TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 428

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Труды
по строительной механике
Сборник статей
VIII

ТАЛЛИН 1977

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 428 1977

УДК 539
624

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Труды
по строительной механике
Сборник статей
VIII

Таллин 1977

Содержание

Таллинский политехнический институт
Труды ТПИ № 428
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
АНАЛИЗА СИСТЕМ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ
Труды по строительной механике. Сборник статей УШ
Редактор А.Юргенсон
Техн. редактор В.Ранник
Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 3 июня 1977 г.
Подписано к печати 27 сентября 1977 г.
Бумага 60х90/16
Печ. л. 3,75 + 0,25 приложение.
Уч.-изд. л. 3,9
Тираж 300
МВ- 06247
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9
Зак. № 1054
Цена 59 коп.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 428 1977

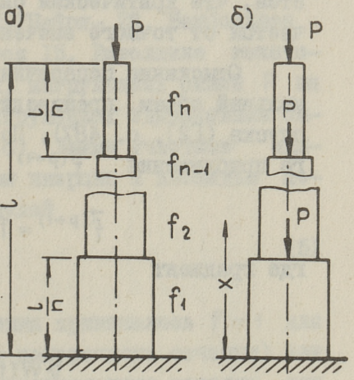
УДК 624.041.2

Р.Н. Ээк

СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННЫЕ УПРУГИЕ СТОЙКИ НАИМЕНЬШЕГО ОБЪЕМА, РАБОТАЮЩИЕ НА ЦЕНТРАЛЬНОЕ СЖАТИЕ

Стержень с постоянным поперечным сечением не является наиболее экономичным элементом для восприятия сжимающих нагрузок. Поэтому в строительных конструкциях широко используются сжатые элементы переменного сечения. Соотношения между поперечными сечениями отдельных частей обычно назначают эмпирически, что не обеспечивает получения наиболее экономичного решения.

В статье описывается программа для определения поперечных сечений центрально сжатых стоек (фиг. I), дающих наименьший объем стойки. Предполагается, что материал подчиняется закону Гука и зависимость между поперечным сечением и моментом инерции выражается одинаковым законом для всех участков стойки. Длины отдельных участков и узловые нагрузки заданы. Поперечные силы не учитываются.



Фиг. 1.

Программа состоит из двух частей: из программы для определения критической нагрузки стойки с заданным соотношением поперечных сечений отдельных частей и из программы выбора этих соотношений для получения оптимального решения.

Программа для определения критической нагрузки составлена на основе матричного метода, изложенного в [I]. Метод представляет собой матричную форму метода Тимошенко. В отличие от статьи [I] форма потери устойчивости уточняется в ходе расчета методом последовательных приближений. Вследствие этого отпадает необходимость решения обобщенного векового уравнения. В первом приближении за форму потери устойчивости стойки принимают упругую линию от единичной силы, приложенной к концу стойки перпендикулярно к оси. В следующих приближениях аппроксимируют форму выпучивания стойки упругой линией от изгибающих моментов предыдущего приближения, полученных от действия заданных продольных нагрузок на перемещениях предыдущего приближения. Метод обладает высокой точностью. Уже после 2...3 приближений получается практически точное решение при предположении, что отдельные участки изгибаются по параболе третьей степени.

Например для стойки постоянного поперечного сечения, разбивая длину стойки только на две равные части, получается, что критическая сила $P_{кр} = 2{,}46742\, EJ/l^2$. Это отличается от точного значения $P_{кр} = \pi^2 EJ/4l^2$ только на 0,001%.

Отыскание поперечных сечений, обеспечивающих минимальный объем, производится на основе метода скорейшего спуска ([2], с. 487). По этому методу вектор площадей нового приближения $\vec{f}^{(p+1)}$ следует найти по формуле

$$\vec{f}^{(p+1)} = \vec{f}^{(p)} - \lambda \nabla W(\vec{f}^{(p)}), \qquad (I)$$

где градиент

$$\nabla W(\vec{f}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial f_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial W}{\partial f_n} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

а множитель λ определяется из уравнения

$$\frac{d}{d\lambda} W[\vec{f}^{(p)} - \lambda \nabla W(\vec{f}^{(p)})] = 0. \qquad (3)$$

В формулах (I)...(3) через W обозначен объем стойки.

По разработанной программе производные $\partial W/\partial f_i$ определяют приближенно, производя определение объема $W^{(0)}$ для заданного вектора площадей $\vec{f}^{(0)}$, и с изменением отдельных площадей на заданную величину Δ. Получим объемы $W_i^{(1)}$, соответствующие площадям $f_i^{(1)} = f_i^{(0)} + \Delta$. Значения производных $\partial W / \partial f_i$ будут приближенно пропорциональны разностям $W_i^{(1)} - W^{(0)}$. Параметр λ определяется так, чтобы наибольшая поправка к какой-то площади была равна Δ:

$$\lambda \left| W_i^{(1)} - W^{(0)} \right|_{max} = \Delta. \tag{4}$$

Определение объема повторяют с полученными значениями поправок, пока объем нового приближения не станет больше объема предыдущего приближения. Тогда определяют новый градиент, принимая за нулевое приближение площади, которые дали в этом цикле наименьший объем. Определение нового градиента производится с новым значением Δ, меньшим предыдущего. Расчет повторяется определенное количество циклов или до тех пор, пока разность объемов, полученных в двух последовательных циклах, не будет меньше заданного значения ε.

Программа реализована на ЭВМ "Найри- 2". Наибольшее количество участков n равняется I5. Выполнено некоторое количество расчетов для стоек, нагруженных силой P на конце (фиг. I,а), и для стоек, нагруженных одинаковыми силами P между участками (фиг. I,б). Длины участков одинаковы. Зависимость между моментом инерции и площадью поперечного сечения выражается формулой

$$J = f^{q}, \tag{5}$$

где q = I,2 и 3.

В качестве нулевого приближения принималась $f = 1$ для всех участков (стойка постоянного поперечного сечения) или относительные поперечные сечения оптимального решения для другого значения q. Каждый расчет проводился в трех циклах, изменения площадей в отдельных циклах были Δ_1 = 0,I, Δ_2 = 0,I/ $\sqrt{\text{I0}}$ и Δ_3 = 0,0I.

Оптимальные относительные площади f_i поперечных сечений стоек с разным количеством участков n приведены в таблице I (для стойки постоянного поперечного сечения f =I). Там же показан отрицательный объем $W_n^{(onm)}$ стойки с оптимальными размерами в сравнении с объемом стойки постоянного поперечного сечения в процентах. В последнем столбце

Таблица I

n	f / $W_n^{(onm)}$ %	Стойка, нагруженная силой на конце (фиг. I,а)			Стойка, нагруженная силами на каждом участке (фиг. I,в)			
		q = I	q = 2	q = 3	q = I	q = 2	q = 3	ν^2
I	2	3	4	5	6	7	8	9
	f_2	0,6I	0 73	0,80	0,5I	0,66	0,74	
2	f_1	I,I9	I,I3	I,I0	I,I8	I,I3	I,I0	4,I33
	W_2	89,6	93,2	94,7	84,4	89,4	92,0	
	f_3	0,43	0,59	0,68	0,29	0,47	0,58	
3	f_2	0,95	0,98	0,99	0,8I	0,90	0,93	5,0I2
	f_1	I,2I	I,I5	I,II	I,24	I,I6	I,I3	
	W_3	86,3	90,4	92,7	78,0	84,3	87,9	
	f_4	0,32	0,50	0,6I	0,I9	0,35	0,48	
	f_3	0,77	0,86	0,90	0,57	0,7I	0,79	
4	f_2	I,08	I,06	I,05	0,98	I,0I	I,0I	5,558
	f_1	I,22	I,I5	I,I3	I,25	I,I8	I,I3	
	W_4	84,8	89,2	9I,7	74,7	8I,4	85,5	

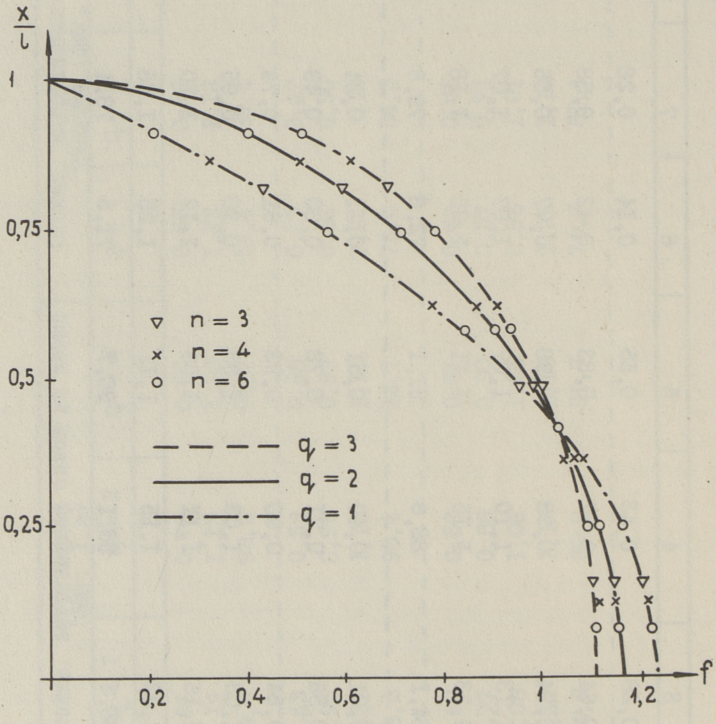
Продолжение таблицы I

I	2	3	4	5	6	7	8	9
	f_5	0,26	0,43	0,55	0,I4	0,28	0,4I	
	f_4	0,64	0,77	0,83	0,42	0,58	0,87	
	f_3	0,94	0,98	0,98	0,77	0,86	0,90	
5	f_2	I,I3	I,I0	I,07	I,07	I,07	I,07	5,926
	f_1	I,23	I,I5	I,II	I,25	I,I8	I,I3	
	W_5	84,I	88,6	9I,I	72,8	79,6	83,9	
	f_6	0,2I	0,40	0,5I	0,II	0,24	0,36	
	f_5	0,56	0,7I	0,78	0,30	0,49	0,60	
	f_4	0,84	0,90	0,93	0,6I	0,74	0,8I	
6	f_3	I,03	I,03	I,03	0,90	0,95	0,96	6,I94
	f_2	I,I6	I,II	I,09	I,I2	I,I0	I,I0	
	f_1	I,22	I,I5	I,II	I,25	I,I8	I,I4	
	W_6	83,6	88,I	90,7	7I,5	78,4	82,8	

дан параметр критической силы ν^2 в формуле

$$N_{кр} = n \cdot P_{кр} = \nu^2 EJ / l^2 \tag{6}$$

для стойки постоянного поперечного сечения, нагруженной несколькими силами. С увеличением количества участков множитель ν^2 приближается к соответствующему значению для стойки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой ($\nu^2 = 7{,}83$).



Фиг. 2.

На фиг. 2 показаны оптимальные площади поперечных сечений на середине отдельных участков в случае нагружения стойки одной силой на конце стойки. Как видно по фигуре, эти точки лежат при $n \geqslant 3$ практически на одной кривой. В случае действия нескольких сил такое хорошее совпадение не наблюдается.

Время отыскания одного оптимального решения при $n = 6$ 3...4 минуты.

Литература

I. Э э к Р.Н. Некоторые разновидности метода единичных сил для определения критической нагрузки упругих рам и стержней. "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 321, Таллин, 1972.

2. Д е м и д о в и ч Б.П., М а р о н И.А. Основы вычислительной математики. Физматгиз. М., 1960.

R. Eek

Axially Loaded Elastic Columns of Minimal Weight

Summary

In this paper a method for determinating the optimal measurements of the cross-sections of axially loaded columns is described. The buckling load of a column is attained by the method of unit forces, published by the author in previous papers of TPI. Optimal measurements are found by gradient method.

Some results of the calculations, obtained on the computer "Nairi-2", are presented.

[illegible]

1. Э т к Л.Б. Некоторые [illegible] методы [illegible] для определения критической нагрузки [illegible]. "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № [illegible]. Таллин, 1972.

2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1960.

[illegible]

Axially loaded discrete columns of minimal weight

Summary

In this paper a method for determinating the optimal arrangements of the cross-sections of axially loaded columns is considered. The buckling load of a column is obtained by the method of unit forces, published by the author in previous papers of 1971. Optimal arrangements are found by gradient method.

The results of the calculations, obtained on the computer "Minsk-22", are presented.

[illegible]

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 428 1977

УДК 539.3

Л.Ю. Поверус, А.А. Рейман

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА ЗАТУХАНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНАХ

I. Однородные и слоистые пластины используются часто в разных сооружениях в качестве ограждающих конструкций против интенсивных внешних воздействий. Такими внешними воздействиями являются взрывы, удары и интенсивные акустические шумы. Слоистые пластины или пластины периодической структуры имеют некоторые и иногда значительные преимущества по сравнению с монолитными пластинами против вышеупомянутых воздействий.

Целесообразным выбором материалов и толщины отдельных слоев пластины можно достигнуть весьма хорошего эффекта затухания разных характеристик волнового процесса.

Характеристики волнового процесса можно делить на динамические и кинематические.

Динамическими характеристиками являются, главным образом, напряжения, возникающие в пластине, а кинематическими характеристиками будут перемещения, скорости и ускорения ограждающих поверхностей пластины. Через напряжения определяется несущая способность пластины, а через кинематические характеристики эксплуатационные свойства всего сооружения в целом.

Затухание характеристик волнового процесса может происходить от разных общеизвестных причин.

В настоящей работе будет рассмотрено затухание от процесса рассеивания упругой энергии волновым процессом и также эффекты термоупругого и вязкоупругого затухания.

Рассматривается слоистая в плане бесконечная пластина, которая состоит из трех слоев. Внешние слои несущие и они обладают более высокими физическими параметрами, чем средний слой, задачей которого является демпфирование проходящих возмущений. По свойствам являются пластины из материала периодической структуры близкими к слоистым пластинам. Это одна из разновидностей анизотропных пластин, т.н. трансверсально-изотропные пластины.

При исследовании затухания по причине процесса рассеивания упругой энергии деформации волнового процесса будем исходить из уравнений движения теории упругости для изотропного или анизотропного материала. Эти уравнения и их решение описаны в статье [II] настоящего сборника, посвященной исследованию волнового процесса в слоистой пластине. В настоящей работе на фигурах 3, 4 и 5 представляются изменения волновых характеристик $W.\ \frac{\partial W}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}$ на оси через эпицентр трансверсально-изотропной пластины в зависимости от времени τ.

Одна из причин затухания волнового процесса является термоупругая диссипация. Если термоупругий эффект затухания, зависящий от термодинамических параметров материала, для высокопрочных металлов является незначительным, то для некоторых низкопрочных металлов и материалов типа пластмасс этот эффект может иметь уже большое значение.

Круг задач общей теории термоупругости весьма широк. В настоящей работе основное внимание будем уделять так называемой связанной теории термоупругости.

Исследование связанных задач термоупругости получили интенсивное развитие за последние десять лет [I,2,3,4], при этом наиболее совершенно разработана теория плоских термоупругих волн.

Если в несвязанной теории термоупругости механические разрывы распространяются со скоростью распространения волн расширения и их значения не изменяются при распространении по среде, то во взаимосвязанной теории выщеупомянутая скорость не изменяется, но величина разрыва уменьшается по времени. Фронту волны расширения предшествует тепловой фронт, который распространяется также с конечной скоростью.

Если диссипативные силы в жидкостях и газах, порожденные вязкостью и теплопроводностью, имеют сравнительно простую природу, причем эти эффекты могут быть исследованы аналитически, то поведение твердых тел оказывается гораздо более сложным и существенно зависит от строения твердого тела. Так как нет удовлетворительной теории внутреннего трения в твердых телах, то для практических расчетов применяются упрощенные модели вязкоупругих тел типа тела Фойхта, тела Максвелла или более общие модели.

