

Ep. 6.7  
171

TALLINNA POLÛTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
Серия А № 171 1960

---

**СБОРНИК СТАТЕЙ  
ПО ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ  
II**

ТАЛЛИН, 1960



Ep. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
Серия А № 171 1960

---

**Сборник статей по теории тонкостенных  
конструкций**

**II**

ТАЛЛИН, 1960

Работы сборника выполнены членами кафедры строительных конструкций ТПИ, руководимой проф. докт. техн. наук Х. Х. Лаул.



77

## РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ МНОГОЗАМКНУТОГО СЕЧЕНИЯ НА КРУЧЕНИЕ

Предлагается приближенный метод расчета тонкостенных стержней с многозамкнутым прямоугольным сечением, где однопролетный стержень рассматривается как призматическая оболочка. Число замкнутых контуров в сечении не имеет принципиального значения; в дальнейшем для простоты оно взято равным трем (рис. 1).

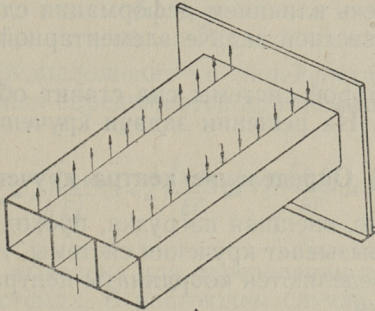


Рис. 1.

Предположим, что сечение оболочки симметрично относительно вертикальной оси и что пластинки, жестко соединенные между собой на узловых линиях, постоянны по толщине вдоль оболочки.

Рассмотрим случай шарнирного закрепления оболочки при наличии жестких в своей плоскости опорных диафрагм.

Пусть на стержень многозамкнутого сечения действует нагрузка, равномерно распределенная в продольном направлении и приложенная перпендикулярно оси оболочки. В отношении же распределения нагрузки в поперечном направлении никаких ограничений нами не делается.

## 1. СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Всякий  $n$ -замкнутый жесткий (недеформируемый) контур можно рассматривать как результат  $n - 1$  замыкания однозамкнутого контура. Так как однозамкнутый жесткий контур статически определим, а каждое замыкание эквивалентно наложению одной обобщенной связи (накладываемой на все сечения оболочки), то  $n$ -замкнутый жесткий контур является статически  $n - 1$  раз неопределимым.

Раскрытие статической неопределимости можно выполнить общими методами строительной механики [1].

Учитывая возможность деформирования замкнутого контура сечения, внешнюю нагрузку целесообразно разлагать на две системы сил — симметричную и антисимметричную относительно вертикальной оси сечения оболочки.

Под действием первой системы оболочка изгибается. Если пренебречь влиянием деформации сдвига, то задача сводится к известной задаче элементарной теории изгиба балок.

Действие второй системы сил ставит оболочку в условия кручения. На решении задачи кручения остановимся ниже.

### а) Определение центра кручения

Как известно, внешняя нагрузка, проходящая через ось кручения, не вызывает кручения системы. Исходя из этого условия и определяются координаты центра кручения для любого сечения.

Для получения более общего решения рассмотрим несимметричное сечение (рис. 2).

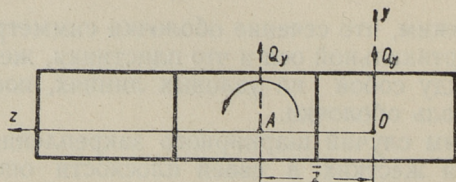


Рис. 2.

Выберем начало координат на оси  $z$  в произвольной точке  $O$ . Пусть искомый центр кручения  $A$  находится в точке, расстояние которой от начала координат  $\bar{z}$  неиз-

вестно. Очевидно, что под действием силы  $Q_y$ , проходящей через точку  $A$ , в системе закручивания не возникнет. Теперь перенесём силу  $Q_y$  в точку  $O$  и учтём компенсирующий момент  $M$ . Угол закручивания, возникший под действием  $Q_y$  и  $M$ , должен равняться нулю.

Обозначим:

$\varphi_Q$  — угол закручивания от силы  $Q_y = 1$ , приложенной в точке  $O$ ;

$\varphi_M$  — угол закручивания от момента  $M = 1$ .

Тогда  $\bar{z}$  определяется из условия

$$\varphi_Q Q_y + \varphi_M M = 0, \quad (1)$$

а так как  $M = Q \bar{z}$ , то

$$\bar{z} = -\frac{\varphi_Q}{\varphi_M} \quad (2)$$

Исходя из предположения о линейности деформации, углы закручивания определяются при помощи общей формулы Мора:

$$\delta_{i_0} = \sum_0^l \frac{M_i M_0}{EJ} dx + \sum_0^l \frac{N_i N_0}{EF} dx + \sum_0^l \frac{Q_i Q_0}{6F} dx. \quad (3)$$

Формула (3) выведена для определения перемещений в стержневых системах. В настоящем случае тонкостенную коробку можно рассматривать как совокупность бесконечно большого количества упругих полюсок, ориентированных вдоль стержня (рис. 3).

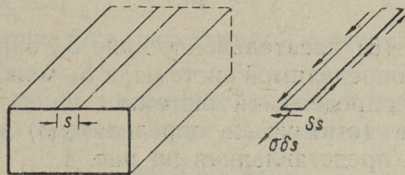


Рис. 3.

Следовательно знак суммы в формуле (3) должен быть заменен знаком интеграла. Тогда

$$\delta_{i0} = \oint_0^l \frac{M_i M_0}{EJ} dx ds + \oint_0^l \frac{N_i N_0}{EF} dx ds + \oint_0^l \frac{Q_i Q_0}{GF} dx ds, \quad (4)$$

где:  $\delta_{i0}$  — искомое перемещение по направлению  $i$ , вызванное заданной внешней нагрузкой;

$M_0, N_0, Q_0$  — изгибающий момент, нормальная и поперечная силы, развивающиеся под действием внешней нагрузки в сечении любой упругой полоски;

$M_i, N_i, Q_i$  — те же силы, вызываемые единичной нагрузкой, приложенной по направлению  $i$ .

Поскольку положение центра кручения зависит только от геометрии сечения, а не от нагрузки, то для определения координат центра кручения возьмем самую простую статическую схему — консоль с неизменяемым прямоугольным профилем. Пусть к свободному концу консоли приложены: поперечная сила  $Q_y = 1$  и закручивающий момент  $M_{кр} = 1$ , обуславливающий возникновение угла закручивания  $\varphi_M$ .

Так как выбранная нами консоль находится в условии чистого кручения, то нормальные напряжения в сечениях системы не развиваются. Вследствие недеформируемости контура сечения отсутствует и поперечный изгибающий момент. Величину поперечной силы необходимо еще определить.

Учитывая изложенное и введя в формулу Мора (4) обозначения  $Q_0 = S_0 ds$ ,  $Q_i = S_i ds$  и  $F = \delta ds$ , получим

$$\delta_{i0} = \varphi = \oint_0^l \frac{S_i S_0}{GS} dx ds. \quad (5)$$

В формуле (5) касательное усилие  $S_0$  определяется из статически неопределимой системы, а  $S_i$  может быть взято из статически определимой системы.

За основную (статически определимую) систему принята система, представленная на рис. 4.

Так как в основной системе замкнут лишь второй контур, то касательные усилия

$$S_i = \frac{M_{i2}}{S_i} = \frac{1}{S_i} \quad (6)$$



будут действовать только в его сечениях. В формуле (6)  $\Omega_i$  обозначает удвоенную площадь, ограниченную  $i$ -м контуром.

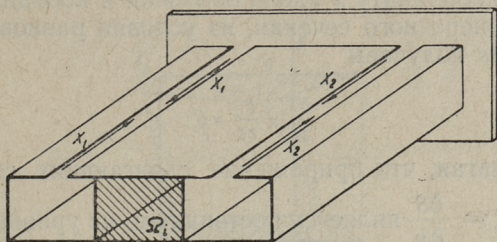


Рис. 4.

Касательные усилия  $S_0$  в любой точке поперечного сечения системы получаются в виде:

$$S_0 = \bar{S}_0 + X_1 \bar{S}_1 + X_2 \bar{S}_2, \quad (7)$$

где  $X_1$  и  $X_2$  — истинные значения неизвестных касательных усилий, действующих в обобщенных связях. Эти усилия определяются из канонических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1n} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2m} &= J \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Следовательно углы закручивания от  $M_{кр} = 1$  можно получить по формуле

$$\varphi_M = \frac{1}{6S\Omega_i} \oint \int_0^x \frac{S_0}{\delta} dx ds \quad (9)$$

Аналогично формуле (5) определяется и угол закручивания  $\varphi_Q$  от  $Q_y = 1$ .

Таким же способом находится и вторая координата центра кручения  $\bar{y}$ .

Для определения координат точки  $A$  однозамкнутого сечения можно вывести формулы в замкнутом виде. Например,

$$\bar{z} = - \frac{\oint \frac{S}{\delta} ds}{J \oint \frac{ds}{\delta}} + \frac{\oint S \rho ds}{J}, \quad (10)$$

где  $\rho$  — расстояние контура от произвольно выбранного полюса.

## б) Определение внутренних сил

Считая координату  $x$  вдоль оболочки и координату  $s$  по контуру поперечного сечения, из условия равновесия элемента  $dx ds$  получаем

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} = 0 \quad (11)$$

Предполагая, что приращение сдвигающих сил вдоль оболочки  $\zeta = \frac{\partial S}{\partial x}$  является постоянным, из уравнения (11) находим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 S}{\partial s \partial x} = - \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s) = -t(s). \quad (12)$$

Внутренние силы системы выражаются теперь в следующем виде [2]:

$$\left. \begin{aligned} T(s, x) &= \frac{x}{2}(L-x)t(s) \\ \max_x T(s, x) &= \frac{L^2}{8}t(s) \\ S(s, x) &= (x - \frac{L}{2})\varphi(s) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из (13) следует, что внутренние силы выражаются при помощи функции  $t(s)$ . В дальнейшем убедимся, что за основное неизвестное целесообразно выбирать именно эпюру  $t(s)$ , описывающую состояние деформации поперечного сечения оболочки.

Сделаем предположение, что в деформированном состоянии прямолинейные элементы контурной линии поперечного сечения, выходя из плоскости  $x = const$ , будут оставаться прямыми [3, 4]. Теперь сконструируем эпюру искомой функции  $t(s)$  в представленном на рис. 5 виде. Ординаты  $t_a$  и  $t_b$  пока неизвестны. Для простоты дальнейших выкладок предположим, что поперечное сечение оболочки имеет две оси симметрии.

Теперь выразим эпюру  $t(s)$  в аналитическом виде для каждой пластинки отдельно. Путем интегрирования  $t(s)$  получим приращения сдвигающих сил, в данном случае  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_6$ , содержащие 6 постоянных интегрирования  $c_1, c_2, \dots, c_6$ . Вместе с  $t_a$  и  $t_b$  имеется теперь 8 неизвестных. Для элиминирования некоторых из них можно

использовать четыре условия непрерывности на узловых линиях и одно условие равновесия  $\Sigma M_x = 0$ . Другое условие равновесия  $\Sigma Z = 0$  уже выполнено из-за симметрии.

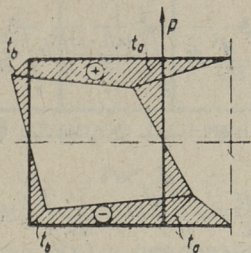


Рис. 5.

Остальные три неизвестных определяются из минимума потенциальной энергии внутренних сил.

Для нахождения поперечных изгибающих моментов  $M(s)$  рассмотрим элементарную поперечную полоску оболочки ( $dx = 1$ ) как многозамкнутую раму с жесткими углами (рис. 6а). Такая рама в данном случае четырехкратно статически неопределима. Неизвестные  $X_1, X_2, X_3$  и  $X_4$ , а также ординаты эпюры изгибающих моментов (качественный вид которой представлен на рис. 6б) выразим при помощи пока неизвестных величин  $t_a, t_b$  и  $c_1$ .

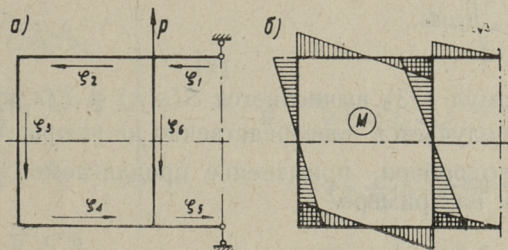


Рис. 6.

При составлении выражения потенциальной энергии системы предположим, что достаточная длина оболочки позволяет отказаться от влияния продольных изгибающих моментов и не вполне удовлетворенных граничных условий у диафрагм.

Если теперь пренебречь влиянием сдвигающих сил, то из формулы (13) получим потенциальную энергию одной четверти оболочки:

$$\pi = \int_0^{\frac{L}{2}} dx \int_0^{s_0} \frac{M^2}{2EJ} ds + \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{4x(L-x)}{L^2} \right]^2 dx \int_0^{s_0} \frac{(maxT)^2}{2EF} ds \quad (14)$$

При интегрировании по  $x$  формула (14) примет вид

$$\frac{4E}{L} \pi = \int_0^{s_0} \frac{M^2}{J} ds + \frac{L^4}{120} \int_0^{s_0} \frac{t^2}{F} ds \quad (15)$$

Дифференцировав потенциальную энергию (15) по неизвестным, получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial t_a} &= 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial t_b} &= 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial c_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

откуда находим  $t_a$ ,  $t_b$  и  $c_1$ .

Итак определены все величины:

$$1) \quad \varphi(s) = \int_0^s t(s) ds.$$

- 2) из формул (13) вычисляется  $S(s, x)$  и  $T(s, x)$ ,
- 3)  $M(s)$  получается непосредственно из эпюры  $M$ .

Более подробное применение предлагаемого метода проследим на примере.

## 2. ПРИМЕР

Проведем вычисления для представленной на рис. 7 призматической оболочки при

$$\begin{aligned} H &= 9 \text{ см}; & \delta &= 0,4 \text{ см}; \\ B &= 6 \text{ см}; & p &= 18 \text{ кг/см.} \\ L &= 200 \text{ см}; \end{aligned}$$

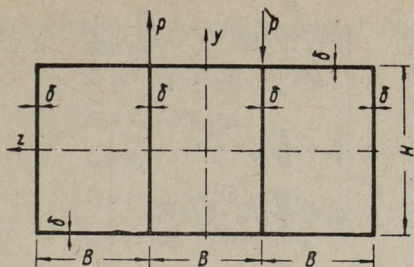


Рис. 7.

а) Эпюра  $t(s)$  и определение  $\zeta(s)$ .

Выберем эпюру  $t(s)$  в виде, изображенном на рис. 5. Как для сдвигающих сил, так и для текущей координаты  $s$ , отчитываемой от начала каждой пластинки, положительным будем считать направление против движения часовой стрелки. Индексы 1, 2, . . . обозначают соответствующие пластинки.

