TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 261

# МАТЕМАТИКА
# И
# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
# III

ТАЛЛИН 1968

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А №261 1968

УДК 55/53

# МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## III

ТАЛЛИН 1968

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 261 1968

УДК 531.311

О. Сильде и Б. Тийкма

# К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ В МЕХАНИКЕ ТЕОРЕМЫ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

## I. Обобщенная теорема кинетической энергии

Успешное применение теоремы кинетической энергии к системе с одной степенью свободы стимулирует исследовать возможность распространения этого метода на любые механические системы. По мнению авторов, этого можно в некоторой степени достичь путем обобщения теоремы кинетической энергии, которое в настоящей статье ради краткости называется принципом кинетической энергии.

Пусть $T$ - кинетическая энергия, $m$ - масса, $\bar{v}$ и $\bar{w}$ - векторы скорости и ускорения материальной точки, $\bar{F}$ - сила, действующая на нее, и $N$ - мощность силы $\bar{F}$, тогда

$$T = \tfrac{1}{2} m\bar{v}\cdot\bar{v},$$

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = m\bar{w}\cdot\bar{v}$$

и

$$N = \bar{F}\cdot\bar{v}.$$

Условие

$$\dot{T} = N$$

или

$$m\bar{w}\cdot\bar{v} = \bar{F}\cdot\bar{v}, \tag{I}$$

или

$$(\bar{F} - m\bar{w})\cdot\bar{v} = 0$$

выражает теорему кинетической энергии материальной точки в форме производной.

Чтобы равенство (I) определяло движение точки, необходимо и достаточно действительную скорость $\bar{v}$ заменить в нем возможной скоростью $\{\bar{v}\}$, т. е. совокупностью всех скоростей, которые точка могла бы иметь в условиях данной задачи.

Обозначим

$$\{\dot{T}\} = m\bar{w}\cdot\{\bar{v}\}, \quad \{N\} = \bar{F}\cdot\{\bar{v}\}.$$

Тогда равенство

$$\{\dot{T}\} = \{N\} \tag{2}$$

будет выражать принцип кинетической энергии материальной точки.

Пусть $v_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, - параметры, определяющие состояние движения механической системы (параметры скоростей или обобщенные скорости в более широком смысле). В ходе рассуждений будем их считать независимыми (принцип освобождаемости), хотя между ними могут быть связи и некоторые из них могут являться заданными функциями времени и даже само время может входить в их состав через производную: одна из $v_j = \frac{dt}{dt} = 1$. В конечных результатах учтем эти связи.

Введем соответственно задаче базисные векторы $\bar{u}_j$, $j = I, 2, \ldots, s$, и скорость системы

$$\bar{V} = \sum_j \bar{u}_j v_j \tag{3}$$

так, чтобы выражение кинетической энергии системы имело вид

$$T = \tfrac{1}{2}(\bar{V}\cdot\bar{V}) = \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} \bar{u}_j\cdot\bar{u}_k v_j v_k. \tag{4}$$

Тогда

$$\dot{T} = \bar{W}\cdot\bar{V},$$

где

$$\bar{W} = \dot{\bar{V}} = \sum_j(\dot{\bar{u}}_j v_j + \bar{u}_j\dot{v}_j).$$

Заменив $\bar{V}$ на

$$\{\bar{V}\} = \sum_k \bar{u}_k\{v_k\}, \tag{5}$$

где $\{v_k\}$ - возможные скорости, получим

$$\{\dot{T}\} = \bar{W}\cdot\{\bar{V}\} = \sum_{j,k}(\dot{\bar{u}}_j\cdot\bar{u}_k v_j + a_{jk}\dot{v}_j)\{v_k\}, \tag{6}$$

где

$$a_{jk} = \bar{u}_j\cdot\bar{u}_k.$$

Поскольку можно положить, что мощность сил

$$N = \sum_k Q_k v_k,$$

где $Q_k$ - обобщенная сила, соответствующая скорости $v_k$, то возможная мощность будет

$$\{N\} = \sum_k Q_k\{v_k\}. \tag{7}$$

Принцип кинетической энергии для любой механической системы выражается равенством

$$\{\dot{T}\} = \{N\}. \tag{8}$$

Если теперь считать все возможные скорости независимыми (а по принципу освобождаемости это означает, что в состав обобщенных сил $Q_k$ должны входить и соответствующие силы реакций связей), то из (6), (7) и (8) получим дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных скоростях

$$\sum_j (\dot{\bar{u}}_j \cdot \bar{u}_k v_j + a_{jk} \dot{v}_j) = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s. \qquad (9)$$

Но

$$\dot{\bar{u}}_j \cdot \bar{u}_k = \frac{d}{dt} a_{jk} - \dot{\bar{u}}_k \cdot \bar{u}_j$$

и

$$\sum_j (\dot{\bar{u}}_j \cdot \bar{u}_k v_j + a_{jk} \dot{v}_j) = \sum_j [a_{jk} \dot{v}_j + \frac{d}{dt}(a_{jk}) v_j] - \dot{\bar{u}}_k \cdot \bar{V} =$$

$$= \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial v_k}) - \dot{\bar{u}}_k \cdot \bar{V}$$

(базисные векторы $\bar{u}_k$ не зависят от обобщенных скоростей $v_k$).

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial v_k}) - \dot{\bar{u}}_k \cdot \bar{V} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s. \qquad (10)$$

В состав уравнений (9) и (10) входят как уравнения, служащие для определения неизвестных скоростей $v_j$, так и уравнения с известными $v_j$. Последние уравнения служат для определения неизвестных сил реакций связей.

Если принять $\{\dot{T}\} = 0$, то получится принцип возможных перемещений (в виде возможных скоростей) в статике

$$\{N\} = 0. \qquad (11)$$

Для того, чтобы равенства (3) - (10) были непосредственно применимы к любой механической системе, введем обозначения: для i-й ($i = 1,2,\ldots,n$) материальной точки системы ($m_i$ - масса, $\bar{v}_i$ - вектор скорости)

$$\bar{V}_i = m_i^{1/2}\bar{v}_i = \sum_j m_i^{1/2}\bar{u}_{ij}v_j,$$

где $\bar{u}_{ij}$ – базисные векторы i-й точки;;для всей системы – формальный вектор скорости системы

$$\bar{V} = \sum_i \bar{V}_i\delta_i = \sum_{i,j} m_i^{1/2}\delta_i\bar{u}_{ij}v_j \qquad (12)$$

с символическими множителями $\delta_i$, которые при умножении мы рассматриваем как числа. Таким образом,

$$\{\bar{V}\} = \sum_i\{\bar{V}_i\}\delta_i = \sum_{i,j} m_i^{1/2}\delta_i\bar{u}_{ij}\{v_j\} \quad ,$$

$$\bar{W} = \dot{\bar{V}} = \sum_i \dot{\bar{V}}_i\,\delta_i \; ,$$

$$T = \tfrac{1}{2}\bar{V}\cdot\bar{V} = \tfrac{1}{2}\sum_{i,k}\bar{V}_i\cdot\bar{V}_k\delta_i\delta_k = \tfrac{1}{2}\sum_i \bar{V}_i\cdot\bar{V}_i \; ,$$

$$\{\dot{T}\} = \bar{W}\cdot\{\bar{V}\} = \sum_{i,k}\dot{\bar{V}}_i\cdot\{\bar{V}_k\}\delta_i\delta_k = \sum_i \dot{\bar{V}}_i\cdot\{\bar{V}_i\} \; .$$

Отсюда видно, что произведение

$$\delta_i\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases}$$

и

$$\bar{u}_j = \sum_i m_i^{1/2}\,\delta_i\,\bar{u}_{ij} \; . \qquad (13)$$

## 2. Пример

Рассмотрим общее движение твердого тела. Пусть $O_{xyz}$ – неподвижная декартова система координат (орты: $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$), а $C_{x'y'z'}$ – неизменно связанная с телом система с началом в центре масс $C(x_c, y_c, z_c)$ (орты: $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$). Пусть $\bar{r}_i$ =

$= \overline{OM}_i$ ($M_i$ – i-я материальная точка системы с массой $m_i$), $i = 1,2,\ldots,n$,

$$\bar r_c = \overline{OC}, \quad \bar r_i{}' = \overline{CM}_i .$$

Тогда

$$\bar r_i = \bar r_c + \bar r_i{}' = x_c\bar i + y_c\bar j + z_c\bar k + x_i{}'\bar i{}' + y_i{}'\bar j{}' + z_i{}'\bar k{}' .$$

Дифференцируя, получим:

$$\bar v_i = \dot x_c\bar i + \dot y_c\bar j + \dot z_c\bar k + x_i{}'\dot{\bar i}{}' + y_i{}'\dot{\bar j}{}' + z_i{}'\dot{\bar k}{}' ,$$

$$\bar V = (\dot x_c\bar i + \dot y_c\bar j + \dot z_c\bar k)\sum_i m_i^{1/2}\delta_i + \sum_i (x_i{}'\dot{\bar i}{}' + y_i{}'\dot{\bar j}{}' + z_i{}'\dot{\bar k}{}')m_i^{1/2}\delta_i ,$$

$$\{\bar V\} = (\{\dot x_c\}\bar i + \{\dot y_c\}\bar j + \{\dot z_c\}\bar k)\sum_i m_i^{1/2}\delta_i +$$

$$+ \sum_i (x_i{}'\{\dot{\bar i}{}'\} + y_i{}'\{\dot{\bar j}{}'\} + z_i{}'\{\dot{\bar k}{}'\})m_i^{1/2}\delta_i ,$$

$$\dot{\bar V} = (\ddot x_c\bar i + \ddot y_c\bar j + \ddot z_c\bar k)\sum_i m_i^{1/2}\delta_i +$$

$$+ \sum_i (x_i{}'\ddot{\bar i}{}' + y_i{}'\ddot{\bar j}{}' + z_i{}'\ddot{\bar k}{}')m_i^{1/2}\delta_i .$$

Тогда

$$\{\dot T\} = \dot{\bar V}\cdot\{\bar V\} = M(\ddot x_c\{\dot x_c\} + \ddot y_c\{\dot y_c\} + \ddot z_c\{\dot z_c\}) +$$

$$+ J_{11}\ddot{\bar i}{}'\cdot\{\dot{\bar i}{}'\} + J_{22}\ddot{\bar j}{}'\cdot\{\dot{\bar j}{}'\} + J_{33}\ddot{\bar k}{}'\cdot\{\dot{\bar k}{}'\} +$$

$$+ J_{12}(\ddot{\bar{i}}'\cdot\{\dot{\bar{j}}'\} + \ddot{\bar{j}}'\cdot\{\dot{\bar{i}}'\}) + J_{13}(\ddot{\bar{i}}'\cdot\{\dot{\bar{k}}'\} + \ddot{\bar{k}}'\cdot\{\dot{\bar{i}}'\}) + \quad (14)$$

$$+ J_{23}(\ddot{\bar{j}}'\cdot\{\dot{\bar{k}}'\} + \ddot{\bar{k}}'\cdot\{\dot{\bar{j}}'\}),$$

где

$$M = \sum_i m_i; \quad J_{11} = \sum_i m_i x_i'^2, \ldots, J_{23} = \sum_i m_i y_i' z_i',$$

а $\sum_i m_i x_i' = 0$ и т. д.

Оставим в стороне первый член (движение центра масс) и будем исследовать вращательное движение вокруг центра масс:

$$\{\dot{T}_{вр.}\} = J_{11}\ddot{\bar{i}}'\cdot\{\dot{\bar{i}}'\} + \ldots + J_{23}(\ddot{\bar{j}}'\cdot\{\dot{\bar{k}}'\} + \ddot{\bar{k}}'\cdot\{\dot{\bar{j}}'\}).$$

Пусть $\bar{\omega} = \omega_1\bar{i} + \omega_2\bar{j} + \omega_3\bar{k}$ – вектор мгновенной угловой скорости тела. Тогда

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}' = \omega_3\bar{j}' - \omega_2\bar{k}' \quad \text{и т. д.}$$

(циклическая перестановка), а

$$\{\dot{\bar{i}}'\} = \{\omega_3\}\bar{j}' - \{\omega_2\}\bar{k}' \quad \text{и т. д.,} \qquad (15)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ являются обобщенными скоростями. Далее

$$\ddot{\bar{i}}' = (-\omega_3^2 - \omega_2^2)\bar{i}' + (\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2)\bar{j}' + (-\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3)\bar{k}'. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14) и учитывая, что $J_{11} + J_{22} = J_3$ – момент инерции тела относительно оси $C_z'$ и т. д., $J_{22} - J_{33} = J_3 - J_2$ и т. д., получим

$$\{\mathring{T}_{вр.}\} = [J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 + J_{12}(-\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3) +$$

$$+ J_{13}(-\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2) + J_{23}(\omega_3^2 - \omega_2^2)]\{\omega_1\} + \ldots \quad . \tag{17}$$

Возможная мощность

$$\{N\} = (M_1^{(a)} + M_1^{(r)})\{\omega_1\} + \ldots , \tag{18}$$

где $M_1^{(a)}$ и т. д. – моменты активных сил, а $M_1^{(r)}$, и т. д. – моменты сил реакций связей относительно осей $C_x'$, $C_y'$ и $C_z'$.

Следовательно, (17) и (18) дают три уравнения вращательного движения тела.

## 3. Обобщенные координаты

Пусть $q_j$, $j = 1,2,\ldots,s$, – параметры,определяющие положение механической системы (обобщенные координаты в более широком смысле). В ходе рассуждений будем их считать независимыми, несмотря на то, что они и их первые производные по времени могут зависеть друг от друга (уравнения связей) и некоторые из них могут являться заданными функциями времени и даже само время может входить в их состав (одна из $q_j = t$). По принципу освобождаемости в состав обобщенных сил $Q_j$ должны входить также силы реакций соответствующих связей.

