

Р. К. РЯЯМЕТ

**ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ  
ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ  
КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛОЧЕК**

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
ТАЛЛИН, 1958



Р. К. РЯЯМЕТ

**ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ  
ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ  
КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
ТАЛЛИН, 1958

Ер. 2298  
~~P37 822~~



Р. К. Ряямет

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ  
КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕ-  
СКИХ ОБОЛОЧЕК

Издательство  
Таллинского Политехнического Института

\*

Редактор Э. Соонурм  
Технический редактор А. Тамм  
Корректор К. Оллик

Сдано в набор 29 03 58 Подписано к печати 21 IV 58 Бумага  
54×84 1/16. Печатных листов 1,0. По формату 60×92 печатных  
листов 0,82. Учетно-издательских листов 0,58. Тираж 800.  
МВ-03125. Заказ № 2253.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк 2.

Цена 45 коп.

## ВВЕДЕНИЕ

Теоретические исследования, основанные на применении классической теории малых перемещений, обычно дают по сравнению с опытными данными повышенные критические нагрузки. Первая попытка выяснить причины расхождения опытных и теоретических исследований была сделана в 1934 г. Л. Х. Доннелем [1]. При исследовании состояний равновесия Доннель ввел понятие о больших перемещениях с учетом отклонения формы оболочки от правильной геометрической формы.

Такой путь исследования применялся также в работе Доннеля и С. С. Уана [2] и несколько позже в работе П. Сикала [3] при решении задачи потери устойчивости цилиндрической оболочки при осевом давлении. Т. Т. Ло [4] распространил вышеупомянутую нелинейную теорию на случай кручения, а В. А. Наш [5] — на исследование потери устойчивости тонких цилиндрических оболочек, находящихся под действием внешнего гидравлического давления.

Доннель, Уан и Наш принимали во внимание только те составляющие отклонения от правильной формы оболочки, которые с точностью до некоторого множителя совпадают с составляющими перемещения, обусловленными внешней нагрузкой.

Начальные отклонения оболочки от правильного цилиндра учитывались так называемым коэффициентом неровностей, значение которого назначается на основе экспериментальных исследований, в зависимости от вида загрузки.

Несовершенство оболочки выражается: 1) в начальных отклонениях от правильной геометрической формы, 2) в начальных напряжениях, 3) в отклонениях от однородного, изотропного и упругого материала и 4) в случайных отклонениях.

Доннель и Уан, а также Наш отмечают, что первые три являются свойствами образца и «эквивалентное отклонение» дает в какой-то мере такой-же эффект, как все три указанных отклонения вместе.

Так как вплоть до настоящего времени влияние начальных напряжений в литературе отдельно не рассматривалось, то целью настоящей работы является исследование вопроса, как влияют начальные напряжения на критическую нагрузку круговых цилиндрических оболочек, находящихся под действием равномерно распределенного внешнего давления.

Исследуемая оболочка состоит из двух полуцилиндров, которые соединяются друг с другом вдоль образующих.

Предполагается, что возникающие при соединении полуцилиндров напряжения одинаковы у обеих швов.

Начальное напряженное состояние определяется по упрощенной теории обобщенного краевого эффекта [6]. Значения критической нагрузки находятся при помощи энергетического метода.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Предположим, что начальное напряженное состояние является либо симметрическим, либо кососимметрическим относительно плоскости, которая пересекает цилиндр по швам. При определении начального напряженного состояния рассмотрим одну половину цилиндра с радиусом  $R$ , длиной  $L$  и толщиной  $Rt$ . Координатными линиями приняты образующие ( $R\xi$ ,  $\theta = \text{конст.}$ ) и круги ( $\xi = \text{конст.}$ ,  $\theta$ ) на срединной поверхности оболочки,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Невыродившиеся обобщенные краевые эффекты цилиндрической оболочки средней приведенной длины определяются интегрированием следующего известного упрощенного уравнения

$$\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \theta^8} + (1 - \nu^2) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0, \quad (1.1)$$

где  $a^2 = t^2/12$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона и  $\Phi$  — рассматривается как потенциальная функция [6].

