

AKSEL JÜRGENSON

**TUGEVUS-  
ÕPETUS**

**AKSEL JÜRGENSON**

# **TUGEVUSÕPETUS**

**TALLINN „VALGUS“ 1985**

Retsenseerinud H. Eesorg ja T. Keskküla

Kaane kujundanud T. Aru

Eesti NSV Kõrg- ja Keskerihariduse Ministeerium lubab kasutada Eesti NSV kõrgkoolide masinaehitus- ja ehituserialade õpikuna.

Õpik on ette nähtud masinaehitus- ja ehituserialade üliõpilastele, kuid on koostatud sellise ainejaotusega, et ühe- või teistsuguste kärbetega võib seda kohandada väiksemamahulisteks kursusteks vastavalt muude erialade programmidele. Peale teooria käsitluse on õpikus toodud rida näidisülesandeid.

## 1. SISSEJUHATUS

### 1.1. TUGEVUSÕPETUSE EESMÄRK JA KOHT KÕRGKOO LIS

Ehitised, masinad ja muud seadmed, aga samuti mis tahes aparaadid ja riistad, peavad olema ühelt poolt usaldatavad ja töökindlad ning teiselt poolt ökonoomsed. Neid enamasti vastakaid nõudeid saab rahuldada asjatundliku projekteerimise, ehitamise ja kasutamisega, kusjuures üks oluline ülesanne on tarindi tugevuse ja temale mõjuvate jõudude sobiva vastavuse loomine. Kui ehitise, masin või aparaat pole küllalt tugev, siis on ta kasutamiseks kõlbmatu ja põhjustab majandusliku kahju, millega sageli kaasneb purunemine ja avarii. Liiga suur tugevusvaru põhjustab ehitise soovimatut kallinemist.

Ehitiste ja masinate projekteerimine, ehitamine ja hooldamine toetub tänapäeval suurel määral teadusele nende tugevusest, deformatsioonist ja stabiilsusest — rakendusmehaanikale. Viimane jaguneb paljudeks harudeks, mille nurgakiviks on *tugevusõpetus* ja lähemateks naabriteks ehitusmehaanika, elastsusteooria, plastsusteooria ja reoloogia.

*Tugevusõpetuse eesmärk on luua ehitiste, masinate ja muude seadmete tugevuse, deformatsiooni ja stabiilsuse prognoosimise arvutuslikud alused.* Temale toetuvad paljud vanemate kursuste õppeained, nagu ehitusmehaanika, elastsus- ja plastsusteooria, masinaelemendid, metallkonstruktsioonid, pinnasemehaanika jt.

Tugevusõpetusele peab eelnema teoreetilise mehaanika õppimine. Need õppeained on nii tihedalt seotud, et pole võimalik isegi kindlat piiri nende vahele tõmmata. Teoreetiline mehaanika käsitleb kõva ehk jäiga keha liikumist ja tasakaalu. Tugevusõpetus aga vaatleb kehi deformeeruvatena, uurides peamiselt kehasisest liikumist ja tasakaalu. Sealjuures rakendab tugevusõpetus vahetult kõiki teoreetilise mehaanika tulemusi sedavõrd, kui võrd käsitluse lihtsuse huvides võib teatud tingimustel deformeeruvaid kehi vaadelda absoluutselt jäikadena.

Uurimis- ja töövahendina on matemaatikal oluline täht-

sus nii tugevusõpetuse omandamisel kui ka rakendamisel. Tänapäeval on arvutusmatemaatika ja raalid avaldanud tugevat mõju *deformeeruva keha mehaanika* arengule, laiendades ja süvendades selle kasutusalasid.

Tugevusõpetusel on ajalooliselt väljakujunenud sidemed füüsikaga. Mainimist vajavad veel oskused ja teadmised kujutavast geomeetriast, joonestamisest ja joonistamisest, milleta tugevusõpetuse õppimine ja rakendamine pole võimalik.

## 1.2. TUGEVSÕPETUSE AJALOOST

Esimene teaduslik teos mehaanikast, mis sisaldab tahke keha tugevuse uurimusi, pärineb Galileo Galileilt (1564...1642) ja ilmus 1638. a. Kui vaadelda tugevusõpetuse arengut pärast Galileid, siis võib selle teadusharu peaaegu 350-aastase ajaloo jaotada neljaks perioodiks.

*Esimene periood* oli nagu embrüonaalne areng, kus 90 aasta jooksul kujunesid välja tugevusõpetuse alused, mis võimaldasid selle vähest rakendamist järgneval perioodil. Sel ajal uurisid materjali tugevust üksikud teadlased, kellest tuntumad olid *Robert Hooke* (1635...1703), *Jakob Bernoulli* (1655...1705), *Johann Bernoulli* (1667...1748) ja *Edme Mariotte* (1620...1684).

*Teine periood* oli tugevusõpetuse rakenduse algperiood. Mitte küll iseseisva teadusena ja õppeainena, vaid nn. inseneriteaduse koostisosana hakkasid teadmised materjali tugevusest ikka rohkem levima ja rakenduma praktikas. Ühtlasi kiirenes tugevusõpetuse areng käsikäes inseneride arvu kasvu ja nende tegevuse laiemisega ehituses. Uurijate nähtu ilmusid sel perioodil matemaatikute ja loodusteadlaste kõrvale inseneride hulgast võrsunud teadlased. Vanema põlvkonna matemaatikute *Daniel Bernoulli* (1700...1782) ja *Leonhard Euleri* (1707...1783) kõrval võtsid tugevusõpetuse arendamisest osa *Joseph L. de Lagrange* (1736...1813), *Charles A. de Coulomb* (1736...1806), *Thomas Young* (1773...1829) jt.

*Kolmas periood* oli tugevusõpetuse arengus noore, oma nimega teadusharu väljakujunemise aeg. Sellel ajal hakati tugevusõpetust õpetama kõikides arenenud maades tol ajal hulgaliselt loodud tehnikakõrgkoolides. Arengu mõjukaks tõukejõuks kujunes tööstuse, ehituse, transpordi ja teede areng, mis vajas palju insenere.

Sellel perioodil arendasid tugevusõpetust peaaegu eranditult inseneridest võrsunud teadlased, kellest tuntumad olid *Louis M. H. Navier* (1785...1836), *A. Barré de Saint-Ve-*

*nant* (1797...1886), *Siméon D. Poisson* (1781...1840), *Augustin L. Cauchy* (1789...1857), *Dmitri Žuravski* (1821...1891), *James Clerk Maxwell* (1831...1879), *Christian Otto Mohr* (1835...1918), *Felix Jassinski* (1856...1899) jt.

*Neljäs periood* tugevusõpetuse arengus algas XX sajandiga. Temast eraldusid elastsusteooria, ehitusmehaanika, raudbetooni tugevusõpetus jt. Arengu oluliseks uueks tõukejõuks sai tugevusõpetuse rakendus masinaehituses, kus teda möödunud sajandil suhteliselt vähe kasutati.

## 1.3. KONSTRUKTSIOON JA SELLE ELEMENDID

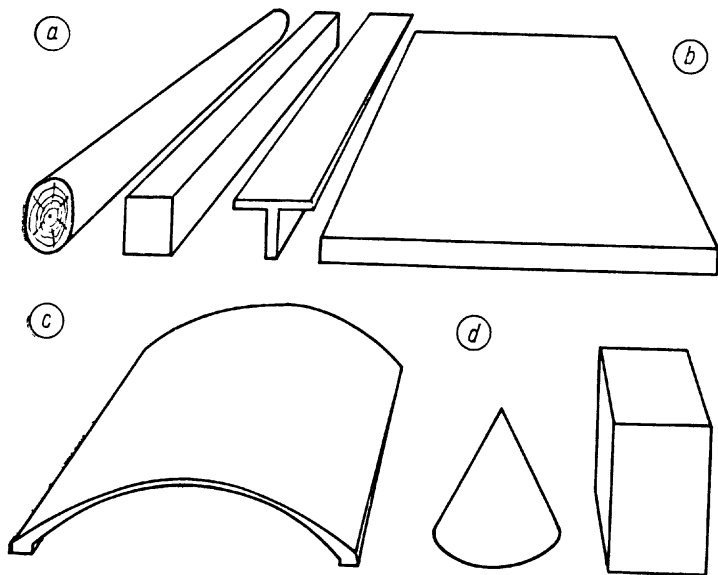
**1.3.1. Liigitus kuju järgi.** Kõige lihtsama tarbeesemena kasutatakse mingit tahket keha. Tahketest kehast koostatud ehitist, masinat või muud seadet nimetatakse *konstruktsiooniks* ehk tarindiks, selle koostisosa — *konstruktsiooni-lemendiks*. Kuju, mõõtmete ja kasutusala järgi on konstruktsioonielementidel väga palju nimetusi, kuid põhimõõtmete suhete alusel võib nad liigitada *varrasteks*, *plaatideks*, *koorikuteks* ja *massiivkehadeks*.

Vardaks nimetatakse konstruktsioonielementi, mille üks mõõde on ülejäänud kahega võrreldes suur. Varrast iseloomustab *telg* ja *ristlõikepind*. Varda telg on joon, mis läbib ristlõikepindade keskmeid, ja ristlõikepind on tasandkujund, mis kujutab varda lõiget risti teljega. Vardad liigitatakse telje kuju järgi *sirgeteks*, *murdjoonseteks* ja *kõverateks* ning ristlõikepinna järgi *ühtlasteks* ja *muutuva ristlõikepinnaga varrasteks*. Joonisel 1.1,a on kujutatud kolm ühtlast sirget varrast erinevate ristlõikepindadega. Varraste põhjalikum liigitus on toodud järgnevatel peatükkides.

Plaadiks ja koorikuks nimetatakse konstruktsioone või nende õhukesi elemente, mille üks mõõde (paksus) on kahe ülejäänuga võrreldes väike. Nende *keskpinnaks* nimetatakse mõttelist pinda, mis poolitab paksuse. Joonisel 1.1,b on kujutatud *ristkülikplaat* ja *c silinderkoorik*. Koorikuid ja plaate liigitatakse peamiselt keskpinna kuju ja suhtelise paksuse järgi.

Massiivkehaks nimetatakse tarindi koostisosa, mille kõik kolm mõõdet on sama suurusjärguga. Joonisel 1.1,d on kujutatud kaks lihtsat massiivkeha.

*Sirge ühtlane varras* on levinuim konstruktsioonielement ja tugevusõpetuse peamine uurimisobjekt. Teisi konstruktsioonielemente vaadeldakse ainult erandjuhtudel, kui neile on rakendatavad samad lihtsustused, mis on aluseks sirge üht-



Joon. 1.1

lase varda käsitlusel. Plaatide, koorikute ja massiivkehade üldine uurimine kuulub elastsusteooria valdkonda.

Eespooltoodud liigituse raamesse mittemahtuvad konstruktsioonelemendid, nagu rattad, liite- ja tugiosad, ketid, trossid jm., kuuluvad tugevusõpetuse valdkonda eriprobleemidena. Käesolevas õpikus neid ei vaadelda.

Varrastarinditest vaatleb tugevusõpetus kõige lihtsamaid. Nende sügavam käsitlus kuulub ehitusmehaanika valdkonda.

**1.3.2. Mehaaniline süsteem.** Tarindit või ka selle elementi vaadeldakse mehaanilises süsteemis, millesse kuuluvad veel *alus*, *sidemed* ja *jõud*. Alus on vundament, pinnas, teekate või mingi muu rajatis, millele konstruktsioon toetub. Sidemed, milleks on tugiosad, ühendusosad, liited, laagrid jm., kindlustavad tarindi tervikluse, vajaliku liikuvuse, püsivuse alusel ja koostöö teiste kehadega.

Tugevusõpetus kasutab enamikul juhtudel *lihtsustatud mehaanilist süsteemi*, milles konstruktsioonelementi käsitletakse deformeeruva kehana, sidemeid ja alust aga vaadeldakse absoluutselt jäikadena. Lihtsustus on enamasti põhjendatud, kuna sidemete deformatsioon ja aluse liiku-

mine on nii väikesed, et ei avalda märgatavat mõju konstruktsioonelemendi uurimistulemustele.

Kirjeldatud lihtsustus võimaldab käsitleda sidemeid ja alust samuti nagu teoreetilises mehaanikaski. Põhilise sidemena kasutatakse *ideaalset kahepoolset sidet*, absoluutselt jäika varrast, otstes hõõrdevabad liigendid. Sideme üks ots kinnitatakse liigendiga alusele, teine uuritava keha külge. Niisugune side vähendab keha liikumise vabadusastmeid ühe võrra.

Kehale võib rakendada liikumist tõkestavaid sidemeid mitte rohkem tema vabadusastmete arvust. Absoluutselt jäigal kehal sõltub vabadusastmete arv keha kujust ja liikumise taustast ega ületa kuut astet.

*Deformeeruvale kehale võib rakendada mis tahes hulga sidemeid*, sest sellel kehal on liikumise vabadusastmeid lõpmata palju. See asjaolu selgub, kui arvestada, et võrreldes absoluutselt jäiga keha liikumisega lisandub siin kehasisene liikumine deformatsiooni lõpmata paljude variatsioonide näol.

Deformeeruva keha liikumine aluse suhtes jaotatakse kaheks osaliikumiseks: *jäikliikumiseks* ja *deformatsiooniks*. Jäikliikumiseks nimetatakse kehavälisist liikumist, mille sooritamisel keha vaadeldakse absoluutselt jäigana. Deformatsioonina vaadeldakse kehasisese liikumise tulemust, tema mõeldavate osade omavahelist ümberpaiknemist deformeerumata oleku suhtes.

Vastavalt jäikliikumisele ja deformatsioonile liigitatakse ka keha sidemed *põhi-* ja *lissidemeteks*. Mehaanilist süsteemi, milles esinevad ainult põhisidemed, nimetatakse *staatikaga määratavaks süsteemiks*. Kui põhisidemetele lisanduvad lissidemed, nimetatakse süsteemi *staatikaga määratavaks*.

**1.3.3. Ideaalne süsteem ja arvutuskeem.** Tugevusarvutustes asendame reaalse konstruktsiooni mehaanilise süsteemiga, milles ei arvestata neid omadusi, mis pole olulised eesmärgi saavutamisel. Arvestatavaid omadusi aga üldistame uurimise lihtsuse huvides.

Reaalse süsteemi abstraktset asendajat teoreetilises uuringus nimetatakse *ideaalseks süsteemiks*. Tugevusõpetus rakendab võimaluste piires kõiki ideaalseid süsteeme ja nende elemente, mis on kasutusel teoreetilises mehaanikas. Kaugemaleulatuvate probleemide lahendamisel tuleb oluliselt laiendada ja täiustada ideaalset süsteemi, mille uute elementide arv kasvab koos tarindi arvestatavate omaduste hulgaga.

Ideaalse mehaanilise süsteemi graafilist kujutist mõõtmete ja kirjeldustega nimetatakse konstruktsiooni *arvutus-skeemiks*.

#### 1.4. JÕUD KONSTRUKTSIOONIS

**1.4.1. Koormused.** Konstruktsioonile mõjuvad *aktiivsed jõud* ehk *koormused*. Koormusteks on konstruktsioonelementide omakaal ja inertsijõud ning teistelt kehadelt tulevad jõud ja jõumomendid, mis antakse üle kas otsese kontaktiga või sidemete ja jõuväljade kaudu.

Muutumise järgi ajas jaguneb koormus *staatiliseks* ja *dünaamiliseks*. Staatiliseks peetakse koormust, mis ajas ei muutu või muutub aeglaselt ja ei kutsu esile olulisi inertsijõudusid tarindis. Dünaamilisena mõistame koormust, mis muutub ajas suhteliselt kiiresti või kujutab endast inertsijõudu.

Põhiliseks peetakse tugevusõpetuses staatilist koormust, millest lähtutakse ka tugevusõpetuse aluste loomisel.

Koormuse jagunemine *omakaaluks* ja *kasuskoormuseks* on oluline majanduslikult ja arvutuste lihtsustamise vaatekohalt. Kasuskoormusena tulevad arvesse konstruktsioonelementidele mõjuvad jõud peale tema omakaalu. Uuritakse konstruktsioonelemendi omakaalu vähendamise ja kasuskoormuse suurendamise võimalusi. Arvutuste lihtsustamiseks loobutakse sageli elemendi omakaalust, kui see on väike võrreldes kasuskoormusega. Niisugune lihtsustus on tugevusõpetuses üldiselt kasutusel.

Oppeülesannetes antakse koormused vahetult vektorite, graafikute ja sõnaliste seletustega, käsitlemata nende täpsemat päritolu.

**1.4.2. Toereaktsioonid ja sisejõud.** Koormus tekitab *sisejõud* konstruktsioonelementides ja neid ühendavates *sisesidemetes* ning *toereaktsioonid välissidemetes*, mis seovad konstruktsiooni alusega.

Tarindi *välisjõududeks* on koormused ja toereaktsioonid. Koormused on tugevusõpetuse ülesandes antud suurused, toereaktsioonid aga sõltuvad nendest ja määratakse lahendamise käigus *välissidemetest (tugedelt) vabastamise printsiibi* rakendamise *tasakaalu- ja kinemaatilistest tingimustest*.

Staatikaga määratud süsteemi lahendamiseks piisab ainult tasakaalutingimustest, seejuures käsitleme süsteemi nii, nagu koosneks ta absoluutselt jäikadest kehadest. Toereaktsioonide määramisel rakendame teoreetilisest mehaanikast tuntud arvutusviise.

Staatikaga määratud süsteemi toereaktsioonide arvutamist tasakaalu- ja kinemaatilistest tingimustest vaatleme hiljem.

Jõudude jagunemine välis- ja sisejõududeks on tinglik selles mõttes, et üle minnes konstruktsiooni kui terviku käsitlelusel tema osa vaatlusele, muutuvad need sisesidemed välissidemeteks, mis seovad vaadeldavat osa tervikuga ja nende sisejõud muutuvad seejuures osale mõjuvateks välisjõududeks. Konstruktsiooni liigestamist osadeks arendatakse kuni konstruktsioonelemendini, luues sellega võimaluse vaadelda sidemete jõudusid välisjõududena.

Tugevusõpetus kasutab tarindi sisejõudude uurimiseks nende muutmist välisjõududeks süsteemi osadeks jaotamise ja sidemetest vabastamise printsiibiga sellepärast, et välisjõudude määramine on lihtsam kui sisejõudude vahetu uurimine.

Konstruktsioonelemendi kui tervikliku tahke keha sisejõud pole määratavad eelpoolkirjeldatud viisil. Vaatleme neid lähemalt allpool.

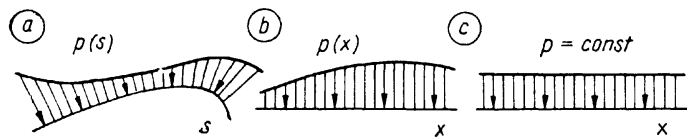
**1.4.3. Välisjõud ja Saint-Venant'i printsiip.\*** Vaatleme lähemalt konstruktsioonelemendi välisjõudude lihtsustamise võimalusi.

Välisjõud jagunevad *mahu-* ja *pinnajõududeks*. Mahujõududeks on keha omakaal, inertsijõud, magnetjõud jm., mis mõjuvad keha massile kogu mahu ulatuses ja mille intensiivsust mõõdetakse ühikuga  $N/m^3$ . Tugevusõpetuses võib enamasti mahujõududest loobuda, sest nad on pinnajõududega võrreldes väikesed. Ülesannetes, kus mahujõu arvestamine on oluline, asendatakse mahujõud oma toimelt võrdväärse pinnajõuga, mis enamikel juhtudel ei kahjusta arvutustulemuste täpsust. Mahujõudude vahetu käsitus pole üldiselt tugevusõpetusele jõukohane ja kuulub elastsusteooria valdkonda.

Pinnajõud konstruktsioonelemendile pärinevad naaberkehadelt ja mõjuvad kokkupuutepindade kaudu, millel jõu intensiivsust mõõdetakse ühikuga *paskal* ( $Pa = N/m^2$ ).

Varda tugevusarvutuses võib pinnajõu asendada varda teljel *jaotatud jõuga*, mille intensiivsust mõõdetakse ühikuga  $N/m$ . Telgjoonel *jaotatud koormust* on lihtne kujutada graafiku ehk *epüürina*, mille ordinaat väljendab *jaotatud jõu intensiivsust*. Joonisel 1.2 on kujutatud: *a* kõverjoonel jaotatud muutuva suuna ja intensiivsusega koormus, *b* sir-

\* A. Barre de Saint-Venant (1797...1886) — prantsuse teadlane, insener, tugevusõpetuse aluste rajaja.

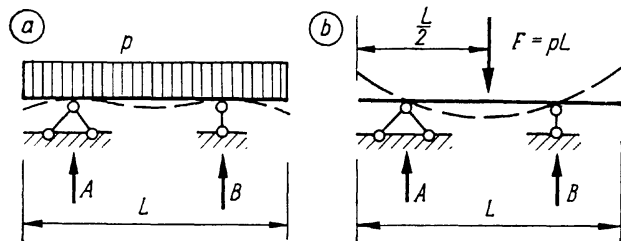


Joon. 2.11

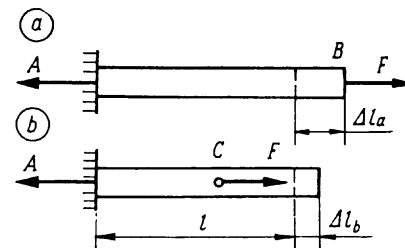
gel jaotatud muutuva intensiivsuse ja püsiva suunaga ja  $c$  ühtlaselt jaotatud koormuse epüürid.

Pinnajõud on otstarbekas asendada *koondjõuga*, kui kehade kontaktpinna joonmõõtmel on konstruktsioonielemendi põhimõõtme(te)ga võrreldes väikesed. Jõu ülekande probleemi väikeste kontaktpindade kaudu uuris lähemalt *Saint-Venant* mõõdunud sajandi algul ja tuli järeldusele, mida tunneme temanimelise printsiibina: *jõu ülekandmise viis suhteliselt väikesel kontaktpinnal ei mõjuta märgatavalt konstruktsioonielemendi üldist deformatsiooni ja tugevust ning pinnajõu võib asendada koondjõuga.*

Konstruktsioonielemendi pinna suhteliselt suurel osal mõjuva jaotatud koormuse ehk nn. *lauskoormuse* asendamisel koondjõuga, samuti jõusüsteemi asendamisel resultandi ja momendiga peab olema tugevusõpetuses ettevaatlik, sest võrreldes teoreetilise mehaanikaga on siin asendamise võimalused piiratud. Selgitame öeldut näitega joonisel 1.3, kus on kujutatud *konsoolidega tala*, mille ühtlane lauskoormus on näidatud skeemil *a*. Skeemil *b* on lauskoormus asendatud teoreetilise mehaanika seisukohalt ekvivalentse koondkoormusega. Määrates selle tala toereaktsioone on arvutuskeemid *a* ja *b* samaväärsed, kuid tala deformatsiooni uurimiseks skeem *b* ei asenda skeemi *a*, sest ta annab teistsuguse pildi varda kõverdunud teljest (joonisel kriipsjoonega).



Joon. 1.3



Joon. 1.4

Samuti ei saa skeem *b* asendada skeemi *a* tala tugevusarvutustes.

Teoreetilises mehaanikas käsitletakse jõudu oma kandesirgel libiseva vektorina, mis tähendab, et jõuvektorit võib sellel sirgel teisaldada, ilma et tema mõju absoluutselt jäigale kehale muutuks. Tugevusõpetuses jõuvektori niisugune teisaldamine pole enamasti võimalik, sest selle tagajärjena võib muutuda jõu mõju deformeeruvale kehale. Joonisel 1.4 on kujutatud jõuga  $F$  koormatud varras. Kui jõud  $F$  mõjub punktis  $B$ , siis ei tohi teda kanda üle punkti  $C$ , sest selle tulemusena varda deformatsioon  $\Delta l$  oluliselt muutub. Esimesel juhul (skeem *a*) töötab kogu varras tõmbele, teisel juhul ainult pool sellest, mistõttu ka varda pikenedamine väheneb kahekordselt.

## 1.5. SISEJÕUD JA PINGE

**1.5.1. Sisejõud.** Vaatleme konstruktsioonielemendi sisejõude.

Tahke keha sisejõududena mõistame jõudusid keha osade vahel, mis säilitavad tema tervikluse ja annavad talle iseloomuliku mahu- ja kujukindluse mõõdukate välisjõudude mõju all. Füüsikast teame, et tahke keha terviklust ja mahuning kujukindlust hoiavad molekulaarjõud, mis keha molekulide vahel aga ka molekulist suuremate osade süsteemis säilitavad tasakaaluoleku koos kehale toimivate välisjõududega.

Tugevusõpetus vaatleb keha sisejõududena molekulaarjõudusid mitte vahetult, vaid nendest pärinevaid jõudusid, mis määratakse *Cauchy* poolt mõõdunud sajandi algul ette pandud *teooria* najal\*. Vaatleme selle teooria aluseid.

\* Augustin Louis Cauchy (1789...1857) — prantsuse matemaatik, kes 1822. a. avaldas nimetatud teooria alused.

**1.5.2. Homogeenne keha.** Sisejõudude teoorias hüljatakse reaalse keha korpuskulaarne (teraline) ehitus ja oletatakse, et ta on homogeenne ja pidev. Ettekujutatav aine, millest see keha koosneb ja mida nimetatakse homogeenseks ja pidevaks materjaliks, täidab ühtlaselt keha kogu ruumala.

Uuritava keha homogeensust ja pidevust vajatakse sellepärast, et tema lõpmata väike element peab säilitama keha omadused ja kindla, kasutatavale koordinaadistikule iseloomuliku korrapärasuse, mida ei kindlusta korpuskulaarne ehitus. Homogeense ja pideva keha uurimiseks on hõlpsasti rakendatav diferentsiaalrvutus.

Korpuskulaarse keha käsitlus homogeensena ja pidevana on võimalik tänu konstruktsioonielemendi küllalt suurte mõõtmetele võrreldes teda moodustavate osakeste mõõtmega, mis on mitu suurusjärku väiksemad. Sellepärast ei tule aine teraline ehitus esile ega põhjusta märgatavaid ebatäpsusi tugevusõpetuse probleemide lahendamisel.

**1.5.3. Lõikemeetod.** Sisejõudude määramiseks kasutatakse lõikemeetodit. Selle meetodi aluseks on tõekspidamine, et *tasakaalus kehast mõtteliselt väljalõigatud osa on ka tasakaalus.*

Vaadeldavale, kehast väljalõigatud osale mõjub jõudude süsteem, millest tuntud välisjõudude kõrval rakendatakse tundmatud jõud *lõikepindadel*, asendamaks lahtilõikamata keha vastavaid sisejõudusid. Lõikepindadel mõjuvad tundmatud jõud, mis on võrdsed sisejõududega, määratakse vaadeldava osa tasakaalutingimustest.

Lõikemeetodil on palju ühist sidemetest vabastamise printsiibiga. Nende erinevus on vormiline ja seisneb selles, et esimene kujutab ette tervikliku konstruktsioonielemendi «lahtilõikamist», teine elementidest koosneva konstruktsiooni «lahtimonteerimist». Printsiip ja meetod taotlevad ka ühist eesmärki — keha (süsteemi) jaotamisega osadeks muuta sisejõud välisjõududeks, et nende määramiseks rakendada tasakaalutingimusi.

**1.5.4. Algmõõtmete printsiip.** Deformeerumisel konstruktsioonielemendi või selle osa mõõtmed muutuvad ja sellepärast räägitakse mõõtmetest deformeerumata seisundis — *algmõõtmetest ning mõõtmetest deformeerunud seisundis.*

Arvutuse lihtsuse huvides asendatakse keha mõõtmed deformeerunud seisundis algmõõtmega. See lihtsus on tuntud *algmõõtmete printsiibina* ja leiab üldist kasutamist, sest keha mõõtmete hälbed algmõõtmetest on deformeerumisel väiksed ja enamasti nendest tulenevad vead arvutustulemustes pole olulised.

Erandjuhtudel, kui mõne algmõõtmega kasutamine põhjustab kaalukaid ebatäpsusi, tuleb seda suurust vaadelda konstruktsioonielemendi deformeerunud seisundis, sellega kaasneb ülesande lahendamise töömahukuse kasv ja keerukus.

**1.5.5. Pinge, sisejõudude peavektor ja peamoment.** *Homogeense keha sisejõududega mõistetakse jõudusid selle keha mõtteliste osade kokkupuutepindadel.* Sisejõud jaguneb pinnal üldjuhul ebaühtlaselt, mis tähendab, et keha mõtteliste osade kokkupuutepindade jaotamisel väikesteks võrdseteks elementideks, saadakse nendele elementidele mõjuvad *elementaarsisejõud* erineva suurusega. Joonisel 1.5,a on kujutatud ristlõikega eraldatud varda osa, mille lõikepinna  $A$  elemendil  $\Delta A$  vaatleme elementaarsisejõudu  $\Delta R$ . Sisejõudude teoorias vaadeldakse elementaarsisejõudu nihutatuna pinnaelemendi keskmesse (joonisel punkt  $B$ ), kusjuures vastavast elementaarsest jõumomendist loobutakse kui tähtsusetult väiksest suurusest.

Elementaarsisejõud väikse suurusena pole praktilistes arvutustes rakendatav ja sellepärast kasutatakse tema suhet pinnaelemendiga, mille piirväärtust pinnaelemendi piiramatu vähendamisel ümber oma keskmee nimetatakse *pingeks* vaadeldavas punktis:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}. \quad (1.1)$$

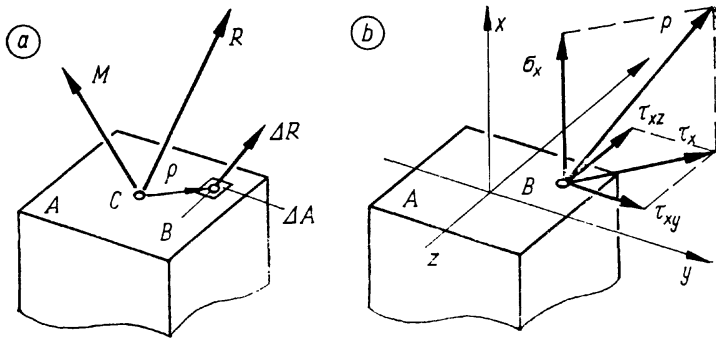
Pinge on vektor, mis näitab sisejõu intensiivsust mõttelisel pinnal. Pinget võib võrrelda rõhuga vedelikus, mis on survejõu intensiivsus mõttelise pinna punktis selle pinna normaali sihis. Erinevalt rõhust vedelikus, võib pinge suund kalduda kõrvale vaadeldava pinna normaalist tänu tahke keha kujususele ja väljendada peale survejõu ka tõmbe- ja nihkejõu intensiivsust. Pinge mõõtühikuks on jõu- ja pinnaühiku jagatis  $N/m^2$  ehk Pa (paskal).

Pinge on kõige üldisem ja ka kõige tähtsam sisejõudu kirjeldav suurus, mille kasutusele võtmine põhjustas olulise murrangu tugevusõpetuse arengus.

Pinge kõrval kasutatakse veel teisi suurusi sisejõudude kirjeldamiseks. Vardas, mis on tugevusõpetuse peamine uurimisobjekt, leiavad rakendamist *elementaarsisejõudude peavektor*  $R$  ristlõikepinna  $A$  keskmee  $C$  ja peamoment  $M$ , mis on kujutatud joonisel 1.5, a.

Pinge  $p$ , sisejõudude peavektor  $R$  ja peamoment  $M$  esitatakse nende komponentide vahendusel  $xyz$ -teljestikus, mille alguspunkt seatakse ristlõikepinna  $A$  keskmesse ja  $x$ -telg suunatakse selle pinna normaali sihis. Väljakujunenud kõne-





Joon. 1.5

pruugis nimetatakse elementaarsisejõudude peavektori ja -momendi komponente *sisejõududeks*.

Joonisel 1.5,b on näidatud pingevektori komponendid:  $\sigma_x$  — normaalpinge,  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  — nihkepinged. Esimene neist mõjub vaadeldava lõikepinna normaali sihis, teised pinna puutujate sihtides. Rakendamist leiab veel summaarne nihkepinge  $\tau_x$ . Normaalsisejõudude ja summaarse nihkepinge indeks näitab vaadeldava lõikepinna normaali sihti. *Nihkepingete kahest indeksist esimene näitab vaadeldava pinna normaali sihti, teine nihkepinge sihti.*

Pinge jagunemine normaal- ja nihkepingeks pole ainult arvutusliku tähtsusega, vaid sellel jagunemisel on ka sügavam füüsikaline sisu, sest materjalid reageerivad nende mõjule märgatavalt erinevalt nii deformatsiooni kui ka purunemise seisukohalt.

Joonisel 1.6 on kujutatud elementaarsisejõudude peavektori  $R$  ja peamomendi  $M$  komponendid varda ristlõikepinna keskmes  $C$ . Need komponendid või, nagu neid nimetatakse, sisejõud on näidatud varda mõlema osa (I ja II) lõikepindadel eraldi. Peavektori  $R$  komponendid on:  $N$  — normaal- ehk *pikijõud*;  $Q_y$  ja  $Q_z$  — *põikjõud*. Peamomendi  $M$  komponendid:  $M_x$  — *väändmoment*;  $M_y$  ja  $M_z$  — *paindemomendid*. Indeks sisejõu juures näitab jõu sihti teljestikus, kusjuures normaaljõu tähis  $N$  ei vaja indeksit.

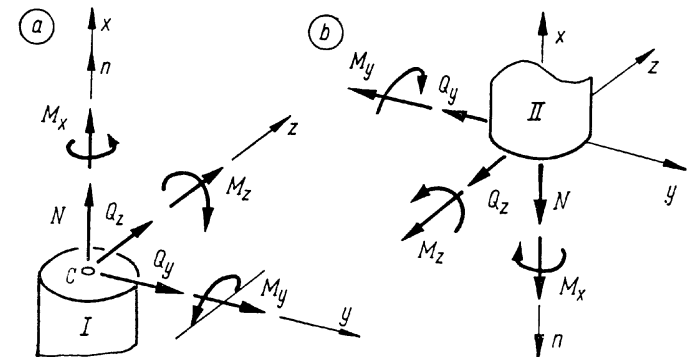
*Newtoni\** kolmandast seadusest järgneb, et lõikega jaotatud keha kahe eraldatud osa lõikepindadel on sisejõud vastandvektorid, vaadeldavad joonisel 1.6,a ja b. Sisejõud

ühesus tervikliku varda ristlõikes saavutatakse niisuguse märgireeglga, mis tunnistab nende vastandvektorite komponendid samamärgilisteks suurusteks. Et pingete kohta kehtivad samad kaalutlused, siis on neile rakendatav ühine märgireegel: *pinge ja sisejõud loetakse positiivseteks, kui nad positiivse välisnormaaliga lõikepinnal suunduvad telje positiivses suunas ja negatiivse välisnormaaliga lõikepinnal telje negatiivses suunas*. Vastupidi suunatud pinge ja sisejõud loetakse negatiivseteks. Joonisel 1.5,b ja 1.6 on pinged ja sisejõud näidatud positiivsetena. Mõnel erandjuhul kasutatakse sisejõudude ja pingete märgistamiseks ka vastupidi-seid märke. Ühte erandit vaatleme paindemomendi  $M_z$  märgireeglina kaheksandas jaotises.

Normaalpinge  $\sigma$  ja normaaljõu  $N$  märgi määramiseks on otstarbekas kasutada üldise märgireegli kõrval lihtsamat, sest nendel suurustel tähendab märgi erinevus teistsugust füüsikalist sisu. *Positiivseks loetakse tõmbepinge ja jõud, negatiivseks survepinge ja jõud*. Nihkepingete, põikjõudude, väändmomendi ja paindemomentide vastasmärgilistel suurustel taoline füüsikaline erinevus puudub.

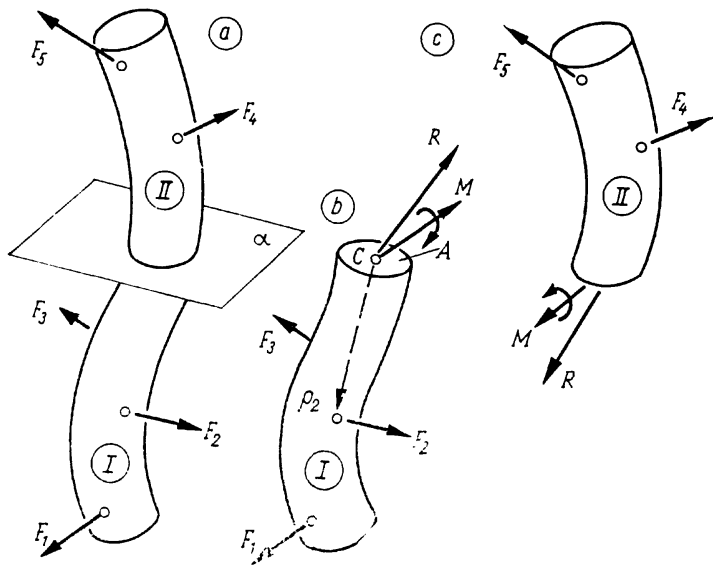
Varda ristlõikepinnas  $A$  mõjuvate elementaarsisejõudude  $dR = p dA$  peavektori ja -momendi komponendid ristteljestikus avalduvad pingekomponentide kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA; & M_x &= \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_{xy} dA; & M_y &= \int_A z\sigma_x dA; \\ Q_z &= \int_A \tau_{xz} dA; & M_z &= \int_A y\sigma_x dA, \end{aligned} \quad (1.2)$$



Joon. 1.6

\* Isaac Newton (1643...1727) — inglise füüsik, astronoom ja matemaatik.



Joon. 1.7

kus pindintegraale mõistame kolmes esimeses seoses elementaarsisejõudude komponentide  $\sigma_x dA$ ,  $\tau_{xy} dA$  ja  $\tau_{xz} dA$  summana ristlõike pindala  $A$  ulatuses ja kolmes viimases seoses nende komponentide elementaarmomentide summana  $x$ ,  $y$  ja  $z$  telgede suhtes.

Teiselt poolt on varda sisejõud ristlõikepinnas määratavad lõikemeetodiga välisjõududest. Vaatleme näitena varrast joonisel 1.7, *a* ja tasandiga  $\alpha$  lahtilõigatud eraldiseisvaid osi (joonisel 1.7, *b* ja *c*). Rakendame varda esimese osa lõikepinnal  $A$  keskmest  $C$  sisejõudude peavektori  $R$  ja peamomendi  $M$ . Tasakaalutingimustest

$$\sum_{i(I)} F_i + R = 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{i(I)} F_i \times \rho_i + M = 0$$

avaldame

$$R = -\sum_{i(I)} F_i \quad \text{ja} \quad M = -\sum_{i(I)} F_i \times \rho_i,$$

kus  $\rho_i$  on jõu  $F_i$  rakenduspunkti kohavektor keskmest  $C$ . Seejuures summeeritakse ainult varda esimesele osale mõjuvad välisjõud ja momendid.

Samal viisil avalduvad sisejõudude peavektor ja -moment

varda teise osa tasakaalutingimustest, kus neid peab kujutama vastandvektoritena.

Tugevusõpetuses rakendame varda sisejõudude (peavektori ja -momendi komponentide) avaldise vaadeldava ristlõikepinnal teljestikus:

$$\begin{aligned} N &= -\sum_{i(I)} F_{ix} = \sum_{i(II)} F_{ix}; & M_x &= -\sum_{i(I)} \mathfrak{M}_{ix} = \sum_{i(II)} \mathfrak{M}_{ix}; \\ Q_y &= -\sum_{i(I)} F_{iy} = \sum_{i(II)} F_{iy}; & M_y &= -\sum_{i(I)} \mathfrak{M}_{iy} = \sum_{i(II)} \mathfrak{M}_{iy}; \\ Q_z &= -\sum_{i(I)} F_{iz} = \sum_{i(II)} F_{iz}; & M_z &= -\sum_{i(I)} \mathfrak{M}_{iz} = \sum_{i(II)} \mathfrak{M}_{iz}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

kus  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$  ja  $F_{iz}$  on vardale rakendatud välisjõu projektioonid ristlõikepinnal telgedel;  $\mathfrak{M}_{ix}$ ,  $\mathfrak{M}_{iy}$  ja  $\mathfrak{M}_{iz}$  — vardale rakendatud välisjõu momendid  $x$ ,  $y$  ja  $z$  telgede suhtes või välismomentide komponendid.  $i(I)$  — tähistab summeerimist varda selle osa ulatuses, mille lõikepinnal välisnormaali suund ühtib  $x$ -telje positiivse suunaga;  $i(II)$  — tähistab summeerimist varda teise osa ulatuses, mille lõikepinnal välisnormaal on negatiivse suunaga.

Seosed (1.2) ja (1.3) on varda tugevusarvutuste põhi-seosed ja kirjeldavad pingete määramise staatikalist külge, kuid nad pole piisavateks tingimusteks ülesande lahendamisel.

**1.5.6. Algpinged.** Konstruksioonielemendis võivad esineda algpinged, mis on tekkinud kuumtöötamise, valtsimise, stantsimise jm. tagajärjel. Algpingete määramine pole enamasti tugevusõpetusele jõukohane ja sellepärast jäävad nad paljudel juhtudel tugevusarvutuses tundmatuks. Liitides välisjõududest esile kutsutud tuntud pingetega, põhjustavad tundmatud algpinged lõplike pingete määramatuse ja on sellepärast ebasoovitavad.

Algpingete kahjulikku toimet reguleeritakse nende kahanemisega. Selleks rakendatakse mitmesuguseid tehnoloogilisi menetlusi, mis hoiavad algpinged teataval lubataval piiril. Algpingete täielik vältimine pole enamasti võimalik, kuid kvaliteetsest materjalist ja tehnoloogiliselt õigesti valmistatud konstruksioonielemendis on nad hüljatavalt väikesed.

Pingete määramine tugevusõpetuses on rajatud *algpingete puudumise eeldusele*, mis tähendab, et *välisjõududega koormamata, ühtlase temperatuuriga ja lisasidemetest deformeermata konstruksioonielemendi pinged loetakse võrdseks nulliga*. Seda eeldust võib kasutada, kui ollakse veendunud, et tingimused selleks on täidetud. Rakendades seda lihtsust konstruksioonielemendile, mis on kannatanud

ülekoormuse, avarii, tulekahju jne. tagajärjel või mis on valmistatud vigastatud materjalist või mille valmistamisel pole kinni peetud tehnilistest nõuetest, võib juhtuda, et tugevusarvutused elemendi ohutu töö tagamiseks osutuvad viljatuks suurte alpingete tõttu. Halvematel juhtudel võivad alpinged olla isegi nii suured, et kutsuvad esile konstruktsiooni- elemendi purunemise ilma välise mõjutuse ta.

**1.5.7. Varda tööseisundid** jagunevad sisejõudude esinemise alusel järgmiselt:

1. *Tõmme ja surve ehk pike* — vardas mõjub ainult normaaljõud  $N$ . Positiivse normaaljõu toimet nimetatakse *tõmbeks*, negatiivse jõu toimet *surveks*.

2. *Vääne* — vardas esineb ainult väändemoment  $M_x$ .

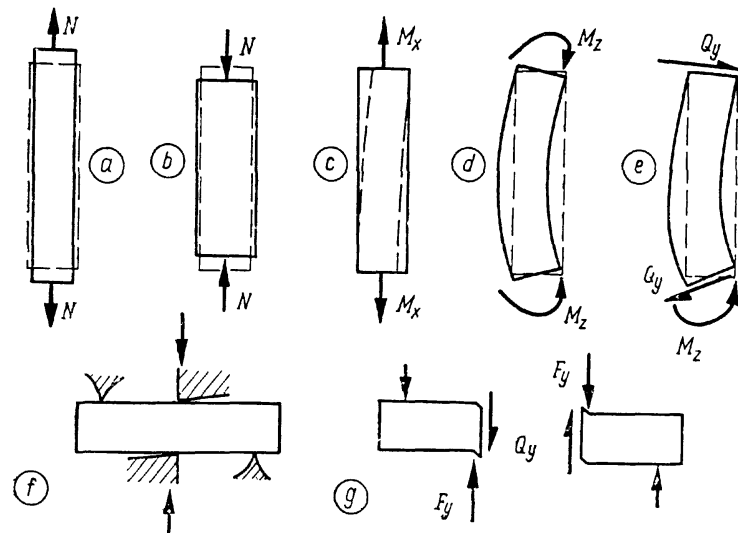
3. *Paine* — jaguneb omakorda *puhtaks paindeks*, kui vardas mõjub ainult üks paindemomentidest  $M_z$  või  $M_y$ , ja *põikpaindeks*, kui koos mõjuvad paindemoment  $M_z$  ja põikjõud  $Q_y$  või  $M_y$  ja  $Q_z$ .

4. *Vildakpaine* — kahe paindemomendi  $M_z$  ja  $M_y$  koosmõju, millele võivad lisanduda põikjõud  $Q_y$  ja  $Q_z$ .

5. *Ekstsentriline tõmme ja surve* — tõmbe või surve ja (vildak)painde koosmõju.

6. *Vääne paindega*.

7. *Sisejõudude koosmõju üldjuhtum*.



Joon. 1.8

Loetletud tööseisundid jaotatakse *liht-* ja *liittööseisunditeks*, mis pole aga päris kindlalt väljakujunenud piiridega. Käesolevas õpikus on lihttööseisunditena käsitletud tõmmet, survet, väänet ja painet, ülejäänuid vaadeldakse aga liittööseisunditena.

Joonisel 1.8 on kujutatud varda lõiku, mis on allutatud  $a$  tõmbele,  $b$  survele,  $c$  väändele,  $d$  puhtale paindele ja  $e$  põikpaindele.

*Lõige* tekib vardas põikjõu toimel, kuid varrast pole võimalik allutada ainult põikjõu mõjule, sest temaga kaasneb alati paindemoment. Enamvähem «puhtana» võib suhteliselt suure põikjõu tekitada varda lühikesel osal, nii nagu näidatud joonisel 1.8,  $f$  ja  $g$ , kus kaasneva paindemomendi mõju on väike. Niisugust suure põikjõu ja väikse paindemomendi koosmõju tuntaksegi lõikena. Lõikele töötavad paljud konstruktsioonelemendid, nagu kolvisõrm, poldid, needid jm.

## 1.6. DEFORMATSIOON

**1.6.1. Punkti siire.** Välisjõudude toimel konstruktsioonelement deformeerub. Vaatame selle nähtuse geomeetrilist külge. *Tahke keha deformatsioon seisneb tema mõeldavate osade mahu- ja kujumuutes, millega enamasti kaasneb kogu keha samalaadne muude.* Vaadeldes keha homogeenne ja pidevana, võib rääkida ka tema lõpmata väikse mõeldava osakese mahu- ja kujumuutest. Järelikult keha deformatsioon on käsitletav tema geomeetriliste elementide teisaldumise ja teisendumisega, mille aluseks on kõige lihtsama elemendi — punkti teisaldumine.

Vaatleme keha punkti teisaldumist aluse suhtes, millele keha on kinnitatud jäikliikumise vabaduseta. Liikumise taustaks olgu alusega seotud  $xyz$ -teljestik nn. *alusteljestik*. Vaadeldava punkti *siire* ehk *paigutis* on vektor  $\Delta$ , mille alguse ja lõpu määravad punkti alg- ja lõppasend üleminekul deformeerunud seisundisse. Enamasti kasutatakse *siirde koordinaate*  $u$ ,  $v$  ja  $w$  alusteljestikus.

Kui vaadeldav konstruktsioonelement osaleb mingis jäikliikumises, näiteks kuulub mehhanismi koosseisu, siis tuleb teljestik siduda selle liikumisega, et arvutatud siirded iseloomustaksid ainult deformatsiooni.

Keha punktide siirded kirjeldavad tema deformeerunud seisundi üldist pilti. Siire on deformatsiooni tunnus, mis seatakse vastavusse välisjõu toimega ning mis iseloomustab elemendi deformeeruvust või jäikust tema kasutamise seisukohalt ehitises, masinas või muus seadmes. Ta ei iseloomusta

otseselt deformatsiooni teist olulist külge, selle lokaalset pilti, mis vastab sisejõudude ja pingete toimele.

**1.6.2. Deformatsioon keha punktis.** Selgitame konstruktsioonelemendi mõõtmete ja kuju muutumise intensiivsust iseloomustavaid suurusid keha punkti ümbritsevas väikeses piirkonnas.

Vaatleme deformeerumata kehas kahte punkti  $A$  ja  $O$  sirgel  $n$  ja kujutame neid joonisel 1.9,a. Olgu punktide vahekaugus  $l$  väike suurus võrreldes konstruktsioonelemendi mõõtmetega. Keha deformeerumisel vaadeldavad punktid siirduvad uutesse asukohtadesse  $A'$  ja  $O'$ . Seejuures nende vahekaugus muutub ja saab väärtuse  $l'$ . Punktide vahekauguse juurdekasv

$$\Delta l_{AO} = l' - l \quad (1.4)$$

kannab nimetust *normaal-* ehk *joondeformatsioon*. Suhet

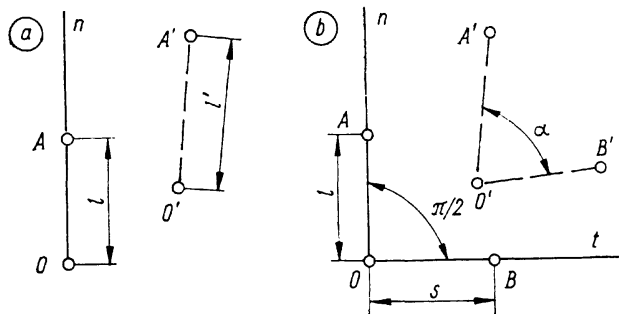
$$\frac{\Delta l_{AO}}{l} = \varepsilon_{AO} \quad (1.5)$$

nimetatakse *keskmiseks suhteliseks normaaldeformatsiooniks* vaadeldavate punktide vahemikus.

Lähendades punkti  $A$  tõkestamatult punktile  $O$  ja minnes piirile

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l_{AO}}{l} = \varepsilon_n, \quad (1.6)$$

saame *suhtelise normaaldeformatsiooni* punktis  $O$  sirge  $n$  sihis. Samas punktis, mingis teises sihis on suhteline normaaldeformatsioon üldjuhul teistsuguse väärtusega. Suhte-



Joon. 1.9

lisi normaaldeformatsioone  $x$ ,  $y$  ja  $z$  telgede sihtides tähistatakse vastavalt  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$ .

Suhteline normaaldeformatsioon keha punktis iseloomustab materjali venimise või kokkusurumise intensiivsust teatavas sihis, kuid ta ei iseloomusta otseselt teist olulist muutust vaadeldavas punktis, mida selgitame joonise 1.9,b najal.

Vaatleme deformeerumata kehas kolme punkti  $A$ ,  $O$  ja  $B$  sihisirgetel  $n$  ja  $t$ , mis lõikuvad täisnurgi punktis  $O$ . Punktide vahekaugusel  $l$  ja  $s$  olgu ka siin väikesed suurused võrreldes konstruktsioonelemendi mõõtmetega. Keha deformeerumisel teisaldunud punktid  $A'$ ,  $O'$  ja  $B'$  moodustavad üldjuhul mitte enam täisnurga, vaid sellest erineva nurga  $\alpha$ , mille hälvet täisnurgast

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \gamma_{AOB} \quad (1.7)$$

nimetatakse *keskmiseks nihkenurgaks* vaadeldava kolme punkti vahelisel alal.

Lähendades punkte  $A$  ja  $B$  tõkestamatult punktile  $O$ , saame piiril

$$\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \gamma_{nt} \quad (1.8)$$

*nihkenurga* punktis  $O$  ristuvate sihisirgete  $n$  ja  $t$  vahel. Ristteljestikus  $xyz$  võime esitada nihkenurgad vaadeldavas punktis vastavalt ristuvatele teljepaaridele  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  ja  $\gamma_{zx}$ .

Suhteliste normaaldeformatsioonide ja nihkenurkade abil võime täielikult kirjeldada keha deformeerumise intensiivsust vaadeldavas punktis, kus nad on vastavuses sisejõu intensiivsust esitavate normaal- ja nihkepingetega. Suhteline normaaldeformatsioon ja nihkenurk on dimensioonitud suurused. Et konstruktsioonelementide mõõtmed ja kuju muutuvad normaalsetes töötingimustes vähesel määral, siis ka suurused  $\varepsilon$  ja  $\gamma$  on väikesed võrreldes ühega ja väljenduvad harilikult tuhandikes või kümnetuhandikes.

**1.6.3. Bernoulli hüpotees.\*** Varda deformatsiooni uurimisel rakendab tugevusõpetus *ristlõikepinna tasandilisuse hüpoteesi*: varda deformeerumisel ristlõikepind ei kõverdu ja säilitab ristseisu varda teljega. Esmakasutaja nime järgi tuntakse seda ka *Bernoulli hüpoteesina*.

Mõningal juhul, näiteks tõmbel, puhtal paindel jt. on hüpotees vaadeldav täpse seaduspärasusena. Teistel juhtudel kujutab ta endast lihtsustust, mis peegeldab tõelist olu-

\*Jakob Bernoulli (1655...1705) — šveitsi matemaatik, kes hüpoteesi avaldas 1694. a.

korda seda täpsemalt, mida saledam on varras. Seejuures võivad esineda olulised hälbed, kui varda pikkuse  $l$  ja ristlõikepinna suurima joonmõõtme  $h$  suhe  $l/h < 5$ . Ka mittemääraraste varraste väändel kõverduvad ristlõikepinnad sel määral, et hüpoteesi ei saa rakendada. Probleemid, mis ei allu Bernoulli hüpoteesile, pole jõukohased tugevusõpetusele. Neid lahendab elastsusteooria.

## 1.7. HOOKE'I SEADUS\*

**1.7.1. Elastsus ja plastsus.** Konstruksioonelemendi tugevuse, jäikuse ja püsivuse uurimisel peab tundma füüsikalisi seoseid jõudude, sisejõudude ja pingete ning neile vastavate deformatsioonide vahel.

Nende seoste juurde tulles puutume kokku mõistega *elastsus*, mis on *konstruksioonelemendi omadus vabaneda deformatsioonist seda põhjustanud jõu kõrvaldumisel*. Normaalses tingimustes deformeerub rõhuv enamik tarindeid peaaegu elastselt. Sellepärast seab tugevusõpetus oma üheks hüpoteetiliseks aluseks *ideaalselt elastse keha*, mille esialgsed mõõtmed ja kuju taastuvad jõudude mõju lakkamisel momentaanselt ja täielikult.

Kõrvalekaldumist ideaalsest elastsusest iseloomustab keha *jääkdeformatsioon*, mis seostub keha *plastsusega*. See tähendab keha omadust säilitada mõningane osa oma deformatsioonist jõudude eemaldamisel. *Ideaalselt plastne keha* säilitab oma deformatsiooni täielikult. Ideaalselt plastsetena tunneme plastiliinist, pehmest vahast, seatinast jt. plastsetest materjalidest kehi.

Vaatamata sellele, et konstruksioonelemendi usaldatav tugevus eeldab selle elastselt deformeerumist, ei tulda toime keha plastsusomaduste uurimiseta tugevuse piirolukorras.

**1.7.2. Isotroopne keha.** Tugevusõpetuse füüsikalistes seostes vaatleme konstruksioonelementi *isotroopse kehana*. Niisugune keha koosneb isotroopsest materjalist, mille mehaanilised omadused on ühesugused kõikides suundades.

Konstruksioonimaterjalid on enamasti küllalt lähedased isotroopsele materjalile, kuid esineb ka olulisi kõrvalekaldu-misi. Metallid ja nende sulamid on üsna täpselt vaadeldavad isotroopsetena, tänu peenele polükristalsele struktuurile. Puit on tüüpiline *anisotroopne materjal*, mille süüline ehitus põhjustab mehaaniliste omaduste erinevust piki- ja põiki-kiudu.

\* Robert Hooke (1635...1703) — inglise füüsik ja looduseuriija, kes seaduse avaldas 1678. a.

**1.7.3. Hooke'i seadus.** Elastsete konstruksioonide vaatlused ja mõõtmised näitavad, et enamikul neist on *deformatsioon võrdeline jõuga*. Seejuures ei tohi jõu rakendus-punkt ja suund muutuda ega suurus ületada teatavat piiri.

Esitatu on tuntud *Hooke'i seadusena*, mis avaldati esmakordselt 1678. a. ladina keeles — *ut tensio sic vis* (nagu venituse nii jõud). Selle seaduse osatähtsus tugevusõpetuses ületab kõikide vaadeldud ja vaadeldavate seaduste, hüpoteeside ja printsiipide omad. Mehaanikaseaduste üldises süsteemis võib *Hooke'i* seadust kõrvutada *Newtoni* seadus-tega.

Seadust võib esitada lineaarse sõltuvusena suuruste vahel, millest üks iseloomustab kehale mõjuvat koormust, teine väikest deformatsiooni. Füüsikast tunneme *Hooke'i* seadust seosena

$$F = c\Delta, \quad (1.9)$$

kus  $F$  on välisjõud ja  $\Delta$  — mingi punkti siire vaadeldavas konstruksioonis.

Võrdetegur  $c$  seoses (1.9) iseloomustab vaadeldava süsteemi *jõu-siirde* vahekorda ja kannab nimetust *süsteemi jäikus*. Selle mõõtühikuks on N/m.

Jäikus  $c$  sõltub süsteemi paljudest omadustest, tariel-lemendi materjalist ja mõõtmetest, toesidemete hulgast ja asetusest, jõu rakenduspunkti asukohast, jõu sihist ja punkti asukohast, kus vaadeldakse siiret. Niisuguse süsteemi uuri-mine on tugevusõpetuse ülesanne, mille lähtealusena vaja-takse *Hooke'i* seadust lineaarsete sõltuvustena pingete ja suhteliste deformatsioonide vahel.

*Hooke'i* seadus tugevusõpetuses esitatakse kõige lihtsa-mal kujul seoste paarina:

$$\sigma = E\varepsilon; \quad \tau = G\gamma, \quad (1.10)$$

millest esimene väljendab lineaarset sõltuvust normaalpinge ja sellele vastava suhtelise normaaldeformatsiooni vahel ja teine sõltuvust nihkepinge ja nihkenurga vahel. Teine seos on üldiselt kehtiv, esimene aga kasutatav ainult tõmbel ja survel. Üldisi sõltuvusi normaalpingete ja suhteliste nor-maaldeformatsioonide vahel, mis väljenduvad lineaarsete seoste süsteemina, vaatleme neljandas peatükis.

Võrdetegurit  $E$  esimeses seoses (1.10) nimetatakse *normaalelastsusmooduliks* või ka *Youngi mooduliks*\*. Võrde-tegur  $G$  kannab nimetust *nihkeelastsus ehk Coulomb'i moo-*

\* Thomas Young (1773...1829) — inglise füüsik, kes mooduli võttis kasutusele 1807. a.

Tabel 1

Materjali tihedus, elastsuskonstandid ja termilise joonpaisumise tegur (TJPT)

Materjal	Tihedus $\rho$ $\frac{\text{Mg}}{\text{m}^3}$	Elastsusmoodulid		Poissoni tegur $\nu$ %	TJPT $\alpha$ ppm
		$E$ GPa	$G$ GPa		
Teras	7,85	210	84	27	12
Malm	7,8	110	44	24	10
Okaspuut	0,5	11	—	—	5
Betoon	2,4	20	9	16	12
Vask	8,9	120	45	34	17
Alumiinium	2,7	70	26	34	26
Seatina	11,4	17	6	45	30
Klaas	2,6	56	22	25	8
Kautšuk	1,6	0,0085	0,0029	47	140

dul. Seostest (1.10) selgub, et elastsusmoodulite mõõtühik ühtib pinge mõõtühikuga.

*Hooke'i* seadust väljendavate seoste (1.10) universaalsus seisneb selles, et nende võrdetegurid, elastsusmoodulid, on füüsikalised konstandid, mis iseloomustavad materjali omadusi ega sõltu vaadeldava keha või süsteemi muudest omadustest. Tabelis 1 on enamlevinud konstruktsioonimaterjalide elastsusmoodulid.

Lineaarsed seosed (1.10) on rakendatavad vaadeldavale materjalile pingete teatavas muutumispiirkonnas, mida nimetatakse *Hooke'i seaduse kehtivuspiirkonnaks*. Mittelineaarset seoseid, mis kehtivad suurematele pingetele väljaspool *Hooke'i seaduse kehtivuspiirkonda*, vaatleme kolmandas peatükis.

**1.7.4. Jõu mõju sõltumatuse printsiip**, sageli nimetatud summeerimis- või superpositsiooni printsiibiks, väidab: *konstruktsiooni (elemendi) le rakendatud lisakoormusest põhjustatud sisejõu-, pinge ja deformatsiooni juurdekasvud ei sõltu varem rakendatud koormusest, ehk teisiti öelduna: konstruktsiooni (elemendi) le rakendatud jõusüsteemi mõju võrdub selle süsteemi üksikute jõudude mõjude summaga.*

Jõu mõju sõltumatuse printsiip on rakendatav siis, kui on kasutatav algmõõtmete printsiip ja kehtiv *Hooke'i seadus*. Põhjenduseks on see, et algmõõtmete printsiip ja *Hooke'i seadus* loovad lineaarsed sõltuvused koormuse ja selle funktsioonide vahel. Jõu mõju sõltumatuse printsiip võimaldab

paljusid keerukaid ülesandeid oluliselt lihtsustada ja leiab sellepärast sageli rakendamist. Tugevusõpetuses esineb aga ka üksikuid probleeme, mille käsitlemisel see printsiip pole rakendatav mittelineaarsete sõltuvuste tõttu.

## 2. TÖMME JA SURVE

### 2.1. NORMAALJÕUD

**2.1.1. Üldmõisted.** Varda tõmme ja surve on tema tööseisundid, mille puhul välisjõud kutsuvad sisejõududest esile varda ristlõikepindades ainult normaaljõu  $N$ . Teised viis sisejõudu puuduvad.

Tõmme ja surve esinevad paljudes konstruktsioonielementides: tõmbid töötavad tõmbele, kandepostid ja toed survele, kandesõrestiku mõned vardad peavad taluma nii tõmme kui survet, mitmekorruseliste hoonete postides mõjub piki varrast muutuv survejõud. Tõmbele ja survele töötavad ka paljud kõverad vardad — tugirõngad, bandaažid, köisteede kandetrossid jt.

Sirge varda tõmbe ja surve kutsuvad esile välisjõud, mis on rakendatud varda teljel ja suunatud selle sihis. Kui telje ühte punkti on rakendatud mitu välisjõudu, siis võivad nad olla ka mitte teljesihilised, kuid nende resultant peab seda olema ja teda vaadeldakse sel juhul välisjõuna.

Kõvera varda tõmbe ja surve võivad esile kutsuda ka mitte teljesihilised välisjõud, kuid selle range tingimusega, et varda mis tahes mõttelisele, ristlõigetega eraldatud osale rakendatud välisjõudude resultant peab tasakaalustuma selle osa lõikepindadel ainult normaaljõududega. Kujutades normaaljõudu varda ühe mõttelise osa ristlõikepinnal vektorina, suunatakse *tõmbejõud lõikepinnast eemale ja survejõud lõikepinna poole*. Arvutustes loetakse tõmbejõud positiivseks ja survejõud negatiivseks normaaljõuks.

Varda tõmbe ja surve erinevus ei piirdu vormilise tunnusega normaaljõu märgis, vaid neil on rida sisulisi eripärasusi, millest siin märgime ühte. See seisneb saleda varda omaduses säilitada oma sirge kuju tõmbele ja kõverduda teatud tingimustes survele. Varda kõverdumist survejõust nimetatakse *nõtkumiseks*. Nõtkunud varras paindub ja lakab kandmast koormat. Surutud saleda varda nõtkumist võib vaadelda, surudes käte vahel peent ja pikka varrast, näiteks sukavarrast. Surutud varda nõtkumist uurime omaette probleemina hiljem. Seni aga väldime varda surve ülesan-

netes nõtkohtlikke vardaid ja piirdume küllalt tüsedate var-  
rastega.

**2.1.2. Normaalgõu määramine.** Varda normaalgõu  $N$   
määrame lõikemeetodiga. Lõikemeetodit kirjeldasime jaotis-  
ses 1.5.3., millele lisame mõned praktilised näpunäited.  
1) Normaalgõudu varda vaadeldava osa ristlõikepinnal on  
soovitatav kujutada tõmbejõuna, siis saame tasakaalutingimu-  
sest  $\sum X=0$  lahendi, mille märk õigesti tunnustab normaalgõu  
kas tõmbe- või survejõuks. 2) Tasakaalutingimuses tuleb  
tundmatut normaalgõudu lõikepinnal vaadelda välisjõuna ja  
anda talle märk vastavalt sellele tunnusele, kuidas ta on  
arvutusskeemil suunatud  $x$ -telje suhtes. 3) Kui vaatleme  
varda seda osa, mis on kinnitatud alusele, siis ei tohi tasa-  
kaalutingimusest välja jätta reaktsioonijõudu.

**Näide 2.1.** Määrame sisejõu tõmbis, mille arvutusskeem on jooni-  
sel 2.1, a.

Kasutame lõikemeetodit. Mõttes teeme ristlõike  $n$  ja vaatleme toe  $A$   
poolset osa joonisel  $b$ . Suuname  $x$ -telje toelt  $A$  toe  $B$  suunas ja raken-  
dame lõikepinnal tõmbejõule vastava (positiivse) normaalgõu  $N$ . Vaa-  
deldava osa tasakaalutingimusest

$$\sum X=0; \quad -F_1+N=0$$

avaldame otsitava normaalgõu

$$N=F_1=280 \text{ kN.}$$

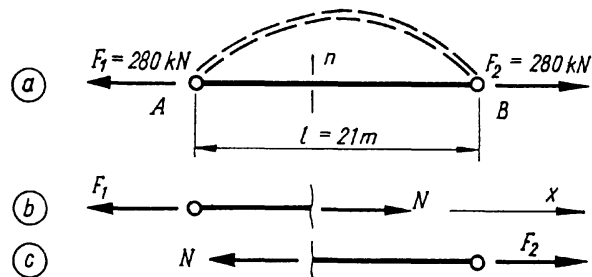
Positiivne tulemus näitab, et tegemist on tõmbejõuga.

Arvutame sama sisejõu toe  $B$  poolse osa tasakaalutingimusest (joo-  
nis  $c$ ):

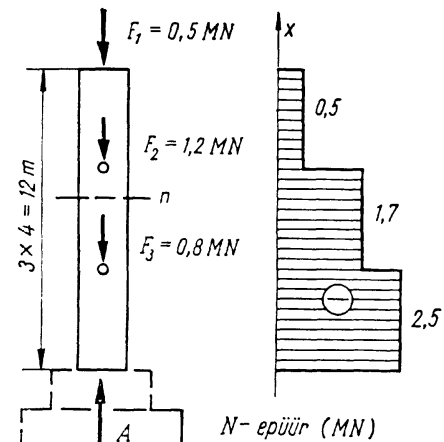
$$\sum X=0; \quad -N+F_2=0; \quad N=F_2=280 \text{ kN.}$$

Sama suur tõmbejõud mõjub varda kõikides ristlõigetes.

Lõikemeetodit sisejõudude määramiseks arendasime üldi-  
sel kujul alapunktis 1.5.5., kus on esitatud avaldised (1.3).  
Esimene nendest annab tõmbe ja surve erijuhul



Joon. 2.1



Joon. 2.2

$$N = -\sum_{i(I)} F_i = \sum_{i(II)} F_i, \quad (2.1)$$

kus  $F_i$  on vardale rakendatud välisjõud,  $i(I)$  nõuab kõikide  
nende välisjõudude summeerimist, mis on rakendatud varda  
ühele osale, lõikepinna välisnormaaliga  $x$ -telje positiivses  
suunas ja  $i(II)$  tähistab ülejäänud välisjõudude summeeri-  
mist, mis on rakendatud varda teisele, negatiivse välisnor-  
maaliga osale.

Lõikemeetodi rakendust valemite (2.1) najal vaatleme  
järgmises näites.

**Näide 2.2.** Määrame sisejõu kolmekorruselise hoone vahelagesid  
kandvas postis, mille arvutusskeem on kujutatud joonisel 2.2. Posti suh-  
teliselt väike omakaal on võetud arvesse skeemil näidatud välisjõudude  
koosseisus.

Eraldame posti vundamendilt  $A$  ja selle reaktsiooni asendame  
jõuga  $A$ . Posti tasakaalutingimusest avaldame otsitava jõu  $A$ .

$$\sum X=0; \quad A=2,5 \text{ MN.}$$

Kasutame sisejõu määramisel avaldist (2.1) ja arvutame normaalgõu  
 $N_2$  teisel korrusel ristlõikes  $n$ . Telje  $x$  suuname vertikaalselt üles.  
Vaatleme posti ülemist osa, mille mõeldava ristlõike välisnormaal on  
suunatud alla, see tähendab  $x$ -telje vastassuunas. Järelikult kasutame  
avaldis (2.1) teist osa:

$$N_2 = \sum_{i(II)} F_{ix} = -F_1 - F_2 = -0,5 - 1,2 = -1,7 \text{ MN,}$$

milles miinuskärgid on kirjutatud jõudude  $F_1$  ja  $F_2$  ette selle tunnuse  
järgi, et nad on suunatud  $x$ -telje vastassuunas. Tulemuse saime miinus-  
märgiga, mis näitab, et normaalgõuna esineb survejõud.

Arvutame  $N_2$  veel kord, vaadeldes posti alumist osa. Ristlõikest  $n$   
allapoole jääva lõikepinna välisnormaali suund ühtib  $x$ -telje positiivse  
suunaga. Seepärast kasutame avaldis (2.1) esimest osa:

$$N_2 = -\sum_{i(I)} F_i = -(A - F_3) = -2,5 + 0,8 = -1,7 \text{ MN.}$$

Tulemus on võrdne eelmisega.

Samal korral posti teistes ristlõigetes mõjub sama suur survejõud, sest sisejõu avaldise koostis ei muutu jõudude  $F_2$  ja  $F_3$  rakenduspunktide vahelisel posti osal.

Avaldise (2.1) abil määrame normaaljõud samuti esimesel ja kolmandal korral:

$$N_1 = -\sum_{i(I)} F_i = -A = -2,5 \text{ MN;}$$

$$N_3 = \sum_{i(II)} F_i = -F_1 = -0,5 \text{ MN.}$$

Parema ülevaate posti muutuvast survejõust saame, kui kujutame normaaljõu epüüri (graafiku), millel näitame normaaljõu suurused ja mõõtühiku.

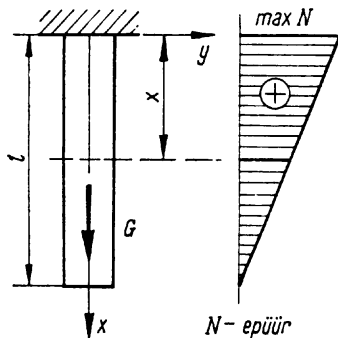
Normaaljõu arvutamisel võime kasutada ka reeglit, mille vormistame avaldise (2.1) najal. Esitame siin ühe, lihtsustatud reegli, mis peab silmas normaaljõu arvatust sirges vardas.

*Normaaljõud sirge varda ristlõikest on võrdne ühel pool vaadeldavat ristlõiget rakendatud teljesihiliste välisjõudude summaga, milles ristlõikest eemale suunatud jõudu loetakse positiivseks, ristlõike poole suunatud negatiivseks.*

Uurime selle reegli najal varda sisejõudu omakaalust. Joonisel 2.3 on kujutatud vertikaalselt rippuv varras ristlõikepindala  $A$  ja materjali erikaaluga  $\gamma$ .

Normaaljõud varda ristlõigetel on pidevalt muutuv suurus. Seepärast vaatleme ristlõiget kaugusel  $x$  ja käsitleme normaaljõudu funktsioonina  $N=N(x)$ . Vaadeldavast ristlõikest allapoole jäävale osale mõjub üks välisjõud, selle osa kaal  $G$ :

$$G = \gamma A (l - x).$$



Joon. 2.3

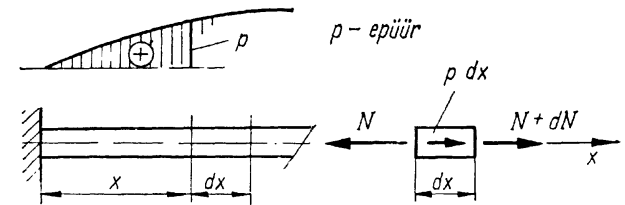
Avaldame normaaljõu reegli najal. Varda alumisele osale mõjuv välisjõud on suunatud vaadeldavast ristlõikest eemale. Järelikult:

$$N = G = \gamma A (l - x). \quad (2.2)$$

Tõmbejõud on lineaarselt muutuv ja kinnituskohas, kus  $x=0$ , omandab suurima väärtuse

$$\max N = \gamma A l. \quad (2.3)$$

**2.1.3. Diferentsiaalseos.** Tõmbe ja surve sirges vardas kutsub esile sageli teljesuunaline välisjõud, mis on vaadeldav teljel lauskoormusena. Siia kuulub vertikaalse varda omakaal, pöörleva varda inertsijõud jt. Lauskoormusest saab normaaljõu määrata eelmises jaotises kirjeldatud võtetega. Selleks võib aga kasutada veel üht seost, mis sageli osutub otstarbekaks normaaljõu määramisel ja on peale selle laiema rakendusliku tähtsusega mõnede keerukamate ülesannete lahendamisel.



Joon. 2.4

Lauskoormuse intensiivsus  $p$  olgu antud pideva funktsioonina  $p(x)$  varda teljel. Joonisel 2.4 on kujutatud osa vardast ja selle kohal  $p$  graafik ehk koormusepüür.

Varda telje punktis, mille koordinaat on  $x$ , mõjugu lauskoormuse intensiivsus  $p$ . Samas kohas mõjub tundmatu normaaljõud  $N$ , mis koordinaadi  $x$  kasvades  $dx$  võrra saab juurdekasvu  $dN$ . Kasutame lõikemeetodit ja eraldame mõttes vardast kahe lõikega väikse osa pikkusega  $dx$ . Seame eraldatud osale tasakaalutingimuse:

$$\sum X = 0; \quad N + dN - N + p dx = 0$$

ja saadud võrrandist avaldame seose:

$$\frac{dN}{dx} = -p. \quad (2.4)$$



Vaadeldes diferentsiaalseost võrrandina võime sellest avaldada normaaljõu üldlahendina:

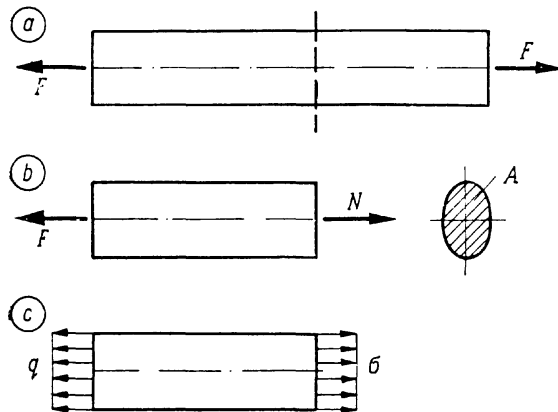
$$N = -\int p \, dx. \quad (2.5)$$

Erilahendi leidmiseks integreerimiskonstandi määrame ääritingimusest, millena vaatleme normaaljõudu integreerimispiirkonna alguses või lõpus. Staatikaga määratud ülesandes leidub alati ääritingimus.

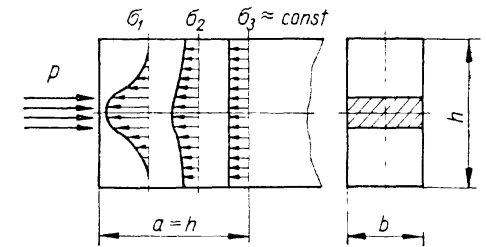
Varda normaaljõu määramisel kasutame avaldist (2.5) harva, sest et eelmises alapunktis kirjeldatud võtted võimaldavad seda teha mitte halvemini. Diferentsiaalseost (2.4) kasutame aga edukalt normaaljõu analüütilise avaldise või selle epüüri kontrollimiseks. Seosest järeldeb: kui varda mingil osal koormus puudub ( $p=0$ ), siis normaaljõud peab seal olema ühtlane ( $N=const$ ); kui vardale mõjub teljel ühtlaselt lauskoormus ( $p=const$ ), siis normaaljõud peab seal olema kirjeldatud lineaarfunktsiooniga jne.

## 2.2. ÜHTLANE TÖMME JA SURVE

**2.2.1. Pinge ristlõikes.** Vaatleme sirget ja ühtlase ristlõikepindalaga  $A$  varrast (joonis 2.5,a), mis on koormatud tasakaalustatud jõududega  $F$ . Rakendades lõikemeetodit (joonis 2.5,b), määrame vardas normaaljõu  $N=F$ , mis osutub ühtlaseks varda kogu pikkusel. Vardas tekib *ühtlane tõmme*. Kui muudame jõudude suunad vastupidiseks, saame *ühtlase surve*.



Joon. 2.5



Joon. 2.6

Oletame, et normaaljõud jaguneb ristlõikepinnal ühtlaselt ja normaalpinged selle pinna kõikides punktides on võrdsed, nagu kujutame joonisel 2.5,c. Konstantse normaalpinge avaldame valemiga:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.6)$$

Oletus normaaljõu ühtlasest jagunemisest ristlõikepinnal peab täpselt paika, kui välisjõud varda otspindadel on rakendatud ühtlaselt jaotatud pinnajõududena nagu on kujutatud joonisel 2.5,c. Seejuures välisjõu intensiivsus  $q=F/A$  varda otspindadel võrdub normaalpingega mis tahes ristlõikepinnal.

Kui välisjõud rakendub varda otspinna väiksel alal, näiteks nii nagu näidatud joonisel 2.6, siis tekib varda otsapiirkonnas keerukas ebaühtlane pingestatund seisund, mille uurimine pole jõukohane tugevusõpetusele. *Saint-Venant* uuris seda probleemi ja tuli järeldusele, et jõu rakendusviisist tulenev pingete ebaühtlus esineb varda väiksel alal jõu rakenduskohas ja selle vahetus läheduses. Juba suhteliselt väiksel kaugusel pinged ühtlustuvad. Oma ettepaneku võttis *Saint-Venant* kokku järgmises juhises: *pinged võib lugeda ühtlaseks varda ristlõikepinna suurima mõõtme kaugusel ja kaugemal jõu rakenduskohast*. Soovitav suurus on saadud eeldusel, et koondjõud mõjub varda otspinna keskmes. Nii-sugune jõu rakendus, olgugi praktiliselt teostamatu, kujutab endast teoreetiliselt kõige ebasoodsamat jõu ülekannet vardale, millest kõik praktilikas kasutatavad viisid annavad ühtlasema pinget varda otsas.

*Saint-Venant*'i printsiip varda ühtlase tõmbe ja surve tugevusarvutuses seisneb selles, et *vardale mõjuvad jõud kujutame koondjõududena ja varda pingestatund seisundi loeme ühtlaseks, jättes vaatlusest välja väikesed piirkonnad jõudude rakenduskohades*. Seda printsiipi vaatlesime üldi-

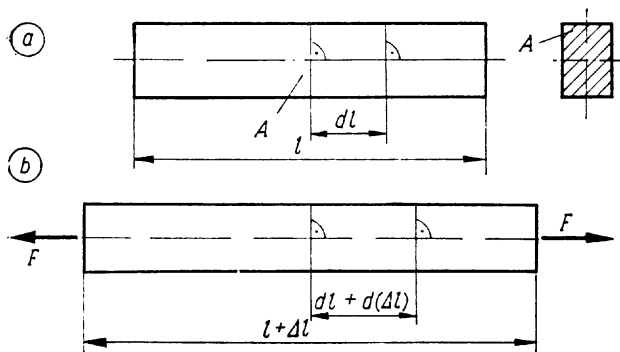
semalt jaotises 1.4.3. ja tema teiste rakendustega puutume kokku edaspidi.

*Saint-Venant*'i printsiip võimaldab sõltumata välisjõude rakendusviisi kasutada ühtset arvutusskeemi kõikidele ühtlasele tõmbele ja survele allutatud varrastele ja määrata normaalpinge ristlõikes valemiga (2.6).

**2.2.2. Varda pikenedamine.** Ühtlasele tõmbele allutatud varras pikeneb  $\Delta l$  võrra, nagu on kujutatud joonisel 2.7. Pikenedamine (lühenedamine) on varda põhiline deformatsioon tõmbel (survel). Pikenedamise loeme positiivseks, lühenedamise negatiivseks deformatsiooniks. Määrame varda pikenedamise ühtlasest normaaljõust  $N=F$ .

Oletame, et varda deformeerumisel ristlõikepinnad ei kõverdu ja säilitavad ristseisu varda teljega. Seda oletust tunneme *Bernoulli hüpoteesina* jaotisest 1.6.3. Ristlõikepindade tasandilise hüpoteesi peab täpselt paika, kui välisjõud varda otspindadel jagunevad ühtlaselt. Teiste koormamisviiside puhul rakendame ka siin *Saint-Venant*'i printsiipi, nagu tegime seda pingete uurimisel, ja peame silmas, et varda otsadel võib esineda ristlõikepindade tähtsusetut kõverdamist.

Märgime koormamata vardas joonisel 2.7,a ristlõikepinna  $A$  ja sellest väiksel kaugusel  $dl$  teise ristlõikepinna. Deformeerunud seisundis (joonis 2.7,b) säilitavad ristlõikepinnad kooskõlas *Bernoulli* hüpoteesiga paralleelsuse, kuid nende vahekaugus saab juurdekasvu  $d(\Delta l)$ . Ristlõikepinna  $A$ , mis tahes punktis on suhteline normaaldeformatsioon avaldatav seose (1.6) järgi:



Joon. 2.7

$$\frac{d(\Delta l)}{dl} = \epsilon. \quad (2.7)$$

*Hooke*'i seadust väljendavatest seostest (1.10) esimene ja normaalpinge valem (2.6) lubavad suhtelise normaaldeformatsiooni varda ristlõikepinna mis tahes punktis avaldada järgmiselt:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}, \quad (2.8)$$

kus  $E$  on materjali normaalelastsusmoodul,  $A$  — varda ristlõikepindala ja nende korrutis  $EA$  kannab nimetust varda *tõmbejäikus*, mille dimensioon ühtib jõu dimensiooniga.

Valemist (2.8) nähtub, et  $\epsilon$  on muutumatu ühtlase varda kogu pikkusel  $l$  ja järelkult seoses (2.7) võime tuletise asendada vastavate lõplike suuruste suhtega:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.9)$$

mis on tuntud *varda suhtelise pikenedamisena*.

Avaldame seosest (2.9) varda pikenedamise  $\Delta l = \epsilon l$ , milles  $\epsilon$  asendame oma väärtusega (2.8). Saame valemi

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (2.10)$$

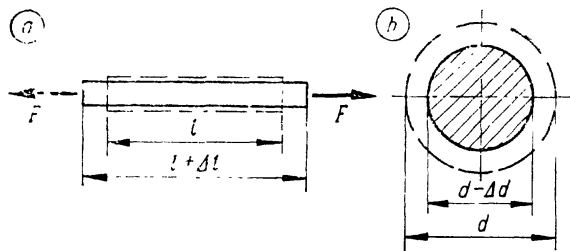
millega arvutame varda pikenedamise ühtlasest normaaljõust ja mida tuntakse ka *Hooke*'i seadusena tõmbel ja survele, sest ta väljendab varda deformatsiooni lineaarset sõltuvust normaaljõust.

**2.2.3. Poissoni tegur.** Katse ja kogemus näitavad, et tõmbejõust pikenenud varras muutub peenemaks ja survejõust lühenenud varras jämedamaks.

Vaatleme ümarat varrast, mille pikkus  $l$  ja läbimõõt  $d$  (joonis 2.8). Koormamata varras on kujutatud kriipsjoonega. Välisjõududega  $F$  koormatud vardas tekib ühtlane normaaljõud  $N=F$ , mis põhjustab *pikideformatsiooni*  $\Delta l$  ja kogu varda ulatuses ühtlase *põikdeformatsiooni*  $\Delta d$ . Põikdeformatsioon  $\Delta d$  tõmbejõust on negatiivne suurus, sest ta näitab läbimõõdu  $d$  vähenemist. Survejõust tekib positiivne põikdeformatsioon. Järelikult deformatsioonid  $\Delta l$  ja  $\Delta d$  on ühes ja samas koormusseisundis vastasmärgilised suurused.

Varda *suhtelise pikideformatsiooni*  $\epsilon = \Delta l/l$  kõrval võtame kasutusele *suhtelise põikdeformatsiooni*

$$\epsilon' = \frac{\Delta d}{d}, \quad (2.11)$$



Joon. 2.8

mis on samuti dimensioonita suurus. Suhteline põik- ja pikideformatsioon on vastasmärgiga suurused, mille suhe on igale materjalile iseloomulik konstant:

$$\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|. \quad (2.12)$$

Suhtearv  $\nu$  kannab nimetust *Poissoni tegur*\*. Poisson vaates tegurit  $\nu$  universaalse konstandina kõikidele materjalidele, võttes selle väärtuseks 0,25. Hiljem selgus, et  $\epsilon'$  ja  $\epsilon$  suhted mitmesugustel materjalidel võivad olla erinevad, kuid jäävad piiridesse  $0 \leq \nu \leq 0,5$ . Viimast seisukohta kinnitasid täpsetele mõõtmistele tuginevad eksperimentaalsed uurimused möödunud sajandi teisel poolel. Näiteks korgitammekoore  $\nu$  on nullilähedane, kummil 0,5 lähedane. Terasel *Poissoni* tegur on piirides 0,25...0,33 olenevalt sortidist. Enamkasutatavate materjalide  $\nu$  ligikaudseid väärtusi on esitatud tabelis 1.

*Poissoni* tegurit koos elastsusmodulitega tuntakse üldnimetusega *elastsuskonstandid*.

**2.2.4. Punkti siire.** Vaatlesime sidemetest vabastatud varda pinget ja deformatsiooni. Alusele kinnitatud varda deformeerunud seisundi kirjeldamisel kasutame eespool käsitletud suuruste kõrval veel punkti siiret. Jaotisest 1.6.1 teame, et punkti siire näitab selle teisaldumist aluse suhtes.

Varda punktide siirete kirjeldamisel piirdume teljel asuvate punktidega, sest varda deformeerunud telg määrab kogu varda deformatsiooni, kui peame silmas *Bernoulli* hüpoteesi. Lihtsustame vastavalt ka arvutusskeemi ja kuju-

\* Siméon Denis Poisson (1781...1840) — prantsuse füüsik ja matemaatik, kes nimetatud füüsikalise konstandi võttis kasutusele 1829. a.

tame süsteemi joonisel 2.9, kus varras on näidatud ainult telgjoonega.

Koormates varrast jõuga  $F$ , nagu on näidatud joonisel 2.9, tekib ühtlane normaaljõud  $N=F$ . Varda deformeerumine põhjustab tema punktide liikumise telje sihis, välja arvatud kinnituspunkt  $A$ , mis jääb paigale. Järelikult kirjeldab varda telje punkti teisaldumist ainult  $x$ -telje suunaline siire  $u$ . Varda koormatud ots saab suurima siirde  $\max u$ , mis on võrdne varda pikeningega  $\Delta l$  ja avaldub valemiga (2.10). Sama valemiga võime määrata ka vabalt valitud punkti  $B$  siirde, kui asendame varda pikkuse  $l$  kaugusega  $x$ . Põhjendus on selles, et varda koormatud otsa siire tuleneb varda deformatsioonist kogu pikkusel, punkti  $B$  siire aga deformeerumisest vaadeldava punkti ja kinnituskoha  $A$  vahelises osas

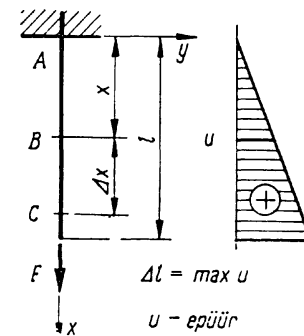
$$u = \frac{N}{EA} x, \quad (2.13)$$

kust nähtub, et vaadeldavas süsteemis varda punkti siire avaldub lineaarses seoses selle punkti kaugusega kinnituskohast. Joonisel 2.9 on kujutatud siirdeepüür.

Kujutame vardas kaks vabalt valitud punkti  $B$  ja  $C$  koordinaatidega vastavalt  $x$  ja  $x+\Delta x$ , mille siirded on  $u_B$  ja  $u_C$ . Punktide  $B$  ja  $C$  vahekauguse muutuse ehk nendevahelise normaaldeformatsiooni saame avaldada punktide siirete vahena:

$$\Delta l_{BC} = u_C - u_B = \frac{N}{EA} (x_C - x_B). \quad (2.14)$$

Asendades seoses (2.14) suuruse  $N/EA$  varda suhtelise normaaldeformatsiooniga  $\epsilon$  valemist (2.8) ja punkti  $C$  koor-



Joon. 2.9

dinaadi  $x_B + \Delta x$ , saame avaldada

$$\varepsilon = \frac{u_C - u_B}{x_C - x_B} = \frac{u_C - u_B}{\Delta x}. \quad (2.15)$$

Näide 2.3. Pöördume tagasi näite 2.1 juurde. Arvutame tõmbi pinget, pikenemise ja varda ahenemise. Vaadeldud ülesandest saame, et tõmbejõud  $N=280$  kN ja pikkus  $l=21$  m. Tõmb soovitakse valmistada ümarterasest läbimõõduga  $d=50$  mm, mille elastsusmoodul  $E=210$  GPa ja Poissoni tegur  $\nu=0,31$ .

Tõmbi ristlõikepindala  $A=\pi d^2/4=3,14 \cdot 50^2/4=19,60$  cm<sup>2</sup>. Normaalsi pinget arvutame valemiga (2.6):  $\sigma = N/A = 280 \cdot 10^3 / (19,6 \cdot 10^{-4}) = 14,26 \cdot 10^7$  Pa = 142,6 MPa. Tõmbi pikenemise arvutame valemiga (2.10):  $\Delta l = Nl / (EA) = 280 \cdot 10^3 \cdot 21 / (210 \cdot 10^9 \cdot 19,6 \cdot 10^{-4}) = 0,0143$  m = 14,3 mm. Varda ahenemise avaldame seosest (2.11), asendades suurused seostest (2.12) ja (2.9):  $\Delta d = d\varepsilon' = -d\nu\varepsilon = -d\nu\Delta l/l = -0,05 \cdot 0,31 \cdot 0,0143/21 = 1,06 \cdot 10^{-5}$  m = 10,6 µm.

Lahend: varda tõmbepinge on 142,6 MPa, pikenemine 14,3 mm ja ahenemine 10,6 µm.

### 2.3. ASTMELISELT MUUTUV TÕMME JA SURVE

Vaatleme astmeliselt muutuva ristlõikepindalaga ja koondjõududega koormatud varda pingete ja deformatsiooni arvutamist. Niisuguse varda näiteks on kõrghoone karkassi post. Ühe näitena vaatlesime varrast jaotises 2.1.2 (näide 2.2). Vaadeldavate varraste iseloomulikuks omaduseks on ristlõikepindala  $A$  ja normaaljõu  $N$  astmeline muutus piki varrast teatavates ristlõigetes ja nende suuruste konstantsus muutekohtade vahemikes.

Jaotame varda lõikudeks  $N$  ja  $A$  muutekohtades. Iga lõik vardast kujutab selle ühtlast osa muutumatu normaaljõuga, mille jaoks rakendame eelmises jaotises saadud valemiteid ja seoseid pinget ja deformatsiooni arvutamisel.

Pingetest kogu varda ulatuses saame parema ülevaate, kui kujutame nad epüürina. Ühtlase varda pingepüür on sarnane normaaljõu epüüriga ja vajadust selle järgi tunneme ainult siis, kui pole tehtud  $N$ -epüür. Muutuva ristlõikega varda pingepüüril see sarnasus puudub.

Varda pikenemise arvutame kõikide ühtlaste lõikude deformatsioonide summana. Punkti siirde arvutame ühtlaste lõikude deformatsioonide summana varda selles piirkonnas, mis jääb vaadeldava punkti ja kinnituskoha vahele. Kahe punkti vahekauguse muutuse arvutame nende punktide vahelise vardaosa deformatsioonide summeerimise teel. Toodud juhise võib kokku võtta valemitega:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{A_i} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \sigma_i l_i;$$

$$\Delta l = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^n N_i l_i, \quad (2.16)$$

kus  $n$  on summeerimisele kuuluvate ühtlaste lõikude arv ja  $i$  tähistab astmeliselt muutuva suuruse järjenumbrit.

Esimest valemiteid (2.16) kasutame üldjuhul, teist erijuhtumil, kui varras on ühtlase ristlõikepinnaga. Esimest valemiteid on väljendatud kahel võrdväärse viisil, seejuures normaaljõu jagatis ristlõikepindalaga on asendatud valemiteid (2.6) normaalpingega.

Astmeliselt muutuvas vardas esineb ebaühtlane pingejaoitus nendes kohtades, kus ristlõikepind muutub. Üleminek ühelt ühtlaselt varda lõigult teisele pideva materjaliga varrastes tehakse keevitusega, mehaanilise töötusega või vajaliku kaju andmisega valamisel vormi või raketisse. Monteeritud varrastes teostatakse liited mitmesuguste detailide, nagu muhvide, äärikute, neetide, poltide jm. abil. Tugevusõpetus vaatab ristlõikepinna muutekohti ja varraste liiteid iseseisvate probleemidena, sest et nende rakendusala on palju laiem kasutamisest tõmbele ja survele töötavate varraste jätkudes ja ristlõikepinna muutumise kohtades. Mõningaid neist probleemidest vaatleme käesolevas õpikus, teistega teeme tutvustava konstruktsiooni käsitlevates õppeainetes. Siinkohal püüme jälle viitega *Saint-Venant'i printsiibile*, mis sel puhul ütleb, et *varda pingestatud seisund liitekohal lähedal on häiretega, mis aga ei levi kaugemale põikpinna suurimast mõõtmest*. Varda deformatsioonidele ja punktide siiretele need häired märgatavat mõju ei avalda.

Näide 2.4. Jätkame näidet 2.2. Esitame posti pingepüüri, määrame lühenemise ja keskkoha paigaldatud reeperi siirde. Algselt võtame vaadeldud ülesandest ja lisame, et post on tehtud terastorst, mille välismõõt  $D=400$  mm ja seinapaksus  $\delta=14$  mm. Teraselastsusmoodul  $E=205$  GPa.

Ristlõikepindala  $A=\pi(D-\delta)\delta=3,14(0,400-0,014)0,014=0,0170$  m<sup>2</sup>.

Normaalpinged valemiga (2.6):  $\sigma_1 = N_1/A = -2,5 \cdot 10^6 / 1,7 \cdot 10^{-2} = -1,471 \cdot 10^8$  Pa = -147,1 MPa;  $\sigma_2 = N_2/A = -1,7 \cdot 10^6 / 1,7 \cdot 10^{-2} = -1,0 \cdot 10^8$  Pa = -100 MPa;  $\sigma_3 = N_3/A = -0,50 \cdot 10^6 / 1,7 \cdot 10^{-2} = -0,294 \cdot 10^8$  Pa = -29,4 MPa.

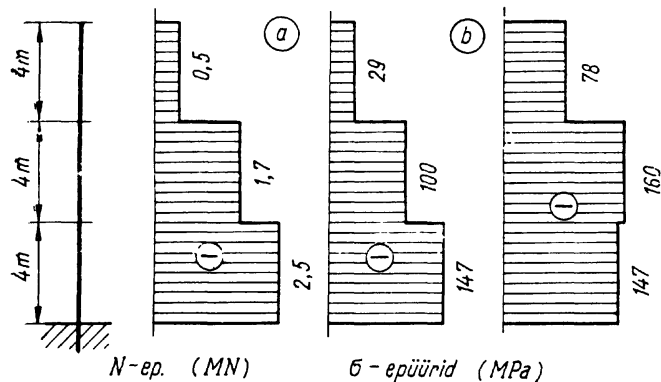
Posti lühenemise arvutame teise valemiteid (2.16):

$$\Delta l = [1/(EA)] \sum N_i l_i = [1/(2,05 \cdot 10^{11} \cdot 1,7 \cdot 10^{-2})] (-2,5 \cdot 10^6 - 1,7 \cdot 10^6 - 0,5 \cdot 10^6) \cdot 4,0 = -5,39 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx -5,4 \text{ mm}.$$

Reeperi vajumise arvutame samuti teise valemiga (2.16) posti alumise poole ulatuses:

$$u = [1/(2,05 \cdot 10^{11} \cdot 1,7 \cdot 10^{-2})] (-2,5 \cdot 10^6 \cdot 4,0 - 1,7 \cdot 10^6 \cdot 2,0) = -3,84 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx -3,8 \text{ mm}.$$

Lahend: Posti pingepüür on esitatud joonisel 2.10, a, post lüheneb 5,4 mm ja reeper vajub 3,8 mm.



Joon. 2.10

Vaatame sama ülesande teist varianti, milles algandmetest on muudetud posti seinapaksus teisel ja kolmandal korrusel. Olgu teisel korrusel toru seinapaksus  $\delta_2=10$  mm ja kolmandal  $\delta_3=6$  mm. Esimesel korrusel jääb seinapaksus endiseks.

Ristlõikepindala:  $A_1=0,0170$  m<sup>2</sup>;  $A_2=0,0106$  m<sup>2</sup>;  $A_3=0,0064$  m<sup>2</sup>.  
Normaalpinged:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= N_1/A_1 = -2,5 \cdot 10^6 / 1,7 \cdot 10^{-2} = -1,47 \cdot 10^8 \text{ Pa} = -147 \text{ MPa}; \\ \sigma_2 &= N_2/A_2 = -1,7 \cdot 10^6 / 1,06 \cdot 10^{-2} = -1,60 \cdot 10^8 \text{ Pa} = -160 \text{ MPa}; \\ \sigma_3 &= N_3/A_3 = -0,5 \cdot 10^6 / 0,64 \cdot 10^{-2} = -0,78 \cdot 10^8 \text{ Pa} = -78 \text{ MPa};\end{aligned}$$

Posti lühenemise arvutame esimesega valemist (2.16):

$$\Delta l = (1/E) \sum \sigma_i l_i = [1/(2,05 \cdot 10^{11})] (-1,47 \cdot 10^8 - 1,6 \cdot 10^8 - 0,78 \cdot 10^8) 4,0 = -7,52/10^{-3} \text{ m} \approx -7,5 \text{ mm}.$$

Reeperi vajumise arvutame sama valemiga posti alumise poole ulatuses:

$$u = [1/(2,05 \cdot 10^{11})] (-1,47 \cdot 10^8 \cdot 4 - 1,6 \cdot 10^8 \cdot 2) = -4,44 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx -4,4 \text{ mm}.$$

**Lahend:** Posti pingepüür on esitatud joonisel 2.10, b, post lüheneb 7,5 mm ja reeper vajub 4,4 mm.

Võrdleme selle ülesande kahte varianti terasekulu seisukohalt. Esimese variandi puhul on posti mass 1,59 t, teise puhul 1,19 t. Kui asendame ühtlase posti muutuva ristlõikega postiga, hoiame terast kokku 25%. Võrreldes pingepüürisid, näeme, et teise variandi puhul on pingete jagunemine piki posti märgatavalt ühtlasem, mis tõendab materjali ökonoomsemat kasutamist. Veidi suuremad deformatsioonid teise variandi puhul harilike hoonete ehitamisel mureks ei ole.

## 2.4. PIDEVALT MUUTUV TÕMME JA SURVE

**2.4.1. Varda arvutus.** Vaatleme pidevalt muutuvat tõmme ja survet.

Normaaljõudu  $N$  ja ristlõikepindala  $A$  käsitleme pidevalt muutuvate suurustena, funktsioonidena argumentil  $x$ . Vahele on kasutatavad ühtlase tõmbe valemid (2.6) ja (2.8) vastavalt normaalpinge  $\sigma$  ja suhtelise deformatsiooni  $\epsilon$  määramiseks. Need seosed kehtivad sellepärast, et nendes vaadeldakse suurusi ühes ristlõikes, kus nad on konstantse tähendusega nii ühtlasel kui ka varda telje sihis muutaval tõmbel.

Need ühtlase tõmbe ja surve valemid, mis sisaldavad varda pikkust  $l$ , selle lõplikke elemente, argumenti  $x$  või argumentide vahesid, pole muutuvale tõmbele ja survele rakendatavad.

Vaatleme ühtlase tõmbe ja surve suhtelise deformatsiooni  $\epsilon$  avaldist (2.15) ja joonist 2.9. Avaldise nimetajas on varda pikenemine kahe punkti vahel ja lugejas nende punktide vaheline kaugus. Muutuva tõmbe ja surve suhtelisest normaaldeformatsioonist võime rääkida ühes punktis ja selle saame avaldada, kui arvutame piirväärtuse:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_C - u_B}{\Delta x} = \frac{du}{dx} = u'. \quad (2.17)$$

Diferentsiaalseost vaatleme muutuva tõmbe ja surve põhivõrrandina ja tema sisu sõnastame järgmiselt: *tõmbel ja survel on siiret väljendava funktsiooni tuletis võrdne suhtelise pikideformatsiooniga.*

Puuduvad seosed ja valemid varda arvutamiseks muutuva tõmbe ja surve tingimustes saame võrrandist (2.17). Alustame punkti siirdega kaugusel  $x$  varda kinnituskohast, kuhu on paigaldatud ka teljestiku algus. Asendame seoses (2.17) suhtelise deformatsiooni  $\epsilon$  seosega (2.8) ja eraldame muutujad. Rakendame otsest integreerimist ja toome elastsusmooduli  $E$  konstantse suurusena integraali märgi ette:

$$u = \frac{1}{E} \int_0^x \frac{N}{A} dx. \quad (2.18)$$

Saadud tulemus on erilahend, mis väljendub ülemise muutuva rajaga integraali abil.

Vardal valitud kahe punkti  $B$  ja  $C$  vahekauguse muutuse arvutame nende punktide siirete vahena:

$$\begin{aligned}\Delta l_{BC} &= u_C - u_B = \frac{1}{E} \left( \int_0^{x_C} \frac{N}{A} dx - \int_0^{x_B} \frac{N}{A} dx \right) = \\ &= \frac{1}{E} \int_{x_B}^{x_C} \frac{N}{A} dx,\end{aligned}\quad (2.19)$$

kus määratud integraal arvutatakse punktide  $B$  ja  $C$  vahemikus.

Varda pikenemise  $\Delta l$  arvutame määratud integraaliga varda kogu pikkusel  $l$

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_l \frac{N}{A} dx. \quad (2.20)$$

Muutuva tõmbe ja surve erijuhtumil, kui varras on ühtlane ja muutub ainult normaaljõud  $N$ , võime valemities (2.18...2.20) tuua integraali märgi alt välja ka suuruse  $A$  ja integreerida ainult normaaljõudu piki varrast. Nendes valemities peame veel silmas, et suuruse  $N/A$  võime asendada valemities (2.6) normaalpingega  $\sigma$ .

**2.4.2. Varda omakaal.** Jaotises 2.1.2 tegime kindlaks, et vertikaalses vardas tekib normaaljõud, mis avaldub seosega (2.2).

Pinge avaldame valemities (2.6):

$$\sigma = \frac{N}{A} = \gamma(l - x); \quad \max \sigma = \gamma l, \quad (2.21)$$

kus  $\gamma$  on varda materjali erikaal ja  $l$  pikkus. Suurim pinge tekib varda kinnituskohas. Pingeepüür on kujutatud joonisel 2.11.

Varda punkti siirde avaldame valemities (2.18) milles normaaljõu võtame seosest (2.2):

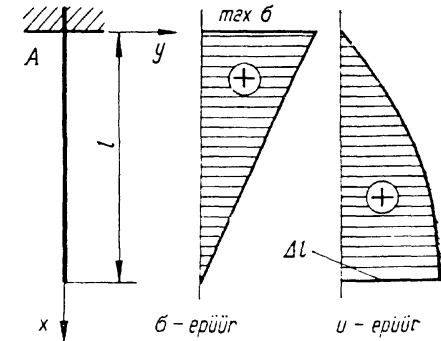
$$u = \frac{1}{EA} \int_0^x N dx = \frac{1}{EA} \int_0^x \gamma A(l - x) dx = \frac{\gamma}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right). \quad (2.22)$$

Varda pikenemise arvutame valemities (2.20):

$$\Delta l = \frac{1}{EA} \int_l N dx = \frac{1}{EA} \int_l \gamma A(l - x) dx = \frac{\gamma A l^2}{2AE} = \frac{Gl}{2EA}, \quad (2.23)$$

kus  $G = \gamma A l$  on varda kaal.

Varda punkti siirdeepüür on kujutatud joonisel 2.11, kus on näidatud ka varda pikenemine. Kõik eeltoodud seosed on



Joon. 2.11

samal kujul rakendatavad ka alumisest otsast toetatud vardale, milles omakaalust tekib surve.

Tulemust (2.23) võrdleme valemities (2.10). Selgub, et valemities (2.10) on normaaljõud, mis on võrdne varda otsal rakendatud välisjõuga  $F$ , asendunud tulemities (2.23) varda omakaaluga  $G$  ja nimetajas lisandub kordaja 2. Järelikult varda pikenemine omakaalust on kaks korda väiksem pikenemisest, mida tekitab omakaaluga võrdne jõud varda otsal.

Nagu nähtub saadud tulemitiesest, pinge ja deformatsioon varda ristlõikepindalast ei sõltu.

**2.4.3. Tõmbe ja surve üldjuhtum.** Mõnikord võivad liituda suuruste  $N$  ja  $A$  astmeline ja pidev muutumine, s.t. varras on koormatud lauskoormusega ja koondjõududega, millega omakorda võivad liituda ristlõikepindala astmeline ja pidev muutumine.

Keeruliste tõmbe ja surve ülesannetes lahendamisel peame silmas järgmisi asjaolusid, mis sageli aitavad lihtsustada ülesande lahendamist.

Toetume jõu mõju sõltumatusse printsiibile, mida vaatleme jaotises 1.7.4. Lahutame keeruka koostisega koormuse lihtsateks osakoormusteks. Lahendanud ülesande osakoormustega, leiame lõpliku tulemuse osalahendite liitmise teel. Jõu mõju sõltumatusse printsiibi paindlik rakendamine võib suurel määral lihtsustada keerukate ülesannetes lahendamist.

Teise võimaluse arvutustöö lihtsustamiseks võime välja lugeda valemities (2.10, 2.16 ja 2.20), mis määravad varda pikenemise erinevates tingimustes. Valemities (2.10) on suurus  $Nl$  mõistetav normaaljõu epüüri pindala ja suurus  $(N/A)l$  pingeepüüri pindalana. Valemities (2.16) on summad samuti vaadeldavad epüüride pindaladena. Selles mõttes ei erine ka

valem (2.20), kus määratud integraal on interpreteeritav kas normaaljõu epüüri või pingepüüri pindalana.

Kui keeruka koormusega varraste juures astmeline muutumine põimub pidevaga, siis varda pikenedamine on vaadeldav valemite (2.16) ja (2.20) järgi arvatud tulemuste summuna. Seejuures summeeruvad ka normaaljõu ja pingepüürid ja varda pikenedamine on ikka arvatav epüüride pindalade vahendusel:

$$\Delta l = \frac{\Omega_{\sigma}}{E}; \quad \Delta l = \frac{\Omega_N}{EA}, \quad (2.24)$$

kus  $\Omega_{\sigma}$  ja  $\Omega_N$  on vastavalt normaalpinge ja normaaljõu epüüri pindalad. Niisugune pindala tuleb arvutada epüüri erinevate märkidega osapindalade algebralise summuna.

Esimene valemite (2.24) on üldkasutatav, teine kasutatav ühtlase varda jaoks. Valemid on sobivad kasutamiseks sel juhul, kui normaaljõu ja pingepüürid on ülesande lahendamisel muuks otstarbeks juba joonistatud.

Valemite (2.24) kasutamise võimalusi saame laiendada varda punkti siirde ja kahe punkti vahekauguse muutuse määramisele. Punkti siirde arvutamisel tuleb epüüri pindala arvutada varda kinnituskoha ja vaadeldava punkti vahelisel alal.

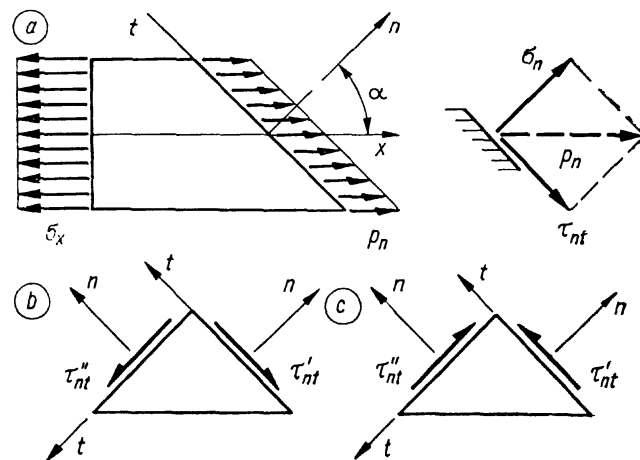
## 2.5. PINGED KALDPINNAL

Tõmbe- ja survejõud kutsuvad esile pinget varda ristlõikepinnal, kuid pinged tekivad ka lõikepindadel, mis on kaldul ristlõikega. Üürime pingeid nendel kaldpindadel olenevalt kaldenurgast.

Vaatleme ühtlasele tõmbejõule  $N$  allutatud varda osa, mis on eraldatud kahe lõikega (joonis 2.12, a). Üks lõigetest on tehtud risti varda teljega  $x$ , teine aga kaldul. Moodustagu kaldlõikepinna normaal  $n$  varda teljega nurga  $\alpha$ , mida vaatleme muutuva suurusena. Varda vasakul otsal, ristlõikepinnal mõjub teatavasti ühtlane normaalpinge:

$$\sigma_x = \frac{N}{A},$$

kus  $A$  on varda ristlõikepindala. Vaadeldava vardalõigu teises otsas, kaldlõikepinnal, mille pindala on  $A/\cos \alpha$ , mõjub otsitav pinget  $p_n$ . Vardalõigu tasakaalutingimusest järeldub, et see pinget peab mõjuma varda telje sihis. Pidades silmas, et ühtlasel tõmbel esineb vardas ka ühtlane pinget, võime teha teise järelduse pinget  $p_n$  ühtlasest jagunemisest kald-



Joon. 2.12

pinnal. Seega on  $x$ -telje sihiline sisejõud kaldpinna keskmes  $p_n A / \cos \alpha$ . Tasakaalutingimusest  $\sum X = 0$  saame võrrandi:

$$-\sigma_x A + p_n A / \cos \alpha = 0,$$

millest avaldame otsitava pinget kaldpinnal:

$$p_n = \sigma_x \cos \alpha.$$

Lahutame pinget  $p_n$  kaldlõikepinnal normaal- ja nihkepingeks:

$$\sigma_n = p_n \cos \alpha; \quad \tau_{nt} = -p_n \sin \alpha$$

või

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\alpha); \quad (2.25)$$

$$\tau_{nt} = -\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.26)$$

Valemite (2.25) ja (2.26) nähtub, et suurimad normaalpinged mõjuvad varda ristlõikepinnas ( $\alpha = 0^\circ$  ja  $\cos \alpha = 1$ ):

$$\max \sigma = \sigma_x. \quad (2.27)$$

Ristlõikepinnas nihkepinged puuduvad. Suurimad nihkepinged mõjuvad  $45^\circ$ -se kaldega lõikepindadel, mille puhul  $\sin 2\alpha = \pm 1$ . Jättes kõrvale nihkepinge märgi, saame

$$\max \tau = \frac{\sigma_x}{2}. \quad (2.28)$$

Suurimate nihkepingete pindadel mõjuvad nihkepingetega suuruse poolest võrdsed normaalpinged.

Märkimist väärrib seaduspärasus, et lõikepindadel, mis omavahel moodustavad täisnurga, mõjuvad võrdsed nihkepinged. Selles võime veenduda, kui avaldame nihkepinge  $\tau'_{nt}$  pinnal, mille kaldenurk on  $\alpha$ , ja teise nihkepinge  $\tau''_{nt}$  pinnal, mille kaldenurk on  $(\alpha+90^\circ)$ , valemiga (2.26):

$$\tau'_{nt} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha;$$

$$\tau''_{nt} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2(\alpha+90^\circ) = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha.$$

Näeme, et nihkepinged ristuvatel lõikepindadel on tõesti absoluutväärtuste poolest võrdsed. Kujutame nihkepinged  $\tau'_{nt}$  ja  $\tau''_{nt}$ , mis vastavad positiivsele normaalpingele (tõmbepingele)  $\sigma_x$  joonisel 2.12,b ja need nihkepinged, mis vastavad survepingele joonisel c. Pingete  $\tau'_{nt}$  ja  $\tau''_{nt}$  vastasmärgilisus pöörduvas teljestikus  $nt$  näitab, et nad täisnurgi lõikuvatel pindadel on mõlemad suunatud kas pindade lõikejoone poole või siis sellest eemale. Paigalseisvas teljestikus saame need pinged ühesuguste märkidega. Nihkepingete võrdsus ja kindel vastastikune asetus ristuvatel lõikepindadel on tuntud *nihkepingete paarsusseadusena*. Selle seaduse juurde pöördume veel kord neljandas jaotises, kus näitame tema kehtivust kõikides kehades mis tahes koormusseisundis.

Valemid (2.25...2.28) sobivad pingete arvutamiseks ka muutuva normaaljõuga vardas, kus neid aga ei saa kasutada varda kogu kaldlõikepinna ulatuses, vaid peab piirduma nende punktidega sellel pinnal, mida läbib vaadeldav lõikepind. Seega on toodud seosed kehtivad varda lõpmata väikeste mõõtmetega elemendil. See asjaolu on põhjustatud pingete ebahühtlasest jagunemisest varda kaldlõikepinnal.

## 2.6. TUGEVUSTINGIMUS

**2.6.1. Tugevustingimus.** Varda pingestatud ja deformeerunud seisundi määramine pole meie tegevuse omaette eesmärk, vaid see peab aitama leida sobivate mõõtmetega varrast, mis kindlustab usaldatava tugevuse ja vajaliku jäikuse; hinnata kasutatava varda tugevust antud tingimustes; või selgitada olemasoleva varda kasutamisevõimalusi.

Tugevustingimusi seatakse üles mitmesugusel viisil sõltuvalt rakendatavast *arvutusmeetodist*. Üheks arvutusmee-

todiks on tugevuse hindamine pingete alusel või nagu seda veel nimetatakse — *lubatavate pingete meetod*. Selle arvutusmeetodi põhimõtteks on konstruktsiooni töötamine elastsete deformatsioonide piirkonnas. Seejuures konstruktsiooni välisjõud, sisejõud, pinged ja deformatsioon ei välju *Hooke'i* seaduse kehtivuspiiridest. Tugevuskriteeriumiks selle juures on pinge. Varda tõmbe ja surve tunnuspingeks on valitud kõige suurem ja iseloomulikum pinge-normaalpinge ristlõikes.

Igale materjalile ja konstruktsioonelemendile määratakse varda ristlõikepinna normaalpinge lubatav piirkond, millest ta ei tohi väljuda ja mis ülevalt poolt on piiratud *lubatava tõmbepingega*  $[\sigma]_z$ , altpoolt *lubatava survepingega*  $[\sigma]_c$ :

$$[\sigma]_c \leq \sigma \leq [\sigma]_z. \quad (2.29)$$

Sellest üldisest tugevustingimusest saab praktiliste arvutuste jaoks kaks ekstreemset tingimust:

$$\begin{aligned} \max \sigma_z &\leq [\sigma]_z; \\ \max \sigma_c &\leq [\sigma]_c, \end{aligned} \quad (2.30)$$

kus survepinget  $\max \sigma_c$  vaadeldakse absoluutväärtusega.

Konstruktsioonelemendis tuleb kindlaks teha suurim tõmbe- ja suurim survepinge ning kontrollida nende vastavust tugevustingimustele.

Lubatavad tõmbe- ja survepinged on enamasti normitud. Tabelis 2 on antud mõnede materjalide lubatavate pingete ligikaudsed väärtused.

Lubatavate pingete määramist vaadeldakse jaotises 3.9.

Pidades silmas valemit (2.6), saame tugevustingimusest (2.30) kaks täiendavat tingimust:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}; \quad (2.31)$$

$$N \leq A[\sigma], \quad (2.32)$$

millest esimene võimaldab määrata varda ristlõikepindala kooskõlas tugevustingimusega ja teine lubab teha tugevuskontrolli olemasolevale konstruktsioonelemendile.

Tugevustingimuste juurde kuulub mõiste — *ratsionaalne varras*, mis kogu pikkuse ulatuses vastab tingimusele (2.31) alumisel piiril

$$A = \frac{N}{[\sigma]} \quad (2.33)$$

Ratsionaalsena õnnestub konstruktsioonelementi harva projekteerida. Enamikul juhtudel piirdutakse tingimuse täit-



Tabel 2

Keskmine lubatav ping	Lubatav ping MPa		
	$[\sigma]_z$	$[\sigma]_c$	$[\tau]$
Harilik teras	160	160	100
Legeeritud teras	250	250	160
Hallmalm	30	140	70
Okaspuut piki kiudu	8	10	1
Betoon	0,5	5	2
Vask	30	30	20
Pronks	80	80	50
Messing	150	150	90
Alumiinium	20	20	15
Duralumiinium	120	120	80
Tekstoliit	35	35	—
Getinaks	60	60	—

misega üksikutes ristlõigetes. Ratsionaalse varda probleem pakub teoreetilist huvi, sest ta annab eesmärgi, mille poole peaks püüdlema konstruktsioonide loomisel. Illustratsiooniks on jaotises 2.3.2 vaadeldud posti arvutamist kahte moodi. Teine variant selles näites on sammuks ratsionaalse lahenduse suunas.

Tingimuse (2.32) ülemist piiri nimetatakse *lubatavaks koormuseks*:

$$[N] = A[\sigma], \quad (2.34)$$

mis määrab olemasoleva konstruktsioonieleменти suurima ohutu koormuse. Seoses (2.34) esineb otseselt lubatav normaaljõud, millest on aga lihtne arvutada koormus.

Tugevustingimuse (2.31) rakendamisel on erandjuhul lubatud mõõtmete ümardamist ka veidi allapoole, kuid seejuures on nõudeks, et suurim normaalpinge ei tohi ületada lubatavat pinget rohkem kui 5% selle väärtusest.

**2.6.2. Jäikustingimus.** Mõnikord seatakse tarielemendi tugevustingimuse kõrvale ka deformatsioonitingimused, või nagu neid nimetatakse — *jäikustingimused*. Tõmbele ja survele töötavas vardas võivad need tingimused olla seatud varda pikenemisele või lühenemisele, punkti siirdele ja suhtelisele deformatsioonile. Nende suuruste lubatavad piirväärtused pannakse nagu lubatavad pingedki nurksulgudesse ( $[\Delta l]$ ,  $[u]$ ,  $[\varepsilon]$ ) ning nimetatakse *lubatavateks deformatsioonideks* või näiteks konkreetsemalt lubatavaks lühenemiseks, lubatavaks vajumiseks jne.

Jäikustingimused on vormiliselt tugevustingimusega samalaadsed võrratused:

$$\Delta l \leq [\Delta l]; \quad u \leq [u]; \quad \max \varepsilon = \frac{\max \sigma}{E} \leq [\varepsilon]. \quad (2.35)$$

Lubatavad deformatsioonid pole nii rangelt kehtestatud üldiseks kasutamiseks nagu seda on lubatavad pinged. Nad on enamasti seotud konkreetse ehitise või masinaga ja sageli tulenevad seadmete töötamise tingimustest.

*Näide 2.5.* Vaatleme veel kord näiteid 2.1 ja 2.3. Algandmed võtame nimetatud ülesannetest: tõmbi pikkus  $l=21$  m, läbimõõt  $d=50$  mm, normaaljõud  $N=280$  kN elastsusmoodul  $E=210$  GPa,  $\sigma=142,6$  MPa ja  $\Delta l=14,3$  mm.

Lisame järgmised algandmed: kasutatava materjali lubatav ping  $[\sigma]=145$  MPa ja lubatav pikenemine  $[\Delta l]=4$  mm ajutisest koormusest, mis normaaljõust  $N=280$  kN moodustab  $N_1=120$  kN.

Tõmbi tugevustingimus

$$\max \sigma = 142,6 < [\sigma] = 145 \text{ MPa}$$

on rahuldatud.

Tõmbi pikenemine ajutisest koormusest:

$$(N_1/N) \Delta l = (120/280) 14,3 = 6,13 \geq [\Delta l] = 4 \text{ mm.}$$

Jäikustingimus pole rahuldatud ja peame valima suurema läbimõõduga tõmbi jäikustingimusest:

$$\Delta l = Nl/(EA) \leq [\Delta l],$$

millest avaldame ristlõikepindala:

$$A \geq Nl/(E\Delta l) = 120 \cdot 10^3 \cdot 21 / (210 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-3}) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 30 \text{ cm}^2;$$

$$d \geq \sqrt{4A/\pi} = \sqrt{4 \cdot 30 / 3,14} = 6,18 \text{ cm.}$$

Valime tõmbi diameetriks  $d=65$  mm. Tõmbi ristlõikepindala

$$A = \pi d^2/4 = 3,14 \cdot 6,5^2/4 = 33,2 \text{ cm}^2.$$

Suurim ping  $\sigma = N/A = 280 \cdot 10^3/33,2 \cdot 10^{-4} = 84,3 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 84,3 \text{ MPa}$ . Tõmbi pikenemine ajutisest koormusest:

$$\Delta l_1 = N_1 l / (EA) = 120 \cdot 10^3 \cdot 21 / (210 \cdot 10^9 \cdot 33,2 \cdot 10^{-4}) = 3,61 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,61 \text{ mm} \geq [\Delta l] = 4 \text{ mm.}$$

*Vastus:* tõmb tuleb valmistada 65-mm ümarterasest.

## 2.7. RATSIONAALNE VARRAS

**2.7.1. Vardast sõltumatu koormus.** Uurime *ratsionaalset varrast*, millest oli juttu jaotises 2.6.1 ja mis peab rahuldama tingimust (2.33).

Määrame antud pikkusega ratsionaalse varda ristlõikepindala kogu varda ulatuses. Tingimust (2.33) vaatleme seosena kahe muutuva suuruse, ristlõikepindala  $A$  ja nor-

maaljõu  $N$  vahel. Varda materjali lubatav pinge esineb seoses konstandina.

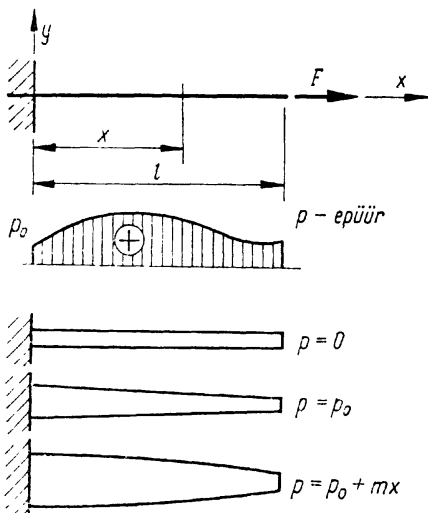
Ristlõikepindala määramisel tuleb eristada kahte juhtumit: ühel juhul normaaljõud  $N$  ei sõltu ristlõikepindalast  $A$ , teisel juhul aga  $N$  sõltub ristlõikepindalast.

Esimesel juhul varras on koormatud jõududega, mis ei sõltu varda mõõtmetest. Suurem osa praktilisi ülesandeid kuulub niisuguste ülesannete hulka. Ülesande lahendamisel määrame esialgu normaaljõu varda ulatuses kas analüütilise avaldisega, epüüri abil või ka mõnel muul viisil. Seejuures annab normaaljõu epüür juba mõningase ettekujutuse varda väliskujust, kuna  $A$  ja  $N$  on omavahel lineaarses sõltuvuses. Varda muutuva ristlõikepindala  $A$  esitame samuti analüütilise avaldise või graafiku abil.

Ristlõikepindala  $A$  võime määrata ka vahetult välisjõudude najal. Selleks diferentseerime seose (2.33) argumenti  $x$  järgi ja asendame normaaljõu tulelise lauskoormusega  $p$  seosest (2.4). Ristlõikepindala  $A$  avaldame saadud võrrandist otsese integreerimisega ja üldlahendis esineva konstandi määrame ääretingimusest. Määrates erilahendi joonisel 2.13 kujutatud arvutusskeemi jaoks, saame:

$$A = A_0 - \frac{1}{[\sigma]} \int_0^x p \, dx, \quad (2.36)$$

kus  $A_0 = F/[\sigma]$  ja integraali ülemine raja on muutuv varda kogu pikkusel.



Joon. 2.13

Valemist (2.36) saame, et lauskoormusega koormamata varda ( $p=0$ ) ratsionaalseks ristlõikepindalaks on  $A=A_0=F/[\sigma]$ .

Ühtlase lauskoormuse  $p_0 = \text{const}$  puhul avaldub ratsionaalne ristlõikepindala lineaarse seosega:

$$A = A_0 + \frac{p_0}{[\sigma]} (l - x),$$

mis näitab, et varras võib siin olla näiteks kiilukujuline.

Kui koormus on lineaarselt jaotatud,  $p = p_0 + mx$ , siis saame:

$$A = A_0 + \frac{p_0}{[\sigma]} (l - x) + \frac{m}{2[\sigma]} (l^2 - x^2),$$

mis näitab, et ristlõikepindala muutub ruutparabooli järgi.

Joonisel 2.13 on kujutatud ratsionaalseid vardaid vastavalt vaadeldud kolmele koormusele.

Ratsionaalse varda pingepüür kujuneb muidugi ühtlaseks ja ordinaat võrdseks lubatava pingega. Ratsionaalne varras on antud koormuse kandmiseks kõige väiksema mahu ja kaaluga varras, võrreldes ülesande teiste võimalike lahendustega.

**2.7.2. Vardast sõltuv koormus.** Vaatleme ratsionaalse varda kaju ja mõõtmete määramise keerukamat juhtumit, mille puhul  $A$  ja  $N$  sõltuvus on vastastikune. Taoline olukord esineb, kui varda lauskoormust kujundavad oluliselt tema enda mahujõud, näiteks raskusjõud, inertsijõud jm.

Olgu varda lauskoormus antud seosega

$$p = qA, \quad (2.37)$$

kus  $q$  on vardale mõjuva mahujõu intensiivsus telje sihis, mõõtühikuga  $N/m^3$ .

Diferentseerime seose (2.33), asendame normaaljõu tulelise lauskoormusega seosest (2.4) ja viimase oma väärtusega seosest (2.37):

$$A' = \frac{N'}{[\sigma]} = -\frac{p}{[\sigma]} = -\frac{qA}{[\sigma]}.$$

Saame homogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$A' + \frac{q}{[\sigma]} A = 0, \quad (2.38)$$

mille üldlahend

$$A = Ce^{-\frac{1}{[\sigma]} \int_0^x q \, dx} \quad (2.39)$$

Joonisel 2.13 esitatud arvutusskeemi kohaselt määrame

integreerimiskonstandi samast ääritingimusest, mida kasutatakse eelmises jaotises varda otsal, kus  $x=l$  ning ristlõikepindala  $A=A_0=N/[\sigma]=F/[\sigma]$ :

$$C e^{-\frac{1}{[\sigma]} \int_0^l q dx} = A_0; \quad C = A_0 e^{\frac{1}{[\sigma]} \int_0^l q dx} \quad (2.40)$$

Asendame üldlahendis (2.39) konstandi oma avaldisega (2.40) ja saame:

$$A = A_0 e^{-\frac{1}{[\sigma]} \int_l^x q dx}, \quad (2.41)$$

kus  $A_0 = F/[\sigma]$ .

**Näide 2.6.** Määrame minimaalset materjalikulu nõudva torni seina ristlõikepindala, vaadeldes koormusena omakaalu. Torni kõrgus on  $h$ , materjali erikaal  $\gamma$  ja lubatav survepinge omakaalust  $[\sigma]$ . Torni tipus on raskus  $Q$ .

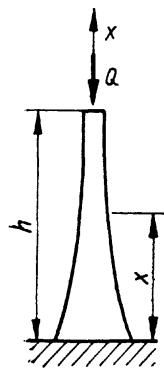
Arvutuskeemi kujutame joonisel 2.14. Suurustena tulevad arvesse valemis (2.41):  $l=h$ ;  $q=\gamma$ ;  $-\sigma$ ;  $F=-Q$ . Kuna selles valemis negatiivsed suurused tuleb jagada ja jagatised on positiivsed, siis loobume algandmetes miinusmärkidest.

Avaldame torni seina ristlõikepindala:

$$A = \frac{Q}{[\sigma]} e^{-\frac{1}{[\sigma]} \int_h^x \gamma dx} = \frac{Q}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} (h-x)} \quad (2.42)$$

Torni tipu ja aluse ristlõikepindalad on vastavalt:

$$A_0 = \frac{Q}{[\sigma]}; \quad A_a = \frac{Q}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma h}{[\sigma]}} \quad (2.43)$$

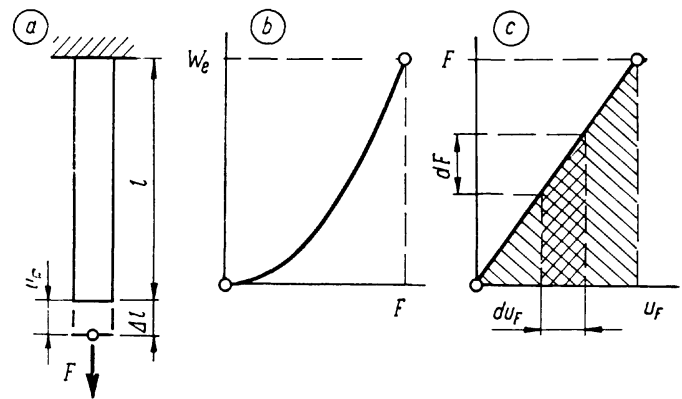


Joon. 2.14

## 2.8. ENERGEETILISED SEOSD

**2.8.1. Välisjõudude töö.** Rakendades alusele kinnitatud kehale välisjõud, keha deformeerub, jõudude rakenduspunktid liiguvad aluse suhtes ja jõud teevad tööd.

Vaatleme kinnitatud varrast joonisel 2.15, a, millele mõjuv jõud on ühtlaselt ja aeglaselt kasvanud nullist oma lõppväärtuseni  $F$ . Jõu kasvu loeme nii aeglaseks, et võime loobuda inertsi jõududest ja vaadelda süsteemi staatilises tase-



Joon. 2.15

kaalus. Varras deformeerub ja jõu rakenduspunkti siire on samuti kasvanud nullväärtusest oma lõppväärtuseni  $u_F$ . Teatavasti on konstantse jõu töö võrdne jõu ja siirde korrutisega. Vaadeldavas süsteemis on jõud muutuv ja sellepärast arvutame jõu poolt tehtava elementaarse töö ühel ajamomendil, millal ta on käsitletav konstantse jõuna  $F_t$ . Samal ajamomendil saab siire juurdekasvu  $du_F$  ja jõu poolt tehtud elementaartöö

$$dW_e = F_t du_F. \quad (2.44)$$

Toetudes Hooke'i seadusele ja kasutades selle avaldist (1.9), võime esitada jõu ja siirde lineaarse seose  $F_t = cu_F$  aga samuti ka seose nende juurdekasvude vahel  $dF = c du_F$ . Viimasest avaldame  $du_F = dF/c$  ja viime diferentsiaalseosesse (2.44). Pärast integreerimist kogu jõu kasvu ulatuses saame:

$$W_e = \frac{1}{c} \int_0^F F_t dF = \frac{F^2}{2c}, \quad (2.45)$$

kus  $c$  on vaadeldava süsteemi jäikust iseloomustav konstant, mille mõõtühikuks on N/m.

Valemist (2.45) näeme, et välisjõudude töö pole lineaarses sõltuvuses jõuga, vaid selle ruuduga. See asjaolu lubab teha olulise järelduse, et välisjõudude töö arvutamisel pole kehtiv jõu mõju sõltumatuse printsiip. Teatavasti see printsiip, mida vaatlesime jaotises 1.7.4, eeldab lineaarset sõltu-

vust. Joonisel 2.15,b on näidatud välisjõu ja tema poolt tehtava töö graafik, mis kujutab endast ruutparabooli.

Hooke'i seadust kajastaval graafikul, mis on näidatud joonisel 2.15,c ja mis kujutab välisjõu ja tema poolt esile kutsutud siirde vahelist seost, on töö mõistetav graafiku viirutatud pinnana. Kahekordse viirutusega pinna osa näitab elementaarse töö geometrilist tähendust. Välisjõudude töö esitame ka jõu ja siirde kaudu väljendatuna. Vastava seose saame graafiku viirutatud pinna avaldisena või asendusega seosest (1.9) valemisse (2.45):

$$W_e = \frac{Fu_F}{2}. \quad (2.46)$$

Vastupidisel protsessil, jõu  $F$  aeglasel kahanemisel kuni nullväärtuseni, elastse varda deformatsioon kõrvaldub. Kaob ka jõu rakenduspunkti siire ja välisjõud teeb negatiivset tööd. Teisiti öeldes: kasvades teeb jõud elastse keha kallal tööd, kaotades oma potentsiaali, kahanedes teeb elastne keha jõu kallal tööd, taastades tema potentsiaali.

Valemist (2.46) näeme, et jõu töö elastses süsteemis on võrdne jõu ja tema poolt esilekutsutud jõusuunalise siirde poole korrutisega. Kui vardale rakendame lisaks veel ühe teljesuunalise jõu  $Q$  mingis teises telje punktis, siis ka see jõud teeb enda poolt põhjustatud siirdel  $u_Q$  tööd, mille arvutame valemiga (2.45) või (2.46). Samal ajal tekib täiendav siire  $u_{FQ}$  jõu  $F$  rakenduspunkti ja jõud teeb tööd, kuid see töö on arvutatav juba ilma arvuta 2 valemi (2.46) nimetajas. See tuleneb jõu  $F$  püsivast suurusest siirdel  $u_{FQ}$ . Seejuures süsteemi välisjõudude  $F$  ja  $Q$  kogutöö

$$W_{FQ} = \frac{Fu_F}{2} + \frac{Qu_Q}{2} + Fu_{FQ}. \quad (2.47)$$

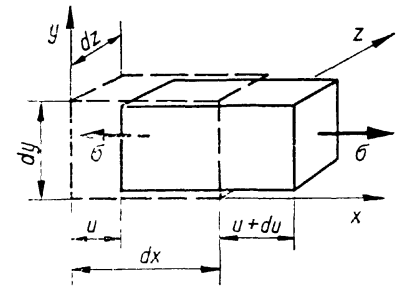
Pole raske mõista, kuidas arvutada välisjõudude süsteemi tööd, kui rakendada veel järjestikku jõudusid.

Kui jõud  $F$  ja  $Q$  rakendada üheaegselt ja nende rakenduspunktide siirded on  $u'_F$  ja  $u'_Q$ , siis süsteemi töö

$$W_{FQ} = \frac{Fu'_F}{2} + \frac{Qu'_Q}{2}, \quad (2.48)$$

kus  $u'_F = u_F + u_{FQ}$ , kuid  $u'_Q > u_Q$ .

**2.8.2. Sisejõudude töö.** Vaatleme sisejõudude tööd. Lõikame tõmbele allutatud vardast koordinaatpindadega välja elementaarristtahuka mõõtmetega  $dx$ ,  $dy$  ja  $dz$ . Kujutame risttahukat joonisel 2.16 kriipsjoonega. Varda koormamisel vaadeldav risttahukas deformeerub varda koostisosana ja



Joon. 2.16

siirdub uude asukohta. Telje  $x$  sihis iseloomustavad seda liikumist siirded  $u$  ja  $(u+du)$ . Ühtlasi tekivad  $x$ -teljega risti olevatel tahkudel normaalpinged  $\sigma$ .

Arvutame elemendi tahkudel mõjuvate elementaarsisejõudude, mille suurus on  $\sigma dy dz$ , töö valemiga (2.46):

$$dW_i = \frac{1}{2} \sigma dy dz (u+du) - \frac{1}{2} \sigma dy dz \cdot u = \frac{1}{2} \sigma dy dz du.$$

Jagame elementaartöö vaadeldava risttahuka mahuga  $dV = dx dy dz$ :

$$\frac{dW_i}{dV} = \frac{\sigma}{2} \frac{du}{dx}.$$

Saadud suurust nimetatakse sisejõu eritööks ja tähistatakse  $w$ , mille mõõtühik ühtib pinge mõõtühikuga. Asendame seosest (2.17) siirde tuletise  $du/dx$  suhtelise deformatsiooniga  $\epsilon$ :

$$w = \frac{dW_i}{dV} = \frac{\sigma \epsilon}{2}. \quad (2.49)$$

Asendame Hooke'i seadusest (1.10) suhtelise deformatsiooni pingega:

$$w = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (2.50)$$

Sisejõu eritöö iseloomustab olukorda keha punktis ja pole sõltuv keha mõõtmetest. Ta on sõltuv ainult pingest ja materjali elastsusmoodulist.

Pöördume tagasi varda juurde joonisel 2.15. Vardas on ühtlane tõmme ja järelikult võime sisejõu töö  $W_i$  vardas arvutada eritöö  $w$  ja mahu  $V = Al$  korrutisena. Võtame eritöö avaldise (2.50) ja korrutame ning jagame seda veel täiendavalt ristlõikepindalaga  $A$ . Arvestades, et  $A\sigma$  on normaaljõud  $N$ , saame:

$$W_i = V\omega = \frac{N^2 l}{2EA}. \quad (2.51)$$

Eritöö avaldise (2.49) korrutamisel varda mahuga, saame sama töö teise avaldise, kui võtame arvesse, et  $l\varepsilon = \Delta l$ .

$$W_i = \frac{N\Delta l}{2}. \quad (2.52)$$

Võrdleme valemeid (2.46) ja (2.52) ja näeme, et sisejõu ja välisjõu tööd on võrdsed, sest joonisel kujutatud süsteemis  $N = F$  ja  $\Delta l = u_F$ .

Muutuva normaaljõu ja ristlõikepindalaga varrastes sisejõu töö arvutamisel tuleb eritöö  $\omega$  integreerida varda mahus. Tõmbel ja survel on pingel ristlõikes konstantne ja töö integreerimine selles pinnas annab korrutise  $A\omega$ . Järelikult sisejõu töö piki varrast

$$W_i = \int_l \omega A dx = \frac{1}{2E} \int_l \frac{N^2}{A} dx. \quad (2.53)$$

Sisejõu töö saame positiivse suurusena koormuse kasvamisel, tegelikult on ta aga negatiivne. Positiivne on sisejõudude töö koormuse kahanemisel. See vastuolu tuleneb kokkuleppes näidata kehast lõikemeetodiga eraldatud osadel sisejõud ja pinged tegelikele vastupidistes suundades. Näitame keha osal alati kõrvaldatud osa mõju vaadeldavale, tööd teeb aga vaadeldaval osal vastupidi suunatud jõud, mille vektor on ettekujutatav vaadeldava osa sees.

Peame meeles, et välisjõudude tööd esitavad valemid (2.44...48) koormuse kasvamisel. Sisejõudude tööd esitavad valemid (2.49...53) koormuse kahanemisel.

**2.8.3. Sisejõudude potentsiaalne energia.** Eelmises jaotises nägime, et joonisel 2.15 kujutatud süsteemi välis- ja sisejõu tööd on võrdsed ning vastasmärgilised. See pole juhuslik, vaid üldine seaduspärasus, mis kehtib kõikides elastsetes süsteemides, kus puudub energia pöördumatu hajumine. Niisuguseid süsteeme nimetatakse *konserveerivateks*.

Teatavasti vähendab positiivne töö tööd tegeva jõu potentsiaali ja vastupidi. Sisejõudude negatiivne töö koormamisel loob elastses kehas energiavaru  $U$ , mis on võrdne välis- ja ka sisejõudude tööga, võetuna vastupidise märgiga. Deformeerunud elastse keha energia varu on potentsiaalse energia eriliik, mida tuntakse nimetusega *sisejõudude potentsiaalne energia* või *deformatsioonienergia*:

$$U = W_e = -W_i. \quad (2.54)$$

Sisejõudude potentsiaalse energia saab alati arvutada kaht moodi. Kumba neist kasutada oleneb sellest, mis antud olukorras on lihtsam, kas arvutus välisjõudude või sisejõudude kaudu.

Elastset keha võib kasutada *energia akumulaatorina*. Tüüpiline näide on kellavedru. Deformeerunud konstruktsioonielementi puhul ei tohi unustada temas peituvat energiat, mis juhtimatult valla pääsedes võib põhjustada ebaeeldivusi. Meenutame praktikast pingutatud pikka veotrossi, mis oma deformatsioonienergiaga on ohtlik.

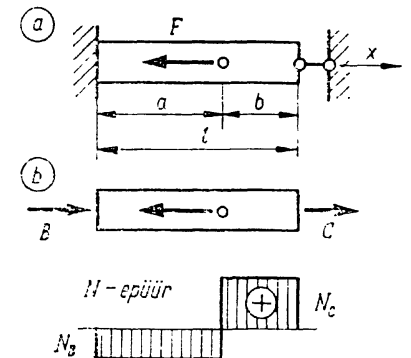
Energeetilised seosed mängivad olulist rolli keerukate süsteemide arvutusmeetodite alustena.

## 2.9. STAATIKAGA MÄÄRAMATU ÜLESANNE

**2.9.1. Deformatsioonitingimus.** Staatikaga määramatuks nimetatakse ülesannet, mille lahendamiseks tasakaalutingimused pole piisavad. Jaotises 1.3.2 valgustasime neid ülesandeid põgusalt, käesolevas jätkame nende käsitlust tõmbe ja surve seisukohalt.

Vaatleme varrast joonisel 2.17, a tasandülesandena. Toel  $B$  näeme liitsidet, mis on võrdväärne kolme ideaalse sidemega. Üldine sidemete arv on neli. See tähendab, et süsteemis on üks lisaside, sest tasakaaluvõrrandeid on kolm. Vastavalt lisaside arvu nimetame konstruktsiooni *ühelkordselt staatikaga määramatuks*. Selle süsteemi tasakaalutingimuste kõrval peame seadma veel ühe deformatsioonitingimuse.

Deformatsioonitingimustena vaatleme sidemete tõkestavat või piiravat mõju varda deformatsioonile. Käesoleval



Joon. 2.17

juhul deformatsiooni tõkestamine sidemetega seisneb selles, et varras ei saa pikeneda.

$$\Delta l = 0.$$

Varrast koormab koondjõud  $F$ , mis kutsub esile toereaktsioonid  $B$  ja  $C$ . Vabastame varda sidemetest ja kujutame teda joonisel 2.17, *b*. Vardale mõjuvad kolm jõudu on ühel sirgel,  $x$ -teljel. Tasakaalutingimustest tuleb kasutusele ainult üks tingimus:

$$\sum X = 0.$$

Kahe tingimusega lahendame ülesande. Tasakaalutingimusest saame võrrandi

$$B - F + C = 0. \quad (a)$$

Deformatsioonitingimusest saame valemi (2.10) vahendusel teise võrrandi:

$$\frac{1}{EA} (N_B a + N_C b) = 0.$$

Lõikemeetodiga määrame normaaljõu ja välisjõudude vahekorra. Saame  $N_B = -B$  ja  $N_C = C$ . Asendades teises võrrandis normaaljõud toereaktsioonidega ja jättes ära kordaja  $1/EA$ , mis oma sisu tõttu ei saa võrduda nulliga, saame:

$$-Ba + Cb = 0. \quad (b)$$

Võrrandid (a) ja (b) moodustavad süsteemi, millest määrame kaks tundmatut reaktsiooni:

$$B = \frac{b}{a+b} F = \frac{b}{l} F; \quad C = \frac{a}{a+b} F = \frac{a}{l} F.$$

Sellega oleme ülesande lahendamisel jõudnud välja tuntud radadele ja edaspidine käsitus ei valmista raskusi.

**Näide 2.7.** Määrame joonisel 2.18, *a* kujutatud kandekonstruktsiooni kolme varda sisejõud koormusest  $F$ . Vardad on samast materjalist ja nende ristlõikepindalad on võrdsed.

Vaadeldavas süsteemis on sõlm  $A$  seotud alusega kolme varda abil. Sõlmel, mis kujutab endast punkti tasandil, on üks lisaside ja ülesanne ühekordselt staatikaga määramata.

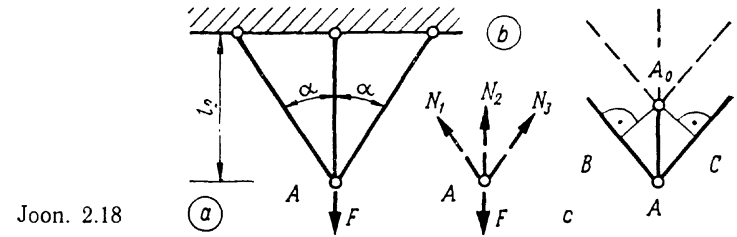
Lõikame sõlme  $A$  mõttes konstruktsioonist välja ja kujutame eraldi joonisel 2.18, *b* koos temale mõjuvate välis- ja sisejõududega. Koostame sõlme kaks tasakaaluvõrrandit:

$$\begin{aligned} \sum X = 0, & \quad -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0; \\ \sum Y = 0, & \quad (N_1 + N_3) \cos \alpha + N_2 - F = 0. \end{aligned}$$

Teisendatult:

$$N_1 = N_3; \quad 2N_1 \cos \alpha + N_2 = F. \quad (c)$$

Deformatsioonitingimuseks on kolme varda pikeneda piiramine ühe omavahelise sõltuvusega. Kujutame varraste pikeneda joonisel



Joon. 2.18

2.18, *c*, kus keskmise varda pikeneda  $\Delta l_2$  on näidatud joonlõiguna  $AA_0$  ja äärmistel varrastel  $\Delta l_1$  ja  $\Delta l_3$  vastavalt  $AB$  ja  $AC$ . Täisnurksest kolmnurgast  $ABA_0$  võime esitada seose:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha,$$

mis annab meile deformatsioonitingimuse. Avaldame pikeneda valemiga (2.10):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{N_1 l_2}{EA \cos \alpha}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA}$$

ja viieme deformatsioonitingimusesse, mis võtab järgmise kuju:

$$N_1 = N_3 \cos^2 \alpha.$$

Lahendades saadud võrrandi koos tasakaaluvõrrandiga (c), saame ülesande vastuse:

$$N_1 = N_3 = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

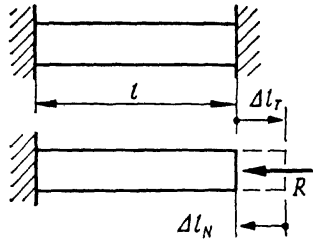
**2.9.2. Termopinged.** Määrame normaaljõu ja pinge temperatuuri ühtlasest tõusust vardas, mille pikeneda on tõkestatud.

Temperatuuri muutumisest tulenevaid pingeid staatikaga määramatutes konstruktsioonides nimetatakse termopingeteks. Staatikaga määratavates konstruktsioonides termopinged temperatuuri ühtlasest muutusest ei teki, sest nendes süsteemides on konstruktsioonelemendil võimalus vabalt deformeeruda.

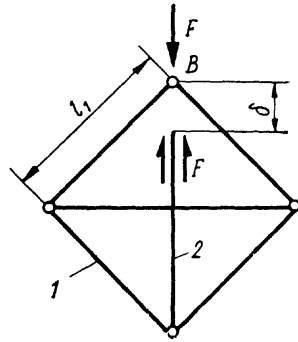
Varras joonisel 2.19 on kinnitatud mõlemast otsast ja sellega on temalt võetud võimalus pikeneda või lüheneda. Temperatuuri tõustes  $\Delta T$  võrra oleks vaba varda pikeneda

$$\Delta l_T = \alpha \Delta T l, \quad (2.55)$$

kus  $\alpha$  on materjali termilise joonpaisumise tegur, mille mõned väärtused on antud tabelis 1. Varras aga pole vaba ja toel tekib reaktsioonijõud  $R$ , mis kõrvaldab pikeneda temperatuuri tõusust kohe selle tekkimise momendil. Vardas



Joon. 2.19



Joon. 2.20

ilmub reaktsioonijõuga võrdne survejõud  $N$  ja kui tähistame sellest tuleneva varda lühenemise  $\Delta l_N$ , siis võime deformatsioonitingimuse esitada järgmisel kujul:

$$-\Delta l_N = \Delta l_T.$$

Asendades pikennemised valemist (2.10) ja (2.55), saame:

$$-\frac{Nl}{EA} = \alpha \Delta T l.$$

Avaldame viimasest normaaljõu ja pinge:

$$N = -EA\alpha\Delta T; \quad \sigma = -E\alpha\Delta T, \quad (2.56)$$

kus miinusmärk näitab, et temperatuuri tõusust tekib survejõud ja -pinge, temperatuuri alanemisest tõmbejõud ja -pinge.

Nagu selgub valemist (2.56), ei sõltu vaadeldud termopinge ei varda pikkusest ega ka ristlõikepindalast, vaid ainult elastsusmoodulist, termilise joonpaisumise tegurist ja temperatuuri muutusest. Arvutame terase termopinge  $\Delta\sigma_T$  tõkestatud deformatsiooni tingimuses, temperatuuri tõusul ühe kelvini võrra ( $E$  ja  $\alpha$  väärtused võtame tabelist 1):

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_T &= -210 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-6} = -2,52 \cdot 10^6 \text{ Pa/K} = \\ &= -2,52 \text{ MPa/K}. \end{aligned}$$

Temperatuuri kõikumised 40 K ulatuses kutsuvad esile pinge muutuse umbes 100 MPa.

**2.9.3. Koostepinged.** Staatikaga määramatus ja välisjõududega koormamata süsteemis võivad esineda sisejõud ja pinged, mis tulenevad konstruktsioonelementide nimimõõtmete hälvetest. Need pinged tekivad montaažil ja kannavad nimetust *montaaži-* ehk *koostepinged*. Viimased kuuluvad

algpingete valdkonda ja on nende hulgas ühed olulisemad.

Staatikaga määratavates süsteemides koostepinged puuduvad, kuna mõõtmete hälbed ei põhjusta konstruktsioonelementide deformatsiooni.

Koostepingete uurimine ja määramine on tugevusõpetuse üks keerukamaid probleeme. Käesolevas vaatleme seda küsimust lihtsustatult ning ainult tõmbele ja survele töötavate varraste seisukohalt.

Joonisel 2.20 on kujutatud ruudukujulise sõrestiku arvutusskeem. Neli kontuuri varrast on kõik ühesuguse ristlõikepindalaga  $A_1$  ja pikkusega  $l_1$ . Kaks diagonaalset varrast on samast materjalist, ristlõikepindalaga  $A_2$  ja pikkusega  $l_2 = l_1\sqrt{2}$ . Vardad on omavahel ühendatud ainult neljas nurgas, kuna diagonaalvarrastel keskmel omavahel ühendus puudub. Sõrestiku monteerimisel tekkis raskus varda 2 kinnitamisega sõlmes  $B$ . Osutus, et varda otsa ja sõlme vahele jäi pilu  $\sigma$ , mis kõrvaldati sel teel, et vardale ja sõlmele rakendati võrdsed ja vastassuunalised jõud  $F$  ja kui pilu sulgus, kinnitati varda ots sõlmes. Välisjõud sõlmele ja varda otsalt küll kõrvaldati, kuid raami jäi sellest sisejõud, mis ei kõrvaldunud. Määrame sisejõud, mis tekkisid sõrestiku montaažil.

Võiks kohe vastata, et sisejõud sõrestikus tekkisid jõust  $F$ , kui see saavutas oma suurima väärtuse pilu sulgumisel ja varraste sisejõudude määramine joonisel kujutatud skeemi järgi ei valmista raskusi. Nii see ongi, kuid vaevalt õnnestub meil jõudu  $F$  mõõta tehnoloogilises protsessis. Lihtsam on seda arvutada.

Tähistame tundmatud sisejõud  $N_1$  ja  $N_2$  vastavalt kontuuri- ja diagonaalvarrastes. Lahendame ülesande energetiliste seoste najal.

