

TALLINNA POLÜTEHNILISE  
INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 241

**ТРУДЫ  
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

**СБОРНИК СТАТЕЙ**

**I**



Ep. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 241

1966

УДК 624

ТРУДЫ  
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

I



## СОДЕРЖАНИЕ

1. Л. К. Нарец. Вариант повышенной эффективности метода деформаций для расчета рам на колебания	3
2. Л. К. Нарец. Вариант повышенной эффективности метода деформаций для расчета рам на устойчивость	31
3. Л. К. Нарец, И. Я. Хархурим. О программе по расчету конструкций по методу деформаций на ЭЦМ	51
4. И. Я. Хархурим. Вычисление на ЭЦМ частот и форм колебаний стержневых систем по Э-методу и оценка точности получения высших частот	61
5. Е. К. Трунов. Изложение теории методов И. Г. Бубнова и П. Ф. Папковича по расчету судовых перекрытий в матричной символике	81
6. Э. М. Иеги. К оптимальному проектированию статически неопределимых систем	93
7. Р. Н. Ээк. Вычисление определителей, решение систем линейных уравнений и обращение матриц путем последовательного нахождения миноров	109



Ep. 7572

УДК 624.072.33.044

*Л. К. Нарец*

## **ВАРИАНТ ПОВЫШЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА РАМ НА КОЛЕБАНИЯ**

1. В методе, который мы ниже изложим, используются основные идеи методов Рэля-Рица, а также и метода Вианелло, имеющего четкую вычислительную направленность.\* Применительно к методу деформаций эти идеи в той или иной степени развивались современными авторами: В. В. Болотиным [1], А. Ф. Смирновым [2], Ш. М. Гофманом и С. И. Бренманом [4] и [5], Н. И. Безуховым и О. В. Лужиным [3], Р. Цурмюлем [6] и многими другими.

Предлагаемый вариант метода деформаций наиболее близок к методу Р. Цурмюля, но имеет другое теоретическое обоснование и, что более важно, другую вычислительную схему\*\*, при которой значительно сокращается число арифметических операций. В отличие от методов вышеуказанных авторов, описываемый метод является точным в том смысле, что позволяет вычислить несколько первых частот и соответствующие им формы колебаний с любым наперед заданным числом верных знаков. Разумеется, повышение точности и вычисление нескольких частот требует дополнительной работы. Педагогическая практика показала, что метод удовлетворительно усваивается студентами, так как в этом методе решение динамической задачи близко к решению статической. Метод легко программируется для проведения вычислений на ЭВМ. Этому вопросу и практическим оценкам точности метода посвящена работа И. Я. Хархурима [11]. Для сокращения речи описываемый вариант метода деформаций, обладающий повышенной эффек-

\* Метод Вианелло в тридцатых годах успешно развивал Б. Н. Горбунов (Б. Н. Горбунов. Расчет устойчивости стержней и арок при помощи последовательных приближений. Сб. Исслед. по теор. сооруж. Госстройиздат, 1936).

\*\* В известной нам литературе эта схема не описана.

тивностью, мы будем называть «Э-методом»<sup>1</sup>. Он отличается от вышеуказанных методов большей простотой, высокой точностью, применением эффективных численных методов, охватом широкого круга задач. См. «Добавление». При изложении Э-метода мы ограничимся примерами расчета простых рам, так как это облегчает ознакомление с методом.

Главное внимание мы уделим тем вопросам, о которых мало или совсем не говорится в указанных работах, а именно: развитию метода, получению высших частот и примененным приемам вычислительной математики.

2. Будем считать, что кривые собственных форм колебаний рамы на целесообразно выбранных участках подразделения стержней рамы могут быть достаточно точно приближены кубическим параболам, по которым изгибается упругий стержень с двумя защемленными концами при повороте или смещении одного из его концов. Концы участков подразделения могут совпадать с узлами рамы, что является обычным необходимым минимумом, но могут располагаться и вне узлов, что увеличивает точность расчета. Смещения всех точек подразделения и повороты сечений рамы в этих точках рассматриваются как основные параметры, посредством которых приближенно определяются собственные формы колебаний рамы.

При приближении функций по Эрмиту\* требуется, чтобы приближающий полином в точках подразделения имел одинаковые значения как с приближаемой функцией, так и с ее производными. Таким образом приближение собственных форм колебаний рамы посредством основных параметров метода деформаций совпадает с приближением этих же форм по Эрмиту\*\*. Это совпадение дает надежное математическое обоснование.

Итак, при расчете рам по Э-методу на раму накладываются обычные для метода деформаций связи в узлах и, если надо, дополнительные. В наложенных связях будут возникать реакции от сил, вызванных упругими перемещениями рамы, и,

---

<sup>1</sup> При расчете по Э-методу не требуется применять таблиц специальных функций, что облегчает программирование вычислений на ЭВЦМ. Вычисление специальных функций и решение трансцендентных уравнений на машине принципиально возможно, но крайне загружает ее оперативную память. Это создает практически непреодолимые трудности.

\* О приближении функций по Эрмиту весьма подробно сказано в книге И. С. Березина и Н. И. Жидкова: «Методы вычислений», ч. I (1959 г. § II, стр. 163).

\*\* Если ограничиться только первыми производными. Р. Цурмюль сообщает, что С. Фальк для подобных же задач применяет дополнительно вторые и третьи производные.

кроме того, в соответствии с принципом Даламбера будут возникать реакции еще и от сил инерции.

Так как на самом деле мысленно налагаемые на раму связи не существуют, то **в направлении каждой из наложенных связей сумма реакций от упругих и инерционных сил должна быть равной нулю.** Это условие позволяет составить необходимое число уравнений метода деформаций для решения нашей динамической задачи.

При желании получить результат с высокой точностью дополнительные связи следует ставить в местах изменения жесткости стержней, в местах изменения интенсивности распределенных масс. Первая частота получается достаточно точно при обычном для метода деформаций числе наложенных связей. Для получения хорошего приближения второй и третьей частоты число налагаемых связей надо увеличить. Введение дополнительных участков подразделений позволяет практически получить результаты с любым наперед заданным числом верных знаков. Проведя расчет при каком-либо числе участков подразделений, расчет повторяют при большем числе участков подразделений (это уточняет делаемое приближение к собственным формам, следовательно уточняет и получаемый результат). Совпадающие знаки являются верными. Если желательно повысить точность результата, то число подразделений еще увеличивают. При вычислении на ЭВЦМ увеличение числа участков подразделения не создает серьезных затруднений. Все эти положения верны при большом числе участков подразделения.\*

3. Определение реакций в наложенных связях от единичных деформаций по их направлению выполняется по общепринятым формулам при правиле знаков «по часовой стрелке» (фиг. 1, 2). При этом вносятся следующие изменения.

Погонную жесткость одного из стержней  $i = \frac{EI}{l}$  принимают за эталонную и через нее выражают погонные жесткости всех остальных стержней. В отличие от статического варианта метода деформаций, эталонную жесткость  $i$  нельзя принимать равной единице, так как ее действительная величина  $\frac{EI}{l}$  войдет в частотный параметр  $\lambda$ , о котором скажем ниже. Погонная жесткость произвольного стержня  $i_{ab}$  будет выражаться через эталонную  $i$  так:

---

\* При малом числе участков подразделения возможны, хотя и очень редко, «казусы» при оценке точности. Можно дать строгую математическую оценку точности Э-метода. Но писать об этой оценке следует лишь тогда, когда Э-метод получит заслуженное внимание.

$$l_{ab} = \alpha_{ab} l, \quad \alpha_{ab} = \frac{l_{ab}}{l}, \quad (1)$$

где  $\alpha_{ab}$  — безразмерный коэффициент.

Вводится эталонная длина стержня  $l$ . Она также входит в частотный параметр  $\kappa$ . Длина произвольного стержня будет определяться равенством:

$$l_{ab} = \beta_{ab} l; \quad \beta_{ab} = \frac{l_{ab}}{l}. \quad (2)$$

где  $\beta_{ab}$  — безразмерный коэффициент.

Поскольку эталонная длина входит в выражение для частотного параметра, необходимо вместо абсолютного перемещения  $\Delta$  или относительного  $\delta$  ввести угол поворота хорды стержня  $\psi_{mn}$ , что для левого (индекс  $m$ ) и, соответственно, правого (индекс  $n$ ) конца основного стержня дает выражения

$$\psi_{mn} = \frac{\Delta_m}{l_{mn}}; \quad \psi_{nm} = \frac{\Delta_n}{l_{nm}}. \quad (3)$$

Если  $\Delta_m$  и  $\Delta_n$  являются перемещениями в направлении наложенных связей, то от этих перемещений будут возникать повороты хорд нескольких стержней (в общем случае) различной длины  $l_{ab}$  и на различные углы  $\psi_{ab}$ . Поэтому возникает необходимость выразить повороты  $\psi_{ab}$  и  $\psi_{ba}$  через основные «эталонные» повороты  $\psi_{mn}$  и  $\psi_{nm}$ , непосредственно зависящие от смещений в основных направлениях  $\Delta_m$  или  $\Delta_n$  (3). Из условий (фиг. 1 и 2)

$$\psi_{ab} l_{ab} = \psi_{mn} l_{mn} = \Delta_m, \quad \psi_{ba} l_{ab} = \psi_{nm} l_{nm} = \Delta_n$$

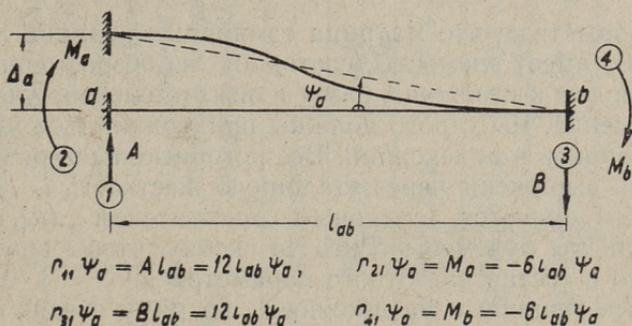
получаем

$$\psi_{ab} = \frac{l_{mn}}{l_{ab}} \psi_{mn}, \quad \psi_{ba} = \frac{l_{nm}}{l_{ab}} \psi_{nm}. \quad (4)$$

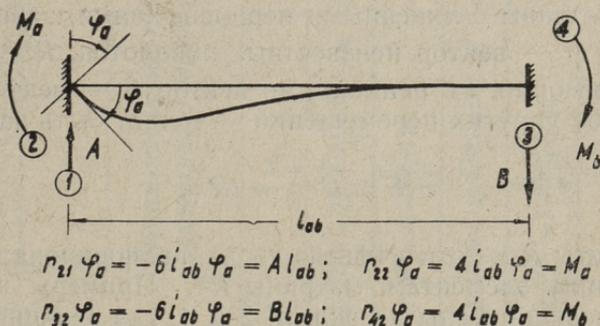
Учитывая (2), эти зависимости можно записать иначе:

$$\psi_{ab} = \frac{\beta_{mn}}{\beta_{ab}} \psi_{mn} = \gamma_{ab} \psi_{mn}, \quad \psi_{ba} = \frac{\beta_{nm}}{\beta_{ab}} \psi_{nm} = \gamma_{ab} \psi_{nm}. \quad (5)$$

Для того чтобы при внесенных изменениях сохранился закон взаимности для единичных реакций, реактивные силы, вне зависимости от того, какими деформациями они вызваны — поворотом ли одного из концов или поворотом хорды, — умножаются на длину  $l_{ab}$  деформируемого стержня (фиг. 1, 2). Реактивные силы заменяются реактивными парами сил.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1, 2 показаны два из четырех возможных случаев деформации стержня  $l_{ab}$  с двумя защемленными концами, приведены обозначения и правила знаков. Направления перемещений и реакций обозначены числовыми индексами. Индексы направлений перемещений и реакций при матричных обозначениях являются соответственно индексами строк и столбцов.

Подобные формулы могут быть написаны для случаев смещения и поворота правого конца стержня. Приведенные формулы для удобства их применения целесообразно объединить в одной матричной записи, где  $r^*$  — матрица единичных реакций.

$$r^* \bar{\varphi} = i_{ab} r^* \bar{\varphi} = i_{ab} \begin{vmatrix} 12 & -6 & 12 & -6 \\ -6 & 4 & -6 & 2 \\ 12 & -6 & 12 & -6 \\ -6 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_{ab} \\ \psi_a \\ \psi_{ba} \\ \psi_b \end{vmatrix} \quad (6)$$

Легко заметить, что матрица единичных реакций  $r^*$ , входящая в (6), имеет элементы, состоящие из безразмерных чисел. Применяя (6) к стержням рамы или к отдельным участкам их подразделения, мы строго должны придерживаться указанного правила знаков и индексации. Все погонные жесткости  $i_{ab}$  должны быть выражены через эталонную жесткость  $i$ . Погонная жесткость  $i$  является склярным множителем (кг.см). Этот множитель мы будем выносить за скобку, чтобы впоследствии ввести его в состав частотного параметра  $\kappa$ .

Полные реакции в наложенных на раму связях определяются суммированием реакций отдельных стержней, перемещающихся вместе со связью. Необходимо помнить, что углы поворота хорд стержней  $\psi_{ab}$  надо выразить через основные  $\psi_{mn}^*$ , которые связаны с линейными перемещениями, зависимостями (3). Если  $\bar{\varphi}$  — вектор неизвестных поворотов,  $R^*$  — матрица соответствующих им реакций, то вектор  $\bar{S}$  — вектор усилий в связях от упругих перемещений — может быть записан так:

$$\bar{S} = R^* \bar{\varphi} = iR \bar{\varphi}.$$

Элементы  $R$  — отвлеченные числа, пропорциональные соответствующим элементам матрицы  $R^*$ . Примеры вычисления упругих реакций даны на вкл. л. 2 и 4, где реакции вычислялись непосредственно, не применяя матрицу вкл. листа № 1. Матрицы  $R^*$  и  $R$  всегда симметричны и являются матрицами, соответствующими определенно положительной квадратичной форме.

4. По принципу Даламбера решение динамической задачи сводится к решению статической. Статический расчет рам по методу деформаций широко известен. Условимся считать, что распределенные силы инерции, возникающие при колебании, будут пропорциональны перемещениям\*\* (на участках подразделения) точек стержней рамы и совпадать с ними по знаку. Приближая кривые собственных форм колебаний по Эрмиту,

\* Соответствующие соотношения даны на вкл. л. № 1. Зависимости (1), (2), (3), (4), (5) учтены при составлении этой таблицы.

\*\* которые возникают от поворотов и перемещений связей.

Матрица реакций при колебаниях стержня

Обозначения для эталонных

величин:

$l$  — длина стержня

$m$  — погонная масса

$EI$  — жесткость

$i = \frac{EI}{l}$  — погонная жесткость

$\chi = \frac{m\omega^2 l^4}{420 EI}$

$\omega = 20,4939 \sqrt{\chi} \sqrt{\frac{EI}{m}}$

Обозначения для рядовых

величин:

$l_{об}$  — длина рядового стержня

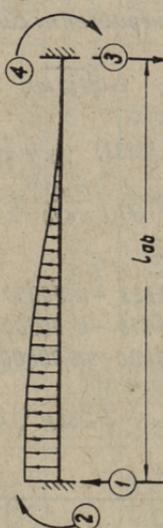
$l_{мп}$  — длина основного стержня

$M_{об}$  — погонная масса

$EI$  — жесткость

$i_{об}$  — погонная жесткость

Стержень, поворот хорды которого принят за неизвестное — „основн.“



Положительные направления перемещений и реактивных сил.

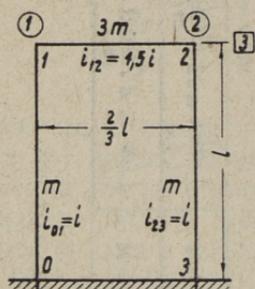
$\bar{r} \backslash \bar{p}$	$\Psi_1$ (поворот основн. стерж.)	$\Psi_2$	$\Psi_3$ (поворот основн. стерж.)	$\Psi_4$
$r_1$	$12 \frac{i_{об} l_{мп}^2}{i l_{об}^2} - 156 \frac{M_{об} l_{об} l_{мп}}{m l^3} \chi$	$-6 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} + 22 \frac{M_{об} l_{об}^2 l_{мп}}{m l^3} \chi$	$12 \frac{i_{об} l_{мп}^2}{i l_{об}^2} + 54 \frac{M_{об} l_{об}^2 l_{мп}}{m l^3} \chi$	$-6 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} - 13 \frac{M_{об} l_{об}^2 l_{мп}}{m l^3} \chi$
$r_2$	$-6 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} + 22 \frac{M_{об} l_{об} l_{мп}}{m l^3} \chi$	$4 \frac{i_{об}}{i} - 4 \frac{M_{об} l_{об}^2}{m l^3} \chi$	$-6 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} - 13 \frac{M_{об} l_{об}^2 l_{мп}}{m l^3} \chi$	$2 \frac{i_{об}}{i} + 3 \frac{M_{об} l_{об}}{m l^3} \chi$
$r_3$	$12 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} + 54 \frac{M_{об} l_{об} l_{мп}}{m l^3} \chi$	$-6 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} - 13 \frac{M_{об} l_{об}^2 l_{мп}}{m l^3} \chi$	$12 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} - 156 \frac{M_{об} l_{об} l_{мп}}{m l^3} \chi$	$-6 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} + 22 \frac{M_{об} l_{об}^2 l_{мп}}{m l^3} \chi$
$r_4$	$-6 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} - 13 \frac{M_{об} l_{об} l_{мп}}{m l^3} \chi$	$2 \frac{i_{об}}{i} + 3 \frac{M_{об} l_{об}}{m l^3} \chi$	$6 \frac{i_{об} l_{мп}}{i l_{об}} + 22 \frac{M_{об} l_{об} l_{мп}}{m l^3} \chi$	$4 \frac{i_{об}}{i} - 4 \frac{M_{об} l_{об}^2}{m l^3} \chi$

Примечание. При соответствующей замене неизвестных за основной можно принять любой стержень, включая и эталонный.

Пример 1.

Вкладной лист № 2.

Исходные данные взяты из книги [8] К. Гогенеммер и В. Прагер. Динамика сооружений, ОНТИ 1936 г. стр. 130-179.



Определение элементов матрицы  $R$  – матрицы реакций от упругих перемещений (6), (17).

$$r_{11}i = 4(l + 1.5l) = 10l, \quad r_{12}i = 3l, \quad r_{13}i = -\frac{6l}{l} = -6l, \\ r_{22}i = 10l, \quad r_{33}i = -6l, \quad r_{33}i = \frac{2 \cdot 2}{l^2} i l l = 24l.$$

В матричной записи:

$$iR\bar{\varphi} = i \begin{vmatrix} 10,00000 & 3,00000 & -6,00000 \\ 3,00000 & 10,00000 & -6,00000 \\ -6,00000 & -6,00000 & 24,00000 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{vmatrix}$$

Определение элементов матрицы реакций от инерционных сил матрица  $J$  (17), (18).

$$\text{Обозначения: } \kappa = \frac{m l^3 l}{210 E I} \omega^2 = \frac{m l^4 \omega^2}{210 E I}; \quad \omega = \frac{v}{l^2} \sqrt{\frac{E I}{m}}; \quad v = \sqrt{210} \kappa.$$

$$j_{11} = \frac{1}{2} \left\{ 4 + 4.3 \frac{l_{12}^3}{l^3} \right\} = 3,77778; \quad j_{12} = \frac{1}{2} \left\{ -3.3 \left( \frac{l_{12}}{l} \right)^3 \right\} = -1,33333; \quad j_{13} = \frac{1}{2} \left\{ -22 \right\} = \\ = -11,00000; \quad j_{22} = 3,77778; \quad j_{23} = -11,00000; \quad j_{33} \kappa = \frac{1}{2 E I} \left\{ \frac{m \omega^2 l^3}{420} \cdot 2.156 + \right. \\ \left. + 3 m \frac{2}{3} l l^2 \omega^2 \right\} = \frac{\kappa}{2} \left\{ 2.156 + 2.420 \right\} = 576,00000 \kappa.$$

$$\kappa J \bar{\varphi} = \kappa \begin{vmatrix} 3,77778 & -1,33333 & -11,00000 \\ -1,33333 & 3,77778 & -11,00000 \\ -11,00000 & -11,00000 & 576,00000 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{vmatrix}$$

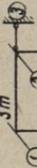
Обобщенная система характерист. ур.-ний.

$$R\bar{\varphi} = \kappa J \bar{\varphi}, \quad \text{или } \bar{\varphi} = \kappa R^{-1} J \bar{\varphi}$$

Таблица для вычисления матрицы  $R^{-1} J$ .

R			$\Sigma$	J			$\Sigma$		
10,00000	3,00000	-6,00000	7,00000	3,77778	-1,33333	-11,00000	-8,55555		
3,00000	10,00000	-6,00000	7,00000	-1,33333	3,77778	-11,00000	-8,55555		
-6,00000	-6,00000	24,00000	12,00000	-11,00000	-11,00000	576,00000	554,00000		
L \quad G			$\Sigma^*$	L <sup>-1</sup> J			$\Sigma^*$		
10,00000	3,00000	-6,00000	7,00000	3,77778	-1,33333	-11,00000	-8,55555		
0,30000	9,10000	-4,20000	4,90000	-2,46666	4,17778	-7,70000	-8,98888		
-0,60000	-0,46154	18,46153	18,46153	-9,87179	-9,87179	565,84614	546,10256		
R <sup>-1</sup> J							$\Sigma^{**}$		
0,21230							-0,51786	13,30000	12,99445
-0,51786							0,21230	13,30000	12,99445
-0,53472							-0,53472	30,65001	29,58057

Пример 1.



Вкладной лист №3.

1	R <sub>i</sub>	Итерационная таблица				Суммы или скалары Рэлея*	Характер числа	Контр. суммы
		0,21230	-0,31786	13,30000	13,30000			
	-0,51786	0,21230	13,30000					
	-0,33472	-0,33472	30,85001					
	-0,84028	-0,84028	57,25001					
Обозначение приоб. сист. векторов								
3	$\bar{x}_{10}$	0,00001	0,00001	0,00001	4	0,00003	18	
5	$\bar{x}_{11}$	0,00130	0,00130	0,00296	6	0,00356	33	
8	$\bar{x}_{12}$	0,03837	0,03837	0,08933	9	0,16727	49	
11	$\bar{x}_{13}$	1,17617	1,17617	2,69659	12	5,04863	12	
14	$\bar{x}_{14}$	35,50727	35,50727	61,38347	15	157,38001	34	
17	$\bar{x}_{15}$ нормир.	0,43622	0,43622	1,00000			43	
20	$\bar{x}_{16}$	1,00000	-0,50000	0,00877			35	
21	$\bar{x}_{17}$	0,58787	-0,50738	0,00141				
22	$\bar{x}_{18}$	0,40631	-0,39340	0,00023				
24	$\bar{x}_{19}$	0,29300	-0,29087	0,00004				
26	$\bar{x}_{20}$ -10,00000	2,13366	-2,12953	0,00007	28	0,08740 <sup>*)</sup>	21	
29	$\bar{x}_{21}$	1,55671	-1,55671	0,00001	30	6,63527 <sup>*)</sup>	31	
32	$\bar{x}_{22}$ нормир.	1,00000	-1,00000	0,00000			1,36926 <sup>*)</sup>	
36	$\bar{x}_{23}$	2,85092	2,85092	0,10000	37	16,965 <sup>*)</sup>		
38	$\bar{x}_{24}$	0,45667	0,45667	0,01610	39	2,61801 <sup>*)</sup>	40	
41	$\bar{x}_{25}$ нормир.	1,00000	1,00000	0,03508			6,21292	
Особый случай. исходн. вектор								
	своб. 3-й частоте	1,60951	1,60951	0,05646	200,12303 <sup>*)</sup>			
Третья форма								
		1,00000	1,00000	0,03508	32,21000 <sup>*)</sup>		6,21307 <sup>*)</sup>	
Особ. случай иск. вектор								
		3,00000	-3,00000	0,00000				
Вторая форма								
		2,19048	-2,19048	0,00000				
		1,00000	-1,00000	0,00000			1,36926	

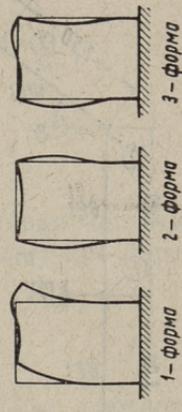
Числа при которых стоит знак \*) получены по отношению Рэлея (26)

2	J	3,77778	-1,33333	-11,00000	546,53580
		-1,33333	3,77778	-11,00000	0,00000
		-11,00000	-11,00000	576,00000	6,81756
	Контр. сумма	-8,55555	-8,55555	556,00000	55,01846
J $\bar{x}_i$ - векторы. Операции по подавлению компон. первых собств. векторов.					
	J $\bar{x}_1$	-9,93368	-9,93368	566,40316	0,00000
	J $\bar{x}_2$	5,11111	-5,11111	0,00000	0,00000
	J $\bar{x}_3$	5,86896	5,86896	-5,12034	6,81756
	J $\bar{x}_4$ нормир.	1,00000	1,00000	-57,01846	0,00000
	J $\bar{x}_5$ нормир.	1,00000	-1,00000	0,00000	0,00000
	J $\bar{x}_6$ нормир.	1,00000	1,00000	-0,87244	0,12756
	Реш. ур. ортов.	1,00000	1,00000	-2,00000	57,01846
		1,00000	-2,00000	-57,01846	-59,01846

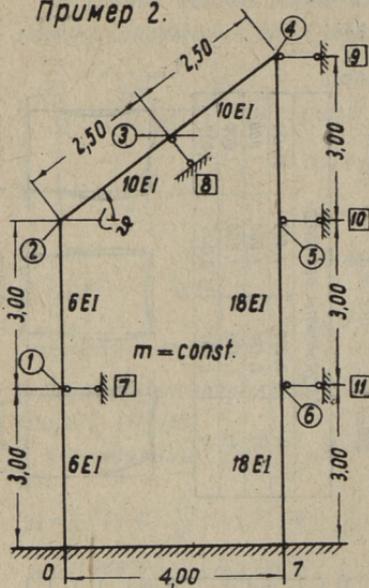
$$\kappa = \frac{m \omega^2 l^4}{210 EI}, \quad \omega = \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \gamma = \sqrt{210 \kappa}$$

Результаты расчета

$\gamma$	2,638	16,959	36,122
$\kappa_1$	0,436	1,000	1,000
$\kappa_2$	0,436	-1,000	1,000
$\kappa_3$	1,000	0,000	0,035



Пример 2.



Вкладный лист №4

Данные и обозначения.

$$l_{37} = l = 6,00 \text{ м}; \quad i_{37} = i = \frac{6EI}{l_{37}}$$

$$\sin \varphi = 0,60000; \quad \cos \varphi = 0,80000$$

$$\chi = \frac{m l^4 \omega^2}{420 EI}; \quad \omega = \frac{20,49350}{l^2} \sqrt{\frac{\chi EI}{m}}$$

$$l_{12} = 2i, \quad l_{12} = 0,50000 l,$$

$$l_{23} = 2i, \quad l_{23} = 0,41667 l,$$

$$l_{34} = 4i, \quad l_{34} = 0,41667 l,$$

$$l_{45} = 6i, \quad l_{45} = 0,50000 l \dots$$

Определение части реакции от упругих перемещений (6), (18).

$$r_{11} = 16i, \quad r_{12} = 4i, \quad r_{13} = r_{17} = r_{16} = r_{17} = 0$$

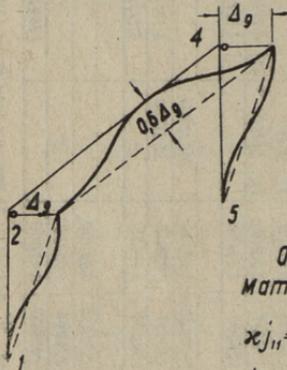
$$r_{18} = 0, \quad r_{19} = -12i, \quad r_{1,10} = r_{1,11} = 0 \dots$$

$$\dots r_{29} = -\frac{6i_{12}}{l_{12}} l_{45} + \frac{6i_{23} \cdot 0,6}{l_{23}} l_{45} =$$

$$= 5,28000 i \dots r_{49} = -\frac{6i_{34} \cdot 0,6 l_{45}}{l_{23}} - \frac{6i_{45} l_{45}}{l_{45}}$$

$$= 53,28000 \dots r_{99} = \frac{12i_{12}}{l_{12}^2} l_{12} l_{45} + \frac{2 \cdot 12i_{23}}{l_{23}^2} \cdot 0,6 l_{34} \cdot 0,6 l_{34} +$$

$$+ \frac{12i_{45}}{l_{45}^2} l_{45} l_{45} = 145,76640 \dots$$



Определение части реакций от инерционных сил  
Матрица J (17), (18).

$$\chi j_{11} = \frac{m \omega^2 l^3}{420} \frac{l}{EI} (4+4) = \chi \left(\frac{l \omega l}{EI}\right)^3 8; \quad j_{11} = 1,00000 \dots$$

$$\dots j_{22} = \left\{ 4 \left(\frac{l_{12}}{l}\right)^3 + 4 \left(\frac{l_{23}}{l}\right)^3 \right\} = 0,78936 \dots$$

$$\dots j_{29} = \left\{ -22 \left(\frac{l_{12}}{l}\right)^3 \frac{l_{45}}{l_{12}} + 22 \left(\frac{l_{23}}{l}\right)^3 \cdot 0,6 \frac{l_{45}}{l_{23}} \right\} = -1,60417 \dots$$

$$\dots j_{49} = \left\{ -22 \left(\frac{l_{23}}{l}\right)^3 \cdot 0,6 \frac{l_{34}}{l_{23}} - 22 \left(\frac{l_{45}}{l}\right)^3 \right\} = -3,89383 \dots$$

$$\dots j_{77} = \left\{ 2 \cdot 156 \left(\frac{l_{12}}{l}\right)^3 \right\} = 39,00000 \dots$$

$$\dots j_{89} = \left\{ 2 \cdot 54 \cdot 0,6 \left(\frac{l_{23}}{l}\right)^3 \frac{l_{45}}{l_{23}} \right\} = 5,62500 \dots$$

$$\dots j_{99} = \left\{ 2 \cdot 156 \left(\frac{l_{12}}{l}\right)^3 \frac{l_{34}}{l_{12}} + 2 \cdot 156 \left(\frac{l_{23}}{l}\right)^3 \cdot 0,6 \frac{l_{34}}{l_{23}} \cdot 0,6 + \right. \\ \left. + 420 l_{23} \cdot 2 \cdot 0,8 l_{45}^2 \cdot 0,8 \frac{l_{34}}{l_{23}} \right\} = 104,75000 \dots$$

или, что то же, — параболлами метода деформаций, мы получаем возможность с той же точностью приближения определить реакции в наложенных на раму связях от сил инерции.

