \frac{Me}{Me_p},$$

где η — коэффициент выделения анодом металла, г/г;

Me — фактическое количество выделившегося анодом металла, г;

Me_p — рассчитанное количество выделившегося анодом металла, г.

В таблице I приведены результаты опытов (время контакта 7 часов).

Т а б л и ц а I

Коэффициент выделения анодом металла

Номер опытной серии	Напряжение, В	Сила тока, мА	Плотность тока, А/м ²	Загрязненное электричество, кулон	К-во в растворе железа, г		Коэффициент η , г/г
					рассчитанное	фактическое	
I	2	3	4	5	6	7	8
1	2,0	25,5	10,2	640	186	175	0,94
2	2,0	21,0	8,4	520	151	131	0,87
3	2,0	26,0	10,4	660	191	199	1,04
4	5,0	66,0	6,4	1670	482	465	0,97
5	5,0	56,5	22,6	1430	415	386	0,93
6	5,0	67,5	27,0	1710	493	541	1,10
7	10,0	127,0	50,7	3210	933	856	0,92
8	10,0	112,0	44,8	2820	814	738	0,91
9	10,0	133,5	53,4	3360	970	956	0,98

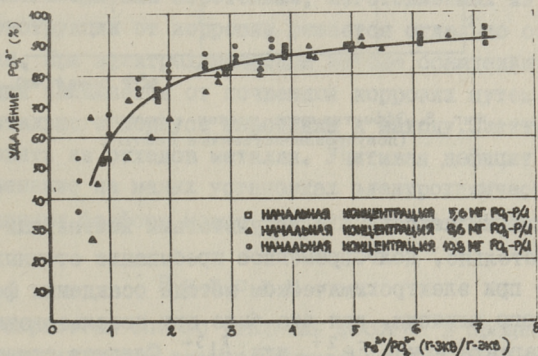
При напряжении 2,0 вольта коэффициент η составлял от 0,87 до 1,04, в среднем 0,95; при напряжении 5,0 вольт он

был от 0,93 до 1,10, в среднем 1,0 и при напряжении 10,0 вольт — от 0,91 до 0,98, в среднем 0,94. Эти результаты показывают, что при размещении электродов в азрационной камере коэффициент η остается в таких же пределах, как и при обычном электрохимическом осаждении фосфора (по 1 $\eta = 0,84$, по 2 $\eta = 1,0$).

Вторая серия контактных опытов проводилась с целью определения требуемого количества растворенного анодом металла для осаждения фосфора.

Опыты проводились при разных начальных концентрациях фосфора (5,6; 8,6 и 10,8 мг PO_4 -P/л). Для выяснения влияния концентрации растворенного кислорода на процесс удаления фосфора, опыты проводились:

- при насыщенной концентрации растворенного кислорода (светлые знаки обозначения на фиг. 2);
- при концентрации растворенного кислорода 1,0 мг O_2 /л (черные знаки обозначения на фиг. 2).

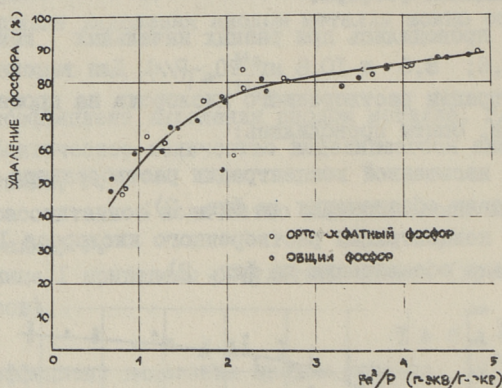


Фиг. 2. Эффективность удаления фосфора (контактные опыты).

Из фиг. 2 видно, что изменение концентрации растворенного кислорода в смеси активного ила не влияет на процесс осаждения фосфора. Вблизи стехиометрического дозирования эффект удаления фосфора имеет большое расхождение (от 40 до 70%). Для 80-процентного удаления фосфора в контактных опытах требовалось 2,5 г-экв Fe^{2+} на 1 г-экв PO_4 -P.

Чтобы получить данные об электрохимическом осаждении

фосфора совместно с биохимической очисткой сточных вод, второй этап лабораторных опытов был проведен на полупроизводственной установке БИО-100 (200 л/сут). В опытах были использованы железные электроды размерами 25x25 см. Расстояние между электродами было 20 мм. Электрическая схема подсоединения электродов была такая же, как и в контактных опытах. Коэффициент выделения анодом металла был в расчетах принят равным 1,0. Результаты опытов приведены на фиг. 3.



Фиг. 3. Эффективность удаления фосфора (полупроизводственные опыты).

Эти результаты совпадают с результатами контактных опытов и, следовательно, длительное пребывание сточных вод в аэротенке при электрохимическом методе осаждения фосфора не имеет такого влияния, как это было при использовании в качестве реагента ионов Fe^{2+} или Al^{3+} . Следует отметить, что опыты проводились при концентрации фосфора в неочищенной воде 10-12 мг P/л.

Симультанный метод осаждения фосфора электрохимическим способом не ухудшает процесса биохимической очистки. В таблице 2 приведены некоторые показатели очистки воды в зависимости от интенсивности электролиза.

Из таблицы 2 видно, что при интенсивности электролиза до 500 кулон/литр процесс биохимической очистки протекает с высокой эффективностью (удаление БПК₅ выше 95%). Улучшается осаждаемость активного ила (иловый индекс ~ 70 мг/л, кон-

центрация взвешенных веществ в очищенной воде ~ 10 мг/л).

Т а б л и ц а 2
Некоторые показатели очистки воды в зависимости
от интенсивности электролиза (кулон-литр)

Интенсивность электролиза, кулон/л	Иловый индекс, ил/г	Очищенная вода		Удаление БПК ₅ , %
		взвешенные вещества, мг/л	БПК ₅ , мг/л	
-	96	16	14	90
I-100	72-88	12-16	2,3-4,0	97-98
101-200	66-83	5-12	3,8-5,2	96-97
201-300	68-75	8-12	4,4-8,0	94-97
301-400	64-69	4-6	4,8-5,2	96-97
401-500	70-76	7-9	5,0-6,4	96-97

В малогабаритных аэротенках, изготовленных из стали, защита конструкции от коррозии решается отдельно от процесса очистки. При электрохимическом методе осаждения фосфора конструкция защищается от почвенной коррозии путем присоединения стального корпуса аэротенка к катоду. Электроды можно изготовить из отходов металла. Учитывая дефицит реагентов, применение на малых установках электрохимического метода осаждения фосфора можно считать перспективным.

В ы в о д ы

1. Разработан способ удаления фосфора в процессе продолженной аэрации путем электрохимического растворения металлического анода в аэрационной камере.

2. Для 80-процентного удаления фосфора требуется 2,5 г-экв Fe^{2+} на 1 г-экв фосфора.

3. Для равномерной утилизации электродов, а также для предотвращения пассивации электродов их полярность следует периодически менять.

4. В стальных компактных аэротенках электрохимический метод одновременно обеспечивает противокоррозионную катодную защиту сооружения.

Л и т е р а т у р а

1. O n s t o t t, E.J. et al. Electroprecipitation of phosphates. "J. Environ. Eng. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng." 1973, 99, 6, 897-907.

2. S a d e k, S.E. An electrochemical method for removal of phosphate from waste waters. Washington, 1970.

P. Ennet, H. Mölder

An Electrochemical Method of Simultaneous Precipitation of Phosphates

Summary

This paper deals with an electrochemical method of precipitation of phosphates in the extended activated sludge process using iron electrodes.

УДК 628.34:628.35

П.О. Эннет

РАСЧЕТ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СИМУЛЬТАННОГО
ОСАЖДЕНИЯ ФОСФОРА В ПРОЦЕССЕ ПРОДЛЕННОЙ
АЭРАЦИИ

В последние годы в Проблемной лаборатории сантехники ТПИ исследован ряд вопросов симультанного осаждения фосфора в компактных аэротенках в процессе продленной аэрации:

- определены оптимальные дозы и режим дозирования реагента (Fe^{3+} и Al^{3+});

- доказана возможность применения в симультанном осаждении извести;

- разработан электрохимический способ удаления фосфора.

На основе экспериментальных исследований разработана методика расчета симультанного осаждения фосфора в процессе продленной аэрации.

При проектировании установок симультанного осаждения фосфора солями алюминия или железа доза реагента может быть рассчитана следующим образом:

$$D = \frac{\beta \cdot m \cdot M \cdot 100}{\eta}, \quad (I)$$

где D - доза реагента, кг/сут;

β - соотношение практически требуемого количества активных ионов реагента на количество активных ионов реагента, рассчитанное по стехиометрическому уравнению (для 80-процентного удаления фосфора $\beta = 1,1$);

m - отношение эквивалентного веса активного веса реагента к эквивалентному весу фосфора (для Al^{3+}

$m = 0,87$, для Fe^{3+} $m = 1,80$);

M — количество в стоке фосфора, кг/сут;

η — количество активных ионов в техническом продукте реагента, % (например, при использовании технического продукта сульфата алюминия, который содержит 17% Al_2O_3 , $\eta = 9\%$).

Количество в стоке фосфора может быть рассчитано:

$$M = \frac{E(C_1 + C_2) + \sum_{i=1}^n Q_i \cdot r_i}{1000}, \quad (2)$$

где E — количество жителей;

C_1 — фосфор в продуктах обмена одного человека, г/сут ($C_1 = 1,7$ г/сут);

C_2 — количество фосфора из детергентов, попавшее в сточные воды от одного жителя, г/сут ($C_2 = 1,6$ г/сут);

Q_i — расход производственных сточных вод от одного предприятия, m^3 /сут;

r_i — среднесуточная концентрация фосфора в производственных стоках одного предприятия, г/ m^3 ;

n — количество производственных предприятий.

При проектировании симультанного осаждения фосфора в малогабаритных аэротенках-отстойниках солями железа или алюминия дозаторные устройства не предусматриваются. Добавление реагента производится вручную, один раз в сутки.

При осаждении фосфора известью доза реагента не зависит от концентрации фосфора в стоке и известь добавляется только для повышения pH среды.

$$D = \frac{q \cdot Q \cdot 100}{\eta}, \quad (3)$$

где D — доза реагента, кг/сут;

q — требуемое количество CaO на 1 m^3 , кг/ m^3 ;

Q — расход сточных вод, m^3 /сут;

η — количество CaO в техническом продукте реагента, %.

Дозирование извести должно быть непрерывным для обеспечения постоянной величины pH смеси активного ила.

Для этой цели следует проектировать дозаторные устройства, включающие рН-метр и системы автоматики, которая обеспечивает включение или прекращение подачи извести в зависимости от рН. Рекомендуемое оптимальное рН = 9,0. При этом требуемое количество CaO зависит от свойств исходного стока (рН, щелочность). В предварительных расчетах $q = 0,25 - 0,30$ кг CaO/м³, в ходе эксплуатации доза извести уточняется. В качестве реагента может быть использована гашеная известь в виде теста.

Электрохимический метод осаждения фосфора основывается на анодном растворении металлического электрода. В качестве материала электродов могут быть применены либо железо, либо алюминий. Применение железных электродов дешевле. Необходимая сила тока:

$$J = \frac{\beta \cdot m \cdot M \cdot F \cdot z}{A \cdot t \cdot \eta_1}, \quad (4)$$

где J - сила тока, А;

β, m, M - см. уравнение (I).

При использовании железных электродов следует учитывать, что на аноде образуются ионы Fe^{2+} и при этом $m = 2,7$; для алюминиевых электродов $m = 0,87$. Для 80-процентного удаления фосфора $\beta = 2,5$;

F - число Фарадея ($F = 96500$ к/г-экВ);

z - валентность ионов (для железных электродов $z = 2$, для алюминиевых $z = 3$);

A - атомный вес (для железных электродов $A = 55,8$, для алюминиевых $A = 27,0$);

t - время, с ($t = 86400$ с);

η_1 - коэффициент выделения анодом металла ($\eta_1 = 0,8 - 1,0$).

Необходимая поверхность электродов:

$$S_a = \frac{Jl}{U \cdot \kappa \cdot \eta_2}, \quad (5)$$

где S_a - поверхность анода, м²;

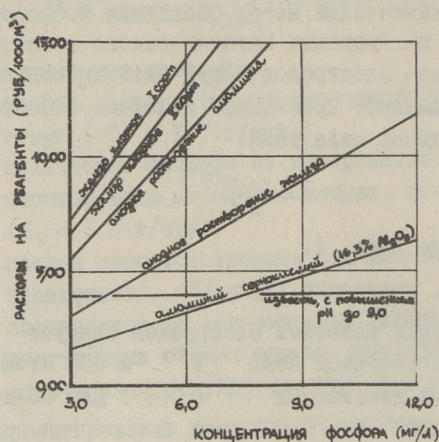
l - расстояние между электродами, м;

U - напряжение между электродами, В;

κ - удельная электропроводность, ом⁻¹ м⁻¹.

η_2 — коэффициент, учитывающий влияние пассивации электродов (η_2 зависит от режима электролиза, $\eta_2 = 0,2 - 1,0$).

Электроды целесообразно размещать в аэротенке компактными блоками, где каждый анодный электрод внутри блока работает с обеими поверхностями. Во избежание пассивации электродов, а также для равномерного использования электродов их полярность периодически меняется (период перемены полярности не более 1 сут.).



Фиг. 1. Стоимость реагентов в зависимости от средней концентрации фосфора в стоке.

