

Л. Ю. ПОВЕРУС

**УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ
ВРАЩЕНИЯ МАЛОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ
ТИПА УСЕЧЕННОГО КОНУСА, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД
ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО
ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

Ер. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А

№ 129

1957

Л. Ю. ПОВЕРУС

**УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ
ВРАЩЕНИЯ МАЛОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ
ТИПА УСЕЧЕННОГО КОНУСА, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД
ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО
ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

Ер. 2297

P37-821



Л. Ю. Поверус

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ
ВРАЩЕНИЯ МАЛОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ТИПА
УСЕЧЕННОГО КОНУСА, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Издательство
Таллинского Политехнического Института

*

Редактор К. Оллик
Технический редактор А. Тамм
Корректор Р. Ээк

Сдано в набор 29. 03. 1958. Подписано к печати 14. 04. 1958. Бумага
54x84 1/16. Печатных листов 1,0. По формату 60x92 печатных листов
0,82. Учетно-издательских листов 0,54. Тираж 800. МВ-02043.

Заказ № 2254.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк, 2.

Цена 40 коп.

В работе определяется критическая нагрузка и исследуется послекритическая стадия оболочки вращения с малой положительной кривизной типа усеченного конуса средней приведенной длины, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления. Под оболочкой типа усеченного конуса в данной работе подразумевается смежный конус, определяемый крайними сечениями срединной поверхности оболочки. Схема оболочки представлена на фиг. 1 соответствующими геометрическими величинами. Основные уравнения, используемые в настоящем исследовании, даны в работах [3], [4], посвященных исследованию оболочки вращения малой положительной кривизны.

Пусть t будет толщина оболочки, R_2 — второй главный радиус кривизны срединной поверхности оболочки, μ — коэффициент Пуассона, $\lambda = \frac{t}{R_2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}$ — малый параметр, $R_1 \gg R_2 \lambda^{-0,5}$ — радиус меридиана срединной поверхности оболочки. Предполагается, что основное напряженное состояние — безмоментное и только в краевых зонах возникает смешанное напряженное состояние — краевой эффект.

1. Упрощенное дифференциальное уравнение местной потери устойчивости

Под критической нагрузкой подразумевается такая наименьшая нагрузка, при которой существует кроме осесимметричного состояния равновесия по крайней мере одно неосесимметричное, бесконечно близкое к осесимметричному. Для определения критической нагрузки используется полученная в работе [3] нижеследующая система дифференциальных уравнений местной потери устойчивости.

$$\frac{A_2}{A_1 R_2} F'' - \frac{A_2}{A_1^2 R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} F' - \frac{A_1}{A_2 R_1} m^2 F - T_2 \frac{A_1}{A_2} m^2 w - \frac{A_1}{A_2^3} D m^4 w = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{A_2}{A_1 R_2} w'' - \frac{A_2}{A_1^2 R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} w' - \frac{A_1}{A_2 R_1} m^2 w + \frac{1}{Et} \frac{A_1}{A_2^3} m^4 F = 0 \quad (1.2)$$

- Здесь α_1, α_2 — внутренние координаты срединной поверхности оболочки;
- $w = w(\alpha_1)$ — функция прогиба;
- $F = F(\alpha_1)$ — функция напряжений;
- A_1, A_2 — параметры Ляме;
- T_2 — нормальная сила начального напряженного состояния, действующая в направлении α_2 ;
- m — количество волн, образующихся вдоль параллельных кругов, при выпучивании оболочки.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(\dots) = (\dots)'$$