II. Ниже выводятся связанные уравнения движения термо- и вязкоупругих волн для изотропных материалов.

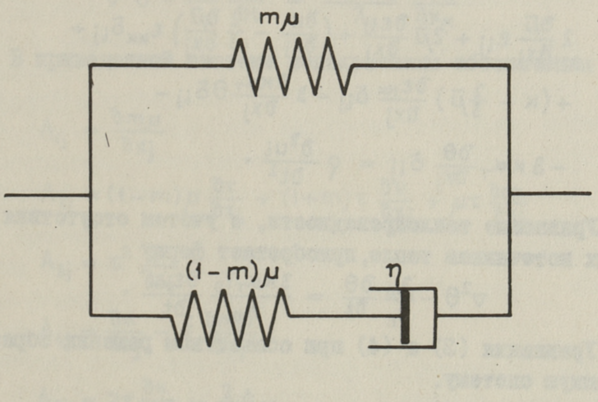
При выводе уравнений движения в данной работе рассматривается неоднородный изотропный вязкоупругий материал, факторы которого описывают свойства и являются функциями от координат. Подобными факторами будут:

I. Модуль упругости объемной деформации К.

На основе многих исследований [5,6] изменение этого модуля в вязкоупругой переходной области можно считать ничтожно малым.

2. Модуль сдвига μ.

Аналогично работе [7] модель, описывающая вязкоупругие свойства материала, представлена на фиг. I.



Фиг. I.

В этой модели: μ – модуль сдвига без релаксации, $m\mu$ – модуль сдвига с учетом релаксации, η – коэффициент вязкости.

Время релаксации выражено формулой:

$$\tau = \frac{\eta}{(1-m)\mu} \qquad (0 < m < 1)$$

Вязкоупругий оператор, описывающий вышепредставленную модель, будет следующий:

$$\bar{\mu} = \mu \left[\frac{m + \tau \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \right],$$

3. Коэффициент температурного расширения $\alpha_т$.

4. Коэффициент удельной теплоемкости c_ε.

5. Коэффициент теплопроводности для изотропного материала λ_0.

Уравнения движения без учета массовых сил будут следующими:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Выражая в уравнении (1) σ_{ij} через следующее уравнение Дюамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = 2\bar{\mu}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) + \left(k\varepsilon_{kk} - 3k\alpha_т\Theta\right)\delta_{ij} \qquad (2)$$

получаются после дифференцирования уравнения движения в виде:

$$2\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial x_j}\varepsilon_{ij} + 2\bar{\mu}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial x_j}\right)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \left(k - \frac{2}{3}\bar{\mu}\right)\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial x_j}\delta_{ij} - 3\frac{\partial k\alpha_т}{\partial x_j}\Theta\delta_{ij} - 3k\alpha_т\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\delta_{ij} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \qquad (3)$$

Уравнение теплопроводности, с учетом отсутствия внутренних источников тепла, приобретает форму

$$\nabla^2\Theta - \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{3k\alpha_т T_0}{\lambda_0}\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial t}. \qquad (4)$$

Уравнения (3) и (4) при совместном решении образуют связанную систему.

В этой системе кроме общеизвестных и ранее представленных обозначений приняты еще следующие:

δ_{ij} – символ Кронекера;

θ – изменение температуры по сравнению с ненапряженным состоянием;

T_0 – температура ненапряженного состояния.

Рассматривая в вышеприведенных уравнениях $\bar{\mu}$ и $\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_j}$ как вязкоупругие операторы и подставляя в них следующие выражения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right); \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \text{и} \quad a_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

получим для неоднородного изотропного и вязкоупругого материала следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}
A_{1j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + A_{2j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + A_{3j}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) + \\
+ m\mu\nabla^2 u_i + 2\mu\tau\nabla^2 v_i + \mu\tau^2\nabla^2 a_i + A_{4j}\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_\kappa} + A_{5j}\frac{\partial v_\kappa}{\partial x_\kappa} + \\
+ A_{6j}\frac{\partial a_\kappa}{\partial x_\kappa} + \left(\kappa + \frac{1}{3}m\mu\right)\frac{\partial^2 u_\kappa}{\partial x_i \partial x_\kappa} + 2\tau\left(\kappa + \frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2 v_\kappa}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \\
+ \tau^2\left(\kappa + \frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2 a_\kappa}{\partial x_i \partial x_\kappa} - A_{7i}\theta - 2\tau A_{7i}\frac{\partial \theta}{\partial t} - \tau^2 A_{7i}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \\
- 3\kappa\alpha_\tau\frac{\partial \theta}{\partial x_i} - 6\tau\kappa\alpha_\tau\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial t} - 3\tau^2\kappa\alpha_\tau\frac{\partial^3 \theta}{\partial x_i \partial t^2} = \\
= \rho a_i + 2\tau\rho\frac{\partial a_i}{\partial t} + \rho\tau^2\frac{\partial^2 a_i}{\partial t^2} \\
\nabla^2\theta - \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{3\kappa\alpha_\tau T_0}{\lambda_0}\frac{\partial v_\kappa}{\partial x_\kappa}
\end{gathered} \tag{5}$$

В приведенной системе использованы обозначения

$$A_{1j} = \frac{\partial m\mu}{\partial x_j}$$

$$A_{2j} = (1-m)\mu\frac{\partial \tau}{\partial x_j} + (1+m)\tau\frac{\partial v}{\partial x_j} + \mu\tau\frac{\partial m}{\partial x_j}$$

$$A_{3j} = \tau^2\frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$

$$A_{4j} = \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial m\mu}{\partial x_j}$$

$$A_{5j} = 2\tau\frac{\partial \kappa}{\partial x_j} - \frac{2}{3}A_{2j}$$

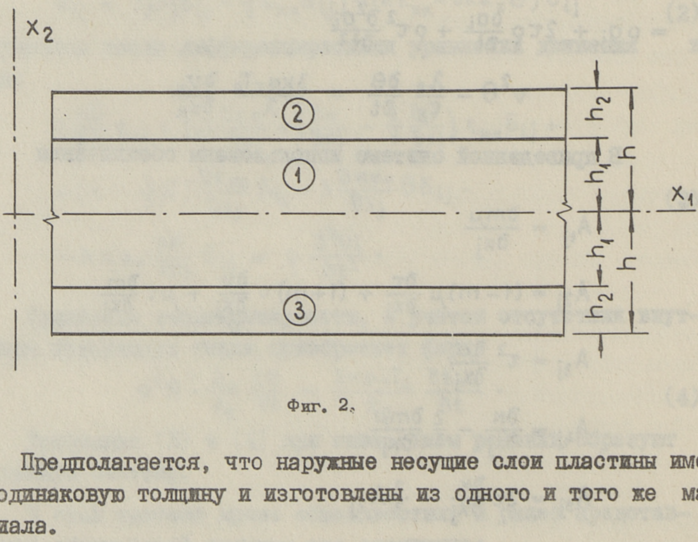
$$A_{6j} = \tau^2 \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\tau^2 \frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$

$$A_{7j} = \frac{\partial \kappa \alpha_T}{\partial x_j}$$

В случае изотропного материала система приобретает форму

$$\begin{aligned} & m\mu \nabla^2 u_i + (\kappa + \tfrac{1}{3} m\mu) \frac{\partial^2 u_\kappa}{\partial x_i \partial x_\kappa} - 3\kappa\alpha_T \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \\ & + 2\tau\Big[\mu \nabla^2 v_i + (\kappa + \tfrac{1}{3}\mu) \frac{\partial^2 v_\kappa}{\partial x_i \partial x_\kappa} - 3\kappa\alpha_T \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial t} - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}\Big] + \\ & + \tau^2\Big[\mu \nabla^2 a_i + (\kappa + \tfrac{1}{3}\mu) \frac{\partial^2 a_\kappa}{\partial x_i \partial x_\kappa} - 3\kappa\alpha_T \frac{\partial^3 \theta}{\partial x_i \partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 a_i}{\partial t^2}\Big] = 0 \\ & \nabla^2 \theta - \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{3\kappa\alpha_T T_0}{\lambda_0} \frac{\partial v_\kappa}{\partial x_\kappa}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ш. Волна плоской термо- и вязкоупругой деформации в трехслойной пластине.

Рассматривается бесконечная трехслойная пластина единичной ширины, сечение которой представлено на фиг. 2.

Фиг. 2.

Предполагается, что наружные несущие слои пластины имеют одинаковую толщину и изготовлены из одного и того же материала.

Аналогично работам [8,9] принимаем, что перемещения и изменение температуры определяются в отдельных слоях при помощи следующих формул

$$
\begin{aligned}
u_i^{(i)} &= u^{(i)}(x_1,t) + x_2 u_1^{(i)}(x_1,t) \\
u_2^{(i)} &= u_2(x_1,t) \\
u_3^{(i)} &= 0 \\
\theta^{(i)} &= \theta_0^{(i)}(x_1,t) + x_2\theta^{(i)}(x_1,t).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Перемещения и изменение температуры в отдельных слоях представляются выражениями

$$
\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= x_2\psi_1(x_1,t) \\
u_1^{(2)} &= -h_1(\psi_1-\psi_2) + x_2\psi_2 \\
u_1^{(3)} &= h_1(\psi_1-\psi_2) + x_2\psi_2 \\
u_2^{(i)} &= u_2(x_1,t) \\
u_3^{(i)} &= 0 \\
\theta^{(1)} &= x_2\psi_3(x_1,t) \\
\theta^{(2)} &= -h_1(\psi_3-\psi_4) + x_2\psi_4 \\
\theta^{(3)} &= h_1(\psi_3-\psi_4) + x_2\psi_4.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Предполагается, что в каждом поперечном сечении $x = \mathrm{const}$ перемещение u_2 для всех точек сечения будет одинаковое. Через ψ_1, ψ_2, ψ_3 и ψ_4 обозначены изменения перемещений и температуры по сравнению со срединной поверхностью пластины. Подобное изложение изменения перемещений и температуры обеспечивает непрерывность их в направлении толщины пластины.

Описывая теперь движение каждого слоя пластины при помощи системы (6) и подставляя там u_i и θ соответственно формулам (8), получим следующую систему, состоящую из пяти уравнений:

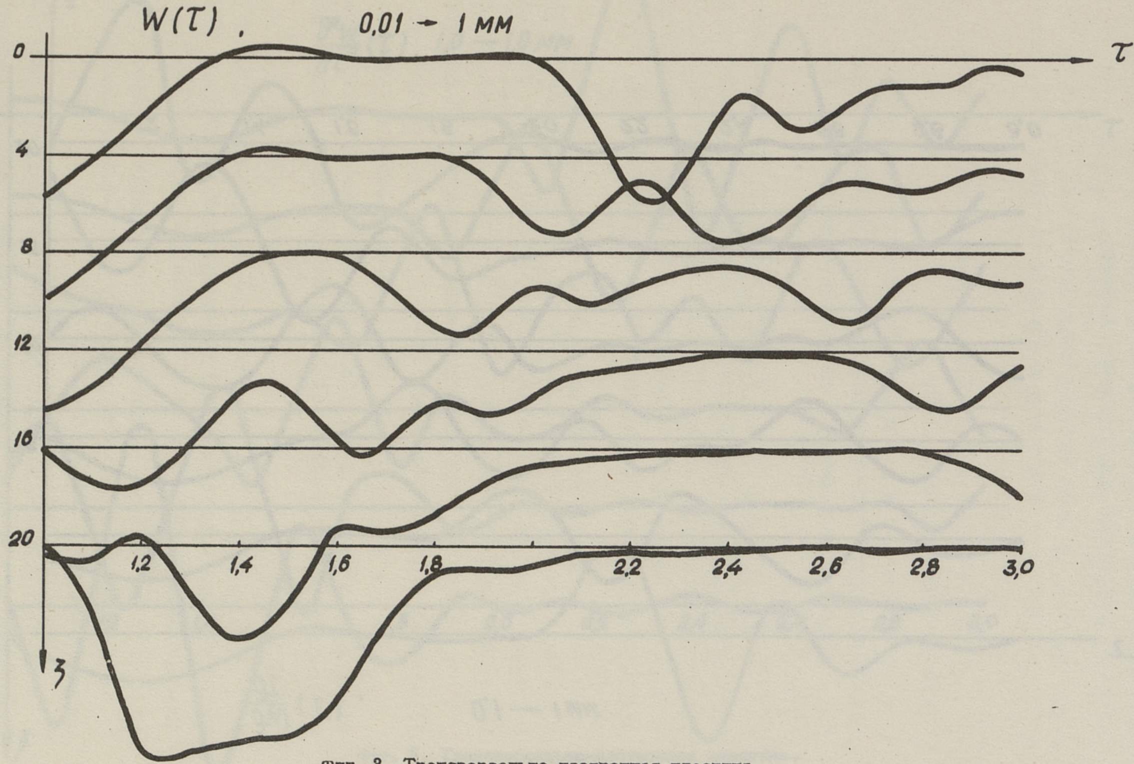
$$
[L_1^{(1)}](x_2\psi_1)+[L_2^{(1)}]\psi_1+[L_3^{(1)}]\psi_3+2\tau\frac{\partial}{\partial t}\Big\{[L_4^{(1)}](x_2\psi_1)+[L_5^{(1)}]\psi_1+
$$

$$
+[L_3^{(1)}](x_2\psi_3)\Big\}+\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big\{[L_4^{(1)}](x_2\psi_1)+[L_5^{(1)}]\psi_1+[L_3^{(1)}](x_2\psi_3)\Big\}=0
$$

