

ISSN 0136-3549

3134-3823

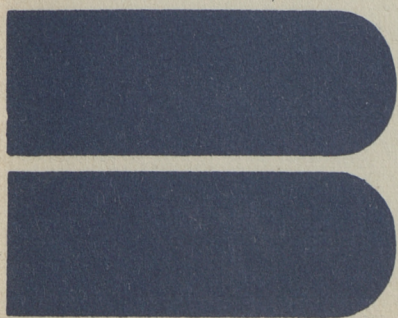
6.1  
643

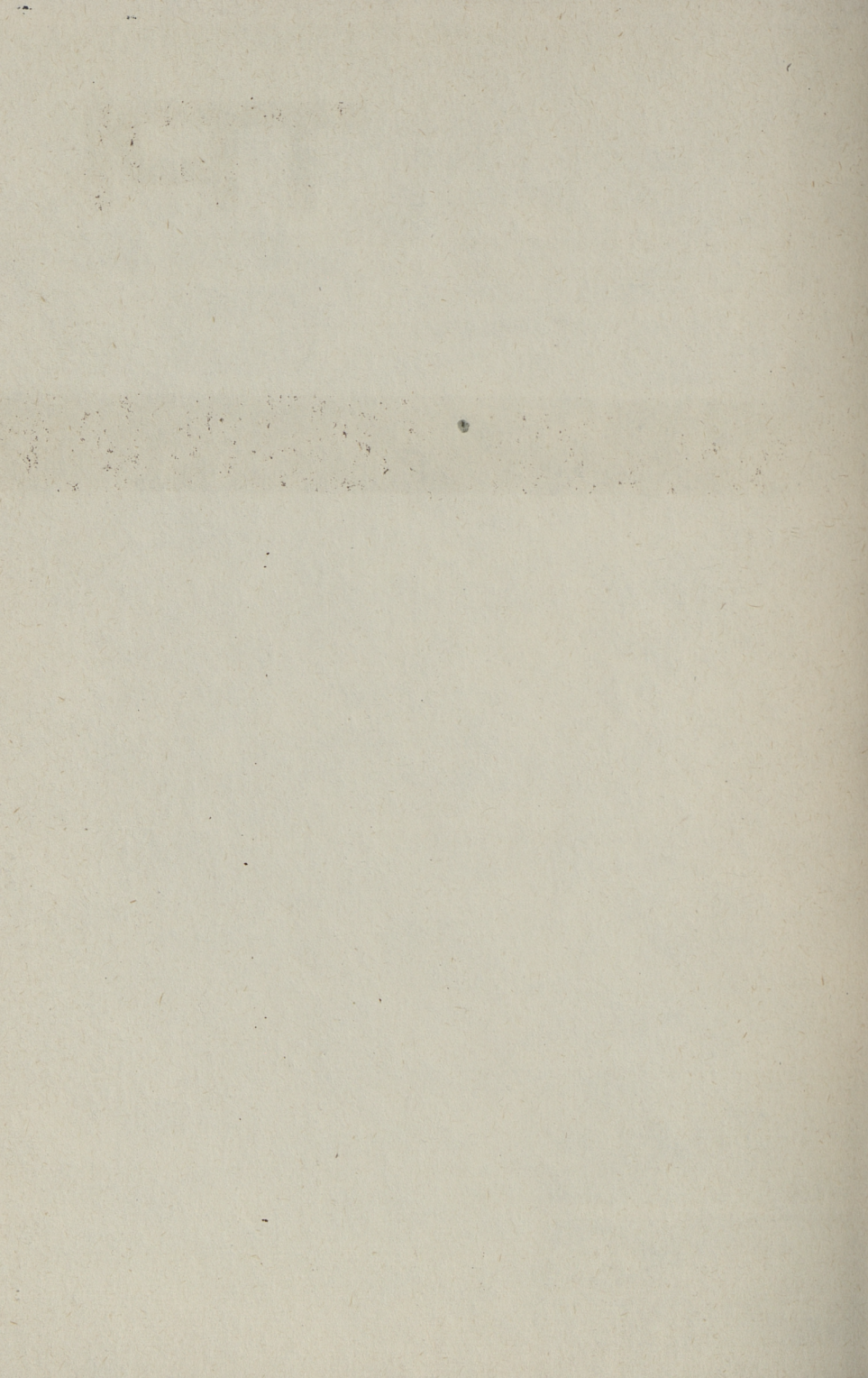
TALLINNA  
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI  
TOIMETISED  
643

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

**ТРИ**  
**'87**

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ  
В СИСТЕМАХ ТЕХНИЧЕСКОЙ  
КИБЕРНЕТИКИ







643

**ТРИ  
'87**

**TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED**

**ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

УДК 681.5

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И  
УПРАВЛЕНИЕ  
В  
СИСТЕМАХ  
ТЕХНИЧЕСКОЙ  
КИБЕРНЕТИКИ**

**Электротехника и автоматика XXX111**

**Таллин, 1987**

## С о д е р ж а н и е

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.  | О. Аарна. Модели оценки и прогноза состояния в задачах управления.....   | 3  |
| 2.  | О. Аарна, М. Метсанурм. Модели совместного оценивания состояния непрерывного технологического процесса и параметров шумов..... | 12 |
| 3.  | Т. Тедер. Статические балансовые модели НПП-I  | 22 |
| 4.  | А. Кийтам, Э. Сакс. Экспресс-оптимизация систем компенсационного управления.....   | 28 |
| 5.  | Р. Ланд, М. Мин. Астатическая система ФАП с цифровым интегратором.....   | 37 |
| 6.  | Ю. Реммель. Определение диапазона и параметров колебательных преобразователей вязкости.....                                    | 43 |
| 7.  | А. Ронк. Алгоритмы для повторного расчета цепи методом редукции: выполнение расчетов, прикрепленных к одному узлу.....         | 50 |
| 8.  | А. Ронк. Алгоритмы для повторного расчета цепи методом редукции: выполнение одного цикла расчета.....                          | 60 |
| 9.  | Т. Ранг. Критические параметры эквивалентных моделей полупроводниковых приборов.....   | 72 |
| 10. | Т. Ранг. Сравнение разных методов оптимизации  | 77 |



ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Труды ТПИ 643

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ. Электротехника и автоматика XXX111.

На русском языке. Отв. редактор А. Лаансоо.

Техн. редактор А. Андриевская. Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 02.12.87. Подписано к печати 26.02.88. МВ-01314. Формат 60x80/16.

Печ. л. 5,25+0,25 приложение. Уч.-изд. л. 4,4. Тираж 300, Зак № 184.

Цена 90 коп.

Таллинский политехнический институт

200108, Таллин, Эжитагате tee, 5. Ротапринт ТПИ, 200006 Таллин, Коскла 2/9.



## МОДЕЛИ ОЦЕНКИ И ПРОГНОЗА СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

### I. Введение

В последние два десятилетия модели и методы пространства состояний получили исключительно широкое распространение при решении задач управления самыми различными системами. Стандартная задача управления заключается в переводе объекта управления (ОУ) из некоторого начального состояния  $x^0 = x(t_0)$  в область желаемых конечных состояний  $x(t_1) \in S$  при минимальном значении заданного критерия оптимальности [1]:

$$J(t_0, x^0, u(\cdot)) = K(t_1, x^1) + \int_{t_0}^{t_1} L(\varphi, t; t_0, x^0, u(\cdot), v(\cdot)), u(t), t) dt, \quad (I)$$

где  $K(\cdot)t_0$  и  $L(\cdot)$  — известные вещественные функции;

$x^1 = \varphi(t_1; t_0, x^0, u(\cdot), v(\cdot))$  — точка достижения целевого множества  $S$ ;

$t_1$  — момент первого достижения;

$u(t)$  — вектор управлений;

$v(t)$  — вектор возмущений;

$\varphi(\cdot)$  — переходная функция НТОУ.

Учитывая неопределенность, обусловленную наличием неконтролируемых возмущений, стандартная задача управления относится к задачам оптимального стохастического управления с критерием управления в виде математического ожидания от функционала (I).

Если ОУ является гладким, а пространство состояний  $x$  конечномерным, тогда его переходная функция  $\varphi(\cdot)$  удовлетворяет системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), v(t), t), \quad (2)$$

где  $x(t)$  - вектор состояния;

$f(\cdot)$  - известная вектор-функция.

Связь вектора состояния с выходами ОУ описывается моделью

$$y(t) = h(x(t), v(t), t), \quad (3)$$

где  $y(t)$  - вектор выходов;

$h(\cdot)$  - известная вектор-функция.

Даже в случае ОУ типа (2), (3) нахождение управлений  $u(t_0, t_1)$ , минимизирующих функционал качества (I) или его математическое ожидание, является исключительно сложной задачей и решается только приближенно [2, 3]. Сложность решения стандартной задачи управления обусловлена нелинейностью и, возможно, стохастичностью объекта, а также высокой размерностью пространства состояний, характерной для многих технических систем, например, непрерывных технологических процессов [4].

В настоящей работе проанализированы пути преодоления противоречия между высокой размерностью пространства состояний и невозможностью решения задач управления такими объектами с использованием принципа разделения.

## 2. Принцип разделения

Одним из способов, упрощающих решение стандартной задачи управления, является применение принципа разделения. Допустим, что вектор  $\theta^*(t) = (x^{*T}(t), u^{*T}(t), v^{*T}(t))^T$  удовлетворяет уравнениям состояния (2), а небольшие отклонения от траекторий решений  $\theta^*(t)$  можно описывать линеаризованной моделью:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= A(t) \delta x(t) + B(t) \delta u(t) + D(t) \delta v(t) \\ \delta y(t) &= C(t) \delta x(t) + E(t) \delta v(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x^*, \quad \delta u = u - u^*, \quad \delta v = v - v^*, \quad \delta y = y - y^* = \\ &= y - h(x^*, v^*, t), \end{aligned}$$

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \right|_{\theta = \theta^*(t)}, \quad B(t) = \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} \right|_{\theta = \theta^*(t)}$$



$$D(t) = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v} \Big|_{\theta = \theta^*(t)},$$

$$C(t) = \frac{\partial h(\cdot)}{\partial x} \Big|_{\theta = \theta^*(t)}, \quad E(t) = \frac{\partial h(\cdot)}{\partial v} \Big|_{\theta = \theta^*(t)}$$

Если ОУ описывается моделью (4) или эквивалентной ей дискретной моделью, тогда, согласно теореме разделения, оптимальная система управления состоит из фильтра Калмана, формирующего оценки вектора состояния и регулятора, оптимального по квадратичному критерию

$$J = \int_{t_0}^1 (\delta x^T(t) Q \delta x(t) + \delta u^T(t) R \delta u(t)) dt, \quad (5)$$

в условиях непосредственной наблюдаемости  $x(t)$ , причем в регуляторе вместо  $x(t)$  используется его оценка [3], где  $Q$  - положительно полуопределенная матрица, а  $R$  - положительно определенная матрица.

Для задачи стохастического оптимального управления линейной системой (4) с квадратичным критерием в виде математического ожидания от функционала (5) принцип разделения был сформулирован Вонхэмом [5]. В случае нелинейных систем с распределениями вероятностей вектора состояния  $p(x(t))$  и  $p(x(t)/y(t_0, t_1))$ , отличными от нормального, строгое разделение невозможно. Однако приближенное разделение вполне возможно и целесообразно. В работе [2] доказано, что если  $(x - \hat{x})$  имеет распределение, близкое к  $\delta$ -распределению, т.е. оценка состояния достаточно точна, тогда теорема разделения справедлива и для нелинейного ОУ (2), (3), и критерия обобщенной работы.

Принцип разделения является важным как в теоретическом, так и в практическом отношениях. Он позволяет синтезировать информационную и непосредственно управляющую части системы управления раздельно, причем управляющая часть синтезируется в детерминированной постановке.

В областях, где отсутствуют строго доказанные результаты относительно применимости принципа разделения, последний служит полезным методологическим принципом синтеза систем управления. В качестве примеров можно назвать теорию ситуационного управления [6] и задачи управления системами типа конечных автоматов [7].



В случае линейного объекта и квадратичного критерия задачи оценки состояния и синтеза управлений дуальны и по сложности решения равноценны. В более общих случаях такая симметрия теряется: задачи синтеза управлений по своей сложности оказываются значительно проще задачи оценки состояния [2]. Это приводит к тому, что при высоких размерностях вектора состояния ( $n = 10 - 20$ ) задача оценки состояния оказывается неразрешимой даже приближенно.

Таким образом, налицо несбалансированность методов оптимального оценивания и оптимального управления. В связи с этим возникает проблема упрощения задачи оптимального оценивания путем применения субоптимальных алгоритмов или же заменой оптимальной оценки  $\hat{x}(t) = \mathcal{E}\{x(t)/y(t_0, t)\}$  на "мгновенную" оценку  $x(t) = \mathcal{E}\{x(t)/y(t)\}$ , где  $\mathcal{E}$  - оператор математического ожидания.

Все имеющиеся подходы к проблеме упрощения задачи оптимального оценивания исходят из того, что задачи оценки состояния и синтеза управлений решаются на базе одной и той же модели ОУ. В настоящей работе показано, что для решения этих двух подзадач общей задачи управления можно использовать разные модели объекта, названные нами моделью оценки состояния и моделью прогноза состояния.

### 3. Модели прогноза и оценки состояния

На основании принципа разделения задача управления распадается на последовательно решаемые подзадачи оценки состояния ОУ и синтеза управляющих воздействий. Стандартная модель ОУ, например модель (2), (3), связывает три группы переменных: входы (управления и возмущения), состояния и выходы. При этом для всех моделей объектов управления характерна ориентированность, т.е. определено направление движения информации "вход  $\Rightarrow$  состояние  $\Rightarrow$  выход".

Идея построения моделей прогноза состояния и оценки состояния базируется на разбиении вышеописанной тройки причинно-следственных отношений на две пары: "вход  $\Rightarrow$  состояние" и "состояние  $\Rightarrow$  выход", связывающие соответствующие группы переменных. Преимуществом такого разбиения одной целостной модели ОУ на пару дополняющих друг друга подмоделей



является возможность отвлекаться при рассмотрении задачи синтеза управлений от связей состояния с выходами, а при рассмотрении задачи оценки состояния - от причинной зависимости изменений состояния, обусловленных управлениями и возмущениями. Последнее приводит к значительному упрощению моделей ОУ, и как следствие - к упрощению решения задачи оценки состояния.

Идея раздельного рассмотрения моделей прогноза и оценки состояния объекта управления не является новой и широко применяется при анализе управляемости и наблюдаемости ОУ [8]. При этом подмодель прогноза состояния характеризует управляемость, а подмодель оценки состояния - наблюдаемость ОУ. Однако в данном случае выделение двух подмоделей является лишь способом упрощения качественного анализа системы, но не методом построения моделей ОУ и решения на их базе задач управления.

Проиллюстрируем применение идеи раздельных моделей прогноза и оценки состояния на линеаризованной модели ОУ (4). В данном случае моделью прогноза состояния является система уравнений состояния в неизменном виде:

$$\delta \dot{x}(t) = A(t) \delta x(t) + B(t) \delta u(t) + D(t) \delta v(t), \quad (7)$$

а модель оценки состояния имеет вид:

$$\delta \dot{x}(t) = A(t) \delta x(t) + \xi(t) \quad (8)$$

$$\delta y(t) = C(t) \delta x(t) + \eta(t),$$

где  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  - вектор-функции, аппроксимирующие влияние управлений и возмущений на состояния и выходы ОУ соответственно.

Принципиально важно то, что при этом мы не требуем, чтобы соблюдались равенства:

$$\xi(t) = B(t) \delta u(t) + D(t) \delta v(t) \quad (9)$$

$$\eta(t) = E(t) \delta v(t).$$

Следует подчеркнуть качественное отличие модели оценки состояния (8) от исходной модели (4), чего нельзя сказать о модели прогноза состояния (7). Это является результатом ориентированности модели (4). Поэтому существенных результатов следует ожидать от применения моделей оценки состояния ОУ.



Наличие отдельных моделей оценки и прогноза состояния обеспечивает определенную независимость в решении задач оценки состояния и синтеза управлений. Обозначим через  $x_p$  и  $x_e$  соответственно пространства состояний модели прогноза состояния  $M_p$  и модели оценки состояния  $M_e$ . Пара моделей  $M_p$  и  $M_e$  является согласованной, если  $x_p \subseteq x_e$ .

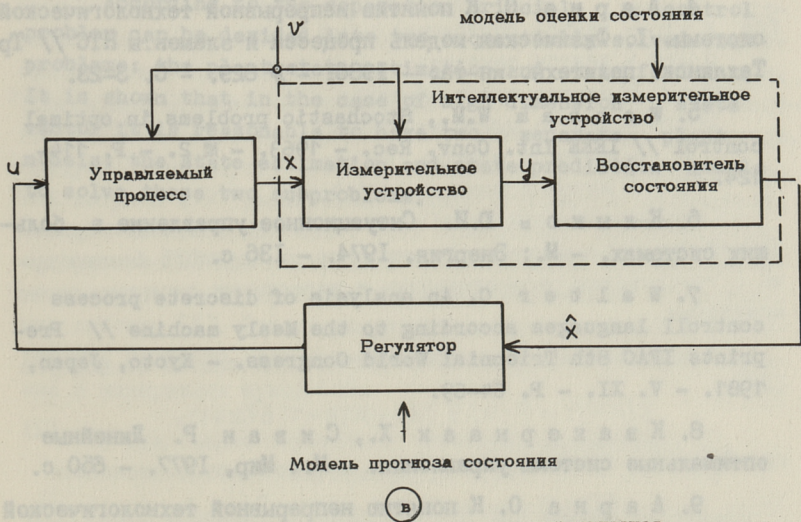
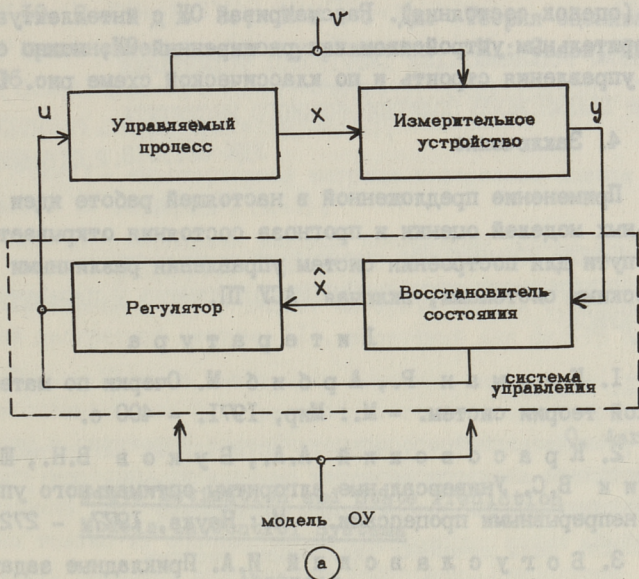
Независимость задач оценки состояния и синтеза управлений выражается в том, что, с одной стороны, оценивание вектора состояния  $x(t)$  может быть декомпозировано произвольным образом при условии, что  $x_e = \bigcup_i x_{ei}, x_{ei} \cap x_{ej} = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ , где  $x_{ei}$  — пространство состояний  $i$ -й подмодели оценки состояния ОУ. С другой стороны, задачу синтеза управлений можно декомпозировать независимо от задачи оценки состояния, причем  $x_p = \bigcup_k x_{pk}$ , а выполнение условия  $x_{pk} \cap$

$x_{ej} = \emptyset$ , для всех  $k = \overline{l}$  не является обязательным. Это означает, что при синтезе управлений мы в каждой подзадаче можем использовать произвольный набор координат вектора оценок  $\hat{x}(t)$ . Такая несимметрия также является следствием направленности моделей ОУ.

Основная структурная особенность моделей оценки состояния заключается в отсутствии управлений в числе переменных моделей  $M_{ei}$ . Как показано в работах [4, 9], отсутствие причинно-следственного описания зависимости состояния ОУ от управлений приводит в случае балансовых моделей оценки состояния к значительному упрощению их структуры, что в свою очередь позволяет решать задачи более высокой размерности. Следует отметить, что модели оценки состояния ОУ являются аналогами моделей сообщений и наблюдений из статистической теории связи [10].

Наличие отдельных моделей оценки и прогноза состояния ОУ приводит к важным изменениям в структуре системы управления (см. рис. 1). Если подзадача оценки состояния решается с применением модели оценки состояния, тогда соответствующее устройство можно рассматривать вместе с измерительным устройством ОУ как интеллектуальное измерительное устройство, которое в своей работе не использует информацию об управлениях, приложенных к объекту и обладает большим по сравнению с физическим измерительным устройством числом выходов, а также возможно и большей точностью измере-





- а - классическая  
 в - с применением отдельных моделей оценки и прогноза состояния

Рис. 1. Структура системы управления

ний (оценок состояния). Рассматривая ОУ с интеллектуальным измерительным устройством как расширенный ОУ, можно системе управления строить и по классической схеме рис. 1, а.

#### 4. Заключение

Применение предложенной в настоящей работе идеи раздельных моделей оценки и прогноза состояния открывает новые пути для построения систем управления различными техническими системами, включая АСУ ТП.

#### Л и т е р а т у р а

1. К а л м а н Р., А р б и б М. Очерки по математической теории систем. - М.: Мир, 1971. - 400 с.

2. К р а с о в с к и й А.А., Б у к о в В.Н., Ш е н д р и к В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. - М.: Наука, 1977. - 272 с.

3. Б о г у с л а в с к и й И.А. Прикладные задачи фильтрации и управления. - М.: Наука, 1983. - 400 с.

4. А а р н а О. К понятию непрерывной технологической системы. I. Физическая модель процесса и элементы НТС // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1986. - № 629. - С. 3-23.

5. W o n h a m W.M., Stochastic problems in optimal control // IEEE Int. Conv. Rec. - 1963. - № 2. - P. 114-124.

6. К л ы к о в Ю.И. Ситуационное управление в больших системах. - М.: Энергия, 1974. - 136 с.

7. W a l t e r C. An analysis of discrete process controll languages according to the Mealy machine // Preprints IFAC 8th Triennial World Congress. - Kyoto, Japan, 1981. - V. XI. - P. 64-69.

8. К в а к е р н а а к Х., С и в а н Р. Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир, 1977. - 650 с.

9. А а р н а О. К понятию непрерывной технологической системы. II. НТС и балансовые модели пространства состояний // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1986. - № 629. - С. 24-43.



Ю. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. - М.: Связь, 1976. - 496 с.

O. Aarna

State Estimation and State Prediction  
Models in Control Systems

Abstract

According to the separation principle a control problem can be divided into two sequentially solved sub-problems: the plant state estimation and state feedback. It is shown that in the case of high dimension state vector it is reasonable to have two separate plant models: the state estimation and state prediction models to solve these two subproblems.

О. Аарна, М. Метсанурм

МОДЕЛИ СОВМЕСТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ  
 НЕПРЕРЫВНОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА И ПАРАМЕТРОВ  
 ШУМОВ

## I. Введение

В случае линейного объекта оптимальным алгоритмом оценки состояния является алгоритм фильтра Калмана (ФК), дающий несмещенные оценки с наименьшей дисперсией [1].

Пусть дана линейная дискретная система

$$\begin{aligned}x(k+1) &= F(k)x(k) + v(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + w(k),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $x$  -  $n$  - вектор состояния;

$y$  -  $m$  - вектор выходов;

$v$  -  $n$  - вектор шумов объекта;

$w$  -  $m$  - вектор шумов измерения;

$F$  - матрица порядка ( $n \times n$ );

$C$  - матрица порядка ( $m \times n$ ).

