TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 120 1957

Н. В. ПАЛУВЕР

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ КООРДИНАТ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 120 1957

Н. В. ПАЛУВЕР

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ КООРДИНАТ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ КООРДИНАТ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

1. **Введение.** В случае центрального проектирования аксонометрическая система координат, как известно, должна содержать кроме масштабных точек также и точки схода координатных осей. Возникает вопрос, как строить в этом случае аксонометрические системы координат и какие элементы при этом можно выбирать произвольно? В учебниках по начертательной геометрии, например в [1], построение обыкновенно начинают с выбора центра проекций и одной точки схода. Это дает простое решение, но зато не дает возможности произвольно выбирать аксонометрические оси. В [2] Н. Ф. Четверухин предлагает два других способа, лишенных упомянутого недостатка. В одном из этих способов построение начинают с выбора аксонометрических осей и точек схода, а в другом — с выбора центра проекций и аксонометрических осей.

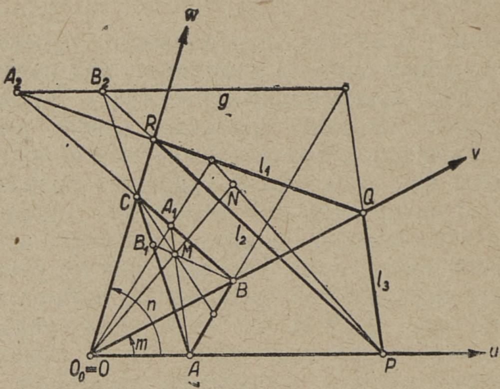
Для развития более общей теории построения аксонометрических систем координат в центральной проекции нам следует остановиться на проблеме Круппа.

2. **Проблема Круппа.** Пусть в пространстве дана прямоугольная, равномасштабная система координат (оригинал) $D_0 \equiv (O_0u_0v_0w_0, A_0B_0C_0, P_\infty Q_\infty R_\infty)$, где через A_0, B_0, C_0 обозначены масштабные точки, а через P_∞, Q_∞, R_∞ — несобственные точки осей O_0u_0, O_0v_0 и O_0w_0 соответственно. По предположению имеем:

$$
\begin{gathered}
O_0A_0 = O_0B_0 = O_0C_0 = e \quad \text{и} \\
O_0A_0 \perp O_0B_0, \; O_0A_0 \perp O_0C_0, \; O_0B_0 \perp O_0C_0.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Проектируя оригинал D_0 из центра проекций S на плоскость проекций, мы получим изображение $D \equiv (Ouvw, ABC, PQR)$, где ABC — проекция масштабного треугольника $A_0B_0C_0$, а PQR — треугольник схода (черт. 1).

На этом же чертеже, кроме того, построена линия схода g масштабного треугольника $A_0 B_0 C_0$, проекция OM высоты $O_0 M_0$ масштабного тетраэдра $O_0 A_0 B_0 C_0$ ($O_0 M_0 \perp A_0 B_0 C_0$) и точка схода N высоты $O_0 M_0$. При этом точки A_1 и B_1, являющиеся проекциями середин сторон $B_0 C_0$ и $A_0 C_0$ равностороннего треугольника $A_0 B_0 C_0$, построены как четвертые гармонические к точкам схода A_2 и B_2 этих сторон.



Черт. 1.

Допустим теперь, что оригинал D_0 и его проекция D заданы независимо друг от друга. Тогда возникает вопрос, можно ли так выбрать центр проекций S и плоскость проекций, чтобы проекцией D_0 была фигура D? Легко убедиться, что этого в общем случае нельзя сделать. В самом деле, если за систему отнесения возьмем, например, данную систему координат $O_0 u_0 v_0 w_0$, то как центр проекций S так и плоскость проекций определяется тремя параметрами, т. е. всего мы насчитываем 6 свободных параметров. С другой стороны, фигура D на плоскости проекций определяется 8 параметрами (например 2 угла и 6 отрезков). В итоге нам нехватает двух свободных параметров. Поэтому можно поставить следующий вопрос (проблема Круппа):

Каким условиям должна удовлетворять фигура D, чтобы она могла быть центральной проекцией оригинала D_0?

Ответ на этот вопрос дает первая теорема Э. Круппа [3]:

Для того, чтобы фигура D была центральной проекцией оригинала D_0, необходимо и достаточно, чтобы поляритет, установленный полярным треугольником PQR и сопряженной парой (N, g), был круговым (с мнимой окружностью в качестве фундаментальной кривой поляритета).

В 1945 г. Н. Ф. Четверухин [4] предложил элементарное доказательство этой теоремы, а в 1946 г. Н. М. Бескин [5] дал аналитические условия для решения проблемы Круппа. Однако, эти условия являются довольно сложными.

3. Элементарное решение проблемы Круппа.

Покажем теперь, как могут быть элементарным путем выведены простые условия для решения проблемы Круппа. [1])

Определим положительные направления на аксонометрических осях и введем следующую систему основных параметров для определения фигуры D (черт. 1):

$$\angle uOv = m, \ \angle uOw = n, \ OA = a, \ OB = b, \qquad (2)$$
$$OC = c, \ OP = p, \ OQ = q, \ OR = r.$$

Параметры a, b, c, p, q и r могут принимать как положительные так и отрицательные значения, в зависимости от расположения точек A, B, C, P, Q, R на аксонометрических осях, как на числовых прямых.