На фиг. 1 показана стоимость реагента при одновременном осаждении фосфора (80-процентное удаление фосфора) различными реагентами. Расходы рассчитаны для очистки 1000 м³ сточных вод. Расход реагента зависит в общем от исходной концентрации фосфора. Исключением является осаждение фосфора известью, где остаточная концентрация фосфора зависит от рН.

Выбор подходящего метода одновременного осаждения фосфора зависит от конкретных условий. При высоких концентрациях фосфора в стоке экономичным является осаждение известью.

Л и т е р а т у р а

1. М ё л ь д е р Х.А., Э н н е т П.О. Влияние дозирования реагента на эффективность удаления фосфора в аэротенках. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1975, № 380, с.3 - II.

2. Э н н е т П.О., М ё л ь д е р Х.А., В е л ь н е р Х.А. Удаление фосфора в аэротенках методом simultaneousного осаждения. - Zezja naukova na temat: "Wysoko efektywne metody oczyszczania sciekow ". Materialy konferencyjne, CZ. II, Krakow, 1975, с. 79-85.

P. Ennet

The Calculations for Projecting the Simultaneous
Precipitation of Phosphates in Extended Aeration
Process

Summary

This article deals with chemical precipitation of phosphates from domestic waste waters in the extended activated sludge process. It contains the calculation formulae for the necessary amount of chemicals in the precipitation of phosphates with Fe^{3+} , Al^{3+} , Ca^{2+} , or using an electrochemical method.

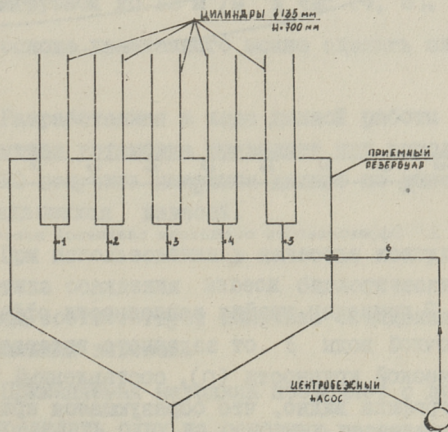
УДК 628.543

А.Г. Вызу

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ОСАЖДЕНИЯ ВЗВЕСИ ПРИ
ДООЧИСТКЕ БЫТОВЫХ СТОЧНЫХ ВОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
СЛАНЦЕВОЙ ЗОЛЫ

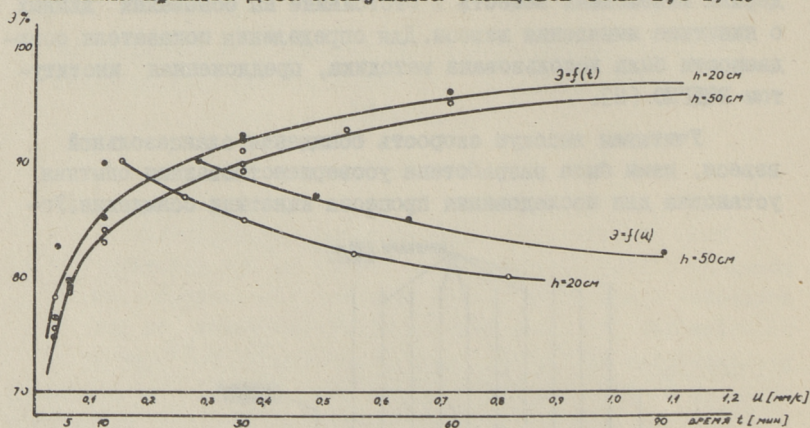
При доочистке бытовых сточных вод с применением сланцевой золы как коагулянта для удаления растворенных органических соединений и взвешенных веществ [1], определенный интерес представляет скорость осаждения образующейся при коагуляции взвеси. При расчете отстойников наиболее правильными являются методы, учитывающие заданный эффект задержки взвешенных веществ в отстойнике на основании данных о кинетике выпадения взвеси. Для определения показателя осаждаемости была использована методика, предложенная институтом ВОДГЕО [2].

Учитывая высокую скорость осаждения сланцевозольной взвеси, нами была разработана усовершенствованная опытная установка для исследования процесса кинетики осаждения. Ус-



Фиг. 1. Схема опытной установки.

тановка (фиг. 1) состояла из 5 цилиндров внутренним диаметром 135 мм и высотой 700 мм. Перемешивание биологически очищенной сточной воды (БПК₅ - 18 мг/л, в.вещ. - 35 мг/л, РО₄ - Р - 14 мг/л) с коагулянтом в течение 5 минут и одновременное заполнение цилиндров осуществлялись центробежным насосом. Последовательность заполнения цилиндров была следующая: в приемный резервуар, над которым закреплены цилиндры, заливали определенный объем (70 л) сточной воды. Затем включали насос и вентилями 1...5 регулировали равномерный перелив во всех цилиндрах. После этого добавляли реагент (золу), согласно желаемой дозе, и включали секундомер. После истечения времени перемешивания включали насос, закрывая одновременно кран 6. Затем закрывали и краны 1...5. Таким образом цилиндры были заполнены одинаковой по концентрации взвешенных веществ сточной жидкостью. Затем определяли кинетику осаждения соответственно названной методики на двух высотах (20 и 50 см). Во всех наших опытах была принята доза коагулянта сланцевой золы 1,5 г/л.



Фиг. 2. Эффективность осаждения сланцевой взвеси.

На фиг. 2 приведен график зависимости эффективности осветления сточной воды \mathcal{E} от заданного интервала времени t и гидравлической крутизны (n), составленный по данным 5 опытов. Из графика видно, что образующаяся при коагуляции взвесь осаждается быстро (кривая приближается к оси ординат). Уже в течение 10 минут на глубине 50 см наблюда-

ется эффект очистки - 84%. Коэффициент агломерации n при 90-процентной эффективности очистки (соответствует эффективности работы трубчатого отстойника в комплексе полупроизводственной очистной установки) [1] рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned} h_1 &= 20 \text{ см} & t_1 &= 2 \text{ I мин} \\ h_2 &= 50 \text{ см} & t_2 &= 3 \text{ I мин} \end{aligned}$$

$$n = \frac{\lg t_2 - \lg t_1}{\lg h_2 - \lg h_1} = 0,43.$$

Величина коэффициента агломерации почти соответствует мелкодисперсной минеральной взвеси с удельным весом 2-3 г/см³ [3]. Зная, что высота слоя отстаивания в работающем тонкослойном отстойнике $H = 6$ см, рассчитываем продолжительность отстаивания

$$T = t_2 \left(\frac{H}{h_2} \right)^n = 12,4 \text{ мин.}$$

Действительная продолжительность пребывания воды в тонкослойном отстойнике назначается с учетом коэффициента использования объема отстойника $k = 0,75$.

Следовательно,

$$T_{\text{отс}} = \frac{T}{k}; \quad T_{\text{отс}} = 16,5 \text{ мин.}$$

Такое время пребывания позволяет трубчатому отстойнику для достижения 90-процентной эффективности работать с поверхностной нагрузкой до 12 м³/м² в час [4, 5].

На основе изложенного можно сделать следующие выводы:

1. Разработанная в ходе данной работы усовершенствованная опытная установка позволяет при использовании методики ВОДТЕО получить надежные данные по кинетике осаждения быстроосаждающихся взвесей.

2. При использовании в качестве коагулянта сланцевой золы кинетика осаждения взвеси биологически очищенных сточных вод соответствует кинетике осаждения мелкодисперсных минеральных взвесей.

3. Применяемая методика позволяет с достаточной точностью определить одну из основных расчетных величин трубчатых отстойников - время отстаивания.

Л и т е р а т у р а

1. В ы з у А.Г., М ё л ь д е р Х.А. О возможности использования сланцевой золы для физико-химической доочистки бытовых сточных вод от соединений фосфора. - Материалы семинара "Физико-химические методы очистки сточных вод". М. Московский Дом научно-технической пропаганды имени Ф.Э. Дзержинского, 1975.

2. Приложение к письму Минводхоза СССР за № ЗИ-05/864 от 11.12.1975 г. Методика по определению эффективности работы сооружений механической очистки (отстойников), применяемая институтом ВОДГЕО.

3. СНиП II-32-74. Канализация. Наружные сети и сооружения.

4. К о р а б е л ь н и к о в В.М. Исследование процесса осаждения взвеси в тонкослойных отстойниках. - Научные труды АКХ им. К.Д. Панфилова. Выпуск 130. М., 1976.

5. Y a o, K.M. Theoretical study of high-rate sedimentation. "J.W.P.C.F." Vol. 42. No 2 Part 1, Febr. 1970.

A. Vösu

Sedimentation Kinetics of Coagulation by Biologically Treating Sewage with Fly Ash

Summary

The fly ash has been introduced as an coagulant for the removal of phosphates from aqueous solutions. The author gives the curve of kinetics of sedimentation resulting from the experimental measurements, and calculated values for the high rate basins.

УДК 628.543.628.322

Вызу А.Г., Мельдер Х.А.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗОЛЫ В КАЧЕСТВЕ РЕАГЕНТА
ДЛЯ ОЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД

Возрастающие требования к качеству очищенной сточной воды вызваны появлением новых синтетических коагулянтов и адсорбентов [1] для обработки сточных вод. В то же время продолжается изучение применяемости отходов различного производства для очистки сточных вод. Сюда относятся и золы (шлак), получаемые от сжигания различных видов топлива. В зависимости от вида топлива, местонахождения ископаемого и метода сжигания, зола и шлак значительно отличаются друг от друга по своим физико-химическим свойствам и по разному взаимодействию с теми или иными загрязняющими веществами, присутствующими в сточной воде [2, 3, 4]. Подробно изучена возможность смещения и запуска неочищенных сточных вод на золотвал, где за счет явления адсорбции, адгезии и химического взаимодействия происходит снижение концентрации нефтепродуктов [2, 3, 5], сероводорода и сероуглерода [6], фенолов и мышьяка [2]. В.П.Шевцова, В.Д.Копеин и др. доказали, что зола экибастузких углей по своим сорбционным свойствам не уступает активированному углю [3]. Летучая зола имеет хорошие адсорбционные свойства и при удалении фосфорных соединений [7].

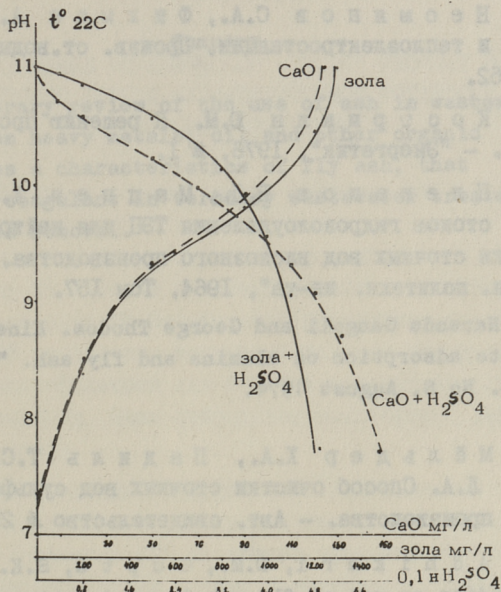
Высокая щелочность, присущая многим водам гидрозолоудаления, способствует осаждению тяжелых металлов, ускоряет окисление гидразина, формальдегида и уротропина, способствует гидролизу комплексонатов и связыванию их в малорастворимые соединения [5]. Кислотные сточные воды сульфатно-целлюлозного производства подвергаются обработке отстаивной водой с системы гидрозолоудаления, которая содержит в среднем 1,2 г/л СаО. В результате смещения вод в осадок выпадает лигнин, уменьшается ХПК и цветность сточных вод [8].

Широко используется щелочность вод гидрозолоудаления для нейтрализации производственных сточных вод [2, 5, 6]. В.Д. Пешаков и А.И. Мацнев [6] предлагают использовать щелочность самой золы при нейтрализации, тем самым уменьшая расход извести как основного реагента при обработке кислотных вод.

При применении летучей золы вместе с солями алюминия, уменьшалась цветность речной воды, улучшалась работа песчаных фильтров и снижалось бактериальное загрязнение [9]. Высокое содержание свободного CaO (до 32%) в фракциях циклонного удаления летучей золы, при применении сланца-кукерсита эстонского месторождения в топках пылевидного сжигания, делает его пригодным для обработки, например, биологически очищенных бытовых сточных вод [10, 11]. Летучая зола из циклонов характеризуется следующими физико-химическими показателями: размер зерен 30–150 мк, удельная масса 2,82–2,93 г/см³, объемная масса 1150–1250 кг/м³, удельная поверхность 500–1200 см²/г, $\text{CaO}_{\text{своб.}}$ 20–32%. Характерным для зол ТЭС является то, что более крупная фракция содержит больше CaO . Фракция, выделяемая циклонами, составляет ~46% от общего количества летучей золы [10]. Зная состав летучих зол, в лаборатории сантехники при ТПИ изучалось его применение вместо извести для доочистки сточных вод от соединений фосфора [11]. На фиг. I приведена зависимость увеличения pH от количества золы и потребное количество O_2 и H_2SO_4 для нейтрализации вод после химической очистки с золой. Для сравнения результатов такие контактные опыты проводились и с чистым CaO . При добавлении золы или CaO характер увеличения pH среды был одинаковым, но доза золы по сухому весу для одинакового увеличения pH была в 10 раз больше. При последующей нейтрализации (от pH = 11 до pH = 7,7) вод, обработанных золой, расход H_2SO_4 уменьшился на 20% по сравнению с нейтрализацией вод, обработанных CaO .