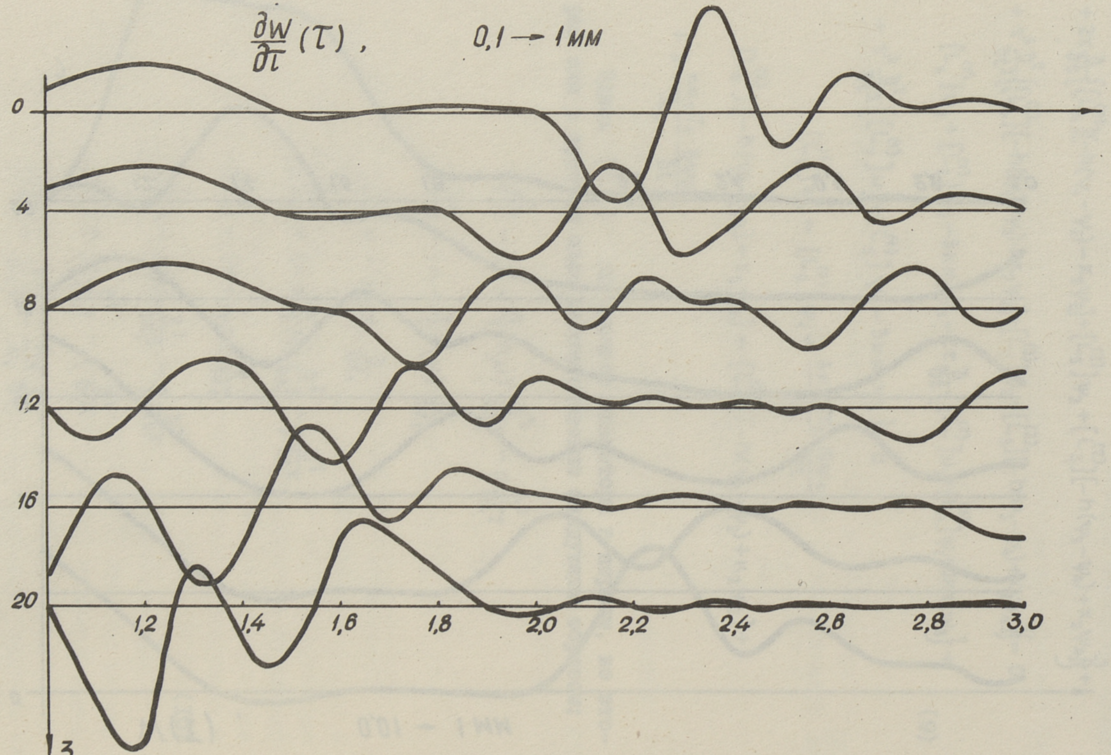
$$
\begin{aligned}
&[L_1^{(2)}][-h(\psi_1-\psi_2)+x_2\psi_2]+[L_2^{(2)}]\psi_2+[L_3^{(2)}][-h(\psi_3-\psi_4)+x_2\psi_4]+\\
&+2\tau\frac{\partial}{\partial t}\Big\{[L_4^{(2)}][-h(\psi_1-\psi_2)-x_2\psi_2]+[L_5^{(2)}]\psi_2+[L_3^{(2)}][-h(\psi_3-\psi_4)+x_2\psi_4]\Big\}+\\
&+\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big\{[L_4^{(2)}][-h(\psi_1-\psi_2)+x_2\psi_2]+[L_5^{(2)}]\psi_2+[L_3^{(2)}][-h(\psi_3-\psi_4)+x_2\psi_4]\Big\}=0\\
&[L_6^{(1)}]u_2+[L_2^{(1)}]\psi_1-3\kappa\alpha_T\psi_3+2\tau\frac{\partial}{\partial t}\Big\{[L_7^{(1)}]u_2+[L_5^{(1)}]\psi_1-3\kappa\alpha_T\psi_3\Big\}+\\
&+\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big\{[L_7^{(1)}]u_2+[L_5^{(1)}]\psi_1-3\kappa\alpha_T\psi_3\Big\}=0\\
&[L_8^{(1)}]\psi_3=[L_9^{(1)}]\psi_1+\frac{3\kappa\alpha_T T_0}{\lambda_0}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\\
&[L_6^{(2)}][-h(\psi_3-\psi_4)+x_2\psi_4]=[L_3^{(2)}][-h(\psi_1-\psi_2)+\kappa_2\psi_2]+\\
&+3\frac{\kappa\alpha_T T_0}{\lambda_0}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь $[L_i^{(i)}]$ обозначает операторы в первом, во втором или в третьем слое соответственно следующим образом:

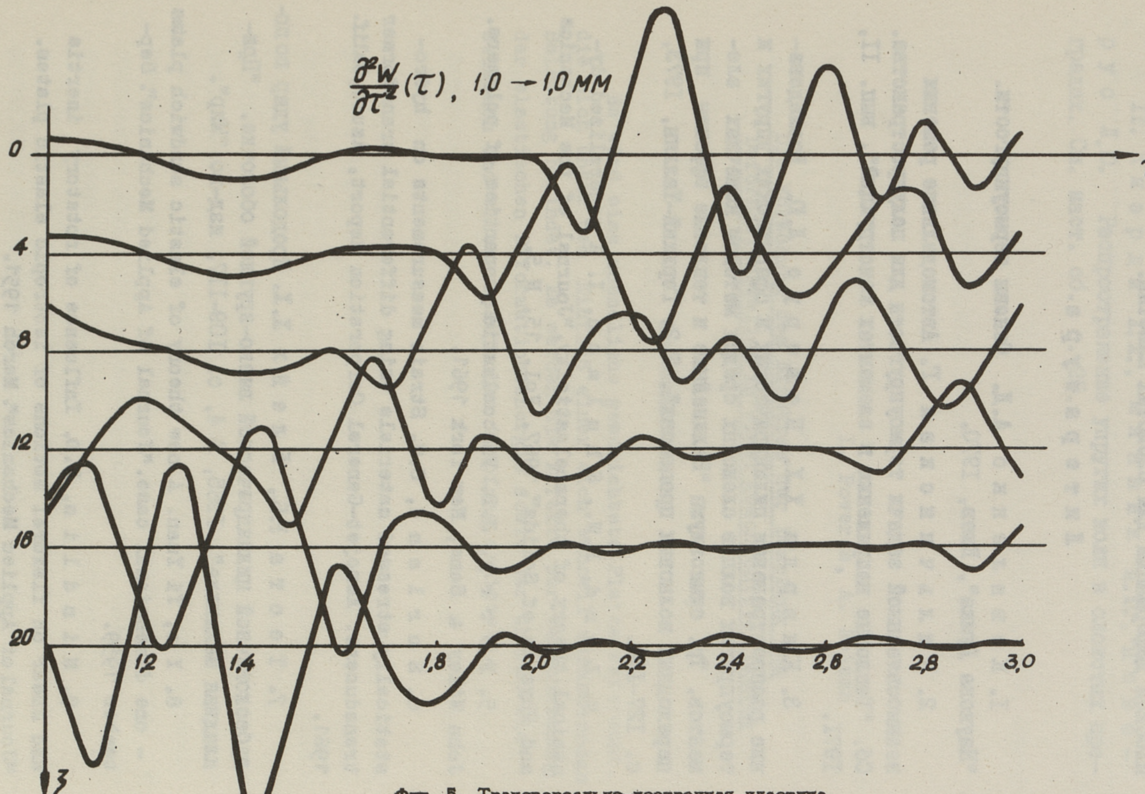
$$
\begin{aligned}
&[L_1^{(i)}]=(\kappa+\tfrac{4}{3}m\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\\
&[L_2^{(i)}]=(\kappa+\tfrac{1}{3}m\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&[L_3^{(i)}]=-3\kappa\alpha_T\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&[L_4^{(i)}]=(\kappa+\tfrac{4}{3}\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\\
&[L_5^{(i)}]=(\kappa+\tfrac{1}{3}\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&[L_6^{(i)}]=m\mu\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\\
&[L_7^{(i)}]=\mu\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\\
&[L_8^{(i)}]=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\\
&[L_9^{(i)}]=\frac{3\kappa\alpha_T T_0}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial t}
\end{aligned}
\tag{I0}
$$



Фиг. 3. Трансверсально-изотропная пластина.



Фиг. 4. Трансверсально-изотропная пластина.



Фиг. 5. Трансверсально-изотропная пластина.

Прилагая к системе (9) начальные и краевые условия, выдвигается задача о распространении термо-вязкоупругих волн плоской деформации для слоистых пластин.

Литература

1. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. "Наукова Думка", Киев, 1970.

2. Кильчинская Г. Автомодельные решения взаимосвязанной задачи термоупругости для полупространства. Сб. "Тепловые напряжения в элементах конструкций", вып. II, 1971.

3. Кяэрди Х.Х., Поверус Л.Ю. Исследование распространения цилиндрических и сферических упругих и термоупругих волн в слоистых средах методом конечных элементов. Тр. симпозиума "Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах", Т.2, Горький-Таллин, 1973, с. 127-134.

4. Lord, H.W., Shulman, I. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. "Journal of the Mechanics and Physics of Solids", 1967, Vol. 15, N 5.

5. Ferry, J.D. Viscoelastic properties of polymers. John Wiley & Sons, New York 1961.

6. Surland, C.C. Strain measurements on hydrostatically stressed materials using differential transformer transducers. Aerojet-General Corporation Report, Azusa, Calif. 1961.

7. Теста Р.Б., Блейх Х.Х. Продольный удар по полубесконечной цилиндрической вязко-круглой оболочке. "Прикладная механика", 1965, № 4, с. 109-117, изд-во "Мир".

8. Yu, Yi Yuan. A new theory of elastic sandwich plates - one dimensional case. "Journal of Applied Mechanics". September 1959.

9. Mindlin, R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. "Journal of Applied Mechanics". March 1951.

10. Новацкий В. Теория упругости. "Мир", М., 1975.

11. Кяэрди Х.Х., Мяннил А.Ю., Поверус Л.Ю. Распространение упругих волн в слоистых преградах. См. наст. сб., с. 25.

L. Poverus, A. Reiman

Die Forschung des Effektes der Dämpfung von Deformationswellen in einer geschichteten Platte

Zusammenfassung

Es wird eine unendliche geschichtete Platte erforscht, die sich unter dem Einfluß einer sich schnell verändernden Belastung befindet. Es werden die Effekte der Verschwimmung der elastischen Deformationsenergie sowie der thermo-elastischen und visco-elastischen Dämpfung ermittelt.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 428 1977

УДК 539.3

Х.Х. Кяэрди, А.Ю. Мяннил, Л.Ю. Поверус

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ ПРЕГРАДАХ

В работе производится исследование распространения упругих волн деформации в трехслойной преграде, находящейся под воздействием осесимметричной кратковременной нагрузки, монотонно изменяющейся по сложному закону по времени и распределенной на некоторой ограниченной области внешней поверхности пластины. Предполагается, что материал отдельных или всех слоев пластины может быть изотропным или трансверсально-изотропным.

Работы в области исследования распространения упругих волн в слоистых средах и пластинах, число которых весьма большое, можно по назначению разделить на геофизические и технические. Для решения всех задач разработаны в течение многих лет разные аналитические и численные методы. Большое внимание уделяется последнее время техническим задачам и численным методам.

Одной из первых работ, посвященных численному методу расчета волновых полей в упругой слоистой системе, является работа [I]. Предложенная авторами этой работы разностная схема является явной и примененный в ней метод в некоторых основных деталях близок к первому из методов, разработанных в данной статье. Математической моделью настоящей работы является трехмерная теория упругости, уравнения движения которой решаются методом трехмерных сеток и упрощенная модель трехслойных пластин типа Тимошенко, решаемая прямым вариантом метода конечных элементов [5].

В первой части работы исследуется распространение упругих волн в бесконечной трехслойной пластине на базе уравнений трехмерной теории упругости.

Первый слой, трансверсально-изотропная пластина, характеризуется следующими упругими постоянными:

E', E_1 – модуль Юнга в плоскости изотропии и в плоскости, перпендикулярной к ней соответственно; ν' – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращения в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости; ν_1 – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном к ней; G_1 – модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

Следующие два слоя изотропные пластины, но с различными упругими постоянными:

$$E_2, \nu_2 \quad \text{и} \quad E_3, \nu_3 .$$

Возможен и такой случай, при котором все слои изотропные или трансверсально-изотропные с различными характеристиками.

Дифференциальные уравнения осесимметричного движения первого слоя пластины в безразмерных переменных

$$\rho = \frac{r}{h_1}, \quad \zeta = \frac{z}{h_1}, \quad u = \frac{u_1}{h_1}, \quad w = \frac{u_3}{h_1}, \quad \tau = c_{13}\frac{t}{h_1} \qquad (I)$$

представляются в следующем виде:

$$K_2^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho^2}\right) + \left(\frac{\nu_1}{1-\nu'}K_1 + K^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \zeta} + K^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{K_{11}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

$$K^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}\right) + \left(\frac{\nu_1}{1-\nu'}K_1 + K^2\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{K_{11}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}. \qquad (2)$$

В выражениях (I) и в системе (2): r, z – цилиндрические координаты пластины; u_1, u_3 – перемещения в направлении r и z соответственно; h_1 – толщина первого слоя; t – время; c_{13} – скорость волны расширения в третьем слое, имеющая наибольшее значение среди подобных скоростей.

$c_{13} = \left[(1-\nu')E_1/(1-\nu'-2K_1\nu_1^2)\rho_1^*\right]^{\frac{1}{2}}$ – скорость волны расширения в направлении ζ,

$c_{1\rho} = \left[(1-\nu_1^2 K_1)E'/(1+\nu')(1-\nu'-2K_1\nu_1^2)\rho_1^*\right]^{\frac{1}{2}}$ – скорость волны расширения в направлении ρ,

$c_{21} = (G_1/\rho_1^*)^{\frac{1}{2}}$ – скорость волны сдвига,

$\kappa^2 = c_{21}^2/c_{1\zeta}^2$, $\kappa_1 = E'/E_1$, $\kappa_2^2 = c_{1\rho}^2/c_{1\zeta}^2 = (1-\kappa_1\nu_1^2)\kappa_1/(1-\nu'^2)$, $\kappa_{11} = c_{1\zeta}^2/c_{13}^2$.

Напряжения в первом слое в безразмерной форме представляются следующими выражениями:

$$\sigma_\zeta = \nu_1\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho}\right) + \frac{1-\nu'}{\kappa_1}\frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

$$\sigma_\rho = \frac{1-\kappa_1\nu_1^2}{1+\nu'}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\nu'+\kappa_1\nu_1^2}{1+\nu'}\cdot\frac{u}{\rho} + \nu_1\frac{\partial w}{\partial \zeta}, \qquad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\nu'+\kappa_1\nu_1^2}{1+\nu'}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1-\kappa_1\nu_1^2}{1+\nu'}\cdot\frac{u}{\rho} + \nu_1\frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

$$\tau_{\zeta\rho} = \frac{G_1}{\kappa_3}\left(\frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right),$$

где $\qquad \kappa_3 = E'/(1-\nu'-2\kappa_1\nu_1^2)$.

Для получения размерных напряжений σ_z, σ_r, σ_θ и τ_{zr} нужно им соответствующие безразмерные величины умножить на коэффициент κ_3.

Следующие два слоя пластины изотропные. Осесимметричное движение и напряжения этих слоев можно определить при помощи уравнений (2) и (3), если в последних заменить $\nu_x' = \nu_x$, $E_x' = E_x$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1$. Через x обозначен индекс слоя $(x = I,2,3)$.

Решение уравнений движения (2) происходит с применением дискретной математической модели конечных разностей. Все производные от перемещений выражаются через отношения конечных разностей в первом приближении. При этом нужно удовлетворить соответствующие начальные, граничные и фронтовые условия. Определение последних происходит в согласии с законами геометрической оптики, состоящих в проведении лучей и построении соответствующих волновых фронтов и также в составлении некоторых дополнительных фронтовых условий.

Ниже кратко описываются граничные условия.

На верхней поверхности пластины нормальные напряжения должны равняться внешней нагрузке $f_i(\tau)$, зависящей от координаты ρ_i и от времени τ. Касательные напряжения равны нулю.

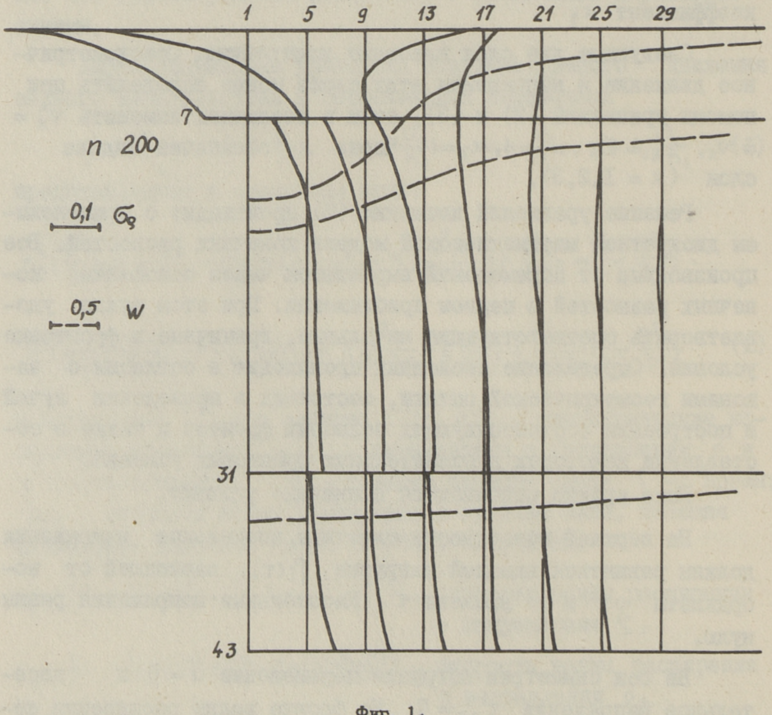
На оси симметрии нагрузки перемещение $u = 0$ и касательное напряжение $\tau_{\rho\zeta} = 0$. На фронте волны расширения перемещения равны нулю.