Пусть, кроме того, стороны треугольника схода PQR и расстояния точек схода до центра проекций S будут:

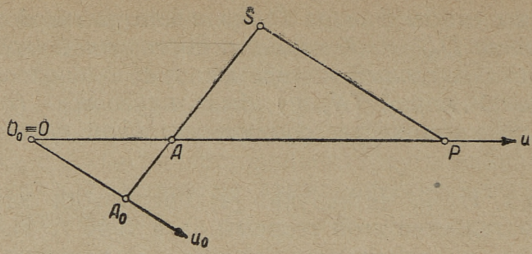
$$QR = l_1, \ PR = l_2, \ PQ = l_3, \ SP = d_1, \ SQ = d_2, \ SR = d_3. \qquad (3)$$

Так как преобразованием гомотетии можно оригинал D_0 перемещать в связке проектирующих лучей, не изменяя его проекции D, то не нарушая общности, можно положить, что $O_0 \equiv O$.

Рассмотрим прямые, лежащие в плоскости SPA (черт. 2).

---

[1]) Сообщение об этом было сделано автором на научно-методической конференции представителей кафедр инженерной графики ВТУЗов СССР в 1957 г.



Черт. 2.

Так как $SP \parallel O_0 A_0$, то из подобных треугольников $O_0 A_0 A$ и SPA, учитывая (1), (2) и (3), получим:

$$d_1 = \frac{p-a}{a} e .$$

Аналогично из треугольников в плоскостях SQB и SRC найдем:

$$d_2 = \frac{q-b}{b} e, \qquad d_3 = \frac{r-c}{c} e.$$

Обозначив

$$\frac{p-a}{a} = k_1 , \qquad \frac{q-b}{b} = k_2 , \qquad \frac{r-c}{c} = k_3 , \tag{4}$$

имеем:

$$d_1 = k_1 e, \ d_2 = k_2 e, \ d_3 = k_3 e. \tag{5}$$

Далее, из прямоугольных треугольников QRS, PRS и PQS получим соответственно:

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 &= d_2^2 + d_3^2 , \\ l_2^2 &= d_1^2 + d_3^2 , \\ l_3^2 &= d_1^2 + d_2^2 . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подставляя выражения (5) в равенства (6), получим:

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 &= (k_2^2 + k_3^2)\, e^2, \\ l_2^2 &= (k_1^2 + k_3^2)\, e^2, \\ l_3^2 &= (k_1^2 + k_2^2)\, e^2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Исключая из равенств (7) e, будем иметь:

$$\frac{l_3^2}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{l_2^2}{k_1^2 + k_3^2} = \frac{l_1^2}{k_2^2 + k_3^2} . \tag{8}$$

Стороны треугольника схода l_1, l_2 и l_3 можно выразить через основные параметры (2), соответственно из треугольников OQR, OPR и OPQ (черт. 1), следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 &= q^2 + r^2 - 2qr\cos(n - m), \\ l_2^2 &= p^2 + r^2 - 2pr\cos n, \\ l_3^2 &= p^2 + q^2 - 2pq\cos m. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подставляя эти выражения в равенства (8), получим окончательно:

$$\frac{p^2 + q^2 - 2pq\cos m}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{p^2 + r^2 - 2pr\cos n}{k_1^2 + k_3^2} = \frac{q^2 + r^2 - 2qr\cos(n - m)}{k_2^2 + k_3^2}. \tag{10}$$

Равенства (10) или (8) и являются условиями того, чтобы фигура D могла служить центральной проекцией оригинала D_0. Эти условия равносильны условиям Н. М. Бескина. Их необходимость и достаточность вытекает непосредственно из способа их получения.

Разумеется, что значения всех параметров, определяющих фигуру D, предполагаем вещественными.

Покажем, что требование остроугольности треугольника схода является следствием условий (10). В самом деле, из равенств (6), которые вошли в условия (10), получим:

$$d_1^2 = \frac{1}{2}(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2),$$

$$d_2^2 = \frac{1}{2}(l_1^2 + l_3^2 - l_2^2),$$

$$d_3^2 = \frac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2).$$

Но так как центр проекций S не может лежать на плоскости проекций, то должно быть $d_1 > o$, $d_2 > o$ и $d_3 > o$. Следовательно будет:

$$l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 > o,$$

$$l_1^2 + l_3^2 - l_2^2 > o,$$

$$l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 > o.$$

Но эти условия и являются условиями остроугольности треугольника схода.

4. Аналитический метод для построения аксонометрических систем координат в центральной проекции.

Условия (10) можно положить в основу аналитического метода для построения аксонометрических систем координат в центральной проекции. Сущность этого метода заключается в следующем:

Возьмем какую-нибудь неполную фигуру D, определенную лишь 6 параметрами и вычислим недостающие 2 параметра из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p^2+q^2-2pq\cos m}{k_1^2+k_2^2} &= \frac{p^2+r^2-2pr\cos n}{k_1^2+k_3^2} & (11)\\ \frac{p^2+q^2-2pq\cos m}{k_1^2+k_2^2} &= \frac{q^2+r^2-2qr\cos(n-m)}{k_2^2+k_3^2}, & (12) \end{aligned}\right\}$$

полученной из условий (10). Ясно, что полученная таким образом полная фигура D является центральной проекцией оригинала D_0 и может служить аксонометрической системой координат.