Приведенная система (1.1), (1.2) получена с асимптотической погрешностью $\lambda^{0,5}$ на основе дифференциальных уравнений потери локальной устойчивости оболочки, которые даны В. З. Власовым в работе [2]. Упрощение уравнений произведено по методике примененной Н. А. Алумяз в работе [1]. При этом учитывается, что оболочки, — как цилиндрическая, так и типа усеченного конуса малой положительной кривизны, — оказываются весьма близкими по своим свойствам. По вышеуказанной методике предполагается, что перемещения и напряжения при общей неосесимметричной деформации оболочки, возникающие при потере устойчивости, не изменяются существенно вдоль меридиана, изменяясь в то же время заметно в направлении параллельного круга. Поэтому для описания общей неосесимметричной деформации были применены следующие качественные оценки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \sim w, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \sim w, \dots \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \sim \lambda^{-0,25} w, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \sim \lambda^{-0,5} w, \dots \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \sim F, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} \sim F, \dots \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \sim \lambda^{-0,25} F, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2^2} \sim \lambda^{-0,5} F, \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

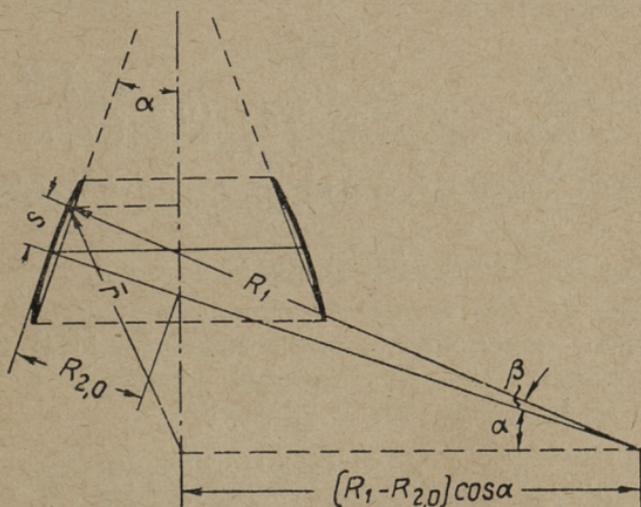
Краевой эффект характеризуется очень быстрым изменением перемещений и напряжений вдоль меридиана и

более медленным изменением вдоль параллельного круга, каковое явление описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \sim \lambda^{-0,5} W, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1^2} \sim \lambda^{-1,0} W, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \sim \lambda^{-0,25} W, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2^2} \sim \lambda^{-0,5} W, \dots \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \sim \lambda^{-0,5} F, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} \sim \lambda^{-1,0} F, \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \sim \lambda^{-0,25} F, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2^2} \sim \lambda^{-0,5} F, \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Радиусвектор \bar{r} срединной поверхности оболочки выражается относительно ортогональной системы координат x, y, z в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{r} = [R_1 \cos(\alpha + \frac{s}{R_1}) - (R_1 - R_{2,0}) \cos \alpha] \cos \theta \bar{u}_x + \\ + [R_1 \cos(\alpha + \frac{s}{R_1}) - (R_1 - R_{2,0}) \cos \alpha] \sin \theta \bar{u}_y + \\ + [R_1 \sin(\alpha + \frac{s}{R_1})] \bar{u}_z \end{aligned} \quad (1.5)$$



Фиг. 1.

Здесь s — лонгальная координата срединной поверхности оболочки, отсчитываемая от средней параллели,
 θ — угол долготы,
 α — половина угла конусности,
 $R_{2,0}$ — второй главный радиус кривизны у средней параллели.

Длины векторов касательных — параметры Ляме — обозначаются соответственно через A_1 и A_2 и они вычисляются с помощью скалярных произведений векторов касательных

$$A_1^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \quad (1.6)$$

$$A_2^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2$$

После некоторых вычислений и упрощений найдем с помощью (1.6)

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R_{2,0} \cos \alpha - s \sin \alpha, \quad R_2 = R_{2,0} - s \operatorname{tg} \alpha \quad (1.7)$$

Перенесем начало координат от средней параллели оболочки к вершине конуса и произведем нижеследующую замену переменных, в которых ζ оказывается безразмерной переменной.

