

О. Т. РООТС

**РАСЧЕТ СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ
БАЛОК ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ
СОСТОЯНИЮ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1958

О. Т. РООТС

**РАСЧЕТ СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ
БАЛОК ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ
СОСТОЯНИЮ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1958

Ep. 2321

~~P37-845~~



1. ОСНОВЫ РАСЧЕТА

При расчете статически неопределимых стержневых систем по предельному состоянию допускаемые нагрузки получаются иногда значительно большими, чем то дает обыкновенный расчет, основанный на линейной зависимости между деформацией и силой. Принимаемые в несущих конструкциях системы перекрестных балок обычно рассчитываются в предположении упругих деформаций. Расчет на предельную нагрузку может дать в некоторых случаях большие допускаемые нагрузки, чем расчет по упругой теории.

В данной статье рассматриваются свободно опирающиеся по краям прямоугольные и квадратные плоские перекрытия из балок одинаковой жесткости и находящихся между собою на равных расстояниях. Определяются эпюры изгибающих моментов, перемещения узлов и допускаемые нагрузки как в виде равномерно распределенной, так и в виде сосредоточенной силы в центральном узле.

Предполагается, что:

- 1) балки опираются свободно друг на друга (жесткость при кручении незначительна);
- 2) распределенную нагрузку можно заместить узловыми нагрузками (это предположение незначительно влияет на точность результата);
- 3) после возникновения пластического шарнира изгибающий момент в этом сечении остается постоянным.

Увеличение расчетной нагрузки (17% для двух тавровых балок) при пластической работе сечения (W пласт.) мы не учитывали.

Для расчета перекрытий применен метод деформаций, обобщенный на случай возникновения пластических шарниров. За неизвестные приняты вертикальные перемещения узлов. Применение этого метода позволяет в предельном состоянии определить перемещение узлов непосредственно и достаточно просто определить изгибающие моменты. В предлагаемом методе вначале опреде-

ляются перемещение и изгибающие моменты, при упругой работе стержней перекрытия и затем учитываются (добавляются) соответствующие приращения моментов и деформаций, возникающие в результате появления пластических шарниров. Делается предположение, что в каждом пластическом шарнире приращение угла поворота упругой линии при увеличении нагрузки в одном и том же направлении растет и при появлении последующих шарниров текучести. Изгибающий момент в шарнире текучести остается постоянным по величине и по знаку.

В отличие от обычной методики расчета перекрытия (в предположении упругой работы всех элементов) при появлении пластических шарниров приходится с появлением каждого нового шарнира составлять и решать соответствующую новую систему канонических уравнений. Следует отметить (см. примеры), что с появлением каждого нового пластического шарнира приходится пересчитывать только небольшую часть коэффициентов. Число дополнительно решаемых систем совместных уравнений равно числу возникающих групп однородных шарниров (при симметрии нагрузок и перекрытия).

При числе балок в одном или в каждом направлении свыше пяти можно с небольшой погрешностью свести расчет к расчету перекрытия с меньшим числом балок, для чего необходимо произвести редуцирование по нижеприведенной схеме [5].

Обозначая:

I_x — момент инерции сечения продольной балки в данной системе;

I_y — момент инерции сечения поперечной балки в данной системе;

m — число продольных балок в данной системе и

n — число поперечных балок в данной системе.

Обозначая индексом (r) эти же величины в редуцированной системе получаем:

$$I_x^{(r)} = \frac{m^{(r)} + 1}{m + 1} I_x,$$

$$I_y^{(r)} = \frac{n^{(r)} + 1}{n + 1} I_y.$$

Возникающая ошибка мала при расчете на основной случай нагрузки — на равномерно распределенную нагрузку.

2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПЕРЕКРЫТИЙ

Чтобы определить зависимость предельной нагрузки от конструкции перекрытия, в данной работе рассмотрены 4 прямоугольных перекрытия с числом балок: 1×5 , 2×5 , 3×5 и 4×5 и 3 квадратных перекрытия с числом балок: 3×3 , 4×4 и 5×5 . Ниже приведен полный расчет перекрытия с числом балок 3×3 . Для остальных перекрытий приведены резульативные данные.

Расчет перекрытия 3×3

Данные:

Жесткости балок при изгибе $EI_x = EI_y = 1$

Расстояния между балками $a = b = 1$

Узловые нагрузки P_i

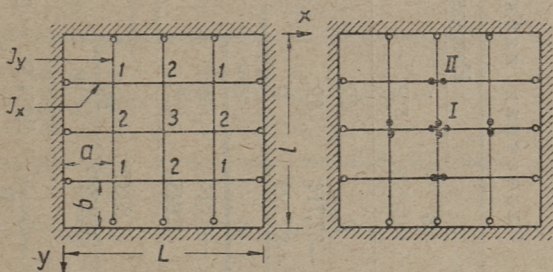


Рис. 1. Образование пластических шарниров в системе балок 3×3 .

В части А расчетной таблицы произведен расчет при упругой работе [5, 8].