В дальнейшем исследуем напряженное и деформационное состояние, где потенциальная функция представлена в виде

$$\Phi = \psi(\theta) \sin k\xi, \quad (1.2)$$

где

$$k = \frac{\pi R}{L} \quad (1.3)$$

В этом случае уравнение (1.1) допускает решение

$$\psi = A e^{x\theta} \quad (1.4)$$

и для определения  $x$  для оболочек средней длиной  $a^{1/2} \ll k \ll a^{-1/2}$  получим характеристическое уравнение

$$x^8 + \frac{1-v^2}{a^2} k^4 = 0. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) имеет восемь корней  $x_j$

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_1 + i\nu_1, & x_2 &= \mu_1 - i\nu_1, & x_3 &= -\mu_1 - i\nu_1, \\ x_4 &= -\mu_1 + i\nu_1, & x_5 &= \mu_2 + i\nu_2, & x_6 &= \mu_2 - i\nu_2, \\ x_7 &= -\mu_2 - i\nu_2, & x_8 &= -\mu_2 + i\nu_2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \nu_2 = 0,9239 k^{0,5} \lambda^{-0,25} \\ \mu_2 &= \nu_1 = 0,3827 k^{0,5} \lambda^{-0,25} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\lambda^2 = t^2/12 (1-v^2) \quad (1.8)$$

и, в соответствии с этим, получим восемь линейно независимых решений

$$\Phi_j = C_j e^{x_j \theta} \sin k\xi \quad (j=1, 2 \dots 8). \quad (1.9)$$

Каждое такое решение  $\Phi_j$  уравнения (1.1) определяет некоторое напряженное состояние круговой открытой оболочки, которая свободно оперта на поперечных диафрагмах  $\xi=0$ ,  $\xi=1=L/R$  и не нагружена по поверхности.

Предположим, что начальное напряженное состояние и краевые условия относительно средней образующей оболочки  $\Theta = \pi/2$  симметрические.

При этом предположении

$$C_5 = -C_1, C_6 = C_2, C_7 = -C_3, C_8 = C_4 \quad (1.10)$$

и выражения для внутренних усилий можем представить в виде

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,7071 Et \lambda^{-0,5} k^3 \left[ - (C_1 - C_2) f_{11}^1 + (C_1 + C_2) f_{11}^2 + \right. \\ &\quad + (C_1 - C_2) f_{12}^1 + (C_1 + C_2) f_{12}^2 + \\ &\quad + (C_3 + C_4) f_{21}^1 + (C_3 - C_4) f_{21}^2 - \\ &\quad \left. - (C_3 + C_4) f_{22}^1 + (C_3 - C_4) f_{22}^2 \right] \\ T_2 &= Et k^4 \left[ C_1 (f_{11}^1 - f_{12}^1) - C_2 (f_{11}^2 + f_{12}^2) + \right. \\ &\quad \left. + C_3 (f_{21}^1 - f_{22}^1) - C_4 (f_{21}^2 + f_{22}^2) \right] \\ M_2 &= 0,7071 Et R \lambda^{0,5} k^3 \left[ - (C_1 + C_2) f_{11}^1 - (C_1 - C_2) f_{11}^2 + \right. \\ &\quad + (C_1 + C_2) f_{12}^1 - (C_1 - C_2) f_{12}^2 + \\ &\quad + (C_3 - C_4) f_{21}^1 - (C_3 + C_4) f_{21}^2 - \\ &\quad \left. - (C_3 - C_4) f_{22}^1 - (C_3 + C_4) f_{22}^2 \right] \quad (1.11) \\ S &= 0,9239 Et \lambda^{-0,25} k^{3,5} \left[ (C_1 - 0,4142 C_2) (f_{11}^1 + f_{12}^1) - \right. \\ &\quad - (0,4142 C_1 + C_2) (f_{11}^2 - f_{12}^2) + \\ &\quad + (0,4142 C_3 - C_4) (f_{21}^1 + f_{22}^1) - \\ &\quad \left. - (C_3 + 0,4142 C_4) (f_{21}^2 - f_{22}^2) \right] \\ N_2 &= 0,9239 Et \lambda^{0,25} k^{3,5} \left[ - (C_1 + 0,4142 C_2) (f_{11}^1 + f_{12}^1) - \right. \\ &\quad - (0,4142 C_1 - C_2) (f_{11}^2 - f_{12}^2) - \\ &\quad - (0,4142 C_3 + C_4) (f_{21}^1 + f_{22}^1) - \\ &\quad \left. - (C_3 - 0,4142 C_4) (f_{21}^2 - f_{22}^2) \right], \end{aligned}$$

