

TALLINNA POLÜTEHNILISE  
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 247

СБОРНИК СТАТЕЙ  
ПО  
**САНИТАРНОЙ ТЕХНИКЕ**  
IV





TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 247

1967

---

СБОРНИК СТАТЕЙ  
ПО  
САНИТАРНОЙ ТЕХНИКЕ  
1У

Таллин  
1967

Ep. 7745





УДК 628.3

Р.В. Плато

## СЛУЧАЙНЫЕ ОШИБКИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ БПК

При оценке достоверности любых гидрохимических показателей необходимо оценить их точность. Особое значение имеет оценка ошибок определения концентраций растворенного в воде кислорода, так как определение БПК состоит из ряда определений концентраций растворенного в воде кислорода. Ниже анализированы случайные ошибки БПК от определения растворенного в воде кислорода.

Растворенный в воде кислород определяется по формуле [1]

$$X = \frac{8nNk \cdot 1000}{W - v' - v''}, \quad (I)$$

где  $X$  - растворенный в воде кислород, в мг/л,  
 $n$  - нормальность тиосульфата натрия (принята 0,01),  
 $N$  - количество тиосульфата натрия, в мл, использованное при титровании,  
 $k$  - фактор нормальности,  
 $W$  - объем склянки, в мл,  
 $v'$  и  $v''$  - соответственно объемы прибавленных растворов  $MnCl_2$  и  $KJ + NaOH$ .

При каждом определении по формуле (I) растворенного в воде кислорода предварительным титрованием или добавлением реактивов определяются величины  $N$ ,  $k$ ,  $v'$  и  $v''$ , допускаемая при титровании и добавлении каждого реактива минимальную ошибку в объеме одной капли (объем одной капли бюреток составляет 0,05 мл, пипеток 0,01 мл). Так как ве-

величины  $V'$  и  $V''$  по сравнению с величиной  $W$  маленькие, то в первом приближении можем ими пренебречь. Согласно теории ошибок относительная случайная ошибка определения растворенного кислорода выражается суммой относительных ошибок:

$$\delta_{O_2} = \delta_N + \delta_K + \delta_W = 0,5 + 0,3 + 0,1 = 0,9\% . \quad (2)$$

Для определения БПК относительно чистых вод количество растворенного в воде кислорода приходится определять два раза. Если считать, что процесс биохимического окисления протекает в оптимальных условиях, то можно предположить, что относительная случайная ошибка определения БПК зависит только от точности титрования растворенного в воде кислорода. Тогда относительная случайная ошибка определения БПК выражается в следующем виде:

$$\delta_{\text{БПК}} = \frac{\delta_1 X_1 + \delta_2 X_2}{X_1 - X_2} , \quad (3)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — относительные ошибки определения растворенного в воде кислорода;  
 $X_1$  и  $X_2$  — соответствующие величины растворенного кислорода.

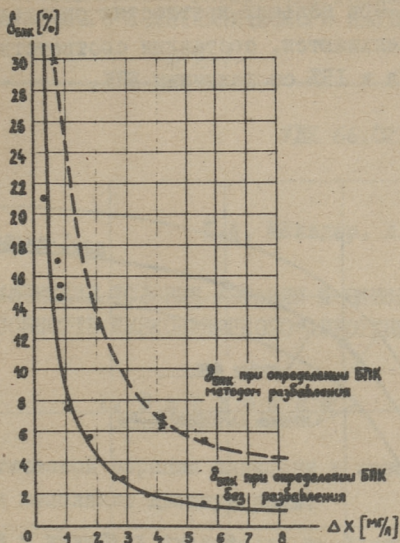
При определении БПК сточных вод методом разбавления растворенный в воде кислород определяется четыре раза. Относительная ошибка БПК при этом выражается:

$$\delta_{\text{БПК}} = \frac{\delta_1 X_1 + \delta_2 X_2}{X_1 - X_2} + \frac{\delta_3 X_3 + \delta_4 X_4}{X_3 - X_4} + \delta_a + \delta_b , \quad (4)$$

где  $\delta_a$  и  $\delta_b$  — относительные ошибки при изготовлении раствора сточных вод дистиллированной водой.

По данным наших лабораторных анализов произведены определения случайной ошибки БПК. При определении абсолютных ошибок титрования и добавления в исследуемую воду реактивов объемные ошибки приняты равными объему одной капли, а объемные ошибки склянок равными изменению объема склянки



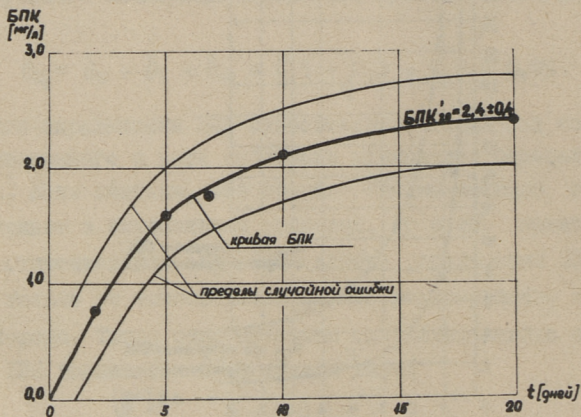


Фиг. 1. Зависимости случайных ошибок определения БПК от величин растворенного в воде кислорода

при отклонении температуры в пределах  $\pm 1^\circ$  от  $20^\circ \text{C}$ . Получены кривые зависимости случайной ошибки определения БПК от найденной величины  $\Delta X$  (фиг. I), где  $\Delta X$  разница растворенного в воде кислорода за определенное время. При определении БПК условно чистых вод без разбавления абсолютная ошибка остается постоянной, равняясь  $\pm 0,1$  мг/л. При определении БПК методом разбавления ошибка зависит от величины БПК, составляя в среднем 10% от последней.

Как видно, случайные ошибки БПК от определения растворенного в воде кислорода могут быть достаточно большие. При оценке же достоверности величины БПК необходимо учесть также погрешности, зависящие от случайности взятия проб, т.е. от кратности определения. Обычно БПК определяется как среднее из двукратных или трехкратных определений. Учитывая кратность определений, пределы ошибок БПК условно чистых вод без разбавления увеличиваются до  $\pm 0,3-0,4$  мг/л, т.е. до 10% от БПК, а значения БПК, определенные методом разбавления, в отдельных случаях имеют ошибку до 30% от

величины БПК. При больших кратностях определений суммарные ошибки уменьшаются, составляя соответственно не более  $\pm 0,2$  мг/л и 15% от величины БПК.



Фиг. 2. Средние и предельные кривые БПК

На фиг. 2 в качестве примера построена кривая БПК с указанием пределов случайных ошибок.

#### Л и т е р а т у р а

1. Ю.Ю. Дурье, А.И. Рыбникова. Химический анализ производственных сточных вод. М. 1963.
2. С.М. Драчев. Борьба с загрязнением рек, озер и водохранилищ промышленными и бытовыми стоками. М.-Л. 1964.
3. О.А. Алексин. Химический анализ вод суши. Л. 1954.



УДК 66.021.32:628.35

Х.А. Мёльдер. Л.А. Тепакс

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ АЭРАЦИИ И ОКИСЛИТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ НИЗКОДАВНОГО АЭРОТЕНКА

### 1. В в е д е н и е

При пневматической аэрации жидкости в аэротенках пузырьки воздуха выполняют двойную роль:

1. Введение в жидкость кислорода, необходимого для процесса биологической очистки стоков.

2. Создание интенсивного движения жидкости в аэротенке для предотвращения оседания хлопков активного ила и способствование тем самым быстрому обмену веществ и продуктов биохимических реакций. В некоторых случаях (при малых скоростях биохимического окисления) условие удержания ила во взвешенном состоянии может явиться лимитирующим.

Эффективность различных систем аэрации и конструкций аэраторов обычно определяется сравнением их окислительной способности (ОС), что равно количеству растворенного за 1 час кислорода в граммах на 1 м<sup>3</sup> объема аэротенка. По существу эта величина выражает скорость растворения кислорода.

Величина окислительной способности зависит от многих факторов. В результате многочисленных исследований разных авторов к настоящему времени в общих чертах изучено влияние таких факторов на окислительную способность, как глубина погружения аэратора, размер отверстий выхода воздуха, расход воздуха, площадь, занятая аэратором и т.д. Условно их можно назвать конструктивно-эксплуатационными факторами.

Перечисленные факторы, однако, не раскрывают полностью картину всех сложных явлений, протекающих в аэротенке при барботаже жидкости.

Из основных положений теории массопередачи следует, что окислительная способность в сущности зависит от суммарной поверхности контакта воздуха с жидкостью, времени пребывания пузырьков воздуха в аэротенке, равномерности и интенсивности смешения воздуха с жидкостью, скорости циркуляции смеси и т.д. Совокупность таких и аналогичных им факторов Я. Сушка [1] дефинирует как "гидродинамические свойства аэротенка".

По последним вопросам имеется мало сведений в литературе. Доказано лишь в общих чертах, что увеличение турбулентности внутри аэротенка влияет стимулирующе на растворение кислорода в воде и на процесс окисления сточных вод активным илом [2], но пока не найдено математической связи между турбулентностью системы и искомым эффектом окисления сточных вод.

К. Калбскопф [3] сделал попытку увязать эффект окисления с величиной площади междуфазовой поверхности соприкосновения, выражая последнюю через диаметр пузырьков. Однако непосредственная оценка междуфазовой поверхности в аэротенках, как правило, невозможна.

Пока не существует всесторонней обобщенной характеристики гидродинамических свойств аэротенков и не установлено точной зависимости их с окислительной способностью. Решение проблемы связано со значительными методическими и техническими трудностями, но безусловно имеет большое практическое (экономическое) значение, так как в конечном счете указывает путь к экономии энергии, расходуемой на аэрацию и соответственно к удешевлению и рационализации процесса в целом.

## 2. Гидродинамические условия аэрации

Низконапорная аэрация сточных вод является конструктивной разновидностью систем пневматической аэрации. Судя по многочисленным литературным данным, эта система заре-



комендовала себя как высокоэффективное сооружение, эксплуатация которого проще и дешевле многих других известных систем.

Изучением явлений, протекающих в низконапорных аэротенках, и определением расчетных параметров занимались в Советском Союзе С.М. Шифрин и Б.Г. Мишуков [4], за рубежом по имеющимся данным главным образом К. Фишерстрэм [5], Е.Ганьчарчик и Я. Сушка [6, 7], а также Б. Левандовский и Е.Рыбинский [8].

Надо отметить, что результаты разных исследователей не сходятся. Большинство зависимостей действительны лишь в определенных узких пределах и требуют проверки в специфических условиях.

В связи с этим на полупроизводственной модели низконапорного аэротенка нами исследованы следующие вопросы:

1. Условия циркуляции и смешения смеси жидкости и воздуха.
2. Окислительная способность аэротенка и методика ее определения.
3. Определение величины междуфазовой поверхности контакта воздуха с водой.

Полупроизводственный аэротенк имел размеры в плане  $2,5 \times 1,0$  метр и полезную глубину —  $1,91$  м. Полезный объем составлял  $4,6 \text{ м}^3$ . Общий вид аэротенка показан на фиг. 1. Аэротенк снабжен низконапорным аэратором, который был изготовлен из нержавеющей труб ( $d = 50$ ). Отверстия для выхода воздуха были выполнены в виде щелей шириной  $3$  мм, пропиленные перпендикулярно к оси трубы с нижней стороны на глубину  $1/3$  диаметра трубы. Расстояние между щелями —  $120$  мм, между осями соседних труб —  $100$  мм. Глубина погружения аэратора была во всех опытах  $0,65$  м.

Опыты проводились параллельно как с перегородкой посредине аэротенка, так и без нее.

Для выяснения условий циркуляции и смешения внутри аэротенка определялась скорость циркуляции смеси в 72 наиболее характерных точках при 5 различных интенсивностях аэрации. Необходимо отметить, что измерения производились гидромет-



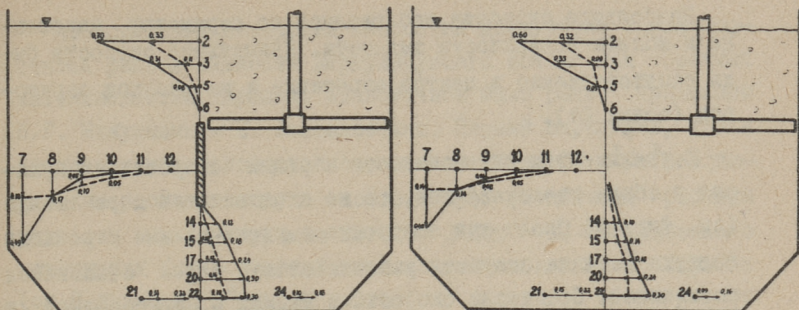
Фиг. 1. Схема опытного аэротенка (объем  $V = 4,6 \text{ м}^3$ )

рическими вертушками И-3 в реальных условиях работы аэротенка (биохимическая очистка сточных вод сульфатно-целлюлозного производства при концентрации активного ила 1,5-2,0 г/л).

Диапазон интенсивностей аэрации был от 12 до 40  $\text{м}^3/\text{час}$  на 1  $\text{м}^3$  объема аэротенка.

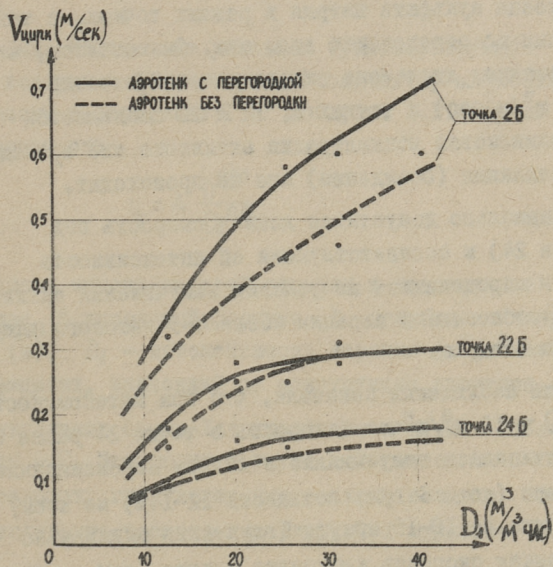
В результате были получены эпюры скоростей движения жидкости в наиболее характерных сечениях (см. фиг. 2).





ПРИМЕЧАНИЯ: — ЭПИЮРА СКОРОСТЕЙ ПРИ ИНТЕНСИВНОСТИ  
 АЭРАЦИИ  $D_{\text{макс}} = 40,5 \text{ м}^3/\text{м}^3 \text{ час}$ ; ( $v - \text{м}/\text{сек}$ )  
 ---- ТО-ЖЕ ПРИ  $D_{\text{мин}} = 12,6 \text{ м}^3/\text{м}^3 \text{ час}$

Фиг. 2. Эпюры скоростей циркуляции жидкости в профиле "Б" для аэротенка с перегородкой и без нее



Фиг. 3. Скорости движения жидкости при различных интенсивностях аэрации

Наибольшие скорости наблюдались по периметру аэротенка и вблизи поверхности жидкости. Наименьшие скорости были соответственно в центре аэротенка и на дне под аэратором (точка 24).

С увеличением интенсивности аэрации скорости циркуляции в общем увеличиваются, но не в одинаковой мере везде (см. фиг. 3). Около дна аэротенка с увеличением расхода воздуха сначала скорость увеличивается, затем становится постоянной. Сравнивая скорости в схемах с перегородкой и без нее видно, что при наличии перегородки скорости циркуляции несколько больше, чем без нее.

Несмотря на большие разницы в скоростях циркуляции в разных точках и почти нулевые скорости в центре аэротенка (при постоянной интенсивности аэрации), содержимое аэротенка хорошо перемешивается. Это положение подтверждается опытами Б.Г. Мишукова [4], который определял скорость окисления сульфита натрия в разных точках, а также нашими опытами по определению дозы ила. Оказывается, что в исследованном диапазоне интенсивностей аэрации ( $12,6 - 40,5 \text{ м}^3/\text{м}^3\text{час}$ ) в точках 2, 12 и 22 наблюдается практически одинаковая концентрация активного ила и, следовательно, расслаивания (осаждения) ила не происходит.

Минимально допустимая донная скорость под аэратором (точка 24) и соответствующая ей интенсивность аэрации должны определяться из условия взмучивания активного ила при возобновлении аэрации после 4-5-часового перерыва в подаче воздуха.

Наши наблюдения показали, что при интенсивности аэрации  $D_1 = 12 \text{ м}^3/\text{м}^3\text{час}$  (скорость в точке 24 равна  $0,1 \text{ м/сек}$ ) обеспечивается взмучивание и полное перемешивание активного ила (доза  $3 \text{ г/л}$ ; зольность  $12-14\%$ ) по всему объему аэротенка за  $10-15$  минут. Полученная минимально допустимая донная скорость несколько меньше, чем предложенная Мишуковым ( $0,15 - 0,2 \text{ м/сек}$ ). По всей вероятности эта величина зависит от характера и свойств ила (например, от его зольности).



На основании измерений скоростей циркуляции смеси рассчитан расход жидкости циркулирующего потока при разных интенсивностях аэрации. Аналогичное было ранее проделано Б.Г. Мишуковым и Е. Левандовским. Первый определил, что в диапазоне интенсивностей аэрации от 10 до 30 м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>час увеличению расхода воздуха соответствует увеличение расхода жидкости в циркулирующем потоке. Опыты Е. Левандовского охватывали более широкий диапазон интенсивностей аэрации (от 8 до 45 м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>час), и здесь было замечено интересное явление: при некоторой величине интенсивности аэрации ( $D_1 = 16 - 18$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>час) расход жидкости достигает максимума и далее с увеличением расхода воздуха начинает снова уменьшаться.

Подобное было зафиксировано и в наших опытах (см. фиг. 4). Максимальный расход жидкости имеет место при расходе воздуха 20 - 25 м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>час как в аэротенке с перегородкой, так и без нее.

Далее была подсчитана удельная транспортирующая способность воздуха -  $Q$ . Это равно количеству жидкости (в м<sup>3</sup>), перемещаемому в аэротенке 1 м<sup>3</sup> воздуха. Б.Г. Мишуков установил зависимость

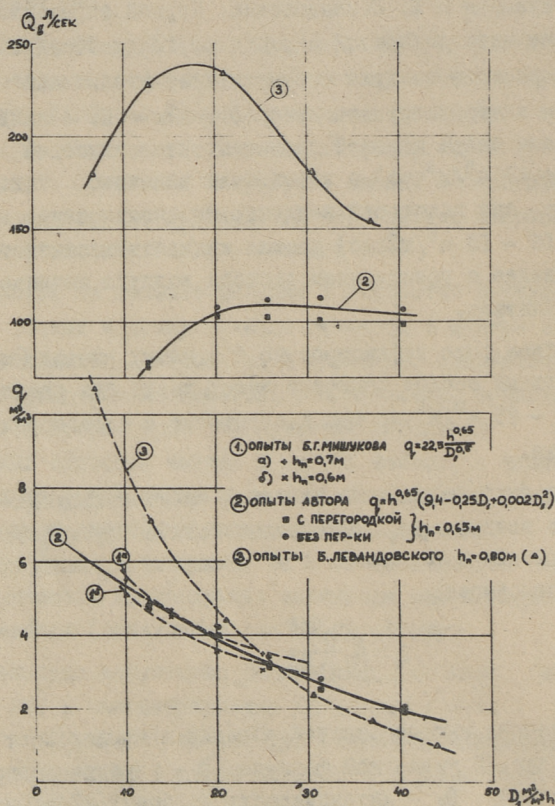
$$Q = A \frac{h^{0,65}}{D_1^{0,5}} \quad (I)$$

для диапазона интенсивностей аэрации в пределах от 10 до 30 м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>час. В указанной формуле  $h$  - глубина погружения аэратора (м),  $D_1$  - интенсивность аэрации (м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>час) и  $A$  - коэффициент, зависящий от конструкции аэратора.

Как показывают опыты Левандовского и наши наблюдения, полученная Б.Г. Мишуковым формула действительна в определенных пределах, где увеличению расхода воздуха соответствует увеличение расхода циркулирующей жидкости (см. фиг. 4).

В более широком диапазоне интенсивностей аэрации ( $D_1 = 10 - 40$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>час) нами предлагается для определения удельной транспортирующей способности формула

$$q = h^{0,65} (9,4 - 0,25 D_1 + 0,002 D_1^2). \quad (2)$$



Фиг. 4. Изменение расхода жидкости и транспортирующей способности воздуха от интенсивности аэрации

Как видно из фиг. 4, в пределах  $D_1 = 10 - 25 \text{ м}^3/\text{м}^3 \text{ час}$  расчеты  $Q$ , как по формуле Б.Г. Мишукова, так и по нашей формуле дают практически одинаковые результаты.

Представляет интерес выяснить причины, вызывающие постоянство (и даже уменьшение) расхода жидкости при увеличении интенсивности аэрации, а также влияние явления на окислительную способность аэротенка.

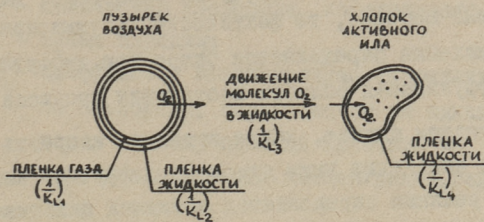


### 3. Окислительная способность аэротенка

По существующим взглядам процесс переноса кислорода (при биологической очистке сточных вод в аэротенках) из пузырька воздуха в хлопок активного ила протекает по крайней мере в три стадии:

- 1) диффузия кислорода из газовой фазы в жидкостную;
- 2) перенос растворенного кислорода к поверхности хлопка активного ила;
- 3) диффузия кислорода через клеточную оболочку.

Схематично это изображено на фиг. 5. Механизм переноса состоит в следующем.



Фиг. 5. Схема переноса кислорода при биологической очистке стоков

Согласно теории молекулярная диффузия кислорода происходит вначале через пограничный слой (пленку) газа — воздуха. Скорость процесса определяется коэффициентом сопротивления —  $1/K_{L1}$ . Затем происходит диффузия через пленку жидкости, скорость которой соответственно характеризуется коэффициентом сопротивления  $1/K_{L2}$ . Растворенный в воде кислород далее проникает в поверхности хлопка активного ила. Скорость процесса здесь характеризуется коэффициентом сопротивления  $1/K_{L3}$ . Наконец растворенный кислород достигает микроорганизмов в хлопке ила, диффундируя через пограничный слой жидкости у хлопка. Сопротивление последнего определяется коэффициентом  $1/K_{L4}$ . Величина всех коэффициентов зависит от гидродинамических

свойств аэротенка. Общая скорость кислородного переноса определяется скоростью каждого из этих процессов

$$K_L = \frac{1}{\frac{1}{K_{L1}} + \frac{1}{K_{L2}} + \frac{1}{K_{L3}} + \frac{1}{K_{L4}}} \quad (3)$$

Суммарная скорость биохимического окисления органического вещества зависит от истинной скорости биохимической реакции и скорости диффузии (переноса) кислорода [9, 10].

В случае, если истинная скорость биохимического окисления выше скорости диффузии кислорода, выражающей кислородный перенос, то фактическая (суммарная) скорость окисления определяется скоростью диффузии кислорода (диффузионная область протекания процесса).

В противном случае, когда истинная скорость биохимического окисления ниже скорости диффузии кислорода, скорость реакции определяется истинной кинетикой химической реакции и не зависит от условий диффузии. Эта область протекания реакции называется кинетической.

Многочисленные исследования доказывают, что в определенном диапазоне нагрузок на активный ил и повышенной турбулентности потока внутри аэротенка процесс протекает в диффузионной области, где существует прямая пропорциональность между расходом воздуха на аэрацию и окислительной мощностью аэротенка [10].

Низконапорный аэротенк характеризуется очень высокой турбулентностью жидкости внутри сооружения и тем самым имеется предпосылка для протекания процесса в диффузионной области. Следовательно, в этом случае вопрос переноса (диффузии) кислорода имеет большое значение, так как определяет по существу скорость биохимического окисления.

Определение скорости кислородного переноса по формуле (3) в процессе биологической очистки достаточно сложно и к тому же для возможности сравнения эффектив-



ности различных аэрационных устройств необходимо проводить опыты в сопоставимых условиях, что также трудно выполнимо. Поэтому на практике сравнение разных аэраторов и конструктивных схем аэротенков производится определением скорости кислородного переноса из воздуха в воду, а не в хлопок активного ила.

Скорость переноса кислорода из воздуха в воду при барботаже пузырьками выражается общим уравнением массообмена

$$\frac{dO}{dt} = k'_L F_K (C_i - C_L), \quad (4)$$

где  $O$  — количество кислорода, переходящего в раствор;  
 $t$  — время аэрации;

$k'_L$  — коэффициент массопередачи (выражает количество кислорода, переходящего за единицу времени через единицу площади контакта из воздуха в воду при разностях концентрации, равной единице);

$F_K$  — суммарная площадь поверхности соприкосновения воздуха с водой;

$C_i$  — растворимость кислорода воздуха в воде (концентрация насыщения);

$C_L$  — концентрация растворенного кислорода в воде в данный момент.

Учитывая, что  $dO = dC \cdot V$ , где  $V$  — объем аэротенка, и принимая  $\frac{F_K}{V} = \alpha$ , уравнение (4) преобразовывается к виду

$$\frac{dC}{dt} = k'_L \alpha (C_i - C_L). \quad (5)$$

Так как определение величины  $F_K$  представляет трудности, то обычно опытным путем определяется произведение  $K'_L = k'_L \alpha$ . Эта величина называется общим коэффициентом переноса кислорода (или общим коэффициентом использования кислорода воздуха).

Следовательно,

$$\frac{dC}{dt} = K'_L (C_i - C_L). \quad (5^a)$$

Последнее уравнение характеризует скорость растворения кислорода и называется окислительной способностью аэротенка, которая представляет собой количество кислорода в г/м<sup>3</sup>час, растворяющегося в условиях его полного дефицита ( $C_L = 0$ ) при определенной температуре и давлении.

Итак,

$$OC = \frac{dC}{dt} = K'_L (C_i - C_L). \quad (5^b)$$

Очевидно, что  $K'_L > K_L$ .

Обычно стандартной абсорбирующей средой для определения OC служит водопроводная вода, которую аэрируют с одновременным определением скорости растворения кислорода. При этом пользуются двумя различными методами.

Некоторые исследователи [4, II] используют метод химического окисления сульфита натрия ( $Na_2SO_3$ ) в присутствии катализатора  $CoCl_2$  с последующим вычислением скорости растворения кислорода в условиях полного дефицита.

Из двухфленочной теории массопередачи известно, что сопротивление газовой пленки ( $\frac{1}{K_{L1}}$ ) ничтожно по сравнению с сопротивлением жидкостной пленки и вообще может быть опущено. Так как скорость реакции окисления сульфита во много раз больше скорости диффузии кислорода, то можно предположить, что в определенных условиях турбулентности окисление происходит непосредственно на поверхности раздела фаз, либо в жидкостной пленке в так называемой "реакционной зоне". Полученный коэффициент переноса кислорода, следовательно, характеризует скорость массопередачи через эту зону.

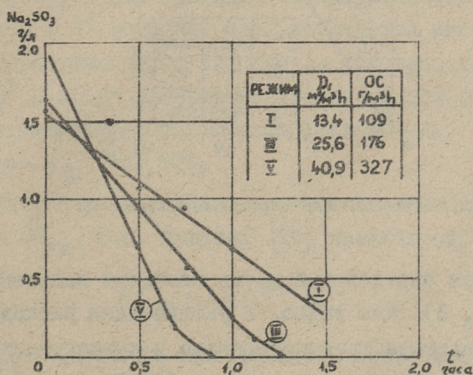
Другие же авторы [5, 6, 12, 13] определяют непосредственно растворенный кислород в аэротенке в ходе аэра-



ции методом Винклера. Для этого водопроводная вода предварительно обескислороживается (добавлением сульфита натрия), а затем фиксируется ход растворения кислорода от полного дефицита в начале опыта до полного насыщения в конце. Затем вычисляется скорость растворения кислорода для начального момента ( $d = 1,0$ ). Полученная величина коэффициента переноса кислорода показывает скорость его диффузии через обе пленки. При одинаковых условиях турбулентности сопротивление диффузии во втором случае больше, а скорость переноса соответственно меньше, чем при первом методе определения.

Для проверки приведенных теоретических рассуждений нами было проведено определение окислительной способности (ОС) аэротенка описанными методами (аэротенк с перегородкой, см. фиг. 1). Аэротенк во всех опытах был заполнен чистой водопроводной водой с температурой  $\sim 20^{\circ} \text{C}$ . Величина ОС определялась при 5 интенсивностях аэрации.

В первом случае применялся метод окисления сульфита натрия. Ход окисления сульфита показан для максимальной, минимальной и средней интенсивности аэрации при исследованном диапазоне на фиг. 6. Можно заметить, что при

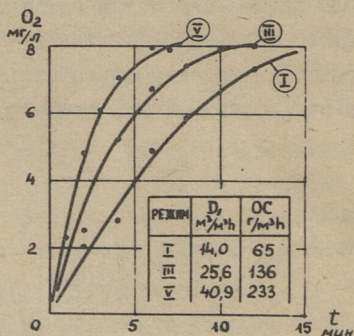


Фиг. 6. Ход окисления сульфата натрия

низких концентрациях сульфита ( $< 0,2$  г/л) скорость его окисления снижается. Это явление объясняется тем, что при малой концентрации сульфит полностью окисляется в жидкостной пленке, в результате чего избыток кислорода диффундирует дальше в жидкость, где реагирует с сульфитом. Скорость процесса при этом естественно снижается.

Во всех опытах катализатором служил  $\text{CoCl}_2$ , доза которого была принята равной 2 мг/л. При столь большой дозе скорость окисления сульфита натрия практически не зависит от дозы катализатора.

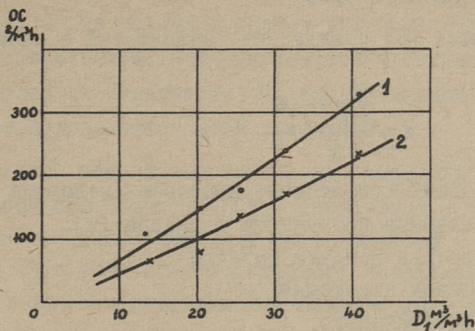
Определение непосредственно хода растворения кислорода производилось методом Винклера на водопроводной воде, предварительно обескислороженной добавлением сульфита натрия (фиг. 7). По опытным данным рассчитывалась окислительная способность в условиях полного дефицита ( $C_L = 0$ ).



Фиг. 7. Ход растворения кислорода

Результаты определений двумя методами нанесены на график (фиг. 8). Как видно, с увеличением расхода воздуха увеличивается пропорционально и окислительная способность (в исследованном диапазоне). Интересно отметить, что эта пропорциональность сохраняется независимо от характера изменения расхода в циркулирующем потоке (см. фиг. 4).