В части таблицы А,а дана матрица коэффициентов системы уравнений, составленных по обобщенному методу деформаций. За неизвестные приняты вертикальные перемещения узлов. Канонические уравнения метода деформаций выражают ту мысль, что реакции в наложенных на узлы вертикальных связях от действия внешних нагрузок и от перемещений узлов равны нулю:

$$\sum R_i = 0$$

Расчетная таблица

	1	2	3	Нагрузка		Множ.		Приращ. изг. мом.	
				I ΣP_i	II P_s	η_I	η_{II}	M_I	M_{II}
a	1	109,714	0	4P	0	I случай нарр.	II случай нарр.		
	2	-75,429	-37,714	4P	0				
	3	0	-37,714	P	P				
b	1	109,714	0	4,000 P	0	I случай нарр.	II случай нарр.		
	2	-0,688	57,857	6,746 P	0				
	3	0	-0,652	5,400 P	P				
c	W_I	0,967 P	1,898 P	M_I	M_I				
	W_{II}	0,158 P	0,229 P	0,352 P					
d	M_{1x}	4,286	-2,571	0	0,086 P	0,664 P	0,664 P	0,086 P	
	M_{2x}	-5,143	4,286	0	0,172 P	0,828 P	0,828 P	0,172 P	
	M_{2y}	0	4,286	-2,571	0,078 P	0,922 P	0,922 P	0,078 P	
	M_{3y}	0	-5,143	4,286	0,328 P*	1,718 P*	1,718 P (1. ш)	0,328 P (1. ш)	

A

a	1	109,714	-75,429	0	4P	0
	2	-75,429	78,857	-12,000	4P	0
	3	0	-12,000	6,000	P	P
b	1	109,714	-75,429	0	4,000 P	0
	2	-0,688	27,000	-12,000	6,750 P	0
	3	0	-0,444	0,667	4,000 P	P
c	W _I	2,042 P	2,917 P	6,000 P	M _I	M _{II}
	W _{II}	0,458 P	0,667 P	1,500 P		
d	M _{1x}	4,286	-2,571	0	1,250 P	0,250 P
	M _{2x}	-5,143	4,286	0	2,000 P	0,500 P
	M _{3y}	0	3,000	-1,500	-0,250 P	-0,250 P
	M _{2y}	—	—	—	0	0
a	W _I	1,318 P	1,855 P	2,930 P		
	W _{II}	0,301 P	0,438 P	0,820 P		
b	M _{1x}					0,879 P
	M _{2x}					1,172 P (2. ш)
	M _{2y}					0,879 P
	M _{3y}					1,172 P (1. ш)

$$\sum \eta_I = 1,175$$

$$\sum \eta_{II} = 1,313$$

В оформлении

повторяющиеся коэффициенты.

Поскольку перекрытие имеет две оси симметрий, вместо системы с девятью неизвестными достаточно решить систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\Sigma R_1 = 4r_{11}w_1 + 4r_{12}w_2 + 4r_{13}w_3 - 4P_1 = 0$$

$$\Sigma R_2 = 4r_{21}w_1 + 4r_{22}w_2 + 4r_{23}w_3 - 4P_2 = 0$$

$$\Sigma R_3 = r_{31}w_1 + r_{32}w_2 + r_{33}w_3 - P_3 = 0,$$

где:

$4r_{11}$ — сумма реакций в группе опор 1 (четыре опоры) от перемещений каждой на единицу:

$4r_{12}$ — сумма реакций в группе опор 1 (четыре опоры) от перемещений группы узлов 2 на единицу, и т. д.

$$r_{ik} = r_{ki}$$

$r_{13} = r_{31}$ в данном случае равна нулю.

Узловая нагрузка:

$$P = \frac{W[\sigma]}{a \cdot m_{\text{упр.}}},$$

где:

W — момент сопротивления сечения,

$[\sigma]$ — допускаемое напряжение,

$m_{\text{упр.}}$ — безразмерный коэффициент, вычисленный в предположении, что допускаемое напряжение достигает предела текучести (см. табл. № 1,*),

a — расстояние между балками (в этом примере $a = 1$).

Для определения единичных реакций r_{ik} используются таблицы метода деформаций для четырехпролетных неразрезных балок***) (табл. № 2).

Таблица № 2

Перемещение	Реакц. или мом.	У з е л					Множитель
		0	1	2	3	4	
$w_1 = 1$	реакция	-3,6429	9,8572	-9,4286	3,8572	-0,6429	$EI:c^3$
	изг. мом.	0	3,6429	-2,5714	0,6429	0	$EI:c^2$
$w_2 = 1$	реакция	2,5714	-9,4286	13,7143	-9,4286	-2,5714	$EI:c^3$
	изг. мом.	0	-2,5714	4,2857	-2,5714	0	$EI:c^2$

**) См. [4, 5, 8]

Здесь:

- $w_i = 1$ — единичное перемещение узла i ,
 EI — жесткость при изгибе и
 c — расстояние между балками ($c = a$ для продольных и $c = b$ для поперечных балок).