При обычном предположении, что колебания стержня происходят по стоячей волне, имеем:

$$V(xt) = V(x) \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{\partial^2 V(xt)}{\partial t^2} = -\omega^2 V(x) \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $V(x)$  — функция прогиба стержня,  $\omega$  — угловая частота. Интенсивность распределенных сил инерции для стержня определится такой функцией:

$$j(x) = \omega^2 m(x) V(x), \quad (7)$$

где  $m(x)$  — интенсивность распределенной массы;  $V(x)$  соответствует крайнему отклонению точек стержня, поэтому тригонометрический множитель принят равным единице. Знак «минус» в (7) опущен в силу указанного выше условия. Для формы изгиба, изображенной на фигуре 3, соответствующий полином Эрмита и его производная при безразмерной абсциссе  $\xi = \frac{x}{l}$  будут такими:

$$V(x) = V(l\xi) = H_1(\xi) \Delta_{ab} = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \Delta_{ab}, \quad (8)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{dH_1(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \Delta_{ab} = -6(\xi - \xi^2) \frac{1}{l} \Delta_{ab}. \quad (9)$$

Краевые условия, как видим, удовлетворяются. В частном случае, при

$$m(\xi) = m = \text{const.} \quad (10)$$

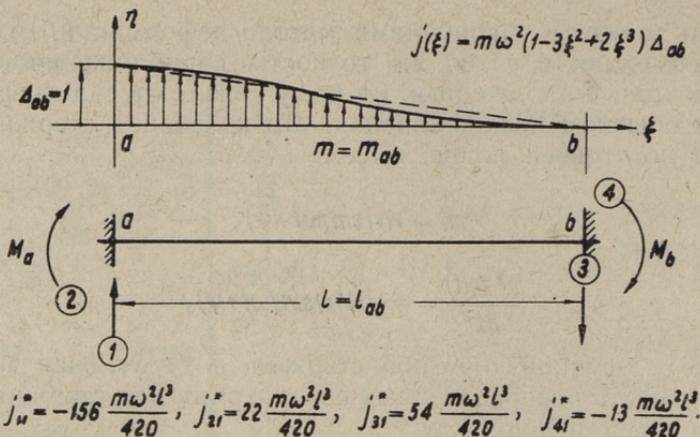
$$EI(\xi) = EI = \text{const.} \quad (11)$$

выражение для функции интенсивности инерционной нагрузки стержня упрощается и при угле поворота хорды стержня запишется так:

$$j(\xi) = m_{ab} \omega^2 l (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \psi, \quad (12)$$

Погонные массы стержней должны быть выражены через эталонную массу  $m$ :

$$m_{ab} = \mu m, \quad (13)$$



Фиг. 3

где  $\mu$  — безразмерный коэффициент. Интегрируя\* (12) по  $x$  последовательно четыре раза, получим основные функции теории изгиба балок.

$$Q(\xi) = Q_{(0)} + m\omega^2 l^2 \left( \xi - \xi^3 + \frac{1}{2} \xi^4 \right) \Psi_1,$$

$$M(\xi) = M_{(0)} + Q_{(0)} l \xi + m\omega^2 l^3 \left( \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{4} \xi^4 + \frac{1}{10} \xi^5 \right) \Psi_1,$$

$$V(\xi) = \frac{1}{EI} \left\{ M_{(0)} l \xi + \frac{1}{2} Q_{(0)} l^2 \xi^2 + m\omega^2 l^4 \left( \frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{20} \xi^5 + \frac{1}{60} \xi^6 \right) \Psi_1 \right\},$$

$$V(\xi) = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} M_{(0)} l^2 \xi^2 + \frac{1}{6} Q_{(0)} l^3 \xi^3 + m\omega^2 l^5 \left( \frac{1}{24} \xi^4 - \frac{1}{120} \xi^6 + \frac{1}{420} \xi^7 \right) \Psi_1 \right\} \quad (14)$$

По крайевым условиям на правом конце стержня:  $x = l$  или  $\xi = 1$ ,

$$V_{(1)} = 0, \quad V'_{(1)} = 0, \quad (15)$$

мы определим опорные реакции и моменты. Запишем их в матричной форме:

$$\bar{j}_1^* = -\frac{m_{ab} \omega^2 l_{ab}^3}{420} \bar{j}_1 = -\frac{m_{ab} \omega^2 l_{ab}^3}{420} \begin{Bmatrix} j_{11} \\ j_{21} \\ j_{31} \\ j_{41} \end{Bmatrix} = -\frac{m_{ab} \omega^2 l_{ab}^3}{420} \begin{Bmatrix} 156 \\ -22 \\ -54 \\ 13 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

\* Берутся интегралы с переменным верхним пределом.

Здесь  $\bar{j}^*$ , — вектор инерционных реакций, соответствующий перемещению по направлению 1,  $\bar{j}_1$  — соответствующий ему безразмерный вектор.

Аналогичным образом мы можем получить реакции от инерционных сил, соответствующие повороту левого конца балки, а также смещению и повороту правого конца балки. В результате получим матрицу инерционных реакций  $j^*$ .

$$j^* \bar{\varphi} = - \frac{m_{ab} \omega^2 l_{ab}^3}{420} j \bar{\varphi} = - \frac{m_{ab} \omega^2 l_{ab}^3}{420} \begin{vmatrix} 156 & -22 & -54 & 13 \\ -22 & 4 & 13 & -3 \\ -54 & 13 & 156 & -22 \\ 13 & -3 & -22 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_{ab} \\ \varphi_a \\ \psi_{ba} \\ \varphi_b \end{vmatrix} \quad (17)$$

где  $j$  — безразмерная матрица, у которой, как и у  $j^*$ , индексы строк и столбцов соответствуют индексам (6). Все величины, входящие в (17), выражаются через эталонные \*. Полные реакции в наложенных связях от инерционных сил определяются суммированием реакций отдельных стержней, перемещающихся вместе со связью. Необходимо помнить, что углы поворота хорд стержней  $\psi_{ab}$  надо выразить через основные  $\psi_{mn}$ , которые связаны с линейными перемещениями  $\Delta_m$  зависимостями (3). Если  $\bar{\varphi}$  — вектор неизвестных поворотов,  $I^*$  — матрица соответствующих им инерционных реакций, то вектор  $I^* \bar{\varphi}$  усилий в связях от инерционных сил выразится так:

$$j^* \bar{\varphi} = - \frac{m \omega^2 l^3}{420} j \bar{\varphi},$$

где матрица  $I$  отличается от матрицы  $I^*$  лишь тем, что за ее знак вынесен скалярный множитель —  $\frac{m \omega^2 l^3}{420}$ . Элементы матрицы  $I$  — отвлеченные числа, пропорциональные соответствующим элементам матрицы  $I^*$ . Примеры вычисления инерционных реакций даны на вкл. л. 2 и 4. Матрицы  $I^*$  и  $I$  всегда симметричны. Матрице  $I$  соответствует определенно положительная квадратичная форма.

5. Так как мысленно наложенные на раму связи в действительности не существуют, то сумма реакций от упругих перемещений и от инерционных сил в направлении каждой из наложенных связей должна быть равной нулю. При введенных обозначениях это положение получит такую математическую запись:

$$(R^* + I^*) \bar{\varphi} = 0 \text{ или } R^* \bar{\varphi} = -I^* \bar{\varphi}.$$

\* См. матрицу на вкл. листе 1.

После очевидных преобразований и замен полученную систему характеристических уравнений можно записать в двух видах.

$$(R - \kappa I)\bar{\varphi} = 0 \text{ или } R\bar{\varphi} = \kappa I\bar{\varphi}. \quad (18)$$

Первый вид является записью обобщенной системы характеристических уравнений. Второй вид соответствует записи пучка квадратичных форм. При получении (18) мы произвели сокращение на  $i$  и ввели обозначение:

$$\kappa = \frac{m\omega^2 l^4}{420EI}. \quad (19)$$

Легко проверить, что  $\kappa$  — безразмерное число. Те значения  $\kappa$ , которые удовлетворяют системам уравнений (18), носят название «характеристические числа»; они записываются в возрастающем порядке

$$\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_i \leq \dots \leq \kappa_n.$$

Из (19) получаются круговые частоты собственных колебаний рамы, которые также записываются в возрастающем порядке

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots \leq \omega_i \leq \dots \leq \omega_n.$$

$$\omega_i = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{420EI}{m}} \kappa_i. \quad (20)$$

Числа  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots \geq \lambda_n$  обратные к  $\kappa_i$  носят название «собственные числа».

$$\lambda_i = \frac{1}{\kappa_i}. \quad (21)$$

Из соотношения (21) следует, что максимальному значению  $\lambda_i$  соответствует минимальное значение  $\kappa_i$ , а минимальному значению  $\lambda_i$  соответствует максимальная частота  $\omega_i$ . В теории колебаний обычно интересуются частотами. В математике обычно изучается теория собственных чисел ( $\lambda$ ). В некоторых работах по колебаниям встречаются оба термина. Поэтому, во избежание ошибок, зависимость (21) надо помнить и соответственно формулировать и использовать необходимые для расчета математические теоремы.

6. О методах численного решения обобщенного характеристического уравнения вида (18) в литературе сказано довольно мало. Теория же вопроса разработана достаточно полно. По-

этому имеется возможность обоснованно выдвигать новые варианты численного решения, стремясь к уменьшению числа выкладок при обычном счете или к простоте программы и к малому загрузению оперативной и внешней памяти при вычислениях на ЭВМ. Наша практика показала, что вычислительный метод, построенный для проведения высчислений на арифмометрах, обычно легко реализуется и на ЭВМ. Описанный ниже метод построен для вычислений, проводимых на арифмометре, но он уже и без особых затруднений запрограммирован [11]. Таким образом, пригодность метода для проведения вычислений на ЭВМ уже проверена.

Как и в работе [6], мы применим итерационный метод, который позволяет вычислить любое число первых частот и соответствующее число собственных форм. Но, вместо «ломаной» итерации [6], применим простую. Вместо итерации с помощью двух матриц [6]\*, будем проводить итерацию с одной матрицей. Видоизменим также метод И. Коха для вычисления высших частот [6] и [7].

Обобщенное характеристическое уравнение (18) умножим слева на матрицу  $R^{-1}$ ; получим:

$$\bar{\varphi} = \kappa R^{-1} I \bar{\varphi}. \quad (22)$$

Хотя матрицы  $R^{-1}$  и  $I$  симметричные и определено положительные, матрица  $R^{-1}I$  вообще не будет симметричной. Матрица  $R^{-1}I$  будет иметь те же характеристические числа (всегда положительные) и те же собственные векторы, что и в (18). Но собственные векторы  $R^{-1}I$  не будут взаимно ортогональными. Несколькими способами вместо  $R^{-1}I$  можно получить симметричную матрицу, у которой собственные векторы будут взаимно ортогональными. Но эти приемы увеличивают число выкладок и усложняют программу. Поэтому мы эти приемы опускаем.

Для получения результата (22) нет необходимости вычислить матрицу  $R^{-1}$  и затем выполнять перемножение матриц. Вдвое меньшее число выкладок потребуется для получения (22), если мы применим какой-либо из современных методов исключения неизвестных, принимая столбцы матрицы  $I$  за совокупность правых частей\*\*, например: модернизированный метод

\* Оригинальная вычислительная схема, принадлежащая Л. К. Нарец, описана в статье И. Я. Хархурима, помещенной в этом же сборнике.

\*\* Как ни проста и плодотворна эта мысль, в известной нам литературе о ней не сказано. Обычно рекомендуется сначала найти  $R^{-1}$  и потом умножить  $R^{-1}$  на  $I$ .

Гаусса (ГМ-метод) [10], метод главных коэффициентов [10], метод Жордана-Эйткина [10]. Эти методы широко известны и для них составлены стандартные программы. Пример определения матрицы  $R^{-1}I$  по ГМ-методу приведен в конце вкладного листа № 2. Выполняется прямой и обратный ход, считая каждый столбец за «правую часть».

После определения  $R^{-1}I$  приступают к итерациям для определения одновременно первого характеристического числа и первого собственного вектора. Вычислительная таблица дана на вкладном листе № 3. Для удобства вычислений итерируемые векторы записываются в строках, поэтому при обозначении итерируемых векторов ставится символ транспозиции. Каждая итерация равносильна операции подстановки. Процесс итерации проводится по правилу:

$$\bar{\varphi}'_{v+1} = R^{-1}I\bar{\varphi}_v. \quad (23)$$

Сходимость этого процесса доказана в [7]. За начальный вектор можно принять вектор с любыми значениями компонент (см. ниже замечание). Порядковые номера проводимых математических операций указаны в таблице 3 в маленьких квадратах. Вычисления проводятся методом накопления [10] с проверкой вычислений по контрольным суммам.

При произвольном начальном векторе, за исключением редких частных случаев, мы всегда приходим к минимальному характеристическому числу и соответствующему собственному вектору. Определение первого характеристического числа (минимального) может производиться несколькими способами. Так как сходимость процесса итераций доказана [7], мы можем считать, что при достаточно большом  $v$  уравнение (22) при  $\bar{\varphi} \simeq \bar{\varphi}_v$  становится достаточно точным приближенным равенством. Учитывая (23), получаем приближенное равенство, определяющее  $\kappa_1$ :

$$\varphi_v = \kappa_1 \varphi_{v+1}. \quad (24)$$

Компоненты векторов  $\bar{\varphi}_v$  и  $\kappa_1 \bar{\varphi}_{v+1}$  должны быть между собою приближенно равны. Если возьмем, например,  $i$ -тые компоненты, то из приближенного равенства  $\bar{\varphi}_{i,v} = \kappa_1 \bar{\varphi}_{i,v+1}$  получаем

$$\kappa_1 = \frac{\varphi_{i,v}}{\varphi_{i,v+1}} \quad (25)$$

В зависимости от сравниваемых компонент мы будем получать вообще различные значения для  $\kappa_1$ , но при достаточно боль-

шом  $v$  они становятся одинаковыми при принятом числе знаков. Для уточнения (осереднения) значений  $\kappa_1$  целесообразно производить вычисление по значениям среднеарифметических чисел от компонент (см. пример). Это дает формулу

$$\kappa_1 = \frac{\sum \varphi_{i,v}}{\sum \varphi_{i,v+1}}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (26)$$

Более точное значение для  $\kappa_1$  мы получим при сравнении модулей векторов:

$$\kappa_1 = \frac{\text{mod } \bar{\varphi}_v}{\text{mod } \bar{\varphi}_{v+1}} = \frac{\sqrt{\sum \varphi_{i,v}^2}}{\sqrt{\sum \varphi_{i,v+1}^2}} \quad (27)$$

Нельзя пройти мимо отношения Рэлея. Умножая слева (22) при значении  $\bar{\varphi} \simeq \bar{\varphi}_v$  на транспонированный вектор  $\bar{\varphi}'_v$ , имеем  $\bar{\varphi}'_v \bar{\varphi}_v = \kappa_1 \bar{\varphi}'_v \bar{\varphi}_{v+1}$ . Отсюда и получаются отношения Рэлея:

$$\kappa_1 = \frac{\bar{J}'_v \bar{J}_v}{\bar{J}'_v \bar{J}_{v+1}}; \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

Выражения (27), (28) дают обычно одинаковое значение для  $\kappa_1$ , но отношения Рэлея\* проще при вычислениях, так как отсутствует операция вычисления квадратного корня. В процессе итераций итерлируемый вектор может по модулю увеличиваться или уменьшаться, что одинаково неудобно при вычислениях. Наиболее просто устраняется это неудобство путем переноса запятой вправо или влево на нужное число разрядов.

Когда два последовательных значения  $\kappa$  совпадают, итерация считается законченной. Полученный собственный вектор нормируется так, чтобы наибольшая его компонента равнялась единице, или так, чтобы сумма квадратов компонент была равна единице.

**Замечание.** В редких случаях (что возможно при простых симметричных рамах) можно так задаться компонентами исходного вектора, что они будут точно пропорциональны компонентам собственного вектора, соответствующего какому-либо характеристическому числу, большему минимального. В этом случае первый итерированный вектор с точностью до постоянного множителя повторяет исходный вектор, что и указывает на особый случай. Как и в общем случае, мы получаем характеристическое число и вектор, но до вычисления других чисел мы не можем сказать,

\* Обычно отношения Рэлея применяют для вычисления  $\lambda_{\max}$ ; тогда отношения Рэлея имеют вид  $\lambda_{\max} = \frac{\bar{\varphi}'_v \cdot \bar{\varphi}_{v+1}}{\bar{\varphi}'_v \cdot \bar{\varphi}_v}$ . См. (21).

какой номер (порядок) занимает полученное число среди других характеристических чисел. Достаточно, однако, даже ничтожного изменения компонент исходного вектора, даже за счет погрешностей округления, чтобы итерационный процесс, хотя бы и медленно, все же привел к первому характеристическому числу и соответствующему собственному вектору.

7. Нахождение второго и последующих собственных чисел производится описанным образом, но вносятся следующие изменения.

1) Используется условие ортогональности, записываемое в таком виде:

$$\bar{\varphi}_2' I \bar{\varphi}_1 = 0. \quad (29)$$

Если выполняется условие (29), то мы будем говорить, что векторы  $\bar{\varphi}_2$  и  $\bar{\varphi}_1$   $I$ -ортогональны по отношению друг к другу\*.

2) При назначении второго исходного вектора и всех последующих итерированных векторов одна из компонент всегда вычисляется из условия  $I$ -ортогональности (29). По этой причине одно из уравнений (22) всегда не используется. Выполнение условия (29) на каждом шаге итерации, за исключением редких особых случаев, всегда приведет нас к получению второго характеристического числа и соответствующего ему собственного вектора\*\*. Особый случай вполне аналогичен случаю,

отмеченному в замечании к пункту 6. Может случиться, что при выполнении условия (29) мы так задались остальными компонентами, что все компоненты оказались пропорциональными компонентами собственного вектора, соответствующего характеристическому числу более высокого порядкового номера. В этом случае мы опять получаем характеристическое число и вектор, не зная определенно, к какому порядковому номеру они относятся. Такой случай нами показан в примере 1. Все операции по  $I$ -ортогонализации выполняются на правой половине вкладного листа № 3. Порядковый номер вычислительной операции помещен в маленьких квадратах. Для определения компонент третьего собственного вектора необходимо использовать два условия ортогональности:

$$\bar{\varphi}_3' I \bar{\varphi}_1 = 0, \quad (30)$$

\* Это условие мы взяли из книги [9], стр. 51. Из-за различия в принятых буквах мы позволили себе, вместо термина  $C$ -ортогональность, применить термин  $I$ -ортогональность.

\*\* Описанный прием близок к приему И. Коха [7]. По Коху используется ортогональность левых и правых собственных векторов, получаемых соответственно из уравнений  $\bar{x}'A = \lambda\bar{x}$ ;  $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ . Использование условий  $I$ -ортогональности значительно сокращает число вычислений.

$$\bar{\varphi}_3' I \bar{\varphi}_2 = 0. \quad (31)$$

В этом случае уже две компоненты определяются из условий  $I$ -ортогональности, а остальные задаются произвольно. В нашем примере может быть только три собственных вектора. Поэтому условия (30) и (31) сразу определяют третий собственный вектор (одна компонента произвольна), а следовательно и третье характеристическое число. Система уравнений (30) и (31) решается методом исключения (разумеется, современными вариантами). Условия  $I$ -ортогональности трех собственных векторов будут записываться в таком виде:

$$\bar{\varphi}_4' I \bar{\varphi}_1 = 0,$$

$$\bar{\varphi}_4' I \bar{\varphi}_2 = 0,$$

$$\bar{\varphi}_4' I \bar{\varphi}_3 = 0.$$

Обобщение получается без затруднений. Часто приходится слышать, что получение высших частот и векторов является более сложной и трудоемкой работой, чем получение первой частоты и соответствующего вектора. Так как сходимость итерационного процесса (число итераций) зависит от двух причин: от особенностей матрицы  $R^{-1}I$  и от того, сколь близок начальный вектор к истинному. Поэтому приведенное мнение не обладает четкостью. Мы уже отмечали, что при вычислении высших векторов часть их компонент определяется из условий  $I$ -ортогональности, и поэтому часть уравнений из системы с матрицей  $R^{-1}I$  выпадает из итерационного процесса\*, а эта особенность сокращает число выкладок, связанных с итерацией. Старший вектор всегда определяется только по условиям  $I$ -ортогональности.

8. Кратные корни при расчете рамных конструкций на колебания встречаются редко. Математическая теория для случая кратных корней разработана достаточно подробно. Поэтому изложение всего необходимого материала в техническом аспекте возможно, но требует значительного увеличения объема этой статьи. Нам представляется, что подробное изложение случая кратных корней будет тогда уместным, когда Э-метод получит должную оценку и войдет в практику технических расчетов. Ограничимся двумя замечаниями.

Кратному корню соответствует число собственных векторов, равное кратности корня. Практически кратность первого характеристического числа устанавливается в процессе итераций

\* Это обстоятельство можно использовать для проверок.

путем выбора нескольких исходных векторов. Если в итоге итераций разнообразных по строению исходных векторов мы приходим к одному и тому же вектору, — корень простой, к различным — корень кратный. О многих «подводных камнях» мы в этой рекомендации не сказали.

О границах возможных значений собственных и характеристических чисел говорят нижеприведенные неравенства [9]:

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\bar{\varphi}' R \bar{\varphi}}{\bar{\varphi}' J \bar{\varphi}} \leq \lambda_{\max}, \quad (32)$$

$$\kappa_{\min} \leq \frac{\bar{\varphi}' J \bar{\varphi}}{\bar{\varphi}' R \bar{\varphi}} \leq \kappa_{\max}, \quad (33)$$

где  $\bar{\varphi}$  — произвольный вектор. В процессе выбора начальных векторов мы имеем возможность применить неравенства (32), (33) и получить некоторое представление о границах и распределении корней.

9. Симметрия конструкции обычно весьма часто используется при расчете рам на колебания. Рассматриваются отдельно симметричные и антисимметричные формы колебаний, и, вместо одной системы уравнений, рассматриваются две более простые. С позиций Э-метода отдельное рассмотрение симметричного и антисимметричного случая не приносит особых выгод. Используя симметрию в нашем примере, мы можем положить  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$ ,  $\psi_3 = 0$ , по данным вкладного листа № 2 получить одно уравнение и сразу определить  $\kappa$ :

$$7,00000\varphi = \kappa; \quad 5,11111\varphi; \quad \kappa = 1,36956.$$

Но такой же результат и столь же быстро мы можем получить и из решения общего случая (см. пример на вкл. листах № 2 и № 3), положив в качестве исходного вектора, что  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$ ,  $\psi_3 = 0$ . Например:  $\bar{\varphi}' = \{ 1, -1, 0 \}$  или  $\bar{\varphi}' = \{ 3,00000, -3,00000, 0,00000 \}$  и т. п. Для определения антисимметричных колебаний рамы мы должны положить, что  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ;  $\psi_3 = \psi \neq 0$ ; составить и решить систему двух уравнений:

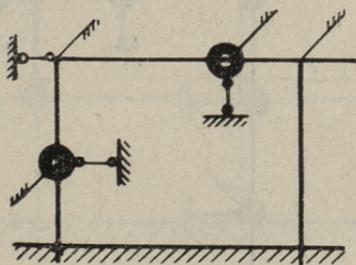
$$\begin{aligned} 13,00000\varphi - 6,00000\psi &= \kappa (2,44445\varphi - 11,00000\psi), \\ -12,00000\varphi + 24,00000\psi &= \kappa (-22,00000\varphi + 576,00000\psi). \end{aligned}$$

Обращаясь к нашему примеру, где приведено общее решение, мы замечаем, что при антисимметричной форме колебаний первые две компоненты начальных и итерированных векторов должны быть равными друг другу. Итерация фактически вы-

полняется только по двум неизвестным. Как видим, решение одной общей системы уравнений для симметричной рамы ничуть не сложнее решения двух систем уравнений с использованием симметрии рамы, оно более систематично и требует меньшего числа записей и выкладок. В нашем примере (вкл. листы № 2 и № 3) мы сознательно взяли «нехороший» исходный вектор  $\bar{\varphi}_0 = 1,00000, -0,500000, 0,00877$ , чтобы показать, как проводится определение второй частоты в общем случае. В действительности, используя симметрию рамы, нам следовало бы взять за начальный вектор  $\bar{\varphi}_0' = \{1,00000, -1,00000, 0,00000\} a$ , где  $a$  — любое число\*. В этом случае мы сразу получили бы точный результат. Мы потому и взяли для иллюстрации Э-метода случай симметричной рамы, чтобы отчетливо показать, что в Э-методе прием раздельного рассматривания симметричной и антисимметричной формы колебаний упрощений не вносит.

10. Если рама имеет точечные массы, создающие инерционные силы и моменты (например, если рама имеет жесткие консоли (см. фиг. 4), то в месте приложения сосредоточенных масс следует наложить связи против поворота и смещения.

Фиг. 4



Если сосредоточенная масса равна  $M_i$ , то реакция (пара сил) в связи, наложенной против линейного смещения, будет

$$I = M_i \omega^2 l^2 \psi_i. \quad (34)$$

Реактивный момент от сосредоточенной массы, обладающей инерцией при вращении, зависит от формы тела. В частном случае, когда это тело является жесткой консолью с погонной массой  $m$  и длиной  $l$ , реактивный момент определяется по такой формуле:

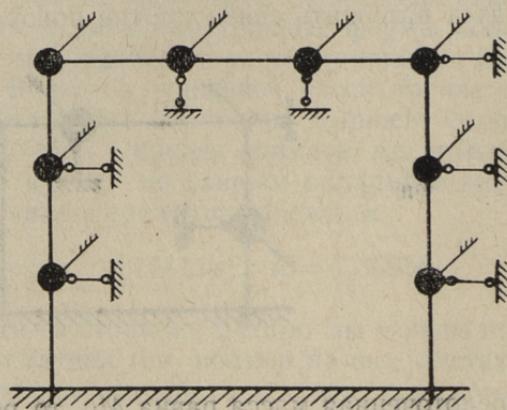
$$\omega = \frac{m \omega^2 l^2}{3}. \quad (35)$$

\* Этот случай приведен в итеративной таблице (вкл. л. № 2) внизу.

Полученные реакции прибавляются к реакциям, вычисленным по матрице (17).

В теории колебаний весьма употребителен метод расчета стержней, ферм и рам посредством замены распределенных масс сосредоточенными. Этот прием обычно применяют при расчете по методу сил, реже — по методу деформаций. Такой прием страдает тем недостатком, что в статически неопределимой конструкции для получения удовлетворительного приближения приходится определять линейные перемещения в большом числе точек. Эти вычисления требуют затраты большого времени и неудобны для программирования. В методе деформаций в вариантах [1], [4], [5] эта работа отпадает. При расчете по Э-методу, так же свободному от отмеченного недостатка, в местах, где прикладываются сосредоточенные массы, которые надо учесть, накладываются связи против поворотов и линейных смещений (фиг. 5). Так как при точечных массах (при неучете инерционных сил при вращении) в связях, наложенных против поворота, не возникает реакций, то в правой

Фиг. 5

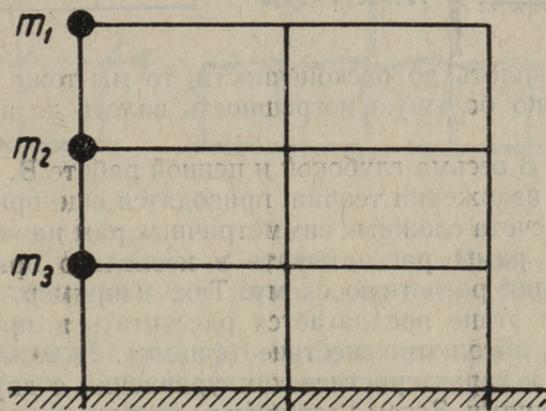


части характеристической системы уравнений метода деформаций, т. е. в матрице  $I$ , в строках и столбцах, соответствующих поворотам узлов, будут нулевые элементы (включая и диагональные). В таких же строках и столбцах матрицы  $R$  в этом случае возникают только упругие реакции. При наличии только сосредоточенных масс, не обладающих инерцией при вращении, обобщенная система характеристических уравнений вырождается. Степень характеристического полинома почти вдвое снижается. Учет связей, наложенных против углов поворота, необходим, — это уточняет приближение к собственным формам колебаний. Неучет этих углов равносителен приближению

этих форм полиномами Эрмита, учитывающими только смещения.

11. На основании соображений, данных в конце пункта 10, из Э-метода можно непосредственно получить приближенный метод Ш. М. Гофмана и С. И. Бренмана, который для многоэтажных многопролетных рам (фиг. 6) с преобладающей погонной массой ригелей может дать хорошее приближенное решение. К сожалению, в двух статьях этих авторов [4] и [5] не указано, как определяются эти массы: являются ли они массой ригелей и несомой ими нагрузки или являются «приведенными» массами, которые каким-либо образом учитывают и массу стоек. Такой расчет дает точный результат для «невесомых» рам, несущих в уровне каждого ригеля по одной точечной массе. Расчетная схема исключает из рассмотрения все симметричные формы колебаний.

Фиг. 6

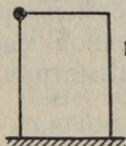


Для выяснения, какую точность можно получить при сделанном авторами упрощении расчетной схемы, ниже мы приводим расчетную таблицу применительно к раме, рассчитанной на вкладных листах № 2 и № 3. При неучете реактивных моментов от сил инерции в узлах рамы элементы первой и второй строки, а также первого и второго столбца матрицы  $I$  становятся нулями. Единственно не нулевой коэффициент  $j_{33}$  мы сохраним таким же, каким он был в предыдущем расчете (с учетом инерции стоек).

Полученный нами при этих условиях частотный коэффициент  $\nu = 2,605$  лишь на 1,3% (!) отличается от точного  $\nu = 2,638$ . Такой результат характеризует метод с весьма положительной стороны. Но надо заметить, что если бы в этой же задаче мы учли только массу ригеля, то погрешность возросла бы до 15%. Если бы при этой же схеме мы увеличили погонные жесткости

Вычисление  $R^{-1}J$  при одной сосредоточенной массе

R			$\Sigma$	J		$\Sigma$
10,00000	3,00000	-6,00000	7,00000			
3,00000	10,00000	-6,00000	7,00000			
-6,00000	-6,00000	24,00000	12,00000		576,00000	
L \ G		$\Sigma^*$	LJ		$\Sigma^*$	
10,00000	3,00000	-6,00000	7,00000			
0,30000	9,10000	-4,20000	4,90000			
-0,60000	-0,46154	18,46153	18,46153		576,00000	
				RJ		$\Sigma^{**}$
				31,20000		31,20000



$$\nu = \sqrt{210} \approx \sqrt{6,77419} = 2,605$$

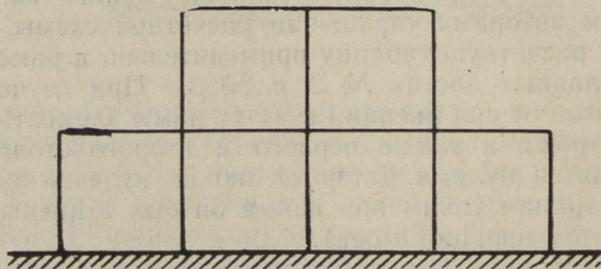
Погрешность  $\epsilon = 1,3$

Точное  $\nu = 2,638$

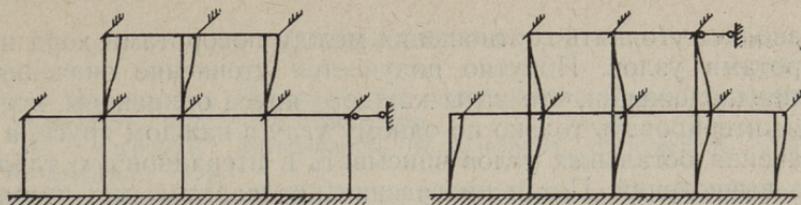
стоек вплоть до бесконечности, то мы тоже получили бы значительно большую погрешность вплоть до исчезновения колебаний.