Относительно  $v(k)$  и  $w(k)$  предположим, что они являются случайными последовательностями типа дискретного белого шума с гауссовским распределением и известными первыми двумя моментами.

Оценка вектора состояния  $\hat{x}(k+1)$  вычисляется по формуле [2]:

$$\hat{x}(k+1) = F(k)\hat{x}(k) + K(k+1)\delta(k+1),\quad (2)$$

где  $\delta(k+1)$  - обновляющий процесс, заданный соотношением:

$$\delta(k+1) = y(k+1) - C(k+1)F(k)\hat{x}(k).\quad (3)$$

$K(k+1)$  - матрица коэффициентов усиления, вычисляемая по формулам



$$\begin{aligned}
 K(k+1) &= P(k+1)C^T(k+1)W^{-1}(k+1) \\
 P(k+1) &= Q(k+1) - Q(k+1)C^T(k+1) \cdot \\
 &\cdot [C(k+1)Q(k+1)C^T(k+1) + W(k+1)]^{-1}C(k+1)Q(k+1) \quad (4) \\
 Q(k+1) &= F(k)P(k)F^T(k) + V(k),
 \end{aligned}$$

где  $P(k+1)$  - апостериорная матрица ковариации оценок состояния  $\hat{x}(k+1)$ ;

$Q(k+1)$  - априорная матрица ковариации оценок состояния  $\hat{x}(k+1)$ .

Уравнения (2)-(4) задают алгоритм оценки состояния линейной дискретной системы (1), известный как фильтр Калмана.

Фильтр Калмана имеет один основной недостаток: уравнения оптимального фильтра требуют точного знания модели системы и статистик случайных процессов; в частности, должны быть известны переходная матрица системы и ковариации возмущений типа аддитивного белого шума. Однако обычно доступны только их оценки. Схемы ФК, которые могут обойти эту проблему, называют адаптивными фильтрами. Наибольшее распространение получила группа методов, где неизвестные параметры сперва некоторым образом оцениваются, а затем подставляются в уравнения ФК. При этом строится новая дискретная динамическая система с расширенным вектором состояния, содержащим неизвестные параметры [3-6] и происходит совместное оценивание состояния исходной системы и этих параметров. Следует подчеркнуть, что при оценивании элементов переходной матрицы  $F(k)$  расширенная модель становится нелинейной. Выходом из положения может быть применение субоптимальных алгоритмов [5] или построение таких моделей, которые позволяют неизвестные параметры оценивать независимо от состояния системы [6]. Это направление является наиболее перспективным, особенно, когда необходимо оценивать только средние и ковариации шумов [3].

## 2. Адаптивное оценивание состояния непрерывных технологических процессов (НТП)

Класс моделей, предназначенных для оценки состояния НТП, был предложен и исследован в работах [7-9] и назван динамическими балансовыми моделями:



$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= \tilde{x}(k) + \tau_k A q(k) \\ q(k+1) &= q(k) + v(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + w(k),\end{aligned}\quad (5)$$

где  $\tilde{x}$  - вектор накопленных в подсистемах НТС количеств вещества и энергии;

$q$  - вектор потоков вещества и энергии между подсистемами;

$\tau$  - длительность интервала дискретности;

$A$  - матрица инцидентий потокового мультиграфа рассматриваемой НТС.

Динамическая балансовая модель (5) является частным случаем линейной динамической системы (I) с матрицей перехода состояний

$$F(k) = \begin{pmatrix} I \tilde{x} & \tau_k A \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

и блочными векторами состояния  $\tilde{x} = (x, q)$  и шумов объекта  $v = (0, \tilde{v})$ , где  $I$  - единичная матрица.

Оценивание состояния динамической балансовой модели (5) происходит с применением ФК (2) - (4). Как показано в работе [10], наиболее эффективным с точки зрения объема вычислений и точности получаемых оценок состояния являются двухуровневые схемы, где на первом уровне каждый измеряемый технологический параметр сглаживается независимо с помощью одномерного ФК, а на втором уровне происходит совместная обработка полученных оценок с применением статических или динамических методов фильтрации.

Изменение каждого  $i$ -го измеряемого технологического параметра описывается моделью случайного блуждания:

$$\begin{aligned}z_i(k+1) &= z_i(k) + v_i(k) \\ y_i(k) &= z_i(k) + w_i(k),\end{aligned}\quad (6)$$

где  $z_i$  - истинное значение измеряемого параметра;

$y_i$  - измеренное значение измеряемого параметра.

Скалярные случайные последовательности  $v_i(k)$  и  $w_i(k)$  имеют в общем ненулевые математические ожидания:  $\bar{v}_i(k) \neq 0$  и  $\bar{w}_i(k) \neq 0$  и неизвестные дисперсии. Если эти статистические характеристики считать известными, то остальные компоненты рассматриваемой двухуровневой схемы оценки состояния НТС неопределенности не содержат, поскольку матрица  $A$  оп-



ределена структурой потоков НТС, а матрица  $C(k)$  – физической природой измеряемых технологических параметров [7].

Таким образом, адаптивное оценивание состояния НТП сводится к совместному сглаживанию каждого измеряемого технологического параметра и оцениванию их средних, а также дисперсий ошибок измерения и дрейфа этих параметров.

### 3. Модель изменения средних значений и дисперсий шумов измерения и дрейфа технологических параметров

Для адаптивной оценки состояния НТП необходимо уметь оценивать неизвестные средние и дисперсии случайных последовательностей  $v_i(k)$  и  $w_i(k)$  из модели случайного блуждания измеряемого технологического параметра (6). В этом пункте, следуя методике работы [3], разработаны модели, описывающие временное изменение этих параметров в пространстве состояний.

#### 1) Модель изменения измеряемого технологического параметра

Для упрощения записей будем далее в модели временного изменения технологического параметра (6) опускать индекс  $i$ , предполагая  $z, y, v$  и  $w$  скалярными величинами, причем

$E[v(k)] = \bar{v}(k) \neq 0$  и  $E[w(k)] = \bar{w}(k) \neq 0$ . Обозначим неизвестные дисперсии шумов  $v(k)$  и  $w(k)$  через  $V(k)$  и  $W(k)$ . При выводе модели для нововведенных величин  $\bar{v}(k), \bar{w}(k), V(k)$  и  $W(k)$  мы исходим из того, что качественно они изменяются во времени примерно также, как исходное состояние  $z(k)$  и для их описания тоже строим соответствующие уравнения состояния и выхода.

Если в алгоритме ФК (2) – (4) пользоваться произвольными значениями параметров  $\bar{v}^*(k), \bar{w}^*(k), V^*(k)$  и  $W^*(k)$ , то получим субоптимальную оценку  $\hat{z}^*(k+1)$ :

$$\begin{aligned} \hat{z}^*(k+1) &= \hat{z}^*(k) + \bar{v}^*(k) + K^*(k+1) \delta^*(k+1) \\ \delta^*(k+1) &= y(k+1) - \hat{z}^*(k) - \bar{v}^*(k) - \bar{w}^*(k). \end{aligned} \quad (7)$$

которая может быть смещенной, причем

$$K^*(k+1) = \frac{Q^*(k+1)}{Q^*(k+1) + W^*(k+1)}$$

$$Q^*(k+1) = P^*(k) + V^*(k) \quad (8)$$

$$P^*(k+1) = \frac{Q^*(k+1)W^*(k)}{Q^*(k+1)+W^*(k)}.$$

В силу специфики одномерного ФК:  $0 \leq K^*(k+1) \leq 1$ . В отличие от оптимального ФК обновляющий процесс субоптимального фильтра  $\delta^*(k)$  уже не будет иметь нулевого математического ожидания:  $E[\delta^*(k)] \neq 0$  и оказывается коррелированным во времени, т.е.  $\text{cov}[\delta^*(k), \delta^*(l)] \neq 0$  при  $k \neq l$ . Поскольку в доступной форме вся информация о неоптимальности ФК содержится в обновляющем процессе, то целесообразно в моделях, описывающих изменение неизвестных параметров  $\bar{v}(k)$ ,  $\bar{w}(k)$ ,  $V(k)$  и  $W(k)$ , использовать  $\delta^*(k)$  как наблюдения.

## 2) Модель изменения средних значений

Вводим в рассмотрение вектор состояния средних значений (математических ожиданий)

$$\bar{x}(k) = (\Delta \bar{z}(k), \bar{v}(k), \bar{w}(k))^T, \quad (9)$$

где  $\Delta \bar{z}(k) = E[\hat{z}^*(k) - \hat{z}(k)]$  - математическое ожидание ошибки в оценке  $\hat{z}^*(k)$ , полученной по формулам (7).

Учитывая, что при наличии точных значений  $\bar{v}(k)$  и  $\bar{w}(k)$  оценка  $\hat{z}(k)$  вычисляется из соотношения

$$\hat{z}(k+1) = \hat{z}(k) + \bar{v}(k) + K^*(k+1)[y(k+1) - \hat{z}(k) - \bar{v}(k) - \bar{w}(k)] \quad (10)$$

и предполагая средние значения шумов  $\bar{v}(k)$  и  $\bar{w}(k)$  случайно флуктуирующими аналогично потокам динамической балансовой модели (5), получим из уравнений (7) и (10)

$$\begin{aligned} \Delta \bar{z}(k+1) &= [1 - K^*(k+1)][\Delta \bar{z}(k) + \bar{v}(k)] - K^*(k+1)\bar{w}(k) \\ \bar{v}(k+1) &= \bar{v}(k) + \Delta \bar{v}(k) \\ \bar{w}(k+1) &= \bar{w}(k) + \Delta \bar{w}(k), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\Delta \bar{v}$  и  $\Delta \bar{w}$  - гауссовские случайные последовательности типа дискретного белого шума с нулевыми математическими ожиданиями и известными дисперсиями, т.е. они удовлетворяют обычным предположениям алгоритма ФК.

Уравнение выхода модели средних значений связывает вектор  $\bar{x}(k)$  с обновляющим процессом:



$$\delta(k) = \Delta \bar{z}(k) + \bar{v}(k) + \bar{w}(k) + w_{\bar{x}}(k), \quad (I2)$$

где  $w_{\bar{x}}(k)$  - гауссовская случайная последовательность типа дискретного белого шума с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией.

Из приведенного следует, что оценивание средних значений шумов можно осуществить с помощью трехмерного ФК, построенного на базе модели (II), (I2).

### 3) Модель изменения дисперсий

В модели дисперсий вектор состояния  $x^c(k)$  также содержит три компонента  $x^c(k) = (P_{\Delta \bar{z}}(k), V(k), W(k))^T$ , где  $P_{\Delta \bar{z}}$  - дисперсия оценки  $\Delta \bar{z}$ . Изменение оцениваемых дисперсий во времени описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} P_{\Delta \bar{z}}(k+1) &= [1 - K^*(k+1)]^2 [P_{\Delta \bar{z}}(k) + V(k)] + [K^*(k+1)]^2 W(k) \\ V(k+1) &= V(k) + v_v(k) \\ W(k+1) &= W(k) + v_w(k), \end{aligned} \quad (I3)$$

где случайные последовательности  $v_v(k)$  и  $v_w(k)$  удовлетворяют обычным предположениям алгоритма ФК.

В уравнении выхода модели дисперсий в качестве наблюдения  $y^c(k)$  используется квадрат невязки между обновляющим процессом и предсказанным из модели средним значений его математическим ожиданием:

$$y^c(k) = [\delta^*(k) - \Delta \bar{z}(k) - \bar{v}(k) - \bar{w}(k)]^2, \quad (I4)$$

а само уравнение выхода имеет вид:

$$y^c(k) = P_{\Delta \bar{z}}(k) + V(k) + W(k) + w^c(k), \quad (I5)$$

где  $w^c(k)$  - гауссовский дискретный белый шум с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией.

Таким образом, оценка скалярного состояния системы  $\bar{z}(k)$ , неизвестных средних значений  $\bar{x}(k)$  и дисперсий  $x^c(k)$  шумов сводится к решению трех взаимосвязанных задач фильтрации с помощью одного одномерного ФК и двух трехмерных ФК. Следует отметить, что построенные модели содержат, в свою очередь, 6 неизвестных дисперсий, определяющих параметры соответствующих ФК. Предполагая, что оцениваемые средние и дисперсии изменяются значительно медленнее состояния исходной



системы, можно ожидать относительную нечувствительность оценок средних и дисперсий, получаемых с применением моделей (II), (I2), (I3) и (I5), относительно неопределенности этих 6 дисперсий.

Модели изменения средних и дисперсий шумов (II)-(I3), (I5) можно назвать полными, поскольку в них отражены все возможные компоненты соответствующих векторов. Если же принять дополнительные предположения о равенстве некоторых средних нулю или считать некоторые дисперсии известными, тогда можно построить еще целое семейство усеченных моделей. Ниже рассмотрена одна из них.

Компонент вектора средних  $\bar{w}(k)$  можно интерпретировать как систематическую ошибку измерения. Ее происхождение было бы правильнее отнести к соответствующему подбору динамических характеристик шумов  $\Delta v(k)$  и  $\Delta w(k)$  (см. п. 4).

Если принять гипотезу об отсутствии систематической ошибки измерения, т.е.  $\delta[\bar{w}(k)] \equiv 0$ , тогда модель изменения средних (II) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{z}(k+1) &= [1 - K^*(k+1)] [\Delta \bar{z}(k) + \bar{v}(k)] \\ \bar{v}(k+1) &= \bar{v}(k) + \Delta v(k) \\ \delta(k) &= \Delta \bar{z}(k) + \bar{v}(k) + \bar{w}_x(k). \end{aligned} \quad (I6)$$

Возможности построения усеченных моделей этим не исчерпываются.

#### 4. Качественный анализ моделей изменения средних и дисперсий

Модели изменения средних значений и дисперсий шумов измерения и дрейфа технологических параметров, разработанные в п. 3, относятся к нестационарным линейным дискретным системам. Для обеспечения сходимости оценок состояния, получаемых из ФК, построенных на базе этих моделей, необходимо, чтобы сами модели были управляемы шумами объекта и полностью наблюдаемы. В этом пункте проведен анализ наблюдаемости и управляемости полной и усеченных моделей изменения средних и дисперсий. При этом соответствующие модели приняты стационарными путем "замораживания" коэффициентов усиления ФК:  $K^*(k+1) = K^*$ . Последнее позволяет использовать алгебраические критерии управляемости и наблюдаемости.



Если система стационарна, тогда критерием наблюдаемости этой системы является равенство ранга матрицы наблюдаемости  $Q_{\sigma}$  размерности пространства состояний  $n$  [1]:

$$\text{rank } Q_{\sigma} = n, \quad (I7)$$

где 
$$Q_{\sigma} = (C^T, F^T C^T, \dots, F^{(n-1)T} C^T).$$

В случае полной модели изменения средних (II), (I2) матрицы  $F$  и  $C$  имеют следующий вид:

$$F = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 1 \ 1), \quad (I8)$$

где  $a = 1 - K^*$ ,  $b = -K^*$ .

Нетрудно заметить, что

$$b = a - 1. \quad (I9)$$

С учетом соотношения (I9) матрица наблюдаемости выражается как

$$Q_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a^2+a+1) \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

и является вырожденной. Отсюда следует важный вывод о том, что один из компонентов вектора средних  $\bar{x}(k)$  неоценим из модели (II), (I2). Следуя рассуждениям, приведенным в п. 3, целесообразно исключить систематическую ошибку измерения из вектора средних.

В усеченной модели средних (I6) матриц  $F$  и  $C$  имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 1).$$

а соответствующая матрица наблюдаемости

$$Q_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг независимо от значения  $K^* = 1 - a$ . Поэтому усеченная модель средних (I6) наблюдаема.

В полной модели изменения дисперсий (I3), (I5) матрицы  $F$  и  $C$  совпадают с (I8), но  $a = (1 - K^*)^2$  и  $b = K^{*2}$ . Поэтому соотношение (I9) уже несправедливо. Матрица наблюдаемости имеет вид

$$Q_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & (a+1) & (a^2+a+1) \\ 1 & (b+1) & (ab+b+1) \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы выражается как

$$\det Q_{\sigma} = ab - 1. \quad (20)$$

Наблюдаемость полной модели дисперсий теряется при

или

$$b = 1/a$$

$$K^{*2} = \frac{1}{(1-K^*)^2}. \quad (21)$$

В интервале допустимых значений  $0 \leq K^* \leq 1$  уравнение (21) не имеет решения и поэтому полная модель дисперсий (13), (15) наблюдаема. Тот же вывод справедлив и относительно усеченной модели изменения дисперсий.

Так как полная модель средних не представляет для нас практического интереса, то анализ управляемости усеченной модели показывает, что матрица управляемости имеет полный ранг для всех  $K^* \neq 1$ . Последнее соответствует отсутствию фильтрации  $\hat{x}(k+1) = y(k+1)$ .

В полной модели дисперсий матрица управляемости имеет полный ранг для всех допустимых значений коэффициента усиления  $K^*$ . То же самое справедливо для усеченной модели дисперсий.

#### Л и т е р а т у р а

1. К в а к е р н а к Х., С и в а н Р. Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир, 1977. - 650 с.
2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. - М.: Связь, 1976. - 496 с.
3. Б р е в е р Н. Идентификация характеристик шума в фильтре Калмана // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса. - М.: Мир, 1980. - С. 321-376.
4. S a g e A.P., H u s a G.W. Adaptive filtering with unknown prior statistics // Preprints Joint Automatic Control Conference. - 1969. - P. 760-769.
5. T a b u c h i Т., Y a s h i m u r a Т., S o e d a Т. On the estimation of noise covariances in linear discrete time systems // Int. J. Syst. Sci. - Vol. 9, N 5. - P. 472-479.
6. W a n g Z h e n g - o u. A new method of on-line



estimation of noise covariances  $Q$  and  $R$  // Preprints of 7 th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation. - 1985. - V. 2. - P. 1501-1506.

7. А а р н а О.А. Балансовые модели в АСУ непрерывными технологическими процессами. - Таллин: ТПИ, 1985. - 84 с.

8. Аарна О.А. Балансовые модели для оценки состояния химико-технологических систем // Автоматика и телемеханика. - 1984. - № 5. - С. 125-133.

9. Аарна О.А. Оценивание состояния химико-технологических процессов // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1985. - № 592. - С. 17-38.

10. А а р н а О.А. Временная и пространственная избыточность информации в задачах оценки состояния химико-технологической системы // Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1984. - № 576. - С. 3-12.

II. А а р н а О. Применение балансовых моделей для оценки состояния непрерывных технологических процессов. - Таллин: ТПИ, 1985. - 112 с.

O. Aarna, M. Metsanurm

Models for Simultaneous Estimation  
of Continuous Process Plant State  
and Noise Parameters

Abstract

Continuous process plant state, process noise and measurement error statistics simultaneous estimation problem is formulated. State space models, describing evolution of measurable technological parameters, mean values and dispersions of noise parameters are proposed. The results of model controllability and observability analysis are presented.

## СТАТИЧЕСКИЕ БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ НТП — I

## I. Введение

Балансовые модели, используемые для оценки состояния непрерывных технологических процессов (НТП), описывают материальный и энергетический баланс системы и связывают оцениваемые величины с измеряемыми технологическими параметрами (ТП). В зависимости от состава и характера временного изменения вектора состояния используемые балансовые модели оценки делятся на [1]:

- статические,
- квазистационарные,
- динамические.

В данной работе рассматриваются вопросы использования статических балансовых моделей (СБМ) для оценки состояния НТП.

СБМ широко известны и подробный анализ данных моделей можно найти в работах [2, 3]. Но во всех этих работах при оценивании состояния с помощью СБМ игнорируется возможность наличия априорной информации о состоянии НТП. Целью настоящей работы и является нахождение таких алгоритмов оценивания состояния СБМ, которые используют имеющуюся априорную информацию.

## 2. Статическая балансовая модель НТП

СБМ НТП можно представить в виде стохастической системы:

$$\begin{aligned} Aq(t) &= 0 \\ y &= h(q) + w, \end{aligned} \quad (I)$$

где  $q$  — вектор потоков;



- A - матрица инцидентий потокового графа;
- y - вектор измеряемых ТП;
- h(·) - известная вектор-функция, которая зависит от типов измеряемых величин.

Модель (1) названа статической по той причине, что описывает состояния потоков НТП в фиксированный момент времени, не связывая его с изменением состояния во времени.

Учитывая особенности функций h(·), можно относительно просто провести линеаризацию уравнения выхода (1):

$$y = C(q^*)q(t) + \bar{w}, \quad (2)$$

где C(q\*) - матрица, каждая строка которой содержит не более двух ненулевых элементов;

$\bar{w}$  - смещенный вектор шумов измерения:

$$\bar{w} = h(q^*) - C(q^*)q^* + w;$$

q\* - центр линеаризации.

### 3. Оценка состояния СБМ

Оценка состояния НТП при помощи СБМ (3) находится методами линейной оценки параметров с ограничениями [4]. В зависимости от априорной информации о состоянии системы получаются две разные задачи оценки:

1) известны математическое ожидание и ковариационная матрица ошибок измерения

$$\varepsilon\{w\} = 0 \quad (3)$$

$$\varepsilon\{w w^T\} = W,$$

где W - известная положительно определенная матрица размерности (m x m).

2) известна также оценка вектора состояния q, до измерений  $\bar{q}$  и априорная ковариационная матрица

$$\varepsilon\{(q - \bar{q})(q - \bar{q})^T\} = Q, \quad (4)$$

где Q - известная положительно определенная матрица размерности (n x n).

Первая задача подробно проанализирована в работах [2, 3]. Оценка вектора состояния  $\hat{q}$  находится по формуле:

$$\hat{q} = [I_q - P^* A^T (A P^* A^T)^{-1} A] P^* C^T W^{-1} y, \quad (5)$$



где

$$P^* = (C^T W^{-1} C)^{-1}$$

и

$$P = [I_{q_j} - P^* A^T (A P^* A^T)^{-1} A] P^* [I_{q_j} - P^* A^T (A P^* A^T)^{-1} A]^T \quad (6)$$

ковариационная матрица оценок.

#### 4. Оценка состояния СЕМ при наличии априорной информации о состоянии

Теперь найдем оценку вектора состояния  $q_j$  статической системы (I), где вектор  $q_j$  имеет размерность  $n$ . Дана также априорная оценка вектора  $\bar{q}_j$  и ковариационная матрица этой оценки  $Q$ .

Задача заключается в нахождении оценки вектора  $\hat{q}_j$ , удовлетворяющей балансовым ограничениям (I) и минимизирующей критерий качества

$$J = \frac{1}{2} [(q_j - \bar{q}_j)^T Q^{-1} (q_j - \bar{q}_j) + (y - Cq_j)^T W^{-1} (y - Cq_j)]. \quad (7)$$

Для решения этой задачи используем метод множителей Лагранжа (см. приложение).

Оценка вектора  $\hat{q}_j$  находится по формулам:

$$\hat{q}_j = T [\bar{q}_j + K(y - C\bar{q}_j)], \quad (8)$$

где

$$T = I_{q_j} - P^* A^T (A P^* A^T)^{-1} A$$

$$P^* = (C^T W^{-1} C + Q^{-1})^{-1}$$

$$K = P^* C^T W^{-1}$$

$K$  - матрица коэффициентов усиления, которая не зависит от результатов измерений и может вычисляться заранее;

$Q$  - априорная ковариационная матрица оценок;

$W$  - ковариационная матрица шумов измерения.