Правила знаков:

для γ : $\uparrow (+)$, $\downarrow (-)$ для m : \pm, \mp .

Коэффициенты в части А табл. 1:

$$\gamma_{11} = 2(9,8572 + 3,8572) = 27,4288$$

$$4\gamma_{11} \approx 109,714$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = -2 \cdot 9,4286 = -18,8572$$

$$4\gamma_{12} = 4\gamma_{21} \approx -75,429$$

Реакция $\gamma_{13} = \gamma_{13} = 0$, так как на реакцию узлов группы 1 от перемещения узлов группы 3 не возникают. Другие реакции определяются аналогично.

Решение системы уравнений по ГМ методу [4] произведено в части таблицы А, б. Рассмотрены два случая нагрузки:

- 1) равномерно распределенная нагрузка;
- 2) сосредоточенная сила в центре перекрытия.

В части таблицы А, д даны изгибающие моменты, вычисленные по полученным значениям w_1 , w_2 и w_3 , используя таблицу № 2.

Например:

$$M_{1x} = 4,286 w_1 - 2,571 w_2 - 0. \quad w_3 = 0,664.$$

Множитель $\eta = 1,000$ (см. табл. № 1) показывает, что в суммарный изгибающий момент входит момент, вычисленный по упругой теории.

В части В расчетной таблицы проведен расчет в предположении, что появились пластические шарниры (в обоих направлениях в группе 1*). С появлением этих двух (в нашем примере) шарниров в центре перекрытия, средние балки (2—3—2) из четырехпролетных неразрезных балок становятся двумя двухпролетными неразрезными балками, загруженными постоянным пластическим изгибающим моментом на одном из концов. В системе уравнений В, а прогиб опоры 3 не равен нулю, а приращение опорного момента ΔM_{3y} (и ΔM_{3x}) равен нулю.

*) В нашем примере в группу 1 входит только один узел 3.

В зависимости от появления пластического шарнира коэффициенты Γ_{22} , $\Gamma_{23} = \Gamma_{32}$ и Γ_{33} изменяются и вычисляются по предыдущей таблице (№ 2) и используется таблица для двухпролетной упругой неразрезной балки (табл. № 3).

Таблица № 3

Перемещение	Реакция или мом.	Узел			Множитель
		0	1	2	
$w_0 = 1$	реакция	1,5000	— 3,0000	1,5000	$EI:c^3$
	изг. мом.	0	— 1,5000	0	$EI:c^2$
$w_1 = 1$	реакция	— 3,0000	6,0000	— 3,0000	$EI:c^3$
	изг. мом.	0	3,0000	0	$EI:c^2$

Получаем:

$$\Gamma_{22} = 13,7143 + 6,0000 = 19,7143$$

$$4\Gamma_{22} \approx 78,857$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = -3,0000$$

$$4\Gamma_{23} = -12,0000$$

$$\Gamma_{33} = 4 \cdot 1,50000 = 6,0000$$

Решение системы уравнений В,а проведено в В,в. В В,с указаны полученные перемещения, а в В,д даны приращения изгибающих моментов. Эти приращения моментов сначала определяются для узлов нагрузки Р и затем, умножая полученные моменты на коэффициент η , получаем для этой стадии полное приращение моментов ΔM . При этом коэффициент η выбирается так, что суммарный изгибающий момент в сечениях, где возникает следующий пластический шарнир (рис. 1, группа II) равен пластическому моменту в I группе шарниров.

В части С,а расчетной таблицы даны суммарные прогибы узловых точек, а в С,б — суммарные изгибающие моменты в узловых сечениях. Сумма коэффициентов $\eta - \sum \eta_i$ для каждого случая нагрузки показывает величину увеличения допускаемых нагрузок при расчете по предельному состоянию, по сравнению с расчетом по упругой теории. Величина $\eta > 1$ показывает экономическую эффективность расчета по пластической теории.*)

*) См. таблицу № 5.

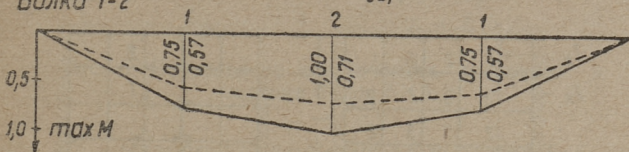
После возникновения пластических шарниров группы II (узлы г) рассчитываемая система перекрестных балок превращается в механизм. Аналогично рассчитываются и другие типы перекрестных балок.

Ниже приводятся результаты расчета других типов перекрытий.

