

Ер. 6.7

Х. Х. ЛАУЛЬ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА  
КАСТИЛЬЯНО-РИТЦА К РАСЧЁТУ  
ДЛИННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК

ENSV Teaduste Akadeemia  
Keskraamatukogu

-50  
6493



ЭСТОНСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ТАЛЛИНН 1950 ТАРТУ



## 1. Введение.

Расчёты длинных цилиндрических оболочек по точным методам очень трудоёмки, требуют большой вычислительной работы, очень чувствительны к ошибкам вычислений и, кроме того, весьма далеки от интуитивной наглядности [2], [7], [9], [11]\*). Вычисления по теории мембран или по другим известным приближённым методам [5], [6], [10] не дают истинной картины действительности.

Метод В. З. Власова [1] можно отнести к числу точных, т. к. он даёт возможность достичь любой степени точности. Но, к сожалению, этот достойный внимания и крайне ценный с методической стороны метод включает в себе некоторые трудности для его практического применения: при составлении уравнений можно легко ошибиться; система уравнений очень чувствительна к погрешностям вычислений (вообще разрешается при помощи арифмометра).

В настоящей работе излагается приближённый метод, т. н. метод аппроксимации сдвигающих сил, по которому вычисления не выходят за пределы интуитивной наглядности и производятся целиком или почти целиком посредством логарифмической линейки.

Предлагаемый метод хотя и не является вполне корректным с точки зрения теории упругости, но зато его численные результаты находятся в очень хорошем соответствии с результатами, получаемыми по точным методам.

В настоящий момент этот метод находится в стадии дальнейшей разработки.

---

\*) Цифры в квадратных скобках указывают на труд, упоминаемый в библиографии.

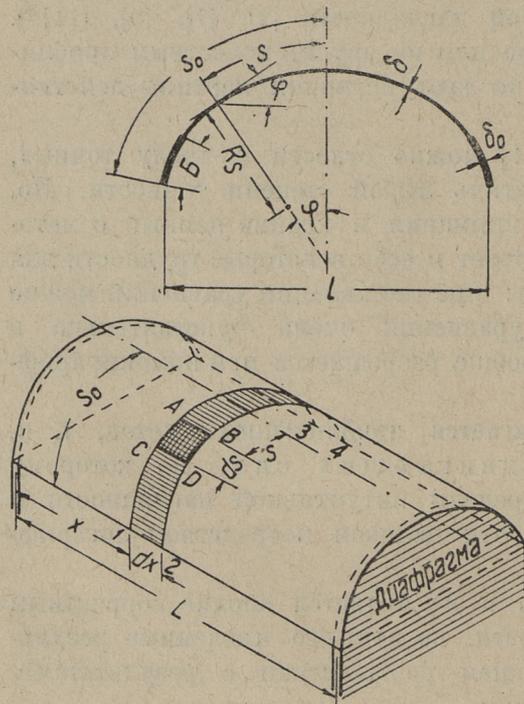
## 2. Общая схема метода.

Длинная цилиндрическая оболочка (черт. 1) с произвольным поперечным сечением (в настоящей работе предполагается симметричность поперечного сечения относительно верхней образующей) несёт нагрузку:

- 1) постоянную относительно оси  $x$ ,
- 2) не имеющую проекции на ось  $x$ ,
- 3) произвольно распределённую вдоль оси  $s$ .

(В настоящей работе вводится ещё одно ограничение, а именно: нагрузка симметрична относительно конька оболочки).

Было бы естественно находить внутренние силы оболочки, исходя из задачи о балке обыкновенной теории сопротивления материалов, т. е. рассматривая оболочку как балку с пролётом  $L$  и с большим, всей оболочке соответствующим



Черт. 1.

поперечным сечением. При этом необходимо допустить справедливость гипотезы плоскостности поперечного сечения. Далее надо было бы предположить, что поперечное сечение не деформируется. Такое допущение вполне обосновано, если толщина оболочки  $\delta$  составляет не меньше, чем около 2% поперечного пролёта  $l$ , или

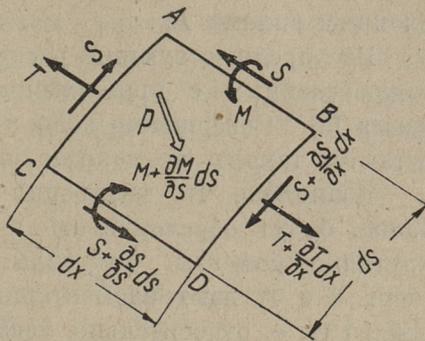
если предвидены особые поперечные диафрагмы. В таком случае применима т. н. теория бимоментов Власова [4]. Обычно встречающиеся в строительной технике оболочки из железобетона имеют соотношение  $l/\delta > 200$ , и поэтому необходимо считаться с большей или меньшей деформацией поперечного сечения.

Таким образом внутренние силы, вычисляемые из задачи о балке, местами значительно различаются от внутренних сил, вычисляемых точными методами. Но, если взять проблему целиком, то результаты задачи о балке всё же представляют собой по крайней мере качественно приближённые решения.

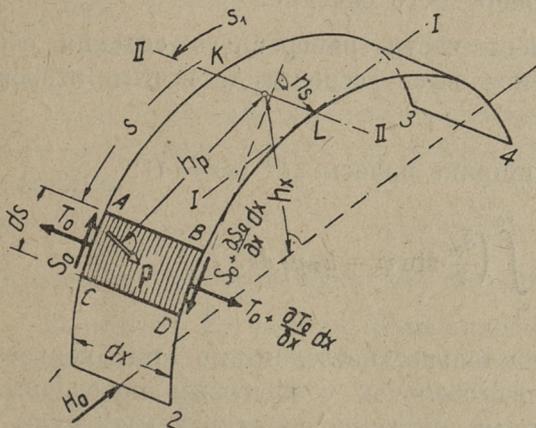
В дальнейшем внутренние силы, находимые из задачи о балке, будут обозначаться индексом „0“.

На чертеже 2 представлены усилия, действующие на элемент оболочки  $A-B-C-D$  (см. черт. 1). Остальные усилия, не изображённые на черт. 2, не влияют на димензионирование оболочки вследствие своей относительной малости, и поэтому ими можно пренебречь в дальнейших рассуждениях.

Поперечные моменты  $M_0(s)$  возникают уже при задаче о балке, как это явствует из рассмотрения равновесия вырезанной полоски 1-2-3-4 (см. черт. 1 и 3). Действительно, приложенные к элементу  $A-B-C-D$  внутренние и внешние силы  $\xi_0(s) = \frac{\partial S_0(s)}{\partial x} dx$  и  $p ds dx$  дают отличный от нуля элементарный изгибающий момент  $dM_0(s_1)$ , взятый относительно какой-либо оси II-II сечения  $s_1$ .