Следовательно

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{2s}{B} t_0; \\ t_2 &= \frac{s}{B} (t_b - t_0) + t_0; \\ t_3 &= -\frac{2s}{H} t_b + t_b; \\ t_4 &= \frac{s}{B} (t_b - t_0) - t_b; \\ t_5 &= \frac{2s}{B} t_0 - t_0; \\ t_6 &= -\frac{2s}{H} t_0 + t_0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{s^2}{B} t_0 + C_1; \\ \varphi_2 &= \frac{s^2}{2B} (t_b - t_0) + t_0 s + C_2; \\ \varphi_3 &= -\frac{s^2}{H} t_b + t_b s + C_3; \\ \varphi_4 &= \frac{s^2}{2B} (t_b - t_0) - t_b s + C_4; \\ \varphi_5 &= \frac{s^2}{B} t_0 - t_0 s + C_5; \\ \varphi_6 &= -\frac{s^2}{H} t_0 + t_0 s + C_6 \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Обозначая

$$q_1 = \int_0^{s_1} \varphi_1(s) ds, \quad q_2 = \int_0^{s_2} \varphi_2(s) ds \quad \text{и т. д., получим}$$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{B^2}{24} t_a + \frac{B}{2} c_1; \\ q_2 &= \frac{B^2}{6} (2t_a + t_b) + B c_2; \\ q_3 &= \frac{H^2}{6} t_b + H c_3; \\ q_4 &= -\frac{B^2}{6} (t_a + 2t_b) + B c_4; \\ q_5 &= -\frac{B^2}{12} t_a + \frac{B}{2} c_5; \\ q_6 &= \frac{H^2}{6} t_a + H c_6. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

**б) Дополнительные условия для определения неизвестных**

Из восьми неизвестных  $t_a, t_b, c_1, c_2, \dots, c_6$  четыре элиминируем при помощи условий непрерывности:

- 1) на узловой линии 1—2—6  $\zeta_2 + \zeta_6 - \zeta_1 = 0;$
- 2) на узловой линии 2—3  $\zeta_2 = \zeta_3;$
- 3) на узловой линии 3—4  $\zeta_3 = \zeta_4;$
- 4) на узловой линии 4—5—6  $\zeta_5 - \zeta_4 - \zeta_6 = 0;$

и одно при помощи условия равновесия

5)  $\Sigma M_x = 0$  или

$$H(q_1 + q_2 + q_4 + q_5) + B(3q_3 + q_6 - p) = C$$

Решив эти уравнения, найдем

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{p}{2H} - 2c_3 - \frac{1}{4} \left( B + \frac{H}{3} \right) t_a + \frac{1}{4} \left( \frac{B}{3} - H \right) t_b; \\ c_2 &= c_3 - \frac{B}{2} (t_a + t_b); \\ c_4 &= c_3; \\ c_5 &= \frac{p}{2H} - 2c_3 - \frac{H}{12} t_a + \frac{1}{4} \left( \frac{B}{3} - H \right) t_b; \\ c_6 &= \frac{p}{2H} - 3c_3 + \frac{1}{2} \left( B - \frac{H}{6} \right) t_a + \frac{1}{4} \left( \frac{7}{3} B - H \right) t_b. \end{aligned} \right\} \quad (Г)$$

После подстановки и преобразований получим из (г)

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 1 - 2c_3 - 2,25t_a - 1,75t_b; \\ c_2 &= c_3 - 3/(t_a + t_b); \\ c_4 &= c_3; \\ c_5 &= 1 - 2c_3 - 0,75t_a - 1,75t_b; \\ c_6 &= 1 - 3c_3 + 2,25t_a + 1,25t_b. \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

### в) Эпюра $M(s)$

Для определения эпюры поперечных изгибающих моментов рассмотрим элементарную поперечную полоску оболочки ( $dx = 1$ ) как замкнутую раму с жесткими углами. Используя симметрию конструкции, примем за расчетную схему раму, изображенную на рис. 8а. На раму действуют внешняя нагрузка  $p$  и касательные усилия  $q_1, q_2, \dots, q_6$ .

Статически определимая основная схема и эпюры от единичных сил представлены на рис. 8б-з. Величины ординат  $K, L$  и  $R$  эпюры  $m_0$  следующие:

$$\begin{aligned} K &= 81 + 81 c_3 - 101,25 t_a - 33,75 t_b; \\ L &= 27 + 54 c_3 - 101,25 t_a - 74,25 t_b; \\ R &= 108 + 81 c_3 - 202,50 t_a - 189,00 t_b. \end{aligned}$$

Для нахождения неизвестных  $X_1, X_2, X_3$  и  $X_4$  получим одно уравнение с одним неизвестным и систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} 81 X_2 = 202,5 + 162 c_3 - 759,375 t_a - 921,375 t_b; \\ 10 X_1 - 30 X_3 + 51 X_4 = 499,5 + 459 c_3 - 860,625 t_a - 631,125 t_b \\ -10 X_1 + 52 X_3 - 82 X_4 = -837,0 - 738 c_3 + 1383,750 t_a + 1014,750 t_b \\ 17 X_1 - 82 X_3 + 135 X_4 = 1345,5 + 1215 c_3 - 2278,125 t_a - 1670,625 t_b, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} X_1 &= 0; \\ X_2 &= 2,5 + 2 c_3 - 9,375 t_a - 11,375 t_b; \\ X_3 &= -9; \\ X_4 &= 4,5 + 9 c_3 - 16,875 t_a - 12,375 t_b. \end{aligned}$$

Теперь возможно выразить эпюру поперечных изгибающих моментов при помощи  $t_a, t_b$  и  $c_3$ . Качественный вид

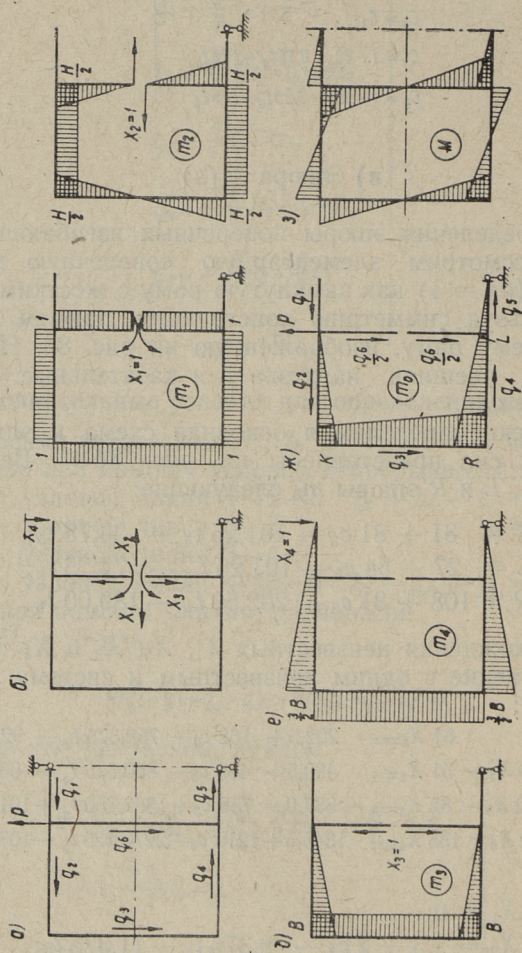


Рис. 8.



эпюры  $M(s)$  представлен на рис. 8з. В углах рамы возникают моменты:

$$\left. \begin{aligned} M_{1-2} &= -13,50 - 27 c_3 + 50,625 t_a + 37,125 t_b; \\ M_{2-1} &= -2,25 - 18 c_3 + 8,4375 t_a - 14,0625 t_b; \\ M_{6-2} &= 11,25 + 9 c_3 - 42,1875 t_a - 51,1875 t_b; \\ M_{2-3} &= -2,25 + 9 c_3 + 8,4375 t_a + 26,4375 t_b. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

### г) Определение неизвестных величин из условия минимума потенциальной энергии оболочки

При решении рассматриваемой задачи самым трудоемким является вычисление потенциальной энергии внутренних сил оболочки по формуле (15). Роль сдвигающих сил в общей потенциальной энергии системы ничтожна и их влиянием можно пренебречь. Эпюра  $M(s)$  и эпюра  $t(s)$  прямолинейные. Вследствие этого вычисление интегралов типа  $\int M^2 ds$  крайне несложно.

Для потенциальной энергии одной восьмой оболочки (по длине половина и четверть в поперечном сечении) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{8E}{1125L} \Pi &= 410,063 + (5766,5 + 800\,000) t_a^2 + \\ &+ (7406,8 + 622\,222) t_b^2 + (11533 + 355\,556) t_a t_b - \\ &- 3075,47 t_a - 3075,47 t_b + 1458 c_3^2 + 1093,5 c_3 - \\ &- 1640,25 t_a c_3 - 1913,63 t_b c_3. \end{aligned}$$

В скобках первые члены выражают роль изгибающих моментов, а вторые — продольных усилий.

Из формул (16) получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1611\,533 t_a + 367\,089 t_b - 1640 c_3 = 3075,47 \\ 367\,089 t_a + 1\,259\,258 t_b - 1914 c_3 = 3075,47 \\ -1\,640 t_a - 1\,914 t_b + 2916 c_3 = -1093,50 \end{cases}$$

и отсюда находим:

$$\begin{aligned} t_a &= 0,001\,180; \\ t_b &= 0,001\,531; \\ c_3 &= -0,3733. \end{aligned}$$

На основе (д) вычисляем и другие постоянные интегрирования:

$$\begin{aligned}c_1 &= 1,7413; & c_5 &= 1,7431; \\c_2 &= -0,3815; & c_6 &= 2,1246. \\c_4 &= -0,3733;\end{aligned}$$

Теперь определяем касательные усилия из формул (в)

$$\begin{aligned}q_1 &= 5,2258; & q_4 &= -2,2654; \\q_2 &= -2,2654; & q_5 &= 5,2258; \\q_3 &= -3,3393; & q_6 &= 19,1370.\end{aligned}$$

Проверим правильность найденных величин.

1) Условие непрерывности на узловой линии 1—2—6 удовлетворено, так как

$$\zeta_2 + \zeta_6 - \zeta_1 = -0,3815 + 2,1246 - 1,7431 = 0,0000.$$

2) Удовлетворены также условия равновесия:

$$\Sigma Z = q_1 + q_2 - q_4 - q_5 = 0$$

и

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= 9 \cdot 5,2258 - 9 \cdot 2,2654 - 9 \cdot 3,3393 + \\ &+ 3(19,1370 - 18) = 0,0009 \approx 0.\end{aligned}$$

#### д) Внутренние силы в оболочке.

Согласно формуле (13) продольные силы в середине пролета

$$\max T_a = \frac{L^2}{8} t_a = \frac{1}{8} \cdot 200^2 \cdot 0,001180 = 5,90 \text{ кг/см};$$

$$\max T_b = \frac{L^2}{8} t_b = \frac{1}{8} \cdot 200^2 \cdot 0,001531 = 7,66 \text{ кг/см};$$

и нормальные напряжения в углах поперечного сечения

$$\max \sigma_a = \frac{\max T_a}{\delta} = \frac{5,90}{0,4} = 14,75 \text{ кг/см}^2;$$

$$\max \sigma_b = \frac{\max T_b}{\delta} = \frac{7,66}{0,4} = 19,15 \text{ кг/см}^2;$$

$T$  и  $\sigma$  изменяются вдоль оболочки по квадратной параболе. Эпюра нормальных сил  $T$  в сечении  $x = \frac{L}{2}$  представлена на рис. 9а.

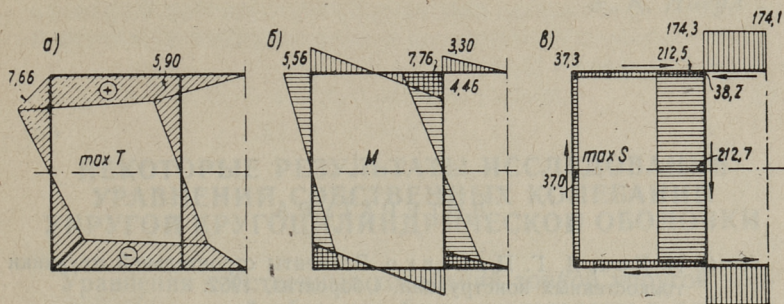


Рис. 9.

Поперечные изгибающие моменты получаются из формул (е). Так как по сделанному предположению  $\zeta$  по длине оболочки не изменяется, то и поперечный изгибающий момент постоянен вдоль оболочки. Эпюра  $M$  изображена на рис. 9б.

$$\begin{aligned} \max M &= 7,76 \text{ кг см/см}; \\ \max \sigma &= \frac{M}{W} = \frac{7,76 \cdot 6}{0,16} = 291 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Сдвигающие силы выражаются через  $\zeta(s)$ . При помощи (а) определим величину  $\zeta$  в любой точке сечения и после этого сдвигающие силы  $S(s, x)$  по формуле (13). Например, в угле, где соединяются пластинки 1, 2 и 6, величины  $\zeta_1$  и  $\zeta_6$  следующие:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 1,5 \cdot 0,001180 + 1,7413 = 1,7431 \text{ кг/см}^2; \\ \zeta_6 &= c_6 = 2,1246 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Наибольшие сдвигающие силы возникают у диафрагм:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{L}{2} \zeta_1 = 100 \cdot 1,7431 = 174,3 \text{ кг/см}; \\ S_6 &= \frac{L}{2} \zeta_6 = 100 \cdot 2,1246 = 212,5 \text{ кг/см}. \end{aligned}$$

Так как  $\delta = 0,4 \text{ см}$ , то

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 174,3 : 0,4 = 436 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_6 &= 212,5 : 0,4 = 531 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Эпюра сдвигающих сил в сечениях  $x = 0$  и  $x = L$  представлена на рис. 9в.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Кан, Я. Г. Пановко, Элементы строительной механики тонкостенных конструкций. Оборонгиз, 1952.
2. Э. Ю. Соонурм, Стесненное кручение тонкостенных конструкций с замкнутым контуром, Труды ТПИ, А № 65, 1955.
3. В. З. Власов, Расчет тонкостенных призматических оболочек. «Прикладная математика и механика», т. VIII, 1944.
4. В. З. Власов, Тонкостенные пространственные системы, Госстройиздат, 1958.

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ КРУГОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Уравнения собственных колебаний тонкой упругой кругоцилиндрической оболочки были исследованы в работах [1, 3, 4, 5, 6, 7]. В этой статье приводятся некоторые результаты исследования свойств этих уравнений, применяя поперечные тригонометрические ряды. Для иллюстрации приводятся численные примеры.

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ПОПЕРЕЧНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ

#### 1. Обозначения и исходные уравнения

Введем обозначения:  $\delta$ ,  $R_0$ ,  $l$  — толщина, радиус срединной поверхности и длина оболочки;  $E$  — модуль упругости,  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $\xi$ ,  $\varphi$  — безразмерные координаты на срединной поверхности соответственно по длине и по поперечному кругу оболочки;

$$H = \frac{(1-\mu^2)R_0^2}{E}, \quad \sigma^2 = \frac{\delta^2}{12R_0^2}, \quad (1)$$

$\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  — единичные векторы касательных к координатным линиям  $\xi$ ,  $\varphi$ , и  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  единичный вектор нормали к срединной поверхности.

Упругие перемещения срединной поверхности зададим вектором:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3. \quad (2)$$

Для краткой записи некоторых формул временно будем применять обозначение:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i, \quad u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w. \quad (2a)$$

С точностью теории тонких упругих оболочек Кирхгофа-Лява уравнения равновесия в перемещениях можно представить в форме [2, 3]:

$$\sum_{i=1}^3 L_{ri} u_i + H Q_r = 0; \quad r = 1, 2, 3; \quad (3)$$

где

$$L_{12} = L_{21}, \quad L_{13} = -L_{31}, \quad L_{23} = -L_{32}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{12} = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi}, \quad L_{13} = \mu \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ L_{22} &= \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sigma^2 \left[ 2(1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \\ L_{23} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sigma^2 \left[ \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \right], \\ L_{33} &= - \left\{ 1 + \sigma^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Применение уравнений (5) является допустимым, если выполняются условия:

$$u_i \gg \sigma^2 \left( 1 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) u_i. \quad (6)$$

## 2. Незатухающие собственные колебания

При незатухающих собственных колебаниях в уравнениях (3)  $Q_r$  имеет следующее значение:

$$Q_r = -\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где  $\rho$  — плотность массы,  $t$  — время.

Формула (7) написана без учета сил инерции поворота нормалей, что является допустимым, если выполняются условия:

$$u_r \gg H \rho \sigma^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \quad r = 1, 2, 3. \quad (8)$$

В рассматриваемом случае можно искать решение системы (3) в форме:

$$u_i = \bar{u}_i f, \quad \bar{u}_i = \bar{u}_i(\xi, \varphi), \quad f = f(\omega t). \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f, \quad (10)$$

где  $\omega$  обозначает круговую частоту собственных колебаний. На основе (7), (9), (10) из системы (3) следуют уравнения:

$$\sum_{i=1}^3 L_{ri} \bar{u}_i + N \bar{u}_r = 0; \quad r = 1, 2, 3; \quad (11)$$

где

$$N = H \rho \omega^2 = \frac{(1 - \mu^2) R_0^2 \rho \omega^2}{E} \quad (12)$$

При заданных стационарных краевых условиях система (11) имеет бесконечное количество решений, которые являются собственными функциями, определяющими формы собственных колебаний. Собственная функция, имеющая порядковый номер  $j$ , определяется вектором

$$\bar{u}_j = \sum_{i=1}^3 \bar{u}_{ij} e_i. \quad (13)$$

Интегрируя уравнения (11) по всей срединной поверхности оболочки и пользуясь условиями (4), можно вывести условие ортогональности собственных функций

$$\iint_{\varphi_0}^{\varphi_0} \bar{u}_j \bar{u}_i d\xi d\varphi = 0, \quad (j \neq i). \quad (14)$$

где  $\varphi_0$  угол раскрытия оболочки.

