

Andrus Räämet
Raimund Räämet

EHITUSMEHAANIKA

Varraskonstruksioonide staatika



Raamatu väljaandmist toetasid:



TARTU EHITUS AS

Tallinna Tehnikaülikool
Ehituse ja arhitektuuri instituut

Andrus Räämet Raimund Räämet

EHITUSMEHAANIKA

Varraskonstruksioonide staatika

2. täiendatud väljaanne



Tallinn 2022

Käesoleva õpiku väljaandmist toetasid
AS Merko Ehitus Eesti, Nordecon AS, AS YIT Ehitus, AS Harju Ehitus, Oma Ehitaja AS,
Conviso OÜ, AS CES, Tartu Ehitus AS, KMG Inseneriehituse AS, Maru Ehitus AS

Retsenseerinud
Aleksander Klauson (Tallinna Tehnikaülikool)
Alexander Ryabchikov (Eesti Maaülikool)
Eino Aarend (Eesti Maaülikool)

Kaane kujundanud Tiia Eikholm

2. täiendatud väljaanne

ISBN 978-9949-83-242-2 (trükis)
ISBN 978-9949-83-897-4 (pdf)
Autoriõigus: Andrus Räämet, 2022
Trükitud Tallinna Raamatutrükikojas

Eessõna

Käesolev õpik on mõeldud peamiselt ehituserialade üliõpilastele, et anda ülevaade ehituskonstruktsioonide töötamisest, nendes tekkivatest sisejõududest ning konstruktsioonide deformeerumisest. Aga kindlasti leiavad siit kasulikku materjali ka tegevinsenerid, et varem õpitut meelde tuletada.

Raamat on jagatud kahte ossa. Esimeses osas tutvustatakse erinevat liiki ehituskonstruktsioone ja kirjeldatakse staatikaga määratud konstruktsioonide sisejõudude ja siirete arvutust. Käsitlemist leiavad lihttalad, mitmesildelised talad, kaared, raamid, sõrestikud, kombineeritud ja rippkonstruktsioonid.

Raamatu teine osa on pühendatud staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutusele. Selle raames vaatame põhiliselt raame ja jätkuvtalasid. Peamiselt tuleb juttu sisejõudude leidmisest, kuid mõningal määral kirjeldame ka staatikaga määramatute konstruktsioonide siirete arvutust.

Varasemate õpikutega võrreldes on märgatavalt suurendatud lõplike elementide meetodi ja piirkoormusmeetodi kui kõige kaasaegsemate arvutusmeetodite mahtu. Õpikus on ka põhjalik rippkonstruktsioonide peatükk, mille kohta leidus siiani väga vähe eestikeelset kirjandust. Esmakordselt on eesti keeles esitatud staatikaga määramatute konstruktsioonide ligikaudse lahendamise meetodika. Raamatu lõpus olevates lisades on antud hulk tabeleid, mida inseneril on mugav käsiraamatuna kasutada lihtsamate projekteerimisülesannete lahendamisel.

Õpikus esitatud teooriamaterjal on illustreeritud rohkem kui saja näiteülesandega, kus kõik arvutamise etapid on samm-sammult põhjalikult lahti seletatud.

Siin raamatus on palju kasutatud Raimund Räämeti 1975. aastal ilmunud õpiku „Ehitusmehaanika“ materjale, millele on antud tänapäevane vorm ja sisu. Püütud on arvestada kaasaja inseneriõppe vajadusi ning fakti, et ehitusprojekteerimises ei käi arvutamine enam ammu käsitsi. Seetõttu on loobutud mitmetest vananenud teemadest, lisatud on uusi peatükke ning kõige olulisem on ehk see, et tuima tehnilise arvutamistöö asemel on pööratud rohkem tähelepanu just insenerliku mõtlemise arendamisele ning konstruktsioonide töötamise kirjeldamisele. Erinevate arvutusmeetoditega tutvumise käigus peaksid üliõpilased õppima insenerlikult tunnetama konstruktsioonide käitumist ning samuti õppima kriitiliselt hindama, kas arvutusega saadud tulemus ka põhimõtteliselt võimalik on. Lähemal ja kaugemal juhtunud õnnetused ning ehitiste kokkuvarisemised näitavad ilmekalt, mis juhtub siis, kui projekteerija usaldab liigselt arvutit ning tal puudub võime avastada jämedaid ja põhimõttelisi vigu.

Käesoleva õpiku pdf-versioon on köites olevaga võrreldes oluliselt mahukam. Siin on rohkem näiteülesandeid ning lisatud on ka peatükke, mis köites üldse puuduvad.

Ja kindlasti ei saa jätta tänamata paljusid inimesi, kes andsid oma panuse selle raamatu valmimisse.

Esmalt soovin tänada retsensente Aleksander Klausonit, Alexander Ryabchikovi ja Eino Aarendit, kes võtsid ette sellise mahuka raamatu lugemise ning esitasid selle kohta oma arvamused ja ettepanekud. Soovin tänada ehitusinsener Tiit Massot raamatu käsikirja kohta tehtud märkuste eest, mis aitasid raamatut stiililt oluliselt ühtlasemaks muuta. Suured tänud kolleegidele Andres Braunbrückile, Eero Tuhkanenile ja Andres Lahele, kellega sai põhjalikult arutatud paljusid raamatus esitatud teemasid ja nende käsitlemist. Olen tänulik TTÜ kirjastusele abi eest raamatu trükiks ettevalmistamisel.

Täna ka ehitusvaldkonnas tegutsevaid ettevõtteid, kes panid õpiku kirjastamisel majanduslikult õla alla, sest tänu nende toetusele sai võimalikuks selle raamatu trükis avaldamine.

Andrus Räämet

Sisukord

| | |
|--|-----------|
| 1. SISSEJUHATUS EHTUSMEHAANIKASSE | 15 |
| 1.1. Ülesanded ja eesmärk | 15 |
| 1.2. Ehitusmehaanika ja konstruktsioonide ajaloost | 16 |
| 1.3. Eeldused ja printsiibid | 20 |
| 1.4. Ehituskonstruktsioonide liigitus | 20 |
| 1.4.1. Üldine liigitus | 20 |
| 1.4.2. Peamised konstruktsioonide tüübid | 21 |
| 1.5. Arvutusskeem | 28 |
| 1.6. Tasandkonstruktsioonide toed | 30 |
| 1.7. Koormused | 32 |
| 1.7.1. Piirseisundid | 32 |
| 1.7.2. Koormuste liigitus | 33 |
| 1.7.3. Koormuste rakendamine arvutusskeemile | 34 |
| 1.7.4. Koormuste arvutamine | 35 |
| 1.8. Sisejõud | 39 |
| 1.8.1. Sisejõudude liigitus | 39 |
| 1.8.2. Sisejõudude märgikokkulepped | 41 |
| 1.8.3. Sisejõudude epüürid | 43 |
| 1.9. Sisejõudude ja koormuste vahelised seosed | 45 |
| | |
| I STAATIKAGA MÄÄRATAVAD ARVUTUSSKEEMID | 49 |
| | |
| 2. ARVUTUSSKEEMI STAATIKALINE ANALÜÜS | 51 |
| 2.1. Staatikaga määratav arvutusskeem | 51 |
| 2.2. Toereaktsioonide arvutus | 56 |
| 2.3. Sisejõudude arvutus lõikemeetodiga | 60 |
| 2.3.1. Taandamisvõte | 60 |
| 2.3.2. Tasakaalustamisvõte | 62 |
| 2.4. Jõudude mõju sõltumatuse printsiip | 70 |
| | |
| 3. ARVUTUSSKEEMI KINEMAATIKALINE ANALÜÜS | 73 |
| 3.1. Arvutusskeemi vabadusaste | 73 |
| 3.2. Arvutusskeemi pooluste plaan | 78 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 3.3. | Virtuaalsiirete printsiip | 81 |
| 3.3.1. | Virtuaaltöö ja virtuaalsiire | 81 |
| 3.3.2. | Virtuaalsiirete printsiip | 82 |
| 3.3.3. | Virtuaalsiirete printsiibi rakendusi | 83 |
| 4. | ARVUTUSSKEEMI GEOMEETRILISE STRUKTUURI ANALÜÜS | 91 |
| 4.1. | Analüüsi mõte | 91 |
| 4.2. | Geomeetrilise muutumatuse põhitunnused | 92 |
| 4.3. | Hetkmuutuvus | 95 |
| 5. | LIKUV KOORMUS | 99 |
| 5.1. | Sissejuhatus | 99 |
| 5.2. | Mõjujoonte ordinaatide arvutus staatika tasakaalutingimustega | 100 |
| 5.2.1. | Toereaktsiooni mõjujoon | 100 |
| 5.2.2. | Paindemomendi mõjujoon | 103 |
| 5.2.3. | Põikjõu mõjujoon | 106 |
| 5.2.4. | Konsoolidega tala mõjujooned | 110 |
| 5.2.5. | Mõjujoon kaudse koormuse korral | 112 |
| 5.3. | Mõjujoonte konstrueerimine kinemaatika meetodiga | 115 |
| 5.3.1. | Meetodi idee | 115 |
| 5.3.2. | Toereaktsiooni mõjujoon | 116 |
| 5.3.3. | Paindemomendi mõjujoon | 117 |
| 5.3.4. | Põikjõu mõjujoon | 118 |
| 5.4. | Mõjujoonte omadused ja kasutamine | 119 |
| 5.4.1. | Koormused, mille mõju saab arvutada mõjujoontega | 119 |
| 5.4.2. | Üks koondjõud | 120 |
| 5.4.3. | Mitu koondjõudu | 120 |
| 5.4.4. | Lauskoormus | 121 |
| 5.4.5. | Mõjujoone sirge osa omadus | 122 |
| 5.5. | Koormuse ebasoodsaim asetus | 125 |
| 5.5.1. | Sisejõudude ekstreemumid | 125 |
| 5.5.2. | Lauskoormus | 125 |
| 5.5.3. | Üks koondjõud | 129 |
| 5.5.4. | Mitu koondjõudu | 129 |
| 5.5.5. | Lihttala suurim võimalik paindemoment | 131 |
| 5.6. | Mõjumaatriks | 134 |
| 5.6.1. | Mõjumaatriksi mõiste | 134 |
| 5.6.2. | Paindemomendi mõjumaatriks | 135 |
| 5.6.3. | Põikjõu mõjumaatriks | 142 |
| 6. | STAATIKAGA MÄÄRATAV MITMESILDELINE TALA | 145 |
| 6.1. | Sissejuhatus | 145 |
| 6.2. | Geomeetrilise struktuuri analüüs | 146 |
| 6.3. | Sisejõudude arvutus | 153 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 6.4. | Mõjujooned | 160 |
| 6.4.1. | Staatika meetod | 160 |
| 6.4.2. | Kinemaatika meetod | 164 |
| 6.5. | Mitmesildelise tala paindemomendi mõjumaatriks | 182 |
| 6.6. | Arvutus virtuaalsiirete printsiibi abil | 185 |
| 6.7. | Liigendite asetus | 188 |
| 7. | KOLME LIIGENDIGA KAAR JA RAAM | 195 |
| 7.1. | Sissejuhatus | 195 |
| 7.1.1. | Kaar | 195 |
| 7.1.2. | Raam | 200 |
| 7.2. | Kaare telgjoone võrrandid | 202 |
| 7.2.1. | Ruutparaboolikujulise teljega kaar | 202 |
| 7.2.2. | Ringjoonekujulise teljega kaar | 203 |
| 7.3. | Toereaktsioonid vertikaalsest koormusest | 203 |
| 7.3.1. | Toed samal kõrgusel | 204 |
| 7.3.2. | Toed erinevatel kõrgustel | 206 |
| 7.4. | Sisejõud vertikaalsest koormusest | 209 |
| 7.4.1. | Paindemoment | 210 |
| 7.4.2. | Põikjõud | 211 |
| 7.4.3. | Pikijõud | 211 |
| 7.5. | Toereaktsioonid ja sisejõud horisontaalsest koormusest | 212 |
| 7.5.1. | Toereaktsioonid | 212 |
| 7.5.2. | Sisejõud | 213 |
| 7.6. | Sisejõudude epüürid vertikaalsest koormusest | 213 |
| 7.7. | Seosed sisejõudude vahel | 218 |
| 7.8. | Kolme liigendiga kaare survejoon | 228 |
| 7.9. | Kaare telje ratsionaalne kuju vertikaalsel koormusel | 237 |
| 7.10. | Mõjujooned | 240 |
| 7.10.1. | Toereaktsioonide mõjujooned | 240 |
| 7.10.2. | Paindemomendi mõjujoon | 241 |
| 7.10.3. | Pikijõu mõjujoon | 242 |
| 7.10.4. | Põikjõu mõjujoon | 243 |
| 7.11. | Kolme liigendiga raam | 246 |
| 7.12. | Mitmesildelised ja -korruselised raamid | 259 |
| 7.13. | Tõmbiga kolme liigendiga kaar ja raam | 266 |
| 8. | TASANDSÕRESTIKUD | 273 |
| 8.1. | Sissejuhatus | 273 |
| 8.2. | Sõrestikskeemide põhimõisted ja liigitus | 278 |
| 8.3. | Sisejõudude arvutus staatika meetodiga | 280 |
| 8.4. | Sõlmede eraldamise võte | 281 |
| 8.5. | Momendipunkti võte | 287 |
| 8.6. | Projektsioonide võte | 291 |

| | |
|--|------------|
| 8.7. Erinevate võtete kombineerimine | 294 |
| 8.8. Talasõrestiku pikijõudude arvutus lihttala M ja Q epüüride abil | 312 |
| 8.9. Varraste asendamise võte | 316 |
| 8.10. Koormuse lahutamise võte | 320 |
| 8.11. Erineva kujuga sõrestike varraste pikijõudude võrdlus | 326 |
| 8.12. Pikijõudude arvutamine kinemaatika meetodiga | 327 |
| 8.13. Liitvarrastega sõrestikud | 329 |
| 8.14. Sprengelsõrestikud | 335 |
| 8.15. Maxwell-Cremona diagramm | 342 |
| 8.16. Talasõrestike mõjujooned | 350 |
| 8.16.1. Mõjujoonte konstrueerimise meetodid | 350 |
| 8.16.2. Momendipunkti võte | 350 |
| 8.16.3. Projektsioonide võte | 356 |
| 8.16.4. Sõlmede eraldamise võte | 358 |
| 8.16.5. Kolmnurksõrestik | 374 |
| 8.16.6. Sprengelsõrestik | 376 |
| 8.16.7. Konsoolsõrestik | 383 |
| 8.16.8. Konsoolidega talasõrestik | 385 |
| 9. KOMBINEERITUD KONSTRUKTSIOONID | 393 |
| 9.1. Sissejuhatus | 393 |
| 9.2. Sprengeltala | 396 |
| 9.3. Kaarele toetuv tala | 400 |
| 9.3.1. Sisejõud | 400 |
| 9.3.2. Mõjujooned | 403 |
| 10. RIPPKONSTRUKTSIOONID | 407 |
| 10.1. Sissejuhatus | 407 |
| 10.2. Vertikaalne koormus | 409 |
| 10.3. Koondjõududega kaabel | 410 |
| 10.4. Kaabli üldine teoreem | 413 |
| 10.5. Lauskoormusega kaabel | 417 |
| 10.5.1. Toed samal kõrgusel | 418 |
| 10.5.2. Toed erinevatel kõrgustel | 419 |
| 10.5.3. Kaabli pikitelje suunas jaotatud koormus | 432 |
| 10.5.4. Omakaaluga koormatud kaabel | 432 |
| 10.6. Viltuse koormusega kaabel | 435 |
| 11. SIIRETE ARVUTUS | 441 |
| 11.1. Sissejuhatus | 441 |
| 11.2. Aktiivtöö | 443 |
| 11.2.1. Välisjõudude töö | 443 |
| 11.2.2. Sisejõudude töö | 446 |
| 11.3. Välis- ja sisejõudude passiivtöö | 449 |

| | |
|---|-----|
| 11.4. Potentsiaalenergia | 451 |
| 11.5. Vastastikkuse teoreemid | 455 |
| 11.5.1. Tööde vastastikkuse teoreem | 455 |
| 11.5.2. Siirete vastastikkuse teoreem | 460 |
| 11.5.3. Reaktsioonide vastastikkuse teoreem | 461 |
| 11.5.4. Reaktsiooni ja siirde vastastikkuse teoreem | 463 |
| 11.6. Siirded mitmesugustest välismõjudest | 464 |
| 11.6.1. Välismõjud | 464 |
| 11.6.2. Koormusest põhjustatud siirded | 464 |
| 11.6.3. Temperatuuri muutusest põhjustatud siirded | 471 |
| 11.6.4. Toesidemete nihkumisest põhjustatud siirded | 482 |
| 11.6.5. Kokkuvõtte kasutatavatest ühikjõududest | 484 |
| 11.6.6. Koormusest põhjustatud siirete valemi integraalide arvutamine | 485 |
| 11.7. Siirete arvutamine Castigliano teise teoreemi abil | 501 |
| 11.7.1. Castigliano teine teoreem | 501 |
| 11.7.2. Castigliano teoreem taladele ja raamidele | 505 |
| 11.7.3. Castigliano teoreem sõrestikele | 507 |
| 11.8. Tala elastse joone diferentsiaalvõrrand | 510 |
| 11.8.1. Diferentsiaalseosed | 510 |
| 11.8.2. Diferentsiaalvõrrandi otsene integreerimine | 512 |
| 11.9. Siirete arvutamine maatrikskujul | 521 |
| 11.9.1. Muutusmaatriks | 521 |
| 11.9.2. Siirete arvutamine | 522 |
| 11.10 Siirete arvutamine M epüüri pindala abil | 533 |
| 11.10.1. Teoreemide tuletamine | 533 |
| 11.10.2. Teoreemide kasutamine | 536 |

II STAATIKAGA MÄÄRAMATUD ARVUTUSSKEEMID 545

12. STAATIKAGA MÄÄRAMATUTE ARVUTUSSKEEMIDE ARVUTAMINE 547

| | |
|---|-----|
| 12.1. Staatikaga määramatu arvutusskeem | 547 |
| 12.2. Staatikaga määramatute konstruktsioonide omadused | 549 |
| 12.3. Arvutamise meetodid | 550 |

13. JÕUMEETOD 551

| | |
|--|-----|
| 13.1. Sissejuhatus | 551 |
| 13.2. Jõumeetodi idee | 552 |
| 13.3. Staatikaga määramatuse aste | 553 |
| 13.4. Põhiskeem ja lisatundmatud | 556 |
| 13.5. Võrrandid lisatundmatute arvutamiseks | 560 |
| 13.6. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajate ja vabaliikmete arvutus | 563 |
| 13.7. Sisejõudude epüürid staatikaga määramatus arvutusskeemis | 566 |
| 13.7.1. Koormusest põhjustatud sisejõudude epüürid | 566 |

| | |
|--|------------|
| 13.7.2. Temperatuuri muutusest ja tugede siiretest põhjustatud sisejõudude epüürid | 569 |
| 13.8. Staatikaga määramatute konstruktsioonide siirete arvutus | 570 |
| 13.8.1. Siirded koormusest | 570 |
| 13.8.2. Siirded temperatuuri muutusest | 575 |
| 13.8.3. Siirded tugede nihkumisest | 575 |
| 13.9. Arvutuse kontroll | 577 |
| 13.9.1. Võrrandisüsteemi kordajate ja vabaliikmete kontrollimine | 577 |
| 13.9.2. Sisejõudude epüüride kontroll | 579 |
| 14. JÄTKUVTALA | 621 |
| 14.1. Sissejuhatus | 621 |
| 14.2. Staatikaga määramatuse aste | 623 |
| 14.3. Põhiskeem ja lisatundmatud | 623 |
| 14.4. Kanoonilised võrrandid. Kolme momendi võrrand | 624 |
| 14.4.1. Koormuse mõju | 624 |
| 14.4.2. Temperatuuri mitteühtlase muutuse mõju | 629 |
| 14.4.3. Tugede vajumise mõju | 630 |
| 14.5. Sisejõudude epüürid ja toereaktsioonid | 630 |
| 14.6. Jätkuvtalade arvutus fookussuhetega | 643 |
| 14.6.1. Fookuste ja fookussuhete mõiste | 643 |
| 14.6.2. Koormatud silde toemomendid | 646 |
| 14.7. Suurimate paindemomentide ja põikjõudude epüürid | 656 |
| 14.8. Mõjujooned | 659 |
| 14.8.1. Staatika meetod | 659 |
| 14.8.2. Kinemaatika meetod | 662 |
| 15. KAARED | 679 |
| 15.1. Sissejuhatus | 679 |
| 15.2. Kahe liigendiga kaar | 682 |
| 15.2.1. Jõumeetodi põhiskeem ja võrrand | 682 |
| 15.2.2. Analüütiliselt määratud telgjoonega kaar | 684 |
| 15.2.3. Analüütiliselt määramatu telgjoonega kaar | 693 |
| 15.2.4. Kahe liigendiga kaare survejoon | 696 |
| 15.2.5. Tõmbiga kahe liigendiga kaar | 696 |
| 15.2.6. Temperatuuri muutuse ja tugede siirete mõju | 698 |
| 15.3. Liigenditeta sümmeetriline kaar | 699 |
| 15.3.1. Põhiskeem ja sisejõudude epüürid | 699 |
| 15.3.2. Mõjujooned | 711 |
| 15.3.3. Temperatuuri muutuse mõju | 712 |
| 15.3.4. Tugede siirete mõju | 712 |
| 16. SÕRESTIKUD | 715 |
| 16.1. Sissejuhatus | 715 |

| | |
|---|------------|
| 16.2. Jõumeetodi põhiskeem ja lisatundmatud | 718 |
| 16.3. Võrrandisüsteem | 719 |
| 16.4. Varraste pikijõud | 720 |
| 16.5. Arvutuse kontroll | 720 |
| 17. DEFORMATSIOONIMEETOD | 729 |
| 17.1. Sissejuhatus | 729 |
| 17.2. Deformatsioonimeetodi idee | 730 |
| 17.3. Kinemaatilise määramatuse aste | 733 |
| 17.4. Kinemaatiliselt määratud põhiskeem | 739 |
| 17.5. Varda otste kinnitusemomentide leidmine koormusest | 747 |
| 17.5.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras | 747 |
| 17.5.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras | 750 |
| 17.6. Varda otste kinnitusemomentide leidmine sõlmede ja varraste pööretest | 754 |
| 17.6.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras | 754 |
| 17.6.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras | 757 |
| 17.7. Koormusest ning sõlmede ja varraste pööretest põhjustatud summaarsed reaktsioonid | 760 |
| 17.7.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras | 761 |
| 17.7.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras | 761 |
| 17.8. Kanoonilised võrrandid | 762 |
| 17.9. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajad ja vabaliikmed | 765 |
| 17.9.1. Sõlme pööret takistavas sidemes j tekkivad reaktsioonid | 766 |
| 17.9.2. Varraste pööret takistavas sidemes c tekkivad reaktsioonid | 768 |
| 17.10. Sisejõudude epüürid ja nende kontroll | 771 |
| 17.11. Temperatuuri muutuse ja tugede siirete mõju | 815 |
| 17.11.1. Temperatuuri muutuse mõju | 815 |
| 17.11.2. Tugede siirete mõju | 823 |
| 17.12. Jätkuvtala arvutamine deformatsioonimeetodiga | 826 |
| 17.12.1. Liigend-ääretugedega jätkuvtala | 826 |
| 17.12.2. Jäikade ääretugedega jätkuvtala | 827 |
| 18. LÕPLIKE ELEMENTIDE MEETOD | 833 |
| 18.1. Sissejuhatus | 833 |
| 18.1.1. Lühiülevaade lõplike elementide meetodist (LEM) | 833 |
| 18.1.2. Põhilised sammud LEMi kasutamisel | 833 |
| 18.1.3. Elementide põhitüübid | 834 |
| 18.1.4. LEMi eelised ja puudused | 836 |
| 18.2. LEMi matemaatilised alused | 836 |
| 18.2.1. Varraste pikiteljesuunaline deformatsioon | 837 |
| 18.2.2. Galjorkini meetodi kasutamine pikideformatsioone kirjeldava diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendi leidmiseks | 839 |
| 18.2.3. Rayleigh-Ritzi meetod | 845 |
| 18.3. Interpolatsioonifunktsioonid | 849 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 18.3.1. | Lineaarne interpolatsioon | 849 |
| 18.3.2. | Lagrange'i interpolatsioon | 853 |
| 18.3.3. | Hermite'i interpolatsioon | 858 |
| 18.4. | Jäikusmaatriksi mõiste. Vedruelemendi jäikusmaatriks | 862 |
| 18.4.1. | Jäikusmaatriksi definitsioon | 862 |
| 18.4.2. | Elastse vedru jäikusmaatriks | 862 |
| 18.4.3. | Konstruktiooni jäikusmaatriksi moodustamine | 863 |
| 18.4.4. | Rajatingimused | 865 |
| 18.4.5. | Vedru jäikusmaatriksi tuletamine Rayleigh-Ritzi meetodiga | 872 |
| 18.5. | Sõrestikuelement | 877 |
| 18.5.1. | Elemendi jäikusmaatriks | 877 |
| 18.5.2. | Pikkele töötava elemendi jäikusmaatriksi tuletamine Galjorkini meetodi abil | 889 |
| 18.5.3. | Kohalik ja üldteljestik | 894 |
| 18.5.4. | Siirete teisendusmaatriks | 894 |
| 18.5.5. | Jõudude teisendusmaatriks | 898 |
| 18.5.6. | Jäikusmaatriks üldkoordinaatides | 900 |
| 18.5.7. | Varda pikijõud | 903 |
| 18.5.8. | Kaldtoed | 909 |
| 18.5.9. | Temperatuuri muutusest põhjustatud lisapinged | 916 |
| 18.6. | Talaelement | 921 |
| 18.6.1. | Talaelemendi jäikusmaatriks | 921 |
| 18.6.2. | Jäikusmaatriksi tuletamine Galjorkini meetodi abil | 923 |
| 18.6.3. | Sõlmede vahel koormatud element | 927 |
| 18.6.4. | Sisejõud sõlmpunktide kohal | 930 |
| 18.6.5. | Siirded ja sisejõud kogu elemendi ulatuses | 930 |
| 18.6.6. | Liigendit sisaldav tala | 952 |
| 18.7. | Raamielement | 957 |
| 18.7.1. | Jäikusmaatriks kohalikes koordinaatides | 957 |
| 18.7.2. | Siirete ja jõudude teisendusmaatriksid | 958 |
| 18.7.3. | Jäikusmaatriks üldkoordinaatides | 962 |
| 18.7.4. | Sisejõudude arvutamine | 963 |
| 19. | SEGAMEETOD | 973 |
| 19.1. | Sissejuhatus | 973 |
| 19.2. | Võrrandisüsteem ja sisejõudude arvutus | 974 |
| 20. | MOMENTIDE JAOTAMISE MEETOD | 985 |
| 20.1. | Sissejuhatus | 985 |
| 20.2. | Nullvabadusastmega raamide arvutamine | 986 |
| 20.2.1. | Põhimõisted ja meetodi idee | 986 |
| 20.2.2. | Arvutamise skeem | 990 |
| 20.3. | Nullist suurema vabadusastmega raamide arvutamine | 1002 |
| 20.3.1. | Meetodi idee | 1002 |

| | |
|--|-------------|
| 20.3.2. Arvutamise skeem | .1003 |
| 21. ARVUTUS PIIRKOORMUSE JÄRGI | 1009 |
| 21.1. Sissejuhatus | .1009 |
| 21.2. Arvutus pikijõule | .1010 |
| 21.2.1. Üksik varras | .1011 |
| 21.2.2. Mitme vardaga arvutusskeemid | .1012 |
| 21.3. Piirpaindemoment ja plastne vastupanumoment | .1022 |
| 21.3.1. Sümmeetriline ristlõige | .1022 |
| 21.3.2. Mittesümmeetriline ristlõige | .1025 |
| 21.4. Ühesildeline staatikaga määramatu tala | .1026 |
| 21.4.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda arvutus staatika meetodiga | .1026 |
| 21.4.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda arvutus staatika meetodiga | .1028 |
| 21.4.3. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda arvutus kinemaatika meetodiga | .1030 |
| 21.4.4. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda arvutus kinemaatika meetodiga | .1032 |
| 21.5. Jätkuvtala | .1037 |
| 21.5.1. Piirkoormuste arvutamine | .1037 |
| 21.5.2. Etteantud koormuste järgi ristlõigete dimensioneerimine | .1041 |
| 21.6. Raamid | .1047 |
| 22. LIGIKAUDSED ARVUTUSMEETODID | 1053 |
| 22.1. Sissejuhatus | .1053 |
| 22.2. Arvutuse lihtsustamine | .1054 |
| 22.3. Vertikaalsete jõududega koormatud raam | .1055 |
| 22.4. Horisontaalsete jõududega koormatud raam | .1058 |
| 22.5. Hoone karkassi arvutamine raamina | .1060 |
| 22.6. Hoone karkassi arvutamine konsoolina | .1063 |
| III LISAD | 1067 |
| A. Tabelid | 1069 |
| A.1. Siirete valemi integraalide arvutamine | .1070 |
| A.2. Kolme momendi võrrandi vabaliikmed | .1071 |
| A.3. Toereaktsioonid jäikade otstega vardas | .1072 |
| A.4. Toereaktsioonid jäiga ja liigendotsaga vardas | .1074 |
| A.5. Toereaktsioonid sõlmede ja varraste pööretest | .1076 |
| A.6. Talade läbipainded ja elastse joone võrrandid | .1077 |
| A.7. Lihtkujundite inerts- ja vastupanumomendid | .1078 |
| A.8. Kujundite pindalad ja pinnakeskmete asukohad | .1079 |
| B. Valemeid tugevusõpetusest | 1081 |

| | |
|---|-------------|
| B.1. Varda põhideformatsioonid | .1081 |
| B.1.1. Pikkedeformatsioon | .1081 |
| B.1.2. Paindedeformatsioon | .1081 |
| B.1.3. Lõikedeformatsioon | .1081 |
| B.1.4. Väändedeformatsioon | .1082 |
| B.2. Tala elastse joone universaalvõrrand | .1082 |
| B.3. Pinged varda ristlõikes | .1087 |
| B.3.1. Normaalpingeväli | .1087 |
| B.3.2. Nihkepingeväli | .1090 |
| C. Maatriksalgebra | 1093 |
| C.1. Maatriksi mõiste | .1093 |
| C.2. Maatriksite liitmine ja lahutamine | .1094 |
| C.3. Maatriksite korrutamine | .1094 |
| C.4. Maatriksite transponeerimine | .1096 |
| C.5. Pöördmaatriksid | .1096 |
| C.6. Maatriksi determinant | .1097 |
| Kirjandus | 1099 |
| Aineregister | 1101 |

Peatükk 1

SISSEJUHATUS EHITUSMEHAANIKASSE

1.1. Ülesanded ja eesmärk

Ehitusmehaanika on ehituskonstruktsioonide projekteerimise alustala. Uute kavandatavate ehitiste *tugevus-* ja *püsivusarvutuste* eesmärgiks on kindlustada nende vastupanu koormustele ning selgitada ehitise võimet säilitada oma kuju deformeerunud tasakaaluolukorras. *Jäikusarvutus* taotleb suurte siirete ja vibratsioonide vältimist, kuigi need oleksid konstruktsiooni seisukohalt küll ohutud, kuid on ebasoovitavad või takistavad ehitise normaalset kasutamist. Tugeva, püsiva ja otstarbeka ehitise kuju ja mõõtmete määramine ning materjali valik nõuab tehnilist ja majanduslikku arvutust. Ka siis, kui olemasolevaid ehitisi renoveeritakse või nende kasutustingimusi muudetakse, tuleb teha tugevuse ja püsivuse kontrollarvutused, mis näitavad, kas ehitist on vaja tugevdada või mitte.

Ehitise tugevus, püsivus (ehk stabiilsus) ja jäikus sõltuvad selle materjalist ning elementide kujust ja mõõtmetest, samuti sisejõududest, mis tekivad ehitises koormuse mõjumisel. Sisejõudude kaudu arvutatakse ka ehitise elementide deformatsioonid ja siirded. Seepärast on ehitusmehaanika üheks põhiülesandeks sisejõudude arvutus.

Ehitusmehaanika on tihedalt seotud *tugevusõpetuse* ja *elastsusteooriaga*. Sageli mõistetakse ehitusmehaanika all kõiki nimetatud teadusharusid. Kõigi nende ühiseks eesmärgiks on anda arvutusmeetodid sisejõudude ja deformatsioonide leidmiseks.

Tugevusõpetus käsitleb sisejõudude ja deformatsioonide ning samuti pingete arvutust peamiselt ehitise üksikutes elementides. Ehitusmehaanika uurib sisejõudude ja deformatsioonide leidmist elementidest koosnevates konstruktsioonides: mitmesildelistes talades, kaartes, raamides, sõrestikes ja rippkonstruktsioonides. Tugevusõpetus ja ehitusmehaanika püüavad saavutada eesmärgi suhteliselt lihtsamate matemaatiliste meetoditega. Elastsusteooria nõuab oma eeldustes ja järeldustes suuremat rangust ja täpsust ning peab seepärast kasutama täpsemaid ja keerukamaid matemaatilisi meetodeid.

Lisaks eespool mainitutele kuuluvad ehitusmehaanika alla ka *plastsusteooria*, mis tegeleb pingete ja deformatsioonide leidmisega plastsetes ja elastoplastsetes materjalides; *dünaamika*, mis uurib dünaamiliste ehk muutuvate koormuste mõju konstruktsioonidele; ning ka

koorikute ja plaatide teooria, mis vastavalt oma nimetusele annab meetodid koorik- ja plaatkonstruktsioonide tugevuse ja püsivuse arvutamiseks.

Eelnevast lähtuvalt võime öelda, et ehitismehaanika tõdede tundmine on ehitusinseneri üks põhioskusi, mis on vähemal või suuremal määral vajalik kõigile ehitusinseneridele, sõltumata sellest, kas istutakse projekteerimisbüroos või töötatakse ehitusplatsil.

Käesolevas raamatus käsitleme varraskonstruktsioonide sisejõudude ja siirete leidmist. Kuna tänapäevases projekteerimises toimub mainitud arvutuste tegemine projekteerimistarkvara abil, siis on mitmete teemade juures loobutud suure hulga erinevate arvutusmeetodite esitamisest, vaid on keskendunud konstruktsiooni töötamise põhiidee väljatoomisele. Kuna arvutustehnikat kasutades peab insener suutma avastada suuri ja põhimõttelisi vigu, siis on käesoleva raamatu eesmärk lisaks arvutusoskuse õpetamisele harjutada ka insenerlikult tunnetama ehituskonstruktsioonide käitumist.

1.2. Ehitismehaanika ja konstruktsioonide ajaloost

Vana- ja keskajal püstitatud ehitiste kohta ei ole säilinud mingeid arvutusi ega projekte. Tolla ehitati kogemuste ja eeskujude põhjal, kasutati katse-eksituse meetodit. Tõenäoliselt kavandati mitmeid konstruktsioone mitte tehnilistest, vaid pigem arhitektuurilistest põhimõtetest lähtuvalt. Postid, talad ja kaared olid kasutusel juba tuhandeid aastaid enne seda, kui nende arvutamiseks vajalikud meetodid kasutusele võeti.

Vana-Egiptuses kasutati templite, püramiidide ja muude ehitiste rajamisel laialdaselt kivist post-tala süsteemi (foto 1.1). Kuna kivi tõmbetugevus on väike, siis pidid talade silded olema lühikesed, et vältida paindest põhjustatud purunemist. Postide stabiilsuse tagamiseks olid need küllaltki suure ristlõikega. Egiptuse teadlast Imhotepi (2650–2600 eKr), kellele omistatakse Sakkara astmikpüramiidi ehitamist, peetakse sageli inimkonna üheks esimeseks ehitusinseneriks.

Antiik-Kreekas ehitati hulganisti suurejoonelisi ehitisi, mille varemed on säilinud tänapäevani. Jätkati post-tala süsteemide kasutamist, mida on eriti laialdaselt näha just templite puhul. Kreeklaste üheks suurimaks saavutuseks võib ehk lugeda ehitiste arhitektuurset poolt, kuna Vana-Kreeka ehitiste proportsioonid ja kolonnaadid on inspireerinud arhitektuurseid stiile kogu järgneva ajaloo jooksul ja isegi veel 20. sajandil kasutasid arhitektid suurte ja oluliste ühiskondlike hoonete fassaadide kujundamisel Vana-Kreeka templite elemente.

Kuid mingil määral tegelesid kreeklased juba ka teooria arendamisega. Näiteks pani antiikaja üks juhtivaid teadlasi Archimedes (287–212 eKr) aluse staatikale, tegi kindlaks kangi tasakaalu tingimused ja võttis kasutusele raskuskeskme mõiste.



Foto 1.1. Karnaki tempel Egiptuses (foto: Wikimedia Commons)



Foto 1.2. Alcántara sild Hispaanias (foto: Wikimedia Commons)

nad oma ehitisi pigem ikkagi arhitektuursetest ideedest lähtuvalt ja tugevuse seisukohalt arvestasid ehitajad lihtsalt eelkäijate empiirilise kogemusega.

Roomlased õppisid hooneid katma betoonist kuplitega, mis erinevalt kaarest on ruumiliselt töötav konstruktsioon. Tänapäevani on säilinud Rooma Pantheon, mis on antiikaja suurim kupliga ehitis.

Keskajal muutusid kaared saledamaks ning ümar-kaare asemel võeti kasutusele teravkaar, mille peamiseks eeliseks oli asjaolu, et selle raskus on suunatud rohkem ülalt alla, mitte nii palju horisontaalsuunas kui ümarkaarel. Laialdaselt hakati ruumide katmisel kasutama teravkaartest moodustatud ristvõlve, mis töötavad ruumiliselt. Fotol 1.3 on näha Tallinna Oleviste kiriku teravkaared ja kesklöövi ristvõlvlagi. Seniajani puudusid aga endiselt teadmised konstruktsioonide tugevusarvutustest.

Kuid juba suur teadlane ja kunstnik Leonardo da Vinci (1452–1519) tegeles ka materjalide tugevuse küsimustega, mille kohta leiti kirjalikke tõendeid alles viimasel ajal osaliselt säilinud käsikirjadest.

Itaalia arhitekti Andrea Palladiot (1508–1580) peetakse esimeseks, kes võttis sillaehituses kasutusele sõrestikkonstruktsioonid. Tema projekteerimise põhimõtted pole küll teada, aga arvatakse, et ta lähtus eelkäijate kogemustest ja dimensioneeris sõrestiku elemendid nii-öelda rusikareeglite põhjal. Pärast Palladiot unustati sõrestikkonstruktsioonid aga mitmesajaks aastaks.

Ehitismehaanika ja materjalide tugevusõpetuse ajaloo alguseks loetakse 17. sajandi teist veerandit, millal kuulus matemaatik, füüsik ja astronoom Galileo Galilei (1564–1642) aval-

Roomlased olid suured ehitusmeistrid, rajades üle kogu keisririigi alade amfiteatreid, akvedukte ja sildasid. Kasutusse võeti kaarkonstruktsioonid, mis oli väga oluline ehitustehniline uuendus, kuna nendega sai sillata oluliselt suuremaid avasid kui taladega (foto 1.2). Seetõttu on ümarkaar Vana-Rooma ehituskunsti lahutamatu osa.

Kivist kaarte stabiilsuse tagamiseks peab kaare ristlõige olema terves ulatuses surutud. Kui palju roomlased sellega arvestada oskasid, on teadmata, kuid suure tõenäosusega kavandasid

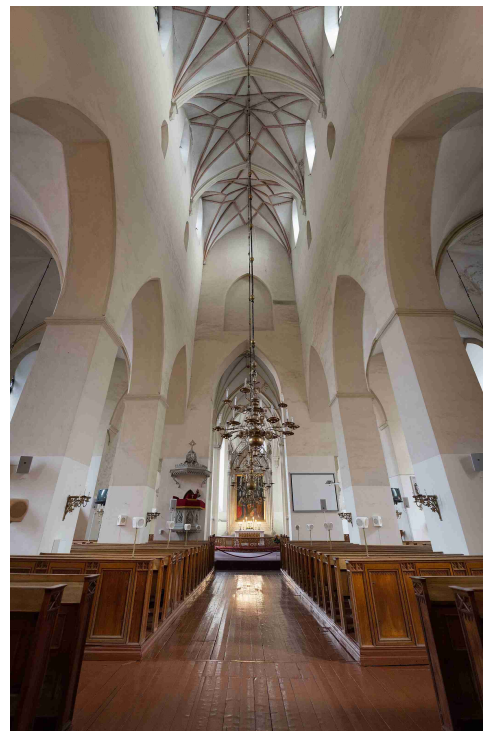


Foto 1.3. Oleviste kirik Tallinnas (foto: Wikimedia Commons)

das trükkis töö, mis on säilinud kuni käesoleva ajani. Selles töös (1638. a) kirjeldab Galilei katseid, mida ta tegi Veneetsia arsenalis painutatud taladega ja püüab esmakordselt tõestada kehade elastsusomadusi. Kuna ta ei teadnud füüsikalist seost pingete ja deformatsioonide vahel, siis ei läinud tal korda luua õiget teooriat talade painde arvutamiseks. Galilei töödega algab katseliste uurimuste ajalugu.

Deformatsioonide ja pingete vahelise seose elastses kehas kõige lihtsamal kujul, s.t lineaarses vormis, andis 1678. aastal inglise füüsik ja looduseurija Robert Hooke (1635–1703).



Foto 1.4. Eiffeli torn Pariisis (foto: Wikimedia Commons)

Esimese olulise panuse elastse varda matemaatilise paindeteooriasse tegid akadeemikud Leonhard Euler (1707–1783) ja Daniel Bernoulli (1700–1782), kelle tööd ilmusid 18. sajandi keskpaiku. Euler uuris esimesena surrutud elementide püsivust ja määras tsentraalselt surrutud sirge varda kriitilise koormuse.

Konstruksioonide tugevusarvutuse arengut 18. sajandil soodustasid edusammud matemaatikas ja mehaanikas. Erilist tähtsust omasid sellel alal Euleri ning prantsuse matemaatiku ja mehaanikateadlase Joseph Louis de Lagrange'i (1736–1813) tööd. Kuid kindlasti tuleb ära mainida ka prantsuse füüsiku Charles Augustin de Coulomb'i (1736–1806) ning inseneri-matemaatiku Claude Louis Marie Henry Navier'i (1785–1836) uurimused tugevusõpetuse vallas. Navier avaldas aastal 1826 raamatu, kus kirjeldas postide, talade, kaarte ja mitmete teiste konstruktsioonide tugevuse ja deformatsioonidega seotud küsimusi.

19. sajandi keskel esitas vene mehaanikateadlane ja insener Dmitri Ivanovitš Žuravski (1821–1891) oma tööd meetodid mitmevõrguliste puitsõrestike arvutamiseks ning painutatud talade tangentsiaalpingete leidmiseks.

USA ehitusinsener Squire Whipple (1804–1888) avaldas 1847. aastal raamatu sildade kavandamisest, kus esitas ka esimese põhjaliku sõrestikkonstruktsioonide analüüsi.

Tööstuse kiire areng 19. sajandi teisel poolel, raudteede, masinate, metallsildade ja laevade ehitamine põhjustasid ka konstruktsioonide tugevuse arvutuse kiire arengu. Selle perioodi nimekamad teadlased ehitusmehaanika alal on prantsuse insener ja füüsik Benoit Pierre Emile Clapeyron (1799–1864), kes esitas staatikaga määramatute jätkuvtalade arvutamise meetodi kolme momendi võrrandiga, šoti päritolu inglise füüsik James Clerk Maxwell (1831–1879), kes sõnastas 1864. aastal siirete vastastikkuse teoreemi ning esitas esimese kasutatava jõumeetodi staatikaga määramatute konstruktsioonide lahendamiseks, saksa insener ja mehaanikateadlane Christian Otto Mohr (1835–1918), kes arendas jõumeetodi teooriat edasi ning esitas selle kümme aastat hiljem peaaegu tänapäevasel kujul, ning itaalia raudteeinsener Car-

lo Alberto Castigliano (1847–1884), kes oma kahe teoreemiga andis samuti olulise panuse ehitusmehaanika arvutusmeetodite arengusse.

19. sajandi lõpuks oli ehituskonstruksioonide projekteerimise tase jõudnud sinnamaani, et oldi valmis püstitama rohkem kui 300 m kõrgune sõrestikkonstruksioonist Eiffeli torn (foto 1.4), mis jäi maailma kõrgeimaks ehitiseks kuni 20. sajandi esimese kolmandiku lõpuni.

20. sajandil hakati ehituses väga palju kasutama mitmekorruselisi ja -avalisi raamkonstruksioone ning seetõttu vajas detailset uurimist paljukordselt staatikaga määramatute konstruksioonide arvusteteooria. 1924. aastal esitas ameeriklane Hardy Cross (1885–1959) momentide jaotamise meetodi.

1930.–40. aastatel sai hoo sisse koorikkonstruksioonide teooria uurimine, millega hilisematel aastakümnetel tegeleti väga põhjalikult ka Tallinna Tehnikaülikoolis. Raudbetoonkonstruksioonide professor ja sõjajärgse ehitusteaduskonna dekaan Heinrich Laul (1910–1991) arendas välja silindriliste ja kaksikkõverate raudbetoonkoorikute arvutamiseks nihkejõudude aproksimatsiooni meetodi, mis tänapäevaks on arvustetehnika arengu tõttu oma aktuaalsuse küll juba ammu kaotanud. Oma ajast ettejäudnuks võib lugeda Tallinna Lennusadama angaaride katusekonstruksiooni, mis valmis juba 1917. aastal ja oli esimene nii suuremahuline raudbetoonkoorikehitus kogu maailmas.

20. sajandi esimesel poolel olid paljud ehitusmehaanika probleemid leidnud lahenduse, kuid puudus arvutusvõimsus, et lahendada saadud matemaatilisi valemeid, mille käsitsi tegemine oli aga väga töömahukas ja aeganõudev. Mitmed meetodid sai praktikas kasutusele võtta alles koos arvutite arenguga.

20. sajandil alustasid võidukäiku rippkonstruksioonid, mis tänapäeval on kujunenud vaieldamatuks liidriks suurte avade sildamisel. Läbi aegade üheks tuntumaks sillaks on kujunenud juba enne teist ilmasõda valminud San Francisco Kuldvärava sild (foto 1.5).



Foto 1.5. Kuldvärava sild San Franciscos (foto: Wikimedia Commons)

Enne sajandi keskpaika avaldati esimesed alged lõplike elementide meetodist, mille areng sai tõsisema hoo sisse 1950. aastatel. Sealt edasi on ta kujunenud tänapäeval väga laialt kasutatavaks arvutusmeetodiks, millel baseerub kogu projekteerimises kasutatav sisejõudude arvutamise tarkvara.

Väga põhjaliku ülevaate ehitusmehaanika ja tugevusõpetuse ajaloost leiab S.P. Timoshenko raamatust [33].

Mida toob 21. sajand, näitab tulevik. Ehitamisel on juba tornid, mille kõrgus ületab kilomeetri. Selliste ehitiste rajamine nõuab aga kõige muu hulgas ka suurepäraseid teadmisi ehitusmehaanikast.

1.3. Eeldused ja printsiibid

Ehitusmehaanika arendab sisejõudude ja deformatsioonide leidmise meetodeid erinevates ehituskonstruktsioonides ja lähtub järgmistest eeldustest:

1. konstruktsiooni materjal on ühtlaselt ja pidevalt jaotatud üle kogu mahu;
2. materjal on homogeenne, s.t materjali kõikides punktides on füüsikalised omadused ühesugused;
3. materjal on isotroopne, s.t kõikides suhtides ühesuguste omadustega;
4. koormamata olukorras on konstruktsioon pingevaba (kui ei esine eelpingeid);
5. materjal on elastne, kehtib *Hooke'i seadus*: elastses kehas on deformatsioonid võrdelised koormusega;
6. konstruktsioonelementide siirded on võrreldes elementide üldmõõtmetega väikesed.

Kahe viimase eelduse kehtimisel võib rakendada *jõudude mõju sõltumatuse printsiipi* (*superpositsiooniprintsiip*).

Jõudude süsteemi poolt tingitud sisejõud ja deformatsioonid on võrdsed iga jõu poolt eraldi põhjustatud sisejõudude ja deformatsioonide algebralise summaga.

Kaks viimast eeldust lubavad kasutada ka *virtuaalsiirete printsiipi*.

Kehale rakendatud tasakaalus olevate jõudude tööde summa konstruktsiooni elementide virtuaalsiiretel võrdub nulliga.

Virtuaalsiirete ja jõudude mõju sõltumatuse printsiibile tuginevad ehitusmehaanika arvutusmeetodid.

1.4. Ehituskonstruktsioonide liigitus

1.4.1. Üldine liigitus

Ehituskonstruktsioone liigitatakse nende arvutamisel mitmesuguste erinevate omaduste järgi, millest üheks olulisemaks on **staatikaga määratavus**. Arvutusskeemid on staatikaga määratavad või staatikaga määramatud. *Staatikaga määratavas* arvutusskeemis piisab suvalisest koormusest põhjustatud toereaktsioonide ja sisejõudude leidmiseks staatika tasakaaluvõrranditest. *Staatikaga määramatuse* arvutusskeemis pole toereaktsioonid ja sisejõud arvutatavad üksnes tasakaaluvõrrandite abil ja ülesande lahendamine nõuab veel kinemaatiliste pidevus-tingimuste alusel koostatud võrrandite lahendamist.

Käesolev raamat on osadeks jaotatud just staatikaga määratavuse alusel: raamatu esimeses osas vaatleme staatikaga määratud arvutusskeeme ning teises osas anname ülevaate staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutamise meetoditest.

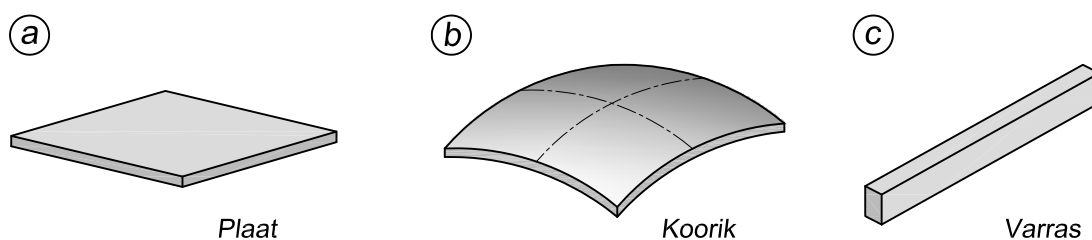
Kinemaatiliste tunnuste järgi on konstruktsioonid kas *geomeetriselt muutumatud* või *geomeetriselt muutuvad*. Ehitistes kasutatakse ainult geomeetriselt muutumatuid konstruktsioone. Geomeetriseline muutumatus on tagatud, kui konstruktsiooni elementide vastastikust asetust ei saa muuta elemente deformeerimata. Kui elementide siirdumine on võimalik deformeerumiseta, siis on arvutusskeem geomeetriselt muutuv ja ehituskonstruktsiooniks seetõttu kõlbmatu.

Geomeetriseliste tunnuste ehk mõõtmete alusel saame konstruktsioonid jaotada massiiv-, plaat-, koorik- ja varraskonstruktsioonideks.

Massiivkonstruktsioonil on kõik kolm mõõdet samas suurusjärgus (paksud jöetammid ja tugisambad, massiivsed vundamendid jne).

Plaat- ja koorikkonstruktsioonide (pindkandurite) elementidel on kaks mõõdet (pikkus ja laius) tunduvalt suuremad kui kolmas (paksus). Elementi, mis on piiratud kahe tasandiga (joonis 1.1, a), nimetatakse plaadiks, kõverpindadega piiratud elementi (joonis 1.1, b) aga koorikuks.

Varraskonstruktsioonil on elemendi üks mõõde (pikkus) tunduvalt suurem kahest teisest (ristlõike) mõõtmest (joonis 1.1, c). Ristlõigete raskuskeskmed kujundavad varda telje, mis on sirge, murtud või kõver.



Joonis 1.1. Ehituskonstruktsioonide jagunemine plaat-, koorik- ja varraskonstruktsioonideks

Varraskonstruktsioonid liigitatakse tasandilisteks ja ruumilisteks. *Tasandkonstruktsioonil* asuvad varraste teljed ühel tasandil, mis läbib ristlõigete üht peatelge. Varraste telgjoontega samas tasandis mõjuva, kriitilisest väiksema arvutuskoormuse puhul jäävad deformeerunud varraste telgjooned samasse tasandisse.

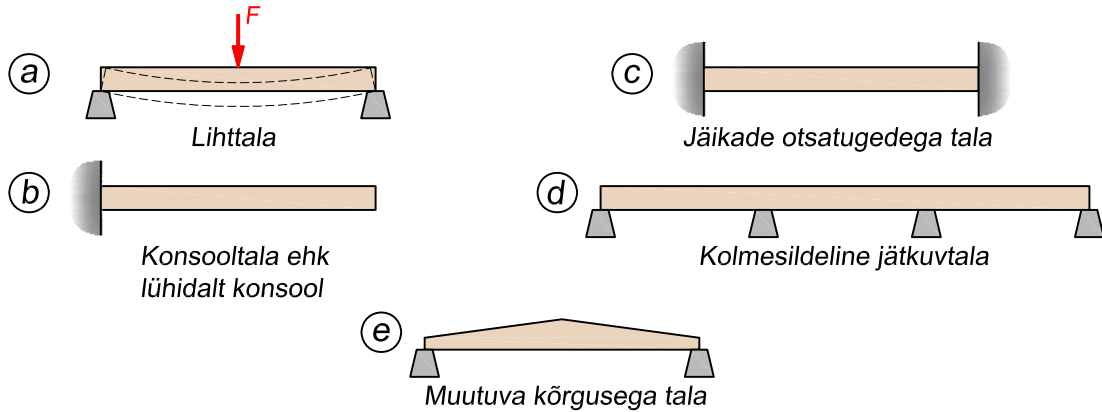
Ruumkonstruktsioonil asuvad varraste teljed mitmel tasandil. Ruumiliste ehituskonstruktsioonide arvutusskeem lahutatakse võimaluse korral tasandilisteks, mis arvutust tunduvalt lihtsustab. Kui seda ei saa teha, käsitletakse konstruktsiooni arvutusskeemi ruumilisena (kuplid, tornid, koorikud, laeva- ja lennukikered).

1.4.2. Peamised konstruktsioonide tüübid

Ehituskonstruktsioonid jagunevad vastavalt tööpõhimõttele ja tekkivatele sisejõududele paljudeks baaskonstruktsioonitüüpideks: taladeks, postideks, kaarteks, raamideks, sõrestikeks jne. Hoonete, sildade ja ka kõigi muude ehitiste projekteerimisel moodustatakse lõplikud konstruktsioonid nendest baaselementidest. Järgnevalt vaatame selliste tüüpkonstruktsioonide üldisi põhimõtteid.

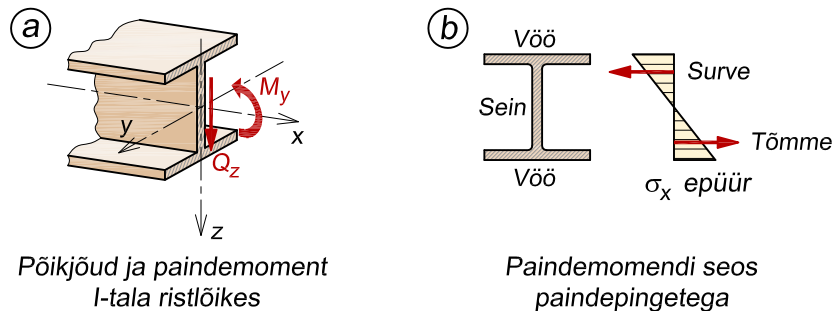
Tala

Tala on konstruktsioonelement, mis paikneb horisontaalselt või ligilähedaselt horisontaalselt ja on koormatud vertikaalse koormusega (joonis 1.2). Talasid nimetatakse sageli selle järgi, millised on nende kinnitused. Üldiselt on talad konstantse ristlõike kõrgusega, kuid tihti kasutatakse ka selliseid talasid, mille kõrgus silde ulatuses muutub (joonis 1.2, e).



Joonis 1.2. Erinevaid talasid

Kui talale rakendada koormus, siis tala paindub (joonis 1.2, a) ning selle tüüpilises ristlõikes tekivad paindemoment ja põikjõud (joonis 1.3, a). Pikkade talade korral (pikkuse ja kõrguse suhe $h/l < 1$) on dimensioneerimisel määravam paindemoment, kui aga tala on lühike ($h/l \geq 1$) ja raskelt koormatud, siis on vastupidiselt olulisem roll põikjõul.



Joonis 1.3. Tala sisejõud

Kui tala töötab elastses staadiumis, siis muutub paindepingete epüür lineaarselt (joonis 1.3, b) ning varda alumine pool on tõmmatud ja ülemine pool surutud. Varda tõmmatud poole summaarne tõmbejõud ja surutud poole summaarne survejõud moodustavad jõupaari, mille moment annab vastavas ristlõikes tekkiva paindemomendi M_y .

Väiksema ristlõikekõrgusega talad on paindemomendi vastuvõtmiseks ebaotstarbekad, kuna summaarse tõmbe- ja survejõu vaheline õlg jääb lühikeseks ja koos sellega muutuvad

pinged ristlõike äärmistes kiududes liiga suureks. Seetõttu on mõistlik tala kõrgust suurendada ja kuna paindemomendi vastuvõtmise seisukohalt on olulised just äärmised kiud, siis nihutatakse osa materjali ristlõike raskuskeskme juurest eemale tala alumise ja ülemise serva suunas. Nii saadakse H-profiiliga talad (joonis 1.3), kus paindemomendi võtavad vastu vööd ning põikjõu seinosa.

Raudbetoonist ja puidust talade korral kasutatakse tavaliselt ristkülikulist ristlõiget, kuna sellist on kõige lihtsam valmistada, kuid võimalikud on ka muud variandid.

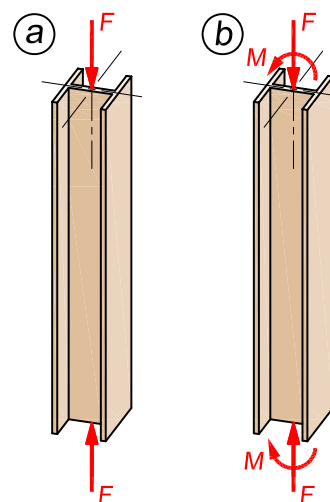
Post

Postid on vertikaalsed konstruktsioonelemendid, mis üldjuhul töötavad pikijõule (joonis 1.4, a). Surutud postide korral on oluline posti saledus, kuna saledate varraste nõtkumine toimub palju väiksema koormuse juures, kui on vajalik varda materjali purunemiseks surve. Saledate postide kandevõimele avaldab mõju ka posti otste kinnituse tüüp – meenutame tugevusõpetusest, et sama pikkuse ja samade ristlõikeparameetrite puhul võtab mõlemast otsast jäiga kinnitusega post vastu neli korda suuremat koormust kui liigendotstega post.

Jämedad postid, kus stabiilsuse kaotuse oht puudub, purunevad survepingete tõttu, kui need ületavad materjali survetugevuse või voolavuspiiri.

Ainult pikiteljesuunalise jõuga koormatud postid esinevad lihtsamates konstruktsioonides ja enamasti tekib postis lisaks pikijõule ka paindemoment (joonis 1.4, b). Paindemomenti võib postis põhjustada eksentriliselt rakendatud koormus, samuti esineb painde moment raamkonstruktsioonides, kus talad ja postid on teineteisega jäigalt ühendatud.

Teraspostid projekteeritakse tavaliselt kas H- või toruristlõikega, neist viimane võib olla nii ringi- kui ristkülikukujuline. Raudbetoonpostide ristlõigetena on kasutusel ring ja ristkülik, puidu puhul eelistatakse üldjuhul ristkülikuristlõiget.

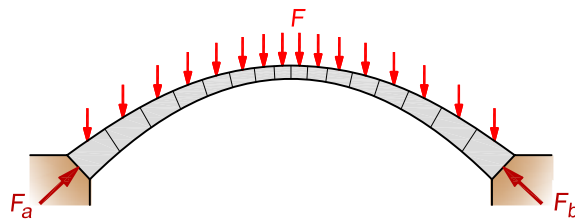


Joonis 1.4. Post

Kaar

Kaar on kõverjoonelise teljega konstruktsioon, milles vertikaalkoormuse all tekivad survejõud (joonis 1.5). Kaarkonstruktsioonis on materjali kasutamine kõige efektiivsem, kui kaare kuju valida selliselt, et kõigis ristlõigetes läbib sisejõudude resultant ristlõike raskuskeset, kuna siis puudub kaares paindemoment ja esineb ainult pikijõud. Kuna igale koormusvariandile vastab ainult üks selline kaare kuju, kus paindemomenti üheski ristlõikes ei esine, siis muutuvad koormused võivad põhjustada suurte paindemomentide tekkimise, millega tuleb projekteerimisel arvestada. Eriti ohtlikuks kujunevad paindemomendid saledates kaartes.

Üks väga oluline omadus, mille poolest kaar erineb talast, seisneb toereaktsioonide iseloomus. Kui talal tekivad vertikaalsest koormusest ainult vertikaalsed reaktsioonid, siis kaare toereaktsioon jaguneb nii vertikaal- kui horisontaalkomponendiks. Kui sille on suur ja kaar



Joonis 1.5. Kaar

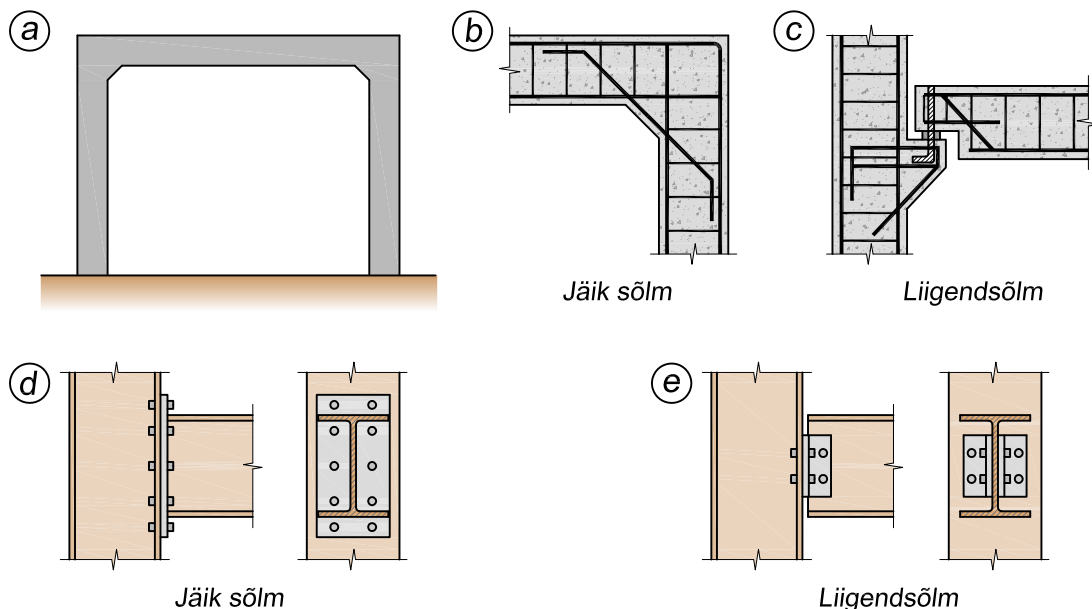
on madal, siis tuleb projekteerimisel arvestada tekkivate väga suurte horisontaalsete reaktsioonidega.

Kaar on küllaltki ökonoomne konstruktsioon just suuremate avade sildamisel ja seetõttu kasutatakse seda laialdaselt sildades ning suurte hallide katusekonstruktsioonides. Aastatuhandeid on kaari ehitatud kivist, tänapäeval kasutatakse suureavaliste kaarkonstruktsioonide puhul raudbetooni, terast või liimputi.

Raam

Raamid (joonis 1.6, a) moodustatakse taladest ja postidest, mis sõlmedes ühendatakse omavahel kas jäigalt või liigenditega. Horisontaalseid elemente nimetatakse raamide puhul sageli riivideks.

Jäik sõlm tähendab seda, et raami deformeerumisel ei saa sõlmes ühendatud vardad üksteise suhtes pöörduda. Jäigad sõlmed muudavad raami staatikaga määramatuks, mis teeb sel-



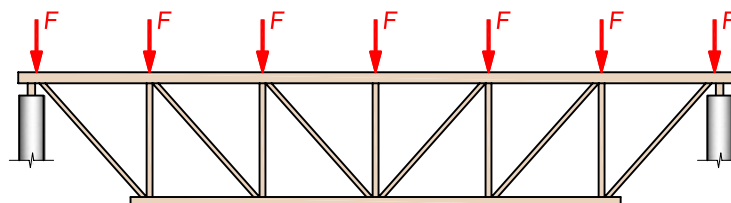
Joonis 1.6. Raam ning erinevad variandid jäikade ja liigendsõlmede moodustamiseks

le arvutamise keerukamaks, kuid samas annab võimaluse elementide ristlõikeid ökonoomsemaks muuta tänu sõlmedes ühelt elemendilt teisele edasikantavatele paindemomentidele. Liigendsõlm võimaldab sõlmes liituvatel varrastel üksteise suhtes pöörduda. Joonisel 1.6, b ja c on kujutatud raudbetoonist raami tüüpiline jäik ja liigendsõlm ning joonisel 1.6, d ja e sama terasraamile.

Tasapinnalise ülesande korral tekivad raamkonstruktsioonides kõik kolm sisejõudu: paindemoment, põikjõud ja pikijõud.

Sõrestik

Sõrestik on konstruktsioon, mida kasutatakse suuremate avade sildamisel tala asemel (joonis 1.7). Kui silde pikkus suureneb, siis tuleb ka tala kõrgust suurendada, mis muutub aga materjalimahukaks. Tala seinaosast liigse materjali eemaldamisel ning selle asendamisel vertikaalsete ja diagonaalsete varrastega saadaksegi sõrestik.



Joonis 1.7. Sõrestik

Sõrestiku vardad asetatakse tavaliselt nii, et nad moodustavad kolmnurkse võrgustiku, kuna kolmnurk on lihtsaim geomeetriliselt muutumatu kujund.

Kui sõrestikku koormata ainult sõlmedes (joonis 1.7), siis tekivad saledate varrastega korral sõrestikus ainult pikijõud. Võrreldes talaga on paindemomendist vabanemise tõttu sõrestikus materjali kasutamine oluliselt efektiivsem. Ehk teisiti öeldes, sõrestiku omakaal on temaga võrdse kandevõimega tala omast väiksem.

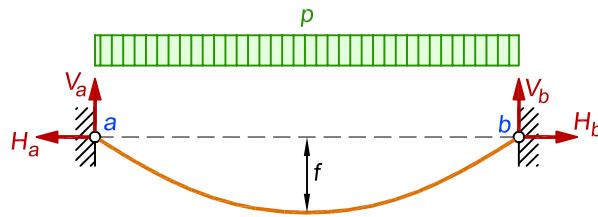
Sõrestikud projekteeritakse tänapäeval valdavalt terasest nelikanttorudest, mis võivad olla nii ruut- kui ristkülikristlõikega. Samas kasutatakse katusesõrestike puhul laialdaselt ka liimpuitu.

Siiani on olnud juttu horisontaalasendis paiknevatest sõrestikest, kuid samamoodi, nagu me võime tala asendada sõrestikuga, saame seda teha ka postide puhul, kus täisseinalise posti asemel kasutame sõrestikposti. Eesmärk on sama – saavutada väiksema materjalikulu juures suurem kandevõime.

Kaabel

Ripp- ja vantkonstruktsioonides on põhiliseks elemendiks terastross, mis võtab vastu ainult tõmbejõudu. Konstruktsioonelemendina nimetatakse trossi kaabliks. Kaablid on vabalt painduvad ja nende paindejäikuse arvestamisest võib loobuda.

Tänu suurele tõmbetugevusele suudavad kaablid kanda suuri koormusi, mistõttu neid kasutatakse suuremõõtmelistes ja -sildelistes konstruktsioonides, näiteks ripp- ja vantsillad ning



Joonis 1.8. Ühtlase lauskoormusega kaabel

rippkatused, aga samuti ka vantidega toetatud mastide puhul. Suuremate sillete juures on rippkonstruktsioonid palju ökonoomsemad, kui võrrelda teiste konstruktsioonitüüpidega.

Paindejäikuse puudumise tõttu sõltub kaabli kaju temale rakendatud koormustest. Näiteks on joonisel 1.8 kujutatud kaabel koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega, mille mõjul võtab kaabel ruutparabooli kaju. Ainult omakaaluga koormatud kaabel on aheljoone kujuga, mis on lähedane ruutparaboolile, kuid sellest siiski erinev.

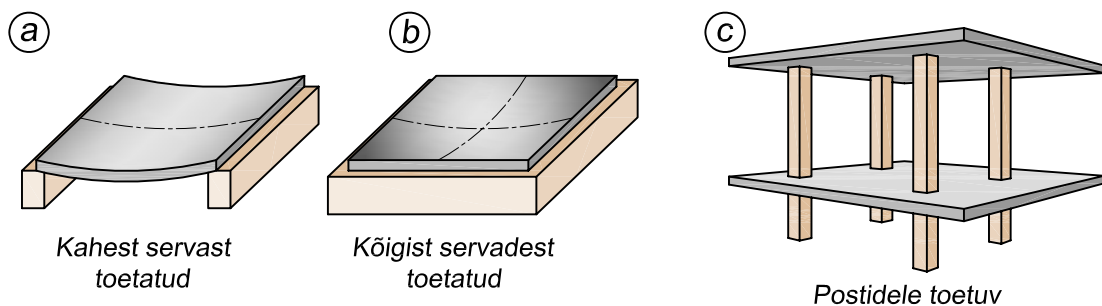
Kaabli töötamine on sarnane kaarele (ainult pikijõu märk on vastupidine) ja nagu kaarel sõltub horisontaalse reaktsiooni suurus kaare kõrgusest, nii on ka siin – mida väiksem on kaabli riipe f , seda suuremad on horisontaalsed toereaktsioonid. See on ka põhjus, miks näiteks elektriliine ei tõmmata kunagi täiesti sirgeks. Isegi peenikese õhukaabli omakaal on pika postivahe korral piisav, et rippe vähenedes horisontaalreaktsioon (ja koos sellega ka kaabli pikijõud) muutuks nii suureks, et võib viia kaabli katkemiseni.

Kuna kaablil paindejäikust ei ole, siis on rippkonstruktsioonide puhul tõsiseks probleemiks tuulekoormuse tekitatud võnkumised (flutter), mis halvimal juhul lõpeb konstruktsiooni purunemisega.

Plaat ja koorik

Plaadid ja koorikud on pindkandurid, mille paksus on võrreldes pikkuse ja laiusega väike.

Plaate kasutatakse peamiselt hoonete põrandate ja vahelagedena ning sillatekkides. Plaadi töötamine sõltub sellest, mitmes küljes on see toetatud. Kui riskülikukujuline plaat on toetatud kahes vastasservas, siis tekib plaadis ühe kõverusega paine (joonis 1.9, a) ja plaati võib arvutada talana. Kui aga plaat toetub kõigis neljas küljes, siis see põhjustab kahe kõverusega



Joonis 1.9. Erineva toetusega plaate



Joonis 1.10. Mõningaid koorikutüüpe

painde (joonis 1.9, *b*). Karkasshoonete puhul on väga levinud, et plaat toetub ainult postidele (joonis 1.9, *c*).

Koorikud on kõverjoonelise pinnaga konstruktsioonid, mille paksus võib olla väga väike (joonis 1.10). Koorikute eelisteks ongi väikesest paksusest tingitud vähene materjalikulu, kõverjoonelisest pinnast põhjustatud tugevus ja jäikus ning asjaolu, et koorikutega saab sillata suuri avasid. Samuti on koorikud arhitektuurselt ilmekad konstruktsioonid.

Koorikkonstruktsioonides tekivad ühtlase lauskoormuse korral pinged peamiselt kooriku tasapinnas, mistõttu kannavad koorikud neile mõjuvad koormused edasi tugevatele põhiliselt membraansisejõudude (nihkejõudude) abil. Paindedeformatsioonid on ühtlase lauskoormuse korral koorikus väikesed, mida võib lugeda kooriku ruumilise töötamise põhitunnuseks. Momendid tekivad enamasti kooriku servadel, kus koorik kinnitub aluse või jäiga äärelükme külge.

Õhukeste koorikute probleemiks on aga see, et nad ei suuda kanda suuri koondjõude, kuna need põhjustavad oluliste paindemomentide tekkimise. Selliste jõudude esinemise korral võib kasutada kooriku pinna jäigastamiseks ribisid.

Koorikud ehitatakse tavaliselt betoonist, kuid selleks otstarbeks kasutatakse ka puitu.

Kuna käesoleva raamatu ülesandeks on anda ülevaade varraskonstruktsioonide arvutamisest, siis plaatide ja koorikutega me siin rohkem kokku ei puutu. Samas võib ära mainida, et plaatide ja koorikute arvutus on ehitusmehaanika üks keerukamate ülesannetest.



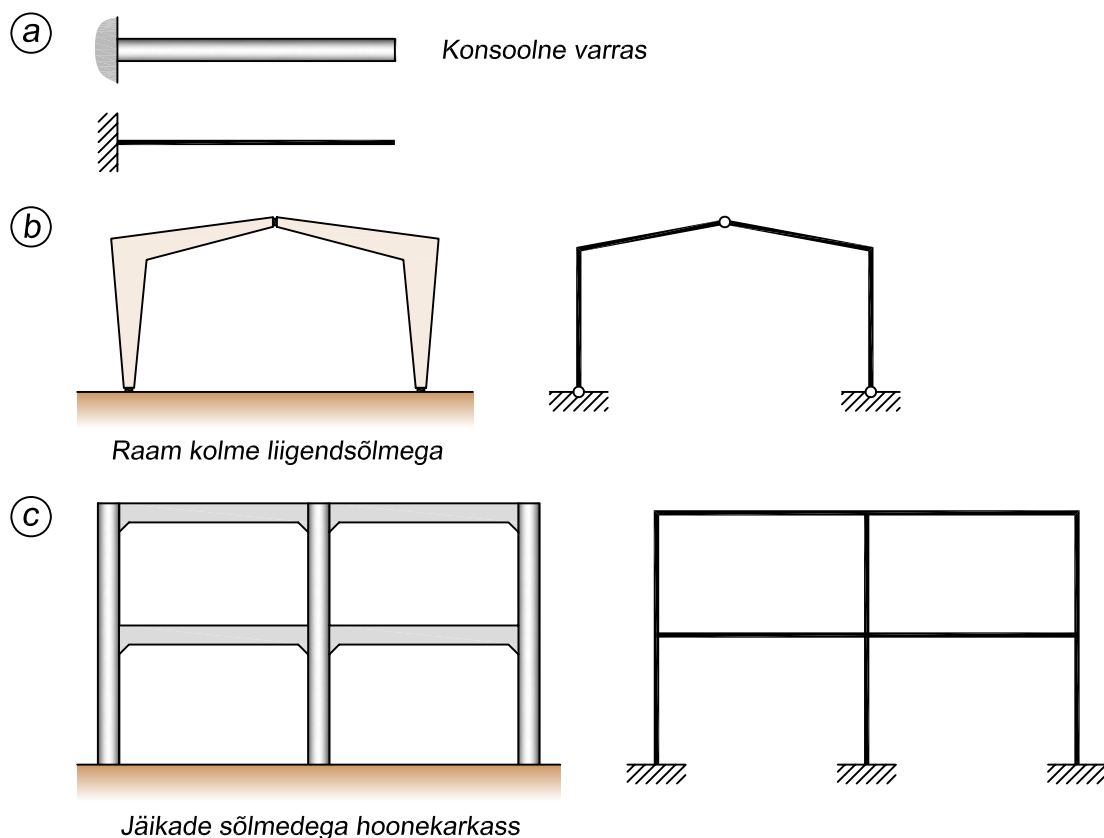
Foto 1.6. Koorikkatused Tallinna Lennusadamas (foto: Wikimedia Commons)

1.5. Arvutusskeem

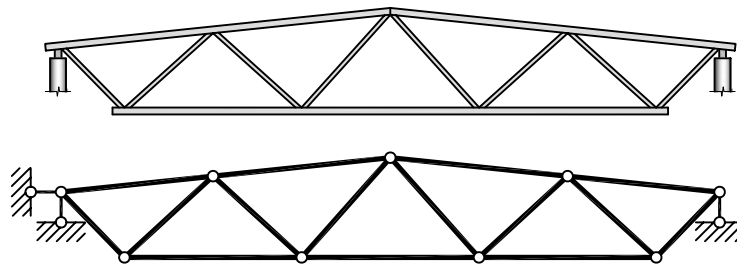
Arvutusskeem on ehituskonstruksiooni lihtsustatud kujutis, mille alusel tehakse konstruksiooni arvutus. Arvutamisel pole võimalik täpselt arvestada konstruksiooni geomeetrilist kuju, talle mõjuvaid koormusi ega materjali füüsikalisi omadusi. Kuna sisejõudude arvutamiseks varraskonstruksioonis on olulised vaid varraste pikkused ja asendid, toetingimused ning staatikaga määratu konstruksiooni puhul ka elastsusomadused, siis tegelikke tingimusi lihtsustatakse ja konstruksioon asendatakse teoreetilise arvutusskeemiga. Erinevatest toetingimustest ning tugede kujutamisest arvutusskeemi moodustamisel on juttu peatükis 1.6.

Ehituskonstruksioonide tugevusarvutus algab alati arvutusskeemi koostamisega, mis on oluline ja kogemust nõudev etapp, kuna selle korrektsusest sõltub kogu edasine lahenduskäik. Liialt lihtsustatud skeemi korral võivad konstruksiooni olulised nüansid jääda arvestamata, liigselt keerukas skeem muudab aga arvutuse töö- ja ajamahukaks.

Arvutusskeemi koostamisel on üheks peamiseks lihtsustuseks varraste asendamine nende telgedega. Joonisel 1.11, *a* on kujutatud seina sisse kinnitatud konsoolne varras ning sellele vastav arvutusskeem, kus varras on asendatud tema telge kujutava sirrega. Joonisel 1.11, *b* on moodustatud arvutusskeem raamkonstruksioonile, kus samuti on vardad asendatud nende telgjoontega. Sõlmedesse, kus konstruksioon ei võta vastu paindemomenti, on lisatud liigen-



Joonis 1.11. Arvutusskeemi moodustamine konsoolile ja raamile

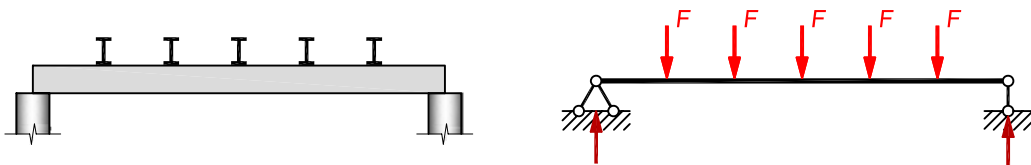


Joonis 1.12. Arvutusskeemi moodustamine sõrestikule, asendades jäigad sõlmed liigenditega

did. Joonisel 1.11, c on näidatud mitmekorruselise ja -sildelise jäikade sõlmedega raamkassari arvutusskeemi koostamine.

Mõne arvutusskeemi tüübi puhul võib teha lihtsustuse, kus jäigad sõlmed asendatakse liigenditega. Näiteks on selliseks konstruktsiooniks sõrestik (joonis 1.12), kui arvutada seda ainult pikijõule. Jäikade sõlmedega sõrestiku arvutus on väga tülikas. Asendades jäigad sõlmed liigenditega, muutub arvutus tunduvalt lihtsamaks. Kui sõrestiku vardad on saledad, s.t paindejäikused $i = \frac{EI}{l}$ on väikesed, siis on paindest põhjustatud pinged varrastes väga väikesed, võrreldes pikijõududest põhjustatud pingetega ja sel juhul erinevad liigendsõlmedega sõrestiku varraste sisejõud vähe jäikade sõlmedega sõrestiku varraste sisejõududest. Kui sõrestik koosneb lühikestest ja suure ristlõikega varrastest, siis on jäikused $i = \frac{EI}{l}$ suured ja liigendsõlmedega arvutusskeem ei ole õigustatud.

Joonisel 1.13 esitatud arvutusskeem kujutab peatala sellele toetuvate abitaladega. Peatala arvutamisel tuleb talle rakendada abitaladelt tulev koormus, mille arvutusskeemi koostamisel kanname joonisele koondjõududena. Reaalselt ükski koormus muidugi punktisuuruse toetuspinna ei ole, aga kui jõu laotumise pind on arvutusskeemi mõõtudega võrreldes väike, siis võime seda arvutada koondjõuna.



Joonis 1.13. Koormuste kujutamine arvutusskeemil

Probleeme võib tekkida arvutusskeemi mõõtude valikul. Näiteks joonisel 1.13 kujutatud tala arvutamisel saab küsida, kas valida arvutusskeemil tala pikkuseks tegeliku konstruktsiooni tugevahelise puhaskaugus või kaugus ühe toe tsentrist teise toe tsentrisse. Kuna viimatimainitu on suurem, siis annab see tulemise tagavara kasuks.

Sageli kasutatakse ühe konstruktsiooni arvutamisel mitut arvutusskeemi: esialgsete mõõtmete valikul suhteliselt lihtsamat, lõplikul arvutusel aga täpsemat.

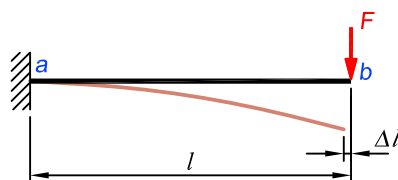
Koormamisel arvutusskeemi elemendid alati deformeeruvad, kuid ehituskonstruktsioonide arvutamisel lähtume peatükis 1.3 toodud kuuendast eeldusest – konstruktsioonelementide

siirded on võrreldes elementide mõõtmetega väikesed – mistõttu saame arvutamisel kasutada *algmõõtmete printsiipi* [19].

Deformatsioonide väiksuse tõttu võib jätta tähelepanuta koormuse asukoha muutuse konstruktsiooni mistahes punkti suhtes: arvutusi võib sooritada konstruktsiooni algskeemi põhjal.

Vaatame joonist 1.14, kus on esitatud koondjõuga koormatud konsool $a-b$ ning selle deformeerunud kuju. Jõu õlg konsooli kinnituspunkti a suhtes muutub varda deformeerumisel Δl võrra, mistõttu paindemomendi M_a täpse väärtuse saamiseks tuleks kasutada õlana väärtust $l - \Delta l$. Õla muudu Δl arvutus aga läheb väga keerukaks ja algmõõtmete printsiibi kohaselt võime sellest loobuda ning kasutada algsele skeemile vastavat õlga l , mis annab paindemomendiks: $M_a = -Fl$.

Deformeerumata kujust lähtumise korral kasutatakse ka *lineaarse* ehk *esimest järku teooria* mõistet. *Teist järku teoorias* arvestatakse ka varda deformeerunud kuju.



Joonis 1.14. Algmõõtmete printsiip

Lisame kokkuvõtvalt, millist informatsiooni arvutusskeem sisaldab: 1) sõlmede asukohad, 2) varraste telgjooned, 3) tugede ja liigendite asukohad, 4) koormused, 5) vajadusel varraste elastsusomadused.

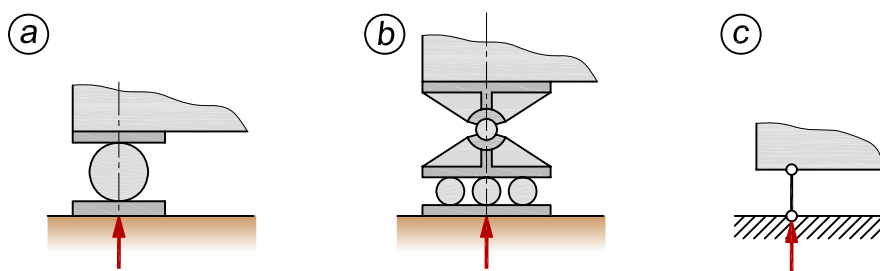
1.6. Tasandkonstruktsioonide toed

Ehituskonstruktsioonid toetuvad alusele või on kinnitatud selle külge tugiosade abil. Konstruktsioonilt erinevate tugede kinemaatilisi omadusi iseloomustavad toetingimused. Arvutusskeemi koostamisel asendame iga toe kinemaatiliselt ekvivalentse toereaktsiooniga, mille realiseerime toevarraste või toesidemetega. Tasandkonstruktsiooni toele vastab kinemaatiliselt kas üks, kaks või kolm toevarrast.

Liikuv liigendtugi ehk ühesidemeline tugi võimaldab pööret ja ühes sihis siiret. Tundmatuks on ainult ühe toereaktsiooni suurus. Joonisel 1.15, *a* kujutatud liikuv tugi koosneb kahest plaadist ja nende vahel asuvast silindrilisest rullist. Suurema toereaktsiooni puhul konstrueeritakse tugi balanssiirtoena (joonis 1.15, *b*). Niisugused toed võimaldavad pööret ja paralleelselt plaatidega ka siiret.

Arvutusskeemis kujutatakse neid tugesid ühe vardana, mille mõlemas otsas on liigend (joonis 1.15, *c*). Reaktsiooni sihiks on varda siht.

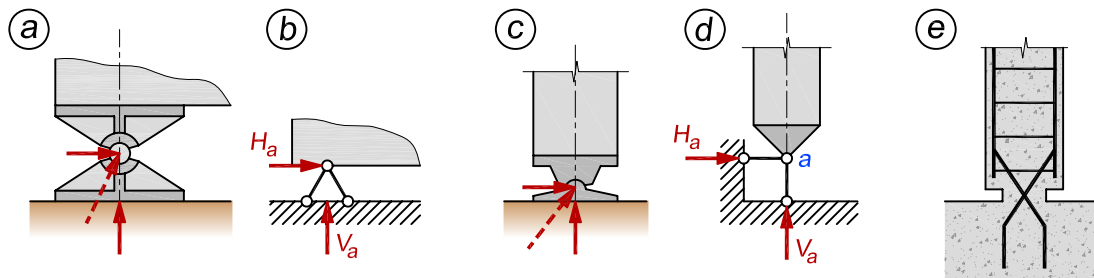
Liikumatu liigendtugi (paigalseisev tugi) ehk kahesidemeline tugi võimaldab pööret ümber liikumatu telje (joonis 1.16, *a*). Niisuguse toe reaktsioonil on kaks tundmatut komponen-



Joonis 1.15. Liikuv liigendtugi

ti: vertikaalne V_a ja horisontaalne H_a . Arvutuskeemis kujutatakse sellist tuge kahe vardaga (joonis 1.16, b). Niisuguseks võib lugeda ka joonisel 1.16, c esitatud tuge, kui hõõrdumine ülemise nõgusa sfääri ja alumise kumera sfääri vahel on väike. Tähistamine arvutuskeemil on selline, nagu on kujutatud joonisel 1.16, d. Juhime tähelepanu ka sellele, et kuigi joonistel 1.16, b ja d kujutatud skeemidel paiknevad toevardad erinevalt, on need tähistusviisid teineteisega samaväärsed.

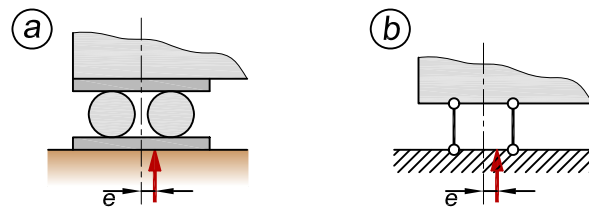
Joonisel 1.16, e on esitatud üks võimalik variant raudbetoonposti liigendühendusest vundamendiga. Selleks vähendatakse toesõlmes posti ristlõiget ja paigutatakse armatuurvardad üksteisega lõikuvalt, nagu joonisel on kujutatud. Kuigi selline liigendsõlm on mittetäielik, mis tähendab, et see on võimeline mingil määral paindemomenti edasi kandma, loetakse see üldjuhul ikkagi liigendsõlmeks.



Joonis 1.16. Liikumatu liigendtugi

Liikuv kahe rulliga tugi (libisev tugi) ehk kahesidemeline tugi võimaldab siiret ühes sihis. Tugi koosneb kahest plaatide vahel asuvast rullist (joonis 1.17, a). Tundmatuteks on toereaktsiooni suurus ja ekstsentrilisus e . Arvutuskeemis kujutatakse niisugust tuge kahe paralleelse ja võrdse pikkusega vardaga (joonis 1.17, b).

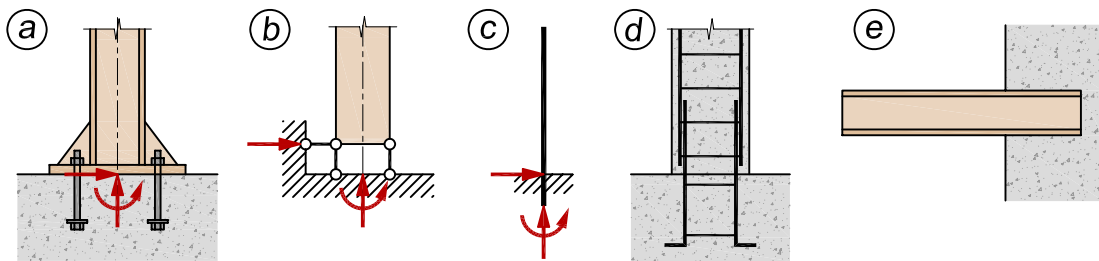
Jäik tugi (kinnistugi) ehk kolmesidemeline tugi ei võimalda siiret ega pööret. Niisugust tuge kujutab näiteks jäigalt kinnitatud metallposti jalg (joonis 1.18, a). Sellise toe puhul keevitatakse metallposti otsa jäik alusplaat, mis kinnitatakse ankrupoltidega vundamendi külge. Toereaktsioonil on kolm tundmatut komponenti: vertikaalne, horisontaalne ja moment. Arvutuskeemis kujutatakse niisugust tuge kas kolme vardaga (joonis 1.18, b) või nagu näidatud joonisel 1.18, c.



Joonis 1.17. Liikuv kahe rulliga tugi

Joonisel 1.18, *d* on kujutatud raudbetoonposti jäik ühendus vundamendiga. Jäiga sõlme saavutamiseks jäetakse vundamendi pinnast välja armatuurvardad, mis on posti armatuuri jätkuks ning kindlasti peavad mõlemad armatuurid olema teatud ülekattega.

Joonisel 1.18, *e* on üks variant terasest konsoolile jäiga toe tekitamiseks, kus terasvarras on otsapidi betoneeritud seina sisse.



Joonis 1.18. Jäik tugi

1.7. Koormused

Ehituskonstruksioonid tuleb projekteerida selliselt, et nad ei puruneks ega deformeeruks üle lubatud piiri neile rakendatud koormuste mõjul. Nende nõuete täitmiseks tehakse konstruksiooni arvutus, mis sisaldab endas elementide sisejõudude, pingete ja deformatsioonide määramist. Selleks tuleb aga esmalt kindlaks teha konstruksioonile mõjuvad koormused.

Kuna konstruksiooni arvutuses kontrollitakse, kas ületatakse mingi piirteisundi tingimusi, siis vaatame enne koormuste juurde asumist piirteisundi mõistet.

1.7.1. Piirteisundid

Piirteisundiks nimetatakse sellist seisundit, mille ületamisel konstruksioon ei täida enam talle esitatud nõudeid. Arvutuses kasutatakse kande- ja kasutuspiirteisundeid, mille kirjelduse esitame vastavalt Ehituskonstruktorigi käsiraamatule [7] ja projekteerimisstandardile [8].

1. **Kandepiirteisundi** arvutus hõlmab konstruksiooni purunemist ja stabiilsuse kadu, mis põhjustab konstruksiooni kande võime kaotuse ning ohu inimesele. Kandepiirteisund vastab konstruksiooni või selle osa suurimale kande võimele.