Черт. 2.



Черт. 3.

Вообще говоря, продольные края оболочки (1—2 и 3—4) могут быть подвержены действию ещё некоторых сил  $H_0$  (см. черт. 3), находимых из неопределённой проблемы статики. Конечно, при вычислении момента  $M_0(s)$  нужно считаться с моментом, обусловленным силами  $H_0$ .

Все предшествующие рассуждения приводят нас к результатам, тождественным с приближённым методом Гильман-Пастернака [5]. Совершенно ясно, что при этом методе величины  $S$  и  $T$  остаются такими же, какими они получаются из проблемы о балке.

Возможно, что внутренние силы, находимые из проблемы о балке, будут обуславливать в рассматриваемой полоске также и крутящие моменты. Так силы, действующие на элемент  $A-B-C-D$  (черт. 3 и 4), дают элементарный крутящий момент относительно оси I-I (т. е. относительно касательной к поперечному сечению в точке  $s_1$ ), выражаемый следующим образом:

$$\begin{aligned} dM_{I-I} &= (S_0 ds \sin \psi) dx - \left( \frac{\partial T_0}{\partial x} dx ds \right) h_T = \\ &= \left( S_0 \sin \psi - \frac{\partial T_0}{\partial x} h_T \right) dx ds = \\ &= \frac{\bar{Q}}{\bar{J}_{zz}} \left( \frac{\bar{S}_{0z}}{2} \sin \psi - h_T y \right) dx ds, \end{aligned}$$

где  $\bar{Q}$  — поперечные силы во всей оболочке, как в балке (в разрезе  $x$ ).

$\bar{J}_{zz}$  — момент инерции поперечного сечения оболочки относительно горизонтальной оси  $z-z$ , проходящей через центр тяжести поперечного сечения.

$\bar{S}_{0z}$  — статический момент части поперечного сечения оболочки, находящейся выше сечения  $s$ , взятый относительно оси  $z-z$ .

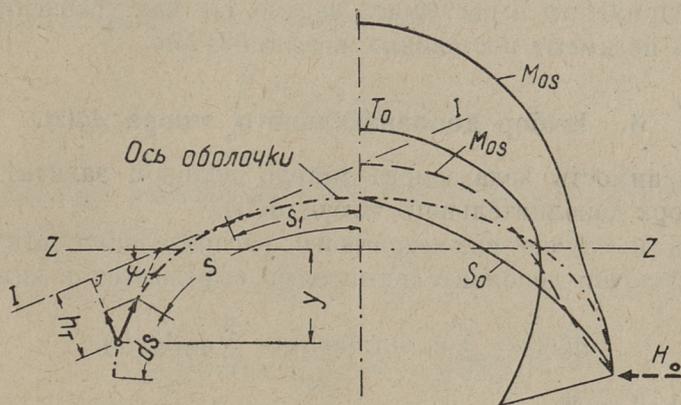
Крутящий момент при ширине полосы „1“ ( $dx = 1$ ):

$$M_{0I-I} = \frac{\bar{Q}}{\bar{J}_{zz}} \int_{s_1}^{s_0} \left( \frac{\bar{S}_{0z}}{2} \sin \psi - h_T y \right) ds.$$

Как показывает более тщательное исследование этого вопроса, крутящие моменты в случае оболочек с круговым поперечным сечением оказываются равными нулю, и почти равными нулю в случае оболочек с произвольным поперечным сечением.

Вообще из задачи о балке вычисляются усилия  $T_0(s)$ ,  $S_0(s)$  и  $M_0(s)$ , качественно представленные на черт. 4 (пунктиром указан случай, когда, например, на продольном ребре оболочки действует статически неопределённая сила  $H_0$ ).

Введём следующее правило знаков: момент  $M(s)$  пусть считается положительным, если он обуславливает растягивающее напряжение на внутренней поверхности оболочки; сила  $T(s)$  — положительна, если она растягивающая; на чертежах 2 и 3 величина  $S(s)$  представлена положительной.



Черт. 4.

На черт. 4 положительные усилия указаны вовнутрь от оси оболочки.

В дальнейшем делается попытка исправить внутренние силы, находимые из задачи о балке, следующим образом.

Представим себе в поперечном сечении некоторый, выраженный пока что в неизвестных параметрах, дополнительный эпюр  $\Delta\zeta(s)$  величины

$$\zeta(s) = \frac{\partial S}{\partial x},$$

являющейся какой-то функцией координаты  $s$ .

Составляя по методу *Кастильяно-Ритца* условия минимума потенциальной энергии внутренних сил всей оболочки, получаем уравнения, определяющие неизвестные параметры. Конечные усилия оболочки находим, суммируя усилия, найденные из задачи о балке, с усилиями, обусловленными величиною  $\Delta\zeta(s)$ .

В настоящей работе рассматриваются только нагрузки, симметрично расположенные относительно конька оболочки.

Предлагаемый метод применим также и для несимметрических конструкций и нагрузок. В таком случае приходится заменить обыкновенную проблему о балке теорией бимоментов Власова [4].

Необходимо отметить, что Уманский, А. А. [8], Рейснер, Е. [12] и др. пользовались методом *Кастильяно-Ритца* при расчётах тонкостенных замкнутых профилей. Применяя вариационные уравнения, приходится решать дифференциальные уравнения *Эйлера-Лагранжа* с постоянными коэффициентами. Такой способ неприменим в настоящей задаче, так как уравнения *Эйлера-Лагранжа* не имеют постоянных коэффициентов.

### 3. Выбор дополнительного эпюра $\Delta\zeta(s)$ .

Применимость излагаемого метода целиком зависит от удачного выбора дополнительного эпюра  $\Delta\zeta(s)$ .

Пусть в случае симметричного распределения относительно конька оболочки дополнительный эпюр выражается в виде

$$\Delta\zeta(s) = \sum_1^n a_m \sin m\pi s/s_0 = \sum_1^n a_m \Delta\zeta_m(s), \quad (1)$$

где  $m = 1, 2 \dots n$ .

Опыты вычислений показывают, что достаточно ограничиться тремя первыми членами, т. е. достаточно взять  $n = 3$ . Таким образом:

$$\Delta\zeta(s) = a_1 \sin \pi s/s_0 + a_2 \sin 2\pi s/s_0 + a_3 \sin 3\pi s/s_0, \quad (1')$$

где  $a_1, a_2, a_3$  — пока неопределённые параметры.