Фиг. 8. Изменение ОС в зависимости от интенсивности аэрации.  
 1 - ОС определена методом окисления сульфита натрия,  
 2 - ОС определена непосредственным титрованием кислорода в растворе.

Окислительная способность аэротенка ( $г/м^3$  час), определенная по методу окисления сульфита натрия ( $ОС'$ ), в среднем в 1,4 раза выше, чем  $ОС''$ , определенная непосредственно по ходу растворения кислорода, что соответствует теории.

Удельная окислительная способность ( $ОС_{уд}$ ) показывает количество растворенного кислорода в граммах, при подаче в аэратор  $1 м^3$  воздуха. Зная количество кислорода в воздухе, прошедшем через аэратор (в условиях наших опытов  $290 г/м^3$ ), можно рассчитать степень использования кислорода в процентах. Согласно первому методу  $\eta_{ср} = 2,52\%$ , второму —  $\eta_{ср}'' = 1,80\%$ .

В литературе приводятся расчетные зависимости для определения  $ОС_{уд}$ . Б.Г. Мишуков [15] предлагает зависимость

$$ОС_{уд} = АВh^{1,45} D_1^{0,1}, \quad (6)$$

где  $ОС_{уд}$  — удельная окислительная способность  $1 м^3$  воздуха, в  $г/м^3$ ;

A и B — коэффициенты;

h — заглубление аэратора (м);

$D_1$  — расход воздуха  $м^3/час$  на  $1 м^3$  аэротенка.

Формула выведена по результатам опытов окисления раствора сульфита натрия.

Ганьчарчик [6] предлагает зависимость в несколько ином виде:

$$K = \frac{N h^{1,5} G^{1,12}}{V}, \quad (7)$$

где  $K$  - общий коэффициент переноса кислорода ( $\frac{I}{\text{час}}$ );

$h$  - глубина погружения аэратора (м);

$G$  - расход воздуха ( $\text{м}^3/\text{час}$ );

$V$  - объем аэротенка ( $\text{м}^3$ );

$N$  - коэффициент.

Формула выведена по результатам опытов определения непосредственного растворения кислорода.

Анализ уравнений показывает, что в сущности они выражают одну и ту же зависимость, а именно, что окислительная способность  $I \text{ м}^3$  воздуха зависит главным образом от заглубления аэратора. Влияние расхода воздуха незначительно.

Результаты наших исследований доказывают близкое сходство обеих формул. При этом существует следующая связь между коэффициентами в формулах:

$$\frac{A B}{C_i V^{0,1}} = N \quad (\text{с точностью } 5 - 7\%). \quad (8)$$

На основании наших опытов предлагаются следующие зависимости для определения  $OC_{\text{уд}}$  (в диапазоне  $D_1 = 10 - 40 \text{ м}^3/\text{м}^3\text{час}$ ):

а) при окислении сульфита натрия

$$OC_{\text{уд}}' = 10,1 h^{1,45} D_1^{0,1}, \quad (9^a)$$

б) при непосредственном определении  $O_2$  в растворе

$$OC_{\text{уд}}'' = 7,2 h^{1,45} D_1^{0,1}. \quad (9^b)$$

Необходимо отметить, что процесс переноса кислорода из пузырька воздуха в хлопок активного ила более сложен и все приведенные формулы изображают лишь часть этого



процесса.  $OC'_{уд}$ , определенная методом окисления сульфита натрия, способна характеризовать это явление в первом приближении. Более точным является величина  $OC''_{уд}$ , определенная вторым методом, которая учитывает истинное растворение кислорода в жидкости. По нашему мнению в расчетах следует пользоваться этой величиной.

Практический расчет аэротенков на основании удельной окислительной способности ( $OC''_{уд}$ ) происходит с учетом действительного среднего дефицита растворенного кислорода ( $d_{ср} < 1,0$ ) и условного переходного коэффициента  $K_{\delta x}$ , величина которого в диффузионной области протекания процесса по существу учитывает разность скоростей переноса кислорода из воздуха в жидкость (в данном случае в водопроводную воду) и из воздуха в хлопок активного ила (в процессе биологической очистки).

В этом случае скорость биохимического окисления органических веществ  $OC_{\delta x}$  (мг/л час) можно выразить в следующем виде

$$OC_{\delta x} = K_{\delta x} d_{ср} OC, \quad (10)$$

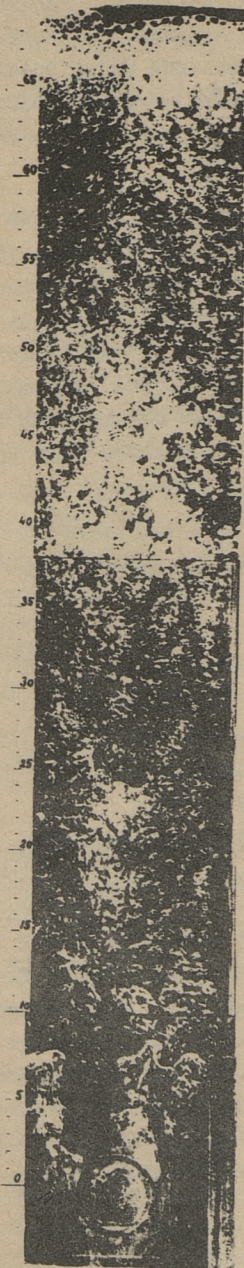
где

$$OC = OC''_{уг} \cdot D_1.$$

Определение  $K_{\delta x}$  является темой особых исследований [21].

#### 4. Определение величины междуфазовой поверхности контакта

Из вышеизложенного видно, что в то время как расход в циркуляционном потоке при определенной интенсивности аэрации достигает максимума и далее начинает уменьшаться (фиг. 4), величина окислительной способности продолжает расти (фиг. 8). Из формул (5<sup>а</sup>) (5<sup>б</sup>) вытекает, что окислительная способность зависит от величины суммарной площади соприкосновения воздуха с водой -  $F_k$ . Знание этой величины позволяет определить также коэффициент массопередачи -  $K'_L$  в формуле (4).



Из многочисленных исследований по массопередаче явствует, что определение величины междуфазовой поверхности представляет большие методические и технические трудности. В частности, для аэротенков с пневматической аэрацией имеются лишь некоторые попытки в этой области. Л.Н. Брагинским, М.А. Евилевичем и И.С. Павлушенко [16] предложены уравнения для расчета междуфазовой поверхности контакта и скорости поглощения кислорода при аэрации с крупными пузырьками ( $d = 3,6$  см).

Б.П. Ленский [17] предлагает соответственно для аэрации через фильтры (мелкими пузырьками) несколько иные зависимости. Необходимо отметить, что как в первом, так и во втором случае аэрация осуществлялась через глубоко погруженные аэраторы ( $H = 3 - 5$  м).

Для аэротенков с низконапорными аэраторами упомянутые расчетные зависимости явно неприменимы, так как процесс аэрации здесь имеет свои особенности. Из-за относительно большой применяемой интенсивности аэрации барботаж в зоне над аэратором протекает в стесненных условиях движения пузырьков.

Фиг. 9. Барботаж жидкости в лабораторной колонне при  $h = 0,65$  м;  $D_1 = 23,3$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup> час



При этом пузырьки имеют разные размеры и их диаметр меньше величины  $d = 3,6$  см, взятой за основу в работах [16,18]. Сказанное подтверждается нашими опытами (фиг. 9).

Из-за больших скоростей циркуляции жидкости около поверхности происходит засасывание части мелких пузырьков воздуха в неаэрируемую часть, что увеличивает также поверхность контакта.

Ниже нами сделана попытка определить величину междуфазовой поверхности при низконапорной аэрации в исследуемой полупроизводственной модели аэротенка (фиг. 1).

Для объяснения механизма аэрации аэротенк мысленно делится на две части: на аэрируемую половину, где расположен аэратор, и неаэрируемую, без аэратора.

Рассмотрим возможности определения площади междуфазовой поверхности контакта в аэрируемой половине.

Воздух, введенный в аэратор, образует в жидкости над аэратором пузырьки, которые двигаются вверх со средней абсолютной скоростью  $V_a$ . Жидкость двигается в том же направлении со средней абсолютной скоростью  $V_b$  и соответственно средняя абсолютная скорость движения водовоздушной смеси  $V_c$ . Принимая во внимание, что расходы воздуха, жидкости и смеси равны  $Q_a$ ,  $Q_b$  и  $Q_c$ , и поперечная площадь половины аэротенка (аэратора) равна  $F$ , получаем для скоростей следующие формулы:

$$V_a = \frac{Q_a}{\alpha F}; \quad (11)$$

$$V_b = \frac{Q_b}{(1-\alpha)F}; \quad (12)$$

$$V_c = \frac{Q_b + Q_a}{F} = \frac{Q_c}{F}, \quad (13)$$

где  $\alpha$  — коэффициент аэрации по формуле

$$\alpha = \frac{W_a}{W_b},$$

$W_a$  — объем воздуха над аэратором,

$W_b$  — объем жидкости над аэратором.

Аэротенк был снабжен 6 пьезометрами (фиг. I), которыми измеряли уровень смеси жидкости в аэротенке до и после включения аэрации. Однако измеряемый подъем уровня  $h$  не может быть использован для определения  $W_a$ , так как при аэрации жидкость стекает в неаэрируемую половину аэротенка. По этой причине коэффициент аэрации определялся исходя из следующих соображений.

Согласно исследованиям А.Г. Чанишвили [19] скорость подъема пузырьков по отношению к скорости подъема смеси (т.е. гидравлическая крупность  $v = v_a - v_c$ ) зависит от коэффициента аэрации и выражается эмпирической формулой:

$$v = 0,27 (1 - 3,72 \alpha + 6,17 \alpha^2). \quad (I4)$$

С другой стороны, из формул (II) и (I3) получаем

$$v = v_a - v_c = \frac{Q_a}{\alpha F} - \frac{Q_c}{F}. \quad (I5)$$

Совместное решение формул (I4) и (I5) дает нам величины  $v$  и  $\alpha$  для исследованных интенсивностей аэрации (см. таблицу I) в аэротенке с перегородкой и без нее. Зная величину  $\alpha$ , можно определить объем воздуха  $W_a$ .

Средняя абсолютная скорость подъема пузырьков зависит от их размера, причем пузырьки в смеси имеют разные размеры. Точное определение величины площади контакта  $F_K$  невозможно, однако при некоторых допущениях можно подсчитать ее ориентировочное значение, что в свою очередь позволяет охарактеризовать процесс растворения кислорода.

Принимаем следующие допущения: 1) все пузырьки имеют одинаковый размер, 2) так как коэффициенты аэрации  $\alpha$  имеют небольшие значения (табл. I), то гидравлическое сопротивление пузырька в смеси определяется законами сопротивления единичного пузырька.

Согласно многим исследованиям относительная скорость подъема пузырька зависит от его диаметра, т.е.  $v_a - v_b = f(d)$ . В.Хаберман [20] приводит график этой зависимости



Определение междуфазовой поверхности контакта ( $\frac{F}{K}^2$ )  
 для зазируемой половини азротенка

№ режима азротенки	$Q_a$ (м <sup>3</sup> /сек)	$Q_b$ (м <sup>3</sup> /сек)	$\alpha$	$V$ (м/сек)	$d$ (мм)	$W_a$ ( м <sup>3</sup> )	$F_{K^2}$ ( м <sup>2</sup> )
--------------------------	--------------------------------	--------------------------------	----------	----------------	-------------	-----------------------------	---------------------------------

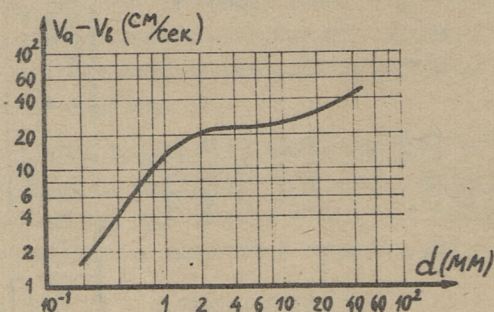
а) азротенк с перегородкой

I	0,0161	0,078	0,042	0,232	2,5	0,0345	82,8
II	0,0258	0,103	0,066	0,211	2,3	0,0546	143,0
III	0,0328	=,103	0,086	0,196	2,2	0,0714	195,0
IV	0,0400	0,101	0,109	0,181	2,0	0,0910	273,0
V	0,0517	0,099	0,149	0,157	1,5	0,1252	502,0

б) азротенк без перегородки

I	0,0161	0,076	0,042	0,233	2,5	0,0347	83,2
II	0,0258	0,108	0,065	0,211	2,3	0,0540	141,0
III	0,0328	0,112	0,084	0,196	2,2	0,0701	191,0
IV	0,0400	0,113	0,105	0,182	2,0	0,0881	264,0
V	0,0517	0,107	0,144	0,160	1,5	0,1221	489,0

(фиг. 10). По этому графику определены средние диаметры пузырьков для всех интенсивностей аэрации.



Фиг. 10. Скорость всплывания пузырьков в зависимости от их диаметра (по Хаберману)

Далее вычислена площадь контакта пузырьков по уравнению

$$F'_k = \frac{6W_a}{d} \cdot \quad (16)$$

Результаты расчетов  $F'_k$  по изложенной методике сведены в таблицу I.

Далее определим площадь междуфазовой поверхности контакта для неаэрируемой половины аэротенка ( $F''_k$ ). В эту часть аэротенка пузырьки "засасываются" потоком жидкости из нааэрирующей зоны, причем общий объем поступающих в неаэрируемую часть пузырьков равен объему покидающих эту часть аэротенка пузырьков.

Так как в неаэрируемой половине аэротенка жидкость движется сверху вниз, то в этой части находится определенный объем воздуха. Об этом свидетельствуют и показания пьезометров  $-h$ , измеряющих превышение уровня жидкости при аэрации. Можно предположить, что средняя скорость подъема пузырьков равняется скорости нисходящего потока жидкости. Согласно измерениям вертикальная скорость движения жидкости убывает от стенки к центру аэротенка (точки 7-12 на фиг. 2). Вся половина аэротенка разделена на вертикаль-



ные зоны шириной 20 см. Скорости циркуляции смеси в точках 7, 8, 9, 10, II и I2 (фиг. 2) равны средним скоростям в соответствующих зонах. По этим скоростям определены из графика (фиг. 10) средние диаметры пузырьков в зонах 7, 8 и 9. Объем воздуха в зоне 7 определен по измеренному пьезометрами подъему уровня жидкости над зоной при аэрации.

Объемы воздуха в 8 и 9 зонах вычислены на основании подъема уровней, которые определены по графику  $h = f(v_c)$ , составленному для точки 7 при различных интенсивностях аэрации.

Площади междуфазового контакта в отдельных зонах рассчитывались по формуле (16).

В результате получены следующие величины для площади контакта в неаэрируемой части аэротенка  $F_K''$  (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Площадь междуфазовой поверхности  
контакта для всего аэротенка

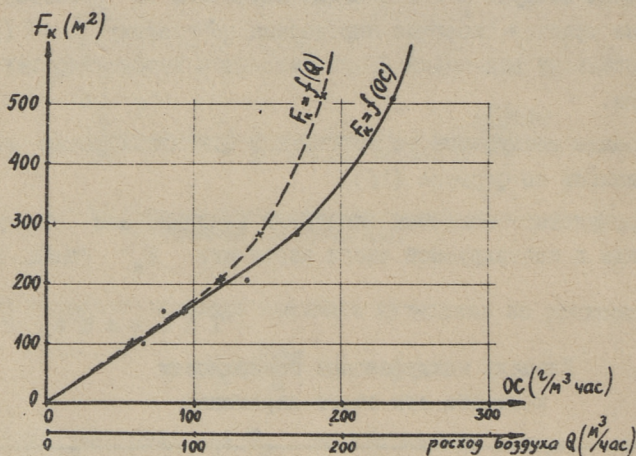
№ режи- ма аэра- ции	Аэротенк с перегородкой			Аэротенк без перепо- родки		
	$F_K'$ ( $m^2$ )	$F_K''$ ( $m^2$ )	$F_K$ ( $m^2$ )	$F_K'$ ( $m^2$ )	$F_K''$ ( $m^2$ )	$F_K$ ( $m^2$ )
I	82,8	20,0	102,8	83,2	12,6	95,8
II	143,0	14,6	157,6	141,0	10,0	151,0
III	195,0	18,1	213,1	191,0	8,7	199,7
IV	273,0	12,8	285,8	264,0	9,7	273,7
V	502,0	12,7	514,7	489,0	7,9	496,9

Общая площадь междуфазовой поверхности контакта  $F_K$  равна сумме  $F_K' + F_K''$ .

К полученной площади контакта следует еще добавить площадь поверхности аэротенка, но из-за относительно малой величины ( $2,5 m^2$ ) она практически может быть опущена.

Как можно заметить, площадь контакта в азротенке с перегородкой получилась несколько больше, что указывает на полезность перегородки.

В пункте 3 была определена окислительная способность азротенка с перегородкой. Зависимость окислительной способности от величины площади междуфазовой поверхности контакта приведена на фиг. II.



Фиг. 11. Окислительная способность в зависимости от междуфазовой площади контакта

На основании определенных площадей контакта  $F_K$  вычислен коэффициент массопередачи  $K'_L$  из формулы (4) (см. табл. 3).

Т а б л и ц а 3

Определение коэффициента массопередачи

№ режима аэрации	ОС <sup>н</sup> (г/м <sup>3</sup> час)	$K'_L$ (л/час)	$F_K$ ( м <sup>2</sup> )	$K'_L$ (м/час)
I	65	6,87	102,8	0,308
II	78,5	8,60	157,6	0,252
III	136	14,5	213,1	0,313
IV	170	18,7	285,8	0,301
V	233	25,1	514,7	0,225



Характер кривой  $R_K = f(OC)$  показывает, что окислительная способность приблизительно пропорциональна площади междуфазового контакта, что и следовало ожидать из теоретических рассуждений (формула 4).

## 5. Выводы

На основе проведенных опытов можно сделать следующие выводы.

Характер изменения расхода жидкости в циркуляционном потоке и окислительной способности в зависимости от интенсивности аэрации (в исследованном аэротенке и в диапазоне  $D_1 = 10 - 40 \text{ м}^3/\text{м}^3\text{час}$ ) различен.

Наличие максимума расхода жидкости в циркуляционном потоке очевидно объясняется тем, что при увеличении интенсивности аэрации все больше воздуха засасывается потоком жидкости в неаэрируемую часть аэротенка. Так как пузырьки имеют свойство всплывать в жидкости, то происходит взаимное торможение движений потока жидкости и пузырьков.

Отсутствие "неаэрируемого" ядра в центре аэротенка доказывает, что несмотря на малые скорости циркуляции в центре, содержимое аэротенка хорошо перемешивается.

Установка перегородки в аэротенк является полезной, это увеличивает как скорости циркуляции смеси, так и междуфазовую площадь контакта.

Как было показано, понятие окислительной способности лишь частично характеризует процесс переноса кислорода из воздуха в хлопок активного ила.

Из описанных двух методов определения окислительной способности (OC) метод определения скорости растворения кислорода непосредственным титрованием его в растворе более точно передает действительный процесс переноса кислорода при биологической очистке.

Предлагается методика для определения величины площади междуфазовой поверхности контакта в системе воздух - вода для низконапорных аэротенков. Вычислен коэффициент массопередачи -  $K_L$ .

Установлено, что окислительная способность аэротенка приблизительно пропорциональна площади междуфазового контакта.

Для экономической характеристики исследованного низконапорного аэратора были подсчитаны затраты электроэнергии (в квт.ч) на растворение 1 кг кислорода.

Расчет произведен на основе политропического процесса сжатия воздуха, при к.п.д. воздуходувки 80% и величине окислительной способности  $OC_{уд}''$ . При заглублении аэратора  $h = 0,65$  м и диапазоне интенсивностей аэрации от 10 до 40 м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>час расход электроэнергии составляет соответственно 0,72 - 0,63 квт.ч/кг O<sub>2</sub>, что совпадает с данными других авторов [5, 15].

## Л и т е р а т у р а

1. J. S u s c h k a. Hydrodynamika komor napowietrzania. "Gaz, Woda i Technika Sanitarna", 1964, No.8.
2. A. P a s v e e r. Distribution of oxygen in activated sludge floc. "Sewage and Ind. Wastes", 1954, No. 1.
3. К.Н. К а л б с к о р ф. Luftmengenberechnung für Belebungsanlagen. "Gas und Wasserfach", 1961, No. 8.
4. С.М. Ш и ф р и н, Б.Г. М и ш у к о в. Исследование режима работы аэротенков с низконапорной аэрацией. "Водоснабжение и санитарная техника", 1966, № 3.



5. N. C. H. F i s c h e r s t r ö m. Low pressure aeration of water and sewage. "Journal of the Sanit. Engng. Div.", 1960, SA-5.
6. J. G a n c z a r c z y k, J. S u s c h k a. Pilot plant studies on coarse bubble aeration. "Int. J. Air Water Pollut.", 1962. pp. 319-334.
7. J. G a n c z a r c z y k, J. S u s c h k a. Doswiadczenia poltechniczne nad napowietrzeniem sciekow wedlug systemu Inka. "Gaz, Woda i Techn. Sanit.", 1961, No.6.
8. B. L e w a n d o w s k i, J. R y b i n s k i. O czasie zatrzymania pecherzykow powietrza w zbiornikach napowietrzania. "Gaz, Woda i Techn. Sanit.", 1963, No.8.
9. Д.А. Ф р а н к - К а м е н е ц к и й. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Изд. АН СССР, 1947.
10. М.А. Е в и л е в и ч. Основные закономерности процесса биоокисления сточных вод целлюлозного производства в аэротенках. Труды ВНИИБ, вып. 51, 1965.
11. Л.Н. Б р а г и н с к и й, М.А. Е в и л е в и ч. Рациональный тип аэратора для биологической очистки сточных вод целлюлозно-бумажной промышленности. "Химическая переработка древесины", реферат, информация, 1965, № 2.
12. C. E. C a r v e r, A. T. I r p e n. Basic factors of oxygen transfer in aeration systems. "Sewage and Industrial Wastes", 1954, No. 7.
13. J. K. B e w t r a, P. F. M o r g a n. Air diffuser efficiencies. "J. Water Pollut. Control Federation", 1960, No 10.
14. Б.Г. М и ш у к о в. Очистка сточных вод молочных заводов. Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. Л. 1965.
15. K. S c h e r b. Vergleichende Untersuchungen über das Sauerstoffeintragsvermögen verschiedener Belüftungssysteme auf dem Münchner Abwasserversuchsfeld. "Münch. Beitr. Abwass.-, Fisch- und Flussbiol.", 1965.
16. Л.Н. Б р а г и н с к и й, М.А. Е в и л е в и ч, И.С. П а в л у ш е н к о. О массопередаче при барботажной аэрации. "Процессы хим. технологии", сборник статей. М.-Л. 1965.

17. Б.П. Л е н с к и й. Исследование закономерностей процесса биологической очистки сточных вод в аэротенках-смесителях. Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд.техн.наук. М. 1966.

18. В.Г. Л е в и ч. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.

19. А.Г. Ч а н и ш в и л и. Гидравлическая крупность воздушных пузырьков в условиях их взаимодействия. Сообщения АН Грузинской ССР, т.22, № 6, 1959.

20. W.L. Н а б е р м а н. R.K. М о r t o n. An experimental study of bubbles moving in liquids. Proc. ASCE, t.80, No 387, 1954.

21. X.A. М ё л ь д е р. Биологическая очистка сточных вод целлюлозно-бумажной промышленности в аэротенках с низконапорной аэрацией. См. наст.сборник, стр.141.



УДК 532.542

М.В. Хяяль, Л.А. Тепакс

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ  
С НЕОДНОРОДНОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

Вопрос о расчете сопротивления, которое оказывает движению жидкости русло с неоднородной шероховатостью, в настоящее время приобрел большое значение. Зачастую отмечаются случаи, когда дно и стенки канала покрываются различными материалами, имеющими различную шероховатость. Шероховатость отложений на дне каналов и канализационных коллекторов в свою очередь отличается от шероховатости стенок.

В литературе приводится множество формул для определения влияния неоднородности шероховатости (формулы Н.Н. Павловского [1], Х.А. Эйнштейна [2], П.Н. Белокопя [3], Е.Э. Шиперко [4], В.Б. Дульнева [5], И.Д. Денисенко [6] и др.) Эти авторы предлагают пользоваться при расчетах формулой Шеши. Коэффициент Шеши определяется по формулам Павловского, Маннинга и др. При этом вводится понятие среднего или приведенного коэффициента шероховатости. Формулы для определения этого коэффициента получены на основании тех или иных допущений. Несмотря на различия между этими формулами, все они дают весьма близкие результаты. Расхождения становятся ощутимыми лишь в тех случаях, когда один коэффициент шероховатости превышает другой в 1,5-2 раза. Опытная проверка этих формул проводилась по измерениям гидравлического сопротивления русла в целом. Подробное и систематическое изучение распределения скоростей и касательных сил по периметру не проводилось.

В последнее время все чаще высказывается мнение, что формула Шези, предложенная в конце XVIII века, устарела. Например, гидравлический радиус  $R$  в случае труб является постоянным и если коэффициент шероховатости  $\Pi$  по длине трубы также постоянный, то по формуле Н.Н. Павловского  $C = \frac{1}{\Pi} R^4$  получаем  $C$  также постоянным. Однако это не соответствует действительности, так как известно, что коэффициент Шези  $C$ , также как и коэффициент сопротивления  $\lambda$ , изменяется с изменением числа Рейнольдса  $Re$ . Доказано, что течение в трубах в большинстве случаев происходит в переходной области, где  $\lambda$  обычно уменьшается по мере увеличения  $Re$ .

Поэтому в настоящее время при расчете водопроводных труб отказались от применения формулы Н.Н. Павловского и в нормах рекомендуется пользоваться формулами Ф.А. Шевелева. Вполне понятно, что формула Н.Н. Павловского не применима также и в случае труб с неоднородной шероховатостью.

К настоящему времени имеется ряд достаточно детальных исследований в части круглых труб с однородной шероховатостью (исследования И. Никурадзе, Ф.А. Шевелева). Ценные результаты были получены благодаря тому, что одновременно с сопротивлением исследовалось также распределение скорости в трубе.

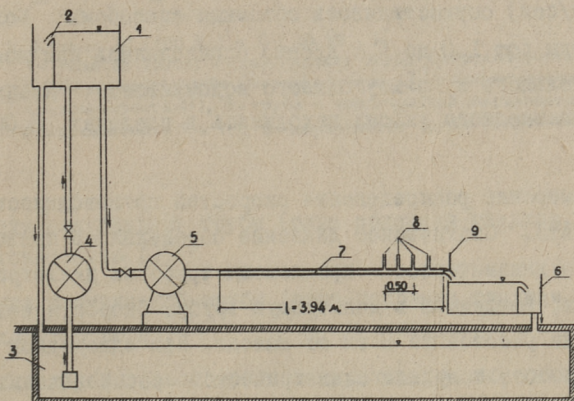
На наш взгляд при изучении гидравлического сопротивления труб и каналов с неоднородной шероховатостью необходимо исследовать также распределение скоростей в поперечном сечении. Определяющим здесь является и распределение касательных напряжений по периметру, так как эти напряжения непосредственно связаны с гидравлическим уклоном.

Как известно, распределение касательных напряжений по периметру в поперечных сечениях некруглых труб с однородной шероховатостью является неравномерным. Распределение касательных напряжений в сечениях некруглых труб с неоднородной шероховатостью является также неравномерным, а



именно по двум причинам: из-за влияния формы поперечного сечения и из-за влияния неоднородности шероховатости. Это обстоятельство усложняет проблему.

В настоящей работе рассматривается первый этап нашего исследования, где влияние неоднородности шероховатости исследуется в наиболее простом случае, а именно в трубе с круглым поперечным сечением, половины которой имеют различные шероховатости.



Фиг. 1. Схема экспериментальной установки:  
1 - напорный бак, 2 - водослив, 3 - резервуар, 4 и 5 - насосы,  
6 - мерный водослив, 7 - исследуемая труба, 8 - пьезометры,  
9 - трубка Пито

При испытаниях пользовались системой установок, имеющих в гидравлической лаборатории Таллинского политехнического института. В эту систему включена специально для этой цели изготовленная медная труба длиной 3,94 м и диаметром 28,2 мм (фиг. 1).

К трубе прикреплены четыре пьезометра - три для измерения гидравлического уклона и один для измерения статического давления при измерении скоростей.

Длина начального участка  $\frac{L}{D} \geq 100$ , что можно считать вполне достаточным.

Труба составлена из двух половин, что позволяет изменять шероховатость трубы. Применялись искусственные шероховатости из отсеянного песка: шероховатость I ( $d_{\text{экв}} = 0,49$  мм) и шероховатость II ( $d_{\text{экв}} = 0,36$  мм), в комбинации с гладкой половиной трубы и указанных шероховатостей между собой.

В каждом случае производилось объемное измерение диаметра трубы. Измерение малых расходов (от 0,1 до 1,0 л/сек) осуществлялось объемным способом. Большие расходы (от 1,0 до 5,4 л/сек) определялись при помощи треугольного и прямоугольного водосливов. Диапазоны гидравлического уклона находились в пределах 0,0022 - 5,26.

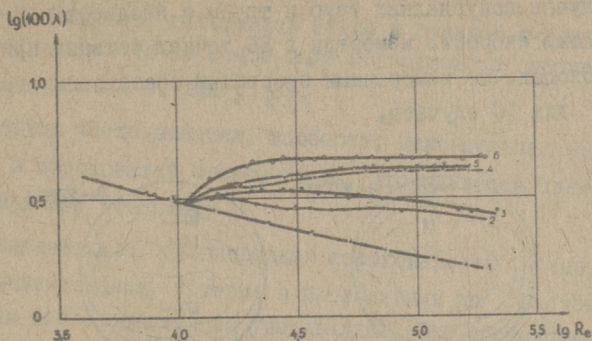
Измерение распределения скоростей производилось трубкой Пито. Статическое давление определялось пьезометром, а динамическое - при помощи трубочки диаметром в 1,5 мм, введенной в испытуемую трубу. Скорости измерялись на расстоянии 8 см от вывода. При однородной шероховатости получили симметрическое распределение скоростей, что доказывает достаточность этого расстояния.

Для определения касательных напряжений измеряли скорости в разных точках по периметру. Расстояние от стенки в случае гладкой трубы  $y = 0,13$  см, шероховатой трубы (шероховатость I)  $y = 0,16$  см, шероховатой трубы (шероховатость II)  $y = 0,15$  см. В целях обеспечения расположения трубочки на равных расстояниях от стенки для всех точек измерения к ее концу прикреплялась шайбочка.