2. **Kasutuspiiriseisundi** arvutus lähtub konstruktsiooni normaalse kasutamise nõuetest, inimese mugavusest ja ehitise välimusest. Näiteks kontrollitakse läbipaindeid ja deformatsioone, vibratsioone ning raudbetooni puhul ka pragudekindlust.

Kontrollida tuleb kõiki esineda võivaid *arvutusolukordi*. Arvutusolukorrad valitakse selle järgi, millistes tingimustes peab konstruktsioon täitma oma otstarvet. Eristatakse kolme arvutusolukorda.

1. **Alaline** on arvutusolukord, mille kestus on sama suurusjärku konstruktsiooni projekteeritud kasutuseaga. See vastab enamasti normaalsetele kasutustingimustele.
2. **Ajutine** on arvutusolukord, mille kestus on lühike, võrreldes konstruktsiooni projekteeritud kasutuseaga. Selline olukord võib esineda näiteks ehitamise või remondi ajal.
3. **Erakorraline** on olukord, millega kaasnevad erandlikud tingimused konstruktsioonidele. Selliseks tingimuseks võib olla näiteks tulekahju, plahvatus, kokkupõrge, lokaalne purunemine.

1.7.2. Koormuste liigitus

Koormusi liigitatakse mitmete parameetrite alusel. Järgnevalt esitame koormuste liigituse ajalise kestuse ning mõjumisviisi vastavalt Ehituskonstruktori käsiraamatule [7] ja projekteerimisstandardile [8].

Koormuse ajaline kestus

Ajalise kestuse järgi jaotatakse koormused kolmeks.

1. **Alalised ehk püsikoormused** on koormused, mis mõjuvad suure tõenäosusega konstruktsiooni kogu kasutusea vältel ja mille suuruse muutumine aja jooksul on tühine või toimub kogu aeg kindlas suunas, kuni koormus saavutab teatud piirväärtuse. Alaliste koormuste hulka kuuluvad konstruktsioonide omakaal (koosneb vaadeldava konstruktsiooni enda kaalust ja teistelt konstruktsioonidelt üleantavatest omakaaludest), statsionaarsed seadmed, teekatend, mahukahanemisest ja ebahühtlasest vajumisest põhjustatud kaudne koormus, eelpingekoormus.
2. **Muutuvkoormused** on koormused, mis suure tõenäosusega ei mõju konstruktsiooni kogu kasutusea vältel või mille suurus võib aja jooksul oluliselt muutuda. Siia kuuluvad kasukoormus vahelagedele (inimeste, mööbli, kaupade, seadmete, teisaldatavate konstruktsioonide kaal), liikuvad transpordiseadmed (autod, kraanad, rongid), lume-, tuule- ja jääkoormus.
3. **Erakorralised koormused** on üldjuhul kestuselt lühiajalised koormused, mille esinemise tõenäosus konstruktsiooni kasutusea jooksul on väike. Sellisteks koormusteks on plahvatused, sõidukite kokkupõrked konstruktsioonidega jms.

Koormuse mõjumisviisi

Mõjumisviisi järgi jaotatakse koormused kaheks.

1. **Staatilised koormused** ei põhjusta konstruktsioonis või selle osades olulisi kiirendusi. Rahulikult, ilma vibratsiooni ja tõugeteta konstruktsioonile rakendatavat koormust arvestatakse staatilisena. Praktiliselt võib koormust käsitleda staatilisena, kui deformatsioonide suurenemise kiirused koormuse aeglasel kasvamisel nullist kuni oma lõpliku suuruseni on nii väikesed, et konstruktsiooni deformeerumisel tekkivad inertsjõud on teiste mõjuvate jõududega võrreldes hüljatavad.
2. **Dünaamilised koormused** põhjustavad konstruktsioonis või selle osades märgatavaid kiirendusi. Dünaamiline koormus võib muutuda kas ainult väärtuselt või nii väärtuselt, suunalt kui ka asukohalt. Dünaamiliste koormuste hulka kuuluvad näiteks löögid. Dünaamilistest koormustest eriti olulised on vibreerivad koormused, mis perioodiliselt muutuvad. Niisugused koormused tekivad pöörlevate osadega masinate töötamisel. Ohtlikud on need koormused seepärast, et teatavil tingimustel võivad nad tekitada konstruktsioonis sisejõudusid ja deformatsioone, mis on mitu korda suuremad kui koormuse staatilisel mõjumisel ning põhjustada konstruktsiooni purunemise. Dünaamilisi koormusi võib mõningatel juhtudel arvestada staatiliste koormustena, kui viimaseid korrutada dünaamikateguriga.

1.7.3. Koormuste rakendamine arvutusskeemile

Arvutusskeemile rakendatakse koormused kas koondatud koormusena või lauskoormusena.

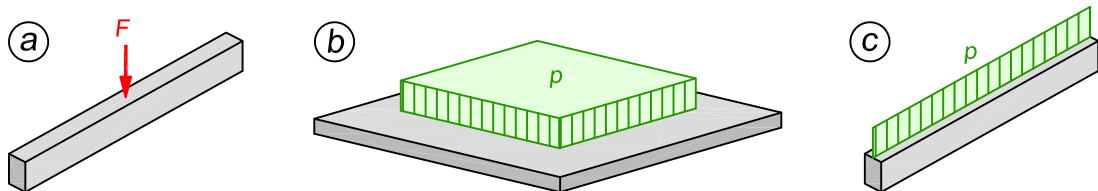
Koondatud koormus (nimetatakse ka punktkoormuseks või koondjõuks) mõjub konstruktsiooni ühes kindlas punktis (joonis 1.19, a). Koondjõu ühikuks on jõu ühik: kN, N, jne.

Lauskoormus võib esineda ruum-, pind- või joonkoormusena.

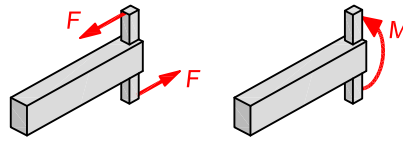
Ruumkoormuseks on keha omakaal, inertsijõud jms, mis mõjub keha massile kogu ruumala ulatuses. Tema intensiivsust mõõdetakse jõuna ruumalaühiku kohta: kN/m^3 , N/m^3 , N/cm^3 , jne.

Pindkoormus mõjub konstruktsiooni pinnale (joonis 1.19, b), tema intensiivsust mõõdetakse jõuna pinnaühiku kohta: kN/m^2 , N/m^2 , N/cm^2 , jne.

Joonkoormuse puhul on ruum- või pindkoormus taandatud varda teljele (joonis 1.19, c) ja tema intensiivsust mõõdetakse jõuna pikkusühiku kohta: kN/m , N/m , jne.



Joonis 1.19. Koormused



Joonis 1.20. Jõupaari väljendamine momendiga

Koormus võib esineda ka jõupaarina, mida väljendatakse **momendiga** (joonis 1.20). Momendi ühikuks on kN·m, N·m, jne. Ühte punkti rakendatud momenti nimetatakse *koondmomentiks*. Vahel harva võib esineda ka *lausmoment* ehk *hajutatud moment*.

1.7.4. Koormuste arvutamine

Koormuste suurused antakse üldjuhul *normkoormustena* F_k ehk nn omaväärtusena.

Arvutuskoormus F_d leitakse normkoormuse korrutamisel koormuse osavaruteguriga γ_F

$$F_d = \gamma_F F_k \quad (1.1)$$

Koormuse *osavarutegur* võtab arvesse koormuse võimalikku hälvet normväärtusest ebasoodsamas suunas. Osavarutegurid alalisele ja muutuvale koormusele on erinevad ja antakse projekteerimisstandardites.

Kandepiir seisundis tehakse arvutus arvutuskoormustega ning kasutuspiir seisundis normkoormustega.

Omakaalukoormused

Konstruksioonide omakaalukoormuste määramisel arvestatakse elementide projektmõõtmeid ja materjalide mahukaalu. Vajadusel tuleb omakaalu täpsustamiseks kasutada tootja andmeid, näiteks tehases valmistatavate monteeritavate vahelaedetailide puhul.

Projekteerimise käigus tuleb omakaalukoormusi sageli üks või enam korda üle vaadata ja täiendada, kuna arvutuse käigus võib selguda, et algselt valitud konstruktsioonide ristlõikemõõtmed olid ebapiisavad ja neid on vaja olulisel määral suurendada, mis tähendab ühtlasi ka omakaalu suurenemist.

Kasuskoormused

Kasuskoormus on muutuvkoormus inimeste, mööbli, teisaldatavate vaheseinte, ladustatud kaupade, seadmete, liiklusvahendite jms kaalust [7].

Kasuskoormusi käsitletakse ühtlaselt jaotatud või koondatud koormustena või nende kombinatsioonidena. Ühtlaselt jaotatud kasuskoormused antakse projekteerimisstandardites koormusena pinna ruutmeetri kohta (kN/m^2).

Kasuskoormused esitatakse vastavalt projekteerimisstandardile [9] järgmistele pindadele: 1) elamis-, ühiskondlik-, äri- ja halduspinnad, 2) garaažid ja sõidukite liikluspinnad, 3) laoj- ja tootmispinnad, 4) katused.

Lumekoormus

Põhjamaises kliimas võib katusele sadav lumi anda väga tõsise koormuse, mistõttu tuleb seda projekteerimisel arvestada. Seda, kuidas lumi katusele koguneb, mõjutavad paljud tegurid: katuse kuju ja kaldenurk, selle soojuslikud omadused, pinna karedus, katuse alla kogunev soojushulk, kõrvalasuvate ehitiste lähedus, ümbritsev maastik ning kohalik ilmastik (tuulisus, temperatuurimuutused, sademete esinemise tõenäosus).

Lumekoormuse normsuurused s_k maapinnal antakse kogu riiki katva lumekoormuste kaardina, kus koormus on esitatud maapinna ruutmeetri kohta (kN/m^2).

Katuse lumekoormuse normsuuruse saab projekteerimisstandardi [10] järgi määrata avaldisega

$$s = \mu_i C_e C_t s_k \quad (1.2)$$

kus μ_i on lumekoormuse kujutegur, mis arvestab katuse kuju ja kaldenurka, C_e on avatustegur, mis võtab arvesse, kui tuulele avatud või varjatud on ümbritsevad maastikutingimused, C_t on soojustegur, mis määrab ära, kui tugevasti katus soojust eraldab. Kuju osas on siin oluline, kas katus on ühekaldeline või viilkatus, või on tegemist hoopis saag- või silinderkatusega ning kas katusel on kõrguse järske muutusi.

Lumekoormus võetakse arvesse katuse horisontaalprojektsioonile mõjuva vertikaalsuunalise lauskoormusena.

Tuulekoormus

Kui tuule teekonnale jääb mõni ehitis, siis muundub tuule kineetiline energia tuulerõhuks, mis annabki ehitisele mõjuva tuulekoormuse [23]. Tuulerõhk ehitisele sõltub tuule kiirusest, ehitise kujust, ümbritsevate alade maapinna profiilist ja karedusest ning läheduses asuvate ehitiste mõjust. Tuulerõhu q ja kiiruse vahel valitseb seos

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (1.3)$$

kus ρ on õhutihedus (tavaliselt võetakse $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$) ning v tuule kiirus.

Tuule kiirus sõltub ületatava pinna karedusest, näiteks üle suurte merealade puhuv tuul aeglustub oluliselt vähem kui metsaga kaetud piirkondi ületav tuul. Lisaks on tuule kiirus seotud ka kõrgusega, kuna maapinna lähedases õhukihis vähendab pinna karedus tuule kiirust, kõrgemates kihtides on aga maapinna hõörde mõju väiksem ja seetõttu ka tuule kiirus suurem.

Tuule rõhk ehitisele on väga tugevalt mõjutatud ehitise ja selle osade kujust. Rõhk on väiksem, kui ehitis ja selle konstruktsioonid on voolujoonelise kujuga, ning suurem nõrgusate ja avatud konstruktsioonide korral.

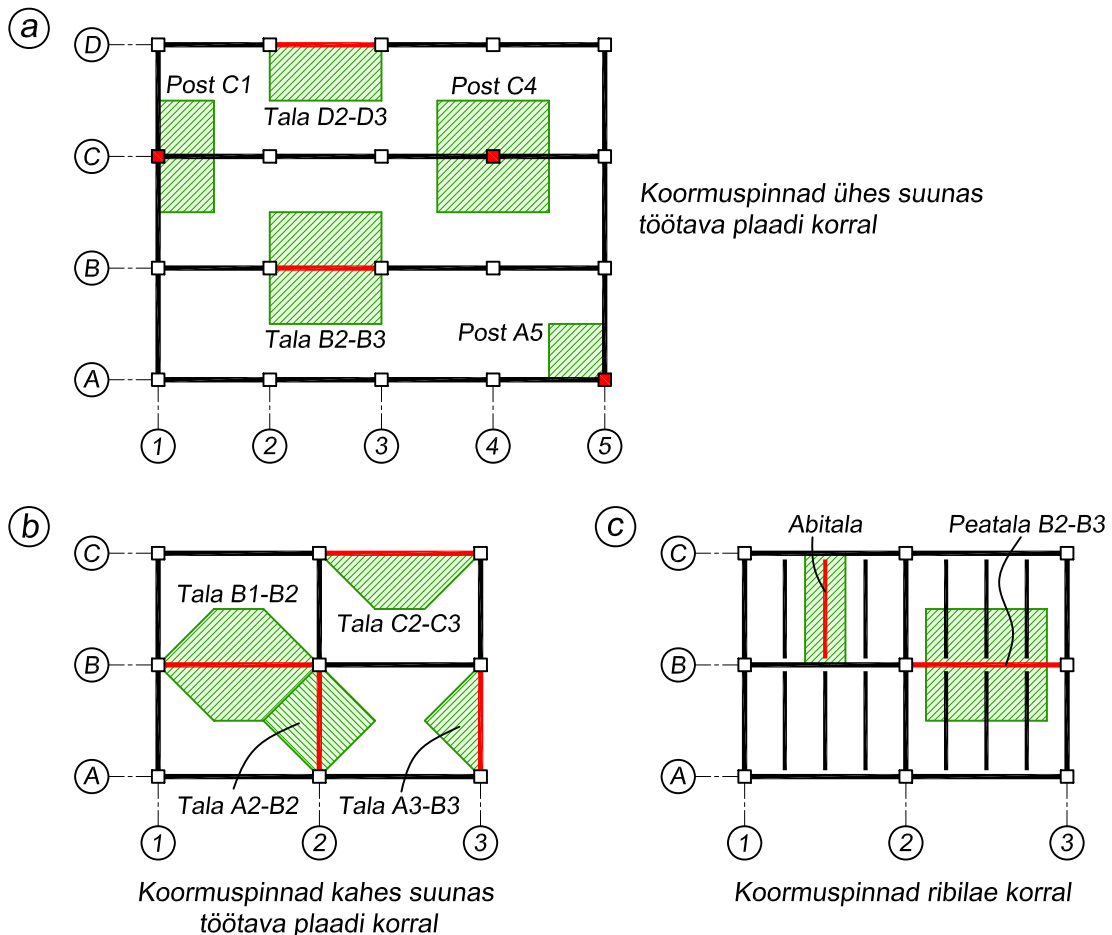
Kuigi tuulekoormus on dünaamiline koormus, esitatakse see standardites staatiliste rõhkude või jõudude kombinatsioonina. Seejuures eeldatakse, et tuule mõjul konstruktsioonides tekkivad inertsjõud on hüljatavalt väikesed. Kui on tegemist suhteliselt saledate ja väikese jäikusega ehitistega (korstnad, mastid, tornid, sageli ka sillad ja kõrghooned), mille puhul see eeldus ei kehti, tuleb lisaks teha ka dünaamika- ja väsimusarvutused [7].

Koormuspinnad: lauskoormuste edasikandmine hoonekarkassile

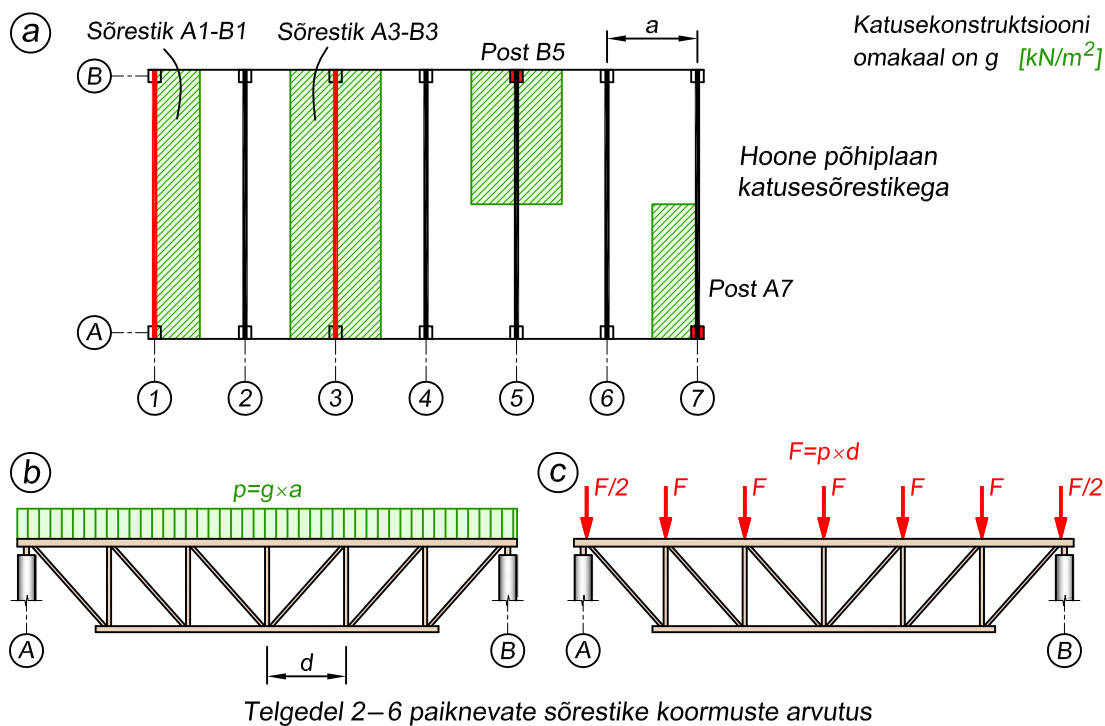
Vahelagede omakaal ja kasuskoormus on ühtlase lauskoormusena jaotatud üle kogu vahelae pinna. Vahelage kandvate konstruktsioonide (talade ja postide) arvutamiseks on aga vaja teada, kuidas see lauskoormus nendele edasi kanda ehk teisiti öeldes, on vaja teada, kui suurelt vahelae pinnalt tuleb koormus konkreetsele konstruktsioonielemendile. Milliseks tulemus kujuneb, sõltub kasutatavast konstruktsioonitüübist ning kuidas vahelagi sellele toetub.

Koormuspinda talale ja postile on kõige lihtsam määrata põhimõttel, et seda piiravad jooned, mis paiknevad täpselt poolel teel järgmise tala või postini.

Joonisel 1.21, a on kujutatud hoone põhiplaan piki- ja põiktelgedega, mis on tähistatud vastavalt tähtede ja numbritega. Vahelaeplaat on toetatud pikitelgede suunas paiknevatele taladele, mis tähendab, et plaadis esineb paine ainult ühes tasapinnas. See määrab ära, et kõigile taladele tuleb koormus ristkülikukujuliselt pinnalt. Tala B2-B3 on hoone sisemisel teljel paiknev tala ja seda koormab pool sildest B-C ning pool sildest B-A. Tala D2-D3 on aga hoone



Joonis 1.21. Talade ja postide koormuspinnad. Koormuspinnad on kujutatud rohelise viirutusega ning iga pinna juurde on märgitud, millist tala või posti see koormab. Vastavad talad ja postid on kujutatud punasega



Joonis 1.22. Sõrestike ja neid toetavate postide koormuspinnad. Koormuspinnad on kujutatud rohelse viirutusega ning iga pinna juurde on märgitud, millist sõrestikku või posti see koormab. Vastavad sõrestikud ja postid on tähistatud punasega

perimeetril paiknev tala ja sellele tuleb koormus peale ainult ühelt küljelt.

Postidega on sarnane olukord: sisemised postid on rohkem koormatud kui välimised. Post C4 on sisemine post ja tema koormuspind ulatub kõigis neljas suunas poolele teele järgmise postini. Hoone välisseinas oleva posti C1 koormuspind on sellest kaks korda ning nurgaposti A5 oma neli korda väiksem.

Joonisel 1.21, b on esitatud hoone plaan, kus vahelaeplaat on toetatud kõigis neljas servas, mis tingib painde kahes tasapinnas ning plaadi koormuse jagunemise kõigi servade vahel. Nüüd saame talade koormuspinnad, tõmmates plaadi nurkadest 45 kraadi all sirged plaadi keskjooneni.

Joonisel 1.21, c on ribilaega hoone plaan. Ribilagi koosneb plaadist ning pea- ja abitaladest. Peatalad paiknevad hoone pikitelgede suunas ning kannavad neile toetuvaid abitalasid, mis asetsevad põikitelgede suunas. Igale abitalale tuleb koormuspind ulatub taas poolele teele järgmise abitalani.

Hoone katusesõrestike koormuspinnad on kujutatud joonisel 1.22, a. Siin on taladega sarnane olukord: hoone sisemisele sõrestikule A3-B3 toetub kaks korda suurem katuse pind kui otsmisele sõrestikule A1-B1. Sel põhjusel on ka sisemist sõrestikku toetava posti B5 koormuspind kaks korda suurem nurgaposti A7 omast.

Lisaks on joonisel 1.22, b ja c näidatud katuse pinnakoormuse taandamine sõrestiku ülemise vöö joonkoormuseks (joonis 1.22, b) ning sõlmkoormusteks (joonis 1.22, c). Kuna koor-

muspind ulatub sõrestikust kummaski suunas poolele teele järgmise sõrestikuni, siis järelikult võrdub koormuspinna laius sõrestike vahekaugusega a . Ülemise vöö joonkoormuse saame, kui katusekonstruktsiooni omakaalu g korrutame sõrestike vahekaugusega a . Edasi taandame saadud joonkoormuse sõrestiku sõlmedesse. Igale sõlmele toetuv koormatud ala ulatub kummaski suunas poolele teele järgmise sõlmeni, mistõttu selle ala kogulaius võrdub sõlmede vahekaugusega d . Korrutades joonkoormuse p sõlmede vahekaugusega d , saamegi sõlme kantava koondjõu F .

1.8. Sisejõud

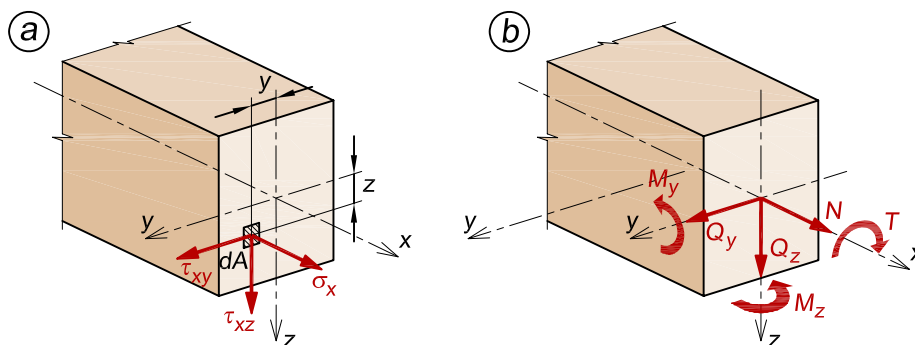
1.8.1. Sisejõudude liigitus

Sisejõu mõiste on tugevusõpetuse raamatus [13] defineeritud järgnevalt: tahke keha sisejõududena mõistame jõudusid keha osade vahel, mis säilitavad tema terviklikkuse ja annavad talle iseloomuliku mahu- ja kujukindluse mõõdukate välisjõudude mõju all.

Igale sisejõule vastab ainult temale omane deformatsioon, mida nimetatakse varda *põhideformatsiooniks*. Kui vardas esineb sisejõud, siis on seal ka vastav deformatsioon, ja vastupidi, kui on olemas deformatsioon, siis peab seal esinema ka vastav sisejõud. Sisejõu ja deformatsiooni kooslus võetakse kokku *tööseisundi* mõistega: tööseisund on vardas esinevate sisejõudude ja põhideformatsioonide kogum [19]. Varraste põhideformatsioonid, tööseisundid ja sisejõud on kokkuvõtlikult esitatud tabelis 1.1.

Sisejõudude kirjeldamiseks vaatleme varda ristlõiget, kus kujutame täisnurkse koordinaatide süsteemi algpunktiga ristlõike raskuskeskmes (joonis 1.23). Koordinaattelg x ühtib varda telgjoonega ning koordinaadid y ja z ristlõike peatelgedega.

Sisejõudude arvutamisel kasutame lõikemeetodit [19]: lõikame varda vaadeldavas ristlõikes tinglikult läbi ja jätame ära varda ühe osa koos temale mõjuvate jõududega. Ärajäetud vardaosa mõju allesjäänud osale asendame läbilõigatud ristlõikes elementaarjõududega $\sigma_x dA$, $\tau_{xy} dA$ ja $\tau_{xz} dA$, mis on jaotatud pidevalt üle ristlõike pinna (joonis 1.23, a). Nende elementaarjõudude positiivne suund määratakse ristlõike normaali ja koordinaattelgede x , y , z suundadega: kui vaadeldava ristlõike normaali suund ühtib x -telje positiivse suunaga, siis elementaarjõudude $\sigma_x dA$, $\tau_{xy} dA$ ja $\tau_{xz} dA$ positiivne suund ühtib vastavalt telje x , y või z posi-



Joonis 1.23. Pinged ja sisejõud varda ristlõikes

tiivse suunaga ning vastupidi – kui vaadeldava ristlõike normaali suund ühtib telje x negatiivse suunaga, siis ka elementaarjõudude $\sigma_x dA$, $\tau_{xy} dA$ ja $\tau_{xz} dA$ positiivne suund ühtib vastavalt telje x , y või z negatiivse suunaga (joonis 1.23).

Elementaarjõudude $\sigma_x dA$ resultanti ristlõikepinnal nimetatakse *pikijõuks*

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (1.4)$$

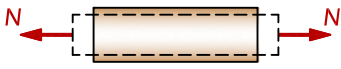
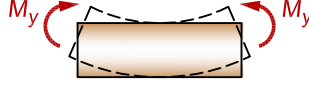
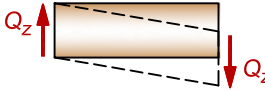
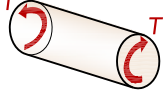
Pikijõu nimetus tuleb sellest, et sisejõud N on suunatud piki varda telge (joonis 1.23, *b*). Pikijõule vastavaks põhideformatsiooniks on kas varda pikenemine või lühenemine, mida põhjustab vastavalt tõmbejõud või survejõud.

Elementaarsete pikijõudude $\sigma_x dA$ momentide summat ristlõike nulljoone (y või z -telje) suhtes nimetatakse *paindemomendiks*

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA; \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA \quad (1.5)$$

Paindemomendiks nimetatakse sisejõudu M seetõttu, kuna temale vastavaks põhideformatsiooniks on ristlõigete omavaheline pöördumine ristlõike ühe peatelje suhtes. Kuna momenti saab väljendada jõupaarina, siis näitab paindemomendi tähises olev indeks, millise telje ümber jõupaar mõjub.

Tabel 1.1. Varraste põhideformatsioonid, tööseisundid ja sisejõud

| Põhideformatsioon | Tööseisund | Sisejõud |
|---|------------|--------------|
|  | Pike | Pikijõud |
|  | Paine | Paindemoment |
|  | Lõige | Põikjõud |
|  | Vääne | Väändemoment |

Elementaarsete nihkejõudude $\tau_{xz}dA$ ja $\tau_{xy}dA$ resultanti ristlõikes nimetatakse *põikjõuks*

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad (1.6)$$

Põikjõu nimetus tuleneb sellest, et sisejõud Q_z ja Q_y mõjuvad varda telje suhtes risti ehk põiki. Tähtsises olev indeks näitab jõu mõjumise suunda. Põikjõule vastavaks põhideformatsiooniks on varda ristlõigete omavaheline nihkumine.

Ingliskeelses kirjanduses on viimasel ajal hakatud põikjõudu tähistama ka tähega V .

Elementaarsete nihkejõudude $\tau_{xy}dA$ ja $\tau_{xz}dA$ momentide summat varda pikitelje suhtes nimetatakse *väändemomendiks*

$$T = \int_A (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dA \quad (1.7)$$

Väändemomendile vastavaks põhideformatsiooniks on varda ristlõigete pöördumine varda pikitelje ümber.

Avaldised (1.4)...(1.7) nimetatakse pingete ja sisejõudude vahelisteks integraalseosteks.

Paindemoment, põik- ja pikijõud on arvutatavad ka välisjõudude kaudu järgmiste reeglite abil.

Paindemoment on arvuliselt võrdne ühel pool vaadeldavat ristlõiget konstruktsiooni osale mõjuvate välisjõudude (kaasa arvatud toereaktsioonid ja ärajäetud sidemeid asendavad sisejõud) momentide algebralise summaga ristlõike nulljoone suhtes.

Põikjõud on arvuliselt võrdne ühel pool lõiget konstruktsiooni osale mõjuvate jõudude projektsioonide algebralise summaga varda teljega risti olevale teljele.

Pikijõud on arvuliselt võrdne ühel pool lõiget konstruktsiooni osale mõjuvate jõudude projektsioonide algebralise summaga varda pikiteljele.

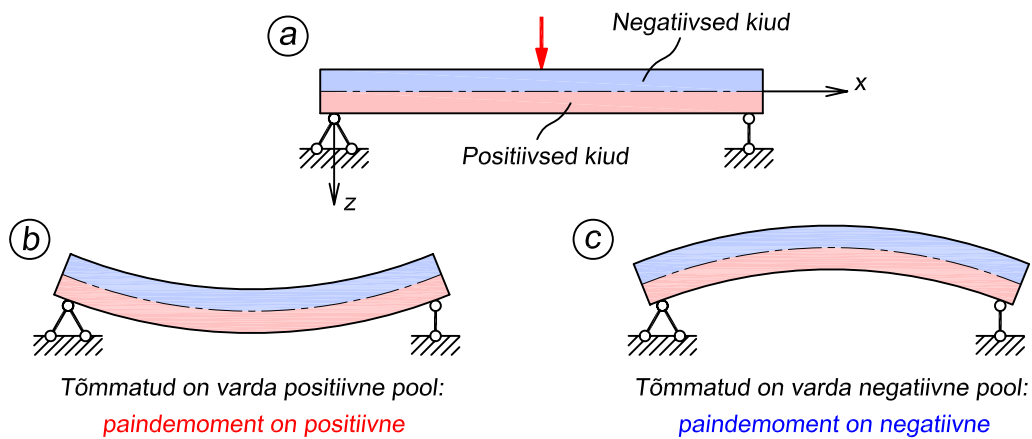
1.8.2. Sisejõudude märgikokkulepped

Sisejõudude M , Q ja N märkide kindlakstegemisel võib kasutada erinevaid meetodeid, kuid enamlevinud on lähtumine vaadeldava lõike piirkonnas esinevast deformatsioonist.

Paindemomendi märgireegli jaoks vaatleme joonisel 1.24, a esitatud tala, mille jagame vastavalt z -telje suunale positiivseteks ja negatiivseteks kiududeks. Positiivsed kiud paiknevad z -telje positiivses suunas.

Paindemoment on positiivne, kui varda positiivsed kiud on tõmmatud, s.t pikenevad. Negatiivse paindemomendi puhul on tõmmatud varda negatiivsed kiud ja surutud positiivsed kiud.

Joonisel 1.24, b on tala vajunud allapoole nõgusaks, mistõttu on tõmmatud varda alumised positiivsed kiud ja surutud ülemised negatiivsed. Selles talas esineb positiivne paindemoment.



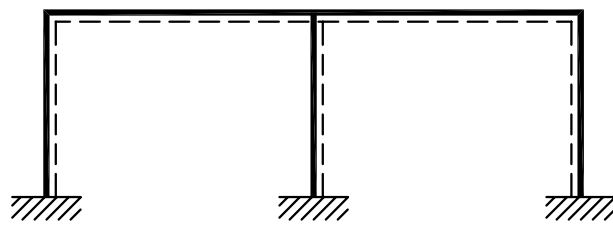
Joonis 1.24. Paindemomendi märgi määramine

Joonisel 1.24, c olev tala on kumerdunud ülespoole, tõmmatud on negatiivsed ja surutud positiivsed kiud, mistõttu vardas esineb negatiivne paindemoment.

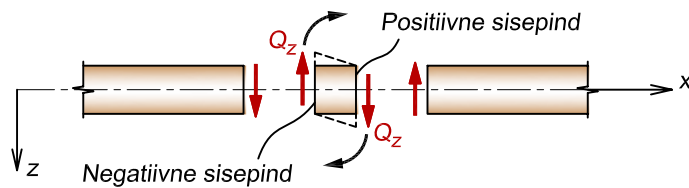
Paljudest varrastest koosneva raami puhul märgime varda ühe poole katkendjoonega (joonis 1.25). Üldiselt märgitakse arvutuskeemi välimistel varrastel sisemine pool ja vahepealsetel postidel parem pool. Selline tähistusviis võimaldab vältida igale vardale kohaliku teljestiku kujutamist. Varda positiivseks pooleks on katkendjoonega tähistatud pool. Paindemoment on positiivne, kui varda märgitud pool on tõmmatud ja negatiivne, kui märgitud pool on surutud.

Põikjõul on kasutusel märgireegli mitu erinevat sõnastust. Tugevusõpetusest tuttava sõnastuse jaoks meenutame mõningaid mõisteid raamatust [19]. Vaatame selleks joonist 1.26. Pärast vardale mõttelise lõike tegemist moodustunud sisepinnad jagunevad positiivseteks ja negatiivseteks. Positiivseks sisepinnaks nimetatakse pinda, mille välisnormaal on suunatud x -telje positiivses suunas. Negatiivse sisepinna välisnormaal on suunatud x -telje negatiivses suunas.

Põikjõud on positiivne, kui ta nihutab positiivset sisepinda peatelje positiivses suunas või negatiivset sisepinda peatelje negatiivses suunas.
 Põikjõu tööreegel koormuse paiknemisel xz -tasandis: positiivne põikjõud nihutab sisepinda kaarega päripäeva.



Joonis 1.25. Raami varraste katkendjoonega tähistatud positiivsed pooled



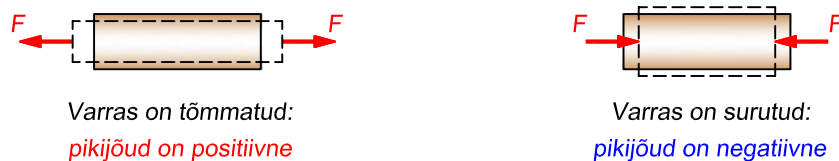
Joonis 1.26. Põikjõu märgi määramine

Ehitusmehaanikas kasutatakse põikjõu arvutamisel sageli reeglit, mis väldib positiivsete ja negatiivsete sisepindade määramist ja teeb seetõttu arvutuse lihtsamaks.

Positiivne põikjõud püüab vardaosa pöörata päripäeva ja negatiivne põikjõud vastupäeva.

Pikijõu märki on tõenäoliselt kõige lihtsam määrata, kuna selle puhul tuleb ainult vaadata, kas varras on surutud või tõmmatud.

Pikijõud on positiivne, kui see põhjustab varda pikendamise. Seega loetakse tõmbejõud alati positiivseks ja survejõud negatiivseks (joonis 1.27).



Joonis 1.27. Pikijõu märgi määramine

Vanemas kirjanduses on mõne konstruktsioonitüübi puhul (näiteks kaared) kasutatud pikijõul vastupidist märgireeglit tingituna selle konstruktsiooni eripärast, aga praegu enam erinevatel arvutusskeemidel selles osas vahet ei tehta ja pikijõu märke arvestatakse alati sama reegli alusel.

1.8.3. Sisejõudude epüürid

Ehituskonstruktsioonide varraste dimensioneerimisel vajalike suurimate normaal- ja tangentsiaalpingete leidmiseks on tarvis teada suurimat paindemomenti, põikjõudu ja pikijõudu ning lõikeid, milles nad tekivad. Nende nn ohtlike lõigete leidmine on lihtsam, kui sisejõudude suurused varda ulatuses on kujutatud graafiliselt. Sisejõudude suurused esitatakse graafiliselt valitud mõõtkavas ordinaatide kujul varda telje vastavate lõigete kohal. Neid graafikuid nimetatakse *sisejõudude epüürideks*.

Vormistamise poolest erinevad epüürid tavalistest graafikutest. Epüüridel ei näidata telgesid, vaid esitatakse suurus märgitakse epüüri juurde. Ordinaadid märgitakse sirgete varraste puhul varda teljega risti ja ülevaatlikkuse huvides tavaliselt epüürid selles suunas ka viirutatakse. Keerukamate konstruktsioonide puhul, kus on palju vardaid, võimaldab viirutamine

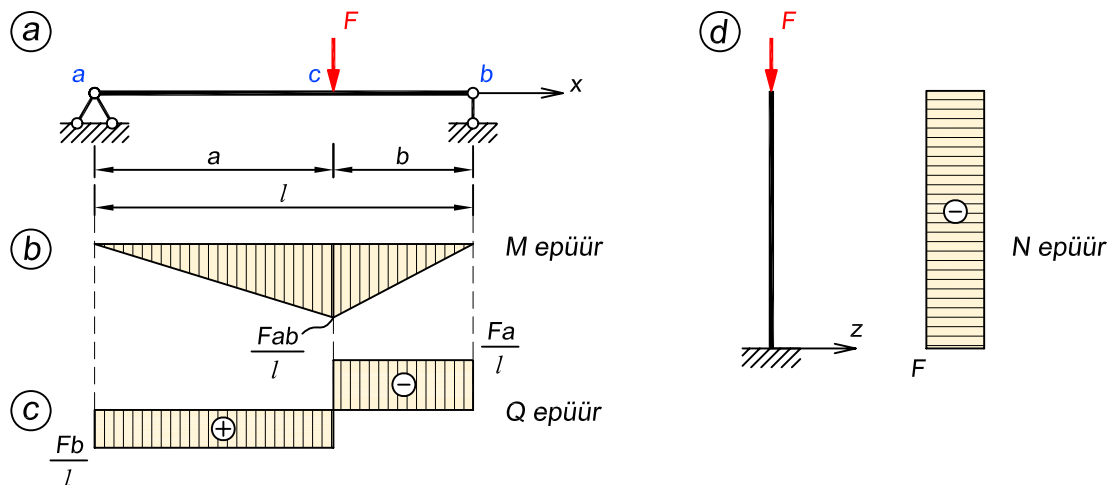
joonist palju selgemaks muuta, kuna on paremini arusaadav, millise varda juurde mingid ordinaadid kuuluvad.

Epüüride ordinaatidele ühikuid juurde ei märgita, vaid ühik näidatakse epüüri kõrval. Kuna ehitusmehaanikas kasutatakse paindemomendi puhul tavaliselt ühikuna kN·m ning põik- ja pikijõu puhul kN, siis nende ühikute korral võib nad ka epüüri juurde märkimata jätta. Kui epüüride juures viidet ühikutele ei ole, siis vaikumisi eeldatakse, et tegemist on mainitud ühikutega.

Sisejõudude epüüridel arvutatakse nende iseloomulikud ordinaadid. Arvutamisel kasutatakse avaldistes sisejõu tähise M , Q , N indeksites kahte tähte, kahte tähte sidekriipsuga või ühte tähte. Kahe tähe puhul märgib esimene varda otsristlõiget, kus leitakse sisejõudu, ja teine tähistab selle varda teist otsristlõiget. Selline tähistusviis on vajalik sõlmedes liituvate varraste otsristlõigete puhul, kuna üks täht ei annaks piisavalt infot, millist varrast me selles sõlmes parasjagu vaatame. Kaks tähte sidekriipsuga näitavad, missuguste ristlõigete vahel on sisejõud konstantne. Üks täht tähistab varda suvalist ristlõiget.

Põik- ja pikijõu epüür

Epüüride ordinaatidele märke ette ei panda, vaid märk näidatakse epüüri pinnal. Põikjõu epüüril (joonis 1.28, c) ja pikijõu epüüril (joonis 1.28, d) ei ole seetõttu oluline, kummale varda poolele on epüür kantud. Tähtis on vaid see, et märk oleks õige, kuna konstruktsiooni dimensioneerimise arvutuse jaoks vajaliku info saab just epüüri märgist, mitte epüüri paiknemisest varda ühel või teisel poolel. Siiski on soovitatav kõigi epüüride ühtse stiili huvides märkida positiivsed ordinaadid varda positiivsete kiudude poolele. Vanemas kirjanduses sageli seda põhimõtet kasutatud ei ole.



Joonis 1.28. Sisejõudude epüüride vormistamine

Paindemomendi epüür

Paindemomendi epüür (joonis 1.28, b) kujutatakse aga alati varda tõmmatud poolele. Positiivne paindemoment kantakse varda katkendjoonega märgitud poolele ja negatiivne paindemoment vastaspoolele. Märkime siinkohal ära ka selle, et ingliskeelses kirjanduses on paindemomendi epüüri kujutamine üldiselt vastupidine ja seal märgitakse epüür varda surutud poolele.

Kuna paindemoment märgitakse varda tõmmatud poolele, siis sellele epüürile märke peale ei panda. Oluline on see, et epüür oleks kindlasti varda õigel poolel.

Kui tugevusõpetuses öeldakse, et lihtsa koormuse ja arvutuskeemi korral võib paindemomendi epüüri ordinaadid arvutada absoluutväärtustena ja kujutada nad siis epüürina varda tõmmatud poolele, siis ehitusmehaanikas on soovitatav kohe algusest peale harjutada ennast kõiki arvutusi tegema märke arvesse võttes. Seega, kui tõmmatud on varda negatiivne pool, siis peab vastav ordinaat ka arvutusest miinusemärgiga tulema.

1.9. Sisejõudude ja koormuste vahelised seosed

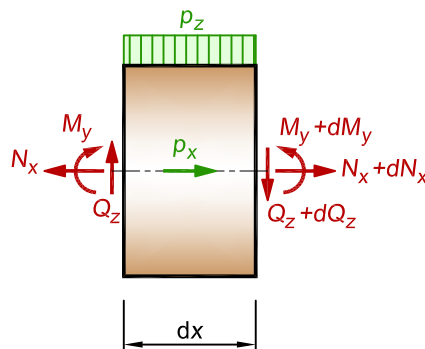
Sisejõudude ja koormuste vahelisi seoseid käsitletakse põhjalikult tugevusõpetuses, seetõttu piirdume siin ainult lühikokkuvõttega ja toome välja olulisemad punktid.

Esitame järgnevalt lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahelised *diferentsiaalseid*, mis baseeruvad varda elementaarse osa tasakaalul (joonis 1.29).

Paindemomendi tuletis on võrdne põikjõuga

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = M'_y(x) = Q_z(x) \quad (1.8)$$

Seda avaldist nimetatakse *Žuravski teoreemiks*. Teoreemi geomeetrisest tõlgendusest tuleb, et põikjõu epüüri ordinaadid on proportsionaalsed paindemomendi epüüri puutuja ja nulljoone vahelise nurga tangensiga.



Joonis 1.29. Varda elementaarse lõigu tasakaal

Põikjõu tuletis on võrdne vastasmärgiga võetud põikkoormuse intensiivsusega

$$\frac{dQ_z(x)}{dx} = Q'_z(x) = -p_z(x) \quad (1.9)$$

Pikijõu tuletis on võrdne vastasmärgiga võetud pikikoormuse intensiivsusega

$$\frac{dN_z(x)}{dx} = N'(x) = -p_x(x) \quad (1.10)$$

Valemite (1.8) ja (1.9) põhjal saame tuletada avaldise, mille kohaselt on paindemomendi teine tuletis võrdne vastasmärgiga võetud põikkoormuse intensiivsusega

$$\frac{d^2M_y(x)}{dx^2} = \frac{dQ_z(x)}{dx} = -p_z(x) \quad (1.11)$$

Lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel saab välja tuua ka järgmised *integraalseosed*

$$N(x) = N(a) - \int_a^x p_x(x) dx \quad (1.12)$$

$$Q_z(x) = Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx \quad (1.13)$$

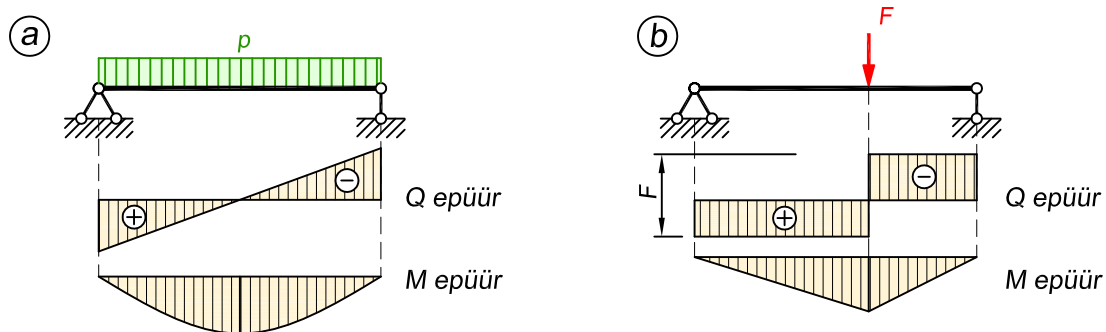
$$M_y(x) = M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx \quad (1.14)$$

kus $N(a)$, $Q_z(a)$ ja $M_y(a)$ on mingile koordinaadile $x = a$ vastavad sisejõudude algväärtused. Nendest integraalseostest saame järeldada, et kui teame sisejõudu varda mingis lõikes ning lauskoormuse intensiivsust, siis on võimalik arvutada sisejõudu mingis suvalises kohas x .

Sisejõudude ja koormuste vahelistest seostest tulenevad järeldused

Järgnevalt esitame diferentsiaal- ja integraalseostest tulenevad mitmed olulised reeglid, millele peavad sisejõudude epüürid vastama, olenemata sellest, kas arvutuskeem on staatikaga määratud või määramatu.

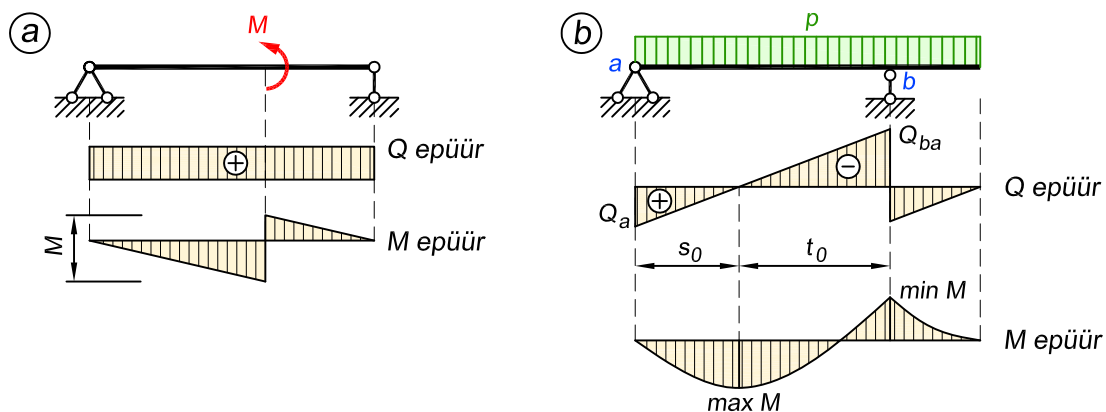
1. Varda piirkonnas, kus puudub lauspõikkoormus, on põikjõud konstantne ning paindemoment muutub lineaarselt.
2. Varda piirkonnas, kus mõjub ühtlane lauspõikkoormus, on põikjõu epüür lineaarselt muutuv ja paindemomendi epüür ruutparabolne (joonis 1.30, a).
3. Lõikes, kuhu on rakendatud varda teljega risti paiknev koondjõud, on põikjõu epüüris koormusega võrdne aste, paindemomendi epüüris aga murdepunkt (joonis 1.30, b).
4. Lõikes, kuhu on rakendatud koondmoment (jõupaar), on paindemomendi epüüris momendiga võrdne aste, põikjõu epüüris aga muutusi ei esine (joonis 1.31, a).



Joonis 1.30. Lauskoormuse ja koondjõuga varras

- Põikjõu väärtus varda mingis ristlõikes annab paindemomendi epüüri puutuva tõusu selles samas ristlõikes. Sellest seosest tulenevad kaks paindemomendi epüüri omadust: 1) kui mingis ristlõikes on põikjõud positiivne (joonisel 1.30, a tala vasak pool), siis x -koordinaadi kasvades paindemoment selle lõike vahetus läheduses muutub positiivses suunas; ning vastupidi, kui mingis ristlõikes on negatiivne põikjõud (joonisel 1.30, a tala parem pool), siis x -koordinaadi kasvades paindemoment selle lõike vahetus läheduses muutub negatiivses suunas, 2) paindemomendi epüüri tõususnurk on seda suurem, mida suurem on põikjõud.
- Lõikes, kus põikjõud muudab märki, on paindemomendil ekstremaalne väärtus, mis võib olla nii positiivne kui negatiivne (joonisel 1.31, b). Selleks, et leida põikjõu nullkooha kaugust piirkonna servast, tuleb vastava serva põikjõu absoluutväärtus jagada lauskoormuse intensiivsusega

$$s_0 = \frac{|Q_a|}{p}; \quad t_0 = \frac{|Q_{ba}|}{p} \quad (1.15)$$

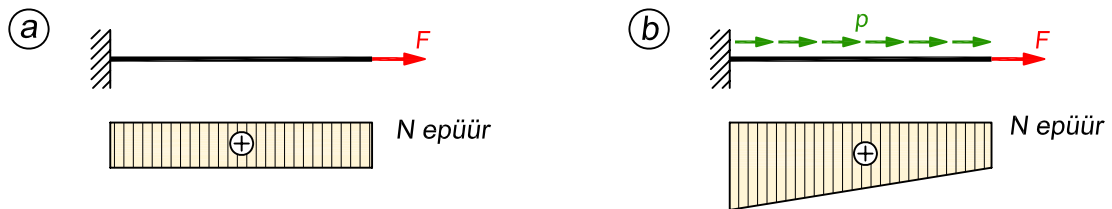


Joonis 1.31. Koondmomendiga varras ning paindemomendi ekstreemumid

Ühtlase lauskoormusega vardas saame paindemomendi ekstremaalse väärtuse leida, võttes aluseks paindemomendi väärtuse mingis lõikes ja lisades sellele juurdekasvu, mille saame samas lõikes esineva põikjõu ruudu jagamisel kahekordse lauskoormuse intensiivsusega

$$\max M = M_a + \frac{Q_a^2}{2p}; \quad \max M = M_b + \frac{Q_{ba}^2}{2p} \quad (1.16)$$

7. Paindemomendi epüüri koostamisel võimaldab epüüri kujust paremat ettekujutust saada *pesunöörireegel*: **paindemomendi epüür on mingi varda ulatuses pesunööri kujuga, mis on tõmmatud varda otsas olevate paindemomendi väärtuste vahele ja seejärel koormatud vaadeldavale vardale mõjuva koormusega.**
8. Varda selles piirkonnas, kus puudub lauspikikoormus, on pikijõud konstantne (joonis 1.32, a).



Joonis 1.32. Pikijõud koondjõu ja lauspikikoormusega vardas

9. Varda piirkonnas, kus mõjub ühtlane lauspikikoormus, on pikijõu epüür lineaarselt muutuv (joonis 1.32, b).

Osa I

STAATIKAGA MÄÄRATAVAD ARVUTUSSKEEMID

Peatükk 2

ARVUTUSSKEEMI STAATIKALINE ANALÜÜS

2.1. Staatikaga määratav arvutusskeem

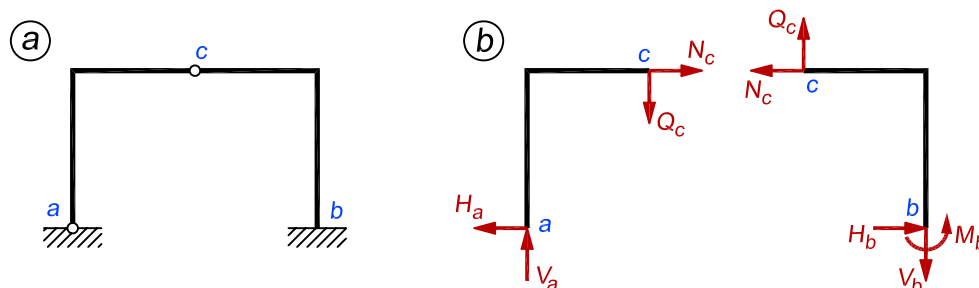
Enne arvutusskeemi sisejõudude ja siirete arvutamise juurde asumist on vaja kindlaks teha, kas vaadeldav arvutusskeem on staatikaga määratud või määramatu. Järgnevalt vaatame, kuidas seda teha.

Varraskonstruksiooni arvutusskeemi elemendid on üksteisega ühendatud liigenditega ja aluse või toepinna külge kinnitatud toesidemetega. Staatikaga määratavuse valemi tuletamiseks jagame arvutusskeemi liigendite ja tugede kohalt üksikuteks elementideks ja vaatleme nende elementide otstes esinevate tundmatute sisejõudude ja reaktsioonide arvu (joonis 2.1).

Kahte elementi ühendavat liigendit nimetatakse *lihtliigendiks*. Joonisel 2.1 kujutatud arvutusskeemil on selleks liigend c . Liigendis on paindemoment null ja selles lõikes saavad esineda ainult põikjõud ja pikijõud (joonisel tähistatud Q_c ja N_c). Järelikult on lihtliigendis kaks tundmatut sisejõudu. Kui liigend ühendab m elementi, siis selle liigendi geomeetrilisel teljel on $m - 1$ lihtliigendit.

Tundmatute toereaktsioonide arv vastab toesidemete arvule. Joonisel 2.1 kujutatud raamil on nendeks reaktsioonid V_a , H_a , V_b , H_b ja M_b .

Olgu arvutusskeemi toesidemete arv t ja üldine lihtliigendite arv l . Eelnevast lähtuvalt



Joonis 2.1. Arvutusskeemis esinevad tundmatud reaktsioonid ja sisejõud

saame arvutusskeemi elemente ühendavates liigendites tekkivate tundmatute sisejõudude ja toesidemetes tekkivate tundmatute toereaktsioonide arvaks $2l + t$.

Tasandil saab iga elemendi kohta koostada kolm tasakaalutingimust. Kui arvutusskeemis olevate staatikaga määratavate kujundite arv on k , siis on üldine tasakaalutingimuste arv $3k$. Kuna käsitleme staatikaga määratavate konstruktsioonide arvutust, siis arvutusskeemi iga element peab olema staatikaga määratav, s.t arvutusskeemis ei tohi olla elementi, mis moodustab suletud kontuuri.

Varraskonstruktsioon on staatikaga määratav, kui suvalise koormuse mõjumisel kõik toereaktsioonid ja sisejõud on arvutatavad tasakaalutingimuste abil.

Toereaktsioonid ja sisejõud on staatikaga määratavad, kui tasakaaluvõrrandite arv võrdub tundmatute arvuga

$$3k = 2l + t \quad (2.1)$$

Joonisel 2.1 näidatud raamil on tundmatute sisejõudude ja toereaktsioonide summaks $2 + 5 = 7$. Kuna arvutusskeem koosneb kahest elemendist, siis on kasutada olevate tasakaalutingimuste arv $3 \cdot 2 = 6$. Tundmatute arv on tasakaalutingimuste arvust suurem, mistõttu see raam on staatikaga määratav. Sellist ülesannet ainult staatika tasakaalutingimustega lahendada ei saa.

Kui viia avaldises (2.1) $3k$ teisele poole võrdusmärgi, saame valemi staatikaga määratavuse astme leidmiseks

$$n = 2l + t - 3k \quad (2.2)$$

Staatikaga määratavuse astme arvutamiseks on pikemalt räägitud peatükis 13.3.

Sõrestiku staatikaga määratavus

Sõrestiku staatikaga määratavust saab kontrollida eespool käsitletud üldavaldisega (2.1), kuid lihtsam on seda teha spetsiaalselt sõrestiku jaoks kasutatava valemiga.

Sõrestik on konstruktsioon, mille arvutusskeemis on vardad ühendatud üksteisega ainult varraste otstes asuvate liigenditega. Tasandsõrestiku iga sõlme kohta saab koostada kaks tasakaaluvõrrandit (näiteks $\sum X = 0$ ja $\sum Z = 0$). Kui sõrestiku sõlmede arv on s , siis ülesande lahendamiseks kasutada olevate tasakaalutingimuste arv on $2s$.

Tundmatuteks on varraste pikijõud ja toesidemetes tekkivad reaktsioonid. Olgu sõrestiku varraste arv v ja toesidemete arv t . Tundmatute sisejõudude ja toereaktsioonide üldarv on seega $v + t$.

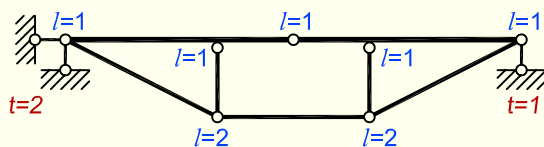
Sõrestik on staatikaga määratav, kui tasakaaluvõrrandite ja tundmatute arv on võrdne

$$2s = v + t \quad (2.3)$$

Kui viia $2s$ avaldise teisele poolele, saame valemi sõrestiku staatikaga määratavuse astme arvutamiseks

$$n = v + t - 2s \quad (2.4)$$

NÄIDE 2.1. Kontrollida joonisel 2.2 kujutatud sprengettala staatikaga määratavust.



Joonis 2.2. Sprengeltala arvutuskeem

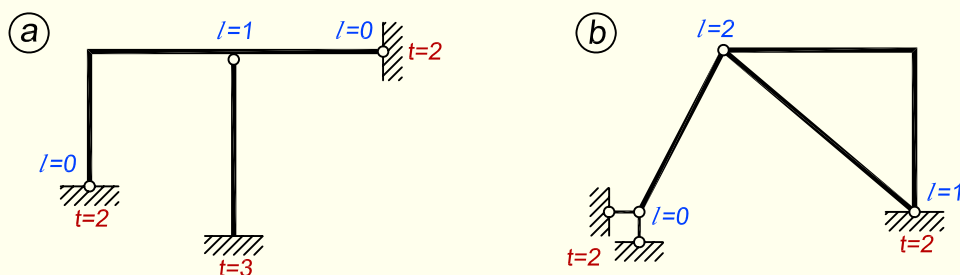
LAHENDUS

Liigendite ja toesidemete arv on näidatud joonisel. Elementide arv $k = 7$, lihtliigendite arv $l = 9$ ja toesidemete arv $t = 3$. Tingimusest (2.1) saame

$$3 \cdot 7 = 2 \cdot 9 + 3$$

Avaldise mõlemad pooled on võrdsed ja seega on arvutuskeem staatikaga määratud.

NÄIDE 2.2. Kontrollida joonisel 2.3 kujutatud arvutuskeemide staatikaga määratavust.



Joonis 2.3. Arvutuskeemid

LAHENDUS

Liigendite ja toesidemete arv on näidatud joonisel.

Skeem a

Lihtliigendite arv $l = 1$, toesidemete arv $t = 7$ ja elementide (kujundite, mille moodustavad järgalt üksteise külge kinnitatud vardad) arv $k = 2$. Tingimusest (2.1) saame

$$3 \cdot 2 \neq 2 \cdot 1 + 7$$

Kuna avaldise pooled ei ole teineteisega võrdsed, siis on arvutuskeem staatikaga määramatu: tundmatuid on rohkem kui tasakaalutingimusi. Staatikaga määramatuse astmeks saame valemiga (2.2)

$$n = 2 \cdot 1 + 7 - 3 \cdot 2 = 3$$

Skeem b

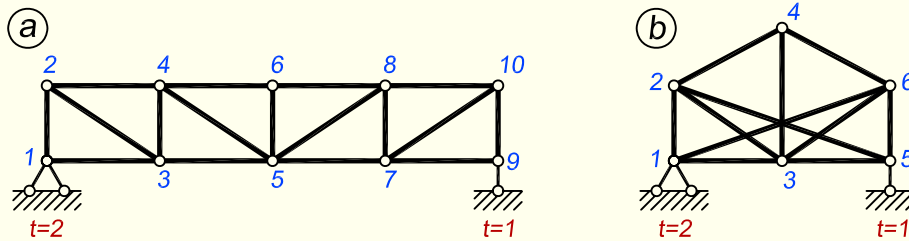
Lihtliigendite arv $l = 3$, toesidemete arv $t = 4$ ja elementide arv $k = 3$.

$$3 \cdot 3 \neq 2 \cdot 3 + 4$$

Järelikult on ka see arvutuskeem staatikaga määramatu. Staatikaga määramatuse astmeks saame

$$n = 2 \cdot 3 + 4 - 3 \cdot 3 = 1$$

NÄIDE 2.3. Kontrollida joonisel 2.4 kujutatud sõrestike staatikaga määratavust.



Joonis 2.4. Sõrestike arvutuskeemid

LAHENDUS

Sõrestike sõlmed on joonisel nummerdatud.

Skeem a

Vasakpoolsel sõrestikul on sõlmede arv $s = 10$, varraste arv $v = 17$ ja toesidemete arv $t = 3$. Tingimusest (2.3) saame

$$2 \cdot 10 = 17 + 3$$

Avaldise mõlemad pooled on võrdsed ja seega on sõrestik joonisel 2.4, a staatikaga määratud.

Skeem b

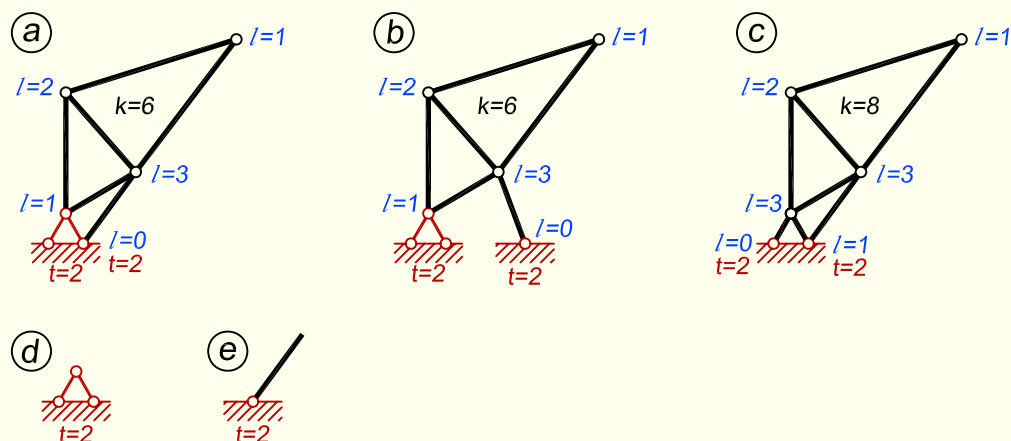
Parempoolsel sõrestikul on sõlmede arv $s = 6$, varraste arv $v = 11$ ja toesidemete arv $t = 3$. Tingimusest (2.3) saame

$$2 \cdot 6 \neq 11 + 3$$

Siin ei ole avaldise mõlemad pooled enam teineteisega võrdsed ja seega on sõrestik joonisel 2.4, b staatikaga määramatu. Kuna avaldise parem pool annab suurema väärtuse, on tundmatute arv suurem kui tasakaaluvõrrandite arv. Staatikaga määramatuse astme saame valemiga (2.4)

$$n = v + t - 2s = 11 + 3 - 2 \cdot 6 = 2$$

NÄIDE 2.4. Võrrelda joonisel 2.5, *a* ja *c* kujutatud arvutusskeemi staatikaga määratuse astme leidmist. Võrdluse eesmärk on näidata, et kui toevardad ajada segamini arvutusskeemi tavaliste varrastega, siis ei juhtu midagi, kui liigendid ja toesidemed õigesti kokku lugeda.



Joonis 2.5. Liigendkolmnurkadest koosnev arvutusskeem

LAHENDUS

Need skeemid erinevad varraste arvu ja toesidemete poolest.

Skeemil *a* on kasutatud kahest toevardast koosnevat liikumatut liigendtuge. Selle skeemi puhul võib tekkida raskusi liigendite ja toesidemete loendamiseks.

Skeemil *c* arvestame skeemi *a* toevardaid kui tavalisi arvutusskeemi vardaid, mis on liigendiga kinnitatud toepinna külge. Skeemil *c* toesidemete ja liigendite arv segadust tekitada ei tohiks. Mõlemas toeliigendis on takistatud sinna kinnitatud varda siire kummagi telje suunas ja seetõttu on mõlemas toesidemete arv võrdne kahega.

Skeemil *a* arvestame esiteks näidatud toevardaid kahe toesidemena (eraldi välja toodud joonisel *d*) ja teiseks saame veel kaks toesidet arvutusskeemi kõige alumise varda kinnitumisega toepinna külge (eraldi välja toodud joonisel *e*).

Skeem *a* on tegelikult samaväärne skeemiga *b*, kus alumine varras on paigutatud teisiti. Skeemil *b* ilmselt liigendite ja toesidemete arv probleemi ei tekita.

Staatikaga määratuse aste skeemidel *a* ja *b* valemiga (2.2) on

$$n = 2l + t - 3k = 2 \cdot 7 + 4 - 3 \cdot 6 = 0$$

Staatikaga määratuse aste skeemil *c* on

$$n = 2l + t - 3k = 2 \cdot 10 + 4 - 3 \cdot 8 = 0$$

Seega, kui arvestada skeemi *a* toevardaid tavaliste arvutusskeemi varrastena, nagu seda on tehtud skeemil *c*, ei juhtu midagi. Staatikaga määratuse aste peab tulema ja ka tuleb mõlemal juhul sama.

2.2. Toereaktsioonide arvutus

Staatikaga määratava tasandkonstruktsiooni iga elemendi kohta, mis on temale rakendatud jõudude mõjul tasakaalus, saab kirjutada tundmatute jõudude leidmiseks kolm tasakaalutingimust

$$\sum X = 0, \quad \sum Z = 0, \quad \sum M = 0 \quad (2.5)$$

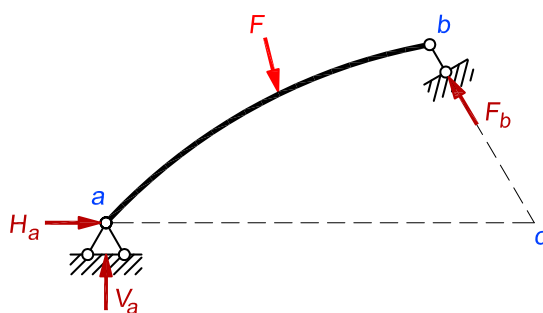
Tingimuste (2.5) asemel võib kirjutada kaks momentide ja ühe projektsioonide võrrandi, kusjuures telg U ei tohi olla risti punkte a ja b läbiva sirgega

$$\sum M_a = 0, \quad \sum M_b = 0, \quad \sum U = 0 \quad (2.6)$$

või kolm momentide võrrandit

$$\sum M_a = 0, \quad \sum M_b = 0, \quad \sum M_c = 0 \quad (2.7)$$

Mõistlik on võtta punktid a , b ja c tundmatute jõudude sihtidel (joonis 2.6).



Joonis 2.6. Toereaktsioonid

Pärast toereaktsioonide arvutust üldjuhul kontrollitakse nende õigsust kasutamata jäänud tasakaaluvõrranditega.

Avaldisi (2.5) ... (2.7) saab toereaktsioonide leidmiseks rakendada kahel erineval moel. Ühe ja enamlevinud variandi puhul kasutame neid ükshaaval ja leiame järgemööda kõik toereaktsioonid. Teise variandi korral kirjutame nende abil välja võrrandisüsteemi korruga kõigi toereaktsioonide arvutamiseks. Järgnevalt vaatamegi võrrandisüsteemi kasutamist.

Lahendus võrrandisüsteemiga

Tasakaalutingimuste alusel koostame lineaarse võrrandisüsteemi $n = 3k$ võrrandiga

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_i + \dots + a_{1n}X_n + C_1 &= 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_i + \dots + a_{2n}X_n + C_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_i + \dots + a_{nn}X_n + C_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

kus kordajad $a_{11}, a_{12} \dots a_{nn}$ on kas tundmatute toereaktsioonide $X_1, X_2 \dots X_n$ õlad momen-
dipunktide suhtes või jõudude ja telgede vaheliste nurkade koosinused (olenevalt sellest, kas
võrrand on koostatud vastavalt momentide või projektsioonide tasakaalu tingimusele). Võr-
randisüsteemi vabaliikmed $C_1, C_2 \dots C_n$ on teadaolevate välisjõudude momentide või projekt-
sioonide summad. Vabaliikmed C_i on proportsionaalsed mõjuva koormusega ja on nullid, kui
konstruktsioon on koormamata.

Võrrandisüsteemi lahendamise saame kätte otsitavate toereaktsioonide väärtused.

Kuigi tänapäeval ei ole mõistlik suuremaid võrrandisüsteeme käsitsi lahendada, toome
siin välja selle süsteemi ühe olulise omaduse, mis avaldub just võrrandisüsteemi lahendamisel
determinantidega ehk kasutades Crameri valemeid.

Võrrandisüsteemi (2.8) lahendi leiame valemiga

$$X_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

Muru (2.9) nimetaja D on võrrandisüsteemi tundmatute ees olevatest kordajatest moodusta-
tud determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Determinant D ei olene koormusest, kuna tema komponendid a_{ik} olenevad ainult konstrukt-
siooni geometriast. Avaldise (2.9) lugeja determinant D_i erineb nimetaja determinandist sel-
lega, et veeru i asemel on vabaliikmete veerg vastupidise märgiga.

Võrrandisüsteemi (2.8) lahend on üheselt määratav, kui determinant (2.10) ei võrdu nul-
liga

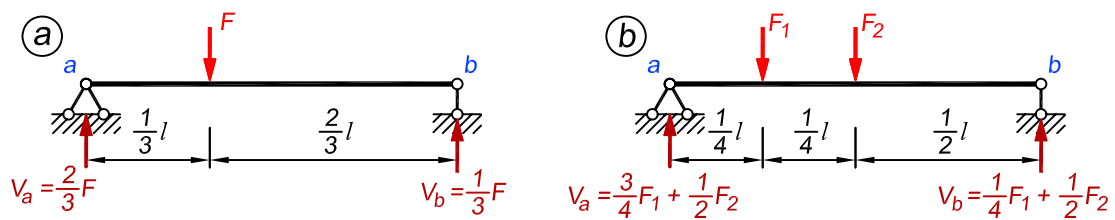
$$D \neq 0 \quad (2.11)$$

Suvalise koormuse mõjumisel on reaktsioonid ja jõud elementide vahel (liigendites) lõp-
likud ja staatika tasakaalutingimustega üheselt määratavad, kui tingimused (2.1) ja (2.11) on
täidetud ($3k = 2l + t$ ja $D \neq 0$). Kui tingimus (2.1) on rahuldatud ($3k = 2l + t$), kuid murru
(2.9) nimetaja determinant $D = 0$, siis tundmatud ei ole kas üheselt määratavad või lõplikud
ning arvutusskeem on staatikaga määramatu. Niisugust arvutusskeemi nimetatakse *hetkmuu-
tuvaks*. Avaldisest (2.9) järeldub, et lõplik koormus võib põhjustada hetkmuutuvas konst-
ruktsioonis teoreetiliselt lõpmata suuri, praktiliselt aga väga suuri sisejõude ja reaktsioone,
mistõttu ei tohi neid ehituskonstruktsioonidena kasutada. Hetkmuutuvuse kindlakstegemist
käsitleme edaspidi detailsemalt.

Ülesande lahendamine on tavaliselt lihtsam, kui algul leida toereaktsioonid ja järgnevalt
arvutada sisejõud.

Toereaktsioonide arvutamine kauguste suhetega

Toereaktsioonide arvutamine taandub lõpptulemusena sellele, et määrata, kui suur osa koor-
musest läheb ühele toele ja kui suur osa teisele toele. Seetõttu võime lihtsamate staatikaga
määratavate arvutusskeemide puhul loobuda pikkade tasakaalutingimuste väljakirjutamisest



Joonis 2.7. Toereaktsioonide arvutamine kauguste suhetest

ja piirduda avaldistega, kus koormuse korrutame kauguste suhtega, mis panebki paika koormuse jagunemise erinevate tugede vahel.

Joonisel 2.7, a kujutatud talal paikneb koormus F silde esimese kolmandiku peal. Koormuse kaugused kummaski toest $\frac{1}{3}l$ ja $\frac{2}{3}l$ määravad ära, et kolmandik koormusest läheb ühele toele ja kaks kolmandikku teisele toele. Kuna koormus asub vasakule toele lähemal, siis läheb ka sellele toele suurem osa koormusest. Nii saame tala toereaktsioonide väärtusteks

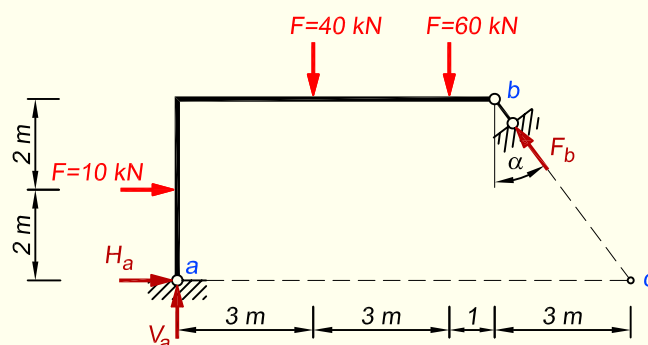
$$V_a = \frac{2}{3}F; \quad V_b = \frac{1}{3}F \quad (2.12)$$

Joonisel 2.7, b esitatud tala on koormatud kahe koondjõuga. Koormus F_1 paikneb silde esimese veerandi peal, mistõttu läheb sellest koormusest kolmveerand vasakule toele ja veerand parempoolsele toele. Koormus F_2 on täpselt silde keskel ja jaguneb seetõttu võrdselt kummagi toe vahel. Toereaktsioonid saame kummagi koormuse reaktsioonide summeerimise tulemusena

$$V_a = \frac{3}{4}F_1 + \frac{1}{2}F_2; \quad V_b = \frac{1}{4}F_1 + \frac{1}{2}F_2 \quad (2.13)$$

Kui arvutuskeem on koormatud lauskoormusega, siis leiame koormuse resultandi ja selle asukoha ning edasi toimetame sarnaselt eelnevalt käsitletud koondjõududele.

NÄIDE 2.5. Arvutada joonisel 2.8 kujutatud arvutuskeemi toereaktsioonid.



Joonis 2.8. Arvutuskeem

LAHENDUS

Esitame siin toereaktsioonide arvutuse mõlemad variandid – esiteks lahendus ükshaaval arvutatavate tasakaalutingimuste abil ning teiseks võrrandisüsteemiga. Toe b kaldenurga funktsioonid on $\sin \alpha = 0,6$ ja $\cos \alpha = 0,8$.

1. Kasutades tasakaaluvõrrandeid ükshaaval, tuleb valida võrrandid ning nende lahendamise järjekord selliselt, et ühtegi avaldisse ei jääks sisse rohkem kui üks tundmatu. Tasakaalutingimuste (2.7) järgi koostame võrrandid

$$\sum M_c = 0; \quad -V_a \cdot 10 - 10 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 4 = 0; \quad V_a = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_b = 0; \quad H_a \cdot 4 - 50 \cdot 7 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 60 \cdot 1 = 0; \quad H_a = 27,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0; \quad F_b \cdot 10 \cdot \cos \alpha - 10 \cdot 2 - 40 \cdot 3 - 60 \cdot 6 = 0; \quad F_b = 62,5 \text{ kN}$$

Siin on punkt c valitud toereaktsioonide H_a ja F_b mõjusirgete lõikumise kohta.

2. Võrrandisüsteemiga lahendades pole oluline ühes võrrandis olevate tundmatute arv. Tasakaalutingimuste (2.5) abil koostame võrrandid

$$\sum X = 0; \quad H_a - F_b \sin \alpha + 10 = 0$$

$$\sum Z = 0; \quad -V_a - F_b \cos \alpha + 40 + 60 = 0$$

$$\sum M_a = 0; \quad F_b \cdot 10 \cdot \cos \alpha - 10 \cdot 2 - 40 \cdot 3 - 60 \cdot 6 = 0$$

millest moodustame võrrandisüsteemi

$$H_a - 0,6F_b + 10 = 0$$

$$-V_a - 0,8F_b + 100 = 0$$

$$8F_b - 500 = 0$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel saame toereaktsioonide väärtusteks

$$V_a = 50 \text{ kN}; \quad H_a = 27,5 \text{ kN}; \quad F_b = 62,5 \text{ kN}$$

Võrrandisüsteemi determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -0,6 \\ 0 & -1 & -0,8 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

avamisel saame tulemuseks $D = -8$. Kuna determinant $D \neq 0$, siis on arvutuskeem geomeetriliselt muutumatu ja leitud lahendid ühesed.

2.3. Sisejõudude arvutus lõikemeetodiga

Lõikemeetod lähtub põhimõttest, et kui kogu arvutusskeem on tasakaalus, siis peavad tasakaalus olema ka selle üksikud osad. Kui teha mõtteline lõige ja eraldada sellega arvutusskeem kaheks osaks, siis võime kummagi osa sisejõudusid arvutada vaadeldava osa tasakaalutingimuste põhjal.

Lõikemeetodit saame rakendada kahe erineva võtte abil. Nendeks on *taandamisvõtte* ja *tasakaalustamisvõtte*, mida järgnevalt vaatame joonise 2.9 abil. Joonisel 2.9, *a* on esitatud kahest otsast toetatud lihttala ja seame eesmärgiks arvutada sisejõud selle keskmises lõikes *c*. Esmalt leiame toereaktsioonid V_a , H_a ja V_b ning seejärel asendame toesidemed neile vastavate reaktsioonidega (joonis 2.9, *b*).

2.3.1. Taandamisvõtte

Taandamisvõtte korral teeme meid huvitavasse kohta mõttelise lõike ja eemaldame lõikest ühele poole jääva arvutusskeemi osa. Eemaldatud osale mõjuvad jõud taandame vaadeldavasse lõikesse.

Joonisel 2.9, *c* on arvutusskeemist eraldatud lõikest *c* vasakule jääv osa ning temale mõjuvad jõud taandatud lõikesse *c*. Lõikes *c* olevad sisejõud tasakaalustavad allesjäänud parempoolset osa ja väljendavad vasakpoolse osa mõju sellele. Siin on nad märgitud skeemile peale positiivsete suundadega. Praktilisel ülesande lahendamisel ei ole vajadust neid joonisel kujutada, kuna keerukamate ülesannete lahendamisel teeb see palju tööd juurde. Piisab sellest, kui arvutuses lähtuda peatükis 1.8.2 esitatud sisejõudude märgikokkulepetest.

Paindemomendi arvutuses vaatame, kas jõud põhjustab tõmme varda positiivses või negatiivses servas. Vertikaalne reaktsioon V_a on suunaga üles ja järelikult on tõmmatud positiivsed kiud, mis annab positiivse paindemomendi. Koormus F_1 vastupidiselt tekitab tõmbe negatiivsetes kiududes.

$$M_y = V_a \cdot 5 - F_1 \cdot 2 = 23 \cdot 5 - 30 \cdot 2 = 55 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (2.14)$$

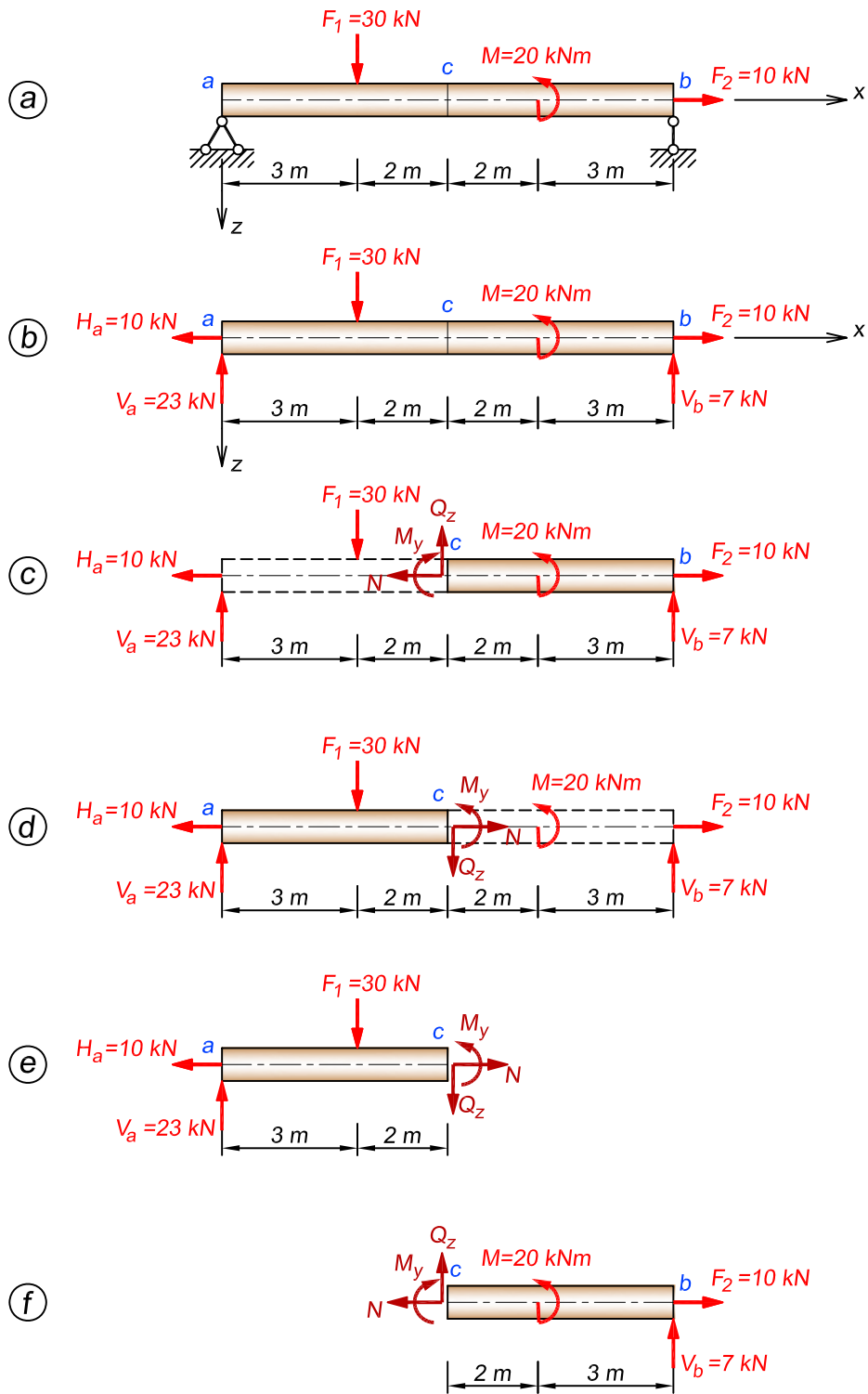
Põikjõu puhul vaatame jõu pöördesuunda. Kui reaktsioon V_a taandada lõikesse *c*, pöörab ta allesjäävat vardaosa päripäeva ja tekitab seetõttu positiivse põikjõu. Jõu F_1 pöördesuund on aga reaktsioonile vastupidine ja annab seetõttu negatiivse põikjõu.

$$Q_z = V_a - F_1 = 23 - 30 = -7 \text{ kN} \quad (2.15)$$

Pikijõu leiame horisontaalse reaktsiooni H_a taandamisel lõikesse *c*. Mainitud jõud on suunaga vardast eemale ja seega tõmbejõud.

$$N = H_a = 10 \text{ kN} \quad (2.16)$$

Joonisel 2.9, *d* alustame arvutust varda parempoolse otsa poolt ja eemaldame lõikest *c* paremale jääva varda osa. Taandame parempoolsele osale mõjuvad jõud lõikesse *c*. Lõikes *c* olevad sisejõud tasakaalustavad nüüd allesjäävat vasakpoolset osa ja väljendavad parempoolse osa mõju sellele.



Joonis 2.9. Lõikemeetod

Sisejõud lõikes leiame sarnaselt eespool kirjeldatule. Paindemomendi puhul arvestame, et koondmoment kohas $x = 7$ m tekitab tõmmet varda alumises ehk positiivses pooles, põikjõudu ega pikijõudu moment ei mõjuta.

$$M_y = V_b \cdot 5 + M = 7 \cdot 5 + 20 = 55 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (2.17)$$

$$Q_z = -V_b = -7 \text{ kN} \quad (2.18)$$

$$N = F_2 = 10 \text{ kN} \quad (2.19)$$

Näeme, et paremalt poolt arvutades saime samad tulemused nagu vasakult poolt tulles.

2.3.2. Tasakaalustamisvõtte

Tasakaalustamisvõtte puhul me vaatame arvutusskeemi ühe osa tasakaalu. Joonisel 2.9, *e* on selleks varda vasakpoolne osa. Eemaldatud parempoolse osa mõju väljendavad lõikesse *c* rakendatavad jõud, mis on esialgu tundmatud ja seetõttu märgime nad joonisele positiivsete suundadega.

Kirjutame välja vasakpoolse osa tasakaalutingimused. Paindemomendi arvutuses võime märkide puhul kasutada tavapärasest praktikast, kus jõu pööre vastupäeva võetakse positiivseks. Tasakaalutingimuse kirjutame välja lõike *c* suhtes, kuna siis ei jää sinna rohkem kui üks tundmatu.

$$\sum M_c = 0; \quad M_y - 23 \cdot 5 + 30 \cdot 2 = 0; \quad M_y = 55 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (2.20)$$

Põikjõu leidmiseks kasutame *z*-telje suunalist tasakaalutingimust

$$\sum Z = 0; \quad Q_z - 23 + 30 = 0; \quad Q_z = -7 \text{ kN} \quad (2.21)$$

Soovi korral saaks põikjõudu arvutada ka mingi punkti suhtes kirjutatavast momentide tasakaalutingimusest.

Pikijõu arvutame *x*-telje suunas kirjutatavast avaldisest

$$\sum X = 0; \quad N - 10 = 0; \quad N = 10 \text{ kN} \quad (2.22)$$

Joonisel 2.9, *f* on kujutatud parempoolse osa tasakaal. Sisejõud leiame selle osa kohta koostatud tasakaalutingimustest

$$\sum M_c = 0; \quad -M_y + 7 \cdot 5 + 20 = 0; \quad M_y = 55 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (2.23)$$

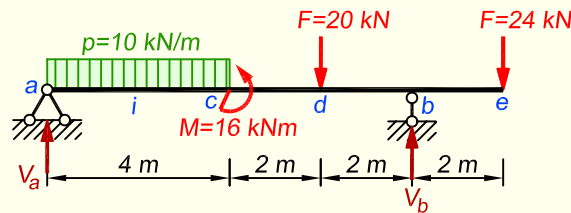
$$\sum Z = 0; \quad -Q_z - 7 = 0; \quad Q_z = -7 \text{ kN} \quad (2.24)$$

$$\sum X = 0; \quad -N + 10 = 0; \quad N = 10 \text{ kN} \quad (2.25)$$

Tasakaalutingimustest saadavad sisejõudude märgid on kohe õiged, kui tundmatud on joonisele märgitud positiivsete suundadega. Kui nad on vastupidi, siis tuleb arvutustest saadud märgid enne sisejõu epüüri koostamist ära vahetada.

Tasakaalustamisvõttega saime samad tulemused nagu taandamisvõtte korralgi.

NÄIDE 2.6. Koostada joonisel 2.10 kujutatud talale paindemomendi ja põikjõu epüürid.



Joonis 2.10. Tala arvutuskeem

LAHENDUS

1. Arvutust alustame toereaktsioonide leidmisega, selleks kirjutame välja momentide tasakaalutingimused kummagi toe suhtes

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 8 + 10 \cdot 4 \cdot 6 + 16 + 20 \cdot 2 - 24 \cdot 2 &= 0; \quad V_a = 31 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 8 - 10 \cdot 4 \cdot 2 + 16 - 20 \cdot 6 - 24 \cdot 10 &= 0; \quad V_b = 53 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontrolliks kasutame jõudude tasakaalutingimust

$$\sum Z = 10 \cdot 4 + 20 + 24 - 31 - 53 = 0$$

2. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamiseks kasutame lõikemeetodit ja konkreetsemalt taandamisvõtet. Arvestame sellega, et kui jõud painutab vardaosa üles, nii et tõmmatud on varda alumine katkendjoonega tähistatud pool, siis loeme paindemomendi positiivseks.

Esmalt vaatame tala kõigis lõigetes arvutust, eemaldades vastavast lõikest vasakule jääva arvutuskeemi osa ja taandades kõik sellele osale mõjuvad jõud vaadeldavasse lõikesse.