### 3. Затухающие собственные колебания

Предположим сопротивление пропорциональным скорости и обозначим коэффициент затухания через  $2s$ : тогда в уравнениях (3)

$$a_r = -\rho \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + 2s \frac{\partial u_r}{\partial t} \right). \quad (15)$$

Решение уравнений (3) можно представить в форме:

$$j_i = \bar{u}_i e^{-st} f, \quad f = f(\bar{\omega}t), \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\bar{\omega}^2 f, \quad \bar{\omega}^2 = \omega^2 - s^2. \quad (17)$$

#### 4. Постановка задачи о собственных колебаниях в поперечных тригонометрических рядах.

Расположим собственные функции  $\bar{u}_j$  в ряд возрастающем порядке собственных частот  $\omega_j$ . Задача исследования собственных колебаний заключается в разыскании всех собственных функций до заданного предела частот. Далее предположим, что оболочка или является замкнутой, или свободно оперта по прямолинейным краям. В этих случаях общее решение системы (11) можно искать в форме:

$$\bar{u}_1 = \bar{u} = \bar{u} \cos m\varphi, \quad \bar{u}_2 = \bar{v} = \bar{v} \sin m\varphi, \quad \bar{u}_3 = \bar{w} = \bar{w} \cos m\varphi, \quad (18)$$

или в форме:

$$\bar{u}_1 = \bar{u} = \bar{u} \sin m\varphi, \quad \bar{u}_2 = \bar{v} = \bar{v} \cos m\varphi, \quad \bar{u}_3 = \bar{w} = \bar{w} \sin m\varphi; \quad (18a)$$

где

$$\bar{u} = u_0 e^{\lambda t}, \quad \bar{v} = v_0 e^{\lambda t}, \quad \bar{w} = w_0 e^{\lambda t}; \quad (19)$$

$u_0, v_0, w_0$  — постоянные;  $m$  — вещественное число. В случае замкнутой оболочки  $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ; в случае открытой оболочки с свободно опертыми краями:

$$m = \frac{n\pi}{\varphi_0}; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (20)$$

При открытой оболочке в формулах (18) началом отчета,  $\varphi$  является ось симметрии; в формулах (18a) — один из краёв оболочки.



Как в случае (18), так и в случае (18а) уравнения (11) превращаются в следующие:

$$\begin{aligned}
 I \quad & (N + \lambda^2 - \frac{1-\mu}{2} m^2) u_0 + \frac{1+\mu}{2} m \lambda v_0 + \mu \lambda w_0 = 0, \\
 II \quad & \frac{1+\mu}{2} m \lambda u_0 + \left\{ m^2 - \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 + \sigma^2 [m^2 - 2(1-\mu)\lambda^2] - N \right\} v_0 + \\
 & + \left\{ m + \sigma^2 [m^3 - (2-\mu)m\lambda^2] \right\} w_0 = 0, \\
 III \quad & \mu \lambda u_0 + \left\{ m + \sigma^2 [m^3 - (2-\mu)m\lambda^2] \right\} v_0 + \left\{ 1 + \sigma^2 (\lambda^2 - m^2)^2 - N \right\} w_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Из условий (6), (8) следуют условия применимости уравнений (21):

$$i \gg \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \sigma^2 [1, m^2, |\lambda^2|, N], \tag{22}$$

т. е. уравнения (21) имеют асимптотическую погрешность порядка  $\varepsilon$ .

Пусть заданы геометрические размеры оболочки и однородные стационарные краевые условия на криволинейных краях оболочки. Выберем конкретное значение  $m$  и будем формально рассматривать  $N$  как вещественный положительный параметр. Каждому значению  $N$  соответствуют корни системы (21)  $\lambda_s = \lambda_s(m, N)$  (в общем случае  $s = 1, 2, \dots, 8$ ) и каждому  $\lambda_s$  — определенные соотношения между коэффициентами  $u_{0s}$ ,  $v_{0s}$ ,  $w_{0s}$ . Следовательно в общем случае решение имеет вид:

$$\tilde{u} = \sum_{s=1}^8 u_{0s} e^{\lambda_s \xi}, \quad \tilde{v} = \sum_{s=1}^8 v_{0s} e^{\lambda_s \xi}, \quad \tilde{w} = \sum_{s=1}^8 w_{0s} e^{\lambda_s \xi}, \tag{23}$$

и содержит 8 произвольных постоянных. Из восьми заданных краевых условий вытекает система однородных уравнений, которая удовлетворяется при значениях параметра

$$N = N_j, \quad j = 1, 2, \dots, \infty,$$

которые превращают в нуль определитель  $\Omega(N)$  этой системы. Каждому  $N_j$  соответствуют определенные соотношения между 8-коэффициентами в формулах (23). Задачу разыскания  $N_j$  можно решить численно. Для этого надо построить численную зависимость  $\lambda_s = \lambda_s(m, N)$ , что является главным содержанием II части статьи. Поскольку

ку  $\lambda$  входит во всех характеристические уравнения, вытекающие из системы (21) в четных степенях, введем обозначение:

$$\beta_k = -\lambda_s^2, \quad k=1,2,3,4; \quad (24)$$

и подвергнем исследованию зависимость

$$\beta_k = \beta_k(m, N).$$

## II. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ (21)

### 1. Частный случай $m=0$

В рассматриваемом частном случае система (21) распадается на две части. Из уравнения (21—II) получим:

$$N = \frac{1-\mu}{2} \beta_2; \quad (25)$$

из уравнений (21—I, III) вытекает характеристическое уравнение для определения  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_4$ :

$$N^2 - N - N\beta - \sigma^2 N \beta^2 + (1-\mu^2)\beta + \sigma^2 \beta^3 = 0. \quad (26)$$

Уравнение (25) можно также получить, предполагая  $u \equiv w \equiv 0$  и ему соответствуют интегралы, описывающие чисто крутильные колебания оболочки как стержня с недеформируемым поперечным контуром. Уравнению (26) соответствуют осесимметрические формы колебания ( $v \equiv 0$ ), которые детально исследованы в работе [4]. С точки зрения численных расчетов важно отметить, что один корень уравнения (26), который назовем  $\beta_1$ , всегда является вещественным и положительным. Практически удобно построить численную зависимость  $\beta_1 = \beta_1(N)$ , подбирая значения  $\beta_1$  и определяя  $N$  из уравнения (26) как меньший корень квадратного уравнения относительно  $N$ . При известной  $\beta_1$  можно определить  $\beta_3$  и  $\beta_4$  из уравнения

$$\beta^2 + (\beta_1 - N)\beta - \frac{N^2 - N}{\sigma^2 \beta_1} = 0. \quad (27)$$

## 2. Частный случай $\beta = 0$ .

В случае  $\lambda = \beta = 0$  получим из уравнения (21—1):

$$N = \frac{1-\mu}{2} m^2, \quad (\beta_2 = 0), \quad (28)$$

и из уравнений (21—II, III):

$$N^2 - N[1 + m^2 + a^2 m^2 (m^2 + 1)] + a^2 m^2 (m^2 - 1)^2. \quad (29).$$

Уравнение (28) можно также получить, предполагая  $v \equiv w \equiv 0$  и оно соответствует чисто сдвигающим колебаниям оболочки. Уравнение (29) можно получить, предполагая  $u \equiv 0$  и интегралы, соответствующие этому уравнению, описывают колебание оболочки кольцом.

Учитывая условия (22), выясним, что при  $\beta_1 = 0$ :

$$N \approx a^2 m^2 \frac{(m^2 - 1)^2}{m^2 + 1}, \quad (30)$$

и при  $\beta_3 = 0$ :

$$N \approx 1 + m^2. \quad (31)$$

## 3. Общий случай

При  $m \neq 0$  и  $\beta \neq 0$  из системы (21) вытекает характеристическое уравнение, которое представим в двух формах:

$$N^3 - d_1 N^2 + d_2 N - D = 0 \quad (32)$$

$$\beta^4 + A_1 \beta^3 + A_2 \beta^2 + A_3 \beta - A_4 = 0, \quad (33)$$

где

$$d_1 = 1 + \frac{3-\mu}{2} (\beta + m^2),$$

$$d_2 = \frac{1-\mu}{2} \{ (3+2\mu)\beta + m^2 + (\beta + m^2)^2 \},$$

$$D = \frac{1-\mu}{2} \{ (1-\mu^2)\beta^2 + a^2 [(\beta + m^2)^4 - 2m^6 + m^4 - 8m^4\beta] \}. \quad (34)$$

$$A_1 = 4m^2, \quad A_2 = 6m^4 + \frac{1-\mu^2-N}{a^2},$$

$$A_3 = \frac{3-\mu}{1-\mu} \frac{N^2}{a^2} - \frac{N}{a^2} (3+2\mu+2m^2) + 4m^4(m^2-2),$$

$$A_4 = \frac{2}{1-\mu} \frac{1}{a^2} \{ N^3 - N^2(1 + \frac{3-\mu}{2} m^2) + \frac{1-\mu}{2} m^2 (m^2 + 1) N \} - m^4 (m^2 - 1)^2.$$

$A_4 = 0$  только в случаях (28), (30), (31), рассмотренных в п. 2. В дальнейшем предполагаем, что  $A_4 \neq 0$ . При собственных колебаниях два корня уравнения (33)  $\beta_1$  и  $\beta_2$  являются вещественными; остальные два корня  $\beta_3$  и  $\beta_4$  могут быть как вещественные, так и комплексные. Чтобы избежать численного решения уравнения четвертой степени (33), можно задавать  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и определить соответствующие им значения  $N$  из уравнения (32). При этом надо иметь в виду соответствия, приведенные в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

$\beta > 0$	$N_I$	$\beta_1$
	$N_{II}$	$\beta_2$
	$N_{III}$	$\beta_3$
$\beta < 0$	$N_I$ и $N_I$	$\beta_2$
	$N_{III}$	$\beta_4$

Здесь  $N_I < N_{II} < N_{III}$  обозначают вещественные положительные корни уравнения (32) при заданной величине  $\beta$ . Отметим, что при определении  $N_I \leq 1$  целесообразно воспользоваться принципом последовательных приближений:

$$N_I^{(1)} = \frac{D}{d_2}; \quad (35)$$

$$N_I^{(2)} = \frac{D}{d_2} + \frac{d_1}{d_2} [N_I^{(1)}]^2 - \frac{1}{d_2} [N_I^{(1)}]^3. \quad (35a)$$

Формула (35) представляет собою формулу В. Е. Бреславского [1] и ее точность повышается с уменьшением  $N_I$ .

Имея численные значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (при заданных  $m$  и  $N$ ), можно определить остальные корни  $\beta_3$  и  $\beta_4$  из уравнения:

$$\beta^2 + (A_1 + \beta_1 + \beta_2)\beta - \frac{A_4}{\beta_1 \beta_2} = 0. \quad (36)$$

#### 4. Численные примеры

Применяя вышеприведенные формулы и изложенную методику расчета, вычислены корни  $\beta_k$  при исходных данных:

$$\frac{\delta}{R_0} = \frac{1}{30}; \quad \mu = 0,3. \quad (37)$$

Корни уравнения (36)  $\beta_3$  и  $\beta_4$  оказываются вещественными выше линии (рис. 3):

$$\beta_3 = \beta_4 = s_1, \quad s_2 = 0. \quad (38)$$

и комплексными — ниже этой линии. Комплексные корни приняты в форме

$$\beta_3, \beta_4 = s_1 \pm i s_2. \quad (39)$$

В случае  $N \ll 1$  этим корням соответствуют интегралы типа простых краевых эффектов [2].

Если ввести параметры  $z$ ,  $r$  и  $\gamma$  по формулам:

$$N = \sigma^z, \quad m = \sigma^{-r}, \quad |\beta| = \sigma^\gamma \quad (40)$$

тогда

$$\gamma = \gamma(z, r, \mu, a);$$

но оказывается, что  $\gamma$  сравнительно мало зависит от  $a$ . Это обстоятельство позволяет воспользоваться приведенными диаграммами также при относительной толщине, немного отличающейся от  $1/30$ . Для иллюстрации на рис. 4 приведены некоторые характерные линии для случаев  $\delta/R_0 = 1/30$  и  $\delta/R_0 = 1/300$ .