Число возможных неполных фигур D, определенных 6 параметрами, очевидно будет $\binom{8}{6}=28$.

Оказывается однако, что многие из этих 28 возможных случаев являются однотипными и что существует только 9 существенно различных групп неполных фигур D. Эти группы следующие (в скобках указаны недостающие параметры, характеризующие неполную фигуру D, принадлежащую к группе):

1) (q, r), (p, r), (p, q); 2) (r, c), (q, b), (p, a);
3) (r, b), (r, a), (q, c), (q, a), (p, c), (p, b);
4) (b, c), (a, b), (a, c); 5) (m, n);
6) (n, c), (m, b); 7) (n, r), (m, q);
8) (n, b), (n, a), (m, c), (m, a);
9) (n, q), (n, p), (m, r), (m, p).

Как видим, первая группа характеризуется тем, что у фигуры D не даны точки схода двух осей; вторая группа тем, что у фигуры D неизвестны точка схода и масштабная точка одной и той же оси и т. д.

Легко убедиться, что определение неизвестных параметров какой-нибудь одной неполной фигуры группы можно всегда привести переименованием осей к определению неизвестных параметров любой другой фигуры этой же группы. Поэтому достаточно дать решение задачи только для первой фигуры каждой группы. Этим мы и займемся в последующих п. п. При этом будем предполагать, что фигура D не является «выражденной», т. е. что выполняются условия:

$$a \neq p,\ b \neq q,\ c \neq r,\ (a, b, c, p, q, r \neq 0),$$

$$n - m \neq \pm k\pi,\ (m, n \neq \pm k\pi),\ \text{где}\ k = 0, 1, 2\ldots$$

5. Задача первого типа. В первой фигуре первой группы определению подлежат параметры q и r. Задача такого типа впервые рассматривается О. Я. Рюнком в [6], где решаются некоторые ее частные случаи и дается два способа графических приближений для решения общего случая. В [7], автором, решение задачи приводится к решению одного уравнения с одним неизвестным не выше 8 степени. При этом доказывается, что число решений (искомых центров проекций) не может превышать 16.

Покажем теперь, что решение задачи можно привести к решению одного уравнения не выше 6 степени.

Перепишем уравнения (11) и (12) в форме:

$$\begin{aligned}(k_1^2 + k_3^2)(p^2 + q^2 - 2pq\cos m) &= \\ = (k_1^2 + k_2^2)(p^2 + r^2 - 2pr\cos n),\end{aligned} \tag{11,1}$$

$$\begin{aligned}(k_2^2 + k_3^2)(p^2 + q^2 - 2pq\cos m) &= \\ = (k_1^2 + k_2^2)[q^2 + r^2 - 2qr\cos(n - m)]\end{aligned} \tag{12,1}$$

и вычтем из уравнения (12,1) уравнение (11,1).

Получим:

$$(k_2^2 - k_1^2)(p^2 + q^2 - 2pq\cos m) =$$

$$= (k_1^2 + k_2^2)[q^2 - p^2 + 2pr\cos n - 2qr\cos(n - m)],$$

откуда

$$r = \frac{pk_2^2(p - q\cos m) - qk_1^2(q - p\cos m)}{(k_1^2 + k_2^2)[p\cos n - q\cos(n - m)]}. \tag{13}$$

Введем новую переменную x:

$$x = k_2 = \frac{q}{b} - 1$$

Тогда

$$q = b(x + 1) \tag{14}$$

и

$$r = \frac{px^2[p - b(x+1)\cos m] - bk_1^2(x+1)[b(x+1) - p\cos m]}{(x^2 + k_1^2)[p\cos n - b(x+1)\cos(n-m)]}.$$

Подставляя эти выражения вместо q и r в уравнение (11,1), можем из него, после громоздких выкладок, выделить в виде множителя многочлен второй степени. Проверкой можно установить, что после этого уравнение (11,1) можно написать в форме:

$$C(x)[(x^2 + k_1^2)^2 A(x) + k_1^2 B(x) C(x)] = 0, \tag{15}$$

где:

$$A(x) = (f - p^2c^2\sin^2 n)x^2 + 2(f - g)x + f - 2g + p^2(s^2 + c^2k_1^2),$$

$$B(x) = 2bhx^3 + [2(bh - ps) + k_1^2(b^2 - c^2)]x^2 +$$
$$+ 2bk_1^2[b - c\cos(n-m)]x +$$
$$+ k_1^2\{2c[p\cos n - b\cos(n-m)] + b^2 - p^2 - c^2k_1^2\},$$

$$C(x) = b^2x^2 + 2b(b - p\cos m)x + p^2 + b^2 - 2bp\cos m,$$

причем:

$$h = p\cos m - c\cos(n-m),$$
$$s = p - c\cos n,$$
$$f = b^2[h^2 + c^2k_1^2\cos^2(n-m)],$$
$$g = bp(hs + c^2k_1^2\cos m).$$

Но учитывая (14), видим что

$$C(x) = p^2 + q^2 - 2pq\cos m = l_3^2 \neq 0 \quad \text{и}$$

поэтому для определения значений x, вместо (15), остается уравнение

$$(x^2 + k_1^2)^2 A(x) + k_1^2 B(x) C(x) = 0. \tag{16}$$

Так как A(x), B(x) и C(x) являются многочленами соответственно не выше, чем второй, третьей и второй степени, то степень уравнения (16) не может превышать 6.