где  $E$  — модуль упругости

$$f_{mn}^1 = \sin k\xi \cdot \sin \nu_m (\theta_n - \theta) \cdot e^{-\mu_m (\theta_n - \theta)}$$

$$f_{mn}^2 = \sin k\xi \cdot \cos \nu_m (\theta_n - \theta) \cdot e^{-\mu_m (\theta_n - \theta)}$$

В выражении  $S$  ставить вместо  $\sin k\xi$  —  $\cos k\xi$ .

Принимая в этих формулах (1.11)  $\theta = \theta_1 = \pi$ , получим внутренние усилия начального напряженного состояния на крае  $\theta = \theta_1$

$$T_2^1 = -Etk^4(C_2 + C_4)$$

$$M_2^1 = -0,7071 EtR \lambda^{0,5} k^3 (C_1 - C_2 + C_3 + C_4)$$

$$N_2^1 = -0,9239 Et \lambda^{0,25} k^{3,5} (0,4142 C_1 - C_2 + C_3 - 0,4142 C_4) \quad (1.12)$$

$$S^1 = -0,9239 Et \lambda^{-0,25} k^{3,5} (0,4142 C_1 + C_2 + C_3 + 0,4142 C_4)$$

Далее обозначаем

$$\begin{aligned} T_2^1 &= Et k^4 T_2^{1*}, & M_2^1 &= Et R \lambda^{0,5} k^3 M_2^{1*} \\ N_2^1 &= Et \lambda^{0,25} k^{3,5} N_2^{1*}, & S^1 &= Et \lambda^{-0,25} k^{3,5} S^{1*} \end{aligned} \quad (1.13)$$

и определяем постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  в четырех отдельных случаях

1.  $T_2^{1*} = 1, M_2^{1*} = 0, N_2^{1*} = 0, S^{1*} = 0$
2.  $T_2^{1*} = 0, M_2^{1*} = 1, N_2^{1*} = 0, S^{1*} = 0$
3.  $T_2^{1*} = 0, M_2^{1*} = 0, N_2^{1*} = 1, S^{1*} = 0$
4.  $T_2^{1*} = 0, M_2^{1*} = 0, N_2^{1*} = 0, S^{1*} = 1$ ,

суммируя которые, получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= 4,1215 T_2^{1*} - 2,4143 M_2^{1*} - 2,2305 S^{1*} + 4,0782 N_2^{1*} \\ C_2 &= 0,7071 T_2^{1*} - 0,9239 S^{1*} + 0,9239 N_2^{1*} \\ C_3 &= -1,7072 T_2^{1*} + 1,0000 M_2^{1*} + 0,3827 S^{1*} - 2,2304 N_2^{1*} \\ C_4 &= -1,7071 T_2^{1*} + 0,9239 S^{1*} - 0,9239 N_2^{1*} \end{aligned} \quad (1.15)$$

## 2. ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ НА КРИТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

При определенном значении нагрузки изменение потенциальной энергии при переходе оболочки от осесимметрического состояния равновесия в неосесимметрическое состояние можно определить следующей формулой

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} EtR^3 \int_0^{L/R} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right)^2 + \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{T_2}{EtR} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta d\xi + R^2 \int_0^{L/R} \int_0^\pi \left[ T_1^0 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ & \left. + T_2^0 \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + 2S^0 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] d\theta d\xi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $F$  — функция напряжения;  $T_1^0$ ,  $T_2^0$ ,  $S^0$  — касательные усилия начального напряженного состояния  $w$  — функция прогиба;

$$T_2 = -pR = -EtRq, \quad (2.2)$$

где  $p$  — равномерное наружное давление и  $T_2$  — касательные усилия в направлении параллели, вызванные наружным давлением.

Первый интеграл в формуле (2.1) совпадает с формулой (4.19) работы [7], второй же интеграл принимает во внимание начальные внутренние усилия.