Несмотря на большой расход сланцевых зол (извести), применение их, в сравнении с коагулянтами, имеет преимущество, связанное в первую очередь с обеззараживающим действием сильно щелочной среды [9]. Численность бактерии *Coli* и общее количество сапрофитов понизились до 95%.

При экономических расчетах следует учитывать, что стоимость сланцевых зол как коагулянта определяется стоимостью транспорта. Важно и то, что образующийся при обработке сточных вод золой осадок легче обвоживается. Осадок может использоваться для известкования кислых почв [10], в то же время он является, благодаря высокому содержанию фосфорных соединений, хорошим удобрением.



Фиг. 1. Зависимость изменения pH от дозы CaO, сланцевой золы и H₂SO₄.

Из изложенного следует вывод, что наряду с использованием зол и шлаков для очистки производственных сточных вод, некоторые виды их можно с успехом применить для обработки бытовых сточных вод. Исследования со сланцевой золой доказали технико-экономическую обоснованность сказанного

Л и т е р а т у р а

1. Худенко Б.М., Чапковский А.В. Использование флокулянтов в процессах очистки сточных вод (обзор). М., 1975.

2. Указания по использованию золы и шлака для очистки сточных вод. М., ВОДГЕО, 1950.

3. Шевцова В.Л., Копеев В.Д., Краснопевцова З.И. Об использовании нефтезагрязненных сточных вод в системе гидрозолоудаления ТЭС. -- "Энергетик", 1977, № 1.

4. Несмянов С.А., Фихман А.Н. Электростанции и теплоэлектростанции. Произв. ст. воды. Ш. М., Медгиз, 1952.

5. Косыркин Ю.М. К решению проблем бессточных ТЭС. -- "Энергетик", 1976, № 1.

6. Плешаков В.Д., Мацнев А.И. Об использовании стоков гидрозолоудаления ТЭС для нейтрализации и доочистки сточных вод вискозного производства. -- "Тр. Новочеркасск. политехн. ин-та", 1964, Том 157.

7. Narendra Gangoli and George Thodos. Kinetics of phosphate adsorption on alumina and fly ash. "J.W.P.C.F.", vol. 46. No 8, August 1974.

8. Мёльдер Х.А., Падиль Т.С., Тепакс Л.А. Способ очистки сточных вод сульфатно-целлюлозного производства. -- Авт. свидетельство № 258932.

9. Adhikari, D.M., Gupta, S.K., Biswas, R.D. Studies on use of fly ash in conjunction with alum for coagulation of turbid water. J. Inst. Eng. (India) Public Health Eng. Div. 1975, 55, No 2.

10. Халлик О.Г. Известкование кислых почв в СССР. Таллин, 1965 (на эст. языке).

11. Вязу А.Г., Мёльдер Х.А. О возможности использования сланцевой золы для физико-химической доочистки бытовых сточных вод от соединений фосфора. -- Материалы семинара: "Физ.-хим. методы очистки сточных вод", М., 1975.

The Use of Ash in Wastewater Treatment

Summary

The literary review of the use of ash in wastewater treatment from heavy metals, oil and other organic components, gives a characteristics of fly ash, that has been used as coagulant in tertiary wastewater treatment for phosphates removal.

Я.Я.Кару, А.Э.Нааритс, О.П.Паулус

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД
ГИДРОЛИЗНОГО ЗАВОДА НА ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКЕ И
ОПЫТНОМ МИКРОФИЛЬТРЕ

Актуальность проблемы защиты водоемов от загрязнения обуславливает повышенное внимание вопросам очистки и доочистки стоков различных отраслей промышленности. В настоящее время Таллинским политехническим институтом на базе очистных сооружений Кедайнского биохимического завода Литовской ССР проводятся экспериментальные исследования применения микрофильтров для очистки сточных вод гидролизной промышленности. Ниже приводятся некоторые результаты этих исследований.

Основной продукцией Кедайнского БХЗ являются кормовые дрожжи. На очистные сооружения вместе со сточными водами завода (примерно 70% от общего расхода) поступают хозяйственно-бытовые стоки города и некоторое количество сточных вод других заводов. Содержание взвешенных веществ в производственных стоках в 1977 году составляло в среднем 600 - 800 мг/л, БПК₅ - 1200 - 1400 мг/л. После раздельной первичной очистки производственные и хозяйственно-бытовые стоки смешиваются и направляются на аэрофильтры, затем на вторичные отстойники. Ввиду малой эффективности аэрофильтров вторичные отстойники перегружены и содержание взвеси в очищенной воде составляет 100 - 300 мг/л. Одной из основных возможностей улучшения работы станции является доочистка стоков, а также уменьшение нагрузки на существующие очистные сооружения.

Учитывая вышесказанное, цель исследований заключалась, во-первых, в определении эффективности применения микрофильтров после отдельных этапов очистки, во-вторых,

в уточнении условий моделирования рабочего процесса микрофильтров при микрофильтрации данных сточных вод.

Исследования проводились в трех точках – перед аэрофильтрами, после аэрофильтров и после вторичных отстойников. Опытный микрофильтр имел диаметр и длину барабана $L = D = 450$ мм. Скорость вращения барабана была постоянная и составляла $n = 2,11$ об/мин, что соответствовало продолжительности цикла $T = 13-17$ с. Промывка микросетки осуществлялась пластинчатыми разбрызгивателями под давлением 0,6–1,0 ати. Применяли как водопроводную, так и микрофильтрованную воду, при этом различия в эффективности регенерации не отмечалось. Полученные средние результаты исследований в 1977 году приведены в таблице I.

Т а б л и ц а I
Средние результаты исследований на опытном микрофильтре

Точка проведения опытов	Применяемая микро-сетка	Удельная производительность m^3/m^2 час	Потеря напора в микро-росетке, мм	Содержание взвешенных веществ		
				в поступающей воде мг/л	в фильтрате мг/л	Э %
Перед аэро-фильтрами	сетка № 008	30–45	40–60	150–250	90–150	25–35
После аэро-фильтров	сетка № 008	15–30	20–100	150–200	100–140	25–40
После вторичных отстойников	сетка № 300 галунного переплетения	4–12	50–100	100–350	50–150	45–55
	сетка № 0045	12–20	30–100	100–200	70–100	40–50

В работах [1, 2] изложена методика прогнозирования производительности и эффекта очистки микрофильтров, применяемых для очистки маломутных, планктоносодержащих поверхностных вод

На основе опытов фильтрации при разных заданных потерях напора через микросетки разной плотности было установлено [1], что свойства воды при микрофильтрации достаточно характеризовать концентрацией взвешенных веществ в исходной воде - C_0 [мг/л] и экспериментально определяемым показателем

$$\beta = \frac{d\alpha}{dH_c} = \frac{d^2(\frac{V_0}{V_k})}{dH_c dt} = \text{const} \left[\frac{1}{\text{м.с}} \right], \quad (1)$$

где $\alpha = \frac{d(\frac{V_0}{V_k})}{dt}$ - интенсивность прироста гидравлического сопротивления в процессе фильтроцикла, 1/с;
 H_c - потеря напора в микросетке, м;
 V_k - средняя скорость фильтрации, м/с;
 V_0 - скорость фильтрации чистой воды через данную микросетку при потере напора H_c , м/с;
 t - продолжительность фильтроцикла, с.

Коэффициент β характеризует воду с точки зрения способности загрязняющих веществ образовывать стабильную пленку на поверхности микросетки. По известным значениям C_0 и β можно рассчитать производительность и эффект микрофильтра при очистке маломутных вод [2].

В настоящих исследованиях была поставлена задача определить условия использования вышеназванных результатов при микрофильтрации сточных вод гидролизной промышленности. Для этого проводились параллельные опыты на лабораторной установке, представляющей собой систему с двумя переливными бачками, между которыми установлена микросетка с рабочей площадью $\omega = 2,16 \text{ см}^2$. Изменяя взаимное высотное расположение бачков, можно создать разные перепады давления на микросетке, а также измерить соответствующие им расходы фильтрата исследуемой жидкости.

На основе ранее проведенных исследований известно [1], что в течение одного фильтроцикла при $H_c = \text{const}$ существует закономерность

$$\frac{V_c}{V_k} = 1 + \alpha t \quad (2)$$

при $\alpha = \text{const}$.

Поэтому для определения показателя β опыты проводились в двух точках: при $H_c = 0,08$ и при $H_c = 0,14$ м с из-

мерением соответствующих средних скоростей фильтрования

$V_{\kappa}^{0,08}$ и $V_{\kappa}^{0,14}$. Зная $V_0^{0,08}$ и $V_0^{0,14}$ можно по формуле (2) определить показатели $\alpha^{0,08} = \frac{V_0^{0,08}}{V_{\kappa}^{0,08}} - 1$ и $\alpha^{0,14} = \frac{V_0^{0,14}}{V_{\kappa}^{0,14}} - 1$. Пользуясь приведенными данными, интегрально нас величину определяем в виде:

$$\beta = \frac{\alpha^{0,14} - \alpha^{0,08}}{0,14 - 0,08} \left[\frac{1}{\text{м.с.}} \right]. \quad (3)$$

Расчетную производительность микрофильтра, с учетом известных значений C_0 ; β и H_c , находили по соответствующей формуле [2]:

$$V_{\kappa}^p = \frac{V_0}{1 + \alpha T} K_4, \quad (4)$$

где K_4 — поправочный коэффициент;

T — продолжительность фильтроцикла микрофильтра (промежуток времени с момента погружения сетки до выхода ее из воды), с;

Ω_{ϕ} и F_{ϕ} — соответственно фактическая и суммарная площадь фильтрования микрофильтра, м^2 ;

D — диаметр барабана, м;

V_{bp} — линейная скорость барабана, м/с.

Интенсивность прироста гидравлического сопротивления микросетки за один оборот барабана микрофильтра определяется из эмпирической формулы:

$$\lg 1000\alpha = 3,65 - \frac{0,3}{\sqrt{\beta}} + 0,43 \lg (H_c \cdot C_0^2 \cdot k_1), \quad (5)$$

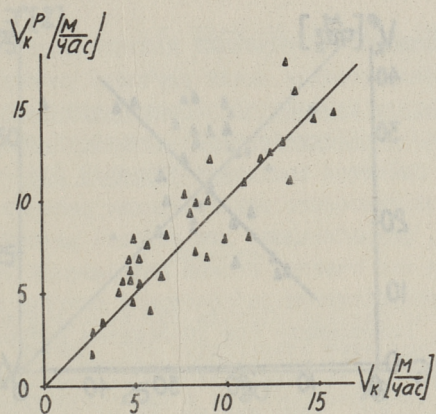
где k_1 — коэффициент, зависящий от применяемой микросетки. Методика расчета характеристик микросеток, а также скорости фильтрования чистой воды V_0 приведена в работе [3].

В качестве примера на фиг. 1-3 приведены графики, характеризующие сходимость расчетных данных с опытными. Как показали исследования, поправочный коэффициент K_4 , применяемый для расчетов по формуле (4), является постоянной величиной для данной сетки.

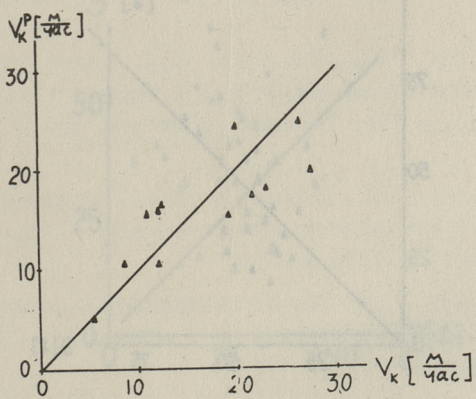
Расчетный эффект очистки микрофильтра определяли по формуле:

$$\mathcal{E}^p = 1 - e^{-K_5 \sqrt{\beta} C_0}. \quad (6)$$

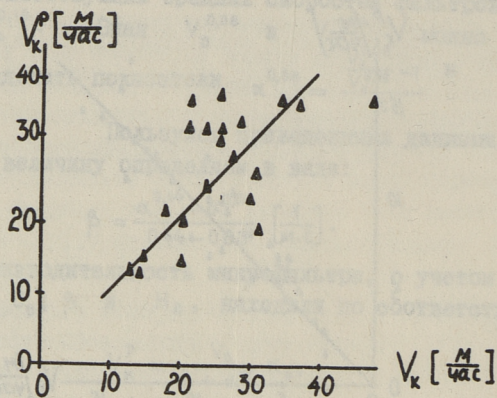
Сходимость расчетных данных с опытными характеризуют графики на фиг. 4-6. При этом поправочный коэффициент K_5 принимали постоянным.



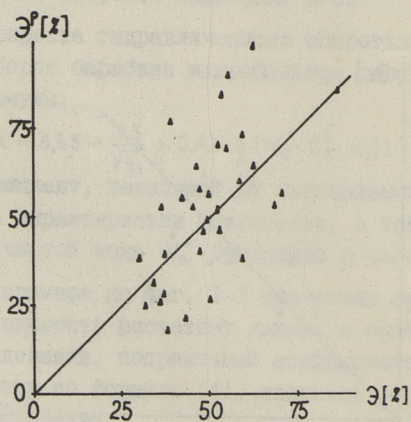
Фиг. 1. Сходимость расчетной производительности с опытной. Микросетка № 300, после вторичных отстойников, $K_4 = 0,725$.