Тогда

$$v_j = \dot{q}_j ,$$

$$\bar{u}_j = \sum_i m_i^{1/2}\delta_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} , \tag{19}$$

$$L = 1/2 \sum_{j,k} \bar{u}_j \cdot \bar{u}_k \dot{q}_j \dot{q}_k = 1/2 \sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k ,$$

где $m_i$ – масса, $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ – радиус-вектор i-й материальной точки системы, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Из (19) получим

$$\dot{\bar{u}}_j = \sum_{i,k} m_i^{1/2} \delta_i \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k .$$

Поскольку

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} (\sum_k \bar{u}_k \dot{q}_k) = \sum_{i,k} m_i^{1/2} \delta_i \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k = \dot{\bar{u}}_j ,$$

то

$$\dot{\bar{u}}_k \cdot \bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial q_k} \cdot \bar{V} = \frac{\partial T}{\partial q_k} .$$

Теперь из (10) следует:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{20}$$

Это дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах. Они являются (обобщенными) уравнениями Лагранжа второго рода.

При практических вычислениях иногда приходится уравнениям (20) или (10) предпочитать уравнения (9) или уравнение

$$\dot{\bar{V}} \cdot \{\bar{V}\} = \{N\} , \tag{21}$$

так как для нахождения уравнений движения системы в (9) или (21) дифференцирование требуется только один раз и нет необходимости вычислять кинетическую энергию системы T (как и в пункте 2). Уравнения (9) и (21) полезно применять также в случае неголономных связей.

## 4. Принцип в тензорной форме

Введем тензор кинетической энергии механической системы

$$\overset{(2)}{T} = ½ \sum_i m_i \bar{v}_i \bar{v}_i ,$$

где $\bar{v}_i \bar{v}_i$ – общее произведение вектора скорости $i$ – й материальной точки $\bar{v}_i$ на вектор $\bar{v}_i$ и тензор мощности сил

$$\overset{(2)}{N} = ½ \sum_i (\bar{F}_i \bar{v}_i + \bar{v}_i \bar{F}_i) .$$

Тогда принцип кинетической энергии выражается равенством

$$\frac{d}{dt} ( \overset{(2)}{T} ) = N . \qquad (22)$$

Чтобы перевести это равенство на язык индексов, обозначим обобщенные координаты верхними индексами (контравариантный вектор). Тогда $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q^1, q^2, \dots, q^s)$, кинетическая энергия

$$T = ½ \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k , \text{ где } a_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^k} .$$

Если основная декартова координатная система не будет преобразована в подвижную систему, то кинетическая энергия T будет скалярным инвариантом и заданную проблему динамики можно будет рассматривать в s – мерной римановой геометрии, где $q^j$ играют роль координат, а $a_{jk}$ можно принять за фундаментальный тензор. Тогда тензор кинетической энергии получит вид

$$T^{jk} = \tfrac{1}{2}\dot q^j \dot q^k,$$

а тензор мощности

$$N^{jk} = \tfrac{1}{2}(Q^j \dot q^k + Q^k \dot q^j) \;,$$

где $Q^j$ – контравариантная составляющая обобщенной силы. Скалярная мощность

$$N = a_{jk} Q^j \dot q^k = Q_k \dot q^k \;,$$

где $Q_k = a_{jk}\, Q^j$ – ковариантная составляющая обобщенной силы. Из принципа (22) следует (если $\frac{\delta}{\delta t}$ означает ковариантное дифференцирование)

$$\frac{\delta T^{jk}}{\delta t} = N^{jk} \;.$$

Нам необходимо вычислить производные только для составляющих, где $k = j$:

$$\frac{\delta}{\delta t}\,(\tfrac{1}{2}\dot q^j \dot q^j) = Q^j \dot q^j \;,$$

откуда

$$\dot q^j\, \ddot q^j + \Gamma^j_{kl}\; \dot q^j\, \dot q^k\, \dot q^l = Q^j\, \dot q^j$$

или

$$\ddot q^j + \Gamma^j_{kl}\, \dot q^k\, \dot q^l = Q^j, \quad j = 1,2,\ldots,s. \tag{23}$$

Нетрудно заметить, что левая сторона (23) равна $\frac{\delta \dot q^j}{\delta t}$,

так что

$$\frac{\delta \dot q^j}{\delta t} = Q^j \;. \tag{24}$$

Но (23) или (24) есть уравнения движения в обобщенных координатах. Чтобы придать им сходство с уравнениями (20), следует индекс j опустить вниз, т. е. (23) надо умножить на $a_{kj}$. Получим

$$a_{kj}\,\ddot{q}^j + a_{kj}\,\Gamma^j_{lu}\,\dot{q}^l\,\dot{q}^u = a_{kj}\,Q^j = Q_k\,.$$

Однако

$$a_{kj}\,\Gamma^j{}_{lu} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{tk}}{\partial q^u} + \frac{\partial a_{uk}}{\partial q^l} - \frac{\partial a_{lu}}{\partial q^k}\right),$$

и, следовательно,

$$a_{kj}\,\ddot{q}^j + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{lk}}{\partial q^u} + \frac{\partial a_{uk}}{\partial q^l}\right)\dot{q}^l\,\dot{q}^u - \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial a_{lu}}{\partial q^k}\,\dot{q}^l\,\dot{q}^u = Q_k\,.$$

Но сумма первых двух членов на левой стороне равенства равна $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right)$, а последний член равен $-\frac{\partial T}{\partial q^k}$.

Окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} = Q_k,\quad k = 1,2,\ldots,s. \qquad (25)$$

В s – мерном пространстве Римана уравнения (25) можно вывести и непосредственно из уравнения (8). Пусть $\bar{u}_j$ – базисные векторы, т. е. $\bar{u}_j\cdot\bar{u}_k = a_{jk}$, тогда

$$\bar{V} = \bar{u}_k\,\dot{q}^k,$$

$$\{\bar{V}\} = \bar{u}_k\,\{\dot{q}^k\}\quad,$$

$$\dot{\bar{V}} = \bar{u}_j\,\ddot{q}^j + \dot{q}^j\,\Gamma^s{}_{jl}\,\dot{q}^l\,\bar{u}_s\,,$$

$$\{\dot{T}\} = \dot{\bar{V}} \cdot \{\bar{V}\} = (a_{kj}\,\ddot{q}^j + a_{ks}\,\Gamma^s_{jl}\,\dot{q}^j\,\dot{q}^l)\{\dot{q}^k\} \ .$$

Так как

$$\{N\} = Q_k\,\{\dot{q}^k\} \ ,$$

то, переменив сообразно индексы, получим

$$a_{kj}\,\ddot{q}^j + a_{kj}\,\Gamma^j_{ls}\,\dot{q}^l\,\dot{q}^s = Q_k \ ,$$

откуда вышеприведенным способом можно получить уравнения(25).

## 5. Заключение

Из всего изложенного видно, что с помощью видоизменения уравнения $\dot{T} = N$ можно распространить способ, применяемый в случае системы с одной степенью свободы, на системы со многими степенями свободы. Используя понятия возможной скорости $\{v_j\}$ и возможной мощности $\{N\}$, получаем уравнение $\dot{T} = N$ в виде

$$\{\dot{T}\} = \{N\} \ ,$$

где

$$\{\dot{T}\} = \dot{\bar{V}} \cdot \{\bar{V}\} \ .$$

Выраженный этим уравнением принцип можно также назвать принципом возможных мощностей. Выделение возможных скоростей в этом уравнении позволяет написать дифференциальные уравнения системы. При этом можно также вывести уравнения Лагранжа в параметрах $q_i$, из которых некоторые могут зависеть от времени.

O.Silde, B.Tiikma

# On the Application of the Theorem of the Kinetic Energy

Summary

This investigation represents a method how to solve the problems of dynamics by means of the modification of the theorem of the kinetic energy. This is possible for every mechanical system by using a formal vector of velocity. In this case the kinetic energy is equivalent to this vector multiplied with half of velocity. The method is applicable to systems of many degrees of freedom and even to systems with linear nonholonomic constraints.

The theorem of the kinetic energy is given also in tensorial form.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 261 1968

УДК 518:512.39

Х.Коппель

# ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЭЙТКЕНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для улучшения и ускорения сходимости двух данных итераций одного и того же порядка

$$x_{n+1}^{(1)} = u\,(x_n^{(1)}),\quad x_{n+1}^{(2)} = v\,(x_n^{(2)}) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

при решении вещественного уравнения

$$f\,(x) \equiv x - \varphi\,(x) = 0 \tag{2}$$

Эйткен (см., напр. [I]) предложил следующий метод:

$$x_{n+1} = \frac{x_n\, u\,(v\,(x_n)) - u\,(x_n)\, v\,(x_n)}{x_n - u\,(x_n) - v\,(x_n) + u\,(v\,(x_n))} \quad (n = 0,1,\ldots) \tag{3}$$

Если итерации (I) имеют порядок $r > 1$, то, как показал Эйткен, итерация (3) имеет порядок не ниже $2r - 1$ и при $r = 1$ порядок, по крайней мере, равный 2, - только в предположении, что

$$(u'\,(x^*) - 1)\,(v'\,(x^*) - 1) \neq 0,$$

где $x^*$ - решение уравнения 2.

Чтобы итерацию (3) обобщить для приближенного решения нелинейного операторного уравнения

$$P(x) \equiv x - \Phi(x) = 0 \tag{4}$$

в пространстве Банаха X, придется ввести понятие порядка итерации для решения уравнения (4). Будем говорить, как и в классическом анализе, что интерация

$$x_{n+1} = U(x_n)$$

имеет порядок m, или оператор $U(x)$ определяет итерацию m-ого порядка, если

$$U(x^*)=x^*, \; U'(x^*)=U''(x^*)=\ldots=U^{(m-1)}(x^*)=0, \quad \text{но } U^{(m)}(x^*) \neq 0,$$

где $x^*$ – решение уравнения (4).

Если некоторый оператор $U(x)$ имеет в окрестности решения $x^*$ m непрерывных производных, то по обобщенной формуле Тейлора

$$U(x) - U(x^*) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} U^{(k)}(x^*)(x - x^*)^k +$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 U^{(m)}(x^* + t(x - x^*))(x - x^*)^m (1 - t)^{m-1} dt.$$

В случае итерации порядка m имеем:

$$U(x) - x^* = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 U^{(m)}(x^* + t(x - x^*))(x - x^*)^m (1 - t)^{m-1} dt. \tag{5}$$

Пусть оператор $V(x)$ определяет интерацию r-ого порядка, тогда

$$V(x) - x^* = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 V^{(r)}(x^* + t(x - x^*))(x - x^*)^r (1-t)^{r-1} dt \tag{6}$$

(в предположении, что производные до порядка $r$ непрерывны в окрестности решения $x^*$).

С помощью операторов $U(x)$ и $V(x)$ построим оператор $T(x)$:

$$T(x) = x - [E - U(V(x);\, x)]^{-1}(x - U(x)),$$

где $U(x';\, x'')$ – разделенная разность первого порядка оператора $U(x)$, а $E$ – единичный оператор пространства $X$. Итерацию

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

или

$$x_{n+1} = x_n - [E - U(V(x_n);x_n)]^{-1}(x_n - U(x_n)) \quad (n = 0,1,\ldots) \tag{7}$$

называем обобщенным методом Эйткена. Отметим, что при решении вещественного уравнения (2) из (7) легко получить формулу (3). Частные случаи (т. н. обобщенный метод Стеффенсена), когда

$$U(x) = V(x) = \Phi(x)$$

и $U(x) = \Phi(x)$, но $V(x) = x + \gamma(x - \Phi(x))$ ($\gamma$ – вещественное число), исследованы в статьях [5],[6],[7], [10] и [11].

Чтобы результаты данной статьи были применимы к более широкому классу нелинейных операторных уравнений (в частности, для систем алгебраических и трансцендентных уравнений), рассмотрим случай, когда $X$ является прямым произведением банаховых пространств $X_i$, т. е.

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_\nu \quad (\text{см. [3] стр. 613}).$$

Пусть в дальнейшем $x, x', x'', x''', x^*$ и $h \in X$, где соответственно

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu);$$

$$x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_\nu);$$

$$x'' = (x''_1, x''_2, \ldots, x''_\nu);$$

$$x''' = (x'''_1, x'''_2, \ldots, x'''_\nu);$$

$$x^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_\nu);$$

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_\nu).$$

$$x_i, x'_i, x''_i, x'''_i, x^*_i, h_i \in X_i \quad (i = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Норму элемента $x \in X$ определим равенством

$$\|x\| = \max_{1 \le i \le \nu} \|x_i\|. \tag{8}$$

В пространстве $X$ можно (5) и (6) представить в следующем символическом виде:

$$U(x) = x^* + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 \Big( \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - x_i^*) \Big)^m U(x^* + t(x - x^*))(1-t)^{m-1} dt, \tag{9}$$

$$V(x) = x^* + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \Big( \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - x_i^*) \Big)^r V(x^* + t(x - x^*))(1-t)^{r-1} dt, \tag{10}$$

где частные дифференциалы операторов $U(x)$ и $V(x)$ выписываются как:

$$\frac{\partial^m U(x^* + t(x - x^*))}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_\nu^{\alpha_\nu}} (x_1 - x_1^*)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^*)^{\alpha_2} \ldots (x_\nu - x_\nu^*)^{\alpha_\nu} =$$

$$= U^{(m)}_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_\nu^{\alpha_\nu}} (x^* + t(x - x^*))(x_1 - x_1^*)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^*)^{\alpha_2} \ldots (x_\nu - x_\nu^*)^{\alpha_\nu};$$

$$(\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = m)$$

(ср. напр. [4], стр. 467). Формулы (9) и (10) легко получить индукцией из (5) и (6).