Условием стационарности функционала  $\Pi$  является

$$\delta \Pi = 0, \quad (2.3)$$

причем в функционале  $\Pi$  допускается для сравнения периодические относительно  $\theta$  функции  $w$ , удовлетворяющие при  $\xi=0$ ,  $\xi=L/R$  краевому условию

$$w = 0, \quad (2.4)$$

а также периодические относительно  $\theta$  функции  $F$ , которые определяются сравниваемыми функциями  $w$  при помощи следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0. \quad (2.5)$$

Функции прогибов  $w$  и напряжений  $F$  ищем в виде

$$\begin{aligned} w(\xi, \theta) &= w_1(\xi) \cos s\theta + w_2(\xi) \sin s\theta, \\ F(\xi, \theta) &= F_1(\xi) \cos s\theta + F_2(\xi) \sin s\theta, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $s$  — целое число.

Подставляя выражения прогибов и функции напряжения (2.6) в формулу (2.1), получим для изменения потенциальной энергии выражение

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\pi}{2} E t R^3 \int_0^{L/R} \{ S^4 [ F_1^2 + F_2^2 + \lambda^2 (w_1^2 + w_2^2) ] - \\ &- q s^2 (w_1^2 + w_2^2) \} d\xi + R^2 \int_0^{L/R} \int_0^\pi \{ T_1^0 [(w_1')^2 \cos^2 s\theta + \\ &+ (w_2')^2 \sin^2 s\theta] + T_2^0 s^2 [ w_1^2 \sin^2 s\theta + \\ &+ w_2^2 \cos^2 s\theta ] \} d\theta d\xi, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $F_1, F_2$  удовлетворяет условиям

$$s^4 F_1 + w_1'' = 0, \quad s^4 F_2 + w_2'' = 0. \quad (2.8)$$

В формулах (2.7), (2.8) штрихом обозначается дифференцирование по  $\xi$

$$(\dots)' = \frac{d}{d\xi} (\dots). \quad (2.9)$$

Вводим новые переменные

$$s^2 = \frac{\pi R}{L} \lambda^{0,5} r^2, \quad w = \frac{L}{\pi R} \lambda^{0,5} x, \quad q = \frac{\pi R}{L} \lambda^{1,5} \sigma$$

$$\xi = \frac{L}{\pi R} \eta, \quad (\dots)' = \frac{d}{d\xi} (\dots) = \frac{\pi R}{L} \frac{d}{d\eta} (\dots) = \frac{\pi R}{L} (\dots)''$$

а также начальные внутренние усилия  $T_1^0, T_2^0, S^0$  (1.11) в формуле (2.7). Учитывая кроме того формулы (1.3), (1.7), имеем выражение потенциальной энергии в виде

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} E t R^2 L \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{r^4} [ (x_1'')^2 + (x_2'')^2 ] + \right. \\ &+ r^2 (r^2 - t) (x_1^2 + x_2^2) \} d\eta + \\ &+ E t R^2 \left( \frac{\pi R}{L} \right)^{1,5} \lambda^{0,75} \int_0^\pi \left\{ \frac{3}{2} [ A(x_1')^2 + B(x_2')^2 ] + \right. \\ &+ \frac{3}{4} [ Cx_1^2 + Dx_2^2 ] \} \sin \eta d\eta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$A = C_1 [0,2551 + (0,4355 + 0,6667r + 1,7421r^2 + 3,7712r^3) f_1^{-1}] + \\ + C_2 [0,6159 + (0,4355 - 0,6667r + 1,7421r^2 - 3,7712r^3) f_1^{-1}] + \\ + C_3 [0,6159 + (0,1804 + 0,6667r + 0,7216r^2 - 3,7712r^3) f_2^{-1}] + \\ + C_4 [0,2551 - (0,1804 - 0,6667r + 0,7216r^2 + 3,7712r^3) f_2^{-1}].$$

$$B = C_1 [0,2551 - (0,2551 + 2,4637r^2) f_1^{-1}] + \\ + C_2 [0,6159 - (0,6159 + 1,0205r^2) f_1^{-1}] + \\ + C_3 [0,6159 - (0,6159 - 1,0205r^2) f_2^{-1}] + \\ + C_4 [0,2551 - (0,2551 - 2,4637r^2) f_2^{-1}]$$