Изгибающие моменты в системе 3×3

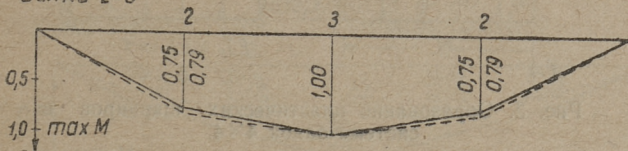
Нагрузка $\sum_{l=1}^{m} (P_l = 1)$

Балка 1-2



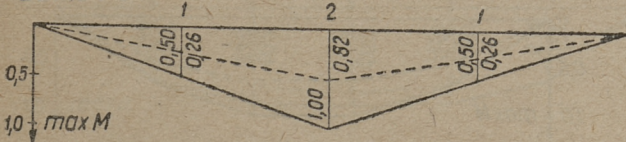
Балка 2-3

max M = 1,17 Pa



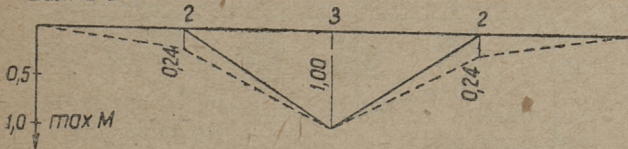
Балка 1-2

Нагрузка $P_3 = 1$



Балка 2-3

max M = 0,33 Pa



--- по теор. упр.
— по теор. пласт.

Рис. 2. Эпюры изгибающих моментов в системе балок 3×3.

На рисунках 2—7, 9—13 приведены эпюры изгибающих моментов.

В таблице IV приведен порядок возникновения пластических шарниров.

В таблице V для рассмотренных типов перекрытий даны величины прогибов, максимальных моментов и коэффициенты η , характеризующие степень экономической эффективности применения расчета перекрытий по пластической теории для случая одинаково направленных и статически приложенных нагрузок.

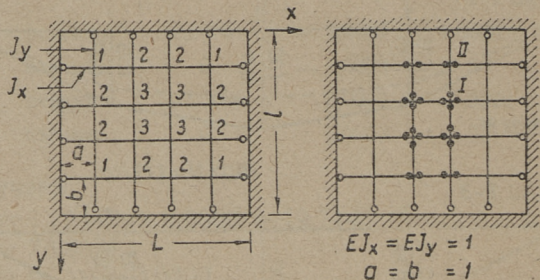


Рис. 3. Образование пластических шарниров в системе балок 4×4 .

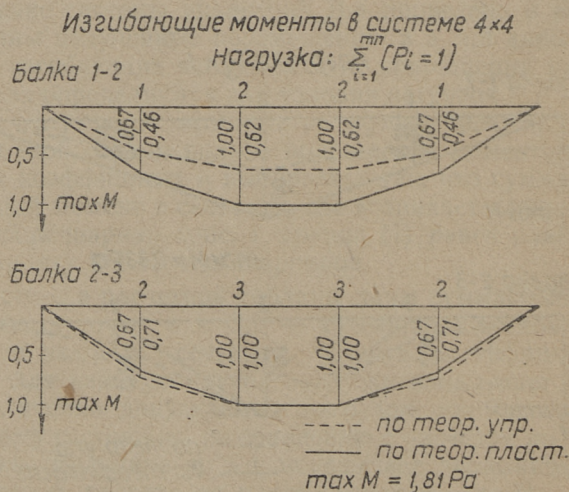


Рис. 4. Эпюры изгибающих моментов в системе балок 4×4 .

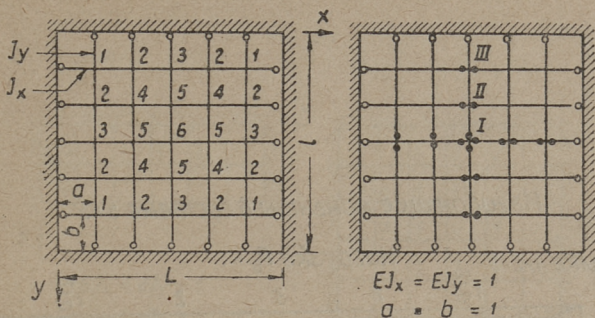


Рис. 5. Образование пластических шарниров в системе балок 5×5 .

Изгибающие моменты в системе 5×5

нагрузка $\sum_{i=1}^{m} (P_i = 1)$

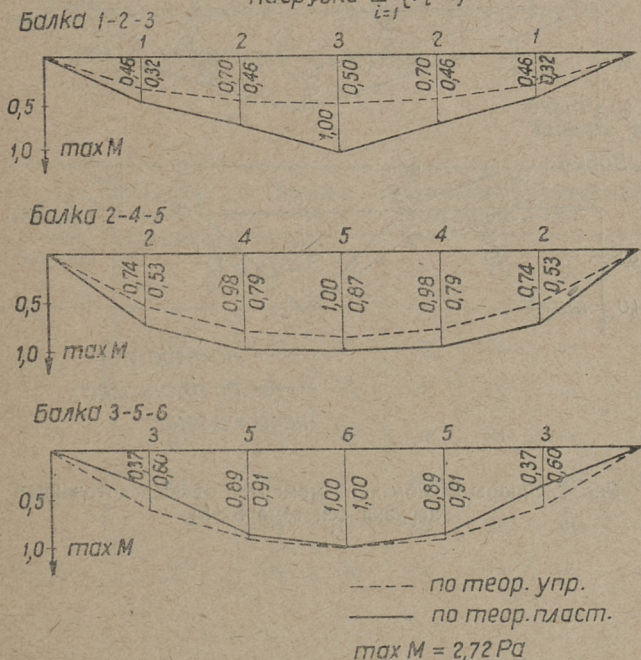


Рис. 6. Эпюры изгибающих моментов от распределенной нагрузки (система 5×5).