Для нахождения решений задачи определяем значения x из уравнения (16), после чего соответствующие значения q и r легко вычисляются по формулам (14) и (13). Так как каждому корню уравнения (16) соответствует по формулам (14) и (13) только одно значение q и r, то задача не может иметь более 6 решений.

Покажем теперь на примере, что число вещественных решений задачи может достигать 6.

Пусть $a=1$, $b=c=\left|\sqrt{8}\right|=2,82843$,

$p=-1$, $m=43^\circ$, $n=317^\circ$. Тогда: $k_1^2=4$,

$h=-0,92866$, $s=-3,06857$, $f=8,14496$,

$g=-74,25438$ и

$$A(x) = 4,42400x^2+164,79868x+198,06984,$$
$$B(x) = -5,25330x^3-11,39044x^2+59,53536x-121,01320.$$
$$C(x) = 8x^2+20,13714x+13,13714.$$

После перемножений получим уравнение (16) в виде:

$$x^6-0,7475\,x^5-125,2664\,x^4+458,8576\,x^3+447,5253\,x^2-$$
$$-900,1232\,x-721,0568=0.$$

Это уравнение имеет 6 вещественных корней:

$x_1=-12,2523$, $x_2=-1,1382$, $x_3=-0,8006$,
$x_4=4,7776$, $x_5=1,5743$, $x_6=8,5867$.

Этим значениям x соответствуют по формулам (14) и (13) следующие решения задачи:

$(q_1=r_1=-31,826)$, $(q_2=r_2=-0,391)$,
$(q_3=r_3=0,564)$, $(q_4=r_4=16,342)$,
$(q_5=7,281, r_5=27,115)$, $(q_6=27,115$, $r_6=7,281)$.

Наблюдаемая симметрия решений не является случайной. Она является результатом того, что неполная фигура D была выбрана симметричной относительно оси Ou.

В [7] приведен пример, где число решений равно 4 (центров проекций 8). Поэтому можно считать доказанным, что в случае задачи первого типа число вещественных решений $k\leqslant 6$.

Вопрос о том, всегда ли существует хотя бы одно (кратное) решение, остается открытым.

Так как каждому треугольнику схода соответствует два центра проекций, расположенных симметрично относительно плоскости проекций, то число центров проекций и число соответствующих им масштабных тетраэдров в задаче первого типа равно $2k$.

6. Задача второго типа. Здесь неизвестными являются r и c. Для определения r можно воспользоваться уравнением (13):

$$r = \frac{pk_2^2(p - q\cos m) - qk_1^2(q - p\cos m)}{(k_1^2 + k_2^2)[p\cos n - q\cos(n - m)]}, \qquad (13)$$

так как в рассматриваемом случае значения всех параметров в правой части этого уравнения известны. Значения же c можно затем определить из уравнения (11), откуда, учитывая (4) и (9), находим:

$$c = \frac{rl_3}{l_3 \pm s_1}, \text{ где } s_1 = \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)\,l_2^2 - k_1^2 l_3^2}. \qquad (17)$$

Из (17) получим для c два значения:

$$c_1 = \frac{rl_3}{l_3 + s_1} \text{ и } c_2 = \frac{rl_3}{l_3 - s_1},$$

которые определяют на оси Ow масштабные точки C_1 и C_2. Докажем, что точки O, C_1, C_2 и R образуют гармоническую четверку. Для этого достаточно показать, что сложное отношение $(ORC_1C_2) = -1$. В самом деле:

$$(ORC_1C_2) = \frac{OC_1 \cdot RC_2}{OC_2 \cdot RC_1} = \frac{c_1(c_2 - r)}{c_2(c_1 - r)} = -1.$$

Из доказанного заключаем, что каждому центру проекций соответствует два масштабных тетраэдра, у которых масштабные единицы по осям O_0u_0 и O_0v_0 совпадают, а масштабные единицы на прямой O_0w_0 имеют противоположные направления.

Число вещественных решений задачи может быть 2 или 0 (случай $c=r$, как случай «вырождения» исключаем из рассмотрения). Так, например, в случае $a=2$, $b=4$, $p=8$, $q=10$, $m=45°$, $n=60°$, имеем два решения: ($r=5{,}877$, $c_1=2{,}307$) и ($r=5{,}877$, $c_2=-10{,}627$), а в случае $a=1$, $b=2$, $p=8$, $q=14$, $m=35°$, $n=40°$ — ни одного..

Из (17) видим, что признаком существования решений является условие

$$(k_1^2 + k_2^2)\,l_2^2 - k_1^2 l_3^2 > 0,$$

где в выражении для l_2, вместо r надо подставить выражение (13).

Так как решения определяют только один треугольник схода и следовательно только два центра проекций, то из сказанного выше следует, что число масштабных тетраэдров, определяемых решениями, равно 4.

7. Задача третьего типа. В задаче третьего типа искомыми являются $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{r}$.