$$\zeta = 1 - s \frac{\operatorname{tg} \alpha}{R_{2,0}}, \quad T_2 = Et \tau_K \lambda^{1,5} \operatorname{tg} \alpha, \quad R_1 = \frac{R_{2,0} \lambda^{-0,5}}{\operatorname{tg} \alpha \rho_1}$$

$$m^2 = \alpha^2 \lambda^{-0,5} \sin \alpha \cos \alpha, \quad \lambda^2 = \frac{t^2}{R_{2,0}^2 (1 - \mu^2)}, \quad A_2 = R_{2,0} \cos \alpha \zeta \quad (1.8)$$

$$R_2 = R_{2,0} \zeta, \quad w = R_{2,0} \operatorname{tg} \alpha^{-1} \lambda^{-0,5} \bar{w}$$

В новых переменных система (1.1), (1.2) преобразуется (если пренебречь малыми членами) в нижеследующее дифференциальное уравнение

$$\bar{w}'''' + \frac{6}{\zeta} \bar{w}''' + \left(\frac{6}{\zeta^2} - \frac{2 \rho_1 \alpha^2}{\zeta} \right) \bar{w}'' - \frac{4 \rho_1 \alpha^2}{\zeta^2} \bar{w}' +$$

$$+ \left[-\frac{2 \rho_1 \alpha^2}{\zeta^3} + \frac{\rho_1^2 \alpha^4}{\zeta^2} + \tau_K \frac{\alpha^6}{\zeta^4} + \frac{\alpha^8}{\zeta^8} \right] \bar{w} = 0 \quad (1.9)$$

Уравнение решается вариационным методом Галеркина, причем решение отыскивается в следующем виде

$$\bar{w} = \sum_j^n a_j \sin j n \pi \zeta \quad (1.10)$$

Далее определяются уравнения контурных линий срединной поверхности

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 1 - \varepsilon \text{ и} \\ \xi_2 &= 1 + \varepsilon\end{aligned}\quad (1.11)$$

Величины μ и ε из выражений (1.10) и (1.11) связаны соотношением

$$2\mu\varepsilon = 1 \quad (1.12)$$

Предполагается, что края оболочки присоединены к тонкостенным диафрагмам, жестким в своей плоскости, но гибким при изгибе своей плоскости. В таком случае, как показывается в работе [2], исключается влияние краевого эффекта и уместными оказываются следующие краевые условия:

$$w = 0, \quad w'' = 0 \quad (1.13)$$

Чтобы функция (1.10) удовлетворяла приведенным краевым условиям, следует назначить μ из нижепредставленного выражения:

$$\cos \mu\pi = 0 \quad (1.14)$$

2. Определение критической нагрузки.

Дальнейшие вычисления произведены только для случая $\mu = 3,5$ ($\varepsilon = 1/7$). Этот частный случай, однако, схватывает целый класс оболочек, где длина меридиана оболочки $2R_{2,0}$ и угол раствора смежного конуса 2α удовлетворяют соотношению

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha = 1/7 \quad (2.1)$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{1}$, получим из соотношений (1.8) следующие выражения

$$\tau_k(\varepsilon, \rho_1) = \frac{T_2}{Et} \lambda^{-1,5} \frac{l}{\varepsilon}, \quad \kappa^2(\varepsilon, \rho_1) = \frac{s^2}{\sin \alpha \cos \alpha} \lambda^{0,5} \quad (2.2)$$

в зависимости от параметра

$$\rho_1 = \frac{R_{2,0}}{R_1} \lambda^{0,5} \frac{l}{\varepsilon} \quad (2.3)$$

В первом приближении берем

$$\bar{w} = a \sin n \pi \xi \quad (2.4)$$

Решим уравнение (1.9) указанным выше методом Галеркина; при этом необходимые интегрирования производим численным методом.