Ковариационная матрица оценок (П. I7) вычисляется по формуле:

$$P = T P^* T^T. \quad (9)$$

Использованный нами подход привел нас к рекуррентной процедуре оценивания, когда результат предыдущего шага вычислений служит априорной информацией на следующем шаге, где используются новые измерения.

Подробный анализ нового алгоритма оценивания СЕМ вместе с численными результатами дается в продолжении данной статьи.



## Л и т е р а т у р а

1. А а р н а О. Оценивание состояния химико-технологических процессов // Тр. Таллинск. политехн. наин-та. - 1985. - № 592. - С. 17-38.

2. В а с л а в е к V. Studies on systems engineering II. On application of the calculus of observations in calculations of chemical engineering balances // Collect. Czechoslovak Chem. Commun. - 1969. - V. 34, N 2. - P. 364-372.

3. Р о м а г н о л и J.A., S t e p h a n o p o u l o s G. Rectification of process measurement data in the presence of gross errors // Chemical Engineering Science. - 1981. - V. 36. - P. 1849-1863.

4. С е б е р Дж. Линейный регрессионный анализ. - М.: Мир, 1980. - 450 с.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

Оценивание состояния статической балансовой модели с априорной информацией

Теперь найдем оценку вектора состояния  $q$  с использованием метода множителей Лагранжа.

Выпишем множители Лагранжа по одной на каждое линейное ограничение:

$$a_i^T q = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{П.1})$$

где  $a_i$  есть  $i$ -я строка матрицы  $A$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^T q = q^T A^T \lambda. \quad (\text{П.2})$$

Выпишем функцию Лагранжа:

$$r = \frac{1}{2} [(q - \bar{q})^T Q^{-1} (q - \bar{q}) + (y - Cq)^T W^{-1} (y - Cq) + q^T A^T \lambda] \quad (\text{П.3})$$

и решим уравнения:

$$\begin{cases} Aq = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial q} = 0. \end{cases} \quad (\text{П.4})$$

Перепишем (П.3), получая

$$r = \frac{1}{2} (q^T Q^{-1} q - 2q^T Q^{-1} \bar{q} + \bar{q}^T Q^{-1} \bar{q} + y^T W^{-1} y -$$



$$-2q^T C^T W^{-1} y + q^T C^T W^{-1} C q) + q^T A^T \lambda. \quad (\text{П.5})$$

Используя правила дифференцирования векторов

$$\frac{d(q^T a)}{dq} = a \quad \text{и} \quad \frac{d(q^T A q)}{dq} = 2Aq, \quad (\text{П.6})$$

если  $A$  - симметричная матрица, получаем

$$\frac{\partial r}{\partial q} = Q^{-1} q - Q^{-1} \bar{q} - C^T W^{-1} y + C^T W^{-1} C q + A^T \lambda. \quad (\text{П.7})$$

Теперь найдем решение системы:

$$\begin{cases} Q^{-1} q - Q^{-1} \bar{q} - C^T W^{-1} y + C^T W^{-1} C q + A^T \lambda = 0 \\ A q = 0. \end{cases} \quad (\text{П.8})$$

Решения этих уравнений обозначим через  $\hat{q}$  и  $\hat{\lambda}$  соответственно

$$(C^T W^{-1} C + Q^{-1}) \hat{q} = Q^{-1} \bar{q} + C^T W^{-1} y + A^T \lambda.$$

Введем обозначение

$$P^* = (C^T W^{-1} C + Q^{-1})^{-1}, \quad (\text{П.9})$$

тогда получаем

$$\begin{aligned} P^{*-1} \hat{q} &= Q^{-1} \bar{q} + C^T W^{-1} y + C^T W^{-1} C \bar{q} - C^T W^{-1} C \bar{q} + A^T \hat{\lambda} \\ P^{*-1} \hat{q} &= (Q^{-1} + C^T W^{-1} C) \bar{q} + C^T W^{-1} (y - C \bar{q}) + A^T \hat{\lambda} \\ \hat{q} &= \bar{q} + P^* C^T W^{-1} (y - C \bar{q}) + P^* A^T \hat{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Обозначим

$$K = P^* C^T W^{-1}, \quad (\text{П.11})$$

тогда

$$\hat{q} = \bar{q} + K(y - C \bar{q}) + P^* A^T \hat{\lambda}. \quad (\text{П.12})$$

Теперь используем второе уравнение из (П.8)

$$\begin{aligned} A \bar{q} + AK(y - C \bar{q}) + AP^* A^T \lambda &= 0 \\ \hat{\lambda} &= -(AP^* A^T)^{-1} A \bar{q} - (AP^* A^T)^{-1} AK(y - C \bar{q}). \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Подставляя (П.13) в (П.12), получаем:

$$\hat{q} = [I_q - P^* A^T (AP^* A^T)^{-1} A] (\bar{q} + K(y - C \bar{q})), \quad (\text{П.14})$$

где  $I_q$  - единичная матрица размером  $(n \times n)$  или же

$$\hat{q} = T (\bar{q} + K(y - C \bar{q})), \quad (\text{П.15})$$

где

$$T = I_q - P^* A^T (AP^* A^T)^{-1} A.$$

Теперь найдем ковариационную матрицу оценок. Используем свойство ковариационного оператора



$$D(AX) = AD(X)A^T, \quad (\text{П.16})$$

где  $A$  - постоянная матрица размером  $(l \times k)$ ;  
 $X$  - случайный вектор размером  $(k \times 1)$

$$\begin{aligned} D(\hat{q}) &= \varepsilon \{ (\hat{q} - q)(\hat{q} - q)^T \} = \\ &= TD(\bar{q} + K(y - C\bar{q}))^T = \\ &= TP^*T^T \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

$$P = TP^*T^T.$$

T. Teder

### Statistical Balance Models of CTP

#### Abstract

The problems of continuous technological process (CTP) state estimation using statistical balance models are presented. A new state estimation algorithm using a priori information about CTP's state is proposed.

ЭКСПРЕСС-ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ КОМПЕНСАЦИОННОГО  
УПРАВЛЕНИЯ

## Введение

Проблематика настоящей статьи принадлежит к области управления многостадийными дискретными технологическими процессами (ТП). Эти ТП применяются широко в электронной и электротехнической промышленности, где для них характерен большой разброс параметров полуфабрикатов (ПФ) и готовых изделий. Соответственно важной задачей при управлении подобными ТП является задача уменьшения разброса. Для решения этой задачи применяются различные системы управления, в том числе рассматриваемые в настоящей статье системы компенсационного управления (СКУ).

СКУ предназначена для уменьшения разброса в условиях групповой обработки. Она функционирует между двумя последовательными стадиями ТП и осуществляет перераспределение поступивших групп полуфабрикатов на более однородные и определение режима обработки для перераспределенных групп. В [1-4] разработаны система алгоритмов и программное обеспечение для оптимизации СКУ. В данной статье предлагается экспресс-процедура, предназначенная для быстрой ориентировочной оценки оптимальных параметров и базирующаяся на графико-аналитическом решении задачи оптимизации.

## Задача оптимизации СКУ

Рассматривается СКУ с входом  $y$ , режимом  $x$  и выходом  $z$ . Поступившие в СКУ группы ПФ, распределенные в заданном допуске  $\varepsilon_y \leq y \leq \lambda_y$  с плотностью  $p_y(y)$  сортируются по  $m$  накопителям согласно некоторому разбиению отрезка  $[\varepsilon_y, \lambda_y]$  на  $m$  интервалов  $[y_{t-1}, y_t], y_{t-1} < y_t$ . Если в некотором  $t$ -м накопителе накопилось достаточное количество ПФ, то из них



комплектуется новая группа, которая обрабатывается по фиксированному режиму  $x_t$ , зависящему только от  $t$ . Компенсирующие режимы  $x_t, t = \overline{1, m}$  выбираются таким образом, чтобы происходило сжатие распределения выхода  $w$  в заданный допуск  $[\varepsilon_w, \lambda_w]$  и увеличение вероятности бездефектности  $P_m$  полуфабрикатов на выходе.

В типичном случае, когда связь  $w$  с  $x$  и  $y$  описана нелинейной моделью с аддитивным гауссовским шумом:

$$\begin{aligned} w &= z + \eta; \quad \eta \sim N(0, \sigma_\eta); \\ z &= E\{w | x, y\} = g(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

$P_m$  выражается в следующем виде:

$$P_m = \sum_{t=1}^m \int_{y_{t-1}}^{y_t} \left[ F\left(\frac{\lambda_w - z}{\sigma_\eta}\right) - F\left(\frac{\varepsilon_w - z}{\sigma_\eta}\right) \right] p_y(y) dy, \quad (2)$$

где  $F(\cdot)$  является гауссовской функцией распределения.

Таким образом, задача оптимизации СКУ состоит в целенаправленном выборе числа накопителей  $m$ , границ интервалов  $\{y_t\}$  и режимов обработки  $\{x_t\}$ . Поскольку увеличение  $m$  обуславливает удлинение времени хранения ПФ в накопителях, а это приводит к увеличению затрат, связанных с их хранением, то оптимизацию СКУ необходимо произвести по экономическому критерию. В работе [5] предложен критерий максимизации суммарного дохода в следующем виде:

$$q = c_1 P_m - c_2 m, \quad (3)$$

где положительные коэффициенты  $c_1, c_2$  зависят от экономических показателей. Согласно (3), задачу оптимизации целесообразно ставить как двухуровневую, причем на верхнем уровне определяется оптимальное число накопителей  $m^*$  по критерию  $q \rightarrow \max$  с применением максимальных вероятностей  $P_m^*$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , а на нижнем уровне определяются оптимальные границы  $\{y_t^*\}$  и режимы  $\{x_t^*\}$  по критерию максимизации вероятности  $P_m \rightarrow \max$ .

#### Процедуры оптимизации

Для оптимизации нелинейных СКУ разработаны система алгоритмов и комплект программ. Система алгоритмов включает кроме процедур численной оптимизации и специальных по-



исковых процедур формулы и процедуры приближенной оптимизации, базирующиеся на аналитических решениях субоптимальных задач оптимизации. Эти формулы и процедуры, изложенные, например, в [3], являются относительно простыми, но все-таки слишком сложными для непосредственного вычисления оптимальных параметров. Сложность процедур связана в основном с необходимостью оперировать с различными входными распределениями  $p_y(y)$ . С другой стороны, часто в практике точная форма  $p_y(y)$  не известна, а известна лишь оценка  $p_y(y)$  в виде гистограммы. Исходя из вышесказанного, представлялось целесообразным разработать экспресс-процедуру, которая позволяет непосредственно, хотя и ориентировочно определить оптимальные значения параметров СКУ, исходя из гистограммы  $\{p_i\}$  с числом интервалов  $k$  и с шириной интервалов  $h = (\lambda_y - \varepsilon_y)/k$  входной плотности  $p_y(y)$ . Обычно для случайного входа  $y$  известны (или легко вычислимы по гистограмме) монотонные характеристики - среднее значение  $\mu$ , дисперсия  $\sigma^2$ , коэффициент асимметрии  $\gamma_a$  и коэффициент эксцесса  $\gamma_e$ . Учитывая, что наиболее распространенными при описании технологических объектов являются монотонные модели, экспресс-процедура разработана для монотонных нелинейных моделей в виде (I) и отдельно для линейной модели с  $z = g(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$  в (I).

Методика для линейной модели (ЭОЛМ) позволяет определить оценки оптимального числа интервалов  $m^*$ , границ интервалов  $y_t^*$ ,  $t=1, m^*-1$  и режимов обработки  $x_t^*$ ,  $t=1, m$  на основе гистограммы  $\{p_i\}$ , входной плотности  $p_y(y)$ , значения стоимостного отношения  $d = c_1/c_2$ , дисперсии остаточного шума  $\sigma_\eta^2$ , технологических границ  $\varepsilon_w, \lambda_w$ , выхода  $w$ , моментных характеристик  $\mu, \sigma^2, \gamma_a, \gamma_e$ , входа  $y$  и коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$  линейной модели.

Рассматриваемая экспресс-процедура состоит в выполнении следующих действий:

Шаг 1. Вычисляется центр настройки  $z_0 = (\varepsilon_w + \lambda_w)/2$  и полуширина допуска выхода  $\delta = (\lambda_w - \varepsilon_w)/2$ .

Шаг 2. Вычисляется  $m^*$  по следующим зависимостям:

$$K_0 = \xi \cdot \tau \cdot \exp(-\tau^2/2) / [(1-\xi)\sqrt{2\pi}]$$

$$\tau = \gamma / \sqrt{1-\xi}; \quad \xi = c^2 \sigma^2 / (c^2 \sigma^2 + \sigma_\eta^2)$$



$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1,576 + 0,160|\gamma_d| - 0,143\gamma_e - 0,020|\gamma_d|\gamma_e + 0,005\gamma_d^2 + 0,056\gamma_e^2 \\
\alpha_2 &= -3,000 - 0,262|\gamma_d| + 0,383\gamma_e + 0,098|\gamma_d|\gamma_e + 0,004\gamma_d^2 - 0,120\gamma_e^2 \quad (4) \\
m &= \exp\{[\ln(d/K_0) - \alpha_1]/\alpha_2\} + (0,5\gamma - 0,52)\xi / (1 - \xi); \\
m^* &= \text{int}(m),
\end{aligned}$$

где  $\text{int}(\cdot)$  - целая часть числа;

$\sigma^2, \gamma_d, \gamma_e$  - моментные характеристики для  $y$ .

Шаг 3. Конструируется на основе гистограммы  $\{p_i\}$ , входной плотности  $p_y(y)$  график функции  $\bar{\Phi}(y) = \sum_{\varepsilon_y}^y p_y(y) dy$ .

Для этого вычисляются  $\bar{p}_i = \sqrt{p_i}$  для  $i = \overline{1, k}$ . Гистограмма  $\{\bar{p}_i\}$  с числом интервалов  $k$  и с шагом  $h$  является аппроксимирующей гистограммой для функции  $\sqrt{p_y(y)}$ . Затем вычисляются значения  $\bar{\Phi}_i$  функции  $\bar{\Phi}(y)$  в точках  $y_i = \varepsilon_i + ih$ ,  $i = \overline{1, k}$  по рекуррентному соотношению:  $\bar{\Phi}_i = \bar{\Phi}_{i-1} + \bar{p}_i$ ;  $\bar{\Phi}_0 = \bar{\Phi}(\varepsilon_y) \equiv 0$ . Отметим, что  $\bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}(\varepsilon_y + kh) = \bar{\Phi}(\lambda_y)$ . Аппроксимирующий график функции  $\bar{\Phi}(y)$  от аргумента  $y$  получается путем соединения нанесенных на  $y, \bar{\Phi}$  плоскость точек  $(y_i, \bar{\Phi}_i)$ ,  $i = \overline{0, k}$  сглаженной от руки кривой. Конструирование  $\bar{\Phi}(y)$  иллюстрирует рис. 1.

Шаг 4. Определяются границы интервалов  $y_t^*$ ,  $t = \overline{1, m^* - 1}$  на основе графика функции  $\bar{\Phi}(y)$ . Для этого отрезок  $[0, \bar{\Phi}]$  на оси  $\bar{\Phi}$  разбивается на  $m^*$  равнодлинных интервалов. Полученные  $m^* - 1$  границы интервалов со значениями  ${}^t\bar{\Phi} = t\bar{\Phi}_k/m^*$ ,  $t = \overline{1, m^* - 1}$  наносятся на кривую  $\bar{\Phi}(y)$  и определяются соответствующие им значения аргумента  $y$ . Искомая граница  $y_t^*$  является соответствующей значению  ${}^t\bar{\Phi}$  значению  $y$  на кривой  $\bar{\Phi}(y)$ . Определение  $\{y_t^*\}$  на основе графика  $\bar{\Phi}(y)$  при  $m^* = 4$  представлено на рис. 1.

Шаг 5. Определяются оптимальные режимы  $x_t^*$ ,  $t = \overline{1, m^*}$ . Для этого наносятся оптимальные границы  $\{y_t^*\}$  на гистограмму  $\{p_i\}$  входной плотности и "на глаз" оцениваются центры тяжести  $\bar{y}_t$  полученных интервалов  $[y_{t-1}^*, y_t^*]$ . Затем вычисляются оптимальные режимы  $x_t^* = (a - c\bar{y}_t)/b$  на основе полученных значений  $\{\bar{y}_t\}$ .

Методика для нелинейных моделей позволяет определить оценки оптимальных значений параметров  $m^*, \{y_t^*\}, \{x_t^*\}$  СКУ

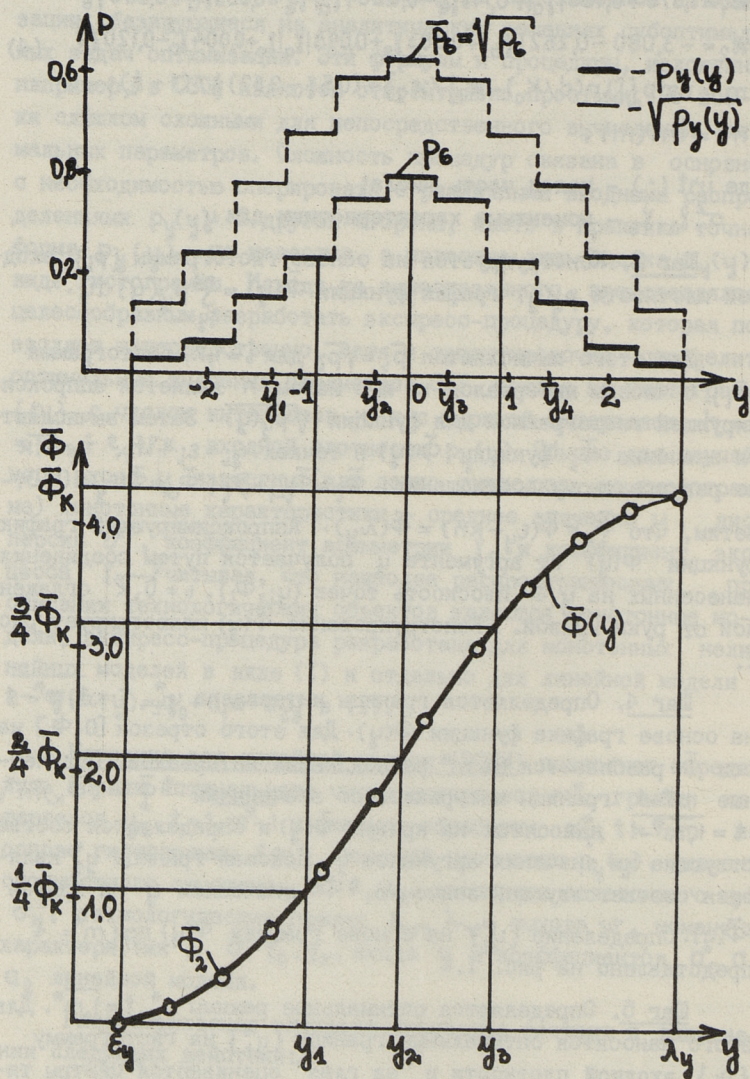


Рис. 1. Определение  $y_t, \bar{y}_t$  при линейной модели и  $m^* = 4$ .



на основе гистограммы  $\{p_i\}$ , входной плотности, значений  $\sigma_{\eta}^2$ ,  $d$ ,  $\epsilon_w$ ,  $\lambda_w$ , моментных характеристик  $\mu$ ,  $\sigma^2$ ,  $\gamma_a$ ,  $\gamma_e$  входа  $y$  и нелинейной модели  $E\{w|x,y\} = z = g(x,y)$ . Поскольку процедура для нелинейных моделей во многом аналогична процедуре для линейной модели (ЭОЛМ), то действия, описанные более подробно в ЭОЛМ, отметим здесь коротко.

Таким образом, экспресс-процедура для нелинейных моделей состоит в выполнении следующих действий:

Шаг 1. Вычисляется  $z_0$  и  $\delta_1$ , согласно шагу I из ЭОЛМ.

Шаг 2. Определяется аналитический вид функции  $C(y) = g'_y[g^{-1}(z_0, y), y]$ , характеризующий нелинейную модель  $z = g(x, y)$  в процедурах оптимизации СКУ. Для этого выводится первая производная функции  $g(x, y)$  по  $y$   $g'_y(x, y)$  и затем заменяется в выражении  $g'_y(x, y)$  аргумент  $x$  функцией  $g^{-1}_x(z_0, y)$  от  $y$ . Функция  $g^{-1}_x(z_0, y)$  является обратной функцией модели  $z = g(x, y)$  по  $x$ , где значение  $z$  фиксировано в центре настройки  $z_0$ .

Шаг 3. Определяются моментные характеристики  $\sigma^2(\tilde{y})$ ,  $\gamma_a(\tilde{y})$ ,  $\gamma_e(\tilde{y})$  нелинейной функции  $\tilde{y} = \int C(y) dy$ . Для этого выражаются аналитически первая и вторая производная  $C(y)$  по  $y$ , а затем вычисляются их значения и значение  $C(y)$  при  $y = \mu$ . Моментные характеристики  $\sigma^2(\tilde{y})$ ,  $\gamma_a(\tilde{y})$  и  $\gamma_e(\tilde{y})$  вычисляются по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{y}) &= C_0^2 \sigma^2 + C_0 \cdot C_1 \cdot \sigma^3 \gamma_a + [C_1^2/4 + C_0 \cdot C_2/3] \sigma^2 \gamma_e + \\ &\quad + [C_1^2/2 + C_0 \cdot C_2] \sigma^4; \\ \gamma_a(\tilde{y}) &= \{C_0^3 \sigma^3 \gamma_a + 1,5 C_0^2 C_1 \cdot \sigma^4 (\gamma_e + 2)\} \sigma^3 (\tilde{\gamma}_1); \\ \gamma_e(\tilde{y}) &= \{C_0^4 \sigma^4 (\gamma_e + 3)\} / \sigma^4(\tilde{y}) - 3; \\ C_0 &= C(\mu); C_1 = C'(\mu); C_2 = C''(\mu), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mu$ ,  $\sigma^2$ ,  $\gamma_a$ ,  $\gamma_e$  являются моментными характеристиками  $y$ .

Шаг 4. Вычисляются оптимальное число интервалов  $m^*$  по (4), где в качестве  $\sigma^2$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_e$  применяются моментные характеристики для  $\tilde{y}$ :  $\sigma^2 = \sigma^2(\tilde{y})$ ,  $\gamma_a = \gamma_a(\tilde{y})$ ,  $\gamma_e = \gamma_e(\tilde{y})$ .

Шаг 5. Конструируется график функции

$$\Phi(y) = \int_{\tilde{y}_y}^y C(y) \sqrt{p_y(y)} dy / h.$$

С этой целью определяется гистограмма  $\{\bar{p}_i\}$  функции  $C(y)$ .

