

Er. 6. /  
551

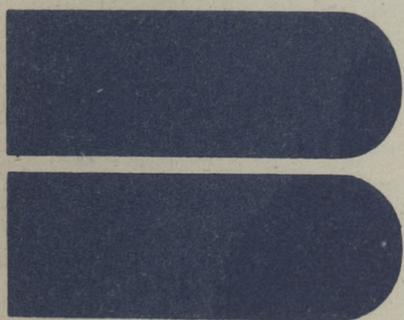
ISSN 0136-3549  
0203-9745

TALLINNA  
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI  
TOIMETISED  
551

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

**ТРИ**  
**'83**

СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ,  
ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК





551

**ТРИ  
'83**

**TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED**

**ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

УДК 624.

●  
СТАТИЧЕСКИЕ  
И  
ДИНАМИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
АНАЛИЗА  
СТЕРЖНЕВЫХ  
СИСТЕМ,  
ПЛАСТИН  
И  
ОБОЛОЧЕК

Строительная механика X1У

Таллин 1983

1

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Труды ТПИ № 551

СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Строительная механика XIУ

Редактор У. Раукас. Технический редактор В. Ранник

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 01.04.83.

Подписано к печати 18.08.83. Формат 60х90/16

Печ. л. 3,5 + 0,25 приложение. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 300

МВ-07478. Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Зак. № 591

Ц е н а 45 коп.

© Таллинский политехнический институт, 1983



Л.А. Йооритс, В.Ю. Компус, Л.И. Руга

ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ПОЛЕ  
НАПРЯЖЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

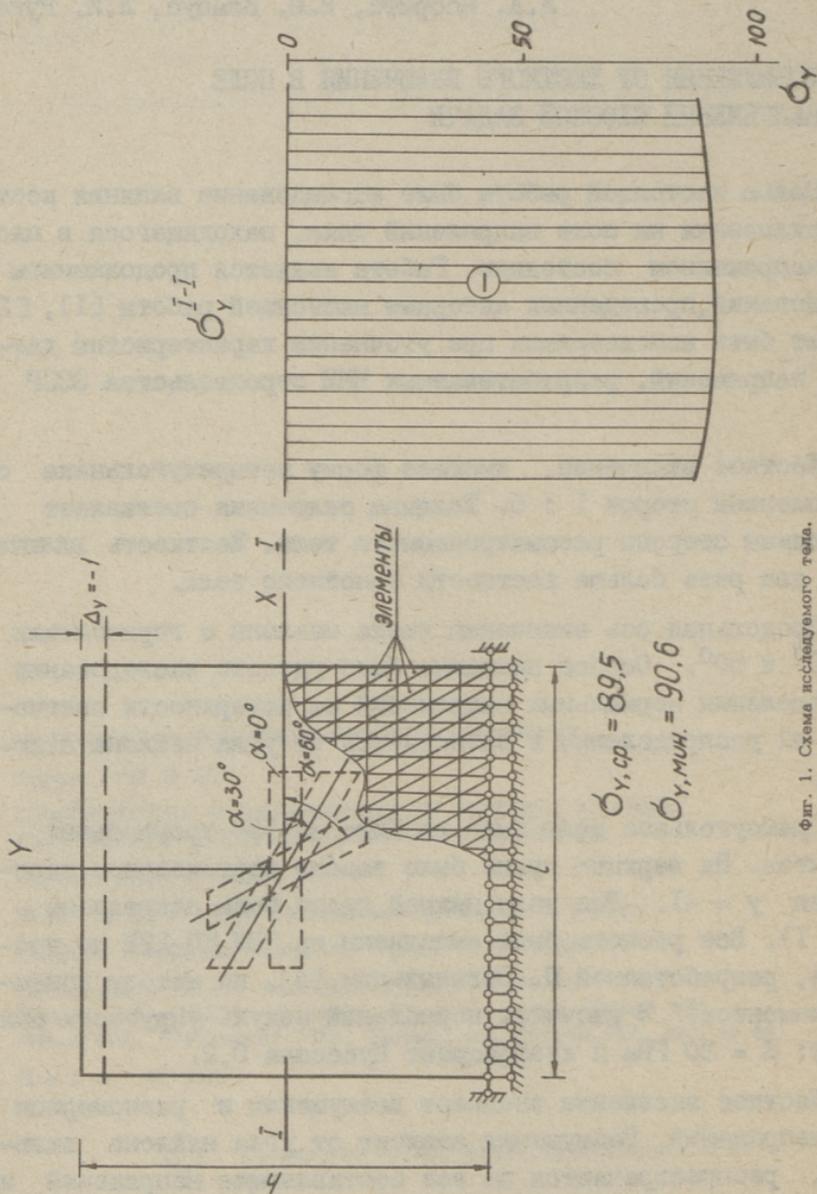
Целью настоящей работы было исследование влияния жесткого включения на поле напряжений тела, находящегося в плоском напряженном состоянии. Работа является продолжением исследований, проведенных авторами настоящей работы [1], [2] и может быть использована при уточнении характеристик датчиков напряжений, разрабатываемых НИИ строительства ЭССР [3].

Жесткое включение, имеющее форму четырехугольника с соотношением сторон  $1 : 6$ . Толщина включения составляет  $1/12$  длины стороны рассматриваемого тела. Жесткость включения в два раза больше жесткости основного тела.

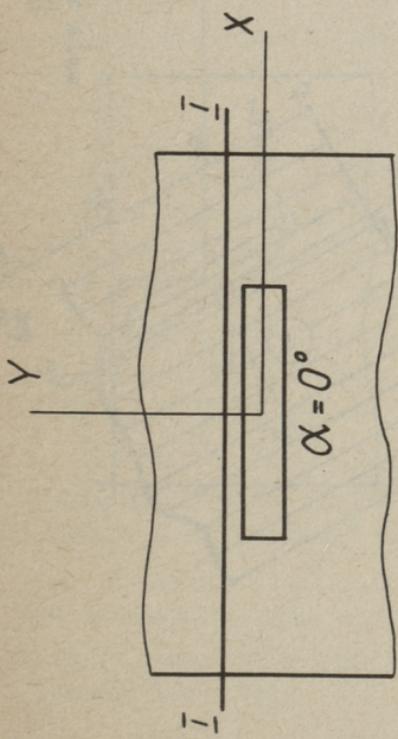
Продольная ось включения имела наклоны к горизонтали  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Особое внимание было уделено исследованию распределения нормальных напряжений на поверхности включения и их распределению в зависимости от угла наклона включения.

Прямоугольное тело было разбито на 598 треугольных элементов. На верхнюю грань было задано вертикальное перемещение  $u = -1$ . Все узлы нижней грани были закреплены (фиг. 1). Все расчеты были выполнены на ЭВМ ЕС-22М по программе, разработанной Ю. Вилипыльдом [4], по методу конечных элементов. В расчетах нормальный модуль упругости был принят:  $E = 20$  ГПа и коэффициент Пуассона 0,2.

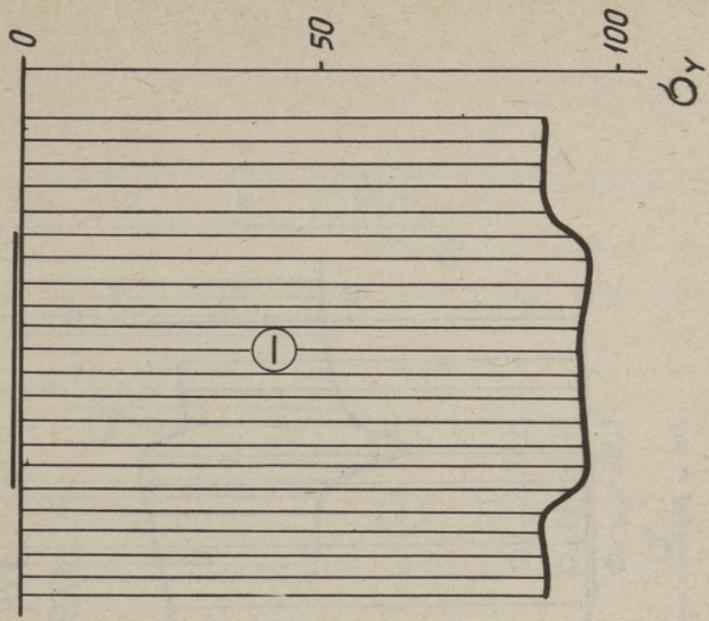
Жесткое включение вызывает возмущения в равномерном поле напряжений. Возмущения зависят от угла наклона включения, распространяются на все составляющие напряжений и имеют наибольшие значения непосредственно у включения.



Фиг. 1. Схема исследуемого тела.  
а) Эпюра напряжений в теле без включения.



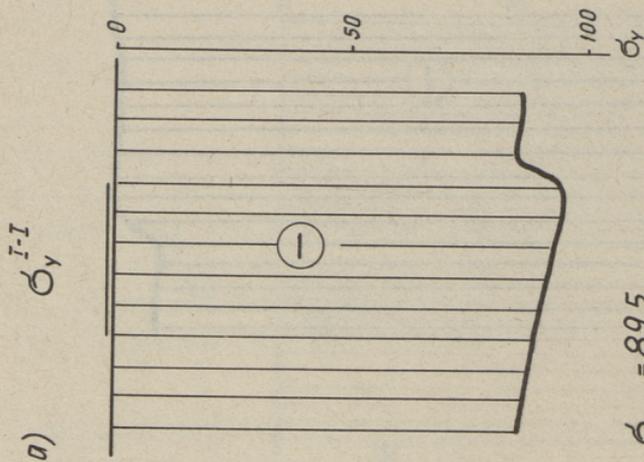
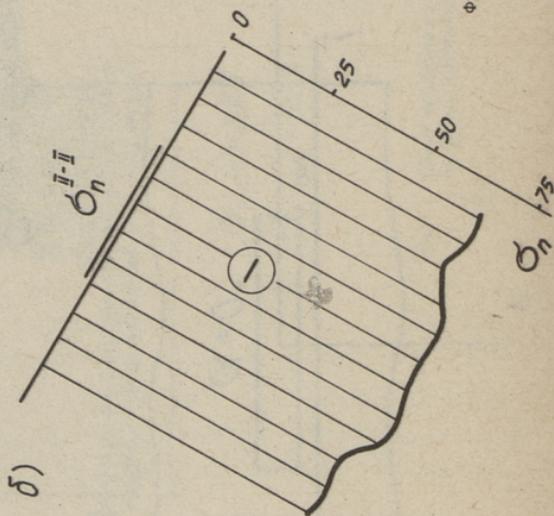
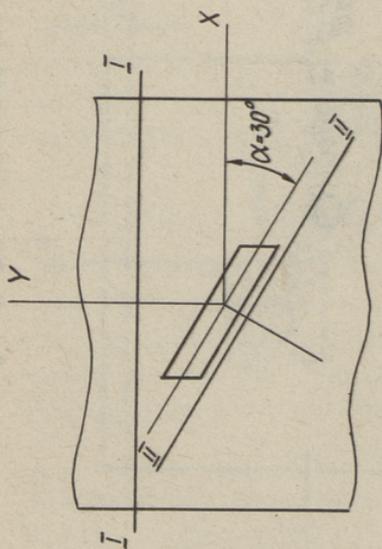
$\sigma_y^{I-I}$



$$\sigma_{y, \text{ср.}} = \sigma_{n, \text{ср.}} = 91,4$$

$$\sigma_{n, \text{мин}} = 95,7$$

Фиг. 2. Эпюра напряжений при горизонтальном положении включения ( $\alpha = 0$ ).



$$\sigma_{y, \text{cp}} = 89,5$$

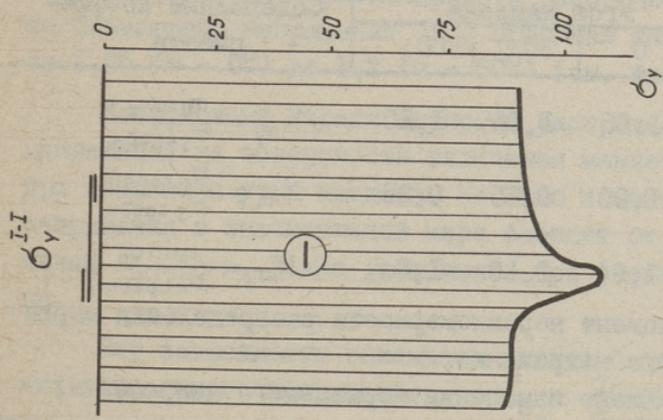
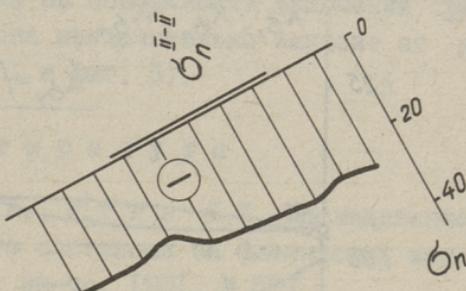
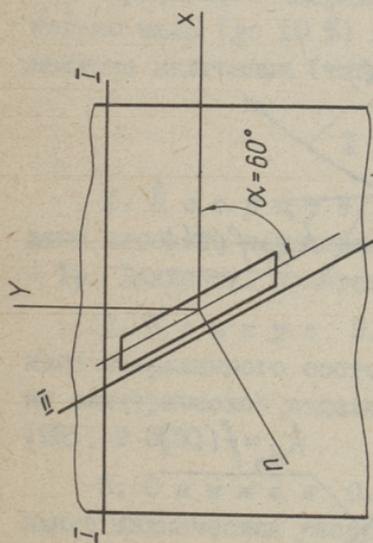
$$\sigma_{n, \text{cp}} = 67,5$$

$$\sigma_{n, \text{MIN}} = 70,3$$

Фиг. 3. Эпюры напряжений при наклоне включения на  $30^\circ$ :

а) напряжения  $\sigma_y$  в разрезе I-I,

б) напряжения  $\sigma_n$  в разрезе II-II.



$\sigma_{y, \text{cp}} = 92,2$   
 $\sigma_{n, \text{cp}} = 25,7$   
 $\sigma_{n, \text{мин}} = 28,3$

Фиг. 4. Эпюры напряжений при наклоне включения на  $60^\circ$ :

а) напряжения  $\sigma_y$  в разрезе I-I,

б) напряжения  $\sigma_n$  в разрезе II-II.