Дополнительный эпюр должен удовлетворять следующим условиям:

а) Вследствие симметрии нагрузки относительно конька оболочки должно иметь место

$$\Delta\zeta(0) = 0. \quad (2)$$

В обычных конструкциях также и вдоль продольного края оболочки:

$$\Delta\zeta(s_0) = 0. \quad (3)$$

Условия (2) и (3) выполняются автоматически, если выбрать  $\Delta\zeta(s)$  в форме (1).

б) Вертикальный результат дополнительного эпюра должен быть равен нулю, т. е.

$$\int_0^{s_0} \Delta\zeta(s) \sin \varphi ds = 0 \quad (4)$$

(значение угла  $\varphi$  следует из черт. 1).

Это условие даёт возможность определить один из параметров, например  $a_1$ , посредством других —  $a_2$  и  $a_3$ .

в) Результат внутренних продольных сил  $\Delta T$ , вызываемых дополнительным эпюром, не должен иметь проекций на оси  $x$ .

Аналитически это условие означает:

$$\int_0^{s_0} \frac{\partial}{\partial s} [\Delta\zeta(s)] ds = 0, \quad (5)$$

т. к. из условий равновесия элемента оболочки, представленного на черт. 2, следует:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial S}{\partial s}$$

или

$$\frac{\partial^2 (\Delta T)}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 (\Delta S)}{\partial s \partial x} = - \frac{\partial}{\partial s} [\Delta\zeta(s)]. \quad (6)$$

Условия (3) и (5) удовлетворяются тождественно выбором эпюра  $\Delta\zeta(s)$  по (1).

г) Результирующий момент дополнительных продольных усилий  $\Delta T$  относительно любой горизонтальной оси должен быть равен нулю.

Нетрудно показать, что это условие тождественно с условием (4).

Если ещё добавить, что в случае выбранного  $\Delta\zeta(s)$  в полоске, представленной на черт. 3, не возникают крутящие моменты для оболочек, имеющих постоянную толщину и с поперечным сечением в виде дуги окружности, и почти не возникают в оболочках с поперечными сечениями, употребляемыми в строительном деле, то следует признать, что предлагаемый выбор  $\Delta\zeta(s)$  в форме (1) является во многих отношениях удачным.

Удачность выбора дополнительного эпюра в форме (1) подчёркивается ещё тем обстоятельством, что функции, фигурирующие в разложениях  $\Delta\zeta(s)$  и  $\partial[\Delta\zeta(s)]/\partial s$ , при интегрировании по поперечному сечению являются ортогональными в случае поперечного

сечения без бортовых элементов и почти ортогональными в случае других, обычных поперечных сечений. Это обстоятельство значительно облегчает интегрирование при нахождении потенциальной энергии внутренних сил.

Если же толщина оболочки не постоянна, то функция  $\Delta\zeta(s)$  выбирается несколько иначе. Так, например, если бортовой элемент назначается более толстым, чем остальная оболочка ( $\delta_0 > \delta$ ) (черт. 5), то необходимо иметь в виду, что как эпюр  $S_0(s)$ , так и эпюр  $\Delta\zeta(s)$  в точке  $M$  бортового элемента, должны иметь в  $a = \delta_0/\delta$  раз большие тангенсы углов наклона касательной ( $a\partial S/\partial s$ ), чем в той же точке оболочки ( $\partial S/\partial s$ ). Такое скачкообразное изменение тангенса угла наклона объясняется тем, что частная производная  $\partial T/\partial s$  резко увеличивается в этой точке в  $a$  раз, а следовательно — в соответствии с (6) — так же резко и во столько же раз увеличивается и производная  $\partial S/\partial s$ .

Точно также и эпюр  $\Delta\zeta(s)$  должен был бы иметь скачок в точке  $M$ , увеличивая  $\partial[\Delta\zeta(s)]/\partial s$  в  $a$  раз, но всё же эпюр должен давать в точке  $A$  нулевую ординату.

Изберём:

$$\Delta\zeta(s) = \sum_1^3 a_m \sin m\pi s/s_{0m},$$

где через  $s_{0m}$  обозначена фиктивная полудлина оболочки.

$m$ -ый член разложения  $\Delta\zeta(s)$  (черт. 6) будет:

$$c_m = a_m \sin m\pi (s_0 - b)/s_{0m}$$

и

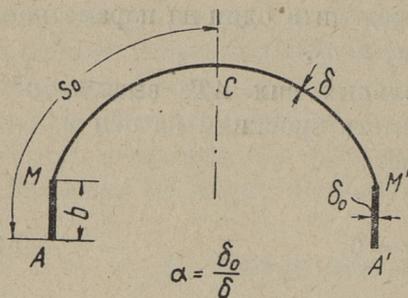
$$p_m = a_m \sin m\pi s_0/s_{0m}.$$

Так как  $c_m = at_m$ , то

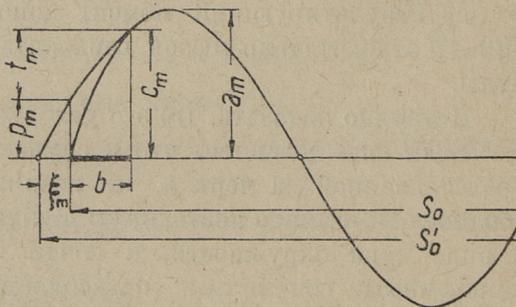
$$c_m = a(c_m - p_m),$$

т. е.

$$\sin m\pi (s_0 - b)/(s_0 + \xi_m) = a [\sin m\pi (s_0 - b)/(s_0 + \xi_m) - \sin m\pi s_0/(s_0 + \xi_m)]. \quad (7)$$



Черт. 5.



Черт. 6.

Из этого тригонометрического уравнения в каждом отдельном случае получается разность  $\xi_m$  между действительной и фиктивной полудугами и затем

$$s_{0m} = s_0 + \xi_m.$$

Приближённое решение  $\xi_m$  уравнения (7) выражается следующим образом, исходя из предположения, что дроби  $\xi_m/s_0$  и  $b/s_0$  значительно меньше единицы

$$\xi_m = \frac{\sin mb\pi/s_0}{\alpha/(\alpha-1) - \cos mb\pi/s_0}. \quad (8)$$

Таким образом, выражение для эпюра  $\Delta\zeta(s)$  в пределах  $s=0$  до  $s_0-b$ , будет:

$$\Delta\zeta(s) = a_1 \sin \pi s/s_{01} + a_2 \sin 2\pi s/s_{02} + a_3 \sin 3\pi s/s_{03} \quad (1'')$$

и в пределах от  $s=s_0-b$  до  $s=s_0$ :

$$\Delta\zeta(s) = (1-\alpha) \left[ a_1 \sin \pi \frac{s_0-b}{s_{01}} + a_2 \sin 2\pi \frac{s_0-b}{s_{02}} + a_3 \sin 3\pi \frac{s_0-b}{s_{03}} \right] + \alpha [a_1 \sin \pi s/s_{01} + a_2 \sin 2\pi s/s_{02} + a_3 \sin 3\pi s/s_{03}]. \quad (1''')$$

Также и в этом случае ортогональность сохраняется с достаточной точностью, а производная функция  $\partial[\Delta\zeta(s)]/\partial s$  от (1'') и (1''') удовлетворяет условиям (5) равновесия моментов относительно горизонтальной оси, если выполнено условие (4).