Paindemomendi arvutamiseks lõikes *i* eraldame sellest vasakule jääva osa (joonis 2.11, *a*). Ärajäetavale osale mõjub toereaktsioon V_a , mis painutab varda otsa üles ja põhjustab seetõttu tõmme alumises ehk positiivses pooles, ning lauskoormus p , mis vastupidiselt surub varrast alla ja tekitab tõmbe varda ülemises ehk negatiivses pooles

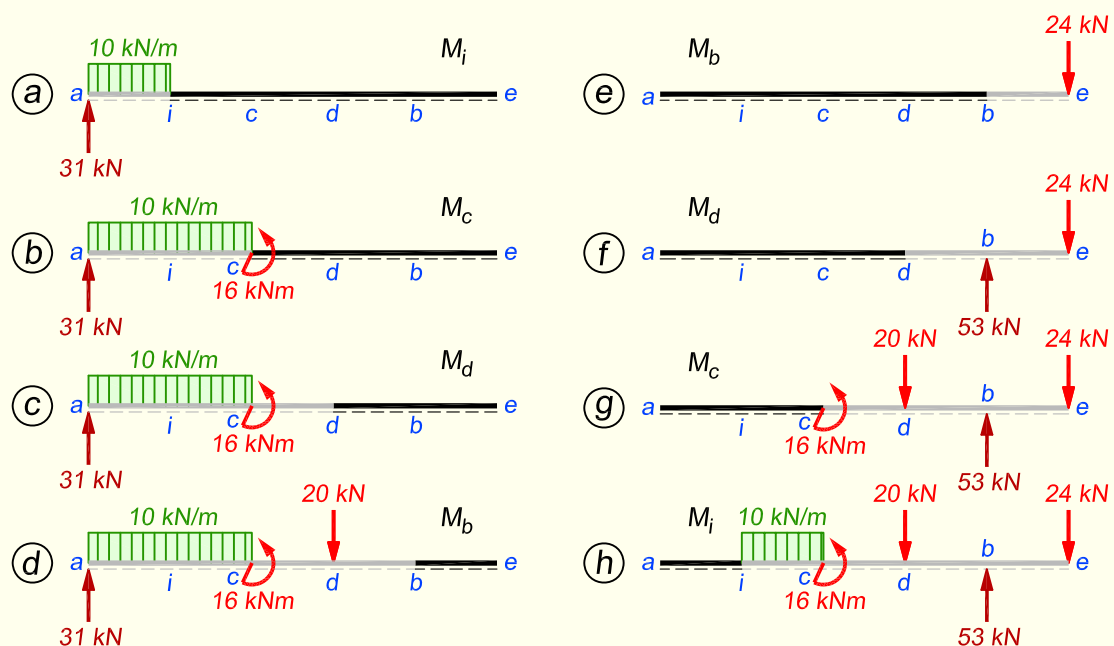
$$M_i = 31 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 42 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Edasi liigume lõikesse *c*, kuhu on rakendatud koondmoment. Kuna koondmomenti kohal peab paindemomendi epüüris olema aste, siis arvutame lõikes *c* kaks ordinaati – ühe vahetult momendist vasakul (joonis 2.11, *b*)

$$M_{ci} = 31 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 44 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

ja teise vahetult paremal, kusjuures lõikest vahetult vasakul saadud ordinaadist lahutame koondmomenti väärtuse maha, kuna momenti pöördesuund on selline, et lõikest paremal põhjustab see tõmme varda ülemises ehk negatiivses pooles

$$M_{cd} = 44 - 16 = 28 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 2.11. Paindemomendi arvutus lõikemeetodil. Halliga on näidatud lõikega eemaldatav arvutusskeemi osa

Lõikes d paindemomendi arvutamisel kasutame vahemikku $a-d$ jäävaid jõudusid (joonis 2.11, c) ning koondmomendi võtame arvesse negatiivsena samal põhjusel nagu eelnevas arvutuseski

$$M_d = 31 \cdot 6 - 10 \cdot 4 \cdot 4 - 16 = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Toelõikes b tekkiva paindemomendi arvutamiseks arvestame vahemikku $a-b$ jäävaid jõudusid (joonis 2.11, d)

$$M_b = 31 \cdot 8 - 10 \cdot 4 \cdot 6 - 16 - 20 \cdot 2 = -48 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Esitame samades lõigetes arvutuse ilma pikemate kommentaarideta ka tala parempoolse otsa poolt tulles

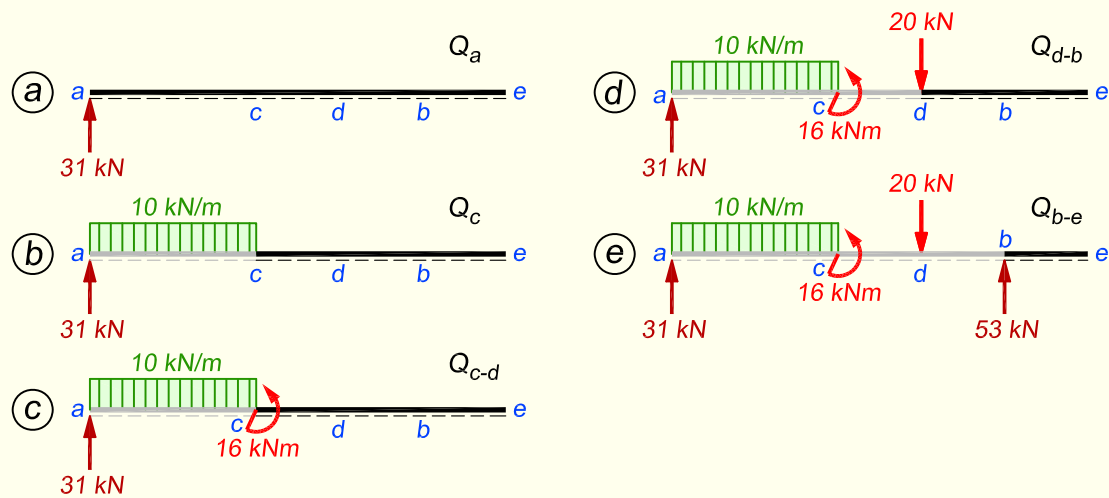
$$M_b = -24 \cdot 2 = -48 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (\text{joonis 2.11, } e)$$

$$M_d = -24 \cdot 4 + 53 \cdot 2 = 10 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (\text{joonis 2.11, } f)$$

$$M_{cd} = -24 \cdot 6 + 53 \cdot 4 - 20 \cdot 2 = 28 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (\text{joonis 2.11, } g)$$

$$M_{ci} = 28 + 16 = 44 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (\text{joonis 2.11, } g)$$

$$M_i = -24 \cdot 8 + 53 \cdot 6 - 20 \cdot 4 + 16 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 42 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (\text{joonis 2.11, } h)$$



Joonis 2.12. Põikjõu arvutus lõikemeetodil. Halliga on näidatud lõikega eemaldatav arvutusskeemi osa

Paindemomendi maksimumi lauskoormuse all saame pärast põikjõu leidmist arvutada valemiga (1.16)

$$\max M = M_a + \frac{Q_a^2}{2p} = 0 + \frac{31^2}{20} = 48 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kuigi siin ülesandes sai kõigis lõigetes arvutus ära näidatud nii vasakult kui paremalt tülles, tasub alati vaadata, millise arvutusskeemi otsa poolt oleks mõistlik arvutust teha. Põhimõttelist vahet sellel küll ei ole, aga töö maht sõltub sellest, kui palju jõudusid on ärajäetavale osale rakendatud.

Paindemomendi epüür on esitatud joonisel 2.13, b.

3. Põikjõu epüüri ordinaatide arvutamiseks kasutame samuti taandamisvõtet. Teeme siin ülesandes arvutuse ainult vasakult poolt tülles.

Tala vasaku otsa toereaktsioon, mis pöörab varrast päripäeva tema teise otsa suhtes (joonis 2.12, a), annab positiivse põikjõu

$$Q_a = 31 \text{ kN}$$

Lauskoormuse all muutub põikjõu epüür linearselt ja seetõttu leiame järgmise ordinaadi lõike c kohal. Lauskoormus tuleb arvesse võtta miinusega, kuna vardaosa a-c parempoolse otsa suhtes pöörab ta seda vardaosa vastupäeva (joonis 2.12, b)

$$Q_c = 31 - 10 \cdot 4 = -9 \text{ kN}$$

Koondmomendi kohal põikjõu epüüris astet ei ole ja seetõttu ta vahemiku c-d arvutust ka ei mõjuta, kuigi jääb sellest vasakule (joonis 2.12, c). Joonisel 2.12, d ja e on ära

näidatud skeemid ka vahemike $d-b$ ja $b-e$ arvutamiseks

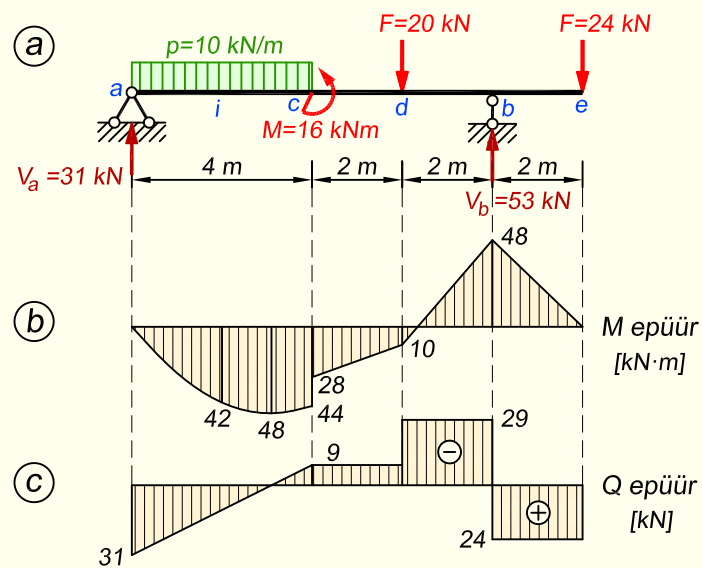
$$Q_{c-d} = -9 \text{ kN}; \quad Q_{d-b} = -9 - 20 = -29 \text{ kN}; \quad Q_{b-e} = -29 + 53 = 24 \text{ kN}$$

Kontrollime paremalt poolt tülles. Konsooli otsas olev koormus pöörab vardaosa $e-b$ selle vasaku otsa suhtes päripäeva ja annab positiivse põikjõu

$$Q_{e-b} = 24 \text{ kN}$$

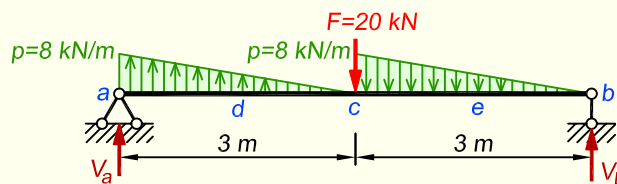
Saime sama tulemuse nagu vasakult tülles.

Põikjõu epüür on esitatud joonisel 2.13, c .



Joonis 2.13. Sisejõudude epüürid

NÄIDE 2.7. Koostada joonisel 2.14 kujutatud talale paindemomendi ja põikjõu epüürid.



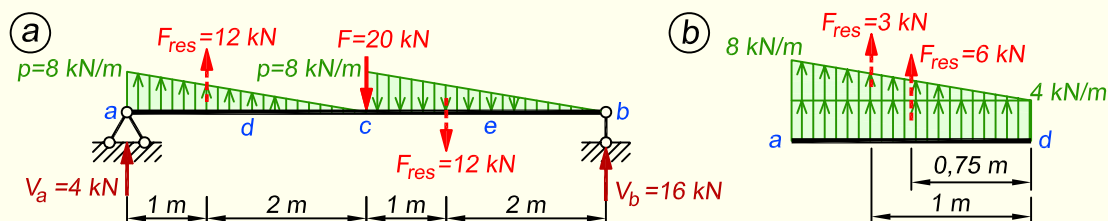
Joonis 2.14. Tala arvutuskeem

LAHENDUS

1. Esimesena leiame toereaktsioonid, milleks kirjutame välja momentide tasakaalutingsimused kummagi toe suhtes. Arvestame ka sellega, et kolmnurkkoormusel paikneb re-

sultant koormuse pikkuse ühe kolmandiku peal (joonis 2.15, a). Kolmnurkkoormuse resultandiks saame

$$F_{res} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ kN}$$



Joonis 2.15. Kolmnurkkoormuste arvestamine

Toereaktsioonide tasakaalutingimused on

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 6 + 20 \cdot 3 - 12 \cdot 5 + 12 \cdot 2 &= 0; \quad V_a = 4 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 6 - 20 \cdot 3 + 12 \cdot 1 - 12 \cdot 4 &= 0; \quad V_b = 16 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontrolliks kasutame jõudude tasakaalutingimust

$$\sum Z = 20 - 12 + 12 - 4 - 16 = 0$$

2. Paimdemomendi epüüri ordinaadid leiame lõikemeetodiga. Iga ordinaadi avutame tala selle otsa poolt tülles, kus peab vähem jõudusid arvesse võtma.

$$M_d = 4 \cdot 1,5 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0,75 = 13,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = 4 \cdot 3 + 12 \cdot 2 = 36 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_e = 16 \cdot 1,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 = 22,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

kus M_d arvutuse jaoks on vahemikus $a-d$ paiknev trapetsikujuline lauskoormus jagatud kolmnurkseks ja ühtlaseks lauskoormuseks, nagu on näidatud joonisel 2.15, b.

Paimdemomendi epüür on esitatud joonisel 2.16, b.

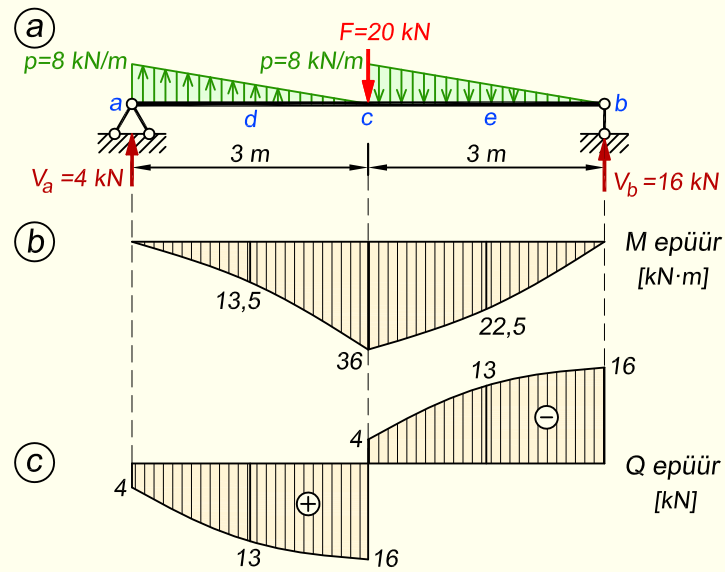
3. Põikjõu epüüri puhul arvutame samuti tala vasaku poole ordinaadid vasakult tülles

$$Q_a = 4 \text{ kN}; \quad Q_d = 4 + \frac{8+4}{2} \cdot 1,5 = 13 \text{ kN}; \quad Q_{cd} = 4 + 12 = 16 \text{ kN}$$

ja tala parema poole omad paremalt tülles

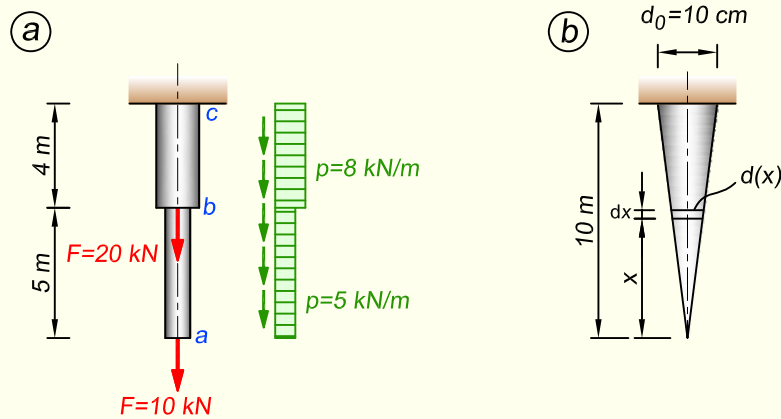
$$Q_b = -16 \text{ kN}; \quad Q_e = -16 + \frac{4 \cdot 1,5}{2} = -13 \text{ kN}; \quad Q_{ce} = -16 + 12 = -4 \text{ kN}$$

Põikjõu epüür on esitatud joonisel 2.16, c.



Joonis 2.16. Sisejõudude epüürid

NÄIDE 2.8. Koostada joonisel 2.17 kujutatud arvutuskeemidele pikijõu epüürid. Skeemil *a* on varras koormatud koondjõudude ja pikiteljesuunalise lauskoormusega. Skeemil *b* näidatud koonusekujuline terasvarras on koormatud omakaaluga. Terasema-humass on $\gamma = 77 \text{ kN/m}^3$.



Joonis 2.17. Arvutuskeemid

LAHENDUS

Skeem a

Arvutust alustame varda vaba otsa poolt. Lõikes *a* võrdub pikijõud sinna rakendatud koondjõuga. Vahemikes *a-b* ja *b-c* muutub pikijõud lauskoormuse tõttu lineaarselt. Lõi-

kes b peab epüüris olema aste, mis võrdub seal lõikes oleva koondjõuga.

$$N_a = 10 \text{ kN}; \quad N_{ba} = 10 + 5 \cdot 5 = 35 \text{ kN}; \quad N_{bc} = 35 + 20 = 55 \text{ kN}; \quad N_c = 55 + 8 \cdot 4 = 87 \text{ kN}$$

Pikijõu epüür on esitatud joonisel 2.18, a .

Skeem b

Siin läheb arvutus keerukamaks, kuna pidevalt muutuva ristlõike tõttu muutub ka varda omakaalust põhjustatud pikisuunaline lauskoormus.

Avaldame varda tipust kaugusel x lõpmata lühikese varda lõigu dx massi

$$dG(x) = \gamma A(x) dx = \gamma \frac{\pi d^2(x)}{4} dx$$

kus $d(x)$ on varda ristlõike diameeter ning $A(x)$ ristlõike pindala kohal x . Lauskoormuse intensiivsuseks saame

$$p(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{\gamma \pi d^2(x)}{4} = \frac{\gamma \pi d_0^2 x^2}{4l^2}$$

kuna ristlõike diameeter kohal x avaldub varda ülemise otsa diameetri d_0 kaudu järgmiselt

$$d(x) = \frac{d_0}{l} \cdot x$$

Pikijõud ristlõikes x võrdub sellest lõikest allapoole jääva vardaosa omakaaluga, mis tõttu integreerime saadud lauskoormust vahemikus nullist kuni kauguseni x

$$N(x) = \int_0^x p(x) dx = \frac{\gamma \pi d_0^2}{4l^2} \int_0^x x^2 dx = \frac{\gamma \pi d_0^2 x^3}{12l^2}$$

Saadud avaldis võimaldab meil arvutada pikijõudu varda suvalises lõikes. Paneme siia kirja pikijõud varda otstes ja keskel

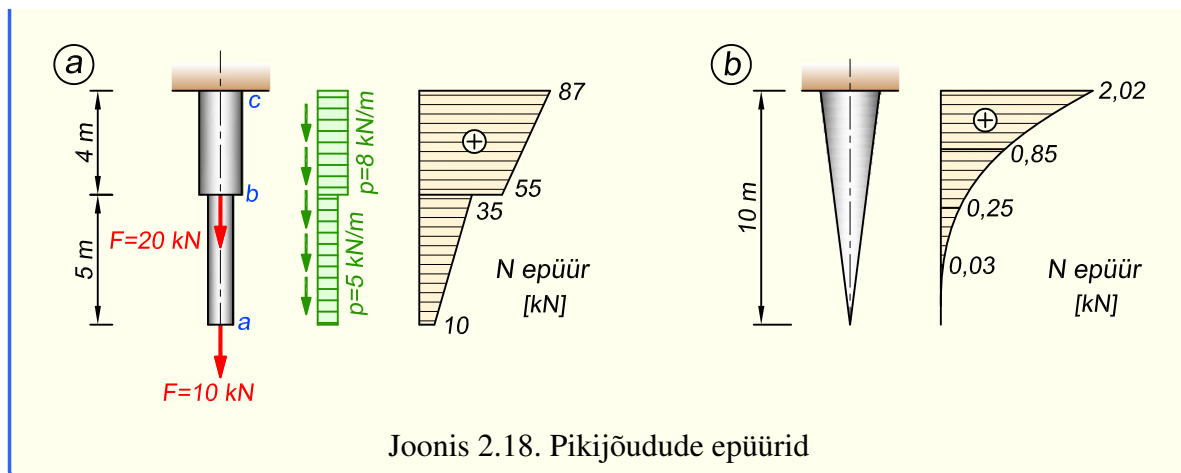
$$N(0) = 0; \quad N(5) = \frac{77 \cdot \pi \cdot 0,1^2 \cdot 5^3}{12 \cdot 10^2} = 0,25 \text{ kN}; \quad N(10) = \frac{77 \cdot \pi \cdot 0,1^2 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^2} = 2,02 \text{ kN}$$

Pikijõu epüür on esitatud joonisel 2.18, b .

Skeemil b esitatud arvutusskeemi pikijõu epüüri saab ka lihtsamalt koostada. Kuna igas lõikes võrdub pikijõud sellest lõikest allapoole jääva koonuselise osa massiga, siis lähtume siin koonuse ruumala valemist ning korrutame selle terase mahumassiga

$$N(x) = V(x)\gamma = \frac{\pi d^2(x) \cdot x}{3 \cdot 4} \cdot \gamma = \frac{\gamma \pi d_0^2 x^3}{12l^2}$$

kus $V(x)$ on lõikest x allpool oleva koonuselise osa ruumala. Diameetrite $d(x)$ ja d_0 omavaheline seos on sama nagu eespool näidatud.



Joonis 2.18. Pikijõudude epüürid

2.4. Jõudude mõju sõltumatuse printsiip

Jõudude mõju sõltumatuse printsiipi kasutatakse ehitusmehaanikas küllaltki laialdaselt, kuna see võimaldab keeruka ülesande asendamist mitme lihtsama ülesandega.

Sõnastame järgnevalt selle printsiibi.

Konstruktsioonile rakendatud jõudude süsteemi poolt tingitud sisejõud ja deformatsioonid on võrdsed iga jõu poolt eraldi põhjustatud sisejõudude ja deformatsioonide algebralise summaga.

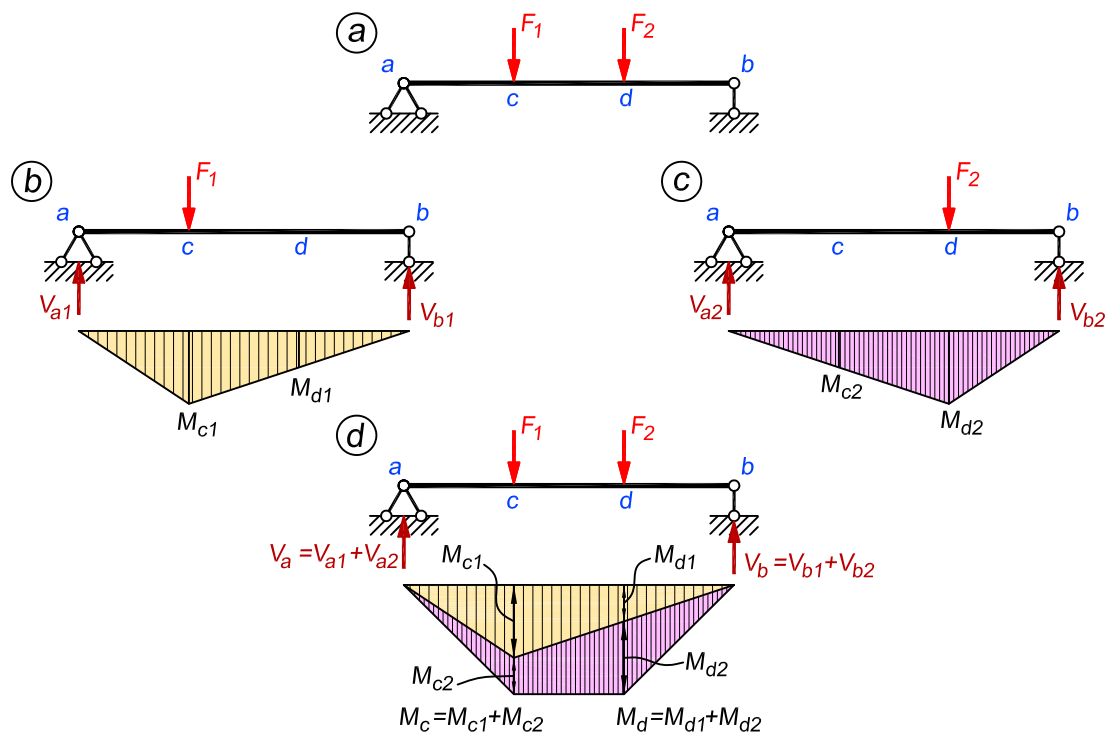
Kuid lisaks siin definitsioonis mainitud sisejõududele ja deformatsioonidele kehtib see ka mitmete muude konstruktsiooni koormamise tulemuste kohta, milleks on toereaktsioonid, siirded ja pinged.

Jõudude mõju sõltumatuse printsiibi kehtimiseks peavad olema täidetud kaks tingimust.

1. Koormuste ning pingete ja deformatsioonide vahel peab valitsema lineaarne seos ehk peab kehtima Hooke'i seadus.
2. Koormus ei tohi märgatavalt muuta konstruktsiooni geometriat, mis tähendab, et konstruktsioonelementide siirded on elementide mõõtmetega võrreldes väikesed.

Jõudude mõju sõltumatuse printsiibi selgitamiseks vaatame joonisel 2.19, a kujutatud arvutusskeemi, mis on koormatud kahe koondjõuga F_1 ja F_2 . Selle ülesande võib lahendada kahes osas – esmalt leiame toereaktsioonid ja sisejõud koormusest F_1 (joonis 2.19, b) ning seejärel koormusest F_2 (joonis 2.19, c). Kui arvutatud väärtused summeerida, siis saame reaktsioonid ja sisejõud, mis tekivad koormuste üheaegsel mõjumisel (joonis 2.19, d).

Lõpetuseks lisame ka selle täpsustuse, et paralleelselt jõudude mõju sõltumatuse printsiibiga kasutatakse ka *superpositsiooniprintsiibi* mõistet, mis on aga üldisem, kuna kehtib kõigi lineaarsete süsteemide puhul (mitte ainult ehituskonstruktsioonide) ja sõnastatakse järgnevalt: mitme mõju resultaat on üksikmõjude resultaatide summa. *Superpositsioon* tähendab liitfunktsiooni moodustamist antud funktsioonide kaudu.



Joonis 2.19. Paindemomendi epüüri ja toereaktsioonide arvutus jõudude mõju sõltumatuse printsiibi abil

Peatükk 3

ARVUTUSSKEEMI KINEMAATIKALINE ANALÜÜS

3.1. Arvutusskeemi vabadusaste

Suur osa ehituskonstruksioone moodustatakse varrastest ja geomeetriselt muutumatutest tasandkujunditest. Need kujundid ühendatakse üksteisega jäigalt või liigenditega. Konstruktsioonide arvutamisel varraste jäigad ja liigendühendused, samuti ka toed, idealiseeritakse ning arvutusskeemis asendatakse nad samaväärsete ühendus- ja toevarrastega. Arvutusskeemis on kolme, kahe või ühe vardaga (sidemega) ühendused, millel on vastavalt null, üks või kaks vabadusastet.

Keha vabadusaste on nende geomeetriseliste parameetrite arv, mis keha liikumisel muutuvad üksteisest sõltumatult.

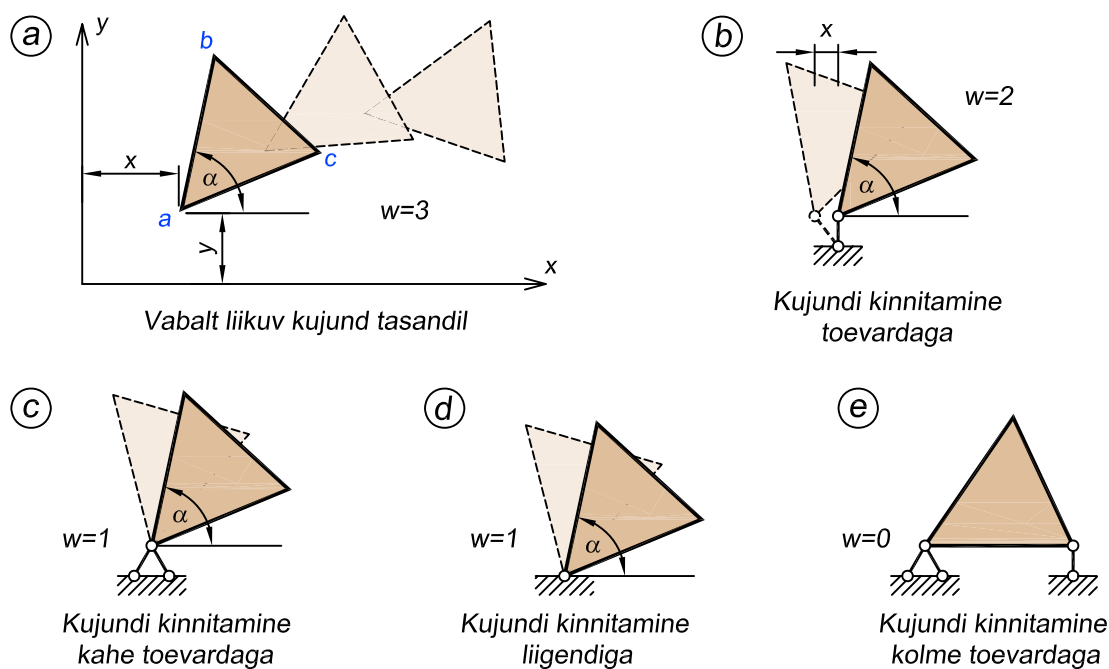
Liikuva punkti asukoht tasandil on määratud kahe koordinaadiga samal tasandil suvalise liikumatu koordinaatide süsteemi suhtes. Punkti vabadusaste tasandil on järelikult kaks.

Kujundi asend tasandliikumisel on määratud kolme sõltumatu muutujaga: kujundi mingi punkti a kahe koordinaadiga x ja y ning kahte suvalist punkti läbiva sirge ja ühe koordinaat-telje vahelise nurgaga α (joonis 3.1, a). **Kujundi vabadusaste tasandliikumisel on seetõttu kolm.**

Kui aga kujund on ühendatud teiste kujundite või toepinnaga liigendite või toevarrastega, siis tema liikumisvabadus võib olla piiratud ning vabadusaste väheneb.

Joonisel 3.1, b on kujund kinnitatud toepinna külge ühe toevardaga. Kuna tegemist on liikuva liigendtoega, siis võimaldab see kujundi horisontaalset siiret ning samuti pööret, takistatud on aga liikumine toevarda sihis ehk vertikaalsuunas. Kujundi asukoht on määratud kahe muutujaga: koordinaadiga x ning nurgaga α . Siit võime järeldada, et **varras vähendab liikumisvabadust ühe võrra ja vastab ühele kinemaatilisele sidemele.**

Lisame kujundile veel ühe toevarda, nagu on kujutatud joonisel 3.1, c . Nüüd moodustub liikumatu liigendtugi, mis võimaldab ainult kujundi pööret. Kujundi asend tasandil on määratud ühe sõltumatu muutujaga: kujundil valitud sirge ja x -telje vahelise nurgaga α . Täpselt sama on olukord ka joonisel 3.1, d esitatud skeemil, kus kujund on kinnitatud toepinna külge



Joonis 3.1. Vabadusaste w kujundi erinevate kinnituste korral

liigendiga, kuna lihtliigend on samaväärne kahest vardast moodustatud liikumatu liigendtoega. See ütleb meile, et **lihtliigend kõrvaldab kaks liikumisvabadust ja vastab kahele kinemaatilisele sidemele**.

Joonisel 3.1, *e* näidatud kujund on kinnitatud toepindade külge kolme toevardaga, mistõttu vabadusaste muutub nulliks ning kujundi igasugune liikumine on takistatud. Jõuame ka ühe olulise põhitõeni, mis ütleb, et tasandil on vaja vähemalt kolme toesidet, et kujund või arvutuskeem oleks kinnitatud geomeetriselt muutumatult.

Arvutuskeemi vabadusastme leiame eelnevast lähtuvalt järgmisel viisil: loendame arvutuskeemist kõigi liigendite ja toevarraste eemaldamisega saadud elementide arvu k , lihtliigendite arvu l ja toesidemete arvu t . Kõigi elementide üldine vabadusaste on $3k$, lihtliigend vastab kahele ja toeside ühele kinemaatilisele sidemele ning üldine sidemete arv, mis vähendab elementide üldist vabadusastet, on $2l + t$. Arvutuskeemi vabadusastme leiame valemiga

$$w = 3k - 2l - t \tag{3.1}$$

Arvutuskeemi vabadusaste võib olla suurem või väiksem nullist või võrdne nulliga.

1. Kui $w > 0$, siis konstruktsiooni osad võivad liikuda ilma elementide deformatsioonideta, mis tähendab, et arvutuskeem on geomeetriselt muutuv.
2. Kui $w = 0$, siis on arvutuskeemil minimaalne arv sidemeid kujumuutumatuse ja liikumatus kindlustamiseks. Tingimus $w = 0$ on arvutuskeemi kujumuutumatuse vajalik, kuid mitte küllaldane tingimus (täpsemalt vaata peatükist 4).

3. Kui $w < 0$, siis on arvutuskeemil liigsidemed.

Liigsidemete arvu ehk staatikaga määratuse astme n leiame valemiga

$$n = -w = 2l + t - 3k \quad (3.2)$$

Geomeetrilise muutumatuse ja liikumatuse vajalik tingimus ($w = n = 0$) minimaalse arvu sidemete juures annab (valemid 3.1 ja 3.2) järgmise võrduse

$$3k = 2l + t \quad (3.3)$$

kus kõigi elementide vabadusastmete summa võrdub kinemaatiliste sidemete koguarvuga.

Tingimus (3.3) ühtib staatikaga määratava arvutuskeemi vajaliku tingimusega (2.1), mille põhjal võib öelda, et **iga staatikaga määratav arvutuskeem on geomeetriliselt muutumatu, ja vastupidi, iga liigsidemeteta geomeetriliselt muutumatu arvutuskeem on staatikaga määratav.**

Ühe vabadusastmega ($w = 1$) kinemaatilist ketti nimetatakse *mehhanismiks*. Mehhanismi punktide siirete trajektoorid on määratud. Varraskonstruksioonide puhul nimetatakse mehhanismi ka *varrasahelaks*.

Ehituskonstruksioonides saab kasutada arvutuskeeme, mille vabadusaste on väiksem või võrdne nulliga. Kuna nullist suurema vabadusastme korral saavad elemendid vabalt siirduda, siis selline arvutuskeem on ehituskonstruksioonina kasutuskõlbmatu.

Sõrestiku vabadusaste

Sõrestiku vabadusastet võib määrata üldvalemiga (3.1), kuid mõistlikum on sõrestikkonstruksioonide puhul kasutada järgnevalt esitatud valemit. Meenutame peatükist 2.1, et sõrestik on konstruksioon, mille arvutuskeemis on jäigad sõlmed asendatud liigenditega.

Sõrestiku igal liigendsõlmel on tasapinnal kaks liikumisvabadust, kuna sõlme käsitleme punktina, mille vabadusaste tasandil on kaks. Kui sõrestiku liigendsõlmede arv on s , siis sõlmede summaarne vabadusaste on $2s$. Iga varras ja toeside aga kõrvaldavad ühe liikumisvabaduse. Kui sõrestiku varraste arv on v ja toesidemete arv t , siis üldine sidemete arv, mis piirab sõrestiku sõlmede liikumisvabadust, on $v + t$.

Sõrestiku arvutuskeemi vabadusastme leiame valemiga

$$w = 2s - v - t \quad (3.4)$$

Minimaalse vajaliku arvu sidemetega geomeetriliselt kujumuutumatu ja liikumatu sõrestik rahuldab tingimust $n = -w = 0$, s.t

$$2s = v + t \quad (3.5)$$

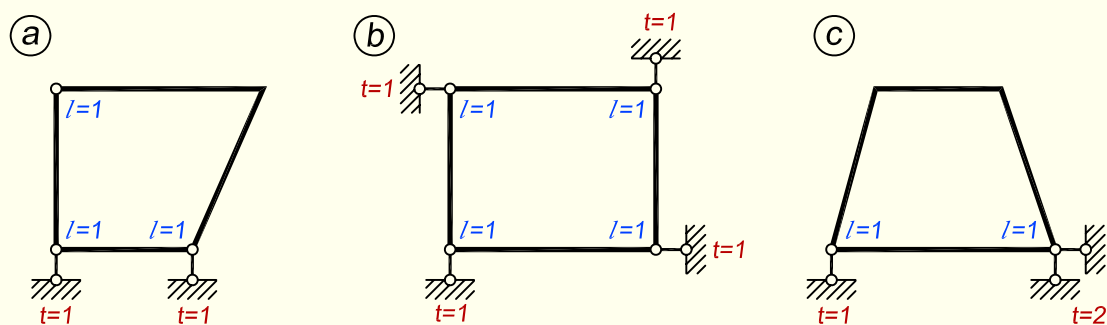
Tingimus (3.5) ühtib sõrestike staatikaga määratavuse vajaliku tingimusega (2.3) ja sellest tulenev järeldus on analoogiline tingimuste (2.1) ja (3.3) ühtimisest tuleneva järeldusega: iga staatikaga määratav sõrestik on geomeetriliselt muutumatu ning vastupidi, iga liigsidemeteta geomeetriliselt muutumatu sõrestik on staatikaga määratav.

Sõrestiku liigsidevõrgu arv või staatikaga määratuse astme leiame valemiga

$$n = -w = v + t - 2s \quad (3.6)$$

mis ühtib eespool tuletatud avaldisega (2.4).

NÄIDE 3.1. Leida joonisel 3.2 kujutatud arvutuskeemide vabadusastmed.



Joonis 3.2. Arvutuskeemid

LAHENDUS

Lihtliigendite ja toesidemete arv on näidatud joonisel.

Skeem a

Esimesel arvutuskeemil on lihtliigendite arv $l = 3$, toesidemete arv $t = 2$ ja elementide (kujundite, mille moodustavad jäigalt üksteise külge kinnitatud vardad) arv $k = 3$.

Vabadusastmeks saame valemiga (3.1)

$$w = 3k - 2l - t = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1$$

mis ütleb, et konstruktsioon on geomeetriselt muutuv. Geomeetiline muutuvus on tingitud toesidemete vähesusest, mistõttu olemasolevad kaks vertikaalset liikuvat liigendituge võimaldavad arvutuskeemil horisontaalsuunas liikuda.

Skeem b

Sellel arvutuskeemil on lihtliigendite arv $l = 4$, toesidemete arv $t = 4$ ja elementide arv $k = 4$.

Vabadusastmeks saame

$$w = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 4 = 0$$

millest järeldame, et arvutuskeemil on minimaalne arv sidemeid kujumuutumatuse tagamiseks.

Skeem c

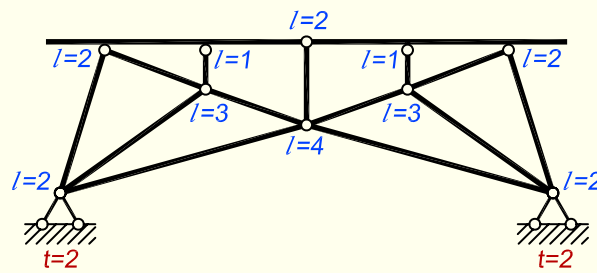
Siin on arvutuskeemi lihtliigendite arv $l = 2$, toesidemete arv $t = 3$ ja elementide arv $k = 2$.

Vabadusastmeks saame

$$w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3 = -1$$

mis näitab, et arvutuskeemil on üks liigside ja skeem on ühekordselt staatikaga määratu: $n = 1$.

NÄIDE 3.2. Leida joonisel 3.3 kujutatud arvutuskeemi vabadusaste.



Joonis 3.3. Arvutuskeem

LAHENDUS

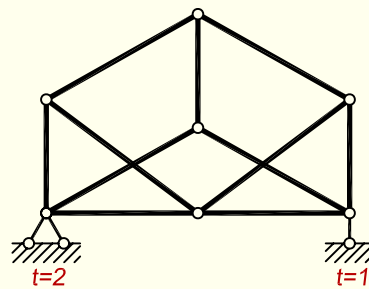
Joonisel esitatud arvutuskeemil on iga liigendi juurde märgitud lihtliigendite arv. Üldine lihtliigendite arv on $l = 22$, elementide arv $k = 15$ ja toesidemete arv $t = 4$.

Vabadusastmeks valemiga (3.1) saame

$$w = 3k - 2l - t = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 22 - 4 = -3$$

Saadud tulemus näitab, et arvutuskeemil on kolm liigside.

NÄIDE 3.3. Leida joonisel 3.4 kujutatud sõrestikskeemi vabadusaste.



Joonis 3.4. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Joonisel esitatud sõrestiku arvutuskeemil on sõlmede arv $s = 7$, varraste arv $v = 11$ ja

toesidemete arv $t = 3$.

Vabadusastmeks saame valemiga (3.4)

$$w = 2s - v - t = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0$$

Sõrestikul on minimaalne arv sidemeid kujumuutumatus tagamiseks.

3.2. Arvutusskeemi pooluste plaan

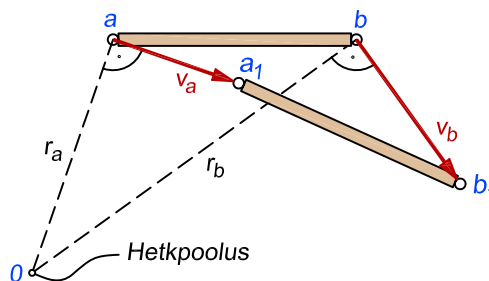
Konstruksioonide kinemaatilise analüüsi käigus on sageli vaja uurida konstruktsiooni elementide liikumist pärast mingite sidemete eemaldamist. Seda saab teha pooluste plaani abil.

Pooluse mõiste

Liikugu tasandkujund $a-b$ oma tasandis asukohta a_1-b_1 (joonis 3.5). Mainitud liikumise käigus toimub kujundi pöördumine ja järgnevalt leiame, millise punkti ümber see pööre toimub. Arvestame ka sellega, et pooluste plaani koostamisel on tegemist lõpmatult lühikese kestusega liikumisega.

Joonisel 3.5 on näidatud kujundi otspunktide a ja b hetkelise liikumise kiirusvektorid v_a ja v_b ning nendest punktidest kiirusvektoritele tõmmatud ristsirged. Saadud ristsirgete lõikumise koht annab meile punkti O , mille ümber toimub kujundi $a-b$ pöördumine. Seda punkti nimetatakse *pöörde hetkeskesmeks* või *hetkpooluseks*. Kujundi hetkpooluse leidmiseks piisab alati selle kujundi kahe punkti kiiruse suunast ning nende tõmmatud ristsirgetest.

Arvutusskeemi mingi kujundi i väikest siiret teise kujundi k suhtes võib vaadelda kui nende kujundite vastastikust pööret ümber ühe reaalse või mõeldava liigendi. Seda liigendit nimetatakse nende kujundite *vastastikuse liikumise hetkpooluseks* või *kõrvalpooluseks* ik . Hetkpooluseid, mille ümber kujundid i ja k pöörduvad, nimetatakse *peapoolusteks* ja tähistatakse iO ja kO . Mehhanismi pea- ja kõrvalpoolused kujundavad *pooluste plaani*.



Joonis 3.5. Tasandkujundi $a-b$ liikumine ümber hetkpooluse O

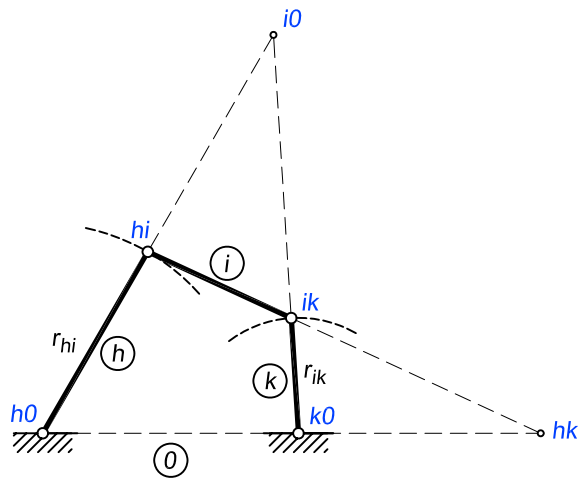
Pooluste plaani koostamine

Kõige lihtsam mehhanism koosneb neljast omavahel liigenditega ühendatud kujundist (joonis 3.6). Kolm varrast h , i ja k on liikuvad ja neljas kujund (ehk toepind) on liikumatu ning tähistatud 0 .

Hetkpoolused $h0$, hi , ik , $k0$ on teada, kuna nad ühtivad kujundeid ühendavate liigenditega. Vardad h ja k pöörduvad ümber peapooluste $h0$ ja $k0$. Varda i peapooluse $i0$ ning varraste h ja k kõrvalpooluse hk asukohad on vaja leida.

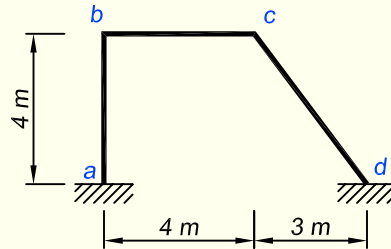
Varda i peapooluse $i0$ asukoha määramiseks on vaja leida varda i kahe punkti liikumise trajektoori normaalide lõikepunkt. Varraste h ja i vastastikuse liikumise pooluse hi trajektoori on mõlemal vardal ühine. Poolus hi liigub ringikaart mööda ümber peapooluse $h0$ raadiusega r_{hi} . Raadius on ringjoonele normaaliks ja seega poolus $i0$ asub raadiuse $h0-hi$ sihil. Samuti on varraste i ja k vastastikuse liikumise pooluse ik trajektoori mõlemal vardal ühine. Poolus ik liigub ringikaart mööda raadiusega r_{ik} ümber pooluse $k0$ ja poolus $i0$ asub ringjoone normaali, s.t raadiuse $k0-ik$ sihil. Seega varda i peapoolus $i0$ asub varraste h ja k sihtide lõikepunktis.

Varraste h ja k vastastikuse liikumise hetkpooluse hk leidmisel eeldame, et varras h on liikumatu ja esialgu liikumatu kujund 0 liikuv; selle juures jääb varraste h ja k suhteline liikumine endiseks. Kasutades nüüd sama mõttekäiku kui pooluse $i0$ leidmisel, võib veenduda, et pooluseks hk on pooluseid hi ja ik ning $h0$ ja $k0$ ühendavate sirgete pikenduste lõikepunkt. Mehhanismi kolme varda h , i ja k kõrvalpoolused hi , ik ning hk asuvad ühel sirgel.



Joonis 3.6. Mehhanismi pooluste plaan

NÄIDE 3.4. Joonisel 3.7 on kujutatud kolmest vardast koosnev raam. Moodustada selle raami varrasahelale pooluste plaan ning arvutada selle abil varrasahela pöörded, kui vasakpoolsele postile on antud ühikpööre $\vartheta_{ab} = 1$.

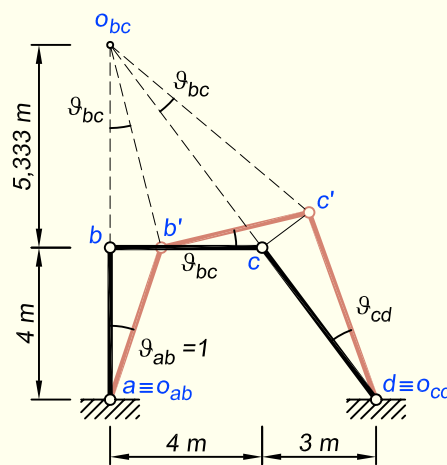


Joonis 3.7. Raami arvutusskeem

LAHENDUS

Varrasahela moodustamiseks lisame raami kõigisse sõlmedesse liigendid (joonis 3.8). Järgnevalt anname vardale $a-b$ lähteülesandes mainitud ühikpöörde $\vartheta_{ab} = 1$. Vardad $a-b$ ja $c-d$ pöörduvad ümber toesõlmede a ja d , mis on seetõttu nende peapoolusteks: $a \equiv o_{ab}$ ja $d \equiv o_{cd}$.

Varda $b-c$ peapoolus o_{bc} paikneb seda vardast toetavate varrasde $a-b$ ja $c-d$ sihtide lõikumise kohas. Sellega on kõigi varrasde peapoolused leitud.



Joonis 3.8. Raami varrasahela pöörded

Järgnevalt saame arvutada varrasde pöörded. Ühendame varrasahela pöördunud asendi nurgasõlmed b' ja c' sirgete abil punktiga o_{bc} . Kolmnurkadel $a-b-b'$ ja $o_{bc}-b-b'$ on üks ühine külg $b-b'$, mille pikkuse avaldame kummastki kolmnurgast, lähtudes sellest, et väikeste nurkade korral võetakse $\tan \alpha \approx \alpha$. Sellest tingimusest avaldame

$$l_{ab}\vartheta_{ab} = -l_{bo_{bc}}\vartheta_{bc}$$

millest saame leida varda $b-c$ pöörde

$$\vartheta_{bc} = -\frac{\vartheta_{ab}l_{ab}}{l_{bo_{bc}}} = -\frac{1 \cdot 4}{5,333} = -0,75$$

Järgnevalt arvutame varda $c-d$ pöördenurga, lähtudes äsja leitud varda $b-c$ pöördest. Kolmnurkade $o_{bc}-c-c'$ ja $d-c-c'$ ühise külje $c-c'$ võrdsuse tingimusest saame

$$-l_{co_{bc}}\vartheta_{bc} = l_{cd}\vartheta_{cd}$$

millest arvutame varda $c-d$ pöörde

$$\vartheta_{cd} = -\frac{\vartheta_{bc}l_{co_{bc}}}{l_{cd}} = -\frac{-0,75 \cdot 6,667}{5} = 1$$

3.3. Virtuaalsiirete printsiip

3.3.1. Virtuaaltöö ja virtuaalsiire

Kui reaalne jõud F läbib reaalse teepikkuse Δ ning jõu suurus jääb selle jooksul konstantseks, siis jõu poolt tehtav töö on $W = F\Delta$. Ehitusmehaanika probleemide lahendamisel kasutatakse sageli lähenemist, kus üks neist, kas jõud või siire, on virtuaalne ehk kujuteldav. Sel juhul räägitakse virtuaaltööst.

Virtuaaltööks δW nimetatakse tööd, mida teeb reaalne jõud virtuaalsiirdel või virtuaaljõud reaalsel siirdel

$$\delta W = F \delta s; \quad \delta W = \delta F \Delta \quad (3.7)$$

kus F on reaalne jõud, δF on virtuaaljõud, Δ on reaalne siire ja δs virtuaalsiire.

Kui arvutusskeemile on rakendatud moment, saame virtuaaltöö avaldisteks

$$\delta W = M \delta \varphi; \quad \delta W = \delta M \varphi \quad (3.8)$$

kus M on tegelik moment, δM on virtuaalmoment, φ on tegelik pööre ja $\delta \varphi$ on virtuaalpööre.

Virtuaalsiirdeks nimetatakse sidemete poolt võimaldatud väikese lõpliku liikumise tulemust, mis ei muuda märgatavalt varraste vastastikust asendit ega nende asukohti aluse suhtes [13].

Virtuaalsiirdeid põhjustavad konstruktsioonile rakendatud tasakaalus koormussüsteemist sõltumatud mõjutused. Ülesande lahendamise käigus me anname arvutusskeemile virtuaalsiirded ja viime sellega arvutusskeemi tema algasendist välja. Virtuaalsiire peab olema piisavalt väike, et see ei muudaks konstruktsioonile rakendatud koormussüsteemi geometriat ega viiks konstruktsiooni mingisse teise asendisse, kus tasakaalutingimused võivad olla teistsugused. Lisaks peab virtuaalsiire olema kooskõlas antud hetkel eksisteerivate arvutusskeemi sidemetega, kuna vastasel juhul me muudaksime vaadeldava mehaanikalise süsteemi kuju.

3.3.2. Virtuaalsiirete printsiip

Kui konstruktsioonile on rakendatud mingi hulk koormuseid, saame üksikute jõudude virtuaaltööde summaks

$$\delta W = F_1 \delta s_1 + F_2 \delta s_2 + F_3 \delta s_3 + \dots + F_n \delta s_n = \sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \quad (3.9)$$

kus kindlasti tuleb arvestada iga jõu puhul ka märki: kui jõud ja siire on samas suunas, siis on virtuaaltöö positiivne, ning kui nad on vastassuunas, siis negatiivne.

Virtuaalsiirete printsiibi võime nüüd sõnastada järgnevalt.

Konstruktsioonile rakendatud tasakaalus olevate jõudude virtuaaltöö konstruktsiooni elementide virtuaalsiiretel võrdub nulliga.

Eelneva definitsiooni saame välja kirjutada kujul

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta s_i = 0 \quad (3.10)$$

Jõu F_i projektsioonide F_{ix} ja F_{iz} ning jõu rakenduspunkti i virtuaalsiirde δs_i projektsioonide δx_i ja δz_i kaudu avaldatuna on virtuaaltöö võrrand (3.10) järgmine

$$\delta W = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iz} \delta z_i) = 0 \quad (3.11)$$

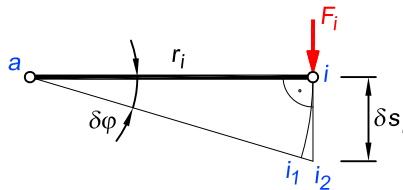
Saadud avaldist nimetatakse ka *staatika üldvõrrandiks* tasandil. Selle teisendamisel jõuame tavaliste staatika tasakaalutingimusteni (2.5).

Kujundi siirdel x -telje sihis on virtuaalsiire $\delta z_i = 0$ ja võrrandi (3.11) asemel võime kirjutada $\sum F_{ix} \delta x_i = 0$. Jagades selle võrrandi siirdega δx_i , saame esimese tasakaalutingimuse (2.5): $\sum F_{ix} = 0$ ehk $\sum X = 0$. Teise tasakaalutingimuse $\sum Z = 0$ saame analoogiliselt, kui kujund siirdub z -telje sihis ja seetõttu siire $\delta x_i = 0$.

Kujundi pöördel ümber mingi punkti a nurga $\delta\varphi$ võrra (joonis 3.9) teeb jõud F_i virtuaaltööd

$$\delta W = F_i \delta s_i = F_i r_i \delta\varphi \quad (3.12)$$

kus r_i on jõu F_i rakenduspunkti kaugus punktist a . Kujundi pöördel liigub punkt i piki ringi kaart raadiusega r_i asukohta i_1 . Küllalt väikese siirde puhul eemaldub kaar väga vähe puutujast ning siirde $i-i_1$ asemel võib küllaldase täpsusega võtta kaarele punktis i tõmmatud puutujasihilise lõigu $i-i_2$. Jõu F_i moment punkti a suhtes on $M_a = F_i r_i$ ning virtuaaltöö võrrand



Joonis 3.9. Jõu virtuaaltöö pöördel

kujundi pöördel $\delta\varphi$ on $\sum M_a \delta\varphi = 0$. Kui jagada see võrrand virtuaalpöördega $\delta\varphi$, siis saame kolmanda tasakaalutingimuse $\sum M_a = 0$.

Virtuaalsiirete printsiibi esitas tänapäeval kasutatavale sarnasel kujul, kuid ilma tõestuse- ta, esimesena J. Bernoulli 1717. aastal. Üldkujul formuleeris selle hiljem J. Lagrange. Tema esitas aastal 1788 esmakordselt ka selle printsiibi tõestuse.

3.3.3. Virtuaalsiirete printsiibi rakendusi

Virtuaalsiirete printsiibi abil saab suhteliselt lihtsalt arvutada keerukamate konstruktsioonide sisejõudusid ja toereaktsioone. Meil on võimalik leida mõni suvaline üksik toereaktsioon, sõltumata teistest reaktsioonidest. Samuti võime arvutada meid huvitavas arvutusskeemi lõikes mingi sisejõu otse koormusest, ilma et oleks vaja eelnevalt leida toereaktsioone.

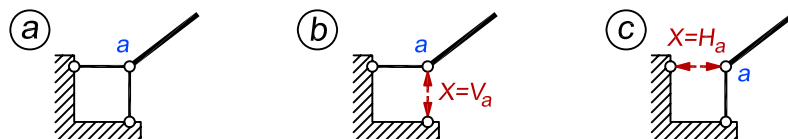
Virtuaalsiirete printsiibi rakendamiseks eemaldame staatikaga määratavast ja geomeetriliselt muutumatust arvutusskeemist selle sideme, milles tahame leida reaktsiooni või sisejõudu, ja sideme mõju asendame toereaktsiooni või sisejõuga, mis mõjub nüüd kui välisjõud. Ühe sideme eemaldamisega muudame geomeetriliselt muutumatu ja staatikaga määratava arvutusskeemi mehhanismiks. Edaspidi nimetame sisejõudude ning toereaktsioonide arvutamist virtuaalsiirete printsiibi abil *kinemaatika meetodiks*.

Sidemete eemaldamine

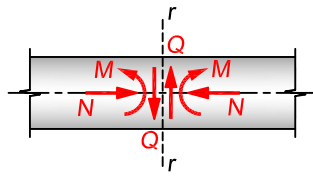
Liikumatu le liigendtoele vastavad sidemed on kujutatud joonisel 3.10, a. **Toereaktsiooni** F_a vertikaalse ja horisontaalse komponendi leidmiseks eemaldame vastavalt vertikaalse ja horisontaalse varda ning selle mõju asendame kahe võrdse vastupidi suunatud jõuga $X = V_a$ ning $X = H_a$ (joonis 3.10, b ja c).

Sisejõudude M , Q , N leidmisel kinemaatika meetodiga on varda ristlõikele r (joonis 3.11) ekvivalentset sidemed kujutatud joonisel 3.12, a, e ja i. Kolme sideme a , b ja c asetus varda vasak- ja parempoolse osa vahel võib olla mitmesugune, kuid peab rahuldama geomeetriliselt muutumatult ühendamise tingimust: varraste a , b ja c sihid ei tohi olla paralleelsed ega lõikuda ühes punktis.

Paindemomendi M_r leidmisel on varraste asetuse skeem näidatud joonisel 3.12, a. Eemaldame sideme c ja selle asemele rakendame kaks võrdset ning vastupidi mõjuvat jõudu (joonis 3.12, b). Pärast sideme c eemaldamist võib varda vasakpoolne kujund 1 pöörduda parempoolse kujundi 2 suhtes ümber pooluse 12 (joonis 3.12, b). Sellise ühenduse tinglik kujutis on näidatud joonisel 3.12, c.



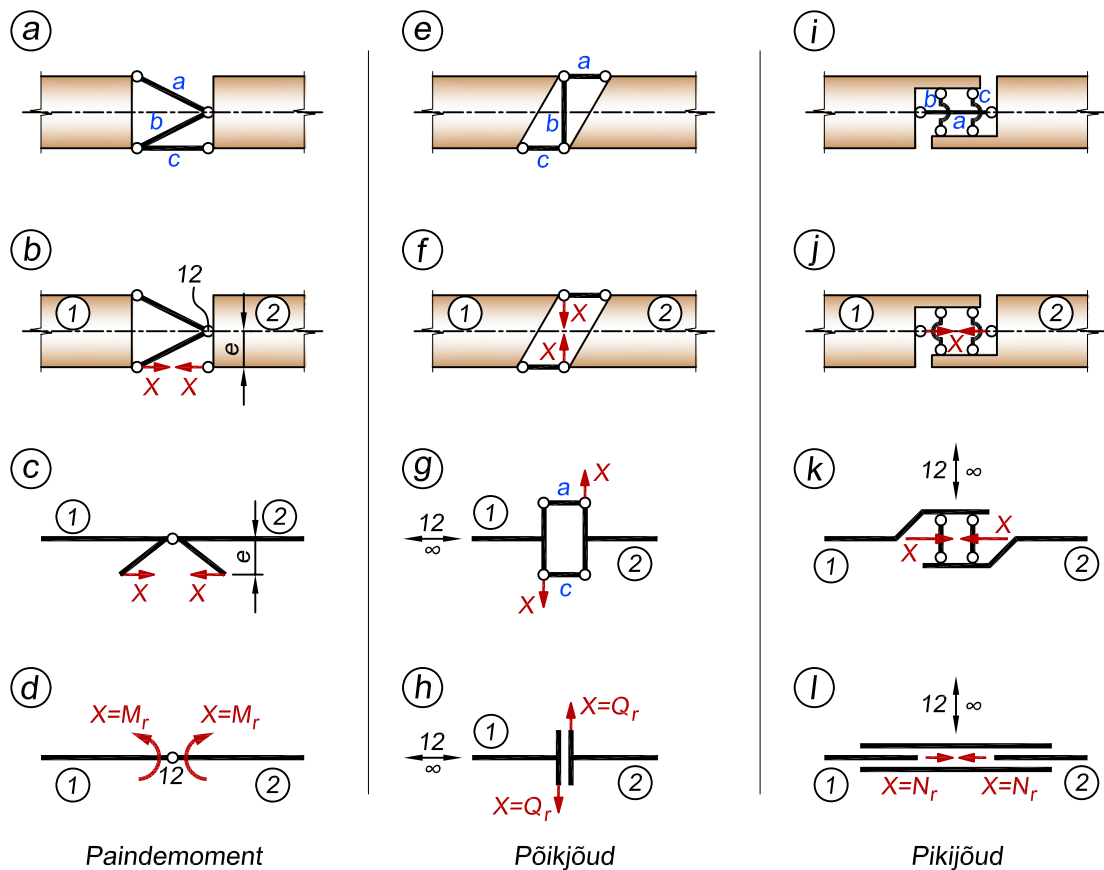
Joonis 3.10. Liikumatu le liigendtoele vastavate sidemete eemaldamine



Joonis 3.11. Sisejõud varda ristlõikes r

Tundmatu jõ X moment varda teljel asuva pooluse 12 suhtes on $M_r = Xe$, milles e on pooluse 12 kaugus jõ X sihist. Kui võtta jõ õlaks ühikpikkus $e = 1$, siis jõ X moment pooluse 12 suhtes võrdub jõ suurusega $M_r = X$ (joonis 3.12, *d*).

Joonisel 3.12, *e* näidatud sidemete asetuse puhul on **põikjõud** ristlõikes r võrdne sideme b sisejõuga. Põikjõu leidmisel eemaldame varda b ja tema mõju asendame kahe võrdse ja vastupidi suunatud jõuga $X = Q_r$ (joonis 3.12, *f*). Allesjäänud ühendusvardad a ja c on varda teljega paralleelsed ja ühendatavate elementide 1 ning 2 vastastikuse liikumise hetkpoolus 12 asub ühendusvarraste sihis, s.t varda telje sihil lõpmatuses. Sellise ühenduse tinglik kujutus on näidatud joonisel 3.12, *g* ja *h*. Mehhanismi võimalikus siirdeolukorras jäävad elementide 1 ja 2 teljed paralleelseteks.



Joonis 3.12. Sidemete eemaldamine ja asendamine kaksikjõuga X_r

Joonisel 3.12, i näidatud ühendusvarraste a , b , c asetuse puhul on **pikijõud** ristlõikes võrdne varda a sisejõuga ja pikijõu leidmisel eemaldame selle sideme (joonis 3.12, j). Pärast varda a kõrvaldamist asendame tema mõju pikijõuga $X = N_r$. Allesjäänud paralleelsed, varda telgjoonega risti olevad ühendusvardad b ja c võimaldavad elementidel 1 ning 2 üksteisele läheneda või eemalduda, kusjuures elementide telgjooned moodustavad sirge. Elementide 1 ja 2 vastastikuse liikumise hetkpoolus 12 asub kahe ühendusvarda (b , c) sihis, s.t varda telgjoone ristsirgel lõpmatutes. Niisuguse ühenduse tinglik kujutis on esitatud joonisel 3.12, k ja l .

Lisame veel, et joonisel 3.12, c kujutatud elementi nimetatakse *paindemomendi liigendiks*, mis on meile tuntud harilik liigend. Joonisel 3.12, g ja k on vastavalt kujutatud *põikjõu* ja *pikijõu liigendid*.

Võrrand toereaktsioonide ja sisejõudude leidmiseks

Koormuse ja kaksikjõu X_r mõjul tasakaalus oleva mehhanismi jaoks koostame virtuaalsiirete printsiibi alusel võrrandi

$$X_r \delta r + \sum F_i \delta s_i = 0 \quad (3.13)$$

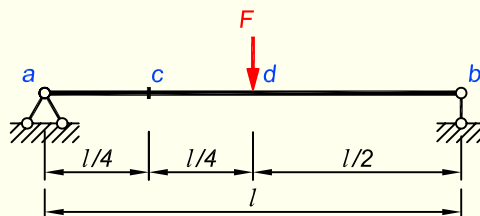
kus δr on kaksikjõu Q_r või N_r rakenduspunktide siirete projektsioonide summa jõudude X_r sihile või kaksikmomendi M_r ristlõigete, kus momendid on rakendatud, vastastikune pööre ja δs_i on jõu F_i rakenduspunkti siirde projektsioon jõu sihile. Meenutame siin ka valemit (3.9) juures esitatud märgireeglit, mille kohaselt on jõu ja siirde korrutis positiivne, kui jõud ja siire on samas suunas. Vastupidisel juhul on korrutis negatiivne.

Võrrandist (3.13) leiame tundmatu

$$X_r = - \frac{\sum F_i \delta s_i}{\delta r} \quad (3.14)$$

Siirded δr ja δs_i leiame mehhanismi pooluste plaanist. Juhul kui $\delta r = 0$ ja $\delta s_i \neq 0$, järeldeb võrrandist (3.13), et arvutusskeemis võivad ka deformeerimata elementide puhul esineda siirded, kui reaktsioonile X_r vastav side ei ole eemaldatud. Niisugune arvutusskeem on hetkmuutuv. Kuna hetkmuutuv arvutusskeem ei ole ehituskonstruksioonina kõlbulik, siis vaatleme edaspidi ainult selliseid juhtusid, kus $\delta r \neq 0$ ja $\delta s_i \neq 0$.

NÄIDE 3.5. Leida kinemaatika meetodiga joonisel 3.13 kujutatud tala ristlõikes c paindemoment ja põikjõud.

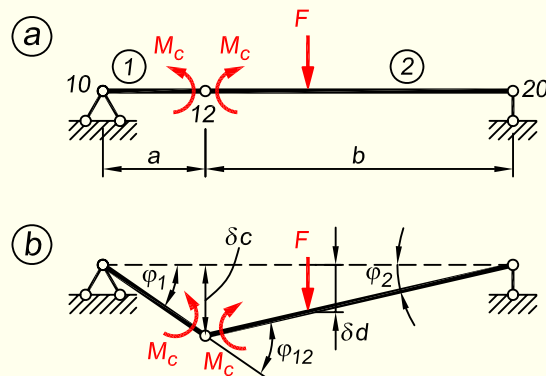


Joonis 3.13. Tala arvutusskeem

LAHENDUS

1. Paindemomendi arvutamisel lõikes c eemaldame sellest lõikest paindemomenti vastuvõtva sideme ja rakendame sinna kaks momenti positiivsete suundadega, mis tähendab, et momendinoole saba jääb varda alumisele ehk tõmmatud poolele (joonis 3.14, a).

Virtuaalsiirete printsiibi kasutamiseks tuleb nüüd moodustada arvutusskeemi pooluste plaan ja anda elementidele siirded. Element 1 on vasakul otsas kinnitatud liikumatu liigendtoega ja pöörduv seetõttu ümber liigendi a , mis on ka peapooluseks 10. Elementide 1 ja 2 ühendusliigend lõikes c on kõrvalpooluseks 12. Elementi 2 peapooluseks 20 on teda toetavate varraste ehk elementi 1 ja toesideme b sihtide lõikepunkt.



Joonis 3.14. Paindemomendi arvutus

Kõrvalpooluse 12 siirde tähistame δc (joonis 3.14, b) ja elementide pööreteks saame

$$\varphi_1 = \frac{\delta c}{a}; \quad \varphi_2 = \frac{\delta c}{b}$$

kuna väikeste nurkade korral võetakse $\tan \alpha \approx \alpha$. Elementide vastastikune pööre on

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\delta c}{a} + \frac{\delta c}{b} = \delta c \frac{a+b}{a \cdot b} = \delta c \frac{l}{a \cdot b}$$

Võtame φ_{12} ühikuliseks pöördenurgaks ehk $\varphi_{12} = 1$, misjärel saame avaldada siirde δc väärtuse

$$\delta c = \frac{ab}{l}$$

Kirjutame virtuaalsiirete printsiibi abil vastavalt valemile (3.13) välja võrrandi

$$-M_c \varphi_{12} + F \delta d = 0$$

kus esimese liikme ees on miinusmärk, kuna elementide pööre on vastupidine momendile M_c . Võrrandist avaldame paindemomendi

$$M_c = \frac{F \delta d}{\varphi_{12}}$$

kus esineva siirde δd avaldame δc kaudu

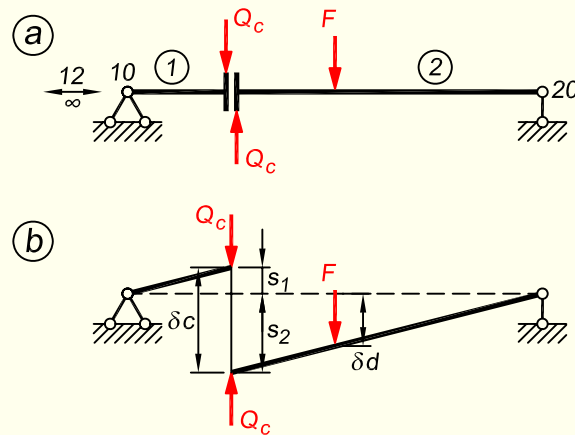
$$\delta d = \frac{\delta c}{b} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\delta c \cdot l}{2b} \Rightarrow \delta d = \frac{ab}{l} \frac{l}{2b} = \frac{a}{2} = \frac{l}{8}$$

Paindemomendiks lõikes c saame

$$M_c = \frac{F \delta d}{\varphi_{12}} = \frac{F}{1} \cdot \frac{l}{8} = \frac{Fl}{8}$$

2. Põikjõu leidmiseks eemaldame ristlõikest c põikjõudu vastuvõtva sideme ja asendame selle mõju kahe positiivse suunaga jõuga Q_c , mis tähendab, et need jõud hakkavad vastavat vardaosa pöörama päripäeva (joonis 3.15, a).

Järgnevalt moodustame pooluste plaani. Elementi 1 peapooluseks 10 on toeliigend a . Elementide 1 ja 2 kõrvalpoolus 12 asub tala telje sihis lõpmatuses, mistõttu elemendi 2 peapooluseks 20 on selle horisontaalsihi ja toesideme b sihi lõikepunkt.



Joonis 3.15. Põikjõu arvutus

Mehhanismi elementidele anname niisugused siirded, et põikjõule Q_c vastav siire oleks ühikulise suurusega $\delta c = 1$. Elementide 1 ja 2 vastastikune eemaldumine lõike c kohal on $s_1 + s_2 = \delta c$ (joonis 3.15, b). Elementid 1 ja 2 on ühendatud kahe paralleelse vardaga ja jäävad paralleelseteks, millest

$$s_1 = \frac{\delta c}{4} = \frac{1}{4}; \quad s_2 = -\delta c \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Kirjutame virtuaalsiirete printsiibi abil välja avaldise

$$-Q_c \delta c + F \delta d = 0$$

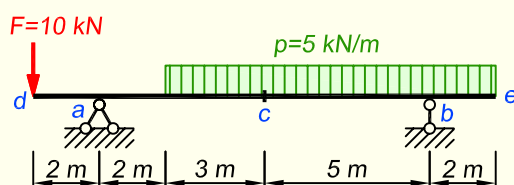
kus esimese liikme ees on miinusmärk, kuna varraste otste siire on vastupidine jõule Q_c . Jõule F vastav siire on

$$\delta d = \frac{s_2}{0,75l} \cdot \frac{l}{2} = s_2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

ja põikjõud

$$Q_c = F \frac{\delta d}{\delta c} = \frac{F}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{F}{2}$$

NÄIDE 3.6. Leida kinemaatika meetodiga joonisel 3.16 kujutatud tala ristlõikes c paindemoment.



Joonis 3.16. Tala arvutuskeem

LAHENDUS

Paindemomendi arvutamiseks lõikes c lisame sinna liigendi ning rakendame kaks positiivsete suundadega momenti (joonis 3.17, a). Pooluste plaani koostamist siin näites pikemalt ei vaata, mainime ainult ära, et element 1 pöörduv toe a peal, mis on selle elemendi peapooluseks 10. Elemendi 2 peapooluseks 20 on toeliigend b .

Anname varraste vastastikuse pöördumise kõrvalpoolusele 12 vertikaalsiirde δc ning avaldame kõik ülejäänud siirded ja pöörded selle kaudu (joonis 3.17, b). Vaja läheb edasises arvutuses varraste vastastikust pööret liigendi c kohal

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\delta c}{5} + \frac{\delta c}{5} = \frac{2}{5} \delta c = 0,4 \delta c$$

Lauskoormuse korral tuleb leida selle resultant. Oluline on siinjuures see, et kui koormus jääb virtuaalsiirete skeemil mitme varda kohale, tuleb iga varda ulatuses leida eraldi resultant. Siin ülesandes arvutame seetõttu resultandi elemendi 1 kohale jäävast 3 m pikkusest lauskoormuse osast ning elemendi 2 kohale jäävast 7 m pikkusest osast. Nendele vastavad siirded tähistame δf ja δg . Resultantide väärtusteks saame

$$F_{res1} = 5 \cdot 3 = 15 \text{ kN}; \quad F_{res2} = 5 \cdot 7 = 35 \text{ kN}$$

Järgnevalt leiame kõigi vajalike siirete väärtused

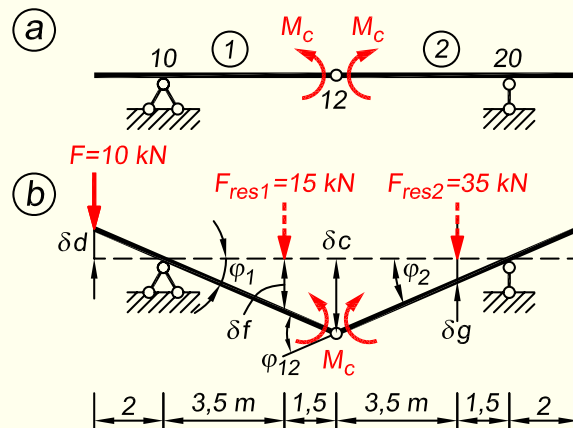
$$\delta d = \frac{2}{5} \delta c = 0,4 \delta c; \quad \delta f = \frac{3,5}{5} \delta c = 0,7 \delta c; \quad \delta g = \frac{1,5}{5} \delta c = 0,3 \delta c$$

Nüüd saame vastavalt valemile (3.13) välja kirjutada virtuaalsiirete võrrandi

$$-M_c \varphi_{12} - 10 \cdot 0,4 \delta c + 15 \cdot 0,7 \delta c + 35 \cdot 0,3 \delta c = 0$$

millest paindemomendi väärtuseks tuleb

$$M_c = \frac{17 \delta c}{0,4 \delta c} = 42,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Joonis 3.17. Paindemomendi arvutus

Lauskoormust saab ka teisiti arvesse võtta. Me võime korrutada koormuse intensiivsuse pindalaga, mis jääb tala esialgse ja siirdunud asendi vahele (joonis 3.18). Arvutame selle pindala, pöörates tähelepanu ka märkidele: kui vaadeldav pindala on nulljoonest allpool, tuleb see võtta positiivsena, ja kui ülevalpool, tuleb seda arvestada negatiivsena

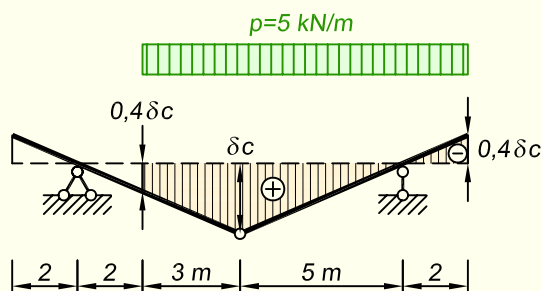
$$A = \frac{0,4\delta c + \delta c}{2} \cdot 3 + \frac{\delta c \cdot 5}{2} - \frac{0,4\delta c \cdot 2}{2} = 4,2\delta c$$

Nüüd kujuneb virtuaalsiirete võrrandiks

$$-M_c \varphi_{12} - 10 \cdot 0,4\delta c + 5 \cdot 4,2\delta c = 0$$

misjärel saame paindemomendi samasuguse nagu eespool

$$M_c = \frac{17\delta c}{0,4\delta c} = 42,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 3.18. Tala esialgse ja siirdunud asendi vaheline pindala

Peatükk 4

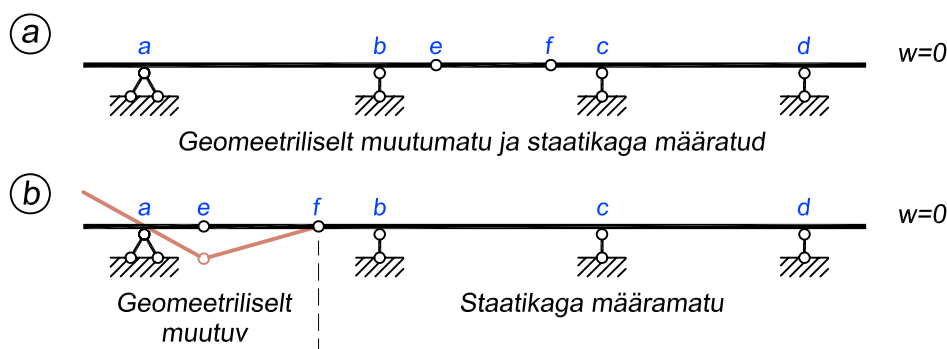
ARVUTUSSKEEMI GEOMEETRILISE STRUKTUURI ANALÜÜS

4.1. Analüüsi mõte

Arvutusskeemi geometria hindamine ei piirdu ainult staatikaga määratuse ja vabadusastme arvutamisega. Lisaks tuleb konstruktsiooni geomeetrisel struktuuri analüüsida ning vaadelda elementide paiknemist üksteise suhtes, nende kinnitusi ja toesidemete asendit.

Oluline on siinjuures see, et iga geomeetriselt muutumatu konstruktsiooni vabadusaste võrdub nulliga või on negatiivne. Kuid iga negatiivse või nullvabadusastmega konstruktsioon ei ole geomeetriselt muutumatu. Esineb samatüübilisi konstruktsioone, milles kujundite, liigendite ja toesidemete arvud on võrdsed, kuid nende erineva asetuse tõttu on konstruktsioonid erinevad: kas *geomeetriselt muutumatud*, *geomeetriselt muutuvad* või *hetkmuutuvad*.

Näiteks joonisel 4.1 kujutatud talad on moodustatud kolmest vardast, mis on omavahel ühendatud kahe liigendiga ja millel on neli tuge viie toesidemega. Mõlema tala vabadusaste on seega $w = 3k - 2l - t = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$, kuid oma struktuurilt on need arvutusskeemid täiesti erinevad. Joonisel 4.1, a kujutatud tala on geomeetriselt muutumatu ja staatikaga määratud. Joonisel 4.1, b esitatud talal on aga vasakpoolne osa geomeetriselt muutuv. Sellel



Joonis 4.1. Kahe võrdse vabadusastmega tala võrdlus

talal võib liigend e liikuda alla ja üles, samas kui tala parempoolisel osal $f-d$ on üks liigside ja see osa on staatikaga määratu.

Koos vabadusastme määramisega tuleb seetõttu arvutusskeemi struktuuri geomeetriselt analüüsida: vaatluse teel selgitame, kas nullvabadusastmega arvutusskeemi elemendid on üksteisega ühendatud niiviisi, et oleks tagatud geomeetiline muutumatus ja staatikaga määratavus või on mõnel konstruktsiooni osal liigsideid ja samal ajal teine osa on liikuv. Praegu sai mainitud nullvabadusastmega arvutusskeemi, kuid sarnaselt tuleb hinnata ka negatiivse vabadusastmega (ehk liigsidemetega staatikaga määratu) konstruktsiooni tööd – ka staatikaga määratul skeemil võib mõni osa olla geomeetriselt muutuv.

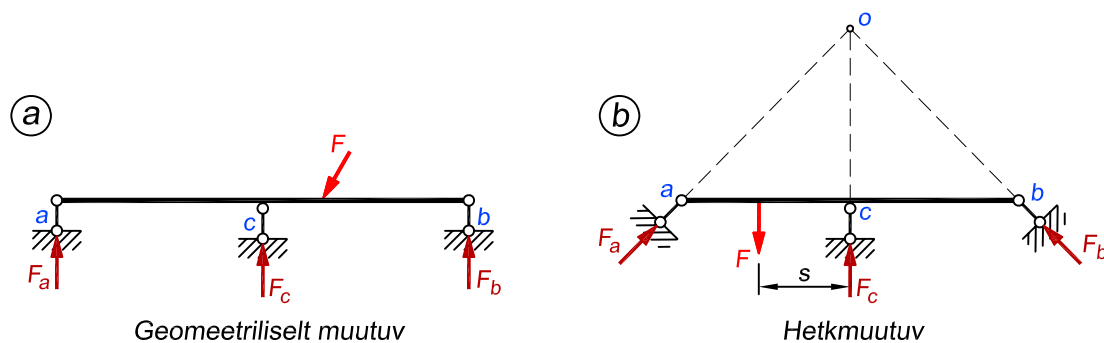
Lisaks tuleb kontrollida ka arvutusskeemi hetkmuutumatust.

4.2. Geomeetriselise muutumatuse põhitunnused

Geomeetriselt muutumatu ja liikumatu konstruktsiooni elemendid võivad olla mitmeti ühendatud. Geomeetriselise struktuuri analüüsimisel peab tundma geomeetriselt muutumatute konstruktsioonide põhitunnuseid.

Üksiku elemendi kinnitus toepinna külge

Peatükis 3.1 jõudsime järeldusele, et tasandilisel kujundil on vaja vähemalt kolme toesidet geomeetriselise muutumatuse tagamiseks. Kuid lisaks sellele on oluline ka nende sidemete asend. Joonisel 4.2, a on kujutatud kolme toesidemega tala, mis sidemete arvule vaatamata on geomeetriselt muutuv, kuna kõik toed on paralleelsed ega võta seetõttu vastu horisontaalsuunalist reaktsiooni ja võimaldavad talal horisontaalselt liikuda.



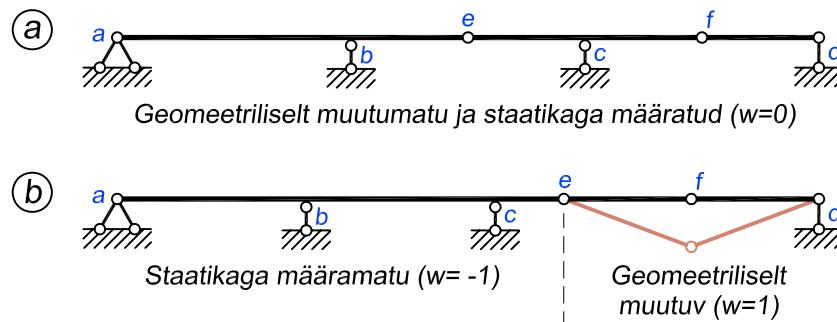
Joonis 4.2. Paralleelsete ning ühte punkti koonduvate toesidemetega talad

Teine mitesobiv variant toesidemete paiknemiseks on esitatud joonisel 4.2, b , kus kõigi kolme toereaktsiooni mõjusirged on suunatud ühte punkti ehk moodustavad koonduva jõusüsteemi. Kui nüüd rakendada sellele arvutusskeemile mingi koormus F , siis näeme, et momentide tasakaalutingimus punkti o suhtes ei võrdu nulliga: $\sum M_o = Fs \neq 0$. See aga tähendab, et arvutusskeem hakkab ümber punkti o pöörduma. Kirjeldatud toesidemete paiknemise korral ei saa see pööre küll täiesti vabalt toimuda, vaid ainult hetkeliselt mingil määral ja sellist arvutusskeemi nimetatakse *hetkmuutuvaks*. Pikemalt on hetkmuutuvusest räägitud allpool.

Mitmest elemendist koosnevad arvutusskeemid

Geomeetriliselt muutumatu arvutusskeemi kõik üksikud osad peavad samuti geomeetriliselt muutumatud olema, mis tähendab, et rohkem kui ühest elemendist koosneva arvutusskeemi puhul tuleb jälgida, et igal selle üksikul elemendil oleks piisav arv toesidemeid.

Joonisel 4.3, *a* kujutatud tala vabadusaste on $w = 3k - 2l - t = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$, mis ütleb, et arvutusskeemil on minimaalne vajalik arv sidemeid geomeetrilise muutumatuse ja staatikaga määratavuse tagamiseks. Järgnevalt analüüsime vaatluse teel, kas kõik sidemed paiknevad selliselt, et ükski selle arvutusskeemi osa poleks liikuv. Näeme, et varras *a-e* on kolme toesidemega, mis ei ole paralleelsed ega moodusta koonduvat jõusüsteemi, mistõttu see element on kujukindel. Kuna element *a-e* on liikumatu, siis tema parempoolses otsas olev liigend *e* on samuti nii vertikaal- kui horisontaalsuunas fikseeritud ning töötab elemendi *e-f* jaoks nagu kahe toesidemega liikumatu liigendtugi. Kui lisada siia juurde tugi *c*, siis saame öelda, et elemendil *e-f* on kolm sobivas asendis toesidet ning see element on geomeetriliselt muutumatu. Sellest järeldub omakorda, et liigendi *f* asend on igas suunas fikseeritud ja see liigend töötab elemendi *f-d* jaoks nagu liikumatu liigendtugi. Kuna elemendil *f-d* on samuti kokku kolm toesidet, siis on järelikult kogu arvutusskeem geomeetriliselt muutumatu ja staatikaga määratud.

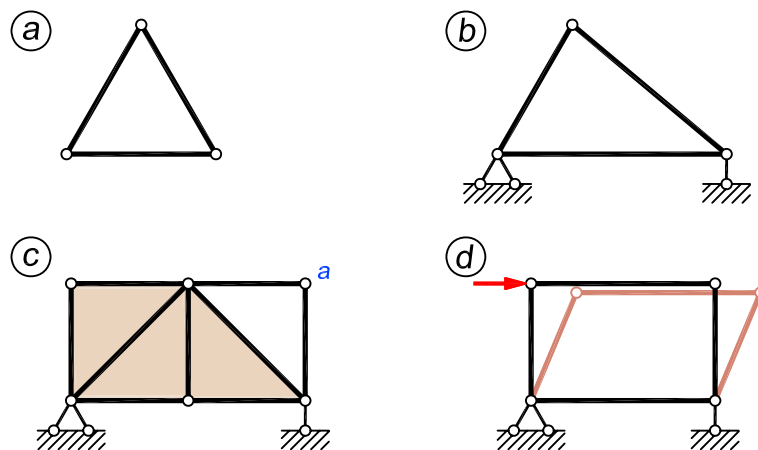


Joonis 4.3. Mõningate talade geomeetrilise struktuuri analüüs

Joonisel 4.3, *b* näidatud tala elementide, liigendite ja toesidemete arv on sama nagu ülises skeemil ja seetõttu ka selle tala üldine vabadusaste võrdub nulliga. Siin on aga elemendil *a-e* neli toesidet, mis tagavad kujukindluse, kuid muudavad elemendi staatikaga määramatuks. Arvutusskeemi osa *a-e* vabadusaste on $w = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = -1$. Kahel parempoolsel vardal *e-f* ja *f-d* on kahepeale kokku aga ainult kolm toesidet (kaks sidet liigendi *e* kohal ja üks toel *d*), mis on ilmselgelt liiga vähe ja arvutusskeemi osa *e-f-d* vabadusaste on $w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1$. Miski ei takista liigendi *f* vertikaalset siiret, mistõttu liigendist *e* paremale jääv osa on ehituskonstruktsioonina kõlbmatu.

Üks lihtsaim geomeetriliselt muutumatu kujund (joonis 4.4, *a*) või konstruktsioon (joonis 4.4, *b*) koosneb kolmest elemendist, mis on ühendatud kolme mitte ühel sirgel asetseva liigendiga. Ehk teisiti öeldes on tegemist kolmnurgaga.

Joonisel 4.4, *c* on kujutatud geomeetriliselt muutumatu esialgne arvutusskeem (värvitud taustaga osa), millele lisame uue sõlme *a* kahe mitte ühel sirgel asetseva vardaga, mis on sõlmes *a* teineteisega ühendatud liigendiga. Liigendkolmnurkadest moodustatud kujund, mille



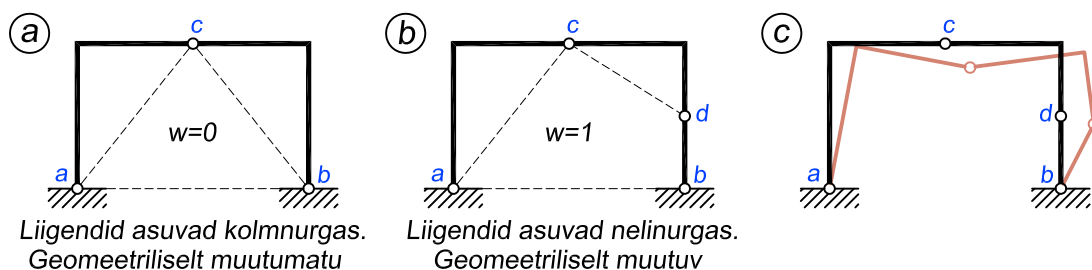
Joonis 4.4. Lihtsate geomeetriselt muutumatute kujundite moodustamine kolmnurgast, võrdluseks geomeetriselt muutuv ristkülik

saame algsele arvutuskeemile kahe mitte ühel sirgel asetseva vardaga uue sõlme lisamise teel, on geomeetriselt muutumatu.

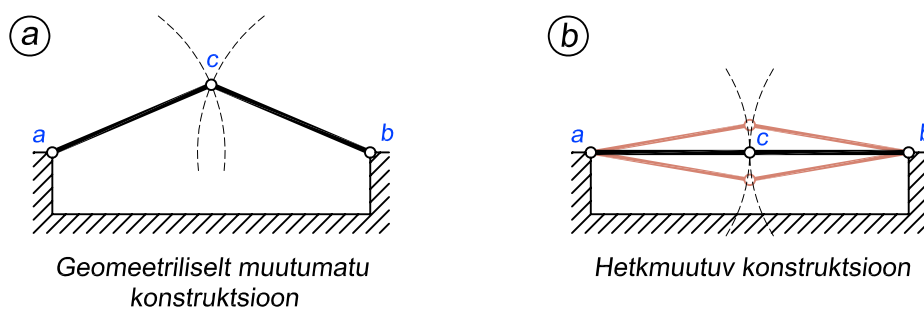
Kuna kolmnurk on lihtsaim geomeetriselt muutumatu kujund, siis kasutatakse seda väga laialdaselt ehituskonstruktsioonides, et hooneid jäigastada. Näiteks karkasshoonete puhul lisatakse mõnede postide vahele diagonaalsed vardad, mis tekitavad karkassile sisse kolmnurkad. Samuti on üheks põhiliseks konstruktsioonitüübiks sõrestik, mis üldjuhul moodustatakse samuti kolmnurkadest. Joonisel 4.4, b ja c esitatud arvutuskeemid ongi lihtsad sõrestikud.

Võrdluseks toome siia juurde liigendsõlmedega ristkülikukujulise arvutuskeemi (joonis 4.4, d), mille kuju saame vabalt muuta ilma varraste deformeerumiseta. See arvutuskeem on geomeetriselt muutuv.

Kolmnurk tagab kujukindluse sageli ka konstruktsioonides, kus tema olemasolu esmapilgul võib märkamatuks jääda. Joonisel 4.5, a kujutatud raami vabadusaste on $w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$. Raamis on kolm liigendit, mis moodustavad kolmnurga ja seetõttu on tagatud raami kujukindlus. Joonisel 4.5, b esitatud raamis on aga neli liigendit ja vabadusaste seega $w = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$, mis ütleb, et konstruktsioon on geomeetriselt muutuv. Kuna liigendid moodustavad nelinurga, siis on geomeetiline muutuvus aga määratav ka visuaalselt, ilma



Joonis 4.5. Raami kujukindluse sõltuvus liigendite paiknemisest



Joonis 4.6. Geomeetriselt muutumatu konstruktsiooni oluline tunnus

vabadusastet arvutamata. Joonisel 4.5, c on kujutatud selle raami osade siirdumine, mis on võimalik tänu liigendite paiknemisele.

Siin tuleb aga kindlasti juhtida tähelepanu sellele, et alati ei saa lähtuda ainult liigendite arvust, sest keerukamatel raamidil võib mõnes sildes olla rohkem kui kolm liigendit, aga sellele vaatamata on tagatud raami kujukindlus tänu kõrvalolevates sildetes eksisteerivatele sidemetele.

Joonisel 4.6, a on näha geomeetriselt muutumatu kujundi üks oluline tunnus – kui märkida mõlemale elemendile nende liitumise sõlmes c elemendi otsa liikumistrajektoor (pöörates vasakpoolset varrast ümber punkti a ja parempoolset ümber punkti b), siis need trajektoorid ei tohi omada ühist puutujat. Kui kõik kolm liigendit asetsevad ühel sirgel, siis on konstruktsioon hetkmuutuv (joonis 4.6, b), kuna keskmine liigend c saab vertikaalsihis hetkeliselt liikuda. Sellel skeemil on elementide otste trajektooridel ühine puutuja.

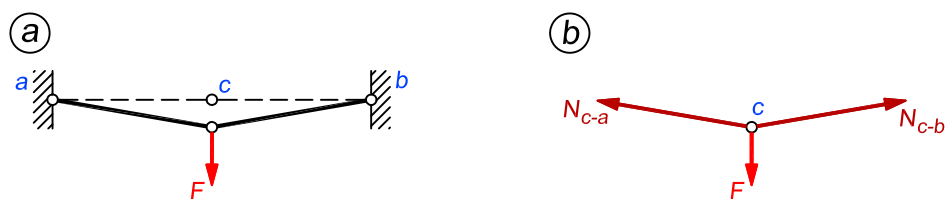
4.3. Hetkmuutuvus

Eelnevas peatükis tõime välja kaks hetkmuutuvust põhjustavat arvutusskeemi omadust ja võtame need siinkohal veel korra kokku. Joonisel 4.2, b esitasime tala, mille kõik kolm toereaktsiooni on suunatud ühte punkti ehk moodustavad koonduva jõusüsteemi. Teise hetkmuutuva konstruktsiooni kujutasime joonisel 4.6, b , kus arvutusskeem koosneb kahest samal sirgel olevast vardast ja kolmest liigendist. Kuid kaks varrast ja kolm liigendit ühel sirgel on vajalik, aga mitte piisav tingimus selleks, et arvutusskeem oleks hetkmuutuv. Näiteks joonisel 4.3, b esitatud talal on parempoolses otsas sarnane olukord, kuid seal on tegemist geomeetriselt muutuva skeemiga.

Järgnevalt esitame hetkmuutuva arvutusskeemi kõige olulisema tunnuse.

Hetkmuutuvas arvutusskeemis võib lõplik koormus põhjustada teoreetiliselt lõpmata suuri, praktiliselt aga väga suuri toereaktsioone ja sisejõude.