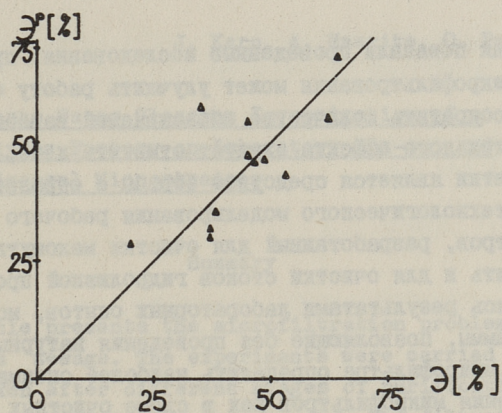
Фиг. 2. Сходимость расчетной производительности с опытной. Микросетка № 0045, после вторичных отстойников, $K_4 = 0,8$.



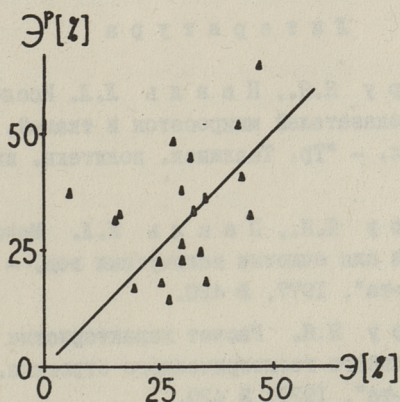
Фиг. 3. Сходимость расчетной производительности с опытной. Микросетка № 008, после аэрофильтров, $K_4 = 0,56$.



Фиг. 4. Сходимость расчетного эффекта очистки с опытным. Микросетка № 300, после вторичных отстойников, $K_5 = 0,77$.



Фиг. 5. Сходимость расчетного эффекта очистки с опытным.
Микросетка № 0045, после вторичных отстойников,
 $K_5 = 1,35$.



Фиг. 6. Сходимость расчетного эффекта очистки с опытным.
Микросетка № 008, после аэрофильтров, $K_5 = 0,57$.

Как показали проведенные исследования, применение метода микрофильтрации может улучшить работу очистной станции и сократить количество сбрасываемой взвеси. В качестве положительного эффекта следует отметить и то, что промывка микросетки является средством борьбы с образованием пены. Метод технологического моделирования рабочего процесса микрофильтров, разработанный для очистки маломутных вод, можно применить и для очистки стоков гидролизной промышленности. Пользуясь результатами лабораторных опытов, можно составить номограммы, позволяющие без проведения натуральных исследований на микрофильтре определить наиболее оптимальные условия применения микрофильтров как в схеме очистных сооружений, так и для доочистки.

Вместе с тем имеются и нерешенные вопросы. Это прежде всего проблемы биологического обрастания микросетки при длительной эксплуатации микрофильтра, закономерности изменения поправочных коэффициентов при применении разных микросеток и др. Уточнение этих вопросов является целью дальнейших исследований.

Л и т е р а т у р а

1. Кару Я.Я., Пааль Л.Л. Исследование технологических показателей микросеток и тканей, применяемых на микрофильтрах. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1977, № 420.
2. Кару Я.Я., Пааль Л.Л. Методика расчета микрофильтров для очистки маломутных вод. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1977, № 420.
3. Кару Я.Я. Расчет характеристик микросеток и тканей правильного геометрического строения. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1977, № 420.

The Waste Water Clearing Investigation of a
Hydrolysis Factory on Laboratory Set-up and
Experimental Microstrainer

Summary

The article presents the microfiltration problems of a leaven works sewage. The experiments were carried out with water taken after different stages of purification. Filter fabric from 35 to 80 μm was used. The filtration parameters were determined on laboratory set-up as well.

As the result of the research, the purification effect of suspended solids was revealed and the methods for the modelling of the process were suggested.

УДК 532.621.643

Л.Я.Айнола, У.Р.Лийв

ОБ УЧЕТЕ СЖИМАЕМОСТИ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ
ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Задача о неустановившемся течении несжимаемой жидкости в круглых трубах ведет к интегрированию уравнений теплопроводности. Это легко осуществляется классическими методами математической физики [1-3]. Решение этой же задачи для сжимаемой жидкости даже на базе упрощенной математической модели [4-6] представляет более серьезные математические трудности. Поэтому практически встает вопрос о том, при каких условиях можно рассматривать решение нестационарной задачи для несжимаемой жидкости как приближенное решение для сжимаемой жидкости.

В настоящей работе исследуется влияние сжимаемости жидкости на среднюю скорость неустановившегося течения. Рассматривается нестационарная задача течения жидкости в трубе, когда на концах трубы заданы давления, изменяющиеся произвольно во времени. Исходя из дифференциальных уравнений для сжимаемой жидкости [4-6] и применяя операционный метод для этой задачи, определяют преобразование Лапласа средней скорости течения. Так как непосредственное обращение этого преобразования не представляется возможным, то исследуют асимптотическое поведение оригинала при $t \rightarrow \infty$. В соответствующем асимптотическом разложении преобразования первый член является решением задачи при несжимаемой жидкости, а последующими членами даны поправки, обусловленные сжимаемостью жидкости.

В конце работы приводятся первые члены асимптотического разложения оригинала для одного конкретного случая кусочно-линейного изменения давления во времени. На основе

этого приближенного решения анализируется влияние сжимаемости жидкости на среднюю скорость течения при $t \rightarrow \infty$.

1. Постановка задачи

Описываем нестационарную задачу осесимметричного движения сжимаемой жидкости в круглых трубах при помощи упрощенных дифференциальных уравнений [4-6], которые в безразмерных переменных можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \tau} - \varkappa \left(\frac{\partial^2 u_{\xi}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial q}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} u_{\eta} + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0. \quad (\text{I.2})$$

К этим уравнениям присоединяем следующие начальные и граничные условия:

$$u_{\xi} = 0, \quad q = 0 \quad \text{при } \tau = 0; \quad (\text{I.3})$$

$$\left. \begin{aligned} q &= q^* \quad \text{при } \xi = 0, \\ q &= q^{**} \quad \text{при } \xi = 1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.4})$$

$$u_{\xi} = 0, \quad u_{\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 1. \quad (\text{I.5})$$

Здесь безразмерные величины определяются при помощи следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{z}{L}, \quad \eta = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{c}{L} t; \\ u_{\xi} &= \frac{v_z}{U}, \quad u_{\eta} = \frac{L v_r}{aU}, \quad q = \frac{P}{c\rho U}; \\ q^* &= \frac{P^*}{c\rho U}, \quad q^{**} = \frac{P^{**}}{c\rho U}, \quad \varkappa = \frac{L\mu}{a^2 c \rho}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.6})$$

где v_z, v_r — составляющие вектора скорости в направлении осей координат z, r ;

P — давление;

ρ — плотность жидкости;

μ — коэффициент вязкости;

c — скорость звука в жидкости;

t - время;
 a и L - радиус и длина трубы.

Средняя по сечению скорость

$$v_z = \frac{2\pi}{\pi a^2} \int_0^a v_z r dr \quad (I.7)$$

выражается при помощи безразмерных величин в виде:

$$v_z = u w, \quad (I.8)$$

где

$$w = 2 \int_0^1 u_\xi \eta d\eta. \quad (I.9)$$

Если уравнение (I.2) умножить на η и интегрировать по координате η , то получается уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0. \quad (I.10)$$

Рассматриваемая задача при несжимаемой жидкости сводится к решению первого уравнения из (I.1) при заданной функции

$$q_v = q_v^* (1 - \xi) + q_v^{**} \xi. \quad (I.11)$$

2. Решение для средней скорости

Решаем систему уравнений (I.1), (I.10) при начальных и граничных условиях (I.3)-(I.5), аналогично работам [4-6], операционным методом.

Если применить обозначение

$$\bar{f}(\xi, \eta, s) = \int_0^\infty f(\xi, \eta, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (2.1)$$

то преобразование Лапласа уравнений (I.1), (I.10) при начальных условиях (I.3) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \bar{u}_\xi}{\partial \eta} - \frac{s}{\alpha^2} \left(\bar{u} + \frac{1}{s} \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \bar{q}_v}{\partial \eta} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + s \bar{q}_v = 0. \quad (2.4)$$

Введем функцию:

$$\bar{\Phi} = \bar{u}_\xi + \frac{1}{s} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi}. \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.2), учитывая (2.3), имеем:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} - \frac{s}{\alpha^2} \bar{\Phi} = 0. \quad (2.6)$$

Общее решение этого уравнения, которое является ограниченным при $\eta = 0$, имеет вид:

$$\bar{\Phi} = C(\xi, s) I_0(\eta \sqrt{\frac{s}{\alpha^2}}), \quad (2.7)$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента;

$C(\xi, s)$ — произвольная функция.

Из соотношения (2.5) и (2.7) получаем:

$$\bar{u}_\xi = C(\xi, s) I_0(\eta \sqrt{\frac{s}{\alpha^2}}) - \frac{1}{s} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi}. \quad (2.8)$$

Применяя граничное условие (I.5), можем найти, что

$$C(\xi, s) = \frac{\frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi}}{s I_0(\sqrt{\frac{s}{\alpha^2}})}. \quad (2.9)$$

Следовательно,

$$\bar{u}_\xi = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi} \frac{I_0(\eta \sqrt{\frac{s}{\alpha^2}}) - I_0(\sqrt{\frac{s}{\alpha^2}})}{s I_0(\sqrt{\frac{s}{\alpha^2}})}. \quad (2.10)$$

Далее по формулам (I.9), (2.10) имеем:

$$W = - \frac{I_2(\sqrt{\frac{s}{\alpha^2}})}{s I_0(\sqrt{\frac{s}{\alpha^2}})} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi}. \quad (2.11)$$

Уравнения (I.10), (2.11) образуют систему для определения функций \bar{W} и \bar{q} . Исключая из этой системы функцию \bar{W} , получаем:

$$\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \xi^2} + \gamma^2(s) \bar{q} = 0, \quad (2.12)$$

где

$$\gamma^2(s) = \frac{s^2 I_0(\sqrt{\frac{s}{\alpha^2}})}{I_0(\sqrt{\frac{s}{\alpha^2}})}. \quad (2.13)$$

Решение уравнения (2.12) при граничных условиях (I.4) имеет вид:

$$\bar{q}_v = \frac{1}{\text{sh}\gamma(s)} [\bar{q}_v^* \text{sh}\gamma(s)(1-\xi) + \bar{q}_v^{**} \text{sh}\gamma(s)\xi]. \quad (2.14)$$

Соответственно по соотношениям (2.11), (2.13) получаем

$$\bar{w} = \frac{s}{\gamma(s)\text{sh}\gamma(s)} [\bar{q}_v^* \text{ch}\gamma(s)(1-\xi) - \bar{q}_v^{**} \text{ch}\gamma(s)\xi]. \quad (2.15)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma(s) \rightarrow 0$. Из соотношений (2.13) видно, что в этом случае или $s \rightarrow 0$, или $s \rightarrow s_k$, где

$$s_k = -\lambda \lambda_k^2 \quad (2.16)$$

и λ_k — решения уравнения $J_0(\lambda) = 0$, т.е. нули функции Бесселя первого рода нулевого порядка. Так как асимптотика $s \rightarrow 0$ соответствует асимптотике $t \rightarrow \infty$, то рассматриваемая асимптотика $\gamma(s) \rightarrow 0$ содержит случай $t \rightarrow \infty$.

Разлагая функции (2.14), (2.15) в ряд по $\gamma(s)$, имеем

$$\bar{q}_v = \bar{q}_v^*(1-\xi) + \bar{q}_v^{**}\xi + \frac{\gamma^2(s)}{6} \left\{ \bar{q}_v^* [(1-\xi)^3 - 1] + \bar{q}_v^{**} (\xi^3 - 1) \right\} + \dots \quad (2.17)$$

и

$$\bar{w} = \frac{s}{\gamma^2(s)} (\bar{q}_v^* - \bar{q}_v^{**}) + \frac{s}{2} \left\{ \bar{q}_v^* [(1-\xi)^2 - 1] - \bar{q}_v^{**} (\xi - 1) \right\} + \frac{s\gamma^2(s)}{24} \left\{ \bar{q}_v^* [(1-\xi)^4 - 2(1-\xi)^2 - \frac{7}{15}] - \bar{q}_v^{**} (\xi^4 - 2\xi^2 - \frac{7}{15}) \right\} + \dots \quad (2.18)$$

Отсюда в первом приближении получаются

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_{v1} &= \bar{q}_v^*(1-\xi) + \bar{q}_v^{**}\xi, \\ \bar{w}_1 &= \frac{s}{\gamma^2(s)} (\bar{q}_v^* - \bar{q}_v^{**}). \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Это решение совпадает с решением рассматриваемой задачи в случае несжимаемой жидкости. Последующие члены в разложениях (2.17), (2.18) учитывают уже сжимаемость жидкости и ими соответственно определены поправки к решению обусловленной сжимаемостью жидкости.

3. Приближенное решение для сжимаемой жидкости

В качестве примера применения приближенного решения (2.17), (2.18) найдем оригиналы функций \bar{q}_v и \bar{w} в частном случае, когда давление в концах трубы q_v^* , q_v^{**} заданы сле-

лучшим образом:

$$q^* = \frac{1}{\tau'} \tau + \eta(\tau - \tau')(1 - \frac{\tau}{\tau'}), \quad (3.1)$$

$$q^{**} = 0.$$

Здесь $\eta(\tau - \tau')$ — единичная функция Хевисайда.