12. В весьма глубокой и ценной работе В. В. Болотина [1]\*, кроме изложения теории, приводятся еще приемы для упрощения расчета сложных симметричных рам на колебания. Предлагается рамы рассчитывать в несколько приемов, постепенно усложняя расчетную схему. Так, например, раму (фиг. 7) на первом этапе предлагается рассчитать в предположении, что ригели абсолютно жесткие (фиг. 8). В этом случае решается система характеристических уравнений с двумя неизвестными смещениями. Затем уточняют расчетную схему и учитывают повороты узлов, считая их одинаковыми в каждом из двух яру-

Фиг. 7



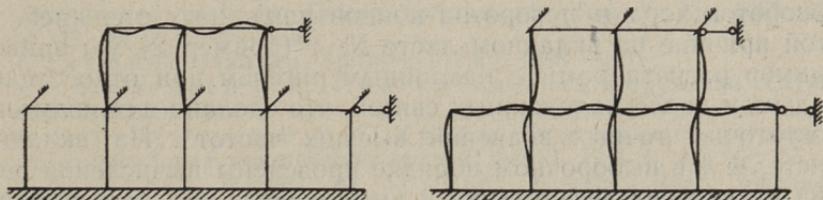
\* Нам кажется, что В. В. Болотин недооценил значение результатов своей работы. Мы уже отмечали, что Э-метод близок к методу В. В. Болотина, но отличается в теории и в развитии математической (вычислительной) части.



Фиг. 8

сов (фиг. 8). В этом случае получается характеристическая система, состоящая из четырех уравнений.

Далее предлагается принять «какую-либо другую картину деформаций»... «приняв, например, что углы поворота крайних



Фиг. 9

узлов вдвое больше углов поворота средних»... «Может случиться, что эти частоты окажутся ниже, т. е. будут ближе к истинным значениям».

Метод В. В. Болотина задуман его автором как приближенный метод, при котором вычисления проводятся «от руки», минуя современные вычислительные приемы. При вычислении на ЭВЦМ указанные В. В. Болотиным приемы не упрощают, а усложняют программирование расчета. При вычислениях на клавишных арифмометрах эти приемы вполне применимы и, возможно, несколько уменьшают объем вычислений. Приведенным приемам В. В. Болотина, построенным на основании физических представлений, соответствуют такие математические операции: в предположении, что матрица  $R^{-1} I$  (для рамы фиг. 7) выписана для всех углов поворота и для всех смещений, расчет по схеме фиг. 8 равносителен итерациям только по углам поворота хорд стоек (считается, что углы поворота узлов равны нулю). Наша расчетная таблица без каких-либо изменений позволяет вычислить значение  $\kappa$  в порядке, рекомендуемом В. В. Болотиным.

Полученное значение  $\kappa$  конечно будет весьма приближенным. Дальнейшее введение в процесс итераций всех углов поворота, считая их равными в каждом ярусе (схемы фиг. 9),

позволяет уточнить соотношения между поворотами хорд и поворотами узлов. Попутно получается уточнение значения  $\kappa$ . В предположении, что углы каждого яруса одинаковы, мы можем итерировать только по одному углу в каждом ярусе, а все значения остальных углов вписывать в итерационную таблицу без вычислений. После проведения предварительных итераций можно уже приступить к итерации по всем переменным. Математическая законность описанных операций, выполненных по В. В. Болотину, следует из условия произвольности выбора компонент начального вектора. По приближенному методу В. В. Болотина вычислить высшие частоты в общем случае невозможно.

13. Учебная практика по применению Э-метода показала, что иногда возникают затруднения при определении реакций от поворотов хорд и поворотов концов наклонных стержней. По этой причине на вкладном листе № 4 (пример 2) мы привели пример расчета рамы с наклонным ригелем при относительно большом числе наложенных связей, что сделано для получения достаточно точных значений высших частот\*. На вкладном листе № 4 в выборочном порядке проведены вычисления реакций от упругих деформаций и инерционных сил. Эти вычисления пояснений не требуют, так как они сделаны в соответствии с вышеизложенным текстом.

На вкладном листе № 1 приведена матрица, облегчающая вычисление реактивных коэффициентов. Применяя эту матрицу, легко проверить правильность получения реактивных коэффициентов во всех приведенных примерах.

Добавление. Так как оформление статьи в печати с момента ее составления сильно задержалось, то следует отметить нижеследующее.

На IV Всесоюзной конференции по ЭЦМ в Киеве 18—21 мая 1965 г. нами докладывалось о применении Э-метода в задачах расчета конструкций на прочность, устойчивость, колебания, по деформированной схеме и на упругом основании. На трех семинарах, проведенных нами для сотрудников проектных организаций Харькова, Ташкента, Москвы, Ленинграда дополнительно сообщалось о расчете пространственных рам и о некоторых упрощениях в теории метода. Подробнее об этих результатах надеемся сообщить в последующих наших работах.

Статья поступила в редакцию 7 X 1965 г.

---

\* Для получения точного значения низших частот такого большого числа связей не требуется.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Болотин. Приближенный метод расчета рам на колебания. Труды МЭИ, вып. XVII, 1955 г. стр. 7.
2. А. Ф. Смирнов. Устойчивость и колебания сооружений. Трансжелдориздат, 1958 г.
3. Н. И. Безухов и О. В. Лужин. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. Москва, 1963 г.
4. Ш. М. Гофман и С. И. Бренман. Собственные колебания рамных систем с линейно подвижными узлами, находящихся под воздействием сосредоточенных масс. Строительство и архитектура Узбекистана. 1962 г., № 5, стр. 12.
5. Ш. М. Гофман и С. И. Бренман. Определение высших частот и форм собственных колебаний рамных систем с линейно подвижными узлами и с конечным числом степеней динамической свободы. Строительство и архитектура Узбекистана, 1963 г., № 2, стр. 12.
6. R. Zurgühl. Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeschwingungen nach der Deformationsmethode. Ing. Archiv 1963, Bd. XXXII, № 3, S. 201—213.
7. R. Zurgühl. Matrizen. Springer-Verlag, 1958. Aufl. 2.
8. К. Гогенемзер и В. Прагер. Динамика сооружений. ОНТИ, 1936, стр. 130, 178.
9. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. ОГИЗ, 1941 г., стр. 52, 57.
10. Л. К. Нарец. Расчет рам на малых вычислительных машинах. Москва, 1958 г.
11. И. Я. Хархурим. Вычисление на ЭЦМ частот и форм колебаний стержневых систем по Э-методу и оценка точности высших частот. ТПИ, 1966 г.



*Л. К. Нарец*

## **ВАРИАНТ ПОВЫШЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА РАМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ\***

*Посвящается памяти  
Николая Васильевича Корноухова*

1. В работе [11], посвященной расчету рам на колебания, мы отмечали, что описанный там метод создавался трудами многих ученых. Создание метода проводилось разными путями, обычно с неполным развитием темы. Очень многие ученые, получая отличные результаты, недооценивали точность, силу и общность приемов, над развитием которых они успешно работали.

Изучая литературу по устойчивости рам, мы обнаружили нечто подобное. И в этом разделе строительной механики исследователи применяли близкие приемы, также не замечая их общности. Полученные эффективные приемы не доводились до полного логического завершения с использованием современной вычислительной математики. Решение, например, характеристического уравнения (уравнения неустойчивости) предлагалось выполнять методом проб или методом ложного положения, не позволяющими установить, вычислен ли минимальный корень уравнения или какой-либо другой.

По указанным причинам мы пришли к выводу, что все близкие между собой приемы необходимо переработать и объединить в отдельный, самостоятельный метод со своим присущим ему названием. Такое выделение несомненно будет способствовать быстрейшему развитию метода и его реализации в практических расчетах. Для краткости речи всю совокупность связанных между собой вычислительных приемов назовем Э-методом. Разумеется, такое название следует рассматривать как временное, и оно может быть заменено любым другим. Будем

\* См. «Добавление», помещенное в предыдущей статье Л. К. Нарец, отмечающее дальнейшее развитие Э-метода.

считать, что такое название относится к нескольким между собою логически связанным приемам: к замене трансцендентных функций линейными, к замене трансцендентных характеристических определителей алгебраическими (вековыми), к приемам последовательного, упорядоченного вычисления корней (собственных чисел), к тем приемам строительной механики, которые сближают расчет рам на прочность, устойчивость и колебания и предназначены для проведения вычислений на механических и электронных цифровых машинах. Имеются основания (частично это проверено) для предположения, что вычислительные приемы, составляющие Э-метод, успешно можно применить во многих других разделах строительной механики\*.

Так как в этой работе мы предлагаем выделить интересующий нас метод в самостоятельный, мы приведем обоснование Э-метода, не связанное с методом Рэлея-Рица и полиномами Эрмита\*\*, как это мы сделали в работе [11].

Так как по независящим от нас причинам объем этой статьи ограничен, мы вынуждены привести только простые иллюстративные примеры.

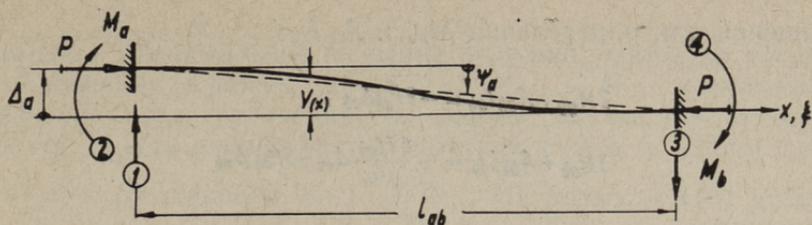
Надеемся в будущем описать применение Э-метода в других областях строительной механики и поделиться опытом проведения расчетов по Э-методу, проводимых на ЭЦМ.

2. Общая схема расчета рам на устойчивость отличается от расчета на колебания только в деталях. Многие вопросы поэтому можно опустить. В метод деформаций вносятся те же небольшие изменения, что и в [11]. Расчет ведется с применением относительных величин, поэтому необходимо все входящие в расчет данные выражать через эталонные. Для вывода основных формул применим метод последовательных подстановок. В строгой форме этот метод применяется для доказательства теорем существования в теории дифференциальных и интегральных уравнений. В строительной механике близкий метод также применяется и чаще под названием «метод последовательных приближений». Вывод основных расчетных формул мы проведем элементарно, но построим его так, что он будет соответствовать методу последовательных подстановок в теории интегральных уравнений [8, 9].

---

\* Таблицы специальных функций не применяются.

\*\* Все теоремы и методы строительной механики можно получить как на основании учения о потенциальной энергии упругих тел, так и без него, не прибегая к этому учению. По этой причине в работе [11] мы, ссылаясь на Рэлея и Рица, не сочли нужным точно придерживаться их метода и не писали выражения для потенциальной энергии. Это было вызвано главным образом тем, что метод деформаций обычно излагается без применения учения о потенциальной энергии и условий ее минимума.



Фиг. 1

Определим опорные реакции стержня (фиг. 1) для случая, когда его левый конец получает перемещение  $\Delta_{ab}$ , а перемещение правого конца и повороты обоих его концов равны нулю.

При принятых обозначениях и знаках для положительных направлений усилий и деформаций изгибающий момент от опорных реакций и продольной сжимающей силы запишется так:

$$M(x) = M_{ab} + A_{ab} l_{ab} \xi + P_{ab} (\Delta_{ab} - V(\xi)), \quad (1)$$

где абсцисса  $x$  выражена через безразмерную абсциссу  $\xi$ ;  $x = l_{ab} \xi$ . В дифференциальное уравнение упругой линии стержня

$$V''(x) = \frac{1}{EI_{ab}} \left\{ M_{ab} + A_{ab} l_{ab} \xi + P_{ab} (\Delta_{ab} - V(\xi)) \right\} \quad (2)$$

в качестве неизвестных войдут: реактивный момент  $M_{ab}$  и пара сил  $A_{ab} l_{ab}$ , вызванная опорными реакциями  $A$  и  $B$ . Интегрируя (2) последовательно два раза, мы получим два интегральных уравнения, последнее из которых является интегральным уравнением типа Вольтерра [9]:\*

$$V'(x) = \frac{l_{ab}}{EI_{ab}} \left\{ M_{ab} \xi + A_{ab} l_{ab} \frac{\xi^2}{2} + \Delta_{ab} P_{ab} \xi - P_{ab} \int_0^{\xi} V(\tau) d\tau \right\}, \quad (3)$$

$$V(x) = \Delta_{ab} + \frac{l_{ab}^2}{EI_{ab}} \left\{ M_{ab} \frac{\xi^2}{2} + A_{ab} l_{ab} \frac{\xi^3}{6} + \Delta_{ab} P_{ab} \frac{\xi^2}{2} - P_{ab} \int_0^{\xi} V(\tau) d\tau \right\}. \quad (4)$$

Будем, как принято, считать, что нулевое приближение неизвестной функции  $V(x)$ , стоящей под знаком интеграла, дает в (3) и (4) свободные члены, не стоящие под знаком интеграла. В нулевом приближении должны удовлетворяться условия на правом конце стержня, где  $V_{(1)} = 0$ ,  $V'_{(1)} = 0$ . Это дает систему

\* О проводимом ниже неявном переходе от уравнения Вольтерра к уравнению типа Фредгольма см. подробнее в работе [10].

уравнений для определения  $M_{ab}$  и  $A_{ab}l_{ab}$ :

$$2M_{ab} + A_{ab}l_{ab} = -2P_{ab}\Delta_{ab},$$

$$3M_{ab} + A_{ab}l_{ab} = -\frac{6EI_{ab}}{l_{ab}^2}\Delta_{ab} - 3P_{ab}\Delta_{ab}$$

с решением:

$$M_{ab} = -\frac{6EI_{ab}}{l_{ab}^2}\Delta_{ab} - P_{ab}\Delta_{ab}, \quad (5)$$

$$A_{ab}l_{ab} = \frac{12EI_{ab}}{l_{ab}^2}\Delta_{ab}. \quad (6)$$

Легко заметить, что эти свободные от  $P_{ab}$  члены точно соответствуют решению с полиномами Эрмита и реакциям метода деформаций при расчете на прочность [11]. Как видим, разные пути привели нас к одному и тому же результату. Проведенную подстановку можно повторить и в результате получить первое приближение. Теперь реакции уже будут зависеть от сжимающей силы  $P_{ab}$  и будут такими:

$$A_{ab}l_{ab} = \Delta_{ab} \left( \frac{12EI_{ab}}{l_{ab}^2} - \frac{12P_{ab}}{10} \right),$$

$$M_{ab} = \Delta_{ab} \left( -\frac{6EI_{ab}}{l_{ab}^2} + \frac{P_{ab}}{10} \right),$$

$$B_{ab}l_{ab} = \Delta_{ab} \left( \frac{12EI_{ab}}{l_{ab}^2} - \frac{12P_{ab}}{10} \right),$$

$$M_{ba} = \Delta_{ab} \left( -\frac{6EI_{ab}}{l_{ab}^2} + \frac{P_{ab}}{10} \right). \quad (9)$$

Замечаем, что первые члены, стоящие в скобках, являются общеизвестными реакциями метода деформаций при расчете на прочность, вторые члены зависят от продольной сжимающей силы  $P_{ab}$ .

Если сила  $P_{ab}$  есть растягивающая сила, то во всех формулах в членах, содержащих  $P_{ab}$ , надо поменять все знаки на обратные. Это замечание следует иметь в виду при расчете рам по деформированной схеме конструкции.

В теории интегральных уравнений [8] доказывается, что в первом приближении погрешность решения  $R_1$  интегрального уравнения удовлетворяет условию

$$|R| \leq |\lambda| UM(b-a), \quad (10)$$

где  $U$  — максимальное значение функции, взятое по абсолютной величине (в нашем случае  $U = |V_{\max}|$ ),  $M$  — максимальное значение ядра уравнения (в нашем случае  $M \leq 1$ ) и где  $b - a = l$  есть длина участка интегрирования (в нашем случае  $b - a = l_{ab}$ ); наконец,  $\lambda = \frac{P_{ab} l_{ab}^2}{EI_{ab}}$ . Из формулы (10) устанавливаем два важных факта: 1) погрешность решения уменьшается вместе с уменьшением силы  $P_{ab}$ , 2) погрешность решения уменьшается вместе с уменьшением участка интегрирования  $l_{ab} = b - a$ .

Поскольку в задачах строительной механики условия сходимости метода последовательных подстановок всегда выполняются, проводимая линеаризация всегда дает решение с оценкой погрешностью и, следовательно, Э-метод применим к решению разнообразных задач строительной механики. Применяя метод деформаций, мы всегда имеем возможность наложить любое число дополнительных связей (при вычислениях на ЭЦМ это не вызывает затруднений); поэтому мы всегда можем получить практически точное решение, несмотря на то, что мы прибегаем к линеаризации нелинейных зависимостей. Сделанные существенные выводы оправдывают сделанное нами отступление и обращение к теории интегральных уравнений.

Продолжим теперь преобразования выражений (9) для реакций. Сделаем это подробно, поскольку операции с относительными величинами упрощают вычисление, но сравнительно мало приняты в строительной механике. Введем в качестве нового неизвестного угол поворота  $\psi_{ab}$  хорды стержня (фиг. 1). Во всех строках (9) выносим за скобку эталонную погонную жесткость

$$i = \frac{EI}{l}, \quad (11)$$

где  $l$  — выбранная эталонная длина,  $EI$  — жесткость. Так как продольные силы  $P_{ab}$  в различных стержнях могут быть различными, то одну из сил  $P$  (она может быть как растягивающей так и сжимающей) выбираем за эталонную. Поэтому в выражениях для реакций (9) необходимо ввести отношения сил  $\frac{P_{ab}}{P}$ . Обозначим еще через  $\lambda$  отвлеченное число

$$\lambda = \frac{Pl^2}{30EI} \quad (12)$$

и учтем, что

$$\frac{I_{ab} l}{I_{ab}} = \frac{i_{ab}}{i}.$$

После указанных преобразований формулы, определяющие реакции при деформации, показанной на чертеже 1, примут вид:

$$\begin{aligned}
 A_{ab}l_{ab} &= i \left\{ 12 \frac{l_{ab}}{i} - 36\lambda \frac{P_{ab}}{\rho} \frac{l_{ab}}{i} \right\} \psi_{ab}, \\
 M_{ab} &= i \left\{ -6 \frac{l_{ab}}{i} + 3\lambda \frac{P_{ab}}{\rho} \frac{l_{ab}}{i} \right\} \psi_{ab}, \\
 B_{ab}l_{ab} &= i \left\{ 12 \frac{l_{ab}}{i} - 36\lambda \frac{P_{ab}}{\rho} \frac{l_{ab}}{i} \right\} \psi_{ab}, \\
 M_{ba} &= i \left\{ -6 \frac{l_{ab}}{i} + 3\lambda \frac{P_{ab}}{\rho} \frac{l_{ab}}{i} \right\} \psi_{ab}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Формулы (13) необходимо преобразовать еще один раз. Дело в том, что одному линейному перемещению узла рамы  $\Delta$  соответствуют повороты нескольких стержней разной (вообще) длины, а потому и с различными углами поворота  $\psi_{ab}$ . По этой причине поворот какого-либо избранного стержня надо принять за «основной», например поворот стержня  $l_{mn}$ , — его обозначим  $\psi_{mn}$ . Из условия

$$\Delta_{ab} = \Delta_{mn} = \psi_{ab} l_{ab} = \psi_{mn} l_{mn}$$

следует, что угол  $\psi_{ab}$  выражается через угол  $\psi_{mn}$  так:

$$\psi_{ab} = \frac{l_{mn}}{l_{ab}} \psi_{mn}. \tag{14}$$

Далее следует учесть, что приняв вместо неизвестных смещений  $\Delta$  углы поворота стержней  $\psi$ , мы вынуждены были принять за соответствующие им реакции не силы, а пары сил, создаваемые опорными реакциями  $A$  и  $B$ . Поэтому, выражая повороты всех стержней с общим линейным смещением  $\Delta$  через поворот основного стержня, т. е. через угол  $\psi_{mn}$ , мы должны реактивные пары соответствующих стержней привести к плечу  $l_{mn}$  реактивной пары основного стержня. Для этого правые части в (13) необходимо умножить на отношение длин соответствующих стержней

$$M = \frac{l_{mn}}{l_{ab}}. \tag{15}$$

Так как при решении задач устойчивости мы получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений, то можно

произвести сокращение на общий множитель — на погонную жесткость  $i$ . В этом случае все реакции становятся отвлеченными числами, что создает определенные удобства при вычислениях на машинах с фиксированной запятой (легко подбирается масштабный коэффициент). Чтобы не нарушать общепринятой терминологии, мы сохраним термины «реактивная сила», «реактивный момент», хотя речь будет идти лишь о величинах им пропорциональных. Итак, при положительном повороте стрелы  $l_{ab}$  на угол, соответствующий углу  $\psi_{mn} = \frac{\Delta_{mn}}{l_{mn}} = 1$ , возникают такие реакции:

$$\begin{aligned} \frac{A_{ab} l_{ab}}{i} &= \left\{ 12 \frac{i_{ab} l_{mn}^2}{i l_{ab}^3} - 36 \frac{P_{ab} l_{mn}^2}{\rho l l_{ab}} \lambda \right\} \psi_{mn}, \\ \frac{M_{ab}}{i} &= \left\{ -6 \frac{i_{ab} l_{mn}}{i l_{ab}^2} + 3 \frac{P_{ab} l_{mn}}{\rho l} \lambda \right\} \psi_{mn}, \\ \frac{B_{ab} l_{ab}}{i} &= \left\{ 12 \frac{i_{ab} l_{mn}^2}{i l_{ab}^3} - 36 \frac{P_{ab} l_{mn}^2}{\rho l l_{ab}} \lambda \right\} \psi_{mn}, \\ \frac{M_{ba}}{i} &= \left\{ -6 \frac{i_{ab} l_{mn}}{i l_{ab}^2} + 3 \frac{P_{ab} l_{mn}}{\rho l} \lambda \right\} \psi_{mn}. \end{aligned} \quad (16)$$

Когда, после решения характеристической системы уравнений, определен угол  $\psi_{mn}$ , то для определения действительных опорных реакций  $A$  и  $B$  необходимо выполнить обратные преобразования: угол  $\psi_{mn}$  выразить через угол  $\psi_{ab}$ , используя зависимость

$$\psi_{mn} = \frac{l_{ab}}{l_{mn}} \psi_{ab}, \quad (17)$$

обратную к зависимости (14); кроме того, первую и третью строку (16) следует умножить на отношение

$$\mu^{-1} = \frac{l_{ab}}{l_{mn}}, \quad (18)$$

обратное к (15).

Положив в формулах (16), что  $\psi_{mn}$  равно единице, мы получим соответствующие единичные реакции (см. таблицы на вкладных листах № 1 и № 2). Условимся эти реакции при обычной числовой индексации обозначать двумя буквами: буквой  $r$  — реакции, соответствующие методу деформации при расчете на прочность, а буквой  $l$  ( $l_{ab}l$  — неустойчивый) — ре-

акции от продольных сил, возникающие при потере устойчивости. В окончательном виде единичные реакции, соответствующие повороту хорды стержня, определяются такими выражениями:

$$\begin{aligned}
 r_{11} - \lambda t_{11} &= 12 \frac{i_{ab} l_{mn}}{i l^2} - 36 \frac{P_{ab} l_{mn}^2}{P l_{ab}} \lambda, \\
 r_{21} - \lambda t_{21} &= -6 \frac{i_{ab} l_{mn}}{i l_{ab}} + 3 \frac{P_{ab} l_{mn}}{P l} \lambda, \\
 r_{31} - \lambda t_{31} &= 12 \frac{i_{ab} l_{mn}^2}{i l_{ab}^2} - 36 \frac{P_{ab} l_{mn}^2}{P l_{ab}} \lambda, \\
 r_{41} - \lambda t_{41} &= -6 \frac{i_{ab} l_{mn}}{i l_{ab}} + 3 \frac{P_{ab} l_{mn}}{P l} \lambda.
 \end{aligned} \tag{19}$$

В частном случае, когда  $i_{ab} = i$ ;  $l_{mn} = l_{ab} = l$ ;  $P_{ab} = P$ , формулы (19) значительно упрощаются, при этом более выявляется их физический смысл.

$$\begin{aligned}
 r_{11} - \lambda t_{11} &= 12 - 36 \lambda, \\
 r_{21} - \lambda t_{21} &= -6 + 3 \lambda, \\
 r_{31} - \lambda t_{31} &= 12 - 36 \lambda, \\
 r_{41} - \lambda t_{41} &= -6 + 3 \lambda.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Совершенно аналогичным образом вычисляются реакции для случаев смещения правого конца стержня и для случаев углов поворота обоих концов стержня. На вкладных листах № 1 и № 2 даны таблицы для определения всех реакций при единичных деформациях стержня с двумя и одним заземленным концом. Как показала практика вычислений, приведенные таблицы значительно облегчают труд по составлению характеристической системы уравнений.

Используя методы, изложенные в работе [10], можно составить подобные таблицы и для стержней переменного сечения. Если сечение изменяется ступенчато, то проще в местах перемены сечения наложить дополнительные связи.

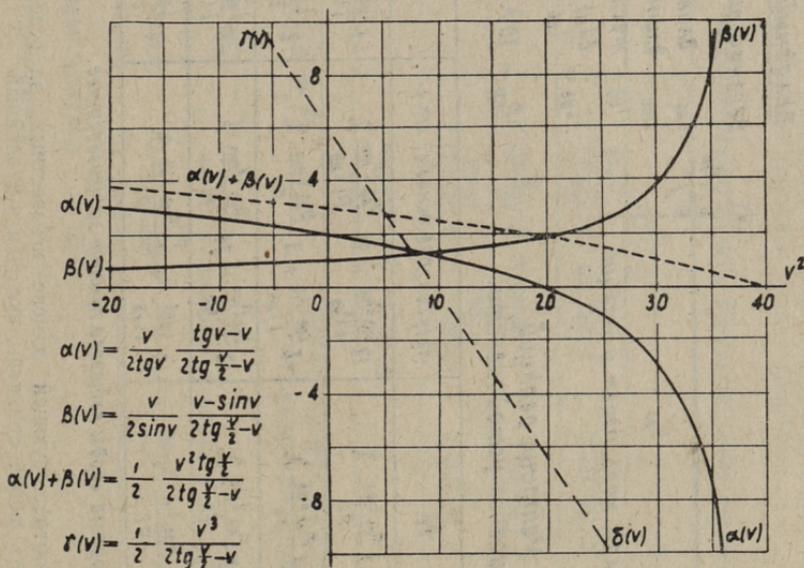
З. Н. В. Корноухов в работе [1] и книге [2] (стр. 328) наметил приближенный метод, близкий к излагаемому, но далеко не во всех положениях этой работы.

Покажем, как можно получить приведенные выше расчетные формулы (вкл. листы № 1 и 2) непосредственно из точных формул метода деформаций в приложении его к задачам устойчивости [2]. Для краткости ограничимся определением ле-

вого опорного момента при деформации по фиг. 1. По [2] этот момент равен:

$$M_{ab} = 2i_{ab} [\alpha_{ab} \varphi_a + \beta_{ab} \varphi_b - (\alpha + \beta)_{ab} \varphi_{ab}] \quad (21)$$

где  $\alpha_{ab}$ ,  $\beta_{ab}$ ,  $(\alpha + \beta)_{ab}$  — относительно сложные трансцендентные функции параметра  $v^2$  (фиг. 2).



Фиг. 2

$$v^2 = \frac{Nl^2}{EI} \quad (22)$$

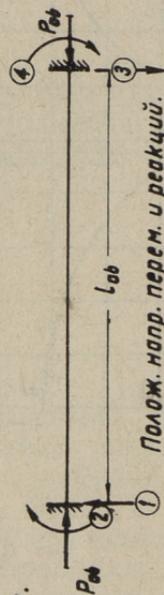
Из рассмотрения графиков этих функций со всей очевидностью ясно, что изображенные кривые с достаточной точностью можно заменить прямыми, притом на сравнительно большом интервале изменения аргумента  $v^2$ . Эту особенность можно также установить чисто математическим путем из рассмотрения рядов, представляющих эти функции. Например, для функции  $\alpha(v^2)$  в [2] дается ряд, сходящийся внутри интервала  $-2\pi < v < 2\pi$ .

$$\alpha(v^2) = 2 - \frac{1}{15} v^2 - \frac{11}{12\,600} v^4 - \frac{1}{54\,000} v^6 - \frac{509}{1\,164\,240\,000} v^8 - \frac{27\,641}{1\,362\,160\,800\,000} v^{10}.$$

Вкладыный лист № 1.  
Обознач. рядов. велич.

$l_{ob}$  — длина,  
 $l_{mn}$  — длина основн. стерж.,  
 $EI_{ob}$  — жесткость,  
 $i_{ob} = \frac{EI_{ob}}{l_{ob}}$  — поз. жесткость,

$$P_{кр} = 30 \lambda \frac{EI}{l^2}$$



Полож. напр. перем. и реакций.

Матрица реакций  
в задачах устойчивости

Обознач. эталонн. велич.

$l$  — длина,  
 $P$  — прод. сила,  
 $EI$  — жесткость,  
 $i = \frac{EI}{l}$  — поз. жесткость,

$$\lambda = \frac{Pl^2}{30EI} \text{ — характ. уст.}$$

$r \setminus \bar{y}$	$\bar{y}_1$ (угол, пов. основн. ст.)	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$ (угол, пов. основн. ст.)	$\bar{y}_4$
$r_1$	$12 \frac{i_{ob} l_{mn}^2}{i l_{ob}^2} - 36 \frac{P_{ob} l_{mn}^2}{Pl_{ob}} \lambda$	$-6 \frac{i_{ob} l_{mn}}{i l_{ob}} + 3 \frac{P_{ob} l_{mn}}{Pl}$	$12 \frac{i_{ob} l_{mn}^2}{i l_{ob}^2} - 36 \frac{P_{ob} l_{mn}^2}{Pl_{ob}} \lambda$	$-6 \frac{i_{ob} l_{mn}}{i l_{ob}} + 3 \frac{P_{ob} l_{mn}}{Pl}$
$r_2$	$-6 \frac{i_{ob} l_{mn}}{i l_{ob}} + 3 \frac{P_{ob} l_{mn}}{Pl}$	$4 \frac{i_{ob}}{i} - 4 \frac{P_{ob} l_{ob}}{Pl}$	$-6 \frac{i_{ob} l_{mn}}{i l_{ob}} + 3 \frac{P_{ob} l_{mn}}{Pl}$	$2 \frac{i_{ob}}{i} + \frac{P_{ob} l_{ob}}{Pl}$
$r_3$	$12 \frac{i_{ob} l_{mn}^2}{i l_{ob}^2} - 36 \frac{P_{ob} l_{mn}^2}{Pl_{ob}} \lambda$	$-6 \frac{i_{ob} l_{mn}}{i l_{ob}} + 3 \frac{P_{ob} l_{mn}}{Pl}$	$12 \frac{i_{ob} l_{mn}^2}{i l_{ob}^2} - 36 \frac{P_{ob} l_{mn}^2}{Pl_{ob}} \lambda$	$-6 \frac{i_{ob} l_{mn}}{i l_{ob}} + 3 \frac{P_{ob} l_{mn}}{Pl}$
$r_4$	$-6 \frac{i_{ob} l_{mn}}{i l_{ob}} + 3 \frac{P_{ob} l_{mn}}{Pl}$	$2 \frac{i_{ob}}{i} + \frac{P_{ob} l_{ob}}{Pl}$	$-6 \frac{i_{ob} l_{mn}}{i l_{ob}} + 3 \frac{P_{ob} l_{mn}}{Pl}$	$4 \frac{i_{ob}}{i} - 4 \frac{P_{ob} l_{ob}}{Pl}$

<sup>1)</sup> Основным назван тот стержень, угол поворота хорды которого принят за неизвестное.