Уравнение (11) дает:

$$\mathfrak{k}_2^2 = \frac{\mathfrak{l}_3^2}{\mathfrak{l}_2^2}(\mathfrak{k}_1^2 + \mathfrak{k}_3^2) - \mathfrak{k}_1^2, \tag{18}$$

откуда, принимая во внимание (4), найдем:

$$\mathfrak{b} = \frac{q\,\mathfrak{l}_2}{\mathfrak{l}_2 \pm \mathfrak{s}_2}, \text{ где } \mathfrak{s}_2 = \sqrt{(\mathfrak{k}_1^2 + \mathfrak{k}_3^2)\,\mathfrak{l}_3^2 - \mathfrak{k}_1^2\,\mathfrak{l}_2^2}. \tag{19}$$

Вычитая из (11) уравнение (12), получим:

$$(\mathfrak{k}_2^2 + \mathfrak{k}_3^2)\,\mathfrak{l}_2^2 - (\mathfrak{k}_1^2 + \mathfrak{k}_3^2)\,\mathfrak{l}_1^2 = 0.$$

Подставляя сюда выражение для $\mathfrak{k}_2$ из (18), а затем выражения для $\mathfrak{k}_3$, $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ и $\mathfrak{l}_3$ из (4) и (9), получим после упрощений уравнение третьей степени:

$$\begin{gathered} \mathfrak{f}_1 \mathfrak{r}^3 + [p\mathfrak{h}_1 - c\,(2\mathfrak{f}_1 + c\mathfrak{k}_1^2)]\,\mathfrak{r}^2 + \\ + c\,[c\mathfrak{f}_1 (1 + \mathfrak{k}_1^2) + 2p\,(c\mathfrak{k}_1^2 \cos n - \mathfrak{h}_1)]\,\mathfrak{r} + \\ + pc^2 (\mathfrak{h}_1 - q\mathfrak{k}_1^2 \cos m) = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

где:

$$\mathfrak{f}_1 = q \cos(n - m) - p \cos n,$$
$$\mathfrak{h}_1 = p - q \cos m.$$

Для получения решений задачи вычисляем сперва $\mathfrak{r}$ из уравнения (20) и находим затем соответствующие значения $\mathfrak{b}$ по формуле (19).

Число решений задачи не может быть больше 6, так как каждому корню уравнения (20) соответствуют по формуле (19) только два значения $\mathfrak{b}$. Вопрос о существовании решения и о максимально возможном числе вещественных решений остается открытым. Можно лишь утверждать, что число вещественных решений достигает 4, что имеет место например в примере: $a=1$, $c=2$, $p=-3$, $q=2$, $m=90°$, $n=225°$.

Здесь уравнение (20)

$$\mathfrak{r}^3 + 11{,}5565\,\mathfrak{r}^2 + 1{,}3824\,\mathfrak{r} - 10{,}1824 = 0$$

дает для $\mathfrak{r}$ следующие значения:

$$\mathfrak{r}_1 = 0{,}852,\ \mathfrak{r}_2 = -1{,}053,\ \mathfrak{r}_3 = -11{,}356.$$

Вычисляя по формуле (19) соответствующие значения для $\mathfrak{b}$, получим только 4 решения задачи:

$$(\mathfrak{r}_1 = 0{,}852,\ \mathfrak{b}_1 = 0{,}375), \quad (\mathfrak{r}_1 = 0{,}852,\ \mathfrak{b}'_1 = -0{,}601),$$

$$(\mathfrak{r}_2 = -1{,}053,\ \mathfrak{b}_2 = 1{,}256),\ (\mathfrak{r}_2 = -1{,}053,\ \mathfrak{b}'_2 = 4{,}904),$$

так как $\mathfrak{r}_3$ дает для $\mathfrak{b}$ комплексные значения.

Каждый из остроугольных треугольников схода PQR_1 и PQR_2 ($\triangle PQR_3$ — тупоугольный) определяет 2 центра проекций и 4 масштабных тетраэдра.

8. Задача четвертого типа. Здесь искомыми являются $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$. Геометрическое решение задачи этого типа рассматривается Н. Ф. Четверухиным в [2]. Ее аналитическое решение легко получается из уравнений (11) и (12), откуда находим:

$$k_2^2 = \frac{l_1^2 + l_3^2 - l_2^2}{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2} k_1^2 \text{ и } k_3^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2} k_1^2 .$$

Подставляя сюда вместо k_2 и k_3 их выражения из (4), получим:

$$\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{q}}{1 \pm k_1 s_2}, \qquad \mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{r}}{1 \pm k_1 s_3}, \tag{21}$$

где
$$s_2 = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_3^2 - l_2^2}{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2}} \text{ и } s_3 = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2}} .$$

Из формул (21) видим, что если выполнены условия остроугольности треугольника схода, то задача имеет 4 решения. Если же $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{r}$ выбраны так, что определяемый ими треугольник схода будет тупоугольным, то задача не имеет вещественных решений.

9. Задача пятого типа. В задаче пятого типа искомыми являются углы $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$.