Из равенств (6) следует, что дополнением величины

$$t = -\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

обусловленным функцией  $\Delta\zeta(s)$ , будет:

$$\Delta t = -\frac{\partial}{\partial s} [\Delta\zeta(s)] = -\sum_1^3 \frac{m\pi}{s_{0m}} a_m \cos m\pi \frac{s}{s_{0m}} = \sum_1^3 a_m \Delta t_m. \quad (9)$$

В данном случае функции, входящие в этот ряд, являются ортогональными или точно, или с достаточной степенью точности.

#### 4. Внутренние силы.

$m$ -ый член разложения  $\Delta\zeta(s)$  обуславливает в первую очередь изменения сдвигающих сил в сечении  $x$  ( $x$  отсчитывается от середины оболочки):

$$S(s) = [\zeta_0(s) + \Delta\zeta(s)]x \quad (10)$$

а также вызывает ещё и дополнительные поперечные моменты  $a_m m_m(s)$ . Если параметр  $a_m = 1$ , то эти моменты можно определить из соотношения (см. черт. 7)

$$m_m(s) = \int_s^{s_0} \Delta \xi_m(\sigma) h_\sigma d\sigma, \quad (11)$$

где через  $\sigma$  обозначена переменная при этом интегрировании длина дуги.

Численное значение интеграла (11) находится легко посредством одного из методов приближённого интегрирования (например, по методу Симпсона).

В соответствии со сделанным допущением,  $M(s)$  не зависит от  $x$  и

$$M(s) = M_0(s) + \sum_1^3 a_m m_m(s). \quad (12)$$

Дополнение  $\Delta t$  величины „ $t$ “ определяется из дополнения сдвигающих сил  $\Delta \xi(s)$  следующим образом (см. 6 и 9).

$$-\Delta t = \frac{\partial}{\partial s} (\Delta \xi) = \frac{\partial}{\partial s} \left[ -\frac{\partial (\Delta S)}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial (\Delta S)}{\partial s} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial (\Delta T)}{\partial x} \right],$$

откуда следует, что ( $x$  отсчитываемая от диафрагмы)

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Delta T) = -\Delta t \cdot x + C(s).$$

Если  $x = \frac{L}{2}$ , то вследствие симметричности

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Delta T) = 0,$$

что даёт:

$$C(s) = \Delta t \cdot \frac{L}{2}$$

и

$$\Delta T = -\frac{x^2 \Delta t}{2} + \frac{L}{2} x \Delta t + D(s).$$

Так как при  $x = 0$  также и  $\Delta T = 0$ , то  $D(s) = 0$ , и таким образом

$$\Delta T = -\Delta t \frac{x^2}{2} + \Delta t \frac{L}{2} x. \quad (13)$$

Наибольшее значение, которое принимает  $\Delta T$  при  $x = \frac{L}{2}$ :

$$\max \Delta T = \Delta t \frac{L^2}{8}.$$

Для нагрузки, указанной в пункте 1, значение  $T(s)$  в середине пролёта будет:

$$\max T(s) = \max T_0(s) + \frac{L^2}{8} \Delta t \quad (14)$$

и на какой-нибудь ординате  $x$  (отсчитываемой от конца оболочки) та же величина  $T(s)$  будет соответственно:

$$T(s, x) = \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \max T(s). \quad (15)$$

## 5. Выражения для минимума потенциальной энергии внутренних сил.

На потенциальную энергию оказывают существенное влияние только лишь внутренние силы  $M(s)$ ,  $T$  и  $S$ .

В этом случае потенциальная энергия, отнесённая к половине длины оболочки при нагрузке, указанной в пункте 1, выражается следующим образом:

$$V = \frac{L}{2} \int_0^{s_0} \frac{12M(s)^2}{2E\delta^3} ds + \int_0^{L/2} dx \int_0^{s_0} \frac{S(s)^2}{E\delta} ds + \int_0^{L/2} dx \int_0^{s_0} \frac{T(s)^2}{2E\delta} ds, \quad (16)$$

где  $G = 0,5E$ .

Это выражение принимает наименьшее значение, если

$$\frac{\delta}{2} \frac{\partial V}{\partial (a_m)} = \frac{6L}{\delta^2} \int_0^{s_0} M \frac{\partial M}{\partial a_m} ds + 2 \int_0^{L/2} dx \int_0^{s_0} S \frac{\partial S}{\partial a_m} ds + \int_0^{L/2} dx \int_0^{s_0} T \frac{\partial T}{\partial a_m} ds = 0, \quad (17)$$

где контурный интеграл берётся по поперечному сечению оболочки (или, в случае симметричной нагрузки, по половине поперечного сечения).

Приняв из (4):

$$a_1 = k_2 a_2 + k_3 a_3,$$

имеем:

$$M(s) = M_0(s) + (k_2 a_2 + k_3 a_3) m_1(s) + a_2 m_2(s) + a_3 m_3(s).$$

Отсюда

$$\frac{\partial M(s)}{\partial a_2} = k_2 m_1(s) + m_2(s); \quad \frac{\partial M(s)}{\partial a_3} = k_3 m_1(s) + a_3 m_3(s).$$

Из выражения для продольных сил в точке  $(x, s)$ :

$$T(s) = \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \left\{ \max T_0(s) + \frac{L^2}{8} [(k_2 a_2 + k_3 a_3) \Delta t_1 + a_2 \Delta t_2 + a_3 \Delta t_3] \right\}$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(s)}{\partial a_2} &= \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \frac{L^2}{8} (k_2 \Delta t_1 + \Delta t_2), \\ \frac{\partial T(s)}{\partial a_3} &= \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \frac{L^2}{8} (k_3 \Delta t_1 + \Delta t_3), \end{aligned}$$

где  $x$  отсчитывается от конца оболочки.