В результате проведенных испытаний получены кривые  $\lambda - Re$  (фиг. 2) для шести случаев:

- 1) для гладкой трубы;
- 2) для шероховатой трубы с шероховатостью I;
- 3) для шероховатой трубы с шероховатостью II;





Фиг. 2. Кривые  $\lg(100\lambda) = f(\lg Re)$ :  
 1 - гладкая труба, 2 - полугладкая труба (шероховатость II),  
 3 - полугладкая труба (шероховатость I), 4 - шероховатая труба  
 (шероховатость II), 5 - труба с неоднородной шероховатостью  
 (шероховатости I и II), 6 - шероховатая труба (шероховатость I)

4) для полугладкой трубы (одна половина гладкая, другая с шероховатостью I);

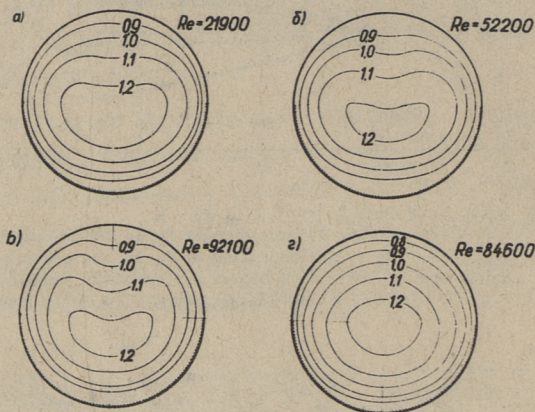
5) для полугладкой трубы (одна половина гладкая, другая с шероховатостью II);

6) для трубы с неоднородной шероховатостью, одна половина которой имела шероховатость I и другая — шероховатость II.

Как видно из фиг. 2, опытные точки гладкой трубы (кривая I) совпадают с формулой Никурадзе. Шероховатые трубы в большей части опытов работают в области квадратичного сопротивления (кривые 4 и 6). Кривая 5 трубы с неоднородной шероховатостью расположена между кривыми 4 и 6 и большей частью находится также в квадратичной области. Кривые 2 и 3 для полугладких труб имеют нисходящий характер и квадратичная область отсутствует.

Во всех случаях измерялось распределение скоростей в поперечном сечении трубы. Опытами установлено, что распределение скоростей в сечениях гладкой и шероховатых труб соответствует логарифмическому закону распределения скоростей.

В случае полугладких труб и трубы с неоднородной шероховатостью скорость измеряли в 86 точках сечения при разных расходах. По измеренным скоростям составлены графики изотак для 10 случаев.



Фиг. 3. Распределение скоростей в поперечном сечении:  
 Изотаки  $\frac{U}{U_{ср}}$ ;  $U$  — фактическая скорость;  $U_{ср}$  — средняя скорость; а, б, в — полугладкая труба, одна половина гладкая, другая с шероховатостью 1; г — труба с неоднородной шероховатостью, одна половина с шероховатостью 1, другая с шероховатостью II

На фиг. 3 в качестве примера изображены изотакхи для четырех случаев. Изотакхи скоростей, полученные для полугладкой трубы при различных расходах (а, б, в), по виду весьма похожи, и позволяют предполагать о наличии вторичных течений, влияние которых увеличивается с повышением числа Рейнольдса. В трубе с неоднородной шероховатостью (фиг. 3 г), где измерения проводились в квадратичной области сопротивления, вторичных течений не обнаружено. Можно заключить, что влияние вторичных течений возрастает также с увеличением разности шероховатостей двух половин трубы.

Х. Шлихтинг [7] исследовал распределение скоростей в трубе широкого прямоугольного сечения, три стороны которой были гладкими, а четвертая шероховатая. При этом макси-



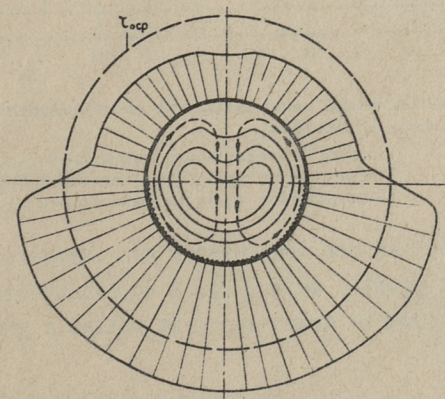
мальная скорость находилась ближе к гладкой стенке, чем к шероховатой. То же самое было обнаружено в исследовании М. Кахана и С. Хынгу [8].

В наших исследованиях, наоборот, максимальная скорость ближе к шероховатой стенке трубы, что является следствием вторичных течений.

Следовательно, неоднородная шероховатость вызывает вторичные течения, которые в проведенных до настоящего времени исследованиях не учитывались. Это обстоятельство безусловно оказывает влияние на сопротивление трубы.

Нами определено также распределение касательных направлений по периметру. Для этого скорость у стенок измерялась в 20-ти точках.

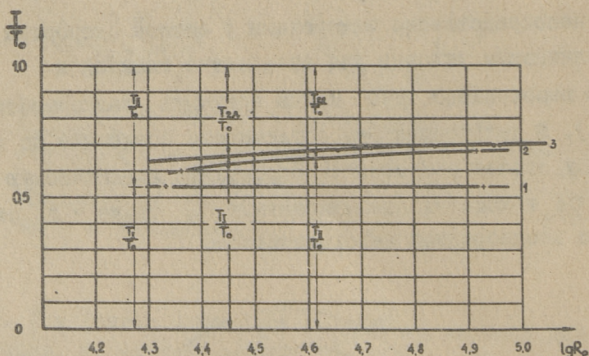
По непосредственно измеренным у стенок скоростям и гидравлическим уклонам для совершенно гладкой и полностью шероховатой труб можно получить зависимости  $U = f(U_*)$ . В дальнейшем эти зависимости позволяют по измеренной у стенок скорости  $U$  определить динамическую скорость  $U_*$  и касательное напряжение  $\tau_0$ , также и в случае трубы с неоднородной шероховатостью.



Фиг. 4. Распределение касательных напряжений в полугладкой трубе (с шероховатостью 1),  $d = 27,8$  мм,  $Q = 1,63$  л/сек.  $Re = 68900$

В качестве примера на фиг. 4 изображено распределение касательных напряжений для полугладкой трубы. Как видно, касательные напряжения являются сравнительно однородными по обеим половинам трубы, однако и здесь отмечается влияние вторичных течений. Касательные напряжения гладкой и шероховатой половины трубы между собой резко различаются.

Соотношение касательной силы, влияющей на шероховатую половину трубы, ко всей касательной силе возрастает с увеличением числа Рейнольдса (фиг. 5, кривые 2 и 3). При неоднородной шероховатости и в области квадратичного сопротивления это соотношение остается постоянным (фиг. 5, линия 1).



Фиг. 5. Распределение касательных сил по периметру в зависимости от числа Рейнольдса:

- 1 - труба с неоднородной шероховатостью,
- 2 - полугладкая труба (шероховатость II),
- 3 - полугладкая труба (шероховатость I)

Все вышесказанное доказывает, что закономерности сопротивления русел с неоднородной шероховатостью можно описать с достаточной достоверностью только с учетом числа Рейнольдса.



## Л и т е р а т у р а

1. Н.Н. П а в л о в с к и й. Собрание сочинений, том I. М. 1955.
2. Н.А. Е i n s t e i n. Der hydraulische oder Profil-Radius. Schweizerische Bauzeitung, 1934, Bd. 103, No.8.
3. П.Н. Б е л о к о н ь. Инженерная гидравлика потока под ледяным покровом. М., Госэнергоиздат, 1940.
4. Е.Э. Ш и п е р к о. Гидравлический расчет русел с неоднородной шероховатостью. Изв. высших уч.заведений. Горный журнал. 1961, №7.
5. В.Б. Д у л ь н е в. О движении потока под ледяным покровом. "Метеорология и гидрология", 1962, №7.
6. И.Д. Д е н и с е н к о. Определение коэффициента шероховатости в руслах с неоднородными стенками. Гидравлика. Межведомственный республиканский сборник I. Киев 1965.
7. Н. S c h l i c h t i n g. Experimentelle Untersuchungen zum Rauheitsproblem. Ingenieur-Archiv, Bd. 7, p.1, 1936.
8. М. К а h а n, S. Н i n g u. Dinamica curentilor sub presiune in canale cu rugozitate mixta. Studii si cercetari de mecanica aplicata, t. VIII, No 2, 1957.





УДК 551.465

А.М. Айтсам, В.К. Асток

МОРСКИЕ ТЕЧЕНИЯ КАК ЭЛЕМЕНТЫ СЛУЧАЙНОГО  
 ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

При решении некоторых технических проблем, связанных с морской средой, необходимо знать кроме вероятностных характеристик осредненных значений параметров морской среды также вероятностные характеристики их реальных, мгновенных значений.

Математически задача описывается следующим образом:

$$Y_2(x_1, x_2 \dots x_n) = F(L)Y_1(x_1, x_2 \dots x_n), \quad (I)$$

где  $Y_1(x_1, x_2 \dots x_n)$  — вероятностная характеристика исследуемого параметра, определяемая граничными условиями;

$L$  — оператор решения дифференциального уравнения баланса;

$F(L)$  — оператор, определяемый типами вероятностной характеристики, оператора  $L$  и исследуемого параметра;

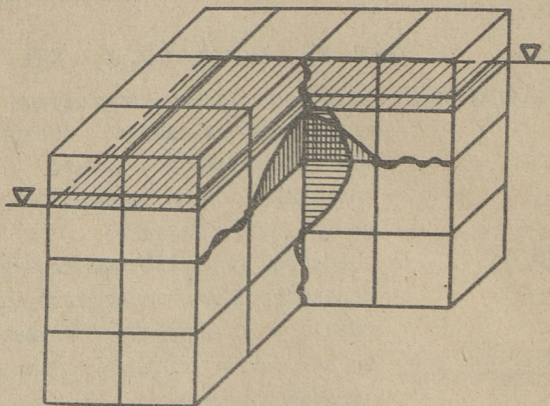
$Y_2(x_1, x_2 \dots x_n)$  — вероятностная характеристика параметра в исследуемом районе моря.

Решение уравнения (I) в большинстве случаев весьма трудоемко.

Рассмотрим возможный вариант описания вероятностной характеристики одного из параметров — поля морских течений, т.е. его стохастическую модель.

Согласно теории вероятностей морские течения можно рассматривать как случайные вектора  $\vec{V}$  в четырехразмерном пространстве  $\vec{r}, t$ , т.е. рассматривать скорости течения как элементы векторного четырехразмерного поля.

С некоторым приближением можно принимать, что случайное векторное поле течений является в широком смысле стационарным и обладает эргодическим свойством (по времени) при достаточной длительности периода реализации  $T$ . Выбор периода осреднения скоростей по времени следует производить в зависимости от масштаба исследуемого процесса так, чтобы исключить из рассмотрения флуктуации более высокой частоты, не характеризующие процесс данного масштаба. Векторное случайное поле течений открытого моря является, по-видимому, однородным в верхних горизонтальных плоскостях  $z = \text{const}$ . В прибрежной части моря поле таким свойством не обладает. Случайное поле течений ограничено характеристиками поля на твердых границах моря и на свободной поверхности. Однако (фиг. 1) по нашему мнению, случайное поле те-



Фиг. 1. Модель определения радиуса взаимосвязи

чений не следует ограничивать свободной поверхностью моря, а можно продолжить его случайным векторным полем скоростей атмосферных течений, корригируя масштабы полей при переходе от одного поля к другому при помощи некоторой постоян-



ной, например, ветровым коэффициентом.

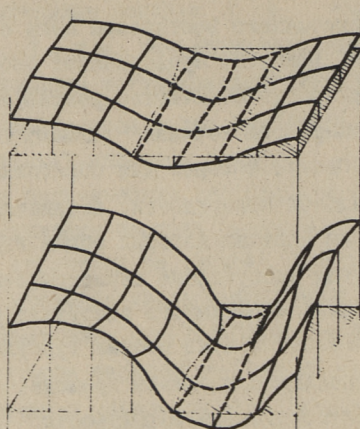
Сечения случайного векторного поля скоростей течения при  $z = \text{const}$  (фиг. 2) представляют собой случайные векторные поверхности. Количество реализации векторных поверхностей скоростей течения зависит от длительности наблюдения. Однако интерес для обработки имеют лишь реализации случайной поверхности, независимые от предыдущих реализаций, из состава которых общим гармоническим анализом исключены неслучайные периодические составляющие. Для определения необходимого интервала реализации можно пользоваться известным из теории турбулентности [1] понятием интегрального масштаба времени, характеризующим меру наибольшего времени связанности

$$T_0 = \sup \int_0^{\infty} B(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $B(\tau)$  — нормированная автокорреляционная функция в точке  $x_i, y_i$  поверхности  $z = \text{const}$ .

Из зависимости (2) видно, что значение интегрального масштаба в основном зависит от  $T_0$ , при котором  $B(\tau) \rightarrow 0$ . Согласно данным Б.Н. Беляева и В.С. Болдырева  $B(\tau)$  приближается к нулю при  $T_0 = 4 - 6$  часов [2]. По нашим данным в мелководных районах  $T_0$  зависит от значения математического ожидания скорости течения  $\vec{V}$ , причем с увеличением  $\vec{V}$  уменьшается  $T_0$ . Величина  $T_0$  в наших опытах находилась в пределах от 3 — II часов.

Определив автокорреляционные функции  $B(\Delta x)$ ,  $B(\Delta y)$  и кросскорреляции  $B(\Delta x, \Delta y)$  при помощи зависимостей, аналогичных (2), представляется возможным определить меры наибольших длин взаимосвязи отдельных частей моря, т.е. районы с независимыми скоростями течения. При этом целесообразно определить длины взаимосвязи в направлениях, перпендикулярных к осредненным по времени линиям тока. Длина взаимосвязи в направлении линии тока определяется интегральным масштабом времени и осредненной скоростью.



Фиг. 2. Случайные векторные поверхности скорости течения при  $z = \text{const}$

Сечение случайной векторной эргодической поверхности скоростей течений другой поверхностью представляет собой случайную функцию от координаты длины.

Сечение случайной функции в зафиксированной точке пространства  $x, y, z$  является случайной векториальной величиной.

$$\vec{v} = f[\vec{r}, \vec{v}(\vec{r} + \Delta\vec{r}), t, \vec{v}(t + \tau)] \text{ при } \Delta r < \Delta r_0, \tau < T_0, \quad (3)$$

где  $\Delta r_0$  - радиус взаимосвязи.

При характеристике случайного векторного поля течений как случайной решетки (аналогично случайной цепи при случайных функциях) для уменьшения необходимых наблюдений следует выбрать шаг решетки равным проекциям радиуса взаимосвязи. В этом случае в каждом узле дискретной решетки скорость течения представляет независимую случайную величину  $\vec{v} = f(\vec{r}, t)$ .

Для характеристики случайного векторного поля морских течений следует в каждом узле решетки определить основные стохастические характеристики: моменты, дифференциальные и интегральные законы распределения и корреляционные функции.



Определение случайного векторного поля скоростей течений возможно практически двумя способами: измерением случайных непрерывных векторных величин в зафиксированных точках пространства при помощи самописцев и определением случайных поверхностей скоростей течений аэронаблюдениями. Оба метода трудоемки, поэтому иногда при решении практических проблем следует пользоваться гидравлической моделью исследуемого участка моря. В качестве критерия правильности моделирования можно принимать тождество статистических характеристик модельного и натурального полей.

В настоящее время в научно-исследовательской лаборатории санитарной техники Таллинского политехнического института на основе вышеописанной стохастической модели исследуется случайное векторное поле для одного из участков Финского залива.

Определение характеристик случайного векторного поля скоростей течений производится при помощи аэрофотосъемок и самописцев течений, а также гидравлическим моделированием исследуемого района.

Обработка полученных данных производится при помощи электронной вычислительной машины Минск-22.

#### Л и т е р а т у р а

1. О. Х и н ц е. Турбулентность. М. 1963.
2. Б.Н. Б е л я е в, В.С. Б о л д ы р е в. Применение теории случайных функций и изучение морских течений. Океанология т. III, вып. 6, М. 1963.





УДК 628.394

А.М. Айтсам

ДВУХРАЗМЕРНАЯ ДИФФУЗИЯ ВЕЩЕСТВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ  
 В ВОДОЕМАХ ПРИ ОТКАЗЕ ОТ УЧЕТА ПРОДОЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

При расчете необходимой степени очистки сточных вод в искусственных очистных сооружениях следует исходить из разбавления веществ загрязнения в водоеме и допустимых значений концентрации веществ загрязнения [1].

Как известно, при описании распространения веществ загрязнения в водотоке в зоне, где кинетическая энергия сточных вод по сравнению с кинетической энергией водотока ничтожно мала, можно в первом приближении пользоваться полуэмпирической теорией турбулентной диффузии [2], [3], [4]. В полуэмпирической теории двухразмерное линейное уравнение турбулентной диффузии при предположении скалярности и постоянства коэффициентов диффузии, а также при выборе координатной оси  $x$  по направлению осредненного движения, записывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - K_1 S, \quad (1)$$

- где:  $S$  - объемная концентрация веществ загрязнения;  
 $x, y$  - декартовы координаты;  
 $u$  - скорости движения воды;  
 $K_x, K_y$  - коэффициенты турбулентной диффузии по направлениям  $x$  и  $y$ ;  
 $K_1$  - коэффициент неконсервативности веществ загрязнения.

Начальным условием для уравнения (I) можно в большинстве встречающихся на практике условиях принимать

$$S(x, y) = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2)$$

Граничные условия уравнения (I) в водоемах (водохранилища и морские бухты) следующие:

$$1) \quad x = 0 \quad S = f_1(y). \quad (3)$$

Функция  $f_1(y)$  определяется решением уравнения диффузии в условиях турбулентного потока со сдвигом [5], [6]. При этом проекции скоростей, входящие в линейные уравнения диффузии, определяются системой нелинейных уравнений турбулентного движения потока. Эта система, состоящая в общем случае (при учете стратификации потока) из пяти уравнений, не всегда поддается аналитическому решению. Поэтому многими авторами (Г.Абрахам [7], Б.Р.Мортон, Г.И. Тейлор [8] и др.) сделаны попытки определить  $f_1(y)$ , пренебрегая более точными уравнениями турбулентного движения. Этими авторами получено, что  $f_1(y)$  имеет вид уравнения нормального распределения.

2)  $x > 0$  граничные условия открытые.

В первоначальных, ориентировочных инженерных расчетах самоочищения водоемов, на стадии проектного задания, можно отказаться от точного учета граничных условий в сечении  $x=0$  и заменить истинные значения функции  $f_1(y)$  прямоугольником

$$S(0, y_1 \leq y \leq y_2, 0 < t \leq T) = S_0. \quad (4)$$

При ориентировочных расчетах можно также отказаться от влияния продольной диффузии на диффузионный процесс и принять  $D_x = 0$ . Сделанное допущение означает, что первая кромка волны загрязнения распространяется вдоль потока со скоростью движения воды  $u$ , что естественно противоречит действительности. Первая кромка волны загрязнения фактически движется со скоростью, превышающей скорость движения воды [9], а задняя кромка со скоростью, меньшей скорости движения воды.



Отказ от учета продольной диффузии на процесс распространения веществ загрязнения равносильен отказу от зависимости между концентрацией и временем. Следовательно, концентрация вдоль потока имеет следующие значения:

$$\frac{x}{u} + T < t < \frac{u}{T}, \quad S = 0; \quad (5)$$

$$\frac{u}{T} \leq t \leq \frac{u}{T} + u, \quad S = f(x, y). \quad (6)$$

При вышепринятых допущениях уравнение (I) и граничные условия (4) переписываются в виде

$$u \frac{\partial S}{\partial x} = D_y \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - k_1 S, \quad (7)$$

$$S(0, y_1 \leq y \leq y_2) = S_0. \quad (8)$$

Для решения уравнения (7) при нулевых начальных условиях целесообразно пользоваться методами операционного исчисления [9], [10].

Перепишем граничные условия в виде аналитической функции при помощи единичной "псевдо-функции" Хевисайда

$$S_0 = S_0 [\tau(y - y_1) - \tau(y - y_2)]. \quad (9)$$

Применив относительно переменной  $y$  в уравнении (7) преобразование Лапласа, получим

$$p \bar{S} - S_0 - \frac{D}{u} \frac{d^2 \bar{S}}{dy^2} + \frac{k_1}{u} \bar{S} = 0. \quad (10)$$

Для решения полученного уравнения в изображении применим вторично преобразование Лапласа относительно переменной  $y$ .

$$p \bar{\bar{S}} - S_0 \frac{1 - e^{-(y_2 - y_1)p_1}}{p_1} e^{-y_1 p_1} - \frac{D}{u} p_1^2 \bar{\bar{S}} + \frac{k_1}{u} \bar{\bar{S}} = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (II) выражаем  $\bar{\bar{S}}$

$$\bar{\bar{S}} = + \frac{e^{-y_1 p_1}}{p_1 (p - \frac{D}{u} p_1^2 + \frac{k_1}{u})} S_0 - \frac{e^{-y_2 p_1}}{p_1 (p - \frac{D}{u} p_1^2 + \frac{k_1}{u})} S_0. \quad (12)$$

Переходя обратным преобразованием Лапласа от  $\bar{S}$  к  $\bar{S}_1$ , используя теорему запаздывания, получим

$$\bar{S} = -\frac{S_0}{p + \frac{k_1}{u}} \left[ \operatorname{ch} \sqrt{\frac{u}{D} p + \frac{k_1}{D}} (y - y_1) \right] + \frac{S_0}{p + \frac{k_1}{u}} \left[ \operatorname{ch} \sqrt{\frac{u}{D} p - \frac{k_1}{D}} (y - y_1) \right]. \quad (I3)$$

После некоторого преобразования и учитывая, что экспоненциальные члены с положительными степенями не удовлетворяют преобразования Лапласа, получим

$$\bar{S} = \frac{S_0}{2(p + \frac{k_1}{u})} \left\{ \exp \left[ -(y - y_2) \sqrt{\frac{u}{D} p + \frac{k_1}{D}} \right] - \exp \left[ -(y - y_1) \sqrt{\frac{u}{D} p + \frac{k_1}{D}} \right] \right\}. \quad (I4)$$

Применяя к (I4) теорему смещения, получим окончательно для изменения концентрации вдоль потока

$$S = \frac{S_0}{2} e^{-k_1 \frac{x}{u}} \left[ \Phi \left( \frac{B - y}{2\sqrt{D \frac{x}{u}}} \right) + \Phi \left( \frac{B + y}{2\sqrt{D \frac{x}{u}}} \right) \right], \quad (I5)$$

где  $B = \frac{y_2 - y_1}{2}$  — полширины начальной прямоугольной эпюры концентрации вещества  $S_0$ ;

$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$  — интеграл вероятности.

Концентрация на оси диффузионного пятна при  $y = 0$  равна

$$S = S_0 e^{-k_1 \frac{x}{u}} \Phi \left( \frac{B}{2\sqrt{D \frac{x}{u}}} \right). \quad (I6)$$

Для определения  $S_0$  и  $B$  в формулах (I5) и (I6) исходим из экспоненциального закона распределения концентрации в конце зоны турбулентного потока со сдвигом

$$\frac{S(0, y)}{S(0, 0)} = e^{-\alpha y^2}, \quad (I7)$$

где  $\alpha$  — экспериментально определяемый коэффициент пропорциональности;

$S(0, 0)$  — концентрация в сечении  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;

$S(0, y)$  — концентрация в сечении  $x = 0$ ,  $y \neq 0$ .

Обозначая отношение  $\frac{S(0, y)}{S(0, 0)} = m$  из (I7) можно определить значение начальной ширины

$$B = \sqrt{-\frac{1}{\alpha} \frac{\log m}{\log e}}. \quad (I8)$$



## Л и т е р а т у р а

1. Х.А. В е л ь н е р, А.М. А й т с а м, Л.Л. П а а л ь. Об определении расчетных нагрузок загрязнения при расчете самоочищения водоемов. Научные доклады по вопросам самоочищения водоемов и смешения сточных вод. 1965.

2. А.В. К а р а у ш е в. Турбулентная диффузия и метод смешения. Гидрометиздат, 1946.

3. А.С. М о н и н. Общий обзор по атмосферной диффузии. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха. М. 1960.

4. А.М. А й т с а м, Л.Л. П а а л ь, Х.А. В е л ь н е р. О теоретических основах инженерного расчета смешения сточных вод в водоемах. Научные доклады I Всесоюзного симпозиума по самоочищению водоемов и смешению сточных вод. Таллин 1965.

5. И.О. Х и н ц е. Турбулентность. М. 1963.

6. А.М. А й т с а м, Л.Л. П а а л ь, Х.А. В е л ь н е р. Вопросы инженерного расчета самоочищения непроточных водоемов. Научные доклады по вопросам самоочищения и смешения сточных вод. 1965.

7. G. A b r a h a m. Jet diffusion in stagnant ambient fluid. Relft Hydraulics Laboratory Publication N 29, 1963.

8. B.R. M o r t o n, G.J. T a y l o r, I.S. T u r n e r. Turbulent gravitational connection from maintained and instantaneous sources. Proc. Roy. Soc. of London, Series A 1956, No 1196 Jan.

9. А.М. А й т с а м, Л.Л. П а а л ь, Х.А. В е л ь н е р. О расчете продольного смешения вещества загрязнения в водотоках, См.наст.сборник, стр.57.

10. Г. К а р с л о у, Д. Е г е р. Теплопроводность в твердых телах. М. 1964.





УДК 628.394

А.М.Айтсам, Х.А.Вельнер, Л.Л.Пааль

О РАСЧЕТЕ ПРОДОЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ ВЕЩЕСТВА  
 ЗАГРЯЗНЕНИЯ В ВОДОТОКАХ

Целью инженерных расчетов самоочищения водотоков является определение допустимых нагрузок загрязнения водотока. Процессы самоочищения водотоков описываются достаточно точно уравнением турбулентной диффузии неконсервативных веществ в виде [1]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) + K S = 0, \quad (1)$$

где  $S$  — концентрация показателя загрязнения,  
 $x, y, z$  — направление координатных осей,  
 $u$  — проекция скорости течения водотока на ось  $x$ ,  
 $K_x, K_y, K_z$  — коэффициенты турбулентной диффузии,  
 $K$  — коэффициент неконсервативности.

В условиях одномерной продольной диффузии решение уравнения производится при следующих допущениях:

1) концентрация вещества загрязнения  $S$  в створах водотока распределена по живому сечению равномерно, т.е.

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0;$$

2) коэффициент турбулентной диффузии  $K_x$  является постоянной величиной и не зависит от  $x$ ;

3) скорость течения распределена по живому сечению равномерно, т.е. в любой точке поперечного сечения равняется средней скорости потока  $V$ ;

4. средняя скорость потока по длине водотока не изменяется.

При этих допущениях уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} - k_x \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + kS = 0. \quad (2)$$

В литературе приводятся лишь некоторые попытки решения уравнения (2) для консервативных ( $k = 0$ ) и неконсервативных веществ. Так, например, А.Нэдли и И.Пельц исследовали экспериментально на модели канала одномерную диффузию и пытались качественно оценить влияние продольной диффузии на скорость биохимического потребления кислорода [2]. Авторы, однако, не приводят расчетных формул изменения концентрации веществ загрязнения по длине водотока. Попытки решения уравнения (2) в условиях мгновенного впуска сточных вод сделаны в работах А. Кренкеля и Д.И. Ожоннора [3] и [4].

Нами приводится решение уравнения (2) в условиях прямоугольного скачкообразного спуска сточных вод для неконсервативных и консервативных веществ загрязнения, как это имеет место при спуске производственных сточных вод.

Начальным условием при решении уравнения (2) принято, что в начальный момент времени  $t = 0$  водоем не загрязнен, т.е.

$$S|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Граничное условие в начальном сечении  $x = 0$  можно в общем случае описать следующей зависимостью

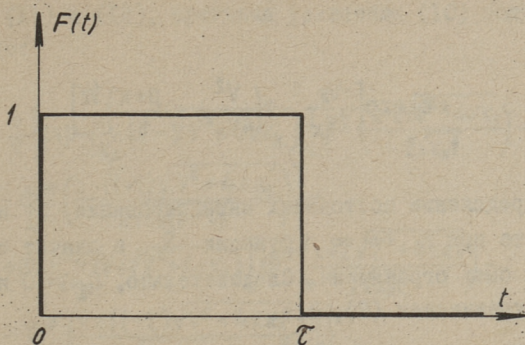
$$S|_{x=0} = F(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Функцию  $F(t)$  при прямоугольном скачкообразном эюре впуска сточных вод можно выразить при помощи единичной функции Хевисайда  $\phi(t)$  в виде (фиг. I)

$$F(t) = \phi(t) - \phi(t - \tau), \quad (5)$$

где  $\tau$  — продолжительность впуска сточных вод.





Фиг. 1. Прямоугольная скачкообразная эпюра впуска сточных вод

Для решения уравнения (2) применяем преобразование Лапласа и выбираем в качестве переменной, относительно которой производится преобразование Лапласа, переменную  $t$ . Переменную  $x$  при выполнении преобразования считаем постоянной. Таким образом каждому определенному значению  $x$  соответствует свое изображение функции  $\bar{S}(x, t)$ .

Тогда уравнение продольной турбулентной диффузии (3) при начальных условиях примет вид

$$\frac{d^2 \bar{S}}{dx^2} - \frac{v}{k_x} \frac{d\bar{S}}{dx} - \frac{\rho + k}{k_x} \bar{S} = 0. \quad (6)$$

Преобразованные по Лапласу граничные условия (5) имеют вид

$$\bar{S}(+0, p) = \frac{1 - e^{-\tau p}}{p}. \quad (7)$$

Общий интеграл уравнения (6), т.е. общий интеграл линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\bar{S} = c_1 \exp \left[ \frac{v x}{2 k_x} + x \left( \frac{v^2}{4 k_x^2} + \frac{\rho + k}{k_x} \right)^{1/2} \right] +$$

$$+ c_2 \exp \left[ \frac{Vx}{2k_x} - x \left( \frac{V^2}{4k_x^2} + \frac{p+k}{k_x} \right)^{1/2} \right] . \quad (8)$$

При определении постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  учитываем, что при  $x \rightarrow \infty$  функция  $S$ , а значит и функция  $\bar{S}$  должны быть ограничены. Следовательно,  $C_1 = 0$  и  $C_2$  определяется уравнением (7), т.е.

$$c_2 = \frac{1 - e^{-\tau p}}{p} . \quad (9)$$

Таким образом решение уравнения (6) при заданных граничных условиях (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{S} = & \frac{1}{p} \exp \left[ \frac{Vx}{2k_x} - x \left( \frac{V^2}{4k_x^2} + \frac{p+k}{k_x} \right)^{1/2} \right] - \\ & - \frac{1}{p} e^{-\tau p} \exp \left[ \frac{V^2}{2k_x} - x \left( \frac{V^2}{4k_x^2} + \frac{p+k}{k_x} \right)^{1/2} \right] . \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения оригинала уравнения (10) используем следующие свойства преобразования Лапласа:

а) теорема запаздывания (правило сдвига)

$$L[S(t-\tau)] = e^{-p\tau} \bar{S}(p), \quad (11)$$

где  $\tau$  — любое положительное число,

б) теорема смещения (правило затухания)

$$L[e^{\alpha t} S(t)] = \bar{S}(p-\alpha), \quad (12)$$

где  $\alpha$  — любое комплексное число.