Примечание. При соответствующей замене неизвестных, за основной можно принять любой стержень, включая и эталонный

Обознач. эталонн. велич

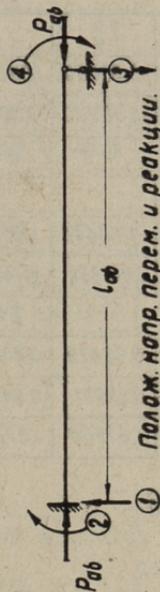
$l$  — длина,

$P$  — прод. сила,

$EI$  — жесткость,

$i = \frac{EI}{l}$  — пог. жесткость.

$\lambda = \frac{Pl^2}{30EI}$  — характ. устойч.



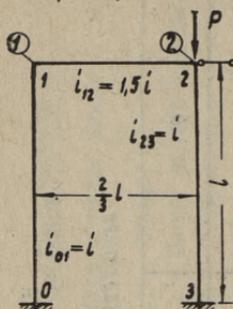
Полож. напр. перем. и реакции.

Матрица реакций  
в задачах устойчивости

$\bar{r} \backslash \bar{\varphi}$	$\varphi_1$ (угол, пов. основн. ст.)	$\varphi_2$	$\varphi_3$ (угол, пов. основн. ст.)	$\varphi_4$
$r_1$	$3 \frac{i_{об} l^3_{mn}}{l^3_{об}} - 36 \frac{P_{об} l^2_{mn}}{Pl_{об}} \lambda$	$-3 \frac{i_{об} l_{mn}}{l_{об}} + 6 \frac{P_{об} l_{mn}}{Pl}$	$3 \frac{i_{об} l^2}{l^2_{об}} - 36 \frac{P_{об} l^2_{mn}}{Pl_{об}} \lambda$	0
$r_2$	$-3 \frac{i_{об} l_{mn}}{l_{об}} + 6 \frac{P_{об} l_{mn}}{Pl}$	$3 \frac{i_{об}}{l} - 6 \frac{P_{об} l_{об}}{Pl}$	$-3 \frac{i_{об} l_{mn}}{l} + 6 \frac{P_{об} l_{mn}}{Pl}$	0
$r_3$	$3 \frac{i_{об} l^3_{mn}}{l^3_{об}} - 36 \frac{P_{об} l^2_{mn}}{l_{об}} \lambda$	$-3 \frac{i_{об} l_{mn}}{l_{об}} + 6 \frac{P_{об} l_{mn}}{Pl}$	$3 \frac{i_{об} l^2_{mn}}{l^2_{об}} - 36 \frac{P_{об} l^2}{Pl_{об}} \lambda$	0
$r_4$	0	0	0	0

\*Основным назван тот стержень, угол поворота хорды которого принят за неизвестное

Примечание. При соответствующей замене неизвестных, за основной можно принять любой стержень, включая и эталонный



Пример определения устойчивости рамы.

Определение реакций:

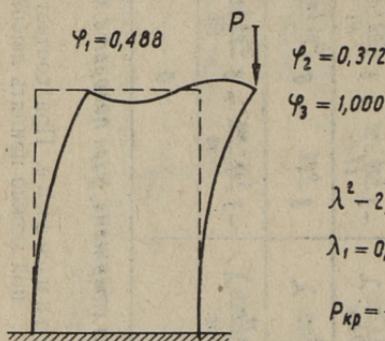
$$r_{11} = 4 + 4 \cdot 1,5 = 10; \quad r_{12} = 2 \cdot 1,5 = 3; \quad r_{13} = -6,$$

$$r_{22} = 4 \cdot 1,5 + 4 \cdot 1 - 4\lambda = 10 - 4\lambda; \quad r_{23} = -6 + 3\lambda;$$

$$r_{33} = 12 + 12 - 36\lambda = 24 - 36\lambda;$$

$$\lambda = \frac{Pl^2}{30EI}; \quad P = 30\lambda \frac{EI}{l^2}; \quad R\bar{\varphi} = \lambda \bar{\varphi}.$$

R			Σ	L			Σ
10,00000	3,00000	-6,00000	7,00000				
3,00000	10,00000	-6,00000	7,00000	4,00000	-3,00000	1,00000	
-6,00000	-6,00000	24,00000	12,00000	-3,00000	36,00000	33,00000	
L			G	L <sup>-1</sup> L			Σ*
10,00000	3,00000	-6,00000	7,00000				
0,30000	9,10000	-4,20000	4,90000	4,00000	-3,00000	1,00000	
0,60000	-0,46154	18,46153	18,46153	-1,15384	34,61538	33,46154	
				R <sup>-1</sup> L			Σ**
				-0,16071	0,96429	0,80358	
				0,41071	0,53571	0,94642	
				-0,06250	1,87500	1,81250	



$$\lambda^2 - 2,84448\lambda + 1,24446 = 0.$$

$$\lambda_1 = 0,54001 \quad \lambda_2 = 2,30447;$$

$$P_{кр} = \frac{30 \cdot 0,54001 EI}{l^2} = \frac{16,200 EI}{l^2};$$

Форма потери устойчив.

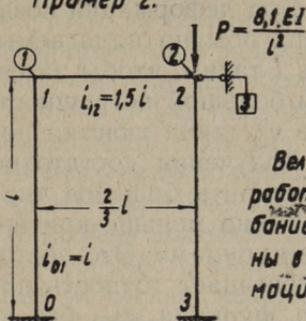
$$v = \sqrt{16,200} = 4,025. \text{ По Н.В. Карнаухову } v = 4,000.$$

$$\bar{\varphi} = \begin{vmatrix} 0,488 \\ 0,372 \\ 1,000 \end{vmatrix}$$

$$\bar{\varphi} = R^{-1}L\bar{\varphi}, \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \cdot \varphi_1 - 0,16071\lambda\varphi_2 + 0,96429\lambda\varphi_3, \\ \varphi_2 &= 0 \cdot \varphi_1 + 0,41071\lambda\varphi_2 + 0,53571\lambda\varphi_3, \\ \varphi_3 &= 0 \cdot \varphi_1 - 0,06250\lambda\varphi_2 + 1,87500\lambda\varphi_3. \end{aligned}$$

Пример 2.

Вкладный лист №4.



Учет влияния продольной силы на частоту собственных колебаний.

$$(R - \frac{\lambda t}{2}) \bar{\varphi} = \kappa J \bar{\varphi}$$

Величина  $\lambda$  и матрица  $t$  взяты из примера 1 этой работы. Определению подлежат частота  $\omega$ . Колебание этой рамы без учета прод. силы рассмотрены в работе: Нарец Л.К., Вариант методы деформаций для расчета рам на колебания

$R - \frac{\lambda t}{2}$			$\Sigma$	$J$			$\Sigma$
10,00000	3,00000	-6,00000	7,00000	3,77778	-1,33333	-11,00000	-8,55555
3,00000	8,92000	-5,19000	6,78000	-1,33333	3,77778	-11,00000	-8,55555
-6,00000	-5,19000	14,28000	3,09000	-11,00000	-11,00000	376,00000	354,00000
$L$		$G$	$\Sigma^*$	$L^{-1}J$			$\Sigma^*$
10,00000	3,00000	-6,00000	7,00000	3,77778	-1,33333	-11,00000	-8,55555
0,30000	8,02000	-3,39000	4,63000	-2,46667	4,17778	-7,70000	-5,98889
-0,60000	-0,42269	9,24708	9,24708	-9,77597	-10,03410	566,14529	546,35522
				$(R - \frac{\lambda t}{2})^{-1}J$			$\Sigma$
				-0,03021	-0,80307	28,15884	29,32556
				-0,75444	0,06225	24,91897	24,22679
				-1,05720	-1,08511	61,22422	59,08181

$$v = \sqrt{210 \cdot 0,01659} = 1,886$$

$$\omega = \frac{1,886}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

С учетом силы Р частота снизилась на 28,3%

Итерац. табл. для опред. собств. чисел и вектор.

$\kappa$	Прибл.	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\Sigma$
	$\bar{\kappa}_0$	0,50000	0,50000	1,00000	2,00000
0,01778	$\bar{\kappa}_1$	27,74220	24,57288	60,15306	112,46814
	$\bar{\kappa}_1$ норм.	0,46119	0,40850	1,00000	1,86931
0,01659	$\bar{\kappa}_2$	27,81685	24,59646	60,29338	112,70669
	$\bar{\kappa}_2$ норм.	0,46136	0,40795	1,00000	1,86931
0,01659	$\bar{\kappa}_3$	27,81729	24,59630	60,29380	112,70739
	$\bar{\kappa}_3$ норм.	0,46136	0,40794	1,00000	

Коэффициенты этого ряда весьма быстро убывают. Поэтому при изменении аргумента  $v^2$  в интервале  $-20 < v^2 < 15$  функции  $\alpha(v^2)$  весьма близка к прямой. Так как метод деформаций позволяет вводить любое число связей сверх обычно налагаемых, мы всегда имеем возможность сделать  $l$  таким, чтобы замена кривой линии прямою не вызывало бы большой погрешности. Так как в формулу (22) в определение  $v^2$  длина участка подразделения входит в квадрате, то для получения достаточной точности не возникает необходимости вводить большое число связей. Сжимающая сила  $N$  в рамках обычно меньше критической силы для стержня с защемленными концами. Это обстоятельство ускоряет сходимость ряда и повышает точность приближения. Все сказанное относительно функции  $\alpha(v^2)$  без каких-либо изменений или ограничений можно повторить и для всех других функций, применяемых при расчете рам на устойчивость по методу деформаций в его классической (точной) форме. При сохранении в рядах двух членов, функции имеют такой упрощенный вид [2]:

$$\begin{aligned}\alpha(v) &= 2 - \frac{1}{15} v^2, \\ \beta(v) &= 1 + \frac{1}{60} v^2, \\ \alpha(v) + \beta(v) &= 3 - \frac{1}{20} v^2.\end{aligned}$$

В наших обозначениях функцию  $\alpha(v)$  надо умножить на 2 и

$$\lambda = \frac{P\Gamma^2}{EI}; \quad v^2 = 30\lambda.$$

Линеаризованная зависимость (21) станет нижеследующей:

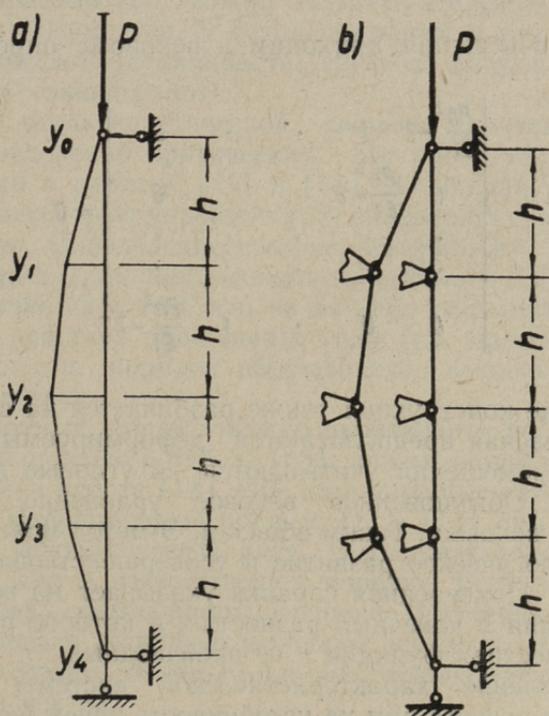
$$M_{об} = i_{об} \{ (4 - 4\lambda) \varphi_a + (2 + \lambda) \varphi_b - (6 - 3\lambda) \psi_{об} \}. \quad (23)$$

где коэффициенты точно соответствуют частному случаю реакций, приведенному нами в формулах (20), которые были выведены нами совершенно другим путем. Итак, мы дали еще одно обоснование Э-метода, обладающее, как нам кажется, большой наглядностью и убедительностью.

4. В статье, посвященной приложению Э-метода к задачам устойчивости, нельзя пройти мимо нижеследующих близких к нему вариантов. Н. В. Корноухов в мало известной статье [1] дал способ приближенного определения значений функций  $\alpha(v)$ ,  $\beta(v)$ ,  $(\alpha(v) + \beta(v))$ . Данные им расчетные формулы по структу-

ре сходны с формулами Крамера для решения системы двух линейных алгебраических уравнений. В нашем варианте это не требуется. Н. В. Корноухов использовал метод неопределенных коэффициентов и задавался формой кривых после потери устойчивости в виде парабол шестого порядка. Мы в этой работе, применяя метод последовательных подстановок, получали параболы пятого порядка. Применение парабол шестого порядка позволяет приближенно учесть переменность сечения стержня. В нашем варианте влияние переменности сечения учитывается наложением дополнительных связей. В сложных случаях можно точно учесть влияние переменности сечения, определяя реакции методами, изложенными в работе [10].

5. Необходимо еще отметить методы Г. Роде и Г. Генки\*. Эти методы описаны в [3], [4] и [7]. При статической интерпретации конечно-разностного метода Роде-Генки (фиг. 3) стержень представляется в виде шарнирной стержневой цепи, в ко-



Фиг. 3

\* Н. Н. R o d e. Beitrag der Knickerscheinungen. Leipzig, 1916, (диссертация).

Н. Н. е н к и. Der Eisenbau. 1920, S. 638 (диссертация).

торой каждый элемент — звено не деформируется и остается прямым. Относительный поворот этих звеньев определяется углом

$$\Delta\varphi = \frac{Mh}{EI} \quad (24)$$

С другой стороны угол  $\Delta\varphi$  определяется через вторые разностные отношения

$$\Delta\varphi = \frac{\delta^2 y}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (25)$$

что позволяет составить такие разностные уравнения:

$$y_{i+1} + \left( \frac{Ph^2}{EI} - 2 \right) y_i + y_{i-1} = 0.$$

В результате решения приходим к вековому определителю:

$$\begin{vmatrix} \frac{Ph^2}{EI} - 2 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & \frac{Ph^2}{EI} - 2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & \frac{Ph^2}{EI} - 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

В Э-методе конструкция также разбивается на звенья (элементы), но звенья предполагаются деформируемыми. Кроме линейных перемещений учитываются и угловые деформации (повороты). Обыкновенное вековое уравнение заменяется обобщенным вековым. Таким образом, Э-метод можно рассматривать как логическое развитие и усовершенствование метода Роде-Генки. Приведенная справка указывает на возможность такого решения в конечных разностях, в которое равноправно входят неизвестная функция и ее производные.

6. Составление характеристической системы уравнений Э-метода для расчета рам на устойчивость ничем не отличается от составления характеристической системы уравнений при расчете рам на колебания [II]. Вместо реакций от инерционных сил  $j_{ik}$  определяются реакции  $t_{ik}$ , возникающие при потере устойчивости. Разумеется, и это очень важно, можно совместить расчет на колебания с расчетом на устойчивость.

Давно было указано (Остенфельд), что влияние продольных сил на частоту собственных колебаний конструкции сказывается достаточно ощутимо\*. При сжимающих силах, близких к критическим, частота колебаний стремится к нулю, а амплитуды становятся недопустимо большими. Э-метод позволяет решить и обратную задачу. Известно, что при наличии постоянно действующих вынужденных колебаний критическая сила уменьшается.

При учете действия продольных сил при колебаниях характеристическое уравнение приобретает такой вид

$$(R - \kappa I - \lambda L) \bar{\varphi} = 0, \quad (27)$$

где  $R$  — матрица реакций от упругих сил;  $I$  — матрица реакций от инерционных сил;  $L$  — матрица «неустойчивости»:  $\kappa, \lambda$  числа соответственно пропорциональные частотам и критическим силам. Из уравнения (27) можно получить все выше рассмотренные случаи. Разумеется, Э-метод применим и для решения задач динамической устойчивости. Но этот вопрос будет освещен в другой нашей работе.

Решение характеристической системы уравнений устойчивости и определение критических сил проводится методами, изложенными в работах [11] и [13]. В задачах устойчивости возникают некоторые упрощения по сравнению с расчетом рам на колебания. Определение высших критических сил обыкновенно отпадает (для приложений не нужно). Другая особенность заключается в том, что не во всех стержнях рамы надо учитывать действие продольных сил (см. пример 1). Ввиду этой особенности порядок обобщенного векового уравнения может понизиться.

Итерационный процесс можно производить по двум матрицам, как это описано в работе [13], или по одной матрице, как это изложено в работе [11]. Обе итерационные таблицы составлены нами. Итерационный процесс [11], [13] при соблюдении указанных условий всегда дает последовательное значение критических сил в возрастающем порядке. Если есть подозрения, что корень обобщенного векового уравнения кратный, то надо испробовать несколько исходных векторов. При кратном корне мы получаем то же самое собственное число, но другой собственный вектор.

#### Пример 1.

Для примера возьмем раму, уже рассчитанную на колебания в работе [11]. Такой выбор вызывается двумя причинами: на этом примере легко

\* См. пример 2.

проверить точность результатов, получаемых по Э-методу при минимальном числе наложенных связей\*. На этом примере легко проверить, как влияют продольные силы на частоту колебаний (см. пример 2).

На вкладном листе № 3 приведен полностью расчет рамы на устойчивость. Элементы матрицы упругих реакций  $R$  и матрицы неустойчивости  $L$  определялись по таблице вкладного листа № 1. Характеристическая система уравнений

$$(R - \lambda L) \bar{\varphi} = 0$$

приводилась к виду

$$\bar{\varphi} = \lambda R^{-1} L \bar{\varphi},$$

для чего применялся ГМ-метод\*\*. При этом столбцы матрицы рассматривались как «правые части» неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. Элементы матрицы  $R^{-1}L$  определялись «обратным ходом». Так как в этом примере сжата только одна стойка — «стойка 2—3», матрица в первой строке и первом столбце содержит только нули. По этой причине отпала надобность применить итерационные приемы при определении собственных чисел и векторов [11], [13]. Собственные числа были найдены из решения квадратного уравнения. По графику Н. В. Корноухова [2] стр. 152 примененный там параметр  $\nu$  равен  $\nu = 4,000$ , мы для этого параметра получили значение  $\nu = 4,025$ . Полученное расхождение в 0,5% практически отсутствует.

### Пример 2.

Вопросам динамической устойчивости мы посвятим отдельную статью. Но здесь нам представляется удобным случай еще раз показать общность Э-метода, показать, что учет влияния продольных сил на величину собственных частот не вызывает ни принципиальных, ни вычислительных затруднений. На вкладном листе № 4 дан пример расчета рамы на колебания при учете влияния продольной силы равной  $P = \frac{8,1EI}{e^2}$ . Значение этой силы выбрано равным половине критической силы, полученной в примере 1 и равной  $P_{кр} = \frac{16,2EI}{e^2}$ . По этой причине в характеристической системе уравнений для колебаний рамы

$$\left( R - \frac{\lambda}{2} L - \kappa I \right) \bar{\varphi} = 0, \left( R - \frac{\lambda}{2} L \right) \bar{\varphi} = \kappa I \bar{\varphi}$$

характеристика неустойчивости  $\lambda = \frac{P l^2}{30EI}$  принята за известное, постоянное число. На вкладном листе № 4 проведены все необходимые вычисления.

\* Результат точного расчета этой рамы на колебания приведен в книге Гогенемзер и Прагер. Точное значение критических сил можно получить по графику Н. В. Корноухова [2] стр. 152.

\*\* См. Л. К. Наред. Расчет статистически неопределимых систем на малых вычислительных машинах. Москва, 1958 г., стр. 30.

Матрица  $I$  взята без изменений из работы [11] (см. вкл. лист № 2). Матрица  $R - \frac{\lambda}{2} L$  вычислялась по данным примера 1 этой работы, но матрица  $L$  умножалась на  $\frac{\lambda}{2} = \frac{0,54001}{2} = 0,27000$ , где число 0,54001 является первым значением характеристики неустойчивости (см. пример 1). Как показывает итерационная таблица, уже второе приближение дало хорошую точность. Учет продольной силы снизил частоту собственных колебаний почти на 30%.

Интересно отметить, что если вместо силы  $P = \frac{1}{2} P_{кр}$  мы приняли  $P = P_{кр}$ , то левая часть исходного уравнения стала бы равной нулю и колебательное движение описывалось бы уравнением

$$0 \cdot \bar{\varphi} = \kappa I \bar{\varphi},$$

в котором отсутствуют упругие реакции  $R$ . Это уравнение показывает, что  $\kappa = 0$ .

Обычно при расчете рам на колебания не производится учет влияния продольных сил. Приведенный пример показывает, что такой учет следует делать и что выполнение такого расчета не составляет трудностей.

С той же легкостью мы можем решить и обратную задачу, которая ставится так: «Рама совершает вынужденные колебания с известной частотой, найти критическую силу?».

Для решения этой задачи уравнение движения запишется как и выше:

$$(R - \lambda L - \kappa I) \bar{\varphi} = 0, \quad (R - \kappa I) \bar{\varphi} = \lambda L \bar{\varphi}.$$

Но в этом случае следует считать, что  $\kappa$  известное, постоянное число, а значения  $\lambda$  и  $P_{кр}$  подлежат определению. Их значения получим, решив вековую систему уравнений:

$$L^{-1} (R - \kappa I) \bar{\varphi} = \lambda \bar{\varphi}.$$

Как видим, Э-метод открывает широкие перспективы.

Статья поступила в редакцию  
7 X 1965.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Корноухов. Розрахунок за методом деформацій стійкості рам із стрижнями змінного перерізу. Доповіді Академії Наук УРСР, № 2, 1939 г.
2. Н. В. Корноухов. Прочность и устойчивость стержневых систем. Госстройиздат, Москва, 1949 г.
3. А. Фейпль и Л. Фейпль. Сила и деформация. Т. II. Онти, 1936 г.
4. А. Р. Ржаницын. Устойчивость равновесия упругих систем. ГИТТЛ, Москва, 1955 г.
5. А. Ф. Смирнов. Устойчивость и колебания сооружений. Трансжелдориздат, Москва, 1958 г.
6. С. П. Тимошенко. Устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, 1946 г.
7. И. М. Рабинович. Основы строительной механики стержневых систем. Госстройиздат, 1960 г.
8. У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. ГИТТЛ, 1956 г.
9. С. Мюнци. Интегральные уравнения (Вольтерра) Т. I, ГТТИ, 1934 г.
10. Л. К. Нарец. Новые вопросы статики, динамики и устойчивости балок, возникающие в связи с появлением вычислительных машин непрерывного и дискретного действия. ТПИ, Таллин, 1963 г.
11. Л. К. Нарец. Вариант повышенной эффективности метода деформаций для расчета рам на колебания. Таллин, 1966 г.
12. Л. К. Нарец и И. Я. Хархурим. О программе по расчету конструкций по методу деформаций на ЭЦМ. ТПИ, Таллин, 1966.
13. И. Я. Хархурим. Вычисление на ЭЦМ частот и форм колебаний стержневых систем по Э-методу и оценка точности получения высших частот. ТПИ, Таллин, 1965 г.

УДК 624.044.681.142:624:044

*Л. К. Нарец, И. Я. Хархурим*

### **О ПРОГРАММЕ ПО РАСЧЕТУ КОНСТРУКЦИЙ ПО МЕТОДУ ДЕФОРМАЦИЙ НА ЭЦМ**

При решении задач строительной механики на ЭЦМ одной из проблем является автоматизация составления системы канонических уравнений при большом числе неизвестных. В институте ГИПРОТИС под руководством Резникова Р. А. на электронную машину поставлен метод сил [4]. Однако весьма обширный круг задач целесообразно решать с помощью метода деформаций, тем более, что некоторые эффективные методы [1, 3] по расчету конструкций связаны с этим методом. При решении задач методом деформаций на прочность, устойчивость и динамические воздействия приходится решать уравнения, в состав которых всегда входит матрица упругих реакций  $R$ , коэффициенты которой суть реакции, возникающие от соответствующих единичных перемещений (углов поворота  $\varphi$  и смещений  $\Delta$ ).

Поэтому прежде всего мы задались целью переложить на машину всю ту трудоемкую и важную работу, которую приходится выполнять при составлении матрицы  $R$ .

#### **1. О некоторых изменениях в методе деформаций, необходимых при постановке на электронные машины**

Выбирается расчетная схема конструкции и на нее накладываются обычные для метода деформаций связи в узлах против поворота и смещения. Смещения  $\Delta$  заменены углами поворота осей стержней  $\psi$ , так что

$$\psi = \frac{\Delta}{l}.$$

Погонную жесткость одного из стержней ( $i = \frac{EI}{l}$ ) принимают за эталонную и через нее выражают погонные жесткости всех остальных стержней; вводится также эталонная длина  $l$ , через которую выражают все остальные длины.

При таких изменениях [1] реактивные силы умножаются на длину деформируемого стержня, а коэффициенты при неизвестных имеют размерность момента ( $\kappa\Gamma/\text{см}$ ). Таким образом, все неизвестные являются безразмерными величинами, что необходимо для упрощения вычислений на машине, а кроме того, за знак матрицы можно вынести целесообразный коэффициент, что позволяет проводить вычисления с фиксированной запятой. Правила знаков сохраняются без изменений.

При наложенных связях в основной системе каждый элемент представляется как стержень с заземленными концами. Реакции по концам стержня определяются матричным уравнением

$$\bar{r} = r \cdot \bar{\varphi}, \quad (1)$$

где

$\bar{r}$  — вектор опорных реакций по концам стержня;

$\bar{\varphi}$  — вектор неизвестных;

$r$  — матрица единичных реакций вида

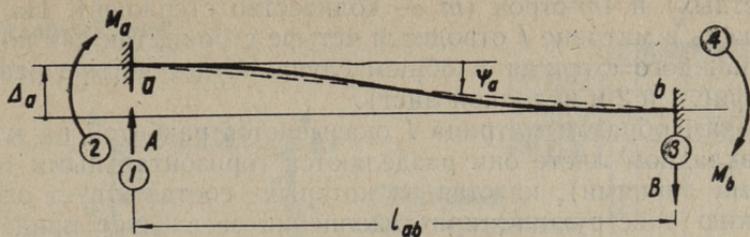
$$r = i \cdot \begin{vmatrix} 12 & -6 & 12 & -6 \\ -6 & 4 & -6 & 2 \\ 12 & -6 & 12 & -6 \\ -6 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

В случае элементов разной длины матрица  $r$  будет иметь вид

$$r = i \cdot \begin{vmatrix} 12 \cdot \alpha^2 & -6 \cdot \alpha & 12 \cdot \alpha^2 & -6 \cdot \alpha \\ -6 \cdot \alpha & 4 & -6 \cdot \alpha & 2 \\ 12 \cdot \alpha^2 & -6 \cdot \alpha & 12 \cdot \alpha^2 & -6 \cdot \alpha \\ -6 \cdot \alpha & 2 & -6 \cdot \alpha & 4 \end{vmatrix}$$

где

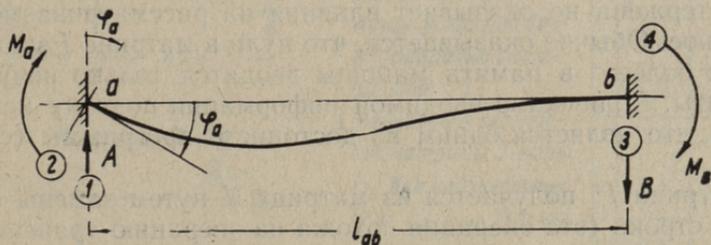
$\alpha$  — отношение длины эталонного стержня к длине рассматриваемого стержня.



$$r_{11} \psi_a = Al_{ab} = 12i_{ab} \psi_a, \quad r_{21} \psi_a \quad M_a = -6i_{ab} \psi_a$$

$$r_{31} \psi_a = Bl_{ab} = 12i_{ab} \psi_a, \quad r_{41} \psi_a \quad M_b = -6i_{ab} \psi_a$$

Фиг. 1



$$r_{12} \varphi_a = -6i_{ab} \varphi_a = Al_{ab}; \quad r_{22} \varphi_a = 4i_{ab} \varphi_a$$

$$r_{32} \varphi_a = -6i_{ab} \varphi_a = Bl_{ab}; \quad r_{42} \varphi_a = 2i_{ab} \varphi_a$$

Фиг. 2

Порядок нумерации единичных реакций (см. фиг. 1 и 2), равно как и порядок следования строк и столбцов матрицы  $r$ , во избежание ошибок должны все время сохраняться неизменными.

## 2. Основная идея

Сущность алгоритма для автоматического составления матрицы системы уравнений метода деформаций состоит в следующем. Представим искомую матрицу  $R$  в виде произведения трех матриц:

$$R = I^* \cdot r \cdot I, \quad (2)$$

где  $I$  —  $n \times 4m$  — направляющая матрица

$I^*$  —  $4m \times n$  — суммирующая матрица.

Важнейшей частью исходных данных является направляющая матрица  $I$ , состоящая из  $n$ -столбцов ( $n$  — количество не-

известных) и  $4m$ -строк ( $m$  — количество стержней). На один стержень в матрице  $I$  отводится четыре строки, так как по концам каждого стержня в общем случае будет четыре реакции (см. фиг. 1 и 2 и вкладной лист).

Таким образом матрица  $I$  оказывается разбитой на клетки (на вкладном листе они разделяются горизонтальными штриховыми линиями), каждая из которых соответствует одному стержню конструкции; при заполнении ее следует придерживаться принятого порядка обхода контура (например, по часовой стрелке).

Элементы матрицы  $I$  состоят из коэффициентов, представляющих из себя погонную жесткость  $i_{ik}^*$  — для неизвестных  $\varphi$ , либо  $(i_{ik} \cdot \alpha_{ik})$  — для неизвестных  $\psi$ , либо нули в случае, если стержень не оказывает влияния на рассматриваемое неизвестное. Обычно оказывается, что нули в матрице  $I$  занимают 90% и более; в память машины вводятся только ненулевые элементы. Количество вводимой информации поэтому незначительно, что является одним из достоинств программы (см. ниже.)

Матрица  $I^*$  получается из матрицы  $I$  путем замены столбцов на строки (эта операция похожа на операцию транспонирования), только ненулевые элементы матрицы  $I$  соответственно заменяются в матрице  $I^*$  единицами для неизвестных  $\varphi$  и коэффициентами  $\alpha_{ik}$  для неизвестных  $\psi$ .

Клетки матрицы  $I$ , описанные выше, делятся в свою очередь вертикальными линиями для каждого неизвестного на столбцы (см. вкладной лист). После получения матриц  $I$  и  $I^*$  сначала находится матрица  $r \cdot I$  путем последовательного умножения матрицы  $r$  справа на столбцы клетки  $I$ . В результате такого матричного умножения элементы матрицы  $r \cdot I$  представляют из себя реакции по концам каждого стержня в порядке следования клеток матрицы.