Преобразования Лапласа функций имеют вид

$$\bar{q}^* = \frac{1}{\tau'}(1 - e^{-s\tau'}) \frac{1}{s^2}. \quad (3.2)$$

$$\bar{q}^{**} = 0.$$

Подставляя выражения (3.2) в соотношения (2.17), (2.18) имеем:

$$\bar{q} = \frac{1 - e^{-s\tau'}}{\tau' s^2} \left\{ (1 - \xi) + \frac{s^2 I_0(\sqrt{\frac{s}{\alpha}})}{6 I_2(\sqrt{\frac{s}{\alpha}})} [(1 - \xi)^3 - 1] \right\} \quad (3.3)$$

и

$$\bar{w} = \frac{1 - e^{-s\tau'}}{\tau' s^2} \left\{ \frac{I_2(\sqrt{\frac{s}{\alpha}})}{s I_0(\sqrt{\frac{s}{\alpha}})} + \frac{s}{2} [(1 - \xi)^2 - 1] + \right. \\ \left. + \frac{s^3 I_0(\sqrt{\frac{s}{\alpha}})}{24 I_2(\sqrt{\frac{s}{\alpha}})} [(1 - \xi)^4 - 2(1 - \xi)^2 - \frac{7}{15}] \right\}. \quad (3.4)$$

Соответствующие оригиналы можно найти при помощи вычетов

$$q = \frac{1}{\tau'} \tau (1 - \xi) + \frac{2\alpha}{3\tau'} \left[2 - \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{-\alpha \mu_{\kappa}^2 \tau} \right] [(1 - \xi)^3 - 1] - \\ - \frac{\eta(\tau - \tau') \left\{ \frac{1}{\tau'} (\tau - \tau') (1 - \xi) + \frac{2\alpha}{3\tau'} \left[2 - \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{-\alpha \mu_{\kappa}^2 (\tau - \tau')} \right] \right.}{\cdot [(1 - \xi)^3 - 1]} \left. \right\} \quad (3.5)$$

и

$$w = - \frac{1}{8\alpha\tau'} \left(\frac{1}{6\alpha} - \tau - \frac{32}{\alpha} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\kappa}^6} e^{-\alpha \lambda_{\kappa}^2 \tau} \right) + \\ + \frac{2}{\tau'} [(1 - \xi)^2 - 1] + \frac{\alpha}{6\tau'} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa}^2 e^{-\alpha \mu_{\kappa}^2 \tau} [(1 - \xi)^4 - 2(1 - \xi)^2 - \frac{7}{15}] - \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 & -\eta(\tau-\tau') \left\{ -\frac{1}{8\alpha\tau'} \left(\frac{1}{6\alpha} - \tau + \tau' - \frac{32}{\alpha} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\kappa}^6} e^{-\alpha\lambda_{\kappa}^2(\tau-\tau')} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\tau'} \left[(1-\xi)^2 - 1 \right] + \frac{\alpha^2}{6\tau'} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa}^2 e^{-\alpha\mu_{\kappa}^2(\tau-\tau')} \left[(1-\xi)^4 - 2(1-\xi)^2 - \frac{7}{15} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь λ_{κ} - решения уравнения $J_0(\lambda) = 0$ и μ_{κ} - решения уравнения $J_2(\mu) = 0$. Подчеркнутые слагаемые в выражениях (3.5), (3.6) дают решение рассматриваемой задачи в случае несжимаемой жидкости. Остальные члены являются поправкой, обусловленной сжимаемостью жидкости.

Л и т е р а т у р а

1. Г р о м е к а И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. - "Учен. зап. Казанск.ун-та", 1882, 18, № 1, 2, с. 41-72.
2. Т а р г С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М., Гостехиздат, 1951.
3. С е л е з к и н Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1951.
4. Д'С у з а А.Ф., О л д е н б у р г е р Р. Динамическая характеристика гидравлических трубопроводов. - "Теор. осн. инж. расчетов", 1964, № 4, с. 196-205.
5. Х о л м б о у Е.Л., Р у л о В.Т. Влияние вязкого трения на распространение сигналов в гидравлических линиях. - "Теор. осн. инж. расчетов", 1967, № 1.
6. Ч а р н ы й И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубках. М., "Недра", 1975.

Effect of Compressibility for Unsteady
Pipe Flow

Summary

In this investigation the effect of compressibility for the instantaneous mean velocity is described. From differential equations for compressible fluids, using operator calculus, the Laplace transformation for instantaneous mean flow is determined. Using the asymptotical method the first approximations for the original are obtained. In this solution the first term corresponds to the solution of incompressible fluid flow, but the next ones give the correction from the compressibility of fluid to the motion.

УДК 532.621.643

Л.Я. Айвола, У.Р. Лийв

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ЗАКОНЫ ВЗАИМНОСТИ
ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ
В ТРУБАХ

Вариационные принципы имеют в прикладной механике, в том числе в гидродинамике, разнообразное применение. Они являются вместе с прямыми методами и методом конечных элементов средством численного решения задач. В то же время они могут быть применены и для получения некоторых общих теоретических результатов.

В настоящей работе сформулирован общий вариационный принцип для одной частной задачи гидродинамики, а именно, для нестационарного осесимметричного течения сжимаемой вязкой жидкости в трубах, и рассматриваются два уровня применения этого принципа. Сначала этот вариационный принцип применяется для вывода известной, наиболее применяемой упрощенной математической модели для рассматриваемой задачи [1-4]. Для этого, используя метод возмущений из соответствующего функционала, выводится упрощенный функционал, из которого вытекают дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия данной модели. Далее, пользуясь обоими из приведенных функционалов, выводятся общие законы взаимности для точной и упрощенной моделей.

1. Вариационный принцип

Вариационные принципы для линейных начально-краевых задач сперва сформулировали для уравнений теории упругости и волнового уравнения [5-8]. Принципиально новым при этом является тот факт, что соответствующие функционалы выражаются через интегралы-свертки по времени. Для урав-

нений гидродинамики вариационные принципы для начально-краевых задач ввели сравнительно недавно. В работе [9] приводятся вариационные принципы для несжимаемой жидкости, а в работе [10] — для вязкого теплопроводящего газа. Ниже приводится вариационный принцип для линеаризованных уравнений Навье-Стокса в цилиндрических координатах, который отличается от названных вариационных принципов в том смысле, что применим в случае, когда граничные условия на торцах заданы в напряжениях.

Описываем осесимметричное движение сжимаемой жидкости в круглых трубах дифференциальными уравнениями Навье-Стокса

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ \rho c^2 \theta - \frac{\partial p}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (I.1)$$

где

$$\theta = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (I.2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (I.3)$$

v_z, v_r — составляющие скорости в направлении осей z, r ;

p — давление;

ρ — плотность жидкости;

μ — коэффициент вязкости;

c — скорость звука в жидкости;

t — время.

Пусть требуется проинтегрировать дифференциальные уравнения (I.1) при следующих граничных условиях на стенке трубы:

$$v_r = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{при } r = a \quad (I.4)$$

и на концах трубы

$$\left. \begin{aligned} -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \theta &= \sigma_z^*, & \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= \tau_{rz}^* \\ & & \text{при } z &= 0 \\ -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \theta &= \sigma_z^{**}, & \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= \tau_{rz}^{**} \\ & & \text{при } z &= L \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.5})$$

и при следующих начальных условиях:

$$v_r = v_r^0, \quad v_z = v_z^0, \quad p = p^0 \quad \text{при } t = 0. \quad (\text{I.6})$$

Обозначим интегралы-свертки по времени через

$$g * f = \int_0^t g(z, r, t) f(z, r, t - t_1) dt_1, \quad (\text{I.7})$$

и рассмотрим функционал:

$$\begin{aligned} I = & \int_0^L \int_0^a \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} * v_z + \frac{\partial v_r}{\partial t} * v_r - \frac{1}{c^2 \rho^2} \frac{\partial p}{\partial t} * p \right) - \right. \\ & - p * \theta - \frac{1}{3} \mu \theta * \theta + \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} * \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} v_r * v_r + \right. \\ & + \frac{\partial v_z}{\partial z} * \frac{\partial v_z}{\partial z} \left. \right) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) * \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \rho [v_z(z, r, 0) v_z(z, r, t) + v_r(z, r, 0) v_r(z, r, t)] - \\ & - \frac{1}{c^2 \rho^2} p(z, r, 0) p(z, r, t) - \rho [v_z^0(z, r) v_z(z, r, t) + \\ & + v_r^0(z, r) v_r(z, r, t)] + \frac{2}{c^2 \rho^2} p^0(z, r) p(z, r, t) \left. \right\} r dr dz + \\ & + \int_0^a \left[\sigma_z^*(r, t) * v_z(0, r, t) - \sigma_z^{**}(r, t) * v_z(L, r, t) + \right. \\ & + \tau_{rz}^*(r, t) * v_r(0, r, t) - \tau_{rz}^{**}(r, t) * v_r(L, r, t) \left. \right] r dr. \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Легко проверить, что условиями стационарности функционала (I.8) в случае, когда варьируемые функции v_z , v_r , p удовлетворяют граничным условиям (I.4) на стенке трубы, являются уравнения (I.1), граничные условия (I.5) на концах трубы и начальные условия (I.6). Действительно, образуя первую вариацию функционала (I.8), преобразуя ее с помощью формулы Остроградского и учитывая, что

$$\delta v_z = 0, \quad \delta v_r = 0, \quad \text{при } r = a, \quad (\text{I.9})$$

получим

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^L \int_0^a \left\langle \left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \nabla^2 v_z - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) * \delta v_z + \right. \\ & + \left(\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} - \mu (\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2}) - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) * \delta v_r - \\ & - \frac{1}{\rho c^2} \left(\rho c^2 \theta + \frac{\partial p}{\partial t} \right) * \delta p + \\ & + \rho \left\{ [v_z(z, r, 0) - v_z^0] \delta v_z(z, r, t) + \right. \\ & + [v_r(z, r, 0) - v_r^0] \delta v_r(z, r, t) - \\ & - \frac{1}{\rho c^2} [p(z, r, 0) - p^0] \delta p(z, r, t) \left. \right\} r dr dz - \\ & - \int_0^a \left\{ [(-p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \theta) \Big|_{z=0} - \sigma_z^*] * \delta v_z(0, r, t) - \right. \\ & - [(-p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \theta) \Big|_{z=L} - \sigma_z^{**}] * \delta v_z(L, r, t) + \\ & + [\mu (\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}) \Big|_{z=0} - \tau_{rz}^*] * \delta v_r(0, r, t) - \\ & - [\mu (\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}) \Big|_{z=L} - \tau_{rz}^{**}] * \delta v_r(L, r, t) \left. \right\} r dr. \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Отсюда видно, что условиями стационарности функционала I являются уравнения (I.1) и условия (I.5), (I.6)

2. Вывод упрощенной теории

Для вывода более простых математических моделей, при описании движения сжимаемой жидкости в трубе, необходимо использовать дополнительные предположения о порядках рассматриваемых величин и соответственно упростить функционал (I.8). Введем порядковое разделение используемых величин при помощи перехода к безразмерным величинам. Анализ частных решений уравнений (I.1), соответствующих элементарным волнам, показывает [1], что для этой цели целесообразно перейти к безразмерным координатам ξ, η, τ и безразмерным переменным

u_ξ, u_η, q следующим образом:

$$z = L\xi, \quad r = a\eta, \quad t = \frac{a}{\varepsilon c} \tau; \quad (2.1)$$

$$v_z = Uu_\xi, \quad v_r = \varepsilon Uu_\eta, \quad p = c\rho Uq;$$

$$\mu = \varepsilon c\rho a\alpha; \quad \varepsilon = \frac{a}{L}.$$

Здесь U — нормирующая скорость.

Отношение радиуса и длины трубы ε считается малым числом и рассматривается как малый параметр.

Соответственно считаем, что заданные начальные скорости и давления и заданные напряжения имеют вид

$$v_z^0 = Uu_\xi^0, \quad v_r^0 = \varepsilon Uu_\eta^0, \quad p^0 = c\rho Uq^0; \quad (2.2)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^* &= c\rho U s_z^*, \quad \tau_{rz}^* = \varepsilon c\rho U t_{rz}^* \quad \text{при } \xi = 0; \\ \sigma_z^{**} &= c\rho U s_z^{**}, \quad \tau_{rz}^{**} = \varepsilon c\rho U t_{rz}^{**} \quad \text{при } \xi = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Для вывода упрощенной теории используем теперь вариационный метод, приведенный в работе [II]. Перейдем в функционале (I.8) к новым безразмерным переменным и константам по соотношениям (2.1)–(2.3). Тогда функционал I можем представить в виде суммы:

$$I = \sum_{k=0}^4 \varepsilon^{k-1} I_k, \quad (2.4)$$

где первый член в сумме имеет вид:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2} \rho a^3 U^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial u_\xi}{\partial \tau} * u_\xi - \frac{\partial q}{\partial \tau} * q - \right. \right. \\ &\quad - 2q * \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} u_\eta + \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \right) + \alpha \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} * \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + \\ &\quad + u_\xi(\xi, \eta, 0) u_\xi(\xi, \eta, \tau) - 2q(\xi, \eta, 0) q(\xi, \eta, \tau) - \\ &\quad - 2u_\xi^0 u_\xi(\xi, \eta, \tau) + 4q^0 q(\xi, \eta, \tau) \left. \right] \eta d\eta d\xi + \\ &\quad + 2 \int_0^1 [s_z^*(\eta, \tau) * u_\xi(0, \eta, \tau) - s_z^{**}(\eta, \tau) * u_\xi(1, \eta, \tau)] \eta d\eta \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь интегралы-свертки взяты по безразмерному времени τ и имеют вид:

$$g * f = \int_0^{\tau} g(\xi, \eta, \tau_1) f(\xi, \eta, \tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (2.6)$$

Если использовать метод малого параметра и в сумме (2.4) сохранять только первый член, то в первом приближении функционал (1.8) заменяется функционалом (2.5).