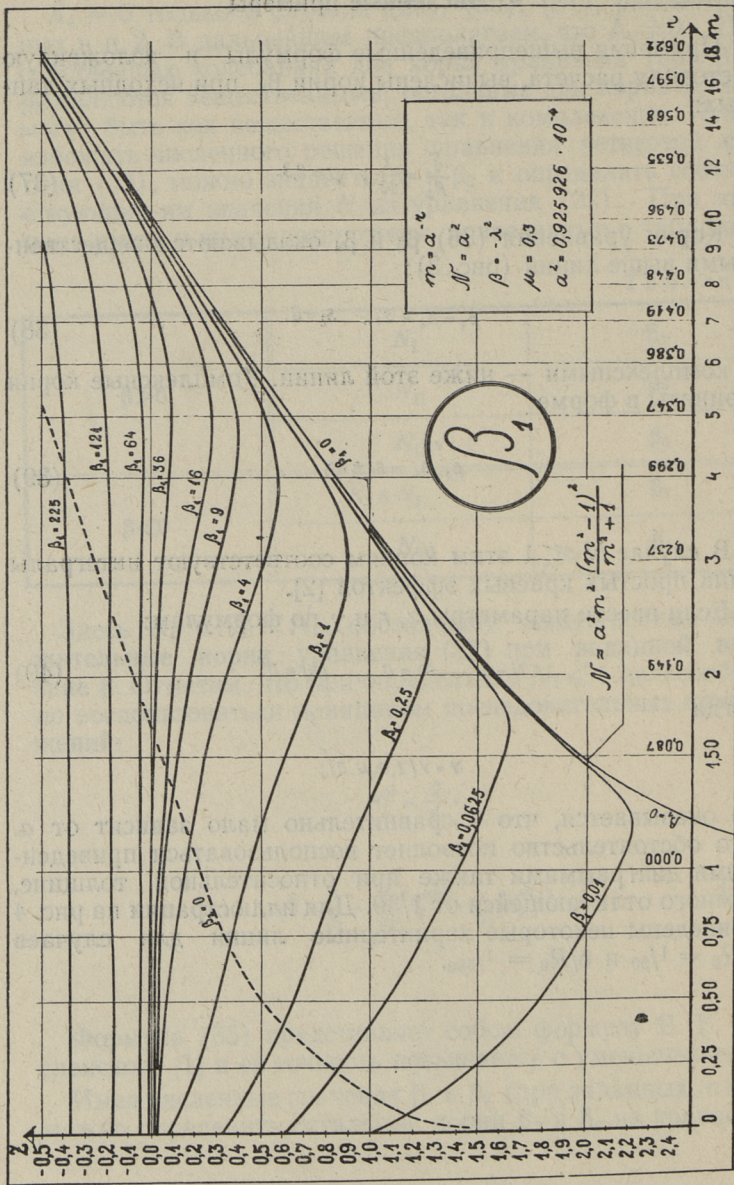


Рис. 1

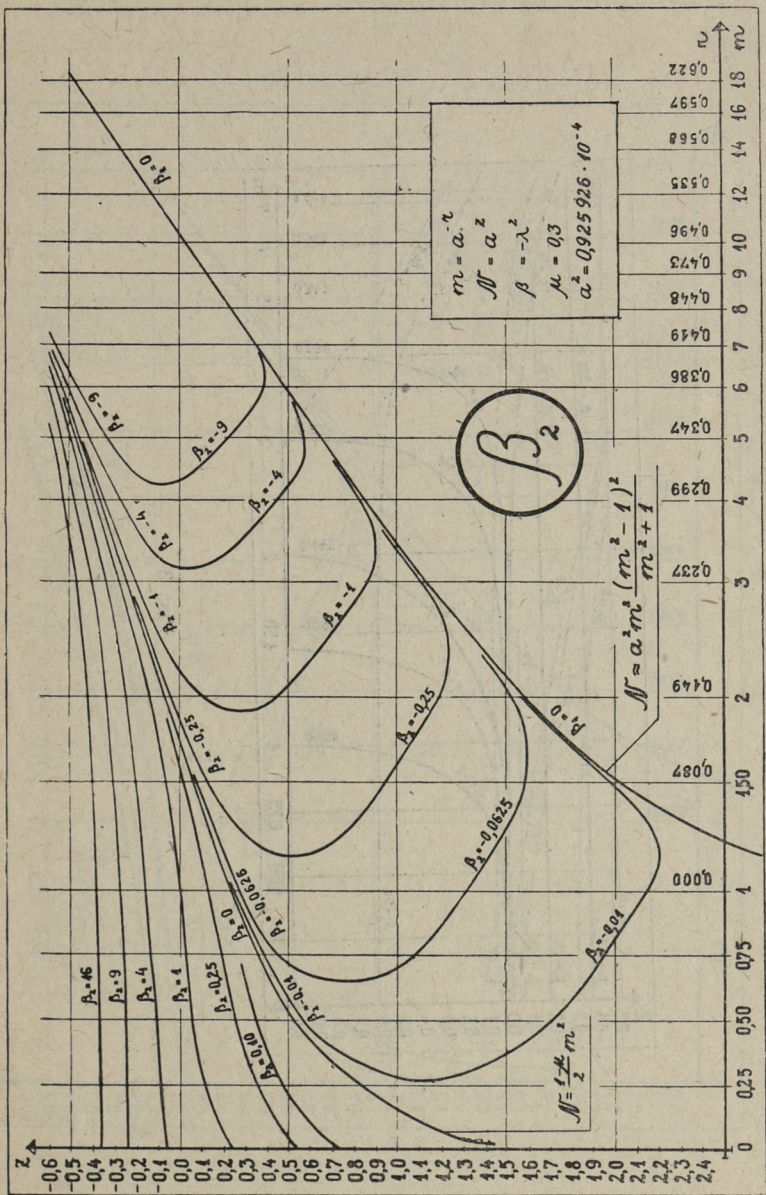


Рис. 2

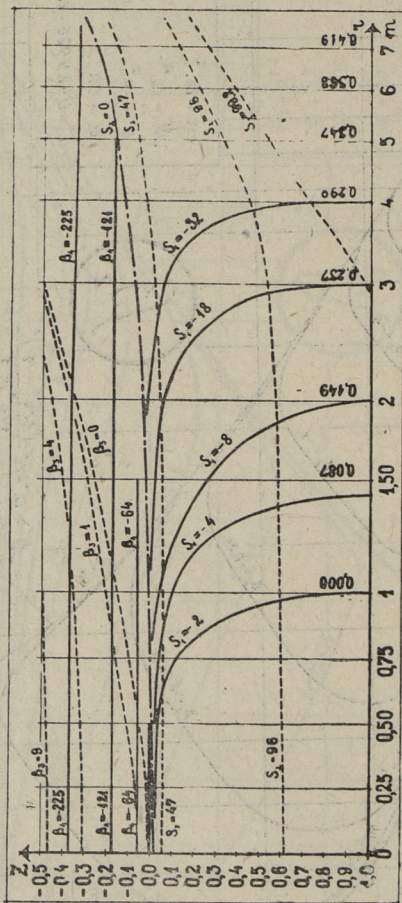


Рис. 3



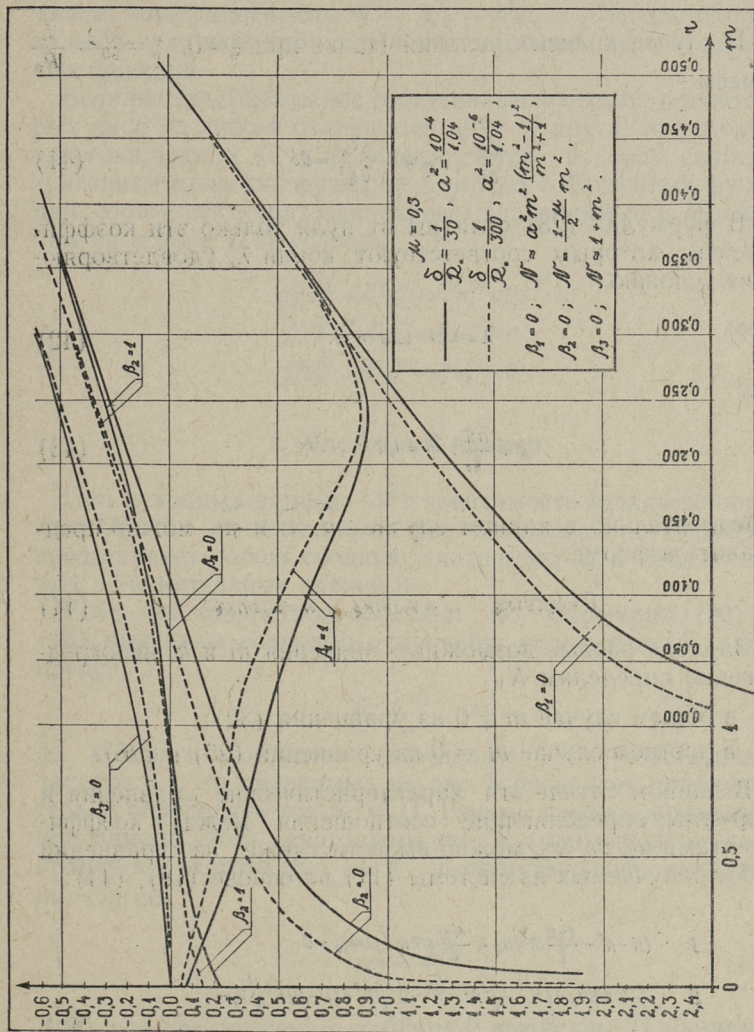


Рис. 4

### III. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НАВЬЕ

#### 1. Расчетные формулы

В случае краевых условий Навье при  $\xi=0$ ,  $\xi=\xi_0 = \frac{L}{R_0}$  имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0. \quad (41)$$

В формулах (23) отличны от нуля только эти коэффициенты, которым соответствуют корни  $\lambda$ , удовлетворяющие условию

$$\lambda = \pm ik \text{ или } \beta = k^2, \quad (42)$$

где

$$k = \frac{\bar{n}\pi}{\xi_0}, \quad \bar{n} = 1, 2, 3, \dots \infty. \quad (43)$$

Следовательно в данном случае  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  и  $\bar{w}$  можно представить в форме:

$$\bar{u} = u_0 \cos k\xi, \quad \bar{v} = v_0 \sin k\xi, \quad \bar{w} = w_0 \sin k\xi. \quad (44)$$

Задавая разные возможные значения  $m$  и  $k$ , непосредственно определим  $N_j$

а) в общем случае  $m \neq 0$  из уравнения (32);

б) в частном случае  $m = 0$  из уравнений (25) и (26).

В данном случае эти характеристические уравнения и формулы, определяющие соотношения между коэффициентами  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , можно вывести также из уравнений (45), получаемых из системы (11) на основе (18), (44):

$$\begin{aligned} I \quad & (N - k^2 - \frac{1-\mu}{2} m^2) u_0 + \frac{1+\mu}{2} k m v_0 + \mu k w_0 = 0, \\ II \quad & \frac{1+\mu}{2} k m u_0 + \left\{ N - \frac{1-\mu}{2} k^2 - m^2 - \sigma^2 [m^2 + 2(1-\mu)k^2] \right\} v_0 - \\ & - m \left\{ 1 + \sigma^2 [m^2 + (2-\mu)k^2] \right\} w_0 = 0, \\ III \quad & \mu k u_0 - m \left\{ 1 + \sigma^2 [m^2 + (2-\mu)k^2] \right\} v_0 - \left\{ 1 - N + \sigma^2 (k^2 + m^2)^2 \right\} w_0 = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что каждой паре заданных значений  $m$  и  $k$  соответствуют три решения кубического уравнения (32)  $N_i$  ( $i = I, II, III$ ) и каждому  $N_i$  — свои соотношения между коэффициентами  $u^{(i)}$ ,  $v_0^{(i)}$ ,  $w_0^{(i)}$ . Следовательно каждой заданной паре  $m$  и  $k$  соответствуют три собственных функций.

Если рассматривать две собственные функции, при которых либо  $m$ , либо  $k$  отличаются друг от друга, то условие ортогональности (14) удовлетворяется в силу свойств тригонометрических функций. Для трех собственных функций, соответствующих одинаковым значениям  $m$  и  $k$  получим на основе (14) условия:

$$\begin{aligned} u_0^{(1)} u_0^{(2)} + v_0^{(1)} v_0^{(2)} + w_0^{(1)} w_0^{(2)} &= 0, \\ u_0^{(1)} u_0^{(3)} + v_0^{(1)} v_0^{(3)} + w_0^{(1)} w_0^{(3)} &= 0, \\ u_0^{(2)} u_0^{(3)} + v_0^{(2)} v_0^{(3)} + w_0^{(2)} w_0^{(3)} &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

## 2. Численный пример

При исходных данных (37) зависимость между величинами  $N$ ,  $k^2$  и  $m$  показана на рис. 5, которая по существу представляет собою сводную диаграмму всех вещественных положительных корней  $\beta$ .

Если для конкретной оболочки по формулам (20) и (43) выяснены возможные значения  $m$  и  $k$  и если задан предел

$$\Pi < \sigma^{-1/2},$$

до которого требуется определить  $N$  (собственные частоты  $\omega_j$ ), то диаграмма на рис. 5 позволяет приблизительно определить все  $N_j < \Pi$ . Весьма удобно определить при помощи этой диаграммы  $\min N$  (наименьшую собственную частоту  $\min \omega$ ) и соответствующее значение  $m = \bar{m}$  по

$$\min k = \frac{\pi R_0}{l}. \quad (47)$$

В качестве примера в таблице 2 выписаны 21 наименьший  $N_j$  для замкнутой оболочки, имеющей длину

$$l = \pi R_0. \quad (48)$$

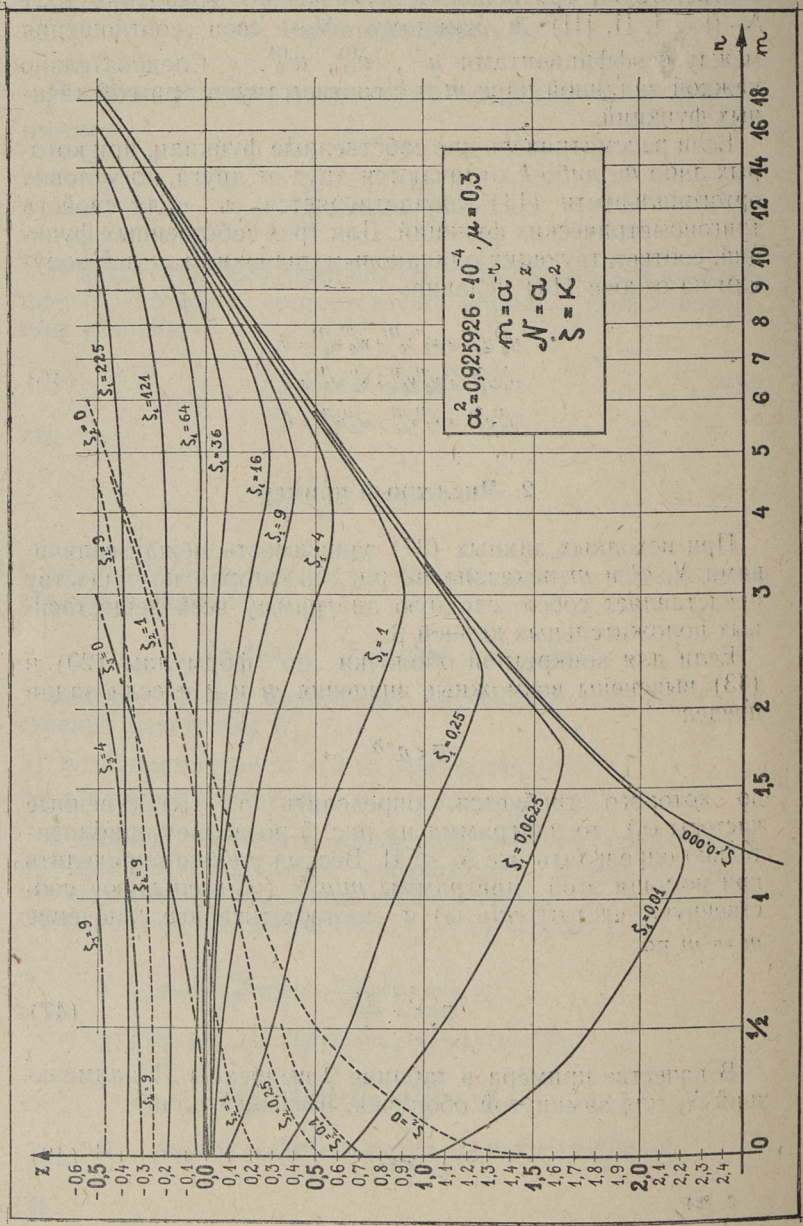


Рис. 5

Значения  $N_j$ , приведенные в таблице 2, соответствуют общим формам колебания. Для этой же оболочки получим по формулам (25) и (26):

а) при чисто крутильных колебаниях ( $m = 0$ ):

$$\min N = 0,350;$$

б) при осесимметрических колебаниях ( $m = 0$ ):

$$\min N = 0,700.$$

Т а б л и ц а 2

$j$	$n=k$	$m$	$N_j$
1	1	3	0,0146
2	1	4	0,0250
3	1	2	0,0295
4	1	5	0,0566
5	2	4	0,0647
6	2	5	0,0852
7	2	3	0,0888
8	1	6	0,1169
9	1	1	0,124
10	2	6	0,146
11	3	5	0,157
12	3	4	0,161
13	2	2	0,195
14	3	6	0,210
15	1	7	0,218
16	3	3	0,235
17	2	7	0,250
18	4	5	0,275
19	4	4	0,302
20	3	7	0,314
21	4	6	0,317

Отметим, что в области  $m \geq 1$ ,  $N \leq 0,35$  соответствует каждой паре  $m$  и  $k$  только одно значение  $N_j$ , определяемое малой погрешностью по формуле (35), которая в случае  $m \gg k$  упрощается в формулу полубезмоментной теории [3, 6, 7]:

$$N \approx \frac{(1-\mu^2)k^4 + a^2 m^4 (m^2 - 1)^2}{m^2(m^2 + 1)}. \quad (49)$$

Из данных, приведенных на рис. 4, 5 и в таблице 2, следует, что густота спектра собственных частот увеличивается с уменьшением  $l$  и  $\frac{\delta}{R_0}$  и с увеличением  $j$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бреславский В. Е. О колебаниях цилиндрических оболочек. Инж. сборник, т. XVI, АН СССР, 1953.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек, 1953.
3. Нигул У. К. Об общих формах колебания круговой замкнутой цилиндрической оболочки. Труды ТПИ № 147, 1958.
4. Оллик К. К. Об осесимметрических колебаниях кругоцилиндрических тонкостенных оболочек. Труды ТПИ № 147, 1958.
5. Ониашвили О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек, АН СССР, 1957.
6. Поверус Л. Ю. и Ряямет Р. К. Малые неосесимметричные собственные колебания упругих тонких конических и цилиндрических оболочек. Труды ТПИ № 147, 1958.
7. Yi-Yuan Yu, Free Vibrations of Thin Cylindrical Shells Having Finite Lengths with Freely Supported and Clamped Edges. Journal of Applied Mechanics, March, 1955.

## КОЛЕБАНИЕ КРУГОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИМПУЛЬСА

В этой статье при помощи метода Фурье исследуется колебание замкнутой кругоцилиндрической упругой оболочки, вызванное действием сосредоточенного импульса. В работе сохраняются обозначения и используются результаты предыдущей статьи; соответствующие ссылки на номера формул снабжены звездочками.