В результате умножения матрицы  $r \cdot I$  слева на суммирующую матрицу  $I^*$  соответствующие реакции по концам отдельных стержней алгебраически суммируются по направлениям наложенных связей (неизвестных) и таким образом получаются искомые элементы матрицы  $R$ .

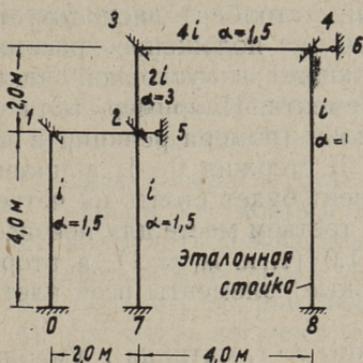
Здесь следует отметить аналогию с матрицей  $B$  [2], с помощью которой находятся изгибающие моменты по концам стержней при расчете рам по ГМ-методу.

Основную идею мы сформулировали в матричных символах, на вкладном листе мы поясняем ее на элементарном примере.

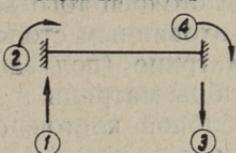
---

\* Здесь индексы обозначают номер стержня, соединяющего узлы  $i$  и  $k$ .

Вкладный лист



Условная балка



		J						
		ψ <sub>1</sub>	ψ <sub>2</sub>	ψ <sub>3</sub>	ψ <sub>4</sub>	ψ <sub>5</sub>	ψ <sub>6</sub>	
12	-6	12	-6					0-1
-6	4	-6	2					
12	-6	12	-6			3,5		
-6	2	-6	4	1				
	3							1-2
		3						
			1		1,5			2-7
						-6		2-3
				2			6	
					2			3-4
				4				
						4		
							1	4-8

Примечания:

1. Обход контура рамы по часовой стрелке
2. Определение места ненулевого элемента в матрице J производится при помощи условной балки (подробно смотри стр. )
3. Ненулевые элементы матрицы J есть:  $i_{ik}$  для неизвестных  $\varphi$  и  $i_{ik} \cdot \alpha_{ik}$  для известных  $\psi$

J\*

ψ <sub>1</sub>	ψ <sub>2</sub>	ψ <sub>3</sub>	ψ <sub>4</sub>	ψ <sub>5</sub>	ψ <sub>6</sub>	ψ <sub>7</sub>	ψ <sub>8</sub>
		1	1				
				1	1		1
						1	1
							1
							1
		1,5		1,5	-3		
						3	

nJ

ψ <sub>1</sub>	ψ <sub>2</sub>	ψ <sub>3</sub>	ψ <sub>4</sub>	ψ <sub>5</sub>	ψ <sub>6</sub>
-6				18	
2				-9	
-6				18	
4				-9	
-10	-10				
12	6				
-10	-10				
6	12				
-6				18	
4				-9	
-6				18	
2				-9	
-12	-12			-72	72
8	4			36	-36
-12	-12			-72	72
4	8			36	-36
-24	-24				
16	8				
-24	-24				
8	16				
-6				12	
4				-6	
-6				12	
				2	-6

$R = i \cdot$

16	6	0	0	-9	0
6	24	4	0	27	-36
0	4	24	8	36	-36
0	0	8	20	0	-6
-9	27	36	0	270	-216
0	-36	-36	-6	-216	228

$R = J^* nJ$

4. Порядок заполнения матрицы nJ смотри на стр

5. Правило знаков полностью соответствует обычному методу деформаций.

6. Для составления исходных данных для машины требуется только матрица J.

7. l - длина эталонной стойки  $\alpha_{ik} = \frac{l}{l_{ik}}$

Проделав все эти выкладки, можно представить и лучше уяснить себе последующее описание программы. Для определения места ненулевого элемента в столбце клетки (на вкладном листе заштрихованный столбец) используется условная балка, которая ставится в положение рассматриваемого стержня. Номер реакции в условной балке соответствует месту ненулевого элемента. Например, если совместить левый конец условной балки (номера реакций в ней остаются неизменными) с узлом 0 стержня 0—1, а правый конец с узлом 1, то ненулевой элемент будет стоять на четвертом месте для неизвестного  $\varphi_1$  и на третьем месте для неизвестного  $\varphi_5$ . Численно первый равен 1,0 (т. к.  $i_{01} = 1$ ), а второй 1,5 (т. к.  $i_{01} \cdot a_{01} = 1 \cdot 1,5$ ). Остальные элементы всей клетки 0—1 равны нулю.

Для получения элементов матрицы  $r \cdot I$ , матрица  $r$  умножается справа на столбец клетки  $I$  (заштрихованный столбец) и результат помещается на место заштрихованного столбца в матрице  $r \cdot I$ . Затем берется следующий столбец того же неизвестного во второй клетке  $I$  (под заштрихованным столбцом) и результат умножения помещается в матрице (под заштрихованным столбцом). Таким образом, столбцы матрицы  $r \cdot I$  получаются наращиванием сверху вниз столбцов клеток, соответствующих каждому неизвестному.

### 3. Краткие сведения о машине «Минск-2»

Для выяснения возможностей составления программы дадим краткие сведения о машине «Минск-2».

Быстродействие	— 5—6 тыс. <i>оп./сек.</i>
Ёмкость оперативной памяти (МОЗУ)	— 4096 (8192) слов
Ёмкость внешней памяти на магнитной ленте (НМЛ)	— 400 (1600) тыс. слов
Скорость обмена информацией с НМЛ	— 2500 <i>слов/сек.</i>
Способ представления чисел	— с фиксированной и плавающей запятой
Разрядность	— 37 двоичных разрядов (включая знак)
Код команд	— двухадресный
Количество команд	— 101
Скорость ввода информации с перфоленды	— 800 <i>строк/сек.</i>
Скорость вывода информации на печать	— 20 <i>слов/сек.</i>
Тип вводимой и выводимой информации	— десятичная, восьмеричная, алфавитно-цифровая.

#### 4. Исходные данные

Ценность любой программы состоит в малом объеме исходной информации. Исходные данные для работы нашей программы можно составить при наличии знаний метода деформаций с незначительными изменениями, описанными в п. 1, и небольшим навыке в составлении направляющей матрицы  $I$ . Для подготовки исходных данных следует:

- 1) начертить расчетную схему конструкции, проставить размеры и жесткости и обозначить неизвестные;
- 2) вычислить коэффициенты  $\alpha_{ik}$  и погонные жесткости  $i_{ik}$  и выразить их через эталонные;
- 3) составить направляющую матрицу  $I$ ;
- 4) составить логические шкалы в двоично-десятичном коде.

Логические шкалы используются для формирования строк или столбцов матриц  $I$  и  $I^*$ , а также для того, чтобы исключить ввод нулей в память машины.

Следует отметить, что составление логических шкал — чрезвычайно простая операция. Они состоят из набора нулей и единиц и составляются из десятичных чисел по столбцам матрицы  $I$ , начиная с первого. Любая десятичная цифра представляется в машине «четверкой» двоичных разрядов, а направляющая матрица как раз и состоит из столбцов с четверками строками. Каждый столбец клеток может быть заполнен либо всеми четверками нулями, либо числом и тремя нулями. Если в ней будут стоять все нули, то в логической шкале следует поставить 0, машина расшифрует его как 0 0 0 0; если число стоит на последнем месте, то следует в логической шкале поставить цифру 1, машина расшифрует ее как 0 0 0 1; если на третьем месте, то цифру 2 (машинное 0 0 1 0), если на втором месте, то 4 (машинное 0 1 0 0) и на первом месте — то цифру 8 (машинное 1 0 0 0).

Таким образом при составлении логических шкал числа состоят из набора пяти цифр: 0, 1, 2, 4 и 8. (Во времени выхода настоящего сборника составление исходных данных значительно упростилось. Об этом см. в следующих наших работах).

#### 5. Работа программы

Было бы нецелесообразным вводить в память машины всю матрицу  $I$ , а также заполнять память матрицей  $I^*$ . В таком случае можно было бы решать системы не более, чем с 15-ю неизвестными. Этот недостаток устраняется использованием ло-

гических шкал. Опишем кратко последовательность работы программы (логической схемы или блок-схемы программы мы здесь не приводим).

Сначала с помощью логических шкал формируется первая строка матрицы  $I^*$ , для которой отводится первая группа фиксированных рабочих ячеек.

Далее с помощью тех же шкал формируется\* первый столбец матрицы  $I$ , занимающий вторую группу рабочих ячеек. Затем производится матричное умножение  $r \times I^{**}$  путем последовательного умножения матрицы  $r$  справа на столбцы клетки  $I$ ; таким образом последовательно наращивается столбец матрицы  $r \cdot I$ , занимающий третью группу рабочих ячеек.

Далее первая строка  $I^*$  умножается справа на первый столбец  $r \cdot I$  — в результате образуется первый элемент искомой матрицы  $R$ .

Далее на месте второй группы рабочих ячеек с помощью тех же шкал формируется второй столбец  $I$ , он умножается слева на  $r$  и получается второй столбец  $r \cdot I$  на месте третьей группы рабочих ячеек.

Далее первая строка  $I^*$  умножается справа на второй столбец  $r \cdot I$  — в результате получается второй элемент первой строки  $R$ , и так далее, пока не образуется вся первая строка.

Затем на месте первой строки  $I^*$  формируется вторая, и весь цикл снова повторяется, пока не образуется полностью вся матрица  $R$ .

Контролем правильности работы программы является то обстоятельство, что матрица  $R$  должна получиться симметричной относительно главной диагонали, а элементы, лежащие на ней, всегда положительны и обычно больше по величине побочных элементов. Последнее обстоятельство является следствием изменений метода деформаций, описанных в п. 1 настоящей работы. Система уравнений получается лучше обусловленной, чем в обычно принятом варианте метода деформаций.

Логическая схема программы очень проста и использует в основном матричные умножения.

Для каждого конкретного случая расчета следует в программе сделать корректировку нескольких ячеек (констант), связанных с количеством неизвестных и стержней.

В настоящее время в нашей программе имеются следующие количественные ограничения:  $n \leq 50$ ;  $m \leq 80$ . Следует указать на то обстоятельство, что в нашей машине «Минск-2» работает пока один блок оперативной памяти (МОЗУ), тогда как за-

---

\* См. описание матриц  $I$  и  $I^*$  в п. 2 и на вкладном листе.

\*\* Матрица  $r$  предварительно вводится в память машины.

проектировано два блока; тогда порядок матриц может быть увеличен. А при использовании внешней памяти количественные ограничения практически отпадают.

## 6. Область применения программы и сравнение ее с программой метода сил

При расчете конструкции на прочность нас обычно интересуют эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Для этого после составления матрицы  $R$  (левой части) следует составить правые части системы уравнений. Автоматическое составление правых частей можно реализовать по той же самой программе, только матрица  $r$  заменяется другой (подобной) матрицей, элементами которой служит числовая информация о внешних нагрузках.

Решение систем канонических уравнений осуществляется по стандартной программе с одной матрицей  $R$  и  $p$  — правыми частями ( $p$  — число различных комбинаций нагрузок; в нашей программе  $p \leq 6$ ).

Затем вычисляются эпюры\* изгибающих моментов и поперечных сил (по концам стержней), а также интересующие нас деформации.

Для вычисления собственных частот и форм колебаний конструкций [3] необходимо, кроме матрицы  $R$ , вычислить еще инерционную матрицу  $J^{**}$ . Матрица  $J$  составляется по той же самой программе, только матрица  $r$  заменяется другой, подобной ей, матрицей  $j$ , которая представляет из себя матрицу единичных реакций по концам стержней от действия инерционных сил при распределенных и сосредоточенных массах.

Для расчета конструкций на устойчивость [5] по методу деформаций опять, кроме матрицы  $R$ , необходимо составить матрицу коэффициентов уравнений устойчивости. Последняя матрица вычисляется по той же самой программе, только матрица  $r$  заменяется другой, подобной ей, матрицей  $l$ .

Следует отметить однотипность решения всех указанных выше задач, а также однотипность матриц  $R$ ,  $J$  и  $L$ , с одной стороны, и матриц  $r$ ,  $j$  и  $l$ , с другой стороны. Отметим некоторые преимущества Э-варианта метода деформаций в отношении составления и реализации программы по сравнению с методом сил. Программа проста и универсальна; сравнительно мало загружает память машины, существенна также простота подго-

\* Например, по ГМ-методу [2].

\*\* См. работы [1, 3]. Введение дополнительных связей, кроме увеличения числа клеток  $R$  и  $J$ , никаких изменений не вносит.

товки исходных данных при решении задач по методу деформаций.

В методе сил важное значение имеет выбор основной системы; в методе деформаций основная система всегда единственна. Кроме того, в нашей программе при решении задач по методу деформаций не требуется кодировать узлы и стержни, задавать особую информацию о линиях, величинах и направлениях сил [4]. Все это существенно влияет на подготовку исходных данных, сокращает время и вероятность ошибок при вводе исходных данных.

Статья поступила в редакцию  
7 X 1965.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Нарец. Вариант метода деформаций повышенной эффективности для расчета рам на колебания. Труды ТПИ, 1966 г.
2. Л. К. Нарец. Расчет статически неопределимых систем на малых вычислительных машинах. Москва, 1958 г.
3. И. Я. Хархурим. Вычисление на ЭЦМ частот и форм колебаний стержневых систем по Э-методу и оценка точности получения высших частот. Труды ТПИ, 1966 г.
4. Р. А. Резников. Методы решения задач строительной механики на электронных цифровых машинах. Стройиздат, 1964 г.
5. Л. К. Нарец. Вариант метода деформаций повышенной эффективности для расчета рам на устойчивость. Труды ТПИ, 1966 г.
6. R. Zurgühl. Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeschwingungen nach der Deformationsmethode. Ing. Archiv. N 3, 1963.

УДК 624.071.3 + 681.142: 624.071.3

*И. Я. Хархурим*

## ВЫЧИСЛЕНИЕ НА ЭЦМ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО Э-МЕТОДУ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ВЫСШИХ ЧАСТОТ\*

В этой статье мы исследуем вопросы практического применения метода деформаций в Э-варианте.

Для нахождения частот и соответствующих форм собственных колебаний по методу деформаций, учитывая принцип Даламбера, приходится решать уравнение вида:

$$R\bar{\varphi} - \kappa I\bar{\varphi} = 0, \quad (1)$$

где

$I$  — инерционная матрица (о ней будет сказано особо);

$\bar{\varphi}$  — вектор единичных перемещений;

$\kappa$  — частотный параметр.

$R$  — матрица упругих реакций

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}$$

Коэффициенты матрицы  $r_{ik}$  — суть реакции, возникающие от соответствующих единичных перемещений (углов поворота узлов  $\varphi$  и смещений  $\Delta$ ). Смещения  $\Delta$  заменены углами перегиба стоек (углы поворота хорд)  $\psi$  таким образом, что

$$\psi_i = \frac{\Delta_i}{l_i},$$

\* См. работу Л. К. Нарца «Вариант метода деформаций повышенной эффективности для расчета рам на колебания». Таллин, 1964, ТПИ.

$$\kappa = \frac{m\omega^2 l^4}{420 \cdot EI}, \quad (2)$$

где  $m$  — погонная масса элемента, выбранного за эталонный;  
 $\omega$  — искомая круговая частота;  
 $l$  — длина эталонного элемента;  
 $EI$  — жесткость на изгиб эталонного элемента.

Уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{\varphi} = \kappa R^{-1} I \bar{\varphi}. \quad (3)$$

Решение уравнения типа (3) и является основой для вычисления частот и форм собственных колебаний. Универсальность его позволяет решать задачи колебаний для любых плоских стержневых систем (балки, фермы, рамы, арки).

Вычисления могут быть проведены как с помощью малых вычислительных машин, так и с помощью электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦМ). Предлагаемый метод является итерационным с использованием матричного аппарата. Основная идея состоит в следующем. Строится последовательность векторов  $\bar{\varphi}^{(0)}$ ,  $\bar{\varphi}^{(1)}$ ,  $\bar{\varphi}^{(2)}$  и т. д. по формуле (3), начиная с некоторого исходного приближения  $\varphi^{(0)}$ , которое может выбираться произвольно.

Некоторое приближение  $\varphi^{(k)}$  будет первой собственной формой, а отношение суммы компонент предыдущего приближения к последующему дает соответствующий частотный параметр  $\kappa_1$ , посредством которого и определится первая собственная частота. Итерационный процесс самоисправляющийся, сходимость его доказана (см., например [2]).

Итерация всегда сходится к первой собственной форме колебаний и будет выполняться следующее соотношение:

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 \text{ и т. д.} \quad (4)$$

Величина  $\kappa_i$  может быть получена довольно просто тремя способами, каждый из которых дает более точное значение, чем предыдущий:

1) Делением любой компоненты предыдущего итерируемого вектора на последующую.

2) Для получения среднего значения частотного параметра  $\kappa_i$  берутся отношения средних арифметических.

3) Еще более точное значение  $\kappa_i$  получается сравнением модулей векторов, т. е. берутся отношения квадратных корней из суммы квадратов компонент.

Кроме этих возможностей для получения  $\chi_i$  можно находить отношения Рэлея.

В процессе итерации может представиться два случая, при которых возникают затруднения:

а) компоненты итерируемого вектора увеличиваются по абсолютной величине без ограничений, что чревато переполнением разрядной сетки машины;

б) компоненты итерируемого вектора уменьшаются по абсолютной величине, что чревато потерей значащих цифр. По этим причинам приходится итерируемый вектор на каждом шагу нормировать.

Существует довольно много возможностей нормировки, отметим наиболее удобные из них: деление компонент вектора на наибольшую из них (этой нормировкой мы практически пользовались при наших расчетах), умножение-деление на  $10^n$ , где  $n$  — любое целое число; нормирование к единичной длине.

Для нахождения второй собственной частоты и формы колебаний необходимо провести аналогичные вычисления, предварительно выполнив условие  $I$ -ортогональности\* вида

$$\bar{\varphi}_2' I \bar{\varphi}_1 = 0. \quad (5)$$

При этом начальный вектор  $\varphi_2^{(0)}$  опять выбирается произвольно, но одна его компонента (безразлично какая именно) будет вычисляться из условия (5).

Условие ортогональности для третьей частоты будет иметь вид

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_3' I \bar{\varphi}_1 = 0; \\ \bar{\varphi}_3' I \bar{\varphi}_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Начальный вектор  $\varphi_3^{(0)}$  опять произвольный, но уже две компоненты (опять безразлично какие) будут вычисляться из условия (6) и так далее для четвертой и последующих частот.

В общем случае для нахождения  $n$  высших частот нужно выполнить условия  $I$ -ортогональности, для чего следует решить систему  $(n - 1)$  уравнений, решение которой дает  $(n - 1)$  фиксированных значений компонент  $n$ -го собственного вектора, причем остальные компоненты выбираются, вообще говоря, произвольно. При нахождении высших частот после нескольких шагов итерации слагаемое, зависящее, от первой формы колебаний, благодаря округлениям чисел будет довольно быстро

\* См. работу Л. К. Нарца.

возрастать по сравнению с остальными, что приведет опять-таки к первой форме. Для того, чтобы предотвратить описанное явление, следует после нескольких шагов итерации «подавлять» по (5) и (6) соответствующие компоненты, отыскивая их не в процессе итерации, а из условия ортогональности (пример в таблице 1).

Особо следует остановиться на вопросе о точности вычисления частот. В данном методе используется идея приближения функций по Эрмиту. Метод определения частот и собственных форм колебаний упругих систем при использовании полиномов Эрмита тесно связан с основной идеей метода деформаций. Под действием респределенных сил инерции каждый стержень рамы в процессе колебаний изгибается так, что его форму колебаний можно приближенно представить полиномом Эрмита.

Для увеличения точности стержень можно разбить на несколько участков и каждый участок в свою очередь представить полиномом Эрмита. Таким образом, задача о колебаниях конструкции будет решена тем точнее, чем более близко принятая по Эрмиту форма колебаний будет соответствовать истинной кривой изгиба. Можно предположить (ниже это будет показано на примерах), что с увеличением числа наложенных связей (а каждая связь по методу деформаций характеризуется углом поворота и смещением) статическая линия изгиба будет все лучше и лучше аппроксимировать искомую форму колебаний. Иначе говоря, строя последовательность собственных частот и форм колебаний путем постепенного увеличения числа наложенных связей, мы можем находить искомые частоты с любой наперед заданной точностью и эта последовательность всегда будет стремиться к точным значениям этих величин. Однако увеличение точности расчетов вызывает увеличение количества вычислений, ибо каждая наложенная связь увеличивает количество неизвестных на два; соответственно растет порядок матриц. Однако при использовании электронных цифровых вычислительных машин количество арифметических операций не очень существенно. Необходимо было выяснить точность метода деформаций в Э-варианте. Для этого мы обратились к решению наиболее простых примеров, так как в литературе имеется их точное решение.

По этой причине пришлось ограничиться элементами с постоянной по длине жесткостью и постоянной величиной погонной массы.

Были рассчитаны балка на двух опорах с распределенной массой (см. таблицу II), консоль (таблица III), а также рама с наклонным ригелем. Однако конструкции, элементы которых имеют переменную по длине жесткость и распределенную мас-

# Таблица I

Таблица „А“. Утерация с итерацион. матр.		Таблица „Б“. Утерация с обр. матр. упр. реак.	
J =		R <sup>-1</sup> =	
4,000	-3,000	0,000	13,000
-3,000	8,000	-3,000	0,000
0,000	-3,000	4,000	-13,000
13,000	0,000	-13,000	312,000
Σ контрольн.	14,000	2,000	-12,000
Σ контрольн.	14,000	2,000	312,000
Итерационная таблица		Запись векторов J·X <sub>i</sub>	
1 X <sub>1,0</sub>	1,000	1,000	1,000
3 X <sub>1,1</sub>	182,332	0,332	-181,668
4 X <sub>1,1</sub>	1,000	0,002	-0,998
6 X <sub>1,2</sub>	137,622	-0,002	-137,618
7 X <sub>1,2</sub>	1,000	0,000	-1,000
9 X <sub>1,3</sub>	136,762	0,000	-136,752
10 X <sub>1,3</sub>	1,000	0,000	-1,000
Σ контрольн.	1,000	1,000	0,000
Σ контрольн.	1,000	1,000	0,000
12 X <sub>2,0</sub>	1,000	-0,900	1,000
14 X <sub>2,1</sub>	6,667	-6,600	6,667
15 X <sub>2,1</sub>	1,000	-0,990	1,000
17 X <sub>2,2</sub>	6,967	-6,963	6,967
18 X <sub>2,2</sub>	1,000	-1,000	1,000
20 X <sub>2,3</sub>	7,000	-7,000	7,000
21 X <sub>2,3</sub>	1,000	-1,000	1,000
Σ контрольн.	1,000	0,000	1,000
Σ контрольн.	1,000	0,000	1,000
22 X <sub>3,0</sub>	1,000	0,000	-1,002
24 X <sub>3,1</sub>	1,179	0,003	-1,187
25 X <sub>3,1</sub>	1,000	0,000	-1,000
27 X <sub>3,2</sub>	1,162	0,000	-1,162
28 X <sub>3,2</sub>	1,000	0,000	-1,000
Σ контрольн.	1,000	0,000	1,000
Σ контрольн.	1,000	0,000	1,000

$$\omega_1 = \sqrt{420 \cdot 32 \cdot 0,00731} \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 9,9125 \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{420 \cdot 32 \cdot 0,143} \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 43,8162 \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Таблица „Б“. Утерация с обр. матр. упр. реак.		Таблица „А“. Утерация с итерацион. матр.	
R <sup>-1</sup> =		J =	
1,333	-0,167	0,000	13,000
-0,167	0,333	-3,000	0,000
-0,167	-0,167	0,000	-3,000
0,500	0,000	-13,000	312,000
Σ контрольн.	1,000	2,000	-12,000
Σ контрольн.	1,000	2,000	312,000
2 J·X <sub>1,0</sub>	14,000	2,000	-12,000
Σ контрольн.	14,000	2,000	-12,000
5 J·X <sub>1,1</sub>	12,327	-0,004	-12,323
Σ контрольн.	12,327	-0,004	-12,323
6 J·X <sub>1,2</sub>	12,268	0,000	-12,268
Σ контрольн.	12,268	0,000	-12,268
11 J·X <sub>2,0</sub>	6,700	-13,200	6,700
Σ контрольн.	6,700	-13,200	6,700
16 J·X <sub>2,1</sub>	6,970	-13,920	6,970
Σ контрольн.	6,970	-13,920	6,970
19 J·X <sub>2,2</sub>	7,000	-14,000	7,000
Σ контрольн.	7,000	-14,000	7,000
23 J·X <sub>3,0</sub>	2,593	0,006	-2,591
Σ контрольн.	2,593	0,006	-2,591
26 J·X <sub>3,1</sub>	2,563	0,000	-2,563
Σ контрольн.	2,563	0,000	-2,563
Σ контрольн.	2,563	0,000	-2,563

Таблица II

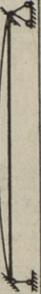
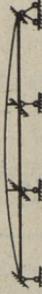
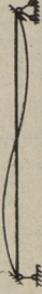
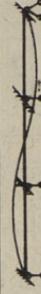
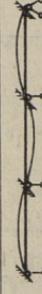
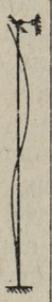
№ η/η	Частоты	№ приближения	Расчетная схема и форма колебаний	Вычисленное значение	Точное значение	Ошибка
1	I <sup>a</sup> частота	0 <sup>e</sup> прибл.		10,9607	$\pi^2 =$ = 9,8696	1,12 %
2		1 <sup>e</sup> прибл.		9,9125		0,42 %
3		2 <sup>e</sup> прибл.		9,8811		0,116 %
4		3 <sup>e</sup> прибл.		9,8734		0,088 %
5	II <sup>a</sup> частота	0 <sup>e</sup> прибл.		50,2018	$4\pi^2 =$ = 39,4784	27,2 %
6		1 <sup>e</sup> прибл.		43,6162		10,9 %
7		2 <sup>e</sup> прибл.		39,7224		0,62 %
8		3 <sup>e</sup> прибл.		39,6226		0,36 %
9	III <sup>a</sup> частота	0 <sup>e</sup> прибл.		—	$9\pi^2 =$ = 88,8264	—
10		1 <sup>e</sup> прибл.		132,1233		48,8 %
11		2 <sup>e</sup> прибл.		90,6401		11,2 %
12		3 <sup>e</sup> прибл.		90,4013		1,77 %

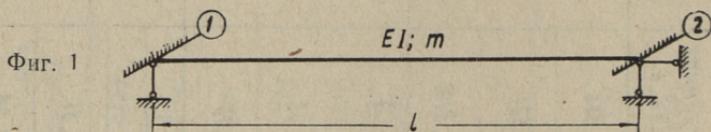
Таблица III

№ п/п	Частоты	№ приближения	Расчетная схема и форма колебаний	Вычисленное значение	Точное значение	Ошибка
1	I <sup>a</sup> частота	1 <sup>e</sup> прибл.		3,536	3,515	0,60 %
2		2 <sup>e</sup> прибл.		3,521		0,17 %
3		3 <sup>e</sup> прибл.		3,518		0,08 %
4	II <sup>a</sup> частота	1 <sup>e</sup> прибл.		35,63	22,00	62,0 %
5		2 <sup>e</sup> прибл.		22,23		1,00 %
6		3 <sup>e</sup> прибл.		22,05		0,22 %
7	III <sup>a</sup> частота	1 <sup>e</sup> прибл.		—	61,9	—
8		2 <sup>e</sup> прибл.		77,51		25,1 %
9		3 <sup>e</sup> прибл.		65,34		5,54 %

су, а также сосредоточенные массы и жесткие консоли, не представляют особых трудностей; увеличивается только количество арифметических операций из-за наложения дополнительных связей.

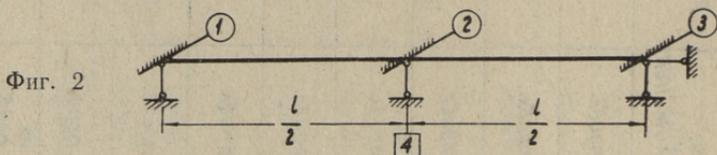
В качестве первого примера рассмотрим задачу о колебаниях простой балки на двух опорах с распределенной массой.

Пусть момент инерции и погонная масса балки постоянны по длине. Определим три первые частоты и соответствующие им формы колебаний, постепенно увеличивая число наложенных связей (таблица II).



Расчетная схема для нулевого приближения представлена на фиг. 1.

В нулевом приближении решим задачу в предположении, что по концам балки наложены связи против поворота (основная система для статического расчета балки по методу деформаций). Каждое приближение характеризуется числом наложенных связей: чем оно больше, тем точнее расчет. Расчет проводится в специальной таблице; так, таблица I дает пример расчета первых трех собственных частот и форм колебаний свободно опертой балки с распределенной массой и постоянной жесткостью в первом приближении (дополнительно наложена связь по середине балки).



Расчетная схема для первого приближения представлена на фиг. 2, ее можно также усмотреть из таблицы II, где сведены результаты расчетов.

В левой части расчетной таблицы I идет итерация с обратной матрицей упругих реакций  $R^{-1}$ . В верхней части таблицы выписаны обе матрицы  $I$  и  $R^{-1}$  с контрольными строками. Порядок вычислений в таблице обозначен номером по порядку в «квадратике» для каждой строки.

Для отыскания параметра  $\kappa_1$ , характеризующего 1-ю собственную частоту, задаемся произвольным начальным вектором

$\dot{X}_{1,0}$ , обозначенным под № 1 в квадратике слева (см. таблицу I). В нашем примере компоненты первоначального вектора приняты равными единице. Далее вычисляем вектор  $I \cdot \dot{X}_{1,0}$  — строка под номером 2, — для чего следует матрицу  $I$  умножить справа на матрицу-столбец  $\dot{X}_{1,0}$ . Для удобства вычислений в таблице, матрица  $I$  умножается на транспонированный вектор  $\dot{X}'_{1,0}$ , т. е. на матрицу-строку, выписанную под № 1. Таким образом каждая компонента вектора  $I \cdot \dot{X}_{1,0}$  находится путем последовательного умножения соответствующей строки матрицы  $I$  на матрицу-строку  $\dot{X}'_{1,0}$ . Попутно осуществляется контроль правильности найденного вектора  $I \cdot \dot{X}_{1,0}$ , для чего вектор  $\dot{X}_{1,0}$  умножается на контрольную строку матрицы  $I$ ; результат должен равняться сумме компонент найденного вектора  $I \cdot \dot{X}_{1,0}$ . Эта контрольная сумма записывается в крайнем правом столбце таблицы (316,000).

Затем вычисляется вектор  $X_{1,1}$  путем умножения справа матрицы  $R^{-1}$  на матрицу-столбец  $I \cdot \dot{X}_{1,0}$ ; и опять для удобства умножения в таблице, матрица  $R^{-1}$  умножается на транспонированный вектор  $\{I \cdot \dot{X}_{1,0}\}'$ , т. е. на матрицу-строку, выписанную под № 2; результат записывается опять в виде строки под № 3.