$$C = r^2 \{ C_1 [0,5102 - (0,5102 - 2,0410r^2) f_1^{-1}] - \\ - C_2 [1,2318 - (1,2318 + 4,9274r^2) f_1^{-1}] + \\ + C_3 [1,2318 - (1,2318 - 4,9274r^2) f_2^{-1}] - \\ - C_4 [0,5102 - (0,5102 + 2,0410r^2) f_2^{-1}] \}$$

$$D = r^2 \{ C_1 [0,5102 - r(1,8856 + 10,6667r^2) f_1^{-1}] - \\ - C_2 [1,2318 + (1,2318 + 4,9274r^2) f_1^{-1}] + \\ + C_3 [1,2318 + r(1,8856 - 10,6667r^2) f_2^{-1}] - \\ - C_4 [0,5102 + (0,5102 + 2,0411r^2) f_2^{-1}] \}$$

$$f_1 = 1 + 5,6569 + 16r^4 \\ f_2 = 1 - 5,6569 + 16r^4.$$

(2.11)

Примем в выражении потенциальной энергии (2.10)

$$x_1 = a_1 \sin \gamma, \quad x_2 = b_1 \sin \gamma \quad (2.12)$$

и интегрируем по  $\eta$ . Тогда выражение изменения потенциальной энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{4} \pi E t R^2 L \lambda^2 \left[ \frac{1}{r^4} (\alpha_1^2 + b_1^2) + \right. \\ & \left. + r^2 (r^2 - \tau) (\alpha_1^2 + b_1^2) \right] + E t R^2 \left( \frac{\pi R}{L} \right)^{1,5} \lambda^{0,75} \cdot \\ & \cdot [(A+C) \alpha_1^2 + (B+D) b_1^2]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Условие (2.3) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = & 2 E t R^2 \lambda^{0,75} \left\{ \frac{\pi}{4} L \lambda^{1,25} \left[ \frac{1}{r^4} + r^2 (r^2 - \tau) \right] + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\pi R}{L} \right)^{1,5} [A + C] \right\} \alpha_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial b_1} = & 2 E t R^2 \lambda^{0,75} \left\{ \frac{\pi}{4} L \lambda^{1,25} \left[ \frac{1}{r^4} + r^2 (r^2 - \tau) \right] + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\pi R}{L} \right)^{1,5} [B + D] \right\} b_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из уравнений (2.14), (2.15) выражаем критическое значение параметра загрузки  $\tau$

$$\tau_{кр} = r^2 + \frac{1}{r^6} + 4 \pi^{0,5} \left( \frac{R}{L} \right)^{2,5} \lambda^{-1,25} \frac{1}{R r^2} (A + C) \quad (2.16)$$

$$\tau_{кр} = r^2 + \frac{1}{r^6} + 4 \pi^{0,5} \left( \frac{R}{L} \right)^{2,5} \lambda^{-1,25} \frac{1}{R r^2} (B + D). \quad (2.17)$$

Уравнение (2.16) соответствует симметрическому состоянию деформации, а (2.17) — кососимметрическому, относительно плоскости, пересекающей оболочку по швам.

Учитывая выражения (2.2) и (2.9), получаем формулы критического усилия и напряжения