Условиями контакта на поверхностях раздела между слоями являются непрерывность перемещений и напряжений.

На нижней поверхности пластины нормальные и касательные напряжения равны нулю. Все вышеописанные условия выражаются через перемещения в дискретных точках.

Что касается приложения фронтовых условий, то в настоящей постановке задачи нужно определить и описать только фронт волны расширения. Как известно, последнюю можно достаточно точно определить методом геометрической оптики, при помощи принципа Ферма.

В случае точечного источника возмущения волновой поверхностью для изотропного материала является сфера. В случае анизотропного материала упругие свойства зависят от



Фиг. 1,

рассматриваемого направлении и волновая поверхность имеет более сложную форму, чем сфера.

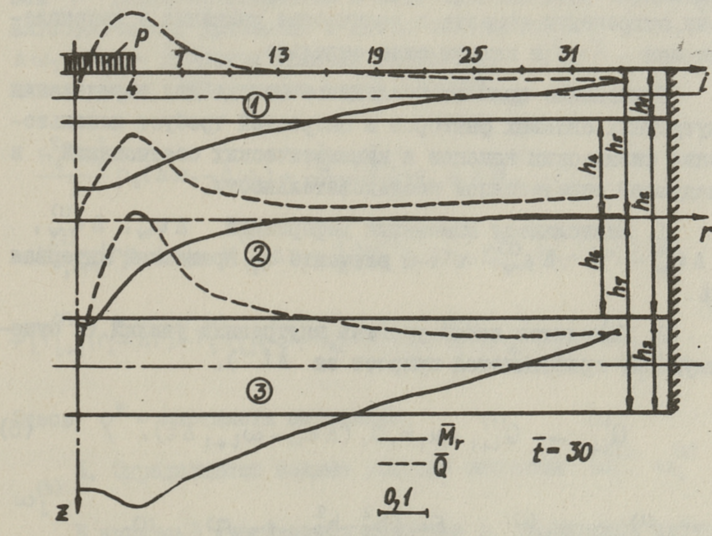
В данном исследовании предполагается, что внешняя нагрузка возрастает во времени по плавному закону. Вызванные этим способом нагружения мягкие фронтовые условия не требуют точного определения расположения фронта и волновая поверхность аппроксимируется в виде эллипсоида. Подробности техники приложения метода трехмерных сеток описаны в ранних работах авторов, в том числе и в работе [2].

Численно задача реализована на языке ФОРТРАН на машине ЭС-I022. Задача решена при следующих данных:

$$h_1/h_2/h_3 = 0{,}5/2{,}0/1{,}0\,,\quad E_1 = E_3 = 2{,}1\cdot 10^6\ \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}\,,\quad \nu_1 = \nu_3 = 0{,}3\,,$$
$$\rho_1^* = \rho_3^* = 7{,}95\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кгс}}{\text{см}^3}\,,\quad E_2 = 0{,}7\cdot 10^6\ \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}\,,\quad \nu_2 = 0{,}21\,,$$
$$\rho_2^* = 2{,}46\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кгс}}{\text{см}^3}\,.$$

Некоторые результаты вычислений представлены на фиг.I.

Во второй части развивается теория типа Тимошенко [3], [4], с применением прямого численного метода [5] к рассмотрению трехслойных пластин с учетом граничных условий.



Фиг. 2.

Перемещения в направлении оси r (фиг.2) определяются в каждом слое отдельно, как

$$
\begin{aligned}
u_r^{(1)} &= -h_4(\psi_2-\psi_1) - z\psi_1, \quad (h_4<0), \\
u_r^{(2)} &= -z\psi_2, \\
u_r^{(3)} &= -h_6(\psi_2-\psi_3) - z\psi_3 .
\end{aligned} \tag{4}
$$

Здесь $\psi_{1,2,3}$ - углы поворота сечений первого, второго и третьего слоя.

Из уравнения (4) путем дифференцирования находятся радиальные деформации ε_r. Окружные деформации определяются как $\varepsilon_\varphi = u_r/r$. Перемещения w в направлении оси z во всех слоях одинаковые. Угловые деформации находятся как $\gamma = -\psi + w' = -\gamma + \varepsilon_w$.

Напряжения определяются из закона Гука и путем интегрирования переходят к внутренним усилиям Q, T, M_r и M_φ (соответственно поперечная и продольная сила, радиальный и окружный момент).

Закон сохранения количества движения i-го элемента как единого целого применяется в направлении оси z, а законы сохранения момента и количества движения в направлении оси r - в каждом слое отдельно.

Применение прямого численного метода для определения внутренних силовых факторов и скоростей требует использования физических законов и кинематических соотношений в следующей определенной последовательности.

I. Вычисляются изменения деформаций $\Delta\varepsilon_w$, $\Delta\varepsilon_\psi^{(1)}$, $\Delta\varepsilon_\psi^{(2)}$ и $\Delta\varepsilon_\psi^{(3)}$ в i-м элементе за временной интервал Δt.

2. Находится новый уровень внутренних усилий (к существующему прибавляется прирост за Δt).

$$
Q_{i+1}^{(1)} \longleftarrow Q_{i+1}^{(1)} + k_1 h_1 G_1 (\Delta\varepsilon_w - \omega_{i+1}^{(1)}\Delta t), \tag{5}
$$

$$
M_{r,i+1}^{(1)} \longleftarrow M_{r,i+1}^{(1)} + \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left\{\frac{h_5^2-h_4^2}{2} h_4 \left[(\Delta\varepsilon_\psi^{(2)} - \Delta\varepsilon_\psi^{(1)}) + \right.\right. \tag{6}
$$

$$+\frac{\nu_1}{r_{i+1}}\left(\omega_{i+1}^{(2)}-\omega_{i+1}^{(1)}\right)\Big]-\frac{h_4^3-h_5^3}{3}\left(\Delta\varepsilon_\psi^{(1)}+\frac{\nu_1}{r_{i+1}}\omega_{i+1}^{(1)}\right)\Big\}.$$

Здесь коэффициент сдвига $\kappa = 0{,}76 + 0{,}3\nu$; G – модуль сдвига; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; ω – угловая скорость.

Аналогично находятся $Q_{i+1}^{(2)}$, $Q_{i+1}^{(3)}$, $M_{r,i+1}^{(2)}$, $M_{r,i+1}^{(3)}$, $M_{\varphi,i+1}^{(1)}$, $M_{\varphi,i+1}^{(2)}$, $M_{\varphi,i+1}^{(3)}$, $T_{i+1}^{(1)}$ и $T_{i+1}^{(3)}$.

3. Применяется закон сохранения количества движения в направлении оси z (определяется скорость элемента V_i).

$$V_i \leftarrow V_i + \\ +\frac{\left[(r_i+\Delta r)\left(Q_{i+1}^{(1)}+Q_{i+1}^{(2)}+Q_{i+1}^{(3)}\right)-r_i\left(Q_i^{(1)}+Q_i^{(2)}+Q_i^{(3)}\right)+p_i\Delta r\left(r_i+\frac{\Delta r}{2}\right)\right]\Delta t}{m_1+m_2+m_3}. \qquad (7)$$

Здесь m_1, m_2, m_3 – соответственно массы первого, второго и третьего слоя в i-м элементе.

4. Законы сохранения момента (для примера см. уравнение (8)) и сохранения количества движения в направлении оси r решаются совместно в виде системы пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными ($\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2, \Delta\omega_3$ – приросты угловых скоростей, N^{I}, N^{II} – сдвигающиеся силы, действующие между слоями).

$$\frac{h_4^2-h_5^2}{2}h_4(\Delta\omega_2-\Delta\omega_1)+\frac{h_4^3-h_5^3}{3}\Delta\omega_1=\Big\{M_{r,i}^{(1)}\cdot r_i -$$

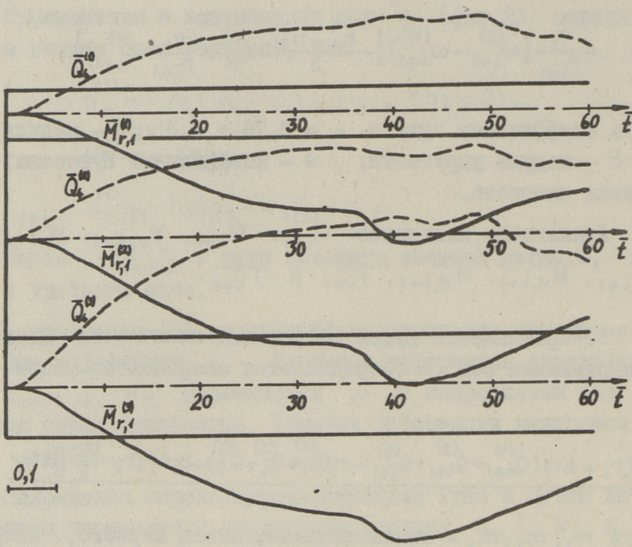
$$-M_{r,i+1}^{(1)}(r_i+\Delta r)+M_{\varphi,i}^{(1)}\Delta r+\frac{1}{2}\left[Q_i^{(1)}r_i\Delta r+Q_{i+1}^{(1)}(r_i+\Delta r)\Delta r\right]+ \qquad (8)$$

$$+\left[T_{i+1}^{(1)}(r_i+\Delta r)-T_i^{(1)}r_i\right]\left(\frac{h_1}{2}-h_4\right)-N_i^{I}\left(r_i+\frac{\Delta r}{2}\right)h_4\Big\}\frac{\Delta t}{\rho_1^*\left(r_i+\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta r}.$$

Здесь ρ^* – плотность материала.

5. Определяются полные угловые скорости $\omega_i^{(1)}$, $\omega_i^{(2)}$ и $\omega_i^{(3)}$.

В пункте 3 учитывается нагрузка p на верхней поверхности. На оси симметрии $Q_1^{(1)}=Q_1^{(2)}=Q_1^{(3)}=0$ и $\omega_1^{(1)}=\omega_1^{(2)}=\omega_1^{(3)}=0$



Фиг. 3.

В жесткой заделке $V_{i_m+1} = 0$ и $\omega^{(1)}_{i_m+1} = \omega^{(2)}_{i_m+1} = \omega^{(3)}_{i_m+1} = 0$ (i_m - количество элементов, на которое разделена пластина). Вышеизложенная методика обеспечивает непрерывность перемещений и напряжений на поверхностях раздела.

Некоторые численные результаты представлены на фиг. 2 и 3 в следующих безразмерных переменных:

$$\bar{t} = \frac{c_3 t}{h_1}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_1}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{h_1 E_3^*}, \quad \bar{M} = \frac{M}{h_1^2 E_3^*}, \tag{9}$$

где

$$c_3 = \left[\frac{E_3^*(1-\nu_3)}{\rho_3^*}\right] \quad \text{и} \quad E_3^* = \frac{E_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}.$$

Здесь c_3 - скорость распространения волны расширения в третьем слое.

Геометрические и физические характеристики конструкции, а также нагрузка аналогичные приведенным в первой части работы. Здесь пластина диаметром $\bar{d} = 24$ жестко заделана.

Максимальные внутренние усилия наблюдаются в конце нагрузки при $i = 4$ (фиг. 2). Первая отраженная волна доходит до оси симметрии при $\bar{t} \approx 35$, и его влияние (некоторое увеличение внутренних силовых факторов) особенно ясно видно из графиков моментов M_r на фиг. 3.

Литература

1. Alterman, Z., Karal, F.C. Jr. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods. "Bull. Seismol. Soc. America", 1968, 58, N 1.

2. Поверус Л.Ю., Ряямет Р.К. Распространение упругих волн в трансверсально-изотропной и изотропной толстой пластине. Распространение упругих и упругопластических волн (материалы У Всесоюзного симпозиума) Алма-Ата - 1973, с. 282-288.

3. Yu, Yi Yuan. A new theory of elastic sandwich plates - one-dimensional case. "Journal of Applied Mechanics", 1959, 26, N 3, 415-421.

4. Lai Jai-Lue. Pressure radiations from an infinite two-layered elastic plate with point and shear force excitations. "J. Acoust. Soc. Amer.", 1973, 53, N 2, 486-495.

5. Koening, H.A., Davids, N. Dynamical finite element analysis for elastic waves in beams and plates. "Int. J. Solids and Struct.", 1968, 4, 643-660.

H. Käerdi, A. Männil, L. Poverus

Die Fortpflanzung von elastischen Wellen in einer geschichteten Platte

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird die Fortpflanzung von elastischen Wellen in einer geschichteten Platte erforscht. Die Schichten der Platte sind aus isotropischem oder transversalisotropischem Material gebaut. Man erforscht den achsensymmetrischen Formänderungszustand. Als Untersuchungsmethoden werden die dreidimensionale Differenzenmethode und die Finite-Element Methode benutzt. Die numerischen Resultate werden mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine ermittelt.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 428 1977

УДК 624.074.4

Ю.А. Тярно

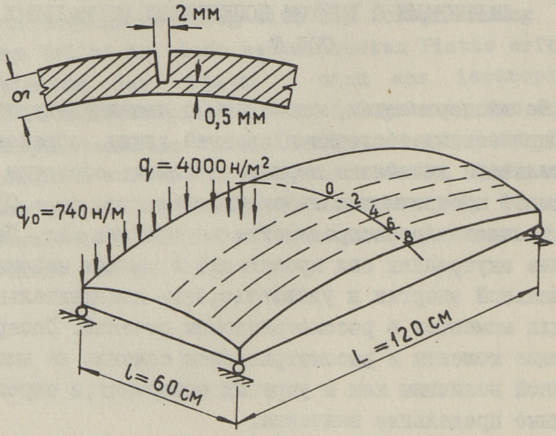
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ДИСКРЕТНЫМИ ШАРНИРАМИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ СИЛ T_y

По экспериментам, сделанным с квазицилиндрическими и цилиндрическими оболочками средней длины, образование действительного линейного шарнира в коньке оболочки (не воспринимает поперечных изгибающих моментов, $m_2 = 0$) вызывает существенное перераспределение внутренних сил. Перераспределение внутренних сил происходит в рамках минимизации потенциальной энергии и удовлетворения дополнительного условия для моментов в рассматриваемом сечении. Поперечные изгибающие моменты в рассматриваемом сечении не имеют естественной величины как в упругих оболочках, а строго фиксированные предельные значения.

Настоящая задача имеет важное значение при создании цилиндрических и квазицилиндрических перекрытий из отдельных продольных панелей или осуществления конструкции из хрупкого армированного материала (например, железобетона), в которых могут быть предусмотрены продольные шарниры или они развиваются в ходе нагружения конструкции.