Используя формулу для разделенной разности оператора $U(x)$ в пространстве $X$ (см. [9])

$$U(x';x'')h = \int_0^1 \sum_{i=1}^{\nu} U^1_{x_i}(x_1'', \ldots, x_{i-1}'', x_i'' + \bar{t}(x_i' - x_i''), x_{i+1}', \ldots, x_\nu')h_i d\bar{t},$$

можем на основании (9) придать ей вид

$$U(x';x'')h = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^{\nu} [mH_i^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_i} U(z_i)h_i + tH_i^m \frac{\partial}{\partial x_i} U(z_i)h_i](1-t)^{m-1} dt d\bar{t}, \tag{11}$$

где

$$H_i = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1'' - x_1^*) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}(x_{i-1}'' - x_{i-1}^*) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i'' - x_i^* + \bar{t}(x_i' - x_i'')) + \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}(x_{i+1}' - x_{i+1}^*) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_\nu}(x_\nu' - x_\nu^*);$$

$z_i=(x_1^*+t(x_1''-x_1^*),\ \dots,\ x_{i-1}^*+t(x_{i-1}''-x_{i-1}^*), x_i^*+t(x_i''-x_i^*)\ +$

$+\ t\bar{t}(x_i'-x_i''), x_{i+1}^*+t(x_{i+1}'-x_{i+1}^*),\ \dots,\ x_\nu^*+t(x_\nu'-x_\nu^*)).$

Теперь мы можем доказать теорему, дающую качественную характеристику скорости сходимости обобщенного метода Эйткена (7).

<u>Теорема I.</u> Пусть даны итерации, удовлетворяющие условиям (9) и (10). Пусть, кроме того

$1^\circ$ уравнение (4) имеет решение в сфере

$$\|x - x_0\| \le \rho; \tag{12}$$

$2^\circ$ для каждого $x', x'', x$ из сферы

$$\|x - x_0\| \le (1 + \alpha)\rho \tag{13}$$

справедливы оценки

а) $\|[E - U(x';\ x'')]^{-1}\| \le B;$

б) $\left\|\frac{1}{k!}\, U^{(k)}_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_\nu^{\alpha_\nu}}(x)\right\| \le A_k$ для $k=m,\ m+1$ и всех $\alpha_i \ge 0$, где $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \alpha_i = k;$

в) $\left\|\frac{1}{r!}\, V^{(r)}_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_\nu^{\alpha_\nu}}(x)\right\| \le B_r$ для всех $\alpha_i \ge 0$, где $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \alpha_i = r,$

причем

$$\alpha = 1 + \nu^r B_r \rho^{r-1}$$

$3^{\circ}$ а) $b\wp<1$, где $b=\{\nu^r BB_r[\nu^{m+r(m-1)}A_m B_r^{m-1}\wp^{(m-1)(r-1)}+$

$$+\sum_{i=1}^{\nu}(mA_m C_i^{m-1}+A_{m+1}C_i^m\wp)]\}^{\frac{1}{m+r-2}} \quad \text{при} \quad m+r\geq 3$$

$$(C_i=i+1+(\nu+1-i)\nu^r B_r\wp^{r-1});$$

б) $q=\nu BB_1[2\nu A_1+\sum_{i=1}^{\nu}A_2(i+1+(\nu+1-i)\nu B_1)\wp]<1$ при $m=r=1$.

Тогда решение $x^*$ уравнения (4) в сфере (I3) единственно и последовательность (7) сходится к $x^*$ со скоростью

$$\|x^*-x_n\|\leq\frac{1}{b}(b\wp)^{(m+r-1)^n} \quad \text{при } m+r\geq 3 \tag{14}$$

и

$$\|x^*-x_n\|\leq\wp q^n \quad \text{при} \quad m=r=1 \ (n=0,1,\ldots). \tag{15}$$

<u>Доказательство.</u> Прежде всего найдем по (7)

$$x^*-x_{n+1}=x^*-x_n+[E-U(V(x_n);x_n)]^{-1}(x_n-U(x_n)) =$$

$$=[E-U(V(x_n);x_n)]^{-1}[x^*-U(x_n)-U(V(x_n);x_n)(x^*-x_n)]=$$

$$=[E-U(V(x_n);x_n)]^{-1}[x^*-U(V(x_n))+U(V(x_n);x_n)(V(x_n)-x^*)].$$

По формуле (9)

$$U(V(x_n))-x^*=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}(V_i(x_n)-x_i^*)\Big)^m U(x^*+$$

$$+t(V(x_n)-x^*))(1-t)^{m-1}dt,$$

где

$$x_n=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\dots,x_\nu^{(n)}) \text{ и } V_1(x_n)=(V_1(x_n),V_2(x_n),\dots,V_\nu(x_n)).$$

На основании формулы (11)

$$U(V(x_n);x_n)(V(x_n)-x^*)=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1\int_0^1\sum_{i=1}^{\nu}\Big[mH_{in}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_i}U(z_{in})+$$

$$+tH_{in}^m\frac{\partial}{\partial x_i}U(z_{in})\Big](V_i(x_n)-x_i^*)(1-t)^{m-1}dtd\bar{t},$$

где

$$H_{in}=\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^{(n)}-x_1^*)+\dots+\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}(x_{i-1}^{(n)}-x_{i-1}^*)+\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i^{(n)}-x_i^*+\bar{t}(V_i(x_n)-x_i^{(n)})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}(V_{i+1}(x_n)-x_{i+1}^*)+\dots+\frac{\partial}{\partial x_\nu}(V_\nu(x_n)-x_\nu^*);$$

$$z_{in}=(x_1^*+t(x_1^{(n)}-x_1^*),\dots,x_{i-1}^*+t(x_{i-1}^{(n)}-x_{i-1}^*),x_i^*+t(x_i^{(n)}-x_i^*)+$$

$$+t\bar{t}(V_i(x_n)-x_i^{(n)}),x_{i+1}^*+t(V_{i+1}(x_n)-x_{i+1}^*),\dots,x_\nu^*+t(V_\nu(x_n)-x_\nu^*)).$$

Теперь можем оценить норму

$$\|x^*-x_{n+1}\|\le B[\|x^*-U(V(x_n))\|+U(V(x_n);x_n)(V(x_n)-x^*)\|]\le$$

$$\le \nu^r BB_r[\nu^{m+r(m-1)}A_m B_r^{m-1}\|x^*-x_r\|^{(m-1)(r-1)}+\sum_{i=1}^{\nu}(mA_m C_{in}^{m-1}+$$

$$+A_{m+1}C_{in}^m\|x^*-x_n\|)]\|x^*-x_n\|^{m+r-1}(C_{in}=i+1+(\nu+1-i)\nu^r B_r\|x^*-x_n\|^{r-1}), \tag{16}$$

так как по формуле (8)

$$\|x^*-x_n\|=\max_{1\le i\le\nu}\|x_i^*-x_i^{(n)}\| \text{ и } \|x^*-V(x_n)\|=\max_{1\le i\le\nu}\|x_i^*-V_i(x_n)\|.$$

Оценки (16) ($n = 0,1,\ldots$) справедливы в предположении, что элементы $x_n$, $V(x_n)$, $x^*+t(x_n-x^*)$, $x^*+t(V(x_n)-(x^*))$ и $x^* + t(x_n-x^*)+t\bar{t}(V(x_n)-x_n)$ принадлежат сфере (13). Но это легко показать. По индукции из оценок (16) вытекают оценки (14) и при $m=r=1$ – оценки (15).

Из предыдущего вытекает, что $\lim x_n=x^*$. Если уравнение (4) имело бы в сфере(I2) решение $x^{**}\ne x^*$, то мы при помощи аналогичных рассуждений могли бы показать, что $\lim x_n=x^{**}$. На основании единственности предельного элемента сходящейся последовательности $\{x_n\}$ решение $x^*$ в сфере (12) единственно.

Теорема доказана.

Оказывается, что можно доказать теорему, из которой, в частности, следует, что при $m=1$, $r\ge1$ скорость метода (7) будет порядка $r+1$. Для этого придется преобразовать разделенную разность второго порядка оператора $U(x)$ в пространстве X. Используем формулу (ср. [9])

$$[U(x';x'')-U(x'';x''')]h=U(x;x'';x''')(x'-x''')h=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}a_{ij}(x_j'-x_j'')h_i,$$

где

$$a_{ij}=\begin{cases}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \tilde{t}U''_{x_i^2}(x_i''',\dots,x_{i-1}''',x_i'''+\tilde{t}(x_i''-x_i''')+\tilde{t}\bar{t}(x_i'-x_i''),x_{i+1}',\dots \\ \qquad\qquad\qquad \dots,x_\nu')\cdot d\tilde{t}d\bar{t}, \text{ если } i=j, \\ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 U''_{x_ix_j}(x_1''',\dots,x_{i-1}''',x_i'''+\tilde{t}(x_i''-x_i'''),x_{i+1}'',\dots,x_{j-1}'',x_j''+ \\ \qquad\qquad\qquad +\bar{t}(x_j'-x_j''),x_{j+1}',\dots,x_\nu')d\tilde{t}d\bar{t}, j>i, \\ 0, \text{ если } j<i. \end{cases}$$

Итак, ввиду(11), можем найти

$$U(x';x'';x''')(x'-x'')h=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 [\sum_{i=1}^{\nu}\tilde{t}U''_{x_i^2}(x_1''',\dots,x_{i-1}''',x_i'''+\tilde{t}(x_i''-x_i''')+$$

$$+\tilde{t}\bar{t}(x_i'-x_i''),x_{i+1}',\dots,x_\nu')(x_i'-x_i'')h_i+\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=i+1}^{\nu}U''_{x_ix_j}(x_1''',\dots,x_{i-1}''',x_i'''+$$

$$+\tilde{t}(x_i''-x_i'''),x_{i+1}'',\dots,x_{j-1}'',x_j''+\bar{t}(x_j'-x_j''),x_{j+1}',\dots,x_\nu')(x_j'-x_j'')h_i]d\tilde{t}d\bar{t}=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \{\sum_{i=1}^{\nu}\tilde{t}[m(m-1)G_i^{m-2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}U(y_i)+2mtG_i^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}U(y_i)+$$

$$+t^2G_i^m\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}U(y_i)](x_i'-x_i'')h_i+\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=i+1}^{\nu}[m(m-1)G_{ij}^{m-2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}U(y_{ij})+$$

$$+2mtG_{ij}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}U(y_{ij})+t^2G_{ij}^m\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}U(y_{ij})](x_j'-x_j'')h_i\}(1-t)^{m-1}dtd\bar{t}d\tilde{t}, \tag{17}$$

где

$$G_i=\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1'''-x_1^*)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}(x_{i-1}'''-x_{i-1}^*)+\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i'''-x_i^*+\tilde{t}(x_i''-x_i''')+$$

$$+\bar{t}\tilde{t}(x_i'-x_i''))+\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}(x_{i+1}'-x_{i+1}^*)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_\nu}(x_\nu'-x_\nu^*);$$

$$G_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1'''-x_1^*)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}(x_{i-1}'''-x_{i-1}^*)+\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i'''-x_i^*+\tilde{t}(x_i''-x_i'''))+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}(x_{i+1}''-x_{i+1}^*)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_{j-1}}(x_{j-1}''-x_{j-1}^*)+\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j''-x_j^*+\bar{t}(x_j'-x_j''))+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_{j+1}}(x_{j+1}'-x_{j+1}^*)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_\nu}(x_\nu'-x_\nu^*);$$

$$y_i=(x_1^*+t(x_1'''-x_1^*),\ldots,x_{i-1}^*+t(x_{i-1}'''-x_{i-1}^*),x_i^*+t(x_i'''-x_i^*)+t\tilde{t}(x_i''-x_i''')+$$

$$+t\tilde{t}\bar{t}(x_i'-x_i''),x_{i+1}^*+t(x_{i+1}'-x_{i+1}^*),\ldots,x_\nu^*+t(x_\nu'-x_\nu^*));$$

$$y_{ij}=(x_1^*+t(x_1'''-x_1^*),\ldots,x_{i-1}^*+t(x_{i-1}'''-x_{i-1}^*),x_i^*+t(x_i'''-x_i^*)+$$

$$+t\tilde{t}(x_i''-x_i'''),x_{i+1}^*+t(x_{i+1}''-x_{i+1}^*),\ldots,x_{j-1}^*+t(x_{j-1}''-x_{j-1}^*),x_j^*+$$

$$+t(x_j''-x_j^*)+t\bar{t}(x_j'-x_j''),x_{j+1}^*+t(x_{j+1}'-x_{j+1}^*),\ldots,x_\nu^*+t(x_\nu'-x_\nu^*)).$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть даны итерации, удовлетворяющие условиям (9) и (10). Пусть, кроме того,

1° уравнение (4) имеет решение в сфере

$$\|x-x_0\|\le\rho; \tag{18}$$

2° для каждого $x', x'', x$ из сферы

$$\|x-x_0\|\le(1+\beta)\rho \tag{19}$$

справедливы оценки

а) $\|[E-U(x';x'')]^{-1}\|\le B$;

б) $\|\frac{1}{k!}U^{(k)}_{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_\nu^{\alpha_\nu}}(x)\|\le A_k$ для $k=m;m+1;m+2$ и всех $\alpha_i\ge0$, где $\sum\limits_{i=1}^{\nu}\alpha_i=k$;

в) $\|\frac{1}{r!}V^{(r)}_{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_\nu^{\alpha_\nu}}(x)\|\le B_r$ для всех $\alpha_i\ge0$, где $\sum\limits_{i=1}^{\nu}\alpha_i=r$;

причём

$$\beta=1+2\nu^rB_r\rho^{r-1};$$

3°

а) $\ell\rho<1$, где $\ell=\{\nu^rBB_r[\sum\limits_{i=1}^{\nu}(\frac{1}{2}m(m-1)A_mb_i^{m-2}+mA_{m+1}b_i^{m-1}\rho+$

$$+A_{m+2}b_i^m\rho^2)+\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=i+1}^{\nu}(m(m-1)A_mb_{ij}^{m-2}+2mA_{m+1}b_{ij}^{m-1}\rho+$$

$$+2A_{m+2}b_{ij}^{m}\wp^{2})]\}^{\frac{1}{m+r-2}}\ (b_i=i+1+\nu^r B_r\wp^{r-1}$$

$$\text{и}\ \ b_{ij}=i+1(j+1-i)\nu^r B_r\wp^{r-1})$$

при $m\geq 2$, $r\geq 1$;

б) $\ell'\wp<1$, где $\ell'=\{\nu^r B_r B[\nu^2 A_2+A_3\wp(\sum_{i=1}^{\nu} b_i+2\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=i+1}^{\nu} b_{ij})]\}^{\frac{1}{r}}$

при $m=1$ и $r\geq 1$.