Arvutame sisejõudude töö sõrestikus valemi (2.51) järgi:

$$W_i = -\left(4 \frac{N_1^2 l_1}{2EA_1} + 2 \frac{N_2^2 l_2}{2EA_2}\right).$$

Välisjõu  $F$  töö avaldub valemiga (2.46):

$$W_e = \frac{F\delta}{2}.$$

Seosest (2.54) võrrutame sise- ja välisjõudude tööd ning viime kõik suurused vasakule poole. Pärast arvuliste kordajate taandamist saame võrrandi

$$2 \frac{N_1^2 l_1}{EA_1} + \frac{N_2^2 l_2}{EA_2} - \frac{F\delta}{2} = 0.$$

Avaldame sisejõud  $N_1$  ja  $N_2$  välisjõu  $F$  kaudu teoreetilisest mehaanikast tuntud sõlmede eraldamise võttega. Saame, et  $N_2 = F$  (tõmbejõud) ja  $N_1 = F/\sqrt{2}$  (survejõud). Sisejõud võrrandis on ruudus ja seepärast nende märk pole oluline. Asendades veel  $l_2 = l_1\sqrt{2}$ , saame:

$$F^2 \left( \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_1\sqrt{2}}{A_2} \right) - \frac{P\delta E}{2} = 0.$$

Võrrandi lahend

$$F = \frac{EA_1 A_2 \delta}{2l_1(A_2 + A_1\sqrt{2})}$$

määrab koostepinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  vastavalt kontuuri- ja diagonaalvarrastes:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{EA_2 \delta}{2\sqrt{2} l_1 (A_2 + A_1\sqrt{2})};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{EA_1 \delta}{2l_1 (A_2 + A_1\sqrt{2})}.$$

Kui analüüsime monteeritud sõrestikku, näeme, et võrreldes staatikaga määratava sõrestikuga on tal üks liigne varras. See tähendab, et vaadeldud sõrestik on ühekordselt staatikaga määratav. Enne viimase varda paigaldamist oli sõrestik kujukindel ja staatikaga määratav. Viimase varda lisamine tegi temast juba niisuguse sõrestiku, milles võivad tekkida eelpinged.

Koostepinged summeeruvad pingetega koormusest ja enamikul juhtudel mõjutavad konstruktsiooni lõplikku pingestatud seisundit ebasoovitavas suunas. Muidugi pole välis- ja vastupidine olukord. Koostepinged ei ole mõnel juhul olulised ja me võime nad jätta tähele panemata. Teistel juhtudel nad on sedavõrd olulised, et nende «unustamine» võib lõppeda konstruktsiooni purunemisega isegi enne valmistamist.

Viimasel ajal areneb ehituses ja masinaehituses teatud montaažipingete tahtlik tekitamine pingestatud seisundi mõjutamiseks soodsas suunas. Niisuguste, soodsalt eelpingestatud süsteemide uurimine on tugevusõpetuse üks olulisi ülesandeid.

*Ülesanne enesekontrolliks.* Lahendada käesolevas jaotises vaadeldud ülesanne teisel teel, kasutamata selleks energetilisi seoseid, vaid tuginedes varraste deformatsioonidele

ja nendest tulenevatele sõlmede ja varda lahtise otsa siiretele.

Pärast ülesande lahendamist võrrelda energetilist ja «harilikku» meetodit ja anda neile hinnang töömahukuse seisukohalt.

### 3. MATERJALI OMADUSED JA TUGEVSARVUTUSE ALUSED TÕMBEL JA SURVEL

#### 3.1. PROOVIKEHA

Konstruktsiooni tugevus- ja deformatsiooniprobleemide lahendamisel peame tundma materjali *mehaanilisi omadusi*, mida iseloomustavad mitmesugused füüsikalised suurused. Nendest juba tunneme elastsuskonstante, millele lisanduvad mitmesugused piirpinged, deformatsioonid ja sisejõudude tööd iseloomustavad suurused. Materjalide mehaanilisi omadusi iseloomustavad suurused ja nende määramine kuuluvad tugevusõpetuse eksperimentaalsesse ossa.

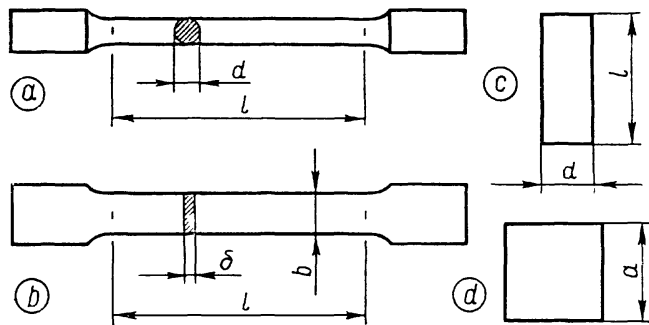
Suurused, mis näitavad materjalide mehaanilisi omadusi väljaspool *Hooke'i* seaduse kehtivuspiire, on oluliselt sõltuvad *teimimise meetodikast (katsemetoodikast)*. Seepärast tuleb kasutada ühtset, normitud meetodikat, et saadud tulemused oleksid omavahel võrreldavad ja konstruktsioonilemendi pingestatud seisundi hindamisel ühtmoodi mõistetavad.

Konstruktsioonimaterjalide mehaaniliste omaduste selgitamisel on keskne koht *tõmbe- ja surveteimil*, sest nendest määratakse enamik vajalikke suurustest.

Tõmbeteimil kasutatakse normitud *proovikehi* ehk *teimikuid*, mille põhitüübiks on *normaal-* ehk *standardproovikeha* (joonis 3.1,a), algmõõtmetega  $l = 200$  mm ja  $d = 20$  mm. Algpikkusega määratud silindrilist osa vaadeldakse ja mõõdetakse teimimisel. Proovikeha silindriline keskmine osa tehakse  $(1,0 \dots 1,5)d$  võrra pikem algpikkusest. Proovikeha otsad ehk pead tehakse jämedamad ja üleminekud keskmiselt osalt sujuvad. Peade kujundus valitakse vastavalt *katsemasina* haardeseadmetele.

Kui uuritava materjali mõõtmed ei luba valmistada normaalproovikeha, tehakse väiksemate algmõõtmetega *proportsionaalproovikeha*, säilitades suhte  $l/d = 10$ . Uurimistel, kus proovikehade arv on suur, kasutatakse materjali kokkuhoiu huvides *lühikest proovikeha*, millel suhe  $l/d = 5$ . Leht- ja lintmaterjalist lõigatakse välja *lapikproovikeha* (joonis





Joon. 3.1

(3.1,b). Selle algpikkus võetakse samas suhtes ümarproovikehaga, kusjuures lapikproovikeha arvutuslikuks diameetriks on tema ristlõikepindalaga võrdpindse ringi diameeter. Seejuures on normaalpikkusega lapikproovikeha algpikkus  $l=11,3\sqrt{\delta b}$  ja lühikesel  $l=5,52\sqrt{\delta b}$ .

Traatidest ja raudbetooni armatuurterasest lõigatakse paraja pikkusega proovikehad ja jäetakse pind töötlemata.

Surveproovikehad on silindrid (joonis 3.1,e), ruudukujulise ristlõikepinnaga prismad või kuubid (joonis 3.1,d). Silinderproovikeha pikkuse ja läbimõõdu suhe  $l/d$  valitakse piires 1...3. Sama suhtega valmistatakse ka prooviprismaid.

Metallide survetugevuse uurimisel kasutatakse silinderproovikehi, mille mõõtmed pole normitud, kuid enamikul juhtudel tehakse proovikehad läbimõõduga 10...20 mm ja pikkusega  $(1,5...2,5)d$ . Betooni survetugevuse määramisel kasutatakse kuupi servapikkusega 150 mm ja prismat  $150 \times 150 \times 450$  mm. Vastavalt on betoonil ka kaks survetugevust, kuubitugevus ja prismatugevus. Puidu jaoks on käibel prisma, looduskivimite uurimiseks silinderproovikeha.

### 3.2. KATSEMASIN JA TENSOMEETER

Tõmbe- ja surveproovikehade koormamiseks ja jõu ning deformatsiooni mõõtmiseks rakendatakse katsemasinaid. Need võivad olla spetsiaalsed tõmbemasinad, pressid või ka universaalsed masinad, mis võimaldavad teimida nii tõmbe kui ka surveproovikehi. Masinad on mehaanilised ja hüdraulilised.

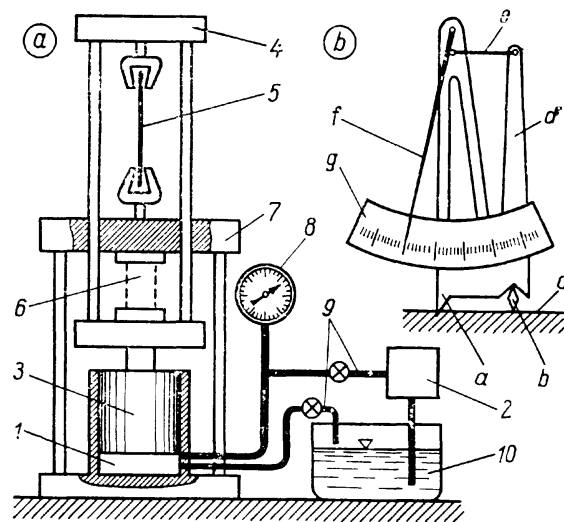
Joonisel 3.2,a on kujutatud skemaatiliselt hüdrauliline universaalmasin. Silindrisse 1 pumbatakse õli pumbaga 2, mis kutsub esile kolvi 3 liikumise ülespoole. Kolviga on ühendatud sellega koos liikuv raam, mille ülemisel traaversil asetseb haardeseade tõmbeproovikeha 5 koormamiseks. Kui masinat kasutatakse surveks, asetatakse proovikeha 6 raami alumisele traaversile. Masina alusraam 7 on liikumatu ja selle külge kinnitub tõmbeproovikeha teise otsa haardeseade ning toetub surveproovikeha teine ots. Proovikehale rakendatud jõud mõõdetakse manomeetriga 8, mis on ühendatud hüdro süsteemi torujuhtmetega 9. Masina juurde kuulub veel õlivann 10 ja jõumasin pumba käivitamiseks, mis pole skeemil näidatud.

Katsemasinaid on jõuga mõnest njuutonist paarikümne meganjuutonini. Seejuures tehakse väiksemad masinad mehaanilistena, suuremad aga hüdraulilistena.

Katsemasinatel on enamasti diagrammi joonestav seade, mis kujutab paberil jõu ja deformatsiooni sõltuvuse nn. masindiagrammi.

Proovikeha elastse deformatsiooni mõõtmiseks ei piisa diagrammseadme tundlikkusest. Sellepärast pannakse proovikehale tundlik mõõteriist — tensomeeter, mis tagab vajaliku mõõtmistäpsuse elastsuspiirides ja pole harilikult kasutatav, kui proovikehas tekib suur deformatsioon.

Tensomeetrid on mehaanilised, optilised ja elektrilised olenevalt deformatsiooni mõõtva seadme tööprintsibiist.



Joon. 3.2

Mehaanilise tensomeetri põhimõtteskeem on kujutatud joonisel 3.2, *b*. Tensomeetril on kaks nugateravat prisma, liikumatu *a* ja pöörduv *b*, mis moodukalt surutakse katsekeha *c* pinda. Katsekeha pikenedes prismade teravikud eemalduvad teineteisest ja prisma *b* pöörduv koos selle külge kinnitatud kangiga *d*. Viimane, suurendades joonliikumist oma ülemises otsas, annab selle edasi ühendusvardaga *e* kang-osutile *f*, mis omakorda suurendab joonliikumist oma alumisel otsal ja lubab seda registreerida skaalal *g*.

Mehaanilise tensomeetri mõõteparameetriteks on prisma-teravikkude vahekaugus-mõõtebaas  $l$  ja kangüsteemi ülekandearv  $n$ , mis näitab mitu korda suureneb joonliikumine pöörduva prisma teravikult osuti otsale. Mõõtmistehnika rakendab ülekandearvu pöördarvu  $\alpha = 1/n$ , mida nimetatakse *tensomeetri konstandiks*. Mehaaniliste tensomeetrite mõõtebaasid on piires  $l = 2 \dots 200$  mm, seejuures enamlevinud baasid on  $10 \dots 100$  mm. Kangüsteemi ülekandearvud  $n = 300 \dots 2000$ . Enamlevinud on nn. *tuhandiktensomeeter*, mille  $n \approx 1000$  ja  $\alpha \approx 0,001$ .

Deformatsiooni mõõtmisel mehaanilise tensomeetriga tehakse lugem enne proovikeha koormamist. Olgu see lugem  $a_0$ . Pärast koormuse rakendamist tehakse uus lugem  $a_1$ . Mõõtebaasi deformatsioon  $\Delta l$  ja suhteline deformatsioon  $\epsilon$  arvutatakse järgmiselt:

$$\Delta l = \alpha (a_1 - a_0); \quad \epsilon = \Delta l / l = \alpha (a_1 - a_0) / l. \quad (3.1)$$

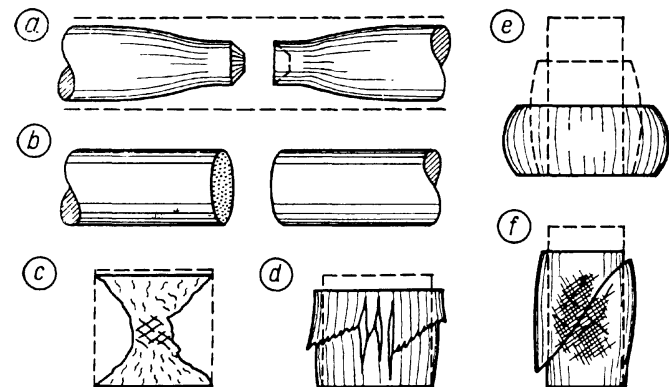
*Optilise tensomeetri* tööpõhimõte on sama mis mehaanilisel, erinevuseks on see, et pöörduva prisma külge on kinnitatud kangi asemel peegel ja kangide ülesannet täidab peegeldumisel pöörduv valguskiir. *Elektritensomeetritest* on levinud *takistustensomeetrid*. Nende töö põhineb proovikehale kleebitud *tensotundlikust materjalist*, näiteks peenike konstantaantraat või fooliumriba, nn. *tensoresistori* deformatsioonist tuleneval oomilise takistuse muutusel.

### 3.3. TÕMBE- JA SURVETEIM

Kirjeldame harilikust konstruktsiooniterasest normaalproovikeha tõmbeteimi.

Valime tõmbe- ja universaalmasina tööpiirkonna  $150 \dots 300$  kN. Kinnitame proovikeha masina haardeosadesse ja seame töökorda masindiagramm-seadme. Asetame proovikehale kaks mehaanilist tensomeetrit.

Käivitame masina ja koormame proovikeha astmeliselt,



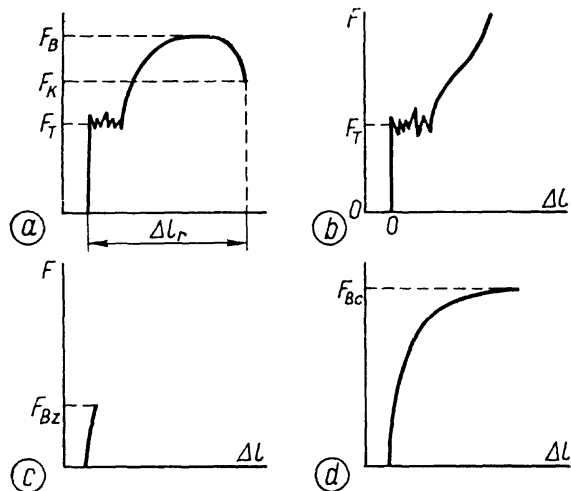
Joon. 3.3

tehes igal astmel lugemid tensomeetritelt. Jätkame koormamist kuni jõu juurdekasv lakkab ja tensomeetrid näitavad deformatsiooni suhteliselt kiiret kasvu püsiva või peaaegu püsiva jõu juures. Tensomeetrite osutid «jooksevad» ja lugemi tegemine pole võimalik. Võtame tensomeetrid maha ja jätkame proovikeha koormamist.

Jõud hakkab uuesti kasvama, kuid masindiagrammilt näeme, et jõud ja deformatsioon on nüüd mittelineaarses sõltuvuses. Jätkame koormamist astmete kaupa ja mõõdame igal astmel proovikeha diameetrit, mis nüüd märgatavalt kahaneb. Jõu kasv aeglustub ja lakkab. Jõud on saavutanud maksimumi, millele järgneb jõu vähenemine ja proovikeha peenenemine ühes kohas, *kaela* tekkimine. Kaela arenedes puruneb proovikeha kaela kõige peenemas kohas. Purunemiskohta kujutab joonis 3.3, *a*, mida nimetame *purunemispildiks*. Masindiagramm on näidatud joonisel 3.4, *a* mõningate iseloomulike suuruste tähistega. Purunenud proovikeha tükide kokkusobitamise ja pikkuse mõõtmisega teeme kindlaks pikenede algpikkuse suhtes, *jääkdeformatsiooni*  $\Delta l_r$ .

Terase surveteimi üldine käik ühtib algul tõmbeteimiga, kuid survejõu kasvades ilmneb erinevus, mis seisneb selles, et proovikeha jämeneb, jõud suureneb kasvava intensiivsusega ja ei saavuta lagipunkti. Survejõudu võib arendada piiramatult ja proovikeha kokku suruda nagu kujutatud joonisel 3.3, *e*, saavutamata purunemist. Terase surve masindiagramm on toodud joonisel 3.4, *b*.

Malmi tõmbeteimil puudub märgatav jääkdeformatsioon



Joon. 3.4

ja proovikeha puruneb kaela tekkimiseta. Purunemispilt on kujutatud joonisel 3.3, *b* ja masindiagramm joonisel 3.4, *c*.

Malmi surveteim on iseloomulik märgatava jääkdeformatsiooni ja proovikeha purunemisega. Malmi surve purunemispilt on kujutatud joonisel 3.3, *f*, masindiagramm joonisel 3.4, *d*.

Joonisel 3.3, *c* on kujutatud betoonkuubi ja joonisel 3.3, *d* puidust prooviprisma purunemispilte survest. Puidust proovikeha on surutud pikikiudu.

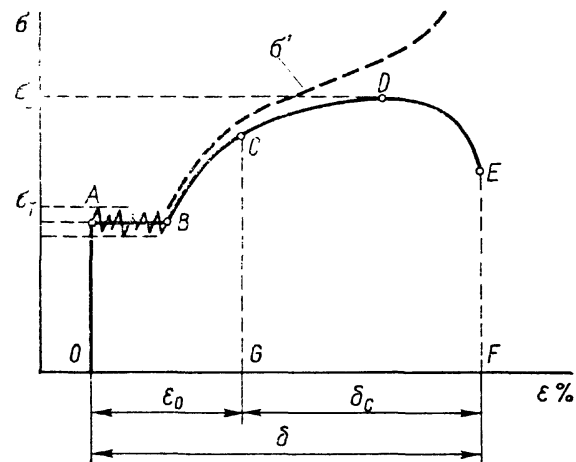
### 3.4. HARILIKU TERASE TÕMBEDIAGRAMM

**3.4.1. Tinglik pinge.** Joonisel 3.4, *a* kujutasime *terase tõmbediagrammi* koordinaadistikus  $F-\Delta l$ , mis iseloomustab otseselt teatava keha, antud juhul proovikeha omadusi.

Materjali iseloomustamiseks kõrvaldame tulemustest proovikeha mõõtmed, s. o. algristlõikepindala ja algpikkuse. Seejuures jagame jõu algristlõikepindala  $A$  ja deformatsiooni algpikkusega  $l$ :

$$\frac{F}{A} = \sigma; \quad \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon. \quad (3.1)$$

Saadud suurused on vastavalt normaalpinge ja suhteline normaaldeformatsioon. Kujutame tõmbediagrammi koordinaadistikus  $\sigma-\varepsilon$  joonisel 3.5 pideva joonega. Diagrammid



Joon. 3.5

koordinaadistikus  $F-\Delta l$  ja  $\sigma-\varepsilon$  on üldiselt ühesugused, sest proovikeha algmõõtmed on konstantsed suurused.

Pinget ja suhtelist deformatsiooni tuleb mõista *tinglikena*, sest rakendame algmõõtmete printsiipi olukorras, kus see ilmselt pole kehtiv. Kujutame joonisel 3.5 *tegeliku pinge*  $\sigma'$  kriipsjoonega, mis on saadud jõu ja deformeerumisel vähenenud ristlõikepinna jagatisena. Näeme, et diagrammi algosas *tegelik* ja *tinglik pinge* praktiliselt ühtivad, keskmises piirkonnas aga lähevad märgatavalt lahku ja purunemisel võib tegelik pinge tingliku ületada mitmekordselt.

Tinglikke suurusi  $\sigma-\varepsilon$  diagrammis kasutatakse lihtsuse huvides. Praktilist kahju see lihtsustus ei põhjusta, sest konstruktsioonelementide tööpiirkonnas algmõõtmete printsiip on rakendatav ja tinglikud suurused ühtivad tegelikega. Purunemisolukorra lähedal saadud suurused pakuvad huvi peamiselt ainult materjalide omavahelisel võrdlemisel ja nende üldisel iseloomustamisel. Viimatimainitud rolli täidavad tinglikud suurused alati rahuldavalt, kui nad on määratud ühesugustel alustel. Tinglik pinge ja suhteline deformatsioon on üldkasutatavad ja seepärast ei rõhutata nende tinglikkust.

**3.4.2. Tõmbediagrammi piirkonnad.** Vaatleme joonisel 3.5 kujutatud  $\sigma-\varepsilon$  diagrammil iseloomulikke punkte ja piirkondi.

Diagrammi lõik  $OA$  on piirkond, milles töötab enamik konstruktsioone. Seda piirkonda iseloomustab materjali

elastsus ja *Hooke*'i seaduse kehtivus peaaegu kogu ulatuses. Diagrammil on piirkond esitatud sirglõiguga, mis näib paralleelsena pingeteljega, tegelikult on siin aga tegemist väikse deformatsiooniga, mis  $\epsilon$ -telje väikse mõõtkava tõttu pole märgatav kaldjoonena. Seda piirkonda vaatleme lähemalt allpool.

Vahemik *AB* kannab nimetust *voolamispiirkond*. Proovikeha materjal on siin seisundis, mis sarnaneb ülirkõrge viskoossusega vedelikutaolise aine voolamisega.

Masindiagrammil näib see piirkond hambulise joonena, mis tähendab jõu väikest kõikumist oma keskmise väärtuse ümber. Diagrammil kujutame jõu keskmist väärtust ja mõistame voolamispiirkonnana horisontaalset sirglõiku *AB*. Teras on selles piirkonnas peaaegu *plastses olekus* ja teda peetakse lähedaseks ideaalselt plastsele materjalile.

Voalamispiirkonna kogu ulatuses vaadeldakse pinget konstantsena ja nimetatakse *voolavuspiiriks* ehk *voolavuspinge*ks  $\sigma_T$ , mille indeks tuleneb venekeelsest sõnast *текучесть*.

Terase voalamise täpsemal kirjeldamisel on käibel mõistet *voolavuspinge ülem-* ja *alampiir*  $\sigma_{TK}$  ja  $\sigma_{TM}$ . Neid suurusi märgivad pingeteljel kaks horisontaalset puutejoont hambulise joonega kujutatud voalamispiirkonnale. Enamikul juhtudel määrab voolavuspinge ülempiiri esimene tipp, mis näitab voalamise alguspunkti.

Lõik *BD* on materjali *kalestumispiirkond*, kus arenevad koos nii elastne kui ka plastne deformatsioon. Siin ei allu pinge ja deformatsioon *Hooke*'i seadusele. Pinge juurdekasv aeglustub ja piirkonna lõpus lakkab.

Diagrammi haripunktis *D* saavutab pinge oma suurima väärtuse, mida nimetatakse *tõmbetugevuseks*  $\sigma_B$ .

Piirkonnas *DE* tekib ja areneb proovikehal *kael* ja see lõpeb *purunemisega* punktis, millele vastab materjali *katkepinge*  $\sigma_K$ . See on alati väiksem tõmbetugevusest. See paradoksina näiv asjaolu saab selgeks, kui meenutame, et me vaatleme tinglikke pingeid. Tegelik pinge kaelas muidugi kasvab kuni purunemiseni.

**3.4.3. Jääkdeformatsioon.** Proovikeha *jääkdeformatsioon*  $\Delta l_r$  määrab suhtelise jääkdeformatsiooni, mis vastab diagrammil punktile *F*. Seda protsentides väljendatud suurust nimetatakse terase *katkevenivuseks*:

$$\delta = \frac{\Delta l_r}{l} 100 (\%), \quad (3.2)$$

Katkevenivus sõltub oluliselt proovikeha pikkusest, sest

kael põhjustab suhtelise deformatsiooni ebaühtlase jagunemise piki varrast ja tema osatähtsus on seda suurem, mida lühem on proovikeha. Seepärast lühikese proovikehaga saadud katkevenivust märgitakse indeksiga  $\delta_5$ , mis näitab, et tulemus on saadud proovikehaga, mille algpikkus võrdub viiekordse diameetriga.

Katkevenivuse kõrval tuntakse veel teist suurust, mis iseloomustab proovikeha ristlõikepindala suhtelist jääkdeformatsiooni katkemiskohas. Seda suurust nimetatakse *ristlõikepindala jääkmuuteks*

$$\psi = \frac{A - A_K}{A} 100 (\%), \quad (3.3)$$

kus *A* on algristlõikepindala ja  $A_K$  — ristlõikepindala purunenud proovikeha kaela kõige peenemas kohas.

**3.4.4. Elastsusmoodul.** Vaatleme tõmbediagrammi esimest lõiku, mis on joonisel 3.5 punktide *O* ja *A* vahel.

Selle vahemiku uurimine masindiagrammil pole võimalik, sest katsemasina isekirjutav mõõteseade pole küllalt tundlik väikse deformatsiooni mõõtmiseks. Kasutame tensomeetritega mõõdetud deformatsiooni väärtusi, arvutame suhtelised deformatsioonid ja pinged seostega (3.1) ja joonestame  $\sigma$ — $\epsilon$  diagrammi, mida vaatleme joonisel 3.6. Võrreldes diagrammiga joonisel 3.5 on siin  $\epsilon$ -telje mõõtkava võetud paarsada korda suurem, et esile tuua graafiku tõus. Joonise loetavuse ja ilmekuse huvides kujutame diagrammi «kõveramana» kui ta tegelikult terase jaoks kujuneb.

*Hooke*'i seadusest (1.10) selgub, et normaalelastsusmooduli saame määrata  $\sigma$ — $\epsilon$  diagrammi tõusuna:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (3.4)$$

Täpsete mõõtmistega võime selgitada, et diagramm vaadeldavas lõigus ei ühti täielikult sirgega. Seepärast määrame elastsusmooduli graafiku nullpunkti lähedase osa tõusuna. Kui ka sellega tekib raskusi, siis loeme elastsusmooduliks diagrammi nullpunkti puutuja *O* tõusu  $m_0$ :

$$E = \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = m_0. \quad (3.5)$$

Enamikul terastest on  $\sigma$ — $\epsilon$  diagrammi algosa küllalt suures ulatuses siiski sirgele väga lähedane.

**3.4.5. Proportsionaalsuspiir.** Vaatleme *Hooke*'i seaduse kehtivuspiirkonna ülemist piiri, proportsionaalsuspiiri  $\sigma_{pr}$ . Nähtavasti teeme jämeda vea, kui loeme pinge proportsio-

naalseks deformatsiooniga kuni voolavuspiirini. Viga väljendub siin diagrammi tõusu hälvena algtõusust  $m_0$  ehk elastsusmoodulist  $E$ . Vaatleme diagrammi punkti  $A$  proportsionaalsuupirina, millele vastab pinge  $\sigma_{pr}$ . Tõmbame diagrammile puutuja  $a$  vaadeldavas punktis. Olgu puutuja tõus  $m_A$ , mille hälve  $\Delta E$  ja suhteline hälve  $\Delta E/E$  elastsusmoodulist:

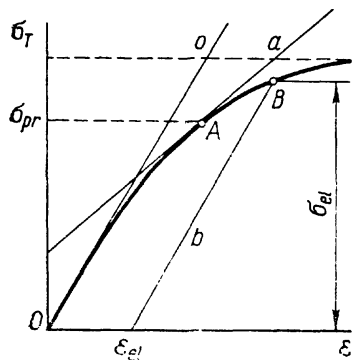
$$\Delta E = E - m_A; \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{E - m_A}{E} 100 (\%). \quad (3.6)$$

Proportsionaalsuupiri määramiseks peame teadma suurimat suhtelist hälvet, mida võib lubada, et lugeda *Hooke'i* seadus veel kehtivaks. Terase jaoks võetakse harilikult lubatav hälve 30...35%, teistel materjalidel lubatakse suuremat hälvet, mis betoonil võib küündida 50% ja isegi rohkem. Mõõteriistade vedrude ja muude deformatsiooniga töötavate konstruktsioonielementide materjali proportsionaalsuupirile esitatakse kõrgemad nõuded.

Harilikul terasel on proportsionaalsuupir umbes 10...15% madalamal voolavuspiirist.

**3.4.6. Elastsuupir**  $\sigma_{el}$  on pinge, millest madalamad pinged ei kutsu esile jääkdeformatsiooni. Elastsuupir määrab elastsuupirkonna. Et materjalid pole ideaalselt elastsed, siis ka elastsuupiri peame vaatlema, lähtudes lubatavast jääkdeformatsioonist, mis määrab selle piiri. Harilikult määratakse elastsuupir jääkdeformatsioonist  $\sigma_{el} = 2 \cdot 10^{-5}$ , kuid võivad esineda ka teised suurused. Sageli kasutatakse elastsuupiri tähise indeksina lubatavat jääkdeformatsiooni protsentides. Eeltoodud normiga määratud elastsuupiri tähistame  $\sigma_{0,002}$ .

Elastsuupiri määramine on tülikas, sest seda tuleb kor-



Joon. 3.6

raldada nii, et proovikeha koormatakse teatava pingeni, vabastatakse koormusest ja mõõdetakse jääkdeformatsiooni. Katset korratakse, varieerides pingega, kuni selgitatakse pinge  $\sigma_{el}$ , mis kutsub esile normiga antud jääkdeformatsiooni  $\epsilon_{el}$ .

Elastsuupiri määramist võib lihtsustada, tehes seda nii nagu on näidatud joonisel 3.6. Kanname lubatava jääkdeformatsiooni  $\epsilon_{el}$   $\epsilon$ -teljele ja tõmbame sellest punktist tõusuga  $m_0 = E$  sirge lõikumiseni diagrammi kõveraga. Saadud lõikepunkt  $B$  on otsitav elastsuupir, millele vastab piirpinge  $\sigma_{el}$ . Lihtsustatud viisil määratud elastsuupiri viga ei kahjusta praktiliste arvutuste täpsust.

Elastsuupir  $\sigma_{el}$  on harilikul terasel voolavuspiirist umbes 8...12% madalamal. Elastsus- ja proportsionaalsuupir on lähestikku. Enamasti on elastsuupir veidi kõrgemal proportsionaalsuupirist, kuid võib esineda ka nende vastupidine asend diagrammil.

### 3.5. MEHAANILISED PÕHINÄITAJAD

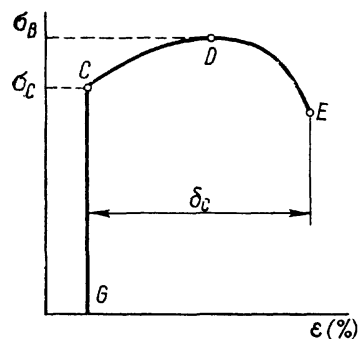
**3.5.1. Bauschingeri efekt.\*** Pöördume tagasi joonise 3.5 juurde ja jälgime proovikehaga tehtavat katset, mis erineb harilikust tõmbeteimist vahepealse koormusest vabastamise poolest. Teisiti öeldes, koormame proovikeha esimest korda nii, et tekib  $\sigma - \epsilon$  diagrammi osa  $OABC$ . Siis vähendame koormust kuni nullini, millega  $\sigma - \epsilon$  graafik jätkub mööda joont  $CG$  kuni punkti  $G$ . Tekib diagramm  $OABCG$ . Teistkordset koormamist alustame punktist  $G$  ja koormuse kasvades jõuame sama joont mööda tagasi punkti  $C$ . Koormuse edasisel kasvul saavutame haripunkti  $D$  ja katkemispunkti  $E$ .

Kahe koormamise  $\sigma - \epsilon$  diagramm ühtib hariliku, ühekordse koormamise diagrammiga. Erinevus on ainult selles, et lisandub kaks korda läbikäidud (edasi ja tagasi) lõik  $CG$ , mis joonisel 3.5 on kujutatud kriipsjoonega.

Võtame terasest varda ja koormame kuni punkti  $C$  ning vabastame koormusest. Vaatleme seda menetlust *materjali eeltöötlusena*, mida nimetatakse terase *kalestamiseks*. Kalestamisega oleme saanud eeltöödeldud terase, mille mõningad olulised mehaanilised omadused on algmaterjaliga võrreldes muutunud. Kalestatud terase  $\sigma - \epsilon$  sõltuvus on kujutatud joonisel 3.7, mis on saadud joonisel 3.5 kujutatud kalestamata algmaterjali diagrammi osana  $GCDE$ .

Kalestatud terasel puudub voolamisnähtus. Võrreldes

\* Johann Bauschinger (1833...1893) — saksa teadlane, insener, nimetatud efekti avastaja 1856. a.



Joon. 3.7

oma algmaterjaliga on kalestunud terasel elastse deformatsiooni piirkond oluliselt suurema ulatusega. Kui algmaterjali lubatava pinge määramisel on aluseks voolavuspinge  $\sigma_T$ , siis kalestatud terasel võime samas rollis vaadelda pinget  $\sigma_C$ , mis vastab diagrammi punktile C ja mis on oluliselt kõrgem voolavuspingest. Seejuures aga ei tohi jätta tähelepanuta vähenenud katkevenivust  $\delta_C$ , mis võrreldes algmaterjali katkevenivusega  $\delta$  on  $\epsilon_0$  võrra väiksem.

Venitamisega kalestatud terase elastsuspiir kõrgeneb tõmbel, kuid, nagu näitavad uurimised, alaneb surveel. Kui terast töödelda plastse kokkusurumisega, siis elastsuspiir kõrgeneb surveel ja alaneb tõmbel. Metallide elastsuspiiride niisugust muutumist plastsest eeldeformatsioonist nimetakse *Bauschingeri efektiks*.

Terase kalestamist kasutatakse tänapäeval raudbetooni armatuurterase tugevusomaduste parendamiseks. Tõmbevardaid töödeldakse venitamisega. Venitamise suurus määratakse kindlaks suhtelise deformatsiooniga  $\epsilon_0$ . Olenevalt terase sordist, kasutatakse venitamist piirides 5...10%. Tabelis 3 on esitatud terase Cr3 mehaanilised omadused kalestamata ja kalestatud seisundites.

**3.5.2. Põhinäitajad.** Konstruktsioonimaterjalide markeerimisel on muude andmete hulgas vajalikud mehaaniliste omaduste *põhinäitajad*.

Terase põhinäitajaid on enamikul juhtudel kolm: voolavuspinge  $\sigma_T$ , tõmbetugevus  $\sigma_B$  ja katkevenivus  $\delta$ . Elastsusmoodul siia hulka harilikult ei kuulu, sest selle väärtus on kõikidel terasemarkidel peaaegu sama ja sellepärast ta ei iseloomusta terast teiste teraste hulgas. Eriprobleemide käsitlemisel võivad lisanduda eeltoodud kolmele suurusele veel proportsionaalsuspiir  $\sigma_{pr}$  ja elastsuspiir  $\sigma_{el}$ .

Konstruktsioonielemendile esitatavate nõuete seisukohalt võib teraste põhinäitajaid mõjutada soodsamas suunas mitmesuguste menetlustega. Siia kuuluvad termotöötlus *karastamise* ja *noolutamise*ga ja külm töötlus *kalestamisega*, milleks kasutatakse eelmises jaotises kirjeldatud menetlust, *valtsimist*, *tõmbamist läbi «silma»* jm. Töötlemise tulemusena muutuvad metallide põhinäitajad nii palju, et peame neid muutusi hoolikalt arvestama. Näitena vaatleme tabelis 3 toodud nelja materjali põhinäitajaid algolekus ja pärast kalestamist ja karastamist.

Metalli kuum- ja külm töötlamisega võib kaduda voolavus. Esineb terasesorte, millel voolavus puudub ka töötlemata olekus. Voolavuspiir on aga võetud tänapäeval kõikide teraste ja muude algolekus plastsest deformeeruvate metallide ja nende sulamite põhinäitajate hulka. Voolavuse kaotanud terastele (metallidele) määratakse *tinglik voolavuspiir*, mis on normeeritud jääkdeformatsiooni  $\epsilon_T$  alusel samal viisil nagu elastsuspiir jaotises 3.4.6. Enamikul juhtudel on tingliku voolavuspiiri aluseks  $\epsilon_T=0,002$ , kuid mõnel juhul

Tabel 3

Materjali mehaanilised omadused

Materjal	Voolavuspiir $\sigma_T$ või $\sigma_{0,2}$ MPa	Tõmbetugevus $\sigma_B$ MPa	Katkevenivus $\delta$ %
Raud, peaaegu puhas	140	260	50
Teras Cr 0	240	370	32
Teras Cr 3	270	420	25
Sama kalestatud $\epsilon=8\%$	330	420	17
Teras Cr 6	310	650	14
Teras 30	330	530	18
Sama karastatud	1000	1100	7
Teras 45	370	620	14
Sama karastatud	1050	1100	9
Teras V8, karastatud	700	1100	12
Kroomteras 20X	650	800	12
Legeeritud teras 35XFCA	1400	1650	10
Legeeritud teras 40XHB	1720	2050	10
Titaan	520	600	19
Vask, peaaegu puhas	50	200	40
Vask, valtsitud	250	320	12
Sama kuumutatud	55	220	38
Messing	330	450	15
Pronks	150	200	10
Alumiinium, peaaegu puhas	50	84	28
Duralumiinium	340	500	11

Materjali mehaanilised omadused

Materjal	Tugevus $\sigma_B$ MPa		Katkevenivus $\delta$ %
	Tõmme	Surve	
Hallmalm C4 15-32	150	640	
Okaspuit	80	50	
Graniit	3	160	
Tellis	1	15	
Betoon, mark 400	2	40	
Tekstoliit	127	168	1,5
Polüetüleen	15	12	350
Epoksüvaik	60	120	5,5
Orgaanklaas	78	120	3

võib see norm olla kõrgem. Nagu elastsuspiiri, nii ka tingliku voolavuspiiri indeksina kasutatakse sageli selle aluseks oleva jääkdeformatsiooni arvulist väärtust, väljendatuna protsentides. Eeltoodud jääkdeformatsiooniga määratud tinglik voolavuspiir tähistatakse  $\sigma_{0,2}$ .

Tabelis 3 on esitatud mõnede metallide ja nende sulamite mehaaniliste põhinäitajate keskmised väärtused. Kui materjalil puudub voolavus, siis voolavuspinge asemel on toodud tinglik voolavuspiir  $\sigma_{0,2}$ .

Malmi põhinäitajateks on tõmbe- ja survetugevus. Malmi katkevenivus tõmbel võrdub nulliga või on tühiselt väike ja ka survel see suurus ei iseloomusta materjali. Voolavus malmil puudub ja ka selle tinglik väärtus põhinäitajana ei paku olulist huvi.

Puitu iseloomustab tõmbe- ja survetugevus pikikiudu.

Betooni, tellise ja loodus kivide põhinäitajaks on survetugevus, mille arvulist väärtust kasutatakse nende materjalide margi määramisel. Tõmbetugevus pole siin olulise tähtsusega oma väiksuse tõttu, mis ei luba neid materjale rakendada tööle tõmbele.

Plastide põhinäitajad pole veel lõplikult välja kujunenud, kuid pole kahtlust, et nende hulka kuuluvad tõmbe- ja survetugevus või üks nendest. Mõnel plastil on ka katkevenivus üks olulistest näitajatest, kuid paljudel pole selle suuruse määramise meetodika veel vajalikul määral välja kujunenud.

Tabelis 4 on esitatud malmi, okaspuidu, kivimaterjalide ja mõnede plastide keskmised mehaanilised põhinäitajad.

### 3.6. DEFORMATSIOON JA PURUNEMINE

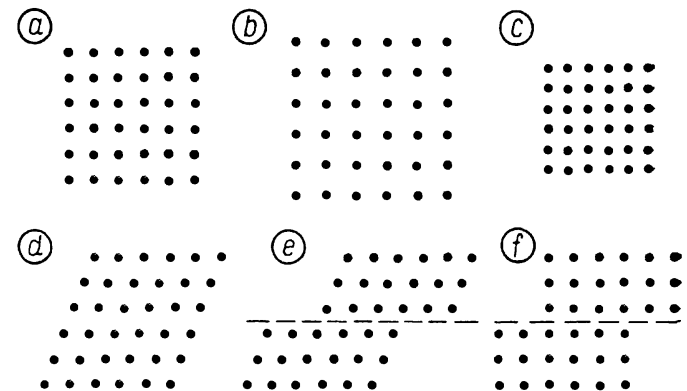
**3.6.1. Deformatsiooni tekkemehhanism.** Vaatleme nimeetatud nähtusi materjali molekulaarehituse seisukohalt esialgu monokristallis.

Deformatsioon tuleneb punktitaoliste aineosakeste ümberpaigutumisest üksteise suhtes. Seda paigutumist võib vaadelda koosnevana komponentidest, mille hulgas on kaks kvalitatiivselt erinevat liikumist: ühtlane paisumine (või kokkutõmbumine) ja nihe. Kujutame neid komponente lihtsustatult joonise 3.8 tasandil, kus on näidatud aineosakeste keskmised a) deformeerumata kehas, b) ühtlaselt paisunud, c) kokkutõmbunud ja d) nihkunud seisundis.

Elastse deformatsiooni puhul kaovad nii paisumine kui ka nihe jõudude mõju lakkamisel ja aineosakesed pöörduvad molekulaarjõudude toimel oma algasendisse tagasi.

Paisumine võib põhjustada osakestevaheliste sidemete katkemise, mis tähendab praod tekkimist kristallis või selle purunemist tükkideks. Samuti võib nihkega kaasneda sidemete katkemine ja purunemine. Nii kujutame ette kristalli habrast purunemist vastavalt tõmbe- või nihkepingest.

Vaatleme nüüd plastse deformatsiooni tekkimist kristallis. Aineosakeste nihkega võib teatud tingimustel kaasneda osaline pöördumatu ehk *plastne nihe* nii nagu näidatud joonisel 3.8, e kriipsjoonega tähistatud nihkepinnas. Uhe kristalli piirides võib pöördumatu nihe olla täisarvukordne kristallvõre pikkuselemendist. Kui koormus kõrvaldada, siis kaob



Joon. 3.8

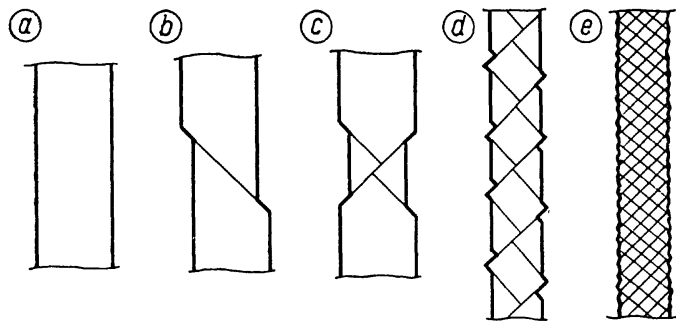
nihke elastne osa ja säilib pöördumatu, plastne osa kristalli jääkdeformatsioonina nagu näidatud joonisel 3.8, f.

**3.6.2. Voolavus.** Metallid ja nende sulamid on polükristalse ehitusega. Nad koosnevad peentest, korrapärase väliskuju ja juhusliku võresuunaga kristallidest, mis harilikult on mitmesuguse ehituse ja koostisega.

Metalli mikroehitus ehk *struktuur* tekib jahtumisel, kui aine läheb vedelast olekust üle tahkesse. Seejuures võib tekkida mitmesugune struktuur olenevalt kristalliseerumise tingimustest ja sulamis leiduvatest lisanditest. Plastsetes metallides ja sulamites tekib hulganisti kristalle, mis taluvad plastset nihet. Terases on «pehmeks» komponendiks *ferriidi kristall*. Kui terase koostis ja kristalliseerumise tingimused põhjustavad ferriidi tekkimist küllalt suurel hulgal, saadakse *plastne teras*, mis teatava koormuse puhul hakkab voolama.

Metalli voolavus tuleneb «pehme» kristalli plastset nihkest, mis tekib nendes kristallides, mille võre nihkepind satub kokku või on lähedane suurima nihkepinge pinnaga. Plastne nihe ühes kristallis kutsub esile omamoodi ahelreaktsiooni nendes naaberkristallides, mille võre on sama orientatsiooniga ja mis asuvad samas suurima nihkepinge pinnas. Kristallide niisugune ühine nihe on kehaväliselt vaadeldav.

Lapikproovikeha lihvitud läikival pinnal tekivad voolamisest põhjustatud omavahel ristuvad matid jooned ja vaotaolised ebatasasused, mis moodustavad tõmbe suunaga 45° nurgad. Proovikeha jätkuval tõmbamisel joonte hulk suureneb ja kalestumispiirkonnas katavad nad kogu pinna. Plastsest deformatsioonist proovikeha pinnal tekkivaid jooni nimetatakse nende avastajate nimede järgi *Lüdersi* ehk *Tšernovi joonteks*.



Joon. 3.9

Joonisel 3.9, a on kujutatud lapikproovikeha fragment ja joonisel b esimene nihe vaadeldaval lõigul. Joonisel on nihet kujutatud skemaatiliselt ja ilmekuse huvides palju suuremana kui ta tegelikult on. Samas on näidatud nihkest tekkinud *Lüdersi* joon ja geomeetrilist külge vaadeldes võime leida proovikeha jääkpikenemise tekke kinemaatilise aluse. Joonisel c vaatleme eelmisega ristuvat nihet, kust selgub ka proovikeha plastse ahenemise mehhanism. Joonisel d on kujutatud proovikeha vaadeldava osa kogu ulatuses välja kujunenud nihete süsteemi, mis on andnud märgatava jääva pikenemise ja ristlõikepindala ahenemise. Samas on näidatud proovikeha külgedel väikeste vaotaoliste ebatasasuste tekkemehhanism. Tegelik olukord (joonis e) erineb joonisel d kujutatust sellega, et nihked tekivad tihedamalt ja on väiksemad.

**3.6.3. Kalestumine.** Ferriidi kristallil on omadus nihkepinna ümbruses tugevneda ja kaotada osa oma võimest edasiseks plastseks nihkeks. Seejuures säilitavad kristalli nihkepinnast kaugemad osad esialgsed omadused. Proovikeha jätkuv venitamine kutsub esile uued nihked kristallide nihkest puutumata osades. Need nihked toimuvad ühe ja sama jõu juures väikeste kõikumistega, kuni kõikvõimalikud *primaarsed nihkumised* on toimunud. Lõpeb voolavuspiirkond ja algab materjali *kalestumine*.

Pinge hakkab kasvama ja algab plastsete nihete «teine ring», mis areneb üha kasvava pinge mõjul. Primaarsed nihked ei kutsu harilikult esile kristalli jagunemist osadeks. Järgnevad sekundaarsed *nihked* kalestumispiirkonnas teevad seda ja muudavad metalli kristallstruktuuri peenemaks. Ühtlasi toimub peenenenud kristallide pöördumine, millega materjal «organiseerib» suuremat vastupanu pingetele sellega, et seab kristallide suurema tugevusega suunad kokku mõjuva jõu sihiga. Materjal muutub märgatavalt anisotroopsemaks ja omandab teatud mõttes süülise materjali tugevusomadused; omandab *tekstuuri*. Kui plastse nihke kõik võimalused on ammendatud, puruneb keha harilikult seda pinda mööda, kus mõjuvad *suurimad nihkepinged*.

**3.6.4. Sitkus ja haprus.** Rääkides mitmesuguste materjalide erinevatest mehaanilistest omadustest ja purunemispiltidest kasutame nende iseloomustamiseks mõisteid *sitke*, *plastne*, *rabe* ja *habras materjal* või purunemine. Rabedus ja haprus on tugevusõpetuses võrdväärased omadused. Nende vastandomaduste sitkuse ja plastseuse tähendused küll kattuvad, kuid sitkust mõistame laiemas tähenduses. Teisiti



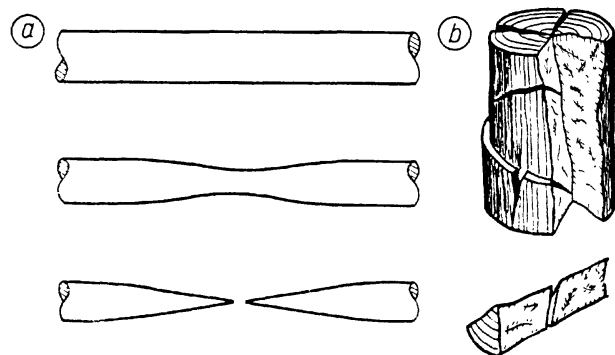
õeldes, kõik plastsed materjalid on sitked, kuid kõik sitked pole plastsed.

Materjali kvalifitseerimisel sitkeks või hapraks on kõige olulisem näitaja katkevenivus  $\delta$ . Mida suurem on materjali katkevenivus, seda sitkem ta on ja mida väiksem on see näitaja, seda hapram. Kahjuks pole välja kujunenud kindlat piiri sitkete ja habraste materjalide vahel. Inseneripraktikas on see piir enamikul juhtudel 1...8%, kuid olenevalt probleemide iseloomust võib tõusta ka kõrgemale.

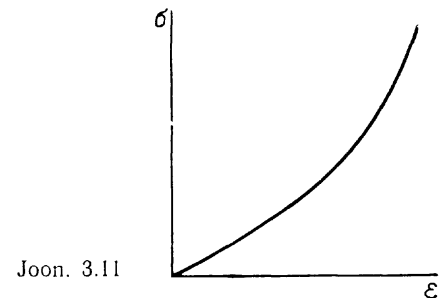
Kõrge sitkusega materjalidena tunneme plastseid kaldestamata metalle: süsinikuvaest terast, vaske, alumiiniumi, titaani jt. Siia kuuluvad ka mitteplastsed materjalid, vulkaniseeritud kummi, polüetüleen, fluoorplast jpt. Sitketeks peetakse enamikku karastamata süsinikterastest, legeeritud teraseid, pronksi, valgevaske, duralumiiniumi, puitu jm. Habrasteks materjalideks peame malmi, paljusid eritöötluusega teraseid, klaasi, graniiti, betooni, tellist, eboniiti jpt.

Plastsetest materjalidest tõmbeproovikehad annavad kõrge katkevenivuse kõrval purunemispildis kaela ja iseloomulikud umbes 45° tõmbesuunaga kaldpinnad. Purunemist põhjustavad siin enamikul juhtudel suurim nihkepingsed. Üheks tüüpiliseks esindajaks on pehme terase purunemispilt joonisel 3.3, a. Plastse metalli suurt deformatsiooni iseloomustavad Lüdersi jooned.

Ülipehmed metallid, näiteks kuld ja plii, aga samuti paljud amorfsed ained ja suure venivusega polümeerimaterjalid võivad anda nõelakujulise purunemispildi, nagu näidatud joonisel 3.10, a. Mõned sitked materjalid, vulkaniseeritud kummi, fluoorplast jt. annavad iseloomuliku tõmbediagrammi



Joon. 3.10



Joon. 3.11

(joonis 3.11), mis näitab nende materjalide tõmbejäikuse suurenemist käsikäes deformatsiooni kasvuga. Teatavasti enamikul materjalidest tõmbejäikus raugneb enne purunemist.

Habraste materjalide (näiteks malmi) tõmme annab madala katkevenivuse kõrval joonisel 3.3, b toodud purunemispildi. Purunemise põhjustab siin suurim tõmbepinge ristlõikepinnas.

Sitkest materjalist surveproovikeha enamikul juhtudel ei purune, vaid muutub plaadiks, mille paksus oleneb survejõu suuruselt. Joonisel 3.3, e on kujutatud terasest proovikeha purunemispilt. Erandiks on anisotroopsed sitked materjalid, mis olenevalt oma tekstuurstist võivad puruneda väga erinevalt. Joonisel 3.3, d on kujutatud okaspuidu purunemist piki kiudu. Tugevamad puidukiud nõtkusid välja, murdusid ja tungisid pehmematesse vahekihtidesse.

Rabedatest materjalidest surveproovikehad purunevad nelja moodi. Joonisel 3.3, c ja f on kujutatud vastavalt kivi- materjalide ja malmi purunemispildid, mis on väliselt erinevad, kuid mille ühiseks jooneks on purunemine umbes 45° kaldpindu mööda. Purunemise põhjuseks on jälle suurim nihkepinge. Need kaks purunemispilti on seotud suhteliselt suure survedeformatsiooniga, nagu seda ilmutavad hallmalm, betoon, tellised, pehmemad kivimid jt.

Karastatud teras, valgemalm, tugevad kivimid, klaas ja nendetaolised väga haprad materjalid annavad purunemispildi, mis on kujutatud joonisel 3.10, b. Niisugused materjalid purunevad pauguga ja proovikeha tükid võivad lennata ümbruskonda. Selles purunemispildis esineb kõige vähem seaduspärasust, kuid enamus uurijaid märgivad tüüpilisi survejõusuunalisi pikipragusid, mis aga paljudel juhtudel on vaieldavad.

Vaadeldes sitkete ja rabedate materjalide tugevust, leia-

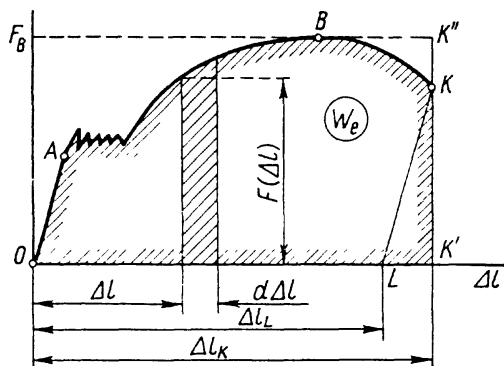
me, et mida sitkem on materjal, seda ühtlasem on tema tõmbe- ja survetugevus. Habrast materjali iseloomustab harilikult tõmbetugevusest suurem survetugevus. Hallmalmi survetugevus ületab tõmbetugevuse 3...4 kordselt, kivimitel ja betoonil umbes kümnekordselt. Sitketel materjalidel võrreldakse surve- ja tõmbetugevust voolavuspiiride või tinglike voolavuspiiride alusel. Väheste eranditega on voolavuspiirid tõmbel ja surveel võrdsed.

**3.6.5. Teimi töö.** Vaatleme terase tõmbediagrammi joonisel 3.12\*. Proovikeha pikenemise  $\Delta l$  juurdekasvule  $d\Delta l$  vastab jõud  $F(\Delta l)$ , mis teeb deformatsiooni juurdekasvul elementaartöö  $dW_e = F(\Delta l)d\Delta l$ . See töö vastab diagrammi pinna viirutatud osale. Kogu töö tõmbeteimil  $W_e$  on arvutatav:

$$W_e = \int_0^{\Delta l_k} dW_e = \int_0^{\Delta l_k} F(\Delta l) d\Delta l, \quad (3.7)$$

kus töö  $W_e$  on teatavasti käsitletav tõmbediagrammi pindalana  $OABKK'$ , mis on äärtel viirutatud. Seejuures joonlõik  $KK'$  on paralleelne jõu  $F$  teljega. Integraal (3.7) määratakse harilikult tõmbediagrammi pindala mõõtmisega kas planimeetri abil, millimeetripaberil vahendusel või numbrilise integreerimisega.

Töö  $W_e$  koosneb kahest osast: töödest proovikeha elastseks ja plastseks deformatsiooniks. *Elastse deformatsiooni töö* vastab kolmnurga  $KK'L$  pindalale, mille külg  $KL$  on paralleelne diagrammi elastsuspiirkonda esindavale lõigule



Joon. 3.12

\* Joonisele ilmekuse andmiseks on diagrammi osa OA kujutatud tegelikust palju suurema kaldega.

OA. See osa tööst on salvestunud proovikehas enne selle purunemist potentsiaalse energiana, mis purunemisel kõrvaldab proovikeha elastse pikenemise  $LK'$ . *Plastse deformatsiooni töö*, mis vastab diagrammi pindalale  $OABKL$ , kulus proovikeha jääkpikenemise  $\Delta l_L$  tekitamiseks. See osa tööst muutub materjali sisehõõrdumisel peamiselt soojusenergiaks.

Sitkematel ja plastsematel terasesortidel on töö  $W_e$  suurem kui kvaliteetierastel, termiliselt töödeldud ja kalestatud terastel, mille katkevenivus on väiksem. Elastseks deformatsiooniks kulunud töö on suurem kvaliteetierastel. Ka elastse ja plastse deformatsiooni suhe kasvab voolavuspiiri kõrgenemise ja katkevenivuse vähenemisega.

Metallide iseloomustamiseks kasutatakse mõnikord *tõmbediagrammi täitetegurit*  $\eta$ , mis kujutab endast suhet

$$\eta = \frac{W_e}{F_B \Delta l_k}, \quad (3.8)$$

kus nimetajas esinev suurus vastab diagrammil ristküliku  $OF_BK''K'$  pindalale ja tegur  $\eta$  näitab, kui suure osa sellest pindalast katab tõmbediagrammi pindala.

Metallide tõmbediagrammi täitetegur võib olla piirides  $0,5 < \eta < 1$ . Teguri  $\eta$  väiksemad väärtused vastavad hapralt purunevatele metallidele, suuremad väärtused iseloomustavad plastset materjali. Termiliselt töötlemata ja kalestatud harilike süsinikteraste tõmbediagrammi täitetegur on piires 0,75...0,90.

Teimimisel rakendatava jõu  $F$  töö  $W_e$  kõrval kasutatakse *teimi eritööd*  $w$ , mis kujutab endast proovikeha ühele mahuühikule kulutatud tööd:

$$w = \frac{W_e}{V}, \quad (3.9)$$

kus  $V$  on proovikeha algmaht.

Asendades töö  $W_e$  seosest (3.8) ja avaldades proovikeha algmahu algristlõikepindala  $A$  ja algpikkuse  $l$  korrutisena, saame:

$$w = \frac{\eta F_B \Delta l_k}{Al} = \eta \sigma_B \delta, \quad (3.10)$$

millest nähtub, et teimi eritöö  $w$  on vaadeldav tõmbediagrammi pindalana  $\sigma$ —ekoordinaadistikus.

### 3.7. TUGEVUSE KAUDNE MÄÄRAMINE

**3.7.1. Tugevuse sõltuvus.** Eespool vaatlesime materjali tugevusomaduste otsesest määramist proovikehade teimimise teel. Sageli pole otsene määramine võimalik ja see asendatakse tugevusomaduste kaudse määramisega. Viimane seisneb materjali niisuguse omaduse arvnäitaja mõõtmises, mis on tuntud sõltuvuses tugevusega ja mille määramisel pole tarvilikud proovikehad. Mõõtmisele allutatakse vahetult uuritav konstruktsioonelement, mis mõõtmisest ei vigastu või on tekkinud vigastused tühised tema edasise kasutamise seisukohalt.

Toome mõned näited materjali tugevuse kaudse määramise võimalikest füüsikalistest alustest.

Männipuit on seda tugevam, mida tihedam ta on. Järelikult võime puidu tugevust hinnata tiheduse alusel teatud kindla niiskussisalduse juures, kui oleme täpsemalt selgitanud tiheduse ja tugevuse sõltuvuse.

Betoon on seda tugevam, mida suurem on tema elastsusmoodul. Elastsusmoodul sõltub aine tihedusest ja heli levikiirusest. Selgitanud vastavad sõltuvused eksperimentaalse ja teoreetilise uurimisega, võime betooni tugevust hinnata ultraheli levikiiruse mõõtmisega betoonist konstruktsioonelementis. Selleks kasutatav mõõtesead on tuntud *betonsooobi* nime all.

Laiemalt on levinud materjali tugevusomaduste hindamine *kõvaduse* järgi, mida vaatleme lähemalt.

**3.7.2. Kõvadus.** Keha kõvadusena mõistame tema vastupanuvõimet teise keha sissetungimisele välispinna väikesel alal. Kõvaduse määramise viise on mitmeid ja neid tunatakse vastavate menetluste väljatöötajate ja esmakasutajate nimede järgi.

Üldtuntud on mineraloogias kasutatav *Mohsi astmik*, mis on rajatud kümnele etalonile tuntud mineraalidest. Kõvaduse kasvamine järjekorras on nendeks mineraalideks: 1 — talk, 2 — kips, 3 — kaltsiit, 4 — fluoriit, 5 — apatiit, 6 — ortoklaas, 7 — kvarts, 8 — topaas, 9 — safiir, 10 — teemant. Uuritava aine kõvadus selle astmiku järgi tehakse kindlaks etalonidega kriimustamise teel. Seejuures on kõvaduse tunnusarvuks selle etaloni järjenumbr, mis kõvemate etalonide poolt tulles esimesena pole suuteline kriimustama uuritavat ainet. *Mohsi astmik* pole sobiv konstruktsioonimaterjalide tugevusomaduste hindamiseks madala mõõtetundlikkuse tõttu.

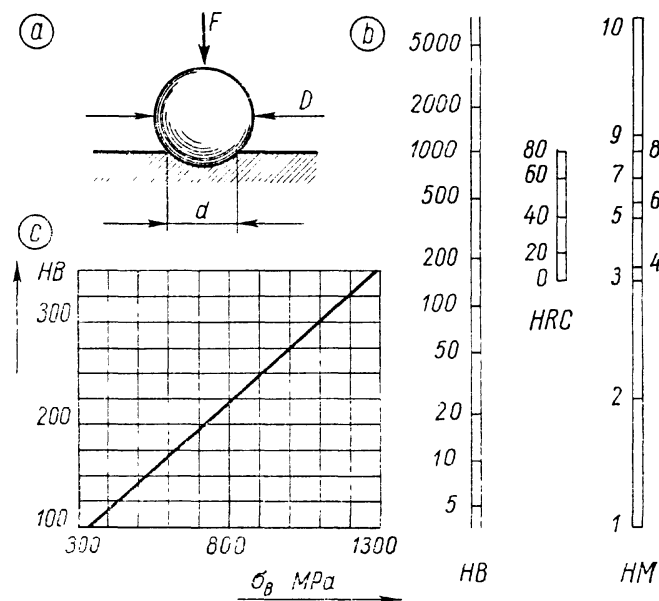
Tugevusomaduste hindamisel tulevad arvesse kõvaduse

määramise *Brinelli, Rockwelli, Vickersi, Shore'i ja Herbert'i* meetodid, millest enamlevinud on esimene. Vaatleme lähemalt *Brinelli meetodit*.

**3.7.3. Kõvaduse määramise meetodid.** *Brinelli* meetod seisneb teraskuuli surumises uuritava keha pinda teadaoleva jõuga  $F^*$ . Selgitame seda menetlust joonisel 3.13, a. Kuul läbimõõduga  $D$ , mida nimetame *indentoriks*, jätab uuritava keha pinnale sfäärilise jälje läbimõõduga  $d$ . *Brinelli* kõvadusarvuks  $HB$  nimetatakse suhet

$$HB = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi D}{2} (D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \quad (3.11)$$

kus  $A$  on kuuli jälje sfääriline pindala, mis valemi viimases avaldises on väljendatud nimetajas kuuli ja jälje läbimõõdude kaudu. *Brinelli* kõvadusarv avaldatakse ühikuga  $\text{kgf/mm}^2$ , mille esitamine arvu järel pole tarvilik.



Joon. 3.13

\* Johann August Brinell (1849...1925) — rootsi insener, kes nimetatud meetodi esitas Pariisi maailmanäitusel 1900. a.

Indentorina kasutatakse karastatud terasest kuuli läbimõõduga  $D=2,5, 5$  või  $10$  mm. Kuul võib olla valmistatud ka mõnest muust materjalist, mis on uuritavast kõvem. Jõud  $F$  valitakse vastavalt kuuli läbimõõdule ja uuritavale materjalile nii, et jälje läbimõõt jääks piiresse  $0,2D < d < 0,6D$ . Harilikult määratakse jõud  $F=30D^2$  kõvematele ja  $F=10D^2$  pehmematele materjalidele. Seejuures  $D$  mõõdetakse millimeetrites ja  $F$  jõukilogrammides.

Uuritava konstruktsioonielemendi pinnal töödeldakse tasaseks väiksed alad lineaarmõõtmega umbes  $10$  mm, silutakse ja igal pinnakesel tehakse jälg spetsiaalse *Brinelli pressiga*. Kasutada võib ka mis tahes muud katsemasinat, mis tagab jõu mõõtmise üheprotsendilise täpsuse. Jõu mõjumise aeg ei tohi olla alla  $10$  sekundit, et anda aega deformatsiooni väljakujunemiseks jälje tekkimisel.

Jälje läbimõõtu mõõdetakse täpsusega  $0,05$  mm kahes ristuvas suunas, millest võetakse arvesse keskmine väärtus. Harilikult kasutatakse jälje mõõtmiseks skaalaga varustatud vaateväljaga mikroskoopi või luupi. Kõvadusarv määratakse kolme jälje alusel aritmeetilise keskmise väärtusena. Suurte konstruktsioonielementide või ebaühtlasema materjali uurimisel jälgede arvu suurendatakse.

*Brinelli* kõvadusarvu määramise eelpoolkirjeldatud põhimenetluse kõrval kasutatakse vähemtäpset, kuid portatiivset *Brinelli löögiseadet*, mis on tuntud ka *Poldi seadmena* neid valmistava tehase nime järgi. Selles seadmes, mis kuju poolest meenutab umbes  $100$  mm pikkust torni läbimõõduga  $25$  mm, seatakse indentor uuritava detaili ja tuntud omadustega *etaloni* vahele. Jõud haamri löögist tekitab üheaegselt jäljed nii uuritaval pinnal kui ka etalonil, mis annab võimaluse määrata uuritava detaili kõvadusarvu  $HB$  seosega

$$HB = \frac{A_e}{A} HB_e, \quad (3.12)$$

kus  $A_e$  ja  $A$  on jälgede sfäärilised pindalad vastavalt etalonil ja uuritaval detailil ning  $HB_e$  etaloni kõvadusarv.

*Brinelli* kõvadusarvude  $HB$  ja *Mohsi* astmiku  $HM$  ligikaudset vastavust on näidatud joonisel 3.13, *b* *G. F. Kinney* uurimuste alusel.

*Rockwelli* ja *Vickersi* meetodid ning üks *Shore'i* kahest meetodist rajanevad samale põhimõttele mis *Brinelli* oma. Erinevused on indentori kujus, mõõtmetes, materjalis ja kõvadusarvu aluseks valitud mõõdetavas parameetris.

Erinevate meetoditega määratud kõvaduse näitarvud on enamikul juhtudel omavahel mittelineaarses sõltuvuses. Neid

sõltuvusi on uuritud paljudel materjalidel ja sügavamalt selgitatud metallidel. Vastavaid võrdlusandmeid võib leida kirjandusest\*.

**3.7.4. Tugevuse sõltuvus kõvadusest.** Metallide tugevusomadusi hinnatakse harilikult *Brinelli* kõvadusarvust lähtudes. Põhjuseks on siin nähtavasti asjaolu, et tasakaalustatud struktuuriga teraste tõmbetugevus  $\sigma_B$  on *Brinelli* kõvadusarvuga  $HB$  enamvähem lineaarses sõltuvuses

$$\sigma_B = CHB, \quad (3.13)$$

kus võrdetegur  $C$  võetakse terastele tõmbetugevusega kuni  $600$  MPa  $C=3,4$  ja kõrgema tugevusega terastele  $C=3,6$ , millega saame  $\sigma_B$  megapaskalites. Seda sõltuvust graafikuna on kujutatud joonisel 3.13, *c*.

Seos (3.13) on põhiline terase tõmbetugevuse hindamisel kõvaduse järgi.

Ebastabiilse struktuuriga, kalestatud, karastatud ja muul viisil termiliselt või termokeemiliselt töödeldud teraste tõmbetugevuse ja kõvaduse seose esitamisel ülaltoodud võrdeteguri väärtused ei kõlba. Enamikul juhtudel võib teguri  $C$  vastava väärtuse määrata katselisel teel teatud piirides ja selle abil hinnata tugevust.

Mõnel juhul on materjali tugevuse ja kõvaduse sõltuvus mittelineaarne ja selle võib esitada üldisemal kujul:

$$\sigma_B = f(H), \quad (3.14)$$

kus funktsiooni argumentina  $H$  mõistame kõvaduse näitarvu *Brinelli* või mõne muu meetodi järgi. Enamasti esitatakse sõltuvus (3.14) uurimistulemustest graafikutena.

### 3.8. TEMPERAATUURI JA AJA MÕJU

**3.8.1. Normaalingimused.** Eespool vaatlesime materjalide mehaanilisi omadusi tõmbel ja survele, mis saadakse *normaalingimustes*. Nende tingimustena mõistame toatemperatuuri  $20$  °C, relatiivset niiskust  $60 \dots 70\%$ , õhurõhku  $1013$  hPa ja jõu staatilist mõjumist. Jõu staatilise mõju all mõeldakse proovikehade koormamist harilike katsemasinatega, mis arendavad väikse kiirusega deformatsiooni piires  $\epsilon=0,001 \dots 1 \text{ min}^{-1}$ . Koormamise kestus nendes masinates piirdub ajavahemikuga mõnest sekundist kuni mõne minutini.

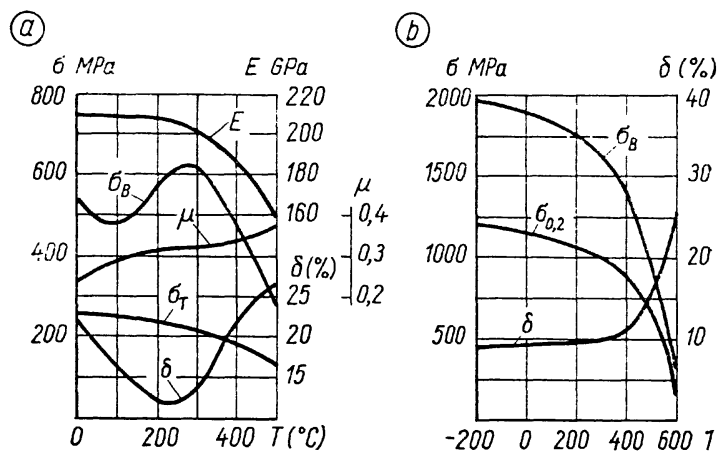
Konstruktsioonielemendi *töötingimused* võivad oluliselt

\* Справочник марок сталей, пер. с нем. Metallургияздат, 1963.

erineda normaaltingimustest. Soojusjõujaamade seadmetes pole haruldane temperatuur 600 °C ja võib tõusta palju kõrgemale. Kaug-Põhjas töötavad konstruktsioonid temperatuuril kuni -70 °C. Koormamine võib kesta mõnest miljonidikust sekundist kümnete aastateni. Sageli on töökeskkonnaks vesi või mõni muu vedelik. Ka kõrge rõhk pole haruldane.

Materjalide mehaaniliste omaduste uurimine muutuvates töötingimustes on keeruline ülesanne ja kuulub tugevusõpetuse tütarteaduse *reoloogia* valdkonda. Meie vaatleme nende sõltuvuste mõningaid tahkusi lihtsamate tehniliste probleemide seisukohalt, mis sagedamini esinevad inseneripraktikas.

**3.8.2. Temperatuuri mõju.** Joonisel 3.14, *a* on kujutatud hariliku süsinikterase elastsusmooduli  $E$ , *Poissoni* teguri  $\nu$ , tõmbetugevuse  $\sigma_B$ , voolavuspiiri  $\sigma_T$  ja katkevenivuse  $\delta$  sõltuvused temperatuurist piirkonnas 0...500 °C. Tähelepanu väärib hariliku terase tõmbetugevuse ja katkevenivuse sõltuvus temperatuurist, mis näitab materjali *termilist kalustumist*. Viimane saavutab oma haripunkti temperatuuril 200...300 °C, kus tõmbetugevus on tõusnud umbes 20% ja katkevenivus vähenenud umbes 50% võrreldes samade suurustega normaaltingimustel. Selle kalustumisega ei kaasne voolavuse kõrvaldumine, nagu see esines deformatsiooniga kalustamisel, mida vaatlesime jaotises 3.5.



Joon. 3.14

Hariliku süsinikterase tugevus raugneb temperatuuril 600...700 °C. Kaob elastsus, mis tähendab, et  $E \rightarrow 0$  ja  $\nu \rightarrow 0,5$  ja teras muutub sepistatavaks plastseks aineks.

Värvilised metallid, nende sulamid ja legeeritud terased käituvad temperatuuri tõusul süsinikterasest erinevalt. Neil puudub vahepealne kalustumine ja mehaanilised omadused muutuvad pidevalt ühes suunas. Joonisel 3.14, *b* on kujutatud krooni ja magneesiumiga legeeritud terase 30XTCA tõmbetugevuse, tingliku voolavuspiiri ja katkevenivuse sõltuvused temperatuurist.

Okaspuidu tugevus langeb temperatuuri tõustes 20 °C kuni 66 °C peaaegu lineaarselt 35% võrra. Temperatuuri edasise tõusuga kaasneb puidu mehaaniliste omaduste pöördumatu muutumine, mis sõltub ajast. Siit järeldub, et puidu kasutamine konstruktsioonides, mille temperatuur ületab 50 °C, pole soovitatav. Temperatuuri vähenemisel 20 °C kuni -180 °C suureneb puidu tugevus märgatavalt.

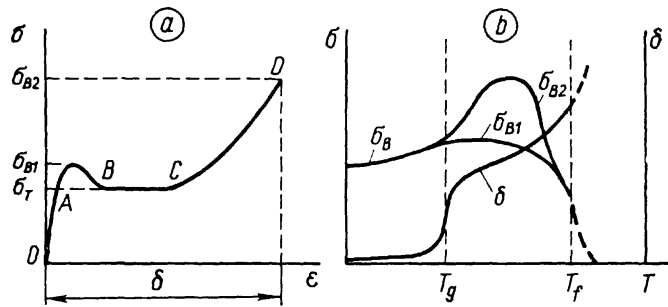
Betoonide ja kivimaterjalide tugevuse sõltuvused temperatuurist on väga erinevad olenevalt nende koostises leiduvatest ainetest. Neid sõltuvusi vaadeldakse lähemalt ehitusmaterjalide kursuses.

Plastide mehaanilised omadused sõltuvad temperatuurist suuremal määral kui teiste materjalide deformatsiooni- ja tugevusnäitajad. Konstruktsioonides kasutatavad plastid koosnevad enamikul juhtudel *side-* ja *täiteainest*. Sideaineks on mingi polümeer, näiteks epoksüvaik; täiteaineks kasutatakse keemiliselt inertset lisandit-pulbrit, tekstiili, kiudainet või paberit. Materjali mehaanilised omadused sõltuvad oluliselt nii side- kui ka täiteainest, kuid nende sõltuvusele temperatuurist annab iseloomulikud jooned sideaineks kasutatav polümeer.

Polümeeridele on iseloomulikud kolm kvalitatiivselt erinevat pingedeformatsiooni sõltuvust olenevalt temperatuurist.

1) Kui polümeeri temperatuur  $T$  on madalam sellele materjalile iseloomulikust piirist  $T_g$ , siis käitub ta hapra materjalina ja  $\sigma - \epsilon$  diagramm sarnaneb klaasi diagrammile. Seejuures kasutatakse väljendit - *klaasitaoline seisund*. Katkevenivus on 0...5%, veidi suurenedes temperatuuri lähenedes piirväärtusele  $T_g$ . Joonisel 3.15, *b* on kujutatud see piirkond  $\sigma$ -telje ja sellega paralleelse kriipsjoone  $T_g$  vahel.

2) Temperatuurivahemikus  $T_g < T < T_f$  käitub enamik polümeere erinevalt «vanadest» materjalidest. Jooniselt 3.15, *b* nähtub, et temperatuuri  $T_g$  lähemas ümbruses materjali katkevenivus suureneb järsult ja polümeer muutub sit-



Joon. 3.15

keks. Selles piirkonnas esineb sageli niisugune tõmbediagramm, mis on kujutatud joonisel 3.15, a.

Proovikeha venib piirkonnas OA, käitudes peaaegu nagu elastne materjal. Piirkonnas AB deformatsiooni kasv kiireneb, tekib voolamine ja moodustub kael. Piirkonnas BC kael areneb piki proovikeha ja punktis C on proovikeha läbimõõt ühtlaselt kahanenud kogu pikkusel. Järgneb piirkond CD, kus pinge kasvab koos deformatsiooniga ühtlase läbimõõdu säilides kuni purunemiseni punktis D. Seejuures viimases piirkonnas on jälle lähedane elastse materjali deformatsioonile.

Polümeer rakendatakse tööle konstruktsioonimaterjalina kas piirkonnas OA või CD, piirkonda ABC kasutatakse materjali töötlemiseks. Materjalile on iseloomulikud kaks tööpiirkonda ja vastavalt ka kaks tõmbepinge haripunkti  $\sigma_{B1}$  ja  $\sigma_{B2}$ , mis joonisel 3.15, b on näidatud eraldi joontena olenevalt temperatuuri tõusust. Piirkonnas OA on polümeer vaadeldav isotroopse materjalina, piirkonnas BC kujuneb temast anisotroopne materjal.

3) Kui polümeeri temperatuur ületab temale omase piirväärtuse  $T_f$ , muutub ta pehmeks ja plastseks ning tema kasutamine konstruktsioonimaterjalina pole võimalik. Seda kasutatakse *termoplastsete polümeeride* töötlemiseks vormimise teel.

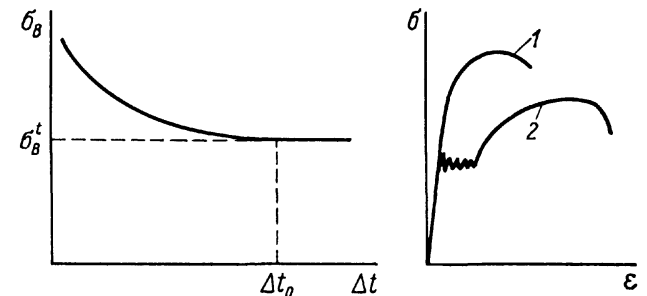
Polümeer, mille iseloomulik temperatuuri piirväärtus  $T_g > 20^\circ\text{C}$ , käitub normaaltemperatuuril hapra materjalina, kui aga  $T_g < 20^\circ\text{C}$ , siis sitke materjalina. Näiteks polüetüleen on toatemperatuuril sitke, katkevenivusega umbes 400%, madalal temperatuuril on ta habras, klaasitaoline materjal.

Plastide mehaanilised omadused pole tänapäeval veel

põhjalikult läbi uuritud ning sellepärast on siin vähe üldistusi ja palju «valgeid laike». Isegi mehaaniliste omaduste konkreetsetesse väärtustesse, mis tuuakse ära ühes või teises raamatus, peab suhtuma äärmise ettevaatlikkusega. On küllalt juhtumeid, et üks ja sama materjal erinevatest valmistajatehastest või erinevatest toodangupartiidest on oluliselt erinevate omadustega. Peab arvestama ka asjaoluga, et plastide mehaaniliste omaduste määramise meetodika pole veel välja kujunenud ja sageli puuduvad ühtsed üldtunnustatud seisukohad.

Teisiti öeldes tegemist on materjalidega, mille omadused on suurel määral varieeruvad ning pole nii selgelt piiritletud nagu näiteks metallidel ja nende sulamitel. Plastide kasutamine konstruktsioonides nõuab materjali mehaaniliste omaduste hoopis laiemat ja sügavamat uurimist igal kasutamise üksikjuhul, kui oleme seda harjunud tegema teiste materjalide rakendamisel. Paratamatu on ka vajadus lähendada proovimise tingimusi konstruktsiooni töötingimustele, pöörates seejuures suurt tähelepanu temperatuuri võimalikele muutustele.

**3.8.3. Koormamise kiirus.** Joonisel 3.16, a on kujutatud tugevuse sõltuvus koormamise ajavahemikust, mille vältel koormus kasvab nullist purustava piirini. Igale materjalile on iseloomulik pikaajalise koormuse nn. *kestustugevus*  $\sigma_B^t$ , mis on määratav, kui proovikeha koormamise kestus pole lühem teatavast, antud materjalile iseloomulikust ajavahemikust  $\Delta t_0$ . Koormamise kestus  $\Delta t_0$  on suhteliselt lühike metallidel ja jääb normaaltingimuste piiridesse. Seepärast saame terase tavalise teimimise tulemuseks tõmbel kestustugevuse ( $\sigma_B = \sigma_B^t$ ).



Joon. 3.16

Betoonidel, kivimaterjalidel, puidul ja plastidel on koormamise kestus  $\Delta t_0$ , kestustugevuse saamiseks palju pikem koormamise normaalkestusest, ulatudes tundidesse ja päevadesse. Nende materjalide  $\sigma_B^t$  on märgatavalt madalam normaalugevusest  $\sigma_B$  ja moodustab sellest 65...90%.

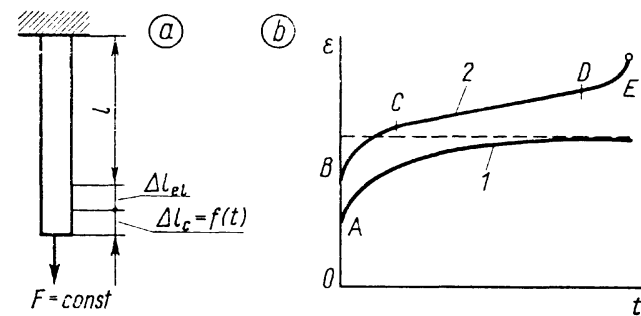
Kui koormamise kestus  $\Delta t$  väheneb normaalkestusega võrreldes, suureneb kõigi materjalide tugevus ja väheneb katkedeformatsioon. Joonisel 3.16, *b* on kujutatud harilikur terase tõmbediagramm kiirel koormamisel (kõver 1) ja selle kõrval normaalkiirusega (kõver 2). Seejuures koormamisaja vähenedes kahaneb terase voolavuspiirkond ning voolavus kaob täielikult, kui koormamiskiirus ületab teatava piiri.

**3.8.4. Järeilmõju.** Koormatud konstruktsioonis esineb aeglane pinge ja deformatsiooni muutumine, mida nimetatakse koormuse *järeilmõjuks*. Selles nähtuses osalevad muutuvate suurustena koormus, aeg, pinge ja deformatsioon keerulistes sõltuvustes, mille üldine uurimine on deformeeruva keha mehaanika sügavamaid probleeme. Vaatleme järeilmõju kahte lihtsamat erijuhtu, *roomamist* ja *pinge relaksatsiooni*.

*Roomamine on konstruktsioonelemendi aeglane deformeerumine püsiva koormuse mõjul.* Tõmbele allutatud varda roomamist vaatleme joonisel 3.17, *a* kujutatud skeemi järgi, kus jõu  $F$  mõjul areneb pärast elastset pikenedmist  $\Delta l_{el}$  veel pikenedmine  $\Delta l_c$  pikema aja vältel.

Roomavus on omane kõigile materjalidele, kuid enamikul juhtudel on see deformatsioon nii väike, et ei vääri tähelepanu. Väikese pinge ja normaaltemperatuuri puhul pole teraskonstruktsioonides roomamine märgatav, muutub aga oluliseks nähtuseks kõrgel temperatuuril ja seda eriti seoses suuremate pingetega. Betoonid, kivimaterjalid, puit, plastid, tina ja teised pehmed metallid, roomavad märgatavalt ka normaaltemperatuuril, kui pinge ületab teatava murdosa nende tugevusest või voolavuspiirist.

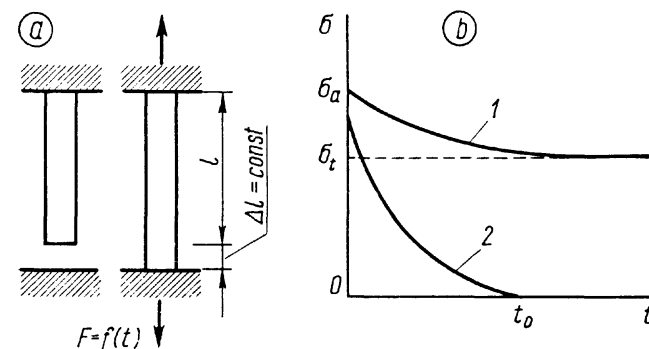
Joonisel 3.17, *b* on kujutatud kaks tüüpilist  $\epsilon$ — $t$ sõltuvust, millest kõver 1 näitab, et elastsele deformatsioonile  $OA$  järgneb deformatsiooni juurdekasv roomamisest. Seejuures läheneb roomamise kiirus asümptootiliselt nullile ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) ja deformatsioon  $\epsilon$  stabiliseerub teataval kindlal suurusel. Seda tüüpi roomamine ei põhjusta purunemist. Kõver 2 iseloomustab roomamist, mille kiirus algul samuti kahaneb vahemikus  $BC$ , kuid jääb siis püsivaks ( $\epsilon = \text{const}$ ) vahemikus  $CD$ . Seejuures deformatsioon pidevalt kasvab ajas ja põhjustab paratamatut purunemist punktis  $E$ .



Joon. 3.17

Üldreeglina tuleb konstruktsioonides tagada aja jooksul kustuva kiirusega roomavus, mis ei lõpe purunemisega. Betooni roomamine lakkab mõne kuu või aasta jooksul, kui pinge ei ületa teatavat piirväärtust, mida nimetatakse materjali *roomavuspiiriks*  $\sigma_c$  ja mis moodustab 20...40% betooni normaalugevusest.

Paljudel juhtudel on materjali roomavuspiir nii madal, et oleme sunnitud kasutama konstruktsioonelemente, milles areneb *lakkamatu roomamine*. Siia kuulub tina normaaltemperatuuril, aga samuti teras kõrgel temperatuuril. Praktiliselt pole võimalik vältida pidevalt arenevat roomamist tänapäeva soojusjõujaamade paljudes terasest konstruktsioonelementides, mille temperatuur tõuseb 600 °C ja mis töötavad suurte koormustega. Lakkamatu roomavusega detailid



Joon. 3.18

võivad töötada teatava aja, näiteks mõni aasta, kuni deformatsioon saavutab suurima lubatava piirväärtuse, mille järel nad vahetatakse uutega.

*Relaksatsioon on pingete aeglane kahanemine püsiva deformatsiooniga konstruktsioonis.* Tõmmatud varda pinge relaksatsiooni vaatleme joonisel 3.18, *a*, kus  $\Delta l$  on etteantud pikenedamine ja  $F$  sellest pikenedamisest esile kutsutud tõmbejõud, mis aja vältel kahaneb, relakseerub. Pinge relaksatsiooni kujutavad joonisel 3.18, *b* graafikud 1 ja 2. Esimene näitab *osalist relaksatsiooni*, mis esineb enamikul juhtudel. Teise kõveraga iseloomustatav *täielik relaksatsioon* leiab aset peamiselt kõrgel temperatuuril töötavates pingestatud metalldetailides.

Poldid on harilikult kinni keeratud teatava eelpingega, mis aja jooksul relakseerub, poldid lõdveneivad ja neid tuleb pingutada, et kompenseerida relaksatsioon.

### 3.9. TUGEVUSE PIIRPINGE JA VARUTEGUR

**3.9.1. Piirpinge.** Konstruktsioonielement peab rahuldama *tugevustingimust*, mida vaatlesime jaotises 2.6. Tugevustingimus nõuab, et suurim pinge ei ületaks *lubatavat pinget*, mille määramise alustega tutvume käesolevas jaotises.

Lubatav pinge  $[\sigma]$  määratakse kahe suuruse jagatisena:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{lim}}{S}, \quad (3.15)$$

kus  $\sigma_{lim}$  on konstruktsioonielemendile iseloomulik tugevuse *piirpinge* ja  $S$  *varutegur*.

Tugevuse piirpinge ületamine põhjustaks konstruktsioonielemendi enneaegse tööst väljalangemise kas purunemise või liigse deformeerumise tagajärjel. Seda pinget nimetatakse veel *ohhtlikuks* või ka *raugepingeks* ja ta valitakse materjali tugevust iseloomustavatest pingetest, lähtudes konstruktsioonielemendi töötingimustest.

Normaalingimustes töötavale staatilise koormusega konstruktsioonielemendile võetakse terase piirpingeks voolavuspiir  $\sigma_T$  või tinglik voolavuspiir  $\sigma_{0,2}$ . Malmile, betoonile, kivimaterjalile, puidule ja teistele materjalidele, mille põhiline tunnussuurus on tugevus, võetakse piirpingeks  $\sigma_B$  või kestustugevus  $\sigma_B^t$ , kui teine on esimesest oluliselt madalam. Tugevuse piirpingetena võivad esineda veel roomavuspiir, tugevus madalal või kõrgel temperatuuril, elastsuspiir ja mitmesugused teised tugevuse tunnussuurused, mida vaatlesime käesolevas jaotises 3. Mõnedega võimalikest piirpingetest tutvume edaspidi.

Erandjuhtudel peetakse silmas tugevuse hindamisel mitut piirpinget, ühte normaalsete töötingimuste jaoks ja teisi võimalike eriolukordade puhul (maavärjn, tulekahju jt.).

Piirpinget vaatleme ligikaudse suurusena, mis on määratud teatud hulga proovikehade teimimise tulemustest keskmise väärtusena. Seejuures on piirpinge hälbed mitmesugustel materjalidel erinevad, terasel on nad väiksemad, puidul ja betoonil suuremad. Mehaaniliste omaduste mõningat hajuvust põhjustab materjali paratamatu ebaühtlus.

**3.9.2. Varutegur.** Tugevusarvutuste algandmed on ligikaudsed suurused, mis antakse keskmiste väärtustega. Siia kuuluvad peale piirpinge kasuskoormus, konstruktsioonielemendi geomeetriselised mõõtmed, materjali tihedus jt. Täpsust vähendavad ka lihtsustused tugevusarvutuste alustes ja arvutusseemis.

Ligikaudsete algandmetega arvutus võib usaldatava tugevuse kindlustada vaid siis, kui me tugevustingimuses lubatava pinge võtame küllaldasel määral madalama piirpingest. Piirpinge ja lubatava pinge suhte määrab varutegur  $S$ . Optimaalne varutegur hoiab kõige ebasoodsamal juhul konstruktsioonielemendi suurima pinge veidi madalama piirpingest. Optimaalsest väiksem varutegur toob kaasa avariiseisundi tekkimise ohu, suurem varutegur aga tingib materjali ülekulu ja konstruktsiooni põhjendamata kallinemise. Eelöeldust järeldub, et *varuteguri suurus määratakse kahte vastandlikku nõuet — ohutust ja ökonoomsust rahuldava suht- arvuna.*

Tugevuse varutegurid on piires 1,4...20. Kui töötingimused pole rasked, kasutatakse hariliku terase jaoks staatiliselt mõjuva koormuse puhul varutegurit piires 1,5...2,2, malmile 2,5...3,5, puidule 4...6 ja looduslikele kivimaterjalidele 6...10.

**3.9.3. Diferentseeritud varutegur.** Varuteguri lähendamiseks optimaalsele väärtusele kasutatakse tema diferentseeritud määramist osategurite korrutisena:

$$S = S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_n, \quad (3.16)$$

kus iga osategur võtab arvesse ühe või mitme faktori mõju. Osategurite hulk  $n$  sõltub arvestatavate mõjufaktorite arvust ja muutub seni ettepanud süsteemides kolmest kümneni. Kahjuks pole siin veel üldisi seisukohti välja kujunenud ja seepärast on vara rääkida lõplikest lahendustest. Kõik kasutamist leidvad süsteemid on oma kohal põhjendatud ja rakendatavad varuteguri täpsemaks määramiseks.

Diferentseeritud varuteguri arvutamisel peab silmas



pidama asjaolu, et iga osategurite süsteem on lahutamatu tervik, mille osategureid ei saa vaadelda iseseisvate varuteguritena. Ühe süsteemi osategurite lisamine teises süsteemis, aga samuti asendamine on enamikul juhtudel lubamatu.

Laiemat rakendust on leidnud nii ehituses kui ka masinaehituses kolme osateguriga määratud varutegurid:

$$S = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3. \quad (3.17)$$

Ehituskonstruksioonide tugevusarvutustes kannab osategur  $S_1$  nimetust *ülekoormustegur*,  $S_2$  - *materjali ühtlustegur* ja  $S_3$  - *töötingimuste tegur*. Kaks esimest on statistiliste uurimustega määratavad suurused, kolmas kehtestatakse kogemuste najal. Ülekoormustegur on piires 1...3, materjali ühtlustegur 1,1...1,7. Töötingimuste tegur võetakse enamikul juhtudel võrdseks ühega, mõningate konstruksioonielementide arvutustes antakse talle väärtus 1,1...1,5.

Masinaehituses arvestab  $S_1$  ülekoormust ja arvutusskeemi ebatäpsust;  $S_2$  - materjali ebaühtlust ja tundlikkust töötlemisjälgede suhtes;  $S_3$  - detaili vastutusrikkust. Ka siin on esimene neist osategureist piires 1...3, teine aga veidi suurem 1,2...2,5. Vastutusrikkuse tegur on piires 1...1,5.

Osategurite konkreetset väärtust antakse projekteerimismisnormides ja tehnilistes tingimustes.

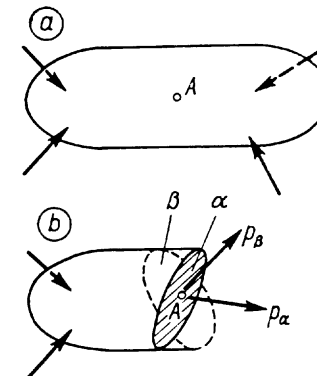
## 4. PINGETEOORIA

### 4.1. PINGUS

**4.1.1. Pinguse mõiste.** Vaatleme pingeid koormatud keha punktis  $A$  joonisel 4.1, *a*. Läbi punkti  $A$  tehtud lõikepinnal  $\alpha$  mõjub vaadeldavas punktis pinge  $p_\alpha$ , mida kujutame joonisel 4.1, *b*. Kui teeme läbi sama punkti lõike mingis teises suunas, siis saame sellel lõikepinnal  $\beta$  ka teistsuguse pinge  $p_\beta$  vaadeldavas punktis. Muutes korduvalt lõikepinna suunda, võime punktis  $A$  määrata piiramatu hulga üksteisest erinevaid pingeid  $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, \dots$

*Pinguseks ehk pingeseisundiks keha punktis nimetatakse üksteisest erinevate pingete hulka, milles pinged on määratud mis tahes suundadega lõikepindadel vaadeldavas punktis.*

*Pingus* on tähtsamaid mõisteid tugevusõpetuses, sest konstruksioonielemendi tugevuse hindamisel peame silmas pidama kõiki pingeid vaadeldavas punktis ja mitte piir-



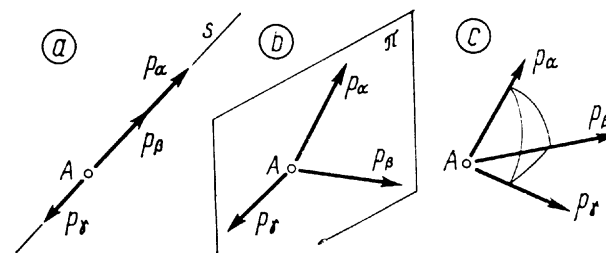
Joon. 4.1

duma ainult ühe pinge tundmisega meelevaldselt valitud lõikepinnal. Teisiti öeldes, tugevuse hindamine põhineb pinguse tundmisel.

Jaotises 2.5 uurisime pingeid varda punktis muutuva kaldega pinnal. Selgitasime pinguse tõmbel ja survel, kus ta esineb suhteliselt lihtsana. Käesolevas jaotises 4 vaatleme konstruksioonielementides esinevaid keerukamaid pingusi.

**4.1.2. Joon-, tasand- ja ruumpingus.** Neid nimetusi pinguste iseloomustamiseks kasutatakse olenevalt sellest, kas pinged  $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, \dots$  kõikvõimalike suundadega lõikepindadel mõjuvad vaadeldavas punktis  $A$  vastavalt *a*) ühel sirgel, *b*) ühes pinnas või *c*) moodustavad vektorite ruumilise süsteemi, nagu näidatud joonisel 4.2. *Joonpingust* iseloomustab teatav pinge ( $s$ ) ja *tasandpingust* tasand ( $\pi$ ), millel pinged mõjuvad. *Ruumpinguses* mõjuvad pinged vaadeldavas punktis kõikvõimalikes suundades seda punkti ümbritsevas ruumis.

*Joonpingus* on pingeseisunditest kõige lihtsam ja esineb konstruksioonielementides kõige sagedamini. Varda tõmbel



Joon. 4.2

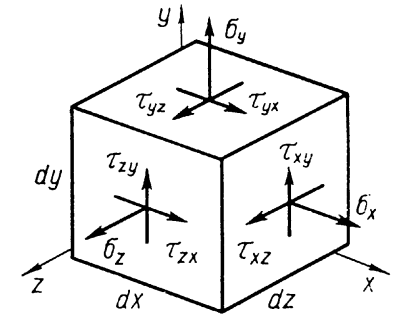
ja survel tekib joonpingus, sest nagu nägime jaotises 2.5 on pinge  $p_n$  mis tahes suunaga kaldpinnal alati varda telje sihiline. *Tasandpingus* on joonpingusest märgatavalt keerukam ja esineb konstruksioonelementides kahesuunalisel tõmbel ja survel, väändel, pöikpindel jm. Käesolevas jaotises 4 vaatleme peamiselt tasandpingust. *Ruumpingust* tugevusõpetuses vaadeldavates kehaes peaaegu ei teki. Et aga joon- ja tasandpingus on ruumpinguse erijuhud, mis nõuavad mõnikord nende vaatlemist üldjuhu seisukohalt, siis tuleb meil tutvuda ka ruumpinguse lihtsamate probleemidega. Ruumpingust käsitletakse põhjalikult elastsusteoorias.

**4.1.3. Pingus alusteljistikus.** Pinged selles lõpmatus hulgas, mis moodustab pinguse, on omavahelises sõltuvuses. Seepärast on pinguse esialgseks määramiseks tarvis teada ainult osa pingeid. Pinguse edaspidise uurimise lähteandmeteks arvutatakse vajalik minimaalne hulk pingeid selles teljestikus, mis on võetud aluseks konstruksioonelementi üldiseks arutamiseks. Vaatleme niisuguses *alusteljistikus* vajalikke pingete hulki ruum-, tasand- ja joonpinguses.

Pingus keha punktis määratakse järgmise mõttekäiguga. Lõikame alusteljestiku koordinaatpindadega vaadeldava punkti ümbert kehast välja väikse ruumilise elemendi, mille pingestatud seisund on määratud pingetega tema pinnal, vähendame elemendi mahtu piiramatult ümber punkti ja minnes piirile, saame pinguse selles punktis. Seejuures keha elementaariosake peab säilitama piiril alusteljestikule iseloomuliku korrapärase kuju. Tingimus on täidetud, kui hülgame keha korpuskulaarse ehituse ja vaatleme teda homogeense ja pideva keskkonnana (kontiinumina), nagu me selles kokku leppisime jaotises 1.5.2.

Homogeense keha mõttelise elementaariosakesena vaatleme elementaarristtahukat, mis sobib igale alusteljestikule, mille koordinaatpinnad lõikuvad täisnurgi. Käesolevas jaotises 4 peame silmas *xyz*-ristteljestikku, milles elementaarristtahuka mõõtmeteks on  $dx$ ,  $dy$  ja  $dz$ , nagu näidatud joonisel 4.3. Risttahuka elementaarmõõtmed lubavad vaadelda pinget igal tahul ühtlasena ja vastastahkudel võrdsetena. Et risttahukal on kolm paari vastastahkusi, siis määravad tema pinguse üldjuhul ka kolm pinget  $p_x$ ,  $p_y$  ja  $p_z$ . Indeks näitab nende kahe vastastahu normaali sihti teljestikus, millel vastav pinge mõjub.

Pinge  $p_x$  lahutame kolmeks komponendiks — *normaalpingeks*  $\sigma_x$  ja kaheks *nihkepingeks*  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$ . *Nihkepinge esimene indeks näitab pinna normaali sihti, teine näitab pinge*



Joon. 4.3

*sihti teljestikus.* Samal viisil lahutame komponentideks ka pinged  $p_y$  ja  $p_z$ . *Pingekomponendid* elementaarristtahuka kolmel nähtaval tahul on kujutatud joonisel 4.3. Samad pinged kolmel nähtamatul vastastahul on kujutatavad vastassuunalistena. Kõik pingekomponendid elementaarristtahukal on kujutatud positiivsetena. Vastavaid märgireegleid vaatlesime jaotises 1.5.5.

Eeltoodust selgub, et üldjuhul pingus keha punktis on määratud *xyz*-alusteljistikus üheksa pingekomponendiga, kolme normaal- ja kuue nihkepingega kolmel koordinaatpinnal. Pingekomponentidest koostatud maatriks

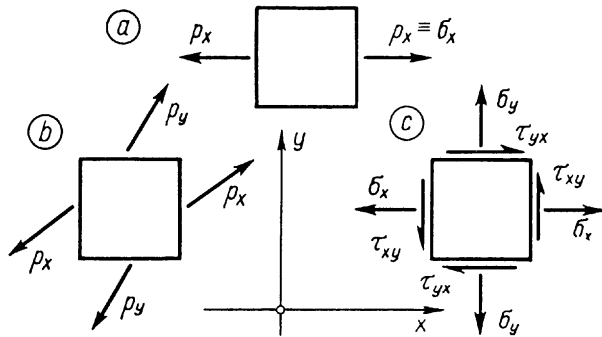
$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

kannab nimetust *pingemaatriks*.

Üheksat pingekomponenti vajame ainult ruumpinguse lähteandmetena, sest joon- ja tasandpinguse jaoks on vajalike pingekomponentide arvu võimalik oluliselt vähendada.

Joonpinguse puhul saame alusteljestiku niisugusesse asendisse, et üks telgedest (näiteks *x*-telg) on paralleelne joonpingusele iseloomuliku sirrega. Joonpingusele sobitunud teljestikule iseloomuliku elementaarristtahuka tahkudest on pingestatud ainult kaks *x*-teljega ristuvat vastastahku, ülejäänud neli tahku on aga pingevabad. Joonpingus on määratud ühe pingega  $p_x$ , mis mõjub *x*-telje sihis ja esineb seetõttu normaalpingena ( $p_x = \sigma_x$ ) nii nagu näidatud joonisel 4.4, a. Järelikult on joonpingus määratud ühe pingekomponendiga  $\sigma_x$ .

Tasandpinguse jaoks saame alusteljestiku ühe koordinaatpinna (näiteks *xy*-tasandi) paralleelseks tasandpingusele iseloomuliku pingepinnaga. Pingus on selles teljestikus



Joon. 4.4

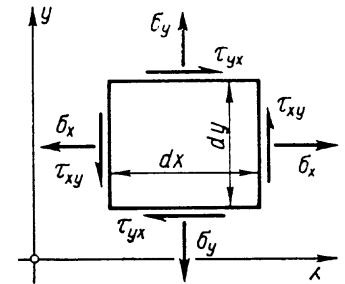
määratud kahe pingega  $p_x$  ja  $p_y$  nagu näidatud joonisel 4.4, b, mis jagunevad neljaks pingekomponendiks joonisel 4.4, c. Järelkult tasandpingus on määratud kahe normaali ja kahe nihkepingega sobivalt valitud teljestikus. Seejuures on pingemaatriks järgmine:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

Joon- ja tasandpinguses konstruktsioonelementidele sobivate alusteljestike ja koordinaadistike valik ei valmista enamasti raskusi. Harilikult osutub sobivaks teljestik, mis on valitud kooskõlas vaadeldava keha kuju ja koormusega. Kui sobivat alusteljestikku ei õnnestu valida, tuleb leppida joon- ja tasandpinguse kirjeldusega üldkujul (4.1) ja nende edasine analüüs muutub tunduvalt keerukamaks.

**4.1.4. Nihkepingete paarsusseadus.** Pinguse määramise baasina kasutatav elementaarristtahukas peab rahuldama tasakaalutingimusi, sest ta on välja lõigatud tasakaalus olevast kehast. Tasakaalutingimustest saame veel olulisi sõltuvusi pingekomponentide vahel keha punktis, mis lubavad vähendada vajalike pingete hulki tasand- ja ruumpinguse määramisel.

Vaatleme esialgu tasandpinguses olevat elementaarristtahukat joonisel 4.5, millel pingete pind on paralleelne  $xy$ -telgedega tasandiga. Joonisel puudub elementaarristtahuka kolmas mõõde  $dz$ , mis on risti joonise pinnaga. Risttahukale mõjuvad kaheksa jõudu, mis paarikaupa tulenevad neljast pingekomponendist. Normaalspingest  $\sigma_x$  tulenevad kaks võrdset ja vastassuunalist jõudu  $+\sigma_x dy dz$  ja  $-\sigma_x dy dz$  kahel vastastahul, mis on arvatud pinge ja tahkude pindala  $dy dz$  korrutisena. Ka ülejäänud kolm pingekomponenti annavad



Joon. 4.5

igaüks kaks võrdset ja vastassuunalist jõudu, mis teineteist tasakaalustavad. Siit järeldub, et kolmest tasakaalutingimusest  $\sum X=0$ ;  $\sum Y=0$ ;  $\sum M=0$  kaks esimest tingimust on rahuldatud. Momentide tasakaalutingimuses tulevad arvesse ainult nihkepingetest tulenevad neli jõudu  $\pm \tau_{xy} dy dz$  ja  $\pm \tau_{yx} dz dx$ , mis kujundavad kaks vastassuunalist ja teineteist tasakaalustavat jõupaari õlgadega vastavalt  $dz$  ja  $dy$ :

$$\sum M=0; \quad \tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dz dx dy = 0.$$

Peale taandamist ruumalaga  $dx dy dz$  saame seose kahe nihkepinge vahel:

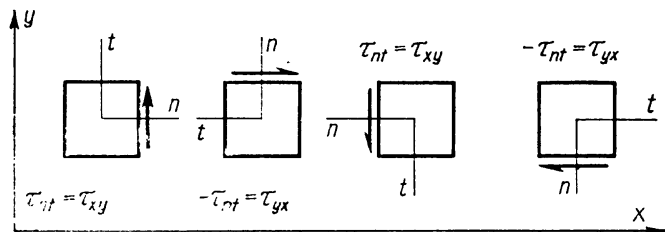
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (4.3)$$

Elementaarristtahukas üldises (ruumilises) pingeseisundis (joonis 4.3) peab rahuldama ruumiülesande kuut tasakaalutingimust, millest kolm jõuprojektsioonide tingimust on rahuldatud. Kolm momenditingimust  $\sum M_x=0$ ;  $\sum M_y=0$ ;  $\sum M_z=0$  annavad kolm seost ruumpingust iseloomustava kuue nihkepinge vahel:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (4.4)$$

Järelkult ruumpingus keha punktis on määratud kuue sõltumatu pingekomponendiga, kolme normaal- ja kolme nihkepingega kolmel ristuvatel lõikepinnal. Tasandpingus on määratud kolme sõltumatu pingekomponendiga, kahe normaal- ja ühe nihkepingega kahel ristuvatel lõikepinnal. Näeme, et pingemaatriksid (4.1) ja (4.2) on sümmeetrilised.

Saadud seostest nihkepingete vahel võime välja lugeda ja sõnastada nihkepingete paarsusseaduse: *koormatud keha punktis ristuvatel lõikepindadel mõjuvad nende pindade ühise serva ristsuunas võrdsed nihkepinged, mis on suunatud mõlemad kas serva poole või servast eemale.* Nihkepingete paarsusseadus on üldkehtiv Cauchy pingeteoorias, kus ta kujutab endast kehasisest tasakaalutingimust.



Joon. 4.6

Jooniselt 4.6 selgub, et pöörduvas ristteljestikus  $nt$  väljendub nihkepingete paarsusseadus nihkepinge  $\tau_{nt}$  muutumises vastasmärgiga suuruseks  $-\tau_{nt}$  teljestiku pööramisel oma tasandis täisnurga võrra:

$$\tau_{nt}(0) = -\tau_{nt}(90^\circ) = \tau_{nt}(180^\circ) = -\tau_{nt}(270^\circ).$$

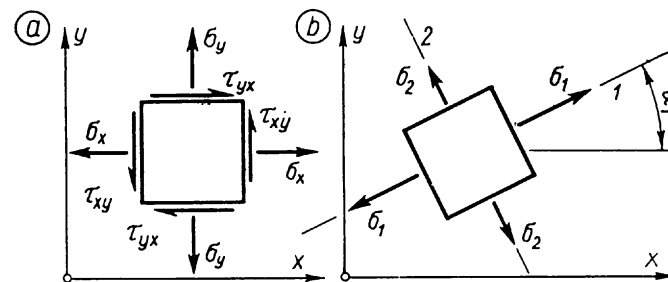
Seejuures läbib  $nt$ -teljestik iga täisnurkse pöörde käigus niisuguse asendi  $\alpha_1$ , mille juures nihkepinge  $\tau_{nt}(\alpha_1) = 0$ .

**4.1.5. Peapinged.** Niisuguse suunaga pinnaelement läbi pingeseisundis punkti, millel mõjub normaalpinge ja puudub nihkepinge, kannab nimetust *peapind*. Sellel mõjuvat normaalpinget nimetame *peapingeks* ja selle kandesirget *peateljeks*. Peatelg on ühtlasi peapinna normaaliks läbi vaadeldava punkti. Et peatelje suunal pole praktilist tähtsust, siis jätame selle märkimata ja joonistel noolega tähistamata.

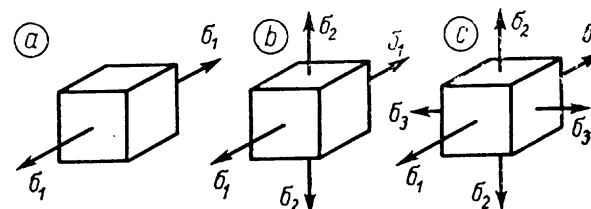
Joonpinguses, mida vaatlesime jaotises 2.5, leidub varda ristlõikes pinge  $p_x \equiv \sigma_x$ , mis vastab peapinge tunnusele. Kõikidel teiste suundadega lõikepindadel kaasnevad normaalpingega nihkepinged või siis puuduvad pinged üldse. Joonpinguse peapinge tähistame  $\sigma_1$  ja selle kandesirge — peatelje tähisega  $1$ . Teatavasti on peapinge suurim pinge joonpinguses ja peamine tunnussuurus materjali seisundi hindamisel vaadeldavas punktis.

Joonisel 4.7, *a* on antud tasandpingus  $xy$ -teljestikus pingekomponentidega  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Nihkepingete paarsusseadus lubab meil telgede pööramisega teatud kindla nurga  $\alpha_1$  võrra leida alati niisugune ristteljestik-peateljestik  $1-2$ , millele vastava elementaarriisttahuka tahkudel — peapindadel mõjuvad ainult normaalpinged — peapinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , nagu näidatud joonisel 4.7, *b*. Peapingete indeksid  $1$  ja  $2$  ja neile vastavad peatelgede tähised pannakse tingimuse

$$\sigma_1 > \sigma_2 \quad (4.5)$$



Joon. 4.7



Joon. 4.8

kohaselt. Seejuures vaadeldakse peapingete suurusi algebrailiselt.

Ruumpingust iseloomustavad kolm peapinget

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (4.6)$$

kolmel ristruval peapinnal.  $123$ -peateljestik on  $xyz$ -alusteljestiku suhtes määratud üldjuhul kolme pöördenurgaga.

Peateljestikkudele iseloomulikud elementaarriisttahukad on kujutatud joonisel 4.8, kus on näidatud *a*) joon-, *b*) tasand- ja *c*) ruumpingus vastavate peapingetega. Peapinged määravad pinguse kõige lihtsamal viisil ja lubavad ka tasand- ja ruumpingust vaadelda tõmbe-surve probleemi-dena, mis on oluliselt tähtis tahkete kehade purunemise ja deformatsiooni uurimisel. Seejuures joonpinguses mõjub tõmme või surve ühes sihis, tasand- ja ruumpinguses esineb tõmme ja surve vastavalt kahes või kolmes ristruvas sihis.

Peapinged on kõige olulisemad pinged pinguse analüüsimisel ja kui nad pole antud alusteljestikus, siis tuleb pinguse uurimist alustada peapingete ja -telgede määramisest.

## 4.2. TASANDPINGUS

**4.2.1. Tasakaaluvõrrandid peapinnal.** Olgu pingus keha punktis antud pingetega  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Otsime selle pinguse peapinget  $\sigma$  ja peatelje sihinurka  $\alpha$  pingetasandis  $xy$ .

Lõikame mõttes vaadeldavas punktis kehast välja elementaarprisma, mida kujutame otsvaates joonisel 4.9. Oletame, et elementaarprisma kaldu asetsev külgtahk on antud pinguse peapind, mille normaal (peatelg) moodustab  $x$ -teljega nurga  $\alpha$ . Olgu kaldtahu elementaarne pindala  $dA$ , mille ülejäänud kahe külgtahu pindalad on järgmistes seostes:

$$dA_x = dA \cos \alpha; \quad dA_y = dA \sin \alpha. \quad (4.7)$$

Pingetest prisma tahkudel tulenevad elementaarjõud  $\sigma dA$ ,  $\sigma_x dA_x$ ,  $\tau_{xy} dA_x$ ,  $\sigma_y dA_y$  ja  $\tau_{yx} dA_y$ , mis peavad rahuldama tasakaalutingimusi

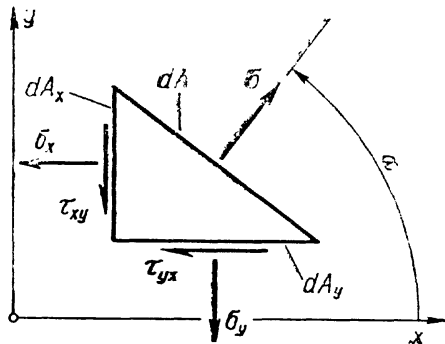
$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad \sigma dA \cos \alpha - \sigma_x dA_x - \tau_{yx} dA_y = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad \sigma dA \sin \alpha - \sigma_y dA_y - \tau_{xy} dA_x = 0. \end{aligned}$$

Asendades  $dA_x$  ja  $dA_y$  seostest (4.7) ja  $\tau_{yx}$  võrdse nihkepingega  $\tau_{xy}$ , saame peale ühiskordaja  $dA$  taandamist ja lihtsaid teisendusi võrrandipaari

$$\left. \begin{aligned} (\sigma - \sigma_x) \cos \alpha - \tau_{xy} \sin \alpha &= 0 \\ -\tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma - \sigma_y) \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.8)$$

Võrrandisüsteem sisaldab kaht tundmatut suurust, peapinget  $\sigma$  ja peatelje sihinurka  $\alpha$ , mis kahest võrrandist on määratavad.

**4.2.2. Karakteristlik võrrand.** Vaatleme võrrandisüsteemis (4.8) tundmatutena suurusi  $\cos \alpha$  ja  $\sin \alpha$ . Et võrrandid on homogeenised, siis saame lahendi tingimusel, et tund-



Joon. 4.9

matute kordajatest moodustatud determinant võrdub nulliga:

$$\begin{vmatrix} (\sigma - \sigma_x) & -\tau_{xy} \\ -\tau_{xy} & (\sigma - \sigma_y) \end{vmatrix} = 0,$$

mis peapinge  $\sigma$  määramiseks annab karakteristliku võrrandi

$$\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0, \quad (4.9)$$

kus

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y \quad \text{ja} \quad I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2. \quad (4.10)$$

Konstandid  $I_1$  ja  $I_2$  on tuntud *tasandpinguse invariantidena*, mis iseloomustavad antud pingust ja neid kasutame pinguse oluliste omaduste määramisel. *Esimene invariant* võrdub antud normaalpingete summaga, *teine invariant* võrdub antud pingemaatriksi determinandiga. Toodud sõnastuse õigsust võime kontrollida pingemaatriksi (4.2) determinandi ja teise invarianti avaldise (4.10) võrdlemisega, pidades silmas nihkepingete paarsusseadust.

Pinguse invariantid pole sõltuvad teljestiku suunavaliikust pingete tasandis. Järelikult nad väljenduvad nii  $xy$ -teljestikus kui ka samas tasandis mis tahes nurga võrra pööratud  $nt$ -teljestikus samade väärtustega. Seega peavad paika järgmised seosed:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \sigma_n + \sigma_t = \text{const}; \\ \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 &= \sigma_n \sigma_t - \tau_{nt}^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Need seosed leiavad rakendamist nii pinguse uurimisel kui ka pingusega seotud ülesannete lahendamisel.

**4.2.3. Peapingete valem.** Peapingete määramisele asudes peame välja arvutama antud pinguse teise invarianti.

Kui  $I_2 \neq 0$ , siis karakteristlikul võrrandil (4.9) on kaks nullist erinevat reaalselt juurt:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (4.12)$$

millest esimene peapinge  $\sigma_1$  saadakse märgiga (+) ja teine peapinge  $\sigma_2$  märgiga (-) juuremärgi ees. Sel juhul on tegemist tasandpingusega.

Erijuhul, kui  $I_2 = 0$ , lihtsustub karakteristlik võrrand lineaarvõrrandiks  $\sigma - I_1 = 0$ , mille lahend

$$\sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y \quad (4.13)$$

on joonpinguse peapinge.

**4.2.4. Peatelgede määramine.** Peatelje 1 sihinurga  $\alpha_1$  teljest  $x$  määrame võrrandisüsteemist (4.8), asetades sellesse peapinge  $\sigma_1$  väärtuse, mis tasandpinguse puhul on arvutatud valemiga (4.12) ja joonpinguses valemiga (4.13). Jagame võrrandid tundmatu suurusega  $\cos \alpha_1$ , mille tulemusena kaks tundmatut  $\cos \alpha_1$ , ja  $\sin \alpha_1$  asenduvad ühe tundmatuga  $\tan \alpha_1$ . Selle tundmatu võime määrata ühest võrrandist, milleks kasutame esimest võrrandit. Lahendi saame järgmisel kujul:

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \quad (4.14)$$

Nurga tangensi järgi leiame teravnurga  $\alpha_1$ , mis on esimese peatelje (1) ja  $x$ -telje vaheliseks nurgaks.

Tasandpinguse teise peatelje (2) sihinurga  $\alpha_2$  teljest  $x$  võime määrata sama valemiga (4.14), asendades selles esimese peapinge  $\sigma_1$  teise peapingega  $\sigma_2$ . Et peateljed 1 ja 2 on teineteisega risti, siis ülesannete lahendamisel piirdume ühe peatelje määramisega valemiga (4.14) põhjal.

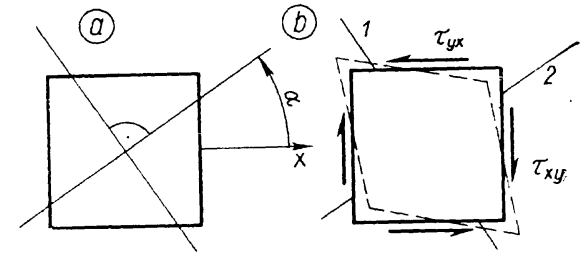
Valemi (4.14) puuduseks on asjaolu, et ta sisaldab algandmete  $\sigma_x$  ja  $\tau_{xy}$  kõrval ka arvutatud suuruse, peapinge  $\sigma_1$ . See puudus pole oluline, kui peapingete arväärtused on lahenduses nõutavad ja seepärast eelnevalt arvutatud. Kui arvutuse eesmärgiks on peatelje sihinurga  $\alpha_1$  määramine ja peapinge väärtus võib seejuures jääda arvutamata, siis tuleks valemis (4.14) peapinge  $\sigma_1$  asendada oma avaldisega (4.12) või (4.13). Joonpinguse jaoks kujuneb teisendatud valem lihtsaks ja seda rakendame, kuid tasandpinguse puhul leiab kasutamist teistsugune valem, mille saame võrrandisüsteemist (4.8), elimineerides sellest peapinge  $\sigma$ . Avaldame esimesest võrrandist  $\tan \alpha$  ja teisest  $\cot \alpha$  ning asetame saadud tulemused trigonomeetriast tuntud seosesse  $\tan 2\alpha = 2/(\cot \alpha - \tan \alpha)$ , kus kaob peapinge  $\sigma$ , ja saame:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.15)$$

Nurga tangensi järgi määrame teravnurga  $2\alpha$  ja selle poolnurga  $\alpha$ , mis on peatelje ja  $x$ -telje vaheliseks nurgaks (joonis 4.10, a).

Valemi (4.15) puuduseks on selgusetus selles, kumb määratud peatelgedest on esimene (1), kumb teine (2). Küsimuse lahendamiseks vaatleme nihkepingete suundi elementaarstahukal (joonis 4.10, b). Nihkepingetest tekib risttahuka deformeerumine nii nagu on näidatud joonisel kriipsjoonega, kusjuures nihkepingete vektorid osutavad oma nool-

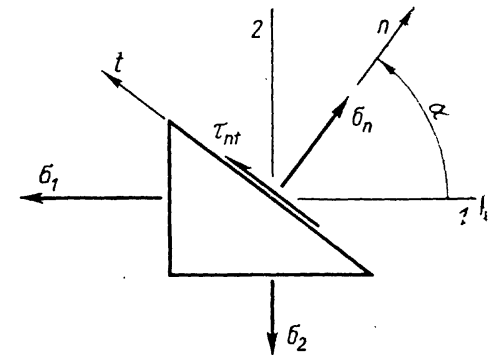
Joon. 4.10



tega rööpküliku pikemaks veninud diagonaalile. Et suurima pikenemise siht ühtib suurima normaalpinge sihiga, siis saame lihtsa eeskirja peatelgede tähistamiseks. *Nihkepingete vektorid osutavad esimesele peateljele (1).*

**4.2.5. Pinged kaldpinnal.** Olgu tasandpingus antud peapingetega  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ . Seame eesmärgiks uurida pingeid pindadel, mille normaalid on kaldu peatelgede suhtes, kuid seejuures jäävad peatelgede tasandisse. Selle uuringuga selgitame pinged ainult ühes kaldpindade kimbus, mis on kõige iseloomulikum tasandpingusele ja jätame läbi uurimata kõik need kaldpinnad, mille normaalid kalduvad välja peatelgede tasandist. Et uuritavatel kaldpindadel mõjuvad nii normaal- kui ka nihkepinged samuti peatelgede tasandis, siis lahendame probleemi tasandülesandena.

Ülesande lahendame 1/2-peateljestikus ja selle suhtes nurga  $\alpha$  võrra pööratud  $nt$ -teljestikus, mida kujutame joonisel 4.11. Samal joonisel on näidatud neile teljestikkudele iseloomuliku elementaarprisma otsvaade. Prisma ristuvatel külgpindadel (peapindadel) on näidatud antud peapinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  ning kolmandal külgtahul (kaldpinnal), mis on



Joon. 4.11

risti  $n$ -teljega, näitame otsitavad pinged  $\sigma_n$  ja  $\tau_{nt}$ . Vaadeldes nurka  $\alpha$  muutuva parameetrina piirides  $0 \dots 2\pi$ , saame otsitavad pinged avaldada kõikidel uuritavatel kaldpindadel kahe parameetrilise funktsiooni abil nii nagu me seda tegime joonpinguse uurimisel jaotises 2.5.

Vaatleme peapingeid  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  omavahel sõltumatute tõmbepingetena kahes ristivas sihis. Peapingest  $\sigma_1$  tulenevad pinged kaldpinnal võime avaldada seostega (2.45) ja (2.46) ning peapingest  $\sigma_2$  tulenevad pinged samade seostega, kui loeme  $n$ -telje suunanurgaks teljest 2 positiivse nurga  $1,5\pi + \alpha$ . Peapingete  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  koosmõjul summeeruvad vastavad pinged ka kaldpinnal ja saame:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos 2\alpha) + \frac{\sigma_2}{2} [1 + \cos 2(1,5\pi + \alpha)];$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2} \sin 2(1,5\pi + \alpha).$$

Võttes arvesse, et  $\cos 2(1,5\pi + \alpha) = -\cos 2\alpha$  ja  $\sin 2(1,5\pi + \alpha) = -\sin 2\alpha$ , saame peale sulgavaldiste läbikurutamist ja suuruste ümbergrupeerimist seosed:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (4.16)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha, \quad (4.17)$$

mis võimaldavad välja arvutada pinged kaldpinnal normaali suunanurgaga  $\alpha$  esimesest peateljest.

**4.2.6. Mohri ring.** Vaatleme seoseid (4.16) ja (4.17) parameetrilise võrrandipaarina

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= a + r \cos 2\alpha \\ \tau_{nt} &= -r \sin 2\alpha \end{aligned} \right\}, \quad (4.18)$$

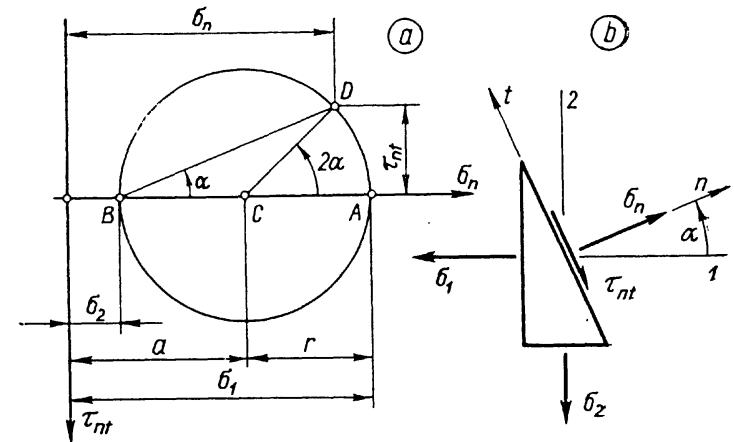
kus konstandid

$$a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{ja} \quad r = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.19)$$

Seame muutuvad pinged  $\sigma_n$  ja  $\tau_{nt}$  omavahelisse sõltuvusse ja kõrvaldame parameetri  $\alpha$ . Selleks viime konstandi  $a$  esimeses võrrandis vasakule poole võrdusmärgi, tõstame mõlemad võrrandid ruutu ja summeerime. Saame kanoonilise võrrandi

$$(\sigma_n - a)^2 + \tau_{nt}^2 = r^2, \quad (4.20)$$

mille graafik  $\sigma_n \tau_{nt}$ -teljestikus on teatavasti ringjoon kesk-



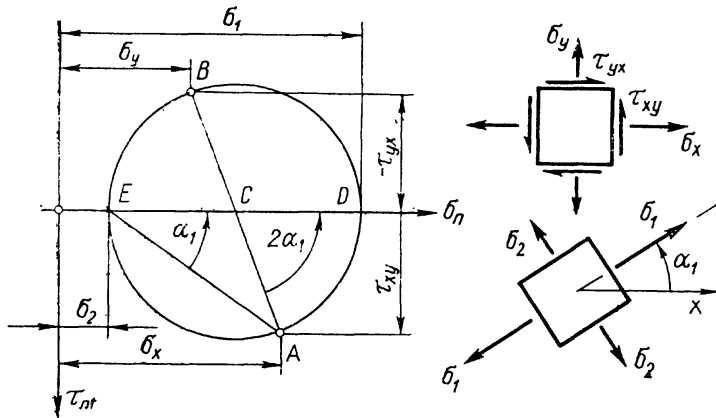
Joon 4.12

punktiga  $C \equiv (a/0)$  ja raadiusega  $r$ . Kujutame selle ringjoone joonisel 4.12, a. Pöörduval pinnal mõjuva normaal- ja nihkepinge sõltuvust kirjeldav graafik kannab nimetust *pin-gering* ehk *Mohri ring\**.

Võrrandite (4.18) najal näeme, et nurgale  $2\alpha = 0$  vastab *Mohri* ringil punkt  $A \equiv (\sigma_1/0)$ , mis esindab esimest peapinda. Nurgale  $2\alpha = \pi$  vastab punkt  $B \equiv (\sigma_2/0)$  teise peapinnaga. Mis tahes nurgale  $2\alpha$  vastab ringil mingi punkt  $D \equiv (\sigma_n/\tau_{nt})$ , mille koordinaadid esitavad pinged kaldpinnal normaali sihinurgaga  $\alpha$  esimesest peateljest nagu näidatud joonisel (4.12, b). Toetudes tuntud teoreemile geomeetriast, võime nurga  $\alpha$  ilmutada ka *Mohri* ringil nii nagu näidatud joonisel (4.12, a). Juhime tähelepanu sellele, et oleme telje  $\tau_{nt}$  suuna valinud allapoole ja kesknurga  $2\alpha$  positiivse suuna jätnud muutmata. See iseärasus pole juhuslik, vaid omane *Mohri* ringile ja tuleneb märgist (—) nihkepinge valemis (4.17).

*Mohri* ring annab ülevaatliku pildi normaal- ja nihkepinge muutumisest punktis olenevalt punkti läbiva pinna kaldest ja võimaldab lihtsal viisil analüüsida pingust. Selle ringi abil võime lahendada mitmesuguseid pingusega seotud ülesandeid. Näitame peapingete ja peatelgede määramist lähtudes alusteljestikus antud pingetest  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$ .

\* Christian Otto Mohr (1835...1918) — saksa insener ja mehaanikateadlane, kes nimetatud ringi võttis kasutusele 1868. a.



Joon. 4.13

Kanname  $\sigma_n - \tau_{nt}$ koordinaattasandile punktid  $A \equiv (\sigma_x/\tau_{xy})$  ja  $B \equiv (\sigma_y/-\tau_{yx})$  nagu näidatud joonisel 4.13. Punktid  $A$  ja  $B$  asuvad Mohri ringil ja nende vahel moodustub kesknurk  $2 \cdot 90 = 180^\circ$ , millest järeldub, et nad on ringi diameetri otspunktid. Diameetriga  $AB$  määrame keskpunkti  $C$  ja joonestame ringjoone, mille lõikepunktid  $D$  ja  $E$  teljega  $\sigma_n$  määravad peapinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ . Nurk  $ACD$  on nurgaks  $2\alpha_1$  ja nurk  $AED$  nurgaks  $\alpha_1$ , mis määrab esimese peatelje sihinurga  $x$ -teljest.

**4.2.7. Tasandpinguse analüüs.** Vaatleme seoseid (4.16) ja (4.17). Arvutame normaalpinge  $\sigma_n$  tuletise nurga  $\alpha$  järgi ja võrdleme tulemust nihkepinge  $\tau_{nt}$  avaldisega. Näeme, et

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 2\tau_{nt}. \quad (4.21)$$

Saadud seos lubab lahendada mitmesuguseid probleeme, nende hulgas ka täpsustada peatelgesid, kui määrame need valemi (4.15) põhjal, mis teatavasti jätab lahtiseks peatelgede tähised 1 ja 2. Seosest (4.21) aga selgub, et pöörates  $n$ -telge nihkepinge  $\tau_{nt}$  suunas normaalpinge  $\sigma_n$  kasvab ja me jõuame peateljele 1, kuna pöördega nihkepinge vastasuunas normaalpinge kähaneb ja me kohtame peatelge 2.

Seos (4.21) lubab järeldada, et peapinged on uuritavas kaldpindade kimbus ekstremaalsed normaalpinged, kuna nihkepingete puudumise tõttu peapindadel ka  $d\sigma_n/d\alpha = 0$ . Seejuures peapinge  $\sigma_1$  on maksimaalne ja  $\sigma_2$  minimaalne. Järelikult normaalpinge kaldpinnal jääb piiresse  $\sigma_1 > \sigma_n > \sigma_2$ .

Samale järeldusele tuleme seoste (4.16), (4.17) ja Mohri ringi vaatlustest.

Ekstreemsed nihkepinged mõjuvad pindadel, mis peapindade suhtes on  $45^\circ$  kaldu, see tähendab  $\alpha' = 45^\circ$  ja  $\alpha'' = 135^\circ$  ( $\sin 2\alpha = \pm 1$ ) ja mis vastavad Mohri ringi punktidele  $A$  ja  $E$  joonisel 4.14.

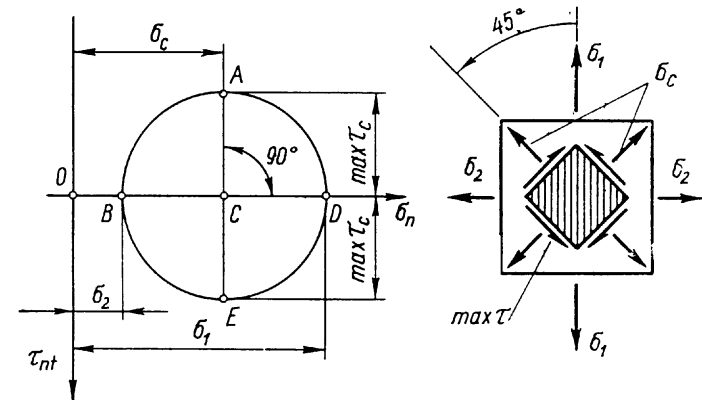
Ekstreemsed nihkepinged

$$\text{extr } \tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.22)$$

Nihkepinge kaldpinnal jääb piiresse  $(\sigma_2 - \sigma_1)/2 < \tau_{nt} < (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ . Seejuures ekstreemsete nihkepingete pindadel mõjuvad omavahel võrdsed normaalpinged

$$\sigma_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (4.23)$$

Suurimaks tõmbepingeks tasandpinguses on  $\sigma_1$ , kui  $\sigma_1 > 0$ , ja suurimaks survepingeks  $\sigma_2$ , kui  $\sigma_2 < 0$ . Suurimaks nihkepingeks on ekstreemsete nihkepingete absoluutväärtus (4.22) ainult sel juhul, kui peapinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  on erimärgilised (pinguse invariant  $I_2 < 0$ ). Kui peapinged on samamärgilised ( $I_2 > 0$ ), siis suurim nihkepinge mõjub pindadel, mis ei kuulu läbiuuritud kaldpindade kimpu ja need teeme kindlaks ruumpinguse uurimisel järgmises jaotises. Seejuures tuleb meil tasandpingust vaadelda ruumpinguse erijuhuna, mille kolmest peapingest üks võrdub nulliga. Kui näiteks tahame tasandpingust peapingetega  $\sigma_1 = -78$  MPa ja



Joon. 4.14

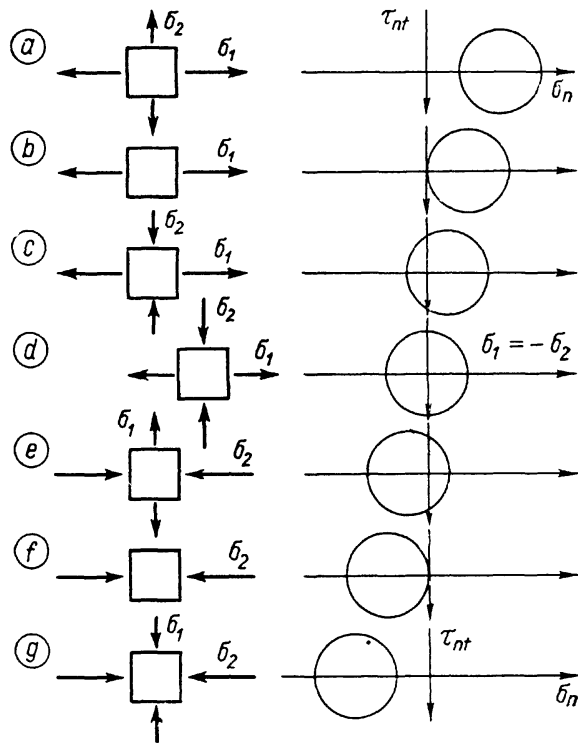


$\sigma_2 = -125$  MPa vaadelda ruumpingusena, siis saame vastavad peapinged  $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_2 = -78$  MPa ja  $\sigma_3 = -125$  MPa.

4.2.8. Tasandpinguse erijuhud on järgmised:

- a) tõmme kahes sihis  $I_1 > 0, I_2 > 0$ ;
- b) tõmme  $I_1 > 0, I_2 = 0$ ;
- c) tõmme survega  $I_1 > 0, I_2 < 0$ ;
- d) puhas nihe  $I_1 = 0, I_2 < 0$ ;
- e) surve tõmbega  $I_1 < 0, I_2 < 0$ ;
- f) surve  $I_1 < 0, I_2 = 0$ ;
- g) surve kahes sihis  $I_1 < 0, I_2 > 0$ .

Kui tasandpingus on antud pingetega  $\sigma_x, \sigma_y$  ja  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , siis teeme erijuhtu kindlaks pinguse invariantide  $I_1$  ja  $I_2$  märkide alusel. Joonisel 4.15 on näidatud erijuhtude tunnused peapingete  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  pildi alusel ja Mohri ringi asendi järgi  $\sigma_n \tau_{nt}$ -teljestikus. Peapingete iseloomulikud tunnused



Joon. 4.15

on aluseks ka enamiku erijuhtude nimetustes, välja arvatud *puhas nihe*, mis on saanud oma nimetuse sellest, et suurimate nihkepingete pindadel puuduvad selles pinguses normaalpinged ja nihkepinged esinevad «puhtal kujul».

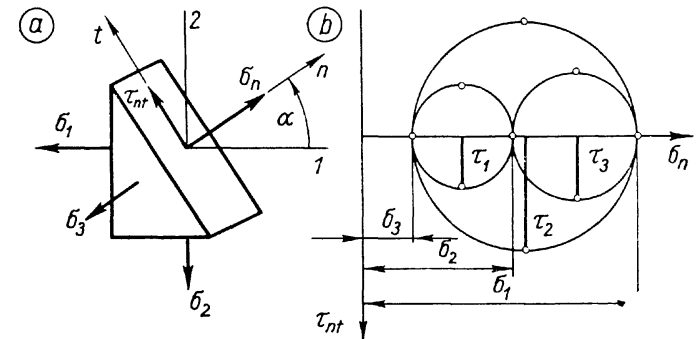
### 4.3. RUUMPINGUS

4.3.1. Pinged kaldpindadel. Olgu ruumpingus keha punktis antud peapingetega  $\sigma_1, \sigma_2$  ja  $\sigma_3$  (joonis 4.8, c), mis rahuldavad tingimust (4.6).

Uurime pingeid pinnal, mis on muutuva kaldega peatelgedel 1 ja 2 suhtes ja jääb nende tasandiga risti (paralleelseks peateljega 3). Probleemi vaatleme tasandülesandena peatelgedel 1 ja 2 tasandis, milles pöörduv  $nt$ -teljestik on seotud kaldpinnaga (joonis 4.16, a) nii nagu tasandpinguses jaotises 4.2.5. Arvesse tulevad antud peapingetest  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  ning otsitavad pinged  $\sigma_n$  ja  $\tau_{nt}$  kaldpinnal. Peapinge  $\sigma_3$  jääb vaatlusest kõrvale. Kaldpinnal esindab nihkepinget ainult  $\tau_{nt}$ , kuna kolmanda peatelje sihis nihkepinge puudub. Selles võime veenduda tasakaalutingimuse  $\sum \beta = 0$  najal.

Otsitavad pinged  $\sigma_n$  ja  $\tau_{nt}$  kaldpinnal on määratavad seostega (4.16) ja (4.17) jaotises 4.2.5. Kujutame kaldpinna pingete Mohri ringi joonisel 4.16, b, kus see on joonestatud peapingetele  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  vastavate punktide vahele.

Samal viisil vaatleme pingeid kaldpindadel, mis on kaldu peatelgedega 2 ja 3 ja risti nende tasandiga (paralleelsed peateljega 1). Vastava pingeringi kujutame joonisel 4.16, b peapingetega  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  määratud punktide vahel. Mohri ring



Joon. 4.16

nende kaldpindade kimbule, mis on risti peatelgedega 3 ja 1 tasandiga, on kujutatud samal joonisel peapingetele  $\sigma_3$  ja  $\sigma_1$  vastavate punktide vahel.

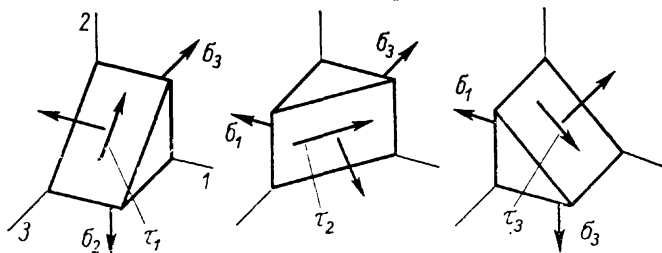
Läbiuuritud pindade hulgas on kolm kaldpinda, millel mõjuvad ekstreemsed nihkepinged  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  ja  $\tau_3$ . Näitame need nihkepinged kolmel Mohri ringil ja avaldame valemi (4.22) põhjal:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.24)$$

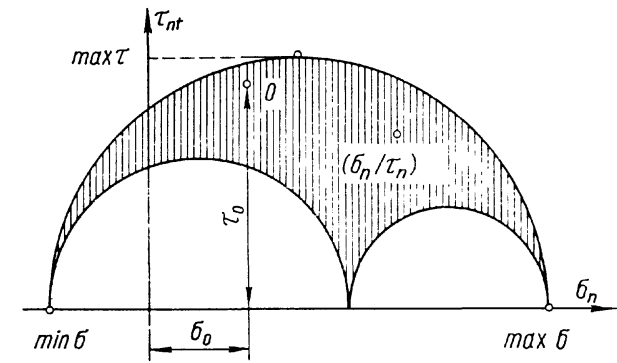
Nihkepinge  $\tau_1$  on ekstreemse tähendusega pinna pöördumisel ümber telje 1 ja mõjub pinnal, mis poolitab telgedega 2 ja 3 vahelise täisnurga. Järelikult moodustab see pind telgedega 2 ja 3 kaldenurgad  $45^\circ$ . Nihkepinged  $\tau_2$  ja  $\tau_3$  mõjuvad kaldpindadel, mis poolitavad vastavalt peatelgedega 3–1 ja 1–2 vahelised täisnurgad, nagu näidatud joonisel 4.17.

Oleme vaadelnud pingeid kolmes kaldpindade kimbuses. Läbi uuritud on kõik need pinnad, mis moodustavad kaldenurgad ainult kahe peateljega kolmest. Vaatlusest on jäänud aga välja kõik ülejäänud kaldpinnad, mis moodustavad kaldenurgad kõigi kolme peateljega. Tasandpinguse seosed ei luba määrata pingeid nendel pindadel.

C. O. Mohr selgitas möödunud sajandi lõpuveerandil normaali- ja nihkepingete muutumise piirid kõigi kolme peatelje suhtes kalduval pinnal. Ta näitas, et mis tahes kaldpinna  $n$  normaalpingele ja nihkepinge absoluutväärtusele vastav punkt ( $\sigma_n/\tau_n$ ) pingetasandil jääb Mohri kolme poolringiga määratud viirutatud piirkonda, mis on näidatud joonisel 4.18. Meid rahuldab kaldpindade pingete tundmine muutumiskiirkonna äärel ja seepärast loobume sisepunktide täpsemast uurimisest. Erandi teeme ainult ühe punkti  $O$  osas, mida vaatleme järgmises jaotises.



Joon. 4.17



Joon. 4.18

Oluliseks järelduseks on ruumpinguse ekstreemsed normaal- ja nihkepinged, mille juures peame silmas kõikvõimalikke kaldpindasid vaadeldavas pinguses ja mis selguvad joonisel 4.18,

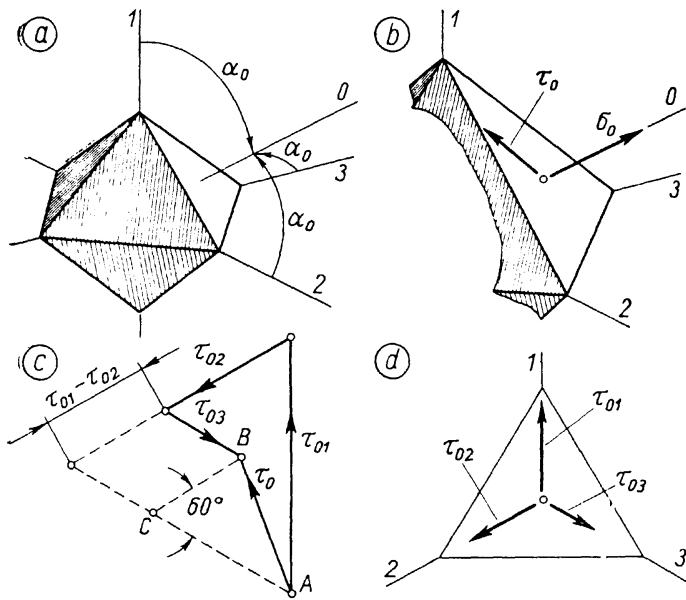
$$\max \sigma = \sigma_1; \quad \min \sigma = \sigma_3; \quad \max \tau = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (4.25)$$

Meenutame, et need avaldised esitavad üldised ekstreemsed pinged ka tasandpinguse jaoks, kui seda pingust vaadelda ruumpinguse erijuhuna, milles üks kolmest peapingest võrdub nulliga (vaata jaotis 4.2.6).

**4.3.2. Oktaeedripinged.** Pinguse olulisi omadusi iseloomustavad pinged pinnal, mis moodustab kõigi kolme peateljega ühe ja sama kaldenurga. Peatelgedega algusest võrdsetele kaugustele võime kujutada niisuguseid tasapindu igasse teljestiku oktanti ühe. Lõigates nende pindadega kehast välja elemendi, näeme seda korrapärase oktaeedrina, mis on kujutatud joonisel 4.19, a. Normaalpinget  $\sigma_0$  ja nihkepinget  $\tau_0$  elementaaroktaeedri tahul nimetatakse *oktaeedripingeteks*. Need on kujutatud joonisel 4.19, b.

Oktaeedri tahu normaali  $o$  ühtse kaldenurga  $\alpha_0$  peatelgedega suhtes võime määrata kuubi põhjal, kuna selle diagonaal on servade suhtes samuti võrdse kaldega. Olgu kuubi servapikkus  $a$  ja diagonaal  $d$ , kusjuures teatavasti  $d^2 = 3a^2$ . Järelikult  $\cos \alpha_0 = a/d = 1/\sqrt{3}$ ;  $\sin \alpha_0 = \sqrt{2}/3$  ja  $\alpha \approx 0,955317 \text{ rad} \approx 54^\circ 44' 08''$ .

Joonpinguse jaoks, kui mõjub ainult peapinge  $\sigma_1$ , saame oktaeedripinged arvutada valemitega (2.45) ja (2.46):



Joon. 4.19

$$\sigma_0 = \sigma_1 \cos^2 \alpha_0 = \frac{1}{3} \sigma_1; \quad (4.26)$$

$$\tau_0 = -\sigma_1 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_1. \quad (4.27)$$

Ruumpinguses, rakendades summeerimise printsiipi, võime *oktaeedernormaalpinge* avaldada algebralise summeerimise teel, sest liidetavad pinged mõjuvad kõik normaali  $o$  sihis:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (4.28)$$

*Oktaeedernihkepinge*  $\tau_0$  ruumpinguses tuleb arvutada geomeetrilise (vektorite) summeerimise teel, kuna selle pinge komponendid  $\tau_{01}$ ,  $\tau_{02}$  ja  $\tau_{03}$ , mis tulenevad vastavalt peapingetest  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$ , mõjuvad kolmes erinevas sihis, mille vahel on nurgad  $120^\circ$ . Nihkepinge komponendid on näidatud joonisel 4.19, *d* ja nende summeerimise hulknurk joonisel 4.19, *c*. Koos kriipsjoonega joonlõikudega lubab see hulknurk summaarse nihkepinge  $\tau_0$  avaldada kolmnurgast *ABC*,

kus külg  $CB = \tau_{01} - \tau_{02}$  ja külg  $AC = \tau_{01} - \tau_{03}$ . Koosinuslau-  
sest avaldame kolmanda külje  $AB = \tau_0$ :

$$\tau_0 = \sqrt{(\tau_{01} - \tau_{02})^2 + (\tau_{01} - \tau_{03})^2 - 2(\tau_{01} - \tau_{02})(\tau_{01} - \tau_{03}) \cos 60^\circ}$$

kus  $\cos 60^\circ = 0,5$  ja milles asendamisega seosest (4.27) saame peale lihtsat algebralist teisendust:

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}. \quad (4.29)$$

Asendades peapingete vahed oma avaldistega (4.24) võime valemile (4.29) anda teise üldtuntud kuju:

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}. \quad (4.30)$$

Valemities (4.29) ja (4.30) võtame arvesse ainult positiivse juure, sest need valemid määravad ainult nihkepinge absoluutväärtuse, selgitamata selle sihti ja suunda. Oktaeedernormaalpinget valemist (4.28) vaatleme märgiga suurusena. Valemities (4.28) ja (4.30) nähtub, et oktaeedri kõigil kaheksal tahul mõjuvad võrdsed normaal- ja nihkepinged. Oktaeedripinged pole mingis mõttes ekstreemsed, kuna kuuludes kolme peatelje kaldpinnale, vastavad nad kaldpindade pingete piirkonna sisepunktile  $O$  joonisel 4.18. Nende pingete tähtsus seisneb selles, et *oktaeedernormaalpinge*  $\sigma_0$ , olles võrdne kõigis kaheksas suunas, kutsub vaa-  
*deldavas punktis esile ainult mahudeformatsiooni, nihkepinge*  $\tau_0$  *ainult kujumuutuse*. Paljudel juhtudel on niisugusel pinguse jagunemisel oluline tähtsus tugevuse hindamisel.

**4.3.3. Hüdrostaatiline pinge ja pingedeviaator.** Jaotame peapingetega

$$(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) \quad (4.31)$$

antud pinguse kaheks osapinguseks. Esimese osapinguse kõik kolm peapinget olgu võrdsed antud pinguse oktaeedernormaalpingega  $\sigma_0$ , mis on määratud seosega (4.28). Esitame selle osapinguse oma peapingetega

$$(\sigma_0; \sigma_0; \sigma_0). \quad (4.32)$$

Teise osapinguse saame, kui antud pingusest (4.31) lahutame esimese osapinguse (4.32):

$$(\sigma_1 - \sigma_0; \sigma_2 - \sigma_0; \sigma_3 - \sigma_0). \quad (4.33)$$

Vaatleme neid kahte komponenti iseseisvate pingustena. Pinguse (4.32) *Mohri* kolm pingeringi, mida vaatlesime jaotises 4.3.1, kõduvad üheks punktiks  $\sigma_n$ -teljel. Järelikult selles pinguses puuduvad nihkepinged ja mis tahes kaldpinnal

normaalpinge  $\sigma_n = \sigma_0 = \text{const}$ . Pingus sarnaneb teatud määral hüdrostaatilisele rõhule vedelikus, millest erinevus seisneb ainult selles, et  $\sigma_0$  võib esineda ka tõmbepingena, mida vedelik teatavasti ei talu. Eeltoodud põhjusel nimetame pingust (4.32) *hüdrostaatilise rõhu taoliseks pinguseks* ja tema ainukest iseloomulikku normaalpinget *hüdrostaatiliseks pingeks*.

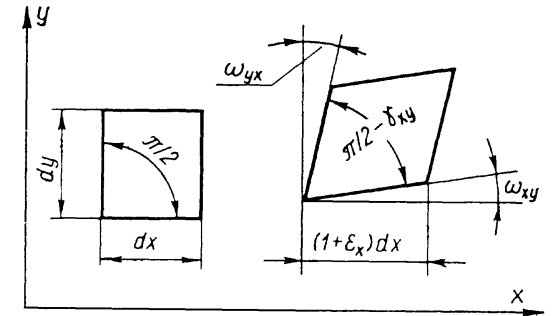
Pinguse teine komponent (4.33) kannab nimetust *pingedeviaator*. Valemi (4.28) ja pingedeviaatori peapingete (4.33) võrdlus näitab, et *pingedeviaatoriks osutub iga nii-sugune pingus, mille peapingete summa võrdub nulliga*. Näiteks tasandpingusest tuntud puhas nihe ( $\sigma_1; 0; \sigma_3 = -\sigma_1$ ) kujutab endast pingedeviaatorit. Võime veenduda, et pingedeviaatori oktaederpingetest esineb ainult nihkepinge  $\tau_0$ , kuna normaalpinge oktaedri pindadel puudub. Järelikult pingedeviaator põhjustab ainult kujumuutuse kehas, ilma et sellejuures muutuks keha maht. Purunemise ja deformatsiooninähtuste hindamisel tuleb pingust iseloomustavate muude suuruste kõrval sageli silmas pidada selle pinguse deviaatorit, kui peamist ohtu keha kuju, pinnavormi ja tervikluse säilivusele.

#### 4.4. DEFORMATSIOONISEISUND KEHA PUNKTIS

**4.4.1. Deformatsiooniseisund alusteljestik.** Jaotises 1.6.2 vaatlesime suhtelist normaaldeformatsiooni  $\epsilon_n$  ja nihkenurka  $\gamma_{nt}$  keha punktis, kus neist esimene oli seotud teatud kindla suunaga  $n$  ja teine kahe ristuva suunaga  $n$  ja  $t$ . *Deformatsiooniseisundina keha punktis mõistetakse suhtelisi normaaldeformatsioone kõikmõeldavates suundades ja nihkenurki kõikmõeldavate ristsuundade vahel.*

Deformatsiooniseisundit uurime nii nagu pingustki lõpmata väikese mahulise elemendi najal, mis on vaadeldava punkti ümbert kehast välja lõigatud. Deformatsiooniseisundi loeme määratuks, kui tunneme selle elemendi geomeetrilist teisendumist deformeerunud keha koostisosana.