### I. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

#### 1. Постановка задачи по методу Фурье

Пусть оболочка находится в покое при  $t = 0$  и пусть на нее действует в промежутке времени  $0 \leq t \leq t_1$  импульсная нагрузка, заданная вектором

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^3 q_r \mathbf{e}_r, \quad r = 1, 2, 3; \quad (1)$$

тогда в уравнениях (3)\*:

$$Q_r = -\rho \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + 2s \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) + q_r, \quad r = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Перемещения будем искать в виде ряда [3]:

$$\mathbf{u} = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{u}_j F_j, \quad (3)$$

где

$$F_j = F_j(t), \quad \bar{u}_j = \bar{u}_j \mathbf{e}_1 + \bar{v}_j \mathbf{e}_2 + \bar{w}_j \mathbf{e}_3, \quad (4)$$

Далее предполагается, что собственные функции  $\bar{u}_j$  являются известными и пронумерованы индексом  $j$  в возрастающем порядке собственных частот  $\omega_j$  (или  $N_j$ ). На основе (2), (3),\* получим уравнение

$$-\rho \sum_{j=1}^{\infty} (\omega_j^2 F_j + 2s_j \frac{\partial F_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial t^2}) \bar{u}_j + \mathbf{q} = 0 \quad (5)$$

Умножая уравнение (5) на  $\bar{u}_j$ , интегрируя по всей срединной поверхности и учитывая условия ортогональности собственных функций (14)\*, получим уравнения:

$$\omega_j^2 F_j + 2s_j \frac{\partial F_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial t^2} = \frac{\iint_{\xi_0}^{\xi_0} q_j \bar{u}_j d\xi d\varphi}{\rho \iint_{\xi_0}^{\xi_0} \bar{u}_j \cdot \bar{u}_j d\xi d\varphi}, \quad j=1, 2, 3, \dots, \infty \quad (6)$$

В случае сосредоточенного импульса  $P$  в точке  $(\xi_*/\varphi_*)$  имеем:

$$q_j(\xi_*/\varphi_*) = \frac{P}{R_0^2 d\xi d\varphi} \quad (7)$$

и во всех других точках:  $q = 0$ .

В дальнейшем предполагается, что импульс задан в форме:

$$P = P_0 \rho p(t), \quad p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 \quad (8)$$

где  $P_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  — постоянные и  $p(t)$  — заданная функция времени. В таком случае можно представить уравнение (6) в форме:

$$\omega_j^2 F_j + 2s_j \frac{\partial F_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial t^2} = P_0 \rho(t) K_j \quad (9)$$

где

$$K_j = \frac{\rho \bar{u}_j(\xi_*/\varphi_*)}{\rho R_0^2 \iint_{\xi_0}^{\xi_0} \bar{u}_j \cdot \bar{u}_j d\xi d\varphi} \quad (10)$$

Введем новую функцию времени по формуле:

$$F_j = \frac{P_0}{\omega_j^2} K_j \Phi_j \quad (11)$$

На основе (11) из уравнения (8) следует:

$$\omega_j^2 \Phi_j + 2s_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} = \omega_j^2 p(t) \quad (12)$$



Во второй части статьи рассмотрим численный пример, в котором

$$\rho = \rho_1 e_1 + \rho_3 e_3, \quad \rho_2 = 0 \quad (13)$$

и на криволинейных краях замкнутой оболочки наблюдаются краевые условия Навье (41)\*. В таком случае чисто крутильные, чисто сдвигающие и чисто нормальные формы колебания не возбуждаются, и при всех возбуждаемых формах колебания амплитуда нормальных перемещений отличается от нуля. В таких задачах целесообразно выбрать начало координаты  $\varphi$  так, чтобы  $\varphi_* = 0$  и представить на основе (18)\*, (44)\* компоненты вектора (4) в форме:

$$\begin{aligned} \bar{u}_j &= u_{0j} \cos m \varphi \cos k \xi, & \bar{v}_j &= v_{0j} \sin m \varphi \sin k \xi, \\ \bar{w}_j &= \cos m \varphi \sin k \xi, & w_{0j} &= 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Соответственно свойствам системы (45)\*:

$$u_{0j} = U_{0mk}^{(i)}, \quad v_{0j} = V_{0mk}^{(i)}, \quad \omega_j = \omega_{mk}^{(i)}, \quad F_{mk}^{(i)} \quad (15)$$

где в случае  $m \neq 0$ :  $i = 1, 2, 3$  и в случае  $m = 0$ :  $i = 1, 2$ .

На основе (13) и (11) получим из (10) для замкнутой оболочки следующие формулы:

а) при  $m \neq 0$ :

$$K_j = \frac{\rho_1 u_{0j} \cos k \xi_* + \rho_3 \sin k \xi_*}{\frac{\pi}{2} \rho R_0 l (1 + u_{0j}^2 + v_{0j}^2)}, \quad (16)$$

б) при  $m = 0$ :

$$K_j = \frac{\rho_1 u_{0j} \cos k \xi_* + \rho_3 \sin k \xi_*}{\pi \rho R_0 l (1 + u_{0j}^2)} \quad (17)$$

## 2. Функция времени $\Phi$

Решение дифференциального уравнения (12) можно представить в следующем виде: при  $0 \leq t \leq t_1$ :

$$\Phi_j = \frac{\omega_j^i}{\omega_{j0}^i} \int_0^t p(\tau) e^{-s_j(t-\tau)} \sin \bar{\omega}_j(t-\tau) d\tau, \quad (18)$$

при  $t_1 < t$ :

$$\Phi_j = a_j e^{-s_j t} \sin[\bar{\omega}_j(t-t_1) + \varphi_j], \quad (19)$$

где  $\omega_j$ ,  $a_j$  и  $\varphi_j$  определяются по формулам:

$$\frac{\Phi_j(t_1)}{c_j} = tg \varphi_j \quad a_j = \sqrt{[c_j]^2 + [\Phi_j(t_1)]^2} \quad (20)$$

$$c_j = \frac{1}{\bar{\omega}_j} \left[ -\frac{\partial \Phi_j(t_1)}{\partial t} + s_j \Phi_j(t_1) \right], \quad \bar{\omega}_j^2 = \omega_j^2 - s_j^2$$

В дальнейшем предполагаем [2], что

$$s_j = \bar{\omega}_j \bar{s}, \quad \bar{s} = const < 1. \quad (21)$$

Приведем формулы, найденные по (18), для двух случаев, в которых функция  $p(t)$  выбрана так, что

$$\int_0^{t_1} p(t) dt = t, \quad (22)$$

а) Импульс постоянной величины:

при  $0 \leq t \leq t_1$ :  $p(t) = 1$ ; при  $t > t_1$ :  $p(t) = 0$ :

$$\Phi_j = 1 - (\bar{s} \sin \bar{\omega}_j t + \cos \bar{\omega}_j t) e^{-\bar{s} \bar{\omega}_j t}$$

$$c_j = \bar{s} + (\sin \bar{\omega}_j t - s \cos \bar{\omega}_j t) e^{-\bar{s} \bar{\omega}_j t} \quad (23)$$

б) Параболический импульс:

при  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $p(t) = 6 \frac{t}{t_1} (1 - \frac{t}{t_1})$ ,

при  $t_1 < t$ :  $p(t) = 0$ :

$$\Phi_j = 6 \left\{ \left( \frac{t}{t_1} - \frac{t^2}{t_1^2} \right) + \frac{4t}{t_1^2 \bar{\omega}_j} \frac{\bar{s}}{1 + \bar{s}^2} - \frac{2}{t_1 \bar{\omega}_j} \frac{\bar{s}}{1 + \bar{s}^2} - \frac{1}{t_1 \bar{\omega}_j} \frac{1}{1 + \bar{s}^2} \left[ (1 - \bar{s}^2) \sin \bar{\omega}_j t - \right. \right.$$

$$\left. - 2 \bar{s} \cos \bar{\omega}_j t \right] e^{-\bar{s} \bar{\omega}_j t} + \frac{2}{t_1^2 \bar{\omega}_j^2} \frac{1 - 3 \bar{s}^2}{(1 + \bar{s}^2)^2} - \frac{2}{t_1^2 \bar{\omega}_j^2} \frac{1}{(1 + \bar{s}^2)^2} \left[ \bar{s} (3 - \bar{s}^2) \sin \bar{\omega}_j t + \right.$$

$$\left. + (1 - 3 \bar{s}^2) \cos \bar{\omega}_j t \right] e^{-\bar{s} \bar{\omega}_j t} \left. \right\}, \quad (24)$$

$$c_j = \frac{6}{(1 + \bar{s}^2)^2} \left\{ -\frac{1 - \bar{s}^4}{t_1 \bar{\omega}_j} + \frac{2 \bar{s} (3 - \bar{s}^2)}{t_1^2 \bar{\omega}_j^2} + \left[ -\frac{2 \bar{s} (1 + \bar{s}^2)}{t_1 \bar{\omega}_j} + \frac{2 (1 - 3 \bar{s}^2)}{t_1^2 \bar{\omega}_j^2} \right] \sin \bar{\omega}_j t, e^{-\bar{s} \bar{\omega}_j t}, \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{1 - \bar{s}^4}{t_1 \bar{\omega}_j} + \frac{2 \bar{s} (3 - \bar{s}^2)}{t_1^2 \bar{\omega}_j^2} \right] \cos \bar{\omega}_j t, e^{-\bar{s} \bar{\omega}_j t} \right\}.$$

### 3. Практическая сходимость рядов перемещений.

В численных задачах приходится ограничиваться учетом конечного числа ( $h$ ) членов ряда (3). При  $t = t^* = const$  сходимость ряда (3) не является одинаковой во всех точках оболочки, но его «среднюю сходимость» можно характеризовать, исследуя сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} F_j(t^*) \quad (25)$$

Во многих задачах величина  $K_j$  с возрастанием  $j$  систематически не увеличивается и в приближенных рассуждениях относительно сходимости ряда (25) его можно заменить более простым рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j(t^*)}{\omega_j^2} \cdot \omega \quad (26)$$

Сходимость ряда (26) улучшается с увеличением  $t^*$ . В дальнейшем под  $t^*$  подразумевается  $\min t$ , при котором требуется численное определение перемещений.

Обозначим

$$\alpha = \bar{\omega} t \quad \alpha_1 = \bar{\omega}_1 t \quad (27)$$

и введем в рассмотрение функцию

$$B = \frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2} \quad (28)$$

Если заданы функция  $p(t)$  и число  $\bar{s}$ , тогда можно построить диаграмму функции  $B$  и затем по  $\alpha_1$  определить такое значение  $\alpha = \alpha_h$  (см. рис. 2), что

$$\frac{B(\alpha \geq \alpha_h)}{\max B(\alpha \geq \alpha_1)} \leq \bar{\varepsilon}, \quad (29)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  сколь угодно малое положительное число.

Перемещения, вызванные действием сосредоточенного импульса, определяются асимптотической погрешностью

порядка  $\varepsilon$ , если в ряде (3) сохранить члены до порядкового номера  $j = h$ , определяемого из условия

$$\bar{\omega}_h \approx \frac{\alpha_h}{t^*}, \quad (30)$$

Число  $h$  с уменьшением  $t^*$  быстро увеличивается. Имея в виду замечания, сделанные в конце предыдущей статьи, можно констатировать, что при применении метода Фурье приходится учитывать в рядах тем больше членов, чем тоньше и короче оболочка и чем меньше  $t^*$ .

## II. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Исходные данные:

$$R_0 = 42,5 \text{ см}, \quad \delta = \frac{R_0}{30}, \quad l = \pi R_0,$$

$$E = 2,0 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \mu = 0,3, \quad \rho = \frac{\gamma}{g}, \quad (31)$$

$$\gamma = 0,00785 \text{ кг/см}^3, \quad g = 981 \text{ см/сек.}^2$$

Импульс (ударная сила) действует в точке «31» (рис. 1);

$$t_1 = 0,001054 \text{ сек} \approx \frac{\pi}{2\omega_1}.$$

Рассматриваются 4 варианта:

	Обозначение варианта	$s$	$p(t)$	$p$
Нормальный удар (импульс)	I	0,10	1	$-e_3$
	I A	0,01	$6 \frac{t}{t_1} \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$	$-e_3$
	I B	0,01	1	$-e_3$
Наклонный удар (импульс)	I	0,10	1	$\cot 10^\circ e_1 - e_3$

На рис. 1 показаны точки, в которых определены нормальные перемещения  $\omega$ , сохраняя 21 первых членов ряда (см. табл. 2 предыдущей статьи). На рис. 2 представлены диаграммы функции  $B$  для двух случаев. На эти диаграммы нанесены ординаты  $t^*_{\omega_1}, t^*_{\omega_2}, \dots, t^*_{\omega_{21}}$  при  $t^* = t_1$ . Оказывается, что при  $h = 21; t^* \leq 0,8 t_1; \varepsilon \leq 0,05$ . Нор-



ДИАГРАММА ФУНКЦИИ  $V(\omega)$  В СЛУЧАЕ  $p(t) \equiv 1$  ПРИ  $0 \leq t \leq t_1$ .