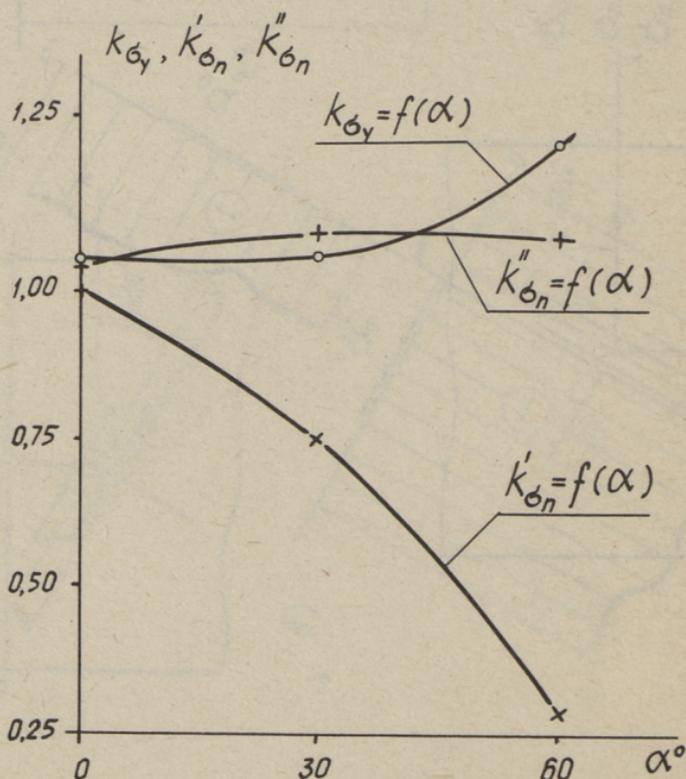
## Коэффициенты распределения напряжений

Коэффициенты	Угол наклона °			Содержание коэффициента
	0	30	60	
$K_{\sigma_y}$	1,05	1,06	1,20	$K_{\sigma_y} = \frac{\min \sigma_y}{\sigma_{y \text{ средн.}}}$
$K'_{\sigma_n}$	1,00	0,75	0,28	$K'_{\sigma_n} = \frac{\sigma_n \text{ средн.}}{\sigma_{y \text{ средн.}}}$
$K''_{\sigma_n}$	1,04	1,10	1,04	$K''_{\sigma_n} = \frac{\min \sigma_n}{\sigma_n \text{ средн.}}$

$K_{\sigma_y}$  — коэффициент неравномерности распределения вертикального напряжения;

$K'_{\sigma_n}$  — коэффициент изменения нормального напряжения;

$K''_{\sigma_n}$  — коэффициент неравномерности распределения нормального напряжения.



Фиг. 5. График зависимости коэффициентов  $K_{\sigma_y}$ ,  $K'_{\sigma_n}$ ,  $K''_{\sigma_n}$  от угла наклона.

На фигурах 2, 3 и 4 приведены эпюры вертикального сжимающего напряжения  $\sigma_y$  и эпюры нормального напряжения на поверхности включения  $\sigma_n$ .

Коэффициент неравномерности распределения вертикального сжимающего напряжения  $K_{\sigma_y}$  принимал значения в пределах от 1,05 ( $\alpha = 0^\circ$ ) до 1,2 ( $\alpha = 60^\circ$ ) (см. табл. I и фиг. 5).

Коэффициент неравномерности распределения нормального напряжения на поверхности включения меняется незначительно при изменении угла наклона. Но само значение нормального напряжения в значительной мере зависит от угла наклона включения  $\sigma_n = f(\alpha)$ , резко уменьшаясь при увеличении угла наклона.

Эту зависимость описывает наглядно коэффициент изменения нормального напряжения  $K'_{\sigma_n} = \frac{\sigma_n \text{ средн.}}{\sigma_y \text{ средн.}}$  (табл. I и фиг. 5).

Из работы выявляется, что неравномерность распределения нормального напряжения на поверхности включения сравнительно мала (до 10 %) и она незначительно зависит от угла наклона включения (табл. I и фиг. 5).

### Л и т е р а т у р а

1. Й о о р и т с Л.А., Р у г а Л.И. Исследование задачи плоского напряженного состояния на физических моделях. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1981, № 507.

2. К о м п у с В.Ю., Р о о т с О.Т. Исследование плоского напряженного состояния при изменении фронта нагрузки на электрической модели. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1981, № 507.

3. С а м м а л О.Ю. Напряжения в бетоне и прогнозирование технических ресурсов в бетонных и железобетонных конструкциях и сооружениях. Таллин, Валгус, 1980.

4. В и л и п ы л ь д Ю.К. и др. Расчет стержневых и пластинчатых систем по методу конечных элементов МКЭ/20, Таллин, Вычислительный центр НИИ строительства Госстроя Эстонской ССР, 1979.

Abweichungen im Spannungsfeld um ein steifes  
Stück im Falle des zweiachsigen Spannungszustandes

Zusammenfassung

In der Abhandlung werden einige Spannungsfeldabweichungen um ein zweimal steifes Stück im Falle des zweiachsigen Spannungszustandes gegeben.

Die Resultate sind je nach der Neigung des steifen Stückes dargestellt.

Aus der Forschung ergibt sich, daß die Druckspannungen auf der Fläche des steifen Stückes unabhängig von der Neigung des Stückes ganz stabil sind.

### О НАХОЖДЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ СКОРОСТИ И ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ

Одномерные волновые процессы деформации в неоднородной среде исследованы во многих работах (см. например, [1 - 3]). Обратная задача импульсной акустодиагностики свойств среды, состоящая в определении свойств среды на основе данных измерения параметров распространяющейся в ней волны, изучена сравнительно мало, и, в основном, для случая однородной среды [4 - 6]. Учет неоднородности среды приводит к необходимости решать дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, что значительно усложняет проблему.

Ниже рассматривается распространение одномерной продольной волны в неоднородной среде. Используя метод ВКБ, получено асимптотическое решение, которое описывает эволюцию формы волны в ее прифронтной зоне. Обсуждаются возможности применения этого решения прямой задачи при решении обратной задачи импульсной акустодиагностики.

I. Во многих случаях распространение одномерных волн деформации описывается уравнением

$$U_{,xx}(x,t) + f_1(x)U_{,x}(x,t) - f_2(x)U_{,tt}(x,t) = 0, \quad (I)$$

где  $x$  - лагранжева координата;

$t$  - время;

$U(x,t)$  - продольное перемещение в направлении  $x$ ;

$f_1(x)$  и  $f_2(x)$  - непрерывные функции;  $f_2(x) > 0$  в области  $0 \leq x \leq \infty$ .

Уравнение (I) позволяет, например, моделировать распространение волны в стержне с переменным сечением и в среде с переменными модулями упругости. К уравнению (I) приводят (после линеаризации) также некоторые модели для описания од-

номерной волны в деформируемой твердой среде с определенными видами начальной деформации.

Будем искать решение уравнения (I) при нулевых начальных условиях

$$U(x, 0) = 0, \quad U_{,t}(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и при краевых условиях

$$\begin{aligned} U_{,t}(0, t) &= -\varepsilon c \varphi(t) H(t), \\ |U(x, t)| &\rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $H(t)$  - функция Хевисайда;  
 $\varepsilon$  и  $c$  - положительные постоянные, причем  $\varepsilon \ll 1$ ;  
 $\varphi(t)$  - произвольная функция, удовлетворяющая условию  $\max |\varphi(t)| = 1$ .

Применяя преобразование Лапласа по времени получим на основе (I), ..., (3) уравнение

$$U_{,xx}^L(x, p) + f_1(x) U_{,x}^L(x, p) - p^2 f_2(x) U^L(x, p) = 0, \quad (4)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} p U^L(0, p) &= -\varepsilon c \varphi^L(p), \\ |U^L(x, p)| &\rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановка

$$U^L(x, p) = C \exp \left\{ \int [p v(x, p) - 2 f_1(x)] dx \right\}$$

позволяет дать уравнению (4) вид уравнения Риккати

$$p v_{,x}(x, p) + p^2 v^2(x, p) = p^2 f_2(x) + g(x), \quad (6)$$

где

$$g(x) = \frac{1}{2} [f_{1,x}(x) + \frac{1}{2} f_1^2(x)].$$

Ищем решение уравнения (6) в виде

$$v(x, p) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) p^{-k}. \quad (7)$$

Подставляя ряд (7) в уравнение (6) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $p$ , получим

$$v_0(x) = \pm f_2^{\frac{1}{2}}(x),$$

$$v_1(x) = [4 f_2(x)]^{-1} f_{2,x}(x),$$

$$v_2(x) = \pm \frac{1}{2} f_2^{-\frac{1}{2}}(x) \{ g(x) + [4 f_2(x)]^{-1} f_{2,xx}(x) -$$

$$-5 [16 f_2^2(x)]^{-1} f_{2,x}(x) \}.$$

Решение уравнения (4) с точностью трех первых членов ряда (7) имеет вид

$$U^L(x, p) = -\varepsilon c \varphi^L(p) p^{-1} \exp \Phi_1(x) \exp [-p \Phi_2(x) - p^{-1} \Phi_3(x)],$$

где

$$\Phi_1(x) = -\frac{1}{4} \int_0^x [2f_1(x) + f_{2,x}(x) f_2^{-1}(x)] dx, \quad (8)$$

$$\Phi_2(x) = \int_0^x f_2^{\frac{1}{2}}(x) dx, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f_2^{-\frac{1}{2}}(x) [g(x) + \frac{1}{2} f_{2,xx}(x) f_2^{-1}(x) - \\ - \frac{5}{16} f_{2,x}^2(x) f_2^{-2}(x)] dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Соответствующим решением исходного уравнения (I) является выражение

$$U(x, t) = -\varepsilon c H(\zeta) \int_0^{\zeta} \varphi(\zeta - \xi) J_0 [2\sqrt{\xi \Phi_3(x)}] d\xi \exp \Phi_1(x), \quad (II)$$

где  $J_0$  - обозначает функцию Бесселя первого рода и

$$\zeta(x, t) = t - \Phi_2(x).$$

Из (II) и (I2) видно, что фронт волны распространяется с переменной скоростью

$$c(x) = x \Phi_2^{-1}(x). \quad (I3)$$

Поскольку решение (8) выведено путем применения ряда (7), быстро сходящегося только при больших значениях параметра  $p$ , то оно описывает эволюцию формы волны в прифронтной зоне, где выполняется условие  $\zeta \ll 1$ .

2. Рассмотрим теперь возможности применения решения (II) при решении обратной задачи импульсной акустодиагностики параметров сред. Легко убедиться в том, что в решении (II) функция  $\Phi_1(x)$  характеризует изменение амплитуды волны, функция  $\Phi_2(x)$  - время прибытия волны в точку ее регистрации и функция  $\Phi_3(x)$  - искажение исходной формы волны, заданной краевым воздействием. Известно, что величины

типа  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  измерить проще чем  $\Phi_3(x)$ . Поэтому рассмотрим возможности решения обратной задачи акустодиагностики путем применения измеренных функций  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$ . На основе формул (8) и (9) получим для вычисления коэффициентов исходного уравнения (I) следующие формулы

$$f_1(x) = -[2\Phi_{1,x}(x) + \Phi_{2,xx}(x)\Phi_{2,x}^{-1}(x)], \quad (I4)$$

$$f_2(x) = [\Phi_{2,x}(x)]^2. \quad (I5)$$

Если измерение функций  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  выполняется только при одном значении  $x$ , то на основе (I4) и (I5) получим соответственно значения функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  только при этом значении  $x$ . Значит, такое измерение может оказаться достаточным, когда известны аналитические представления  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , в которых лишь два неизвестных параметра. Если неизвестных параметров большое количество, то может оказаться возможным их определение путем измерения  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  при различных значениях  $x$ .

Прежде, чем приступить к изложению примера, поясним смысл коэффициентов  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  уравнения (I).

Выведем функцию  $r(x)$  по формуле

$$r(x) = x^{-1}\Phi_1(x)$$

как аналог декремента затухания в стационарных задачах. Тогда на основе формул (I3), (I4) и (I5) коэффициенты  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  могут быть записаны в виде

$$f_1(x) = -2\{[x r(x)]_{,x} - c_{,x}(x)c^{-1}(x)[1 + \frac{1}{2}x c_{,x}^{-1}(x)c_{,xx}(x)(1 - xc^{-1}(x)c_{,x}(x))^{-1}]\},$$

$$f_2(x) = c^{-2}(x)[1 - xc^{-1}(x)c_{,x}(x)]^2.$$

Следовательно, коэффициент  $f_1(x)$  влияет на изменение как амплитуды, так и скорости распространения волны, а коэффициент  $f_2(x)$  - только на изменение ее скорости.

3. В качестве примера рассмотрим стержень, материал которого имеет постоянную плотность  $\rho$  и переменный по длине модуль Юнга  $E(x)$ , определяемую формулой

$$E(x) = \alpha(1 + \beta x), \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad \beta = \text{const}. \quad (I6)$$

Уравнение (I) описывает распространение продольной волны в таком стержне [I], если предположить

$$f_1(x) = E_{,x}(x) E^{-1}(x), \quad (I7)$$

$$f_2(x) = \rho E^{-1}(x). \quad (I8)$$

Рассмотрим  $\alpha$  и  $\beta$  как постоянные, подлежащие определению с помощью акустодиагностического эксперимента. Предположим, что удалось измерить значения функций  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  в точке  $x = l$ . Используя (I7) и (I8), легко вычислять интегралы (8) и (9), в результате чего имеем:

$$\Phi_1(l) = -\frac{1}{4} \ln |1 + \beta l|, \quad (I9)$$

$$\Phi_2(l) = [(1 + \beta l)^{\frac{1}{2}} - 1] / (\alpha \beta l). \quad (20)$$

Из (I9) и (20) следует формулы

$$\alpha = [\Phi_2(l)(e^{-2\Phi_1(l)} + 1)]^{-1}$$

$$\beta = e^{-4\Phi_1(l)} - 1.$$

Однако, как известно по [I], рассматриваемая модель распространения продольной волны в стержне является обоснованной только в том случае, если  $|\beta l| \ll 1$ . Поэтому, используя известные разложения функций  $\ln |1 + \beta l|$  и  $(1 + \beta l)^{\frac{1}{2}}$ , формулы (I9) и (20) можно преобразовать к виду

$$\Phi_1(l) = -\frac{1}{4} \beta l (1 - \frac{1}{2} \beta l + \frac{1}{3} \beta^2 l^2 - \dots), \quad (2I)$$

$$\Phi_2(l) = (2\alpha)^{-1} (1 - \frac{1}{4} \beta l + \frac{1}{8} \beta^2 l^2 - \dots). \quad (22)$$

Согласно формулам (2I) и (22) значения функции  $\Phi_1(l)$  зависят существенно от величины  $\beta$ , а зависимость значений функции  $\Phi_2(l)$  от параметра  $\alpha$  имеет при  $\alpha \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow \infty$  зоны, в которых решение задачи акустодиагностики свойств стержня является невозможным, так как в этих зонах малым изменениям параметра  $\alpha$  соответствуют большие изменения значений функции  $\Phi_2(l)$  или наоборот. Если учесть, что

$$c_0 = (\alpha / \rho)^{\frac{1}{2}},$$

где  $c_0$  - скорость распространения продольной волны в среде с постоянным значением модуля Юнга, то в вышеупомянутых зонах  $c_0 \rightarrow 0$  и  $c_0 \rightarrow \infty$  соответственно. Эти случаи останутся однако вне основного класса практических задач.

## Л и т е р а т у р а

1. Ф и л и п п о в И.Г., Б а х р а м о в Б.М. Волны в упругих однородных и неоднородных средах. Ташкент, ФАН, 1978, с. 152.

2. Б а с о н G. Wave propagation in inhomogeneous elastic media, solution in terms of Bessel functions. - Acta Mechanica, 1969, N 7, p. 137-160.

3. Н а у ф е н А.Н. Finite amplitude longitudinal waves in non-uniform bars. - J. Sound and Vibration, 1975, v. 42, N 3, p. 357-361.

4. Н и г у л У.К. Нелинейная акустодиагностика. Л., Судостроение, 1981, с. 252.

5. Г у з ь А.Н. О линеаризированной теории распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями. - Прикладная механика, 1978, т. 14, № 4, с. 3-32.

6. Б о б р е н к о В.М., В а н г е л и М.С., К у - ц е н к о А.Н. Акустические методы контроля напряженного состояния материала деталей машин. Кишинев, Штиинца, 1981, с. 148.