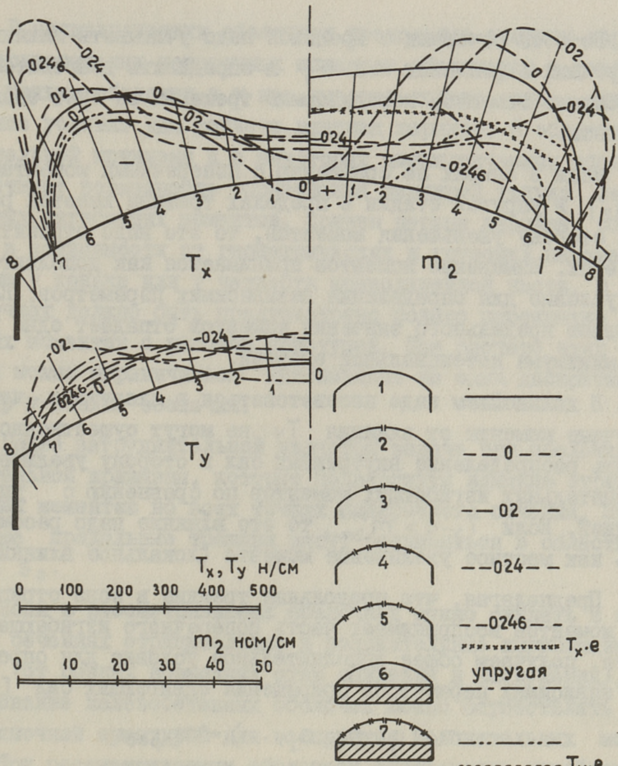
В оболочках рассматриваемого типа кроме основных внутренних сил T_x и m_2 действуют еще поперечные нормальные силы T_y и продольные изгибающие моменты m_1. Особого внимания в оболочках с продольными трещинами требуют усилия T_y, которые в упругих оболочках, ввиду их малости имеют незначительное значение.

Действительные продольные шарниры образуются только в некоторых частных случаях. Как правило, в продольном сечении у конька оболочки влияют сжимающие усилия T_y, которые в продольных трещинах влияют с эксцентриситетом (передаются по нижней, армированной, неразрушенной части трещины). В продольной трещине действуют, таким образом, отрицательные изгибающие моменты $m_2 = T_y \cdot e$. Обычно изгибающие моменты такого знака и величины имеются и в упругих оболочках относительно продольных трещин. Возможность передачи изгибающего момента через неармированную трещину имеет место только в пространственных конструкциях, в которых развиваются нормальные усилия в двух направлениях T_x и T_y.



Фиг. 1. Основные геометрические данные и расположение продольных трещин.

Существует прямая связь между поперечными нормальными силами T_y и поперечными моментами m_2. При всех экспериментах, сделанных с моделями с искусственными продольными трещинами (см. фиг. I), отмечается, что знак моментов у краев трещин совпадает с примененной эпюрой $m = T_y \cdot e$ моментов у трещин, а абсолютные величины отличаются примерно в 2 раза (см. фиг. 2). Последнее можно объяснить уменьшением плеча внутренней пары сил в трещине за счет концентрации напряжений. Для определения действительного эксцентриситета поперечных нормальных сил был сделан ряд экспериментов с оболочками с разными геометрическими и грузовыми параметрами, из которых выяснилось, что эксцентриситет колеблется в пределах (0,20 - 0,35) δ. Шарниры-трещины отрицательных



Фиг. 2. Распределение внутренних сил T_x, T_y и m_2 в квазицилиндрических оболочках с продольными искусственными трещинами.

изгибающих моментов в квазицилиндрических оболочках положительной кривизны вызывают такое распределение поперечных моментов, что имеется возможность образования следующих параллельных трещин. Как правило, эти трещины не вызывают разрушения, если предусмотрены мероприятия для восприятия продольных нормальных сил с учетом уменьшения плеча продольных внутренних сил и возможного образования зоны растяжения у конька оболочки. По сравнению с квазицилиндрическими оболочками без трещин отмечается значительное уменьшение отрицательных моментов даже при существенных эксцентриситетах усилий T_y. Можно сделать вывод, что продольные трещины переводят оболочки к состоянию, близкому к безмоментному (относительно наибольшие моменты и характерное поперечное распределение продольных сил).

Во всех сечениях с трещиной надо учитывать влияние поперечных нормальных сил T_y и определить действительные изгибающие моменты, передаваемые трещиной за счет эксцентриситета.

Если в эпюрах по сравнению с поперечными моментами $|m_2|$ в упругой стадии в пределах трещины имеется разница в сторону уменьшения моментов, то это надо отразить в расчетах. Изменение моментов принимается как дополнительное условие для определения независимых параметров. Каждым условием предельного значения моментов отпадает одно условие минимума потенциальной энергии.

В дальнейшем надо посоветоваться в следующем, что поперечные моменты от влияния T_y не могут существенно изменить распределение внутренних сил в сторону увеличения отрицательных изгибающих моментов по сравнению с упругой стадией. Если $T_y \cdot e > m_{2n}^{упр}$, то это влияние надо рассматривать как местное увеличение момента (локальное влияние).

Предполагая, что продольная трещина в зоне отрицательных моментов воспринимает часть поперечного изгибающего момента, получаем общее дополнительное условие для определения зависимых параметров приращения сдвигающих сил [I,2]

$$m_n(q,\ a_i,\ a_I,\ \ldots) = m_{пред}.$$

В зависимости от предельных поперечных изгибающих моментов $m_{пред}$ можно получить ряд дополнительных условий для различных точек поперечного сечения.

Условие предельного момента в точке 0 имеет вид $m_0 = m_{0пред}$. Если при выполнении в точке I условия $m_1 = m_{1пред}$ в точке 0 выполняется неравенство $m_0 > m_{0пред}$, следует учитывать также условие $m_0 = m_{0пред}$, если же $m_0 \leq m_{0пред}$, этого условия не надо учитывать для других точек поперечного сечения и т.д.

Из условий вертикального равновесия, сходства деформации и предельного момента в определенном сечении можно выразить зависимые параметры $a_I, a_0, a_1, a_2 \cdots a_m$ (m - количество шарниров), а независимые параметры приращения сдвигающих сил определяются из $n-m$ условий минимума потенциальной энергии. Все расчеты производятся при помощи интеграции.

В цилиндрических оболочках продольные трещины-шарниры от отрицательных поперечных моментов образуются в узкой зоне у конька оболочки и у нас имеется только одно дополнительное условие для расчета влияния шарнира. В оболочках отрицательной кривизны и в некоторых цилиндрических оболочках существует возможность образования шарниров только положительных изгибающих моментов, причем первые шарниры образуются в зависимости от геометрических и грузовых параметров в зоне у конька или у четверти криволинейной части. В этих оболочках должно быть предусмотрено полное перекрытие поперечных моментов с рабочей арматурой. При расчете этих оболочек можно ограничиться максимально на один дискретный шарнир у конька оболочки.

Более затруднительной является задача при оболочках положительной кривизны, которые подвергнуты влиянию отрицательных моментов во всех точках поперечного сечения. Параллельные продольные трещины могут развиваться в области шириной s_0.

Если в рассматриваемых оболочках можно ожидать в некоторых сечениях отрицательные и положительные изгибающие моменты (от разных возможных схем опирания и нагружения), то армирование железобетонных оболочек можно осуществлять только одиночной арматурой для восприятия положительных моментов. При рассматриваемых оболочках образование линейного шарнира текучести положительных изгибающих моментов никакого перераспределения усилий не вызывает и конструкция разрушается по линии шарнира.

Литература

1. Л а у л Х.Х. Расчет цилиндрических оболочек с криволинейными частями, очерченными по окружности.–"Тр.Таллинского политехн. ин-та", серия А, № 50, Таллин, 1953.

2. Л а у л Х.Х., Т я р н о Ю.А. Вопросы расчета цилиндрической оболочки линейным коньковым шарниром.–"Тр.Таллинск. политехн. ин-та", серия А, № 296, Таллин, 1970.

Ü. Tärno

A Study of Flat Shells with Discrete Line Hinges by Transversal Normal Forces T_y

Summary

The paper deals with the results of theoretical and experimental studies of the cylindrical and quasicylindrical shells with line hinges. It has been observed that the eccentricity of transversal normal forces T_y in line cracks influences the moment state of the shells.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 428 1977

УДК 624.041.2

Э.М.Иеги, П И.Коппель

СВОЙСТВА РАМНОЙ КОНСТРУКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕСОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

Свойства статически неопределенных рамных систем (с преобладающим изгибом) в пространстве безразмерных весовых параметров исследуются на примере портальной рамы. Такая однопараметрическая система позволяет провести полную графическую иллюстрацию статических и упруго-жесткостных свойств рамы, влияющих на объемную характеристику ее. При этом выявляется общая методика исследования свойств статически неопределимых рам, полностью соответствующая и анализу многопараметрических систем.

I. Раскрытие статической неопределенности системы проводится по методу сил (фиг. I и 2) и усилия в статически неопределенной раме определяются из матричного уравнения:

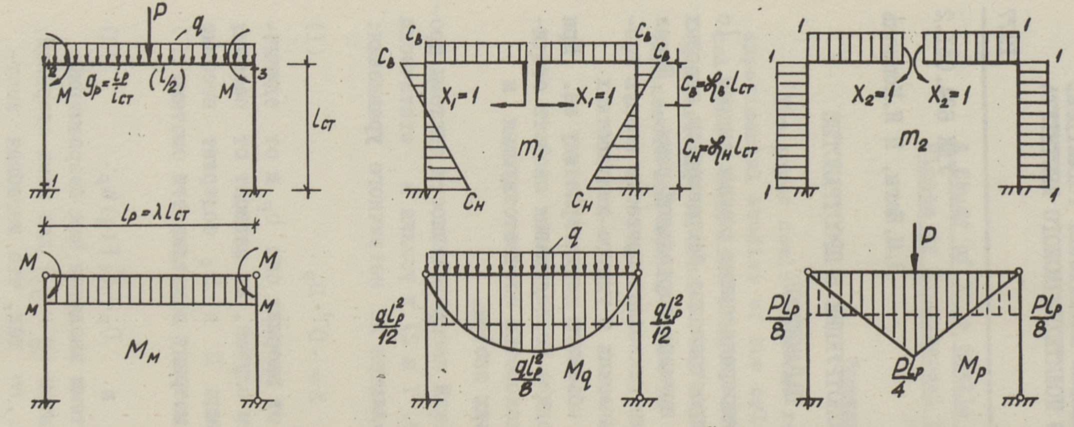
$$b = b_p + b_1 \cdot X, \quad \text{где} \quad X = -D^{-1} \cdot D_p \,. \tag{I}$$

Здесь матрицы усилий от внешних сил b_p и от единичных воздействий b_1, в общем случае, не зависят от весовых параметров системы, а матрицы D и D_p содержат весовые параметры (g), входящие в матрицу податливости системы (F) так, что

$$D = b_1' F(g)\, b_1 \quad \text{и} \quad D_p = b_1' F(g)\, b_p \,. \tag{2}$$

Весовые параметры системы вводятся как безразмерные параметры жесткостей элементов ($g = g_s$) для всех стержней, входящих в раму $s = 1,2...,m$ так, что изгибная жесткость s-го стержня $g_s = \frac{i_s}{i_0}$, где индекс (0) соответствует стержню с единичным весовым параметром (базисный элемент).

2. Анализ статических свойств рамы проводится для ор-



$$\delta_{12} = 2\left[\frac{l_p}{2} \cdot C_B \cdot 1 \cdot \frac{1}{EJ_p} - \frac{C_H - C_B}{2} \cdot l_{ct} \cdot 1 \frac{1}{EJ_{ct}}\right] = 0 \longrightarrow \quad C_B = \frac{g_p}{2g_p+1} \cdot l_{ct}; \quad C_H = \frac{g_p+1}{2g_p+1} \cdot l_{ct}$$

$$\delta_{11} = 2\frac{C_H^3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_{ct}} + 2\frac{C_B^3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_{ct}} + \frac{C_B^2 l_p}{EJ_p} = l_{ct}^2 \frac{g_p+2}{3(2g_p+1)} \cdot \frac{1}{l_{ct}}; \quad \Delta_{1p} = -M \cdot l_p \cdot \frac{1}{EJ_p} \cdot C_B = -M \frac{1}{g_p} \cdot l_{ct} \frac{g_p}{2g_p+1} \cdot \frac{1}{l_{ct}} =$$

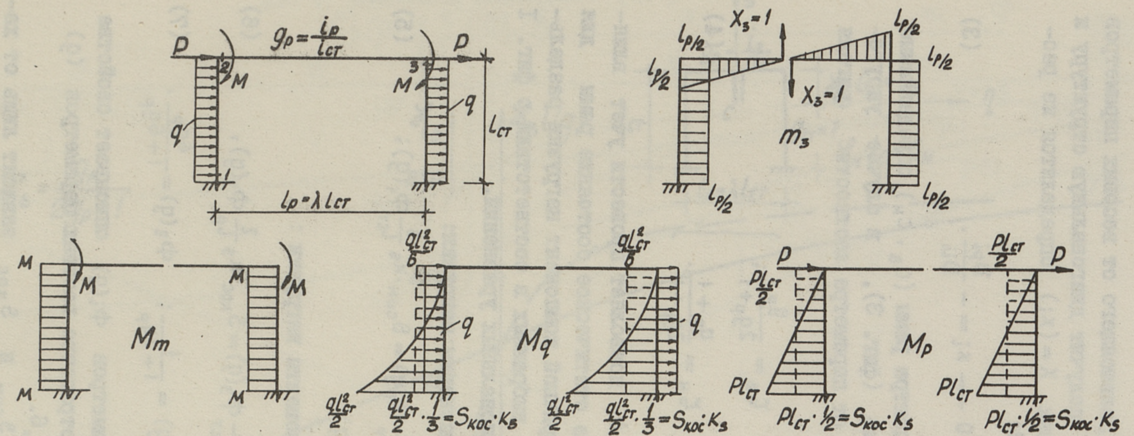
$$= -M l_{ct} \frac{1}{2g_p+1} \cdot \frac{1}{l_{ct}}; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{M}{l_{ct}} \cdot \frac{3}{g_p+2} = S_{cum} \cdot K_s \lambda \frac{1}{l_p} \cdot 3\Phi_1(g) = S_{cum} \cdot K_s \frac{3}{l_{ct}} \Phi_1(g); \quad \Phi_1(g) = \frac{1}{g_p+2};$$

$$\delta_{22} = \frac{1 l_{ct}}{EJ_{ct}} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{l_p}{EJ_p} \cdot 1 = \left(2 + \frac{1}{g_p}\right) \cdot \frac{1}{l_{ct}} = \frac{2g_p+1}{g_p} \cdot \frac{1}{l_{ct}}; \quad \Delta_{2p} = -M \cdot l_p \cdot \frac{1}{EJ_p} \cdot 1 = -M \frac{1}{g_p} \cdot \frac{1}{l_{ct}};$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = M \cdot \frac{1}{g_p} \cdot \frac{g_p}{2g_p+1} = M \frac{1}{2g_p+1} = S_{cum} \cdot K_s \cdot \Phi_2(g); \quad \Phi_2(g) = \frac{1}{2g_p+1}$$

$$S_{cum} = \vee M \vee \frac{Pl_p}{4} \vee \frac{ql_p^2}{8}; \quad K_s: \quad K_M = 1; \; K_P = \frac{1}{2}; \; K_q = \frac{2}{3}$$

Фиг. 1. Статический расчет для симметричной компоненты нагрузки.



$$\delta_{33} = 2\left(\frac{l_p}{2}\right)^2 \cdot l_{ст} \cdot \frac{1}{EJ_{ст}} + 2\left(\frac{l_p}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3EJ_p} = \frac{l_p^2}{2} \cdot \frac{6g_p + 1}{6g_p} \cdot \frac{1}{i_{ст}};$$

$$\Delta_{3p} = -2M \cdot l_{ст} \cdot \frac{1}{EJ_{ст}} \cdot \frac{l_p}{2} = -M \cdot l_p \frac{1}{i_{ст}};$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = \frac{2M}{l_p} \cdot \frac{6g_p}{6g_p + 1} = M \cdot \frac{2}{l_p} \Phi_3(g) = S_{кос} \cdot K_s \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2}{l_{ст}} \cdot \Phi_3(g) = S_{кос} \cdot K_s \frac{2}{l_p} \Phi_3(g); \quad \Phi_3(g) = \frac{6g_p}{6g_p + 1}$$

$$S_{кос} = V\,M\,V\,Pl_{ст}\,V\,\frac{ql_{ст}^2}{2} \qquad K_s: \; K_M = 1; \; K_p = \frac{1}{2}; \; K_q = \frac{1}{3}$$

Фиг. 2. Статический расчет для кососимметричной компоненты нагрузки.