Vaatleme deformatsiooniseisundit keha alusteljestikule iseloomuliku elementaarristtahuka najal, mille mõõtmised on  $dx$ ,  $dy$  ja  $dz$ . Selle risttahuka lõpmata väikesed mõõtmised lubavad teda vaadelda deformeerunud seisundis kaldrööptahukana. Kaldrööptahuka servad on kaldunud ja nende pikkused muutunud, kui teda võrrelda risttahukaga deformeerumata seisundis. Serv pikkusega  $dx$ , mis on paralleelne  $x$ -teljega, saab suhtelise pikenemise  $\epsilon_x$  ja kaldenurgad  $\omega_{xy}$  ja  $\omega_{xz}$ . Esimene kahest kaldenurgast näitab serva  $dx$  kaldumist  $x$ -teljest  $y$ -telje poole ja teine kaldumist  $z$ -telje poole.



Joon. 4.20

Joonisel 4.20 on kujutatud risttahuka ühte tahku enne deformatsiooni ja sama tahku deformeerununa, kus on näidatud suurused  $\epsilon_x$  ja  $\omega_{xy}$ . (Nurk  $\omega_{xz}$  pole nähtav joonisel kujutatud vaates.) Et risttahukas on määratud oma kolme ristuva servaga  $dx$ ,  $dy$  ja  $dz$ , siis võime tema deformeerumust kaldrööptahukaks kirjeldada üheksa arvsuurusega, mis esitame maatriksis:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & \epsilon_y & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Jooniselt 4.20 selgub, et elementaarristtahuka servade  $dx$ , ja  $dy$  nihkenurk  $xy$ -koordinaattasandis avaldub nende servade pöördenurkade summamana. Avaldades samal viisil nihkenurgad  $yz$ - ja  $zx$ -tasandites, saame seosed:

$$\gamma_{xy} = \omega_{xy} + \omega_{yx}; \quad \gamma_{yz} = \omega_{yz} + \omega_{zy}; \quad \gamma_{zx} = \omega_{zx} + \omega_{xz}. \quad (4.35)$$

Jooniselt 4.20 selgub ka, et telgede järjekord nihkenurga indeksis pole oluline, sest  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ . Viimane asjaolu meenutab nihkepingete paarsusseadust. Asendame maatriksis (4.34) pöördenurgad  $\omega_{xy}$  ja  $\omega_{yx}$  vastavalt suurustega  $\gamma_{xy}/2$  ja  $\gamma_{yx}/2$ . Analoogselt asendame ka ülejäänud pöördenurgad vastavate poolnihkenurkadega:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Maatriks kannab nimetust *deformatsioonimaatriks*, millega deformatsiooniseisund keha punktis on määratud  $xyz$ -

teljestikus kolme suhtelise normaaldeformatsiooniga ja kolme nihkenurgaga. Järelikult deformatsiooniseisund on määratud kuue sõltumatu arvsuurusega (parameetriga) nagu pinguski keha punktis.

Nagu selgub jooniselt 4.20 ja seostest (4.35), oleks pöördenurkade  $\omega_{xy}$  ja  $\omega_{yx}$  asendamine poolnihkenurkadega  $\gamma_{xy}/2$  ja  $\gamma_{yx}/2$  täiesti korrektne, kui pöördenurgad  $\omega_{xy}$  ja  $\omega_{yx}$  oleksid võrdsed. Nende nurkade võrdsuse saavutaksime  $xy$ -telgedele pööramisega nurga  $(\omega_{xy} - \omega_{yx})/2$  võrra, mis aga pole märgatav selle nurga väiksuse tõttu väikeste deformatsioonide juures. Sellest järgneb, et maatriksisse (4.36) tehtud asendused on küllalt täpsed ka esialgses  $xyz$ -teljestikus, kui konstruksioonelemendi deformatsioon pole suur.

**4.4.2. Deformatsiooniseisundi ja pinguse sarnasus.** Vaatleme maatrikseid (4.36) ja (4.1). Matemaatilisel on need maatriksid adekvaatsed. See aga tähendab, et deformatsiooniseisundi matemaatiline käsitlus ühtib pinguse käsitlusega, kui seame vastavusse suhtelise normaaldeformatsiooni  $\varepsilon$  normaalpingega  $\sigma$  ja poole nihkenurgast  $\gamma/2$  nihkepingega  $\tau$ . Seejuures ei teki raskusi ka märkidega, mis samuti täielikult ühtivad. Seda asjaolu silmas pidades võib pinguse seosed ja valemid jaotistest 4.1...4.3 ümber kirjutada deformatsiooniseisundile. Toome ainult ühe näite tasandülesande suhteliste *peadeformatsioonide* valemite ümberkirjutamisest pinguse vastavate valemite (4.12) ja (4.14) alusel:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}); \quad (4.37)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\gamma_{xy}}. \quad (4.38)$$

Tähtsamateks ruumdeformatsiooniseisundit iseloomustavateks suurusteks on suhtelised peadeformatsioonid  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  ja  $\varepsilon_3$ . Isotroopsetes keha langeda peadeformatsioonide ja peapingete  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  suunad kokku. Järelikult *deformatsiooniseisundi ja pinguse peateljed* ühtivad.

**4.4.3. Mahudeformatsioon.**  $xyz$ -teljestikule iseloomuliku elementaaristtahuka maht vaadeldavas keha punktis deformeerumata seisundis on  $dV = dx dy dz$ . Deformeerunud seisund vaadeldavas punktis on määratud suurustega  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yx}$  ja  $\gamma_{zx}$ , millest võtame arvesse kolm suhtelist normaaldeformatsiooni, sest nihkenurgad ei mõjuta elemendi mahtu. Deformeerunud elemendi servade pikkused avalduvad teatavasti järgmiselt:  $(1 + \varepsilon_x) dx$ ;  $(1 + \varepsilon_y) dy$  ja  $(1 + \varepsilon_z) dz$ . Arvutame deformeerunud elemendi mahu:

$$dV' = (1 + \varepsilon_x) dx (1 + \varepsilon_y) dy (1 + \varepsilon_z) dz = \\ = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z).$$

Kuna  $\varepsilon \ll 1$ , siis jätame kõrvale nende väikeste suuruste omavahelised korrutised (kõrgemat järku väikesed suurused) ja saame, et

$$dV' = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Avaldame *suhtelise mahudeformatsiooni* vaadeldavas punktis:

$$\theta = \frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (4.39)$$

Keha ruumala muutused ei sõltu seatud teljestiku orientatsioonist. Seepärast ka suhteline mahu deformatsioon keha punktis peab jääma samaks mis tahes suunaga teljestikus, sealhulgas ka peateljestikus:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{const}. \quad (4.40)$$

Viimasest nähtub, et suurus  $\theta$  kujutab endast *deformatsiooniseisundi invarianti*.

## 4.5. ÜLDISTATUD HOOKE'I SEADUS

**4.5.1. Seosed ruumpinguses.** Jaotises 1.7.3 esitasime Hooke'i seaduse seostena (1.10), millest esimene sobib joonpingusele, teine seob nihkepinge ja sellele vastava nihkenurga mis tahes pinguses. Jaotises 2.2.3 laiendasime seadust joonpinguse põikdeformatsioonile. Käesolevas üldistame Hooke'i seaduse rakendamiseks ruumpinguses.

Olgu ruumpingus ja sellest põhjustatud deformatsiooniseisund keha punktis esitatud  $xyz$ -teljestikus suurustega:

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}); \quad (4.41)$$

$$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}). \quad (4.42)$$

Hooke'i seaduse järgi kehtivad kuue sõltumatu pinge (4.41) ja kuue suhtelise deformatsiooni (4.42) vahel lineaarsed seosed. Neid seoseid on kuus, millest igaüks üldjuhul seob ühe suhtelise deformatsiooni suuruste hulgast 4.42 kuue pingega 4.41. Elastsusteoorias tõestatakse, et *väikse deformatsiooniga isotroopses ja elastses kehas nihkenurk sõltub ainult temale vastavast nihkepingest ja suhteline normaaldeformatsioon sõltub ainult kolmest normaalpingest*.

Kasutame  $\varepsilon_x$  ja normaalpingete  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\sigma_z$  vahelise sõltuvuse väljatoomisel summeerimise printsiipi. Mõjugu ainult normaalpinge  $\sigma_x$ , mis kujutab endast joonpingust. Esimene

seostest (1.10) määrab pinge suunas suhtelise normaaldeformatsiooni  $\varepsilon_x' = \sigma_x/E$ . Kui mõjub ainult pinge  $\sigma_y$ , siis  $x$ -telje sihis tekib põikdeformatsioon, mis seoste (1.10) ja (2.12) järgi on  $\varepsilon_x'' = -\nu\sigma_y/E$ . Pinge  $\sigma_z$  kutsub esile  $x$ -telje sihis samuti põikdeformatsiooni  $\varepsilon_x''' = -\nu\sigma_z/E$ . Kolme normaalpinge koosmõjul, see tähendab ruumpinguses tekib  $x$ -telje sihis summaarne suhteline normaaldeformatsioon  $\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x'''$ . Samal viisil avaldame  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$ , mis koos  $\varepsilon_x$  annavad pärast suuruste asendamist ja lihtsustamist kolm seost. Lisades neile kolm seost nihkepingete ja neile vastavate nihkenurkade vahel, saame kuus seost, mis väljendavad üldistatud Hooke'i seaduse ruumpinguses:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}.\end{aligned}\quad (4.43)$$

Need seosed lubavad arvutada suhtelised deformatsioonid antud pingetest mis tahes suunaga ristteljestikus, sealhulgas ka peateljestikus, kus muidugi kolm viimast seost ei tule arvesse nihkepingete puudumise tõttu peapindadel.

**4.5.2. Seosed tasandpinguses.** Olgu tasandpingus antud pingetega  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$ . Hooke'i seadust väljendavad seosed saame sel juhul seostest (4.43), kui loeme  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  ja  $\tau_{zx}$  võrdseks nulliga:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y); & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x); & \left[ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \right].\end{aligned}\quad (4.44)$$

Viimane seos nurksulgudes ei kuulu Hooke'i seadust tasandpinguses väljendavate põhiseoste hulka. See lisaseos näitab, et tasandpinguses nagu joonpinguseski, esineb normaaldeformatsioon selles suunas, milles normaalpinged puuduvad.

Tasandpinguse uurimisel on mõnikord vajalikud vastupidised seosed, mis võimaldavad arvutada pinged suhtelistest deformatsioonidest. Nende seoste saamiseks normaalpingete jaoks korrutame teist seost (4.44) Poissoni teguriga  $\nu$  ja liidame esimese seosega. Tulemusest avaldame normaalpinge  $\sigma_x$ . Toimides samal viisil vastupidises järjekorras, avaldame  $\sigma_y$ :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); & \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Saadud seoseid vajame pingete eksperimentaalsel uurimisel.

**4.5.3. Mahtelastsus.** Väljendame Hooke'i seaduse seosena suhtelise mahudeformatsiooni ja pingete vahel keha punktis. Asendame seoses (4.39) suhtelised normaaldeformatsioonid  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$  oma avaldistega (4.43). Lihtsustades tulemuse, saame seose

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).\quad (4.46)$$

Tähistame suurused selles seoses järgmiselt:

$$K = \frac{E}{1-2\nu};\quad (4.47)$$

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.\quad (4.48)$$

Seose (4.46) võime nüüd esitada järgmisel kujul:

$$\Theta = K\theta.\quad (4.49)$$

Oktaeedernormaalpinge  $\sigma_0$ , aga samuti ka hüdrostaatilise pinge vahendusel, mida vaatlesime jaotistes 4.3.2 ja 4.3.3 avaldub seos (4.49)

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} K\theta.\quad (4.50)$$

Seosed (4.49) ja (4.50) väljendavad Hooke'i seadust elastse keha punktis, kus deformatsioonina vaadeldakse ruumala suhtelist muutust normaalpingetest kolmel ristaval pinnal, oktaeedernormaalpingest või hüdrostaatilisest pingest.

Võrdetegur  $K$  kannab nimetust *mahtelastsusmoodul*\*. See on füüsikaline konstant, mis kuulub materjali elastsuskonstantide ( $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ ,  $K$ ) hulka. Tema mõõtühik langeb kokku elastsusmoodulite omaga. Enamikul tuntud materjalidest on mahtelastsusmoodul 1,5...3 korda suurem Youngi moodulist. Terasel  $K=460$  GPa või on selle suuruse lähedane.

Suurus  $\Theta$  (teeta) avaldub seosega (4.48). Et see suurus seoses (4.49) oma füüsikalise sisu poolest ei saa olla sõltuv

\* Aine mahtelastsusmoodulina vaadeldakse mõnel juhul siintoodust kolm korda väiksemat suurust. Sel juhul seoses (4.50) puudub tegur 1/3 ja vastavalt muutuvad ka seosed (4.47) ja (4.49).

kehaga meelevaldselt seotud ristteljestiku suunavalikust, siis on meil suuruse  $\Theta$  näol tegemist *ruumpinguse invariandiga*, mis on analoogne tasandpinguse invariandiga  $I_1$  (vaata seos 4.10). Sellest järeldame, et ka *ruumpinguses normaalpingete summa mis tahes ristteljestikus, sealhulgas ka peateljestikus, on muutumatu suurus*:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.} \quad (4.51)$$

Valemist (4.47) nähtub, et *Poissoni* tegur  $\nu$  ei saa olla isotroopsel materjalil suurem kui 0,5. Kui see tegur oleks suurem, siis materjali mahtelastsusmoodul on väiksem nullist ja niisugusest materjalist keha peaks hüdrostaatilisel surveel paisuma. Looduses pole materjale, mis niimoodi käituvad. Leidub küll materjale ja mõnede materjalide niisuguseid seisundeid, mille  $\nu$  on lähedane suurusele 0,5. Näiteks voolavuse olukorras on terase *Poissoni* tegur peaaegu 0,5, mis tähendab, et terasest keha maht ei muutu deformeerumisel plastses seisundis. Tähtsust omab järeldus *Poissoni* teguri piiridest

$$0 \leq \nu \leq 0,5. \quad (4.52)$$

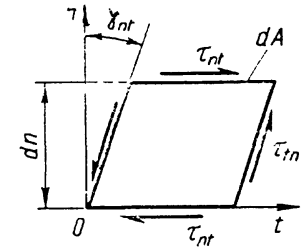
#### 4.6. PINGUSE POTENTSIAALNE ENERGIA

**4.6.1. Potentsiaalne koguennergia.** Jõudude mõjul deformeeruva konstruktsioonielemendi energeetilisi seoseid vaatlesime jaotises 2.8. Seejuures pidasime silmas varda tõmmet ja survet, millega pingustest keha punktiis klaarisime ainult joonpinguse. Käesolevas laiendame keha potentsiaalse siseenergia arvutamise alused pinguse üldjuhule, ruumpingusele.

Sisejõudude eritöö joonpinguses on määratud valemiga (2.69). Sellele lisaks arvutame sisejõudude eritöö puhtas nihkepinguses. Vaatleme elementaarristtahukat joonisel 4.21 kaasaliikivas  $nt$ -teljestikus, mille  $t$ -telg on alguspunktis  $O$  seotud elemendiga. Puhas nihkepingus pingetega  $\tau_{nt} = \tau_{tn}$  põhjustab elemendis nihkenurga  $\gamma_{nt}$ . Seejuures elementaarsisejõududest ainult üks,  $\tau_{nt}dA$  teeb nihkel  $\gamma_{nt}dn$  elementaartöö  $dW_i = (1/2)\tau_{nt}dA\gamma_{nt}dn$ . Jagame töö  $dW_i$  elemendi mahuga  $dV = dAdn$ , saame puhta nihkepinguse eritöö

$$w = \frac{1}{2} \tau_{nt} \gamma_{nt} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}, \quad (4.53)$$

mis väljendub samal viisil ka kaasaliikiva teljestikuga paralleelses alusteljestikus ( $xy$ ), kuna sisejõudude töö oma



Joon. 4.21

olemuselt ei saa sõltuda teljestikust. Näeme, et valemid (2.69) ja (4.53) on sarnased.

Olgu pingus antud alusteljestikus pingetega  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , millele vastavad suhtelised deformatsioonid on  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . Toetudes jõudude mõju sõltumatuse printsiibile, lahutame antud ruumpinguse kolmeks joonpinguseks ja kolmeks puhtaks nihkepinguseks vastavalt antud pingetele ja suhtelistele deformatsioonidele. Nende osapinguste eritööd on määratud valemitega (2.69) ja (4.53). Ruumpinguse eritöö saame tulemuste summeerimisega:

$$w = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (4.54)$$

Keha vaadeldavas punktis kogunenud *potentsiaalse siseenergia ruumtihedus*  $u$  on võrdne sisejõudude eritööga (4.54), milles asendame suhtelised deformatsioonid seostega (4.43) ja saame:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (4.55)$$

Konstruktsioonielemendi kogu potentsiaalse energia  $U$  arvutame energia tiheduse  $u$  integreerimisega keha mahus  $V$ :

$$U = \int_V u \, dV. \quad (4.56)$$

**4.6.2. Mahu- ja kujumuutuse energiad.** Tugevusküsimuste lahendamisel vajame konstruktsioonielemendi energia tihedust ohtlikus punktis, kus see harilikult väljendatakse peapingete kaudu valemist (4.55):

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \quad (4.57)$$

ja jaotatakse kaheks komponendiks. Üks osa energiast  $u_0$  vastab keha mahudeformatsioonile, teine osa  $u_D$  kujumuutusele. Suhtelise mahudeformatsiooni kutsub esile pinguse kahest komponendist hüdrostaatiline pinge, mis teatavasti võrdub oktaedri normaalpingega  $\sigma_0$  ja avaldub valemiga (4.28). Võttes valemis (4.57) peapinged võrdseks hüdrostaatilise pingega  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ , saame:

$$u_0 = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{3\sigma_0^2}{2K}. \quad (4.58)$$

Teise osa energia tihedusest avaldame valemiga (4.57) kujumuutust põhjustava pinguse komponendi — pingedeviaatori (4.33) abil, millesse  $\sigma_0$  asetame valemist (4.28):

$$\begin{aligned} u_D &= \frac{1 + \nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{8(1 + \nu)}{3E} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2). \end{aligned} \quad (4.59)$$

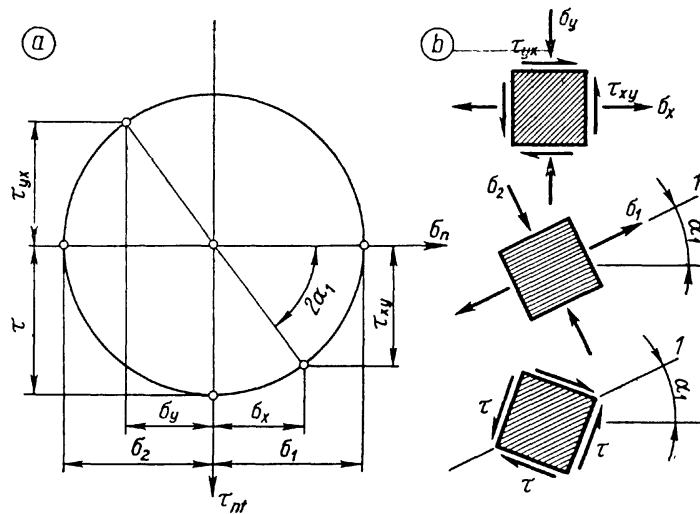
Sama tulemuse saame, kui pinguse energiatihtedusest (4.57) lahutame suhtelisele mahudeformatsioonile vastava energiatihteduse (4.58). Valemi (4.59) teise kjuu saame, kui asendame peapinged ekstreemsete nihkepingetega seostest (4.24).

## 5. NIHE JA LÕIGE

### 5.1. PUHAS NIHE

**5.1.1. Pinged.** Paljud konstruktsioonelemendid, nagu völldid, keerdvედრud, liigendite sõrmed, poldid, needid jt. töötavad koormustega, mis nende ohtlikes kohtades kutsuvad esile *puhta nihke* või sellele lähedase pinguse ja deformatsiooniseisundi. Niisuguste konstruktsioonelementide tugevusarvutustes esineb iseloomuliku pingena suurim nihkepinge ja -deformatsioon, elastsuskonstandina nihkeelastsusmoodul ja tugevusnäitajatena piirnihkepinged, mis iseloomustavad materjali tugevust puhtal nihkel. Taolisi tugevusarvutusi nimetatakse *arvutusteks nihkele* või ka *arvutusteks lõikele*. Käesolevas peatükis vaatleme nende arvutuste kõige üldisemaid aluseid.

Uurime nihkele ja lõikele töötavate konstruktsioonelementide iseloomulikku pingust, *puhast nihet*, mis on teatavasti tasandpinguse üks erijuht ja tuntud meile jaotisest



Joon. 5.1

4.2.8. Sealt teame, et puhast nihet iseloomustavad tasandpinguse invariantid

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y = 0 \quad \text{ja} \quad I_2 = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 < 0, \quad (5.1)$$

mis lubavad identifitseerida puhta nihke, kui pingus on antud pingetega  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$ .

Esimene tingimustest (5.1) annab seosed:

$$\sigma_x = -\sigma_y \quad \text{ja} \quad \sigma_1 = -\sigma_2; \quad (5.2)$$

millest järeldub, et normaalpinged ristuvatel pindadel on võrdsed ja vastasmärgilised. Et ka peapinged on võrdsed ja vastasmärgilised, siis võime vaadeldavas punktis kehas välja lõigata elementaarristtahuka, millele ühes suunas mõjub tõmbepinge ja ristsuunas sama suur survepinge. Peapingete väärtused on määratud valemiga (4.12), kus  $\sigma_y$  asendame esimesest seosest (5.2):

$$\sigma_{1,2} = \pm \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (5.3)$$

Esimese peatelje (peapinge) suuna määrame valemi (4.14) või (4.15) abil. Viimane neist saab puhtal nihkel järgmise kjuu:

$$\tan 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x}. \quad (5.4)$$



Suurimad nihkepinged puhtal nihkel

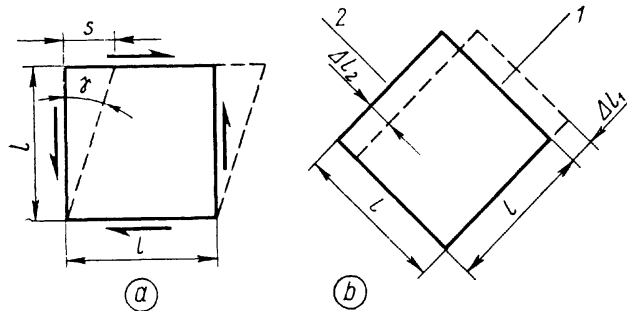
$$\tau = \sigma_1 = \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.5)$$

ja mõjuvad ristpindadel, mis moodustavad peapindadega nurgad  $45^\circ$ . Valemi (4.23) najal veendumel, et puhtal nihkel puuduvad suurimate nihkepingete pindadel normaalpinged. Sellest järeldub, et *kehast võime välja lõigata teatava orientatsiooniga elementaarriistahuka, mille neljal tahul mõjuvad ainult nihkepinged*. See on vaadeldava pinguse üks olulisemaid omadusi, mida on silmas peetud nähtavasti ka nimetusel *puhas nihe*.

Toodud seosed ja järeldused leiavad kinnitust ka puhas nihet esindaval Mohri ringil, mis on kujutatud joonisel 5.1, a. Joonisel 5.1, b on kujutatud elementaarkuupi, mis esimesel juhul on kehast välja lõigatud alusteljestikus ( $xy$ ), teisel juhul peateljestikus ja kolmandal juhul mööda suurimate nihkepingete pindasid.

**5.1.2. Deformatsioonid.** Puhast nihe deformatsiooniseisundina on iseloomulik sellepõhjust, et suurima nihkepinge pindadega välja lõigatud väiksel kuubil vaadeldakse deformatsioonidest ainult nihet  $S$  ja nihkenurka  $\gamma = S/l$  (suhteline nihe) (joonis 5.2, a). Kuubi servade pikkus  $l$  ei muutu normaalpingete puudumise tõttu suurimate nihkepingete pindadel. Siit järeldub, et *puhtal nihkel puudub ruumala muutus* ( $\theta = 0$ ).

Peapindadega välja lõigatud kuubil vaatleme joonisel 5.2, b kriipsjoonega kujutatud deformeerunud seisundit, mille peadeformatsioonid, suhteline pikenemine  $\epsilon_1 = \Delta l_1/l$  ja lühenemine  $\epsilon_2 = -\Delta l_2/l$  on võrdsed ja vastasmärgilised nagu



Joon. 5.2

neile vastavad peapingedki:

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 \quad (5.6)$$

Avaldame eritöö  $w$  puhtal nihkel ühelt poolt suurimast nihkepingest  $\tau$  nihkenurgal  $\gamma$  ja teiselt poolt peapingetest  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  peadeformatsioonidel  $\epsilon_1$  ja  $\epsilon_2$  valemiga (4.53):

$$w = \frac{1}{2} \tau \gamma; \quad w = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2).$$

Asendades  $\sigma_2$  ja  $\epsilon_2$  võrdsete suurustega  $-\sigma_1$  ja  $-\epsilon_1$ , võrrutame eritöö avaldised ja taandame võrdsed pinged  $\tau = \sigma_1$ . Saame seose:

$$\gamma = 2\epsilon_1 \quad (5.7)$$

millest nähtub, et *puhtal nihkel suurim nihkenurk võrdub kahekordse suhtelise peadeformatsiooniga*.

**5.1.3. Nihkeelastsusmooduli sõltuvus normaalelastsusmoodulist ja Poissoni tegurist.**

Avaldame suurima nihkenurga  $\gamma$  ja suhtelise peadeformatsiooni  $\epsilon_1$  Hooke'i seadust väljendavate seostega (4.43):

$$\gamma = \frac{\tau}{G}; \quad \epsilon_1 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1.$$

Asetame  $\gamma$  ja  $\epsilon_1$  avaldised võrrandisse (5.7):

$$\frac{\tau}{G} = 2 \frac{1+\nu}{E} \sigma_1,$$

millest taandame võrdsed pinged  $\tau$  ja  $\sigma_1$  ja avaldame nihkeelastsusmooduli:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.8)$$

Tugevusõpetuses on kasutusel neli elastsuskonstanti  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  ja  $K$ , mis pole aga kõik sõltumatud suurused, vaid nende vahel on kaks seost. Esimest seost vaatlesime jaotises 4.5.3, kus see on esitatud valemiga (4.46) mahtelastsusmooduli  $K$  arvutamiseks normaalelastsusmooduli ja Poissoni teguri najal. Valemiga (5.8) on nihkeelastsusmoodul määratud samade suurustega. Järelikult homogeense, isotroopse ja elastse keha jaoks on Hooke'i seadus väljendatav kahe sõltumatu konstandiga, millena tugevusõpetus vaatleb Youngi moodulit  $E$  ja Poissoni tegurit  $\nu$ .

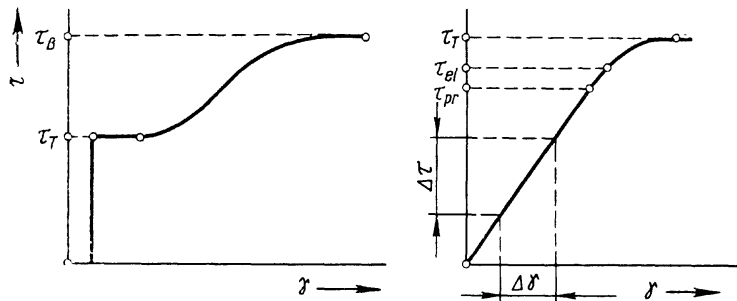
Tabelis 1 on toodud materjalide katseliselt määratud  $E$ ,  $G$  ja  $\nu$  keskmised väärtused, mille najal võime veenduda seose (5.8) paikapidavuses.

### 5.3. NIHKETUGEVUS

**5.2.1. Nihkediagramm.** Materjali mehaanilisi omadusi puhtal nihkel iseloomustab ülevaatlilikult nihkepinge ja -nurga sõltuvust kirjeldav  $\tau-\gamma$  diagramm. See diagramm saadakse katses proovikehaga, mis kasvava koormuse mõjul on ühtlase puhta nihke seisundis.

Puhta nihke saame harilikul *väändekatsel*, mida vaatleme lähemalt järgnevas peatükis. Hariliku väändekatse puuduseks on puhta nihke ebaühtlus proovikehas, mis põhjustab moonutusi  $\tau-\gamma$  diagrammis. Need moonutused vähenevad, kui harilik ümarproovikeha asendada torukujulise proovikehaga, milles materjal väändel on ühtlasemas pinge- ja deformatsiooniseisundis. Veelgi ühtlasema puhta nihke saavutamiseks katsetasid *Bach* ja *Baumann* torukujulisi proovikehi, mis pikisuunas allutati survejõule harilikus katsemasinas ja põiksuunas tõmbele hüdraulilise rõhuga toru sees.\*

Uurimised näitavad, et hariliku terase  $\tau-\gamma$  diagrammid (joonis 5.3) meenutavad üldjoontes  $\sigma-\epsilon$  diagramme tõmbel ja survel. Erinev on ainult diagrammi lõpp, kus nihkepurunemine toimub nii, et diagrammi puutuja jääb horisontaalseks. Diagrammi olulisemates osades esinevad kõik samalaadsed iseloomulikud suurused ja punktid, mida vaatlesime ka  $\sigma-\epsilon$  diagrammil. Nendeks on diagrammi sirge algosa tõus ehk nihkeelastsusmoodul  $G = \Delta\tau/\Delta\gamma$ , proportsionaalsuspiir  $\tau_{pr}$ , elastsuspiir  $\tau_{el}$ , voolavuspinge  $\tau_T$  ja *nihketugevus*  $\tau_B$ . Nihkekarakteristikute väärtused muidugi erinevad sama materjali tõmbenäitajatest, kuid moodustavad nendega



Joon. 5.3

\* C. Bach, R. Baumann. Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1921.

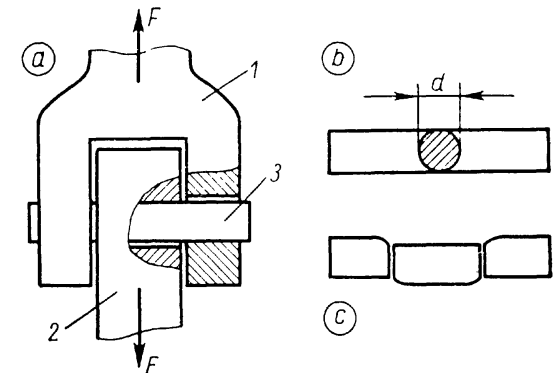
enam-vähem kindlad suhted. Harilikul terasel  $G = (0,38 \dots 0,40)E$ ,  $\tau_T = (0,56 \dots 0,60)\sigma_T$  ja  $\tau_B = (0,6 \dots 0,7)\sigma_B$ .

Mitmesuguste materjalide mehaanilised omadused nihkel ja tõmbel on erinevates suhetes, mis jäävad aga siiski järgmistesse üldistesse piiridesse:  $G = (0,33 \dots 0,50)E$ ;  $\tau_B = (0,5 \dots 1,0)\sigma_B$ ;  $\tau_T = (0,56 \dots 0,60)\sigma_T$ . Nagu näeme, osutub kõige püsivamaks plastsete materjalide voolavuspingete suhe.

Purunemine puhtast nihkest toimub nagu tõmbelgi kas nihkepurunemisenä suuimate nihkepingete  $\tau$  pindadel, millele eelnevad enamasti suhteliselt suured plastsed deformatsioonid või siis habraspurunemisenä tõmbe peapingete  $\sigma_1$  pindadel. Harilikus terases normaaltingimustel esineb nihkepurunemine, malmis aga habraspurunemine.

**5.2.2. Lõiketeim.** Jaotises 1.5.7 vaatlesime varda tööseisundit, mida nimetasime *lõikeks*. Lõikele töötavas vardas tekib keeruline pingeseisund, kuid ohtlikus ristlõikepinnas mõjuvad suhteliselt suured nihkepinged ja pingus sellel pinnal on lähedane puhtale nihkele. Katsed kinnitavad, et materjalidel, millel tõmbe- ja survetugevused on võrdsed või peaaegu võrdsed, nagu näiteks terasel, võime nihketugevuse  $\tau_B$  määrata küllalt täpselt *lõiketeimiga*.

Lõiketeimi seade on kujutatud joonisel 5.4, a, kus haardeosade 1 ja 2 avades on näidatud silinderproovikeha 3 läbimõõduga  $d$  ja ristlõikepindalaga  $A = \pi d^2/4$ . Haardeosad panakse tõmbemasinasse ja koormatakse kasvava jõuga  $F$ . Teatava jõu  $\max F$  juures proovikeha puruneb kahes lõikepinnas kolmeks tükiks. Proovikeha enne ja pärast lõiketeimi on kujutatud joonistel 5.4, b ja c. Keskmist piirpinget lõikepindadel



Joon. 5.4

$$\tau_B = \frac{\max F}{2A} \quad (5.9)$$

vaatleme uuritava materjali *nihketugevusena*. Lõiketeimi eelistame tema lihtsuse tõttu. Kahjuks võimaldab lõiketeim määrata mehaanilistest omadustest ainult nihketugevuse.

Materjalide *lubatavad nihkepinged*  $[\tau]$  määratakse samade kaalutlustega, millega määratakse lubatavad pinged tõmbel ja survel. Mõnede materjalide lubatavad nihkepinged on antud tabelis 2.

### 5.3. TUGEVUSARVUTUSED LÕIKELE JA MULJUMISELE

**5.3.1. Liigendi sõrm.** Konstruksioonelementide ühendamiseks kasutatakse sageli *liigendeid*, mille hulgas üks levinumaid on *sõrmligend*. Joonisel 5.4, a kujutatud katseseade koos proovikehaga on vaadeldav ka liigendina, milles konstruksioonelemendid 1 ja 2 on ühendatud sõrmega 3. Selles liigendis töötab sõrm teatavasti lõikele kahes ristlõikepinnas. Joonisel 5.5, a on kujutatud nelja lõikepinnaga sõrmligend, kuna sõrm selles liigendis jõu  $F$  kasvades võiks puruneda neljas ristlõikepinnas. Praktikas esineb ka kuue ja veelgi suurema arvu lõikepindadega liigendeid. Kui lõikepindade arv on  $m_0$ , siis nende summaarne pindala  $m_0A = m_0\pi d^2/4$ .

Liigendi sõrm peab rahuldama tugevustingimust lõikele, mis tähendab, et nihkepinge  $\tau$  lõikepindadel peab olema väiksem sõrme materjali lubatavast nihkepingest  $[\tau]$ . Nihkepinge lõikepindadel on ebaühtlane, kuid ühtlustub tugevuse piirreisisundis, see tähendab vahetult enne purunemist. See asjaolu annab alust teha arvutust lihtsustav oletus, et *nihkepinge lõikepindadel on ühtlane* ja esitada tugevustingimus järgmisel kujul:

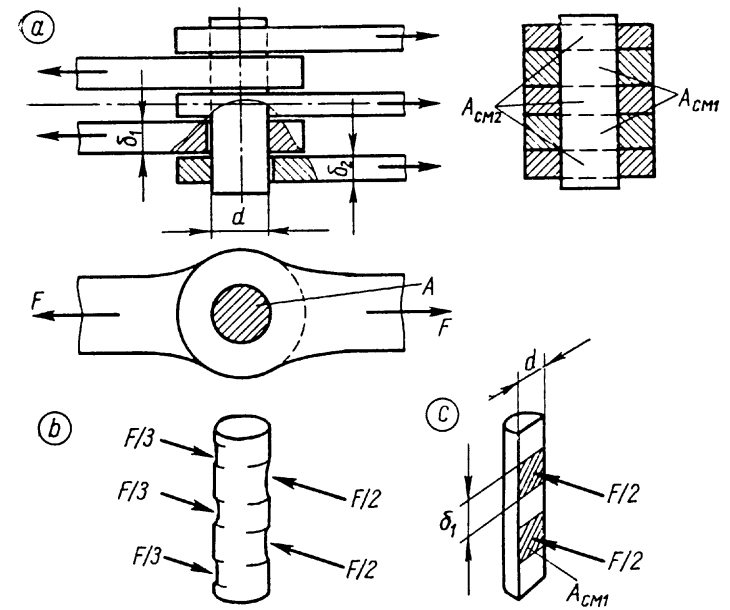
$$\tau = \frac{F}{m_0A} = \frac{4F}{m_0\pi d^2} \leq [\tau], \quad (5.10)$$

mildest saame tingimuse liigendi sõrme vajaliku läbimõõdu määramiseks:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{m_0\pi[\tau]}}, \quad (5.11)$$

kus  $F$  on liigendile mõjuv jõud,  $m_0$  — sõrme lõikepindade arv ja  $[\tau]$  — sõrme materjali lubatav lõikepinge.

Ühendatavad konstruksioonelemendid mõjuvad sõrmele jõududega (joonis 5.5, b), mis ohustavad sõrme *muljumisega*.



Joon. 5.5

Samal joonisel on kujutatud sõrme kahjustusi muljumisest, mida peab vältima. Pinnajõu intensiivsust nimetatakse *muljumispingeks* ja tähistatakse  $\sigma_{CM}$ , mille indeks tuleneb sõnast *смятие* — muljumine. Pinge sõrme silinderpinnal on ebaühtlane, kuid *arvutuse lihtsuse huvides asendame tegeliku muljumispinna tinglikuga*, milleks võetakse tegeliku pinna *projektsioon diametraaltasandil* ja loetakse muljumispinge ühes suunas mõjuvatest jõududest sellel pinnal ühtlaseks. Kahele jõule, mille suurused on  $F/2$ , vastavaid tinglikke muljumispindu vaatleme sõrme pikilõikepinna viirutatud osadena  $A_{CM1} = \delta_1 d$  joonisel 5.5, c. Vastassuunas kolmele jõule  $F/3$  vastavaid pindu  $A_{CM2} = \delta_2 d$  kujutame ette pikilõike viirutamata aladel.

Liigendi sõrmele, millel ühes suunas on  $m_1$  muljumispinda ja vastassuunas  $m_2$  pinda, saame kaks tugevustingimust muljumisele:

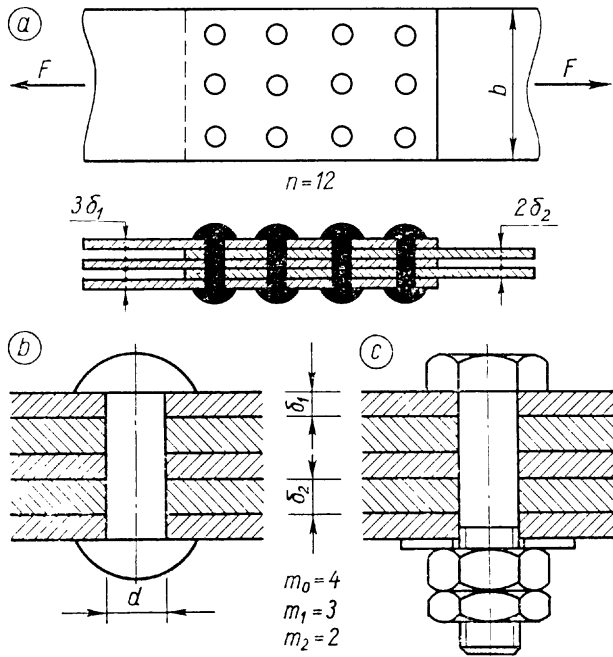
$$\sigma_{CM1(2)} = \frac{F}{m_{1(2)}\delta_{1(2)}d} \leq [\sigma]_{CM}, \quad (5.11)$$

kus  $[\sigma]_{CM}$  on *lubatav muljumispinge*, mille suurus oleneb materjalide tugevusest, kõvadusest, pinnatööstusest, liigendi

liikuvuse ulatusest ja sagedusest ning paljudest teistest asjaoludest ja kaalutlustest. Lubatavad muljumispinged määratakse kogemuste najal ja nad jäävad enamasti piirsesse  $[\sigma]_{CM} = (0,5 \dots 1,5) [\sigma]_C$ , kus viimane on lubatav pinge survele.

**5.3.2. Neet- ja poltliide.** Teatud tüüpi neet- ja poltliited arvutatakse lõikele ja muljumisele nagu liigendi sõrmgi. Joonisel 5.6, a on kujutatud teraslehtede neetliide, milles igat neeti (joonis 5.6, b) võime tugevusarvutuse seisukohalt vaadelda sõrmena. Samad lehed võib ühendada poltliitega (joonis 5.6, c), mis oma tööpõhimõtte poolest ei erine neetliitest.

Neet ja polt erinevad liigendi sõrmest sellega, et nendes mõjub suhteliselt suur tõmbejõud, kunä sõrmes tõmbejõud harilikult puudub. Tõmbejõud tekib lõõmutatud needi jahtumisel termopingetest ja poldi pingestamisest mutri kinnikeeramisel. Eelpingestatud neet ja polt avaldavad ühendatavatele teraslehtedele survejõudu, millest tulenev hõõrdejõud



Joon. 5.6

teraslehtede vahel tagab nende koostöö koormuse  $F$  kandmisel. Oigesti projekteeritud ja valmistatud liidete normaalsel kasutamisel, elastsete deformatsioonide piirkonnas, tasakaalustub jõud  $F$  täielikult hõõrdejõududega ja needid (poldid) ei tööta lõikele ega muljumisele. Nad hakkavad tööle lõikele ja muljumisele alles siis, kui jõu  $F$  ohtlikust kasvust põhjustatud plastsete deformatsioonide tagajärjel eelpinged kaovad ja koos nendega ka hõõrdejõud. Tugevuse piirsesundis töötavad needid ja harilikud poldid kõik ühtlaselt lõikele ja muljumisele.

Neet- ja poltliite elastse töötamise arvutuskeemis peetakse silmas tugevuse piirsesundit selles mõttes, et oletatakse kõikide neetide ja poltide ühtlast töötamist lõikele ja muljumisele, hüljates lehtede vahel mõjuvad hõõrdejõud. Sellel eeldusel väljenduvad tugevustingimused järgmiselt:

$$\tau = \frac{4F}{nm_0\pi d^2} \leq [\tau]; \quad (5.12)$$

$$\sigma_{CM 1(2)} = \frac{F}{nm_{1(2)}\delta_{1(2)}d} \leq [\sigma]_{CM}, \quad (5.13)$$

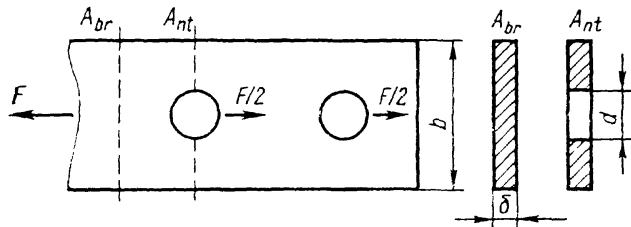
kus  $F$  on ühendile mõjuv jõud,  $n$  — neetide või poltide arv,  $m_0$  — ühe needi või poldi lõikepindade arv,  $m_{1(2)}$  — ühe needi või poldi muljumispindade arv ühes ja teises suunas,  $d$  — needi või poldi läbimõõt ja  $\delta_{1(2)}$  — ühendatavate lehtede paksus ühes ja teises suunas.

Tugevustingimustest (5.12) ja (5.13) saame avaldada tingimused neetide või poltide arvu  $n$  määramiseks:

$$n \geq \frac{4F}{m_0\pi d^2 [\tau]}; \quad n \geq \frac{F}{m_{1(2)}\delta_{1(2)}d [\sigma]_{CM}}. \quad (5.14)$$

Lubatav nihkepinge neetidele ja tavalisest terasest poltidele on piires  $[\tau] = 80 \dots 120$  MPa. Lubatav muljumispinge  $[\sigma]_{CM} = 280 \dots 320$  MPa on suhteliselt kõrge, põhinedes neet- ja poltliidete katselisel uurimisel ja praktilisel kogemusel, mis tõendavad kehade võimet taluda kõrgeid muljumispingeid väikestel kontaktpindadel. Kehad taluvad seda kõrgemat muljumispinget, mida väiksem on kontaktpind nende kokkupuutekohas võrreldes kehade mõõtmetega. Näiteks vaguni ratas ja rööbas taluvad ohutult muljumispinget 700 MPa ja rohkemgi nende suhteliselt väikesel kontaktpinnal.

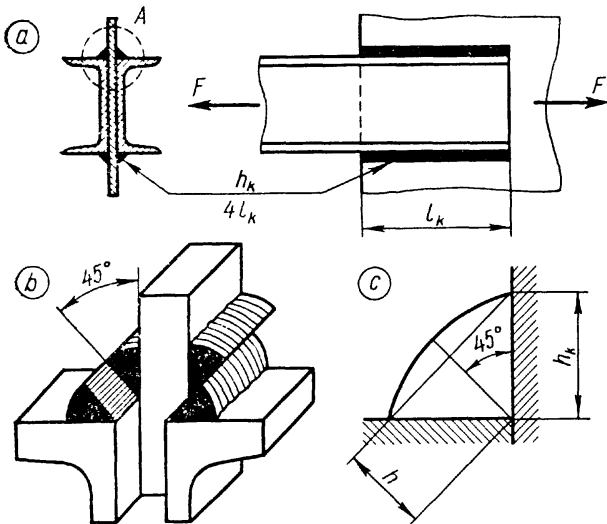
Neet- ja poltliidete puuduseks on ühendatavate elementide tugevuse nõrgestatus avadega. Joonisel 5.7 on kujutatud neediavadega nõrgestatud varras, mille arvutamisel tõmbele ja survele kasutame kahte ristlõikepindala:  $A_{br} = b\delta$  ja



Joon. 5.7

$A_{nt} = (b - d)\delta$ . Indeksid *br* ja *nt* tulenevad sõnadest *bruto* ja *neto*. Nõrgestatud ristlõike pindala  $A_{nt}$  kasutame varda tugevustingimuses  $\sigma = N/A_{nt} \leq [\sigma]$ , kus tugevus on määratud kõige nõrgema ristlõikega. Deformatsioonide (näiteks piknemise) arvutamisel kasutame nõrgestamata ristlõike pindala  $A_{br}$ , kuna siin nõrgestus varda väiksel alal märgatavat mõju ei avalda ( $\Delta l = Nl/EA_{br}$ ).

**5.3.3. Keevisliide.** Keevisliite eeliseks võrreldes neet- ja poltliitega on ühendatavate elementide nõrgestuse puudumine ja töö lihtsus. Tänapäeval on keevisliited kõige levinumad terasest elementide ühendamisel. Joonisel 5.8, *a* on kujutatud kahest karpterasest varda *nurkõmblusega* keevisliide teras-



Joon. 5.8

lehega. Neli keevisõmblust kõrgusega  $h_k$  ja pikkusega  $l_k$  ühendavad vaadeldavad elemendid. Keevisõmbluse kõrgus selgub õmbluse ristlõikelt joonisel 5.8, *c*.

Nurkõmblustega keevisliidete tugevuse uurimine näitab, et nendes mõjuvad olulised nihkepinged, mis piirteisundis põhjustavad õmbluste nihkepurunemise nii nagu näidatud kohtvaatel *A* joonisel 5.8, *b*. Nurkõmbluse arvutusliku ristlõikeka vaatlеме täisnurkset kolmnurka kaatetitega  $h_k$ . Õmbluse kumerat osa ei arvestata (joonis 5.8, *c*). Keevisõmbluse arvutuslikuks nihkepinnaks kujuneb  $A = hl$ , kus  $h$  on arvutuslik kõrgus (joonis 5.8, *c*) ja  $l$  arvutuslik pikkus. Keevisõmbluse arvutuslik kõrgus  $h = h_k \sin 45^\circ \approx 0,7h_k$  ja arvutuslik pikkus  $l = l_k - h_k$  (või  $l = l_k - 10 \text{ mm}$ ). Viimane võetakse väiksem keevisõmbluse pikkusest  $l_k$  sellepärast, et keevisõmbluse otsad on madalama kvaliteediga. Mitme õmblusega keevisliite nihkepind arvutatakse summeerimise teel.

Oletame, et nihkepinge keevisliite arvutuslikul nihkepinnaal on ühtlane ja tugevustingimus avaldub järgmisel kujul:

$$\tau = \frac{F}{0,7h_k \left( \sum_{i=1}^n l_{ki} - nh_k \right)} \leq [\tau], \quad (5.15)$$

kus  $n$  on õmbluste arv keevisliites ja  $l_{ki}$  — õmbluste pikkused. Tugevustingimusest saame arvutada keevisõmbluste vajaliku summaarse pikkuse:

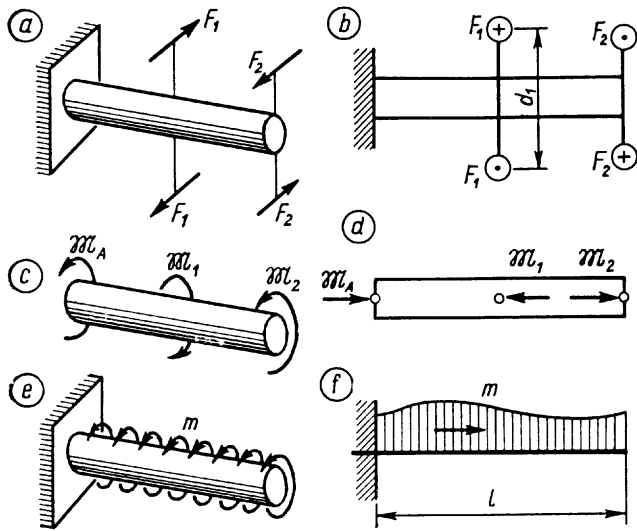
$$\sum_{i=1}^n l_{ki} \geq \frac{F}{0,7h_k [\tau]} + nh_k. \quad (5.16)$$

Lubatud pinge  $[\tau]$  oleneb ühendatavate elementide materjali ja elektroodide omadustest, kuid sõltub veel paljudest asjaoludest, mida me siinkohal ei vaatle. Enamasti jääb lubatud pinge teraskonstruksioonide nurkõmblusega keevisliidetes piirre 80...120 MPa.

## 6. VÄÄNE

### 6.1. VÄÄNDEMOMENT

**6.1.1. Varda koormus.** Väändeks nimetatakse varda tööseisundit, mille puhul sisejõuna esineb ainult väändemoment. Seejuures normaal- ja põikjõud, aga samuti paindemomendid puuduvad. Väändeale töötavad paljud konstruktsioonelemendid, võllid, keerdvedrud jt. Käesolevas jaotises 6 vaatlеме sirge ühtlase varda väännet.



Joon. 6.1

Sirge varda väände põhjustavad välisjõud, mis moodustavad jõupaari varda telje risttasandites (joonis 6.1, a). Arvutusskeemil kujutame jõupaare nii nagu näidatud joonisel 6.1, b, kus ristiga on tähistatud vaataja poolt eemale suunatud jõudu ja punktiga jõudu, mis on suunatud vaataja poole. Jõupaari momenti  $\mathfrak{M} = F \cdot d$  võime kujutada arvutusskeemil ka vektorina varda teljel (joonis 6.1, d), mille suund on seotud jõupaari suunaga paremakäe krüvireegli järgi (joonis 6.1, c). Mõnele konstruktsioonielemendile jaguneb välismoment nii pikal alal, et peame seda momenti arvutusskeemil kujutama *lausmomentina intensiivsusega*  $m$  (joonis 6.1, e). Momendi intensiivsuse mõõtühikuks on N·m/m. Arvutusskeemil kujutame intensiivsust  $m$  varda teljel epüürina, millel nool näitab momendivektori suunda (joonis 6.1, f). Moment avaldub intensiivsuse kaudu järgmiselt:

$$\mathfrak{M} = \int l m dx, \quad (6.1)$$

kus  $l$  on momendiga koormatud piirkonna pikkus ja  $dx$  — varda telje element.

Ühtlase intensiivsuse korral  $\mathfrak{M} = ml$ . Epüüriiga antud intensiivsuse puhul on moment väljendatav epüüri pindalana.

Teguri  $C$  väärtused

Pöördemomendi $\mathfrak{M}$ mõõtühik	Võimsuse $P$ mõõtühik	
	kW	HJ
N·m	9549	7023
kgf·m	974	716

Liikumatu alusele kinnitatud vardale (joonis (6.1, b) mõjub välismomendina ka toemoment, mille määrame sidemetest vabastamise printsiibiga (joonis 6.1, d) tasakaaluvõrrandist

$$\sum \mathfrak{M} = 0; \quad \mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = 0; \quad \mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2.$$

Võllide arvutamisel tuleb välismoment või nn. *pöördemoment* sageli määrata antud võimsusest ja pöörlemissagedusest. Teatavasti

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{\omega}, \quad (6.2)$$

kus  $P$  on võimsus ja  $\omega$  — nurkkiirus. Et võllide töötamise kiirus ja võimsus antakse sageli süsteemiväliste mõõtühikutega, siis peame antud suurused teisendama. Mõõtühikute teisendus koondub kordajasse  $C$  valemis

$$\mathfrak{M} = C \frac{P}{n}, \quad (6.3)$$

kus  $n$  on võlli pöörlemissagedus minutis (p/min). Teguri  $C$  väärtused pöördemomendi ja võimsuse enamlevinud mõõtühikutele on esitatud tabelis 5.

Vaatleme kahte näidet.

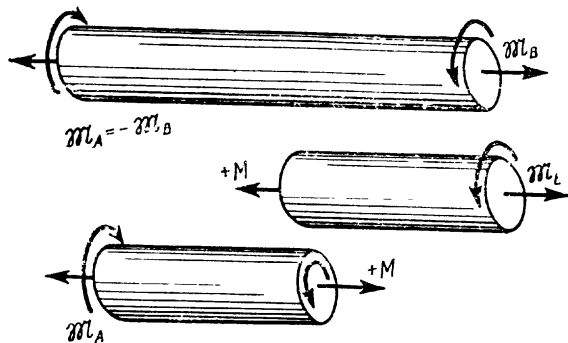
*Näide 6.1.* Mootor töötab võimsusega  $P = 10$  kW ja  $n = 1450$  P/min. Arvutame mootori pöördemomendi SI ühikutes (njuutonmeetrites).

$$\mathfrak{M} = C \frac{P}{n} = 9549 \frac{10}{1450} = 65,9 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

*Näide 6.2.* Töömasin tarbib võimsust 80 hobujõudu pöörlemissagedusel 600 pöört minutis. Arvutame pöördemomendi MKGS-süsteemi ühikutes (jõukilogramm-meetrites).

$$\mathfrak{M} = 716 \frac{80}{600} = 95,4 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

**6.1.2. Väändemoment,** varda sisemoment ristlõikepinnal, määratakse lõikemeetodiga põhimõtteliselt samuti nagu nor-



Joon. 6.2

maaljõudki. Lõikega eraldatud vardaosa ristlõikepinna keskmes kujutame väändemomendi  $M$  normaalisihilise vektorina (joonis 6.2). Positiivseks loeme väändemomendi, mille vektor on suunatud ristlõikepinnast eemale, nagu näidatud joonisel. Negatiivse väändemomendi vektor osutab oma noolega ristlõikepinna. Mõnel juhul on väändemomendi suunda otstarbekas näidata ristlõikepinna joonestatud ringvektoriga, mille positiivne suund on vastupidine kellaosuti liikumise suunale, kui vaadata ristlõikele.

Väändemomendi suund (märk) pole nii oluline nagu normaaljõu oma, kuna vääne ühes ja teises suunas füüsikaliselt ei erine. Teisiti öeldes, *varda tugevus ei sõltu väändemomendi suunast ja seepärast loobutakse siin sageli märkist*. Märkil on tähtsus väändemomentide algebralisel summeerimisel ja väändedeformatsiooni määramisel.

Vaatleme joonisel 6.3 välismomentidega koormatud tasakaalus varrast  $A-B$ . Määrame väändemomendi  $M$  varda keskkohas, kus teeme mõttes lõike ja kujutame vasakut osa eraldiseisvana. Rakendame lõikepinna keskmes tundmatu väändemomendi positiivses suunas, see tähendab nii, et vektori nool osutab ristlõikest eemale. Koostame vaadeldavale osale momentide tasakaalutingimuse varda telje suhtes, lugedes sellel positiivse suuna ristlõikest otsa poole (käesoleval juhul vasakule poole):

$$M_1 - M_2 - M = 0, \text{ millest } M = M_1 - M_2 = 45 - 25 = 20 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Samal viisil koostame tasakaalutingimuse vaadeldavast ristlõikest paremal pool asetsevale vardaosale, mida me joonisel eraldiseisvana ei kujuta:

$$-M + M_3 - M_4 = 0; \text{ millest } M = M_3 - M_4 = 50 - 30 = 20 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Tulemus, nagu oodata võis, ühtib vasaku osa tasakaalutingimusest saadud väändemomendiga. Järelikult pole oluline kumma osa najal väändemoment arvutatakse. Vaatleme alati muidugi seda osa, mis annab lihtsama arvutuse.

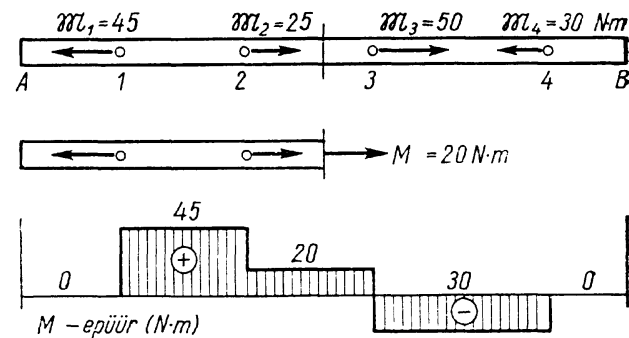
Rakendades lõikemeetodit varda teistes kohtades, näeme, et punktide 2 ja 3 vahel väändemoment ei muutu. Punktide 1 ja 2 vahemikus saame väändemomendi  $45 \text{ N}\cdot\text{m}$  ja vahemikus  $3-4$   $M = -30 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Varda äärmistel aladel  $A-1$  ja  $4-B$  väändemoment puudub. Ülevaatlukult kirjeldab väändemomendi kogu vardas epüür, mis on esitatud joonisel 6.3 ja mis vormiliselt ei erine normaaljõu epüürist.

Eeltoodust teeme üldistuse, mis lihtsustab väändemomendi määramist lõikemeetodiga. Väändemomendi avaldame vaadeldava ristlõikega eraldatud vardaosa tasakaalutingimusest üldisel kujul:

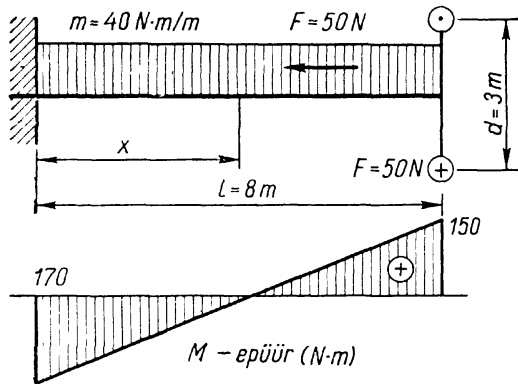
$$M = \sum M, \quad (6.4)$$

mille rakendamisel juhindume järgmisest määrangust: *ristlõike väändemoment võrdub nende välismomentide algebralise summaga, mis koormavad varrast ühelt poolt vaadeldavat ristlõiget*. Seejuures loetakse summeerimisel välismoment positiivseks, kui tema vektor on suunatud eemale vaadeldavast ristlõikest, ja negatiivseks, kui vektor osutab ristlõikele.

Määrame väändemomendi alusele kinnitatud vardas (joon. 6.4), mis on koormatud jõupaari ja ühtlase lausmomendiga. Märkime varda teljel libiseva punkti (ristlõike) kaugusel  $x$  varda vasakust otsast ( $0 \leq x \leq l$ ). Avaldame väändemomendi vaadeldavas ristlõikes parempoolse vardaosa järgi:



Joon. 6.3



Joon. 6.4

$$M = Pd - (l - x)m = 50 \cdot 3 - (8 - x)40 = 150 - 320 + 40x = 40x - 170.$$

Väändemoment toel on  $170 \text{ N} \cdot \text{m}$  ( $x=0$ ) ja varda teises otsas  $150 \text{ N} \cdot \text{m}$  ( $x=8 \text{ m}$ ). Väändemomendi lineaarse avaldise epüür on joonisel 6.4.

Jõupaari momendi  $Fd$  võtsime väändemomendi avaldises positiivsena, kuna selle momendi vektor tala teljel on suunatud paremale poole, see tähendab eemale vaadeldavast ristlõikest. Lausmomendi  $(l - x)m$  võtsime arvesse miinusmärgiga, sest tema vektor on suunatud vaadeldava ristlõike poole.

## 6.2. ÜMARVARDA VÄÄNE

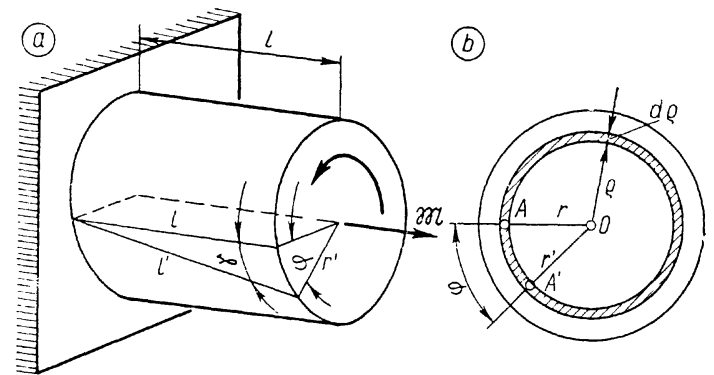
**6.2.1. Väändedeformatsioon.** Varda pinguse ja deformatsiooniseisundi uurimine tugevusõpetuses toetub *Bernoulli* hüpoteesile (jaotis 1.6.3), mis seisneb selles, et *deformeerumisel ristlõikepinnad ei kõverdu ja säilitavad ristseisu varda teljega*. Elastusteooria uurimused näitavad, et väändel see hüpotees peab paika ainult ümarvardal, kuna mitteümarate varraste ristlõikepinnad kõverduvad. Seda järeldust kinnitavad katsed ja praktiline kogemus. Vaatleme ainult ümarvardaid, mille ristlõikepinnad on kas ringi- või rõngakujulised.

Ümarvarda väändel lisandub *Bernoulli* hüpoteesile asjaolu, et ristlõikepinnad ei deformeeru ka oma tasandis. See tähendab, et *varda ristlõikepinnad on vaadeldavad absoluutselt jäikade tasandketastena või -rõngastena, millel mõeldavad raadiused ei pikene ega kõverdu*.

Ümarvarda väände oluline tunnus on *pikkuse muutumatus*, mis koos läbimõõdu säilivusega lubab järeldada, et *varda maht väändel ei muutu*.

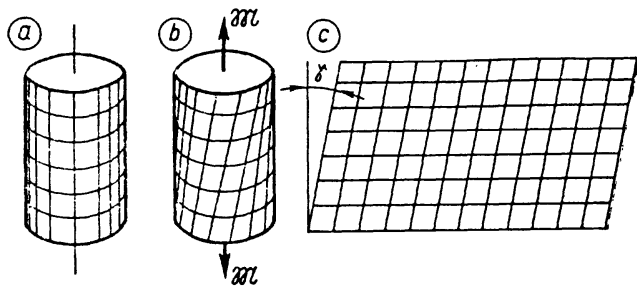
Ümarvarda väändedeformatsioon väljendub ristlõikepindade pöördumises üksteise suhtes ümber varda telje. Vaatleme seda deformatsiooni joonisel 6.5, *a*, kus varda vabal otspinnal kujutatud raadius  $r$  väändemomendi  $M = \mathfrak{M}$  mõjul pöördub asendisse  $r'$ , moodustades *väändenurga*  $\varphi$ . Väändenurk on varda väändedeformatsiooni põhisuurus nii nagu tõmbedeformatsiooni põhisuurus on varda pikenemine  $\Delta l$ .

Väänet iseloomustab veel nihkenurk  $\gamma$ , mis väljendub varda mõeldava pikijoone kõrvalekalde oma esialgses asendis. Varda silindrilise külgpinna moodustaja nihkenurk selgub jooniselt 6.5, *a*, kus moodustaja  $l$  ühtlase väändemomendi mõjul kaldub asendisse  $l'$  ja moodustab nihkenurga  $\gamma$ . Nihkenurka varda pinnal aitab selgitada ka joonis 6.6, kus osa *a* kujutab ümarvarda lõiku, mille pinnale on joonestatud ristvõrk moodustajatest ja nendega ristuvatest ringjoontest. Väände allutatud varrast näeme joonisel *b* ja selle pinnalaotust deformeerunud võrguga joonisel *c*. Vääne põhjustab võrgu kujumuutuse nihkenurga  $\gamma$  näol, kusjuures võrgu joonlõikude pikkused ei muutu väikse deformatsiooni ( $\gamma \ll 1$ ) tõttu. Järelikult on väänatud varda õhuke väliskihit puhta nihke seisundis. Samalaadse puhta nihke seisundis on ka välispinnaga paralleelsed (silindrilised) õhukesed sisekihid. Erinevus on ainult nihkenurgas, mis varda pinnal on suurima väärtusega ja kahaneb sisekihtides kuni nullini varda teljel.



Joon. 6.5





Joon. 6.6

Selgitame nihkenurga muutust varda õhukestes silinderkihtides joonise 6.5 najal, kus  $b$  kujutab joonisel  $a$  näidatud varda otspinda. Sellel otspinnal märgitud raadiusel valime meelevaldselt punkti  $A$  kaugusel  $\rho$  keskpunkti  $O$  ja vaatleme seda kaugust muutuva suurusena piirides  $0 \leq \rho \leq r$ . Olgu punktiga  $A$  vardas määratud õhuke silinderkiht, mille nihet iseloomustab punkti  $A$  nihe  $AA' = \varphi\rho$ . Nihkele vastab nihkenurk  $\gamma = AA'/l$ , ehk teisiti väljendatuna

$$\gamma = \frac{\varphi}{l} \rho = \theta\rho, \quad (6.5)$$

kus

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (6.6)$$

Viimane on tuntud *suhtelise väändenurgana* ja vastab suhtelisele piknemisele ( $\epsilon = \Delta l/l$ ) tõmbel. Suhtelise väändenurga mõõtühikuks on rad/m, kuid teda väljendatakse ka nurgakraadides, -minutites ja -sekundites pikkusühiku, näiteks meetri kohta.

**6.2.2. Nihkepinged ristlõikes.** Kuna väändemomendile  $M$  allutatud varda ristlõige on puhta nihke pind, siis sellel pinnal esinevad ainult nihkepinged. Nihkepinge suund mis tahes punktis ühtib nihke suunaga, see tähendab ta on risti vaadeldava punkti raadiusvektoriga, nagu on näidatud joonisel 6.7,  $a$ . Punkti ümbritseval elementaarpinnal  $dA$  mõjub elementaarjõud  $\tau dA$ , mille momendi  $\rho\tau dA$  integraal ristlõikepinnal  $A$  on väändemoment

$$M = \int_A \rho\tau dA. \quad (6.7)$$

Staatikaline võrrand (6.7) on tuletatav ka üldisemast

tasakaalutingimusest, mille tööme ära jaotises 1.5.5 neljandana seostest (1.2). Seal antud tasakaaluvõrrand on rakendatav ka mitteümaratele varrastele, kuna käesolev kehtib ainult ümarate varraste jaoks.

Asendame Hooke'i seadust väljendavas seoses  $\tau = G\gamma$  nihkenurga oma avaldisega (6.5):

$$\tau = G\theta\rho. \quad (6.8)$$

Vaatleme seoseid (6.7) ja (6.8) võrrandisüsteemina, millest avaldame meid huvitavad tundmatud, nihkepinge  $\tau$  ja suhtelise väändenurga  $\theta$  antud väändemomendist  $M$ .

Asendame võrrandis (6.7) nihkepinge oma avaldisega (6.8) ja toome integraalimärgi alt välja elastsusmooduli  $G$  ja suhtelise väändenurga  $\theta$ , mis integreerimisel ristlõikepinnas  $A$  on vaadeldavad konstantsete suurustena:

$$M = G\theta \int_A \rho^2 dA, \quad (6.9)$$

kus pindintegraal on geomeetriline suurus, mis kannab nime *ristlõikepinna polaarinerstsimoment*:

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA. \quad (6.10)$$

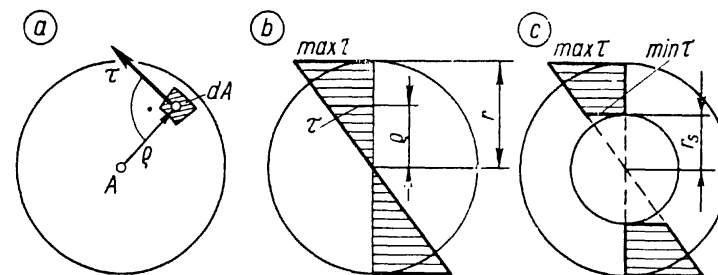
Polaarinerstsimomendi mõõtühikuks on  $m^4$  või  $cm^4$ .

Asendades polaarinerstsimomendi oma tähisega  $I_0$ , avaldame tasakaaluvõrrandist (6.9) suhtelise väändenurga

$$\theta = \frac{M}{GI_0}, \quad (6.11)$$

kus suurust  $GI_0$  nimetatakse ümarvarda *väändejäikuseks*, mille mõõtühikuks on  $N \cdot m^2$ .

Nihkepinge avaldame deformatsioonivõrrandist (6.8), asendades selles suhtelise väändenurga  $\theta$  oma avaldisega (6.11):



Joon. 6.7

$$\tau = \frac{M_v}{I_0} \varrho. \quad (6.12)$$

Joonisel 6.7, *b* on antud nihkepinge epüür, mis on määratud valemiga (6.12) ristlõikepinna läbimõõtu kujutataval sirg-  
lõigul. Nihkepinge puudub ristlõike keskmel ja saavutab oma suurima väärtuse varda pinnal, kus  $\varrho = r$ :

$$\max \tau = \frac{M}{I_0} r = \frac{M}{W_0}, \quad (6.13)$$

milles

$$W_0 = \frac{I_0}{r}. \quad (6.14)$$

Suurus  $W_0$  on ristlõikepinna iseloomustav suurus, mida nimetatakse *polaartugevusmomentiks* ja mille mõõtühiku-  
teks on  $m^3$  ja  $cm^3$ .

Joonisel 6.7, *c* on kujutatud nihkepinged õõnsa ümar-  
varda rõngakujulisel ristlõikepinnal, mis on määratud samuti  
valemitega (6.12) ja (6.13). Erinevus on inertsimomendis  
ja selles, et õõnsa varda minimaalne nihkepinge ei võrdu  
nulliga, vaid

$$\min \tau = \frac{M}{I_0} r_s, \quad (6.15)$$

kus  $r_s$  on varda õõnsuse raadius ja see pinge mõjub õõnsuse  
pinnakihis.

**6.2.3. Polaarmomendid.** Määrame ümarvarraste polaar-  
inertsimomendid ja -tugevusmomendid.

a) *Hariliku ümarvarda* ristlõikepinnaks on ring, mille  
läbimõõt on  $d$  (joonis 6.8, *a*). Polaarinertsimomendi aval-  
dame valemiga (6.10). Pinnaelement  $dA$  on joonisel viiru-  
tatud. Pinnaelemendi avaldame rõnga pindalana järgmisel  
viisil  $dA = 2\pi\varrho d\varrho$ , mis võimaldab pindintegraali arvutada  
hariliku määratud integraalina  $d\varrho$  järgi piires  $0 \leq \varrho \leq (r =$   
 $= d/2)$ :

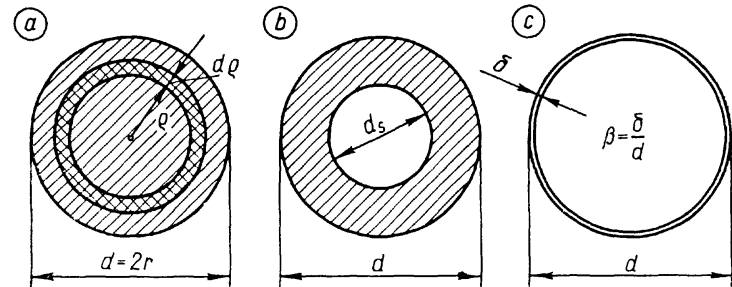
$$I_0 = 2\pi \int_0^{d/2} \varrho^3 d\varrho,$$

või pärast integreerimist

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (6.16)$$

Polaartugevusmomendi avaldame valemi (6.14) abil:

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (6.17)$$



Joon. 6.8

b) *Paksuseinalise toru* ristlõikepinnaks on tasandrõngas,  
millel antakse välis- ja siseläbimõõt (joonis 6.8, *b*). Polaar-  
inertsimoment avaldub nagu ringil, kuid integraal arvuta-  
takse siin toru seina paksuse piires  $d_s/2 \leq \varrho \leq d/2$ :

$$I_0 = 2\pi \int_{d_s/2}^{d/2} \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_s^4);$$

mis on sobiv teisendada valemiks

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (6.18)$$

kus  $\alpha = d_s/d$ , sise- ja välisläbimõõdu suhe.

Polaartugevusmoment avaldub valemi (6.14) abil:

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{16} (1 - \alpha^4). \quad (6.19)$$

c) *Õhukeseseinalise toru* ristlõikepinnaks on samuti rõn-  
gas, millel aga harilikult antakse välisläbimõõt  $d$  ja seina-  
paksus  $\delta$  (joonis 6.8, *c*). Polaarinertsimomendi arvutame siin  
nii, et vaatleme toru seinapaksust  $\delta$  väikese suurusena, mis-  
tõttu inertsimoment  $I_0 = \varrho^2 A$ , kus  $\varrho$  on seina keskpinna raa-  
dius  $\varrho = (d - \delta)/2$  ja  $A = \pi\delta(d - \delta)$ . Asendades suurused,  
saame pärast lihtsat teisendust:

$$I_0 = \frac{\pi}{4} d^3 \delta (1 - \beta)^3, \quad (6.20)$$

kus  $\beta = \delta/d$  on seinapaksuse ja välisläbimõõdu suhe.

Polaartugevusmomendi avaldame valemiga (6.14):

$$W_0 = \frac{\pi}{2} d^2 \delta (1 - \beta)^3. \quad (6.21)$$

**6.2.4. Väändenurk**  $\varphi$  on määratav seosest (6.6), kus suhtelise väändenurga  $\theta$  asendame oma avaldisega (6.11):

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_0}, \quad (6.22)$$

ja kus väändemoment  $M = \text{const}$  varda pikkuse  $l$  ulatuses.

Kui varras on allutatud väändemomentidele  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), mis on konstantse väärtusega varda lõikusel pikkusega vastavalt  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), siis varda iga lõigu väändenurga võime arvutada valemiga (6.22). Kogu varda väändenurga saame kõikide lõikude väändenurkade summeerimisega:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_i l_i}{GI_0}. \quad (6.23)$$

Kui vardas mõjub väändemoment, mis varda pikkusel  $l$  pidevalt muutub, siis võime valemiga (6.22) rakendada varda elementaarlõigule pikkusega  $dx$ , mille ulatuses väändemomenti võime vaadelda ühtlasena:

$$d\varphi = \frac{M}{GI_0} dx.$$

Varda väändenurk on arvutatav integreerimise teel:

$$\varphi = \int_l \frac{M}{GI_0} dx, \quad (6.24)$$

kus integraal arvutatakse varda kogu pikkuses või ainult sellele osale, mis on allutatud väändemomendile.

Väändenurka vaadeldakse mõnikord kohas  $x_1$  ( $0 < x_1 < l$ ), kusjuures nurga määrame funktsioonina varda teljel:

$$\varphi = \int_0^{x_1} \frac{M}{GI_0} dx, \quad (6.25)$$

mida sageli kujutatakse epüürina.

Väändenurk arvutatakse harilikult varda otsa suhtes, kuid selle võib määrata ka mis tahes ristlõike suhtes, kui seda nõuab praktiline kaalutus. Enamasti on seda vaja teha võllide puhul.

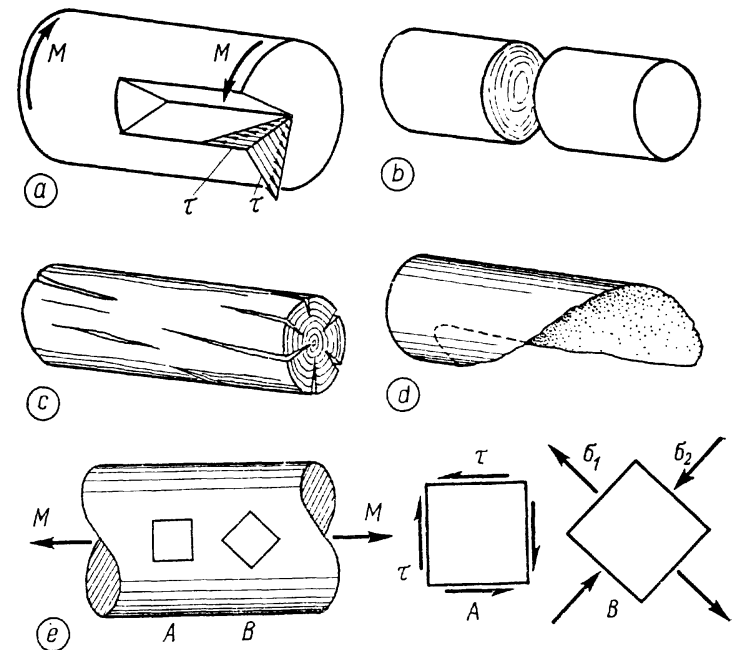
Ebaühtlase varda väändenurk arvutatakse valemiga

(6.23, 6.24 või 6.25), vaadeldes seejuures polaarinertsimomenti  $I_0$  muutuva suurusena piki varrast.

Väändenurk arvutatakse eeltoodud valemite radiaanides, kuid tulemused esitatakse harilikult nurgakraadides, -minutites ja -sekundites.

**6.2.5. Pingus väändel.** Eespool nägime, et väände alla allutatud varda mis tahes punktis mõjub seda punkti läbival ristlõikepinnal ainult nihkepinge  $\tau$ . See nihkepinge on suunatud risti vaadeldavat punkti läbiva raadiusega. Nihkepinge paarsusseadus lubab järeldada, et sama suur nihkepinge  $\tau$  mõjub punkti läbival pikisuunalisel telglõikepinnal (joonis 6.9, a). Need pinged on väändel esineva puhta nihke suurimad pinged. Esimene nendest põhjustab harilikust terasest ümarproovikeha nihkepurunemise ristlõikepinnas väändeteimil. Joonisel 6.9, b on kujutatud niisuguse proovikeha fragmendid purunemiskohast.

Pikisuunalise suurima nihkepinge mõju on nähtav puudust proovikeha väändekatsel. Puit, tüüpiline anisotroopne



Joon. 6.9

materjal, on suhteliselt madala nihketugevusega pikikiudu. Seepärast algabki puitproovikeha purunemine pikisuunaliste pragude tekkimisega nihkepingetest, mis mõjuvad varda telgloikepindades (joonis 6.9, c).

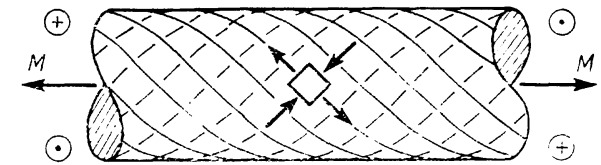
Umarvardast väljalõigatud elementaarasal  $A$  (joon. 6.9, e), mis tänu väikestele mõõtmetele on vaadeldav risttahukana, mõjuvad suurimad nihkepinged neljal tahul. Vaadeldav osa  $A$  on puhta nihke seisundis. Pingeteooriast teame, et peapinged mõjuvad seejuures pindadel, mis moodustavad  $45^\circ$  kaldenurgad puhta nihke pindadega. Joonisel on kujutatud peapindadega vardast väljalõigatud element  $B$  ja pinged selle tahkudel. Peapingetest on  $\sigma_1$  tõmbepinge ja  $\sigma_2$  survepinge, kusjuures teatavasti  $\sigma_1 = -\sigma_2 = |\tau|$ .

Peapinge  $\sigma_1$  mõju võime näha vändekatsel proovikehaga, mis on tehtud suhteliselt madala tõmbetugevusega (rabadast) materjalist. Joonisel 6.9, d on kujutatud malmist proovikeha purunemispilt vändest. Malmi tõmbetugevus on oluliselt madalam surve- ja nihketugevusest. Et vändel mõjuvad omavahel võrdsed suurimad nihke-, surve- ja tõmbepinged, siis puruneb proovikeha suurimast tõmbepingest, peapingest  $\sigma_1$ . Joonisel kujutatud proovikeha purunemine algas tõenäoselt pinna punktis, kus pragu tekkis suurima tõmbepinge  $\sigma_1$  ristsuunas. See pragu, vaadelduna proovikeha pinnal, levis mõlemale poole, säilitades igas punktis ristseisu peapingega  $\sigma_1$ . Pragu kujundab  $45^\circ$ -se tõusunurgaga krüvijoone, mis ulatub ümber varda ja mille otsad ühinevad sirge praoga mööda moodustajat. Purunemispind meenutab keerukat krüvipinda, mis iseloomustab rabedatest materjalidest varraste vändepurunemist. Samasugune purunemispilt iseloomustab ka luumurdu, mis tuleneb jäseme ülemäärast vändest.

**6.2.6. Peapinge trajektor pingestatud kehas on ettekujutatav joon, millele mis tahes punktis peapinge sihisirge on puutujaks.** Väänatud vardas on peapinge trajektor krüvijoone, mille tõusunurk on  $45^\circ$ . Positiivsest vändemomendist saame esimese peapinge (suurima tõmbepinge) trajektoriks paremakäe krüvijoone, kuna teise peapinge trajektor kujutab endast vasakukäe krüvijoont.

Joonisel 6.10 on kujutatud positiivse vändemomendiga varras, mille välispinnal on näidatud peapinge  $\sigma_1$  trajektorid pidevjoonega ja  $\sigma_2$  trajektorid kriipsjoonega.

Peapingete trajektoride tundmine on oluline konstruktioonelementide loomisel liitmaterjalist, milles põhimaterjal on suhteliselt madala ja lisamaterjal kõrge tõmbetugevusega. Tuntum niisugustest liitmaterjalidest on raudbe-



Joon. 6.10

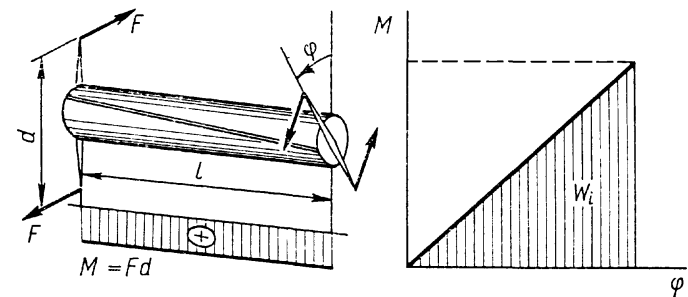
toon, milles betooni tugevdatakse terasvarrastega. Sellest materjalist konstruktioonelementi loomise põhiidee seisneb terasvarraste sissebetoonimises peapingete  $\sigma_1$  trajektoridele. Kui betoonitoru peab töötama vändele, siis betoonime temasse spiraalsed terasvardad suurimate tõmbepingete trajektoridele. Seejuures ei tohi eksida spiraalvarda suuna määramisega, sest valepidi sissebetoonitud varras asetseb suurima survepinge trajektoril ja ei tõsta märgatavalt betoonitoru vändetugevust.

**6.2.7. Potentsiaalne energia**, mis salvestub vardas vändel, on arvatav analoogselt potentsiaalse energiaga tõmbel ja surveel. Kui ühtlases vardas mõjub kogu pikkusel ühtlane vändemoment, mis kasvab teatava aja jooksul nullist oma lõppväärtuseni  $M$ , siis kasvab ka vändenurk *Hooke'i* seaduse järgi proportsionaalselt vändemomendiga nullist oma lõppväärtuseni  $\varphi$  (joonis 6.11). Vändemomendi töö on seejuures vaadeldav viirutatud pinnana  $M - \varphi$  graafikul:

$$W_i = -\frac{1}{2} M\varphi. \quad (6.26)$$

Sellest tööst koguneb vardasse potentsiaalne energia

$$U = \frac{1}{2} M\varphi. \quad (6.27)$$



Joon. 6.11

Asendades väändenurga oma avaldisega (6.22), saame

$$U = \frac{M^2 l}{2GI_0}. \quad (6.28)$$

Saadud valem on rakendatav ka astmeliselt muutuva ja astmete vahelistel aladel ühtlase väände puhul. Sel juhul arvutame varda potentsiaalse energia summeerimise teel kõikide ühtlaste ( $M^2/I_0 = \text{const}$ ) lõikude ulatuses.

Ebaühtlasel väändel, kus varda pikkusel võib pidevalt muutuda nii väändemoment kui ka ristlõikepindala, rakendame seost (6.28) varda elementaarlõigule pikkusega  $dx$ , mille ulatuses väänet võib vaadelda ühtlasena. Varda potentsiaalse energia arvutame integreerimise teel:

$$U = \frac{1}{2G} \int_l \frac{M^2}{I_0} dx, \quad (6.29)$$

kus integraal arvutatakse varda kogu selle ala pikkuse ulatuses, kus varras on koormatud ja kus  $M^2/I_0$  kujutab endast pidevat funktsiooni.

### 6.3. VÄÄNDETUGEVSUS

**6.3.1. Tugevustingimus** väände seatakse samal põhimõttel nagu tõmbele: nõutakse, et suurim pinge varda *ohtliku ristlõike* äärepunktides ei ületaks lubatavat pinget. Ristlõike äärepunktides mõjuvad puhta nihke neli omavahel võrdset suurimat pinget, kaks nihkepinget ja kaks peapinget. Tugevustingimuses võetakse nendest aluseks väände kõige iseloomulikum pinge, nihkepinge ristlõikepinnal:

$$\max \tau = \frac{M}{W_0} \leq [\tau], \quad (6.30)$$

kus  $M$  on *ohtliku ristlõike* väändemoment,  $W_0$  — sama ristlõike polaartugevusmoment ja  $[\tau]$  — materjali lubatav pinge väändel.

*Ühtlases vardas on ohtlikuks see ristlõige, kus mõjub suurim väändemoment, ebaühtlases vardas ristlõige, kus suhe  $M/W_0$  on suurima väärtusega.*

Tugevustingimusest (6.30) saame avaldada tingimused vajaliku tugevusega varraste määramiseks. Hariliku ümarvarda läbimõõdu saamiseks asendame  $W_0$  oma avaldisega (6.17):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi[\tau]}} \approx 1,72 \sqrt[3]{\frac{M}{[\tau]}}. \quad (6.31)$$

Õõnsa varda läbimõõdu saamiseks asendame  $W_0$  avaldisega (6.18):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} \approx 1,72 \sqrt[3]{\frac{M}{[\tau](1-\alpha^4)}}, \quad (6.32)$$

kus õõnsuse ja varda läbimõõtude suhe  $\alpha = d_s/d$  peab olema antud.

Õhukeseseinalise toru, mille läbimõõt  $d$  on antud, vajaliku seinapaksuse võime määrata ligikaudu, kui asendame  $W_0$  avaldisega (6.21) ja loeme suuruse  $(1-\beta)$  võrdseks ühega:

$$\delta \geq \frac{2}{3} \frac{M}{d^2[\tau]}. \quad (6.33)$$

Valinud varda mõõtmed tingimustest (6.31...33), kontrollime tugevust tingimusega (6.30). Seejuures võib erandjuhul suurim pinge veidi ületada lubatava pinget, kuid mitte rohkem kui 5% tema väärtusest.

**6.3.2. Jäikustingimus** seatakse nende konstruktsiooni-elementidele, peamiselt võllidele, mille kasutamisel väändenurk ei tohi ületada teatavat piiri, *lubatavat väändenurka*. Enamasti kasutatakse varda jäikuse hindamiseks suhtelist väändenurka, mis on määratud valemiga (6.11):

$$\theta = \frac{M}{GI_0} \leq [\theta]. \quad (6.34)$$

Varda pikkusel muutuva väändega tuleb jäikust kontrollida ohtlikus ristlõikes, kus suhe  $M/I_0$  on maksimaalne. Ühtlase väändega vardas või selle osas võime suhtelise väändenurga arvutada ka väändenurga ja varda pikkuse suhtena:  $\theta = \varphi/l$ .

*Lubatav suhteline väändenurk*  $[\theta]$  antakse normide või tehniliste tingimustega nurgakraadides (minutites, sekundites) meetri kohta ( $^\circ/m$ ). Valem (6.11) või (6.34) annab suhtelise väändenurga radiaanides selle pikkusühiku kohta, milles toimub arvutus (m, cm, mm). See asjaolu nõuab hoolikat suuruste teisendamist ühtsesse mõõtühikute süsteemi. Seejuures on üldiseks nõudeks, et jäikustingimuses esinev normeeritud suurus  $[\theta]$  peab säilitama selle arvulise väärtuse, millega ta on esitatud tehnilistes tingimustes.

Vaatleme järgmist näidet:

*Näide 6.3.* Terasvõll, mille läbimõõt  $d = 100$  mm, töötab väändemomendiga  $2500 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Kas võll rahuldab jäikustingimust, kui  $[\theta] = 12 \text{ }^\circ/m$ ?  
Terase nihkeelastsusmoodul  $G = 84 \text{ GPa}$  ja võlli polaarinertsimoment  $I_0 = \pi d^4/32 = 983 \text{ cm}^4$ .

$$\theta = \frac{M}{GI_0} \frac{180 \cdot 60}{\pi} = \frac{2500}{84 \cdot 10^9 \cdot 983 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180 \cdot 60}{3,14} = 10,4 < [\theta] = 12 \text{ } ^\circ/\text{m}.$$

Võll rahuldab jäikustingimust.

Võllide lubatavad suhtelised väädenurgad jäävad enamasti piiresse  $10 \text{ } ^\circ/\text{m} \dots 1 \text{ } ^\circ/\text{m}$ , kuid võivad olla erandjuhtudel ka väiksemad või suuremad.

Ka jäikustingimusest (6.34) saame avaldada tingimused vajaliku jäikusega varraste määramiseks. Selleks asendame jäikustingimuses polaarinertsimomendi  $I_0$  oma avaldisega (6.16, 6.18 või 6.19) ning avaldame varraste põhimõõtmed, analoogselt tingimustega (6.31...33).

Hariliku ümarvarda läbimõõt

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M}{\pi G[\theta]}} \approx 1,78 \sqrt[4]{\frac{M}{G[\theta]}}. \quad (6.35)$$

Oõnesvarda läbimõõt

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M}{\pi G[\theta] (1 - \alpha^4)}} \approx 1,78 \sqrt[4]{\frac{M}{G[\theta] (1 - \alpha^4)}}. \quad (6.36)$$

Ohukeseseinalise toru paksus

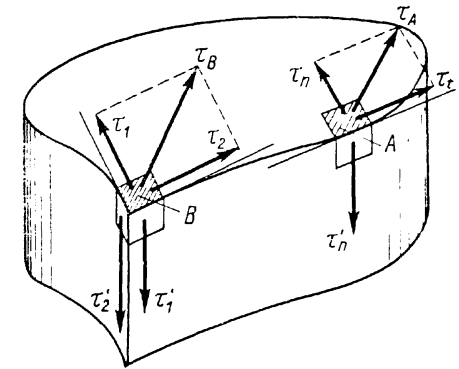
$$\delta \geq \frac{4}{3} \frac{M}{Gd^3[\theta]}. \quad (6.37)$$

## 6.4. MITTEÜMARATE VARRASTE VÄÄNDEST

**6.4.1. Mitteümar varras** väändeülesande seisukohalt on mitte ringi- ega rõngakujulise ristlõikega. Mitteümarate varraste ristlõikepinnad kõverduvad väändel oluliselt ja neid ei saa uurida *Bernoulli* hüpoteesi najal, mis on aluseks tugevusõpetuses. Seepärast mitteümarat varda vääne kuulub elastsusteooriasse ja siin vaatleme ainult mõningaid tulemusi, mis enamasti põhinevad sellest teoriast saadud lahenditel. Mitteümaratest varrastest käsitleme kõige sagedamini konstruktsioonides esinevaid.

Näitame varda ristlõikepinna kontuuril mõjuva nihkepinge kahte olulist tunnust, mis aitavad paremini mõista pingete jagunemist mitteümaras vardas.

1) *Nihkepinge ristlõike kontuuri mis tahes punktis mõjub kontuuri puutuja sihile.*



Joon. 6.12

Näitame seda oletades esialgu vastupidist, see tähendab, nihkepinge  $\tau_A$  punktis  $A$  joonisel 6.12 mõjuvu kontuuri puutuja suhtes kaldu. Lahutame  $\tau_A$  komponentideks puutuja sihile  $\tau_t$  ja sellega risti  $\tau_n$ . Nihkepingete paarsusseadus lubab nihkepingel  $\tau_n$  mõjuda ainult tingimisel, et sama suur nihkepinge  $\tau_n'$  mõjuks varda pinnal. Et varda pinnal nihkepinge puudub:  $\tau_n' = 0$ , siis peab ka  $\tau_n = 0$  ja järelikult mõjuda võib ainult kontuuri puutuja sihiline nihkepinge. Sama- sugusest mõttekäigust järeldub ( $\tau_B = 0$ ) ka teine oluline tunnus.

2) *Ristlõikepinna väljaulatuvates nurgapunktides nihkepinge puudub.*

**6.4.2. Ristkülikukujulise ristlõikega varras.** Joonisel 6.13, a on näidatud nihkepingete jagunemine ristlõikepinna kontuuril, sümmeetriatelgedel ja diagonaalil. Nurkades ja keskmis nihkepinged puuduvad. Suurimad nihkepinged mõjuvad pikemate külgede keskohtades  $A$ :

$$\max \tau = \tau_A = \frac{M}{ahb^2}, \quad (6.38)$$

kus  $h$  on ristlõike kõrgus,  $b$  — laius ja  $a$  — kordaja, mis sõltub külgede suhtest  $h/b$ .

Ristlõikepinna lühematel külgedel saavutab nihkepinge keskpunktis  $B$  samuti ekstreemse väärtuse, kuid väiksema pingest  $\tau_A$  punktis  $A$ :

$$\tau_B = \eta \tau_A. \quad (6.39)$$

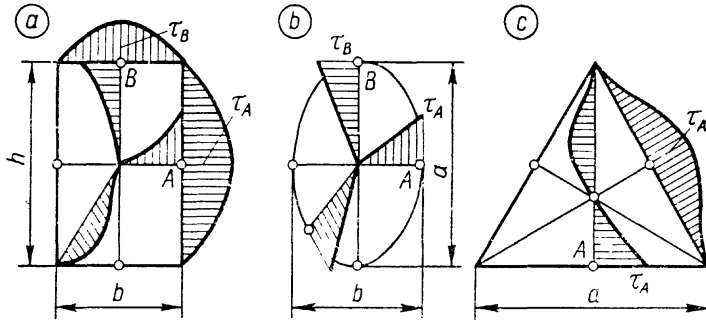
Väädenurga võime arvutada valemiga:

$$\varphi = \frac{Ml}{G\beta hb^3}. \quad (6.40)$$

Tabel 6

Kordajad  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\eta$ 

$n/b$	1	1,5	2	2,5	3	4	6	8	10
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313
$\beta$	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313
$\eta$	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742



Joon. 6.13

Valemities (6.38...40) esinevad kordajad  $\alpha$ ,  $\eta$  ja  $\beta$  on antud tabelis 6.

**6.4.3. Elliptilise ristlõikega varras.** Suurimad pinged mõjuvad lühema telje ( $b$ ) otspunktides (joonis 6.13,  $b$ ), kus

$$\max \tau = \tau_A = \frac{16M}{\pi ab^2}. \quad (6.41)$$

Pinged pikema telje ( $a$ ) otspunktides:

$$\tau_B = \frac{16M}{\pi ba^2}. \quad (6.42)$$

Ühtlases vardas, mille pikkus on  $l$ , tekib konstantse väändemomendi mõjul väändenurk

$$\varphi = \frac{Ml}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}. \quad (6.43)$$

**6.4.4. Võrdkülgse kolmnurgakujulise ristlõikega varras.** Joonisel 6.13,  $c$  on näidatud pingepüürid küljel ja sümmeetriateljel. Suurim pinge külje keskpunktis  $A$ :

$$\max \tau = \tau_A = \frac{20M}{a^3}. \quad (6.44)$$

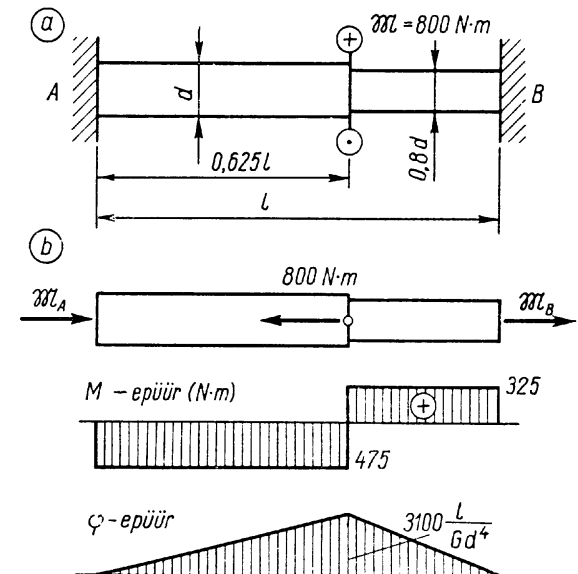
Väändenurk

$$\varphi = \frac{46,2Ml}{Ga^4}. \quad (6.45)$$

## 6.5. STAATIKAGA MÄÄRAMATU JA PLASTNE VÄÄNE

**6.5.1. Staatikaga määramatu väändeülesanne** on analoogne vastava tõmbe- ja surveülesandega, mida vaatlesime jaotises 2.9. Olgu ümarvarras mõlema otsaga kinnitatud alusele ja koormatud momendiga  $\mathfrak{M}$  (joonis 6.14,  $a$ ). Määrame selle varda toemomendid ja väändemomendi ning väändenurga epüürid.

Vabastame varda tugeid  $A$  ja  $B$  ja asendame nende reaktsioonid tundmatute momentidega  $\mathfrak{M}_A$  ja  $\mathfrak{M}_B$  (joonis 6.14,  $b$ ). Vardale saame seada ainult ühe mittetriviaalse tasa-



Joon. 6.14

kaalutingimuse  $\sum \mathfrak{M}=0$ , mis annab võrrandi

$$\mathfrak{M}_A - 800 + \mathfrak{M}_B = 0.$$

Süsteem on ühekordselt staatikaga määratu. Deformatsioonitingimuseks kasutame asjaolu, et varda otsad ei saa teineteise suhtes pöörduda. Järelikult väändenurk otste  $A$  ja  $B$  vahel  $\varphi_{AB}=0$ . Avaldame väändenurga valemiga (6.23) ja võrrutame nulliga, võttes arvesse, et varda jämedamal osal mõjub negatiivne väändemoment, mis on võrdne toemomendiga  $\mathfrak{M}_A$ , ja peenemal osal positiivne väändemoment, võrdne toemomendiga  $\mathfrak{M}_B$ :

$$-\frac{\mathfrak{M}_A \cdot 0,625l \cdot 32}{G\pi d^4} + \frac{\mathfrak{M}_B \cdot 0,375l \cdot 32}{G\pi (0,8d)^4} = 0.$$

Lihtsustame saadud võrrandi:

$$0,683\mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_B = 0$$

ja lahendame koos tasakaaluvõrrandiga

$$\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = 800.$$

Süsteemi lahend annab toemomendid  $\mathfrak{M}_A = 475 \text{ N}\cdot\text{m}$  ja  $\mathfrak{M}_B = 325 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Väändemomendid on esitatud epüürina joonisel 6.14. Väändenurgad kasvavad lineaarselt ja saavutavad suurima väärtuse välismomendi rakenduskohal, kus toe  $A$  poolt

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}_A \cdot 0,625l \cdot 32}{G\pi d^4} = 3100 \frac{l}{Gd^4}$$

või teiselt poolt arvatuna

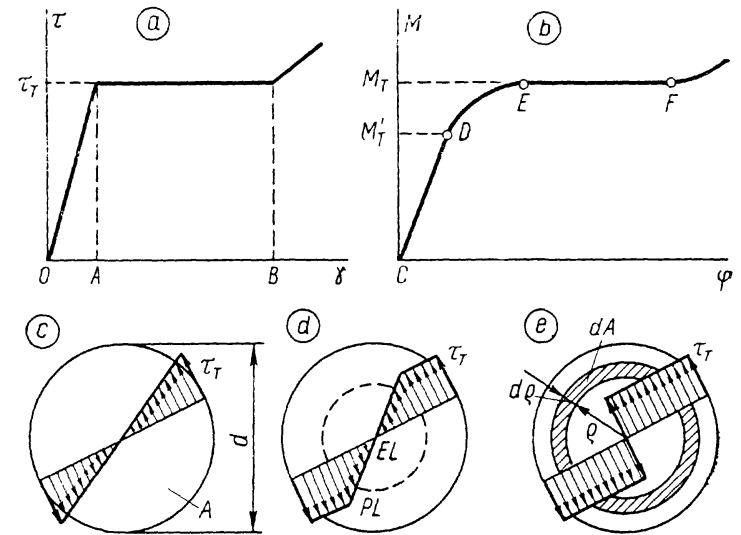
$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}_B \cdot 0,375l \cdot 32}{G\pi (0,8d)^4} = 3100 \frac{l}{Gd^4}.$$

Väändenurkade epüür on kujutatud joonisel 6.14.

**6.5.2. Plastne vääne.** Vaatleme niisugusest materjalist ümarvarrast, mille  $\tau - \gamma$  diagrammil esineb plastse deformatsiooni (voolavuse) piirkond ( $A - B$ ), mis on elastse deformatsiooni piirkonnaga ( $O - A$ ) võrreldes suur (joonis 6.15, a). Olgu varras allutatud väändemomendile  $M$ , mis põhjustab väändenurga  $\varphi$ . Vaatleme neid suurusi ajalisel kasvamiseprotsessis graafikul (joonis 6.15, b). Piirkond  $CD$  lõpeb piirmomendiga  $M_T'$ , mis kutsub varda pinnakihi esile voolavuspinge  $\tau_T$  (joonis 6.15, c). See piirmoment on arvutatav seosest (6.13):

$$M_T' = W_0 \tau_T. \quad (6.46)$$

Piirmoment  $M_T'$  on seotud tugevustingimusega (6.30),



Joon. 6.15

kus lubatava pingena tuleb arvesse  $[\tau] = \tau_T/S$ . Avaldame tugevustingimusest suurima lubatava väändemomendi, asendades lubatava pinget ja võtame arvesse seose (6.46):

$$W_0[\tau] = W_0 \frac{\sigma_T}{S} = \frac{M_T'}{S}. \quad (6.47)$$

Pöördume tagasi joonise 6.15, b juurde. Väändemoment võib ohutult kasvada piirkonnas  $DE$ , kuna vardas leidub materjali, mis töötab elastse deformatsiooni piirkonnas. Seejuures momendi kasv laiendab plastset tsooni ( $PL$ ) varda pinnalt sügavuti (joonis 6.15, d) kuni teljeni (joonis 6.15, e). Kui kogu varras on viidud voolamisseisundisse, siis väändemomendi kasv lakkab punktis  $E$  ja saavutab väärtuse  $M_T$ . Selle piirmomendi mõjul tekib suur väändedeformatsioon, mis muudab varda konstruktsioonelemendina kõlbmatuks. Piirmomendi arvutame elementaarsisejõudude  $\tau_T dA$  momentide  $\rho \tau_T dA$  integreerimisega ristlõikepinna  $A$  ulatuses:

$$M_T = \int_A \rho \tau_T dA.$$

Pindintegraali arvutame polaarkoordinaatides pinnaelemendiga  $dA = 2\pi \rho d\rho$  (joonis 6.15, e), mis lubab üle minna harilikule integraalile:



$$M_T = 2\pi r_T \int_0^{d/2} \rho^2 d\rho = \frac{\pi d^3}{12} \tau_T;$$

$$M_T = W_0^T \tau_T, \quad (6.48)$$

kus

$$W_0^T = \frac{\pi d^3}{12} \quad (6.49)$$

kannab nimetust *polaartugevusmoment voolavuspiirkonnas*.

Tugevustingimuse konstruksioonelemendile võib mõnel juhul seada piirmomendist  $M_T$  lähtudes:

$$M \leq \frac{M_T}{S}. \quad (6.50)$$

Arvutame suurimate lubatavate väändemomentide suhte tugevustingimustest (6.30) ja (6.50), eeldades ühtset varu-  
tegurit  $S$ :

$$\frac{M_T}{SW_0[\tau]} = \frac{M_T}{M'_T} = \frac{W_T}{W_0} = \frac{\pi d^3 16}{12\pi d^3} = \frac{4}{3} \approx 1,33.$$

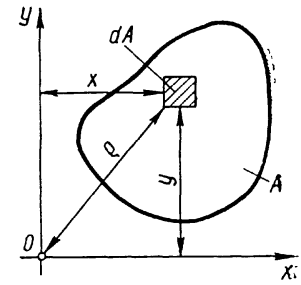
Sellest järeldub, et piirmomendile  $M_T$  rajatud tugevustingimus (6.50) on antud juhul märgatavalt soodsam lubatavale pingele rajatud tugevustingimusest (6.30). Esimene neist annab lubatava koormuse vardale 33% kõrgema kui teine.

Piirsisejõule rajatud tugevusarvutused leiavad tänapäeval ulatuslikku rakendamist. Selle arvutusmeetodi juurde pöördume veel korduvalt edaspidi.

## 7. VARDA RISTLÕIKE TUNNUSSUURUSED

### 7.1. TASANDKUJUNDI MOMENDID

**7.1.1. Avaldised.** Varda tugevust ja jäikust tõmbel ja survel iseloomustab geomeetrisest küljest ristlõikepindala  $A$ . Väändel esineb samas rollis keerukam suurus, ristlõikepinna polaarinerstsimoment  $I_0$ . Need suurused kuuluvad varda ristlõike tunnussuuruste hulka. Mõned neist on üldtuntud, kuid enamik leiab kasutamist ainult tugevusõpetuses. Seepärast selgitame käesolevas jaotises 7 kõik meile vajalikud varda *ristlõike tunnussuurused*. Varda ristlõiget vaatleme geomeetrisel kujundina ja selle tunnussuuruste määramist tasandigeomeetria ülesandena.



Joon. 7.1

Vaatleme kujundit pindalaga  $A$  meelevaldselt seatud  $xy$ -teljestikus joonisel 7.1. Avaldame järgmised suurused:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y \, dA; & S_y &= \int_A x \, dA; \\ I_x &= \int_A y^2 \, dA; & I_y &= \int_A x^2 \, dA; \\ I_{xy} &= \int_A xy \, dA; & I_0 &= \int_A \rho^2 \, dA, \end{aligned} \quad (7.1)$$

kus pindintegraalid arvutatakse kujundi pindala  $A$  ulatuses.

Kujundi  $A$  kohta avaldatud suurused meenutavad teoreetilisest mehaanikast tuntud suurusi — kehade esimese ja teise astme momente. Avaldised ühtivad õhukese plaadi momentidega, milles massielement  $dm$  on asendunud pinnaelemendiga  $dA$ . Sellest analoogiast nähtavasti tulenevad ka vastavad nimetused ja tähised.

*Esimene astme momendid* dimensiooniga  $L^3$  (mõõtühikud  $m^3, cm^3$ ):

$S_x$  ja  $S_y$  — *staatilisest momendid* vastavalt  $x$ -telje ja  $y$ -telje suhtes.

*Teise astme momendid* dimensiooniga  $L^4$ :

$I_x$  ja  $I_y$  — *inertsimomendid* vastavalt  $x$ -telje ja  $y$ -telje suhtes;

$I_{xy}$  — *tsentrifugaalmoment*  $xy$ -teljestiku suhtes;

$I_0$  — *inertsimoment* pooluse  $O$  suhtes ehk *polaarinertsimoment*.

Polaarinertsimomenti vajame ainult ringi ja tasandrõnga jaoks väändel, kus tema kohta andsime piisavad selgitused ja seepärast me seda tunnussuurust siin enam ei vaatle.

Pindintegraalide (7.1) geomeetrisel interpretatsioon lubab järeldada, et *kujundi momentidena mõistame pinnaelementide ja nende koordinaatide või koordinaatide ruutude korrutiste summat*. Sellest tuleneb võimalus ligikaudselt arvutada momendid kujundi lõplike elementidega, asenda-

des integreerimise summeerimisega:

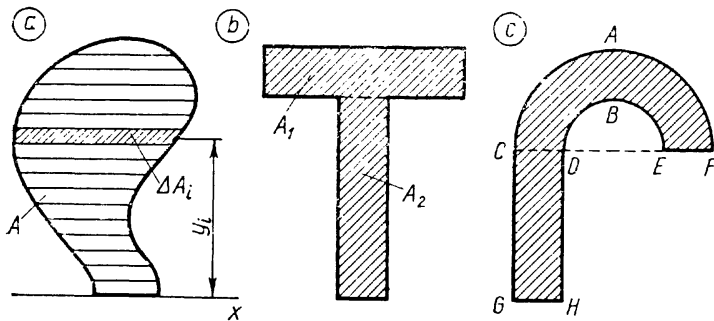
$$S_x = \sum_{i=1}^n y_i \Delta A_i; \quad I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta A_i; \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \Delta A_i, \quad (7.2)$$

kus  $n$  on kujundi  $A$  lõplike elementide arv,  $\Delta A_i$  —  $i$ -nda elemendi pindala,  $x_i$  ja  $y_i$  —  $i$ -nda pinnaelemendi kaugused vastavalt  $y$ - ja  $x$ -teljest (koordinaadid). Analoogsed valemid saame ka ülejäänud momentide arvutamiseks. Momentide  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $I_x$  ja  $I_y$  arvutamisel jaotame kujundi  $A$  vastavate telgedega paralleelseteks ribadeks ja vaatleme neid ribadid lõplike elementidena  $\Delta A_i$ . Joonisel 7.2, *a* on näidatud kujundi  $A$  jaotus lõplikeks elementideks staatilise momendi  $S_x$  ja telginertsimomendi  $I_x$  arvutamiseks. Tsentrifugaalmomendi arvutamisel peame kujundi jaotama väikesteks ristkülikuteks või ruutudeks. Momentide arvutamiseks kasutame valemid (7.2) sel juhul, kui kujundi kontuur pole matemaatiliselt määratud (on aga antud joonisega), või ei allu harilikule integreerimisele. Valemid (7.2) annavad seda täpsema tulemuse, mida suurem on jaotuste arv  $n$ .

Integraalarvutusest on teada, et integreerimispiirkonna võime jaotada meelevaldselt osapiirkondadeks ja integraali arvutada osapiirkondade integraalide summana. Järelkult võime jaotada ka kujundi  $A$  meelevaldselt osakujunditeks ja arvutada kujundi momendi osakujundite momentide summana:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} y^2 dA = \sum_{i=1}^n I_{(x)i}, \quad (7.3)$$

kus  $n$  on osakujundite arv,  $A_i$  —  $i$ -nda osakujundi pindala



Joon. 7.2

ja  $I_{(x)i}$  —  $i$ -nda osakujundi inertsimoment  $x$ -telje suhtes. Analoogne osakujundite momentide summeeritavus on rakendatav ka kõikide teiste momentide arvutamiseks. Valemid (7.3) ja sellele analoogseid valemid saab kasutada momentide arvutamiseks *liitkujunditele*, mis tervikuna vaadelduna on keerukad, kuid jagunevad *lihtsateks* tuntud *kujunditeks*. Joonisel 7.2, *b* näidatud nn. T-kujundi võime jaotada kaheks ristkülikuks  $A_1$  ja  $A_2$  ning joonisel 7.2, *c* esitatud kujundi poolringiks  $ACF$ , ristkülikuks  $CDGH$  ja väljalõigatud poolringiks  $BDE$ , mida tuleb vaadelda negatiivse osakujundina.

**7.1.2. Staatilised momendid** võivad olla positiivsed ja negatiivsed suurused, või ka võrdua nulliga olenevalt telgedes asendist vaadeldava kujundi suhtes. Kujundil teljestiku esimeses veerandis on mõlemad staatilised momendid positiivsed, teises veerandis  $S_x > 0$  ja  $S_y < 0$ , kolmandas mõlemad negatiivsed ja neljandas veerandis  $S_x < 0$  ja  $S_y > 0$ .

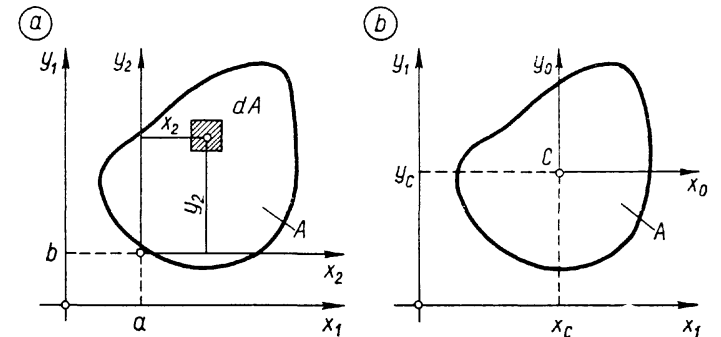
Vaatleme staatiliste momentide teisendumist teljestiku paralleellükkega. Olgu kujundi  $A$  staatilised momendid  $S_{x1}$  ja  $S_{y1}$  antud  $x_1 y_1$ -teljestikus (joon. 7.3, *a*).

Avaldame staatilised momendid teises, paralleelses  $x_2 y_2$ -teljestikus, mille algus on punktis koordinaatidega  $(a/b)$  ja kuhu mis tahes punkti koordinaadid teisenduvad teatavasti valemitega  $x_2 = x_1 - a$  ja  $y_2 = y_1 - b$ :

$$S_{x2} = \int_A y_2 dA = \int_A (y_1 - b) dA = \int_A y_1 dA - b \int_A dA = S_{x1} - bA.$$

Staatiline moment  $S_{y2}$  avaldub samal viisil. Tulemused esitame teisendusvalemitega:

$$S_{x2} = S_{x1} - bA; \quad S_{y2} = S_{y1} - aA, \quad (7.4)$$



Joon. 7.3

kus telgedevahelisi kaugusi  $a$  ja  $b$  vaatleme märgiga suurustena, teise teljestiku alguse koordinaatidena esimeses teljestikus. Valemitest (7.4) järeldub, et telje paralleellükkega positiivses suunas, staatiline moment tema suhtes algebraliseult väheneb. Lükkega negatiivses suunas staatiline moment algebraliseult suureneb.

## 7.2. KUJUNDI TELJESTIKUD

**7.2.1. Kesksteljestik.** Vaatleme kujundit pindalaga  $A$  joonisel 7.3,  $b$  ja seame sellele meelevaldse  $x_1y_1$ -teljestiku. Arvutame kujundi staatilised momendid  $S_{x_1}$  ja  $S_{y_1}$ . Otsime paralleelsete teljestikkude hulgast niisugust  $Cx_0y_0$ -teljestikku, mille telgede suhtes kujundi staatilised momendid võrduvad nulliga:

$$S_{x_0}=0; \quad S_{y_0}=0. \quad (7.5)$$

Asendame teisendusvalemite (7.4) paralleelsete telgede vahekaugused  $a$  ja  $b$  tundmatutega  $x_c$  ja  $y_c$  ning pidades silmas tingimusi (7.5), võrrutame saadud avaldised nulliga:

$$S_{x_0}=S_{x_1}-Ay_c=0; \quad S_{y_0}=S_{y_1}-Ax_c=0.$$

Saadud võrranditest avaldame telgede vahekaugused:

$$x_c=\frac{S_{y_1}}{A}; \quad y_c=\frac{S_{x_1}}{A}, \quad (7.6)$$

mis määravad otsitava teljestiku ja mida nimetame kujundi *kesksteljestikuks* ning selle algust  $C$  kujundi *keskmeks*. Kujundi kese ühtib samasuguse õhukese ühtlase plaadi raskuskeskmega.

Teades kujundi  $A$  keset, võime tema staatilised momendid arvutada meelevaldselt valitud  $x_1y_1$ -teljestikus seoste (7.6) põhjal:

$$S_{x_1}=Ay_c; \quad S_{y_1}=Ax_c; \quad (7.7)$$

kus  $x_c$  ja  $y_c$  on kujundi kesme  $C$  koordinaadid  $x_1y_1$ -teljestikus.

*Keeruka kujundi kesksteljed* määrame kujundi jaotamisega *lihtsateks osakujunditeks*, mille keskmeks on teada või kergesti leitavad sümmeeria tunnustest. Liitkujundi kesksteljed arvutame meelevaldselt valitud  $x_1y_1$ -teljestikus valemitega (7.6), asendades nendes kujundi staatilised momendid osakujundite momentide summadega ja viimastes osakujundite

staatilised momendid avaldistega (7.7):

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{ci}}{A}; \quad y_c=\frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{A}, \quad (7.8)$$

kus  $x_c$  ja  $y_c$  määravad liitkujundi kesksteljed  $x_1y_1$ -teljestiku suhtes,  $A_i$  on  $i$ -nda osakujundi pindala,  $x_{ci}$  ja  $y_{ci}$  —  $i$ -nda osakujundi kesme koordinaadid  $x_1y_1$ -teljestikus ja  $A$  — liitkujundi pindala.

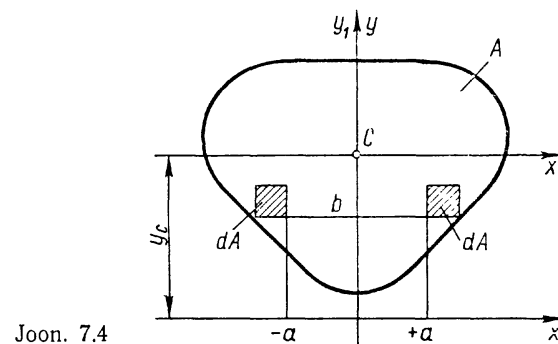
**7.2.2. Peateljestik on ristteljestik, mille suhtes kujundi tsentrifugaalmoment võrdub nulliga.** Kujundil on peateljestikke piiramatult palju nagu tal on ka piiramatult palju kesksteljestikke. Kõikidel kesksteljestikel on ühine algus kujundi keskes. Igast punktist on aga võimalik suunata teljed nii, et nad rahuldavad peateljestikule esitatavat tingimust.

Kujundi peateljestiku määramine antud punktis on määrgatavalt keerukam kesksteljestiku määramisest. Selle probleemi juurde tuleme tagasi jaotises 7.4.3. *Siinkohal piirdume sümmeetrilise kujundi jaoks peatelgede määramisega.*

Seame sümmeetrilisele kujundile (jconis 7.4)  $x_1y_1$ -teljestiku, mille üks telg ( $y_1$ ) on kujundile sümmeetriateljeks, teine telg ( $x_1$ ) võib sümmeetriateljega lõikuda meelevaldses punktis. Näitame, et see teljestik on üks peateljestikkudest, sest ta rahuldab tingimust

$$I_{x_1y_1}=\int_A x_1y_1 dA=0. \quad (7.9)$$

Selles võime veenduda, kui vaatleme integreeritavate väikeste suuruste  $x_1y_1dA$  summat. Igale positiivsele väiksele



Joon. 7.4

suurusele ( $abdA$ ) paremal pool sümmeetriatelge vastab sama absoluutväärtusega, kuid negatiivne suurus ( $-abdA$ ) teisel pool sümmeetriatelge, mis summeerimisel annavad nulli. Järelikult tsentrifugaalmoment saab võrduda ainult nulliga ja  $x_1y_1$ -teljestik on peateljestik.

Meid huvitab see peateljestikkudest, mille algus on kujundi keskmes  $C$ , see tähendab keskpeateljestik  $xy$ , mille telgede suhtes ka staatilised momendid võrduvad nulliga:

$$S_x=0; \quad S_y=0; \quad I_{xy}=0. \quad (7.10)$$

Esimesed kaks tingimust seavad teljestiku alguse kujundi keskmesse, kolmas tingimus seab teljed kahele kindlale ristsihile. Igal kujundil on vähemalt üks keskpeateljestik, kui jätta kõrvale varieerimise võimalused kahel ristsihil telgede suundadega, millel pole olulist tähtsust.

Sümmeetrilisel kujundil joonisel 7.4 on keskpeateljed määratavad sel teel, et arvutame kujundi pindala  $A$  ja staatilise momendi  $S_{x_1}$  ning  $x$ -telje kauguse  $y_c$  valemiga (7.6).

**Näide 7.1.** Määrata kolmnurga üks keskkelg, mis on alusega paralleelne (joonis 7.5, a).

Seame kolmnurgale  $x_1y_1$ -teljestiku ja avaldame  $x_0$ -keskkelje kauguse  $x_1$ -teljest teise valemiga (7.6), milles staatilise momendi väljendame avaldisega (7.1):

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{\int y_1 dA}{A}.$$

Arvutame staatilise momendi pinnaelemendiga  $dA = b_y dy$ , kus muutuva suuruse  $b_y$  avaldame kolmnurkade sarnasusest:

$$b_y = b \frac{h - y_1}{h};$$

$$S_{x_1} = \int_A y_1 dA = \frac{b}{h} \int_0^h (h - y_1) y_1 dy = \frac{bh^2}{6}.$$

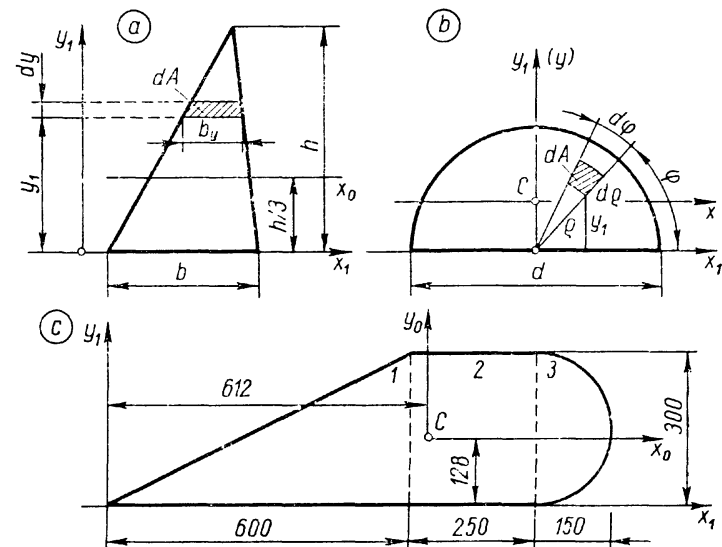
Arvutame  $x_0$ -keskkelje kauguse  $y_c$  teljest  $x_1$ , võttes arvesse kolmnurga pindala  $A = bh/2$ :

$$y_c = \frac{h}{3}. \quad (7.11)$$

**Näide 7.2.** Määrata poolringi keskpeateljestik (joonis 7.5, b).

Seame poolringile  $x_1y_1$ -teljestiku ja avaldame keskpeatelje kauguse  $y_c$  samuti nagu eelmises näites. Arvutame poolringi staatilise momendi  $x_1$ -telje suhtes, võttes polaarkoordinaatides pinnaelemendi  $dA = \rho d\varphi d\rho$  ja selle kauguse  $y_1 = \rho \sin \varphi$ :

$$S_{x_1} = \int_A y_1 dA = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{d/2} \rho \sin \varphi \rho d\rho = \frac{d^3}{12}. \quad (7.12)$$



Joon. 7.5

Arvestades poolringi pindalaga  $A = \pi d^2/8$ , saame

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{2d}{3\pi} \approx 0,212d. \quad (7.13)$$

**Näide 7.3.** Arvutada joonisel 7.5, c antud kujundi keskmise koordinaadid. Mõõtmised joonisel on antud millimeetrites.

Seame kohale  $x_1y_1$ -teljestiku ja jaotame kujundi kriipsjoontega osakujunditeks, kolmnurgaks (1), ristkülikuks (2) ja poolringiks (3). Arvutame mõõtmetega deetsimeetrites. Avaldame osakujundite pindalad ja keskmise koordinaadid  $x_1y_1$ -teljestikus. Kolmnurga ja poolringi keskmise määramisel kasutame valemite (7.11) ja (7.13):

$$\begin{array}{lll} A_1 = 9 \text{ dm}^2; & x_{c1} = 4 \text{ dm}; & y_{c1} = 1 \text{ dm}; \\ A_2 = 7,5 \text{ dm}^2; & x_{c2} = 7,25 \text{ dm}; & y_{c2} = 1,5 \text{ dm}; \\ A_3 = 3,53 \text{ dm}^2; & x_{c3} = 9,14 \text{ dm}; & y_{c3} = 1,5 \text{ dm}. \end{array}$$

Kujundi pindala  $A = 20,0 \text{ dm}^2$ .

Arvutame kujundi staatilised momendid:

$$S_{x_1} = \sum_{i=1}^3 A_i y_{ci} = 9 \cdot 1 + 7,5 \cdot 1,5 + 3,53 \cdot 1,5 = 25,6 \text{ dm}^3;$$

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^3 A_i x_{ci} = 9 \cdot 4 + 7,5 \cdot 7,25 + 3,53 \cdot 9,14 = 122,6 \text{ dm}^3.$$

Määrame kujundi keskmee koordinaadid valemiga (7.6) või (7.8):

$$x_c = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{122,6}{20,0} = 6,12 \text{ dm} = 612 \text{ mm};$$

$$y_c = \frac{S_{x1}}{A} = \frac{25,6}{20,0} = 1,28 \text{ dm} = 128 \text{ mm}.$$

### 7.3. INERTSIMOMENDID

**7.3.1. Teisendus paralleelsesse teljestikku.** Kujundi inertsimomendid on positiivsed suurused, olenemata teljestiku asendist. Seda kinnitavad avaldised (7.1), milles integreeritavad funktsioonid  $x^2$  ja  $y^2$  on positiivsed olenemata pinnaelemendi koordinaatide  $x$  ja  $y$  märkidest.

Pöördume tagasi joonise 7.3, a juurde. Olgu kujundile  $A$  meelevaldselt seatud  $x_1y_1$ -teljestikus antud  $I_{x1}$ ,  $I_{y1}$ ,  $S_{x1}$  ja  $S_{y1}$ . Avaldame inertsimomendid teises, paralleelses  $x_2y_2$ -teljestikus:

$$I_{x2} = \int_A y_2^2 dA; \quad I_{y2} = \int_A x_2^2 dA.$$

Teisendame integreeritavates funktsioonides pinnaelemendi koordinaadid esimesse teljestikku valemitega  $x_2 = x_1 - a$  ja  $y_2 = y_1 - b$ :

$$I_{x2} = \int_A (y_1 - b)^2 dA; \quad I_{y2} = \int_A (x_1 - a)^2 dA.$$

Arendame saadud avaldistest esimest:

$$I_{x2} = \int_A y_1^2 dA - 2b \int_A y_1 dA + b^2 \int_A dA,$$

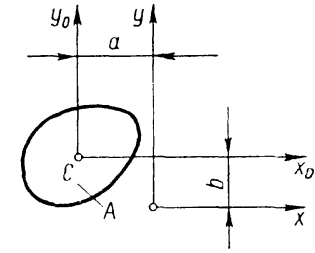
kus esimene integraal on antud inertsimoment  $I_{x1}$ , teine staatiline moment  $S_{x1}$  ja kolmas kujundi pindala  $A$ . Asendame integraalide väärtused ja lisame teise avaldise analoogselt arenduse:

$$\begin{aligned} I_{x2} &= I_{x1} - 2bS_{x1} + b^2A; \\ I_{y2} &= I_{y1} - 2aS_{y1} + a^2A, \end{aligned} \quad (7.14)$$

kus suurusi  $a$  ja  $b$  tuleb vaadelda  $x_2y_2$ -teljestiku alguse koordinaatidena  $x_1y_1$ -teljestikus, pidades silmas nende märke.

Kui antud suurused kuuluvad kujundi keskteljestikku  $x_0y_0$ , siis staatilised momendid  $S_{x0} = S_{y0} = 0$ . Inertsimomendid paralleelses  $xy$ -teljestikus avalduvad seostega (7.14), millest keskmised liikmed sel juhul langevad välja (joonis 7.6):

$$I_x = I_{x0} + b^2A; \quad I_y = I_{y0} + a^2A. \quad (7.15)$$



Joon. 7.6

Kui aga inertsimomendid on antud  $xy$ -teljestikus, siis keskteljestikus arvutame nad samadest seostest (7.15):

$$I_{x0} = I_x - b^2A; \quad I_{y0} = I_y - a^2A. \quad (7.16)$$

Suurusi  $a$  ja  $b$  valemities (7.15) ja (7.16) võime vaadelda vastavalt telgede  $y$  ja  $y_0$  ning  $x$  ja  $x_0$  vahekaugustena, arvestamata märke. Valemities nähtub, et *kujundi inertsimomentidest paralleelsete telgede parves on vähima väärtusega kesktelje suhtes arvatud inertsimoment.*

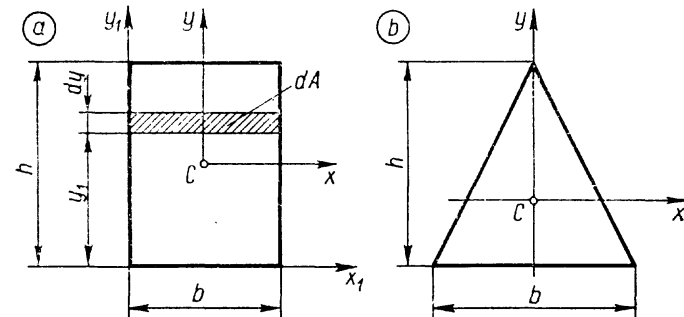
#### 7.3.2. Lihtsate kujundite inertsimomendid.

1) *Ristkülik* (joonis 7.7, a). Arvutame inertsimomendi  $x_1$ -telje suhtes, võttes pinnaelemendi  $dA = bdy$ :

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = b \int_0^h y_1^2 dy = \frac{bh^3}{3}. \quad (7.17)$$

Avaldame inertsimomendi keskteelje suhtes teisendusvalemiga (7.16):

$$I_x = I_{x1} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 A = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}. \quad (7.18)$$



Joon. 7.7

2) *Kolmnurk* (joon. 7.5, a). Arvutame inertsimomendi kolmnurga aluse (ühe serva) suhtes. See arvutus on analoogne kolmnurga staatilise momendi arvutusega jaotisest 7.2.3. Erinevus seisneb ainult selles, et pinnaelemendi kaugus  $y_1$  asendub kauguse ruuduga  $y_1^2$ :

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h (h - y_1) y_1^2 dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (7.19)$$

Inertsimoment alusega paralleelse kesktelje suhtes avaldub teisendusvalemiga (7.16):

$$I_{x0} = I_{x1} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 A = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}. \quad (7.20)$$

3) *Võrdhaarne kolmnurk* (joonis 7.7, b). Inertsimoment  $x$ -keskpeatelje suhtes avaldub valemiga (7.20). Sümmeetriatelje suhtes arvutame inertsimomendi, vaadeldes kujundit koosnevana kahest võrdsest täisnurksest kolmnurgast ühiste kaatetitega sümmeetriateljel. Vaatleme neid kolmnurki alustega  $h$  ja kõrgustega  $b/2$  ning avaldame nende summaarse inertsimomendi  $y$ -telje suhtes valemi (7.19) põhjal:

$$I_y = 2 \frac{h(b/2)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}. \quad (7.21)$$

4) *Ring ja rõngas*. Teisendame polaarinertsimomendi avaldise polaarkoordinaatidest ristkoordinaatidesse tuntud seosega  $q^2 = x^2 + y^2$ :

$$I_0 = \int_A q^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x. \quad (7.22)$$

Saadud tulemusest näeme, et *ristteljestikus võrdub kujundi telginertsimomentide summa polaarinertsimomendiga selle teljestiku alguse suhtes*.

Ringi ja rõnga telginertsimomendid kesktelgede suhtes on võrdsed. Kui  $xy$ -teljestik on ringi keskteljestik, siis  $I_x = I_y$ . See võrdsus koos seosega (7.22) lubavad järeldada, et ringi telginertsimoment moodustab poole tema polaarinertsimomendist, mis on esitatud valemiga (6.16):

$$I_x = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (7.23)$$

Rõnga telginertsimoment avaldub samal viisil valemist (6.18):

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} (1 - \alpha^4), \quad (7.24)$$

kus  $\alpha = d_s/d$  on sise- ja välisläbimõõtude suhe.

Kitsa rõnga telginertsimoment avaldub valemist (6.20):

$$I_x = \frac{\pi}{8} d^3 \delta (1 - \beta)^3, \quad (7.25)$$

kus  $d$  on rõnga välisläbimõõt,  $\delta$  tema laius ja  $\beta = \delta/d$ .

5) *Poolring* (joon. (7.5, b)). Inertsimomendid peatelgede  $x_1$  ja  $y_1$  suhtes moodustavad poole ringi inertsimomendist (7.23):

$$I_{x1} = I_{y1} = \frac{\pi d^4}{128}. \quad (7.26)$$

Keskpeatelje suhtes arvutame inertsimomendi teisendusvalemiga (7.16), milles telgede vahekaugus on antud valemiga (7.13):

$$I_x = \frac{\pi d^4}{128} - \left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi d^2}{8} \approx 0,006860 d^4. \quad (7.27)$$

**7.3.3. Inertsiraadius on kujundi pinnaelementide ruutkeskmise kaugus teljest:**

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad (7.28)$$

kus  $i_x$  on kujundi inertsiraadius  $x$ -teljest,  $I_x$  — kujundi inertsimoment  $x$ -telje suhtes ja  $A$  — pindala. Inertsiraadiust mõõdame pikkusühikutega (m; cm; mm).

Inertsiraadius on kujundi geomeetriline tunnussuurus, mis inertsimomentide kõrval leiab kasutamist paljudes tugevusõpetuse ülesannetes. Enamasti vajame inertsiraadiusi, mis on määratud keskpeatelgedest, nn. *kujundi peainertsiraadiusi*. Inertsiraadiust võib kujutada graafiliselt joonlõiguna, mis suunatakse risti temale vastavast teljest. Näiteks inertsiraadius  $i_x$  näidatakse  $y$ -telje sihil ükskõik kummas suunas.

Ringil on inertsiraadiused võrdsed kõigist kesktelgedest. Ringil läbimõõduga  $d$  saame inertsiraadiuse valemiga (7.28):

$$i = \sqrt{\frac{\pi d^4 \cdot 4}{64 \pi d^2}} = \frac{d}{4}. \quad (7.29)$$

Ristkülikul (joonis 7.7, a) avaldub peainertsiraadius  $x$ -teljest:

$$i_x = \frac{h}{2\sqrt{3}}. \quad (7.30)$$

Võrdhaarsel kolmnurgal (joonis 7.7, b):

$$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}}; \quad i_y = \frac{b}{2\sqrt{6}}. \quad (7.31)$$

Profiilteraste ristlõikepindade inertsiraadiused leiame vastavatest sortimentide tabelitest.

**Näide 7.4.** Joonisel 7.8, a on esitatud pool sümmeetrilisest kujundist. Arvutada inertsimoment ja -raadius keskpäetelje ( $x$ ) suhtes. Kujundi kõrgus on 120 mm, tema muutuv laius mõõta jooniselt.

Arvutame kujundi inertsimomendi valemi 7.2 abil, jaotades poole kujundist kümneks võrdse laiusega ribaks:

$$n=10; \quad \Delta y=6 \text{ mm}; \quad \Delta A_i=b_i \Delta y; \quad y_i=(i-0,5)\Delta y.$$

Laiused  $b_i$  kanname tabelisse 7, kus teeme ka vajalikud arvutused.

Tabel 7

Keeruka kujundi inertsimomendi arvutus

$i$	$b$ cm	$\Delta A$ cm <sup>2</sup>	$y$ cm	$y^2$ cm <sup>2</sup>	$y^2 \Delta A$ cm <sup>4</sup>
1	1.20	0.720	0.30	0.09	0.07
2	1.32	0.792	0.90	0.81	0.64
3	1.45	0.870	1.50	2.25	1.96
4	1.80	1.080	2.10	4.41	4.76
5	2.40	1.440	2.70	7.29	10.50
6	3.12	1.872	3.30	10.89	20.39
7	4.08	2.418	3.90	15.21	36.78
8	4.56	2.736	4.50	20.25	55.40
9	4.80	2.880	5.10	26.01	74.91
10	4.20	2.520	5.70	32.49	81.88
Summa		17.328		Summa	287.29

Tabeli viimase veeru kahekordne summa on antud kujundi inertsimomendi ligikaudne väärtus:

$$I_x = 2 \sum_{i=1}^{10} y_i^2 \Delta A_i = 2 \cdot 287,3 \approx 575 \text{ cm}^4,$$

mille suhteline viga ei ületa 2%. Kui arvutada inertsimoment jaotusarvuga  $n=20$ , siis suhteline viga ei ületa 0,5%.

Arvutame kujundi inertsiraadiuse  $x$ -teljest valemiga (7.28):

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{575}{2 \cdot 17,33}} = 4,07 \text{ cm} = 40,7 \text{ mm}.$$

**Näide 7.5.** Arvutame joonisel 7.8, b esitatud kujundi inertsimomendid keskpäetelgede  $x$  ja  $y$  suhtes. Mõõtmed on antud millimeetrites.

Vaatleme antud T-kujundit koosnevana kahest ristkülikust  $A_1$  ja  $A_2$ . Arvutame ristküliku  $A_1$  inertsimomendi valemiga (7.18) tema keset läbiva telje suhtes, mis on paralleelne  $x$ -teljega, ja teisendame tulemuse valemiga (7.15)  $x$ -teljele. Samal viisil arvutame ristküliku  $A_2$  inertsimomendi  $x$ -telje suhtes ja summeerime mõlema ristküliku inertsimomendid (valem 7.3):

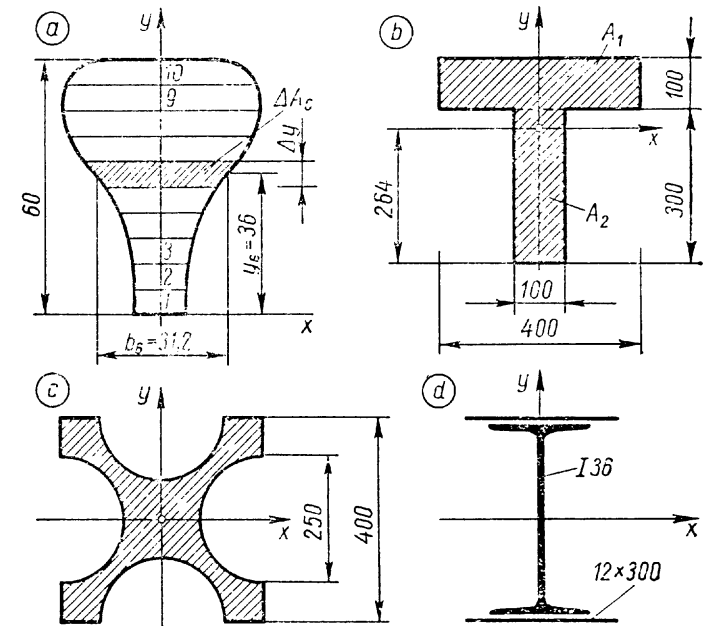
$$I_x = \frac{40 \cdot 10^3}{12} + 8,6^2 \cdot 40 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 30^3}{12} + 11,4^2 \cdot 30 \cdot 10 = 94\,400 \text{ cm}^4.$$

Inertsimomendi  $I_y$  arvutamisel pole vaja ristkülikute inertsimomente valemiga (7.15) teisendada, kuna  $y$ -telg läbib osakujundite keskmed:

$$I_y = \frac{10 \cdot 40^3}{12} + \frac{30 \cdot 10^3}{12} = 55\,800 \text{ cm}^4.$$

**Näide 7.6.** Arvutada joonisel 7.8, c esitatud kujundi inertsimoment. Kujundi mõõtmed  $x$ -telje sihis ühtivad mõõtmetega  $y$ -telje sihis. Mõõtmed on antud millimeetrites.

Kujundi inertsimomendid antud telgede suhtes on võrdsed. Ka see kujund on vaadeldav liitkujundina, mis koosneb ruudust servapikkusega  $a=40$  cm ja neljast negatiivse tähendusega poolringist läbimõõtudega  $d=25$  cm. Arvutame ruudu inertsimomendi valemiga (7.18), lahutame



Joon. 7.8

sellest valemiga (7.26) leitud kahe poolringi inertsimomendid ja ülejäänud kahe poolringi omad, mille arvutamiseks kasutame valemit (7.27) koos teisendusvalemiga (7.15). Poolringi kese on määratud valemiga (7.13):

$$I_x = \frac{a^4}{12} - 2 \frac{\pi d^4}{128} - 2 \left[ 0,00686d^4 + \left( \frac{a}{2} - 0,212d \right)^2 \frac{\pi d^2}{8} \right] =$$

$$= \frac{40^4}{12} - 2 \frac{3,14 \cdot 25^4}{128} - 2 \left[ 0,00686 \cdot 25^4 + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{40}{2} - 0,212 \cdot 25 \right)^2 \frac{3,14 \cdot 25^2}{8} \right] = 83\,100 \text{ cm}^4.$$

Näide 7.7. Arvutada joonisel 7.8,  $d$  esitatud liitkujundi inertsimomendid keskpeatelgede suhtes.

Liitkujund koosneb standardsest I-profiilist nr. 36 ja kahest  $12 \times 300$ -mm ristkülikust. Profiilteraste tabelitest leiame antud profiilile  $I_x = 15\,760 \text{ cm}^4$  ja  $I_y = 552 \text{ cm}^4$ . Samast tabelist leiame profiili kõrguse 360 mm, mis lubab määrata ristkülikute keskmete kauguse  $360/2 + 6 = 186$  mm  $x$ -teljest. See kaugus on tarvilik valemis (7.15) ristkülikute inertsimomentide teisendamiseks:

$$I_x = 15\,760 + 2 \left( \frac{30 \cdot 1,2^3}{12} + 18,6^2 \cdot 30 \cdot 1,2 \right) = 40\,560 \text{ cm}^4;$$

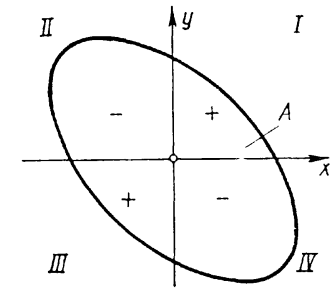
$$I_y = 552 + \frac{1,2 \cdot 30^3}{12} = 3252 \text{ cm}^4.$$

#### 7.4. EBASÜMMEETRILISE KUJUNDI PEATELJED JA PEAINERTSIMOMENDID

**7.4.1. Tsentrifugaalmoment** võib olla positiivne, negatiivne või ka võrduda nulliga, olenevalt kujundi asendist teljestikus. Avaldistest (7.1) ja (7.2) nähtub, et *kujundi tsentrifugaalmoment moodustub pinnaelementide ja nende koordinaatide korrutiste summana*. Järelikult kujunevad pinnaelementide elementaarsed tsentrifugaalmomendid ( $xy dA$ ) teljestiku esimeses ja kolmandas veerandis positiivseteks, teises ja neljandas veerandis negatiivseteks. Kujundile, mis asetseb teljestiku mitmes veerandis, saame tsentrifugaalmomendi märgi nende veerandite järgi, milles asetsevad tema ülekaalukad osad. Näiteks joonisel 7.9 esitatud kujundi tsentrifugaalmoment  $I_{xy}$  on negatiivne, kuna tema osad teises ja neljandas veerandis on ülekaalus võrreldes osadega esimeses ja kolmandas veerandis.

Tsentrifugaalmoment varda ristlõikepinna tunnussuurusena tugevusõpetuses rakendust ei leia, kuid ta on tarvilik ebasümmeetrilise kujundi peatelgede ja nende suhtes inertsimomentide määramisel.

Tsentrifugaalmomendi teisendamiseks paralleelsesse tel-



Joon. 7.9

jestikku pöördume tagasi joonise 7.3,  $a$  juurde. Olgu kujundi pindala  $A$ , tema tsentrifugaalmoment  $I_{x_1y_1}$  ja staatilised momendid  $S_{x_1}$  ja  $S_{y_1}$  antud meelevaldses  $x_1y_1$ -teljestikus. Avaldame tsentrifugaalmomendi teises, paralleelses  $x_2y_2$ -teljestikus, mille algpunkti koordinaadid esimeses teljestikus on  $a$  ja  $b$ , ning teisendame pinnaelementi koordinaadid esimesse teljestikku valemitega  $x_2 = x_1 - a$  ja  $y_2 = y_1 - b$ :

$$I_{x_2y_2} = \int_A x_2 y_2 dA = \int_A (x_1 - a)(y_1 - b) dA =$$

$$= \int_A x_1 y_1 dA - a \int_A y_1 dA - b \int_A x_1 dA + ab \int_A dA.$$

Asendades pindintegraalid oma tähtedega, saame:

$$I_{x_2y_2} = I_{x_1y_1} - aS_{y_1} - bS_{x_1} + abA, \quad (7.32)$$

kus suurusi  $a$  ja  $b$  tuleb arvestada märkidega, see tähendab  $x_2y_2$ -teljestiku alguse koordinaatidena  $x_1y_1$ -teljestikus.

Kui antud suurused kuuluvad kujundi keskteljestikku (joonis 7.6), siis  $S_{x_0} = S_{y_0} = 0$  ja tsentrifugaalmoment mis tahes paralleelses  $xy$ -teljestikus:

$$I_{xy} = I_{x_0y_0} + abA. \quad (7.33)$$

Teisendamiseks mis tahes teljestikust paralleelsesse keskteljestikku saame samast seosest valemi:

$$I_{x_0y_0} = I_{xy} - abA. \quad (7.34)$$

Suurusi  $a$  ja  $b$  valemities (7.33) ja (7.34) tuleb vaadelda märgiga suurustena, ükskõik kumma teljestiku alguse koordinaatidena teises teljestikus. Pöörame tähelepanu asjaolule, et lihtsus, mis lubab suurusi  $a$  ja  $b$  valemities (7.15) ja (7.16) vaadelda telgede vahekaugustena (märgita suurustena), põhjustaks valemities (7.33) ja (7.34) olulisi vigu.

Tsentrifugaalmomendi võime igale sümmeetrilisele kujundile arvutada seosest (7.33), kui keskteljestikuna rakendada



peateljestiku, mille suhtes tsentrifugaalmoment teatavasti võrdub nulliga (tingimus 7.10):

$$I_{xy} = abA, \quad (7.35)$$

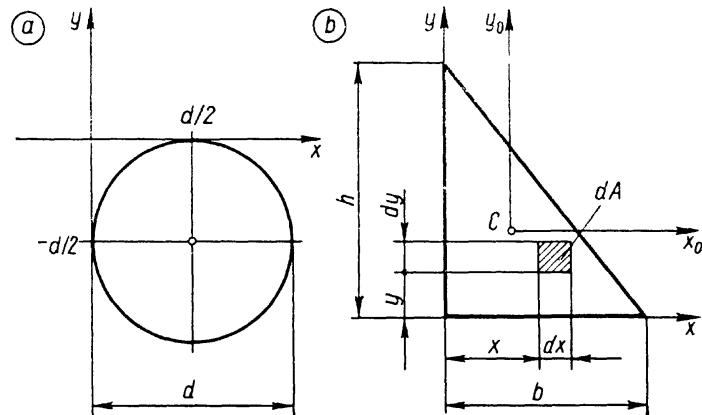
kus  $a$  ja  $b$  on  $xy$ -teljestiku alguse koordinaadid paralleelses keskkeateljestikus.

Määrame tsentrifugaalmomendi selle valemiga ringile joonisel 7.10, a, kus  $a = d/2$  ja  $b = -d/2$ :

$$I_{xy} = \frac{d}{2} \left( -\frac{d}{2} \right) \frac{\pi d^2}{4} = -\frac{\pi d^4}{16}.$$

Ebasümmeetrilisele kujundile arvutame tsentrifugaalmomendi integreerimise teel. Näiteks võtame täisnurkse kolmnurga joonisel 7.10, b. Pinnaelemendi peame siin võtma üldisel kujul  $dA = dx dy$ , kuna integreerida on vaja kahemuutuja funktsioon. Arvutame tsentrifugaalmomendi kaatetite suhtes  $xy$ -teljestikus, milles hüpotenuus on kirjeldatav võrrandiga  $y = h(1 - x/b)$ . Esiteks integreerime  $y$ -telje suunas muutuva ülemise rajaga  $h(1 - x/b)$  ja siis  $x$ -telje suunas kaateti  $b$  ulatuses:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A xy \, dA = \int_0^b dx \int_0^{h(1-x/b)} xy \, dy = \\ &= \frac{h^2}{2} \int_0^b x \left( 1 - \frac{x}{b} \right)^2 dx = \frac{b^2 h^2}{24}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

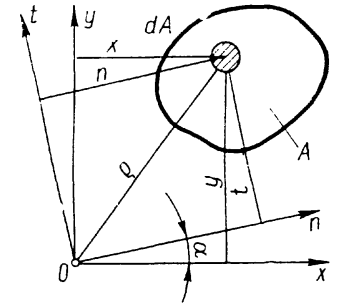


Joon. 7.10

Tsentrifugaalmomendi keskeljestikus avaldame teisendusvalemi (7.34) abil:

$$I_{x_0y_0} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b}{3} \frac{h}{3} \frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72}. \quad (7.37)$$

**7.4.2. Inertsimomendid pöörduvas teljestikus.** Raken-dame kujundile  $A$  teljestiku  $Oxy$  ja pöörduva teljestiku  $Ont$ , mille suund on määratud nurgaga  $\alpha$  (joonis 7.11). Olgu antud kujundi inertsimomendid  $I_x$  ja  $I_y$  aga samuti ka tsentrifugaalmoment  $I_{xy}$ . Seame ülesandeks uurida inertsimomente pöörduvas teljestikus, kus nad on muutuvad suurused ja sõltuvad nurgast  $\alpha$ .



Joon. 7.11

Avaldame kujundi polaarinertsimomendi harilikul viisil polaarkoordinaatides ja teisendame ristkoordinaatidesse tuntud seostega  $\rho^2 = x^2 + y^2$  ja  $\rho^2 = n^2 + t^2$ :

$$I_0 = \int_A \rho^2 \, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA = \int_A n^2 \, dA + \int_A t^2 \, dA.$$

Asendame integraalid oma tähistega ja muudame nende summeerimise järjekorra:

$$I_0 = I_x + I_y = I_n + I_t = \text{const}. \quad (7.38)$$

Saadud seosest järeldame, et *pöörduvas teljestikus inertsimomentide summa on invariantne*.

Avaldame inerts- ja tsentrifugaalmomendi pöörduvas teljestikus:

$$I_n = \int_A t^2 \, dA; \quad I_{nt} = \int_A nt \, dA$$

ja teisendame avaldised  $xy$ -koordinaadistikku matemaatikast tuntud teisendusvalemitega  $n = y \sin \alpha + x \cos \alpha$  ja  $t = y \cos \alpha - x \sin \alpha$ :

$$I_n = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA;$$

$$I_{nt} = \int_A (y \sin \alpha + x \cos \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA.$$

Avame integreeritavates funktsioonides sulud ja asendame integraalid avaldiste (7.1) põhjal antud suurustega, pidades silmas, et integreerimisel pinna  $A$  ulatuses nurgafunktsioonid on vaadeldavad konstantsete suurustena ja neid võib tuua integraali märgi alt välja:

$$I_n = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$I_{nt} = (I_x - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (7.39)$$

Teisendusvalemitele võime anda teise, enamkasutatava kuju, asendades nendes esinevad suurused trigonomeetriast tuntud seostest:  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ ;  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ ;

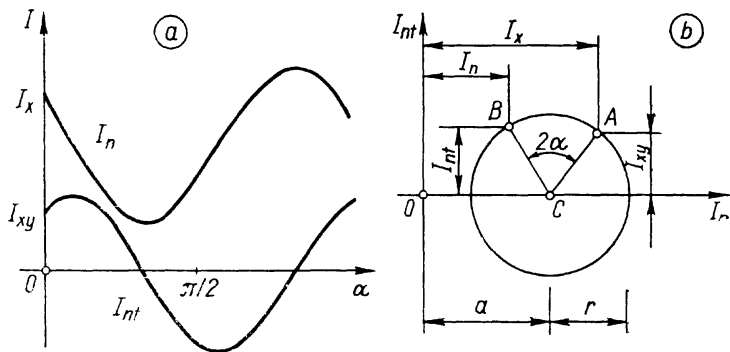
$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Lihtsustades avaldised, saame:

$$I_n = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$I_{nt} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (7.40)$$

Teisendusvalemid võimaldavad arvutada inerts- ja tsentrifugaalmomendi mis tahes sihiga telgede suhtes. Funktsioonide  $I_n$  ja  $I_{nt}$  graafikud on sinusoidid, kujutatud joonisel 7.12,  $\alpha$   $\alpha I$ -tasandil piires  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .



Joon. 7.12

Vaatleme seoseid (7.40) võrrandipaarina, millest kõrvaldame  $\alpha$  ja seame muutujad  $I_n$  ja  $I_{nt}$  sõltuvusse ühes, nn. *kanoonilises võrrandis*. Selleks viime esimeses võrrandis konstandi  $(I_x + I_y)/2$  vasakule poole võrdusmärgi, tõstame võrrandi ruutu, liidame ühele teise ja tähistame konstantset suurused:

$$a = \frac{I_x + I_y}{2}; \quad r^2 = \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2. \quad (7.41)$$

Tulemuseks saame ringi võrrandi:

$$(I_n - a)^2 + I_{nt}^2 = r^2, \quad (7.42)$$

mis on sarnane võrrandiga (4.20) pingeteooriast. Ka siin nimetame selle võrrandi graafikut  $I_n I_{nt}$ -tasandil *Mohri ringiks* (joonis 7.12, b). Sellel ringil on vaatluste alguseks punkt  $A$  koordinaatidega  $I_x$  ja  $I_{xy}$ . Mis tahes punkt  $B$  määrab oma koordinaatidega  $I_n$  ja  $I_{nt}$  inerts- ja tsentrifugaalmomendi pöörduvas teljestikus, kusjuures pool nurgast  $ACB$  vastab  $n$ -telje pöördenurgale  $\alpha$   $x$ -teljest.

**7.4.3. Peainertsimomendid ja peateljed.** *Peainertsimomendiks nimetatakse inertsimomenti peatelje suhtes. Peateljestikuks on teatavasti ristteljestik, mille suhtes kujundi tsentrifugaalmoment võrdub nulliga.*

Määrame peainertsimomendi kanoonilisest võrrandist (7.42). Tingimusega  $I_{nt} = 0$  rahuldab seda võrrandit otsitav peainertsimoment  $I$ :

$$(I - a)^2 = r^2,$$

mis teisendub ruutvõrrandiks

$$I^2 - 2aI + a^2 - r^2 = 0.$$

Ruutvõrrandi kahes lahendis

$$I_{1,2} = a \pm r$$

asendame konstandid  $a$  ja  $r$  oma tähendustega (7.41):

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (7.43)$$

Saadud valem esitab kaks peainertsimomenti  $I_1 > I_2$  kahe omavahel ristuva peatelje  $1$  ja  $2$  suhtes. Võrrandist (7.42) näeme, et tingimusel  $I_{nt} = 0$  saab suurus  $I_n - a$  ekstreemseks. Et  $a = \text{const}$ , siis saab ka ekstreemse tähenduse  $I_n$ .

Järelikut on peainertsimoment  $I_1$  maksimaalne ja  $I_2$  minimaalne inertsimomentidest pöörduvas teljestikus ( $I_2 \leq I_n \leq I_1$ ).

Suurimale peainertsimomendile  $I_1$  vastava peatelje määramiseks pöördume tagasi joonise 7.11 juurde. Kasutame pinnaelemendi koordinaatide  $y$  ja  $t$  korrutise võrdsust isendaga:  $yt = ty$ , milles teised tegurid teisendame matemaatiliselt tuntud valemitega  $t = y \cos \alpha - x \sin \alpha$  ja  $y = t \cos \alpha + n \sin \alpha$ . Integreerime võrduse mõlemat poolt kujundi pinnaelemendi  $dA$  järgi kogu pinna  $A$  ulatuses:

$$\int_A y(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \int_A t(t \cos \alpha + n \sin \alpha) dA,$$

millest pärast sulgude avamist ja integraalide asendamist neile vastavate suurustega, saame

$$I_x \cos \alpha - I_{xy} \sin \alpha = I_n \cos \alpha + I_{nt} \sin \alpha. \quad (7.44)$$

Pöörame telge  $n$  nurga  $\alpha_1$  võrra, millega seame ta kokku peateljega  $I$ . Seejuures eeltoodud seoses  $I_n = I_1$  ja  $I_{nt} = 0$  annavad nurga  $\alpha_1$  määramiseks võrrandi, millest

$$\tan \alpha_1 = -\frac{I_1 - I_x}{I_{xy}}. \quad (7.45)$$

Peatelje 2 suunanurga  $\alpha_2$  võime määrata sama valemiga, asendades  $I_1$  teise peainertsimomendiga  $I_2$ . Enamasti määratakse teise peatelje tingimusest  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$ .

Peateljestiku määramiseks on käibel ka teine valem, mille saame teisest seosest (7.40) tingimusega  $I_{nt} = 0$ :

$$\tan 2\alpha_{1(2)} = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (7.46)$$

Valemi (7.46) puuduseks on asjaolu, et ta ei määra peatelje tähist  $I$  või 2.

## 8. PAINDE SISEJÕUD

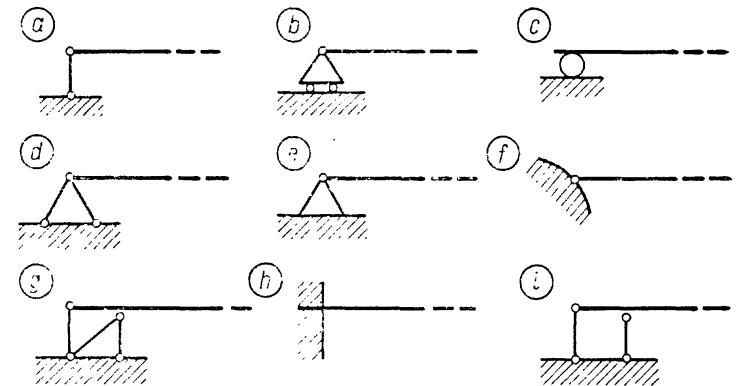
### 8.1. TALA

**8.1.1. Varda paine on tööseisund, mille puhul ristlõigetes mõjuvad paindemomendid ja põikjõud.** Seejuures normaaljõud ja väändemoment puuduvad. Erandjuhul, kui vardas mõjub ainult paindemoment, räägime *puhtast paindest*. *Põikpaindega* rõhutame paindemomendi ja põikjõu koosmõju. Sirges vardas põhjustavad painde teljega risti mõjuvad jõud

ja momendid. Varda telje suhtes kaldu mõjuv jõud ja moment annaksid projektsioonid varda teljele ja kutsuksid esile vastavalt normaaljõu ja väändemomendi lisaks paindele. Neid sisejõude koosmõjusid vaatleme jaotises 12.

Vaatleme sirget ja telgsümmeetrilise ristlõikepinnaga varrast. Allutame varda paindele, rakendades talle välisjõud ja momendid ühes tasandis, mis on määratud varda telje ja ristlõikepinna sümmeetriateljega. Seejuures varras paindub nii, et tema kõverdunud telg ehk *elastne joon* jääb välisjõududega samasse tasandisse. Niisugust painet nimetatakse *tasand-* ehk *otsepaindeks*, ning seda vaatleme käesolevas jaotises 8 ja järgnevas jaotises 9 ja 10. *Vildakpaine*, mille puhul elastne joon põikub kõrvale välisjõudude sihilt, vaatleme jaotises 12.

**8.1.2. Tala toed ja toetusviisid.** Alusele kinnitatud ja paindele töötavat varrast nimetatakse *talaks*. Arvutusskeemis asendame tala oma telgjoonega. Tala annab oma koormuse edasi alusele tugede kaudu. Tugede konstruktiivne kujundus on väga mitmesugune, olenevalt toele esitatavatest kinemaatilistest nõuetest, tala mõõtmetest, koormusest, materjalist ja paljudest teistest asjaoludest. *Tugiosaks* tala ja aluse vahel võib olla lihtne puidust tugiklots, kuid ka paljudest detailidest koosnev ja mitmetonnise massiga tugisõlm. Vaatamata tugiosade konstruktiivsele mitmekesisusele, on nad üsna lihtsalt klassifitseeritavad oma kinemaatiliste tunnuste järgi. Meid huvitavad toe juures need liikumise vabadusastmed, mida ta võimaldab talale. Tala toed kujutame üldreeglina ideaalsete kahepoolsete lihtsidemete kombi-

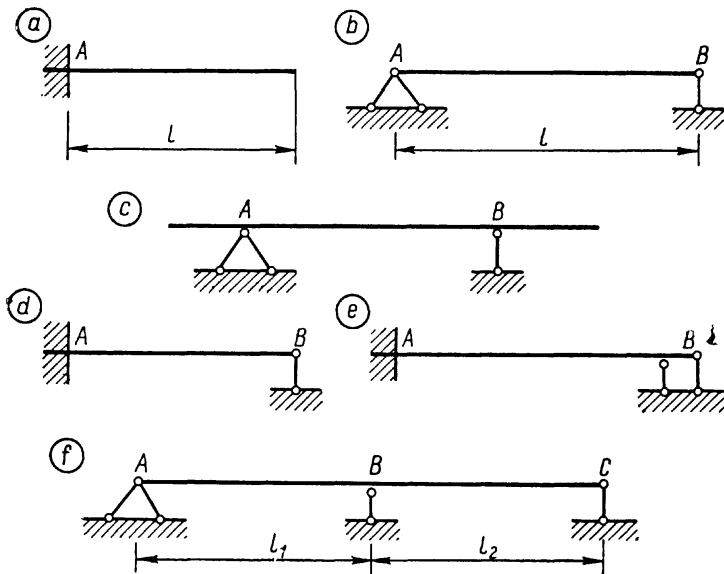


Joon. 8.1

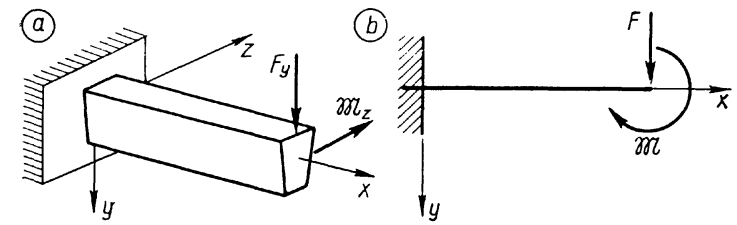
natsioonidena, kuid kasutame nende kõrval ka mõningaid liitsidemeid.

Joonisel 8.1, *a*, *b* ja *c* on kujutatud liikuv liigendtugi kolmes variandis, millest eelistame esimest. See tugi võimaldab tala pöörduda ja liikuda horisontaalselt. Tugi sisaldab üht ideaalset liitsidet, mis tõkestab tugipunkti liikumise vertikaalselt. Joonisel 8.1, *d*, *e* ja *f* on liikumatu liigendtugi kolmes variandis, millest samuti eelistame esimest. See tugi võimaldab ainult tala vaba pöördumist toel, tõkestades oma kahe liitsidemega liikumise nii rõht- kui ka püstsuunas. Joonisel 8.1, *g* ja *h* näeme kinnistuge kahes variandis, millest eelistame teist. See tugi sisaldab kolm liitsidet ja tõkestab nendega kõik kolm vabadusastet tasandil. Joonisel 8.1, *i* on kujundatud liikuv pöördumatu tugi, mis jätab tala otsale ühe liikumisvabaduse rõhtsuunas, tõkestades liikumise püstsuunas ja pöördumise.

Toetusviiside järgi jagunevad talad staatikaga määratavateks ja määramatuteks. Joonisel 8.2 on kujutatud kolm lihtsamat staatikaga määratavat tala: *a* konsool; *b* lihttala; *c* konsoolidega lihttala. Samal joonisel on kolm staatikaga määramatut tala; *d* ühe sildega ühekordselt määramatu ja



Joon. 8.2



Joon. 8.3

*e* kahekordselt määramatu tala; *f* kahe sildega jätkuv tala, mis on ühekordselt staatikaga määramatu.

Arvutusskeemis tähistame tala toed suurte tähtedega tähestiku järjekorras ja mõistame neid punktidenä. Põhimoõtmeks arvutusskeemil on tugevaheline kaugus  $l$ , mida nimetatakse sildeks. Konsooli juures räägime selle pikkusest  $l$ .

Talale rakendame paremakäe ristteljestiku, algusega varda vasakus otsas;  $x$ -telje seame tala teljeks ja  $y$ -telje ristlõikepinna sümmeetriateljeks (joonis 8.3, *a*). Tala tasandpaine arvutusskeemi kujutame  $xy$ -tasandil, kus on vaadeldavad painet esile kutsuvad välisjõud ja elastne joon. Välis- ja sisejõudude arvutusskeemis jätame ära välisjõudude ja -momentide sihte tähistavad indeksid, mis tasandülesandes pole olulised (joonis 8.3, *b*). Momente tuleb seejuures kujutada ringvektoritena, et nad oleksid nähtavad  $xy$ -tasandil. Joonisel on  $y$ -telg suunatud alla, mis pole juhuslik, vaid pärit inseneripraktikast. See asjaolu tuleneb nähtavasti sellest, et soovitakse kõige sagedamini esinevat tala koormust — raskusjõudu ja sellest põhjustatud tala telje siiret, nn. läbipainet, esitada positiivsete suurustena. Teisiti öeldes, püütakse võimaluste piires vähendada negatiivsete suuruste hulka praktilistes arvutustes.

**8.1.3. Toereaktsioonid.** Vaatleme staatikaga määratavat tala, mille koormus on antud. Talale mõjuvad välisjõududena antud koormus ja tundmatud toereaktsioonid. Viimased määratakse sidemetest vabastamise printsiibiga tasakaalutingimustest. Võime kasutada füüsikast ja teoreetilisest mehaanikast tuntud tasakaalutingimusi, valides nendest selle, mis antud ülesande lahendamisel osutub kõige lihtsamaks. Esikohal seame teoreetilisest mehaanikast tuntud tasakaalutingimused tasandülesande jaoks:

$$\sum X=0; \quad \sum Y=0; \quad \sum \mathcal{M}_R=0, \quad (8.1)$$

kus teatavasti kolmandas tingimuses jõumomendid tuleb arvutada punkti  $R$  suhtes, milleks võime valida mis tahes punkti  $xy$ -tasandil.

Toereaktsioonide määramisel on enamasti kõige otstarbekam rakendada kolmandat (momentide) tasakaalutingimust (8.1), millest saab vajalikud ühe tundmatuga võrrandid. Teist tasakaalutingimust saab kasutada lahendi kontrollimiseks. Esimene tasakaalutingimus pole sel juhul kasutatav, kui talale mõjuvad jõud risti  $x$ -teljega, nagu me seda antud juhul eeldame.

*Näide 8.1.* Arvutame toereaktsioonid  $A$  ja  $B$  joonisel 8.4, *a* kujutatud talale.

Vabastame tala tugedest ja asendame nende mõju jõududega  $A$  ja  $B$ , mille suuna valime alt ülespoole (joonis 8.4, *b*). Asendame talale mõjuva lauskoormuse  $p$  tala osal pikkusega  $a$  ekvivalentse koondjõuga  $p \cdot a = 5 \cdot 2 = 10$  kN. Meenutame teoreetilistest mehaanikast, et toereaktsioonide arvutamisel lauskoormuste asendamine ekvivalentsete koondjõududega on alati võimalik. Seejuures tuleb ekvivalentne koondjõud rakendada lauskoormuse epüüri keskmes.

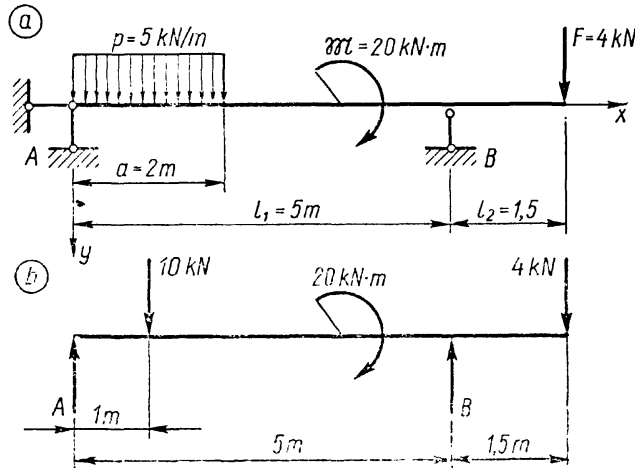
Tugedelt eraldatud talale seame momentide tasakaalutingimuse momendipunktiga  $B$ , et saada võrrandit, mis sisaldaks ainult üht tundmatut toereaktsiooni  $A$ :

$$\sum \mathfrak{M}_B = 0; \quad 5A - 10(5 - 1) + 20 + 4 \cdot 1,5 = 0.$$

Saadud võrrandist arvutame otsitava

$$A = 2,8 \text{ kN}.$$

Toereaktsiooni  $B$  arvutame momentide tasakaalutingimusest punktis  $A$  suhtes:



Joon. 8.4

$$\sum \mathfrak{M}_A = 0; \quad 10 \cdot 1 + 20 + 4(5 + 1,5) - 5B = 0,$$

millest

$$B = 11,2 \text{ kN}.$$

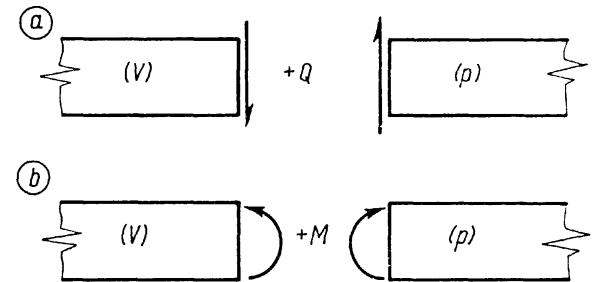
Lahendi kontrolliks kasutame teist tasakaalutingimust (8.1):

$$\sum Y = 0; \quad -2,8 - 11,2 + 10 + 4 = 0.$$

## 8.2. PÕIKJÕUD JA PAINDEMOMENT

Tala ristlõikes on põikjõud  $Q$  ja paindemoment  $M$  määratavad lõkemeetodiga. Selles kohas, kus soovime määrata sisejõud, teeme mõttelise ristlõike, mille tulemusena tala jaguneb kaheks osaks. Vaatleme üht osa, mille lõikepinnal rakendame tundmatu positiivse põikjõu  $Q$  ja paindemomendi  $M$ . Seame vaadeldavale osale tasakaalutingimused, millest määrame tundmatud sisejõud.

Põikjõu ja paindemomendi positiivsed suunad on näidatud joonisel 8.5, *a* ja *b*. Positiivne põikjõud tala vasaku osa ( $v$ ) ristlõikepinnal on suunatud alla ja parempoolse osa ( $p$ ) lõikepinnal üles; positiivne paindemoment vasaku osa ( $v$ ) ristlõikepinnal on suunatud vastupäeva ja parempoolse osa ( $p$ ) lõikepinnal päripäeva.



Joon. 8.5

*Näide 8.2.* Arvutame põikjõu ja paindemomendi joonisel 8.6, *a* kujutatud konsooli ristlõikes  $C$ . Konsooli tasakaalutingimustest määrame otsivad  $A = 20$  kN ja  $\mathfrak{M}_A = 60$  kN·m (joonis 8.6, *b*). Teeme lõike kohas  $C$  ja vaatleme konsooli parempoolset osa  $CB$  (joonis 8.6, *d*). Rakendame positiivse põikjõu  $Q_C$  ja paindemomendi  $M_C$  vaadeldava osa lõikepinnal ja seame tasakaalutingimused:

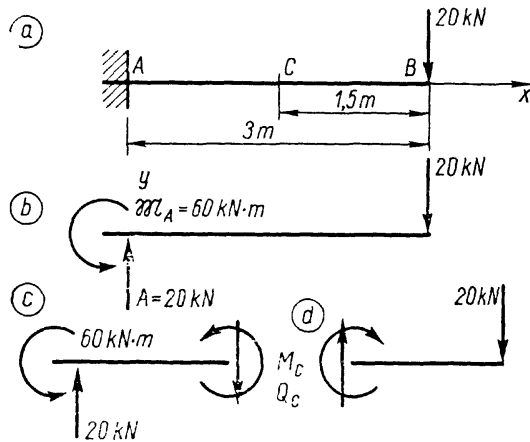
$$\sum Y = 0; \quad -Q_C + 20 = 0;$$

$$\sum \mathfrak{M}_C = 0; \quad M_C + 20 \cdot 1,5 = 0,$$

millest

$$Q_C = 20 \text{ kN} \quad \text{ja} \quad M_C = -30 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Arvutame sama ristlõike sisejõud, vaadeldes konsooli vasakut osa  $AC$  (joonis 8.6, *c*). Ka siin rakendame vaadeldavale osale lõikepinnal



Joon. 8.6

tundmatud positiivsed sisejõud  $Q_c$  ja  $M_c$ , mis on vastupidised võrreldes samade sisejõududega parempoolse osa lõikepinnal. Seame vasakpoolsele osale tasakaalutingimused:

$$\begin{aligned} \sum Y; & \quad -20 + Q_c = 0; \\ \sum \mathfrak{M}_c = 0; & \quad -60 + 20 \cdot 1,5 - M_c = 0, \end{aligned}$$

millest

$$Q_c = 20 \text{ kN} \quad \text{ja} \quad M_c = -30 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Eeltoodud arvutusest näeme, et konsooli sisejõudude määramisel on soovitatav vaadelda seda osa, mis asetseb vaba otsa pool, sest sel juhul pole tarvis eelnevalt välja arvutada toereaktsioone. Teise olulise järeldusena märgime, et sisejõudude arvutamisel võtame momentide tasakaalutingimuse momendipunktiks ristlõikepinna keskme (vaadeldud näites punkt C). Sel juhul tundmatul põikjõul puudub õlg ja see tingimus kujuneb ühe tundmatuga võrrandiks.

Põikjõu ja paindemomendi võib arvutada, kasutades lõikemeetodi najal saadud valemeid. Määrame tala ristlõikes C sisejõud  $Q_c$  ja  $M_c$ . Vaadeldav ristlõige jaotab tala kaheks osaks, vasak- ( $v$ ) ja parempoolseks ( $p$ ). Eelmises näites toodud mõttekäikude alusel võime mõlema talaosa tasakaalutingimused esitada järgmisel üldisel kujul:

$$\begin{aligned} \sum_{i(v)} F_i + Q_c = 0; & \quad \sum_{i(v)} \mathfrak{M}_{ci} - M_c = 0; & \text{(vasakpoolne)} \\ \sum_{i(p)} F_i - Q_c = 0; & \quad \sum_{i(p)} \mathfrak{M}_{ci} + M_c = 0, & \text{(parempoolne)} \end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned} Q_c &= -\sum_{i(v)} F_i = \sum_{i(p)} F_i; \\ M_c &= \sum_{i(v)} \mathfrak{M}_{ci} = -\sum_{i(p)} \mathfrak{M}_{ci}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

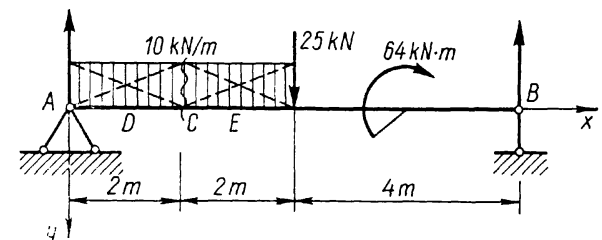
kus  $F_i$  on talale mõjuv välisjõud, mida teistest jõududest eristab tunnus  $i$ ;  $\mathfrak{M}_{ci}$  — punkti C suhtes talale mõjuv välismoment eritunnusega  $i$ ;  $i(v)$  — nõuab kõikide nende jõudude või momentide summeerimist, mis mõjuvad talale vasakul pool vaadeldavat ristlõiget ja  $i(p)$  — jõudude või momentide summeerimist, mis mõjuvad talale paremal pool vaadeldavat ristlõiget. Valemites (8.2) tuleb välisjõud ja -momendid summeerida algebraliselt nende märkidega, mis on  $xy$ -teljestikus.

Jaotisest 1.5.5 tunneme sisejõudude avaldisi (1.3), millest teine ja kuues esitavad põikjõu  $Q_y$  ja paindemomendi  $M_z$  varda üldises koormusseisundis. Avaldised (8.2) esitavad samad suurused tala tasandpindel, kus me jätame ära indeksid  $y$  ja  $z$  ning märgime varda osad ( $I$ ) ja ( $II$ ) tähistega ( $v$ ) ja ( $p$ ). Oluliseks erinevuseks on paindemomendi märk, mis on valemis (8.2) vastupidine võrreldes märgiga kuuendas avaldises (1.3). See erinevus tuleneb asjaolust, et tala jaoks kasutame inseneripraktikast pärinevat paindemomendi märgireeglit, mis pole kooskõlas sisejõudude ja pingete üldise märgireegli (joonis 8.5, b).

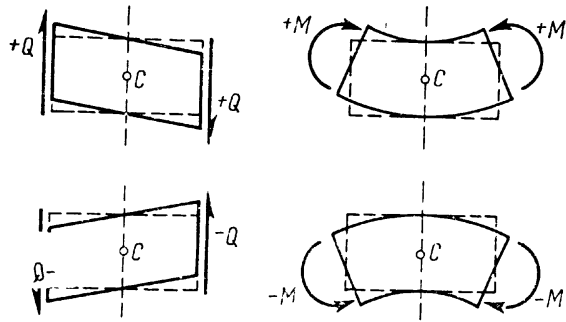
**Näide 8.3.** Arvutame joonisel 8.7 esitatud lihttala sisejõud ristlõikes C.

Määrame tala tasakaalutingimustest  $\sum \mathfrak{M}_B = 0$  ja  $\sum \mathfrak{M}_A = 0$  toereaktsioonid  $A = 34,5$  kN ja  $B = 30,5$  kN. Arvutame sisejõud ristlõikes C, vaadeldes tala vasakpoolset osa AC. Põikjõu  $Q_c$  arvutamisel tuleb valemis (8.2) toereaktsioon võtta märgiga ( $-$ ), kuna ta on suunatud  $y$ -telje negatiivses suunas ja lauskoormus märgiga ( $+$ )  $y$ -telje positiivses suunas

$$Q_c = -\sum_{i(v)} F_i = -(-34,5 + 10 \cdot 2) = 14,5 \text{ kN}.$$



Joon. 8.7



Joon. 8.8

Paindemomendi  $M_c$  arvutamisel tulevad arvesse samade välisjõudude momendid punkti  $C$  suhtes. Toereaktsiooni moment on positiivne, lauskoormuse moment negatiivne.

$$M_c = \sum_{i(v)} m_{c,i} = 34,5 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 49 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Arvutame sisejõud, vaadeldes tala parempoolset osa  $CB$ :

$$Q_c = \sum_{i(p)} F_i = 10 \cdot 2 + 25 - 30,5 = 14,5 \text{ kN};$$

$$M_c = - \sum_{i(p)} m_{c,i} = -(10 \cdot 2 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 64 - 30,5 \cdot 6) = 49 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

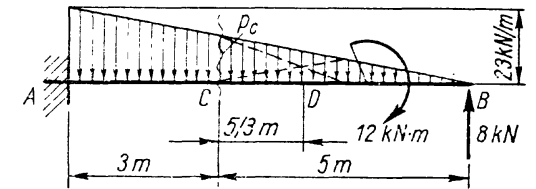
Valemitest (8.2) on väljaloetavad lõikemeetodi rakendamise reeglid.

1) Põikjõud tala ristlõikes võrdub ühel pool seda ristlõiget mõjuvate välisjõudude algebralise summaga. Summeerimisel loeme positiivseks need välisjõud, mis põhjustaksid tugedest vabastatud tala pöördumise päripäeva vaadeldava ristlõike keskmee ümber (joonis 8.8).

2) Paindemoment tala ristlõikes võrdub ühel pool seda ristlõiget mõjuvate välismomentide ja välisjõudude momentide algebralise summaga. Summeerimisel loeme positiivseks need momendid, mis põhjustaksid tugedest vabastatud ja vaadeldavas ristlõikes kinnitatud tala paindumise nõgusaks (joonis 8.8).

Näide 8.4. Arvutame sisejõud joonisel 8.9 kujutatud konsooli ristlõikes  $C$ .

Lauskoormuse intensiivsus avaldub punktis  $C$  kolmnurkade sarnasusest:  $p_c = (5/8)23 = 14,38 \text{ kN/m}$ . Sisejõudude arvutamisel vaatleme konsooli osa  $CB$ , millel lauskoormuse suurus on  $14,38 \cdot 5/2 = 35,6 \text{ kN}$ . Selle koormusega ekvivalentne koondjõud tuleks rakendada teatavasti punktis  $D$  (kolmnurga keskmee).



Joon. 8.9

Põikjõudu kujundavad osal  $CB$  lauskoormus, mis püüab konsooli pöörata päripäeva, ja koondjõud, mis püüab konsooli pöörata vastupäeva. Järelikult

$$Q_c = 35,6 - 8 = 27,6 \text{ kN}.$$

Paindemomendi kujundavad lauskoormuse moment, mis painutaks konsooli pealtpoolt kumeraks, koondjõu moment, mis painutaks konsooli nõgusaks, ja koondmoment  $12 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , mis painutaks konsooli kumeraks. Järelikult:

$$M_c = -35,6 \cdot \frac{5}{3} + 8 \cdot 5 - 12 = -31,33 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

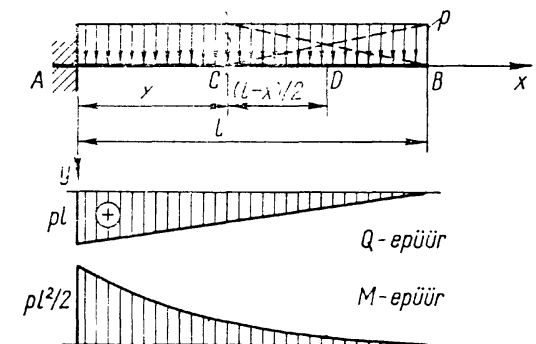
### 8.3. SISEJÕUDUDE EPÜÜRID

#### 8.3.1. Sisejõud funktsioonidena.

Põikjõu ja paindemomendi funktsioonid saame sel teel, et märgime tala arvutuskeemil vaadeldava ristlõike kauguse telgede algusest (tala otsast) muutuva suurusena  $x$  ja avaldame sisejõud  $Q = Q(x)$  ja  $M = M(x)$ .

Näide 8.5. Avaldame joonisel 8.10 kujutatud konsooli sisejõud ühtlaselt lauskoormusest.

Märgime konsoolil ristlõike  $C$  kaugusel  $x$ , mis võib muutuda piirides  $0 \leq x \leq l$ . Määrame sisejõud ristlõikes  $C$ . Konsooli osale  $CB$  mõjub ainult



Joon. 8.10

lauskoormus  $p(l-x)$ , mis püüab seda osa punkti  $C$  suhtes pöörata päripäeva. Järelikult on otsitav põikjõud positiivne:

$$Q = p(l-x).$$

Koormus konsooli osal  $CB$  mõjub ristlõike  $C$  suhtes õlaga  $CD = (l-x)/2$  ja painutab tala pealpoolt kumeraks. Järelikult paindemoment on negatiivne ja avaldub järgmiselt:

$$M = -p(l-x) \frac{l-x}{2} = -\frac{p}{2} (l^2 - 2lx + x^2).$$

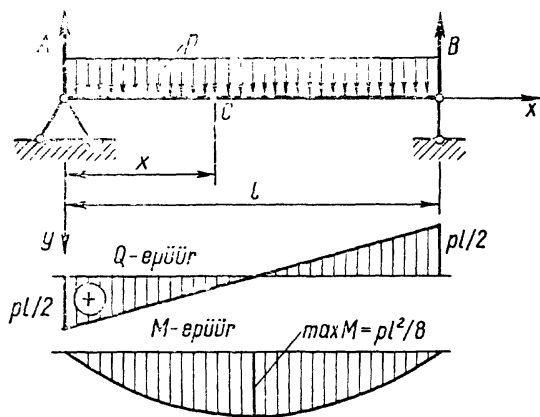
Põikjõud avaldub lineaarse, paindemoment aga teise astme funktsioonina. Nende epüürid (graafikud) on kujutatud joonisel 8.10. Konsooli suurimad sisejõud mõjuvad kinnituskohas, kus  $x=0$  ja

$$\max Q = pl \quad \text{ja} \quad \min M = -\frac{pl^2}{2}. \quad (8.3)$$

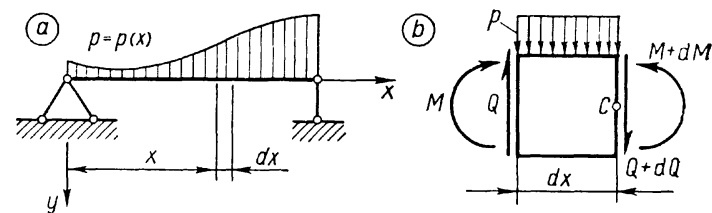
Epüüride ordinaadid kujutame risti tala teljega ja kasutame samasihilist viirutust. Põikjõu positiivse ordinaadi suund pole oluline ja seepärast näitame epüüril alati märgi. Paindemomendi epüüri positiivsed ordinaadid suuname alla poole, negatiivsed üles. Teisiti öeldes, paindemomendi epüüri ordinaadid kujutame tala sellel poolel, mis on allutatud tõmbepingele ja märki epüüril ei näita.

**Näide 8.6.** Määrame sisejõud ühtlase lauskoormusega lihttalas (joonis 8.11). Tala toereaktsioonid on arvutuskeemi sümmeetriast võrdsed:

$$A = B = \frac{pl}{2}. \quad (8.4)$$



Joon. 8.11



Joon. 8.12

Avaldame põikjõu ja paindemomendi ristlõikes  $C$ , mis on kaugusel  $x$  toest  $A$ :

$$Q = A - px = p \left( \frac{l}{2} - x \right);$$

$$M = Ax - \frac{p}{2} x^2 = \frac{p}{2} (lx - x^2).$$

Saadud avaldistele vastavad epüürid on esitatud joonisel, kust näeme, et suurimad põikjõud mõjuvad tugele lähedale ja suurim paindemoment tala keskel ( $x=l/2$ ):

$$Q_A = -Q_B = \frac{pl}{2}; \quad \max M = \frac{pl^2}{8}. \quad (8.5)$$

**8.3.2. Diferentsiaalvõrded.** Enamasti tala sisejõudude analüüs ei osutu nii lihtsaks nagu eelmistes näidetes ja seepärast vajame paindeülesannete lahendamisel põhjalikumaid teadmisi koormuse, põikjõu ja paindemomendi omavahelistest seostest.

Olgu tala koormatud lauskoormusega, mille intensiivsus on esitatav pideva funktsioonina  $p=p(x)$  (joonis 8.12, a). Tala vasakust otsast kaugusel  $x$ , kus koormuse intensiivsus on  $p$ , teeme ristlõike, milles mõjuvad sisejõud  $Q$  ja  $M$ . Teise lõike teeme  $dx$  võrra kaugemal, kus koormuse intensiivsus võime vaadelda muutumatuna, sisejõudusid aga lõpmata väikeste juurdekasvudega  $dQ$  ja  $dM$ . Eraldame väljalõigatud elemendi talast ja rakendame talle lauskoormuse kõrval sisejõududega võrdsed jõud ja momendid lõikepindadel (joonis 8.12, b). Selles seisundis on element tasakaalus ja rahuldab tingimusi

$$\sum Y = 0; \quad -Q + (Q + dQ) + p dx = 0;$$

$$\sum M_c = 0; \quad Q dx + M - (M + dM) - p dx \frac{dx}{2} = 0.$$

Hüljates teises tingimuses summeerimisel esineva teist järku väikse liikme  $p(dx)^2/2$ , saame pärast lihtsustamist:



$$\frac{dQ}{dx} = -p; \quad \frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -p. \quad (8.6)$$

Sõnadega seletatuna: *paindemomendi tuletis tala telje järgi võrdub põikjõuga ja põikjõu tuletis koormuse intensiivsusega, võetuna vastasmärgiga.*

Diferentseerime jaotises 8.3.1 vaadeldud kahes näites paindemomendi funktsiooni  $x$ -i järgi ja veendume, et tulemus ühtib põikjõu avaldisega, mille tuletis omakorda võrdub lauskoormuse vastasmärgilise intensiivsusega.

**8.3.3. Ekstreemne paindemoment** määratakse ekstreemülesande lahendamise teel, kasutades esimese tuletisfunktsioonina põikjõudu ja teisena koormuse intensiivsust vastasmärgiga (seosed 8.6).

*Näide 8.7.* Vaatleme konsooli joonisel 8.13 ja arvutame suurima absoluutväärtusega põikjõu ja paindemomendi. Sisejõud avaldame samal viisil nagu joonisel 8.10 kujutatud konsooli puhul, seejuures lisandub põikjõule koondjõust konstant  $-15$  kN ja paindemomendile lineaarne liige  $15(3-x)$ :

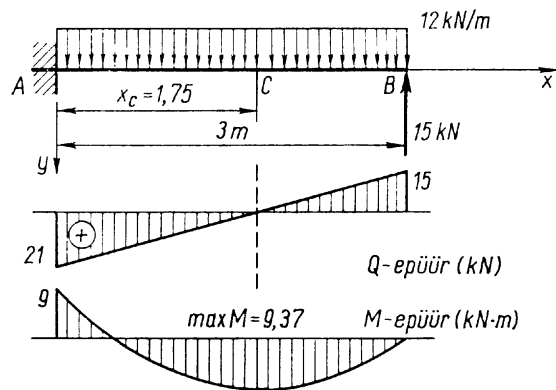
$$Q = 12(3-x) - 15 = -12x + 21; \\ M = -6(3^2 - 6x + x^2) + 15(3-x) = -6x^2 + 21x - 9.$$

Lineaarselt muutuva põikjõu väärtused konsooli otstel on  $Q_A = Q(x) = 21$  kN ja  $Q_B = Q(x) = -15$  kN, mille põhjal joonestame põikjõu epüüri.

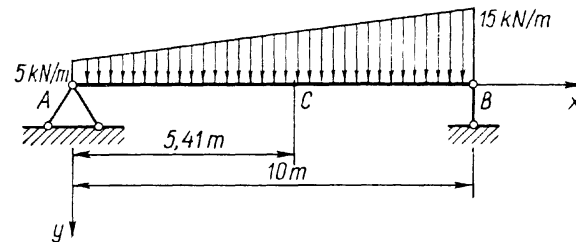
Ruutparaboolina kujutatava paindemomendi epüüri joonestamiseks peame teadma vähemalt kolme punkti sellel kõveral. Epüüri ordinaadid arvutame punktides  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Punktiks  $C$  valime haripunkti, milles paindemoment on ekstreemväärtusega. Selle punkti kauguse  $x_c$  konsooli toest määrame tingimusest

$$M'_c = Q_c = -12x_c + 21 = 0; \quad x_c = 21/12 = 1,75 \text{ m}.$$

Konsooli koormuse intensiivsust samas kohas on positiivne



Joon. 8.13



Joon. 8.14

( $+12$  kN/m), mis tähendab, et paindemomendi teine tuletis on negatiivne ja momendi väärtus maksimaalne:

$$\max M = -6 \cdot 1,75^2 + 21 \cdot 1,75 - 9 = 9,37 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Punktides  $A$  ja  $B$  saame paindemomendi avaldisest  $M(0) = -9$  kN·m ja  $M(3) = 0$ .

Absoluutväärtuselt suurimad sisejõud konsoolis on  $Q_A = 21$  kN ja  $M_c = 9,37$  kN·m.

Peame meeles, et *paindemomendi epüüri ekstreemväärtused on nendes kohtades, kus põikjõu epüüri ordinaadid võrduvad nulliga (vahetavad märki).*

**8.3.4. Muutuva intensiivsusega lauskoormus** kutsub talas esile põikjõu ja paindemomendi, mille määramine eespool vaadeldud arvutusviisidega on väga töömahukas. Neil juhitudel vaatleme seoseid (8.6) diferentsiaalvõrranditena, milles muutujad on eraldatavad ja üldlahendid saadavad integreerimise teel:

$$Q = -f p dx; \quad M = \int Q dx; \quad M = -\int dx \int p dx. \quad (8.7)$$

Eriühendid saame integreerimiskonstantide määramisega tala ääritingimustest, millena tulevad arvesse põikjõud ja paindemomendid tala otstel.

*Näide 8.8.* Arvutame joonisel 8.14 kujutatud tala suurima paindemomendi.

Talale mõjuva lauskoormuse muutuv intensiivsust väljendub funktsioonina

$$p = 5 + x.$$

Avaldame paindemomendi kolmanda lahendiga (8.7):

$$M = -\int dx \int (5+x) dx = -2,5x^2 - \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2.$$

Ääritingimustena võtame arvesse paindemomendid tala otstel, kus nad võrduvad nulliga

$$M(0) = 0, \text{ millest } C_2 = 0;$$

$$M(l) = -2,5 \cdot 10^2 - \frac{1}{6}10^3 + C_1 \cdot 10 = 0,$$

millest  $C_1 = 41,67$ .

Paindemoment avaldub leitud konstantidega:

$$M = 41,67x - 2,5x^2 - 0,167x^3.$$

Suurima paindemomendi asukoha  $C$  määramiseks diferentseerime avaldist, võrrutame tulelise (põikjõu avaldise) nulliga ja lahendame võrrandi

$$M' = 41,67 - 5x_c - 0,5x_c^2 = 0.$$

Selle võrrandi kahest juurest tuleb arvesse positiivne juur  $x_c = 5,41$  m:

$$\max M = 41,67 \cdot 5,41 - 2,5 \cdot 5,41^2 - 0,167 \cdot 5,41^3 = 125,9 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Vaadeldud ülesandes on lauskoormuse intensiivsus esitatav suhteliselt lihtsa (lineaarse) funktsiooniga, kuid ka siin on käesoleva arvutusviisi eelised ilmsed. Kõverjoone järgi jagunevate koormuste puhul pole eespool vaadeldud arvutusviisid aga praktiliselt kasutatavad.

## 8.4. EPUURIDE KATKEVUS

**8.4.1. Põikjõu epüüri katkevus koondjõust.** Jaotises 8.3 vaatlesime talasid, millele koormuse intensiivsust, põikjõudu ja paindemomenti kirjeldavad funktsioonid olid pidevad tala kogu pikkusel. Niisugused talad võivad olla koormatud koondjõudude ja -momentidega ainult otstes ja pideva lauskoormusega tala ulatuses. Käesolevas vaatleme tala, millele koondjõud või -moment võib mõjuda mis tahes kohas või lauskoormus piiratud alal.

Määrame joonisel 8.15 kujutatud ja koondjõuga  $F$  koormatud lihttala toereaktsioonid  $A = Fb/l$  ja  $B = Fa/l$  ning avaldame põikjõu ja paindemomendi ristlõikes  $D$ , mis asetseb kaugusel  $x$  (joonisel märkimata) tala otsast  $A$ :

$$Q = A = \frac{Fb}{l} = \text{const}; \quad (0 < x < a);$$

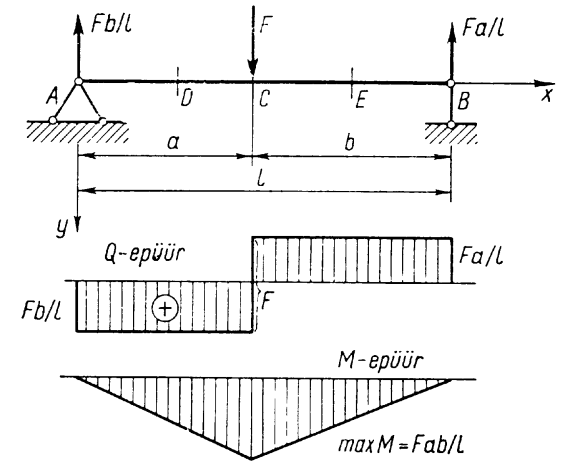
$$M = Ax = \frac{Fb}{l} x; \quad (0 \leq x \leq a),$$

Saadud avaldised on kehtivad piirkonnas  $AC$ . Kui avaldame sisejõud piirkonna  $CB$  punktis  $E$ , saame teistsugused avaldised:

$$Q = -B = -\frac{Fa}{l} = \text{const}; \quad (a < x < l);$$

$$M = B(l - x) = \frac{Fa}{l} (l - x); \quad (a \leq x \leq l).$$

Kujutame joonisel sisejõudude epüürid, millest näeme, et koondjõu rakenduspunktis põikjõu epüür katkeb. Katkemis-



Joon. 8.15

kohas esineva astme suurus võrdub koondjõuga ja on sellega vastassuunaline. Teisiti öeldes, positiivne välisjõud kutsub esile põikjõu hüppelise muutuse negatiivses suunas.

Paindemomendi epüür ei katke, kuid selles esineb koondjõu rakenduspunktis murdepunkt epüüri tõusu vähenemisega  $F$  võrra. Paindemoment selles punktis on määratud, põikjõud aga määramata ja seepärast ei saa rääkida põikjõust punktis  $C$  vaid põikjõududest ühel ja teisel pool katkevuspunkti, vasemal pool ( $Q_{c(p)}$ ) ja paremal pool ( $Q_{c(p)}$ ).

Vaadeldud näide on ühtlasi üks põhilistest lihttala arvutusskeemidest, millest tõstame esile järgmised tulemused:

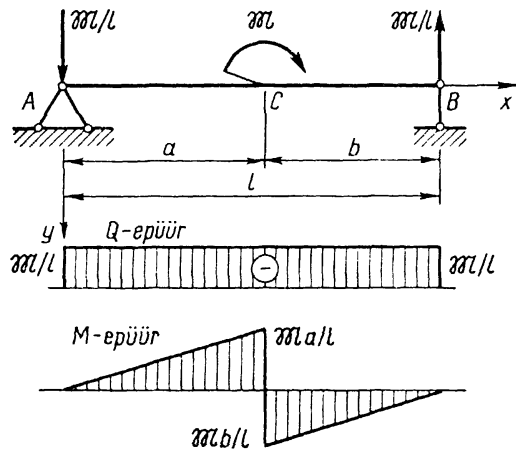
$$A = \frac{Fb}{l}; \quad B = \frac{Fa}{l}; \quad \max M = \frac{Fab}{l}. \quad (8.8)$$

Erijuhul kui jõud asetseb tala keskel, see tähendab  $a = b = l/2$ , saame  $A = B = F/2$  ja peame mees, et

$$\max M = \frac{Fl}{4}. \quad (8.9)$$

**8.4.2. Koondmoment talal** kutsub esile paindemomendi epüüris katkevuse, mida vaatleme joonisel 8.16 kujutatud lihttala juures. Selle lihttala toereaktsioonid esinevad jõupaarina õlaga  $l$ , mis tasakaalustab koormusena mõjuva momendi. Järelikult  $A = -B = M/l$ , mis tekitavad pideva ja konstantse põikjõu tala kogu ulatuses:

$$Q = -A = -\frac{M}{l} = \text{const}; \quad (0 < x < l).$$



Joon. 8.16

Avaldame paindemomendi piirkondades AC ja CB:

$$M = -Ax = -\frac{P}{l}x; \quad (0 \leq x \leq a);$$

$$M = B(l-x) = \frac{Q}{l}(l-x); \quad (a \leq x \leq l).$$

Punktis C tekib paindemomendi epüüris katkevuspunkt astmega, mis võrdub selles punktis rakendatud välismomendiga. Põikjõu epüüris koondmoment ei põhjusta katkevust ega ka tõusu muutust. Kuna paindemoment katkevuskohas pole määratud, siis võime tema väärtused esitada selle punkti vahetus läheduses vasemal ja paremal pool ( $M_{c(v)}$ ;  $M_{c(p)}$ ).

**3.4.3. Lauskoormuse katkevus**, mida vaatleme joonisel 8.17 punktis C, jaotab tala kaheks piirkonnaks, mille sisejõudude avaldised erinevad. Määrame tala toereaktsioonid  $A=36,3$  kN ja  $B=14,1$  kN, ning avaldame sisejõud piirkondades AC ja CB:

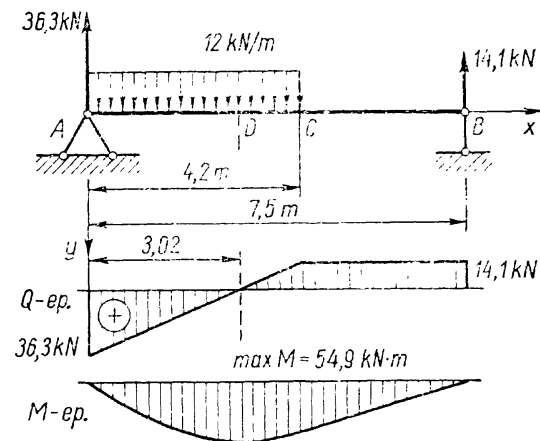
$$Q = 36,3 - 12x \quad (0 < x < 4,2);$$

$$Q = -14,1 = \text{const} \quad (4,2 < x < 7,5);$$

$$M = 36,3x - 6x^2 \quad (0 \leq x \leq 4,2);$$

$$M = 105,8 - 14,1x \quad (4,2 \leq x \leq 7,5).$$

Lauskoormuse katkevus põhjustab põikjõu epüüris murdepunkti, milles tõus järsult muutub. Positiivse suunaga lauskoormuse piirkonnas (AC) põikjõu epüüri tõus on negatiivne ja tala koormuseta osal (CB) võrdub tõus nulliga



Joon. 8.17

( $Q = \text{const}$ ). Paindemomendi epüüris põhjustab koormuse katkevus kõveruse järsu muutuse, mis vaadeldavas ülesandes tähendab paraboolselt kõverjoonelt üleminekut sirgliõigule. Kui seejuures lauskoormuse katkevuspunktis ei mõju koondjõudu ega -momenti, siis paindemomendi epüüris ei esine selles kohas ei murdepunkti ega astmelist muutust.

Lauskoormuse katkevuskohana talal on vaadeldav ka koormatud piirkonna alguspunkt.

Lõpetame joonisel 8.17 esitatud ülesande suurima paindemomendi arvutamisega. Tingimusest

$$Q_D = 36,3 - 12x_D = 0$$

määrame ristlõike D kauguse

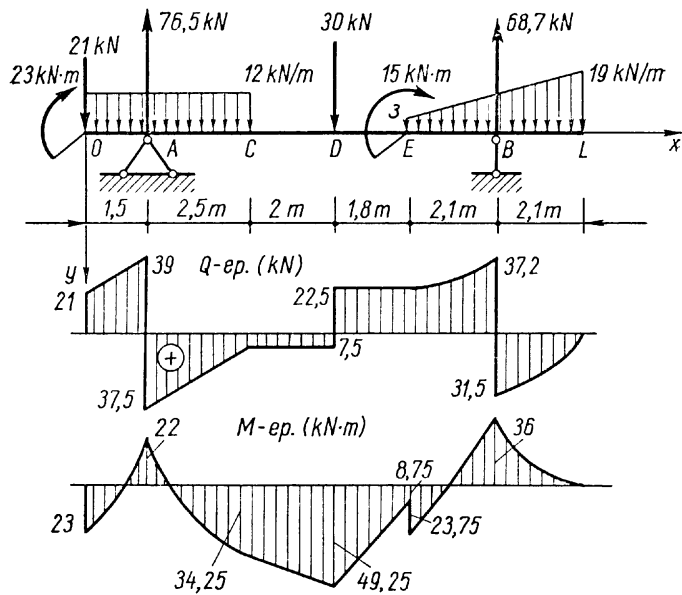
$$x_D = 36,3/12 = 3,02 \text{ m},$$

kus mõjub suurim paindemoment

$$\max M = 36,3 \cdot 3,02 - 6 \cdot 3,02^2 = 54,9 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

## 8.5. EPUURIDE PIDEVUSPIIRKONNAD

**8.5.1. Iseärased punktid ja pidevuspiirkonnad.** Iseäras teks nimetatakse punkte tala teljel, kus vähemalt ühe sisejõu funktsioon või tuletisfunktsioon omab katkevuskoha. Jaotises 8.4 vaatlesime funktsioonide  $M$ ,  $Q$  ja  $p$  katkevuspunkte, millele lisanduvad harvemini esinevad katkevused funktsioonides  $p'$ ,  $p''$ , ... Vaadeldud näidetes oli igas ühes üks iseärane punkt. Mitmekesisema koormusega lihttalas võib



Joon. 8.18

iseäraste punktide arv olla suurem ja suurenda veelgi, kui tala on konsooli(de)ga.

Joonisel 8.18 on kujutatud tala, millele mõjuvad koondjõud, koondmomentid ja lauskoormused piiratud aladel. Tähistame tala toed  $A$  ja  $B$ , otspunktid  $O$  ja  $L$  ning veel punktid  $C$ ,  $D$  ja  $E$ . Talal  $OL$  on iseäraseks punktideks  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  ja  $B$ , sest nendes esineb  $M$ ,  $Q$  ja  $p$  katkevusi.

Iseärsed punktid jaotavad tala *pidevuspiirkondadeks*, milles sisejõudude ja nende tuletiste funktsioonid on pidevad. Vaadeldavas konsoolidega talas on kuus pidevuspiirkonda  $OA$ ,  $AC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EB$  ja  $BL$ .

Sisejõudude avaldised ja epüürid tuleb koostada pidevuspiirkondade kaupa nii, nagu tegime jaotises 8.4 kahe pidevuspiirkonna puhul. Kui pidevuspiirkondi on palju, siis on otstarbekas alustada epüüride ehitamist tala ühest otsast ja liikuda piirkondade järjekorras teise otsani. Seejuures käsi-kaes arvutaja vilumuse ja kogemuse kasvuga võib oluliselt vähendada töömahtu. Näiteks sisejõudude avaldised võime jätta välja kirjutamata, kui nad ülesande lahendamisel pole otseselt vajalikud, ja piirduda sisejõudude arväärtuste mää-

ramisega pidevuspiirkondade alguses ja lõpus, millest enamasti piisab epüüride joonestamiseks.

**8.5.2. Algparameetrite meetod.** Tala sisejõudude epüüride konstrueerimine paljude pidevuspiirkondadega arvutuskeemi puhul on mahukas ja keeruline ülesanne, mis eriti algajale võib valmistada raskusi. Seepärast tuleme veel kord tagasi sisejõudude avaldiste ja epüüride koostamise juurde pidevuspiirkonnas ja tutvume veel ühe arvutusmeetodiga, mis enamasti osutub kõige sobivamaks keerukate ülesannete lahendamisel.

Arendame sisejõudude funktsioonid  $Q$  ja  $M$  mis tahes pidevuspiirkonnas *Taylori* ritta, milles tuletised asendame neile vastavate suurustega diferentsiaalsetest (8.4):

$$Q = Q_0 - p_0(x - x_0) - p'_0 \frac{(x - x_0)^2}{2} - p''_0 \frac{(x - x_0)^3}{6} - \dots; \quad (8.10)$$

$$M = M_0 + Q_0(x - x_0) - p_0 \frac{(x - x_0)^2}{2} - p'_0 \frac{(x - x_0)^3}{6} - \dots,$$

kus  $x$  on funktsioonide  $Q$  ja  $M$  argument;  $x_0$  — vaadeldava pidevuspiirkonna alguspunkti koordinaat; konstantsed korradajad  $M_0$ ,  $Q_0$ ,  $p_0$ ,  $p'_0$ ,  $p''_0$ , ... on paindemomendi, põikjõu, lauskoormuse ja selle tuletiste arväärtused piirkonna alguses, mis kannavad nimetust *algparameetrid* ja millest tuleneb ka arvutusmeetodi nimetus.

Sisejõudude avaldamine ridadena on otstarbekas nendes ülesannetes, kus lauskoormus või selle tuletised alates teatavast järgust võrduvad nulliga ja read (8.10) kujunevad lõplikeks, väljendades sisejõudude avaldise täpselt. Sisejõudude avaldise lõplike ridadena on hõlpsalt välja kirjutada, kui teame sisejõudude väärtusi, lauskoormuse intensiivsust ja selle tuletisi piirkonna alguses. Enamik praktilisi ülesandeid rahuldavad neid tingimusi.

Algparameetrite meetodiga alustame sisejõudude avaldise väljakirjutamist ja epüüride ehitamist tala otsast pidevuspiirkondade järjekorras. Iga piirkonnale saame algparameetrid  $p_0$ ,  $p'_0$ ,  $p''_0$ , ... arvutusskeemist, algparameetrid  $Q_0$  ja  $M_0$  avalduvad järgmiselt:

$$Q_0 = Q_L - F; \quad M_0 = M_L + \mathfrak{M}, \quad (8.11)$$

kus  $Q_L$  ja  $M_L$  on põikjõud ja paindemoment eelmise piirkonna lõpus,  $F$  ja  $\mathfrak{M}$  — piirkondade piiril rakendatud koondjõud ja -moment. Tala otsal, millest algame epüüride ehitamist,  $Q_L = M_L = 0$ .

Tala sisejõudude määramisel peame silmas, et lauskoor-

museta piirkonnas ( $p=0$ ) põikjõud ei muutu ( $Q=const$ ) ja paindemoment muutub lineaarselt. Ühtlase lauskoormusega piirkonnas ( $p=const$ ) muutub põikjõud lineaarselt ja paindemoment ruutparabooli kõvera järgi. Lineaarselt muutuva intensiivsusega lauskoormuse piirkonnas põikjõud muutub ruutparabooli, paindemoment kuupparabooli järgi. Need lihtsad vahekorrad on mõistetavad, kui peame silmas ühelt poolt sisejõudude ja lauskoormuse diferentsiaalseid (8.6) ja teiselt poolt astmefunktsioonide järgu alanemist diferentseerimisel. Samadele järeldustele jõuame seoste (8.10) vaatlemisel.

## 9. PINGED PAINDEL

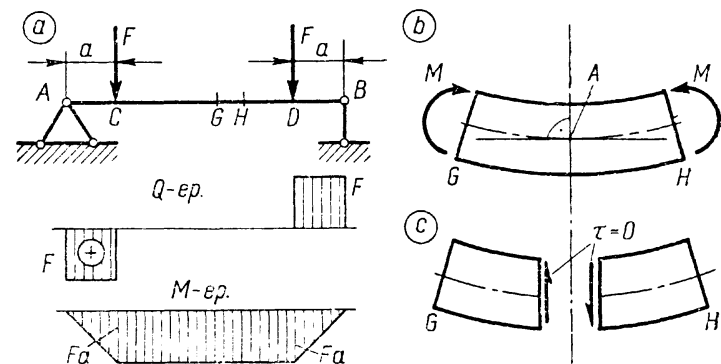
### 9.1. PUHAS PAINE

**9.1.1. Pinguse ja deformatsiooni põhitunnused.** Vaatleme telgsümmeetrilise ristlõikega ühtlast ja sirget varrast, mis on allutatud *puhtale tasandpainele*. Et põikjõud talas puudub ( $Q=0$ ), siis seostes 8.6 näeme, et  $M=const$  ja  $p=0$ .

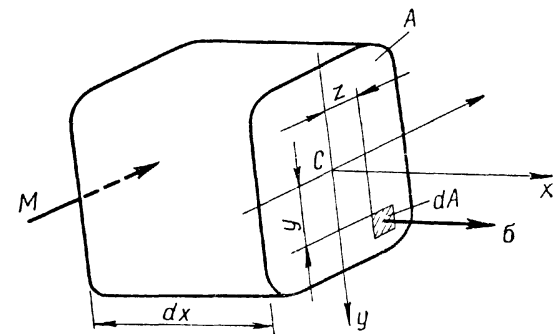
Puhta tasandpaine mõjul kõverdub varras ühtlaselt ja tema telg kujuneb konstantse kõverusega jooneks, see tähendab ringi kaareks. Eraldame talast kahe ristlõikega meelevaldse lõpliku elemendi  $GH$  (joonis 9.1, *a*) ja vaatleme seda elementi eraldi seisvana joonisel 9.1, *b*. See element on sümmeetriline oma keskkoha ristlõikepinna  $A$  suhtes. Järelikult asetseb ristlõikepind  $A$  elemendi sümmeetriatasandis ja ei saa seepärast kõverduda ega kalduda varda telje suhtes. Sellega oleme tõestanud, et *puhtal paindel peab Bernoulli hüpotees täpselt samuti paika* nagu tõmbel, survel ja ümarvarda väändelgi.

Vaadeldud sümmeetriast teeme veel teise järelduse: *puhtal paindel puuduvad varda ristlõikepinnas nihkepinged*. Selles võime veenduda, kui joonisel 9.1, *b* kujutatud sümmeetrilise elemendi lõikame lahti mööda pinda  $A$  ja oletame, et tekkinud lõikepindadel mõjuvad nihkepinged (joonis 9.1, *c*). Oletatud nihkepinged kujundaksid aga lubamatu ebasümmeetria ja järelikult neid seal ei saa esineda. Nihkepingete paarsusseadus kinnitab nende puudumist ka pikilõikepindadel.

Kolmandaks järelduseks on *normaalpingete puudumine varda pikilõikepindadel*, mis leiab kinnitust, kui eraldame vardast kahe rist- ja ühe pikilõikega elemendi ja uurime selle tasakaalu eeltoodud tingimustes. Nende pingete ainuke-



Joon. 9.1



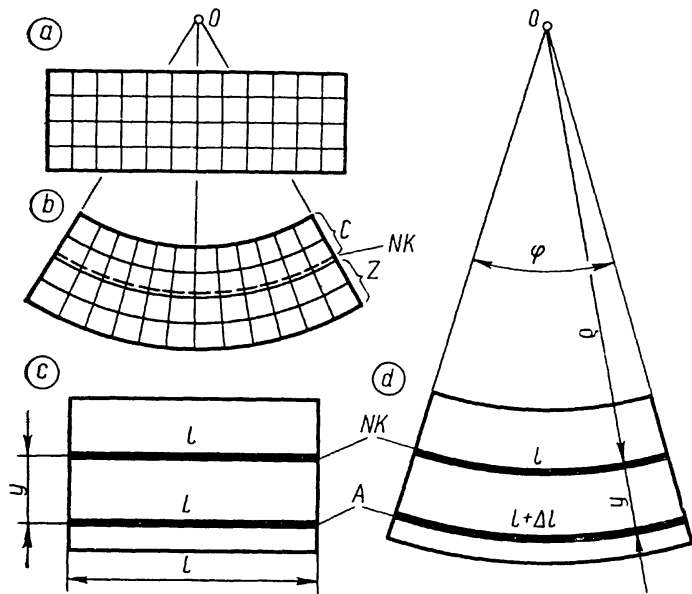
Joon. 9.2

seks põhjustajaks võiks olla koormus tala välispinnal, mis aga puhtal paindel puudub.

*Puhtal paindel esineb vardas joonpingus peapingega ristlõikepinnal*. Erinevus joonpingusest tõmbel ja survel seisneb selles, et siin normaalpinged jagunevad ristlõikepinnal ebaühtlaselt.

**9.1.2. Tasakaalutingimused.** Vaatleme tasakaalus varrast, millele mõjub puhas paine momendiga  $M$ . Eraldame sellest vardast kahe ristlõikega elemendi, mida kujutame joonisel 9.2. Rakendame elemendi nähtamatul lõikepinnal momendi  $M$  ja nähtaval lõikepinnal normaalpinge  $\sigma$ , mis tuleneb sama suurest paindemomendist selles ristlõikes. Varda element peab olema tasakaalus ja rahuldama tingimusi

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & \int_F \sigma dA &= 0; \\ \sum \mathcal{M}_y &= 0; & \int_F z \sigma dA &= 0; \end{aligned} \quad (9.1)$$



Joon. 9.3

$$\sum M_z = 0; \quad M - \int_F y \sigma dA = 0.$$

Kolm ülejäänud tasakaalutingimust ei tule arvesse. Võrrandid (9.1) võime saada ka ristlõikepinnas mõjuvate elementaarsisejõudude ja nende peavektori ning -momendi komponentide vahelistest seostest (1.2). Tasakaaluvõrrandid on tarvilikud, kuid mitte piisavad puhta painde ülesande lahendamiseks, kuna neid võivad rahuldada mitmed lahendid erinevate normaalpingetega ristlõikes. Nii nagu väändel, peame ka siin vaatlema veel deformatsioonide jagunemist ristlõikes, et kindlaks teha vajalik lisatingimus.

**9.1.3. Deformatsioonitingimus.** Varras kõverdub ja sellega kaasneb tasandiliste ristlõikepindade pöördumine üksteise suhtes (joonis 9.3, a ja b). Seejuures mis tahes kahe ristlõikepinna tasandid lõikuvad ühel ja samal sirgel, mille järgl paindetasandil on tuntud kõveruskeskpunktina  $O$ . Vardas märgitud pikisuunalised sirglõigud kõverduvad kontsentriiliste ringjoonte kaarteks keskmega punktis  $O$ . Vardas ettekujutatavad õhukesed, paindetasandiga risti asetsevad pikikihid nõrgusal poolel lühenevad ja moodustavad tala *survetsooni* ( $C$ ), kumeral poolel pikenevad ja moodustavad *tõm-*

*betsooni* ( $Z$ ). Nende kahe tsooni piirikihti, mis ei pikene ega lühene, nimetatakse *neutraalkihiks* ( $NK$ ).

Joonisel 9.3, c on kujutatud varda osa pikkusel  $l$ . Sama osa deformeerunud seisundis on kujutatud joonisel 9.3, d, kus otsaristlõigete omavaheline pöördenurk  $\varphi$  määrab kõveruskeskpunkti  $O$ . Neutraalkihi ( $NK$ ) kauguse  $\rho$  punktist  $O$  määrame tingimusest, et selle kihi pikkus kõverdumisel ei muutu ja võrdub elemendi esialgse pikkusega  $l$ . Järelikult neutraalkihi kõverusraadius

$$\rho = \frac{l}{\varphi}.$$

Olgu meelevaldselt valitud kihi  $A$  asukoht määratud kaugusega  $y$  neutraalkihist. Selle kihi esialgne pikkus oli  $l$ , pärast deformeerumist  $l + \Delta l$ . Võttes arvesse, et  $l = \rho\varphi$  ja  $l + \Delta l = (\rho + y)\varphi$ , saame vaadeldava kihi pikeneduse

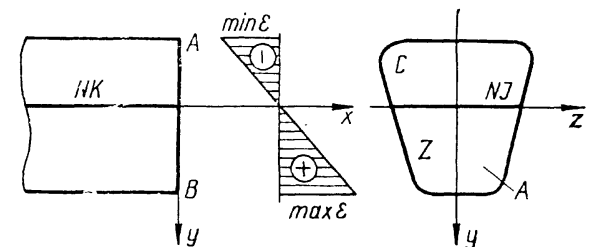
$$\Delta l = y\varphi$$

ja suhtelise pikeneduse

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{\rho}. \quad (9.2)$$

Sellest seosest näeme, et puhtal paindel suurus  $\varepsilon$  muutub varda ristlõikes lineaarselt, vahetades märki neutraalkihis. Ekstreemväärtused esinevad äärmistes kihtides  $A$  ja  $B$ , mis asetsevad kõige kaugemal neutraalkihist  $NK$  (joonis 9.4). Varda neutraalkihi jälge ristlõikepinnal  $A$  nimetame *neutraaljooneks*  $NJ$ , mis jaotab selle pinna tõmbetsooniks  $Z$  ja survetsooniks  $C$ . Teljestiku paigaldame ristlõikepinnas nii, et  $z$ -telg ühtiks neutraaljoonega.

Seoses (9.2) asendame suuruse  $1/\rho$  neutraalkihi kõverusega  $K$ . Seejuures peame silmas, et kõverus on märgiga suurus ja osutub meie teljestikus positiivsete  $y$  ja  $\varepsilon$  väärtuste puhul negatiivseks. Järelikult avaldub seos neutraalkihi kõve-



Joon. 9.4

ruse kaudu järgmisel kujul:

$$\varepsilon = -Ky. \quad (9.3)$$

Seda seost kasutame deformatsioonitingimusena paindeülesande edaspidisel lahendamisel.

**9.1.4. Painde põhivalem.** Seosest (9.3) saame *Hooke'i* seaduse põhjal avaldada normaalpinge ristlõikes:

$$\sigma = E\varepsilon = -EKy. \quad (9.4)$$

Seos annab meile normaalpingete jagunemise seaduspärase ristlõikepinnal. Näeme, et normaalpinged jagunevad samuti lineaarselt nagu suhtelised normaaldeformatsioonidki. Seda joont ristlõikepinnal, millel normaalpinged võrduvad nulliga, nimetame *nulljooneks* (ühtib neutraaljoonega).

Asendades tasakaaluvõrrandites (9.1) normaalpinged avaldisega (9.4), saame:

$$EK \int_A y \, dA = 0; \quad EK \int_A yz \, dA = 0; \quad M + EK \int_A y^2 \, dA = 0,$$

kus integraalidest esimene on varda ristlõikepinna staatiline moment  $S_z$ , teine tsentrifugaalmoment  $I_{yz}$  ja kolmas inertsimoment  $I_z$ . Asendame need suurused ja avaldame kolmandast võrrandist varda neutraalkihi kõveruse, millele lisame esimesest ja teisest võrrandist saadavad tingimused:

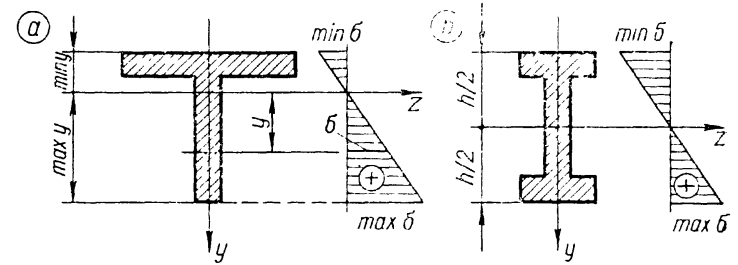
$$K = -\frac{M}{EI_z}; \quad (9.5)$$

$$S_z = 0; \quad I_{yz} = 0.$$

See valem on tuntud *painde põhivalem*ina, mille juurde kuuluvad kolm lisatingimust. Kaks nendest on toodud valemi juures, kolmas nõuab, et *y*-telg peab olema ristlõikepinnale *sümmeetriateljeks* (vt. jaot. 8.1 ja 9.1.1). Kõik kolm tingimust võime kokku võtta üheks nõudeks: *y* ja *z* peavad olema varda sümmeetrilise ristlõikepinna keskpeateljed. Järelikult  $I_z$  on ristlõikepinna peainertsimoment.

Painde põhivalemis on  $EI_z$  *paindejäikus*, mille mõõtühikuks on jõu- ja pinnauhiku korrutis ( $N \cdot m^2$ ). Märkimist väärib valem (9.5) sarnasus valemitega (2.8) ja (6.11), mis esitavad põhideformatsioone tõmbel, survel ja väändel. Painde põhivalem annab peamise deformatsioonina varda neutraalkihi kõveruse, mida edaspidi vaatleme tala *telje* ehk *elastse joone kõverusena*.

**9.1.5. Normaalpinged ristlõikes** avaldame valemiga (9.4), asendades selles varda telje kõverusega  $K$  oma avaldisega (9.5):



Joon. 9.5

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y. \quad (9.6)$$

Sellele valemile vastavat normaalpinge lineaarset muutumist ristlõikes kujutame joonisel 9.5. Varda äärmistes kihtides mõjuvad suurimad tõmbe- ja survepinged, mille absoluutväärtused üldjuhul erinevad (joonis 9.5, a): Kui paindemomendi väärtus on positiivne, siis

$$\max \sigma = \frac{M}{I_z} \max y, \quad \min \sigma = \frac{M}{I_z} \min y. \quad (9.7)$$

Absoluutselt suurim normaalpinge mõjub *z*-teljest (nulljoonest) kõige kaugema(te)s punkti(de)s:

$$\max |\sigma| = \frac{M}{I_z} \max |y|,$$

kus suhe  $I_z / \max |y|$  on *tugevusmoment* *z*-telje suhtes

$$W_z = \frac{I_z}{\max |y|}, \quad (9.8)$$

mille abil arvutame suurima normaalpinge paindel:

$$\max \sigma = \frac{M}{W_z}. \quad (9.9)$$

Kahe ristuva sümmeetriateljega ristlõikepinnal, mille kõrgus on  $h$ , saame  $\max y = h/2$  (joonis 9.5, b). Sel juhul suurim tõmbepepinge on võrdne suurima survepingega ja nad avalduvad valemiga (9.9), kus

$$W_z = \frac{2I_z}{h}. \quad (9.10)$$

Tugevusmoment on varda ristlõikepinna tunnussuurus

dimensiooniga  $L^3$  ( $m^3$ ,  $cm^3$  jt.). Lihtsate kujundite tugevusemomendid arvutame üldtuntud valemitega, mis on saadavad jaotisest 7 tuntud inertsimomentide valemite seosega (9.10).

Ristkülik

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad W_z = \frac{bh^2}{6}. \quad (9.11)$$

Ring

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad W_z = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (9.12)$$

Paksu seinaga toru

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} (1 - \alpha^4); \quad W_z = \frac{\pi d^3}{32} (1 - \alpha^4). \quad (9.13)$$

Õhukese seinaga toru

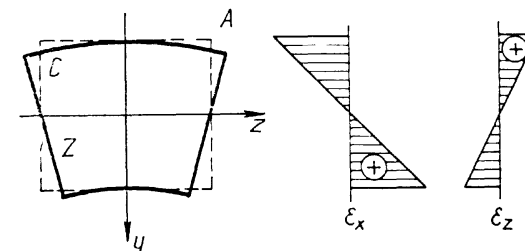
$$I_z = \frac{\pi}{8} d^3 \delta (1 - \beta)^3; \quad W_z = \frac{\pi}{4} d^2 \delta (1 - \beta)^3. \quad (9.14)$$

Valemite (9.11...14) näeme, et tala paindejäikus ( $EI_z$ ) on võrdeline ristlõike lineaarmõõtmete neljanda astmega, tugevus ( $W_z$ ) aga kolmanda astmega. Siit järeldame, et *paindejäikus ja -tugevus pole lineaarses sõltuvuses*.

Standardsete profiilide tugevusemomendid saame standardite juurde kuuluvatest tabelitest, kus nad on esitatud koos muude tunnussuurustega. Liit- ja keerukate kujundite tugevusemomendid arvutame inertsimomentidest valemitega (9.8) ja (9.10).

**9.1.6. Pinged varda otsapiirkonnas ja põikdeformatsioon.** Käesolevas jaotises 9.1 esitatud valemite tuletamisel ei teinud me ühtki lihtsustust ja selles mõttes võime saadud lahendit lugeda täpseks. Seejuures jäi aga selgitamata välismomentide rakendamise viis varda otstel. Lahend säilitab oma kõrge täpsuse, kui välismomentide jõupaarid on rakendatud varda otspindadel nii, et nende intensiivsus jaguneb samuti nagu normaalpinged ristlõikes. Enamasti pole see tingimus praktikas täidetud ja sel juhul tekib varda otstes ja nende lähedal pingete kõrvalekaldumist meie lahendist. *Saint-Venant'i* printsiip lubab aga vaadelda saadud lahendit küllalt täpsena varda nendes osades, mis on otstest kaugemal ristlõikepinna suurima mõõtme võrra.

Vaatleme painduvas vardas põiksuunalist deformatsiooni  $z$ -telje sihis, mille tähistame  $\epsilon_z$ . Varras on joonpinguses ja seepärast põikdeformatsioon  $\epsilon_z = -\nu \epsilon_x$ , kus  $\epsilon_x$  on pikideformatsioon ja  $\nu$  — *Poissoni* tegur. Avaldame põikdeformatsi-



Joon. 9.6

ooni seose (9.3) kaudu, milles kõveruse  $K$  asendame painde põhivalemist (9.5):

$$\epsilon_z = -\frac{\nu M}{EI_z} y. \quad (9.15)$$

Joonisel 9.6 kujutame põikdeformatsiooni  $\epsilon_z$  ristkülikulisel ristlõikel, mille deformeerumata kuju on näidatud kriips-, deformeerunud kuju aga pidevjoonega. Survetsoon  $C$  pakeneb ja tõmbetsoon  $Z$  õheneb, millega kaasneb ristlõikepinna kõverdumine nii, et survetsoon muutub kumeraks ja tõmbetsoon nõgusaks. Ristlõikepinna keskjoon  $z$ -telje sihil saab kõveruse  $K_z$ , mis võrreldes varda telje kõverusega  $K_x$  on vastasmärgiline ja  $\nu$ -kordne:

$$K_z = -\nu K_x. \quad (9.16)$$

## 9.2. PÕIKPAINE

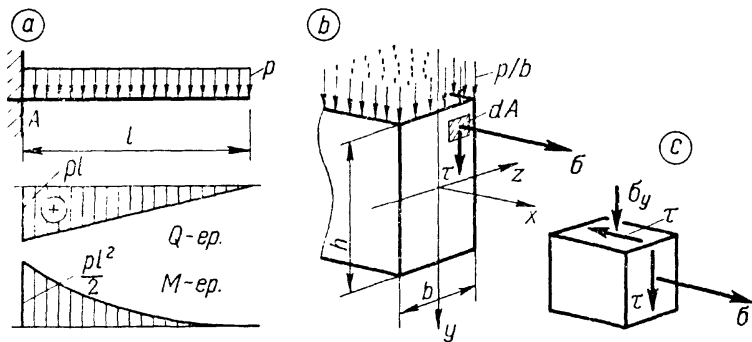
**9.2.1. Pinged põikpainedel.** *Põikpaine on varda tööseisund, mille puhul paindemomentidele lisandub põikjõud* (joonis 9.7, a). Ristkülikulises ristlõikepinnas ilmub normaalpinge kõrvale nihkepinge  $\tau$ , mille kutsuvad esile põikjõud (joonis 9.7, b):

$$M = \int_A y \sigma dA; \quad Q = \int_A \tau dA. \quad (9.17)$$

Paarsusseaduse põhjal mõjub sama suur nihkepinge ka varda pikilõikepinnas, mis on risti  $y$ -teljega (joonis 9.7, c). Kui põikjõud on muutuva suurusega, siis kutsuvad ta pikilõikepinnas esile veel normaalpinge  $\sigma_y$ , mis joonisel vaadeldava varda pealispinna lähedal võrdub lauskoormuse intensiivsusega  $p/b$  ja kahaneb nullini lõikepinna liginedes alumisele pinnale. Järelikult põikpainedel esineb tasandpingus, mis on vaadeldav paindetasandil.

Põikjõust tulenevad pinged  $\tau$  ja  $\sigma_y$  on väiksed võrreldes





Joon. 9.7

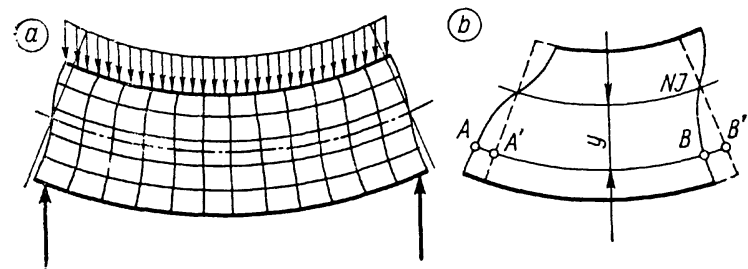
pingega  $\sigma$  paindemomendist. Harilikudel taladel, mille pikkus ületab kõrguse umbes kümnekordselt, on nihkepinged  $\tau$  ühe suurusjärgu ja põiksuunalised normaalpinged  $\sigma_y$  kahe järgu võrra väiksemad ristlõike normaalpingetest  $\sigma$ .

Tugevusõpetuses vaatleme suhteliselt pikkade varraste, millel  $l/h > 5$ , põikpainet ja loobume põiksuunaliste normaalpingete  $\sigma_y$  vaatlemisest nende väiksuse tõttu. Peamist tähelepanu pöörame kõige tähtsamale neist, normaalpingete ristlõikes. Sageli tuleb arvestada ka nihkepinget, mis on eriti oluline suurtes, paljudest elementidest kokkupandud nn. *liit-talades*.

**9.2.2. Ristlõikepinna kõverdamine.** Pingega  $\tau$  kaasneb deformatsioon, mis väljendub nihkenurgaga  $\gamma$ . Puhta painde deformatsioonile normaalpingest  $\sigma$  lisandub ristlõikepindade kaldumine telje suhtes ja kõverdamine ebaühtlasest nihkepingest. Joonisel 9.8, a on kujutatud niisuguseid nihkeid ühtlaselt jaotatud koormusega lihttalas.

Eelmises jaotises märkisime, et nihkepinged küllalt pikkade talade ristlõigetel on palju väiksemad normaalpingetest. Järelikult on ka nihkenurgad väiksed võrreldes suhteliste normaaldeformatsioonidega. Seepärast võime öelda, et ristlõikepindade kõverdamine võrreldes varda telje kõverdamisega on väike ja ei avalda olulist mõju varda üldisele deformatsiooniseisundile.

Ristlõikepindade tagasihoidliku kõverdamise mõju normaalpingetele vähendab veel see asjaolu, et kahe lähedase pinna enamvähem ühetaoline kõverdamine ei mõjuta varda kihtide pikenemist. Kui vardas põikjõud on konstantne, siis kõik ristlõikepinnad kõverduvad võrdselt ja ei mõjuta üldse



Joon. 9.8

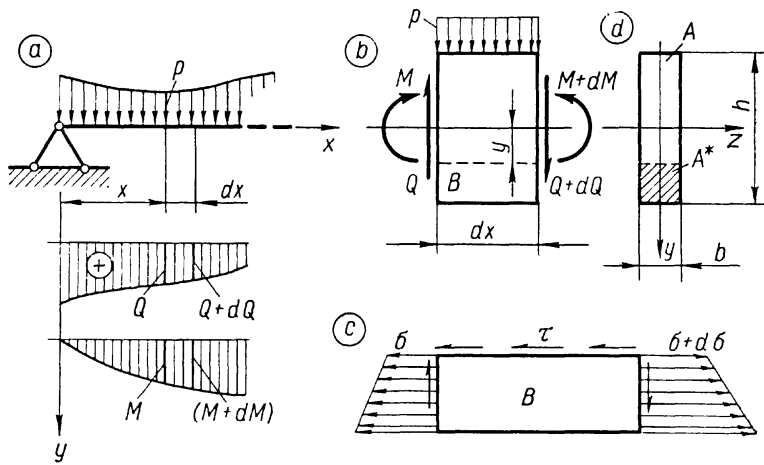
normaalpingeid ristlõikes. Seda kinnitab joonisel 9.8, b kujutatud deformatsioon, kust on näha, et varda kihi  $AB$  pikkus võrdselt kõverdunud ( $AA' = BB'$ ) ristlõikepindade vahel on sama, mis ta oleks kõverdamata pindade vahel  $A'B'$ .

Esitatud kaalutlused lubavad ka põikpainel lugeda tinglikult kehtivaks *Bernoulli* hüpoteesi talade ja varraste jaoks, millel  $l/h > 5$ . Selle hüpoteesiga kõrvaldame põikjõu mõju tala deformatsioonile ja normaalpingete jagunemisele ristlõikes. Ühtlasi tunnistame põikpainel kehtivaks kõik puhta painde seosed ja arvutusvalemid. Võrreldes puhta paindega ( $M = \text{const}$ ) on põikpainde eripäraks piki tala muutuv paindemoment  $M = M(x)$ , millega kaasneb telje kõverusraadiuse  $\rho$ , kõveruse  $K$ , suhtelise normaaldeformatsiooni  $\epsilon$  ja normaalpinge  $\sigma$  samalaadne muutumine.

**9.2.3. Nihkepinged** paindel võime ligikaudselt määrata teisest seosest (9.17), kui lisame sellele mingi oletuse pingete jagunemisest ristlõikes. Kõige lihtsamalt avaldub nihkepinge, kui eeldame selle ühtlast jagunemist:

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (9.18)$$

See nn. *keskmine nihkepinge* leiab tänapäeval kasutamist mitmesugustes lõikele töötavates liidetes, mida vaatleme viiendas jaotises. Mõõdunud sajandi viiekümnendate aastateni kasutati valemit (9.18) ka nihkepingete määramisel põikpaindega töötavates talades. Selle valemi puuduseks on nihkepingete määramise liiga väike täpsus, mis andis ennast halvasti tunda suurte talade projekteerimisel. Aastal 1850 lahendas *D. I. Zjuravski* nihkepingete küsimuse paindel. See lahendus, olgugi elastsusteooria seisukohalt ligikaudne, annab inseneripraktika jaoks küllalt täpsed tulemused ja leiab üldist kasutamist tugevusõpetuses ja ehituskonstruksioonide arvutamisel.



Joon. 9.9

Vaatleme ristkülikulise ristlõikepinnaga tala põikpaineit töö seisundis. Osa talast on kujutatud koos sisejõudude epüüridega joonisel 9.9, a. Eraldame talast kohas  $x$  kahe teineteise lähedase ristlõikega elementaarlõigu pikkusega  $dx$  ja rakendame sellele sise- ja välisjõud (joonis 9.9, b). Ristlõikes mõjuva nihkepinge asemel määrame pinge pikilõikepinnas. Teeme tala elemendis lõike pikisuunas kaugusel  $y$  neutraalkihist ja kujutame eraldatud osa  $B$  joonisel 9.9, c. Koostame tasakaalutingimuse:

$$\sum X=0; \quad -\int_{A^*} \sigma dA + \int_{A^*} (\sigma + d\sigma) dA - \tau b dx = 0.$$

Asendame tasakaaluvõrrandis normaalpinged oma avaldistega valemi (9.6) abil ja summeerime integreeritavad funktsioonid:

$$\int_{A^*} \frac{dM}{I_z} y^* dA - \tau b dx = 0,$$

kus  $y^*$  on vaadeldava osa  $B$  otspinna  $A^*$  mis tahes punkti koordinaat, mis võib muutuda piirides  $y \leq y^* \leq h/2$  ja  $I_z$  on tala ristlõikepinna  $A$  inertsimoment  $z$ -telje suhtes (joonis 9.9, d). Jagatise  $dM/I_z$  võime tuua välja integraali märgi alt, sest see suurus on konstantne integreerimisel pinnas  $A^*$ . Tähistame integraali

$$S_z^* = \int_{A^*} y^* dA, \quad (9.19)$$

mis on ristlõikepinna osa  $A^*$  staatiline moment  $z$ -telje suhtes ja saame tasakaaluvõrrandi järgmisel kujul:

$$\frac{dM S_z^*}{I_z} - \tau b dx = 0.$$

Sellest võrrandist avaldame otsitava nihkepinge, kus suhe  $dM/dx$  on paindemomendi tuletis tala telje järgi ja võrdub põikjõuga  $Q$ :

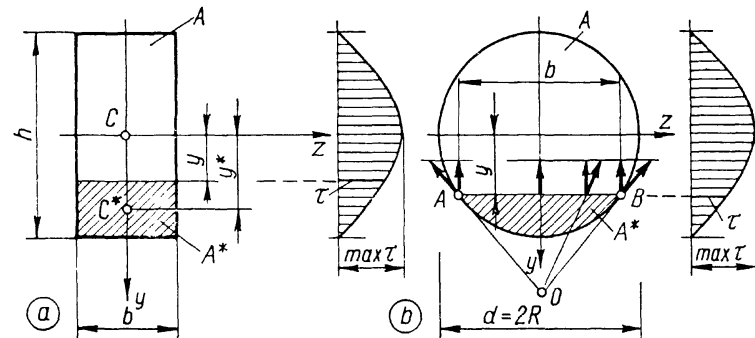
$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b}. \quad (9.20)$$

Saadud valemiga võime arvutada nihkepinge varda pikipinnas ja paarsusseaduse järgi ka ristlõikes. Nihkepinge sõltuvus vaadeldava punkti koordinaadist  $y$  väljendub staatilise momendi  $S_z^*$  kaudu. Mis tahes punkti jaoks ristlõikepinnas ( $-h/2 < y < h/2$ ), saame joonise 9.10, a põhjal

$$\begin{aligned} S_z^* &= A^* y_c^* = \left(\frac{h}{2} - y\right) b \left[ y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right) \right] = \\ &= \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \end{aligned} \quad (9.21)$$

mis inertsimomendiga  $I_z = bh^3/12$  annab:

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (9.22)$$



Joon. 9.10

Avaldisest näeme, et nihkepinge jaguneb ristlõikes ruutparabooli kõvera järgi. Suurim nihkepinge mõjub ristlõikepinna nulljoonel, kus  $y=0$ :

$$\max \tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A}. \quad (9.23)$$

Valemist nähtub, et pinge väärtus ristlõike keskkohal ületab poolteisekordselt keskmise väärtuse  $Q/A$ .

Valemiga (9.20) hindame nihkepingeid ligikaudselt ka nendes varrestes, mille ristlõige pole ristkülik, vaid mingi teistsugune sümmeetriline kujund. Joonisel 9.10, *b* kujutame ümarristlõiget, milles nihkepingete arvutamisel

$$S^* = \frac{2}{3} \sqrt{(R^2 - y^2)^3}, \quad b = 2\sqrt{R^2 - y^2}.$$

Võttes arvesse, et  $I_z = \pi d^4/64$ , saame

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{A} \left[ 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right], \quad (9.24)$$

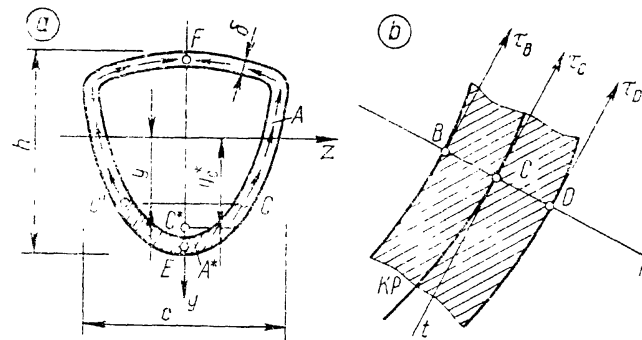
millest suurim nihkepinge nulljoonel, kus  $y=0$ , avaldub

$$\max \tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{A}. \quad (9.25)$$

Valemiga (9.24) määratud pinget vaatleme  $y$ -telje sihilise komponendina. Resultantpinge jaoks oletame, et ta on suunatud poolusesse  $O$ , mis on määratud punktidest  $A$  ja  $B$  joonestatud puutujate lõikepunktina. Selle oletuse aluseks on jaotises 6.4.1 seatud nõue, mille järgi nihkepinge ristlõikepinna äärel võib mõjuda ainult kontuuri puutuja sihis. Tehtud oletus on täpne ristlõike kontuuril ja  $y$ -teljel, mujal annab ta aga pinge suuna ligikaudselt.

**9.2.4. Nihkepinge õhukeseseinalises profiilvardas** on suhteliselt suurem kui massiivses vardas, mida vaatlesime eelmises jaotises. Kui õhukeseseinaline varras on küllalt pikk ( $l/h > 5$ ) ja tema ristlõikepinna kaju paindel oluliselt ei muutu, siis nihkepinged on määratavad valemiga (9.20). Siia hulka kuulub enamik ehituses ja masinaehituses kasutatavatest standardprofiilidest.

Joonisel 9.11, *a* on kujutatud õhukeseseinalise varda ristlõige, mille iseloomulik tunnus on väike seinapaksus  $\delta$  võrreldes varda mõõtmetega  $c$ ,  $h$  ja  $l$  (varda pikkus). Joonisel 9.11, *b* on kujutatud ristlõikepinna väikest osa punkti  $C$  ümbert, millel vaatleme kolme punkti  $B$ ,  $C$  ja  $D$ . Jaotises 6.4.1 näitasime, et ristlõikepinna äärel asetsevates punktides  $B$  ja  $D$  mõjuvad nihkepinged  $\tau_B$  ja  $\tau_D$  kontuuri puutu-



Joon. 9.11

jate sihis. Pidades silmas *Bernoulli* hüpoteesi, võime oletada, et  $\tau_B = \tau_C = \tau_D$ , kuna varda ristlõikepinna  $A$  kolmes üksteisele lähedases punktis pinged võivad erineda ainult väikeste suuruste võrra.

Sümmeetriast järeldame, et nihkepingete pilt ristlõikepinnal peab olema sümmeetriline  $y$ -telje suhtes. Joonisel 9.11, *a* on näidatud nihkepinged vaadeldaval ristlõikepinnal, kus sümmeetriateljel asetsevates punktides  $E$  ja  $F$  peavad pinged võrduma nulliga. Sümmeetriliselt asetsevates punktides  $C$  ja  $C'$  avalduvad nihkepinged valemiga (9.20), milles suurus  $S_z^*$  on viirutatud pinna  $A^*$  staatiline moment  $z$ -telje suhtes:

$$S_z^* = \int_{A^*} y \, dA = A^* y_c^*; \quad b = 2\delta.$$

Joonisel 9.12, *a* on ümara toru ristlõige, millel on näidatud nihkepingete kulg õhukeses seinas ja epüür. Suurimad nihkepinged punktides  $A$  ja  $B$ :

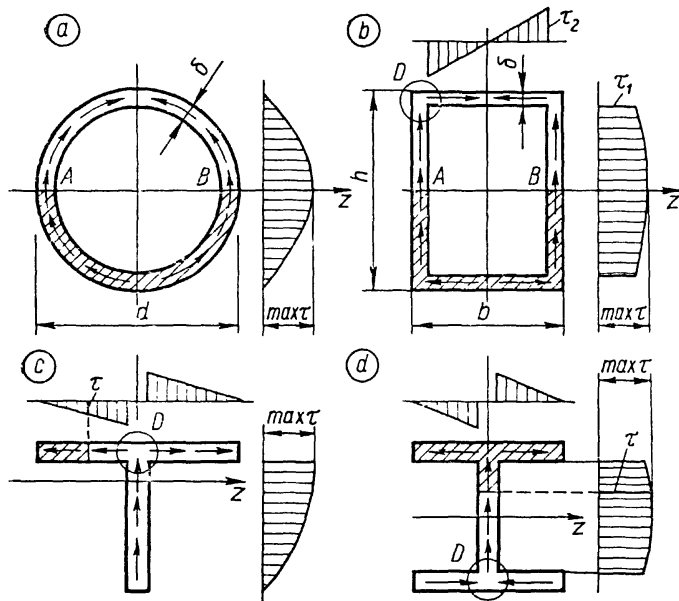
$$\max \tau = \frac{Q S_z^*}{I_z 2\delta} = \frac{2Q}{A}, \quad (9.26)$$

kus  $S_z^*$  on poole ristlõikepinna (viirutatud) staatiline moment  $z$ -telje suhtes:

$$S_z^* = \int_0^\pi \left( \frac{d-\delta}{2} \right)^2 \delta \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\delta}{2} (d-\delta)^2$$

ja inertsimoment on antud valemiga (7.25).

Joonisel 9.12, *b* on täisnurkse toru ristlõige nihkepinge



Joon. 9.12

suundade ja epüüridega. Pinge

$$\tau_1 = \frac{QS_{z(1)}^*}{I_z 2\delta},$$

kus

$$S_{z(1)}^* = b\delta \left( \frac{h}{2} - \frac{\delta}{2} \right).$$

Pinge  $\tau_2$  arvutame sama valemiga, kuid seejuures

$$S_{z(2)}^* = (b - 2\delta)\delta \left( \frac{h}{2} - \frac{\delta}{2} \right).$$

Suurimad nihkepinged punktides A ja B arvutame poole ristlõikepinna (viirutatud) staatilise momendiga  $z$ -telje suhtes.

Joonisel 9.12, c on näidatud nihkepinged T-kujulises ristlõikes. Nihkepinge

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z \delta},$$

kus  $S_z^*$  on viirutatud pinna staatiline moment. Joonisel 9.12, d on näidatud nihkepinged I-ristlõikes. Selles ristlõikes mõjuva suurima nihkepinge ligikaudseks arvutamiseks võime kasutada valemit

$$\max \tau = \frac{Q}{A_{vs}}, \quad (9.27)$$

kus  $A_{vs}$  on vertikaalseina ristlõikepindala. Selle valemi sisu saab mõistetakvaks, kui peame silmas, et vertikaalse põikjõu tasakaalustavad ainult vertikaalseinas mõjuvad nihkepinged, mis jagunevad peaaegu ühtlaselt. Valem (9.27) on edukalt kasutatav ka ristlõikele joonisel 9.12, b, kus pindalana  $A_{vs}$  tuleb arvestada kahe vertikaalseina summaarset pindala  $2\delta(h - 2\delta)$ . Valemi (9.27) järgi arvutatud suurima nihkepinge suhteline viga ei ületa 5...6%.

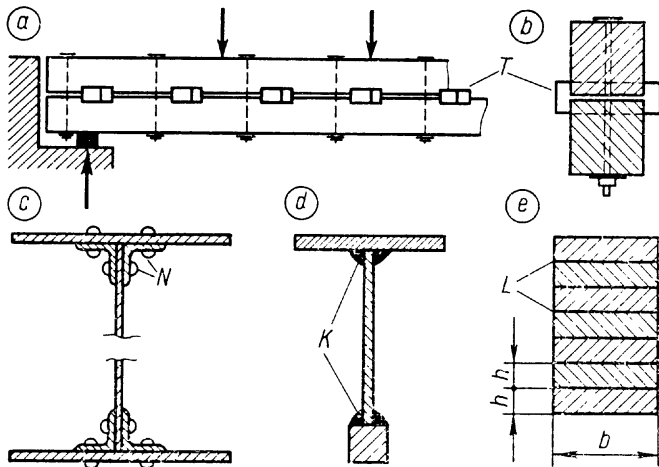
Standardsetes I-profiilides suurima nihkepinge arvutamiseks vajalik poole ristlõikepinna staatiline moment või siis inertsimomendi suhe selle suurusega antakse standardi juurde kuuluvas tabelis.

Joonisel 9.12, b, c ja d ringidega ümbritsetud piirkondades  $D$ , aga samuti neile sarnastes nurga- ja kaelapiirkondades ei saa nihkepingeid määrata valemiga (9.20). Enamasti pole nihkepinged nendes piirkondades ohtlikud, kui tala on valmistatud sitkest või plastsest materjalist. Hapra materjali puhul peitub nurgapiirkondades teatud oht. Pingeisundi uurimiseks nendes piirkondades tuleb rakendada elastsusteooria arvutusviise.

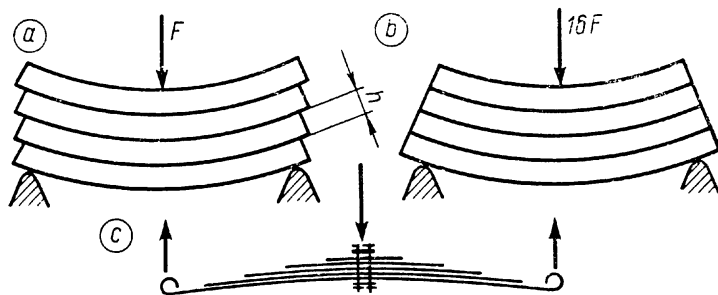
**9.2.5. Nihkejõud liittalas.** Liittala koosneb mitmest vardast, mis on omavahel tervikuks ühendatud. Joonisel 9.13 on kujutatud: a kahest puitprussist koostatud liittala, ühendatud tüüblite ( $T$ ) ja poltidega; b neetidega ( $N$ ) ühendatud lehtedest ja nurkterastest koosneva terastala ristlõige, c keevitatud ( $K$ ) tala ristlõige ja d liimitud ( $L$ ) puittala üheksast lauast. Kui liittala elemendid pole ühendatud, siis nende vahel puuduvad nihkepinged, mis mõjuksid harilikus (terviklikus) talas ja niisugune tala töötab põikpainele, nagu näidatud joonisel 9.14, a. Pidades seejuures silmas ristkülikulise ristlõikega tala  $n$  lauast, saame tugevus- ja inertsimomendi arvutada kõikide elementide momentide summana:

$$W_1 = n \frac{bh^2}{6}; \quad I_1 = n \frac{bh^3}{12}.$$

Liimides (või mõnel teisel viisil ühendades) üksikud elemendid ühtseks tervikuks, saame tala tugevus- ja inertsimomendi (joonisel 9.14, b)



Joon. 9.13



Joon. 9.14

$$W_2 = \frac{b(nh)^2}{6}; \quad I = \frac{b(nh)^3}{12}.$$

Suhted

$$\frac{W_2}{W_1} = n; \quad \frac{I_2}{I_1} = n^2$$

näitavad, et elementide nihkekindla ühendamisega oleme saavutanud tala  $n$ -kordse paindetugevuse ja  $n^2$ -kordse jäikuse ( $EI$ ) suurenemise.

Nagu näeme, mängivad nihkepingsed, vaatamata nende

suhtelisele väiksusele, konstruktsioonelementides väga tähtsat rolli. Nende esinemine või puudumine mõjutab suurel määral painduva elemendi tugevust ja jäikust. Lehtvedru (joonis 9.14, c) kujutab endast paindele töötavat teraslehtede paketti, milles lehed jäetakse nihkekindlalt ühendamata ja isegi määratakse nende kokkupuutepindu nihkejõudude vähendamiseks vedrulehtede vahel. Sellega saavutame väikese paindejäikuse ja hea vetruvuse. Kandekonstruktsioonides tuleb toimida vastupidi: ühendada kõik osad painduvas talas nihkekindlalt, et tõsta tugevust ja jäikust.

Liittalades mõjuvate nihkejõudude arvutamisel lähtume valemist (9.20), millest saame nihkejõu intensiivsuse  $t$ , korrutades nihkepingset lõikepinna laiusse  $b$ :

$$t = b\tau = \frac{QS_z^*}{I_z}. \quad (9.28)$$

Suuruse  $t$  mõõtühikuks on N/m ja ta kujutab endast nihkejõudu tala pikkusühiku kohta kahe elemendi vahel, mille ristlõikepindade staatilised momendid kogu ristlõike nulljoone ( $Z$ ) suhtes on  $S_z^*$ .

Nihkejõu  $T$  määramiseks tala piirkonnas  $a < x < b$  tuleb intensiivsust  $t$  integreerida tala telje järgi:

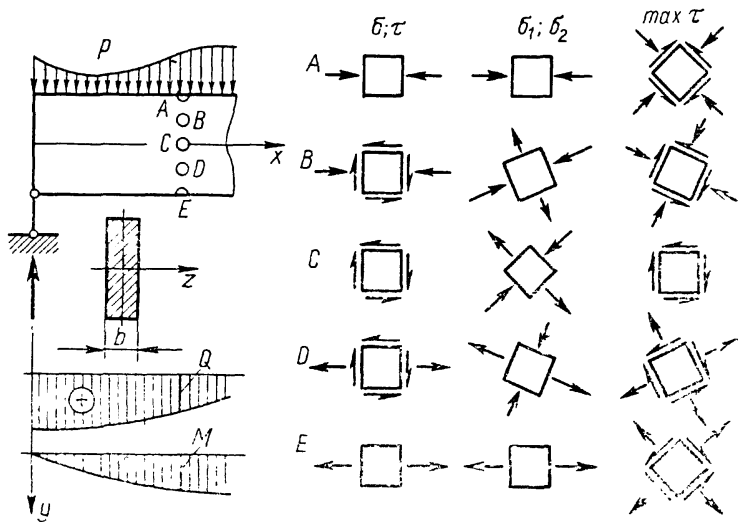
$$T = \int_a^b t \, dx = \frac{S_z^*}{I_z} \int_a^b Q \, dx = \frac{S_z^*}{I_z} \Omega_Q, \quad (9.29)$$

kus määratud integraal on põikjõu epüüri pindala  $\Omega_Q$  vaadeldava piirkonna ulatuses. Kui põikjõud vaadeldavas piirkonnas pikkusega  $c$  ei muutu ( $Q = \text{const}$ ) või muutub vähe, siis

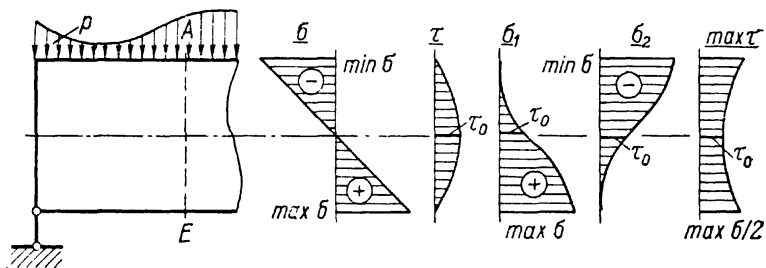
$$T = \frac{S_z^*}{I_z} Qc. \quad (9.30)$$

**9.2.6. Tala üldine pingeseisund.** Eespool selgitasime, et põikpaine põhjustab talas tasandpinguse. Pingus meelevaldses punktis on määratud pingetega  $\sigma$  ja  $\tau$ . Joonisel 9.15 kujutame osa talast punktidega  $A, B, C, D$  ja  $E$  ristlõikest, kus mõjuvad sisejõud  $Q$  ja  $M$ . Talaosa kõrval kujutame vaadeldavatest punktidest  $xyz$ -teljestiku koordinaatpindadega välja lõigatud elementaarristtahukaid, mille tahkudel on näidatud pinged  $\sigma$  ja  $\tau$ . Nende pingete epüürid on esitatud joonisel 9.16.

Pingust punktis iseloomustame peapingetega  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , mis on määratud valemiga (4.12). Et talas  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = \tau$  ja  $\sigma_y = 0$ , siis avalduvad peapinged selle valemiga järgmisel



Joon. 9.15



Joon. 9.16

kujul:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (9.31)$$

Peapinnad määrame valemiga (4.15):

$$\tan 2\alpha_{1(2)} = \frac{2\tau}{\sigma}. \quad (9.32)$$

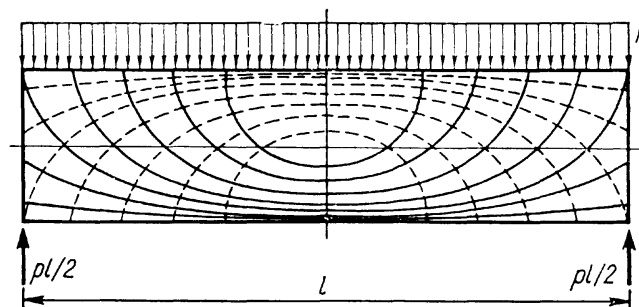
Punktides A ja E saame joonpinguse peapingetega vastavalt  $\sigma_2 = \min \sigma$  ( $\sigma_1 = 0$ ) ja  $\sigma_1 = \max \sigma$  ( $\sigma_2 = 0$ ). Punktis C

esineb puhas nihe peapingetega  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_0$ . Punktides B ja D on tasandpingus, mida iseloomustab peapingete vastasmärgilisus. Joonisel 9.15 kujutame vaadeldud punktide peapindadega välja lõigatud elementaarristtahukad peapingetega. Joonisel 9.16 on näidatud peapingete epüürid. Samadel joonistel kujutame ka valemiga (4.22) määratud suurimad nihkepinged

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (9.33)$$

Nagu selgub analüüsist, mõjuvad suurimad surve- ja tõmbe pinged tala ristlõike äärepunktides (A ja E), kus esineb joonpingus. Järelikult tala ohtlik punkt põikpaindest on samasuguses lihtsas pingeseisundis nagu puhtal paindel, tõmbel ja survel. Erandeid võib ette tulla õhukeseseinalistes talades, kus ohtlikuks ei osutu punkt ristlõikepinna äärel, vaid sellest veidi eemal. Näiteks I-profiiliterasest suhteliselt lühikeses talas võib peapinge vertikaalseinas vöö vahetus läheduses ületada normaalpinget ristlõike äärepunktis. Seepärast õhukeseseinalistes ja inseneripraktika uudisloomingulistes talades on vajalik pingeolukorra põhjalikum uurimine.

**9.2.7. Peapingete trajektoorid.** Peapinge trajektoor on mõeldav joon, millele mis tahes punktis peapinge sihisirge on puutujaks. Põikpainele töötavas talas võime kujutada peapingete trajektoorid, mille tõusud on määratud valemiga (9.32). Joonisel 9.17 on näidatud need jooned ühtlasest lauskoormusest. Pidevjooned on tõmbe- ( $\sigma_1$ ) ja kriipsjooned survepingete ( $\sigma_2$ ) trajektoorid ehk kulgjooned. Neid iseloomustavad järgmised tunnused: peapingete tra-



Joon. 9.17

jektoolid lõikuvad üksteisega alati täisnurgi; lõikuvad tala teljega 45° nurga all; vaadeldavas talas lõikuvad sümmeetriateljega täisnurgi; trajektoori otspunktis, mis asetseb tala pealmisel või alumisel pinnal, on trajektoori puutuja risti selle pinnaga.

Peapingete trajektoolid võime talas konstrueerida mis tahes tugevate puhul ja mis tahes koormusest. Kui tala ristlõige pole ristkülik, siis kulgjooned kujunevad keerukamaks ja mõnel juhul moodustuvad ruumilised kõverad. Ohukeseinalistes talades tuleb peapingete trajektoore kujutada eraldi igas elemendis tema keskpinnal.

Peapingete trajektoolid annavad konstruktorile selge ettekujutuse sisejõudude toimest ja jagunemisest. See ettekujutus tõmbe ja surve kulgjoontest on põhilise tähtsusega talade konstrueerimisel *liitmaterjalidest*. *Raudbetoon-talade konstrueerimisel peetakse silmas tõmbepinge trajektoore terasvarraste optimaalse asetusploaniina*. Kui harilikust raudbetoonist ja väiksemates talades on lubatavad mõningad hälbed, siis suuremates *eelpingestatunud talades* seatakse terasvardad võimalikult täpsemalt tõmbepinge kulgjoontele.

Põhimõtteliselt samuti nagu raudbetoonitala, töötavad ka mis tahes *liitmaterjalidest* konstruktsioonielemendid. Kiudplastist vardale annab suure tõmbetugevuse kiudaine (näiteks klaaskiud), survejõu võtab aga endale kanda põhiaine (näiteks vaik).

### 9.3. PAINDETUGEIVUS

**9.3.1. Tugevustingimused.** Pingeseisundi analüüs nii puhtal kui ka põikpainedel näitab, et tala põhilises tugevustingimuses tuleb arvestada ohtlikus ristlõikes mõjuvat suurimat normaalpinget nulljoonest kõige kaugemas punktis, mis avaldub valemiga (9.9) ja ei tohi ületada lubatavat pinget:

$$\max \sigma = \frac{M_a}{W_z} \leq [\sigma], \quad (9.34)$$

kus  $M_a$  on *arvutuslik paindemoment*, milleks võtame absoluutselt suurima paindemomendi ja  $W_z$  on ristlõikepinna tugevusmoment.

Tingimusega (9.34) saame kontrollida antud varda või tala tugevust ja sellest võime avaldada ka vajaliku tugevusmomendi

$$W_z = \geq \frac{M_a}{[\sigma]}, \quad (9.35)$$

millest lähtudes kas konstrueerime vajaliku ristlõike või valime standardse ristlõike profiilide tabelist. Kui ristlõike kuhu on teada ja geomeetriliselt lihtne, siis taandub konstrueerimine varda iseloomuliku mõõtme arvutamisele. Näiteks ümarvarda jaoks võime tugevusmomendi valemist (9.12) avaldada läbimõõdu kohta tingimuse (9.35) järgmisel kujul:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M}{\pi[\sigma]}} \approx \sqrt[3]{\frac{10M}{[\sigma]}}. \quad (9.36)$$

Kahe mõõtmega määratud ristlõikepinna saame otsese arvutusega dimensioneerida, kui üks mõõtmetest on antud või on teada nende suhe ja tunneme ka tugevusmomendi valemist. Näiteks seosest (9.11) võime avaldada ristkülikulise ristlõike kõrguse  $h$ , kui laius  $b$  on antud, või ka mõlemad mõõtmed, teades suhet  $h/b$ . Valemist (9.13) ja (9.14) saame avaldada tingimused paksu- ja õhukeseinalise toru dimensioneerimiseks.

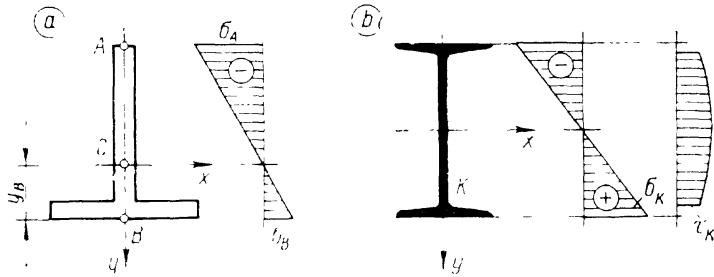
Mõnel juhul jääb tugevustingimus (9.34) põikpainedele töötava varda pingeseisundi kontrollimisel puudulikuks ja on vaja seada täiendavaid tingimusi. Haprast materjalist talas, mille ristlõige on  $z$ -telje suhtes ebasümmeetriline ja lubatavad pinged tõmbele ja survele erinevad, peame kontrollima pingeid kahes äärmises punktis. Joonisel 9.18, *a* on näidatud T-kujuline ristlõige, millel tugevustingimus (9.34) kontrollib survepinget punktis *A*. Punktis *B* mõjuvat suurimat tõmbepinget on vaja täiendavalt võrrelda lubatavaga, kusjuures selle pinge avaldame valemiga (9.6):

$$\max \sigma_B = \frac{M_a}{I_z} y_B \leq [\sigma]_z. \quad (9.37)$$

Sageli jäetakse ebasümmeetrilise ristlõike tugevusmoment kõrvale ja väljendatakse tugevustingimused mõlemas punktis (*A* ja *B*) võrrotusega (9.37).

Vardas, milles paindemoment vahetab märki (näiteks konsooli(de)ga talas), tuleb hapra materjali ja ebasümmeetrilise ristlõikepinna puhul täiendavalt kontrollida pingeid suurima vastasmärgilise paindemomendiga ristlõikes.

Suhteliselt lühikestes ja kitsa ristlõikepinnaga puittalades on vaja kontrollida suurimaid nihkepingeid pikikiudu. Tugevustingimuse saame valemist (9.20):



Joon. 9.18

$$\max \tau = \frac{Q_a S_z^*}{I_z b} \leq [\tau], \quad (9.38)$$

kus  $Q_a$  on *arvutuslik põikjõud*, milleks tuleb võtta suurima absoluutväärtusega põikjõud. Selles *ohtlikus ristlõikes* peame leidma *ohtliku punkti*, mille jaoks jagatis  $S_z^*/b$  osutub maksimaalseks. Lihtsate ristlõikepindade jaoks kasutame maksimaalse nihkepinge valemeid, näiteks prussi puhul (9.23) ja ümarpuidu jaoks (9.25).

Ka õhukeseseinalistes suhteliselt lühikestes talades kontrollime suurimaid nihkepingeid ristlõikes tugevustingimusega (9.38). Õhukeseseinalistes varrastes peab silmas pidama pingeseisundit nn. *kaelapunktides*, kus üks õhuke sein (näiteks I-profiili vertikaalsein) liitub teisega (vööga). Ristlõikes, milles mõjuvad koos suur põikjõud ja paindemoment (näiteks konsoolidega tala tugeedelähedased ristlõiked) võib kaelapunktides kujuneda ohtlik tasandpingus. Joonisel 9.18,  $b$  on kujutatud standardse I-profiiltala ristlõige normaal- ja nihkepinge epüüridega. Kaelapunktis  $K$  mõjub ristlõikepinnas normaalpinge  $\sigma_K$  ja nihkepinge  $\tau_K$ , mis üsna vähe on väiksemad suurimatest pingetest epüüridel. Haprast materjalist talas võib punktis  $K$  ohtlikuks kujuneda peatõmbepeinge, mis avaldub valemiga (9.31) ja peab rahuldama tugevustingimust

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_k}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{2}\right)^2 + \tau_k^2} \leq [\sigma]_z. \quad (9.39)$$

Plastsest materjalist talas on ohtlikuks suurim nihkepinge, mis võib põhjustada voolamise kaela piirkonnas. Suurim nihkepinge avaldub valemiga (9.33) ja peab rahuldama tingimust

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{2}\right)^2 + \tau_k^2} \leq [\tau]. \quad (9.40)$$

Liittalades tuleb peale tala üldise paindetugevuse kontrollimist kindlustada ka liidete küllaldane tugevus. Nendes arvutustes lähtume liidetavate elementide vahel mõjuva nihkejõu ja selle intensiivsuse valemist (9.28...30). Liited (keemis-, liim-, neet-, polt- jm.) töötavad talades lõikele ja nende tugevusarvutust vaatlesime lühidalt viiendas jaotises.

**Näide 9.1.** Määrata männipalgi läbimõõt, mis on vajalik 1,8 m pikkuseks konsooliks. Konsooli otsale mõjub 1,5-kN koormus.

Konsooli kinnituskohas mõjub suurim paindemoment  $M = Fl = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,8 = 2,7 \cdot 10^3$  N·m.

Palgi läbimõõdu avaldame tugevustingimusest (9.36), milles lubatava pinge võtame tabelist 2:  $[\sigma] = 8$  MPa:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2,7 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,151 \text{ m.}$$

**Vastus:** Konsooliks sobib 160-mm või jämedam palk.

**Näide 9.2.** Määrata okaspuidust laetalade ristlõike mõõtmed suhtega 2, kui selle on 5,2 m, talatelgede vahekaugus 0,8 m, vahelae omakaal 0,85 kN/m<sup>2</sup> ja kasuskoormus 1,50 kN/m<sup>2</sup>. Lubatav pinge  $[\sigma] = 10$  MPa.

Üks tala kannab ühtlast lauskoormust

$$p = 0,8 \cdot (0,85 \cdot 10^3 + 1,50 \cdot 10^3) = 1,88 \cdot 10^3 \text{ N/m.}$$

Suurim paindemoment tala keskel avaldub valemiga (8.5):

$$M = pl^2/8 = 1,88 \cdot 10^3 \cdot 5,2^2/8 = 6,35 \cdot 10^3 \text{ N·m.}$$

Et ristlõike mõõtmete suhe  $h/b = 2$ , siis  $b = h/2$  ja tugevusmoment avaldub valemiga (9.11):  $W_z = bh^2/6 = h^3/12$ . Tugevustingimusest (9.35) arvutame ristlõike kõrguse

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12M}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 6,35 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0,197 \text{ m} \approx 200 \text{ mm.}$$

**Vastus:** laetaladeks tuleb kasutada 100×200-mm prusse.

**Näide 9.3.** Tala arvutusskeem ja sisejõudude epüürid on antud joonisel 9.19,  $a$ . Valida sobiv I-profiilteras, kui  $[\sigma] = 160$  MPa ja  $[\tau] = 100$  MPa.

Tugevustingimuses (9.35) võtame arvutuslikuks paindemomendiks  $M_a = 120$  kN·m;

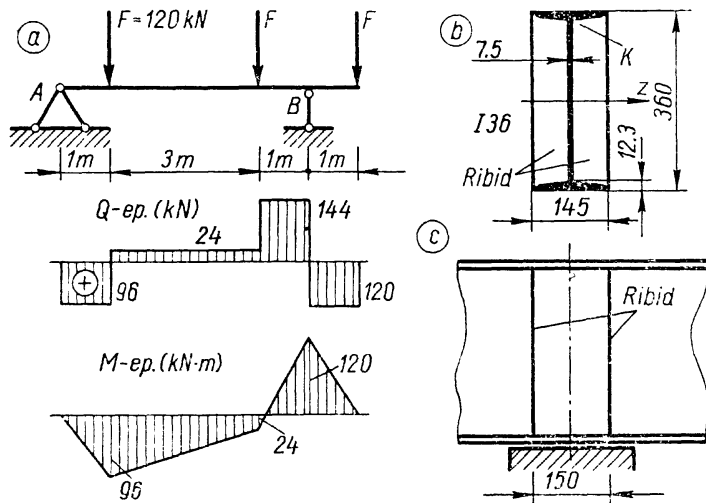
$$W_z \geq M_a/[\sigma] = 120 \cdot 10^3/(160 \cdot 10^6) = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 750 \text{ cm}^3.$$

Valime profiilide tabelist I-profiili Nr. 36  $W_z = 743$  cm<sup>3</sup>.

Et valisime vajalikust väiksema tugevusmomendiga profiili, siis kontrollime selle tugevust tingimusega (9.34):

$$\max \sigma = M_a/W_z = 120 \cdot 10^3/(743 \cdot 10^{-6}) = 162 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 162 \text{ MPa} \approx [\sigma] = 160 \text{ MPa.}$$





Joon. 9.19

See rahuldab, kuna ülepinge 2 MPa moodustab lubatavast pingest vähem kui 5%.

Talas mõjub suhteliselt suur põikjõud, mis teeb vajalikuks tugevuse põhjalikuma kontrollimise. Vajalikud lisaandmed saame profiilide tabelist:  $I_z = 13\,380 \text{ cm}^4$ ;  $S_z^* = 423 \text{ cm}^3$ .

Tugevustingimusega (9.38) kontrollime suurimat nihkepinget ristlõikes toest B vasakul, kus mõjub suurim põikjõud  $Q = 144 \text{ kN}$ :

$$\begin{aligned} \max \tau &= QS_z^*/(I_z b) = 144 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6} / (13\,380 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}) = \\ &= 60,7 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 60,7 \text{ MPa} < [\tau] = 100 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Kontrollime tugevust veel kaelapunktis K (joonis 9.19, b). Vaatlu-sele võtame ristlõike vahetult toest B vasakul, kus koos mõjuvad suurim paindemoment  $120 \text{ kN} \cdot \text{m}$  ja põikjõud  $144 \text{ kN}$ . Arvutame normaalpinge valemiga (9.6) punktis K, mille kaugus z-teljest  $y_k = 360/2 - 12,3 = 167,7 \text{ mm}$ :

$$\sigma_k = My_k/I_z = 120 \cdot 10^3 \cdot 167,7 \cdot 10^{-3} / 13\,380 \cdot 10^{-8} = 150,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

ja nihkepinge valemiga (9.29), kus

$$S_z^* = 12,3 \cdot 10^{-3} \cdot 145 \cdot 10^{-3} (180 - 12,3/2) 10^{-3} = 310 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3;$$

$$\begin{aligned} \tau_k &= QS_z^*/(I_z b) = 144 \cdot 10^3 \cdot 310 \cdot 10^{-6} / (13\,380 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}) = \\ &= 44,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Suurim nihkepinge kaelapunktis

$$\begin{aligned} \max \tau_k &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{2}\right)^2 + \tau_k^2} = \sqrt{\left(\frac{150,4 \cdot 10^6}{2}\right)^2 + (44,5 \cdot 10^6)^2} = \\ &= 87,4 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 87,4 \text{ MPa} < [\tau] = 100 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Suurim peapinge

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_k}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{2}\right)^2 + \tau_k^2} = \frac{150,4 \cdot 10^6}{2} + \\ &+ \sqrt{\left(\frac{150,4 \cdot 10^6}{2}\right)^2 + (44,5 \cdot 10^6)^2} = (75,2 + 87,4) 10^6 \text{ Pa} = \\ &= 162,6 \text{ MPa} \approx [\sigma] = 160 \text{ MPa} \end{aligned}$$

rahuldab tugevustingimust (9.39) arvutustäpsuse piires.

Tugevusarvutustest teeme järelduse, et tala tuleb valmistada I-profiilist Nr. 36, mida peab tugevdama jäikusribidega vertikaalseina stabiilsuse kindlustamiseks ja koondjõududest tulenevate kohalike pingete leevendamiseks, nagu on näidatud 9.19, c.

**9.3.2. Ratsionaalne ristlõige.** Uurime puhtale paindele töötava ja z-telje suhtes sümmeetrilise ristlõikega tala valmistamiseks kuluva materjali kokkuhoidu, mis ühtib oma kaalu vähendamise nõudega. Lähteandmeteks olgu arvutuslik paindemoment  $M_a$ , lubatav pinge  $[\sigma]$  ja ehituskõrgus, millena vaatleme ristlõike kõrgust  $h$ . Tala omakaal ja tema valmistamiseks kuluv materjali hulk on võrdelised ristlõikepindalaga. Järelikult seame eesmärgiks kujundada talale võimalikult väike ristlõikepindala  $A$ .

Tugevustingimusest

$$W_z = \frac{M_a}{[\sigma]}.$$

Teiselt poolt väljendame tugevusmomendi valemiga (9.10), asendades selles inertsimomendi seosest (7.28):

$$W_z = \frac{2I_z}{h} = \frac{2}{h} i_z^2 A.$$

Võrrutame tugevusmomendi avaldised ja leiame saadud seosest ristlõikepindala

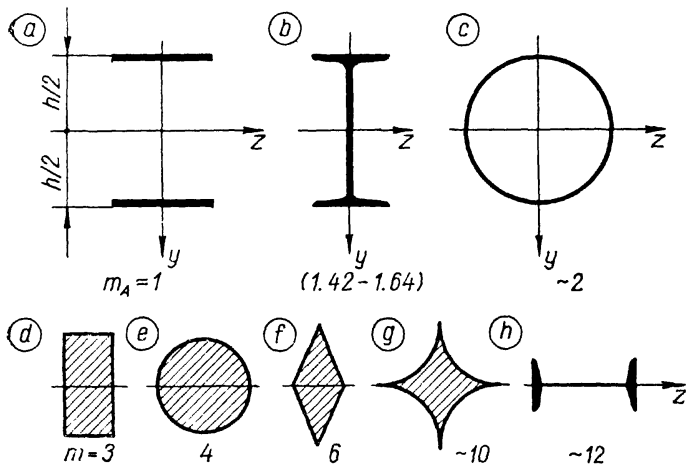
$$A = \frac{M_a h}{2[\sigma] i_z^2} \cdot \frac{h^2}{2h},$$

mida korrutasime ja jagasime täiendavalt suurusega  $2h$ . Umbergrupeerimisega anname avaldisele järgmise kuju:

$$A = \frac{2M_a}{h[\sigma]} \cdot \frac{h^2}{4i_z^2} = m_A \frac{2M_a}{h[\sigma]}, \quad (9.41)$$

kus

$$m_A = \frac{h^2}{4i_z^2}. \quad (9.42)$$



Joon. 9.20

Saadud valemite näeme, et ristlõikepindala  $A$  väheneb võrdeliselt teguriga  $m_A$ , mida nimetatakse *ristlõike ökonoomsusteguriks*. Selle teguri avaldises (9.42) on muutuvaks suuruseks nimetajas esinev inertsiraadius  $i_z$ , mis väljendab ristlõike pinnaelementide ( $dA$ ) ruutkeskmist kaugust  $z$ -teljest. Et minimeerida tegurit  $m_A$ , tuleb suurendada pinnaelementide kaugust neutraaljoonest ja lähendada neid võimalikult ristlõike piirjoontele kaugusel  $h/2$ . Ideaalne oleks ristlõige, mille pindalast üks pool ( $A/2$ ) jaguneb ühel ja teine pool ( $A/2$ ) teisel äärjoonel (joonis 9.20, a). Sel juhul läheneks inertsiraadius oma suurimale väärtusele  $\max i_z = h/2$ , ökonoomsustegur aga oma vähimale väärtusele  $\min m_A = 1$  ja ristlõikepindala piirsuurusele:

$$\min A = \frac{2M_a}{h[\sigma]}. \quad (9.43)$$

Kirjeldataud ideaalne ristlõige pole harilike talade juures teostatav, sest tõmbe- ja survetsoon jääksid omavahel ühendamata. Peame leppima ristlõikepinnaga, mille ökonoomsustegur  $m_A > 1$ , kuid mida lähemal on see väärtus ühele, seda kergemaks ja odavamaks tunnistame tala. Kõige ökonoomsemaks osutub I-profiil, milles enamik materjali on koondataud ristlõike äärtele, võõdesse. Standardsetel I-profiilidel  $m_A = 1,42 \dots 1,64$ . Hästi projekteeritud suurte keevitatud

ja needitud liittalade keskkoha ümbruses võib see tegur olla väiksem, langedes mõnel juhul kuni 1,2-ni. Teraskonstruksioonides on talade ristlõigete ökonoomsustegur piires  $m_A = 1,2 \dots 2,0$ , puitkonstruksioonides  $m_A = 2 \dots 3$ . Kujundid, mille  $m_A > 3$  tuleb tunnistada ebaökonoomseteks ja nende kasutamist talade ristlõigetena ei saa soovitada. Erandiks on ümarpuit, mille  $m_A = 4$  ja mis leiab sageli kasutamist taladena ajutistes ehitistes.

Joonisel 9.20 on esitatud tuntud kujundid ja nende ökonoomsustegurid. Jooniselt selgub, et asendades ümarpuidust (e) talad sama ehituskõrgusega prussidega (d), hoiame materjali kokku 25%. Asetades I-profiiliga terastalad koormust kandma väiksema paindetugevuse suunas (h), oleme sunnitud kulutama umbes kaheksa korda rohkem terast võrreldes sellega, kui kasutaksime samasugust profiili suurima paindetugevuse suunas (b).

**9.3.3. Ühtlase paindetugevusega varras.** Põikpainele töötav tala, milles paindemoment on muutuv pikisuunas, tehakse mõnel juhul tehnilistel või majanduslikel kaalutlustel muutuva ristlõikepindalaga. Niisuguses talas kooskõlastatakse tugevuse ja paindemomendi muutumised nii, et igas ristlõikes oleks rahuldatud tugevustingimus (9.35). Ideaalselt ratsionaalne tala rahuldab seda tingimust alumisel piiril:

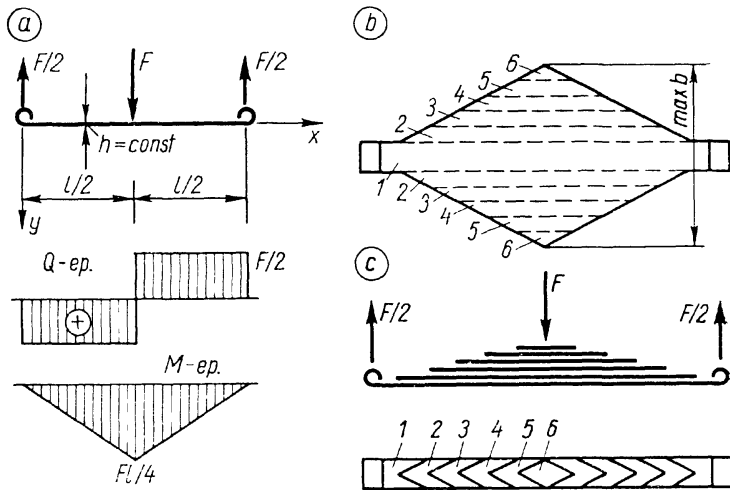
$$W_z = \frac{M}{[\sigma]}. \quad (9.44)$$

Et selles seoses lubatav pinge on muutumatu suurus, siis tugevusemoment peaks muutuma sama seaduspärasusega nagu paindemoment. Praktikas me seda tingimust enamasti ei suuda täpselt täita.

Varda ristlõikepindala saab kujundada muutuvana kolmel viisil: 1) muutuva laiusega; 2) muutuva kõrgusega; 3) õhukeseseinalise tala võõde ja vertikaalseina paksuste muutmise. Kasutamist leiavad ka nende kolme võtte mitmesugused kombinatsioonid.

Muutuva laiusega vardana vaatleme *lehtvedru*, millega tutvusime jaotises 9.2.5 (joonis 9.14, c). Joonisel 9.21, a on kujutatud lehtterasest varras, lihttala koondjõuga keskkoha ja selle sisejõudude epüürid. Kavandame muutuva laiusega ühtlase tugevusega varda. Varda vasaku poole jaoks:

$$M = \frac{F}{2} x, \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right).$$



Joon. 9.21

Ristkülikulise ristlõikepinna tugevusmoment

$$W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Asctades paindemomendi ja tugevusmomendi avaldised tugevustingimusse (9.44), saame

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{Fx}{2[\sigma]},$$

millest avaldame otsitava muutuva laiuse

$$b = \frac{3Fx}{h^2[\sigma]}.$$

Varras kujuneb lineaarselt kasvava laiusega, mis kesk- kohal saavutab väärtuse

$$\max b = \frac{3Fl}{2h^2[\sigma]}.$$

Toel saame laiuse  $b=0$ , mis pole vastuvõetav, sest seal mõjuv põikjõud  $Q=F/2$  nõuab väikest ristlõikepindala. Joonisel 9.21, *b* on näidatud varda pealtvaade. Saime varda, mille normaalpinged kõikides ristlõigetes on võrdsed. Nii- sugune varras deformeerub ühtlaselt ja on sobiv kasutamiseks lehtvedruna. Harilikult valmistatakse lehtvedru lehtede

paketina, nagu näeme joonisel 9.21, *c* ja 9.14, *c*. Lehed nii- suguses pakettis on vaadeldavad kriipsjoonega kujutatud elementidena suuremast lehest joonisel 9.21, *b*.

Kavandame ristkülikulise ristlõikepinna konsooli, mille laius on ühtlane, kuid kõrgus  $h$  muutuv (joonis 9.22, *a*). Konsooli paindemomendi absoluutväärtus

$$M = F(l - x),$$

mis tugevustingimuses 9.44 koos tugevusmomendiga annab seose:

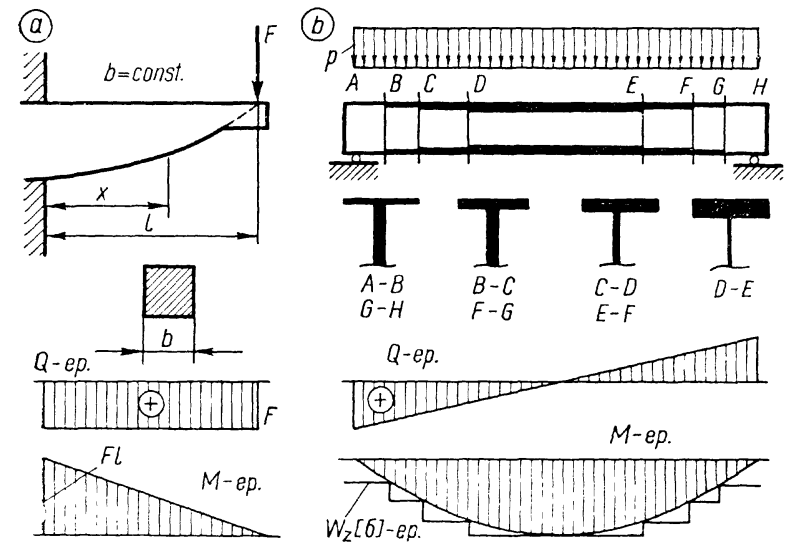
$$\frac{bh^2}{6} = \frac{F(l - x)}{[\sigma]},$$

millest

$$h = \sqrt{\frac{6F(l - x)}{b[\sigma]}}.$$

Konsooli kõrgus muutub siin kõverjoone järgi, nagu kuju- tame joonisel.

Joonisel 9.22, *b* kujutame I-profiiliga tala, millele muu- tuv ristlõige on antud vööde ja vertikaalseina paksuste ast- melise muutmisega. Piirkonnad *AB* ja *GH*, kus paindmo- menti väärtus on võrdne, on näidatud joonisel 9.22, *c*.



Joon. 9.22

ment on väike, põikjõud aga suur, teeme vööd suhteliselt õhukesed ja vertikaalseina paksema, võttes arvutuslikud paindemomendid punktides  $B$  ja  $G$  ning põikjõud tugeedel. Piirkondades  $BC$  ja  $FG$ , aga samuti piirkondades  $CD$  ja  $EF$ , määrame vööde paksused vastavalt paindemomentidele punktides  $C$  ja  $F$  ning  $D$  ja  $E$  ning vertikaalseina paksused põikjõududega punktides  $B$  ja  $G$  ning  $C$  ja  $F$ . Keskmises osas  $DE$  on arvutuslikuks suurim paindemoment tala keskel ja põikjõud punktides  $D$  ja  $E$ .

Niisuguse tala projekteerimisel kasutame *paindemomendi kattepuuri*, milleks on astmeliselt muutuva suuruse  $W_z[\sigma]$  graafik (esitatud joonisel). Tala tugevus on kindlustatud, kui kattepuur ei lõiku paindemomendi graafikuga.

#### 9.4. PAINDE POTENTSIAALNE ENERGIA

Painutatud varda punktis on tasandpingus, mis on määratud pingetega  $\sigma$  ja  $\tau$ . Potentsiaalse energia tiheduse avaldame valemiga (4.55), kus  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = \tau$  ja ülejäänud pinged paindel võrduvad nulliga:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}. \quad (9.45)$$

Asendame avaldises pinged oma väärtustega valemite (9.6) ja (9.20) ning väljendame vardas salvestunud potentsiaalse energia ruumintegraaliga (4.56):

$$U = \int_V u \, dV = \int_V \left[ \frac{1}{2E} \left( \frac{M_y}{I_z} \right)^2 + \frac{1}{2G} \left( \frac{QS_z^*}{I_z b} \right)^2 \right] dV.$$

Korrutame ja jagame nurksulgudes teist summeeritavat ristlõikepindalaga  $A$ , avaldame elemendi  $dV = dA dx$  ja asendame integreerimise varda mahus  $V$  kahekordsete integraalidega:

$$U = \frac{1}{2E} \int_l \left( \frac{M}{I_z} \right)^2 dx \int_A y^2 dA + \frac{1}{2G} \int_l \frac{Q^2}{A} dx \frac{A}{I_z^2} \int_A \left( \frac{S_z^*}{b} \right)^2 dA,$$

kus pindintegraalidest esimene on ristlõike inertsimoment  $I_z$ , teise tähistame

$$k = \frac{A}{I_z^2} \int_A \left( \frac{S_z^*}{b} \right)^2 dA \quad (9.46)$$

ja saame

$$U = \frac{1}{2E} \int_l \frac{M^2}{I_z} dx + \frac{k}{2G} \int_l \frac{Q^2}{A} dx. \quad (9.47)$$

Ühtlase varda potentsiaalse energia arvutamisel toome integraali märgi alt välja inertsimomendi  $I_z$  ja ristlõikepindala  $A$ . Kui funktsioonides  $M^2/I_z$  ja  $Q^2/A$  või nende tuletistes esineb katkevuskohti, kasutame valemit (9.47) igale pidevuspiirkonnale eraldi ja tulemused summeerime.

Valemist (9.46) näeme, et kordaja  $k$  on dimensioonitu arvsuurus, mis sõltub ainult ristlõike kujust. Arvutame selle kordaja väärtuse ristkülikulisele ristlõikepinnale, mille jaoks  $S_z^*$  avaldub valemiga (9.21),  $A = bh$ ,  $I_z = bh^3/12$  ja  $dA = bdy$ :

$$k = bh \left( \frac{12}{bh^3} \right)^2 \int_{-h/2}^{+h/2} \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2 \frac{1}{b^2} b dy = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Ümarvarda jaoks saame  $k = 32/27 \approx 1,185$ . Harilikudel ristlõigetel jääb see kordaja piiresse 1,1...1,3, kuid õhukeseseinalistel varrastel on suurem. Standardsetel I-profiilidel muutub  $k$  piires 2,1...3,9, kusjuures väikestele numbritele vastab ülemine, suurtele alumine piir. Laiade vöödega I-profiilidel on  $k$  muutumispiirkond 2,0...2,9. Ohukeseseinalisel torul  $k \approx 2$ . Ligikaudselt I-profiilidele

$$k \approx \frac{A}{A_{vs}}, \quad (9.48)$$

kus  $A$  on kogu ristlõikepindala ja  $A_{vs}$  — vertikaalseina ristlõikepindala.

Valemis (9.47) pole mõlemad liidetavad enamasti üheväärsed. Puhtal paindel põikjõud puudub ja teine liige võrdub nulliga. Põikpaindel on üldreeglina nihkepinge  $\tau$  üks või kaks suurusjärku väiksem normaalpingest  $\sigma$  ja kuna avaldises (9.45) need suurusd on ruudus, siis neile vastavad energia tihedused erinevad 2...4 suurusjärku. Seepärast jäetakse avaldises (9.47) teine liige enamasti väikse suurusena arvestamata.

#### 9.5. PAINDEKESE

Põikjõud on varda ristlõikes mõjuvate elementaarnihkejõudude  $\tau dA$  resultant. Järelikult põikjõu mõeldavaks rakenduspunktiks on elementaarnihkejõudude kese. Seda punkti nimetatakse ristlõike *paindekeskmeks*  $C_i$ , mis mõnel ristlõi-

kel ühtib pinnakeskmega  $C$ , kuid teistel võib asetseda selles ka teataval kaugusel.

Teiselt poolt teame, et tasandpaindel peab põikjõud mõjuma samas tasandis välisjõududega. Sellest järeldub, et põikpaindel peab varras kandma koormust tasandis, mis läbib ristlõike paindekeskme. Kui rakendame koormuse mõnes teises paralleelses tasandis, mis on paindekeskmest kaugusel  $r$ , siis vardas tekib vändemoment  $M_x = Qr$ , mis oluliselt võib muuta varda pinge- ja deformatsiooniseisundit võrreldes harilikku paindega. Eriti ohtlik on taoline koormamine õhukeseseinaliste avatud kontuuriga varrastele, mis halvasti taluvad väänet\*.

Sümmeetrilise ristlõikepinna paindekese asetseb sümmeetriateljel. Selles veendume, kui rakendame vardale koormuse sümmeetriatasandis ja võtame arvesse, et selles süsteemis peavad ka sisejõud ja pinged olema sümmeetrilised. Järelikult põikjõud sümmeetriliste elementaarnihkejõudude resultantina võib mõjuda ainult sümmeetriateljel. Seni oleme paindele allutanud vardad, mille ristlõiked on sümmeetrilised paindetasandi suhtes.

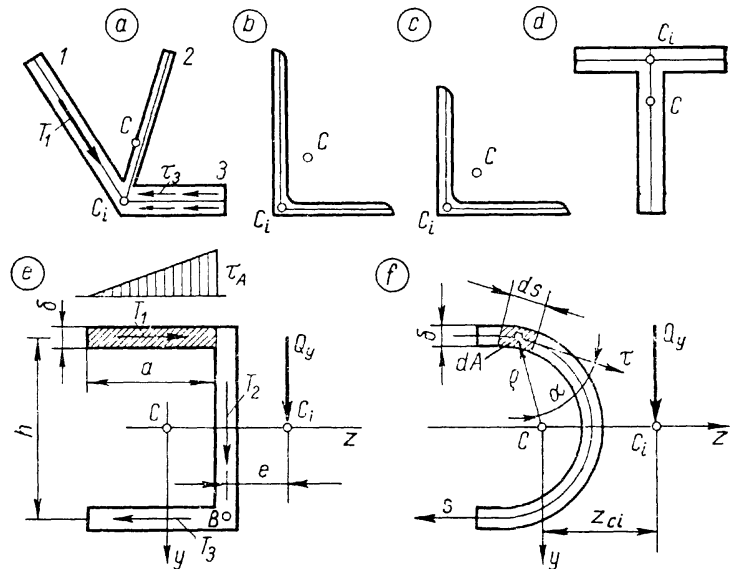
Määrame õhukeseseinaliste avatud kontuuriga varraste ristlõikepindade paindekeskmed.

1. Kahe sümmeetriateljega ristlõikel on paindekese nende telgede lõikepunktis ja ühtib pinnakeskmega. Siia kuuluvad võrdsete vöödega I-profiilid.

2. Joonisel 9.23, *a* kujutatud ristlõikepinna osapindade sirgete keskjoonte ühises lõikepunktis  $C_i$ . Põhjendame seda väidet: osapindadel mõjuvad nihkepingsed servade ja keskjoontega paralleelselt ja on keskjoone normaali suhtes ühtlaselt jagunenud (nagu on näidatud joonisel nihkepingset  $\tau_3$ ); nihkepingsetest tulenevad elementaarnihkejõud taanduvad igal osapinnal nihkejõuks keskjoonel (joonisel näidatud  $T_1$ ); kõikide osapindade nihkejõud kujundavad ühes punktis koonduva süsteemi, mille resultandi (põikjõu  $Q$ ) kandesirge läbib seda punkti; järelikult leitud punkt on ristlõike paindekese. Niisuguste ristlõigetena on vaadeldavad nurkprofiilid joonisel 9.23, *b* ja *c* ja T-kujulised ristlõiked (joonis 9.23, *d*).

3. Ristlõige kitsastest osapindadest sirgete keskjoontega, mis lõikuvad mitmes punktis. Siin tuleb määrata osapindade nihkejõud eraldi kahest põikjõust  $Q_y$  ja  $Q_z$ . Ühe ja teise nihkejõudude süsteemi resultantide lõikepunkt määrab

\* Õhukeseseinaline suletud kontuuriga varras on vaadeldav teatava ristlõikega toruna, avatud profiiliga varrast aga toruna kasutada ei saaks.



Joon. 9.23

paindekeskme. Näitena vaatleme karpristlõiget joonisel 9.23, *e*. Koormusest  $y$ -telje sihis tekib vöös lineaarselt kasvav nihkepinge, mis punktis  $A$  saab väärtuse

$$\tau_A = \frac{Q_y S_z^*}{I_z \delta},$$

kus

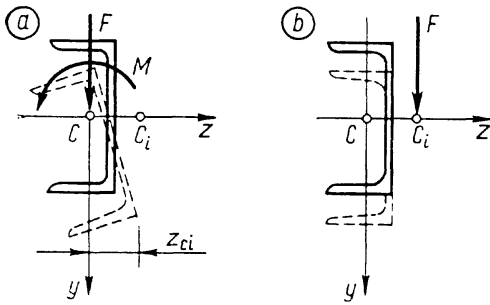
$$S_z^* = a\delta \frac{h}{2}.$$

Nihkejõud

$$T_1 = \frac{\tau_A a \delta}{2} = \frac{Q_y a^2 h \delta}{4 I_z}.$$

Taandame kolmest nihkejõust koosneva süsteemi  $B$ , et vältida  $T_2$  ja  $T_3$  määramist. Nihkejõudude süsteemi moment punkti  $B$  suhtes

$$M_B = T_1 h = \frac{Q_y a^2 h^2 \delta}{4 I_z}.$$



Joon. 9.24

Järelikult  $Q_y$  kandesirge kaugus punktist  $B$

$$e = \frac{\mathfrak{M}_B}{Q_y} = \frac{a^2 h^2 \delta}{4I_z} \quad (9.49)$$

Karpristlõikel on üks sümmeetriatelg ( $Z$ ), mille lõikepunkt põikjõu  $Q_y$  kandesirgega määrab otsitava paindekeskme  $C_i$ . Standardsetel karpterastel on painde- ja pinnakese teine teisel pool seina umbes võrdsetel kaugustel.

4. Ristlõige kõvera keskjoonega (joonis 9.23, f). Elementaarnihkejõudude  $\tau dA$  süsteemi taandame pinnakesmesse  $C$ , mille suhtes elementaarmomentide  $q\tau \sin \alpha dA$  summa arvutame integreerimisega mööda keskjoont  $s$ , asendades pinnaelemendi  $dA = \delta ds$ :

$$\mathfrak{M}_c = \int_s \delta q \tau \sin \alpha ds \quad (9.50)$$

Et ristlõige on ühe sümmeetriateljega, siis paindekeskme  $C_i$  asukoht on määratav ühe koordinaadiga

$$z_{ci} = \frac{\mathfrak{M}_c}{Q_y} \quad (9.51)$$

Ebasümmeetrilistel ristlõigetel tuleb samal viisil määrata paindekeskme teine koordinaat  $Y_{ci}$  põikjõuga  $Q_z$ .

Joonisel 9.24 on näidatud, kuidas standardsest karpterasest tala töötab paindele suurima tugevuse suunas.

## 9.6. PLASTNE PAINNE

9.6.1. **Plastne liigend.** Vaatleme harilikust terasest valmistatud ristkülikulise ristlõikega tala. Järgnevates arutlustes võtame aluseks *Prandtli idealiseeritud tõmbe-surve-diagrammi*, mis on kujutatud joonisel 9.25, a. Allutame tala paindele nii, et suurima paindemomendiga ristlõikes nor-

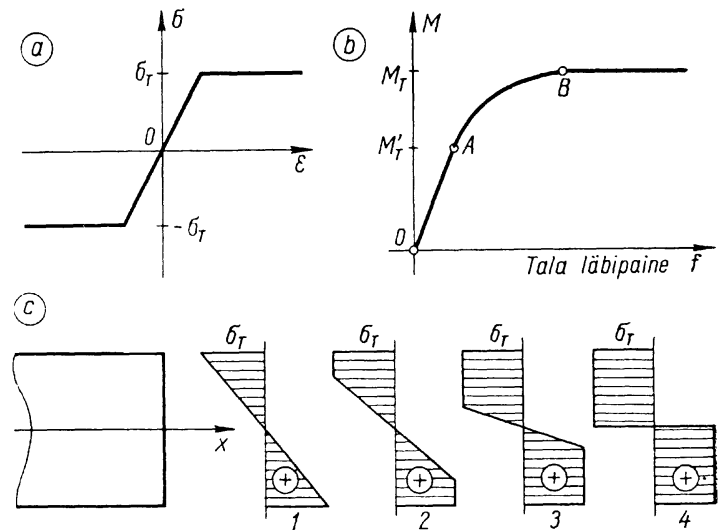
maalpinged äärmistes kihtides kasvades saavutavad väärtuse  $\sigma_T$  (joon. 9.25, c1). Seejuures paindemoment  $M$  kasvab lineaarses sõltuvuses tala läbipaindega  $f$  väärtuseni  $M'_T$  (joon. 9.25, b):

$$M'_T = W_z \sigma_T, \quad (9.52)$$

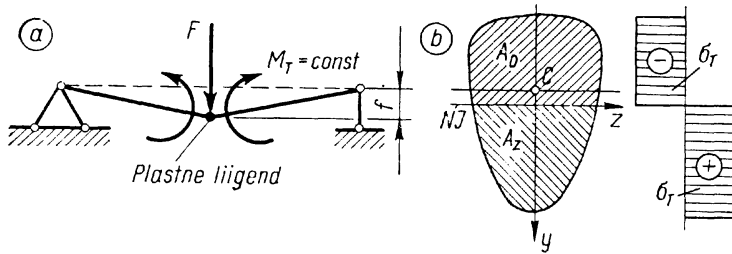
kus  $W_z$  on ristlõikepinna tugevusmoment. Suurus (9.52) on *piirmomendiks lubatavate pingete arvutusmeetodis*, kus tugevustingimus võib olla esitatud järgmisel kujul:

$$M \leq \frac{M'_T}{S} = W_z \frac{\sigma_T}{S} = W_z [\sigma]. \quad (9.53)$$

Talale võime koormust veel lisada, sest peaaegu kogu ristlõige töötab elastse deformatsiooni piirkonnas ja pingete edasine kasv on võimalik. Koormuse suurenedes plastse deformatsiooni piirkonnad laienevad (joonis 9.25, c2). Paindemoment kasvab, kuid mittelineaarselt, piirkonnas  $A-B$ . Elastse deformatsiooni ala ristlõikes kahaneb (joonis 9.25, c3). Koormuse lisamisel saabub teine piirulukord. Kaob elastne deformatsioon ja kogu ristlõige on voolamisseisundis konstantse pingega  $\sigma_T$  (joon. 9.25, c4). Paindemomendi suurenemine lõpeb punktis  $B$  ja läbipainde kasv toimub püsiva koormusega. Tala on avariiolekorras, mida tingli-



Joon. 9.25



Joon. 9.26

kult nimetatakse purunemiseks. Talas on tekkinud nn. *plastne liigend*, mis muudab staatikaga määratud tala mehhanismiks ja konstruktsioonielemendina kõlbmatuks (joonis 9.26, a).

**9.6.2. Painde piirmoment.** Pirolukorra paindemomenti plastses liigendis kasutatakse tugevustingimuses nendel juhtudel, kui tugevusarvutused tehakse *purustava koormuse meetodiga*. Seda suurust nimetatakse *painde piirmomendiks*. Vaatleme painde piirmomendi määramist tala ristlõikes.

Painde piirmomendi arvutamisel peame teadma neutraaljoont, mis võib eemalduda ristlõikepinna keskmeist plastsete deformatsioonide arenemisel. Põhjuseks on pingete jagunemise seaduspärasuse oluline muutumine. Neutraaljoone asukoha määrame esimesest tasakaalutingimusest (9.1), milles pindintegraal tuleb arvutada eraldi tõmbe- ja survetsoonis, kuna normaalpinge on neutraaljoonel katkev (joonis 9.26, b):

$$\int_{A_z} \sigma_T dA - \int_{A_c} \sigma_T dA = 0.$$

Tasakaalutingimus väljendab kahe jõu tõmbe- ja survevõrdsust ristlõikes. Kuna  $\sigma_T = \text{const}$ , siis võime selle suuruse integraali märkide alt välja tuua ja ühise kordajana taandada. Saame tingimuse neutraaljoone määramiseks:

$$A_z = A_c = \frac{A}{2}. \quad (9.54)$$

Järelikult *neutraaljoon jaotab ristlõikepinna võrdseteks osadeks*.

Kui ristlõikepinnal on kaks sümmeetriatelge, siis tingimus (9.54) jaotab ristlõikepinna pooleks läbi keskmel  $C$ . Teisiti öeldes, neutraaljoon säilitab oma asukoha plastse liigendi kujunemisel. Seda asjaolu pidasime silmas ka joonisel 9.25, c, kus talale oli valitud ristkülikuline ristlõikepind.

Kui ristlõikepinnal on üks sümmeetriatelg paindetasandis, siis neutraaljoon ( $NJ$ ) plastse deformatsiooni arenedes eemaldub keskme  $C$  (joonis 9.26, b) ja selle asukoht tuleb määrata igale kujundile tingimusest (9.54).