$\cdot \sqrt{p_y(y)}$  путем вычисления значений  $\bar{p}_i = \sqrt{p_i} \cdot C(y_i)$  для

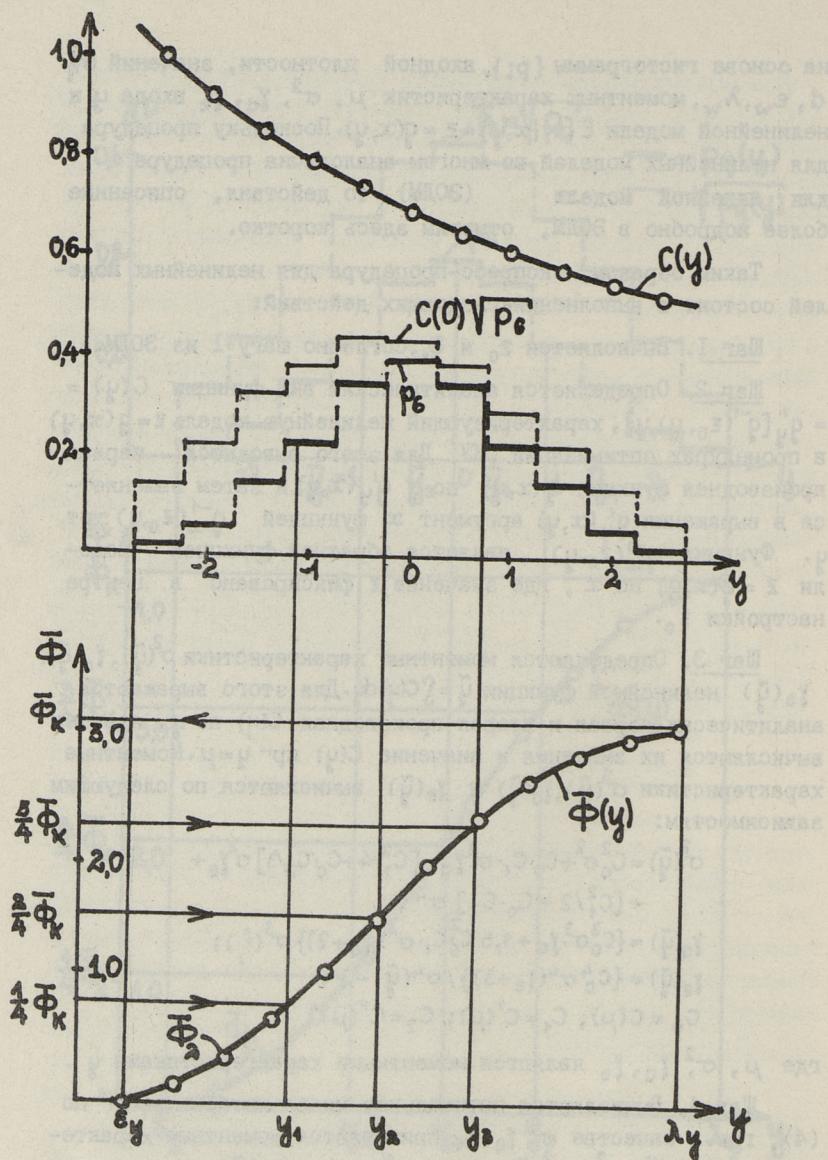


Рис. 2. Определение  $y_t$  при нелинейной модели и  $m^* = 4$ .



$i = \overline{1, k}$ . Применяемые здесь  $y_i$  являются средними точками интервалов гистограммы:  $y_i = \varepsilon_y - 0,5h + ih, i = \overline{1, k}$ . Затем определяется на основе  $\{\bar{p}_i\}$  график функции  $\bar{\Phi}(y)$ , согласно шагу 3 из ЭОЛМ. Конструирование графика функции  $\bar{\Phi}(y)$  при нелинейной модели иллюстрирует рис. 2.

Шаг 6. Определяются оптимальные границы  $\{y_t^*\}$  на основе графика функции  $\bar{\Phi}(y)$ , согласно шагу 4 из ЭОЛМ.

Шаг 7. Определяются оптимальные режимы  $\{x_t^*\}$ . Для этого определяются центры тяжести  $\bar{y}_t$  интервалов аналогично шагу 5 из ЭОЛМ, а затем вычисляются  $x_t^* = g_x^{-1}(z_0, \bar{y}_t)$ .

Точность экспресс-оптимизации. Результаты практического применения экспресс-процедуры позволяют заключить, что процедура как для линейной, так и для нелинейных моделей дает возможность простого и быстрого "ориентировочного прикидывания" оценки решения задачи оптимизации СКУ. При этом, во многих случаях, получаемая оценка решения является достаточно точной. Например, ошибка вычисляемой по экспресс-процедуре оценки не превышает единицу, и вероятность возникновения такой ошибки изменяется в пределах от 0,2 до 4 %.

Точность определенных по экспресс-процедуре оптимальных значений  $\{y_t^*\}$  и  $\{x_t^*\}$  определяется точностью гистограммы входной плотности. В предположении, что ошибки при оценке относительных частот  $\{p_i\}, i = \overline{1, k}$  малы, можно точность оценок  $\{y_t^*\}, \{x_t^*\}$  считать хорошей при  $k \geq 2m^*$ . При числе интервалов гистограммы  $k \leq m^*$  оценки  $\{y_t^*\}, \{x_t^*\}$  являются весьма грубыми. В среднем можно сказать, что для  $k > m^*$  ошибка не превышает 10 %.

Точность экспресс-процедуры в частности характеризует представленное на рис. 1 определение  $\{y_t^*\}$  и  $\{\bar{y}_t\}$  при  $m^* = 4$ ,  $\varepsilon_y = -2,75$ ,  $\lambda_y = 2,75$  и при гистограмме  $\{p_i\}$  гауссовской нормированной входной плотности с числом интервалов  $k = 11$  и с шагом  $h = 0,5$ . Полученные на рис. 1 значения  $y_t^*, t = \overline{1, 3}$  и  $\bar{y}_t, t = \overline{1, 4}$  достаточно хорошо согласуются со значениями  $y_1 = -0,95; y_2 = 0,00; y_3 = 0,95; \bar{y}_1 = -1,49; \bar{y}_2 = -0,44; \bar{y}_3 = 0,44; \bar{y}_4 = 1,49$ , вычисленными по расчетным формулам для  $m^* = 4$  и гауссовского нормированного распределения.



## Л и т е р а т у р а

1. К и й т а м А.А. Приближенная оптимизация алгоритмов компенсационного управления для многостадийных технологических процессов II // Автоматика и телемеханика. - 1981. № 10. - С. 177-182.

2. К и й т а м А.А., С а к с Э.К. Приближенная оптимизация алгоритмов компенсационного управления с режимными ограничениями для многостадийных технологических процессов // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. -1983. - № 550. - С. 55-65.

3. К и й т а м А.А., С а к с Э.К. Приближенная оптимизация монотонных нелинейных систем компенсационного управления для многостадийных технологических процессов //Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1985. - № 592. - С. 187-194.

4. С а к с Э.К. Программная реализация совокупности процедур оптимизации систем компенсационного управления // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1984. - № 576. - С. 51-61.

5. К и й т а м А.А. Приближенная оптимизация алгоритмов компенсационного управления для многостадийных технологических процессов I // Автоматика и телемеханика. - 1981.- № 8. - С. 172-179.

A. Kiitam, E. Saks

### Express-Optimization of Compensational Control Systems

#### Abstract

The paper is concerned with optimal design of compensational control systems for a multi-stage technological process. Express design procedure for quick approximate estimation of optimal parameters of the system is proposed. The procedure, developed for linear and monotonous non-linear models with additive noise, is based on graphical techniques using histogram and simplified computation formulas. Accuracy of express design is discussed. Two examples are presented.



## АСТАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ФАП С ЦИФРОВЫМ ИНТЕГРАТОРОМ

## I. Введение

Астатическая система фазовой автоподстройки (ФАП) третьего порядка нашла свое рассмотрение в нескольких работах, например, в статьях [1, 2, 6]. Однако в этих работах не уделено внимания проблемам астатической системы ФАП, в них просто принято, что такая система уже существует. В настоящей статье рассматриваются вопросы реализации астатической системы ФАП при помощи цифрового интегратора (ЦИ), построенного на базе реверсивного счетчика.

## 2. Описание системы

Система ФАП состоит из фазового детектора ФД, фильтра нижних частот ФНЧ и управляемого генератора УГ (рис. 1), которые характеризуются коэффициентом передачи  $K_{ФД}$ , передаточной функцией  $F(s)$  и коэффициентом передачи  $K_{УГ}$  соответственно. Как принято в работах [1, 2, 3], передаточная

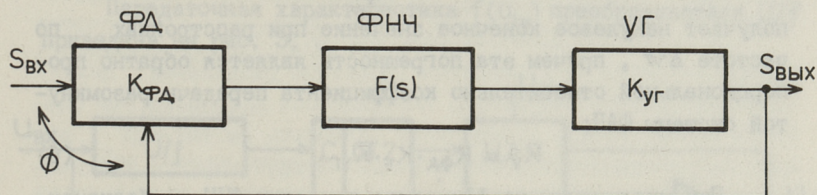


Рис. 1. Структура системы ФАП.

функция ФНЧ имеет следующую форму в астатической системе ФАП третьего порядка:

$$F(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{T_F s (\tau_3 s + 1)}, \quad (1)$$

где  $\tau_2$  и  $\tau_3$  - постоянные времени аperiodических звеньев,  
 $T_F$  - постоянная времени интегрирующего звена.

Выражение (1) показывает, что ФНЧ содержит идеальный интегратор с передаточной функцией  $1/T_F s$ . Именно благодаря существованию этого интегратора, система ФАП обладает свойством астатизма, которое в статике ( $t \rightarrow \infty$ ) обеспечивает нулевое значение фазовой ошибки ( $\phi(\infty=0)$ ) при любых начальных значениях расстройки по частоте  $\Delta\omega$  в пределах полосы захвата системы.

Однако практическая реализация идеального интегратора средствами аналоговой техники связана с серьезными трудностями и поэтому, как правило, реальный ФНЧ описывается следующей передаточной функцией:

$$F(s) = K_F \frac{\tau_2 s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \quad (2)$$

где  $K_F$  - коэффициент передачи ФНЧ по постоянному току.

В ФНЧ с передаточной функцией (2) вместо идеального интегратора содержится аperiodическое звено

$$W(s) = \frac{K_\Phi}{\tau_1 s + 1} \quad (3)$$

с постоянной времени

$$\tau_1 = K_\Phi \cdot T_F \quad (4)$$

В связи с вышеизложенным, данная система ФАП является по существу статической и ее статическая фазовая погрешность

$$\phi(\infty) = \frac{\Delta\omega}{K_V} \quad (5)$$

получает ненулевое конечное значение при расстройках по частоте  $\Delta\omega$ , причем эта погрешность является обратно пропорциональной относительно коэффициента передачи разомкнутой системы ФАП:

$$K_V = K_{\Phi D} \cdot K_F \cdot K_{УГ} \quad (6)$$

При увеличении коэффициента передачи ФНЧ до бесконечности ( $K_F \rightarrow \infty$ ) как  $K_V$  (6), так и постоянная времени  $\tau_1$  (4) становятся бесконечными, а аperiodическое звено (3) превращается в интегратор с постоянной времени  $T_F$ , и передаточная функция (2) получает форму (1). Из вышеизложенного вытекает, что только включение идеального интегратора в ФНЧ позволяет устранить статическую погрешность фазы (5) при



слежении системы ВАП за изменениями частоты входного сигнала.

### 3. Реализация цифрового интегратора (ЦИ)

Хорошо известны цифровые интеграторы на реверсивных счетчиках [4, 5], которые нашли использование в автоматических системах связи. Например, в книге [4, с. 12 и 159] описаны гибридные системы ФАП, в которых реверсивный счетчик выполняет в ФНЧ функцию медленно действующего накопителя, а параллельно работающая аналоговая часть ФНЧ обеспечивает требуемые динамические характеристики системы. Однако в прецизионных системах ФАП такой подход является неудовлетворительным, поскольку нарушается быстродействие системы из-за отсутствия определенного константного значения постоянной времени счетчикового интегратора, который реагирует только на полярность входного сигнала, но не на его уровень.

Гораздо лучшие результаты обеспечивает усовершенствованный авторами данной статьи цифровой интегратор (ЦИ) (рис. 2), который состоит из реверсивного двоичного счетчика СТ2, тактовая частота  $f(u_{вх})$  которого управляется при помощи входного напряжения  $u_{вх}$ , действующего на входе преобразователя напряжения в частоту  $U/f$ . Детектор знака вырабатывает сигнал направления счета для реверсивного счетчика СТ2. Выходной код СТ2 преобразуется в аналоговое выходное напряжение  $u_{вых}$  при помощи цифроаналогового преобразователя ЦАП и операционного усилителя ОУ.

Передаточная характеристика  $f(u_{вх})$  преобразователя  $U/f$  приведена на рис. 3.

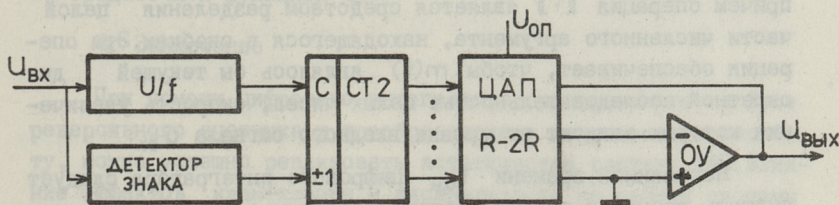


Рис. 2. Структурная схема цифрового интегратора (ЦИ).

Выходной сигнал ЦИ может быть представлен в следующей математической форме:

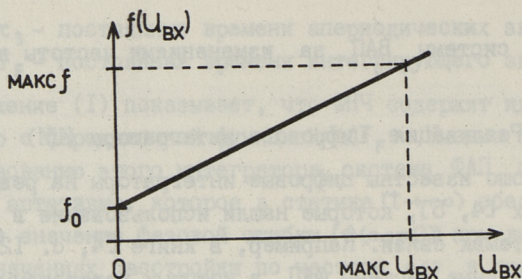


Рис. 3. Передаточная характеристика преобразователя напряжения в частоту ( $U/f$ ).

$$u_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^{m = \llbracket t/T(u_{\text{bx}}) \rrbracket} \text{sign}\{u_{\text{bx}}(t)\} (\Delta U)_i, \quad (7)$$

где  $t$  - текущее время,  
и период следования тактовых импульсов

$$T(u_{\text{bx}}) = \frac{1}{f(u_{\text{bx}})}. \quad (8)$$

Знаковая функция

$$\text{sign}\{u_{\text{bx}}(t)\} = \begin{cases} +1, & \text{при } u_{\text{bx}} > 0 \\ -1, & \text{при } u_{\text{bx}} < 0 \end{cases} \quad (9)$$

определяет направление (суммирование или вычитание) накопления элементарных приращений

$$(\Delta U)_i = \frac{U_{\text{оп}}}{2^n} = \text{const}, \quad (10)$$

где  $U_{\text{оп}}$  - опорное напряжение ЦАП;  
 $n$  - число двоичных разрядов ЦИ,

причем операция  $\llbracket \cdot \rrbracket$  является средством разделения целой части численного аргумента, находящегося в скобках. Эта операция обеспечивает, чтобы  $m(t)$  являлось бы текущей дискретной последовательностью целых чисел, скорость увеличения которых зависит от уровня входного сигнала  $u_{\text{bx}}$ .

Постоянной времени  $T_{\text{ци}}$  цифрового интегратора следует считать время, в течение которого выходное напряжение становится равным входному напряжению. Приравнивая в выражении (7)  $u_{\text{вых}} = u_{\text{bx}}$  и  $t = T_{\text{ци}}$ , получим:

$$T_{\text{ци}} = \frac{u_{\text{bx}}}{\Delta U} T(u_{\text{bx}}). \quad (11)$$



Поскольку постоянная времени является параметром ЦИ, его значение не должно зависеть от уровня входного сигнала. Поэтому необходимо, чтобы произведение

$$u_{bx} \cdot T(u_{bx}) = \frac{u_{bx}}{f(u_{bx})} = \text{const}, \quad (12)$$

то есть частота  $f(u_{bx})$  преобразователя  $U/f$  должна быть в линейной зависимости от напряжения  $u_{bx}$  на его входе. Эта зависимость имеет в общем случае следующую форму (рис. 3):

$$f(u_{bx}) = f_0 + Au_{bx}, \quad (13)$$

где  $A$  - коэффициент преобразования;

$f_0$  - начальная частота при  $u_{bx} = 0$ .

Подставив (13) в выражение (11), получим формулу для определения постоянной времени ЦИ:

$$T_{ци} = \frac{u_{bx}}{\Delta U(f_0 + Au_{bx})} = \frac{1}{\frac{\Delta U}{u_{bx}} f_0 + \Delta U \cdot A}. \quad (14)$$

Отметим, что ввиду наличия члена  $\Delta U / u_{bx} f_0$  в знаменателе формулы (14), постоянная времени  $T_{ци}$  оказывается зависящей от уровня  $u_{bx}$ . С целью устранения этого несовершенства следует добиться, чтобы  $f_0 = 0$ . В таком случае формула (14) получает следующую простую форму:

$$T_{ци} = \frac{1}{\Delta U \cdot A}. \quad (15)$$

Таким образом, выбором значения для  $\Delta U$  и определением коэффициента преобразования  $A$  можно построить цифровой интегратор с требуемой постоянной времени  $T_{ци} = T_F$  для ФНЧ с передаточной функцией (1).

#### 4. Заключение

При помощи цифрового интегратора, построенного на базе реверсивного счетчика и преобразователя напряжения в частоту, можно успешно реализовать астатическую систему ФАП. Влияние эффектов квантизации и дискретизации на работу системы ФАП будет изложено в последующих работах автора этой статьи.

#### Л и т е р а т у р а

И. М и н М. Фазовая автоподстройка координатных сигналов в векторных измерительных преобразователях // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1965. - № 592. - С. 103-110.

2. Л а н д Р., М и н М. Переходные процессы в неавтономной системе ФАП третьего порядка // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1986. - № 629. - С. 71-79.

3. М и н М. Помехоустойчивость и динамика фазовых процессов в синхронных измерительных преобразователях // Дисс. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. - Таллин, 1983. - 264 с.

4. Системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации / В.В. Шахгильдян, А.А. Ляховкин, В.А. Корякин и др. / Под ред. В.В. Шахгильдяна - Связь: М., 1979. - 224 с.

5. Фазовая синхронизация / Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстины. - М.: Связь, 1975. - 288 с.

6. M i n M., R o n k A., S i l l a m a H. Adaptive control of frequency and phase in vector analyzer // 5th International IMEKO Symposium "Intelligent Measurement". - Jena (GDR), June 10-14, 1986. - N 1, vol. 2, -P. 200-202.

R. Land, M. Min

An Astatic PLL with a Digital Integrator

Abstract

The problems of designing an astatic third order phase locked loop (PLL) are discussed in this paper. As it is shown, only the use of a digital integrator in the astatic PLL gives good results. A digital integrator comprising a reversible binary counter and a voltage-to-frequency converter acting as a clock signal source, is proposed.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАПАЗОНА И ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ  
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ВЯЗКОСТИ

## I. Введение

Важным показателем технологического совершенства измерительного преобразователя является ширина диапазона измерения. Преобразователь одного типа может теоретически, при разных типовых размерах, покрыть очень широкий диапазон измерения, однако конкретный экземпляр — только часть его [1]. У колебательного преобразователя (КП) вязкости ширина диапазона зависит существенно от выбранного выходного сигнала КП. Известно [2], что возведение в квадрат переменных составляющих выходных сигналов значительно повышает линейность характеристик КП и расширяет диапазон измерения. Методика определения диапазона и параметров КП вязкости, которая излагается ниже, исходит именно из возведенных в квадрат переменных составляющих выходных сигналов КП.

## 2. Основные положения

На практике находят место два случая:

- 1) КП уже существует и при заданной точности измерения требуется определить диапазон измерения;
- 2) диапазон и точность измерения заданы, а определению подлежат параметры КП.

В первом случае параметры КП известны или их можно определить. Собственную частоту  $\omega_0$ , жесткость  $C$ , площадь соприкосновения зонда с жидкостью  $S$  и начальную добротность  $Q_0$  мы можем измерить, приведенную площадь  $\bar{S} = S/m$ , где  $m$  — колеблющаяся масса, вычислить. Первым этапом при определении диапазона КП, является нахождение его крайних зна-

чений диапазона -  $\rho\eta_{\min}$  и  $\rho\eta_{\max}$ , где  $\rho$  - плотность жидкости,  $\eta$  - динамическая вязкость. На практике по добротности непогруженного КП происходит установка нуля или контрольной точки шкалы прибора. Для того, чтобы влияние изменения  $Q_0$  на показания прибора было как можно меньшим, необходимо выбрать  $\rho\eta_{\min}$  намного большим, чем эквивалентное по своему затухающему действию с  $Q_0\rho\eta_{\text{екв}}$ , т.е.

$$\rho\eta_{\min} \gg \rho\eta_{\text{екв}} \quad (1)$$

Путем уравнивания выходного сигнала КП при  $\rho\eta = 0$  и  $Q_0 = \text{const}$  с его же выходным сигналом при  $\rho\eta_{\text{екв}}$  и  $Q_0 \rightarrow \infty$  можем показать, что

$$\rho\eta_{\text{екв}} = \frac{2\omega_0}{5^2 Q_0^2} \quad (2)$$

Если на практике условие (1) невозможно соблюсти, а намереваются измерить вязкости близкие к  $\rho\eta_{\min}$ , то для устранения влияния отклонений  $Q_0$  от ее первоначального значения пригоден способ стабилизации и нормализации добротности КП при помощи обратной связи по скорости зонда [3].

Диапазон измерения для всех выходных сигналов КП ограничивается со стороны больших вязкостей уменьшением относительной чувствительности  $S_{\alpha/\rho\eta}$  выходного сигнала  $\alpha$  КП к измеряемой вязкости  $\rho\eta$  (см. рис. 1). Относительные изменения  $\alpha$  и  $\rho\eta$  связаны между собой формулой [4]:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = S_{\alpha/\rho\eta} \cdot \frac{\Delta\rho\eta}{\rho\eta}, \quad (3)$$

где  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\rho\eta$  - абсолютные изменения соответственно  $\alpha$  и  $\rho\eta$ .

При помощи этой формулы вычисляется, при заданных  $\Delta\alpha/\alpha$  и  $\Delta\rho\eta/\rho\eta$ , требуемое значение чувствительности  $S_{\alpha/\rho\eta}$ , а по последней в свою очередь определяется с рис. 1 приведенная вязкость  $\bar{\rho\eta}_{\max}$ , которая связана с  $\rho\eta_{\max}$  формулой:

$$\rho\eta_{\max} = \frac{2\omega_0}{5^2} \bar{\rho\eta}_{\max} \quad (4)$$

Во втором случае, при разработке новых КП,  $\rho\eta_{\min}$  и  $\rho\eta_{\max}$  заданы, а значение добротности  $Q_0$  неизвестно - ее можно только оценить по аналогичным конструктивным решениям КП и ориентировочно вычислить  $\rho\eta_{\text{екв}}$ .  $\bar{\rho\eta}_{\max}$  определяется как и в первом случае - из формулы (3) получают  $S_{\alpha/\rho\eta}$  и по



рис. 1 находят  $\bar{\rho}\eta_{\max}$ . Совокупность конструктивных параметров КП получаем переписывая формулу (4) в виде:

$$\frac{\bar{s}^2}{2\omega} = \frac{\bar{\rho}\eta_{\max}}{\rho\eta_{\max}}. \quad (5)$$

Развязка этих параметров для конкретного КП зависит от требований, предъявляемых к механической прочности, формы, размеров и материалов механической колебательной системы КП, а также от условий его эксплуатации.