A. Ravasoo

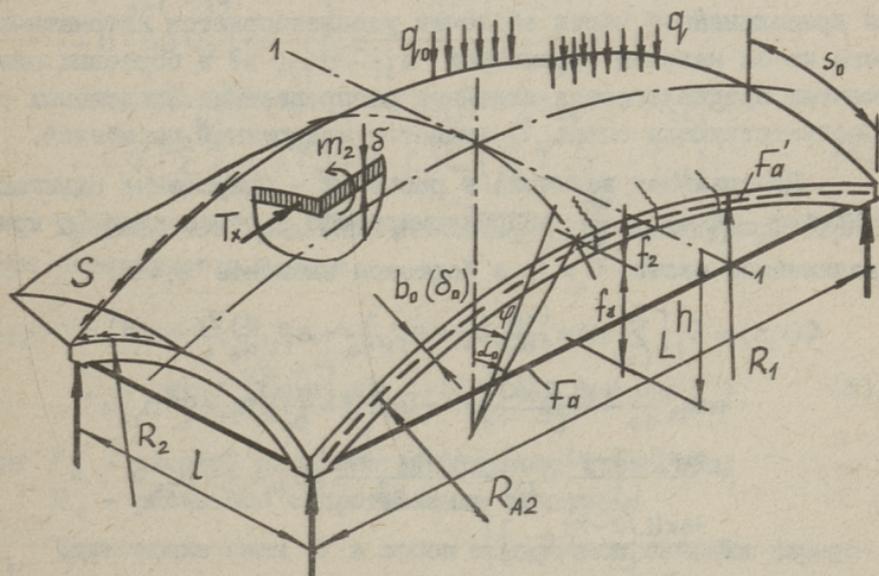
On the Determination of Physical Parameters of the  
Inhomogeneous Medium by Measuring the Velocity and  
the Intensity of the Wave

### Summary

The propagation of an one-dimensional longitudinal wave in the inhomogeneous medium is investigated. The equation of motion of the medium is solved asymptotically using the method of WKB. The solution describes the evolution of the wave profile in its near-front region. The determination of the medium parameters on the basis of experimental data is briefly analysed.

### КВАЗИЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ ОБОЛОЧКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ БОРТОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В настоящей статье рассматривается расчет пологих оболочек двойной кривизны, прямоугольных в плане  $\frac{L}{l} = 2 - 3$  с отношением продольных и поперечных радиусов кривизны  $R_1/R_2 > 5$ . В дальнейшем будем называть эти оболочки квазицилиндрическими. При реальных краевых условиях оболочки такого типа работают под значительными поперечными изгибающими моментами. На внутренние силы влияют изменяющиеся в продольном направлении приращения сдвигающих сил  $\zeta(x, s)$ , нагрузка и силы  $T_x/R_1$ . В соответствии с принципом работы про-



Фиг. 1. Расчетная схема и основные геометрические величины.

странственных конструкций рассматриваемого типа, основная часть нагрузки от криволинейной части передается на торцевые диафрагмы при помощи сдвигающих сил. В квазицилиндрических оболочках нагрузка передается на торцевые угловые опоры еще при помощи влияния кажущейся продольной четырехопорной арки с затяжками.

Продольные бортовые элементы и торцевые диафрагмы могут иметь вид двущарнирной арки с затяжкой или криволинейного бруса. Последние обычно имеют дополнительные промежуточные вертикальные опоры. Бортовые элементы нагружаются в основном сдвигающими усилиями от тонкостенной плиты.

Влияние деформации диафрагм в виде арки учитывается при помощи потенциальной энергии.

В оболочке с неподпертыми в вертикальном направлении бортовыми элементами эпюра приращения сдвигающих сил в криволинейной части и в арке (в брус) продольного бортового элемента должна удовлетворять следующим условиям:

а) должно иметь место  $\zeta(x, 0) = 0$  вследствие симметрии нагрузки относительно конька оболочки; б) условия соответствия сдвигающих сил на линиях соединения бортовых элементов и криволинейной части оболочки удовлетворяются автоматически из-за наличия параметров  $a_{11} - a_{16}$ ; в) в бортовых элементах предполагается линейное распределение продольных сил. Соответствующая эпюра  $\zeta$  является квадратной параболой.

Центральная величина в расчетах - приращение сдвигающих сил -  $\zeta(x, s) = \frac{\partial s}{\partial x}$  аппроксимируется в общем виде (в криволинейной части  $C_1 = 1$ , в бортовом элементе  $C_1 = 0$ )

$$\begin{aligned} \zeta(x, s) = C_1 \left[ \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\alpha\pi}{\alpha_0} a_i + a_{11} \frac{\alpha}{\alpha_0} + a_{12} \frac{\alpha}{\alpha_0} \frac{2x}{L} + \right. \\ \left. + a_{13} \frac{\alpha}{\alpha_0} \frac{16x(L/2-x)}{L^2} \right] + (1-C_1) \left\{ \left(1 - \frac{b}{b_0}\right) \left[ a_{11} + \frac{2x}{L} a_{12} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{16x(L/2-x)}{L^2} a_{13} \right] + \frac{4b(b_0-b)}{b_0^2} \left[ a_{14} + \frac{2x}{L} a_{15} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{16x(L/2-x)}{L^2} a_{16} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (I)$$

В расчетах одной неизвестной является реакция промежуточных опор  $r(x)$  (если последние имеются) на бортовые элементы. Опорная реакция  $r(x)$  зависит от геометрии и нагрузки оболочки и должна быть такой, чтобы бортовой элемент не ис-

кривился в вертикальном направлении. В любом поперечном сечении  $x$  предполагается, что приращение сдвигающих сил в пределах арки бортовых элементов имеет вид

$$\xi_A = (1 - C_1) \left\{ \left( 1 - \frac{b}{b_0} \right) \left[ a_{I1} + \frac{2x}{L} a_{I2} + \frac{16x(L/2 - x)}{L^2} a_{I3} \right] \right\}. \quad (2)$$

Обобщенные выражения для аппроксимации приращения сдвигающих сил для всех рассматриваемых вариантов формы оболочек, опирания, трещин и упругих свойств материала представляются в виде:

$$\begin{aligned} \xi(x, s) = C_1 \left\{ C_2 \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\alpha\pi}{\varphi} a_i + [C_2 \frac{\alpha}{\varphi} + (1 - C_2)] (a_{I1} + F_7 a_{I2} + \right. \\ \left. + F_2 a_{I3}) \right\} + (1 - C_1) \left\{ [K_5(1 - C_2) + C_2(K_5 + K_6)(1 - \frac{b}{b_0})] \cdot \right. \\ \left. \cdot (a_{I1} + F_7 a_{I2} + F_2 a_{I3}) + K_5 C_2 \frac{4b(b_0 - b)}{b_0^2} (a_{I4} + F_7 a_{I5} + F_2 a_{I6}) \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Продольные нормальные усилия определяются при помощи формулы:

$$\begin{aligned} T_x(x, s) = C_1 C_2 \left[ \frac{1}{\varphi R_2} (F_1 a_{I1} + F_3 a_{I2} + F_4 a_{I3}) + \right. \\ \left. + F_1 \sum_{i=1}^n \frac{i\pi}{R_2 \varphi} \cos \frac{i\pi\alpha}{\varphi} a_i + T_0 \right] + \\ + (1 - C_1) C_2 \left[ -\frac{1}{b_0} (F_1 a_{I1} + F_3 a_{I2} + F_4 a_{I3}) + \right. \\ \left. + K_5 \frac{4b_0 - 8b}{b_0^2} (F_1 a_{I4} + F_3 a_{I5} + F_4 a_{I6}) + T_{0A} \right] = \\ = C_1 C_2 \left( \sum_{i=1}^n \bar{T}_i a_i + \bar{T}_0 \right) + (1 - C_1) C_2 \left( \sum_{i=1}^n \bar{T}_{iA} a_i + \bar{T}_{0A} \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Продольные нормальные условия  $\bar{N}_{A2}$  в арматурном стрингере определяются в виде

$$\begin{aligned} N_{A2}(x) = (K_6 - 1) [(F_1 a_{I1} + F_3 a_{I2} + F_4 a_{I3}) K_7 + \\ + (1 - K_7) F_1 \frac{8R_2 F'_a}{L^2}] = (K_6 - 1) \left( \sum_{i=1}^n \bar{N}_{A2i} a_i + N_{A20} \right), \quad (5) \end{aligned}$$

где  $F'_a$  - площадь верхнего арматурного стрингера;  
 $R_a$  - расчетное сопротивление арматуры.

Сдвигающие силы  $S$  в любом поперечном сечении определяются при помощи формулы

$$\begin{aligned}
S(x,s) &= C_1 \left[ C_2 F_9 \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\alpha\pi}{\varphi} a_i + (C_2 \frac{\alpha}{\varphi} + 1 - C_2) \cdot \right. \\
&\quad \cdot (F_9 a_{I1} + F_5 a_{I2} + F_6 a_{I3}) \left. + (1 - C_1) [K_5(1 - C_2) + \right. \\
&\quad + C_2(K_5 + K_6)(1 - \frac{b}{b_0})(F_9 a_{I1} + F_5 a_{I2} + F_6 a_{I3}) + \\
&\quad + C_2 K_5 \frac{4b(b_0 - b)}{b_0^2} (F_9 a_{I4} + F_5 a_{I5} + F_6 a_{I6}) \left. \right] = \\
&= C_1 \left( \sum_{i=1}^n \bar{S}_i a_i + \bar{S}_0 \right) + (1 - C_1) \left( \sum_{i=1}^n \bar{S}_{iA} a_i + \bar{S}_{0A} \right). \quad (6)
\end{aligned}$$

Поперечные изгибающие моменты  $m = m_2$  определяются при помощи формулы

$$\begin{aligned}
m = m_2(x,s) &= M_0 + (a_{I1} + F_7 a_{I2} + F_2 a_{I3}) m_I + \\
&\quad + (a_{I4} + F_7 a_{I5} + F_2 a_{I6}) m_{II} + \sum_{i=1}^n m_i a_i + \\
&\quad + (F_1 a_{I1} + F_3 a_{I2} + F_4 a_{I3}) m_{IR} + F_1 \sum_{i=1}^n m_{iR} a_i + \\
&\quad + (1 - K_6) \left[ K_7 \frac{1}{R_{A2}} (F_1 a_{I1} + F_3 a_{I2} + F_4 a_{I3}) + \right. \\
&\quad + (1 - K_7) F_1 \frac{8 R_0 F'_a}{R_{A2} L^2} \left. \right] m_A + T_0 m_{IR} + T_{0A} \frac{b_0}{R_1} m_A + \\
&\quad + \frac{K_8}{R_1} (F_1 a_{I1} + F_3 a_{I2} + F_4 a_{I3}) m_A + X_1 m_b + X_2 = \\
&= \sum_{i=1}^n \bar{m}_i a_i + \bar{M}_0. \quad (7)
\end{aligned}$$

Формулы для расчета  $m_I, m_{II}, m_i, m_{IR}, m_{iR}, m_A, m_b$  и  $\bar{M}_0$  представлены в [1].

Поперечные нормальные силы  $T_y$  в отдельных точках поперечного сечения определяются при помощи условия равновесия всех влияющих сил в направлении касательной.

Реакции на промежуточные вертикальные опоры определяются при помощи формулы:

$$r(x) = F_9 a_{I4} + F_5 a_{I5} + F_6 a_{I6}. \quad (8)$$

Для этой задачи применяются обозначения

$$a_{14} = r_1, \quad a_{15} = r_2, \quad a_{16} = r_3.$$

Для определения внутренних сил  $N_{A1}$  в продольных тьяках в продольном бортовом элементе применяем условия равновесия изгибающих моментов относительно оси конька оболочки в середине продольного пролета ( $x = L/2$ ):

$$\frac{\bar{q}L^2}{8} - N_{A1} \cdot h + \int_0^{s_0+b_0} T_x y' ds = 0 \quad (9)$$

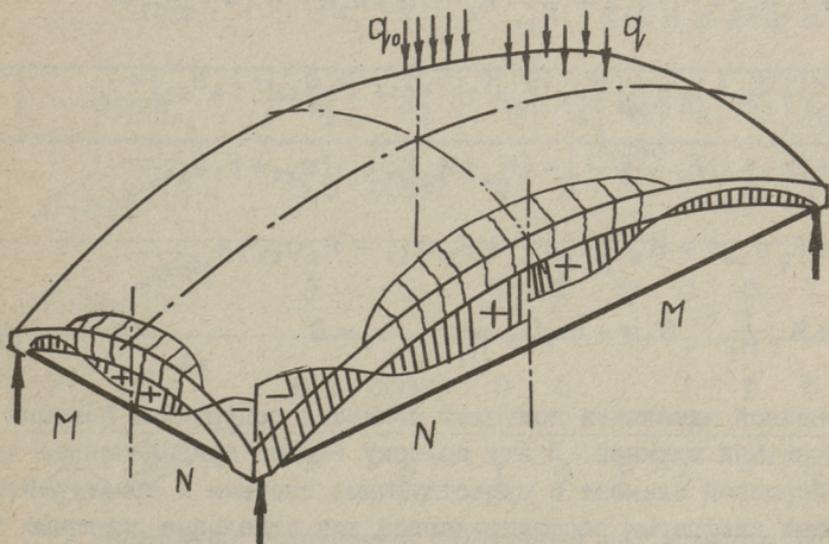
$$N_{A1} = \frac{\frac{\bar{q}L^2}{8} + \int_0^{s_0+b_0} T_x y' ds}{h},$$

где  $\bar{q} = s_0 q + q_0$ ;

$y'$  - расстояние точек поперечного сечения от горизонтальной оси 1-1.

Выразим внутренние силы в тьяках при помощи независимых параметров сдвигающих сил в виде

$$N_{A1} = \bar{N}_{A1} + \sum_{i=1}^n \bar{N}_{A1i} a_i. \quad (10)$$



Фиг. 2. Принципиальное распределение внутренних сил в бортовых элементах и зоны основных поперечных (относительно бортовых элементов) трещин.

Распределение внутренних сил в торцевых диафрагмах [2] зависит от геометрических размеров, расположения плиты относительно арки и от свойств тяжей. Нагрузкой являются сдвигающие усилия. Характерной чертой рассматриваемых оболочек является, что продольные и поперечные элементы в средних зонах растянуты, а у опор сжаты (см. фиг. 2).

При помощи численного интегрирования можно учитывать изменяющиеся упругие свойства (от трещин и т.д.) в разных сечениях бортовых элементов и торцевых диафрагм.

Условия вертикального равновесия единичной полосы выписываются для любого поперечного сечения в виде

$$\begin{aligned}
 & R_2 \alpha_0 q + q_0 + R_2 \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1} \sin \varphi}{\frac{i\pi}{\varphi} - \frac{\varphi}{i\pi}} a_i + K_4 (1 - K_7) b_0 (a_{I1} + \\
 & + F_7 a_{I2} + F_2 a_{I3}) + [R_2 (1 - \cos \alpha_0) - R_2 (1 - \cos \varphi) + \\
 & + R_2 \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} - \cos \varphi \right)] (a_{I1} + F_7 a_{I2} + F_2 a_{I3}) + \frac{\sin \varphi}{R_1 \varphi} (F_1 a_{I1} + \\
 & + F_3 a_{I2} + F_4 a_{I3}) + \frac{1}{R_{A1}} (K_6 - 1) (1 - K_7) (F_4 a_{I1} + F_3 a_{I2} + \\
 & + F_4 a_{I3}) + \frac{1}{R_{A2}} (K_6 - 1) [K_7 (F_1 a_{I1} + F_3 a_{I2} + F_4 a_{I3}) + \\
 & + (1 - K_7) F_1 \frac{8 R_0 A_2}{L^2}] + (K_4 + K_2 K_5 b_0) (a_{I4} + F_7 a_{I5} + \\
 & + F_2 a_{I6}) + K_8 \frac{1}{R_1} (a_{I1} + F_7 a_{I2} + F_2 a_{I3}) + \\
 & + K_7 \frac{1}{R_1} \hat{T}_0 R_2 \varphi + K_7 C_2 \frac{1}{R_1} T_{0A} b_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{II}$$

Конечной единичной полоской является поперечная полоска с единичной шириной. В эту полоску входит криволинейная часть и бортовой элемент с существующими опорами и арматурой. Торцевые диафрагмы рассматриваются как отдельные конечные элементы.