Попутно опять осуществляется контроль правильности найденного вектора  $X_{1,1}$ , для чего вектор  $I \cdot \dot{X}_{1,0}$  умножается на контрольную строку матрицы  $R^{-1}$  и результат должен равняться сумме компонент найденного вектора (эта сумма имеется в столбце  $\Sigma$  компонент) и в крайнем правом столбце таблицы (117,892).

После нахождения векторов  $\dot{X}_{1,0}$  и  $X_{1,1}$  находится параметр  $\kappa_1$  путем деления суммы компонент вектора  $\dot{X}_{1,0}$  (4,000) на сумму компонент вектора  $X_{1,1}$  (117,892).

Далее, в строке № 4 осуществляется нормирование путем деления каждой компоненты вектора  $X_{1,1}$  на наибольшую по абсолютной величине компоненту (182,332).

Итак, подготовлен следующий вектор для итерации, которая выше была описана. Итерация считается законченной, если при принятом числе знаков два последующих приближения совпадают до последнего знака.

В нашем примере последний нормированный вектор  $\dot{X}_{1,3}$  (или собственная форма) для 1-й частоты совпадает с предыдущим  $\dot{X}_{1,2}$ .

При отыскании второй собственной частоты и соответствующей ей формы колебаний, итерация идет в том же порядке, начи-

ная со строки № 12, с тем отличием, что одна компонента первоначального вектора берется не произвольно, а отыскивается из условий ортогональности этого вектора с последним вектором  $I \cdot \dot{X}_{1,2}$ . То есть, должно быть выполнено условие

$$(I \cdot \dot{X}_{1,2})' \cdot X_{2,0} = 0 \quad (7)$$

или подробно

$$12,268 \cdot X_{2,1} + 0 \cdot X_{2,2} - 12,268 \cdot X_{2,3} + 224,432 \cdot X_{2,4} = 0.$$

Если первые три компоненты взяты произвольно, например,

$$X_{2,1} = 1,000, \quad X_{2,2} = -0,900, \quad X_{2,3} = 1,000,$$

то из условия (7) следует, что  $X_{2,4} = 0$ .

Итак, на каждом шаге итерации одна компонента нормированного вектора будет находиться из условий ортогональности (7).

При нахождении 3-ей частоты отличие будет состоять в том, что уже 2 компоненты вектора будут находиться из условия ортогональности

$$\begin{cases} (I \cdot \dot{X}_{1,2})' \cdot X_{3,0} = 0; \\ (I \cdot \dot{X}_{2,2})' \cdot X_{3,0} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

или подробно

$$12,268 \cdot X_{3,1} + 0 \cdot X_{3,2} - 12,268 \cdot X_{3,3} + 224,432 \cdot X_{3,4} = 0;$$

$$7,000 \cdot X_{3,1} - 14,000 \cdot X_{3,2} + 7,000 \cdot X_{3,3} + 0 \cdot X_{3,4} = 0.$$

Если первые 2 компоненты взяты произвольно, например,

$$\begin{cases} X_{3,1} = 1,000, \\ X_{3,2} = 0, \end{cases}$$

то условие ортогональности (8) будет выглядеть

$$12,268 \cdot 1,000 + 0 \cdot 0 - 12,268 \cdot X_{3,3} + 224,432 \cdot X_{3,4} = 0;$$

$$7,000 \cdot 1,000 - 14,000 \cdot 0 + 7,000 \cdot X_{3,3} + 0 \cdot X_{3,4} = 0,$$

откуда:

$$\begin{cases} X_{3,3} = -1,002, \\ X_{3,4} = -0,109. \end{cases}$$

Итак, вектор,  $\dot{X}_{3,0}$  готов для итерации, и в таблице I он записан в строке № 22. Таким же образом на каждом шаге итерации две компоненты вектора будут находиться из условия ортогональности (8).

Частоты определяются по формуле

$$\omega_i = \sqrt{420 \cdot a^4 \cdot \kappa_i} \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (9)$$

где  $a$  — число пролетов балки, соответствующее каждому приближению.

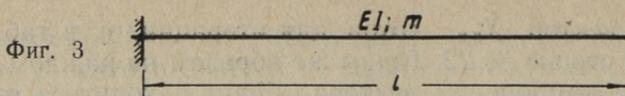
Так, например, в 0-ом приближении (2 неизвестных) пролет один:  $a=1$ , в 1-ом (4 неизвестных) приближения число пролетов два:  $a=2$  и т. д.

Коэффициент  $a$  таким образом приводит расчетную длину пролета в каждом приближении к основному пролету.

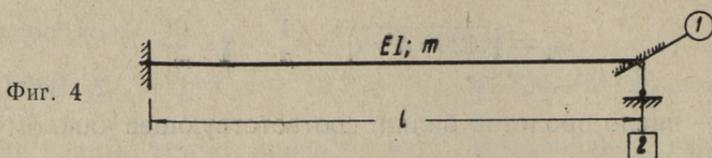
Коэффициенты матрицы  $R^{-1}$  в таблице I все увеличены для точности в 2 раза, следовательно, при отыскании частоты  $\omega_i$  по формуле (9) необходимо увеличить подкоренное выражение тоже в 2 раза, откуда и появляется коэффициент 32, вместо  $2^4=16$ .

Результаты расчета на колебания простой балки на двух опорах представлены в таблице II. Вычислены значения трех первых собственных частот путем последовательного увеличения числа наложенных связей, чем достигается увеличение точности значения частот. В 0-ом приближении количество неизвестных ( $a$  следовательно, порядок матриц  $I$  и  $R^{-1}$ ) равно двум значениям углов поворота правого и левого концов балки, что соответствует основной системе по методу деформаций. В 1-ом приближении по середине балки дополнительно наложена одна связь против поворота и смещения, во 2-ом приближении в каждой трети пролета наложена связь, а в 3-ем приближении в каждой четверти пролета. Как видно из таблицы II, с увеличением числа наложенных связей точность вычисленных значений очень быстро нарастает (ошибка быстро уменьшается) и уже к 3-му приближению достигает весьма близких значений к точному решению, причем с увеличением порядкового номера частоты ошибка значительно возрастает: так, в 1-ом приближении ошибка для первой частоты составляет 0,42%, для второй частоты 10,9% и для третьей 48,8%, а уже в 3-ем приближении ошибка для первой частоты составляет 0,038%, для второй 0,36%, а для третьей 1,77%.

Вычислим три первые собственные частоты консоли длиной  $l$  с постоянной жесткостью  $EI$  и погонной массой  $m$ .

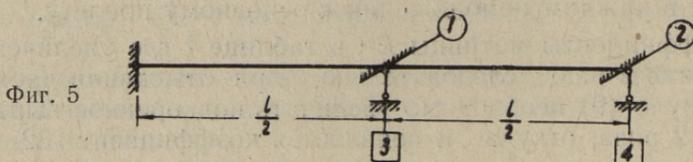


В первом приближении расчетная схема будет выглядеть так:



Порядок матриц равен  $n=2$ .

Во втором приближении наложена дополнительная связь по середине длины. Расчет производился по схеме фиг. 5.



Порядок матриц  $n=4$ .

В третьем приближении связи наложены в каждой трети пролета. Порядок матриц  $n=6$ . Результаты расчета консоли на колебания представлены в таблице III. Как видно из таблицы, с увеличением числа наложенных связей точность расчета частот резко повышается. Однако для высших частот точность гораздо хуже, чем для первых частот; это означает, что для получения удовлетворительной точности для высших частот следует брать лучшее приближение (т. е. с большим числом наложенных связей). В инженерных расчетах обычно требуется знать первые частоты, которые могут быть получены с хорошей точностью при малом числе участков подразделения и небольшом количестве выкладок.

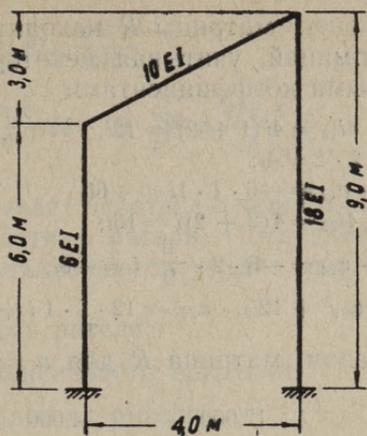
Рассмотрим более сложный случай. Возьмем, например, раму с наклонным ригелем.

Размеры и жесткости указаны на фиг. 6.

Пусть стойки и ригель для простоты имеют постоянную погонную массу  $m$  и постоянную по длине жесткость. Эта рама считалась на электронной машине\* М-3, причем параллельно в 0-ом (при 3-х наложенных связях) и 1-ом (при 5 наложен-

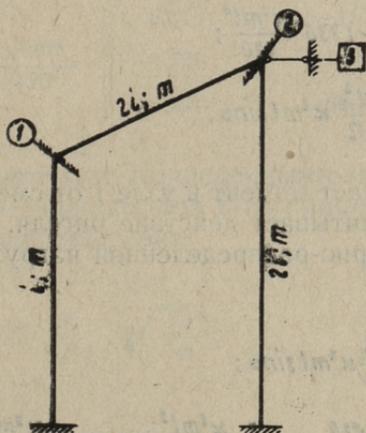
\* О постановке задачи на электронную машину будет сказано ниже.

Фиг. 6



ных связях) приближениях расчет был проделан вручную с помощью арифмометра, результаты были сверены и обнаружено полное совпадение результатов (это обстоятельство было использовано при отладке программы).

В 0-ом приближении рама считалась по такой расчетной схеме:



Фиг. 7

При этом параметры (погонная масса, погонная жесткость и длина) левой стойки условно приняты за эталонные, и все частоты будут выражены через эти параметры. Ввиду того, что наклонный ригель вносит некоторое своеобразие в инерционной матрице, а также в связи с безразмерными единичными реакциями, приведем пример вычисления коэффициентов обеих матриц  $R$  и  $I$ .

Коэффициенты матрицы  $R$  находят обычным образом по методу деформаций, учитывая некоторые изменения в связи с безразмерными коэффициентами.

$$r_{11} = 4i_{01} + 4i_{12} = 4i(1 + 2) = 12i;$$

$$r_{12} = 2i_{12} = 2 \cdot 2 = 4i;$$

$$r_{13} = -6i_{01} \cdot \alpha_{01} = -6 \cdot 1 \cdot 1i = -6i;$$

$$r_{22} = 4i_{12} + 4i_{23} = 4(2 + 2)i = 16i;$$

$$r_{23} = -6i_{24} \cdot \alpha_{24} = -6 \cdot 2 \cdot \frac{6}{9} i = -8i;$$

$$r_{33} = 12i_{01} \cdot \alpha_{01}^2 + 12i_{24} \cdot \alpha_{24}^2 = 12 \cdot 1 \cdot 1i + 12 \cdot 2 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^2 i = 22,66667i;$$

Таким образом, матрица  $R$  для  $n=3$  будет выглядеть так:

$$R = i \cdot \begin{vmatrix} 12,000 & 4,000 & -6,000 \\ 4,000 & 16,000 & -8,000 \\ -6,000 & -8,000 & 22,667 \end{vmatrix}.$$

Составление матрицы  $I$ :

$$j_{11} = \frac{\alpha^2 m l^3}{420} 4 + \frac{\alpha^2 m l_{12}^3}{420} 4 = \frac{\alpha^2 m l^3}{420} \left(4 + \frac{l_{12}^3}{l^3} 4\right) = 6,315 \frac{\alpha^2 m l^3}{420},$$

$$j_{12} = \frac{\alpha^2 m l_{12}^3}{420} (-3) = -1,736 \frac{\alpha^2 m l^3}{420};$$

$$j_{13} = \frac{\alpha^2 m l^3}{420} (-22) + \frac{l_{12}^2}{12} \alpha^2 m l \sin \alpha,$$

Первый член  $j_{13}$  означает момент в узле 1 от смещения стойки 0—1, а второй член учитывает действие ригеля. Здесь находится момент от равномерно-распределенной нагрузки  $j = \alpha^2 m l$  таким образом, что

$$M_{\text{ригеля}} = \frac{j l_{12}^3}{12} = \frac{l_{12}^2}{12} \alpha^2 m l \sin \alpha;$$

$$j_{13} = \frac{\alpha^2 m l^3}{420} (-22) + \frac{420}{12} 0,694 \frac{3}{5} \frac{\alpha^2 m l^3}{420} = -7,417 \frac{\alpha^2 m l^3}{420};$$

$$j_{22} = \frac{\alpha^2 m l_{12}^3}{420} (4) + \frac{\alpha^2 m l_{24}^3}{420} (4) = 15,815 \frac{\alpha^2 m l^3}{420},$$

$$j_{23} = \frac{\alpha^2 m l_{24}^3}{420} (-22) - \frac{420}{12} \frac{l_{12}^2}{l^2} \sin \frac{\alpha^2 m l^3}{420};$$

Второй член здесь опять учитывает действие ригеля;

$$j_{22} = -88,833 \frac{\kappa^2 m l^3}{420};$$

$$j_{33} = \frac{\kappa^2 m l^3}{420} \left( 156 + 156 \frac{l_{12}^2}{l^2} + \frac{420 \cdot 5}{6} \right);$$

Здесь первый член учитывает действие левой стойки, второй — правой, а третий — действие ригеля. Последний член получается таким образом: отыскивается усилие от ригеля в связи 3 —

$\kappa^2 m l_{12}$  — масса ригеля,

$\kappa^2 m l_{12} \cdot l$  — интенсивность нагрузки,

$\kappa^2 m l_{12} \cdot l \cdot l$  — усилие от ригеля.

Приводя последнее выражение для усилия под общий множитель, получим:

$$\frac{420 \cdot l_{12}}{l} = \frac{420 \cdot 5}{6}.$$

Таким образом, матрица  $I$  для  $n=3$  будет выглядеть так:

$$I = \frac{\kappa^2 m l^3}{420} \cdot \begin{vmatrix} 6,315 & -1,736 & -7,417 \\ -1,736 & 15,815 & -88,833 \\ -7,417 & -88,833 & 857,000 \end{vmatrix}.$$

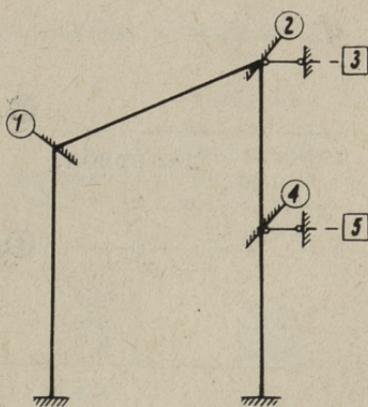
Решая систему с вычисленными матрицами  $I$  и  $R^{-1}$  в указанном выше порядке, для 0-го приближения (фиг. 7) найдем, что первая частота равна:

$$\omega_1 = 3,021 \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

и вторая частота равна:

$$\omega_2 = 21,475 \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

В 1-ом приближении расчетная схема той же рамы будет выглядеть так (фиг. 8):



Фиг. 8

Матрица  $R$  будет такова:

$$R = i \cdot \begin{vmatrix} 12,000 & 4,000 & -6,000 & 0 & 0 \\ 4,000 & 24,000 & -32,000 & 8,000 & 32,000 \\ -6,000 & -32,000 & 97,333 & -32,000 & -85,333 \\ 0 & 8,000 & -32,000 & 32,000 & 0 \\ 0 & 32,000 & -85,000 & 0 & 170,667 \end{vmatrix}$$

а матрица  $I$  будет такова:

$$I = \frac{\kappa^2 m l^3}{420} \begin{vmatrix} 6,315 & -1,736 & -7,417 & 0 & 0 \\ -1,736 & 4,002 & -26,958 & -1,266 & -5,484 \\ -7,417 & -26,958 & 593,750 & 5,484 & 22,781 \\ 0 & -1,266 & 5,484 & 3,375 & 0 \\ 0 & -5,484 & 22,781 & 0 & 131,623 \end{vmatrix}$$

Далее найдем частоты ( $n=5$ );

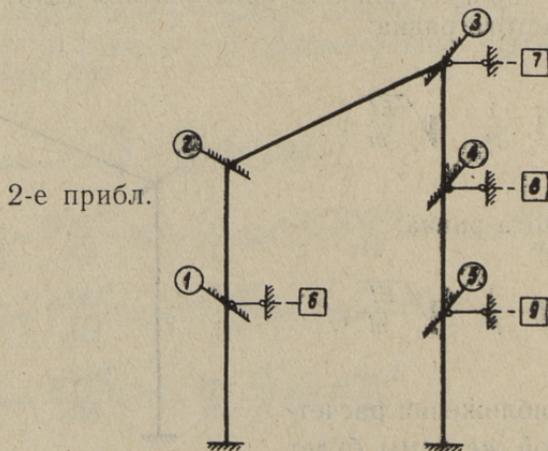
первая частота —

$$\omega_1 = 3,402 \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

вторая частота —

$$\omega_2 = 20,834 \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Приведем расчетные схемы той же рамы во 2-м (9 наложенных связей) и 3-ем (11 наложенных связей) приближениях:

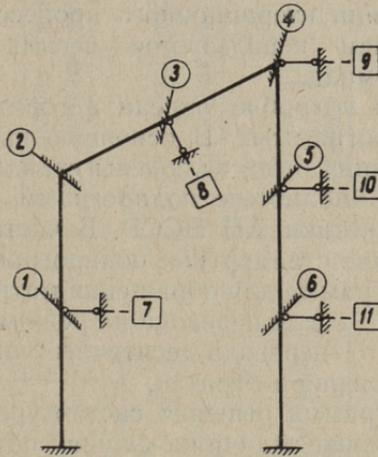


Фиг. 9

$$\omega_1 = 3,580 \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_2 = 20,421 \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

3-е прибл.



Фиг. 10

$$\omega_1 = 3,598 \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_2 = 20,224 \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Все перечисленные результаты сопоставим в таблице IV.

Таблица IV

	№ п/п приближения по числу налож- енных связей	Порядок матриц	Значения частот	Относительная разность к предыдущему значению
первая частота	0-е прибл.	3	3,021	—
	1-е „	5	3,402	11,2% <sub>0</sub>
	2-е „	9	3,580	4,97% <sub>0</sub>
	3-е „	11	3,598	0,50% <sub>0</sub>
вторая частота	0-е „	3	21,475	—
	1-е „	5	20,834	2,98% <sub>0</sub>
	2-е „	9	20,421	1,98% <sub>0</sub>
	3-е „	11	20,224	0,96% <sub>0</sub>

## Программирование задачи и постановка ее на электронную машину М-3\*

Матричный аппарат, примененный при решении задачи о колебаниях, позволяет весьма удобно использовать возможности электронной цифровой вычислительной машины. Однообразные операции итерационного процесса хорошо программируются, причем используется весьма ограниченное число логических команд.

Выше был подробно описан алгоритм, теперь рассмотрим блок-схему программы. В основную программу для расчета рам на колебания были включены стандартные подпрограммы, имеющиеся в библиотеке подпрограмм для машины М-3 Института кибернетики АН ЭССР. В частности, были использованы следующие стандартные подпрограммы:

- а) подпрограмма для обращения матриц,
- б) „ для перевода на режим с плавающей запятой,
- в) „ перевода десятичных чисел в двоичную систему счисления и обратно,
- г) подпрограмма решения систем уравнений.

При постановке задачи на машину потребовалось тщательно проанализировать вопрос точности вычислений в процессе округлений, ибо машина М-3 работает в режиме с фиксированной запятой. В результате анализа оказалось, что вычисление на машине с фиксированной запятой дает большие погрешности, а в некоторых случаях получаются недопустимые ошибки, так как диапазон чисел весьма широк (от 0,001—10000). Поэтому было решено производить все расчеты на машине в режиме с плавающей запятой, что, однако, повлекло за собой значительное усложнение программы и, что самое главное, уменьшение оперативной памяти в 2<sup>1</sup> раза. Дело в том, что на одно число приходится занимать 2 ячейки: одну для мантииссы, другую — для порядка чисел, не считая самой программы для перевода работы машины в режим с плавающей запятой.

Все числа вводились в память машины в нормализованном виде, ввод осуществляется с помощью логических шкал, что явилось целесообразным вследствие того, что матрицы  $R$  и  $I$  имеют очень много нулей. Логические шкалы состоят из набора нулей и единиц, ячейка памяти имеет 36 разрядов не считая знакового, поэтому в одной ячейке можно обозначить 36 чисел, что дает большую экономию времени.

Перед вводом каждого числа из матриц, машина анализирует содержимое каждого из 36 разрядов ячейки, выбранную

---

\* К моменту выхода настоящего сборника автором была составлена и оглашена программа для ЭВМ «Минск-2».



под логическую шкалу, и если там, например, стоит единица, что обозначает число, то это число захватывается вводным устройством с перфоленты и вводится в память. Таким образом отпадает необходимость перфорировать нули на перфоленте. В дальнейшем имеется в виду вообще не вводить нули в память, а логические шкалы при этом использовать в самом счете. Тем самым можно значительно экономить память машины.

Память машины была распределена следующим образом. Ячейки на магнитном барабане были использованы только под матрицы  $I$  и  $R^{-1}$ , туда же вводилась матрица  $R$ , но на ее место записывалась найденная матрица  $R^{-1}$ .

Основная программа и промежуточные расчеты были в оперативной памяти, использующей ферритовые сердечники (МОЗУ). Основная программа для расчета частот колебаний и программа для нахождения обратной матрицы были записаны на магнитную ленту внешней памяти. Таким образом, для каждой конкретной задачи приходилось составлять лишь маленькие корректировки, в которых содержалась информация о геометрических размерах, количестве неизвестных и некоторые другие данные.

В процессе счета, по желанию, можно было печатывать все промежуточные данные и окончательные результаты, либо только окончательные результаты с контрольными суммами или без них.

Статья поступила в редакцию  
7 X 1965 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Нарец. Вариант метода деформаций повышенной эффективности для расчета рам на колебания. Таллин, 1966, ТПИ.
2. R. Z i g m ü h l. Matrizen. Springer-Verlag, 1958.
3. В. В. Болотин. Приближенный метод расчета рам на колебания. Труды МЭИ, вып. XVII 1955 г.
4. Н. И. Безухов, О. В. Лужин. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. Москва, 1963.
5. Р. А. Резников. Методы решения задач строительной механики на электронных цифровых машинах. Стройиздат, 1964 г.

УДК 624.673.75.512.83

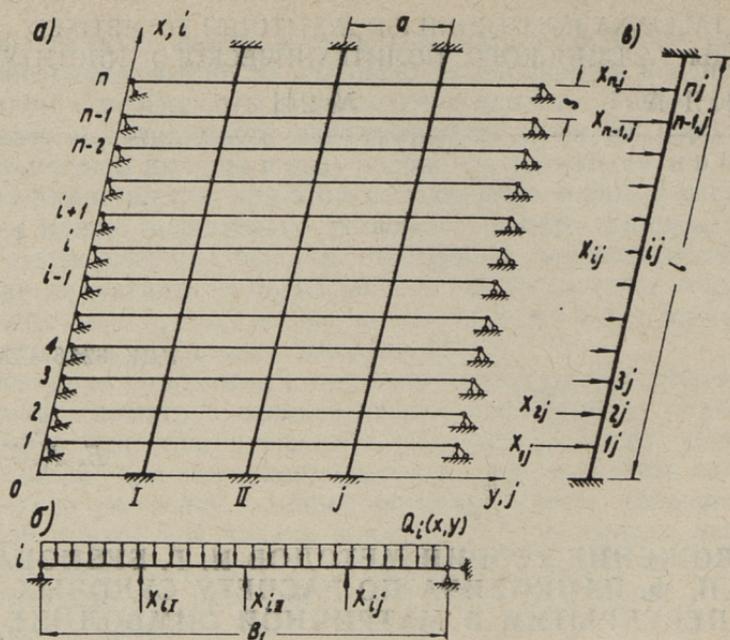
*Е. К. Трунов*

## ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ МЕТОДОВ И. Г. БУБНОВА И П. Ф. ПАПКОВИЧА ПО РАСЧЕТУ СУДОВЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ В МАТРИЧНОЙ СИМВОЛИКЕ

В настоящее время все большее количество работ по строительной механике излагается на языке матриц. Всесоюзное совещание по проблемам преподавания строительной механики и сопротивления материалов во ВТУЗах (Москва, 15÷19 VI 64 г.) признало необходимость перехода в высшей школе к изложению строительной механики на языке матриц. Изложение теории методов И. Г. Бубнова и П. Ф. Папковича по расчету судовых перекрытий, входящих в программу по строительной механике корабля, на языке матриц непосредственно отвечает рекомендациям упомянутого совещания. Кроме того, в матричной форме легко выясняется тесная связь указанных методов.

### 1. Система дифференциальных уравнений изгиба перекрытия

Рассмотрим судовое перекрытие с большим числом одинаково устроенных и загруженных равномерно распределенной нагрузкой балок главного направления и небольшим числом, тоже одинаково устроенных, перекрестных связей. Пример такого перекрытия приведен на фиг. 1, где также обозначены оси координат и изображены  $i$ -тая ( $x_i$ ) балка главного направления (фиг. 1, б) и  $j$ -тая ( $y_j$ ) перекрестная связь (фиг. 1, в) со всеми действующими на них нагрузками.



Фиг. 1

С учетом обозначений фиг. 1 нетрудно для прогиба  $i$ -той ( $x_i$ ) балки главного направления в месте пересечения ее с  $j$ -той ( $y_j$ ) перекрестной балкой написать выражение:

$$w(x_i, y_j) = w_{ij} = \beta_j \frac{Q B_j^3}{E J_\phi} - \frac{B_j^3}{E J_\phi} \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} X_{ik} \quad (1)$$

где

- $\beta$  — коэффициент влияния равномерно распределенной нагрузки  $Q$  балки главного направления на ее прогиб в точке  $j$  ( $y_j$ );
- $\gamma_{jk}$  — коэффициент влияния на прогиб балки главного направления в точке  $j$  ( $y_j$ ) единичной силы, приложенной в точке  $k$  ( $y_k$ ); здесь  $k=1, 2, \dots, 3, 4, \dots, m$  — текущий индекс перекрестной связи;
- $m$  — число перекрестных связей.

Обозначение других величин приведено на фиг. 1

При большом числе балок главного направления без большой погрешности можно рассматривать  $X_{ik}$  ( $i=1, 2, \dots, n$

$k = 1, 2 \dots m$ ) сосредоточенные реакции взаимодействия между балками перекрытия как функции аргумента  $x$ , т. е.  $X_k(x)$  ( $k = 1, 2 \dots m$ ). Эти функции в каждой из  $i$  ( $x_i$ )-той точке совпадают с реакцией  $X_{ik}$ .

Поделив функцию  $X_k(x)$  на длину шпации  $s$ , мы найдем соответствующую интенсивность распределенной нагрузки

$$Z_k(x) = \frac{1}{s} X_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

Изложенное выше позволяет нам перейти от системы алгебраических уравнений к системе совместных дифференциальных уравнений.

На основании зависимостей Журавского

$$Z_k(x) = \frac{dW_k^4(x)}{dx^4} EJ_{ст.к}; \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

Тогда с учетом (2) и (3)

$$X_k(x) = s EJ_{ст.к} \frac{dW_k^4(x)}{dx^4}; \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

Если теперь подставить в выражение (1) значение реакций (4) и учесть, что прогибы балок главного направления равны в узловых точках перекрытия прогибам перекрестных связей, то получим следующее уравнение:

$$W_j(x) = \beta_j \frac{QB_j^3}{EJ_\phi} - \frac{sB_j^3}{EJ_\phi} \sum_{k=1}^m r_{i,k} EJ_{ст.к} \frac{dW_k^4(x)}{dx^4}; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

В развернутом виде (5) запишется так:

$$\begin{aligned} W_1 + \sigma_{11} W_1^{IV} + \sigma_{12} W_2^{IV} + \dots + \sigma_{1m} W_m^{IV} &= a_1 \\ W_2 + \sigma_{21} W_1^{IV} + \sigma_{22} W_2^{IV} + \dots + \sigma_{2m} W_m^{IV} &= a_2 \\ \dots & \dots \\ W_m + \sigma_{m1} W_1^{IV} + \sigma_{m2} W_2^{IV} + \dots + \sigma_{mm} W_m^{IV} &= a_m \end{aligned} \quad (6)$$

где обозначено:

$$\sigma_{jk} = r_{jk} \frac{sB_j^3}{EJ_\phi} EJ_{ст.к} \quad (6a) \quad \sigma_j = \beta_j \frac{QB_j^3}{EJ_\phi} \quad (6b)$$

Уравнения (6) представляют систему совместных дифференциальных уравнений четвертого порядка с постоянными

коэффициентами и правыми частями. Эти уравнения выражают условие совместности деформаций балок перекрытия. С учетом граничных условий по концам перекрестных связей решение системы (6) позволяет определить функции прогибов  $w_j(x)$  всех перекрестных связей.

В матричных обозначениях систему уравнений (6) можно записать так:

$$\bar{w} + A \bar{w}^{IV} = \bar{a} \quad (7)$$

где

$\bar{w}$  — вектор-столбец, элементы которого являются функциями неизвестных прогибов  $w_j(x)$

$$\bar{w} = \left\| w_1(x) \quad w_2(x) \quad \dots \quad w_m(x) \right\|^{*}) \quad (8)$$

$A$  — матрица, элементы которой  $a_{jk}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , определяются зависимостями (6а);

$\bar{w}^{IV}$  — вектор-столбец, элементы которого представляют четвертые производные по  $x$  от функций прогибов перекрестных связей  $w_j(x)$ ;

$$\bar{w}^{IV} = \left\| w_1^{IV}(x) \quad w_2^{IV}(x) \quad \dots \quad w_m^{IV}(x) \right\| \quad (9)$$

$\bar{a}$  — вектор-столбец правых частей системы (6), его элементы определяются зависимостью (6б).

В формуле (7) и последующих мы термин матрица понимаем обобщенно, т. е. считаем, что элементами матрицы (вектора-строки или столбца) могут быть как числа, так и функции. Матричные операции при этом остаются без изменений [4]. Остаются справедливыми и преобразования подобия матриц и связанные с этим операции по определению собственных чисел и собственных функций [3], [4]. Нахождение последних связано с обычной в линейной алгебре операцией по нахождению собственных чисел и собственных векторов, так как в случае матриц, элементы которых представляют функции, а не числа, элементы матрицы преобразования и ее обратной остаются числами.

\* Для экономии места вектор-столбец здесь и в дальнейшем записываем в виде строки (транспонируем).

## 2. Метод И. Г. Бубнова\*

И. Г. Бубнов для решения системы дифференциальных уравнений (6) применил подстановку Даламбера. Следуя И. Г. Бубнову, запишем подстановку Даламбера в матричной символике:

$$\bar{\omega} = U \cdot \bar{\omega} \quad (10)$$

где  $\bar{\omega}$  — вектор-столбец вспомогательных функций, элементы которого  $\omega_j(x)$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ , представляют линейную форму, составленную из функций прогибов  $\omega_j(x)$  перекрестных балок;

$U$  — матрица, элементы которой  $u_{jk}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$   $k = 1, 2, \dots, m$  определяются зависимостью

$$u_{jk} = a_{jk} \cdot \frac{I_k}{I_\Phi}, \quad (11)$$

где в свою очередь

$I_k$  и  $I_\Phi$  — моменты инерции  $k$ -той перекрестной связи и балок главного направления;

$a_{jk}$  — некоторые постоянные, подлежащие определению.