Из уравнения (11) находим:

$$\cos \mathfrak{n} = \frac{1}{2\mathfrak{p}\mathfrak{r}} \left(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{r}^2 - \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_1^2 + k_2^2} l_3^2 \right) .$$

Введем вместо $\mathfrak{m}$ новую переменную x:

$$x = \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 - 2\mathfrak{p}\mathfrak{q} \cos \mathfrak{m} = l_3^2 .$$

Тогда

$$\cos \mathfrak{m} = \frac{1}{2\mathfrak{p}\mathfrak{q}} (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 - x) \tag{22}$$

и

$$\cos \mathfrak{n} = \frac{1}{2\mathfrak{p}\mathfrak{r}} \left(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{r}^2 - \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_1^2 + k_2^2} x \right) . \tag{23}$$

Проверкой можно установить, что если подставить выражения (22) и (23) в уравнение (12) и учесть, что

$$\cos(n-m)=\cos n\cos m+\sqrt{(1-\cos^2 n)(1-\cos^2 m)}, \quad (24)$$

то после упрощений (12) примет форму:

$$xD(x)=0,$$

где

$$D(x)=(k_1^2+k_3^2)(k_2^2+k_3^2)x^2-2[p^2k_1^2(k_2^2+k_3^2)+$$
$$+q^2k_2^2(k_1^2+k_3^2)+r^2k_3^2(k_1^2+k_2^2)]x+$$
$$+(k_1^2+k_2^2)[k_1^2(q^2-r^2)^2+k_2^2(p^2-r^2)^2+k_3^2(p^2-q^2)^2].$$

Но, $x=l_3^2\neq 0$, и поэтому для определения значений x остается уравнение второй степени:

$$D(x)=0. \quad (25)$$

Для получения решений задачи находим сперва корни уравнения (25) и определяем затем значения m и n по формулам (22) и (23). Так как $x=l_3^2>0$, то для существования решений необходимо, чтобы корни уравнения (25) были положительны. Следует также отметить, что вследствие того, что косинусу угла соответствуют два различных значения угла, число решений задачи может достигать 4, как это имеет место, например, в случае:

$$a=1,\ b=2,\ c=3,\ p=4,\ q=5,\ r=6.$$

Здесь уравнение (25)

$$65x^2-5742x+46575=0.$$

имеет два положительных корня: $x_1=9{,}0354$ и $x_2=79{,}3031$, которым по формулам (22) и (23) соответствуют следующие 4 решения задачи, попарно симметричные относительно оси Ou:

$$(m_1=36°57',\ n_1=23°39'),\quad (m_1'=323°03',\ n_1'=336°21'),$$
$$(m_2=163°15',\ n_2=112°39'),\quad (m_2'=196°45',\ n_2'=247°21').$$

С другой стороны, можно указать примеры, когда число решений меньше 4. Так, например, в случае: $a=1$, $b=1$, $c=10$, $p=3$, $q=3$, $r=20$, решений не будет вовсе, в чем можно убедиться проверкой.

Таким образом можно считать доказанным, что в случае задачи пятого типа число вещественных решений k может быть $0\leqslant k\leqslant 4$.

Так как каждому решению соответствует один треугольник схода, то число центров проекций и число масштабных тетраэдров будет 2k.

10. Задача шестого типа. Здесь искомыми будут c и n. Уравнение (11) дает:

$$k_3^2 = \frac{l_2^2}{l_3^2}(k_1^2 + k_2^2) - k_1^2.$$

Выбрав вместо n новую переменную x:

$$x = p^2 + r^2 - 2pr\cos n = l_2^2,$$

можем написать:

$$k_3^2 = \frac{1}{l_3^2}(k_1^2 + k_2^2)\,x - k_1^2, \tag{26}$$

$$\cos n = \frac{1}{2pr}(p^2 + r^2 - x). \tag{27}$$

Из (26), учитывая (4), находим:

$$c = \frac{rl_3}{l_3 \pm s_4}, \text{ где } s_4 = \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)x - k_1^2 l_3^2} \tag{28}$$

Подставляя (26) и (27) в уравнение (12) и принимая во внимание (24), получим (12) в виде:

$$\begin{gathered} l_3^2 x^2 + 2\left[(q\cos m - p)\,h_2 - q^2(p^2 + r^2)\sin^2 m\right]x + \\ + h_2^2 + q^2(p^2 - r^2)^2\sin^2 m = 0, \end{gathered} \tag{29}$$

где

$$h_2 = p\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}\,l_3^2 + q^2 + r^2\right) - q\,(p^2 + r^2)\cos m.$$

Решения задачи находим по формулам (27) и (28) после определения корней уравнения (29).

Докажем теперь, что задача не может иметь более 4 решений.

Пусть корню x_1 уравнения (29) соответствуют по формуле (27) значения n_1 и n_1' и по формуле (28) значения c_1 и c_1' и пусть уравнения (11) и (12) удовлетворяются значениями (n_1, c_1). Тогда они удовлетворяются также и парой (n_1, c_1'), так как c_1 и c_1' определяют одну и ту же величину k_3^2. Но пары (n_1, c_1) и (n_1', c_1') не могут тогда удовлетворять уравнению (12), так как в нем значение $\cos(n_1 - m)$ заменится на $\cos(n_1' - m)$, а все другие величины останутся прежними.

Таким образом каждому корню уравнения (29) может соответствовать только два решения, т. е. всего можем получить не более 4 решений задачи. Какие из значений n дают решения задачи, это определяется проверкой на уравнения (11) и (12).