Условие равенства продольных деформаций по линии соединения криволинейной части и бортового элемента в любом поперечном сечении  $x$  имеет вид:

$$\frac{1}{S_0}(F_1 a_{I1} + F_3 a_{I2} + F_5 a_{I3}) + \sum_{i=1}^n \frac{i\pi}{S_0} (-1)^i F_4 a_i =$$

$$= -K_6 \frac{\delta}{b_0 \delta_0} (F_1 a_{I1} + F_3 a_{I2} + F_5 a_{I3}) + K_5 K_6 \frac{4\delta}{b_0 \delta_0} \cdot$$

$$\cdot (F_1 a_{I4} + F_3 a_{I5} + F_5 a_{I6}). \quad (I2)$$

Левая часть уравнения описывает продольные напряжения в криволинейной части оболочки, а правая часть - напряжения у верхнего края продольного бортового элемента.

Функции в формулах (I) - (I2) можно определять следующим образом:

$$F_1 = \frac{xL}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad F_2 = \frac{16x}{L^2} \left(\frac{L}{2} - x\right), \quad F_3 = \frac{Lx}{4} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x^2}{L^2}\right),$$

$$F_4 = \frac{Lx}{3} \left(1 - 4 \frac{x^2}{L^2} + 4 \frac{x^3}{L^3}\right), \quad F_5 = \frac{L}{4} \left(1 - 4 \frac{x^2}{L^2}\right),$$

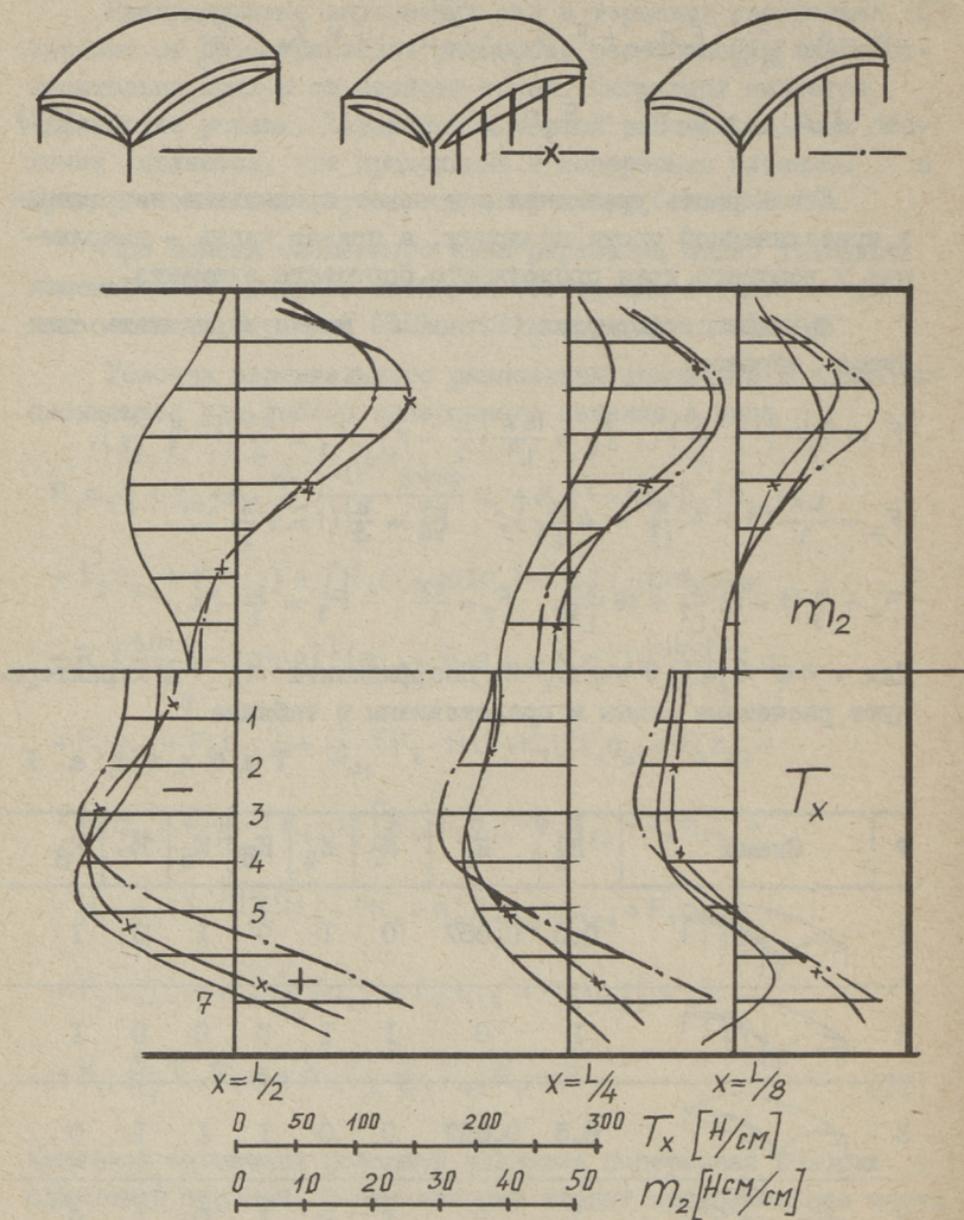
$$F_6 = \frac{L}{3} \left(1 - 12 \frac{x^2}{L^2} + 16 \frac{x^3}{L^3}\right), \quad F_7 = \frac{2x}{L}, \quad F_9 = \frac{L}{2} - x.$$

Для  $\alpha < \varphi$   $C_2 = 1$ ,  $\alpha \geq \varphi$   $C_2 = 0$ . Коэффициенты  $K_1 - K_8$  характеризуют расчетные схемы и представлены в таблице I.

Т а б л и ц а I

№	Схема	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$	$K_8$
1		0,5	0,667	0	I	0	I	0	I
2		I	0	I	I	0	0	0	I
3		0,5	0,667	0	0	I	I	I	0
4		I	0	I	0	I	0	I	0

В выражениях приращений сдвигающих сил имеются  $n$  независимых параметров  $a_i$  и 6 зависимых параметров  $a_{I1} - a_{I6}$ , которые исключаются вследствие трех условий вертикального равновесия и трех условий непрерывности продольных деформаций в поперечных сечениях  $x = 0 + \Delta x$ ,  $L/4$ ,  $L/2$ .



Фиг. 3. Распределение внутренних сил  $T_x$  и  $m_2$  в отдельстоящих оболочках  $L = 1200$  мм,  $l = 600$  мм,  $R_2 = 523$  мм,  $\delta = 5$  мм,  $R_1/R_2 = 5$ , диаметр троса 7 мм, нагрузка  $q = 4$  кПа.  
 Условные обозначения:  
 1 - оболочка со свободными бортовыми элементами,  
 2 - оболочка с вертикально подпертой арочной диафрагмой,  
 3 - оболочка с вертикально подпертой диафрагмой типа криволинейного бруса.

Условия равенства продольных деформаций в оболочках с поперечными трещинами отпадают, и зависимые параметры  $\sigma_{I1}$  -  $\sigma_{I3}$  находят из трех условий вертикального равновесия.

Независимые параметры приращения сдвигающих сил  $\sigma_i$  определяем в соответствии с вариационным методом Кастилиано-Ритца из условия минимума потенциальной энергии всей системы [3].

По результатам теоретических и экспериментальных исследований можно сделать вывод (фиг. 3), что в оболочках со свободными продольными бортовыми элементами имеется значительная седловидность. При уменьшении отношения  $R_1/R_2$  (при этом увеличивается общая высота конструкции) плечо продольных внутренних сил (в пределах  $0,7 - 0,8 h$ ) не увеличивается и внутренние силы в тязях не уменьшаются. Тяжами воспринимается около 90 % продольного растяжения, 10 % воспринимается аркой. Эти величины изменяются соответственно с изменением отношения  $R_1/R_2$ . В продольных и поперечных арках действуют усилия растяжения и положительные изгибающие моменты (см. фиг. 2). В поперечных сечениях  $x=L/8$  арка сжата.

При сравнении поперечных изгибающих моментов в разных поперечных сечениях в продольном направлении, можно отметить и влияние компонента  $T_x/R_1$  на внутренние силы. В поперечных сечениях в середине продольного пролета существуют только отрицательные поперечные изгибающие моменты, а в сечениях вблизи торцевых диафрагм имеются и значительные положительные моменты. Это свидетельствует о работе конструкции как оболочки.

Интересные результаты получены при промежуточном вертикальном опирании продольных бортовых элементов. Если бортовой элемент в виде двухшарнирной арки, с отношением радиусов  $R_1/R_2 = 5$ , на промежуточные опоры передается 45-47 % от общей нагрузки, при  $R_1/R_2 = 10$  около 35 %. Если бортовой элемент в виде криволинейного бруса и  $R_1/R_2 = 5$ , на промежуточные опоры передается 50-52 % от нагрузки, при  $R_1/R_2 = 10$  около 37 %. При опирании арочной диафрагмой тяз практически выключается из работы. Зона растяжения в плите расширяется, соответственно увеличивается и зона возможных поперечных трещин. Поперечные изгибающие моменты в основном положительны.

По принципу Сен-Венана напряженное состояние в угловых зонах не подчиняется вышеописанным закономерностям.

## Л и т е р а т у р а

1. Т я р н о Ю.А. Расчет квазицилиндрических оболочек средней длины. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1974, № 357.

2. Л а у л Х.Х., Т я р н о Ю.А. О расчете арочных диафрагм оболочек. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1976, № 410.

3. Т я р н о Ю.А. О распределении напряжений в оболочках положительной гауссовой кривизны. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1982, № 532.

Ü. Tärno

### About Quasicylindrical Reinforced Concrete Shells with the Arch-like Edgebeams

#### Summary

The real edge conditions of the so called quasicylindrical shell are influenced by the differences of the radii of curvature in both directions ( $R_1/R_2 = 5...10$ ) and of the length ( $L/l = 2...3$ ). On the transverse edges the edge conditions by Navier are assumed, whereas on the longitudinal edges, the real edge conditions with vertical support forces are considered. For the analysis of inner forces of a quasicylindrical shell of middle length the modified method of approximation of shear flow has been used taking into account the direction change of the membrane longitudinal forces. For eliminating some parameters of shear forces the equilibrium and the longitudinal stress equal conditions can be used. The remaining parameters are found using the equations for the minimum of potential energy of the shell. The graphs of inner forces for positive Gaussian curvature quasicylindrical shells with arch-like edgebeams with various edge conditions are presented. It is possible to use the basic computing scheme for shells of different materials and cross-sections. There are some modifications for the equations taking into account the additional conditions on the edge beam. The method tries to take into account as much as possible the peculiarities of reinforced concrete.

## РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТЕНТОВОЙ ПАНЕЛИ С ГИБКИМ КОНТУРОМ ПО МЕТОДУ РАЗЛОЖЕНИЯ НАГРУЗОК

### Введение

В последние годы в СССР и за рубежом все более актуальным становится проектирование и возведение тентово-вантовых покрытий. Объясняется это тем, что последние имеют ряд характерных черт, которые в определенных условиях превращаются в преимущества по сравнению с другими типами конструкций. Наряду с достоинствами тентовых сооружений при возведении необходимо учитывать и их недостатки. С подробным перечнем и анализом тех или иных свойств можно ознакомиться по литературе ([1], [2], [3], [4] и др.).

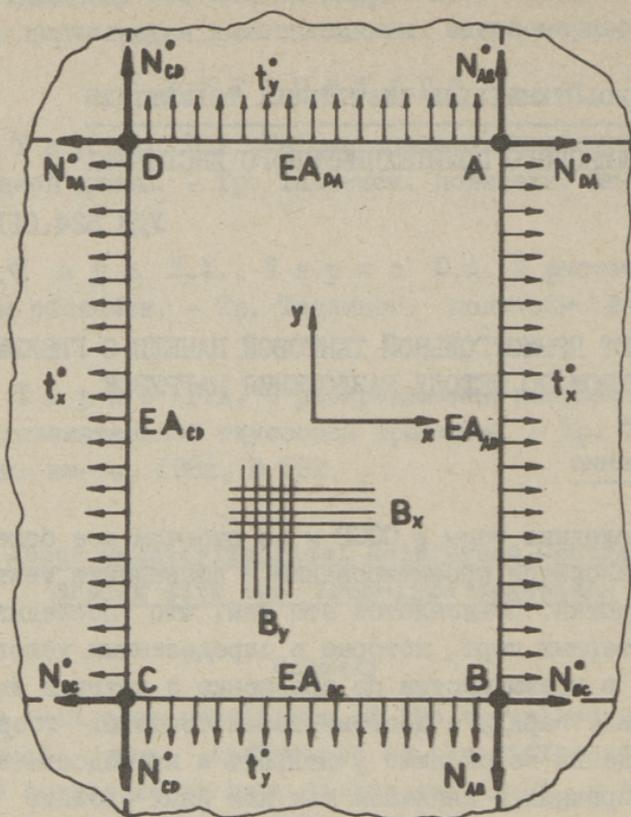
Материалы мягких оболочек бывают разные. Основное количество составляют сотканые ткани, которые и рассматриваются в рамках данной статьи.

Как показали испытания модели тентового покрытия и образцов из парусного лавсана [4], а также выводы исследований таких авторов как В.Н. Гордеев [5], Д. Мальколм и П. Глокнер [6], влияние тангенциальных напряжений в сотканых тканях ничтожно мало и способность восприятия продольных усилий в направлениях основы и утка значительно больше по сравнению с другими направлениями.

Учитывая вышеизложенное, предлагается инженерный метод расчета прямоугольной плоской тканевой панели с вантовым контуром.

### Расчетная схема

Имеется дело с тентово-вантовым покрытием, где в ненагруженном состоянии ванты располагаются перпендикулярно



Фиг. 1. Расчетная схема.

по отношению к друг другу и в узлах образуемой сети оперты на колонны неподвижно. Между вантами натянута сотканная ткань, волокна которой ориентированы в направлениях вант. После натяжения ткань закреплена к вантам. Из образуемой системы прямоугольных тканевых панелей под осмотр берется одна внутренняя панель, при которой можно считать, что ванты контура не получают горизонтальных перемещений.