$$T_{2кр} = - E t R \lambda^{1,5} \frac{\pi R}{L} \tau_{кр} \quad (2.18)$$

$$\sigma_{2кр} = - E \lambda^{1,5} \frac{\pi R}{L} \tau_{кр}. \quad (2.19)$$

Таблица 1

L/R		2				4				6				8				
		$t$	$\sigma_2^2$ кг./см <sup>2</sup>	$\sigma_{кр}$	$\Delta\sigma$	$\sigma/\sigma^0/\sigma$	$r^2$	$\sigma_{кр}$	$\Delta\sigma$	$\sigma/\sigma^0/\sigma$	$r^2$	$\sigma_{кр}$	$\Delta\sigma$	$\sigma/\sigma^0/\sigma$	$r^2$	$\sigma_{кр}$	$\Delta\sigma$	$\sigma/\sigma^0/\sigma$
0,002	50	0,002	86,2	2,74	3,2	1,3	43,1	3,87	9,0	1,3	28,7	4,95	17,2	1,2	21,6	5,89	27,3	1,2
	100		1,3	5,48	6,4	1,3	8,14	18,9	1,2	10,29	35,8	1,2	13,21	61,2	1,0	13,21	61,2	1,0
0,004	50	0,004	244	3,27	1,3	122	4,61	3,8	1,3	81,3	5,65	7,0	1,3	60,9	6,51	10,7	1,3	
	100		1,3	6,51	2,7	1,3	9,22	7,5	1,3	10,98	13,5	1,2	13,84	22,7	1,2	13,84	22,7	1,2
0,006	50	0,006	488	3,61	0,8	224	5,11	2,3	1,3	149	6,25	4,2	1,3	112	7,21	6,4	1,3	
	100		1,3	7,21	1,6	1,3	10,19	4,6	1,3	12,46	8,4	1,3	14,73	13,1	1,2	14,73	13,1	1,2
0,008	50	0,008	690	3,88	0,6	345	5,49	1,6	1,3	230	6,72	2,9	1,3	172	7,74	4,5	1,3	
	100		1,3	7,76	1,1	1,3	10,97	3,2	1,3	13,43	5,8	1,3	15,46	9,0	1,3	15,46	9,0	1,3
0,010	50	0,010	964	4,10	0,4	482	5,78	1,2	1,3	321	7,09	2,2	1,3	241	8,19	3,4	1,3	
	100		1,3	8,19	0,8	1,3	11,57	2,4	1,3	14,19	4,4	1,3	16,39	6,8	1,3	16,39	6,8	1,3

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$ , определяющие начальное напряженное состояние, вычислены по формуле (1.13) и (1.15) для следующих случаев:

- 1) в местах соединения полуцилиндров максимальное начальное кольцевое напряжение  $\sigma_2^0 = -50$  кг/см<sup>2</sup>;
- 2) то же при  $\sigma_3^0 = -100$  кг/см<sup>2</sup>;
- 3) изгибные нормальные напряжения, возникающие от поперечного изгибающего момента  $M_2^0$ ,  $\sigma_2^0 = \pm 100$  кг/см<sup>2</sup>;
- 4) максимальные касательные напряжения  $N_2^0 / Rt = 10$  кг/см<sup>2</sup>, вызванные поперечной силой и
- 5) наибольшие напряжения  $S^0 / Rt = 100$  кг/см<sup>2</sup>, возникающие от сдвигающей силы.

Подставив полученные константы в выражения (2.11), (2.16), (2.17), найдем минимальные значения параметра нагрузки  $\tau$ , соответствующие этим постоянным.

По формуле (2.19) определим критическое напряжение. Вычисления произведены при следующих соотношениях длины и радиуса оболочки:  $L/R = 2, 4, 6, 8$  и при следующих относительных толщинах:  $t = 0,002; 0,004; 0,006; 0,008; 0,010$ . Результаты представлены в таблицах 1 и 3.

Рассмотрим теперь оболочки, для которых критические напряжения, возникающие от равномерно распределенного внешнего давления, без учета влияния начального напряжения, будут следующими: а)  $\sigma_{2,кр} = -50$  кг/см<sup>2</sup> и б)  $\sigma_{2,кр} = -100$  кг/см<sup>2</sup>, т. е. равными максимальным начальным напряжениям для первого и второго случаев.

В таблице 2 приведены данные по уменьшению критических напряжений ( $\Delta\sigma$ ) оболочек разной длины для двух вышеназванных случаев.

Таблица 2

L/R		2	4	6	8
Уменьшение критического напряжения $\Delta\sigma$ %%	1)	5,1	8,3	10,7	13,4
	2)	5,9	9,2	11,8	14,8