Määratud neutraaljoone, arvutame painde piirmomendi kolmandast tasakaalutingimusest (9.1):

$$M_T = \int_{A_z} \sigma_T y dA - \int_{A_c} \sigma_T y dA = \sigma_T (S_z^{(z)} + S_z^{(c)}),$$

kus  $S_z^{(z)}$  ja  $S_z^{(c)}$  on ristlõikepinna tõmbe- ja survetsooni staatiliste momentide absoluutväärtused neutraaljoone suhtes. Võtame kasutusele tunnussuuruse:

$$W_z^T = S_z^{(z)} + S_z^{(c)}, \quad (9.55)$$

mis on ristlõikepinna *tugevusmomendiks plastses seisundis*. Selle suurusega väljendame painde piirmomendi järgmisel viisil:

$$M_T = W_z^T \sigma_T. \quad (9.56)$$

Ristkülikule (joonis 9.27, a)

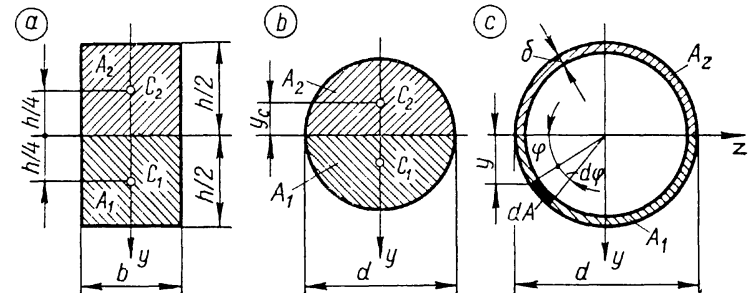
$$W_z^T = S_z^{(1)} + S_z^{(2)} = A_1 \frac{h}{4} + A_2 \frac{h}{4} = 2 \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}. \quad (9.57)$$

Ümarvardale (joonis 9.26, b)

$$W_z^T = 2A_1 y_c = 2 \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{6}. \quad (9.58)$$

Ohukeseseinalisele torule (joonis 9.27, c)

$$W_z^T = 2 \int_{A_1} y dA,$$



Joon. 9.27

kus asendame

$$y = \frac{d - \delta}{2} \sin \varphi; \quad dA = \delta \frac{d - \delta}{2} d\varphi.$$

$$W_z^T = 2 \frac{\delta (d - \delta)^2}{4} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \delta (d - \delta)^2 = d^2 \delta (1 - \beta)^2, \quad (9.59)$$

kus

$$\beta = \delta/d.$$

Võrdleme varda plastse seisundi tugevusmomente (9.57...59) samade kujundite tugevusmomentidega (9.11...14) elastses seisundis. Ristküliku momentide suhe

$$\frac{W_z^T}{W_z} = \frac{bh^2 \delta}{4bh^2} = 1,5.$$

Ümarvarda ja õhukeseseinalise toru ristlõigete jaoks saame need suhted vastavalt

$$\frac{d^3 32}{6\pi d^3} = 1,70 \quad \text{jä} \quad \frac{d^2 \delta (1 - \beta)^2 4}{\pi d^2 \delta (1 - \beta)^3} = \frac{4}{\pi (1 - \beta)} \approx 1,3$$

ja standardsetel I-profiilidel keskmiselt 1,17.

Purustava koormuse arvutusmeetodi tugevustingimus paindel on põhimõtteliselt sama mis väändel (6.53):

$$M \leq \frac{M_T}{S} = \frac{W_z^T \sigma_T}{S}. \quad (9.60)$$

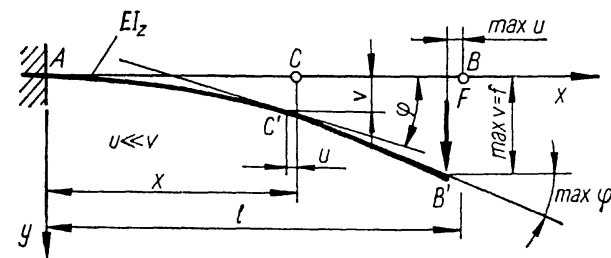
Tugevustingimuste (9.60) ja (9.53) võrdlus näitab, et purustava koormuse arvutusmeetod lubab rakendada suuremaid koormusi kui lubatavate pingete meetod. Seejuures peame silmas üht ja sama varutegurit mõlemas tugevustingimuses. Koormuse suurenemine on samas suhtes tugevusmomentide suhtega  $W_z^T/W_z$ . Järelikult I-profiili kasutamisel saame rakendada 17% võrra suuremat koormust, õhukeseseinalisele torule 30%, ristkülikulise ristlõikega vardale 50% ja ümarvardale 70%. Praktikas kasutatavatel varrastel koormuse suurenemine jääb enamasti piiridesse 15...100%.

## 10. TALA ELASTNE JOON

### 10.1. ELASTSE JOONE DIFERENTSIAALVÖRRAND

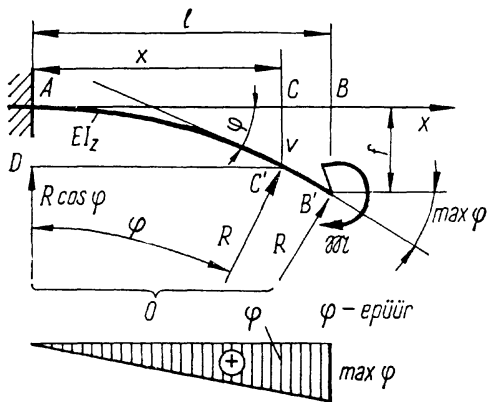
**10.1.1. Läbipaine ja pöördnurk.** Paindetugevuse kõrvale peame oskama määrata varda punktide siirdeid, mis on vajalikud kandetalade jääkuse kontrollimisel, vetruvate konstruktsioonielementide parameetrite arvutamisel ja staatikaga määramatute süsteemide deformatsioonitingimustes. *Bernoulli* hüpotees lubab siirete uurimist oluliselt lihtsustada ja piirduda vaatlustega elastsel joonel. Koormamata talas ühtib elastne joon alusteljestiku  $x$ -teljega, koormatud talas aga eemaldub teljest, kuid jääb paindetasandisse ( $xy$ -tasandisse) nagu kujutatud joonisel 10.1. Seejuures iseloomustavad elastset joont igas punktis siirded  $u$ ,  $v$  ja tõusunurk  $\varphi$ . Pidades silmas väikseid deformatsioone, on  $\varphi$  (möödetuna radiaanides) väike võrreldes ühega ( $\varphi \ll 1$ ). Samas suurusjärgus on ka suhteline siire  $v/l$ , kuid  $u/l$  osutub nendega võrreldes teist järku väikseks suuruseks. Ehituskonstruktsioonides kasutatavatel taladel on  $\varphi$  ja  $v/l$  enamasti suurusjärgus  $10^{-3}$  ja  $u/l$  järgus  $10^{-6}$ . Kolme suuruse vahekorrad lubavad nendest hüljata siirde  $u$  ja vaadelda ainult suurus  $v$  ja  $\varphi$ , millest esimest nimetatakse *läbipaindeks*, teist *pöördnurkaks*. Suurim läbipaine tähistatakse  $f$ .

Paindele töötavate vedrude hulgas võib esineda saledaid vardaid, mille pöördnurkad ja suhtelised läbipainded on suurusjärgus  $10^{-1}$  või isegi  $10^\circ$ . Niisuguste konstruktsioonielementide käsitlemisel põhjustab siirde  $u$  hüljamine liiga suure vea arvutustes või muudab need isegi mõttetuks. Neil juhtudel tuleb arvutused teha suurte deformatsioonide valdkonnas ja enamasti loobuda ka algmõõtmete ja jõu mõju sõltumatuse printsiipidest. Suurte deformatsioonide paindetooriat käesolevas õpikus ei vaadelda.



Joon. 10.1





Joon. 10.2

**10.1.2. Elastse joone määramise alused on energeetilised seosed ja painde põhivalem.** Energeetilisi arvutusmeetodeid vaatleme kolmeteistkümnendas jaotises. Käesolevas raketandame läbipainete ja pöördenurkade arvutamiseks painde põhivalemit (9.5).

Määrame pöördenurga  $\varphi$  ja läbipainde  $v$  momendiga  $M$  koormatud ühtlase konsooli punktis  $C$  (joonis 10.2). Konsoolis mõjub puhas paine konstantse momendiga  $M = -M$ . Elastse joone kõverus

$$K = -\frac{M}{EI_z}$$

osutub muutumatuks konsooli kogu pikkusel  $l$ . Elastne joon on ringjoone kaar, mille raadius  $R = 1/K$  ja keskpunkt  $O$  (joonisel pole näidatud).

Avaldame pöördenurga  $\varphi$  kaare  $AC'$  ja raadiuse  $R$  jagatise, asendades seejuures  $AC'$  sirglõiguga  $AC = x$ , mis on lubatav eeldusel, et nurk  $\varphi$  on väike. Avaldame läbipainde  $v = CC'$  sellega võrdse joonlõigu  $AD$  pikkusena:

$$\varphi = x/R; \quad v = R - R \cos \varphi.$$

Asendame  $R = 1/K$ ,  $\cos \varphi = 1 - \varphi^2/2$ ;  $K$  painde põhivalemit ja viimases  $M = -M$ :

$$\varphi = \frac{M}{EI_z} x; \quad v = \frac{M}{2EI_z} x^2. \quad (10.1)$$

Teine neist on elastse joone võrrand, mille graafikuks on see joon ise. Graafikule (epüürile) ilmekuse andmiseks valitakse läbipainde mõõtkava harilikult suurem tala omast. Pöördenurga epüür kujutatakse nagu sisejõudude epüüridki

tala arvutuskeemi all (joonis 10.2). Positiivne läbipaine on  $y$ -telje positiivses suunas (alla) ja pöördenurk  $x$ -teljelt  $y$ -le läbi esimese veerandi (päripäeva).

Suurim pöördenurk ja läbipaine konsooli otsal

$$\max \varphi = \frac{Ml}{EI_z}; \quad f = \frac{Ml^2}{2EI_z}. \quad (10.2)$$

Vahetult painde põhivalemi abil lahenduvate ülesannete ring pole suur, piirdudes ühtlase varda puhta paindega. Põikpaine ja muutuva inertsimomendiga varda jaoks tuleb painde põhivalemile rajatud arvutusviisi täiustada. On loodud mitu enam või vähem erinevat arvutusmeetodit, millest mõnda vaatleme järgnevatel jaotistel.

**10.1.3. Diferentsiaalseosed.** Vaatleme läbipainet ja pöördenurka funktsioonidena  $v = v(x)$  ja  $\varphi = \varphi(x)$ . Neist esimese tuletis on elastse joone tõus ehk pöördenurga tangens. Teatavasti võib nurga lugeda võrdseks oma tangensiga, kui ta on väiksem 0,1-st. Et pöördenurk on suurusjärgus  $10^{-3}$ , siis võime arvestada seosega

$$v' = \varphi. \quad (10.3)$$

Diferentsiaalgeomeetriast joone kõverus

$$K = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}},$$

kus  $v'$  on pöördenurk ja tema teine aste üliväike võrreldes ühega. Järelikult võime kõveruse valemis nimetaja lugeda võrdseks ühega. Asendades painde põhivalemis (9.5) kõveruse, saame:

$$v'' = -\frac{M}{EI_z}, \quad (10.4)$$

mis on elastse joone diferentsiaalvõrrandiks. Selles võrrandis on muutujad eraldatavad ja lahend leitav otsese integreerimise teel. Enne, kui asume seda võrrandit lahendama, süstematiseerime kõik diferentsiaalseosed, mis kehtivad varda painet iseloomustavate funktsioonide vahel.

Avaldiste (10.3), (10.4) ja (8.6) põhjal võime koostada järgmised diferentsiaalseoste süsteemid:

$$\begin{aligned} v' &= \varphi; & v' &= \varphi; \\ \varphi' &= -\frac{M}{EI_z}; & v'' &= -\frac{M}{EI_z}; \\ M' &= Q; & v''' &= -\frac{Q}{EI_z}; \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$Q' = -p; \quad v^{IV} = \frac{p}{EI_z}.$$

Viimane seos esitatakse sageli kujul

$$EI_z v^{IV} = p. \quad (10.6)$$

See seos on vaadeldav varda painde kõige üldisema diferentsiaalvõrrandina. Diferentsiaalvõrrandite süsteemid võimaldavad hinnata suuruste üldist muutumise iseloomu painduvas vardas. Näiteks piirkonnas, kus talale mõjub ühtlane lauskoormus ( $p = \text{const}$ ), muutub põikjõud lineaarselt, paindemoment teise, pöördenurk kolmanda ja elastne joon neljanda astme kõvera järgi.

## 10.2. DIFERENTSIAALVÕRRANDI OTSENE INTEGREERIMINE

**10.2.1. Ühe pidevuspiirkonnaga tala elastse joone avaldise saame, kui eraldame diferentsiaalvõrrandist (10.4) muutujad ja integreerime:**

$$v = - \int dx \int \frac{M}{EI_z} dx, \quad (10.7)$$

kus tekivad kaks konstanti, mis määrame ääritingimustesi. Pöördenurga avaldise saame erilahendi diferentseerimise teel (seos 10.3).

Sageli esutub otstarbekamaks lahendada ülesanne nii, et esmalt avaldame pöördenurga ja siis sellest läbipainde:

$$\varphi = - \int \frac{M}{EI_z} dx; \quad v = \int \varphi dx. \quad (10.8)$$

*Näide 10.1.* Määrame joonisel 10.3, a kujutatud konsooli elastse joone ja selle tõusunurga avaldised ning vaba otsa läbipainde ja pöördenurga.

Avaldame paindemomendi:

$$M = - \frac{p}{2} (l - x)^2.$$

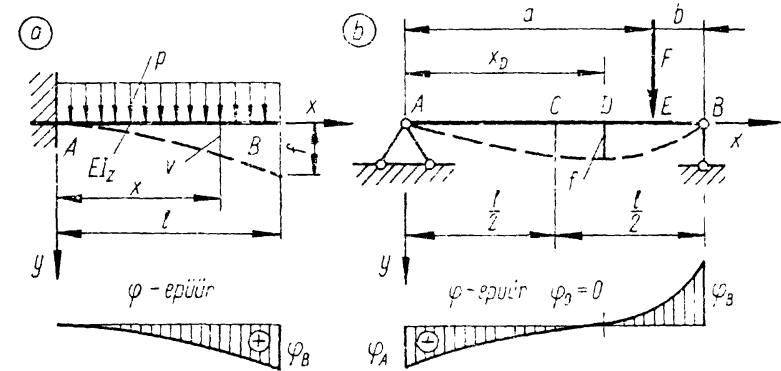
Kasutame esimest üldlahendit (10.8), kus konstantse kordaja toome integraali märgi ette:

$$\varphi = \frac{p}{2EI_z} \int (l - x)^2 dx = \frac{p}{2EI_z} \left( lx - \frac{x^2}{2} + C_1 \right).$$

Konstandi  $C_1$  määrame ääritingimusest toel A ( $x=0$ ), kus  $\varphi=0$ . Saame  $C_1=0$  ja erilahendi

$$\varphi = \frac{p}{2EI_z} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right),$$

mis on joonisel kujutatud ka epüürina.



Joon. 10.3

Teisega üldlahenditest (10.8)

$$v = \frac{p}{2EI_z} \int \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{p}{2EI_z} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_2 \right),$$

milles konstandi määrame ääritingimusest toel A, kus ka  $v=0$  ja saame  $C_2=0$ . Järelikult erilahend

$$v = \frac{p}{4EI_z} \left( lx^2 - \frac{x^3}{3} \right).$$

Suurim läbipaine ja pöördenurk on konsooli otsal B, kus  $x=l$ :

$$f = \frac{pl^3}{6EI_z}; \quad \varphi_B = \frac{pl^2}{4EI_z}. \quad (10.9)$$

**10.1.2. Mitme piirkonnaga tala elastse joone määramiseks kasutame samuti üldlahendeid (10.7) ja (10.8), kuid igale piirkonnale eraldi. Kui tala inertsimoment astmeliselt muutub, siis lisanduvad eespool vaadeldud iseärasele punktidele funktsiooni  $I_z(x)$  katkevuskohad. Vardale, millel on  $n$  pidevuspiirkonda, saame  $(2n)$  integreerimiskonstanti. Nende määramiseks kasutame tingimusi tugeudel, millele lisanduvad elastse joone pidevustingimused teistes iseärstes punktides, kus terviklikus talas läbipainded ja pöördenurgad naaberpiirkondade lahenditest peavad olema võrdsed. Igas staatikaga määratavas talas leidub vähemalt  $(2n)$  ääritingimust, mis lubavad määrata sama suure hulga integreerimiskonstante. Ääritingimustest saame algebraliste lineaarvõrrandite süsteemi, milles tundmatuteks on otsitavad konstandid. Suurema piirkondade arvu puhul kujuneb konstantide arvutamine väga töömahukaks.**

Näide 10.2. Määrame lihttala elastse joone (joonis 10.3, b). Talal on iseäran punkt E, kus esineb põikjõu Q katkevus. Avaldame paindemomendi piirkondades AE ja EB, mida tähistame vastavalt I ja II.

$$M_I = (Fb/l)x; \quad M_{II} = (Fa/l)(x-a).$$

Avaldame üldlahendid (10.7):

$$v_I = -\frac{Fb}{lEI_z} \left( \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 \right);$$

$$v_{II} = -\frac{Fa}{lEI_z} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2} + C_3x + C_4 \right).$$

Konstantide määramiseks kasutame ääretingimusi tugele A ( $x=0$ ) ja B ( $x=l$ ) ning punktis E ( $x=a$ ):

$$v_I(0) = 0; \quad v_{II}(l) = 0; \quad v_I(a) = v_{II}(a); \quad v'_I(a) = v'_{II}(a),$$

mis annavad neli võrrandit.

Lahendades süsteemi, saame:

$$C_1 = -\frac{a}{6b} (l^2 - al + b^2); \quad C_3 = -\frac{1}{6} (2l^2 + a^2);$$

$$C_2 = 0; \quad C_4 = \frac{a^2l}{6}.$$

Elastse joone võrrandid:

$$v_I = \frac{Fb}{6lEI_z} [a(l+b)x - x^3] \quad (\text{kui } x \leq a);$$

$$v_{II} = \frac{Fa}{6lEI_z} [x^3 - 3lx^2 + (2l^2 + a^2)x - a^2l] \quad (\text{kui } x \geq a).$$

Pöördenurga avaldised saame elastse joone võrrandite diferentseerimise teel:

$$\varphi_I = \frac{Fb}{6lEI_z} [a(l+b) - 3x^2]; \quad \varphi_{II} = \frac{Fa}{6lEI_z} (3x^2 - 6lx + 2l^2 + a^2).$$

Suurimat läbipainet tuleb otsida ilmselt esimesest piirkonnast. Võrrutame  $\varphi_I$  avaldise nulliga ja lahendame sel teel saadud ruutvõrrandi:

$$x_D = \sqrt{\frac{a}{3} (l+b)}.$$

Leitud punkt D asetseb tala keskpunkti C ja jõu rakenduspunkti vahel.

Jõu rakenduspunktis võime läbipainde arvutada ükskõik kummast elastse joone võrrandist argumentiga  $x=a$ :

$$v_E = \frac{Fa^2b^2}{3lEI_z}. \quad (10.10)$$

Pöördenurgad tugele:

$$\varphi_A = \frac{Fab}{6lEI_z} (l+b); \quad \varphi_B = -\frac{Fab}{6lEI_z} (l+a). \quad (10.11)$$

Talal, millele jõud mõjub keskkohas, saame suurima läbipainde samas punktis:

$$f = \frac{Fl^3}{48EI_z} \quad (10.12)$$

ja pöördenurgad tugele

$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{Fl^2}{16EI_z}. \quad (10.13)$$

### 10.3. GRAFOANALÜÜTILINE MEETOD\*

10.3.1. Fiktiivkoormus ja -tala. Vaatleme avaldistest (10.5) kahte paari seoseid diferentsiaalvõrrandite süsteemidena:

$$\left. \begin{aligned} v' &= \varphi \\ \varphi' &= -\frac{M}{EI_z} \end{aligned} \right\} \text{I} \quad \left. \begin{aligned} M' &= Q \\ Q' &= -p \end{aligned} \right\} \text{II}$$

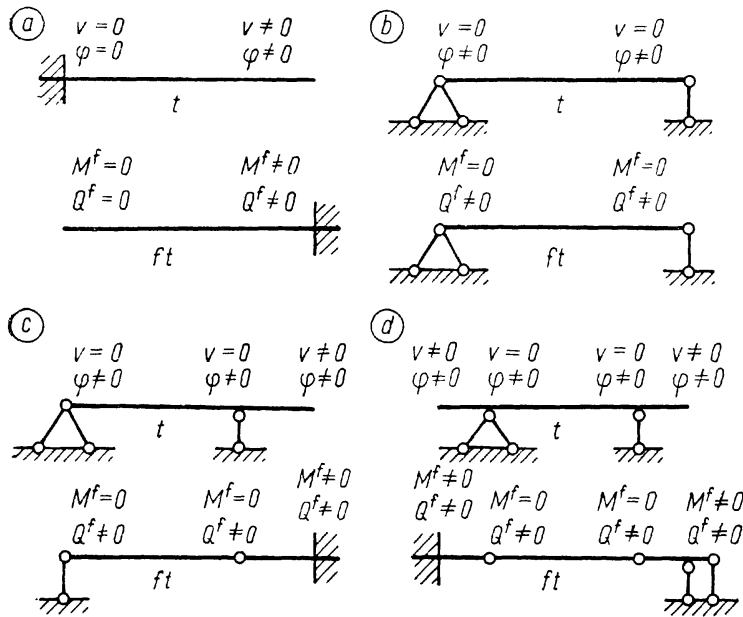
Esimene süsteem on teisega sarnane. Sedasama võib öelda nende süsteemide lahendite kohta, kui ääretingimused on ühesugused. Sellele sarnasusele on rajatud läbipainde ja pöördenurga arvutamise meetodika, mis ühtib paindemomendi ja põikjõu omaga.

Märgime võrrandipaaris (I) funktsioonid järgmiste tähistega:

$$p^f \equiv \frac{M}{EI_z}; \quad Q^f \equiv \varphi; \quad M^f \equiv v; \quad (10.14)$$

ja nimetame neid vastavalt *fiktiivkoormuseks*, *-põikjõuks* ja *-paindemomendiks*. Neid suurusi vaatleme välis- ja sisejõududena nisugusel ettekujutataval talal, mille paindemomendi ja põikjõu ääretingimused on ühesugused tõelise tala läbipainde ja pöördenurga ääretingimustega. Ettekujutatavat tala nimetatakse *fiktiivtalaks*. Joonisel 10.4 on konsooli (a), lihttala (b), konsooltala (c) ja kahe konsooliga tala (d) skeemid märgitud tähega t. Nende all on näidatud vastavate fiktiivtalade skeemid ft. Tala tugele ja vabade otste juurde on märgitud läbipainde ja pöördenurga tingimused. Fiktiivtalal on samadesse kohtadesse näidatud paindemomendi ja põikjõu tingimused. Võrreldes talade ja fiktiivtalade ääretingimusi, näeme, et nad on ühesugused. Järeli-

\* C. O. Mohri poolt 1868. a. loodud meetod tala elastse joone arvutamiseks. Oli noore teadlase üks esimesi tähtsamaid töid, mis leidis üldist tunnustust ja laialdast kasutamist inseneripraktikas.



Joon. 10.4

kult on fiktiivtalaade valik tehtud õigesti, või täpsemalt, ainuõigesti, kuna siin teist valikut olla ei saa. Igale tala skeemi elemendile vastab teatav ainuvõimalik element fiktiivtala skeemis. Joonise 10.4 tähelepanelik uurimine annab kõik vajalikud juhtnõupid fiktiivtalaade konstrueerimiseks. Lisame ainult ühe asjaolu: kui tala on staatikaga määratav, siis sama laadi on ka fiktiivtala.

Tala läbipainde ja pöördenurga arvutamist alustame paindemomendi epüürist. Seejärel joonestame sobiva fiktiivtala ja rakendame sellele fiktiivse lauskoormuse paindemomendi epüüri näol, mille ordinaadid on jagatud tala jäikusga. Fiktiivsele koormusele jätame paindemomendi märgi, mis tähendab, et positiivsest paindemomendist saadud koormuse suunamine  $y$ -telje suunas (alla). Järgneb fiktiivtala toereaktsioonide määramine, kui see osutub tarvilikuks, ja sisejõudude arvutamine nendes kohtades, kus soovime teada tegeliku tala läbipaindeid ja pöördenurki. Vajadust mööda võime konstrueerida ka nende suuruste epüürid, millel õige lahendusega saame sobivad märgid ja fiktiivpaindemomendi epüür kujutab elastset joont õiges asendis.

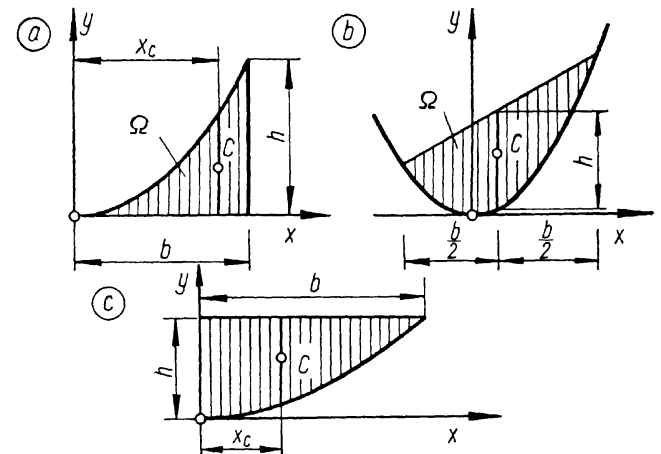
Fiktiivtala vaatleme koormust  $p^f$ -epüüri pindalana, mille asendame koondjõuga keskmis. Keeruka epüüri jaotame lihtsateks osakujunditeks, ristkülikuteks, kolmnurkadeks, parabooli segmentideks jt., mille pindalad ja keskmised on teada või kergesti määratavad. Vaatleme lähemalt astmekõveratega piiratud kujundite pindalade ja keskmiste arvutamist. Joonisel 10.5, a on kõverjoonega  $y=ax^n$  ( $n$ -astme parabooliga),  $x$ -teljega ja ordinaadiga  $y(b)=h$  piiratud (viirutatud) pind, mille pindala ja keskmise abstsiss:

$$\Omega = \int_0^b ax^n dx = \frac{bh}{n+1}; \quad x_c = \frac{1}{\Omega} \int_0^b ax^{n+1} dx = \frac{n+1}{n+2} b. \quad (10.15)$$

Kui  $n=0$  (ristkülik), siis  $\Omega=bh$  ja  $x_c=b/2$ . Hästi tuntakse ka kolmnurga ( $n=1$ ) pindala  $bh/2$  ja keskmise kaugust  $(2/3)b$ , kuid vähem teatakse, et ruutparaboolil ( $n=2$ )

$$\Omega = \frac{bh}{3}; \quad x_c = \frac{3}{4} b. \quad (10.16)$$

Paindemomendi epüüridel esineb kõverjoonena kõige sagedamini ruutparabool, mida seepärast tuleb põhjalikult tunda. Joonisel 10.5, c on näidatud ruutparabooliga piiratud pind, mis tihti esineb epüüri osapindade hulgas ja mille pindala ja keskmise kaugus avalduvad valemite (10.16) abil:



Joon. 10.5

$$\Omega = \frac{2}{3}bh; \quad x_c = \frac{3}{8}b. \quad (10.17)$$

Ruutparabooli segmendil (joonis 10.5, b), mis on määratud mõõtmetega  $b$  ja  $h$ , avaldub pindala samuti esimese valemiga (10.17). Seejuures  $h$  on segmendi suurim mõõde  $y$ -telje sihis läbi keskme ja  $b$  tema laius  $x$ -telje sihis, mille kese  $C$  jaotab pooleks.

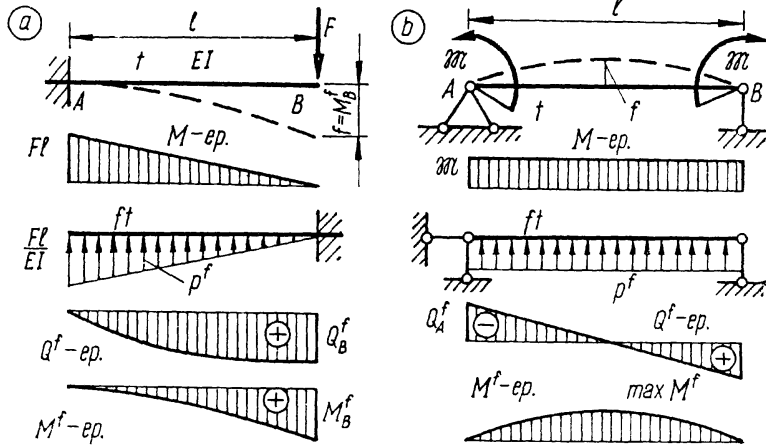
**Näide 10.3.** Määrame konsooli suurima läbipainde ja pöördenurga (joonis 10.6, a). Jagame paindemomendi epüüri negatiivsed ordinaadid jäikusega  $EI_z$  ja kujutame  $p^f$  ülespoole suunatud koormusena fiktiivsel talal, milleks on teatavasti samasugune konsool toega teises otsas. Avaldame fiktiivse põikjõu kinnituskohas, kus see võrdub kogu koormusega talal, see tähendab  $p^f$ -epüüri pindalaga. Avaldame ka fiktiivse paindemomendi toel, milleks kujutame kogu koormuse rakendatuna epüüri (kolmnurga) keskmesse kaugusel  $(2/3)l$  toest B:

$$\varphi_B = Q_B^f = \frac{Fl}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Fl^2}{2EI_z}; \quad f = M_B^f = \frac{Fl^2}{2EI_z} \cdot \frac{2}{3}l = \frac{Fl^3}{3EI_z}. \quad (10.18)$$

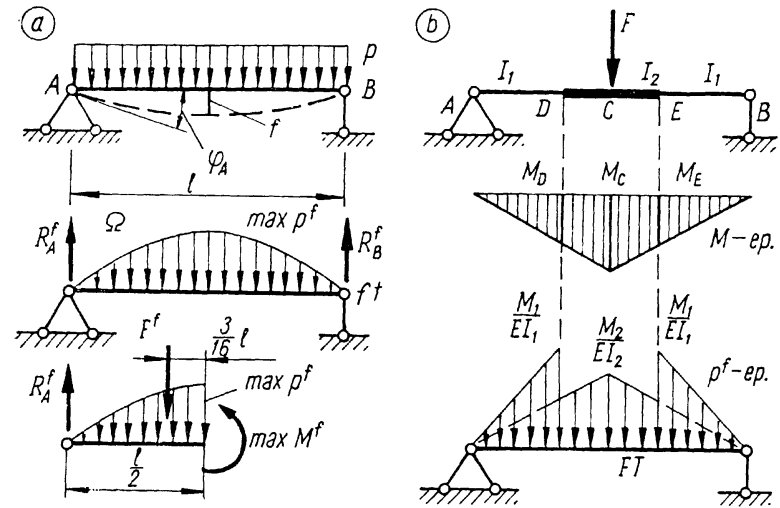
Kui arvutame fiktiivsed sisejõud konsooli mitmes ristlõikes, siis võime konstrueerida  $Q^f$ - ja  $M^f$ -epüürid, mis on kujutatud joonisel.

**Näide 10.4.** Määrame lihttala läbipainde ja pöördenurgad tugeidel (joonis 10.6, b). Fiktiivkoormuse rakendame ka siin negatiivses suunas (alt ülespoole) ja avaldame toereaktsioonid, põikjõud tugede juures ja paindemomendi tala keskel:

$$\varphi_A = -\varphi_B = Q_A^f = \frac{pl}{2} = -\frac{ml}{2EI_z}; \quad f = \min M^f = \frac{pl^2}{8} = -\frac{ml^2}{8EI_z}. \quad (10.19)$$



Joon. 10.6



Joon. 10.7

**Näide 10.5.** Arvutame lihttala läbipainde ja pöördenurga (joonis 10.7, a). Paindemomendi epüüri kujutab ruutparabool suurima ordinaadiga tala keskel:  $\max M = pl^2/8$ . Samuti jaguneb ka fiktiivkoormus, mille suurim väärtus

$$\max p^f = \frac{\max M}{EI_z} = \frac{pl^2}{8EI_z}.$$

Süsteemi sümmeetriat arvestades saame esimese valemiga (10.17):

$$\varphi_A = -\varphi_B = Q_A^f = R_A^f = \frac{\Omega}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}l \frac{pl^2}{8EI_z} = \frac{pl^3}{24EI_z}. \quad (10.20)$$

Läbipainde tala keskel määrame fiktiivpaindemomendina, asendades fiktiivlauskoormuse pooltel talal koondjõuga  $F^f$ , mille suurus ja rakenduspunkti kaugus avalduvad valemitega (10.17):

$$\begin{aligned} f &= \max M^f = R_A^f \cdot \frac{l}{2} - F^f \cdot \frac{3}{16}l = \frac{pl^3}{24EI_z} \cdot \frac{l}{2} - \frac{pl^3}{24EI_z} \cdot \frac{3}{16}l = \\ &= \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI_z} \end{aligned} \quad (10.21)$$

**10.3.2. Muutuva ristlõikepinnaga tala läbipainde ja pöördenurga** arutamisel grafoanalüütilise meetodiga võtame ebaühtlase paindejäikuse arvesse fiktiivkoormuse epüüris, kus paindemomendi epüüri ordinaate tuleb jagada igas tala telje punktis sellele vastava jäikusega. Kui paindemomendi ja fiktiivkoormuse epüürid ühtlase tala jaoks on alati

ühesugused, või õigemini, erinevad ainult konstantse kordaja poolest, siis muutuva ristlõikepinnaga tala puhul nad on erisugused.

Joonisel 10.7, *b* on kujutatud astmeliselt muutuva ristlõikepinnaga tala, mida iseloomustavad inertsimomendid  $I_1$  ja  $I_2$ . Antud koormusest moodustub paindemomendi epüür kahest sirglõigust. Fiktiivkoormuse epüür koosneb aga neljast sirglõigust, mille määramiseks arvutame kaks suurst:

$$p_c^f = \frac{M_c}{EI_2}; \quad p_D^f = p_E^f = \frac{M_D}{EI_1}.$$

Fiktiivpõikjõud ja -paindemomendid arvutame ka siin nii, et vaatleme  $p^f$ -epüüri pindala koormusena, mille jaotame kolmnurkadeks.

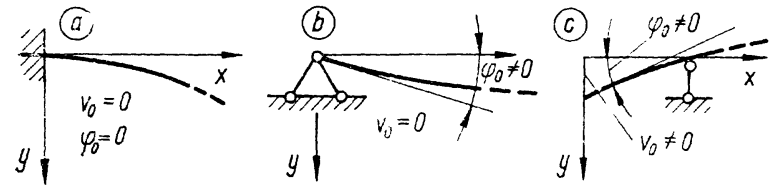
Nagu näeme, grafoanalüütilise meetodiga on suhteliselt lihtne arvutada läbipainet ja pöördenurka muutuva ristlõikepinnaga talas. See meetod on üldse üks lihtsamaid, mida kasutatakse paljude keerukate talaskeemide arvutamisel, kus ta võimaldab tülikaid analüütilisi arvutusi osaliselt asendada lihtsate graafiliste võtetega.

#### 10.4. ALGPAREMETRITE MEETOD\*

**10.4.1. Elastse joone avaldis** on väljendatav *algparameetrite meetodiga*, mida kasutasime sisejõudude arvutamisel jaotises 8.5.2. Ka siin seame eesmärgiks avaldada elastne joon *Taylori* rea abil, mille kordajaid  $v_0$  ja  $v_0' = \varphi_0$  nimetatakse *algparameetriteks*. Kahjuks pole need ülesande lahendamisele alati tuntud suurused, nagu algparameetrid sisejõudude arvutamisel, vaid on määratavad elastse joone enda ääretingimustest. Kui vardal on alguspunkti kinnine tugi, siis  $v_0$  ja  $\varphi_0$  on määratud (joonis 10.8, *a*). Teistel juhtudel esineb nende määramatus (joonis 10.8, *b* ja *c*). Seepärast erinevad algparameetrite meetodi rakendusviisid oluliselt sisejõudude ja elastse joone arvutamisel.

Vaatleme joonisel 10.9 jaotatud koormusega  $p = p(x)$  varrast, mille elastne joon on esitatud funktsiooniga  $v = v(x)$ . Punktis  $i$  lisame momendi  $M_i$ , jõu  $F_i$  ja jaotatud

\* Matemaatikas tuntud *Cauchy* meetodina, tugevusõpetusse tõi selle meetodi 1862. a. saksa teadlane *A. Clebsch* (1833...1872). Meetodit on täiustanud vene ja nõukogude teadlased *I. G. Bubnov* (1872...1919), *A. N. Krölov* (1863...1945), *N. K. Snitko* jt. ning põhjalikult selgitanud *A. P. Filin* oma raamatus — Приближенные методы математического анализа, используемые в механике твердых деформируемых тел. Л., Стройиздат, 1971.

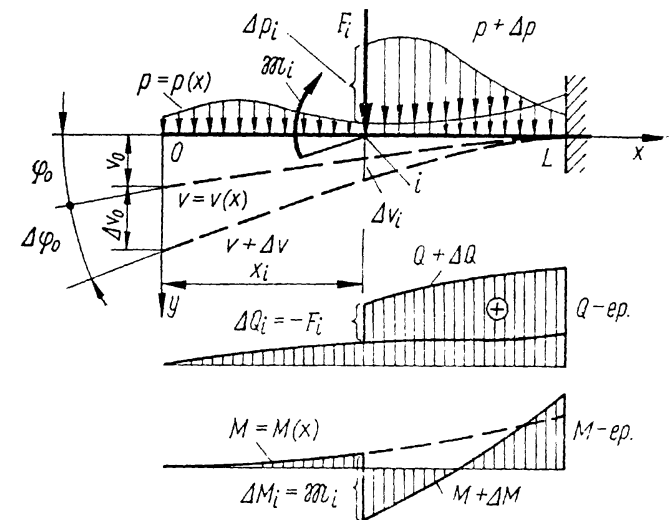


Joon. 10.8

koormuse  $\Delta p = \Delta p(x)$ , mis koormab varrast punktide  $i$  ja  $L$  vahemikus, kus ta on antud pideva funktsiooniga. Lisakoormusest tekib täiendav läbipaine ja elastne joon on väljendatav funktsiooniga  $v + \Delta v$ . Juurdekasv  $\Delta v$  tuleneb vardaosa  $i-L$  täiendavast kõverdumisest suurenenud sisejõudude tagajärjel, kuna vahemikus  $0-i$ , kus sisejõud ei muutu, toimub jäikliikumine ilma lisakõverdumiseta.

Vahemikus  $i-L$  on läbipainde juurdekasv  $\Delta v$  ja selle tuletised pidevad, mis võimaldab arendust *Taylori* ritta punktist  $i$ :

$$\Delta v = \Delta v_i + \Delta v_i' (x - x_i) + \Delta v_i'' \frac{(x - x_i)^2}{2!} + \dots \quad (x_i \leq x \leq x_L).$$



Joon. 10.9

Vahemikus  $O-i$  arendame  $\Delta v$  ritta alguspunktist  $O$ . Siin piirdub rida kahe esimese liikmega, sest  $\Delta v'' = \Delta v''' = \dots = 0$ :

$$\Delta v = \Delta v_0 + \Delta v'_0 x \quad (0 \leq x \leq x_i).$$

Läbipainde juurdekasvu avaldised võib kokku sobitada üheks liitavaldiseks. Silmas pidades tala terviklikkust (katkematumust ja murdumatust), väljendame läbipainde ja pöördenurga ühest ja teisest avaldisest punktis  $x = x_i$  ja võrrutame:

$$\Delta v_i = \Delta v_0 + \Delta v'_0 x_i; \quad \Delta v'_i = \Delta v'_0,$$

mis asetatuna esimesse avaldisse, annavad soovitud liitavaldise. Selles väljendame astmerea konstantsed kordajad diferentsiaalseostest (10.5):

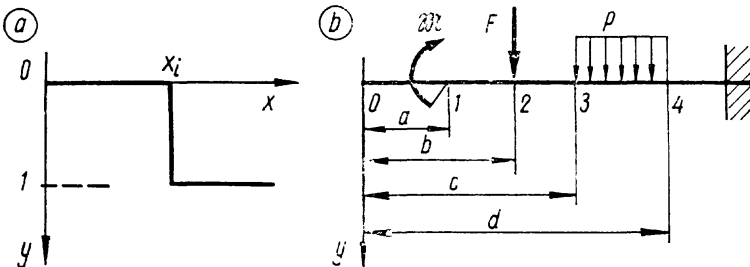
$$\Delta v = \Delta v_0 + \Delta \varphi_0 x + \frac{1}{EI_z} \left[ -\Delta M_i \frac{(x-x_i)^2}{2!} - \Delta Q_i \frac{(x-x_i)^3}{3!} + \Delta p_i \frac{(x-x_i)^4}{4!} + \Delta p'_i \frac{(x-x_i)^5}{5!} + \dots \right] H(x-x_i),$$

kus

$$H(x-x_i) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < x_i \\ 1, & \text{kui } x > x_i \end{cases}$$

on nn. Heaviside'i funktsioon, mille graafik on kujutatud joonisel 10.10, a. See funktsioon kirjutatakse kordajana teise funktsiooni järel ja ta sobitab argumenti muutumise erinevad piirkonnad liitavaldises.

Tala mis tahes koormus on jaotatav punktis  $i$  rakendatud lisakoormuse taolisteks osakoormusteks. See asjaolu võimaldab meil saadud avaldiste summeerimise teel esitada elastne joon mis tahes koormusest. Olgu talale rakendatud koormusi  $n$  punktides, mida tähistame järjenumbritega



Joon. 10.10

$i=1, 2, \dots, n$ . Seejuures võib punkt  $1$  kokku sattuda alguspunktiga  $O$  ja viimane punkt  $n$  lõpuga  $L$ , kui tala otstel mõjuvad välisjõud. Rea esimesed kaks konstanti annavad summeerimisel algparameetrid  $v_0$  ja  $\varphi_0$ , kolmandad ja neljandad kordajad  $\Delta M_i$  ja  $\Delta Q_i$  asendame neile võrdsete suurustega  $\mathfrak{M}_i$  ja  $-F_i$ :

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI_z} \sum_{i=1}^n \left[ -\mathfrak{M}_i \frac{(x-x_i)^2}{2!} + F_i \frac{(x-x_i)^3}{3!} + \Delta p_i \frac{(x-x_i)^4}{4!} + \Delta p'_i \frac{(x-x_i)^5}{5!} + \Delta p''_i \frac{(x-x_i)^6}{6!} + \dots \right] H(x-x_i). \quad (10.22)$$

Pöördenurga avaldise saame rea (10.22) diferentseerimisega. Seejuures on soovitav jätta sulud avamata.

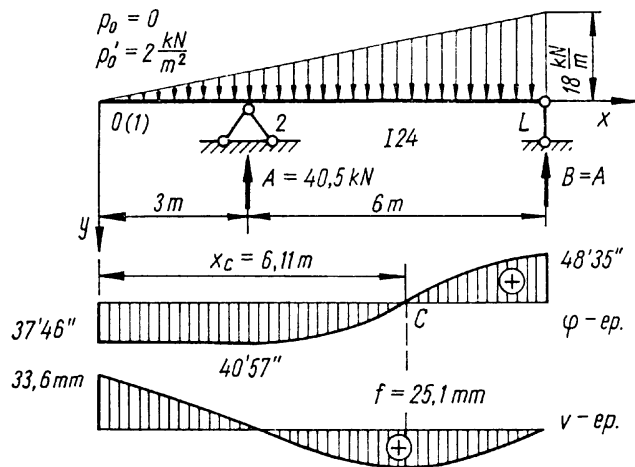
Tundmatud algparameetrid, läbipaine  $v_0$  ja pöördenurk  $\varphi_0$  tala otsas, kuhu on seatud teljestiku algus, määrame tingimustest tugele. Seejuures pole toesidemete asetuse suhtes muid piiravaid tingimusi, kui need, mis on üldised staatikaga määratud taladele. Joonisel 10.9 näidatud tugi varda lõpus ( $L$ ) ei piira avaldise (10.22) rakendamist, kuna me tuletamisel neid sidemeid ei kasutanud.

Lõpmatu rida (10.22) muutub lõplikuks, elastse joone täpseks avaldiseks, kui jaotatud koormus puudub või on antud astmefunktsiooniga, mille tuletised teatud järgust alates muutuvad nulliks. Kuid ka lõpmatu reaga on läbipaindeid ja pöördenurki hõlpus arvutada, sest enamasti saame hea koonduvuse.

**10.4.2. Universaalvõrrand.** Avaldame joonisel 10.10, b kujutatud konsooli elastse joone võrrandi rea (10.22) abil, korrutades selle läbi jäikusega ja asendades  $H(x-x_i)$  piirjoontega viie pidevuspiirkonna jaoks. Kuna  $n=4$ , siis saame võrrandis neli summeeritavat rida, millest igaüks sisaldab ainult ühe liikme:

$$EI_z v = EI_z v_0 + EI_z \varphi_0 x \Big|_I - \mathfrak{M} \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{II} + F \frac{(x-b)^3}{6} \Big|_{III} + p \frac{(x-c)^4}{24} \Big|_{IV} - p \frac{(x-d)^4}{24} \Big|_V. \quad (10.23)$$

Saadud avaldis on tuntud *elastse joone universaalvõrrandina*, mis on lihtne ja seisab hästi mees. Selle abil võib võrrandi esitada, kui koormustena esinevad momendid, koondjõud ja ühtlased lauskoormused. Igale momendile ja



Joon. 10.11

jõule tuleb võrrandisse kirjutada vastav liige ja ühtlasele lauskoormusele kaks liiget punktides, kus koormus algab ja lõpeb. Pidevuspiirkondade vahejooned näitavad, et esimeses kehtib võrrand kuni esimese vahejooneni, teises piirkonnas teise vahejooneni jne.

**Näide 10.6.** Esita joonisel 10.11 kujutatud terasest tala elastse joone ja pöördenurga avaldised ja epüürid.

Tala toereaktsioonid  $A=B=40,5$  kN.

Inertsimoment (tabelist)  $I_z=3460$  cm<sup>4</sup>.

Paindejäikus  $EI_z=210 \cdot 10^9 \cdot 346 \cdot 10^{-7}=726,6 \cdot 10^4$  N·m<sup>2</sup>.

Lauskoormuse tõus alguspunktis  $p'_0=2$  kN/m<sup>2</sup>.

Elastse joone võrrand avaldisest (10.22):

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{p'_0}{EI} \frac{x^5}{5!} - \frac{A}{EI_z} \frac{(x-3)^3}{3!} H(x-3) =$$

$$= v_0 + \varphi_0 x + 229,3 \cdot 10^{-8} x^5 - 929 \cdot 10^{-6} (x-3)^3 H(x-3).$$

Arvutame algarvameetrid äärelingimustest:

$$v_A = 0; \quad v_0 + 3\varphi_0 + 557,2 \cdot 10^{-6} = 0;$$

$$v_B = 0; \quad v_0 + 9\varphi_0 - 65,3 \cdot 10^{-3} = 0,$$

mis annavad võrrandisüsteemi lahendiga

$$\varphi_0 = 10,98 \cdot 10^{-3}; \quad v_0 = -33,55 \cdot 10^{-3}.$$

Elastse joone võrrand leitud algarvameetritega:

$$v = -33,6 \cdot 10^{-3} + 10,98 \cdot 10^{-3} x + 229,3 \cdot 10^{-8} x^5 -$$

$$- 929 \cdot 10^{-6} (x-3)^3 H(x-3).$$

Pöördenurga võrrandi saame diferentseerimise teel:

$$\varphi = 10,98 \cdot 10^{-3} + 114,6 \cdot 10^{-7} x^4 - 278,7 \cdot 10^{-5} (x-3)^2 H(x-3).$$

Suurima läbipainde koha sildes määrame tingimusest  $\varphi=0$ . Võrrandades pöördenurga avaldise nulliga, saame neljanda astme võrrandi, mille lahendame vastuse sobitamise teel silde keskkohast veidi paremal pool, kus on tõenäone suurima läbipainde koht. Võrrandit rahuldab üsna täpselt  $x_c=6,11$  m. Pannes selle väärtuse elastse joone avaldisse, arvutame läbipainde:

$$f = -33,55 \cdot 10^{-3} + 10,983 \cdot 10^{-3} \cdot 6,11 + 229,3 \cdot 10^{-8} \cdot 6,11^5 -$$

$$- 929 \cdot 10^{-6} \cdot 3,11^3 = 25,14 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 25,1 \text{ mm}.$$

Konsooli otsal on läbipaine elastse joone võrrandi vabaliige (algarvameeter):

$$v_0 = -33,55 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -33,6 \text{ mm}.$$

Miinusmärk näitab, et konsooli ots tõuseb ülespoole. Arvutame veel pöördenurga toel B.

$$\varphi_B = 10,98 \cdot 10^{-3} + 114,6 \cdot 10^{-7} \cdot 9^4 - 278,7 \cdot 10^{-5} \cdot 6^2 = -0,01413 \text{ rad} =$$

$$= -48'35''.$$

Joonisel 10.11 on kujutatud elastne joon ja pöördenurga epüürid.

## 11. TUGEVUSTEORIID

### 11.1. MATERJALI PIIRSEISUND RUUMPINGUSES

Tõmbele, survele, väändelevale ja lõikele töötavate konstruktsioonielementide tugevust hindame piirpinge najal, mis on määratud proovikehade teimimisega. Teimimisel on proovikeha elemendiga ühesuguses pinguses, mille ühenimeliste pingete võrdlus lubab määrata usaldatava tugevusvaru. Tõmbel ja survel esineb joonpingus, mida iseloomustame tema ainukese peapingega. Väändel mõjub vardas puhas nihe, samuti üheparameetriline pingus, mille tunnuspingeks võtame suurima nihkepinge. Neile koormuseseisunditele teimide korraldamine on lihtne just sellepärast, et pingused on ühemõõtmelised.

Olukord muutub põikpindel, kus vardas tekib tasandpingus oma kahe peapingega. Materjal on kahesuunalise tõmbe-surve mõju all, mille piirpinged pole meile teada, või teisiti öeldes, pole teimiga määratud. Pindel saame siiski tugevustingimused üles seada tänu sellele, et ohtlikes punktides enamasti esinevad kas joonpingus või siis puhas nihe. Väike probleem tekkis I-profiili kaelas, kus mõnikord võib kujuneda ohtlik punkt tasandpingusega (tugevustingimused 9.39 ja 9.40). Selles punktis seadime tingimused suurimale normaali- ja nihkepingele nii nagu tõmbel ja puhtal nihkel, pikemalt selgitamata teguviisi õigsust. Käesoleva peatüki järgnevates lõikudes näeme, et antud juhul toimi-



sime põhjendatult ja nimetatud tugevustingimusi võime usaldada. Kuid kas tohime seada tugevustingimused tasand- ja ruumpingusele kõikidel juhtudel samal põhimõttel? Selgub, et ei tohi. Meenutame neljandas peatükis kirjeldatud fakti, kus hüdrostaatilisele survele allutatud keha ei purune isegi mitmekümne gigapaskalise rõhu all. Järelikult hüdrostaatilise rõhu tingimustes töötavale konstruktsioonielemendile pole õige seada tugevustingimust nii nagu harilikul survele. Võib tuua palju taolisi näiteid, mis kinnitavad vajadust põhjalikumalt uurida tugevustingimust tasand- ja ruumpinguses.

Mitmemõõtmeliste pinguste piirpingete määramine proovikehade laboratoorse teimimisega inseneripraktika vajaduste rahuldamiseks on väga tülikas, sest puuduvad katsemasinad ja vajalike katsete kõige tagasihoidlikumgi hulk ületaks praktiliste võimaluste piiri. Probleemi lahenduse leiame *tugevusteooriatest*, mis lubavad seada tugevustingimusi ruumpingusele tõmbe- ja surveteimist saadud piirpingetega. Neid teooriaid vaatlemegi käesolevas jaotises 11, kuid enne selgitame veel mõningaid mõisteid ja üldisi lähtealuseid.

*Konstruktsioonielementi piirseisundina* peame silmas selle mõiste klassikalist kontseptsiooni, elemendi muutumist kõlbmatuks suurenevate pingete mõjul ohtlikus punktis. See asjaolu võimaldab vajaduse korral rääkida üldisemalt — *materjali piirseisundist*. Piirseisunditest vaatleme siin ainult kahte: materjali osakeste lahtirebimist üksteisest ja prao tekkimist, millega enamasti kaasneb keha jagunemine kaheks tükiks ning plastse deformatsiooni tekkimist. Esimest nimetatakse *purunemiseks*, teist *voolamiseks*, seejuures mõistetakse sageli ka voolamist tinglikult purunemisena selles mõttes, et temast tulenev suur jääkdeformatsioon põhjustab avariiolekorda.

Piirseisundi tekkimiseni loeme kehtivaks *Hooke'i* seaduse. Seda seisukohta tuleb mõista lihtsustava oletusena, millest kõrvalekaldumised teatavasti võivad olla üsna suured.

Täpsustamist vajab ka tugevuse varutegur, mis joonpinguses on määratud piirpinge ja konstruktsioonielemendis mõjuva suurima pinge suhtega. Ruumpinguses esineb kolm sõltumatut peapinget, mis konstruktsioonielementi tööseisundis on mingites kindlates omavahelistes suhetes. Need suhted aga muutuvad piirseisundis ja jääb selgusetuks, kuidas arvutada varutegur. Ka siin teeme lihtsustava oletuse, et peapinged kasvavad kõik võrdeliselt oma suurustega ja säilitavad konstantsed suhted omavahel. Varutegurina mõista-

me arvu, mis näitab mitu korda peapinged kasvavad piirseisundisse jõudmiseks.

Konstruktsioonielementi tugevuse hindamisel ruumpinguses kasutame materjali mehaanilist näitajat, mis on saadud harilikust tõmbe- või survekatsest, see tähendab joonpinguse piirpinget. Seejuures *tugevusteooria ülesandeks on anda reegel kolmest peapingest sõltuva niisuguse ekvivalentpinge määramiseks, mis võrrelduna joonpingusega piirpingega esitab ruumpinguse varutegurit*. Eeldades ühtset varutegurit joon- ja ruumpingustes töötavatele konstruktsiooni-elementidele, saame tugevustingimuse:

$$\sigma_{eq} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma] \left( = \frac{\sigma_{piir}}{S} \right), \quad (11.1)$$

kus  $f$  on peapingetest sõltuv funktsioon, valem või reegel ruumpinguse ekvivalentpinge väljaarvutamiseks ja lubataval pingel  $[\sigma]$  on sama tähendus, mis jaotises 2 ja 3.

## 11.2. KLASSIKALISED TUGEVUSTEORIID

**11.2.1. Esimene tugevusteooria** ehk *suurimate normaalpingete teooria* peab piirseisundi põhjustajaks suurimat peapinget sõltumata ülejäänud kahest. Esineb kaks võimalust, kas ohtlikuks pingeks on  $\sigma_1 > 0$  või  $\sigma_3 < 0$ . Tugevuse varutegurid on võrdsed joon- ja ruumpingustes, kui  $\sigma_2 = \sigma_1 = \sigma_{eq(z)}$  või  $\sigma_c = \sigma_3 = \sigma_{eq(c)}$ , kus  $\sigma_2$  ja  $\sigma_c$  on joonpinguse tõmbe- või survepinge. Esimesest tugevusteooriast kujunevad järelikult ruumpinguse tugevustingimused järgmisteks:

$$\sigma_{eq}^I = \begin{cases} \sigma_1 \leq [\sigma]_z; \\ |\sigma_3| \leq [\sigma]_c, \end{cases} \quad (11.2)$$

kus ülaindeks ekvivalentpinge juures näitab tugevusteooriat.

Esimene on vanim tugevusteooriatest, mille võttis kasutusele juba *Galilei*. Selle teooria puudus on asjaolu, et ta tunnistab ainult ühe peapinge mõju ja ei arvesta kahte ülejäänud. Kõige selgemalt tuleb see puudus ilmsiks siis, kui vaadeldav keha on allutatud survele kõigis kolmes sihis ja talub märgatavalt kõrgemaid survepingeid, kui sama keha koormatuna survega ühes sihis. Ka ei iseloomusta esimene teooria õigesti voolamisnähtust. Esimene tugevusteooria sobib suhteliselt hästi hapra materjali purunemisele tõmbe- ja survepingetel, näiteks malmile, betoonile, kivimitele jt. Vaatamata oma puudustele leiab suurimate normaalpingete teooria rakendamist ka tänapäeval.

**11.2.2. Teine tugevusteooria** ehk *suurima deformatsiooni teooria* lähtub oletusest, et materjali piirseisundi määrab suurim peadeformatsioon  $\varepsilon_1$  sõltumata ülejäänud deformatsiooni- ja pingeseisundi komponentidest. Tähistades harilikul tõmbel suhtelise piknemise  $\varepsilon_z$ , väidab see teooria, et tugevuse varutegurid joon- ja ruumpingustes on võrdsed, kuid  $\varepsilon_z = \varepsilon_1$ . Väljendades selles võrduses suhtelised piknemised *Hooke*'i seadusest 4.43 saame:

$$\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

millest järeldub tugevustingimus

$$\sigma_{eq}^{II} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_z, \quad (11.3)$$

kus  $\sigma_{eq}^{II} > 0$ .

Teise tugevusteooria eelis, võrreldes esimesega, on kõigi kolme peapinge arvestamine piirseisundi kujunemisel keha punktis. Tema peamine puudus on kahesuunalise tõmbe tunnistamine soodsamaks ühesuunalisest, mida katse ja kogemus ei kinnita. Ka ei sobi see teooria plastse voolamise selgitamiseks. Hästi seletab teooria habrastest materjalidest katsekehade purunemist survele, kui nende otspinnad on määritud parafiini või mõne muu tahke määrdega. Niisugustes proovikehades tekivad pikipraadid, mis selle teooria põhjal tulenevad surutud varda põiklaienemisest. Sama laadi praadid tekivad ülemäärases koormusest surutud betoon- ja kivipostides.

Nagu esimenegi, sobib ka teine tugevusteooria hapra pildiga purunemise jaoks. Ta leiab rakendust betooni ja raudbetooni purunemistingimuste selgitamisel.

**11.2.3. Kolmas tugevusteooria** ehk *suurima nihkepinge teooria* väidab, et piirseisundi põhjustab nimetatud pinge sõltumata teistest pinguse komponentidest. Järelikult, kui joon- ja ruumpinguse suurimad nihkepinged on võrdsed:  $\max \tau = \tau_2$ , siis on võrdsed ka nende pinguste varutegurid. Asendades joon- ja ruumpinguste suurimad nihkepinged oma avaldistega (2.28) ja (4.25), saame võrduse

$$\frac{\sigma_{z(c)}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

millest järeldub, et ekvivalentpinge avaldub suurima ja vähima peapinge vahena ja tugevustingimus saab järgmise kuju:

$$\sigma_{eq}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (11.4)$$

Kolmanda tugevusteooria peamine puudus on teise peapinge  $\sigma_2$  mittearvestamine ruumpinguse piirseisundi väljakujunemisel konstruktsioonielemendis. See teooria põhjendab tihedast materjalist kehade purunematust hüdrostaatilise rõhu tingimustes, kus  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , mis tõepoolest annab ekvivalentpinge võrdse nulliga. Seejuures aga ei ole samalaadsele tõmbele allutatud keha purunematu. Teooria sobib hästi tugevuse hindamiseks plastsete materjalide jaoks, mille tõmbe- ja survetugevus on arvuliselt võrdsed. Ta on kõige sagedamini kasutatav tugevusteoorias terasest konstruktsioonielementidele, mis töötavad tasandpinguses.

Kolmas tugevusteooria on seotud voolamise tekkimisega pehmetes metallides. Väljendatult kujul:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T \quad (11.5)$$

on ta tuntud *Tresca-Saint-Venant*'i *plastsustingimusena*.

**11.2.4. Neljas tugevusteooria** ehk *energeetiline teooria* esitati esmakordselt *Beltrami* poolt 1885. a., kes oletas, et piirseisundi pingestatud keha punktis määrab seal kogunenud potentsiaalne energia ruumalaühiku kohta, ehk energia tihedus. Teisiti öeldes, kui joon- ja ruumpinguse energia tihedused on võrdsed, siis on ka nende tugevuse varutegurid võrdsed. Sellele oletusele rajatud tugevusteooria oli mõnel juhul katseandmete ja kogemusega kooskõlas, kuid enamasti andis vasturääkivad tulemused. Teooriat täiustas 1904. a. *Huber*, kes eeldas, et piirseisundi mõõduks on ainult kujumuutuse (pingede viaatori) energiatihedus, kuna mahudeformatsioonile (hüdrostaatilisele pingele) vastav osa piirseisundit ei mõjuta. Tugevusteooria selle parandusega osutus märgatavalt sobivamaks ja võeti inseneripraktikas kasutusse.

Tugevustingimuse saamiseks väljendame kujumuutuse energia tiheduse joon- ja ruumpinguses valemiga (4.59) ja võrrutame tulemused:

$$\frac{1+\nu}{3E} \sigma_{z(c)}^2 = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1).$$

Avaldame võrdusest  $\sigma_{z(c)}$ :

$$\sigma_{z(c)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}, \quad (a)$$

mis on otsitavaks ekvivalentpingeks. Tugevustingimuse saame järgmisel kujul:

$$\sigma_{eq}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]. \quad (11.6)$$

Asendades seoses (a) suuruse  $\sigma_{z(c)}$  voolavuspiiriga  $\sigma_T$  tõmbel ja surveil, saame:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sigma_T, \quad (11.7)$$

mis on tuntud *Maxwell-Huberi* või ka *Mises-Hencky plast-sustingimuse*na. Väga pehmetele, puhastele metallidele (plii, kuld, hõbe, vask, alumiinium jt.) sobib paremini plast-sustingimus (11.5), kuna metallide sulamitele (teras, pronks, messing jt.) annab (11.7) katseandmetega parema kooskõla. Kui võrrelda voolavuspingeid tõmbel ( $\sigma_T$ ) ja puhtal nihkel ( $\tau_T$ ), kus  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_T$  ja  $\sigma_2 = 0$ , saame tingimustest (11.5) ja (11.7) vastavalt:

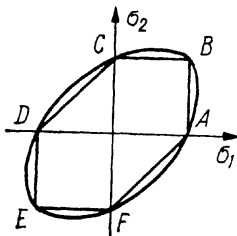
$$\tau_T = \sigma_T/2 = 0,5\sigma_T; \quad \tau_T = \sigma_T/\sqrt{3} = 0,58\sigma_T. \quad (11.8)$$

Teatavasti moodustavad metallide ja nende sulamite voolavuspinged puhtal nihkel 50...70% vastavast pingest tõmbel ja surveil. Viieandas peatükis nägime, et ka terase lõike-tugevus on 60...70% tõmbetugevusest. Seepärast tuleb plast-sustingimust (11.7) ja ka tugevustingimust (11.6) pidada sobivamaks konstruktsioonimaterjalidena kasutatavatele metallide sulamitele kui tingimusi (11.5) ja (11.6).

Nagu näeme, sobivad kolmas ja neljas tugevusteooria mõlemad plastsete materjalide kohta, või täpsemalt, nendele juhtudele, kui piir seisund on voolamine. Seejuures eelistame neljandat teooriat kui täpsemat, kuid sageli lepime ka kolmanda kui lihtsamaga. Ühine puudus on asjaolu, et nad sobivad ainult nendele materjalidele, mille voolavuspiirid tõmbel ja surveil on võrdsed, või nagu on kombeks rääkida, võrdse tõmbe- ja survetugevusega materjalidele.

Kolmandat ja neljandat tugevusteooriat on ülevaatlilik võrrelda tasandpinguses peapingete  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  teljestikus (joonis 11.1), kus esimene neist annab plast-sustingimuse (11.5) suletud murdjoone *ABCDEF*, kuna teine (11.7) annab plastse seisundi ellipsi võrrandiga

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_T^2 (= \text{const}).$$



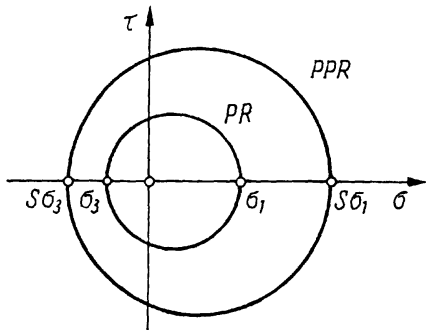
Joon. 11.1

Iga klassikaline tugevusteooria on rajatud ühele oletatavale piir seisundit põhjustavale faktorile. Sageli on tõesti nii, et piir seisundi kutsus esile ainult suurim suhteline pikenemine või mõni teine pinge-deformatsiooniseisundit iseloomustav üksiksuurus enam-vähem sõltumatult teistest. Sel juhul kasutame tugevusteooriatest ühte, mis vastab oodatavale piir seisundile. Harvad pole ka konstruktsiooni-elementide piir seisundid, mida pole võimalik vaadelda ühe põhjusliku faktori najal. Näiteks betooni purunemine raudbetoonist tala teatud piirkondades annab pildi, milles põimuvad ilmselt mitmesugused põhjuslikud faktorid. Taolised keerukad purunemispildid esinevad peamiselt materjalides, mille mehaanilised emadused tõmbel ja surveil on märgatavalt erinevad ja mis on allutatud keha ruumalas muutuvale tasand- või ruumpingusele. Nendel juhtudel pole klassikalised teooriad rakendatavad. Käesolevas punktis vaatleme C. O. Mohri poolt aastal 1900 ette pandud teooriat, mis on eelmistest universaalsem, küllalt lihtne ja leiab rakendust inseneripraktikas.

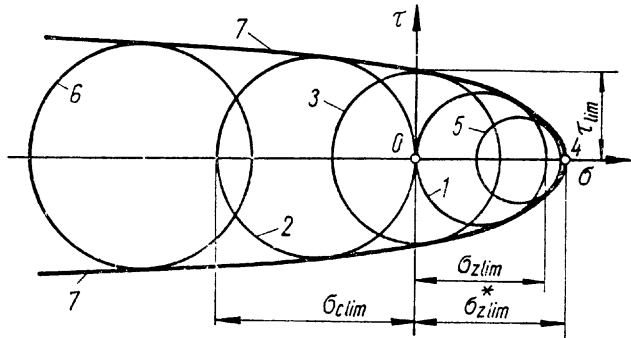
Selle tugevusteooria üldine põhimõte seisneb järgmises arutluses. Kujutame ruumpinguse peapingete  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ -teljestikus ruumi, mille iga punkt vastab teatavale arvuliselt määratud pingusele. Et materjali jaoks pingused jagunevad purustavateks ja ohututeks, siis nendele vastavalt ka pinguse ruum jaguneb kaheks piirkonnaks. Neid piirkondi eraldava pinna punktid kuuluvad materjali piir seisundi pingustele. Kui õnnestub katsetega määrata piir seisundite pind, siis on võimalik hinnata mis tahes pinguse tugevusvaru.

Selle põhimõtte rakendamine praktilisteks tugevusarvutusteks on keeruline ülesanne, mis lahendatakse lihtsustuste najal. Ühe lihtsustusena jäetakse vaatlusest kõrvale keskmine peapinge  $\sigma_2$  ja oletatakse, et piir seisund sõltub ainult äärmistest peapingetest  $\sigma_1$  ja  $\sigma_3$ . Sellega taandub ruumiülesanne tasandülesandeks, mida vaadeldakse Mohri pingeringide abil  $\sigma$ -teljestikus. Äärmistele peapingetele  $\sigma_1$  ja  $\sigma_3$  vastavat suurimat pingeringi (joonis 4.16) nimetatakse *pearingiks* (PR). Piir seisundis, kus peapinged on kasvanud varuteguri kordselt väärtusteni  $S\sigma_1$  ja  $S\sigma_3$ , saame *piirpearingi* (PPR), nagu kujutatud joonisel 11.2.\* Meie eesmärk

\* Selles peatükis suuname  $\tau$ -telje üles, kuna siin pole vajadust pingeteljestikku siduda  $xy$ -alusteljestikuga, mille suhtes  $\tau$ -telg peab olema suunatud  $y$ -telje vastassuunas.



Joon. 11.2  
Joon. 11.3



on leida  $\sigma$ -tasandil ohutu piirkond, millesse peab jääma vaadeldava pinguse piirpearing.

Vaatleme pingetasandit joonisel 11.3. Oletame, et uuritava materjali piirpinged  $\sigma_{z\lim}$  — tõmbele,  $\sigma_{c\lim}$  — survele,  $\tau_{\lim}$  — puhtale nihkele ja  $\sigma_{z^*\lim}$  — kolmesuunalisele ühtlasele (hüdrostaatilisele) tõmbele on proovikehade teimimisega määratud. Joonestame neile pingetele vastavad pearingid 1, 2, 3 ja 4, millest ring 4 kõdub üheks punktiks. Tõmbame läbi punkti 4 kolmele ringile sujuva puutejoone 7, mida nimetame *tugevuse piirjooneks*. Kui teeksimisega veel katseid, milles mõlemad äärmised piirpeapinged teineteisest arvuliselt erinevad, siis näeme, et nende pinguste pearingid (näiteks 5 ja 6) jäävad tugevuse piirjoone haardesse puuteriingidena. Määratud materjalile tugevuse piirjoone, oleme saanud mis tahes ruupinguse hindamiseks järgmise reegli: *kui pinguse piirpearing jääb tugevuse piirjoone haardesse seda lõikamata, siis tugevus pole ohustatud.*

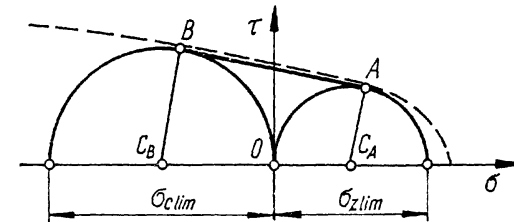
Tugevuse piirjoonel on kõige tülrikamalt määratavaks

tema haripunkt 4, kuna materjalide proovimine tõmbele kolmes ristuvast suunas on tänapäeval peaaegu teostamatu. Ka ei paku mitmesuunalise tõmbe piirkond enamasti praktilist huvi. Samuti jäetakse vaatlusest välja tugevuse piirjoone haarade kaugemale ulatuvad osad, mis vastavad mitmesuunalisele survele. Pinguste huvipakkuvast piirkonnast, kus  $\sigma_1 > 0$  ja  $\sigma_3 < 0$ , asendame tugevuse piirjoone sirglõiguga, mis on igale materjalile määratav kahe tugevusnäitajaga  $\sigma_{z\lim}$  ja  $\sigma_{c\lim}$ . Joonisel 11.4 on kujutatud neile suurustele vastavad pearingid ühise puutujaga, sirglõiguga  $AB$ , mida vaatleme tugevuse piirjooneks. Jooniselt näeme, et tõelise piirjoone (katkendjoone) ja tema asendaja (pidevjoone) lahknevus on vaadeldavas piirkonnas tähtsusetult väike.

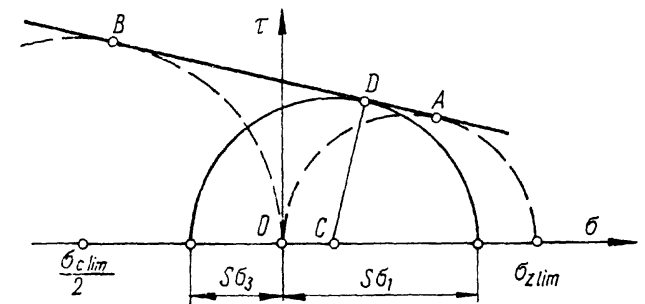
Tuletame tugevustingimuse ülaltoodud eeldustel joonise 11.5 põhjal. Joonestame ringjoone keskmega  $C$  ja puutepunktiga  $D$ . Vaatleme punkti  $D$  asukohta muutuvana tugevuse piirjoonel  $AB$ , kus ta on määratud ringi keskpunkti kaugusega  $OC$  alguspunktist ja raadiusega  $CD$ , mis on omavahel lineaarses sõltuvuses:

$$CD = a + b(OC). \quad (a)$$

Ringjoont vaatleme peapingetega  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  määratud



Joon. 11.4



Joon. 11.5

ruumpinguse piirteisundi  $S\sigma_1$ ,  $S\sigma_2$  ja  $S\sigma_3$  piirpearingina, kus suurus  $S$  on tugevuse varutegur. Selle ringi keskpunkti kaugus alguspunktist ja raadius väljenduvad teatavasti järgmiselt:

$$OC = \frac{S\sigma_1 + S\sigma_3}{2}; \quad CD = \frac{S\sigma_1 - S\sigma_3}{2}. \quad (b)$$

Asendame võrrandis (a) sirglõigud oma väärtustega võrrandist (b). Pärast teisendamist saame seose:

$$S\sigma_1 = \frac{2a}{1-b} + \frac{1+b}{1-b} S\sigma_3, \quad (c)$$

mis näitab, et suurused  $S\sigma_1$  ja  $S\sigma_3$  on samuti lineaarses sõltuvuses. Konstantsed kordajad seoses (c) määrame tingimustest punktides A ja B. Punktis A  $S\sigma_1 = \sigma_{z\text{lim}}$  ja  $S\sigma_3 = 0$ , millest

$$\frac{2a}{1-b} = \sigma_{z\text{lim}}.$$

Punktis B  $S\sigma_1 = 0$  ja  $S\sigma_3 = -\sigma_{c\text{lim}}$ , millest

$$\frac{1+b}{1-b} = \frac{\sigma_{z\text{lim}}}{\sigma_{c\text{lim}}}.$$

Asendades seoses (c) konstandid, saame:

$$\frac{\sigma_{z\text{lim}}}{S} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{z\text{lim}}}{\sigma_{c\text{lim}}} \sigma_3,$$

milles vasakul pool võrdusmärki on lubatav pinge tõmbel ja paremal pool järelikut ruumpinguse ekvivalentpinge  $\sigma_{eq}^M$ .

Tugevustingimuse saame esitada järgmisel kujul:

$$\sigma_{eq}^M = \sigma_1 - n\sigma_3 \leq [\sigma]_z, \quad (11.9)$$

kus

$$n = \frac{\sigma_{z\text{lim}}}{\sigma_{c\text{lim}}} \quad (11.10)$$

ja

$$\sigma_1 > 0; \quad \sigma_3 < 0.$$

Tingimust  $\sigma_3 < 0$  tuleb silmas pidada rangena, kuna väljumine piirkonnast AB (joonis 11.4) üle punkti A pole mingil juhul lubatud. Tingimust  $\sigma_1 > 0$  võib vaadelda mitte nii rangena, sest et väljumine piirkonnast AB üle punkti B on

seotud väiksema vea ja riskiga kirjeldada ohtlikku seisundit ohutuna.

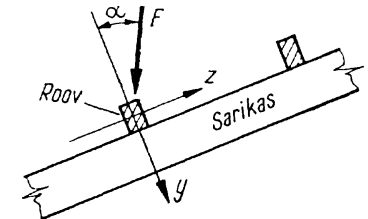
Suhtes (11.10) tulevad piirpingetena arvesse voolavuspiirid  $\sigma_{Tz}$  ja  $\sigma_{Tc}$  tõmbel ja survel, kui materjal on plastne, või tõmbe- ja survetugevus ( $\sigma_{Bz}$  ja  $\sigma_{Bc}$ ), kui materjalil voolavus puudub. Juhul, kui  $n=1$ , s.t. materjali tugevusnäitajad tõmbel ja survel on võrdsed, ühtib Mohri tugevusteooria kolmanda tugevusteooriaga.

Tugevusteooriatest võib soovitada Mohri oma, kui kõige täiuslikumat lihtsatest teooriatest, mille kõrval ruumilisele tõmbele tuleks rakendada esimesi teooriat.

## 12. LIITTÖÖSEISUNDID

### 12.1. VILDAKPAINE

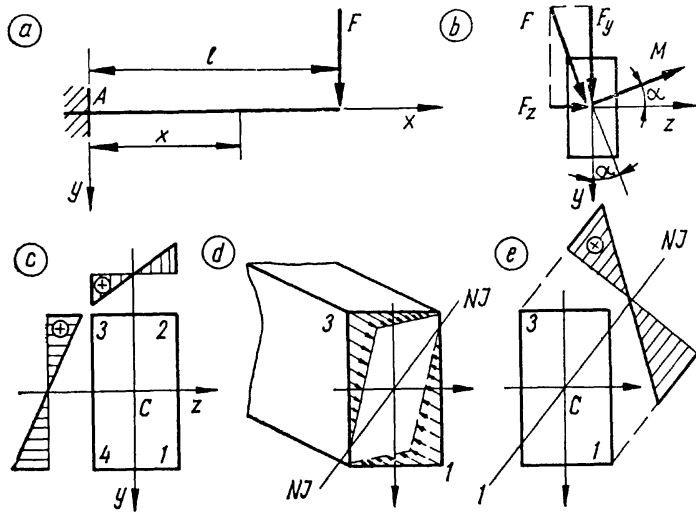
**12.1.1. Pinged varda ristlõikes.** Vildakpaine tekib siis, kui vardas mõjuvad kaks paindemomenti  $M_z$  ja  $M_y$ , millega võivad kaasneda põikjõud  $Q_y$  ja  $Q_z$ . Seejuures  $y$  ja  $z$  on varda ristlõikepinna keskpeateljed. Vildakpaine tüüpiliseks näiteks on katuse roov, mille ristlõikepinna keskpeatelgede sihid ei ühti koormuse sihiga (joonis 12.1).



Joon. 12.1

Vaatleme suhteliselt jääkade varraste vildakpaine rakendamise jõe mõju sõltumatuse printsiibi. Lahutame koormuse komponentideks  $y$ - ja  $z$ -teljele, millega vildakpaine jaguneb kaheks tasandpaine ülesandeks. Nende ülesannete lahendid on summeeritavad vajalike lõplike tulemuste saamiseks.

Joonisel 12.2, a on kujutatud konsool, millele mõjub koondjõud nii nagu näidatud otsvaates (b). Lahutame välis-



Joon. 12.2

jõu  $F$  komponentideks:

$$F_y = F \cos \alpha; \quad F_z = F \sin \alpha.$$

Avaldame sisejõud ristlõikes:

$$\begin{aligned} M_z &= -F_y(l-x); & M_y &= -F_z(l-x); \\ Q_y &= F_y; & Q_z &= F_z. \end{aligned}$$

Sisejõudude  $M_y$ ,  $Q_y$  ja  $Q_z$  märgid määrame üldise märgireeglina jaotisest 1.5.5 ja  $M_z$  märgi võtame vastupidise, nagu tegime otsepaindel kaheksandas jaotises.

Normaalpinged paindetasanditest  $xy$  ja  $xz$  avaldame valemiga (9.6) ja kujutame nende epüürid joonisel 12.2, c. Normaalpinged liidame algebraliselt igas ristlõikepinna punktis, mille koordinaadid on  $y$  ja  $z$ :

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (12.1)$$

Valemist näeme, et summaarse ruumilise pingepüüri kujundab tasand. Pingepüüri tasand lõikab ristlõikepinna mööda sirget, mida nimetame nulljooneks ( $NJ$ ), sest sellel joonel võrduvad normaalpinged nulliga (joonis 12.2, d). Suurimad tõmbe- ja survepinged mõjuvad nurgapunktides  $I$  ja  $3$ ;

$$\max \sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}, \quad (12.2)$$

kus  $M_z$  ja  $M_y$  on paindemomentide absoluutväärtused.

Valem (12.1) on üldiselt kehtiv, (12.2) ainult ristlõikepindadele, millel on kaks sümmeetriatelge ja neli nurgapunkti. Seejuures need neli nurgapunkti peavad olema ristlõikepinna kõige kaugemateks punktideks nii  $y$ - kui ka  $z$ -teljest. Taolise ristlõikepinna tuleb ristkülikulise kõrval arvesse näiteks I-profiil.

Valemit (12.2) võime veelgi lihtsustada, kui eeltoodud tingimustele lisandub see, et talale mõjub koormus ühes tasandis kaldenurgaga  $\alpha$   $y$ -telje suhtes. Seda tingimust rahuldab ka vaadeldav konsool joonisel 12.2. Määrame summaarse paindemendi

$$M = F(l-x)$$

ja avaldame paindemomentide  $M_z$  ja  $M_y$  absoluutväärtused selle kaudu:

$$M_z = M \cos \alpha; \quad M_y = M \sin \alpha.$$

Asendame paindemomentide väärtused valemis (12.2):

$$\max \sigma = \frac{M}{W_z} (\cos \alpha + m \sin \alpha), \quad (12.3)$$

kus  $m = W_z/W_y$ . Valem (12.3) osutub otstarbekaks vildakpainele töötava tala dimensioneerimisel, kui ristlõikepinna kuju on antud ja sellega ka suhe  $m$  teada.

Nihkepinged ristlõikes avalduvad valemiga (9.20):

$$\tau_y = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b}; \quad \tau_z = \frac{Q_z S_y^*}{I_y h}.$$

Need liituvad vektoriaalselt summaarseks nihkepingeks

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}.$$

Ristkülikulise ristlõike suurimad nihkepinged keskmes

$$\max \tau = \frac{3}{2} \frac{1}{A} \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A}, \quad (12.4)$$

kus  $Q = F$  on summaarne põikjõud konsoolis.

**12.1.2. Nulljoon.** Olgu tala ristlõikepind kujutatud joonisel 12.3, a. Sel juhul suurima tõmbe- ja survepinge arvutamine valemitega (12.2) ja (12.3) pole võimalik ja nende määramiseks kasutame normaalpinge üldist avaldist (12.1).

Eelnevalt teeme kindlaks *ohtlikud punktid*, kus mõjuvad ekstreemsed normaalpinged. Et normaalpinged jagunevad lineaarselt, siis osutuvad ohtlikeks ristlõikepinna äärepunktid, mis asetsevad kõige kaugemal nulljoonest. Joonisel 12.2, *e* on näidatud ristkülikulise ristlõikepinna nulljoon (*NJ*) ja selle ristsirgele ehitatud summaarsete normaalpingete epüür.

Täpsustame nulljoone asendi tingimusest, et selle mis tahes punktis ( $y_0|z_0$ ) võrdub normaalpinge nulliga:  $\sigma(y_0, z_0) = 0$ . Nulljoone võrrandi saame, kui rakendame selle tingimuse normaalpinge avaldisele (12.1):

$$\frac{M_z}{I_z} y_0 + \frac{M_y}{I_y} z_0 = 0,$$

mis kujutab sirget läbi koordinaatide alguse (ristlõikepinna keskmel). Määrame nulljoone suunanurga  $\gamma$  nii nagu näidatud joonisel 12.3, *a*.

Avaldame selle nurga tangensi nulljoone võrrandist:

$$\tan \gamma = -\frac{y_0}{z_0} = \frac{I_z M_y}{I_y M_z}. \quad (12.5)$$

Asendame saadud valemis suhte  $M_y/M_z$  suurusega  $\tan \beta$ :

$$\tan \gamma = \frac{I_z}{I_y} \tan \beta. \quad (12.6)$$

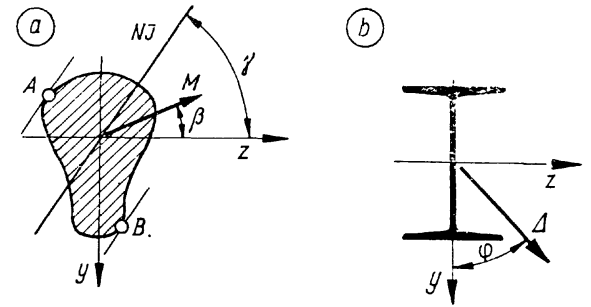
Näeme, et nulljoon kaldub paindemomendi vektorist  $M$  selle keskpatele suunas, mille suhtes inertsimoment on väiksem. Kui  $I_z = I_y$ , siis  $\gamma = \beta$  ja paindemomendi vektor on nulljoonel. Ühes tasandis mõjuvate välisjõudude puhul  $\alpha = \beta$  ja

$$\tan \gamma = \frac{I_z}{I_y} \tan \alpha, \quad (12.7)$$

millest nähtub, et nulljoon pole risti koormuse tasandiga. See tunnus on iseloomulik vildakpaindele. Erandjuhul, kui  $I_z = I_y$ , on nulljoon risti välisjõudude tasandiga ja esineb tasandpaine. Järelikult *vardad, mille ristlõikepinna painertsimomendid on võrdsed, töötavad taladena ainult tasandpaine tingimustes*. Näiteks vildakpaindest ei saa rääkida ümara ja ruudukujulise ristlõikepinna varraste juures.

Ohtlikud punktid *A* ja *B* määrame nulljoonele paralleelsete sirgetega, mis on puutujateks ristlõike kontuurile (joon. 12.3, *a*). Nende punktide koordinaatidega ( $y_A|z_A$ ) ja ( $y_B|z_B$ ) arvutame suurima tõmbe- ja survepinge valemist (12.1).

**12.1.3. Läbipaine** vildakpaindest määratakse komponentide  $v$  ja  $w$  vektoriaalse summana:



Joon. 12.3

$$\Delta = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad (12.8)$$

kus  $v$  ja  $w$  on läbipained vastavalt  $y$ - ja  $z$ -telje sihis ja  $\Delta$  — summaarne läbipaine suunanurgaga  $\varphi$ , mille

$$\tan \varphi = \frac{w}{v}. \quad (12.9)$$

Konsoolile joonisel 12.2 arvutame suurima läbipainde komponendid valemiga (10.1):

$$v = \frac{F_y l^3}{3EI_z}; \quad w = \frac{F_z l^3}{3EI_y}.$$

Summaarne läbipaine

$$\Delta = \frac{l^3}{3E} \sqrt{\frac{F_y^2}{I_z^2} + \frac{F_z^2}{I_y^2}}$$

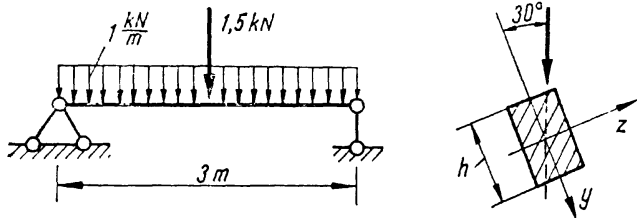
ja selle suunanurga tangens

$$\tan \varphi = \frac{F_z I_z}{F_y I_y} = \frac{I_z}{I_y} \tan \alpha. \quad (12.10)$$

Sellest valemist järeldame, et tasandkoormusest tala ei paindu läbi välisjõudude suunas, vaid sellega viltu. Seejuures kaldub läbipainde vektor jõusihist kõrvale selle keskpatele poole, mille suhtes inertsimoment on suurim. Võrreldes valemist (12.7) ja (12.10) näeme, et tasandkoormusega  $\varphi = \gamma$ . Järelikult on sel juhul nulljoon ja läbipainde vektor teineteisega risti.

*Näide 12.1.* Terastala I-50 monteeriti oma kohale ja osutus, et tema sein oli vertikaalseisust kaldunud  $1^\circ 36'$  võrra. Määrata normaalpingete suurenemine vildakpaindest vertikaalse koormusega.

Profiilide tabelist  $W_z = 1570 \text{ cm}^3$  ja  $W_y = 122 \text{ cm}^3$ .



Joon. 12.4

Kui tala poleks kaldunud, siis ta töötaks tasandpaindele ja

$$\max \sigma = \frac{M}{W_z}.$$

Kaldunud asendis määrame suurimad pinged valemiga (12.3):

$$\max \sigma = \frac{M}{W_z} (\cos \alpha + m \sin \alpha),$$

kus  $\alpha = 1^\circ 36'$  ja  $m = W_z/W_y = 1570/122 = 12,87$ .

Võrreldes suurimaid pingeid, näeme, et vildakpaindest tekib  $\cos 1^\circ 36' + 12,87 \sin 1^\circ 36' = 1,359$

kordne pingete suurenemine, s. t. umbes 36% võrra.

**Näide 12.2.** Määrata joonisel 12.4 kujutatud puidust tala ristlõike mõõtmed  $b$  ja  $h = 1,5b$ , kui  $[\sigma] = 10$  MPa.

Arvutame suurima summaarse paindemomendi silde keskel:

$$M = (1 \cdot 3^2/8 + 1,5 \cdot 3/4) 10^3 = 2,25 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Suhe  $m = W_z/W_y = h/b = 1,5$ .

Seame talale tugevustingimuse valemiga (12.3):

$$\max \sigma = \frac{2,25 \cdot 10^3}{W_z} (\cos 30^\circ + 1,5 \sin 30^\circ) \leq [\sigma] = 10 \cdot 10^6,$$

millest avaldame vajaliku tugevusmomendi

$$W_z \geq \frac{2,25 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} (0,866 + 0,75) = 3,64 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Arvestades, et  $W_z = bh^2/6 = 2,25b^3/6$ , arvutame tala laiuse

$$b = \sqrt[3]{\frac{6W_z}{2,25}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 3,64 \cdot 10^{-4}}{2,25}} = 0,1 \text{ m}$$

ja kõrguse  $h = 1,5b = 1,5 \cdot 0,1 = 0,15 \text{ m}$ .

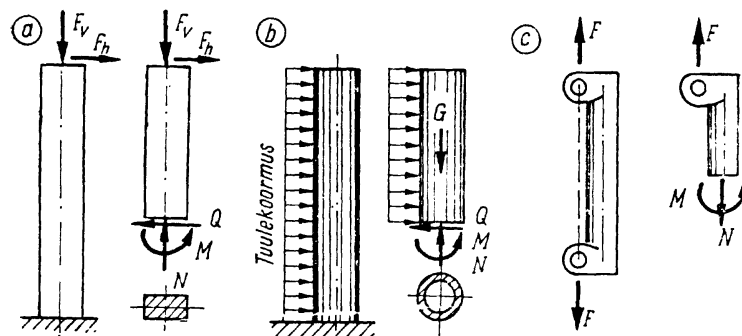
Vastus: ristlõike mõõtmed on  $100 \times 150 \text{ mm}$ .

## 12.2. EKSTSEENTRILINE SURVE JA TÕMME

**12.2.1. Normaalgpinged ristlõikes.** Vaatleme normaaljõu  $N$  ning paindemomentide  $M_z$  ja  $M_y$  koosmõju, millele võivad lisanduda põikjõud  $Q_y$  ja  $Q_z$ . Põikjõudude mõjust loobume, sest nendest põhjustatud nihkepinged varda ristlõikes on väiksed võrreldes pingetega normaaljõust ja paindemomentidest. Peame silmas *suure jäikusega vardaid*, mille läbi-paine on väike võrreldes ristlõike mõõtetega. Seejuures ei tohi survele töötava varda suhteline pikkus olla nii suur, et võiks tekkida nõrkeoht. Seda selgitasime teise jaotise alguses. Normaalgjõu ja paindemomendi koosmõju *saledates varrestes* uurime jaotises 15. Seal täpsustame ka suure jäikusega ja saledate surutud varraste tunnused, mis võimaldavad neid piiritleda. Normaalgjõududest seame esikohale survejõu, sest praktilistes rakendustes esineb surve koosmõju paindega sagedamini ja annab ülesandele ajalooliselt väljakujunenud tausta.

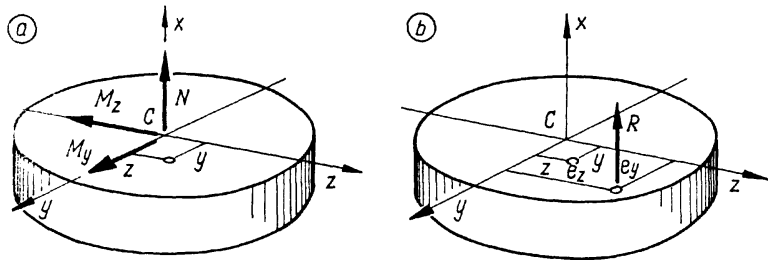
Ekstsentrilisele survele ja tõmbele töötavate varraste tüüpilised esindajad on kandepostid, sambad, korstnad jt., mis töötavad survele ja paindele, kuid ka mitmesugused tõmbe ja painde koosmõjule allutatud konstruktsioonielemendid (joonis 12.5).

Vaatleme varrast vertikaalasendis ja kõrvaldame lõikega tema ülemise osa. Alumise osa ristlõikepinna kujutame joonisel 12.6, a. Seame kohale  $xyz$ -teljestiku, algusega keskmises  $C$ ,  $x$ -teljega välisnormaali suunas ja  $yz$ -teljed ristlõikepinna peatelgedena. Mõjugu vaadeldavas ristlõikes sisejõud  $N$ ,  $M_z$  ja  $M_y$ , mis on määratud nii nagu tegime seda tõmbel, survel



Joon. 12.5





Joon. 12.6

ja paindel ning ka märgireeglid jätame samaks. Joonisel kujutame sisejõud positiivsete suurustena. Rakendades jõu mõju sõltumatuse printsiipi, arvutame normaalpinged punktis  $(y/z)$  valemitega (2.6) ja (9.6) ning summeerime tulemused:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z; \quad (12.11)$$

kus  $A$  on ristlõikepindala,  $I_z$  ja  $I_y$  — inertsimomendid.

Kui ristlõikepinnal on kaks sümmeetriatelge ja neli nurgapunkti, mis osutuvad kõige kaugemateks punktideks nii  $y$ - kui ka  $z$ -teljest, siis võime ekstreempinged arvutada tugevsmomentide abil:

$$\max_{\min} \sigma = \frac{N}{A} \pm \left( \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right), \quad (12.12)$$

kus paindemomentidena arvestame nende absoluutväärtusi, normaaljõudu vaatleme aga märgiga suurusena.

Normaalpingete arvutamiseks ristlõikepinnas kasutame veel teist põhilise tähtsusega valemit, milles sisejõudude süsteem  $N$ ,  $M_z$  ja  $M_y$  on asendatud oma resultantiga  $R$  rakenduspunktis  $(e_y|e_z)$  nii, nagu kujutatud joonisel 12.6,  $b$ . Selle valemi tuletamiseks asendame normaalpinge avaldises (12.11) paindemomendid resultantjõu ekvivalentsete momentidega

$$M_z = R \cdot e_y; \quad M_y = R \cdot e_z, \quad (12.13)$$

kus  $e_y$  ja  $e_z$  on tuntud resultantsisejõu *ekstsentrilisuse koordinaatidena*. Asendame veel inertsimomendid  $I_z = A i_z^2$  ja  $I_y = A i_y^2$ , kus  $i_z$  ja  $i_y$  on ristlõikepinna inertsiraadiused ja  $R = N$ . Tuues ühise teguri sulgude ette, saame normaalpinge arvutamise valemi

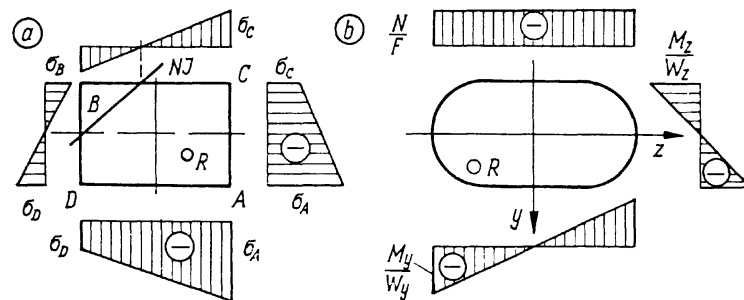
$$\sigma = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{e_y y}{i_z^2} + \frac{e_z z}{i_y^2} \right). \quad (12.14)$$

See valem sobib normaalpingete arvutamiseks juhtudel, kui sisejõudude resultandi ekstsentrilisuse koordinaadid on üllesandega antud.

Suurimate surve- ja tõmbepingete arvutamiseks kasutame erandjuhul valemit (12.12). Üldjuhul määrame eelnevalt ristlõikepinna *ohtlikud punktid*  $A(y_A|z_A)$  ja  $B(y_B|z_B)$  ning arvutame nendes mõjuvad ekstreemsed normaalpinged kas valemiga (12.11) või (12.14). Ohtlikud punktid määrame nagu vildakpindelgi *nulljoone abil*, mida uurime järgmises jaotises.

Normaalpinge epüüre võime ehitada mitmel viisil: joonisel 12.7,  $a$  on näidatud pingegraafikud ristlõike kontuuril; joonisel 12.7,  $b$  komponentepüürid sisejõududest  $N$ ,  $M_z$  ja  $M_y$  eraldi esitatuna. Esimese viisi puudus on kontuurisest punktide puudumine graafikutel, teisel viisil aga see, et pinge mis tahes punktis on määratav komponentide summeerimise teel. Kõige ülevaatlikumaks osutub nulljoone abil ehitatud pingepüür, mida vaatleme järgmises jaotises.

Ekstsentrilisel survel ja tõmbel esineb vardas samasugune pingeseisund nagu paindel ning seepärast seame tugevustingimused siin samal viisil, kuid ainult suurimatele normaalpingetele. Tugevustingimused ekstsentrilisel tõmbel ja survel peaaegu ühelgi juhul ei võimalda otseselt välja arvutada konstruktsioonielemendi vajalikke mõõtmeid. Seepärast tuleb projekteerimisel valida mõõtmed ette ja kontrollida nende sobivust tugevustingimusega. Optimaalsed mõõtmed saavutame nende korduva valiku ja tugevustingimusele vastavuse kontrollimisega.



Joon. 12.7

**12.2.2. Nulljoon** ekstsentrilisel survel ja tõmbel määratakse tingimusest  $\sigma(y_0, z_0) = 0$ . Võrrutame normaalpingete avaldise (12.14) nulliga ja võtame arvesse, et tegur  $N/A \neq 0$ . Järelikult

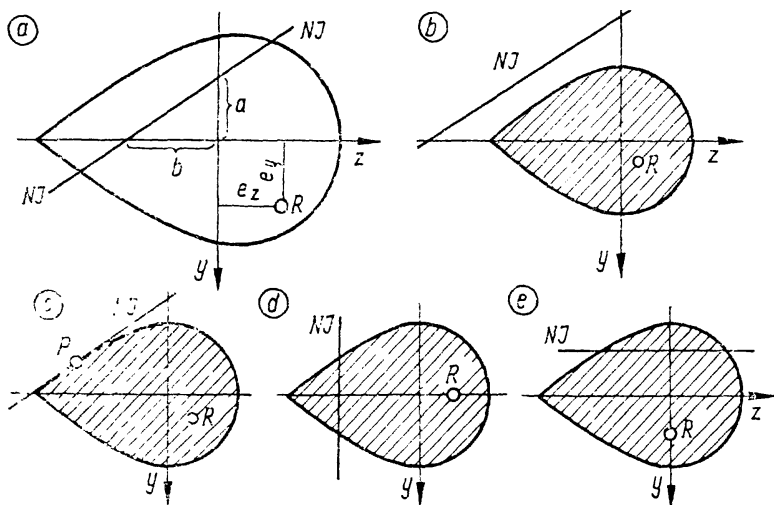
$$1 + \frac{e_y}{i_z^2} y_0 + \frac{e_z}{i_y^2} z_0 = 0, \quad (12.15)$$

kus  $y_0$  ja  $z_0$  on nulljoone punkti koordinaadid. Võrrandist nähtub, et nulljoon on sirge, mis üldjuhul ei läbi koordinaatide algust, ja selle määramiseks on otstarbekas kasutada telglõikusid  $a$  ja  $b$  (joonis 12.8, a). Telglõikude väärtused saame tingimustest  $a = y_0$ , kui  $z_0 = 0$  ja  $b = z_0$ , kui  $y_0 = 0$ .

$$a = -\frac{i_z^2}{e_y}; \quad b = -\frac{i_y^2}{e_z}, \quad (12.16)$$

kus miinusmärgid näitavad, et nulljoone telglõigud on alati ekstsentrilisuse koordinaatidega võrreldes vastasmärgilised. Teisiti öeldes, nulljoon ei lõika keskpeateljestiku seda veerandit, milles asetseb sisejõudude resultandi rakenduspunkt  $R$ .

Valemist (12.16) nulljoone telglõigud ja ekstsentrilisuse koordinaadid on pöördvõrdelised. Kui sisejõudude resultant mõjub ristlõikepinna keskmest, siis nulljoon on lõpmata



Joon. 12.8

kaugel ja niisugune koormusseisund ühtib hariliku surve ja tõmbega. Kui sisejõudude resultant asetseb keskmest väga kaugel, siis nulljoon läbib keskmest ja tegemist on vildakpaindega. Nagu näeme, ekstsentriline surve ja tõmme on teatavas mõttes ühendavaks lüliks tõmbe-surve ja painde vahel.

Nulljoon võib läbida ristlõikepinna (joonis 12.8, a) või asetseda sellest väljaspool (joonis 12.8, b). Esimesel juhul nulljoon jaotab ristlõikepinna kaheks osaks, surve- ja tõmbetsooniks; teisel juhul mõjub kas surve- või tõmbepinge kogu ristlõikepinna ulatuses. Piirseisundis (joonis 12.8, c) on nulljoon ristlõikepinna kontuurile puutujaks, seejuures pinge on ühemärgiline ja võrdub nulliga puutepunktis  $P$ . Kui nulljoon ei läbi ristlõikepinda, siis pinge ja sisejõudude resultandi märgid ühtivad. Kaheks tsooniks jagunenud ristlõikepinnas ühtivad resultandi ja pinge märgid selles piirkonnas, kus asetseb resultandi rakenduspunkt  $R$ . Valemist (12.16) nähtub, kui  $e_y = 0$ , siis  $a \rightarrow \infty$ , mis tähendab, et nulljoon on paralleelne  $y$ -teljega (joonis 12.8, d). Juhul kui sisejõudude resultandi rakenduspunkt  $R$  asetseb  $y$ -teljel ( $e_z = 0$ ), siis nulljoon on paralleelne  $z$ -teljega (joonis 12.8, e).

Vaatleme pingepüüri ehitamist nulljoone abil joonisel 12.9. Analüütilisest geometriast teame, et võrrandiga (12.15) esitatud sirge (nulljoone) kaugus  $d_c$  teljestiku algusest (keskmest  $C$ ):

$$d_c = \frac{1}{1 + \sqrt{\left(\frac{e_y}{i_z^2}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{i_y^2}\right)^2}}. \quad (12.17)$$

Määrame pinge meelevaldses punktis  $D(y, z)$  valemiga (12.14), mida korrutame ja jagame suurusega  $d_c$ :

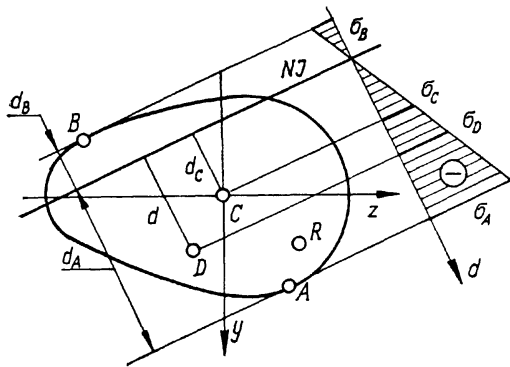
$$\sigma = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{e_y}{i_z^2} y + \frac{e_z}{i_y^2} z \right) \frac{d_c}{d_c}.$$

Pinge avaldises

$$d = \left( 1 + \frac{e_y}{i_z^2} y + \frac{e_z}{i_y^2} z \right) d_c; \quad S_0 = A d_c,$$

millest esimene on punkti  $D$  kaugus nulljoonest ja teine ristlõikepinna staatiline moment nulljoone suhtes. Pinge avaldis kujuneb järgmiseks:

$$\sigma = \frac{N d}{A d_c} = \frac{N}{S_0} d, \quad (12.18)$$



Joon. 12.9

millest nähtub, et pinge võime esitada lineaarse epüürina nulljoonega risti asetseval teljel  $d$ , mille positiivse suuna loeme nulljoonest keskme poole. Pingeepüüri saame kõige lihtsamalt kahe ordinaadi abil, milleks võtame nullpinge ja ordinaadi nulljoonega paralleelsel sirgel, mis läbib keskme  $C$ , kus  $d = d_c$  ja

$$\sigma_c = \frac{N}{A}. \quad (12.19)$$

Suurimad pinged mõjuvad nulljoonest kõige kaugemates punktides  $A$  ja  $B$ , kus

$$\sigma_{A;B} = \frac{N}{A} \frac{d_{A;B}}{d_c} = \frac{N}{S_0} d_{A;B}. \quad (12.20)$$

Valemit (12.18) on otstarbekas kasutada siis, kui ristlõikepind on keerukas ja pingeid tuleb määrata mitmes punktis, mille koordinaate peame mõõtma jooniselt. Sel juhul on valemi (12.18) puhul vaja vähem mõõta ja arvutada on lihtsam.

**12.2.3. Ristlõikepinna tuum on keset ümbritsev piirkond, milles mõjuv sisejõudude resultant kutsub kogu ristlõikes esile ühemärgilise normaalpinge.** Teisiti öeldes, kui sisejõudude resultandi rakenduspunkt ehk nn. poolus asetseb tuuma piires, siis nulljoon ei läbi ristlõikepinda, vaid jääb sellest väljapoole.

Ristlõikepinna tuumal on tähtsus ekstsentriliselt surutud konstruktsioonelementides, mis ei talu tõmbepingeid, nagu näiteks kivist laotud ja betoonist valatud postid, kaared jt. Pingebetoonist elementides peame hoolitsema, et poolus püsiks tuuma piires vältimaks tõmbepragusid. See-

juures mõistame konstruktsioonelemendi tuumana ruumilist kujundit. Varda tuum moodustub näiteks ristlõikepinna tuuma liikumisega teljel.

Tuuma piirjoone punktiks on poolus, millele vastav nulljoon on ristlõikepinna kontuurile puutujaks. Selle pooluse koordinaadid määrame seostest (12.16):

$$e_y = -\frac{i_z^2}{a_p}; \quad e_z = -\frac{i_y^2}{b_p}, \quad (12.21)$$

kus telglõigud  $a_p$  ja  $b_p$  kuuluvad nulljoonele, mis on kontuuri puutuja.

Tuuma piirjoone võime määrata kolmel viisil olenevalt kontuuri iseloomust. Kui ristlõikepinna kontuuriks on sile kõverjoon, mis pole kirjeldatav võrrandiga, siis ehitame tuuma piirjoone punktide najal, mille leidmiseks kasutame osaliselt graafilist meetodit. Seejuures vajame ristlõikepinna joonist, millele on kantud keskepateljed (joonis 12.10, a) ja nende suhtes arvatud inertsiraadiusi  $i_z$  ja  $i_y$ . Joonestame kontuurile meelevaldse puutuja  $I$  ja mõõdame jooniselt selle telglõigud  $a_p$  ja  $b_p$ , mis tulevad arvesse märgiga suurusena. Arvutame puutujale (nulljoonele) vastava pooluse koordinaadid valemitega (12.21) ja kanname leitud punkti  $I$  joonisele. Küllalt tihedalt määratud poolustest ( $1, 2, 3 \dots$ ) joonestame läbi kinnise sileda kõverjoone, mis on tuuma piirjooneks.

Kui ristlõikepinna kontuur või selle osa on kumer kõverjoon, mille saab esitada võrrandiga

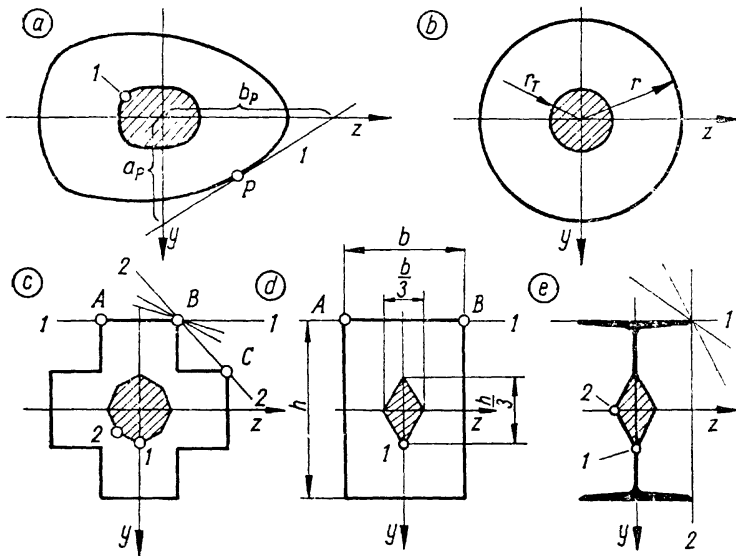
$$F(y, z) = 0, \quad (a)$$

siis selle meelevaldses punktis  $P(y_p, z_p)$  puutujaks oleva sirge telglõigud avalduvad teatavasti järgmiselt:

$$a_p = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p y_p + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_p z_p}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p};$$

$$b_p = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p y_p + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_p z_p}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_p}. \quad (b)$$

Asetades need valemitesse (12.21), saame tuuma piirjoone koordinaatide arvutamiseks võrrandipaari



Joon. 12.10

$$\left. \begin{aligned} y &= e_y(y_p, z_p) \\ z &= e_z(y_p, z_p) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Tuuma piirjoone võime konstrueerida graafiliselt võrrandipaari (c) abil, kuid soovi korral teisendame nad kõvera üldvõrrandiks

$$F_T(y, z) = 0; \quad (d)$$

kust ristlõike kontuuri meelevaldse punkti  $P$  koordinaadid  $y_p$  ja  $z_p$  kõrvaldame võrrandi (a) abil.

**Näide 12.3.** Määrame tuuma piirjoone üldvõrrandi ümarale ristlõikepinnale raadiusega  $r$  (joonis 12.10, b), mille kontuuri võrrand on

$$F(y, z) = y^2 + z^2 - r^2 = 0. \quad (a')$$

Arvutame osatuletised meelevaldses puutepunktis  $P(y_p, z_p)$ :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_p = 2y_p; \quad \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_p = 2z_p.$$

Avaldame puutesirge (nulljoone) telglõigud

$$a_p = \frac{2y_p^2 + 2z_p^2}{2y_p}; \quad b_p = \frac{2y_p^2 + 2z_p^2}{2z_p}, \quad (b')$$

mis asetatuna valemitesse (12.21) annavad tuuma piirjoone võrrandi-paari

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{y_p z_p^2}{y_p^2 + z_p^2} \\ z &= -\frac{z_p y_p^2}{y_p^2 + z_p^2} \end{aligned} \right\} \quad (c')$$

Ringi inertsiraadiused asendame valemist (7.29), millest  $i_z = i_y = = r/2$ . Tõestame võrrandid ruutu ja liidame. Seejuures võtame arvesse, et punkt  $P(y_p, z_p)$  asetseb ristlõikepinna kontuuril ja selle koordinaadid rahuldavad võrrandit (a'). Järelikult asendame suuruse  $(y_p^2 + z_p^2)$  kontuuri raadiuse ruuduga ( $r^2$ ) ja saame peale lihtsustamist tuuma piirjoone üldvõrrandi

$$F_T(y, z) = y^2 + z^2 - \left( \frac{r}{4} \right)^2 = 0. \quad (d')$$

Sellest võrrandist näeme, et tuum on ring raadiusega  $r_T = r/4$ .

Kui ristlõikepinnaks on hulknurk, mille kontuur koosneb sirglõikudest ja nõgusatest kõverjoontest, siis tuuma määramiseks sobib kolmas viis, mis baseerub pooluse ja sellele vastava nulljoone kahel iseloomulikul omadusel.

1. Kui ristlõikepinna kontuuril leidub vähemalt kaks ühise puutujaga punkti  $A$  ja  $B$ , siis lõigule  $AB$  vastab tuuma piirjoonel üks punkt.

Selgituseks meenutame pooluse ja nulljoone füüsikalist tähendust, millest järgneb, et igale poolusele vastab ainult üks nulljoon ja ka vastupidi, igale nulljoonele vastab ainult üks poolus.

Näitena vaatleme ristlõiget joonisel 12.10, c, mille kontuuri sirglõigu  $AB$  kõikidele punktidele on ühiseks puutujaks nulljoon 1. Sellele nulljoonele vastab poolus 1 tuuma piirjoonel. Samuti vastab nulljoonele 2, puutepunktidega  $B$  ja  $C$ , poolus 2. Et vaadeldavale ristlõikele võime joonestada kaheksa analoogset nulljoont, siis leidub ka tuuma piirjoonel kaheksa neile vastavat poolust.

2. Ristlõikepinna kontuuri tipu puutesirgete kimbule vastab tuuma piirjoonel sirglõik.

Tõestuseks valime poolusele  $R(e_y, e_z)$  vastaval nulljoonel

$$1 + \frac{e_y y}{i_z^2} + \frac{e_z z}{i_y^2} = 0 \quad (e)$$

punkti  $R'$  ( $e'_y, e'_z$ ), mille koordinaadid rahuldavad võrrandi ( $e$ ):

$$1 + \frac{e'_y e'_y}{i_z^2} + \frac{e'_z e'_z}{i_y^2} = 0. \quad (f)$$

Nulljoon, mis vastab poolusele  $R'$ , avaldub teise võrrandiga:

$$1 + \frac{e'_y y}{i_z^2} + \frac{e'_z z}{i_y^2} = 0, \quad (g)$$

mida aga rahuldavad ka pooluse  $R$  koordinaadid  $e_y$  ja  $e_z$ , kuna need, asetatuna võrrandisse ( $g$ ), annavad seosega ( $f$ ) ühtiva tulemuse. Järelikult, mingil sirgel valitud meelevaldsele poolusele vastab nulljoon, mis läbib selle sirge poolust. Et sirgel võime valida piiramatu arvu erinevaid pooluseid, mille nulljooned oma füüsilise olemuse tõttu ei saa ühtida, kuid peavad kõik läbima üht ja sama punkti, siis järeldame, et nad moodustavad sirgete kimbu. Sellega oleme näidanud, et nulljoonte kimbule läbi mingi kontuuri tipu vastab tuuma piirjoonel sirglõik.

Puutesirgete kimbule nurgapunktis  $B$  joonisel 12.10,  $c$ , milles äärmisteks sirgeteks on nulljooned 1 ja 2, vastab tuuma piirjoonel sirglõik punktide 1 ja 2 vahel. Ühendades sirglõikudega ka teised leitud poolused, saame kaheksanurkse tuuma.

Näide 12.4. Määrame ristküliku tuuma joonisel 12.10,  $d$ .

Seame nulljoone 1 servale  $AB$  ja arvutame pooluse 1 koordinaadid valemitega 12.21, milles  $a_p = -h/2$ ,  $b_p \rightarrow \infty$  ja ristküliku inertsiraadiuse saame valemist 7.30 ( $i_z = h/2 \sqrt{3}$ ):

$$e_y = -\frac{i_z^2}{a_p} = \frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{h}{6}; \quad e_z = 0. \quad (12.22)$$

Kanname pooluse 1 joonisele ja märgime ka ülejäänud kolm tuuma tippu, toetudes kujundi sümmeetriale. Tuuma tipud ühendame sirglõikudega ja saame rombi, mille diagonaalide mõõtmed on  $h/3$  ja  $b/3$ .

Näide 12.5. Joonisel 12.10,  $e$  kujutatud I-profiilile saame seada samuti neli sirget, millest igaühel on vähemalt kaks puutepunkti. Puutesirgetele 1 ja 2 vastavate pooluste koordinaadid arvutame valemitega (12.21):

$$e_{y1} = \frac{2i_z^2}{h}; \quad e_{z1} = 0; \quad e_{y2} = 0; \quad e_{z2} = -\frac{2i_y^2}{b},$$

kus  $h$  ja  $b$  on profiili kõrgus ja laius ning  $i_z$  ja  $i_y$  inertsiraadiused, mis on antud profiilide tabelis. Tuuma teised kaks tippu on sümmeetrilised määratud poolustega. Ühendame leitud neli tippu sirglõikudega ja saame rombikujulise tuuma.

Näide 12.6. Ristkülikulise ristlõikepinnaga postile võivad mõjuda neli jõudu nii nagu näidatud joonisel 12.11,  $a$ . Iga jõud, sõltumatult teisest, võib ka puududa. Määrata suurimad surve- ja tõmbepinged postis.

Kasutame lahendamiseks valemit (12.12), mille jaoks ristlõikepinnatunnusarvud on  $A = bh$ ,  $W_z = bh^2/6$  ja  $W_y = hb^2/6$ .

Kui mõjub ainult üks jõud, siis sisejõud  $N = -F$ ,  $|M_z| = Fh/4$  ja  $|M_y| = Fb/4$  ja

$$\min \sigma = -\frac{F}{bh} - \frac{Fh \cdot 6}{4 \cdot bh^2} - \frac{Fb \cdot 6}{4 \cdot hb^2} = -4 \frac{F}{bh};$$

$$\max \sigma = -\frac{F}{bh} + \frac{Fh \cdot 6}{4 \cdot bh^2} + \frac{Fb \cdot 6}{4 \cdot hb^2} = +2 \frac{F}{bh}.$$

Kui kaks jõudu mõjuvad ühel diagonaalil, siis  $N = -2F$  ja  $|M_z| = |M_y| = 0$ . Järelikult pinge on ühtlane kogu ristlõikes:

$$\sigma = -\frac{2F}{bh}.$$

Kaks jõudu ühel pool  $y$ -telge annavad  $N = -2F$ ,  $|M_z| = 0$  ja  $|M_y| = Fb/2$ :

$$\min \sigma = -\frac{2F}{bh} - \frac{Fb \cdot 6}{2 \cdot hb^2} = -5 \frac{F}{bh};$$

$$\max \sigma = -\frac{2F}{bh} + \frac{Fb \cdot 6}{2 \cdot hb^2} = + \frac{F}{bh}.$$

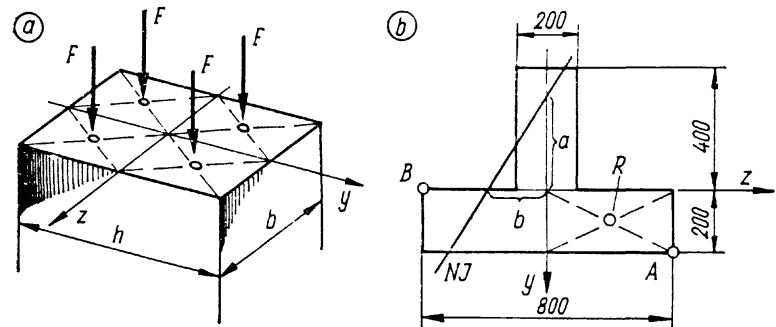
Sama tulemuse annavad kaks jõudu ühel pool  $z$ -telge.

Kolme jõu üheaegsel mõjumisel  $N = -3F$ ,  $|M_z| = Fh/4$  ja  $|M_y| = Fb/4$ :

$$\min \sigma = -\frac{3F}{bh} - \frac{Fh \cdot 6}{4 \cdot bh^2} - \frac{Fb \cdot 6}{4 \cdot hb^2} = -6 \frac{F}{bh};$$

$$\max \sigma = -\frac{3F}{bh} + \frac{Fh \cdot 6}{4 \cdot bh^2} + \frac{Fb \cdot 6}{4 \cdot hb^2} = 0.$$

Kui mõjuvad neli jõudu, siis  $N = -4F$  ja paindemomendid puuduvad.



Joon. 12.11

Ohtlane pinge ristlõikes:

$$\sigma = -\frac{4F}{bh}$$

*Vastus:* suurim survepinge  $\min \sigma = -6F/(bh)$  esineb postis, kui mõjuvad kolm jõudu ja suurim tõmbepinge  $\max \sigma = 2F/(bh)$ , kui mõjub üks jõududest.

*Näide 12.7.* Määrata suurimad surve- ja tõmbepinged postis, mille ristlõige on kujutatud joonisel 12.11, *b*. Posti koormus kutsub vaadeldavas ristlõikes esile sisejõudude resultandi  $R = -500$  kN rakenduspunktis  $R$ , mis on näidatud joonisel.

Määrame ristlõikepinna keskpateeljestiku ja kanname joonisele. Arvutame ristlõikepinna tunnussuurused, mis osutuvad vajalikuks valemis (12.14):

$$A = 0,24 \text{ m}^2; \quad i_z^2 = 0,02889 \text{ m}^2; \quad i_y^2 = 0,03625 \text{ m}^2$$

Jooniselt teeme kindlaks ekstsentrilisuse koordinaadid:  $e_y = 0,1$  m;  $e_z = 0,2$  m.

Arvutame nulljoone teiglõigud valemitega (12.16):

$$a = -\frac{i_z^2}{e_y} = -\frac{0,02889}{0,1} = -0,2889 \text{ m};$$

$$b = -\frac{i_y^2}{e_z} = -\frac{0,03625}{0,2} = -0,1813 \text{ m}.$$

Kanname nulljoone joonisele, kust seejärel selguvad ohtlikud punktid  $A(0,2; 0,4)$  ja  $B(0; -0,4)$ . Suurimad pinged arvutame valemiga (12.14), võttes arvesse, et  $N = R = -500$  kN

$$\min \sigma = \sigma_A = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{e_y y_A}{i_z^2} + \frac{e_z z_A}{i_y^2} \right) = -\frac{500 \cdot 10^3}{0,24} \left( 1 + \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,02889} + \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,03625} \right) = -8,122 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -8,122 \text{ MPa};$$

$$\max \sigma = \sigma_B = -\frac{500 \cdot 10^3}{0,24} \left( 1 + \frac{0,1 \cdot 0}{0,02889} + \frac{0,2 \cdot (-0,4)}{0,03625} \right) = 2,514 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 2,514 \text{ MPa}.$$

### 12.3. VÄÄNDE JA PAINDE KOOSMÕJU

**12.3.1. Tugevustingimus ohtlikus ristlõikes.** Vääne paindega esineb kõige sagedamini võllides, mida peame silmas ka käesolevas jaotises. Vaatleme probleeme, mis on jätkuks puhtale väändele kuuendast jaotisest. Sisejõududena võtame arvesse väändemomendi  $M_t = M_x$  ja paindemomendi  $M_y$  ja  $M_z$ . Paindemomendide esinemine kahes ristuv tasandis ei tähenda ümara varda puhul vildakpaineid, nagu selgus jaotises 12.1, vaid harilikku painet välisjõududest, mis ei asetse

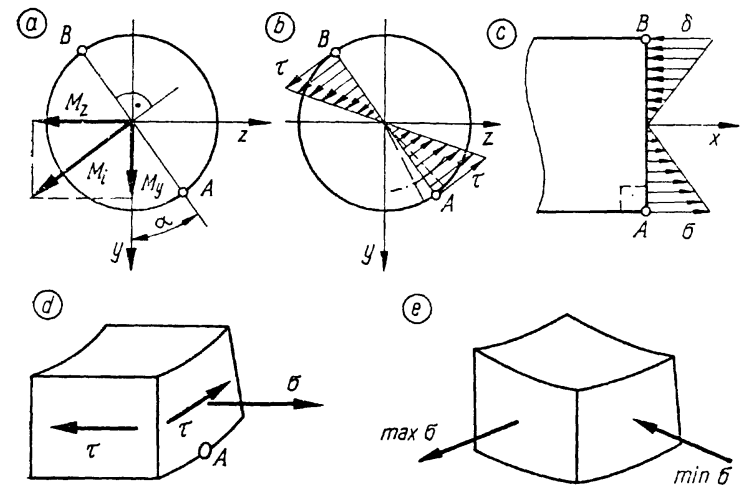
ühes tasandis. Seepärast võime summaarset paindemomenti

$$M_i = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad (12.23)$$

pingete määramisel varda ristlõikes käsitleda nii nagu paindemomenti tasandpaindel.

Ümarvarrastes, mille pikkus on läbimõõdust viis ja enam korda suurem, nihkepinged põikjõududest on väiksed võrreldes nihkepingetega väändest ja normaalpingetega paindest.

Oletame, et on teada varda ohtlik ristlõige selles mõjuvate sisejõududega  $M_t$  ja  $M_i$ . Ohtliku ristlõike määramist selgitame hiljem. Kujutame joonisel 12.12, *a* ohtliku ristlõikepinna. Suurimad normaalpinged paindest mõjuvad ristlõikepinna äärel, vektoriga  $M_i$  risti asetseva läbimõõdu otspunktides  $A$  ja  $B$ . Suurimad nihkepinged väändest mõjuvad ristlõikepinna kontuuril puutuja sihis. Kujutame joonisel 12.12, *b* nihkepingeid väändest läbimõõdul, mille otstes on punktid  $A$  ja  $B$ . Samal läbimõõdul kujutame normaalpingeid paindest kõrvaltvaates, seejuures on diameeter  $AB$  pööratud joonise tasandisse (joonis 12.12, *c*). Et nihkepinged väändest on kontuuril ühtlased, siis osutuvad enamasti ohtlikeks punktid  $A$  ja  $B$ , kus mõjuvad suurimad normaalpinged. Punktis  $A$



Joon. 12.12

$$\sigma = \frac{M_i}{W_z}; \quad \tau = \frac{M_t}{W_0}, \quad (a)$$

kus tugevusmomentid ümara varda jaoks

$$W_z = \pi d^3/32; \quad W_0 = \pi d^3/16. \text{ Näeme, et } W_0 = 2W_z,$$

mis peab paika ka õõnsatel ümarvarrastel. Järelikult

$$\tau = \frac{M_t}{2W_z}. \quad (b)$$

Lõikame mõtteliselt silinderteljestiku koordinaatpinda-dega vardast välja lõpmata väikse elemendi koos ohtliku punktiga  $A$  (joonis 12.12,  $d$ ). Tänu elementaarmõõtmetele võime väljalõigatud osakest vaadelda risttahukana. Kujutame elemendi tahkudel pinged  $\sigma$  ja  $\tau$ , millest esimene mõjub kahel vastastahul (ristlõikepindadel), teine aga neljal tahul. Elemendi kahel vastastahul, mis on risti raadiusega, pingeid ei ole. Järelikult esineb ohtlikus punktis tasandpingus samal viisil nagu põikpindidel. Ekstreemsed normaalpinged (peapinged) avalduvad ka siin valemiga (9.31):

$$\max \min \sigma = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad (c)$$

millest näeme, et  $\max \sigma$  on tõmbe- ja  $\min \sigma$  survepinge.

Tugevustingimuse tasandpingusele punktis  $A$  saame seada tugevusteooriate vahendusel. Et nendes teooriates võtsime aluseks pinguse üldjuhu, siis peame tasandpinguse ohtlikus punktis esitama ruumpinguse erijuhuna, mille kolm peapinget avalduvad tingimuse (4.6) kohaselt

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_2 = 0. \quad (d)$$

Kui ümarvarras on valmistatud materjalist, mille voolavuspiirid tõmbel ja survel on võrdsed, siis enamasti sobib kas kolmas või neljas tugevusteooria. Termiliselt või keemiliselt töödeldud, kõrglegeeritud või kalastatud materjalile, mille tugevusnäitajad tõmbel ja survel pole võrdsed, rakendame *Mohri* teooriat. Mõnel juhul (näiteks malmile) kasutame esimest tugevusteooriat.

Kolmanda teooria tugevustingimus (11.4) peapingetega ( $d$ ):

$$\sigma_{eq}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} -$$

$$- \left[ \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right],$$

mis peale lihtsustamist annab

$$\sigma_{eq}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (12.24)$$

Asendades pinged  $\sigma$  ja  $\tau$  valemitega ( $a$ ) ja ( $b$ ), saame

$$\sigma_{eq}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_i}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{2W_z}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_i^2 + M_t^2}}{W_z},$$

kus lugejas esinev suurus kannab nimetust *ekvivalentmoment*:

$$M_{eq}^{III} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad (12.25)$$

kus ülaindeks III viitab kolmandale tugevusteooriale. Ekvivalentmomentiga tugevustingimus

$$\sigma_{eq}^{III} = \frac{M_{eq}^{III}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (12.26)$$

millest saame avaldada ümarvarda tugevusmomenti

$$W_z \geq \frac{M_{eq}^{III}}{[\sigma]}. \quad (12.27)$$

Täis- ja õõnsate ümarvarraste tugevusmomentide avaldiste (9.11...14) najal võime arutada tingimusest (12.27) läbimõõdud samal viisil nagu tegime seda harilikul väändel.

Suurust  $M_{eq}^{III}$  ei tohi mõista momentina harilikus mõttes. Tegemist on siin arvutusliku skalaarse suurusega, millel võivad olla ainult positiivsed väärtused. Et selle suuruse dimensioon ühtib momenti omaga ja ta esineb valemites momenti rollis, siis nimetame teda tinglikult momentiks.

Neljanda teooria tugevustingimusest (11.6) peapingetega ( $d$ )

$$\sigma_{eq}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma], \quad (12.28)$$

mis pingete asendamisega seostest ( $a$ ) ja ( $b$ ) annab

$$M_{eq}^{IV} = \sqrt{M_i^2 + 0,75M_t^2}. \quad (12.29)$$

Ekvivalentmomentiga väljenduvad tugevustingimused samal kujul nagu kolmanda teooria puhul (12.26) ja (12.27), kus ainult ülaindeks III asendub IV-ga.

Mohri tugevusteooriast saame

$$\sigma_{eq}^M = \frac{1-n}{2} \sigma + \frac{1+n}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_z; \quad (12.30)$$

$$M_{eq}^M = \frac{1-n}{2} M_p + \frac{1+n}{2} \sqrt{M_i^2 + M_i^2}, \quad (12.31)$$

kus  $n$  on tõmbe piirpinge suhe surve piirpingesse. Kui piirpingete väärtused pole teada, siis võib nad asendada vastavate lubatavate pingetega

$$n = \frac{[\sigma]_z}{[\sigma]_c}. \quad (12.32)$$

Esimene tugevusteooria annab tingimusest (11.2):

$$\sigma_{eq}^I = \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_z; \quad (12.33)$$

$$M_{eq}^I = \frac{1}{2} M_i + \frac{1}{2} \sqrt{M_i^2 + M_i^2}. \quad (12.34)$$

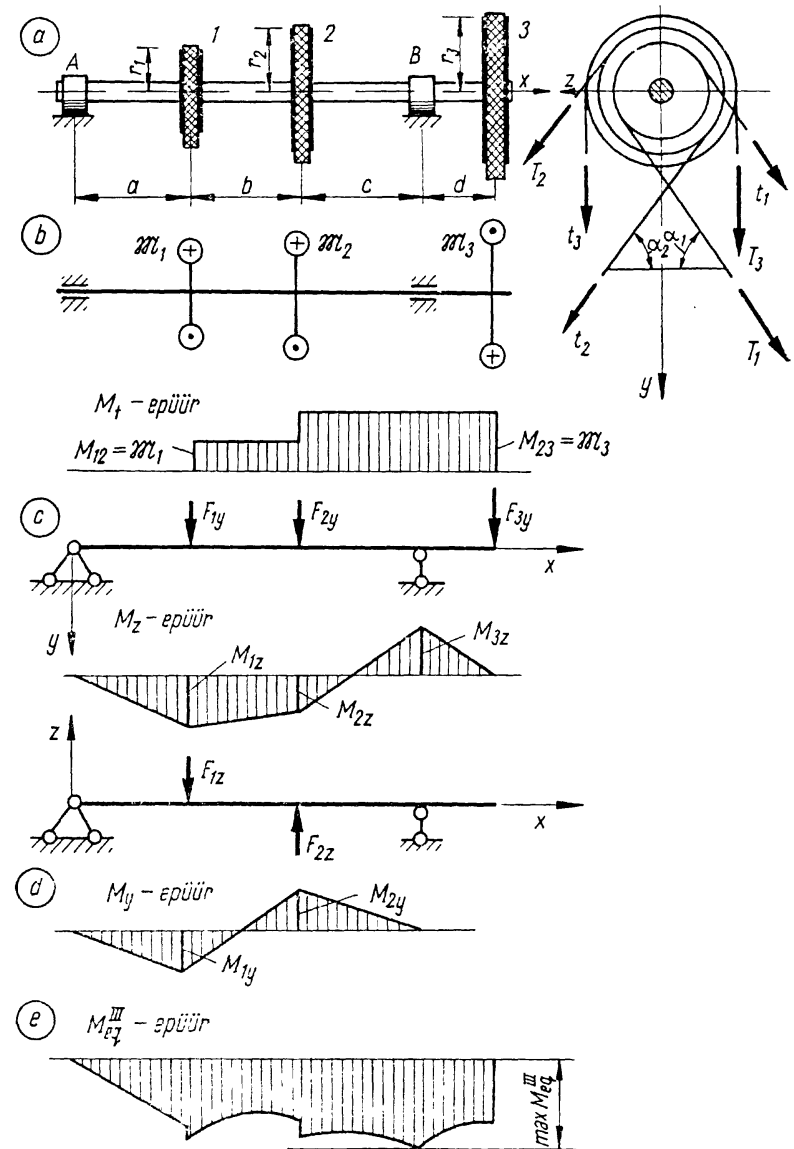
Kui rakendame Mohri või esimest tugevusteooriat tugevustingimustes, siis lubatava pingena tuleb arvesse  $[\sigma]_z$ .

**12.3.2. Ohtliku ristlõike määramine.** Kui sisemomentide  $M_x$ ,  $M_y$  ja  $M_z$  suurimad väärtused esinevad ühes ja samas kohas, siis ohtliku ristlõike määramine ei valmista raskusi. Sageli ei lange väände- ja pändemomentide ekstreemsed suurused kokku ja nende epüüride järgi pole võimalik kindlaks teha kohta, kus ekvivalentpinge osutub suurimaks. Sel juhul koostatakse sisejõudude epüüridele lisaks veel *ekvivalentmomenti epüür*, mille suurim ordinaat lahendab probleemi. Täpsema selgituse saame järgnevast näitest.

**Näide 12.8.** Joonisel 12.13, *a* on kujutatud võlli, mis toetub laagritele *A* ja *B*. Võllil on kolm rihmaratast, millest *1* ja *2* käitavad töomasinaid, kolmanda paneb pöörlema mootor. Rihmarataste *1* ja *2* kaudu ülekantavad pöördemomendid  $\mathfrak{M}_1$  ja  $\mathfrak{M}_2$  arvutame tarbitavate võimsuste ja võlli pöörlemissageduse järgi. Eeldades hõõrdejõudude puudumist, võime ajami rihmaratta pöördemomendi arvutada tasakaalutingimusest  $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ . Pöördemomentide arvutuskeemi ja sellele vastava vändemomendi epüüri kujutame joonisel 12.13, *b*.

Võlli otsvaates näeme veorihmasid ja nende harudes mõjuvaid tõmbejõudusid. Töötamisel mõjuvad iga rihma kahes harus tõmbejõud  $T > t$ , mille vahe kutsub esile pöördemomendi  $\mathfrak{M} = (T - t)r$  ja kus  $r$  on rihmaratta raadius. Sellest seosest arvutame tõmbejõudude vahe  $(T - t)$ . Rihmad tõmmatakse ratastele eelpingega, mis töötamisel kindlustab teatava tõmbejõudude suhte  $T/t$ . Harilikult on see suhte piires 2...3. Teades seda suhet, võime arvutada jõudude  $T$  ja  $t$  väärtused nende vahe kaudu.

Peale vändemomendi põhjustavad jõud  $T$  ja  $t$  võllis painde. Seejuures mõjub igalt rattalt võllile põiksuunaline jõud  $F = T + t$ . Võlli otsvaatest selgub, et jõud  $F_1$ ,  $F_2$  ja  $F_3$  mõjuvad erinevatel sihtidel, mis moo-



Joon. 12.13



dustavad  $y$ -teljega nurkad  $\alpha_1, \alpha_2$  ja  $\alpha_3=0$ . Lahutame need jõud komponentideks  $y$ - ja  $z$ -telje suhtele ja vaatleme võlli konsooliga lihttalana tagedel  $A$  ja  $B$  kahes projektsioonis. Esimene neist on koormatud jõukomponentidega  $F_{1y}=F_1 \cos \alpha_1, F_{2y}=F_2 \cos \alpha_2$  ja  $F_{3y}=F_3$ ; teine komponentidega  $F_{1z}=-F_1 \sin \alpha_1$  ja  $F_{2z}=F_2 \sin \alpha_2$ ; ( $F_{3z}=0$ ). Arvutame skeeme nagu talasid ja esitame nende pändmomentide epüürid.

Sisejõudude kolme epüüri põhjal pole lihtne otsustada, kus on võlli ohtlik ristlõige. Seepärast koostame ekvivalentmomenti epüüri valemi 12.25 põhjal (joonis 12.13, e). Peame silmas, et piirkonnas  $A-l$ , kus vändemoment puudub ja pändmomentide epüürid on lineaarsed, nullväärtustega ühes ja samas punktis ( $A$ ), saame ekvivalentmomenti ka lineaarsena. Teistes piirkondades kujuneb see epüür kõverjoonseks ja nimelt nõgusaks. Seepärast võime ekvivalentmomentide arvutamisel piiruda laagrite ja rihmarataste ristlõigetega. Joonisel kujutatud  $M_{eq}^{III}$ -epüürist selgub, et ohtlikuks on võlli ristlõige laagris  $B$ .

## 12.4. ÜLDINE LIITTÕEISEISUND

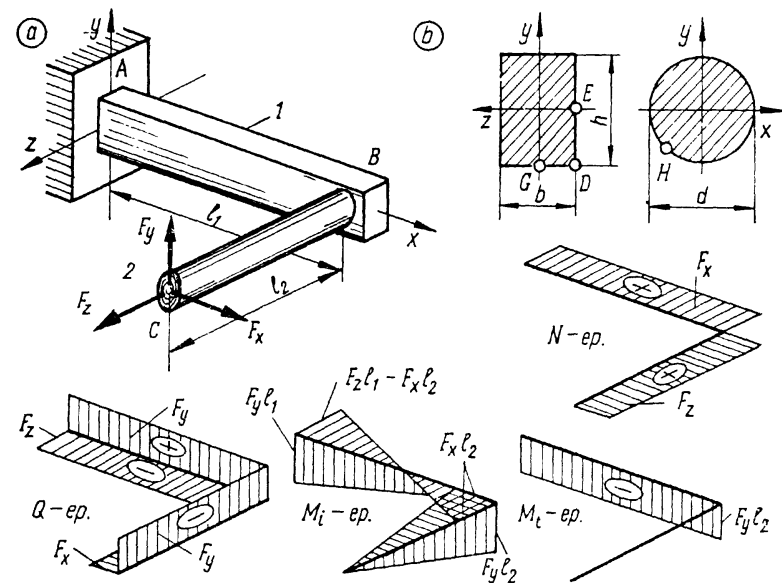
**12.4.1. Murdjoonse teljega varda sisejõud** määrame samal viisil nagu sirgel vardal. Seejuures varda igale sirgele elemendile valime  $xyz$ -teljestiku, milles arvutame üldjuhul kõik kuus sisejõudu  $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y$  ja  $M_z$ .

Kui varda teljeks on murdjoon, mille sirged elemendid on üksteisega risti või paralleelsed, siis võime kogu süsteemile rakendada ühise teljestiku. Seejuures seame ka telgede sihid risti ja paralleelselt elementidega. Sisejõudude indekseid kujunevad ühtses teljestikus teistsuguseks, sest siin näiteks  $M_x$  ei tähenda ainult vändemomenti, vaid võib olla ka üks pändmomentidest, kui vaadeldav sirge element on risti  $x$ -teljega.

Sisejõudude märgireeglitest kõrvaldame nendes ülesannetes erandliku  $M_z$  märgireegli. *Sisejõu loeme positiivseks, kui tema vektor positiivse välisnormaaliga lõikepinnal on suunatud telje positiivses suunas või negatiivse välisnormaaliga lõikepinnal telje negatiivses suunas.* Teatavasti normaaljõu ja vändemomendi märgid ei sõltu alusteljestiku valikust, põikjõudude ja pändmomentide märgid aga sõltuvad.

Epüürid esitame kas murdjoonse telje ortogonaalprojektsioonidel või kaldparalleelprojektsioonidel. Eelistame viimast kujutamise viisi, mis on enamasti ülevaatlikum ja võimaldab epüürid esitada väiksemal arvul joonistel. Epüüridel näitame iseloomulike ordinaatide väärtused ja märgid. Erandiks on ka siin pändmomentide epüürid, millel märki ei näidata, vaid kantakse ordinaadid varda tõmmatud poolele vastavas pändetasandis.

*Näide 12.9.* Vaatleme näidet joonisel 12.14, a, kus murdjoonse teljega konsoolne varras koosneb kahest teineteisega risti asetsevast sirgest ele-



Joon. 12.14

mentidest 1 ja 2. Rakendame vardale  $xyz$ -teljestiku. Varda vabal otsal  $C$  mõjub jõud, mis on antud oma projektsioonidega  $F_x, F_y$  ja  $F_z$ . Määrame sisejõud esimese elemendi (1) ristlõikes, mis asetseb kaugusel  $x$  kinnituskohast  $A$ .

$$\begin{aligned} N &= F_x; & Q_y &= F_y; & Q_z &= F_z; & M_x &= M_t = -F_y l_2; \\ M_y &= F_x l_2 - F_z(l_1 - x); & M_z &= F_y(l_1 - x); & & & & (0 \leq x \leq l_1). \end{aligned}$$

Elemendi 2 ristlõikes, mis asetseb kaugusel  $z$  punktist  $B$ , avalduvad sisejõud:

$$\begin{aligned} N &= F_z; & Q_y &= F_y; & Q_x &= F_x; & M_z &= M_t = 0; \\ M_y &= F_x(l_2 - z); & M_x &= -F_y(l_2 - z); & & & & (0 \leq z \leq l_2). \end{aligned}$$

Teise elemendi sisejõudude indeksitel pole harilikud tähendused, sest elemendi telg on paralleelne  $z$ -teljega. Järelikult normaaljõudu ja vändemomenti vaatleme  $z$ -telje, põikjõudusid ja pändmomente  $y$ - ja  $x$ -telje sihilistena.

Sisejõudude epüürid on kujutatud kaldparalleelprojektsioonides joonisel 12.14. Normaaljõu ja vändemomendi epüüride ordinaate kujutame meelevaldsetes tasandites ja suundades ning varustame märkidega. Põikjõudude epüüride ordinaate kujutame neile vastavates tasandites, kuid meelevaldsetes suundades, näidates märgid. Pändmomentide epüüri ordinaadid joonestame neile vastavatesse tasanditesse varda tõmmatud poolele, jättes näitamata märgid. Epüüridele kirjutame iseloomulike ordinaatide väärtused sisejõudude avaldiste najal.

**12.4.2. Tugevustingimus** üldise liittõeiseisundi puhul ei erine oluliselt väände ja painde koosmõju tingimusest. Vaatleme esialgu ümarvarrast, milles mõjuvad väände- ja pain-

demomendid ning normaaljõud. Põikjõud jätame ebaoluliseks vaatlusest kõrvale. Ohtliku ristlõike võime määrata ekvivalentmomenti epüüri põhjal, kui normaaljõud on konstantne varda või selle sirge elemendi ulatuses, nagu see enamasti esineb praktikas. Kahjuks ei võimalda ekvivalentmoment siin seada tugevustingimust. Olgu ümarvarras materjalist, mille piirpinged tõmbel ja survel on võrdsed. Sel juhul võime ohtliku punkti asukoha ristlõike kontuuril jätta täpsustamata ja avaldada absoluutselt suurima normaalpinge:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_i}{W_z}, \quad (12.35)$$

kus summaarne paindemoment avaldub valemiga (12.23) positiivse juurena ja normaaljõust  $N$  arvestame absoluutväärtuse. Ühtlase nihkepinge ristlõike kontuuril väändemomendist määrame tuntud valemiga

$$\tau = \frac{M_t}{W_0}.$$

Pingus ohtlikus punktis ei erine sellest, mis esineb väände ja painde koosmõjul. Seepärast avalduvad ka peapinged sama valemiga (9.31) ja tugevustingimuse võime seada pingete  $\sigma$  ja  $\tau$  najal võrratustena (12.24, 12.28, 12.30 või 12.33) olenevalt rakendatavast tugevusteooriast.

Kui me tahame arvestada põikjõust tulenevat nihkepinget, peame täpsustama ohtliku punkti asukoha nii nagu tegime seda väände ja painde koosmõjul ja arvutame selles punktis summaarse nihkepinge.

Mitteümarale vardale tugevustingimuse seadmine üldise liitööseisundi puhul on märgatavalt keerukam. Võimalikud ohtlikud ristlõiked tuleb siin valida sisejõudude epüüride vaatluse alusel. Igas ristlõikes tuleb valida võimalikud ohtlikud punktid. Igas valitud punktis peame arvutama summaarse normaalpinge  $\sigma$  paindemomendist ja normaaljõust ning nihkepinge  $\tau$  väändemomendist ja põikjõududest. Tugevustingimuse seame ka siin samade võrratustega nagu ümarale vardale olenevalt kasutatavast tugevusteooriast.

*Näide 12.10.* Vaatleme näidet joonisel 12.14, *a*. Oletame, et sirge elemendi 1 ohtlik ristlõige on kinnituskohas *A*, kus ta on ristkülikukujuline mõõtmetega  $b$  ja  $h$  (joonis 12.14, *b*). Kontrollime tugevust kolmes punktis *D*, *E* ja *G*. Esimeses neist mõjub suurim normaalpinge tõmbepinge näol. Punktid *E* ja *G* on iseloomulikud ekstreemsete nihkepingetega väändest.

Punktis *D* mõjub ainult tõmbepinge, nihkepinge aga puudub. Järelikult esineb selles punktis joonpingus ja tugevustingimuse saame järgmisel kujul:

$$\sigma_D = \frac{F_x}{bh} + \frac{6F_y l_1}{bh^2} + \frac{6(F_z l_1 - F_x l_2)}{hb^2} \leq [\sigma].$$

Punktis *E* mõjub summaarne normaalpinge

$$\sigma_E = \frac{F_x}{bh} + \frac{6(F_z l_1 - F_x l_2)}{hb^2}$$

ja summaarne nihkepinge valemitega (6.41) ja (9.23)

$$\tau_E = \frac{F_y l_2}{ahb^2} - \frac{3}{2} \frac{F_y}{bh},$$

mille põhjal seame tugevustingimuse, näiteks võrratusega (12.28):

$$\sigma_{eq}^{IV} = \sqrt{\sigma_E^2 + 3\tau_E^2} \leq [\sigma].$$

Samal viisil kontrollime tugevust punktis *G*.

Vaadeldava varda elemendi 2 ohtlik ristlõige on ilmselt liitekohas *B*. Ristlõige on ümar, diameetriga  $d$  (joonis 12.14, *b*). Ohtlikuks on punkt *H*, mille täpse asukoha jätame määramata. Ohtlikus punktis mõjub suurim tõmbepinge summaarsest paindemomendist

$$M_i = l_2 \sqrt{F_x^2 + F_y^2},$$

mis koos normaaljõuga  $N = F_z$  annab summaarse tõmbepinge tugevustingimuse jaoks:

$$\sigma_H = \frac{4F_z}{\pi d^2} + \frac{32l_2 \sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma].$$

Nihkepinge punktis *H* puudub, kuna väändemoment võrdub nulliga ja põikjõud  $Q = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  selles punktis nihkepinget esile ei kutsu. Järelikult punktis *H* esineb joonpingus.

## 13. STAATIKAGA MÄÄRATAV KONSTRUKTSIOON

### 13.1. KONSTRUKTSIOONI ANALÜÜSIST

Eespool vaatlesime ühte konstruktsioonielementi — varrast. Ehitistes ja masinates ühendame vardad omavahel, seome alusega ja saame *konstruktsiooni* ehk *varrassüsteemi*. Teoreetilisest mehaanikast tunneme *sõrestikku*, milles vardad töötavad tõmbele ja survele. Käesolevas peatükis laieneb oma teadmisi konstruktsioonidest *mitme sildega talade* ja lihtsamate *raamidega*. Raamiks nimetatakse konstruktsiooni, milles vardad töötavad liitööseisundis.

Teoreetilisest mehaanikast tuntud sõrestiku kinemaatiline analüüs ei võimalda uurida raame ja talasid. Seepärast tutvume üldisema analüüsi alustega, mis lubab vaadelda mis tahes konstruktsioone.

Olgu süsteemis  $V$  varrast, mis omavahel on liidetud  $S$

ideaalse sidemega üheks tervikuks ja kinnitatud alusele  $T$  toesidemega. Selles süsteemis säilib

$$W = 6V - S - T \quad (13.1)$$

jäikliikumise vabadusastet. Tasandsüsteemides, mis on meie peamised uurimisobjektid,

$$W = 3V - S - T. \quad (13.2)$$

Sisemiste sidemetena kasutame peamiselt liigendeid. *Lihtliigend* on liigend kahe varda vahel, mis kõrvaldab neilt kaks vabadusastet ja vastab seega kahele ideaalsele sidemele (joonis 13.1, *b* liigend *A*). Järelkult  $L$  lihtliigendiga süsteemile saame valemist (13.2) asendada teisega:

$$W = 3V - 2L - T. \quad (13.3)$$

Liitliigend on liigend, mis ühendab kolme või enamat varrast (joonis 13.1, *c* liigend *B*). Valemis (13.3) võtame liitliigendi arvesse temale vastava lihtliigendite arvuga. Liitliigend kolme varda vahel kõrvaldab neilt neli vabadusastet ja vastab seega kahele lihtliigendile. Kui liitliigendiga on ühendatud  $V_0$  varrast, siis sisaldab ta  $L = V_0 - 1$  lihtliigendit.

Varrassüsteemi nimetame *mehhanismiks*, kui  $W > 0$ . Kui  $W = 0$  ja igale jäikliikumise vabadusastmele on rakendatud ainult üks side, siis süsteem on *geomeetriliselt muutumatu* ehk *kujukindel ja staatikaga määratav*. Süsteemid, mille jaoks saame  $W < 0$ , on *staatikaga määramatud* ja neid iseloomustab *määramatuse aste*  $n = -W$ .

$$n = 2L + T - 3V; \quad (13.4)$$

kui peame silmas tasandkonstruktsioone.

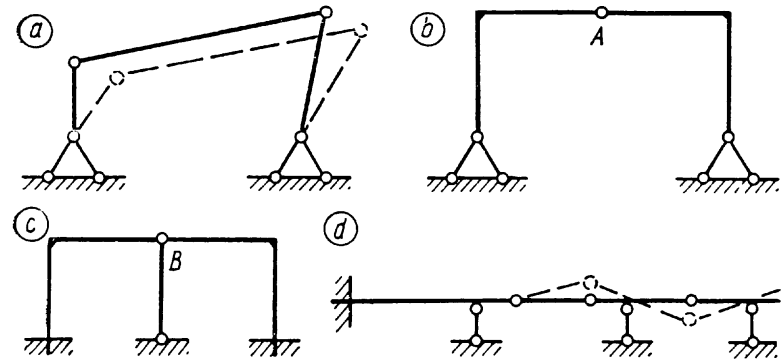
Käesolevas peatükis vaatleme staatikaga määratavaid tasandkonstruktsioone, mis peavad rahuldama tingimust

$$3V - 2L - T = 0. \quad (13.5)$$

See tingimus on staatikaga määratavatele konstruktsioonidele tarvilik, kuid mitte piisav. Täiendavalt peame veel uurima süsteemi struktuuri ja veenduma, et selles ei esine kohati geomeetrilist muutuvust ega staatikaga määramatust. Tingimust (13.5) rahuldav süsteem on ühes osas muutuv, kui teises kohas on üht jäikliikumise vabadusastet tõkestatud kahe sidemega.

*Näide 13.1.* Joonisel 13.1, *a* on kujutatud tasandiline varrassüsteem, mis sisaldab kolm varrast ( $V=3$ ), kaks sisemist lihtliigendit ( $L=2$ ) ja neli toesidet ( $T=4$ ). Vabadusastmete arv valemist (13.3):

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1.$$



Joon. 13.1

Süsteem osutus mehhanismiks. Joonisel 13.1, *b* on  $V=2$ ,  $L=1$ ,  $T=4$  ja

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0,$$

mis näitab, et süsteem on staatikaga määratav konstruktsioon. Joonisel 13.1, *c* esitatud süsteemil on varraid  $V=3$ , üks liitliigend, mis ühendab kolm varrast ja vastab kahele liitliigendile ( $L=2$ ). Raami kolmest toest on kaks kinnist tuge, millest kumbki sisaldab kolm toesidet ja üks liigendtüüpi kahe sidemega ( $T=2 \cdot 3 + 2 = 8$ ). Arvutame vabadusastmed valemiga (13.3):

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 8 = -3,$$

mis näitab, et see on kolmekordselt staatikaga määramatu konstruktsioon.

Joonisel 13.1, *d* kujutatud kolme sildega liigendtalal on  $V=4$ ,  $L=3$  ja  $T=6$ , mis annavad vabadusastmeid

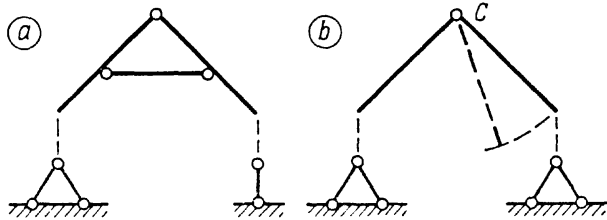
$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Süsteem pole aga staatikaga määratav ja geomeetriliselt muutumatu, sest selgub, et tala vasakpoolses sildes esineb ühekordne määramatus ja teistes sildetes võib ta käituda mehhanismina.