После вычислений получим:

$$\tau_k = -\frac{13159}{x^6} - \frac{230,05}{x^4} \rho_1 - \frac{0,98123}{x^2} \rho_1^2 - 1,0298 x^2 \quad (2.5)$$

Значения для параметра полуволн выпученного параллельного круга x^2 , при котором τ_k оказывается наименьшим, представляется в следующем виде:

$$x^2 = 0,5704 \rho_1 + \sqrt{0,1844 \rho_1^2 + 195,9} \quad (2.6)$$

где $\rho_1 \leq 3,5$

При сравнении выражения (2.5) и (2.6) с соответствующими выражениями работы [3] явствует весьма близкое сходство между ними.

С помощью формул (2.5) и (2.6) найдем численные значения для τ_k при трех различных значений ρ_1 и представим результаты в следующей таблице.

Таблица 1

ρ_1	x^2	τ_k , кр.
0	14,0	-19,21
2,1	15,22	-21,77
3,5	16,07	-23,59

Для второго приближения берем

$$\bar{w} = a_1 \sin n \pi \xi + a_2 \sin 2n \pi \xi \quad (2.7)$$

Вычисление производится здесь в общих чертах аналогично первому приближению, причем возникает система

из двух уравнений, определитель которой оказывается равным нулю. Таким образом имеем сразу также и уравнение устойчивости. Минимальное значение для τ_k определяется пробным путем и представляется при трех значениях q_1 в таблице 2.

Таблица 2.

q_1	χ^2	$\tau_{k, \text{кр.}}$
0	15,90	-19,13
2,1	18,93	-21,69
3,5	21,96	-23,28

Для практических расчетов окажется целесообразным выражать критическое внешнее давление $q_{\text{кр. к.}}$ для оболочки типа усеченного конуса малой положительной кривизны. Используя соотношения $T_2 = R_2 q$ и (1.8), (2.2), выводим формулу

$$q_{\text{кр. кр.}} = \frac{2Et^{2,5}\varepsilon}{[12(1-\mu^2)]^{0,75} L \cdot R_{2,0}^{1,5}} \tau_{\text{кр. кр.}} \quad (2.8)$$

где $\tau_{\text{кр. кр.}}$ вычисляется как указано выше (для частного случая $\varepsilon = 1/7$ даны в таблицах 1 и 2).

$L = 2R_{2,0} l$ — длина меридиана оболочки,

$R_{2,0}$ — второй главный радиус кривизны оболочки у средней параллели (отрезок нормали от срединной поверхности оболочки до оси вращения),

t — толщина оболочки,

E — модуль упругости,

μ — коэффициент Пуассона,

$$\varepsilon = \frac{L}{2R_{2,0}} \operatorname{tg} \alpha$$

В работе [3] одним из результатов была получена следующая формула внешнего критического давления для симметричной оболочки малой положительной кривизны:

$$q_{c,кр} = \frac{\pi E t^{2,5}}{[\tau_2(1-\mu^2)]^{0,75} L \cdot R_{2,0}^{1,5}} \tau_{c,кр} \quad (2.9)$$

Отношения критических давлений симметричной и конусообразной оболочек (в частном случае $\varepsilon = 1/7$) при одинаковых значениях E , $t/R_{2,0}$, $L/R_{2,0}$ в зависимости от отношения $R_{2,0}/R_1 \lambda^{0,5}$ даны в таблице 3.

Таблица 3

$R_{2,0}/R_1 \lambda^{0,5}$	0	0,6	1,0
$q_{c,кр}/q_{к,кр}$	1,009	1,007	1,014

Эти данные указывают на то, что конусность оболочки (по крайней мере при небольших углах раствора смежной конической оболочки) мало сказывается на величину критического давления.

Следует, однако, отметить, что произведенные в табл. 3 значения $q_{c,кр}/q_{к,кр}$ — занижены, так как $q_{c,кр}$ определена точно, а $q_{к,кр}$ — методом Галеркина.