Mainitud põhitõde määrab ära, mille poolest erinevad teineteisest geomeetriselt muutuv ja hetkmuutuv arvutusskeem, kuna geomeetriselt muutuv konstruktsioonis saavad vardad vabalt pöörduda, ilma et see põhjustaks elementides sisejõudusid. Kui pöörduda tagasi joo-



Joonis 4.7. Väga suurte sisejõudude tekkimine hetkmuutuvas konstruktsioonis

nise 4.3, b juurde, siis näeme, et selle tala elemendid $e-f$ ja $f-d$ saavad vabalt üles-alla liikuda ja see ei tekita sinna mingeid sisejõudusid. Joonisega 4.6, b on aga olukord teistsugune. Rakendades keskmisse sõlme c vertikaalse koormuse (joonis 4.7, a), tekivad varrastes $a-c$ ja $b-c$ suured pikijõud. Põhjus seisneb selles, et kuna toeliigendid a ja b on liikumatud, siis saab sõlm c allapoole liikuda ainult varraste $a-c$ ja $b-c$ pikemaks venimise arvelt, mis aga põhjustab varrastes tõmbejõude. Mida suurem on varraste pikkejäikus, seda vähem nad pikenevad ja seda vähem saab sõlm c siirduda. Sõlme tasakaalu skeemilt (joonis 4.7, b) näeme, et kuna varraste pikijõudusid kujutavad noolekesed N_{c-a} ja N_{c-b} on väga lähedal horisontaalile, siis peavad nad koormuse F tasakaalustamiseks olema väga suured.

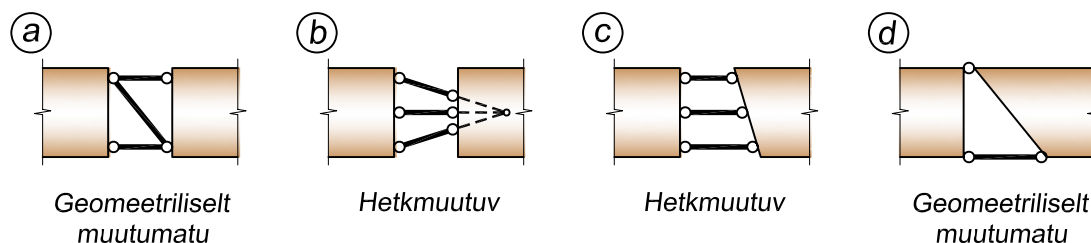
Seetõttu võime kokkuvõtvalt öelda, et kui arvutusskeemi elementidel on võimalik vabalt liikuda, deformeerumata ja sisejõudude tekkimiseta, siis on see konstruktsioon geomeetriselt muutuv. Kui aga liikumine on võimalik hetkeliselt ehk väga väikeses ulatuses ja see põhjustab varrastesse suuri sisejõudusid, siis nimetame arvutusskeemi hetkmuutuvas.

Nii nagu geomeetriselt muutuvat arvutusskeemi ei tohi ehituskonstruktsioonides kasutada, ei tohi seda teha ka hetkmuutuva skeemiga. Soovitav on vältida ka hetkmuutuvasse lähedasi konstruktsioone, kuna sisejõud neis võivad kujuneda väga suureks.

Kahe geomeetriselt muutumatu kujundi ühendamine kolme vardaga

Kahe geomeetriselt muutumatu kujundi ühendamisel kolme vardaga tuleb jälgida, et tekkiv konstruktsioon ei oleks hetkmuutuvas.

Kui me kasutame kolme varrast, mille sihid ei lõiku ühes punktis ega pole ka paralleelsed, saame uue geomeetriselt muutumatu kujundi (joonis 4.8, a). Kui kolme ühendusvarda sihid lõikuvad ühes punktis (joonis 4.8, b) või on paralleelsed, kusjuures vardad on erineva pikkusega (joonis 4.8, c), siis on kujund hetkmuutuvas.



Joonis 4.8. Kahe kujundi ühendamine

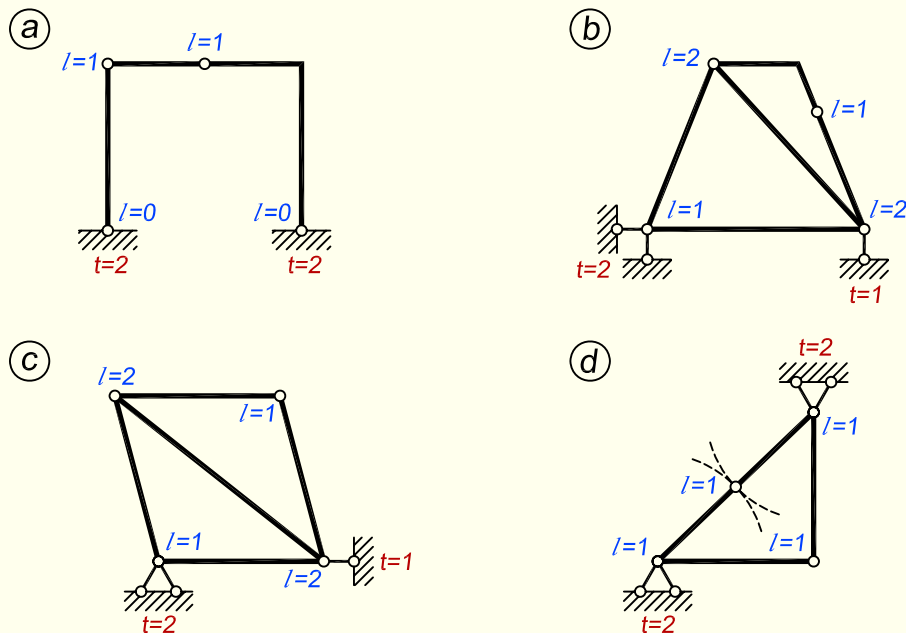
Kaks kujundit saab ühendada geomeetriselt muutumatuks kujundiks liigendi ja vardaga, mille siht ei läbi ühendusliigendit (joonis 4.8, *d*). Kui varda siht läheb läbi ühendusliigendi, siis on uus kujund hetkmuutuv.

Staatika ja kinemaatika tunnused hetkmuutuva skeemi kohta

Nullvabadusastmega arvutusskeemi, mis rahuldab tingimust $3k = 2l + t$ (valem 2.1), toereaktsioonid ja sisejõud on arvutatavad staatika tasakaalutingimustega, kui tasakaalutingimuste alusel koostatud lineaarse võrrandisüsteemi (2.8) tundmatute kordajatest moodustatud determinant D (2.10) ei võrdu nulliga. Juhul kui tingimus (2.1) on rahuldatud, kuid determinant (2.10) võrdub nulliga ($D = 0$), ei ole tundmatud kas üheselt määratavad või lõplikud. Niisugune arvutusskeem on hetkmuutuv.

Kinemaatika tunnuse hetkmuutuva arvutusskeemi jaoks saame virtuaalsiirete printsiibi alusel koostatud võrrandist (3.13) avaldatud tundmatu valemist $X_r = -\frac{\sum F_i \delta s_i}{\delta r}$. Juhul kui $\delta r = 0$ ja $\delta s_i \neq 0$, võivad ka deformeerumata elementide puhul esineda siirded arvutusskeemis, kui reaktsioonile X_r vastav side ei ole skeemist eemaldatud. Arvutusskeem on sel juhul hetkmuutuv.

NÄIDE 4.1. Selgitada, kas joonisel 4.9 kujutatud arvutusskeemid on geomeetriselt muutumatud, geomeetriselt muutuvad või hetkmuutuvad.



Joonis 4.9. Arvutusskeemid

LAHENDUS

Kõigil juhtudel arvutame esmalt välja arvutusskeemi vabadusastme, kasutades selleks valemit (3.1)

$$w = 3k - 2l - t$$

Skeem a

Selle arvutusskeemi vabadusastmeks saame

$$w = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$$

Kuna vabadusaste on nullist suurem, siis ei ole kahtlust, et arvutusskeem on geomeetriliselt muutuv. Sellise arvutusskeemi osad saavad siirduda ilma elementide deformatsioonideta.

Skeem b

Siin leiame arvutusskeemi vabadusastmeks

$$w = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0$$

Nullvabadusaste on üks vajalik, kuid mitte piisav tingimus geomeetriliseks muutumiseks. Kontrollime hetkmuutuvust, milleks pöörame esmalt tähelepanu toesidemetele. Näeme, et kolme toevarda sihid ei lõiku kõik ühes punktis. Seega puudub üks hetkmuutuva arvutusskeemi tunnus. Järgnevalt vaatame, ega kuskil ei esine kolme ühel sirgel paiknevat liigendit, milledest äärmistel on takistatud kõigis suundades siirdumise võimalus. Selliseid liigendeid ei esine ja seega ei saa väike koormus tekitada arvutusskeemis väga suuri sisejõudusid ning puudub teine hetkmuutuva arvutusskeemi tunnus. Seetõttu on tegemist geomeetriliselt muutumatu skeemiga.

Skeem c

Arvutusskeemi vabadusastmeks saame

$$w = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0$$

Kontrollime toesidemeid, mille tulemusena näeme, et kõigi kolme toesideme sihid lõikuvad samas punktis, mistõttu on tegemist hetkmuutuva arvutusskeemiga.

Skeem d

Arvutusskeemi vabadusastmeks saame

$$w = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 4 = 0$$

Hetkmuutuvuse kontrolliks vaatame esmalt toesidemeid. Kuna mõlemad toed on liikumatud liigendtoed, siis toesidemetes asend sellel skeemil hetkmuutuvust ei põhjusta. Küll aga näeme, et kaks varrast on kinnitatud omavahel ja tugede külge kolme liigendiga, mis paiknevad ühel sirgel, kusjuures kumbki äärmine liigend ei saa liikumatu liigendtoetõttu üheski suunas siirduda. Antud arvutusskeem on hetkmuutuv.

Peatükk 5

LIKUV KOORMUS

5.1. Sissejuhatus

Seni oleme käsitlenud toereaktsioonide ja sisejõudude arvutust konstruktsioonil mõjuvast paigalseisvast ehk liikumatust koormusest. Koos sellega oleme näidanud, et liikumatu koormuse puhul on parimaks variandiks konstruktsioonides tekkivate sisejõudude kirjeldamisel epüürid – paindemomendi, põikjõu ja pikijõu epüür. Praktilises projekteerimises puutub insener aga sageli kokku ka liikuvate koormustega. Kõige tüüpilisemateks näideteks on siin sillad ja tööstusehitised, kuid ka ühiskondlikud hooned.

Konstruktsioonide arvutuse eesmärgiks on leida suurimad paindemomendid, piki- ja põikjõud ning ristlõiked, milles nad tekivad. Paigalseisva koormuse puhul on selleks tarvis arvutada sisejõudude epüüride joonestamiseks vajalikud ordinaadid, sest nii näeme, kus lõigetes sisejõudude ekstremaalsed väärtused esinevad.

Kui koormus liigub konstruktsioonil, siis kõigis selle konstruktsiooni lõigetes sisejõud aga pidevalt muutuvad, mis teeb suurimate arvutuslike sisejõudude määramise keerukamaks. Nüüd tuleb leida liikuva koormuse niisugune asetus, mis põhjustab arvutusskeemi ohtlikus lõikes suurima sisejõu. Koormuse asetus, mis tingib vaadeldavas ristlõikes suurima sisejõu, on selles lõikes tekkiva sisejõu jaoks kõige ebasoodsam ehk ohtlikum. Üheks variandiks suurimate sisejõudude leidmisel on katse-eksituse meetod, mille puhul me liigutame koormuse üle konstruktsiooni ja koostame koormuse teatud asukohtadele vastavad sisejõudude epüürid. Selline lähenemisviis on aga tülikas, kuna eeldab keerulisemate arvutusskeemide puhul suure hulga epüüride koostamist.

Liikuva koormuse puhul arvutame konstruktsioonid seetõttu graafikute abil, milles abstsiss vastab koormuse asukohale ja ordinaat kujutab toereaktsiooni, sisejõu või siirde suurust konstruktsiooni ühes konkreetses ristlõikes. Iga dimensioonitava ristlõike jaoks koostame sisejõududele eraldi graafikud, mida nimetatakse mõjujoonteks.

Mõjujoon on graafik, mis kujutab konstruktsioonil liikuvast ühikjõust tingitud toereaktsiooni, sisejõu või siirde suurust arvutusskeemi kindlas ristlõikes.

Siin tulebki nüüd vahet teha sisejõu epüüril ja mõjujoonel. Kui epüür väljendab paindemomendi, põik- või pikijõu väärtusi kogu arvutusskeemi kõigis ristlõigetes paigalseisvast

koormusest, siis mõjujoon iseloomustab sisejõu väärtust liikuvast koormusest ainult ühes ristlõikes. Kui me vaatame epüüri, siis iga selle ordinaat väljendab sisejõu väärtust sellele ordinaadile vastavas lõikes. Kui koostame mõjujoone arvutuskeemi mingi lõike k sisejõu kohta, siis mõjujoone iga ordinaat kujutab lõikes k tekkiva sisejõu väärtust, kui koormus paikneb selle ordinaadi kohal.

Kuna mõjujoon annab meile infot ainult mingi konkreetse lõike kohta, siis tasub enne mõjujoonte koostamise juurde asumist analüüsida, millised on selle arvutuskeemi ohtlikud lõiked (ehk kus võivad esineda suurimad sisejõud) ja seejärel koostada mõjujooned just nende lõigete kohta. Kui mõjujooned on olemas, siis on nende järgi juba lihtne määrata, kus peab paiknema liikuv koormus, mille puhul tekivad ohtlikesse lõigetes sisejõudude ekstreemalsed väärtused.

Mõjujooned koostatakse dimensioonitu ühikjõu $F = 1$ abiga ja hiljem saab neid kasutada suvaliste reaalsete koormuste mõjude arvutamisel.

Mõjujoone ordinaadi dimensioon

Mõjujoone ordinaadi dimensiooni määramiseks tuleb vaadeldava suuruse dimensioon jagada jõu dimensiooniga. Toereaktsiooni, põik- ja pikijõu mõjujoone ordinaat on dimensioonita ($\frac{\text{kN}}{\text{kN}}$). Paindemomendi mõjujoone ordinaadi dimensiooniks on $\frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{kN}} = \text{m}$, s.t pikkuse dimensioon. Siirde mõjujoone ordinaadid on dimensiooniga $\frac{\text{m}}{\text{kN}}$ ning pöörde mõjujoone ordinaadid $\frac{1}{\text{kN}}$.

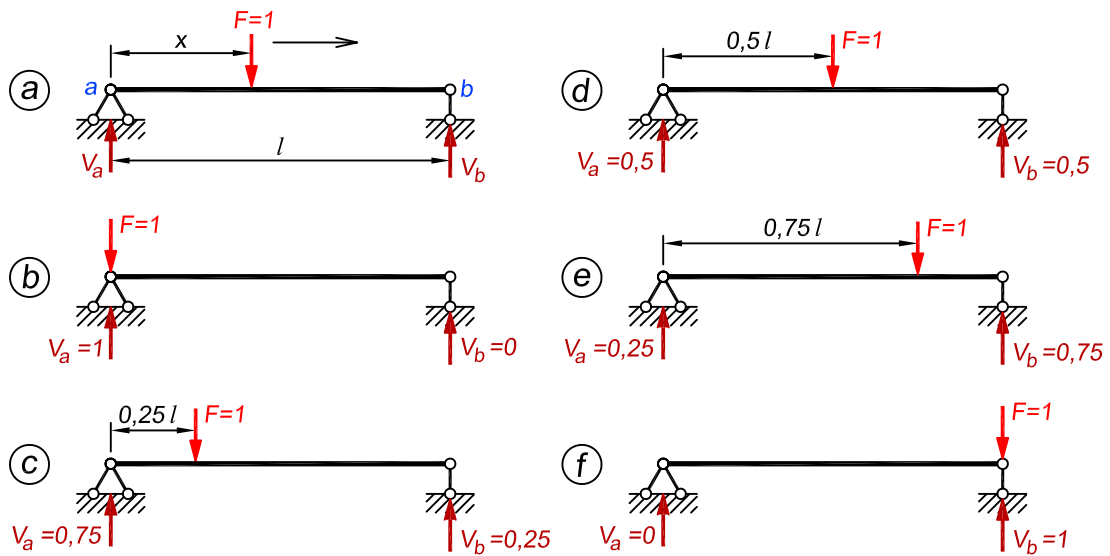
Toereaktsiooni, põik- ja pikijõu ning paindemomendi mõjujoonte ordinaatide dimensioonid ei sisalda jõu dimensiooni ja nende mõjujoonte kasutamisel võib koormuse dimensiooniks olla N, kN või midagi muud. Siirde mõjujoone ordinaadi dimensioonis esineb jõu dimensioon kN. Seepärast tuleb siirete arvutamisel mõjujoontega võtta koormus sama jõu dimensiooniga, mis esineb mõjujoone ordinaadi dimensioonis.

5.2. Mõjujoonte ordinaatide arvutus staatika tasakaalutimustega

5.2.1. Toereaktsiooni mõjujoon

Enne mõjujoonte avaldiste juurde minekut on kasulik mõelda sellele, mis juhtub lihttala toereaktsioonidega, kui koormus liigub talal (joonis 5.1).

Paneme ühikjõu liikuma vasakult paremale ja alustame toe a kohalt. Kui koormus paikneb täpselt toel a , siis sel juhul kandub ta täielikult üle sellele toele ning toereaktsioon $V_a = 1$. Samal ajal toereaktsioon $V_b = 0$. Kui ühikjõud hakkab nüüd silde suunas liikuma, siis ta eemaldub toest a ja läheneb toele b . See omakorda tähendab, et toereaktsioon V_a hakkab vähenema ja reaktsioon V_b kasvama, kusjuures nende summa peab tala tasakaalu tõttu alati olema üks. Kui ühikjõud jõuab silde keskele, siis on ta mõlemast toest võrdsel kaugusel ning mõlemad toereaktsioonid on seega 0,5. Kui koormus jätkab paremale liikumist ja jõuab toe b kohale, siis muutub reaktsioon V_a nulliks ning reaktsiooni V_b väärtuseks saab üks.



Joonis 5.1. Toereaktsioonide muutumine sõltuvalt koormuse asukohast

Koostame tabeli 5.1, kus on näidatud liikuva koormuse erinevatele asukohtadele vastavad toereaktsioonide väärtused.

Kirjeldatud toereaktsioonide muutumist koormuse liikumisel peavad väljendama ka nende reaktsioonide mõjujooned. Kuna mõjujoone iga ordinaat näitab toereaktsiooni suurust, kui koormus paikneb selle ordinaadi kohal, siis on tabelis 5.1 esitatud sisuliselt mõlema toereaktsiooni mõjujoone ordinaadid. Mõjujooned on kujutatud joonisel 5.2.

Tabel 5.1. Liikuvast ühikjõust tekkivad toereaktsioonide väärtused

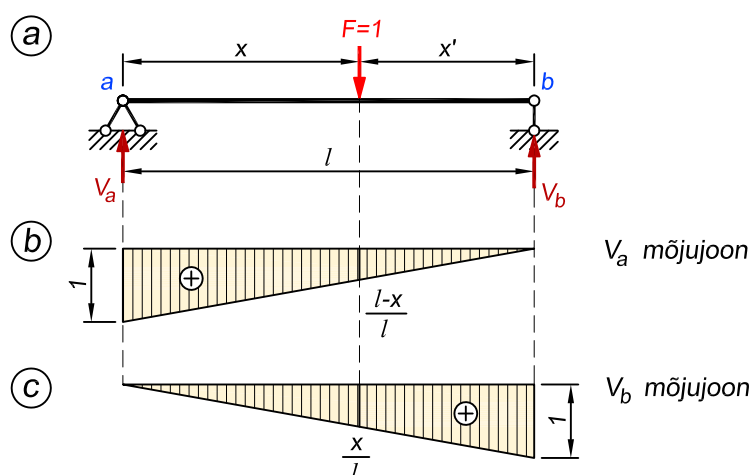
| Koormuse asukoht x | 0 | $0,25l$ | $0,5l$ | $0,75l$ | l |
|----------------------|---|---------|--------|---------|-----|
| V_a | 1 | 0,75 | 0,5 | 0,25 | 0 |
| V_b | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |

Järgnevalt tuletame ka mõjujooni kirjeldavad avaldised. Liikugu talal a - b ühikjõud $F = 1$ (joonis 5.2, a). Toe b suhtes koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a l + F(l - x) = 0 \quad (5.1)$$

avaldame toereaktsiooni V_a jõu F ja abstsissi x funktsioonina

$$V_a = F \frac{l - x}{l} \quad (5.2)$$



Joonis 5.2. Toereaktsioonide mõjujooned

ja kuna $F = 1$, siis $V_a = 1 \frac{l-x}{l}$ ehk

$$V_a = \frac{l-x}{l} \quad (5.3)$$

Toereaktsiooni V_a avaldises (5.3) on muutuja x esimeses astmes, seega on toereaktsiooni V_a suuruse ja ühikjõu asukoha abstsissi seos lineaarne. Selle sirge määrame kahe punktiga: kui $x = 0$, siis $V_a = 1$; kui $x = l$, siis $V_a = 0$.

Saadud sirge (joonis 5.2, b) iga ordinaat kujutab toereaktsiooni V_a suurust, kui ühikjõud asub talal selle ordinaadi kohal. Seda sirget nimetatakse toereaktsiooni V_a mõjujooneks. Sille l ja ühikjõu kaugus toest b $l-x$ on pikkuse dimensiooniga, kuid nende suhe $\frac{l-x}{l}$ on dimensioonita; toereaktsiooni V_a mõjujoone ordinaadid on dimensioonita arvud.

Toereaktsiooni V_b mõjujoone ordinaatide arvutamiseks koostame toe a suhtes momentide tasakaalu tingimuse

$$\sum M_a = 0; \quad V_b l - Fx = 0 \quad (5.4)$$

millest

$$V_b = F \frac{x}{l} \quad (5.5)$$

ehk arvestades, et $F = 1$

$$V_b = \frac{x}{l} \quad (5.6)$$

Toereaktsiooni V_b mõjujoone (joonis 5.2, c) määrame kahe ordinaadiga: kui $x = 0$, siis $V_b = 0$; kui $x = l$, siis $V_b = 1$.

Kui mõjujooned on olemas, siis võrdleme jooniseid 5.1 ja 5.2 omavahel. Näeme, et kui paigutada joonisel 5.2 koormus mõnda nendest kohtadest, kus see on joonisel 5.1, siis on koormuse all olevad mõlema mõjujoone ordinaadid samad nagu sellele koormuse asetusele vastavad toereaktsioonid joonisel 5.1. Selliselt jooniseid vaadates ja võrreldes, on hästi näha, kuidas mõjujoon kirjeldab reaktsiooni muutumist koormuse liikumisel.

5.2.2. Paindemomendi mõjujoon

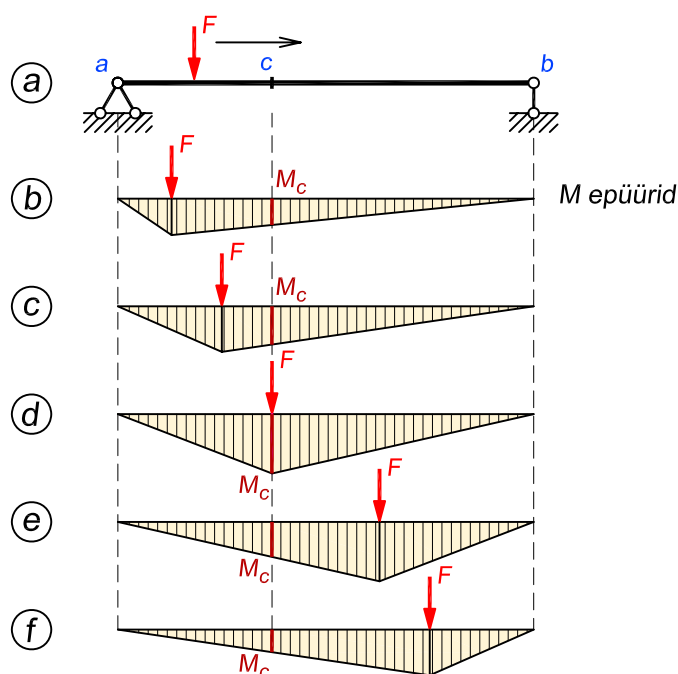
Lihttala mõjujoon

Sarnaselt toereaktsioonidele analüüsime ka siin, mis juhtub paindemomendiga, kui lihttala peal koormus liigub (joonis 5.3). Vaatame konkreetselt paindemomendi M_c muutumist.

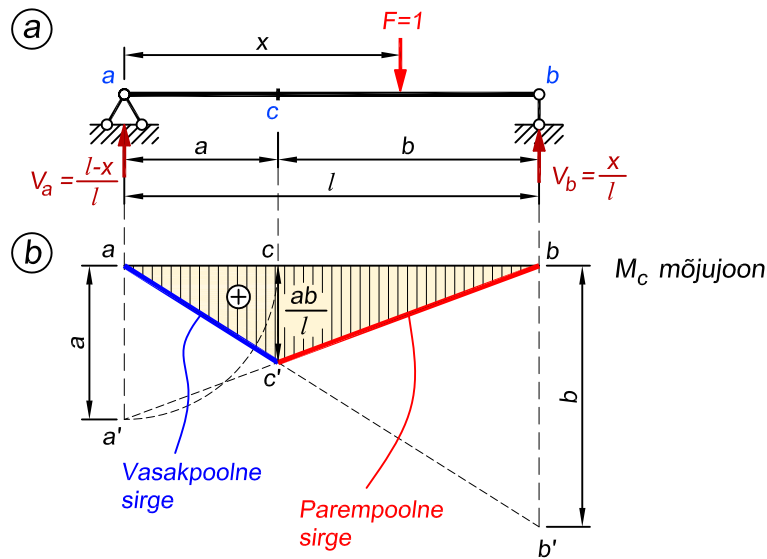
Alustame koormuse liikumisega vasakult toelt. Kui koormus paikneb täpselt toe a kohal, siis tala sildes kuskil paindemomenti ei teki ja meid huvitavas lõikes on see samuti null. Kui koormus hakkab lõike c poole liikuma, siis toimub mainitud lõikes paindemomendi epüüri ordinaadi kasvamine (joonis 5.3, b ja c). Paindemoment M_c saavutab maksimumväärtuse, kui koormus jõuab täpselt lõike c kohale (joonis 5.3, d). Koormuse edasisel liikumisel ta eemaldub lõikest c , millega kaasneb ka paindemomendi M_c vähenemine (joonis 5.3, e ja f). Kui koormus jõuab toe b kohale, siis sildes painet ei esine ja lõikes c on see samuti null.

Eelmises lõigus kirjeldatud paindemomendi muutumist lõikes c väljendab ka selle lõike mõjujoon, mis on kujutatud joonisel 5.4, b . Kuna paindemomendi M_c mõjujoone ordinaadid kujutavad paindemomendi suurust lõikes c , kui ühikjõud asub talal vastava ordinaadi kohal, siis toe a kohal on mõjujoon null, paremale liikudes hakkavad ordinaadid kasvama ja saavutavad maksimumi lõike c kohal. Edasi mõjujoone ordinaadid vähenevad, kuni jõuavad toe b kohal nulli. Järgnevalt tuletame täpsed avaldised mõjujoone ordinaatide arvutamiseks. Selleks kasutame lõikemeetodit (vt peatükk 2.3).

Paindemomendi avaldis lõike c kohta oleneb sellest, kummal pool lõiget c asetseb ühikjõud (joonis 5.4, a). Olenevalt ühikjõu asukohast saame kaks võrrandit mõjujoone ordinaatide arvutamiseks.



Joonis 5.3. Paindemomendi M_c muutumine koormuse liikumisel lihttalal



Joonis 5.4. Lihttala paindemomendi mõjujoon

Olgu ühikjõud paremal pool lõiget c , s.t $x > a$ (joonis 5.4, a). Paindemomendi lõike c kohta avaldame valemiga

$$M_c = V_a a \quad \text{kui} \quad x \geq a \quad (5.7)$$

Paindemomendi M_c (kui $x \geq a$) mõjujoone ordinaadid on proportsionaalsed toereaktsiooni mõjujoone ordinaatidega, kusjuures proportsionaalsusteguriks on lõike c kaugus toest a . Arvestades valemist (5.3) on

$$M_c = \frac{l-x}{l} \cdot a \quad \text{kui} \quad x \geq a \quad (5.8)$$

Võrrandiga (5.8) määratud sirge kujutamiseks leiame kaks ordinaati: kui $x = 0$, siis $M_c = a$; kui $x = l$, siis $M_c = 0$. Joonisel 5.4, b kujutatud sirgel $a'-b$ kehtib mõjujoonena ainult lõik $c'-b$, s.t kui ühikjõud on paremal pool lõiget c ($x \geq a$). Lõiku $c'-b$ nimetatakse mõjujoone parempoolseks sirgeks.

Kui jõud asub vasakul pool lõiget c ($x \leq a$), siis

$$M_c = V_b b = \frac{x}{l} \cdot b \quad (5.9)$$

Sirge (5.9) kujutamiseks leiame kaks ordinaati: kui $x = 0$, siis $M_c = 0$; kui $x = l$, siis $M_c = b$. Selle sirge ordinaadid on proportsionaalsed toereaktsiooni V_b mõjujoone ordinaatidega; proportsionaalsusteguriks on lõike c kaugus toest b . Paindemomendi M_c mõjujoonena kehtib sirge lõik $a-c'$ ($x \leq a$) ja seda nimetatakse mõjujoone vasakpoolseks sirgeks.

Paindemomendi mõjujoon koosneb järelikult kahest sirgjoonest: mõjujoone parempoolsest sirgest $c'-b$ ja vasakpoolsest sirgest $a-c'$. Viies avaldistesse (5.8) ja (5.9) $x = a$, veendume, et mõlemate sirgete ordinaadid lõike c kohal on võrdsed: $M_c = \frac{ab}{l}$. Mõjujoone vasak- ja parempoolne sirge lõikuvad lõike c vertikaalil.

Praktikas konstrueerime paindemomendi mõjujoone järgmiselt. Vasakpoolse toe vertikaalile kanname lõigu a (joonis 5.4, b). Lõigu otspunktist a' ja parempoolse toe kohal läbi nullpunkti b tõmbame sirge, mis lõigete c ja b vahel kujutab mõjujoone parempoolset sirget. Järgnevalt tõmbame läbi lõike c vertikaalse sirge kuni lõikumiseni parempoolse sirgega punktis c' . Mõjujoone vasakpoolseks sirgeks on sirglõik vasakpoolse toe kohal nullpunktist a kuni lõikepunktini c' lõike c vertikaalil.

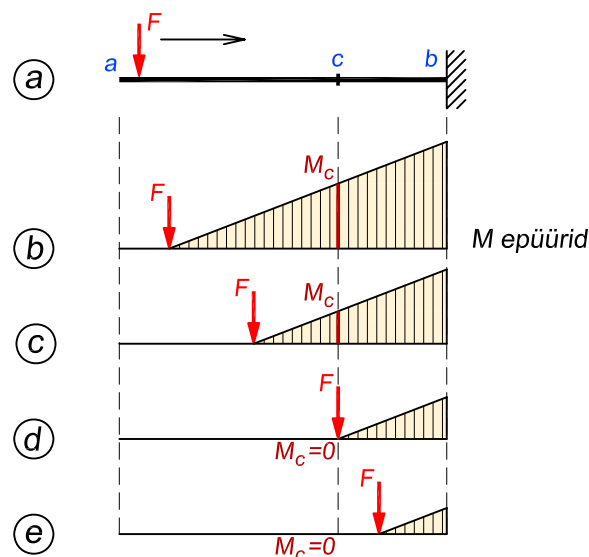
Kui lõige c on lähemal parempoolsele toele, siis tõmbame enne vasakpoolse sirge. Parempoolse toe vertikaalile kanname lõigu b ja tõmbame sirge $a-b'$, leiame lõikepunkti c' , mille ühendame punktiga b sirglõigu $c'-b$ abil.

Paindemomendi mõjujoone ordinaat on pikkuse dimensiooniga: $\frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{kN}} = \text{m}$.

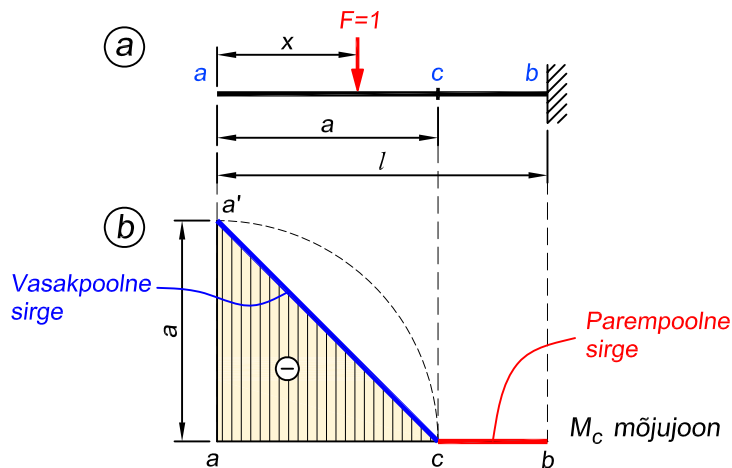
Konsooli mõjujoon

Paneme koormuse liikuma konsooli peale ja vaatame, kuidas see mõjutab lõikes c tekki- vat paindemomenti (joonis 5.5). Jooniselt näeme, et paindemoment M_c on nullist erinev, kui koormus liigub lõike c ja konsooli vaba otsa vahel (joonis 5.5, b ja c). Kui koormus paikneb otse lõike c kohal või lõike c ja konsooli jäiga toe vahel, siis on M_c võrdne nulliga (joonis 5.5, d ja e). Järelikult, kuna lõikest c paremal olevad koormused selles lõikes paindemomenti ei tekita, siis peab mõjujoon vahemikus $c-b$ olema nullsirge. Mõjujoone ordinaadid on nullist erinevad ainult lõikest c vasakul, kus asuvad koormused mõjutavad selle lõike paindemomenti. Kuna paindemomendi suurus sõltub jõu õlast, siis tekib lõikes c suurim paindemoment, kui koormus paikneb konsooli otsal. Järelikult peab konsooli otsas olema ka mõjujoone ordinaat maksimaalne.

Konsooli lõike c paindemomendi mõjujoon on esitatud joonisel 5.6, b . Tuletame avaldise mõjujoone kuju kirjeldamiseks. Olenemata ühikjõu asukohast vaatleme konsooli vaba otsa ja



Joonis 5.5. Paindemomendi M_c muutumine koormuse liikumisel konsoolil



Joonis 5.6. Konsooli paindemomendi mõjujoon

lõike c vahelise osa tasakaalu. Kui ühikjõud on lõike c ja toeristlõike b vahel, siis $M_c = 0$. Mõjujoone parempoolne sirge ühtib abstsisssteljega. Kui ühikjõud asub vasakul pool lõiget c (joonis 5.6, a), siis

$$M_c = -F(a - x) = -(a - x) \quad (5.10)$$

ja vasakpoolse sirge (5.10) kujutamiseks leiame kaks ordinaati: kui $x = 0$, siis $M_c = -a$; kui $x = a$, siis $M_c = 0$. Kui ühikjõud asub konsooli vabal otsal, siis paindemoment lõikes c on negatiivne ja võrdne lõike kaugusega vabast otsast. Kui ühikjõud asub lõike c kohal, siis võrdub paindemoment lõikes c nulliga (joonis 5.6, b).

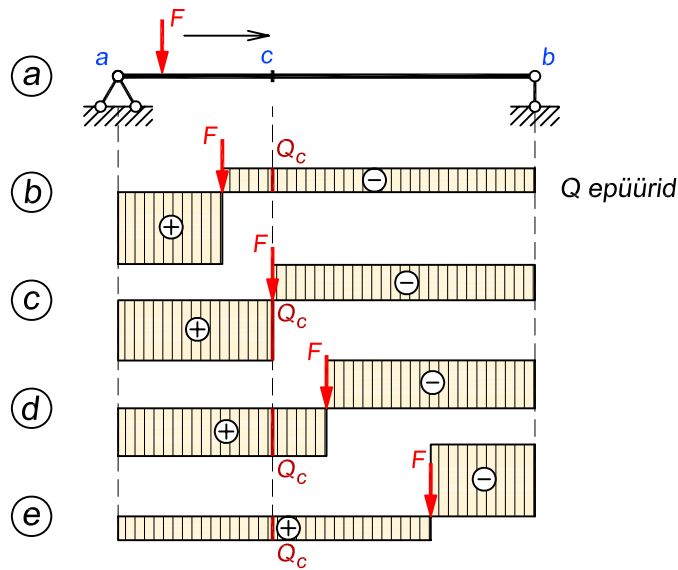
Konsooli paindemomendi mõjujoon lõike c jaoks koosneb kahest sirgest, mille lõikepunkt asub lõike c vertikaalil. Lõike c ja toe vaheline sirge ühtib abstsisssteljega. Mõjujoone kujutamiseks konsooli vaba otsa ja lõike c vahel kanname vaba otsa vertikaalile lõigu a , mille otspunkti a' ja nullpunkti c lõike c vertikaalil ühendame sirglõiguga $a'-c$ (joonis 5.6, b).

Konsooli toelõike b paindemomendi mõjujoone koostame sarnaselt joonisel 5.6 kirjeldatule. Nüüd kanname konsooli vaba otsa vertikaalile lõigu a , mis on võrdne konsooli pikkusega: $a = l$. Mõjujoone kahest sirgest jääb järgi ainult vasakpoolne sirge, mille saame, kui ühendame sirglõiguga punktid a' ja b .

5.2.3. Põikjõu mõjujoon

Lihttala mõjujoon

Vaatame joonise 5.7 abil, kuidas muutub lihttala põikjõud lõikes c koormuse liikumisel tala peal. Kui koormus paikneb täpselt toel a , siis tala sildes põikjõudu ei teki ja Q_c on võrdne nulliga. Koormuse liikumisel vahemikus $a-c$ tekib lõikes c negatiivne põikjõud (joonis 5.7, b), mis kasvab, kui koormus läheneb lõikele c . Kui koormus jõuab lõike c kohale, siis on lõikest vasakul positiivne ja paremal negatiivne põikjõud (joonis 5.7, c). Jätkates paremale liikumist, põhjustab koormus nüüd lõikes c positiivse põikjõu (joonis 5.7, d ja e), mis väheneb, kui

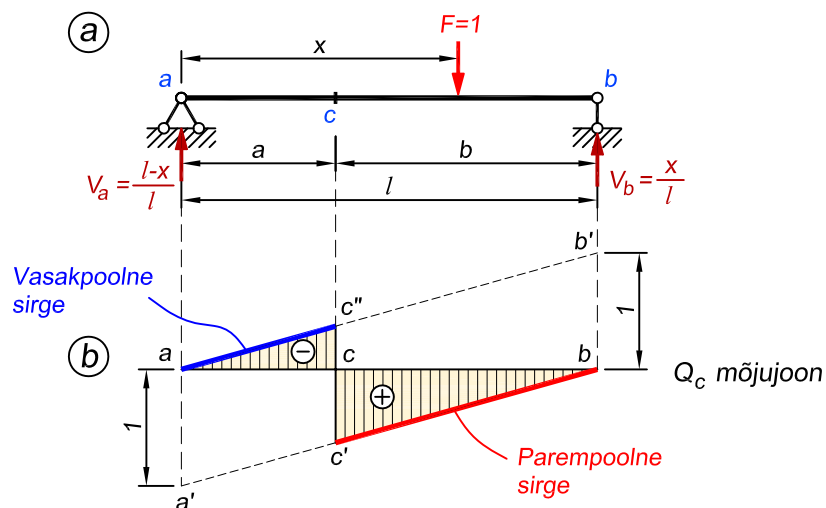


Joonis 5.7. Põikjõu Q_c muutumine koormuse liikumisel lihttalal

koormus eemaldub sellest lõikest. Koormuse jõudmisel toele b kaob tala sildest igasugune põikjõud.

Kuna põikjõu Q_c mõjujoone ordinaadid kujutavad põikjõu suurust lõikes c , kui ühikjõud asub talal vastava ordinaadi kohal, siis on tugede kohal mõjujoone ordinaadid nullid. Lõikest c vasakul peavad mõjujoone ordinaadid olema negatiivsed ja paremal positiivsed, vastavalt sellele, mis märgiga põikjõu ühes või teises vahemikus paiknev koormus tekitab lõikesse c . Lõike c põikjõu mõjujoon on kujutatud joonisel 5.8, b .

Lihttala lõike c põikjõu Q_c mõjujoone parempoolse sirge kujutamiseks koostame põikjõu



Joonis 5.8. Lihttala põikjõu mõjujoon

avaldise lõike c jaoks, kui ühikjõud mõjub paremal pool lõiget c (joonis 5.8, a), kusjuures lihtsam on vaadelda tala vasaku osa tasakaalu

$$Q_c = V_a = \frac{l-x}{l} \quad (x > a) \quad (5.11)$$

Siit näeme, et mõjujoone parempoolne sirge ühtib toereaktsiooni V_a mõjujoonega lõigete c ja b vahel.

Kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget c , siis põikjõud lõikes c , arvutades tala parempoolse osa järgi, on võrdne toereaktsiooniga V_b ning vastavalt põikjõu märgireeglile on negatiivne

$$Q_c = -V_b = -\frac{x}{l} \quad (x < a) \quad (5.12)$$

Põikjõu mõjujoone konstrueerime järgmiselt. Vasakpoolse toe vertikaalile kanname abstsisssteljest allapoole ühikpikkusega lõigu $a-a'$, mille otspunkti a' ja parempoolse toe vertikaalil nullpunkti b ühendame sirglõiguga $a'-b$ (joonis 5.8, b). Mõjujoone parempoolseks sirgeks on sellest sirglõigust lõik $c'-b$ lõigete c ja b vahel. Järgnevalt kanname parempoolse toe vertikaalile abstsisssteljest ülespoole ühikpikkusega lõigu $b-b'$, mille otspunkti b' ja vasakpoolse toe vertikaalil nullpunkti a ühendame sirglõiguga $b'-a$. Mõjujoone vasakpoolseks sirgeks on sellest sirglõigust lõik $a-c''$ lõigete a ja c vahel. Ilmselgelt $a-c'' \parallel c'-b$. Mõjujoone parempoolse sirge vasakpoolse ordinaadi $c-c'=b/l$ ja vasakpoolse sirge parempoolse ordinaadi $c-c''=a/l$ absoluutväärtuste summa on üks

$$\frac{a}{l} + \frac{b}{l} = \frac{a+b}{l} = 1 \quad (5.13)$$

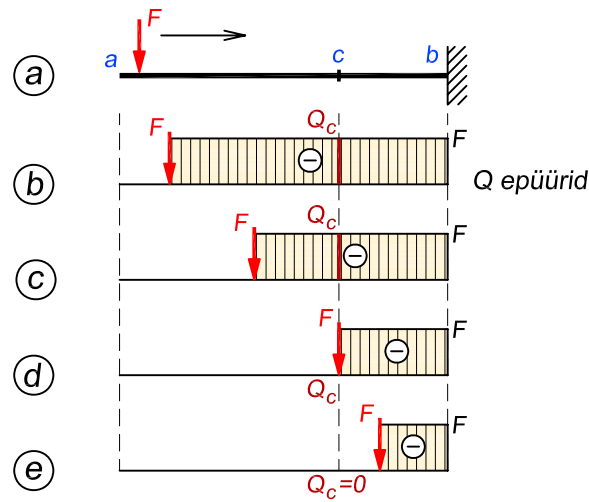
Kokkuvõtteks toome veel eraldi välja reegli, mis ütleb, et lihttala põikjõu mõjujoone parem- ja vasakpoolne sirge on alati paralleelsed ja lõike kohal on nad teineteise suhtes nihutatud ühikjõu võrra.

Konsooli mõjujoon

Asetame konsoolile koormuse ja analüüsime, kuidas selle liikumine mõjutab lõikes c tekkinud põikjõudu (joonis 5.9). Sarnaselt paindemomendile näeme ka siin, et lõikes c esineb põikjõud ainult juhul, kui koormus liigub lõike c ja konsooli vaba otsa vahel (joonis 5.9, b ja c). Sõltumata koormuse asukohast, on Q_c väärtus konstantne ja võrdne koormusega. Koormuse paiknemisel lõike c ja konsooli jäiga toe vahel on Q_c võrdne nulliga (joonis 5.9, e). Järelikult lõikest c paremal olevad koormused selle lõike põikjõudu ei mõjuta ja mõjujoon peab selles vahemikus olema nullsirge. Asume nüüd mõjujoone koostamise juurde.

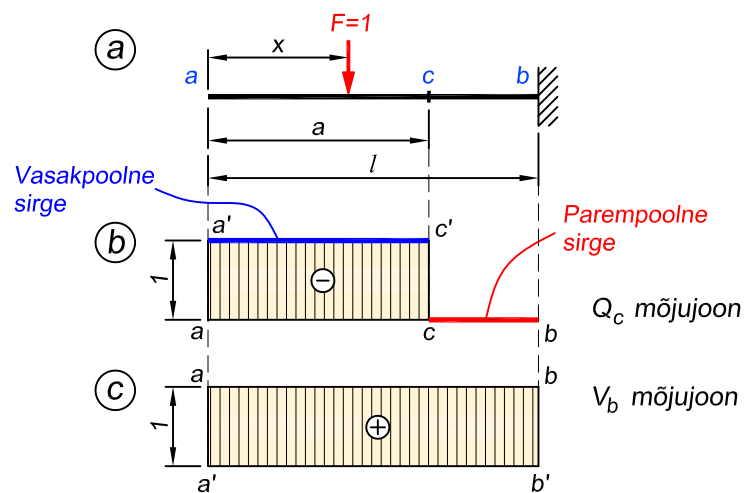
Ka konsooli põikjõu mõjujoon lõike c jaoks koosneb sarnaselt lihttala mõjujoonele kahest paralleelsest sirgest, mis on teineteise suhtes nihutatud ühiku võrra. Lõike c vertikaalil on mõjujoones aste (joonis 5.10, a ja b). Kui ühikjõud mõjub paremal pool lõiget c , siis vasaku osa tasakaalu tingimus $\sum Z = 0$ annab $Q_c = 0$. Kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget c , siis sama osa tasakaalu tingimus $\sum Z = 0$ annab $Q_c = -1$. Mõjujoone vasakpoolne sirge on abstsisssteljega paralleelne sirge $a'-c'$, mis asetseb abstsisssteljest ühiku kaugusel.

Põikjõu mõjujoone ordinaadid on dimensioonita arvud: kN/kN.



Joonis 5.9. Põikjõu Q_c muutumine koormuse liikumisel konsoolil

Eespool oli toereaktsioonide mõjujoonte puhul juttu ainult lihttala toereaktsioonidest. Vaatame siin ära ka konsooli toereaktsiooni mõjujoone, kuna see on otseselt seotud käsitletava põikjõuga. Jooniselt 5.9 nägime, et konsooli toelõikes on põikjõud alati konstantne ja võrdne koormusega. Ka konsooli vertikaalne toereaktsioon on alati võrdne rakendatud koormusega. Kuna koormuse liikumine reaktsiooni suurst ei mõjuta, siis on konsooli toereaktsiooni V_b mõjujoon konstantne (joonis 5.10, c).



Joonis 5.10. Konsooli põikjõu ning toereaktsiooni mõjujoon

5.2.4. Konsoolidega tala mõjujooned

Konsoolidega tala mõjujoonte koostamist alustame sildest, kuna tugedevahelises alas on mõjujooned täpselt sama kujuga nagu konsoolideta tala puhul. Kui sildes on mõjujoon olemas, siis liigume konsoolide juurde.

Vaatame joonisel 5.11, *a* kujutatud tala ja koostame sellele toereaktsiooni V_a mõjujoone. Peatükist 5.2.1 teame, et toe *a* kohal peab mõjujoone ordinaat olema üks, samuti teame, et teisel toel on mõjujoon null. Nende ordinaatide abil saame kujutada mõjujoone sirge tugede vahel (joonis 5.11, *b*). Järgnevalt peame välja selgitama, millised on mõjujoone väärtused kummagi konsooli otsas. Selleks kasutame mõjujoone V_a avaldist (5.3)

$$V_a = \frac{l-x}{l} \quad (5.14)$$

mille abil saame vajalikud ordinaadid

$$\begin{aligned} \text{kui } x = -k, \text{ siis } V_a &= \frac{l+k}{l} = 1 + \frac{k}{l} \\ \text{kui } x = l+r, \text{ siis } V_a &= \frac{l-(l+r)}{l} = -\frac{r}{l} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Kandes saadud tulemused joonisele, selgub, et konsoolide kohal olevad mõjujoone osad on sildes oleva mõjujoone pikendused. Seetõttu on mõistlik edaspidi mõjujooni koostada selliselt, et esmalt paneme paika mõjujoonte sirged tugede vahel ja seejärel pikendame neid üle tugede kuni konsoolide otsteni. See kehtib lisaks toereaktsioonidele ka paindemomendi ja põikjõu mõjujoonte kohta. Konsoolide otstes olevad ordinaadid võib pärast arvutada sarnasest kolmnurkadest.

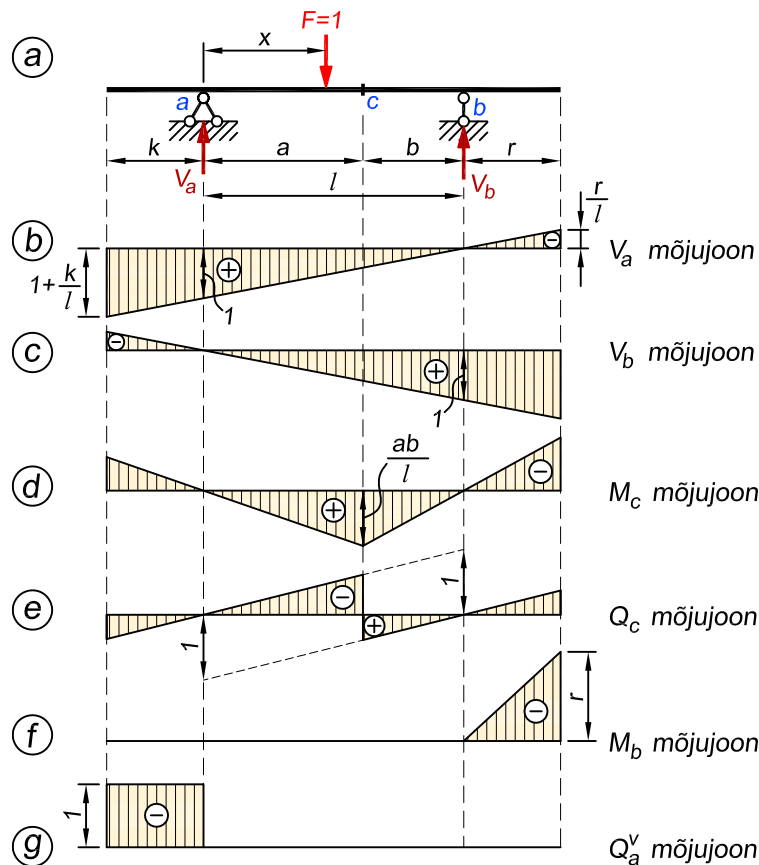
Peatume veel toereaktsiooni V_a mõjujoone märkide juures. Tala vasakust otsast kuni toeni *b* on mõjujoon plussmärgiga, mis tähendab, et selles vahemikus liikuv koormus põhjustab toel *a* positiivse ehk alt üles suunatud reaktsiooni. Parempoolse konsooli kohal on aga mõjujoon miinusmärgiga, mis tähendab, et seal paiknev koormus tekitab toel *a* ülalt alla suunatud reaktsiooni. Toereaktsiooni suunamuutust on siin lihtne ettekujutada. Kui me paigutame koormuse parempoolse konsooli peale, siis vajutab ta seda allapoole, tala tahab toe *b* peal pöörduma hakata, mis põhjustaks varda vasaku otsa ülespoole liikumist. See aga tekitab toel *a* alla suunatud ehk negatiivse reaktsiooni.

Toereaktsiooni V_b mõjujoone (joonis 5.11, *c*) koostame sarnaselt eespool kirjeldatule.

Joonisel 5.11, *d* ja *e* on näidatud lõike *c* paindemomendi ja põikjõu mõjujooned, mille koostamist alustame sarnaselt joonistel 5.4 ja 5.8 kujutatule ning seejärel pikendame sirged kuni konsoolide otsteni.

Toelõike *b* paindemomendi mõjujoon (joonis 5.11, *f*) on nullist erinev ainult parempoolse konsooli ulatuses, kuna lihttala sildes olev koormus ei põhjusta toel paindemomenti. Mõjujoone koostame, nii nagu tegime seda konsooli jaoks joonisel 5.6.

Q_a^v tähendab põikjõudu vahetult toest *a* vasakul olevas lõikes, mis sisuliselt paikneb konsoolis. Selle lõike põikjõu mõjujoon on nullist erinev ainult vasaku konsooli ulatuses, kuna konsooli lõikes ei saa sisejõudu tekitada tala sildes paiknev koormus (joonis 5.11, *g*). Mõjujoone koostame, lähtudes joonisest 5.10.



Joonis 5.11. Konsoolidega tala mõjujooned

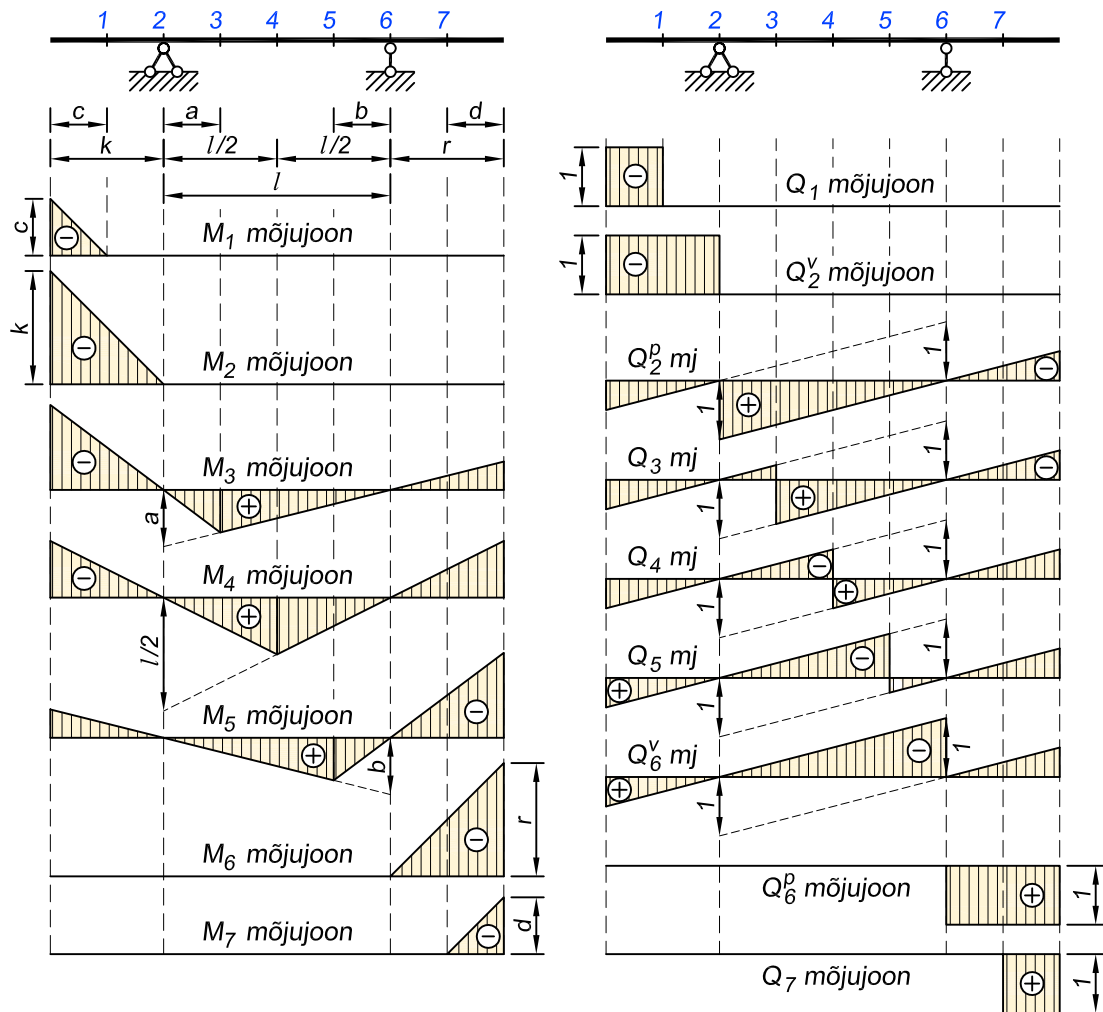
Joonisel 5.12 on esitatud konsoolidega talale paindemomendi ja põikjõu mõjujooned seitsme erineva lõike kohta. Põikjõu mõjujoonte tähistes tähendab ülaindeks „v“ toest vahetult vasakul paiknevat lõiget ning ülaindeks „p“ toest vahetult paremal asuvat lõiget.

Neid mõjujooni uurides tasub kindlasti mõelda sellele, miks paindemomendi puhul on toelõike kohta ainult üks mõjujoon (näiteks M_2 mj), aga põikjõu puhul kaks (näiteks Q_2^v mj ja Q_2^p mj). Vastuse sellele küsimusele leiab sisejõu epüüridelt. Paindemomendi epüüris on toe kohal ainult murdepunkt ja seega üks ordinaat. Selle ühe ordinaadi muutumist liikuvast koormusest iseloomustabki selle lõike kohta koostatud üks mõjujoon. Kui aga vaadata konsoolidega tala põikjõu epüüri, siis näeme, et seal on epüüris toe kohal aste, mis tähendab, et toest vasakul ja paremal on erinevad ordinaadid. Kuigi need ordinaadid paiknevad vahetult toe kõrval, on üks neist sisuliselt konsoolis ja teine sildes. Kuidas liikuv koormus mõjutab neid kahte ordinaati, seda kujutavadki kaks erinevat mõjujoont.

Kokkuvõtteks lisame siia veel kaks olulist reeglit.

Staatikaga määratavate arvutuskeemide toereaktsioonide ja sisejõudude mõjujooned koosnevad sirgjoontest (joonised 5.11 ja 5.12) ning siirete mõjujooned kõverjoontest (vt näiteks [29] peatükk 16.8).

Staatikaga määramatute arvutuskeemide kõik mõjujooned koosnevad kõverjoontest (vt peatükk 14.8).

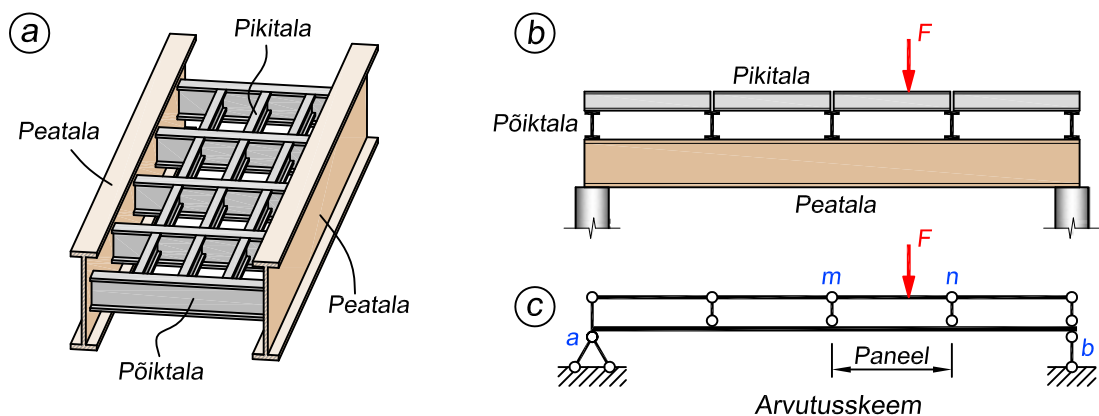


Joonis 5.12. Konsoolidega tala M ja Q mõjujooned [4]

5.2.5. Mõjujoon kaudse koormuse korral

Siiani oleme käsitlenud olukordi, kus koormus on rakendatud vahetult taladele. Ehituses esineb aga sageli konstruktsioone, kus koormus ei paikne otse tala peal, vaid liigub abitaladel ning kantakse peatalale üle sõlmkoormustena.

Üheks kõige tüüpilisemaks näiteks siin on joonisel 5.13, *a* kujutatud sillakonstruktsioon, kus *peataladele* (nimetatakse ka *peakanduriteks*) toetuvad nendega risti paiknevad *põiktalad* ja nendele omakorda *pikitalad* (nimetatakse ka *stringeriteks*). Skemaatiliselt võib selle konstruktsiooni töötamist selgitada joonise 5.13, *b* abil. Sellise konstruktsiooni puhul mõjuvad koormused otseselt pikitaladele, mis töötavad kahest otsast toetatud lihttala skeemi järgi (kuid võivad olla ka staatikaga määratud jätkuvtalad). Pikitaladelt kantakse koormused edasi põiktaladele, kust omakorda läheb koormud peataladele. Sellise konstruktsiooni arvutuskeem on esitatud joonisel 5.13, *c*.



Joonis 5.13. Sillakonstruktsioon peatalade ning põik- ja pikitaladega

Põiktalade vahelist osa m - n nimetatakse *paneeliks* (joonis 5.13, c). Kui koormus rakendada pikitalale punktide m ja n vahel, siis kantakse see edasi peatalale just nendes punktides. Selline jõudude edasikandumine ei muuda peatala toereaktsioonide mõjujooni, mis on samasugused nagu tavalised lihttala toereaktsioonide mõjujooned otsese koormuse korral.

Kui aga koostada mõjujoon peatala mingi lõike sisejõu kohta, siis on tegemist kaudse koormuse mõjujoonega, mis on otsese koormuse mõjujoonest erinev. Järgnevalt vaatame joonisel 5.14, a kujutatud tala lõikele c paindemomendi mõjujoone koostamist.

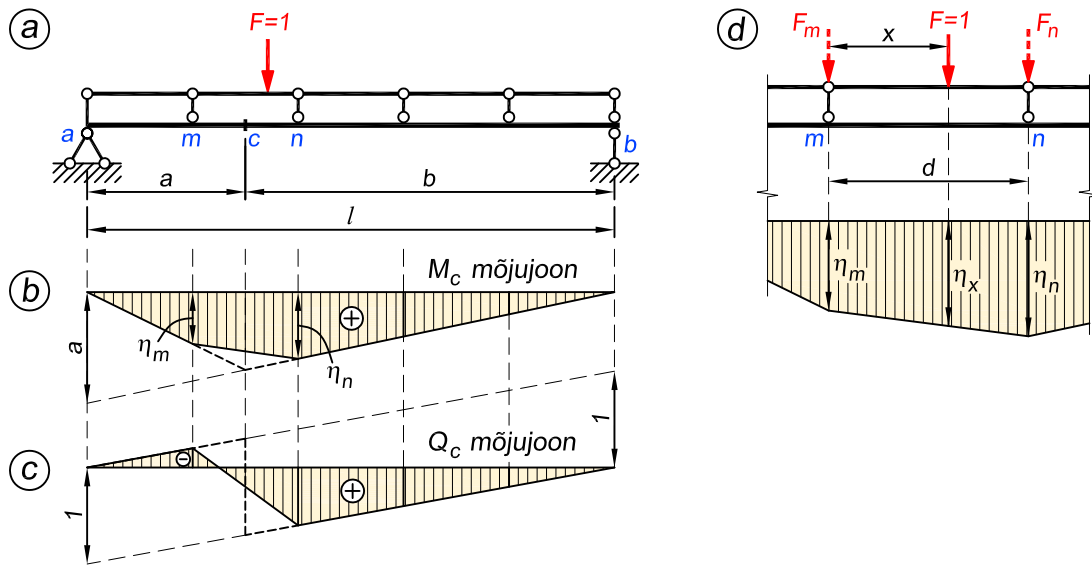
Osaliselt ühtib paindemomendi mõjujoon otsese koormuse mõjujoonega. Kui koormus paikneb väljaspool paneeli m - n , kus asub lõige c , siis on otsese ja kaudse koormuse paindemomendi mõjujooned kattuvad. See tähendab, et joonisel 5.14, a näidatud tala lõikele c koostame paindemomendi mõjujoone (joonis 5.14, b) vahemikes a - m ja n - b nii nagu otsese koormuse korral. Seda väidet on lihtne kontrollida paindemomendi avaldistega. Kui koormus asub sõlmest n paremal, siis on lõikes c tekkiv paindemoment $M_c = V_a a$, mis ühtib otsese koormuse kohta kirjutatud valemiga (5.7). Ning kui koormus on sõlmest m vasakul, siis saame paindemomendiks $M_c = V_b b$, mis on sama nagu avaldis (5.9).

Selleks, et selgitada välja mõjujoone kuju paneelis m - n , paneme ühikjõu liikuma pikitalal sõlmpunktide m ja n vahel. Pikitalale rakendatud ühikjõud mõjub peatalale kahe komponendina F_m ja F_n naabersõlmede m ja n ristlõigetes (joonis 5.14, d), kusjuures need komponendid on võrdsed pikitala toereaktsioonidega (5.3) ja (5.6)

$$F_m = \frac{1(d-x)}{d}; \quad F_n = \frac{1x}{d} \quad (5.16)$$

kus x on ühikjõu kaugus sõlmest m ja d on sõlmede vahekaugus ehk paneeli pikkus. Paindemomendi M_c otsese koormuse mõjujoone ordinaadid sõlmede m ja n kohal on vastavalt η_m , ja η_n .

Kui ühikjõud asub pikitalal sõlmes m , siis mõjub ta sõlme kaudu otseselt peatala samas lõikes. Paindemomendi M_c väärtuse kaudsel koormusel jõu niisuguse asetuse puhul arvutame otsese koormuse mõjujoone ordinaadiga η_m , s.t sõlme kohal on otsese ja kaudse koormuse mõjujoonte ordinaadid võrdsed. Kaudse koormuse mõjujoone ordinaati sõlmede vahel ühikjõu vertikaalil tähistame η_x .



Joonis 5.14. Kaudse koormuse mõjujoon

Kaudse koormuse puhul jaotub ühikjõud sõlmedesse m ja n ning paindemomendi M_c väärtuse arvutame valemiga (5.33)

$$M_c = F_m \eta_m + F_n \eta_n \quad (5.17)$$

Viies avaldisse (5.17) komponentide suurused (5.16), saab see kuju

$$M_c = \frac{1(d-x)}{d} \eta_m + \frac{1x}{d} \eta_n \quad (5.18)$$

Et vältida ühikjõu komponentide arvutamist ja kahe korrutise liitmist, kujutame sõlmede vahel kaudse koormuse mõjujoone, mille ordinaadi η_x korrutamisel ühikjõuga saame paindemomendi M_c väärtuse kaudsel koormusel

$$M_c = 1 \eta_x \quad (5.19)$$

Võrrandite (5.18) ja (5.19) vasakud ja paremad pooled on võrdsed, mille põhjal saame kaudse koormuse mõjujoone võrrandi sõlmede m ja n vahel

$$\eta_x = \frac{d-x}{d} \eta_m + \frac{x}{d} \eta_n \quad (5.20)$$

Kuna võrrandis (5.20) on muutuja x esimeses astmes, siis on see avaldis sirge võrrandiks. Järelikult on kaudse koormuse mõjujoon kahe naabersõlme vahel sirgjoon. Otsese ja kaudse koormuse mõjujoonte ordinaadid on võrdsed sõlmede kohal: kui $x = 0$, siis $\eta_{x=0} = \eta_m$; kui $x = d$, siis $\eta_{x=d} = \eta_n$.

Järelikult tuleb paindemomendi M_c mõjujoone saamiseks lõigete m ja n vahel ordinaadid η_m ja η_n omavahel sirgega ühendada (joonis 5.14, b). Põikjõu Q_c mõjujoone saame kätte

sarnaselt (joonis 5.14, c). Vahemikes $a-m$ ja $n-b$ on kaudse koormuse mõjujoone ordinaadid samad nagu siis, kui koormus oleks rakendatud otse peatalale. Paneeli $m-n$ ulatuses on mõjujoon sirge, mille saame, kui otsese koormuse mõjujoone ordinaadid lõigete m ja n kohal omavahel ühendada.

Kokkuvõtvalt saame öelda, et kaudse koormuse mõjujoone kujutamiseks koostame esmalt mõjujoone otsesele koormusele, misjärel projekteerime sõlmed otsese koormuse mõjujoonele ja naabersõlmede projektsioonid ühendame sirgega. Kaudse koormuse mõjujoon kujutab hulknurka, mille tippude ordinaadid sõlmede kohal ühtivad otsese koormuse mõjujoone ordinaatidega.

Mainime ka seda, et joonisel 5.13, b ja 5.14, a esitatud peatala kujutab joonise 5.13, a konstruktsioonil mõlemat peatala, kuna sillal olev koormus kandub põiktalade kaudu mõlemale peatalale. Seega, kui koormus ei asu silla keskel, tuleb eraldi analüüsida ka tema jagunemist kummagi peatala vahel.

5.3. Mõjujoonte konstrueerimine kinemaatika meetodiga

5.3.1. Meetodi idee

Mõjujoonte koostamisel kinemaatika meetodiga lähtume virtuaalsiirete printsiibist. Vaatame joonisel 5.15, a kujutatud mehhanismi, mis on saadud esialgsest arvutusskeemist mingi sideme eemaldamisel ja asendamisel sellele sidemele vastava reaktsiooniga X_r . Ei ole oluline, kas see on toeside või sisejõudu vastu võttev side ja seetõttu nimetame seda üldsõnaliselt lihtsalt sidemeks. Tuletame varasemast meelde, et staatikaga määratava toereaktsiooni või sisejõu leiame virtuaalsiirete printsiibi alusel valemiga (3.13), mis, kui arvestada eemaldatud sideme reaktsiooni X_r ja sellele vastava virtuaalsiirde δr vastupidist suunda praegusel juhul, saab kuju

$$-X_r \delta r + F_i \delta s_i = 0 \quad (5.21)$$

kus δs_i on jõu F_i rakenduspunkti siire jõu suunas (joonis 5.15, a)

$$\delta s_i = d\varphi \cdot x \quad (5.22)$$

Valemist (5.21) saame

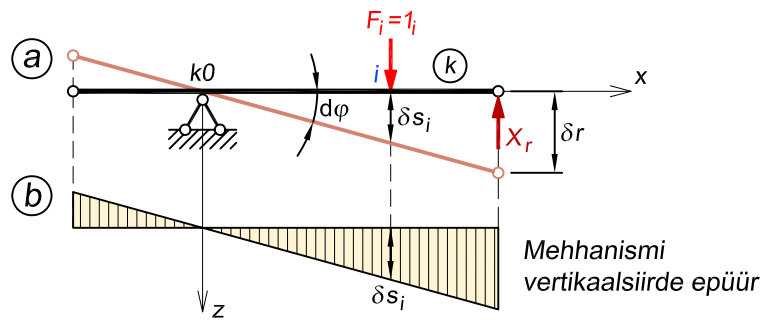
$$X_r = \frac{F_i \delta s_i}{\delta r} \quad (5.23)$$

Mõjujoone ordinaatide arvutamisel on koormuseks ühikjõud ja avaldis on siis järgmine

$$X_r = 1_i \frac{\delta s_i}{\delta r} \quad (5.24)$$

Reaktsioonile X_r vastav siire δr on konstant, kuna X_r rakenduspunkt ega suund ei muutu. Ühikjõud aga liigub konstruktsiooni sõiduteel ja tema rakenduspunkti siire δs_i muutub olenevalt ühikjõu asukohast. Arvutusskeemi sõidutee siirded leiame pooluste plaaniga.

Vaatame joonisel 5.15, a kujutatud mehhanismi elementi k . Mehhanismi liikumisel varras k pöörduv ümber peapooluse kO . Varda k punktide siirded muutuvad lineaarselt kaugusega



Joonis 5.15. Kinemaatika meetodi idee, lähtudes mehhanismi liikumisest

peapoolusest $k0$. Sõidutee punkti i siire ühikjõu sihile δs_i muutub vastavalt valemile (5.22) lineaarselt punkti abstsissiga x , kusjuures koordinaatide algpunktiks on peapoolus $k0$ (joonis 5.15, a). Järelikult on mõjujoon iga geomeetriselt muutumatu kujundi ulatuses sirge, mis lõikub telgjoonega peapooluse $k0$ kohal. Seega on tõestatud väide, et staatikaga määratava konstruktsiooni sisejõudude ja reaktsioonide mõjujooned koosnevad sirgjoontest.

Joonisel 5.15, b on esitatud varda k pöördumisest ümber peapooluse $k0$ tekkiv vertikaalsiirde epüür.

Avaldisest (5.24) järeldeb, et eemaldatud sideme reaktsiooni X_r mõjujoone ordinaadid on suuruselt võrdsed jagatisega $\frac{\delta s_i}{\delta r}$. Mehhanismi punktide siirded määrame ühe vabalt valitud parameetriga, milleks võetakse tavaliselt reaktsioonile X_r vastav siire. Kui võtta $\delta r = 1$, siis $X_r = 1 \frac{\delta s_i}{1} = \delta s_i$ ja reaktsiooni X_r mõjujoone ordinaadid on võrdsed (nii suuruselt kui märgilt) mehhanismi siirde epüüri ordinaatidega.

Kokkuvõetult – kinemaatika meetodiga moodustame mõjujooned järgmiselt:

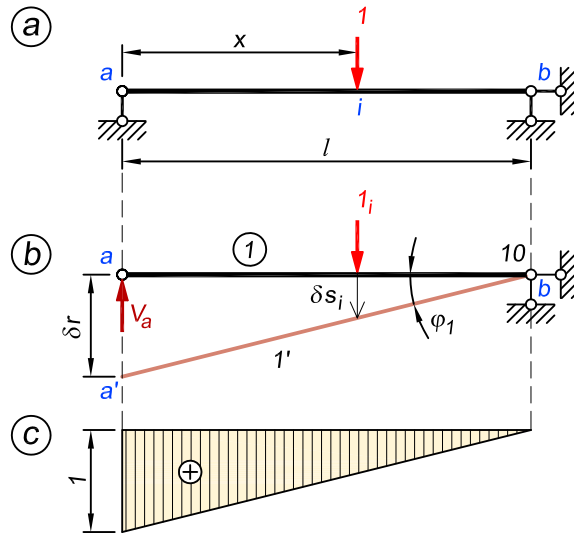
1. eemaldame arvutuskeemist sideme, mille reaktsiooni mõjujoont konstrueerime;
2. kujutame pooluste plaaniga mehhanismi nende elementide, millel asub sõidutee, ühikjõuga paralleelse siirde epüüri;
3. määrame mõjujoone ordinaadi mõõtkava ja märgi.

Mõjujoonte koostamist kinemaatika meetodiga nimetatakse ka *Müller-Breslau printsiibiks* saksa ehitusinseneri ja õppejõu Heinrich Müller-Breslau (1851–1925) järgi, kes võttis selle meetodi esimesena kasutusele.

5.3.2. Toereaktsiooni mõjujoon

Lihttala (joonis 5.16, a) toereaktsiooni V_a mõjujoone moodustamiseks eemaldame toe a ja asendame sellele vastava reaktsiooniga (joonis 5.16, b). Mehhanism koosneb kujundist I , mille peapoolus 10 ühtib parempoolse toeliigendiga $b \equiv 10$. Kujundi I virtuaalsiirde epüüri kujutame sirgega $1'$, mille saame kujundi pöördel φ_1 ümber peapooluse 10 . Virtuaalsiirde printsiibi alusel koostatud võrrandist

$$-V_a \delta r + 1_i \delta s_i = 0 \quad (5.25)$$



Joonis 5.16. Toereaktsiooni mõjujoone koostamine kinemaatika meetodiga

leiame toereaktsiooni

$$V_a = 1_i \frac{\delta s_i}{\delta r} \quad (5.26)$$

Avaldises (5.25) on esimene korrutis negatiivne, kuna rakenduspunkti a siire on reaktsiooni suunaga vastupidine. Mõjujoone ordinaadi mõõtkava määramiseks võtame $\delta r = 1$. Valemi (5.26) kuju on nüüd

$$V_a = 1 \frac{\delta s_i}{1} = \delta s_i \quad (5.27)$$

Reaktsiooni V_a mõjujooneks on kujundi I vertikaalsirde epüür (joonis 5.16, c).

5.3.3. Paimdemomendi mõjujoon

Paimdemomendi M_c mõjujoone moodustamiseks eemaldame lõikest c paimdemomenti vastuvõtva sideme, s.t asetame lõikesse c liigendi. Ühikjõu tasakaalustamiseks rakendame ristlõikesse c kaks võrdset vastupidi mõjuvat momenti M_c (joonis 5.17, a). Järgnevalt kujutame mehhanismi vertikaalsirde epüüri (joonis 5.17, b).

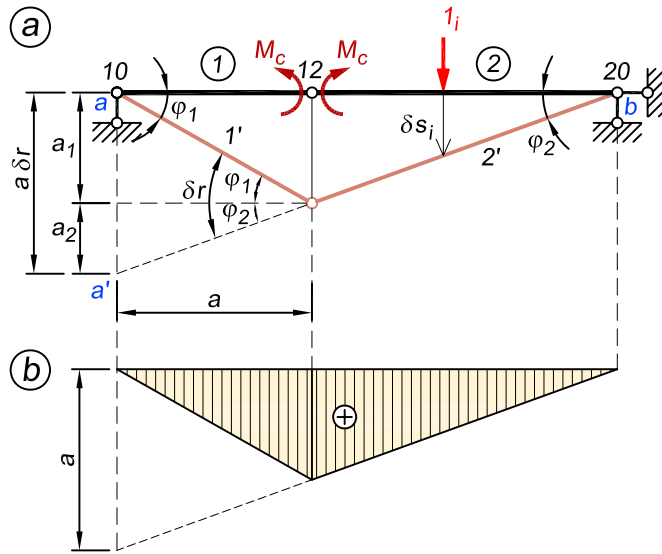
Mehhanism koosneb elementidest 1 ja 2. Elementide 1 ja 2 ühendusliigend on kõrvalpooluseks 12. Elementi 2 peapooluseks on toelliigend $b \equiv 20$. Elementi 1 peapooluseks on toelliigend $a \equiv 10$. Mehhanismi vertikaalsirde epüüri kujutame kahe sirgega 1' ja 2', mis lõikuvad kõrvalpooluse 12 vertikaalil. Epüüri nulljoonega lõikuvad need sirged vastavalt peapooluste 10 ja 20 vertikaalidel.

Virtuaalsiirete printsiibi alusel koostatud võrrandist

$$-M_c \varphi_1 - M_c \varphi_2 + 1_i \delta s_i = 0 \quad (5.28)$$

avaldame paimdemomendi

$$M_c = 1_i \frac{\delta s_i}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{\delta s_i}{\delta r} \quad (5.29)$$



Joonis 5.17. Paindemomendi mõjujoone koostamine kinemaatika meetodiga

Avaldises (5.28) on kaks esimest korrutist negatiivsed, sest elemendid 1 ja 2 pöörduvad vastupidises suunas nendel elementidel mõjuvate momentidega M_c . Kuna siirded on väikesed, siis nurkade φ_1 ja φ_2 asemel võtame tangensid: $\varphi_1 + \varphi_2 = \delta r = \frac{a_1 + a_2}{a}$. Kui võtta $\delta r = 1$, siis $a_1 + a_2 = a$ ja paindemomendi mõjujoone ordinaadid võrduvad vertikaalsirde epüüri ordinaatidega $M_c = \delta s_i$ (joonis 5.17, b).

5.3.4. Põikjõu mõjujoon

Põikjõu Q_c mõjujoone moodustamiseks eemaldame lõikest c põikjõudu vastuvõtva sideme, s.t lõikame tala lõike c kohalt läbi, ja ühikjõu tasakaalustamiseks rakendame tala teljega risti kaks võrdset vastupidise suunaga jõudu Q_c (joonis 5.18, a).

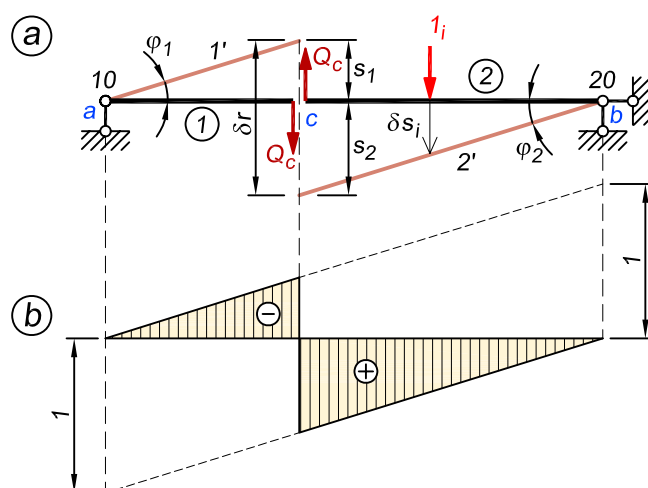
Ristlõikesse c jääb pärast põikjõudu vastuvõtva sideme eemaldamist kaks tala teljega paralleelset sidet, mis lubavad mehhanismi elementidel 1 ja 2 teineteise suhtes nihkuda, kuid ei võimalda ühe elemendi pöört teise suhtes. Elementide 1 ja 2 kõrvalpoolus 12 asetseb kahe paralleelse sideme sihis, s.t varda telje sihis, lõpmatuses. Elementide 1 ja 2 peapoolused ühtivad toeliigenditega $10 \equiv a$ ja $20 \equiv b$ (joonis 5.18, a). Mehhanismi elemendid pöörduvad ümber peapooluste 10 ja 20, kuid jäävad teineteisega paralleelseks. Vertikaalsirde epüür koosneb kahest paralleelsest sirgest 1' ja 2', mille nullpunktid on tugede kohal.

Virtuaalsiirete printsiibi alusel koostatud võrrandist

$$-Q_c s_1 - Q_c s_2 + 1_i \delta s_i = 0 \quad (5.30)$$

avaldame põikjõu

$$Q_c = 1_i \frac{\delta s_i}{s_1 + s_2} = 1_i \frac{\delta s_i}{\delta r} = \frac{\delta s_i}{\delta r} \quad (5.31)$$



Joonis 5.18. Põikjõu mõjujoone koostamine kinemaatika meetodiga

Avaldise (5.30) kaks esimest korrutist on negatiivsed, kuna elementidele 1 ja 2 mõjuvate põikjõudude Q_c rakenduspunktide siirded on jõududele Q_c vastupidised.

Kui võtta $\delta r = 1$, siis on vertikaalsiirde epüür põikjõu mõjujooneks: $Q_c = \delta s_i$ (joonis 5.18, b). Paremal pool lõiget c on mõjujoone ordinaadid positiivsed, sest δs_i on koormusega 1_i samas suunas, ja vasakul pool negatiivsed, sest δs_i on koormusega vastassuunas.

5.4. Mõjujoonte omadused ja kasutamine

Mõjujoontega saame arvutada toereaktsioone, sisejõude, deformatsioone, siirdeid ja ka pingeid, mida nimetame siin ühe sõnaga kokkuvõetult suuruseks Z_k . Eespool kirjutasime, et mõjujooni kasutatakse liikuvate koormuste puhul, kuna koormuste asukoha muutumine põhjustab ka suuruse Z_k muutumise, mistõttu reaktsioonide ja sisejõudude arvutus tavaliste staatika tasakaalutingimustega kujuneks väga töömahukaks.

Lisaks on võimalik suuruse Z_k mõjujoone abil määrata, kus kohas arvutusskeemil peab paiknema koormus, et sellel suurusel oleks mainitud koormusest põhjustatud ekstremaalne väärtus.

5.4.1. Koormused, mille mõju saab arvutada mõjujoontega

Suuruse Z_k mõjujoone ordinaat η_i kujutab konstruktsiooni lõikes i mõjuvast ühikjõust põhjustatud suuruse Z väärtust lõikes k .

Mõjujoontega saame arvutada suuruse Z_k väärtust igasugusest ühikjõuga paralleelsest koormusest – nii koondjõududest kui ka lauskoormusest, mis võib olla kas konstantne või muutuv.

5.4.2. Üks koondjõud

Kuna mõjujoone ordinaat lõikes i väljendab suuruse Z_k (ehk toereaktsiooni, sisejõu, deformatsiooni või siirde) väärtust selles lõikes paiknevast ühikjõust, siis konstruktsioonil lõikes i mõjuvast reaalsest koondatud jõust $F_i \neq 1$ põhjustatud suuruse Z_k väärtus on võrdne jõu F_i ja jõu kohal oleva mõjujoone ordinaadi η_i korrutisega

$$Z_k = F_i \eta_i \quad (5.32)$$

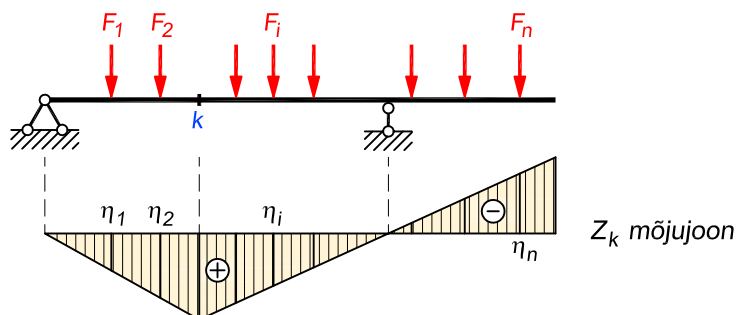
kus ordinaadi η_i juures arvestame ka märki. Mõjujoonel võivad olla nii positiivsed kui negatiivsed piirkonnad, mis tähendab, et arvutusskeemil liikuvast koormusest põhjustatud suurus Z_k võib suunda vahetada ja seda tuleb projekteerimisel kindlasti arvestada. Näiteks, kui toereaktsioon võib sõltuvalt koormuse asetusest olla suunatud nii üles- kui allapoole, peab kasutama selliseid toesidemeid, mis oleks võimelised mõlemas suunas reaktsiooni vastu võtma.

5.4.3. Mitu koondjõudu

Olgu konstruktsioonil ühikjõuga paralleelsetest koondatud jõududest koosnev koormussüsteem F_1, F_2, \dots, F_n (joonis 5.19). Sisejõud või siire võrdub jõudude mõju sõltumatusse printsiibi alusel jõudude ja nende kohal olevate mõjujoone ordinaatide korrutiste summaga

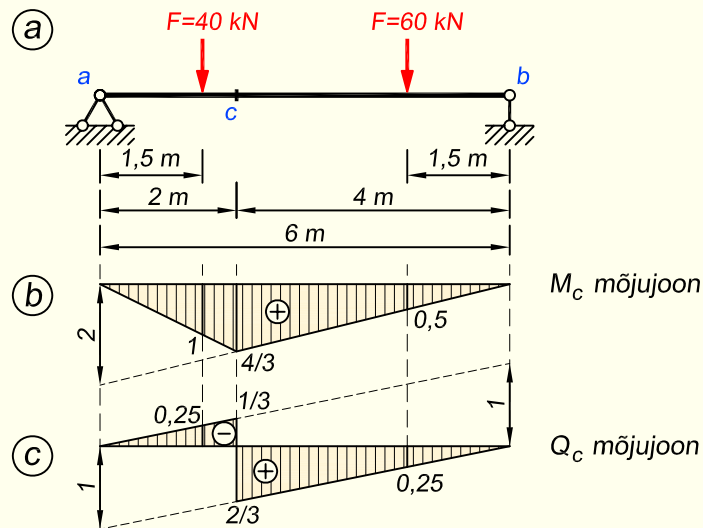
$$Z_k = F_1 \eta_1 + F_2 \eta_2 + \dots + F_n \eta_n = \sum_{i=1}^n F_i \eta_i \quad (5.33)$$

Avaldis (5.33) on kehtiv ainult geomeetriliselt muutumatute konstruktsioonide jaoks, kui nende elastsusomadused on väljendatavad Hooke'i seadusega.



Joonis 5.19. Mõjujoone kasutamine paralleelsete koondatud jõududega

NÄIDE 5.1. Arvutada mõjujoonte abil paindemoment ja põikjõud joonisel 5.20, *a* kujutatud tala lõikes *c*.



Joonis 5.20. Tala arvutuskeem ja mõjujooned

LAHENDUS

Paindemomendi ja põikjõu mõjujooned on näidatud joonisel 5.20, *b* ja *c*. Jõudude kohal olevate ordinaatide suurused on märgitud joonisel.

Arvutamisel kasutame valemit (5.33)

$$M_c = 40 \cdot 1 + 60 \cdot 0,5 = 70 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Q_c = -40 \cdot 0,25 + 60 \cdot 0,25 = 5 \text{ kN}$$

5.4.4. Lauskoormus

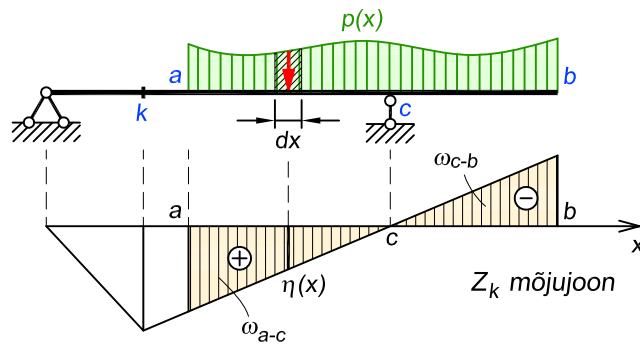
Konstruksioonil vahemikus *a-b* muutuva intensiivsusega koormuse $p(x)$ puhul võtame koormuse intensiivsuse diferentsiaali dx pikkusel konstantseks (joonis 5.21). Sellel pikkusel vaatame koormusele kui koondatud jõule suurusega $p(x)dx$. Elementaarjõust $p(x)dx$ tingitud suuruse Z_k väärtuse arvutame valemiga (5.32)

$$dZ_k = p(x)dx \cdot \eta(x) \quad (5.34)$$

kus $\eta(x)$ on mõjujoone ordinaat elementaarjõu kohal (joonis 5.21). Nüüd kasutame valemit (5.33), kusjuures asendame summa märgi integraali märgiga

$$Z_k = \int_a^b p(x)\eta(x)dx \quad (5.35)$$

Konstruksioonile vahemikus *a-b* rakendatud koormusest põhjustatud suuruse Z_k väärtus on arvutatav, kui on teada koormuse intensiivsus $p(x)$ ja mõjujoone võrrand $\eta(x)$.



Joonis 5.21. Mõjujoone kasutamine lauskoormusega

Ühtlase lauskoormuse puhul $p(x) = p = \text{const.}$, mistõttu toome koormuse intensiivsuse p valemis (5.35) integraalimärgi ette ja integreerimise tulemusena saame

$$Z_k = p \int_a^b \eta(x) dx = p\omega_{a-b} \quad (5.36)$$

kus ω_{a-b} on mõjujoone pindala koormuse mõjumise ulatuses $a-b$ (joonisel 5.21 näidatud viirutatuna).

Ühtlasest lauskoormusest põhjustatud toereaktsiooni, sisejõu, siirde või deformatsiooni arvutamisel vastava mõjujoonega korrutame koormuse intensiivsuse p koormuse all oleva mõjujoone pindalaga. Kui mõjujoone ordinaadid koormuse kohal on kahemärgilised, siis võtame pindalad vastavate märkidega (joonis 5.21)

$$Z_k = p(\omega_{a-c} - \omega_{c-b}) \quad (5.37)$$

5.4.5. Mõjujoone sirge osa omadus

Kui ühtlase lauskoormuse pikkusel l mõjujoon on sirge (joonis 5.22, b ja c), siis arvutame mõjujoone pindala koormuse kohal valemiga

$$\omega_{a-b} = \frac{l(\eta_a + \eta_b)}{2} \quad (5.38)$$

kus η_a ja η_b on mõjujoone ordinaadid koormuse otste kohal.