Тогда решение $x^*$ уравнения (4) в сфере (I8) единственно и последовательность (7) сходится к $x^*$ со скоростью

$$\|x^*-x_n\|\leq\frac{1}{\ell}(\ell\wp)^{(m+r-1)^n}\qquad \text{при}\ \ m\geq 2,\ r\geq 1, \tag{20}$$

$$\|x^*-x_n\|\leq\frac{1}{\ell'}(\ell'\wp)^{(r+1)^n}\qquad \text{при}\ \ m=1,\ r\geq 1\ (n=0,1,\ldots). \tag{21}$$

Доказательство. По формуле (7) найдем (ср. [6])

$$x^*-x_{n+1}=[E-U(V(x_n);x_n)]^{-1}[U(x^*;x_n)-U(V(x_n);x_n)](x^*-x_n).$$

Используя формулу (I7), получим

$$[U(x^*;x_n)-U(V(x_n);x_n)](x^*-x_n)=U(x^*;V(x_n);x_n)(x^*-V(x_n))(x^*-x_n)=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\{\sum_{i=1}^{\nu}\tilde{t}[m(m-1)G_{in}^{m-2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}U(y_{in})+2mtG_{in}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}U(y_{in})+$$

$$+t^2G_{in}^m\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}U(y_{in})](x_i^*-V_i(x_n))(x_i^*-x_i^{(n)})+\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=i+1}^{\nu}[m(m-1)G_{ijn}^{m-2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}U(y_{ijn})+2mtG_{ijn}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}U(y_{ijn})+t^2G_{ijn}^m\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}U(y_{ijn})](x_j^*-$$

$$-V_j(x_n))(x_i^*-x_i^{(n)})\}(1-t)^{m-1}dtd\bar{t}d\tilde{t},$$

где

$$G_{in}=\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^{(n)}-x_1^*)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}(x_{i-1}^{(n)}-x_{i-1}^*)+\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i^{(n)}-x_i^*+\tilde{t}(V_i(x_n)-$$

$$-x_i^{(n)})+\tilde{t}\bar{t}(x_i^*-V_i(x_n));$$

$$G_{ijn}=\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^{(n)}-x_1^*)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}(x_{i-1}^{(n)}-x_{i-1}^*)+\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i^{(n)}-x_i^*+\tilde{t}(V_i(x_n)-$$

$$-x_i^{(n)}))+\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}(V_{i+1}(x_n)-x_{i+1}^*)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_{j-1}}(V_{j-1}(x_n)-x_{j-1}^*)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}(V_j(x_n)-x_j^*+\bar{t}(x_j^*-V_j(x_n));\quad y_{in}=(x_1^*+t(x_1^{(n)}-x_1^*),\ldots,x_{i-1}^*+$$

$$+t(x_{i-1}^{(n)}-x_{i-1}^*),x_i^*+t(x_i^{(n)}-x_i^*)+t\tilde{t}(V_i(x_n)-x_i^{(n)})+t\tilde{t}\bar{t}(x_i^*-V_i(x_n)),$$

$$x_{i+1}^*,\ldots,x_\nu^*);$$

$$y_{ijn}=(x_1^*+t(x_1^{(n)}-x_1^*),\ldots,x_{i-1}^*+t(x_{i-1}^{(n)}-x_{i-1}^*),x_i^*+t(x_i^{(n)}-x_i^*)+$$

$$+t\tilde{t}(V_i(x_n)-x_i^{(n)},x_{i+1}^*+t(V_{i+1}(x_n)-x_{i+1}^*),\ldots,x_{j-1}^*+$$

$$+t(V_{j-1}(x_n)-x_{j-1}^*),x_j^*+t(V_j(x_n)-x_j^*)+t\bar{t}(x_j^*-V_j(x_n)),x_{j+1}^*,\ldots,x_\nu^*).$$

Теперь можем оценить

$$||x^*-x_{n+1}||\le\nu^rBB_r\{\sum_{i=1}^{\nu}[\tfrac{1}{2}m(m-1)A_mb_{in}^{m-2}+mA_{m+1}b_{in}^{m-1}||x^*-$$

$$-x_n||+A_{m+2}b_{in}^m||x^*-x_n||^2]+\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=i+1}^{\nu}[m(m-1)A_mb_{ijn}^{m-2}+2mA_{m+1}b_{ijn}^{m-1}||x^*-$$

$$-x_n||+2A_{m+2}b_{ijn}^m||x^*-x_n||^2]\}||x^*-x_n||^{m+r-1}\quad(n=0,1\ldots),\tag{22}$$

где

$$b_{in}=i+1+\nu^rB_r||x^*-x_n||^{r-1}\quad\text{и}\quad b_{ijn}=i+1+(j+1-i)\nu^rB_r||x^*-x_n||^{r-1}.$$

По индукции из оценок (22) вытекают оценки (20)($m\ge2$, $r\ge1$) и оценки (21) ($m=1$, $r\ge1$). Принадлежность элементов

$$x_n,V(x_n),x^*+t(x_n-x^*),x^*+t(V(x_n)-x^*),x^*+t(x_n-x^*)+t\tilde{t}(V(x_n)-$$

$$-x_n),x^*+t(V(x_n)-x^*)+t\bar{t}(x^*-V(x_n))\text{ и }x^*+t(x_n-x^*)+t\tilde{t}(V(x_n)-x_n)+$$

$$+t\tilde{t}\bar{t}(x^*-V(x_n))$$

к сфере (19) доказывается, как и в теореме 1. Причем концовки доказательств совпадают.

Замечание I. Пусть итерация $V$ имеет вид

$$x_{n+1}=V(x_n,x_{n-1},\ldots,x_{n-\ell+1}),\tag{23}$$

причем известна оценка

$$\|V(x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\ell+1})-x^*\|\le M\|x_n-x^*\|^{r_0}\|x_{n-1}-x^*\|^{r_1}\dots$$

$$\dots\|x_{n-\ell+1}-x^*\|^{r_{\ell-1}}.$$

Можно показать, что порядок итерации (23) определяет положительный корень уравнения

$$\gamma^{\ell}-r_0\gamma^{\ell-1}-r_1\gamma^{\ell-2}-\dots-r_{\ell-1}=0 \text{ (ср. [2]).}$$

Из оценки (16) или (22) при $m\ge 2$, $r\ge 1$ следует, что в этом случае

$$\|x^*-x_{n+1}\|\le M'\|x_n-x^*\|^{m+r_0-1}\|x_{n-1}-x^*\|^{r_1}\dots\|x_{n-\ell+1}-x^*\|^{r_{\ell-1}}$$

и порядок итерации (7) определяет положительный корень уравнения

$$\gamma^{\ell}-(m+r_0-1)\gamma^{\ell-1}-r_1\gamma^{\ell-2}-\dots-r_{\ell-1}=0.$$

Аналогично при $m=1$, $r\ge 1$ из (22) найдем

$$\|x^*-x_{n+1}\|\le M''\|x_n-x^*\|^{r_0+1}\|x_{n-1}-x^*\|^{r_1}\dots\|x_{n-\ell+1}-x^*\|^{r_{\ell-1}}$$

и порядок итерации (7) получаем из уравнения

$$\gamma^{\ell}-(r_0+1)\gamma^{\ell-1}-r_1\gamma^{\ell-2}-\dots-r_{\ell-1}=0.$$

Замечание 2. При практическом применении метода (7) полезно обратить внимание на частные случаи, когда $U(x)=\Phi(x)$, а $V(x)$ определяет итерацию r-ого порядка. В этом случае можем (7) представить в виде

$$x_{n+1}=x_n-[E-\Phi(V(x_n);x_n)]^{-1}(x_n-\Phi(x_n)) \qquad (24)$$

или

$$x_{n+1}=x_n-[P(V(x_n);x_n)]^{-1} P(x_n) \quad (n=0,1,\ldots).$$

Легко показать (аналогично доказательству сходимости метода Стеффенсена (ср. [6]), что итерация (24) имеет порядок $r+1$.

Отметим, наконец, что все алгорифмы обобщенного метода Стеффенсена, которые были построены в статье [8] для решения конкретных типов операторных уравнений, пригодны и для метода (24), если в разделенной разности $\Phi(\Phi(x_n);x_n)$ заменить $\Phi(x_n)$ на $V(x_n)$.

Литература


1. А.С. Хаусхолдер. Основы численного анализа, 1956.

2. А.М. Островский. Решение уравнений и систем уравнений, 1963.

3. Л.В. Канторович и Г.П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, 1959.

4. Л.А. Люстерник и В.И. Соболев. Элементы функционального анализа, 1965.

5. Chen Kuo-Wang. Comment. math. Univ. Carolinae, 5, Nr. 2, 47-77 (1964).

6. С.Ю.Ульм. Ж. вычисл. мат. и мат. физики, 4, № 6, 1093-1097 (1964).

7. Б.А. Бельтюков. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 5, № 5, 927-931 (1965).

8. С.Ю. Ульм. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 14, № 3, 435-443 (1965).

9. С.Ю. Ульм. Изв. АН ЭССР. Физика. Математика, № 2, (1967).

10. Х.К. Коппель. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 15, № 4, 531-539 (1966).

11. Х.К. Коппель. Труды Таллинского политехнического института, сер. А, № 251 (1967).

## The Generalization of Aitken's Method for the Solution of Non-linear Operator Equations

H. Koppel

Summary

In this paper Aitken's method (3) is generalized for the solution of non-linear operator equations in Banach space. Two theorems on the convergence of the method (7) are proved. From the practical viewpoint the most favourable special class of methods is (24). The generalized Steffensen's methoi belongs also to this class.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 261 1968

УДК 518:517.392

М. Левин

# ЗАМЕЧАНИЕ О КОЭФФИЦИЕНТАХ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} [A_k f^{(k)}(-1)+B_k f^{(k)}(0)+C_k f^{(k)}(1)], \quad (1)$$

где $p(x)$ есть четная, знакопостоянная, не эквивалентная нулю и интегрируемая на отрезке $[-1;1]$ функция.

Обозначим $m=2\cdot[0,5(3n+1)]$, $p=2\cdot[0,5(n+1)]$, где $[x]$ – целая часть числа x. Рассмотрение функций $x^p(1-x^2)^n$ показывает, что формула (1) не может быть точной для произвольного многочлена степени $m$.

Формулу (1) наивысшей алгебраической степени точности, т.е. точную для произвольного многочлена степени $m-1$, можно получить, исходя из интерполяционной формулы Эрмита. Однако при этом вычисление коэффициентов становится громоздким.

Приведем сравнительно простую схему для вычисления коэффициентов формулы (1) с алгебраической степенью точности $m-1$.

Введем обозначения моментов

$$\mu_i = \int_{-1}^{1} p(x)x^i dx \quad (i=0,1,\ldots),$$

определителей

$$\Delta_k = \left| u_{ij}^{(k)} \right|_{i,j=0}^{n-1} \quad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

где

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{(p+2i)!}{(p+2i-j)!} \quad (i=0,1,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1),$$

$$u_{ik}^{(k)} = \frac{1}{2}\mu_{p+2i}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Коэффициенты формулы (1), точной для любого многочлена степени $m-1$, можно вычислять следующим образом:

$$C_k = \frac{\Delta_k}{1!2!\ldots(n-1)!2^{\frac{1}{2}n(n-1)}}, \tag{2}$$

$$A_k = (-1)^k C_k, \tag{3}$$

$$B_k = \begin{cases} 0 & , k \text{ - четное;} \\ \frac{1}{k!}\left[\mu_k - 2\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!}C_i\right], & k \text{ - нечетное,} \end{cases} \tag{4}$$

$$(k = 0,1,\ldots,n-1).$$

Доказывается это утверждение так. Подставим в (1) значения $A_k=(-1)^k C_k$ и потребуем, чтобы формула (1) была точна для функций $x^p, x^{p+2}, x^{p+4}, \ldots, x^{m-2}$. Решая полученную систему методом Крамера, получим значения (2). Учитывая это, взяв коэффициентами формулы (1) числа (2), (3), (4), непосредственной подстановкой убеждаемся, что она точна и для функций $1, x, x^2, \ldots, x^{p-1}, x^{p+1}, x^{p+3}, x^{p+5}, \ldots, x^{m-1}$. Этим утверждение доказано.

Приведем примеры конкретных формул.

Взяв в (1) $p(x)\equiv 1$ и $n=3$ и учитывая (2), (3), (4), получим

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{105}[41f(-1)+128f(0)+41f(1)]+\frac{2}{35}[f'(-1)-f'(1)]+$$

$$+\frac{1}{315}[f''(-1)+16f''(0)+f''(1)].$$

Эта формула точна для произвольного многочлена 9-ой степени.