Выразим функции прогибов перекрестных балок  $\omega_j(x)$  и их четвертые производные по  $x$  через новые неизвестные  $\bar{\omega}_j(x)$ . В матрицах это выглядит так:

$$\bar{\omega} = U^{-1} \bar{\omega} \quad (12)$$

$$\bar{\omega}^{IV} = U^{-1} \bar{\omega}^{IV} \quad (13)$$

В (12) и (13)  $U^{-1}$  представляет матрицу, обратную к матрице  $U$ , а  $\bar{\omega}^{IV}$  — вектор-столбец четвертых производных по  $x$  от функций  $\omega_j(x)$ .

В выражении (13) операция дифференцирования будет относиться к каждой строке, а элементы матрицы  $U^{-1}$  являются постоянными и не зависят от переменной, по которой производится дифференцирование.

Подставляем (12) и (13) в формулу (7)

$$U^{-1} \bar{\omega} + A \cdot U^{-1} \bar{\omega}^{IV} = \bar{a} \quad (14)$$

\* Метод И. Г. Бубнова приведен А. И. Сегалем [5].

Умножим слева полученное выражение на матрицу  $U$  и учтем, что

$$UU^{-1} = E, \quad (15)$$

где  $E$  представляет единичную матрицу,

$$\bar{\omega} + UAU^{-1}\bar{\omega}^{IV} = U\bar{a} \quad (16)$$

Произведение матриц  $UAU^{-1}$  в выражении (16) представляет частный случай самого общего преобразования исходной матрицы  $A$  умножением слева и справа на выбранные особым образом матрицы  $P$  и  $Q$ , т. е. преобразование подобия [4]. В нашем случае

$$P = U, \quad Q = U^{-1}. \quad (17)$$

Нам необходимо найти матрицы  $U$  и  $U^{-1}$  так, чтобы выполнялось равенство:

$$UAU^{-1} = \Lambda, \quad (18)$$

где  $\Lambda$  представляет из себя диагональную матрицу

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & O & \dots & \dots & \dots & O \\ O & \lambda_2 & \dots & \dots & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & \dots & \dots & \lambda^m \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Только в этом случае система совместных дифференциальных уравнений (7) перейдет в систему отдельных дифференциальных уравнений.

Если умножить слева (18) на матрицу  $U^{-1}$ , то получим равенство

$$AU^{-1} = U^{-1}\Lambda. \quad (20)$$

Матрицу  $U^{-1}$  можно переписать в виде строки вектор-столбцов  $\bar{u}_j^*$  [4]

$$U^{-1} = \parallel \bar{u}_1^* \quad \bar{u}_2^* \quad \dots \quad \bar{u}_m^* \parallel, \quad (21)$$

где каждый из  $j$  вектор-столбцов определяется равенством

$$\bar{u}_j^* = \parallel u_{1j}^* \quad u_{2j}^* \quad \dots \quad u_{mj}^* \parallel. \quad (22)$$

С учетом (21) и 22) выражение (20) переписется так

$$A\bar{u}_j^* = \lambda_j \bar{u}_j^* \quad j=1, 2 \dots m \quad (23)$$

Выражение (23) есть ничто иное как матричная форма записи известной «вековой» (характеристической) системы уравнений. Эта система уравнений имеет отличные от нуля решения, если ее вековой определитель равен нулю при вообще различных значениях  $\lambda_j$ ,  $j=1, 2 \dots m$ . Разворачивая вековой определитель в алгебраический полином, мы получим вековое (характеристическое) уравнение. Каждому корню (собственному числу)  $\lambda_j$  уравнения будет соответствовать свой собственный вектор (значения  $\bar{u}_j^*$  при полученном  $\lambda_j$ ).

Проблема определения собственных чисел и собственных векторов в линейной алгебре хорошо изучена, но, к сожалению, не полностью используются в строительной механике корабля.\*

После определения элементов матриц  $\Lambda$  и  $U^{-1}$  система раздельных дифференциальных уравнений в матричной форме запишется так:

$$\bar{\omega} + \Lambda \bar{\omega}^{\text{IV}} = U \bar{a}. \quad (24)$$

Для того, чтобы привести систему (24) к виду, удобному для применения таблиц функций И. Г. Бубнова для расчета балок на упругом основании, обозначим:

$$K = \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\lambda_m} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\bar{q} = KU \bar{a} \quad (26)$$

После этого выражение (24) примет вид системы независимых друг от друга дифференциальных уравнений изгиба балок на упругом основании жесткости  $\frac{1}{\lambda_i}$  и загруженной внеш-

\* В работе [4] приводится наиболее удобный, как показал наш опыт, для реализации на ЭЦВМ метод Гессенберга по определению коэффициентов векового уравнения.

ней нагрузкой интенсивности  $q_i$ . В матрицах такая система имеет вид

$$\bar{\omega}^{IV} - K\bar{\omega} = \bar{q}, \quad (27)$$

где  $\bar{q}$  — вектор-столбец внешней нагрузки

$$\bar{q} = \parallel q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_m \parallel. \quad (28)$$

Определение функций прогибов  $\omega_j(x)$  балок на упругом основании — задача известная.

Для определения внешней нагрузки на балки на упругом основании — вектора  $\bar{q}$  (26) приходится находить матрицу  $U$ . Искомые функции прогибов  $\omega_j(x)$  перекрестных балок находятся по зависимости (12). При этом не приходится решать системы уравнений (10), так как элементы обратной матрицы  $U^{-1}$  определены из вековой системы (23). Остальные элементы изгиба перекрестных балок находятся с использованием зависимостей Журавского по известным функциям прогибов перекрестных связей. Балки главного направления рассчитываются на действие внешней нагрузки  $Q$  и реакцией перекрестных связей  $X_{ij}$ , определяемых после вычисления  $\omega_j(x)$ .

### 3. Метод П. Ф. Папковича

П. Ф. Папкович [2] в своем методе главных изгибов использовал те же предпосылки о характере работы перекрытия и о его нагрузке, что и И. Г. Бубнов. Изгиб перекрытия при этих предпосылках описывается системой дифференциальных уравнений (5). Для получения отдельных уравнений П. Ф. Папкович применил подстановку Лагранжа.

Следуя П. Ф. Папковичу [2], запишем систему совместных дифференциальных уравнений И. Г. Бубнова (5) в виде

$$\bar{\omega} + D \cdot B\bar{\omega}^{IV} = \bar{v}, \quad (29)$$

где

$D$  — симметричная матрица, элементы которой определяются выражением:

$$d_{jk} = \gamma_{jk} \cdot s \cdot B_1^3, \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \dots m, \\ k = 1, 2 \dots m, \end{matrix} \quad (30)$$

$\gamma_{jk}$ ,  $s$ ,  $B_1$  — имеют тот же смысл, что и ранее в формуле (5);  $B$  — диагональная матрица, так называемая матрица жесткости:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{EI_1}{EI_\Phi} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{EI_2}{EI_\Phi} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{EI_m}{EI_\Phi} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$\bar{v}$  — вектор-столбец правых частей, его элементы определяются выражением:

$$b_j = \beta_j \frac{QB_j^3}{EI_\Phi};$$

$$j = 1, 2, \dots, m. \quad (32)$$

Легко заметить, что

$$D \cdot B = A, \quad (33)$$

$$\bar{a} = \bar{v}. \quad (34)$$

Здесь матрица  $A$  и вектор  $\bar{a}$  имеют тот же смысл, что и в нашем изложении метода И. Г. Бубнова.

Подстановку Лагранжа, следуя П. Ф. Папковичу, можно в матричном виде представить так:

$$B\bar{w} = N\bar{p}, \quad (35)$$

где  $N$  — матрица, элементы  $v_{jk}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , которой, названные П. Ф. Папковичем «формами главных изгибов», подлежат определению;  
 $\bar{p}$  — вектор-столбец, элементы которого  $p_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , названные П. Ф. Папковичем «главными изгибами», некоторые новые переменные, линейно связанные с функциями прогибов  $w_j(x)$ .

На основании выражения (35) можно записать:

$$\bar{w} = B^{-1} \cdot N \cdot \bar{p}, \quad (36)$$

$$\bar{w}^{IV} = B^{-1} \cdot N \cdot \bar{p}^{IV}. \quad (37)$$

здесь  $B^{-1}$  — матрица, обратная к матрице жесткости  $B$ ;  
 $\bar{p}^{IV}$  — вектор-столбец, элементы которого  $p_j^{IV}(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , представляют четвертую производную по  $x$  от функций  $p_j(x)$ .

Подстановка (36) и (37) в выражение (29) приводит к равенству:

$$B^{-1} \cdot N \cdot \bar{p} + D \cdot N \bar{p}^{IV} = \bar{v}. \quad (38)$$

Умножая (38) последовательно слева на матрицы  $B$  и  $N^{-1}$ , получим:

$$\bar{p} + N^{-1} \cdot B \cdot D \cdot N \cdot \bar{p}^{IV} = N^{-1} \cdot B \cdot \bar{v}. \quad (39)$$

Если считать, что

$$B \cdot D = C, \quad (40)$$

где  $C$  — матрица с известными элементами, то систему (39) можно переписать так:

$$\bar{p} + N^{-1} \cdot C \cdot N \cdot \bar{p}^{IV} = N^{-1} \cdot B \cdot \bar{v}. \quad (41)$$

Нетрудно заметить, что равенство (41) аналогично (16), поэтому для получения системы отдельных дифференциальных уравнений из системы (41) необходимо, чтобы выполнялись условия

$$N^{-1} \cdot C \cdot N = \Lambda \quad (42)$$

и мы опять, как и в методе И. Г. Бубнова, пришли к вековой системе уравнений.

После определения собственных чисел (элементов матрицы  $\Lambda$  (19) и собственных векторов (элементов матрицы  $N$ ) необходимо вычислить вектор-столбец  $\bar{q}$  по формуле, аналогичной (26)

$$\bar{q} = K \cdot N^{-1} \cdot B \cdot \bar{v}. \quad (43)$$

Здесь матрица  $K$  имеет тот же смысл, что и ранее (25). Для определения  $\bar{q}$  нужно найти матрицу  $N^{-1}$ .

После определения перечисленных величин система отдельных дифференциальных уравнений может быть записана в виде:

$$\bar{p}^{IV} + K \bar{p} = \bar{q}. \quad (44)$$

Также как и в методе И. Г. Бубнова каждое из уравнений (44) представляет дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании. «Главные изгибы» — функции  $p_j(x)$  определяются из уравнений (44) с учетом граничных условий перекрестных балок.

Неизвестные функции прогибов  $w_j(x)$  перекрестных связей определяются из уравнений (36) по функциям  $p_j(x)$ . Осталь-

ные элементы изгиба перекрестных связей находятся на основании зависимостей Журавского по известным функциям  $w_j(x)$ . Балки главного направления рассчитываются на  $Q$  и  $X_{jk}$ .

Как видно из вышеизложенного, матричные символы дают однозначную и четкую программу выполнения всех вычислительных операций.

Кроме того, они позволяют выявить следующее:

1. Матрицы  $U^{-1}$  (12) в подстановке Даламбера и  $N$  (35) в подстановке Лагранжа в обоих методах определяются из решения вековых систем (18) и, соответственно, (42). Т. е. при вычислении функций прогибов перекрестных связей  $w_j(x)$  в методе И. Г. Бубнова, как и в методе П. Ф. Папковича, вовсе не нужно решать систему (12), как это утверждает А. И. Сегаль [5].

2. Вычислительная работа по определению собственных чисел и векторов в обоих методах одинакова (см. (18) и (42)).

3. При вычислении нагрузок на балки на упругом основании  $\bar{q}$  и  $\bar{q}$  в обоих методах приходится определять обратные матрицы к уже определенным матрицам преобразования  $U^{-1}$  и  $N$ . Формула П. Ф. Папковича [2] для определения  $\bar{q}_j(x)$  есть ничто иное, как получение матрицы  $N^{-1}$ , выполненное с учетом ортогональности форм главных изгибов.

Все это позволяет утверждать, что методы И. Г. Бубнова и П. Ф. Папковича, а также метод А. И. Сегалья, представляют различные формулировки, характерные для каждого из авторов, одного и того же преобразования к диагональному виду матрицы системы (5). На сходство этих методов указал ранее А. П. Филин [6].

Однако матричная форма не только дает возможность выявить общность указанных методов, но и позволяет получить упрощения при вычислениях по этим методам. Одно из них заключается в проведении матрицы  $A$  к симметричному виду и использование свойств ортогональных матриц, составленных из нормированных собственных векторов.

Статья поступила в редакцию  
7 X 1965 г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Бубнов. Строительная механика корабля, ч. 2. СПб, 1914.
2. П. Ф. Папкович. Труды по строительной механике корабля, том 2. Судпромгиз, 1962.
3. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз, 1958.
4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1959.
5. А. И. Сегаль. Прочность и устойчивость судовых перекрытий. Речной транспорт, 1959.
6. А. П. Филин. Статика сооружений на основе элементарных положений функционального анализа. Известия ОТН АН СССР, Механика и машиностроение, № 1, 1964.

УДК 624.041.001.12

*Э. М. Иегу*

## К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

### 1. Постановка задачи исследования

Задача оптимального проектирования, по существу, является задачей проектирования конструкции, наилучшим образом удовлетворяющей некоторым, наперед заданным свойствам, при некоторых условиях (ограничениях).

Общая задача оптимального проектирования может быть определена как задача синтеза конструкций, т. е. задача отыскания оптимальной топологической схемы с оптимальной геометрией осей, определения оптимальной геометрии поперечных сечений и законов их изменения вдоль осей при выбранном критерии оптимума.

Далее рассматривается лишь один из вопросов общей задачи оптимального проектирования, связанный с оптимизацией закона распределения материала вдоль оси конструкции, причем как топологическая схема, так и геометрия осей предполагаются предварительно заданными, а оптимизация формы поперечного сечения принята на уровне ранее проведенных исследований. Оптимизация рассматривается для систем с прямолинейными элементами, постоянного между узлами поперечного сечения, вследствие чего закон изменения сечений вдоль оси характеризуется конечным числом параметров. Для расчетной схемы конструкции, выбранной как дискретная (прерывистая) система, определяющаяся конечным числом параметров весовой функции, задача оптимального проектирования формулируется как задача математического программирования.

В качестве оптимизируемой функции выбрана функция объема, совпадающая с точностью до постоянного множителя с функцией веса для однородных систем. Функция объема выступает как нелинейная (выпуклая функция) на множестве не-

зависимых весовых параметров

$$\mathbf{g}_s = (EJ_{x_s}, EJ_{y_s}, GJ_{z_s}, GF_s, EF_s), \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

где  $r$  — число элементов в системе. Пренебрегая влиянием продольных деформаций и сдвигов при определении перемещений, получим

$$\mathbf{g}_s = (EJ_{x_s}, EJ_{y_s}, GJ_{z_s}).$$

Задача оптимального проектирования  $n$  раз статически неопределимой рамы формулируется так:

определить  $r$ -мерный квазивектор  $\underline{\mathbf{g}} = (\mathbf{g}_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, r$ , минимизирующий объемную функцию\*

$$\bar{V}(\mathbf{g}) = \sum_s \bar{V}_s(\mathbf{g}),$$

при нелинейных ограничениях, определяющих область  $\Omega$ :

$$\min \{ \bar{V}(\mathbf{g}) \mid \mathbf{g} \in \Omega \}$$

$$\Omega = \{ \mathbf{g} \mid 1) \mathbf{b}_s = ([\tilde{\mathbf{b}}^{c\beta}]^0 + [\tilde{\mathbf{b}}^{c\alpha}]^0 \bar{\mathbf{x}}) \rho$$

$$2) \bar{\mathbf{x}} = -([\tilde{\mathbf{b}}^{c\alpha}]^0 \rho [\tilde{\mathbf{b}}^{c\alpha}])^{-1} ([\tilde{\mathbf{b}}^{c\alpha}]^0 \rho [\tilde{\mathbf{b}}^{c\beta}]^0)$$

$$3) \mathbf{g} > 0$$

$$4) V_s(\mathbf{g}) \geq V_{s, \min}$$

Первое ограничение соответствует условиям статики, второе — условиям совместности деформации, третье — определяет физическое существование элементов (условие невырождения) и четвертое ограничение выступает как условие надежности элементов конструкции (прочности и (или) устойчивости и (или) жесткости).

Если воспользоваться представлением объема рамы  $V(x)$  как суммы элементарных зеркальных форм многих независимых переменных  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и интерпретацией объемной функции как  $n$ -мерной гиперповерхности в  $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве  $(x_1, x_2, \dots, x_n, V)$  (см. [1]), то при этом с очевидностью устанавливается выпуклость объемной функции (в сторону минус  $V$ ).

\* дефис (-) отличает объемную функцию от объема, объемная функция определяется ниже.

Каждое из ограничений 1), 3), 4) определяет выпуклое множество\* в  $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве, пересечение которых также выпукло.

Следовательно, задача минимизации объемной функции является задачей выпуклого программирования, а именно — задачей отыскания минимума выпуклой функции на выпуклом множестве.

Известные методы выпуклого программирования строго предусматривают то, что оптимизируемая функция и ограничивающие функции имеют непрерывные частные производные, а выпуклое множество  $\Omega$  удовлетворяет некоторому условию регулярности\*\*.

Очевидно, что эти жесткие требования не удовлетворяются, прежде всего для оптимизируемой функции объема

$$V(\mathbf{x}) = \sum_s V_s(\mathbf{x}),$$

ибо во всех точках (или ломанных многообразиях), где хотя бы одно из элементарных слагаемых  $V_s(X)$  (или несколько) обращаются в нуль — градиент функции имеет разрыв первого рода и решение поставленной задачи обычными методами математического программирования не проходит.

Формулируя задачу оптимального проектирования статически неопределимых рам как задачу выпуклого математического программирования и имея в виду несоблюдение условий непрерывности частных производных оптимизируемой функции на множестве независимых параметров, возникает необходимость создания алгоритма по отысканию базисного решения с ослабленными требованиями по отношению к оптимизируемой функции. Нами разрабатывается алгоритм, при котором необходимо иметь лишь непрерывность самой объемной функции\*\*\*, причем предлагаемый алгоритм разрабатывается в приложении к плоским статически неопределимым системам, однако, может быть в принципе применен и к проектированию пространственных систем.

---

\* Множество  $\Omega$  называется выпуклым, если вместе с двумя произвольными точками  $x_1, x_2 \in \Omega$  оно содержит соединяющий их отрезок

$$x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Omega, \text{ где } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

\*\* Для всех  $n$  существует вектор  $x \in \Omega$  такой, что при нем удовлетворяются граничные условия.

\*\*\* В удовлетворении этому исходному условию для объемной функции убеждаемся ниже.

Задача оптимального проектирования решается на основе приближенного статического расчета многоконтурных рам. Расчетная система статически неопределимых рам образуется при этом как система, состоящая из жестких замкнутых контуров, расположенных по закону полей одного цвета шахматной доски и шарнирно соединенных друг с другом в узлах. Каждый контур выступает как диск, свободно опертый на двух опорах (контур-диск). Образованная таким образом система содержит в себе, в качестве расчетного элемента рамы, контуры-диски, обладающие свойствами минимальной связности и максимальной автономности.

Идея подхода к приближенному решению задачи основывается на использовании эффекта затухающего влияния удаленных контуров на некоторый рассматриваемый контур ( $\xi$ ). Это позволяет ограничить некоторую область близлежащих контуров, наиболее существенно влияющих на статические и кинематические условия работы контура  $\xi$ . Ограниченная таким образом группа контуров, расположенных вокруг некоторого центрального контура, имеет вид звездочки. Основной расчетной моделью для раскрытия статической неопределимости сил взаимодействия контуров друг с другом является звездочка некоторого порядка\*. Очевидно, что чем выше порядок звездочки, тем точнее определяются в ней неизвестные силы взаимодействия для центрального контура

Способ звездочек позволяет свести задачу оптимизации объемной функции рамы на множестве весовых параметров всех ее элементов к оптимизации объемной функции ограниченной части рамы — звездочки на подмножестве весовых параметров группы контуров, входящих в звездочку.

Минимизация объемной функции проводится как шаговый процесс по схеме метода возможных направлений. Для определения возможного направления оптимизации объемной функции вводится некоторый критерий по параметру весовой функции и устанавливаются условия его соответствия минимуму объема. При реализации схемы счета исследуется вопрос о существовании и единственности решения, выясняющий также и вопрос о сходимости процесса оптимального проектирования.

## 2. Оптимальное проектирование контура

Постольку, поскольку всякую раму можно рассматривать как совокупность отдельных контуров-дисков, предварительно

\* Основные теоретические положения способа звездочек изложены в [2].

исследуется вопрос оптимального проектирования отдельного контура.

Объем контура, определяемый как сумма объемов элементов контура, находится из условия удовлетворения, с одной стороны, требованию прочности\* элемента (как требование надежности каждого элемента в системе), и с другой стороны, требованию выбранного закона распределения весовой функции по контуру (как требование, возникшее в результате объединения элементов в систему), при удовлетворении условиям равновесия и совместности деформации в контуре.

Если задаться некоторым типом профиля поперечного сечения элементов и выбрать оптимальные параметры сечения, то при определении объема контура можно выделить неизменяющуюся при переходе от элемента к элементу часть — параметр объема. Объем контура тогда запишется в виде

$$V = \sum_s V_s = \sum_s \Theta \bar{V}_s - \Theta \sum_s \bar{V}_s - \Theta \bar{V},$$

где  $\Theta$  — параметр объема,

$$\bar{V} = \sum_s \bar{V}_s \text{ — объемная функция контура.}$$

Если в условии прочности\* ограничиться лишь учетом влияния изгибающего момента, тогда объемная функция контура определится по формуле

$$\bar{V} = \sum_s \bar{V}_s \geq \sum_s b_{s \text{ расч.}} \frac{l_s}{h_s} j_s - \sum_s b_{s \text{ расч.}} \frac{1}{\alpha_s} j_s$$

где  $b_{s \text{ расч.}}$  — расчетное усилие в  $s$ -ом элементе контура, определяемое по результатам статического расчета в соответствии с законом распределения весовой функции в контуре, учитывая и корректируя эффект действия связей;

$\alpha_s = \frac{h_s}{l_s}$  — коэффициент, связывающий высоту поперечного сечения элемента  $h_s$  и длину его  $l_s$ ;

$j_s = \begin{cases} +1, & \text{если } b_{s \text{ расч.}} > 0 \\ -1, & \text{если } b_{s \text{ расч.}} < 0 \end{cases}$  — функция перемены знака.

Объемная функция контура, имеющего в своем составе  $m$  различных элементов ( $s = 1, 2 \dots m$ ) будет определяться

\* Здесь могут быть учтены и (или) условия устойчивости и (или) условия жесткости.

по одной из  $m$  формул (в геометрической интерпретации каждой из них соответствует ветвь существования объемной функции). Каждая из этих формул (ветвей) ( $s$ ) соответствует некоторому замкнутому интервалу изменения параметра весовой функции и определяет объем контура по отношению к объему  $s$ -го элемента (опорного элемента), требуя увеличения объема всех остальных (кроме опорного) элементов (1, 2, . . .  $s - 1$ ,  $s + 1$ , . . .  $m$ ), в силу закона распределения весовой функции.

Если рассматривать прямоугольный контур, имеющий четыре элемента, и принять условие упругой симметрии контура относительно вертикальной оси (сводящего объем двух элементов — стоек к удвоенному объему одного элемента — наиболее нагруженной стойки), то определяются три ветви существования объемной функции контура, каждая из которых соответствует некоторому замкнутому интервалу изменения параметра весовой функции и определяет объем контура либо относительно объема стоек, либо — объема верхнего ригеля, либо — нижнего ригеля.

Минимизация объемной функции контура будет проводиться по одной из  $m$  ветвей в зависимости от начального вектора весовых параметров (и ему соответствующего результата статистического расчета).

Минимум объемной функции контура соответствует такому вектору весовых параметров, для которого все ветви существования объемной функции пересекаются так, что результат статического расчета в точности удовлетворяет закону распределения параметров весовой функции в контуре (т. е. исчезает эффект действия связей). Условие минимума объемной функции совпадает с условием равнопрочности контура, или точнее, частичной равнопрочности ее отдельных элементов.

В работе вводится понятие критерия по параметру весовой функции  $K_p(\mathbf{g})$ , определяющий условие минимума объемной функции на множества весовых параметров  $\mathbf{g} = (\omega, \beta)$ .

Для прямоугольного контура, имеющего вертикальную ось упругой симметрии, приняты следующие безразмерные параметры весовой функции:

$$\omega = \frac{l_{CT}}{l_{D1}}, \quad \beta = \frac{l_{D1}}{l_{D2}}, \quad \beta\omega = \frac{l_{CT}}{l_{D2}},$$

где  $l_{CT}$ ,  $l_{D1}$ ,  $l_{D2}$  — погонные жесткости элементов контура соответственно — стоек, ригеля верхнего, ригеля нижнего. Соответствующие этим параметрам критерии определяются следующим образом:

$$Kp(\omega) = \frac{m_1}{m_1^0}, \quad \text{где } m_1 = \frac{M_1}{M_{ст}} \omega, \quad m_1^0 = \frac{\alpha_{ст}}{\alpha_{р1}}$$

$$Kp(\beta) = \frac{m_{31}}{m_{31}^0}, \quad \text{где } m_{31} = \frac{M_3}{M_{ст}} \beta, \quad m_{31}^0 = \frac{\alpha_{р1}}{\alpha_{р3}}$$

$$Kp(\beta\omega) = \frac{m_3}{m_3^0}, \quad \text{где } m_3 = \frac{M_3}{M_{ст}} \beta\omega, \quad m_3^0 = \frac{\alpha_{ст}}{\alpha_{р3}}$$

Минимум объемной функции на множестве параметров соответствует условию  $Kp(\mathbf{g}) = 1$ .

Введение критерия по параметру позволяет четко определить выбор и направление оптимизации объемной функции контура. В силу монотонности изменения объемной функции контура вдоль соответствующей ветви, это направление однозначно отыскивается для каждого из варьируемых параметров вычислением критерия в двух точках и выбором направления так, чтобы критерий по варьируемому параметру стремился к единице:  $Kp(\mathbf{g}) \rightarrow 1$ . Минимизация объемной функции проводится вдоль выбранной ветви (выбором исходных параметров) в выбранном направлении (расчетом в двух точках) как шаговый процесс.

Оптимальный вектор весовых параметров контура  $\mathbf{g}_{\text{оптим.}} = (\omega, \beta)_{\text{оптим.}}$ , минимизирующий объемную функцию контура, найдется повторными расчетами-итерацией:

1-й шаг — при некотором фиксированном значении параметра  $\omega = \omega^{(0)}$  (или  $\beta = \beta^{(0)}$ ) находится  $\beta_{\text{оптим.}}^{(0)}$  (или  $\omega_{\text{оптим.}}^{(0)}$ ) при условии  $Kp^{(0)}(\beta\omega) = 1$ , определяя этим минимум объемной функции для фиксированного  $\omega^{(0)}$  (или  $\beta^{(0)}$ );

2-й шаг — при  $\beta = \beta_{\text{оптим.}}^{(0)}$  (или  $\omega = \omega_{\text{оптим.}}^{(0)}$ ) находится  $\omega_{\text{оптим.}}^{(1)}$  (или  $\beta_{\text{оптим.}}^{(1)}$ ) при условии  $Kp^{(1)}(\beta\omega) = 1$ ;

3-й шаг — при  $\omega = \omega_{\text{оптим.}}^{(1)}$  (или  $\beta = \beta_{\text{оптим.}}^{(1)}$ ) находится  $\beta_{\text{оптим.}}^{(1)}$  (или  $\omega_{\text{оптим.}}^{(1)}$ ) и т. д. до удовлетворения условию  $Kp(\beta\omega) = Kp(\omega) = 1$  (или  $Kp(\beta\omega) = Kp(\beta) = 1$ ), дающему минимум минимум объемной функции и определяющему вектор оптимальных параметров весовой функции.

В геометрической интерпретации объемная функция контура может рассматриваться как поверхность в трехмерном пространстве с базисом, образованном ортами вектора весовых параметров  $\omega, \beta$ .

### 3. Оптимальное проектирование многоконтурных рам

Рассматривая многоконтурную раму как систему контуров-дисков, проводим приближенный статический расчет рамы способом звездочек, обуславливая степень точности расчета выбранным порядком звездочки. При этом каждый из контуров-дисков ядра\* рамы становится в определенной последовательности центральным контуром звездочки ( $\xi$ ). Статический расчет центрального контура проводится с учетом влияния лишь близлежащих контуров, входящих в звездочку. Говоря о затухающем эффекте влияния удаленных контуров, имеется в виду лишь влияние узловых моментов, ибо учет влияния узловых сил оказывается необходимым и легко обеспечивается.

Задача оптимального проектирования многоконтурных рам способом звездочек сводится к оптимальному проектированию отдельных звездочек (от звездочки к звездочке). При этом для каждой звездочки определяется:

1) вектор оптимальных параметров центрального контура звездочки  $\mathbf{g}_{\xi \text{ опт.}} = (\omega_{\xi}, \beta_{\xi})_{\text{опт.}}$  (внутриконтурные весовые параметры) и

2) вектор оптимальных межконтурных весовых параметров звездочки  $\Gamma_{* \text{ опт.}} = \left( \gamma_{\chi} = \frac{i_{\text{ст}\xi}}{i_{\text{ст}\chi}} \right)_{\text{опт.}}$  ( $\chi = 1, 2, \dots, p$ , где  $p$  число контуров-дисков в звездочке).

Оптимальный вектор внутриконтурных весовых параметров  $\mathbf{g}_{\xi \text{ опт.}}$  определяется по методике, рассмотренной для отдельного контура, где кроме действующей внешней нагрузки на контур, в роли нагрузки выступают узловые моменты и силы взаимодействия рассматриваемого контура ( $\xi$ ) со смежными контурами ( $\chi$ ).

Оптимальный вектор межконтурных весовых параметров  $\Gamma_{* \text{ опт.}}$ , в силу независимости его от вектора  $\mathbf{g}_{\xi} (\mathbf{g}_{\chi})$ , найдется из условия минимума объемной функции звездочки на множестве межконтурных параметров  $\gamma_{\chi}$  ( $\chi = 1, 2, \dots, p$ ).

Объемная функция звездочки представляется как сумма объемных функций контуров, входящих в нее, и описывается на множестве независимых параметров  $\gamma_{\chi}$  двумя формулами (ветвями), каждая из которых соответствует некоторому замкнутому интервалу изменения параметра  $\gamma_{\chi}$  и определяет

\* Ядро рамы образуют контуры рамы без обрамляющих контуров.

объем звездочки по отношению к объему одного из опорных элементов — либо стойки контуров  $\xi$ , либо стойки контура  $\chi$ .

Минимум объемной функции звездочки соответствует такому значению параметров  $\gamma_\chi$ , при котором обе ветви существования объемной функции звездочки пересекаются так, что при этом исчезает эффект действия связей.