Следующим этапом определения диапазона КП является разбиение диапазона, ограниченного значениями  $\rho\eta_{\min}$  и  $\rho\eta_{\max}$ , на поддиапазоны. Целью разбиения является получение поддиапазонов, у которых погрешность от нелинейности характеристик КП не превышает заданное значение  $\varepsilon_{\text{зад}}$ , которое определяет расположение кривых начальных и конечных точек (соответственно  $\bar{\rho}\eta_{\text{н}}$  и  $\bar{\rho}\eta_{\text{к}}$ ) поддиапазонов КП. На рис. 2 приведены кривые  $\bar{\rho}\eta_{\text{н}}$ ,  $\bar{\rho}\eta_{\text{к}}$  и  $D = \rho\eta_{\text{к}}/\rho\eta_{\text{н}}$  для определения вязкости по возведенному в квадрат переменному компоненту возбуждающего момента КП при  $\varepsilon_{\text{зад}} = 1\%$ .

Разбиение целесообразно начинать заданием  $D = \rho\eta_{\text{к}}/\rho\eta_{\text{н}}$  для самых больших значений  $\rho\eta$  и по кривой  $D$  определить крайние значения этого поддиапазона. Дальнейшее разбиение диапазона происходит в сторону меньших значений  $\rho\eta$  до  $\rho\eta_{\min}$  при соблюдении условия, что все начальные и конечные точки поддиапазонов должны располагаться между кривыми  $\bar{\rho}\eta_{\text{н}}$  и  $\bar{\rho}\eta_{\text{к}}$ . Общее число поддиапазонов вычисляется по формуле:

$$N \geq \frac{\lg \rho\eta_{\max}/\rho\eta_{\min}}{\lg D_{\min}}, \quad (6)$$

где  $D_{\min}$  - минимальное допустимое значение отношения  $\rho\eta_{\text{к}}/\rho\eta_{\text{н}}$  для поддиапазона.

### 3. Примеры применения

А. Имеется КП с параметрами  $\omega_0 = 480 \text{ с}^{-1}$ ,  $\bar{s} = 0,2 \text{ м} \cdot \text{кг}^{-1}$  и  $Q_0 = 450$ . Для какого диапазона измерения вязкости этот КП пригоден, если вязкость намереваются определить по возбуждающему моменту при постоянной амплитуде колебаний зонда КП?

В первую очередь задаемся значениями  $D_{\min} = 5$  и  $\varepsilon_{\text{зад}} = 1\%$ . При условии  $\rho\eta_{\min} \geq 10\rho\eta_{\text{екв}}$  найдем по формуле (2), что

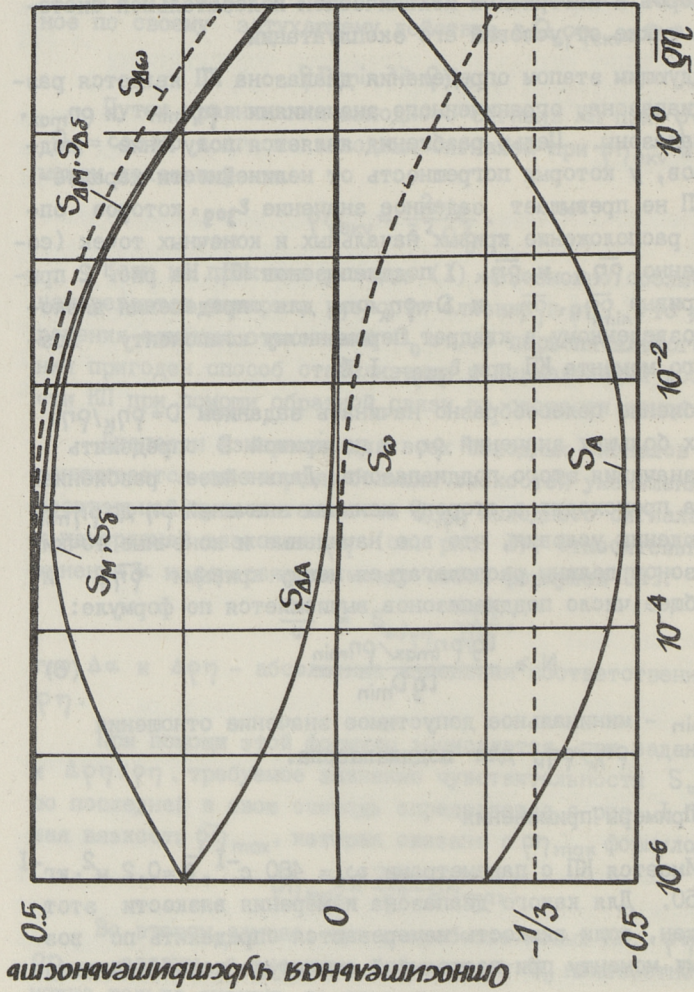


Рис. 1. Относительные чувствительности выходных сигналов КП в зависимости от приведенной вязкости  $\eta$ .  $S_A, S_{\Delta A}, S_M, S_{\Delta M}, S_{\delta}, S_{\Delta \delta}, S_{\omega}, S_{\Delta \omega}$  - относительные чувствительности полного выходного сигнала КП и его переменной составляющей при определении вязкости соответственно по амплитуде колебаний зонна, возбуждающему моменту КП, логарифмическому декременту затухания и резонансной частоте КП.



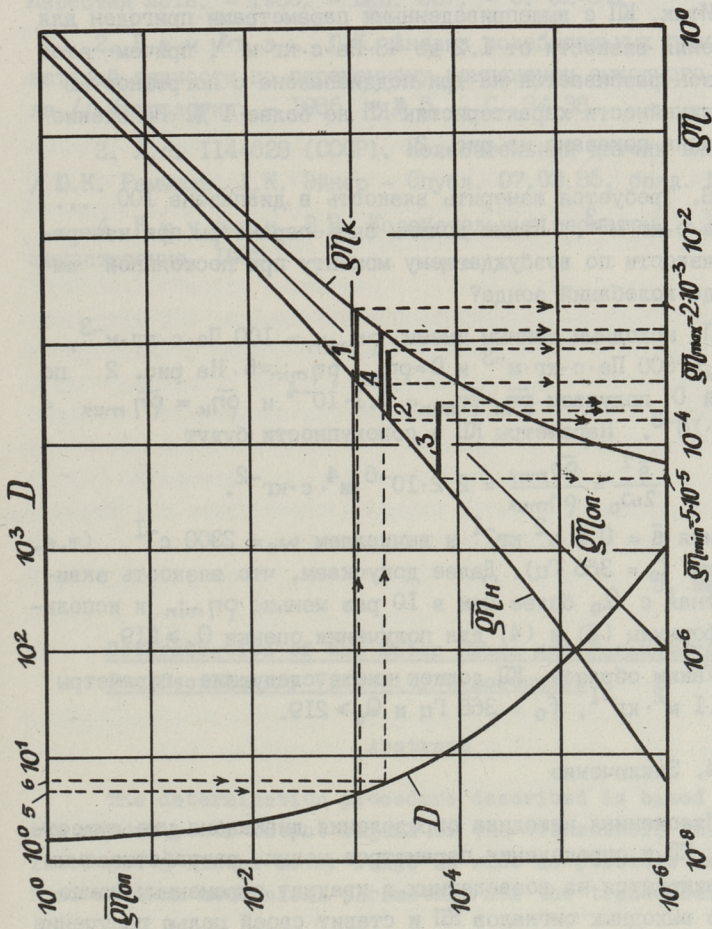


Рис. 2. Определение диапазонов и поддиапазонов при  $\xi_{13} = 1\%$ .

1, 2, 3 - поддиапазоны для примера А;

4 - диапазон для примера Б;

$\overline{\sigma\eta}_{оп}$  - опорная точка, к которой прилагается касательная на кривой зависимости момента возбуждения КП от вязкости жидкости для линейной части заданного участка этой кривой.

$\rho\eta_{\min} \geq 1.2$  Па·с·кг·м<sup>-3</sup>. С рис. 2 определяем, при  $D_{\min} = 5$ , для поддиапазона самых больших значений вязкостей  $\bar{\rho}\eta_k = \bar{\rho}\eta_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}$  и по формуле (4) вычисляем  $\rho\eta_{\max} = 48$  Па·с·кг·м<sup>-3</sup>. Число поддиапазонов  $N \geq 2.3$  получаем при помощи формулы (6).

Итак, КП с вышеприведенными параметрами пригоден для измерения вязкости от 1.2 до 48 Па·с·кг·м<sup>-3</sup>, причем этот диапазон разбивается на три поддиапазона с погрешностью от нелинейности характеристик КП не более 1%. Разбиение диапазона показано на рис. 2.

В. Требуется измерить вязкость в диапазоне 100 ... 600 Па·с·кг·м<sup>-3</sup>. Какие должны быть параметры при измерении вязкости по возбуждающему моменту при постоянной амплитуде колебаний зонда?

По исходным данным имеем  $\rho\eta_{\min} = 100$  Па·с·кг·м<sup>-3</sup>,  $\rho\eta_{\max} = 600$  Па·с·кг·м<sup>-3</sup> и  $D = \rho\eta_{\max} / \rho\eta_{\min} = 6$ . На рис. 2 по кривой  $D$  получаем  $\bar{\rho}\eta_n = \bar{\rho}\eta_{\min} = 2 \cdot 1 \cdot 10^{-4}$  и  $\bar{\rho}\eta_k = \bar{\rho}\eta_{\max} = 1.3 \cdot 10^{-3}$ . Параметры КП в совокупности будут

$$\frac{\bar{s}^2}{2\omega_0} = \frac{\bar{\rho}\eta_{\max}}{\rho\eta_{\max}} = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4 \cdot \text{с} \cdot \text{кг}^{-2}.$$

Задаемся  $\bar{s} = 0,1 \text{ м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$  и вычисляем  $\omega_0 = 2300 \text{ с}^{-1}$  (т.е. частота  $f_0 = 366 \text{ Гц}$ ). Далее допускаем, что вязкость эквивалентная с  $Q_0$  более чем в 10 раз меньше  $\rho\eta_{\min}$  и используем формулы (2) и (4) для получения оценки  $Q_0 \geq 219$ .

Таким образом, КП должен иметь следующие параметры  $\bar{s} = 0,1 \text{ м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$ ,  $f_0 = 366 \text{ Гц}$  и  $Q_0 \geq 219$ .

#### 4. Заключение

Изложенная методика определения диапазона уже существующих КП и определения параметров новых, разрабатываемых КП, базируется на возведенных в квадрат переменных компонентов выходных сигналов КП и ставит своей целью получение наибольшей ширины диапазона с заданной погрешностью от нелинейности характеристик КП. Методика вполне применима, кроме уже рассмотренного выше случая определения вязкости по возбуждающему моменту, и при других выходных сигналах КП.



## Л и т е р а т у р а

1. Б а б и ч е н к о А.Б., К а р п о в В.И., Ч е р н я в с к и й Е.А. Учет диапазона измеряемой величины при оценке информативности измерительных преобразователей // Известия ЛЭТИ. - 1985. - Вып. 357. - С. 82-84.

2. Р е м м е л ь Ю.К. Анализ колебательных преобразователей вязкости по переменному компоненту выходного сигнала // Метрология. - 1986. - № 5. - С. 34-38.

3. А.с. И144028 (СССР). Колебательный датчик вязкости / Ю.К. Реммель, Л.К. Эйнер - Оpubл. 07.03.85, бюлл. № 9.

4. К р у т и н В.Н. Колебательные реометры. - М.: Машиностроение, 1985.

Ü. Remmel

### Determination of the Meter Range and Parameters for Oscillatory Viscosity Transducers

#### Abstract

The determination procedure described is based on the second power output signal of the transducer. The aim is to get a linear meter range as wide as possible and to find optimum mechanical parameters for the transducer.

АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ПОВТОРНОГО РАСЧЕТА ЦЕПИ МЕТОДОМ  
РЕДУКЦИИ: ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТОВ, ПРИКРЕПЛЕННЫХ  
К ОДНОМУ УЗЛУ

I. Введение

В статье, как и в [1] (в настоящем сборнике), рассматриваются вопросы практической реализации на ЭВМ предложенного в [2] способа повторного расчета линейной активной адмитансной цепи, который основывается на применении предложенного в [3] формализованного преобразования звезда-сеть и позволяет 1) повысить точность по сравнению с расчетом цепи на ее матричной модели  $YU=I$  методом Гаусса (LU - разложения) и 2) эффективно учитывать как разреженность, так и латентность цепи.

Согласно [2], каждый цикл расчета цепи включает прямой ход (последовательное исключение узлов цепи) и обратный ход (последовательное вычисление напряжений узлов цепи). В настоящей статье мы рассмотрим (приводя и конкретный пример), как можно описать и выполнить соответствующие одному узлу цепи шаги прямого и обратного хода.

В ходе каждого цикла расчета цепи выполняются те шаги прямого и обратного хода, которые отличаются от соответствующих шагов, выполненных в ходе предыдущих циклов последними. Это означает, что расчеты, связанные с конкретным узлом, выполняются 1) на прямом ходе только тогда, когда найдется инцидентный этому узлу элемент (либо исходной цепи, либо введенный в процессе исключения других узлов), значение параметра которого отличается от значения параметра соответствующего (если не сказать того же) элемента в последней рассчитанной модификации цепи и 2) на обратном ходе тогда, когда действительно нужно найти напря-



жение этого узла (в некоторых случаях только для обеспечения возможности расчета какого-то другого узла). В [1] (в наст. сборнике) мы рассмотрим (приводя и конкретный пример), как можно 1) описать множество возможных различных циклов расчета, 2) организовать (представить) данные и 3) выбрать (построить) и выполнить каждый конкретный цикл расчета.

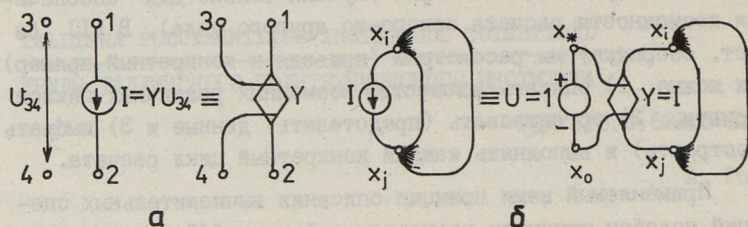
Применяемый нами принцип описания вычислительных операций подобен принципу кодирования формул [4], но, в отличие от последнего, не предусматривает использования кодов каких-то формальных групп математических операций над группами данных. Фактически мы описываем (в объеме нужд вычислительного процесса) фрагменты изменяющейся (в процессе исключения узлов) цепи и возможности (последовательности) их обработки.

Предлагаемая организация данных и вычислений ориентирована на использование средств инструментальной системы программирования SPADE [5], сквозным принципом которой является управление вычислительным процессом данными. Можно надеяться, что в ее подсистеме анализа цепей удастся в рамках решения разных задач (где это нужно) наиболее эффективно (в смысле затрат как на программирование, так и на выполнение расчетов) использовать возможности рассматриваемого способа расчета линейной цепи.

## 2. Основные положения

Согласно [2, 3], каждый элемент адмитансной цепи рассматривается как динзор (управляемый напряжением источник тока), зажимы которого пронумерованы так, как указано на рис. 1, а. Такой элемент цепи представим в виде пары  $d = \{Y; \dot{X}\}$  (которую назовем его описанием), где  $Y$  — проводимость элемента и  $\dot{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  — кортеж (упорядоченное множество) узлов  $x_j$  цепи, к которым присоединены зажимы элемента (в порядке номеров зажимов  $j = 1, 2, 3, 4$ ). Для представления независимых источников тока в виде динзоров, расширяем множество  $X$  узлов исходной цепи введением двух особых узлов  $x_*$  и  $x_0$ , к которым присоединен независимый источник единичного напряжения так, как показано на рис. 1, б. Считаем, что напряжение узла  $x_0$  равно нулю, т.е.  $U_{x_0} = 0$ . Тогда  $U_{x_*} = 1$ .





Фиг. 1. Нумерация зажимов диодора (а) и представление независимого источника тока (б).

Цепь представим (как в [2]) в виде пары  $C=(X D)$ , где  $D$  - множество элементов/диодоров цепи, причем  $|X|=n$  и  $|D|=l$ . Таким образом, мы подчеркиваем особую роль узлов  $x_0$  и  $x_*$  и введенного источника напряжения.

Предположим, что узлы цепи пронумерованы, согласно некоторому взаимно однозначному отображению

$$\alpha : X \rightarrow I = \{1, 2, \dots, n\}, x_* \rightarrow n+1, x_0 \rightarrow n+2.$$

Фактически такое отображение приписывает каждому узлу  $x \in X$  некоторый атрибут, уникальное значение которого можно рассматривать как имя, идентификатор, обозначение, указатель и т.д. Условимся тут в том, что номер (имя и т.д.)  $i \in I$  узла  $x \in X$  используется нами без уточнения его происхождения в случае  $i = \alpha(x)$  и что в дальнейшем допускаем (если это не вызовет недоразумений) использование  $x$  вместо  $i$  и  $i$  вместо  $x$ .

Инцидентные узлу  $x$  в момент его исключения элементы цепи, которые называются монотонно инцидентными  $x$  элементами, образуют первичную звезду (множество)  $S^x$ . В процессе расчета на основе параметров элементов  $d \in S^x$  находят параметры элементов  $d \in S_0^x$ , т.е. элементов вторичной (упрощенной и эквивалентной) звезды. Далее, как при вычислении параметров элементов эквивалентной  $S^x$  и  $S_0^x$  сети (множества)  $M^x$ , так и при расчете напряжения  $U_x$  узла  $x$  исходят из  $S_0^x$ . Преобразование  $S^x \rightarrow S_0^x \rightarrow M^x$  показано на рис. 2. Там же приведено описание процессов расчета узла  $x$  (и преобразуемых в ходе их данных) в виде структуры данных STAR $x$  и необходимых дополнительных данных.

Для каждого элемента цепи существует несколько эквивалентных описаний. Предпочитаемым или  $\Pi$ -описанием монотонно



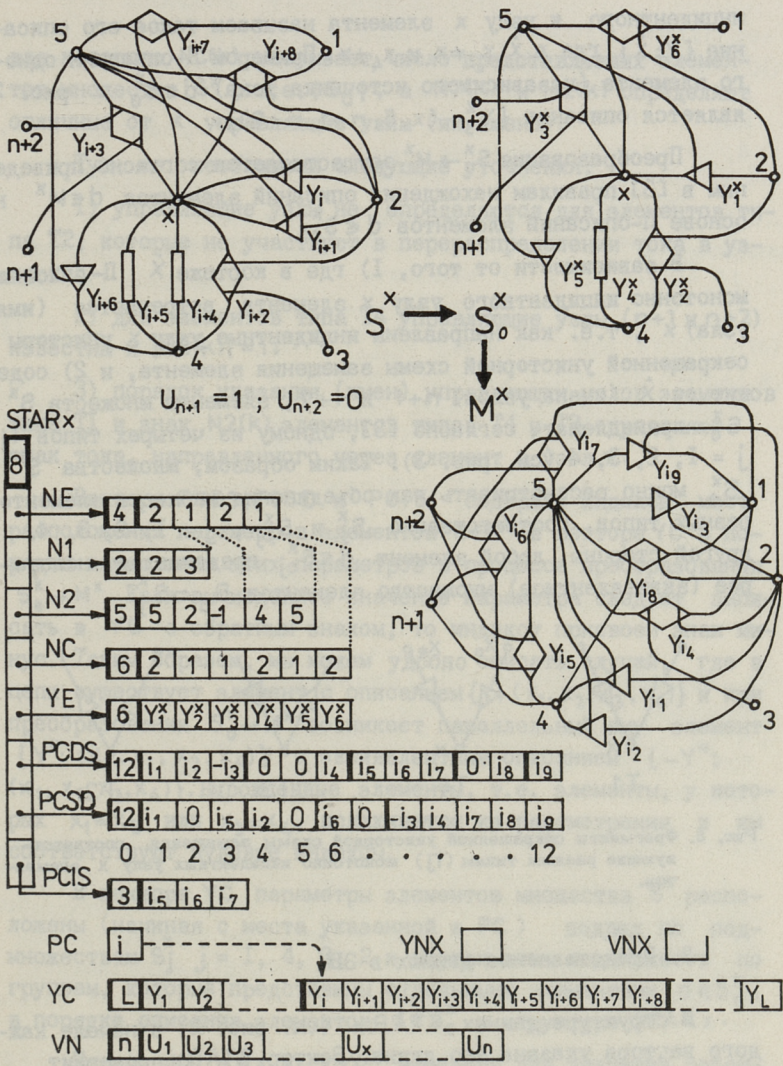


Рис. 2. Преобразование звезда-сеть ( $S^x \rightarrow S_0^x \rightarrow M^x$ ) и структура данных STARx, описывающая как это преобразование (т.е. исключение узла x), так и процесс вычисления напряжения узла x.

инцидентного к узлу  $x$  элемента называем такое его описание  $\{Y; \dot{x}\}$ , где в  $\dot{x}$   $x_2 \neq x$  и  $x_4 \neq x$ . Примером П-описания одного элемента (независимого источника тока)  $d \in S_0^x$  с рис. 2 является описание  $\{Y_3^x; (x, 5, n+1, n+2)\}$ .

Преобразование  $S_0^x \rightarrow M^x$  осуществляется согласно приведенным в [3] правилам нахождения описаний элементов  $d \in M^x$  на основе П-описаний элементов  $d \in S_0^x$ .

В зависимости от того, 1) где в кортеже  $\dot{x}$  П-описания монотонно инцидентного узлу  $x$  элемента встречается (имя узла)  $x$ , т.е. как направлены инцидентные узлу  $x$  унисторы сокращенной унисторной схемы замещения элемента, и 2) содержит ли  $\dot{x}$  (имена узлов)  $n+1$  и  $n+2$ , элементы множеств  $S^x$  и  $S_0^x$  принадлежат, согласно [3], одному из четырех типов  $T_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  (см. рис. 3). Таким образом, множества  $S^x$  и  $S_0^x$  можно рассматривать как объединения множеств элементов разных типов, соответственно  $S_j^x$  и  $S_{0j}^x$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . С другой стороны, любой элемент  $d \in S_{0j}^x$  представляет некоторое (эквивалентное) множество элементов  $S_d \subset S_j^x$ .

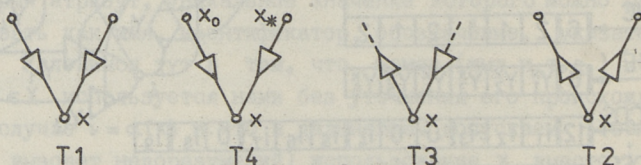


Рис. 3. Фрагменты сокращенной унисторной схемы замещения, соответствующие разным типам ( $T_j$ ) монотонно инцидентных узлу  $x$  элементов.

### 3. Представление данных в ЭВМ

В структуре данных  $STAR_x$  (см. рис. 2) в начале каждого вектора указана его длина. Вектор  $STAR_x$  содержит только указатели - ссылки на векторы самого низкого уровня, содержащие нужные нам данные.

Вектор  $NE$  содержит числа элементов разных типов в  $S_0^x$ , т.е. числа  $l_{xj} = |S_{0j}^x|$  в последовательности  $j = 1, 4, 3, 2$ . Векторы  $N1, N2, N3$  и  $YE$  описывают элементы множеств  $S_{0j}^x$  в той же последовательности  $j = 1, 4, 3, 2$ .  $YE(k)$  предназначено для значения проводимости  $k$ -го элемента  $d \in S_0^x$ .