Изгибающие моменты в системе 5×5

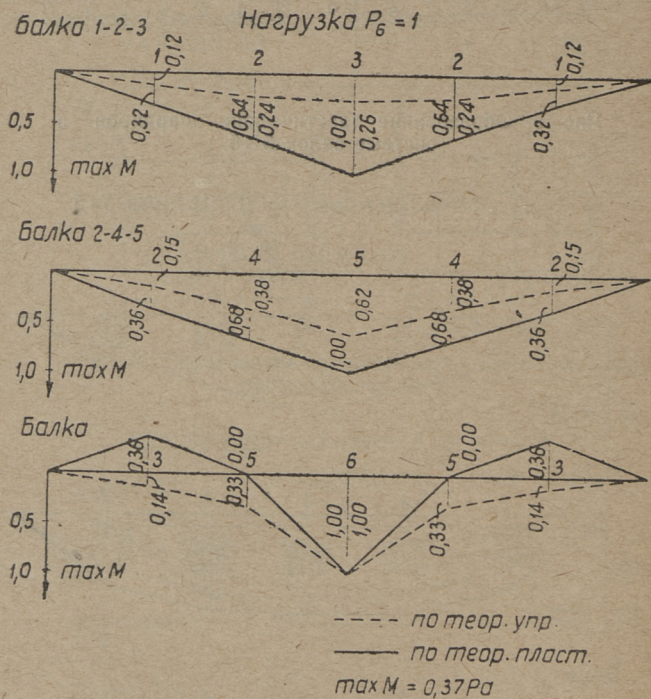


Рис. 7. Эпюры изгибающих моментов от сосредоточенной нагрузки (система 5×5).

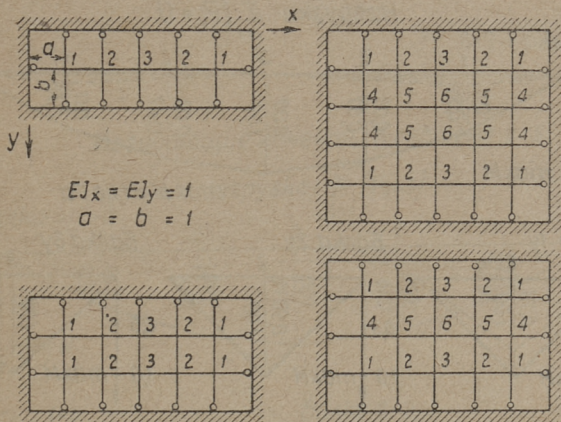


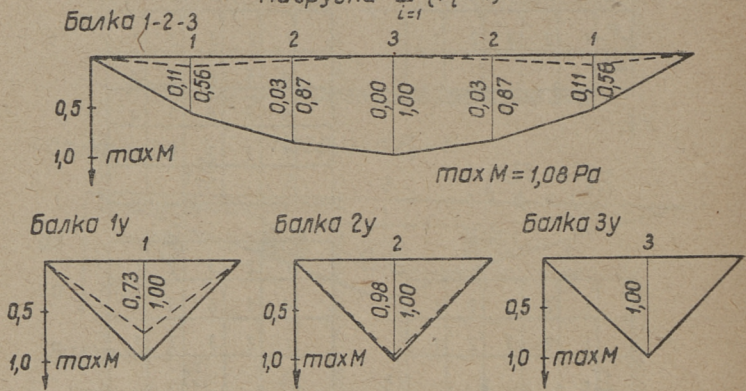
Рис. 8. Перекрытия прямоугольного типа.

Таблица № 4

№№ п/п	Тип балочной системы	Нагрузка	Порядок образования пластических шарниров					
			I	II	III	IV	V	VI
1	1×5	ΣP	3y	2y	1y	3x	—	—
2			3y	2y	3x	1y	—	—
3		2×5	ΣP	3y	2y	1y	3x	—
4	3×5	ΣP	6y	5y	6x	4y	3y	3x
5			6y	6x	5y	3x	4y	—
6		4×5	ΣP	6y	5y	6x	4y	3x