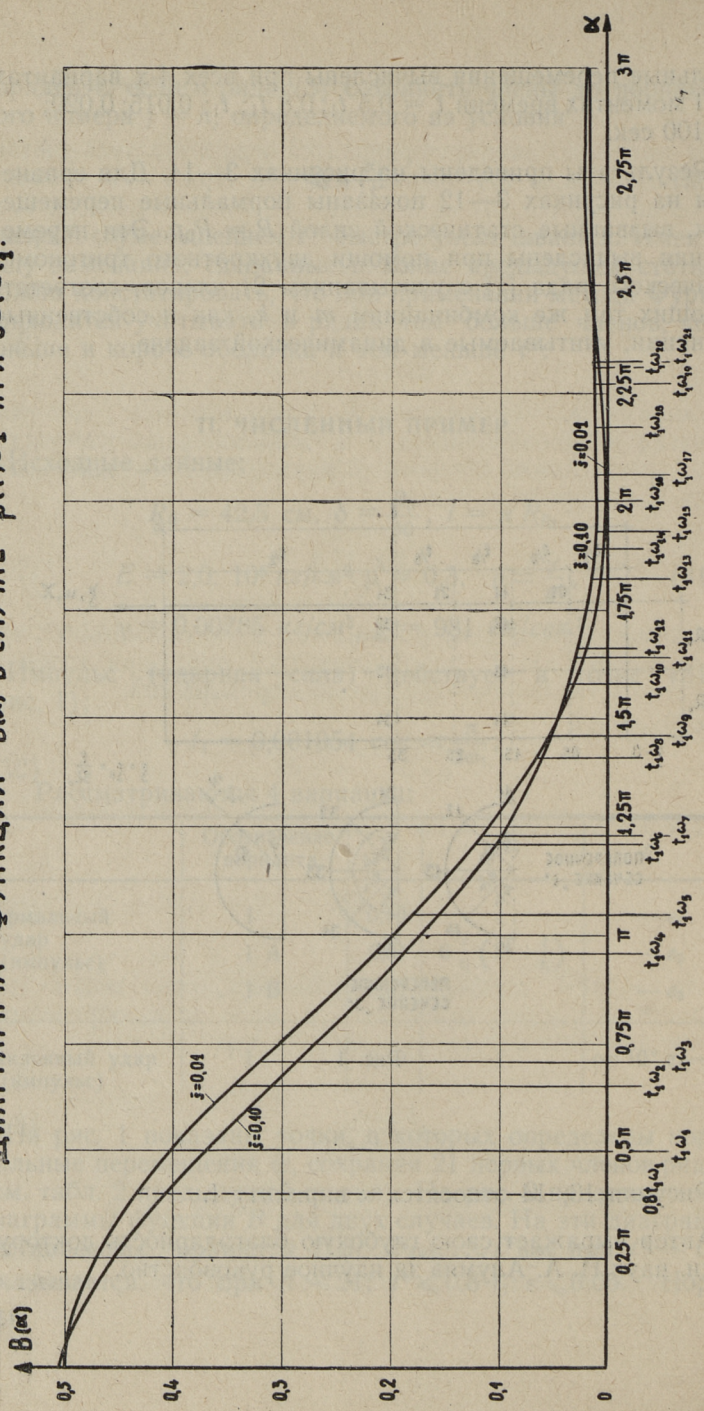


Рис. 2

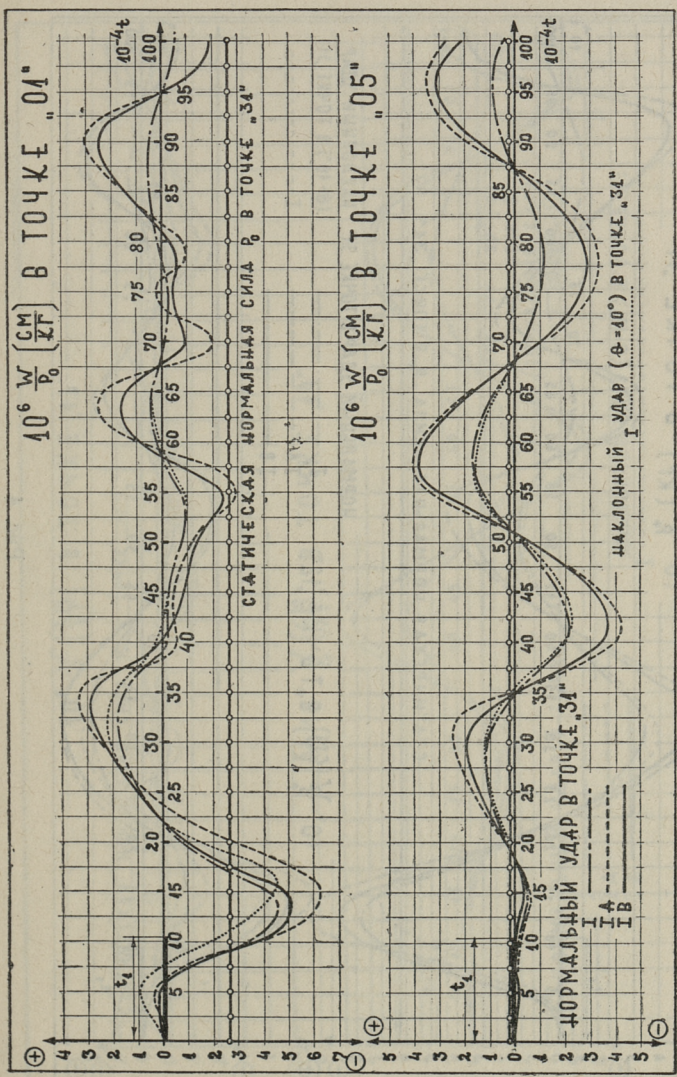


Рис. 3

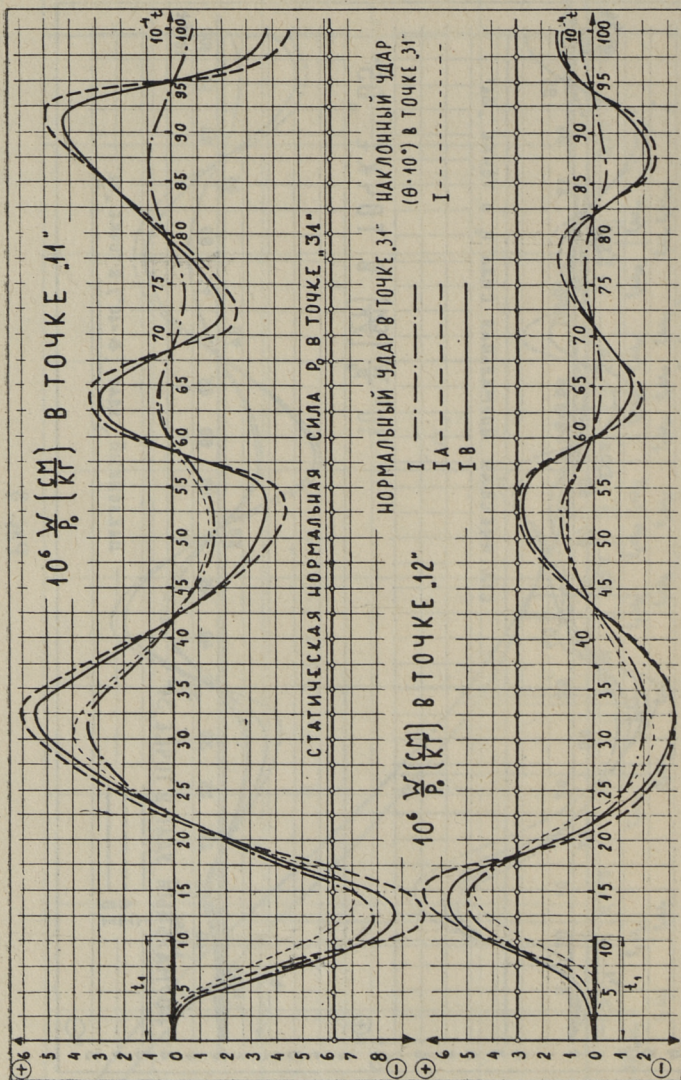


Рис. 4







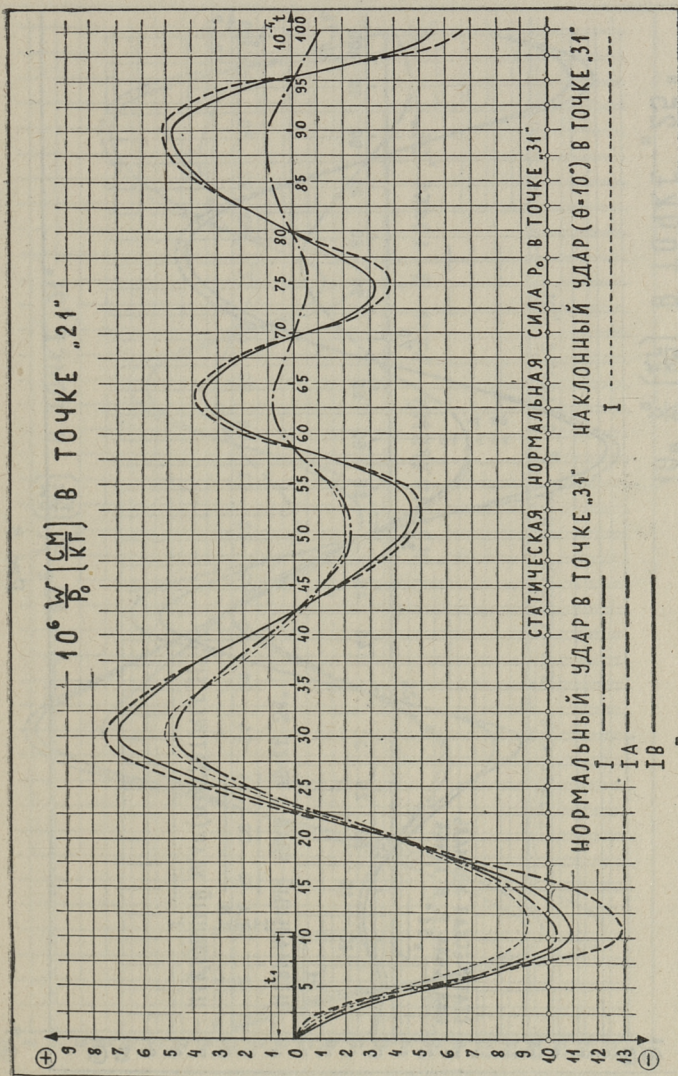


Рис. 7



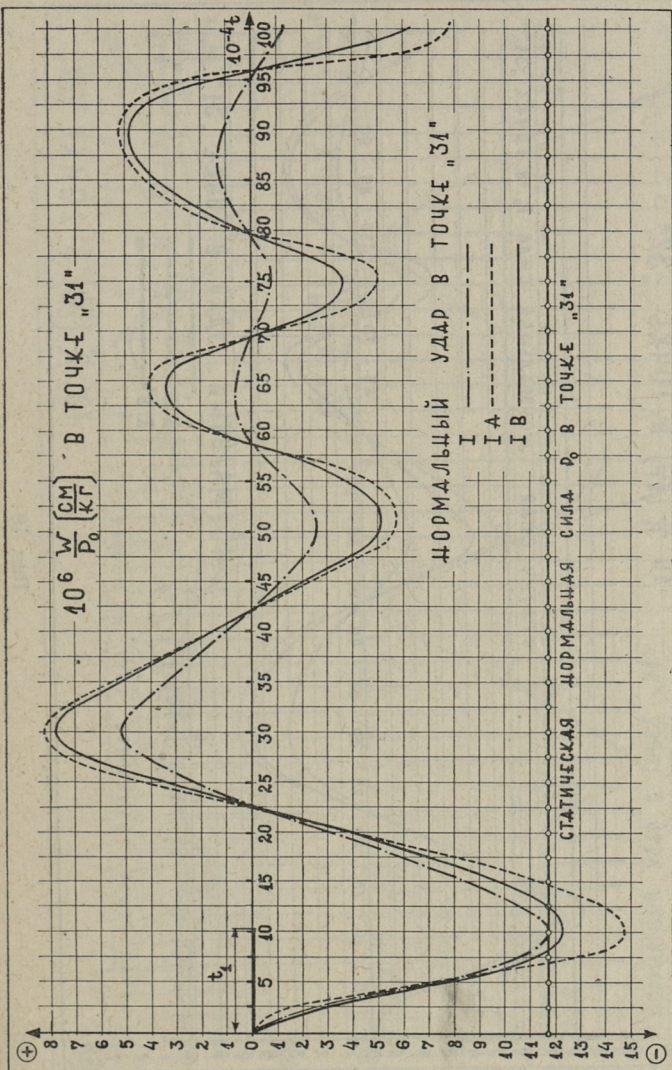


Рис. 9

$10^6 \frac{W}{P_0} \left( \frac{CM}{KG} \right)$  В ТОЧКЕ "32"

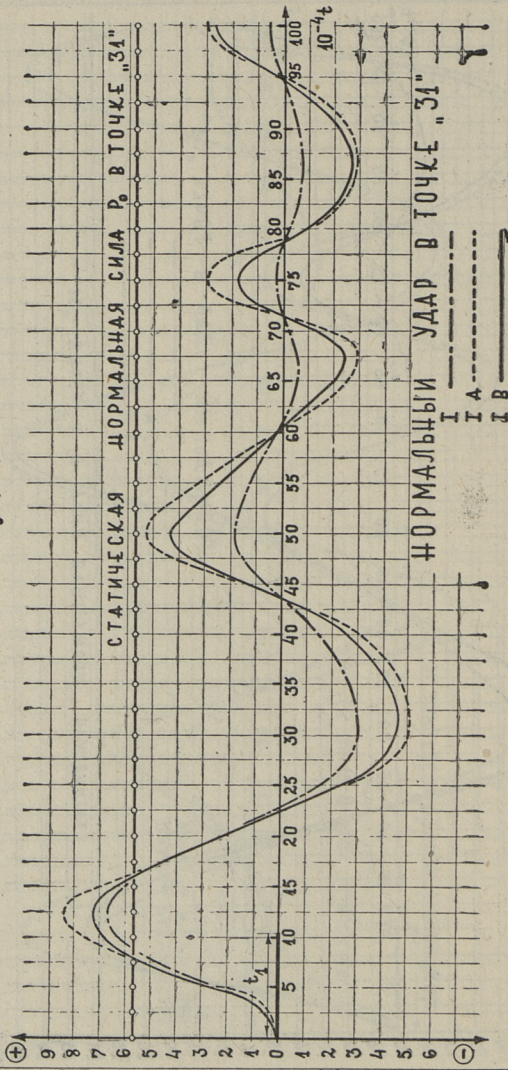
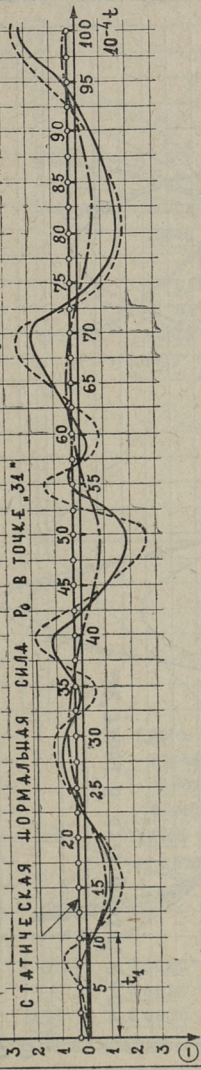


Рис. 10

$10^6 \frac{W}{P_0} \left( \frac{CM}{KG} \right)$  В ТОЧКЕ "33"



$10^6 \frac{W}{P_0} \left( \frac{CM}{KG} \right)$  В ТОЧКЕ "34"