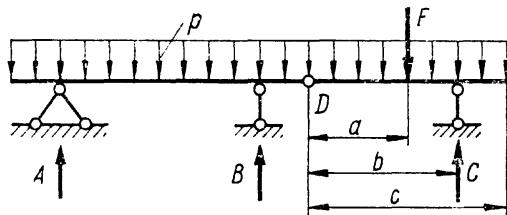
## 13.2. TOERAKTSIOONID

Toereaktsioonid arvutame staatikaga määratavatele tasandkonstruktsioonidele enamasti tasakaalutingimustest  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  ja  $\sum \mathfrak{M}_A = 0$  saadud võrrandite põhjal. Vajalike võrrandite hulk peab ühtima toesidemete arvuga. Kolme toesidemega konstruktsioonile (joonis 13.2, *a*), mis vabastatuna alusest on kujukindel, saame vajalikud võrrandid harilikul viisil.

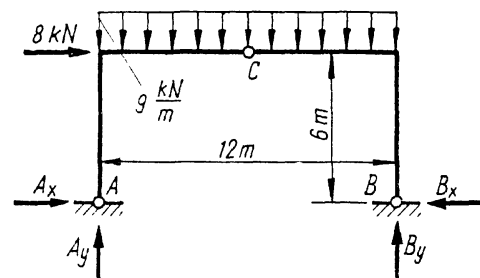
Kui toesidemeid on rohkem ( $T > 3$ ), saame puuduvad võrrandid tasakaalutingimuste rakendamisega konstruktsiooni osadele. Need süsteemid, vabastatuna tugevalt, pole kuju-



Joon. 13.2



Joon. 13.3



Joon. 13.4

kindlad (joonis 13.2, b). Nad sisaldavad ( $T-3$ ) liigendit, mille ümber süsteemi osad võiksid üksteise suhtes pööruda (joonisel liigend C). Siit järeldub, et liigendist ühel pool asetsevale süsteemi osale mõjuvate välisjõudude momentide summa selle liigendi suhtes peab võrduma nulliga:

$$\sum \mathcal{M}_{c(I)} = 0; \quad \sum \mathcal{M}_{c(II)} = 0, \quad (13.6)$$

kus C tähistab vaadeldavat liigendit; I ja II — sellest liigendist ühel ja teisel pool asetsevaid süsteemi osasid.

Näide 13.2. Joonisel 13.3 kujutatud kahe sildega liigendtala toereaktsiooni C määrame liigendist D paremal pool asetseva varda tasakaalutingimusest

$$\sum \mathcal{M}_{D(P)} = 0; \quad -Cb + Fa + 0,5pc^2 = 0,$$

millest

$$C = (Fa + 0,5pc^2)/b.$$

Toereaktsioonid A ja B arvutame kogu talale rakendatud tasakaalutingimustest  $\sum \mathcal{M}_A = 0$  ja  $\sum \mathcal{M}_B = 0$ .

Näide 13.3. Joonisel 13.4 on nn. kolme liigendiga raam, mille nelja toereaktsiooni määramiseks rakendame kaks tasakaalutingimust kogu raamile:

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{M}_B = 0; & \quad 12A_y + 8 \cdot 6 - 9 \cdot 12 \cdot 6 = 0; & \quad A_y = 50 \text{ kN}; \\ \sum \mathcal{M}_A = 0; & \quad -B_y \cdot 12 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 12 \cdot 6 = 0; & \quad B_y = 58 \text{ kN} \end{aligned}$$

ja kaks tingimust raami osadele:

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{M}_{C(V)} = 0; & \quad -A_x \cdot 6 + 50 \cdot 6 - 9 \cdot 6 \cdot 3 = 0; & \quad A_x = 23 \text{ kN}; \\ \sum \mathcal{M}_{C(P)} = 0; & \quad B_x \cdot 6 - 58 \cdot 6 + 9 \cdot 6 \cdot 3 = 0; & \quad B_x = 31 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Tasakaalutingimusi  $\sum X = 0$  ja  $\sum Y = 0$  rakendame tulemuste kontrollimiseks:

$$\sum X = 0; \quad 23 + 8 - 31 = 0; \quad \sum Y = 0; \quad 9 \cdot 12 - 50 - 58 = 0.$$

### 13.3. SISEJÕUD

**13.3.1. Liigendtala.** Mitme sildega liigendtalas esinevad sisejõududena põikjõud Q ja paindemoment M, mille määramine antud koormuse ja leitud toereaktsioonide põhjal ei erine samade suuruste arvutamisest konsoolis ja lihttalas. Sisejõudude epüürid kujunevad siin enamasti keerukamaks, sest suureneb pidevuspiirkondade hulk ja esineb rohkem märgivaheldust. Tuleb silmas pidada, et liigendite asukohtades peavad paindemomendi epüüris olema nullpunktid. Kui see tingimus pole täidetud, on viga tõenäoselt toereaktsioonides.

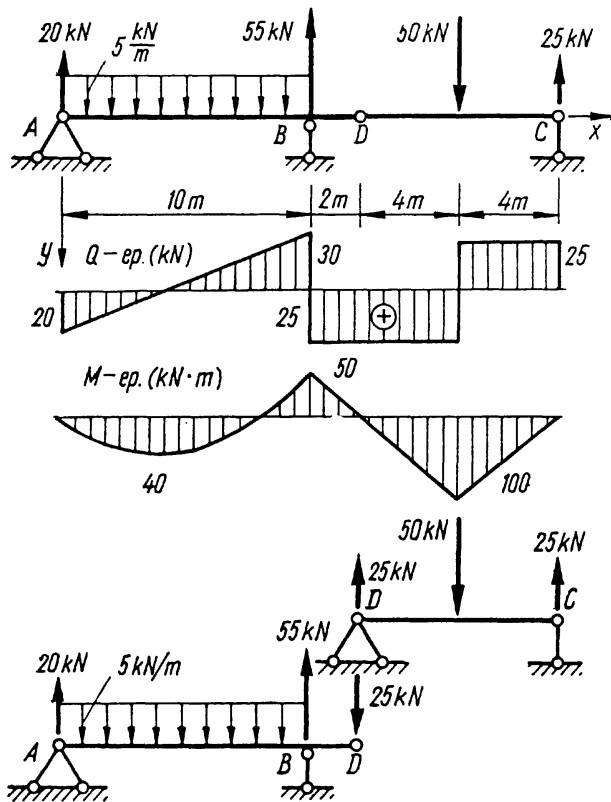
Näide 13.4. Joonisel 13.5 on kujutatud kahe sildega liigendtala koormustega ja nendest tulenevate toereaktsioonidega. Põikjõud kolmes piirkonnas:

$$\begin{aligned} Q &= 20 - 5x; & 0 < x < 10; \\ Q &= 20 - 5 \cdot 10 + 55 = 25 = \text{const}; & 10 < x < 16; \\ Q &= 20 - 5 \cdot 10 + 55 - 50 = -25 = \text{const}; & 16 < x < 20. \end{aligned}$$

Paindemomendid:

$$\begin{aligned} M &= 20x - 5x^2/2 = 20x - 2,5x^2; & 0 \leq x \leq 10; \\ M &= 20x - 5 \cdot 10(x-5) + 55(x-10) = 25x - 300; & 10 \leq x \leq 16; \\ M &= 20x - 5 \cdot 10(x-5) + 55(x-10) - 50(x-16) = & 16 \leq x \leq 20. \\ &= -25x + 500; \end{aligned}$$

Mitme sildega liigendtala toereaktsioonid ja sisejõud võime määrata ka teisel teel. Selleks jaotame tala liigenditest vabastamiseks põhi- ja lisaosadeks. Joonisel 13.5 kju-



Joon. 13.5

tatud tala põhiosa on  $AD$  ja lisaosa  $DC$ . Põhiosa tunnuseks on geomeetiline muutumatus iseseisva talana, see tähendab vabastatuna liigendist  $D$ . Antud juhul on põhiosaks konsooliga lihttala. Lisaosa tunnuseks on geomeetiline muutuvus, kui ta on vabastatud liigendist  $D$ . Lisaosa muutumatuse talas kindlustavad sidemed (liigend) põhiosaga.

Lahendamist alustame lisaosast  $DC$ , mida vaatleme lihttalana tugelel  $D$  ja  $C$ . Arvutame selle tala toereaktsioonid ja sisejõud ning kujutame epüürid piirkonnas  $DC$ . Lahendanud lisaosa, siirdume põhiosale, millele rakendame punktis  $D$  lisaks lauskoormusele koondjõu. See jõud kujutab endast lisaosa mõju põhiosale ja on vaadeldavas näites 25 kN

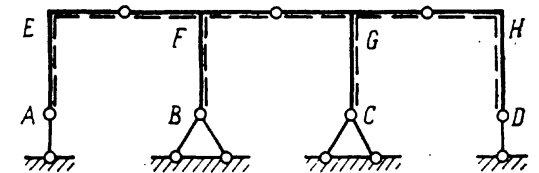
suunaga alla. Põhiosa lahendamisel saame liigendtala toereaktsioonid tugelel  $A$  ja  $B$  ning sisejõud piirkonnas  $AD$ .

**13.3.2. Raam.** Sisejõud raamis määrame lõikemeetodiga nii nagu tegime seda murdjoonse teljega vardas. Üldjuhul vardad raamis ei kujunda ortogonaalset süsteemi ja seepärast nende sisejõud arvutame ristlõikepinna teljestikus, milles kaks telge on vaadeldava pinna keskpateeljed.

Tasandraamides asetsevad varraste teljed ühes tasandis, mis on ka ristlõikepindade sümmeetriatasandiks. Raami tasandis kujutame teljestiku esimest ( $x$ ) ja teist ( $y$ ) telge ning  $z$ -telge risti selle tasandiga. Sisejõududest esinevad tasandraamides normaaljõud  $N$ , põikjõud  $Q_y$  ja paindemoment  $M_z$ , kuna  $Q_z = M_x = M_y = 0$ . See asjaolu võimaldab põikjõu ja paindemomendi indeksid jätta märkimata.

Et tasandraamis määrame sisejõud  $N$ ,  $Q$  ja  $M$  kaasaliikuvast teljestikus, siis peame täpsustama nende suuruste märgireeglid, mida pole otstarbekas seostada teljestikuga. Normaaljõududest loeme tõmbejõu positiivseks ja survejõu negatiivseks. See märgireegel sisuliselt ei erine eespool kasutatust. Paindemomendi loeme positiivseks, kui ta tekitab tõmbepinge varda sellel küljel, mis on märgitud arvutus skeemis punktiiriga (joonis 13.6). Seejuures on kokku lepitud märkida horisontaalsete varraste (riivide) alumised küljed ja vertikaalsete varraste (postide) sisemised või selle tunnuse puudumisel parempoolsed küljed. Joonisel 13.6 on varraste ühed küljed märgitud seda kokkulepet silmas pidades. Pidades kinni sellest kokkulepest, võime arvutus skeemis vardad jätta punktiiridega märgistamata. Kui raamil eeltoodud tunnused puuduvad, siis märgime varraste küljed punktiiriga meelevaldselt. Põikjõu loeme raamis positiivseks, kui ta vaadeldavat varda osa püüab pöörata päripäeva.

Sisejõudude epüürid kujutame raami telgjoonel, ordinaatidega selle telje ristsihis. Normaal- ja põikjõu ordinaatide positiivse suuna valime meelevaldselt ja näitame epüüridel märgi. Paindemomendi epüüri ordinaadid joonestame varda küljele, mis on allutatud tõmbepingetele ja märki graafikule ei kannu.



Joon. 13.6

Näide 13.5. Joonisel 13.7 on kujutatud staatikaga määratav raam, mille toereaktsioonid määrame tasakaalutingimustest:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}_A = 0; & \quad 15 \cdot 4 + 8 \cdot 6 \cdot 9 - B \cdot 6 = 0; & \quad B = 82 \text{ kN}; \\ \sum \mathbf{M}_D = 0; & \quad 15 \cdot 4 + 8 \cdot 6 \cdot 3 - A_y \cdot 6 = 0; & \quad A_y = 34 \text{ kN}; \\ \sum \mathbf{M}_{B(P)} = 0; & \quad -C \cdot 4 + 8 \cdot 6 \cdot 3 = 0; & \quad C = 36 \text{ kN}; \\ \sum \mathbf{M}_{B(V)} = 0; & \quad A_x \cdot 4 - A_y \cdot 6 = 0; & \quad A_x = 51 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Kasutamata tasakaalutingimustega kontrollime tulemusi:

$$\sum X = 0; \quad -51 + 15 + 36 = 0; \quad \sum Y = 0; \quad 34 - 82 + 8 \cdot 6 = 0.$$

Kujutame postis  $AE$  lõiget kaugusel  $y$  toest  $A$  ja avaldame selles ristlõikes sisejõud. Normaalsjõud  $N = A_y = 34 = \text{const}$  selle varda kogu ulatuses ( $0 < y < 4$ ). Põikjõud  $Q = A_x = 51 = \text{const}$ . Paindemomendi arvutame toereaktsiooni  $A_x$  momendina vaadeldava ristlõike suhtes, kuna  $A_y$  momenti esile ei kutsu:  $M = A_x \cdot y = 51y$ . Paindemoment toel  $A$ , kus  $y = 0$ , võrdub nulliga ja sõlmpunktis  $E$  saavutab väärtuse  $M_E = 51 \cdot 4 = 204$ , muutudes postis lineaarselt. Nii  $N$ ,  $Q$  kui ka  $M$  on vaadeldavas postis positiivsed.

Raami osas  $EB$  (riivis) kujutame lõiget kaugusel  $x$  punktist  $E$ . Avaldame sisejõud sellest ristlõikest vasakul pool asetsevale raami osale mõjuvatest välisjõududest:  $N = 51 - 15 = 36 = \text{const}$ ;  $Q = -34 = \text{const}$  ja  $M = 51 \cdot 4 - 34x$ . Paindemoment selles piirkonnas muutub lineaarselt, kusjuures punktis  $E$ , kus  $x = 0$ , saame  $M_E = 204$  ja punktis  $B$ , kus  $x = 6$ ,  $M_B = 0$ .

Raami osas  $BF$ :  $N = 51 - 15 = 36 = \text{const}$ ;  $Q = -34 + 82 - 8(x - 6) = 48 - 8(x - 6)$  ja  $M = 51 \cdot 4 - 34x + 82(x - 6) - 8(x - 6)^2/2 = -288 - 48x + 4(x - 6)^2$ . Põikjõud muutub lineaarselt, kusjuures punktis  $B$ , kus  $x = 6$ , saame  $Q_B = 48$  ja punktis  $F$ , kus  $x = 12$ ,  $Q_F = 0$ . Paindemoment muutub ruutparabooli kõvera järgi, kusjuures  $M_B = 0$  ja  $M_F =$

$= 144$ . Epüüri joonestamisel parabooli haripunkti on piirkonna lõpus  $F$ , kus põikjõu väärtus võrdub nulliga.

Postis  $CF$  saame  $N = 0$ ,  $Q = -36 = \text{const}$  ja  $M = 36y$ , mis punktis  $F$  annab  $M_F = 144$  ja punktis  $C$  paindemomendi  $M_C = 0$ .

Sisejõudude epüürid on kujutatud joonisel 13.7. Epüüridele kanname iseloomulike ordinaatide arväärtused, mille mõõtühikud esitame epüüri nimetuse järel.

Raami sisejõud (ka toereaktsioonid) võime määrata süsteemi jaotamisega osadeks sisemistest sidemetest vabastamise teel nii nagu kirjeldasime seda mitme sildega liigendtalade puhul. Mõned raamid jagunevad seejuures samuti põhi- ja lisaosadeks. Joonisel 13.7 kujutatud raamil on põhiosaks vasakpoolne murdjoonse teljega varras  $AEB$ , mis kujutab iseseisvalt püsivat osa. Parempoolne varras  $BFC$  on vaadeldav lisaosana, mis toetub põhiosale. Ka raami arvutamist alustame lisaosast ja siirdume siis põhiosale, millele rakendame lisaosa mõju horisontaalse koondjõuna punktis  $B$ . Vaadeldaval juhul on see jõud  $36 \text{ kN}$  ja suunatud paremale poole.

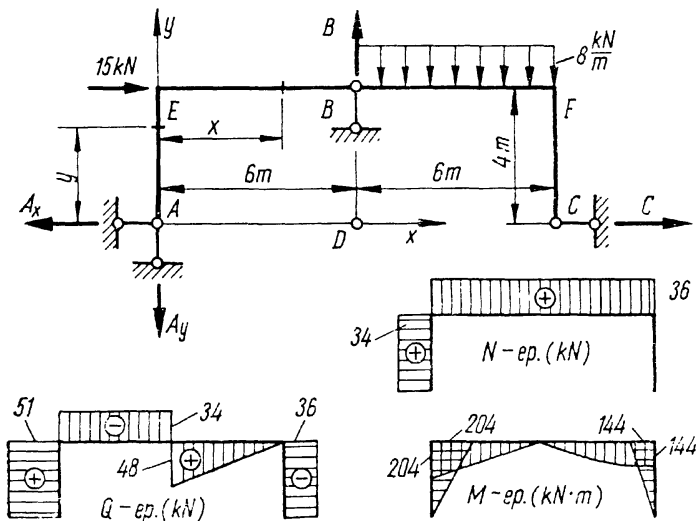
Mõned raamid ei jagune põhi- ja lisaosadeks. Niisuguse varrassüsteemi näiteks on joonisel 13.4 kujutatud kolme liigendiga raam, mille osad liigendi  $C$  kõrvaldamisega pole kumbki iseseisvana püsivad. Niisuguse raami sisejõudude ja toereaktsioonide määramist võib alustada ükskõik kummast osast, kuid eelnevalt tuleb määrata liigendis  $C$  mõjuv jõud või selle komponendid.

Raami jaotamine osadeks osutub vajalikuks, mõnikord aga möödapääsmatuks sel juhul, kui vardad moodustavad süsteemis kinnisi kontuure. Taolistes raamides jääb paratamatult ühte lõikesse rohkem kui üks varras ja sisejõudude arvutamine terviklikus süsteemis kujuneb keerukaks matemaatiliseks ülesandeks. Raami jaotamisega osadeks võime ülesannet lihtsustada ja suunata tuntud lahendusviisidele.

## 13.4. VIRTUAALSIIRETE PRINTSIIP

13.4.1. Jäikade kehade süsteem. Varrassüsteemide toereaktsioonid ja sisejõud, aga samuti ka siirded ja pöördenurgad deformeerumisel, on määratavad *analüütilise mehaanika* tasakaalutingimusest, mida tunneme teoreetilisest mehaanikast järgmises sõnastuses: *mehaaniline süsteem on tasakaalus, kui selle süsteemi mis tahes virtuaalsiirdel tema jõudude tööde summa võrdub nulliga.*

Tuletame meelde mõisted analüütilisest mehaanikast. Varrassüsteemi virtuaalsiirdena mõistame sidemete poolt võimaldatud väikse lõpliku liikumise tulemust, mis ei muuda märgatavalt varraste vastastikust asendit ega nende asukohti aluse suhtes. Üldistatud jõuna mõistame koondjõudu, koondmomenti, lauskoormust, reaktsioonijõudu või mis tahes muud nn. *jõufaktorit*, mis on suuteline liikumisel



Joon. 13.7

sooritama tööd. Tugevusõpetuses lisanduvad üldistatud jõudele veel sisejõud, kuna ka need, nagu teame, võivad süsteemis teha tööd. Üldistatud jõu üldistatud siirdena mõistame varrassüsteemi virtuaalsiirde seda parameetrit, mis korutatuna jõu suurusega võrdub tema poolt sooritatud tööga. Näiteks koondjõu üldistatud siire on tema rakenduspunkti siirde projektsioon jõu sihil, koondmomendi üldistatud siire on tema rakenduspunkti pöördenurk selle momendi tasandis jne.

Meenutame virtuaalsiirete printsiibi rakendust staatikaga määratava konstruktsiooni toereaktsioonide arvutamisel. Olgu konstruktsioonile rakendatud tuntud üldistatud jõud  $F_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) ja nendest esilekutsutud tundmatud üldistatud reaktsioonijõud  $R_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ), mis mõjuvad toesidemete kaudu aluselt. Seame eesmärgiks määrata üks tundmatustest reaktsioonijõududest. Selleks vabastame süsteemi otsitavale reaktsioonijõule vastavast toesidemest ( $j$ ) ja asendame selle mõju tundmatu jõuga  $R_j$  kõrvaldatud sideme sihil meelevaldses suunas. Toesideme kõrvaldamisega muutub süsteem mehhanismiks, millele anname virtuaalsiirde nii, et tundmatu reaktsioonijõud  $R_j$  saab üldistatud siirde  $\Delta_j$  oma mõju vastassuunas, sooritades negatiivse tööd ( $-R_j\Delta_j$ ). Seejuures tuntud üldistatud jõud  $F_i$  saavad neile vastavad üldistatud siirded  $\Delta_{ij}$  ja sooritavad tööd  $F_i\Delta_{ij}$ . Et süsteem on tasakaalus, võrdub selles virtuaalsiirdeseisundis kõikide jõudude poolt sooritatud tööde summa nulliga:

$$\sum_{i=1}^n F_i \Delta_{ij} - R_j \Delta_j = 0,$$

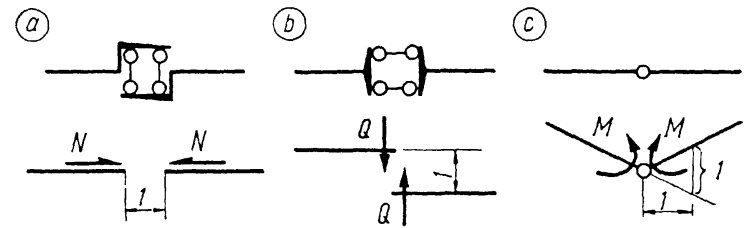
mida vaatleme tasakaaluvõrrandina otsitava toereaktsiooni määramiseks. Jagame võrrandit reaktsioonijõu siirdedega  $\Delta_j$  ja jagatiseid  $\Delta_{ij}/\Delta_j$  tähistame  $\delta_{ij}$ . Tasakaaluvõrrandi saame nüüd kujul

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta_{ij} - R_j = 0,$$

millest

$$R_j = \sum_{i=1}^n F_i \delta_{ij}, \quad (13.7)$$

kus *suhtelised siirded*  $\delta_{ij}$  tuleb määrata kõrvaldatud sideme ( $j$ ) sihilisest ühiksiirdest, mille suund on vastupidine arvutusskeemile märgitud tundmatule reaktsioonijõule  $R_j$ . Ühiksiiret ei tohi mõista mõõtühikuga siirdena suurusega 1, vaid väikse siirde  $\Delta_j$  suhtena iseendasse  $\Delta_j/\Delta_j=1$ , millel puudub



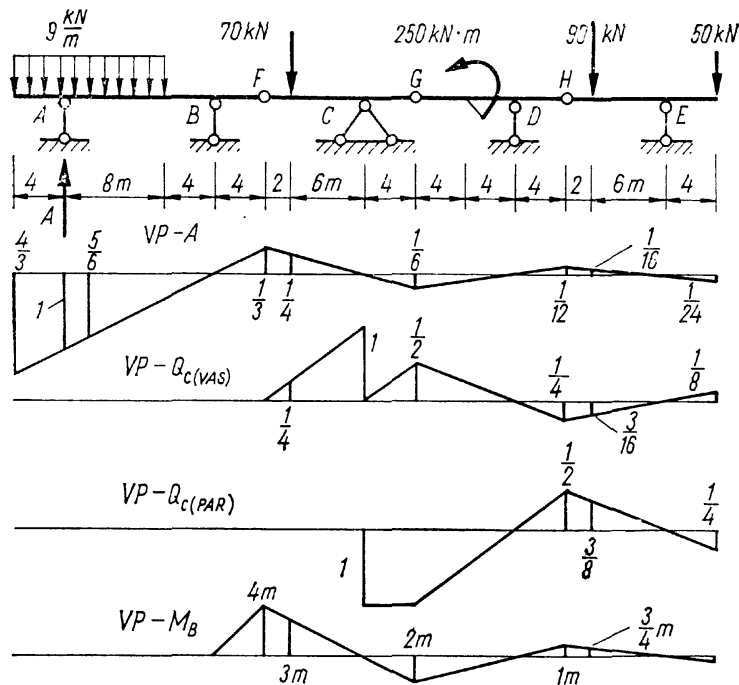
Joon. 13.8

mõõtühik. Suurusi  $\delta_{ij}$  tuleb vaadelda suhteliste siiretena, millel võib olla dimensioon sel juhul, kui väikeste absoluutsete siirete  $\Delta_{ij}$  ja  $\Delta_j$  dimensioonid ei ühti.

Virtuaalsiirete printsiibiga võime määrata ka sisejõu süsteemi varda ristlõikes. Selleks kõrvaldame otsitavale sisejõule vastava mõeldava sideme vaadeldavast ristlõikest ja asendame selle mõju kahe võrdse ja vastassuunalise tundmatu jõu või momendiga, millele anname arvutusskeemis positiivse sisejõu suuna. Tundmatut jõudude või momentide paari vaatleme üldistatud reaktsioonijõuna ja määrame valemiga 13.7. Seejuures tekitame süsteemis virtuaalsiirdeseisundi sel teel, et anname kõrvaldatud sideme sihis ristlõikega eraldatud varda kahele osale teineteise suhtes üldistatud ühiksiirde positiivse sisejõu vastassuunas.

Selgitame, kuidas kujutada varrast, mille ristlõikest on kõrvaldatud sisejõule vastav mõeldav side. Kui eemaldame normaaljõule vastava sideme, siis peab süsteemis moodustuma üks liikumise vabadusaste, mis võimaldab vaadeldava ristlõikega külgnevaid varda osi teineteisest eemalduda telje sihis (joonis 13.8, a). Kujutatud elementi nimetame arvutusskeemis tinglikult *normaaljõu liigendiks*. Joonisel 13.8, b ja c on vastavalt *põikjõu* ja *paindemomendi liigendid*, millest viimane on meile tuntud harilik liigend. Liigendite all on kujutatud tundmatud sisejõud  $N$ ,  $Q$  ja  $M$  positiivsetes suundades ning neile vastavad ühiksiirded, mis oma suunalt on vastupidised märgitud jõududele. Tuleb pidada silmas, et normaaljõu liigend võimaldab varda osade eemaldamist nii, et nende teljed jäävad ühele sirgele. Põikjõu liigend säilitab varda osade paralleelsuse siirdeseisundis. Paindemomendile on üldistatud siirdeks väike pöördenurk, mille konstrueerime nagu näidatud joonisel 13.8, c.

*Näide 13.6.* Määrame joonisel 13.9 kujutatud tala toereaktsiooni  $A$ , põikjõud vasakul ja paremal pool tuge  $C$  ning paindemomendi toel  $B$ . Alustame toereaktsioonist  $A$ , mille kujutame skeemil üllespoole suu-



Joon. 13.9

natuna. Kõrvaldame mõttes toe A ja anname talale selles punktis ühik-siirde allapoole. Tala skeemi all kujutame graafiliselt punkti A ühik-siirde ja joonestame selle najal kogu telgjoone *virtuaalsiirde skeemi*  $VP-A$ . Seejuures tala liigenditega eraldatud osad pöörduvad aluse suhtes ümber tugede B, C, D ja E ning naaberosad üksteise suhtes ümber liigendite F, G ja H. Tala virtuaalsiirde skeem koosneb kolmnurkadest, mille sarnasustunnused lubavad lihtsal viisil määrata tala telje iseloomulike punktide siirded liigendite asukohtades ja koondjõudude rakenduspunktides. Nende väärtused kanname skeemile ja lisame siirde  $5/6$  ühtlase lauskoormuse resultandi asukohas. Koondmomenti üldistatud siirde määrame tala osa GH pöördenurgana, mille saame, kui liigendi G siirde  $1/6$  jagame punktide G ja D vahekaugusega 8 m. Saame suuruse  $1/48 \text{ m}^{-1}$ , mida arvestame positiivsena, sest pöördenurga suund ühtib koondmomenti suunaga. Arvutame toereaktsiooni valemiga (13.7):

$$A = 9 \cdot 12 \cdot 5/6 - 70 \cdot 1/4 + 250 \cdot 1/48 - 90 \cdot 1/16 + 50 \cdot 1/24 = 74,17 \text{ kN}.$$

Vasakul pool tuge C mõjuva põikjõu arvutamiseks kujutame selles ristlõikes liigendi jooniselt 13.8, b ja tekitame virtuaalse ühik-siirde positiivsele sisejõule vastassuunas. Koostame tala telgjoone virtuaalsiirde skeemi  $VP-Q_{c(VAS)}$  iseloomulike ordinaatide arvuliste väärtustega ja arvutame otsitava põikjõu valemiga (13.7):

$$Q_{c(VAS)} = -70 \cdot 1/4 - 250 \cdot 1/16 + 90 \cdot 3/16 - 50 \cdot 1/8 = -22,5 \text{ kN}.$$

Põikjõu liigendiga paremal pool tuge C saame virtuaalsiirdeseisundi  $VP-Q_{c(PAR)}$ . Selle skeemi abil arvutame sisejõu:

$$Q_{c(PAR)} = 250 \cdot 1/8 - 90 \cdot 3/8 + 50 \cdot 1/4 = 10,00 \text{ kN}.$$

Toel B mõjuva paindemomendi arvutamiseks kujutame ette selles ristlõikes liigendi jooniselt 13.8, c ja anname 4 m pikkusele tala osale BF ühikpöördenurga positiivse paindemomendi vastassuunas. Ühiknurga saame, kui liigendis F tekitame 4 m suuruse siirde ülespoole. Koostame skeemi  $VP-M_B$  ja arvutame paindemomendi

$$M_B = -70 \cdot 3 + 250 \cdot 1/4 - 90 \cdot 3/4 + 50 \cdot 1/2 = -190,0 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Virtuaalsiirde printsiip lubab suhteliselt lihtsal viisil arvutada keerukate konstruktsioonide toereaktsioone ja sisejõudusid. Võime määrata konstruktsiooni mis tahes toereaktsiooni üksikult, sõltumatult teistest. Samuti arvutada meelevaldse sisejõu vahetult koormusest, ilma eelneva toereaktsioonide määramiseta ja sõltumatult teistest sisejõududest. Seetõttu paljudel juhtudel lihtsustuvad arvutused oluliselt. Printsiibi puuduseks on vajadus koostada virtuaalsiirde skeem, mis eeldab ühe vabadusastmega mehhanismide kinemaatika head tundmist. Keeruliseks kujuneb ka sisejõudude funktsioonide koostamine selle arvutusviisiga. Viimati mainitud puudus aga ei häiri asjatundlikku arvutajat, kellele sisejõudude epüüride konstrueerimiseks piisab sisejõudude tundmisest süsteemi varraste teatavates iseloomulikes ristlõigetes.

**13.4.2. Deformeeruv konstruktsioon.** Toereaktsioonide ja sisejõudude arvutamisel vaatlesime virtuaalsiiret absoluutselt jäikade kehade (varraste) süsteemis vaatamata sellele, et tegelikult vardad on deformeeruvad. Selle lihtsustusega ei kaasne aga mingit viga ega ebatäpsust, sest koormatud konstruktsioon on deformeerunud seisundis tasakaalus ja niisuguses staatilises olekus, kus deformatsioonidest tulenevad liikumised on lõppenud. Virtuaalse paigutisseisundi tekitame seejuures jäikliikumisena ühe vabadusastmega näiliselt jäikade kehade süsteemis.

Kui seame eesmärgiks uurida konstruktsiooni punktide siirdeid ja ristlõigete pöördenurki, siis peame eespool kirjeldatud lihtsustusest loobuma ja kujundama virtuaalsiirde-seisundi jäikliikumise ja deformatsiooni tulemusena, või siis ainult viimasega, kui jäikliikumine süsteemis puudub. Ka deformatsiooniga seotud virtuaalsiirdeseisundile esitame kaks tingimust: *suhtelised deformatsioonid, punktide siirded ja elementide pöördenurgad peavad olema vaadeldavad väikeste suurustena ja olema kooskõlas süsteemi sidemetega*. Sidemetena mõistame seejuures kahepoolsete ideaalsete sidemete kõrval ka molekulaarsidemeid deformeeruva aine osa-



keste vahel, mis ühelt poolt kindlustavad keha tervikluse, teiselt poolt aga annavad talle võimaluse deformeeruda. Et tahkel kehal on deformeerumise vabadusastmete arv praktiliselt piiramatult suur, siis võime kasutada ka piiramatult hulka kõikvõimalikke deformeerunud olekuid virtuaalsiirdeseisunditena. Probleem tekib aga selles, et suure hulga võimalike seisundite kõrval esineb veel suurem hulk võimatuid seisundeid, mis pole kooskõlas süsteemi sidemetega ja mille kasutamine virtuaalsiirdena ei ole lubatav. Siirdeseisundi võimalikkuse kriteeriumid pole siin nii lihtsad nagu ühe vabadusastmega jäikade kehade süsteemis.

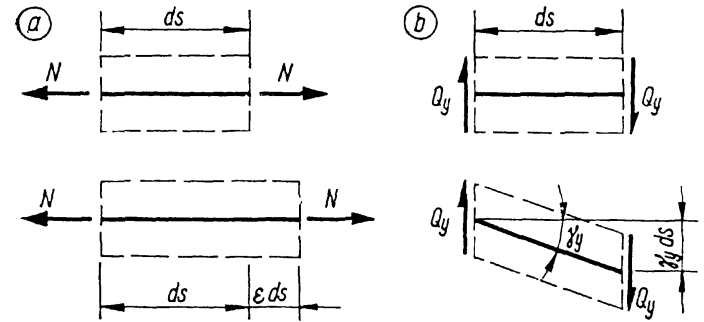
Käesoleva kursuse vajadusi rahuldab varrassüsteemi virtuaalsiirde valikul järgmine juhtmõte: *konstruktsiooni virtuaalsiirdeks sobib tema mis tahes tegelikult võimalik deformeerunud seisund, mis lubab rakendada algmõõtmete printsiipi*. Seejuures pole oluline deformeerumise põhjus, milleks võib olla mis tahes lubatav koormus, temperatuuri muutumine, tugevde vajumine jt. See juhtnõr ei ammenda küll kõiki võimalikke virtuaalsiirdeid, kuid kindlustab õige valiku, sest realselt eksisteeriva deformeerunud oleku sobivus ja kooskõla sidemetega on väljaspool kahtlust.

Deformeerunud oleku kasutamisel virtuaalsiirdena tuleb muude tööde kõrval arvestada ka sisejõudude tööd, mida need jõud sooritavad varda osakeste liikumisel üksteise suhtes. Deformeeruva konstruktsiooni tasakaalutingimuses lisandub sisejõudude tööd arvestav liige:

$$\sum_{i=1}^n F_i \Delta_i + \sum_{j=1}^m R_j \Delta_j - W = 0, \quad (13.8)$$

kus  $W$  on koormusest  $F_i$  põhjustatud sisejõudude  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_z$  ja  $M_y$  töö vastavalt virtuaalsiirde deformatsioonidele  $\epsilon$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ ,  $\theta$ ,  $\Delta K_y$  ja  $\Delta K_z$ , mida vaatleme varraste elastisel joonel  $S$  (varraste telgjoonel). Telje tähisega  $s$  (senise tähise  $x$  asemel) peame silmas nii sirgeid, kui ka väikse kõverusega varda, mille telg on kõver enne deformeerumist. Väikse kõverusega varda tunnuseks on tema telje kõverusraadiuse  $\varrho$  ja ristlõikepinna mõõtme  $h$  (kõveruse tasandis) suhe  $\varrho/h > 5$ . Niisugused vardad on pingete ja deformatsioonide arvatamisel käsitletavad sirgetena.

Tööde summeerimisel arvestame sisejõudude töö negatiivsena, kuna tugevusõpetuse tähiste ja märkidega sisejõud ja deformatsioonid annavad arvutamisel töö vastupidise märgiga. Teisiti öeldes, kui lugeda positiivseks töö, millest jõu potentsiaal väheneb ja negatiivseks töö, mis tõstab jõu potentsiaali, nagu me seda mõistame füüsikas, siis sisejõu-



Joon. 13.10

dude töö tugevusõpetuse tähistuses tuleb alati varustada miinusmärgiga.\*

Vaatleme sisejõudude töö arvutamist virtuaalsiirdeseisundis. Sisejõud ja neile vastavad deformatsioonid on üldjuhul muutuvad suurused varda teljel  $s$ . Seepärast arvutame esmalt elementaartöö elastse joone lõigul pikkusega  $ds$ , mille ulatuses sisejõud ja deformatsioonid võime lugeda muutumatuteks suurusteks.

Joonisel 13.10, *a* on katkendjoonega kujutatud varda lõik ja pidevjoonega ettekujutatav elastne joon elementaarse algpikkusega  $ds$ , mis virtuaalsiirdeseisundis suhtelise normaaldeformatsiooniga  $\epsilon$  pikeneb  $\epsilon ds$  võrra. Varda elemendis mõjuv normaaljõud  $N$  sooritab seejuures elementaartöö  $N \epsilon ds$ . Joonisel 13.10, *b* on kujutatud varda elastse joone element nihkenurgaga  $\gamma_y$ , millest tuleneb otspindade nihe  $\gamma_y ds$ . Elemendis mõjuv põikjõud  $Q_y$  sooritab sellel nihkel elementaartöö  $Q_y \gamma_y ds$  ja põikjõud  $Q_z$  analoogselt elementaartöö  $Q_z \gamma_z ds$ . Väändemomendist saame töö  $M_x \theta ds$  ning paindemomentidest  $M_z \Delta K_y ds$  ja  $M_y \Delta K_z ds$ , kus  $\theta$  on varda suhteline väändernurk ja  $\Delta K_y$  ning  $\Delta K_z$  — elastse joone kõveruste juurdekasvud kahes ristuv tasandis.

Kõikide sisejõudude koosmõjumisel teeb igaüks neist virtuaalsiirdeseisundis tööd ainult temale vastavalt elementaarsiidel. See tähendab, et näiteks normaaljõud  $N$  sooritab tööd ainult varda elemendi elementaarpikenemisel  $\epsilon ds$  ja ei tee seda nihkel  $\gamma_y ds$ , kui me vaatleme nihkenurka  $\gamma_y$  väikse suurusena. Järelikult saame sisejõudude töö varda elemendi virtuaalsiirdeseisundis üldjuhul avaldada eespool väljenda-

\* Seda küsimust on selgitatud ka jaotises 2.8.2.

tud tööde summeerimise teel:

$$dW = N\varepsilon ds + Q_y \gamma_y ds + Q_z \gamma_z ds + M_x \theta ds + M_z \Delta K_y ds + M_y \Delta K_z ds.$$

Vardas avaldub sisejõudude töö määratud integraaliga varda kogu pikkuse  $l$  ulatuses telje  $s$  järgi ja kogu konstruksioonis kõigi varraste tööde summamana:

$$W = \sum_{k=1}^v \int_{l_k} (N\varepsilon + Q_y \gamma_y + Q_z \gamma_z + M_x \theta + M_z \Delta K_y + M_y \Delta K_z) ds,$$

kus  $V$  on varraste arv.

Asendades tasakaalutingimuses (13.8) sisejõudude töö  $W$  saadud avaldisega, saame

$$\sum_{i=1}^n F_i \Delta_i + \sum_{j=1}^m R_j \Delta_j - \sum_{k=1}^v \int_{l_k} (N\varepsilon + Q_y \gamma_y + Q_z \gamma_z + M_x \theta + M_z \Delta K_y + M_y \Delta K_z) ds = 0, \quad (13.9)$$

mille ühte, meie jaoks olulist rakendust vaatleme ülejäätmises jaotises.

### 13.5. CASTIGLIANO TEOREEM

Vaatleme siirete ja pöördenurkade määramist konstruksioonis. Selle ülesande lahendamine elastse joone diferentsiaalvõrrandile rajatud arvutusviisidega osutub äärmiselt keerukaks ja töömahukaks. Suhteliselt lihtsamateks kujunevad energeetilised meetodid, mida märkisime juba jaotises 10.1.2.

Rakendame konstruksioonile tuntud üldistatud jõud  $F_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Konstruksioon deformeerub ja jõud saavad neile vastavad üldistatud siirded  $\Delta_i$ , mis on tundmatud suurused. Väljendame konstruksioonis salvestunud potentsiaalse energia ühelt poolt välisjõudude tööna:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \Delta_i. \quad (13.10)$$

Teiselt poolt väljendame selle energia sisejõudude kaudu. Summeerime kõikide sisejõudude potentsiaalse energia ühe varda ulatuses valemite (2.53, 6.29 ja 9.47) najal, milles integreerimise varda sirge  $x$ -telje järgi asendame integreerimisega murdjoonse või väikse kõverusega  $s$ -telje järgi. Kui konstruksioonis on  $V$  varrast, siis kogu energia avaldub summamana:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^v \int_l \left[ \frac{N^2}{EF} + \frac{k_y Q_y^2}{GF} + \frac{k_z Q_z^2}{GF} + \frac{M_x^2}{B_v} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right] ds, \quad (13.11)$$

kus  $B_v = GI_\theta$  ümaratele varrastele. Mitteümarate varraste puhul asendub polaarinertsimoment teistsuguste tunnussuurrustega, millest mõningaid vaatlesime jaotises 6.4.

Potentsiaalse energia avaldises (13.11) väljendame sisejõud koormuste kaudu. Pärast integreerimist ja summeerimist saame potentsiaalse energia esitada funktsioonina koormusest:

$$U = U(F_1, F_2, \dots, F_n), \quad (13.12)$$

kus kõik suurused on määratud algandmetega ja seega tuntud. Võrrutame potentsiaalse energia avaldises (13.10 ja 13.12)

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \Delta_i = U(F_1, F_2, \dots, F_n). \quad (13.13)$$

Saime võrrandi, milles on  $n$  tundmatut siiret  $\Delta_i$  ja mis lahendub ainult sel erijuhul, kui konstruksioonile mõjub üks koormus ja tundmatute arv piirdub samuti ühega. Mitme jõuga koormatud konstruksiooni jaoks võrrand antud kujul ei lahendu.

Valime meelevaldselt ühe tundmatu siirde  $\Delta_{i=r}$  ja diferentseerime võrrandi (13.13) üldistatud jõu  $F_r$  järgi:

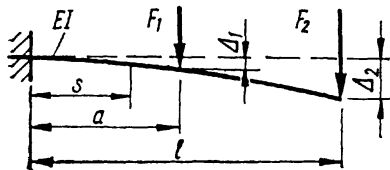
$$\frac{1}{2} \left( \Delta_r + F_r \frac{\partial \Delta_r}{\partial F_r} \right) = \frac{\partial U}{\partial F_r},$$

kus  $F_r (\partial \Delta_r / \partial F_r) = \Delta_r$ , kuna konstruksioon allub Hooke'i seadusele ja siire  $\Delta_r$  on vaadeldav lineaarses sõltuvuses jõust  $F_r$ . Tehes saadud seoses asenduse, saame valemite otsitava siirde arvutamiseks:

$$\Delta_r = \frac{\partial U}{\partial F_r}, \quad (13.14)$$

mille sisu sõnastame järgmiselt: *konstruksiooni potentsiaalse energia osatuletis mis tahes üldistatud jõu järgi võrdub selle jõu rakenduspunkti üldistatud siirdega*. Esitatu on tuntud *Castigliano teoreemina*.

*Näide 13.7.* Arvutame joonisel 13.11 kujutatud konsoolile rakendatud jõudude  $F_1$  ja  $F_2$  rakenduspunktide siirded  $\Delta_1$  ja  $\Delta_2$  Castigliano teoreemi põhjal. Et põikjõu osatähtsus on tühine, siis loobume sellest.



Joon. 13.11

Avaldame paindemomendi:

$$M = -F_1(a-s) - F_2(l-s); \quad (0 \leq s \leq a);$$

$$M = -F_2(l-s); \quad (a \leq s \leq l),$$

millega koormatud konsooli potentsiaalse energia arvutame valemi (13.11) järgi:

$$U = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^a [-F_1(a-s) - F_2(l-s)]^2 ds + \int_a^l [-F_2(l-s)]^2 ds \right] =$$

$$= \frac{1}{2EI} \left[ F_1^2 \frac{a^3}{3} + F_1 F_2 a^2 \left( l - \frac{a}{3} \right) + F_2^2 \frac{l^3}{3} \right].$$

Arvutame otsitavad siirded valemiga 13.14:

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{2}{3} F_1 a^3 + F_2 a^2 \left( l - \frac{a}{3} \right) \right];$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial F_2} = \frac{1}{2EI} \left[ F_1 a^2 \left( l - \frac{a}{3} \right) + \frac{2}{3} F_2 l^3 \right].$$

Castigliano teoreem kirjeldab deformeeruvate kehade ja süsteemide üht põhilist seaduspärasust ja seepärast on ta olulise tähtsusega teooria valdkonnas. Teoreemi rakendus siirete arvutamiseks inseneripraktikas on piiratud ja sellepärast leiab harva kasutamist.

### 13.6. MOHRI MEETOD

Konstruksioonides tekkivate siirete määramise universaalse arvutusviisi esitas Maxwell 1864. a. See ettepanek jäi aga inseneripraktikas tähelepanuta probleemi keerukavõitu käsitlemise tõttu. Sõltumatult Maxwelli tööst avastas Mohr sama arvutusviisi ja avaldas selle 1873. a. Sellest ajast leidis see meetod tee praktikasse, kus teda algul rakendati tagasihoidlikult. Tänapäeval on Maxwell-Mohri siirete arvutusmeetod üks levinumaid teiste hulgas. Esitame selle meetodi põhilise arvutusvalemi Mohri poolt antud tulemusviisiga.

Vaatleme konstruktsiooni, mis koormuse mõjust, temperatuurimuutest ja välissidemete liikumisest (tugede järeleandlikkusest) läheb oma algolekust üle deformeerunud seisundisse. See seisund olgu määratud üldistatud deformatsi-

oonidega  $\varepsilon$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ ,  $\theta$ ,  $\Delta K_y$  ja  $\Delta K_z$  ja välissidemete siiretega  $\Delta_j$ , mida käsitleme tuntud suurustena. Seame eesmärgiks määrata konstruktsiooni meelevaldse punkti üldistatud siire  $\Delta$ , mida vaatleme tundmatu suurusena. Olgu deformatsioonid väikesed ja algmõõtmete printsiip rakendatav. *Vaatleme konstruktsiooni deformeerunud olekut tema virtuaalsiirde-seisundina.*

Kujutame ette sama konstruktsiooni oma esialgses, deformeerumata olekus, vabana välismõjudest. Võtame otsitavale siirdele  $\Delta$  vastava üldistatud jõu  $\bar{F}$ , mille arvulise väärtuse võime valida meelevaldselt. Analoogselt jaotises 13.2.1 kasutusele võetud ühiksiirdele, valime ka siin arvutuse lihtsuse huvides üldistatud ühikjõu  $F=1$ , mis on dimensioonitu suurus, kuid säilitab oma kõik muud tunnused vektorina ja üldistatud jõuna. Rakendame üldistatud ühikjõu konstruktsioonile kohas, kus määrame siirde, seades jõu sihi kokku otsitava siirde sihiga. Määrame ühikjõust  $F=1$  tulenevad toereaktsioonid  $r_j$  ja sisejõud  $n$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ ,  $m_x$ ,  $m_z$  ja  $m_y$  varraste kõikides ristlõigetes. Kuna konstruktsioon on koormuse  $F=1$  mõjul tasakaalus, siis rahuldab ta tasakaalutingimust (13.9) mis tahes virtuaalsiirde-seisundiga. *Seame konstruktsioonile tasakaalutingimuse meid huvitava virtuaalsiirde-seisundiga:*

$$F\Delta + \sum_{j=1}^m r_j \Delta_j - \sum_{k=1}^v \int_{l_k} (n\varepsilon + q_y \gamma_y + q_z \gamma_z + m_x \theta + m_z \Delta K_y + m_y \Delta K_z) ds = 0,$$

mildest avaldame otsitava siirde.

$$\Delta = \sum_{k=1}^v \int_{l_k} (n\varepsilon + q_y \gamma_y + q_z \gamma_z + m_x \theta + m_z \Delta K_y + m_y \Delta K_z) ds - \sum_{j=1}^m r_j \Delta_j, \quad (13.15)$$

kus  $F=1$  on ära jäetud.

Paigutiste arvutamise avaldis (13.15) on tuntud Mohri valemina. Tuleb silmas pidada, et dimensioonitust üldistatud ühikjõust tulenevad toereaktsioonid  $r_j$  ja sisejõud  $n$ ,  $q_y$ , ... selles valemis on suurused, mille dimensioonid ei ühti harilike toereaktsioonide ja sisejõudude omadega. Kui üldistatud ühikjõuks on näiteks ühikkoondjõud, siis temast tulenev normaaljõud  $n$  on dimensioonitu suurus ja paindemoment  $m_z$  dimensiooniga  $L$ , ühikmomendist tulenev normaaljõud  $n$  on dimensiooniga  $L^{-1}$  ja paindemoment  $m_z$  dimensioonita suurus.

Vaatleme Mohri valemis (13.15) esinevaid suurusi, mis

määravad konstruktsiooni siirdeseisundi. Välissidemete (toesidemete) siirdeid  $\Delta_j$  käsitleme antud suurustena. Varda teljel vaadeldavaid suhtelisi deformatsioone kutsuvad esile sisejõud  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_z$  ja  $M_y$  ning temperatuurimuude  $\Delta T$ . Temperatuurimuute loeme konstantseks varda ristruunas ja jätame talle võimaluse muutuda piki varrast.

Varda elastse joone elemendi  $ds$  pikenedamise  $\epsilon ds$  väljendame tuntud valemite põhjal:

$$\epsilon ds = \frac{N ds}{EA} + \alpha \Delta T ds = \left( \frac{N}{EA} + \alpha \Delta T \right) ds,$$

millest

$$\epsilon = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta T, \quad (13.16)$$

kus  $\alpha$  on varda materjali termilise joonpaisumise tegur.

Varda elastse joone elemendi  $ds$  otspunktide nihke  $\gamma_y ds$  kutsuvad esile põikjõud  $Q_y$ , kuna temperatuuri tõus  $\Delta T$  seda ei mõjuta. Kahjuks puudub meil suuruste  $Q_y$  ja  $\gamma_y$  vaheline seos valemiga. Puuduva valemiga tuleme energeetilistest seostest, vaadeldes põikjõudu  $Q_y$  üldistatud jõuna ja nihet  $\gamma_y ds$  sellele jõule vastava üldistatud siirdena. Varda elemendis sisejõududest salvestunud elementaarse potentsiaalse energia saame avaldise (13.11) diferentseerimise teel:

$$dU = \frac{1}{2} \left[ \frac{N^2}{EA} + \frac{k_y Q_y^2}{GA} + \frac{k_z Q_z^2}{GA} + \frac{M_x^2}{B_v} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right] ds. \quad (a)$$

*Castigliano* teoreemi najal võime sellest seosest avaldada mis tahes sisejõule vastava elementaarse üldistatud siirde. Arvutame põikjõule  $Q_y$  vastava siirde:

$$\gamma_y ds = \frac{\partial (dU)}{\partial Q_y} = \frac{k_y Q_y}{GA} ds,$$

millest elastse joone elemendi nihkenurk:

$$\gamma_y = \frac{k_y Q_y}{GA}; \quad \gamma_z = \frac{k_z Q_z}{GA}, \quad (13.17)$$

kus  $k_y$  ja  $k_z$  on dimensioonitud kordajad, mis on määratud valemiga (9.46). Valemiga (13.17) määratud suurusi tuleb mõista varda ristlõikepinna keskmises vaadeldavate arvutuslike nihkenurkadena, mis väljendavad selles pinnas esinevate tõeliste, muutuvate nihkenurkade teatavaid keskmisi väärtusi. Need arvutuslikud nihkenurgad lubavad õigesti

väljendada põikjõudude poolt sooritatud tööd ja nende jõude potentsiaalset energiat.

Varda elastse joone suhtelise väändenurga  $\theta$  ja kõveruse muutused  $\Delta K_y$  ja  $\Delta K_z$  peatasandites saame avaldada tuntud valemitega või ka seestest (a) *Castigliano* teoreemi põhjal:

$$\theta = \frac{M_x}{B_v}; \quad \Delta K_y = \frac{M_z}{EI_z}; \quad \Delta K_z = \frac{M_y}{EI_y}. \quad (13.18)$$

Temperatuuri ühtlane tõus ristlõikepinnas ei mõjuta varda kõverust ja suhtelist väändenurka.

Asendades valemis (13.15) deformatsioonid seostest (13.16, 17 ja 18), saame *Mohri* valemikuju

$$\Delta = \sum_{h=1}^v \int_{l_k} \left( \frac{Nn}{EA} + \frac{k_y Q_y q_y}{GA} + \frac{k_z Q_z q_z}{GA} + \frac{M_x m_x}{B_v} + \frac{M_z m_z}{EI_z} + \frac{M_y m_y}{EI_y} \right) ds + \sum_{h=1}^v \alpha_h \int_{l_k} \Delta T n ds - \sum_{j=1}^m r_j \Delta_j.$$

Valemitest (13.15 ja 13.19) on esimene oluliselt universaalsem, sest ta võimaldab laiemalt arvestada deformatsioone esilekutsuvaid välismõjusid ja lubab arvutada paigutisi süsteemides, mille materjal ei allu *Hooke*'i seadusele. Teine valem eeldab *Hooke*'i seaduse kehtivust ja võtab deformeerumise põhjustena arvesse ainult sisejõud, temperatuurimuute (ühtlase varda rist- ja muutuva pikisuunas) ja välissidemete siirdeid. Sageli esitatakse valem veelgi lihtsamal kujul, kui peetakse silmas tema rakendust kitsamalt piiritletud konstruktsioonidele, kus deformatsioone esilekutsuvate faktorite hulk on väiksem või kus osa neist jätetakse mitteolulistena kõrvale. *Mohri* valemil paljudest lihtsamatest variantidest esitame kaks järgmist:

$$\Delta = \sum_{h=1}^v \left( \frac{Nnl}{EA} \right)_h; \quad \Delta = \sum_{h=1}^v \int_{l_k} \frac{Mm}{EI} ds. \quad (13.20)$$

Esimest neist kasutame sõrestike, teist tasandraamide jaoks, kui siirdeid arvutame ainult sisejõududest. Sõrestikus mõjub teatavasti ainult normaaljõud, mis igas vardas on konstantne. Kui seejuures iga varras on ühtlane ( $EA = \text{const}$ ), siis saamegi valemist (13.19) esimese lihtsustatud variandi (13.20).

Tasandraamides puudub väändemoment ja üks paindemomentidest ning põikjõududest. Teine põikjõud ja normaaljõud jätetakse aga enamasti kõrvale, sest nende mõju raami

siiretele on tühine. Vaadeldes ka tugesid jäikadena ja temperatuurimuuteid tühistena, saame teise valemi (13.20).

*Mohri* valemi mis tahes lihtsustatud variandi rakendamisel peame veenduma, et kõrvalejäetud liikmetes ei leidu vaadeldava konstruktsiooni siirdeid oluliselt mõjutavaid faktoreid. Seejuures tuleb lähtuda üldvalemist (13.15).

*Näide 13.8.* Arvutame joonisel 13.12, a kujutatud sõrestiku sõlme  $C$  vertikaalsiirde  $\Delta$  koormusest  $2F$ . Varraste pikkused on võrdsed ( $l$ ), ristlõikepindalad erinevad ja on antud joonisel 13.12, b, materjali elastsusmoodul  $E$ .

Määrame varraste sisejõud:

$$N_1 = N_2 = F/\sqrt{3}; \quad N_3 = N_6 = -(2/\sqrt{3})F; \quad N_4 = N_5 = 0; \quad N_7 = -F/\sqrt{3}.$$

Rakendame sõlmes  $C$  vertikaalse ühikjõu (joonis 13.12, b) ja arvutame sisejõud sellest koormusest:

$$n_1 = n_2 = 1/(2\sqrt{3}); \quad n_3 = n_6 = -1/\sqrt{3}; \quad n_4 = n_5 = 1/\sqrt{3}; \quad n_7 = -1/\sqrt{3}.$$

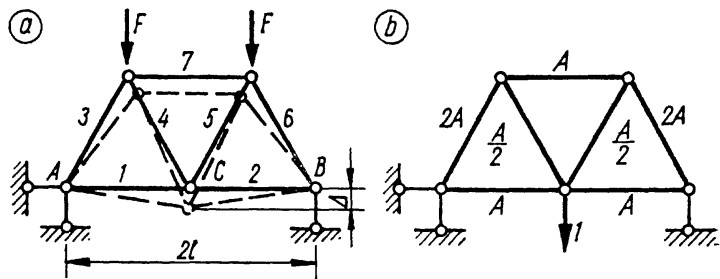
Esimese valemiga (13.20) leiame otsitava siirde

$$\Delta = \sum_{k=1}^7 \left( \frac{N n l}{EA} \right)_k = \frac{N_1 n_1 l}{EA} + \frac{N_2 n_2 l}{EA} + \frac{N_3 n_3 l}{2EA} + \frac{N_4 n_4 l}{EA/2} + \frac{N_5 n_5 l}{EA/2} + \frac{N_6 n_6 l}{2EA} + \frac{N_7 n_7 l}{EA} = \frac{Fl}{EA} \left( \frac{2}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} + \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \right) = \frac{4Fl}{3EA}$$

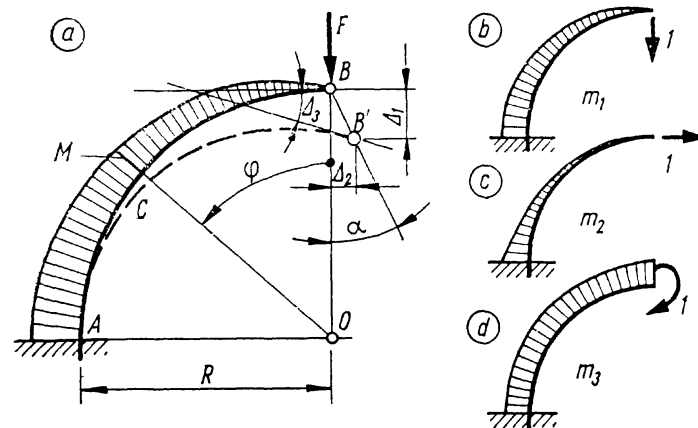
*Näide 13.9.* Arvutame joonisel 13.12 kujutatud sõrestiku sõlme  $C$  vertikaalsiirde  $\Delta$  varda  $3$  kuumenemisest  $\Delta T$  võrra ühtlaselt kogu pikkusel  $l$ . Materjali termilise joonpaisumise tegur on  $\alpha$ .

Et siirde arvutame samas sõlmes ja suunas nagu eelmises näites, siis kasutame skeemi joonisel 13.12, b ja selles määratud normaaljõudusid  $n_k$  ühikkoormusest. Otsitava siirde arvutame valemiga (13.19), millest tuleb arvesse ainult temperatuuri tõusu sisaldav liige:

$$\Delta = \alpha \int_l \Delta T n_3 ds = \alpha \Delta T \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) l = -0,5774 \alpha \Delta T l.$$



Joon. 13.12



Joon. 13.13

Miinusmärk näitab, et sõlm  $C$  saab varda  $3$  kuumenemisest siirde skeemil rakendatud ühikjõu vastassuunas.

*Näide 13.10.* Määrame joonisel 13.13, a kujutatud väikse kõverusega varda otsa  $B$  siirde ja pöördenurga jõu  $F$  mõjul. Varda telg punktide  $A$  ja  $B$  vahel kujutab täisnurkset ringjoone kaart radiusega  $R$  ja tema paindejäikus on  $EI$ .

Vardas mõjuvad sisejõud  $N$ ,  $Q$  ja  $M$ , millest olulisena võtame arvesse ainult paindemomendi

$$M = -FR \sin \varphi.$$

Et nõutakse varda otsa täielikku siiret, mille sihti me ei tea, siis arvutame üldistatud siirde  $\Delta_1$  (siirde projektsiooni) vertikaalsihis ja  $\Delta_2$  horisontaalsihis, mis võimaldavad määrata otsitava siirde. Varda otsa pöördenurga tähistame  $\Delta_3$ . Rakendame varda otsas üldistatud ühikjõud, mis vastavad otsitavatele üldistatud siiretele ja kujutame joonisel 13.13, b, c ja d. Ühikjõududest tulenevad paindemomendid

$$m_1 = -R \sin \varphi; \quad m_2 = -R(1 - \cos \varphi); \quad m_3 = -1.$$

Otsitavad siirded arvutame teise valemiga (13.20):

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \int_l M m_1 ds = \frac{FR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi FR^3}{4EI};$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_l M m_2 ds = \frac{FR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi = \frac{FR^3}{2EI};$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \int_l M m_3 ds = \frac{FR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{FR^2}{EI} \text{ rad} = \left( \frac{180FR^2}{\pi EI} \right)^\circ.$$

Arvutame siirde  $\overline{BB'}$  arvvaärtuse:

$$\overline{BB'} = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} = \frac{FR^3}{EI} \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}} \approx 0,931 \frac{FR^3}{EI}$$

ja suunanurga

$$\alpha = \arctan \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \arctan \frac{2}{\pi} = 32^\circ 29'.$$

*Näide 13.11.* Joonisel 13.14,  $a$  on kujutatud õhuke ristkülikulise ristlõikega rõngas piluga, mis temperatuuril  $T_0$  on laiusel  $a$ . Määrata pilu laius, kui rõnga temperatuur sisepinnal on  $T_i$  ja välispinnal  $T_e$  (joonis 13.14,  $b$ ). Materjali termilise joonpaisumise tegur on  $\alpha$ , rõnga diameeter  $D$  ja paksus  $\delta$ .

Vaatleme piluga rõngast väikese kõverusega vardana. Oletades temperatuuri lineaarset muutumist paksuse  $\delta$  ulatuses, määrame varda teljel temperatuuri tõusu  $\Delta T = (T_i + T_e)/2 - T_0$  ja gradiendi  $\partial T/\partial r = (T_i - T_e)/\delta$ . Temperatuuri tõus põhjustab varda teljel suhtelise pikenemise  $\epsilon = \alpha \Delta T$  ja gradient kõveruse muutuse  $\Delta K = \alpha \partial T/\partial r$ .

Et valem (13.19) ei arvesta varda kõveruse muutumist temperatuuri gradiendist varda ristsuunas, siis kasutame üldvalemit (13.15), mis vaadeldaval juhul määrab pilu laiendamise:

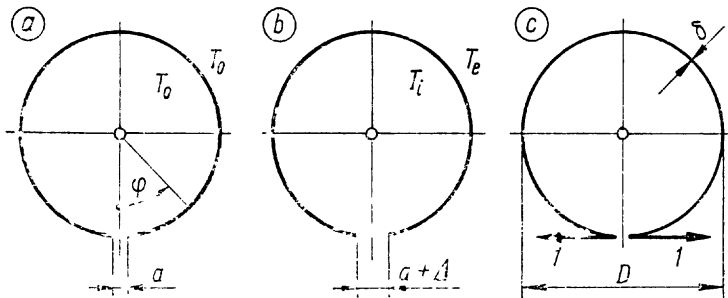
$$\Delta = \int_0^{\pi} (n\epsilon + m\Delta K) ds, \quad (13.21)$$

kus  $n$  ja  $m$  on arvutatavale siirdele vastava üldistatud ühikjõu poolt esile kutsutud normaaljõud ja paindemoment.

Joonisel 13.14,  $c$  on kujutatud üldistatud ühikjõud, mis vastab otsitavale siirdele, s.t. pilu laiendamisele. See üldistatud ühikjõud koosneb kahest ühikkoondjõust, millest ühe rakendamise varda ühele otsale ja teise jõu teisele otsale otsitava siirde sihile vastassuunas. Jätame meelde, et samalaadse üldistatud ühikjõuga võime arvutada igasuguses konstruktsioonis kahe mis tahes punkti vahetäuguse muutumise.

Avaldame normaaljõu ja paindemomendi

$$n = -\cos \varphi; \quad m = \frac{D}{2} (1 - \cos \varphi).$$



Joon. 13.14

Asetame eespool toodud suurused ja funktsioonid valemisse (13.21), kus asendame  $ds = (D/2)d\varphi$  ja integreerime polaarkoordinaatides:

$$\begin{aligned} \Delta &= - \int_0^{2\pi} \cos \varphi \alpha \Delta T \frac{D}{2} d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{D}{2} (1 - \cos \varphi) \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \frac{D}{2} d\varphi = \\ &= - \frac{\alpha \Delta T D}{2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{\alpha D^2}{4} \frac{\partial T}{\partial r} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{\pi D^2}{2\delta} \alpha (T_i - T_e). \end{aligned}$$

### 13.7. MOHRI VALEMI INTEGRAALIDE NUMBRILINE ARVUTAMINE

**13.7.1. Simpsoni valem.** Varrassüsteemi siirde valemis sisalduvad integraalid arvutatakse eelmise jaotise näidetes analüütiliselt väljendatud funktsioonide harilikku integreerimise teel. See üldtuntud arvutusviis tuleb mõnikord arvesse, kuid inseneripraktikas on enam levinud sisejõudude esitamine epüüridena, millel iseloomulike ordinaatide väärtused on määratud numbriliselt. Epüüride põhjal võime integraalid arvutada matemaatikast tuntud mis tahes numbrilise arvutusviisiga. Mõningaid neist vaatleme käesolevas ja kahes järgnevas jaotises.

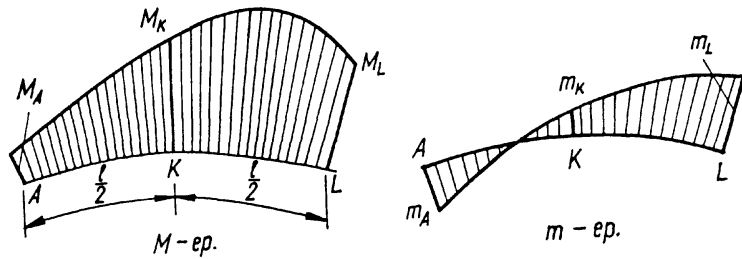
Matemaatikast teame numbrilise integreerimise *Simpsoni valemit*:

$$\int_a^b y dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n),$$

mille kohandame *Mohri* integraali arvutamiseks järgmiste eeldustega: 1) vaadeldav varras või selle osa on sirge või pidevalt muutuva väikse kõverusega ja ühtlase ristlõikega; 2) sisejõudude epüürid integreerimispiirkonnas ei sisalda katkevusi ega murdepunkte, see tähendab, nad peavad olema «siledad».

$$\begin{aligned} \int_l Mm ds &\approx \frac{\Delta s}{3} (M_0 m_0 + 4M_1 m_1 + 2M_2 m_2 + 4M_3 m_3 + \dots + \\ &+ \dots + 2M_{n-2} m_{n-2} + 4M_{n-1} m_{n-1} + M_n m_n), \end{aligned} \quad (13.22)$$

kus varda jäikus on konstantse suurusena toodud välja integraali märgi alt ja jätetud vaatlusest kõrvale;  $M$  ja  $m$  tähistavad mis tahes ühenimelisi sisejõudusid vastavalt siiret esilekutsuvast koormusest ja sellele siirdele sobivast üldis-



Joon. 13.15

tatud ühikjõust;  $l$  on varda või selle osa pikkus integreerimispiirkonnas, mõõdetuna mööda telge  $s$ ;  $n$  — integreerimispiirkonna jaotusarv, mis *Simpsoni* valemi jaoks peab olema paarisarv;  $\Delta s = l/n$  — integreerimispiirkonna jaotuse samm;  $M_0$  ja  $m_0$  on sisejõudude numbrilised väärtused piirkonna alguses ja  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ning  $m_1, m_2, \dots, m_n$  — sisejõudude väärtused sammuga  $\Delta s$ .

Valemiga (13.22) arvatud integraali väärtus on seda täpsem, mida suurema valime jaotusarvu  $n$ . Kui  $M$ - ja  $m$ -epüürid sisaldavad rohkesti kään- ja haripunkte, siis tuleb  $n$  valida vastavalt suurem. Harilikult pole sisejõudude pidevuspiirkonnas üle ühe haripunkti ja vajaliku arvutustäpsuse kindlustab minimaalne jaotusarv  $n=2$ . Kõrge täpsuse saame, kui  $M$  ja  $m$  on astmefunktsioonid, kuna *Simpsoni* valemiga arvatades teatavasti aproksimeerime integreeritavat funktsiooni ruutparabooli lõikudega. Seejuures, kui integreeritavate funktsioonide astmete summa ei ületa kolme, annab valem minimaalse jaotusarvuga täpse tulemuse:

$$\int_l M m ds \approx \frac{l}{6} (M_A m_A + 4M_K m_K + M_L m_L), \quad (13.23)$$

kus esinevad suurused selguvad jooniselt 13.15.

**13.7.2. Vereštšagini võte** sobib sirgetele ühtlastele varrastele või nende osadele, kui  $M$ - ja  $m$ -epüüridest vähemalt üks on lineaarne. Enamasti on üldistatud ühikjõust tulenev sisejõu epüür  $m$  sirges vardas või selle osas lineaarne ja me võime selle esitada üldiselt võrrandiga  $m = a + bx$ , kus  $x$  on varda sirge telg. Sel juhul võime *Mohri* integraali arvutada ja geomeetriliselt interpreteerida järgmiselt:

$$\begin{aligned} \int_l M m ds &= \int_l M (a + bx) dx = a \int_l M dx + b \int_l M x dx = \\ &= a \Omega_M + b \Omega_M x_{CM} = \Omega_M (a + b x_{CM}), \end{aligned}$$

kus  $\Omega_M$  on sisejõu  $M$  epüüri pindala ja  $x_{CM}$  selle keskme  $C_M$  koordinaat (joonis 13.16, a). Võttes arvesse, et  $a + b x_{CM} = m_{CM}$  on sisejõu  $m$  väärtus  $M$ -epüüri keskme kohal, saame *Mohri* integraali

$$\int_l M m dx = \Omega_M m_{CM}. \quad (13.24)$$

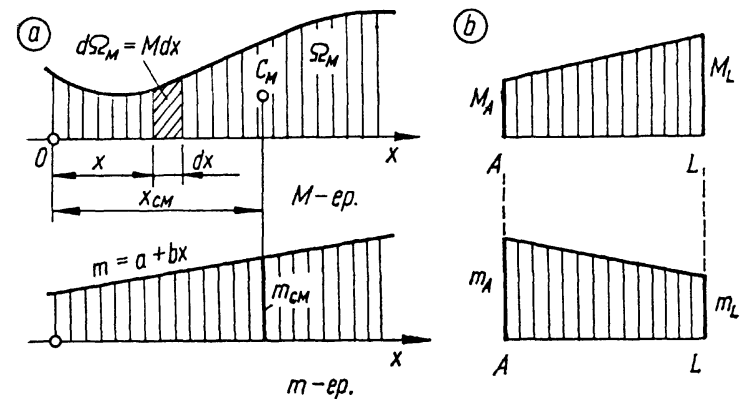
Kui  $M$ - ja  $m$ -epüürid on mõlemad lineaarsed, siis pole oluline kummast epüürist võtame pindala. Igal juhul ordinaadi võime võtta ainult niisugusest epüürist, mis on vaadeldavas piirkonnas pidevalt lineaarne.

Sageli pole sisejõu epüüri pindala ja keskme asukoha määramine lihtne ja nõuab omakorda pindintegraalide arvutamist. Enamasti võime aga mahukaid arvutusi vältida epüüri jaotamisega lihtsateks osakujunditeks — ristkülikuks, kolmnurgaks ja astmekõvera segmendiks, mille pindalad ja keskmed on teada (vt. jaotis 10.3.1). Seejuures valem (13.24) saab kuju

$$\int_l M m dx = \sum_{i=1}^n \Omega_{(M)i} m_{(CM)i}, \quad (13.25)$$

kus  $n$  on osakujundite arv,  $\Omega_{(M)i}$  —  $i$ -nda osakujundi pindala ja  $m_{(CM)i}$  — selle osakujundi keskme kohalt võetud  $m$ -epüüri ordinaat.

**13.7.3. Kaks lineaarset epüüri** on kõige lihtsam, aga ka kõige sagedamini esinev *Mohri* integraalide arvutamise juhtum, mis lubab kasutada lihtsat valemit. Selle saame *Simpsoni* valemist (13.23), kui võtame arvesse, et lineaarsetes epüürides  $M_K = (M_A + M_L)/2$  ja  $m_K = (m_A + m_L)/2$ . Asen-



Joon. 13.16

dades keskpunktis mõjuvad sisejõud valemis, saame (joonis 13.16, b):

$$\int M m dx = \frac{l}{6} (2M_A m_A + 2M_L m_L + M_A m_L + M_L m_A). \quad (13.26)$$

Saadud valem lubab arvutada Mohri integraalid trapetsi- ja kolmnurgakujulistest epüüridest mis tahes kombinatsioonides, kusjuures kõiki suurusi tuleb vaadelda märkidega ja nende korrutiste märgid määrata algebraliselt. Paindemomendi epüüride puhul, mille märgid puuduvad, tuleb korrutis valemis (13.26) lugeda positiivseks, kui ordinaadid mõlemas epüüris on ühesuunalised, ja negatiivseks, kui ordinaatide suunad on erinevad. See paindemomentide korrutiste märgireegel annab õiged tulemused eeldusel, et epüüride koostamine on kinni peetud eespool toodud reeglist, mis nõuab ordinaatide kandmist tõmbepingetele allutatud varda servale\*. Samal viisil tuleb sisejõudude, nende korrutiste ja epüüri pindalade märke käsitleda ka numbrilise integreerimise valemis (13.22... 25).

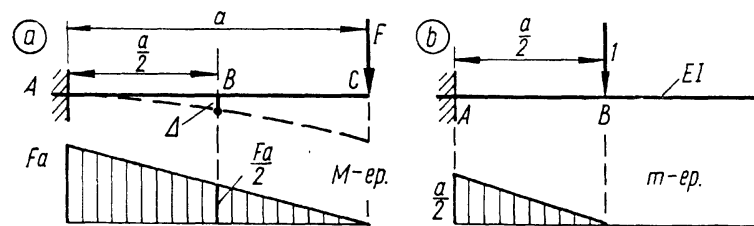
**Näide 13.12.** Määrata joonisel 13.17, a kujutatud konsooli punkti B läbipaine.

Koostame konsooli paindemomendi epüüri. Rakendame punktis B konsoolile vertikaalse ühikjõu ja koostame sellele koormusele paindemomendi epüüri (joonis 13.17, b). Arvutame läbipainde teise valemiga (13.20), kasutades numbrilist integreerimist valemi (13.26) järgi:

$$\Delta = \frac{1}{EI} \frac{a/2}{6} \left( 2Fa \frac{a}{2} + \frac{Fa a}{2} \right) = \frac{5 Fa^3}{48 EI}.$$

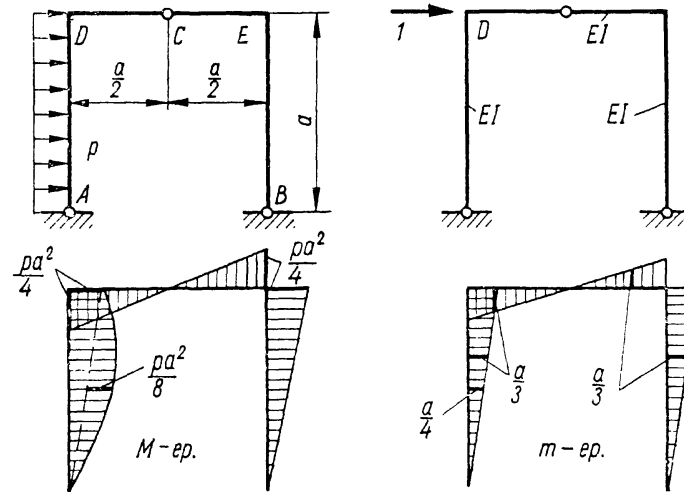
**Näide 13.13.** Arvutada joonisel 13.18 kujutatud raami punkti D horisontaalne siire.

Koostame lauskoormusest intensiivsusega  $p$  tuleneva paindemomendi epüüri. Rakendame punktis D otsitavale siirdele vastava üldistatud ühik-



Joon. 13.17

\* On võimalik ka vastupidine kokkulepe, kanda paindemomendi epüüri ordinaadid survepingele allutatud servale, nagu seda mõnedes õpikutes tehakse.



Joon. 13.18

jõu ja koostame paindemomendi epüüri. Arvutame siirde teise valemiga (13.20), kasutades numbrilist integreerimist Vereštšagini võttega. Pinnad  $\Omega_{(M)_i}$  võtame M-epüürist, ordinaadid m-epüürist. Seejuures posti AD epüüri jaotame kolmnurgaks ja parabooli segmendiks, mille pindalad ja keskmete kaugused on kergesti määratavad. Arvutustes vajalikud epüüride ordinaadid joonisel on tähistatud.

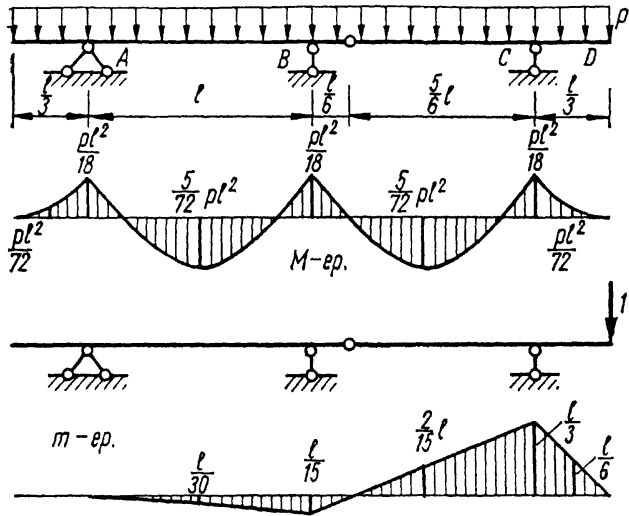
$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \frac{pa^2}{4} a \frac{a}{3} + \frac{2}{3} \frac{pa^2}{8} a \frac{a}{4} + 2 \frac{1}{2} \frac{pa^2}{4} a \frac{a}{2} \frac{3}{3} + \frac{1}{2} \frac{pa^2}{4} a \frac{a}{3} \right) = \\ &= \frac{7 pa^4}{48 EI}. \end{aligned}$$

**Näide 13.14.** Määrata joonisel 13.19 kujutatud liigendtala punkti D läbipaine.

Koostame M-epüüri koormusest  $p$ . Rakendame punktis D läbipaindele vastava ühikjõu ja koostame m-epüüri. Otsitava läbipainde arvutame Simpsoni valemiga (13.23):

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{l}{6} \left( 4 \frac{5}{72} pl^2 \frac{l}{30} - \frac{pl^2 l}{18 \cdot 15} \right) + \right. \\ &+ \frac{l}{6} \left( -\frac{pl^2 l}{18 \cdot 15} - \frac{5}{72} pl^2 \frac{2}{15} l + \frac{pl^2 l}{18 \cdot 3} \right) + \\ &+ \left. \frac{l/3}{6} \left( \frac{pl^2 l}{18 \cdot 3} + 4 \frac{pl^2 l}{72 \cdot 6} \right) \right] \approx 0,00417 \frac{pl^4}{EI}. \end{aligned}$$





Joon. 13.19

Näide 13.15. Määrame joonisel 13.19 kujutatud tala jäikusteguri  $c$  punktis  $D$  mõjuvale koondjõule  $F$ .

Jäikustegurit mõistame võrdetegurina seoses

$$F = c\Delta,$$

kus  $F$  on punktis  $D$  mõjuv vertikaalne jõud ja  $\Delta$  — sama punkti läbipaine. Et  $\Delta = 1$  puhul  $F = c$ , on süsteemi jäikustegur võrdne jõuga, mis kutsub esile ühiksiirde.

Seoses

$$\Delta = \delta F = \frac{1}{c} F$$

nimetatakse võrdetegurit  $\delta = 1/c$  deformatsiooniteguriks. Nagu näeme, on  $\delta$  võrdne siirdega ühikjõust. Järelikult võime deformatsiooniteguri arvutada Mohri valemiga:

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum_{k=1}^n \int_{l_k} m^2 ds,$$

milleks vajalik  $m$ -epüür on meil juba koostatud eelmises ülesandes. Numbriliseks integreerimiseks kasutame valemit (13.26):

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{l}{6} \cdot 2 \frac{l^2}{15^2} + \frac{l}{6} \left( 2 \frac{l^2}{15^2} + 2 \frac{l^2}{3^2} - 2 \frac{l}{15} \frac{l}{3} \right) + \frac{l/3}{6} \cdot 2 \frac{l^2}{3^2} \right] \\ &= 0,03753 \frac{l^3}{EI}, \text{ millest } c = \frac{1}{\delta} = 26,65 \frac{EI}{l^3}. \end{aligned}$$

## 14. STAATIKAGA MÄÄRAMATU KONSTRUKTSIOON

### 14.1. ÜHE SILDEGA TALA

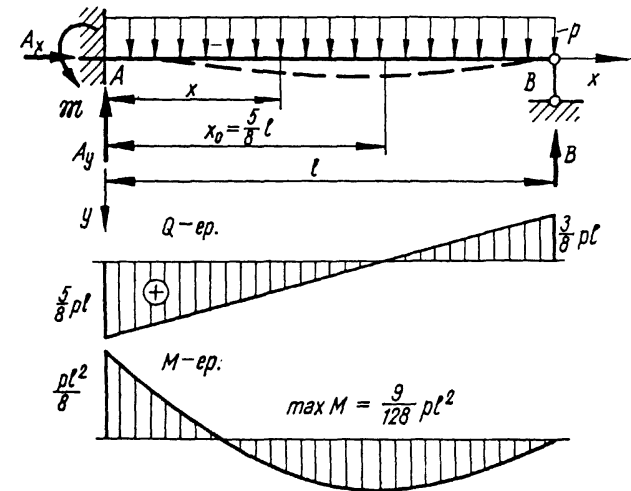
14.1.1. Ühekordselt staatikaga määramatu tala on kujutatud joonisel 14.1, mille neli toereaktsiooni  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B$  ja  $B$  pole määratavad kolmest tasakaalutingimusest:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & A_x &= 0; \\ \sum Y &= 0; & -A_y + pl - B &= 0; \\ \sum \mathcal{M}_A &= 0; & -\mathcal{M} + pl^2/2 - Bl &= 0. \end{aligned} \quad (a)$$

Ülesande võime lahendada sama mõttekäiguga, mida rakendasime staatikaga määramatutes tõmbe-surve ja väändeülesannetes, kus tasakaalutingimustest saadud võrranditele lisasime ühe võrrandi deformatsioonitingimustest. Kujutades deformeerunud tala elastset joont (joonisel katkendjoonega), näeme, et tugeudel puuduvad läbipained ja vasakul toel ka pöördnurk:

$$v_A = 0; \quad \varphi_A = 0; \quad v_B = 0, \quad (b)$$

millest otsitava võrrandi võime saada mitmel teel. Üks võimalustest on väljendada elastse joone võrrand avaldisega (10.22), kus algparameetrid  $v_0 = v_A = 0$  ja  $\varphi_0 = \varphi_A = 0$  ning mis argumendil  $x = l$  peab rahuldama kolmandat tingimust (b):



Joon. 14.1

$$v_B=0; \quad \frac{1}{EI} \left( \mathfrak{M} \frac{l^2}{2} - A_y \frac{l^3}{6} + p \frac{l^4}{24} \right) = 0.$$

Pidades silmas, et tala paindejäikus  $EI \neq 0$ , saame deformatsioonitingimusest otsitava võrrandi:

$$\mathfrak{M} - A_y l/3 + p l^2/12 = 0. \quad (c)$$

Ühendades (a) ja (c) ning jättes kõrvale triviaalse tingimuse  $A_x=0$ , saame võrrandisüsteemi

$$\left. \begin{aligned} A_y + B &= pl; \\ \mathfrak{M} + lB &= pl^2/2; \\ (l/3)A_y - \mathfrak{M} &= pl^2/12, \end{aligned} \right\}$$

millest arvutame tala toereaktsioonid

$$A_y = \frac{5}{8} pl; \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{8} pl^2; \quad B = \frac{3}{8} pl. \quad (14.1)$$

Tala paindemomendi ja põikjõu avaldame tuntud viisil:

$$M = -\mathfrak{M} + A_y x - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2} \left( -\frac{l^2}{4} + \frac{5}{4} lx - x^2 \right);$$

$$Q = A_y - px = p \left( \frac{5}{8} l - x \right),$$

mille epüürid on kujutatud joonisel ja kus iseloomulike ordinaatide väärtused on:

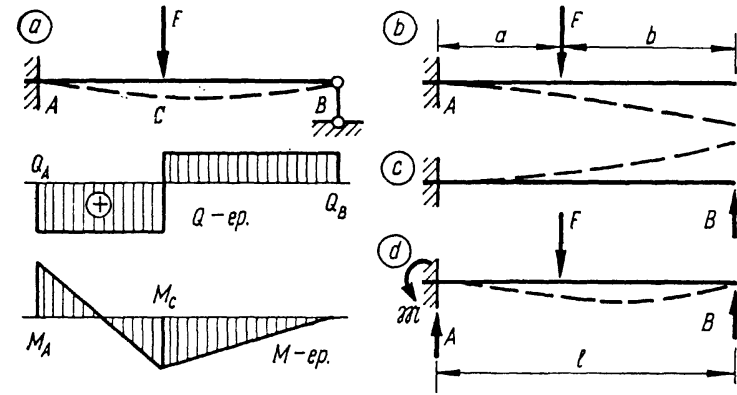
$$M_A = -\frac{pl^2}{8}; \quad \max M = \frac{9}{128} pl^2; \quad Q_A = \frac{5}{8} pl;$$

$$Q_B = \frac{3}{8} pl. \quad (14.2)$$

Joonisel 14.2, a on kujutatud sama tala, kuid koormatud koondjõuga  $F$ . Ka selle ülesande võiksime lahendada eeltoodud mõttekäiguga, kuid kasutame siin põhimõtteliselt teist, mis samuti leiab rakendust inseneripraktikas ja mis kõrgema staatikaga määratuse astmega konstruktsioonide arvutamisel osutub oluliselt lihtsamaks. Vaatleme antud, staatikaga määratatu tala asemel konsooli (joonis 14.2, b), mis on saadud sel teel, et talalt on kõrvaldatud üks side toel  $B$ . Arvutame konsooli vaba otsa läbipainde koormusest  $F$  grafoanalüütilise meetodiga:

$$v = \frac{Fa^2}{2EI} \left( l - \frac{a}{3} \right). \quad (d)$$

Rakendame konsooli vabale otsale ülespoole suunatud



Joon. 14.2

jõu  $B$  (joonis 14.2, c), mille suuruse jätame esialgu lahtiseks. Jõust  $B$  saab konsooli ots negatiivse läbipainde, mis valemiga (10.1) avaldub:

$$v = -\frac{Bl^3}{3EI}. \quad (e)$$

Koormame konsooli kahe jõuga  $F$  ja  $B$  (joonis 14.2, d) ja seame tingimuse, et jõudude koosmõjust konsooli vaba ots ei painduks läbi. Läbipainde puudumise tingimuse saame avaldiste (d) ja (e) summa võrrutamise teel nulliga:

$$v = \frac{Fa^2}{2EI} \left( l - \frac{a}{3} \right) - \frac{Bl^3}{3EI} = 0,$$

millest arvutame jõu  $B$  väärtuse:

$$B = \frac{Fa^2}{2l^3} (3l - a). \quad (14.3)$$

Et antud tala (koormusega  $F$ ) ja konsooli (koormustega  $F$  ja  $B$ ) deformeerumise tingimused ühtivad, siis võime jõudu  $B$  konsooli otsal vaadelda tala toereaktsioonina ja edaspidistes arvutustes staatikaga määratatu tala asendada staatikaga määratava konsooliga. Toereaktsioonid  $A$  ja  $\mathfrak{M}$  arvutame konsooli tasakaalutingimustest:

$$A = F - B = \frac{Fb}{2l^3} (3l^2 - b^2); \quad (14.4)$$

$$\mathfrak{M} = Fa - Bl = \frac{Fb}{2l^2} (l^2 - b^2),$$

ja iseloomulikud sisejõud lõikemeetodiga:

$$\begin{aligned} Q_A &= \frac{Fb}{2l^3} (3l^2 - b^2); & Q_B &= -\frac{Fa^2}{2l^3} (3l - a); \\ M_A &= -\frac{Fb}{2l^2} (l^2 - b^2); & M_C &= \frac{Fa^2b}{2l^3} (2l - b). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Nagu näeme, erineb viimase ülesande lahendamise käik oluliselt eelmisest. Viimases me ei lahenda staatikaga määramatut süsteemi vahetult, vaid kasutame selleks staatikaga määratavat lisasideme asendussüsteemi koos täiendava koormusega, mis taastab lisasideme mõju. Ülesande lahendamine jaguneb seejuures kaheks osaks: algul määrame lisasideme reaktsiooni deformatsioonitingimusest ja siis juba jätkame arvutusi tasakaalutingimuste najal. Arvutustöö olulist lihtsustumist nende ülesannete võrdlemisel me veel ei märka, kuid paneme tähele, et teises ülesandes vabanesime võrrandisüsteemi lahendamisest. Seejuures võtsime arvutamise asendussüsteemiks konsooli, kuid oleksime võinud valida ka lihttala, mille saaksime antud talast toemomendile vastava sideme kõrvaldamise teel. Vaadeldud ülesandes pole ühel asendussüsteemil teise ees märgatavaid eeliseid.

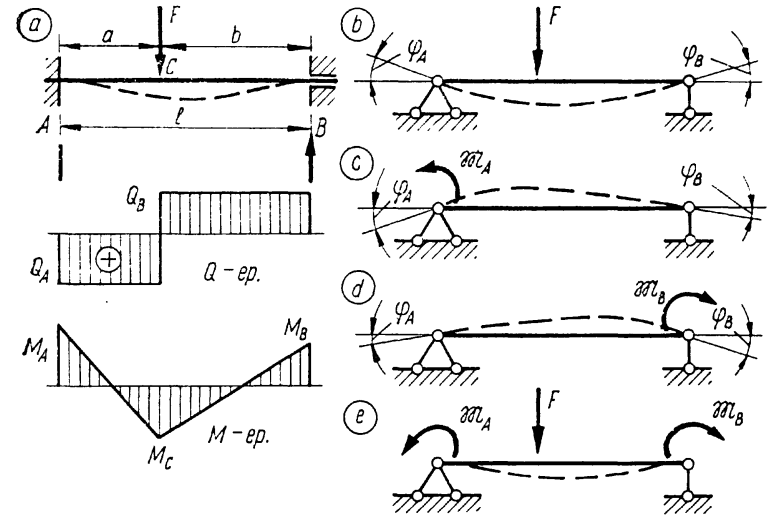
Staatikaga määramatu konstruktsiooni arvutamisel kasutatavat staatikaga määratavat süsteemi nimetame edaspidi *põhisüsteemiks*. Nagu nägime, igale staatikaga määramatule konstruktsioonile on võimalik valida mitu erinevat põhisüsteemi.

**14.1.2. Kahekordselt staatikaga määramatu tala, kooramatud koondjõuga  $F$ , on kujutatud joonisel 14.3, a.** Valime põhisüsteemiks lihttala (joonis 14.3, b), kõrvaldades kummalgi toelt ühe momendile vastava sideme. Rakendame põhisüsteemile jõu  $F$  ja paneme tähele, et tugeudel tekivad pöördenurgad, mis antud talal puuduvad. Arvutame need pöördenurgad valemitega (10.11):

$$\varphi_A = \frac{F}{6EI} \frac{ab}{l} (l+b); \quad \varphi_B = -\frac{F}{6EI} \frac{ab}{l} (l+a). \quad (f)$$

Rakendame põhisüsteemile momendi  $\mathfrak{M}_A$  (joonis 14.3, c) ja määrame sellest pöördenurgad tugeudel grafoanalüütilise meetodiga:

$$\varphi_A = -\frac{\mathfrak{M}_A l}{3EI}; \quad \varphi_B = \frac{\mathfrak{M}_A l}{6EI}. \quad (g)$$



Joon. 14.3

Momendist  $\mathfrak{M}_B$  (joonis 14.3, d)

$$\varphi_A = -\frac{\mathfrak{M}_B l}{6EI}; \quad \varphi_B = \frac{\mathfrak{M}_B l}{3EI}. \quad (h)$$

Koormame nüüd lihttala üheaegselt antud jõuga  $F$  ja oma suuruse poolest määramata momentidega  $\mathfrak{M}_A$  ja  $\mathfrak{M}_B$  (joonis 14.3, e). Avaldame lihttala otste pöördenurgad koormuste koosmõjust  $f, g$  ja  $h$  summeerimise teel ja võrrutame nulliga, sest antud talas otsad pöörduda ei saa:

$$\varphi_A = \frac{F}{6EI} \frac{ab}{l} (l+b) - \frac{\mathfrak{M}_A l}{3EI} - \frac{\mathfrak{M}_B l}{6EI} = 0;$$

$$\varphi_B = -\frac{F}{6EI} \frac{ab}{l} (l+a) + \frac{\mathfrak{M}_A l}{6EI} + \frac{\mathfrak{M}_B l}{3EI} = 0,$$

mis annavad pärast lihtsustamist võrrandisüsteemi

$$\left. \begin{aligned} 2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B &= Fb(l^2 - b^2)/l^2 \\ \mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B &= Fa(l^2 - a^2)/l^2 \end{aligned} \right\}$$

Toemomendid

$$\mathfrak{M}_A = \frac{Fab^2}{l^2}; \quad \mathfrak{M}_B = \frac{Fa^2b}{l^2}. \quad (14.6)$$

Nende momentide määramisega kõrvaldasime staatikaga

määramatuse ja edaspidised arvutused sooritame põhisüsteemis tasakaalutingimuste põhjal. Toereaktsioonid

$$A = F \frac{b^2}{l^3} (l+2a); \quad B = F \frac{a^2}{l^3} (l+2b) \quad (14.7)$$

ja sisejõud iseloomulikes ristlõigetes:

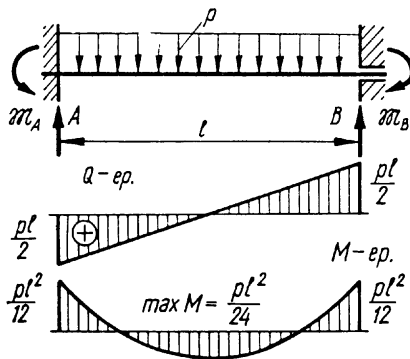
$$\begin{aligned} Q_A &= F \frac{b^2}{l^3} (l+2a); & Q_B &= -F \frac{a^2}{l^3} (l+2b); \\ M_A &= -\frac{Fab^2}{l^2}; & M_C &= 2F \frac{a^2b^2}{l^3}; & M_B &= -\frac{Fa^2b}{l^2}. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Ka sellele talale oleks võinud valida teise põhisüsteemi, konsooli, millel kahe tundmatu koormusena tuleksid arvesse antud tala toereaktsioonid  $B$  ja  $\mathfrak{M}_B$ . Märkimist väärib veel asjaolu, et arvutamise käigus tuli lahendada kahe tundmatuga võrrandisüsteem. Nagu näeme, sellele arvutusviisile on iseloomulik võrrandisüsteem, milles deformatsioonitingimustest leitavad jõud või momendid esinevad tundmatutena. Järelikult *tundmatute ja võrrandite arv süsteemis võrdub staatikaga määramatuse astmega*.

Joonisel 14.4 on kujutatud sama tala ühtlase lauskoormusega. Ka siin valime põhisüsteemiks lihttala, mille otsade pöördenurgad koormusest  $p$  avalduvad valemiga (10.20):

$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{pl^3}{24EI}. \quad (i)$$

Pöördenurgad põhisüsteemi tugeudel momentidest  $\mathfrak{M}_A$  ja  $\mathfrak{M}_B$  avalduvad seostega (g) ja (h), mis koos nurkadega (i) annavad põhisüsteemi deformatsioonitingimused:



Joon. 14.4

$$\varphi_A = \frac{pl^3}{24EI} - \frac{\mathfrak{M}_A l}{3EI} - \frac{\mathfrak{M}_B l}{6EI} = 0;$$

$$\varphi_B = -\frac{pl^3}{24EI} + \frac{\mathfrak{M}_A l}{6EI} + \frac{\mathfrak{M}_B l}{3EI} = 0.$$

Nendest tingimustest

$$\left. \begin{aligned} 2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B &= pl^2/4 \\ \mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B &= pl^2/4 \end{aligned} \right\}$$

Süsteemi lahend

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B = \frac{pl^2}{12}. \quad (14.9)$$

Tasakaalutingimustest

$$\begin{aligned} A = B = \frac{pl}{2}; & & Q_A = -Q_B = \frac{pl}{2}; \\ M_A = M_B = -\frac{pl^2}{12}; & & \max M = \frac{pl^2}{24}. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Joonisel 14.3 ja 14.4 esitatud tala lahendused kahe erineva koormusega näitavad, et teisel juhul arvutused lihtsustuvad mõnede suuruste suurvast kasutamisel, kui me ei muuda põhisüsteemi. Olulise tähtsuse omandab see asjaolu kõrgema staatikaga määramatuse astmega konstruktsioonide arvutamisel.

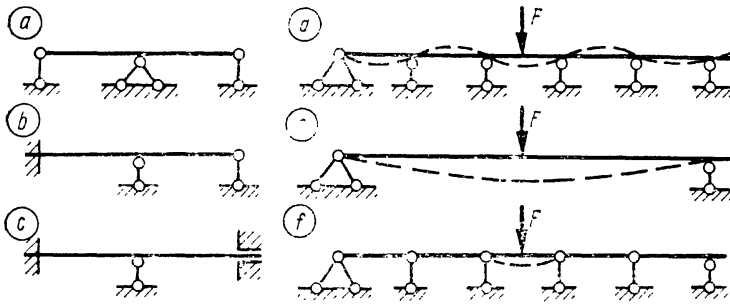
## 14.2. JÄTKUVTALA

**14.2.1. Põhisüsteem.** Kui talana töötaval vardal on rohkem kui kaks tuge, siis nimetame seda *jätkuvtalaks* (joonis 14.5, a, b, c ja d). Jätkuvtalal on toesidemete arv  $T > 3$  ja järelikult staatikaga määramatuse aste

$$n = T - 3. \quad (14.11)$$

Joonisel kujutatud jätkuvtaladel on toesidemete arvud ja staatikaga määramatuse astmed: a)  $T=4$ ,  $n=1$ ; b)  $T=5$ ,  $n=2$ ; c)  $T=6$ ,  $n=3$ ; d)  $T=7$ ,  $n=4$ .

Vaatleme tala joonisel 14.5, d, millest nelja sideme kõrvaldamisega võime kujundada palju staatikaga määratavaid ja geomeetriselt muutumatuid põhisüsteeme. Nendest paljudest võimalustest kaks on näidatud joonisel 14.5, e ja f. Esimese põhisüsteemi saame nelja toesideme kõrvaldamise teel, mis annab ühe lihttala. Teisel juhul kõrvaldame varda

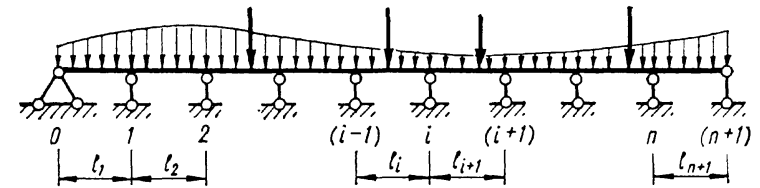


Joon. 14.5

neljast toeristlõikest paindemomentidele vastavad sidemed, s. t. kujundame nendes ristlõigetes liigendid. Saame viiest lihttalast koosneva põhisüsteemi. Parimaks osutub põhisüsteemi (*f*), sest selle najal kujuneb jätkuvtala arvutus kõige lihtsamaks. Põhjusi on siin kaks: 1) talale ühes kohas mõjuvast jõust või momendist tulenevad sisejõud ja deformatsioon levivad põhisüsteemis piiratud ulatuses; 2) põhisüsteemi sisejõud ja deformatsioonid on oma suuruselt palju lähedasemad jätkuvtala omadele. Nendest asjaoludest omakorda kujuneb võrrandisüsteem tundmatute määramiseks märgatavalt scodsam, kui põhisüsteemiga (*e*), mis koondjõust või momendist deformeerub kogu ulatuses ja milles tekkivad kümneid kordi suuremad paindemomendid ja läbi-painded võrreldes jätkuvtalaga.

Põhisüsteemi valikuga oleme kindlaks määranud ka *põhitundmatud*, milleks on paindemomendid toeristlõigetes. Põhisüsteemis tuleb tundmatu paindemoment asendada kahe võrdse ja vastassuunalise momendiga (vt. alapunkt 13.4.1 ja joonis 13.8). Meie ülesandeks on leida koormuse ja põhitundmatute paindemomentide vahelised seosed tala elastse joone *pidevustingimusest*. Selleks tingimuseks on nõue, et tala elastne joon peab tugede kohal olema «sile», see tähendab, teemas ei tohi olla murdepunkte.

**14.2.2. Kolme momendi võrrand.** Vaatleme meelevaldse põiksuunalise koormusega jätkuvtala joonisel 14.6. Nummerdame tala toed  $0, 1, 2, \dots, n, (n+1)$ . Tähistame silded  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$  mis üldjuhul ei ole võrdsed. Tala olgu iga silde ulatuses ühtlane, kuid tugeudel astmeliselt muutuv ( $I_1, I_2, \dots, I_{n+1}$ ). Staatikaga määramatuse aste on  $n$  ja põhisüsteemiks võtame lihttalade ahela, mille saame, kui tugede  $1, 2, \dots, n$  ristlõigetes kujutame liigendid.



Joon. 14.6

Põhisüsteemist kujutame ainult  $i$ -nda toe lähedast piirkonda kahe silde ulatuses (joonis 14.7, *a*). Koostame paindemomendi  $M_0$  epüüri, kus indeks 0 näitab, et see suurus kuulub lihttalade põhisüsteemile. Seejuures toel  $i$  pöörduvad lihttalade otsad teineteise suhtes nurga  $\Delta_i$  võrra, mille määrame *Mohri* meetodiga. Rakendame otsitavale siirdele vastava üldistatud ühikjõu (kaks ühikmomenti) ja koostame nendest tuleneva paindemomendi  $m$  epüüri (joonis 14.7, *b*). Arvutame paigutise *Vereštšagini* võttega (vt. 13.7.2):

$$\Delta_i = \frac{1}{EI_i} \Omega_i m_i + \frac{1}{EI_{i+1}} \Omega_{i+1} m_{i+1}, \quad (a)$$

kus paindemomendid ühikmomendist asendame kolmnurkade sarnasusest järgmiste suhetega:

$$m_i = a_i / l_i; \quad m_{i+1} = b_{i+1} / l_{i+1} \quad (b)$$

ja võtame kasutusele suurused:

$$S_i = \Omega_i a_i; \quad S_{i+1} = \Omega_{i+1} b_{i+1}, \quad (c)$$

millest esimene on paindemomendi  $M_0$  epüüri pindala  $\Omega_i$  staatiline moment toe  $(i-1)$  suhtes ja teine on pindala  $\Omega_{i+1}$  moment toe  $(i+1)$  suhtes.

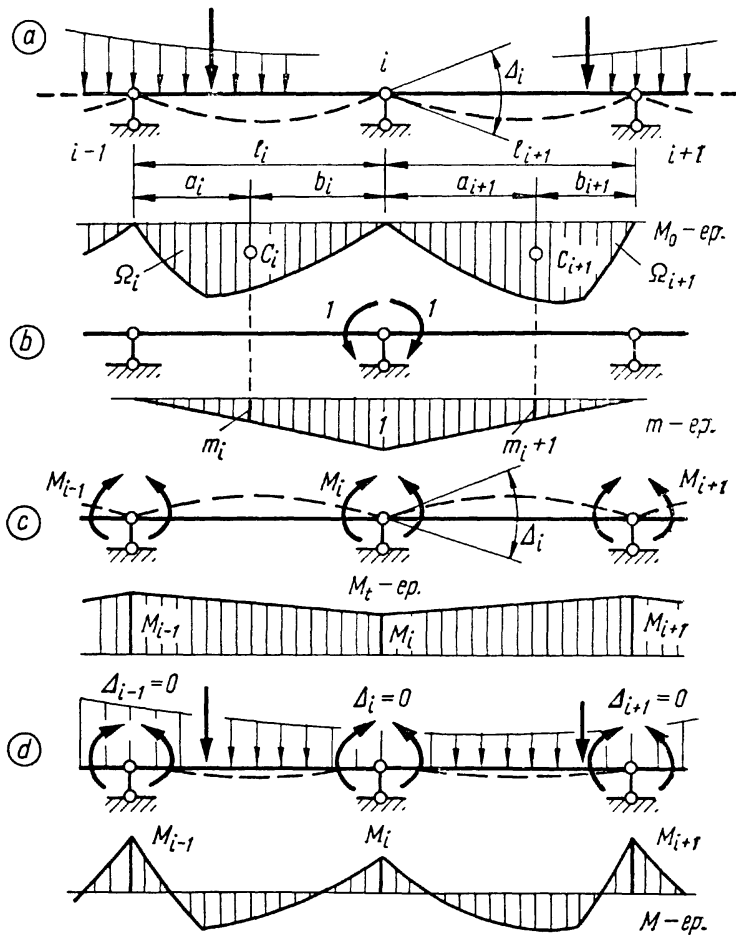
Seoste (*b*) ja (*c*) najal avaldame pöördenurga:

$$\Delta_i = \frac{S_i}{EI_i l_i} + \frac{S_{i+1}}{EI_{i+1} l_{i+1}}. \quad (d)$$

Rakendame nüüd põhisüsteemis tundmatud toemomendid (joonis 14.7, *c*). Koostame nendest tuleneva paindemomendi  $M_i$  epüüri ja arvutame *Mohri* meetodiga valemi (13.26) abil lihttalade otste vahel pöördenurga teineteise suhtes toel  $i$ :

$$\Delta_i = \frac{l_i}{6EI_i} (2M_i + M_{i-1}) + \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} (2M_i + M_{i+1}). \quad (e)$$

Rakendades lõpuks põhisüsteemile üheaegselt koormuse



Joon. 14.7

ja tundmatud toemomendid (joonis 14.7, d), seame tingimuseks, et lihttala otsad teineteise suhtes ei pöörduks, s. t. et  $\Delta_i = 0$ . Kasutades jõudude mõju sõltumatuse printsiipi, avaldame  $\Delta_i$  seoste (e) ja (d) summeerimise teel:

$$\Delta_i = \frac{l_i}{6EI_i} (2M_i + M_{i-1}) + \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} (2M_i + M_{i+1}) + \frac{S_i}{EI_i l_i} + \frac{S_{i+1}}{EI_{i+1} l_{i+1}} = 0,$$

millest

$$\frac{l_i}{I_i} M_{i-1} + 2 \left( \frac{l_i}{I_i} + \frac{l_{i+1}}{I_{i+1}} \right) M_i + \frac{l_{i+1}}{I_{i+1}} M_{i+1} = -6 \left( \frac{S_i}{I_i l_i} + \frac{S_{i+1}}{I_{i+1} l_{i+1}} \right). \quad (14.12)$$

Saadud seos on tuntud kolme momendi võrrandina, mis lihtsustub, kui tala on kogu oma pikkuses ühtlane ( $I = \text{const}$ ):

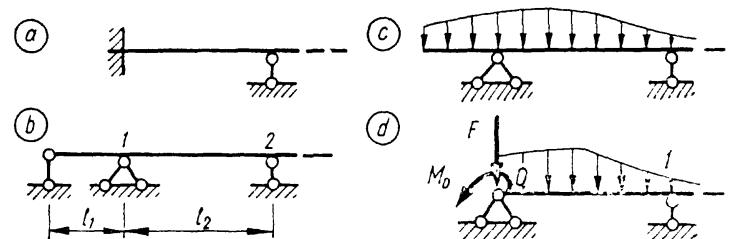
$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{i+1} = -6 \left( \frac{S_i}{l_i} + \frac{S_{i+1}}{l_{i+1}} \right). \quad (14.13)$$

Võrdsete silletega ( $l = \text{const}$ ) ühtlase jätkuvtala kolme momendi võrrand:

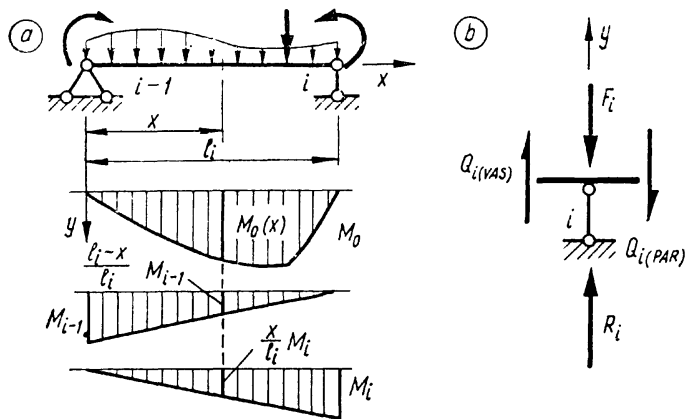
$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = -\frac{6}{l^2} (S_i + S_{i+1}). \quad (14.14)$$

Joonisel 14.6 vaadeldud jätkuvtalale tuleb koostada  $n$  kolme momendi võrrandit, vaadeldes  $i$ -na tugesisid  $1, 2, \dots, n$ . Saame võrrandisüsteemi, milles on  $n$  tundmatut toemomenti  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Süsteemi lahendamiseks määrame jätkuvtala paindemomendid tugedel.

Kui jätkuvtala otsas on kinnine tugi (joonis 14.8, a), siis lisame arvutusskeemis talale ühe tingliku silde ja kõrvaldame pöört takistava sideme toelt  $1$  (joonis 14.8, b). Lisatud silde võrrutame kolme momendi võrrandis nulliga ( $l_1 = 0$ ). Kui tala otsas on koormatud konsool (joonis 14.8, c), siis asendame arvutusskeemis selle mõju jõuga  $F$  ja momendiga  $M_0$ , millest esimene võrdub konsooli koormusega, teine aga konsooli toemomendiga. Järelikult äärmist sillet vaatleme põhisisüsteemis nagu konsoolita lihttala (joonis 14.8, d).



Joon. 14.8



Joon. 14.9

**14.2.3. Toereaktsioonid ja sisejõud** määrame jätkuvtalale tasakaalutingimuste, lõikemeetodi ja summeerimise printsiibi põhjal. Vaatleme ühte, enamlevinud arvutusviisi. Kujutame joonisel 14.9, a  $i$ -nda silde oma tugetega ( $i-1$ ) ja  $i$   $xy$ -teljestikus. Ülesande lahendamisel oleme juba määranud paindemomendi  $M_0(x)$  kogu silde ulatuses ja toemomendid  $M_{i-1}$  ja  $M_i$ . Koostame paindemomentide epüürid, mis tulenevad toemomentidest ja vaatleme neid koos  $M_0$  epüüri. Jätkuvtala paindemomendi vaadeldava silde meelevaldselt ristlõikes avaldame summeerimise teel:

$$M(x) = M_0(x) + M_{i-1} \frac{l_i - x}{l_i} + M_i \frac{x}{l_i}. \quad (14.15)$$

Põikjõu määrame paindemomendi avaldise (14.15) diferentseerimise teel:

$$Q(x) = Q_0(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}. \quad (14.16)$$

Reaktsiooni  $i$ -ndal toel arvutame tala elemendi tasakaalutingimusest  $\sum Y=0$  (joonis 14.9, b):

$$R_i = Q_{i(PAR)} - Q_{i(VAS)} + F_i, \quad (14.17)$$

kus  $F_i$  on toel rakendatud koondjõud, kui ta pole arvesse võetud lihttalade koormuses. Nagu näha, võime valemi (14.17) lihtsal viisil teisendada järgmisele kujule:

$$R_i = R_{oi} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} - \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}, \quad (14.18)$$

kus  $R_{oi}$  on toereaktsioon põhisüsteemis.

Valemitesse (14.15...18) asetame sisejõud algebraliste suurustena, see tähendab, võtame arvesse nende märgid. Välisjõud  $F_i$  loeme positiivseks, kui ta on suunatud allapoole ja toereaktsioonid ülespoole.

**Näide 14.1.** Määrata joonisel 14.10 kujutatud ühtlase jätkuvtala sisejõud ja toereaktsioonid.

Tala on kahekordselt staatikaga määramatu ( $n=T-3=5-3=2$ ). Põhisüsteemi saame, kui tugede 1 ja 2 kohale asetame talasse liigendid. Põhitundmatutena tulevad arvesse toemomendid  $M_1$  ja  $M_2$ .

Põhisüsteemi paindemomentide  $M_0$  epüüri kujutame joonisel. Selle epüüri pindalad esimeses ja teises sildes on vastavalt (vt. valem 10.17):

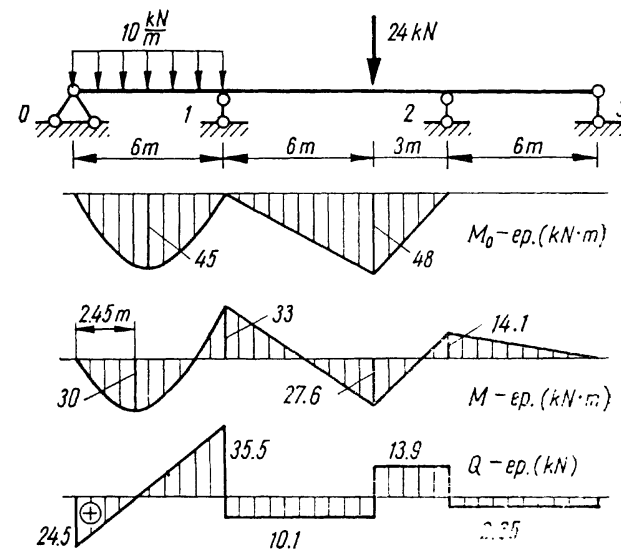
$$\Omega_1 = \frac{2}{3} \cdot 45 \cdot 6 = 180 \text{ kN} \cdot \text{m}^2; \quad \Omega_2 = \Omega_2' + \Omega_2'' = \frac{48 \cdot 6}{2} + \frac{48 \cdot 3}{2} = 144 + 72 = 216 \text{ kN} \cdot \text{m}^2.$$

Koostame kolme momendi võrrandi toel 1 ( $i=1$ ). Arvutame epüüri pindalade  $\Omega_1$  ja  $\Omega_2$  staatilised momendid vastavalt tugede 0 ja 2 suhtes:

$$S_1 = \Omega_1 \cdot 3 = 180 \cdot 3 = 540 \text{ kN} \cdot \text{m}^3;$$

$$S_2 = \Omega_2' \cdot 5 + \Omega_2'' \cdot 2 = 144 \cdot 5 + 72 \cdot 2 = 864 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

ja asetame koos antud suurustega  $l_1=6$  m,  $l_2=9$  m ja  $M_0=0$  võr-



Joon. 14.10

randisse (14.13)

$$6 \cdot 0 + 2(6+9)M_1 + 9M_2 = -6 \left( \frac{540}{6} + \frac{864}{9} \right). \quad (f)$$

Koostame võrrandi toele 2 ( $i=2$ ).  $M_0$ -epüüri staatiline moment toe 1 suhtes:

$$S_2 = \Omega_2' \cdot 4 + \Omega_2'' \cdot 7 = 144 \cdot 4 + 72 \cdot 7 = 1080 \text{ kN} \cdot \text{m}^3,$$

sest  $S_3 = 0$ . Asetame staatilise momendi ja antud suurused  $l_2 = 9 \text{ m}$ ,  $l_3 = 6 \text{ m}$  ja  $M_3 = 0$  võrrandisse:

$$9M_1 + 2(9+6)M_2 + 6 \cdot 0 = -6 \cdot 1080/9. \quad (g)$$

Lihtsustame võrrandid (f) ja (g):

$$\left. \begin{aligned} 10M_1 + 3M_2 &= -372 \\ 3M_1 + 10M_2 &= -240 \end{aligned} \right\}$$

Lahendame võrrandisüsteemi:

$$M_1 = -32,97 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad M_2 = -14,11 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Oleme määranud toemomendid, millega on kõrvaldatud staatiline määramatus. Paindemomendid jätkuvtala teistes ristlõigetes arvutame valemiga (14.15). Arvutame paindemomendi teise silde koondjõu rakenduspunktis, kus  $x=6 \text{ m}$ :

$$\max M = 48 - 32,97 \cdot 3/9 - 14,11 \cdot 6/9 = 27,60 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Esimese silde suurima paindemomendi asukoha määrame põikjõu epüüri põhjal pärast selle koostamist.

Põikjõud määrame valemiga (14.16). Arvutame põikjõu esimese silde alguses:

$$Q = \frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{-32,97 - 0}{6} = 24,51 \text{ kN}$$

ja lõpus:

$$Q = -\frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{-32,97 - 0}{6} = -35,50 \text{ kN}.$$

Teise silde alguses:

$$Q = \frac{24 \cdot 3}{9} + \frac{-14,11 + 32,97}{9} = 10,10 \text{ kN}$$

ja lõpus:

$$Q = -\frac{24 \cdot 3}{9} + \frac{-14,11 + 32,97}{9} = -13,90 \text{ kN}.$$

Kolmandas sildes:

$$Q = 0 + \frac{0 + 14,11}{6} = 2,35 \text{ kN}.$$

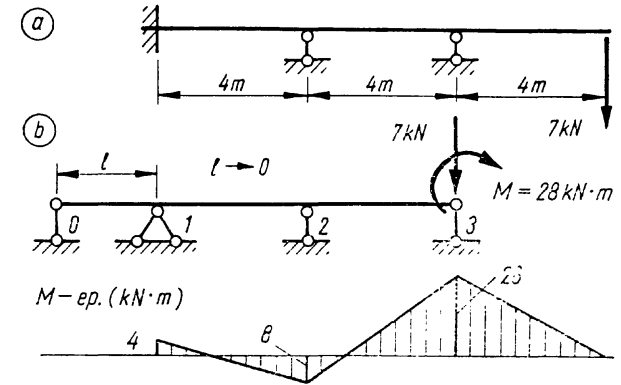
Toereaktsioonid arvutame valemiga (14.17):

$$\begin{aligned} R_0 &= 24,51 \text{ kN}; & R_3 &= 2,35 + 13,90 = 16,25 \text{ kN}; \\ R_1 &= 10,10 + 35,50 = 45,60 \text{ kN}; & R_4 &= -2,35 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Miinusmärk toereaktsioonil  $R_4$  näitab, et ta mõjub talale ülevalt allapoole.

Kontrollime lahendit jätkuvtala tasakaalutingimusega välisjõudude suhtes:

$$\Sigma Y = 0; \quad 24,51 + 45,60 + 16,25 - 2,35 - 60 - 24 = 0,01.$$



Joon. 14.11

Näide 14.2. Määrata joonisel 14.11, a kujutatud tala paindemomendi epüür.

Asendame tala skeemi arvutuse jaoks sobiva skeemiga (joonis 14.11, b), mis osutub antud skeemiga ekvivalentseks, kui arvutustes lisasille  $l_1$  võrjutada nulliga ( $l_1=0$ ) ja lõpplahendusele lisada konsooli paindemomendi epüür.

Koostame kolme momendi võrrandi toele 1 ( $i=1$ ):

$$0 \cdot 0 + 2(0+4)M_1 + 4M_2 = 0.$$

Toele 2 saame võrrandi

$$4M_1 + 2(4+4)M_2 + 4M_3 = 0,$$

kus  $M_3 = -7 \cdot 4 = -28 \text{ kN} \cdot \text{m}$ . Saame võrrandisüsteemi:

$$\left. \begin{aligned} 2M_1 + M_2 &= 0 \\ M_1 + 4M_2 &= 28 \end{aligned} \right\},$$

millega lahendi

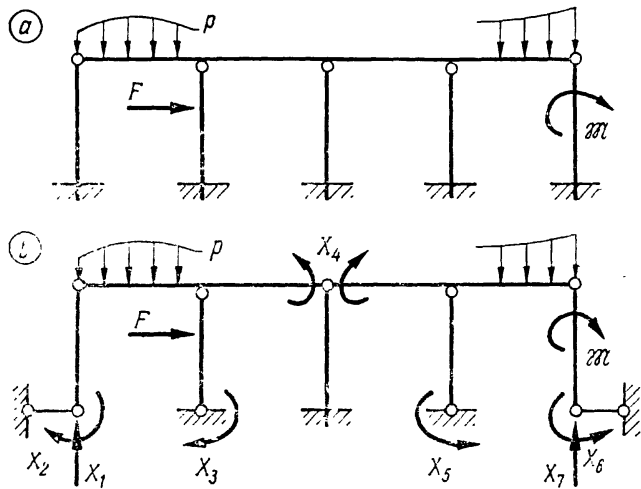
$$M_1 = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad M_2 = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

najal koostame paindemomendi epüüri joonisel 14.11.

### 14.3. JÕUMEETOD

**14.3.1. Kanooniline võrrandisüsteem.** Staatikaga määratud tala toereaktsioonide ja sisejõudude arvutamisel võtame aluseks staatikaga määratava ja geomeetriliselt muutuva põhisüsteemi, mille saime lisasidemete kõrvaldamise teel. Otsitavateks suurusteks olid välis- ja sisejõud või ka momendid, mis asendasid kõrvaldatud sidemeid. Niisugust arvutusviisi, milles tundmatutena vaadeldakse jõudusid ja momente, nimetatakse *jõumeetodiks*.





Joon. 14.12

Staatikaga määratu konstruktsiooni sisejõudude ja toereaktsioonide teiseks põhiliseks arvutusviisiks on *deformatsioonimeetod*, kus põhitundmatutena vaadeldakse siirdeid teatavas geomeetriselt määratud põhisüsteemis. Deformatsioonimeetodit me käesolevas kursuses ei käsitle. Küll aga peame täiustama jõumeetodit, et suuta määrata raamide, sõrestike ja muude keerukamate konstruktsioonide toereaktsioone, sisejõude ja siirdeid.

Jõumeetodi põhisüsteemi kujundamisel tulevad staatikaga määratu konstruktsiooni lisasidemetena arvesse nii väliskui sisesidemed ja ka mõeldavad, sisejõududele vastavad sidemed varda ristlõikes, mille kõrvaldamine ei põhjusta geomeetriselt muutuvust. Vaatleme raami joonisel 14.12, a, milles kuus varrast ( $V=6$ ) on seotud viie lihtliigendiga ( $L=5$ ) omavahel ja viieteistkümne toesidemega alusele ( $T=5 \cdot 3=15$ ). Määrame raami staatikaga määratuse astme valemiga (13.4):

$$n = T + 2L - 3V = 15 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = 7.$$

Selle seitsmekordselt staatikaga määratu raami põhisüsteemi saame, kui kõrvaldame seitse sidet. Joonisel 14.12, b on kujutatud üks paljudest võimalikest põhisüsteemidest, mis on saadud kuue toesideme eemaldamise ja ühe paindemomendile vastava (mõeldava) sideme kõrvaldamisega riivi keskkohast. Rakendame nii raamile kui ka tema põhisüsteemi

mile koormuse ( $F, p, M, \dots$ ). Selleks, et raami ja tema põhisüsteemi deformeerunud seisundid oleksid ühesugused, peame viimasele rakendama kõrvaldatud sidemetele vastavad üldistatud jõud  $X_1, X_2, \dots, X_7$ , mille väärtused esialgu on tundmatud. Nende jõudude suurused tuleb määrata tingimustest, mis nõuavad kõrvaldatud lisasidemetele vastavate siirete puudumist. Nendest tingimustest määratud jõud asendavad kõrvaldatud sidemete mõju ja on võrdsed nende sidemete reaktsioonijõududega. Arvutustes aga võime staatikaga määratu raami asendada oma põhisüsteemiga.

Olgu meil üldjuhul  $n$ -kordselt staatikaga määratu konstruktsioon, mille põhisüsteemi saame  $n$  lisasideme kõrvaldamisega. Koormatud põhisüsteemis asendame kõrvaldatud lisasidemete mõju neile vastavate tundmatute üldistatud jõududega  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ja koostame eespool kirjeldatud deformatsioonitingimused nende jõudude määramiseks. Eeldades jõudude mõju sõltumatuse printsiibi kehtivust, võime esimesele tundmatule jõule  $X_1$  vastava siirde avaldada koormusest ja kõikidest tundmatutest jõududest põhjustatud osasiirete summuna, mis peab võrduma nulliga:

$$\Delta_{11} + \Delta_{12} + \dots + \Delta_{1n} + \Delta_{1F} = 0. \quad (a)$$

Esitatud tingimuses esimene indeks näitab, et osasiiret vaadeldakse esimese kõrvaldatud sideme ehk tundmatu üldistatud jõu  $X_1$  sihil, teised indeksid viitavad osasiirdeid põhjustanud jõududele  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ja koormusele  $F$ . Tähega  $F$  tähistame siin kogu jõudude süsteemi, mis mõjub konstruktsioonile antud koormusena.

Toetudes Hooke'i seadusele, avaldame tundmatule jõule  $X_i$  vastava ja tundmatust  $X_j$  põhjustatud osasiirde deformatsiooniteguri vahendusel:

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} X_j, \quad (b)$$

kus  $\delta_{ij}$  on põhisüsteemi üks deformatsioonitegur. Staatikaga määratava konstruktsiooni deformatsiooniteguri, selle tähendust ja arvutamist vaatlesime jaotise 13.7.4 näites 4. Deformatsioonitegur  $\delta_{ij}$  on  $i$ -ndale kõrvaldatud lisasidemele, aga samuti ka tundmatule jõule  $X_i$  vastav siire, mis on põhjustatud ühikjõust  $X_j=1$ . Ka deformatsiooniteguri indeksitest esimene näitab siirde kohta, teine aga viitab seda siiret põhjustavale ühikjõule.

Väljendame tingimuses (a) tundmatutest jõududest põhjustatud osasiirde seosega (b) ja lisame analoogsed tingimused ülejäänud lisasidemete sihtidel, mis vastavad tundmatutele üldistatud jõududele  $X_2, X_3, \dots, X_n$ :

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} &= 0. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Saime  $n$  deformatsioonitingimust, mis on tuntud jõumeetodi *kanoonilise võrrandisüsteemina*. Sellest võime määrata kõik  $n$  tundmatut üldistatud jõudu.

Nagu eespool nägime, on võrrandisüsteemi (14.19) kordajad ja vabaliikmed siirded põhisüsteemis ühikjõududest ja koormusest. Need siirded võime põhimõtteliselt määrata mis tahes arvutusviisiga, kuid inseneripraktikas on siin peaaegu ainukesena kasutusel *Mohri* meetod. Siirete arvutamiseks selle meetodiga tuleb määrata põhisüsteemi sisejõud koormusest ( $F$ ) ja ühikjõududest  $X_1=1, X_2=1, X_3=1, \dots, X_n=1$  ning siis rakendada valemeid (13.15, 13.19, 13.20 ja 13.21). Sõrestike arvutused on otstarbekas teha tabelites, raamide omad aga epüüride põhjal, kasutades numbrilist integreerimist.

Vabaliikmete arvutamisel *Mohri* meetodiga võime koormustest põhjustatud siirete kõrval arvestada ka siirdeid temperatuuri muutusest ja välissidemete järeleandlikkusest (tugede vajumisest). Järelikult võime jõumeetodiga määrata sisejõudusid ja toereaktsioone nii koormusest jõudude näol, kui ka muudest välismõjudest, mis staatikaga määramatute konstruktsioonide põhjustavad sisejõudusid. Selle meetodiga võime edukalt uurida ka koostepingeid konstruktsioonides.

*Mohri* valemist (13.19) näeme, et võrrandisüsteemi (14.19) ühesuguste indeksitega kordajate  $\delta_{ii}$  arvutamisel ühikjõust  $X_i=1$  põhjustatud sisejõud esinevad integraalides ruudus ( $n_i^2, q_{yi}^2, \dots$ ). Sellest järeldub, et *ühesuguste indeksitega kordajad on alati positiivsed suurused* ( $\delta_{ii} > 0$ ). Eri-nevate indeksitega kordajad  $\delta_{ij}$  võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed või võrdsed nulliga. Samast *Mohri* valemist näeme, et kordajate  $\delta_{ij}$  arvutamisel ühikjõududest  $X_i=1$  ja  $X_j=1$  põhjustatud sisejõud  $n_i, q_{yi}, \dots$  ja  $n_j, q_{yj}, \dots$  esinevad integraalides korrutisena  $n_i n_j, q_{yi} q_{yj}, \dots$ . Kuna korrutis ei olene tegurite järjekorrast, siis kehtib ka võrdus

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (14.20)$$

mille füüsikaline sisu väljendub *siirete vastastikuse* ehk *Maxwelli teoreemina*: *üldistatud ühikjõudude  $X_i=1$  ja  $X_j=1$  vastastikused siirded on võrdsed*. See teoreem lihtsustab oluliselt kanoonilise võrrandisüsteemi kordajate väljaarvutamist ja näitab, et nende kordajate ruutmatriks on sümmeetriline.

**14.3.2. Võrrandisüsteemi lahendamine** kuulub arvutusmatemaatika valdkonda ja seda võib teha mis tahes viisil. Juhime tähelepanu kolmele lahendamise võimalusele, mis tänapäeval on enamlevinud. Esialgu aga väljendame jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi matrikssümboolikas:

$$DX + D_F = 0, \quad (14.21)$$

kus

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}; \quad X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{vmatrix}; \quad D_F = \begin{vmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \dots \\ \Delta_{nF} \end{vmatrix}. \quad (14.22)$$

Nagu eespool nägime, on matriks  $D$  sümmeetriline ja tema peadiagonaali liikmed positiivsed suurused ( $\delta_{ii} > 0$ ). Kõrvalliikmed  $\delta_{ij}$  ( $i \neq j$ ) võivad olla nii positiivsed, negatiivsed kui ka võrdsed nulliga.

Kui tundmatute arv  $n$  pole suur ( $n \leq 4$ ) või kui matriksi  $D$  kõrvalliikmete hulgas leidub küllaldasel määral nulliga võrduvaid liikmeid, siis võime võrrandisüsteemi lahendada lükatil või taskuarvutiga *Crameri* teoreemi najal. Selle teoreemi põhjal arvutame tundmatud valemiga:

$$X_i = - \frac{\det D_i}{\det D}; \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (14.23)$$

kus  $\det D$  on matriksi  $D$  determinant ja  $\det D_i$  on saadud sel teel, et determinandis  $\det D$   $i$ -ndas veerg on asendatud matriksi  $D_F$  veeruga.

Kui tundmatute arv  $n > 4$  ja matriksis  $D$  puuduvad nulliga võrduvad kõrvalliikmed või on neid liiga vähe, siis on soovitatav võrrandisüsteem lahendada otseselt väiksel arvutil (näiteks arvutil *Nairi* tingimusele, et  $n \leq 10$ ).

Kui staatikaga määramatut konstruktsiooni tuleb arvutada mitme koormusega  $F_1, F_2, \dots, F_q$ , siis vabaliikmete ja tundmatute matriksid kujunevad  $q$  veeru ja  $n$  reaga:

$$D_F = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1q} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nq} \end{vmatrix}; \quad X = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1q} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nq} \end{vmatrix}. \quad (14.24)$$

Tundmatute  $X$ -maatriksi väljaarvutamiseks on sobiv kasutada valemit

$$X = -D^{-1}D_F, \quad (14.25)$$

kus  $D^{-1}$  on  $D$  pöördmaatriks. Arvutamiseks sobib ka siin *Nairi*-tüüpi väikearvuti.

Lahendit kontrollime leitud jõudude asetamisega süsteemi 14.19 võrranditesse, mis peavad rahuldama arvutustäpsuse piirides. Seda kontrolli võime lihtsustada süsteemi võrrandite liitmisega, mis annab lahendi õigsuse ühe üldise tingimuse:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i X_i + \Delta_F = 0, \quad (14.26)$$

kus

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}; \quad \Delta_F = \sum_{j=1}^n \Delta_{jF}. \quad (14.27)$$

**14.3.3. Sisejõud ja toereaktsioonid** võime määrata kolmel teel. Üheks võimaluseks on rakendada põhisisüsteemile koormus ja kanoonilise võrrandisüsteemi lahendina leitud jõud  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ja määrata toereaktsioonid ja sisejõud tasakaalutingimuste ja lõikemeetodi abil nii nagu me seda teeme staatikaga määratavale konstruktsioonile.

Teiseks arvutusviisiks on sisejõudude ja toereaktsioonide arvutamine summeerimise printsiibi najal järgmise üldvalemiga:

$$S = S_F + \sum_{i=1}^n X_i s_i, \quad (14.28)$$

kus  $S$  on staatikaga määratu konstruktsiooni mis tahes sisejõud või toereaktsioon;  $S_F$  ja  $s_i$  — samanimelised sisejõud või toereaktsioonid põhisisüsteemis vastavalt koormusest  $F$  ja ühikjõust  $X_i = 1$ . See arvutusviis nõuab, et eelnevalt peavad olema määratud kõik sisejõud ja toereaktsioonid põhisisüsteemis koormusest ja ühikjõududest. Kui see nõue pole täidetud võrrandisüsteemi kordajate ja vabaliikmete arvutamisel, siis seda arvutusviisi pole otstarbekas rakendada.

Kõige sagedamini leiab rakendamist eelmise kahe arvutusviisi kombineeritud kasutamine. Need sisejõududest, mis põhisisüsteemis koormusest ja ühikjõududest on määratud võrrandisüsteemi kordajate ja vabaliikmete arvutamisel, leitakse valemiga (14.28). Ülejäänud sisejõud ja toereaktsioonid määratakse tasakaalutingimuste ja lõikemeetodi abil harilikul viisil. Seejuures kasutatakse tasakaalutingimustes

koormuse ja jõudude  $X_i$  kõrval ka valemiga (14.28) määratud sisejõudusid, mis oluliselt lihtsustab puuduvate sisejõudude arvutamist. Näiteks tasandraami jaoks võrrandisüsteemi kordajate ja vabaliikmete arvutamisel koostatakse ainult põhisisüsteemi paindemomentide epüürid. Peale põhitudmatute määramist koostatakse staatikaga määratu raami paindemomendi epüür valemiga (14.28) põhjal, põik- ja normaaljõudude epüürid aga varraste ja sõlmede tasakaalutingimustest. Viimastes võetakse koormuse ja jõudude  $X_i$  kõrval arvesse ka paindemomendid varda otstel. Tasakaalutingimuste ja lõikemeetodi otstarbeka rakendamise viisidega tutvume peatüki lõpus esitatud näidetes.

Kui staatikaga määratu konstruktsiooni sisejõud ja toereaktsioonid on arvutatud, siis tuleb lahendit kontrollida. Süsteem peab rahuldama kaheksa tingimusi: tasakaalu- ja deformatsiooni pidevustingimusi. Esimeste kontrollimiseks vabastame konstruktsiooni toesidemetest, rakendame sellele kõik välisjõud (koormuse ja toereaktsioonid) ja koostame tasakaalutingimused, mis peavad arvutustäpsuse piirides olema rahuldavad. Neid tingimusi peavad rahuldama ka konstruktsioonist lõikemeetodiga eraldatud mis tahes mõttelised osad nendele toimivate välis- ja sisejõudude mõjul. Kui mõni tasakaalutingimustest pole rahuldatud, siis on lahenduses viga.

Tasakaalutingimused staatikaga määratule konstruktsioonile on vajalikud, kuid mitte piisavad. Igal taolisel süsteemil on lõpmata palju lahendeid, mis rahuldavad tasakaalutingimusi, kuid ainult üks on nendest õige. Selleks, et anda lõplik otsus lahendi õigsuse kohta, peame veel kontrollima, kas on rahuldatud deformatsioonide pidevustingimused nendes kohtades, kust me lahendamise käigus kõrvaldasime lisasidemed. Lihtsustatult väljendudes, peame veenduma, et saadud lahendiga ei jääks «pilusid» nendes kohtades, kus konstruktsioon on «läbi lõigatud» põhisisüsteemi kujundamisel. Need tingimused on rahuldatud, kui üldistatud jõududele  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vastavad siirded põhisisüsteemis võrduvad nulliga või ei ületa nende suuruste arvutamise paratamatut viga. Siirded arvutame *Mohri* meetodiga.

Vaatleme deformatsiooni pidevustingimuste kontrollimist  $n$ -kordselt staatikaga määratule tasandraamis, milles siirded võime arvutada teisega valemitega (13.20). Olgu selle raami paindemomendid  $M$  määratud ja esitatud epüürina. Üldistatud jõududele  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vastavate siirete arvutamisel peame veel teadma ühikjõududest  $X_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) põhjustatud paindemomente  $m_i$  põhisisüsteemis. Need sisejõud

on aga juba määratud ülesande lahendamise käigus kanoonilise võrrandisüsteemi kordajate ja vabaliikmete arvutamisel ning nad on harilikult esitatud epüüride näol.

Valemist (13.20) saame  $n$  tingimust:

$$\sum_{k=1}^v \int_{l_k} \frac{Mm_i}{EI} ds = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

mis lihtsustuvad, kui raam on ühest materjalist ( $E = \text{const}$ ) ja iga varras on ühtlane ( $I_k = \text{const}$ ). Sel juhul korrutame tingimusi jäikusega  $EI_0$ , milles  $I_0$  on raami meelevaldselt valitud varda (või varraste) ristlõikepinna inertsimoment:

$$\sum_{k=1}^v \frac{I_0}{I_k} \int_{l_k} Mm_i ds = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (14.29)$$

kus  $I_0/I_k$  on igat raami varrast iseloomustav inertsimomentide suhe. Neil varrastel, mille inertsimomendi välisime suuruseks  $I_0$ , võrdub see suhe ühega.

Tingimused (14.29) võime ühendada liitmise teel üheks üldiseks kriteeriumiks:

$$\sum_{k=1}^v \frac{I_0}{I_k} \int_{l_k} Mm_{\Sigma} ds = 0, \quad (14.30)$$

kus

$$m_{\Sigma} = m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad (14.31)$$

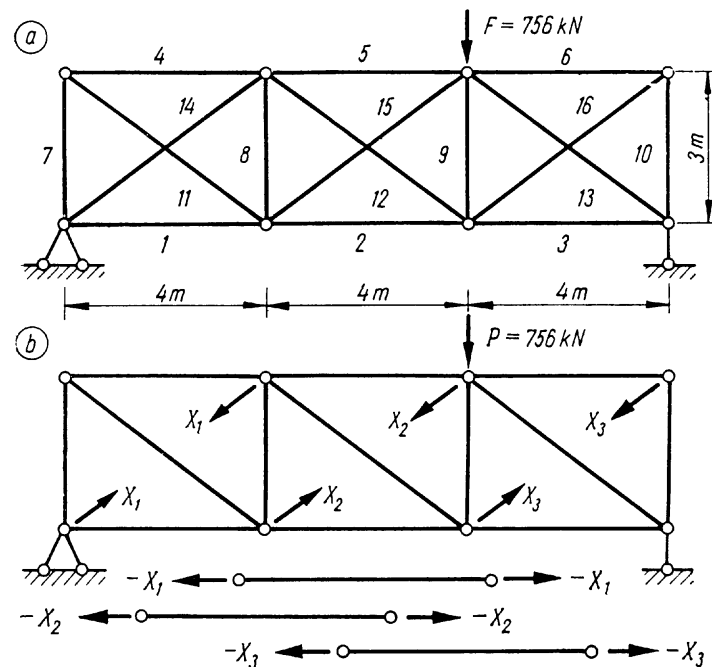
on ühikjõududest  $X_i = 1$  põhjustatud paindemomentide summa. Kui arvutus tehakse epüüride põhjal, siis on otstarbekas koostada ka  $m_{\Sigma}$ -epüür, mis saadakse  $m_i$ -epüüride liitmise teel.

## 14.4. SÖRESTIK JA RAAM

**14.4.1. Staatikaga määratatu sõrestik** (joonis 14.13, a) sisaldab  $V=16$  varrast,  $L=4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 24$  lihtliigendit ja on seotud alusele  $T=3$  toesidemega. Staatikaga määratutuse astme arvutame valemiga (13.4):

$$n = T + 2L - 3V = 3 + 2 \cdot 24 - 3 \cdot 16 = 3.$$

Sõrestik on terasest ja kõikide varraste ristlõikepinnad ühesugused. Nummerdame vardad ja vaatleme lisasidemetena vardaid 14, 15 ja 16. Kõrvaldades need kolm varrast, saame staatikaga määratava ja geomeetriliselt muutumatu põhisüsteemi. Lisasidemete mõju asendame kolme tundmatu jõuga  $X_1$ ,  $X_2$  ja  $X_3$  (joonis 14.13, b). Tundmatud jõud koor-



Joon. 14.13

musest  $F$  määrame jõumeetodi kanoonilisest võrrandisüsteemist

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (a)$$

mille kordajad ja vabaliikmed arvutame Mohri meetodiga (esimene valem 13.20):

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^v \left( \frac{n_i n_j l}{EA} \right)_k; \quad \Delta_{iF} = \sum_{k=1}^v \left( \frac{N_F n_i l}{EA} \right)_k. \quad (b)$$

Teatavasti võrrandisüsteemi kordajaid ja vabaliikmeid võime korrutada mis tahes ühise kordajaga, mõjutamata sellega otsitavaid tundmatuid. Kasutame seda võimalust ja korrutame valemid ühise kordajaga  $EA/l_0$ , kus  $EA$  on kõikide varraste ühine jäikus ja  $l_0 = 5$  m, kaldvarraste 11–16 pikus. Valemid (b) võtavad nüüd järgmise kuju:

Tabel 8

## Staatikaga määramatü s6restiku arvutus

$k$	$\frac{l}{l_0}$	$N_F$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$\frac{l}{l_0} N_F n_1$	$\frac{l}{l_0} N_F n_2$	$\frac{l}{l_0} N_F n_3$	$\frac{l}{l_0} \frac{n^2}{l_0^2}$	$\frac{l}{l_0} \frac{n^2}{l_0^2}$	$\frac{l}{l_0} \frac{n^2}{l_0^3}$	$\frac{l}{l_0} \frac{n_1 n_2}{l_0}$	$\frac{l}{l_0} \frac{n_2 n_3}{l_0}$	$\chi_{1n_1}$	$\chi_{2n_2}$	$\chi_{3n_3}$	$N$	$n^*$	$\frac{l}{l_0} N n^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.8		-0.8						0.512					+177			+177	-0.8	-113
2	0.8	+336		-0.8			-215		0.512						+196		+532	-0.8	-340
3	0.8	+672			-0.8			-430		0.512						-285	+387	-0.8	-248
4	0.8	-336	-0.8			+215			0.512					+177			-159	-0.8	+102
5	0.8	-672	-0.8			+430			0.512						+196		-476	-0.8	+305
6	0.8				-0.8					0.512						-285	-285	-0.8	+182
7	0.6	-252	-0.6			+91			0.216					+132			-120	-0.6	+43
8	0.6	-252	-0.6	-0.6		+91	+91		0.216	0.216				+132	+147		+27	-1.2	-19
9	0.6	-252	-0.6	-0.6			+91	+91		0.216	0.216		0.216		+147	-214	-319	-1.2	+230
10	0.6				-0.6					0.216						-214	-214	-0.6	+77
11	1	+420	+1			+420		1						-221			+199	+1	+199

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	1	+420		+1			+420			1					-245		+175	+1	+175
13	1	-840			+1			-840			1					+356	-484	+1	-484
14	1		+1					1					-221				-221	+1	-221
15	1			+1					1						-245		-245	+1	-245
16	1				+1					1						+356	+356	+1	+356
$\Sigma$										+817	+817	-1179	3.456	3.456	0.216	0.216			-1

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^v \left( \frac{l}{l_0} n_i n_j \right)_k; \quad \Delta_{iF} = \sum_{k=1}^v \left( \frac{l}{l_0} N_F n_i \right)_k, \quad (c)$$

kus  $l/l_0$  on varda pikkuse  $l$  suhe kaldvarda pikkuse  $l_0=5$  m,  $n_i$  ja  $n_j$  — varraste sisejõud ühikjõududest  $X_1=1$ ,  $X_2=1$  ja  $X_3=1$  ning  $N_F$  — varraste sisejõud koormusest  $F$ .

Võrrandisüsteemi kordajate ja vabaliikmete arvutuse teeme tabelis 8, kus esimeses lahtris on varraste numbrid  $k=1, 2, \dots, 16$ . Teise lahtrisse arvutame varraste pikkuste suhted  $l/l_0$ , kolmandasse sisejõud  $N_F$  koormusest  $F$  ja kolme järgnevasse sisejõud  $n_1, n_2$  ja  $n_3$  ühikjõududest  $X_1=1$ ;  $X_2=1$  ja  $X_3=1$ . Lahtritesse 7...14 arvutame valemite (c) esinevad korrutised, mis liitmisel annavad tabeli all servas kordajad ja vabaliikmed. Seejuures  $\delta_{13}=\delta_{31}=0$ , kuna kõikides varrastes korrutised  $n_1 n_3$  võrduvad nulliga. Asendades võrrandisüsteemis (a) kordajad ja vabaliikmed oma arvuliste väärtustega, saame

$$\left. \begin{aligned} 3,456X_1 + 0,216X_2 + 817 &= 0 \\ 0,216X_1 + 3,456X_2 + 0,216X_3 + 817 &= 0 \\ 0,216X_2 + 3,456X_3 - 1179 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Lahendame võrrandisüsteemi *Crameri* teoreemi abil ja saame otsitavate jõudude suurused:

$$X_1 = -221 \text{ kN}; \quad X_2 = -245 \text{ kN}; \quad X_3 = 356 \text{ kN},$$

mis on kõrvaldatud varraste sisejõud  $N_{14} = -221$  (survejõud),  $N_{15} = -245$  ja  $N_{16} = 356$  kN (tõmbejõud). Teiste varraste sisejõud arvutame valemiga (14.28):

$$N = N_F + x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 \quad (d)$$

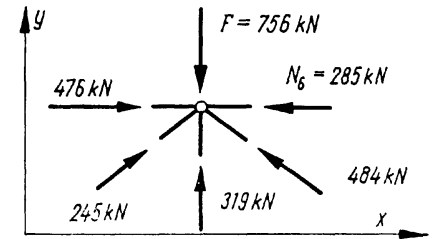
tabelis 8, kus lahtritesse 15...17 arvutame korrutiste väärtused ja lahtrisse 18 nende summa, millele lisame põhissüsteemi sisejõud  $N_F$  koormusest (lahtrist 3). Sellega on sõrestiku sisejõud arvutatud ja jääb veel kontrollida lahendit.

Sõrestikus kontrollime sõlmede tasakaalu. Eraldame lõikemeetodiga sõlme, milles mõjub koormus  $F$  ja koostame sellele tasakaalutingimused (joonis 14.14):

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & 476 - 285 + 0,8 \cdot 245 - 484 \cdot 0,8 &= -0,2; \\ \sum Y &= 0; & -756 + 319 + 0,6 \cdot 245 + 0,6 \cdot 484 &= +0,4, \end{aligned}$$

mis on küllalt täpselt rahuldatud. Samal viisil võime veenduda, et ka sõrestiku kõik teised sõlmed rahuldavad arvutustäpsuse piires tasakaalutingimusi.

Sõrestikule seame veel teise tingimuse, millega kontrol-



Joon. 14.14

lime deformatsioonide pidevust põhissüsteemis. Sõrestikule esitatav deformatsioonitingimus on analoogne raamile esitatavaga (14.30):

$$\sum_{k=1}^v \left( \frac{A_0}{A} \frac{l}{l_0} N n_{\Sigma} \right)_k = 0, \quad (14.32)$$

kus

$$n_{\Sigma} = n_1 + n_2 + \dots + n_n. \quad (14.33)$$

Arvutuse selle tingimuse järgi teeme tabeli 8 lahtrisse 19 ja 20. Seejuures suhe  $A_0/A=1$ , sest antud sõrestikus on kõik vardad ühesuguse ristlõikega. Summeerides korrutised lahtrisse 20, saame tulemuseks  $-1$ , mis on väike ja tunnistab deformatsiooni pidevustingimuse (14.32) täidetuks.

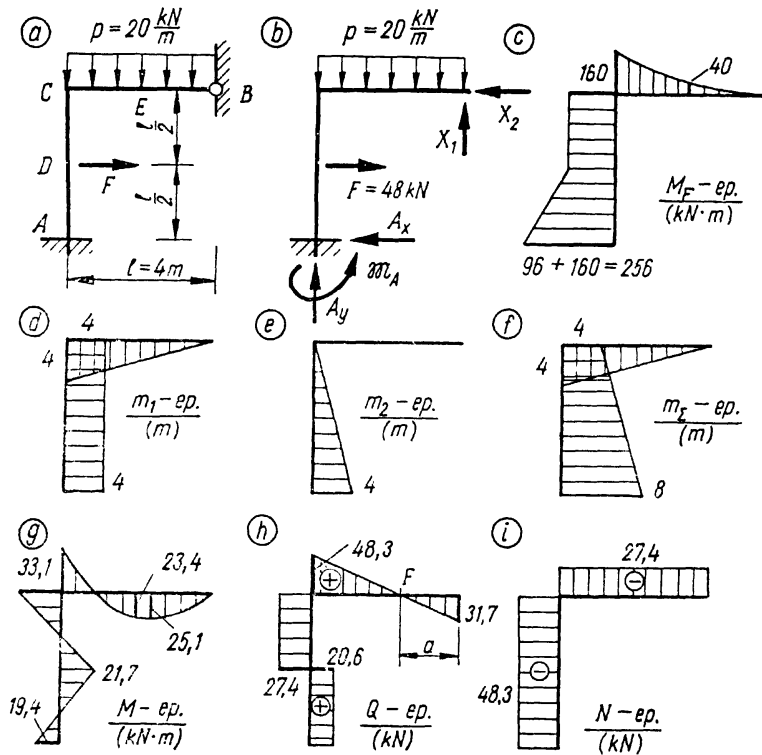
**14.4.2. Raam** joonisel 14.15, a koosneb postist ja riivist, mis moodustavad murdjoonse telje ja ühtlase ristlõikega varda. Raam on kinnitatud alusele viie toesidemega ja staatikaga määramatuse aste  $n=T-3V=5-3=2$ . Põhisüsteemi kujundame kahe lisasideme kõrvaldamisega toelt B (joonis 14.15, b) ja asendame nende mõju tundmatute reaktsioonijõududega  $X_1$  ja  $X_2$ . Otsitavad jõud määrame kanoonilisest võrrandisüsteemist (14.19), kui  $n=2$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (e)$$

Süsteemi vabaliikmed ja kordajad arvutame *Mohri* meetodiga teise valemiga (13.20) põhjal, millest jätame välja varda konstantse paindejäikuse  $EI$ . Sisuliselt tähendab see vabaliikmete ja kordajate korrutamist ühe ja sama suurusga.

$$\Delta_{iF} = \int_S M_F m_i ds; \quad \delta_{ij} = \int_S m_j m_i ds, \quad (f)$$

kus  $M_F$  on põhissüsteemi paindemoment koormusest  $p$  ja  $F$ ,  $m_i$  ja  $m_j$  — paindemomendid ühikjõududest  $X_i=1$  ja  $X_j=1$ .



Joon. 14.15

Koostame põhisüsteemi paindemomentide  $M_F$ ,  $m_1$  ja  $m_2$  epüürid (joonis 14.15, c, d ja e) ja integraalid (f) arvutame Vereštšagini võttega valemi (13.25) põhjal:

$$\Delta_{1F} = \int_s M_F m_1 ds = -\frac{1}{3} \cdot 160 \cdot 4 \cdot 3 - (160 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 2) 4 = -3584;$$

$$\Delta_{2F} = \int_s M_F m_2 ds = -160 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot 4 = -1600;$$

$$\delta_{11} = \int_s m_1^2 ds = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 85,33;$$

$$\delta_{22} = \int_s m_2^2 ds = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 21,33;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_s m_1 m_2 ds = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32.$$

Asetame leitud suurused võrrandisüsteemi (e):

$$\left. \begin{aligned} 85,33X_1 + 32 X_2 - 3584 &= 0 \\ 32 X_1 + 21,33X_2 - 1600 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

millest

$$X_1 = 31,72 \text{ kN}; \quad X_2 = 27,43 \text{ kN}.$$

Raami paindemomendid arvutame valemiga (14.28), mis antud juhul võtab järgmise kuju:

$$M = M_F + X_1 m_1 + X_2 m_2.$$

Paindemomendid punktides A, D, C ja E, millest viimane asetseb riivi keskel:

$$M_A = -256 + 31,72 \cdot 4 + 27,43 \cdot 4 = -19,40 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_D = -160 + 31,72 \cdot 4 + 27,43 \cdot 2 = 21,74 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_C = -160 + 31,72 \cdot 4 = -33,12 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_E = -40 + 31,72 \cdot 2 = 23,44 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Koostame paindemomendi  $M$  epüüri (joonis 14.15, g), milles esialgu jääb lahtiseks maksimaalse paindemomendi suurus ja asukoht riivis. Selle probleemi lahendamise põhikõue epüüri põhjal. Normaalkõue  $N$  ja põikjõue  $Q$  määrame põhisisüsteemist, millele rakendame koormuse  $p$  ja  $F$  ning jõud  $X_1$  ja  $X_2$ . Koostame  $Q$ - ja  $N$ -epüürid (joonis 14.15, h ja i) ja arvutame toereaktsioonid:

$$A_x = 20,57 \text{ kN}; \quad A_y = 48,28 \text{ kN}; \quad \mathfrak{M}_A = 19,40 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Reaktsioonideks toel  $B$  on lahendamise käigus leitud jõud  $X_1$  ja  $X_2$ .