На фиг. I изображена расчетная схема описываемой не-нагруженной панели.

$$N_{AB}^{\circ} = N_{CD}^{\circ}, N_{BC}^{\circ} = N_{CA}^{\circ} - \text{преднапряжения контурных вант};$$

$$t_x^{\circ}, t_y^{\circ} - \text{преднапряжения ткани};$$

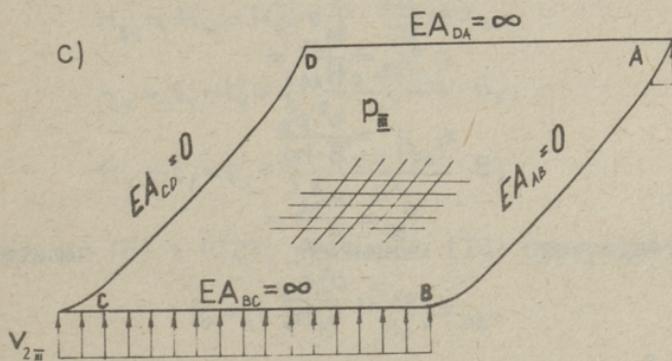
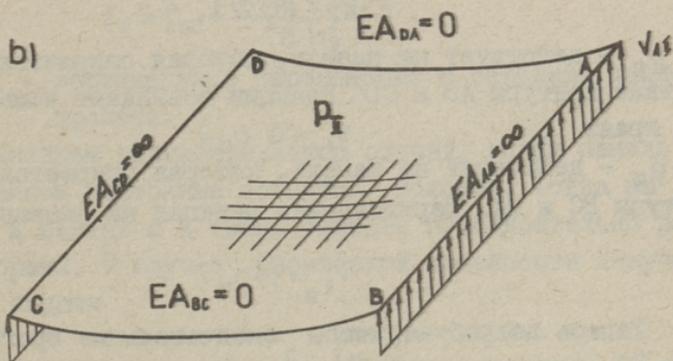
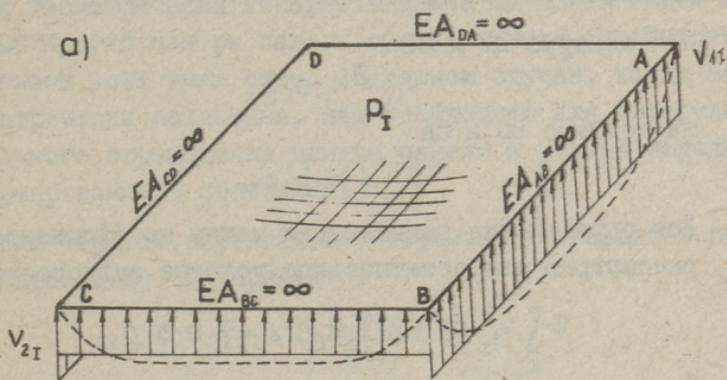
$$EA_{AB} = EA_{CD}, EA_{BC} = EA_{CA} - \text{жесткость вант};$$

$$B_x, B_y - \text{жесткость ткани.}$$

Считаем, что на панель действует равномерно распределенная вертикальная нагрузка  $p$ , Н/м.

Дальше разложим нагрузку между тремя схемами, которые изображены на фиг. 2.

$$p = p_I + p_{II} + p_{III} \quad (I)$$



Фиг. 2. Схемы разложения нагрузок.

$p_I$  - действует на панель (вернее на панели, так как смотрится внутренняя панель), контур которой бесконечно жесткий. Близко к реальному форма эпюры вертикальной реакции контура изображена на фиг. 2,а прерывистой линией. Все же для упрощения расчетов считаем, что реакция распределена равномерно (сплошная линия)

на контуре АВ и CD

$$v_{1I} = k_1 \cdot a \cdot p_I \quad (2)$$

на контуре ВС и СА

$$v_{2I} = k_2 \cdot b \cdot p_I. \quad (3)$$

Для определения зависимости между коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  рассмотрим макростатическое условие равновесия

$$2 \cdot \int_L v_{1I} \cdot dy + 2 \cdot \int_L v_{2I} \cdot dx = 2 \cdot a \cdot b \cdot p_I. \quad (4)$$

В данном случае

$$k_1 + k_2 = 1, \quad (5)$$

$p_{II}$  - действует на панель, которая опирается только на жесткие контуры АВ и CD. Реакции возникают лишь на названных краях

$$v_{1II} = a \cdot p_{II}, \quad (6)$$

$p_{III}$  - действует на панель, которая опирается на жесткие контуры ВС и СА. Вертикальная реакция на названные края

$$v_{2III} = b \cdot p_{III}. \quad (7)$$

Теперь потребуем, чтобы окончательные прогибы контуров АВ и ВС равнялись соответственно прогибам панели под III и под II удельной нагрузкой.

$$f_{AB} = \frac{M_{AB}^{\delta}}{H_{AB}} = \quad (8)$$

$$= \frac{b^2 \cdot p_{III}}{8 \cdot h_y} \quad (9)$$

$$f_{BC} = \frac{M_{BC}^{\delta}}{H_{BC}} = \quad (10)$$

$$= \frac{a^2 \cdot p_{II}}{8 \cdot h_x} \quad (11)$$

$M_{AB}^{\delta}, M_{BC}^{\delta}$  - моменты изгиба простой балки пролетов АВ и ВС от реальной нагрузки;

$h_x, h_y$  - распоры ткани;

$N_{AB}, N_{BC}$  - распоры контурных вант.

$$M_{AB}^{\delta} = \frac{b^2}{8} \cdot v_{I} + \frac{b^2}{8} \cdot v_{II} = \frac{b^2}{8} \cdot a \cdot (k_1 \cdot p_I + p_{II}) \quad (I2)$$

$$M_{BC}^{\delta} = \frac{a^2}{8} \cdot v_{2I} + \frac{a^2}{8} \cdot v_{2III} = \frac{a^2}{8} \cdot b \cdot (k_2 \cdot p_I + p_{III}). \quad (I3)$$

При геометрически линейной задаче мы можем найти окончательный прогиб центра панели суммированием соответственных прогибов всех трех схем. В данном случае, когда задача геометрически нелинейна, нам необходимо для определения вертикального перемещения центра панели и усилий исходить из деформированного состояния.

Таким образом, вертикальное перемещение середины панели по направлению  $x$  выражается

$$f_0 = \bar{f}_{AB} + \frac{(k_1 \cdot p_I + p_{II}) \cdot a^2}{8 \cdot h_x} \quad (I4)$$

и по направлению  $y$

$$f_0 = \bar{f}_{BC} + \frac{(k_2 \cdot p_I + p_{III}) \cdot b^2}{8 \cdot h_y}, \quad (I5)$$

$\bar{f}_{AB}, \bar{f}_{BC}$  - вертикальное перемещение в середине данного пролета.

В дальнейшем рассматривается случай, когда панель в деформированном состоянии остается пологой. Тогда мы можем усилия в вантах и в ткани считать приблизительно равными их распорам. В случае физической линейности получаем для данной задачи

$$N_{AB} \approx N_{AB} = N_{AB}^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{\bar{f}_{AB}^2}{b^2} \cdot EA_{AB}, \quad (I6)$$

$$N_{BC} \approx N_{BC} = N_{BC}^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{\bar{f}_{BC}^2}{a^2} \cdot EA_{BC}, \quad (I7)$$

$$h_y \approx t_y = t_y^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{(f_0 - \bar{f}_{BC})^2}{b^2} \cdot B_y, \quad (I8)$$

$$h_x \approx t_x = t_x^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{(f_0 - \bar{f}_{AB})^2}{a^2} \cdot B_x. \quad (I9)$$

Учитывая (8) и (I2), уравнение (I4) превращается в вид

$$f_0 = \left(1 + \frac{a}{b^2} \cdot \frac{N_{AB}}{h_x}\right) \cdot \bar{f}_{AB}. \quad (20)$$

Заменяя  $N_{AB}$  и  $h_x$  уравнениями (I6) и (I9), получим

$$f_0 = \left[ 1 + \frac{a}{b^2} \cdot \frac{N_{AB}^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{\bar{f}_{AB}^2}{b^2} \cdot EA_{AB}}{t_x^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{(f_0 - \bar{f}_{AB})^2}{a^2} \cdot B_x} \right] \cdot \bar{f}_{AB} \quad (21)$$

Такие же замены в формуле (I5), используя (I0), (I3) и (I7), (I8), дают

$$f_0 = \left( 1 + \frac{b}{a^2} \cdot \frac{H_{BC}}{h_y} \right) \cdot \bar{f}_{BC} \quad (22)$$

откуда

$$f_0 = \left[ 1 + \frac{b}{a^2} \cdot \frac{N_{BC}^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{\bar{f}_{BC}^2}{a^2} \cdot EA_{BC}}{t_y^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{(f_0 - \bar{f}_{BC})^2}{b^2} \cdot B_y} \right] \cdot \bar{f}_{BC} \quad (23)$$

Далее из (II) получаем

$$P_{II} = \frac{8}{a^2} \cdot h_x \cdot \bar{f}_{BC} \quad (24)$$

и из (9)

$$P_{III} = \frac{8}{b^2} \cdot h_y \cdot \bar{f}_{AB} \quad (25)$$

Используя (8), (I2), (I0), (I3), (II), (9) и (5)

$$p_I = \frac{8}{l} \cdot \left[ \left( \frac{H_{BC}}{a^2 \cdot b} - \frac{h_x}{a^2} \right) \cdot \bar{f}_{BC} + \left( \frac{H_{AB}}{a \cdot b^2} - \frac{h_y}{b^2} \right) \cdot \bar{f}_{AB} \right] \quad (26)$$

Подставляя (24), (25) и (26) в формулу (I), получим:

$$\frac{8}{a \cdot b^2} \cdot H_{AB} \cdot \bar{f}_{AB} + \frac{8}{a^2 \cdot b} \cdot H_{BC} \cdot \bar{f}_{BC} = p, \quad (27)$$

откуда, используя формулы (I6), (I7), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{8}{a \cdot b^2} \cdot \left( N_{AB}^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{\bar{f}_{AB}^2}{b^2} \cdot EA_{AB} \right) \cdot \bar{f}_{AB} + \\ & + \frac{8}{a^2 \cdot b} \cdot \left( N_{BC}^0 + \frac{8}{3} \cdot \frac{\bar{f}_{BC}^2}{a^2} \cdot EA_{BC} \right) \cdot \bar{f}_{BC} = p. \end{aligned} \quad (28)$$

Получена нелинейная система уравнений из (21), (23) и (28), где искомыми являются перемещения  $\bar{f}_{AB}$ ,  $\bar{f}_{BC}$  и  $f_0$ . Можно пользоваться системой уравнений (20), (22), (27), (I6), (I7), (I8) и (I9). Там искомыми являются кроме названных и усилия, но сами формулы окажутся более простыми. Обе системы просто решаются на ЭВМ, используя стандартные программы.

## Л и т е р а т у р а

1. О т т о Ф., Ш л е й е р Ф.-К. Тентовые и вантовые строительные конструкции. М., 1970.

2. Р ю л е Т. Пространственные покрытия (конструкции и методы возведения). М., 1974, том. 2.

3. М р а ч к о в с к и й Л.И. Тентовые сооружения.- В кн.: Проектирование и расчет строительных конструкций. Мат. пост. семинара (ЛДНП. Л., 1981, с. 25-30.

4. Н й г е р К.П., О р а с Р.Э., Т а л ь в и к А.И. Об исследовании работы тенто-вантового покрытия.-Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1982, № 527, с. 77-85.

5. Г о р д е е в В.Н. Уравнения для расчета тканевых оболочек. - Прикладная механика, Киев, 1962, том. 8, вып. 6.

6. М а л с о л м D.I., G l o c k n e r P.G. Material Tests on Covering Fox Airsupported Greenhouse. - Proceedings of the IASS Symposium, Oulu, 1980, p. 565-574.

R. Oras

### Analysis of a Tetragonal Fabric Panel with Elastic Contour Using Load Separation Method

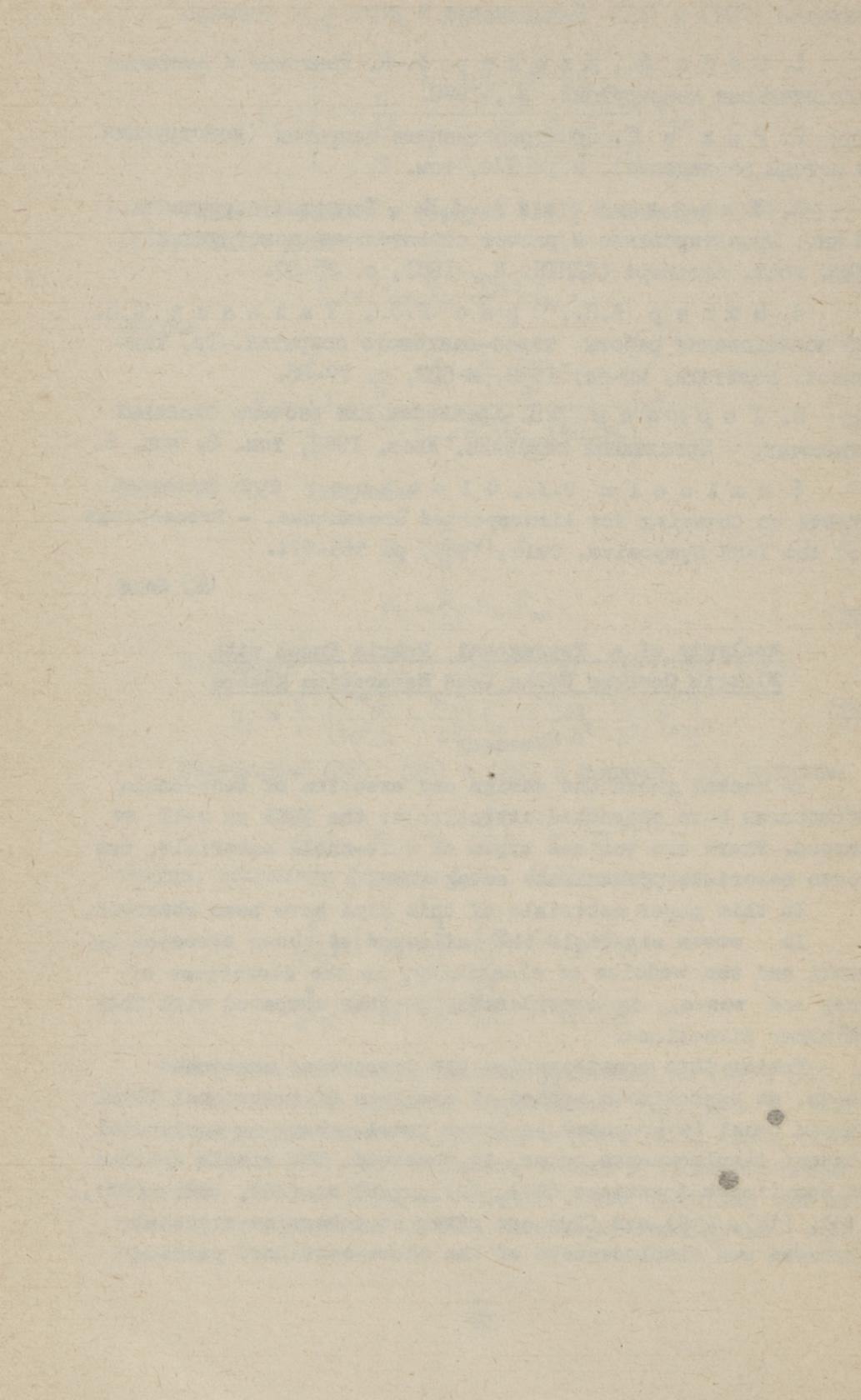
#### Summary

In recent years the design and erection of tent-cable structures have attracted attention in the USSR as well as abroad. There are various types of soft-shell materials, but woven materials predominate among them.