Если в (1) взять $p(x)\equiv 1$, $n=4$, то получим точную для произвольного многочлена степени 11 формулу

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{231}[103f(-1)+256f(0)+103f(1)]+\frac{19}{231}[f'(-1)-f'(1)]+$$

$$+\frac{2}{3465}[13f''(-1)+64f''(0)+13f''(1)]+\frac{1}{3465}[f'''(-1)-f'''(1)].$$

Литература

1. N. Obreschkoff. Neue Quadraturformeln. Abhandlungen der Preussischer Acad. der Wissenschaften, 1940, Nr. 4, 2-20.

M. Levin

## Remarks on the Coefficients of a Quadrature Formula


### Summary

For the formula (1) coefficients are found in explicit form so that the formula is exact for the polynomials of the order 2[0,5(3n+1)]-1. The coefficients are given by (2),(3),(4). Some special cases of the formula are considered.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 261 1968

УДК 518:517.944/947

Ю. Ярцев

# О СХОДИМОСТИ ОДНОГО МЕТОДА КОЛЛОКАЦИОННОГО ТИПА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В замечании 3 статьи [I] имеется указание на равномерную сходимость одного метода коллокационного типа применительно к интегральному уравнению с непрерывным ядром и таким же свободным членом. Однако оценка сходимости этого метода не дана. Позже аналогичный метод под названием метода С рассматривался в работе [2], где была доказана его равномерная сходимость и приведена оценка быстроты последней для случая дифференциальных уравнений с коэффициентами и правой частью из класса Липшица с положительным показателем. В предлагаемой заметке изучается сходимость метода С для интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$L(x)\equiv x^{(m)}(t)-\lambda\Big[\sum_{k=0}^{m-2} p_k(t)x^{(k)}(t)+ \int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{m} q(t,s)x^{(k)}(s)ds\Big]=y(t) \qquad (1)$$

с граничными условиями вида

$$L_j(x)\equiv\sum_{k=1}^{m}\Big[\alpha_{jk}x^{(k-1)}(-1)+\beta_{jk}x^{(k-1)}(1)+$$

$$+\int_{-1}^{1}\gamma_{jk}(s)x^{(k-1)}(s)ds\Big]=0, \tag{2}$$

$$j=1,2,\ldots,m.$$

Относительно уравнения (1) и граничных условий(2) сделаем такие предположения:

I. $\lambda$ не является собственным значением задачи(1,2);

2. коэффициенты $\alpha_{jk}$, $\beta_{jk}$ и суммируемые функции $\gamma_{jk}(s)$ таковы, что

$$\left|L_j(t^{k-1})\right|_{j,k=1}^{m}\neq 0,$$

3. функции $y(t)$,$p_k(t)$ и $q_k(t,s)$ непрерывны при $t,s\in[-1;1]$.

Легко усмотреть, что предположение 2. позволяет построить последовательность полиномов степени $m+k(k=0,1,\ldots)$, удовлетворяющих условиям (2). Обозначив эту последовательность через $\{p_{m+k}^{(t)}\}$, будем разыскивать приближенное решение задачи (1,2) в виде полинома

$$x_n(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}a_k^{(n)}p_{m+k}^{(t)}, \tag{3}$$

коэффициенты которого, согласно методу С, определим из условий

$$[L(x_n)-y(t)]_{t=t_j}=0,\quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$\left[\frac{d^{m+1}x_n(t)}{dt^{m+1}}\right]_{t=t_j}=0, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{4}$$

где $t_j \in [-1;1]$.

Пусть $H^o_{2n-1}$ есть класс алгебраических полиномов степени не выше $2n-1$, для которых первая производная в узлах Чебышева равна нулю. И пусть $E^o_{2n-1}[f]$ – наилучшее приближение функции $f(t) \in C[-1;1]$ полиномами из класса $H^o_{2n-1}$. Тогда справедлива следующая <u>теорема.</u>

Если выполнены условия предположений I., 2. и 3. и в качестве узлов коллокации выбраны узлы Чебышева, то: а) для всех достаточно больших $n$ система алгебраических уравнений (4) однозначно разрешима, б) приближенные решения (3,4) вместе со своими производными до $m$-го порядка включительно равномерно сходятся к точному решению задачи (1,2) и его соответствующим производным; в) быстрота сходимости характеризуется следующими неравенствами

$$\max_{t \in [-1;1]} \left|\frac{d^k}{dt^k}\left[x(t)-x_n(t)\right]\right| \le A_k E^o_{2n-1}\left[x^{(m)}\right] (n \ge n_o), \tag{5}$$

$$k=0,1,\ldots,m,$$

где $A_к$ некоторые постоянные, не зависящие от $n$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что предположение 2. есть необходимое и достаточное условие существования функции Грина $\Gamma(t,\tau)$ оператора $\frac{d^m}{dt^m}$ при граничных условиях (2), и, значит, если $x(t)$ есть решение задачи (1,2), то справедливо равенство

$$x(t)=\int_{-1}^{1}\Gamma(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где

$$\varphi(t)=\frac{d^m x(t)}{dt^m}. \tag{7}$$

Воспользовавшись (6) и (7), из уравнения (1) получим равносильное ему интегральное уравнение

$$\varphi(t)-\int_{-1}^{1}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=y(t), \tag{8}$$

где ядро

$$K(t,\tau)\equiv\sum_{k=0}^{m-2}p_k(t)\frac{\partial^k\Gamma(t,\tau)}{\partial t^k}+\sum_{k=0}^{m}\int_{-1}^{1}q_k(t,s)\frac{\partial^k\Gamma(s,\tau)}{\partial s^k}\,ds, \tag{9}$$

ввиду предположения 3. и непрерывности функций $\frac{\partial^k\Gamma(t,\tau)}{\partial t^k}$ $(k=0,1,\ldots,m-2)$ (см., например, [3]), есть непрерывная функция.

Поскольку полином (3,4) удовлетворяет граничным условиям, то его можно также представить в виде

$$x_n(t)=\int_{-1}^{1}\Gamma(t,\tau)\varphi_n(\tau)d\tau, \tag{10}$$

где

$$\varphi_n(t)=\frac{d^m x_n(t)}{dt^m}. \qquad (11)$$

И тогда условия (4) выразятся так:

$$\varphi_n(t_j)-\lambda\int_{-1}^{1} K(t_j,\tau)\varphi(\tau)d\tau=y(t_j),$$

$$\qquad (12)$$

$$\frac{d\varphi_n(t_j)}{dt}=0, \quad t_j\varepsilon[-1;1], \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Обозначим через $T$ линейный интегральный оператор из $C[-1;1]$ в $C[-1;1]$ с ядром (9) и через $\Phi_n$ – линейный проекционный оператор, ставящий в соответствие каждой функции из $C[-1;1]$ ее интерполяционный полином Фейера степени не выше $2n-1$ по узлам $t_j\varepsilon[-1;1]$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Тогда уравнение(8) и условия (12) примут вид

$$(E-\lambda T)\varphi=y \qquad (13)$$

и

$$(E-\lambda\Phi_n T)\varphi=\Phi_n y \qquad (14)$$

соответственно ($E$ – единичный оператор).

Из равномерной сходимости интерполяционного процесса Фейера по узлам Чебышева для любой непрерывной функции следует, что если в качестве точек коллокации в (4) взять $t_j = \cos\frac{2j-1}{2n}\Pi$, $j=1,2,\ldots,n$, то

$$\|T-\Phi_n T\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad (15)$$

(здесь и в дальнейшем имеется в виду норма оператора в пространстве $[C[-1;1] \longrightarrow C[-1;1]]$).

Поскольку предположение I. влечет за собой существование линейной обратной операции $(E-\lambda T)^{-1}$, то, принимая во внимание (15), заключаем, что для всех достаточно больших $n$ операторы $E-\lambda\Phi_n T$ тоже обратимы, и имеет место неравенство

$$\|(E-\lambda\Phi_n T)^{-1}\| \le A < +\infty, \quad n \ge n_o. \tag{16}$$

Действительно, из (15) следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $n_o(\varepsilon)$, что для $n \ge n_o(\varepsilon)$

$$\|T-\Phi_n T\| < \varepsilon. \tag{17}$$

Далее имеем

$$\|(E-\lambda\Phi_n T)x\| \ge \|(E-\lambda T)x\| - |\lambda| \|(T-\Phi_n T)x\| \tag{18}$$

(имеется в виду норма в пространстве $C[-1;1]$).

Но из существования обратной операции для оператора $E-\lambda T$ вытекает существование такого числа $m_o>0$, что

$$\|(E-\lambda T)x\| \ge m_o \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in C[-1;1].$$

Отсюда, из (17) и (18) следует

$$\|(E-\lambda\Phi_n T)x\| \ge (m_o-\lambda\varepsilon)\|x\|.$$

Выбрав теперь $\varepsilon>0$ таким, чтобы $M=m_o-\lambda\varepsilon>0$, и отыскав соответствующее $n_o(\varepsilon)$, имеем:

$$\|(E-\lambda\Phi_n T)x\| \ge M\|x\|, \quad M>0$$

для всех $x \in C[-1;1]$ и всех $n \geq n_o(\varepsilon)$. Отсюда и следует наше утверждение, причем $A=M^{-1}$.

Итак, для $n \geq n_o$ операторы $E-\lambda\Phi_n T$ обратимы. Но это равносильно утверждению а) доказываемой теоремы.

Теперь заметим, что равенство

$$\Phi_n(E-\lambda T)\varphi=\Phi_n y,$$

которое очевидным образом следует из (13), совместно с (14) дает

$$\Phi_n(E-\lambda T)\varphi=(E-\lambda\Phi_n T)\varphi_n,$$

откуда

$$(E-\lambda\Phi_n T)(\varphi-\varphi_n)=\varphi-\Phi_n\varphi.$$

Отсюда, воспользовавшись (16), находим:

$$\|\varphi-\varphi_n\| \leq A\|\varphi-\Phi_n\varphi\|, \quad n \geq n_o. \tag{19}$$

Пусть $p$ – элемент класса $\overset{o}{H}_{2n-1}$, осуществляющий наилучшее приближение $\varphi$. Тогда, имея в виду (19), получим

$$\|\varphi-\varphi_n\| \leq A(\|\varphi-p\|+\|\Phi_n\|\|p-\varphi\|) \leq 2A\overset{o}{E}_{2n-1}[\varphi].$$

Из этого неравенства, а также из (6), (7), (10) и (11) становятся очевидными утверждения б) и в). Теорема доказана.

Следствие.

Пусть выполнены все условия предпосылок теоремы и, кроме того, коэффициенты уравнения (1) и его правая часть принадлежат классу Липшица с положительным показателем $\alpha$. Тогда при прочих утверждениях теоремы имеют место соотношения

$$\max_t \left|\frac{d^k}{dt^k}[x(t)-x_n(t)]\right| = 0[n^{-\frac{\alpha}{2}}], \quad k=0,1,\dots,m; \quad n\geq n_0. \quad (20)$$

Доказательство непосредственно вытекает из неравенств (5). Действительно, если коэффициенты и правая часть уравнения (1) принадлежат классу Липшица с показателем $\alpha>0$, то и $x^{(m)}(t)$ принадлежит этому классу. С другой стороны, если $x^{(m)}(t)\in \in \mathrm{lip}\alpha$, то интерполяционный полином Фейера по узлам Чебышева $F_{2n-1}[x^{(m)};t]$ удовлетворяет соотношению

$$\max_t |x^{(m)}(t)-F_{2n-1}[x^{(m)};t]| = 0[n^{-\frac{\alpha}{2}}]$$

(см., например, [2], стр. II).
Но тогда подавно

$$E^o_{2n-1}[x^{(m)}] = 0[n^{-\frac{\alpha}{2}}]$$

и, значит, справедливо (20).

## Литература


I. О. Киш. О сходимости интерполяционного метода для дифференциальных и интегральных уравнений. Magyar tud. acad. Mat. kutato int. közl., 3, N 1-2, 1958, 25-41.

2. И. Петерсен. О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн.наук, I, 1961, 3-I2.

3. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Гос. изд. физ.-мат. литературы, М., 1961, 195-197.


## Über die Konvergenz einer Kollokationstypus-Methode für gewöhnliche Integro-Differentialgleichungen


J. Jarzev


### Zusammenfassung


Im vorliegenden Aufsatz werden einige angenährte Lösungsmethoden der Grenzwertaufgabe (1-2) betrachtet, die die Lösung in Form eines Polynoms (3) suchen, wobei die Koeffizienten $a_k^{(n)}$ durch die Bedingungen (4) festgesetzt worden sind. Dabei wird die Konvergenz dieser Methode festgestellt und die Abschätzung ihrer Konvergenzgeschwindigkeit im Falle Tschebyschevscher Knotenpunkte durchgeführt.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 261 1968

УДК 518:517.944/947

Ю. Ярцев

# О СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ

Исследованию сходимости метода коллокации в случае обыкновенных дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений посвящен ряд статей различных авторов (см., например, [I-6]). Значительно меньше внимания до последнего времени было уделено аналогичному вопросу в случае дифференциальных уравнений с частными производными. По-видимому, [7] является пока единственной работой, рассматривающей сходимость метода коллокации в случае задач математической физики. Одной из таких задач посвящена и настоящая заметка.

I. Рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 u - \lambda u = v(x,y), \tag{1}$$

где $\Delta$ - оператор Лапласа с граничными условиями вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = 0, \Pi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \quad \text{при } y = 0, \Pi. \tag{2}$$

Предполагаем, что

1. $\lambda$ не является собственным значением задачи (1,2).

2. $v(x,y)$ непрерывна в квадрате $r[0\le x,\ y\le \Pi]$.