Используя следующую формулу обращения преобразования Лапласа [5]

$$\begin{aligned} \frac{e^{-qx}}{p-\alpha} = & L \left\{ \frac{1}{2} e^{\alpha t} e^{-x\sqrt{\frac{\alpha}{k_x}}} \Phi^* \left[ \frac{x}{2\sqrt{k_x t}} - \sqrt{\alpha t} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} e^{\alpha t} e^{x\sqrt{\frac{\alpha}{k_x}}} \Phi^* \left[ \frac{x}{2\sqrt{k_x t}} + \sqrt{\alpha t} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $q = \sqrt{\frac{p}{k_x}}$ ,



и теоремы (I1) и (I2), оригинал уравнения (I0) получается в виде:

$$\begin{aligned}
 \hat{S} = \frac{1}{2} \left\{ \exp \frac{x}{2K_x} (V - \sqrt{V^2 + 4KK_x}) \left[ \Phi^* \left( \frac{x - t\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x t}} \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \Phi^* \left( \frac{x - (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x(t - \tau)}} \right) \right] + \right. \\
 \left. + \exp \frac{x}{2K_x} (V + \sqrt{V^2 + 4KK_x}) \left[ \Phi^* \left( \frac{x + t\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x t}} \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \Phi^* \left( \frac{x + (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x(t - \tau)}} \right) \right] \right\}. \quad (I4)
 \end{aligned}$$

В последней формуле  $\Phi^*(y)$  определяется как

$$\Phi^*(y) = 1 - \Phi(y), \quad (I5)$$

где  $\Phi(y)$  — функция ошибок и представляет собой интеграл в виде

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\xi^2} d\xi. \quad (I6)$$

Полученное уравнение (I4) является решением уравнения (2) при начальном условии (3) и при граничном условии (4). Для инженерных расчетов концентрации вещества загрязнения формула (I4) слишком сложна и поэтому, в целях ее упрощения, проведен анализ влияния отдельных членов на результат расчета. В формуле (I4) члены

$$\Phi^* \left[ \frac{x + t\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x t}} \right] \text{ и } \Phi^* \left[ \frac{x + (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x(t - \tau)}} \right]$$

отличаются от нуля только при очень малых значениях  $x$  и уже на расстоянии нескольких сотен метров от створа спуска сточных вод указанные члены равняются нулю. Поэтому для расчета самоочищающей способности водотока формулу (I4) можем переписать в виде:

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \exp \frac{x}{2K_x} (V - \sqrt{V^2 + 4KK_x}) \left[ \Phi^* \left( \frac{x - t\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x t}} \right) - \Phi^* \left( \frac{x - (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x(t - \tau)}} \right) \right] \right\}. \quad (17)$$

Проведенные нами предварительные натурные исследования турбулентной диффузии на небольших реках Эстонской ССР показали, что коэффициент  $K_x$  имеет величину в пределах 0,1 до 1,0 м<sup>2</sup>/сек. Кроме того, коэффициент биохимического окисления  $K$  колеблется от 0,1 до 1,0, т.е.  $K = 1,16 \cdot 10^{-6} + 1,16 \cdot 10^{-5}$  1/сек [6].

Если иметь в виду, что эпюра загрязнения спускаемых в водоток сточных вод при  $t = 0$  выражается при помощи единичной функции Хевисайда, то формула для расчета продольной диффузии по БПК в водотоке выражается как

$$\frac{L}{L_0} = \frac{1}{2} \left\{ \exp \frac{x}{2K_x} (V - \sqrt{V^2 + 4KK_x}) \left[ \Phi^* \left( \frac{x - t\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x t}} \right) - \Phi^* \left( \frac{x - (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x(t - \tau)}} \right) \right] \right\}. \quad (18)$$

Для расчета изменения концентрации консервативного вещества загрязнения по длине водотока, формула (17) при  $K = 0$  переписывается в виде

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \left\{ \Phi^* \left[ \frac{x - vt}{2\sqrt{K_x t}} \right] - \Phi^* \left[ \frac{x - (t - \tau)V}{2\sqrt{K_x(t - \tau)}} \right] \right\}. \quad (19)$$

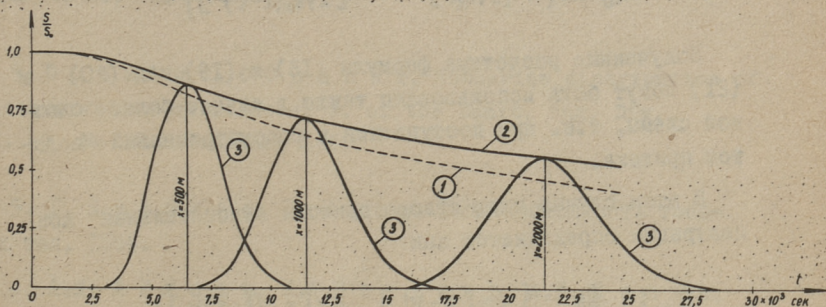
В качестве примера на фиг. 2 представлены кривые максимальных значений относительной концентрации вещества загрязнения по БПК  $\frac{L}{L_0} = f(t)$  (кривая 1),  $\frac{S}{S_0} = f(t)$  (кривая 2), а также "волны загрязнения" при  $x = \text{const}$ . (кривая 3). Все кривые построены при  $\tau = 3000$  сек,  $V = 0,1$  м/сек,  $K_x = 1,0$  м<sup>2</sup>/сек и  $K = 1,16 \cdot 10^{-5}$  1/сек. ( $K = 1,0 \frac{1}{\text{сутки}}$ ). При этом кривая 1 построена по формуле



$$\frac{L}{L_0} = \frac{1}{2} \exp \frac{V(t-\frac{\tau}{2})}{2k_x} \left( V - \sqrt{V^2 + 4kk_x} \right) \left[ \Phi^* \left( \frac{V(t-\frac{\tau}{2}) - t\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x t}} \right) - \Phi^* \left( \frac{V(t-\frac{\tau}{2}) - (t-\tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x(t-\tau)}} \right) \right], \quad (20)$$

а кривая 2 по формуле

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \left\{ \Phi^* \left[ \frac{-V\tau}{4\sqrt{k_x t}} \right] - \Phi^* \left[ \frac{V\tau}{4\sqrt{k_x(t-\tau)}} \right] \right\}. \quad (21)$$



Фиг. 2. Характеристики движения волны загрязнения вдоль водотока

Анализ зависимостей (20) и (21) приводит к выводу, что максимальное значение  $\frac{L}{L_0}$  или  $\frac{S}{S_0}$  при заданной величине  $x$  имеет место при  $t = \frac{x}{V} + \frac{\tau}{2}$ .

Обе формулы (20) и (21) действительны только в том случае, если расход по длине водотока остается постоянным. В практике расход по длине водотока увеличивается или уменьшается, т.е.  $Q = f(x)$ . По данным исследования рек Эстонской ССР А.Г. Каск рекомендует принимать в первом приближении прирост расхода линейным. В этом случае на расстоянии

$x$  от створа впуска сточных вод расход определяется как [6]

$$q = Q_0 + \alpha x, \quad (22)$$

где  $Q_0$  — расход реки в створе впуска сточных вод,  
 $\alpha$  — коэффициент, определяемый одним из известных в гидрологии методов.

Не учитывая расхода сточных вод и считая, что  $V = \text{const}$  (не изменяется по длине водотока), концентрация вещества загрязнения в условиях линейного прироста расхода реки вместо (19) определяется в виде

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \frac{Q_0}{Q_0 + \alpha x} \left\{ \Phi^* \left[ \frac{x - vt}{2\sqrt{k_x t}} \right] - \Phi^* \left[ \frac{x - (t - \tau)V}{2\sqrt{k_x(t - \tau)}} \right] \right\}. \quad (23)$$

Полученные расчетные формулы (18) и (19) или (20) и (21) могут быть использованы также в случае более сложной схемы, т.е. при поступлении в рассматриваемый водоток притока.

В этом случае ниже створа притока относительная концентрация определяется как

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \frac{Q_0}{Q_0 + Q_n} \left\{ \Phi^* \left[ \frac{x - vt}{2\sqrt{k_x t}} \right] - \Phi^* \left[ \frac{x - (t - \tau)V}{2\sqrt{k_x(t - \tau)}} \right] \right\}, \quad (24)$$

где  $Q_n$  — расход притока.

Аналогичные формулы получаем также при уменьшении расхода по длине водотока, например, в условиях орошения.

Более сложная картина получается в случае поступления в водоток дополнительного загрязнения. При этом в створе дополнительного впуска сточных вод отношение  $\frac{S}{S_0}$  сразу увеличивается, а потом под влиянием продольной диффузии уменьшается.



## Л и т е р а т у р а

1. А.М. Айтсам, Л.Л. Пааль, Х.А. Вельнер. О теоретических основах инженерного расчета смешения сточных вод. Научные доклады симпозиума по самоочищению водоемов и смешению сточных вод. Таллин, 1965.
2. A. Nejedlý, J. Pelz. Studie podèlného mísení v otevřených korytech a jeho vlivu na rychlost biochemické spotřeby kyslíku ve vodním prostředí. Praha, 1964.
3. P.A. Krenke l. Waste dispersion characteristics of streams using turbulent diffusion phenomenon. J. WPCF, vol. 34, No. 12, 1962.
4. Donald J. O'Connor. Estuarine distribution of nonconservative substances, J. of the Sanit. Eng. Div., vol. 91, No SA1 February 1965.
5. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. 1964.
6. А.М. Айтсам, Х.А. Вельнер, Л.Л. Пааль. О инженерном расчете допустимых нагрузок загрязнения водотоков. Сб. Материалы по вопросам самоочищения водоемов и смешения сточных вод. 1965.





УДК 628.2  
532.543

К.Р. Хяяль, Л.А. Тепакс

НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ НЕРАВНОМЕРНОГО  
ДВИЖЕНИЯ В АСБЕСТОЦЕМЕНТНОМ КАНАЛИЗАЦИОННОМ  
КОЛЛЕКТОРЕ

Гидравлические сопротивления канализационных коллекторов исследованы многими авторами, однако в результатах опытов по литературным данным часто имеются расхождения.

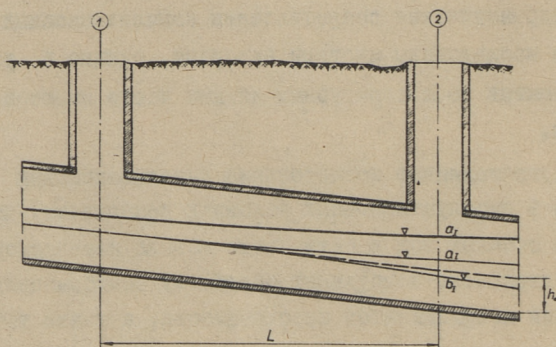
Многочисленные исследования канализационных коллекторов в эксплуатационных условиях показывают, что движение сточных вод в сети почти всегда неравномерное. Это обстоятельство затрудняет обработку опытов с целью определения коэффициентов шероховатости, а также установления закономерностей гидравлических сопротивлений вообще.

По этой причине многие исследования проведены в полублабораторных условиях, на крупных полевых стендах, где исследуемый трубопровод смонтирован с большой точностью над землей. В таких исследованиях равномерное движение обеспечивается достаточной протяженностью опытного трубопровода, а также с помощью регулирования глубины потока путем создания подпора в конце трубопровода. Точность измерений в таких условиях не отличается от обычной точности лабораторных гидравлических исследований. Однако при укладке коллекторов в траншею достижение

большой точности практически невозможно. Продольный профиль искажается вследствие строительных дефектов, неравномерных просадок и т.д. По этой причине лабораторные результаты требуют проверки в эксплуатационных условиях.

В настоящей статье приводятся некоторые данные, полученные при исследовании одного из коллекторов г. Таллина.

Объектом исследования является канализационный коллектор из асбестоцементных труб  $d = 764$  мм. Данный трубопровод эксплуатируется недолго и донных отложений не имеет. Исследуемый участок трубопровода, длиной  $L = 48.0$  м и с уклоном дна  $i = 0,001083$ , расположен между двумя смотровыми колодцами (фиг. 1).



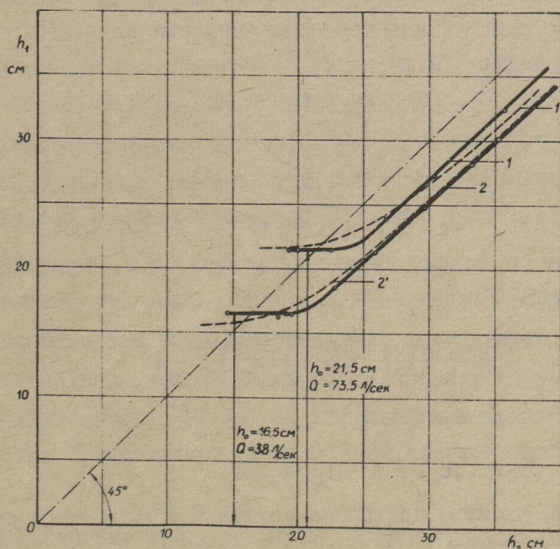
Фиг. 1. Схема исследуемого участка канализационного коллектора

Продольный профиль данного коллектора позволил непосредственно перед выбранным участком установить мерный водослив трапецеидального профиля, ранее протарированный в лабораторных условиях. Регулирование расхода сточных вод в коллекторе осуществлялось в вышестоящем ливнепуске, который для этой цели был перестроен. Боковой приток на протяжении исследуемого участка, как показало специальное исследование, был незначительным, что обеспечило достаточную точность измерений расхода. В смотровых колодцах были установлены реперы, связанные между собой точной нивелировкой.



В естественных условиях на выбранном участке трубопровода между смотровыми колодцами № 1 и 2 образовалась кривая спада  $\theta_I$  (глубина потока в первом колодце  $h_1$  больше глубины во втором  $h_2$ ). В смотровом колодце, расположенном ниже колодца № 2, была смонтирована установка для создания разных подпоров на исследуемом участке.

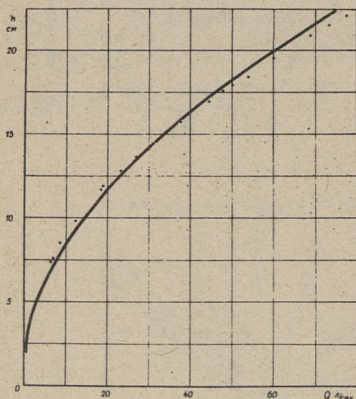
При проведении серии опытов расход воды сохранялся постоянным и в смотровых колодцах исследуемого участка фиксировались глубины потока при различных подпорах. При определенном подпоре была получена нормальная глубина потока, т.е.  $h_1 = h_2 = h_0$ . При дальнейшем увеличении подпора образовалась кривая подпора  $a_I$  ( $h_2 > h_1$ ).



Фиг. 2. Кривые зависимости  $h_1$  ( $h_2$ )  
1 и 2 – кривые натуральных исследований,  
1' и 2' – соответствующие теоретические кривые

Результаты опытов при расходах  $Q = 38 \text{ л/сек}$  и  $Q = 73,5 \text{ л/сек}$  изображены на фиг. 2 кривыми 1 и 2. Из фигуры видно, что

при малых подпорах уровень воды в колодце № I не зависит от глубины течения в колодце № 2 (горизонтальные участки на кривых I и 2). Можно заключить, что при расходах меньше  $Q = 73,5$  л/сек в натуральных условиях без подпора в смотровом колодце № I всегда образуется нормальная глубина ( $h_1 = h_0$ ). Это позволило, путем изменения расхода сточной воды, установить зависимости  $Q (h_0)$ . Полученные опытные точки изображены на фиг. 3.



Фиг. 3. Зависимости  $Q (h_0)$ .  
Кривая по СНиП 11-Г. 6-62,  
 $i = 0,001083$

Принимаем за основу сравнения формулу Н.Ф. Федорова [I] (СНиП 11-Г. 6-62)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left( \frac{\Delta_3}{13,68R} + \frac{\alpha_2}{Re} \right) \quad , \quad (I)$$

где для асбестоцементных труб

$$\Delta_3 = 0,6 \text{ мм и } \alpha_2 = 73.$$

Нами по этой формуле построена кривая  $Q (h_0)$  для уклона  $i = 0,001083$  (фиг. 3).

Из графика видно, что опытные точки имеют некоторое расхождение по сравнению с вычисленной кривой: при расходах меньше 30 л/сек фактическая глубина выше вычисленной, а при расходах более 30 л/сек соответственно ниже. Однако результаты довольно близки друг к другу и расхождения между опытными и вычисленными глубинами не превышают 0,5 см.



Проведено также сравнение результатов с формулой С.В. Яковлева [2]

$$c = 24,7 \lg \frac{Rv}{v\xi + 10} . \quad (2)$$

Наиболее сходящим значением приведенной шероховатости получилось  $\xi = 0,6$  мм. Кривая  $Q(h_0)$ , построенная по формуле (2) с этим значением, практически совпадает с кривой по формуле (I) СНИП и по этой причине на фигуре не показана.

Следует отметить, что большинство исследователей пользовалось при обработке опытов иной методикой. Обычно за основу принимается средняя глубина потока рассматриваемого участка  $h_{\text{ср}} = \frac{h_1 + h_2}{2}$ . Исходя из величины  $h_{\text{ср}}$  вычисляются все характерные гидравлические элементы— $\omega$ ,  $R$  и  $v$ . В расчеты вводится гидравлический уклон  $J$ , с учетом изменения кинетической энергии на исследуемом участке, а не уклон дна, как в наших расчетах. Указанное осреднение гидравлических элементов может обусловить неточности при обработке опытов, чем частично и объясняется разбросанность опытных точек, приведенных в литературных источниках.

Понятно, что метод, принятый в настоящей работе, может быть использован только в условиях, когда длина кривых спада и подпора меньше длины рассматриваемого участка. Поэтому зависимость  $h_1(h_2)$ , полученная в таких условиях (фиг. 2), представляет определенный теоретический интерес.

Предполагая, что формула (I) действительна также в условиях неравномерного движения, нами проведены гидравлические расчеты неравномерного движения для того же участка коллектора. На основе формулы (I) вычислена зависимость  $J(h)$  при постоянном расходе воды, а также зависимость  $Fr(h)$ , где число Фруда  $Fr = \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3}$ . В расчетах принято  $\alpha = 1,1$ .

За основу дальнейших вычислений принято дифференциальное уравнение неравномерного движения в виде

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - Fr} \quad (3)$$

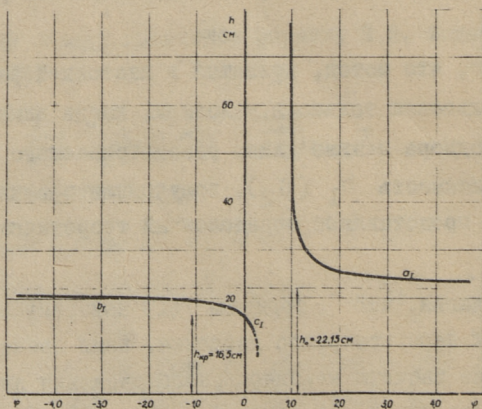
и изображена функция

$$\varphi(h) = \frac{1 - Fr}{i - J} \quad (4)$$

для определенных условий.

Зависимость  $\varphi(h)$  при  $Q = 73,5$  л/сек и  $i = 0,001083$  изображена на фиг. 4. Там же показаны отдельные участки, соответствующие разным кривым свободной поверхности, согласно общепринятым обозначениям ( $a_I, b_I, c_I$ ). Вычисление кривой свободной поверхности проводится по выражению

$$L = \int_{h_1}^{h_2} \varphi(h) dh \quad (5)$$



Фиг. 4. Зависимость  $\varphi(h)$

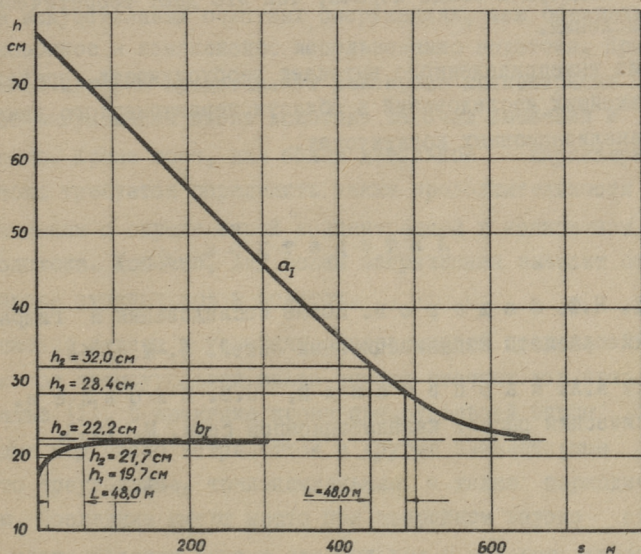


На фиг. 5 построена интегральная кривая

$$S = \int \varphi(h) dh, \quad (6)$$

где  $S$  — координата длины потока.

Интегральная кривая функции (4), изображенная на фиг. 4, получена после вычисления и суммирования площадей, ограниченных кривой  $\varphi(h)$ . Для кривой подпора  $a_I$  суммирование произведено сверху вниз, а для кривой  $b_I$  снизу вверх. Для кривой  $c_I$  вычисления не производились, так как в данных условиях эта кривая не представляет практического интереса.



Фиг. 5. Зависимость  $S(h)$

Полученная интегральная кривая позволяет графически определить зависимость  $h_1(h_2)$ , как это показано на фиг. 5. Например, на кривой подбора  $a_I$  при  $h_1 = 28,4$  см и длине участка  $L = 48,0$  м, соответствующая глубина  $h_2 = 32,0$  см. На

кривой спада  $\theta_I$ , при  $h_I = 19,7$  см и длине участка  $L = 48,0$  м, соответствующая глубина  $h_2 = 21,7$  см. Зависимости  $h_1$  ( $h_2$ ) определены таким путем для расходов  $Q = 38,0$  и  $73,5$  л/сек, результаты изображены на фиг. 2 пунктирными кривыми  $I'$  и  $2'$ .

Как видно из фигуры, между опытными кривыми  $I, 2$  и соответствующими теоретическими  $I'$  и  $2'$  имеются некоторые расхождения. Наиболее существенное расхождение состоит в том, что изменение глубины в нижнем смотровом колодце гораздо меньше влияет на уровень воды в верхнем смотровом колодце, чем это показывают теоретические расчеты. У теоретических кривых горизонтальный участок в близости нормальной глубины  $h_0$  отсутствует. Очевидно, фактические кривые подпора и спада короче, чем это дают теоретические вычисления.

Из вышеприведенного вытекает необходимость проведения дальнейших исследований в области неравномерного движения в канализационных коллекторах.

### Л и т е р а т у р а

1. Н.Ф. Федоров. Новые исследования и гидравлические расчеты канализационных сетей. Л.-М. 1964.
2. А.А. Карпинский, С.В. Яковлев. Гидравлический расчет канализационной сети. М. 1955.



УДК 628.394

Л.Л. Паалъ

О РАСЧЕТЕ СМЕШЕНИЯ СТОЧНЫХ ВОД ПРИ НЕКОТОРЫХ  
ЭПЮРАХ ЗАГРУЗКИ ВОДОТОКОВ

При расчете самоочищения водотоков определяются допустимая нагрузка водоема и степень необходимой очистки сточных вод в искусственных очистных сооружениях, чем обеспечивается экономное и комплексное использование водотока. При этом основной интерес представляет изменение концентрации вещества загрязнения вдоль водотока за счет смешения и самоочищения. Кроме того, для более детальной характеристики водотока требуется определить также продолжительности волны загрязнения с определенной концентрацией в конкретном створе водотока. Конечно, вид волны загрязнения зависит от эпюры впуска сточных вод в водоток.

Решение задачи в условиях одномерной продольной диффузии при прямоугольной эпюре впуска сточных вод приводится в статье [1]. В практике кроме прямоугольной эпюры спуска сточных вод часто встречаются и другие элементарные эпюры, как-то треугольные, трапецеидальные, а также периодические эпюры. Последние имеют место при аварийном впуске сточных вод, регулировании впуска сточных вод в водоток, впуске ливневых вод и в других подобных случаях.

Для решения поставленной задачи в условиях одномерной продольной диффузии исходим из уравнения [1]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} - K_x \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + K S = 0, \quad (1)$$

где  $S$  — концентрация показателя загрязнения;  
 $x$  — продольная координата водотока;  
 $V$  — средняя скорость течения в водотоке;  
 $K_x$  — коэффициент турбулентной диффузии;  
 $K$  — коэффициент неконсервативности.

Последнее уравнение получено при следующих допущениях [1]:

- 1) концентрация вещества загрязнения в любых створах водотока распределена по живому сечению равномерно;
- 2) коэффициент турбулентной диффузии  $K_x$  является постоянной величиной и не зависит от координаты  $x$ ;
- 3) средняя скорость течения по длине водотока не изменяется.

Для решения уравнения (1) применим преобразование Лапласа. При этом в начальный момент времени  $t = 0$  предположим, что водоток не загрязнен, т.е.

$$S|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Граничное условие в начальном сечении зависит от эпюры впуска сточных вод. В общем случае граничное условие выражается в виде

$$S|_{x=0} = F(t) \text{ при } t \geq 0. \quad (3)$$

Изображающее уравнение при начальном условии (2) имеет вид

$$\frac{d^2 \bar{S}}{dx^2} - \frac{v}{K_x} \frac{d\bar{S}}{dx} - \frac{p+K}{K_x} \bar{S} = 0. \quad (4)$$

Общий интеграл уравнения (4) выражается как

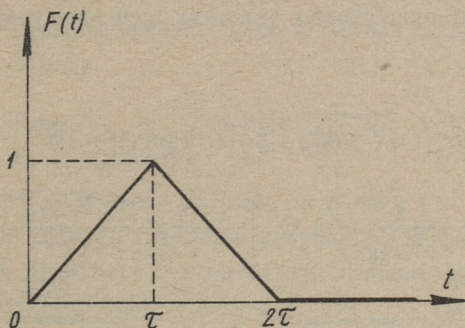
$$\begin{aligned} \bar{S} = & C_1 \exp \left[ \frac{Vx}{2K_x} + x \left( \frac{V^2}{4K_x^2} + \frac{p+K}{K_x} \right)^{1/2} \right] + \\ & + C_2 \exp \left[ \frac{Vx}{2K_x} - x \left( \frac{V^2}{4K_x^2} + \frac{p+K}{K_x} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения постоянных интегрирования учтем, что



при  $x \rightarrow \infty$  функция  $S$ , а значит и функция  $\bar{S}$  должны быть ограничены. Следовательно,  $C_1 = 0$  и постоянная  $C_2$  равняется изображению граничного условия.

Имея в виду вышеприведенные исходные соображения, рассмотрим ниже некоторые конкретные задачи при разных эпюрах впуска сточных вод в водоток.



Фиг. 1. Эпюра загрязнения в виде равнобедренного треугольника

I. Равнобедренный треугольник (фиг. I).

Граничное условие при этом можно выразить при помощи единичной функции Хевисайда  $\zeta(t)$  в виде

$$F(t) = \frac{t}{\tau} \zeta(t) - 2 \frac{t}{\tau} \zeta(t - \tau) + \frac{t}{\tau} \zeta(t - 2\tau). \quad (6)$$

Преобразование по Лапласу зависимости (6) дает

$$\bar{S}(+0, p) = \frac{(1 - e^{-\tau p})^2}{\tau p^2}, \quad (7)$$

и тогда уравнение (5) имеет вид

$$\bar{S} = \frac{(1 - e^{-\tau p})^2}{\tau p^2} \exp \left[ \frac{Vx}{2Kx} - x \left( \frac{V^2}{4Kx^2} + \frac{p+K}{Kx} \right)^{1/2} \right]. \quad (8)$$

Для определения оригинала уравнения (8) используем теорему запаздывания и теорему смещения, а также следующую формулу обращения преобразования Лапласа [2]:

$$\frac{e^{-x\sqrt{\frac{\rho}{k_x}}}}{(p-\alpha)^2} = L \left\{ \frac{1}{2} e^{\alpha t} \left[ \left( t - \frac{x}{2\sqrt{\alpha k_x}} \right) e^{-x\sqrt{\frac{\alpha}{k_x}}} \Phi^* \left( \frac{x}{2\sqrt{k_x t}} - \sqrt{\alpha t} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( t + \frac{x}{2\sqrt{\alpha k_x}} \right) e^{x\sqrt{\frac{\alpha}{k_x}}} \Phi^* \left( \frac{x}{2\sqrt{k_x t}} + \sqrt{\alpha t} \right) \right] \right\}. \quad (9)$$

При вышеприведенных условиях оригинал уравнения (8) имеет вид

$$S = \frac{1}{\tau} \exp \left[ \frac{x}{2k_x} (V - \sqrt{V^2 + 4kk_x}) \right] \left\{ \frac{1}{2} \left( t - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left[ \frac{x - t\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x t}} \right] - \right. \\ \left. - \left( t - \tau - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left[ \frac{x - (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x(t - \tau)}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( t - 2\tau - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left[ \frac{x - (t - 2\tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x(t - 2\tau)}} \right] \right\} + \\ + \frac{1}{\tau} \exp \left[ \frac{x}{2k_x} (V + \sqrt{V^2 + 4kk_x}) \right] \left\{ \frac{1}{2} \left( t + \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left[ \frac{x + t\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x t}} \right] - \right. \\ \left. - \left( t - \tau + \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left[ \frac{x + (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x(t - \tau)}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( t - 2\tau + \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left[ \frac{x + (t - 2\tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x(t - 2\tau)}} \right] \right\}. \quad (10)$$

При практических расчетах самоочищающей способности водотоков можно, как уже было показано в статье [I], в формуле (10) пренебречь членами

$$\Phi^* \left[ \frac{x + t\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x t}} \right], \quad \Phi^* \left[ \frac{x + (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x(t - \tau)}} \right] \text{ и}$$



$$\Phi^* \left[ \frac{x + (t - 2\tau)\sqrt{V^2 + 4kKx}}{2\sqrt{kx}(t - 2\tau)} \right],$$

отличающимися от нуля только при очень малых значениях  $x$ .

В формуле (10) обозначение  $\Phi^*(y)$  определяется как

$$\Phi^*(y) = 1 - \Phi(y), \quad (11)$$

где  $\Phi(y)$  - функция ошибок, представляющая собой интеграл в виде

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\xi^2} d\xi. \quad (12)$$

Учитывая, что граничные условия вводились в уравнение (8) при помощи единичной функции Хевисайда, можем в формуле (10) вместо  $S$  применить относительную концентрацию  $\frac{S}{S_0}$ , где  $S_0$  - начальная концентрация.