для которого  $NC(k)$  указывает число представляемых элементов множества  $S^x$ , т.е.  $|S_D|$ , а  $N1(k)$  и  $N2(k)$  определяют отличные от  $x$  управляющие узлы (их имена).

Тут же необходимы следующие уточнения:

1) управляющие узлы не определяются для элементов типа T2, которые не участвуют в перераспределении тока в узле  $x$ ;

2) для элементов типа T4 управляющие узлы ( $n+1$  и  $n+2$ ) известны и  $|N2(k)|=1$ ;

3) порядок указания (имен) управляющих узлов элементов типа T1 и знак  $N2(k)$  элементов типов T4 и T3 определяют знак тока, направленного через элемент в узел  $x$ .

Векторы PCDS, PCSD и PCIS содержат индексы мест расположения параметров элементов  $d \in M^x$  в векторе  $YC$  в порядке вычисления этих параметров в процессе преобразования  $S_0^x \rightarrow M^x$ . Если вычисленное значение параметра следует записать в  $YC$  с обратным знаком, то индексу присвоен знак минус. Таким образом, мы можем удобно описать случай, где в цепи существует элемент с описанием  $\{Y'; (x_1, x_2, x_3, x_4)\}$  и при преобразовании  $S_0^x \rightarrow M^x$  возникает параллельный ему элемент  $\{Y''; (x_2, x_1, x_3, x_4)\}$  с эквивалентным описанием  $\{-Y''; (x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ . Вырожденные элементы, т.е. элементы, у которых  $x_1=x_2$  или  $x_3=x_4$ , исключаются из рассмотрения и им соответствуют нулевые индексы.

В векторе  $YC$  параметры элементов множества  $S^x$  расположены (начиная с места указанной в PC) подряд по подмножествам  $S_j^x$   $j = 1, 4, 3, 2$  и внутри этих подмножеств по группам, которые представимы отдельными элементами  $d \in S_0^x$ , в порядке описания элементов  $d \in S_0^x$  в структуре STARX.

Переменные  $YNX$  и  $VNX$  выделены для значений собственной проводимости и напряжения узла  $x$ . В векторе  $VN$  хранятся вычисленные узловые напряжения ( $VN(x) = U_x$ ).

#### 4. Алгоритмы и вопросы их применения

Для расчетов прямого хода предлагаем четыре алгоритма (FSTi  $i = 1, 2, 3, 4$ ) возможность и целесообразность применения которых зависит от того, а) какие элементы  $d \in S^x$

(их параметры) изменялись по сравнению с последним циклом расчета цепи, где выполнялись вычисления по структуре данных STARx, и б) какими являются числа  $l_{xj}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , т.е. числа элементов разных типов в  $S_0^x$ .

Алгоритм FST1:

1. Вычислить проводимости элементов звезды  $S_0^x$ , т.е. при  $j = 1, 2, \dots$ ,  $Y_E(0)$  вычислить

$$Y_E(j) = \sum_{k=k_1}^{k_2} Y_C(k), \quad (1)$$

где

$$k_1 = PC + \sum_{l=1}^{j-1} NC(l) \quad \text{и} \quad k_2 = PC - 1 + \sum_{l=1}^j NC(l) \quad (\text{считая здесь}$$

и в дальнейшем, что при  $l_2 < l_1 \sum_{l=l_1}^{l_2} ( ) = 0$ ).

2. Вычислить собственную проводимость узла x согласно

$$Y_{NX} = \sum_{k=k_1}^{k_2} Y_E(k), \quad (2)$$

где  $k_1 = 1 + NE(1) + NE(2)$  и  $k_2 = YE(0) - NE(4)$ .

3. Установить  $m = 0$  и выполнить при  $j = 1, 2, \dots, j_2$ , где  $j_2 = YE(0) - 1$  при  $NE(4) = 0$  и  $j_2 = YE(0) - NE(4)$  при  $NE(4) \neq 0$ , следующее:

1) вычислить  $Y_X = Y_E(j) / Y_{NX}$ ; (3)

2) при  $k = k_1, k_1 + 1, \dots, YE(0)$ , где  $k_1 = 1 + NE(1) + NE(2)$  при  $j \leq NE(1) + NE(2)$  и  $k_1 = 1 + j$  в противном случае, установить  $m = m + 1$  и, если  $PCDS(m) \neq 0$ , вычислить проводимости невырожденных элементов (эквивалентной  $S_0^x$ ) сети  $M^x$  согласно

$$Y_C(|PCDS(m)|) = \text{sign}(PCDS(m)) \cdot Y_X \cdot Y_E(k). \quad (4)$$

4. Конец.

Алгоритм FST2 (для которого задается  $Y_{NX} = Y_N(x)$ ):

1. В случае  $NE(2) = 0$  перейти к 3.

2. Установить  $m = NE(1) \cdot (NE(3) + NE(4))$  и выполнить при  $j = NE(1) + 1, NE(1) + 2, \dots, NE(1) + NE(2)$  следующее:

1) вычислить  $Y_E(j)$  согласно (1);



2) вычислить  $YX$  согласно (3);

3) при  $k=k_1, k_1+1, \dots, YE(0)$ , где  $k_1=1+NE(1)+NE(2)$ , установить  $m=m+1$  и, если  $PCDS(m) \neq 0$ , вычислить  $YC(|PCDS(m)|)$  согласно (4)

3. Конец.

Алгоритм FST3 отличается от FST1 только шагом 3.:

3. Установить  $m=0$  и выполнить при  $j=j_1, j_1+1, \dots, YE(0)$ , где  $j_1=1+NE(1)+NE(2)$  при  $NE(1)+NE(2) \neq 0$  и  $j=2$  в противном случае, следующее:

1) вычислить  $YX$  согласно (3);

2) при  $k=1, 2, \dots, k_2$ , где  $k_2=j-1$  при  $j \leq YE(0)-NE(4)$  и  $k_2=YE(0)-NE(4)$  в противном случае, установить  $m=m+1$  и, если  $PCSD(m) \neq 0$ , вычислить проводимости невырожденных элементов  $d \in M^x$  согласно

$$YC(|PCSD(m)|) = \text{sign}(PCSD(m)) \cdot YX \cdot YE(k). \quad (5)$$

Алгоритм FST4 отличается от FST2 тем, что на шаге 2. следует в начале установить  $m=0$  и на шаге 3) следует вместо вектора PCDS использовать везде вектор PCIS (часть вектора PCDS).

Если в  $S^x$  (по сравнению с модификацией цепи, для которой выполнялись последние расчеты по STARX) изменились параметры не только независимых источников, то при  $NE(1) + NE(2) \leq NE(4)$ , т.е. при

$$l_{x1} + l_{x4} \leq l_{x2}. \quad (6)$$

следовало бы предпочесть алгоритм FST1 (включить в STARX вектор PCDS), а при нарушении (6) использовать FST3 (включить в STARX вектора PCSD и PCIS)<sup>I</sup>. Это обосновано тем, что  $m'_{Fx}$ , т.е. число мультипликативных операций, выполняемых на прямом ходе по STARX, в случае FST1 равно

$$\begin{aligned} m'_{Fx} &= l_{x1} + l_{x4} + l_{x3} + l_{xm} \leq \\ &\leq (l_{x1} + l_{x4} + \frac{1}{2}l_{x3})(1 + l_{x3} + l_{x2}) + \frac{1}{2}l_{x3}l_{x2}. \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>I</sup> FST1 и FST3 реализуют аналоги таких шагов редукции матричного уравнения цепи  $YU=I$  (где  $Y=(y_{jk})$  и  $I=(i_j)$ ), которые снижают порядок матрицы  $Y$  на один путем LU-разложения, выполняемого соответственно согласно  $y'_{xz} = y_{xz}/y_{xx}$ ,  $i'_x = i_x/y_{xx}$  и согласно  $y'_{zx} = y_{zx}/y_{xx}$ .

где  $l_{xM} = |M^x|$ , а в случае FST3 равно

$$m_{Fx}''' = l_{x2} + l_{x3} + l_{xM} \leq (l_{x2} + \frac{1}{2}l_{x3})(1 + l_{x3} + l_{x1} + l_{x4}) + \frac{1}{2}l_{x3}(l_{x1} + l_{x4}). \quad (8)$$

Алгоритмы FST2 и FST4 следовало бы использовать соответственно вместо FST1 и FST3 в случае изменения в  $S^x$  только параметров независимых источников.<sup>I</sup> Тогда  $m_{Fx}$  не превышает

$$m_{Fx}'' = l_{x4}(1 + l_{x3} + l_{x2}). \quad (9)$$

Алгоритм BST для определения по STARx напряжения узла  $x$  заключается в вычислении

$$VNx = (I1 + I2 + I3) / YNx, \quad (10)$$

где

$$I1 = \sum_{j=1}^{j_1} YE(j) [VN(N1(j)) - VN(N2(j))], \quad (11)$$

$$I2 = \sum_{j=j_1+1}^{j_2} YE(j) \cdot \text{sign}(N2(j)), \quad (12)$$

$$I3 = \sum_{j=j_2+1}^{j_3} YE(j) \cdot VN(N2(j)) \cdot \text{sign}(N2(j)) \quad (13)$$

причем для  $k = 1, 2, 3$   $j_k = \sum_{l=1}^k NE(l)$ .

Число мультипликативных операций  $m_{Bx}$ , выполняемых согласно BST по структуре STARx на обратном ходе, равно

$$m'_{Bx} = 1 + l_{x1} + l_{x3}. \quad (14)$$

Если в ходе вычисления I3 по (13) пропустить операции с нулями (например, если при  $VN(N2(j)) = 0$  обеспечить  $N2(j) = 0$  это можно сделать по значениям элементов вектора  $N2$ ), то

$$m_{Bx} \leq m'_{Bx}.$$

### Л и т е р а т у р а

И. Ронк А. Алгоритмы для повторного расчета цепи методом редукции: выполнение одного цикла расчета // См. наст. сб. с. 60.

<sup>I</sup> FST2 и FST4 реализуют аналоги шага преобразования нового вектора токов  $\dot{I}$  в соответствии с выполненным ранее преобразованием уравнения  $YU = I$  (LU-разложения матрицы  $Y$ ).



2. Ронк А. Повторный расчет линейной цепи методом редукции при использовании строгого частичного упорядочения исключаемых узлов // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1986. - № 629. - С. 81-92.

3. Кукк В., Ронк А.Х. Преобразование звезда-сеть для расчета активных адмитансных цепей // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1980. - № 497. - С. 121-128.

4. Dembart В., Grisman А.М. Hybrid sparse-matrix methods // IEEE Trans. Circuit Theory. - 1973. - Vol. CT-20, N 6. - P. 641-649.

4. Автоматизация проектирования в электронике - система SPADE // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1982. - № 535. С. 96.

A. Ronk

Algorithms for Varying Circuit Analysis by Reduction  
Method: Node Reduction and Nodal Voltage Computation

Abstract

The paper presents algorithms for node reduction and nodal voltage computation, which run on the data structure, proposed for multiple solution of varying circuit linear equations.



АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ПОВТОРНОГО РАСЧЕТА ЦЕПИ МЕТОДОМ  
РЕДУКЦИИ: ВЫПОЛНЕНИЕ ОДНОГО ЦИКЛА РАСЧЕТА

## I. Введение

В статье мы продолжаем начатое в [1] рассмотрение вопросов практической реализации на ЭВМ изложенного в [2] способа повторного расчета линейной активной адмитансной цепи. Мы считаем, что статья [1] (в настоящем сборнике) является достаточным и доступным читателю введением для настоящей статьи.

Как в [1] мы будем рассматривать цепь как пару  $C=(X,D)$ , где  $X$  - множество узлов ( $|X|=n$ ) и  $D$  - множество элементов/динзоров ( $|D|=l$ ), причем всем узлам  $x \in X$  присвоены номера (имена)  $i = \alpha(x) \in \{1, 2, \dots, n\}$  согласно некоторому взаимно однозначному отображению  $\alpha$ .

Подчеркнем, что в дальнейшем мы будем использовать (часто без ссылок) введенные в [1] понятия, обозначения и т.д. Обозначения  $S^i, S_0^i, M^i, m_{Fi}, m_{Bi}$  и т.д. эквивалентны использованным в [1] обозначениям  $S^x, S_0^x, M^x, m_{Fx}, m_{Bx}$  и т.д., так как  $i$  следует (если нет оговорки) понимать как номер (имя, обозначение) узла  $x$ , т.е.  $i = \alpha(x)$ .

## 2. Основы организации (цикла) расчета цепи

При рассмотрении организации расчета цепи мы, не теряя общности, используем в качестве примера цепь  $C$  с рис. I, которая состоит только из дисторов.

Расчеты изображенной на рис. I цепи предлагаем выполнить на приведенной там же структуре данных LICINA, которая включает как преобразуемые, так и интерпретируемые (описывающие цепь и/или вычислительный процесс) данные.



При комментировании структуры данных LICINA и изложении основ организации вычислительного процесса мы используем следующие (введенные в [2]) понятия:

1) первичная и вторичная цепи редукции  $C_I$  и  $C_{II}$  (см. рис. 1), которые формируются согласно

$$\begin{aligned} C_I &= (X, \bigcup_{i=1}^n S^i) = (X, DU(\bigcup_{i=1}^n M^i)), \\ C_{II} &= (X, \bigcup_{i=1}^n S_0^i) \end{aligned} \quad (I)$$

в процессе исключения узлов  $x \in X$  цепи  $C$  (преобразования множеств  $S^i$  исключенных вместе с узлами  $x = \alpha^{-1}(i)$  элементов:  $S^i \rightarrow S_0^i \rightarrow M^i$ , см. [1]) в убывающей последовательности номеров узлов  $j = \beta(x) \in \{1, 2, \dots, n\}$ , определенных некоторым взаимно однозначным отображением  $\beta$ ;

2) ориентированное (к корню) дерево упорядочения  $T_0 = (X, E_0)$  (см. рис. 1).  $T_0$  определяет (описывает)  $B_0$ , т.е. множество разных отображений  $\beta$ , приводящих в случае цепи  $C$  к одной и той же паре цепей редукции  $C_I$  и  $C_{II}$ :  $\beta \in B_0$  тогда и только тогда, когда для любых таких  $x, z \in X$ , что в  $T_0$  существует путь от  $x$  к  $z$ , выполняется  $\beta(x) > \beta(z)$ .

Предположим, что мы уже выполнили расчеты цепи  $C$  согласно  $\beta$  и сформировали в ходе этого процесса  $C_I, C_{II}$  и  $T_0$  (на рис. 1 элементы  $d \notin D$  цепи  $C_I$  изображены прерывистыми линиями). Предположим еще, что нам нужно вычислить все узловые напряжения цепи  $\tilde{C}$ , которая отличается от  $C$  только значениями параметров некоторых элементов  $d \in D_F^* \subset D$  (представленных на рис. 1 в изображении  $C$  жирными линиями). Тогда мы можем выполнить эти расчеты на (структурах)  $C_I$  и  $C_{II}$ , например, следующим образом:

1) вводим в  $C_I$  новые значения параметров элементов  $d \in D_F^*$ , пометая  $x \in X_F^* \subset X$ , т.е. (монотонно) инцидентные элементам  $d \in D_F^*$  узлы/вершины дерева  $T_0$ ;

2) определяем на  $T_0$  его поддереву  $T_{OF} = (X_F, E_{OF})$  (которое на рис. 1 указано жирными линиями) так, что  $x \in X_F$  тогда и только тогда, когда найдется такой  $z \in X_F^*$ , что в  $T_0$  найдется путь от  $z$  к  $x$  (включая путь нулевой длины - от  $z$  к  $z$ );



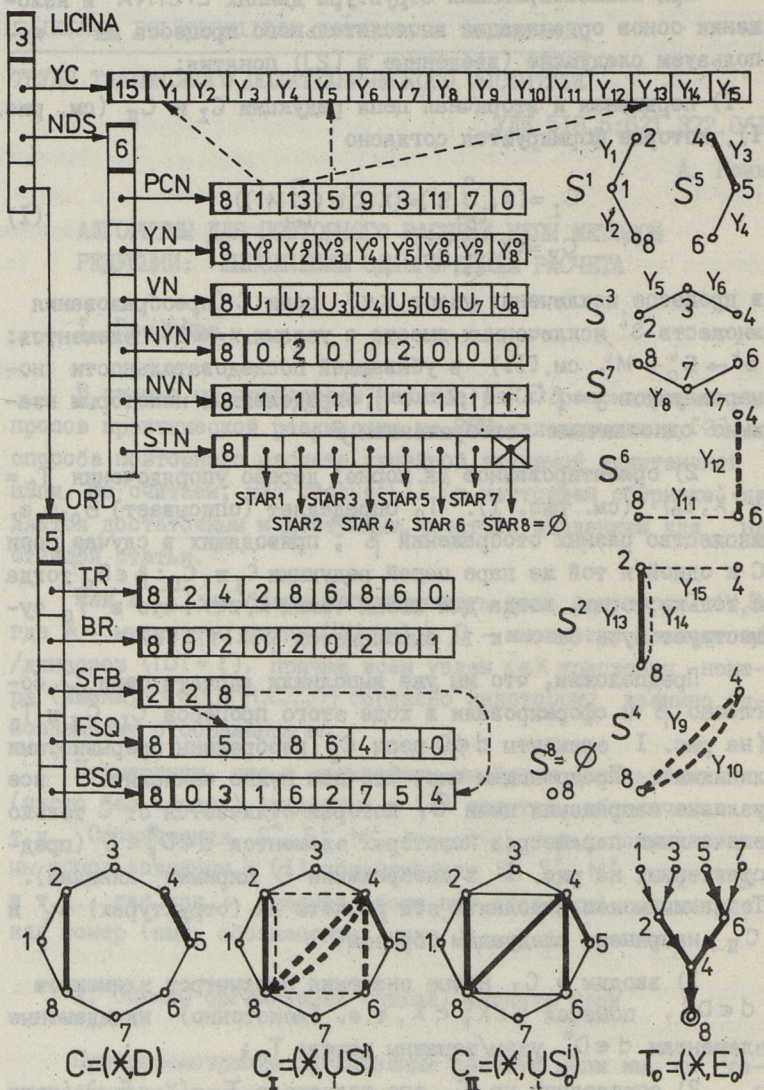


Рис. 1. Цепь С, выбранные для нее дерево упорядочения узлов T<sub>0</sub> и цепи редукции C<sub>I</sub> и C<sub>II</sub> и структура данных LICINA для повторного расчета цепи С (на C<sub>I</sub> и C<sub>II</sub>).



3) выполняем (повторяем) на  $C_I$  и  $C_{II}$  процесс исключения узлов  $x \in X_F$  (соответствующих им множеств элементов (звезд)  $S^x$ , см. рис. I) в убывающей последовательности их номеров  $j = \beta_F(x)$ , определенных взаимно однозначным отображением  $\beta_F: X_F \rightarrow \{1, 2, \dots, |X_F|\}$ , которое входит в описываемое деревом  $T_{OF}$  множество отображений  $V_{OF}$ . (На рис. I те элементы  $C_I$  и  $C_{II}$ , параметры которых получают в этом процессе новые значения, изображены жирными линиями)

4) вычисляем на  $C_{II}$  напряжения узлов  $x \in X_B = X$  в возрастающей последовательности их номеров  $j = \beta_B(x)$ , определенных отображением  $\beta_B$ , которое входит в описанное деревом  $T_{OB} = T_O$  множество отображений  $V_{OB} = V_O$ .

В случае, когда мы должны найти только напряжения зажимов элементов  $d \in D_B^* \subset D$  ((инцидентных им) узлов  $x \in X_B^* \subset X$ ), шагу 4) должны предшествовать шаги, аналогичные шагам 1) и 2), определяющие на основе  $D_B^*$  (или  $X_B^*$ ) поддерево  $T_{OB}$ , т.е. множество отображений  $V_{OB}$ .

Таким образом, мы можем избегать на прямом и обратном ходе выполнения расчетов, прикрепленных соответственно к узлам  $x \in X \setminus X_F$  и к узлам  $x \in X \setminus X_B$ , т.е. учесть как латентность элементов цепи, так и наши (изменяющиеся) действительные цели.

### 3. Представление данных в ЭВМ

В ЭВМ данные, описывающие некоторое множество разных циклов расчета цепи, как и данные, связанные с каким-то конкретным циклом расчета, объединены в структуру данных LICINA (см. рис. I), где все векторы начинаются с нулевого элемента, указывающего длину вектора.

Векторы LICINA, NDS и ORD содержат только указатели, ссылающиеся на другие векторы (подструктуры).

Вектор  $YC$  содержит в произвольной последовательности номеров  $i = \alpha(x)$  все группы значений параметров всех элементов  $d \in S^i$ .

$i$  — элементы векторов, на которые ссылаются из NDS, характеризуют узел  $x = \alpha^{-1}(i)$ ;



- PCN(i) содержит индекс параметра первого элемента  $d \in S^i$  в  $YC$ ;

- YN(i) и VN(i) предназначены для значений собственной проводимости и напряжения узла;

- STN(i) содержит ссылку (указатель) на подструктуру STARi (см. рис. 2 в [I]), которая описывает вычисления, прикрепленные к узлу  $x = \alpha^{-1}(i)$ , т.е. структуру звезд  $S^i$  и  $S_0^i$ , и содержит места для значений параметров элементов  $d \in S_0^i$ ;

- NYN(i) и NVN(i) предоставляют возможность помечать узел  $\alpha^{-1}(i)$ , как вершину дерева  $T_0$ : NYN(i) может принимать значения 0, 1 и 2, указывающие, что в текущем цикле расчета цепи шаг прямого хода по STARi соответственно не выполняется, выполняется по алгоритму FST2 (или FST4, см. [II]), выполняется по алгоритму FST1 (или FST3). NVN(i) принимает значение 1 или 0, указывающее соответственно нужно или не нужно в текущем цикле расчета вычислить напряжение узла  $\alpha^{-1}(i)$ . Значения NYN(i) и NVN(i) могут в ходе цикла расчета увеличиваться (до начала обработки узла  $\alpha^{-1}(i)$  соответственно на прямом и обратном ходе).

Векторы, на которые ссылают из QRD, описывают возможные и используемые в текущем цикле расчета последовательности обработки узлов цепи:

- вектор TR описывает дерево упорядочения  $T_0 = (X, E_0)$ :  
: TR(i) = j означает, что  $(\alpha^{-1}(i), \alpha^{-1}(j)) \in E_0$ , а TR(i) = 0 указывает, что  $\alpha^{-1}(i)$  является корнем дерева. Значение элемента вспомогательного вектора BR(i) равно числу входящих в вершину  $\alpha^{-1}(i)$  дуг дерева  $T_0$ .

- FSQ(i) и BSQ(i) содержат номера  $\alpha(x)$  узлов, которые в конкретном цикле расчета следует обработать соответственно на прямом и на обратном ходе после узла  $\alpha^{-1}(i)$ , или нуль (если в этом цикле расчета узел  $\alpha^{-1}(i)$  либо обрабатывается последним, либо вообще не обрабатывается).

SFB(1) и SFB(2) содержат номера  $\alpha(x)$  узлов, которые соответственно на прямом и на обратном ходе обрабатываются первыми (т.е. указатели начал списков в FSQ и BSQ).