Koormuse keskkohal asuv ordinaat η_r võrdub koormuse otste kohal asuvate mõjujoone ordinaatide poolsummaga

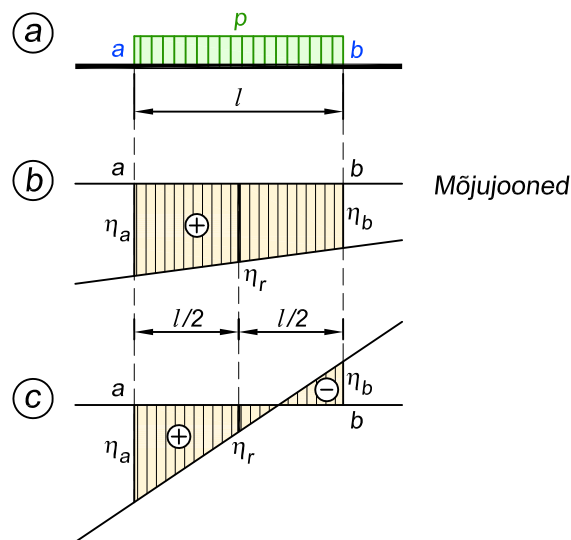
$$\eta_r = \frac{\eta_a + \eta_b}{2} \quad (5.39)$$

Valem (5.38) on siis järgmine

$$\omega_{a-b} = l\eta_r \quad (5.40)$$

Mõjujoone sirge osa kohal asetseva koormuse mõju arvutame nüüd valemiga

$$Z_k = p\omega_{a-b} = pl\eta_r \quad (5.41)$$



Joonis 5.22. Lineaarselt muutuvate mõjujoone kasutamine

ehk

$$Z_k = R\eta_r \quad (5.42)$$

kus

$$R = pl \quad (5.43)$$

on lauskoormuse resultant.

Valem (5.42) on kehtiv ka mitteühtlase lauskoormuse, samuti koondatud jõudude puhul.

NÄIDE 5.2. Arvutada mõjujoonte abil paindemoment ja põikjõud joonisel 5.23, a kujutatud tala lõikes c.

LAHENDUS

Paindemomendi M_c mõjujoone (joonis 5.23, b) pindala koormuse ulatuses on

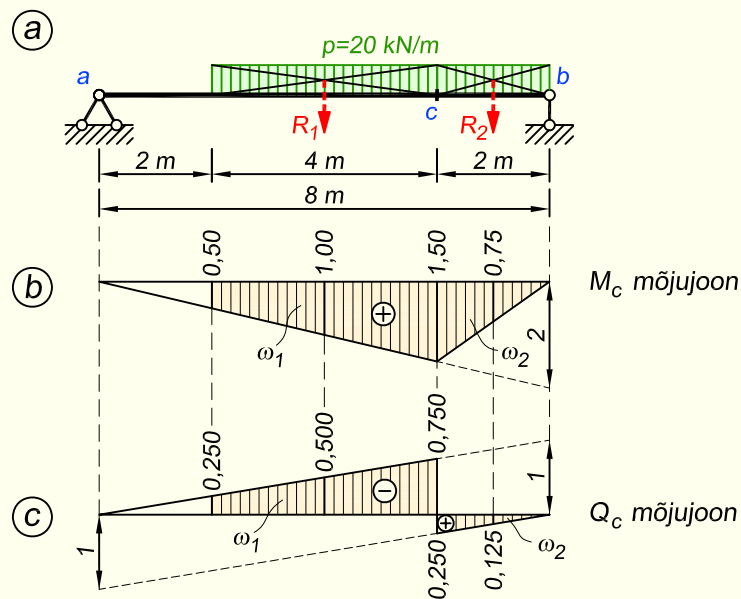
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{0,50 + 1,50}{2} \cdot 4 + \frac{1,50 \cdot 2}{2} = 5,5 \text{ m}^2$$

ja paindemoment lõikes c vastavalt valemile (5.36)

$$M_c = p\omega = 20 \cdot 5,5 = 110 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Leiame sama väärtuse, kasutades mõjujoone sirge osa omadust. Koormuse resultantid mõjujoone vasak- ja parempoolse sirge kohal on $R_1 = 20 \cdot 4 = 80 \text{ kN}$ ja $R_2 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ kN}$. Mõjujoone ordinaadid resultantide kohal on $\eta_1 = 1,0 \text{ m}$ ja $\eta_2 = 0,75 \text{ m}$. Paindemoment lõikes c valemiga (5.42) on

$$M_c = R_1\eta_1 + R_2\eta_2 = 80 \cdot 1,0 + 40 \cdot 0,75 = 110 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 5.23. Tala arvutuskeem ja mõjujooned

Põikjõu Q_d mõjujoone (joonis 5.23, c) ordinaadid on vasakul pool lõiget c negatiivsed ja paremal pool positiivsed. Negatiivne pindala on

$$\omega_1 = \frac{0,25 + 0,75}{2} \cdot 4 = 2,0 \text{ m}^2$$

ja positiivne pindala

$$\omega_2 = \frac{0,25 \cdot 2}{2} = 0,25 \text{ m}^2$$

Põikjõud lõikes c vastavalt valemitele (5.36) ja (5.37)

$$Q_c = p(\omega_2 - \omega_1) = 20(0,25 - 2,00) = -35 \text{ kN}$$

Leiame põikjõu, kasutades mõjujoone sirge osa omadust ja valemit (5.42). Mõjujoone ordinaadid resultantide kohal on $\eta_1 = -0,500$ ja $\eta_2 = 0,125$. Põikjõuks saame

$$Q_c = R_1\eta_1 + R_2\eta_2 = -80 \cdot 0,500 + 40 \cdot 0,125 = -35 \text{ kN}$$

5.5. Koormuse ebasoodsaim asetus

5.5.1. Sisejõudude ekstreemumid

Eelmises peatükis vaatasime, kuidas arvutada mõjujoontega sisejõudusid ja reaktsioone. Mõjujoone abil saame lisaks leida konstruktsiooni kindlaksmääratud lõike jaoks liikuva koormuse asetuse, mille juures suurus Z_k (sisejõud, toereaktsioon jne) omab suurimat positiivset ($\max Z_k$) või suurimat negatiivset ($\min Z_k$) väärtust. Koormuse sellist paiknemist nimetatakse *ebasoodsaimaks* ehk *kõige ohtlikumaks asetuseks*.

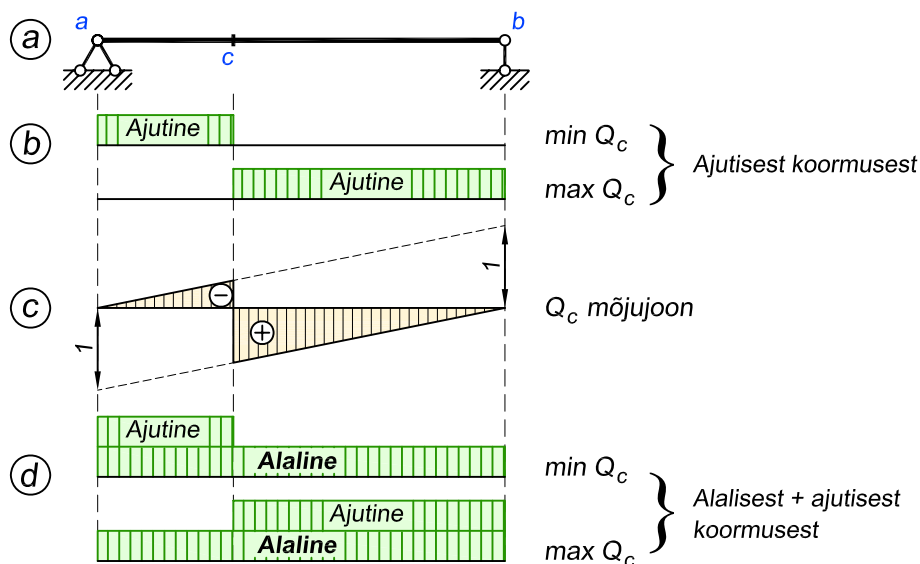
5.5.2. Lauskoormus

Ekstremaalsete sisejõudude arvutamisel tuleb tähelepanu pöörata esmalt sellele, millised koormused on alalised ja millised ajutised. Alaliseks koormuseks on näiteks konstruktsiooni oma kaal ja see tuleb meil arvesse võtta kogu konstruktsiooni ulatuses, sõltumata mõjujoone märkidest. Ajutise koormuse aga paigutame konstruktsiooni peale, nii et sellest tekiks ekstremaalne sisejõud.

Järelikult alalisest lauskoormusest p (kN/m) ja ajutisest lauskoormusest g (kN/m) tekib $\max Z_k$ ajutise koormuse rakendamisel konstruktsioonile mõjujoone positiivse osa kohal ja $\min Z_k$ ajutise koormuse rakendamisel konstruktsioonile mõjujoone negatiivse osa kohal

$$\begin{aligned} \max Z_k &= p(\omega_+ - \omega_-) + g\omega_+ \\ \min Z_k &= p(\omega_+ - \omega_-) - g\omega_- \end{aligned} \quad (5.44)$$

kus ω_+ ja ω_- on vastavalt positiivse osa ja negatiivse osa pindala. Kui arvestame ainult ajutist



Joonis 5.24. Koormuse ebasoodsaim asetus lauskoormuse puhul

koormust, siis on avaldised järgmised

$$\max Z_k = g\omega_+; \quad \min Z_k = -g\omega_- \quad (5.45)$$

Joonisel 5.24, a on kujutatud lihttala ja skeemil c tema lõike c põikjõu mõjujoon. Joonisel 5.24, b on näidatud koormuste paiknemine arvutuses ainult ajutisest koormusest ning 5.24, d arvutuses nii alalisest kui ajutisest koormusest.

Lauskoormus on lühem kui tala sille

Arvutus läheb keerukamaks, kui lauskoormusega koormatud ala pikkus on määratud ja me ei saa seda ise valida vastavalt mõjujoone pluss- või miinusmärgiga osa pikkusele. Tuletame avaldise sellisel juhul maksimaalse paindemomendi arvutamiseks mingis lõikes sarnaselt, nagu seda on teinud T.S. Thandavamoorthy oma õpikus [32].

Joonisel 5.25, a on kujutatud tala a - b ning joonisel 5.25, b selle lõike c paindemomendi mõjujoon. Talal liikuva lauskoormuse pikkus s on määratud ja seda me muuta ei saa. Nüüd tuleb lõikes c maksimaalse paindemomendi saamiseks paigutada lauskoormus talale selliselt, et koormuse alla jääv mõjujoone pindala, mis joonisel on näidatud kaldu viirutusega, oleks maksimaalne.

Tähistame koormuse alguse ja lõpu lõigetega d ja e ning neile vastavad mõjujoone ordinaadid η_d ja η_e . Koormuse alla jääv mõjujoone pindala on maksimaalne, kui ordinaadid η_d ja η_e on võrdsed. Ükskõik, kummale poole sellest asendist koormust nihutada, hakkab mõjujoone kaldu viirutatud pindala vähenema. Mainitud ordinaadid saame avaldada maksimaalse ordinaadi $\eta_c = \frac{ab}{l}$ kaudu järgmiselt

$$\eta_d = \frac{\frac{ab}{l}}{a} \cdot t = \frac{b}{l} \cdot t; \quad \eta_e = \frac{\frac{ab}{l}}{b} \cdot m = \frac{a}{l} \cdot m \quad (5.46)$$

kus t ja m on vastavalt koormuse alguse kaugus tala vasakust toest ja koormuse lõpu kaugus paremast toest.

Kuna maksimaalse pindala saamiseks peab $\eta_d = \eta_e$, siis saame kirjutada

$$\frac{b}{l} \cdot t = \frac{a}{l} \cdot m \quad (5.47)$$

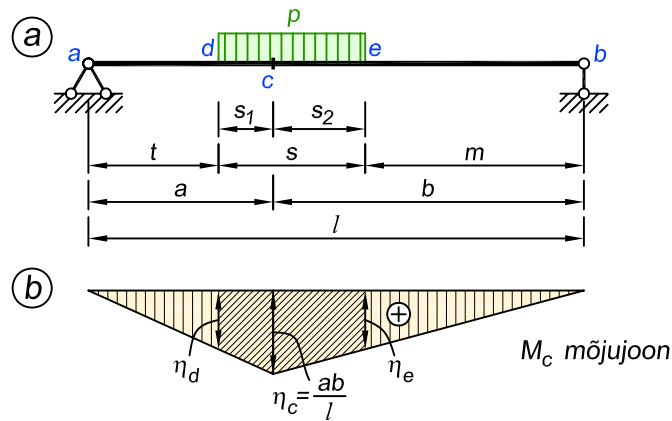
millest

$$\frac{a}{b} = \frac{t}{m} = \frac{a-t}{b-m} = \frac{s_1}{s_2} \quad (5.48)$$

kus s_1 ja s_2 on vastavalt koormuse alguse ja lõpu kaugus lõikest c . Kuna saadud avaldisest näeme, et $\frac{a}{b} = \frac{s_1}{s_2}$, siis võime kokkuvõtvalt öelda, et lõikes c tekib maksimaalne paindemoment, juhul kui see lõige jaotab lauskoormuse kaheks lõiguks, mille pikkuste suhe on sama nagu selle lõike kaugustel kummastki tala otsast.

Maksimaalse paindemomendi avaldise saame vastavalt valemile (5.36)

$$M_{c,\max} = p\omega_{d-e} = p \left[(\eta_d + \eta_c) \frac{s_1}{2} + (\eta_c + \eta_e) \frac{s_2}{2} \right] \quad (5.49)$$



Joonis 5.25. Koormuse ebasoodsaim asetus kindla pikkusega lauskoormuse korral

Kuna $\eta_d = \eta_e$, siis võime selle avaldise lühemalt välja kirjutada

$$M_{c,\max} = p(\eta_d + \eta_c) \frac{s}{2} \quad (5.50)$$

Saadud valem sisaldab mõjujoone ordinaate, millest vabanemiseks tuleb seda teisendada. Maksimaalse ordinaadi väärtus on lihtsalt leitav avaldisega $\eta_c = \frac{ab}{l}$. Järgnevalt leiame, millega võrdub ordinaat η_d . Selleks on eelnevalt vaja tuletada veel mõned avaldised.

Vastavalt avaldisele (5.48) $\frac{a}{b} = \frac{s_1}{s_2}$, mis teisiti kirjutatuna on

$$s_1 b = s_2 a \quad (5.51)$$

Kuna $s_2 = s - s_1$, siis

$$s_1 b = (s - s_1) a \quad (5.52)$$

mis peale teisendusi annab

$$s_1 = \frac{sa}{l} \quad (5.53)$$

Koormuse alguse kaugus vasakust toest on $t = a - s_1$, millest saame

$$t = a - \frac{sa}{l} = \frac{a(l-s)}{l} \quad (5.54)$$

Sarnastest kolmnurkadest saame

$$\frac{\eta_d}{\eta_c} = \frac{t}{a} \quad (5.55)$$

mistõttu ordinaat η_d võrdub

$$\eta_d = \frac{t}{a} \cdot \eta_c = \frac{a(l-s)}{la} \cdot \frac{ab}{l} = \frac{ab(l-s)}{l^2} \quad (5.56)$$

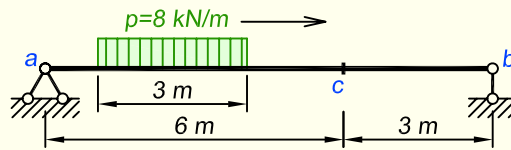
Nüüd saame lõikes c tekkiva maksimaalse paindemomendi arvutamise valemi (5.50) avaldada järgmiselt

$$M_{c,\max} = \frac{ps}{2} \left[\frac{ab(l-s)}{l^2} + \frac{ab}{l} \right] \quad (5.57)$$

mis peale teisendusi annab meile

$$M_{c,\max} = \frac{psab}{2l^2} (2l - s) \quad (5.58)$$

NÄIDE 5.3. Joonisel 5.26 kujutatud talal liigub lauskoormus p , kusjuures koormatud ala pikkus on 3 m. Leida, kus peab mainitud lauskoormus paiknema, et tala lõikes c tekiks maksimaalne paindemoment ning arvutada selle paindemomendi väärtus.



Joonis 5.26. Tala arvutuskeem

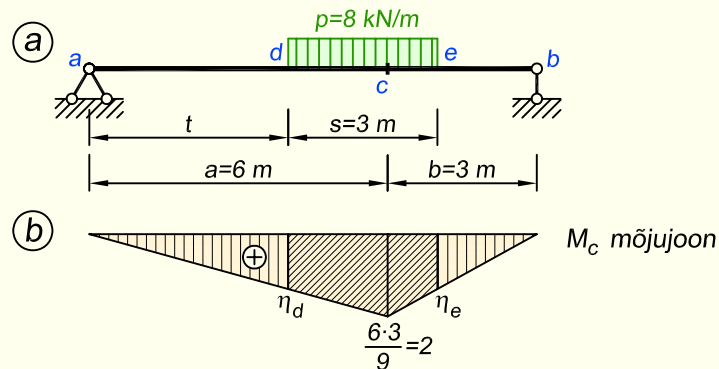
LAHENDUS

Esmalt koostame lõikele c paindemomendi mõjujoone (joonis 5.27, b).

Koormuse asukoha määramiseks kasutame valemit (5.54)

$$t = \frac{a(l - s)}{l} = \frac{6(9 - 3)}{9} = 4 \text{ m}$$

Järelikult peab lõikes c maksimaalse paindemomendi tekkimiseks liikuma lauskoormus asukohta, kus tema vasak ots on tala vasakust toest 4 m kaugusel.



Joonis 5.27. Maksimaalse M_c arvutamine

Paindemomendi arvutamiseks lõikes c mõjujoone abil on nüüd mitu võimalust.

Ühe variandi korral kasutame valemit (5.58)

$$M_{c,\max} = \frac{psab}{2l^2} (2l - s) = \frac{8 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3}{2 \cdot 9^2} (2 \cdot 9 - 3) = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Teise variandi korral võime kasutada valemeid (5.49) või (5.50), mis nõuavad eelnevalt mõjujoone ordinaatide arvutamist. Määrame ordinaatide η_d ja η_e väärtused, mis peavad võrdsed tulema. Teeme seda sarnaste kolmnurkade abil, lähtudes mõjujoone maksimaalsest ordinaadist ning äsja leitud koormuse asukohta määravast kaugusest t

$$\eta_d = \frac{2}{6} \cdot 4 = 1,3333 \text{ m}; \quad \eta_e = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,3333 \text{ m}$$

Nüüd saame paindemomendiks lõikes c valemitega (5.49) ja (5.50)

$$M_{c,\max} = 8 \left[(1,3333 + 2) \frac{2}{2} + (2 + 1,3333) \frac{1}{2} \right] = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{c,\max} = 8 (1,3333 + 2) \frac{3}{2} = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

5.5.3. Üks koondjõud

Ühe koondatud jõu puhul tekib maksimaalne või minimaalne sisejõud siis, kui jõud asetseb konstruktsioonil vastavalt mõjujoone suurima positiivse või negatiivse ordinaadi kohal

$$\max Z_k = F\eta_{\max}; \quad \min Z_k = F\eta_{\min} \quad (5.59)$$

5.5.4. Mitu koondjõudu

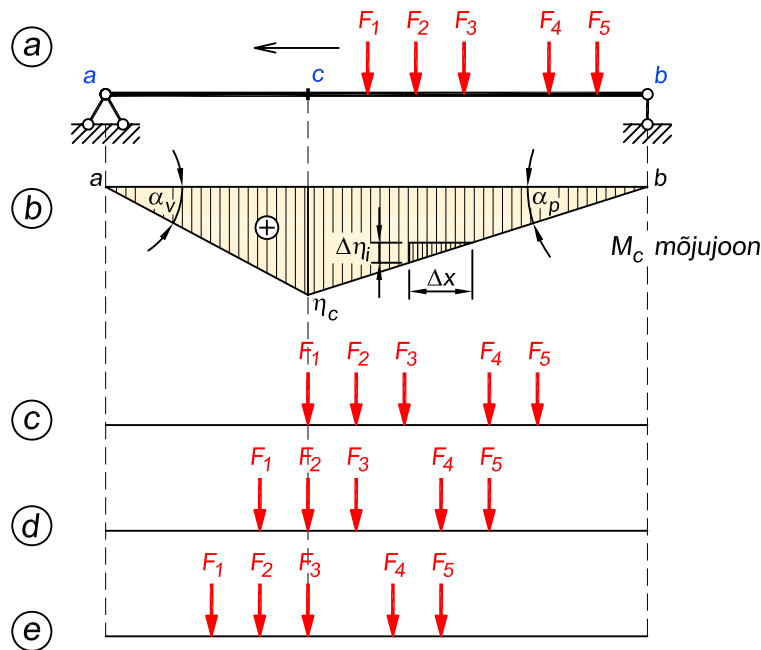
Mitmest koondatud jõust F_1, F_2, \dots, F_n , mille vahekaugused koormuse liikumisel ei muutu, arvutame suurimad sisejõud tavaliselt proovimise teel, kusjuures ebasoodsaima asetuse määramiseks me ei arvuta kohe lõplikke sisejõudusid, vaid kasutame selleks sisejõudude juurdekasvusi ΔZ_k . See tähendab, et kui koormuse nihutamisel sisejõud kasvab ($\Delta Z_k > 0$), siis lähetasukoht ei olnud koormuse kõige ohtlikum asetuse. Koormust tuleb järgmistesse asukohtadesse edasi nihutada seni, kuni sisejõud hakkab vähenema ($\Delta Z_k < 0$). Et liigset arvutamist vältida, siis katsume kohe alguses koormuse asetada arvutusskeemile niimoodi, et suuremad jõud oleksid suuremate ordinaatide kohal, ning et vastavalt sellele, kas leiame $\max Z_k$ või $\min Z_k$, oleks konstruktsioonil koormatud ainult mõjujoone positiivne või negatiivne osa.

Kui koormuse ebasoodsaim asetuse on leitud, siis arvutame kõigi jõudude all olevad mõjujoone ordinaadid ning leiame suuruse Z_k väärtuse mõjujoone abil valemiga (5.33)

$$Z_k = \sum F_i \eta_i \quad (5.60)$$

Joonisel 5.28, a on kujutatud tala ning sellel liikuv koormussüsteem, mis koosneb viiest jõust. Joonisel 5.28, b on selle tala lõike c paindemomendi mõjujoon, mille abil saame leida paindemomendi M_c jaoks koormuse kõige ohtlikuma asendi.

Koormuse ebasoodsaima asetuse leidmisel paigutame koormuse talale esmalt sellisel, et jõud F_1 on mõjujoone suurima ordinaadi η_c kohal (joonis 5.28, c).



Joonis 5.28. Koormuse ebasoodsaima asetuse määramine mitme koondjõu korral

Järgnevalt liigutame koormuse edasi vasakule, nii et jõud F_2 satub ordinaadi η_c kohale (joonis 5.28, d). Sellise liikumise tulemusena paindemoment M_c muutub. Jõu F_1 mõju paindemomendile väheneb, kuna vasakule liikumisel selle jõu all olevad mõjujoone ordinaadid hakkavad vähenema. Samal ajal kõigi ülejäänud jõudude mõju paindemomendile aga kasvab, kuna need jõud liiguvad mõjujoone suuremate ordinaatide kohale. Kui nüüd kõigi jõudude summaarne mõju on selline, et paindemoment M_c väheneb, siis ütleme, et sisejõu juurdekasv on negatiivne ja järelikult on koormuse eelmine asukoht ohtlikum. Kui aga sisejõu juurdekasv on positiivne, siis on koormuse praegune asukoht eelmisest ohtlikum ja arvutust tuleb jätkata.

Nihutame koormust veel edasi vasakule, nii et jõud F_3 paikneb nüüd ordinaadi η_c kohal (joonis 5.28, e). Arvutame välja selle liikumise tulemusena tekkiva sisejõu juurdekasvu, mille negatiivne väärtus tähendab, et paindemoment lõikes c on vähenema hakanud ja järelikult oli koormuse eelmine asukoht ohtlikum. Kui juurdekasv on endiselt positiivne, siis on praegune asukoht eelmisest ohtlikum.

Sellist koormuse edasi nihutamist jätkame alati seni, kuni sisejõu positiivne juurdekasv muutub negatiivseks.

Kokkuvõtvalt võime öelda, et koormuse ebasoodsaima asetuse puhul on sisejõud suurim: koormuse nihkumisel ebasoodsaimast asukohast Δx võrra paremale või vasakule on sisejõu juurdekasv negatiivne ($\Delta Z_k < 0$). Liikuvat jõudu, mis koormuse ebasoodsaima asetuse korral paikneb mõjujoone tipu kohal, nimetatakse *kriitiliseks jõuks*.

Vaatame, kuidas arvutada sisejõu juurdekasvu. Koormussüsteemi nihkumine Δx võrra paremale või vasakule poole põhjustab kõigi jõudude kohal olevate ordinaatide pikkuse muutu-

mise järgmise valemi kohaselt

$$\Delta\eta_i = \Delta x \tan \alpha_i \quad (5.61)$$

kus α_i on koormuse all oleva mõjujoone sirge ning horisontaali vaheline nurk (joonis 5.28, b). Mõjujoone langeva sirge (vasakpoolne sirge) puhul on nurk positiivne ja mõjujoone positiivsed ordinaadid suurenevad paremale poole; tõusva sirge (parempoolne sirge), s.t negatiivse nurga puhul on vastupidi.

Sisejõu juurdekasvu koormussüsteemi nihkumisest arvutame valemiga

$$\Delta Z_k = \Delta x \sum F_i \tan \alpha_i \quad (5.62)$$

kus Δx puhul tuleb kindlasti arvestada ka märki: koormuse liikumine paremale on positiivne ja vasakule negatiivne.

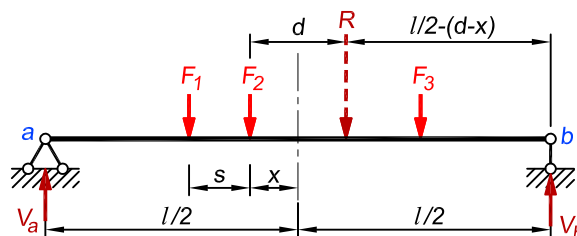
5.5.5. Lihttala suurim võimalik paindemoment

Tavaliselt me eeldame, et suurim paindemoment tekib arvutusskeemi ristlõikes, mille asukoht on teada. Sel juhul me koostame selle ristlõike kohta mõjujoone, leiame liikuva koormuse ebasoodsaima asetuse ja arvutame seejärel maksimaalse paindemomendi. Sageli tuleb aga arvutada talale suurim võimalik paindemoment, mis võib esineda mingis suvalises ristlõikes, mille asukoht pole teada. Järgnevalt vaatame, kuidas määrata tala suurima paindemomendi asukoht liikuvast koormusest.

Koondatud jõudude puhul koosneb paindemomendi epüür sirgjoontest, kusjuures koormuste all on epüüris murdepunktid. Sellest võime järeldada, et suurim paindemoment esineb alati täpselt ühe koondjõu all. Küsimus on nüüd selles, millise jõu all maksimaalne moment tekib, ning kus peab koormussüsteem paiknema, et see maksimaalne moment realiseeruks.

Joonisel 5.29 on kujutatud lihttala, millel liigub kolmest jõust koosnev koormussüsteem (F_1 , F_2 ja F_3), kus jõudude omavahelised kaugused on fikseeritud. Oletame, et sellise koormuse resultant R paikneb kaugusel d jõust F_2 (resultandi asukohta jõudude suhtes vaatame täpsemalt näites 5.4).

Esialgu ei ole meil võimalik väga kindlalt öelda, millise jõu all maksimaalne paindemoment tekib, kuid oletame, et see tekib ühe resultantile lähedal oleva jõu all. Kuna üksiku koondjõu puhul on moment seda suurem, mida lähemal on jõud silde keskkohale, siis sellest lähtuvalt oletame, et maksimaalne paindemoment tekib jõu F_2 all. Tähistame selle jõu kauguse tala silde keskkohast x -ga.



Joonis 5.29. Lihttala suurima võimaliku paindemomendi arvutus

Nüüd tuleb leida kauguse x väärtus, mille puhul saavutab paindemoment jõu F_2 all suurima võimaliku väärtuse. Seda teeme paindemomendi avaldise abil, esitades paindemomendi x funktsioonina.

Arvutame esmalt vasakpoolse toereaktsiooni väärtuse

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a l + R \left[\frac{l}{2} - (d - x) \right] = 0; \quad V_a = \frac{R}{l} \left(\frac{l}{2} - d + x \right) \quad (5.63)$$

Leiame paindemomendi jõu F_2 all, vaadeldes sellest löikest vasakule jäävat arvutuskeemi osa

$$M = V_a \left(\frac{l}{2} - x \right) - F_1 s \quad (5.64)$$

Lisame sellesse toereaktsiooni V_a avaldise

$$M = \frac{R}{l} \left(\frac{l}{2} - d + x \right) \left(\frac{l}{2} - x \right) - F_1 s \quad (5.65)$$

Pärast teisendusi saame

$$M = \frac{Rl}{4} - \frac{Rd}{2} + \frac{Rd}{l}x - \frac{R}{l}x^2 \quad (5.66)$$

Järgnevalt lähtume diferentsiaalseostest sisejõudude vahel, et paindemomendi tuletis on põikjõud, mis paindemomendi maksimumi kohal peab võrduma nulliga. Seetõttu võtame saadud avaldisest tuletise x järgi ja võrdsustame selle nulliga

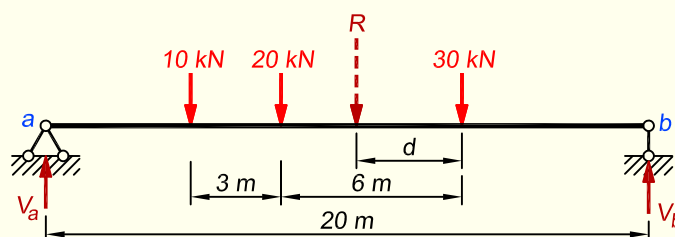
$$\frac{dM}{dx} = d\frac{R}{l} - 2x\frac{R}{l} = 0 \quad (5.67)$$

mis annab meile x väärtuseks

$$x = \frac{d}{2} \quad (5.68)$$

Leitud x väärtuse võime kokku võtta järgmiselt: **koormuse ebasoodsaima asetuse korral on kriitiline jõud tala keskmisest ristlõikest sama kaugel ühel pool kui koormuse resultant teisel pool.**

NÄIDE 5.4. Leida joonisel 5.30 kujutatud talas tekkiv liikuvast koormusest põhjustatud suurim võimalik paindemoment.



Joonis 5.30. Tala arvutuskeem liikuva koormusega

LAHENDUS

Arvutame resultantjõu

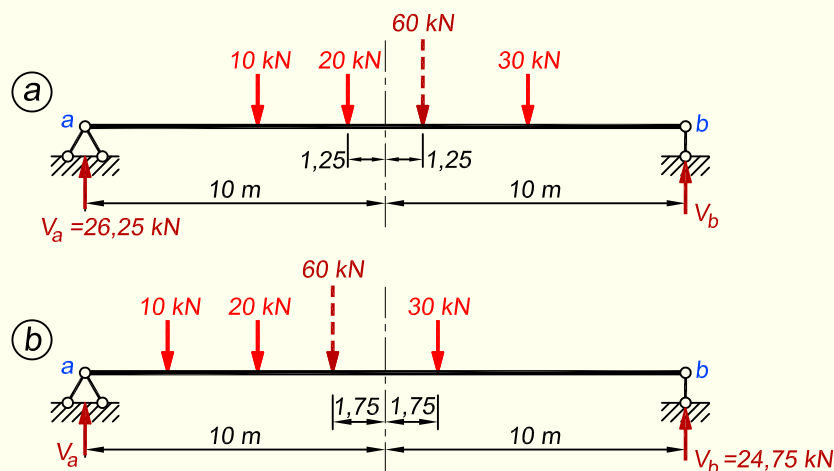
$$R = 10 + 20 + 30 = 60 \text{ kN}$$

Leiame resultantjõu paiknemise koormuste suhtes. Selleks võrdsustame resultantjõu momendi koormuste momendiga 30 kN rakenduspunkti suhtes ja avaldame resultantjõu kauguse d koormusest 30 kN

$$60 \cdot d = 10 \cdot 9 + 20 \cdot 6; \quad d = 3,5 \text{ m}$$

Maksimaalne paindemoment võib esineda nii koormuse 20 kN kui ka 30 kN all. Kuna täpset asukohta me ei tea, siis tuleb kontrollida mõlemat varianti.

Esmalt teeme arvutuse, eeldades, et maksimaalne paindemoment esineb 20 kN all. Kuna koormuse ebasoodsaima asetuse puhul peab kriitiline jõud paiknema tala keskmisest ristlõikest sama kaugel kui resultantjõud teisel pool, siis asetame koormussüsteemi talale selliselt, et tala keskmine ristlõige jagab pooleks 20 kN ja resultantjõu vahelise ala (joonis 5.31, a).



Joonis 5.31. Maksimaalse paindemomendi arvutus

Momentide tasakaalutingimusest toe b suhtes leiame tala vasaku toereaktsiooni

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 20 + 60 \cdot 8,75 = 0; \quad V_a = 26,25 \text{ kN}$$

Nüüd saame arvutada paindemomendi väärtuse 20 kN rakenduspunkti

$$M_{20} = 26,25 \cdot 8,75 - 10 \cdot 3 = 199,69 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Teise arvutuse teeme eeldusel, et suurim võimalik paindemoment esineb 30 kN all. Selleks asetame koormussüsteemi selliselt, et tala keskmine ristlõige jagab pooleks 30 kN ja resultantjõu vahelise ala (joonis 5.31, b).

Momentide tasakaalutingimus toe a suhtes annab meile tala parempoolse toereaktsiooni

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 20 - 60 \cdot 8,25 = 0; \quad V_b = 24,75 \text{ kN}$$

Arvutame paindemomendi väärtuse 30 kN rakenduspunktis

$$M_{30} = 24,75 \cdot 8,75 = 216,56 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Viimasena saadud tulemus on suurem, millest saame järeldada, et kriitiliseks jõuks on 30 kN ning suurim võimalik paindemoment talas tekib siis, kui koormussüsteem paikneb joonisel 5.31, b näidatud asendis.

5.6. Mõjumaatriks

5.6.1. Mõjumaatriksi mõiste

Arvutuskeemi lõigetes $i = 1, 2, \dots, n$ mõjuvatest jõududest tingitud sisejõu (siirde) lõikes k leiame selle lõike sisejõu (siirde) mõjujoone abil valemiga (5.33)

$$S_k = s_{k1}F_1 + s_{k2}F_2 + \dots + s_{kn}F_n = \sum_{i=1}^n s_{ki}F_i \quad (5.69)$$

Arvutuskeemis kõigi mõjuvate jõudude lõigete jaoks on sisejõudude avaldised järgmised

$$\begin{aligned} S_1 &= s_{11}F_1 + s_{12}F_2 + \dots + s_{1i}F_i + \dots + s_{1n}F_n \\ S_2 &= s_{21}F_1 + s_{22}F_2 + \dots + s_{2i}F_i + \dots + s_{2n}F_n \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ S_k &= s_{k1}F_1 + s_{k2}F_2 + \dots + s_{ki}F_i + \dots + s_{kn}F_n \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ S_n &= s_{n1}F_1 + s_{n2}F_2 + \dots + s_{ni}F_i + \dots + s_{nn}F_n \end{aligned} \quad (5.70)$$

mis maatrikskuju on järgmine

$$\mathbf{S} = \mathbf{b}_s \mathbf{F} \quad (5.71)$$

kus

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} \quad (5.72)$$

on sisejõudude vektor ja

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (5.73)$$

on mõjuvate välisjõudude vektor ehk *koormusvektor* ning

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1i} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2i} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{ki} & \dots & s_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{ni} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

on *sisejõu mõjumaatriks*, mille element s_{ki} on kohas i mõjuvast ühikjõust põhjustatud sisejõud arvutusskeemi lõikes k .

Sisejõu mõjumaatriks (5.74) võimaldab teisendada välisjõudude vektori (5.73) sisejõudude vektoriks (5.72).

Maatriksi (5.74) veeru i elemendid $s_{1i}, s_{2i}, \dots, s_{ni}$ on kohas i mõjuvast ühikjõust $F_i = 1$ põhjustatud sisejõu S epüüri ordinaadid arvutusskeemi lõigetes $1, 2, \dots, n$.

Maatriksi (5.74) rea k elemendid $s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn}$ on sisejõu S mõjujoone ordinaadid arvutusskeemi lõike k jaoks.

Astmelisel muutumisel koondatud jõu kohal on maatriksi ühesuguste tähistega elementidel s_{ii} kaks tähendust: $s_{ii,i-1}$, kui ühikjõud on lõikest i vasakul, ja $s_{ii,i+1}$, kui ühikjõud on lõikest i paremal.

5.6.2. Paindemomendi mõjumaatriks

Järgnevalt käsitleme paindemomendi mõjumaatriksit. Kohas i mõjuvast ühikjõust $F_i = 1$ põhjustatud paindemomendi arvutusskeemi lõikes k tähistame m_{ki} . Jõudude mõju sõltumatuse printsiibi alusel leiame paindemomendid arvutusskeemi lõigetes järgmiselt

$$\begin{aligned} M_1 &= m_{11}F_1 + m_{12}F_2 + \dots + m_{1i}F_i + \dots + m_{1n}F_n \\ M_2 &= m_{21}F_1 + m_{22}F_2 + \dots + m_{2i}F_i + \dots + m_{2n}F_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ M_k &= m_{k1}F_1 + m_{k2}F_2 + \dots + m_{ki}F_i + \dots + m_{kn}F_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ M_n &= m_{n1}F_1 + m_{n2}F_2 + \dots + m_{ni}F_i + \dots + m_{nn}F_n \end{aligned} \quad (5.75)$$

või maatrikskujul esitatuna

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}_m \mathbf{F} \quad (5.76)$$

kus maatriks

$$\mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{k1} & m_{k2} & \dots & m_{ki} & \dots & m_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{ni} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

on *paindemomendi mõjumaatriks*. Maatriksi (5.77) rea k elementideks m_{ki} on arvutusskeemi lõike k paindemomendi mõjujoone ordinaadid lõigete $i = 1, 2, \dots, n$ kohal. Maatriksi (5.77) veeru i elementideks m_{ki} on lõikes i mõjuvast ühikjõust $F_i = 1$ põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaadid lõigetes $k = 1, 2, \dots, n$. Maatriksi (5.77) koostamiseks on järelikult vaja arvutada kas n mõjujoone või n epüüri ordinaadid lõigetes $1, 2, \dots, n$.

Lihttala paindemomendi mõjumaatriks

Eelnevalt andsime üldjuhised mõjumaatriksi koostamiseks, siin alapeatükis vaatame, kuidas arvutust lihtsustada, kui meil on tegemist lihttalaga.

Lähtume siin paindemomendi epüüri ordinaatidest. Joonisel 5.32 kujutatud n võrdseks osaks jaotatud lihttala paindemomendi mõjumaatriksi elemendid arvutame valemitega

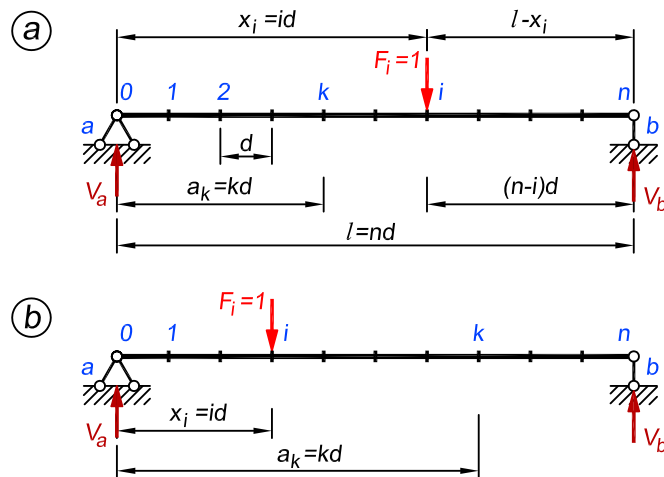
$$\begin{aligned} m_{ki} &= V_a a_k, \quad \text{kui } k \leq i \\ m_{ki} &= V_b (l - a_k), \quad \text{kui } i \leq k \end{aligned} \quad (5.78)$$

mis, kui nendesse asetada

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{1(l - x_i)}{l} = \frac{(n - i)d}{nd} = \frac{n - i}{n} \\ V_b &= \frac{1x_i}{l} = \frac{id}{nd} = \frac{i}{n} \\ a_k &= kd; \quad l = nd \end{aligned} \quad (5.79)$$

saavad kuju

$$\begin{aligned} m_{ki} &= \frac{d}{n} (n - i) k = \frac{l}{n^2} (n - i) k, \quad \text{kui } k \leq i \\ m_{ki} &= \frac{d}{n} (n - k) i = \frac{l}{n^2} (n - k) i, \quad \text{kui } i \leq k \end{aligned} \quad (5.80)$$



Joonis 5.32. Võrdseteks osadeks jaotatud lihttalad

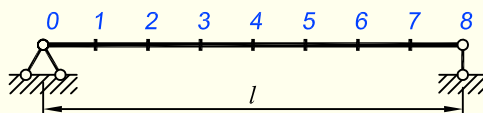
Lihttala paindemomendi mõjumaatriks (5.77), kui tala on jaotatud n võrdseks osaks ja maatriksi elemendid arvutame valemitega (5.80), on järgmine

$$\mathbf{b}_m = \frac{l}{n^2} \begin{bmatrix} n-1 & n-2 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & (n-2)2 & \dots & \dots & \dots & 4 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha \cdot 2 & \dots & \alpha \cdot \beta & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & \dots & 2\beta & \dots & 2(n-2) & n-2 \\ 1 & 2 & \dots & \beta & \dots & n-2 & n-1 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Maatriks \mathbf{b}_m on sümmeetriline mõlema diagonaali suhtes. Viimane rida vasakult paremale ja esimene veerg alt üles esitavad naturaalarvude ridu 1, 2, ..., $n-1$. Teised elemendid arvutame järgmise reegli järgi: iga element peadiagonaalil (vasakult ülevalt paremale alla) ja allpool võrdub rea α ja veeru β järjekorranumbrite korrutisega $\alpha \cdot \beta$ (numeratsioon ridadel esimese veeru järgi alt üles ja veergudel alumise rea järgi vasakult paremale). Tala jaotamisel n võrdseks osaks on lõigete arv $n+1$. Tugede lõigetes on paindemomendid nullid ning need read ja veerud võib jätta kirjutamata. Paindemomendi mõjumaatriks on sel juhul ruutmaatriks $n-1$ rea ja veeruga.

Valem (5.81) võimaldab meil mõjumaatriksi kätte saada ilma selleks eelnevalt epüüre ja mõjujooni koostamata.

NÄIDE 5.5. Koostada paindemomendi mõjumaatriks joonisel 5.33 kujutatud kaheksaks võrdseks osaks jaotatud lihttalale.



Joonis 5.33. Tala arvutuskeem

LAHENDUS

Kasutame mõjumaatriksi koostamiseks valemit (5.81). Selle abil saame paindemomendi mõjumaatriksi ilma nullridade ja -veergudeta järgmiselt

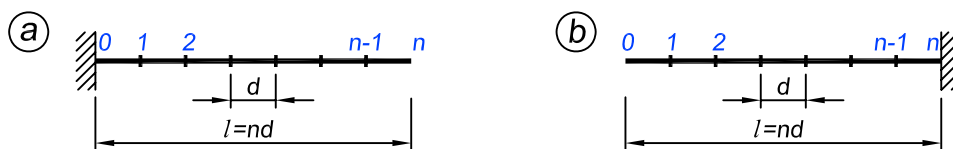
$$\mathbf{b}_m = \frac{l}{8^2} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Konsooli paindemomendi mõjumaatriks

Võrdseteks osadeks jaotatud konsooli (joonis 5.34, a) paindemomendi mõjumaatriks on järgmine

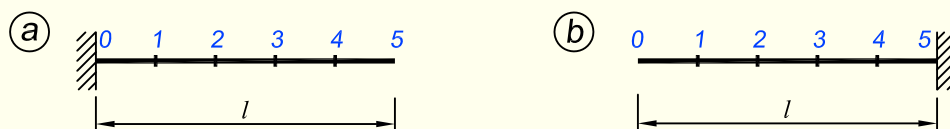
$$\mathbf{b}_m = -\frac{l}{n} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Kui konsooli tugi on paremal pool (joonis 5.34, b), siis mõjumaatriks kujutab maatriksi (5.82) peegelpilti peadiagonaali suhtes.



Joonis 5.34. Võrdseteks osadeks jaotatud konsoolid

NÄIDE 5.6. Koostada paindemomendi mõjumaatriksid joonisel 5.35 kujutatud viieks võrdseks osaks jaotatud konsoolidele.



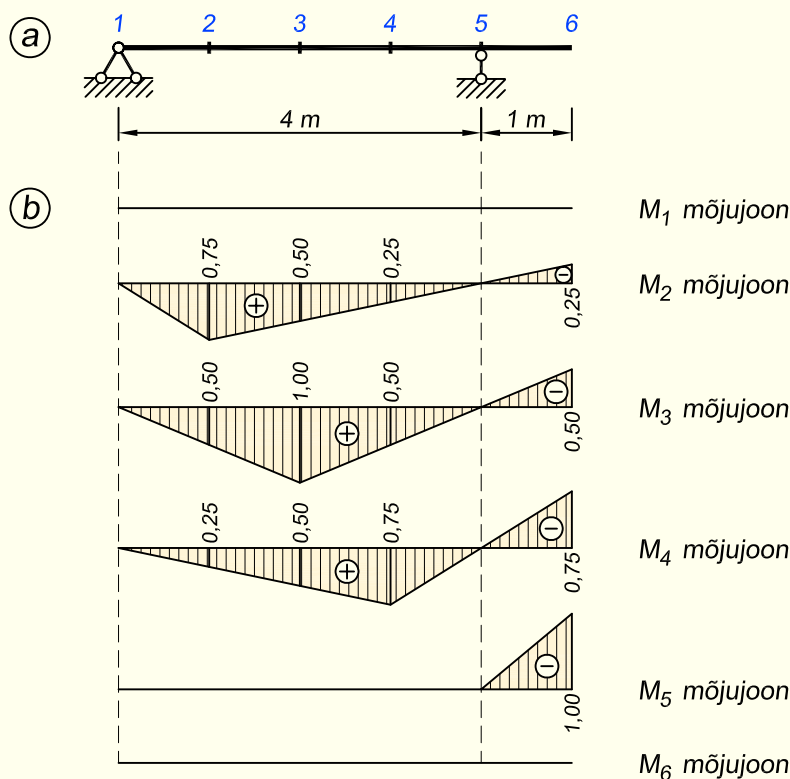
Joonis 5.35. Konsoolide arvutusskeemid

LAHENDUS

Mõjumaatriksite koostamiseks kasutame valemit (5.82), mille abil saame konsoolide paindemomendi mõjumaatriksid vastavalt

$$\mathbf{b}_m = -\frac{l}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_m = -\frac{l}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

NÄIDE 5.7. Koostada paindemomendi mõjumaatriks joonisel 5.36, *a* kujutatud konsooliga lihttalale.



Joonis 5.36. Tala arvutuskeem ja mõjujooned

LAHENDUS

Selle jaoks võib kasutada valemit, aga võib lähtuda ka sellest, et mõjumaatriksi iga rida kujutab sellele reale vastava tala lõike mõjujoone ordinaate. Seetõttu koostame igale lõikele esmalt paindemomendi mõjujoone, nagu on näidatud joonisel 5.36, *b*. Kuna lõigetes 1 ja 6 on paindemoment igal juhul null, siis nende mõjujooned on nullsirged.

Pärast mõjujoonte koostamist kanname nende ordinaadid mõjumaatriksisse niimoodi, et ülemisele reale kirjutame M_1 mõjujoone ordinaadid, järgmisele reale M_2 ordinaadid jne.

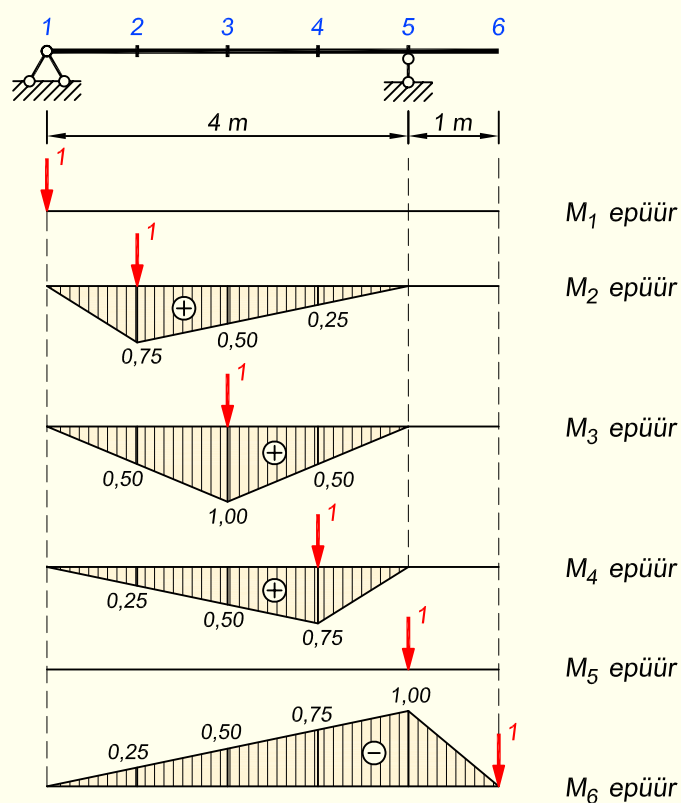
Paindemomendi mõjumaatriksiks saame

$$\mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,50 & 0,25 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0,50 & 1,00 & 0,50 & 0 & -0,50 \\ 0 & 0,25 & 0,50 & 0,75 & 0 & -0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mõjumaatriksi saaksime lühema, kui nullread ja -veerud ära jätaksime. Sel juhul oleks see 4×4 maatriks

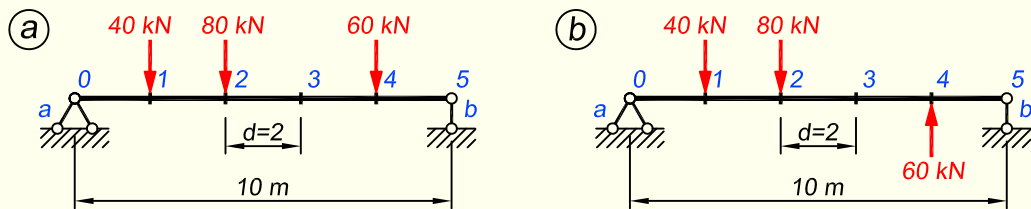
$$\mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,50 & 0,25 & -0,25 \\ 0,50 & 1,00 & 0,50 & -0,50 \\ 0,25 & 0,50 & 0,75 & -0,75 \\ 0 & 0 & 0 & -1,00 \end{bmatrix}$$

Mõjumaatriksit saame koostada ka paindemomendi epüüridest lähtudes (joonis 5.37). Selle meetodi korral koostame tähistatud lõigetes paiknevate ühikjõududega paindemomendi epüürid. Mõjumaatriksi moodustamiseks kirjutame saadud epüüride ordinaadid maatriksisse, nii et esimesse veergu lähevad M_1 epüüri ordinaadid, teise veergu M_2 epüüri ordinaadid jne. Jõuame samale tulemusele nagu eespool mõjujoonte abil.



Joonis 5.37. Paindemomendi epüürid mõjumaatriksi koostamiseks

NÄIDE 5.8. Arvutada joonisel 5.38, a ja b kujutatud lihttaladele paindemomendi epüüri ordinaadid paindemomendi mõjumaatriksi abil.



Joonis 5.38. Talade arvutusskeemid

LAHENDUS

Mõlemad talad on ühesugused ja vastavalt valemile (5.81) saame neile paindemomendi mõjumaatriksiks

$$\mathbf{b}_m = \frac{10}{5^2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

kus puuduvad lõigetele 0 ja 5 vastavad nullread ja -veerud.

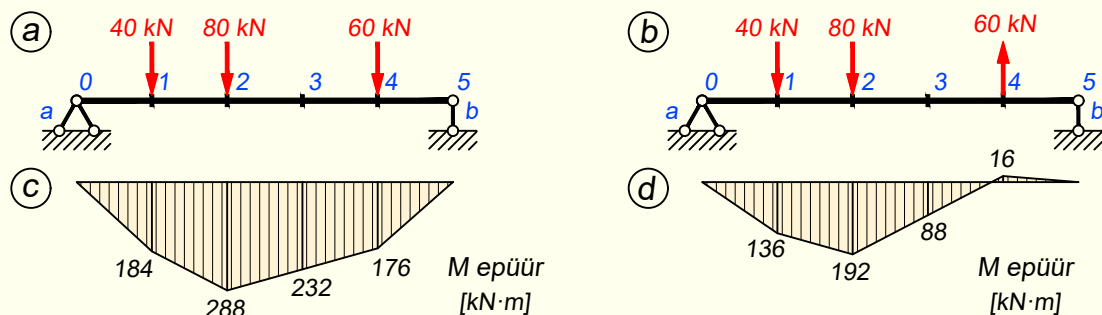
Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamiseks kasutame valemit (5.76)

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}_m \mathbf{F}$$

Ordinaatide väärtusteks saame

$$\mathbf{M} = \frac{10}{5^2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & 40 \\ 80 & 80 \\ 0 & 0 \\ 60 & -60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 184 & 136 \\ 288 & 192 \\ 232 & 88 \\ 176 & -16 \end{bmatrix}$$

kus koormusvektoris on kirjutatud mõlema arvutusskeemi koormused ja seega vastusena saadav maatriks sisaldab samuti mõlema skeemi paindemomendi epüüri ordinaate. Paindemomendi epüürid on kujutatud joonisel 5.39, c ja d.



Joonis 5.39. Paindemomendi epüürid

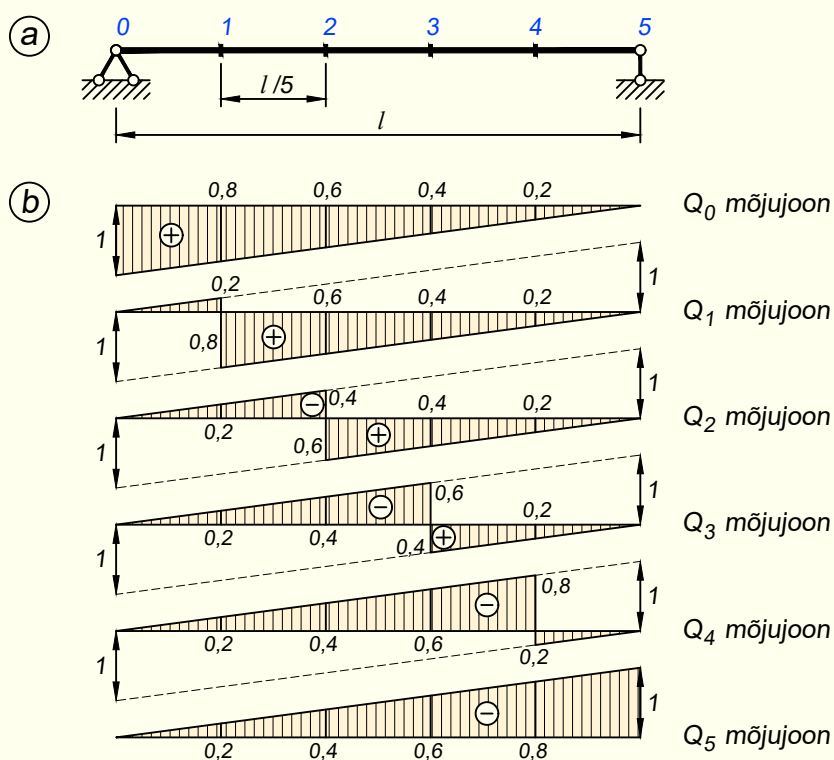
5.6.3. Põikjõu mõjumaatriks

Lihttala, mis on jaotatud n võrdseks osaks, *põikjõu mõjumaatriks* on järgmine

$$\mathbf{b}_q = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2/n-2 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & -2 & \dots & 2-n/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & 2-n & 1-n/1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & 2-n & 1-n & -n \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Põikjõu mõjumaatriksi peadiagonaalil asuvatel elementidel on kaks väärtust: vasakpoolne, kui ühikjõud on lõikest vasakul, ja parempoolne, kui ühikjõud on lõikest paremal. Arvutiga lahendamisel peavad ka teised elemendid olema kirjutatud kaks korda. Näiteks maatriksi (5.83) kolmanda veeru asemel kirjutame kaks veergu: peadiagonaalist ülalpool $n-2$ ja allpool -2 kahes veerus.

NÄIDE 5.9. Koostada joonisel 5.40, a kujutatud viieks võrdseks osaks jaotatud lihttalale põikjõu mõjumaatriks.



Joonis 5.40. Tala arvutuskeem ja lõigete mõjujooned

LAHENDUS

Seda ülesannet võime lahendada valemi (5.83) abil või kasutades üksikute lõigete mõjujoooni, mis on esitatud joonisel 5.40, *b*. Kandes iga mõjujoone ordinaadid maatriksi ühteritta, alustades Q_0 mõjujoonega maatriksi ülemisest reast, saame tala põikjõu mõjumaatriksiks

$$\mathbf{b}_q = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2/3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4/1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Lihttala põikjõu mõjumaatriks on ruutmaatriks $n + 1$ rea ja veeruga. Esimese rea elementideks on lõike 0 põikjõu mõjujoone ordinaadid, teise rea elementideks lõike 1 mõjujoone ordinaadid jne.

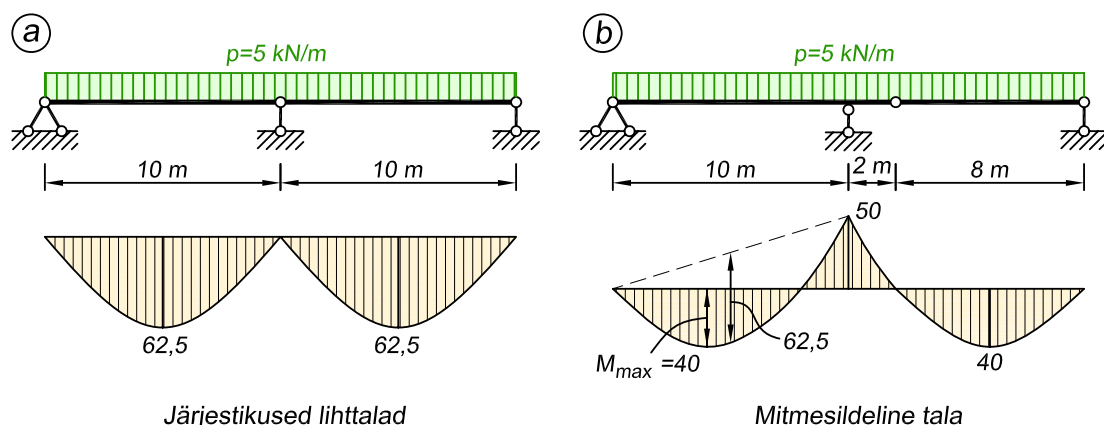
Peatükk 6

STAATIKAGA MÄÄRATAV MITMESILDELINE TALA

6.1. Sissejuhatus

Ehitise mitme naaberava sildamiseks kasutatakse lihttalasid, staatikaga määramatut mitmesildelist nn jätkuvtala ja *staatikaga määratavat mitmesildelist liigenditega tala*, mida nimetatakse ka *Gerberi talaks* Saksa inseneri Heinrich Gottfried Gerberi (1832–1912) järgi. Mitmesildelised konstruktsioonitüübid on ökonoomsemad, kui üksteise järel asetsevad lihttalad, sest mitmesildelistes talades on paindemomendid väiksemad.

Toome siin näiteks kahe arvutuskeemi paindemomendi epüürid ilma arvutusi esitamata. Joonisel 6.1, a on kujutatud arvutuskeem, mis koosneb kahest järjestikusest lihttalast. Joonisel 6.1, b on näidatud sama laiade sillete ja sama koormusega mitmesildeline tala, mis koosneb konsooliga talast ja sellele toetuvast lihttalast. Epüüridelt näeme, et mitmesildelise tala puhul on ordinaadid oluliselt väiksemad, mis võimaldab projekteerimisel materjali kokkuhoidu saavutada.



Joonis 6.1. Järjestikuste lihttaladega skeemi võrdlus mitmesildelise talaga

6.2. Geomeetrilise struktuuri analüüs

Mitmesildelise tala staatikaga määratavus

Liigenditeta mitmesildeline tala (joonis 6.2, a) on toereaktsioonide suhtes staatikaga määratav. Staatikaga määratavuse aste

$$n = t - 3 \quad (6.1)$$

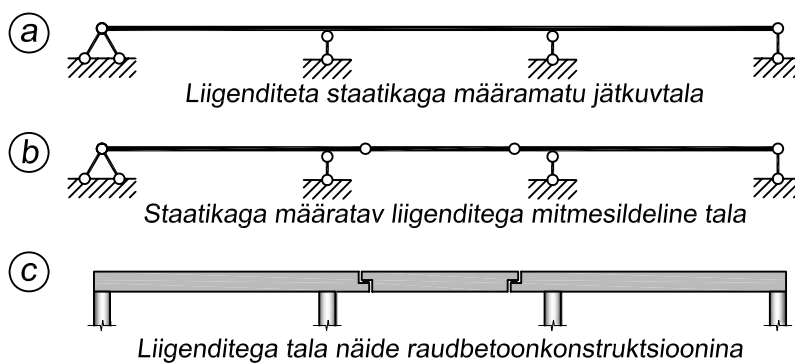
kus t on toesidemete arv. Staatikaga määratav mitmesildelise tala muudame arvutusskeemi liigendite asetamisega staatikaga määratavaks. Liigendis on paindemoment võrdne nulliga. Lisaks kolmele tasakaalutingimusele $\sum X = 0$, $\sum Z = 0$ ja $\sum M = 0$ võimaldab liigend koostada sõltumatu tasakaaluvõrrandi: kõigi ühel pool liigendit talale rakendatud jõudude momentide summa liigendi suhtes on võrdne nulliga.

Mitmesildeline tala on staatikaga määratav (joonis 6.2, b), kui lihtliigendite arv on võrdne ilma liigenditeta tala staatikaga määratavuse astmega (6.1)

$$l = n = t - 3 \quad (6.2)$$

Joonisel 6.2, a kujutatud jätkuvtala määratavuse aste on $n = t - 3 = 5 - 3 = 2$. Joonisel 6.2, b näidatud staatikaga määratava tala saame seetõttu jätkuvtalale kahe liigendi lisamisega. Kuidas selline konstruktsioon tegelikkuses võiks välja näha, on toodud joonisel 6.2, c, kus liigendite kohal on liituvad raudbetoontalad hambaga, nii et üks tala toetub teise peale.

Tingimus (6.2) on vajalik, kuid mitte küllaldane selleks, et mitmesildeline tala oleks staatikaga määratav. Liigendite ja toesidemete asetus peab olema niisugune, et oleks tagatud geomeetriline muutumatus.



Joonis 6.2. Staatikaga määratav ja määratava tala skeemid

Liigenditega mitmesildelisel talal on staatikaga määratav jätkuvtalaga võrreldes mitmeid eeliseid.

1. Üheks oluliseks eeliseks, millest Gerberi talade kasutamine ajalooliselt alguse sai, on staatikaga määratavate skeemide omadus, et tugevde vajumine ei põhjusta konstruktsioonis lisapingeid. Kui jätkuvtalal mõni tugi ära vajub, võib see viia lisanduvate sisejõudude tõttu tala purunemiseni.

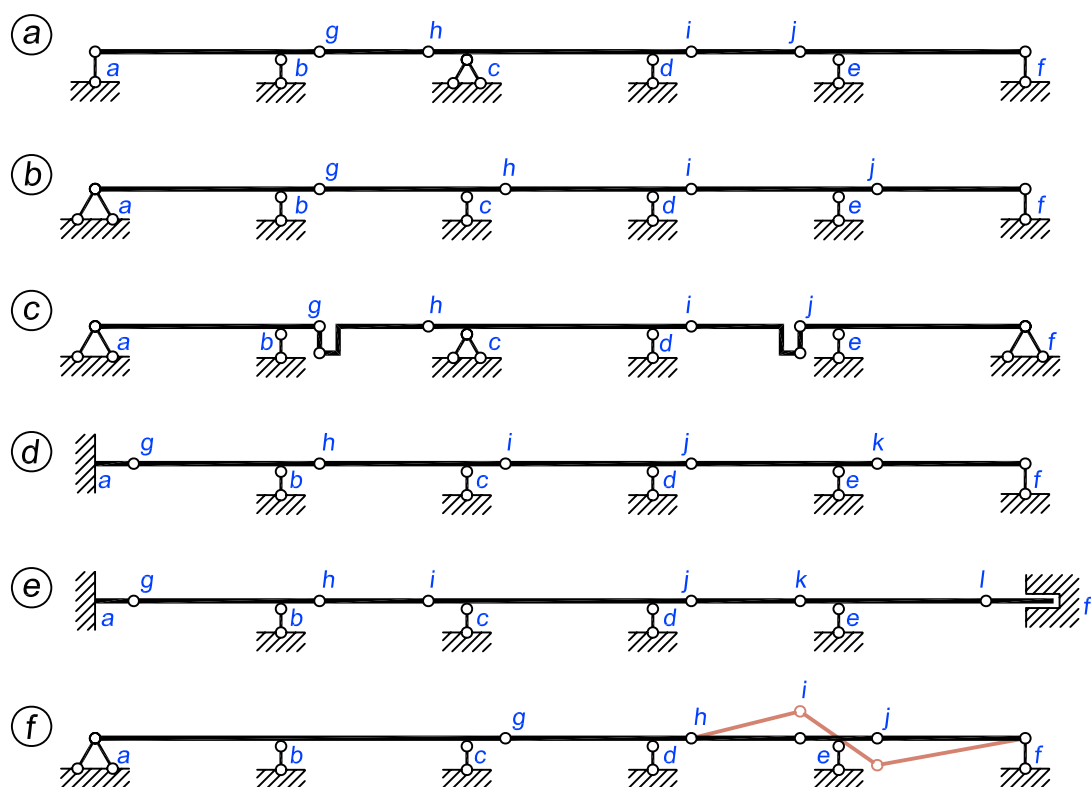
- Teiseks Gerberi tala eeliseks on võimalus kasutada tehases valmistatud elemente, mis ehitusplatsil tuleb lihtsalt paika monteerida.
- Lisaks on liigenditega tala puhul võimalik konstrueerida liigendid selliselt, et need võimaldavad tala elementidel teineteise suhtes horisontaalsuunas nihkuda, mis tasandab temperatuurimuutusest põhjustatud elementide pikkuse muutumist.

Liigenditega tala puuduseks jätkuvtala kõrval on konstruktsiooni keerukamaks muutumine liigendite tekitamise vajaduse tõttu.

Liigenditega mitmesildeliste talade tüübid

Mitmesildelised staatikaga määratavad talad on peamiselt kahte tüüpi. Joonisel 6.3, a ja b kujutatud taladel on üks liikumatu ja viis liikuvat liigendituge. Kummalgi talal on toesidemeid seitse. Vajalik liigendite arv on $l = t - 3 = 7 - 3 = 4$. Joonisel 6.3, a kujutatud talal on äärmised silded liigendita ja edasi vahelduvad kahe liigendiga silded liigendita silletega. Joonisel 6.3, b esitatud talal on esimene silde liigendita ja teistes silletes on igapähes üks liigend.

Rohkem kui ühe horisontaalset siiret mittevõimaldava toe puhul asendame osa lihtliigendeid elementidega, kus peale paindemomendi on ka pikijõud võrdne nulliga (joonis 6.3, c). Need elemendid võimaldavad peale talaosade vastastikuse pöörde ka nende vastastikust ho-



Joonis 6.3. Mitmesildelise tala skeeme

risontaalset siiret (joonisel 6.3, c elemendid g ja j), mida võib kasutada eespool mainitud temperatuurideformatsioonide tasandamiseks. Nende elementide arvu leiame valemiga

$$h = j - 1 \quad (6.3)$$

kus j on horisontaalset siiret takistavate tugede arv.

Joonisel 6.3, d kujutatud talal on äärmine vasakpoolne tugi jäik. Sellele toele vastab kolm sidet ja vajalik liigendite arv $l = t - 3 = 8 - 3 = 5$. Joonisel 6.3, e kujutatud talal on vajalik liigendite arv $l = t - 3 = 9 - 3 = 6$.

Valemiga (6.2) leiame vajaliku liigendite arvu. Lisaks peab liigendite asetus olema niisugune, mis tagab mitmesildelise tala geomeetriselise muutumatuse. Joonisel 6.3, $a...e$ on kõik talad geomeetriselt muutumatud. Joonisel 6.3, f kujutatud talal on vajalik arv liigendeid ($l = 7 - 3 = 4$), kuid liigendite asetus talas on niisugune, mille juures üks osa ($a-g$) on staatikaga määratu ja teine osa ($h-i-j-f$) geomeetriselt muutuv. Joonisel on kujutatud ka liigendite asetusest põhjustatud mehhanismi võimalik siirdeolukord.

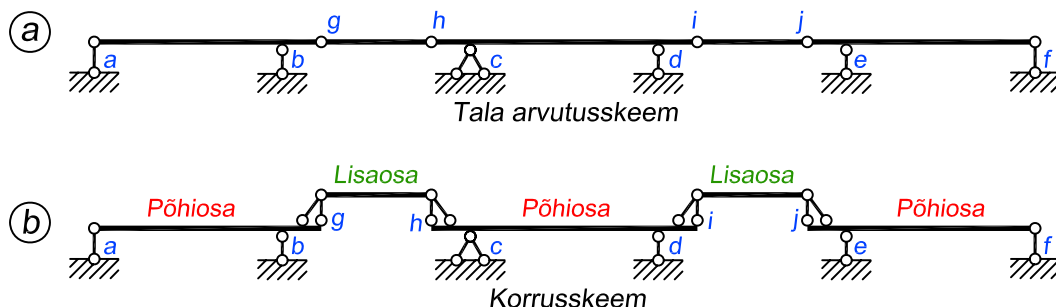
Geomeetriselt muutumatus ja staatikaga määratavas mitmesildelises talas, milles on võrrandile (6.2) vastav arv liigendeid, peavad olema täidetud järgmised tingimused:

1. ühes sildes ei ole rohkem kui kaks liigendit;
2. kahes naabersildes ei ole rohkem kui kolm liigendit;
3. kahes naabersildes peab olema vähemalt üks liigend.

Korrusskeemide koostamine

Mitmesildelise tala üksikute osade töötamise skeemi nimetatakse *korrusskeemiks*. Korrusskeemil jagatakse tala üksikud elemendid *põhiosadeks* ja *lisaosadeks*. Põhiosadeks nimetatakse elemente, mis on geomeetriselt muutumatud ilma kõrvalolevate taladeta. Lisaosa vajab aga geomeetriselise muutumatuse tagamiseks ka põhiosade olemasolu.

Enam kasutatav staatikaga määratav mitmesildeline tala koosneb konsoolidega taladest (osad $a-g$, $h-i$, $j-f$) ja nende vahel liigenditega konsoolide külge kinnitatud osadest ($g-h$, $i-j$) (joonis 6.4, a). Konsoolidega tala $h-i$ on põhiosa, kuna ta on kinnitatud kolme toesidemega

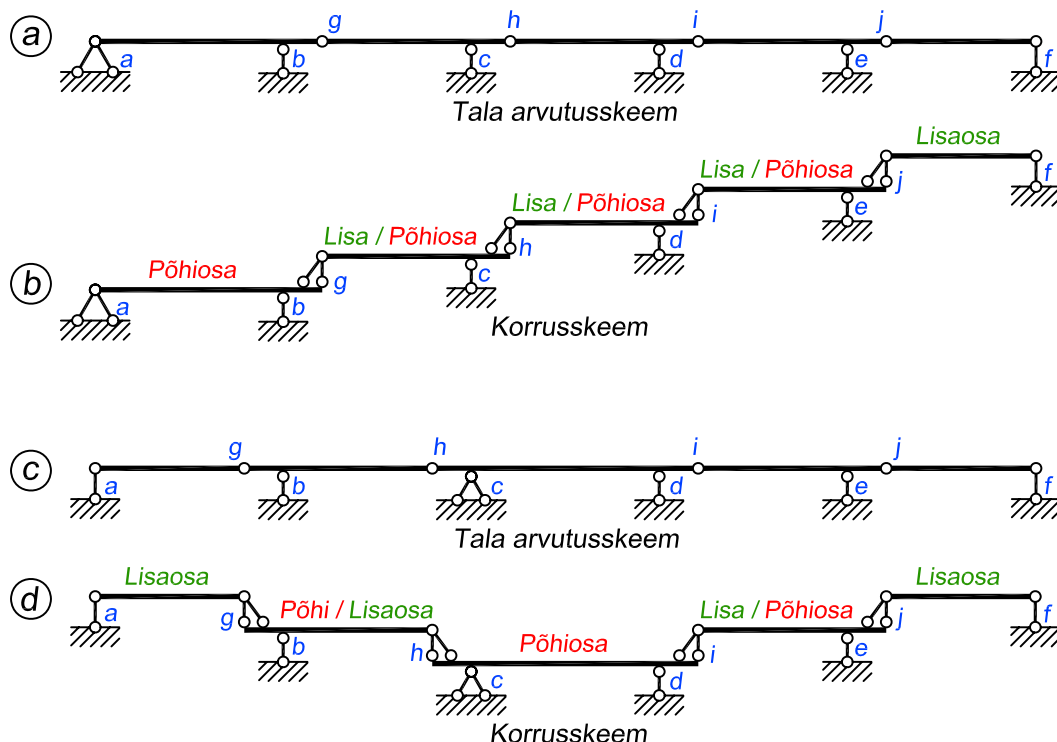


Joonis 6.4. Mitmesildelise tala korrusskeemi koostamine

ja on geomeetriselt muutumatu ka siis, kui naaberosad $g-h$ ja $i-j$ on eemaldatud. Konsoli-
 dega talad $a-g$ ja $j-f$ on vertikaalse koormuse puhul põhiosad, kuna naaberosade $g-h$ ja $i-j$
 puudumisel on takistatud talade $a-g$ ja $j-f$ vertikaalne siire ja on võimalik ainult horisontaal-
 ne siire. Osadel $g-h$ ja $i-j$ ei ole ühtegi toesidet ja need on lisaosad, kuna nende naaberosa
 eemaldamisega muutuvad nad mehhanismiks. Korrusskeem on esitatud joonisel 6.4, *b*.

Korrusskeemis kinnitatakse lisaosa põhiosa külge kahe sidemega (joonis 6.4, *b*), kuna
 korrusskeem peab olema ekvivalentne tegeliku arvutusskeemiga. Kui tegelik arvutusskeem
 ei ole kahe kõrvutiasetseva tala horisontaalne nihkumine teineteise suhtes võimalik, siis
 peab selline horisontaalne nihkumatus olema tagatud ka korrusskeemis. Seetõttu kasutamegi
 põhi- ja lisaosa ühendamiseks liikumatut liigendit, kuna toesidemete arvult vastab see liht-
 liigendile (vt ka peatükk 3.1 joonis 3.1, *c* ja *d*). Sisejõudude arvutusel käsitleme lisaosaid kui
 lihttalasid, kuna nende üks tugi on liikuv: osal $g-h$ tugi g ja osal $i-j$ tugi j , sest need toetuvad
 taladele, mille horisontaalne siire on võimalik.

Joonisel 6.5, *a* kujutatud tala kolme toesidemega kinnitatud geomeetriselt muutumatu
 osa $a-g$ on põhiosa. Element $g-h$ jääb geomeetriselt muutumatuks, kui eemaldame ainult te-
 mast paremal asuvad osad, sest ta on kinnitatud liigendiga g põhiosa ja toevaradaga c toepinna
 külge. Element $h-i$ on geomeetriselt muutumatu, kui on eemaldatud ainult paremal asuvad
 osad. Järgnevate osade kohta kehtib sama. Seepärast on elemendid $g-h$, $h-i$, $i-j$, $j-f$ vasak-
 poolse naaberelemendi suhtes lisaosaks ja paremal asuva naaberelemendi suhtes põhiosaks.
 Korrusskeem on esitatud joonisel 6.5, *b*.



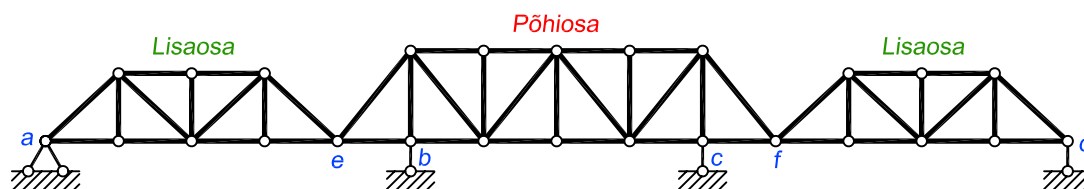
Joonis 6.5. Korrusskeemide koostamise näiteid

Joonisel 6.5, c kujutatud tala puhul on keskmine element $h-i$ põhiosaks, kuna on kinnitatud kolme toesidemega. Element $g-h$ on lisaosaks elemendi $h-i$ suhtes ja põhiosaks elemendile $a-g$. Korrusskeemil on põhiosa $h-i$ kõige alumisel korrusel ja kummalegi poole liikudes, paiknevad järgmised elemendid korruse võrra kõrgemal. Kirjeldatud korrusskeem on näidatud joonisel 6.5, d.

Mitmesildelised sõrestikskeemid

Sageli kasutatakse suuremate konstruktsioonide puhul tavaliste talade asemel sõrestikskeeme, kus tala täisseinaline osa on asendatud sõrestikuga. Põhi- ja lisaosade töötamise skeemi osas ja korrusskeemi moodustamisel on aga kõik sama nagu talade puhul.

Joonisel 6.6 on kujutatud kolmesildeline sõrestikkonstruktsioon, kus keskmine element $e-f$ on põhiosa, millele toetuvad kummaltki poolt lisaosad $a-e$ ja $f-d$.



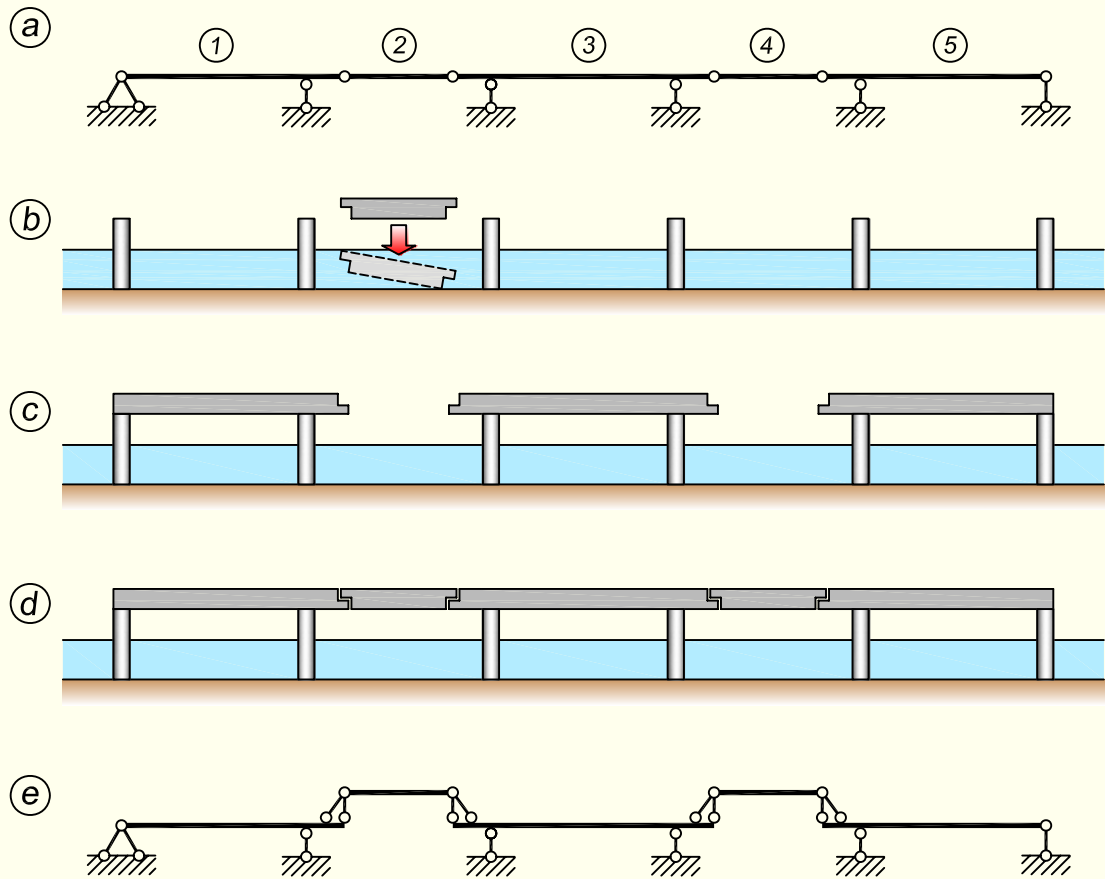
Joonis 6.6. Mitmesildeline sõrestik

Siinkohal sobib mitmesildelise sõrestikkonstruktsiooni heaks näiteks Šotimaal asuv *Forthi* raudteesild (foto 6.1), kus kolmele põhiosale toetuvad nende vahel olevad kaks lisaosa. Sarnasele talakonstruktsioonile korrusskeemi koostamist on kirjeldatud näites 6.1.



Foto 6.1. Forthi sild Šotimaal (foto: Wikimedia Commons)

NÄIDE 6.1. Koostada joonisel 6.7, a kujutatud staatikaga määratava mitmesildelise tala korrusskeem.



Joonis 6.7. Korrusskeemi koostamine

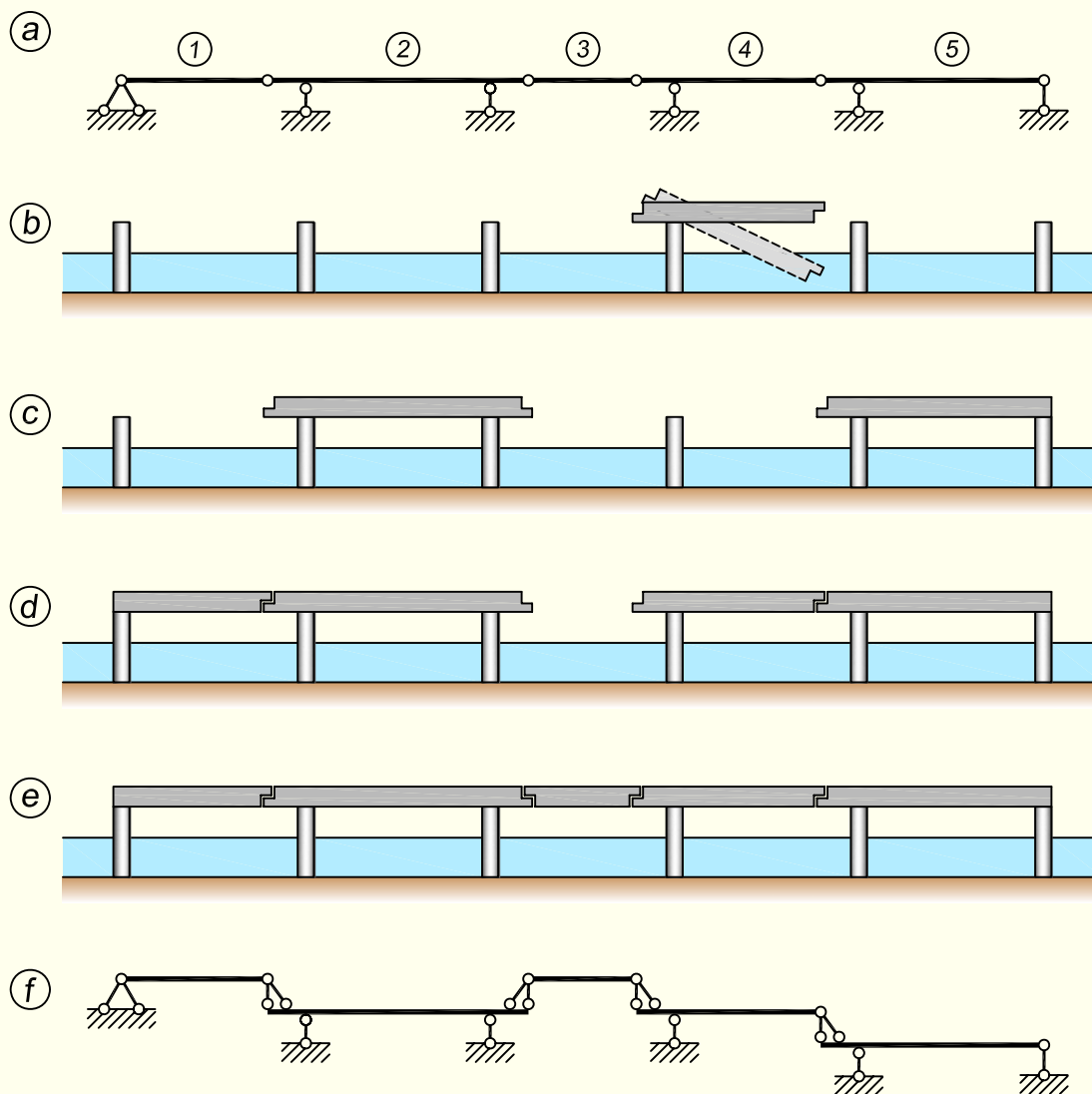
LAHENDUS

Korrusskeemide koostamisel on soovitatav mõelda sellele, et vaadeldav arvutuskeem kujutab näiteks silda, mille elemente on vaja hakata ehituse käigus paigaldama. Paigaldamise võimalikuks osutuv järjekord määrab ära põhi- ja lisaosade jaotuse. Need elemendid, millel on olemas piisav arv tugesisid ja mille saab seetõttu esimesena paika monteerida, on põhiosad. Talad, millel ei ole piisavalt tugesisid ja mis vajavad seetõttu toetuseks kõrvaloleva või kõrvalolevate talade olemasolu, on lisaosad.

Korrusskeemile märgitakse alumisele korrusele esimesena monteeritavad talad. Vastavalt paigaldusjärjekorrale lähevad järgmised talad korrusekaupa ülespoole. Kõige ülemisele korrusele märgitakse viimasena monteeritav tala.

Siin näites ei saa elementi 2 esimesena paigaldada, kuna seda pole kuhugi toetada (joonis 6.7, b). Esimesena monteerime paika kahe tugipostiga elemendid 1, 3 ja 5 (joonis 6.7, c). Ilma tugipostideta elemendid 2 ja 4 jäävad viimaseks (joonis 6.7, d). Korrusskeem on esitatud joonisel 6.7, e.

NÄIDE 6.2. Koostada joonisel 6.8, a kujutatud staatikaga määratava mitmesildelise tala korrusskeem.



Joonis 6.8. Korrusskeemi koostamine

LAHENDUS

Esimesena ei saa paigaldada näiteks elementi 4, kuna tugipost on ainult vasaku otsa all (joonis 6.8, b). Esimesena paigaldame elemendid 2 ja 5, kuna mõlemal on tugipostid kahes otsas (joonis 6.8, c). Järgnevalt saame paigaldada elemendid 1 ja 4, millel ühe otsa all on tugipost ja teise otsaga toetuvad nad kõrvalolevatele taladele (joonis 6.8, d). Viimaseks jääb element 3, kuna tema toetub mõlema otsaga kõrvalolevatele taladele (joonis 6.8, e). Korrusskeem on esitatud joonisel 6.8, f.

6.3. Sisejõudude arvutus

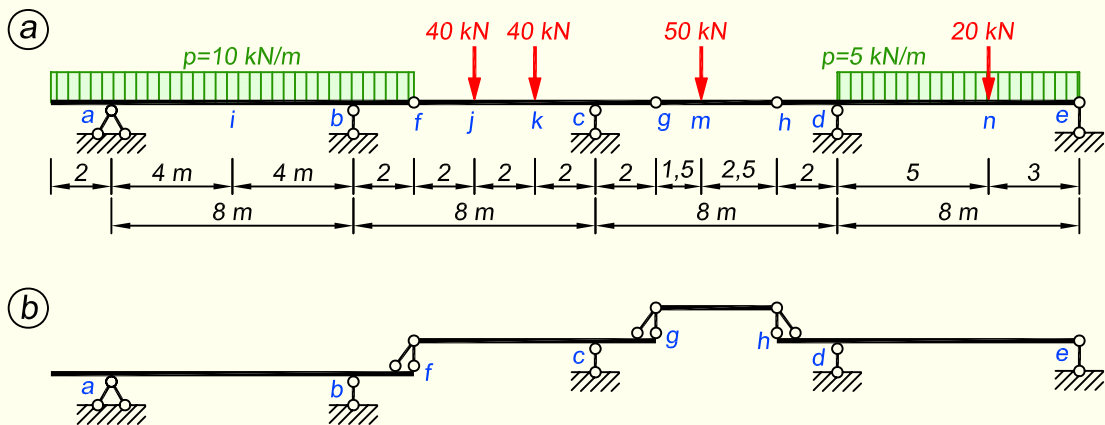
Sisejõudude arvutamisel lähtume reeglist: **kuna lisaosad toetuvad põhiosadele, siis kanduvad ka koormused lisaosadelt edasi põhiosadele, aga mitte vastupidi.** Seetõttu alustame toereaktsioonide ja sisejõudude arvutust alati lisaosadest.

Joonisel 6.4, *a* ja *b* kujutatud tala lisaosad arvutame lihttaladena. Põhiosad arvutame konsoolidega taladena. Põhiosade arvutamisel rakendame lisaks põhiosale mõjuvale koormusele ka lisaosade toereaktsioonid vastupidiste suundadega, s.t lisaosale mõjuva koormuse lahutame kaheks komponendiks ühendusliigenditesse.

Joonisel 6.5, *a* ja *b* kujutatud tala arvutust alustame kõige ülemisest lisaosast *j-f*. Esmalt leiame toereaktsioonid toesidemel *f* ja liigendis *j* ning arvutame sisejõud. Järgmise lisaosa, konsooliga tala *i-j*, arvutamisel rakendame lisaks talle mõjuvale koormusele ka konsooli otsalõikesse *j* lisaosa *j-f* vastava toereaktsiooni vastupidise suunaga. Leiame toereaktsioonid toesidemel *e* ja liigendis *i* ning arvutame sisejõud. Järgmise osa, konsooliga tala *h-i*, arvutame analoogiliselt.

Joonisel 6.4, *a* kujutatud tala toereaktsioonid saab kontrollida (võib ka arvutada) momentide tingimustega liigendite *g*, *h*, *i* ja *j* suhtes. Talale vahemikus *a-g* mõjuvate kõigi välisjõudude momentide summa liigendi *g* suhtes on võrdne nulliga. Sama tingimus kehtib ka vahemikus *a-h* mõjuvate välisjõudude kohta liigendi *h* suhtes ning vahemikus *a-i* ja *a-j* mõjuvate välisjõudude kohta vastavalt liigendite *i* ja *j* suhtes.

NÄIDE 6.3. Koostada joonisel 6.9, *a* kujutatud staatikaga määratava mitmesildelise tala paindemomendi ja põikjõu epüürid.