3. Исследование состояний равновесия в послекритической стадии

При исследовании состояний равновесия в послекритической стадии оболочки типа усеченного конуса воспользуемся результатами, полученными в работе [4]. Критической нагрузкой определялось начало новых состояний равновесия, — начало т. н. послекритической стадии. При описании этой стадии предполагается, что характер деформации, существующий при критической нагрузке, продолжает существовать и на некотором протяжении в начале послекритической стадии. Это предположение дает основание приложить в настоящем случае методику упрощения уравнений, которая применялась при линейных соотношениях.

Переход оболочки от осесимметричного напряженного состояния в неосесимметричное при определенной величине внешней нагрузки описывается изменением потенци-

альной энергии Π , которая представляется следующей, заимствованной из работы [4] приближенной формулой

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{A_1}{EtA_2^3} m^4 (F_1^2 + 16F_2^2) + \frac{Et^3 A_1}{12(1-\mu^2)A_2^3} m^4 w_1'^2 + T_2 \frac{A_1}{A_2} m^2 w_1'^2 \right] ds \quad (3.1)$$

$$\text{где } F_1 = -\frac{EtA_2^4}{A_1^2 R_2 m^4} w_1'' + \frac{EtA_2^2}{R_1 m^2} w_1 - \frac{EtA_2^2}{A_1^2 m^2} w_0'' w_1 \quad (3.2)$$

$$F_2 = -\frac{EtA_2^2}{32A_1^2 m^2} w_1' w_1 + \frac{EtA_2^2}{32A_1^2 m^2} w_1'^2 - \frac{EtA_2}{16A_1^2 m^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} w_1' w_1 + \frac{Et}{32A_1^2 m^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right)^2 w_1'^2 \quad (3.3)$$

и

$$w_0 = -\frac{m^2 R_2}{4 A_2^2} w_1'^2 \quad (3.4)$$

В дальнейшем произведем замену переменных согласно (1,8), причем добавим еще следующие обозначения:

$$F_1 = EtR_{2,0}^2 \operatorname{tg} \alpha \lambda^{1/3} \bar{F}_1, \quad F_2 = EtR_{2,0}^2 \operatorname{tg} \alpha \lambda^{1/3} \bar{F}_2 \quad (3.5)$$

После преобразования выражения изменения потенциальной энергии приобретает следующую форму:

$$\Pi = \frac{1}{2} \pi Et \lambda^2 R_{2,0}^2 \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\frac{\alpha^4}{\xi^3} (\bar{F}_1^2 + 16\bar{F}_2^2 + \bar{w}_1'^2) + \tau_k \frac{\alpha^2}{\xi} \bar{w}_1'^2 \right] ds \quad (3.6)$$

В этом выражении \bar{w}_1 , как и в (1.12), аппроксимируется в виде

$$\bar{w}_1 = \sum_j^n a_j \sin j n \pi \xi \quad (3.7)$$

Границы интеграции ξ_1 и ξ_2 определяем с учетом выбранного из уравнений (1.13) значения n . В качестве примера рассмотрим, как и при определении критической нагрузки, оболочку, у которой $n=3,5$ ($\varepsilon=1/7$).

В первом приближении принимаем

$$\bar{w}_1 = a \sin n \pi \xi \quad (3.8)$$

После некоторых преобразований получим:

$$\Pi = \frac{1}{2} \pi E t \lambda^2 R_{2,0}^2 \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} [0,14324 \tau_k \kappa^2 \sigma^2 + 0,14286 \rho_1^2 \sigma^2 + 34,636 \frac{\rho_1}{\kappa^2} \sigma^2 + \frac{2104,9}{\kappa^4} \sigma^2 + 0,14324 \kappa^2 \sigma^2 - 8,5819 \kappa^2 \rho_1 \sigma^4 - 965,06 \sigma^4 + 259,27 \kappa^4 \sigma^6] \quad (3.9)$$

Если обозначить, $\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \pi E t \lambda^2 R_{2,0} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \bar{\Pi}$ взять $\rho_1 = 3,5$ и соответствующую критической нагрузке $\kappa^2 = 16,66$, тогда

$$\Pi = 2,3864 \tau_k \sigma^2 + 56,368 \sigma^2 - 1465,5 \sigma^4 + 7,1963 \cdot 10^4 \sigma^6 \quad (3.10)$$