In this paper materials of this kind have been observed.

In woven materials the influence of shear stresses is small and the modulus of elasticity, in the directions of warp and weave, is considerably greater compared with that in other directions.

Taking into consideration the properties mentioned above, an approximate method of analysis of tetragonal level fabric panel is proposed. An inner panel, where no horizontal contour displacements occur, is observed. The simple systems of non-linear equations (21), (23), (28) or (20), (22), (27), (16), (17), (18) and (19) are given to determine extremal stresses and displacements of the above-mentioned panel.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕРЕВЯННОГО ГИПАРА, АРМИРОВАННОГО ВАНТОВОЙ СЕТЬЮ

### Введение

В течение последних 12 лет в Эстонской ССР построен ряд покрытий с деревянными гипарами.

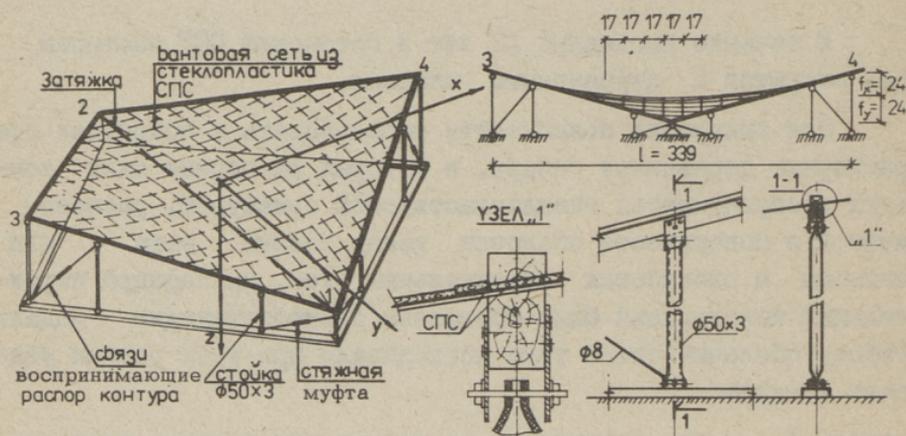
Для выявления возможности использовать в покрытиях безраспорные деревянные гипары, в которых распорные силы контура воспринимаются стеклопластиковой арматурой, расположенной в поверхности оболочки между слоями реек или связями в плоскостях вертикальных стен, на кафедре строительных конструкций были построены соответствующие модели. Работу оболочки этого типа исследовали при трех разных условиях контура:

- модель I - при восприятии распорных сил контура горизонтальной затяжкой;
- модель II - при восприятии распорных сил контура со связями, расположенных в плоскостях вертикальных стен, одновременно ограничивая вертикальные перемещения контура;
- модель III - свободно в горизонтальном направлении деформирующий контур.

### I. Геометрия и изготовление моделей

В плане квадратные модели гипаров в масштабе 1:100 имели размеры 2,4x2,4, подъем бортового элемента 1/5, т.е. 48 см (фиг. I). Криволинейная часть оболочки выполнена из двух слоев реек с поперечным сечением 3x24 мм, между которыми расположена перекрестная сетка из ленточного стекло-

пластика (СПС) сечением  $1 \times 19$  мм, модулем упругости  $E = 50000$  МПа и временным сопротивлением  $\sigma_{вр} = 1200$  МПа. Шаг вант  $17,0$  см. Нижний слой реек и СПС ориентирован параллельно главной выпуклой диагонали. Верхний слой реек и СПС был ориентирован перпендикулярно другому слою. Слои реек образовали карниз крыши вылетом от оси бортового элемента  $12$  см. Рейки соединены между собой клеем ДФК-14 (Фенолалкилрезорцино-формальдегидная смола с отвердителем (параформа 87 %, древесная мука 13 %) в соотношении 100:12). Рейки прижаты гвоздевой прессовкой, один гвоздь  $\phi 1,0$  мм на  $4 \text{ см}^2$  площади оболочки.



Фиг. 1. Общий вид и детали модели.

Бортовой элемент состоит из двух брусков: нижнего сечением  $4 \times 6$  см и верхнего -  $4 \times 1,5$  см (фиг. 1). Крепление реек криволинейной части к бортовому элементу осуществлено при помощи клея ДФК-14 и гвоздей  $\phi 1,5$  мм. Верхняя часть бортового элемента соединена с поверхностью оболочки и нижней частью бортового элемента клеем и шурупами  $40 \times 4$ , шагом  $14$  см. Бортовые элементы моделей в нижних углах соединены при помощи металлических башмаков и опираются через стальные шарики на стенд. На верхних углах бортовые элементы соединены снизу металлической пластинкой.

Т а б л и ц а I

№ модели	Обозначение	Размеры плана, м	Подъем контура	$\frac{f_x}{f_y}$	$\frac{f_x}{l}$ $\frac{f_y}{l}$	Сечение бортового элемента, см	Сечение досок, см	Затяжка, связи
1. I	x-x-x	2,4x2,4	48	1,0	1/14	4x8,2	0,3x2	∅8, 12
2. III	o-o-o	2,4x2,4	48	1,0	1/14	4x8,2	0,3x2	-
3. II	————	2,4x2,4	48	1,0	1/14	4x8,2	0,3x2	связи ∅8

### Модель I

Разнообразие модели I заключается в том, что она опирается в 4-х углах на стойки, а нижние опоры контура соединены между собой горизонтальной затяжкой из Ст3 диаметром 8 или 12 мм. В остальных точках горизонтальные и вертикальные перемещения контура не ограничены.

### Модель II

Оболочка была установлена на 12 стойках из трубы ∅50x3, которые по обоим концам имели шарнирное прикрепление к контуру и к нижней раме, которая была закреплена в пол. В плоскостях стен между стойками были установлены 8 преднатяженных связей ∅ 8 мм. При этом применяли различные величины усилия преднатяжения.

### Модель III

Оболочка опирается в четырех углах на стойки. В остальных точках вертикальные перемещения, а горизонтальные перемещения по всему контуру не ограничены затяжками или другими связями.

## 2. Испытание моделей

### 2.1. Нагружение

Для нагружения применяли распределительную рычажную систему (фиг. 2). При испытании моделей I и II последние нагружались вертикальной равномерно распределенной по всей поверхности и несимметрической равномерно распределенной статической нагрузкой. Этапы нагружения 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 кН/м<sup>2</sup>. Модель III нагружалась вертикальной равномерно распределенной по всей поверхности статической нагрузкой 0,5; 0,75; 1,0 кН/м<sup>2</sup>. Для определения опорных реакций применялось специальное приспособление.

### 2.2. Измерение деформации

Деформации измерялись электрическими тензорезисторами базой 20 мм, установленными согласно фигуре 3, и измерителем деформации ЦТМ-5. Общее количество тензорезисторов 224 шт. Перемещения криволинейной части, бортовых элементов и углов оболочки измерялись при помощи прогибомеров Максимова (35 шт.) и индикаторов часового типа (16 шт.).

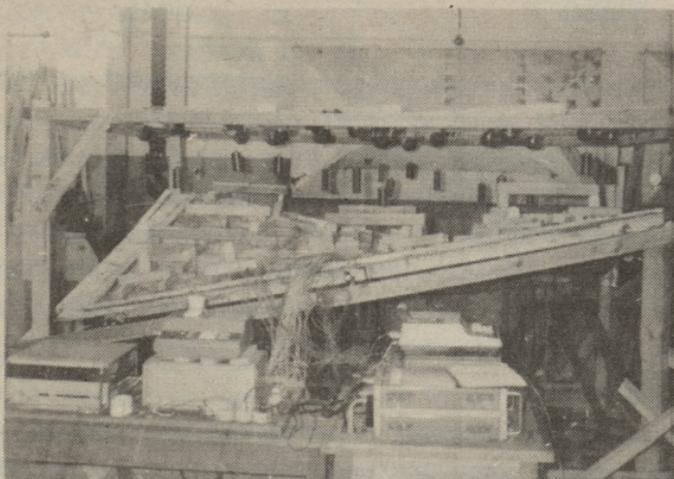
## 3. Результаты испытаний

### 3.1. Модель I

Отношение суммарной равномерно распределенной нагрузки по всей поверхности и усилия в затяжке  $\kappa = N_{\text{зат}} / \sum q_i a^2 = 0,9$  в 1,7 раза меньше, чем в оболочках без вантовой сети ( $\kappa = 1,5$ ), что значительно упрощает конструирование главных опорных узлов.

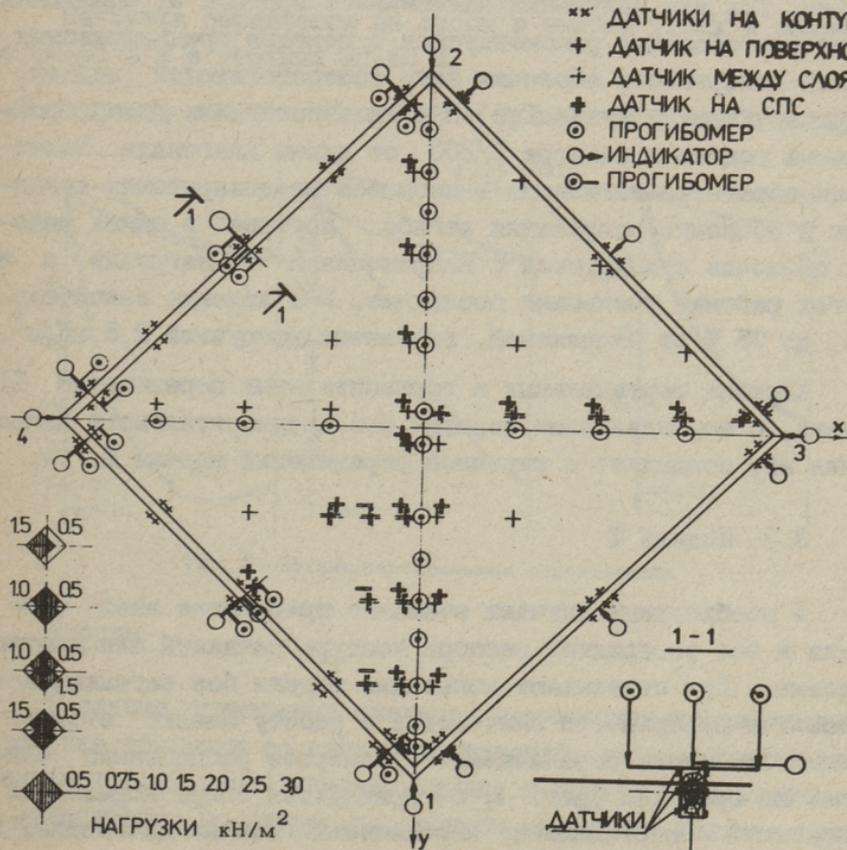
Нагрузка передается на опоры, в основном, в двух нижних углах (примерно 90-95 % от всей нагрузки).

Под нагрузкой 2,0 кН/м<sup>2</sup> в течение 30 дней были определены изменения перемещений. Прирост максимальных вертикальных перемещений составлял 7-8 %, причем прирост после II дней практически прекратился.



Фиг. 2. Нагружение оболочки.

- \*\* ДАТЧИКИ НА КОНТУРЕ
- + ДАТЧИК НА ПОВЕРХНОСТИ
- + ДАТЧИК МЕЖДУ СЛОЯМИ
- + ДАТЧИК НА СПС
- ПРОГИБОМЕР
- ИНДИКАТОР
- ПРОГИБОМЕР



Фиг. 3. Схема датчиков и прогибомеров.

### 3.2. Модель II

При величине преднапряжения вертикальных связей 100 МПа появился обратный выгиб средней точки оболочки на 3,45 см, а суммарное перемещение нижних углов во внутрь на 1,06 см, причем на поверхности образовались волны. Дальнейшее стягивание натяжной муфты не привело к увеличению силы в связях, а привело к образованию новых волн на поверхности оболочки. Нагружение оболочки равномерно распределенной нагрузкой  $2,5 \text{ кН/м}^2$  вызвало прирост усилия в связях примерно в 1,5 раза.

Величина вертикальных перемещений оболочки от нагрузки не зависела от меры преднапряжения связей и от величины обратного выгиба, возникающего в процессе натяжения связей. Следовательно, преднапряжение связей играло в данном случае роль приема, позволяющую получить строительный подъем. Так для получения наименьшего прогиба от начальной геометрии оболочки рекомендуется с помощью преднапряжения связей поверхности оболочки дать соответствующий подъем. Например, при нагрузке  $1,5 \text{ кН/м}^2$  целесообразно дать строительный подъем в размере  $1/200$  от длины диагонали. Вследствие обратного выгибания в процессе преднапряжения возникают в оболочке напряжения изгиба, которые в одних районах оболочки суммируются с напряжениями от нагрузки, а в других районах уменьшают последние. Это явление значительное, до 75 % от напряжений, вызванных нагрузкой  $2,5 \text{ кН/м}^2$ .

Картина вертикальных и горизонтальных перемещений II модели, с вертикальными связями без предварительного напряжения их, совпадает с картиной перемещений модели III.

### 3.3. Модель III

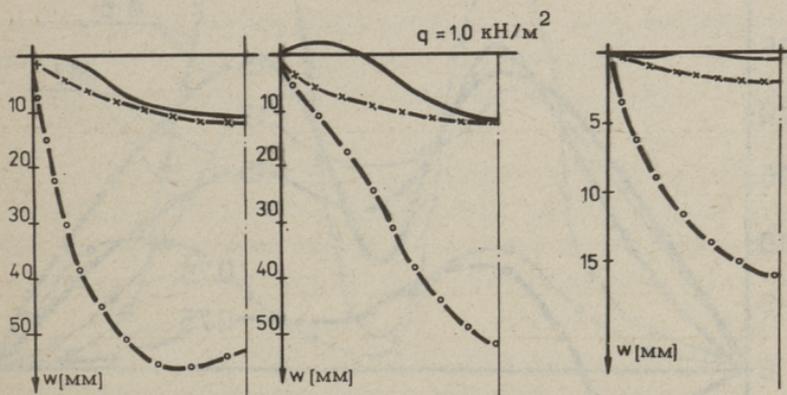
В необходимых случаях возможно применение этой оболочки и без восприятия распора контура затяжкой или контрафорсами. Как показывают испытания модели без затяжки, часть элементов поверхности включается в работу вместо отсутствующей затяжки и ограничивает чрезмерное расползание контура. На графиках (фиг. 4, 5) приводятся эпюры нормальных напряжений и вертикальных перемещений главных диагоналей и

бортовых элементов при равномерно распределенной нагрузке  $1,0 \text{ кН/м}^2$  моделей I, II, III. При отсутствии затяжки горизонтальное перемещение опор в направлении выпуклой диагонали составляло  $1/450$ , при наличии вертикальных связей  $1/1000$  от длины диагонали оболочки.

При отсутствии горизонтальной затяжки и вертикальных связей имеет место значительное закручивание контурных балок. При  $1,0 \text{ кН/м}^2$  поворот среднего сечения балки относительно торцевых сечений составлял  $1,1^\circ$ . У распорных контуров это закручивание примерно в 1,5 раза меньше (фиг. 6).

Нагрузка передается на опоры в нижних углах в количестве 60–65 % и в верхних 35–40 %.