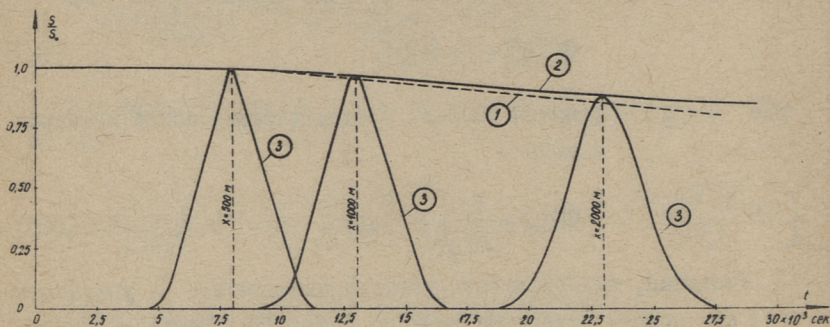
Таким образом, для расчета концентрации неконсервативного вещества загрязнения при эпюре впуска сточных вод в виде равнобедренного треугольника рекомендуем следующую формулу

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_0} = & \frac{1}{\tau} \exp \left[ \frac{x}{2Kx} (V - \sqrt{V^2 + 4kKx}) \right] \left\{ \frac{1}{2} \left( t - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kKx}} \right) \Phi^* \left[ \frac{x - t\sqrt{V^2 + 4kKx}}{2\sqrt{kx}t} \right] - \right. \\ & - \left( t - \tau - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kKx}} \right) \Phi^* \left[ \frac{x - (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4kKx}}{2\sqrt{kx}(t - \tau)} \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( t - 2\tau - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kKx}} \right) \Phi^* \left[ \frac{x - (t - 2\tau)\sqrt{V^2 + 4kKx}}{2\sqrt{kx}(t - 2\tau)} \right] \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

и для консервативного вещества загрязнения (при  $k = 0$ ) формулу

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_0} = & \frac{vt - x}{2\tau v} \Phi^* \left[ \frac{x - vt}{2\sqrt{kx}t} \right] - \left( \frac{vt - x}{\tau v} - 1 \right) \Phi^* \left[ \frac{x - v(t - \tau)}{2\sqrt{kx}(t - \tau)} \right] + \\ & + \left( \frac{vt - x}{2\tau v} - 1 \right) \Phi^* \left[ \frac{x - v(t - 2\tau)}{2\sqrt{kx}(t - 2\tau)} \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Запомним, что формулы (I3) и (I4) применимы только при  $t \geq \tau$ , потому что при  $t < \tau$ , согласно теореме смещения, функция  $F(t - \tau)$  должна быть равна нулю.



Фиг. 2. Характеристики движения волны загрязнения вдоль водотока

В качестве примера на фиг. 2 представлены кривые максимальных значений относительной концентрации вещества загрязнения по БПК  $\frac{L}{L_0} = f(t)$  (кривая 1),  $\frac{S}{S_0} = f(t)$  (кривая 2) и волны загрязнения при  $x = \text{const}$  (кривая 3). Все кривые получены при  $\tau = 3000$  сек,  $V = 0,1$  м/сек,  $K_x = 1,0$  м<sup>2</sup>/сек и  $K = 1,16 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{сек}}$ .

Для облегчения расчета максимальные значения относительной концентрации неконсервативного вещества загрязнения могут быть определены по формуле

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{S_0}\right)_{\text{макс}} = & \frac{1}{\tau} \exp \left[ \frac{v(t-\tau)}{2K_x} (V - \sqrt{V^2 + 4KK_x}) \right] \left\{ \frac{1}{2} \left( t - \frac{v(t-\tau)}{\sqrt{V^2 + 4KK_x}} \right) \times \right. \\ & \times \Phi^* \left[ \frac{v(t-\tau) - t\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x t}} \right] - \left( t - \tau - \frac{v(t-\tau)}{\sqrt{V^2 + 4KK_x}} \right) \times \\ & \times \Phi^* \left[ \frac{v(t-\tau) - (t-\tau)\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x(t-\tau)}} \right] + \frac{1}{2} \left( t - 2\tau - \frac{v(t-\tau)}{\sqrt{V^2 + 4KK_x}} \right) \times \\ & \left. \times \Phi^* \left[ \frac{v(t-\tau) - (t-2\tau)\sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x(t-2\tau)}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (I5)$$

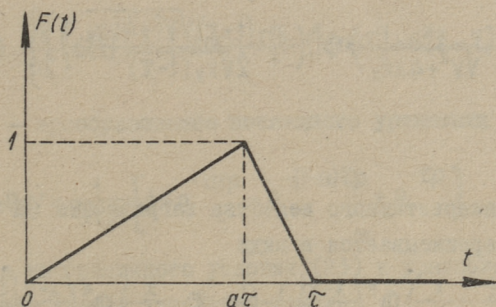


Максимальные значения относительной концентрации консервативного вещества загрязнения определяются как

$$\left(\frac{S}{S_0}\right)_{\max} = \frac{1}{2} \left\{ \Phi^* \left[ \frac{-\sqrt{t}}{2\sqrt{K_x t}} \right] - \Phi^* \left[ \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{K_x (t-2\tau)}} \right] \right\}. \quad (16)$$

Кривые 1 и 2 на фиг. 2 получены формулами (15) и (16).

2. Разносторонний треугольник. При помощи эпюры разностороннего треугольника (фиг. 3) можно решить почти все задачи, имеющие треугольный вид.



Фиг. 3. Эпюра загрязнения в виде разностороннего треугольника

Граничные условия определяются здесь следующим уравнением:

$$F(t) = \frac{t}{a\tau} [\sigma(t) - \sigma(t-a\tau)] - \frac{t}{(1-a)\tau} [\sigma(t-a\tau) - \sigma(t-\tau)] \quad (17)$$

или после преобразования по Лапласу

$$\bar{S}(+0, p) = \frac{1 - e^{-a\tau p}}{a\tau p^2} - \frac{e^{-a\tau p} - e^{-\tau p}}{(1-a)\tau p^2}. \quad (18)$$

Имея в виду граничное условие (18), уравнение (5) принимает вид:

$$\bar{S} = e^{\frac{Vx}{2K_x}} \left[ \frac{1 - e^{-a\tau p}}{a\tau p^2} - \frac{e^{-a\tau p} - e^{-\tau p}}{(1-a)\tau p^2} \right] \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{K_x}} \sqrt{V^2 + 4KK_x + 4pK_x}\right). \quad (19)$$

Далее для определения оригинала используем также теоремы запаздывания и смещения и формулу (9). В результате получим следующую формулу для неконсервативных веществ загрязнения

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_0} = & \frac{1}{2\tau} \exp \left[ \frac{x}{2k_x} (V - \sqrt{V^2 + 4kk_x}) \right] \left\{ \left( \frac{t}{a} - \frac{x}{a\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left( \frac{x - t\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x}t} \right) - \right. \\ & - \left( \frac{t}{a} - \tau - \frac{x}{a\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left( \frac{x - (t - a\tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x}(t - a\tau)} \right) - \\ & - \frac{1}{1-a} \left[ \left( t - a\tau - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left( \frac{x - (t - a\tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x}(t - a\tau)} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \left( t - \tau - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}} \right) \Phi^* \left( \frac{x - (t - \tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x}(t - \tau)} \right) \right] \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Для консервативного вещества загрязнения ( $k = 0$ ) формула (20) переписывается в виде

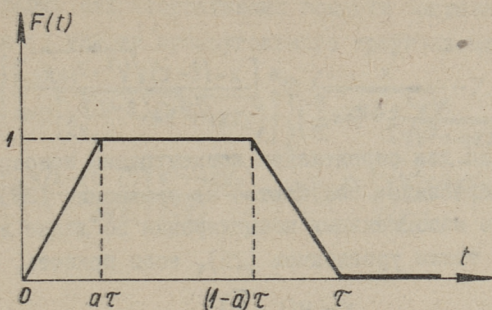
$$\begin{aligned} \frac{S}{S_0} = & \frac{1}{2\tau} \left\{ \left( \frac{t}{a} - \frac{x}{av} \right) \Phi^* \left( \frac{x - vt}{2\sqrt{k_x}t} \right) - \left( \frac{t}{a} - \tau - \frac{x}{av} \right) \Phi^* \left( \frac{x - v(t - a\tau)}{2\sqrt{k_x}(t - a\tau)} \right) - \right. \\ & - \frac{1}{1-a} \left[ \left( t - a\tau - \frac{x}{v} \right) \Phi^* \left( \frac{x - v(t - a\tau)}{2\sqrt{k_x}(t - a\tau)} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \left( t - \tau - \frac{x}{v} \right) \Phi^* \left( \frac{x - v(t - \tau)}{2\sqrt{k_x}(t - \tau)} \right) \right] \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Ввиду того, что впускная эпюра несимметрична, формулы для определения максимальных значений концентрации загрязнения в общем случае получаются слишком сложные. Поэтому рекомендуем определять максимальные концентрации графически по верхней грани волны загрязнения.

### 3. Трапеция.

Граничное условие для симметричной трапеции может быть определено в виде (фиг. 4)





Фиг. 4. Эпюра загрязнения в виде трапеции

$$F(t) = \frac{t}{a\tau} \left\{ \delta(t) - \delta(t - a\tau) - \delta[t - (1-a)\tau] + \delta(t - \tau) \right\}. \quad (22)$$

L - преобразование последнего уравнения дает

$$S(+0, p) = \frac{1}{a\tau p^2} \left[ 1 - e^{-a\tau p} - e^{-(1-a)\tau p} + e^{-\tau p} \right]. \quad (23)$$

Исходя из граничного условия (23) и уравнения (5), получим изображающее уравнение в виде

$$\bar{S} = e^{\frac{Vx}{2k_x}} \frac{1}{a\tau p^2} \left[ 1 - e^{-a\tau p} - e^{-(1-a)\tau p} + e^{-\tau p} \right] \times \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{k_x}} \sqrt{V^2 + 4kk_x} + 4k_x p\right). \quad (24)$$

Оригинал последнего уравнения для определения концентрации неконсервативных веществ загрязнения получается при помощи вышеуказанных теорем и формулы (9) в виде

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_0} = & \frac{1}{2a\tau} \exp\left[\frac{x}{2k_x} (V - \sqrt{V^2 + 4kk_x})\right] \left\{ \left(t - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}}\right) \Phi^* \left[\frac{x - t\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x}t}\right] - \right. \\ & - \left(t - a\tau - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}}\right) \Phi^* \left[\frac{x - (t - a\tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x}(t - a\tau)}\right] - \\ & - \left[t - (1-a)\tau - \frac{x}{\sqrt{V^2 + 4kk_x}}\right] \Phi^* \left[\frac{x - (t - \tau + a\tau)\sqrt{V^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x}(t - \tau + a\tau)}\right] + \end{aligned}$$

$$+\left(t-\tau-\frac{x}{\sqrt{V^2+4KK_x}}\right) \Phi^* \left[ \frac{x-(t-\tau)\sqrt{V^2+4KK_x}}{2\sqrt{K_x}(t-\tau)} \right] \} . \quad (25)$$

Формула для определения концентрации консервативных веществ загрязнения получается из уравнения (25) при  $K = 0$ ; изменение максимальных концентраций по длине водотока определяется также уравнением (25), если принять, что

$$x = v\left(t + \frac{\tau}{2}\right).$$

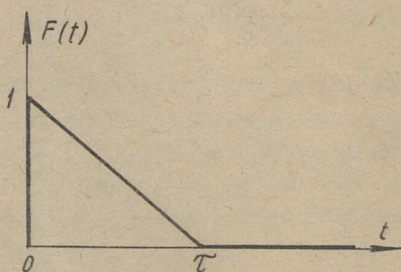
#### 4. Прямоугольный треугольник.

Граничное условие для прямоугольного треугольника (фиг. 5) имеет вид

$$F(t) = G(t) - \frac{t}{\tau} G(t) + \frac{t}{\tau} G(t-\tau). \quad (26)$$

После  $L$  - преобразования граничного условия (26) изображающее уравнение (5) переписывается как

$$\bar{S} = \frac{e^{-\tau p} + \tau p - 1}{\tau p^2} \exp \left[ \frac{Vx}{2K_x} - x \sqrt{\frac{V^2}{4K_x^2} + \frac{p+K}{K_x}} \right]. \quad (27)$$



Фиг. 5. Эпюра загрязнения в виде прямоугольного треугольника

Имея в виду  $L^{-1}$  преобразование уравнения (27), по аналогии с предыдущей методикой получим формулу для определе-



ния концентрации неконсервативных веществ загрязнения при эюре впуска по закону прямоугольного треугольника в виде

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \exp \left[ \frac{x}{2K_x} (V - \sqrt{V^2 + 4KK_x}) \right] \left\{ \left( \frac{t}{\tau} - 1 - \frac{x}{\tau \sqrt{V^2 + 4KK_x}} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ \Phi^* \left( \frac{x - (t - \tau) \sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x}(t - \tau)} \right) - \Phi^* \left( \frac{x - t \sqrt{V^2 + 4KK_x}}{2\sqrt{K_x}t} \right) \right] \right\}. \quad (28)$$

Для консервативного вещества при  $K = 0$  уравнение (28) принимает следующую форму

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} - 1 - \frac{x}{V\tau} \right) \left\{ \Phi^* \left[ \frac{x - (t - \tau)V}{2\sqrt{K_x}(t - \tau)} \right] - \Phi^* \left[ \frac{x - Vt}{2\sqrt{K_x}t} \right] \right\}. \quad (29)$$

Для определения изменения максимальной концентрации вещества загрязнения по длине водотока следует применять формулы (28) и (29), так как при несимметричной эюре впуска сточных вод формула получается более сложной.

### 5. Пикообразная эюра.

При условии пикообразной эюры впуска сточных вод (фиг. 6) граничное условие описывается формулой [3]

$$F(t) = e^{-\beta(t-a)} \quad \text{при } a < t. \quad (30)$$

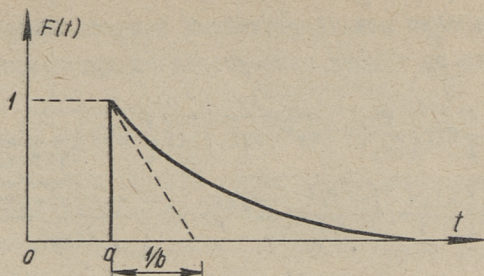
L - преобразование граничного условия (30) в данном случае дает

$$\bar{S}(+0, p) = \frac{e^{-ap}}{p + \beta}, \quad (31)$$

и изображающее уравнение (5) принимает вид

$$\bar{S} = \frac{e^{-ap}}{p + \beta} \exp \left[ \frac{Vx}{2K_x} - x \sqrt{\frac{V^2}{4K_x^2} + \frac{p + K}{K_x}} \right]. \quad (32)$$

Для получения оригинала последнего уравнения (32) используется теорема запаздывания и следующая формула обра-



Фиг. 6. Пикообразная эпюра загрязнения

щения [4]

$$\frac{\exp[-\sqrt{\alpha(\beta+\alpha)}]}{\beta+\alpha} = L \left\{ \frac{1}{2} e^{-\alpha t} \exp[-\sqrt{\alpha(\beta-\alpha)}] \Phi^* \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{t}} - \sqrt{(\beta-\alpha)t} \right] + \exp \sqrt{\alpha(\beta-\alpha)} \Phi^* \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{t}} + \sqrt{(\beta-\alpha)t} \right] \right\}. \quad (33)$$

Как в случае формулы (10), можно и здесь принять, что член

$$\Phi^* \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{t}} + \sqrt{(\beta+\alpha)t} \right]$$

равняется нулю.

Имея в виду вышеприведенное, уравнение для расчета относительной концентрации вещества загрязнения при впуске сточных вод по закону фиг. 6 получается в виде

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} e^{-b(t-\alpha)} \exp \left[ \frac{Vx}{2K_x} - x \sqrt{V^2 + 4KK_x - 4K_x b} \right] \times \Phi^* \left[ \frac{x - (t-\alpha) \sqrt{V^2 + 4KK_x - 4K_x b}}{2\sqrt{K_x(t-\alpha)}} \right]. \quad (34)$$

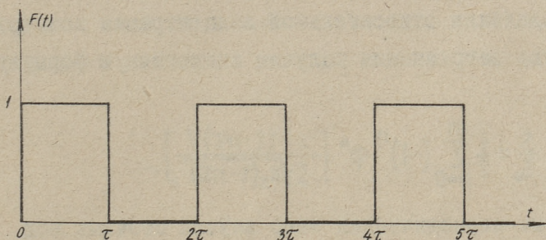
Для консервативного вещества загрязнения формула (34) в некоторой мере упрощается и принимает вид (\$K = 0\$)



$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} e^{-b(t-\alpha)} \exp\left(\frac{Vx}{2k_x} - x\sqrt{V^2 - 4k_x b}\right) \Phi^* \left[ \frac{x - (t-\alpha)\sqrt{V^2 - 4k_x b}}{2\sqrt{k_x(t-\alpha)}} \right]. \quad (35)$$

До сих пор мы рассматривали расчетные формулы для выпуска сточных вод по элементарным эпюрам и видели, что в результате решения уравнения (I) расчетные зависимости получаются довольно сложные. Несмотря на сложности этих формул, они применимы в инженерной практике, и расчет по этим формулам не требует специальной подготовки.

В практике в большинстве случаев встречаются периодические выпускные эпюры сточных вод. При периодических эпюрах расчетные формулы получаются более сложными даже при очень простых выпускных эпюрах. В качестве примера ниже приводим одну из таких формул при скачкообразном периодическом выпуске сточных вод (фиг. 7).



Фиг. 7. Скачкообразная периодическая эпюра загрязнения

Изображающее уравнение в этом случае имеет вид

$$\bar{S} = \frac{1}{p} \exp\left[\frac{Vx}{2k_x} - \frac{x}{\sqrt{k_x}} \sqrt{V^2 + 4kk_x + 4k_x p}\right] \sum_{n=0}^m (-1)^n e^{-n\tau p}, \quad (36)$$

где  $\frac{m+1}{2}$  — число скачкообразных выступов с равными периодами  $2\tau$ .

Для получения оригинала уравнения (36) пользуемся теоремами запаздывания и смещения, а также формулой обращения преобразования Лапласа [2]

$$\frac{e^{-x\sqrt{\frac{p}{k_x}}}}{p-\alpha} = L \left\{ \frac{1}{2} e^{\alpha t} \left[ e^{-x\sqrt{\frac{\alpha}{k_x}}} \Phi^* \left( \frac{x}{2\sqrt{k_x t}} - \sqrt{\alpha t} \right) + e^{x\sqrt{\frac{\alpha}{k_x}}} \Phi^* \left( \frac{x}{2\sqrt{k_x t}} + \sqrt{\alpha t} \right) \right] \right\} \quad (37)$$

получим

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \exp \left[ \frac{x}{2k_x} (v - \sqrt{v^2 + 4kk_x}) \right] \times \sum_{n=0}^m (-1)^n \Phi^* \left[ \frac{x - (t - n\tau)\sqrt{v^2 + 4kk_x}}{2\sqrt{k_x}(t - n\tau)} \right]. \quad (38)$$

Отдельные члены последней формулы имеют значение только при  $t \geq n\tau$ , а в противном случае, как уже показано выше, при  $t < n\tau$  они равняются нулю.

Для определения относительной концентрации консервативного вещества загрязнения получим аналогичную формулу в виде

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m (-1)^n \Phi^* \left[ \frac{x - (t - n\tau)v}{2\sqrt{k_x}(t - n\tau)} \right]. \quad (39)$$

Для других периодических эпюр впуска сточных вод можно получить аналогичные расчетные формулы, но в более сложном виде. Если имеется потребность получить эти формулы, следует решить уравнение (I) по вышеупомянутой методике при помощи преобразования Лапласа.

Все полученные формулы кроме практического значения представляют определенный методический интерес для исследования коэффициента турбулентной диффузии и коэффициента неконсервативности в водотоке.

#### Л и т е р а т у р а

Г. А. М. Айтсам, Х. А. Вельнер, Л. Л. Паль. О расчете продольного смещения вещества загрязнения в водотоках. В этом сборнике стр. 57.



2. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М. 1964.

3. Г. Дёч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. 1965.

4. В.А. Диткин, А.П. Прудников. Справочник по операционному исчислению. М. 1965.





УДК 628.3

Х.А. Вельнер, Р.В. Плате

О БИОХИМИЧЕСКОМ ОКИСЛЕНИИ ВЕЩЕСТВА  
 ЗАГРЯЗНЕНИЯ В РЕКАХ

(I сообщение)

Кинетика БПК сточных вод вдоль водотока зависит от начального разбавления, дополнительного разбавления вдоль водотока, а также биохимического окисления органического (неконсервативного) вещества загрязнения с учетом турбулентной диффузии этого вещества в потоке. Применяемые в инженерной практике расчетные зависимости, однако, не учитывают дополнительного разбавления вдоль водотока и влияния турбулентной диффузии.

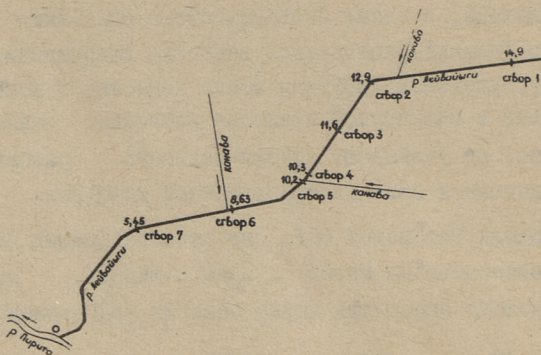
В условиях Эстонской ССР, где преобладающими являются реки относительно малой глубины и ширины, процесс биохимического окисления можно описать уравнением

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} - K_x \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + KS = 0, \quad (I)$$

где  $S$  — концентрация загрязнения;  
 $x$  — продольная координата водотока;  
 $u$  — средняя скорость течения в водотоке;  
 $K_x$  — коэффициент турбулентной диффузии в продольном направлении;  
 $K$  — коэффициент неконсервативности.

В статье [I] настоящего сборника приведены математические решения этого уравнения для типичных режимов впуска загрязнения в водоток.

Для решения уравнения (I) надо предварительно определить коэффициенты  $K_x$  и  $K$ . Конкретные величины этих коэффициентов зависят от целого ряда исходных и граничных условий (вещество загрязнения, температура, гидравлические и гидрографические параметры русла и пр.). В настоящей статье сделана попытка подойти к определению коэффициента скорости биохимического окисления  $K = K_1$  в природных условиях небольшой речки, типичной для Эстонской ССР. Определение коэффициента  $K_1$  в природных условиях представляет большой интерес, поскольку установлено, что процесс окисления органического вещества в водотоке протекает значительно быстрее, чем в условиях баночных экспериментов [2], [3], [4].



Фиг. 1. Схема р. Лейвайыги

Водотоком для исследования биохимического окисления вещества органического загрязнения мы выбрали небольшую речку Лейвайыги (фиг. 1). Средняя ширина исследуемого участка реки 1,5 - 3 м, глубина 0,2 м, уклон 0,8‰. Скорости течения воды колеблются от 0,1 до 0,4 м/сек, средняя скорость течения 0,15 м/сек. Вдоль исследуемого участка в реку впадают три магистральные канавы. Расходы воды увеличиваются вдоль водотока от 0,035 до 0,28 м³/сек. Исследуемый водоток является олигосапробным, с числом сапрофитных бактерий 2000-4000 микр/мл. Вода слегка щелочная, жесткостью до 5 мг экв/л. Соотношение перманганата



натной окисляемости к бихроматной меньше 0,5, что соответствует преобладанию в водной среде стабильных веществ (гуминовые вещества). Процесс нитрификации происходит очень слабо, процесс денитрификации протекает интенсивно (после четвертого дня наблюдается образование газообразного азота).

При исследовании кинетики БПК вдоль водотока необходимо брать анализы загрязненной воды в разных створах водотока во время прохождения пика волны загрязнения. Для точного определения прохождения пика загрязнения вдоль водотока через выбираемые створы мы определили время добегаания воды консервативным веществом ( $\text{NaCl}$ ). Выпуском раствора хлористого натрия в водоток увеличивали электропроводность воды водотока и, измеряя изменение электропроводности воды вдоль водотока специальным прибором для определения электропроводности растворов, определяли время добегаания воды в эпюры понижения концентраций консервативного вещества загрязнения. Зная эпюры понижения концентраций консервативного вещества загрязнения и гидрологические и гидрометрические параметры водотока, можно по формулам, приведенным в статье [1], определить коэффициенты продольной диффузии.

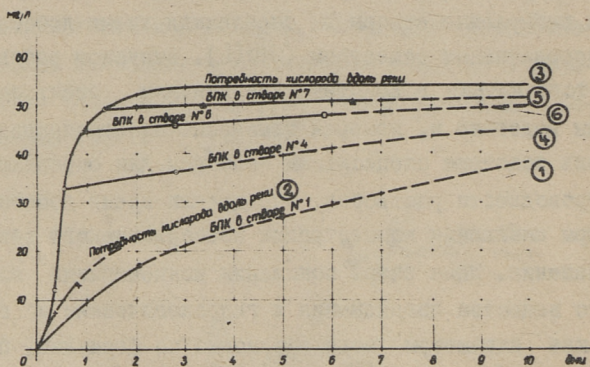
Т а б л и ц а I

Время добегаания реки Лейвайыги между створами

№ створа	I	IA	2	3	4	6
км от устья	14,9	13,9	12,9	11,6	10,3	8,63
время добегаания, [часы, мин.]	-	4.40	7.20	10.40	14.10	24.50

В качестве органического (неконсервативного) вещества загрязнения мы применяли сахарозу. В настоящей статье рассмотрен случай непрерывного впуска сахарозы в реку Лейвайыги в течение 24 часов. При таком впуске сахарозы обеспечивается стационарный режим загрязнения в последних створах длительностью не менее 10 часов. Анализы воды взя-

ты с учетом времени добегания. Изменение концентрации сахаразы вдоль реки определено как непосредственно, так и при помощи бихроматной окисляемости. Бихроматную окисляемость сахаразы можно принять равным полному биохимическому потреблению кислорода. Разницу бихроматных окислений волны загрязнения между створами можно тогда считать биохимическим потреблением кислорода вдоль водотока за период времени добегания между этими створами.



Фиг. 2. Характеристики БПК в водотоке и в склянках

Таким образом мы получили кривую БПК вдоль водотока (фиг.2). Для сравнения кинетики БПК вдоль водотока и в стандартных баночных условиях во время прохождения пика волны органического загрязнения в створах 1, 4, 6 и 7 взяты пробы и инкубированы склянки БПК по стандартной методике. Данные опыта приведены на фиг. 2 и в таблице 2. Помимо БПК определялись азотная группа и число сапрофитных микробов.

Аналогичным путем были проведены эксперименты и с прерывным впуском волны загрязнения, результаты которых находятся в стадии обработки.



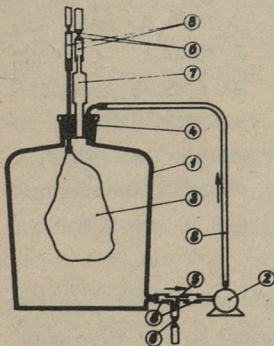
Биохимическое потребление кислорода  
в склянках и вдоль реки, мг/л

№ створа	БПК <sub>0,5</sub>	БПК <sub>I</sub>	БПК <sub>2</sub>	БПК <sub>5</sub>	K <sub>I</sub>
№ I	5,5	10	18	27	0,17
№ 4	-	-	4,4	6,5	0,11
№ 6	-	-	2,2	5,6	0,10
№ 7	-	-	1,7	3,6	0,10
Вдоль водотока	10	15	23	-	0,30

П р и м е ч а н и е. БПК в створах I, 4, 6 и 7 определены в склянках по стандартной методике.

Коэффициенты  $K_1$  определены как средние по методике Н.А. Базякиной [5]. Из таблицы 2 видно, что скорость окисления органического вещества в натуральных условиях значительно выше скорости окисления в склянках. Это, по-видимому, объясняется перемешиванием вод разного возраста в процессе турбулентной диффузии и активизацией деятельности микроорганизмов в условиях непрерывного движения воды.

Схема опытного устройства.



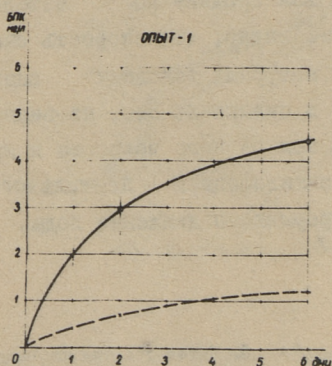
Фиг. 3. Установка для исследования процесса БПК в водотоке и в склянках:

- 1 - бутылка
- 2 - насос
- 3 - пластмассовый мешок,
- 4 - резиновая пробка,
- 5 - тройник стеклянный для взятия проб
- 6 - кранки
- 7 - газонабиратель
- 8 - резиновые соединительные части

Как нами было показано [6], скорость биохимического окисления изменяется в процессе окисления, как правило, в убывающем направлении. Максимальная скорость наблюдается в первые сутки процесса. Определив коэффициенты скорости биохимического окисления  $K_1$  в разные моменты времени согласно [6] как

$$K_1 = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)_o - \left(\frac{dy}{dt}\right)_i}{Y_{t_i}}, \quad (2)$$

где  $Y_{t_i}$  — потребленный кислород за время  $t_i$ , видим, что в начальный период протекания процесса скоростной коэффициент биохимического окисления  $K_1$  в 1,5 — 2 раза выше среднего.



Фиг. 4. Результаты определения БПК в динамических условиях

Для выявления влияния скорости течения потока на кинетику окисления нами начат цикл методических опытов в замкнутой системе.

Предварительные опыты произведены на установке, показанной на фиг. 3. Установка состоит из сосуда, диафрагменного насоса и

соединительных частей. В качестве примера на фиг. 4 представлена связь  $BPK = f(t)$  в условиях непрерывного движения воды (сплошная линия) и в статических условиях (пунктирная линия).

Как видно, скорость биохимического окисления органического вещества в природных условиях и в условиях динамического эксперимента выше скорости окисления, полученной в условиях стандартной методики.



Т а б л и ц а 3

Биохимическое потребление кислорода  
в статических и динамических условиях  
[мг/л]

Условия	БПК <sub>1</sub>	БПК <sub>2</sub>	БПК <sub>3</sub>	БПК <sub>4</sub>	БПК <sub>5</sub>	K <sub>1</sub>
Статическое	0,4	0,7	0,9	1,1	1,2	0,15
Динамическое	2,0	3,0	3,5	3,9	4,2	0,25

Это указывает на необходимость продолжения методических исследований по установлению истинной скорости биохимического окисления органических веществ.

#### Л и т е р а т у р а

1. А.М. Айтсам, Х.А. Вельнер, Л.Л. Пааль. О расчете продольного смещения вещества загрязнения водотоках. См. наст.сборник, стр.57.

2. A. Nejedlý, J. Pelz. Teoretickoexperimentální výzkum vlivu podíleho mísení na rychlost biochemické spotřeby kyslíku

(теоретически-экспериментальное изучение влияния продольного смещения на скорость биохимического потребления кислорода). Praha Podbaba, 1964.

3. J.W. Clark, I.C. Young, W. Carner. An Improved Apparatus for Biochemical Oxygen Demand. Analytical Chemistry, Vol. 37, N°6, May, 1965.