Изгибающие моменты в системе 1×5

Нагрузка: $\sum_{i=1}^{m} (P_i = 1)$



Нагрузка: $P_3 = 1$

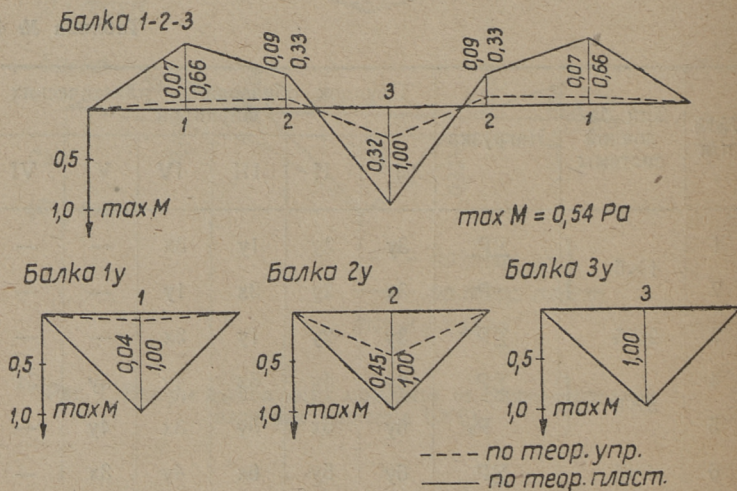
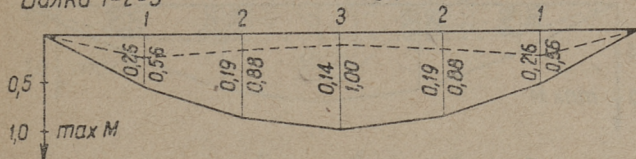


Рис. 9. Эпюры изгибающих моментов в системе балок 1×5.

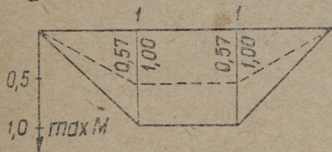
Изгибающие моменты в системе 2x5

Нагрузка: $\sum_{i=1}^{m} (P_i = 1)$

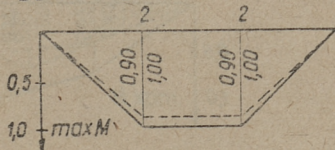
Балка 1-2-3



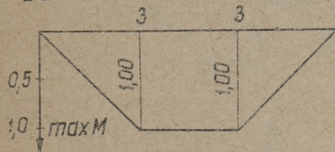
Балка 1-1



Балка 2-2

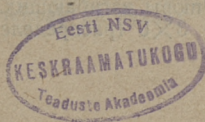


Балка 3-3



----- по теор. упр.
 ————— по теор. пласт.
 $\max M = 1,12 Pa$

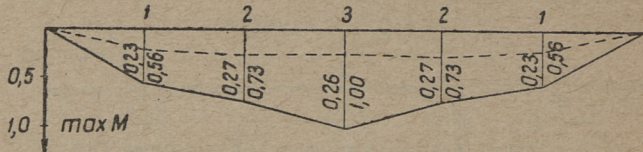
Рис. 10. Эпюры изгибающих моментов в системе балок 2x5.



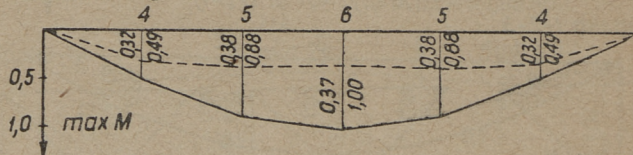
Изгибающие моменты в системе 3x5

Нагрузка: $\sum_{i=1}^{mn} (P_i = 1)$

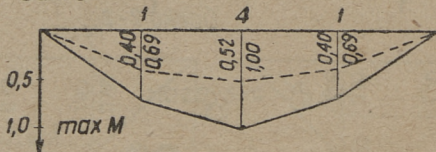
Балка 1-2-3



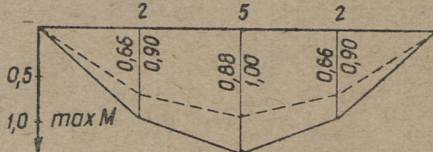
Балка 4-5-6



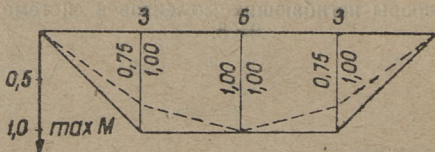
Балка 1-4



Балка 2-5



Балка 3-6



--- по теор. упр.
 — по теор. пласт.
 $\max M = 2,04 Pa$

Рис. 11. Эпюры изгибающих моментов в системе балок 3x5 (распределенная нагрузка).