Точно так же получаем:

$$S(s) = [\xi_0 + (k_2 a_2 + k_3 a_3) \Delta \xi_1 + a_2 \Delta \xi_2 + a_3 \Delta \xi_3] x,$$

откуда

$$\frac{\partial S(s)}{\partial a_2} = (k_2 \Delta \xi_1 + \Delta \xi_2) x; \quad \frac{\partial S(s)}{\partial a_3} = (k_3 \Delta \xi_1 + \Delta \xi_3) x,$$

где  $x$  отсчитывается от середины оболочки.

Таким образом все величины выражения (17) оказываются найденными.

Неизвестными остались сейчас два параметра:  $a_2$  и  $a_3$ . Столько же уравнений получаем и из выражений (17).

Обычно отдельные слагаемые из (17) далеко неодинаково влияют на результаты вычислений. Доминирующим является, вообще говоря, член с моментами, в то время как слагаемыми с сдвигающими силами можно зачастую пренебречь, хотя член с продольными силами в случае толстых оболочек имеет сравнительно большее влияние.

В члене с моментами имеем 9 интегралов в форме:

$$\int_0^{s_0} M_0(s) \cdot m_m(s) \cdot ds; \quad \int_0^{s_0} m_m(s) \cdot m_n(s) \cdot ds \text{ и т. д.,}$$

вычисление которых (хотя бы методом Симпсона) не представляет никаких затруднений.

Интегрируя слагаемое с продольными силами вначале по  $x$ , имеем:

$$F(s) \int_0^{\frac{L}{2}} \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)^2 dx = 0,267 F(s) \cdot L.$$

Интегрируя далее по  $s$ , выясняется, что в обоих уравнениях

$$\sum_0^{s_0} \int_0^{s_0} \max T_0(s) \Delta t_m ds \approx 0,$$

а, вследствие ортогональности, также и

$$\int_0^{s_0} \Delta t_m \Delta t_n ds = 0 \text{ (если } m \neq n \text{)}.$$

Таким образом, всё слагаемое с продольными силами можно приближённо представить в форме:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} dx \int_0^{s_0} T \frac{\partial T}{\partial a_m} ds \approx 0,0042L^5 \int_0^{s_0} \Delta t_m^2 ds. \quad (18)$$

Упрощения, сделанные в слагаемом с продольными силами, с ещё большим основанием можно проделать в слагаемом с сдвигающими силами, т. к. это слагаемое имеет, вообще говоря, ещё меньшее удельное влияние.

Учитывая ортогональность, а также и то обстоятельство, что

$$\int_0^{s_0} \xi_0(s) \Delta \xi_m ds \approx 0,$$

имеем:

$$2 \int_0^{\frac{L}{2}} dx \int_0^{s_0} S \frac{\partial S}{\partial a_m} ds \approx \frac{L^3}{12} \int_0^{s_0} \Delta \xi_m^2 ds. \quad (19)$$

После этих упрощений приходится вычислять только 13 интегралов вместо 27.

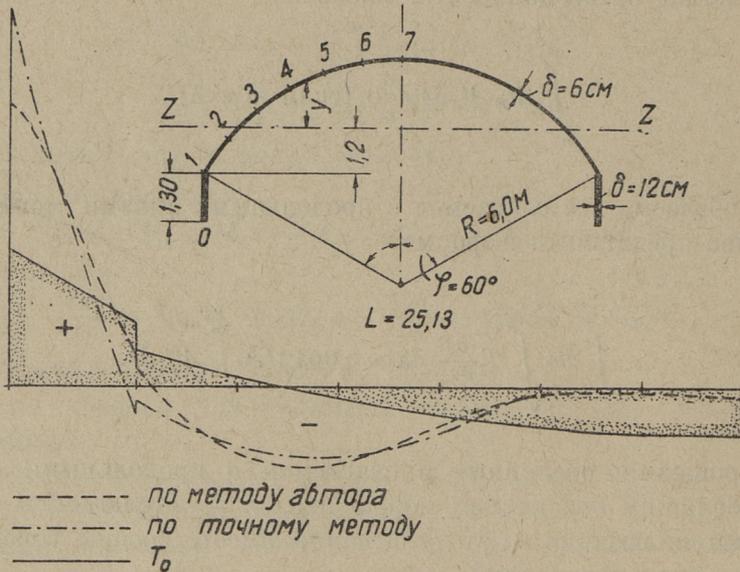
Из условий минимума потенциальной энергии получаем два уравнения для определения параметров  $a_2$  и  $a_3$ .

Истинные значения внутренних сил находим суммированием.

## 6. Примеры вычислений.

### а) Геометрические данные.

В качестве примера приводится расчёт оболочки с пролётом  $L = 25,13$  м [1], поперечное сечение которой представлено на черт. 8.



Черт. 8.

Общая толщина оболочки  $\delta = 0,06$  м.

Толщина бортового элемента  $\delta_0 = 0,12$  м.

Центр тяжести поперечного сечения находится выше бортового элемента на

$$y_0 = 1,2 \text{ м.}$$

Момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси  $z-z$ , проходящей через центр тяжести:

$$\bar{J}_{zz} = 36,23 \text{ м}^4.$$

### б) Нагрузки и функции нагрузок из задачи о балке

Нагрузка оболочки  $p = 0,144$  т/м<sup>2</sup>.

Нагрузка в части бортового элемента  $p_0 = 0,288$  т/м<sup>2</sup>.

Нагрузка погонного метра оболочки  $\bar{q} = 2[(s_0 - b) \cdot 0,144 + b \cdot 0,288] = 2,56$  т/м.

Для задачи о балке имеем:

$$\max \bar{M} = \frac{\bar{q}L^2}{8} = \frac{2,56 \cdot 25,13^2}{8} = 202 \text{ тм},$$

$$\max \bar{Q} = \bar{q}L/2 = 2,56 \cdot 25,13/2 = 32,2 \text{ т},$$

$$\max T_0(s) = -\frac{\max \bar{M}_y}{\bar{J}_{xz}},$$

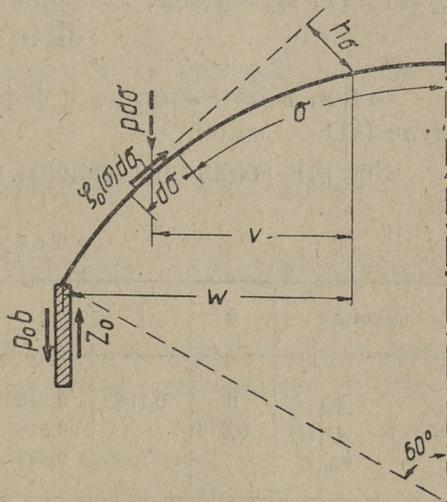
$$\xi_0(s) = \bar{q} \frac{\bar{S}_{0z}}{2\bar{J}_{xz}}.$$

Поперечный момент в оболочке из задачи о балке (см. черт. 9)

$$M_0(s) = (Z_0 - p_0 b) w + \int_{s_0-b}^s \xi_0(\sigma) h_\sigma d\sigma - \int_{s_0-b}^s v p d\sigma,$$

$$\text{где } Z_0 = \int_b^{s_0} \xi_0(\sigma) d\sigma$$

— результат сдвигающей силы в бортовом элементе.