4. A. Nejedlý. An Explanation of the Difference Between the Rate of the BOD Progression under Laboratory and Stream Conditions. Third International Conference of Water Pollution Research. 1966.

5. Н.А. Б а з я к и н а. Значение константы скорости потребления кислорода при определении биохимической потребности в кислороде сточной жидкости. Санитарная техника, № 2, 1933.

6. Х.А. В е л ь н е р, А.М. А й т с а м, Л.Л. П а а л ь. Об основах инженерного расчета самоочищающей способности водотоков. Научные доклады по вопросам самоочищения водоемов и скопления сточных вод. Таллин 1965.

7. Вопросы моделирования процессов самоочищения малых рек. Техн. отчет. Библ. ТПИ, Таллин 1966.



УДК 534.322.3.+517.5

А.М.Айтсам, В.К.Асток

О РАСЧЕТНЫХ ШУМАХ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО СПЕКТРА СМЕШАННОЙ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ, СТАЦИОНАРНОЙ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ\*

### В в е д е н и е

В статье рассматриваются на основе развитой Н. Винером теории общего гармонического анализа расчетные шумы, входящие в статистический спектр смешанной стационарной случайной функции, состоящей из непериодической и периодических составляющих.

Приводятся зависимости для выяснения расчетных, ложных шумов в смешанном спектре.

#### I. Спектральная плотность периодической, в широком смысле стационарной, случайной функции

Одной из основных характеристик стационарных в широком смысле случайных функций является их спектральная функция, определяемая теоремой Хинчина [1], [2], записываемой интегралом Фурье-Ститтьеса в виде

---

\* Под расчетными шумами понимается в настоящей статье составляющие спектра, возникающие в расчетах спектра и не имеющиеся в истинном спектре рассматриваемого процесса.

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dS(\omega), \quad (1)$$

где  $R(\tau)$  — корреляционная функция стационарной функции  $X(t)$ ,

$\tau$  — сдвиг координаты случайной функции  
 $t_2 - t_1 = \tau$ ,

$S(\omega)$  — вещественная, неубывающая ограниченная функция, называемая спектральной функцией.

Как известно [2], [3], в наиболее важных для практических приложений случаях, когда корреляционная функция  $R(\tau)$  убывает по абсолютной величине при  $|\tau| \rightarrow \infty$  так, чтобы было выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) d\tau < \infty, \quad (2)$$

функция  $S(\omega)$  является дифференцируемой.

В этом случае интеграл Фурье—Стилтьеса совпадает с интегралом Фурье

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} S(\omega) d\omega, \quad (3)$$

где  $S(\omega) = \frac{dS(\omega)}{d\omega}$  — спектральная плотность функции  $X(t)$ .

Согласно (3), корреляционная функция стационарной случайной функции является преобразованием Фурье спектральной плотности  $S(\omega)$ . Следовательно, применив обратное преобразование Фурье, получим для спектральной плотности зависимость

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Так как в случае вещественной случайной функции корреляционная функция является вещественной функцией, то обычно вместо (4) записывается



$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (5)$$

Иногда спектральной плотностью называют двойное значение интеграла (5)

$$S_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (6)$$

Сравнивая формулу (6) спектральной плотности с формулой коэффициентов  $A(\omega)$  в разложении четной функции в интеграл Фурье

$$\frac{X(t-0) + X(t+0)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cos \omega \tau d\tau, \quad (7)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (8)$$

видим, что спектральная плотность является разложением корреляционной функции в коэффициенты интеграла Фурье, что непосредственно вытекает также из (4) и (2).

С физической точки зрения спектральная плотность непериодической, стационарной в широком смысле случайной функции представляет собой распределение "мощности" корреляционной функции между отдельными частотами. Одновременно спектральная плотность представляет собой также распределение "кинетической энергии" случайной функции между отдельными частотами.

В условиях эксперимента мы имеем дело обычно с отдельными реализациями случайного процесса. Для стационарных случайных процессов, обладающих эргодическим свойством, при всех отдельных реализациях функции спектральных плот-

\* При этом под мощностью функции понимаем  $f(t) \cdot t$ .

\*\* Под кинетической энергией случайной функции понимаем  $\frac{f(t)^2}{2} \cdot t$ .

ностей одинаковы. Следовательно, спектральная плотность для единичной реализации эргодической стационарной функции является неслучайной функцией.

Спектральные плотности отдельных реализаций неэргодических стационарных процессов представляют собой случайные функции. Для получения неслучайной спектральной плотности неэргодических стационарных случайных процессов следует произвести двукратное осреднение по множеству и по времени, причем порядок осреднения безразличен. Можно либо найти осредненную корреляционную функцию, осредняя корреляционные функции отдельных реализаций, и по ней определить осредненный спектр, либо осреднять спектры отдельных реализаций.

Вышеприведенные рассуждения действительны в случае непериодических случайных функций. Следовательно, спектр непериодических случайных функций является непрерывным.

## 2. Распределение спектра периодических, в широком смысле стационарных, случайных функций

В практике часто встречаются периодические случайные функции, описываемые зависимостью

$$X_t = \sum_{i=1}^n A_i \cos(\omega_i t + \Phi_i), \quad (9)$$

где  $t$  — координата, например время;  
 $A_i$  — амплитуда отдельной гармоники;  
 $\Phi_i$  — сдвиг фазы отдельной гармоники;  
 $\omega_i$  — частота отдельной гармоники;

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i},$$

$T_i$  — период гармоники;

$n$  — число гармоник.

При этом  $A_i$  и  $\Phi_i$  являются независимыми случайными величинами.

Способом, аналогичным вышеприведенному, на основе теоремы Хинчина можно показать, что распределение спектра



$G(\omega)$  периодических случайных функций представляет разложение корреляционной функции в коэффициенты ряда Фурье [2], [3], [4].

$$G(\omega) = \sum_{i=0}^n g(\omega_i) = \sum_{i=0}^n \frac{2}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{+\frac{T_i}{2}} R_i(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau, \quad (10)$$

где  $R_i(\tau)$  — корреляционная функция гармоники периодической функции, которая равна

$$R_i(\tau) = \frac{A_i^2}{2} \cos \omega_i \tau. \quad (11)$$

Корреляционная функция всей стационарной периодической функции (9) равна сумме корреляционных функций отдельных гармоник

$$R(\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^2}{2} \cos \omega_i \tau. \quad (12)$$

Из зависимости (10) видно, что распределение спектра периодической случайной функции является дискретной, состоящей из отдельных вертикальных отрезков, высота которых равна квадрату половины осредненного значения амплитуды отдельных гармоник.

Спектральное распределение периодической стационарной случайной функции отличается от спектральной плотности непериодической функции тем, что последняя представляет собой спектральное распределение, приходящееся на бесконечно малую длину полосы частот

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{g(\omega)}{\Delta\omega}, \quad (13)$$

где  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Следовательно, для сравнения спектров непериодических и периодических случайных функций, значения последнего следует подразделить на соответствующие частоты

$$S(\omega) = \frac{g(\omega)}{\omega_1} = T \frac{g(\omega)}{2\pi}. \quad (14)$$

Обозначив переходный коэффициент перевода спектрального распределения периодической функции в условную спектральную плотность  $\frac{1}{\omega_1} = K$ , можно (I4) переписать в виде

$$S_y(\omega) = Kg(\omega). \quad (I4a)$$

Понятие условной плотности спектра периодической случайной функции помогает, как показано ниже, легче установить расчетные шумы при вычислении спектра.

Следовательно, основное различие при определении спектральных распределений непериодических и периодических стационарных случайных функций, удовлетворяющих условиям (3), состоит в том, что спектр непериодической функции является разложением корреляционной функции в коэффициенты интеграла Фурье, спектр периодических случайных функций представляет собой разложение корреляционной функции в коэффициенты ряда Фурье. Сравнивая формулы (6) и (10) для определения спектров соответственно непериодических и периодических стационарных случайных функций видим, что они отличаются пределами интегрирования и видом задания функции частоты. Для определения спектральной плотности непериодических случайных функций следует проинтегрировать произведение корреляционной функции и косинуса по всей длине реального значения координатной оси, а для определения спектрального распределения периодических стационарных функций это следует произвести лишь в пределах одного периода функции. Также для определения спектральной плотности непериодических функций частота задается непрерывной функцией, а при периодических случайных функциях — прерывной. Как будет показано ниже, отличие в определении спектральных плотностей непериодических и периодических функций является одной из причин появления ошибок при определении спектра смешанных случайных стационарных функций, состоящих одновременно из периодического и непериодического составляющих.



На практике не представляется возможным получить бесконечно длинные реализации случайной функции, поэтому вместо истинных вероятностных характеристик случайных функций пользуются их статистическими характеристиками, определяемыми реализацией функции в течение периода  $L$ .

Очевидно, тем самым статистические характеристики случайных функций отличаются от их истинных значений на величину значения этих характеристик в интервале от  $L$  до  $\infty$ .

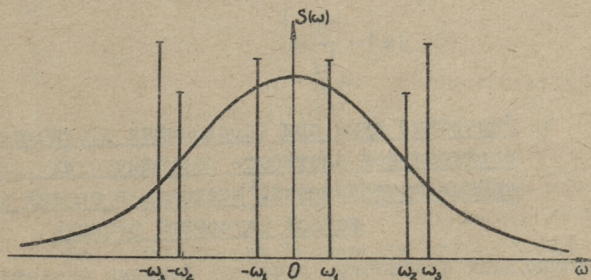
Обозначаем статистические характеристики случайных стационарных функций добавлением звездочки, например,  $R^*(\tau)$ ,  $S^*(\omega)$ .

### 3. Спектральная плотность смешанной, в широком смысле стационарной, случайной функции

Определяемые экспериментом случайные стационарные функции являются обычно суммой непериодической и периодических случайных функций

$$X(t) = Y(t) + Z(t), \quad (15)$$

где  $Y(t)$  — непериодическая стационарная случайная функция с непрерывным спектром,  
 $Z(t)$  — стационарная периодическая случайная функция с дискретным спектром.



Фиг. 1. Спектр смешанной стационарной случайной функции.  
 Рисунок заимствован из [8]

Спектр случайной стационарной функции  $X(t)$  является смешанным, состоящим из непрерывной и дискретной части [8] (фиг. 1).

Для определения спектра полученной экспериментом стационарной случайной смешанной функции пользуются формулой определения спектральной плотности непериодической случайной стационарной функции (6). На основе вышеприведенного анализа понятно, что этим допускается ошибка, так как спектры периодической и непериодической составляющей функции  $X(t)$  определяются по-разному.

Часто для уменьшения ошибок, возникающих при определении спектра смешанной стационарной случайной функции, пользуются фильтром  $\lambda$ . В этом случае спектральная плотность выражается зависимостью:

$$S_{\Phi}^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{+L} \lambda R^*(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (16)$$

При этом на достоверность определенной экспериментом корреляционной функции фильтр оказывает влияние как функция веса.

В литературе приводится ряд различных форм фильтра [5], [6]. По предложению Г.М. Дженкинса [7] влияние фильтра на спектральную плотность оценивается его окном, характеризующим полосу частот, пропускаемую фильтром. Для примера приводим из работы Дженкинса [7] выражение окна так называемого фильтра Бартлета:

$$\lambda = 1 - \frac{|\tau|}{L}. \quad (17)$$

#### 4. Расчетные шумы при определении статической спектральной плотности периодических случайных составляющих, входящих в состав смешанной случайной функции

Спектральная плотность случайной функции является линейным оператором, тем самым спектральная плотность смешанной стационарной случайной функции (15) равна сумме

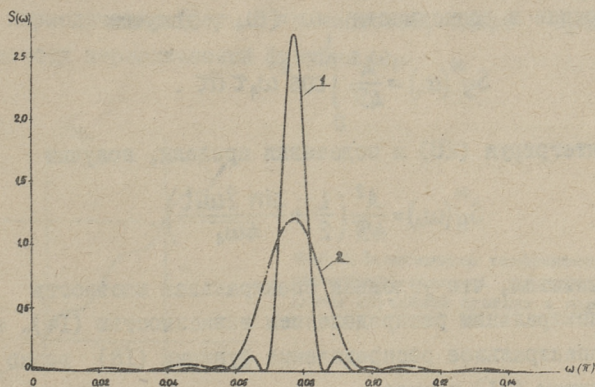


спектральных плотностей периодической и непериодической составляющих функций. Следовательно, и расчетные шумы спектральной плотности смешанной случайной функции равны сумме расчетных шумов отдельных ее составляющих.

Пусть в результате измерения определена случайная стационарная функция  $X(t)$  длиной  $L$ , в состав которой входит периодическая составляющая  $Z(t)$ . Так как корреляционная функция стационарных случайных процессов является четной функцией, а все четные периодические функции можно представить в виде ряда Фурье, состоящего только из косинус-членов, то ограничимся рассмотрением только периодических случайных функций в виде косинус-волн. Не нарушая общности рассуждения, можно вначале рассмотреть расчетные шумы только одной случайной периодической функции с частотой  $\omega_1$  и периодом  $T_1$

$$Z(t) = A \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi), \quad (18)$$

где  $A$  и  $\Phi$  являются случайными величинами. При этом напомним, что для эргодических стационарных случайных функций  $A$  и  $\Phi$  являются математическими ожиданиями  $A_i$  и  $\Phi_i$ , а для единичной неэргодической реализации стационарных случайных функций они являются конкретными ре-



Фиг. 2. Окно фильтра Бартлета при  $L = 1,0$  и  $L = 2,5$

лизациями соответствующих случайных величин  $A_i$  и  $\Phi_i$ , т.е. неслучайными величинами.

Дискретная, т.е. истинная спектральная плотность периодической случайной величины с единственной частотой  $\omega_1$ , выраженная в виде разложения корреляционной функции (I8) в коэффициенты ряда Фурье, состоит, как известно, из одного вертикального отрезка высотой  $\frac{A^2}{4}$  при частоте  $\omega_1$ .

Определяем статическую условную спектральную плотность периодической случайной функции (I8) длиной  $L$ , как разложение коэффициентов интеграла Фурье

$$S_y^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^L \frac{A^2}{4} \cos \omega_1 \tau \cos \omega \tau d\tau. \quad (I9)$$

Как известно, общее интегрирование зависимости (I9) является невозможным и возможно лишь отдельно для значений  $\omega = \omega_1$  и  $\omega \neq \omega_1$ . Из сравнения спектральной плотности при  $\omega = \omega_1$  со значением истинной спектральной плотности определяется шум при частоте  $\omega_1$ . Так как дискретная спектральная плотность периодической функции (I8) при  $\omega \neq \omega_1$  равняется нулю, то расчетный шум вне частот  $\omega_1$  определяется значением интеграла (I9).

Приняв в зависимости  $\omega = \omega_1$ , получим

$$S_y^*(\omega_1) = \frac{A^2}{4\pi} \int_0^L \cos^2 \omega_1 \tau d\tau. \quad (20)$$

Интегрируя (20) и подставив пределы, получим

$$S_y^*(\omega_1) = \frac{A^2}{4\pi} \left( \frac{L}{2} + \frac{\sin 2\omega_1 L}{4\omega_1} \right). \quad (2I)$$

Учитывая, что условная спектральная плотность связана со спектральным распределением зависимостью (I4), а также, что спектральное распределение функции (I8) равно  $\frac{A^2}{4}$ , перепишем (2I) в виде

$$S_y^*(\omega_1) = \frac{T_1}{2\pi} \left( \frac{L}{T_1} + \frac{\sin 2\omega_1 L}{2\omega_1 T_1} \right) \frac{A^2}{4}. \quad (22)$$



Обозначив выражение в скобках через  $\alpha$ , получим

$$S_y^*(\omega_1) = \alpha K \frac{A^2}{4} = \alpha K g(\omega_1), \quad (23)$$

где

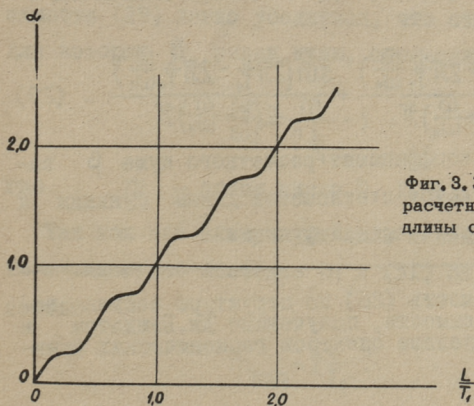
$$\alpha = \frac{L}{T_1} + \frac{\sin 2\omega_1 L}{2\omega_1 T_1}. \quad (24)$$

Коэффициент  $\alpha$  выражает отношение расчетной условной спектральной плотности функции (18) к истинному значению условной спектральной плотности. Поэтому коэффициент  $\alpha$  можно называть коэффициентом расчетного шума при частоте  $\omega_1$ .

Для выяснения зависимости  $\alpha$  от длины функции  $Z(t)$  и периода  $T_1$  перепишем (24) учитывая, что  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ , в виде

$$\alpha = \frac{L}{T_1} + \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi \frac{L}{T_1}. \quad (25)$$

Из (25) видно, что коэффициент расчетного шума равен единице лишь при  $L = T_1$ . При остальных значениях  $L$  значение коэффициента расчетного шума  $\alpha$  увеличивается с ростом  $\frac{L}{T_1}$  периодически (фиг. 3) с частотой, вдвое превышающей частоту периодической функции  $\omega_1$ .



Фиг. 3. Зависимость коэффициента расчетного шума  $\alpha$  от отношения длины случайной функции к периоду  $\frac{L}{T_1}$

Расчетный шум при  $\omega \neq \omega_1$  выражается зависимостью

$$S_y^*(\omega_1) = \frac{A^2}{4\pi} \int_0^L \cos \omega_1 \tau \cos \omega \tau d\tau = \frac{A^2}{4\pi} \left[ \frac{\sin(\omega_1 + \omega)L}{2(\omega_1 + \omega)} + \frac{\sin(\omega_1 - \omega)L}{2(\omega_1 - \omega)} \right]. \quad (26)$$

Учитывая, что истинные значения условной спектральной плотности периодических стационарных случайных функций для всех частот, несовпадающих с частотой самой функции, равны нулю, условная спектральная плотность, определяемая по (26), является расчетным шумом.

Перепишем (26), выделив из формулы обозначения переходного коэффициента  $K$  и спектрального распределения для частоты  $\omega_1 - g(\omega_1)$

$$S_y^*(\omega_1) = \beta K g(\omega_1), \quad (27)$$

где  $\beta$  — коэффициент расчетного шума при  $\omega \neq \omega_1$ , при этом

$$\beta = \frac{\sin(\omega_1 + \omega)L}{2(1 + \frac{\omega}{\omega_1})\pi} + \frac{\sin(\omega_1 - \omega)L}{2(1 - \frac{\omega}{\omega_1})\pi}. \quad (28)$$

Коэффициентом  $\beta$  определяется, применяя терминологию Пристли, спектральное окно для единичного фильтра  $\lambda = 1, 0$ .

Выразивши частоту через период, (28) переписывается в виде

$$\beta = \frac{\sin(2\pi \frac{L}{T_1} + 2\pi \frac{L}{T_1} \frac{\omega}{\omega_1})}{2(1 + \frac{\omega}{\omega_1})\pi} + \frac{\sin(2\pi \frac{L}{T_1} - 2\pi \frac{L}{T_1} \frac{\omega}{\omega_1})}{2(1 - \frac{\omega}{\omega_1})\pi}. \quad (29)$$

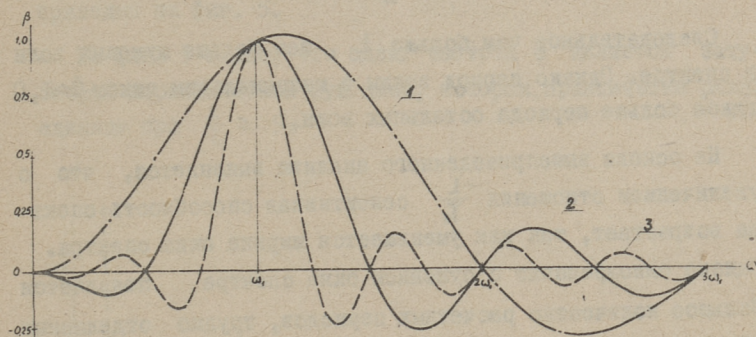
Из (29) видно, что коэффициент расчетного шума  $\beta$  зависит от соотношения частот и отношения длины функции к периоду исследуемой периодической функции

---

\* Выведенная зависимость (26) по структуре весьма похожа на некоторые зависимости, полученные Дж. Бендатом и В.Л. Ли [4], [8] при анализе спектров гармонических функций.



$$\beta = f\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \frac{L}{T_1}\right). \quad (30)$$



Фиг. 4. Коэффициент расчетного шума  $\beta$  (окно единичного фильтра).  
 1)  $\frac{L}{T_1} = 0,5$ , 2)  $\frac{L}{T_1} = 1,0$ ,  $\frac{L}{T_1} = 2,0$

График коэффициента расчетного шума изображен на фиг. 4. Из фиг. 4 видно, что  $\beta$  является периодической функцией  $\frac{\omega}{\omega_1}$  с частотой, зависящей от отношения  $\frac{L}{T_1}$ . Анализом зависимости (29) легко убедиться, что относительные частоты, для которых  $\beta$  равен нулю, определяются зависимостью

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{m}{2\frac{L}{T_1}} - 1, \quad (31)$$

где  $m$  — целое число 0, 1, 2...

Так как нас интересуют лишь положительные значения  $\frac{\omega}{\omega_1}$ , то минимальное значение  $m$  в (31) определяется зависимостью

$$m_{\min} = 2\frac{L}{T_1}. \quad (32)$$

Период волн  $\beta$  в размерностях  $\frac{\omega}{\omega_1}$  равен

$$T_\beta = \frac{T_1}{L}. \quad (33)$$

Следовательно, чем больше  $L$ , тем больше шумовых волн в спектре. Однако период волны с максимальным пиком  $\beta \approx 1,0$  вдвое больше периода остальных волн.

На основе вышеприведенного анализа выясняется, что с увеличением отношения  $\frac{L}{T_1}$  селективная способность спектра возрастает, так как уменьшается ширина окна спектра. Однако одновременно с сужением окна спектра появляется большое количество расчетных периодов, трудно отделяемых от имеющихся в случайной функции периодических компонентов. Минимальная ширина окна  $*$  спектра по (24) равна

$$\Delta\omega = 2T_\beta = 2\frac{T_1}{L}. \quad (34)$$

Из фиг. 4 видно, что при  $\frac{\omega}{\omega_1} = 1,0$   $\beta$  не достигает максимального значения. Следовательно, при определении частоты периодической составляющей стационарной случайной функции по спектральной плотности смешанной функции получается не истинная частота периодической составляющей, а ее значение с каким-то сдвигом

$$\omega^* = \omega_1 + \varepsilon. \quad (35)$$

Из фиг. 4 и анализа формулы (29) вытекает, что

$$\varepsilon = f\left(\frac{L}{T_1}\right). \quad (36)$$

Сдвиг частоты можно определить общеизвестными методами максимума-минимума из уравнения (29). Вычисленный нами график для коэффициента сдвига частоты

---

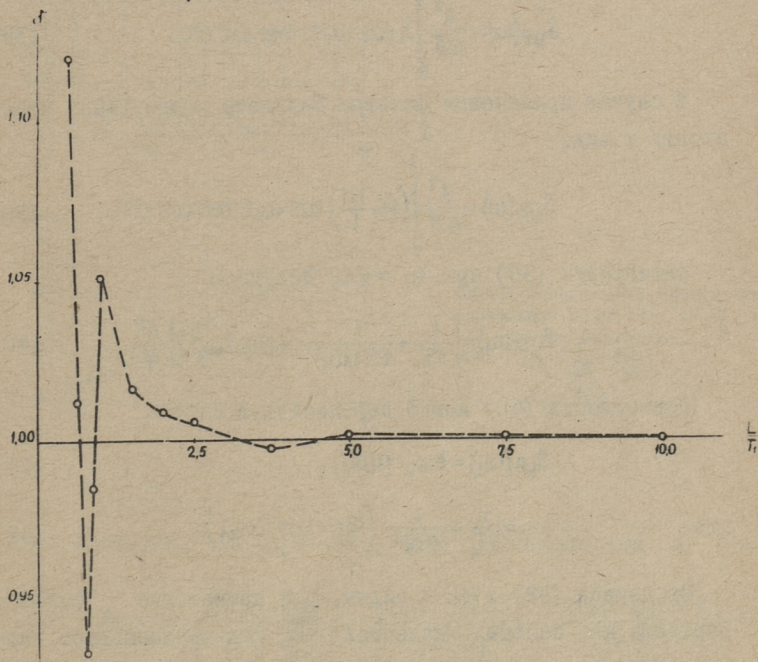
\* Под минимальной шириной окна спектра понимаем расстояние по оси  $\frac{\omega}{\omega_1}$  между нулевыми значениями максимальной волны  $\beta$  вблизи  $\frac{\omega}{\omega_1} = 1,0$ .



$$\delta = \frac{\omega^*}{\omega_1} \quad (37)$$

приведен на фиг. 5.

На фиг. 5 видно, что сдвиг частоты  $\delta$  является затухающей периодической функцией, которая практически равна единице при  $\frac{L}{T_1} > 5$ .



фиг. 5. Коэффициент сдвига частоты  $\delta$  для единичного фильтра

Для уменьшения расчетных шумов при расчетах спектральных плотностей используются фильтры различной формы. Рассмотрим влияние фильтров на значения коэффициентов расчетного шума.

5. Расчетный шум при вычислении статистической  
спектральной плотности стационарных слу-  
чайных косинус-функций при применении  
фильтра Бартлета

При применении фильтра условная спектральная плотность случайных косинус-функций вычисляется по формуле:

$$S_{y\phi}^*(\omega) = \frac{A^2}{4\pi} \int_0^L \lambda \cos \omega_1 \tau \cdot \cos \omega \tau \, d\tau. \quad (38)$$

В случае применения фильтра Бартлета можно (38) переписать в виде

$$S_{yB}(\omega) = \frac{A^2}{4\pi} \int_0^L \left(1 - \frac{|\tau|}{L}\right) \cos \omega_1 \tau \cos \omega \tau \, d\tau. \quad (39)$$

Интегрируя (39) при  $\omega = \omega_1$ , получаем

$$S_{yB}(\omega_1) = \left[ \frac{L}{4\pi} + \frac{1}{8\pi L \omega_1^2} (1 - \cos 2\omega_1 L) \right] \frac{A^2}{4}. \quad (40)$$

Зависимость (40) можно переписать в виде

$$S_{yB}(\omega_1) = K \alpha_B \cdot g(\omega_1), \quad (41)$$

где 
$$\alpha_B = \frac{L}{2T_1} + \frac{1}{16\pi^2} \frac{T_1}{L} (1 - \cos 2\omega_1 L). \quad (42)$$

Сравнивая (42) и (25) видим, что применение фильтра Бартлета при больших значениях  $\frac{T_1}{L}$  вдвое уменьшает значение расчетного коэффициента.

График  $\alpha_B$  приведен на фиг. 6.

Интегрируя (39) при  $\omega \neq \omega_1$ , имеем

$$S_{yB} = \frac{1}{2\pi L} \left[ 2 \frac{\omega_1^2 + \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2} \frac{\cos(\omega_1 + \omega)L}{(\omega_1 + \omega)^2} - \frac{\cos(\omega_1 - \omega)L}{(\omega_1 - \omega)^2} \right] \frac{A^2}{4}. \quad (43)$$

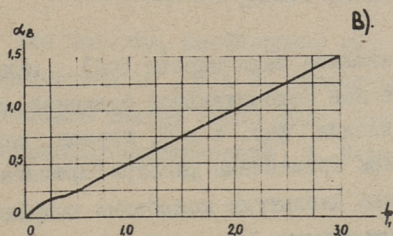
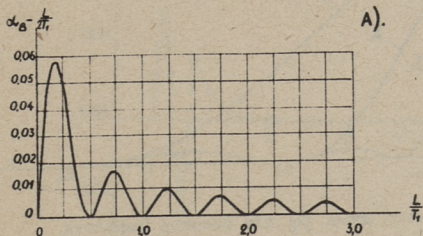
Преобразовав (43) с учетом значений спектрального переходного коэффициента  $K$  и спектрального распределения для частоты  $\omega_1$ , получим



$$S_{yB}^* = K_{\beta B} g(\omega_1), \quad (44)$$

где

$$\beta = \frac{1}{4\pi^2} \frac{T_1}{L} \left[ 2 \frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2} - \frac{\cos(\omega_1 + \omega)L}{\left(1 + \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} - \frac{\cos(\omega_1 - \omega)L}{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right]. \quad (45)$$



Фиг. 6. Зависимость коэффициента расчетного шума  $\alpha_B$  от  $\frac{L}{T_1}$  для фильтра Бартлета.

А)  $\alpha_B - \frac{L}{2T_1} = f\left(\frac{L}{T_1}\right),$

В)  $\alpha_B = f\left(\frac{L}{T_1}\right)$

Учитывая, что  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ , (45) переписывается в виде

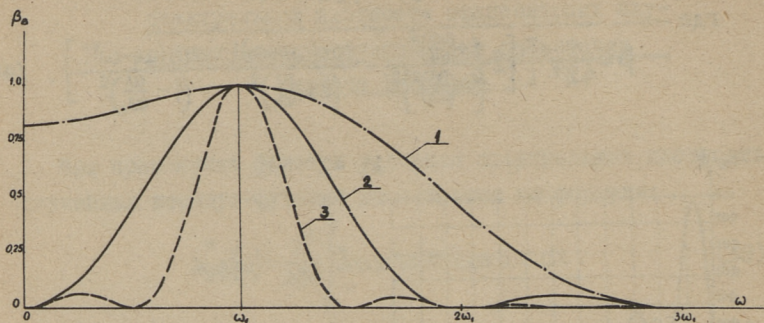
$$\beta_B = \frac{1}{4\pi^2} \frac{T_1}{L} \left[ 2 \frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2} - \frac{\cos\left(1 + \frac{\omega}{\omega_1}\right) 2\pi \frac{L}{T_1}}{\left(1 + \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} - \frac{\cos\left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right) 2\pi \frac{L}{T_1}}{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right]. \quad (46)$$

Из (46) видно, что

$$\beta_B = f\left(\frac{\omega}{\omega_1}, \frac{L}{T_1}\right). \quad (47)$$

Зависимость (46) определяет окно спектра для фильтра Бартлета.

График зависимости (46) приведен на фиг. 7.



Фиг. 7. Коэффициент расчетного шума  $\beta_B$  для фильтра Бартлета.