Эту задачу будем решать методом коллокации, для чего приближенное решение выберем в форме тригонометрического полинома

$$u_{mn}(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}\cos(k-1)x\cos(\ell-1)y, \tag{3}$$

коэффициенты которого определим из условий

$$\Delta^2 u(x,y)\Big|_{\substack{x=x_i^{(m)}\\ y=y_j^{(n)}}} -\lambda u(x,y)\Big|_{\substack{x=x_i^{(m)}\\ y=y_j^{(n)}}} =v(x,y)\Big|_{\substack{x=x_i^{(m)}\\ y=y_j^{(n)}}}$$

$$(x_i^{(m)};\ y_j^{(n)})\varepsilon r;\quad i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,n,$$

т.е. из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}\{[(k-1)^2+(\ell-1)^2]^2-\lambda\}\cos(k-1)x_i^{(m)}\cdot \tag{5}$$

$$\cdot\cos(\ell-1)y_j^{(n)}=v(x_i^{(m)};y_j^{(n)});$$

$$x_i^{(m)}\varepsilon[0;\Pi],\quad i=1,2,\ldots,m;\quad y_j^{(n)}\varepsilon[0;\Pi],\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Поскольку полином (3) при любых $a_{kl}$ удовлетворяет краевым условиям (2), то легко обнаружить, что нахождение полинома (3), удовлетворяющего условиям (4), равносильно решению уравнения

$$\Delta^2 u_{mn} - \lambda u_{mn} = C_{mn}[v;x,y] \tag{6}$$

с условиями (2). Здесь

$$C_{mn}[v;x,y] = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} v(x_k^{(m)}, y_\ell^{(n)}) C_{k\ell}^{(mn)}(x,y), \tag{7}$$

где

$$C_{k\ell}^{(mn)}(x,y) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \frac{\cos x - \cos x_i^{(m)}}{\cos x_k^{(m)} - \cos x_i^{(m)}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq \ell}}^{n} \frac{\cos y - \cos y_j^{(n)}}{\cos y_\ell^{(n)} - \cos y_j^{(n)}}.$$

Выберем узлы коллокации $(x_i^{(m)};\ y_j^{(n)})$ так, чтобы $\cos x_i^{(m)}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ и $\cos y_j^{(n)}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ были корнями ортогональных на $[-1;1]$ алгебраических полиномов $p_m(z_1)$ и $p_n(z_2)$ с весами $\dfrac{s_1(z_1)}{(1-z_1^2)^{1/2}}$, $\quad s_1(z_1) \geq s_1 > 0,$

и $\dfrac{s_2(z_2)}{(1-z_2^2)^{1/2}}$, $\quad s_2(z_2) \geq s_2 > 0,$

соответственно ($p_m(z_1)$ полином $m$-ой степени, $p_n(z_2)$ – полином $n$-ой степени). И пусть $E_{mn}[v;r]$ – наилучшее приближение функции $v(x,y)$ полиномами вида

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell} \cos(k-1)x \cos(\ell-1)y$$

в квадрате r. Тогда можно доказать, что полином (7) сходится в среднем с весом $s(x,y)=s_1(\cos x)\ s_2(\cos y)$ в квадрате r к аппроксимируемой функции, причем имеет место неравенство

$$\varepsilon_{mn}\equiv\iint_r s(x,y)\{v(x,y)-C_{mn}[v;x,y]\}^2dxdy\leq$$

$$\leq 4E^2_{mn}[v;r]\iint_r s(x,y)dxdy\ . \qquad (8)$$

Действительно, пусть $|k-p|+|\ell-q|\neq 0$. Тогда, положив для конкретности $k\neq p$, имеем

$$J_{kp\ell q}\equiv\iint_r s(x,y)C^{(mn)}_{k\ell}(x,y)C^{(mn)}_{pq}(x,y)dxdy=$$

$$=\int_0^\pi s_2(\cos y)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{n}\frac{\cos y-\cos y_j^{(n)}}{\cos_\ell^{(n)}-\cos y_j^{(n)}}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{n}\frac{\cos y-\cos y_j^{(n)}}{\cos y_q^{(n)}-\cos y_j^{(n)}}dy\ \cdot$$

$$\cdot\int_0^\pi s_1(\cos x)\cdot\frac{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k,\ i\neq p}}^{m}(\cos x-\cos x_i^{(m)})\prod\limits_{i=1}^{m}(\cos x-\cos x_i^{(m)})}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m}(\cos x_k^{(m)}-\cos x_i^{(m)})\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{m}(\cos x_p^{(m)}-\cos x_i^{(m)})}dx\ .$$

Вынеся во втором множителе постоянные за знак интеграла и сделав в последнем подстановку $\cos x=z_1$, имеем

$$J_{pk}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{s_1(z_1)\,g_{m-2}(z_1)}{(1-z_1^2)^{1/2}}\,p_m(z_1)\,dz_1=0,$$

ибо

$$g_{m-2}(z_1)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k,\ i\neq p}}^{m}(z_1-\cos x_i^{(m)})$$

является полиномом степени $m-2$, а

$$p_m(z_1)=\prod_{i=1}^{m}(z_1-\cos x_i^{(m)}),$$

ввиду предположения, сделанного относительно узлов коллокации, есть полином степени $m$, ортогональный на $[-1;1]$ с весом

$$\frac{s_1(z_1)}{(1-z_1^2)^{1/2}}.$$

Итак,

$$J_{kp\ell q}=0 \text{ при } |k-p|+|l-q|\neq 0. \qquad (*)$$

Отсюда и из очевидного равенства

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}C_{k\ell}^{(mn)}(x,y)=1$$

следует

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}\iint\limits_{r}s(x,y)\,[C_{k\ell}^{(mn)}(x,y)]^2dxdy=\iint\limits_{r}s(s,y)dxdy. \qquad (**)$$

Пусть теперь $p_{mn}(x,y)$ является полиномом, осуществляющим указанное выше наилучшее приближение функции $v(x,y)$. Тогда

$$\varepsilon_{mn}=\int_r\int s(x,y)\{v(x,y)-p_{mn}(x,y)+C_{mn}[p_{mn}-v;x,y]\}^2dxdy.$$

Применив теперь неравенство Коши и воспользовавшись (*) и (**), получим (8), откуда ввиду $E_{mn}[v;r]\xrightarrow[m,n\to\infty]{}0$ и вытекает сходимость полиномов (7) к аппроксимируемой функции в среднем с весом $s(x,y)$.

Покажем теперь, что если $u(x,y)$ есть решение уравнения (1) при условиях (2), то имеет место равенство

$$u(x,y)=\int_r\int q(x,y;\xi,\eta)[\lambda u(\xi,\eta+v(\xi,\eta)]d\xi d\eta-$$
$$-\frac{4}{\pi^2\lambda}\int_r\int v(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{9}$$

где $g(x,y;\xi,\eta)$ есть функция Грина оператора $\Delta^2$ при условиях (2). С этой целью представим решение (I) при условиях (2) в виде

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha_{k\ell}\cos kx\cos \ell y. \tag{10}$$

Если подставить (10) в (1), то получим

$$\alpha_{kl}=\frac{\beta_{k\ell}}{(k^2+\ell^2)^2-\lambda}\quad k,\ell=0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

где

$$\beta_{k\ell}=\frac{4}{\pi^2}\int_\Gamma\int v(\xi,\eta)\cos k\xi\cos l\eta\,d\xi d\eta. \qquad (12)$$

Предположим, что $u'(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 u = \varphi(x,y) \qquad (13)$$

с условиями (2).

Решение этой задачи запишем в виде

$$u'(x,y)=\alpha'_{00}+\sum_{\substack{k=0\\ |k|+|\ell|\neq 0}}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha'_{k\ell}\cos kx\cos \ell y. \qquad (14)$$

Если

$$\varphi(x,y)=\lambda u(x,y)+v(x,y),$$

то $u'(x,y)$ есть фактически решение задачи (1,2) и, следовательно,

$$\alpha'_{k\ell}=\alpha_{k\ell}.$$

В частности,

$$\alpha'_{00}=\alpha_{00}=-\frac{\beta_{00}}{\lambda}=-\frac{4}{\pi^2\lambda}\int_\Gamma\int v(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (15)$$

С другой стороны, подстановка (14) в (13) дает

$$\alpha'_{kl}=\frac{\gamma_{k\ell}}{(k^2+\ell^2)^2};\quad |k|+|\ell|\neq 0;\quad k,\ell=0,1,2,\ldots, \qquad (16)$$

где

$$\gamma_{kl} = \frac{4}{\pi^2} \int_\Gamma\int \varphi(\xi,\eta)\cos k\xi \cos l\eta \, d\xi d\eta .$$

И, наконец, (I4) совместно с (15) и (16) дает возможность утверждать, что

$$u(x,y) = \iint_\Gamma g(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta - \frac{4}{\pi^2\lambda}\int_\Gamma\int v(\xi,\eta)d\xi d\eta ,$$

где

$$g(x,y;\xi,\eta) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{\ell=0\\ |k|+|\ell|\neq 0}}^{\infty} \frac{\cos kx \cos \ell y \cos k\xi \cos \ell\eta}{(k^2+\ell^2)^2}$$

есть функция Грина оператора $\Delta^2$ при краевых условиях (2). Но это равносильно (9).

Воспользовавшись теперь равенством (9), можем представить решение задач (1, 2) и (6, 2) в виде

$$u(x,y) = \int_\Gamma\int g(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta - \frac{4}{\pi^2\lambda}\int_\Gamma\int v(\xi,\eta)d\xi d\eta , \tag{17}$$

$$u_{mn}(x,y) = \int_\Gamma\int g(x,y;\xi,\eta)\varphi_{mn}(\xi,\eta)d\xi d\eta - \frac{4}{\pi^2\lambda}\int_\Gamma\int C_{mn}[v;\xi,\eta]d\xi d\eta , \tag{18}$$

где

$$\varphi(x,y) = \Delta^2 u(x,y), \varphi_{mn}(x,y) = \Delta^2 u_{mn}(x,y). \tag{19}$$

Равенства (17) и (18) в свою очередь позволяют заменить краевые задачи (1, 2) и (6, 2) равносильными интегральными уравнениями

$$\varphi(x,y)-\lambda\int_\Gamma\int g(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta = \\ = v(x,y) - \frac{4}{\pi^2}\int_\Gamma\int v(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{20}$$

$$\varphi_{mn}(x,y) -\lambda\int_\Gamma\int g(x,y;\xi,\eta)\varphi_{mn}(\xi,\eta)d\xi d\eta = \\ = C_{mn}[v;x,y] - \frac{4}{\pi^2}\int_\Gamma\int C_{mn}[v;\xi,\eta]d\xi d\eta . \tag{21}$$

Здесь уместно будет отметить, что общее ядро уравнений (20) и (2I), являясь функцией Грина оператора $\Delta^2$, содержит в качестве слагаемого функцию $\gamma(x,y;\xi,\eta)=r^2\ln r(r=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2})$ и, следовательно, не определено при $x=\xi,y=\eta$. Однако ввиду того, что

$$\lim_{\substack{x\to\xi\pm0\\ y\to\eta\pm0}}\gamma(x,y;\xi,\eta) = 0,$$

можно положить $\gamma(x,y;x,y) = 0$ и функция Грина становится непрерывной. Кроме того, можно показать, что

$$\Gamma_{ij} = \max_\Gamma\int_\Gamma\int[\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}g(x,y;\xi,\eta)]^2 d\xi d\eta<+\infty \tag{22}$$

при $0\le i+j\le 2$.

Из (20) и (21) следует

$$\varphi(x,y)-\varphi_{mn}(x,y) = \lambda \iint_{\Gamma} R_{\lambda}(x,y;\xi,\eta)\omega(\xi,\eta)d\xi d\eta+\omega(x,y), \quad (23)$$

где $R_{\lambda}(x,y;\xi,\eta)$ – резольвента ядра $g(x,y;\xi,\eta)$ и для краткости обозначено

$$w(x,y) = v(x,y)-C_{mn}[v;x,y] - \frac{4}{\pi^2} \int_{\Gamma}\int [v(\xi,\eta) - C_{mn}[v;\xi,\eta]]d\xi d\eta. \quad (24)$$

Очевидно

$$\int_{\Gamma}\int R_{\lambda}^2(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta < +\infty .$$

С помощью неравенства Коши из (23) получаем

$$\|\varphi -\varphi_{mn}\|_{L^2_{s(xy)}} \le \{\iint_{\Gamma} s(x,y)\,[\int_{\Gamma}\int R_{\lambda}(x,y;\xi,\eta)\omega(\xi,\eta)d\xi d\eta]^2 dxdy\}^{1/2} + \{\int_{\Gamma}\int s(x,y)\omega^2(x,y)dxdy\}^{1/2} .$$

Отсюда, с помощью неравенства Буняковского и имея в виду, что $s(x,y)\ge s = s_1 \cdot s_2 > 0$, получаем

$$\|\varphi-\varphi_{mn}\|_{L^2_{s(x,y)}} \le M[\int_{\Gamma}\int s(x,y)\omega^2(x,y)dxdy]^{1/2}, \quad (25)$$

$$M = 1 + \frac{\lambda}{s^{1/2}} \{\int_{\Gamma}\int s(x,y)[\int_{\Gamma}\int R_{\lambda}^2(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta]dxdy\}^{1/2}. \quad (26)$$

Теперь, принимая во внимание (24) и (8), имеем

$$\|\varphi-\varphi_{mn}\|_{L^2_{s(x,y)}} \leq M(\varepsilon^{1/2}_{mn} +$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\left[\int_r\int s(x,y)\left\{\int_r\int[v(x,y)-C_{mn}[v;x,y]]dxdy\right\}^2dxdy\right]^{1/2}) \leq$$

$$\leq M(\varepsilon^{1/2}_{mn}+\frac{4}{\pi^2}\left[\int_r\int s(x,y)dxdy\right]^{1/2}\left[\frac{\pi^2}{s}\varepsilon_{mn}\right]^{1/2}) \leq$$

$$\leq 2M(1+\frac{4}{\pi s^{1/2}}\left[\int_r\int s(x,y)dxdy\right]^{1/2})\left[\int_r\int s(x,y)dxdy\right]^{1/2}E_{mn}[v;r].$$

Итак,

$$\|\varphi-\varphi_{mn}\|_{L^2_{s(x,y)}} \leq BE_{mn}[v;r], \tag{27}$$

где

$$B = 2M(1+\frac{4L}{\pi s^{1/2}})\cdot L, \tag{28}$$

$$L = \left[\int_r\int s(x,y)dxdy\right]^{1/2}. \tag{29}$$

Из (17) и (18), с помощью (27) и (8), имеем

$$|u-u_{mn}| \leq \left[\int_r\int g^2(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta\right]^{1/2}\frac{1}{s^{1/2}}\|\varphi-\varphi_{mn}\|_{L^2_{s(x,y)}} +$$

$$+\frac{4}{\pi^2\lambda s^{1/2}}\varepsilon^{1/2}_{mn} \leq \frac{E_{mn}[v;r]}{s^{1/2}}(B\Gamma^{1/2}_{oo}+\frac{8L}{\pi^2\lambda}). \tag{30}$$

Аналогичным образом из (17), (18) и (27) получим

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} [u-u_{mn}] \right| \le \frac{E_{mn}[v;r]}{s^{1/2}} B\Gamma_{ij}^{1/2} ,$$

$$1 \le i+j \le 2 \,.$$

Кроме того, непосредственно из (19) вытекает

$$\|\Delta^2 [u-u_{mn}]\|_{L^2_{s(x,y)}} \le BE_{mn}[v;r] \,.$$

Из всего сказанного выше следует

Теорема I.