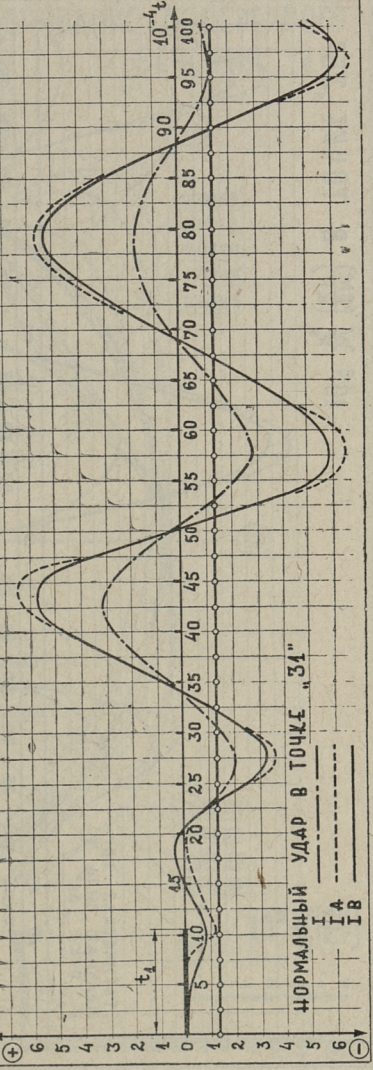


Рис. 11

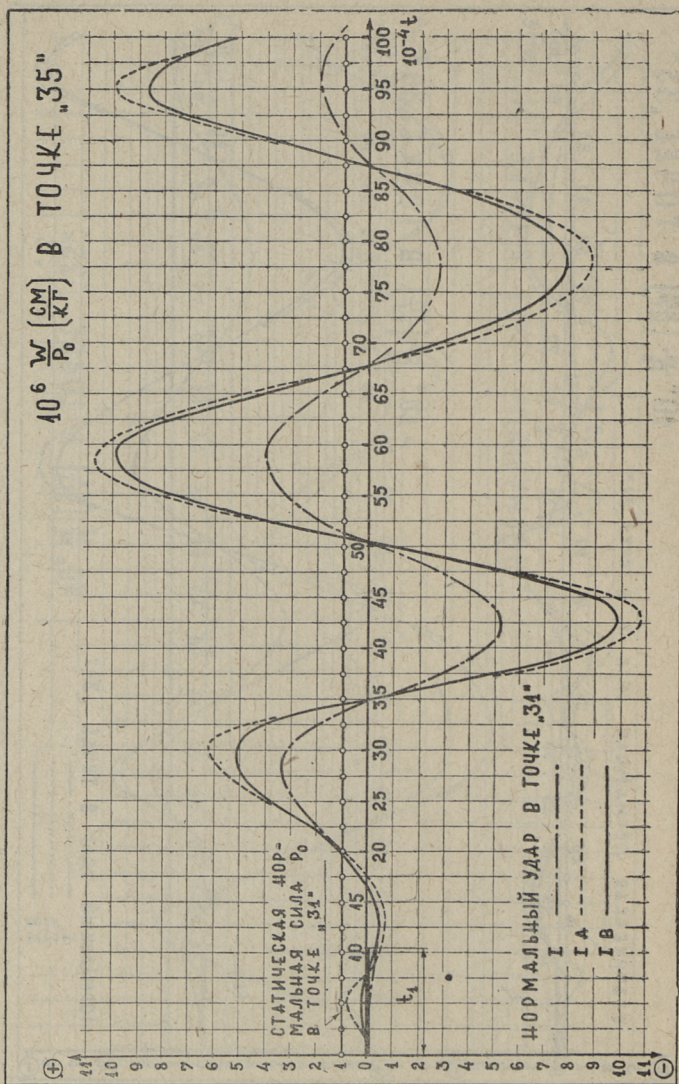


Рис. 12



# ИЗГИБАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ "1"

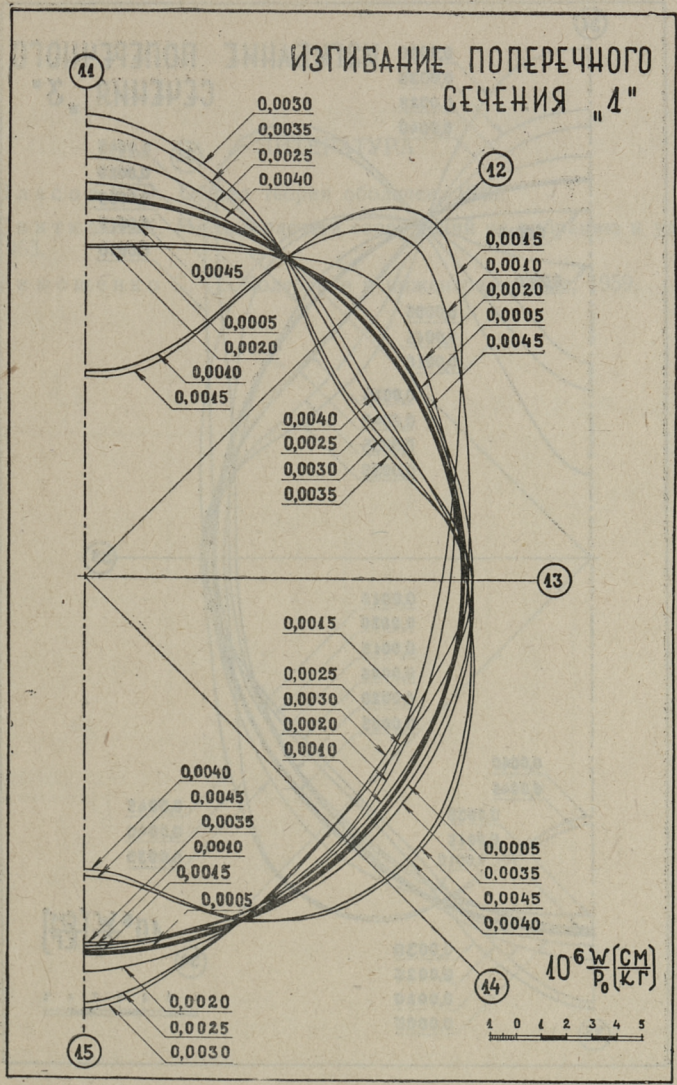


Рис. 13

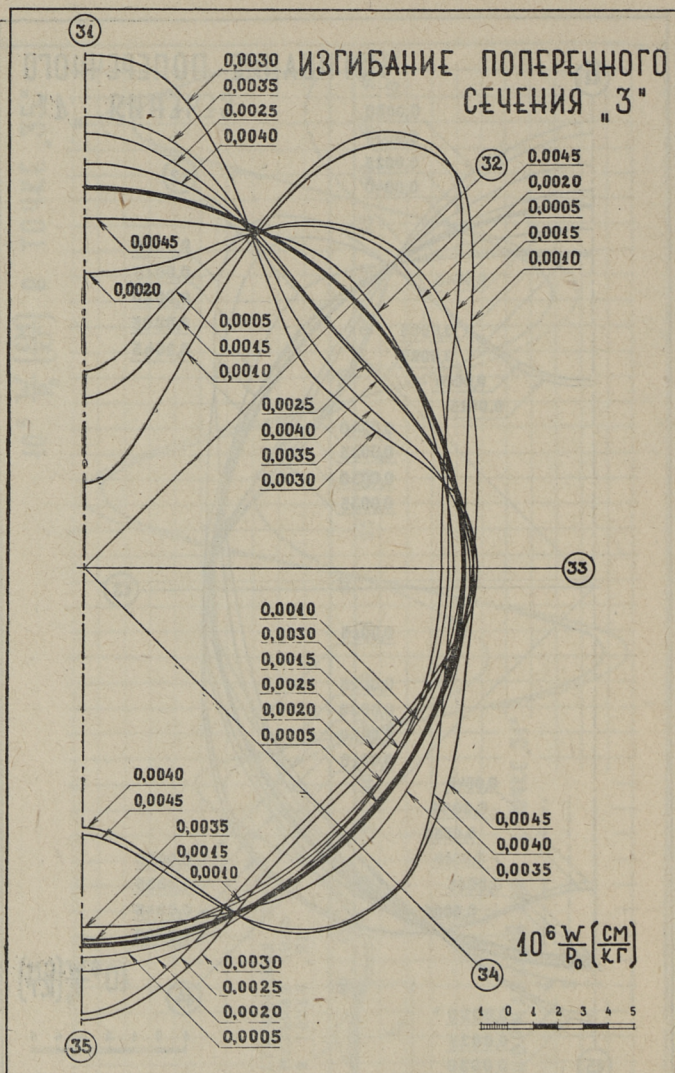


Рис. 14

## ЛИТЕРАТУРА

1. В л а с о в В. З. Общая теория оболочек, 1949.
2. С н и т к о Н. К. Методы расчета сооружений на вибрацию и удар, 1953.
3. Т и м о ш е н к о С. П. Колебание в инженерном деле, 1959.



## О РАСЧЕТЕ УПРУГОЙ АРМИРОВАННОЙ БАЛКИ-СТЕНКИ, ОПИРАЮЩЕЙСЯ НА ТОРЦЕВЫЕ РЕБРА

В настоящей работе приводится приближенный расчет однопролетной упругой балки-стенки, опирающейся на торцевые ребра и армированной продольной арматурой по нижнему краю плиты. Расчетная схема и обозначения приведены на рис. 1.

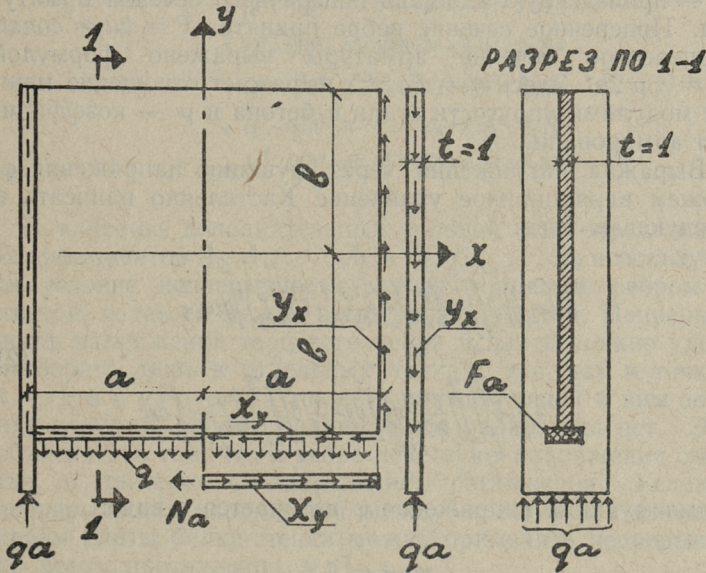


Рис. 1.

По аналогии с работой [1] при решении задачи используется метод Кастильяно-Ритца. Точно так же для упрощения расчетной схемы предполагается, что: 1) нормальные напряжения  $X_x$  в месте сопряжения плиты с торцевыми ребрами равны нулю, т. е. жесткость ребра (а также арматуры) при изгибе равна нулю; 2) коэффициент

Пуассона  $\nu = 0$ ; 3) силы сдвига, нагружающие ребра и арматуру, приложены к их оси, и 4) напряжения в ребре и арматуре по поперечному сечению распределены равномерно.

Потенциальная энергия всей системы:

$$U = \frac{1}{2E} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} (X_x^2 + Y_y^2 + 2X_y^2) dx dy + \frac{1}{FE} \int_{-b}^{+b} \int_{x=a}^{+b} \left\{ \int Y_x | dy \right\}^2 dy + \frac{1}{F_a E} \int_0^{+a} \int_x^{+a} \left\{ \int X_y | dx \right\}^2 dx. \quad (1)$$

где первый член выражает потенциальную энергию плиты, второй член — потенциальную энергию торцевого ребра и третий — потенциальную энергию арматуры. В уравнении (1)  $F$  выражает площадь поперечного сечения ребра и  $F_a$  — приведенную площадь поперечного сечения арматуры. Поперечное сечение ребра принято  $F = ka = const.$  Поперечное сечение арматуры выражено формулой  $F_a = n \mu bt$ . Здесь  $n = E_a : E_b$  выражает отношение между модулями упругости стали и бетона и  $\mu$  — коэффициент армирования.

Выражая напряжения через функцию напряжения  $\varphi$ , можем вариационное уравнение Кастильяно написать в следующем виде:

$$\delta U = \frac{1}{2E} \delta \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{FE} \delta \int_{-b}^{+b} \int_y^{+b} \left\{ \int_{x=a}^{+b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} | dy \right\}^2 dy + \frac{1}{F_a E} \delta \int_0^{+a} \int_x^{+a} \left\{ \int_{y=-b}^{+a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} | dx \right\}^2 dx. \quad (2)$$

Сама функция напряжения  $\varphi$  избирается в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_1^i \sigma_i \varphi_i,$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots$

При этом нулевой член  $\varphi_0$  должен удовлетворять следующим контурным условиям в напряжениях:

$$\begin{aligned} x = \pm a; & \quad X_x = 0, \\ y = +b; & \quad Y_y = 0 \text{ и} \\ y = -b; & \quad Y_y = q. \end{aligned}$$

Соответственно предъявленным требованиям нулевой член взят в виде:

$$\varphi_0 = \frac{1}{8} \sigma^2 (\xi^2 \eta^3 - 3 \xi^2 \eta - \eta^3 + 2 \xi^2) \varphi, \quad (3)$$

где  $\xi = \frac{x}{a}$  и  $\eta = \frac{y}{b}$ .

Члены функции  $\varphi_i$  избираются так, чтобы они на контуре дали нулевые напряжения, за исключением краев  $x = \pm a$ , где  $Y_x \neq 0$ , и  $y = -b$  где  $X_y \neq 0$ . Означенным условиям удовлетворяют функции:

$$\begin{aligned} \sum \sigma_i \varphi_i = & (\xi^2 - 1)(\eta^3 - \eta^2 - \eta + 1)(\sigma_0 + A_0 \xi^2 + B_0 \eta) + \\ & + (\xi^2 - 1)(\eta^3 - \eta^2 - \eta + 1)(\sigma_1 + A_1 \xi^2 + B_1 \eta) + \\ & + (\xi^2 - 1)(\eta^4 - \eta^3 - \eta^2 - \eta + 1)(\sigma_2 + A_2 \xi^4 + B_2 \eta) + \\ & + (\xi^4 - 1)(\eta^5 - \eta^4 - \eta^3 - \eta^2)(\sigma_3 + A_3 \xi^4 + B_3 \eta) + \\ & + (\xi^4 - 1)(\eta^6 - \eta^5 - \eta^4 - \eta^3)(\sigma_4 + A_4 \xi^4 + B_4 \eta) + \\ & + (\xi^6 - 1)(\eta^7 - \eta^6 - \eta^5 - \eta^4)(\sigma_5 + A_5 \xi^6 + B_5 \eta). \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве дополнительных условий для определения коэффициентов  $A_0, A_1, \dots, A_5$  и  $B_0, B_1, \dots, B_5$  используется условие непрерывности между торцевым ребром и плитой, а также между арматурой и плитой. Непрерывность напряжений торцевого ребра и плиты можно удовлетворить лишь в отдельных точках, так как в точках  $x = \pm a$  и  $y = -b$ , а также в примыкающей к ним зоне при упругой работе балки-стенки равновесия нет. Это объясняется тем, что в ребре действуют напряжения сжатия, в плите же — напряжения растяжения. Условие непрерывности напряжений между арматурой и нижним краем плиты балки-стенки можно применить непрерывно по всему протяжению.

Означенное условие непрерывности напряжений между арматурой и плитой выражается в виде:

$$\frac{1}{F \sigma_x} \int_x^0 \int_{y=-b}^0 |X_y| dx = |X_x|_{y=-b} \quad (5)$$

и условие непрерывности напряжений в вертикальном се-

чении между опорным ребром и плитой выражается в виде:

$$\int_y^{1/2} \int_{x=0}^{x=b} -Y_x / dy = |Y_y| \quad (6)$$

При разработанном численном примере принимается:  $a=b$ ;  $t=t_1=1$ ;  $k=0,5$  и  $F=0,5a$ ;  $\mu=1\%$ ,  $n=10$  и  $F_a=0,2a$ .

Применяя соответственно приведенные исходные данные формулы (5), получим для коэффициентов  $B_0, B_1, \dots, B_5$  следующие значения:

$$\begin{aligned} B_0 &= -\frac{3}{112} \sigma^2 q - a_0 - A_0 \xi^2, \\ B_1 &= \frac{7}{9} (a_1 + A_1 \xi^2), \\ B_2 &= \frac{2}{11} (a_2 + A_2 \xi^4), \\ B_3 &= \frac{11}{13} (a_3 + A_3 \xi^2), \\ B_4 &= \frac{13}{15} (a_4 + A_4 \xi^4) \text{ и} \\ B_5 &= \frac{15}{17} (a_5 + A_5 \xi^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив полученные таким путем результаты (7) в формулы (5), можем функцию напряжения выразить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{8} (\xi^2 \eta^2 - 3\xi^2 \eta - \eta^2 + 2\xi^2) \sigma^2 q \cdot \\ &- \frac{3}{112} (\xi^2 - 1) (\eta^2 - \eta^2 - \eta + 1) \sigma^2 q + \\ &+ \frac{7}{9} (\xi^2 - 1) (7\eta^4 + 2\eta^2 - 16\eta^2 - 2\eta + 9) (a_1 + A_1 \xi^2) + \\ &+ \frac{2}{11} (\xi^2 - 1) (9\eta^5 + 2\eta^4 - 20\eta^2 - 2\eta^2 + 11\eta) (a_2 + A_2 \xi^4) + \\ &+ \frac{11}{13} (\xi^2 - 1) (11\eta^6 + 2\eta^5 - 24\eta^4 - 2\eta^2 + 13\eta^2) (a_3 + A_3 \xi^2) + \\ &+ \frac{13}{15} (\xi^2 - 1) (13\eta^7 + 2\eta^6 - 28\eta^5 - 2\eta^4 + 15\eta^3) (a_4 + A_4 \xi^4) + \\ &+ \frac{15}{17} (\xi^2 - 1) (15\eta^8 + 2\eta^7 - 32\eta^6 - 2\eta^5 + 17\eta^4) (a_5 + A_5 \xi^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее условие непрерывности (6) применяется в пяти точках:  $y=0$ ,  $y=\pm \frac{3}{8}b$  и  $y=\pm \frac{6}{8}b$  опорного вертикального сечения ( $x=a$ ) балки-стенки.