Põikjõue epüüril määrame riivis punkti  $F$ , kus  $Q_F = 0$  ja  $M_F$  on maksimaalne. Tingimusest  $Q_F = -X_1 + pa = 0$  arvutame  $a = X_1/p = 31,72/20 = 1,59$  m, mis annab  $M_F = X_1 a/2 = 31,72 \cdot 1,59/2 = 25,15$  kN·m. Lahendi õigsust kontrollime tasakaalu- ja deformatsioonitingimustega. Vabastame raami mõttes tugegelt ja rakendame talle tingimused  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  ja  $\sum \mathfrak{M}_C = 0$ . Näeme, et esimesed kaks on rahuldatud täpselt, kolmas

$$\begin{aligned} -A_x l + Fl/2 - pl^2/2 + X_1 l + \mathfrak{M}_A &= \\ = -20,6 \cdot 4 + 48 \cdot 2 - 20 \cdot 4^2/2 + 31,7 \cdot 4 + 19,4 &= -0,2 \end{aligned}$$

arvutustäpsuse piires. Võime veenduda, et ka raami mis tahes mõeldavad osad rahuldavad tasakaalutingimusi.

Deformatsioonitingimuse 14.30 kontrollimiseks koostame  $m_\Sigma$ -epüüri (joonis 14.15, f), võtame suhte  $I_0/I_h$  võrdseks

ühaga ja arvutame integraali riivi ulatuses *Simpsoni* valemiga (13.23), postis aga valemiga (13.26):

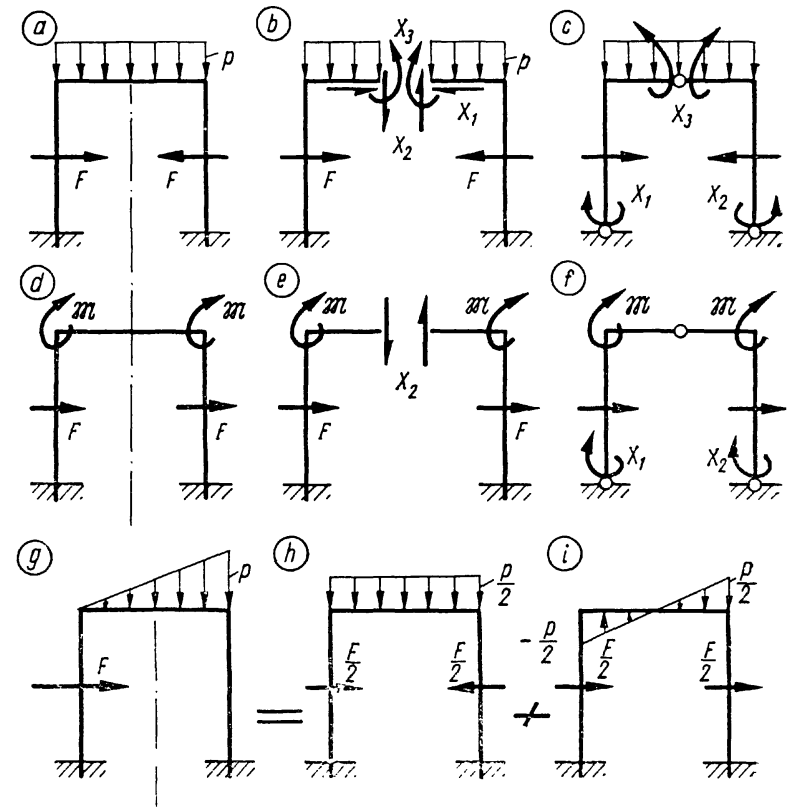
$$\int_s Mm_{\Sigma} ds = \frac{4}{6} (-33,1 \cdot 4 + 4 \cdot 23,4 \cdot 2) + \frac{2}{6} (-2 \cdot 33,1 \cdot 4 + 2 \cdot 21,7 \cdot 6 - 33,1 \cdot 6 + 21,7 \cdot 4) + \frac{2}{6} (2 \cdot 21,7 \cdot 6 - 2 \cdot 19,4 \cdot 8 + 21,7 \cdot 8 - 19,4 \cdot 6) = +0,2.$$

Tingimus on arvutustäpsuse piires rahuldatud.

**14.4.3. Sümmeetriline süsteem.** Vaatleme staatikaga määramatut konstruktsiooni, mis on *sümmeetriline* ja mille koormus on ka sümmeetriline. Olgu selleks süsteemiks *portaalraam* sümmeetrilise koormusega (joonis 14.16, a), millel on sümmeetriatasand (joonisel nähtav sümmeetriateljena). Raami staatikaga määramatuse aste  $n=3$ . Sümmeetrilisele raamile on soovitatav kujundada samalaadne põhisüsteem. Teeme seda kolme sisemise sideme kõrvaldamisega riivi keskelt (joonis 14.16, b), kus eemaldatud sidemete mõju asendame tundmatute üldistatud jõududega  $X_1$ ,  $X_2$  ja  $X_3$ . Sümmeetrilises süsteemis peavad ka tundmatud jõud kujundama samalaadse pildi. Normaalkõule ja paindemomendile vastavad tundmatud  $X_1$  ja  $X_3$  on sümmeetrilised, kuid põikjõule vastav tundmatu  $X_2$  ei rahulda sümmeetria nõuet; ta kujundab *antisümmeetrilise pildi*\*. Siit järeldub, et vaadeldavas süsteemis  $X_2=0$  ja ülesande lahendamisel peame määrama ainult  $X_1$  ja  $X_2$  väärtused. Kui valiksime mingi teise sümmeetrilise põhisüsteemi, näiteks niisuguse nagu joonisel 14.16, c, siis sümmeetriast  $X_1=X_2$  ja ülesande lahendamisel otsime ikkagi ainult kahte lisatundmatut.

Vaatleme sama portaalraami *antisümmeetrilise koormusega* (joonis 14.16, d). Ka siin on soovitatav valida sümmeetriline põhisüsteem, milles tundmatud üldistatud jõud peavad rahuldama antisümmeetria nõudeid. Sellest järeldame, et põhisüsteemis joonisel 14.16, e sümmeetrilised tundmatud  $X_1=X_3=0$  ja nullist erineda võib ainult antisümmeetriline tundmatu  $X_2$ . Põhisüsteemis (f) peab  $X_3=0$  ja antisümmeetrilised toemomendid  $X_1=X_2$ . Näeme, et nii või teisiti taandub ülesanne ühe tundmatu leidmisele kolme asemel. Antisümmeetrilise koormusega raami lahendamine lihtsustus veelgi suuremal määral.

\* Kaks sümmeetrilist jõudu muutuvad antisümmeetrilisteks, kui nendest ühe vektor asendada oma vastandvektoriga.

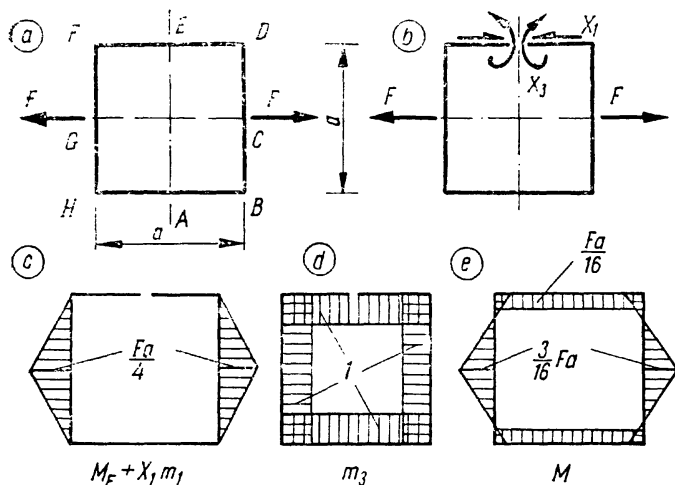


Joon. 14.16

Eespool vaadeldud lihtsustuste kasutamise võimalused avarduvad oluliselt, kui võtame teadmiseks, et *sümmeetrilisele konstruktsioonile mõjuva mis tahes ebasümmeetrilise koormuse võib alati lahutada kaheks komponendiks, millest üks on sümmeetriline ja teine antisümmeetriline*. Toome näite joonisel 14.16, kus antud meelevaldne ebasümmeetriline koormus (g) on vaadeldav sümmeetrilise (h) ja antisümmeetrilise (i) summana.

Järeldus: *sümmeetrilise konstruktsiooni põhisüsteemi kujundamine võimalust mööda samalaadse ja koormuse lahutada kaheks komponendiks — sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks. Lahendame sel teel saadud kaks ülesannet ja liidame nende lahendid.*





Joon. 14.17

Seda juhust tuleb mõista soovitusena, sest ka kõik teised võimalikud teed viivad sihile. Inseneripraktikas aga ei jäeta seda soovitus peaaegu kunagi kasutamata. Temast tulenev arvutustöö lihtsustumine on seda kaaluvam, mida kõrgem on konstruktsiooni staatikalise määramatuse aste. Analoogseid lihtsustusi võime teha, kui konstruktsioon on vaadeldav antisümmeetrilisena. Süsteemid, millel sümmeetriatelgi on rohkem kui üks, lubavad enamasti ka suurema hulga lihtsustusi teha.

**Näide 14.3.** Määrame joonisel 14.17, a kujutatud sümmeetrilise raami sisejõud. Raam on staatikaga kolmekordselt määramatu. Sümmeetriast ja tasakaalutingimusest  $\sum X = 0$  järeldame, et varrastes  $HB$  ja  $FD$  mõjuvad võrdsed tõmbejõud suurusega  $F/2$ . Kujundame põhisüsteemi kolme sideme kõrvaldamisega ristlõikest  $E$  (joonis 14.17, b). Nende sidemete mõju asendame üldjuhul kolme tundmatu üldistatud jõuga  $X_1$ ,  $X_2$  ja  $X_3$ . Tundmatu jõud  $X_1$ , mis vastab normaalkõule varras  $FD$ , on meil juba määratud  $X_1 = F/2$ . Põikjõule vastav antisümmeetriline tundmatu  $X_2 = 0$ . Sümmeetriast jääb leidmata ainult paindemomendile vastav tundmatu  $X_3$ , mille määramiseks koostame võrrandi

$$\delta_{33}X_3 + \delta_{31}X_1 + \Delta_{3F} = 0,$$

kus suurus  $\delta_{31}X_1 + \Delta_{3F}$  esineb vabaliikmena. Selle suuruse võime määrata, kui rakendame põhisüsteemile koormuse  $F$  ja jõu  $X_1 = F/2$ , koostame paindemomendi  $(M_F + X_1m_1)$  epüüri (joonis 14.17, c) ja arvutame vabaliikme:

$$\delta_{31}X_1 + \Delta_{3F} = \int_s (M_F + X_1m_1)m_3 ds = -\frac{Fa}{4}a = -\frac{Fa^2}{4},$$

kus  $m_3$  on paindemomendi epüür ühikmomendist  $X_3 = 1$  (joonis 14.17, d).

Arvutame ka kordaja  $\delta_{33}$ :

$$\delta_{33} = \int_s m_3^2 ds = 4a \cdot 1 = 4a.$$

Pannes leitud vabaliikme ja kordaja võrrandisse, avaldame tundmatu

$$X_3 = \frac{Fa^2}{4 \cdot 4a} = \frac{Fa}{16}.$$

Paindemomendi punktis  $G$  arvutame valemiga (14.28):

$$M_G = -\frac{Fa}{4} + \frac{Fa}{16} = -\frac{3}{16}Fa.$$

Leitud ordinaatide najal koostame paindemomendi  $M$  epüüri (joonis 14.17, e).

## 14.5. SIIRDED

Staatikaga määramatu konstruktsiooni siirete arvutamisel tulevad praktiliselt arvesse ainult energeetilised meetodid. Nendest tunneme *Mohri* meetodit ja *Castigliano* teoreemi, mis mõlemad on sobivad, kuid inseneripraktikas on tänapäeval levinum esimene. Põhjus on nähtavasti selles, et *Mohri* meetodit rakendame ka staatikaga määramatu varrasüsteemi arvutamisel jõumeetodiga, millest ta on meile hästi tuttav.

*Mohri* meetod pole piiratud staatikaga määratavate konstruktsioonidega, vaid on vahetult, ilma täiendusteta rakendatav mis tahes määramatule konstruktsioonile. See asjaolu selgub, kui meenutame, et see meetod on rajatud virtuaalsiirete printsiibile, millele on allutatavad kõik elastselt deformeeruvad kehad ja kehade süsteemid, vaatamata nende sidemete hulga.

Tülikaks kujuneb arvutamisel see asjaolu, et rakendades ühikjõu staatikaga määramatule konstruktsioonile, tuleb lahendada uuesti keerukas ülesanne. *Arvutustööd võime oluliselt lihtsustada, kui asendame staatikaga määramatu konstruktsiooni tema põhisüsteemiga.* Niisugune asendamine on võimalik, sest teatavasti deformeerub põhisüsteem õigesti määratud sisejõududest täpselt samuti nagu staatikaga määramatu konstruktsioon. Põhisüsteemis on aga mis tahes üldistatud ühikjõust sisejõudusid arvutada palju lihtsam.

Siirete arvutamist võime mõnel juhul veelgi lihtsustada, kui peame silmas, et ühikjõu võime rakendada mis tahes põhisüsteemile. See tähendab, et me pole tingimata seotud selle põhisüsteemiga, mida kasutasime konstruktsiooni lahendamisel jõumeetodiga. Sageli võib osutuda lihtsamaks mõni teine põhisüsteem, mille võime jälle välja vahetada soodsamaga, kui asume arvutama järjekordset siiret.

Vaatleme siirete arutamise näiteid staatikaga määratud konstruktsioonides.

**Näide 14.4.** Arvutada joonisel 14.18, *a* kujutatud tala otsa pöördenurk toel *B*.

Tala paindemomendid arvutatakse jaotises 14.1.1 ja kujutatakse epüüri joonisel 14.1. Kõige lihtsamaks põhisüsteemiks on konsool, mille otsale rakendame ühikmomendi. Siirde määrame teise valemiga (13.20), milles leiduva integraali arvutame *Simpsoni* valemiga (13.23):

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^l Mm \, ds = \frac{l}{6EI} \left( -\frac{pl^2}{8} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{pl^2}{16} \cdot 1 \right) = \frac{pl^3}{48EI}. \quad (14.34)$$

**Näide 14.5.** Arvutame eelmises näites vaadeldud tala läbipainde koondjõust selle rakenduspunktis (joonis 14.18, *b*).

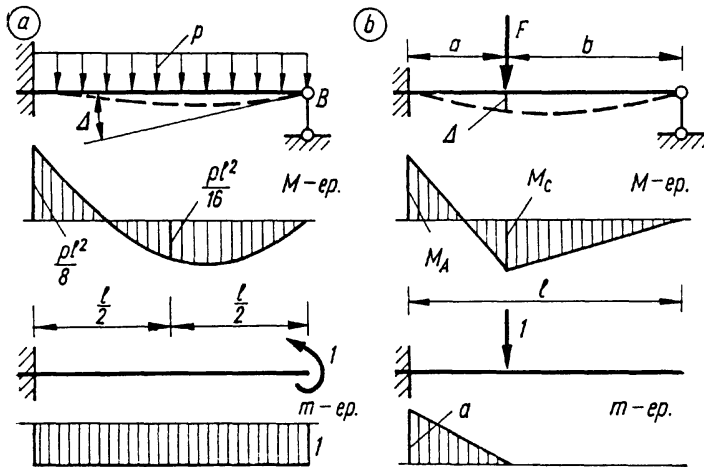
Tala paindemomendid on määratud jaotises 14.1.1 ja epüür esitatud joonisel 14.2, *a*. Põhisüsteemiks võtame ka siin konsooli, millele rakendame otsitavale läbipaindele vastava ühikjõu. Koostame paindemomendi epüüri ühikjõust põhisüsteemis ja arvutame siirde, kasutades numbrilise integreerimise valemit (13.26):

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^a Mm \, ds = \frac{a}{6EI} \left[ 2 \frac{Fb}{2l^2} (l^2 - b^2)a - \frac{Fa^2b}{2l^3} (2l - b)a \right],$$

mis pärast lihtsustamist annab:

$$\Delta = \frac{Fa^2b}{12EI} [2(1 - \eta^2) - \xi^2(1 - \xi)], \quad (14.35)$$

kus  $\xi = a/l$  ja  $\eta = b/l$ .



Joon. 14.18

Sõrestiku sõlme siirde arvutus

<i>k</i>	<i>l</i> <i>m</i>	<i>N</i> kN	<i>n</i>	<i>lNn</i> kN·m
1	4	+177	0	0
2	4	+532	+0,444	+945
3	4	+387	+0,888	+1375
4	4	-159	-0,444	+282
5	4	-476	-0,888	+1691
6	4	-285	0	0
7	3	-120	-0,333	+120
8	3	+27	-0,333	-27
9	3	-319	-0,333	+319
10	3	-214	0	0
11	5	+199	+0,555	+552
12	5	+175	+0,555	+486
13	5	-484	-1,111	+2689
14	5	-221	0	0
15	5	-245	0	0
16	5	+356	0	0
Σ				+8432

**Näide 14.6.** Arvutame jaotises 14.4.1 (joon. 14.13) vaadeldud sõrestikus jõu *F* rakenduspunkti vertikaalsiirde eeldusel, et varraste ristlõikepindala  $A = 40 \text{ cm}^2$ .

Siirde arvutame esimese valemiga (13.20), milles antud juhul võime jääkuse  $EA$  võtta summamärgi ette, sest kõikide varraste jääkused on võrdsed:

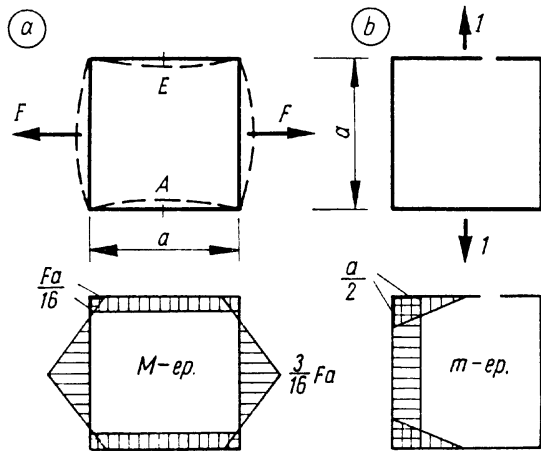
$$\Delta = \frac{1}{EA} \sum_{k=1}^v (Nnl)_k. \quad (a)$$

Arvutused teeme tabelis 9, kuhu märgime varraste numbrid *k*, pikkused *l* ja sisejõud *N* tabelist 8. Põhisüsteemi valime sama, mis oli kasutusel jaotises 14.4.1. Rakendame põhisüsteemis otsitavale siirdele vastava ühikjõu ja arvutame tabelisse varraste sisejõud *n*. Viimasesse lahtirisse arvutame valemi (a) sulgavaldisse igale vardale ja summeerime need suurused. Saadud summa jagame jääkusega  $EA$  ning saamegi otsitava siirde:

$$\Delta = \frac{8432 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = 0,01 \text{ m} = 10 \text{ mm}.$$

**Näide 14.7.** Määrame joonisel 14.19, *a* kujutatud raami punktide *A* ja *E* vahekauguse muute jõust *F*.

Vaadeldava raami paindemomendi *M* epüür on antud joonisel 14.17, *e*. Võtame selle raami põhisüsteemiks joonisel 14.19, *b* kujutatut, millele rakendame otsitavale siirdele vastava üldistatud ühikjõu. See koosneb teatavasti kahest koondjõust suurusega 1, millest tulenev paindemomendi *m* epüür on näidatud joonisel. Siirde arvutame teise



Joon. 14.19

valemiga (13.20) ja numbriliseks integreerimiseks rakendame valemit (13.26):

$$\Delta = 2 \frac{1}{EI} \frac{a/2}{6} \left( -2 \frac{3}{16} Fa \frac{a}{2} + 2 \frac{1}{16} Fa \frac{a}{2} - \frac{3}{16} Fa \frac{a}{2} + \frac{1}{16} Fa \frac{a}{2} + 2 \frac{1}{16} Fa \frac{a}{2} + \frac{3}{16} Fa \frac{a}{2} \right),$$

mis pärast lihtsustamist saab kuju

$$\Delta = \frac{Fa^3}{192EI}. \quad (14.36)$$

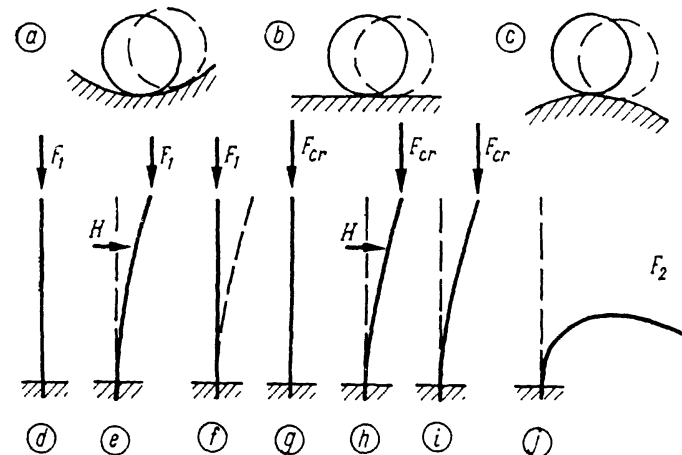
Miinusmärk näitab, et siire on ühikjõule vastupidine ja punktid  $A$  ja  $E$  lähenevad teineteise  $\Delta$  võrra.

## 15. SURUTUD VARDA STABIILSUS

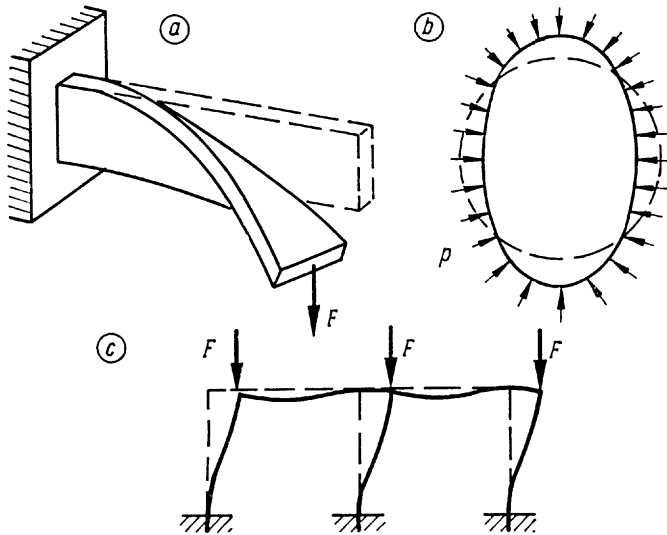
### 15.1. STABIILNE TASAKAAL JA KRIITILINE KOORMUS

Küllaldane tugevus ja jäikus on konstruktsiooni usaldatavuse vajalikeks, kuid mitte alati piisavateks tingimusteks. Kindlustanud konstruktsioonile tugevuse ja jäikuse, oleme rahuldunud tasakaalutingimused, kuid *kõik tasakaaluseisundid pole kaugeltki usaldatavad*. Füüsikast teame raske kõvakeha kolme tasakaaluseisundit, mida meenutame jooniselt 15.1. kus  $a$  kujutab massiivse kera stabiilset,  $b$  indiferentset ja  $c$  labiilset tasakaalu.

Koormatud deformeeruva konstruktsiooni tasakaaluseisundid võivad olla samuti *stabiilsed, indiferentsed* ja *labiilsed*. Vaatleme neid seisundeid survele allutatud saleda varda näite varal joonisel 15.1. Rakendame vardale jõu  $F_1$  (joonis  $d$ ). Süsteem on tasakaalus, kuid uurime seda tasakaaluseisundit sel teel, et rakendame vardale põiksuunas väikse jõu  $H$ , mis põhjustab väikse läbipainde (joonis  $e$ ). Väikest jõudu mõistame *juhuliku häiringuna* ja temast tulenevat läbipainet varda tühise *hälbena tasakaaluasendist*. Kui varda hälve kaob peale häiriva jõu kõrvaldamist (joonis  $f$ ), siis vaadeldav tasakaaluseisund on stabiilne. Suurendades varda koormust teatava piirväärtuseni, mida nimetatakse *kriitiliseks jõuks*  $F_{cr}$  (joonis  $g$ ), tekib indiferentne tasakaaluseisund. Kui selles seisundis mõjutada varrast häiriva jõuga  $H$  (joonis  $h$ ), siis pärast selle jõu kõrvaldamist temast põhjustatud hälve ei kao, vaid säilib niisugusena nagu ta tekkis (joonis  $i$ ). Kui varda koormust õnnestuks veel suurendada ( $F_2 > F_{cr}$ ), siis varras peaks olema labiilses tasakaaluseisundis. Väike põiksuunaline jõud  $H$  kutsuks esile varda hälbe, mis selles seisundis momentaanselt kasvab suureks läbipaindeks. Deformeerudes võib varras leida uue tasakaaluasendi või puruneda (joonis  $j$ ). Praktiliselt meil jõudu  $H$  rakendada ei õnnestu, sest ümbritsevas keskkonnas on külluses «looduslike» häiringuid, mis ennetavad meie «tehishäiringu» ja niipea, kui varda koormus kasvades ületab  $F_{cr}$  väärtuse, tekib



Joon. 15.1



Joon. 15.2

suur läbipaine näiliselt automaatselt. Niisugust varda käitumist jõu  $F_2$  mõjul nimetatakse *nõtkeks*.

Olgu surutud sale varras konstruktsioonielemendiks, näiteks kandepostiks või sõrestiku osaks. Selle elemendi usaldatavuse üks tingimus on, et varda koormus  $F$  ei tohi ületada kriitilise jõu väärtust:  $F < F_{cr}$ . Seejuures võivad survepinged vardas olla palju madalamad kui nõuab seda tugevustingimus. *Stabiilsuse tingimuse seadmisel vardale, peame oskama määrata kriitilise jõu suurust, mis ongi meie üks ülesanne käesolevas jaotises 15.*

Edaspidi kasutame sageli mõistet *stabiilsus*, millena mõistame deformeeruva koormatud konstruktsiooni võimet vabandada väikestest juhuslikest tasakaaluoleku hälvetest. Usaldatava stabiilsuse saavutame, kui piirame süsteemi koormust mitte vahetult kriitilise, vaid *lubatava jõuga*, mille saame, kui  $F_{cr}$  vähendame teatava arvu kordselt:

$$F \leq \frac{F_{cr}}{S_n} = [F],$$

kus suurust  $S_n$  nimetatakse *nõtkete varuteguriks*. Ilmselt  $S_n > 1$  ja teda mõistame tugevuse varuteguriga samas rollis.

Labiilne tasakaal ohustab ka väände ja paindele töö-

tavaid võlle ja talasid. Joonisel 15.2, *a* on kujutatud õhukest kõrget konsooli, mis on kaotanud stabiilsuse. Seda nähtust nimetatakse tala *põikumiseks*. Suurte terastalade õhuke vertikaalsein võib võõde ja jäikusribide vahel kaotada stabiilsuse ja *mõlkuda* lohklikuks ja laineliseks. Pikk sale võll võib liiga suurest väändemomendist kõverduda. Välisrõhule allutatud toru õhuke sein võib kaotada stabiilsuse ja toru ümar ristlõige muutub elliptiliseks (joonis 15.2, *b*). Ka raamides võib ülemäärane koormus esile kutsuda labiilse tasakaalu ja põhjustada avariiseisundi (joonis 15.2, *c*). Stabiilsusprobleem esineb ka ehitistel ja masinatel tervikuna. Sild võib kaotada stabiilsuse, samuti kõrghoone karkass, lennuk jt.

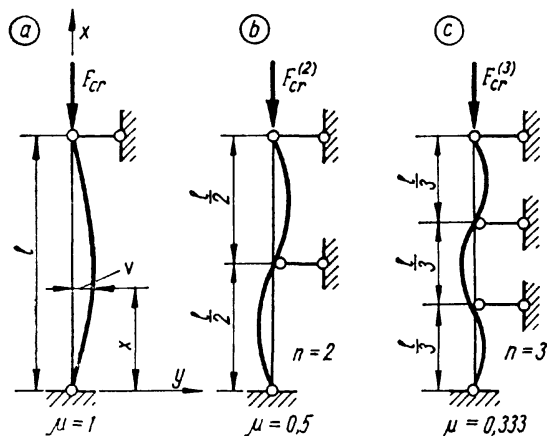
Stabiilsus on deformeeruva keha mehaanika keerukamaid probleeme, mida pole nii põhjalikult uuritud nagu tugevuse ja jäikusega seotud küsimusi. Meie ülesanne on tutvuda *surutud varda nõtkearvutusega*.

## 15.2. EULERI ÜLESANNE

**15.2.1. Kriitiline jõud** konstruktsioonile on määratav mitmel viisil, millest vanimaks on *Euleri\** poolt ette pandud meetod. See arvutusviis lubab edukalt avaldada surutud saleda varda kriitilise koormuse, kui jõu siht nõtkumisel ei muutu. Meetodi küündimatus paljude muude stabiilsusprobleemide lahendamisel sundis hiljem rakendama teistsuguseid arvutusviise, millest tänapäeval kõige üldisemaks on nn. *dünaamiline meetod*. Viimane on rajatud koormatud elastse konstruktsiooni uurimisele väikeste võnkumistega oma tasakaaluasendi ümber. Opetus konstruktsioonide stabiilsusest on kujunenud viimastel aastakümnetel iseseisvaks teaduseharuks. Selles õpetuses on *Euleri* meetod säilitanud olulise koha, sest ta on lihtne, õpetlik ja võimaldab lahendada suure hulga ülesandeid inseneripraktikast. Vaatleme lähemalt nn. *Euleri ülesannet*.

Olgu ümarale, sirgele ja mõlemast otsast liigenditele toetatud vardale rakendatud kriitiline jõud  $F_{cr}$  (joonis 15.3, *a*). Mõjutame mõttes varrast väikse põiksuunalise jõuga, mis tekitab märgatava, kuid mitte suure läbipainde ja kõrvaldame siis selle jõu. Kui seejuures säilib varda läbipaine, siis koormus on kriitiline. Määrame  $F_{cr}$  tingimusest, et ta säilitaks varda kõverdunud seisundi sellest jõust ja

\* Leonhard Euler (1707—1783) — Sveitsist pärinev matemaatik, füüsik ja astronoom, kes selle ülesande lahenduse avaldas 1744. a.



Joon. 15.3

läbipaindest põhjustatud paindemomendiga

$$M = F_{cr}v.$$

Pannes paindemomendi väärtuse elastse joone diferentsiaalvõrrandisse (10.4), saame

$$v'' = -\frac{F_{cr}v}{EI}.$$

Ehk teisiti

$$v'' + k^2v = 0, \quad (a)$$

kus

$$k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}. \quad (b)$$

Saime nõtkunud varda diferentsiaalvõrrandi (a), mis on hästi tuntud nii füüsikast kui ka matemaatikast ja mille üldlahend on

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (c)$$

Integreerimiskonstandid määrame ääritingimustest varda otstel, kus argumendil  $x=0$  läbipaine  $v=0$  ja  $x=l$  puhul  $v=0$ . Esimesest tingimusest  $C_2=0$ , teine annab võrrandi

$$C_1 \sin kl = 0. \quad (d)$$

Võrrandil (d) on kaks võimalikku lahendit  $C_1=0$  ja

$$\sin kl = 0, \quad (e)$$

millest esimene vastab varda sirgele seisundile ega ole kooskõlas ülesande füüsikalise sisuga. Teine lahend (e) annab seose

$$kl = n\pi, \quad (f)$$

kus  $n$  on meelevaldne täisarv. Asendades seoses (f)  $k$  väärtuse (b), saame:

$$l \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} = n\pi,$$

millest

$$F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}. \quad (15.1)$$

Saime valemi, milles  $n=1, 2, 3, \dots$ . Kõige väiksemaks kriitiliseks jõuks on see, mis vastab  $n=1$ :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (15.2)$$

Sel juhul avaldub seos (f) kujul

$$kl = \pi \quad (g)$$

ja elastse joone võrrand (c)

$$v = C_1 \sin \frac{\pi}{l} x, \quad (h)$$

millest nähtub, et elastne joon kujutab endast sinusoidi poollainet. Kui  $n > 1$ , siis elastsel joonel

$$v = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (i)$$

on  $n$  poollainet ja kriitiline jõud (15.1) ületab  $n^2$  kordselt vähima kriitilise koormuse (15.2).

Vardale jooniselt 15.3, a sobib ainult lahend (15.2) ja (h) ( $n=1$ ). Elastsed jooned (i), kui  $n > 1$ , pole saavutatavad, sest nõtkumine toimub juba jõu (15.2) ( $n=1$ ) juures, mida pole võimalik ületada. Seepärast seatud ülesande lahendina esitame valemi (15.2).

**15.2.2. Kriitilise jõu sõltuvus toesisidemetest.** Lahenditel (15.1) ja (i), kui  $n > 1$  on praktiline väärtus teistsuguste sidemetega varraste juures. Varras jooniselt 15.3, b ei saa nõtkuda elastse joonega (h), sest tal on üks lisaside, mis keskkohas ei luba läbipainet. Küll aga võib tekkida sinusoidi kahe poollaine kujuline elastne joon ( $n=2$ ), millele vastav kriitiline koormus ületab neljakordselt ( $n^2=4$ ) jõu (15.2). Varras jooniselt 15.3, c nõtkub jõu all, mis üheksakordselt

ületab koormuse (15.2), kusjuures elastne joon koosneb sinusoidi kolmest poollainest. Niisugused vardad esinevad praktikas kandepostidena, mis ulatuvad läbi mitme korruse.

Niisiis, varraste jaoks, mille toetustingimused erinevad joonisel 15.3, *a* kujutatud varda omadest, võime kriitilise jõu arvutada valemiga (15.1). Tugevusõpetuses antakse sellele valemile kuju:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad (15.3)$$

kus

$$\mu = \frac{l}{n}. \quad (15.4)$$

Dimensioonitult suurust  $\mu$  nimetatakse *varda pikkuse redutseerimisteguriks*. See on toodud ka joonisel 15.3 esitatud skeemidel. Korrutis  $\mu l$  on tuntud varda *nõtkepikkusena*

$$l_n = \mu l, \quad (15.5)$$

millega valemile (15.3) võime anda järgmise kuju:

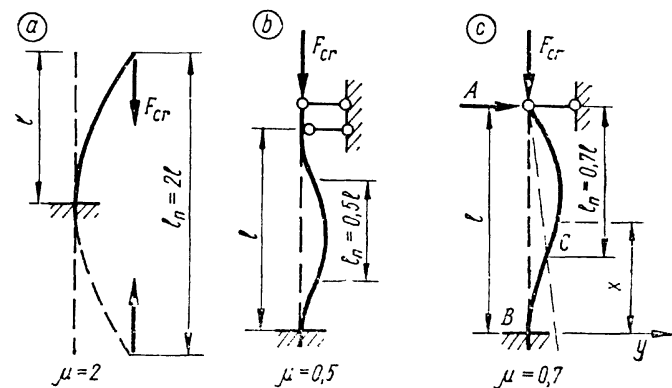
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2}. \quad (15.6)$$

*Nõtkepikkus*  $l_n$  väljendab nõtkunud varda sinusoidaalsel elastsel joonel ühe poollaine pikkust. Määrame pikkuse redutseerimisteguri varrastele, mis sageli leiavad kasutamist konstruktsioonides surutud elementidena ja mida me ei vaadeldud joonisel 15.3.

Konsoolitaoline post joonisel 15.4, *a* nõtkub välja nii nagu me seda kujutasime juba joonisel 15.1. Ilmselt kujuneb varda elastne joon sinusoidi lainepikkuse ühe neljandiku ulatuses. Sellele elastsele joonele vastava poollaine pikkus  $l_n = \mu l = 2l$ . Järelikult  $\mu = 2$ . Joonisel 15.4, *b* oleva posti nõtkumisel kujuneb elastne joon sinusoidi ühe laine pikkuseks ja  $l_n = \mu l = 0,5 l$ , millest  $\mu = 0,5$ .

Joonisel 15.4, *c* oleval postil kujuneb sinusoidi poollaine punktide *A* ja *C* vahel, millest punkti *C* asukohta me ei tea. Seepärast peame sellele süsteemile *Euleri* ülesande uuesti lahendama. Et punktid *A* ja *C* ei asetse jõu *F* kandesirgega paralleelsel sirgel, tekib siin toereaktsioon *A*, mida eespool vaadeldud postidel ei esinenud. Koostame varda elastse joone diferentsiaalvõrrandi (10.4), milles paindemoment

$$M = Fv - A(l - x).$$



Joon. 15.4

Saame mittehomogeense võrrandi

$$v'' + k^2 v = \frac{A}{EI} (l - x), \quad (j)$$

mille erilahendiks sobib

$$v = \frac{A}{k^2 EI} (l - x). \quad (k)$$

Võrrandi (j) üldlahendi saame, kui summeerime homogeense võrrandi lahendi (c) ja erilahendi (k):

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{A}{k^2 EI} (l - x). \quad (l)$$

Integreerimiskonstandid  $C_1$ ,  $C_2$  ja  $A$  peavad rahuldama vaadeldava varda ääretingimusi

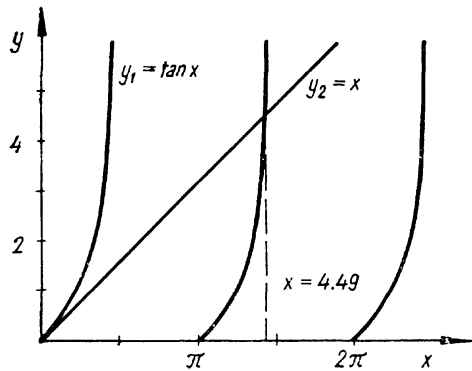
$$1) v(0) = 0; \quad 2) v'(0) = 0; \quad 3) v(l) = 0,$$

millest saame võrrandid

$$C_2 + \frac{Al}{k^2 EI} = 0; \quad C_1 k - \frac{A}{k^2 EI} = 0; \quad C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

Vaatleme neid kolme võrrandi süsteemis, mis on homogeenne ja võib anda lahendi teatavasti ainult siis, kui nendes leiduva kolme tundmatu kordajatest moodustatud determinant võrdub nulliga:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & l/(k^2 EI) \\ k & 0 & -1/(k^2 EI) \\ (\sin kl) & (\cos kl) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$



Joon. 15.5

mille avamisega saame transsendentse võrrandi

$$kl = \tan kl. \quad (m)$$

Saadud võrrandist määrame suuruse  $kl$  väärtuse ligikaudselt graafilise võttega ja täpsustame siis lahendit trigonomeetriliste funktsioonide tabelite või arvuti abil. Lahendamiseks asendame otsitava suuruse  $kl$  tähisega  $x$ . Kujutame  $xy$ -teljestikus funktsioonide  $y_1 = \tan x$  ja  $y_2 = x$  graafikud (joonis 15.5). Nende graafikute lõikepunktid on võrrandi lahenditeks. Meid huvitab kõige väiksem positiivne lahend  $kl = x = 4,49$ , mis vastab kõige väiksema kriitilise jõu väärtusele. Avaldame otsitava kriitilise jõu saadud lahendi ja seose (b) põhjal:

$$l \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} = 4,49,$$

millest

$$F_{cr} = \frac{4,49^2 EI}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0,7l)^2}. \quad (15.7)$$

Leitud kriitilise jõu avaldisest näeme, et joonisel 15.4, c kujutatud varda nõtkepikkus  $l_n \approx 0,7l$  ja  $\mu = 0,7$ .

**15.23. Euleri valemi kehtivuspiir.** Möödunud sajandi algupoolel võeti see valem ineseneripraktikas kasutusele surutud varraste arvutamisel teraskonstruktsioonides. Paljudel juhtudel andsid arvutused usaldatavaid tulemusi, kuid rida suuri sildu purunesid surutud elementide väljanõtkumise tagajärjel. Tekkis kahtlus Euleri lahenduse õigsuse suhtes. Probleemi selgitas belgia insener E. Lamartie 1845. a., kes näitas, et lahendit võib rakendada, kui kriitilise koormu-

sega vardas survepinge ei ületa materjali proportsionaalsuspiiri  $\sigma_{pr}$ . See tingimus saab mõistetavaks kriitilise jõu valemist, kus materjali elastsusmoodul  $E$  on lugejas ja  $E_{cr}$  sellega võrdeline. Kui survepinge ületab proportsionaalsuspiiri, siis elastsusmooduli väärtus oluliselt kahaneb ja väheneb ka kriitiline jõud.

Euleri valemi kehtivuspiiri selgitamiseks võtame kasutusele kriitilise pinget  $\sigma_{cr}$  mõiste:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A}. \quad (15.8)$$

Asendades  $F_{cr}$  oma avaldisega 15.6, saame

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2 A} = \frac{\pi^2 E i^2}{l_n^2}, \quad (n)$$

kus  $i$  on varda ristlõikepinna inertsiraadius. Toome sisse veel ühe uue mõiste — varda saleduse  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{l_n}{i}. \quad (15.9)$$

Asendades avaldises (n) saleduse oma tähisega (15.9), saame

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (15.10)$$

mida mõistame teisendatud Euleri valemiga.

Seame Euleri valemile (15.10) eespool kirjeldatud tõkke:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr}. \quad (o)$$

Võrratusest järeldub, et varda saledus peab rahuldama tingimust

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}}, \quad (15.11)$$

kus paremal pool on dimensioonitu suurus, mis iseloomustab materjali. Tähistame selle  $\lambda_E$  ja avaldame tema väärtuse:

$$\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}}. \quad (15.12)$$

Harilikuledele konstruktsiooniterastele (Cт0, 1, 2 ja 3), mille  $E = 210$  GPa ja  $\sigma_{pr} \approx 200$  MPa, saame  $\lambda_E \approx 100$ . Terasele Cт5 on  $\lambda_E \approx 90$  ja legeeritud teraste jaoks võib ta langeda kuni suuruseni 50. Malmil  $\lambda_E \approx 80$ , puidul umbes 100.

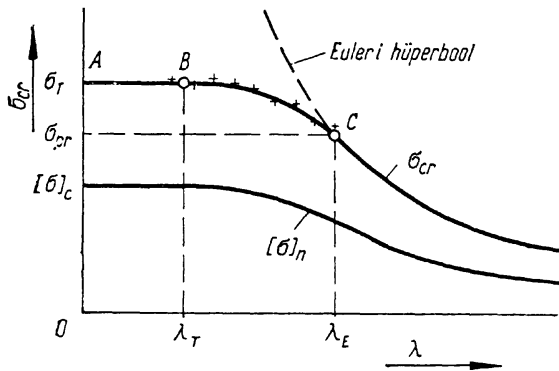
Nagu näeme, tohib *Euleri* valemit rakendada kriitilise koormuse arvutamiseks ainult nendel varrastel, mille saledus on suurem teatavast, igale materjalile iseloomulikust piirist.

### 15.3. NÕTKE VÄLJASPOOL HOOKE'I SEADUSE KEHTIVUS-PIIRI

*Euleri* valem lubab stabiilsusülesande lahendada, kui varda saledus  $\lambda$  ületab piirsaleduse  $\lambda_E$ , mis harilikule terasele ja puidule on umbes 100. Konstruktioonides on palju surutud vardaid, mille saledus on väiksem sellest piirist. Katsed ja kogemused näitavad, et need vardad nõtkuvad madalama survepingega, kui annab selle *Euleri* valem.

Kriitilise pinge (jõu) määramine teoreetilistest kaalutlustest varrastele väiksema saledusega kui  $\lambda_E$  on deformeeruva keha mehaanika üks keerukamaid probleeme, millele nähtavasti pole leitud veel täiesti usaldatavat lahendust. Kuid juba möödunud sajandil tekkis vajadus seda ülesannet praktiliselt lahendada vähemalt ehitiste püstitamisel. Küsimust uurisid paljud insenerid ja teadlased, kellest olulisemaid tulemusi saavutasid *F. Jassinski*, *L. Tetmajer*, *F. Engesser* ja *T. Karman*.

Surutud varraste praktilise arvutamise seisukohalt võime probleemi vaadelda joonise 15.6 põhjal. Esitame  $\lambda - \sigma_{cr}$  teljestikus sõltuvuse 15.10 graafiku, mis on tuntud *Euleri hüperboolina*. Sellest kõverast tuleb arvesse ainult osa, mis algab punktist *C* ja kus  $\lambda \geq \lambda_E$ . Seda osa nimetatakse *suure saleduse piirkonnaks*. Kui saledus on väike,  $\lambda \leq \lambda_T$  ( $\lambda_T$  hari-



Joon. 15.6

Konstandid  $\lambda_E$ ,  $a$ ,  $b$  ja  $c$ 

Materjal	$\lambda_E$	MPa		
		$a$	$b$	$c$
Teras CT 2 ja CT 3	100	310	1,14	—
Teras CT 5	90	464	3,26	—
Teras 40	90	321	1,16	—
Okaspuut	100	29,3	0,194	—
Malm	80	776	12	0,053

liku terase jaoks on umbes 40), siis varras ei nõtku ja töötab harilikule survele. Selles nn. *väikse saleduse piirkonnas* *AB* on kriitiliseks materjali piirpinge survele, milleks terastel on voolavuspinge  $\sigma_T$ , malmil ja teistel habrastel materjalidel  $\sigma_{BC}$ . Lahtiseks jääb nn. *keskmise saleduse piirkond* *BC*, kus nõtkumise nähtus esineb, kuid pinge seejuures ületab proportsionaalsuspääri  $\sigma_{pr}$ . Käsitähtselt ehitiste projekteerimisega tehti selle piirkonna varrastega katseid ja määrati ohusid mõõtmised. Nendest katsetest täitus «tühemik» *BC* andmetega, mis lubasid anda empiirilisi valemeid kriitilise pinge arvutamiseks. Neid valemeid on ajajooksul lihtsustatud ja tänapäeval arvutatakse kriitiline pingeline väikse saleduse piirkonnas empiirilise avaldisega

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (15.13)$$

mis on tuntud *Jassinski-Tetmajeri valem*. See valem asendab graafiku piirkonna *BC* sirglõigu või ruutparabooliga ja tema konstandid  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on iseloomulikud suurused igale materjalile. Tabelis 10 on antud mõne enamkasutatava materjali jaoks valemi (15.13) konstandid.

### 15.4. NÕTKETEGUR

Surutud varraste arvutus valemitega (15.10) ja (15.13) on suhteliselt lihtne, kui tuleb kontrollida antud mõõtmisega posti. Kui aga mõõtmised tuleb määrata, siis valemite rakendamine osutub tülikaks piirsaleduse  $\lambda_E$  lähedasel alal, kus töötab enamik survele allutatud konstruktioonelementidest. Arvutamisele asudes jääb siin alati lahtiseks õige valemi valik. Näiteks valime ühe, kuid määratud sellega ristlõikepinna mõõtmised, selgub, et varda saledus on piirkonnas, kus kehtib teine valem. See asjaolu sundis otsima niisugust



arvutusmeetodit, mis oleks vaba sellest puudusest. Taoline arvutusviis töötati välja käesoleva sajandi algupoolel ja on tänapäeval võetud üldisele kasutusele inseneripraktikas.

Seame vardale stabiilsustingimuse kriitilise pinge abil nõrke varuteguriga  $S_n$ :

$$\sigma_c = \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{cr}}{S_n} = [\sigma]_n, \quad (a)$$

kus  $N=F$  ja jagatis  $\sigma_{cr}/S_n$  on vaadeldav lubatava pingena nõrkel  $[\sigma]_n$ , mis sõltub saledusest  $\lambda$  samal viisil nagu kriitiline pinge, sest varutegur on konstantne suurus.

Pöördume tagasi joonise 15.6 juurde, kus esitame ka lubatava pinge  $[\sigma]_n$  graafiku, mille ordinaadid on  $S_n$  korda väiksemad  $\sigma_{cr}$  omadest. Väikse saleduse piirkonnas langeb lubatav pinge nõrkel  $[\sigma]_n$  kokku varda materjali lubatava survepingega  $[\sigma]_c$ , kui eeldame, et tugevuse ja nõrke varutegurid on võrdsed. See eeldus peab üsna hästi paika, sest tugevuse ja nõrke varutegurid on niivõrd lähedased, et võime nad võrrutada ja asendada ühtse varuteguriga  $S$ .

Väljendame muutuva lubatava pinge nõrkel:

$$[\sigma]_n = \varphi [\sigma]_c, \quad (b)$$

kus  $\varphi$  on dimensioonitu tegur, mis sõltub saledusest  $\lambda$  ja muutub piires  $1 \geq \varphi > 0$  ning kannab nimetust *nõrketegur*.

Asendame tingimuses (a) lubatava pinge nõrkel avaldisega (b):

$$\sigma_c = \frac{N}{A} \leq \varphi [\sigma]_c$$

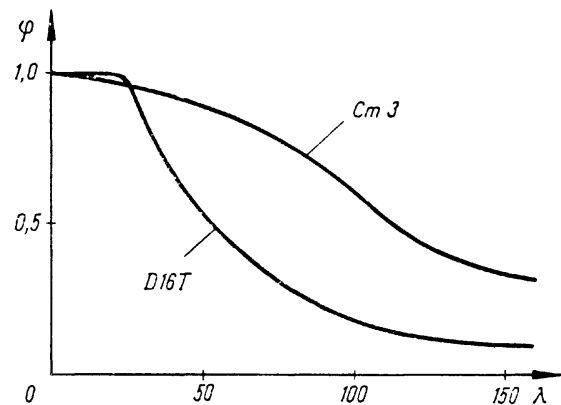
ja jagame tingimust teguriga  $\varphi$ , millest saame

$$\frac{\sigma_c}{\varphi} = \frac{N}{\varphi A} \leq [\sigma]_c. \quad (c)$$

Tingimuses (c) mõistame survepinge ja nõrketeguri jagatist  $\sigma_c/\varphi$  teatava arvutusliku pingena  $\sigma$ , mis on suurem tegelikust survepingest ja mida tuleb võrrelda materjali lubatava survepingega, vältimaks varda nõrkeohtu. Tehes vastava asenduse, saame varda stabiilsustingimuse oma lõplikul kujul:

$$\sigma = \frac{N}{\varphi A} \leq [\sigma]_c. \quad (15.14)$$

Nõrketegur  $\varphi$  on määratud seosega (b), millest  $\varphi = [\sigma]_n/[\sigma]_c$ . Asendades selles seoses lubatavad pinged vastavate piirpingete  $\sigma_{cr}$ ,  $\sigma_T$  ja  $\sigma_{BC}$  ning ühtse varuteguri  $S$  jaga-



Joon. 15.7

tistega, saame peale viimase taandamist nõrketeguri jaoks avaldised

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_T}; \quad \varphi = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{BC}}, \quad (d)$$

vastavalt sellele kas tugevuse piirpingena tuleb arvesse voolavuspinge  $\sigma_T$  (plastsed materjalid) või surve tugevus  $\sigma_{BC}$  (haprad materjalid). Avaldistest (d) näeme, et nõrketegur  $\varphi$  muutub sama seaduspärasusega nagu  $\sigma_{cr}$  ja  $[\sigma]_n$  olenevalt saledusest  $\lambda$ . Igale materjalile on määratud nõrketeguri  $\varphi$  väärtused. Joonisel 15.7 on kujutatud  $\varphi$  graafik terasele Cт3 ja alumiiniumisulamile Д16Т. Praktiliste arvutuste jaoks antakse nõrketeguri väärtused enamasti tabelites. Tabelis 11 on esitatud  $\varphi$  väärtused enamkasutatavatele materjalidele saleduse järgi sammuga 10. Vahepealsete väärtuste leidmiseks võib kasutada lineaarset interpolatsiooni.

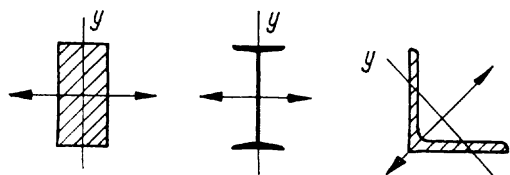
Märkus: tabelis 11 Cт3 all antud nõrketeguri väärtused on kasutatavad ka teistele madala tugevusega terastele, nagu näiteks Cт0, Cт4, 20, 40 jt. Cт5 all esitatud nõrketeguriid kehtivad samuti teistele keskmise tugevusega süsinik- ja legeeritud terastele, nagu näiteks Cт6, 50, HЛ-1 jt. СПК all on toodud nõrketeguriid kõrge tugevusega süsinik- ja legeeritud terastele. Malmi СЧ12-28 nõrketeguriid sobivad kõigile madala tugevusega malmidele, nagu näiteks СЧ15-18, СЧ21-40 jt. СЧ21-44 all toodud teguriid sobivad kõrge tugevusega malmidele, nagu näiteks СЧ28-48 jt.

Tabel 11

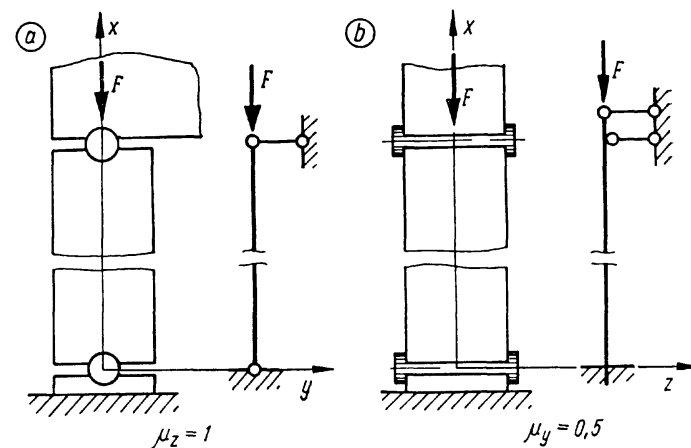
Nõtketegur $\varphi$							
$\lambda$	Teras			Malm		Okaspuit	Betoon
	Cт 3	Cт 5	СПК	СЧ 12-28	СЧ 21-44		
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
10	0.99	0.98	0.97	0.97	0.95	0.99	1.00
20	0.97	0.95	0.95	0.91	0.87	0.97	0.96
30	0.95	0.92	0.91	0.81	0.75	0.93	0.90
40	0.92	0.89	0.87	0.69	0.60	0.87	0.84
50	0.89	0.86	0.83	0.57	0.43	0.80	0.76
60	0.86	0.82	0.79	0.44	0.32	0.71	0.70
70	0.81	0.76	0.72	0.34	0.23	0.61	0.63
80	0.75	0.70	0.65	0.26	0.18	0.49	0.57
90	0.69	0.62	0.55	0.20	0.14	0.38	0.51
100	0.60	0.51	0.43	0.16	0.12	0.31	0.45
110	0.52	0.43	0.35			0.25	
120	0.45	0.38	0.30			0.22	
130	0.40	0.32	0.26			0.18	
140	0.36	0.28	0.23			0.16	
150	0.32	0.26	0.21			0.14	
160	0.29	0.24	0.19			0.12	
170	0.26	0.21	0.17			0.11	
180	0.23	0.19	0.15			0.10	
190	0.21	0.17	0.14			0.09	
200	0.19	0.16	0.13			0.08	

### 15.5. SALEDA VARDA ARVUTUS NÕTKELE

Eelnenud punktides vaatlesime stabiilsusprobleemi eeldusel, et survele allutatud varras on ümara ristlõikega ja tema sidemete mõju kõikides põiksuundades ühesugune. Sel juhul on varda väljanõtkumise suund juhuslik. Samuti käituvad mitteümarad vardad, mille ristlõikepinna inertsimomendid on võrdsed kõikide kesktelgede suhtes. Kui jätame toetustingimused (sidemed) endiseks ja vaatleme varrast, mille peainertsimomendid pole võrdsed (joon. 15.8), siis varras nõtkub vähima paindejäikuse sihis kas ühele või tei-



Joon. 15.8

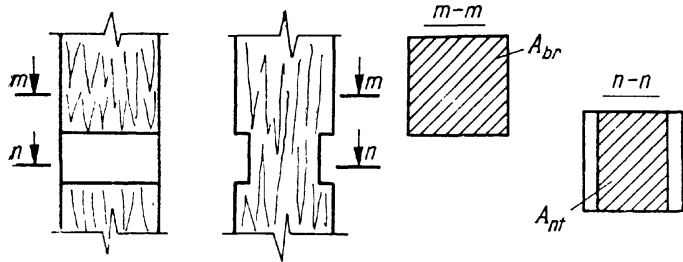


Joon. 15.9

sele poole. Sel juhul tuleb kõikides eespool vaadeldud arvutusvalemities arvesse võtta väiksem peainertsimoment  $\min I$ . Joonisel 15.8 kujutatud ristlõigetega vardad nõtkuvad noolega näidatud sihis ja minimaalsete inertsimomentidena tulevad arvesse  $I_y$ .

Surutud varrastel võivad olla erinevad kinnitustingimused ühes ja teises peatasandis. Näiteks silinderliigenditele toetatud kandepostil on liigendi sõrme ristruunas tugi vaadeldav liigendina, pikisuunas aga kinnisena (joonis 15.9, a ja b). Sellest asjaolust tulenevad erinevad nõtkepikkused ja saledused kahes ristruuas  $xy$ - ja  $xz$ -tasandis. Samuti erinevad nõtkepikkused kahes ristruuas neil juhtudel, kui vardale on ühes suunas pandud vahepealsed sidemed ja teises suunas taolised sidemed puuduvad või on asetatud teistsuguse vahekaugusega. Kõik niisugused vardad nõtkuvad välja selles sihis, milles nende saledus  $\lambda$  osutub suurimaks. Järelikult tuleb selgitada varda suurim saledus  $\max \lambda$  ja arvestada selle suurusega.

Surutud saleda varda stabiilsust ei kahjusta märgatavalt kohalikud nõrgestused sisselõigete, avade jm. näol. Seejärel tuleb eespool vaadeldud valemities varda ristlõikepindalana arvesse  $A_{br}$ . Joonisel 15.10 on kujutatud puitposti lõiku kahes vaates ja kahte ristlõiget. Prussile on tehtud tapid, mis ristlõikes  $n-n$  nõrgestavad tema tugevust, kuid ei mõjuta oluliselt stabiilsust. Stabiilsuse arvutustes võtame arvesse prussi ristlõike  $m-m$  (brutopindala  $A_{br}$ ).



Joon. 15.10

Miks stabiilsusarvutustes nõrgestust ei arvestata selgub asjaolust, et nõtkumine oma olemuselt on paine, mis tuleb varda deformeerumisest kogu pikkuse ulatuses. Et nõrgestatud piirkond moodustab väikse osa varda pikkusest, siis ka tema mõju läbipaindele (väljanõtkumisele) on tühine.

Stabiilsustingimus (15.14) nõrgestustega vardale väljendub järgmiselt:

$$\sigma = \frac{N}{\varphi A_{br}} \leq [\sigma]_c \quad (15.15)$$

Nõrgestusteta varda puhul rahuldame stabiilsustingimusega 15.14 ka tugevustingimuse. Seda ei kindlusta aga tingimus (15.15) nõrgestustega vardale, mille tugevustingimuses peame arvestama ristlõikepindalaga  $A_{nt}$ . Seepärast tuleb saada nõrgestustega varda stabiilsustingimuse kõrvale seada veel täiendavalt tugevustingimus

$$\sigma = \frac{N}{A_{nt}} \leq [\sigma]_c \quad (15.16)$$

**Näide 15.1.** Kui suur on kriitiline survejõud kahest otsast jäigalt kinnitatud terastorule, mille välisläbimõõt on 100 mm, seinapaksus 4 mm ja pikkus 12 m?

Arvutame toru ristlõike vajalikud tunnussuurused:

$$A = 12,06 \text{ cm}^2; \quad I = 139 \text{ cm}^4; \quad i = 3,39 \text{ cm}.$$

Joonisel 15.4 näeme, et antud suurutud toru vastab skeemile (b), mille puhul  $\mu = 0,5$  ja  $l_n = \mu l = 0,5 \cdot 12 = 6 \text{ m}$ .

Arvutame varda saleduse valemiga (15.9):

$$\lambda = \frac{l_n}{i} = \frac{600}{3,39} = 177,0,$$

mis näitab, et saledus kuulub *Euleri* valemi kehtivuspiirkonda. Seepärast arvutame kriitilise jõu valemiga (15.6):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_n^2} = \frac{3,14^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 139 \cdot 10^{-8}}{6^2} = 80 \cdot 10^3 \text{ N} = 80 \text{ kN}.$$

**Näide 15.2.** Arvutada kriitiline jõud malmpostile, mille pikkus on 1,5 m, ristlõige 150×150 mm ja mis ühe otsaga on jäigalt kinnitatud alusele, teine ots aga on vaba.

Arvutame ristlõike vajalikud tunnussuurused:

$$A = 225 \text{ cm}^2; \quad i = 4,33 \text{ cm}.$$

Posti toetustingimused ühtivad skeemiga (a) jooniselt 15.4. Järelikult  $\mu = 2$  ja  $l_n = \mu l = 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ m}$ .

Arvutame posti saleduse valemiga (15.9):

$$\lambda = \frac{l_n}{i} = \frac{300}{4,33} = 69,3,$$

mis tabeli 10 andmetel näitab, et  $\lambda < \lambda_E = 80$  ja kriitiline pinge tuleb arvutada *Jassinski-Tetmajeri* valemiga (15.13):

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 776 - 12 \cdot 69,3 + 0,053 \cdot 69,3^2 = 199,4 \text{ MPa},$$

millest kriitiline jõud

$$F_{cr} = A\sigma_{cr} = 225 \cdot 10^{-4} \cdot 199,4 \cdot 10^6 = 4,49 \cdot 10^6 \text{ N} = 4,49 \text{ MN}.$$

**Näide 15.3.** Määrata okaspuidust ruudukujulise ristlõikega prussi mõõtmed, mis sobiks 6 m pikkuseks kandepostiks 240 kN koormuse alla, kui posti otsad on toetatud liigenditele ja lubatav survepinge on 10 MPa.

Arvutuse teeme nõtketeguri abil. Stabiilsustingimusest (15.14) avaldame ristlõikepindala:

$$A \geq \frac{N}{\varphi [\sigma]_c}, \quad (a)$$

mille võime arvutada iteratsiooniga (järkjärgulise lähenemisega), sest avaldises esineb tundmatu suurusena nõtketegur  $\varphi$ . Näitame siin taolise arvutuse üht võimalust.

Esimeses lähenduses võtame  $\varphi_1 = 0,5$ :

$$A = \frac{240 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10 \cdot 10^6} = 480 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

millest

$$i = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{480 \cdot 10^{-4}}}{2\sqrt{3}} = 5,32 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Arvutame saleduse nõtkepikkusega  $l_n = \mu l = 1 \cdot 6 = 6 \text{ m}$ :

$$\lambda = \frac{l_n}{i} = \frac{6}{5,32 \cdot 10^{-2}} = 112,8.$$

Tabelist 11 saame lineaarse interpoleerimise teel leitud saledusele vastava nõtketeguri  $\varphi_1^* = 0,242$ . Et meie poolt valitud  $\varphi_1$  ei ühti leitud nõtketeguriga, siis saadud lahend ei sobi.

Teiseks lähenduseks võtame nõtketegurite  $\varphi_1$  ja  $\varphi_1^*$  aritmeetilise keskmise:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,242}{2} = 0,371$$

ja kordame samasugust arvutust nagu esimeses lähenduses:

$$A = \frac{240 \cdot 10^3}{0,371 \cdot 10 \cdot 10^6} = 647 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$$

$$i = \frac{\sqrt{647 \cdot 10^{-4}}}{2\sqrt{3}} = 7,34 \cdot 10^{-2} \text{ m}; \quad \lambda = \frac{6}{7,34 \cdot 10^{-2}} = 81,7,$$

millest  $\varphi_2^* = 0,471$ . Et leitud nõtketegur ei ühti teise lähendusarvutuse alguses valitud teguriga, siis oleme sunnitud tegema kolmanda lähendusarvutuse. Kolmandas lähenduses valime nõtketeguri samuti aritmeetilise keskmise suurusena teise lähenduse teguritest:

$$\varphi_3 = \frac{0,371 + 0,471}{2} = 0,421; \quad A = \frac{240 \cdot 10^3}{0,421 \cdot 10 \cdot 10^6} = 570 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$$

$$i = \frac{\sqrt{570 \cdot 10^{-4}}}{2\sqrt{3}} = 6,89 \cdot 10^{-2} \text{ m}; \quad \lambda = \frac{6}{6,89 \cdot 10^{-2}} = 87,1,$$

millest  $\varphi_3^* = 0,412$ .

Neljas lähendus:

$$\varphi_4 = \frac{0,421 + 0,412}{2} = 0,416; \quad A = \frac{240 \cdot 10^3}{0,416 \cdot 10 \cdot 10^6} = 576 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$$

$$i = \frac{\sqrt{576 \cdot 10^{-4}}}{2\sqrt{3}} = 6,93 \cdot 10^{-2} \text{ m}; \quad \lambda = \frac{6}{6,93 \cdot 10^{-2}} = 86,6,$$

millest  $\varphi_4^* = 0,418$ .

Neljandas lähenduses saime nõtketeguri  $\varphi_4$  ja  $\varphi_4^*$  kokkulangevuse arvutustäpsuse piires. Sellega oleme leidnud sobiva ristlõikepindala  $A = 576 \text{ cm}^2$ , mis vastab prussi ristlõike mõõtmetele  $240 \times 240 \text{ mm}$ .

**Näide 15.4.** Joonisel 15.11 kujutatud arvutusskeemiga postiks on kasutatud terasest Cr3 I-profiili № 40, mille suurim paindejäikus on seatud  $xy$ -tasandisse. Leida posti lubatav koormus, kui lubatav pinge on 160 MPa.

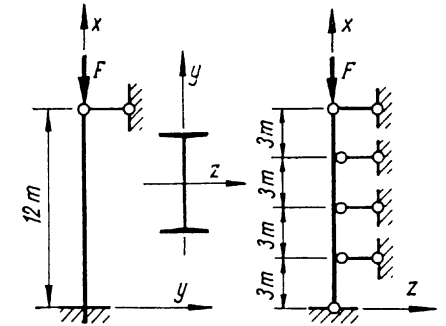
Postiks kasutatud terasprofiili ristlõike tunnussuurused leiame tabelist:  $I_x = 18930 \text{ cm}^4$ ;  $i_x = 16,3 \text{ cm}$ ;  $I_y = 666 \text{ cm}^4$ ;  $i_y = 3,05 \text{ cm}$ ;  $A = 71,4 \text{ cm}^2$ .

Nõtkepikkus  $xy$ -tasandis  $l_n = \mu_y l = 0,7 \cdot 12 = 8,4 \text{ m}$  ja  $xz$ -tasandis  $l_n = \mu_x l = 0,25 \cdot 12 = 3 \text{ m}$ . Neile nõtkepikkustele vastavad saledused:

$$\lambda_x = 8,4/0,163 = 51,5; \quad \lambda_y = 3,0/0,0305 = 98,4.$$

Suurimaks osutus saledus  $xz$ -tasandis  $\lambda_y = 98,4$ , millele tabelist 11 leiame nõtketeguri  $\varphi = 0,615$  ja lubatava koormuse arvutame stabiilsustingimusest (15.14):

$$F = [N] = \varphi A [\sigma] = 0,615 \cdot 71,4 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 703 \cdot 10^3 \text{ N} = 703 \text{ kN}.$$



Joon. 15.11

## 15.6. EKSTSENTRILISELT SURUTUD SALE VARRAS

Jaotises 12.2 vaatlesime ekstsentrilist survet varrestes, mille läbipaine oli jõu ekstsentrilisusega võrreldes väike. Nendes, nn. *jäikades varrestes* jätsime deformatsiooni mõju sisejõududele arvestamata, ehk teisiti öeldes rakendasime algmõõtmete printsiibi, mis omakorda lubas ülesannete lähendamisel kasutada jõudude mõju sõltumatuse printsiipi. Inseneripraktikas esinevad sageli *saledad ekstsentriliselt surutud vardad*, mille läbipaained ei ole hüljatavalt väiksed võrreldes jõu ekstsentrilisusega. Nendes varrestes deformatsioon avaldab olulist mõju paindemomendile ja seepärast oleme sunnitud loobuma nii algmõõtmete kui ka jõudude mõju sõltumatuse printsiibist.\*

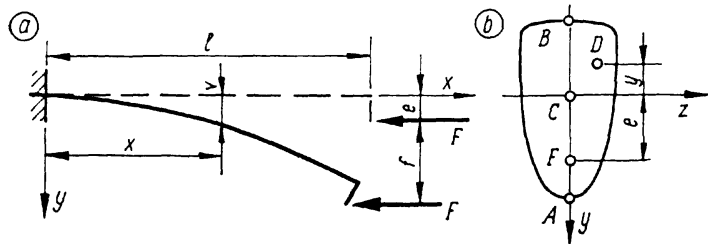
Vaatleme ekstsentriliselt surutud saledat varrast joonisel 15.12, a ja selle ristlõiget joonisel 15.12, b, kus jõu  $F$  kandesirge jäljeks on punkt  $F$  (deformeerumata olekus). Et eeldame jõu mõjumist varda  $xy$ -peatasandis, siis samas tasandis on nähtavad ka elastse joone punktide siirded. Paindemoment varda meelevaldses ristlõikes:

$$M = -F(e + f - v), \quad (a)$$

kus  $e$  on jõu  $F$  ekstsentrilisus,  $v$  — elastse joone siire punktis, mille kaugus varda kinnituskohast on  $x$  ja  $f$ -siire jõu  $F$  rakenduspunktis.

Pannes paindemomendi (a) elastse joone diferentsiaalvõrrandisse 10.4, saame:

\* Tähelepanelik lugeja arvatavasti märkas, et jõudude mõju sõltumatuse printsiip pole rakendatav ka surutud saleda varda arvutustes nõtketele, kus väikse juhusliku läbipaained arvestamine tasakaaluseisundi uurimisel pole kooskõlas algmõõtmete printsiibiga.



Joon. 15.12

$$v'' + k^2 v = k^2(e + f), \quad (b)$$

kus

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI_z}}. \quad (c)$$

Mittehomogeenset diferentsiaalvõrrandit (b) rahuldab erilahend  $v = e + f$ , mis liidetuna vastava homogeense võrrandi eespoolt tuntud üldlahendile, annab:

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + e + f. \quad (d)$$

Saadud mittehomogeense võrrandi (b) üldlahendi kaks integreerimiskonstanti  $C_1$  ja  $C_2$  ning tundmatu läbipainde  $f$  avaldame vaadeldava varda elastse joone ääretingimustest:

$$v'(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad v(l) = f,$$

millest

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -(e + f); \quad f = e \frac{1 - \cos kl}{\cos kl} \quad (e)$$

Asetades leitud konstandid (e) üldlahendisse (d), saame elastse joone võrrandi

$$v = e \frac{1 - \cos kx}{\cos kl}, \quad (f)$$

ehk asendades  $k$  oma väärtusega (c):

$$v = \frac{e}{\cos l \sqrt{\frac{F}{EI_z}}} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{F}{EI_z}} x \right). \quad (15.17)$$

Elastse joone võrrandist (15.17) näeme, et suurim siire

tekib varda koormatud otsas, kus  $x = l$ :

$$f = e \left( \frac{1}{\cos l \sqrt{\frac{F}{EI_z}}} - 1 \right). \quad (15.18)$$

Valemist (15.18) teeme kaks olulist järeldust:

- 1) jõu  $F$  ja läbipainde  $f$  sõltuvus on mittelineaarne, mis tähendab, et nad ei allu Hooke'i seadusele;
- 2) kui jõu  $F$  kasvades suurus

$$\cos l \sqrt{\frac{F}{EI_z}} \rightarrow 0, \quad (g)$$

siis läbipaine  $f$  hakkab kiiresti kasvama ja muutub suureks. See tähendab, et varras kaotab stabiilsuse ja satub kriitilisse seisundisse, millega kaasneb purunemine või väga suur deformatsioon. Kriitilisele seisundile vastab piiril (g) koosnuse argumenti suurus:

$$l \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI_z}} = \frac{\pi}{2}, \quad (h)$$

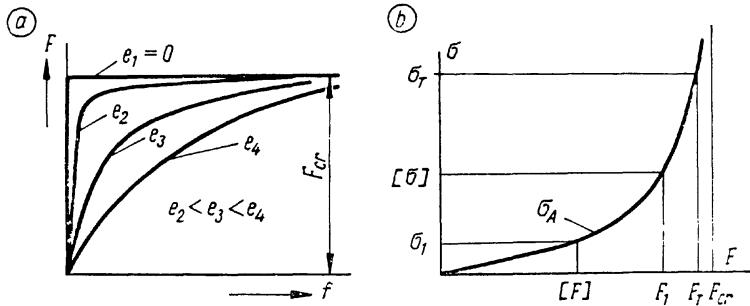
millest avaldame kriitilise jõu väärtuse:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4l^2}. \quad (15.19)$$

Järeldused kinnitavad veel kord algmõõtmete ja jõudude mõju sõltumatuse printsiipide kehtimatust.

Kui võrrelda valemist (15.19) Euleri ülesande lahendusega, siis näeme, et *ekstsentriliselt surutud saleda varda kriitiline jõud ühtib sama varda kriitilise jõuga harilikul survel*. Erinevus on muidugi kriitilise seisundi tekkimise protsessis. Harilikul survel tekib suur läbipaine (väljanõtkumine) momentaanselt, ekstsentrilisel survel aga kasvab seda sujuvamalt, mida suurem on jõu ekstsentrilisus. Joonisel 15.13, a on kujutatud läbipainde  $f$  ja jõu  $F$  vahelise sõltuvuse graafikud harilikul survel murdjoonena ( $e_1 = 0$ ) ja ekstsentrilisel survel jõu kolme ekstsentrilisusega  $e_2$ ,  $e_3$  ja  $e_4$  kõverjoontena, mis on arvutatud valemiga (15.18).

Tuleb märkida, et joonisel 15.13, a kujutatud graafikut harilikul survel ( $e_1 = 0$ ) tuleb vaadelda läbipainde  $f$  ja jõu  $F$  teoreetilise sõltuvusena. Katseandmetest me taolist graafikut ei saa, sest praktiliselt pole võimalik vältida jõu väga väikest ekstsentrilisust. Seepärast võime katsetest saada kõveraid, mis ühel või teisel määral on lähedased teoreetili-



Joon. 15.13

sele, murdjoonsele graafikule. Ka konstruktsioonides hari-likule survele allutatud elemendid käituvad nähtavasti nii nagu ekstsentriliselt surutud vardad jõu väikse ekstsentrilisusega.

Avaldame paindemomendi varda meelevaldses ristlõikes diferentsiaalseose ja elastse joone võrrandi (f) põhjal:

$$M = -EI_z v'' = -EI_z e k^2 \frac{\cos kx}{\cos kl}. \quad (i)$$

Asendades  $k$  oma avaldisega (c), saame:

$$M = -\frac{Fe}{\cos l \sqrt{\frac{F}{EI_z}}} \cos \sqrt{\frac{F}{EI_z}} x, \quad (15.20)$$

millel suurim väärtus on varda kinnituskohas, kus

$$M_0 = -\frac{Fe}{\cos l \sqrt{\frac{F}{EI_z}}}. \quad (15.21)$$

Avaldises (15.20) ja valemis (15.21) tuleb jõu ekstsentrilisust  $e$  arvestada märgiga suurusena  $y$ -telje järgi.

Normaalpinge varda ristlõikepinna punktis  $D$  (joonis 15.12, b), mille kaugus  $z$ -teljest on  $y$ , avaldub tuntud valemiga

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y, \quad (15.22)$$

kus  $N = -F$  ja  $M$  on määratav avaldisega (15.20).

Ekstreemsed normaalpinged mõjuvad varda toeristlõike punktides  $A$  ja  $B$  (joonis 15.12, b), kus nad määrame valemiga (15.22), asendades selles paindemomendi oma avaldisega (15.21):

$$\sigma_{A;B} = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{ey_{A;B}}{i_z^2 \cos l \sqrt{\frac{N}{EI_z}}} \right). \quad (15.23)$$

Suure jäikusega lühikese varda jaoks, mille jäikust iseloomustav suurus

$$l \sqrt{\frac{N}{EI_z}} \rightarrow 0 \quad \text{ja} \quad \cos l \sqrt{\frac{N}{EI_z}} \rightarrow 1, \quad (i)$$

valemid (15.20...23) ühtivad jaotisest 12 tuntud ekstsentrilise surve valemitega. Saadate varraste arvutustes need suurused jäävad piiridesse

$$0 < l \sqrt{\frac{N}{EI_z}} < \frac{\pi}{2}; \quad 1 > \cos l \sqrt{\frac{N}{EI_z}} > 0 \quad (k)$$

ja seavad paindemomendi ja normaalpinged mittelineaarsesse sõltuvusse jõust  $F$  (või  $N$ ). Joonisel 15.13, b on kujutatud  $F\sigma$ -teljestikus vaadeldava varda toeristlõike punktis  $A$  mõjuva survepinge  $\sigma_A$  graafik sõltuvalt jõust  $F$ .

Vaatleme ekstsentriliselt surutud saleda varda tugevustingimust, mida ei saa seada nii nagu oleme seda teinud eespool käsitletud tööseisundite puhul, kus pinged olid lineaarses sõltuvuses koormusest. Nendel juhtudel oli tugevuse varutegur ühtne nii suurimale pingele vardas kui ka koormusele:

$$S = \frac{\sigma_T}{\sigma} = \frac{F_T}{F},$$

kus  $\sigma_T$  on tugevuse piirpinge, milleks plastsetel materjalidel on voolavuspinge, teistel materjalidel aga tugevus  $\sigma_B$ ;  $F_T$  on tugevuse piirkoormus, mis kutsub esile piirpinge  $\sigma_T$ ;  $\sigma$  on suurim pinge, mille kutsub esile koormus  $F$ , ja  $S$  on ühtne varutegur, mida arvutatakse pingete järgi.

Ekstsentriliselt surutud saleda varda suurim pinge ja koormus ei ole lineaarses sõltuvuses. Kui juhindume tugevuse varutegurist  $S=2$  ja leiame lubatava pinge  $[\sigma] = \sigma_T/S$  joonisel 15.13, b toodud graafikul, siis sellele vastab koormus  $F_1$ , mis ilmselt ei ole tugevuse piirkoormusega  $F_T$  suhtes  $S=2$ , vaid on sellele koormusele ohtlikult lähedal. Et saavutada vajalikku varutegurit tugevuse piirkoormuse

suhtes, peame määrama lubatava koormuse  $[F]=F_T/S$ . Nagu näeme graafikult, kutsub lubatav koormus esile pinge  $\sigma_1$ , mis on märgatavalt madalam lubatavast pingest  $[\sigma]$ .

Eeltoodust järeldame, et *ekstsentriliselt surutud saledale vardale pole rakendatav klassikaline tugevustingimus lubatava pingega, vaid siin tuleb tingimus seada lubatava koormuse alusel*. Selle tunnuse järgi see tugevusarvutus meenu tab purustava (piir-)koormuse arvutusmeetodit.

Tugevusarvutuse võime teha kahel teel, millest esimene on osaliselt graafiline. Koostame  $F\sigma$  graafiku valemi (15.23) najal (joonis 15.13, b) ja määrame graafikult kas vajaliku lubatava koormuse või siis tugevuse varutegurit antud koormusele. Niisuguse lahenduse puuduseks on see, et peame ehitama suurima pinge ja koormuse graafiku praktiliseks arvutuseks vajaliku täpsusega. Tugevusarvutuse teiseks teeks on probleemi täielikult analüütiline lahendus. Selleks võrrutame suurima pinge avaldise (15.23) tugevuse piirpingega  $\sigma_T$  ( $\sigma_B$ ) ja vaatleme seda võrrandina, milles tundmatuks suuruseks on varda piirkoormus  $N_T$  või  $SN$  ( $F_T$  või  $SF$ ). Lahendame võrrandi, millega määrame piirkoormuse. Tugevustingimuse seame järgmisel kujul:

$$N \leq \frac{N_T}{S}. \quad (15.24)$$

Kirjeldatud arvutusviisis eeldame, et proportsionaalsuspiir  $\sigma_{pr}$  langeb kokku voolamise alguspunktiga. Seda nõuab valemi 15.23 rakendamine, mis toetub *Hooke'i* seadusele. Et proportsionaalsuspiirile  $\sigma_{pr}$  ja voolamise algusele vastavate punktide vahekaugus  $\sigma-\epsilon$  graafikul pole suur, siis lubatavate koormuste ja tugevuste varutegurite määramine kirjeldatud arvutusviisiga on harilikult küllalt täpne. Viga arvutustes on oluline siis, kui lubatav koormus ületab 80...85% piirkoormusest või varutegur  $S < 1,2$ . Inseneripraktikas harilikult nii madalaid tugevuse varutegureid ei esine.

Ekstsentriliselt surutud saledatele varrastele tuleb tugevustingimuse kõrval seada ka stabiilsustingimus nii ühes kui ka teises peatasandis, nagu me neid tingimusi vaatlesime eelmistes punktides. Sageli langeb paindetasandis (ekstsentrilisuse tasandis) stabiilsuse kontrollimise vajadus ära, kui tugevuse ja stabiilsuse varutegurid on võrdsed ( $S=S_n$ ) ja varda saledus  $\lambda \geq \lambda_E$ . Igal juhul tuleb varda stabiilsust kontrollida teises peatasandis, mis on risti paindetasandiga, kui selles suunas nõtkumine on võimalik.

## 15.7. PIKI-PÕIKPAINE

Põikpainde ja surve või tõmbe koosmõju saledas vardas nimetame *piki-põikpaindeks*. Sama tööseisund jäigas vardas kuulub ekstsentrilise surve valdkonda, mida vaatlesime jaotises 12.2. Piki-põikpaindel on palju ühist eelmises jaotises vaadeldud saleda varda ekstsentrilise survega.

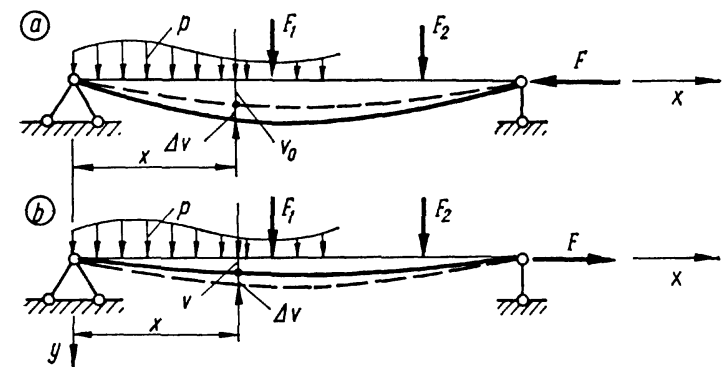
Varda arvutamisel piki-põikpaindele võtame arvesse läbipainde mõju paindemomendile. Vaatleme joonisel 15.14 lihttalasid, millele võivad mõjuda ühesuunaline põikkoormus  $p$ ,  $F_1$ ,  $F_2, \dots$ , ja pikijõud  $F$ , mis talas  $a$  kutsub esile survejõu ja talas  $b$  tõmbejõu. Rakendame mõttes taladele esialgu ainult põikkoormuse, millest tekib läbipaine  $v_0$ . Selle järel rakendame pikijõu  $F$ , mis talal  $a$ , kus ta esineb survejõuna, suurendab läbipainet  $\Delta v$  võrra ja lõplik läbipaine  $v=v_0+\lambda v$ . Talal  $b$  vähendab tõmbejõud läbipainet  $\Delta v$  võrra ja lõplik läbipaine  $v=v_0-\Delta v$ . Peamise tähelepanu pöörame käesolevas jaotises survejõuga talale jooniselt 15.14, a, mis inseneripraktikas on olulisem probleem kui tõmbejõuga tala.

Survejõuga tala (joonis 15.14, a) ristlõikes kaugusel  $x$  vasakust toest mõjub paindemoment

$$M=M_0+Fv, \quad (a)$$

kus  $M_0$  on paindemoment põikkoormusest ja  $Fv$  paindemoment pikijõust  $F$ .

Pannes paindemomendi avaldise (a) tala elastse joone diferentsiaalvõrrandisse (10.4), saame:



Joon. 15.14

$$v'' = -\frac{M_0 + Fv}{EI_z}. \quad (b)$$

Võrrandile (b) otsime lahendit eespool arendatud mõttekäigu järgi:

$$v = v_0 + \Delta v, \quad (c)$$

kus  $v_0$  on ainult põikkoormusest põhjustatud läbipaine, mida vaatleme tuntud suurusena, ja  $\Delta v$  — läbipainde juurdekasv, mis tekib pikijõu  $F$  lisandumisest põikkoormusele ja mida me käsitleme tundmatuna.

Arendame lahendis (c) tundmatu funktsiooni  $\Delta v$  *Fourier'* ritta:

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (d)$$

mille liikmed rahuldavad vaadeldava tala elastse joone ääritingimusi  $v(0) = 0$  ja  $v(l) = 0$ . *S. Timoshenko* oma uurimustega selgitas, et ühesuunalise põikkoormusega talade jaoks lahendis (d) koondub rida väga soodsalt ja küllaldase arvutustäpsuse kindlustab juba esimene liige

$$v = v_0 + C_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (e)$$

Diferentseerime otsitava lahendit (e) kaks korda  $x$ -i järgi

$$v'' = v''_0 - \frac{\pi^2}{l^2} C_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (f)$$

kus asendame seosest (e) suuruse

$$C_1 \sin \frac{\pi x}{l} = v - v_0,$$

millega teine tuletis (f) saab järgmise väljenduse:

$$v'' = v''_0 - \frac{\pi^2}{l^2} (v - v_0). \quad (g)$$

Võrrutame teise tuletise avaldised (b) ja (g):

$$v''_0 - \frac{\pi^2}{l^2} (v - v_0) = -\frac{M_0}{EI_z} - \frac{F}{EI_z} v,$$

millest taandame võrdsed suurused

$$v''_0 = -\frac{M_0}{EI_z}$$

ja saame võrrandi

$$\frac{\pi^2}{l^2} (v - v_0) = \frac{F}{EI_z} v. \quad (h)$$

Võrrandist (h) avaldame otsitava läbipainde

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F l^2}{\pi^2 EI_z}}, \quad (i)$$

kus suurus  $\pi^2 EI_z / l^2$  väljendaks valemi (15.2) põhjal vaadeldava tala kriitilist jõudu stabiilse tasakaalu piiril, kui selle tala saledus  $\lambda_z > \lambda_E$ . Tähistame selle suuruse

$$F_E = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \quad (15.25)$$

ja nimetame *Euleri jõuks*, millega avaldis (i) saab järgmise kuju:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F}{F_E}}, \quad (15.26)$$

mis on tuntud *Timoshenko valemina*.

Kui pikijõud  $F$  tekitab talas tõmbejõu (joonis 15.14, b), siis *Timoshenko* valemis miinusmärk asendub plussmärgiga:

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{F}{F_E}}. \quad (15.27)$$

Valemities (15.26 ja 27) esinev *Euleri* jõud  $F_E$  pole piiratud materjali piirsaledusega  $\lambda_E$ , mis on määratud seosega (15.12). Teatavasti varda kriitiline jõud stabiilse tasakaalu piiril on arvutatav *Euleri* valemiga ainult siis, kui varda saledus ületab piirsaleduse  $\lambda_E$ . Seepärast pole soovitatav *Euleri* jõudu piki-põikpainedel nimetada tala kriitiliseks jõuks, nagu seda mõnikord siiski tehakse.

Valemist (15.26) näeme, et tala läbipainete  $v$  ja  $v_0$  vahetõlge on suhte  $F/F_E$ . Sellest järeldub, et see suhe iseloomustab tala näivat jäikust piki-põikpainedel. Kui suhe  $F/F_E \rightarrow 0$ , siis tala näiv jäikus põikkoormuse suhtes on suur, suhte kasvades näiv jäikus väheneb ja kui suhe  $F/F_E \rightarrow 1$ , siis tala kaotab põikkoormuse kandevõime. Peab aga märkima, et suhte ülemise piiri lähedal valem (15.26) pole kasutatav, sest ta kaotab kehtivuse lihtsustuste tõttu diferentsiaalvõrrandis (10.4) ja *Timoshenko* valemi tuletamisel. Ka valem



(15.27) kaotab kehtivuse tõmbele allutatud varda läbipainete arvutamisel, kui jõud  $F$  on suur ( $F > 2F_E$ ).

Piki-põikpaindele allutatud tala sisejõud  $N=F$  ja paindemoment

$$M = M_0 \pm Fv, \quad (15.28)$$

kus plussmärk tuleb arvesse survejõu ja miinus tõmbejõu puhul. Põikjõud sõltuvad peamiselt põikkoormusest ja need arvutame nagu harilikul paindel.

Normaalpinge arvutame piki-põikpaindele töötava tala ristlõikes valemiga

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y = \frac{N}{A} + \frac{M_0}{I_z} y + \frac{Fv}{I_z} y. \quad (15.29)$$

Suurimad tõmbe- ja survepinged  $z$ -telje suhtes sümmeetrilise ristlõikepinnaga talas avalduvad valemiga

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_z} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_0}{W_z} \pm \frac{Fv}{W_z}. \quad (15.30)$$

Piki-põikpaindele allutatud talale pole tugevustingimust võimalik seada lubatavate pingete arvutusmeetodiga. Põhjus on siin sama, mis ekstsentriliselt surutus saledal vardal eelmisest jaotisest. Valemite (15.29 ja 30) näeme, et ka siin koormusega mittelineaarses sõltuvuses olev läbipaine  $v$  kujundab paindemomendi ja normaalpinge samalaadse sõltuvuse koormusest. Tugevusvaru küsimus muutub veelgi keerukamaks kui ekstsentriliselt surutus saledal vardal, sest siin koosneb koormus mitmest komponendist, mis igaüks omal viisil kasvades, võivad kutsuda esile kui tahes suure hulga üksteisest erinevaid piirteisundeid. Seejuures jääb isegi lahtiseks tugevuse varuteguri arvuline määramine. Varutegur määratakse piki-põikpaindel lihtsustava oletusega, et piirteisundisse üleminekul tala kõik koormused kasvavad proportsionaalselt oma väärtustega. Teisiti öeldes eeldame, et koormuste kasvades nende suhe säilib konstantsena, nii nagu me seda tegime tugevusteooriates jaotises 11. Selle lihtsustava oletusega võime tala tugevusarvutuse teha lubatava koormusega, mis on määratav kui eelnevalt oleme kindlaks teinud piirkoormuse. Piirkoormusena mõistame ka siin seda, mis kutsub esile tugevuse piirpinge tala ohtlikus punktis. Lähemalt vaatleme seda küllaltki keerulist küsimust järgneva näite põhjal.

Piki-põikpaindele allutatud talad teistsugustel tugeudel ja otste kinnitustingimustes arvutatakse samal viisil selle erinevusega, et valemite (15.26 ja 27) kasutame neile varras-

tele vastavaid Euleri jõudusid, mis üldkujul on arvutatavad valemiga (15.3).

Piki-põikpaindele töötavad surutus vardad peavad peale tugevustingimuste rahuldama ka stabiilsustingimuse, mida midugi ei seata tõmbele allutatud varrastele.

Vaatleme piki-põikpaindele töötava tala näidet, mis aitab mõista ka ekstsentriliselt surutus saleda varda tugevuse ja stabiilsuse arvestust.

Näide 15.5. Määrame joonisel 15.15 kujutatud profiilterasest I-tala nr. 24 lubatavad koormused tingimisel, et  $F=1000p$ . Materjali voolavuspinge  $\sigma_T=270$  MPa, varutegurid tugevusele  $S=1,5$  ja stabiilsusele  $S_n=1,8$ . Tala on konstruktsioonis teiste elementidega seotud nii, et tema väljanõtkumine rõhitasandis pole võimalik, küll aga on see oht püsttasandis lauskoormuse suunas.

Tala ristlõikepindala  $A=34,8$  cm<sup>2</sup>, inertsimoment  $I=3460$  cm<sup>4</sup>, tugevusmoment  $W=289$  cm<sup>3</sup>, inertsiraadius  $i=9,97$  cm ja elastsusmoodul  $E=210$  GPa.

Avaldame valemite (8.5) ja (10.21) põhjal paindemomendi ja läbipainde tala keskkohal ühtlasest lauskoormusest  $p$ :

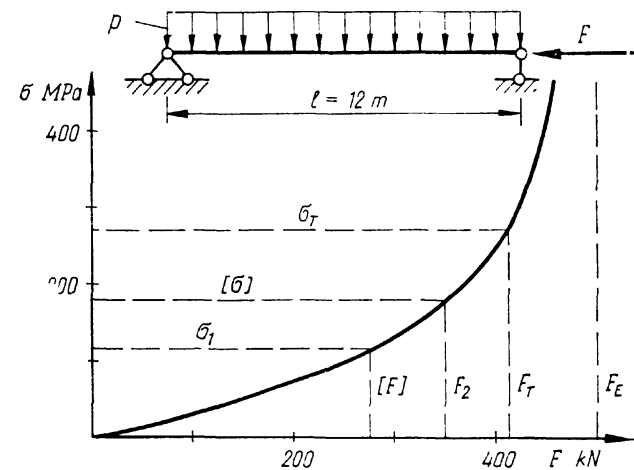
$$M_0 = p l^2 / 8 = p \cdot 12^2 / 8 = 18p;$$

$$v_0 = \frac{5 p l^4}{384 E I} = \frac{5 p 12^4}{384 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 3,72 \cdot 10^{-5} p.$$

Euleri jõu arvutame valemiga (15.25):

$$F_E = \pi^2 E I / l^2 = 3,14^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 3460 \cdot 10^{-8} / 12^2 = 498 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Tala keskkoha läbipainde, mis on põhjustatud põikkoormuse  $p$  ja pikijõu  $F$  koosmõjust, avaldame Timoshenko valemiga (15.26):



Joon. 15.15

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F}{F_E}} = \frac{3,72 \cdot 10^{-5} p}{1 - \frac{F}{498 \cdot 10^3}}$$

Avaldame valemiga 15.30 suurima survepinge tala keskkoha ristlõike ülemisel serval, mis on vaadeldava tala ohtlik piirkond. Avaldises asendame põikkoormuse, väljendades selle pikijõu kaudu  $p=0,001F$ :

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M_0}{W} - \frac{Fv}{W} = -\frac{F}{34,8 \cdot 10^{-4}} - \frac{0,018F}{289 \cdot 10^{-6}} - \frac{F \cdot 3,72 \cdot 10^{-8} F}{289 \cdot 10^{-6} \left(1 - \frac{F}{498 \cdot 10^3}\right)},$$

mis peale lihtsustamist annab sõltuvuse:

$$\sigma = -350F - \frac{0,129F^2}{1000 - \frac{F}{498}} \quad (j)$$

Saadud sõltuvuses anname argumendile  $F$  väärtuse teatava samuga (näiteks  $50 \cdot 10^3$  N), arvutame suurima survepinge  $\sigma$  väärtused, kanname neile koordinaatidele vastavad punktid  $F\sigma$ -teljestikku ja joonestame funktsiooni  $\sigma=f(F)$  graafiku (joonis 15.15). Graafikul määrame tuguvuse piirpingele (voolavuspingele)  $\sigma_T=270$  MPa vastava pikijõu  $F_T \approx 410 \cdot 10^3$  N, millele vastab ühtlaselt jaotatud põikkoormus  $p_T=0,001F=410$  N/m. See koormuste kombinatsioon kutsuks talä ohtlikus punktis esile tuguvuse piir seisundi. Tuguvuse varuteguriga  $S=1,5$  saame lubatavad koormused  $[F]=F_T/S=410/1,5=273$  kN ja  $[p]=273$  N/m.

Graafikult selgub, et lubatavad koormused kutsuvad talas esile suurima survepinge  $\sigma_1=115$  MPa, mis moodustab voolavuspingega suhte  $\sigma_T/\sigma_1=270/115=2,35$ . Näeme, et see suhe ületab suurel määral tuguvuse varuteguri  $S=1,5$ . Kui koormaksime tala nii, et suurim survepinge võrduks lubatava pingega  $[\sigma]=\sigma_T/S=270/1,5=180$  MPa, siis vastaks sellele koormuste kombinatsioon  $F_2=350$  kN (graafikult) ja  $p_2=350$  N/m. Koormused  $F_2$  ja  $p_2$  moodustavad tuguvuse piirkoormustega suhte  $F_T/F_2=410/350=1,17$ , mis on oluliselt vähem tuguvuse varutegurist ja ilmselt ohtlikult lähedal piirkoormusele.

Lahendasime ülesande osaliselt graafiliselt, mis on õpellik, sest annab hea ettekujutuse taolistest mittelineaarsetest ülesannetest. Graafiline lahendusviis on praktikas kasutatav, kuid tänapäeval eelistatakse analüütilist lahendust. Selleks võrrutame suurima survepinge  $\sigma$  sõltuvuses (j) voolavuspingega  $\sigma_T=270$  MPa ja tähistame sellele vastava koormuse  $F_T$ :

$$-270 \cdot 10^6 = -350F_T - \frac{0,129F_T^2}{1000 - \frac{F_T}{498}},$$

mis teisendub ruutvõrrandiks

$$(10^{-6}F_T)^2 - 1,56(10^{-6}F_T) + 0,473 = 0$$

või

$$F_T^2 - 1,56F_T + 0,473 = 0,$$

kui arvestame jõudu  $F_T$  mõõtühikuga MN. Võrrandi kahest juurest  $F_T=(1,147; 0,412)$  MN tuleb võtta teine

$$F_T=412 \text{ kN},$$

sest esimene annab jõu, mis kaugelt ületab tala tõelise kandevõime. Jõud  $F_T=1147$  kN kutsuks esile tala keskmise ristlõike alumisel serval tõmbepinge, mis võrduks voolavuspingega, kui survetsoon suudaks taluda pingeid, mis mitmekordselt ületaksid voolavuspinge. Et tala taoline pingeseisund pole võimalik, siis pole ka asjalikku mõtet koormusel  $F_T=1147$  kN.

Arvutame leitud lahendi põhjal tala lubatava koormuse:

$$[F]=F_T/S=412/1,5=275 \text{ kN};$$

$$[p]=275 \text{ N/m}.$$

Tala stabiilsuse kontrollimiseks arvutame saleduse:

$$\lambda = \mu l/i = 1 \cdot 12/9,97 \cdot 10^{-2} = 120,4 > \lambda_E = 100,$$

mis, nagu näeme, ületab hariliku terase piirsaleduse  $\lambda_E$ . Järelikult kriitiline jõud tuleb antud juhul arvutada *Euleri* valemiga. See jõud ühtib käesolevas ülesandes kasutatud Euleri jõuga  $F_E$ :

$$F_{cr}=498 \text{ kN}.$$

Stabiilsuse varuteguriga  $S_n=1,8$  saame lubatava koormuse

$$[F]=F_{cr}/S_n=498/1,8=277 \text{ kN},$$

mis veidi ületab tuguvustingimusest määratud lubatava jõu  $[F]=275$  kN.

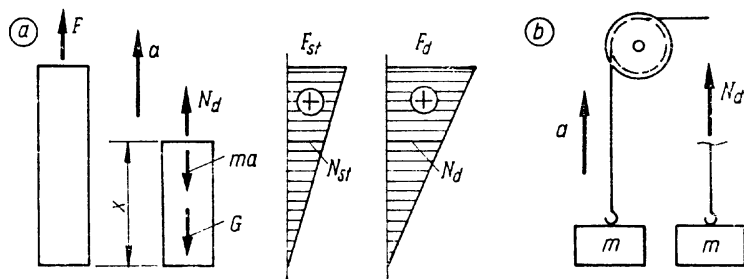
*Vastus:* Talale võime rakendada pikijõu 275 kN ja põikkoormuse 275 N/m.

## 16. DÜNAAMILINE KOORMUS

### 16.1. SISEJÕUD KIIRENDUSEGA LIIKUMISEST

**16.1.1. Külgliikumine.** Seni vaatlesime koormuse staatilist mõju konstruktsioonelementidele. Seejuures jõud olid muutumatud või nii aeglaselt muutuvad, et nendest põhjustatud kiirendused osutusid tähtsusetult väikesteks ja võisid jääda tähelepanuta. Koormuste taoline mõjumisviis võimaldas *inertsijõududest* loobuda ja ülesandeid lahendada staatika valdkonnas. Kui konstruktsioonelemendi koormus rakendub kiiresti, kui lühikeses ajavahemikus muutub tema rakenduspunkt, siht, suund või suurus, või kui mõjuvad jõud sõltuvad oluliselt elemendi enese kiirendusega liikumisest, siis pingete ja deformatsioonide määramisel peame siirduma dünaamika valdkonda.

Vaatleme kehale mõjuvat lisakoormust, mis tuleneb tema enda kiirendusega liikumisest. Kui keha mingi punkt liigub kiirendusega  $a$ , siis selle punkti ümbert välja lõigatud elementaarosale massiga  $dm$  mõjub kiirenduse vastassuunas *inertsijõud* suurusega  $adm$ . Liikumise üldjuhul on kiirendus ja elementaarinertsijõud keha ruumalas muutuvad nii suunalt



Joon. 16.1

kui ka suuruselt. Kulgliikumisel on kiirendus keha kõikides punktides ühesugune ja samalaadne on ka inertsijõud. Järelikult kulgliikumisel jaguneb inertsijõud homogeenise keha ruumalal ühtlaselt ja tema suurus on  $ma$ .

Sisejõud arvutame lõikemeetodiga, rakendades seejuures teoreetilistest mehaanikast tuntud *d'Alembert'i printsiipi*. Teatavasti lubab see printsiip seada liikuvale kehale mis tahes ajamomendil tasakaalutingimused, kui mõjuvatele jõududele lisada inertsijõud.

Määrame sisejõu joonisel 16.1,  $a$  kujutatud raskes vardas, mida tõstetakse ülemisest otsast ühtlase kiirendusega  $a$ . Olgu varda ristlõikepindala  $A$ , tihedus  $\rho$  ja tema kiirendus samas suurusjärgus vabalangemise kiirendusega  $g$ . Varras on kulgliikumises ja inertsijõud jaguneb temas ühtlaselt. Teeme vardale mõttes lõike kohas  $x$  ja vaatleme alumist osa, mille lõikepinnale rakendame tundmatu tõmbejõu  $N_d$ . Vaadeldavale osale mõjuvad veel tema omakaal  $G = mg$  ja inertsijõud  $ma$ . Et kõik kolm on kujutatavad koondjõududena varda teljel, siis rahuldavad nad tasakaalutingimust

$$\sum X = 0; \quad N_d - G - ma = 0,$$

millest avaldame tõmbejõu, asendades  $G = mg$  ja  $m = \rho Ax$ :

$$N_d = k_d g \rho A x, \quad (16.1)$$

kus

$$k_d = 1 + \frac{a}{g}. \quad (16.2)$$

Suurim normaaljõud mõjub varda ülemises otsas, kus  $x = l$ :

$$\max N_d = k_d g \rho A l = k_d G. \quad (16.3)$$

Võrdleme saadud avaldise valemitega (2.2) ja (2.3).

Näeme, et oluliseks erinevuseks on dimensioonitu kordaja  $k_d$ , mis kannab nimetust *dünaamikategur*. See tegur, korrutatuna keha kaaluga, annab tema näiva kaalu muutunud kiirendusväljas tugevusega  $g + a$ . Teisiti öeldes, me võime ülesannet vaadelda staatikaga valdkonnas ja koormuse dünaamilise mõju võtta arvesse dünaamikateguriga, millega korrutame staatilisest arvutusest saadud koormust, sisejõudusid, pingeid, deformatsioone ja teisi suurusi. Tähistades staatilistes ja dünaamilistes arvutustes esinevad suurused indeksitega vastavalt  $st$  ja  $d$ , saame üldise arvutusvalemi järgmisel kujul:

$$S_d = k_d S_{st}. \quad (16.4)$$

Dünaamikategur  $k_d$  on sageli kasutatav koormuse dünaamilise mõju arvestamisel. Enamasti piirdub selle teguri rakendamine püstsihis mõjuvate koormustega, kui kiirendused pole suured. Vaadeldud ülesandes ja paljudel teistel juhtudel on dünaamikategur määratav arvutuslikul teel, kuid teda võib selgitada ka eksperimentaalse uurimise või mõõtmiste najal, nagu seda tehakse lennukite, sildade ja teiste suurte ja keerukates tingimustes töötavate konstruktsioonide jaoks.

**Näide 16.1.** Arvutame lifti trossi tõmbejõu, kui laskumine kiirusega 4 m/s pidurdub ühtlaselt kolme sekundi jooksul (joonis 16.1, b). Lifti mass koos inimestega on 750 kg.

Kui lift seisab või liigub ühtlaselt, siis trossi tõmbejõud

$$N_{st} = mg = 750 \cdot 9,81 = 7358 \text{ N} = 7,36 \text{ kN}.$$

Dünaamikateguri arvutame valemiga (16.2):

$$k_d = 1 + a/g = 1 + 4/(3 \cdot 9,81) = 1 + 0,136 = 1,136.$$

Trossi tõmbejõud pidurdamisel

$$N_d = k_d N_{st} = 1,136 \cdot 7,36 = 8,36 \text{ kN}.$$

**Näide 16.2.** Vaatleme veel ühte ülesannet, milles varras sooritab keerukamat kiirendusega kulgliikumist. Määrame joonisel 16.2 kujutatud vântmehhanismi paralleelvarda paindemomendi epüüri. Vântmehhanism teeb 300 pöört minutis ja terasest paralleelvarda ristlõikepindala on 34,5 cm<sup>2</sup>.

Võttes arvesse terase tiheduse  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ , arvutame paralleelvarda massi:

$$m = \rho LA = 7800 \cdot 2 \cdot 34,5 \cdot 10^{-4} = 53,82 \text{ kg}.$$

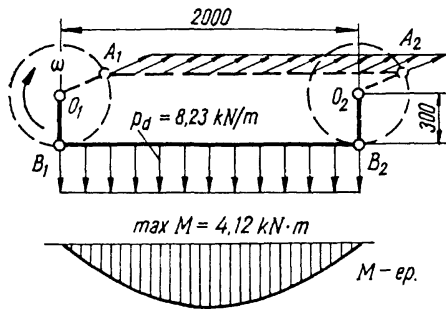
Mehhanismi pöörlemise nurkkiirus

$$\omega = 2\pi \cdot 300/60 = 31,42 \text{ rad/s},$$

millest paralleelvarras saab vântadesuunalise kiirenduse

$$a = \omega^2 R = 31,42^2 \cdot 0,3 = 296,1 \text{ m/s}^2.$$

Sellest kiirendusest tuleneb konstantse suurusega ja muutuva suunaga inertsijõud, mis paralleelvarda kõige madalamas asendis  $B_1 B_2$ , mõjudes talle ristsuunas ja liitudes raskusjõuga, kutsub esile kõige suurema dünaamilise ühtlaselt jaotatud põikkoormuse  $\rho_a$ . Arvutame



Joon. 16.2

selle koormuse dünaamikateguri valemiga (16.2):

$$k_d = 1 + a/g = 1 + 296,1/9,81 = 1 + 30,19 = 31,19.$$

Paralleelvarda lauskoormus omakaalust

$$p_{st} = mg/l = 53,82 \cdot 9,81/2 = 264 \text{ N/m},$$

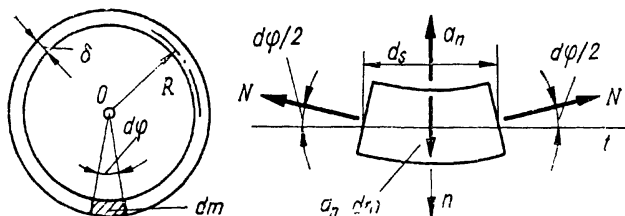
mis korrutatuna dünaamikateguriga annab

$$p_d = k_d p_{st} = 31,19 \cdot 264 = 8234 \text{ N/m}.$$

See ühtlane suurim dünaamiline lauskoormus kutsub paralleelvargas esile paindemomendi, mille epüür on kujutatud joonisel suurima ordinaadiga keskkohal:

$$\max M = p_d l^2/8 = 8234 \cdot 2^2/8 = 4117 \text{ N} \cdot \text{m} = 4,12 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

**16.1.2. Pöörliikumine** kutsub esile muutuva kiirenduse keha ruumalas. Erandiks on ühtlaselt pöörlev õhuke rõngas, milles kiirendust võib lugeda konstantseks kogu ruumalas teatud tingimustel. Vaatleme seda pöörliikumise kõige lihtsamat ülesannet joonisel 16.3. Kujutame rõngast pöörlemas suure nurkkiirusega  $\omega$  joonise tasandis ümber punkti  $O$ . Olgu rõnga ristlõikepindala  $A$ , materjali tihedus  $\rho$  ja paksus  $\delta$  väike võrreldes keskmise raadiusega  $R$ . Kuna  $\delta \ll R$ , siis võime rõnga punktide normaalkiirendused paksuse  $\delta$  ulatuses lugeda võrdseteks ja arvutada raadiuse  $R$  najal teoreeti-



Joon. 16.3

lisest mehaanikast tuntud valemiga

$$a_n = \omega^2 R. \quad (a)$$

Vabalangemise kiirenduse jätame arvestamata, kuna nendes ülesannetes  $g \ll a_n$ . Ka dünaamikategur kaotab siin oma mõtte.

Eraldame rõngast kahe ristlõikega elementaarosa massiga  $dm$ . Osale mõjub normaalkiirendus  $a_n$ , mis on suunatud pöörlemiskeskmesse  $O$  ja kutsub esile vastupidi suunatud elementaarinertsijõu  $a_n dm$ . See inertsijõud võib tasakaalustada ainult lõikepindadel mõjuvate sisejõududega, millest arvesse tulevad normaaljõud ja paindemomendid pöörlemistasandis. Ülejäänud sisejõud puuduvad, milles võime veenduda, kui peame silmas süsteemi sümmeetriat (vt. jaotis 14.4.3). Pöörlemistasandis mõjuv paindemoment on tähtsusetult väike, kui  $\delta \ll R$  ja seepärast loeme ka selle võrdseks nulliga. Vaadeldava elemendi kahel lõikepinnal mõjuvate normaaljõudude sümmeetriast järeldub nende võrdsus, millega kõrvaldub ülesandest staatikaline määramatus. Seame vaadeldavale elemendile tasakaalutingimuse

$$\sum n = 0; \quad -N \sin d\varphi/2 - N \sin d\varphi/2 + a_n dm = 0, \quad (b)$$

milles kiirenduse  $a_n$  asendame seosest (a) ja elemendi massi oma väärtusega  $dm = \rho dV = \rho A ds = \rho A R d\varphi$ . Pidades silmas, et väikse nurga puhul  $\sin d\varphi/2 = d\varphi/2$ , saame võrrandist (b) avaldada otsitava tõmbejõu:

$$N = \rho \omega^2 R^2 A, \quad (16.5)$$

mildest normaalpinge ja rõnga suhteline ja absoluutne deformatsioon avalduvad tuntud seoste põhjal:

$$\sigma = \rho \omega^2 R^2; \quad \varepsilon = \rho \omega^2 R^2/E; \quad \Delta R = \rho \omega^2 R^3/E. \quad (16.6)$$

Kui ülesande algandmetena on antud materjali erikaal  $\gamma$  ja pöörlemisagedus minutis  $n$ , siis asendame valemities (16.5) ja (16.6) suurused  $\rho = \gamma/g$  ja  $\omega = \pi n/30$ .

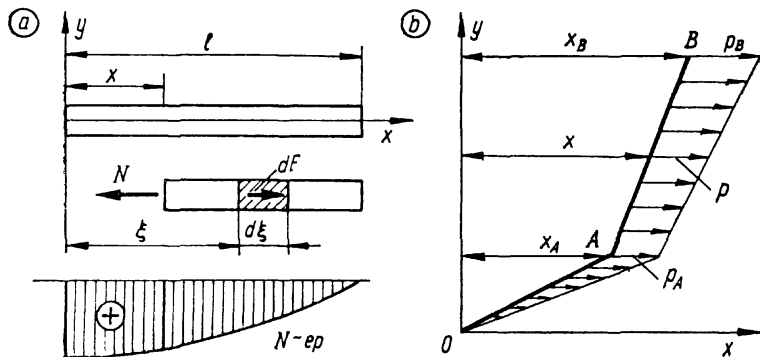
Vaatleme ülesannet jooniselt 16.4, a, kus kujutame varrast ristlõikepindalaga  $A$ , tihedusega  $\rho$  ja elastsusmoduliga  $E$ , mis pöörleb ühtlase nurkkiirusega  $\omega$  ümber  $y$ -telje. Määrame selle varda tõmbejõu, pinge ja pikenemise.

Teeme lõike kohas  $x$  ja seame varda parempoolsele osale tasakaalutingimuse

$$\sum X = 0; \quad -N + \int_x^l dF = 0, \quad (c)$$

milles elementaarne inertsijõud

$$dF = a_n dm = \omega^2 \xi \rho A d\xi. \quad (d)$$



Joon. 16.4

Asetades avaldise (d) tasakaaluvõrrandisse (c), saame pärast integreerimist avaldada otsitava tõmbejõu:

$$N = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A (l^2 - x^2). \quad (16.7)$$

Tõmbejõu  $N$ -epüür on kujutatud joonisel 16.4, suurima väärtusega kinnituskohas ( $x=0$ ):

$$\max N = \frac{1}{2} m \omega^2 l, \quad (16.8)$$

kus  $m$  on varda mass. Pinge vardas

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (l^2 - x^2); \quad \max \sigma = \frac{1}{2} \rho \omega^2 l^2 \quad (16.9)$$

ja pikenemine

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dx = \int_0^l \frac{\sigma}{E} dx = \frac{\rho \omega^2}{2E} \int_0^l (l^2 - x^2) dx,$$

millest saame

$$\Delta l = \frac{\rho \omega^2 l^3}{3E}. \quad (16.10)$$

Joonisel 16.4, b on kujutatud murdjoonse teljega varras  $OAB$ , mis on kinnitatud ühe otsaga punktis  $O$  ja pöörleb ühtlase nurkkiirusega  $\omega$  ümber  $y$ -telje. Olgu varda ristlõikepindala  $A$  ja tihedus  $\rho$ . Selle ja teiste taoliste ülesannete lahendamisel on otstarbekas kujutada inertsijõud lauskoor-

musena  $p$  varda teljel. Inertsijõu intensiivsust

$$p = dF/ds, \quad (e)$$

kus  $dF$  on elementaarinertsijõud, mis mõjub varda elemendile pikkusega  $ds$ . Avaldades  $dF$  valemiga (d), milles  $\xi = x$  ja  $d\xi = ds$ , saame:

$$p = \omega^2 \rho A x, \quad (16.11)$$

kus  $x$  on varda teljel asetseva punkti kaugus pöörlemisteljest. Inertsijõu intensiivsust  $p$  mõjub pöörlemistelje ristsihis ja on suunatud sellest eemale. Vaadeldavas näites võime inertsijõu intensiivsuse epüüri koostada, kui arvutame kahe iseloomuliku ordinaadi väärtused  $p_A = \omega^2 \rho A x_A$  ja  $p_B = \omega^2 \rho A x_B$ . Määratud koormuse, arvutame sisejõud ja koostame nende epüürid nii nagu tegime seda staatilise koormusega.

## 16.2. LÖÖK

**16.2.1. Inertsivaba konstruktsioon.** Löögiks nimetatakse koormuse rakendumist lühikese ajavahemiku vältel. Löökide valdkond mehaanikas on väga suur. Siin vaatleme lööke piiratud ulatuses järgmiste põhiliste eeldustega.

Peame silmas lööki ühest koondjõust, mida põhjustab konstruktsiooni suhtes liikuv tahke keha, nn. *löökkeha* pörkimisega. Eeldame mööduka tugevusega lööki, millest konstruktsioon deformeerub elastselt ja hakkab vonkuma. Löökkeha loeme absoluutselt jäigaks. See lihtsus on põhjendatud, kui löökkeha deformatsioon on väike võrreldes konstruktsiooni omaga. Vaatleme lööki ainult otsepõrkest, millest tuleneva koondjõu ja selle rakenduspunkti siirde suunad ühtivad. Eeldame *Hooke*'i seaduse kehtivust eelnimetatud koondjõu ja siirde omavahelises sõltuvuses. Ülesande lahendamise horisontaalselt ja vertikaalselt allapoole suunatud löökide jaoks, kaldsuunalised löögid jätame kõrvale.

Need eeldused on piisavalt täidetud paljudel juhtudel, kuid kaugelki mitte kõigil praktikas esinevatel löökidel.

Lisaks toodud eeldustele võtame löögi uurimisel aluseks veel järgmised oletused: 1) pärast põrget ei eemaldu löökkeha konstruktsioonist; 2) mehaanilise süsteemi loeme konservatiivseks; 3) deformatsioon levib konstruktsioonis momentaanselt.

Esimene oletus enamasti peab paika, sest nii tugevaid lööke, millest löökkeha pörkub tagasi ja eemaldub olulisel määral konstruktsioonist, tuleb praktikas vältida. Liiga tugevate löökide nõrgendamiseks kasutatakse konstruktsioo-

nis puhvrit ja amortisaatorit, konstruktsioonielemente, millega tutvume eespool. Teine oletus ei pea kunagi täpselt paika, sest et löögiga kaasneb alati energia paratamatu dissipatsioon. Osa energiast kulub õhutakistuse ületamiseks, akustilise laine tekitamiseks, soojuseks, jääkdeformatsiooniks pörkepindadel ja teisteks taolisteks pöördumatuteks nähtusteks, milles energia hajub. Samuti ei pea täpselt paika kolmas oletus, sest deformatsioon levib konstruktsioonis teatud kindla kiirusega. Kui see kiirus on palju suurem löökkeha kiirusest vahetult enne pörget, siis nimetatud oletus on põhjendatud. Löökkeha kiiruse kasvades ja lähenedes deformatsioonilaine levikiirusele, kolmas oletus kaotab rakendatavuse.

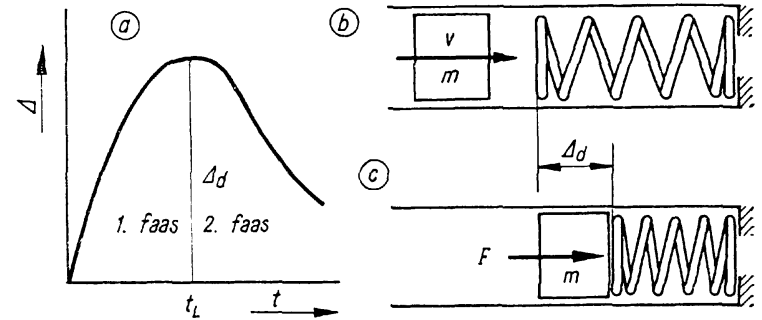
Aluseks võetud lihtsustavad oletused peavad seda täpsemini paika, mida väiksem on löögi kinetiline energia ja kiirus. Ei tohi unustada, et nende suuruste kasvades üle teatava piiri, kaotab oletustele rajatud arvutusviis täielikult kehtivuse ega ole suuteline andma tõepäraseid tulemusi. Kahjuks on lihtsustavate oletuste kehtivuspiire üldisel kujul raske määrata, kuid mõningaid täpsustusi esitame eespool.

Toodud eelduste ja oletustega võime lööke uurida, nagu öeldud, piiratud ulatuses ja sedagi märgatavate, sageli oluliste hälvetega tegelikust olukorrast. Inseneripraktikas annavad need uuringud siiski paljudel juhtudel arvestatavaid tulemusi või siis enam-vähem õige ettekujutuse löögi ohtlikkusest võrreldes samade koormuste staatilise mõjuga.

Kas või osalinegi loobumine eeltoodud lihtsustavatest eeldustest ja oletustest muudab löögi käsitlemise palju keerukamaks. Löögi ulatuslikum ja täpsem uurimine on deformeeruva keskkonna mehaanika tänapäeva üks põhiprobleeme.

Vaatleme löögi rakenduspunkti siiret joonisel 15.6, *a* esitatud graafiku najal  $t\Delta$ -teljestikus, kus  $t$  on aeg ja  $\Delta$  — siire. Löökk jaguneb kaheks faasiks. Esimene algab pörke alg hetkest ja lõpeb, kui siire on kasvanud suurima väärtuseni. Teine faas algab siirde kahanemisega. Meid huvitab löögi esimene faas ja peamiselt selle lõpuhetk, kui konstruktsioon on kõige ohtlikumas seisundis. Löögi rakenduspunkti suurimat siiret esimese faasi lõpus nimetatakse *dünaamiliseks siirdeks*  $\Delta_d$  ja sellega kaasnevat suurimat jõudu *löögi jõuks*  $F$ . Löögi esimese faasi ajalisele kestusele  $t_L$  me tähelepanu ei pööra, kuna see üldiselt lühike ajavahemik on raskelt uuritav ja vaadeldava, suhteliselt väikse kinemaatilise energiaga löögi puhul mitteoluline.

Löögi jõu ja dünaamilise siirde võime määrata kas liikumise diferentsiaalvõrrandi (*Newtoni* teise seaduse) najal või



Joon. 16.5

energeetilise meetodiga. Meie eelistame energeetilist meetodit, mis osutub seatud ülesande lahendamisel lihtsamaks.

Vaatleme joonisel 16.5, *b* konstruktsiooni (keerdvedru) millele läheneb kiirusega  $v$  horisontaalselt pörkuv löökkeha massiga  $m$ . Teatavasti sellel löökkehal on kinetiline energia  $T = mv^2/2$ . Konstruktsiooni käsitleme inertsivabana, mis on põhjendatud sel juhul, kui tema mass on väike võrreldes löökkeha omaga. Joonisel 16.5, *c* kujutame mehaanilist süsteemi löögi esimese faasi lõpuhetkel, kui löökkeha viivuks peatub ( $v=0$ ) ja on kaotanud oma kinetilise energia. See energia on muundunud löögijõu  $F$  mõjul deformeerunud ( $\Delta_d$ ) konstruktsiooni potentsiaalseks energiaks  $U = F\Delta_d/2 = c\Delta_d^2/2$ , mille viimases avaldises löögijõud on asendatud seosest (1.9). Et konservatiivses süsteemis

$$T = U, \quad (a)$$

saame suuruste asendamisega võrrandi

$$mv^2/2 = c\Delta_d^2/2. \quad (b)$$

Sellest võrrandist avaldame otsitava dünaamilise siirde

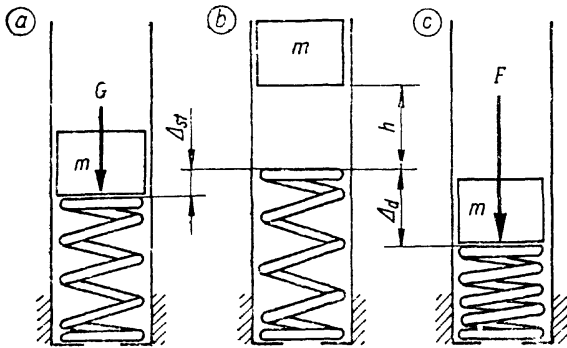
$$\Delta_d = v\sqrt{m/c} \quad (16.12)$$

ja löögijõu

$$F = c\Delta_d = v\sqrt{mc}, \quad (16.13)$$

kus  $c$  on süsteemi jäikust iseloomustav suurus, mille arvutamist selgitasime näites 13.15, kuid mis sageli määratakse ka katse abil.

Järgnevalt vaatleme inertsivaba konstruktsiooni, millele löökkeha massiga  $m$  langeb vertikaalselt (joonis 16.6). Esi-



Joon. 16.6

mese faasi algthetkel (kokkupuute momendil) olgu löökkeha kiirus  $v$  ja kineetiline energia  $T = mv^2/2$ , mille ta kulutab ära löögiks oma teekonna järgneval ajal  $\Delta_d$  koos täiendava potentsiaalse energiaga  $\Pi = mg\Delta_d$  (joonis 16.6, c). Ka siin muundub löökkeha energia konstruktsiooni deformatsiooni  $\Delta_d$  potentsiaalseks energiaks  $U = c\Delta_d^2/2$ . Järelikult

$$T + \Pi = U, \quad (c)$$

kus asendades suurused ja teisendused, saame võrrandi

$$\Delta_d^2 - \frac{2mg}{c}\Delta_d - \frac{mgv^2}{cg} = 0. \quad (d)$$

Esitame selle võrrandi järgmisel kujul:

$$\Delta_d^2 - 2\Delta_{st}\Delta_d - \frac{v^2}{g}\Delta_{st} = 0, \quad (e)$$

kus suurust  $\Delta_{st} = mg/c$  nimetatakse *staatiliseks siirdeks*. See siire tekib konstruktsioonis siis, kui löökkeha mõjub oma raskusjõuga  $G = mg$  staatilises olekus (joonis 16.6, a).

Staatiline siire iseloomustab mehaanilist süsteemi vertikaalse löögi puhul, asendades arvutustes löökkeha massi  $m$  ja konstruktsiooni jäikuse  $c$ . Staatilise siirde võime määrata arvutusega või ka katsetega.

Lahendame võrrandi (e) otsitava dünaamilise siirde leidmiseks:

$$\Delta_d = \Delta_{st} \pm \sqrt{\Delta_{st}^2 + \frac{v^2}{g}\Delta_{st}},$$

millest võtame arvesse ainult plussmärgiga saadava lahendi

ja esitame selle järgmisel kujul\*:

$$\Delta_d = k_d \Delta_{st}, \quad (16.14)$$

kus

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \quad (16.15)$$

on tuntud vertikaalse löögi dünaamikateguriina. Löökkeha vabalangemisel kõrguselt  $h$  (joonis 16.6, b) asendame valemis (16.15) kiiruse tuntud seosega  $v = \sqrt{2gh}$  ja saame:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}. \quad (16.16)$$

Löögijõud avaldub ka siin dünaamikateguri vahendusel valemiga (16.4):

$$F = k_d G, \quad (16.17)$$

kus  $G$  on langeva löökkeha kaal. Samal viisil võime arvutada koormusest lineaarselt sõltuvaid suurusi, sisejõudusid, pingeid jt.

Nagu nähtub tuletatud valemist, on löögijõud seda suurem, mida väiksem on staatiline siire. Sellest järeldub, et *mida jäigem on lööda konstruktsioon, seda suurem on löögi dünaamiline mõju*. Kui soovime vähendada löögijõudu, siis on soovitatav konstruktsioonid teha võimalikult väikse jäikusega.

**16.2.2. Puhver.** Löögijõu vähendamiseks kasutatakse sageli *puhvit*, mis ühtlasi kaitseb konstruktsiooni kohalike kahjustuste eest põrke piirkonnas.

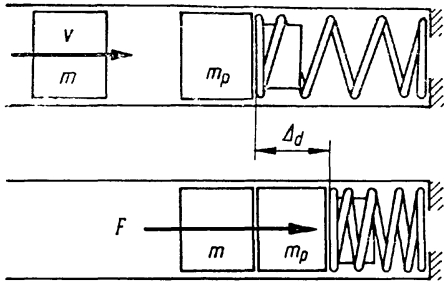
Olgu eelmises jaotises vaadeldud süsteemides kasutatud puhvreid massiga  $m_p$ . Esimest, horisontaalsele löögile allutatud konstruktsiooni puhvriga kujutame joonisel 16.7. Kui löökkeha massiga  $m$ , liikudes kiirusega  $v$  põrkub puhvriga, siis eeldades nende absoluutselt jäika põrget, hakkavad nad koos liikuma kiirusega  $v_1$ . Seejuures on teatavasti liikumishulgal enne ja pärast põrget võrdsed:

$$mv = (m + m_p)v_1,$$

millest

$$v_1 = \frac{mv}{m + m_p} = \frac{v}{1 + \frac{m_p}{m}}. \quad (f)$$

\* Teine lahend miinuskärgiga vastab süsteemi deformeerunud seisundile löögi teise faasi lõpus, kui keha massiga  $m$ , liikudes tagasi ülespoole, on saavutanud kõrgeima asendi, kus ta jälle viivuks peatub.



Joon. 16.7

Dünaamilise siirde avaldame valemiga 16.12, millesse asetame kiiruse  $v_1$  ja massi  $m+m_p$ :

$$\Delta_d = v_1 \sqrt{\frac{m+m_p}{c}} = v \sqrt{\frac{m}{c(1+m_p/m)}}. \quad (16.18)$$

Sellele siirdele vastav löögijõud

$$F = v \sqrt{\frac{mc}{1+m_p/m}}. \quad (16.19)$$

Asetades vertikaalselt langeva löökkeha alla puhvri massiga  $m_p$ , kutsub see esile staatilise siirde (joonis 16.8, a ja b)

$$\Delta_{pst} = G_p/c = m_p g/c, \quad (g)$$

millest salvestub konstruktsioonis deformatsiooni potentsiaalne energia

$$U_0 = c\Delta_{pst}^2/2. \quad (h)$$

Kui puhvrile kõrguselt  $h$  langeb löökkeha massiga  $m$ , siis saavutab see kokkupuute hetke eel kiiruse  $v$ . Kokkupuute hetkel sunnib langev keha liikuma ka puhvri ühise kiirusega  $v_1$ , mis on määratud valemiga (f). Koos liikuvate kehade kineetiline energia

$$T_1 = (m+m_p)v_1^2/2. \quad (i)$$

Koos liikuvad kehad tekitavad dünaamilise siirde  $\Delta_d$ , milleks nad kulutavad oma kineetilise energia  $T_1$  ja veel täiendavalt potentsiaalset energiat (joonis 16.8, c)

$$\Pi_1 = (m+m_p)g\Delta_d. \quad (j)$$

Kulutatud energia lisandub konstruktsiooni deformatsiooni potentsiaalsele energiale, mis kasvab löögi esimese

faasi lõpphetkeks suuruseni

$$U = c(\Delta_{pst} + \Delta_d)^2/2. \quad (k)$$

Löögist tuleneva osa sellest energiast saame kui avaldisest (k) lahutame enne lööki salvestunud energia (h):

$$U_1 = U - U_0 = c(\Delta_d^2 + 2\Delta_{pst}\Delta_d)/2. \quad (l)$$

Toetudes süsteemi konservatiivsusele, võime energia säilivuse esitada võrdsusena:

$$T_1 + \Pi_1 = U_1,$$

kus suurused asendame seostest (i, j ja l) ning kiiruse  $v_1$  avaldisega (f):

$$\frac{mv^2}{2(1+m_p/m)} + (m+m_p)g\Delta_d = \frac{c}{2}(\Delta_d^2 + 2\Delta_{pst}\Delta_d).$$

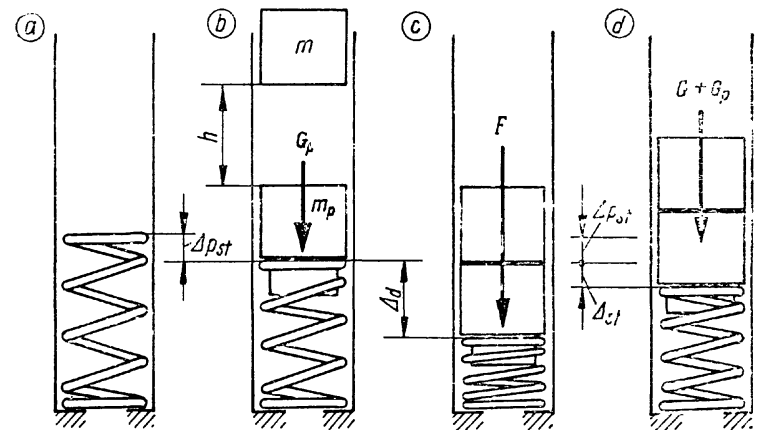
Saadud seose teisendame võrrandiks

$$\Delta_d^2 - 2\left(\frac{mg}{c} + \frac{m_p g}{c} - \Delta_{pst}\right)\Delta_d - \frac{mg}{c} \frac{v^2}{g(1+m_p/m)} = 0,$$

kus peame silmas, et

$$mg/c = G/c = \Delta_{st} \quad \text{ja} \quad m_p g/c = G_p/c = \Delta_{pst} \quad (\text{joonis 16.8, d})$$

ning tehes vastavad asendused, saame pärast lihtsustamist ruutvõrrandi



Joon. 16.8



$$\Delta_d^2 - 2\Delta_{st}\Delta_d - \frac{\Delta_{st}v^2}{g(1+m_p/m)} = 0,$$

mille lahendid on

$$\Delta_d = \Delta_{st} \pm \sqrt{\Delta_{st}^2 + \frac{\Delta_{st}v^2}{g(1+m_p/m)}}.$$

Kaalutlustel, mis on toodud eelmises jaotises valemi (16.14) juures, võtame ka siin arvesse ainult plussmärgiga lahendi, mis annab dünaamikateguri avaldise

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{st}(1+m_p/m)}} \quad (16.20)$$

või asendades  $v^2$  võrdse suurusega  $2gh$ , saame

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}(1+m_p/m)}}. \quad (16.21)$$

Kõrvutades selles jaotises tuletatud valemeid eelmise jaotise vastavate valemitega, näeme, et puhver vähendab löögijõudu. Puhvriga löögi valemities esineb dimensioonitu liige  $1+m_p/m$ , mis puhvrita löögi puhul ( $m_p=0$ ) võrdub ühega ( $1+m_p/m=1$ ). Kui näiteks puhvri ja löökkeha massid on võrdsed ( $m_p=m$ ), siis horisontaalne löögijõud väheneb 29% võrra. Löögijõud vertikaalselt langevalt kehalt väheneb piirides 0...29% olenevalt suhtest  $h/\Delta_{st}$ . Seejuures kui  $h/\Delta_{st}=0$ , see tähendab  $h=0$ , siis puhvril mõju puudub.

Puhvri massi suurendamisega võib löögikoormust vähendada mis tahes kordselt. Muude ülesannete kõrval täidab sepikoja alasi suure massiga puhvri ülesannet haamri ja alasi kandekonstruktsiooni vahel, vähendades haamri löögijõudu viimasele 10...20 korda.

Vaatleme veel üht vertikaalselt allapoole suunatud löögi erijuhtu, kui löökkehal puudub vabalangemine, see tähendab langemiskõrgus  $h=0$ . Nagu selgub valemist (16.21), saame dünaamikateguri  $k_d=2$ , olenemata sellest, kas konstruktsioonil on puhver või mitte. Niisugust lööki nimetatakse *momentaanselt rakendatud koormuseks*. Momentaanselt võime koormuse rakendada näiteks veoautole, kui kraana konksu otsas laseme lasti veokasti põhjale, kuid nii, et raskust kannab veel täielikult kraana. Kui selles seisundis vabastada kraana momentaanselt lastist, rakendub autole löögijõud, mis kaks korda ületab keha kaalu. Nagu näeme, koormuse dünaamiline mõju on oluline isegi momentaansel

rakendamisel, mida sageli ekslikult ei mõistetagi löögina, vaid kiputakse pidame lähedaseks staatilisele koormamisele.

**16.2.3. Konstruktsiooni massi mõju.** Eespool oletasime, et löödava konstruktsiooni mass ei mõjuta temale rakenduvat löögijõudu. Mõnel juhul on selle massi mõju tõeppoolest tühine, kuid enamasti on ta märgatav, sageli aga olulise tähtsusega. Konstruktsiooni massi mõju on soodus, sest ta vähendab löögijõudu.

Konstruktsiooni massi mõju avaldub selles, et löögi esimese faasi algmomendil hakkavad teatava kiirusega liikuma ka tolle massi mõeldavad väiksed elemendid ja seepärast mitte kogu kineetiline energia  $T_1$  pole löökkehas ja puhvris, nagu me seda kujutasime ette eelmises jaotises, vaid osa sellest energiast on deformeerivas konstruktsioonis. Konstruktsiooni kineetilise energia määramisel tuleb silmas pidada tema punktide erinevaid kiirusi. Löökkeha ja puhvri kiirusega  $v_1$  liiguvad ainult puhvriga kokkupuutuvad ja temale lähedased punktid. Kaugemad punktid liiguvad kiirusega, mis on kas väiksem või suurem kiirusest  $v_1$ . Konstruktsiooni tugele võib kiirus võrduda nulliga.

Arvutustes asendame konstruktsiooni massi  $m_0$  sellega ekvivalentse massiga  $m_{eq}$ , mida kujutame ette punktmassina selles kohas kuhu toimub löök. Järelikult ekvivalentmassi võime lisada puhvri massile ja kasutada kõiki eelmises jaotises tuletatud valemeid, milles suuruse  $m_p$  asendame summaga  $m_p+m_{eq}$ .

Ekvivalentmassi  $m_{eq}$  peame määrama nii, et selle kineetiline energia

$$T_{eq} = m_{eq}v_1^2/2 \quad (m)$$

võrduks konstruktsiooni omaga  $T_0$  löögi esimese faasi alghetkel:

$$T_{eq} = T_0. \quad (n)$$

Konstruktsiooni kineetilise energia  $T_0$  määrame ligikaudselt. Vaatieme varda elementaarlõiku pikkusega  $ds$ , ristlõikepindalaga  $A$ , tihedusega  $\rho$  ja massiga  $dm = \rho A ds$ , mis liigub kiirusega  $v(s)$ . Selle elemendi kineetiline energia

$$dT_0 = \frac{v(s)^2}{2} dm = \frac{1}{2} \rho A v(s)^2 ds.$$

Seejuures oleme teinud lihtsustava oletuse, et elemendi pöördliikumise kineetiline energia on väike võrreldes kulgliikumise omaga ja võib jääda arvestamata. Konstruktsiooni kogu kineetilise energia arvutame integreerimise ja sum-

meerimisega:

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^v \int_{l_k}^v \rho A v(s)^2 ds, \quad (o)$$

kus  $V$  on varraste arv ja  $l_k$  on  $k$ -nda varda pikkus.

Asendame võrduses (n) suurused oma avaldistega (m) ja (o) ja avaldame otsitava ekvivalentmassi:

$$m_{eq} = \sum_{k=1}^v \int_{l_k}^v \rho A \left( \frac{v(s)}{v_1} \right)^2 ds. \quad (p)$$

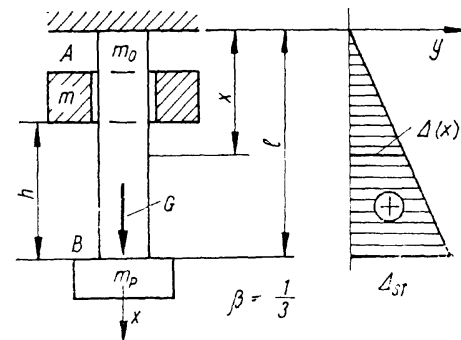
Saadud avaldise lihtsustamiseks oletame, et konstruktsiooni mis tahes kahe punkti kiiruste suhe löögi esimese faasi alghetkel võrdub nende punktide siire suhtega faasi lõpus. Selle oletuse põhjal asendame avaldises (p) suhte  $v(s)/v_1$  siirete suhtega  $\Delta(s)/\Delta_d$ . Seejuures mõistame suurusena  $\Delta(s)$  varda icljel kohas  $s$  asetseva punkti siiret, mis on määratud selle punkti alg- ja lõppasendite vahekaugusena esimeses faasis. Edasiseks lihtsustamiseks toetume kolmandale oletusele jaotisest 16.2.1., mis lubab dünaamiliste siirete suhte asendada siirete suhtega staatilisest koondjõust, mille rakenduspunkt ja suund ühtivad löögi omadega. Seejuures võime jõu suuruse valida meelevaldselt (näiteks ühikjõu) või piirduda üldise tähisega. Sageli osutub otstarbekaks võtta selleks jõuks löökkeha omakaal  $G$ , kui ülesande lahendamisel vajatakse sellest jõust pärinevat staatilist siiret  $\Delta_{st}$ . Esitatud kaalutlustel saame ekvivalentmassi avaldise järgmisel kujul:

$$m_{eq} = \sum_{k=1}^v \int_{l_k}^v \rho A \left( \frac{\Delta(s)}{\Delta_{st}} \right)^2 ds, \quad (16.22)$$

kus  $\Delta_{st}$  on löögi koha siire staatilisest koondjõust, mis on rakendatud samas kohas löögi sihis ja  $\Delta(s)$  — varrassüsteemi elastse joone meelevaldse punkti siire samast koormusest.

Kui konstruktsioon on tehtud ühest materjalist ( $\rho = \text{const}$ ) ja ühtlase ristlõikega ( $A = \text{const}$ ) varrastest, siis võime avaldises (16.22) esineva konstantse korrutise  $\rho A$  välja tuua integraali ja summa märkide alt. Korrutades ja jagades avaldist kõikide varraste pikkuste summaga  $l$  ja võttes arvesse, et korrutis  $\rho A l = m_0$  on konstruktsiooni tegelik mass, võime ekvivalentmassi avaldada järgmise valemiga:

$$m_{eq} = \beta m_0, \quad (16.23)$$



Joon. 16.9

kus

$$\beta = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^v \int_{l_k}^l \left( \frac{\Delta(s)}{\Delta_{st}} \right)^2 ds; \quad (l = l_1 + l_2 + \dots + l_k). \quad (16.24)$$

Dimensioonitu massi redutseerimise tegur  $\beta$  võib kujuneda mis tahes positiivseks arvsuuruseks, mis sõltub löögi kohast konstruktsioonis. Selle teguri arvutamine valemiga (16.24) ei valmista raskusi, eriti sel juhul, kui tunneme varraste elastsete joonte avaldise löögile vastavast koondjõust.

Arvutame teguri  $\beta$  väärtuse keerdvedrule jäikusega  $c$ , mis töötab löögile nii, nagu on kujutatud joonistel 16.5...8. Vedru vaba otsa siire jõust  $G$   $\Delta_{st} = G/c$  ja tema traadi ristlõike siire kaugusel  $s$  toetuskohast

$$\Delta(s) = \frac{Gs}{cl} = \Delta_{st} \frac{s}{l},$$

kus  $l$  on vedru traadi pikkus.

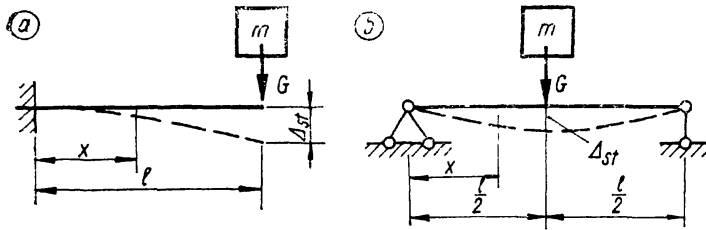
Asetades  $\Delta_{st}$  ja  $\Delta(s)$  valemisse (16.24), saame:

$$\beta = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{\Delta(s)}{\Delta_{st}} \right)^2 ds = \frac{1}{l^3} \int_0^l s^2 ds = \frac{1}{3}. \quad (16.25)$$

Joonisel 16.9 on kujutatud pikilöögile allutatav sirge ühtlane varras  $AB$  massiga  $m_0$ . Määrame varda massi redutseerimise teguri pikilöögil.

Avaldame valemiga (2.13) siirde telje punktis kaugusel  $x$  kinnituskohast  $A$ , mille kutsub esile jõud  $G$ :

$$\Delta(x) = \frac{G}{EA} x; \quad \Delta_{st} = \Delta_B = \frac{Gl}{EA}.$$



Joon. 16.10

Asetame siirded valemisse (16.24) ja arvutame teguri  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{x}{l} \right)^2 dx = \frac{1}{3}. \quad (16.26)$$

Näeme, et tegurid  $\beta$  keerdvedrul ja ühtlase varda pikilöögil langevad kokku ja lubavad ühe kolmandiku nende massist arvesse võtta lööki pehmenitava puhvrina.

Vaatleme varrast töötamas põiklöögile, mis kutsub esile painde. Määrame konsooli massi redutseerimise teguri  $\beta$ , kui löök toimub vabale otsale (joonis 16,10, a). Aवादame konsooli elastse joone võrrandi ja varda otsa läbipainde jõust  $G$ :

$$\Delta(x) = \frac{Gl^3}{3EI} \left( \frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{2l^3} \right); \quad \Delta_{st} = \frac{Gl^3}{3EI}.$$

Asetame avaldised valemisse (16.24) ja integreerimise hõlbustamiseks võtame uue muutuja  $\xi = x/l$  piirides  $0 < \xi < 1$ , millega argumendi diferentsiaal  $dx = l d\xi$ :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{2l^3} \right)^2 dx = \int_0^1 \left( \frac{3}{2} \xi^2 - \frac{1}{2} \xi^3 \right)^2 d\xi = \\ &= \frac{33}{140} \approx 0,236. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Lihttala jooniselt 16.10, b, millele löök suunatakse keskkohta, läbipaine jõust  $G$  ja elastse joone võrrand piirkonnas  $0 < x < l/2$  avalduvad järgmiselt:

$$\Delta(x) = \frac{Gl^3}{48EI} \left( 3 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right); \quad \Delta_{st} = \frac{Gl^3}{48EI}.$$

Teguri arvutamisel on sobiv üle minna uuele muutujale  $\xi = 2x/l$ , millega  $dx = (l/2) d\xi$ :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \left( 3 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right)^2 dx = \int_0^1 \left( \frac{3}{2} \xi - \frac{1}{2} \xi^3 \right)^2 d\xi = \\ &= \frac{17}{35} \approx 0,486. \end{aligned} \quad (16.28)$$

Leitud tegurid sobivad ainult konsooli otsale ja lihttala keskkohtale mõjuvatele löökidele. Kui löök toimub mujale, siis konsooli ja lihttala massid tulevad puhvritena arvesse teistsuguste, oluliselt erinevate väärtustega teguritega. Neid tegureid võime arvutada samuti valemiga (16.24) vastavate läbipainde ja elastsete joonte võrranditega kas arväärtusena, nagu tegime seda siin, või ka funktsioonina argumendil  $\xi$ . Tegurite arvutamise avaldised esitame tuletamiseta:

$$\begin{aligned} \beta_h &= \frac{105 - 105\xi + 35\xi^2 - 2\xi^3}{140\xi^2}; \\ \beta_T &= \frac{2 + 4\xi - \xi^2 - 6\xi^3 + 3\xi^4}{105\xi^2(1 - \xi)^2}, \end{aligned} \quad (16.29)$$

kus  $\xi = x/l$  ja millest esimene on konsooli ja teine lihttala jaoks. Ülevaateks teguri  $\beta$  väärtustest esitame need konsooli jaoks tabelis 12.

Esitame löögijõu arvutamiseks olulised valemid, mis saame eelmisest alapunktist sel teel, et lisame puhvri massile konstruktsiooni massiga  $m_0$  ekvivalentse massi  $m_{eq} = \beta m_0$ .

Horisontaalne löögijõud valemist (16.19):

$$F = mv \sqrt{\frac{c}{m + m_p + \beta m_0}}. \quad (16.30)$$

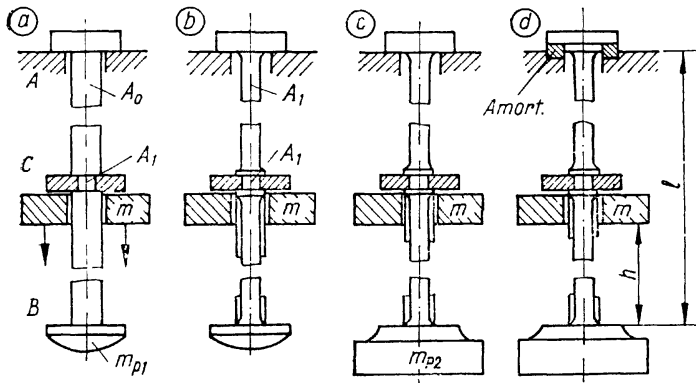
Dünaamikategur vertikaalselt langeva keha löögist (valemist 16.21):

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2mh}{\Delta_{st}(m + m_p + \beta m_0)}}. \quad (16.31)$$

Tabel 12

Teguri  $\beta$  väärtused konsoolile

$\xi$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\beta$	67,75	15,25	6,08	3,06	1,74	1,08	0,70	0,47	0,33	0,24



Joon. 16.11

**Näide 16.3.** Vaatleme löögile töötavat varrast joonisel 16.11, *a*. Terasest ketas massiga  $m=10$  kg ja 28-mm avaga keskel liigub vertikaalsel vardal kahe tükke *C* ja *B* vahel. Ketas liigub üles tõstemehhanismiga ja alla vabalangemisega kõrguselt  $h=300$  mm. Varras pikkusega  $l=3$  m ripub jäigal toel *A* ja kohas *C* ei tohi tema läbimõõt ületada sissetreitud soones 20 mm. Kavandame varda, arvestades lubatava tõmbepingega  $[\sigma]=50$  MPa, elastsusmooduliga  $E=210$  GPa ja tihedusega  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>.

Valime esimese konstruktiivse lahenduse nii, nagu kujutame joonisel 16.11, *a*. Võtame varda läbimõõdu 28 mm vastavalt ketta avale, kusjuures ristlõikepindala  $A_0=616$  mm<sup>2</sup>. Soonega nõrgestatud kohas varda ristlõikepindala  $A_1=314$  mm<sup>2</sup>.

Varras töötab tõmbele dünaamilise koormusega, mis tekib langeva ketta löögist. Arvutame varda pikendamise  $\Delta_{st}$  ketta raskusjõust  $G=mg=10 \cdot 9,81=98,1$  N, hüljates sissetõigatud soone mõju;

$$\Delta_{st} = Nl/EA_0 = Gl/EA_0 = 98,1 \cdot 3 / (210 \cdot 10^9 \cdot 616 \cdot 10^{-6}) = 2,28 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

Arvutame dünaamikateguri ligikaudselt valemiga (16.16), arvestamata varda ja tükke *B* massid:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 300 \cdot 10^{-3} / (2,28 \cdot 10^{-6})} = 514.$$

Suurim tõmbepinge varda nõrgestatud kohas

$$\sigma = N/A_1 = F/A_1 = k_d G/A_1 = 514 \cdot 98,1 / (314 \cdot 10^{-6}) = 161 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 161 \text{ MPa} > [\sigma].$$

Tugevustingimus pole rahuldatud. Teeme täpsustatud arvutuse, võttes arvesse varda massi 14,41 kg ja tükke *B* oma, mis olgu 3 kg. Dünaamikateguri arvutame valemiga (16.31), kus varda massi redutseerimise tegur  $\beta=0,333$ :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 300 \cdot 10^{-3}}{2,28 \cdot 10^{-6} (10 + 3 + 0,333 \cdot 14,41)}} = 386;$$

$$\sigma = 386 \cdot 98,1 / (314 \cdot 10^{-6}) = 120 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 120 \text{ MPa} > [\sigma].$$

Kuna ka täpsustatud arvutus näitab, et suurim pinge ületab luba-

tava rohkem kui kahekordselt, peame rakendama konstruktiivseid võtteid dünaamilise pinge vähendamiseks. Esimese võttena kavandame varda ühtlase 20-mm läbimõõduga (joonis 16.11, *b*). Peenemaks tehtud varda mass on 7,35 kg ja pikenedamine ketta raskusjõust  $\Delta_{st}=4,47 \cdot 10^{-6}$  m. Dünaamikategur

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 300 \cdot 10^{-3}}{4,47 \cdot 10^{-6} (10 + 3 + 0,333 \cdot 7,35)}} = 296$$

ja suurim pinge

$$\sigma = 296 \cdot 98,1 / (314 \cdot 10^{-6}) = 92,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 92,5 \text{ MPa} > [\sigma].$$

Varda ristlõike ühtlustamine andis umbes 25% madalama dünaamilise pinget, kuid antud juhul pole see konstruktiivne võte küllaldane.

Dünaamilise pinget vähendamise teise abinõuna kujundame tükke *B* massiivseks puhvriks (joonis 16.11, *c*) massiga  $m_p=25$  kg.