Изгибающие моменты в системе 3×5
 Нагрузка: $P_b = 1$

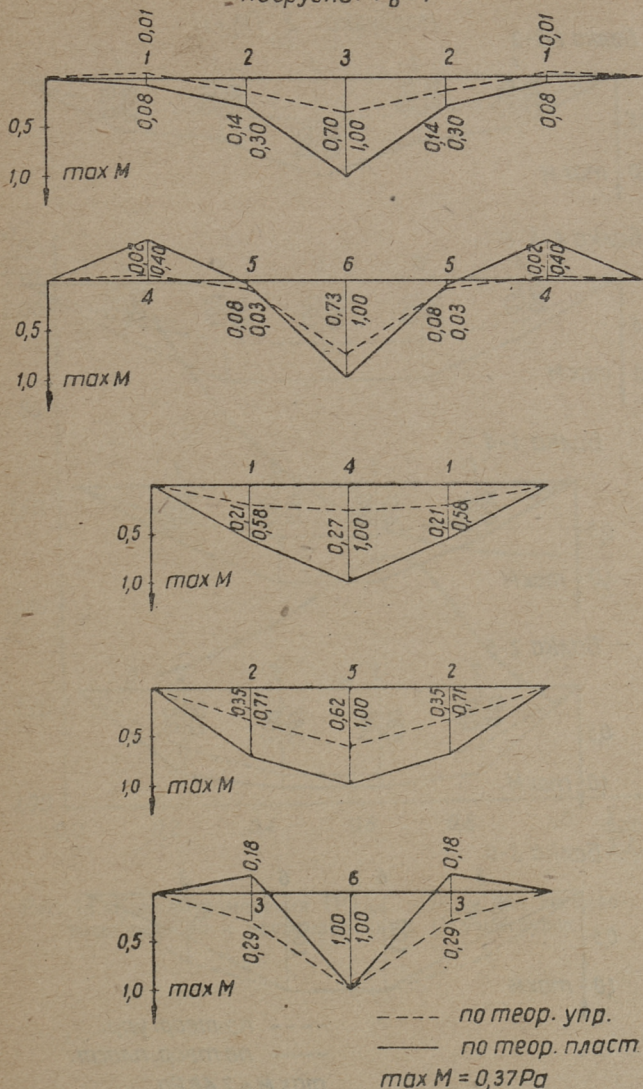


Рис. 12. Эпюры изгибающих моментов в системе балок 3×5 (сосредоточенная нагрузка)

Изгибающие моменты в системе 4×5

Нагрузка: $\sum_{i=1}^{m,n} (P_i = 1)$

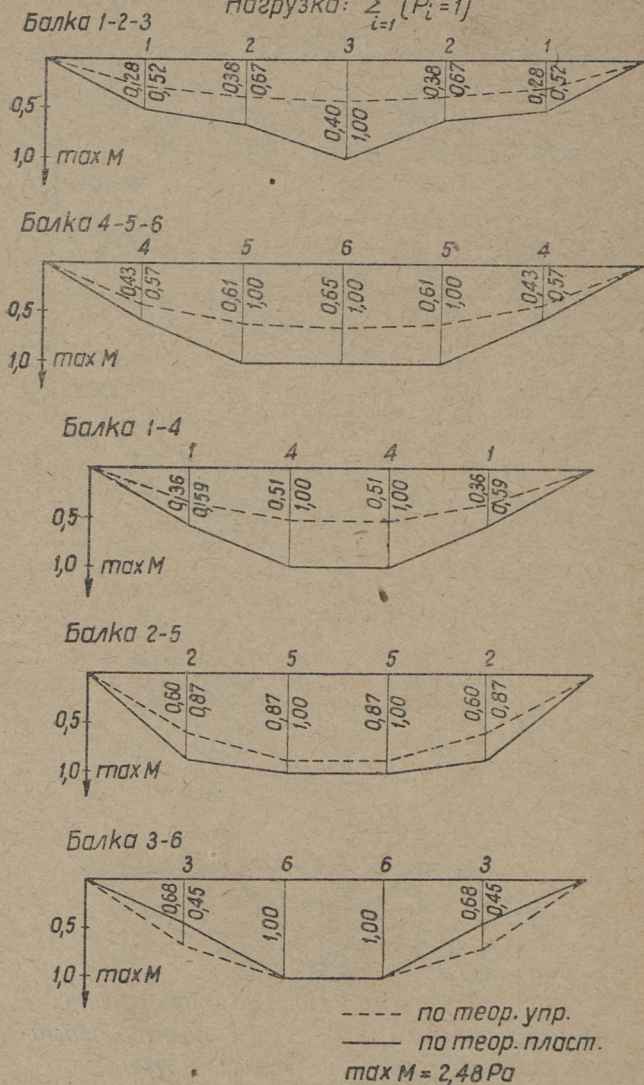


Рис. 13. Эпюры изгибающих моментов в системе балок 4×5.

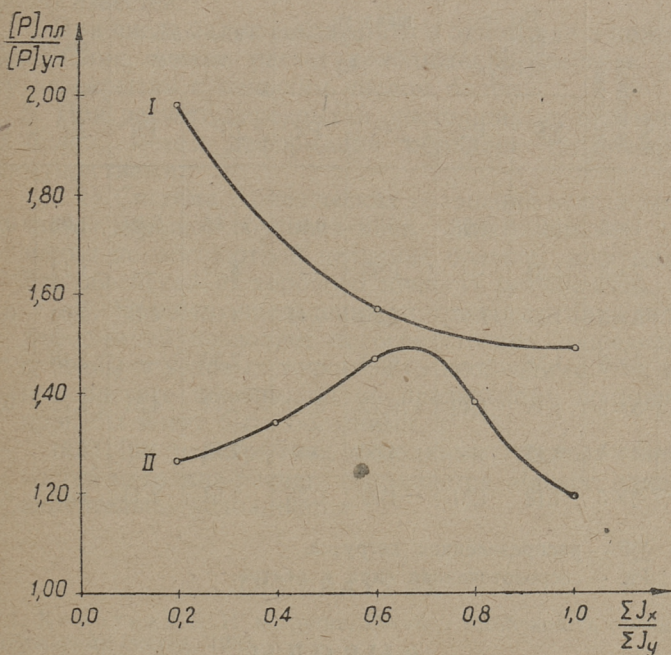


Рис. 14. Кривые изменения $[P]_{пл} : [P]_{уп}$ для сосредоточенных (I) и распределенных (II) нагрузок.