Изображенные на рис. 1 векторы NYN, NVN, SFB, FSQ и BSQ описывают конкретный цикл расчета цепи, который мы рассматривали в качестве примера в пункте 2.



Описание цепи, откуда (или на основе которого) можно получить в каждом цикле расчета заносимые в  $Y_C$  значения проводимостей элементов  $d \in D$ , должно содержать для каждого  $d \in D$  следующее:

- 1)  $i_d$  - указатель места значения его проводимости в  $Y_C$  и
- 2)  $k_d$  - номер монотонно инцидентного к нему узла  $x \in X$ .

#### 4. Алгоритмы

Многократный расчет изменяющейся линейной цепи выполняется в рамках решения многих задач. Последние определяют во многом как общую организацию вычислений, так и некоторые алгоритмы  $DETV$  и  $DETY$  для фиксирования в структуре данных  $LICINA$  соответственно цели и (изменений) исходных данных для циклов расчета. Ниже приводим набор алгоритмов (модулей) для многократного расчета цепи на структуре  $LICINA$ . Отметим, что до начала повторного расчета цепи необходимо заполнять вектор  $Y_C$  нулями.

Алгоритм  $DETV$  служит для формирования (исходного состояния) вектора  $NVN$ .

Алгоритм  $DETY$ , используемый в начале цикла расчета для ввода в векторы  $Y_C$  и  $NYN$  исходных данных, следующий:

I. Заполнить  $NYN$  нулями.

2. В цикле по всем элементам изменяющейся цепи записать в  $Y_C$  значения проводимостей эквивалентных им динзоров  $d \in D$ . При записи в  $Y_C(i_d)$  значения, отличающегося от предыдущего значения, следует:

1) если  $d \in D$  соответствует независимому источнику тока, то при  $NYN(k_d) = 0$  установить  $NYN(k_d) = 1$ ;

2) если  $d \in D$  не соответствует независимому источнику, то установить  $NYN(k_d) = 2$ ;

3. Конец.

Алгоритм  $FORW$  для выполнения прямого хода расчета цепи:

I. Сформировать вектор  $BRC = BR$ ;

2. Выполнить в цикле по  $j = 1, 2, \dots, BRC(0)$  следующий подалгоритм:

1) при  $BRC(j) \neq 0$  перейти к II);

- 2) установить  $i = j$  и перейти к 4);
- 3) установить  $i = TR(i)$  и  $BRC(i) = BRC(i) - 1$ ;
- 4) при  $NYN(i) = BRC(i) = 0$  перейти к 3);
- 5) при  $BRC(i) \neq 0$  перейти к II);
- 6) при  $TR(i) = 0$  перейти к 3);
- 7) установить  $PC = PCN(i)$ . В случае  $NYN(i) = 2$ , выполнить расчеты прямого хода по  $STAR_i$  (на которую указывает  $STN(i)$ ), используя в зависимости от наличия в  $STAR_i$  вектора  $PCDS$  или  $PCSD$  (выполнения или нарушения (6) из [I]) соответственно алгоритм  $FST1$  или  $FST3$  и установить  $YN(i) = YNX$ . В случае  $NYN(i) = 1$ , установить  $YNX = YN(i)$  и выполнить расчеты по  $STAR_i$ , используя в зависимости от наличия в  $STAR_i$  вектора  $PCDS$  или  $PCIS$  (выполнения или нарушения (6) из [I]) алгоритм  $FST2$  или  $FST4$ ;
- 8) установить  $k = TR(i)$  и  $BRC(k) = BRC(k) - 1$ ;
- 9) при  $NYN(i) > NYN(k)$  установить  $NYN(k) = NYN(i)$ ;
- 10) установить  $i = k$  и перейти к 4);
- II) конец подалгоритма;

3. Конец.

Алгоритм FORWO для формирования в векторе  $FSQ$  списка узлов цепи (в последовательности их обработки на прямом ходу) получим из  $FORW$ , изменяя три его шага следующими:

- 2) установить  $i = j$  и  $l = 0$  и перейти к 4);
- 6) при  $l = 0$  установить  $SFB(1) = i$  и  $l = i$ , а при  $l \neq 0$  установить  $FSQ(l) = i$  и  $l = i$ ;
- 7) при  $TR(i) = 0$  установить  $FSQ(i) = 0$  и перейти к 3).

Алгоритм FORWC для выполнения расчетов прямого хода по списку узлов в  $FSQ$  следующий:

- 1) установить  $k = SFB(1)$  и перейти к 3);
- 2) выполнить шаг 7) алгоритма  $FORW$ ;
- 3) установить  $i = k$  и  $k = FSQ(i)$ ;
- 4) при  $k \neq 0$  перейти к 2);
- 5) конец.



Алгоритм BACKO для формирования в векторе BSQ списка узлов (в последовательности их обработки на обратном ходе) получим из FORWARD, заменяя везде SFB(1) на SFB(2), FSQ на BSQ, NYN на NVN и добавляя в конце шаг инвертирования полученного в BSQ списка.

Алгоритм BACKC для выполнения расчетов обратного хода по списку узлов в BSQ следующий:

- 1) установить  $i = SFB(2)$ ;
- 2) в случае  $TR(i) = 0$  установить  $VN(i) = VR$ ;

Замечание: Традиционно  $VR = 0$ , т.е. напряжение первого узла приравнивается к нулю, но возможно, что в некоторых случаях целесообразно поступить иначе.

- 3) перейти к 5);
  - 4) установить  $YNX = YN(i)$ , выполнить расчеты обратного хода по STAR $i$  (по алгоритму BST) и установить  $VN(i) = VNX$ ;
  - 5) установить  $i = BSQ(i)$ ;
  - 6) при  $i \neq 0$  перейти к 4);
  - 7) конец.
5. Оценивание эффективности рассматриваемого способа расчета

Об эффективности повторного расчета цепи можно судить по такой величине как  $m_{cp}$  — среднее число мультипликативных операций, необходимых для однократного расчета цепи в процессе повторного расчета. Ниже рассмотрим некоторые возможности оценивания  $m_{cp}$ .

Пусть  $P_d$  — вероятность изменения и  $\bar{P}_d = 1 - P_d$  — вероятность постоянства значения параметра элемента цепи  $d \in D$  в дискретном (в смысле времени изменения) процессе изменения цепи  $C = (X, D)$ .

Предположим, что  $\bar{P}_d$  для всех  $d \in D$  стационарны и независимы. Тогда вероятность (необходимости) выполнения на прямом ходе расчетов, прикрепленных к узлу с номером  $i = \alpha(x)$  (повторения исключения множества элементов  $S^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

$$P_i = 1 - \prod_{d \in \hat{S}^i} \bar{P}_d, \quad (2)$$

Где

$$\hat{S}^i = \bigcup_{j: h_{ji} > 0} (D \cap S_j) \quad (3)$$

является множеством всех элементов исходной цепи  $C$ , (монотонно) инцидентных к узлам / вершинам  $x \in X$  такого максимального поддерева дерева упорядочения  $T_0$ , корнем которого является вершина  $\alpha^{-1}(i)$ , а

$$h_{ji} = \min_{\beta \in B_0} [\beta(\alpha^{-1}(j)) - \beta(\alpha^{-1}(i))] \quad (4)$$

есть некоторое расстояние от вершины  $\alpha^{-1}(j)$  до вершины  $\alpha^{-1}(i)$  дерева  $T_0$ .

Вероятность (необходимости) перерасчета цепи

$$P_C = 1 - \prod_{d \in D} \bar{P}_d. \quad (5)$$

Нас интересуют приведенные вероятности

$$p_d = P_d / P_C = (1 - \bar{P}_d) / (1 - \prod_{d \in D} \bar{P}_d), \quad (6)$$

$$p_i = P_i / P_C = (1 - \prod_{d \in \hat{S}^i} \bar{P}_d) / (1 - \prod_{d \in D} \bar{P}_d).$$

Если вероятности изменения всех элементов цепи равны  $P = 1 - \bar{P}$  (при неизвестных  $P_d$  такое предположение можно считать естественным), то

$$p_d = (1 - \bar{P}) / (1 - \bar{P}^l), \quad (7)$$

$$p_i = (1 - \bar{P}^{l_i}) / (1 - \bar{P}^l),$$

где  $l = |D|$  и  $l_i = |\hat{S}^i|$ .

В случае  $P \rightarrow 0$  из (7) следует, что

$$p_d = 1/l, \quad (8)$$

$$p_i = l_i/l = l_i p_d.$$

Полученное можно интерпретировать как результат следующего ограничения: в момент изменения в цепи изменяется только один элемент. Ясно, что в таком случае использование латентности может дать наибольший эффект.

Если предположить еще, что число элементов исходной цепи  $C$ , исключаемых вместе с каждым узлом, является константой, то полезно ввести такую величину, как  $P_D$  - веро-



ятность изменения хотя бы одного из монотонно инцидентных узлу элементов ( $d \in D \cap S^i$ ) исходной цепи. Тогда

$$p_D = 1 / (n - 1), \quad (9)$$

$$p_i = n_i / (n - 1) = n_i p_D,$$

где  $n_i = |\{j: \alpha(j) \in X \text{ и } h_{ji} \geq 0\}|$  есть число узлов / вершин такого максимального поддерева дерева  $T_0$ , корнем которого является вершина  $\alpha^{-1}(i)$ .

В случае расчета всех узловых напряжений для всех модификаций изменяющейся цепи, с использованием на прямом ходе только алгоритмов FST1 и FST3, получим, что

$$m_{cp} = \sum_{i=1}^n p_i m_{Fi} + \sum_{i=1}^n m_{Bi}, \quad (10)$$

где  $p_i$  определяются по одной из формул (6), (7), (8), (9), а  $m_{Fi}$  и  $m_{Bi}$  - числа мультипликативных операций, выполняемых соответственно при исключении узла  $\alpha^{-1}(i)$  и при вычислении напряжения того же узла на обратном ходе. В зависимости от применяемого алгоритма FST1, FST2 (или FST4) и FST3  $m_{Fi}$  приобретает соответственно значения  $m'_{Fi}$ ,  $m''_{Fi}$  и  $m'''_{Fi}$  (см. [1]). Выбором алгоритма можно обеспечить, что в (10)  $m_{Fi} = \min(m'_{Fi}, m'''_{Fi})$ . Для  $j = \alpha(\beta^{-1}(1))$  и  $k = \alpha(\beta^{-1}(2))$  всегда  $m_{Fj} = m_{Bj} = m_{Fk} = 0$  и  $m_{Bk} = p_k = p_j = 1$ .

В случае выполнения тех же расчетов с оптимальным выбором алгоритмов FST

$$m_{cp} = \sum_{i=1}^n p_{i1} \cdot \min(m'_{Fi}, m'''_{Fi}) + \sum_{i=1}^n p_{i2} m''_{Fi} + \sum_{i=1}^n m_{Bi}, \quad (11)$$

где  $p_{i1}$  и  $p_{i2}$  - вероятности, для которых можно (использованным выше путем) получить соответствующие (6), (7), (8) и (9) оценки, исходя не из  $P_i$ , а из его составляющих

$$P_{i1} = 1 - \prod_{d \in \hat{S}^{i1}} \bar{P}_d \text{ и } P_{i2} = (1 - \prod_{d \in \hat{S}^{i2}} \bar{P}_d) \prod_{d \in \hat{S}^{i1}} \bar{P}_d,$$

где  $\hat{S}^{i1} = \hat{S}^i \setminus \hat{S}^{i2}$  и  $\hat{S}^{i2}$  является множеством всех таких элементов  $d \in \hat{S}^i$ , которые представляют независимые источники тока.

Полученные оценки могут оказаться полезными при выборе для цепи  $C$  дерева упорядочения и соответствующих ему це-

пей редукций, от которых зависит эффективность предлагаемого способа расчета цепи.

В качестве примера приводим базирующиеся на (8) и (9) оценки  $m_{cp}$  по (10) для повторного расчета цепи  $C$  с рис. I:

$22\frac{7}{9}$  и  $2I\frac{2}{7}$  - соответствуют дереву  $T_0$  с рис. I,

$26\frac{I}{9}$  и 25 - соответствуют неразветвленному дереву  $T'_0$ , допускающему только такое  $\beta$ , что при заданном на рис. I  $\alpha \beta(x) = 9 - \alpha(x)$  для всех  $x \in X$ .

При выполнении расчета цепи  $C$  без учета латентности, но с учетом разреженности (т.е. на структурах данных, соответствующих деревьям упорядочения  $T_0$  и  $T'_0$ ),  $m_{cp} = 35$ . Во всех полученных численных оценках  $m_{cp} = m_{Fcp} + m_B$  доля расчетов обратного хода  $m_B = 19$ .

## 6. Замечания

I. Структура данных LICINA и работающие на ней алгоритмы, описанные в настоящей статье, могут содержать соответственно подструктуры STARi и работающие на них алгоритмы, которые базируются не на динзорной модели (как описанные в [I] подструктуры и алгоритмы), а на какой-то другой модели цепи. В качестве примера отметим следующие альтернативные модели: унаторная модель, гираторно-дисторная модель и (на первый взгляд, самая простая и естественная, но в действительности просто наиболее привычная) унисторная или матричная модель (на базе неопределенной матрицы узловых проводимостей без главной диагонали).

2. Используя модифицированные алгоритмы FORWO и BASKO можно получить комплекты из аналогичных SFB, FSQ и BSQ векторов:

I) для выполнения расчета всех связанных компонентов  $C_j$  несвязной цепи  $C$ , согласно соответствующим им деревьям упорядочения  $T_{0j}$  из леса упорядочения, описываемого с помощью вектора TR и

2) для параллельного выполнения расчетов цепи по под-деревьям дерева упорядочения  $T_0$  (или деревьев  $T_{OF}$  и  $T_{OB}$ ) на многопроцессорной ЭВМ.



3. В [2] было отмечено, что при расчете цепи на цепях редукции, соответствующих дереву упорядочения  $T_0$ , которое определяет множество  $V_0$  отображений  $\beta$ , на прямом ходе допустимыми могут оказаться последовательности обработки узлов соответствующие отображениям  $\beta$  из такого (описываемого ациклическим орграфом) множества  $V_F$ , что  $V_0 \subset V_F$ . Можно убедиться и в том, что последовательности обработки узлов на обратном ходе могут соответствовать  $\beta$  из такого множества  $V_B$ , что  $V_0 \subset V_B$  и  $V_B \neq V_F$ . Таким образом, при расчете некоторых цепей вместо дерева упорядочения  $T_0$  можно использовать более гибкие, но и более громоздкие графовые модели упорядочения узлов цепи.

#### Л и т е р а т у р а

1. Р о н к А. Алгоритмы для повторного расчета цепи методом редукции: выполнение расчетов, прикрепленных к одному узлу // См. наст. сб. с. 50.

2. Р о н к А. Повторный расчет линейной цепи методом редукции при использовании строгого частичного упорядочения исключаемых узлов // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1986. - № 629. - С. 81-92.

A. Ronk

Algorithms for Varying Circuit Analysis by  
Reduction Method: Planning and Executing of  
a Solution Cycle

#### Abstract

The paper presents algorithms for planning and executing a circuit solution cycle on the data structure, proposed for multiple solution of varying circuit linear equations. Estimation of the efficiency of the multiple solution process is discussed.



КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ  
ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ

Любая модель описывает реальность с некоторой ошибкой, которая по существу является систематической или случайной. Систематическая ошибка вытекает из сложности или простоты модели, иными словами, чем сложнее модель, тем точнее она, и наоборот. Следовательно, сложность и точность модели являются противоречивыми требованиями и систематическую ошибку при приемлемой сложности модели нельзя элиминировать. Таким образом в эквивалентных моделях полупроводниковых приборов, которые используются, например, в программах численного анализа схем, уменьшать можно только случайную ошибку. Последняя возникает из-за неточного определения параметров модели. Для уменьшения случайной ошибки обычно используют разные методы оптимизации с целью пригонки ВАХ и динамических характеристик структуры. Как сказано в работе [1], при определении целевой функции вектор придаточных условий надо определить для таких параметров моделей, которые действительно влияют на статические и динамические характеристики эквивалентной модели данной структуры (прибора). Целью данной работы является определение критических параметров эквивалентных моделей диода и биполярного транзистора. Рассматриваются модели из программы TRANZ-TRAN.

Модель диода. Модель диода является моделью типа Эберса-Молла. Анализ показывает, что заметное влияние на ВАХ прибора имеют последовательное сопротивление  $r_s$ , ток насыщения  $I_s$  прямой ветви ВАХ, скорректированный температурный потенциал  $m\varphi_T$  и ток насыщения  $I_R$  обратной ветви ВАХ. На динамические характеристики влияют емкость рп-перехода  $C_{sc}$  и постоянная времени инжекции носителей  $\tau_B$ . С увеличением двух последних параметров увеличивается время



выключения модели диода.

Следовательно, эти параметры не противоречивые, т.е. они влияют в одном направлении. Параметры  $r_s, m\varphi_T, I_s, I_R$  влияют на ВАХ. Последовательное сопротивление  $r_s$  изменяет наклон прямой и пробивной характеристики модели. Ток насыщения  $I_s$  перемещает прямую ВАХ по оси напряжения. Таким образом влияет и скорректированный температурный потенциал  $m\varphi_T$ . Но их взаимодействие противоположно друг другу, т.е. при увеличении  $I_s$  ВАХ перемещается в сторону меньших напряжений, а при увеличении  $m\varphi_T$  ВАХ перемещается в сторону больших напряжений. Следовательно, для точной пригонки прямой ВАХ задача оптимизации является трехпараметровой.

Для обратной ВАХ критическим параметром является ток насыщения  $I_R$ . Его влияние тривиальное - увеличение  $I_R$  вызывает и увеличение обратного тока.

На рис. 1 показаны чувствительности конкретных параметров. Приведем и расчет параметров диода с помощью метода оптимизации Флечера-Ривеса. Была использована ЭВМ

PHILIPS RM4400. Результаты приведены в таблице 1. Для точной ВАХ использовались характеристики, измеренные заводом-изготовителем (модель диода типа ГД508Б).

Т а б л и ц а 1

Оптимизация параметров модели диода

| Параметр     | Величина перед оптимизацией | Величина после оптимизации | Значение целевой функции перед оптимизацией | Значение целевой функции после оптимизации |
|--------------|-----------------------------|----------------------------|---|--|
| $r_s$        | 8,79                        | 13,1                       | 4,3 · 10 <sup>-6</sup>                      | 4,2 · 10 <sup>-7</sup>                     |
| $I_s$        | 8,3 · 10 <sup>-8</sup> А    | 8,2 · 10 <sup>-8</sup> А   |   |  |
| $m\varphi_T$ | 0,0355                      | 0,0367                     |   |  |

Биполярный транзистор. Важнейшие параметры модели типа Эберса-Молла и их влияние на входные и выходные ВАХ модели биполярного транзистора приведены в таблице 2. В таблице со знаком "+" отмечены те параметры, которые при изменении данного параметра во 100(10) раз вызывают изменение



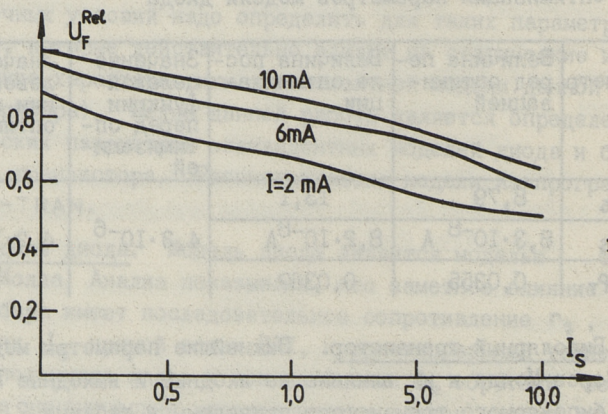
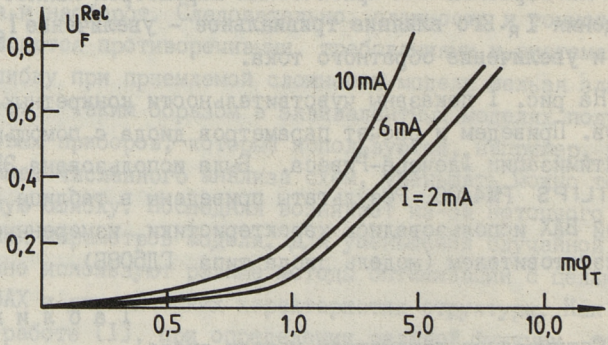
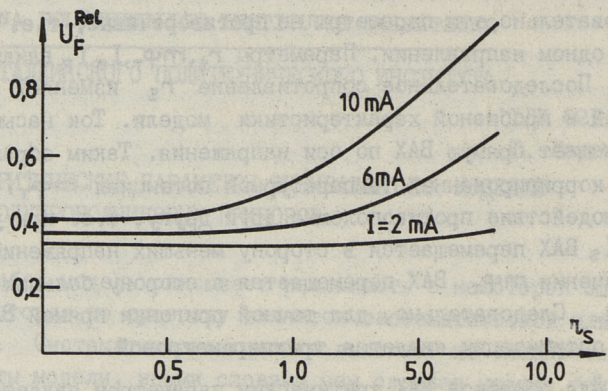


Рис. 1. Чувствительности изменения параметров от данного параметра: а)  $r_s$ , б)  $m\phi_T$ , в)  $I_s$ .



характеристик на 10 % и более, т.е. обозначены критические параметры. Как видно из таблицы 2, входные характеристики зависят от тех же параметров, которые явились критичными и у модели диода, т.е.  $I_{se}$ ,  $m\varphi_T$ ,  $r_{se}$ . Из таблицы также видно, что на входную и выходную ВАХ влияет нормальный коэффициент усиления тока  $A_{NO}$ , но так как реальная область его изменения меньше, чем у других параметров, его влиянием на входную ВАХ можно пренебречь.

Т а б л и ц а 2

Критические параметры модели биполярного транзистора

| Параметр     | Область изменения | $I_B = f(U_{BE})$ |               | $I_C = f(U_{CE})$ |                   |
|--------------|-------------------|-------------------|---------------|-------------------|-------------------|
|              |                   | $U_{CE} = 0B$     | $U_{CE} = 5B$ | $I_B = 75 \mu A$  | $I_B = 200 \mu A$ |
| $r_{se}$     | 100x              | +                 | +             | -                 | -                 |
| $I_{se}$     | 100x              | +                 | +             | -                 | -                 |
| $m\varphi_T$ | 100x              | +                 | +             | -                 | -                 |
| $I_{Re}$     | 100x              | -                 | -             | -                 | -                 |
| $r_{sc}$     | 100x              | -                 | -             | -                 | -                 |
| $I_{sc}$     | 100x              | -                 | -             | +                 | +                 |
| $I_{RC}$     | 100x              | -                 | -             | +                 | +                 |
| $A_{NO}$     | 10x               | +                 | +             | +                 | +                 |
| $A_I$        | 10x               | -                 | -             | -                 | -                 |
| $r_{BB}$     | 100x              | -                 | -             | -                 | -                 |
| $K_U$        | 100x              | -                 | -             | -                 | -                 |

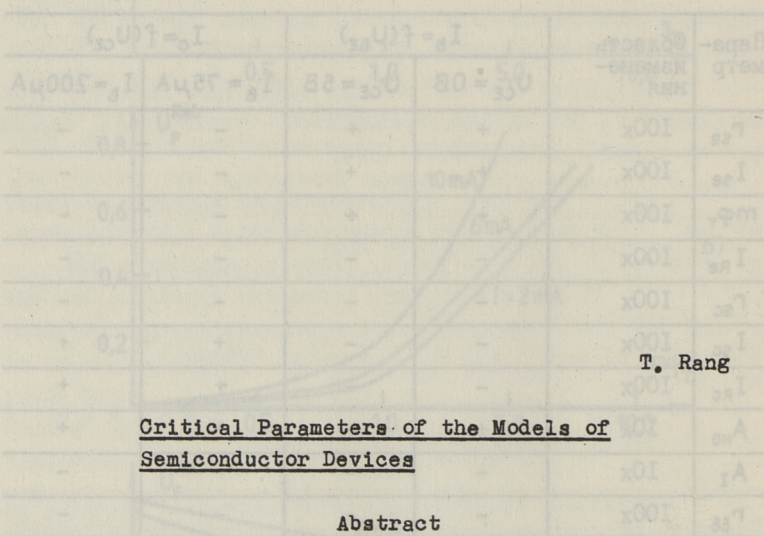
На выходные ВАХ модели биполярного транзистора влияют три параметра  $I_{RC}$ ,  $I_{SC}$  и  $A_{NO}$ . Влияние  $I_{RC}$  и  $I_{SC}$  рассмотрено в работе [1]. Параметр  $A_{NO}$  в данной версии TRANZ-TRAN-a (версия ЕС) моделирован не точно и поэтому совпадение выходных ВАХ эквивалентной модели биполярного транзистора с измеренными плохое. Причиной является то, что при моделировании коэффициента усиления тока  $A_{NO}$  не учитываются его зависимость от тока и влияние при изменении границ запрещенных зон (эффект Эарли).