Образуя первую вариацию функционала (2.5), найдем:

$$\begin{aligned} \delta I_0 = & \varrho \alpha^3 U^2 \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \tau} - \kappa \left(\frac{\partial^2 u_{\xi}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial q}{\partial \xi} \right) * \delta u_{\xi} + \right. \\ & + \frac{\partial q}{\partial \eta} * \delta u_{\eta} - \left(\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{u_{\eta}}{\eta} + \frac{\partial q}{\partial \tau} \right) * \delta q + \\ & \left. + [u_{\xi}(\xi, \eta, 0) - u_{\xi}^0] \delta u_{\xi}(\xi, \eta, \tau) - 2[q(\xi, \eta, 0) - q^0] \delta q(\xi, \eta, \tau) \right]. \quad (2.7) \\ & \cdot \eta d\eta d\xi - \int_0^1 [q(0, \eta, \tau) - s_z^*(\eta, \tau)] * \delta u_{\xi}(0, \eta, \tau) - \\ & - [q(1, \eta, \tau) - s_z^{**}(\eta, \tau)] * \delta u_{\xi}(1, \eta, \tau) \eta d\eta. \end{aligned}$$

Здесь учтены условия (1.9).

Из соотношения (2.7) видно, что условиями стационарности функционала (2.5) при условии (1.4) являются дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \tau} - \kappa \left(\frac{\partial^2 u_{\xi}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial q}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{u_{\eta}}{\eta} + \frac{\partial q}{\partial \tau} &= 0; \end{aligned} \quad (2.8)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} q - s_z^* &= 0, \quad \text{при } \xi = 0 \\ q - s_z^{**} &= 0, \quad \text{при } \xi = 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

и начальные условия:

$$u_{\xi} = u_{\xi}^0, \quad q = q^0, \quad \text{при } \tau = 0. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.8) рассмотрены в работах [1-4].

3. Законы взаимности

Обзор работ о законах взаимности в гидродинамике дан в статье [12]. Закон взаимности для нестационарных процессов в гидродинамике приведен в работе [10]. В этой работе заданный закон взаимности применим в случае различных начальных условий, но при одинаковых граничных условиях. Ниже для частной задачи нестационарного течения жидкости в трубах приводятся более общие законы взаимности, охватывающие случаи как различных начальных, так и различных граничных условий. При выводе законов взаимности используются вариационные принципы, приведенные в предыдущих пунктах.

Отметим, что если уравнения (1.1) и условия (1.4) - (1.6) удовлетворены, то при любом выборе вариации $\delta u_z, \delta u_r$ и δp выполняется условие:

$$\delta I = 0, \quad (3.1)$$

где δI заданы соотношением (1.10).

Обозначая

$$\delta u_z = u'_z, \quad \delta u_r = u'_r, \quad \delta p = p' \quad (3.2)$$

и используя формулу Остроградского, можем выражению (1.10) придать вид

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^L \int_0^a \left\langle -\left(\rho \frac{\partial v'_z}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \mu \nabla^2 v'_z - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta'}{\partial z}\right) * v_z + \right. \\ & + \left(\rho \frac{\partial v'_r}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial r} - \mu (\nabla^2 v'_r - \frac{v'_r}{r}) - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta'}{\partial r}\right) * v_r - \\ & - \frac{1}{\rho c^2} \left(\rho \epsilon^2 \theta' + \frac{\partial p'}{\partial t}\right) * p + \rho [v_z(z, r, t) v'_z(z, r, 0) - \\ & - v_z^0 v'_z(z, r, t) + v_r(z, r, t) v'_r(z, r, 0) - v_r^0 v'_r(z, r, t)] - \\ & \left. - \frac{1}{\rho c^2} [p(z, r, t) p'(z, r, 0) - p^0 p'(z, r, t)] \right\rangle r dr dz - \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^a \left[(-p' + 2\mu \frac{\partial v_z'}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \theta') \Big|_{z=0} * v_z(0, r, t) - \sigma_z^* * v_z'(0, r, t) - \right. \\
& - (-p' + 2\mu \frac{\partial v_z'}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \theta') \Big|_{z=L} * v_z(L, r, t) + \sigma_z^{**} * v_z'(L, r, t) + \\
& + \mu \left(\frac{\partial v_r'}{\partial z} + \frac{\partial v_z'}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} * v_r(0, r, t) - \tau_{rz}^* * v_r'(0, r, t) - \\
& \left. - \mu \left(\frac{\partial v_r'}{\partial z} + \frac{\partial v_z'}{\partial r} \right) \Big|_{z=L} * v_r(L, r, t) - \tau_{rz}^{**} * v_r'(L, r, t) \right] r dr.
\end{aligned}$$

Предположим теперь, что функции v_z', v_r', p' являются решениями задачи (I.1), (I.4)–(I.6) при заданных напряжениях $\tau_{rz}^{i*}, \sigma_z^{i*}, \sigma_z^{i**}, \tau_{rz}^{i**}$ на концах трубы при $z = 0$ и $z = L$ и при заданных начальных скоростях и давлении v_z^{i0}, v_r^{i0} и p^{i0} при $t = 0$. Из условий (3.1) и соотношений (3.3) тогда получим следующий закон взаимности:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^a \left\{ \rho [v_z^0 v_z'(z, r, t) + v_r^0 v_r'(z, r, t)] - \frac{1}{\rho c^2} p^0 p'(z, r, t) \right\} r dr dz - \\
& - \int_0^a \left[\sigma_z^* * v_z'(0, r, t) - \sigma_z^{**} * v_z'(L, r, t) + \tau_{rz}^* * v_r'(0, r, t) - \right. \\
& \left. - \tau_{rz}^{**} * v_r'(L, r, t) \right] r dr = \\
& = \int_0^L \int_0^a \left\{ \rho [v_z^{i0} v_z(z, r, t) + v_r^{i0} v_r(z, r, t)] - \frac{1}{\rho c^2} p^{i0} p(z, r, t) \right\} r dr dz - \quad (3.4) \\
& - \int_0^a \left[\sigma_z^{i*} * v_z(0, r, t) - \sigma_z^{i**} * v_z(L, z, t) + \tau_{rz}^{i*} * v_r(0, r, t) - \right. \\
& \left. - \tau_{rz}^{i**} * v_r(L, r, t) \right] r dr.
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично при помощи условий (3.1) и соотношений (2.7) получается закон взаимности для упрощенной теории в виде:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 [u_{\xi}^0 u_{\xi}'(\xi, \eta, \tau) - 2q^0 q'(\xi, \tau)] \eta d\eta d\xi - \\
& - \int_0^1 [s_z^*(\tau) * u_{\xi}'(0, \eta, \tau) - s_z^{**}(\tau) * u_{\xi}'(L, \eta, \tau)] \eta d\eta = \quad (3.5) \\
& = \int_0^1 \int_0^1 [u_{\xi}^0 u_{\xi}'(\xi, \eta, \tau) - 2q^0 q'(\xi, \tau)] \eta d\eta d\xi - \\
& - \int_0^1 [s_z^*(\tau) * u_{\xi}'(0, \eta, \tau) - s_z^{**}(\tau) * u_{\xi}'(L, \eta, \tau)] \eta d\eta.
\end{aligned}$$

Л и т е р а т у р а

1. Д'Суза А.Ф., Олденбургер Р. Динамическая характеристика гидравлических трубопроводов. - "Теор. осн. инж. расч.", 1964, № 3, с. 196-205.

2. Холмбоу Е.Д., Руло В.Т. Влияние вязкого трения на распространение сигналов в гидравлических линиях. - "Теор. осн. инж. расч.", 1967, № 1.

3. Джаясингхе, Лойтхойсер. Распространение возмущений при течении вязкой жидкости в гидравлическом трубопроводе с упругими стенками, "Теор. осн. инж. расч.", 1974, № 3, с. 176-183.

4. Чарный И.А. Неуставившееся движение реальной жидкости в трубах. М., "Недра", 1975.

5. G u r t t i n, М.Е. Variational principles for linear elastodynamics. "Arch.Rat.Mech.Anal." 1964, 16, No 1, 34-50.

6. G u r t t i n, М.Е. Variational principles for linear initial - value problems. "Quart.Appl.Math." 1964, 22, No 3, 252-256.

7. Айнола Л.Я. Вариационный принцип динамики линейной теории упругости. - "Докл. АН СССР", 1967, 172, № 2, с. 306-308.

8. Айнола Л.Я. Вариационные принципы и общие формулы для смешанной задачи волнового уравнения. - "Изв. АН ЭССР, Физ.Матем.", 1969, № 1, с. 48-56.

9. Подгаец Р.М., Няшин Ю.И. Вариацион-

ные принципы нестационарной задачи течения несжимаемой вязкой среды. - В сб. науч. тр. ПИИ "Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций" 1974, № 153(Пермь).

10. Мургау, J.C., Gurtin M.E. Type properties associated with wave propagation in a viscous heat-conducting gas. "Quart. Appl. Math.", 1976, 34, No 3, 271-286.

11. Айналова Л.Я. О геометрически нелинейной теории динамики упругих пластинок. "Прикл. механика", 1965, 1, № 8, с. 7-16.

12. Белоусов Ю.И., Римский И-Корсаков А.В. Принцип взаимности в акустике для неустановившихся процессов. "Акуст. журнал", 1971, 17, № 1, с. 148-151.

L. Ainola, U. Liiv

Variational Principles and Reciprocal Laws
for Unsteady Flow Problems in Pipes

Summary

In this investigation the general variational principle for axisymmetrical unsteady flows of the viscous compressible fluid is given. The corresponding functional is used for deriving the known simple mathematical model of the flow problems in pipes. This is accomplished by simplification of the functional using the method of perturbation. Further, from the given functionals the general reciprocal laws for flow problems in pipes are derived.

УДК 532.621.643

Л.Я. Айнола, У.Р. Лийв

К МЕТОДАМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ
НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Решение нестационарных задач течения жидкости в трубах и определение распределения скоростей жидкости в сечении трубы представляют даже на базе упрощенных дифференциальных уравнений [1-3] довольно большую математическую трудность. Классический метод разделения переменных здесь не применим, а при применении операционного метода возникают трудности при обращении изображения решения. В настоящей работе для решения нестационарных задач пользуются вариационным методом Канторовича, при помощи которого интегрирование системы дифференциальных уравнений для функций трех переменных приводится к интегрированию бесконечной системы дифференциальных уравнений для функций двух переменных.

Рассматривается решение этой бесконечной системы дифференциальных уравнений в частных производных итерационным методом, который в каждом этапе итерации требует интегрирования бесконечной несвязанной системы уравнений. Указывается итерационный процесс, при котором последняя система соответствует модели плоскопараллельного течения решения задачи [4]. Тем самым устанавливается взаимоотношение между двумя известными математическими моделями для исследования движения жидкости в трубе.

С помощью операционного метода дается решение в первом приближении итерационного процесса для задачи о нестационарном осесимметричном течении жидкости для одного случая простого изменения во времени давления в концах трубы.

Определяются компоненты скорости движения жидкости как в осевом, так и в радиальном направлениях.

I. Исходный вариационный принцип

Рассматриваем нестационарную задачу осесимметричного движения сжимаемой жидкости в круглых трубах, приводящую к решению дифференциальных уравнений [1-3]

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial n^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \rho c^2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r \right) + \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.1})$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$v_z = 0, \quad p = 0 \quad \text{при } t = 0; \quad (\text{I.2})$$

$$p = p^* \quad \text{при } z = 0, \quad \left. \begin{aligned} p &= p^{**} \quad \text{при } z = L; \\ v_z &= 0, \quad v_r = 0 \quad \text{при } r = a. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.3})$$

$$v_z = 0, \quad v_r = 0 \quad \text{при } r = a. \quad (\text{I.4})$$

Здесь v_z, v_r — составляющие скорости в направлении осей координат z, r ;

p — давление;

ρ — плотность жидкости;

μ — коэффициент вязкости;

c — скорость звука в жидкости,

t — время;

a — радиус трубы;

L — длина трубы.

Если перейти к безразмерным координатам ξ, η, τ и переменным u_ξ, u_η, u_τ при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} z &= L\xi, \quad r = a\eta, \quad t = \frac{L}{c}\tau; \\ v_z &= Uu_\xi, \quad v_r = \frac{a}{L}Uu_\eta, \quad p = c\rho Uu_\tau; \\ p^* &= c\rho Uu_\tau^*, \quad p^{**} = c\rho Uu_\tau^{**}; \\ \mu &= \frac{a^2 c \rho \mu}{L} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.5})$$

то уравнения (I.1) и условия (I.2)–(I.4) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \tau} - \kappa \left(\frac{\partial^2 u_{\xi}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial q}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{u_{\eta}}{\eta} + \frac{\partial q}{\partial \tau} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (I.6)$$

и

$$u_{\xi} = 0, \quad q = 0 \quad \text{при } \tau = 0; \quad (I.7)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= q^* \quad \text{при } \xi = 0, \\ q &= q^{**} \quad \text{при } \xi = 1; \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

$$u_{\xi} = 0, \quad u_{\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 1. \quad (I.9)$$

Начально-краевую задачу (I.6)–(I.9) можно сформулировать в виде вариационного принципа

$$\delta I = 0, \quad (I.10)$$

где I имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2} \rho a^3 U^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \tau} * u_{\xi} - \frac{\partial q}{\partial \tau} * q - \right. \right. \\ \left. \left. - 2q * \left(\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} u_{\eta} \right) + \kappa \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} * \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + \right. \right. \\ \left. \left. + u_{\xi}(\xi, \eta, 0) u_{\xi}(\xi, \eta, \tau) - 2q(\xi, 0) q(\xi, \tau) \right] \eta d\eta d\xi - \right. \\ \left. - 2 \int_0^1 [q^*(\tau) * u_{\xi}(0, \eta, \tau) - q^{**}(\tau) * u_{\xi}(1, \eta, \tau)] \eta d\eta \right\}. \quad (I.11) \end{aligned}$$

Условиями стационарности функционала (I.11) при предельных условиях (I.9) являются уравнения (I.6) и условия (I.7), (I.8).