Joonis 6.9. Tala arvutuskeem ja korrusskeem

LAHENDUS

1. Tala põhi- ja lisaosade skeem, mida nimetatakse korrusskeemiks, on kujutatud joonisel 6.9, *b*.

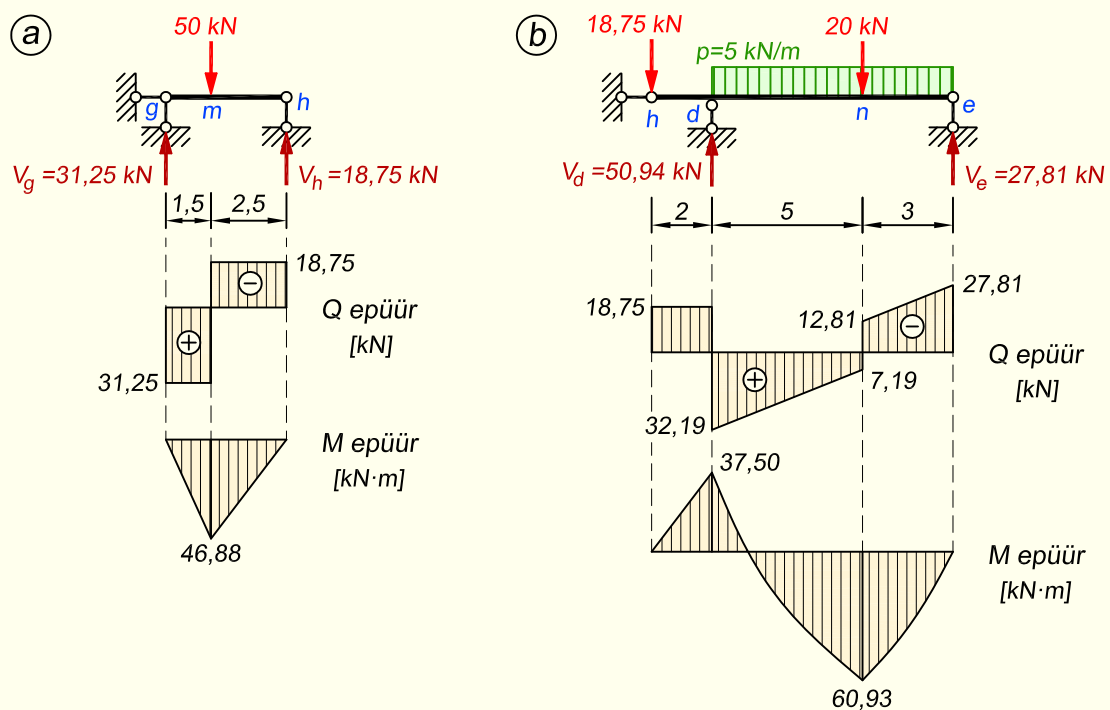
Konsoolidega tala *a-f* on põhiosa, kuna see on kinnitatud toepinna külge kolme toesi-

demega ja on geomeetriselt muutumatu ka siis, kui teised elemendid on arvutusskeemist eemaldatud.

Samuti on põhiosaks konsooliga tala $h-e$, kuna temal on ka mõlema otsa all tugi olemas.

Element $f-g$ on kinnitatud toevardaga c toepinna külge ning vasakpoolses otsas liigendiga f põhiosa külge. Element $f-g$ jääb geomeetriselt muutumatuks, kui eemaldatakse temast paremal olevad elemendid. Seega on ta vasakul oleva elemendi suhtes lisaosaks ja paremal oleva elemendi suhtes põhiosaks.

Element $g-h$ on kõige ülemine element ja seetõttu kõigi teiste elementide suhtes lisaosaks. See varras toetub mõlemas otsas kõrvalasuvate talade peale ja seepärast on tema geomeetiline muutumatus seotud teiste elementidega.



Joonis 6.10. Tala osade $g-h$ ja $h-e$ sisejõudude epüürid

2. Arvutust alustame **lisaosast $g-h$** (joonis 6.10, a), kuna see on korrusskeemil kõige kõrgemal paiknev element. Momentide tasakaalu tingimustest punktide h ja g suhtes leiame lisaosa $g-h$ toereaktsioonid

$$\begin{aligned} \sum M_h = 0; \quad -V_g \cdot 4 + 50 \cdot 2,5 = 0; \quad V_g = 31,25 \text{ kN} \\ \sum M_g = 0; \quad V_h \cdot 4 - 50 \cdot 1,5 = 0; \quad V_h = 18,75 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kui tala on koormatud koondjõuga, siis on üldjuhul mõistlik toereaktsioonid arvutada hoopis kauguste suhtest, mis määrab ära, kui palju koormusest läheb ühele ja kui palju

teisele toele

$$V_g = 50 \cdot \frac{2,5}{4} = 31,25 \text{ kN}; \quad V_h = 50 \cdot \frac{1,5}{4} = 18,75 \text{ kN}$$

Soovitav oleks teha iga talaosa toereaktsioonide kontroll, kuna lisaosade juures tehtud viga kandub edasi põhiosadele. Kontrolli tegemiseks arvutame talale rakendatud koormuse ja leitud toereaktsioonide summa vertikaalteljele, mis peab võrduma nulliga

$$\sum Z = 50 - 31,25 - 18,75 = 0$$

Sisejõudude epüüride ordinaadid arvutame nagu tavalisel lihttalal. Tala vasakpoolne toereaktsioon, mis pöörab varrast päripäeva, annab vahemikus g - m positiivse põikjõu. Parempoolne reaktsioon pöörab varrast vastupäeva ja annab vahemikus h - m negatiivse põikjõu

$$Q_{g-m} = 31,25 \text{ kN}; \quad Q_{h-m} = -18,75 \text{ kN}$$

Paindemomendi lõikes m võib arvutada toereaktsioonide kaudu või kasutades valemit, kus koormus tuleb korrutada tema kaugustega kummastki toest ja jagada silde pikkusega

$$M_m = \frac{50 \cdot 1,5 \cdot 2,5}{4} = 46,88 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

3. Järgnevalt vaatleme **põhiosa h - e** tasakaalu (joonis 6.10, b). Lisaks temale mõjuvale koormusele rakendame lõikesse h lisaosa g - h parempoolse toereaktsiooni $V_h = 18,75$ kN vastupidise suunaga. Momentide tasakaalutingimustest punktide e ja d suhtes leiame osa h - e toereaktsioonid

$$\begin{aligned} \sum M_e = 0; \quad -V_d \cdot 8 + 18,75 \cdot 10 + 5 \cdot 8 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 0; \quad V_d = 50,94 \text{ kN} \\ \sum M_d = 0; \quad V_e \cdot 8 + 18,75 \cdot 2 - 5 \cdot 8 \cdot 4 - 20 \cdot 5 = 0; \quad V_e = 27,81 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontrollime

$$\sum Z = 18,75 + 5 \cdot 8 + 20 - 50,94 - 27,81 = 0$$

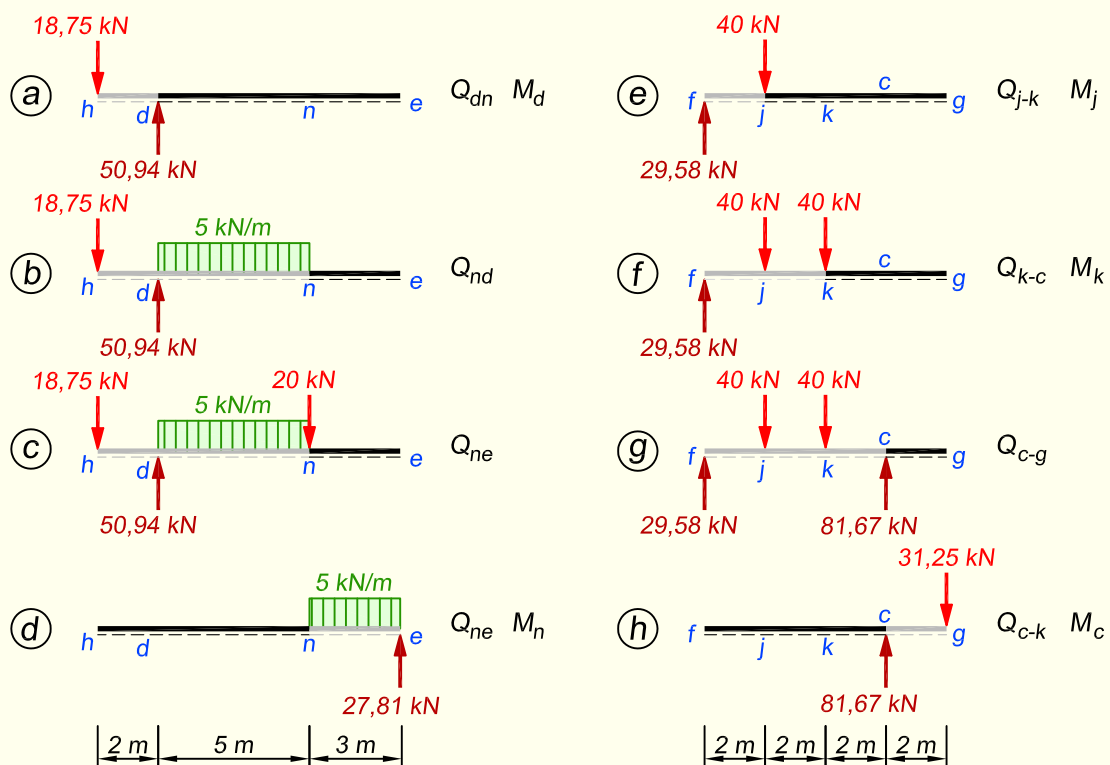
Selle tala puhul vaatame sisejõudude arvutust natuke põhjalikumalt. Sisejõudude arvutamiseks kasutame lõikemeetodit, mida saab rakendada erinevate võtete abil. Siin näites kasutame taandamisvõtet.

Põikjõu leidmist võime alustada tala konsoolsest osast. Kuna konsooli otsa peal olev jõud pöörab konsooli vastupäeva, siis tekitab ta sinna põikjõu

$$Q_{h-d} = -18,75 \text{ kN}$$

Edasi liigume üle toe d ja vaatame toest vahetult paremale jäävat lõiget. Nüüd eraldame lõikest d vasakule jääva arvutusskeemi osa (joonis 6.11, a) ja taandame sellele mõjuva jõusüsteemi ristlõikesse d . Märgid valime selle järgi, kuidas vaadeldavad jõud hakkavad toest d paremale jäävat vardaosa pöörama. Jõud 18,75 kN pöörab seda vardaosa vastupäeva ja annab negatiivse põikjõu, jõud 50,94 kN pöörab aga päripäeva ja tekitab seetõttu positiivse põikjõu

$$Q_{dn} = -18,75 + 50,94 = 32,19 \text{ kN}$$



Joonis 6.11. Tala osade $h-e$ ja $f-g$ sisejõudude arvutus lõikemeetodil. Halliga on näidatud lõikega eemaldatav arvutus skeemi osa

Kuna vahemikus $d-n$ muutub Q epüür lineaarselt, siis järgmise ordinaadi leiame lõikest n vahetult vasakul (joonis 6.11, b)

$$Q_{nd} = -18,75 + 50,94 - 5 \cdot 5 = 7,19 \text{ kN}$$

Lõikes n on koondjõu tõttu Q epüüris aste. Lõikest n vahetult paremal oleva ordinaadi saame joonise 6.11, c abil

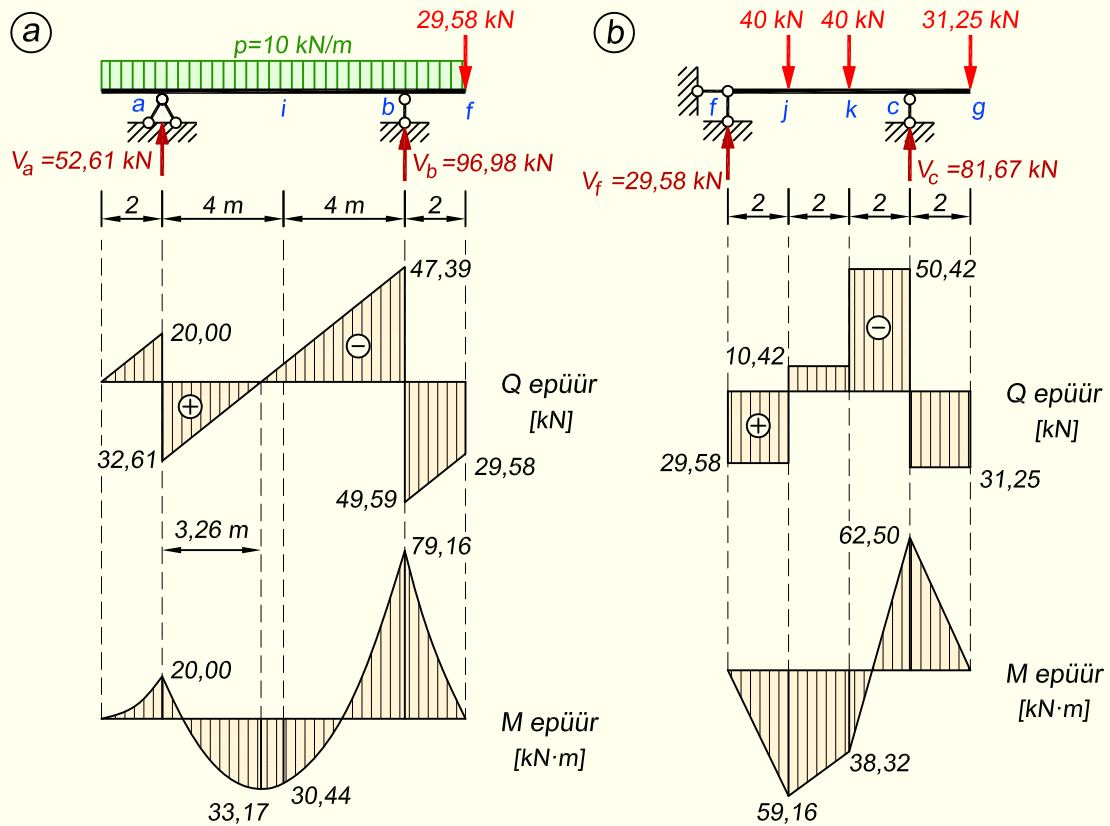
$$Q_{ne} = 7,19 - 20 = -12,81 \text{ kN}$$

Sama ordinaadi võime arvutada ka tala parempoolse otsa poolt tulles ja arvestades seetõttu kõiki sellest lõikest paremale jäävaid jõudusid (joonis 6.11, d)

$$Q_{ne} = -27,81 + 5 \cdot 3 = -12,81 \text{ kN}$$

Paindemomendi arvutamiseks lõikes d eraldame sellest lõikest vasakule jääva osa (joonis 6.11, a). Ärajäetaval osal paikneb üks jõud, millest leiame momendi lõikes d . Kuna konsooli otsal olev koormus painutab varda otsa alla, siis on tõmmatud ülemine ehk negatiivne pool ja vastus tuleb seetõttu negatiivne

$$M_d = -18,75 \cdot 2 = -37,50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 6.12. Tala osade *f-g* ja *a-f* sisejõudude epüürid

Lõikes *n* on paindemoment mõistlik arvutada paremalt poolt tulles. Seetõttu eraldame lõikest *n* paremale jääva arvutuskeemi osa (joonis 6.11, *d*) ja saame

$$M_n = 27,81 \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot 1,5 = 60,93 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Tugede *d* ja *e* vahel on paindemomendi epüür lauskoormuse tõttu kõverjooneline, kuid lisaks sellele peab lõikes *n* koondjõu tõttu olema epüüris ka murdepunkt.

4. Edasi läheme **talaosa *f-g*** juurde (joonis 6.12, *b*). Lisaks temale mõjuvale koormusele rakendame lõikesse *g* lisaosa *g-h* toereaktsiooni $V_g = 31,25 \text{ kN}$ vastupidise suunaga. Tasakaalu tingimustest punktide *c* ja *f* suhtes leiame osa *f-g* toereaktsioonid

$$\begin{aligned} \sum M_c = 0; & \quad -V_f \cdot 6 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 2 - 31,25 \cdot 2 = 0; & \quad V_f = 29,58 \text{ kN} \\ \sum M_f = 0; & \quad V_c \cdot 6 - 40 \cdot 2 - 40 \cdot 4 - 31,25 \cdot 8 = 0; & \quad V_c = 81,67 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontrollime

$$\sum Z = 40 + 40 + 31,25 - 29,58 - 81,67 = 0$$

Kuna sellel vardal lauskoormust ei ole, siis on koondjõudude vahel Q epüür konstantne. Alustame arvutust tala vasaku otsa poolt ning leiame põikjõu vahemikus $f-j$, $j-k$ (joonis 6.11, e) ja $k-c$ (joonis 6.11, f)

$$Q_{f-j} = 29,58 \text{ kN}$$

$$Q_{j-k} = 29,58 - 40 = -10,42 \text{ kN}$$

$$Q_{k-c} = 29,58 - 40 - 40 = -50,42 \text{ kN}$$

Jätkates sarnaselt, saame ka konsooli $c-g$ põikjõu (joonis 6.11, g)

$$Q_{c-g} = 29,58 - 40 - 40 + 81,67 = 31,25 \text{ kN}$$

kuid lühem oleks arvutus paremalt poolt tulles, kuna siis peame arvestama ainult konsooli otsas olevat koormust, mis päripäeva pöörde tõttu annab positiivse põikjõu

$$Q_{c-g} = 31,25 \text{ kN}$$

Ka vahemiku $c-k$ põikjõu võiks arvutada paremalt poolt tulles (joonis 6.11, h)

$$Q_{c-k} = 31,25 - 81,67 = -50,42 \text{ kN}$$

Paindemomendi epüüri ordinaadid arvutame lõigetes j ja k vasakult poolt tulles (joonis 6.11, e ja f) ning lõikes c paremalt poolt tulles (joonis 6.11, h)

$$M_j = 29,58 \cdot 2 = 59,16 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_k = 29,58 \cdot 4 - 40 \cdot 2 = 38,32 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = -31,25 \cdot 2 = -62,50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

5. Põhiosa $a-f$ arvutamisel (joonis 6.12, a) rakendame lisaks temale mõjuvale koormusele ka lisaosa $f-g$ toereaktsiooni $V_f = 29,58 \text{ kN}$ vastupidise suunaga. Momentide tasakaalu tingimusest punktide b ja a suhtes leiame põhiosa $a-f$ toereaktsioonid

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 8 - 29,58 \cdot 2 + 10 \cdot 12 \cdot 4 &= 0; \quad V_a = 52,61 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 8 - 29,58 \cdot 10 - 10 \cdot 12 \cdot 4 &= 0; \quad V_b = 96,98 \text{ kN} \end{aligned}$$

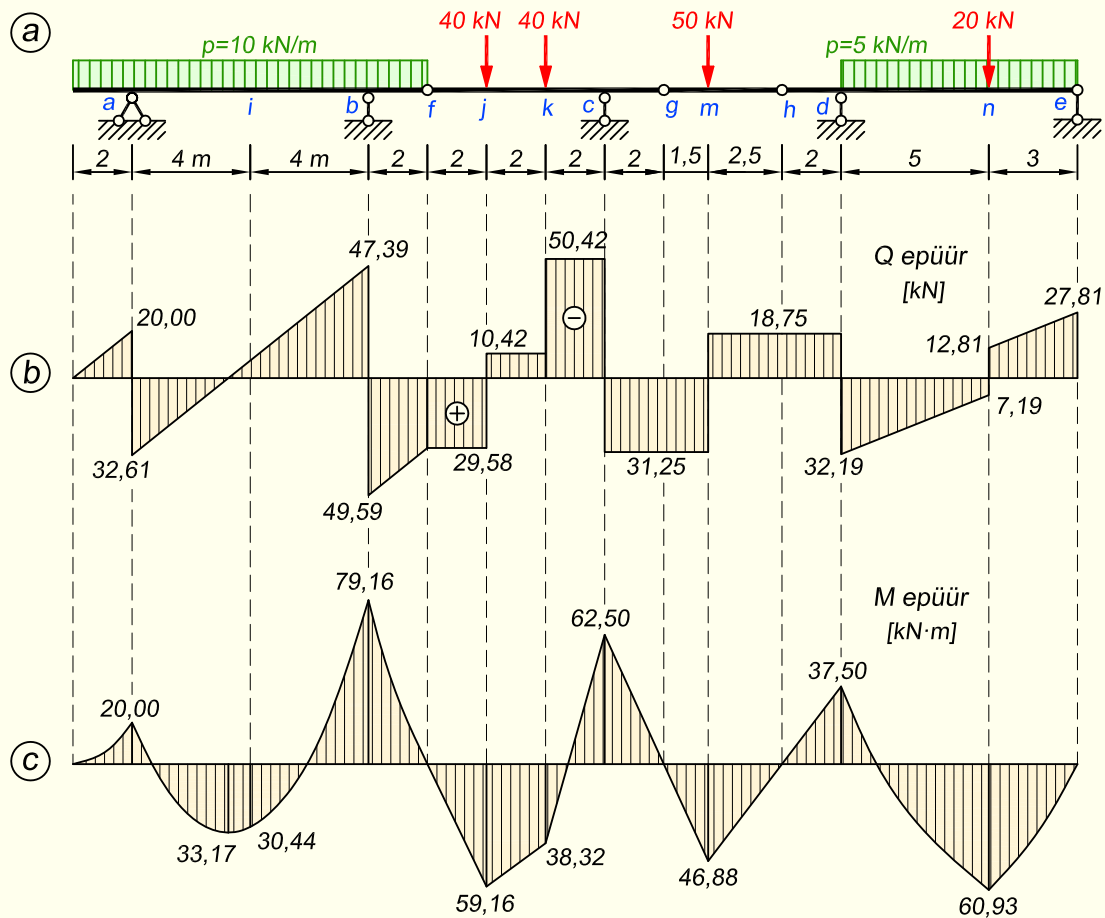
Kontrollime

$$\sum Z = 10 \cdot 12 + 29,58 - 52,61 - 96,98 = 0$$

Siin jätame epüüride ordinaatide arvutuse esitamata, vaatame ära ainult selle, kuidas saada kätte paindemomendi maksimum tala sildes.

Esmalt tuleb selle asukoht välja arvutada. Saame seda teha põikjõu epüüri nullkoha abil, mille leiame vastavalt valemile (1.15), jagades silde otsas oleva põikjõu väärtuse lauskoormusega

$$s_0 = \frac{|Q_a|}{p} = \frac{32,61}{10} = 3,26 \text{ m}$$



Joonis 6.13. Mitmesildelise tala sisejõudude epüürid

Paindemomendi maksimum on

$$\max M = 52,61 \cdot 3,26 - 10 \cdot \frac{5,26^2}{2} = 33,17 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Teise variandi korral kasutame valemit (1.16). Sel juhul ei ole eraldi maksimumi asukohta vaja leida.

$$\max M = M_a + \frac{Q_{ab}^2}{2p} = -20 + \frac{32,61^2}{20} = 33,17 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lõpetuseks tasub teha kogu tala toereaktsioonide kontroll

$$\sum Z = 40 + 40 + 50 + 20 + 10 \cdot 12 + 5 \cdot 8 - 52,61 - 96,98 - 81,67 - 50,94 - 27,81 = 0$$

Pärast iga osa põikjõu ja paindemomendi epüüri ordinaatide leidmist esitatakse kogu tala epüürid. Põikjõu epüür on kujutatud joonisel 6.13, b ja paindemomendi epüür joonisel 6.13, c.

6.4. Mõjujooned

Mõjujoonte koostamisel tuleb samuti nagu sisejõudude arvutamisel arvestada mitmesildelise tala jagunemist põhiosadeks ja lisaosadeks ning seda, et lisaosad toetuvad põhiosadele. Kuna lisaosadelt kanduvad koormused edasi põhiosadele, siis järelikult lisaosadel paiknevad koormused mõjutavad põhiosade sisejõudusid ja toereaktsioone. Vastupidine variant aga võimalik pole – põhiosade koormused lisaosade sisejõudusid ega toereaktsioone ei mõjuta. See põhitõde määrab ära, millises ulatuses on mingi löike sisejõu kohta koostatud mõjujoon nullist erinev. Järgnevalt vaatame mõjujoonte koostamist nii staatika kui ka kinemaatika meetodiga.

6.4.1. Staatika meetod

Toereaktsiooni mõjujoon

Alustame mõjujoonte koostamist joonisel 6.14, *a* kujutatud neljasildelise tala baasil, mille korrusskeem on esitatud joonisel 6.14, *b*. Tala on moodustatud kahest põhi- ja lisaosast. Kolme sidemega konsoolidega tala *g-h* on põhiosa, vertikaalse ühikjõu suhtes on põhiosa ka kahe vertikaalse toesidemega osa *a-f*. Lisaosadeks on *f-g* ja *h-m*.

Toereaktsiooni V_c mõjujoon on näidatud joonisel 6.14, *c*. Mõjujoone kujutamisel vaatleme esmalt seda talaosa, millele kuulub tugi *c*. Toereaktsioon V_c on põhiosa *g-h* reaktsioon. Ühikjõu mõjumisel põhiosal *g-h* leiame toereaktsiooni V_c toe *d* suhtes kirjutatud momentide tasakaalu tingimusest $\sum M_d = 0$

$$V_c = \frac{1(l_3 - x_3)}{l_3} \quad (6.4)$$

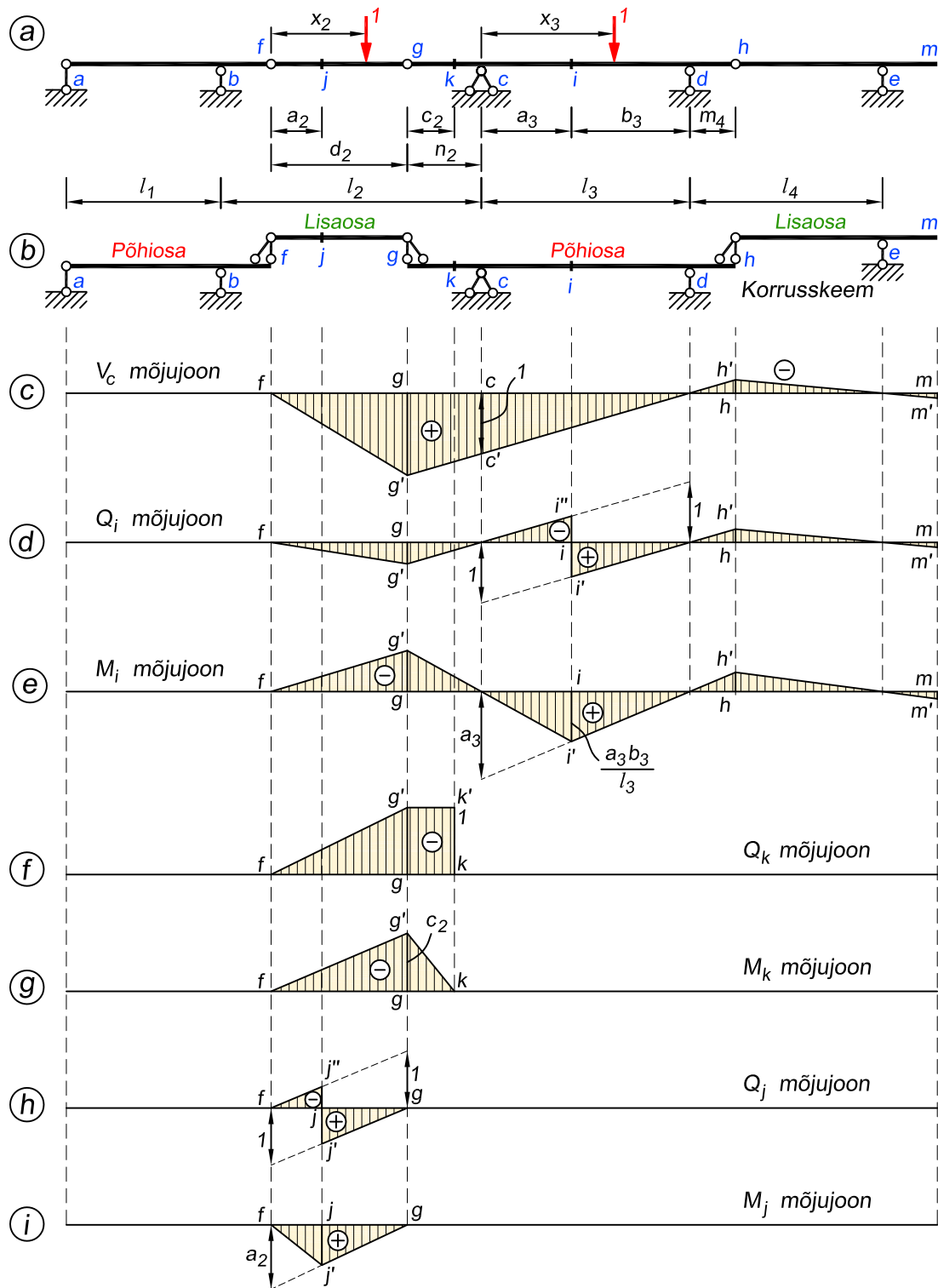
Toereaktsioonid V_a , V_b ja V_e on siis nullid. Toereaktsiooni V_c mõjujoone avaldis (6.4) kujutab sirget $g'-h'$. Kuna V_c on põhiosa toereaktsioon, siis mõjutavad seda ka vaadeldavast põhiosast kummalgi pool kõrgemal paiknevate lisaosade koormused, mistõttu peab mõjujoon mainitud lisaosade ulatuses olema samuti nullist erinev.

Ühikjõu mõjumisel lisaosal *f-g* ($0 \leq x_2 \leq d_2$) lahutame jõu põhiosa mõjujoonte arvutamisel kaheks komponendiks liigenditesse *f* ja *g*

$$V_f = \frac{1(d_2 - x_2)}{d_2}; \quad V_g = \frac{1x_2}{d_2} \quad (6.5)$$

Komponent liigendis *g* oleneb ühikjõu asukohast lisaosal *f-g* ja on proportsionaalne ühikjõu kaugusega liigendist *f*. Komponent V_g võrdub nulliga, kui ühikjõud on liigendi *f* kohal ($x_2 = 0$, $V_g = 0$) ja on suurim, kui ühikjõud on liigendi *g* kohal ($x_2 = d_2$, $V_g = 1$). Kuna ühikjõu komponent V_g kandub edasi praegu vaadeldavale põhiosale *g-h*, siis eelnevast järeldub, et lisaosal liikumisel liigendi *g* kohale jõudes läheb ühikjõud täielikult põhiosa konsooli otsale. Seetõttu annab V_g muutumine meile kätte mõjujoone sirge $f-g'$. Sirge $f-g'$ ordinaat liigendi *f* kohal võrdub nulliga, liigendi *g* kohal aga põhiosa mõjujoone ordinaadiga samas lõikes.

Sarnase mõttekäiguga saame kätte mõjujoone sirge $h'-m'$ ka teise lisaosa *h-m* ulatuses. Toereaktsiooni V_c mõjujoon koosneb siin järelikult kolmest sirgest. Põhiosa ulatuses kujutab sirge (6.4) konsoolidega tala toereaktsiooni mõjujoont, millest oli juttu peatükis 5.2.4. Kui



Joonis 6.14. Mõjujonte koostamine staatika meetodiga

ühikjõud mõjub põhiosal $a-f$, siis lisaosades ja põhiosas $g-h$ toereaktsioone ega sisejõude ei teki, mistõttu toereaktsiooni V_c mõjujoone ordinaadid vahemikus $a-f$ on nullid.

Põikjõu mõjujoon

Lõige i asub põhiosa $g-h$ tugede c ja d vahel. **Põikjõu Q_i mõjujoon** (joonis 6.14, d) põhiosa $g-h$ ulatuses koosneb kahest paralleelsest sirgest. Kui ühikjõud asub paremal pool lõiget i ($x_3 > a_3$), siis põikjõud võrdub toereaktsiooniga V_c . Ühikjõu mõjumisel põhiosal lõike i ja liigendi h vahel võrdub põikjõud lõikes i seetõttu avaldisega (6.4)

$$Q_i = V_c = \frac{l_3 - x_3}{l_3} \quad (6.6)$$

mis on mõjujoone parempoolse sirge $i'-h'$ võrrandiks.

Kui ühikjõud asub põhiosal vasakul pool lõiget i ($x_3 < a_3$), siis põikjõu lõikes i avaldame toereaktsiooni V_d kaudu

$$Q_i = -V_d = -\frac{x_3}{l_3} \quad (6.7)$$

mis on mõjujoone vasakpoolse sirge $g'-i''$ võrrandiks.

Kuna lõige i paikneb põhiosas, siis mõjutavad seda lõiget lisaks põhiosal olevatele koormustele ka kõrgemal olevatel lisaosadel liikuvad koormused. Kui ühikjõud asetseb lisaosal $f-g$ liigendi f kohal, siis $Q_i = 0$ ja kui ta asub liigendi g kohal, siis on tema mõju lõikele i samasugune nagu asudes põhiosal lõikes g . Järelikult mõjujoone sirge $f-g'$ ordinaat liigendi f kohal on null ja liigendi g kohal võrdne põhiosa kohal oleva mõjujoone sirge vastava ordinaadiga. Kui ühikjõud asub lisaosal $h-m$ toe e kohal, siis $Q_i = 0$ ja kui ta asub liigendi h kohal, siis võrdub tema mõju lõikele i põhiosal liigendi h kohal oleva jõuga. Sellest lähtuvalt saame kätte sirge $h'-m'$.

Ristlõikes k , mis asub põhiosa $g-h$ konsooli osas, ühtib **põikjõu Q_k mõjujoon** põhiosa ulatuses konsooli mõjujoonega (joonis 6.14, f). Kui ühikjõud mõjub põhiosal liigendi g ja ristlõike k vahel, siis $Q_k = -1$. Kui ühikjõud paikneb lisaosal $f-g$, siis saame Q_k vastavalt lisaosa parempoolse toereaktsiooni avaldisele $Q_k = -V_g = -\frac{x_2}{d_2}$: kui $x_2 = 0$, siis $Q_k = 0$ ja kui $x_2 = d_2$, siis $Q_k = -1$.

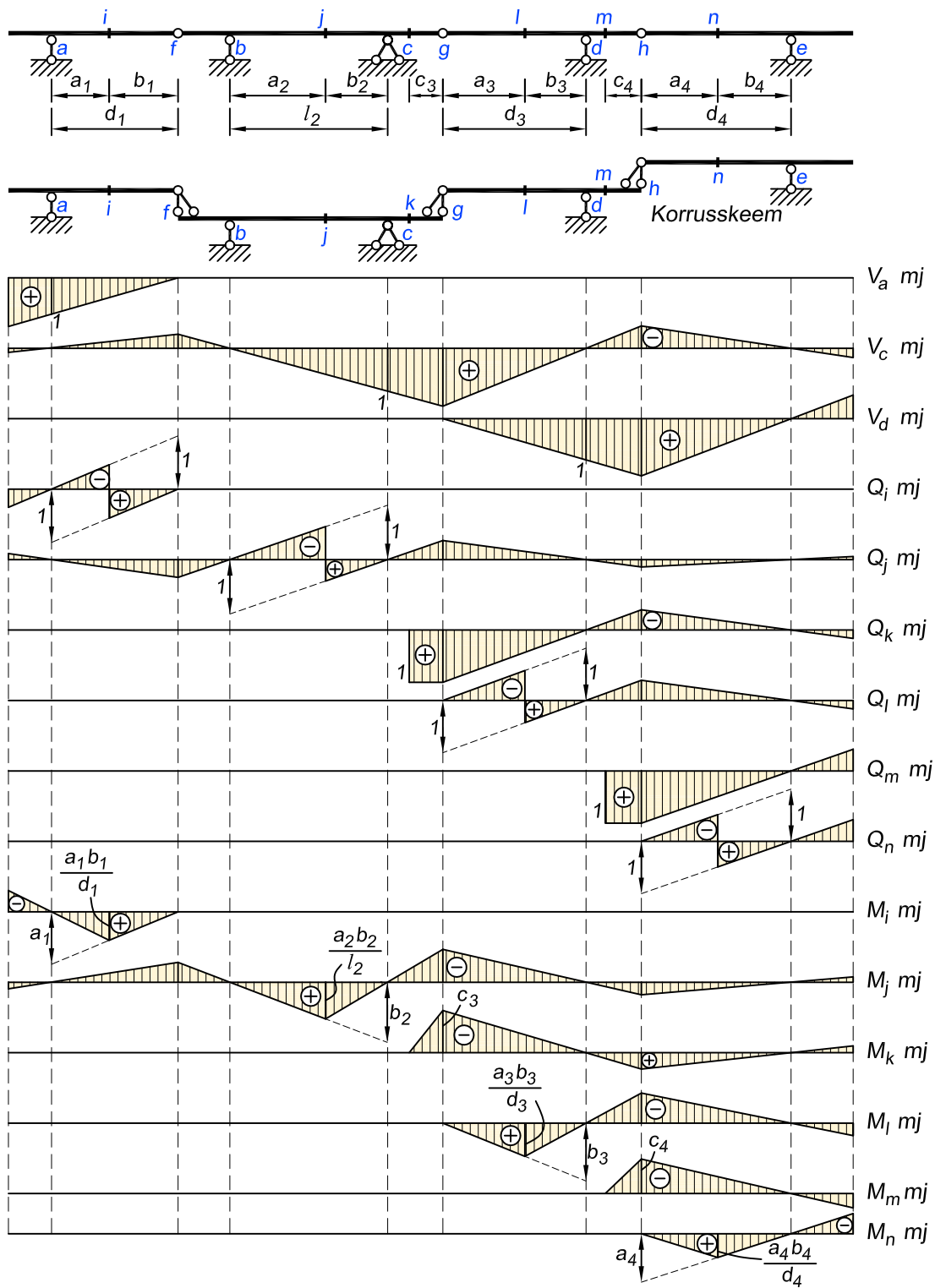
Kuna koormuse mõjumisel põhiosal ei teki sisejõudusid lisaosas, siis lisaosa $f-g$ lõike j jaoks koostatud **põikjõu Q_j mõjujoon** on nullist erinev ainult selle talaosa ulatuses ja ühtib sama sildega ($l = d_2$) lihttala mõjujoonega (joonis 6.14, h).

Paindemomendi mõjujoon

Paindemomendi M_i mõjujoon (joonis 6.14, d) põhiosa $g-h$ ulatuses koosneb kahest sirgest. Kui ühikjõud asub paremal pool lõiget i ($x_3 \geq a_3$), siis arvutame paindemomendi lõikes i toereaktsiooni V_c kaudu

$$M_i = V_c a_3 = \frac{(l_3 - x_3) a_3}{l_3} \quad (6.8)$$

Avaldis (6.8) on mõjujoone parempoolse sirge $i'-h'$ võrrand, mis ühikjõu mõjumisel lõike i kohal ($x_3 = a_3$) annab mõjujoone vastavaks ordinaadiks $M_i = \frac{a_3 b_3}{l_3}$.



Joonis 6.15. Veel näiteid mõjujoontest

Kui ühikjõud asub vasakul pool lõiget i , siis

$$M_i = V_d (l_3 - a_3) = \frac{b_3 x_3}{l_3} \quad (6.9)$$

Avaldis (6.9) on mõjujoone vasakpoolse sirge $g'-i'$ võrrandiks, mis lõikes i mõjuva ühikjõu korral ($x_3 = a_3$) annab $M_i = \frac{a_3 b_3}{l_3}$.

Lõikes i tekkivat paindemomenti mõjutavad ka lisaosadel olevad koormused, mistõttu täiendame mõjujoont lisaosade ulatuses sirgetega $f-g'$ ja $h'-m'$.

Paindemomendi M_k mõjujoon (joonis 6.14, g) kujutab endast põhiosa ulatuses konsooli mõjujoont. Kui koormus on lõikest k paremal pool, siis $M_k = 0$. Ühikjõu mõjumisel ristlõikes k on $M_k = 0$ ja liigendi g kohal $M_k = -1 \cdot c_2$. Kui ühikjõud on lisaosal $f-g$, siis $M_k = -V_g c_2 = -\frac{x_2 c_2}{d_2}$, mis kujutab sirget $f-g'$: kui $x_2 = 0$, siis $M_k = 0$ ja kui $x_2 = d_2$, siis $M_k = -c_2$.

Paindemomendi M_j mõjujoon erineb nullist ainult lisaosa $f-g$ ulatuses ja kattub sama sildega lihttala mõjujoonega (joonis 6.14, i).

Veel näiteid mõjujoontest

Joonisel 6.15 on kujutatud teistsuguse mitmesildelise tala mõjujooned, mille koostamisel arvestame sellega, et konsoolidega tala $f-g$ on põhiosa ning elemendid $a-f$ ja $h-e$ on lisaosad. Element $g-h$ on lisaosaks elemendi $f-g$ suhtes, kuid põhiosaks elemendi $h-e$ suhtes.

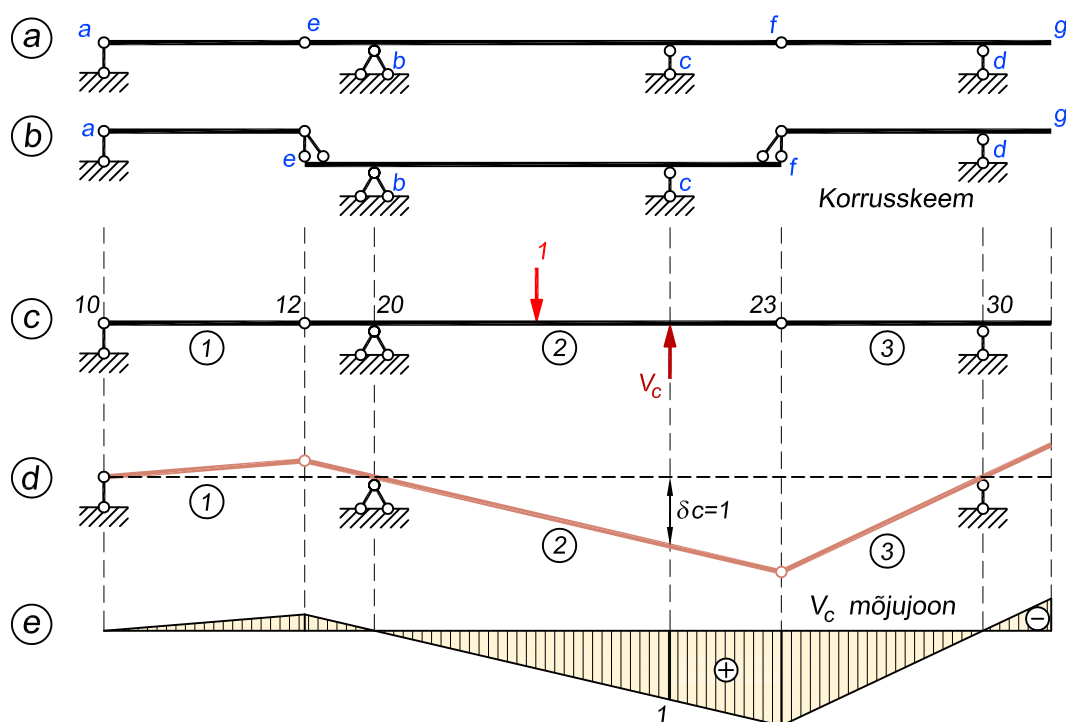
6.4.2. Kinemaatika meetod

Mõjujoone koostamisel kinemaatika meetodiga lähtume põhimõtetest, mida on kirjeldatud peatükis 5.3. Alustades mõjujoone kujutamist eemaldame sideme, mille reaktsiooni mõjujoont koostame. Sideme eemaldamisega tekkinud mehhanismile anname virtuaalsiirde, nii et eemaldatud sideme reaktsioonile R vastav siire $\delta r = 1$ toimuks positiivsele reaktsioonile vastassuunas. Reaktsioon R on kas paindemoment, põikjõud, pikijõud või toereaktsioon. Seejärel moodustame mehhanismi vertikaalsiirde epüüri, ehk teisisõnu, koostame skeemi, kus on näidatud tala asend pärast siirdumist. Epüüri ordinaat võrdub eemaldatud sideme reaktsiooni mõjujoone ordinaadiga.

Lihttala mõjujoontest erineb mitmesildelise tala mõjujoonte koostamine ainult selle poolest, et siin on ühe elemendi asemel neid mitu. Seetõttu tuleb mehhanismi vertikaalsiirde epüüri koostamisel jälgida, kuidas ühe elemendi siirdumisel reageerivad sellele kõrvalasetsevad elemendid. Oluline on siinjuures pöörata tähelepanu ka põhiosadeks ja lisaosadeks jagunemisele. Andes siirde põhiosale, pöörduvad ka tema peale toetuvad lisaosad, samas aga lisaosale siirde andmisel temast allpool olevad põhiosad jäävad liikumatuks.

Toereaktsiooni mõjujoon

Joonisel 6.16, a esitatud tala toereaktsiooni V_c mõjujoone kujutamisel muudame tala mehhanismiks toesideme c eemaldamisega (joonis 6.16, c). Vertikaalsiirde epüüri kujutame mehhanismi pooluste plaani abil.



Joonis 6.16. Toereaktsiooni mõjujoone koostamine kinemaatika meetodiga

Pooluste plaani koostamist alustame elemendist 2, kuna tugi c paikneb selle all. Lõikes c anname talale virtuaalse ühiksiirde $\delta c = 1$ positiivsele reaktsioonile vastassuunas ehk ülevalt alla. Mehhanismi element 2 pöörduv ümber toeliigendi b , mis on elemendi 2 peapoolus 20. Element 1 toetub sõlmes a toevardale ning teises otsas elemendile 2. Seetõttu paikneb tema peapoolus 10 mainitud toevarda ja elemendi 2 sihtide lõikumise kohas, mis ühtib liigendiga a . Element 3 toetub sõlmes d toevardale ja vasakus otsas elemendile 2, mistõttu paikneb tema peapoolus 30 elemendi 2 ning mainitud toevarda d sihi lõikepunktis (joonis 6.16, c).

Mõjujoone ordinaadid peapooluste 10, 20 ja 30 vertikaalidel (mehhanismi toevarraste kohal) on nullid. Elementide 1 ja 2 ning 2 ja 3 siirded vastavalt pooluste 12 ning 23 vertikaalidel on võrdsed, kuna elemendid on liigendis teineteisega ühendatud. Kogu mehhanismi vertikaalsiire (joonis 6.16, d) ühtib toereaktsiooni mõjujoonega (joonis 6.16, e).

Paindemomendi mõjujoon

Paindemomendi mõjujoonte koostamist selgitame joonise 6.17 abil, kus esitame paindemomentide M_k , M_i ja M_j mõjujooned.

Lõike k paindemomendi mõjujoone kujutamisel paneme sellesse lõikesse liigendi ning rakendame kummalegi poole liigendit varraste otstes positiivsed momendid (joonis 6.17, b). Seejärel leiame pooluste plaani. Element 2 pöörduv toeliigendi b peal, mis on selle elemendi peapoolus 20. Elemendi 3 peapooluseks 30 on toeliigend c . Elemendid 1 ja 4 pöörduvad vastavalt toe a ja toe d ümber, mis on peapoolusteks 10 ja 40. Nüüd anname lõikes k elemen-

tidele virtuaalse ühiksiirde $\delta r = 1$ positiivse paindemomendi vastassuunas. Kuna momendile vastavaks siirdeks on pööre, siis peavad elemendid 2 ja 3 teineteise suhtes pöörduma ühiknurga võrra. Selleks, et pööre toimuks positiivse momendi vastassuunas, nihutame lõikesse k paigutatud liigendit allapoole. Mehhanismi asend peale siiret (joonis 6.17, c) annab meile paindemomendi M_k mõjujoone (joonis 6.17, d).

Lõige i paikneb konsoolis ja seetõttu on mõjujoone koostamise käik natuke erinev eespool kirjeldatust, kus oli tegemist sildes paikneva lõikega. Peale lõikesse i liigendi lisamist ja sellest kummalegi poole positiivsete momentide rakendamist tuleb anda liigendist mõlemale poole jäävatele elementidele vastastikune pööre $\delta r = 1$ taas positiivse paindemomendi vastassuunas. Kuna liigendist vasakule poole jäävat vardaosa ei saa pöörata, siis anname ainult elemendile 1 pöördet ümber tema peapooluse 10 . Pööre peab toimuma ülespoole, kuna sel juhul on see vastupidi positiivsele momendile. Koos elemendiga 1 pöördub ka element 2, kuna liigendis 12 on nad omavahel ühendatud. Jõudsime mehhanismi asendini peale siiret (joonis 6.17, f), mis annab meile paindemomendi M_i mõjujoone (joonis 6.17, g).

Lõige j paikneb sildes ja selle mõjujoone koostamise meetodika on sama nagu lõike k puhul. Selle mõjujoone koostamine on näidatud joonisel 6.17, h, i, j.

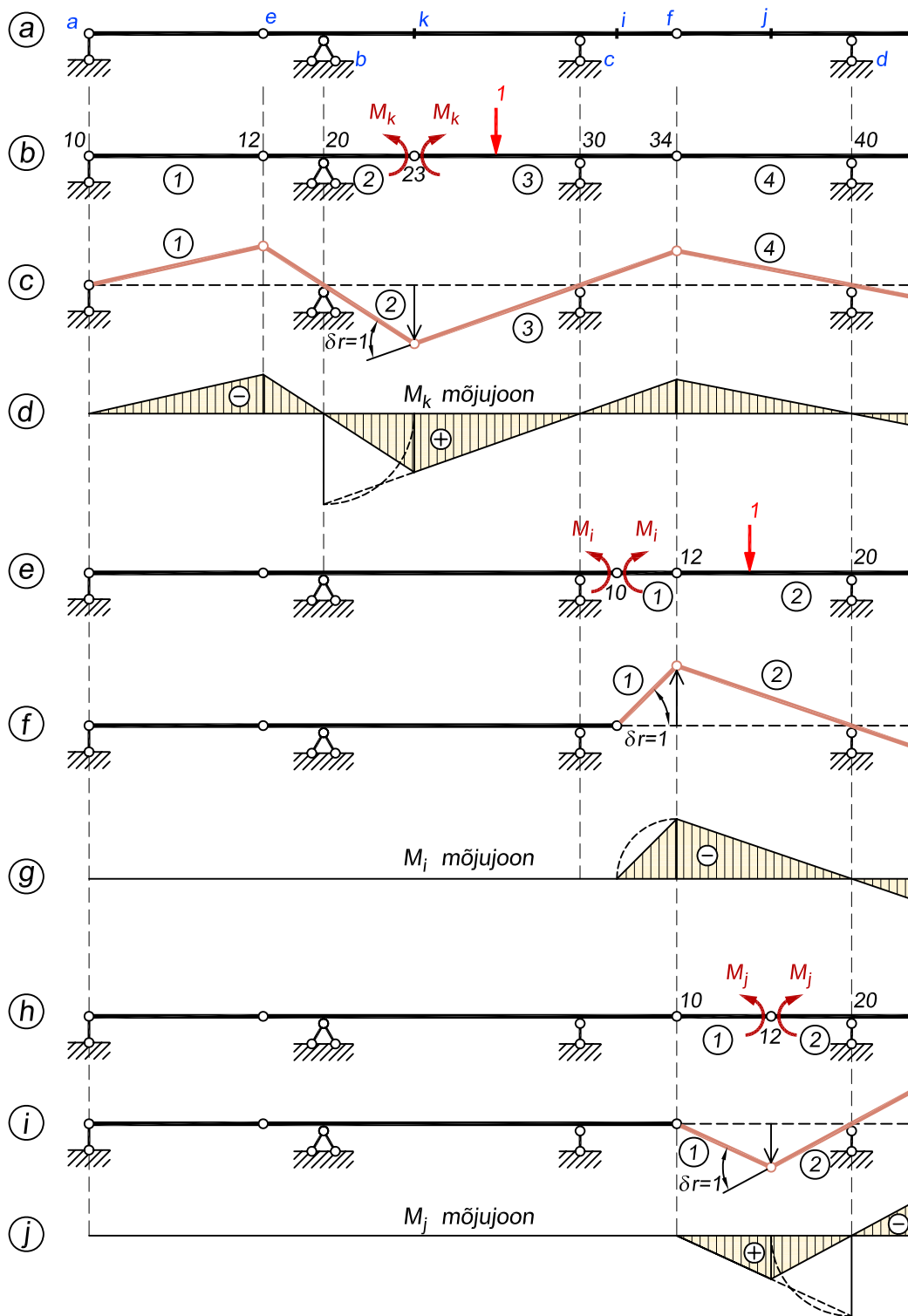
Põikjõu mõjujoon

Põikjõudude Q_k , Q_i ja Q_j mõjujoonte kujutamisel eemaldame vastavast lõikest põikjõudu vastuvõtva sideme, mis tähendab varda läbilõikamist, ning leiame mehhanismi vertikaalsiirde epüüri, kusjuures virtuaalse ühiksiirde $\delta r = 1$ anname positiivsele põikjõule vastassuunas. Põikjõu sideme eemaldamisel jäävad teine teisel pool lõiget asetsevad elemendid virtuaalsiirde korral paralleelseteks.

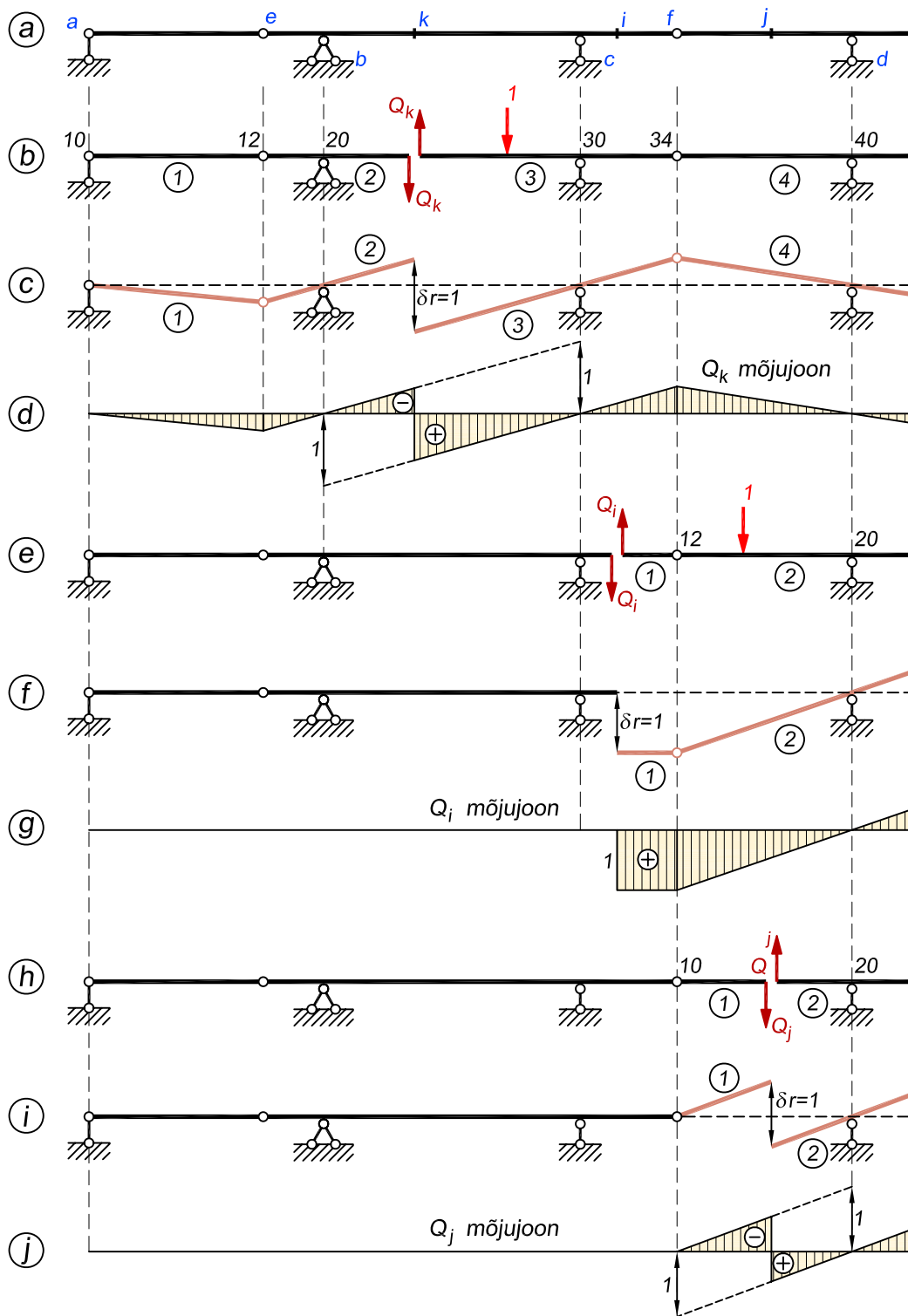
Lõike k põikjõu mõjujoone koostamiseks lõikame tala selle lõike kohalt läbi ning rakendame lõikest kummalegi poole jäävatele vardaotstele positiivsed põikjõud (joonis 6.18, b). Tuletame meelde, et positiivne on põikjõud, mis pöörab vardaosa päripäeva. Lõikest vasakule jääv element 2 saab pöörduda toeliigendi b ümber, mis on selle elemendi peapooluseks 20 . Lõikest paremale jääva elemendi 3 peapooluseks 30 on toeliigend c . Elementide 1 ja 4 peapoolused on vastavalt 10 ja 40 . Nüüd anname lõikest k kummalegi poole jäävatele vardaotstele siirde selliselt, et nihutame neid positiivsetele põikjõududele vastupidises suunas (joonis 6.18, c). Saadud vertikaalsiirde skeem ühtib eemaldatud sideme reaktsiooni mõjujoonega (joonis 6.18, d).

Lõige i paikneb varda konsoolses osas. Pärast varda läbilõikamist lõike i kohal ning positiivsete põikjõudude rakendamist saadud vardaotstesse (joonis 6.18, e), tuleb nendele vardaotstele anda vastastikune siire. Kuna lõikest vasakule jäävat elementi ei saa toesidemete tõttu kuhugi nihutada, siis teeme seda ainult lõikest paremale jääva elemendiga 1 . Nihutame seda positiivsele põikjõule vastupidises suunas ning oma esialgse asendiga paralleelselt, kuna mõlemale poole lõiget jäävad elemendid peavad pärast siiret olema endiselt teineteisega paralleelsed (joonis 6.18, f). Mõjujoon on kujutatud joonisel 6.18, g.

Lõikes j koostame mõjujooned sarnaselt lõikele k . Kujutatud on seda joonisel 6.18, h, i, j.

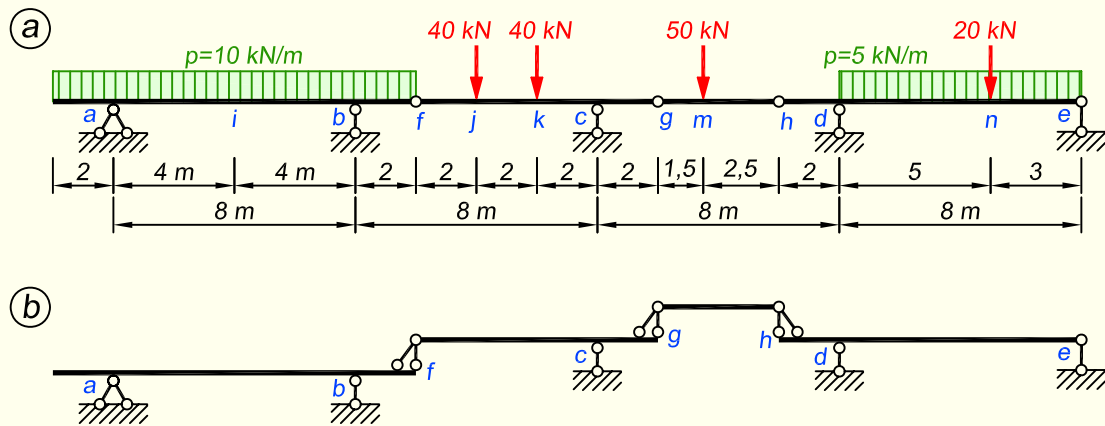


Joonis 6.17. Paindemomendi mõjujoonte koostamine kinemaatika meetodiga



Joonis 6.18. Põikjõu mõjujoonte koostamine kinemaatika meetodiga

NÄIDE 6.4. Koostada joonisel 6.19, a kujutatud staatikaga määratava mitmesildelise tala toereaktsioonide V_b ja V_d , põikjõudude Q_b^v , Q_j ja Q_c^p ning paindemomentide M_i , M_b ja M_n mõjujooned. Mõjujoonte abil leida toereaktsioonid ja sisejõud talale rakendatud koormusest ning võrrelda neid näites 6.3 otseselt leitud suurustega.



Joonis 6.19. Tala arvutuskeem ja korrusskeem

LAHENDUS

Mõjujoonte koostamist alustame alati sellest tala osast, kus paikneb lõige, mille mõjujoon meid huvitab.

Selleks, et teada saada, millistel arvutuskeemi osadel paiknevad koormused mõjutavad meid huvitavat lõiget, tuleb mõelda põhiosade ja lisaosade skeemi peale. Lisaosadelt kanduvad koormused põhiosadele üle, vastupidi aga mitte, kuna lisaosa asub kõrgemal.

Seega, kui meid huvitav lõige paikneb põhiosas, siis seda lõiget ja temas tekkivat sisejõudu mõjutavad esiteks koormused, mis paiknevad sellel põhiosal endal ja teiseks koormused, mis paiknevad sellest põhiosast kõrgemal olevatel lisaosadel. Kuna mõjujoone iga ordinaat näitab selle ordinaadi kohal oleva koormuse mõju lõikele, mille kohta mõjujoon on koostatud, siis peavad mõjujoone ordinaadid olema nullist erinevad kõigi nende varraste ulatuses, mille koormused meid huvitavat lõiget mõjutavad.

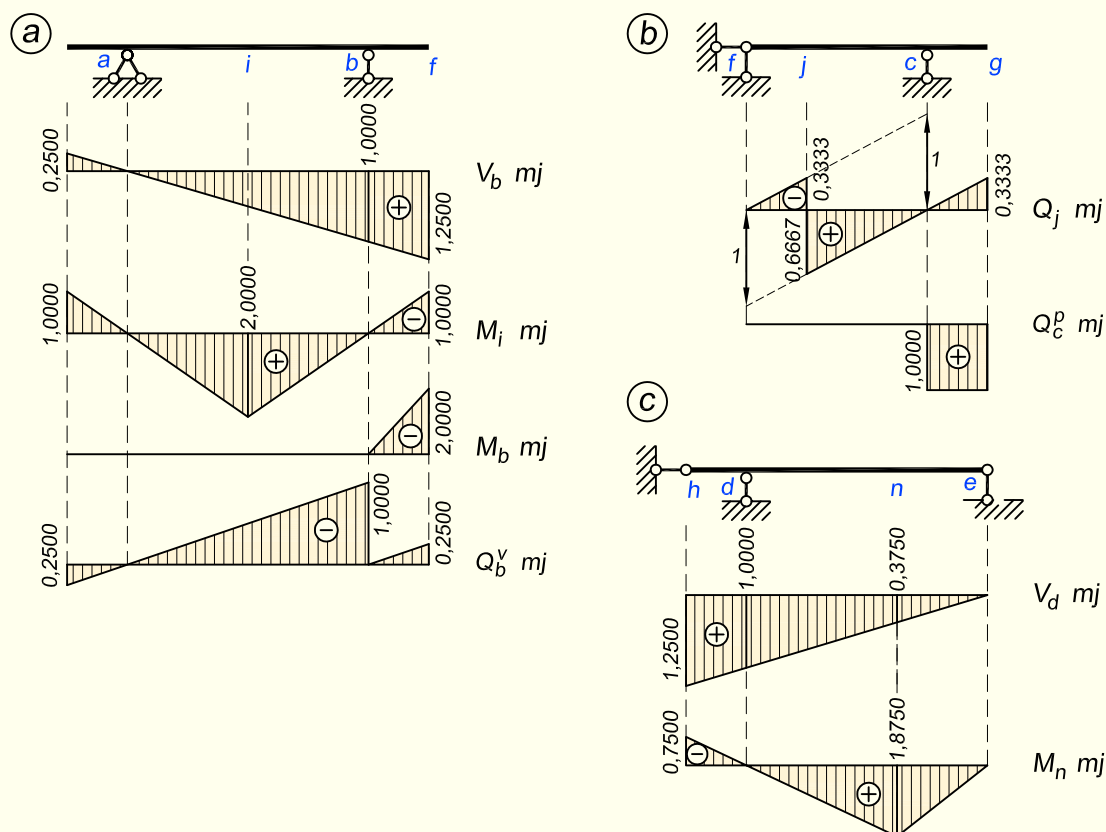
Kui lõige paikneb lisaosal, siis seda lõiget mõjutavad ainult need koormused, mis asetsevad selle lisaosa enda peal. Madalamal olevate põhiosade koormused ei saa kuidagi kõrgemal olevatele varrastele üle kanduda ja seetõttu ka ei mõjuta lisaosade lõikeid. Mõjujoone ordinaadid on nullist erinevad ainult lisaosa enda ulatuses. Tuleb tähelepanu pöörata ka sellele, et varras võib olla temast ühel pool asuva varda suhtes lisaosaks (ehk paikneb kõrgemal) ja teisel pool oleva varda suhtes põhiosaks (ehk paikneb madalamal).

1. Põhiosas $a-f$ olevate lõigete mõjujooned

Toereaktsiooni V_b , paindemomentide M_i ja M_b ning põikjõu Q_b^v mõjujoonte koostamiseks vaatame esmalt tala $a-f$ (joonis 6.20, a).

Nimetatud tala on põhiosa. Kuna lisaosad paiknevad põhiosast kõrgemal (joonis 6.19, *b*), siis mõjutavad selle elemendi lõikeid nii koormused, mis asuvad tema enda peal kui ka lisaosadel asuvad koormused. Järelikult peavad nende nelja mõjujoone ordinaadid olema nullist erinevad mitmesildelise tala vasakust otsast kuni lõikeni *h*.

Tala *a-f* ulatuses on need mõjujooned tavalise konsoolidega lihttala vastavate mõjujoonte kujudega, nagu kirjeldatud peatükis 5 ja nagu on näidatud joonisel 6.20, *a*.



Joonis 6.20. Mitmesildelise tala üksikute osade mõjujooned

Kui meid huvitava põhiosa ulatuses on mõjujooned koostatud, siis saame minna lisaosade juurde. Lähtume põhiosa mõjujoontest ja sellest, et lisaosade kohal on mõjujooned sirged, kusjuures tugede kohal on ordinaadid nullid.

Kogu tala mõjujooned on esitatud joonisel 6.22, *b*, *c*, *d* ja *e*.

Vaatame ka seda, kuidas saame need mõjujooned kätte kinemaatika meetodiga.

V_b **mõjujoone** koostamiseks tuleb tugi *b* eemaldada ja anda talale selles kohas negatiivne ehk toereaktsioonile vastupidise suunaga siire (joonis 6.21, *b*). Tala *a-f* parempoolne ots vajub sellega alla ja nii on meil teada mõjujoone kogu selle varde enda ulatuses. Kuna lisaosa *f-g* toetub vasakus otsas põhiosa peale, siis põhiosa otsa allavajumisel

peab sama juhtuma ka lisaosaga. Varras $f-g$ hakkab nüüd toe c peal pöörduma, mistõttu tema parempoolne ots tõuseb üles ja võtab endaga kaasa ka järgmise lisaosa $g-h$ otsa. Kirjeldatud kolme varda siirdumine annabki meile V_b mõjujoone kuju.

Paindemomendi M_i mõjujoone koostamiseks paigutame lõikesse i liigendi, millega muudame põhiosa $a-f$ mehhanismiks (joonis 6.21, c). Järgnevalt nihutame liigendit suunaga alla, nii et mehhanismi pooled hakkavad teineteise suhtes pöörduma. Tala vasak pool pöördub toe a peal ning parem pool toe b peal. Liigendis f tõuseb põhiosa ots üles, mis paneb pöörduma ka temast paremal olevad kaks lisaosa. Selliselt toimides saame kätte M_i mõjujoone kuju.

Paindemomendi M_b mõjujoone saamiseks asetame toelõikesse b liigendi, mis põhjustab konsooli $b-f$ mehhanismiks muutumise (joonis 6.21, d). Erinevalt sildes olevast lõikest, ei saa me siin lisatud liigendit kuhugi suunas liigutada, kuna see paikneb toe peal. Praegusel juhul tuleb meil anda pööre mehhanismiks muudetud konsoolile, nii et konsooli vaba ots tõuseb üles. Konsooli pöördumine põhjustab ka temast paremal oleva kahe lisaosa pöördumise. Tugede a ja b vahel olev varras kuidagi pöörduda ei saa ja selles piirkonnas on ka mõjujoone ordinaadid nullid. See on ka arusaadav, kuna lihttala toel tekkivat paindemomenti ei saa kuidagi mõjutada tugede vahel olev koormus.

Q_b^v **mõjujoon** kirjeldab põikjõu muutumist toest b vahetult vasakule jäävas lõikes. Nüüd lõikame varda selle koha pealt läbi ja anname lõikest kummalegi poole jäävale osale pöörde (joonis 6.21, e). Lõikest vasakule jääv osa hakkab pöörduma toe a peal, paremale jääv konsool aga toe b peal. Pöördudes peavad mõlemad osad teineteisega paralleelseks jääma. Kui varda $a-f$ osadele on siire antud, siis edasi vaatame, kuidas pöörduvad lisaosad.

2. Talas $f-g$ olevate lõigete mõjujooned

Põikjõudude Q_j ja Q_c^p mõjujoonte koostamist alustame talast $f-g$ (joonis 6.20, b).

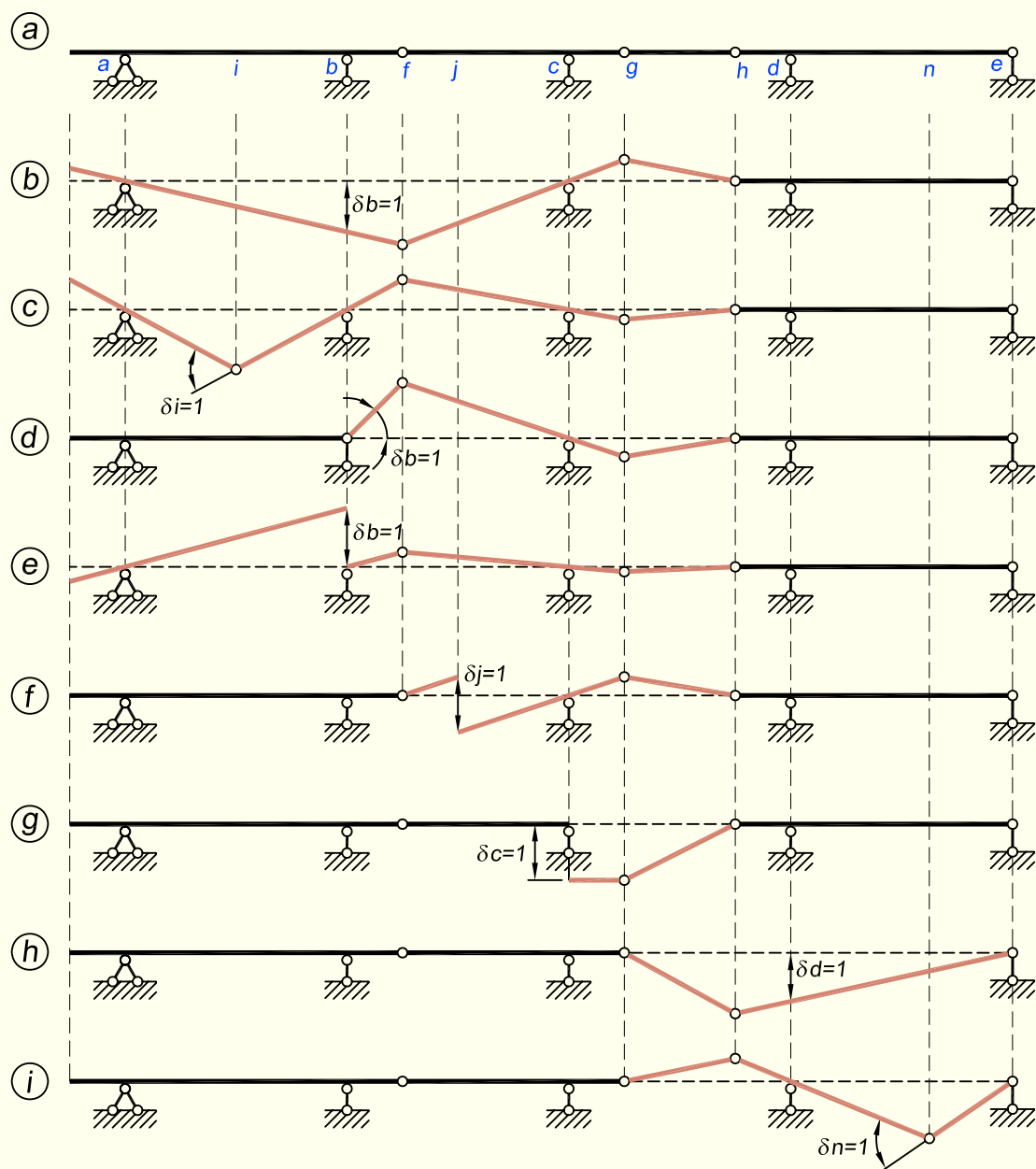
Q_j **mõjujoon** on vahemikus $f-g$ konsooliga lihttala põikjõu mõjujoone kujuga. Liigendist f vasakul on mõjujoone ordinaadid nullid, kuna osa $a-f$ on osale $f-g$ põhiosaks (joonis 6.19, b), alt üles koormused edasi kanduda ei saa ja seetõttu liigendist f vasakul pool asuv koormus tala $f-g$ ega temal olevat lõiget j ei mõjuta. Liigendist g paremale jääb kõrgemal asuv lisaosa $g-h$, millel asuvad koormused mõjutavad tala $f-g$ ja seetõttu peavad mõjujoone ordinaadid varda $g-h$ ulatuses olema nullist erinevad.

Q_c^p **mõjujoon** on konsoolse varda põikjõu mõjujoone kujuga. Selles lõikes tekkivat põikjõudu mõjutab konsoolile toetuva lisaosa $g-h$ peal olev koormus, küll aga mitte toest c vasakule jääv koormus, kuna see paikneb lihttala tugede vahel ega saa mõjutada konsooli.

Mõlemad mõjujooned on esitatud joonistel 6.22, f ja g .

Kasutades kinemaatika meetodit, tuleb mõlema põikjõu mõjujoone koostamiseks varras vastavas lõikes läbi lõigata (joonis 6.21, f ja g) ja sellega tala mehhanismiks muuta. Edasi on erinev see, kuidas me saadud mehhanismidele siirded anname. Lõige j paikneb sildes, mispuhul me anname lõikest kummalegi poole jäävale mehhanismi osale

pöörde. Q_c^p mõjujoone puhul on tegemist konsoolis paikneva löikega (olgu et vahetult toe kõrval) ning siin nihutame löikest paremale jäävat osa vastupidiselt positiivsele põikjõule ehk ülevalt alla ja teeme seda tema algse asendiga paralleelselt. Löikest vasakule jäävat osa me toesidemete tõttu kuhugi nihutada ei saa. Kui mõlema mõjujoone koostamisel on varda $f-g$ osadele siire antud, siis vaatame, kuidas liigub sellele elemendile toetuv varras $g-h$.



Joonis 6.21. Mõjujoonte koostamine kinemaatika meetodiga

3. Põhiosas $h-e$ olevate lõigete mõjujooned

Toereaktsiooni V_d ja paindemomendi M_n mõjujoone koostamiseks vaatame esimesena tala $h-e$, mille puhul on tegemist konsooliga lihttalaga (joonis 6.20, c).

Kuna mainitud tala on põhiosa, siis mõjutavad temas olevaid lõikeid tema enda peal olevad koormused ja temast kõrgemal oleva lisaosa $g-h$ koormused. Liigendist g vasakule jäävad koormused kuidagi vardale $h-e$ edasi kanduda ei saa ja seetõttu peavad ka vaadeldavate mõjujoonte ordinaadid liigendist g vasakul nullid olema.

Mõlemad mõjujooned on esitatud joonistel 6.22, h ja i .

Kinemaatika meetodi kasutamise korral on tegevus sarnane eespool kirjeldatule.

V_d **mõjujoone** koostamiseks eemaldame arvutuskeemist toe d ning anname tekki-vale mehhanismile vertikaalsiirde (joonis 6.21, h). Koos põhiosaga $h-e$ pöördub ka tema peale toetuv lisaosa $g-h$.

M_n **mõjujoone** jaoks paigutame lõikesse n liigendi ja anname sellest kummalegi poole jäävale vardale osale pöörde, nii et vasak pool hakkab pöörduma toe d peal ja parem pool toe e peal (joonis 6.21, i). Koos põhiosa pöördumisega pöördub ka lisaosa $g-h$.

4. Toereaktsioonide ja sisejõudude leidmiseks mõjujoonte abil korrutame lauskoormuse selle all oleva mõjujoone osa pindalaga ja koondatud koormuse selle all oleva mõjujoone ordinaadiga ning summeerime saadud tulemused.

Näitena leiame sisejõud viiele lõikele

$$V_b = 40 \cdot (0,8333 + 0,4167) - 50 \cdot 0,2604 + 10 \cdot (1,25 \cdot 10 \cdot 0,5 - 0,25 \cdot 2 \cdot 0,5) = 96,980 \text{ kN}$$

$$M_b = 40 \cdot (-1,3333 - 0,6667) + 50 \cdot 0,4167 - 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,5 = -79,165 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Q_b^v = 40 \cdot (-0,1667 - 0,0833) + 50 \cdot 0,0521 + 10 \cdot (-1 \cdot 8 \cdot 0,5 - 0,25 \cdot 2 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 2 \cdot 0,5) = -47,395 \text{ kN}$$

$$Q_j^v = 40 \cdot (0,6667 + 0,3333) - 50 \cdot 0,2083 = 29,585 \text{ kN}$$

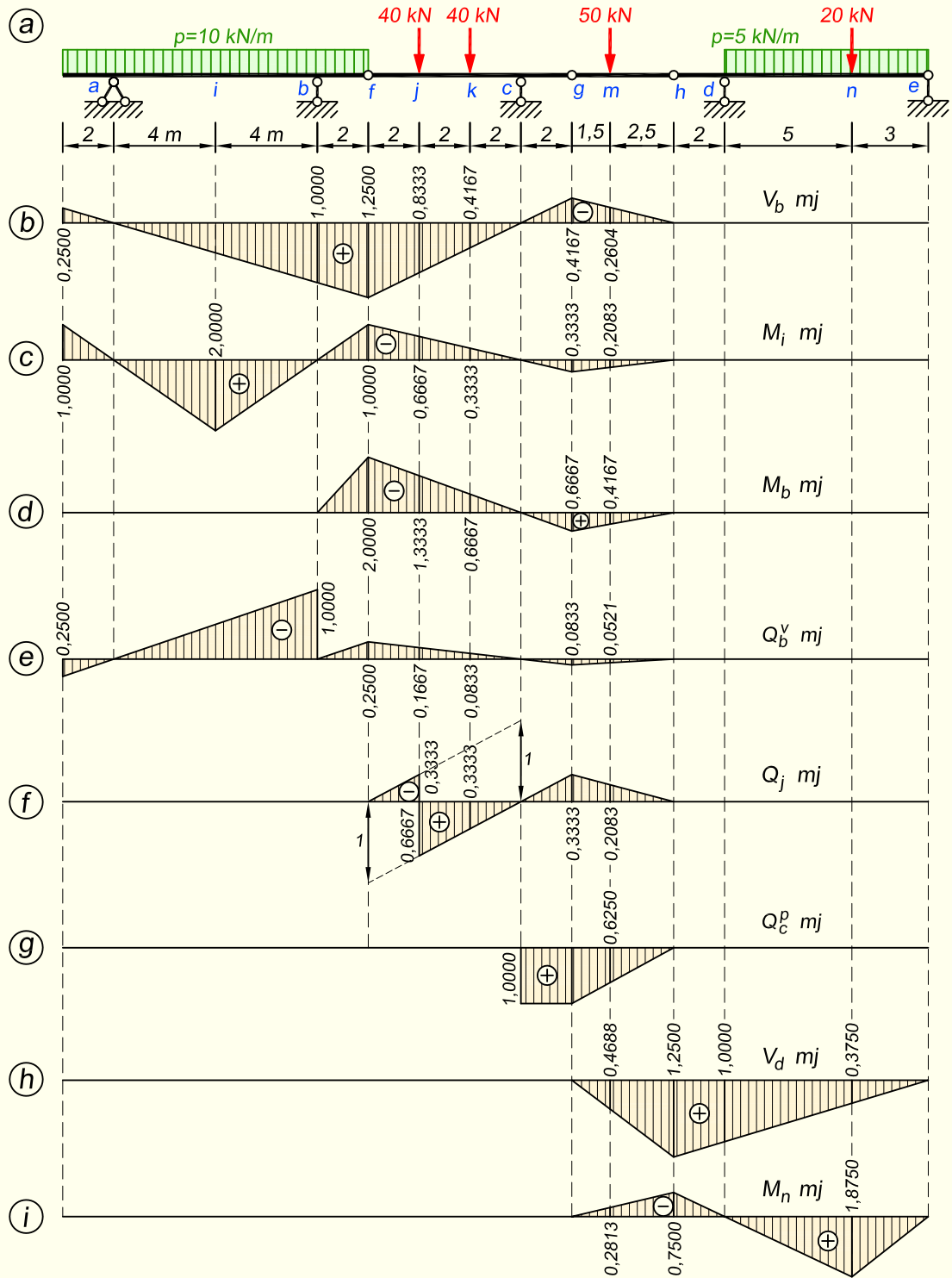
$$Q_j^p = 40 \cdot (-0,3333 + 0,3333) - 50 \cdot 0,2083 = -10,415 \text{ kN}$$

Ülesande lõpetuseks võrdleme otsese arvutusega ja mõjujoonte abil saadud sisejõudusid. Otsese arvutuse teel näites 6.3 leitud suurused olid

$$V_b = 96,98 \text{ kN}; \quad M_b = -79,16 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

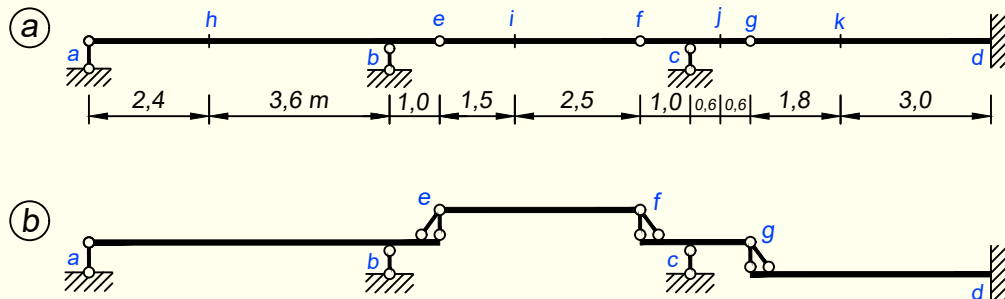
$$Q_b^v = -47,39 \text{ kN}; \quad Q_j^v = 29,58 \text{ kN}; \quad Q_j^p = -10,42 \text{ kN}$$

Järeldus: mõjujoonte abil leitud sisejõud ühtivad otsese arvutuse teel saadud sisejõududega.



Joonis 6.22. Mitmesildelise tala mõjujooned

NÄIDE 6.5. Koostada joonisel 6.23, a kujutatud staatikaga määratava mitmesildelise tala toereaktsioonide V_b , V_c ja V_d mõjujooned ning lõigete h , i , c , j ja k jaoks paindemomendi ja põikjõu mõjujooned. Põikjõu mõjujoon lõikele c koostada vasakul pool tuge.



Joonis 6.23. Tala arvutuskeem ja korrusskeem

LAHENDUS

Põhi- ja lisaosade korrusskeem on esitatud joonisel 6.23, b.

Põhiosaks on konsool $g-d$, kuna jäiga kinnituse tõttu on temal olemas kolm toesidet.

Konsooliga tala $a-e$ omab kahte toesidet ning on vertikaalse koormuse puhul samuti põhiosaks, kuna teiste osade puudumisel on takistatud tema vertikaalne siire ja võimalik on ainult horisontaalne siire.

Elemendil $f-g$ on üks toeside c ja see element on kinnitatud parempoolses otsas liigendiga konsooli $g-d$ külge. Element $f-g$ jääb geomeetriliselt muutumatuks, kui eemaldatakse temast vasakul olevad elemendid. Järelikult on ta lisaosa konsooli $g-d$ suhtes ja põhiosaks elemendile $e-f$.

Ilma toesidemeteta element $e-f$ on lisaosa.

Selleks, et paremini mõista koormuste mõju erinevatele talaosadele, näitame joonisel 6.24, milline toereaktsioon või sisejõud on mõjutatud milliste koormuste poolt. See määrab ära, milliste elementide kohale peab ühe või teise lõike mõjujoon ulatuma.

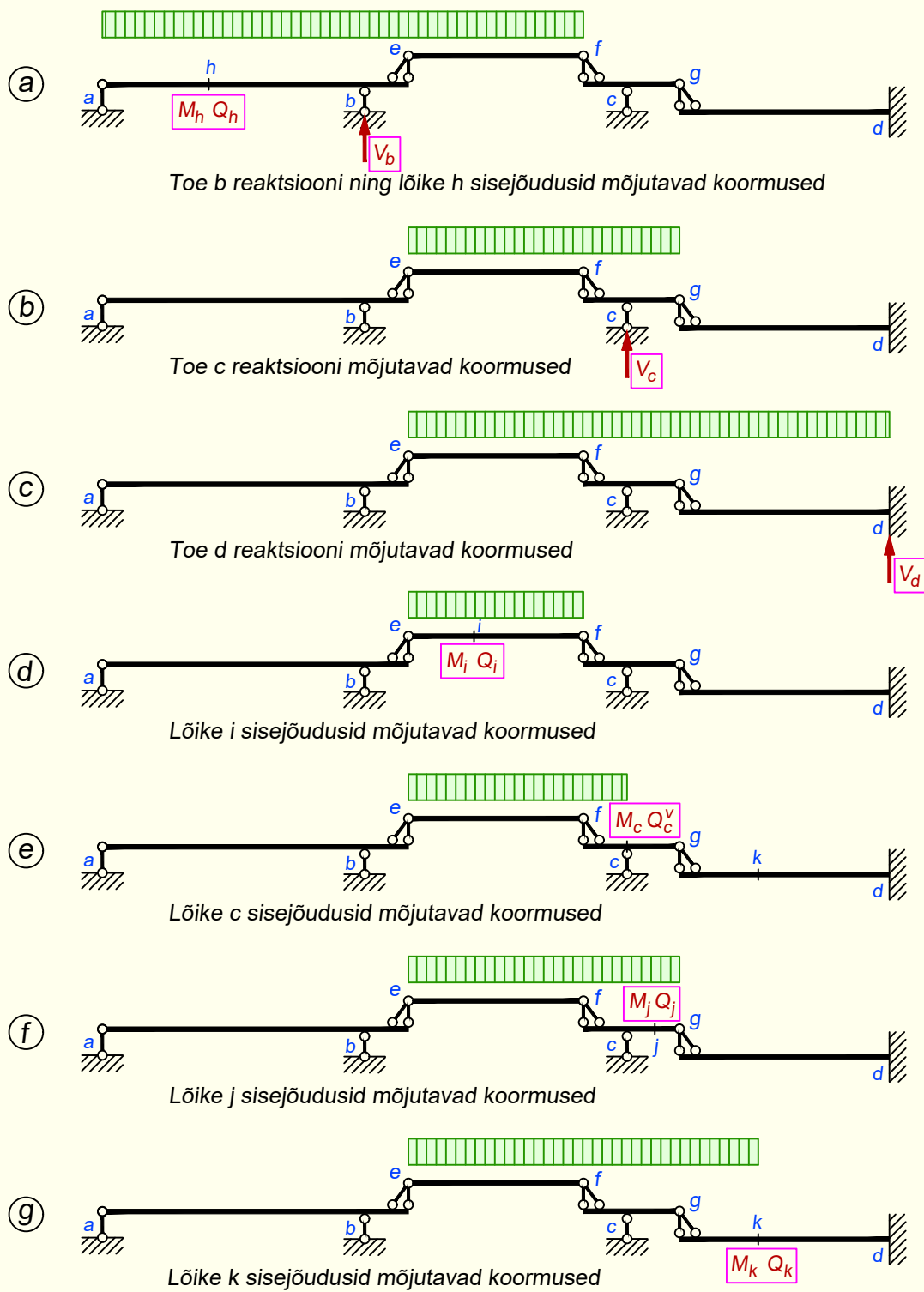
Tugi b on põhiosa $a-e$ tugi, mis tähendab, et selle toe reaktsiooni mõjutavad põhiosa $a-e$ enda peal olevad koormused ja ka sellele põhiosale toetuva lisaosa $e-f$ peal olevad koormused (joonis 6.24, a). Järelikult peab toereaktsiooni V_b mõjujoon olema nullist erinev lõikest a kuni lõikeni f . Sama kehtib lõike h paindemomendi M_h ja põikjõu Q_h mõjujoonte kohta.

Tugi c on elemendi $f-g$ tugi ja selle reaktsiooni mõjutavad varda $f-g$ enda peal olevad koormused ja ka sellele vardale toetuva elemendi $e-f$ koormused (joonis 6.24, b). Toereaktsiooni V_c mõjujoon peab seetõttu olema nullist erinev lõikest e kuni lõikeni g .

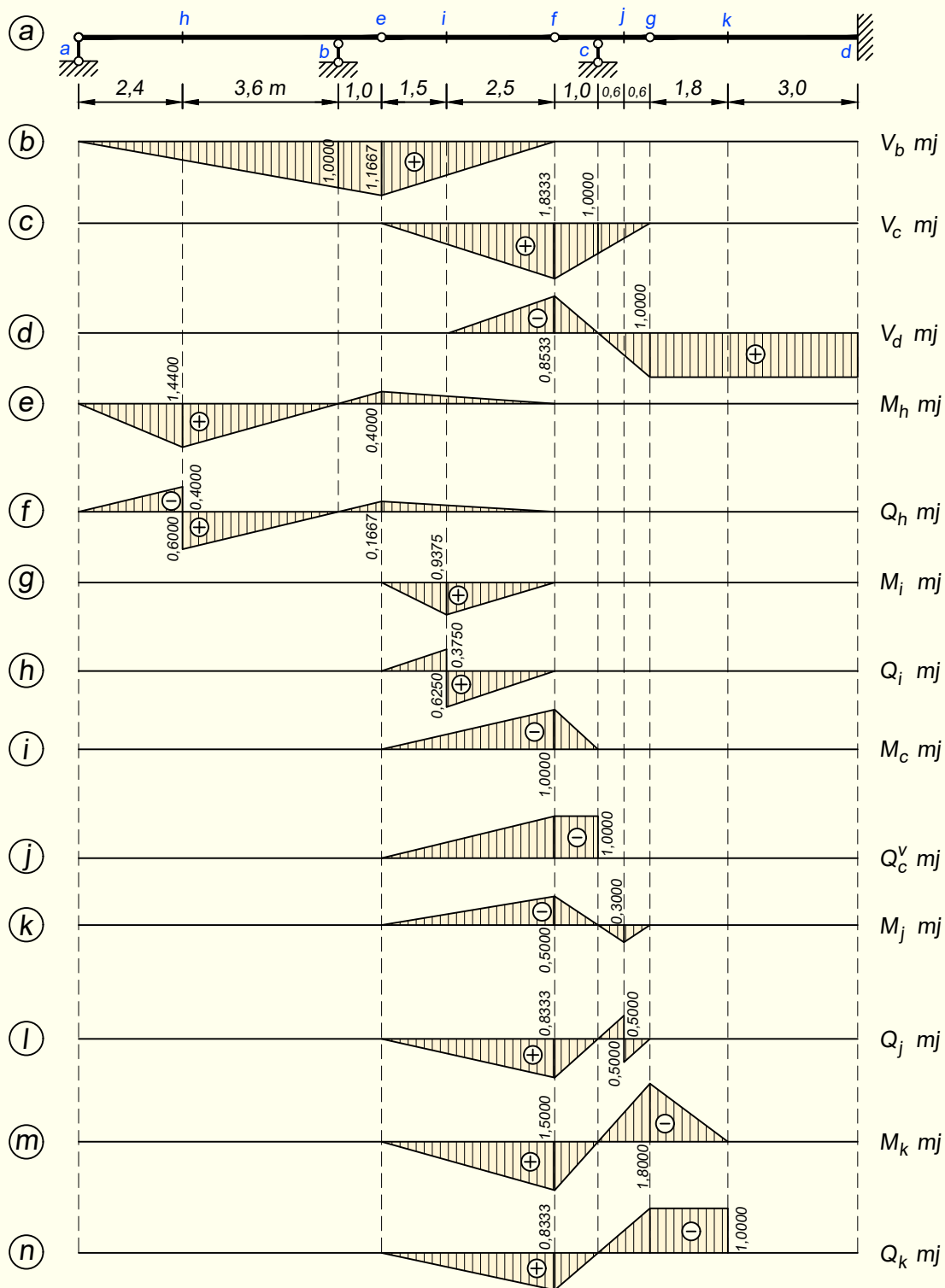
Lõige c on varda $f-g$ konsooli toelõige ja selle lõike sisejõudusid mõjutavad konsooli $f-c$ koormused ja sellele konsoolile toetuva lisaosa $e-f$ koormused (joonis 6.24, e).