Черт. 9.

Функции нагрузок задачи о балке сведены в таблице 1.

Таблица 1.

Сечение	0	1	2	3	4	5	6	7
$\max T_0(s)$	+27,90	+13,30 0,65	+1,92	-2,22	-5,58	-8,10	-9,60	-10,0
$\xi_0(s)$	0	0,338	0,394	0,390	0,338	0,246	0,131	0
$M_0(s)$	0		-0,122	-0,317	-0,550	-0,748	-0,896	-0,954

в) Дополнительный эпюр  $\Delta\zeta(s)$ .

$$a = \delta_0/\delta = 2; \quad s_0 = 7,583 \text{ м}; \quad b = 1,3 \text{ м}.$$

По формуле (8) находим

$$\begin{aligned} \xi_1 = 1,07 \text{ м}; \quad s_{01} = 8,653 \text{ м}; \quad \Delta\zeta_1(s) &= \sin \pi s/s_{01} \dots (s=0 \text{ до } s_0-b) \\ \Delta\zeta_1(s) &= 2 \sin \pi s/s_{01} - 0,758 (s=s_0-b \text{ до } s_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = 0,687; \quad s_{02} = 8,270; \quad \Delta\zeta_2(s) &= \sin 2\pi s/s_{02} \dots (s=0 \text{ до } s_0-b) \\ \Delta\zeta_2(s) &= 2 \sin 2\pi s/s_{02} + 0,998 (s=s_0-b \text{ до } s_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_3 = 0,799; \quad s_{03} = 7,982; \quad \Delta\zeta_3(s) &= \sin 3\pi s/s_{03} \dots (s_0 \text{ до } s_0-b) \\ \Delta\zeta_3(s) &= 2 \sin 3\pi s/s_{03} - 0,907 (s=s_0-b \text{ до } s_0). \end{aligned}$$

Затем, в соответствии с формулой (9), находим  $\Delta t_m$  и по формуле (11) —  $m_m(s)$ .

Все эти величины сведены в таблице 2.

Таблица 2.

Сечения	0	1	2	3	4	5	6	7	
$m = 1$	$\Delta\zeta_1(s)$	0	0,7582	0,9460	0,9988	0,9091	0,6889	0,3709	0
	$\Delta t_1(s)$	0,676		0,118	-0,018	-0,151	-0,263	-0,337	-0,363
	$m_1(s)$			0,339	0,914	1,896	3,44	5,65	8,55
$m = 2$	$\Delta\zeta_2(s)$	0	-0,9981	-0,7423	-0,0414	0,6850	1,0000	0,7139	0
	$\Delta t_2(s)$	-1,317		0,509	0,759	0,554	0,015	-0,532	-0,760
	$m_2(s)$			-0,526	-1,325	-2,468	-3,84	-5,25	-6,48
$m = 3$	$\Delta\zeta_3(s)$	0	0,9070	-0,1003	-0,9728	-0,5383	0,6199	0,9445	0
	$\Delta t_3(s)$	2,105		-1,175	-0,273	0,995	0,927	-0,388	-1,181
	$m_3(s)$	0	0	0,651	1,50	1,51	3,30	4,19	4,83

г) Условие равновесия эпюра  $\Delta\zeta(s)$  (4) даёт в результате приближённого интегрирования:

$$3,10a_1 - 1,050a_2 + 0,784a_3 = 0,$$

откуда

$$a_1 = 0,339a_2 - 0,253a_3.$$

Этим выражением будем пользоваться в дальнейшем вместо  $a_1$ .

д) Выражения для минимума потенциальной энергии.

Согласно (17) составляем два уравнения. Например, первое уравнение можно представить так:

$$\frac{bL^2}{j^2} \int_0^{s_0} [M_0(s) + (0,339a_2 - 0,253a_3)m_1(s) + a_2m_2(s) + a_3m_3(s)] \times \\ \times [(0,339m_1(s) + m_2(s)) ds + 0,0042L^5 \int_0^{s_0} \Delta t_2^2 ds + \frac{L^3}{12} \int_0^{s_0} \Delta \xi_2^2 ds] = 0.$$

По способу Симпсона (сравни таблицы 1 и 2) находим, например, для первого интеграла

$$\int_0^{s_0} M_0(s)m_1(s) ds = \frac{1,047}{3} [-4 \cdot 0,122 \cdot 0,339 - 2 \cdot 0,317 \cdot 0,914 -$$

$-4 \cdot 0,550 \cdot 1,896 - 2 \cdot 0,748 \cdot 3,44 - 4 \cdot 0,896 \cdot 5,65 - 0,954 \cdot 8,55] = -13,43,$   
где  $\Delta s = 1,047$  м.

Подставив значения вычисленных интегралов, находим первое уравнение (здесь для иллюстрации значения сдвигающих и поперечных сил указаны точно):

1283000 $a_2$ — 1138000 $a_3$ + 354000	(моменты)
96700 $a_2$ — 8600 $a_3$ — 0	(продольные силы)
5200 $a_2$ — 400 $a_3$ + 700	(сдвигающие силы)
1385000 $a_2$ — 1147000 $a_3$ + 355000 = 0 (I уравнение), аналогично	
— 1147000 $a_2$ + 1267000 $a_3$ — 316000 = 0 (II уравнение)	

Матрица уравнений симметрична относительно главной диагонали. Кроме того, очевидно, что влиянием сдвигающих сил можно пренебречь, а при вычислении влияния продольных сил можно пользоваться формулой (18). Решение этой системы:

$$a_1 = -0,0847; \quad a_2 = -0,198; \quad a_3 = 0,0702.$$

е) Внутренние силы находим суммированием.

