TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 119 1957

Б. А. ТИЙКМА

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПЛОСКИХ ФЕРМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 119 1957

Б. А. ТИЙКМА

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПЛОСКИХ ФЕРМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

При изучении метрических свойств плоских ферм приходится изучать и вопросы о расположении и распределении их частей. Плоские фермы можно рассматривать как конечные комплексы отрезков, как плоские нитевые сети или графы (по немецки Graphen [1]).

Для геометрической неизменяемости т. н. простых плоских ферм имеется условие

$$s=2\,n-3, \text{ где } s \tag{1}$$

означает число стержней и n число узлов. Подобная формула для пространственных ферм имеет вид

$$s=3\,n-6. \tag{2}$$

Эта формула тесно связана с формулой Эйлера для полиэдров [2].

В случае формулы (1) s окажется всегда нечетным числом. Из каждого узла выходит некоторое число стержней. Это четное или нечетное число называем степенью или индексом узла. Если это число k одинаковое для всех узлов, то сеть называется регулярной. В геометрической неизменяемой ферме из каждого узла выходит в среднем

$$k=\frac{(2n-3)2}{n} \text{ или } 4-\frac{6}{n} \text{ стержней.} \tag{3}$$

Так например, в случае $n=3$ все узлы двухстержневые, при $n=6$, все узлы трехстержневые. Но если $n\to\infty$, то $k\to4$.

Сумма индексов (степеней) всех узлов является четным числом 2s или $2(2n-3)$.

Среди плоских геометрически неизменяемых ферм будут регулярными только две, — когда число узлов будет $n=3$ или $n=6$. В общем фермы не являются регулярными нитевыми сетями. С точки зрения теории нитевых сетей, фермы не являются ни «деревьями», ни «звездами», они имеют всегда замкнутую форму, т. е. никакой узел не обладает индексом 1. В общем фермы не являются также и линиями Эйлера — т. е. замкнутыми линиями, которые проходят все стержни поочередно только один раз. Но среди плоских ферм имеются такие, которые имеют Гамильтоновы линии — т. е. замкнутые линии, которые проходят все узлы только один раз. Последнее свойство таких ферм сделает возможным при графическом определении усилий в стержнях применять метод нотации полей и таким путем построить компактную диаграмму Максвелла-Кремоны.

Назовем число

$$\mu=\alpha_1-\alpha_0+1 \tag{5}$$

числом связности нитевой сети [1]. Здесь α_0 означает число узлов, а α_1 число отрезков (стержней). Это число μ показывает, сколько отрезков придется отбросить, чтобы получилось «дерево». Число связности для «дерева» будет 0.

Для геометрически неизменяемой простой плоской фермы имеем

$$\mu=\frac{\alpha_1-1}{2} \quad \text{или} \tag{6}$$

$$\mu=\alpha_0-2. \tag{7}$$

Действительно, если $\alpha_1=2\alpha_0-3$, то из формулы (5) получается (6). Видно, что μ зависит от числа α_0 или α_1 и все фермы с одинаковым числом α_0 имеют одинаковое число μ. Число μ определяет число циклов или замкнутых линий, содержащихся в данной ферме. Каждый такой цикл определяет одно поле. Итак число полей будет $\mu=\alpha_0-2$. Но если считать полем также область, которую ограничивает контурная линия всех этих полей, то число полей будет

$$\alpha_0-1. \tag{8}$$

Обозначая через $\mu+1$ или через α_2 общее число полей, получается

$$(\alpha_1-\alpha_0+1)+1=\alpha_2 \qquad \text{или}$$

$$\alpha_2-\alpha_1+\alpha_0=2, \tag{9}$$

что и представляет собой формулу Эйлера для выпуклых полиэдров.

Для всех нитевых сетей пригодна формула

$$\alpha_1 - \alpha_0 + \delta = \mu, \qquad \text{где} \qquad (10)$$

δ означает число изолированных сетей. Так как ферма состоит из одной части (она не имеет изолированных частей), то здесь будем иметь выражение

$$\mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1,$$

которое совпадает с формулой (5).

Возьмем характеристику Эйлера в форме Пуанкаре

$$X = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \alpha_r, \qquad \text{где} \qquad (11)$$

r означает размерность симплекса. Напр. точка будет симплексом нулевой размерности, а отрезок размерности один.

Если r имеет значения 0, 1, 2, то

$$X = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (12)$$

Взяв $\alpha_2 = \mu + 1$, тогда для плоских ферм имеем (по (7))

$$X = \alpha_0 - (2\alpha_0 - 3) + \alpha_0 - 2 + 1 = 2.$$

В случае $\alpha_2 = \mu$, $X_1 = 1$.

Из предыдущего следует, что числа $X = 2$ или $X_1 = 1$ окажутся топологическими инвариантами для всех плоских геометрический неизменяемых ферм.

Для изучения статически определимых ферм применяется часто алгебраический (аналитический) метод. При этом, начиная составление систем уравнений от нагруженного узла, который соединяет больше чем два стержня, получаются уравнения в параметрической форме. Число параметров зависит от числа стержней в этом узле (от индекса). Напр. в случае трех стержней будет один параметр. Освободиться от параметра можно в дальнейшем ходе решения. Число узлов, которое придется обходить до определения параметра, будет равным, как мне кажется, числу связности фермы μ. При этом обходе нужно, так сказать, разрезать μ циклов.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. König, Graphentheorie, Berlin 1936.
2. S. Timoshenko, Statics, New-York, 1936, p. 273.

Б. А. Тийкма

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПЛОСКИХ ФЕРМ

Издательство
Таллинского Политехнического Института

*

Редактор О. Сильде
Технический редактор А. Тамм
Корректор А. Рейгна

Сдано в набор 9 XI 1957. Подписано к печати 24 XII 1957. Бумага 54×84 1/16. Печатных листов 0,5. По формату 60×92 печатных листов 0,41. Учетно-издательских листов 0,19. Тираж 800. МВ-08935. Заказ № 7351.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк, 2.

Цена 15 коп.