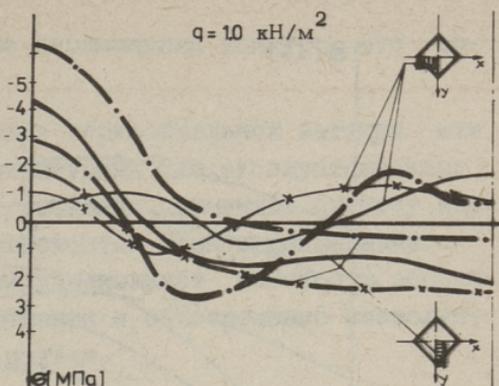
а) выпуклые доски б) вогнутые доски в) прогибы контура



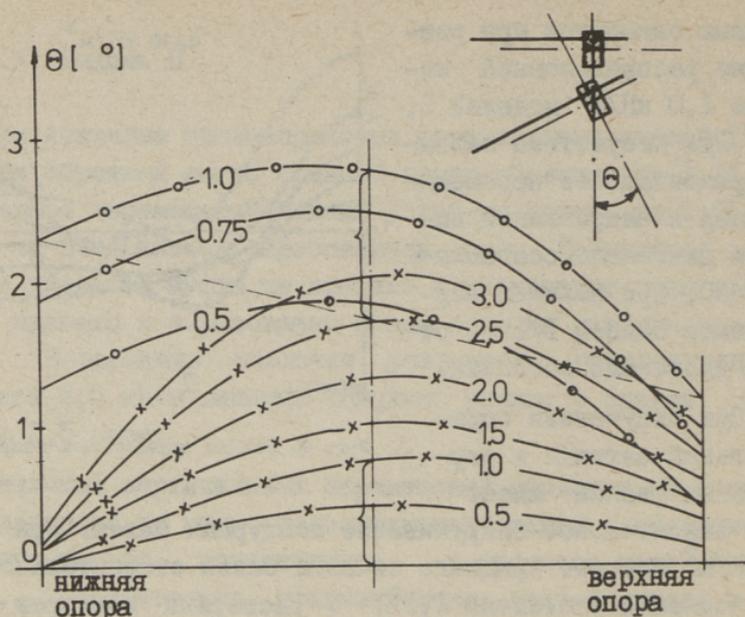
Фиг. 5. Эпюры вертикальных перемещений.

### Выводы

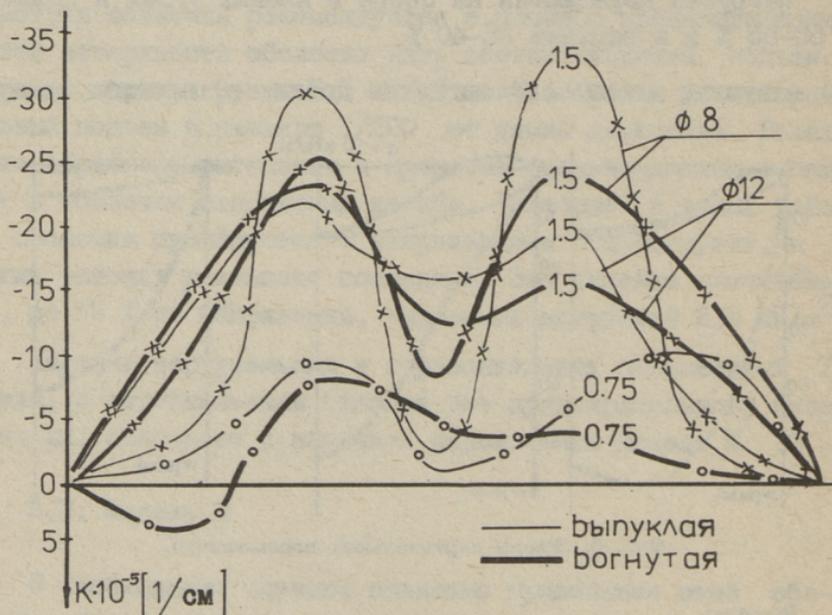
В случае применения стальной горизонтальной затяжки армирование оболочки со стеклопластиковой сетью значительно уменьшает (1,7 раза) усилие затяжки и бортовых элементов, но существенно не влияет на прогибы оболочки. В то же время



Фиг. 4. Эпюры нормальных напряжений.



Фиг. 6. Эпюры углов поворота бортового элемента.



Фиг. 7. Графики изменений кривизн поверхности.

усложняется конструирование оболочки и повышается трудоемкость изготовления оболочки.

При безраспорном контуре дополнительное армирование оболочки со стеклопластиковой сетью значительно уменьшает

горизонтальные и вертикальные перемещения контура, что оправдывает ее применение.

В случае, когда применение горизонтальной затяжки или контрафорсов со стороны архитектурных или эксплуатационных соображений нецелесообразно, возможно применять систему вертикальных связей и стоек в плоскостях стен перекрываемого здания, что в большей степени увеличивает жесткость оболочки, чем дополнительное армирование и одновременно позволяет легко получить строительный подъем.

Так как максимальные напряжения при эксплуатационных нагрузках около  $2,0 \text{ кН/м}^2$  составляют 24–30 % в оболочке и 35–40 % в бортовых элементах от расчетного значения, то при рассмотренных тонких оболочках во многих случаях являются определяющими прогибы или изменения кривизн поверхности (фиг. 7), т.е. жесткость поверхности оболочки в смысле прочности кровельного ковра и расчет по второму предельному состоянию.

Untersuchung des Modells der mit einem  
Glasfaserseilnetz verstärkten Holzhyparschale

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wird die Beschreibung des Modells der mit einem Glasfaserseilnetz verstärkten Holzschale in der hyperbolisch-paraboloidischer Form und einige Resultate der Untersuchungen des Spannungs- und Formänderungszustand unter statischer Belastung gegeben.

Die Versuchsmodelle über rechteckigen Grundriß hatten folgende Abmessungen: Schalenseiten  $a = b = 240$  cm, Pfeilhöhe der Schale 48 cm, Schalendicke 0,68 cm. Die Querschnittabmessungen der aus zwei Teilen bestehenden Randglieder sind: untere 4,0x6,0 cm und obere 4,0x1,5 cm. Die Mittelfläche der Holzschale war aus zwei Lagen Brettern aufgebaut, wobei die niedrige Brettlage und Druckseilen aus Glasfaser in der Richtung der konvexen Hauptdiagonale und die obere Brettlage und Zugseilen aus Glasfaser in der Richtung der konkaven Diagonale mit dem Leim DEK-14 aufeinandergeleimt und genagelt waren.

Die horizontale Komponente der Reaktionskräfte wurden mit einer horizontalen Stahlzugstange  $\varnothing 8$  mm oder  $\varnothing 12$  mm, mit der Konstruktion der Verbindungen und Pfosten in der Fläche der Außenwänder oder selbst mit der Konstruktion der Schale angenommen.

Holz als Verbundkonstruktion in Verbindung mit Seilen bildet eine schub-, zug- und druckfeste Schalenkonstruktionen. In dieser Verbundkonstruktion mit dem Seiltragwerk wird die hohe Elastizität des Holzes ausgenutzt, so daß sich Verformungen des Seilnetzes der Montage oder dem ungleichmäßigen Wind- und Schneelast anpassen, ohne dabei seine Tragfähigkeiten zu verlieren. Deshalb soll die Dimensionierung der Holzhyparschale vom zweiten Höchstzustand ausgehen.

## РАСЧЕТ ДЕРЕВЯННЫХ ГИПАРОВ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Введение

В данной статье рассматривается метод расчета пологих деревянных гипаров с учетом больших перемещений, причем на контуре принимается заделка криволинейной части оболочки в упругие балки. Рассматривается квадратный в плане пологий деревянный гипар с прямолинейными бортовыми элементами (фиг. 1), с уравнением срединной поверхности в виде:

$$z = \frac{f}{ab} xy.$$

В работе рассматриваются оболочки, относительная толщина которых  $b/a$  1/200–1/400. Вертикальные перемещения таких оболочек велики по сравнению с ее толщиной  $w/\delta = 1,8-6,0$  при нагрузках от 1,0 до 3,0 кН/м<sup>2</sup>). Поэтому при выводе уравнений учитывается геометрическая нелинейность работы этих оболочек. В то же время немалую роль в работе оболочки играют изгибающие моменты.

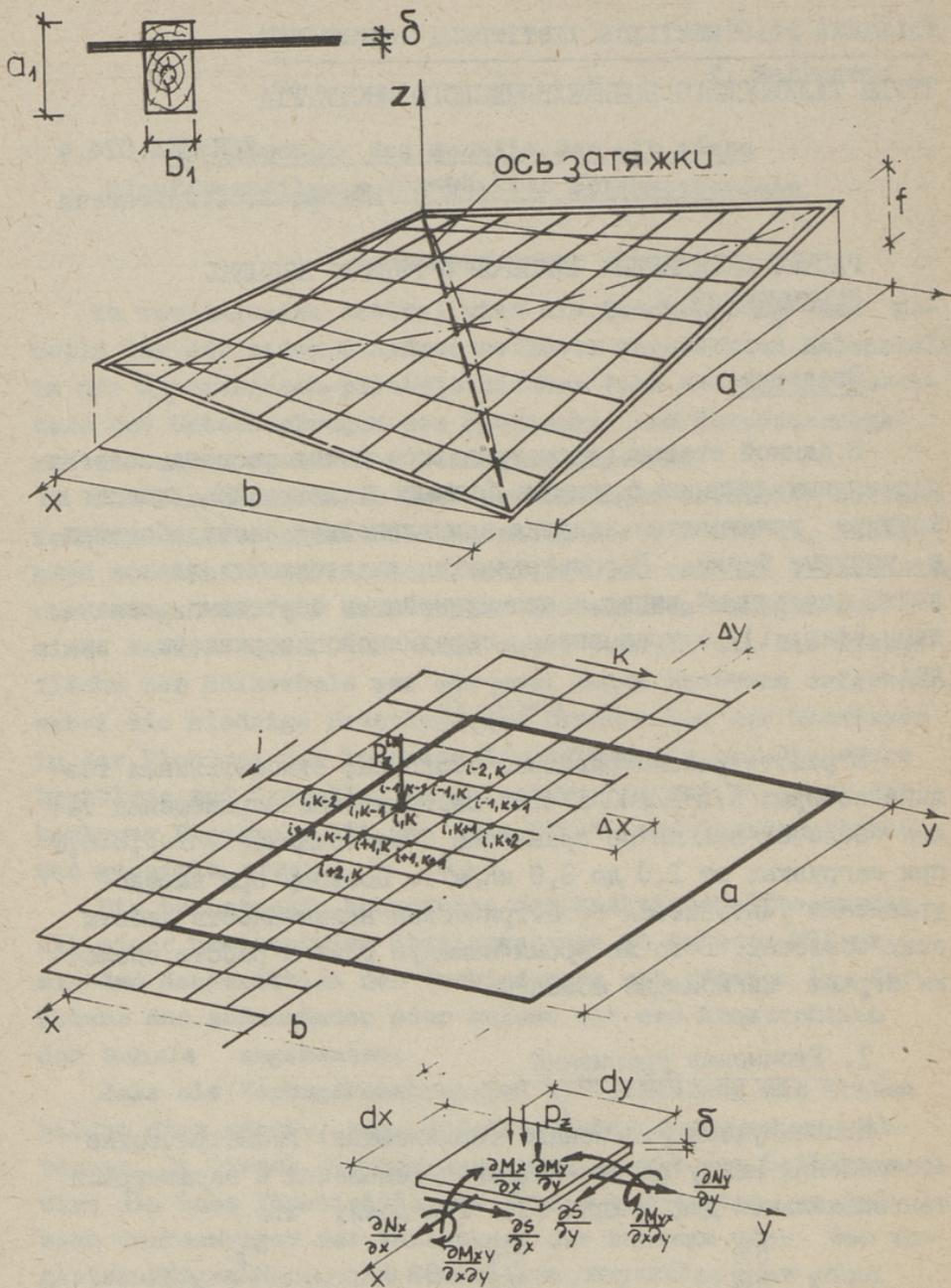
1. Уточнение уравнений

Используются уточненные (нелинейные) геометрические соотношения между составляющими перемещений и параметрами тангенциальных деформаций [3]. Учитывая, что

$$k_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad k_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad k_{xy} = \frac{f}{ab} \neq 0$$

получаем

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$



Фиг. 1. Расчетная схема оболочки.

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2k_{xy} w \\ \varepsilon_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \chi &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Вместо третьего уравнения равновесия используется уточненное уравнение, составленное для элемента оболочки, вырезанного из деформированной поверхности [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_x &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + P_y &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \left( k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + P_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Внутренние усилия в оболочке определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} N_x &= C \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ N_y &= C \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ S &= \frac{C(1-\mu)}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2k_{xy} w \right] \\ M_{xy} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_x &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ ;  $C = \frac{E\delta}{1-\mu^2}$ .

## 2. Разрешающая система уравнений

После подстановки физических уравнений (3) в уравнения равновесия (2) получаем систему разрешающих уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - k_{xy}(1-\mu) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \\ + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{P_x}{C} = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - k_{xy} (1-\mu) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{P_y}{C} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla^4 w + \frac{C(1-\mu)}{D} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2k_{xy} w \right] \left( k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{C}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{C}{D} \frac{\partial w}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{P_x}{D} = 0$$

Эта система разрешающих уравнений решается методом сеток. После замены частных производных соответствующими конечными разностями получаем нелинейную систему алгебраических уравнений

$$U_{i,k+1} + U_{i,k-1} + \psi_2 U_{i+1,k} + \psi_2 U_{i-1,k} - \psi_5 U_{i,k} + \psi_1 (V_{i+1,k+1} + V_{i-1,k-1} - V_{i+1,k-1} - V_{i-1,k+1}) - (W_{i+1,k} - W_{i-1,k}) \left[ \psi_3 - \psi_6 (W_{i+1,k+1} + W_{i-1,k-1} - W_{i+1,k-1} - W_{i-1,k+1}) \right] + \psi_4 (W_{i,k+1} - W_{i,k-1}) (W_{i,k+1} + W_{i,k-1} + \psi_2 W_{i+1,k} + \psi_2 W_{i-1,k} - \psi_5 W_{i,k}) + P_x^* = 0. \quad (5)$$

$$V_{i+1,k} + V_{i-1,k} + \psi_8 V_{i,k+1} + \psi_8 V_{i,k-1} - \psi_{12} V_{i,k} + \psi_7 (U_{i+1,k+1} + U_{i-1,k-1} - U_{i-1,k+1} - U_{i+1,k-1}) - (W_{i,k+1} - W_{i,k-1}) \left[ \psi_9 - \psi_{10} (W_{i+1,k+1} + W_{i-1,k-1} - W_{i-1,k+1} - W_{i+1,k-1}) \right] - \psi_{11} (W_{i+1,k} - W_{i-1,k}) (W_{i+1,k} + W_{i-1,k} + \psi_8 W_{i,k+1} + \psi_8 W_{i,k-1} - \psi_{12} W_{i,k}) + P_y^* = 0.$$

$$W_{i,k-2} - \psi_{31} W_{i,k-1} + \psi_{32} W_{i,k} - \psi_{31} W_{i,k+1} + W_{i,k+2} + \beta_4 W_{i-2,k} - \psi_{31} W_{i-1,k} - \psi_{31} W_{i+1,k} + \beta_4 W_{i+2,k} + \psi_{13} (W_{i+1,k+1} + W_{i-1,k-1} + W_{i+1,k-1} + W_{i-1,k+1}) + \psi_{16} (W_{i+1,k+1} + W_{i-1,k-1} - W_{i+1,k-1} - W_{i-1,k+1}) \left[ \psi_{17} (U_{i-1,k} - U_{i+1,k}) + \psi_{18} (V_{i,k-1} - V_{i,k+1}) + \psi_{19} (W_{i,k-1} - W_{i,k+1}) (W_{i+1,k} - W_{i-1,k}) - \psi_{20} W_{i,k} \right] + \psi_{21} (W_{i,k+1} - 2W_{i,k} + W_{i,k-1}) \left[ \psi_{22} (U_{i,k+1} -$$

$$\begin{aligned}
& -u_{i,k-1}) + \psi_{23}(v_{i+1,k} - v_{i-1,k}) + \psi_{24}(w_{i,k+1} - w_{i,k-1})^2 + \psi_{25}(w_{i+1,k} - w_{i-1,k})^2] + \\
& + \psi_{26}(w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}) [\psi_{27}(v_{i+1,k} - v_{i-1,k}) + \psi_{28}(u_{i,k+1} - u_{i,k-1}) + \\
& + \psi_{29}(w_{i+1,k} - w_{i-1,k}) + \psi_{30}(w_{i,k+1} - w_{i,k-1})] - P_z^* = 0.
\end{aligned}$$