Пусть имеют место предположения I и 2. Тогда, если узлы коллокации $(x_i^{(m)}; y_j^{(n)})$ таковы, что $\cos x_i^{(m)} (i=1,2,\ldots,m)$ и $\cos y_j^{(n)} (j=1,2,\ldots,n)$, суть корни ортогональных на $[-1;1]$ полиномов с весами

$$\frac{s_1(z_1)}{(1-z_1^2)^{1/2}} \; (s_1(z_1) \ge s_1 > 0), \qquad \frac{s_2(z_2)}{(1-z_2^2)^{1/2}} \; (s_2(z_2) \ge s_2 > 0)$$

соответственно, то приближенные решения (3, 5) сходятся к точному решению задачи (1, 2) с быстротой, характеризуемой соотношениями

$$\left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} [u(x,y)-u_{mn}(x,y)] \right\|_C \le A_{ij} E_{mn}[v;r], \tag{31}$$

$$0 \le i+j \le 2,$$

$$\|\Delta^2[u(x,y)-u_{mn}(x,y)]\|_{L^2_{s(x,y)}} \le BE_{mn}[v;r] ,$$

г д е

$$s(x,y) = s_1(\cos x)\, s_2(\cos y) ,$$

$$A_{00} = \frac{1}{s^{1/2}}\left(B\Gamma_{00}^{1/2} + \frac{8L}{\pi^2\lambda}\right), \quad s = s_1 s_2 ,$$

$$A_{ij} = \frac{B\Gamma_{ij}^{1/2}}{s^{1/2}}, \quad 1 \le i+j \le 2 ,$$

а константы $B$, $\Gamma_{ij}$ и $L$ определены равенствами (22), (26), (28) и (29). Система (5) однозначно разрешима при любых $m,n \ge 1$.

Например, если положить

$$x_i^{(m)} = \frac{2i-1}{2m}\pi, \quad i = 1,\dots,m; \quad y_j^{(n)} = \frac{2j-1}{2n}\pi, \quad j = 1,\dots,n,$$

то $\cos x_i^{(m)}$, $\cos y_j^{(n)}$ будут корнями полиномов Чебышева степени $m$ и $n$ соответственно, и, значит, в этом случае имеет место теорема I, причем $s(x,y) \equiv 1$.

2. В данном пункте рассматривается устойчивость метода коллокации (3-5).

С целью упрощения дальнейших рассуждений запишем полином (3) и систему коллокации (5) в виде

$$u_{mn}(x,y) = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \varphi_p(x,y) \tag{32}$$

$$\text{и} \qquad \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \psi_p(M_q) = V(M_q), \quad q = 1,2,\ldots,N=m\cdot n \tag{33}$$

соответственно. Здесь

$$\alpha_p = a_{k\ell}; \quad p = (k-1)n+\ell; \quad k = 1,\ldots,m; \quad \ell = 1,\ldots,n;$$

$$\varphi_p(x,y) = \cos(k-1)\, x \cos(\ell-1)\, y \ ,$$

$$\psi_p(x,y) = \{[(k-1)^2 + (\ell-1)^2]^2 - \lambda\}\cos(k-1)\, x \cos(\ell-1)\, y,$$

$$M_q = (x_i^{(m)};\, y_j^{(n)}) \ ,$$

$$q = (i-1)\, n + j; \quad i = 1,\ldots,m; \quad j = 1,\ldots,n \ .$$

При практическом составлении системы (33) матрица этой системы, а также столбец свободных членов, как правило, вычисляются с некоторыми погрешностями. Поэтому коэффициенты полинома (32) фактически находятся из "неточной" системы

$$\sum_{p=1}^{N} \tilde{\alpha}_p [\psi_p(M_q) + \gamma_{qp}] = V(M_q) + \delta_q; \quad q = 1,\ldots,N, \tag{34}$$

в результате чего получается "неточное" приближение

$$\tilde{u}_{mn}(x,y) = \sum_{p=1}^{N} \tilde{\alpha}_p \varphi_p(x,y), \tag{35}$$

которое, вообще говоря, при больших N может значительно отличаться от точного приближения (32) даже при достаточно малых $\gamma_{qp}$ и $\delta_q$. Зависимость разности $u_{mn}(x,y)-\tilde{u}_{mn}(x,y)$ от погрешностей $\gamma_{qp}$ и $\delta_q$, а также разрешимость "неточной" системы коллокации (34) составляют сущность вопроса об устойчивости метода коллокации. Устойчивость этого метода в случае обыкновенных дифференциальных уравнений исследована Г.М.Вайникко в статье [5]. Ниже устойчивость изучается в следующем смысле.

Метод коллокации (3 - 5) будем считать устойчивым, если найдутся такие не зависящие от m и n постоянные P, Q и R, что для всех $m,n\geq 1$ при $\|\Gamma_N\|\leq R$ система (34) однозначно разрешима и имеет место неравенство

$$\|\Delta^2[u_{mn}-\tilde{u}_{mn}] - \lambda[u_{mn}-u_{mn}]\|_{L_1^2} \leq P\|\Gamma_N\| + Q\|\delta^{(N)}\|, \quad (36)$$

$\Gamma_N$ - матрица погрешностей $\gamma_{qp}$, рассматриваемая как операция из $R_N$ в $m_N$; $\delta^{(N)} = (\delta_1,\ldots,\delta_N)$ - вектор-столбец, рассматриваемый как элемент пространства $m_N$; $R_N$ - пространство N-мерных векторов с нормой $\|z\| = (\Sigma z_i^2)^{1/2}$, $m_N$ - пространство N-мерных векторов с нормой $\|z\| = \max|z_i|\,(1\leq i\leq N)$.

Теорема 2.

Если выполнены условия теоремы I, то метод коллокации (3 - 5) устойчив.

Доказательство. Запишем системы (33) и (34) в виде

$$A_N\alpha^{(N)} = V^{(N)} \quad (37)$$

и

$$(A_N + \Gamma_N)\tilde{\alpha}^{(N)} = V^{(N)} + \delta^{(N)} \quad (38)$$

соответственно. Здесь $A_N$ - матрица системы (33), рассматриваемая как операция из $R_N$ в $m_N$,

$$\alpha^{(N)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \varepsilon R_N,$$

$$\tilde{\alpha}^{(N)} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_N) \varepsilon R_N,$$

$$V^{(N)} = (V(M_1), \dots, V(M_N)) \varepsilon m_N.$$

Легко показать, что

$$\int_\Gamma \int \phi_p(x,y)\phi_q(x,y)dxdy = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ J_{pp}, & p = q, \end{cases} \tag{39}$$

где $p = (k-1)n+\ell$, $k = 1,\dots,m$; $\ell = 1,\dots,n$,

$$J_{pp} = \begin{cases} \pi^2\lambda^2, & k=\ell=1, \\ \frac{\pi^2}{2}[(k-1)^4 - \lambda]^2, & k>1,\ \ell=1, \\ \frac{\pi^2}{2}[(\ell-1)^4 - \lambda]^2, & k=1,\ \ell>1, \\ \frac{\pi^2}{4}\{[(\ell-1)^2 + (k-1)^2]^2 - \lambda\}^2, & k,\ \ell>1. \end{cases}$$

Ввиду того, что $\lambda$ не является собственным значением задачи (1, 2), $\lambda \neq [(k-1)^2 + (\ell-1)^2]^2$ для всех $k, \ell \geq 1$, и, следовательно, $J_{pp} > 0$, $p = 1,\dots,N=m \cdot n$.

Пусть $J^{(N)} = \min\limits_{1 \leq p \leq N} J_{pp}$. Очевидно, что с увеличением N $J^{(N)}$

не возрастает. Обозначив $\inf J^{(N)}$ через $J$ при $m,n \to \infty$, имеем

$$J^{(N)} \geq J > 0.$$

Составим теперь диагональную матрицу

$$D_N = \left\{ \frac{1}{J_{11}^{1/2}}, \frac{1}{J_{22}^{1/2}}, \ldots, \frac{1}{J_{pp}^{1/2}}, \ldots, \frac{1}{J_{NN}^{1/2}} \right\}$$

и будем рассматривать ее как операцию из $R_N$ в $R_N$. Тогда $\|D_N\| = \dfrac{1}{(J^{(N)})^{1/2}}$. Действительно (см., например, [8]), если $D_N \varepsilon [R_N \to R_N]$, то $\|D_N\| = \sigma^{1/2}$, где $\sigma$ – максимальное характеристическое число матрицы $D_N \cdot D_N^*$. Но $D_N^* = D_N$ и, следовательно, $\sigma = \dfrac{1}{J^{(N)}}$.

Положим

$$\beta^{(N)} = D_N^{-1} \alpha^{(N)} = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \varepsilon R_N,$$

$$\tilde{\beta}^{(N)} = D_N^{-1} \tilde{\alpha} = (\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_N) \varepsilon R_N.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\|\Delta^2 u_{mn} - \lambda u_{mn}\|_{L_1^2} = \|\beta^{(N)}\|_{R_N}. \tag{40}$$

В самом деле, поскольку $\alpha^{(N)} = D_N \beta^{(N)}$, то

$$\Delta^2 u_{mn} - \lambda u_{mn} = \sum_{p=1}^{N} \frac{\beta_p}{J_{pp}^{1/2}} \psi_p(x,y).$$

Отсюда, учитывая (39), получим (40). Можно убедиться, что

$$\|\Delta^2[u_{mn} - \tilde{u}_{mn}] - \lambda[u_{mn} - \tilde{u}_{mn}]\|_{L_1^2} = \|\beta^{(N)} - \tilde{\beta}^{(N)}\|_{R_N} . \quad (41)$$

Очевидно, что уравнения

$$A_N' \beta^{(N)} = v^{(N)} \quad (42)$$

и

$$(A_N' + \Gamma_N')\tilde{\beta}^{(N)} = v^{(N)} + \delta^{(N)}, \quad (43)$$

где $A_N' = A_N D_N$, $\Gamma_N' = \Gamma_N D_N$, равносильны уравнениям (37) и (38) соответственно. Из (42) и (43) вытекает

$$(A_N' + \Gamma_N')(\beta^{(N)} - \tilde{\beta}^{(N)}) = \Gamma_N' \beta^{(N)} - \delta^{(N)}. \quad (44)$$

Отметим, что из теоремы I следует обратимость операции $A_N'$ при любых $m, n \geq 1$. Покажем, что при этом

$$\|(A_N')^{-1}\| \leq \alpha,$$

где $\alpha$ – постоянная, не зависящая от $N$. Из доказательства теоремы I известно, что полином (32) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (33), является решением уравнения (6).

Учитывая ортогональность полиномов $C_{kl}^{(mn)}(x,y)$ по весу

$s(x,y)$ и принимая во внимание равенство (**), имеем

$$\|\Delta^2 u_{mn} - \lambda u_{mn}\|_{L^2_{s(x,y)}} \leq \max_{1\leq p\leq N} |V(M_p)| \left[\iint_r s(x,y)dxdy\right]^{1/2}.$$

Но

$$\|\Delta^2 u_{mn} - \lambda u_{mn}\|_{L^2_1} \leq \frac{1}{s^{1/2}} \|\Delta^2 u_{mn} - \lambda u_{mn}\|_{L^2_{s(x,y)}} \quad , s(x,y)\geq s>0.$$

Значит

$$\|\Delta^2 u_{mn} - \lambda u_{mn}\|_{L^2_1} \leq \alpha \|V^{(N)}\|_{m_N} , \tag{46}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{s^{1/2}} \left[\int_r \int s(x,y)dxdy\right]^{1/2} .$$

Из (42), (40) и (46) теперь имеем

$$\|(A'_N)^{-1} V^{(N)}\|_{R_N} \leq \alpha \|V^{(N)}\|_{m_N} ,$$

откуда и следует (45).