Joonisel 6.24 on sarnaselt ära näidatud ka ülejäänud lõigete jaoks, millised koormused neid lõikeid mõjutavad.

Mõjujooned on esitatud joonisel 6.25.



Joonis 6.24. Tala erinevaid tugesid ja ristlõikeid mõjutavad koormused



Joonis 6.25. Mõjujooned

NÄIDE 6.6. Kujutada joonisel 6.26, *a* kujutatud mitmesildelise tala toereaktsioonide V_b ja V_c ning lõigete i ja k jaoks paindemomendi ja põikjõu mõjujooned. Mõjujoonte abil leida ekstremaalsed toereaktsioonid ja sisejõud joonisel 6.26, *b* esitatud liikuvast koormusest. Liikuv koormus koosneb kahest sildkraanast, mille minimaalne vahekaugus on 2 m. Kraana telgede vahekaugus on 5 m ja teljekoormus 240 kN.

LAHENDUS

Ilma toesidemeta element $f-g$ ja ühe toesidemega element $h-e$ on lisaosad. Konsooliga tala $a-f$ ja vertikaalse koormuse puhul kahe vertikaalse toesidemega element $g-h$ on põhiosad.

Toereaktsioonide ja sisejõudude mõjujooned on kujutatud joonisel 6.26, *c, d, e, f, g* ja *h*. Mõjujoonte juures on näidatud sildkraanade asetus, mille puhul tekivad suurimad toereaktsioonid ja sisejõud. Ekstremaalsete väärtuste saamiseks tuleb üks teljekoormus paigutada nõutava märgiga mõjujoone osa suurima ordinaadi kohale ja ülejäänud teljekoormused sellest lähtuvalt, arvestades ülesandes antud vahekauguseid. Maksimaalse sisejõu saab, kui koormused paigutada mõjujoone positiivsele osale, minimaalse sisejõu, kui koormused paiknevad mõjujoone negatiivsel osal. Kuna sildkraanadel on konkreetne tööpiirkond määratud, kus nad liikuda saavad, siis peavad kõigil skeemidel mõlemad kraanad ka peal olema. Kui mõlemad kraanad ei mahu ära mõjujoone sama märgiga osale, siis tuleb üks viia mõjujoone nullosale.

Järgnevas arvutuses tähistab \max suurimat võimalikku positiivset ning \min suurimat võimalikku negatiivset sisejõudu või reaktsiooni.

Suurimad toereaktsioonid (joonis 6.26, *c* ja *d*)

$$\max V_b = 240 \cdot (0,5 + 1,0 + 1,2 + 0,2) = 696 \text{ kN}$$

$$\min V_b = 0$$

$$\max V_c = 240 \cdot (0,2 + 1,2 + 1,0 + 0,5) = 696 \text{ kN}$$

$$\min V_c = 240 \cdot (-0,18 - 0,07) = -60 \text{ kN}$$

Suurimad paindemomendid (joonis 6.26, *e* ja *g*)

$$\max M_i = 240 \cdot (2,4 + 0,4) = 672 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\min M_i = 240 \cdot (-0,800 - 0,133) = -224 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\max M_k = 240 \cdot (0,600 + 2,100) = 648 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\min M_k = 240 \cdot (-0,100 - 0,600 - 1,890 - 0,738) = -799 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

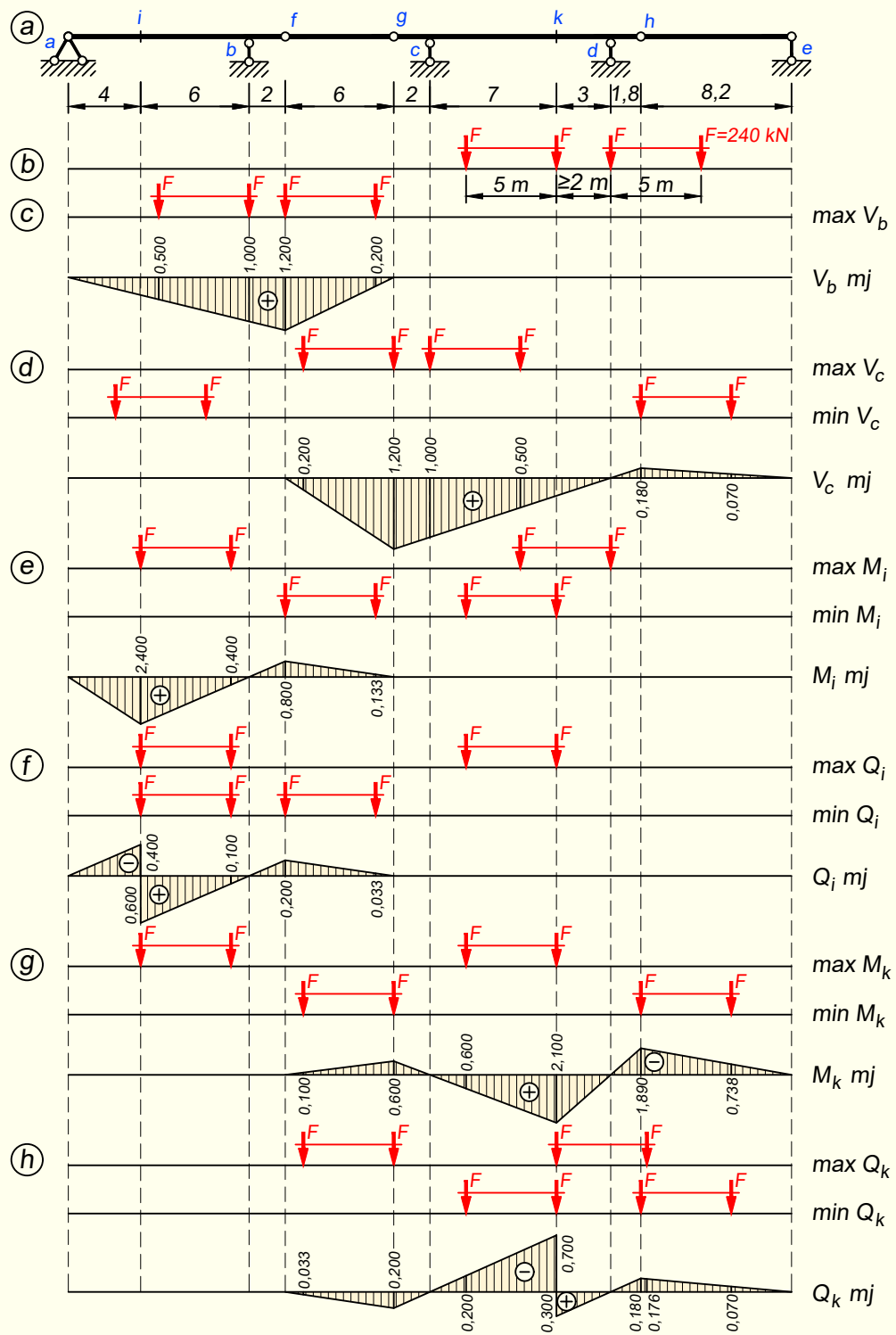
Suurimad põikjõud (joonis 6.26, *f* ja *h*)

$$\max Q_i = 240 \cdot (0,6 + 0,1) = 168 \text{ kN}$$

$$\min Q_i = 240 \cdot (-0,400 + 0,100 - 0,200 - 0,033) = -128 \text{ kN}$$

$$\max Q_k = 240 \cdot (0,033 + 0,200 + 0,300 - 0,176) = 86 \text{ kN}$$

$$\min Q_k = 240 \cdot (-0,200 - 0,700 - 0,180 - 0,070) = -276 \text{ kN}$$



Joonis 6.26. Kraanade asetis ekstremaalsete toereaktsioonide ja sisejõudude korral

NÄIDE 6.7. Joonisel 6.27, *a* kujutatud talal liiguvad autod, millest põhjustatud koormused on näidatud joonisel 6.27, *b*. Sõidusuund võib olla nii vasakult paremale kui ka paremalt vasakule. Leida mõjujoonte abil suurimad võimalikud toereaktsioonide V_b ja V_c ning lõigete *i* ja *k* paindemomentide ja põikjõudude väärtused.

LAHENDUS

Mõjujoonte juures on näidatud autode asetus, mille puhul tekivad suurimad toereaktsioonid ja sisejõud. Kuna siin ülesandes on koormusteks autod, siis arvestame, et antud tala kujutab näiteks silda, mida autod ületavad. Kuna sillal võivad korraga olla nii kõik neli autot kui ka ainult üks, siis tuleb iga skeemi peale paigutada nii palju sõidukeid, kui on vaja ekstreemaalse sisejõu saamiseks.

Autod võivad liikuda nii vasakule kui ka paremale ja kuna nende teljekoormused on erinevad, siis tuleb välja selgitada, kummas suunas liiguvad sõidukid annavad suurema sisejõu. Ühe sõiduki koormused on teistest suuremad, mistõttu tuleb iga skeemi korral esimesena paika panna tema, nii et suurema koormusega telg oleks mõjujoone nõutava märgiga osa suurima ordinaadi kohal, ja seejärel vastavalt antud vahekaugustele teised sõidukid.

Järgnevas arvutuses tähistab \max suurimat võimalikku positiivset ning \min suurimat võimalikku negatiivset sisejõudu või reaktsiooni.

Suurimad toereaktsioonid (joonis 6.27, *c* ja *d*)

$$\max V_b = 70 \cdot 0,4 + 30 \cdot 0,8 + 95 \cdot 1,2 + 35 \cdot 0,4 = 180 \text{ kN}$$

$$\min V_b = 0$$

$$\max V_c = 35 \cdot 0,4 + 95 \cdot 1,2 + 30 \cdot 0,8 + 70 \cdot 0,4 = 180 \text{ kN}$$

$$\min V_c = -95 \cdot 0,180 - 35 \cdot 0,092 = -20,3 \text{ kN}$$

Suurimad paindemomendid (joonis 6.27, *e* ja *g*)

$$\max M_i = 95 \cdot 2,4 + 35 \cdot 0,8 = 256 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\min M_i = -95 \cdot 0,800 - 35 \cdot 0,267 = -85,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\max M_k = 35 \cdot 0,900 + 95 \cdot 2,100 = 231 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\min M_k = -70 \cdot 0,200 - 30 \cdot 0,600 - 95 \cdot 1,890 - 35 \cdot 0,968 = -245,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Suurimad põikjõud (joonis 6.27, *f* ja *h*)

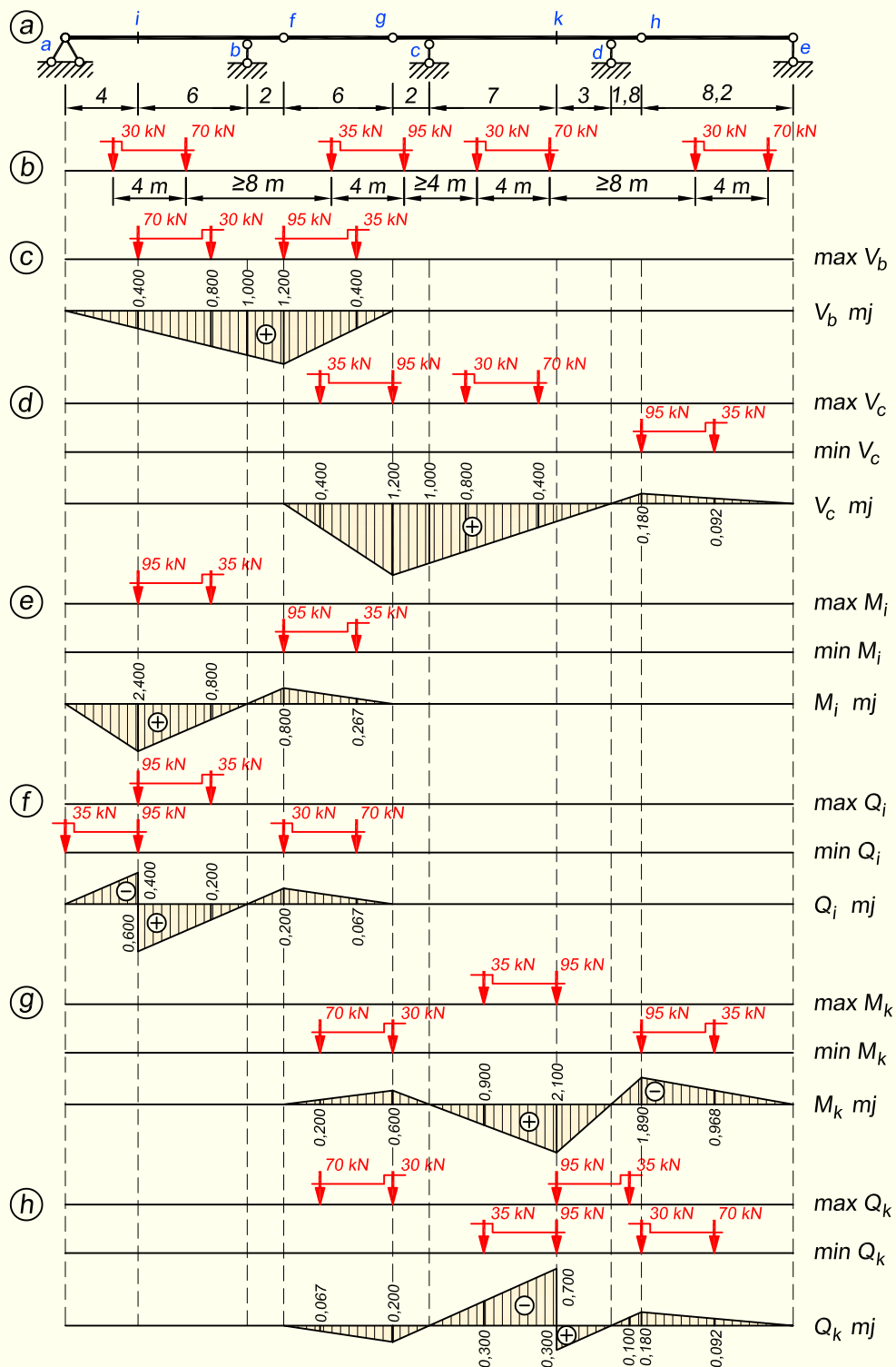
$$\max Q_i = 95 \cdot 0,600 + 35 \cdot 0,200 = 64 \text{ kN}$$

$$\min Q_i = 35 \cdot 0 - 95 \cdot 0,400 - 30 \cdot 0,200 - 70 \cdot 0,067 = -48,7 \text{ kN}$$

$$\max Q_k = 70 \cdot 0,067 + 30 \cdot 0,200 + 95 \cdot 0,300 - 35 \cdot 0,100 = 35,7 \text{ kN}$$

$$\min Q_k = -35 \cdot 0,300 - 95 \cdot 0,700 - 30 \cdot 0,180 - 70 \cdot 0,092 = -88,8 \text{ kN}$$

Siin pöörata tähelepanu $\max Q_k$ arvutusele, kus üks korrutis on küll negatiivne, aga vastava auto summaarne tulemus sellele vaatamata ikkagi positiivne.



Joonis 6.27. Autode asetus ekstreemsete toereaktsioonide ja sisejõudude korral

6.5. Mitmesildelise tala paindemomendi mõjumaatriks

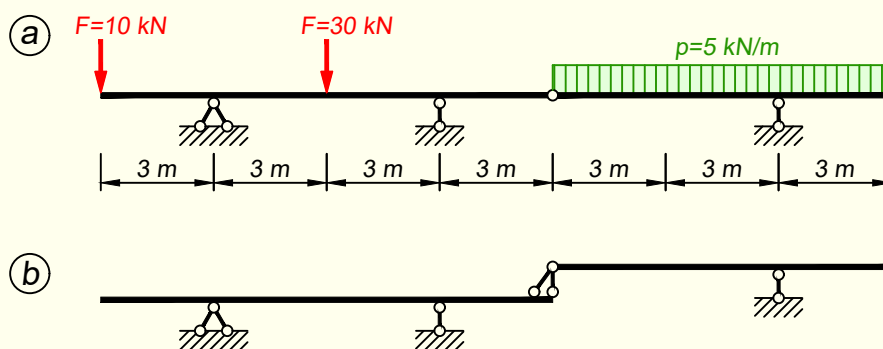
Staatikaga määratava mitmesildelise tala arvutamine mõjumaatriksi abil toimub sarnaselt lihttalale, millest oli juttu peatükis 5.6.

Paindemomendi epüüri ordinaadid leiame mõjumaatriksi abil valemiga (5.76)

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}_m \mathbf{F} \quad (6.10)$$

kus \mathbf{M} on paindemomendi epüüri ordinaatide vektor, \mathbf{b}_m on paindemomendi mõjumaatriks ja \mathbf{F} on talale rakendatud koormuste vektor.

NÄIDE 6.8. Koostada joonisel 6.28, a kujutatud mitmesildelise tala paindemomendi mõjumaatriks ning arvutada selle abil paindemomendi epüüri ordinaadid.



Joonis 6.28. Tala arvutuskeem ja korrusskeem

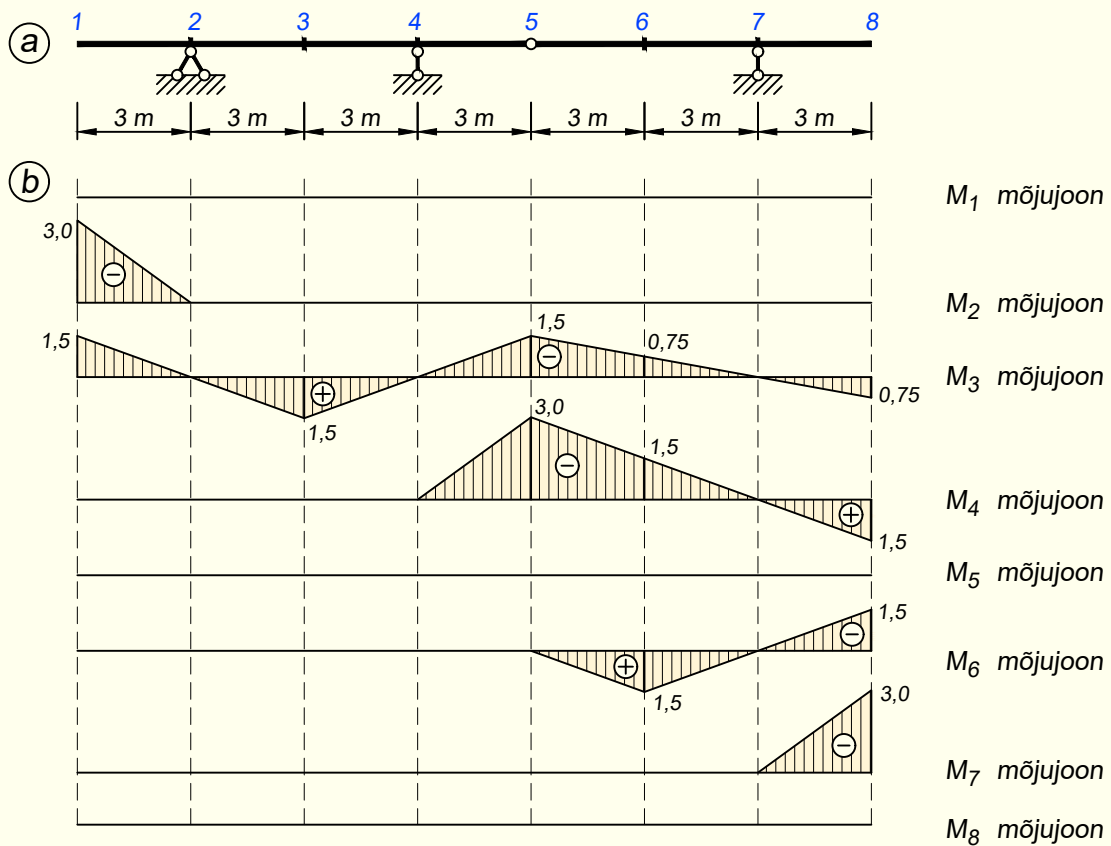
LAHENDUS

Esmalt koostame talale korrusskeemi (joonis 6.28, b). Vasakpoolne element, millel on toed mõlemas otsas, on põhiosaks. Parempoolne element, millel on ainult üks toeside, on lisaosaks.

Tähistame tala iseloomulikud lõiked, nagu on näidatud joonisel 6.29, a ja koostame kõigi lõigete jaoks paindemomendi mõjujooned (joonis 6.29, b).

Järgnevalt kirjutame saadud mõjujoonte ordinaadid mõjumaatriksisse, nii et esimesele reale märgime M_1 mõjujoone ordinaadid. Järgmistele ridadele lähevad järgmiste mõjujoonte ordinaadid. Selle tulemusena saame järgmise mõjumaatriksi

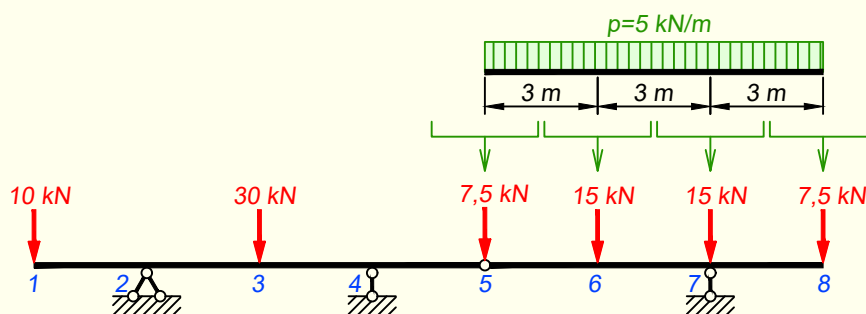
$$\mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 & -0,75 & 0 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1,5 & 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Joonis 6.29. Paindemomendi mõjujooned lõigete 1...8 jaoks

Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamiseks on lisaks mõjumaatriksile vaja ka koormusvektorit, mille moodustame talale rakendatud jõududest.

Parempoolsel elemendil paikneb lauskoormus, mille taandame esmalt sõlmedesse (joonis 6.30), kuna koormusvektor peab sisaldama ainult sõlmkoormuseid.



Joonis 6.30. Koormuste skeem koormusvektori moodustamiseks

Koormusvektori saame joonise 6.30 abil. Selleks kirjutame kõik koondjõud koormusvektorisse, nii et lõike järjekorranumber määrab ära, mitmendal real jõud vektoris paikneb.

$$F = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 7,5 \\ 15 \\ 15 \\ 7,5 \end{Bmatrix}$$

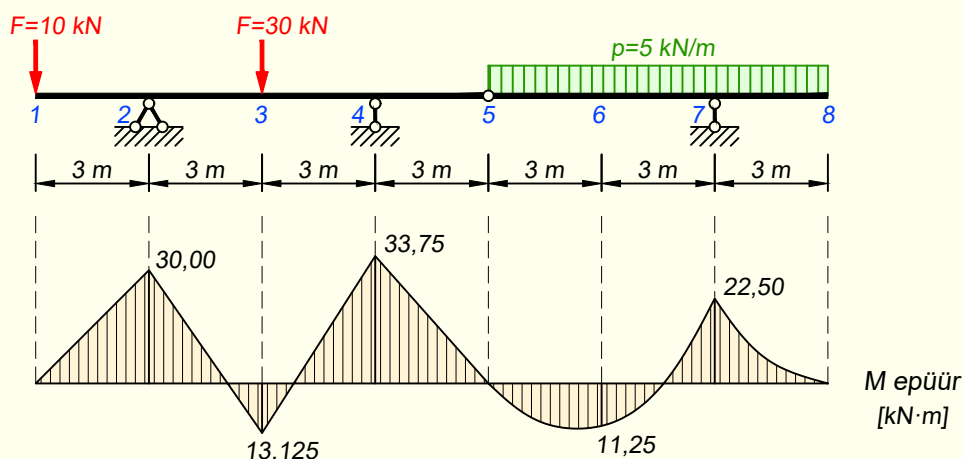
Paindemomendi epüüri ordinaatide leidmiseks kirjutame välja avaldise vastavalt valemile (6.10)

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}_m \mathbf{F}$$

M epüüri ordinaatide avaldiseks saame nüüd

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 & -0,75 & 0 & 0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1,5 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 7,5 \\ 15 \\ 15 \\ 7,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -30 \\ 13,125 \\ -33,75 \\ 0 \\ 11,25 \\ -22,5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Paindemomendi epüüri ordinaadid kanname joonisele 6.31 vastavalt lõigete järjekorranumbritele.

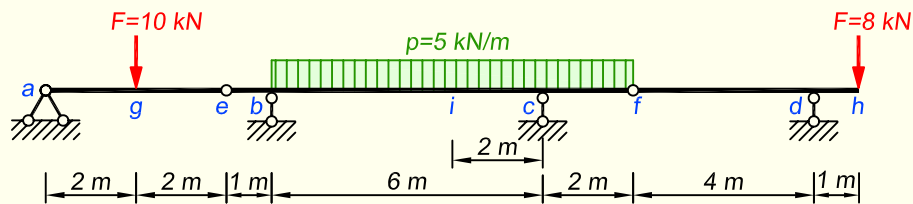


Joonis 6.31. Paindemomendi epüür

6.6. Arvutus virtuaalsiirete printsiibi abil

Mitmesildelise tala lahendamisel virtuaalsiirete printsiibi abil on tegevus sama, nagu on kirjeldatud peatükis 3.3.3 – arvutusskeemist peame eemaldama selle sideme, milles on vaja sisejõudu või reaktsiooni leida. Eemaldatud sideme mõju asendame sellele sidemele vastava toereaktsiooni või sisejõuga. Edasi lahendame ülesannet lähtudes põhimõttest, et konstruktsioonile rakendatud jõudude töö konstruktsiooni virtuaalsiiretel võrdub nulliga. Erinevalt näites 3.5 esitatud lihttala arvutusest on siin vaja mõelda põhiosade ja lisaosade omavahelistele seostele, kuna mingi sideme eemaldamisel võib siirduda rohkem kui üks element.

NÄIDE 6.9. Arvutada joonisel 6.32 kujutatud mitmesildelise tala toereaktsioonid, kasutades selleks virtuaalsiirete printsiipi.



Joonis 6.32. Tala arvutusskeem

LAHENDUS

Toereaktsiooni arvutamisel eemaldame seda reaktsiooni vastuvõtva sideme ning anname arvutusskeemile eemaldatud sidemele vastava siirde.

1. Toereaktsiooni V_a leidmiseks eemaldame vasakpoolse toe ning anname tala vastavale lõikele vertikaalsiirde δa z -telje positiivses suunas (joonis 6.33, b). Avaldame kõik siirded varda a - e pöördenurga α kaudu. Pöördenurgaks on

$$\alpha = \frac{\delta a}{4}$$

kuna väikeste nurkade korral võetakse $\tan \alpha \approx \alpha$. Siit saame, et

$$\delta a = 4\alpha; \quad \delta g = 0,5 \cdot \delta a = 2\alpha$$

Arvutusskeemile rakendatud jõudude tööde summa virtuaalsiiretel peab võrduma nulliga

$$-V_a \cdot \delta a + 10 \cdot \delta g = 0$$

millest

$$-V_a \cdot 4\alpha + 10 \cdot 2\alpha = 0$$

Avaldame toereaktsiooni väärtuse

$$V_a = \frac{10 \cdot 2\alpha}{4\alpha} = 5 \text{ kN}$$

2. Toereaktsiooni V_b leidmiseks eemaldame toe b (joonis 6.33, c) ning anname vardale $e-f$ selles kohas siirde δb . Avaldame varda $e-f$ pöördenurga ning siirde δb seose sellega

$$\alpha = \frac{\delta b}{6} \Rightarrow \delta b = 6\alpha$$

Teiste siirete seosed nurgaga α on

$$\delta e = 7\alpha; \quad \delta g = 0,5 \cdot \delta e = 3,5\alpha; \quad \delta i = \frac{\delta b}{3} = 2\alpha; \quad \delta f = -2\alpha; \quad \delta h = 0,5\alpha$$

Jõudude tööde summa on

$$-V_b \cdot \delta b + 10 \cdot \delta g + 5 \cdot 8 \cdot \delta i + 8 \cdot \delta h = 0$$

$$-V_b \cdot 6\alpha + 10 \cdot 3,5\alpha + 40 \cdot 2\alpha + 8 \cdot 0,5\alpha = 0$$

ning toereaktsioon

$$V_b = \frac{35\alpha + 80\alpha + 4\alpha}{6\alpha} = 19,83 \text{ kN}$$

Praegu tegime arvutuse nii, et lauskoormuse resultandi korrutasime sellele vastava siirdega: $5 \cdot 8 \cdot \delta i = 80\alpha$. Juhul kui lauskoormus ulatub mitme talaosa peale, siis tuleb resultandid arvutada ka eraldi iga osa peal olevast koormusest ning seejärel korrutada neile vastavate siiretega.

Lauskoormust võib arvesse võtta aga ka teistmoodi. Me võime lauskoormuse intensiivsuse korrutada pindalaga, mis jääb tala esialgse ja siirdunud asendi vahele. Leiame selle pindala, arvestades ka märke

$$A = \frac{\delta b \cdot 6}{2} - \frac{\delta f \cdot 2}{2} = 3\delta b - \delta f = 3 \cdot 6\alpha - 2\alpha = 16\alpha$$

Saadud tulemuse korrutame lauskoormusega

$$5 \cdot A = 5 \cdot 16\alpha = 80\alpha$$

3. Toereaktsiooni V_c arvutamisel on avaldised järgmised

$$\alpha = \frac{\delta c}{6} \Rightarrow \delta c = 6\alpha$$

$$\delta e = \alpha; \quad \delta g = -0,5\alpha; \quad \delta i = 4\alpha; \quad \delta f = 8\alpha; \quad \delta h = -2\alpha$$

$$-V_c \cdot \delta c + 10 \cdot \delta g + 5 \cdot 8 \cdot \delta i + 8 \cdot \delta h = 0$$

$$-V_c \cdot 6\alpha - 10 \cdot 0,5\alpha + 40 \cdot 4\alpha - 8 \cdot 2\alpha = 0$$

$$V_c = \frac{-5\alpha + 160\alpha - 16\alpha}{6\alpha} = 23,167 \text{ kN}$$

4. Toereaktsioon V_d

$$\alpha = \frac{\delta d}{4} \Rightarrow \delta d = 4\alpha; \quad \delta h = 5\alpha$$

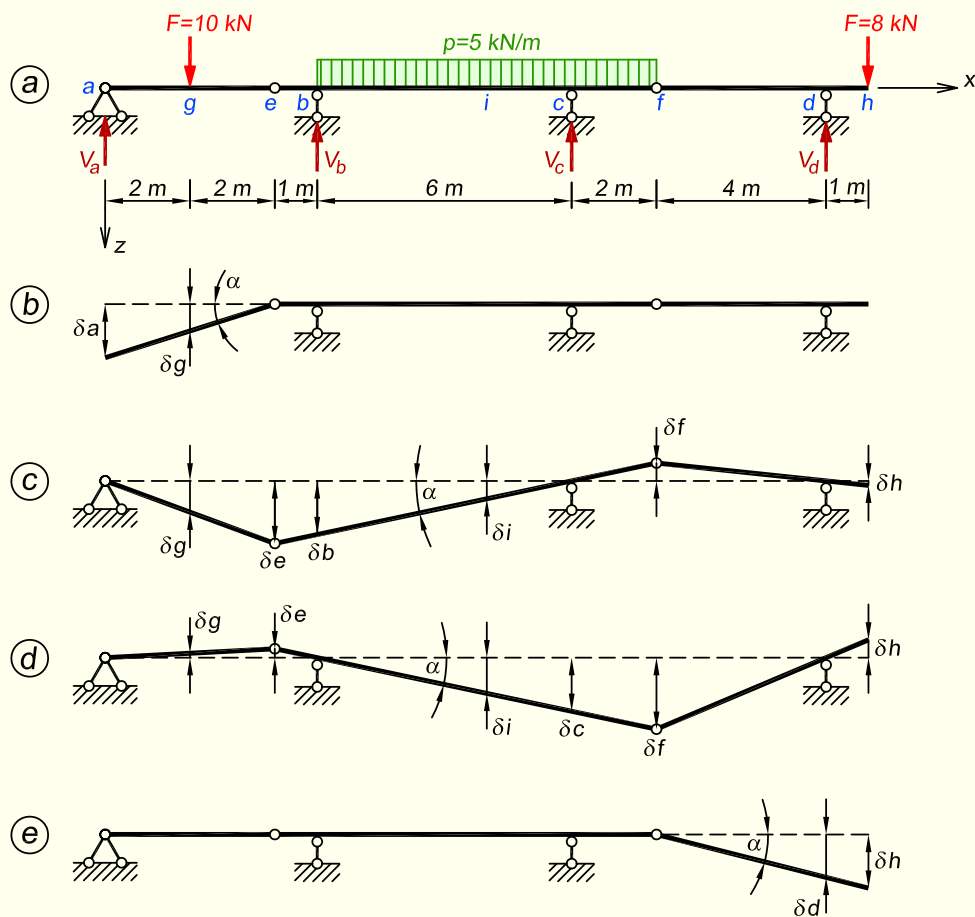
$$-V_d \cdot \delta d + 8 \cdot \delta h = 0$$

$$-V_d \cdot 4\alpha + 8 \cdot 5\alpha = 0$$

$$V_d = \frac{40 \cdot \alpha}{4\alpha} = 10 \text{ kN}$$

Kontrollime toereaktsioone jõudude tasakaalutingimusega vertikaalteljele

$$\sum Z = -5 - 19,83 - 23,167 - 10 + 10 + 5 \cdot 8 + 8 = 0$$



Joonis 6.33. Virtuaalsiirete skeemid

6.7. Liigendite asetus

Mitmesildelises staatikaga määratavas talas olenevad antud koormusest põhjustatud paindemomendid liigendite asukohast. Konstantse ristlõikega talade puhul on materjali kulu väikseim, kui suurimad positiivsed sildemomendid on arvuliselt võrdsed suurimate negatiivsete toemomentidega.

Kahe võrdse sildega tala

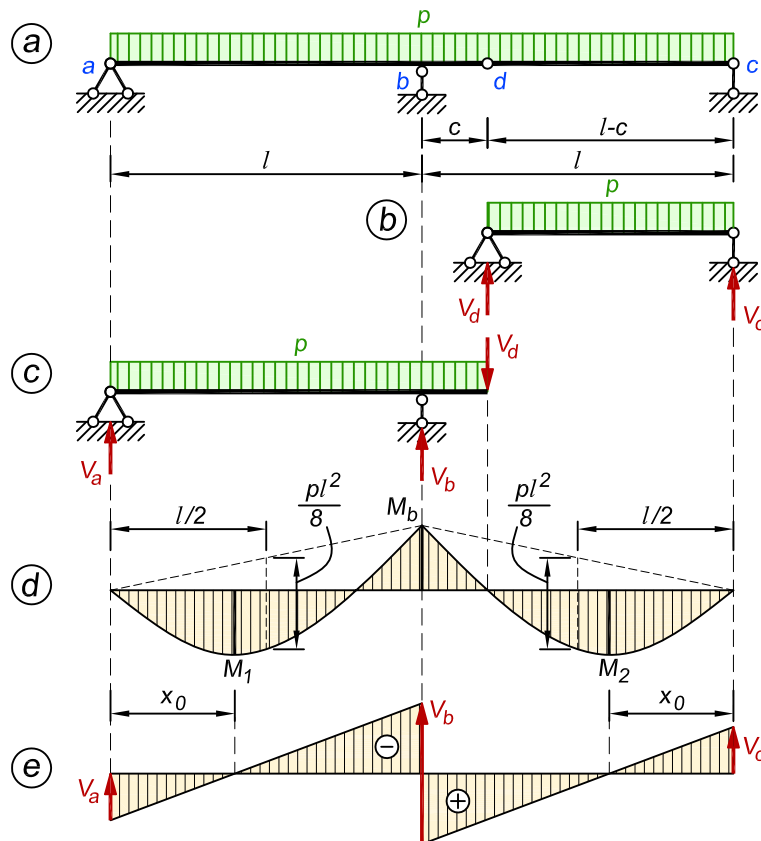
Joonisel 6.34, *a* on kujutatud kahe võrdse sildega tala, mis on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega. Liigendi *d* kauguse toest *b* leiame võrdusest

$$M_1 = -M_b \quad (6.11)$$

kus M_1 on maksimaalne sildemoment ja M_b on minimaalne toemoment.

Põhiosaks on konsooliga tala *a-d* ja lisaosaks *d-c*. Lisaosa toereaktsioonid

$$V_d = V_c = \frac{p(l-c)}{2} \quad (6.12)$$



Joonis 6.34. Liigendi asukoha leidmine kahe võrdse sildega lihttalas

Toemoment

$$M_b = -V_d c - \frac{pc^2}{2} = -\frac{p(l-c)c}{2} - \frac{pc^2}{2} = -\frac{plc}{2} = -\frac{pl^2\xi}{2} \quad (6.13)$$

kus

$$\xi = \frac{c}{l} \Rightarrow c = \xi l \quad (6.14)$$

kus c on konsooli pikkus $b-d$.

Toereaktsiooni V_a leiame tasakaalutingimusest $\sum M_b = 0$

$$\begin{aligned} -V_a l + \frac{pl^2}{2} - V_d c - \frac{pc^2}{2} &= 0 \\ V_a &= \frac{\frac{pl^2}{2} - \frac{p(l-c)c}{2} - \frac{pc^2}{2}}{l} = \frac{\frac{pl^2}{2} - \frac{plc}{2}}{l} = \frac{pl(1-\xi)}{2} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Lõikes, kus tekib maksimaalne paindemoment M_1 , võrdub põikjõud nulliga

$$Q_{x_0} = V_a - px_0 = 0 \quad (6.16)$$

millest, arvestades avaldist (6.15), leiame

$$x_0 = \frac{V_a}{p} = \frac{l(1-\xi)}{2} \quad (6.17)$$

Maksimaalne paindemoment on

$$M_1 = V_a x_0 - \frac{px_0^2}{2} = \frac{pl^2(1-\xi)^2}{4} - \frac{pl^2(1-\xi)^2}{8} = \frac{pl^2(1-\xi)^2}{8} \quad (6.18)$$

Avaldised (6.13) ja (6.18) on tingimuse (6.11) alusel arvuliselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega

$$\frac{pl^2(1-\xi)^2}{8} = \frac{pl^2\xi}{2} \quad (6.19)$$

mis ξ suhtes on ruutvõrrand

$$\xi^2 - 6\xi + 1 = 0 \quad (6.20)$$

Võrandi (6.20) üks lahend $\xi = 3 + \sqrt{8}$ ei kõlba, kuna peab olema $\xi < 1$. Järelikult kasutame teist lahendit

$$\xi = 3 - \sqrt{8} = 0,17157 \quad (6.21)$$

Kui liigend d on toest b kaugusel $c = \xi l = 0,17157l$, siis

$$M_1 = -M_b = M_2 = 0,0858pl^2 = 0,6863\frac{pl^2}{8} \quad (6.22)$$

$$V_a = V_c = 0,414pl; \quad V_b = 1,172pl \quad (6.23)$$

Vasakpoolses sildes on paindemomendi epüüri nullpunkt toest b kaugusel $\xi l = 0,17157l$.

Kolmesildeline tala. Liigendid äärmistes silletes

Joonisel 6.35 kujutatud kolmesildelise sümmeetrilise tala liigendi e kaugus toest b on arvutatav järgmise tingimuse alusel

$$-M_b = -M_c = M_2 = \frac{M_2^0}{2} = \frac{pl^2}{16} = 0,0625pl^2 \quad (6.24)$$

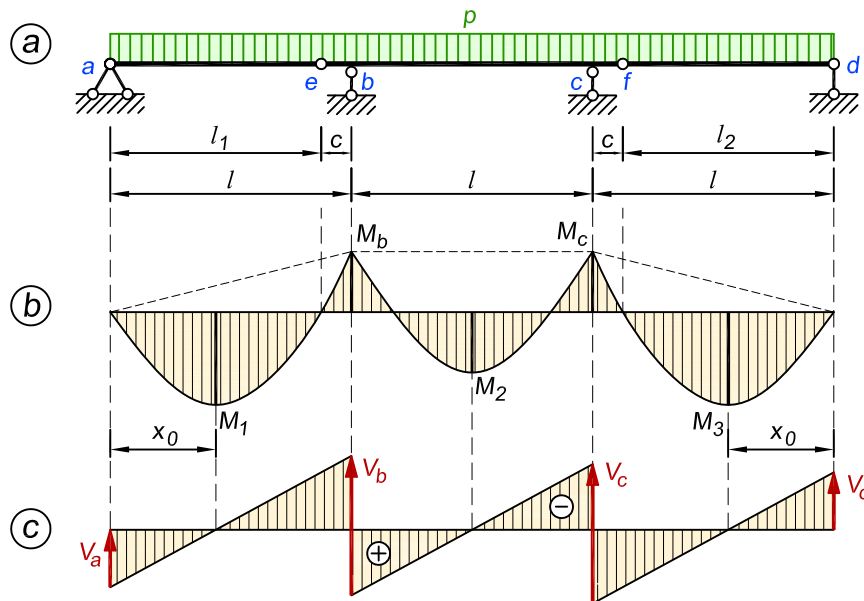
kus $M_2^0 = \frac{pl^2}{8}$ on lihttala suurim paindemoment ühtlasest jaotatud koormusest p . Tulemused on järgmised

$$c = 0,125l; \quad l_1 = 0,875l; \quad x_0 = 0,438l \quad (6.25)$$

$$M_2 = -M_b = -M_c = \frac{pl^2}{16} = 0,0625pl^2 \quad (6.26)$$

$$M_1 = M_3 = 0,0957pl^2 \quad (6.27)$$

$$V_a = V_d = 0,438pl; \quad V_b = V_c = 1,062pl \quad (6.28)$$

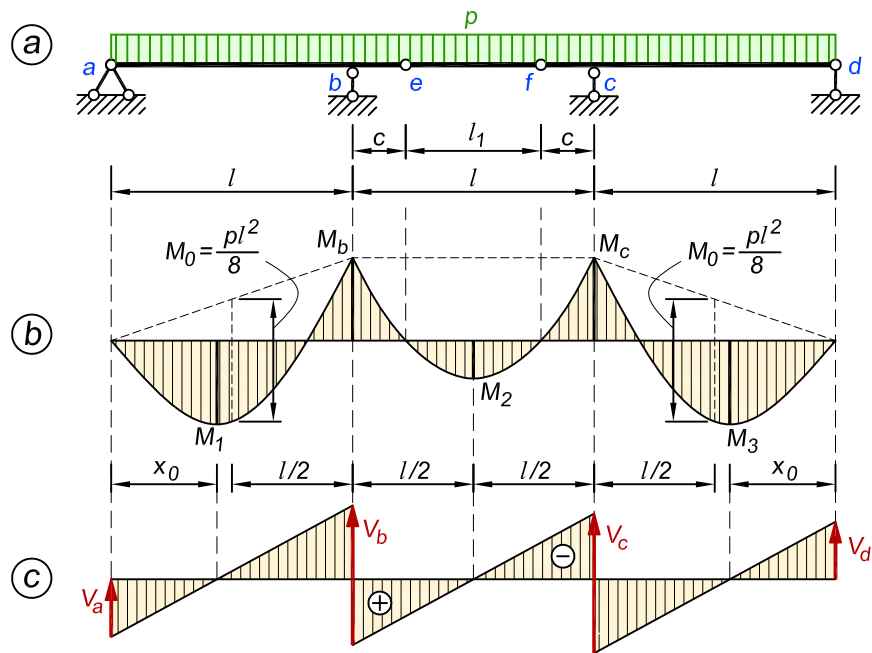


Joonis 6.35. Liigendite asukoha leidmine kolme võrdse sildega talas. Liigendid paiknevad äärmistes silletes

Kolmesildeline tala. Liigendid keskmises sildes

Joonisel 6.36 kujutatud tala konsooli $e-b$ pikkus c on arvutatav võrduse $M_1 = -M_b$ alusel

$$c = 0,220l; \quad l_1 = 0,560l; \quad x_0 = 0,414l \quad (6.29)$$



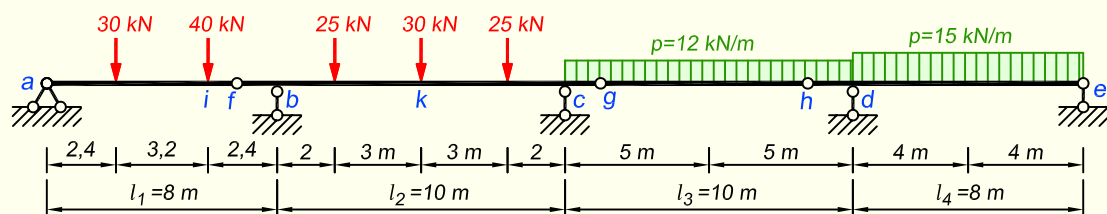
Joonis 6.36. Liigendite asukoha leidmine kolme võrdse sildega talas. Liigendid paiknevad keskmises sildes

$$M_1 = -M_b = -M_c = M_3 = 0,0858pl^2 = \frac{0,6863pl^2}{8} \quad (6.30)$$

$$M_2 = 0,0392pl^2 \quad (6.31)$$

$$V_a = V_d = 0,414pl; \quad V_b = V_c = 1,086pl \quad (6.32)$$

NÄIDE 6.10. Leida joonisel 6.37 kujutatud neljasildelises talas liigendite f , g ja h kaugused vastavalt tugedest b , c ja d , lähtudes tingimusest, et antud koormuse puhul põhiosade toemomendid võrduksid absoluutväärtuselt põhiosade suurimate avamomentidega.



Joonis 6.37. Tala arvutuskeem

LAHENDUS

Põhiosadeks on vardad $f-g$ ja $h-e$.

Alustame arvutust teisest sildest. Vastavalt lähteülesandele peavad toemomendid M_b ja M_c olema absoluutväärtuselt võrdsed maksimaalse avamomendiga M_k (joonis 6.38)

$$M_k = -M_b = -M_c$$

Kui teist sillet arvutada lihttalana, siis saame keskmises lõikes paindemomendi väärtuseks

$$M_k^0 = 125 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kuna ava- ja toemomendi absoluutväärtuste summa peab võrduma lihttala epiüüri ordinaadiga lõike k kohal, siis

$$M_k = -M_b = -M_c = \frac{M_k^0}{2} = 62,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Paindemomendi lõikes i arvutame

$$M_i = M_i^0 + M_b \frac{l_1 - b_i}{l_1} = 88,8 - 62,5 \cdot \frac{5,6}{8} = 45,05 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

kus M_i^0 on saadud, vaadates tervet esimest sillet lihttalana. Liigendi f kauguse toest b (tähistatud n_f) arvutame tingimusest

$$\frac{b_i - n_f}{M_i} = \frac{n_f}{-M_b}$$

ehk

$$n_f = \frac{62,5 \cdot (2,4 - n_f)}{45,05}$$

Konsooli pikkuse (ehk liigendi f kauguse toest b) saame

$$n_f = 1,395 \text{ m}$$

Edasi liigume neljandasse sildesse, kus tingimusest

$$M_{4,\max} = -M_d$$

arvutame neljanda silde suurima avamomendi $M_{4,\max}$ ja toemomendi M_d .

Lõikes, kus paindemoment on maksimaalne, võrdub põikjõud nulliga

$$Q_0 = -V_e + ps_4 = 0$$

kus s_4 on paindemomendi maksimumi kaugus silde parempoolsest toest. Saadud avaldisest leiame silde parempoolse toereaktsiooni

$$V_e = ps_4$$

Suurim avamoment on

$$M_{4,\max} = V_e s_4 - \frac{ps_4^2}{2} = \frac{ps_4^2}{2}$$

ja toemoment on

$$M_d = V_e l_4 - \frac{pl_4^2}{2} = p \left(l_4 s_4 - \frac{l_4^2}{2} \right)$$

Arvestades tingimust $M_{4,\max} = -M_d$ ning kahte viimatileitud avaldist, saame

$$\frac{ps_4^2}{2} = -p \left(l_4 s_4 - \frac{l_4^2}{2} \right)$$

mille läbijagamisel intensiivsusega p ja korrutamisel kahega, jõuame ruutvõrrandini

$$s_4^2 + 2l_4 s_4 - l_4^2 = 0$$

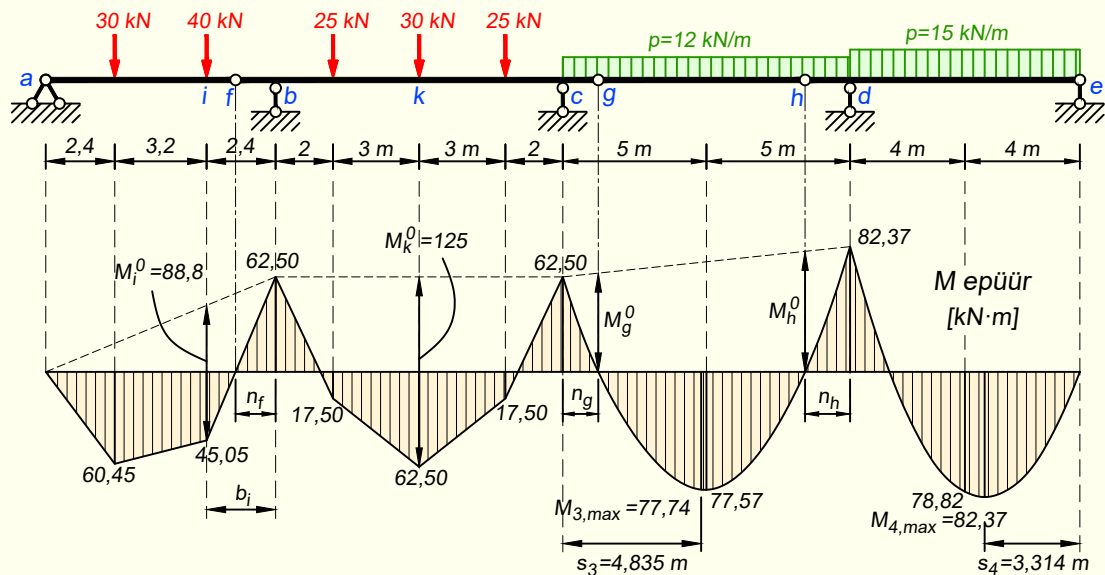
Lõige, milles põikjõud võrdub nulliga, on toest e kaugusel

$$s_4 = 0,414l_4 = 0,414 \cdot 8 = 3,314 \text{ m}$$

kuna ruutvõrrandi teine lahend $s_4 = -2,414l_4$ ei rahulda ülesande tingimusi.

Suurimad paindemomendid on

$$M_{4,\max} = -M_d = \frac{ps_4^2}{2} = \frac{15 \cdot 3,314^2}{2} = 82,37 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 6.38. Paindemomendi epüür

Tingimusest, et liigendis võrdub paindemoment nulliga, arvutame kolmanda silde liigendite g ja h asukohad

$$M_{g,h} = M_{g,h}^0 + M_c + \frac{M_d - M_c}{l_3} \cdot x_{g,h} = 0$$

kus $x_{g,h}$ on liigendite g ja h kaugused silde vasakust toest ja $M_{g,h}^0$ on paindemomendid lõigete g ja h kohal, vaadeldes kolmandat sillet terves pikkuses ühe lihttalana

$$M_{g,h}^0 = 12 \cdot 5 \cdot x_{g,h} - \frac{12x_{g,h}^2}{2} = 60x_{g,h} - 6x_{g,h}^2$$

Asetame võrrandisse momentide ja silde arvulised suurused ning saame

$$M_{g,h} = 60x_{g,h} - 6x_{g,h}^2 - 62,5 + \frac{-82,37 + 62,5}{10} \cdot x_{g,h} = 0$$

mis teisendatuna annab meile ruutvõrrandi

$$-6x_{g,h}^2 + 58,013x_{g,h} - 62,5 = 0$$

Võrrandi lahenditeks on

$$x_g = 1,235 \text{ m} = n_g$$

$$x_h = 8,434 \text{ m} = l_3 - n_h$$

Neist esimene lahend on liigendi g kaugus toest c . Teisest lahendist saame ka liigendi h kauguse toest d

$$n_h = l_3 - x_h = 10 - 8,434 = 1,566 \text{ m}$$

Joonisel 6.38 on paindemomendi epüüri korrektsuse huvides ära näidatud ka need ordinaadid, mida siin ülesandes liigendite asukohtade määramisel vaja ei läinud.

Peatükk 7

KOLME LIIGENDIGA KAAR JA RAAM

7.1. Sissejuhatus

7.1.1. Kaar

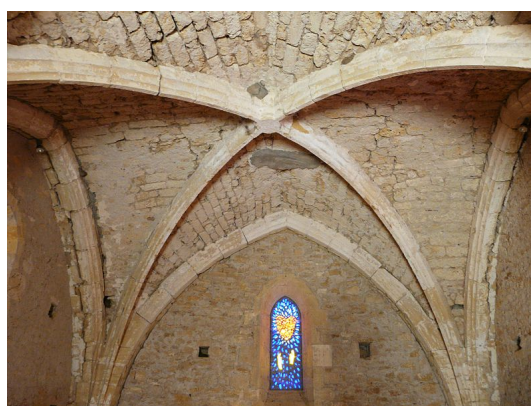
Kaared kuuluvad vanimate ehituskonstruktsioonide hulka, kuna võimaldasid sillata suuri avasid vanadel aegadel, kui ehitati peamiselt tõmbele mittetöötavatest materjalidest, nagu kivi-plokid ja tellised. Kivist laotud kaari on kasutatud juba tuhandeid aastaid (foto 7.1).

Tänapäeval on kaar levinud konstruktsioonelement sildade ja suureavaliste hoonete ehitamisel (foto 7.2). Vahel asendatakse täisseinaline kaar sõrestikkaarega, nagu on näha fotol 7.2, *b* kujutatud katusekonstruktsiooni puhul.

Kaare efektse välimuse tõttu on seda kasutatud aegade algusest peale laialdaselt ka monumentide püstitamisel (foto 7.3). Fotol 7.3, *b* kujutatud Gateway Arch USA-s on oma 192 m



(a) Pont du Gard Prantsusmaal



(b) Võlvlagi keskaegses kloostris

Foto 7.1. Kaarkonstruktsioonid vanadel aegadel (fotod: Wikimedia Commons)

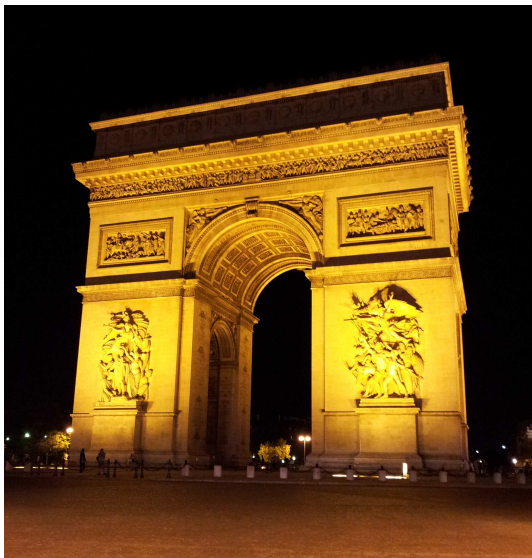


(a) Hulli raudteejaam Inglismaal



(b) Victoria raudteejaam Londonis

Foto 7.2. Kaarkonstruktsioonid suurte avade sildamisel (fotod: Wikimedia Commons)



(a) Pariisi triumfikaar



(b) Gateway Arch St. Louisis USAs

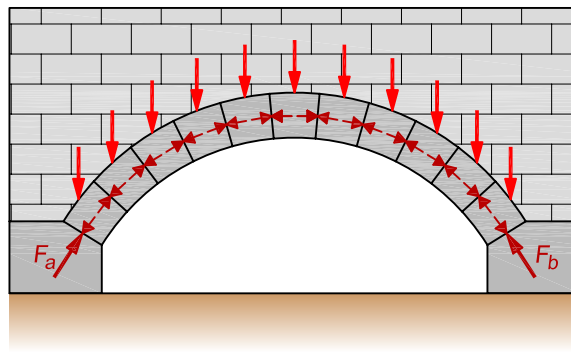
Foto 7.3. Kaarkonstruktsioonid monumentidena (fotod: Wikimedia Commons)

kõrgusega maailma kõrgeim kaarkonstruktsioon.

Kaared on oma tasapinnas väga jäigad ja lisaks sellele ka vastupidavad tugevde nihkumisele, mis on ka põhjuseks, miks aastatuhandete tagused kaarkonstruktsioonid on suurepäraselt tänapäevani säilinud.

Kaar on konstruktsioon, mis võtab vastu temale mõjuva koormuse ning muudab selle enda pikiteljesuunalisteks survejõududeks (joonis 7.1). Kaare üksikud elemendid on seetõttu allutatud survejõududele. Mainitud survejõud kantakse edasi kummalegi toele, kus tekivad kaldu suunatud toereaktsioonid, mille saame jagada vertikaalseteks ja horisontaalseteks komponentideks.

Kaare projekteerimisel on mõistlik valida kaare kuju selliselt, et konstruktsiooni omakaa-



Joonis 7.1. Kivist kaare töötamise skeem

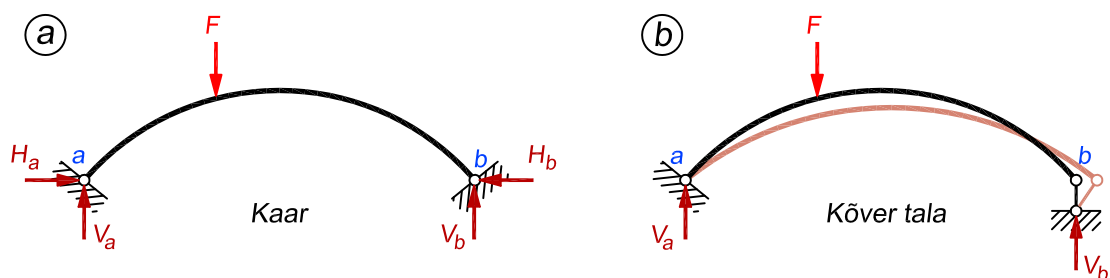
lust tekivadki kaares ainult survejõud. Igasugused muutuvad koormused (näiteks tuul, lumi, liikluskoormus jne) aga võivad kaares põhjustada ka paindemomente.

Edaspidi näitame, et kaares tekkivad paindemomendid ja põikjõud on oluliselt väiksemad kui kaarega võrdsel silde ja koormusega lihttalas. Seetõttu on kaarkonstruktsioon suuremate sillete puhul ökonomisem kui tala. Väiksemate sillete puhul on aga kaar talaga võrreldes vähemsoovitav, kuna tema konstruktsioon on keerukam.

Kui kaar projekteerida varraskonstruktsioonina (sel juhul on materjaliks raudbetoon, teras või puit), siis võime seda iseloomustada järgmiselt.

Kaareks nimetatakse kahele toele toetuvat ühest või mitmest surutud kõverast vardast moodustatud konstruktsiooni, milles vertikaalne koormus põhjustab nii vertikaalseid kui ka horisontaalseid toereaktsioone.

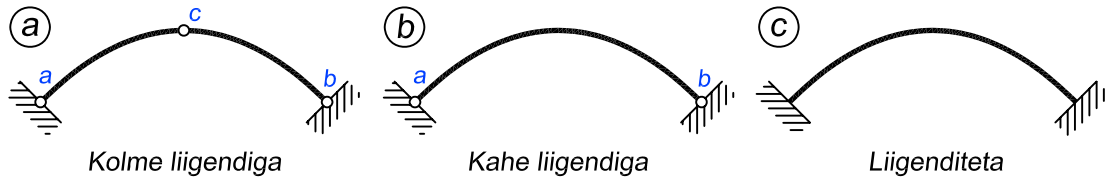
Seetõttu eristab kaart talast mitte ainult kuju, vaid ka toereaktsioonide iseloom. Tuletame meelde, et talas tekivad vertikaalsest koormusest ainult vertikaalsed toereaktsioonid. Selgitame nende kahe arvutuskeemi erinevust ka joonise abil. Joonisel 7.2, a ja b on kujutatud vastavalt kaare ja kõvera tala arvutuskeemid. Kõverale talale mõjuv vertikaalne koormus tekitab ainult vertikaalseid toereaktsioone (joonis 7.2, b), kuid põhjustab liigendi b horisontaalse siirde. Selle vältimiseks lisame toele b horisontaalse toesideme, mis teeb toe b liikumatuks ja nii saame kaare arvutuskeemi (joonis 7.2, a).



Joonis 7.2. Kaare ja kõvera tala arvutuskeemid

Kaare tüübid

Liigendite arvu järgi jaotatakse kaared järgmiselt: 1) kolme liigendiga kaar (joonis 7.3, a); 2) kahe liigendiga kaar (joonis 7.3, b) ja 3) liigenditeta kaar (joonis 7.3, c). Neist kolme liigendiga kaar on staatikaga määratav, kaks ülejäänut on staatikaga määramatud.



Joonis 7.3. Kaare tüübid

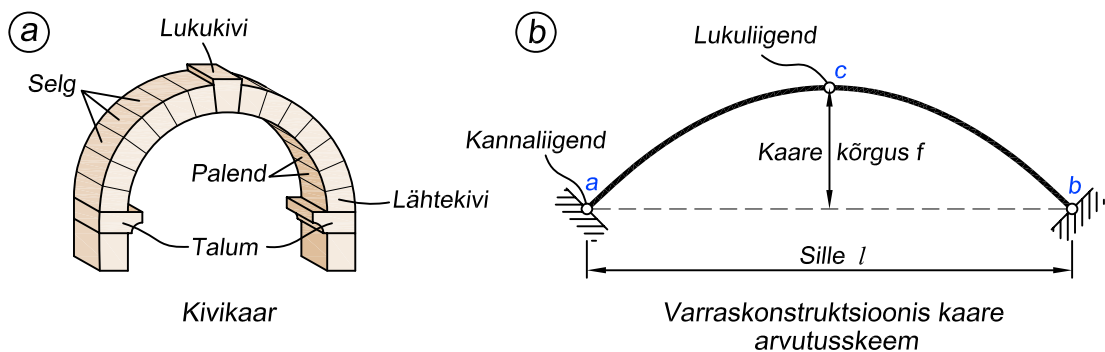
Raudbetoonkaared on üldjuhul liigenditeta. Puitkaared tehakse tavaliselt kas kahe või kolme liigendiga. Teraskaared võivad olla nii liigenditega (lühemate sillete puhul) kui ka ilma liigenditeta (pikemate sillete puhul).

Kaare elemendid

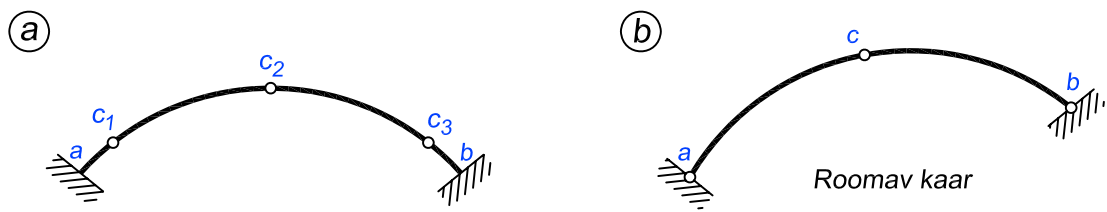
Kivist kaared laotakse kiiltelistest või kiilukujulistest kaarekividest (joonis 7.4, a). Kaare kummagi poole alumises servas (nimetatakse kaare lähtetasandiks) paiknevad lähtekivid, kaare ülemises punktis aga lukukivi, mis ühendab mõlemat kaare poolt. Kaare alumist pinda nimetatakse palendiks ja ülemist pinda seljaks. Tihti paikneb lähtekivi ja kaart toetava konstruktsiooni vahel profileeritud kivi, mida nimetatakse talumiks.

Kolme liigendiga kaare toeliigendeid a ja b nimetatakse *kannaliigenditeks* ja keskmist liigendit c *lukuliigendiks* (joonis 7.4, b). Lukuliigendi vertikaalset kaugust toeliigendeid ühendavast sirgest nimetatakse *kaare kõrguseks* f . Kaare geomeetriselised põhikarakteristikud on kõrgus f ja sille l . Kõrguse ja silde suhet f/l nimetatakse *tõusuks*. Samuti on oluline kaare telje kuju, milleks võib olla ringi kaar, ruutparabool jne.

Tõusu järgi jaotatakse kaared: 1) *lamedad kaared*, millel $\frac{f}{l} = \frac{1}{10} \dots \frac{1}{5}$; 2) *normaalsed kaared*, millel $\frac{f}{l} = \frac{1}{5} \dots \frac{1}{3}$ ja 3) *kõrged kaared*, millel $\frac{f}{l} > \frac{1}{3}$.



Joonis 7.4. Kaare elementide nimetused

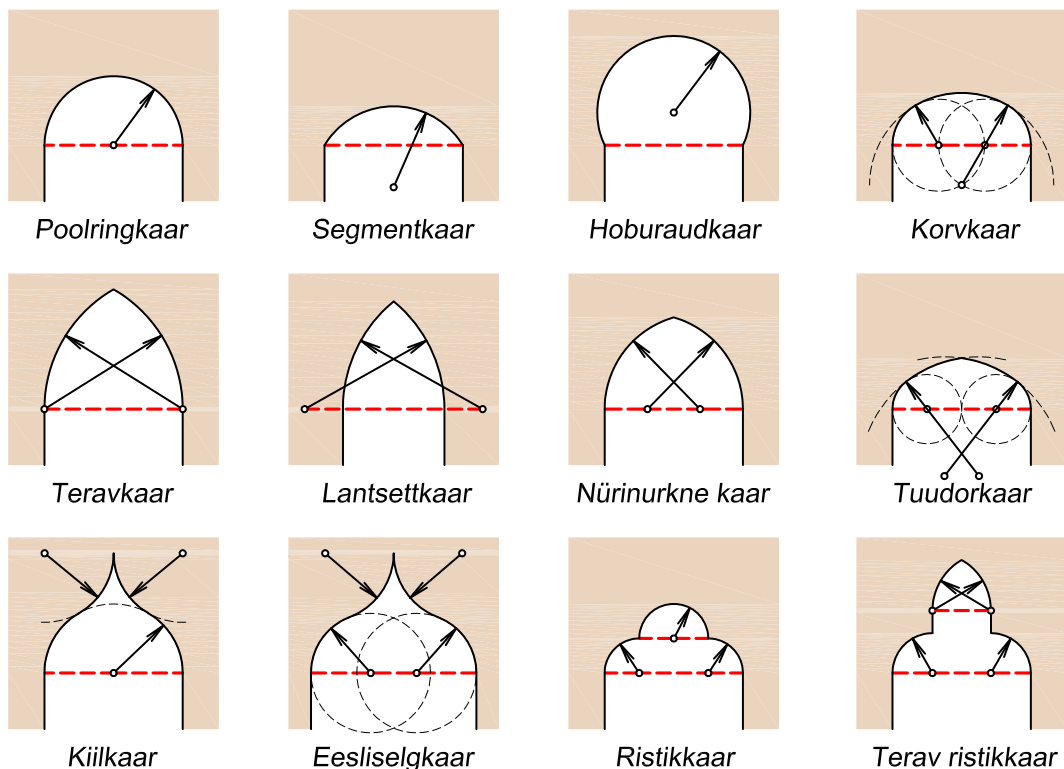


Joonis 7.5. Kõrgemale nihutatud toeliigenditega kaar ja roomav kaar

Mõnikord on kannaliigendid nihutatud silde keskkoha poole ja asetsevad siis konsoolidel (joonis 7.5, a). Tavaliselt asuvad kannaliigendid *a* ja *b* samal kõrgusel. Mõnel juhul on toed erinevatel kõrgustel (joonis 7.5, b); sellist kaart nimetatakse *roomavaks*.

Ajaloolised kaare kujud

Kivist kaari on ajaloo jooksul ehitatud väga paljude erinevate kujudega ja kõiki neid siin üles lugeda ei saa. Joonisel 7.6 on esitatud enamlevinud variandid [14], [32]. Kõigi nende konstruktsioonide ühiseks tunnuseks on see, et nende moodustamiseks on kasutatud ringjoont. Erinevad nad aga selle poolest, mitut ringjoont on kaares kasutatud ja kus asuvad nende ringide tsentrid. Punase katkendjoonega on joonisel näidatud kaare lähtetasand.



Joonis 7.6. Erineva kujuga kivist kaared

Ühe tsentriga kaare näideteks on poolringkaar, segmentkaar ja hoburaudkaar. Nende erinevus seisneb selles, kas ringi kese paikneb kaare lähtetasandil või sellest all- või ülalpool. Poolringkaar on romaani stiili tunnuseks ja uuesti võeti see kasutusele hiljem renessansis. Hoburaudkaar on iseloomulik islami arhitektuurile.

Kahe tsentriga on teravkaar, lantsettkaar ja nürinurkne kaar. Kõigil neil paiknevad tsentrid kaare lähtetasandil, aga võivad olla nii talumil kui ka sellest väljas- või seespool. Teravkaar on gooti stiili põhitunnus, lantsettkaar kasutati inglise varagootikas.

Kolme või ka enama tsentriga on korvkaar, mis oli kasutusel barokkarhitektuuris. Korvkaar võib ühtlasi nimetada ka lamedaks ümarkaareks.

Nelja tsentriga kaareks on tuudorkaar, mis on iseloomulik inglise hilisgootikale. Tuudorkaar võib nimetada ka lamedaks teravkaareks.

Kolme või nelja tsentriga on kiilkaar ja eesliselgkaar, millest viimatimainitu on kiilkaare laiendatud variant. Eesliselgkaar kasutati hilisgootikas. Samuti kuuluvad kolme või nelja tsentriga kaarte hulka ristikkaar ja teravatipuline ristikkaar. Ristikkaare moodustavad kolm ümarkaart, mis kujutavad ristikehinaalehte. Neist keskmine võib olla ka teravatipuline. Ristikkaar on iseloomulik hilisromantikale ja varagootikale.

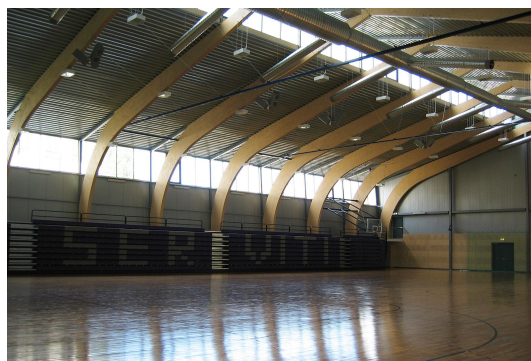
7.1.2. Raam

Kolme liigendiga raame kasutatakse peamiselt spordihallide, tööstus- ja laohoonete konstruktsioonidena.

Fotol 7.4 on toodud kahe spordisaali liimpuidust valmistatud raamkonstruktsioonid. Fotol 7.4, a kujutatud Kuressaare tennisehalli raamide postid ja riivid on eraldi elementidest, mis on nurgasõlmes paindejärgalt ühendatud, nii et ülemised nurgasõlmed loetakse arvutuses jäikadeks. Vahel tehakse ülemised nurgasõlmed kumerad, nagu on näha fotol 7.4, b Mesikäpa võimla raamide puhul. Sellisel juhul moodustavad postid ja riivid ühe elemendi. Skeemina on see raam kujutatud joonisel 7.8, b.

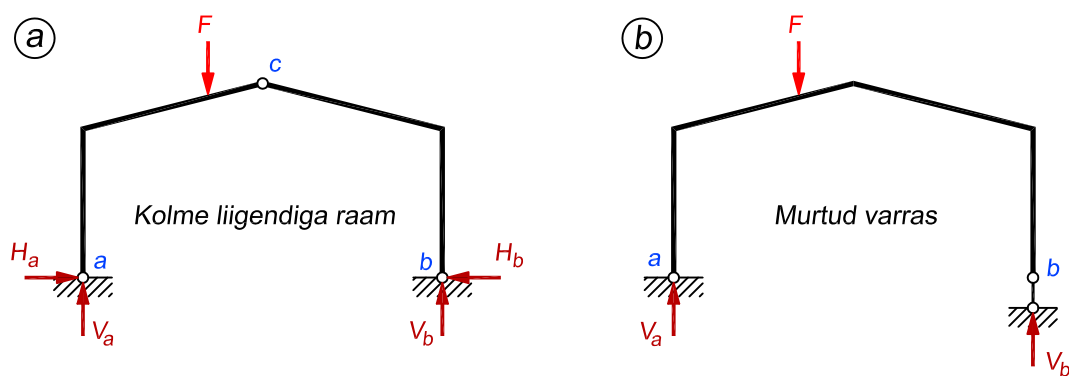


(a) Kuressaare tennisehall



(b) Põlva Mesikäpa võimla

Foto 7.4. Kolme liigendiga raamid (fotod: Arcwood)



Joonis 7.7. Kolme liigendiga raami ja murtud varda arvutuskeemid

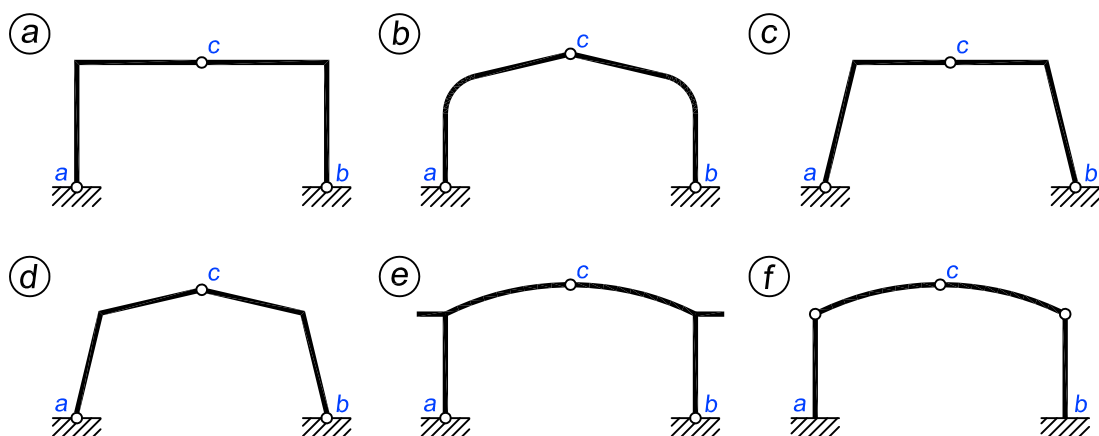
Raamiks nimetatakse sirgetest või murtud teljega varrastest koosnevat konstruktsiooni, milles vertikaalne koormus põhjustab vertikaalseid ja horisontaalseid toereaktsioone (joonis 7.7, a).

Kui vertikaalsest koormusest tekivad ainult vertikaalsed reaktsioonid, siis on tegemist murtud vardaga (joonis 7.7, b).

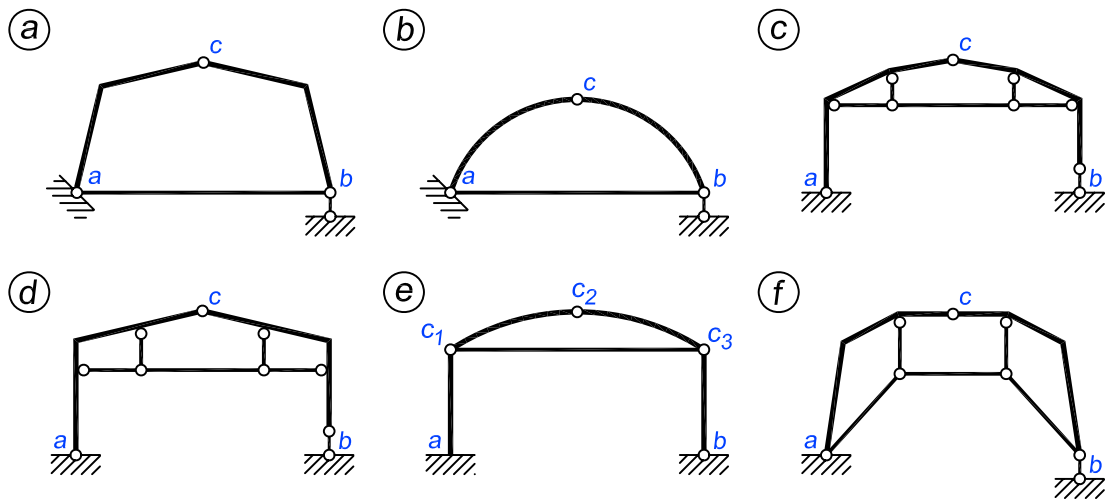
Joonisel 7.8 on esitatud mitmesuguse kujuga kolme liigendiga raame. Raami kuju oleneb peamiselt konstruktsiooni otstarbest. Sageli ehitatakse konstruktsioone, milles osa vardaid on kõverad ja osa sirged (joonis 7.8, e ja f).

Vertikaalse koormuse puhul horisontaalse toereaktsiooni vältimiseks kasutatakse sirget või murtud kujuga tõmbi (joonis 7.9). Tõmbiga kolme liigendiga kaar ja raam on staatikaga määratavad. Üks tugi on liikumatu ja teine on liikuv silindriline tugi. Tõmbi asetus ja kuju olenevad kaare või raami kujust ning konstruktsiooni otstarbest.

Tõmbi võib kaare ja raami puhul vaja minna näiteks siis, kui horisontaalset reaktsiooni ei ole võimalik juhtida pinnasesse.



Joonis 7.8. Mitmesuguse kujuga kolme liigendiga raame



Joonis 7.9. Tõmbiga kaare ja raami skeemid

7.2. Kaare telgjoone võrrandid

Kaare telgjoone kujul on väga palju erinevaid variante ja siinkohal esitame võrrandid kahele enamkasutatavale – ruutparabooli- ja ringikujulisele kaarele.

7.2.1. Ruutparaboolikujulise teljega kaar

Kui kaare (joonis 7.10) telgjooneks on ruutparabool, arvutame selle ordinaadid valemiga

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2} \quad (7.1)$$

või

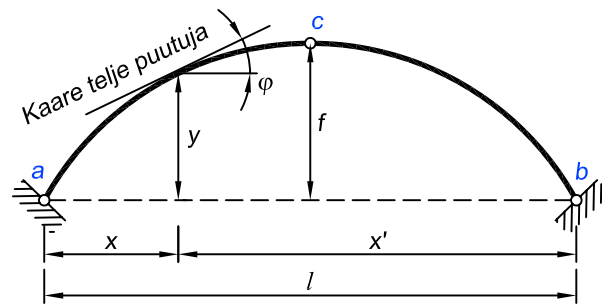
$$y = 4f\xi(1-\xi) = 4f\xi\xi' \quad (7.2)$$

kus

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \xi' = \frac{l-x}{l} = \frac{x'}{l} \quad (7.3)$$

Kaare telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse saame valemitega

$$\sin \varphi = \frac{1-2\xi}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2 + (1-2\xi)^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2 (1-2\xi)^2}} \quad (7.4)$$



Joonis 7.10. Kaare telgjoon

7.2.2. Ringjoonekujulise teljega kaar

Kui kaare telgjooneks on ringi kaar, arvutame selle ordinaadid valemiga

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - (R - f) \quad (7.5)$$

kus R on kaare telje kõverusraadius ja selle leiame valemiga

$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} \quad (7.6)$$

Kaare telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse arvutame valemitega

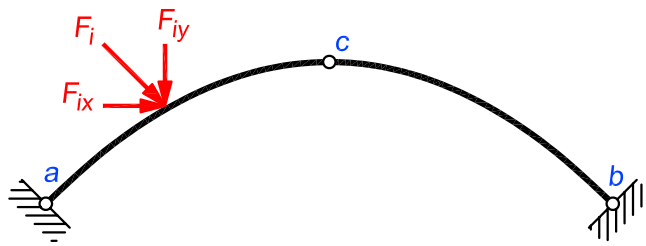
$$\sin \varphi = \frac{l}{R} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right); \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)^2} \quad (7.7)$$

7.3. Toereaktsioonid vertikaalsest koormusest

Kolme liigendiga kaare arvutamisel lahutame suvalises suunas mõjuva koormuse tavaliselt vertikaalseks ja horisontaalseks koormuseks (joonis 7.11) ning lahendame need eraldi. Järgnevalt käsitleme ainult vertikaalset koormust.

Kolme liigendiga kaare toed on liikumatud liigendtoed, mis võimaldavad ainult toeristlõigete pööret. Järelikult on kolme liigendiga kaarel neli tundmatut toereaktsiooni komponenti: kummagi toe juures vertikaalne ja horisontaalne (joonis 7.12, a). Need neli komponenti arvutame kogu kaare kohta koostatud kolmest tasakaaluvõrrandist ja ühest lukuliigendi c suhtes kirjutatud tasakaalutingimusest: liigendis c on moment null, s.t kõigi ühel pool liigendit c kaarele (osale $a-c$ või $c-b$) rakendatud jõudude momentide summa liigendi c suhtes võrdub nulliga.

Toereaktsioonide arvutus sõltub sellest, kas kaare toed asetsevad samal kõrgusel või mitte (roomav kaar). Järgnevalt vaatleme mõlemaid variante.

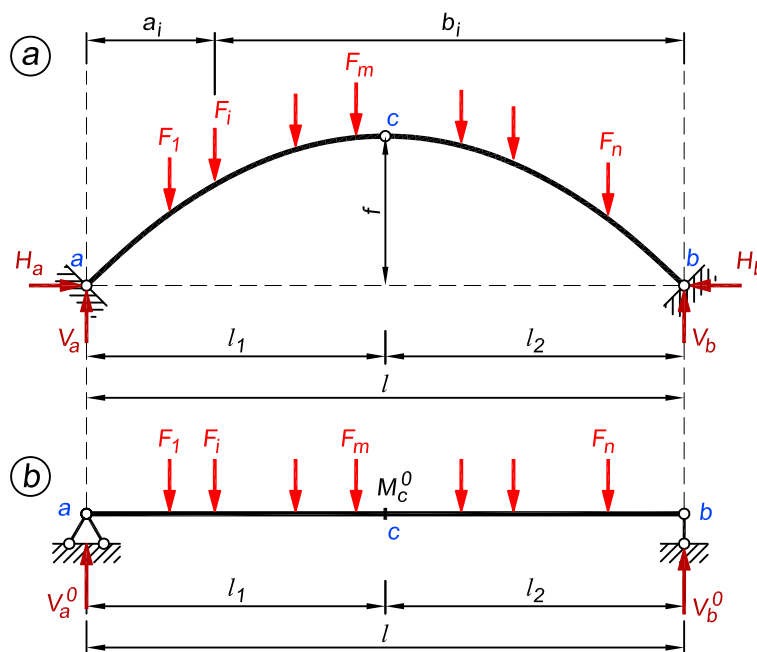


Joonis 7.11. Koormuse lahutamine komponentideks

7.3.1. Toed samal kõrgusel

Kui toeliigendid a ja b on samal kõrgusel (joonis 7.12, a), siis on toereaktsioonide arvutamine oluliselt lihtsam kui roomava kaare puhul. Tähistame toereaktsioonide vertikaalsed komponendid V_a ja V_b ning horisontaalsed komponendid H_a ja H_b . Toeliigendite b ja a suhtes kirjutatud momentide tasakaalu tingimustest

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad -V_a l + \sum_{i=1}^n F_i b_i &= 0 \\ \sum M_a = 0; \quad V_b l - \sum_{i=1}^n F_i a_i &= 0 \end{aligned} \tag{7.8}$$



Joonis 7.12. Kaare toereaktsioonide leidmine samal kõrgusel asetsevate tugede korral

arvutame toereaktsioonide komponendid

$$V_a = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i b_i; \quad V_b = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i a_i \quad (7.9)$$

kus a_i ja b_i on toeliigendite a ja b kaugused jõu F_i sihist ning n on kaarele rakendatud jõudude arv. Toereaktsioonide komponendid V_a ja V_b on sama koormusega ja kaarega võrdse sildega lihttala toereaktsioonidega (joonis 7.12, b) ühesuurused

$$V_a = V_a^0; \quad V_b = V_b^0 \quad (7.10)$$

Pärast vertikaalsete reaktsioonide arvutamist saame liikuda horisontaalsete reaktsioonide juurde. Tasakaalutingimus $\sum X = 0$ annab meile

$$H_a = H_b = H \quad (7.11)$$

Ülalt alla suunatud koormuse korral on mõlemad horisontaalsed reaktsioonid suunatud kaare silde poole. Nüüd vaatleme mõlemat kaare poolt eraldi ja leiame vastava poole horisontaalse reaktsiooni. Vaatame esmalt kaare vasakut poolt ja kirjutame lukuliigendi suhtes tasakaalutingimuse

$$\sum M_c^v = 0; \quad -V_a l_1 + \sum_{i=1}^m F_i (l_1 - a_i) + H_a f = 0 \quad (7.12)$$

millest

$$H_a = \frac{V_a l_1 - \sum_{i=1}^m F_i (l_1 - a_i)}{f} \quad (7.13)$$

kus f on kaare kõrgus, l_1 on lukuliigendi c kaugus toeliigendi a vertikaalist ning m on kaarele mõjuvate jõudude arv vasakul pool liigendit c .

Avaldise (7.13) võime lühemalt kokku võtta järgmiselt

$$H = \frac{M_c^0}{f} \quad (7.14)$$

kus M_c^0 on samast koormusest kaarega võrdse sildega lihttala lõikes c tekkiv paindemoment (joonis 7.12, b)

$$M_c^0 = V_a l_1 - \sum_{i=1}^m F_i (l_1 - a_i) \quad (7.15)$$

või kasutades tala toereaktsiooni

$$M_c^0 = V_a^0 l_1 - \sum_{i=1}^m F_i (l_1 - a_i) \quad (7.16)$$

Toereaktsiooni H_b saamiseks teeme läbi analoogse arvutuse kaare parema poolega ja horisontaalse koormuse puudumisel peame vastavalt avaldisele (7.11) saama sama tulemuse nagu kaare vasaku poolega.

Valemist (7.14) tuleb välja inseneri jaoks väga oluline järeldus: **mida kõrgem on kaar, seda väiksemad on tema horisontaalsed reaktsioonid, ja vastupidi, mida madalam on kaar, seda suuremaks muutuvad horisontaalsed reaktsioonid.**

7.3.2. Toed erinevatel kõrgustel

Roomaval kaarel saame toereaktsioone lahutada komponentideks kahel viisil. Ühe variandi korral jagame toereaktsioonid vertikaalseteks ja horisontaalseteks komponentideks. Teise variandi korral lahutame toereaktsioonid vertikaalseteks ning toeliigendeid a ja b ühendava sirge sihilisteks komponentideks. Järgnevalt vaatame mõlemaid variante.

Variant 1

Lihtsam on arvutust teha siis, kui lahutame toereaktsioonid vertikaalseteks ja horisontaalseteks komponentideks (joonis 7.13). Vertikaalseid komponente tähistame V_a ja V_b ning horisontaalseid H_a ja H_b . Kirjutame esmalt momentide tasakaalu tingimuse parempoolse toeliigendi b suhtes, et avaldada vasakpoolne vertikaalne reaktsioon

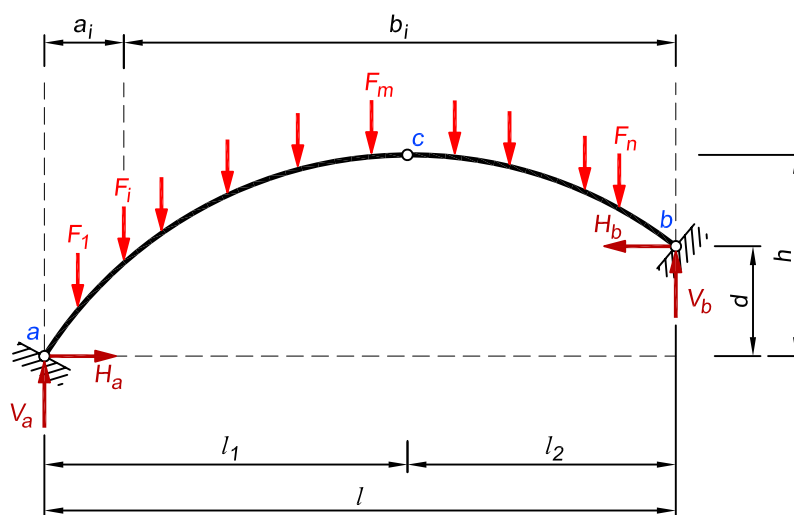
$$\sum M_b = 0; \quad -V_a l + H_a d + \sum_{i=1}^n F_i b_i = 0 \quad (7.17)$$

millest

$$V_a = \frac{1}{l} \left(H_a d + \sum_{i=1}^n F_i b_i \right) \quad (7.18)$$

Saadud avaldise jääb tundmatuna horisontaalne reaktsioon, mille leiame lukuliigendi c suhtes kirjutatud paindemomendi tingimusest $M_c = 0$

$$\sum M_c^y = 0; \quad H_a h - V_a l_1 + \sum_{i=1}^m F_i (l_1 - a_i) = 0 \quad (7.19)$$



Joonis 7.13. Toereaktsioonid roomaval kaarel, lahutades reaktsioonid vertikaalseteks ja horisontaalseteks komponentideks

kuhu lisame vasakpoolse vertikaalse reaktsiooni avaldise (7.18) ja saame

$$H_a h - \frac{1}{l} \left(H_a d + \sum_{i=1}^n F_i b_i \right) l_1 + \sum_{i=1}^m F_i (l_1 - a_i) = 0 \quad (7.20)$$

Kuna tuletatud avaldises on H_a ainukeseks tundmatuks, saame selle arvutada. Asetades horisontaalse reaktsiooni seejärel avaldise (7.18), saame kätte ka vertikaalse reaktsiooni.

Kaare parempoolsed reaktsioonid arvutame sarnase lahenduskäigu abil.