Коэффициенты, входящие в уравнения равновесия, в уравнениях внеконтурных точек и в формулы внутренних усилий:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \frac{1+\mu}{2} & \Lambda_2 &= \frac{1-\mu}{2} & \psi_{16} &= \frac{2C\Lambda_2 k_{xy}}{D} \\
\beta &= \frac{\Delta x}{\Delta y} & P_x^* &= \frac{P_x^{i,k} \Delta x^2}{C} & \psi_{17} &= \frac{\beta \Delta x^3}{2} \\
P_y^* &= \frac{P_y^{i,k} \Delta y^2}{C} & P_z &= \frac{P_z^{i,k} \Delta x^4}{D} & \psi_{18} &= \frac{\Delta x^3}{2} \\
\psi_1 &= \frac{\Lambda_1 \beta}{4} & & & \psi_{19} &= \frac{\beta \Delta x^2}{4} \\
\psi_2 &= \beta^2 \Lambda_2 & & & \psi_{20} &= 2k_{xy} & \psi_{21} &= \frac{C}{D} \\
\psi_3 &= k_{xy} \Lambda_2 \beta \Delta x & & & \psi_{22} &= \frac{\Delta x}{2} \\
\psi_4 &= \frac{1}{2\Delta x} & \psi_5 &= 2 + 2\psi_2 & \psi_{23} &= \frac{\mu \beta \Delta x}{2} \\
\psi_6 &= \frac{\Lambda_1 \beta}{8\Delta y} & & & \psi_{24} &= \frac{1}{8} & \psi_{25} &= \frac{\mu \beta^2}{8} \\
\psi_7 &= \frac{\Lambda_1}{4\beta} & \psi_8 &= \frac{\Lambda_2}{\beta} & \psi_{26} &= \frac{12\beta^2}{\delta^2} \\
\psi_9 &= \frac{k_{xy} \Lambda_2 \Delta y}{\beta} & & & \psi_{27} &= \mu \psi_{23} \\
\psi_{10} &= \frac{\Lambda_1}{8\beta \Delta x} & & & \psi_{28} &= \beta \psi_{23} \\
\psi_{11} &= \frac{1}{2\Delta y} & \psi_{12} &= 2 + 2\psi_8 & \psi_{29} &= \frac{\beta^2}{8} & \psi_{30} &= \frac{\mu}{8} \\
\psi_{13} &= 2\beta^2 & \psi_{14} &= 8\beta^2 & \psi_{31} &= 4 + \psi_{15}
\end{aligned}$$

$$\psi_{15} = 4\beta^2$$

$$\psi_{32} = 6 + \psi_{14} + 6\beta^4$$

$$\psi_{33} = \frac{1}{4\Delta x}$$

$$\psi_{43} = 2\beta + 2\mu$$

$$\varkappa_5 = 2 + 2\psi_{44}$$

$$\varkappa_{14} = \frac{2B_1\beta^3}{D\Delta x}$$

$$\psi_{34} = \mu\beta$$

$$\psi_{44} = \mu\beta$$

$$\varkappa_6 = 1 + \varkappa_3$$

$$\varkappa_{15} = \frac{2-\mu}{\beta}$$

$$\psi_{35} = \frac{C}{2\Delta x}$$

$$\psi_{45} = 2 + 2\psi_{44}$$

$$\varkappa_7 = \frac{1+\varkappa_3}{1-\varkappa_3}$$

$$\varkappa_{16} = 2 + 2\varkappa_{15}$$

$$\psi_{36} = \frac{\mu\beta}{4\Delta y}$$

$$\psi_{46} = \frac{\mu}{\beta^2}$$

$$\varkappa_8 = \frac{\varkappa_4}{1-\varkappa_3}$$

$$\varkappa_{17} = \frac{C_v}{2D\beta\Delta x}$$

$$\psi_{37} = \frac{\mu}{4\Delta x}$$

$$\psi_{42} = \frac{-D}{\Delta x^2}$$

$$\varkappa_9 = \frac{\varkappa_5}{1-\varkappa_3}$$

$$\varkappa_{18} = 2 + 2\psi_{46}$$

$$\psi_{38} = \mu\psi_{36}$$

$$\varkappa_1 = \frac{2B_1\beta^3}{D\Delta y}$$

$$\varkappa_{10} = \frac{\psi_{44}}{1-\varkappa_3}$$

$$\varkappa_{19} = \frac{2B_2}{C\beta\Delta x^3}$$

$$\psi_{39} = \frac{C\Lambda_2}{2\Delta y}$$

$$\varkappa_2 = \frac{B_1\beta(2-\mu)}{D}$$

$$\varkappa_{11} = \frac{2B_2\beta}{C\Delta y^3}$$

$$\varkappa_{20} = \frac{\mu}{\beta}$$

$$\psi_{40} = \frac{1}{\beta}$$

$$\varkappa_3 = \frac{C_v\beta}{D\Delta y}$$

$$\varkappa_{12} = \frac{4\beta EF}{C(1-\mu)\Delta y}$$

$$\varkappa_{21} = \frac{\varkappa_{12}}{\beta^3}$$

$$\psi_{41} = \frac{-D\Lambda_2}{2\Delta x\Delta y}$$

$$\varkappa_4 = \frac{\varkappa_3}{2}$$

$$\varkappa_{13} = 4K_{xy}\Delta x$$

$$\varkappa_{22} = \frac{8K_{xy}EF\Delta y}{C(1-\mu)}$$

### 3. Граничные условия

Рассматривается случай, когда оболочка заделана в упругие балки, которые работают на растяжение (сжатие), на изгиб и на кручение. Оболочка опирается в угловых точках.

Граничные условия в углах принимаются следующими:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

и  $u = v = w = 0$ , т.е. в углах отсутствуют сдвиг, крутящий момент и поворот балок. Граничные условия остальной части оболочки выражаются по следующему [4]:

При  $y = 0$ ,  $u = v$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{D}{B_1} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{D}{C_v} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (7)$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\frac{C}{B_2} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{C(1-\mu)}{2EF} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2k_{xy} w \right]$$

$$B_1 = \frac{E b_1 a_1^3}{12} \quad B_2 = \frac{E a_1^3 b_1}{12} \quad C_v = \frac{E a_1 b_1^3 \beta_c}{2(1+\mu)}$$

При  $x = 0, x = a$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{D}{B_1} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{D}{C_v} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = -\frac{C}{B_2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{C(1-\mu)}{2EF} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2k_{xy} w \right], \quad EF = E a_1 b_1$$

где  $B_1$  и  $B_2$  жесткости контурного элемента при изгибе;  
 $C_v$  - жесткость при кручении.

После замены в приведенных граничных условиях частных производных соответствующими конечными разностями получаем выражения для внеконтурных точек в следующей форме:

$$w_{i,k-2} = w_{i,k+2} + \left[ 2(w_{i,k+1} - w_{i,k-1}) + \alpha_1(w_{i+2,k} - 4w_{i+1,k} + 6w_{i,k} - 4w_{i-1,k} + w_{i-2,k}) - \alpha_2[w_{i+1,k+1} - w_{i+1,k-1} - 2(w_{i,k+1} - w_{i,k-1}) + w_{i-1,k+1} - w_{i-1,k-1}] \right]$$

$$w_{i,k-1} = -\alpha_7 w_{i,k+1} + \alpha_8(w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k-1} - w_{i+1,k-1} + w_{i-1,k+1}) - \alpha_9 w_{i,k} - \alpha_{10}(w_{i+1,k} + w_{i-1,k})$$

$$u_{i,k-1} = u_{i,k+1} - \alpha_{11}(u_{i+2,k} - 4u_{i+1,k} + 6u_{i,k} - 4u_{i-1,k} + u_{i-2,k}) - \alpha_{12}(v_{i+1,k} - v_{i-1,k})$$

$$v_{i,k-1} = v_{i,k+1} + \alpha_{12}(v_{i+1,k} - 2v_{i,k} + v_{i-1,k}) - \beta(u_{i+1,k} - u_{i-1,k}) + \alpha_{13} w_{i,k}$$

$$W_{i-2,k} = W_{i+2,k} + \alpha_{14}(W_{i,k-2} - 4W_{i,k-1} + 6W_{i,k} - 4W_{i,k+1} + W_{i,k+2}) + \\ + \alpha_{16}(W_{i+1,k} - W_{i-1,k}) - \alpha_{15}(W_{i+1,k+1} + W_{i-1,k-1} + W_{i+1,k-1} - W_{i-1,k+1})$$

$$W_{i-1,k} = -W_{i+1,k} + W_{i,k} \alpha_{18} + \alpha_{17} [W_{i+1,k+1} - W_{i-1,k+1} - 2(W_{i+1,k} - W_{i-1,k}) + \\ + W_{i+1,k-1} + W_{i-1,k-1}] - \psi_{46}(W_{i,k+1} + W_{i,k-1})$$

$$V_{i-1,k} = V_{i+1,k} - [V_{i,k-2} - 4V_{i,k-1} + 6V_{i,k} - 4V_{i,k+1} + V_{i,k+2}] \alpha_{19} - \\ - \alpha_{20}(u_{i,k+1} - u_{i,k-1})$$

$$u_{i-1,k} = u_{i+1,k} + \alpha_{21}(u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}) - \psi_{40}(v_{i,k+1} - v_{i,k-1}) + \alpha_{22}W_{i,k}$$

#### 4. Алгоритм решения

Для решения полученной системы нелинейных алгебраических уравнений используется метод Брауна [1]. В общем случае мы имеем  $3M^2 - 12$  уравнений для внутренних точек сетки,  $16M$  уравнений для внеконтурных точек и 16 добавочных уравнений в углах. При использовании симметрии количество уравнений уменьшается. Составлена программа расчета для ЭВМ ЕС-1022 на языке ФОРТРАН-ЕС.

После решения системы нелинейных алгебраических уравнений при помощи вычисленных величин перемещений  $u, v, w$  выражаем внутренние усилия в виде:

$$N_x^{i,k} = \psi_{35} [u_{i,k+1} - u_{i,k-1} + \psi_{33}(w_{i,k+1} - w_{i,k-1})^2 + \psi_{34}(v_{i+1,k} - v_{i-1,k}) + \\ + \psi_{36}(w_{i+1,k} - w_{i-1,k})^2]$$

$$N_y^{i,k} = \psi_{35} [\beta(v_{i+1,k} - v_{i-1,k}) + \psi_{38}(w_{i+1,k} - w_{i-1,k})^2 + \mu(u_{i,k+1} - u_{i,k-1}) + \\ + \psi_{37}(w_{i,k+1} - w_{i,k-1})^2]$$

$$S^{i,k} = \psi_{39} [\psi_{40}(u_{i+1,k} - u_{i-1,k}) + v_{i,k+1} - v_{i,k-1} + \psi_{33}(w_{i,k+1} - w_{i,k-1})(w_{i+1,k} - w_{i-1,k}) - \psi_{20} w_{i,k}]$$

$$M_{xy}^{i,k} = \psi_{41} (w_{i+1,k+1} + w_{i-1,k-1} - w_{i-1,k+1} - w_{i+1,k-1})$$

$$M_x^{i,k} = \psi_{42} [w_{i,k+1} + w_{i,k-1} + \psi_{44}(w_{i+1,k} - w_{i-1,k}) - \psi_{45} w_{i,k}]$$

$$M_y^{i,k} = \psi_{42} [\beta(w_{i+1,k} + w_{i-1,k}) + \mu(w_{i,k+1} - w_{i,k-1}) - \psi_{43} w_{i,k}]$$

## Л и т е р а т у р а

1. B r o w n К.М. A quadratically convergent Newton-like method based Gaussian Elimination. - SIAM on Numerical Analysis, 6(4), 1969.

2. Ф и л и н А.П. Элементы теории оболочек. Ленинград, Стройиздат, изд. 2-ое, перераб., 1975. 276 с.

3. В о л ь м и р А.С. Гибкие пластины и оболочки. М., Гостехиздат, 1956. 419 с.

4. Н а з а р о в А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. М., Стройиздат, 1966. 303 с.

Die Rechnung der Holzhyparschale mit der  
Berücksichtigung der großen Durchbiegungen

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wird kurz eine Methode der Berechnung der flachen Hyparschalen mit der Berücksichtigung der großen Deformationen der Mittelfläche behandelt. Die allgemeine Gleichung der Mittelfläche des hyperbolischen Paraboloids mit geradlinigen nachgiebigen Randträgern ist  $z = f_{xy}/ab$ .

Die Durchbiegungen der Hyparschalen mit relativer Schalendicke  $\delta/a = 1/200 \dots 1/400$  sind groß im Vergleich zu der Schalendicke ( $w/\delta = 1.8 \dots 6.0$ ), deshalb wird in den Gleichgewichts- und geometrischen Bedingungen die unlineare Arbeit der Schale berücksichtigt.

Infolge der geometrischen Antimetrie des hyperbolischen Paraboloids sind die analytischen Lösungen der Biegetheorie mit Hilfe trigonometrischer Reihen unrealistisch, deshalb wird für die Entscheidung des Systems der Differentialgleichungen die Methode der finiten Abstände gebraucht und das System der unlinearischen algebraischen Gleichungen wird mit Hilfe Browner Methode [1] gelöst. Ein Programm in der Sprache FORTRAN-EC für den Computer ist zusammengesetzt. Nach der Lösung des Systems unlinearischer algebraischer Gleichungen wird mit Hilfe der Formänderungskomponente  $u, v, w$  das abschließende Spannungszustand erhalten.

## С о д е р ж а н и е

1. Йооритс Л.А., Компус В.Д., Руга Л.И. Возмущения от жесткого включения в поле напряжений плоской задачи..... 3
2. Равасоо А.А. О нахождении физических параметров неоднородной среды по измерениям скорости и интенсивности волны..... II
3. Тярно Ю.А. Квазицилиндрические железобетонные оболочки с криволинейными бортовыми элементами..... 17
4. Орас Р.Э. Расчет прямоугольной тентовой панели с гибким контуром по методу разложения нагрузок..... 27
5. Раттасепп Т.Р. Исследование деревянного гипара, армированного вантовой сетью..... 35
6. Нйгер К.П., Раттасепп Т.Р. Расчет деревянных гипаров с учетом больших перемещений..... 45







Цена 45 коп.