Соотношение между τ_k и $\bar{\Pi}$ получим из условия $\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a} = 0$ следующее:

$$2,1589 \cdot 10^5 \sigma^4 - 2930,9 \sigma^2 + 56,368 + 2,3864 \tau_k = 0 \quad (3.11)$$

Соотношение между τ_k , $\bar{\Pi}$ и a представлено в таблице 4 и на фиг. 2.

Таблица 4

a	0	0,02857	0,04	0,05714	0,06857	0,08	0,09714	0,1086
τ_k	-23,62	-22,68	-21,89	-20,57	-19,85	-19,47	-20,08	-21,71
Π	0	0,000912	0,00316	0,01060	0,01742	0,02229	0,009583	-0,03200

Во втором приближении принимаем

$$\bar{w}_1 = a \sin n \pi \xi + b \sin 2 n \pi \xi \quad (3.12)$$

Из выражения (3.6) получим после вычислений

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \pi E t \lambda^2 R_{2,0}^2 \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} [& 0,14324 \tau_k \kappa^2 \sigma^2 + 0,14324 \kappa^4 \sigma^2 + 0,14286 \rho_1^2 \sigma^2 + 34,636 \frac{\rho_1 \sigma^2}{\kappa^2} + \\ & + 2104,9 \frac{\sigma^2}{\kappa^4} + 0,14369 \tau_k \kappa^2 b^2 + 0,14369 \kappa^4 b^2 + 0,14286 \rho_1^2 b^2 + 138,97 \frac{\rho_1 b^2}{\kappa^2} + \\ & + 33989 \frac{b^2}{\kappa^4} + 0,014794 \tau_k \kappa^2 a b - 0,014794 \kappa^4 a b + 0,014704 \rho_1^2 a b + \\ & + 17,778 \frac{\rho_1 a b}{\kappa^2} + 2584,5 \frac{a b}{\kappa^4} - 965,06 \sigma^4 + 206,34 \sigma^3 b - 24775 \sigma^2 b^2 - 1811,7 a b^3 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -15606b^4 - 8,6115\kappa^2 a^4 + 0,014234\kappa^2 a^3 b - 86,2363\kappa^2 a^2 b^2 - \\
 & -1,022169\kappa^2 a b^3 - 34,489\kappa^2 a b^4 + 260,15\kappa^4 a^5 b + \\
 & + 7371,2\kappa^4 a^4 b^2 - 1045,9\kappa^4 a^3 b^3 + 20529\kappa^4 a^2 b^4 - 1016,3\kappa^4 a b^5 - 4196,2\kappa^4 b^6 \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

При $a_1 = 3,5$ и $\kappa^2 = 17,04$ (соответствует критическому значению нагрузки) получается

$$\begin{aligned}
 \bar{\Pi} = & 2,4402\tau_k a^2 + 57,689\tau_k b^2 + 189,12b^2 + 0,25203\tau_k ab + 8,4445ab - 1478,5a^4 + \\
 & + 205,49a^3 b - 29917a^2 b^2 - 1813,1ab^3 - 17663b^4 + 75500a^6 - 35721a^5 b + \\
 & + 2139200a^4 b^2 - 303530a^3 b^3 + 59578000a^2 b^4 - 2949300b^5 + 1217800b^3 \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Из условий

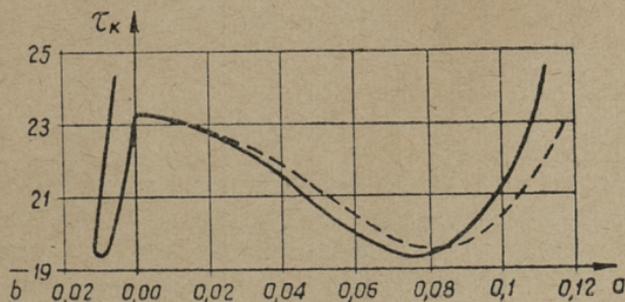
$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial b} = 0$$