Решив систему уравнений, получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= -0,09566 a^2 q - 0,42857 a_1, \\ A_2 &= +0,04194 a^2 q - 0,27273 a_2, \\ A_3 &= -0,03742 a^2 q - 0,55555 a_3, \quad \text{и} \\ A_4 &= +0,18187 a^2 q - 0,38461 a_4, \\ A_5 &= -0,15441 a^2 q - 0,63636 a_5. \end{aligned} \quad (9)$$



Подставив результаты (9) в уравнения (8), получим функцию напряжения  $\varphi$  в виде:

$$\begin{aligned}
 \varphi = & [0,12500(\xi^2\eta^3 - 3\xi^2\eta - \eta^3 + 2\xi^2) - 0,02679(\eta^3 - \eta^2 - \eta + 1) - \\
 & - 0,01063(\xi^4 - \xi^3)(7\eta^4 + 2\eta^3 - 16\eta^2 - 2\eta + 9) + \\
 & + 0,00381(\xi^6 - \xi^4)(9\eta^5 + 2\eta^4 - 20\eta^3 - 2\eta^2 + 11\eta) - \\
 & - 0,00283(\xi^6 - \xi^3)(11\eta^6 + 2\eta^5 - 24\eta^4 - 2\eta^3 + 13\eta^2) + \\
 & + 0,01212(\xi^4 - \xi^3)(13\eta^7 + 2\eta^6 - 28\eta^5 - 2\eta^4 + 15\eta^3) - \\
 & - 0,00908(\xi^6 - \xi^3)(15\eta^8 + 2\eta^7 - 32\eta^6 - 2\eta^5 + 17\eta^4)]a_1q + \\
 & + 0,01588(-3\xi^4 + 10\xi^2 - 7)(7\eta^4 + 2\eta^3 - 16\eta^2 - 2\eta + 9)a_1 + \\
 & + 0,09091(-0,27273\xi^6 + 0,27273\xi^4 + \xi^2 - 1)(9\eta^5 + 2\eta^4 - 20\eta^3 - 2\eta^2 + 11\eta)a_2 + \\
 & + 0,07692(-0,55555\xi^6 + \xi^4 + 0,55555\xi^2 - 1)(11\eta^6 + 2\eta^5 - 24\eta^4 - 2\eta^3 + 13\eta^2)a_3 + \\
 & + 0,06667(-0,38461\xi^6 + 0,38461\xi^4 - 1)(13\eta^7 + 2\eta^6 - 28\eta^5 - 2\eta^4 + 15\eta^3)a_4 + \\
 & + 0,05882(-0,63636\xi^6 + \xi^4 - 0,63636\xi^2 - 1)(15\eta^8 + 2\eta^7 - 32\eta^6 - 2\eta^5 + 17\eta^4)a_5.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Остальные пока неизвестные коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_5$  определяются из условия минимума потенциальной энергии  $\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0$ . Таким путем получаем канонические уравнения Кастильяно-Ритца:

$$a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{21} + a_3 \delta_{31} + a_4 \delta_{41} + a_5 \delta_{51} = -\Delta p_1 \tag{11}$$

$$a_1 \delta_{12} + a_2 \delta_{22} + a_3 \delta_{32} + a_4 \delta_{42} + a_5 \delta_{52} = -\Delta p_2$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

где множители при неизвестных  $\delta_{ik}$  и свободные члены  $\Delta p_k$  определяются из уравнений:

$$\begin{aligned}
 \delta_{ik} = & \iint_{-a}^{+a} \iint_{-b}^{+b} (\varphi_{i,xx} \varphi_{k,xx} + \varphi_{i,yy} \varphi_{k,yy} + 2\varphi_{i,xy} \varphi_{k,xy}) dx dy + \\
 & + \frac{2}{F} \left\{ \int_{-b}^{+b} \int_{x=a}^{+a} \varphi_{i,xy} dy \int_{x=a}^{+a} \varphi_{k,xy} dy \right\} dy + \frac{2}{F} \left\{ \int_{y=-b}^{-b} \int_{x=0}^{+a} \varphi_{i,xy} dx \int_{y=-b}^{-b} \varphi_{k,xy} dx \right\} dx.
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\Delta p_{\kappa} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\varphi_{0xx} \varphi_{\kappa xx} + \varphi_{0yy} \varphi_{\kappa yy} + 2 \varphi_{0xy} \varphi_{\kappa xy}) dx dy +$$

$$+ \frac{2}{F} \int_{-b}^b \left\{ \int_y^{+b} \varphi_{0xy} dy \int_{x=a}^{+b} \varphi_{\kappa xy} dx \right\} dy + \frac{2}{F_0} \int_0^a \left\{ \int_{y=b}^a \varphi_{0xy} dx \int_{y=b}^a \varphi_{\kappa xy} dy \right\} dx$$

Вычислив множители и свободные члены согласно выражениям (12) и решив систему канонических уравнений (11), получим для множителей ряда функции напряжений  $\varphi$  следующие значения:

$$a_1 = -0,06387 a^2 q, \quad a_2 = +0,04494 a^2 q, \quad a_3 = -0,01130 a^2 q,$$

$$a_4 = -0,04702 a^2 q \quad \text{и} \quad a_5 = +0,09463 a^2 q.$$

Поместив значения коэффициентов  $a_1, a_3, \dots, a_5$  в выражение (10) и сгруппировав члены, получим функцию напряжения в виде

$$\varphi = 0,12500 (\xi^2 \eta^3 - 3 \xi^2 \eta - \eta^3 + 2 \xi^2) - 0,02679 (\eta^3 - \eta^2 - \eta + 1) +$$

$$+ (-0,00759 \xi^4 + 0,00049 \xi^2 + 0,00710) (7\eta^4 + 2\eta^3 - 16\eta^2 - 2\eta + 9) +$$

$$+ (+0,00270 \xi^6 - 0,00270 \xi^4 + 0,00409 \xi^2 - 0,00409) (9\eta^5 + 2\eta^4 - 20\eta^3 - 2\eta^2 + 11\eta) +$$

$$+ (-0,00239 \xi^6 - 0,00087 \xi^4 + 0,00239 \xi^2 - 0,00087) (11\eta^6 + 2\eta^5 - 24\eta^4 - 2\eta^3 + 13\eta^2) +$$

$$+ (+0,01333 \xi^8 - 0,01646 \xi^4 + 0,00314) (13\eta^7 + 2\eta^6 - 28\eta^5 - 2\eta^4 + 15\eta^3) +$$

$$+ (-0,01262 \xi^8 + 0,00557 \xi^6 + 0,01262 \xi^2 - 0,00557) (15\eta^8 + 2\eta^7 - 32\eta^6 - 2\eta^5 + 17\eta^4)$$
(13)

и составляющие напряжения:

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

$$Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} u$$

$$X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Составляющие напряжений в сечениях более характеризующих балку-стенку, приведены в таблице 1 и на рис. 21.

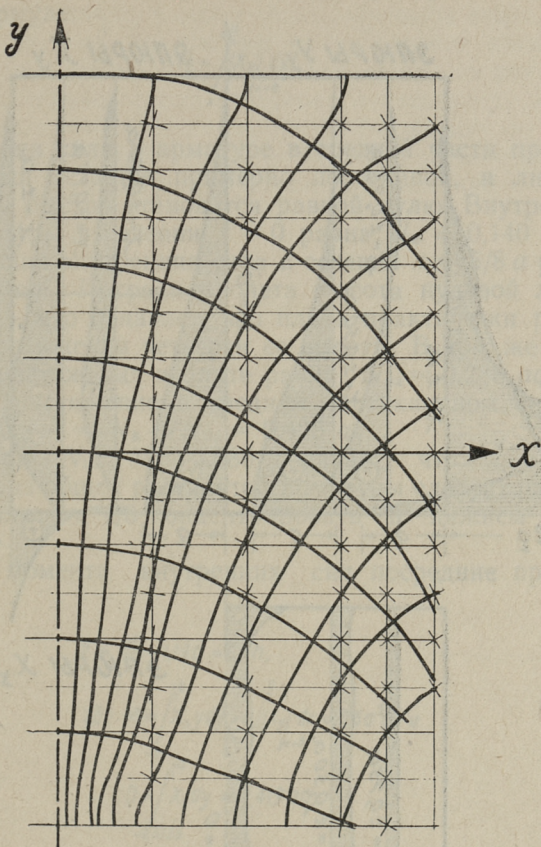


Рис. 2.

Так как соответственно описанному методу распределение напряжений в плите балки-стенки отличаются от ныне известных, то на черт. 3. приведены траектории главных напряжений. Для получения траекторий был произведен расчет направлений главных напряжений в 102 точках балки-стенки (на рис. 3 отмечены крестиками) на основании чего и были изображены приведенные траектории.

Расчет величины и распределения внутренних сил в

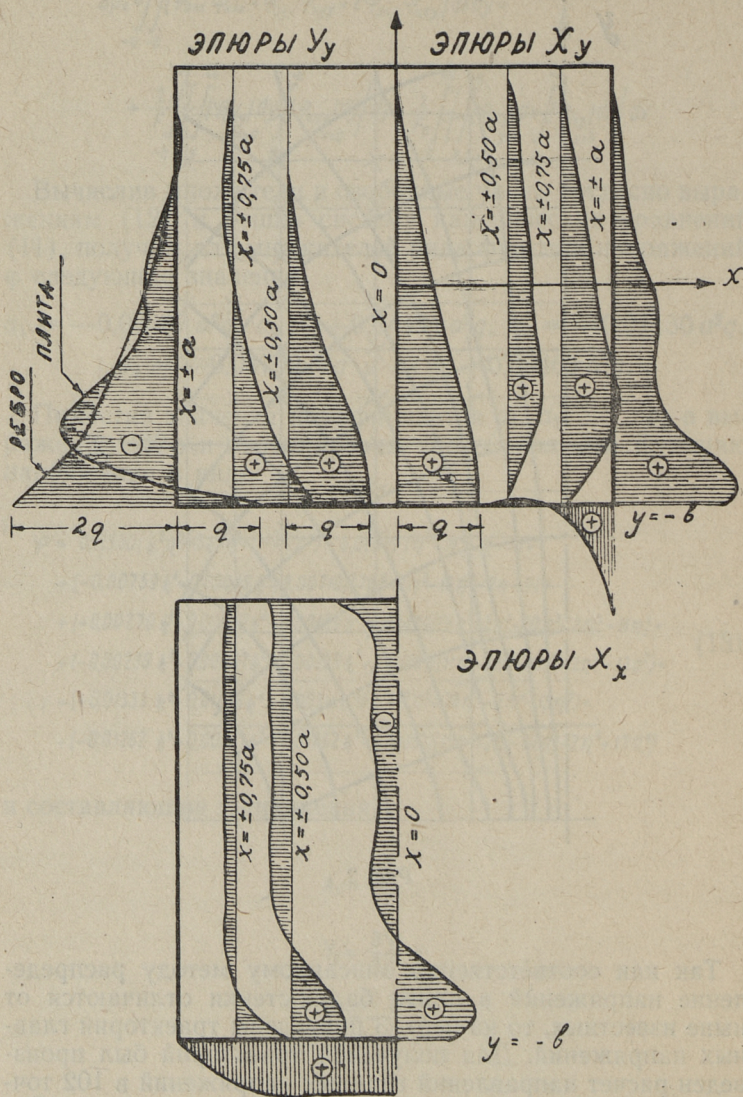


Рис. 3.

арматуре согласно исходным данным примера был проведен по формуле:

$$F_a = \int_x^0 \int_{y=-b}^0 |X_{y}| dx$$

Внутренняя сила в арматуре в средней части пролета балки-стенки остается примерно постоянной, и лишь в зоне опоры быстро становится равной нулю. Внутренняя сила арматуры в сечении  $x = 0$  равна  $N_a = 0,140 aq$ , а максимальная внутренняя сила в сечении  $x = 5/8 a$  равна  $N_a = 0,143 aq$ . Посреди пролета высота нулевой линии  $\eta = -0,535$ , что означает, что плита практически растянута на протяжении четверти ее высоты. В том же сечении сила растяжения в плите равна  $N_{пл} = 0,285 aq$ . Общая сила растяжения в среднем вертикальном сечении балки-стенки  $N = N_a + N_{пл} = 0,425 aq$ .

Отношение  $N_{пл} : N = 0,680$  означает, что приблизительно  $2/3$  из общей растянутой арматуры следует распределить в плиту и  $1/3$  концентрировать в нижнем крае плиты.

Плечо момента внутренних сил посредине пролета ( $x = 0$ ):

$$z = \frac{M}{D} = 1,19a = 0,6h,$$

$$\text{где } M = \int_{-b}^{+b} X_x y dy + b \int_0^a \int_{y=-b}^0 |X_y| dx = 0,5a^2q \quad \text{и} \quad (17)$$

$$D = \int_{-0,535b}^{+b} X_x dy = 0,419aq.$$

Проверка расчетов была произведена двояко:

- 1) моменты внешних сил в сечении ( $x = 0$ )  $\frac{1}{8} q (2a)^2$  равен моменту внутренних сил  $0,5 a^2 q$  в том же сечении;
- 2) условие проекции сил на ось  $y$  в вертикальном сечении  $x = 0$  удовлетворяется, т. е.

$$\int_{-b}^{+b} X_x dy + \int_0^a \int_{y=-b}^0 |X_y| dx = 0.$$

В заключение следует отметить, что приведенное распределение арматуры необходимо в случаях, когда не допускается возникновение трещин в плите балки-стенки. В случае же, когда возникновение трещин в плите допускается, приведенная расчетная схема конечно неприменима. В последнем случае целесообразнее продольную арматуру располагать в большей мере (до  $\frac{2}{3}$  от всей арматуры) в нижнем крае плиты балки-стенки.

---

Таблица 1

## Составляющие напряжений

Напряжения	$y/b$	1	$7/8$	$6/8$	$5/8$	$4/8$	$3/8$	$2/8$	$1/8$	0	$-1/8$	$-2/8$	$-3/8$	$-4/8$	$-5/8$	$-6/8$	$-7/8$	-1
	$x/e$																	
$\frac{X_x}{q}$	0 $\pm 0,5$	-0,793 -0,236	-0,299 -0,180	-0,228 -0,212	-0,274 -0,243	-0,303 -0,244	-0,287 -0,222	-0,250 -0,199	-0,228 -0,192	-0,242 -0,208	-0,283 -0,236	-0,311 -0,250	-0,263 -0,215	-0,081 -0,097	-0,257 +0,118	-0,679 +0,401	-0,966 +0,654	+0,669 +0,673
$\frac{y_y}{q}$	0 $\pm 0,5$ $\pm 1,0$	0 0 0	+0,030 -0,009 -0,024	+0,083 -0,018 +0,007	+0,136 -0,010 +0,037	+0,186 +0,016 +0,002	+0,246 +0,062 -0,110	+0,310 +0,118 -0,243	+0,381 +0,180 -0,329	+0,455 +0,250 -0,364	+0,533 +0,332 -0,387	+0,614 +0,430 -0,497	+0,700 +0,549 -0,763	+0,738 +0,681 -1,145	+0,874 +0,816 -1,436	+0,946 +0,926 -1,202	+0,988 +0,987 -0,404	+1,000 +1,000 +1,000
$\frac{X_y^{реб.}}{q}$	$\pm 1,0$	0	+0,009	+0,007	-0,026	-0,064	-0,110	-0,170	-0,254	-0,364	-0,494	-0,630	-0,763	-0,895	-1,055	-1,202	-1,622	-2,000
$\frac{y_x}{q}$	$\pm 0,5$ $\pm 1,0$	0 0	+0,110 -0,021	+0,137 +0,075	+0,159 +0,137	+0,194 +0,166	+0,232 +0,206	+0,263 +0,283	+0,285 +0,389	+0,306 +0,488	+0,334 +0,543	+0,374 +0,541	+0,414 +0,518	+0,431 +0,558	+0,390 +0,753	+0,269 +1,131	+0,093 +1,518	-0,015 +1,327
	$x/a$	1	$7/8$	$8/9$	$5/8$	$4/8$	$3/8$	$2/8$	$1/8$	0	$-1/8$	$-2/8$	$-3/8$	$-4/8$	$-5/8$	$-6/8$	$-7/8$	-1
$\frac{X_x}{q}$	$y/b$																	
$\frac{X_x}{q}$	-1	+0,325	+0,512	+0,660	+0,681	+0,673	+0,667	+0,666	+0,669	+0,670	-0,669	+0,666	+0,667	+0,673	+0,681	+0,660	+0,512	+0,325
$\frac{N_a}{aq}$	-1	0	+0,100	+0,132	+0,138	+0,135	+0,132	+0,131	+0,132	+0,134	+0,132	+0,131	+0,132	+0,135	+0,138	+0,132	+0,100	0
$\frac{X_y}{q}$	-1	+1,327	+0,439	+0,095	-0,004	-0,015	-0,005	+0,002	+0,003	0	+0,003	+0,002	-0,005	-0,015	-0,004	+0,095	+0,439	+1,327





## ЛИТЕРАТУРА

1. Алликас Л. А. Расчет балок-стенок, опирающихся на торцевые ребра. Труды Таллинского политехнического института, № 147, 1958.
2. Алликас Л. А. Несущая способность железобетонных балок-стенок. Труды Таллинского политехнического института, № 65, 1955.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
1. Соонурм Э. Ю. Расчет тонкостенных стержней многозамкнутого сечения на кручение. . . . .	3
2. Нигул У. К. Некоторые результаты исследования уравнений собственных колебаний упругой кругоцилиндрической оболочки. . . . .	19
3. Нигул У. К. Колебание кругоцилиндрической упругой оболочки, вызванное действием сосредоточенного импульса.	37
4. Алликас Л. А. О расчете упругой армированной балки-стенки, опирающейся на торцевые ребра . . . . .	59

---

Рукописи сборника поступили в редакцию 27 января 1960 г.

---

### СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ II

\*

Таллинский Политехнический Институт

Редактор **Х. Лаул**

Технический редактор **А. Тамм**

Корректор **М. Каска**

Сдано в набор 4 II 1960. Подписано к печати 24 III 1960. Печатных листов 4,5. По формату 60×92 печатных листов 3,48. Учетно-издательских листов 2,73. Тираж 500. МВ-02409. Заказ № 864.

Типография «Коммунист», ул. Пикк 2, Таллин

Цена 1 руб. 95 коп.





Руб. 1.95

С 1. 1961. г.

Цена ..... р. 20 ..... к.