Исключаем из функционала (I.11) варьируемую функцию u_{η} , пользуясь граничным условием (I.9) и тем обстоятельством, что функция q не зависит от координаты η . Тогда функционал (I.11) получает вид:

$$I = \frac{1}{2} \rho a^3 U^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \tau} * u_{\xi} - 2q * \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} * \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + u_{\xi}(\xi, \eta, 0) u_{\xi}(\xi, \eta, \tau) \Big] \eta d\eta d\xi - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial q}{\partial \tau} * q + 2q(\xi, 0) q(\xi, \tau) \right] d\xi - 2 \int_0^1 [q^*(\tau) * u_{\xi}(0, \eta, \tau) - \\
& - q^{**}(\tau) * u_{\xi}(1, \eta, \tau)] \eta d\eta \Big\}. \quad (I.12)
\end{aligned}$$

2. Применение вариационного метода Канторовича

Рассмотрим вариационную задачу — найти стационарное значение функционала (I.12). Ищем решение этой задачи в виде

$$\left. \begin{aligned}
u_{\xi} &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\xi, \tau) J_0(\lambda_i \eta), \\
q &= q(\xi, \tau).
\end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь $J_0(\lambda_i \eta)$ — функция Бесселя нулевого порядка;
 λ_i — корни уравнения

$$J_0(\lambda) = 0. \quad (2.2)$$

Легко увидеть, что выбранная функция u_{η} удовлетворяет граничным условиям (I.9).

Подставляя функции u_{ξ} , q в функционал (I.12), имеем

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \rho a^3 U^2 \left\langle \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} [J_1(\lambda_i)]^2 \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} * \alpha_i + \right. \right. \right. \\
& + \kappa \lambda_i^2 \alpha_i * \alpha_i + \alpha_i(\xi, 0) \alpha_i(\xi, \tau) \Big] - \\
& - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i} q_0 * \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial q_0}{\partial \tau} * q_0 - \\
& \left. \left. \left. - q_0(\xi, 0) q_0(\xi, \tau) \right\} d\xi - \right. \\
& \left. - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i} [q^* * \alpha_i(0, \tau) - q^{**} * \alpha_i(1, \tau)] \right\rangle. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Здесь использованы соотношения:

$$\int_0^1 \eta J_0(\lambda_i \eta) J_0(\lambda_k \eta) d\eta = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda_i \neq \lambda_k, \\ \frac{1}{2} [J_1(\lambda_i)]^2 & \text{при } \lambda_i = \lambda_k. \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\int_0^1 \eta J_0(\lambda_i \eta) d\eta = \frac{1}{\lambda_i} J_1(\lambda_i).$$

Уравнения и условия для определения функции α_i, q_0 получаются теперь, как условия стационарности функционала (2.3). Найдем первую вариацию функционала (2.3):

$$\begin{aligned} \delta I = & \frac{1}{2} \rho a^3 U^2 \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} [J_1(\lambda_i)]^2 \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} + \right. \right. \\ & + \kappa \lambda_i^2 \alpha_i + \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \frac{\partial q_0}{\partial \xi} \left. \right) * \delta \alpha_i - \\ & - \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_i} J_1(\lambda_i) \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} + \frac{\partial q_0}{\partial \tau} \right] * \delta q_0 + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} 2 [J_1(\lambda_i)]^2 \alpha_i(\xi, 0) \delta \alpha_i(\xi, \tau) - q_0(\xi, 0) \delta q(\xi, \tau) \Big| d\xi + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_i} J_1(\lambda_i) \left\{ [q_0(0, \tau) - q^*] * \delta \alpha_i(0, \tau) - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_i} J_1(\lambda_i) [q_0(1, \tau) - q^{**}] * \delta \alpha_i(1, \tau) \right\} \Big\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда видно, что вариация функционала равняется нулю, если удовлетворены уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} + \kappa \lambda_i^2 \alpha_i + \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \frac{\partial q_0}{\partial \xi} &= 0, \\ 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} + \frac{\partial q_0}{\partial \tau} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

($i = 1, 2, \dots$),

начальные и граничные условия:

$$\alpha_i = 0, \quad q_0 = 0 \quad \text{при } \tau = 0; \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= q^* & \text{при } \xi &= 0, \\ q_0 &= q^{**} & \text{при } \xi &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Найдем теперь компоненты скорости u_η . Применяя уравнения (1.6), (2.6) и соотношение (2.1), получаем, что

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{u_\eta}{\eta} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} \left[J_0(\lambda_i \eta) + \frac{2}{\lambda_i} J_1(\lambda_i \eta) \right]. \quad (2.9)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$u_\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} \left[J_1(\lambda_i \eta) - J_1(\lambda_i \eta) \right]. \quad (2.10)$$

3. Приближенное решение бесконечной системы дифференциальных уравнений

Для приближенного решения бесконечной системы связанных между собой уравнений (2.9) пользуемся итерационным методом, позволяющим привести задачу к решению бесконечной системы несвязанных уравнений. С этой целью представим систему (2.9) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial \tau^2} + \kappa \lambda_i^2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial \xi^2} &= \frac{\lambda_i}{J_1(\lambda_i)} \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq i}}^{\infty} \left[\frac{J_1(\lambda_\kappa)}{\lambda_\kappa} \frac{\partial^2 \alpha_\kappa}{\partial \xi^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\lambda_\kappa} \frac{\partial^2 q_0}{\partial \xi \partial \tau} \right], \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left[J_1(\lambda_i) \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} + \frac{2}{\lambda_i} \frac{\partial q_0}{\partial \tau} \right] = 0.$$

Здесь использовано соотношение:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_i^2} = 1. \quad (3.2)$$

Из уравнений (3.1) видно, что один вариант итерационного процесса для определения последовательностей приближенных решений $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots$ и q_{01}, q_{02}, \dots задан уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha_{is}}{\partial \tau^2} + \varkappa \lambda_i^2 \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \alpha_{is}}{\partial \xi^2} &= \\ &= \frac{\lambda_i}{J_1(\lambda_i)} \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq i}}^{\infty} \left[\frac{J_1(\lambda_\kappa)}{\lambda_\kappa} \frac{\partial^2 \alpha_{\kappa, s-1}}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\lambda_\kappa} \frac{\partial^2 q_{0, s-1}}{\partial \xi \partial \tau} \right], \\ \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial \xi} + \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \frac{\partial q_{0s}}{\partial \tau} &= 0 \quad (s = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\alpha_{i0} = 0, \quad q_{00} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

Отсюда в первом приближении при $s = 1$ получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha_{i1}}{\partial \tau^2} + \varkappa \lambda_i^2 \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \alpha_{i1}}{\partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial \xi} + \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \frac{\partial q_{01}}{\partial \tau} &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отметим, что если уравнения приближенной модели плоскопараллельного течения жидкости в трубе [4] представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \tau^2} - \varkappa \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial q_0}{\partial \tau} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

и для их решения использовать метод разделения переменных, то решение для u_ξ получается в виде (2.1), причем функция $\alpha_i(\xi, \tau)$ определяется теми же самыми уравнениями (3.5). Следовательно, модель плоскопараллельного течения может быть рассмотрена как первое приближение при использовании итерационного метода (3.3) для решения дифференциальных уравнений (I.I).

Применяя преобразование Лапласа, найдем теперь решение уравнений (3.5).

Используя обозначения

$$\begin{aligned} \bar{f}(\xi, s) &= \int_0^{\infty} f(\xi, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \\ \chi_i(s) &= \sqrt{s^2 + \kappa_i s}, \quad \kappa_i = \varkappa \lambda_i^2, \quad c_i = \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

из уравнений (3.5) и условий (2.7), (2.8) получаем:

$$\frac{d^2 \bar{\alpha}_{i1}}{d\xi^2} - \gamma_i^2(s) \bar{\alpha}_{i1} = 0, \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\alpha}_{i1}}{d\xi} &= -s c_i \bar{q}^* \quad \text{при } \xi = 0, \\ \frac{d\bar{\alpha}_{i1}}{d\xi} &= -s c_i \bar{q}^{**} \quad \text{при } \xi = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.8), удовлетворяющее граничным условиям (3.9), имеет вид:

$$\bar{\alpha}_{i1} = \frac{s c_i}{\gamma_i(s) \operatorname{sh} \gamma_i(s)} [\operatorname{ch} \gamma_i(s) (1 - \xi) \bar{q}^* - \operatorname{ch} \gamma_i(s) \xi \bar{q}^{**}]. \quad (3.10)$$

Для дальнейшего решения задачи надо конкретизировать функции $q^*(\tau)$, $q^{**}(\tau)$.

Принимаем

$$\left. \begin{aligned} q^*(\tau) &= 0 \\ q^{**}(\tau) &= \begin{cases} \frac{1}{\tau'} \tau & \text{при } 0 < \tau < \tau', \\ 1 & \text{при } \tau' \leq \tau. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Тогда

$$q^* = 0, \quad q^{**} = \frac{1}{\tau'^2 s^2} (1 - e^{-\tau' s}) \quad (3.12)$$

и

$$\bar{\alpha}_{i1} = -\frac{c_i \operatorname{ch} \gamma_i(s) \xi}{\tau' s \gamma_i(s) \operatorname{sh} \gamma_i(s)}. \quad (3.13)$$

Оригинал преобразования (3.13) имеет вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{i1}(\xi, \tau) &= \frac{c_i}{\tau' \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n \pi \xi \cdot T_{in}(\tau) - \\ &- \frac{c_i}{\tau' k_i} \left\{ \tau - \frac{1}{k_i} + \frac{k_i}{2} \left(\xi^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{k_i} e^{-k_i \tau} - \right. \\ &\left. - H(\tau - \tau') \left[\tau - \tau' - \frac{1}{k_i} + \frac{k_i}{2} \left(\xi^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{k_i} e^{-k_i(\tau - \tau')} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$T_{in} = 2e^{-\frac{k_i}{2}\tau} \cos \omega_{in} \tau + \frac{k_i}{\omega_{in}} e^{-\frac{k_i}{2}\tau} \sin \omega_{in} \tau -$$

$$\begin{aligned}
 & -H(\tau - \tau') \left[2e^{-\frac{\kappa_i}{2}(\tau - \tau')} \cos \omega_{in}(\tau - \tau') + \right. \\
 & \left. + \frac{\kappa_i}{\omega_{in}} e^{-\frac{\kappa_i}{2}(\tau - \tau')} \sin \omega_{in}(\tau - \tau') \right]
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

при
$$\omega_{in}^2 = n^2 \pi^2 - \frac{\kappa_i^2}{4} \geq 0$$

и

$$\begin{aligned}
 T_{in} = & 2e^{-\frac{\kappa_i}{2}\tau} \cos \Omega_{in}\tau + \frac{\kappa_i}{\Omega_{in}} e^{-\frac{\kappa_i}{2}\tau} \sin \Omega_{in}\tau - \\
 & -H(\tau - \tau') \left[2e^{-\frac{\kappa_i}{2}(\tau - \tau')} \cos \Omega_{in}(\tau - \tau') + \right. \\
 & \left. + \frac{\kappa_i}{\Omega_{in}} e^{-\frac{\kappa_i}{2}(\tau - \tau')} \sin \Omega_{in}(\tau - \tau') \right]
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

при
$$\Omega_{in}^2 = \frac{\kappa_i^2}{4} - n^2 \pi^2 > 0.$$

Здесь $H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда.

Компоненты скорости движения жидкости в осевом и в радиальном направлениях u_{ξ} , u_{η} выражаются теперь через найденные функции (3.14) по формулам (2.1) и (2.13).

Л и т е р а т у р а

1. Д'С у з а А.Ф., О л д е н б у р г е р Р. Динамическая характеристика гидравлических трубопроводов. — "Теор. осн. инж. расчетов", 1964, № 3, с. 196-205.

2. Х о л м б о у Е.Л., Р у л о В.Т. Влияние вязкого трения на распространение сигналов в гидравлических линиях. — "Теор. осн. инж. расчетов", 1967, № 1.

3. Ч а р н ы й И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М., "Недра", 1975.

4. Д ж а я с и н г х е, Л о й т х о й с е р. Гидравлический удар при условии ламинарного течения. — "Теор. осн. инж. расчетов", 1972, № 2.

5. А й н о л а Л.Я., Л и й в У.Р. Вариационные принципы и законы взаимности для нестационарных задач течения жидкости в трубах. См. наст. сб., с. 53-62.

On Integration Methods of the Unsteady Flow
Equations in Pipes

Summary

Using the Kantorovich variational method the integration of a system of the three-dimensional differential equations is replaced by an infinite system of two-dimensional differential equations. The system is solved by the iteration method for the unsteady flow problem. Using operator calculus in the first approximation both axial and radial components of velocities for a simple case of variation of the pressure in time are determined.