Таблица 3

L/R	2				4				6				8					
	$t$	$\sigma_{кр}$	$\sigma\Delta$	$\varphi/\%$	МАКС. $\sigma_{20}^0$	$\sigma_{кр}$	$\sigma\Delta$	$\varphi/\%$	МАКС. $\sigma_{20}^0$	$\sigma_{кр}$	$\sigma\Delta$	$\varphi/\%$	МАКС. $\sigma_{20}^0$	$\sigma_{кр}$	$\sigma\Delta$	$\varphi/\%$	МАКС. $\sigma_{20}^0$	
0,002	$N_2^0$	10,1	11,7	62	10,1	23,4	46	10,1	35,2	38	10,1	46,9	31,5	10,1	46,9	31,5	10,1	46,9
	$S_0^0$ $M_2^0$	86,2	0,74 0,054	3,5 0,40	43,1	1,72 0,09	3,0 0,20	0,74 0,039	28,7	2,58 0,108	2,4 0,11	0,74 0,031	3,44 0,12	21,6	0,74 0,027	2,5 0,10	2,4 0,11	2,4 0,11
0,004	$N_2^0$	10,1	4,1	56	10,1	8,3	41	10,1	12,4	32	10,1	16,6	29,5	10,1	16,6	29,5	10,1	16,6
	$S_0^0$ $M_2^0$	244	0,43 0,04	4,0 0,49	121,9	0,86 0,05	4,0 0,31	1,05 0,062	81,3	1,29 0,07	3,2 0,15	1,05 0,057	1,72 0,07	60,9	1,05 0,045	2,6 0,22	3,2 0,15	3,2 0,15
0,006	$N_2^0$	10,1	2,3	54	10,1	4,5	35	10,1	6,8	30	10,1	9,0	26,5	10,1	9,0	26,5	10,1	9,0
	$S_0^0$ $M_2^0$	448	0,28 0,03	5,2 0,66	224	0,57 0,04	4,9 0,32	1,29 0,050	149,3	0,86 0,05	3,9 0,31	1,28 0,076	1,15 0,06	112,0	1,29 0,064	2,2 0,34	3,9 0,31	3,9 0,31
0,008	$N_2^0$	10,1	1,5	47	10,1	2,9	32	10,1	4,4	29	10,1	5,9	22,5	10,1	5,9	22,5	10,1	5,9
	$S_0^0$ $M_2^0$	690	0,22 0,02	6,2 0,84	345	0,43 0,03	6,0 0,32	1,47 0,117	230	0,64 0,04	3,3 0,46	1,48 0,092	0,86 0,05	172,4	1,48 0,079	1,7 0,51	3,3 0,46	3,3 0,46
0,010	$N_2^0$	10,1	1,0	44	10,1	2,1	30	10,1	3,1	27	10,1	4,2	20	10,1	4,2	20	10,1	4,2
	$S_0^0$ $M_2^0$	964	0,17 0,02	8,1 1,00	482	0,34 0,3	6,3 0,41	1,65 0,135	321	0,52 0,03	3,0 0,57	1,67 0,109	0,69 0,04	241	1,66 0,096	1,9 0,44	3,0 0,57	3,0 0,57

Из таблицы 2 видно, что в первом и во втором случае начальные напряжения влияют на критические напряжения при более длинных оболочках больше, чем при коротких.

В третьем случае уменьшение критического напряжения незначительное (менее одного процента).

В четвертом случае уменьшение критического напряжения будет  $\Delta\sigma = 10,1$  кг/см<sup>2</sup>. Таким образом можно сказать, что уменьшение критического напряжения не зависит от толщины и длины оболочки.

В пятом случае, как это показывают результаты вычислений (таблица 4), уменьшение критического напряжения не зависит от длины оболочки, но зависит от относительной толщины оболочки.

Таблица 4

t	0,002	0,004	0,006	0,008	0,010
$\Delta\sigma$ кг/см <sup>2</sup>	0,74	1,05	1,28	1,48	1,66

Вычислены кольцевые напряжения  $\sigma_2^0$  в сечениях оболочки через  $15^\circ$ , возникающие в третьем случае от начального изгибающего момента  $M_2^0$ , в четвертом случае от поперечной силы  $N_2^0$  и в пятом случае от сдвигающей силы  $S^0$ . На основе результатов вычислений составлены графики и с их помощью определены наибольшие сжимающие напряжения  $\sigma_2^0$ , представленные также в таблицах 1, 3. Наибольшие напряжения в третьем случае  $\sigma_2^0 = -1,0$  кг/см<sup>2</sup>, в четвертом случае  $\sigma_2^0 = -62$  кг/см<sup>2</sup> и в пятом случае  $\sigma_2^0 = -8,1$  кг/см<sup>2</sup>. Соответственно их величинам, уменьшились и критические напряжения.

Таким образом, на основе приведенных результатов вычислений можно сказать, что влияние начального напряженного состояния на критическую нагрузку зависит главным образом от кольцевых напряжений начального напряженного состояния.