По аналогии с внутриконтурным параметром весовой функции, вводится понятие критерия по межконтурному параметру  $\gamma_\chi = Kp(\gamma_\chi)$ .

$$Kp(\gamma_\chi) = \frac{\gamma_\chi}{\gamma_\chi^0},$$

где  $\gamma_\chi$  — исходный параметр жесткости

$\gamma_\chi^0 = \frac{M_{ст\xi}^{4/3}}{M_{ст\chi}^{4/3}} \cdot \frac{l_{ст\chi}^4}{l_{ст\xi}^4}$  — расчетный параметр, отражающий картину распределения усилий в звездочке по результатам статического расчета.

Минимум объемной функции звездочки соответствует условию  $Kp(\gamma_\chi) = 1$ .

Введение критерия по межконтурному весовому параметру позволяет четко определить выбор ветви и направление оптимизации объемной функции звездочки. В силу монотонности изменения объемной функции звездочки вдоль ветви на множестве независимых межконтурных параметров, это направление однозначно отыскивается для каждого варьируемого параметра вычислением критерия в двух точках и выбором направления так, чтобы  $Kp(\gamma_\chi) \rightarrow 1$ . Минимизация объемной функции звездочки проводится вдоль выбранной ветви (выбором исходных  $\gamma_\chi$ ), в выбранном направлении (расчетом в двух точках) как шаговый процесс.

Вопрос о существовании и единственности решения при оптимальном проектировании рамы включает в себя две стороны этого вопроса: существование и единственность решения при оптимальном проектировании контура (на множестве внутриконтурных весовых параметров) и существование и единственность решения при оптимальном проектировании звездочки (на множестве межконтурных весовых параметров) и может быть сформулирован следующим образом.

Если для каждого контура и каждой звездочки решение существует, то оно единственно и определяет раму минимального объема на множестве варьируемых параметров. Условия оптимума при этом совпадают с условиями частичной равнопрочности системы.

Если выпуклые многообразия, определяющие решение на множестве параметров весовой функции, не пересекаются (пересекаются в бесконечности), то можно говорить об условном минимуме, как наименьшем значении на границе некоторой области. Равнопрочной конструкции в этом случае соответствует вырожденная конструкция.

Существование или несуществование решения на множестве внутриконтурных весовых параметров связано с характером загрузки контура, определяющим меру вовлечения (или исключения) элементов контура в работу конструкции при модификации ее.

Существование или несуществование решения на множестве межконтурных весовых параметров связано с характером загрузки звездочки, определяющим сравнительную степень загрузки контуров.

Оценка существования решения может быть связана со следующим формальным признаком числа ветвей объемной функции на множестве весовых параметров.

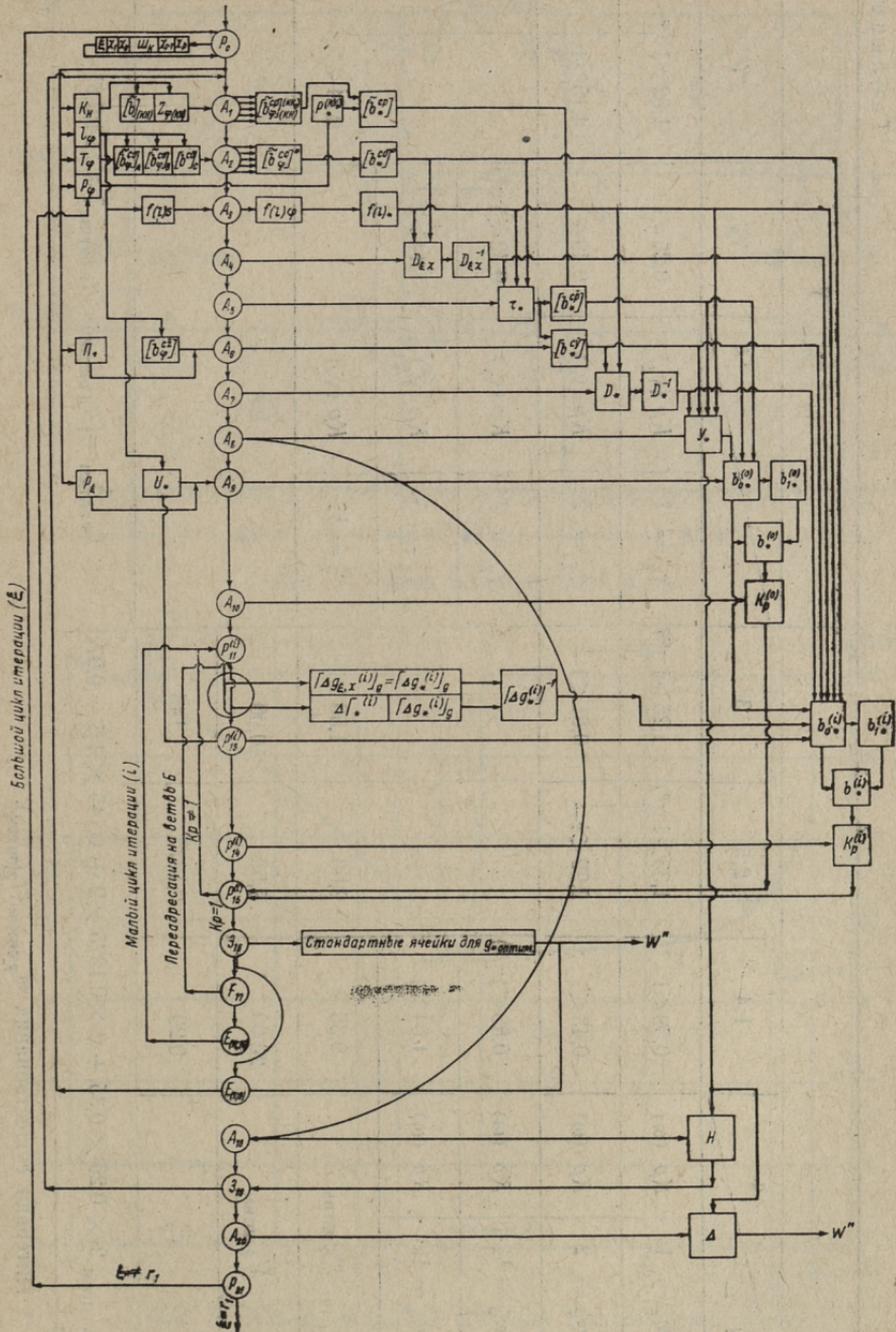
Если на множестве варьируемых весовых параметров, при переходе от одного граничного значения параметра к другому, объемная функция определяется разными ветвями, т. е. меняется опорный элемент определения объемной функции контура или звездочки, то решение существует и оно единственно.

Если на множестве варьируемых весовых параметров, при переходе от одного граничного значения параметра к другому, ветвь существования объемной функции остается неизменной, то решения в принятой постановке не существует. Ограничивая область отыскиваемого решения здесь можно говорить лишь об оптимальной конструкции на границе области (условный минимум).

Разработанный алгоритм оптимального проектирования плоских статически неопределимых рам предусматривает возможность решения задачи на электронных цифровых вычислительных машинах. В статье приводится лишь блок-схема рабочего счета (см. фиг. 1).

В качестве примера оптимального проектирования приводятся результаты расчета 9-тиконтурной рамы (фиг. 2).

Для подтверждения правильности алгоритма дается графическое представление рельефа объемной функции рамы на множестве средневзвешенных внутриконтурных весовых параметров ( $\omega_{cp}$ ) и межконтурных весовых параметров для нижних контуров ( $\gamma_n$ ) (фиг. 3 и 4).



Фиг. 1. Блок-схема счета

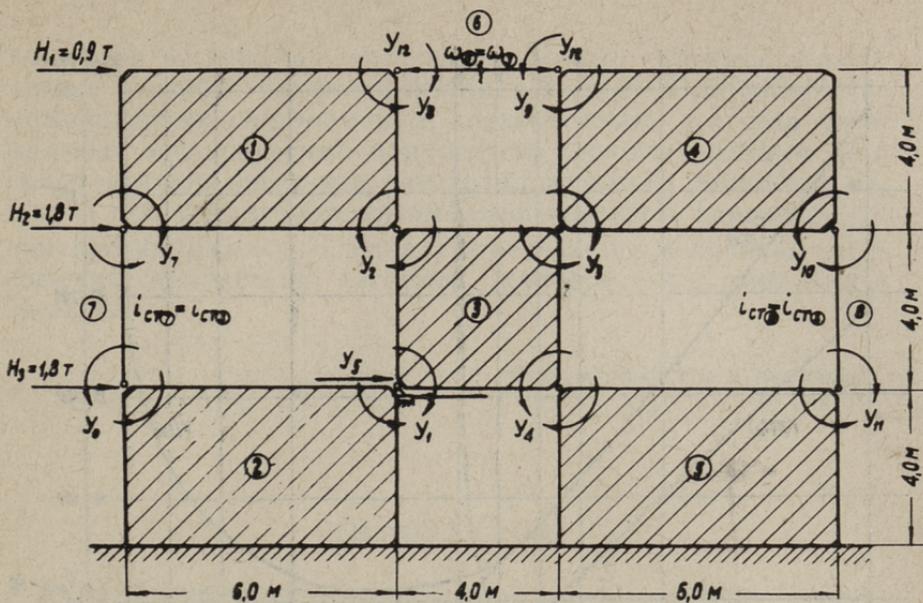
Таблица 1

		$\omega$			$\gamma$		
$i$	$\Phi$	1;4	2;5	3	$\gamma_{\chi}$	$\gamma_{\nu}$	$\gamma$
$\omega_{\varphi} = 1$	$Kp(\omega)$	$0,59 < 1$	$1,33 > 1^{*}$	$1,25 > 1^{*}$	$Kp(\nu_{\chi})$	$0,26 < 1$	$1,82 > 1^{*}$
$\omega_{\varphi} = 2$	$Kp(\omega)$	$0,43 < 1$	$0,99 < 1$	$0,81 < 1$	$Kp(\nu_{\chi})$	$0,49 < 1$	$4,15 > 1$
$\omega_{\varphi} = 1/2$	$Kp(\omega)$	$0,83 < 1^{*}$			$Kp(\nu_{\chi})$	$0,72 < 1^{*}$	
$\omega_{\varphi} = 1/3$	$Kp(\omega)$	$1,04 > 1$			$Kp(\nu_{\chi})$	$1,14 > 1$	
$\omega_{\varphi \text{ оптм}}$		0,35	2,00	1,50	$Kp(\nu_{\chi})$		$0,74 < 1$
$\bar{V}_{\varphi \text{ оптм}}$		20,00	9,50	10,00			
$c_{\varphi}$		0,29	0,1375	1,145			

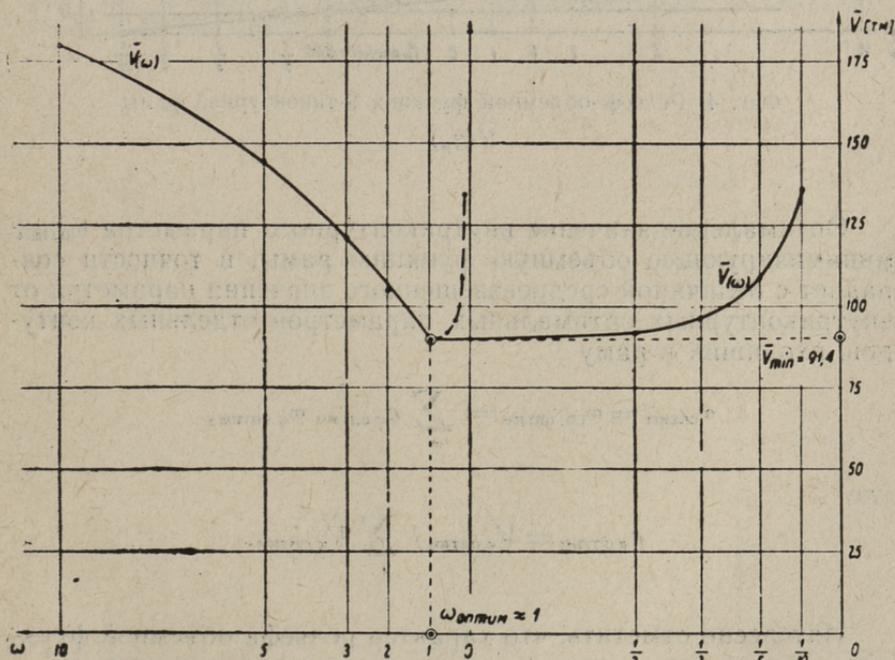
$\Gamma_{* \text{ оптм}} = [\gamma_{\nu \text{ оптм}}; \gamma_{\chi \text{ оптм}}] \approx [4,4; 0,6]$

$\omega_{\text{ср. оптм}} = 2 \times 0,29 \times 0,35 + 2 \times 0,1375 \times 2 + 0,145 \times 1,5 = 0,97$

\* Интервал существования  $\omega_{\varphi \text{ оптм}} (\gamma_{\chi \text{ оптм}})$ .

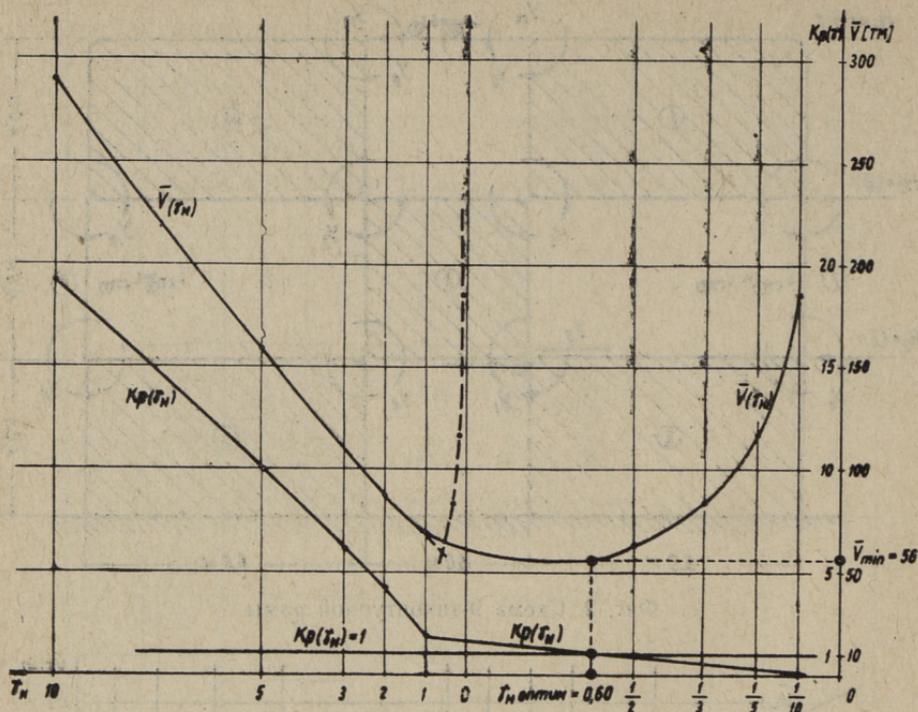


Фиг. 2. Схема 9-тиконтурной рамы



Фиг. 3. Рельеф объемной функции 9-тиконтурной рамы

$$\bar{V}(\omega_{\text{опт}})$$



Фиг. 4. Рельеф объемной функции 9-тиконтурной рамы  
 $\bar{V}(\gamma_N)$

Оптимальное значение внутриконтурного параметра  $\omega_{\text{оптим}}$  минимизирующее объемную функцию рамы, в точности совпадает с величиной средневзвешенного значения параметра от внутриконтурных оптимальных параметров отдельных контуров, входящих в раму

$$\omega_{\text{оптим}} = \omega_{\text{ср. опт}} = \sum_{\varphi} c_{\varphi \text{ опт}} \omega_{\varphi \text{ опт}} ;$$

где

$$c_{\varphi \text{ опт}} = \bar{V}_{\varphi \text{ опт}} / \sum_{\varphi} \bar{V}_{\varphi \text{ опт}} .$$

Интересно отметить, что характер рельефа объемной функции контура на множестве внутриконтурных параметров, а, следовательно, и вектор оптимальных внутриконтурных параметров, дающих минимум объемной функции контура, не зависят от величины параметра нагрузки, а зависят лишь от

характера загрузки, при прочих равных условиях. Характер же рельефа объемной функции звездочки на множестве межконтурных параметров, а, следовательно, и вектор оптимальных межконтурных параметров, дающих минимум объемной функции звездочки, зависят от величины параметра нагрузки так, что значение оптимального весового параметра  $\gamma_\chi$ , при прочих равных условиях, определяется величиной соотношения параметров нагрузки контуров  $\xi$  и  $\chi$ , входящих в звездочку.

Статья поступила в редакцию  
7 X 1965 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Радциг. Основные положения теории зеркальных функций. Труды Казанского авиационного ин-та, 1958, вып. XXXIII—XXXIV.
2. Э. М. Иегги. Оптимальное проектирование статически неопределимых рам, как проблема математического программирования. Труды ТПИ, серия А, № 227, Таллин, 1965.

... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..

... ..  
... ..  
... ..

... ..

... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ, РЕШЕНИЕ СИСТЕМ  
 ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ  
 ПУТЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО НАХОЖДЕНИЯ  
 МИНОРОВ**

1. Основное тождество

Пусть дана матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \| a_{ik} \|_n.$$

Определитель, составленный из элементов этой матрицы, обозначим через  $|A|$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Возьмем другую матрицу

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{vmatrix} = \| \bar{a}_{ik} \|_n,$$

элементы  $\bar{a}_{ik}$  которого являются минорами порядка  $n-1$  определителя  $|A|$ , т. е. равны определителям, полученным из опре-

делителя  $A$ , если там вычеркнуть  $i$ -ю строку и  $k$ -й столбец, на пересечении которых находится элемент  $a_{ik}$ .

Между минорами определителей  $|A|$  и  $|\bar{A}|$  существует следующая зависимость ([1], § 2):

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1l} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{l1} & \bar{a}_{l2} & \dots & \bar{a}_{ll} \end{vmatrix} = |A|^{l-1} \begin{vmatrix} a_{1+1, 1+1} & a_{1+2, 1+2} & \dots & a_{1+1, n} \\ a_{1+2, 1+1} & a_{1+2, 1+2} & \dots & a_{1+2, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n, 1+1} & a_{n, 1+2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

В частности, при  $l=2$  получим

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

откуда значение определителя  $|A|$

$$|A| = \frac{\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (3)$$

Надлежащей перестановкой столбцов и строк в матрице  $A$  можно формулу (3) привести к виду

$$|A| = \frac{\begin{vmatrix} \bar{a}_{nn} & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2, n-1} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3, n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1, 2} & a_{n-1, 3} & \dots & a_{n-1, n-1} \end{vmatrix}}. \quad (4)$$

Тождество (4) является основным для предлагаемых алгоритмов.

В развернутом виде тождество (4) имеет для определителя 3-го порядка следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{a_{22}},$$

для определителя 4-го порядка

и т. д.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

## 2. Алгоритмы для вычисления определителей

Для построения алгоритма находим и миноры, входящие в формулу (4), этой же формулой. Повторно применяя формулу (4), получим для вычисления определителей следующую схему:

Пусть дана матрица  $n$ -го порядка  $A_n = \|a_{ik}\|_n$ , определитель которой  $|A_n|$  надо вычислить.

Выпишем последовательно следующие матрицы порядка  $(n-1)$ ,  $(n-2)$  . . . 1

$$A_{n-1} = \| a_{ik}^{(1)} \|_{n-1}$$

$$A_{n-2} = \| a_{ik}^{(2)} \|_{n-2}$$

$$A_{n-3} = \| a_{ik}^{(3)} \|_{n-3}$$

.....

$$A_1 = a_{11}^{(n-1)},$$

где

$$a_{ik}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i, k+1} \\ a_{i+1, k} & a_{i+1, k+1} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$a_{ik}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{ik}^{(1)} & a_{i, k+1}^{(1)} \\ a_{i+1, k}^{(1)} & a_{i+1, k+1}^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{i+1, k+1}}; \quad a_{ik}^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{ik}^{(2)} & a_{i, k+1}^{(2)} \\ a_{i+1, k}^{(2)} & a_{i+1, k+1}^{(2)} \end{vmatrix}}{a_{i+1, k+1}^{(1)}} \quad (6)$$

и т. д.

Легко видеть, что матрица  $A_{n-1}$  состоит из миноров 2-го порядка матрицы  $A_n$  из соседних элементов (блоков), матрица  $A_{n-2}$  из таких же миноров третьего порядка матрицы  $A_n$  и т. д. Наконец, последняя матрица состоит из одного числа, которое равняется искомому значению определителя  $A$ :

$$A_1 = a_{11}^{(n-1)} = |A_n|.$$

Достоинство метода — простая и однообразная вычислительная схема. Недостатком является возможность вырождения вычислительного процесса. Если в матрице  $A_i$  какой-нибудь некраевой элемент, иначе — некраевой минор порядка  $n-i$  матрицы  $A_n$  — равняется нулю, то при вычислении соответствующего элемента матрицы  $A_{i-2}$ , т. е. минора порядка  $n-i+2$  получается неопределенность  $0/0$ . В этом случае придется этот минор вычислить каким-то другим способом.

Другой недостаток — отсутствие текущей строгой проверки. Если вычисления выполняются без округления, то некоторую проверку обеспечивает то обстоятельство, что все деления должны выполняться без остатка. Заключительную проверку можно получить, окаймляя матрицу  $A_n$  справа левым столбцом или снизу верхней строкой и включая этот столбец или строку в следующие расчеты. Таким приемом мы повторяем вычисление  $|A_n|$  при другой последовательности строк или столбцов. В конце расчета получаются для  $a_{11}^{(n-1)}$  два

значения. Если  $n$  — нечетное, то они должны совпасть; если  $n$  — четное, то дополнительное  $a_{11}^{(n-1)}$  имеет обратный знак.

Пример. Вычислить определитель

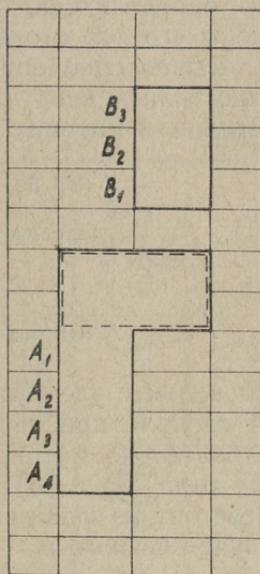
$$|A_5| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Вычисления приведены в таблице 1. Последний столбец справа служит для контроля.

Таблица 1

$A_5$	1	-2	3	1	2	1
	3	2	1	-2	1	3
	-1	1	4	-3	2	-1
	0	3	1	1	2	0
	2	-1	0	2	5	2
$A_4$	8	-8	-7	5	5	
	5	7	5	-1	-7	
	-3	-11	7	-8	2	
	-6	1	2	1	4	
$A_3$	48	9	9	-30		
	-34	26	11	-29		
	-23	-29	23	-17		
$A_2$	222	-27	-69			
	-144	131	-60			
$A_1$	959	959				

$$|A_5| = 969$$



Фиг. 1

При заполнении таблицы можно пользоваться соответствующим шаблоном (см. фигуру 1). Например, для заполнения какой-то клетки матрицы  $A_2$  накладываем шаблон на таблицы так, чтобы окошко  $A_2$  оказалось над этой клеткой. Число, записываемое в это окошко, получается делением определителя, появившегося в средней части шаблона (на фигуре ограничен пунктиром) на число  $B_2$ . При вычислении  $A_{n-1} = A_4$  процесс деления не производится.

### 3. Решение системы линейных уравнений

Решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

можно записать в следующем виде:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta; \quad x_2 = \Delta_2/\Delta; \quad \dots; \quad x_i = \Delta_i/\Delta; \quad \dots; \quad x_n = \Delta_n/\Delta \quad (8)$$

(формула Крамера), где  $\Delta$  — определитель матрицы  $\|a_{ij}\|$ , а  $\Delta_i$  — определитель, получающийся из определителя  $\Delta$  путем замены его  $i$ -го столбца столбцом свободных членов системы (7). Вычисление определителей, входящих в выражения (8), осуществляем следующим образом:

Выпишем матрицу  $B_n$

$$B_n = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -b_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & -b_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & -b_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{array} \right\| \quad (9)$$

и проведем с элементами этой матрицы те же операции, которые сделали при вычислении определителей, т. е. найдем последовательно матрицы  $B_{n-1}, B_{n-2}, \dots, B_1$ , пользуясь формулами типа (5) и (6). Легко убедиться, что последняя матрица  $B_1$  состоит из искомых определителей:

в случае четного  $n$

$$B_1 = \|\Delta \quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_n\|, \quad (10)$$

а в случае нечетного

$$B_1 = \|\Delta \quad -\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad -\Delta_3 \quad \dots \quad (-1)^n \Delta_n\|. \quad (11)$$

Для сокращения записи можно матрицу  $B_n$  выписать не полностью, как в (9). Поскольку во всех получаемых матрицах некоторые правые столбцы являются повторением первых левых столбцов, достаточно матрицу  $B_n$  выписать в следующем виде

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_1 & -b_1 & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_2 & -b_2 & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & -b_n & a_{n1} \end{vmatrix} \quad (12)$$

и вычисляемые матрицы  $B_{n-1}$ ,  $B_{n-2}$  снова окаймлять справа своим первым левым столбцом. В каждой матрице будет  $n+2$  столбца.

Пример. Решить следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0,5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 &= 5,4 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 5,0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 3,3 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 7,5 \end{aligned}$$

Расчет выполнен в таблице 2.

Таблица 2

$B_5$	1 3 -2 -2 0	3 4 -5 -3 1	-2 -5 3 2 -2	-2 -3 2 4 3	0 1 -2 3 5	-0,5 -5,4 -5,0 -3,3 -7,5	1 3 -2 -2 0
$B_4$	-5,0 -7,0 -4,0 -2,0	-7,0 -13,0 -1,0 4,0	-4,0 -1,0 8,0 14,0	-2,0 4,0 14,0 11,0	0,5 -15,8 21,6 -6,0	3,9 25,8 3,4 -15,0	-5,0 -7,0 -4,0 -2,0
$B_3$	4,0 9,0 6,0	9,0 -35,9 -23,0	6,0 -23,0 -27,0	29,6 -153,8 107,2	-13,8 122,2 92,0	33,9 39,7 33,4	4,0 9,0 6,0
$B_2$	17,0 -3,0	-3,0 52,0	-60,5 -120,5	-94,6 -48,6	-181,8 126,2	-20,9 15,6	17,0 -3,0
$B_1$	-25,0	-152,5	55,0	-170,0	-5,0	-22,5	
x		-6,1	-2,2	-6,8	0,2	-0,9	

Вычисление элементов матрицы  $B_4$  производится по формулам типа (5), остальных матриц по формулам типа (6), т. е. так же, как при вычислении определителя. Можно пользоваться

шаблоном. Каждая полученная матрица (кроме последнего) окаймляется справа первым столбцом. Неизвестные  $x_i$  найдем по формуле (8), принимая соответствующие определители из  $B_1$  (см. выражение 11).

#### 4. Обращение матриц

Элементы обратной матрицы, как известно, выражаются частными двух определителей, причем в знаменателе стоит определитель системы, а в числителе — алгебраическое дополнение соответственного элемента транспонированной матрицы.

Вычисление определителей производим по следующей схеме: Пусть дана матрица

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Транспонируем матрицу  $A$  и окаймляем ее снизу 1-й строкой и справа 1-ым столбцом:

$$C_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} & a_{11} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} & a_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & a_{1n} \\ a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} & a_{11} \end{vmatrix}.$$

По формуле (5) вычислим элементы новой матрицы и окаймляем получаемую матрицу таким же образом:

$$C_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & \dots & a_{n1}^{(1)} & a_{11}^{(1)} \\ a_{12}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{n2}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ a_{11}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & \dots & a_{n1}^{(1)} & a_{11}^{(1)} \end{vmatrix}.$$



но этому при вычислении определителей, т. е. определитель, появившийся в окошке 2, делится на число в окошке 1 и результат запишется в окошке 3. В отличие от первого шаблона в этом шаблоне расстояние между окошками для вычисления матриц заданного порядка постоянное, поскольку все матрицы, появившиеся в ходе расчета, кроме последнего  $C_1$ , имеют одинаковый порядок.

Искомая обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -8 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & -6 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{(-16)}.$$

2. Найти обратную матрицу матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Расчет выполнен в таблице 4.

Заполнить матрицу  $C_2$  полностью сразу не удастся, поскольку в матрице  $C_3$  имеются нулевые элементы. Поэтому оставим эти клетки пока незаполненными и вычислим один элемент матрицы  $C_1$ . После этого можно уже заполнить всю матрицу  $C_1$ , где этот элемент везде повторяется (если матрица  $A$  четного порядка — с чередующимися знаками). Теперь найдем недостающие элементы матрицы  $C_2$  (в таблице в скобках) рекурсивно.

Таблица 4

$C_4$	2	1	0	0	2
	1	2	1	0	1
	0	1	2	1	0
	0	0	1	2	0
	2	1	0	0	2
$C_3$	3	1	0	0	3
	1	3	1	-1	1
	0	1	3	0	0
	0	-1	0	4	0
	3	1	0	0	3
$C_2$	4	1	(2)	3	4
	1	4	3	(2)	1
	(2)	3	6	(4)	2
	3	(2)	(4)	6	3
	4	1	2	3	4
$C_1$	5	-5	5	-5	
	-5	5	-5	5	
	5	-5	5	-5	
	-5	5	-5	5	

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

### 5. Необходимое количество операций для вычислений на малых вычислительных машинах

Для вычислений на малых вычислительных машинах требуются только действия умножения и деления как самостоятельные операции. Суммирование отдельных произведений операций не считается, поскольку оно выполняется автоматически, без специальных команд машине.

Количество операций  $r$  следующее (при  $n \geq 3$ ).

а) Для вычисления определителя:

$$\begin{aligned} r &= 2(n-1)^2 + 3(n-2)^2 + 3(n-3)^2 + \dots + 3 \cdot 1^2 = \\ &= \frac{1}{2} (2n - 5n^2 + 5n - 2). \end{aligned}$$

б) Для обращения матрицы:

$$r = 2n^2 + 3n^2(n-3) + 3 + n^2 = 3n^3 - 6n^2 + 3.$$

в) Для решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} r &= 2(n+1)(n-1) + 3(n+1)[(n-2) + (n-3) + \\ &+ \dots + 1] + n = \frac{1}{2} (3n^3 - 2n^2 - n + 2). \end{aligned}$$

Для симметричных определителей и матриц количество операций уменьшается.

Количество операций для некоторых значений  $n$  показано в таблице 5.

Таблица 5

Количество операций

$n$	для вычисления определителя	для обращения матрицы	для решения системы уравнений
3	11	30	31
4	33	99	79
5	74	228	161
6	140	435	286
7	237	741	463

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Госиздат техн.-теор. лит., 1950.
2. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. I. Госиздат техн.-теор., лит., 1954.
3. Б. П. Демидович и И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Физматгиз, 1960.

Статья поступила в редакцию  
7 X 1965 г.

---

### ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ СБОРНИК СТАТЕЙ I

Таллинский политехнический институт

Редактор Л. Нарец

Технический редактор Я. Мыттус

Сдано в набор 8 XII 1965 г. Подписано к печати 30 VI 1966 г. Бумага 60×90 1/16.  
Печатных листов 7,5. Учетно-изд. листов 6,25. Тираж 500. МВ 06046. Заказ № 8941  
Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк, 2.

Цена 42 коп.





Цена 42 коп.