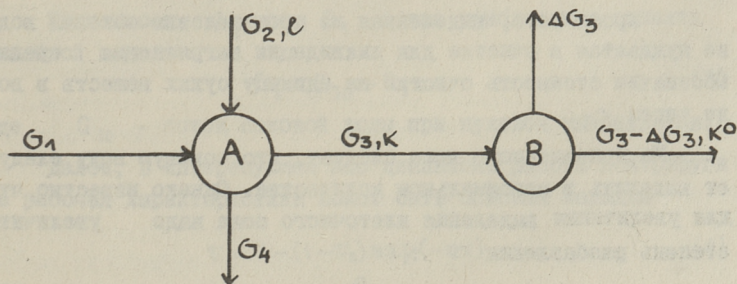
УДК 62-50:628.33(088.8)

Э.Э.Кирт, А.А.Аннус, Д.И.Каллас,
А.А.Кийтам, Э.Э.Уйбо, М.С.Жигалов

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ВЫДЕЛЕНИЯ КЛЕТОЧНОГО СОКА
ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ КАРТОФЕЛЬНОГО КРАХМАЛА (НА
ПРИМЕРЕ КРАХМАЛЬНОГО ЗАВОДА КОЛХОЗА "ПАУЗИ" ЭССР)

В производстве крахмала для выделения клеточного сока из картофеля используется центрифугирование с последующим выпариванием соковой воды. Так как центрифугирование картофельной кашки является в технологии утилизации основной операцией, то оптимизация режимов центрифугирования является важной задачей. Ниже решается задача оптимизации технологического процесса утилизации одноступенчатым центрифугированием кашки с последующим выпариванием соковой воды.

Вода с массовым расходом G_1 (фиг. 1) и картофельная кашка с расходом G_2 поступают в центрифугу А. В кашке содержится l процентов сухого вещества клеточного сока. В



Фиг. 1. Схема выделения клеточного сока.

центрифуге выделяется из картофеля соковая вода (расход G_3), в которой содержится сухого вещества k процентов и кашка (расход G_4). Последняя отправляется в производство крахмала, а разбавленная водой соковая вода — в выпариватель В, в котором для получения требуемой концентрации сухих веществ k^0 выпаривается вода в количестве ΔG_3 .

I. Показатель эффективности процесса

Для оптимизации рассматриваемого процесса придется сперва сформулировать критерий эффективности процесса. При этом рассмотрим задачу локальной оптимизации с учетом имеющегося в цеху технологического оборудования и схемы утилизации, исходя из существующих стоимостных показателей технологических процессов и их обработки (т.е. не будем учитывать, например, капиталовложения и эксплуатационные расходы, вызванные установкой центрифугирования).

Таким образом, будем исходить из того, что главной целью центрифугирования является максимальное выделение клеточного сока и это полезно потому, что

— чем больше выделено клеточного сока, тем выше качество основного продукта производства — крахмала. Однако в этом отношении не удалось сформулировать обоснованные экономические показатели;

— выделенная соковая вода применяется в виде корма. Естественно выразить ценность соковой воды как корма на единицу сухих веществ в ней. Обозначим эту цену через c_1 ;

— кроме того, выделенная из производства соковая вода не нуждается в очистке для ликвидации загрязнения среды. Обозначим стоимость очистки на единицу сухих веществ в воде через c_2 .

Из приведенного выше следует, что соковую воду следует выделить в максимальном количестве. Однако известно, что для увеличения выделения клеточного сока надо увеличить степень разбавления ν :

$$\nu = \frac{G_1}{G_2}, \quad (I)$$

что приведет к уменьшению процента сухих веществ в потоке из центрифуги G_3 . Если концентрация k падает ниже некото-

рой критической концентрации k_0 , то нужно часть воды ΔG_3 из сока выпаривать. Обозначим стоимость выпаривания единицы воды на c_3 и допустим, что выпаривание осуществляется до достижения критической концентрации k_0 .

Следовательно, с учетом введенных обозначений критерий эффективности центрифугирования η можно представить в следующем виде:

$$\eta = c_1 k G_3 + c_2 k G_3 - c_3 \Delta G_3 = k G_3 (c_1 + c_2) - c_3 \Delta G_3, \quad (2)$$

где

$$\Delta G_3 = \begin{cases} 0, & \text{если } k \geq k_0, \\ \frac{k_0 - k}{k_0}, & \text{если } k < k_0. \end{cases}$$

Последнее выражение получается преобразованием баланса сухого вещества, составленного для выпаривания.

Задача оптимизации режима центрифугирования таким образом сводится к максимизации выражения (2).

2. Модель работы центрифуги

При фиксированном потоке картофеля G_2 единственным управляющим фактором процесса является поток воды G_1 . Поэтому рассматриваем далее возможности определения зависимостей характеристик соковой воды G_3 и k от G_1 , с целью определения оптимального значения G_1 согласно критерию (2).

Зависимость G_3 от G_1 можно приближенно описать линейной моделью:

$$G_3 = G_{30} + G_1, \quad (3)$$

где G_{30} — поток соковой воды при нулевом разбавлении.

Далее, в интересующем нас диапазоне работы центрифуги ее рабочая характеристика может быть описана моделью

$$\tau = 1 - (1 - \tau_0) \exp(-\alpha v), \quad (4)$$

$$0 < \tau_0 < 1,$$

$$\alpha > 0,$$

$$\tau = \frac{d}{d_0},$$

$$d = k G_3, \quad (5)$$

$$d_0 = l G_2,$$

где τ_0, d - коэффициенты.

Эта модель хорошо согласуется с физическими соображениями:

- подставим $\nu = 0$, получим $\tau = \tau_0$, т.е. τ_0 есть доля выделенного сока при нулевом разбавлении;

- подставим $\nu = \infty$, получим $\tau = 1$, т.е. при бесконечном разбавлении весь клеточный сок выделяется.

Учитывая выражение (I) и обстоятельство, что поток картофеля G_2 зафиксирован, можем представить уравнение (4) в виде:

$$\tau = 1 - (1 - \tau_0) \exp(-b G_1), \quad b > 0 \quad (6)$$

или

$$d = d_0 - d_0(1 - \tau_0) \exp(-b G_1), \quad (7)$$

где

$$b = a/G_3.$$

С учетом уравнения (3) получаем:

$$k = \frac{d_0}{G_{30} + G_1} [1 - (1 - \tau_0) \exp(-b G_1)]. \quad (8)$$

3. Поиск оптимального режима

Получение модели процесса позволяет критерий эффективности центрифугирования η , определяемый уравнением (2), связывать с потоком воды G_1 . Очевидно, что при $k > k_0$ максимизация выражения (2) с учетом модели (I2) сводится к тривиальному решению $G_1 = G_{1max}$, где G_{1max} - максимальный поток воды, определенный технологическими возможностями. Поэтому ниже рассмотрим случай $k < k_0$, где требуется выпаривать часть воды ΔG_3 . Подставляем (7) и (8) в (2) и после очевидных преобразований получим:

$$\eta = (c_1 + c_2 + \frac{c_3}{k_0}) d_0 [1 - (1 - \tau_0) \exp(b G_1)] - c_3 (G_{30} + G_1). \quad (9)$$

Необходимым условием экстремума выражения (9) является равенство нулю производной $\partial \eta / \partial G_1$. Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial \eta}{\partial G_1} = (c_1 + c_2 + \frac{c_3}{k_0}) d_0 (1 - \tau_0) b \exp(-b G_1) - c_3 = 0, \quad (10)$$

откуда получим выражения для оптимального значения потока G_1^0 :

$$G_1^0 = \frac{1}{b} \ln \frac{(c_1 + c_2 + c_3/k_0)(1-\tau_0)bd_0}{c_3}. \quad (\text{II})$$

Естественно, что найденное G_1^0 является оптимумом только тогда, когда $k_1^0 = k(G_1^0) \geq k_0$, где $k(G_1^0)$ обозначает зависимость k от G_1 по формуле (8).

Если $k_1^0 < k_0$, то оптимальным следует считать режим, при котором достигается критическая концентрация сока, т.е. $k = k_0$. Это условие сводится к решению уравнения (8) относительно G_1 при $k = k_0$. Это уравнение является трансцендентным и решается численными методами; решением уравнения является оптимальный режим G_1' .

Таким образом, оптимизация режима процесса сводится к следующей последовательной процедуре:

- определение параметров b , τ_0 , d_0 , G_{30} моделей (7) и (8) и цен c_1 , c_2 , c_3 в выражении (2);
- расчет значения потока G_1^0 по формуле (II);
- расчет получаемой при потоке G_1^0 концентрации k_1^0 по формуле (8);
- если $k_1^0 \leq k_0$, то G_1^0 является оптимальным режимом центрифуги. В противном случае следует найти величину потока G_1' решением уравнения (8) при $k = k_0$;
- если найденное оптимальное значение (G_1^0 или G_1') превышает максимально допустимую $G_{1\max}$, то наилучшим режимом является работа при разбавлении $G_{1\max}$.

4. Экспериментальное исследование и оценка коэффициентов в модели процесса

Вышеприведенный подход к моделированию и оптимизации процесса центрифугирования апробировался применительно к одному из заводов производства крахмала - к заводу колхоза "Павэи" Эстонской ССР.

Так как численные значения входящих в модель коэффициентов зависят от многих обстоятельств (в том числе и от характеристик технологического оборудования), то целесооб-

Разно получить оценки коэффициентов экспериментальным путем. Поэтому было проведено экспериментальное исследование процесса с применением методов планирования эксперимента.

С целью охвата достаточно широкой области факторного пространства и с учетом характера модели был выбран план 3^1 , т.е. входной фактор G_1 варьировался в трех уровнях. Для получения оценки дисперсии эксперимента весь план дублировался двукратно. За нулевой выбирался обычный технологический режим, и шаг варьирования выбирался максимально возможным.

Для обработки эксперимента применялась обычная методика регрессионного анализа с использованием оценок по методу наименьших квадратов [1]. Относительно расчетного аппарата хочется отметить, что до оценки параметров нелинейные по параметрам модели были преобразованы в линейный вид.

После оценивания коэффициентов моделей осуществлялась проверка адекватности полученных уравнений регрессии по критериям Фишера и Студента. На уровне значимости $\alpha = 5\%$ все коэффициенты являлись значимыми, а полученные модели адекватными. Ввиду известности примененной методики регрессионного анализа расчетные формулы не приводятся, укажем лишь конечный вид получаемых моделей и коэффициенты модели:

$$\tau = 1 - (1 - 0,600) \exp(-0,834 G_1). \quad (12)$$

$$k = \frac{0,0943}{1,18 + G_1} \tau, \quad (13)$$

$$\tau_0 = 0,600, \quad b = -0,834, \quad d_0 = 0,0943, \quad G_{30} = 1,18.$$

5. Оптимизация технологического режима

Для нахождения оптимального режима необходимо рассчитать цены C_1, C_2, C_3 в выражении (2). При расчете цен учитывались конкретные технологические и экономические условия: состав и ценность получаемого корма, стоимость выпаривания и затраты на эксплуатацию оборудования для ликвидации загрязнения. Ниже представлены результаты расчета цен (цены привнесены в единицах "рубли на тонну сухих веществ

клеточного сока"):

- цена сока как корма $c_1 = 95,6$;
- стоимость ликвидации сока как загрязнения $c_2 = 848$;
- стоимость выпаривания воды $c_3 = 1,28$.

Модель выпаривания (см. уравнение (2)) содержит коэффициент k_0 . Имея в виду требование на корм, а также стоимость и расстояние перевозки корма, принимаем $k_0 = 0,15$.

Теперь мы имеем все необходимые данные для расчета оптимального режима центрифугирования. Для этого применяли в разделе 2 описанную процедуру:

По (II) получим значение потока $G_1^0 = 2,49$ Т/час, по (I2) и (I3) определяем $k_1^0 = 0,0202$. Таким образом, $k_1^0 \leq k_0$, и найденный режим можно считать оптимальным. При этом выделение клеточного сока характеризует $\tau = 0,951$. Однако максимальный технологически допустимый поток воды $G_{1max} = 1,08$ Т/час, что является, следовательно, наилучшим. При этом потоке доля выделенного клеточного сока $\tau = 0,84$.

З а к л ю ч е н и е

По результатам данной статьи делаем вывод, что можно рекомендовать центрифугирование картофельной кашки для выделения клеточного сока в производстве крахмала как технологический способ для очистки стоков картофелекрахмальной промышленности и в то же время возможно получить дополнительный корм для животноводства.

Л и т е р а т у р а

И. Нахимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., "Наука", 1965.

E. Kirt, A. Annus, J. Kallas,
A. Kiitam, E. Uibo, M. Zhigalov

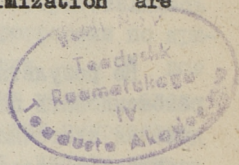
Optimization of Cell Water Exudation Process in
Potato-Starch Industry

Summary

The present article describes the optimization of cell water exudation process using centrifugation at the potato-starch industry of "Pajusi" collective farm.

The exponent of the efficiency of the process, its mathematical model and optimization algorithm have been elaborated.

In order to determine the parameters of the model the experimental research has been carried out. The results have been treated by the method of regression analysis using least square estimation. The calculated coefficients of the model and results of optimization are presented.



ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ ТПИ № 445
ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА ВОДЫ ВОДОЕМОВ
И ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ОЧИСТКИ ПРИРОДНЫХ И СТОЧНЫХ ВОД
(Сборник статей по санитарной технике XII)
Редактор Х. Пааль. Техн. ред. Л. Лоопер
Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 18 января 1978 года
Подписано к печати 3 августа 1978 года
Бумага 60x90/16. Печ. л. 5,0 + 0,25 приложение
Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 300. МВ-06960
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскля, 2/9. Зак. № 732
Цена 60 коп.



Цена 60 коп.