Число вещественных решений задачи k может быть $0 \leqslant k \leqslant 4$. Так, например, в случае: $a=1$, $b=2$, $p=5$, $q=6$, $r=3$, $m=60°$, получим 4 решения: ($n_1=83°26'$, $c_1=1{,}024$), ($n_1=83°26'$, $c'_1=-3{,}228$), ($n_2=138°40'$, $c_2=0{,}448$), ($n_2=138°40'$, $c'_2=-0{,}639$), а в случае: $a=1$, $b=2$, $p=5$, $q=6$, $r=2$, $m=60°$ — ни одного.

Число центров проекций, соответствующих решениям, равно k, а число масштабных тетраэдров — $2k$.

11. Задача седьмого типа. Для этого случая неизвестными являются n и r.

Из уравнения (11) получим:

$$\cos n = \frac{1}{2pr}\left(p^2 + r^2 - \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_1^2 + k_2^2} l_3^2\right). \tag{30}$$

Обозначим

$$x = \frac{r}{c} - 1 = k_3.$$

Тогда

$$r = c(x+1) \tag{31}$$

и

$$\cos n = \frac{1}{2cp(x+1)}\left[p^2 + c^2(x+1)^2 - \frac{x^2 + k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} l_3^2\right]. \tag{32}$$

Подставляя выражения (31) и (32) в уравнение (12), получим после упрощений следующее уравнение 4 степени:

$$f_3^2 x^4 - 4c^2 h_3 f_3 x^3 + 2\left[f_3 g_3 + 2h_3\left(c^4 h_3 - p^2 q^2 \sin^2 m\right)\right] x^2 -$$
$$- 4c^2 h_3 g_3 x + g_3^2 - 4p^2 q^2 k_1^2 k_2^2 \sin^2 m = 0, \tag{33}$$

где

$$h_3 = k_1^2 + k_2^2,$$
$$f_3 = l_3^2 - c^2 h_3,$$
$$g_3 = p^2 k_2^2 + q^2 k_1^2 - c^2 h_3.$$

Для получения решений задачи находим корни уравнения (33) и определяем r и n по формулам (31) и (32).

Рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 10, убеждаемся, что число решений задачи $k \leqslant 4$. При этом правильные значения для n подбираются, как и в п. 10, проверкой решений на уравнения (11) и (12).

Возможность существования случаев, когда $k=4$, показывает пример: $a=1$, $b=2$, $c=1$, $p=5$, $q=6$, $m=60°$, где получим следующие решения:

$$(r_1=2{,}979,\ n_1=84°13'),\ (r_2=23{,}137,\ n_2=194°27'),$$
$$(r_3=-12{,}148,\ n_3=8°25')\ \text{и}\ (r_4=-2{,}695,\ n_4=300°33').$$

Можно указать также примеры, где $k=2$ (например:

$$a=1,\ b=2,\ c=0{,}581,\ p=5,\ q=6,\ m=60°).$$

Вопрос о существовании случая $k=0$ остается открытым.

Число центров проекций и масштабных тетраэдров, определяемых решениями задачи рассматриваемого типа, равно $2k$.

12. Задача восьмого типа. Здесь подлежат определению b и n.

Уравнение (11) дает:

$$\cos n = \frac{1}{2pr}\left(p^2 + r^2 - \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_1^2 + k_2^2} l_3^2\right).$$

Возьмем вместо b новую неизвестную x:

$$x = \left(\frac{q}{b} - 1\right)^2 = k_2^2. \tag{34}$$

Тогда

$$b = \frac{q}{1 \pm \sqrt{x}} \tag{35}$$

и

$$\cos n = \frac{1}{2pr}\left(p^2 + r^2 - \frac{k_1^2 + k_3^2}{x + k_1^2} l_3^2\right). \tag{36}$$

После подстановки выражений (34) и (36) в уравнение (12) получим:

$$(p^2 - r^2)^2 x^2 + 2\left[h_4 (p^2 - r^2) - 2p^2q^2 (k_1^2 + k_3^2) \sin^2 m\right] x +$$
$$+ h_4^2 - 4p^2q^2k_1^2k_3^2 \sin^2 m = 0, \tag{37}$$

где

$$h_4 = k_3^2 l_3^2 + k_1^2 (q^2 - r^2).$$

Неизвестные b и n определяются из (35) и (36) после решения уравнения (37).

Ввиду того, что $x=k_2^2>0$, решения задачи следует искать только для положительных корней уравнения (37). Все сказанное в п. 10 относительно подбора значений n остается в силе и для задачи этого типа.

Число решений задачи k может быть $0\leqslant k\leqslant 4$.

Так, например, в случае: $a=1$, $c=1$, $p=5$, $q=6$, $r=2{,}9791$, $m=60^\circ$, имеем 4 решения:

$$(n_1=84^\circ 13',\ b_1=2{,}000),\ (n_1=84^\circ 13',\ b_1'=-6{,}000),$$

$$(n_2=357^\circ 15',\ b_2=0{,}477)\text{ и }(n_2=357^\circ 15',\ b_2'=-0{,}568),$$

а в случае: $a=2$, $c=0{,}5$, $p=4$, $q=10$, $r=1$, $m=60^\circ$ — ни одного.

Число центров проекций, соответствующих решениям, равно k, а число масштабных тетраэдров — 2k.

13. Задача девятого типа. В этом последнем случае искомыми являются q и n.