На рис. 14 приведены значения коэффициентов η для различного числа балок составляющих перекрытие. Эти данные получены при решении указанных выше примеров. Кривая I соответствует нагрузке в виде силы, сосредоточенной в центре перекрытия. Кривая II соответствует распределенной нагрузке.

Таблица № 5

№№ п/п	Тип балочной системы	$\Sigma \eta =$ [P] _{пл.} : : [P] _{уп.}		max w _{уп.} : : $\frac{Pa^3}{EI}$		max w _{пл.} : : max w _{уп.}		max M : Pa	
		ΣP	P _ц	ΣP	P _ц	ΣP	P _ц	ΣP	P _ц
1	1×5	1,27	1,98	0,18	0,09	21,85	9,89	1,08	0,54
2	2×5	1,34	—	0,93	—	4,34	—	1,12	—
3	3×5	1,47	1,57	3,23	0,41	4,05	4,15	2,04	0,37
4	4×5	1,38	—	6,23	—	2,36	—	2,48	—
5	5×5	1,19	1,49	10,17	0,80	2,13	4,31	2,72	0,37
6	4×4	1,15	—	4,60	—	1,73	—	1,81	—
7	3×3	1,18	1,31	1,89	0,35	1,54	2,33	1,17	0,33

ΣP — распределенная нагрузка,

P_ц — сосредоточенная сила в центре.

ВЫВОДЫ

1. Во всех рассмотренных типах перекрытий расчет по предельным состояниям дает значительно большую расчетную, нагрузку чем обычный расчет. Значительное повышение расчетной нагрузки возникает в прямоугольных перекрытиях при нагружении сосредоточенными силами (49—98%). При распределенной нагрузке наибольшее повышение расчетной нагрузки (50%) возникает в прямоугольных перекрытиях при соотношении жесткостей

$$\frac{\Sigma EI_x}{\Sigma EI_y} \approx 0,7.$$

2. При свободно опертых квадратных перекрытиях форма поверхности прогибов при упругой и пластической работе почти одинакова. Повышение расчетной нагрузки при сосредоточенной силе в центре составляет от 31% — 49%, при распределенной нагрузке — 15% — 19%.

3. Увеличения расчетной нагрузки за счет пластической работы сечения (W пласт) нами не рассматривались, так как экономический эффект от применения W пласт. хорошо известен.

4. При числе балок свыше пяти в одном или в каждом направлении, можно расчет приближенно свести к расчету перекрытия с меньшим числом балок.

5. При расчете перекрытий, состоящих из перекрестных балок, метод деформаций обладает следующими преимуществами:

1) Система канонических уравнений всегда получается хорошо обусловленной (диагональные элементы по абсолютной величине больше побочных). Это обеспечивает хорошую точность результатов.

2) Помимо определения внутренних усилий метод деформаций позволяет непосредственно определить прогибы в узловых точках. Это необходимо, так как при расчете перекрытий по предельному состоянию прогибы могут быть большими.

3) При перекрытиях с балками разных жесткостей методика расчета сохраняется. Расчет, однако, значительно усложняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Короткин Я. И. и другие. Изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем, 1953.

2. Розенблат Г. И. Применение метода деформаций к расчету рам за пределом упругости, 1957.

3. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, ч. 1, т. II, 1957.

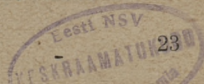
4. Нарец Л. К. О распаде систем канонических уравнений строительной механики, 1957. Труды ТПИ Сер. А № 121.

5. Роотс О. Т. Расчет и электро моделирование перекрестных балок. Диссертация. 1954, ТПИ.

6. Heyman, J. Limit Design of Continuous Beams for Minimum Weight, 1950.

7. Heyman, J. The Limit Design of a Transversely Loaded Square Grid, 1952.

8. Ostfeld, C. Lastverteilende Querverbindungen, 1930.



О. Т. Роотс

РАСЧЕТ СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК
ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ

Издательство
Таллинского Политехнического Института

*

Редактор Л. Поверус
Технический редактор А. Тамм
Корректор К. Оллик

Подписано к печати 2. VII 1958. Бумага $54 \times 84^{1/16}$. Печатных листов 1,5. По формату 60×92 печатных листов 1,23. Учетно-издательских листов 0,89. Тираж 800. Заказ № 470. МВ-04559.

Типография Управления Делами СМ ЭССР, Таллин

Цена 65 коп.