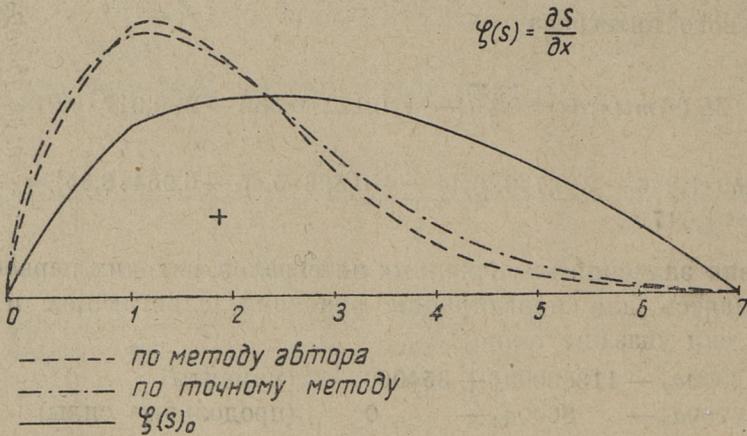
Например, нахождение  $\max T(s)$  указано в табл. 3.

На чертеже 8 представлены эпюры  $\max T(s)$  из задачи о балке, вычисленные по точным методам и по методу автора. Обе кривые достаточно близко совпадают друг с другом, откуда следует, что

Таблица 3.

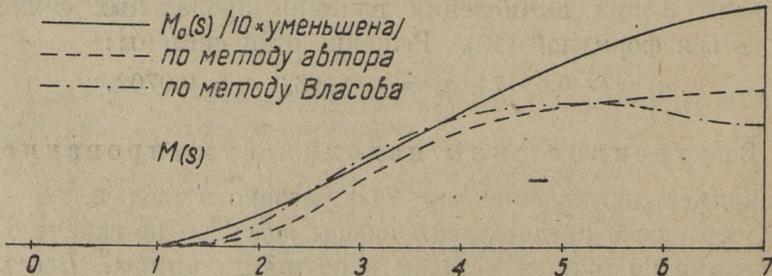
Сечения	0	1	2	3	4	5	6	7	
$\max T_0(s)$	27,9	13,3	6,6	1,9	-2,2	-5,6	-8,1	-9,6	-10,0
$L^2 a_1 \Delta t_1 / 8$	-4,5	-3,2	-1,6	-0,8	+0,1	+1,0	+1,8	+2,2	+2,4
$L^2 a_2 \Delta t_2 / 8$	+20,6	+1,4	-0,7	-8,0	-11,8	-8,6	-0,2	+8,3	+11,8
$L^2 a_3 \Delta t_3 / 8$	+11,7	-5,5	-2,7	-6,5	-1,5	+5,5	5,1	-2,1	-6,5
$\max T(s) =$	55,7	6,0	3,0	-13,4	-15,4	-7,7	-1,4	-1,2	-2,3

предлагаемый метод даёт достаточно хорошие результаты, вполне сравнимые с результатами вычислений по точным методам, за исключением величины  $\max T(s)$  на нижнем краю оболочки. Но



Черт. 10.

зато результирующая растягивающая сила эпюра, вычисленная этим методом с большой степенью точности, сходна с результатом, получаемым по точным методам.



Черт. 11.

Аналогично найденные эпюры  $\zeta(s)$  и  $M(s)$  представлены на черт. 10 и 11 (на черт. 11  $M_0(s)$  уменьшена в 10 раз). Результаты точных методов на черт. 10 умножены на  $\pi/4$ , т. к. они получены из первого члена разложения нагрузки в ряд Фурье.

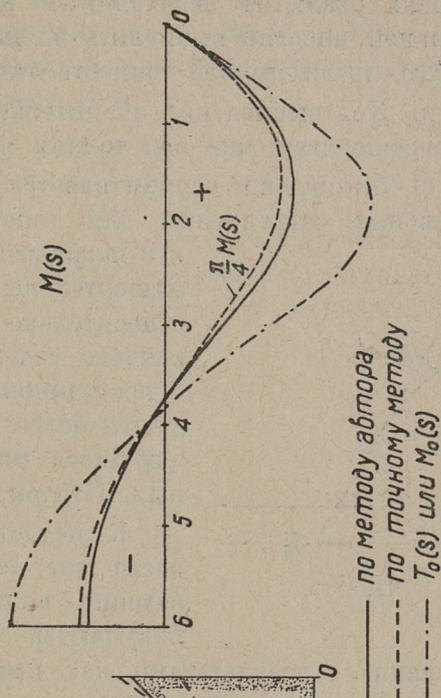
На черт. 12 представлены результаты другого численного примера; в этом случае фигурировала статически неопределимая горизонтальная сила  $H_0$ . Сравнение с результатами точного метода (2) указывает, что внутренние силы найдены с достаточной степенью точности.

## 7. Заключение.

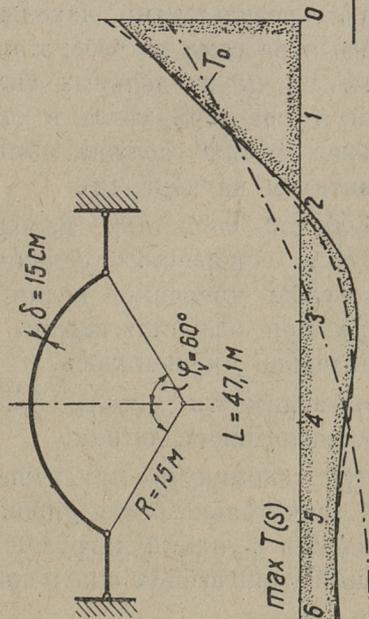
Предлагаемый метод имеет некоторые очень значительные преимущества по сравнению с точными методами, а также и с другими опубликованными, известными автору методами. Этими преимуществами являются:

а) Ход вычислений по своей ясности не выходит за рамки интуитивной наглядности, в результате чего возможность грубых ошибок (например, в знаках) сводится фактически на нет.

б) Вычисления почти целиком выполняются обыкновенной (длиной в 25 см) логарифмической линейкой.



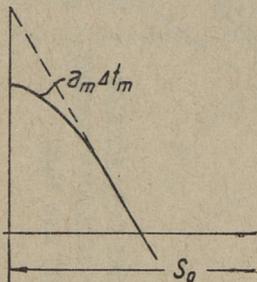
Черт. 12.



рифмической линейкой. Не исключено, что в некоторых частных случаях окажется необходимым в выражении минимума потенциальной энергии вычислить члены, содержащие моменты, с точностью, превышающей точность линейки на один знак.

в) Ход вычислений значительно короче и менее чувствителен к погрешностям, чем при точном методе.

г) Вычисление осуществляется без каких бы то ни было дополнительных затруднений для поперечных сечений любой формы и с нагрузкой, произвольно распределённой относительно переменного  $s$  (но постоянной относительно  $x$ ), так как и в случае поперечного сечения в форме дуги окружности и постоянной нагрузки так или иначе оказывается более целесообразным находить встречающиеся интегралы каким-нибудь численным методом.