Итак, описаны критические параметры эквивалентных моделей диода и биполярного транзистора. Приведен расчет оп-

тимизации параметров модели диода. Показано, что в версии ЕС программы расчета схем TRANZ-TRAN неправильно моделирован нормальный коэффициент усиления тока  $A_{NO}$ .

### Л и т е р а т у р а

И. Р а н г Т. Программа определения параметров "ОПТИ"  
 // Тр. Таллинск. политехн. ин-та.-1986.-№ 617. - С. 21-26.



Critical Parameters of the Models of Semiconductor Devices

Abstract

Critical parameters of the diode and bipolar transistor models are carried out. The most important parameters influencing statical V-A characteristics are determined. The optimization of diode model parameters is shown.



## СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Определение параметров моделей полупроводниковых приборов является одним, среди многих, критическим моментом численного моделирования схем, так как от него во многих случаях зависит адекватность результатов окончательных расчетов. Определение параметров включает два этапа:

1. Первичное определение параметров. При этом используются измеренные или определенные из численных расчетов прибора статические и динамические характеристики.

2. Оптимизация этих параметров с целью получения наилучшего совпадения характеристик, полученных из эквивалентной схемы и измеренных или рассчитанных из численной модели прибора.

В литературе проблемы оптимизации рассмотрены широко (оптимизация разных схемных решений, см. например [1-3]), но с проблемами оптимизации параметров эквивалентных схем полупроводниковых приборов активно начали заниматься в последние годы, несмотря на то, что первые работы в этой области были опубликованы уже в 70-х годах (см. например [4-5]). Примером последних работ можно назвать системы SACA0 [6], TЕСАР [7], OPTI [8] и др., например [9].

Целью данной работы является коротко рассмотреть разные методы оптимизации и сравнить их.

Для оптимизации параметров эквивалентной схемы полупроводниковых приборов (структур) выполняются следующие процедуры. Сперва электротехнически корректно сформулированная проблема переписывается в математическую форму. По критерию доброты формируется скалярная целевая функция  $F(p)$  изменяющихся параметров  $p$ , которую в общем случае

надо минимизировать. Придаточные условия описывают содержание функции  $g_x(p)$ . Через итеративный процесс с помощью программной системы определяют для вектора  $p^j$  целевую функцию  $F(p^j)$ , градиент целевой функции  $\nabla F(p^j)$  (иногда это не требуется) и величину функции придаточного условия  $g_x(p^j)$ . Следовательно, на каждом итерационном шагу найдется вектор  $p^{j+1}$  таким образом, чтобы  $p^j$  при придаточных условиях ввести в локальный минимум целевую функцию  $F(p)$ . Блок-схема такого алгоритма показана на рис. 1.

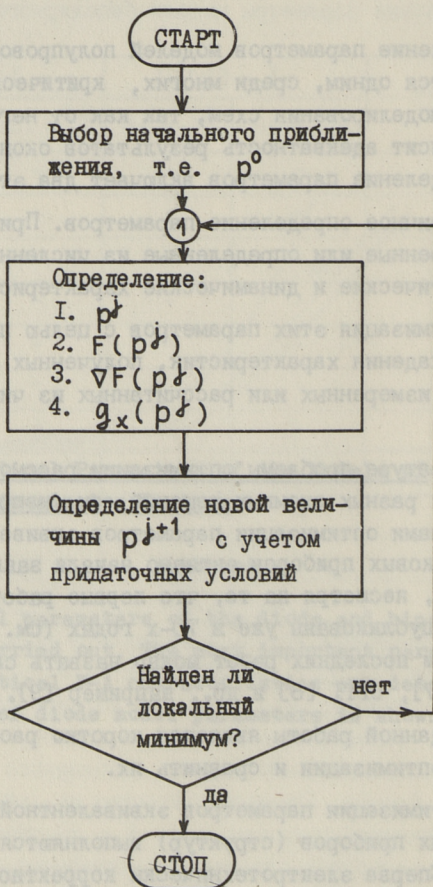


Рис. 1. Блок-схема оптимизатора



Для нелинейной эквивалентной модели целевая функция определяется двумя параметрами: изменяющимися параметрами  $p$ , реакцией данной модели  $r: F(p, r(p, t), t)$ . Целевая функция может быть типа пригонки кривой (curve fitting) или типа выполнения предсказанного критерия доброты. Очевидно, что целевая функция второго типа для эквивалентной модели не пригодна. Градиент целевой функции определяется:

$$\nabla F(p) = \left[ \frac{\partial F}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_m} \right]^T. \quad (1)$$

Для целевой функции типа пригонки кривых под реакцией модели  $r$  понимаются зависимости напряжения или токов друг от друга или от времени в данной модели. Точность процедуры определяется следующим образом, насколько, например, временная функция  $r(t)$  соответствует преданной зависимости  $\hat{r}(t)$ . Контроль проводится в  $n$  точках,  $t_\ell$  - в пределах времени анализа. Общая формулировка целевой функции следующая:

$$F(p) = F \{ [r(p, t_1) - \hat{r}(t_1)], \dots, [r(p, t_n) - \hat{r}(t_n)] \}. \quad (2)$$

Отметим, что на месте времени, как уже было отмечено, может оказаться ток или напряжение (пригонка ВАХ). Обычно вместо уравнения (2) используется следующая формула:

$$F(p) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n [r(p, t_\ell) - \hat{r}(t_\ell)]^2. \quad (3)$$

Можно использовать и другие, более сложные критерии, но для оптимизации ВАХ и динамических параметров эквивалентных моделей достаточными являются функции типа уравнения (3) или его модификация, где используется дополнительно т.н. весовой фактор  $w_\ell$ . Результатом в последнем случае является целевая функция типа наименьших квадратов. Обобщив понятие целевой функции, можно написать:

$$F(p) = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\ell=1}^n w_\ell [r(p, t_\ell) - \hat{r}(p, t_\ell)]^\xi \right\}^{\frac{1}{\xi}}, \quad (4)$$

где  $\xi$  - целое число.

При построении более сложных целевых функций нельзя забывать о том, что во многих случаях требуется и продифференцировать целевую функцию. Например, как показано в работе [10], целевые функции типа  $\min/\max$  не имеют производных для всех точек характеристики.



Функция типа уравнения (3) и ее модификации являются дифференцируемыми. При условии  $w_\ell = 1$  из уравнения (3) получаем:

$$\frac{\partial F(p)}{\partial p} = \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n [r(p, t_\ell) - \hat{r}(t_\ell)] \frac{\partial r(t_\ell)}{\partial p}. \quad (5)$$

Для уравнения (4) можем записать:

$$\frac{\partial F(p)}{\partial p} = \frac{1}{n\xi} \left\{ \sum_{\ell=1}^n w_\ell [r(p, t_\ell) - \hat{r}(t_\ell)] \right\}^{\xi+1} \sum_{\ell=1}^n w_\ell \xi [r(p, t_\ell) - \hat{r}(t_\ell)]^{\xi-1} \frac{\partial r(t_\ell)}{\partial p}. \quad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) члены  $\partial r(t_\ell) / \partial p$  обозначают коэффициенты чувствительности реакции модели  $r$  к параметру  $p$ .

Придаточные условия часто включаются в состав целевой функции. При этом надо быть уверенным, что целевая функция действительно определена в каждой точке придаточных условий. Следовательно, придаточными условиями выбирают такие критерии, которые вытекают из физики работы прибора. Например, в модели биполярного транзистора базовое сопротивление всегда положительная величина ( $r'_{bb} > 0$ ), коэффициент усиления больше единицы ( $\beta \gg 1$ ) и т.д. Таким образом можно ограничивать и некоторые другие величины, имеющие заметное влияние на характеристики модели, что можно выразить следующим образом:  $a_k \leq p_k \leq b_k$ , где  $k$  отмечает конкретный параметр.

В литературе можно встретить много хороших обзоров по данной тематике (см. например [22]), в которых даны оценки разных методов оптимизации. Анализированы следующие методы: метод наискорейшего спуска, метод Ньютона, квазиньютоновский метод [11], метод сопряженных направлений, метод Пауэлла [12], метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла [13, 14] и метод Маркуардта [20] и Левенбурга [21]. В литературе [15, 16] отмечается, что метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла является удельным методом из общих методов квадратной сходимости, а метод Маркуардта и Левенбурга входит в группу методов наименьших квадратов (см. например [17-19]). Как известно [22], критерии оценки на методы оптимизации можно разделить на два больших класса. Алгоритмы можно исследовать как с теоретической, так и с экспе-



риментальной точек зрения. Мы делаем попытку оценить выше-указанные алгоритмы, используя экспериментальный путь. С целью найти более пригодный алгоритм для получения совпадимости между ВАХ и динамическими характеристиками, полученными из эквивалентных моделей полупроводниковых структур, и теми же характеристиками, полученными из точных численных моделей или с помощью измерения.

Целевая функция имеет следующий вид:

$$F(p) = A[\hat{r}(p, t) - \hat{r}(p, t)]^2. \quad (7)$$

Задача сводится к задаче типа пригонки ВАХ. Для диодных структур  $r(p, t)$  соответствует току через структуры, полученные с помощью эквивалентной модели, а  $\hat{r}(p, t)$  — точному току (численная модель или измерение). Динамические характеристики определяют из процесса переключения диодной структуры (процесс Лэкса). Для биполярного транзистора пригонка ВАХ включает базовые и коллекторные токи из эквивалентной и точной модели. Кроме того, для силовых транзисторных структур проводится дополнительная оптимизация (пригонка) зависимости коэффициента усиления ( $\beta$ ) от коллекторного тока. Динамические характеристики определяются из процесса переключения транзистора. Оптимизация включает два процесса — переключение из открытого состояния в закрытое, и наоборот. Окончательные динамические параметры определяются с учетом обоих процессов переключения транзисторных структур. Для полевых транзисторов для пригонки ВАХ  $r(p, t)$  является током истока эквивалентной модели, а  $\hat{r}(p, t)$  — током точной модели. Динамические характеристики уточняются таким образом, как это было сделано для биполярных структур. Также поступаем в случае тиристорной структуры.

Результаты расчетов, полученные с помощью ЭВМ SIEMENS 3700, приведены на рис. 2. Отметим, что картина является в некотором смысле обманчивой. А именно, на рис. 2 не найдена отражения вычислительная работа, выполненная с формированием и переформированием матрицы направления. На рис. 2 показаны только число итераций и число вычисления целевой функции. Как было уже сказано, в данной работе не пытались ответить на вопрос, годен ли один или другой метод (алгоритм) для широкого класса задач. Такие сравнения можно найти в специальной литературе (см. например [22]). Для конкретного типа це-

левой функции (формула (7)) наши расчеты показали, что перспективными методами с этой точки зрения являются методы Дэвидона-Флетчера-Пауэлла и Левенбурга и Маркуардта.

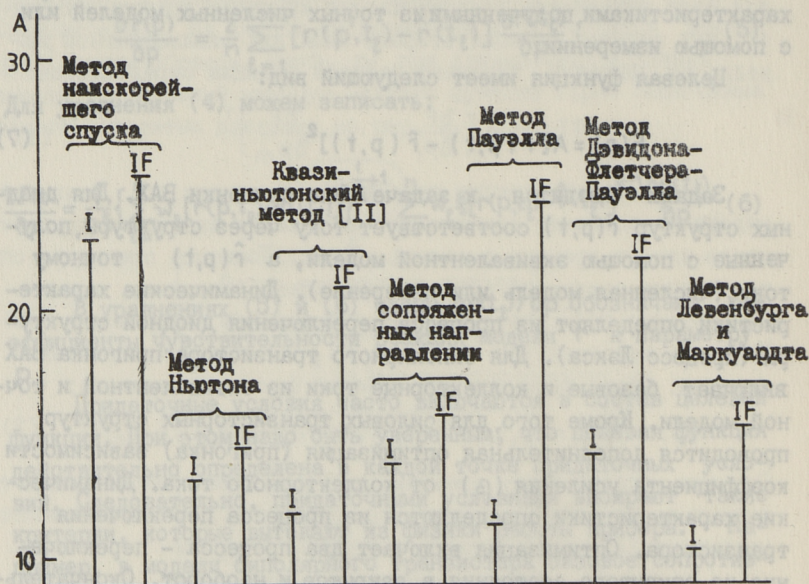


Рис. 2. Диаграмма для иллюстрации разных методов оптимизации. I—число итерации, IF—число эволюции целевой функции  $Fx^{(k)}$ .

### Л и т е р а т у р а

1. Т е м е с , G.C., С а л а h a n , D.A. Computer aided network optimization: the-state-of-the-art // Proc. IEEE. - 1967. - 55.-P. 1832-1863.

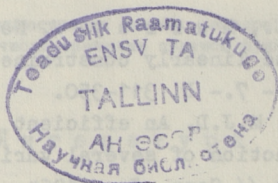
2. D i r e c t o r , S.W. Survey of circuit. Oriented optimization techniques // IEEE Tr. Circ. Theory. - CT-18. - 1971.-P. 3-10.

3. H a c h t e l , G.D., R o h r e r , R.A. Techniques for the optimal design and synthesis of switching circuits // Proc. IEEE. - 1967.- 55.- P. 1864-1876.



4. M u s a, F. Computer aided determination of transistor model element values // Proc. WESCON'69. - 1969. P. 1-8.
5. R o h r e r, R., F a n, S.-P., C l a u d i s, L. Automated bipolar junction transistor DC model parameter determination // IEEE Tr. Syst. and Circ. -1971.- SC-6.- P. 260-262.
6. N i c k e l, R., K o h l h e p p, P. Rechnergestützte Schaltungsoptimierung mit dem Programmsystem CACAO // AUE. - 1984.- 38. S. 136-146.
7. T E C A P Software. Application Note HP94445A, May 1985.
8. P а н г Т. Программа определения параметров "ОПТИ" // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1986. - № 617. С. 21-26.
9. B l u m, A., K r a u s, W. Modellierung von Halbleiterbauelementen unter simultaner Berücksichtigung von Signal- und Rauschverhalten // Kleinheubacher Berichte. - 1986.- 29.-S. 3-13.
10. C h a r a l a m b o u s, C. A unified review of optimization // IEEE tr. Microwave Theory and Techn. -1974.- MTT-22.- P. 289-300.
11. G i l l, P.E., M u r r a y, W. Newton type methods for unconstrained and linearly constrained optimization // Math. Progr. - 1974.- 7.- P. 311-350.
12. P o w e l l, M.J.D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives // Comp. J. - 1964.- 7. - P. 155-162.
13. F l e t c h e r, R., P o w e l l, M.J.D. A rapidly convergent descent method for minimization // Comp. J. - 1963.- 6.-P. 163-168.
14. D a v i d o n, W.C. Variable metric method for minimization // RD Rep. ANL-5990, USAEC, Argonne Nat. Lab., 1959.
15. S t e w a r t, G.W. A modification of Davidson's minimization method to accept difference approximations to derivatives // J. Assoc. Comp. Machin. - 1967.- 14. - P. 72-83.

16. H u a n g, H.Y. Unified approach to quadratically convergent algorithms for function minimization // J. Opt. Theory and Appl. - 1970.- 5. - P. 405-423.
17. H a r t l e y, H.O. The modified Gauss-Newton method for the fitting of nonlinear regression functions by least squares // Technometrics. - 1961.- 3. - P. 269-280.
18. F l e t c h e r, R. A modified Marquardt subroutine for non-linear least squares // UK AE A RG Rep. R-6799, 1971.
19. M e y e r, R.R., R o t h, P.M. Modified damped least squares: an algorithm for non-linear estimation // J. Inst. Math. and its Appl. - 1972.- 9. - P. 218-233.
20. L e v e n b u r g, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares // Quarterly J. Appl. Math. - 1944. - 2. - P. 164-168.
21. M a r q u a r d t, D.W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // J. Soc. Industr. and Appl Math. - 1963. - 11. - P. 431-441.
22. Х и м м е л ь б л а у Д. Прикладное нелинейное программирование // М. - Мир.- 1975. - С. 534.



T. Rang

Comparison of Various Optimization Methods

Abstract

A number of parameter function optimization methods are described. An objective function for the models of semiconductor devices is developed. Different optimization methods are estimated taking into account computing time and memory requirements. It is shown that the most effective algorithm is that of Levenberg and Marquard.



№ 643

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ  
ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Электроника и автоматика XXXIII

УДК 681.518

Модели оценки и прогноза состояния в задачах  
управления. Аарна О. - Труды Таллинского  
политехнического института, 1987, № 643, с. 3-II.

Согласно принципу разделения, задача управления раз-  
бивается на последовательно решаемые подзадачи оценки со-  
стояния и синтеза управлений, решаемые на базе одной моде-  
ли объекта управления. Показано, что при высокой размерно-  
сти вектора состояния целесообразно иметь для решения  
этих двух подзадач специальные модели оценки и прогноза  
состояния.

Рисунков - I, библи. наименований - IO.

УДК 681.518.2.016:658.527

Модели совместного оценивания состояния  
непрерывного технологического процесса и  
параметров шумов. Аарна О, Метсанурм М. - Труды  
Таллинского политехнического института, 1987,  
№ 643, с. I2-2I.

Дана постановка задачи совместной оценки состояния не-  
прерывного процесса и статистических характеристик дрейфа  
технологических параметров и ошибок измерений. Предложены  
модели, описывающие в пространстве состояний изменение из-  
меняемых технологических параметров, средних значений и  
дисперсий шумов, вызывающих дрейф технологических парамет-  
ров и ошибки измерений. Проведен качественный анализ этих  
моделей.

Библи. наименований - II.

I





УДК 66.01.001.57 (57)

Статические балансовые модели НТП-I. Тедер Т. - Труды Таллинского политехнического института, 1987, № 643, с. 22-27.

В статье рассматриваются вопросы использования статических балансовых моделей (СБМ) для оценки состояния непрерывных технологических процессов (НТП). Выведен новый алгоритм оценивания состояния СБМ, который использует имеющуюся априорную информацию о состоянии НТП.

Библ. наименований - 4.

УДК 65.012.122

Экспресс-оптимизация систем компенсационного управления. Кийтам А., Сакс Э. - Труды Таллинского политехнического института, 1987, № 643, с. 28-36.

Рассматривается оптимизация систем компенсационного управления для многостадийных технологических процессов. Предлагается экспресс-процедура оптимизации, которая предназначена для ориентировочной оценки оптимальных параметров системы; базируется на графико-аналитическом решении задачи оптимизации и исходит из входного распределения системы в виде гистограммы. Приводится описание экспресс-процедуры для монотонных моделей с аддитивным гауссовским шумом и отдельно для линейной модели. Оцениваются точность экспресс-методики. Приводятся два примера.

Рисунков - 2, библ. наименований - 5.

УДК 621.396

Астатическая система ФАП с цифровым интегратором. Ланд Р., Мин М. - Труды Таллинского политехнического института, 1987, № 643, с. 37-42.

В статье рассматриваются проблемы создания астатической системы фазовой автоподстройки (ФАП) третьего порядка. Показывается, что астатическую систему ФАП целесообразно реализовать с использованием цифрового интегратора, построенного на базе реверсивного двоичного счетчика, источ-



ником тактового сигнала для которого работает преобразователь напряжения в частоту.

Рисунков - 3, библиографических наименований - 6.

УДК 621.317.39:532.137

Определение диапазона и параметров колебательных преобразователей вязкости. Реммель Ю. - Труды Таллинского политехнического института, 1987, № 643, с. 43-49.

Изложена методика определения диапазона измерения уже существующих колебательных преобразователей и определения параметров новых, разрабатываемых преобразователей. Методика базируется на возведенных в квадрат переменных составляющих выходных величин преобразователей и ставит своей целью получение наибольшей ширины диапазона с заданной погрешностью от нелинейности характеристик этих преобразователей. Приведены примеры применения методики.

Рисунков - 2, библиографических наименований - 4.

УДК 518.5:621.372.061

Алгоритмы для повторного расчета цепи методом редукции: выполнение расчетов, прикрепленных к одному узлу. Ронк А. - Труды Таллинского политехнического института, 1987, № 643, с. 50-59.

В статье описаны структура данных и работающие на ней алгоритмы для выполнения в процессе повторного расчета линейной адмитансной цепи прикрепленных к одному узлу расчетов (т.е. исключения узла и вычисления его напряжения). Приведены рекомендации для выбора алгоритмов.

Рисунков - 3, библиографических наименований - 5.

Алгоритмы для повторного расчета цепи методом редукции: выполнение одного цикла расчета. Ронк А. - Труды Таллинского политехнического института, 1987, № 643, с. 60-71.

В статье описаны структура данных и работающие на ней алгоритмы для планирования и выполнения одного цикла расчета в процессе повторного расчета изменяющейся линейной цепи. Рассмотрены некоторые возможности оценки эффективности такого процесса расчета.

Рисунков - 1, библиографических наименований - 2.

УДК 621.382

Критические параметры эквивалентных моделей полупроводниковых приборов. Ранг Т. - Труды Таллинского политехнического института, 1987, № 643, с. 72-76.

Рассматриваются критические параметры моделей диодов и биполярных транзисторов, которые имеют самое сильное влияние на ВАХ модели прибора. Приводится пример уточнения ВАХ модели диода с помощью оптимизации.

Таблиц - 2, библиографических наименований - 1.

УДК 621.382

Сравнение разных методов оптимизации. Ранг Т. - Труды Таллинского политехнического института, 1987, № 643, с. 77-84.

Рассматриваются разные методы оптимизации многопараметрических функций. Обсуждаются вопросы построения целевой функции для эквивалентных моделей полупроводниковых приборов. Дается оценка разным методам с точки зрения затрат машинного времени и памяти ЭВМ. Выясняется, что самым эффективным методом является метод Левенберга и Маркуардта.

Рисунков - 2, библиографических наименований - 22.





EESTI AKADEEMILINE RAAMATUKOGU



1 0200 00082384 3

Цена 90 коп.