В общем итоге результаты работы нижеследующие.

Пусть

$\sigma_2^0$  — максимальное мембранное кольцевое напряжение соответствующее начальному напряженному состоянию обобщенного краевого эффекта;

$\sigma_{кр}$  — критические значения мембранно-кольцевого напряжения в случае равномерного внешнего давления на оболочку, не имеющую начальных напряжений;

$\sigma_{кр}^{\circ}$  — критическое значение мембранно-кольцевого напряжения, возникающее от внешней нагрузки и рассчитанное по безмоментальной теории.

На основе результатов вычислений можно дать соотношение

$$\sigma_{кр}^{\circ} = \sigma_{кр} \left( 1 - k \frac{\sigma_2^{\circ}}{\sigma_{кр}} \right)$$

где  $k$  зависит от относительной длины и толщины оболочки.

При очень тонких ( $t=1/500$ ) и относительно коротких ( $L/R=2$ ) оболочках  $k \approx 0,2$ . При более толстых ( $t=1/100$ ) и длинных ( $L/R=6$ ) оболочках  $k$  может достигать 0,4 (см. табл. 3).

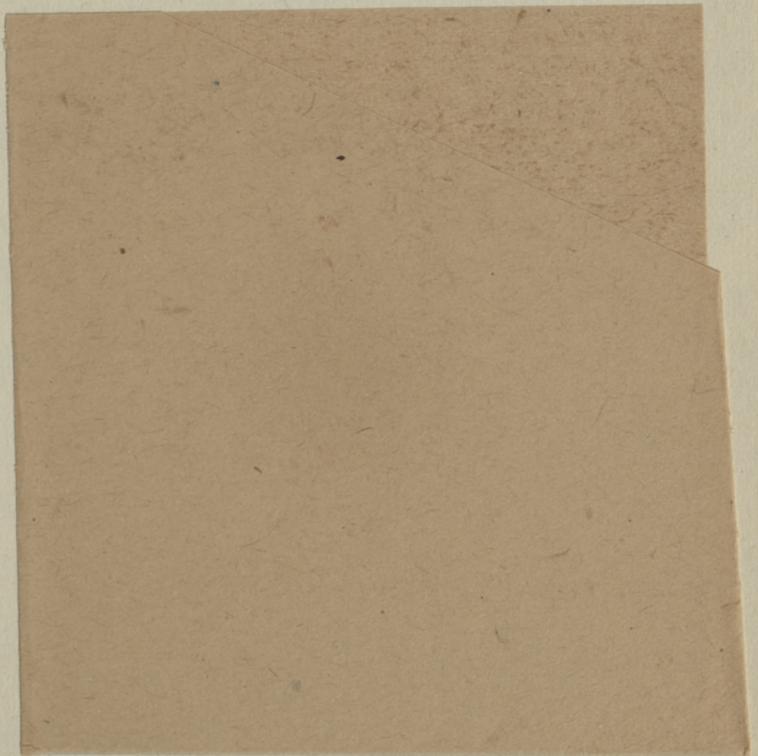
Отсюда следует, что несмотря на быстрое изменение начального напряженного состояния, влияние начального напряжения на критическую нагрузку все же значительное.

Следует добавить, что критическая нагрузка вычислена сравнительно неточно и нет оснований считать, что выражения (2.6) хорошо аппроксимируют определяемые величины при достаточно сложном состоянии начального напряженного состояния. Выражениями же (2.6) системе добавлены дополнительные связи, которые искусственно повышают критическую нагрузку; таким образом величины  $k$ , вычисленные на основе таблицы, оказываются меньше действительных.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Donnell L. H. Trans. ASME 56, 795. 1934.
2. Donnell L. H., Wann C. C. Journal of Applied Mechanics, Vol. 7, N 1, 1950.
3. Cicala P. Quartely of Applied Mathematics. Vol. IX, N 3, 1951.
4. Loo T. T. Doctoral dissertation. Illinois Institute of Technology, 1952.
5. Nash W. A. Journal of the Aeronautical Sciences, April 1955.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек, 1953.
7. Алумяэ Н. А. Прикладная математика и механика. Том XVII, вып. 5, 1953.





Цена 45 коп.