Черт. 13.

К недостаткам этого метода надо отнести тот факт, что продольные растягивающие силы в нижнем краю оболочки получаются несколько уменьшенными по

сравнению с результатами, находимыми по точным методам. Причина этого ясна сама по себе, т. к. (см. черт. 13) отдельные дополнительные члены продольных сил  $L^2 a_m \Delta t_m / 8$  являются линиями косинусов и поворачиваются в сторону к ребру в то время, как „правильная линия“ должна была бы идти дальше (как это указано пунктиром на черт. 13).

С большой точностью находится результирующая растягивающая сила поперечного сечения. Эта сила значительно отличается по своей численной величине от соответствующих величин, находимых при решении задачи о балке, т. к. плечо внутренних сил значительно уменьшилось.

О применимости метода при антисимметрической нагрузке будет сообщено впоследствии.

Следует упомянуть, что решение задачи можно представить себе ещё значительно более упрощённым, если вообще отказаться от нахождения функций нагрузки в задаче о балке и искать эпюр приращений сдвигающих сил непосредственно в форме

$$\zeta(s) = \frac{\partial S}{\partial x} = a_1 \sin \pi s / s_{01} + a_2 \sin 2\pi s / s_{02} + a_3 \sin 3\pi s / s_{03}. \quad (20)$$

Такая схема даёт вполне подходящие решения, хотя максимальная ордината величины  $T$  в нижнем краю оболочки оказывается несколько уменьшенной по сравнению даже и с результатом предлагаемого метода. Причина этого одна и та же — эпюр проходит более прямо в нижнем краю оболочки, чем заменяющий его первый член  $t_1(s)$  в разложении (20).

## Обозначения.

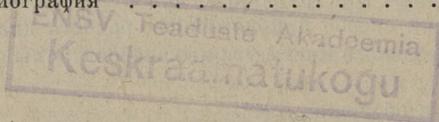
- $p$  — нагрузка на единицу поверхности оболочки (т/м<sup>2</sup>)  
 $p_0$  — то же в части бортового элемента (т/м<sup>2</sup>)  
 $\bar{q}$  — нагрузка на единицу длины оболочки (т/м)  
 $S(s, x)$  — сдвигающие силы на единицу длины сечения (т/м)  
 $\zeta(s) = \partial S / \partial x$  — прирост сдвигающей силы вдоль оболочки (т/м<sup>2</sup>)  
 $\Delta \zeta(s)$  — дополнение прироста сдвигающей силы (т/м<sup>2</sup>)  
 $T(s, x)$  — продольная сила в поперечном сечении оболочки (т/м)  
 $t = -\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$   
 $\Delta t = -\frac{\partial^2 [\Delta T]}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial s} \Delta \zeta$  [дополнение  $t$  от  $\Delta \zeta(s)$ ] (т/м<sup>3</sup>)  
 $M(s)$  — поперечный момент оболочки на единицу длины (т)  
 $m_m(s)$  — то же от  $m$ -го члена разложения  $\Delta \zeta(s)$  при  $a_m = 1$   
 $\bar{M}$  — момент в оболочке, как в балке (тм)  
 $\bar{Q}$  — поперечные силы в оболочке, как в балке (т)  
 $\bar{J}_{zz}$  — момент инерции поперечного сечения оболочки, как балки относительно оси тяжести (м<sup>4</sup>)  
 $\bar{S}_{0z}$  — статический момент части поперечного сечения оболочки относительно оси тяжести (м<sup>3</sup>)  
 $\left. \begin{array}{l} s \\ \sigma \end{array} \right\}$  — длина дуги вдоль поперечного сечения оболочки (0 — в коньке оболочки)  
 $x$  — координата вдоль образующей (в общем случае отсчитываемая от диафрагмы, в случае же  $S(s, x)$  — от середины оболочки)  
 $\delta$  — толщина оболочки вообще (м)  
 $\delta_0$  — толщина бортового элемента оболочки (м)  
 $\alpha = \delta_0 / \delta$   
 $b$  — высота бортового элемента (м)  
 $s_0$  — полудлина поперечного сечения оболочки (м)  
 $s_{01}, s_{02}, s_{03}$  — фиктивные полудлины оболочки (м)  
 $a_1 a_2 a_3$  — пока не определённые параметры, подлежащие нахождению.

## Библиография.

1. В. З. Власов. Перекрытия типа оболочек. Справочник проектировщика, Т. IV, 1935.
2. В. З. Власов и А. Л. Гольденвейзер. Расчёт тонкостенных сводов — оболочек. Справочник проектировщика, деревянные конструкции, 1937.
3. В. З. Власов. Новый метод расчёта тонкостенных призматических складчатых покрытий и оболочек, 1938.
4. В. З. Власов. Строительная механика оболочек, 1935.
5. Л. С. Гильман. Приближённый метод расчёта цилиндрических сводов — оболочек (С. А. Шустиков, Деревянные конструкции, 1933).
6. С. С. Голушкевич. Графический способ приближённого расчёта цилиндрических оболочек (Труды Ленинградского Института инженеров промышленного строительства, вып. 5, 1938).
7. С. А. Тимошенко. Пластинки и оболочки, 1948.
8. А. А. Уманский. Изгиб и кручение тонкостенных авиаконструкций, 1939.
9. В. З. Власов. Общая теория оболочек, 1949.
10. F. Dischinger. Handbuch f. Eisenbetonbau, T. 12. Berlin, 1928.
11. U. Finsterwalder. Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem Querschnitt. Ingenieur-Archiv, 1933.
12. E. Reissner. Least work solutions of Shear Lag Problems, J. Aeron, Sci, V. 8. May 1941, nr. 7.

## Содержание.

	Стр.
1. Введение . . . . .	3
2. Общая схема метода . . . . .	4
3. Выбор дополнительного эюра $\Delta\zeta(s)$ . . . . .	8
4. Внутренние силы . . . . .	11
5. Выражения для минимума потенциальной энергии внутренних сил . . . . .	13
6. Примеры вычислений . . . . .	16
7. Заключение . . . . .	21
Обозначения . . . . .	24
Библиография . . . . .	25



*Vastutav toimetaja A. Garšnek.*

*Tehniline toimetaja H. Kohu.*

Ladumisele antud 25. X 49. Trükkimisele antud 9. I 50. Trükiarv 1000. Trüki-  
poognaid  $1\frac{5}{8}$ . Paberi kaust  $67 \times 95$ .  $\frac{1}{16}$ . MB 00659. Trükikoda „Hans Heidemann“,  
Tartu, Vallikraavi tn. 4. Tellimise nr. 2837.

Hind rbl. 1.50