вытекает следующее соотношение между τ_k , a и b :

$$\begin{aligned}
 & 4,8804\tau_k a + 115,379a + 0,25203\tau_k b + 8,4445b - 5914,1a^3 + 616,48a^2 b - \\
 & - 59833ab^2 - 1813,1b^3 + 453000a^5 - 178610a^4 b + 8557000a^3 b^2 - 910580a^2 b^3 + \\
 & + 11916000ab^4 - 294930b^5 = 0 \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4,8957\tau_k b + 378,24b + 0,25203\tau_k a + 8,4445a + 205,49a^3 - 59833a^2 b - \\
 & - 5439,2ab^2 - 70650b^3 - 35721a^5 + 4278500a^4 b - 910580a^3 b^2 + \\
 & + 23832000a^2 b^3 - 1474700ab^4 + 7306700b^5 = 0 \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

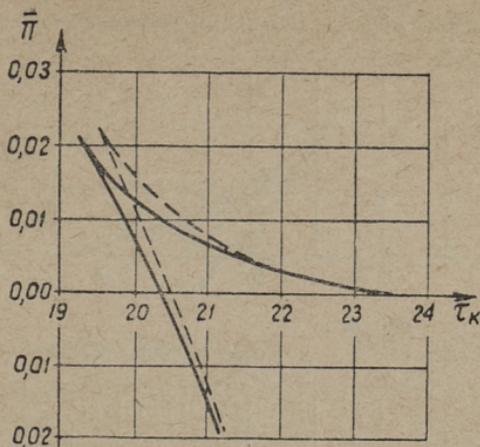
Зависимость τ_k и Π от a и b представлена в таблице 5 и на фиг. 2.



Фиг. 2а.

Таблица 5

a	0	0,02857	0,05714	0,06857	0,07429	0,08000	0,08571	0,1029	0,1143
b	0	$-1,829 \cdot 10^{-3}$	$-0,600 \cdot 10^{-2}$	$-0,874 \cdot 10^{-2}$	$-1,01 \cdot 10^{-2}$	$-1,114 \cdot 10^{-2}$	$-1,120 \cdot 10^{-2}$	$-0,943 \cdot 10^{-2}$	$-0,571 \cdot 10^{-2}$
τ_x	-23,28	-22,47	-20,16	-19,39	-19,25	-19,32	-19,67	-21,77	-24,43
II	0	$12,22 \cdot 10^{-4}$	$10,74 \cdot 10^{-3}$	$19,72 \cdot 10^{-3}$	$21,48 \cdot 10^{-3}$	$14,34 \cdot 10^{-3}$	$14,34 \cdot 10^{-3}$	$-3,34 \cdot 10^{-2}$	$-7,70 \cdot 10^{-2}$



Фиг. 2b.

Для сравнения поведения конусообразной оболочки в послекритической стадии с поведением цилиндрической и симметричной оболочек с малой положительной кривизной, результаты исследований которых приведены в работе [2], определяем отношение изменения потенциальной энергии Π к потенциальной энергии начального напряженного состояния

$$\Pi_0^{\circ} = \frac{\pi}{4} (5-4\mu) \sin \alpha \lambda^3 E t R_{2,0}^2 \tau_{к}^2 \int_{s_1}^s \tau ds \quad (3.16)$$