Как и ранее, можем из (11) получить, что

$$\cos n=\frac{1}{2pr}\left(p^2+r^2-\frac{k_1^2+k_3^2}{k_1^2+k_2^2}l_3^2\right).$$

Обозначив

$$x=\frac{q}{b}-1=k_2,$$

можем написать:

$$q=b(x+1), \tag{38}$$

$$\cos n=\frac{1}{2pr}\left(p^2+r^2-\frac{k_1^2+k_3^2}{x^2+k_1^2}l_3^2\right). \tag{39}$$

Подставив выражения (38) и (39) в уравнение (12), можем из него, после довольно громоздких выкладок, выделить множитель

$$E(x)=b^2(x+1)^2-2bp(x+1)\cos m+p^2.$$

После этого уравнение (12) примет вид:

$$E(x)\cdot F(x)=0, \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned}F(x)={}&[f_5^2-4b^2p^2(k_1^2+k_3^2)\sin^2 m]\,x^4+\\&+4[f_5h_5-2b^2p^2(k_1^2+k_3^2)\sin^2 m]\,x^3+\\&+2[f_5g_5+2h_5^2-2b^2p^2(k_1^2+k_3^2+k_1^2k_3^2)\sin^2 m]\,x^2+\\&+4[h_5g_5-2b^2p^2k_1^2k_3^2\sin^2 m]\,x+g_5^2-4b^2p^2k_1^2k_3^2\sin^2 m,\end{aligned}$$

причем:

$$f_5 = b^2 (k_1^2 + k_3^2) + p^2 - r^2,$$

$$h_5 = b^2 (k_1^2 + k_3^2) - bpk_3^2 \cos m ,$$

$$g_5 = b^2 (k^2 + k_3^2) - 2bpk_3^2 \cos m + p^2 k_3^2 - r^2 k_1^2 .$$

Но, учитывая (38), видим, что

$$E(x) = p^2 + q^2 - 2pq \cos m = l_3^2 \neq 0$$

и поэтому для определения значений x, вместо (40) остается уравнение

$$F(x) = 0. \tag{41}$$

Таким образом, решение задачи сводится в основном к решению уравнения четвертой степени.

Число решений задачи k может быть $k \leqslant 4$.

Так, например, в случае: $a=1$, $b=2$, $c=1$, $p=5$, $r=2{,}9791$, $m=60^\circ$, имеем 4 решения:

$$(q_1=6{,}000,\ n_1=84^\circ 13'),\ (q_2=-0{,}229,\ n_2=276^\circ 58'),$$

$$(q_3=-5{,}232,\ n_3=131^\circ 58') \text{ и } (q_4=0{,}544,\ n_4=77^\circ 03').$$

Возможность существования случая, где $k=0$, остается открытой.

Число центров проекций, а также число масштабных тетраэдров, соответствующих решениям, равно 2k.

14. Замечания. Как было отмечено, вопрос о возможности несуществования вещественных решений в задачах I, III, VII и IX типов остался открытым. Однако, аналогия с другими типами задач заставляет полагать, что и здесь решения не всегда существуют.

Численное решение уравнений выше второй степени, встречающихся в задачах, всегда осуществляется например методом Лобачевского-Греффе или каким нибудь другим известным способом.

Положения центров проекций и масштабных тетраэдров легко определяются хорошо известными способами начертательной геометрии по фигуре D и по заранее полученным треугольникам схода. Для их определения нетрудно вывести также и соответствующие формулы.

В заключение отметим, что уравнения для определения неизвестных параметров фигуры D, в частных случаях задач, обыкновенно сильно упрощаются. Это в большой мере способствует их применению для практических целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Scheffers, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. II, (1927), 210—213.

2. Н. Ф. Четверухин, Основная теорема аксонометрии и построение аксонометрических систем в центральной проекции, Методы начертательной геометрии и ее приложения, Сборник статей (1955), 105—111.

3. E. Kruppa, Zur achsonometrischen Methode der darstellenden Geometrie, Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathnaturwiss. Klasse, Abt. IIa, Bd. 119, Heft 4, Wien, (1910), 487—506

4. Н. Ф. Четверухин, Об основной теореме аксонометрии в центральной проекции, ДАН СССР т. L, (1945).

5. Н. М. Бескин, Аналог теоремы Польке-Шварца в центральной аксонометрии, Математический Сборник, т. 19 (61), вып. I, (1946).

6. O. Rünk, Perspektiivaksonomeetria fundamentaalülesanne, Kand. dissertatsioon, Tallinn, (1956), 1—70.

7. Н. В. Палувер, Определение системы координатных осей в пространстве по ее центральной проекции, Труды Таллинского политехнического института, Серия А, № 100, (1957), 1—14.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Н. В. Палувер

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ КООРДИНАТ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Издательство
Таллинского Политехнического Института

*

Редактор О. Рюнк
Технический редактор А. Тамм
Корректор В. Мянд

Сдано в набор 2 XI 1957. Подписано к печати 29 XI 1957. Бумага 54×84 1/16. Печатных листов 1,5. По формату 60×92 печатных листов 1,23. Учетно-издательских листов 0,78. Тираж 800. МВ-07100.

Заказ № 6604.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк, 2.

Цена 55 коп.

Цена 55 коп.