1)  $\frac{L}{T_1} = 0,5$ , 2)  $\frac{L}{T_1} = 1,0$ , 3)  $\frac{L}{T_1} = 2,0$

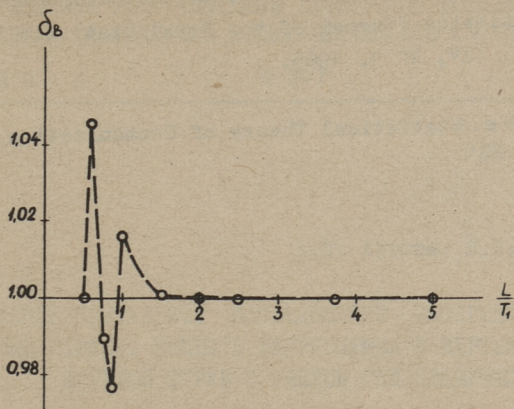
Из фиг. 7, а также из анализа зависимости (46) видно, что  $\beta_B$  является периодической положительной функцией. При этом, как явствует из сравнения фиг. 4 и 7, период коэффициента расчетного шума при применении фильтра Бартлета не изменяется, уменьшаются лишь амплитуды колебания коэффициента. Также выясняется, что применение фильтра Бартлета не сокращает ширину окна спектра. Однако наличие фильтра значительно уменьшает гармонические значения расчетных шумов вблизи анализируемой частоты  $\omega_1$ .

Применение фильтра Бартлета не устраняет также сдвига частоты пика спектра относительно исследуемой частоты  $\omega_1$ . Зависимость коэффициента сдвига частоты от  $\frac{L}{T_1}$  при наличии фильтра Бартлета приведена на фиг. 8.

Значения коэффициентов расчетного шума и сдвига частоты для других типов фильтров определяются аналогичным способом.

Зная значения коэффициентов расчетного шума и сдвига частоты, можно определить значение осредненных амплитуд периодических составляющих спектра смешанной стационарной случайной функции.





Фиг. 8. Коэффициент сдвига частоты  $\delta_\beta$  для фильтра Барглета.

Все расчеты, необходимые для составления расчетных коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$ , выполнены на ЭВМ Минск-22 в вычислительном центре ЭРСПО ЭССР. Расчеты производились по программе, составленной Э. Лелумээс.

### Л и т е р а т у р а

1. А.А. Х и н ч и н. Теория корреляции стационарных стохастических процессов. Усп. мат. наук 5, 1938.
2. А.М. Я г л о м. Введение в теорию стационарных случайных функций. Усп. мат., т.УП, выпуск 5(51), 1952.
3. М.С. Б а р т л е т. Введение в теорию случайных процессов. М. 1958.
4. Дж. Б е н д а т. Основы теории случайных шумов и ее применение. М. 1965.
5. В.М. P r i e s t l e y. The Role Bandwidth in Spectral Analysis. Applied Statistics Journal of the Royal Statistical Society, Series C, V. XIV No 1, 1965.
6. В.М. P r i e s t l e y. Basic Consideration in the Estimation of Spectra, Technometrics, V.4, Nov. 1962.

7. G.M. J e n k i n s. A Survey of Spectral Analysis.  
Applied Statistics Journal of the Royal Statistic Society,  
Series C, V. XIV, N° 1, 1965.

8. Y.W. L e e. Statistical Theory of Communication.  
N.Y. 1960.



УДК 628.39

А.М. Айтсам, Л.Л. Пааль

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
КОНЦЕНТРАЦИИ ВЕЩЕСТВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ  
КРУГЛОЙ СТРУЕ С УЧЕТОМ СИЛ ПЛАВУЧЕСТИ

Распространение веществ загрязнения, выпускаемых глубоководными выпусками в море, можно подразделить на две зоны: струйная зона смешения и диффузионная зона смешения. В первой зоне распространение веществ загрязнения происходит под действием сил инерции самой сточной жидкости, а также под действием сил турбулентного переноса первичного (сточные воды) и вторичного потока (морская вода). Во второй, диффузионной зоне распространение веществ загрязнения происходит лишь под влиянием сил турбулентного переноса вторичного потока.

Распространение веществ загрязнения сточных вод в струйной зоне смешения происходит в условиях свободной, затопленной круглой струи при наличии разницы удельных весов приемной воды (морская вода) и воды струи (сточная вода). При этом, как известно, удельный вес морской воды с увеличением глубины повышается, т.е. распространение струи происходит в условиях вертикальной стратификации весов приемной воды.

Нами было показано, что при наличии различий в удельных весах сточных вод и приемной воды распространение веществ загрязнения в затопленной свободной струе можно описать следующей системой дифференциальных уравнений, составленной для условий баланса вещества в элементарном объеме жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_i} = D_s \Delta \bar{S} + \frac{\Delta \gamma}{g}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = D_u \Delta \bar{u}_i, \\ \frac{\partial(\Delta \gamma)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial(\Delta \gamma)}{\partial x_i} = D_s(\Delta \gamma), \end{cases}$$

где  $\bar{S}$  и  $\bar{u}_i$  - осредненные по времени средние значения концентрации скалярной субстанции и проекции скоростей на координатных осях;  
 $D_s$  и  $D_u$  - коэффициенты вихревой диффузии скалярной субстанции и импульса;  
 $\Delta \gamma$  - разность удельных весов сточной жидкости и приемной воды - сила плавучести.

Решение приведенной системы дифференциальных уравнений весьма затруднительно даже при простейших начальных и граничных условиях. Кроме того, теоретическое решение определяет лишь осредненные по времени значения концентрации веществ загрязнения и ни в коей мере не оценивает пульсацию концентрации по времени.

В литературе приводятся теоретические решения задачи о распространении концентрации скалярной субстанции в затопленных круглых струях лишь при отсутствии сил плавучести ( $\Delta \gamma = 0$ ). Расчетные зависимости, приводимые с учетом сил плавучести, базируются, в отличие от вышеприведенной системы уравнений, на балансе количества движения всей струи. Полученные расчетные зависимости применимы после экспериментального определения входящих в них коэффициентов.

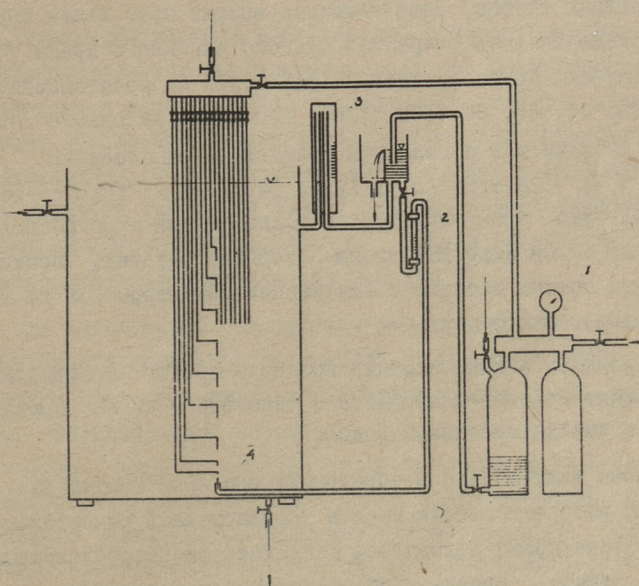
Определение распределения концентрации в затопленной круглой струе при наличии сил плавучести для условий проектируемого глубоководного выпуска сточных вод г. Таллина было проведено нами экспериментально. Опыты были поставлены при средних удельных весах сточной жидкости и морской воды в намечаемом месте спуска сточных вод. Соответствующ-



щими значениями удельных весов было принято  $1,000 \text{ т/м}^3$  для сточной жидкости и  $1,005 \text{ т/м}^3$  для морской воды.

Целью опытов являлось определение в круглой затопленной вертикальной струе:

- 1) распределения осредненных по времени концентраций веществ загрязнения вдоль оси струи,
- 2) распределения осредненных по времени концентраций веществ в поперечном сечении струи,
- 3) пределов вероятных мгновенных значений концентрации веществ загрязнения в поперечном сечении струи,
- 4) пределов вероятных мгновенных значений концентрации веществ вдоль оси струи.



Фиг. 1. Схема опытной установки для исследования распространения концентрации в вертикальной затопленной струе.  
1 - компрессор, 2 - ротаметр, 3 - пьезометр, 4 - насадка

Схема опытной установки приведена на фиг. I. Опытная установка состоит из металлического резервуара со стеклянными боковыми стенками, насадки для спуска первичной жидкости в резервуар, питательной системы, компрессора напорного резервуара первичной жидкости, ротаметра для определения расхода первичной жидкости, пьезометра для определения уровня воды в приемном резервуаре и из системы мгновенного взятия проб воды. Приемный резервуар опытной установки имеет размеры 2,2 x 1,5 x 0,4 м.

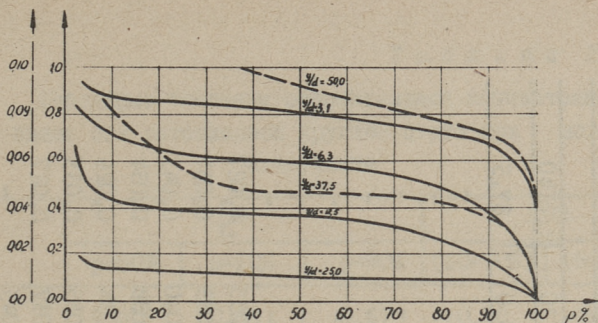
Для увеличения удельного веса приемной воды использовалась обычная поваренная соль. В качестве вторичной жидкости применялась пресная вода, а в качестве вещества загрязнения — красный краситель.

Взятие проб для определения концентрации красителя в струе производилось при помощи соединенных в одну батарею стеклянных трубок. Одновременное взятие проб всеми трубками обеспечивалось открытием единого выходного крана батареи трубок. Пробы брались на оси струи на расстояниях 5, 10, 20, 40, 60, 80, 100, 120 и 140 см от выходного отверстия насадки и в поперечном сечении на расстояниях 1,8; 3,6; 5,4; 7,2; 9,0; 10,8; 12,6; 14,4; 16,2; 18,0 см от оси струи. Само поперечное сечение для взятия проб располагалось на 60 см выше выходного отверстия насадки. Применяемая при опытах насадка с внутренним диаметром 1,8 см имела цилиндрическую форму.

Определение концентрации краски в пробах производилось фотоэлектрическим колориметром типа ФЭК-М путем сравнения проб с дистиллированной водой.

Кроме взятия проб концентрации, при всех опытах для определения распространения краски производилась киносъемка. При киносъемке время измерялось секундомером, расположенным в кадре съемки. Взятие проб концентрации производилось после образования горизонтального облака краски и достижения им стенок приемного резервуара.





Фиг. 2. Распределение относительной концентрации примеси вдоль оси затопленной круглой струи.

$\rho$  струя = 1,000 т/м<sup>3</sup>,

$\rho$  прием.в. = 1,005 т/м<sup>3</sup>

Результаты опытных исследований распространения концентрации веществ загрязнения вдоль оси затопленной струи приведены в табл. I. При обработке результатов измерений вместо абсолютной концентрации применялась относительная концентрация, т.е. отношение концентрации в рассматриваемой точке на оси струи  $C_m$  к начальной концентрации при выходе из отверстия насадки  $C_0$ , причем расстояние  $x$  выражено относительно диаметра насадки  $d$ .

Для определения зависимости осредненной по времени относительной концентрации примеси от относительного расстояния вдоль оси струи все опытные данные были подвергнуты статистической обработке. По опытным данным при  $\frac{x}{d} = \text{const}$  были составлены статистические ряды, и на основании последних вычислены функции статистических распределений (фиг. 2). По функциям статистического распределения определялись значения относительной концентрации с 50% обеспеченностью и построена зависимость этой концентрации от относительного расстояния (фиг. 3, табл. 2)

$$\left(\frac{C_m}{C_0}\right)_{50\%} = f\left(\frac{x}{d}\right) .$$

Распределение относительной концентрации  $\sigma\%$  вдоль оси затоплен-  
ной круглой струи при наличии сил плавучести ( $\gamma$  прим  $> \gamma$  сек)  $d = 1,6$  см

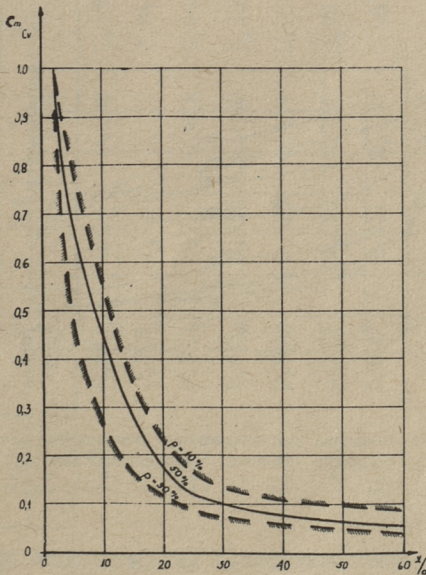
№ П.п.	Номер опыта	Расстояние от начала струи, в см										
		0	5	10	20	40	60	80	100	120	140	
		$\frac{\sigma}{\rho} = 0$	3,1	6,3	12,5	25,0	37,5	50,0	62,5	75,0	87,5	
1.	36	1,0	0,684	0,280	0,222	-	0,073	-	-	-	-	-
2.	37	1,0	0,416	0,240	-	0,141	0,122	-	-	-	-	-
3.	38	1,0	0,375	0,135	-	0,068	0,076	-	-	-	-	-
4.	39	1,0	0,886	0,594	0,349	0,105	0,064	0,041	-	-	-	-
5.	40	1,0	0,748	0,568	0,221	0,132	0,094	-	-	-	-	-
6.	41	1,0	0,757	0,542	0,129	0,081	0,095	0,076	-	-	-	-
7.	42	1,0	0,714	0,472	0,249	0,099	0,107	0,081	-	-	-	-
8.	43	1,0	0,830	0,595	0,342	0,101	-	0,042	0,038	0,035	0,027	-
9.	44	1,0	0,738	0,560	0,344	0,091	-	0,033	0,036	0,033	0,037	-
10.	45	1,0	0,842	0,481	0,390	0,099	-	0,0	0,048	0,040	0,043	-
11.	46	1,0	0,892	0,635	0,439	0,116	-	0,043	0,038	0,038	0,034	-
12.	47	1,0	0,820	0,620	0,300	0,096	-	0,035	0,031	0,034	0,026	-
13.	48	1,0	0,761	0,730	0,387	0,121	-	0,064	0,040	0,035	0,035	-
14.	49	1,0	0,809	0,712	0,459	0,124	-	0,042	0,042	0,037	0,027	-
15.	50	1,0	0,841	0,659	0,378	0,092	-	0,047	0,045	0,045	-	-
16.	51	1,0	0,834	0,609	0,344	0,090	-	0,047	0,038	0,033	-	-



Таблица 2

Вероятные значения относительной концентрации  
вдоль оси затопленной круглой струи при наличии  
плавучести

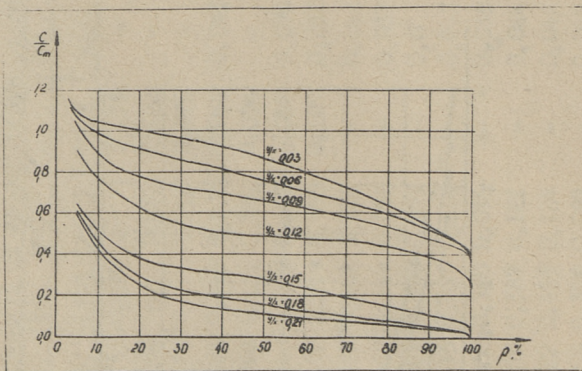
$\frac{x}{d}$	$\frac{c_m}{c_0}$			$\frac{\Delta c_m}{c_0}$	
	p=50%	p=10%	p=90%	(10-50%)	(90-50%)
3,1	0,80	0,88	0,67	+0,08	-0,13
6,3	0,59	0,72	0,38	+0,13	-0,21
12,5	0,36	0,44	0,17	+0,08	-0,19
25,0	0,10	0,14	0,19	+0,04	-0,01
37,5	0,09	0,13	0,08	+0,04	-0,01
50,0	0,05	0,08	0,04	+0,03	-0,01



Фиг. 3. Функция распределения относительной концентрации  $\frac{c_m}{c_0}$  при различных относительных расстояниях  $\frac{x}{d}$  от начала струи

По функциям распределения (фиг. 2) определялись также значения относительной концентрации с обеспеченностью 10% и 90%, зависимость которых от  $\frac{x}{d}$  нанесена также на фиг. 3.

Из фиг. 3 видим, что мгновенные значения относительной концентрации примеси, которые не превышают 10% от всего времени, больше значений относительной концентрации обеспеченностью 50% (медиана) не более чем на 3-13%. Значения относительной концентрации примеси, которые обеспечены с 90% вероятностью, меньше значений медианы на 1-21%. Медианальное значение относительной концентрации уменьшается с увеличением относительного расстояния  $\frac{x}{d}$  (табл. 2). Из таблицы видно, что при увеличении  $\frac{x}{d}$  увеличивается также относительное отклонение мгновенных значений  $\frac{C_m}{C_0}$  от медианальных.



Фиг. 4. Распределение концентрации в поперечном сечении круговой струи в условиях Таллинского залива

Аналогично вышеприведенной методике были проведены исследования распространения концентрации примеси в поперечном сечении круглой свободной струи в условиях спуска сточных вод в Таллинский залив, результаты которых приведены в табл. 3 и 4.



Распределение относительной концентрации  $\frac{c}{c_m}$  в поперечном сечении затопленной круглой струи при наличии сил плавучести ( $\gamma$  прим  $> \gamma$  сек.)

$z = 60$  см

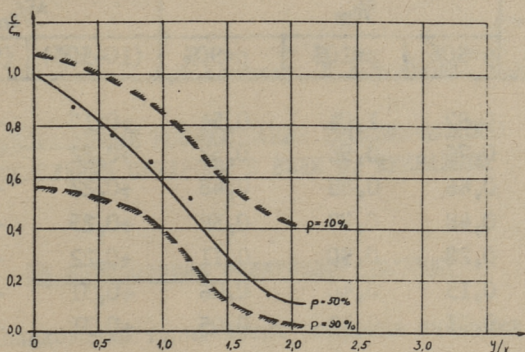
№ п.п.	Номер опыта	Относительная концентрация $c/c_m = f(y/x)$										
		$y=0$	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2	18,0
I	III 6	$\frac{y}{x}=0$	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	0,30
2	III 7	I,0	0,811	0,735	0,698	0,433	0,226	-	0,075	0,057	0,038	0,038
3	III 8	I,0	0,783	0,483	0,712	0,849	0,030	0,002	0,011	-	-	-
4	III 9	I,0	0,928	0,785	0,488	0,464	0,369	0,512	0,167	0,059	-	-
5	III 10	I,0	0,616	0,482	1,050	0,554	0,178	0,411	-	0,089	-	-
6	IV I	I,0	0,366	0,589	0,477	0,533	0,144	0,111	0,178	-	-	-
7	IV 2	I,0	0,397	0,589	0,797	0,783	-	0,051	0,500	-	-	-
		I,0	1,000	0,811	0,660	0,481	0,264	0,189	0,075	0,075	0,075	0,075

Распределение относительной концентрации  $C_{cm}$  в поперечном сечении круглой струи при наличии плавучести ( $\gamma$  прим  $> \gamma$  сек)  $z=100$  см

№ п.п.	Номер опыта	Относительная концентрация $C_{cm} = f(y/x)$											
		$y = 0$	3	6	9	12	15	18	21				
		$\frac{y}{x} = 0$	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21				
I	IV 3	1,000	0,606	0,727	-	0,485	0,334	0,485	0,091				
2	IV 4	1,000	0,727	0,804	0,606	0,636	0,515	0,152	0,243				
3	IV 5	1,000	1,000	0,846	0,513	0,334	0,308	0,179	0,179				
4	IV 6	1,000	0,646	0,452	0,677	0,549	0,355	0,129	0,047				
5	IV 7	1,000	0,645	0,935	0,548	0,420	-	0,258	0,323				
6	IV 8	1,000	1,000	0,678	0,806	0,544	0,290	0,097	0,097				
7	IV 9	1,000	1,065	0,678	0,452	0,097	0,129	-	-				
8	IV 10	1,000	0,946	1,055	0,730	0,513	0,108	0,108	0,108				
9	V 1	1,000	0,886	1,060	0,685	0,571	0,114	-	-				
10	V 2	1,000	0,949	0,821	0,538	0,436	0,154	0,077	0,077				



Обработка опытных данных проведена статистическим методом, как это было рассмотрено выше. Результаты статистической обработки опытных данных приведены в табл. 3 и на фиг. 4 и 5.



Фиг. 5. Функция распределения концентрации  $\frac{c}{c_{стм}}$  загрязнения в поперечном сечении круглой затопленной струи в условиях Галлинского залива

Из фиг. 5 и табл. 3 видно, что значения относительной концентрации с 10% вероятностью превышают медианальное значение на 17 - 31%. При этом наблюдается тенденция увеличения относительного расстояния от оси струи. Значения относительной концентрации с 90% обеспеченностью меньше медианального значения на 6 - 33%.

На основании проведенных нами экспериментов можно заключить, что для характеристики распределения концентрации в струях недостаточно определения осредненных распределений концентрации, так как мгновенные значения концентрации во много раз отличаются от осредненных. Для более общей характеристики распределения концентрации в струях следует определить статистические характеристики распределения концентрации - функции распределения.

Вероятные значения относительной концентрации  $\%c_m$   
в затопленной круглой струе при наличии сил плавучести

$\frac{y}{x}$	$\%c_m$			$\Delta c/c_m$	
	p=50%	p=10%	p=90%	(10-50%)	(90-50%)
0,03	0,87	1,04	0,54	+0,17	-0,33
0,06	0,76	0,98	0,52	+0,22	-0,24
0,09	0,66	0,88	0,48	+0,22	-0,18
0,12	0,48	0,77	0,38	+0,29	-0,10
0,15	0,28	0,50	0,11	+0,22	-0,17
0,18	0,15	0,46	0,06	+0,31	-0,09
0,21	0,11	0,42	0,05	+0,31	-0,06



УДК 628.3

А.И.Кёстнер, В.В.Реммель, М.М.Аарма

ЛАБОРАТОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ БИОХИМИЧЕСКОГО  
ОКИСЛЕНИЯ САХАРОЗЫ В ВОДЕ р. ЛЕЙВАЙЫГИ

НИ лаборатория санитарной техники

При исследовании термических вопросов кинетики самоочищения водоемов в ряде случаев целесообразно провести эксперименты с чистыми веществами в качестве загрязнений. В научно-исследовательской лаборатории санитарной техники ТПИ под руководством доцента Х.А. Вельнера с 1964 г. проводятся лабораторные и натурные исследования для определения кинетики биохимического окисления органического вещества [1]. В качестве модельного вещества применяется сахароза в виде продажного сахара. В ходе этих исследований выявились некоторые теоретические соображения, которые изложены в настоящей статье.

Все лабораторные опыты проводились с водой реки Лейвайыги, подробная характеристика которой приведена в [2]. Большинство опытов проведено по общепринятой методике определения биологической потребности в кислороде, т.е. исследуемые растворы выдерживались в герметических склянках при температуре  $+20^{\circ}\text{C}$ . Окисление органических веществ определялось по уменьшению концентрации кислорода в сосуде. В ряде случаев определялись дополнительно некоторые химические показатели воды (содержание азотистых соединений и т.д.).

При проведении первых опытов выяснилось, что скорость окисления сахарозы почти не зависит от ее исходной концентрации (см. табл. I).

Т а б л и ц а I  
Окисление больших концентраций  
сахарозы

№ опы- та	Концентрация сахарозы, [мг/л]	БПК <sub>I</sub>	БПК <sub>2</sub>	БПК <sub>3</sub>	БПК <sub>4</sub>
I	1000	0,75	3,34	6,36	7,61
2	100	0,94	3,30	5,37	7,44
3	10	1,04	3,20	5,29	6,23

Приведенные данные показывают, что в наших условиях не соблюдается общепринятое основное уравнение биохимического окисления - уравнение мономолекулярной химической реакции

$$\frac{dL}{dt} = -kL. \quad (1)$$

В данном случае процесс окисления лучше характеризуется уравнением химической реакции нулевого порядка

$$\frac{dL}{dt} = -k. \quad (2)$$

Ясно, что скорость окисления ограничивается каким-то лимитирующим фактором. Так как р. Лейвайыги является олигосапробным водоемом, можно предположить, что скорость реакции ограничивается малой численностью микроорганизмов, окисляющих сахарозу. Формально микроорганизмы можно считать катализатором, который ускоряет процесс окисления. Процесс без катализатора, т.е. в стерильной воде, протекает весьма медленно. Определение БПК всегда ведется в избытке кислорода, когда изменения в его концентрации не влияют на скорость процесса. В таком случае протекание процесса зависит только от концентрации субстрата и катализатора, т.е. процесс описывается уравнением псевдомономолекулярной катализируемой реакции. В таких условиях кинетика ферментативной реакции описывается уравнением Михаэлиса-Ментена [2]



$$-\frac{dS}{dt} = \frac{V}{1 + \frac{K_m}{S}}, \quad (3)$$

где  $S$  - концентрация субстрата,

$V$  - максимальная скорость реакции в избытке субстрата,

$K_m$  - константа Михаэлиса, характеризующая родство субстрата и фермента.

Константа Михаэлиса равняется концентрации субстрата, если скорость реакции составляет половину максимальной

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{V}{2}. \quad (4)$$

Максимальная скорость реакции находится в линейной зависимости от концентрации фермента

$$V = k_{+2} E, \quad (5)$$

где  $k_{+2}$  - константа скорости разложения активного комплекса фермент-субстрат,

$E$  - концентрация фермента.

В нашем случае приведенное уравнение можно использовать в следующем виде

$$-\frac{dL}{dt} = \frac{k_N \cdot N}{1 + \frac{K_m}{L}}, \quad (6)$$

где  $L$  - концентрация органического вещества,

$N$  - концентрация сапрофитных микроорганизмов,

$K_m, k_N$  - характерные константы,

(условно можно назвать  $k_N$  константой активности микробов и  $K_m$  константой усваиваемости субстрата),

$t$  - время.

При большом избытке микроорганизмов  $L \ll K_m$  уравнение (6) принимает общепринятый вид

$$-\frac{dL}{dt} \approx \frac{k_N \cdot N}{K_m} \cdot L. \quad (7)$$

В наших опытах (см. табл. I)  $L \gg K_m$ .  $\frac{K_m}{L} \approx 0$  и скорость реакции выражается уравнением

$$-\frac{dL}{dt} \approx K_N \cdot N. \quad (8)$$

В отличие от чисто ферментативной реакции, где концентрация фермента обычно не изменяется, при биохимическом окислении число микроорганизмов может резко изменяться и уравнение (6) принимает следующий вид

$$\frac{dL}{dt} = \frac{K_N \cdot f(N_0, t)}{1 + \frac{K_m}{L}}, \quad (9)$$

где  $f(N_0, t)$  обозначает концентрацию микроорганизмов в каждом моменте времени. Ясно, что это зависит от их исходного числа и длительности периода размножения.

Уравнение (9) оказывается несколько сложнее общепринятого уравнения (I), требует определения числа микробов и знания закономерностей их размножения. Поэтому в простейших случаях (фекальное загрязнение) целесообразно использовать уравнение (I). Тем не менее, в ряде случаев, например, отравление микроорганизмов пестицидами и пр. ядами, наличие трудноусваиваемых веществ, нельзя произвести расчеты без знания количества активных микроорганизмов. В таких случаях можно полагать, что приведенное нами уравнение (9) может оказаться полезным в практических расчетах.

Для предварительной проверки вышеприведенных предложений нами было проведено две серии опытов, где в воду реки Лейвайыги прибавлялись концентрации микробов и питательные соли.

Концентрат микробов (KM) получен следующим образом. К 50 мл питательной среды, состоящей из сахарозы, пептона, минеральных солей и микроэлементов, прибавили 10 мл воды р. Лейвайыги. Смесь инкубировали в течение 4 суток при температуре  $20^{\circ}$ . За это время наблюдался сильный рост микроорганизмов. Микроорганизмы выделялись из смеси центрифугированием и переводились в физиологический раствор.



## Окисление сахарозы в присутствии ускоряющих факторов

№ опы-та	Прибавки	Исходный сахар $O_2$ , [мг/л]	БПК, [мг/л]				Число микробов, [тыс/мл]						
			6 ч	12 ч	24 ч	2 су-ток	3 су-ток	5 су-ток	0 ч	12 ч	2 су-ток	5 су-ток	
1	-	8,70	-	0,16	0,34	0,44	0,77	1,34	0,4	-	2,0	-	-
2	ПС	8,53	-	0,16	0,35	0,63	0,78	1,25	0,4	-	1,8	0,1	0,1
3	КМ	8,52	-	0,15	0,33	0,55	0,75	1,11	5,0	-	11	2,5	2,5
4	-	8,49	-	0,27	1,39	2,95	3,77	4,31	0,4	-	2,2	-	-
5	ПС	8,52	-	0,43	2,03	3,70	4,41	5,08	0,4	-	4,5	0,16	0,16
6	КМ	8,44	-	1,45	2,04	2,96	3,79	4,61	50	-	460	16	16
7	КМ, ПС	8,50	-	1,69	2,13	3,21	4,03	5,37	50	-	480	16	16
8	-	8,95	0,17	0,26	0,50	0,70	-	-	0,7	0,81	0,42	-	-
9	КМ, ПС	8,81	0,32	0,77	1,05	1,61	-	-	180	260	144	-	-
10	КМ, ПС	8,65	0,71	2,30	2,84	4,37	-	-	190	1700	340	-	-
11	КМ, ПС	8,77	0,63	2,25	4,84	6,83	-	-	160	1300	5,30	-	-
12	КМ, ПС	8,83	0,61	2,29	7,84	8,68	-	-	190	990	16800	-	-
13	КП, ПС	8,88	0,63	1,96	8,88	-	-	-	180	870	16100	-	-

Смесь питательных солей (ПС) приготавливалась обычным способом из фосфатного буфера  $\text{pH} = 7,2$ ,  $\text{NH}_4\text{Cl}$ ,  $\text{MgSO}_4$ ,  $\text{CaCl}_2$  и  $\text{FeCl}_3$ .

Результаты опытов приведены в табл. 2.

Данные табл. 2 показывают, что начальная скорость окисления сахарозы под влиянием концентрата микробов сильно возрастает. При большей продолжительности опыта разницы в скоростях сглаживаются. Питательные соли увеличивают скорость более поздних стадий процесса.

Для предварительной проверки вышеприведенных теоретических соображений на основе данных табл. 2 вычислялась средняя скорость потребления кислорода одним микроорганизмом. Подходящей размерностью оказалось  $10^{-12}$  г кислорода на I микроб в сутки. При расчетах учитывались только те опыты, где в смеси присутствовали сахар и КМ, а также не нарушалась аэробность.