Пусть матрица $\Gamma_N$ такова, что

$$\max_q \left(\sum_p \gamma^2_{qp}\right)^{1/2} \leq \frac{\beta J^{1/2}}{\alpha} = R, \quad 0<\beta<1.$$

Тогда $\|\Gamma_N\| \leq R$, а поскольку $\|D_N\| \leq \frac{1}{J^{1/2}}$ , то $\|\Gamma'_N\| \leq \dfrac{\beta}{\|(A'_N)^{-1}\|}$

и на основании теоремы 4 (2. 5) из [9] заключаем, что операция $A'_N + \Gamma'_N$ имеет линейную обратную операцию при всех

$N \geq 1$, причем

$$\|(A_N' + \Gamma_N')^{-1}\| \leq \frac{\alpha}{1-\beta}. \qquad (47)$$

Но из обратимости операции $A_N' + \Gamma_N'$ вытекает обратимость операции $A_N + \Gamma_N$, что означает в свою очередь, что при $\|\Gamma_N\| \leq R$ "неточная" система (34) однозначно разрешима для всех $N \geq 1$. Из (44), (41) и (47) имеем

$$\|\Delta^2[u_{mn}-\tilde{u}_{mn}]-\lambda[u_{mn}-\tilde{u}_{mn}]\|_{L_1^2} \leq \frac{\alpha}{1-\beta} (\|\Gamma_N\| \frac{1}{J^{1/2}}\|\beta^{(N)}\|+\|\delta^{(N)}\|).$$

Но из (42) и (45)

$$\|\beta^{(N)}\| \leq \alpha \max_{M\varepsilon\Gamma} |V(M)|,$$

и, следовательно,

$$\|\Delta^2[u_{mn} - \tilde{u}_{mn}] - \lambda[u_{mn} - \tilde{u}_{mn}]\|_{L_1^2} \leq P\|\Gamma_N\| + Q\|\delta^{(N)}\|,$$

где

$$P = \alpha^2(1-\beta)^{-1} J^{-1/2} \max_{M\varepsilon\Gamma} |V(M)|, \quad Q = \alpha(1-\beta)^{-1}.$$

Теорема 2 доказана.

<u>Замечание.</u> Воспользовавшись функцией Грина оператора $\Delta^2 - \lambda E$ при краевых условиях (2), можно показать, что из неравенства (36) следует

$$\left\|\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} [u_{mn} - \tilde{u}_{mn}]\right\|_{C_\Gamma} \leq P_{ij}\|\Gamma_N\| + Q_{ij}\|\delta^{(N)}\|, \quad 0 \leq i+j \leq 2,$$

где $P_{ij}$, $Q_{ij}$ суть некоторые постоянные, не зависящие от $m$ и $n$.

## Литература


I. Л.В. Канторович. Функциональный анализ и прикладная математика. УМН, 3, вып. 6, 1948, 89-185.

2. Э.Б. Карпиловская. О сходимости метода коллокации. Доклады АН СССР, 151, № 4, 766-769.

3. Э.Б. Карпиловская. О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений. УМН, 8, вып. 3, 1953, III-II8.

4. О. Киш. О сходимости интерполяционного метода для дифференциальных и интегральных уравнений. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 3, Nr. 1-2, 1958, 25-41.

5. Г.М. Вайникко. О сходимости и устойчивости метода коллокации. Дифференциальные уравнения, I, № 2, 1965, 244-254.

6. Г.М. Вайникко. О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений, ЖВМ и МФ, 6, № I, 1966, 35-42.

7. Э.Б. Карпиловская. О сходимости метода коллокации для некоторых граничных задач математической физики. Сибирский математический журнал, 4, № 3, 1963, 632-639.

8. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. Изд-во Наука, М, 1966.

9. Л.В. Канторович и Г.П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.

## Über die Konvergenz der Kollokationsmethode

J. Jarzev

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz werden die Konvergenz und die Stabilität der Kollokationsmethode für die Randwertaufgabe (1,2) betrachtet, wenn die Lösung in Form (3) gesucht wird.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

С Е Р И Я   А   № 261   1968

УДК 517.521.5

Ф. Вихманн

# О СУММИРУЕМОСТИ ФОРМАЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Рассмотрим два ряда $\Sigma a_k$ и $\Sigma b_k$[I]. Обозначим

$$A_p = \sum_{k=0}^{p} a_k, \quad A_p^1 = \sum_{k=0}^{p} A_k, \quad c_p = \sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k} .$$

В [I] приведена без доказательства теорема I77: если $a_k = o(k)$ и

$$\Sigma k^2 |b_k| < \infty,$$

то

$$C_p^1 - BA_p^1 + B^* A_p = o(p),$$

где $B = \Sigma b_k$, $B^* = \Sigma k b_k$.

В настоящей заметке рассматривается одно возможное обобщение этой теоремы на случай двойных рядов.

Введем необходимые понятия. Пусть даны два двойных ряда $\Sigma a_{kl}$ и $\Sigma b_{kl}$. Обозначим через

$$A_{pq} = \sum_{k,l=0}^{p,q} a_{kl}, \quad A_{pq}^{10} = \sum_{k=0}^{p} A_{kq}, \quad A_{pq}^{01} = \sum_{l=0}^{q} A_{pl}, \quad A_{pq}^{11} = \sum_{k,l=0}^{p,q} A_{kl} .$$

---

I) Если индексы или пределы суммирования не обозначены, то возможные индексы суммирования пробегают все значения от 0 до $\infty$.

Под формальным произведением двух рядов будем понимать их произведение Коши $\Sigma c_{pq}$, где

$$c_{pq} = \sum_{k,l=0}^{p,q} a_{kl} b_{p-k,\, q-l}.$$

Обозначение $C_{pq}^{11}$ аналогично. Мы говорим, что двойная последовательность $\{A_{pq}\}$ принадлежит к классу $mc_o$, если $\lim\limits_{p,q\to\infty} A_{pq} = 0$ и $|A_{pq}| \le M$ для всех $p,q = 0,1,\ldots$, и к классу $c_\lambda^o$, если $\lim\limits_{p,q\to\infty} A_{pq} = 0$ при $\frac{1}{\lambda} \le \frac{p}{q} \le \lambda$, $\lambda \ge 1$ ($\lambda$ зафиксировано). В дальнейшем этот предел будем обозначать через

$$\lim_{(p,q)_\lambda \to \infty} A_{pq} = 0 .$$

При доказательстве теоремы используется следующая

Лемма (см. [2], § 3). Преобразование

$$\bar{A}_{pq} = \sum_{u,v=0}^{p,q} t_{pquv} A_{uv}$$

переводит все последовательности $\{A_{uv}\} \in mc_o$ в последовательности $\{\bar{A}_{pq}\} \in c_\lambda^o$ тогда и только тогда, когда

$1^o$ $\quad \sum\limits_{u,v=0}^{p,q} |t_{pquv}| \le M$ при $\frac{1}{\lambda} \le \frac{p}{q} \le \lambda$ ,

$2^o$ $\quad \lim\limits_{(p,q)_\lambda \to \infty} \sum\limits_{u=0}^{p} |t_{pquv}| = 0 \quad (v = 0,1,\ldots)$,

$3^o$ $\quad \lim\limits_{(p,q)_\lambda \to \infty} \sum\limits_{v=0}^{q} |t_{pquv}| = 0 \quad (u = 0,1,\ldots)$.

Теорема. Если

$$1^\circ \quad \{a_{kl}\} \in mc_o ,$$

$$2^\circ \quad \Sigma(k+1)^2(l+1)^2|b_{kl}| < \infty ,$$

то последовательность

$$\left\{ \frac{C^{11}_{pq} - A^{11}_{pq}B + A^{10}_{pq}B^{01} + A^{01}_{pq}B^{10}}{(p+1)(q+1)} \right\} \in c^o_\lambda ,$$

где

$$B = \Sigma klb_{kl}, \ B^{01} = \Sigma lb_{kl}, \ B^{10} = \Sigma kb_{kl} .$$

Доказательство. Поскольку

$$\sum_{i,k=0}^{p,q} (p-i+1)(q-k+1)\, c_{ik} =$$

$$= \sum_{u,v=0}^{p,q} a_{uv} \sum_{i,k=u,v}^{p,q} (p-i+1)(q-k+1) b_{i-u,k-v} ,$$

то

$$C^{11}_{pq} = \sum_{u,v=0}^{p,q} a_{uv} \sum_{i,k=u,v}^{p,q} [(p-u+1)(q-v+1) - (p-u+1)(k-v) -$$

$$- (i-u)(q-v+1) + (i-u)(k-v)] b_{i-u,k-v} =$$

$$= A^{11}_{pq}B - A^{10}_{pq}B^{01} - A^{01}_{pq}B^{10} - \sum_{u,v=0}^{p,q} a_{uv}(p-u+1)(q-v+1)[S] b_{st} +$$

$$+\sum_{u,v=0}^{p,q} a_{uv}(p-u+1)[S]tb_{st} + \sum_{u,v=0}^{p,q} a_{uv}(q-v+1)[S]sb_{st} +$$

$$+\sum_{u,v=0}^{p,q} a_{uv} \sum_{s,t=0}^{p-u,q-v} stb_{st} = A_{pq}^{11}B - A_{pq}^{10}B^{01} - A_{pq}^{01}B^{10} -$$

$$- r_1 + r_2 + r_3 + r_4 ,$$

где

$$S = \sum_{\substack{s=p-u+1,\\ t=p-v+1}}^{\infty} + \sum_{\substack{s=0,\\ t=q-v+1}}^{p-u,\infty} + \sum_{\substack{s=p-u+1,\\ t=0}}^{\infty,q-v} .$$

Для доказательства теоремы, ввиду условия $I^o$ теоремы, достаточно показать, что последовательность $\{r_i(p+1)^{-1}(q+1)^{-1}\}\in \in c_\lambda^o$ при всех $i=1,2,3,4$. С этой целью используем лемму. Выражения $r_i(p+1)^{-1}(q+1)^{-1}$ можно рассматривать как преобразования из пространства $mc_o$, где, например, для $r_1$

$$t_{pquv} = \frac{(p-u+1)(q-v+1)}{(p+1)(q+1)}[S]b_{st} .$$

Тем самым остается показать, что соответствующие $t_{pquv}$ удовлетворяют условиям леммы.

Рассмотрим остаток $r_1$, который состоит из трех слагаемых. Для первого слагаемого имеем

$$t_{pquv}^1 = \frac{(p-u+1)(q-v+1)}{(p+1)(q+1)} \sum_{\substack{s=p-u+1,\\ t=q-v+1}}^{\infty} b_{st} ,$$

и так как по условию $2^o$ теоремы при $p,q\to\infty$

$$\sum_{u,v=0}^{p,q} |t_{pquv}^1| \le \sum_{u,v=0}^{p,q} \frac{(p-u+1)^{-1}(q-v+1)^{-1}}{(p+1)(q+1)} = o(1) ,$$

то все условия леммы для $t^1_{pquv}$ выполнены. Для второго слагаемого

$$t^2_{pquv} = \frac{(p-u+1)(q-v+1)}{(p+1)(q+1)} \sum_{\substack{s=0,\\ v=q-t+1}}^{p-u,\infty} b_{st} .$$

Теперь, ввиду условия $2^\circ$ теоремы, при $\frac{1}{\lambda} \le \frac{p}{q} \le \lambda$

$$\sum_{u,v=0}^{p,q} |t^2_{pquv}| \le \frac{1}{(p+1)(q+1)} \{ \sum_{s,t=0,1}^{p,q} |b_{st}| \sum_{\substack{u=0,\\ v=q-t+1}}^{p-s,q} (p-u+1)\cdot$$

$$\cdot(q-v+1) + \sum_{s,t=0,q+1}^{p,\infty} |b_{st}| \sum_{u,v=0}^{p-s,q} (p-u+1)(q-v+1)\} =$$

$$= \frac{1}{4(p+1)(q+1)} \{ \sum_{s,t=0,1}^{p,\infty} (p+s+2)(p-s+1)t(t+1)|b_{st}| +$$

$$+ \sum_{s,t=0,q+1}^{p,\infty} (p+s+2)(p-s+1)(q+1)(q+2)|b_{st}|\} = O(1) ,$$

и тем самым условие $I^\circ$ леммы выполнено. Условия $2^\circ$ и $3^\circ$ леммы проверяются непосредственно. Поскольку третье слагаемое остатка $r_1$ аналогично второму слагаемому, то доказательство проводится здесь подобно предшествующему. Так же рассматриваются остатки $r_2$ и $r_3$.

Осталось исследовать $r_4$. Условие $I^\circ$ леммы выполнено, поскольку

$$\sum_{u,v=0}^{p,q} | \sum_{s,t=0}^{p-u,q-v} st b_{st} | = O[(p+1)(q+1)] .$$

Условия $2^\circ$ и $3^\circ$ леммы выполнены.

Теорема полностью доказана.

Если при $(p,q)_\lambda \to \infty$ $A^{10}_{pq} = o[(p+1)(q+1)]$ и $A^{01}_{pq} =$ $= o[(p+1)(q+1)]$ и, в частности, если

$$(p+1)^\alpha (q+1)^\beta a_{pq} = o(1), \ \alpha>0, \ \beta>0, \ \alpha+\beta\geq 1,$$

то

$$C^{11}_{pq} - A^{11}_{pq} B = o[(p+1)(q+1)],$$

т.е. произведение Коши $\Sigma c_{kl}$ и $B\Sigma a_{kl}$ стесненно равносуммируемы методом Чезаро $C^{1,1}$.

## Литература


1. Г. Харди. Расходящиеся ряды. М., 1951.
2. И. Кулль. Умножение суммируемых двойных рядов. Уч.зап. Тартуского гос. ун-та, 62, 1958, 3-59.


## On the Summation of the Formal Product of Double Series


F.Vichmann



Summary

In the monograph by G. Hardy "Divergent Series"[1] the theorem 177 is given about the summation of the formal product of two series. In this paper one of the possible generalizations for double series is given.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА Ш

Таллинский политехнический институт

Редактор Ф. Вихманн
Технический редактор Л. Лоопер

---

Сдано в набор 5/IУ 1967. Подписано к печати 23/У 1968.
Бумага 60х90/16. Печ.л. 5,0 + приложение (0,25)
Учетно-изд.л. 3,1. Тираж 300. МВ-05312. Зак.№ 238
Ротапринт ТПИ, Таллин, Пикк ялг, 14.
Цена 31 коп.

Цена 31 коп.