тогонального базиса $b_1(g)$, зависящего от весовых параметров (g). При этом матрица D_1 получит диагональную структуру и элементы вектора неизвестных $X=(x_i)$ определятся из распавшейся системы уравнений:

$$DX + D_p = 0 \longrightarrow x_i = -\frac{D_{pi}}{D_{ii}}. \tag{3}$$

Координаты упругого центра рамы $(c_в, c_н)$, определяемые из условия ортогонализации (фиг. 3), в случае упругосимметричной рамы зависят от параметра жесткости ригеля $\left(g_p = \frac{i_p}{i_{ст}}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} c_в &= \zeta_в\, l_{ст}; \quad \zeta_в = \frac{g_p}{2g_p+1}; \\ c_н &= \zeta_н\, l_{ст}; \quad \zeta_н = \frac{g_p+1}{2g_p+1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ортогональный базис b_1 позволяет провести учет влияния внешних воздействий на статическое состояние рамы для симметричной и кососимметричной компонент нагрузки раздельно. Значения неизвестных, выбранных в соответствии с фиг. I и 2 определяются из функциональных уравнений.

Для симметричной компоненты нагрузки:

$$X_1 = S_{сим}\cdot k_S\cdot\lambda\cdot\frac{3}{l_p}\phi_1(g) = S_{сим}\cdot k_S\frac{3}{l_{ст}}\phi_1(g); \tag{5}$$

$$X_2 = S_{сим}\cdot l_p\cdot\phi_2(g);$$

для кососимметричной компоненты нагрузки:

$$X_3 = S_{кос}\cdot k_S\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{2}{l_{ст}}\phi_3(g) = S_{кос}\cdot k_S\frac{2}{l_p}\phi_3(g), \tag{6}$$

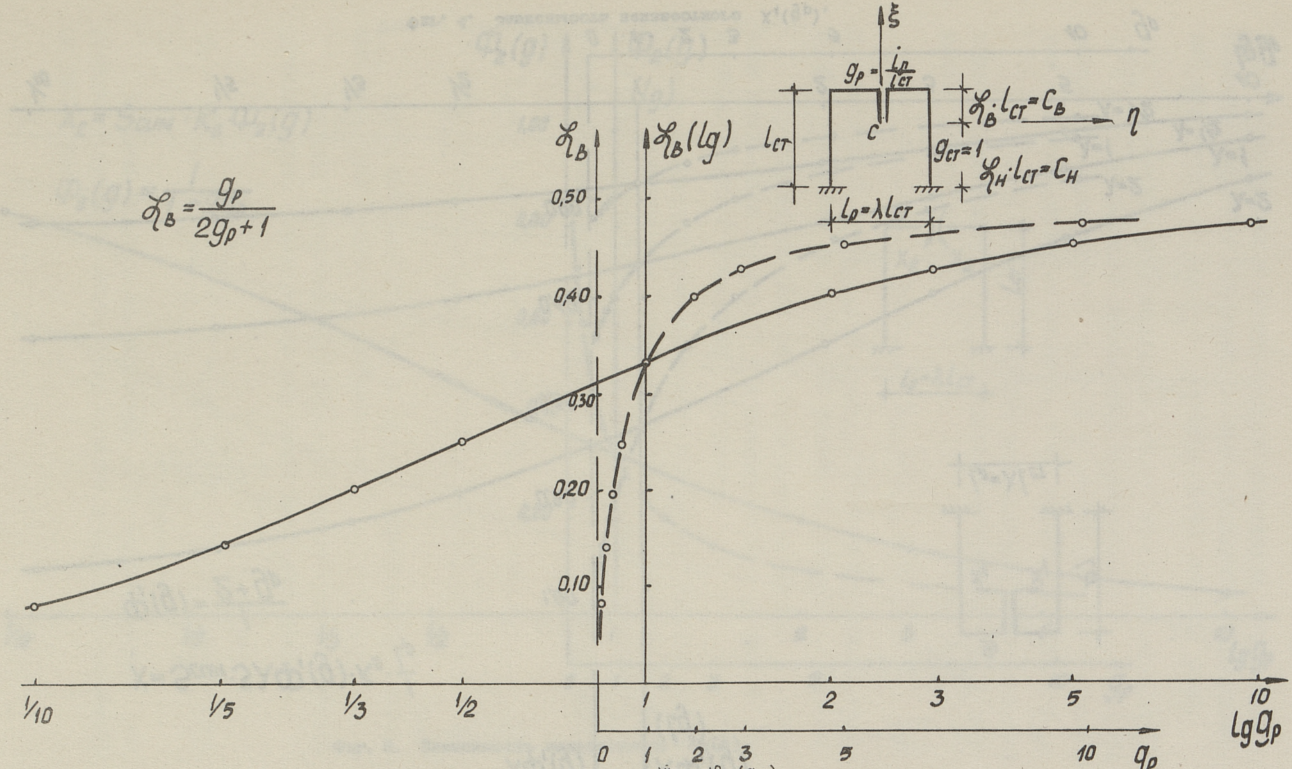
где

$$\phi_1(g) = \frac{1}{2+g_p}; \quad \phi_2(g) = \frac{1}{1+2g_p}; \quad \phi_3(g) = \frac{6g_p}{1+6g_p}. \tag{7}$$

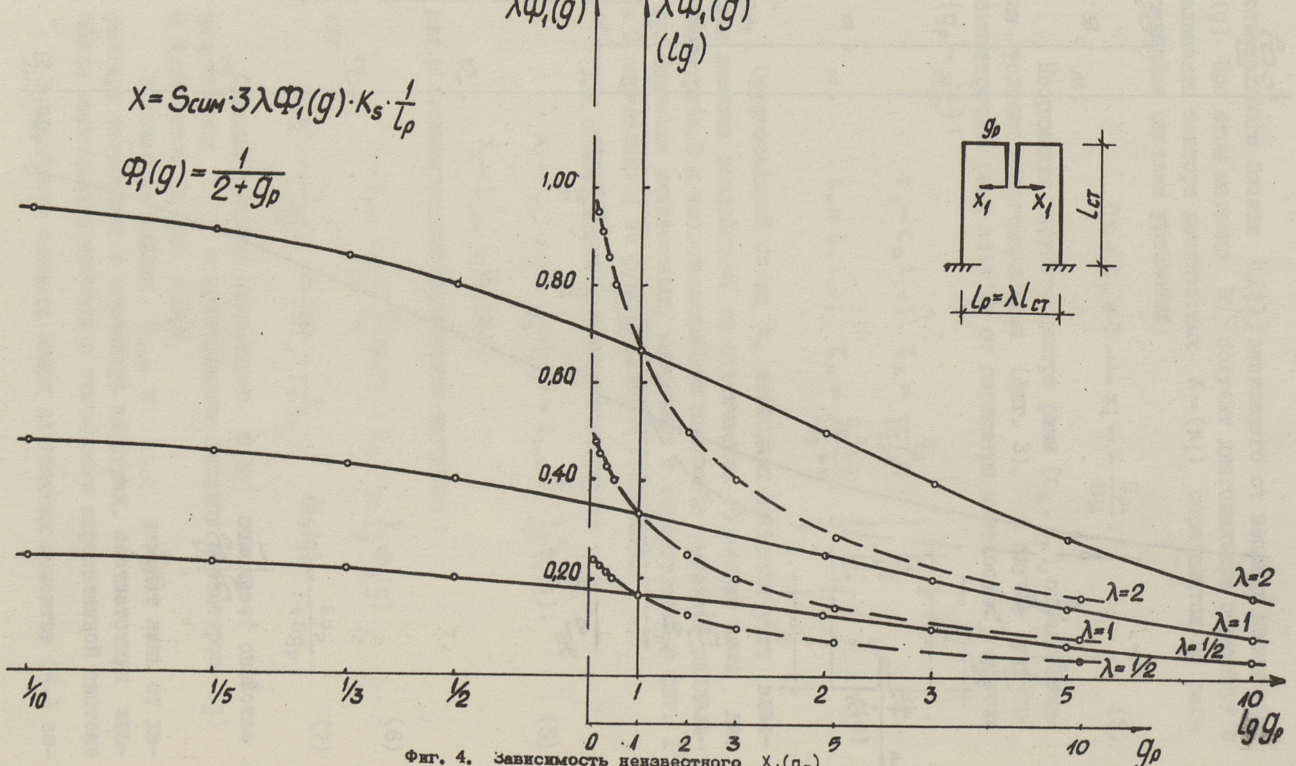
Функция весовых параметров $\phi_i(g)$ описывает свойства неизвестных $X_i(g)$ в пространстве весовых параметров (g) и приводится на фиг. 4,5,6.

Обобщенные усилия $S_{сим}$ и $S_{кос}$ зависят лишь от характера загружения и параметра нагрузки, соответствуя значению изгибающего момента в статически определенной системе.

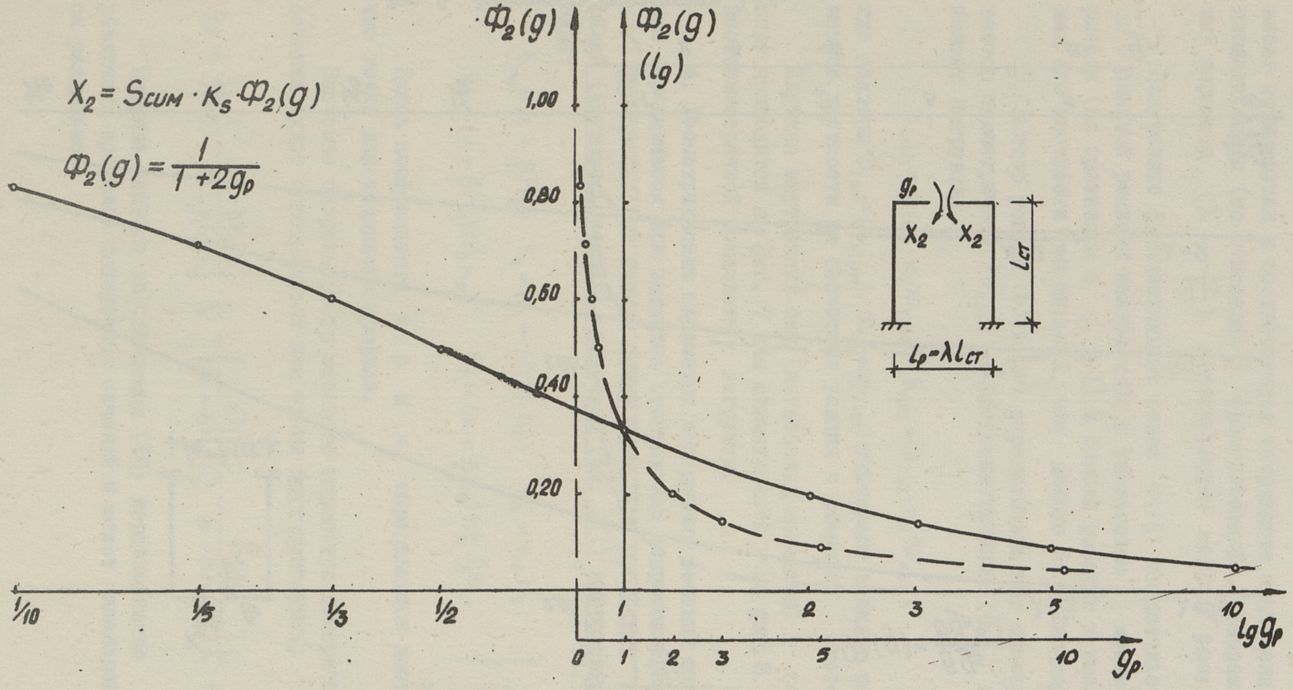
Коэффициент площади эпюры изгибающих моментов (k_S) за-



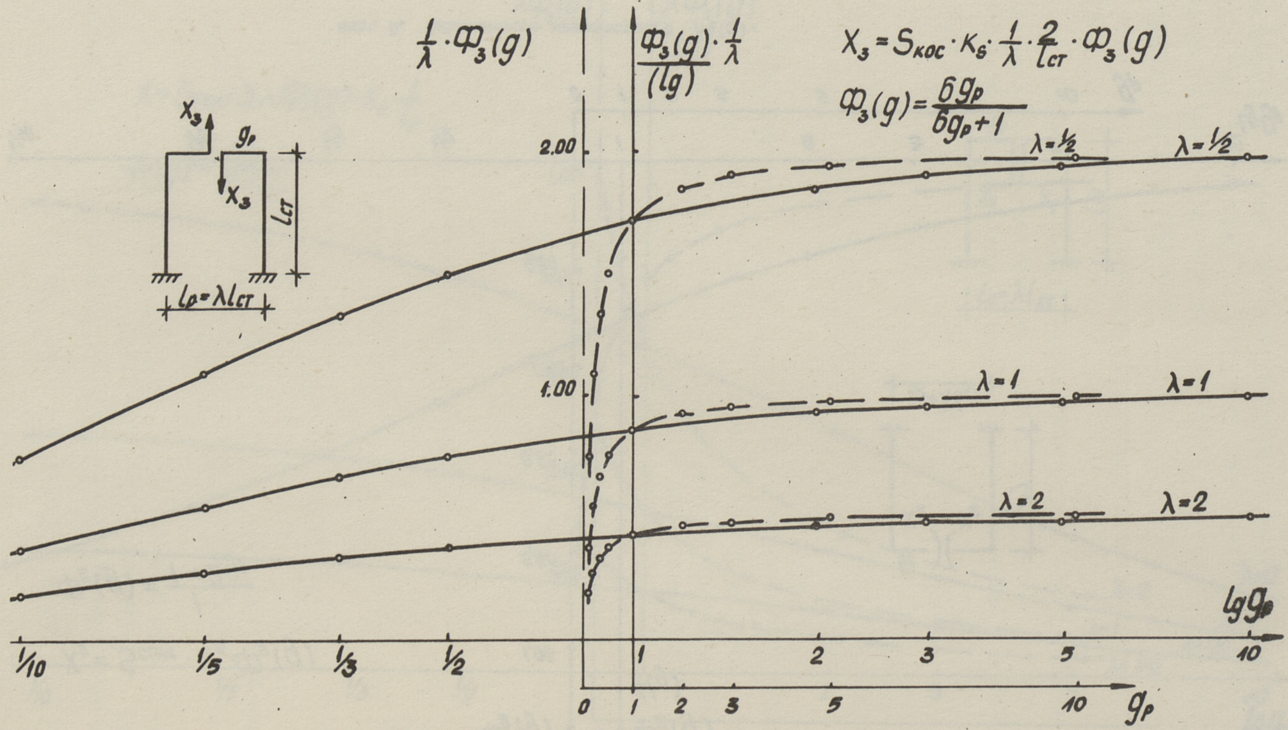
Фиг. 3. Координата упругого центра $\varkappa_B = \varkappa_B(g_p)$.



Фиг. 4. Зависимость неизвестного $X_1(g_p)$.



Фиг. 5. Зависимость неизвестного $X_2(g)$.



Фиг. 6. Зависимость неизвестного $X_3(g_p)$.

висит от нагрузки и соответствует координате приведенной площади эпюры (по отношению к прямоугольной). Безразмерный параметр $\left(\lambda = \frac{l_p}{l_{ст}}\right)$ характеризует метрику рамы.