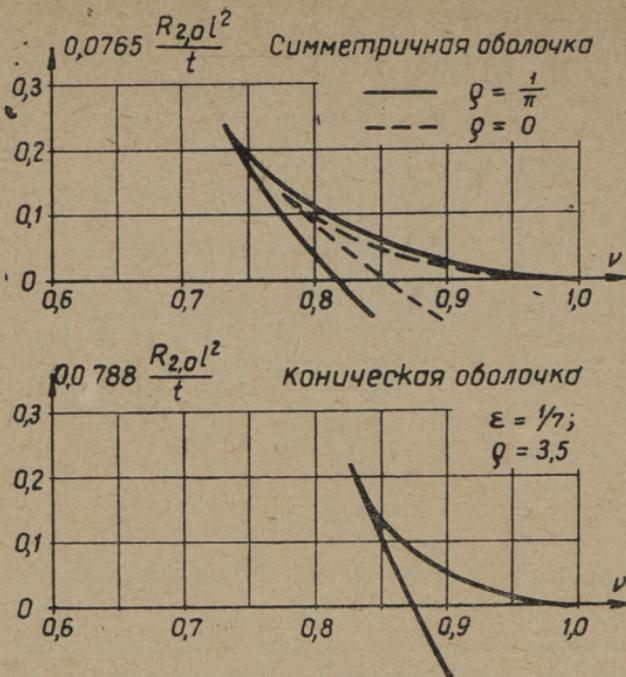
В соответствии с нашим примером получим

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{2\sqrt{12(1-\mu^2)} R_{2,0}}{(5-4\mu) 0,286 \text{tg}^2 \alpha \tau_{к,кp} t} \frac{\bar{\Pi}}{\nu^2}$$

здесь $\nu = \frac{\tau_{к}}{\tau_{к,кp}}$

Результаты приведены на фиг. 3.

Сравнение результатов показывает, что относительные энергетические барьеры, разделяющие устойчивые состояния равновесия при докритических давлениях, являются как при конусообразной и симметричной, так и при цилиндрической оболочках величинами одного порядка.

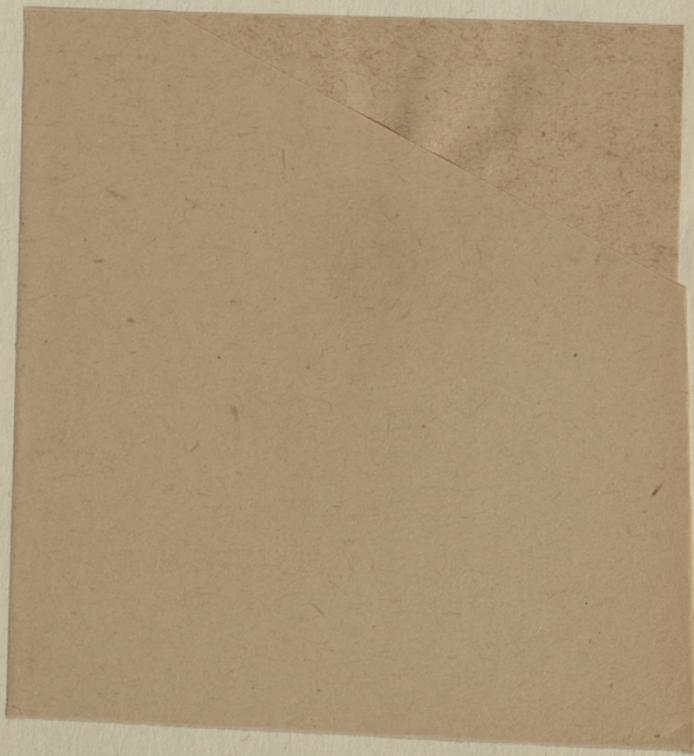


Фиг. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н. А. Об определении состояний равновесия круговой оболочки при осесимметричной нагрузке. ППМ Т. XVII, 1953.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
3. Поверус Л. Ю. Устойчивость оболочки вращения с малой положительной кривизной под действием равномерно распределенного внешнего давления. Труды ТПИ, Серия А, № 65, 1955.
4. Поверус Л. Ю. Исследование состояния равновесия в послекритической стадии оболочки вращения с малой положительной кривизной, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления. Труды ТПИ, Серия А, № 82, 1956.





Цена 40 коп.