Результаты расчетов приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Вычисления константы активности микроорганизмов

№ опыта	Период, часов	Потребление кислорода, [мг/л]		Число микробов, $[10^8 / \text{мл}]$	$K_N$ $[10^{-12} / \text{микроб} \cdot \text{сутки}]$
		Весь период	Сутки		
6	0-48	2,96	1,48	255	5,8
7	0-48	3,21	1,60	265	6,0
10	0-12	2,30	4,60	940	4,9
11	0-12	2,25	4,50	740	6,1
12	0-12	2,29	4,58	570	8,0
13	0-12	1,19	2,38	520	7,5
10	12-48	2,07	1,38	1040	1,3
11	12-48	4,58	3,06	910	3,4

Данные табл. 3 показывают заметную сходимость результатов. В начальный период константа активности  $K_N$  в среднем равняется  $6,4 \cdot 10^{-12}$  г/микроб.сутки. Конечно, приведенная величина является лишь ориентировочной, т.к.



нами определено общее число сапрофитных микробов и предположено, что все они имеют в среднем равную активность.

Также предположено, что концентрация субстрата значительно больше  $K_m$ . Эти предпосылки являются сугубо ориентировочными. При продолжении работы намечается проведение более развернутых опытов, которые позволяют с большей точностью проверить вышеизложенные теоретические соображения.

В вышеприведенных расчетах мы исходили из предположения, что в начальных стадиях биохимического окисления кислород расходуется только на окисление сахарозы, и ионы аммония не окисляются, т.е. не протекает процесс нитрификации. Для проверки этого предположения в ряде опытов был определен также баланс азотистых соединений. Полученные результаты приведены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

Баланс азотистых соединений

Показатель	№ опыта	Время, сутки					
		0	0,5	1	2	3	5
$NH_4^+$	1	0,77	0,89	0,85	0,72	0,72	0,66
	2	1,13	0,99	1,1	1,03	0,70	1,16
	3	0,83	0,81	0,91	0,81	0,89	0,73
	4	0,77	0,87	1,03	0,83	0,72	0,73
	5	1,13	1,07	0,97	0,93	0,89	0,81
	6	0,82	0,85	1,0	0,81	1,06	0,82
	7	1,18	0,98	1,06	0,98	0,79	0,76
$NO_2^-$	1	0,056	0,056	0,153	0,086	0,117	0,32
	2	0,060	0,057	0,115	0,046	0,094	0,15
	3	0,060	0,056	-	0,059	0,096	0,28
	4	0,06	0,063	0,153	0,104	0,10	0,18
	5	0,06	0,063	0,165	0,076	0,103	0,44
	6	0,06	0,068	0,09	0,074	0,06	0,40
	7	0,06	0,076	0,10	0,076	0,082	0,25
$NO_3^-$	1	0,87	0,88	0,59	0,70	0,88	1,13
	2	0,87	0,90	0,77	0,89	-	0,87
	3	0,87	0,90	0,83	0,81	0,87	0,80
	4	0,87	-	0,77	0,89	0,88	1,24
	5	0,87	0,86	0,77	0,81	1,13	1,13
	6	0,87	0,87	0,77	-	0,79	0,61
	7	0,87	0,72	0,79	-	1,13	-

П р и м е ч а н и е: Все данные выражены в пересчете на азот.

Данные табл. 4 показывают, что в ряде случаев в составе азотистых соединений наблюдаются заметные изменения. Для оценки значения этих изменений в общем балансе кислорода следует учитывать кислородные эквиваленты этих процессов (см. табл. 5).

Т а б л и ц а 5

Кислородные эквиваленты процессов  
разложения азотистых соединений

Наименование процесса	Кислородный эквивалент [мг на мг азота]
Образование аммиака из белков	0
Окисление аммиака до азота	- 1,71
Окислы аммиака до нитрата	- 3,42
Окисление нитрита до нитрата	- 1,14
Восстановление нитрата до азота	+ 2,86

Сопоставляя табл. 4 и 5, можно убедиться, что уже в течение первых пяти суток в ряде случаев расход кислорода на окисление аммиака может составлять значительную долю в общем балансе кислорода.

Пример: Опыт № 5, БПК<sub>5</sub>.

Суммарный расход кислорода 5,08 мг/л.

Окисление аммиака до нитрита  $0,38 \times 3,42 = 1,3$  мг/л.

Окисление аммиака до нитрата  $0,26 \times 4,56 = 1,2$  " " .

Всего на окисление азота 2,5 " " .

Расход кислорода на окисление сахарозы  $5,1 - 2,5 = 2,6$  мг/л.

Общая окисляемость сахарозы  $5 \times 1,12 = 5,60$  " " .

Степень окисления сахарозы  $\frac{2,6}{5,6} = 0,47$ .

Выясняется, что около половины кислорода расходуется на окисление аммиака, в то время как степень разложения сахарозы не достигает 50%. Следовательно, результаты определения концентрации органического вещества по расходу кислорода могут оказаться значительно искаженными. Для предот-



вращения этих ошибок в сомнительных случаях следует определять также баланс азотистых соединений. Такой прием применялся в НИ лаборатории санитарной техники ТПИ при интерпретации экспериментальных данных.

### В ы в о д ы

1. В олигосапробной воде р. Лейвайыги окисление даже сравнительно малых концентраций сахарозы не подчиняется общепринятому уравнению биохимического окисления органических веществ.

2. Выдвигается уточненное уравнение для описания кинетики процесса биохимического окисления.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{k_N \cdot N \cdot L}{k_M + L}$$

3. В условиях проведенных опытов вычислено предварительное значение константы активности микробов.

4. Показано, что в условиях проведенных опытов наряду с окислением сахарозы протекает интенсивное окисление азотистых соединений.

### Л и т е р а т у р а

1. Х.А. В е л ь н е р, А.М. А й т с а м, Л.Л. П а а л ь. Об основах инженерного расчета самоочищающей способности водотоков. Таллин 1965.

2. Вопросы моделирования процессов самоочищения малых рек. Технический отчет. Таллинский политехнический институт. 1966.

3. Ферменты. "Наука", М. 1964, стр. 62.





УДК 628.35:676.0

Х.А. Мельдер

БИОЛОГИЧЕСКАЯ ОЧИСТКА СТОЧНЫХ ВОД ЦЕЛЛЮЛОЗНО-  
БУМАЖНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ В АЭРОТЕНКАХ  
С НИЗКОНАПОРНОЙ АЭРАЦИЕЙ

Из многочисленных исследований как отечественных, так и зарубежных авторов известно, что основными загрязнителями сточных вод целлюлозной промышленности являются органические вещества, которые поддаются биохимическому окислению. Известно также, что наиболее эффективными и производительными сооружениями по биохимической очистке сточных вод целлюлозной промышленности являются аэротенки. Они позволяют осуществлять стабильную обработку больших количеств сточных вод с желаемой степенью очистки. Однако очистка сточных вод в аэротенках связана с относительно крупными капиталовложениями и особенно большими эксплуатационными затратами. Последние определяются главным образом расходами на электроэнергию.

Для подачи воздуха в жидкость аэротенков применяются различные типы аэрационных устройств.

Основной тенденцией в развитии аэрационного оборудования является стремление обеспечить безаварийность работы, сочетая ее с высоким использованием кислорода и образованием высокой турбулентности потока при минимальных затратах электроэнергии.

В Советском Союзе вопросы биологической очистки сточных вод целлюлозно-бумажной промышленности детально изучены в полупроизводственном масштабе ВНИИБ'ом и выработаны параметры для проектирования промышленных аэротен-

ков [1, 2]. Из исследованных типов пневматических аэраторов глубокого погружения (фильтросы, дырчатые трубы, вертикальные стояки) рекомендуются дырчатые трубы, которые уже установлены в аэротенках, построенных при Жидачевском и Котласском ЦБК.

В последние годы за рубежом получили широкую известность аэротенки с низконапорной аэрацией для очистки хозяйственно-фекальных и некоторых промышленных стоков. Эти аэротенки характеризуются простотой эксплуатации и небольшими затратами энергии. В Советском Союзе проведены исследования аэротенков с низконапорной аэрацией применительно к очистке сточных вод молочной промышленности [3], из которых видно, что этот тип аэратора экономнее аналогичных аэраторов глубокого погружения.

По имеющимся данным до сих пор низконапорные аэраторы для биохимической очистки сточных вод целлюлозно-бумажной промышленности нигде не применялись и не изучались.

Учитывая изложенное, нами проведены в полупроизводственном масштабе обширные исследования по очистке сточных вод целлюлозного производства в аэротенках с низконапорной аэрацией. Для этих цели была сооружена опытная установка на Кехраском ЦБ.

Все исследования проводились на сточных водах сульфатно-целлюлозного производства. Это было обусловлено, во-первых, обстоятельством, что стоки указанного вида производства окисляются несколько труднее, чем стоки сульфитно-целлюлозного производства [1, 2], а во-вторых, тем, что при аэрации они пенятся значительно сильнее стоков других видов производства. К тому же надо учесть и то, что в ближайшие годы в нашей стране намечено особенно сильное развитие производства целлюлозы именно сульфатным способом.

Описание опытной установки, а также хода наращивания активного ила при ее пуске было опубликовано ранее [4]. Однако в процессе исследований первоначальная установка подвергалась реконструкции, а именно дырчатые аэраторы в



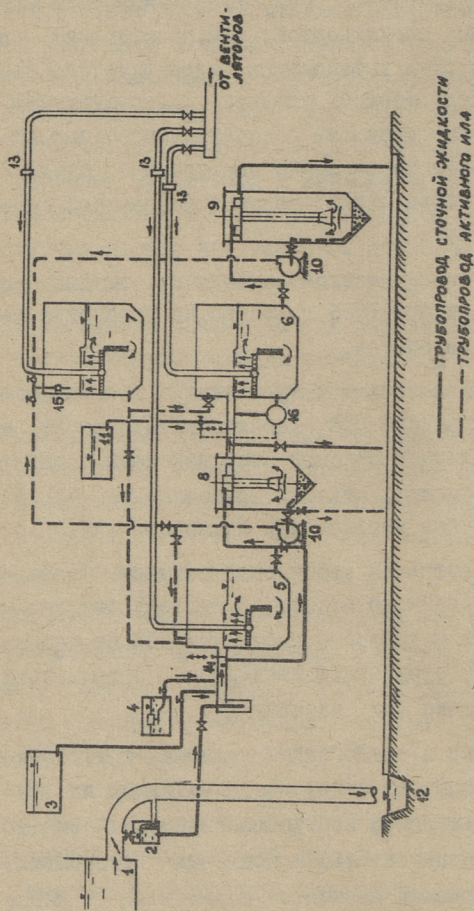
аэротенках были заменены на щелевые [5] и погружены на глубину 0,65 м от поверхности жидкости; для возможности регулирования концентрации поступающего на установку стока в систему был введен бак черного щелока и соответствующее дозировочное устройство; для регулировки pH поступающих вод был установлен бак серной кислоты и pH-метр с автоматической регулировкой; для пеногашения в аэротенках над ними были установлены гидравлические пеногасители в виде центробежных насадок (конструкции ВОДГЕО) [6], в которые жидкость подавалась насосами либо из аэротенков, либо же из лотка поступающей сточной жидкости. Принципиальная схема реконструированной установки приведена на фиг. I.

Исследования по биохимической очистке проводились с ноября 1964 г. по декабрь 1966 г. Всего на установке было выполнено 5 циклов опытов.

I и II циклы проводились с натуральным волокнодержущим стоком Кехраского ЦБК. Характеристика стока, а также основные результаты очистки были изложены ранее [7]. Во время этих циклов установка работала по схеме аэротенка-смесителя без регенерации активного ила.

В III цикле концентрация стока была повышена добавлением в сток отработанного щелока. В систему был включен регенератор, объем которого составлял 63% от общего объема сооружения. В результате введения регенерации понизился иловый индекс (см. таблицу I).

IV цикл проводился в аналогичных условиях с III циклом, однако была увеличена нагрузка на активный ил путем увеличения концентрации поступающего стока. Вместе с тем увеличилась и окислительная мощность установки. Во время цикла наблюдался несколько повышенный вынос активного ила из системы (46 мг/л), однако эффект очистки был вполне удовлетворительным. Обильное пенообразование в аэротенке и регенераторе не позволяло повышать концентрацию стока более 170-180 мг/л по БПК<sub>5</sub>.



Фиг. 1. Схема полупроизводственной установки для биологической очистки стоков в низконапорных аэротенках.

1-барaban сетчатого фильтра, 2-бак постоянного уровня, 3-бак отработанного шлока, 4-бак питательных солей, 5-1 аэротенк ( $V_1 = 4,48-4,6 \text{ м}^3$ ), 6-11 аэротенк ( $V_2 = 8,7 \text{ м}^3$ ); 7-111 аэротенк-регенератор ( $V_3 = 7,6 \text{ м}^3$ ), 8 и 9 - отстойники, 10-насос для перекачки активного ила; 11-бак разбавленной серной кислоты; 12-отвод стоков в канализацию; 13-измерительная диафрагма на воздуховоде; 14-мерный водослив в лотке; 15-расходомер (пьезометрический); 16-регулирующий pH-метр.



Т а б л и ц а I

Результаты процесса биохимической очистки сточных вод  
на опытной полупроизводственной установке

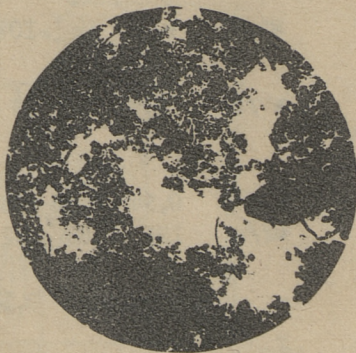
Показатели	Единица измерения	№ цикла опыта				
		I	II	III	IV	V
Продолжительность цикла	сутки	14	13	25	26	30
Период аэрации	час	3,1	2,5	5,7	5,7	4,5
Объем регенератора	%	-	-	63	63	47
Температура поступающих стоков	°C	12	9	17	10	9
pH	-	7,8	7,6	9,0	9,1	7,3
БПК <sub>5</sub> поступающих стоков	мг/л	44	39	107	174	199
БПК <sub>5</sub> очищенных стоков	мг/л	6	5	15	33	30
Средняя доза ила в системе по беззольному веществу	г/л	0,94	0,98	2,30	2,87	3,51
Иловый индекс	мл/г	286	685	142	121	91
Средний дефицит кислорода	-	не определялся		0,31	0,44	0,69
Окислительная мощность	$\frac{г}{м^3 \text{сутки}}$	295	329	387	591	895
Нагрузка по БПК <sub>5</sub> на 1 г беззольного вещества ила	мг/сутки	362	385	195	256	301
Удельный расход воздуха на снятие 1 кг БПК <sub>5</sub>	м <sup>3</sup> /кг	1720	1600	870	569	321
Прирост активного ила	г/м <sup>3</sup>	-	-	-	-	30

В связи с этим У цикл опытов был проведен с предварительной нейтрализацией поступающей сточной жидкости серной кислотой. Объем регенератора был несколько уменьшен и составлял 47% от общего объема сооружений. В результате нейтрализации уменьшилось пенообразование, что позволило увеличить концентрацию поступающего стока до 200 мг/л по БПК<sub>5</sub> и соответственно нагрузку на активный ил.

При нагрузке на активный ил 300 мг/л ила в сутки была достигнута окислительная мощность 895 г/м<sup>3</sup> сутки при эффекте очистки по БПК<sub>5</sub> - 85%.

Средние показатели процесса биологической очистки всех опытных циклов сведены в таблицу I.

Микроскопированием активного ила установлено, что ил состоялся из несколько рыхлых хлопков разной величины (фиг. 2). Почти постоянно в иле присутствовали простейшие организмы в виде реснитчатых, реже колоставки.



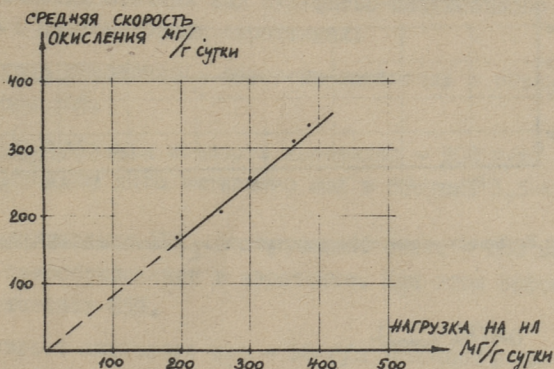
Фиг. 2. Активный ил (увеличение 120 раз)

На протяжении всех опытов в поступающую сточную воду добавлялись питательные соли - азот и фосфор в соотношениях БПК<sub>5</sub>:N:P = 100 : 5 : 1.

Учитывая целенаправленность данных исследований, которая состоялась в определении параметров и зависимостей для расчета промышленных низконапорных аэротенков, на основании опытов нами установлено следующее:



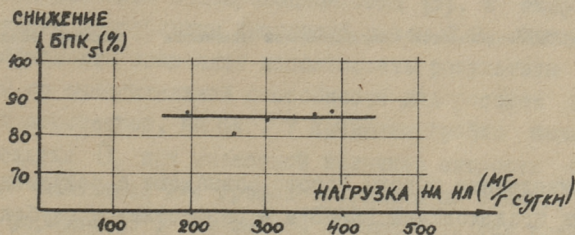
1. Скорость окисления увеличивается пропорционально нагрузке (в пределах нагрузки от 195 до 385 мг/г сутки), т.е. не зависит от концентрации активного ила (фиг. 3).



Фиг. 3. Зависимость скорости окисления от нагрузки на активный ил

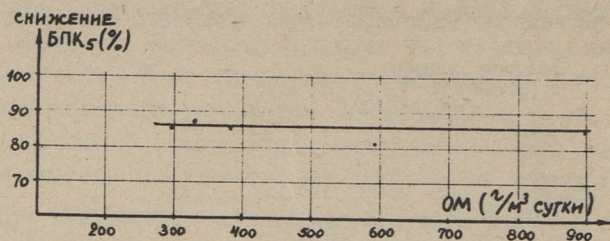
2. Нагрузка на активный ил в определенном диапазоне не влияет практически на эффективность очистки по БПК<sub>5</sub>, которое составляло 81-87% (фиг. 4).

3. Эффект очистки не зависит от окислительной мощности в диапазоне 300 - 900 г/м<sup>3</sup> сутки (фиг. 5).

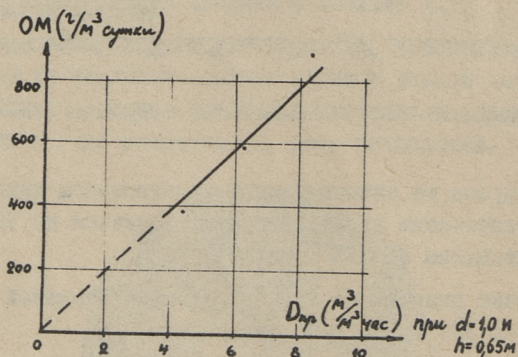


Фиг. 4. Зависимость эффекта очистки от нагрузки на активный ил

4. Скорость окисления органики пропорциональна затраченному расходу воздуха (в диапазоне  $OM = 400-900$  г/м<sup>3</sup> сутки). Для сравнения расходы воздуха при различных опытных циклах пересчитаны к дефициту  $d = 1,0$ . Это иллюстрируется графиком (фиг. 6).



Фиг. 5. Зависимость эффекта очистки от окислительной мощности



Фиг. 6. Зависимость окислительной мощности от расхода воздуха

Приведенные выводы хорошо совпадают с результатами обширных исследований ВНИИБ<sup>9</sup>а в аэротенках с глубоко погруженными аэраторами при очистке различных видов стоков целлюлозной промышленности [1, 2]. Это доказывает, что несмотря на иную гидродинамическую обстановку в низконапорном аэротенке, характер процесса не изменился. Тем самым полностью подтверждается теоретическая гипотеза М.А. Евиновича [2] о протекании процесса биоокисления в диффузионной области.



Данные наших исследований позволяют рекомендовать следующие основные расчетные параметры для процесса биохимической очистки сточных вод сульфатно-целлюлозного производства в низконапорных аэротенках:

1. Схема аэротенка - аэротенк-смеситель с объемом регенератора 50%.

2. Окислительная мощность аэротенка -  $900 \text{ г/м}^3$  в сутки, при средней дозе активного ила в системе 3,5-4,0 г/л.

3. Максимальное БПК<sub>5</sub> поступающего стока - 200 мг/л, исходя из пенообразования в аэротенке. При этом эффект очистки составляет 85%.

4. Прирост активного ила -  $30 \text{ г/м}^3$  сточной воды.

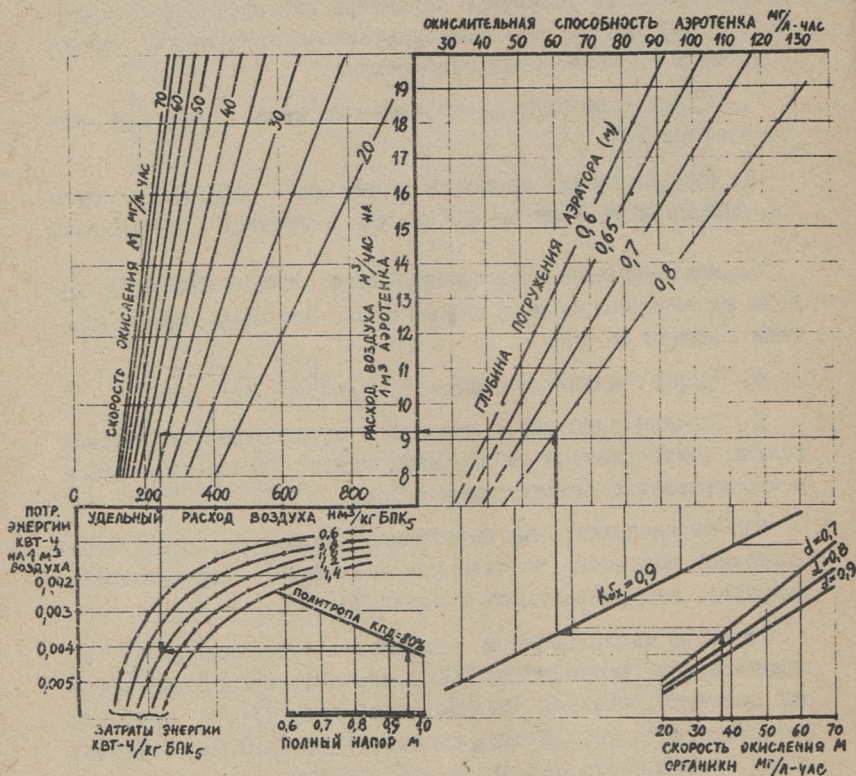
5. Сточные воды перед подачей в аэрационные сооружения должны освобождаться от ядовитых газов, нейтрализоваться и смешиваться с питательными солями.

Расчет низконапорных аэротенков следует вести по окислительной мощности (по скорости окисления органических веществ), как указывалось и ранее [5, 8].

Согласно исследованиям коэффициент перехода ( $k_{бх}$ ) от окислительной способности (ОС), определенной методом аэрации обескислороженной водопроводной воды [5], к скорости биохимического потребления кислорода равен 0,9. Введение этого коэффициента позволяет использовать результаты исследований по окислительной способности для расчета низконапорных аэротенков. На фиг. 7 приведен график подбора расхода воздуха  $D_1$  при известной величине скорости биохимического окисления  $M$ . График составлен по примеру [3], однако по формуле (9<sup>б</sup>) из работы автора [5], где предлагалась методика определения ОС, более точно соответствующая действительному процессу переноса кислорода из воздуха в хлопья активного ила. Расходы воздуха, не обеспечивающие достаточных донных скоростей, нанесены на график штриховыми линиями.

Расчетный средний дефицит кислорода следует брать  $d = 0,7$ , однако, как показывает опыт [2], в условиях устойчи-

вой работы комбината и очистных сооружений он может быть повышен до  $d = 0,9$ .



Фиг. 7. График для определения расхода воздуха и экономических показателей аэрации

По графику (фиг. 7) можно также определить расход воздуха (в  $\text{м}^3$ ) на снятие 1 кг загрязнений (по  $\text{БПК}_5$ ) и затраты энергии (в  $\text{квт} \cdot \text{ч}$ ) на снятие 1 кг  $\text{БПК}$ , что характеризует экономичность аэратора. Затраты энергии на сжатие воздуха приняты по политропическому процессу сжатия при  $\text{кпд}$  воздуходувки 80% (на основании данных отечественного воздуходувочного оборудования).



Из графика определяем, что при заглублении аэратора 0,8 м и

$$M = \frac{OM}{24} = 37,3 \text{ мг/л час}$$

( $OM = 895 \text{ г/м}^3 \text{ сутки}$ ) затраты энергии на снятие 1 кг БПК<sub>5</sub> составляет 1,02 квт -ч.

При применении аэротенков с аэраторами в виде глубоко погруженных дырчатых труб, которые были разработаны ВНИИБ'ом и применяются в настоящее время на ряде комбинатов, затраты энергии при равном расчетном дефиците кислорода ( $d = 0,7$ ) составляют

$$1,15 \frac{\text{квт-ч}}{\text{кг БПК}_5}$$

(расход воздуха на снятие 1 кг БПК<sub>5</sub> при этом принят по данным ВНИИБ'а [I]).

Следовательно, в смысле затрат на электроэнергию, низконапорные аэротенки экономнее аэротенков с заглубленными до дна дырчатыми трубами примерно на 10%.

По литературным данным загрязнение стоков сульфатно-целлюлозного производства в зависимости от технологии может быть разным (от 150 - 300 мг/л по БПК<sub>5</sub>).

Например, после реконструкции Кехраского ЦБК расчетная концентрация общего стока по БПК<sub>5</sub> будет составлять 200 мг/л, на Жидачевском ЦБК средняя концентрация сточных вод за 1965-66 год составляла 249 мг/л [9], в Ковингтоне (США) среднее загрязнение стока по БПК<sub>5</sub> равно 152-220 мг/л [10] и т.д.

Анализ современного развития технологии сульфатно-целлюлозного производства позволяет утверждать, что при правильной организации регенерации щелоков концентрация загрязнений по БПК<sub>5</sub> в сточных водах не превышает 200 мг/л.

Как показали наши опыты, превышение этой величины связано с обильным пенообразованием, что крайне затрудняет применение аэротенков для очистки этого типа сточных вод.

Известно, что ведутся поиски по разработке эффективных пеногасителей [II], применение которых откроет большую, совершенно новую перспективу для аэрации сточных вод.

В заключение следует отметить, что полученные в данной работе параметры очистки стоков сульфатно-целлюлозного производства совпадают с параметрами, предлагаемыми ВНИИБом для аэротенков с заглубленными до дна дырчатыми трубами (кроме удельных расходов воздуха). Очевидно такое совпадение будет иметь место и при очистке других видов стоков целлюлозного производства. Кстати, другие виды стоков пенятся значительно меньше сульфатных. В связи с этим, изложенные здесь основные положения расчета низконапорных аэротенков могут быть распространены на все виды стоков целлюлозно-бумажной промышленности, которые поддаются биохимической очистке.

### Л и т е р а т у р а

1. М.А. Е в и л е в и ч. Исследование процесса биологической очистки сточных вод целлюлозного производства. Труды ВНИИБ, вып. 49, 1964.
2. М.А. Е в и л е в и ч. Основные закономерности процесса биоокисления сточных вод целлюлозного производства в аэротенках. Труды ВНИИБ, вып. 51, 1965.
3. Б.Г. М и ш у к о в. Очистка сточных вод молочных заводов. Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. Л. 1965.
4. Х.А. М ё л ь д е р, Л.А. Т е п а к с. Предварительные данные о возможностях биологической очистки сточных вод Кехраского ЦБК. Труды ТПИ, серия А, № 223, 1965.
5. Х.А. М ё л ь д е р, Л.А. Т е п а к с. Гидродинамические условия аэрации и окислительная способность низконапорного аэротенка. См. наст. сборник, стр. 7.
6. И.Л. М о н г а й т и др. Исследование методов механического разрушения пены в аэротенках. ВОДГЕО, Научные сообщения. Сентябрь, 1963.
7. Х.А. М ё л ь д е р. Некоторые вопросы биологической очистки сточных вод сульфатно-целлюлозного производства. Труды ТПИ, серия А, № 233, 1966.



8. С.М. Ш и ф р и н, Б.Г. М и ш у к о в. Исследования режима работы аэротенков с низконапорной аэрацией. "Водоснабжение и санитарная техника", № 3, 1966.

9. Г.М. Б о г о м о л. Некоторые особенности эксплуатации сооружений биологической очистки сточных вод. "Бумажная промышленность", №II, 1966.

10. М.А. Е в и л е в и ч. Биологическая очистка сточных вод целлюлозно-бумажного производства за рубежом. М. 1966.

11. П.М. К р у г л я к о в, П.Р. Т а у б е. Применение химических пеногасителей при промывке сульфатной целлюлозы. "Бумажная промышленность", №7, 1966.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Р.В. Платс. Случайные ошибки при определении БПК . . . . .	3
2. Х.А. Мельдер, Л.А. Тепакс. Гидродинамические условия аэрации и окислительная способность низконапорного аэротенка . . . . .	7
3. М.В. Хяяль, Л.А. Тепакс. Движение жидкости в круглой трубе с неоднородной шероховатостью.	35
4. А.М. Айтсам, В.К. Асток. Морские течения как элементы случайного векторного поля. . . . .	45
✓ 5. А.М. Айтсам. Двухразмерная диффузия веществ загрязнения в водоемах при отказе от учета продольной диффузии . . . . .	51
✓ 6. А.М. Айтсам, Х.А. Вельнер, Л.Л. Пааль. О расчете продольного смешения вещества загрязнения в водотоках . . . . .	57
7. К.Р. Хяяль, Л.А. Тепакс. Некоторые данные по исследованию неравномерного движения в асбестоцементном канализационном коллекторе . . . . .	67
✓ 8. Л.Л. Пааль. О расчете смешения сточных вод при некоторых эпюрах загрузки водотоков. . . . .	75
9. Х.А. Вельнер, Р.В. Платс. О биохимическом окислении вещества загрязнения в реках (I сообщение) . . . . .	91
10. А.М. Айтсам, В.К. Асток. О расчетных шумах при вычислении статистического спектра смешанной, состоящей из периодических и непериодической составляющих, стационарной в широком смысле случайной функции. . . . .	99



11. А.М. Айтсам. Л.Л. Пааль. Экспериментальное исследование распределения концентрации веществ загрязнения в вертикальной круглой струе с учетом сил плавучести . . . . . 119
12. А. Кёстнер, В.В. Реммель, М.М.Аарма. Лабораторные исследования биохимического окисления сахарозы в воде р. Лейвайыги . . . . . 131
13. Х.А. Мёльдер. Биологическая очистка сточных вод целлюлозно-бумажной промышленности в аэротенках с низконапорной аэрацией. . . . . 141



СБОРНИК СТАТЕЙ  
ПО  
САНИТАРНОЙ ТЕХНИКЕ  
IУ

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Редактор Л. Т е п а к с  
Технический редактор Л. Л о о п е р

---

Сдано в набор 9/XI 1966. Подписано к печати 15/II 1967.  
Бумага 60x90, 1/16. Печ. листов 8,75. Учетно-изд. лис-  
тов 7,5. Тираж 500. МВ-01157. Зак. № 93 .  
Ротапринт ТПИ, Таллин, Пикк ялг 14.  
Цена 50 коп.





Цена 50 коп.