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 300 \cdot 10^{-3}}{4,47 \cdot 10^{-6} (10 + 25 + 0,333 \cdot 7,35)}} = 190;$$

$$\sigma = 190 \cdot 98,1 / (314 \cdot 10^{-6}) + 25 \cdot 9,81 / (314 \cdot 10^{-6}) = 59,36 \cdot 10^6 + 0,78 \cdot 10^6 = 60,14 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx 60 \text{ MPa} > [\sigma] = 50 \text{ MPa.}$$

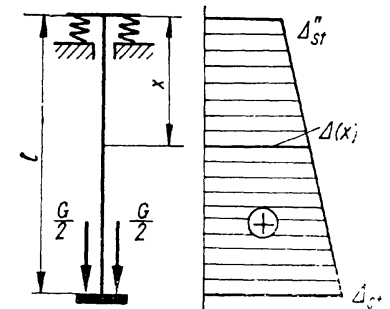
Puhvri massi suurendamine vähendab oluliselt pinget. Oletame aga, et konstruktiivsetel kaalutlustel pole soovitatav kasutada suuremat puhvrit ja seepärast lahendame probleemi lõplikult amortisaatori abil. Amortisaatoriks paneme toel *A* varda pea alla vetruva seibi (joonis 16.11, *d*). Seib võib olla kummist, mille elastsusmoodul on umbes 10 MPa. Konstrukteerime seibi, mille jäikustegur  $c=20$  MN/m. Amortisaator suurendab varda otsa *B* staatilist paigutist ketta kaalust, sest varda enda pikenedamisele  $4,47 \cdot 10^{-6}$  m lisandub veel tema pea paigutis  $G/c$  kummiseibi survedeformatsioonist:

$$\Delta_{st} = 4,47 \cdot 10^{-6} + 98,1 / (20 \cdot 10^6) = 9,38 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

Dünaamikateguri määramisel peame silmas pidama, et amortisaator muudab ka varda massi arvestamise tegurit  $\beta$ . Avaldame varda ristlõike siirde kaugusel  $x$  toest *A*, kui alumisel otsal mõjub staatiline jõud  $G=98,1$  N:

$$\Delta(x) = \Delta_{st}'' + \Delta_{st}' x/l = 4,91 \cdot 10^{-6} + 4,47 \cdot 10^{-6} x/3,$$

mida aitab selgitada  $\Delta(x)$  graafik joonisel 16.12. Teguri  $\beta$  arvutame valemiga (16.24):



Joon. 16.12

$$\beta = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{\Delta(x)}{\Delta_{st}} \right)^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^3 \left( \frac{4,91 \cdot 10^{-6} + 4,47 \cdot 10^{-6} x/3}{9,38 \cdot 10^{-6}} \right)^2 dx = 0,750$$

Määrame nüüd valemiga (16.31) dünaamikateguri:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-3}}{9,38 \cdot 10^{-6} (10 + 25 + 0,750 \cdot 7,35)}} = 127.$$

Suurim pinge

$$\sigma = (127 \cdot 98,1 + 25 \cdot 9,81) / (314 \cdot 10^{-6}) = 40,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 40,5 \text{ MPa} < [\sigma] = 50 \text{ MPa}$$

rahuldab tugevustirgimust.

*Näide 16.4.* Teise näitena vaatleme horisontaalset lööki, mille saab tõkkepuu aeglaselt liikuvalt vagonetilt massiga  $m=1000$  kg (joonis 16.13). Tõkkepuuks  $AB$  on  $200 \times 200$ -mm männipuidust pruss, mille arvutuslik pikkus  $l=2,8$  m, elastsusmoodul  $E=10$  GPa ja tihedus  $\rho=600$  kg/m<sup>3</sup>. Määrame suurima lubatava kiiruse, millega vagonett võib ohutult liikuda vastu tõkkepuud, kui selle lubatav pinge  $[\sigma]=12$  MPa. Ülesanne seatakse kahes variandis: a) tõkkepuu toetub absoluutselt jäikadele tugedele (joonis 16.13, a) ja b) tõkkepuu tugedele on pandud amortisaatorid keerdvedrudest, mille jäikus  $c_A=200$  kN/m (joonis 16.13, b).

Määrame tõkkepuuks kasutatava prussi tunnussuurused: mass  $m_0=67,2$  kg; inertsimoment  $I=13\,330$  cm<sup>4</sup>; tugevusmoment  $W=1333$  cm<sup>3</sup>; jäikust  $c_T$  vaatleme lihttala keskel ühiklābipainet põhjustava koondjõuna, mille avaldame valemist (10.12)

$$f = F l^3 / (48 E I),$$

asendades selles  $f=1$  ja  $F=c_T$ :

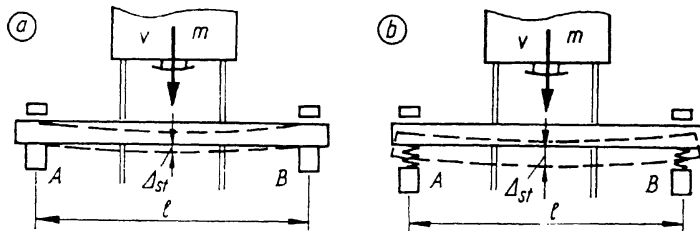
$$c_T = 48 E I / l^3 = 48 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 13\,330 \cdot 10^{-8} / 2,8^3 = 2915 \cdot 10^3 \text{ N/m}.$$

Suurim lubatav tõkkepuu koormus

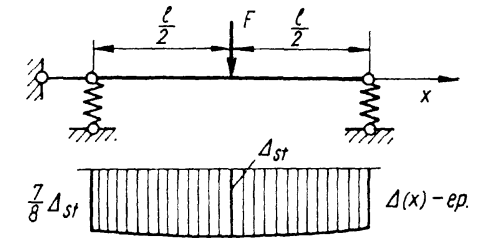
$$F = 4 W [\sigma] / l = 4 \cdot 1333 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^6 / 2,8 = 22,9 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Vagoneti suurim lubatav kiirus valemist (16.30):

$$v = \frac{F}{m} \sqrt{\frac{m + m_p + \beta m_0}{c}},$$



Joon. 16.13



Joon. 16.14

kus  $m_p=0$  ja  $\beta=17/35=0,49$  esimese variandi jaoks:

$$v = \frac{22,9 \cdot 10^3}{1000} \sqrt{\frac{1000 + 0,49 \cdot 67,2}{2915 \cdot 10^3}} = 0,43 \text{ m/s}.$$

Teise variandi puhul tõkke üldine jäikus  $c$  kujuneb prussi paindejäikusest  $c_T=2915 \cdot 10^3$  N/m ja amortisaatorite summaarsest jäikusest  $2c_A=400$  kN/m. Seejuures jäikuse  $c$  arvutame temale vastava deformatsiooniteguri  $\delta=1/c$  vahendusel:

$$1/c = 1/c_T + 1/(2c_A),$$

millest

$$c = 2c_T c_A / (2c_A + c_T) = 2 \cdot 2915 \cdot 10^3 \cdot 200 \cdot 10^3 / (400 \cdot 10^3 + 2915 \cdot 10^3) = 352 \text{ N/m}.$$

Avaldades suurima lubatava kiiruse, võtame prussi massi redutseerimise teguri  $\beta \approx 1$ , sest selles ülesandes amortisaatorite suhteliselt väike jäikus võrreldes tala jäikusega põhjustab löögil kõikide rütlõigete peaaegu ühtlase siide. See tähendab, et valemis (16.24) funktsioon  $\Delta(x)$  muutub vähe ja on peaaegu võrdne konstandiga  $\Delta_{st}$ , moodustades suhte  $\Delta(x)/\Delta_{st} \approx 1$  (joonis 16.14). Suurim lubatav kiirus amortisaatoritega tõkke jaoks

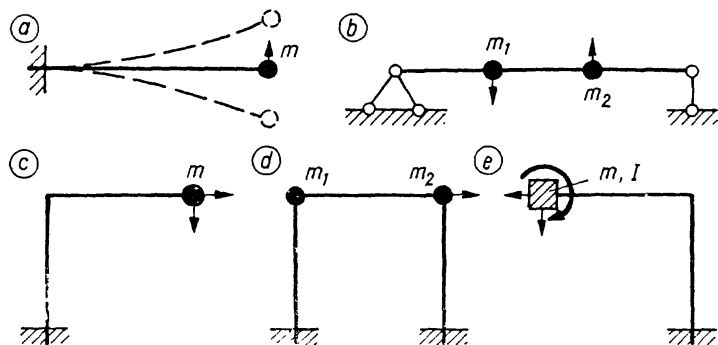
$$v = \frac{22,9 \cdot 10^3}{1000} \sqrt{\frac{1000 + 67,2}{352 \cdot 10^3}} = 1,26 \text{ m/s}.$$

Prussi keskkoha läbipaine suurimate lubatavate kiirustega löökidel on  $F/c_T = 22,9 \cdot 10^3 / (2915 \cdot 10^3) \approx 0,008 \text{ m} = 8 \text{ mm}$ . Suurimad siirded amortisaatoritega tugedel  $F/2c_A = 22,9 \cdot 10^3 / (400 \cdot 10^3) = 0,057 \text{ m}$  ja tõkkepuu keskkohal  $57 + 8 = 65 \text{ mm}$ .

Amortisaatoriteta tõkkepuu täidab oma ülesannet halvasti, sest lubatav suurim kiirus 0,43 m/s on liiga madal praktikas, kus vagoneti käitsi ajamise kiirus võib tõusta veidi üle 1 m/s. Amortisaatoritega tõkkepuu pidurdab ohutult vagoneti, mille kiirus võib tõusta kuni 1,26 m/s, mis rahuldab praktilist vajadust.

## 16.3. KONSTRUKTSIOONI VÕNKUMINE

**16.3.1. Võnkliikumise vabadusaste.** Kui konstruktsiooni pihta lüüakse või mõjub talle liikuv koormus või perioodiliselt muutuv jõud, siis teatud tingimisel tekib *võnkumine*. Konstruktsiooni võnkumiseks nimetatakse tema perioodilist deformeerumist stabiilse tasakaaluasendi ümber.



Joon. 16.15

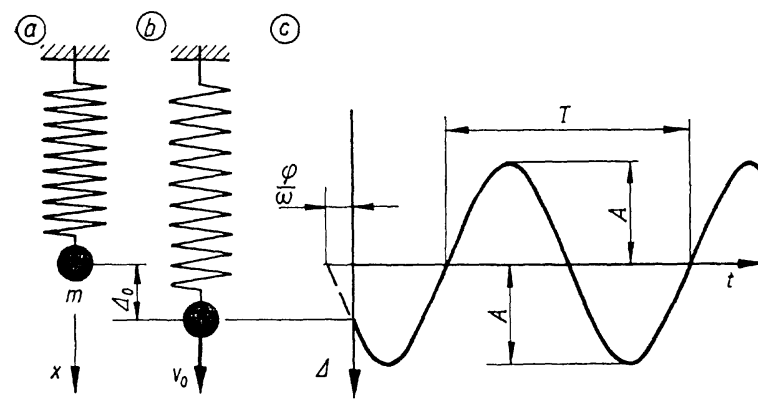
Konstruksiooni võnkumise uurimine on oluline, kuna deformeerumisest tulenevad lisapinged ja siirded võivad osutada kaalukateks tugevus- ja jäikustingimustes. Püsival võnkumisel tekkinud muutuv pingeline võib põhjustada väsimuspurunemise ja selle nähtusega võib kaasneda ka stabiilse tasakaalu kadumine *resonantsi* tagajärjel. Sageli on vaja teada konstruktsioonides esinevate võnkumiste sagedust, amplituudi ja teisi tunnussuursusi, et hinnata nende poolt esile kutsutud vibratsioonide kahjulikkust inimestele ja seadmetele ümbritsevas keskkonnas.

Konstruksiooni võnkumise uurimisele asudes peame kõigepealt kindlaks tegema *võnkliikumise vabadusastmete arvu*. Selle arvu määrab mõeldavate lihtsistemite hulk, mis on tarvilik konstruktsiooni võnkumisvõimaluste tõkestamiseks. Ühe masspunktiga mehaanilisel süsteemil on ruumülesandes võnkliikumise vabadusastmete arv kuni kolm, tasandülesandes kuni kaks. Kuna konstruktsioon on vaadeldav koosnevana väga suurest hulgast masspunktidest, siis on ka üldjuhul tema võnkliikumise vabadusastmete arv piiramatult suur. Praktilistes arvutustes asendame konstruktsiooni idealiseeritud mehaanilise süsteemiga, milles varrastena esinevad massitud elastsed jooned nendele kinnitatud kindla arvu punktmasside ja massiivsete kehade. Niisuguses idealiseeritud mehaanilises süsteemis on võnkliikumise vabadusastmete arv lõplik. Vaatleme tasandsüsteemi joonisel 16.15, kus *a* kujutab ühe võnkliikumise vabadusastmega süsteemi, pidades silmas, et punktmassi siire varda sihis on tähtsusetult väike võrreldes siirdega põiksuunas. Süsteemis *b* on võnkliikumise vabadusastmete arv kaks. Süsteemis *c* on ühel punktmassil kaks võnkumise vabadust

ja süsteemis *d* kahel punktmassil ainult üks, kui võtame arvesse, et need kaks massi  $m_1$  ja  $m_2$  on seotud omavahel vardaga, mille pikkus oluliselt ei muutu. Mõnikord osutub vajalikuks punktmassi asendada kehaga, millel massi kõrval esineb ka *dünaamiline inertsimoment*. Massiga  $m$  ja inertsimomendiga  $I$  keha on kujutatud joonisel 16.15, *e*, millel antud juhul võnkliikumise vabadusastmeid on kolm, kaks kuuluvad kulgliikumisele ja üks pöörliikumisele.

Käesolevas vaatlleme ühe võnkliikumise vabadusastmega süsteemi, mis on kõige lihtsamad, kuid ka kõige olulisemad inseneripraktikas. Kahe-, kolme- ja suurema vabadusastmete arvuga süsteemid leiavad käsitlust chitusmehaanika kursuses.

**16.3.2. Vabavõnkumine** esineb sel juhul, kui löögi või jõuimpulsi mõjul tasakaaluolekust väljunud konstruktsioon hakkab võnkuma ainult selle oleku taastamisele suunatud elastsusjõu mõjul. Vaatlleme ühe vabadusastmega süsteemi vabavõnkumist joonisel 16.16, *a* kujutatud keerdvedru ja selle otsa kinnitatud massi  $m$  põhjal. Olgu keerdvedru massitu ja jäikusega  $c$ . Oletame, et massile  $m$  mõjub  $x$ -telje sihiline jõuimpulss, mis põhjustab siirde  $\Delta_0$ , mille juures liikumine jätkub kiirusega  $v_0$  (joonis 16.16, *b*). Alustame vaatlust sellest ajamomendist ( $t_0=0$ ) ja seame *d'Alembert'i* printsiibi najal punktmassile tasakaalutingimuse mis tähendab hilisemal ajamomendil  $t$ , kui punktmassi siire on  $\Delta$ . Punktmassile mõjuvad kolm jõudu: tema enda *inertsijõud* —  $m\ddot{\Delta}$ , vedru *elastsusjõud* —  $c\Delta$ , mis tuleb arvesse miinusemärgiga, kuna ta on suunatud siirde  $\Delta$  vastassuunas, ja *takistusjõud*. Viie-



Joon. 16.16

mane neist on elastsete süsteemide võnkumisel väike võrreldes inerts- ja elastsusjõuga ja seepärast pakub huvi ka niisugune vabavõnkumine, milles hülgame takistusjõu ja tasakaalutingimusest  $\sum X=0$ ;  $-m\ddot{\Delta}-c\dot{\Delta}=0$  saame tuntud homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\ddot{\Delta}+\omega^2\Delta=0, \quad (a)$$

kus konstantne kordaja

$$\omega^2=c/m. \quad (16.32)$$

Diferentsiaalvõrrandi (a) üldlahend on teatavasti

$$\Delta=C_1 \sin \omega t+C_2 \cos \omega t, \quad (b)$$

mille teisendame sel teel, et väljendame integreerimiskonstandid  $C_1=A \cos \varphi$  ja  $C_2=A \sin \varphi$ . Sel juhul üldlahend

$$\Delta=A \sin (\omega t+\varphi), \quad (16.33)$$

kus  $A$  ja  $\varphi$  on integreerimiskonstandid. Punktmassi liikumise kiiruse ja kiirenduse avaldame siirde (16.33) diferentseerimise teel:

$$v=\dot{\Delta}=A \omega \cos (\omega t+\varphi); \quad (16.34)$$

$$a=\ddot{\Delta}=-A \omega^2 \sin (\omega t+\varphi). \quad (16.35)$$

Integreerimiskonstandid määrame algtingimustest, mille kohaselt vaatluse alghetkel ( $t=t_0=0$ ) siire ja kiirus on tuntud:  $\Delta(0)=\Delta_0$  ja  $v(0)=v_0$ . Võrrandisüsteemist

$$\left. \begin{array}{l} A \sin \varphi=\Delta_0 \\ A \omega \cos \varphi=v_0 \end{array} \right\}$$

saame

$$A=\sqrt{\Delta_0^2+(v_0/\omega)^2}; \quad \varphi=\arctan \omega \Delta_0/v_0. \quad (16.36)$$

Masspunkti siirde, see tähendab funktsiooni (16.33) graafik  $t\Delta$ -teljestikus on kujutatud joonisel 16.16, c. Võrrandist (16.33) nähtub, et suurim siire  $A$  tasakaaluasendist ühele või teisele poole esineb neil ajahetkeil, kui  $\sin (\omega t+\varphi)=1$  ja seda suurust nimetatakse *võnkeamplituudiks*. Ajavahemikku  $T$ , mille jooksul võnkuv keha taastab oma siirde ja kiiruse, nimetatakse *võnkeperioodiks* ja selle aja vältel toimunud liikumist *võnkeks*. Nurk  $\varphi$  on tuntud võnkumise *algfaasina* ja tema tähendus selgub graafikult. Võrrandist (16.33) saame võrduse

$$\Delta=A \sin (\omega t+\varphi)=A \sin [\omega(t+T)+\varphi],$$

millega järeldub seos

$$\omega T=2\pi \quad \text{ehk} \quad T=2\pi/\omega. \quad (16.37)$$

Suurus  $\omega$  kannab nimetust võnkumise *nurksagedus*, mille mõõtühikuks on rad/s. Nurksagedus on määratud seosega (16.32), millest

$$\omega=\sqrt{c/m}=\sqrt{g/\Delta_{st}} \quad (16.38)$$

ja kus talle teine väljendusviis on saadud esimese arendusena, korrutades lugejat ja nimetajat vabalangemise kiirendusega  $g$  ja pidades silmas, et  $mg/c=\Delta_{st}$  on vedru otsa siire, kui võnkuva keha raskusjõud  $mg$  rakendub staatilise koormusena.

Asendades seoses (16.37) nurksageduse valemist (16.38), saame

$$T=2\pi \sqrt{m/c}=2\pi \sqrt{\Delta_{st}/g} \approx 2 \sqrt{\Delta_{st}}. \quad (16.39)$$

*Võnkesageduseks* nimetatakse suurust  $f=1/T=\omega/2\pi$ , mis näitab *võngete arvu ühe sekundi vältel* ja mille mõõtühikuks on Hz (herts). Toetudes seostele (16.39), saame

$$f=\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}=\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} \approx \frac{0,5}{\sqrt{\Delta_{st}}}. \quad (16.40)$$

Inseneripraktikas on kasutusel võnkesagedus  $n=60f$ , mis näitab *võngete arvu minutis*. Vabavõnkumise sagedust nimetatakse sageli ka süsteemi *omasageduseks*.

**16.3.3. Sumbuv võnkumine.** Vaatleme nüüd *takistusjõu* mõju vabavõnkumisele. Konstruktioonides avaldab kõige olulisemat takistust kehasisene hõõrdumine ehk nn. *sisehõõrdumine*, mis on seda suurem, mida ulatuslikumad on hülbed ideaalsest elastsusest. Õhutakistus, hõõrdumine liigendites jt. mõjutavad võnkumist vähem. Sisehõõrdumisest tekivad jõud  $R$  väikestel deformatsioonidel on peaaegu võrdeline deformeerumise kiirusega ja suunatud liikumisele vastu:  $R=-rv=-r\dot{\Delta}$ , kus konstantne kordaja  $r$  on konstruktsiooni *sisehõõrdetegur*. Võnkuva massi  $m$  tasakaalutingimus *d'Alembert'i* printsiibi põhjal  $\sum X=0$ ;  $-m\ddot{\Delta}-r\dot{\Delta}-c\Delta=0$  annab võnkumise diferentsiaalvõrrandi

$$\ddot{\Delta}+2\delta\dot{\Delta}+\omega^2\Delta=0, \quad (c)$$

kus

$$2\delta=r/m \quad \text{ja} \quad \omega^2=c/m. \quad (16.41)$$

Suurus  $\delta$  kannab nimetust *sumbetegur*.

Teist järku lineaarsele homogeenale konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandile (a) vastab karakteristiklik võrrand

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0,$$

mille lahendid

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

Diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$\Delta = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (d)$$

on esitatav kolmel erineval viisil, olenevalt suuruse  $\delta^2 - \omega^2$  märgist:

$$1) \delta^2 - \omega^2 < 0; \quad 2) \delta^2 - \omega^2 > 0; \quad 3) \delta^2 - \omega^2 = 0.$$

Esimesel juhul, kui hõõrdejõud on väike, see tähendab  $\delta < \omega$ , on karakteristikliku võrrandi lahendid kaaskompleksarvud

$$\lambda_1 = -\delta + i\omega' \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -\delta - i\omega',$$

kus

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}. \quad (16.42)$$

Võnkumise üldvõrrand (d) väljendub sel juhul teatavasti trigonomeetriliste funktsioonide kaudu:

$$\Delta = e^{-\delta t} (C_1 \sin \omega' t + C_2 \cos \omega' t),$$

ehk eelmises alapunktis tehtud teisenduse eeskujul

$$\Delta = A e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \varphi), \quad (16.43)$$

kus integreerimiskonstandid  $A$  ja  $\varphi$  väljenduvad valemitaga (16.36).

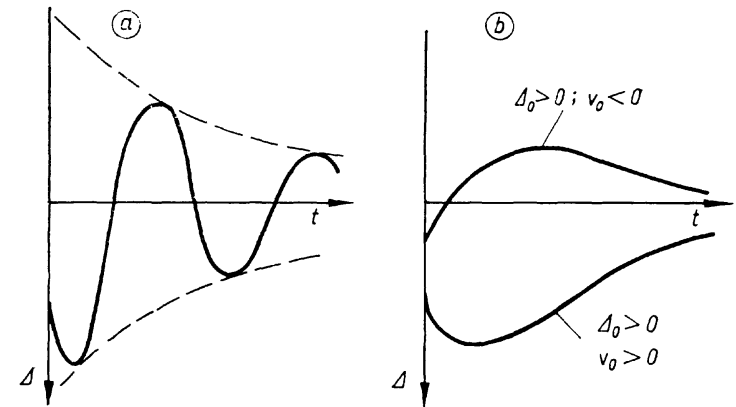
Hõõrdetakistusega võnkumise võrrand (16.43) sisaldab eksponentfunktsiooni, mille väärtus argumendi  $t$  kasvades monotoonselt väheneb. Võnkumise amplituudina esineb siin suurus

$$A e^{-\delta t}, \quad (16.44)$$

mis samuti iga perioodi  $T$  jooksul väheneb konstantse arvu  $e^{\delta T}$  kordselt, sest et

$$A e^{-\delta t} / A e^{-\delta(t+T)} = e^{\delta T}.$$

Nagu näeme, on meil tegemist vabavõnkumisega, mille amplituud aja kulgedes väheneb, kuni liikumine üldse lakkab. Kujutame niisuguse võnkumise graafiku joonisel 16.17, a ja nimetame teda *sumbuvaks võnkumiseks*. Suurust  $e^{\delta T}$  nimetatakse *sumbedekremendiks*, tema naturaallogaritmi



Joon. 16.17

$\delta T$  aga *logaritmiliseks sumbedekremendiks*:

$$\delta T = \ln \Delta(\bar{t}) / \Delta(t+T). \quad (16.45)$$

Omasagedus  $\omega'$  on väiksem sumbumatu võnkumise omasagedusest  $\omega$ , periood aga vastavalt pikem. Harilikudes konstruktsioonides  $\delta \ll \omega$  ja need erinevused pole enamasti märgatavad. Seepärast võib konstruktsiooni või selle elemendi omasageduse määrata sumbumust arvestamata.

Teisel juhul, kui hõõrdejõud on suur ja  $\delta > \omega$ , karakteristikliku võrrandi lahendid  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  on reaalsed ja negatiivsed. Üldlahendit (d) võime vaadelda sel juhul väljendatuna eksponentfunktsioonide kaudu või teisendada ta järgmisele kujule:

$$\Delta = A e^{-\delta t} \text{sh}(\omega'' t + \varphi), \quad (16.46)$$

kus

$$\omega'' = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}. \quad (16.47)$$

Kolmandal juhul, kui  $\delta = \omega$ , on karakteristikliku võrrandi lahendid võrdsed  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$  ja võnkumise võrrand

$$\Delta = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}. \quad (16.48)$$

Lahendites (16.46 ja 48) sisalduvad ainult aperioidilised funktsioonid, mis näitab, et kui  $\delta \geq \omega$ , siis võnkumine on *aperioidiline*. Niisuguse võnkumise kaks graafikut on esitatud joonisel 16.17, b vastavalt teatavatele erinevatele algingimustele, mida me siin lähemalt ei selgita. Aperioidilised võnkumised enamasti ei paku huvi konstruktsioonide



uurimisel inseneripraktikas, sest siin pole tegemist võnkumise harilikus mõttes. Konstruksioonides hõõrdetakistus kunagi nii suur pole, et tekiks aperioidiline võnkumine. Isegi veealustes konstruksioonides tekib harilik võnkumine.

**16.3.4. Sundvõnkumine tekib siis, kui masspunktile  $m$  mõjub peale eelmises alapunktis vaadeldud jõudude veel perioodiliselt muutuv jõud  $F$ .** Konstruksioonides põhjustavad selle jõu masinate pöörlevad või perioodiliselt liikuvad osad, nagu väntvõll, keps, rootor jpt., mehaanilised sundvõnkumise allikad, kuid ka perioodiliselt muutuv elektromagnetiline väli, keskkonna rõhk jne. Enamasti need konstruksiooni häirivad jõud muutuvad *harmoniliselt*, see tähendab, neid võime esitada funktsioonina ajast järgmisel kujul:

$$F = F_0 \sin \omega_0 t, \quad (16.49)$$

kus  $F_0$  on jõu amplituud ja  $\omega_0$  tema nurksagedus.

Kui jõud  $F$  ei ole harmooniline, vaid muutub mingi teise perioodilise seaduspärasusega, siis tekib konstruksioonid samuti sundvõnkumine, mis paljudel juhtudel on lähedane sama sagedusega harmoonilisest jõust põhjustatud võnkumisele.

Sundvõnkumisel mõjuvad masspunktile endiselt inertsi jõud, sisehõõrdejõud, elastsusjõud ja neile lisaks välisjõud  $F$ , mis peavad rahuldama igal hetkel tasakaalutingimust  $\sum X = 0$ ;  $-m\ddot{\Delta} - r\dot{\Delta} - c\Delta + F = 0$ . Sellest tingimusest, arvesse võttes avaldist (16.49), saame diferentsiaalvõrrandi

$$\ddot{\Delta} + 2\delta\dot{\Delta} + \omega^2\Delta = (F_0/m) \sin \omega_0 t, \quad (e)$$

kus suurustel  $2\delta$  ja  $\omega^2$  on sama tähendus, mis eelmises jaotises (seosed 16.41).

Saime teist järku lineaarse mittehomoogeense konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi, mille lahendit otsime tingimisel

$$\delta < \omega. \quad (16.50)$$

Seda tingimust rahuldavad kõik need konstruksioonid, mille sundvõnkumise uurimine võib pakkuda praktilist huvi. Kui tingimus pole täidetud, siis ohtlikku sundvõnkumist ei teki suure sisehõõrdumise tõttu (vt. eelmine jaotis).

Kui võrrandi (e) kordajad rahuldavad tingimust (16.50), siis temale vastav homogeenne diferentsiaalvõrrand ühtib võrrandiga (c) eelmisest jaotisest ja selle üldlahendiks on avaldis (16.43). Mittehomoogeense võrrandi (e) erilahendit otsime kujul

$$\Delta^* = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (16.51)$$

kus  $A_0$  ja  $\varphi_0$  on esialgu tundmatud konstandid, mis määratakse nii, et nad rahuldaksid võrrandit. Arvutame erilahendi tuletised

$$\dot{\Delta}^* = A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad \ddot{\Delta}^* = -A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

ja asetame võrrandisse (e):

$$-A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + 2\delta A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \omega^2 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = (F_0/m) \sin \omega_0 t. \quad (f)$$

Väljendades võrduses (f) esineva suuruse

$$\begin{aligned} \sin \omega_0 t &= \sin(\omega_0 t + \varphi_0 - \varphi_0) = \\ &= \cos \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \sin \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned}$$

teisendame selle järgmisele kujule:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_0^2) A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + 2\delta \omega_0 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ = (F_0/m) \cos \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - (F_0/m) \sin \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned}$$

mis peab rahuldama mis tahes  $t$  väärtusega. See tingimus on täidetud teatavasti ainult siis, kui võrduse konstantsed kordajad ühesuguste muutuvate suuruste ees on võrdsed:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \omega_0^2) A_0 &= (F_0/m) \cos \varphi_0 \\ 2\delta \omega_0 A_0 &= -(F_0/m) \sin \varphi_0 \end{aligned} \right\}.$$

Saadud võrrandisüsteemist leiame

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega_0^2}}; \\ \varphi_0 &= \arctan \left( -\frac{2\delta \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right). \end{aligned} \quad (16.52)$$

Diferentsiaalvõrrandi (e) üldlahendi saame, kui homogeense võrrandi üldlahendile (16.43) liidame erilahendi (16.51), milles konstandid  $A_0$  ja  $\varphi_0$  asendame oma avaldisetega (16.52):

$$\begin{aligned} \Delta &= A e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \varphi) + \\ &+ \frac{F_0 \sin \left[ \omega_0 t + \arctan \left( -\frac{2\delta \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \right]}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega_0^2}}. \end{aligned} \quad (g)$$

Vaatleme saadud lahendit. Lähtudes alghetkest ( $t=0$ ), masspunkti  $m$  võnkliikumine koosneb kahest komponendist, millest esimene kujutab endast sumbuvat vabavõnkumist

amplituudiga  $Ae^{-\delta t}$ , mis ei sõltu just  $F$  ja mis aja  $t$  kulgedes varem või hiljem kaob. Teine komponent sõltub jõust  $F$  ja on ajas püsiv. Sellel statsionaarsele sundvõnkumisele ülemineku ajavahemikul summeerub masspunkti  $m$  liikumine kahest, üldjuhul erineva sagedusega võnkumisest, mille graafik  $t\Delta$ -teljestikus võib kujuneda üsna keerukaks kõverjooneks. Statsionaarse sundvõnkumise kujunemise ajavahemik  $0 \leq t \leq t_1$ , mis ei ületa ühte-kahte sekundit, ei paku enamasti huvi konstruktsioonide tugevus-, jäikus- ja stabiilsusarvutuste seisukohalt, kuna selle suhteliselt lühikese aja vältel dünaamilised pinged ja siirded on samuti alles kujunemas ja pole veel saavutanud oma suurimaid väärtusi. Ajahetkest  $t_1$  iseloomustab sundvõnkumist võrrandi ( $g$ ) teine liige.

$$\Delta = \frac{F_0 \sin \left[ \omega_0 t + \arctan \left( -\frac{2\delta\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \right]}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2}} \quad (16.53)$$

eeldusel, et juhul kui  $\omega = \omega_0$ , siis  $\delta \neq 0$  või kui  $\delta = 0$ , siis  $\omega \neq \omega_0$ . (Kui  $\omega = \omega_0$  ja  $\delta = 0$ , siis siire  $\Delta$  pole määratav.)

Võrrandist (16.53) nähtub, et ajas väljakujunenud sundvõnkumise amplituud avaldub esimese valemiga (16.52). Korrutame ja jagame seda valemit konstruktsiooni jäikus-teguriga  $c$  ja võtame arvesse, et  $F_0/c = \Delta_{st}$  ja  $c/m = \omega^2$ :

$$A_0 = \Delta_a = \frac{F_0 c}{m c \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2}} = \frac{\omega^2 \Delta_{st}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2}}, \quad (h)$$

kus  $\Delta_{st}$  on võnkuva masspunkti *staatiline siire* muutuva jõu suurimast väärtusest  $F_0$ . Esitame *dünaamilise siirde* (võnkumise amplituudi) valemi kujul

$$\Delta_a = k_d \Delta_{st}, \quad (16.54)$$

kus  $k_d$  on *dünaamikategur*, mis seose (h) põhjal avaldub ja on teisendatav järgmiselt:

$$k_d = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^2 + \frac{4\delta^2 T^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

Võttes arvesse, et  $\omega T = 2\pi$ , saame

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^2 + \frac{(\delta T)^2}{\pi^2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}, \quad (16.55)$$

kus  $\omega$  on konstruktsiooni omasagedus,  $\omega_0$  — sundvõnkumise sagedus ja  $\delta T$  — logaritmiline sumbedekrement, mis iseloomustab hõrdetakistust.

Dünaamikateguril on üldiselt oma endine tähendus. Ta näitab mitu korda suurenevad staatilised siirded, pöördenurgad, sisejõud, pinged jt. jõufunktsioonid, mis tulenevad staatilisest jõust  $F_0$ , kui see hakkab harmooniliselt vahelduma nurksagedusega  $\omega_0$  (vt. avaldis 16.49). Ülesande lahendamise üks võimalik plaan on järgmine: 1) arvutame konstruktsioonile mõjuvast staatilisest koormusest  $G = mg$  tuleneva jõufunktsiooni väärtuse  $S_1$ , millena mõistame suurimat pinget, mingi punkti siiret või mõnd muud meid huvitavat suurust; 2) vaatleme muutuva jõu amplituudi  $F_0$  staatilise koormusena ja määrame sellest tuleneva otsitava jõufunktsiooni väärtuse  $S_{st}$ ; 3) leiame dünaamikateguri  $k_d$  valemist (16.55); 4) arvutame vahelduvast koormusest  $F = F_0 \sin \omega t$  tekkiva dünaamilise suuruse

$$S_d = k_d \cdot S_{st}. \quad (16.56)$$

Rakendades jõudude mõju sõltumatuse printsiibi, arvutame otsitava jõufunktsiooni suurima väärtuse, mida võrdleme vastava lubatava suurusega:

$$S = S_1 + S_d \leq [S]. \quad (16.57)$$

**16.3.5. Resonants on suure amplituudiga sundvõnkumine, mis tekib, kui perioodiliselt muutuva jõu sagedus ühtib konstruktsiooni omasagedusega**

$$\omega_0 = \omega \quad (16.58)$$

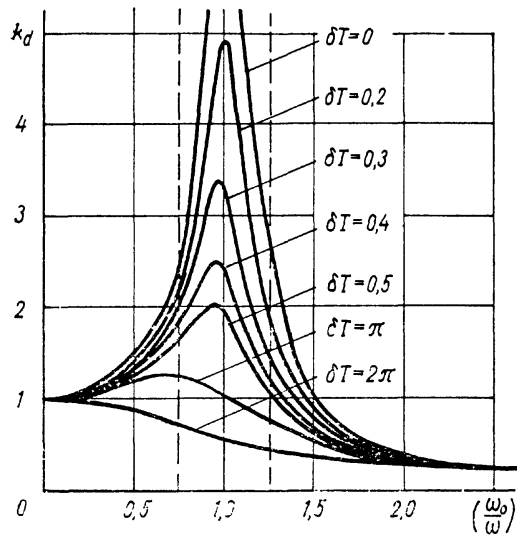
ja logaritmiline sumbedekrement ei ületa suurust  $2\pi$ :

$$\delta T < 2\pi. \quad (16.59)$$

Tingimus (16.59) on saadav tingimusest (16.50), kui selle korrutame vabavõnkumise perioodiga  $T$  ja võtame arvesse, et  $\omega T = 2\pi$ .

Vaatleme resonantsi nähtust dünaamikateguri  $k_d$  najal, mille suurus on võrdeline sundvõnkumise amplituudiga (vt. valem 16.54). Valemist (16.55) selgub, et juhul kui on rahuldatud resonantsi tingimus (16.58), siis suhe  $\omega_0/\omega = 1$  ja dünaamikategur

$$k_d = \pi/\delta T. \quad (16.60)$$



Joon. 16.18

Kui seejuures logaritmiline sumbedekrement on väga väike ( $\delta T \approx 0$ ), siis dünaamikategur ja võnkeamplituud võivad piiramatult kasvada ( $k_d \rightarrow \infty$ ), millega kaasneb paratamatult konstruktsiooni purunemine. Joonisel 16.18 on kujutatud dünaamikateguri sõltuvus suhtest  $\omega_0/\omega$ . Kõige kõrgemal asetsev joon, mis on tähistega  $\delta T=0$ , esitab dünaamikateguri sisehõõrdeta konstruktsioonis. Nendes konstruktsioonides, mille sissehõõrdumise logaritmiline sumbedekrement  $\delta T$  on teatava mõõduka väärtusega, kasvab dünaamikategur oma lõpliku suuruseni ja sundvõnkumine resonantsi tingimustes toimub silmatorkavalt suure võnkeamplituudiga. Võnkeamplituudi suurenemine suhte  $\omega_0/\omega=1$  puhul kaob täielikult, kui  $\delta T \geq 2\pi$ . Järelikult, kui pole rahuldatud tingimus (16.58), siis ei esine ka resonantsi nähtust. Konstruktsioonide resonantsi uurimisest inseneripraktikas võime loobuda, kui

$$\delta T > \pi, \quad (16.61)$$

sest piirkonnas  $2\pi > \delta T > \pi$  on see nähtus vaevalt märgatav ja praktilist tähtsust tal pole. See asjaolu selgub ka jooniselt 16.18.

Konstruktsioonides on resonants üldiselt kahjulik nähtus, enamasti aga täielikult lubamatu. Muidugi pole välistatud võimalus rakendada mõnel juhul resonantsi nähtust kasuli-

kel eesmärkidel, nagu see leiab aset teatud mõõteriistades, releedes, muusikas j.m. Resonantsist hoidumiseks tuleb silmas pidada, et suhe  $\omega_0/\omega$  erineks tunduvalt ühest. Teisiti öeldes, ei tohi lubada, et sundvõnkumise ja omasageduse suhe satuks nn. *resonantsi piirkonda*, kus võnkeamplituud ja dünaamikategur on lubamatult suured. Resonantsi piirkond on määratud kahe piirväärtusega, millest üks on ühest veidi väiksem ja teine suurem:

$$[\omega_0/\omega]_M < 1 < [\omega_0/\omega]_K,$$

mis joonisel 16.18 on tähistatud kahe vertikaalse kriipsjoonega. Järelikult on lubatavaid sundvõnkumise piirkondi kaks:

$$1) \omega_0/\omega < [\omega_0/\omega]_M; \quad 2) \omega_0/\omega > [\omega_0/\omega]_K. \quad (16.62)$$

Esimesele piirkonnale võetakse suurim lubatav suhe enamasti vahemikus  $[\omega_0/\omega]_M = 0,60 \dots 0,75$  ja teisele  $[\omega_0/\omega]_K = 1,25 \dots 1,40$ . Joonisel 16.18 on need lubatavad suhted näidatud vastavalt 0,75 ja 1,25.

Konstruktsioonide usaldatavuse tagamine tingimuste (16.62) najal on üks olulisemaid tugevusarvutuste valdkonnas sel juhul, kui vaadeldavas konstruktsioonis esineb perioodiliselt muutuv jõud. Isegi väga väiksest jõust esile kutsutud resonants võib oluliselt konstruktsiooni kahjustada. Nende ülesannete lahendamisel tuleb arvutuse või katsetega kindlaks teha konstruktsiooni omasagedus ja võrrelda seda sundvõnkumise, see tähendab perioodiliselt muutuva jõu sagedusega. Kui need sagedused rahuldavad tingimusi (16.62), siis konstruktsiooni võnkeamplituud ei kujune ohtlikult suureks. Seejuures on võimalik ligikaudselt arvutada ka sundvõnkumise amplituudi suurus praktiliselt küllaldase täpsusega ilma, et oleks vajalik kindlaks teha tülikalt määratavat konstruktsiooni logaritmilist sumbedekrementi. Tõepoolest, joonisel 16.18 selgub, et  $k_d$  kõverad mitmesuguste  $\delta T$  väärtuste puhul erinevad oluliselt ainult resonantsi lähedases piirkonnas, kuna sellest kaugemal, kus  $\omega_0$  on 1,5...2,0 korda suurem või väiksem omasagedusest  $\omega$ , asetsevad need kõverad lähestikku. Seepärast dünaamikateguri määramisel resonantsiühututes piirkondades süsteemi sumbuvus olulist rolli ei mängi ja arvutustes võime võtta  $\delta T=0$ , millega valem (16.55) lihtsustub ja saab kuju

$$k_d = \pm \frac{1}{1 - (\omega_0/\omega)^2}. \quad (16.63)$$

Kui ehitiste projekteerimisel ja seadmete konstrueerimi-

sel tekib resonantsi oht, siis kõrvaldame selle niisuguste konstruktiivsete muudatustega, mis nihutavad suhte  $\omega_0/\omega$  eemale ohtlikust piirkonnast. Seejuures on meil alati kaks võimalust, kas vähendame sageduste suhet või siis suurendame seda. Ökonoomsuse kaalutlustest tuleks suhet suurendada üle ühe, sest piirkonnas  $\omega_0/\omega > 1$  saame dünaamikategori  $k_d$  väiksema kui esimeses piirkonnas  $\omega_0/\omega < 1$ , mis selgub ka jooniselt 16.18. Kõige lihtsam on seda saavutada konstruktsiooni jäikuse  $c$  vähendamisega või võnkumise massi

$m$  suurendamisega, millega kaasneb omasageduse  $\omega = \sqrt{c/m}$  alanemine ja suhte  $\omega_0/\omega$  suurenemine. Seejuures, kui seade töötab teises ohutusepiirkonnas, see tähendab  $\omega_0 > \omega$ , siis tekib probleem masinate käivitamisel ja seiskamisel, millega paratamatult kaasneb vajadus läbida resonantsi piirkond. Ka see küsimus vajab inseneripraktikas mõnel juhul sügavat uurimist ja abinõude rakendamist ohtude vältimiseks. Väiksematele masinatele ja konstruktsioonidele resonantsi piirkonna läbimine enamasti ohtu ei tekita ja sageli pole peaaegu märgatav. Ohtlikud nähtused kõrvalduvad siin sellega, et sundvõnkumisel on oma n. ö. käivitumise aeg, mille jooksul kujuneb välja püsiv võnkeamplituud. Ka resonantsi korral on tarvilik teatav aeg, mille jooksul võnkeamplituud kasvab ja saavutab oma iseloomuliku suure väärtuse. Kui konstruktsioon ohtliku tsooni läbimisel on selles ainult lühemat aega, mis on väiksem resonantsi väljakujunemiseks vajalikust ajast, siis see muidugi konstruktsiooni ei kahjusta ja sageli jääb võnkumise ägenemine üldse märkamatuks.

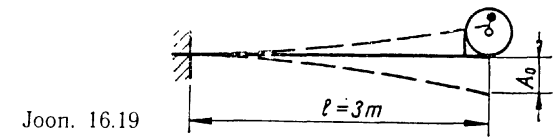
Mõnikord esineb olukord, kus sageduste suhte muutmine pole võimalik ja resonants on vältimatu. Sel juhul kasutame *võnkesummuteid*, millega kunstlikult suurendame logaritmilist sumbedekrementi  $\delta T$  ja vähendame sel teel dünaamikategurit ning võnkeamplituudi niisugusel määral, et konstruktsioonist kõrvaldub resonantsi ohtlik mõju. Seejuures peame silmas tingimust (16.61). Summutitena on kasutusel õli keskkond võnkumise keha ümber, hõõret tekitavad detailid ja muud taolised, mis hajutavad energiat võnkuvast konstruktsioonist.

Resonantsi uurimisel peame silmas veel seda asjaolu, et võnkumine ei toimu siin samas faasis jõu muutumisega. Teisest valemist (16.52) selgub, et igasuguse sundvõnkumise faas hilineb jõu muutumise faasist nurga  $\varphi_0$  võrra. See *faasi nihe* kasvab resonantsis ( $\omega = \omega_0$ ) suuruseni

$$\varphi_0 = \arctan \left( -\frac{2\beta\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Järelikult resonantsis jääb võnkumise faas  $\omega_0 t + \varphi_0$  jõu faasist  $\omega_0 t$  täisnurga (veerandperioodi) võrra maha.

Inseneripraktikas on levinud võnkumiste eksperimenditaalne uurimine, milleks kasutatakse *vibrograafi*, aparati, mis kinnitatuna võnkuvale kehale, joonestab liikuvale lindile võnkumisgraafiku  $t\Delta$ -teljestikus. Niisuguselt graafikult või *vibrogrammilt* saame paljud suurused, mis on meile vajalikud vahetult või ka algandmetena arvutusteks. Eriti oluline on omasageduse ja sumbuuse määramine katselisel teel, kuna esimese arvutamine on sageli seotud võimaliku liiga suure veaga ja teist võime kindlaks teha ainult katseliselt.



*Näide 16.5.* Vaatleme arvutusnäidet joonise 16.19 põhjal. Konsooli otsale on kinnitatud 300-kg masin, mille võllil pöörleb 5-mm ekstsentrilisusega 50-kg keha, tehes 250 pööret minutis. Määrata konsooliks sobiv terasest I-profiil, milles dünaamiline pinge ei ületaks 140 MPa, võnkeamplituud 2 mm ja sundvõnkumise sageduse ja omasageduse suhe ei satuks resonantsipiirkonda 0,67...1,33.

Valime konsooliks profiiliterase I-16, mille  $I = 873 \text{ cm}^4$  ja  $W = 109 \text{ cm}^3$ . Arvutame konsooli jäikuse ja omasageduse, arvestamata konsooli massi:

$$c = 3EI/l^3 = 3 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}/3^3 = 203,7 \cdot 10^3 \text{ N/m};$$

$$\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{203,7 \cdot 10^3/300} = 26,06 \text{ rad/s}.$$

Määrame sundvõnkumise nurksageduse

$$\omega_0 = \pi n/30 = 3,14 \cdot 250/30 = 26,18 \text{ rad/s}.$$

Suhe  $\omega_0/\omega = 26,18/26,06 = 1,005$  näitab, et konsool on resonantsis ja valitud konstruktiivne lahendus ei kõlba.

Vähendame konsooli omasagedust, sel teel, et võtame profiili I-14, mille  $I = 572 \text{ cm}^4$  ja  $W = 81,7 \text{ cm}^3$  ja lisame masina massile ballasti 60 kg, nii et võnkumise mass on 360 kg. Arvutame jäikuse ja omasageduse:

$$c = 3EI/l^3 = 3 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 572 \cdot 10^{-8}/3^3 = 133,5 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

$$\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{133,5 \cdot 10^3/360} = 19,25 \text{ rad/s}.$$

Suhe  $\omega_0/\omega = 26,18/19,25 = 1,36 > 1,33$  rahuldab seatud tingimust. Määrame dünaamikateguri valemiga (16.63):

$$k_d = \pm \frac{1}{1 - (\omega_0^2/\omega^2)} = \pm \frac{1}{1 - 1,36^2} = \pm 1,176.$$

Arvutame pöörleva massi inertsijõu

$$F_0 = m_0 \omega_0^2 R = 50 \cdot 26,18^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 171,35 \text{ N}.$$

Suurim tõmbe- ja survepinge konsooli kinnituskohas masina ja ballasti kaalust

$$\sigma_{st} = mg/W = 360 \cdot 9,81 \cdot 3 / (81,7 \cdot 10^{-6}) = 129,7 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 129,7 \text{ MPa}.$$

Pinged dünaamilisest koormusest

$$\sigma_d = k_d F_0 l / W = \pm 1,176 \cdot 171,35 \cdot 3 / (81,7 \cdot 10^{-6}) = \pm 7,4 \cdot 10^6 \text{ Pa} = \pm 7,4 \text{ MPa}.$$

Summaarsed pinged

$$\max \sigma = \sigma_{st} + \sigma_d = 129,7 + 7,4 = 137,1 \text{ MPa};$$

$$\min \sigma = \sigma_{st} - \sigma_d = 129,7 - 7,4 = 122,3 \text{ MPa}.$$

Tugevustingimus ja sundvõnkumise amplituud:

$$\max \sigma = 137,1 < [\sigma] = 140 \text{ MPa};$$

$$A_0 = k_d F_0 l^3 / 3EI = 1,176 \cdot 171,4 \cdot 3^3 / (3 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 572 \cdot 10^{-8}) = 0,00151 \text{ m} = 1,51 \text{ mm} < [A_0] = 2 \text{ mm}.$$

## 17. KOHALIKUD PINGED

### 17.1. PINGEKONTSENTRATSIOON

Teatavasti tuletasime pingete arvutusvalemid *Bernoulli* hüpoteesi põhjal, mis vardale on rakendatav suures ulatuses, kuid mitte kogu pikkusel. Mitmes eelnenud peatükis märkisime, et kohtades, kus rakenduvad välisjõud, muutub ristlõikepindala, selle kuju, on tehtud sisselõiked või avad ja muud taolisõid, varda ristlõige deformeerumisel oluliselt kõverdub. Pingete arvutamisel jätsime need väiksed piirkonnad vaatlusest kõrvale. Mõnel juhul pingeseisund nendel aladel pole oluline, sest varda üldise tugevuse hindamisel ei kujure ta mõõtuandvaks ja võib seepärast jääda tähelepanuta. Teistel juhtudel tekib nendes kohtades suhteliselt suur pinge, nn. *kohalik pinge*, mida peame silmas pidama.

Kohaliku pinge üks põhjustaja on *pingekontsentraator*, millena mõistetakse vardas esinevat ava, sisselõiget, keeret, kuid ka defekte töötlemisjälje, prao, tühemiku, korrosioonikahjustuse jm. näol. Pingekontsentraatori lähedases piirkonnas mõjub ühes või mõnes punktis suhteliselt suur pinge  $\max \sigma$ , mis oluliselt ületab nn. *nimipinget*  $\sigma_{nom}$ . Viimase saame arvutusliku pingena tugevusõpetuse valemiteest. Nii-sugune tegeliku pinge kõrvalekaldumine nimipingest on *pingekontsentratsioon*.

Pingeseisundit kontsentraatori lähedases piirkonnas võib uurida elastsusteooria abil ja eksperimentaalsel teel konstruktiooni või mudelite abil. Kui selle uurimisega õnnestub määrata suurim pinge  $\max \sigma$ , siis võime tugevusõpetuse tarbeks määrata suhtarvu  $\alpha = \max \sigma / \sigma_{nom}$ , mis kannab nime-

tust *teoreetiline kontsentratsioonitegur*. Vajaduse korral lubab see tegur arvutada suurima pinge

$$\max \sigma = \alpha \sigma_{nom}. \quad (17.1)$$

Tegur  $\alpha \geq 1$ . Tema piirväärtus  $\alpha = 1$  viitab pingekontsentratsiooni puudumisele või teisiti öeldes sellele, et tugevusõpetuse arvutusviis annab täpse tulemuse. Valemis (17.1) mõistame pingetena nii normaal- kui ka nihkepingeid.

Vaatleme pingekontsentratsiooni suures terasest lehes, milles mõjub tõmbepinge  $\sigma_0$  ja millesse on puuritud suhteliselt väike ava läbimõõduga  $d$ . Selle teraslehe kõne all olev piirkond on kujutatud joonisel 17.1, a. Kui lahendada seatud ülesanne elastsusteoorias, siis saame, et mööda  $x$ -telge tehtud lõikepinnal normaalpinge

$$\sigma(x) = \sigma_0 [1 + d^2 / (8x^2) + 3d^4 / (32x^4)].$$

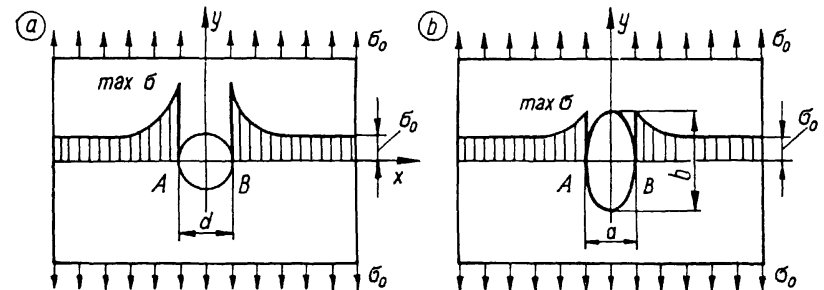
Ava äärepunktides  $A$  ja  $B$ , kus  $x = \mp d/2$ , saame suurima pinge

$$\max \sigma = 3\sigma_0. \quad (17.2)$$

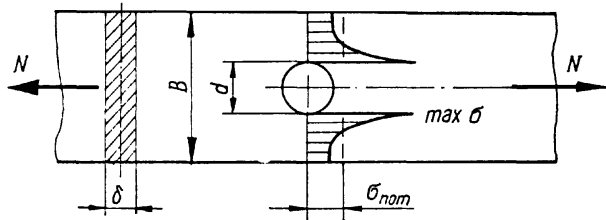
Avast kaugenemisel väheneb pinge kiiresti ja läheneb tõmbepinge  $\sigma_0$  väärtusele. Kujutame pinge  $\sigma(x)$  epüüri joonisel 17.1, a. Suurim pinge punktides  $A$  ja  $B$  on arvutatav valemiga (17.1), kui võtame kontsentratsiooniteguriks  $\alpha = 3$  ja  $\sigma_{nom} = \sigma_0$  tingimisel  $d < 0,1B$ , kus  $B$  on lehe laius (joonisel pole näidatud).

Kui plaati lõigata elliptiline ava mõõtmetega  $a$  ja  $b$ , nagu näidatud joonisel 17.1, b, siis elastsusteooriast saame teoreetilise kontsentratsiooniteguri jaoks järgmise avaldise:

$$\alpha = 1 + 2(a/b). \quad (17.3)$$



Joon. 17.1



Joon. 17.2

Sellest avaldisest nähtub, et pingete vähendamiseks tuleb ümarad avad võimaluse korral asendada elliptilistega, mis on piklikud mõjuva jõu sihis. Siit saime tähtsa juhtnööri pingekontsentratsiooni kahjuliku mõju vähendamiseks tõmbele töötavate varraste avade ümber. Uurime veel valemit (17.2). Kui  $b \rightarrow 0$ , mis tähendab elliptilise ava kahanemist mõjuva jõuga risti asetsevaks praoks, siis  $\sigma \rightarrow \infty$  ja suurim pinge selle praost peaks piiramatult kasvama. Tegelikult põhjustab kasvav pinge rabedas materjalis paratamatu purunemise ja plastses materjalis voolamise väikestel aladel praost juures. Kui  $a \rightarrow 0$ , siis  $\alpha \rightarrow 1$  ja pingekontsentratsiooni ei esine. Järelikult jõu sihiga ühtiv pragu pole ohtlik.

Ümara ava teoreetiline kontsentratsioonitegur  $\alpha = 3$  ja elliptilise ava tegur valemist (17.3) kehtivad siis, kui varda laius ületab vähemalt kümnekordselt mõõtmed  $d$  ja  $a$ . Kui varda laius on väiksem, siis  $\alpha$  suureneb märgatavalt (joonis 17.2). Tabelis 13 on toodud ümara ava  $\alpha$  väärtused tõmbele allutatud ristkülikulise ristlõikega vardas olenevalt suhtest  $d/B$ . Seejuures suurima pinge arvutame endiselt valemiga (17.1), milles nimipinge

$$\sigma_{nom} = N/A_{nt}, \quad \text{kus} \quad A_{nt} = \delta(B - d). \quad (17.4)$$

Valemist (17.4) selgub, et nimipinge arvutame nõrges-

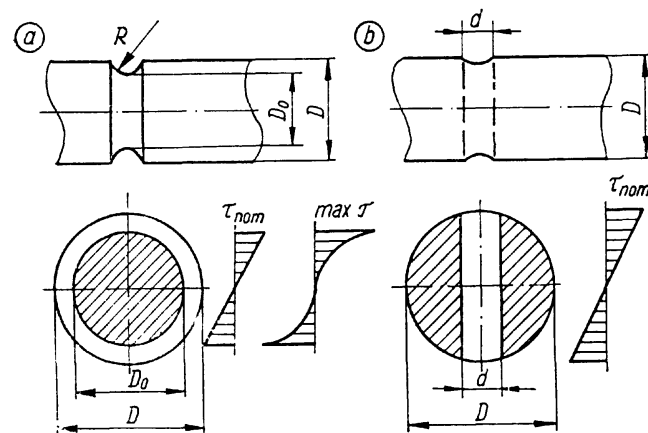
Tabel 13

Teguri  $\alpha$  väärtused vardale jooniselt 17.2

$d/B$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\alpha$	3,00	3,03	3,14	3,36	3,74	4,32

tatud ristlõikepindalaga  $A_{nt}$ . Nimipinge arvutatakse üldreeglina nõrgestatud ristlõike geomeetrilise tunnussuurusega. Näitena vaatleme võlli lõiku jooniselt 17.3, a, millel kontsentratoriks on sissetreitud soon. Selle võlli arvutamisel väändeled tuleb arvesse nimipinge  $\tau_0 = M_v/W_0$ , kus polaartugevusmoment arvutatakse viirutatud ristlõikepindalale ( $A_{nt}$ ). Järelikult  $W_0 = \pi D_0^3/16$ . Neil juhtudel, kui nõrgestatud ristlõike tunnussuurus pole tugevusõpetusest tuntud valemitega leitav või pole üldse määratud, arvutatakse nimipinge erandlikult nõrgestamata ristlõikepindala  $A_{br}$  järgi. Näitena vaatleme võlli lõiku jooniselt 17.3, b, millesse on puuritud ava läbimõõduga  $d$ . Nimipinge  $\tau_0 = M_v/W_0$  arvutatakse siin polaartugevusmomendiga  $W_0 = \pi D^3/16$ , see tähendab nõrgestamata ristlõikepindala  $A_{br}$  järgi, sest nõrgestatud (viirutatud) ristlõikepindalale  $A_{nt}$  pole polaartugevusmoment määratav. Samal viisil teeme väändelearvutuse võllile, millesse on freesitud pikisuunaline soon.

Teoreetiline kontsentratsioonitegur määratakse eeldusel, et materjal allub Hooke'i seadusele koormuse suurenedes kuni piirseisundini. Sellele eeldusele vastavad enam või vähem ainult kvaliteeterased. Suurem osa materjalidest ei allu piirseisundi eel Hooke'i seadusele. Sellest asjaolust tuleneb, et kontsentratoriga varras näitab eksperimentaalsel uurimisel kõrgemat tugevust, kui lubab oodata teoreetiline kontsentratsioonitegur  $\alpha$ . Katseandmete najal võime määrata tegelikule tugevusele vastava nn. *efektiivse kont-*



Joon. 17.3

sentratsiooniteguri staatilisel koormusel

$$K_{st} = \sigma_B / \sigma_{OB}, \quad (17.5)$$

kus  $\sigma_B$  on materjali tugevus ja  $\sigma_{OB}$  — kontsentratoriga elemendi nimipinge purunemise piiril staatilise koormusega. Nagu juba eespool öeldust järgneb, osutub efektiivne kontsentratsioonitegur väiksemaks teoreetilisest ( $K_{st} < \alpha$ ).

Lisaks tegurit  $\alpha$  mõjutavatele geomeetrisetele faktoritele sõltub efektiivne kontsentratsioonitegur  $K_{st}$  veel materjalist, konstruktsioonielemendi absoluutsetest mõõtmetest, koormuse muutuvusest ajas, temperatuurist, keskkonnast jpt. See pärast on efektiivse kontsentratsiooniteguri määramine inseneripraktika vajaduste rahuldamiseks äärmiselt töömahukas ja tema arväärtusi leiame kirjandusest ainult piiratud ulatuses. Lünki aitab siin kõrvaldada teguri  $K_{st}$  ligikaudne määramine staatilise pinge kontsentratsioonitundlikkuse teguri

$$q_{st} = \frac{K_{st} - 1}{\alpha - 1} \quad (17.6)$$

vahendusel, millest

$$K_{st} = q_{st}(\alpha - 1) + 1, \quad (17.7)$$

kus  $\alpha$  on teoreetiline kontsentratsioonitegur. Väärtusi  $q_{st}$  jaoks leiame teatmeteostest, kus see tegur enamasti antakse sõltuvalt materjalist ja selle margist.

Tugevustingimus seatakse konstruktsioonielemendile lähitudes tugevusõpetuse valemitega määratud nimipingetest:

$$\sigma_{nom} \leq \sigma_{OB} / S, \quad (17.8)$$

kus  $\sigma_{OB}$  vastab sama elemendi tugevuse piirkoormusele ja  $S$  on varutegur. Asendades piirseisundi nimipinge  $\sigma_{OB}$  seosest (17.5), saame tingimuse (17.8) väljendada järgmisel kujul:

$$\sigma_{nom} \leq \frac{\sigma_B}{SK_{st}}, \quad (17.9)$$

kus  $\sigma_B$  on materjali tugevus. Materjali lubatava pingega tugevustingimus

$$K_{st} \sigma_{nom} \leq [\sigma]. \quad (17.10)$$

Kui puuduvad andmed, siis võime efektiivse teguri  $K_{st}$  asendada teoreetilisega  $\alpha$ , mille arväärtused on peaaegu alati leitavad. See asendus ei ohusta ühelgi juhul tugevust, võib aga mõnel juhul selle varu põhjendamatult suurendada.

Pingekontsentratsioon on üldiselt kahjulik ja seda tuleb võimalust mööda vältida või vähendada tema mõju. Selleks rakendame mitmesuguseid konstruktiivseid võtteid, millest ühte oleme vaadelnud eespool ja mis seisneb selles, et tõmbele töötavas vardas asendame sobival juhul ümara ava pikergusega. *Varrastesse tehtud sisselõiked soonte, astmete ja muude näol, annavad seda madalama kontsentratsiooni, mida suurema raadiusega on tehtud nende põhjad ja sisselõikuvad nurgad.* Kui näiteks sisselõigatud teravnurkse soone põhjas nn. *üleminekuraadius* puudub ( $R=0$ ), siis teoreetiline kontsentratsioonitegur  $\alpha \approx 3$ , meeterkeermel  $\alpha = 2,5$ .

*Pingekontsentratori mõju on seda väiksem mida staatilistem koormus ja plastsem materjal.* Konstruktsioonides, mille koormused muutuvad aeglaselt ja vähesel määral ja mis on valmistatud harilikust plastsest terasest, pingekontsentratsiooni enamasti ei arvestata ja tugevustingimuses (17.10) efektiivne kontsentratsioonitegur  $K_{st} = 1$ . Põhjenduseks on asjaolu, et koormuse suurenemisest tekkiv voolamine tõkestab suurima pinge kasvu ohtlikus punktis ja ühtlustab pinged selle punkti ümbruses. Kui seejuures koormus on staatiline, siis taoline väikesel alal esinev voolamine konstruktsioonielemendile ohtlik ei ole. Teisel poolt, *mida dünaamilisem on koormus ja rabedam materjal, seda hoolikamalt tuleb arvestada pingekontsentratsiooni.* Eelöeldu taustal on *erandlikuks materjaliks malm*, mis vaatamata oma iseloomulikule haprusele pole kontsentratsioonitundlik. Harilikust hallmalmist konstruktsioonielementide tugevusarvutustes staatilise ja mõõdukalt dünaamilise koormusega võib pingekontsentratsioon jääda tähelepanuta, s. t. võib võtta  $K_{st} = 1$  või  $q_{st} = 0$ . Kõrgtugevast malmist elementides jätame kontsentratsiooni arvestamata, kui selle teoreetiline tegur  $\alpha \leq 2$ . Juhul, kui  $\alpha > 2$ , siis võtame  $K_{st} = \alpha - 1$ .

Malmi madal kontsentratsioonitundlikkus tuleneb temas suurel hulgal leiduvatest loomulikest defektidest mikropragude, mittemetalsete lisandite, väikeste tühemike jm. näol. Need defektid esinevad sisemiste pingekontsentratoritena, mille kõrval välise (konstruktiivsete) kontsentratorite mõju hallmalmil üldse ei avaldu. Kõrgtugev malm osutub hallmalmiga võrreldes kontsentratsioonitundlikumaks seepärast, et temas tuleb peamise kontsentratorina arvesse vaba süsinik, mis aga selles materjalis ei esine lehekeste kujul, vaid väikeste, peaaegu kerakujuliste terakestena. Need ümarad «tühemikud» kujundavad madalama pingekontsentratsiooni, mille tegur  $\alpha \approx 2$ . Seepärast ainult need välised kontsentratorid, mille  $\alpha < 2$  ei pääse mõjule, kuna tugeva-

mad kontsentratorid ( $\alpha < 2$ ) tulevad arvesse selles osas, millega nad ületavad materjali sisemist kontsentratsiooni.

Lõpetades pingekontsentratsiooni käsitlust, ei saa jätta märkimata selle ohtlikkust löögikoormusel ja kiiresti muutuv, eriti vahelduval koormusel, mida vaatleme lähemalt järgmises peatükis. Tugevatele löökidele allutatud varrastes tuleks mõjukaid kontsentratoore üldse vältida.

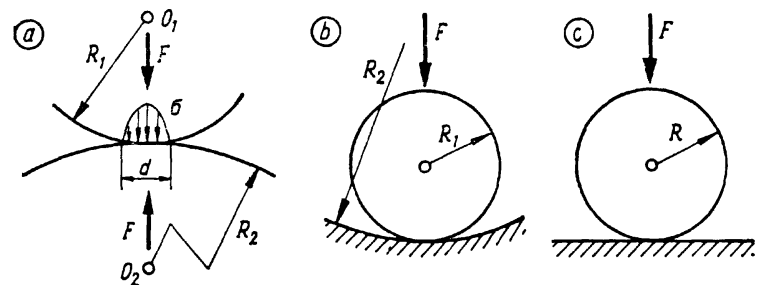
Pingekontsentratoore võib mõnel juhul ka tulusalt rakendada. Selle näitena meenutame klaasi lõikamist, mille juures teemantnoaga tehtud vaevalt märgatav jälj esineb tahvli murdmisel pingekontsentratorina. Umbes samal viisil võime parema võimaluse puudumisel tükeldada profiilterast. Näiteks raudteerööpale raiume meisliga pealispinnale 5...6 mm sügavuse põiksoone ja siis kukutame selle umbes 1,5 m kõrguselt maas ristsihis asetsevale teisele rööpale. Raudteel oma aja ära teeninud rööbas puruneb kaheks tükiks juba esimese löögiga.

## 17.2. KONTAKTPINGE

Survejõuga teineteist mõjutavate kehade kokkupuutepindadel tekib kohalik pinge, nn. *kontaktpinge*, mis on tuntud ka *muljumis-* või *puutepingena*. Konstruktioonides esinevad kontaktpinged väga paljudes kohtades, kuid enamasti nad on väikesed ja võivad jääda tähelepanuta. Mõnel juhul on kontaktpinged suured ja võivad seada ohtu konstruktioonielelemendi tugevuse. Just neid suhteliselt suuri kontaktpingeid peame oskama arvutada ja tunda vastavaid tugevustingimusi. Viiendas peatükis vaatlesime muljumispingeid lõikele töötavates neet-, polt- ja sõrmliidetes, kus tutvusime ka vastava ligikaudse arvutusviisi, lubatavate pingete ja tugevustingimusega. Käesolevas punktis vaatleme pingeid suhteliselt väikestel *kontaktpindadel*, mis tekivad kahe elemendi puutepunkti või puutejoone ümber elastse deformatsiooni tulemusena. Niisugused pinged esinevad vaguni ratta ja rööpa vahel, silla tugiosade rullide ja tugiplatide vahel, laagri kuulidel jm.

Seatud probleemi üksikasjalik lahendamine on jõukohane elastsusteooriale, kus see on tuntud *Hertzi ülesandena*. Siin esitame ilma tuletamiseta kontaktülesande mõned lahendid, mis lubavad arvutada pinge kokkupuutepindadel. Valemid on tuletatud eeldustel, et materjal allub *Hooke'i* seadusele, et tema *Poissoni* tegur on 0,3 ja survejõud mõjub puutepindade ühises keskmises nende normaali sihis.

Vaatleme kahte keha, mille kerapindade raadiused on



Joon. 17.4

$R_1$  ja  $R_2$  (joonis 17.4, a). Materjalide elastsusmoodulid olgu vastavalt  $E_1$  ja  $E_2$ . Kui kehad surutakse teineteise vastu jõuga  $F$ , siis elastse deformatsiooni tulemusena nende keskmete  $O_1$  ja  $O_2$  vahekaugus muutub  $\Delta_H$  võrra, kusjuures

$$\Delta_H = 0,77 \sqrt[3]{F^2 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (17.11)$$

Samal ajal moodustub kokkupuutepunkti ümber väike sfääriline kontaktpind, mille äärejooneks on ringjoon läbi-mõõduga  $d_H$ :

$$d_H = 1,76 \sqrt[3]{F \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) : \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (17.12)$$

Juhul, kui teine pindadest on nõgus, tuleb valemities (17.11...12) raadius  $R_2$  arvesse negatiivsena (joonis 17.4, b). Joonisel 17.4, c on kujutatud kuul tasandplaadil, mille raadiust valemities tuleb vaadelda lõpmata suurena ( $R_2 \rightarrow \infty$ ). Kui seejuures kuul ja plaat on samast materjalist ( $E_1 = E_2 = E$ ), siis valemities võtavad järgmise kuju:

$$\Delta_H = 1,22 \sqrt[3]{\frac{F^2}{E^2 R}}; \quad d_H = 2,22 \sqrt[3]{\frac{FR}{E}}. \quad (17.13)$$

Kontaktpind on väike osa kerapinnast ja me võime seda ligikaudu vaadelda tasandilisena, s. t. ringina, mille  $A_H = \pi d_H^2 / 4$ . Kontaktpinge sellel pinnal jaguneb ebaühtlaselt, kusjuures suurim väärtus keskpunktis ületab poolteisekordselt keskmise pinget:

$$\max \sigma_H = 1,5F/A_H = 6F/(\pi d_H^2).$$



Asendades  $d_H$  valemite (17.12) ja (17.13), saame suurimate kontaktpingete arvutamiseks avaldised

$$\max \sigma_H = 0,62 \sqrt[3]{F \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 : \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^2}; \quad (17.14)$$

$$\max \sigma_H = 0,39 \sqrt[3]{\frac{FE^2}{R^2}}. \quad (17.15)$$

Kontaktpinna keskmises lubatakse suhteliselt kõrgeid pingeid, mis enamasti ületavad materjali survetugevuse. Võimalus lubada kõrgeid pingeid tuleneb kahest asjaolust: esiteks sellest, et suured pinged mõjuvad keha väikses piirkonnas, millest eemaldudes nad järsult kahanevad; teiseks põhjuseks on see, et kontaktpinna keskpunkti ümbrus on ruumpinguses, lähedases hüdrostaatilisele rõhule. Nii näiteks lubatakse karastatud terasest laagri kuulidele ja rõngastele kontaktpinget piires 4000...5000 MPa ja harilikule konstruktsiooniterasest (Ст3) 700 MPa.

Silinderkehade (rullide) vastastikusel surve moodustajat kujuneb kitsas ristkülikuline kontaktpind, mille laius

$$b_H = 2,15 \sqrt{p \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) : \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}, \quad (17.16)$$

kus  $p$  on survejõud silindri telje pikkusühiku kohta, see tähendab, koormuse intensiivsus piki rulli.

Suurim kontaktpinge silindri moodustajal analoogselt eespool vaadelduga:

$$\max \sigma_H = 0,59 \sqrt{p \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) : \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}. \quad (17.17)$$

Plaadile toetuva rulli puhul, kui  $E_1 = E_2 = E$ ,  $R_2 \rightarrow \infty$  ja  $R_1 = R$ , saavad valemid (17.16...17) kuju:

$$b_H = 3,04 \sqrt{pR/E}; \quad \max \sigma_H = 0,42 \sqrt{pE/R}. \quad (17.18)$$

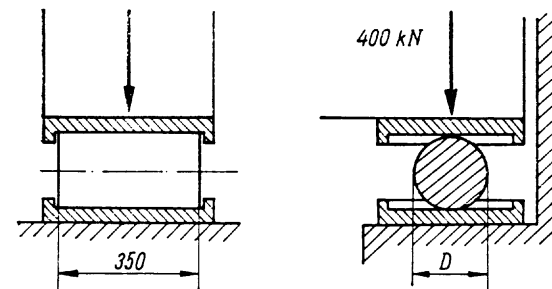
*Näide 17.1.* Arvutame vaguni ratta ja rööpa kokkupuutepinna laiuse ja kontaktpinge, kui staatiline koormus rattale on 100 kN ja dünaamikategur 1,3, ratta läbimõõt 780 mm, kontaktriiba pikkus 30 mm ja elastsusmoodul  $E = 210$  GPa.

Määrame kontaktriiba laiuse esimese valemiga (17.18):

$$b_H = 3,04 \sqrt{100 \cdot 10^3 \cdot 390 \cdot 10^{-3} / (30 \cdot 10^{-3} \cdot 210 \cdot 10^9)} = 0,0076 \text{ m} = 7,6 \text{ mm}.$$

Suurim staatiline kontaktpinge teise valemiga (17.18):

$$\max \sigma_H^{st} = 0,42 \sqrt{100 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^9 / (30 \cdot 10^{-3} \cdot 390 \cdot 10^{-3})} = 562,7 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$



Joon. 17.5

Suurim dünaamiline kontaktpinge

$$\max \sigma_H^d = k_d \cdot \max \sigma_H^{st} = 1,3 \cdot 563 = 732 \text{ MPa}.$$

*Näide 17.2.* Arvutame suure tala liikuva liigendtoe rulli läbimõõdu, kui jõud toele on 400 kN, rulli pikkus 350 mm ja nii rull kui ka plaadid on tehtud harilikust konstruktsiooniterasest Ст3, mille lubatav kontaktpinge on 700 MPa (joonis 17.5).

Seame suurimale kontaktpingele teise valemiga (17.18) põhjal tugevus-tingimuse:

$$\max \sigma_H = 0,42 \sqrt{pE/R} \leq [\sigma],$$

millest

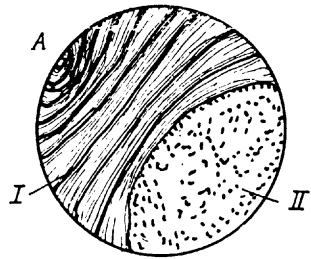
$$D = 2R \geq 2 \cdot 0,42^2 pE / [\sigma]^2 = 2 \cdot 0,42^2 (400 \cdot 10^3 / 350 \cdot 10^{-3})^2 210 \cdot 10^9 / (700 \cdot 10^6)^2 = 0,173 \text{ m}.$$

Valime rulli läbimõõduks 175 mm.

## 18. KONSTRUKTSIOONIELEMENDI VÄSIMUS

### 18.1. PINGETSUKLI TUNNUSSUURUSED

Möödunud sajandi algul märgati tugevuse alanemist terasest konstruktsioonelementidel, mis töötasid pikemat aega muutuvate pingetega. Esimesed kogemused saadi postitõldade purunenud telgedega, millele hiljem lisandusid lehtvedrud, raudteerööpad, vaguni- ja veduriteljed jt. Selgus, et terasest varras purunes ootamatult mõõduka koormusega, mida ta varem oli talunud pikema aja jooksul. Seejuures plastsest terasest varda purunemisel ei esinenud märgatavat jääkdeformatsiooni. Teisiti öeldes, kõikidel juhtudel oli purunemine üldjoontes niisugune, nagu see esineb haprast materjalist varrastel staatilisest koormusest. Purunemisel avanenud pindadel olid selgesti eraldatavad kaks piirkonda, millest üks oli tumedam, veidi laineline ja sile, teine aga kare



Joon. 18.1

ja sillerdav ja kus palja silmaga võis näha kristalliite. Joonisel 18.1 on kujutatud ümarvarda purunemispinda, mille need piirkonnad on tähistatud vastavalt I ja II.

Esiialgu oletati, et varda tugevus alaneb aja jooksul terase struktuuri muutumise tulemusena ja seepärast hakati seda nähtust nimetama materjali *väsimuseks*. Hilisemad uurimused näitasid, et materjali struktuuri muutused ei mängi siin olulist rolli, vaid purunemist põhjustab pikema aja jooksul arenev pragu. Teisiti öeldes tegemist pole materjali tugevuse alanemisega, tema väsimusega, vaid konstruktsioonielemendi kandevõime kahanemisega kohaliku purunemisprotsessi tulemusena. Vaatamata sellele, et sõna «väsimus» pole nähtuse hilisema seletusega päris heas kooskõlas, kasutame seda ajalooliselt väljakujunenud terminit ka tänapäeval.

Väsimuspurunemise arengut kujutame ette järgmiselt. Esiialgu tekib varda enam pingestatud osas väga väike pragu.

Joonisel 18.1 on kujutatud prao tekkimise kohana ehk *väsimuskoldena* punkti A, mis purunemispildis on enamasti kergesti leitav prao järk-järgulise arengu laineliste jälgede järgi. See pragu tekib seal, kus varda materjal on leidub «nõrk koht» mingi defekti näol. Selleks võib olla mikroskoopiline tühemik kristalliitide vahel, mittemetalne vahekiht, korrosioonikahjustus, mehaaniline vigastus, töötlemisjälg jt. Enamasti tekib *väsimuspragu* varda pinnal, kuid erandjuhul võib ta hakata arenema ka varda sees. Mikroprao tekkimist «nõrgas kohas» soodustab veel see asjaolu, et iga niisugune defekt toimib ka pingekontsentraatorina. Tekkinud mikropragu pole ohtlik mõõduka staatilise koormusega, sest ta ei arene edasi. Muutuv pinget aga suurendab esialgset mikropragu, mis ka ise esineb pingekontsentraatorina ja kasvab üle suureks praoks. Kui pragu avaneb välispinnal, tungivad temasse õhk, vesi, määrdeõli ja teised keskkonnas lei-

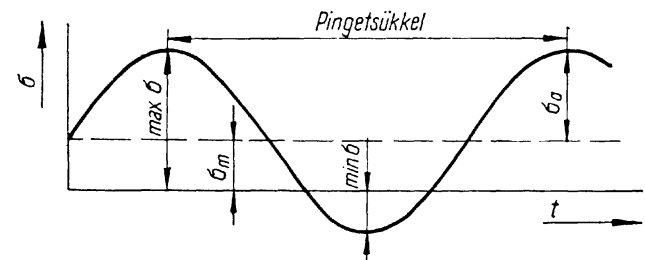
duvad ained, mis omakorda kiirendavad prao arengut peamiselt korrosiooni ja mehaanilise survega. Muutuvatest pingetest põhjustatud nihete tagajärjel hõõrduvad prao pinnad teineteise vastu ja kulutatakse siledaks. Kui niisugune pragu on arenenud teatava piirini, mille juures varda nõrgestatud ristlõikes tugevusvaru ammendub, siis toimub terveks jäänud osa järsk purunemine. Väga kõrge pingekontsentratsiooni tõttu sarnaneb see lõplik purunemine üldjoontes rabadast materjalist varda purunemisele.

Väsimuspragu areneb mis tahes pinguses ja suundub enamasti pinda mööda, millele mõjuvad suurimad tõmbe- ja nihkepinged. Plastset metallis tekib puhtal nihkel väsimuspragu suurima nihkepinge pinnal. Seepärast nii tõmbel, paindel kui ka väändel suundub pragu varda ristlõikepinnas ja tema arengu üldine iseloom ei sõltu sellest, kas purunemise põhjustajaks on suurim normaal- või nihkepinge. Järgnevad arutlused on ruumi säästu huvides tehtud normaalpingega  $\sigma$ , kuid kehtivad ka nihkepingega  $\tau$ .

*Väsimuspurunemist* põhjustav pinget võib muutuda ajas nii perioodiliselt kui ka aperioidiliselt. Kogemused ja katsed näitavad, et väsimusprao areng ei sõltu sellest, kas pinget väsimuskoldes muutub üht- või teistviisi, vaid olulisteks osutuvad muutuva pinget ekstreemsed väärtused ja *pingetsüklite* arv\*. Seepärast vaatleme väsimuse uurimisel lihtsuse huvides harmooniliselt muutuvat pinget, mis ka konstruktsioonides esineb muude hulgas kõige sagedamini:

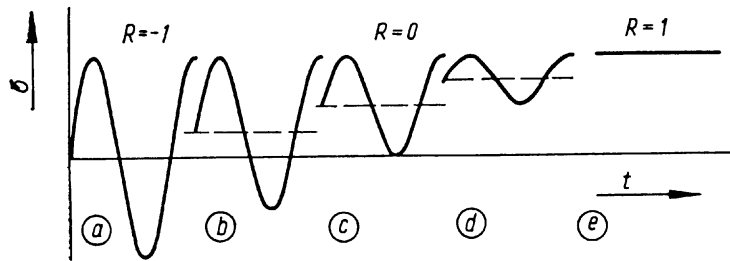
$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t, \quad (18.1)$$

kus  $\sigma_m$  on *keskmine pinget*,  $\sigma_a$  — *pinget amplituud*,  $\omega$  — pinget muutumise nurksagedus ja  $t$  — aeg (joonis 18.2). Pinget-



Joon. 18.2

\* Pingetsükliks mõistame pinget muutumise ühte käiku, milles taastub muutuva pinget vaadeldav väärtus ja muutumise suund.



Joon. 18.3

tsükli ekstreemsed suurused

$$\max \sigma = \sigma_m + \sigma_a; \quad \min \sigma = \sigma_m - \sigma_a, \quad (18.2)$$

mille kaudu keskmine pinge ja pingeamplituud omakorda avalduvad seostega

$$\sigma_m = \frac{\max \sigma + \min \sigma}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\max \sigma - \min \sigma}{2}. \quad (18.3)$$

Väsimusprobleemide uurimisel iseloomustatakse muutuvat pinget veel *pingetsükli asümmeetriateguriga*

$$R = \min \sigma / \max \sigma. \quad (18.4)$$

*Pingetsükliid tunnistame sarnasteks, kui nende asümmeetriategurid on võrdsed.* Pingetsükkel on määratud kahe tunnussuurusega. Järelikult, kui viiest tunnussuurusest ( $\max \sigma$ ,  $\min \sigma$ ,  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$  ja  $R$ ) kaks on antud, siis pingetsükkel on määratud ja kolm ülejäänud iseloomulikku suurust võime arvutada seostest (18.2... 4). Joonisel 18.3 on esitatud muutuva pinge mitmesugused graafikud  $t\sigma$ -teljestikus, mis selgitavad pingetsükklitega seotud järgmisi nimetusi: a) *sümmeetriline tsükkel*, mida iseloomustab tegur  $R = -1$ ; b, c, d) *asümmeetrilised tsükliid* piirides  $-1 < R < 1$ , mille hulgas c) kannab nimetust *pulsatsioonitsükkel* ( $R = 0$ ); e) staatiline pinge, mille  $R = 1$ .

## 18.2. MATERJALI VÄSIMUSTUGEVSUS

**18.2.1. Väsimuskõver.** Uurime metalli väsimust proovikehade abil. Valmistame ühesugused ümarproovikehad, mis meenutavad kolmandas peatükis kirjeldatud proportsionaalproovikeha läbimõõduga  $d = 6 \dots 10$  mm. Proovikehade pind peab olema hoolikalt töödeldud, et sellel ei leiduks lõike-

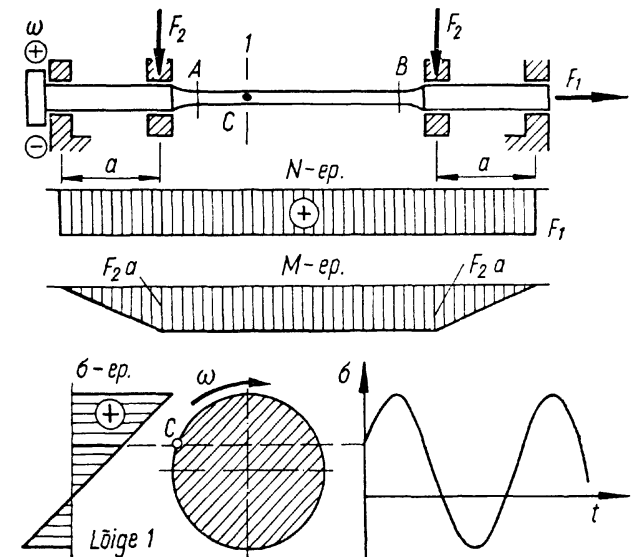
jälgi. Pinna töötlemine lõpetatakse poleerimisega. Katseseadmeteks on harilik tõmbemasin ja *väsimusmasin*. On kasutusel *painde-, tõmbe- ja väändeväsimusmasinad*. Kõige lihtsam ja levinum on paindele töötav masin, milles proovikeha pöörleb ümber oma telje ja on koormatud põik- ja pikisuunaliste püsivate jõududega (joonis 18.4). Masin on varustatud *pööretearvestliga*. Jõudude  $F_1$  ja  $F_2$  sobiva valikuga võime tekitada proovikeha keskmise osa AB pinnal mis tahes punktis C normaalpinge  $\sigma$ , mis muutub aja  $t$  jooksul nii nagu kirjeldab seda avaldis (18.1). Seejuures keskmine pinge ja amplituud

$$\sigma_m = N/A = 4F_1/(\pi d^2); \quad \sigma_a = M/W = 32F_2 a/(\pi d^3),$$

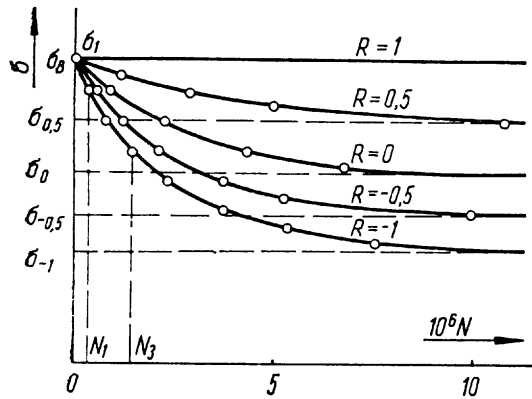
kus  $d$  on proovikeha läbimõõt.

Kõigepealt määrame proovikehade abil tõmbetugevuse  $\sigma_B$  harilikul tõmbemasinal. Seejärel katsetame väsimusmasinal.

Esimese seeria katseid teeme sarnaste pingetsükklitega, võttes asümmeetriateguri  $R = -1$  ( $\max \sigma = -\min \sigma = \sigma_a$  ja  $\sigma_m = 0$ ). Selle seeria esimeseks katseks valime suurima pinge veidi madalama tõmbetugevusest:  $\max \sigma_1 = \sigma_B - \Delta\sigma$ , kus  $\Delta\sigma$  moodustab 3...5% tõmbetugevusest  $\sigma_B$ . Asetame ühe proo-



Joon. 18.4



Joon. 18.5

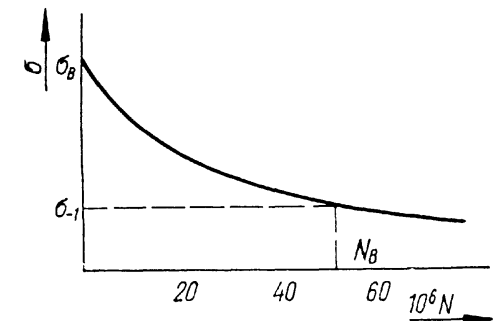
vikeha masinasse, käivitame selle, ootame kuni toimub väsimuspurunemine ja registreerime *pingetsüklite arvu*. Kolme proovikehaga saadud pingetsüklite arvudest määrame keskmise suuruse  $N_1$ . Teiseks katseks esimeses seerias vähendame suurimat pinget, võttes  $\max \sigma_2 = \sigma_B - 2\Delta\sigma$ . Seejuures säilitame eelmisega sarnase pingetsükli. Tulemuseks saame kolme proovikeha keskmise väsimuspurunemist esile kutsuva pingetsüklite arvu  $N_2$ , mis on suurem esimese katsega saadud arvust  $N_1$ . Kolmandaks katseks võtame  $\max \sigma_3 = \sigma_B - 3\Delta\sigma$  ( $R = -1$ ) ja saame tulemuseks pingetsüklite arvu  $N_3 > N_2$ . Katseid jätkame suurima pingete astmelise vähendamisega, kuni väsimuspurunemist põhjustavate pingetsüklite arv kasvab üle teatava piiri, *pingetsüklite baasarvu*, mis madallegeeritud ja süsinikterastel on  $10 \cdot 10^6$ . Kõrglegeeritud terastel ja värviliste metallide sulamitel võetakse see piir kõrgem ( $50 \dots 100$ )  $\cdot 10^6$ .

Katseseeria tulemused kanname  $N\sigma$ -teljestikku punktidenäna, mille põhjal joonestame *väsimus- ehk Wöhleri kõvera* (joonis 18.5). Süsinikterase väsimuskõver läheneb asümptootiliselt sirgele, mis vastab pingele  $\sigma_{-1}$ . Teisiti öeldes, kui proovikehale rakendame sümmeetrilise pingetsükli, mille  $\max \sigma < \sigma_{-1}$ , siis väsimuspurunemist ei toimu ükskõik kui suureks ka ei kasva pingetsüklite arv  $N$ . Suurust  $\sigma_{-1}$  nimetatakse materjali *väsimustugevuseks* sümmeetrilise pingetsükliga, mille teguri  $R = -1$  arväärtuse kirjutame indeksina vastava pingetähtse juurde ( $\sigma_{-1}$  või  $\tau_{-1}$ ). Väsimuskõver

ühtib praktiliselt väsimustugevusele vastava asümptoodiga pingetsüklite baasarvu  $10 \cdot 10^6$  juures.

Teise, kolmanda ja järgnevad katseseeriad teeme samal viisil, kuid asümmeetriliste pingetsüklitega, mille tegurite väärtused valime mõningase sammuga piirkonnast  $-1 < R < 1$  (näiteks  $R = -0,5$ ;  $0$ ;  $+0,5$ ). Iga katseseeria annab ühe väsimuskõvera, millele vastab teatav väsimustugevus (näiteks  $\sigma_{-0,5}$ ;  $\sigma_0$ ;  $\sigma_{0,5}$ ). Joonisel 18.5 on kujutatud ka sirge, mis vastab staatilisele pingele  $\sigma_1 \equiv \sigma_B$  ( $R = 1$ ). Nagu kinnitavad katseandmed, kõige madalama väsimustugevuse annab sümmeetriline pingetsükkel. Kõikvõimalike asümmeetriliste pingetsüklitega saame kõrgema väsimustugevuse, mis võib tõusta kuni materjali staatilise tugevuseni  $\sigma_1 \equiv \sigma_B$ . Järelikult asetsevad kõik väsimuskõverad joonte vahel, millele vastavad tegurid  $R = -1$  ja  $R = 1$  ja väsimustugevused  $\sigma_B$  jäävad  $\sigma$ -teljel lõigule  $\sigma_{-1}$  ja  $\sigma_B$  vahemikus. Kõige olulisemaks on sümmeetrilise pingetsükliga saadud väsimuskõver, mis küllalt täielikult iseloomustab materjali: Seepärast piirduakse sageli laboratoorsel uurimisel ainult selle pingetsükliga, mis on kõige soodsam ka väsimuskatse korraldamise seisukohalt, kuna ei nõua pikijõu  $F_1$  rakendamist proovikehale (joonis 18.4).

Asümptootilised on väsimuskõverad ka malmil ja puidul. Kõrglegeeritud teraste, värviliste metallide sulamite ja enamiku mittemetalsete materjalide väsimuskõverad ei ole asümptootilised, vaid lõikuvad  $N$ -teljega (joonis 18.6). Teisiti öeldes, nendel materjalidel esineb väsimuspurunemine kui tahes madala muutuva pingega, kui ainult pingetsüklite arv on küllalt suur. See asjaolu ei luba niisugustele materjalidele määrata väsimustugevust, vaid nn. *piiratud väsimustugevuse*, mille juurde kuulub vastav pingetsüklite baasarv  $N_B$  (joonis 18.6). Siit selgub ka vajadus selgitada vär-



Joon. 18.6

viliste metallide sulamite väsimuskõverad palju suurema pingetsükli arvu võrreldes harilikule terase ja malmiga.

Piiratud väsimustugevused määratakse mõnel juhul ka harilikule terasele ja malmile, kui soovitakse need suurused määrata pingetsükli baasarvudega, mis oluliselt on väiksemad kümnest miljonist ( $10 \cdot 10^6$ ). Pingetsükli baasarv  $N_B$  konstruktsioonelemendile määratakse silmas pidades tema kasutamise eesmärki. Näiteks mõnede lülite ja releede vedrudelt nõutakse töökindlust ainult 20 000 pingetsükli; inimese purunenud hüppeliigese reponaatorilt pole mõtet nõuda väsimustugevust nähtavasti üle ühe miljoni pingetsükli, sest sooritanud mõnisada tuhat sammu, haige paraneb ja reponaator tuleb jalast kõrvaldada; raudteerööbastele nähakse ette samuti piiratud väsimustugevus, mis limiteeritakse pingetsükli baasarvuga piirides kolmest kuni kuue miljonini olenevalt liikluse iseloomust; laeva diiselmootorite duralumiiniumist kolbidelt nõutakse töökindlust kuni 100 miljoni pingetsükli jne.

Ettekujutuse saamiseks väsimustugevuse ja tõmbetugevuse vahekorrad anname järgmised ligikaudsed andmed:

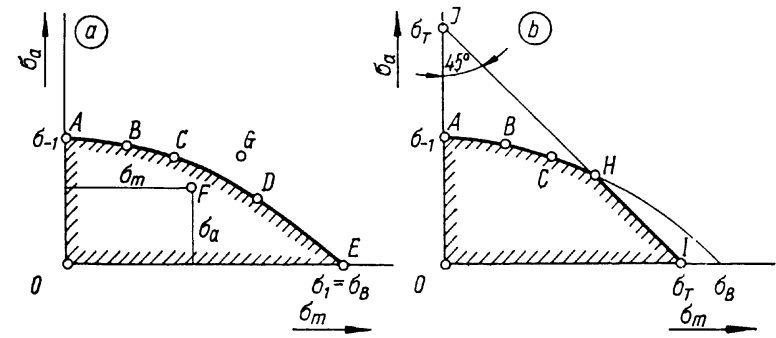
süsinikterased	$\sigma_{-1} \approx 0,43\sigma_B$ ;	$\sigma_0 \approx 0,6\sigma_B$ ;
malmid	$\sigma_{-1} \approx 0,45\sigma_{B1}$ ;	$\sigma_0 \approx 0,65\sigma_{B1}$ .

Toodud vahekorrad iseloomustavad väsimustugevust, mis on saadud paindel. Tõmbel on väsimustugevus madalam, sest siin on varda kogu ristlõikepind ühtlaselt arvutusliku suurima pinge mõju all. Paindel mõjuvad aga suurimad (arvutuslikud) pinged ainult kahes punktis ristlõike äärel ja kogu ülejäänud pind on madalamalt pingestatud. Seepärast on tõmbel väsimusprao tekkimise tõenäosus suurem ja ka tema areng intensiivsem. Väsimustugevused tõmbel moodustavad staatilisest tõmbetugevusest:

süsinikterased	$\sigma_{-1} \approx 0,36\sigma_B$ ;	$\sigma_0 \approx 0,5\sigma_B$ ;
malmid	$\sigma_{-1} \approx 0,4\sigma_{B1}$ ;	$\sigma_0 \approx 0,6\sigma_{B1}$ .

Terase väsimustugevus väändel, kus pragu tekib suurimast nihkepingest ristlõikes, saame  $\tau_{-1} \approx 0,22\sigma_B$  ja  $\tau_0 \approx 0,3\sigma_B$ .

**18.2.2. Väsimustugevuse diagramm** jaotab  $\sigma_m\sigma_a$ -teljestikus kõik selle pooltasandi punktid kahte piirkonda, millest üks vastab purunematuks väsimusest, teine — purunemisele. Pingeamplituud  $\sigma_a$  on oma olemuselt ainult positiivne suurus. Keskmine pinge võib üldiselt olla nii positiivne kui ka negatiivne, kuid tänapäevani on metallide väsimust uuritud peamiselt ainult pingetsükliatega, mille  $\sigma_m$  on tõmbe-



Joon. 18.7

pinge (positiivne). Seepärast ehitame ka meie väsimustugevuse diagrammi  $\sigma_m\sigma_a$ -teljestiku esimesse veerandisse.

Iga väsimuskõver (joonis 18.5) annab ühe punkti väsimustugevuse diagrammi eespool nimetatud kahe piirkonna piirkõveral (joonis 18.7, a). Ühe niisuguse punkti koordinaadid ( $\sigma_m|\sigma_a$ ) saame Wöhleri kõverale vastava väsimustugevuse  $\sigma_R$  pingetsükli keskmise pinge ja amplituudina. Punkti A saame sümmeetrilise pingetsükli väsimuskõvera parameetritest  $\sigma_{-1}$  ja  $R=-1$ , mis annavad  $\sigma_m=0$  ja  $\sigma_a=\max\sigma=\sigma_{-1}$ . Järelikult vastava punkti A koordinaadid väsimusdiagrammil on  $(0|\sigma_{-1})$ . Teine väsimuskõveratest annab punkti B, mille koordinaadid arvutame parameetritest  $\sigma_{-0.5}$  ja  $R=-0.5$  seostega (18.2...4) ja saame  $\sigma_m=\sigma_{-0.5}/3$  ja  $\sigma_a=2\sigma_{-0.5}/3$ . Väsimuskõver parameetritega  $\sigma_0$  ja  $R=0$  (pulsatsioontsükkel) annab punkti C koordinaadid  $\sigma_m=\sigma_a=\sigma_0/2$ . Punktid D ja E saame vastavalt koordinaatidega ( $\sigma_m=3\sigma_{0.5}/4$ ;  $\sigma_a=0.5/4$ ) ja ( $\sigma_m=\sigma_1=\sigma_B$ ;  $\sigma_a=0$ ).

Ilmselt on meil küllaldaselt punkte, et joonestada sujuv kõver ABCDE, mis on otsitavaks piirjooneks purunematuks ja purunemise piirkondade vahel. Esimese nendest ümbritseme joonisel viirutatud servaga. Kui näiteks mingi kontrollitava pingetsükli keskmine pinge  $\sigma_m$  ja amplituud  $\sigma_a$  annavad punkti F purunematuks piirkonnas, siis see pingetsükkel pole antud materjalile ohtlik, kui aga punkt satub teise piirkonda (joonisel punkt G), siis on väsimuspurunemine paratamatu.

Kui vaadeldav materjal on plastne, siis peame joonisel 18.7, a määratud piirkonda tõkestama veel täiendavalt tingimusega

$$\max \sigma < \sigma_T, \quad (18.5)$$

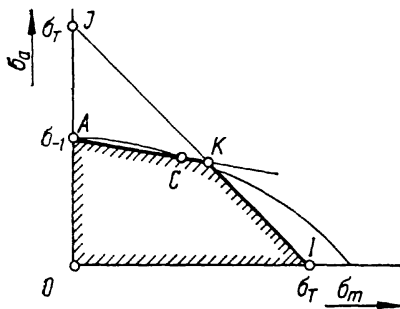
mis väldib plastse deformatsiooni. Esimese seosega (18.2) kujuneb tingimus (18.5) järgmiseks:  $\sigma_m + \sigma_a < \sigma_T$ , mis  $\sigma_m \sigma_a$ -tasandil eraldab piirkonna äärejoonega  $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_T$ . Nagu näeme, äärejoon on sirgel, mis telglõikudes esitub võrrandiga

$$\sigma_m / \sigma_T + \sigma_a / \sigma_T = 1. \quad (18.6)$$

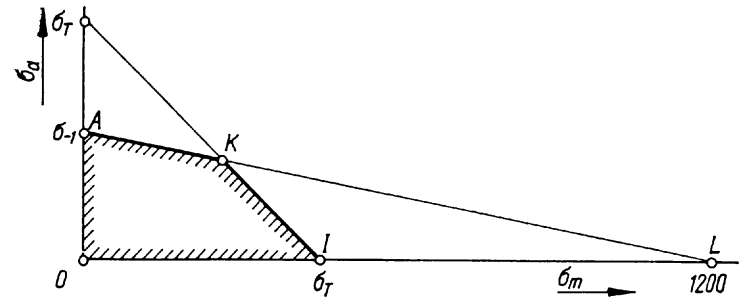
Saadud võrrandi põhjal kanname joonisele 18.7, *b* ristlõigu *II* koos väsimustugevuse piirjoonega, millega ta lõikub punktis *H*. Nagu näha, rahuldab üheaegselt väsimus- ja plastsustingimust see viirutatud äärega piirkond, mis on ümbritsetud telglõikudega *OI* ( $\sigma_T$ ) ja *OA* ( $\sigma_{-1}$ ), kõverjoonega *ABCH* ja sirglõiguga *HI*. Piirkonna määramisel kõige tülikamaks äärejoone osaks on kõver lõik *ABCH*, mille leidmiseks peame sooritama mitu mahukat seeriat väsimuskatseid. Meie arutlustes oli neid seeriaid viis. Niisuguse hulga proovikehade valmistamine ja katsete tegemine käib inseneripraktikale enamasti üle jõu ja seepärast kasutatakse lihtsustatud määramisviise. Neid on ettepanud kümnekond, millest käesoleval ajal väärivad tähelepanu kaks värskemat ja nähtavasti ka täiuslikumat.

*S. Serensen* ja *S. Kinasošvili* tegid ettepaneku lihtsustada nimetatud kõvera lõigu määramist, asendades selle sirglõiguga läbi kahe punkti *A* ja *C* (joonis 18.8). Nende punktide saamiseks on teatavasti vaja teha kaks seeriat väsimuskatseid, üks sümmeetrilise pingetsükliga (punkt *A*) ja teine pulsatsioontsükliga (*C*). Saadud sirglõik *AK* on küllalt lähedane tegelikule kõverjoonele, kusjuures hälve vahemikus *AC* veidi suurendab tugevusvaru, vahemikus *CK* aga tähtsusetult vähendab.

*S. Rabinovitš* oma uurimustega näitas, et mis tahes marki terastele tehtud väsimuskatsed nii normaal- kui ka nihke-



Joon. 18.8



Joon. 18.9

pingetega annavad punktid *A* ja *C* nii, et neid läbiv sirge lõikub keskmise pingele teljega ikka ühes ja samas punktis *L*, mis on ligilähedane pingele 1200 MPa (joonis 18.9). See järeldus lubab väsimustugevuse diagrammi äärejoone määrata kahe punkti *A* ja *L* najal, millest katsetega tuleb selgitada ainult üks punkt (*A*) sümmeetrilise pingetsükliga.

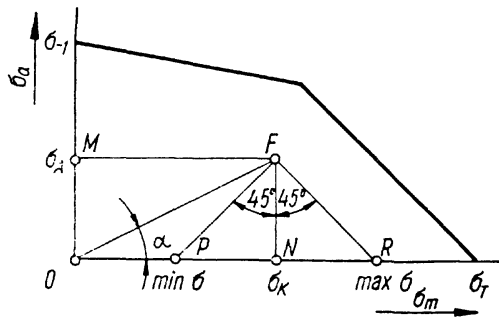
Inseneripraktikas leiab tänapäeval teraste väsimustugevuse diagrammide koostamisel kõige laiemat rakendamist *Rabinovitši* ettepanek. *Serenseni-Kinasošvili* menetlust kasutatakse põhjalikumatel uurimistel ja ka siis, kui on tegu uudsete materjalidega, mille kohta pole teada punkti *L* abtsiss.

Vaatleme joonisel 18.10 punkti *F*  $\sigma_m \sigma_a$ -teljestikus, mis määrab pingetsükli koordinaatidega  $\sigma_m \equiv ON$  ja  $\sigma_a \equiv OM$ . Samas teljestikus on lihtsal viisil määratavad ka selle pingetsükli ülejäänud kolm parameetrit. Tõepoolest, märgime punktidele *M* ja *N* lisaks veel punktid *P* ja *R* nii, et  $NP = NR = NF$ . Nagu näeme, on  $\max \sigma \equiv OR$  ja  $\min \sigma \equiv OP$ . Pingetsükli asümmeetriategur on määratud suhtega

$$R = \frac{\min \sigma}{\max \sigma} = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{1 - \sigma_a / \sigma_m}{1 + \sigma_a / \sigma_m} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}, \quad (18.7)$$

kus  $\alpha$  on punkti *F* suunanurk koordinaatide algusest *O*, mõõdetuna  $\sigma_m$ -teljest.

Joonestame samale joonisele sirglõigud *MF*, *OF*, *PF*, *NF* ja *RF*. Sirglõigul *MF* asetsevad punktid vastavad pingetsüklikele, millel  $\sigma_a = \text{const}$ . Sirglõigul *NF* on  $\sigma_m = \text{const}$ , *PF* on  $\min \sigma = \text{const}$ , *RF* on  $\max \sigma = \text{const}$  ja *OF* on  $R = \text{const}$ . Toodud asjaolu arvestades võime pingetsükli mis tahes kahe antud parameetri järgi leida temale vastava punkti  $\sigma_m \sigma_a$ -



Joon. 18.10

tasandil ja muidugi ka ülejäänud kolm tunnussuurust. Näiteks, kui on antud  $R$  ja  $\min \sigma$ , siis märgime  $\sigma_m$ -teljele punkti  $P$  ( $OP \equiv \min \sigma$ ) ja arvutame nurga

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \arctan \frac{(\max \sigma - \min \sigma) 2}{2(\max \sigma + \min \sigma)} = \\ &= \arctan \frac{1 - R}{1 + R}, \end{aligned} \quad (18.8)$$

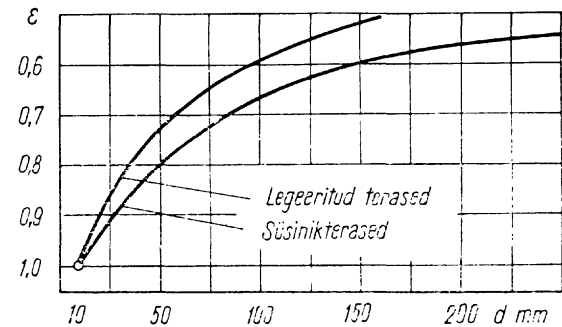
mille kanname  $\sigma_m \sigma_a$ -tasandile. Punktist  $P$  joonestame kiire tõusunurgaga  $45^\circ$ , mille lõikepunkt nurga  $\alpha$  haaraga määrab otsitavale pingetsüklile vastava punkti  $F$ .

### 18.3. VÄSIMUSTUGEVIKUST MÕJUTAVAD TEGURID

**18.3.1. Mastaabitegur.** Katsed näitavad ja kogemus kinnitab, et konstruktsioonelemendi väsimustugevus erineb proovikeha omast. Selle erinevuse põhjustavad geomeetriselise kuju ja mõõtmete lahknevus, pingekontsentratsioon, pinnatöötlus, keskkonna füüsikalised ja keemilised omadused, vahelduva koormuse sagedus ja muutumise iseloom jt. Seepärast tuleb proovikeha väsimustugevust vaadelda materjali tunnussuurusena, mis on saadud standardse proovikehaga *normaaltingimustes*. Konstruktsioonelemendi väsimustugevuseks võime võtta proovikeha oma ainult sel juhul, kui üks ei erine teisest ja esimese töötingimused ühtivad teise katsetingimustega.

Vaatleme konstruktsioonelementi, mis erineb proovikehast ainult oma mõõtmetega. Katsed näitavad, et *poleeritud ümarvarda väsimustugevus on seda väiksem, mida suurem on tema läbimõõt*:

$$\bar{\sigma}_{-1} = \varepsilon \sigma_{-1}, \quad (18.9)$$



Joon. 18.11

kus  $\sigma_{-1}$  on standardse proovikeha ja  $\bar{\sigma}_{-1}$  — suuremate mõõtmetega ümarvarda väsimustugevus sümmeetrilise pingetsükliga;  $\varepsilon$  on ühest väiksem kordaja, mida nimetatakse *mastaabiteguriks* ja mis on määratav suhtarvuna

$$\varepsilon = \bar{\sigma}_{-1} / \sigma_{-1}. \quad (18.10)$$

Mastaabitegur sõltub peamiselt varda läbimõõdust ja materjalist. Joonisel 18.11 on graafikud, mis annavad  $\varepsilon$  väärtused olenevalt ümarvarda läbimõõdust süsinik- ja legeritud terastele paindel ja väändel, lähtudes standardproovikeha läbimõõdust 10 mm, ehk teisiti öeldes, kui  $d=10$  mm, siis  $\varepsilon=1$ . Mastaabitegureid teistsuguste varraste ja tingimuste jaoks leiame teatmeteostest.

**18.3.2. Pingekontsentratsiooni mõju** vahelduva koormusega konstruktsioonelementides arvestatakse suhtega

$$K_d = \sigma_{-1} / \bar{\sigma}_{-1}, \quad (18.11)$$

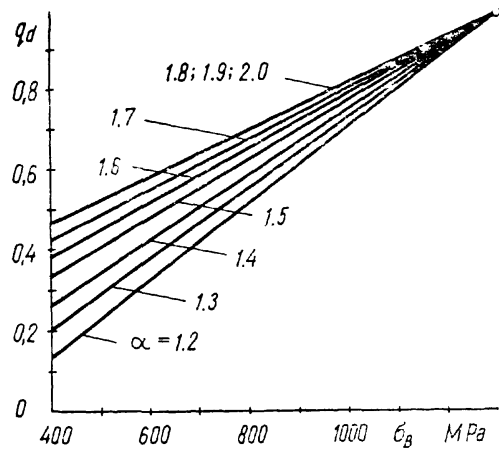
kus  $\sigma_{-1}$  on standardproovikehaga ( $d=10$  mm) saadud väsimustugevus,  $\bar{\sigma}_{-1}$  — sama läbimõõduga poleeritud pinnaga, kuid pingekontsentratsiooniga proovikeha väsimustugevus sümmeetrilise pingetsükliga. Suhtarv  $K_d$  on tuntud *efektiivse pingekontsentratsiooni tegurina vahelduvat pingetel*. Tegur  $K_d$  võimaldab määrata pingekontsentratsiooniga elemendi väsimustugevuse

$$\bar{\sigma}_{-1} = \sigma_{-1} / K_d. \quad (18.12)$$

Teguri  $K_d$  väärtusi leiame teatmeteostest või määrame ligikaudselt samal viisil nagu tegurile  $K_{st}$  (vt. punkt 17.1):

$$K_d = 1 + q_d (\alpha - 1), \quad (18.13)$$

kus  $\alpha$  on teoreetiline kontsentratsioonitegur ja  $q_d$  — mater-



Joon. 18.12

jali pingekontsentratsiooni tundlikkuse tegur vahelduva pingega. Rabcdatele materjalidele tegurite  $K_d$  ja  $K_{st}$  väärtused enamasti ühtivad, kuid plastsetele  $K_d > K_{st}$ . Näiteks plastsetel terastel staatilise koormusega võtame enamasti  $K_{st} = 1$ , vahelduva pingega aga  $K_d > 1$  ja selle võime arvutada valemiga (18.15), võttes tundlikkuse teguri  $q_d$  joonisel 18.12 toodud graafikult kooskõlas materjali tõmbetugevusega  $\sigma_B$  ja teoreetilise kontsentratsiooniteguriga  $\alpha$ .

Kui andmed efektiivse teguri  $K_d$  kohta puuduvad ja pole võimalik leida ka tundlikkuse teguri  $q_d$  väärtusi, siis võime erandkorras arvutustes kasutada teoreetilist tegurit  $\alpha$ . Ka siin peab paika võrratus  $K_d \leq \alpha$ , mis võib mõningal määral suurendada tugevusvaru.

Malm on ka vahelduval koormamisel pingekontsentratsiooni suhtes erandlik materjal. Samuti nagu staatilisel koormusel, võime hallil malmil võtta  $K_d = 1$  ( $q_d = 0$ ) mis tahes pingekontsentratsiooniteguriga. Kõrgtugeval malmil  $K_d = 1$ , kui  $\alpha \leq 2$  ja  $K_d = \alpha - 1$ , kui  $\alpha > 2$ . Malm on üks tänuväärsemaid materjale keeruka kujuga (paljude pingekontsentratsiooniteguritega) ja vahelduval koormusele töötavate konstruktsioonielementide valmistamiseks.

**18.3.3. Pinnakvaliteedi tegur.** Väsimustugevusele avaldab tugevat mõju konstruktsioonielemendi pinna seisund. Seletatav on see asjaolu sellega, et väsimuspragu tekib enamasti varda pinnal, kus mõjuvad suhteliselt suured pinged ja kus ühelt poolt töötlemisjäljed, kriimustused, korrosioonikahjustused ja muud vigastused kiirendavad väsimuskolde

kujunemist, teiselt poolt aga mehaanilised, termilised ja termokeemilised pinna eritöötlused võivad oluliselt tõkestada väsimuskolde moodustumist.

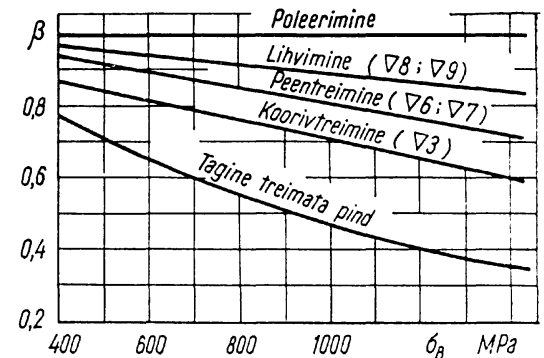
Pinnaseisundi mõju väsimustugevusele võetakse arvesse teguriga

$$\beta = \bar{\sigma}_{-1} / \sigma_{-1}, \quad (18.14)$$

kus  $\sigma_{-1}$  on endiselt standardse poleeritud pinnaga proovikeha väsimustugevus ja  $\bar{\sigma}_{-1}$  — sama kuju ja mõõtmetega, kuid uurimisele allutatud pinnatöötlemisega proovikeha väsimustugevus sümmeetrilise pingetsükliga. Suhtarvu  $\beta$  nimetatakse *pinnakvaliteedi teguriks*, mille abil erinevate pinnatöötlemiste mõju väsimustugevusele mis tahes pingetsükliga tuleb arvesse valemiga

$$\bar{\sigma}_{-1} = \beta \sigma_{-1}. \quad (18.15)$$

Vaatleme pinnakvaliteedi tegurit pinnasileduse seisukohalt joonisel 18.13, kus on esitatud graafikud, mis annavad teguri  $\beta$  väärtused terasele olenevalt tõmbetugevusest  $\sigma_B$ . Näeme, et proovikehad, mille pinnasiledus kuulub madalamasse klassi, on ka väiksema väsimustugevusega ja annavad tagasihoidlikuma teguri  $\beta$  väärtuse. Seejuures väärib tähelepanu, et mida suurem on terase tõmbetugevus, seda väiksemaks osutub pinnakvaliteedi tegur ühe ja sama siledusega. Siit tulenebki üldtuntud nõue töödelda kvaliteeterasest valmistatud vahelduvatele koormustele töötavate konstruktsioonielementide pinnad siledamalt võrreldes harilikud terastest elementide pindadega. Eriti teravalt torkab silma kõrgkvaliteetse terase kasutamise kahjulikkus töötlemata pinnaga, sest siin võib töötlus anda kuni kolmekordse väsimustugevuse suurenemise. Harilikul terasel pinna töötlemine ei anna väsimustugevusele üle 25% lisa.



Joon. 18.13



Võlliteraste orienteeruvad tugevused ja lubatavad pinged

Terase mark	$H_B$	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\tau_T$	$\sigma_{-1}$	$\tau_{-1}$	$[\sigma]_1$	$[\sigma]_0$	$[\sigma]_{-1}$	$[\tau]_1$	$[\tau]_0$	$[\tau]_{-1}$
	$\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$	MPa										
15	135	370	200	120	160	90	95	80	60	70	60	45
20	145	420	240	140	180	100	110	90	70	80	70	50
35	170	520	280	160	220	120	135	110	80	100	80	60
45	200	620	370	220	280	160	155	125	95	115	90	70
40X	200	700	400	240	300	170	180	140	100	130	100	75
12XH3	220	650	450	270	280	150	190	140	95	140	105	70

Väsimustugevus sümmeetrilise pingetsükliga töötavale konstruktsioonielelemendile määratakse ühega järgmistest empiirilistest valemiteist:

$$\bar{\sigma}_{-1} = \frac{\epsilon\beta}{K_d} \sigma_{-1}; \quad \bar{\sigma}_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{K_d/\epsilon + 1/\beta - 1}, \quad (18.16)$$

kus  $\bar{\sigma}_{-1}$  on elemendi ja  $\sigma_{-1}$  — materjali väsimustugevused;  $\epsilon$ ,  $K_d$  ja  $\beta$  on vastavalt mastaabi-, pingekontsentratsiooni ja pinnakvaliteedi tegurid.

Inseneripraktikas on enamasti rakendatud esimest valemit (18.16), kuid viimastel aastakümnetel tehtud katsed lubavad eelistada teist. Praktiliste arvutuste seisukohalt tulemused ühe ja teise valemiga oluliselt siiski ei erine ja seepärast valemi valik suuremat tähelepanu ei nõua.

Konstruktsioonieleменти väsimustugevuse diagrammi  $\sigma_m \sigma_a$ -teljestikus kujundame samal viisil nagu koostasime selle eelmises punktis materjali jaoks. Erinevuseks on ainult see, et materjali tunnussuurused  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_T$  ja  $\sigma_B$  asenduvad konstruktsioonielementi iseloomustavate vastavate suurus-tega  $\bar{\sigma}_{-1}$ ,  $\bar{\sigma}_T$  ja  $\bar{\sigma}_B$ . Nendest esimese määrame valemitega 18.16, teised arvutame seostega

$$\bar{\sigma}_T = \sigma_T / K_{st}; \quad \bar{\sigma}_B = \sigma_B / K_{st}, \quad (18.17)$$

kus  $K_{st}$  on pingekontsentratsiooni tegur staatilisel koormusel, mis plastsele terasele ja malmile võetakse enamasti võrdseks ühega. Kui koostame täpse diagrammi, nagu kujutasime joonisel 18.7, a, siis rakendame tegureid  $\epsilon$ ,  $K_d$  ja  $\beta$  ainult pingeamplituudile valemi (18.16) eeskujul ja tegurit  $K_{st}$  pingetsükli keskmisele pingele valemi (18.17) kohaselt.

## 18.4. ARVUTUSMEETODID

**18.4.1. Lubatavate pingete meetod** on suhteliselt ebatäpsem, kuid oluliselt lihtsam arvutusviis, mida kasutatakse konstruktsioonielementi projekteerimisele asudes selle mõõtmete esialgseks määramiseks. Täpsem arvutusviis, nn *varuteguri meetod*, mida vaatleme järgmises jaotises, sobib olemasoleva või tööjoonisega määratud konstruktsioonielementi tugevuse kontrollimiseks. Viimane on põhiline väsimustugevuse arvutusmeetod.

Lubatavate pingete meetod on rajatud oma üldkujult tuntud tugevustingimusele, mis muutuva koormuse puhul väljendub võrratusena

$$\max \sigma \leq [\sigma]_R, \quad (18.18)$$

kus  $\max \sigma$  on pingetsükli suurim pinge ja  $[\sigma]_R$  — sellele pingetsüklile vastav lubatav pinge. Lubatav pinge määratakse väsimustugevuse ja varuteguri jagatisena

$$[\sigma]_R = \bar{\sigma}_R / S. \quad (18.19)$$

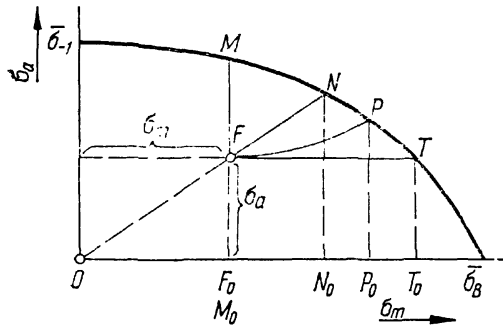
Väsimustugevustena vaadeldakse harilikult kolme suurus  $\sigma_1$  ( $\equiv \sigma_B$ ),  $\sigma_0$  ja  $\sigma_{-1}$  ja varutegur valitakse enamasti piirides  $S = 1,4 \dots 3,0$  kaalutlustel, mida vaatlesime jaotises 3.9, kusjuures tänapäeval sageli rakendatakse *diferentseeritud varutegurit*. Vastavalt eeltoodule on kasutusel ka kolm lubatavat pinget  $[\sigma]_1$  ( $\equiv [\sigma]$ ),  $[\sigma]_0$  ja  $[\sigma]_{-1}$ .

Mõnel juhul võime kasutada lubatavaid pingeid, mis vahetult on antud teatmeteostes. Seejuures peame silmas, et vahelduva koormusega lubatavad pinged ei saa kunagi olla nii üldise tähendusega nagu staatilisel koormusel. Antud lubatavate pingete juurde kuulub alati seletus, mis piiritleb nende suhteliselt kitsa kasutamise ala. Tabelis 14 on toodud lubatavad pinged ühtlase ristlõikega võllidele, mille  $d = 20 \dots 60$  mm ja millel puuduvad olulised pingekontsentratsioonid.\*

Et arvutused lubatavate pingete meetodiga vahelduval koormusel põhimõtteliselt ei erine arvutustest staatilisel koormusel, siis me sellel küsimusel rohkem ei peatu.

**18.4.2. Varuteguri meetod** selgitab konstruktsioonielementi kõlblikkuse tingimusega

\* В. Н. Журавлев, О. И. Николаева. Машиностроительные стали. Справочник конструктора. Машгиз. М., 1962.



Joon. 18.14

$$S \geq [S], \quad (18.20)$$

kus  $S$  on arvutusega määratav elemendi tugevuse varutegur ja  $[S]$  — nõutav minimaalne varutegur, mis on kas antud või saadud diferentseeritud varutegurina. Kui kontrollarvutus annab nõutavast madalama või ka lubamatul määral kõrgema varuteguri, siis tuleb mõõtmeid, materjali, pinnatöötlust või muid lähteandmeid muuta ja korrata arvutust seni, kuni saame rahuldava tulemuse.

Vaatleme varuteguri määramist vahelduval koormusel. Olgu meil koostatud konstruktsioonelemendi väsimustugevuse diagramm (joonis 18.14). Arvutame pingetsükli keskmise pinge  $\sigma_m$  ja amplituudi  $\sigma_a$ , millega kanname diagrammile konstruktsioonelemendi tööseisundile vastava punkti  $F$ . Sellele punktile vastava pingetsükli suurim pinget avaldub  $\max \sigma = \sigma_m + \sigma_a$ , mis diagrammil on väljendatav järgmiste joonlõikude pikkuste summana,  $\max \sigma = OF_0 + F_0F$ . Võimalikust ülekoormusest kasvaksid pinget  $\max \sigma$  koordinaadid ja nendega määratud punkt siirduks väsimustugevuse diagrammi piirjoonele. Oletame, et suurim pinget läheb tööseisundile vastavast punktist  $F$  teatavat kõverjoont mööda piirseisundisse punktis  $P$ , millele vastab konstruktsioonelemendi väsimustugevus  $\bar{\sigma}_R = OP_0 + P_0P$ . Tugevuse varuteguriks on sel juhul suhe

$$S = \bar{\sigma}_R / \max \sigma = \frac{OP_0 + P_0P}{OF_0 + F_0F}. \quad (18.21)$$

Varuteguri arvutamiseks kasutame valemis (18.21) sisalduvate joonlõikude mõõtmist diagrammilt, mis peab olema joonestatud kindlas mõõtkavas. Niisugune varuteguri määramise viis on suhteliselt lihtne ja käesolevates ligikaudsetes arvutustes küllalt täpne.

Tõepoolest  $F$  suurim pinget võib minna piirjoone mis tahes punkti olenevalt keskmise pinget ja amplituudi kas-

vamise vahekorras. Näiteks resonantsi puhul toimub üleminek tingimustel  $\sigma_m = \text{const}$  ja kasvab ainult  $\sigma_a$ . Sel juhul suurim pinget läheb piirile mööda sirglõiku  $FM$  ja väsimustugevuse varutegur  $S = (OM_0 + M_0M) / (OF_0 + F_0F)$ . Kui kasvada võib ainult keskmine pinget  $\sigma_m$  ja  $\sigma_a = \text{const}$ , siis

$$S = (OT_0 + T_0T) / (OF_0 + F_0F).$$

Mõnikord suurima pinget teekond tööpunktist  $F$  väsimustugevuse piirjoonele pole teada või on selle määramine väga tülikas. Neil juhtudel teeme lihtsustava oletuse, et üleminek toimub tingimustel  $R = \text{const}$ , mis tähendab, et piirpingetsükkel on sarnane töötükliga. Joonisel 18.14 saame sel juhul piirjoonel punkti  $N$  ja varutegur avaldub  $S = (ON_0 + N_0N) / (OF_0 + F_0F)$ , või kui võtame arvesse kolmnurkade  $OF_0F$  ja  $ON_0N$  sarnasuse, siis lihtsamalt

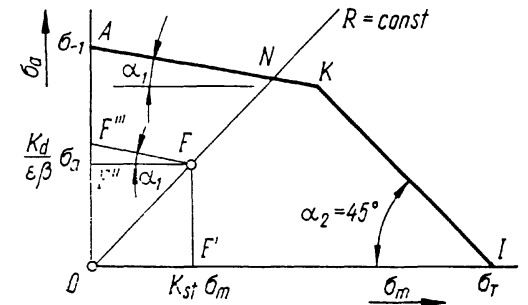
$$S = ON / OF. \quad (18.22)$$

Kui kasutame väsimustugevuse lihtsustatud diagramme joonisel (18.8) ja (18.9), ettepanud vastavalt Serensen-Kinasošvili ja Rabinovitši poolt, siis võime ka tugevuse varuteguri määrata lihtsamalt, valemite najal, mis ei nõua graafilisi konstruktsioone.

Kujutame joonisel 18.15 materjali väsimustugevuse lihtsustatud diagrammi, mis koosneb sirglõikudest  $AK$  ja  $KI$ . Arvutame konstruktsioonelemendi ohtlikus punktis keskmise pinget  $\sigma_m$  ja amplituudi  $\sigma_a$  ja määrame tegurid  $\epsilon$ ,  $\beta$ ,  $K_d$  ja  $K_{st}$ . Kanname diagrammile teisendatud koordinaatidega tööpunkti  $F$ , mille koordinaatideks pole mitte  $(\sigma_m | \sigma_a)$ , vaid

$$OF' = K_{st} \sigma_m; \quad OF'' = \frac{K_d}{\epsilon \beta} \sigma_a \quad \text{või}$$

$$OF'' = \frac{\beta(K_d - \epsilon) + \epsilon}{\epsilon \beta} \sigma_a.$$



Joon. 18.15

Teisendatud koordinaatidega tööpunkti kasutame seepärast, et võiksime tugevuse varuteguri selgitada materjali väsimustugevuse diagrammil, jättes kõrvale konstruktsioonielemendi oma.

Konstruktsioonielemendi tugevuse varutegurina vaatleme valemiga (18.22) määratud suurust, mis on saadud lihtsustava oletusega, et pingetsükkel läheb piirseisundisse tingimusel  $R = \text{const}$  mööda kiirt punktist  $O$  läbi punkti  $F$ . Seejuures olenevalt tööpunkti  $F$  asukohast võime piirseisundi punkti  $N$  saada kas diagrammi sirglõigul  $AK$  või siis sirglõigul  $KI$ . Vaatleme esimest juhtumit ja võtame arvesse sirglõigu  $AK$  kaldenurga  $\alpha_1$ . Joonestame punktist  $F$  sirglõigu  $FF''$ , mis on paralleelne lõiguga  $AK$  ja peame silmas, et  $\sigma_a$ -teljel asetsev lõik  $F''F''' = FF'' \tan \alpha_1 = OF' \tan \alpha_1 = K_{st} \sigma_m \tan \alpha_1$ . Avaldame tugevuse varuteguri valemiga (18.22) ja teisendame tulemust kolmnurkade  $ONA$  ja  $OFF'''$  sarnasusest:

$$S = \frac{ON}{OF} = \frac{OA}{OF'''} = \frac{\sigma_{-1}}{\psi_1 K_{st} \sigma_m + \frac{K_d}{\epsilon \beta} \sigma_a}, \quad (18.23)$$

kus  $\psi_1 = \tan \alpha_1$ . Teisel juhul, kui punkt  $N$  on sirglõigul  $KI$ , saame analoogselt tuletamisega

$$S = \frac{\sigma_T}{K_{st} \sigma_m + \frac{K_d}{\epsilon \beta} \sigma_a}. \quad (18.24)$$

Kui arvutuse teeme *Serensen-Kinasošvili* poolt ettepanud lihtsustatud diagrammi alusel (joonis 18.8), siis määrame  $\psi_1$  punktide  $A$  ja  $C$  koordinaatidega:

$$\psi_1 = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_0/2}{\sigma_0/2} = \frac{2\sigma_{-1}}{\sigma_0} - 1. \quad (18.25)$$

Kui arvutame *Rabinovitši* poolt ettepanud diagrammi alusel, siis avaldub  $\psi_1$  punktide  $A$  ja  $L$  koordinaatidega järgmiselt (joonis 18.9):

$$\psi_1 = \sigma_{-1} / \sigma_L, \quad (18.26)$$

kus  $\sigma_L$  on konstant, punkti  $L$  abstsiss; terastel ja malmidel  $\sigma_L = 1200$  MPa.

Tugevuse varuteguri määramisel peaksime selgitama, kas pingetsükkel läheb piirile sirglõigul  $AK$  või  $KI$  ja olenevalt sellest rakendame valemit (18.23) või (18.24). Selle küsimuse eelnev lahendamine on tülikas ja seepärast osutub otstarbekamaks arvutada varutegur nii ühe kui ka teise

valemiga ja valida siis kahest tulemusest väiksem. Teinud selle valiku, saame ka seatud küsimusele vastuse, mis piirseisundi sügavamal analüüsimisel on olulise tähtsusega.

Materjalidele, millel puudub plastne deformatsioon kasutatakse väsimustugevuse lihtsustatud diagrammina joonisel 18.16 kujutatut, mis ehitatakse punktidele  $A$ ,  $C$  ja  $E$  (vaata ka joonis 18.7) algandmetega  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_0$  ja  $\sigma_B (\equiv \sigma_1)$ . Konstruktsioonielemendi tugevuse varuteguri saame arvutada valemitega (18.23) ja (18.25), kui punkt  $N$  satub sirglõigule  $AC$ . Teisel juhul, kui punkt  $N$  satub lõigule  $CE$ , saame varuteguri avaldada valemiga (18.22) ja tulemuse teisendada kolmnurkade  $ONE$  ja  $OFF_1$  sarnasuse najal järgmisele kujule:

$$S = ON/OF = OE/OF_1 = OE/(OF' + F'F_1); \quad (18.27)$$

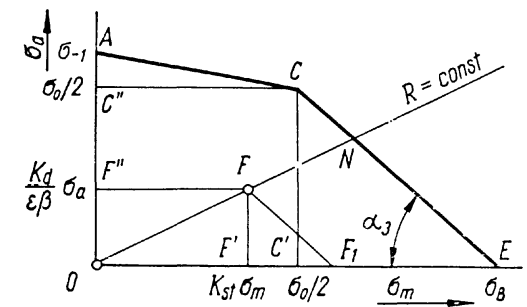
$$S = \frac{\sigma_B}{K_{st} \sigma_m + \psi_3 \frac{K_d}{\epsilon \beta} \sigma_a},$$

kus

$$\psi_3 = \cot \alpha = \frac{\sigma_B - \sigma_0/2}{\sigma_0/2} = \frac{2\sigma_B}{\sigma_0} - 1. \quad (18.28)$$

Tugevuse varuteguri määramist vaatlesime, kui varda ristlõikes mõjub kas ainult normaalpinge või siis ainult nihkepinge. Normaalpinge annavad tõmme, surve, puhas paine ja nende koosmõjud, nihkepinge annab vääne. Põikpaindega väsimusarvutustes arvestatakse samuti ainult normaalpinge, kuna nihkepinge oma suhtelise väiksuse tõttu jäetakse kõrvale.

Inseneripraktikas on sageli tegemist konstruktsioonielementidega, mis on allutatud väände ja painde, väände ja tõmbe või väände, painde ja tõmbe koosmõjule. Need liit-



Joon. 18.16

koormusseisundid aga ei allu vahetult selles punktis tuletatud valemitele, sest varda ristlõikes esinevad koos normaal- ja nihkepinge. Sel juhul peame varuteguri määramisel rakendama ühte tugevusteoriatest.

Tuletame valemi varuteguri arvutamiseks kolmanda (suurima nihkepinge) tugevusteorია najal eeldusel, et normaal- ja nihkepinge ristlõikepinna ohtlikus punktis muutuvad sama sagedusega ja faasinihketa. Seame pingetsükli suurimatele pingetele  $\max \sigma$  ja  $\max \tau$  tugevustingimuse (12.24), milles lubatava pinge  $[\sigma]$  asendame suurusega  $\bar{\sigma}_R/S$ :

$$\sigma_{eq}^{III} = \sqrt{\max \sigma^2 + 4 \max \tau^2} \leq \bar{\sigma}_R/S, \quad (a)$$

kus  $\bar{\sigma}_R$  on konstruktsioonelemendi väsimustugevus ja  $S$  — tema varutegur.

Vaatleme tingimuses (a) võrratust tugevuspiiril

$$\sqrt{\max \sigma^2 + 4 \max \tau^2} = \bar{\sigma}_R/S. \quad (b)$$

Jagame võrduse (b) mõlemat poolt suurusega  $\sigma_R$  ja tõstame ruutu:

$$\frac{\max \sigma^2}{\bar{\sigma}_R^2} + \frac{4 \max \tau^2}{\bar{\sigma}_R^2} = \frac{1}{S^2}. \quad (c)$$

Pidades silmas, et kolmanda tugevusteorია järgi tõmbe-tugevus on võrdne kahekordse nihketugevusega, loeme kehtivaks vahekorra  $\bar{\sigma}_R = 2\bar{\tau}_R$  ja teeme vastava asenduse seoses (c)

$$\left(\frac{\max \sigma}{\bar{\sigma}_R}\right)^2 + \left(\frac{\max \tau}{\bar{\tau}_R}\right)^2 = \frac{1}{S^2}. \quad (d)$$

Tähistame seoses (d) suurused  $\bar{\sigma}_R/\max \sigma$  ja  $\bar{\tau}_R/\max \tau$  vastavalt  $S_\sigma$  ja  $S_\tau$  ning vaatleme neid tugevuse varuteguritena, millest esimene peaks paika juhul, kui mõjub ainult  $\max \sigma$  ( $\max \tau = 0$ ) ja teine, kui mõjub ainult  $\max \tau$  ( $\max \sigma = 0$ ). Saame seose

$$1/S_\sigma^2 + 1/S_\tau^2 = 1/S^2,$$

millest avaldame liitkoormusseisundis töötava konstruktsioonelemendi tugevuse varuteguri

$$S = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}}, \quad (18.29)$$

kus  $S_\sigma$  ja  $S_\tau$  määrame eespool vaadeldud arvutusviisidega.

Valemit (18.29) võime rakendada piires, mis on määratud tuletamise käigus kasutatud eeldusega. Ta sobib plastsetele materjalidele, kui normaal- ja nihkepinged muutuvad sünkroonselt nii, et vaadeldavas ohtlikus punktis suurimad pinged mõjuvad ühel ja samal ajamomendil. Ka peavad normaal- ja nihkepingete tsüklid olema sama asümmeetria-teguriga  $R$  ja minema mõlemad tugevuse piirile tingimisel  $R = \text{const}^*$ . Kui need tingimused pole täidetud, tuleb abi otsida erialakirjandusest.

Lõpetades väsimusküsimuste käsitlust, pöörame veel kord tähelepanu arvutustele piiratud väsimustugevusega. Ei tohi unustada, et olles teinud arvutused väsimustugevusega, mis on tagatud kuni pingetsüklite arv ei ületa teatud kindlat piiri, tuleb konstruktsioonelementi vaadelda kõlblikuna ainult selles piiris. Kui määratud pingetsüklite hulk on töötamisel ammendunud, peame «väsinud» konstruktsioonelemendi välja vahetama uuega, vaatamata tema näilisele kõlblikusele. Lubatav pingetsüklite arv või selle alusel määratud usaldatav töötamise aeg kuulub sel juhul konstruktsioonelemendi tugevustingimuse juurde ja peab olema küllaldaselt määralt teatavaks tehtud neile, kes ehitisi ja masinaid kasutavad.

\* Inseneripraktikas on valemit (18.29) rakendatud, kui üks või teine loetletud tingimustest pole täidetud ja saavutatud rahuldavaid tulemusi. Nähtavasti selle valemi rakendusala taoline laiendamine on mõningal määral võimalik, kuid nõuab ettevaatlikkust ja on seotud riskiga.

## SISUKORD

### 1. Sissejuhatus — 3

- 1.1. Tugevusõpetuse eesmärk ja koht kõrgkoolis — 3
- 1.2. Tugevusõpetuse ajaloost — 4
- 1.3. Konstruktsioon ja selle elemendid — 5
  - 1.3.1. Liigitus kuju järgi. 1.3.2. Mehaaniline süsteem. 1.3.3. Ideaalne süsteem ja arvutusskeem.
- 1.4. Jõud konstruktsioonis — 8
  - 1.4.1. Koormused. 1.4.2. Toereaktsioonid ja sisejõud. 1.4.3. Välisjõud ja Saint-Venant'i printsiip.
- 1.5. Sisejõud ja pinged — 11
  - 1.5.1. Sisejõud. 1.5.2. Homogeenne keha. 1.5.3. Lõikemeetod. 1.5.4. Algmõõtmete printsiip. 1.5.5. Pinged, sisejõudude peavektor ja peamoment. 1.5.6. Algpinged. 1.5.7. Varda koormusseisundid.
- 1.6. Deformatsioon — 19
  - 1.6.1. Punkti paigutus. 1.6.2. Deformatsioon keha punktis. 1.6.3. Bernoulli hüpotees.
- 1.7. Hooke'i seadus — 22
  - 1.7.1. Elastsus ja plastsus. 1.7.2. Isotroopne keha. 1.7.3. Hooke'i seadus. 1.7.4. Jõu mõju sõltumatuse printsiip.

### 2. Tõmme ja surve — 25

- 2.1. Normaaljõud — 25
  - 2.1.1. Üldmõisted. 2.1.2. Normaaljõu määramine. 2.1.3. Diferentsiaal-seos.
- 2.2. Ühtlane tõmme ja surve — 30
  - 2.2.1. Pinged ristlõikes. 2.2.2. Varda pikenemine. 2.2.3. Poissoni tegur. 2.2.4. Punkti paigutus.
- 2.3. Astmeliselt muutuv tõmme ja surve — 36
- 2.4. Pidevalt muutuv tõmme ja surve — 39
  - 2.4.1. Varda arvutus. 2.4.2. Varda omakaal. 2.4.3. Tõmbe ja surve üldjuhtum.
- 2.5. Pinged kaldpinnal — 42
- 2.6. Tugevustingimus — 44
  - 2.6.1. Tugevustingimus. 2.6.2. Jäikustingimus.
- 2.7. Ratsionaalne varras — 47
  - 2.7.1. Vardast sõltumatu koormus. 2.7.2. Vardast sõltuv koormus.
- 2.8. Energeetilised seosed — 50
  - 2.8.1. Välisjõudude töö. 2.8.2. Sisejõudude töö. 2.8.3. Sisejõudude potentsiaalne energia.
- 2.9. Staatikaga määratu ülesanne — 55
  - 2.9.1. Deformatsioonitingimus. 2.9.2. Termopinged. 2.9.3. Montaažipinged.

### 3. Materjalide omadused tõmbel ja survel — 61

- 3.1. Proovikeha — 61
- 3.2. Katsemasin ja tensomeeter — 62
- 3.3. Tõmbe- ja surveteim — 64
- 3.4. Hariliku terase tõmbediagramm — 66
  - 3.4.1. Tinglik pinged. 3.4.2. Tõmbediagrammi piirkonnad. 3.4.3. Jääkdeformatsioon. 3.4.4. Elastsusmoodul. 3.4.5. Proportsionaalspiir. 3.4.6. Elastsuspiir.
- 3.5. Mehaanilised põhinäitajad — 71
  - 3.5.1. Bauschingeri efekt. 3.5.2. Põhinäitajad.
- 3.6. Deformatsioon ja purunemine — 75
  - 3.6.1. Deformatsiooni tekkemehhanism. 3.6.2. Voolavus. 3.6.3. Kales-tumine. 3.6.4. Sitkus ja rabadus. 3.6.5. Teimi töö.
- 3.7. Tugevuse kaudne määramine — 82
  - 3.7.1. Tugevuse sõltuvus. 3.7.2. Kõvadus. 3.7.3. Kõvaduse määramise meetodid. 3.7.4. Tugevuse sõltuvus kõvadusest.
- 3.8. Temperatuuri ja aja mõju — 85
  - 3.8.1. Normaalingimused. 3.8.2. Temperatuuri mõju. 3.8.3. Koorma-mise kiirus. 3.8.4. Järelmõju.
- 3.9. Tugevuse piirpinge ja varutegur — 92
  - 3.9.1. Piirpinge. 3.9.2. Varutegur. 3.9.3. Diferentseeritud varutegur.

### 4. Pingeteooria — 94

- 4.1. Pingus — 94
  - 4.1.1. Pinguse mõiste. 4.1.2. Joon-, tasand- ja ruumpingus. 4.1.3. Pin-gus alusteljistikus. 4.1.4. Nihkepingete paarsusseadus. 4.1.5. Peapin-ged.
- 4.2. Tasandpingus — 102
  - 4.2.1. Tasakaaluvõrrandid peapinnal. 4.2.2. Karakteristlik võrrand. 4.2.3. Peapingete valem. 4.2.4. Peatelgede määramine. 4.2.5. Pinged kaldpinnal. 4.2.6. Mohri ring. 4.2.7. Tasandpinguse analüüs. 4.2.8. Tasandpinguse erijuhud.
- 4.3. Ruumpingus — 111
  - 4.3.1. Pinged kaldpindadel. 4.3.2. Oktaeederpinged. 4.3.3. Hüdrostaa-tiline pinged ja pingedeviaator.
- 4.4. Deformeerumus keha punktis — 116
  - 4.4.1. Deformeerumus alusteljistikus. 4.4.2. Deformeerumuse ja pin-guse sarnasus. 4.4.3. Mahudeformatsioon.
- 4.5. Üldistatud Hooke'i seadus — 119
  - 4.5.1. Seosed ruumpinguses. 4.5.2. Seosed tasandpinguses. 4.5.3. Maht-elastsus.
- 4.6. Pinguse potentsiaalne energia — 122
  - 4.6.1. Potentsiaalne kogueenergia. 4.6.2. Mahu- ja kujumuutuse ener-giad.

### 5. Nihe ja lõige — 124

- 5.1. Puhas nihe — 124
  - 5.1.1. Pinged. 5.1.2. Deformatsioonid. 5.1.3. Nihkeelastsusmooduli sõltuvus normaalelastsusmoodulist ja Poissoni tegurist.
- 5.2. Nihketugevus — 128
  - 5.2.1. Nihkediagramm. 5.2.2. Lõiketeim.
- 5.3. Tugevusarvutused lõikele ja muljumisele — 130
  - 5.3.1. Liigendi sõrm. 5.3.2. Neet- ja poltliide. 5.3.3. Keevisliide.

## 6. Vääne — 135

- 6.1. Väändemoment — 135
  - 6.1.1. Varda koormus. 6.1.2. Väändemoment.
- 6.2. Umarvarda vääne — 140
  - 6.2.1. Väändedeformatsioon. 6.2.2. Nihkepinged ristlõikes. 6.2.3. Po-laarmomendid. 6.2.4. Väändenurk. 6.2.5. Pingus väändel. 6.2.6. Pea-pinge trajektor. 6.2.7. Potentsiaalne energia.
- 6.3. Väändetugevus — 150
  - 6.3.1. Tugevustingimus. 6.3.2. Jäikustingimus.
- 6.4. Mitteümarate varraste väändest — 152
  - 6.4.1. Mitteümar varras. 6.4.2. Ristkülikukujulise ristlõikega varras. 6.4.3. Elliptilise ristlõikega varras. 6.4.4. Võrdkülgse kolmnurgakuju-lise ristlõikega varras.
- 6.5. Staatikaga määratu ja plastne vääne — 155
  - 6.5.1. Staatikaga määratu väändeülesanne. 6.5.2. Plastne vääne.

## 7. Varda ristlõiketunnussuurused — 158

- 7.1. Tasandkujundi momendid — 158
  - 7.1.1. Avaldised. 7.1.2. Staatilised momendid.
- 7.2. Kujundi teljestikud — 162
  - 7.2.1. Keskteljestik. 7.2.2. Peateljestik.
- 7.3. Inertsimomendid — 166
  - 7.3.1. Teisendus paralleelsesse teljestikku. 7.3.2. Lihtsate kujundite inertsimomendid. 7.3.3. Inertsiraadius.
- 7.4. Ebasümmeetrilise kujundi peateljed ja peainertsimomendid — 172
  - 7.4.1. Tsentriugaalmoment. 7.4.2. Inertsimomendid pöörduvas teljes-tikus. 7.4.3. Peainertsimomendid ja peateljed.

## 8. Painde sisejõud — 178

- 8.1. Tala — 178
  - 8.1.1. Varda paine. 8.1.2. Tala toed ja toetusviisid. 8.1.3. Toereakt-sioonid.
- 8.2. Põikjõud ja paindemoment — 183
- 8.3. Sisejõudude epüürid — 187
  - 8.3.1. Sisejõud funktsioonidena. 8.3.2. Diferentsiaalseosed. 8.3.3. Ekst-reemne paindemoment. 8.3.4. Muutuva intensiivsusega lauskoormus.
- 8.4. Epüüride katkevus — 192
  - 8.4.1. Põikjõu epüüri katkevus koondjõust. 8.4.2. Koondmoment talal. 8.4.3. Lauskoormuse katkevus.
- 8.5. Epüüride pidevuspiirkonnad — 195
  - 8.5.1. Iseärsed punktid ja pidevuspiirkonnad. 8.5.2. Algpameetrite meetod.

## 9. Pinged paindel — 198

- 9.1. Puhas paine — 198
  - 9.1.1. Pinguse ja deformatsiooni põhitudused. 9.1.2. Tasakaalutin-gimused. 9.1.3. Deformatsioonitingimus. 9.1.4. Painde põhivalem. 9.1.5. Normaalpinged ristlõikes. 9.1.6. Pinged otsapiirkonnas ja põik-deformatsioon.
- 9.2. Põikpaine — 205
  - 9.2.1. Pinged põikpaindel. 9.2.2. Ristlõikepinna kõverdumine. 9.2.3. Nihkepinged. 9.2.4. Nihkepinge õhukeseseinalises profiilvardas. 9.2.5.

Nihkejõud liittalas. 9.2.6. Tala üldine pingeseisund. 9.2.7. Peapingete trajektorid.

- 9.3. Paindetugevus — 218
  - 9.3.1. Tugevustingimused. 9.3.2. Ratsionaalne ristlõige. 9.3.3. Ühtlase paindetugevusega varras.
- 9.4. Painde potentsiaalne energia — 228
- 9.5. Paindekese — 229
- 9.6. Plastne paine — 232
  - 9.6.1. Plastne liigend. 9.6.2. Painde piirmoment.

## 10. Tala elastne joon — 237

- 10.1. Elastse joone diferentsiaalvõrrand — 237
  - 10.1.1. Läbipaine ja pöördenurk. 10.1.2. Elastse joone määramise alused. 10.1.3. Diferentsiaalseosed.
- 10.2. Diferentsiaalvõrrandi otsene integreerimine — 240
  - 10.2.1. Ühe pidevuspiirkonnaga tala. 10.2.2. Mitme piirkonnaga tala.
- 10.3. Grafoanalüütiline meetod — 243
  - 10.3.1. Fiktiivkoormus ja -tala. 10.3.3. Muutuva ristlõikega tala.
- 10.4. Algpameetrite meetod — 248
  - 10.4.1. Elastse joone avaldis. 10.4.2. Universaalvõrrand.

## 11. Tugevusteooriad — 253

- 11.1. Materjali piirseisund ruumpinguses — 253
- 11.2. Klassikalised tugevusteooriad — 255
  - 11.2.1. Esimene tugevusteooria. 11.2.2. Teine tugevusteooria. 11.2.3. Kolmas tugevusteooria. 11.2.4. Neljas tugevusteooria.
- 11.3. Mohri tugevusteooria — 259

## 12. Liittõõseisundid — 263

- 12.1. Vildakpaine — 263
  - 12.1.1. Pinged varda ristlõikes. 12.1.2. Nulljoon. 12.1.3. Läbipaine.
- 12.2. Ekstsentriline surve ja tõmme — 269
  - 12.2.1. Normaalpinged ristlõikes. 12.2.2. Nulljoon. 12.2.3. Ristlõike tuum.
- 12.3. Väände ja painde koosmõju — 280
  - 12.3.1. Tugevustingimus. 12.3.2. Ohtliku ristlõike määramine.
- 12.4. Üldine liittõõseisund — 286
  - 12.4.1. Murdjoonse teljega varda sisejõud. 12.4.2. Tugevustingimus.

## 13. Staatikaga määratav konstruktsioon — 289

- 13.1. Konstruktsiooni analüüsist — 289
- 13.2. Toereaktsioonid — 291
- 13.3. Sisejõud — 293
  - 13.3.1. Liigendtala. 13.3.2. Raam.
- 13.4. Virtuaalsete nihutuste printsiip — 297
  - 13.4.1. Jäikade kehade süsteem. 13.4.2. Deformeeruv konstruktsioon.
- 13.5. Gastigliano teoreem — 304
- 13.6. Mohri meetod — 306
- 13.7. Mohri valemi integraalide numbriline arvutamine — 313
  - 13.7.1. Simpsoni valem. 13.7.2. Vereštšagini võte. 13.7.3. Kaks lineaarset epüüri.

#### **14. Staatikaga määratu konstruktsioon — 319**

- 14.1. Ühe sildega tala — 319
  - 14.1.1. Ühekordselt staatikaga määratu tala.
  - 14.1.2. Kahekordselt staatikaga määratu tala.
- 14.2. Jätkuvtala — 325
  - 14.2.1. Põhiskeem.
  - 14.2.2. Kolme momendi võrrand.
  - 14.2.3. Toereaktsioonid ja sisejõud.
- 14.3. Jõumeetod — 333
  - 14.3.1. Kanooniline võrrandisüsteem.
  - 14.3.2. Võrrandisüsteemi lahendamise.
  - 14.3.3. Sisejõud ja toereaktsioonid.
- 14.4. Sõrestik ja raam — 340
  - 14.4.1. Staatikaga määratu sõrestik.
  - 14.4.2. Raam.
  - 14.4.3. Sümmeetriline süsteem.
- 14.5. Siirded — 351

#### **15. Surutud varda stabiilsus — 354**

- 15.1. Stabiilne tasakaal ja kriitiline koormus — 354
- 15.2. Euleri ülesanne — 357
  - 15.2.1. Kriitiline jõud.
  - 15.2.2. Kriitilise jõu sõltuvus toesidemest.
  - 15.2.3. Euleri valemi kehtivuspiir.
- 15.3. Nõtke väljaspool Hooke'i seaduse kehtivuspiiri — 364
- 15.4. Nõtketegur — 365
- 15.5. Saleda varda arvutus nõtkele — 368
- 15.6. Ekstsentriliselt surutud sale varras — 373
- 15.7. Piki-põikpaine — 379

#### **16. Dünaamiline koormus — 385**

- 16.1. Sisejõud kiirendusega liikumisest — 385
  - 16.1.1. Kulgliikumine.
  - 16.1.2. Pöördliikumine.
- 16.2. Löök — 391
  - 16.2.1. Inertsivaba konstruktsioon.
  - 16.2.2. Puhver.
  - 16.2.3. Konstruktsiooni massi mõju.
- 16.3. Konstruktsiooni võnkumine — 407
  - 16.3.1. Võnkliikumise vabadusaste.
  - 16.3.2. Vabavõnkumine.
  - 16.3.3. Sumbuv võnkumine.
  - 16.3.4. Sundvõnkumine.
  - 16.3.5. Resonants.

#### **17. Kohalikud pinged — 422**

- 17.1. Pingekontsentratsioon — 422
- 17.2. Kontaktpinge — 428

#### **18. Konstruktsioonielemendi väsimus — 431**

- 18.1. Pingetsükli tunnussuurused — 431
- 18.2. Materjali väsimustugevus — 434
  - 18.2.1. Väsimuskõver.
  - 18.2.2. Väsimustugevuse diagramm.
- 18.3. Väsimustugevust mõjutavad tegurid — 442
  - 18.3.1. Mastaabitegur.
  - 18.3.2. Pingekontsentratsiooni mõju.
  - 18.3.3. Pinnakvaliteedi tegur.
- 18.4. Arvutusmeetodid — 446
  - 18.4.1. Lubatavate pingete meetod.
  - 18.4.2. Varuteguri meetod.

Аксел Юргенсон

**Сопротивление материалов**

На эстонском языке

Художник-оформитель Т. Ару

Таллин, «Валгус»

Toimetajad P. Sarevet, Ü. Arula

Kunstiline toimetaja H. Puzanov

Tehniline toimetaja M. Pall

Korrektorid L. Kondraševa, M. Lillipuu

ИБ № 1534

Laduda antud 09. 03. 83

Trükkida antud 20. 05. 85

Formaat 84×108/32

Trükipaber nr. 1

Kiri: *literaturnaja*

Kõrgtrükk

Tingtrükipoognaid 24,15

Tingvärvitõmmiseid 24,15

Arvestuspoognaid 24,71

Trükiarv 3500

Tellimuse nr. 908

Hind rubl. 1.10

Kirjastus «Valgus», 200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10

H. Heidemanni nim. trükikoda, 202400 Tartu, Ülikooli 17/19 II