Полученные функциональные связи $\phi_i(g)$ свидетельствуют о сильной реакции неизвестных к уменьшению жесткости ригеля (по сравнению с $g_p = I$) и слабой реакции к увеличению его жесткости тем меньшей, чем дальше от единичной.

3. Вектор усилий (b) будет определяться как суммарный вектор симметричной $(b_{сим})$ и кососимметричной $(b_{кос})$ компонент нагрузки:

$$b_{сим} = S_{сим} \cdot k_s \Phi_{сим}\ ; \quad b_{кос} = S_{кос} \cdot k_s \Phi_{кос}\ , \tag{8}$$

где векторы $\Phi_{сим} = (\phi_{i\,сим})$; $\Phi_{кос} = (\phi_{i\,кос})$ учитывают влияние параметров жесткости на расчетные усилия в стержнях системы.

Картина внутренних сил (изгибающих моментов) в общем виде приводится на фиг. 7 для симметричной и на фиг. 8 для кососимметричной компонент нагрузки.

4. Геометрические параметры поперечных сечений стержней определяются при заданных (точных или аппроксимированных) функциональных связях между ними. Для прокатных профилей (двутавр, швеллер) получены (см. [I]) аппроксимации вида:

$$\left.\begin{aligned} & b_{пр} = \alpha + \beta h_s\ ; \quad F_s = (\alpha + \beta h_s) \cdot h_s\ ; \quad r_я = k_я h_s\ ; \\ & W_s = (\alpha + \beta h_s) h_s^2 k_я\ ; \qquad I_s = (\alpha + \beta h_s) h_s^3 \frac{k_я}{2}\ . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь коэффициенты α, β и $k_я$ определяются достаточно точно для заданного профиля.

Значение безразмерного весового параметра поперечного сечения будет определяться как сумма двух слагаемых:

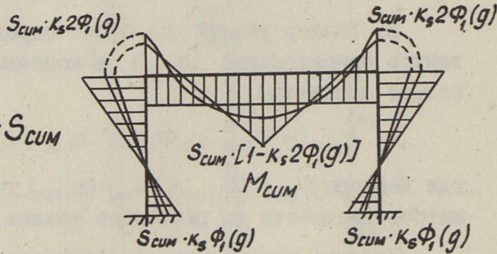
$$g_s = \frac{I_s}{I_0} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{(\alpha + \beta h_s) h_s^3}{(\alpha + \beta h_0) h_0^3} \cdot \frac{1}{\lambda} = \left[\frac{\alpha h_s^3}{(\alpha + \beta h_0) h_0^3} + \frac{\beta h_s^4}{(\alpha + \beta h_0) h_0^3}\right] \cdot \frac{1}{\lambda}\ . \tag{I0}$$

Влияние каждого из слагаемых (I0) неравнозначно для различных профилей поперечных сечений и может исследоваться раздельно.

$$b_{cum} = b_p - m_1 X_1 - m_2 X_2$$

$$b = \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M(l/2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0/S_{cum} \\ S_{cum} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -C_H \\ C_B \\ C_B \end{vmatrix} \cdot S_{cum} \cdot K_s \frac{3}{l_{ct}} \cdot \Phi_1(g) - \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot S_{cum} \cdot K_s \Phi_2(g) =$$

$$= \begin{vmatrix} K_s \Phi_1(g) \\ \cancel{-K_s 2\Phi_1(g)}\ 1-K_s 2\Phi_1(g) \\ 1-K_s 2\Phi_1(g) \end{vmatrix} \cdot S_{cum}$$

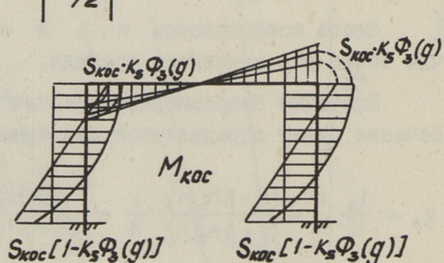


Фиг. 7. Усилия для симметричной компоненты нагрузки.

$$b_{koc} = b_p - b_3 X_3$$

$$b = \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{koc} \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} l_p/2 \\ l_p/2 \end{vmatrix} \cdot S_{koc} \cdot K_s \frac{2}{l_p} \cdot \Phi_3(g) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - K_s \Phi_3(g) \\ -K_s \Phi_3(g) \end{vmatrix} \cdot S_{koc}$$



Фиг. 8. Усилия для кососимметричной компоненты нагрузки.

Для аппроксимации вида $b_{np} = \beta h_s$ $(\alpha = 0)$ весовой параметр будет иметь значение $g_s = \frac{h_s^4}{h_0^4} \cdot \frac{1}{\lambda}$. Значение параметра на границе прочности $[g_s]$ определится из прочных размеров высоты сечения стержня $[h_s]$, принятого на границе прочности:

$$\left.\begin{aligned} & W_s = \beta h_s^3 \kappa_я \geq \frac{M_{s\,расч}}{R_{расч}} \longrightarrow \\ & \longrightarrow [h_s] = \left(\frac{M_{s\,расч}}{R_{расч}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \kappa_\beta, \text{ где } \kappa_\beta = (\kappa_я \cdot \beta)^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Для аппроксимации вида $b_{np} = \alpha + \beta h_s = const = b$ весовой параметр будет иметь значение $g_s = \frac{h_s^3}{h_0^3} \cdot \frac{1}{\lambda}$, а высота сечения стержня на границе прочности найдется из условия:

$$\left.\begin{aligned} & W_s = b h_s^2 \kappa_я \geq \frac{M_{s\,расч}}{R_{расч}} \longrightarrow \\ & \longrightarrow [h_s] = \left(\frac{M_{s\,расч}}{R_{расч}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \kappa_b, \text{ где } \kappa_b = (\kappa_я \cdot b)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

В дальнейшем исследуются упругожесткостные свойства рамы с поперечным сечением стержней, аппроксимированным из условия $b_{np} = \beta h_s$.

Безразмерный весовой параметр жесткости на границе прочности определится с учетом (11):

$$[g_s] = \frac{[h_s]^4}{[h_0]^4} \cdot \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{M_{s\,расч}}{M_{o\,расч}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{\lambda}. \quad (13)$$

После подстановки $M_{s\,расч}$ из (8) весовой параметр ригеля на границе прочности найдется по формуле (13) для симметричной нагрузки:

$$\left.\begin{aligned} & [g_p] = \left(\frac{\kappa_s \cdot 2\phi_1(g)}{\kappa_s \cdot 2\phi_1(g)}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \text{ если } g_p < 4\kappa_s - 2; \\ & [g_p] = \left(\frac{1 - \kappa_s \cdot 2\phi_1(g)}{\kappa_s \cdot 2\phi_1(g)}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{2(1-\kappa_s) + g_p}{2\kappa_s}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{\lambda}, \text{ если } g_p > 4\kappa_s - 2; \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

для кососимметричной нагрузки:

$$[g_p]=\left(\frac{K_S\cdot\Phi_3(g)}{1-K_S\cdot\Phi_3(g)}\right)^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\lambda}=\left(\frac{K_S\cdot 6g_P}{1-6g_P(1-K_S)}\right)^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\lambda}. \tag{15}$$

5. Оптимальные значения весовых параметров ($g_{опт}$) будут определяться из условия:

$$[g_s]\equiv g_s, \tag{16}$$

как совпадения исходного весового параметра (g_s) со значением его, вычисленным по результатам статического расчета на границе прочности $[g_s]$.

Рассматривая совместно связи (I4, I6) и (I5, I6), можно записать уравнения оптимальных значений параметра ($g_{p\,опт}$) для заданных схем загружения.

Существование оптимального решения определяется существованием пересечения кривой $y_1=f(g)$ и прямой $y_2=\lambda g$. При этом можно установить граничный луч ($y=\lambda g$), определяющий границу области существования решения, как луча касания к кривой $y_1=f(g)$.

а) Симметричная нагрузка.

Уравнение оптимальных значений g_p:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{2(1-K_S)+g_P}{2K_S}\right]^{\frac{4}{3}}&\equiv\lambda g_p, \text{ для } g_p\geq 4K_S-2.\\ 1&\equiv\lambda g_p, \text{ для } g_p\leq 4K_S-2.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Положение граничного луча определится из условия:

$$y_1'\equiv\lambda\longrightarrow\frac{4}{3}\left[\frac{2(1-K_S)+g_P}{2K_S}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{2K_S}\equiv\lambda. \tag{18}$$

Иллюстрация вопроса для симметричной нагрузки приводится на фиг. 9 для равномерно-распределенной нагрузки в пролете (K_S = 2/3). Положение луча касания определяется λ = I,26.

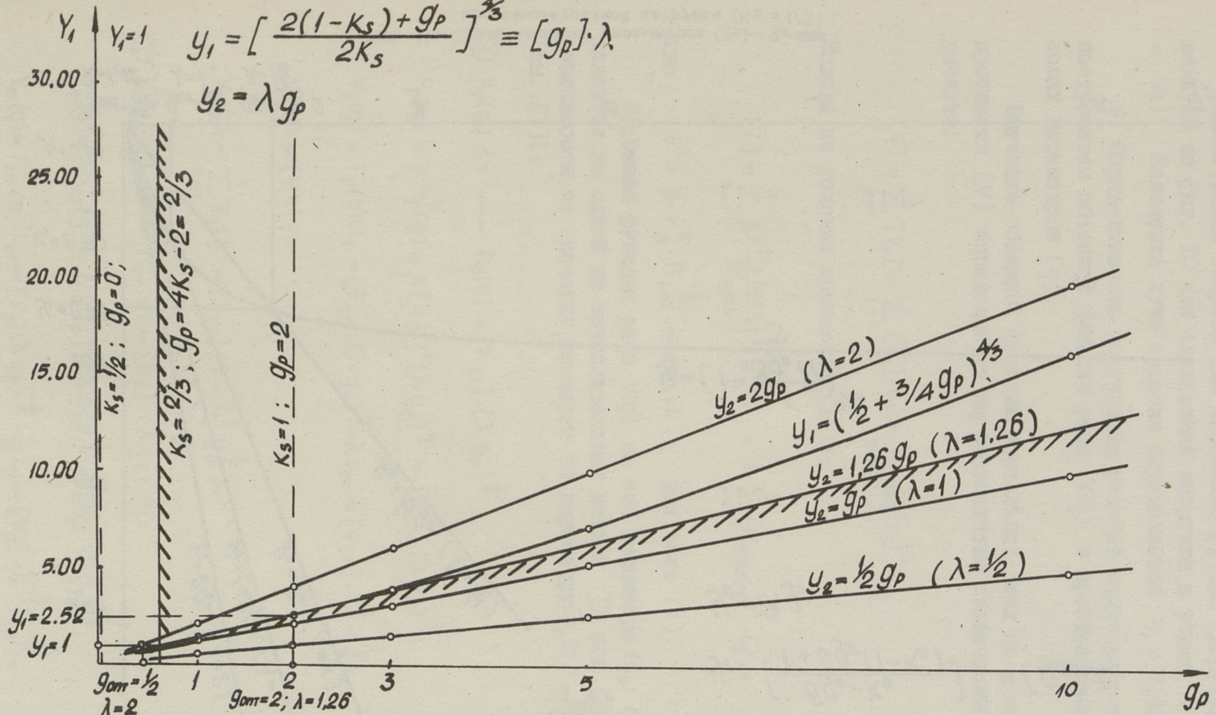
б) Кососимметричная нагрузка.

Уравнение оптимальных значений g_p:

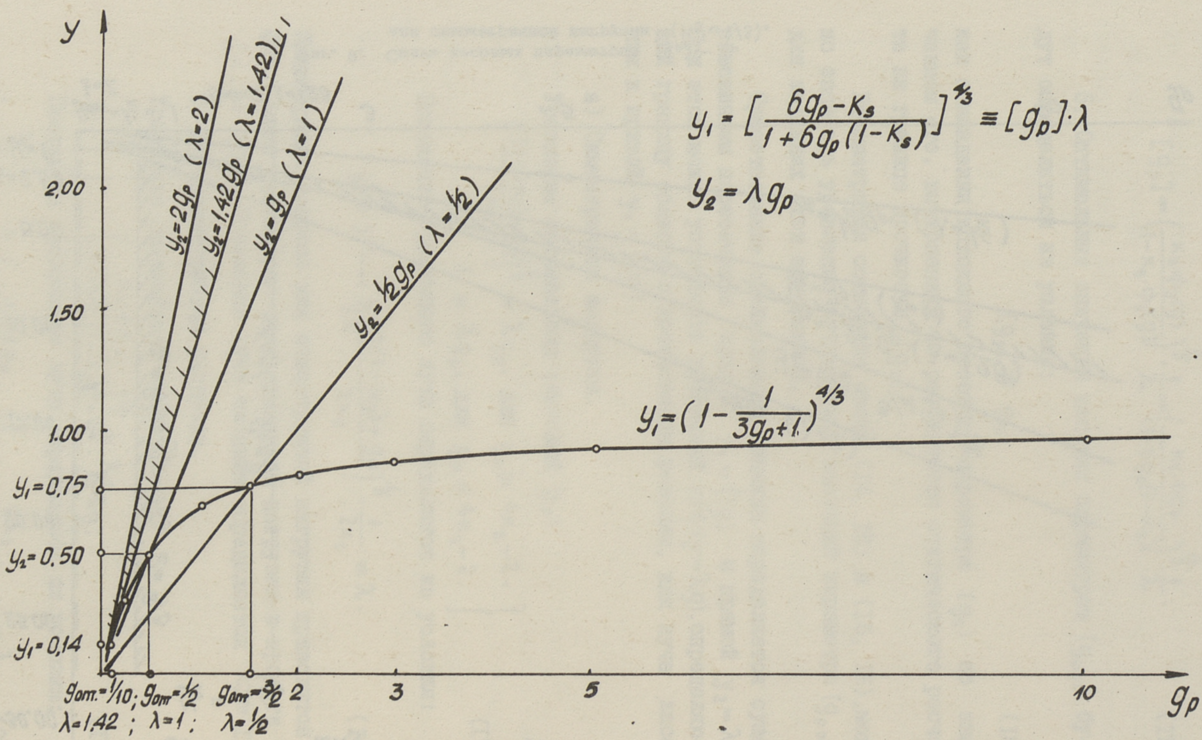
$$\left[\frac{K_S\cdot 6g_P}{1+6g_p(1-K_S)}\right]^{\frac{4}{3}}\equiv\lambda g_P. \tag{19}$$

Положение граничного луча определится из условия:

$$y_1'=\lambda\longrightarrow\frac{4}{3}\left[\frac{K_S\cdot 6g_P}{1+6g_P(1-K_S)}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{6K_S}{[1+6g_P(1-K_S)]^2}\equiv\lambda. \tag{20}$$



Фиг. 9. Связь весовых параметров $[g_p] - g_p$ для симметричной нагрузки $(K_S = 2/3)$.



Фиг. 10. Связь весовых параметров $[g_p] - g_p$ для кососимметричной нагрузки ($K_s = 1/2$).

Иллюстрация вопроса для кососимметричной нагрузки приводится на фиг. IO для сдвигающей нагрузки в узлах ($\kappa_s = 1/2$). Положение луча касания определяется $\lambda = 1{,}42$.

6. Справедливость полученных решений подтверждается построением объемной функции рамы $V(g)$ в пространстве весовых параметров (g).

Значение объемной функции портальной рамы на границе прочности $[V]$ определяется по результатам статического расчета:

$$[V] = \sum_{s=1}^{3} [V_s] = \sum_{s=1}^{3} [F_s] \cdot l_s = \sum_{s=1}^{3} \beta [h_s]^2 \cdot l_s . \tag{2I}$$

Исходя из условия прочности (II):

$$[V] = \sum_{s=1}^{3} \beta \left(\frac{M_{s\,расч}}{R_{расч}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \kappa_\beta^2 \cdot l_s = \alpha \sum_{s=1}^{3} (M_{s\,расч})^{\frac{2}{3}} \cdot l_s , \tag{22}$$

где $\alpha = \beta \cdot \kappa_\beta^2 \cdot R_{расч}^{-\frac{2}{3}} = const$ для всех (s).

Объемная функция рамы $V(g)$ на оси параметра (g_p) определяется по одной из вычислительных ветвей ① или ②, в зависимости от значения критерия по параметру $K_p(g_p) = \frac{[g_p]}{g_p} \lessgtr 1$ (см. [I]):

$$① \quad K_p(g_p) \leq 1 \longrightarrow h_p(g) = [h_{ст}] \cdot (\lambda g_p)^{\frac{1}{4}} ;$$

$$F_p(g) = \beta h_p^2(g) = \beta [h_{ст}]^2 (\lambda g_p)^{\frac{1}{2}} = [F_{ст}] \cdot (\lambda g_p)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$V_p(g) = F_p(g) \cdot l_p = [F_{ст}] \cdot (\lambda g_p)^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda l_{ст} = [V_{ст}] \cdot \lambda^{\frac{3}{2}} g_p^{\frac{1}{2}} ;$$

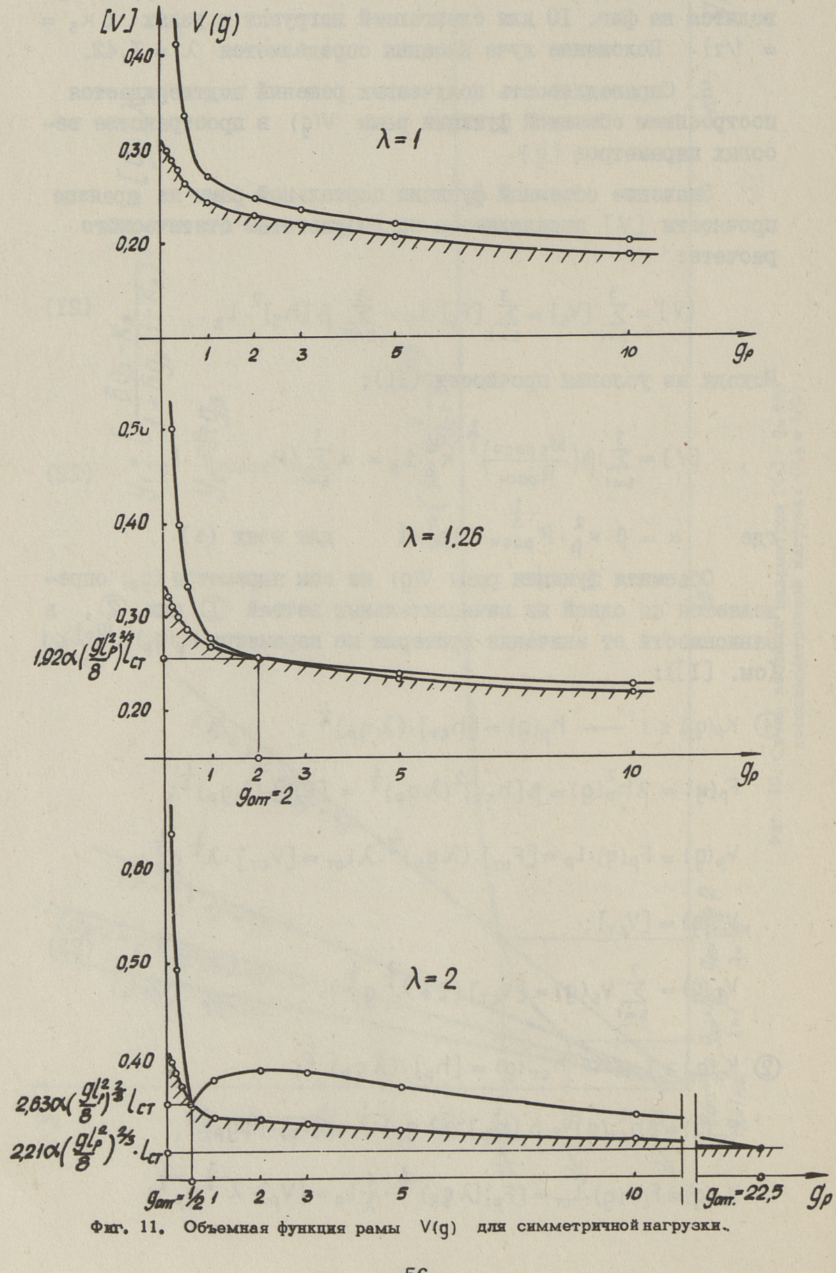
$$V_{ст}(g) = [V_{ст}] ; \tag{23}$$

$$V_{①}(g) = \sum_{s=1}^{3} V_s(g) = [V_{ст}] \, (2 + \lambda^{\frac{3}{2}} g_p^{\frac{1}{2}}) .$$

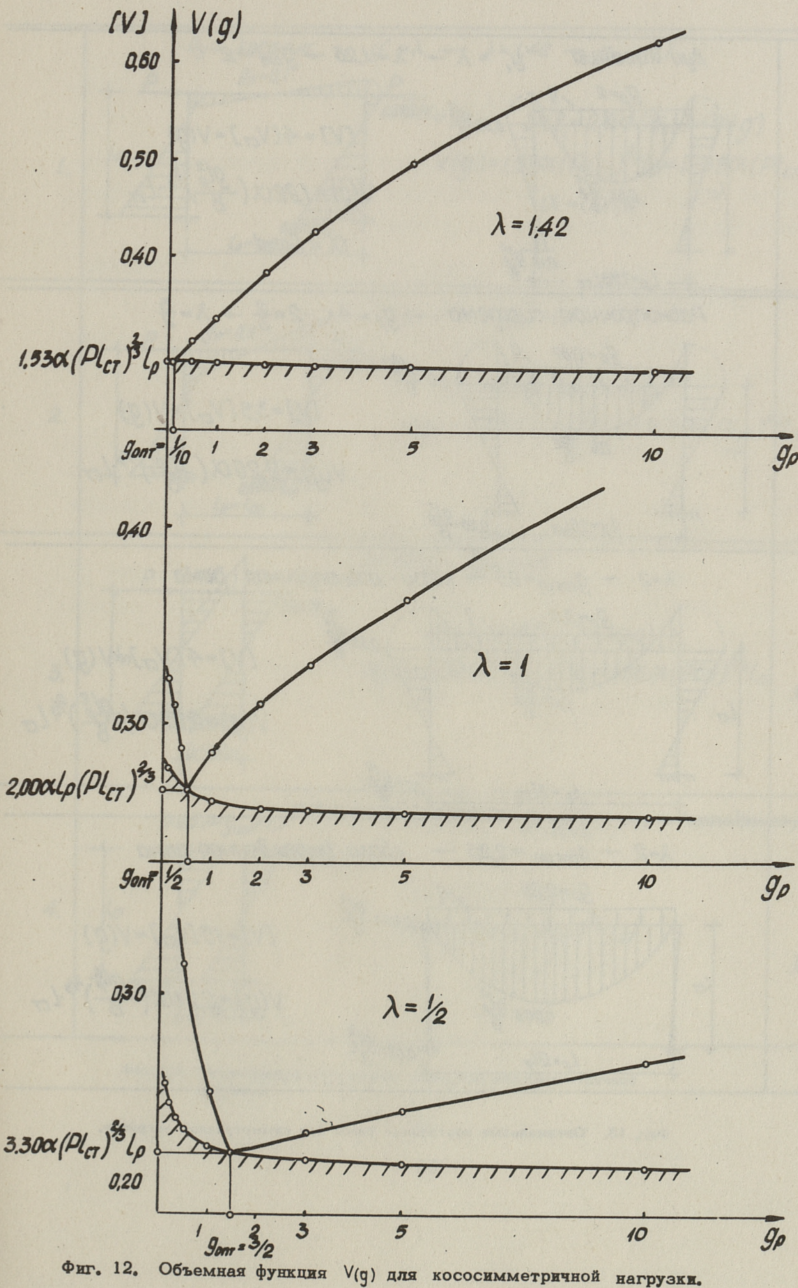
$$② \quad K_p(g_p) \geq 1 \longrightarrow h_{ст}(g) = [h_p] \cdot (\lambda g_p)^{-\frac{1}{4}} ;$$

$$F_{ст}(g) = \beta h_{ст}^2(g) = \beta [h_p]^2 (\lambda g_p)^{-\frac{1}{2}} = [F_p] \cdot (\lambda g_p)^{-\frac{1}{2}} ;$$

$$V_{ст}(g) = F_{ст}(g) \cdot l_{ст} = [F_p] (\lambda g_p)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\lambda} l_p = [V_p] \cdot \lambda^{-\frac{3}{2}} g_p^{-\frac{1}{2}} ;$$

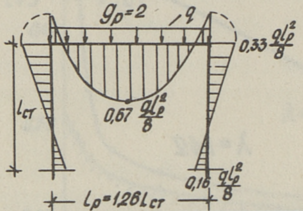


Фиг. 11. Объемная функция рамы V(g) для симметричной нагрузки.



Фиг. 12. Объемная функция V(g) для кососимметричной нагрузки.

1. Лучи касания $y_1' = \lambda \to \lambda = 1{,}26 \to g_{опт} = 2$

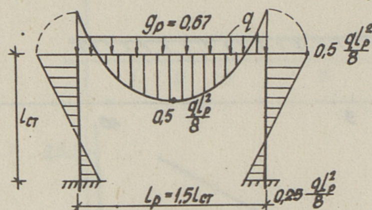


$$[V] = 4[V_{ст}] = V(g)$$

$$V(g) = 1{,}92\,\alpha\left(\frac{ql_p^2}{8}\right)^{2/3}\cdot l_{ст}$$

$$\alpha = Const$$

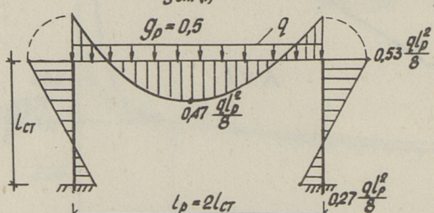
2. Равнопрочная система $\to g_p = 4\kappa_s - 2 = \frac{2}{3} \to \lambda = \frac{3}{2}$



$$[V] = 3{,}5[V_{ст}] = V(g)$$

$$V(g) = 2{,}20\,\alpha\left(\frac{ql_p^2}{8}\right)^{2/3}\cdot l_{ст}$$

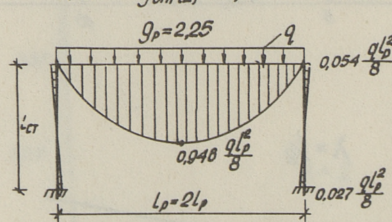
3. $\lambda = 2 \to g_{опт(1)} = 0{,}5 \to$ квази-равнопрочная рама



$$[V] = 4[V_{ст}] = V(g)$$

$$V(g) = 2{,}63\,\alpha\left(\frac{ql_p^2}{8}\right)^{2/3} l_{ст}$$

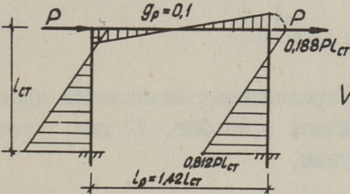
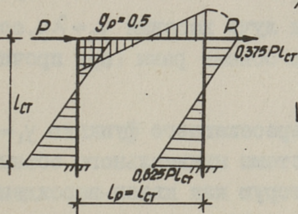
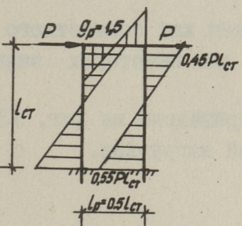
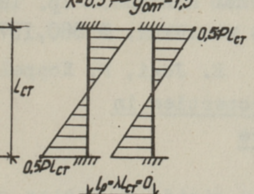
4. $\lambda = 2 \to g_{опт(2)} = 2{,}25 \to$ квази-вырожденная рама



$$[V] = 15[V_{ст}] = V(g)$$

$$V(g) = 2{,}21\,\alpha\left(\frac{ql_p^2}{8}\right)^{2/3}\cdot l_{ст}$$

Фиг. 13. Оптимальные портальные рамы при симметричной нагрузке.

1.	Луч касания $y_1' = \lambda \rightarrow \lambda = 1{,}42 - g_{опт} = 0{,}1$ 	$[V] = 2{,}54\,[V_{ст}] = V(g)$ $V(g) = 1{,}53\alpha(Pl_{ст})^{2/3} l_p = 3{,}88\alpha(Pl_{ст})^{2/3} l_{ст}$ $\alpha = Const$
2.		$\lambda = 1 \rightarrow g_{опт} = 0{,}5$ $[V] = 2{,}71\,[V_{ст}] = V(g)$ $V(g) = 2{,}0\alpha(Pl_{ст})^{2/3} \cdot l_p = 2{,}71\alpha(Pl_{ст})^{2/3} l_{ст}$
3.		$\lambda = 0{,}5 \rightarrow g_{опт} = 1{,}5$ $[V] = 2{,}43\,[V_{ст}] = V(g)$ $V(g) = 3{,}30\alpha(Pl_{ст})^{2/3} l_p = 1{,}65\alpha(Pl_{ст})^{2/3} l_{ст}$
4.	$\lambda = 0{,}5 \rightarrow g_{опт} = 1{,}5$ 	Равнопрочная система $\rightarrow g_p = \frac{1}{б(2K_s - 1)} = \infty \rightarrow$ вырожденная рама $[V] = 2\,[V] = V(g)$ $V(g) = 1{,}26\alpha(Pl_{ст})^{2/3} \cdot l_{ст}$

Фиг. 14. Оптимальные портальные рамы при кососимметричной нагрузке.

$$V_p(g) = [V_p];$$

$$V_{②}(g) = \sum_{s=1}^{3} V_s(g) = [V_p]\left(1 + 2\lambda^{-\frac{3}{2}} g_p^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{24}$$

Графическая иллюстрация проведенных вычислений приводится на фиг. II для симметричной и на фиг. I2 для кососимметричной компонент нагрузки.

Анализ результатов свидетельствует о трех возможностях существования решения в пространстве параметров (g, λ):

I) единственное решение для луча касания $y_2 = \lambda g$, соответствующее наименьшему значению объема рамы (при прочих равных условиях);

2) два решения для луча, пересекающего функцию $y_1 = f(g)$ в двух точках, определяя две системы минимального объема – одну, как квази-равнопрочную, вторую как квази-вырожденную при произвольно заданной метрике (λ);

3) отсутствие оптимального решения как совместного решения двух уравнений $y_1 = f(g)$; $y_2 = \lambda g$ для некоторых значений (λ).

Оптимальные параллельные рамы приведены на фиг. I3 и I4 при симметричной и кососимметричной нагрузках.

Литература

I. Иеги Э.М., Нурмухамедова Р.М. К расчету и оптимальному проектированию контура.–"Тр. Таллинск. политехн. ин-та". Строительная механика. № 360, I974.

E. Jõgi, P. Koppel

Framework Structure Properties in Weight Parameters Space

Summary

The paper deals with elastic and rigid properties of single-contour framework in the space of state on the axes, which are taken as the nondimensional ratio parameters of stiffness and geometric measures of the frame.

The capacity function of the frame is investigated in the space of quality, represented on the same axes, and optimum ratios of stiffnesses (at metrics, taken for the frame) corresponding to the minimum of the frame capacity function, are determined at the same time.

The results of calculation are graphically illustrated.

Цена 59 коп.