Variant 2

Roomava kaare puhul võib toereaktsioonid lahutada vertikaalseteks ja toeliigendeid a ning b ühendava sirge sihilisteks komponentideks (joonis 7.14, a). Vertikaalsed komponendid tähistame V'_a ja V'_b ning toeliigendeid ühendava sirge sihilised komponendid H'_a ja H'_b . Toeliigendite b ja a suhtes kirjutatud momentide tasakaalu tingimustest

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad -V'_a l + \sum_{i=1}^n F_i b_i &= 0 \\ \sum M_a = 0; \quad V'_b l + \sum_{i=1}^n F_i a_i &= 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

saame toereaktsioonide komponendid

$$V'_a = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i b_i; \quad V'_b = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i a_i \quad (7.22)$$

kus a_i ja b_i on toeliigendite a ja b kaugused jõu F_i sihist. Toereaktsioonide komponendid V'_a ja V'_b on sama koormusega ja kaarega võrdse sildega lihttala (joonis 7.14, b) toereaktsioonidega ühesuurused

$$V'_a = V_a^0; \quad V'_b = V_b^0 \quad (7.23)$$

Jõudude tasakaalutingimusest horisontaalteljele

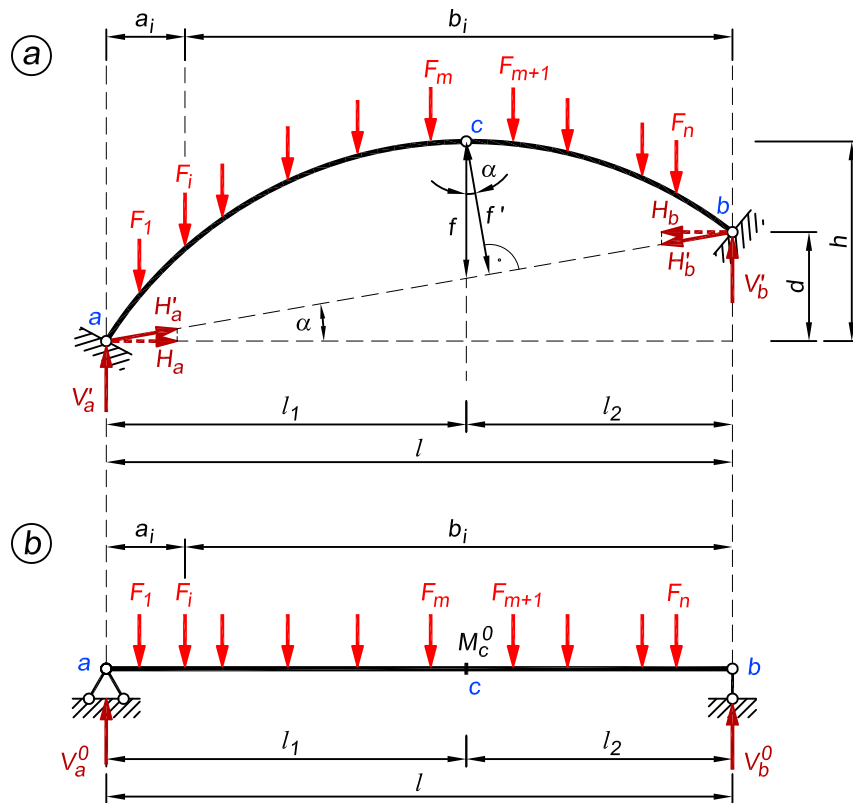
$$\sum X = 0; \quad H'_a \cos \alpha - H'_b \cos \alpha = 0 \quad (7.24)$$

leiame, et

$$H'_a = H'_b = H' \quad (7.25)$$

Vertikaalsest koormusest põhjustatud, toeliigendeid a ja b ühendava sirge sihilised toereaktsioonide komponendid on võrdsed ning vastassuunalised. Ülalt alla mõjuva koormuse puhul on mõlemad suunatud kaare silde poole. Toereaktsiooni komponendi H' leiame luku-liigendi c suhtes kirjutatud paindemomendi tingimusest $\sum M_c = 0$

$$-V'_a l_1 + \sum_{i=1}^m F_i (l_1 - a_i) + H' f' = 0 \quad (7.26)$$



Joonis 7.14. Toereaktsioonid roomaval kaarel, lahutades reaktsioonid vertikaalseteks ning toeliigendeid a ja b ühendava sirge sihilisteks komponentideks

ehk

$$-M_c^0 + H' f' = 0 \quad (7.27)$$

kus f' ja l_1 on liigendi c kaugused vastavalt sirgest $a-b$ ja toeliigendi a vertikaalset, m on kaarele mõjuvate jõudude arv vasakul pool liigendit c ning M_c^0 on samast koormusest kaarega võrdse sildega lihttala lõikes c tekkinud paindemoment (joonis 7.14, b)

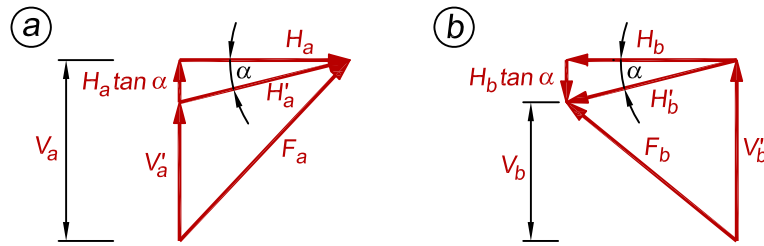
$$M_c^0 = V_a' l_1 - \sum_{i=1}^m F_i (l_1 - a_i) \quad (7.28)$$

või kaare parempoolse osaga

$$M_{c,par}^0 = V_b^0 l_2 - \sum_{i=m+1}^n F_i (l_2 - b_i) \quad (7.29)$$

Vertikaalse koormuse puhul $M_{c,par}^0 = M_{c,vas}^0 = M_c^0$. Võrrandist (7.27) avaldame

$$H' = \frac{M_c^0}{f'} \quad (7.30)$$



Joonis 7.15. Toereaktsioonide komponendid

Kaare toereaktsioonid F_a ja F_b lahutame tavaliselt vertikaalseks ja horisontaalseks komponendiks (joonis 7.15). Vertikaalse koormuse puhul on horisontaalsed komponendid võrdsed:

$$H_a = H_b = H \quad (7.31)$$

Horisontaalse toereaktsiooni H leiame valemiga

$$H = H' \cos \alpha = \frac{M_c^0 \cos \alpha}{f'} \quad (7.32)$$

ehk

$$H = \frac{M_c^0}{f} \quad (7.33)$$

kuna $f' = f \cos \alpha$. Jõudsimme samale tulemusele nagu ühel kõrgusel olevate tugede korral. H' vertikaalne komponent on

$$H' \sin \alpha = H \tan \alpha \quad (7.34)$$

Toereaktsioonide V_a ja V_b vertikaalsed komponendid arvutame järgmiste valemitega

$$V_a = V'_a + H' \sin \alpha; \quad V_b = V'_b - H' \sin \alpha \quad (7.35)$$

ehk

$$V_a = V'_a + H \tan \alpha; \quad V_b = V'_b - H \tan \alpha \quad (7.36)$$

7.4. Sisejõud vertikaalsest koormusest

Kaart on teoreetiliselt võimalik projekteerida selliselt, et konstruktsiooni omakaalukoormused tekitavad kaares ainult survejõudusid. Tegelikult koormused aga sageli muutuvad ja liiguvad ning see põhjustab ka paindemomendi tekkimist. Sageli kavandab projekteerija kaare nii, et peamised ja ülekaalus olevad koormused põhjustaksid selles ainult pikijõudu. Paindemomendi tekkimise vältimisest on juttu peatükkides 7.8 ja 7.9.

7.4.1. Paindemoment

Paindemomendi kaare suvalises ristlõikes k (joonis 7.16) arvutame valemiga

$$M_k = V_a x - \sum_{i=1}^r F_i (x_k - a_i) - Hy \quad (7.37)$$

ehk

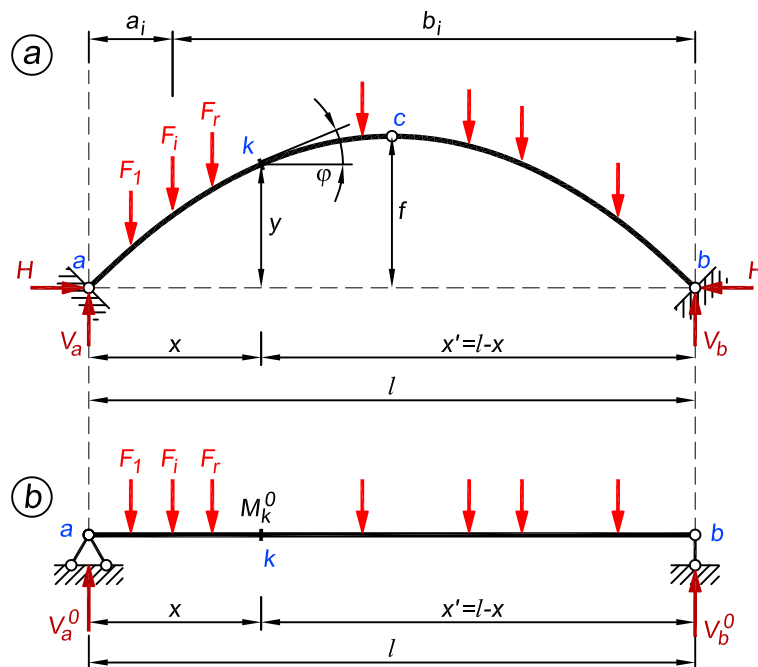
$$M_k = M_k^0 - Hy \quad (7.38)$$

kus x on ristlõike k kaugus toeliigendi a vertikaalist, y on lõike k kaugus ühendussirgest a - b vertikaalsihis, r on jõudude arv vasakul pool lõiget k ja

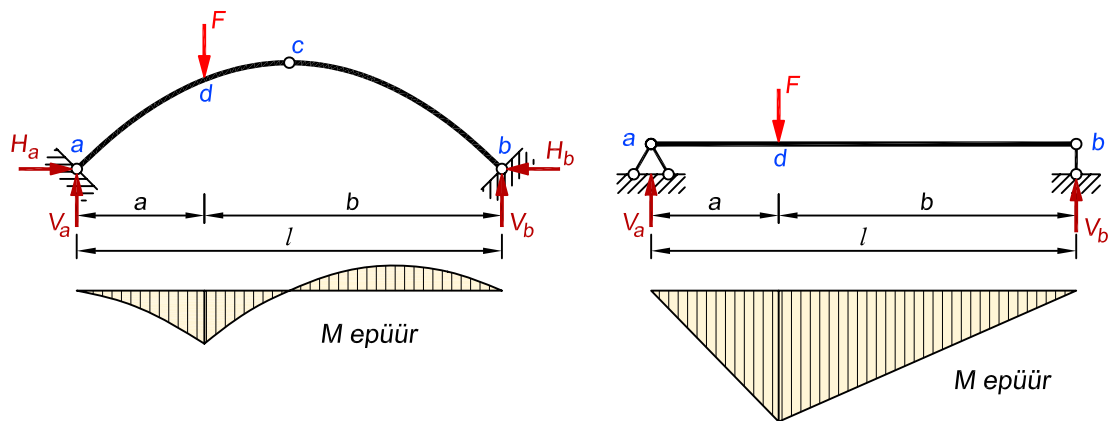
$$M_k^0 = V_a^0 x - \sum_{i=1}^r F_i (x_k - a_i) \quad (7.39)$$

on kaarega võrdse sildega lihttala ristlõikes k tekkiv paindemoment (joonis 7.16, b).

Paindemoment kaare ristlõikes k on võrdne sama sildega lihttala vastavas ristlõikes k tekkiva paindemomendi ja horisontaalsest toereaktsioonist põhjustatud momendi vahega (7.38). Lihttala paindemoment M_k^0 ja horisontaalsest reaktsioonist põhjustatud moment Hy on samas suurusjärgus, vahe aga nendest tunduvalt väiksem. **Järelikult on samast koormusest põhjustatud paindemoment kaares tunduvalt väiksem kui kaarega võrdse sildega lihttala paindemoment** (joonis 7.17). See on ka põhjus, miks suuremate sillete puhul on kaarkonstruktsioon talaga võrreldes ökonoomsem.



Joonis 7.16. Kaar ning sellega võrdse silde ja koormusega tala kaare sisejõudude leidmisel



Joonis 7.17. Kaare ja tala paindemomentide võrdlus sama silde ja koormuse juures

7.4.2. Põikjõud

Põikjõud ristlõikes k arvutatakse kõigi ühel pool lõiget k mõjuvate jõudude projektsioonide summana lõikes k kaare telje puutujaga risti olevale sihile (ristlõike tasandile)

$$Q_k = \left(V_a - \sum_{i=1}^r F_i \right) \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (7.40)$$

ehk

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (7.41)$$

kus

$$Q_k^0 = V_a - \sum_{i=1}^r F_i \quad (7.42)$$

on põikjõud lihttalas ja φ on horisontaali ja puutuja vaheline nurk lõikes k .

7.4.3. Pikijõud

Pikijõud arvutatakse kõigi ühel pool lõiget k mõjuvate jõudude projektsioonide summana kaare telje puutuja sihile lõikes k

$$N_k = - \left(V_a - \sum_{i=1}^r F_i \right) \sin \varphi - H \cos \varphi \quad (7.43)$$

ehk

$$N_k = -Q_k^0 \sin \varphi - H \cos \varphi \quad (7.44)$$

Avaldistest (7.41) ja (7.44) jäeldub, et **põikjõud kaares on väiksem kui lihttalas, kuid kaares tekib pikijõud, mis lihttalas puudub.**

7.5. Toereaktsioonid ja sisejõud horisontaalsest koormusest

7.5.1. Toereaktsioonid

Toereaktsioonide vertikaalsed komponendid V_a ja V_b (joonis 7.18) arvutame liigendite b ning a suhtes koostatud momentide tasakaalu tingimustest

$$V_a = -\frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i c_i; \quad V_b = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i c_i \quad (7.45)$$

kus c_i on horisontaalse jõu F_i kaugus ühendussirgest $a-b$.

Toereaktsioonide horisontaalsete komponentide H_a ja H_b leidmiseks kirjutame liigendi c suhtes momentide tasakaalu tingimused

$$\sum M_c^v = 0; \quad H_a f - V_a l_1 + \sum_{i=1}^m F_i (f - c_i) = 0 \quad (7.46)$$

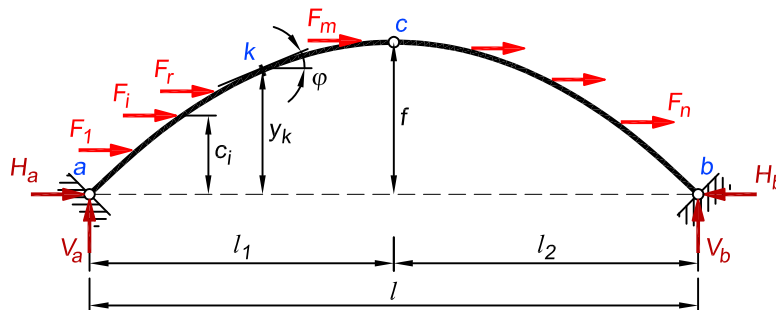
$$\sum M_c^p = 0; \quad -H_b f + V_b l_2 + \sum_{i=m+1}^n F_i (f - c_i) = 0 \quad (7.47)$$

millest saame horisontaalseteks komponentideks

$$H_a = \frac{V_a l_1 - \sum_{i=1}^m F_i (f - c_i)}{f}; \quad H_b = \frac{V_b l_2 + \sum_{i=m+1}^n F_i (f - c_i)}{f} \quad (7.48)$$

Kontrolliks vaatame jõudude tasakaalu horisontaalsuunas

$$\sum X = 0; \quad H_b - H_a = \sum_{i=1}^n F_i \quad (7.49)$$



Joonis 7.18. Kaar horisontaalse koormusega

7.5.2. Sisejõud

Paindemomendi lõikes k (joonis 7.18) arvutame valemiga

$$M_k = V_a x_k - \sum_{i=1}^r F_i (y_k - c_i) - H_a y_k \quad (7.50)$$

Põik- ja pikijõud lõikes k arvutame järgmiste valemitega

$$Q_k = V_a \cos \varphi - \left(\sum_{i=1}^r F_i + H_a \right) \sin \varphi \quad (7.51)$$

$$N_k = -V_a \sin \varphi - \left(\sum_{i=1}^r F_i + H_a \right) \cos \varphi \quad (7.52)$$

7.6. Sisejõudude epüürid vertikaalsest koormusest

Kaare sisejõudude epüüride esitamiseks on kaks erinevat varianti: me võime epüürid kujutada otse kaare teljel nagu teiste arvutuskeemide puhulgi või näitame epüürid kaare all horisontaalteljel. Vaatame järgnevalt, kuidas koostada paindemomendi epüüri.

Kaare paindemomendi epüüri ordinaadid arvutame valemiga (7.38). Selleks, et kujutada epüür otse kaare teljel, teisendame paindemomendi avaldist (7.38) järgmiselt

$$M_k = M_k^0 - Hy = H \left(\frac{M_k^0}{H} - y \right) = H (y^* - y) = H\eta \quad (7.53)$$

kus y^* ja η on vastavalt lihttala ja kaare paindemomendi epüüride ordinaadid, mis on jagatud horisontaalse reaktsiooniga H

$$y^* = \frac{M_k^0}{H}; \quad \eta = \frac{M_k}{H} \quad (7.54)$$

Lukuliigendis c võrdub paindemoment nulliga

$$M_c = M_c^0 - Hy_c = H \left(\frac{M_c^0}{H} - y_c \right) = H (y_c^* - y_c) = 0 \quad (7.55)$$

kus

$$y_c = f \quad (7.56)$$

on kaare kõrgus. Võrrandist (7.55) järeldub, et

$$y_c^* = f \quad (7.57)$$

Võrrandite (7.53) ja (7.57) alusel konstrueerime nüüd paindemomendi epüüri (joonis 7.19, a). Esmalt kujutame kaare telgjoone $a-c-b$. Järgnevalt kanname positiivsed ordinaadid $y^* = M_k^0/H$ horisontaaljoonelt $a-b$ ülespoole ja kuna $y_c^* = f$, siis epüüri M_k^0/H ($a-d-b-a$) sirge $b-d$ läbib kaare lukuliigendit c . Kaare paindemoment võrdub epüüri M_k^0/H ja kaare telgjoone ordinaatide vahe η ja toereaktsiooni H korrutisega (7.53): $M_k = H\eta$. Joonisel 7.19, a kujutab viirutus ordinaate η . Siinkohal peab kindlasti rõhutama seda, et joonisel 7.19, a esitatud epüür vastab küll kaare paindemomendi epüüri kujule, kuid selle ordinaadid on tegelikest H korda väiksemad.

Kaare sisejõudude epüürid kujutatakse üldjuhul horisontaalteljel, seetõttu esitame joonisel 7.19, b kaare paindemomendi epüüri, kus nulljooneks on võetud horisontaalne telg. Sellel skeemil näidatakse ordinaadid nende tegelikes suurustes.

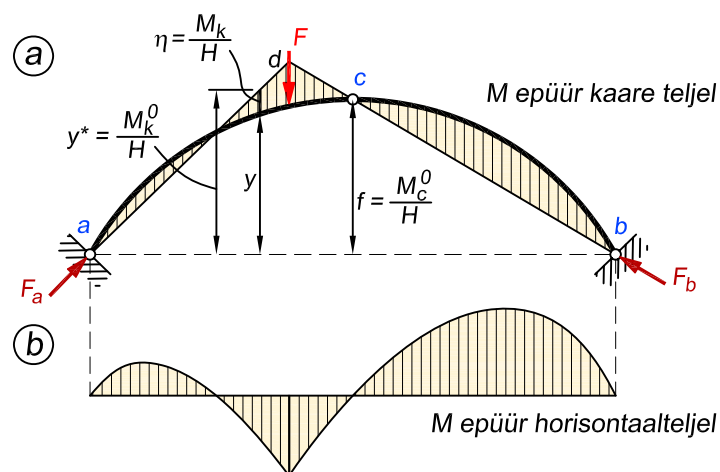
Paindemomentide sõltuvus kaare kõrgusest

Kui kahe kaare silded on võrdsed ($l_1 = l_2 = l$, kus indeks 1 viitab ühele kaarele ja indeks 2 teisele kaarele), telje kujud ühesugused, näiteks ruutparaboolid ($y_1 = \frac{4f_1x(l-x)}{l^2}$ ja $y_2 = \frac{4f_2x(l-x)}{l^2}$), ning kõrgused erinevad ($f_1 \neq f_2$), siis sama koormuse puhul on mõlemas kaares paindemomendid võrdsed.

Olgu kõrgustevaheline seos järgmine: $f_1 = cf_2$, kusjuures $c > 0$. Kui $l_1 = l_2 = l$, siis sama kujuga kaartel on $y_1 = cy_2$. Horisontaalne toereaktsioon on pöördvõrdeline kõrgusega: $H_1 = \frac{H_2}{c}$. Kaare paindemomendi avaldises korrutis $H y$ mõlema kaare jaoks on võrdne

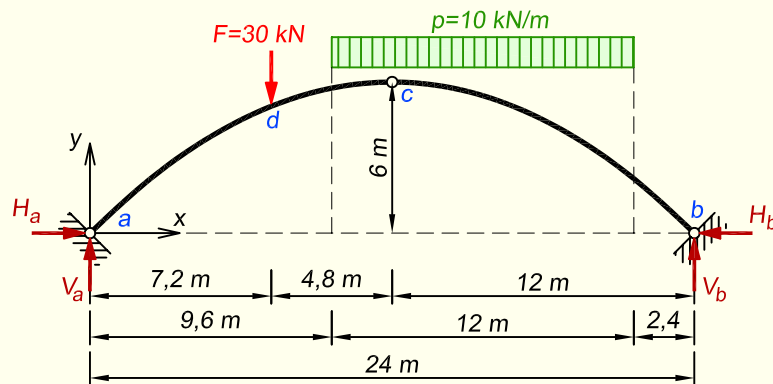
$$H_1 y_1 = \frac{H_2}{c} c y_2 = H_2 y_2 \quad (7.58)$$

Järelikult paindemomendi epüüri ordinaadid on võrdsed ja me võime öelda, et paindemoment ei sõltu kaare kõrgusest, kui ülejäänud kaare telje parameetrid jäävad muutumatuks.



Joonis 7.19. Kaare paindemomendi epüüri koostamine

NÄIDE 7.1. Koostada joonisel 7.20 kujutatud kolme liigendiga kaare sisejõudude epüürid. Kaare telgjoon kujutab ruutparabooli.



Joonis 7.20. Kaare arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Esmalt leiame vertikaalsed toereaktsioonid kaare toeliigendite *a* ja *b* suhtes koostatud momentide tasakaalutingimuste abil

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad & -V_a \cdot 24 + 30 \cdot 16,8 + 10 \cdot 12 \cdot 8,4 = 0; \quad V_a = 63 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad & V_b \cdot 24 - 30 \cdot 7,2 - 10 \cdot 12 \cdot 15,6 = 0; \quad V_b = 87 \text{ kN} \end{aligned}$$

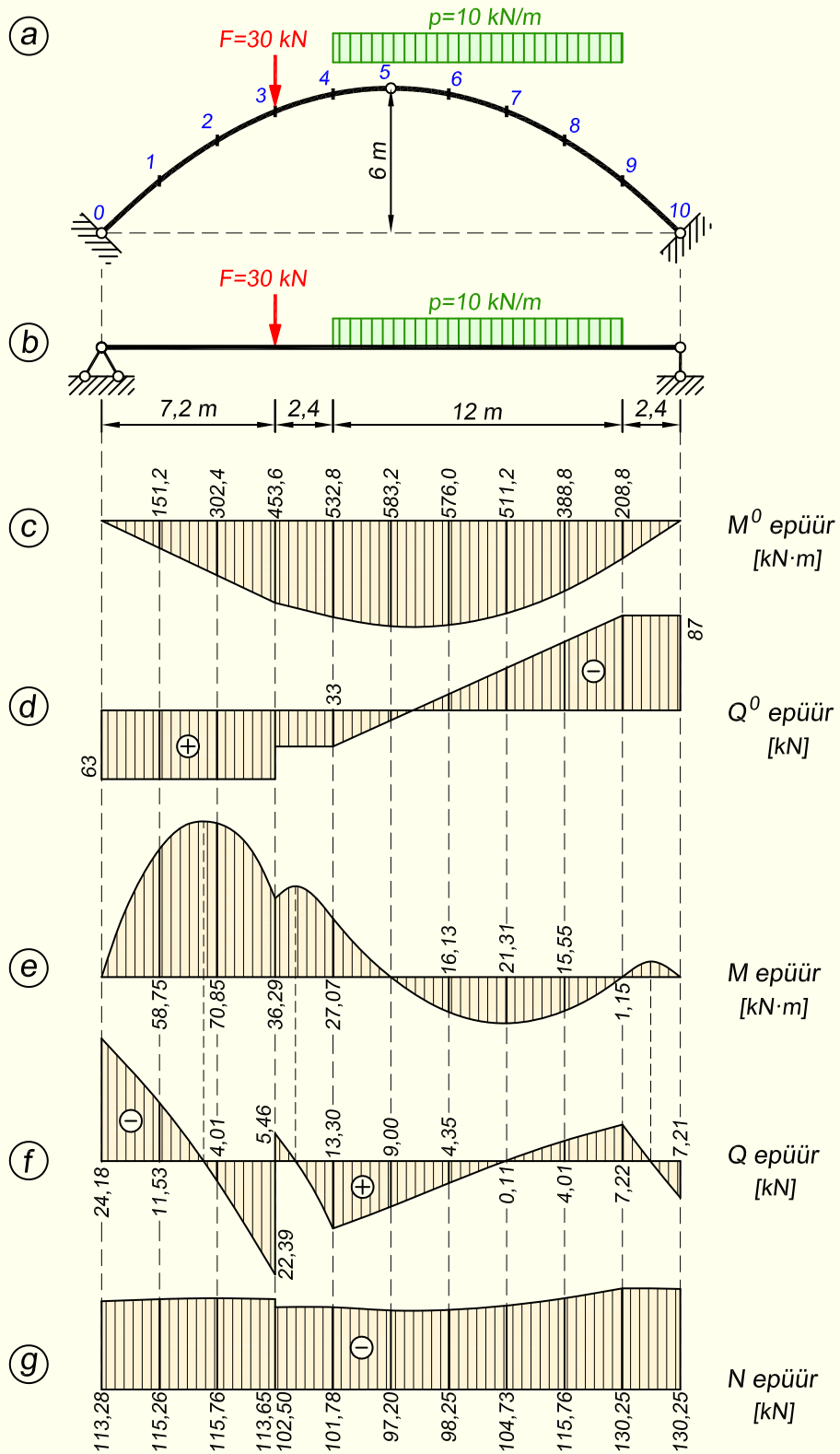
Kontrolliks kirjutame toereaktsioonide ja kaarele rakendatud koormuste tasakaalu tingimuse vertikaalteljele

$$\sum Y = 63 + 87 - 30 - 10 \cdot 12 = 0$$

Horisontaalsed toereaktsioonid leiame kaare lukuliigendi *c* suhtes kirjutatud tasakaalu võrranditest

$$\begin{aligned} \sum M_c^y = 0; \quad & H_a \cdot 6 - 63 \cdot 12 + 30 \cdot 4,8 + 10 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 0; \\ & H_a = \frac{63 \cdot 12 - 30 \cdot 4,8 - 10 \cdot 2,4 \cdot 1,2}{6} = \frac{M_c^0}{f} = 97,2 \text{ kN} \\ \sum M_c^p = 0; \quad & -H_b \cdot 6 + 87 \cdot 12 - 10 \cdot 9,6 \cdot 4,8 = 0; \\ & H_b = \frac{87 \cdot 12 - 10 \cdot 9,6 \cdot 4,8}{6} = \frac{M_c^0}{f} = 97,2 \text{ kN} \end{aligned}$$

kus M_c^0 on kaarega võrdse sildega lihttala (joonis 7.21, *b*) paindemoment lõikes *c*. Kuna kaarele horisontaalset koormust ei ole rakendatud, peavad horisontaalsed toereaktsioonid olema võrdsed.



Joonis 7.21. Kaare ja sellega võrdse sildega lihttala sisejõudude epüürid

Tabel 7.1. Kolme liigendiga kaare sisejõudude arvutamine

| Lõige | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| x | 0,0 | 2,4 | 4,8 | 7,2 | 9,6 | 12,0 | 14,4 | 16,8 | 19,2 | 21,6 | 24,0 |
| ξ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| y | 0 | 2,16 | 3,84 | 5,04 | 5,76 | 6,00 | 5,76 | 5,04 | 3,84 | 2,16 | 0,00 |
| $\sin \varphi$ | 0,7071 | 0,6247 | 0,5145 | 0,3714 | 0,1961 | 0 | -0,1961 | -0,3714 | -0,5145 | -0,6247 | -0,7071 |
| $\cos \varphi$ | 0,7071 | 0,7809 | 0,8575 | 0,9285 | 0,9806 | 1 | 0,9806 | 0,9285 | 0,8575 | 0,7809 | 0,7071 |
| M_x^0 | 0 | 151,2 | 302,4 | 453,6 | 532,8 | 583,2 | 576,0 | 511,2 | 388,8 | 208,8 | 0 |
| $H \cdot y$ | 0 | 209,95 | 373,25 | 489,89 | 559,87 | 583,20 | 559,87 | 489,89 | 373,25 | 209,95 | 0 |
| M_x | 0 | -58,75 | -70,85 | -36,29 | -27,07 | 0 | 16,13 | 21,31 | 15,55 | -1,15 | 0 |
| Q_x^0 | 63 | 63 | 63 | 63 | 33 | 9 | -15 | -39 | -63 | -87 | -87 |
| $H \sin \varphi$ | 68,73 | 60,72 | 50,01 | 36,10 | 19,06 | 0,00 | -19,06 | -36,10 | -50,01 | -60,72 | -68,73 |
| Q_x | -24,18 | -11,53 | 4,01 | 22,39 | 13,30 | 9,00 | 4,35 | -0,11 | -4,01 | -7,22 | 7,21 |
| $Q_x^0 \sin \varphi$ | 44,55 | 39,36 | 32,41 | 23,40 | 12,26 | 0,00 | 2,94 | 14,48 | 32,41 | 54,35 | 61,52 |
| $H \cos \varphi$ | 68,73 | 75,90 | 83,35 | 90,25 | 95,31 | 97,20 | 95,31 | 90,25 | 83,35 | 75,90 | 68,73 |
| N_x | -113,28 | -115,26 | -115,76 | -113,65 | -102,50 | -97,20 | -98,25 | -104,73 | -115,76 | -130,25 | -130,25 |

2. Sisejõudude arvutamiseks jagame kaare silde kümneks võrdseks osaks ning leiame sisejõud kõigis nendes lõigetes.

Kaare telgjooneks on ruutparabool, mille ordinaadid arvutame valemiga (7.1)

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

Kaare telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse leiame ruutparaboolikujulise telje puhul valemitega (7.4)

$$\sin \varphi = \frac{1 - 2\xi}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2 + (1 - 2\xi)^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2 (1 - 2\xi)^2}}$$

kus $\xi = \frac{x}{l}$.

Sisejõudude arvutamiseks kasutatakse valemeid (7.38), (7.41) ja (7.44)

$$M_k = M_k^0 - Hy; \quad Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi; \quad N_k = -Q_k^0 \sin \varphi - H \cos \varphi$$

Kaare sisejõudude arvutus on näidatud tabelis 7.1.

Joonisel 7.21, *b* on näidatud kaarega võrdse sildega lihttala ning joonisel 7.21, *c* ja *d* selle tala paindemomendi M^0 ja põikjõu Q^0 epüürid. Kaare sisejõudude epüürid on esitatud joonisel 7.21, *e, f* ja *g*.

Kaare paindemomendi epüüri koostamisel tuleb tähelepanu pöörata ka põikjõu epüüri- rile, kuna silde jagamisel kümneks osaks ei pruugi me muidu saada piisavalt informatsiooni M epüüri koostamiseks. Oluline on see M epüüri maksimumide määramisel. Näiteks ei teaks me ilma Q epüürita, kas lõigete 3 ja 4 vahel peab M epüüris maksimum olema või ei. Praegusel juhul näitabki põikjõu nullkoht ära, et paindemomendil on seal kohalik maksimum.

7.7. Seosed sisejõudude vahel

Seostega (1.8)...(1.10) kontrollitakse sirge varda sisejõudude epüüre. Järgnevalt tuletame paindemomendi, põik- ja pikijõu vahelised seosed kõvera varda jaoks.

Paindemomendi ja põikjõu vahelised seosed

Joonisel 7.22 on kujutatud kõverast vardast eraldatud element pikkusega ds . Eeldame, et elemendile mõjub pidevalt jaotatud koormus intensiivsusega p , mille resultant on $p ds$. Elemendi otsristlõigetest tõmmatud kaare telje puutujate lõikepunkti i suhtes kirjutatud momentide tasakaalu tingimus $\sum M_i = 0$ annab võrrandi

$$-M + (M + dM) - (Q + dQ)R \tan \frac{d\varphi}{2} - QR \tan \frac{d\varphi}{2} - p ds R \left(\tan \frac{d\varphi}{2} - \sin \frac{d\varphi}{2} \right) \quad (7.59)$$

Kuna $d\varphi$ on väike nurk, siis $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \tan \frac{d\varphi}{2}$ ja võrrandi (7.59) viimane liige võrdub ligikaudu nulliga. Arvestades veel, et väikeste nurkade korral $\tan d\varphi \approx d\varphi$, avaldame võrrandist (7.59) momendi juurdekasvu

$$dM = QR d\varphi + dQ R \frac{d\varphi}{2} \quad (7.60)$$

ja jagame elemendi pikkusega $Rd\varphi = ds$

$$\frac{dM}{ds} = Q + \frac{1}{2}dQ \quad (7.61)$$

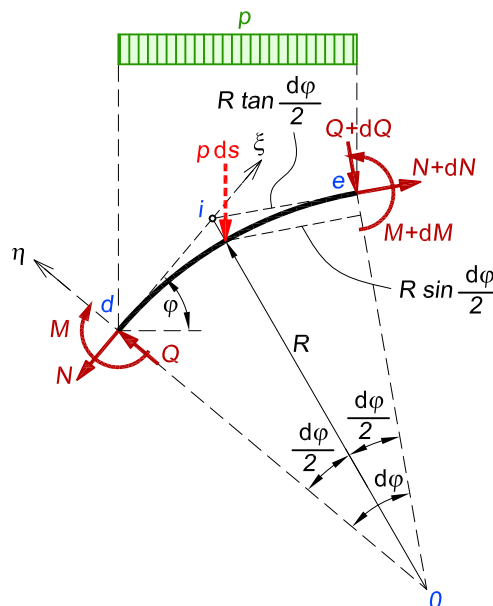
Võrrandi (7.61) teine liige paremal pool võrdusmärgi on võrreldes esimese liikmega väike, mistõttu võime kirjutada

$$\frac{dM}{ds} = Q \quad (7.62)$$

või

$$Q = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dM}{dx} \cos \varphi \quad (7.63)$$

Saadud avaldised väljendavad kaare paindemomendi ja põikjõu vahelist seost: põikjõud võrdub paindemomendi tuletisega, mis valemis (7.62) on leitud piki kaare telge ja valemis (7.63) piki horizontaalsuunalist x -telge.



Joonis 7.22. Kaarest eraldatud element pikkusega ds

Põikjõu ja pikijõu vahelised seosed

Projektsioonide tasakaalu tingimus elemendi otsristlõikest d tõmmatud kaare telje puutuja sihile $\sum \xi = 0$ annab võrrandi

$$-N + (N + dN) \cos d\varphi - (Q + dQ) \sin d\varphi - p ds \sin \varphi = 0 \quad (7.64)$$

Kui arvestada, et $\sin d\varphi \approx d\varphi$, $\cos d\varphi \approx 1$, $ds = R d\varphi$ või $d\varphi = \frac{ds}{R}$, ja jagada võrrand (7.64) elemendi pikkusega ds ning ära jättes teist järku väikesed suurused, saame järgmised võrrandi

$$\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{R} - p \sin \varphi = 0 \quad (7.65)$$

millest

$$\frac{Q}{R} = \frac{dN}{ds} - p \sin \varphi \quad (7.66)$$

Järelikult võrdub kaare põikjõu ja raadiuse jagatis mööda kaare telge arvatud pikijõu tuletisega, millest on maha lahutatud lauskoormuse ja kaare telje puutuja kaldenurga siinuse korrutis.

Projektsioonide tasakaalu tingimus otsristlõikes d puutuja ristteljele $\sum \eta = 0$ annab võrrandi

$$Q - (Q + dQ) \cos d\varphi - (N + dN) \sin d\varphi - p ds \cos \varphi = 0 \quad (7.67)$$

Kui võrrandit (7.67) teisendada analoogiliselt avaldise (7.64) juures tehtule, siis saame järgmise võrrandi

$$-\frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R} - p \cos \varphi = 0 \quad (7.68)$$

millest

$$\frac{N}{R} = -\frac{dQ}{ds} - p \cos \varphi \quad (7.69)$$

Järelikult võrdub kaare pikijõu ja raadiuse jagatis vastandmargiga võetud ja mööda kaare telge arvatud põikjõu tuletisega, millest on maha lahutatud lauskoormuse ja kaare telje puutuja kaldenurga koosinuse korrutis.

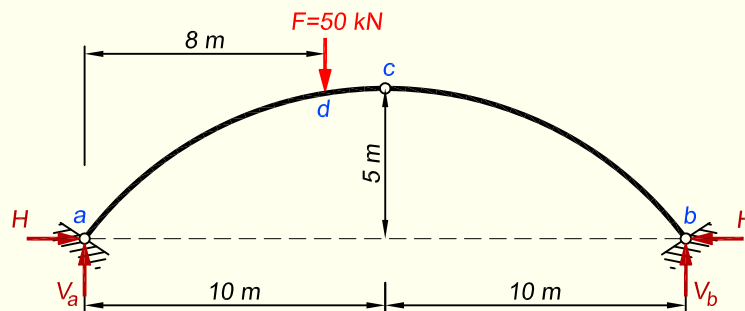
Kui kaare elemendil koormust ei ole, siis on seosed (7.66) ja (7.69) järgmised

$$\frac{Q}{R} = \frac{dN}{ds} \quad (7.70)$$

$$\frac{N}{R} = -\frac{dQ}{ds} \quad (7.71)$$

Järelikult võrdub koormamata alas kaare põikjõu ja raadiuse jagatis mööda kaare telge arvatud pikijõu tuletisega. Pikijõu ja raadiuse jagatis võrdub vastandmargiga võetud ja mööda kaare telge leitud põikjõu tuletisega.

NÄIDE 7.2. Koostada joonisel 7.23 kujutatud kolme liigendiga kaare sisejõudude epüürid ning leida suurimad paindemomendid ja pikijõud. Kaare teljeks on ringi kaar.



Joonis 7.23. Kaare arvutuskeem

LAHENDUS

1. Esmalt leiame toereaktsioonid

$$V_a = 50 \cdot \frac{12}{20} = 50 \cdot 0,6 = 30 \text{ kN}; \quad V_b = 50 \cdot \frac{8}{20} = 50 \cdot 0,4 = 20 \text{ kN}$$

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{V_b \cdot \frac{l}{2}}{f} = \frac{20 \cdot 10}{5} = 40 \text{ kN}$$

Kuna kaare teljjooneks on ringi kaar, siis arvutame selle ordinaadid valemiga (7.5)

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - (R - f)$$

kus R on kaare telje kõverusraadius ja selle leiame valemiga (7.6)

$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} = \frac{20^2 + 4 \cdot 5^2}{8 \cdot 5} = 12,5 \text{ m}$$

Kaare telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse arvutame valemitega (7.7)

$$\sin \varphi = \frac{l}{R} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right) = \frac{20}{12,5} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{20}\right) = 0,8(1 - 0,1x)$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{20}{12,5}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{20}\right)^2} = \sqrt{1 - 0,64(1 - 0,1x)^2}$$

Epüüride ordinaatide arvutuse jätmise siinkohal esitamata ja asume kohe ekstreemumite juurde. M , Q ja N epüürid on kujutatud joonisel 7.24, b , c ja d .

Seostest (7.62) ja (7.70) järeldub, et ristlõigetes, kus $Q = 0$, on M ja N ekstreemsed. Seetõttu tuleb meil leida pöikjõu nullkoha täpne asukoht.

Põikjõu kaare ristlõikes x arvutame valemiga (7.41)

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi$$

2. Ekstreemumid vahemikus $a-d$

Vahemikus $0 < x < 8$ m on põikjõu avaldis

$$Q_x = 30\sqrt{1 - 0,64(1 - 0,1x)^2} - 40 \cdot 0,8(1 - 0,1x)$$

mille võrrutame nulliga ja pärast lihtsaid teisendusi saame ruutvõrrandi põikjõu nullkoha asukoha määramiseks

$$x^2 - 20x + 43,75 = 0$$

Võrrandi üks lahend $x_1 = 2,5$ m määrab ristlõike, kus M ja N on ekstreemsed. Võrrandi teine lahend $x_2 = 17,5$ m ei ole vaadeldavas vahemikus ($0 < x < 8$) ja seetõttu ei kõlba.

Kaare ristlõikes $x = 2,5$ m on

$$\sin \varphi = 0,6; \quad \cos \varphi = 0,8; \quad y = 2,5 \text{ m}$$

ning sisejõudude väärtusteks saame

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi = 30 \cdot 0,8 - 40 \cdot 0,6 = 0$$

$$M_x = M_x^0 - Hy = 7,5 - 40 \cdot 2,5 = -25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$N_x = -Q_x^0 \sin \varphi - H \cos \varphi = -30 \cdot 0,6 - 40 \cdot 0,8 = -50 \text{ kN}$$

3. Ekstreemumid vahemikus $d-b$

Paremal pool jõu F rakenduspunkti ($8 < x < 20$ m) arvutame põikjõud valemiga

$$Q_x = -20\sqrt{1 - 0,64(1 - 0,1x)^2} - 40 \cdot 0,8(1 - 0,1x)$$

Sarnaselt kaare vasakpoolses osas tehtule võrdsustame selle nulliga ja peale mõningaid teisendusi jõuame võrrandini

$$x^2 - 20x + 68,75 = 0$$

mille kahest lahendist on kasutatav $x = 15,59$ m, mis jääb vaadeldavasse vahemikku $8 < x < 20$ m.

Kaare ristlõikes $x = 15,59$ m on

$$\sin \varphi = -0,4472; \quad \cos \varphi = 0,8944; \quad y = 3,680 \text{ m}$$

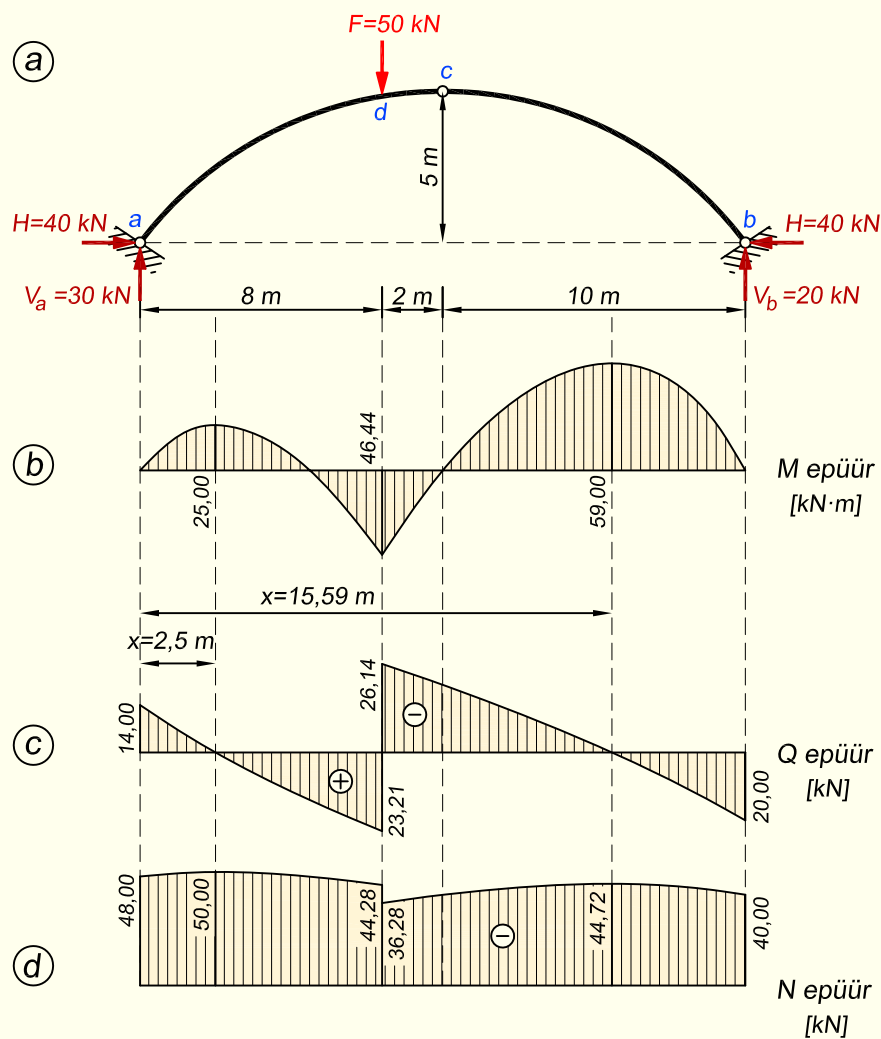
ning sisejõudude väärtusteks saame

$$Q_x = -2 \cdot 0,8944 + 40 \cdot 0,4472 = 0$$

$$M_x = 20(20 - 15,59) - 40 \cdot 3,68 = -59 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

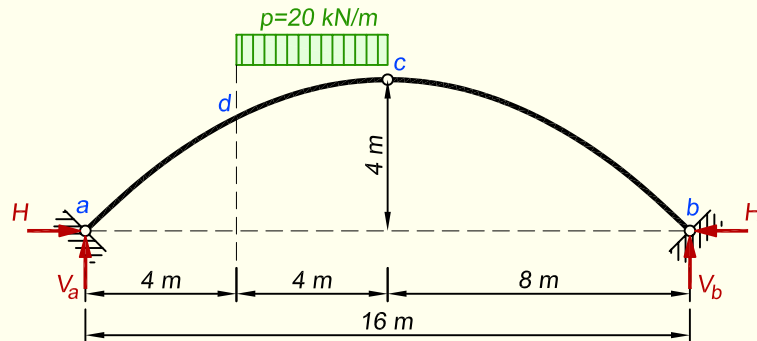
$$N_x = -20 \cdot 0,4472 - 40 \cdot 0,8944 = -44,72 \text{ kN}$$

M ja N epüüri ekstreemumid on näidatud ka joonisel 7.24.



Joonis 7.24. Sisejõudude epüürid

NÄIDE 7.3. Koostada joonisel 7.25 kujutatud kolme liigendiga kaare sisejõudude epüürid ning leida suurimad paindemomendid ja pikijõud. Kaare teljeks on ruutparabool.



Joonis 7.25. Kaare arvutuskeem

LAHENDUS

1. Arvutame toereaktsioonid

$$V_a = 20 \cdot 4 \cdot \frac{10}{16} = 50 \text{ kN}; \quad V_b = 20 \cdot 4 \cdot \frac{6}{16} = 30 \text{ kN}$$

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{V_b \cdot \frac{l}{2}}{f} = 30 \cdot \frac{8}{4} = 60 \text{ kN}$$

Sisejõudude epüürid on esitatud joonisel 7.26, *b*, *c* ja *d* ilma arvutusega.

Paindemomendi ekstreemumid esinevad lõigetes, kus põikjõud on null. Koormuseta piirkonnas, vahemikes $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$ ja $8 \leq x \leq 16 \text{ m}$, tekivad nendes lõigetes ka pikijõu ekstreemumid. Koormuse all, vahemikus $4 \leq x \leq 8 \text{ m}$, ei teki paindemomendi ja pikijõu ekstreemumid ühes ja samas ristlõikes. Suurim paindemoment esineb ka koormuse all ristlõikes, kus põikjõud on null. Kuid pikijõu suurima väärtuse peame eraldi võrrandist leidma.

Põikjõu kaare ristlõikes *x* arvutame valemiga (7.41)

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi$$

kus $\sin \varphi$ ja $\cos \varphi$ leiame valemitest (7.4) vastavalt ülesande andmetele

$$\sin \varphi = \frac{1 - 2\frac{x}{l}}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}} = \frac{1 - \frac{x}{8}}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{8}\right)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2 \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{8}\right)^2}}$$

Kuna kaare teljeks on ruutparabool, siis arvutame selle ordinaadid valemiga (7.1)

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

2. Ekstreemumid vahemikus $a-d$

Vahemikus $0 < x < 4$ m on põikjõu avaldis

$$Q_x = 50 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{8}\right)^2}} - 60 \cdot \frac{1 - \frac{x}{8}}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{8}\right)^2}}$$

Kui võrrutame põikjõu avaldise nulliga ja saadud võrrandit korrutame avaldises esi-
neva ruutjuurega, siis saame järgmise võrrandi

$$50 - 60 \left(1 - \frac{x}{8}\right) = 0$$

mille lahend on

$$x = \frac{8}{6} = 1,333 \text{ m}$$

Kaare ristlõikes $x = 1,333$ m on

$$\sin \varphi = 0,6402; \quad \cos \varphi = 0,7682; \quad y = \frac{11}{9} \text{ m}$$

ning sisejõudude väärtusteks saame

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi = 50 \cdot 0,7682 - 60 \cdot 0,6402 = 0$$

$$M_x = M_x^0 - Hy = 50 \cdot \frac{8}{6} - 60 \cdot \frac{11}{9} = -6,67 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$N_x = -Q_x^0 \sin \varphi - H \cos \varphi = -50 \cdot 0,6402 - 60 \cdot 0,7682 = -78,10 \text{ kN}$$

3. Ekstreemumid vahemikus $d-c$

Põikjõu avaldis lõigete d ja c vahel ehk koormatud alas (vahemikus $4 \leq x \leq 8$ m) on järgmine

$$Q_x = [V_a - p(x - x_d)] \cos \varphi - H \sin \varphi$$

või vastavalt ülesande andmetele

$$Q_x = [50 - 20(x - 4)] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{8}\right)^2}} - 60 \cdot \frac{1 - \frac{x}{8}}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{8}\right)^2}}$$

Kui võrrutame saadud avaldise nulliga ja korrutame ruutjuure avaldisega, siis saame järgmise võrrandi

$$70 - 12,5x = 0$$

mille lahend on

$$x = 5,6 \text{ m}$$

Vastavalt saadud lahendile

$$\xi = \frac{x}{l} = \frac{5,6}{16} = 0,35; \quad \xi' = 1 - \xi = 0,65; \quad y = 4f\xi\xi' = 16 \cdot 0,35 \cdot 0,65 = 3,64 \text{ m}$$

Paindemoment kohal $x = 5,6 \text{ m}$ võrdub

$$M_x = 50 \cdot 5,6 - 20 \cdot 1,6 \cdot 0,8 - 60 \cdot 3,64 = 36,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kaare ristlõike, milles tekib väikseim pikijõud vahemikus $4 \leq x \leq 8 \text{ m}$, leiame valemiga (7.66)

$$\frac{Q}{R} + p \sin \varphi = \frac{dN}{ds}$$

Kuna ekstreemumi kohal on epüüri puutuja horisontaalne, siis $\frac{dN}{ds} = 0$, mis annab lõike leidmiseks võrrandi

$$\frac{Q}{R} + p \sin \varphi = 0$$

kus R on kaare kõverusraadius, mille ruutparaboolikujulise telje korral leiame valemiga

$$R = \frac{l^2}{8f} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{4f}{l^2}\right)^2 (l - 2x)^2\right]^3}$$

Võrrand on vastavalt ülesande andmetele järgmine

$$\frac{50 - 20(x - 4)}{\sqrt{1 + (1 - x/8)^2}} - \frac{60(1 - x/8)}{\sqrt{1 + (1 - x/8)^2}} + \frac{20(1 - x/8)}{\sqrt{1 + (1 - x/8)^2}} = 0$$

Võrrandi lahend vahemikus $4 \leq x \leq 8 \text{ m}$ on

$$x = 7,088 \text{ m}$$

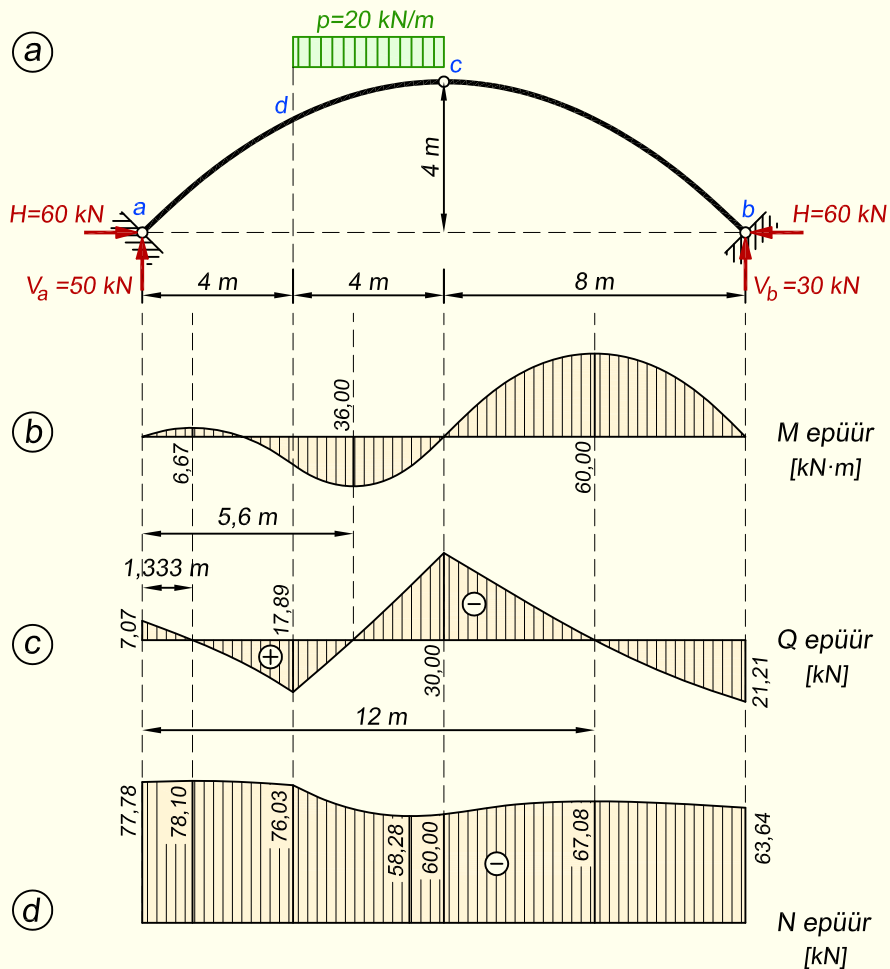
Kaare ristlõikes $x = 7,088 \text{ m}$ on

$$\sin \varphi = 0,1133; \quad \cos \varphi = 0,9936$$

ning sisejõudude väärtusteks saame

$$Q_x^0 = 50 - 20(7,088 - 4) = -11,76 \text{ kN}$$

$$N_x = 11,76 \cdot 0,1133 - 60 \cdot 0,9936 = -58,28 \text{ kN}$$



Joonis 7.26. Sisejõudude epüürid

4. Ekstreemumid vahemikus $c-b$

Kuna kaare parempoolsel osal koormust ei ole, siis läbib toereaktsiooni siht liigendeid b ja c . Põikjõud on null selles ristlõikes, kus kaare telje puutuja on paralleelne sihiga $c-b$. Kaare telje puutuja kaldenurga tangensi avaldis on järgmine

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4 \cdot 4}{16^2} (16 - 2x) = 1 - \frac{x}{8}$$

kus y avaldisena kasutame ülesande alguses toodud ruutparaboolikujulise kaare telje ordinaatide arvutamise valemit.

Abstsisstelje ja sirge $c-b$ vahelise nurga tangens on

$$\tan \varphi_{cb} = -\frac{f}{0,5l} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Võrrutame mõlemad avaldised

$$1 - \frac{x}{8} = -\frac{1}{2}$$

ja leiame saadud võrrandi lahendi

$$x = 12 \text{ m}$$

Kaare ristlõikes $x = 12 \text{ m}$ on

$$\sin \varphi = -0,4472; \quad \cos \varphi = 0,8944; \quad y = 3 \text{ m}$$

ning sisejõudude väärtusteks saame

$$Q_x = -30 \cdot 0,8944 + 60 \cdot 0,4472 = 0$$

$$M_x = 30 \cdot 4 - 60 \cdot 3 = -60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$N_x = -30 \cdot 0,4472 - 60 \cdot 0,8944 = -67,08 \text{ kN}$$

Kõik saadud M ja N epüüri ekstreemumid on näidatud ka joonisel 7.26.

7.8. Kolme liigendiga kaare survejoon

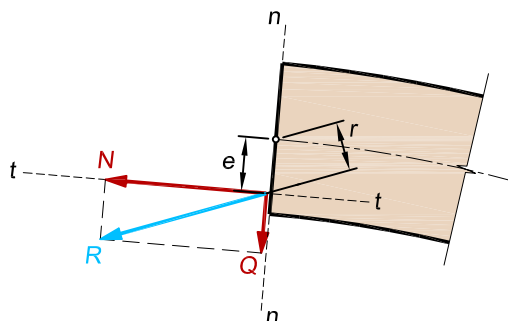
Kolme liigendiga kaare *survejooneks* nimetatakse resultantjõudude hulknurka, mille küljeks on kõigi ühel pool lõiget mõjuvate jõudude resultantjõu siht.

Survejoon läbib kaare ristlõiget ühel pool lõiget mõjuvate jõudude resultandi rakendus-
punktis (joonis 7.27). Resultantjõu projektsioonid kaare telje puutujale $t-t$ ja puutujaga risti
olevale teljele $n-n$ ristlõikes k on võrdsed lõike k piki- ja põikjõuga. Paindemoment kaare
ristlõikes k on

$$M_k = N_k e \tag{7.72}$$

või

$$M_k = R_k r \tag{7.73}$$



Joonis 7.27. Resultantjõu paiknemine kaare ristlõikes

kus R_k on ühel pool lõiget k mõjuvate jõudude resultant, r on ristlõike raskuskeskme kaugus resultantjõu sihist

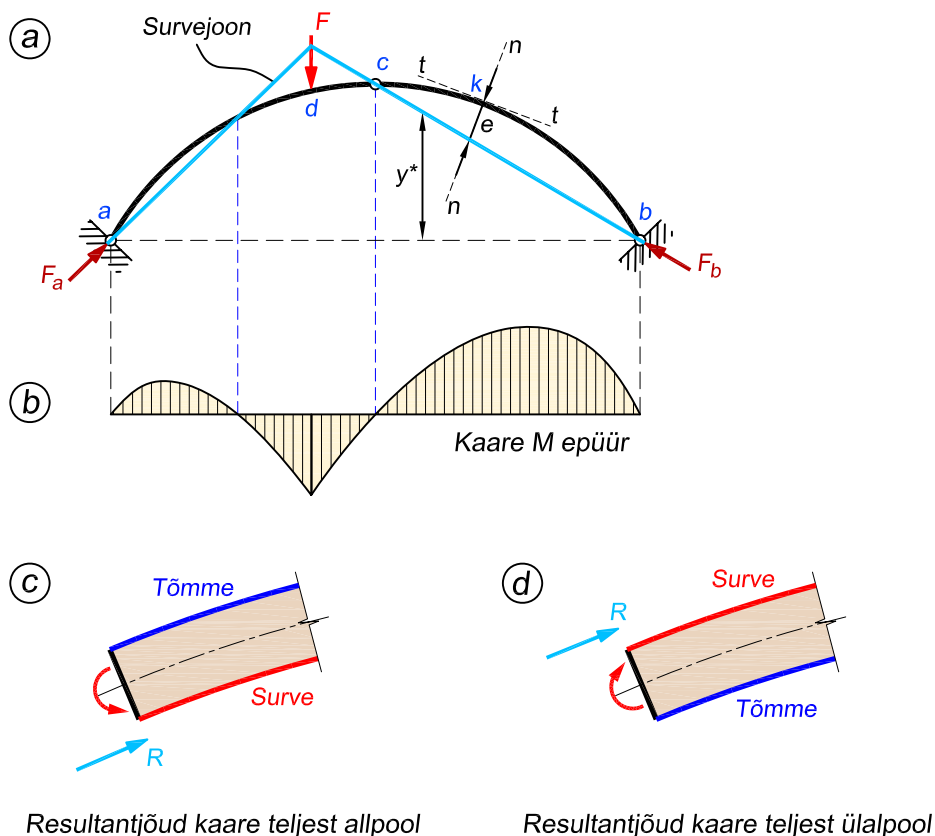
$$r = \frac{M_k}{R_k} \quad (7.74)$$

ning e on ekstsentrilisus, mis kujutab ristlõike raskuskeskme ning ühel pool lõiget mõjuvate jõudude resultandi rakenduspunkti vahekaugust lõikes k

$$e = \frac{M_k}{N_k} \quad (7.75)$$

Seega, teades paindemomendi ja pikijõu väärtuseid mingis lõikes, saame leida sisejõudude resultandi rakenduspunkti kauguse kaare raskuskeskmest selles lõikes. Kui leida sisejõudude resultantjõud kaare kõigi lõigete jaoks, siis moodustub nendest jõuhulknurk ehk survejoon. Survejoon läbib alati kaare kõiki kolme liigendit, kuna liigendis võrdub paindemoment nulliga ja seetõttu vastavalt valemile (7.75) ka ekstsentrilisus e .

Joonisel 7.28, a on kujutatud ühest koondjõust põhjustatud survejoon. Kui vaadata lõikest d vasakule jäävat kaare osa, siis näeme, et sellele osale on rakendatud ainult üks jõud – toereaktsioon F_a – mistõttu vahemikus $a-d$ on ka resultantjõu siht toereaktsiooni suunaline. Lõikes d paikneb koondjõud F , mis muudab resultantjõu suunda ja seetõttu on ka koondjõud



Joonis 7.28. Survejoon üksikust koondjõust

kohal alati survejoones murdepunkt. Lõikest d paremal pool saame survejoone kätte, vaadates kaare parempoolse osa toereaktsiooni F_b , kuna see on vahemikus $b-d$ ainuke koormus ja seega määrab üksinda resultantjõu suuna.

Jaotatud koormuse puhul on survejoon kõverjoon. Kui survejoon ühtib kaare telgjoonega, siis on paindemoment kaare igas ristlõikes null. Kaart, mille telgjoon ühtib survejoonega, nimetatakse *ratsionaalse teljega kaareks*.

Survejoone kujutamine analüütilisel teel

Survejoone kujutamiseks analüütilise arvutuse põhjal saab kasutada valemit (7.75), mis annab survejoone ja kaare telje vahelise kauguse e ristlõikes k (joonis 7.28, a). Survejõu N_k ja positiivse paindemomendi puhul on survejoon ülalpool kaare telgjoont ning negatiivse paindemomendi puhul allpool telge. Ristlõikes, kus survejoon lõikub kaare teljega, võrdub paindemoment nulliga (joonis 7.28, a ja b).

Survejoone ja paindemomendi epüüri paiknemise seose saab välja tuua joonise 7.28, c ja d abil. Kui survejoon paikneb kaare teljest allpool, siis survejõu (ehk ristlõike poole suunatud jõu) korral tekitab ta kaare ristlõikes momendi sellise suunaga, et see põhjustab tõmme varda ülemises ja survet varda alumises pooles (joonis 7.28, c). Sellisel juhul on paindemomendi epüür varda ülemisel poolel, nagu on joonisel 7.28, a kaare vasakus otsas ning kogu parema poole ulatuses. Kui resultantjõud asub kaare teljest ülevalpool, siis on olukord vastupidine. Nüüd põhjustab kaare ristlõikes tekkiv moment tõmbe varda alumises ja surve ülemises pooles. Joonisel kujutatud kaarel on selline olukord lõike d ümbruses, kus seetõttu märgime paindemomendi allapoole.

Praktikas on valemiga (7.75) survejoont kujutada siiski ebamugav ja seetõttu tuletame survejoone arvutamiseks avaldise kaare paindemomendi valemist (7.38). Võrdsustades paindemomendi nulliga $M_k = 0$, saame

$$0 = M_k^0 - Hy^* \quad (7.76)$$

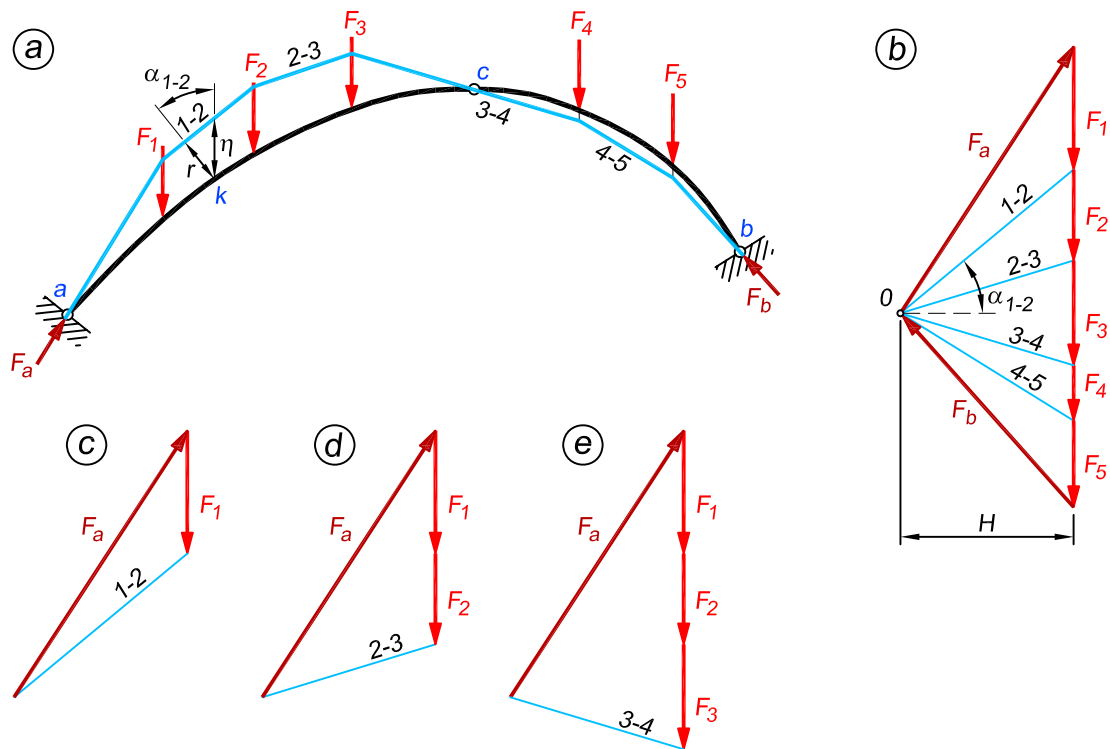
millest

$$y^* = \frac{M_k^0}{H} \quad (7.77)$$

kus y^* on survejoone ordinaadid kaare toeliigendeid a ja b ühendavast sirgest vertikaalsuunas (joonis 7.28, a).

Survejoone kujutamine graafilisel teel

Joonisel 7.29, a ja b on kujutatud survejoon ja välisjõudude jõuhulknurk vertikaalsete koormuste korral. Survejoone graafiliseks kujutamiseks tuleb välisjõudude hulknurgas esitada kõik välisjõudude ja toereaktsioonide vektorid nende tegelike suuruste ja suundadega. Jõuhulknurgas võtame nullpunktiks toereaktsioonide F_a ja F_b lõikepunkti ning tõmbame kiired 1-2, 2-3, 3-4 ja 4-5. Iga kiir on ühel pool seda kiirt asetsevate jõudude resultant, mistõttu kasutame tavalist vektorite liitmist. Näiteks kiire 1-2 saame jõudude F_a ja F_1 resultandina



Joonis 7.29. Survejoon ning välisjõudude hulknurk vertikaalsete jõudude puhul

(joonis 7.29, c), kiir 2-3 on jõudude F_a , F_1 ja F_2 resultant (joonis 7.29, d). Joonisel 7.29, e on näidatud veel ka kiire 3-4 saamine.

Järgnevalt kujutame jõuhulknurgale vastavaurvejoone, mille esimese sirge (toereaktsiooni F_a) siht läbib liigendit a . Iga järgnevaurvejoone sirge tõmbame paralleelselt jõuhulknurga vastava kiirega. Selliselt edasi liikudes saameurvejoone kogu kaare jaoks. Liigend c on jõudude F_3 ja F_4 vahel ningurvejoone lõik 3-4 läbib liigendit c . Survejoone viimane kül, milleks on toereaktsiooni F_b siht, läbib toelliigendit b .

Vaatame, kuidas onurvejoon seotud paindemomendi epüüri ordinaatidega. Olgu i ja j lõikest k vasakul ja paremal asuvate jõudude tähised. Joonisel 7.29, a märgitud lõike k puhul on $i = 1$ ja $j = 2$.

Vertikaalse koormuse puhul võib paindemomendi avaldist (7.73)

$$M_k = R_{i-j}r = R_{1-2}r \quad (7.78)$$

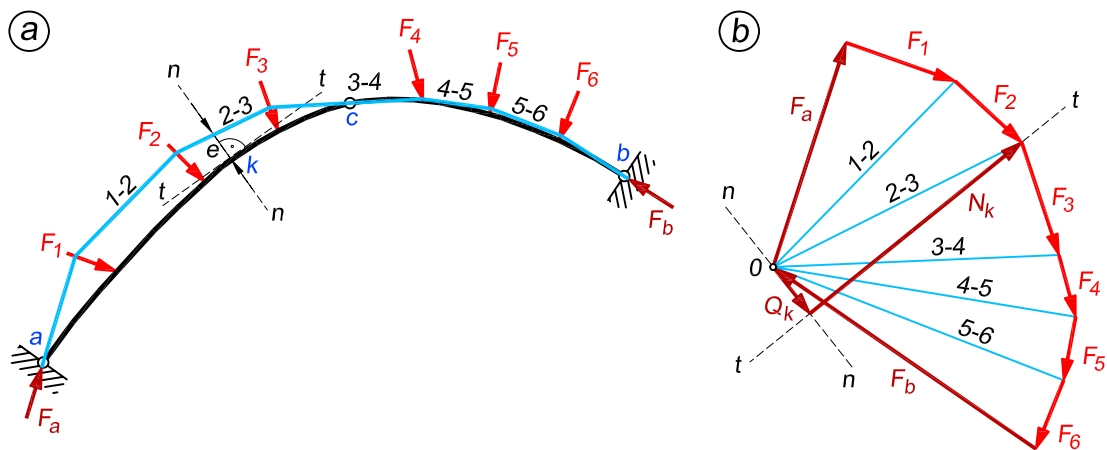
esitada järgmiselt

$$M_k = H\eta \quad (7.79)$$

kuna

$$R_{1-2} = \frac{H}{\cos \alpha_{1-2}} \quad \text{ja} \quad r = \eta \cos \alpha_{1-2} \quad (7.80)$$

kus H on ühel pool lõiget mõjuvate jõudude resultandi horisontaalne komponent (horison-



Joonis 7.30. Survejoon ning välisjõudude hulknurk kaldjõudude puhul

taalne toereaktsioon H), η on vertikaalne lõik kaare telje jaurvejoone vahel ristlõike k raskuskeskme kohal ning α_{1-2} on nurk kiire $1-2$ ja horisontaali vahel.

Vastavalt valemile (7.79) kujutavad vertikaalse koormuse puhul vertikaalsed ordinaadid η kaare telje jaurvejoone vahel kindlaksmääratud mõõtkavas paindemomendi epüüri ordinaate. Seda olulist tõe nimetatakse *Eddy teoreemiks*.

Paindemoment kaare mingis lõikes on proportsionaalne kaare telje jaurvejoone vahelise vertikaalse vahekaugusega.

Proportsionaalsusteguriks on seejuures kaare horisontaalne toereaktsioon H .

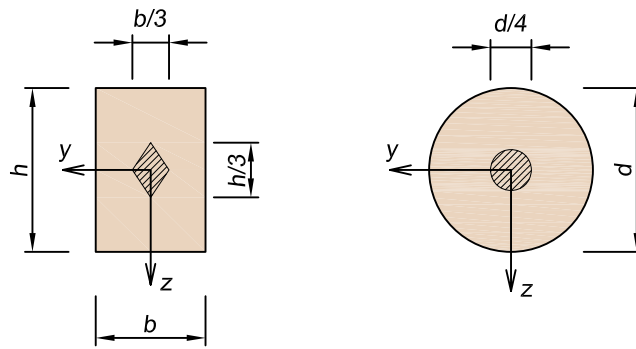
Joonisel 7.30 on toodudurvejoon ning sellele vastav välisjõudude hulknurk, kui kaar on koormatud kaldu asetsevate jõududega. Survejoone graafiline koostamine toimub siin sama põhimõtte järgi, nagu eespool kirjeldasime vertikaalsete koormuste puhul.

Näitame ära ka selle, kuidas saada kaare suvalises lõikesurvejoone abil kätte vastava lõike normaaljõu ja põikjõu väärtused. Selleks peame ristlõike k kohal olevaurvejoone kiire $2-3$ (joonis 7.30, a) lahutama jõuhulknurgas kaare telje puutuja sihiliseks ($t-t$) ja puutuajaga risti olevaks ($n-n$) komponendiks, nii saame lõikes k normaaljõu N_k ja põikjõu Q_k (joonis 7.30, b).

Pinged kaare ristlõikes

Sõltuvalturvejoone paiknemisest kaare telje suhtes võivad ristlõikes esineda kas ainult ühemärgilised pinged või nii surve- kui tõmbepinged. Habraste materjalide puhul, nagu kivimüüritis, toimub purunemine juba väikeste tõmbepingete juures, mistõttu kasutatakse selliseid materjale üldjuhul ainult surutud konstruktsioonides. Seepärast tuleb kivist kaared projekteerida selliselt, et vältida tõmbepingete teket, mis saavutatakse, kui resultantjõud paikneb piisavalt lähedal kaare teljele.

Siin võtame appi ristlõike tuuma mõiste. Tuumaks nimetatakse ristlõike keset ümbritsevat piirkonda, kuhu rakendatud resultantjõud põhjustab ristlõikes ainult ühemärgilisi pingeid.



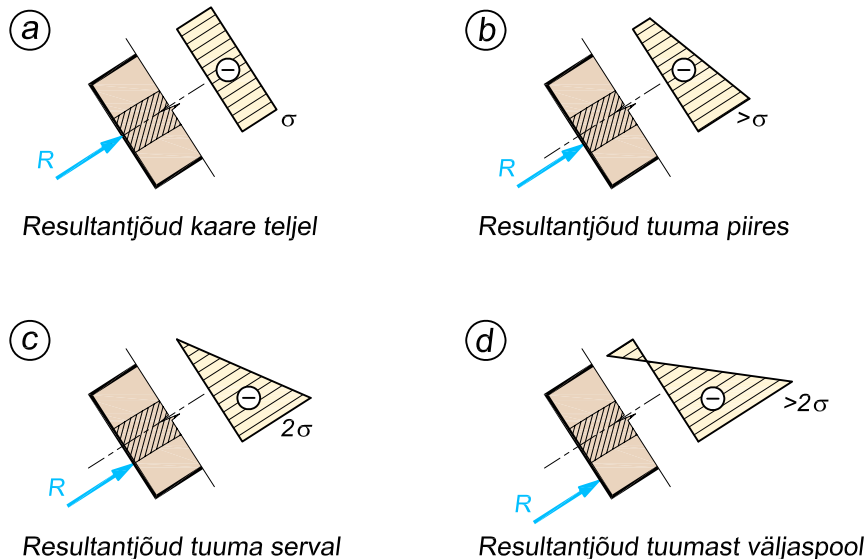
Joonis 7.31. Ristküliku- ja ringikujulise ristlõike tuumad

Joonisel 7.31 on kujutatud ristküliku- ja ringikujulise ristlõike tuumad. Ristlõike tuum on viirutatud.

Järgnevalt vaatame täpsemalt pingeväljade muutumist olenevalt resultantjõu paiknemisest ristlõike tuuma suhtes. Joonisel 7.32, a on resultantjõud rakendatud täpselt ristlõike raskuskeskmesse, mis põhjustab kogu ristlõikes ühtlase survepinge. Joonisel on näidatud ka vastav pingepüür.

Kui resultantjõud liigub kaare teljest eemale, siis ristlõike ühes servas hakkab survepinge kasvama ja teises vähenema (joonis 7.32, b).

Resultantjõu paiknemisel täpselt tuuma servas muutub ristlõike ühes küljes pinge nulliks (joonis 7.32, c). Kui resultantjõud liigub tuumast väljapoole, siis tekivad ristlõike vastasküljel juba tõmbepinged (joonis 7.32, d).



Joonis 7.32. Ristkülikukujulise ristlõikega kaare pingepüürid sõltuvalt survejoone paiknemisest. Ristlõike tuum on viirutatud

Kokkuvõtvalt saame öelda, et ristlõike pingeväli on ühemärgiline ainult siis, kui resultantjõud paikneb tuuma piirides.

Normaalpingete arvutamiseks kaare ristlõike äärmistes kiududes saame kasutada tugevusõpetusest tuttavat valemit

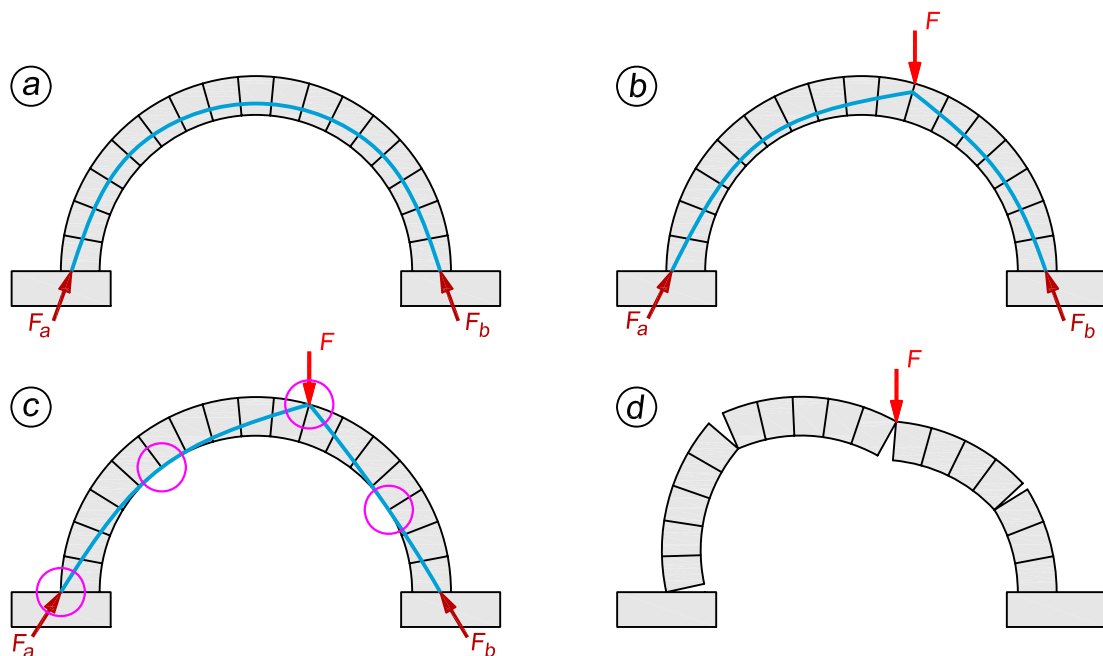
$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \quad (7.81)$$

Kivist kaare purunemise skeem

Kivist kaared muutuvad mehhanismiks ja purunevad pärast nelja liigendi tekkimist. Vaatame järgnevalt, kuidas see toimub.

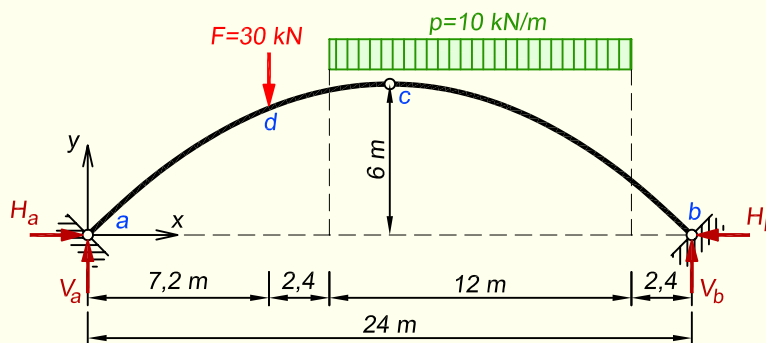
Joonisel 7.33, *a* on kaar koormatud ainult omakaaluga, mistõttu survejoon on ühtlane kõverjoon ja jääb igal pool kaare ristlõikesse. Koondatud jõu F lisamisel kaarele tekib survejoones koormuse all murdepunkt. Kuigi survejoon muudab oma kuju, jääb ta endiselt kaare ristlõikesse (joonis 7.33, *b*). Kui me hakkame nüüd koormust suurendama, hakkab murdepunkt muutuma järjest teravamaks ning survejoon sirgemaks, mistõttu ta läheneb kaare kas alumisele või ülemisele välispinnale. Edasisel koormuse suurendamisel jätkab survejoon lähenemist kaare välispindadele ning konstruktsioon muutub mehhanismiks, kui survejoon puutub kaare välispinda neljas punktis (joonis 7.33, *c*).

Eelnevast on teada, et survejoonepoolses kaare servas on surve ja samal ajal esinevad vastaspoolel tõmbepinged, mistõttu tõmmatakse seal kaare elemendid teineteisest lahku. Selle tagajärjel moodustub vastavasse ristlõikesse liigend (joonis 7.33, *d*). Kõik neli liigendit ei pruugi moodustuda samaaegselt ja kaar puruneb alles peale neljanda liigendi moodustumist.



Joonis 7.33. Kivist kaare purunemine

NÄIDE 7.4. Koostada joonisel 7.34 kujutatud kolme liigendiga kaarele survejoon. Arvutada lõigetes $x = 4,8$ m ja $x = 21,6$ m pinged kaare ristlõike alumises ja ülemises servas. Kaare parameetrid on samad nagu näites 7.1. Kaare ristlõikeks on ristkülik, mille laius $b = 30$ cm ja kõrgus $h = 90$ cm.



Joonis 7.34. Kaare arvutuskeem

LAHENDUS

1. Survejoone ordinaadid arvutame valemiga (7.77)

$$y^* = \frac{M_k^0}{H}$$

Horisontaalse reaktsiooni väärtuseks saime näites 7.1 $H = 97,2$ kN. Kuna lihttala paindemomendi epüür on samuti mainitud näites esitatud, siis siin seda ei korda.

Survejoone ordinaatide arvutus on näidatud tabelis 7.2, kus esmalt on esitatud kõigi lõigete x ja y koordinaadid ning seejärel lihttala M epüüri ordinaadid ja kaare survejoone ordinaadid y^* .

Tabel 7.2. Kolme liigendiga kaare survejoone ordinaatide arvutamine

| Lõige | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| x | 0,0 | 2,4 | 4,8 | 7,2 | 9,6 | 12,0 | 14,4 | 16,8 | 19,2 | 21,6 | 24,0 |
| y | 0 | 2,16 | 3,84 | 5,04 | 5,76 | 6,00 | 5,76 | 5,04 | 3,84 | 2,16 | 0,00 |
| M_x^0 | 0 | 151,2 | 302,4 | 453,6 | 532,8 | 583,2 | 576,0 | 511,2 | 388,8 | 208,8 | 0 |
| y^* | 0 | 1,56 | 3,11 | 4,67 | 5,48 | 6,0 | 5,93 | 5,26 | 4,00 | 2,15 | 0 |

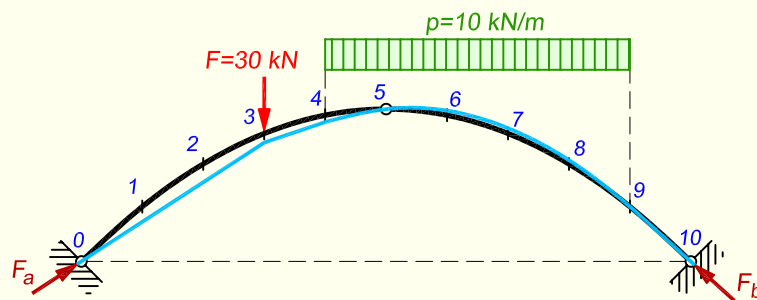
Survejoon koos kaare telgjoonega on kujutatud joonisel 7.35.

Survejoone koostamisel hakkame ordinaate y^* lugema kaare toeliigendeid ühendavast sirgest vertikaalsuunas. Kaare koormamata osal vasakust toest kuni lõikeni 3 on survejoon sirge, lõike 3 kohal on koondjõu tõttu temas murdepunkt ning edasi läheb ta sirgena kuni lauskoormuse alguseni lõikes 4. Lauskoormuse all on survejoon kõver.

Koormamata vahemikus lauskoormuse lõpust lõikes 9 kuni kaare parempoolse toeni on tegemist sirgega.

Lõigete 0 ja 3 vahel olev sirge on samasihiline vasaku toereaktsiooniga F_a ning lõigete 9 ja 10 vaheline sirge on samasihiline parempoolse toereaktsiooniga F_b .

Võrdleme saadud survejoont ka näites 7.1 joonisel 7.21, e kujutatud paindemomendi epüüriga. Kaare vasakul pool on survejoon teljest allpool, mis tähendab, et resultantjõud põhjustab kaare ristlõikes momendi, mis alumist poolt surub ja ülemist tõmbab. See sobitub kenasti paindemomendi epüüriga, mis paikneb varda ülemisel ehk tõmmatud poolel. Lõikest 5 kuni ligikaudu lõikeni 9 on survejoon kaare teljest ülevalpool ja selles vahemikus resultantjõu poolt põhjustatud moment ristlõikes surub varda ülemist ja tõmbab alumist poolt. Paindemomendi epüürit näeme, et see paikneb varda alumisel poolel.



Joonis 7.35. Kaare survejoon

2. Pinged kaare ristlõigetel arvutame valemiga (7.81)

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}$$

kus

$$A = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27 \text{ m}^2 \quad \text{ja} \quad W = \frac{0,3 \cdot 0,9^2}{6} = 0,0405 \text{ m}^3$$

Ristlõikes 2 ($x = 4,8 \text{ m}$) on $M = -70,85 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ja $N = -115,76 \text{ kN}$.
Pinged äärmistes kiududes on

$$\sigma_{ii} = -\frac{115,76}{0,27} + \frac{70,85}{0,0405} = 1320,6 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_a = -\frac{115,76}{0,27} - \frac{70,85}{0,0405} = -2178,1 \text{ kN/m}^2$$

Ristlõikes 9 ($x = 21,6 \text{ m}$) on $M = -1,15 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ja $N = -130,25 \text{ kN}$.
Pinged äärmistes kiududes on

$$\sigma_{ii} = -\frac{130,25}{0,27} + \frac{1,15}{0,0405} = -454,0 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_a = -\frac{130,25}{0,27} - \frac{1,15}{0,0405} = -510,8 \text{ kN/m}^2$$

Näeme, et lõikes 2, kus survejoon on kaare teljest küllaltki kaugel ($e = \frac{M_k}{N_k} = \frac{70,85}{115,85} = 0,61$ m, mis jääb väljapoole tuuma), on ristlõike ülemises ja alumises servas pinged erimargilised – üleval on tõmbepinged ja all survepinged. Lõikes 9, kus vastupidiselt on survejoon kaare teljele lähedal ($e = \frac{1,15}{130,25} = 0,009$ m, mis on tuuma piires), on kogu ristlõikes survepinged.

7.9. Kaare telje ratsionaalne kuju vertikaalsel koormusel

Kaare telje ratsionaalne kuju kindlaksmääratud silde ja kõrguse juures ühtib antud koormuse jaoks kujutatud survejoonega. Kaare kõigis ristlõigetel on siis paindemomendid nullid. Survejoon läbib kaare kolme liigendit, kusjuures tema kuju liigendite vahel on koormuse iseloomust ja suurusest.

Ühtigu pideva jaotatud vertikaalse koormuse $p(x)$ mõjumisel kaare telgjoon survejoonega, mille ordinaadid määratakse kaare telje võrrandiga

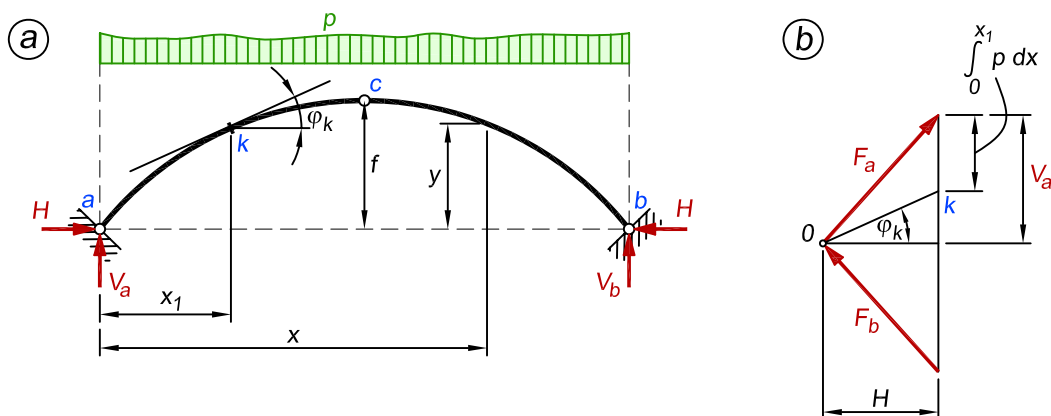
$$y = f(x) \tag{7.82}$$

Horisontaali ja kaare telje puutuja vahelise nurga φ tangens on avaldatav järgmiselt (joonis 7.36)

$$\tan \varphi = \frac{V_a - \int_0^{x_1} p(x) dx}{H} \tag{7.83}$$

Kuna $\tan \varphi = dy/dx$, siis võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_a - \int_0^{x_1} p(x) dx}{H} \tag{7.84}$$



Joonis 7.36. Kaare telje ratsionaalse kuju määramine

Kaare telje ratsionaalse kuju diferentsiaalvõrrandi pideva jaotatud koormuse $p(x)$ jaoks saame avaldise (7.84) diferentseerimisel ühe korra x järgi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p(x)}{H} \quad (7.85)$$

Ratsionaalse telje kujuga kaare igas ristlõikes võrdub paindemoment nulliga

$$M_x = M_x^0 - Hy = 0 \quad (7.86)$$

millest

$$y = \frac{M_x^0}{H} \quad (7.87)$$

Avaldisest järeldub, et vertikaalse koormuse puhul on kaare ratsionaalse telje ordinaadid proportsionaalsed sama silde ja koormusega lihttala paindemomendi epüüri ordinaatidega. Proportsionaalsusteguriks on $1/H$.

Ühtlase lauskoormusega kaare telje ratsionaalne kuju

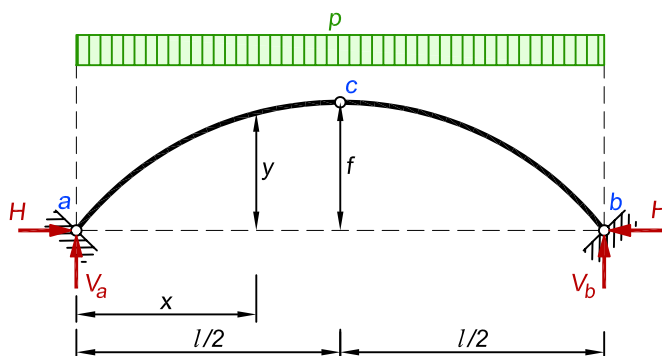
Järgnevalt tuletame võrrandi konstantse lauskoormusega kaare telje ratsionaalse kuju jaoks (joonis 7.37). Konstantse lauskoormuse korral on kaare telje ratsionaalse kuju diferentsiaalvõrrand (7.85) järgmine

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{H} \quad (7.88)$$

Kuna tegemist on teist järku diferentsiaalvõrrandiga, siis integreerime seda kaks korda

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{H}x + C_1 \quad (7.89)$$

$$y = -\frac{p}{2H}x^2 + C_1x + C_2 \quad (7.90)$$



Joonis 7.37. Kaare telje ratsionaalne kuju ühtlase lauskoormuse korral

Integreerimiskonstandi C_2 saame avaldisest (7.90), lähtudes rajatingimustest: kui $x = 0$, siis ka $y = 0$. Integreerimiskonstandi väärtuseks saame

$$C_2 = 0 \quad (7.91)$$

Integreerimiskonstandi C_1 saame avaldisest (7.89), lähtudes rajatingimustest: kui $x = \frac{l}{2}$, siis $\frac{dy}{dx} = 0$. Integreerimiskonstandi väärtuseks saame

$$C_1 = \frac{pl}{2H} \quad (7.92)$$

Asetades leitud integreerimiskonstandid avaldisse (7.90), saame võrrandi

$$y = \frac{px(l-x)}{2H} \quad (7.93)$$

milles esineva kaare horisontaalse reaktsiooni arvutame valemiga

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{pl^2}{8f} \quad (7.94)$$

Kirjutades horisontaalse reaktsiooni valemi avaldisse (7.93), jõuame järgmise võrrandini

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2} \quad (7.95)$$

mis kujutab ruutparabooli. **Järelikult on konstantse lauskoormuse korral kaare telje ratsionaalseks kujuks ruutparabool.**

Samale tulemusele jõuaksime ka valemi (7.87) abil. Lihttala ühtlaselt jaotatud koormusest põhjustatud paindemomendi lõikes x arvutame valemiga

$$M_x^0 = \frac{1}{2}px(l-x) \quad (7.96)$$

ning kaare horisontaalse reaktsiooni valemiga

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{pl^2}{8f} \quad (7.97)$$

Kaare telje võrrandiks saame nüüd

$$y = \frac{M_x^0}{H} = \frac{4fx(l-x)}{l^2} \quad (7.98)$$

mis ühtib võrrandiga (7.95).

7.10. Mõjujooned

7.10.1. Toereaktsioonide mõjujooned

Sümmeetrilise kolme liigendiga kaare toereaktsioonide vertikaalsed komponendid V_a ja V_b arvutame momentide tasakaalu tingimustest $\sum M_b = 0$ ning $\sum M_a = 0$. Kui kaarele mõjub ühikjõud, siis

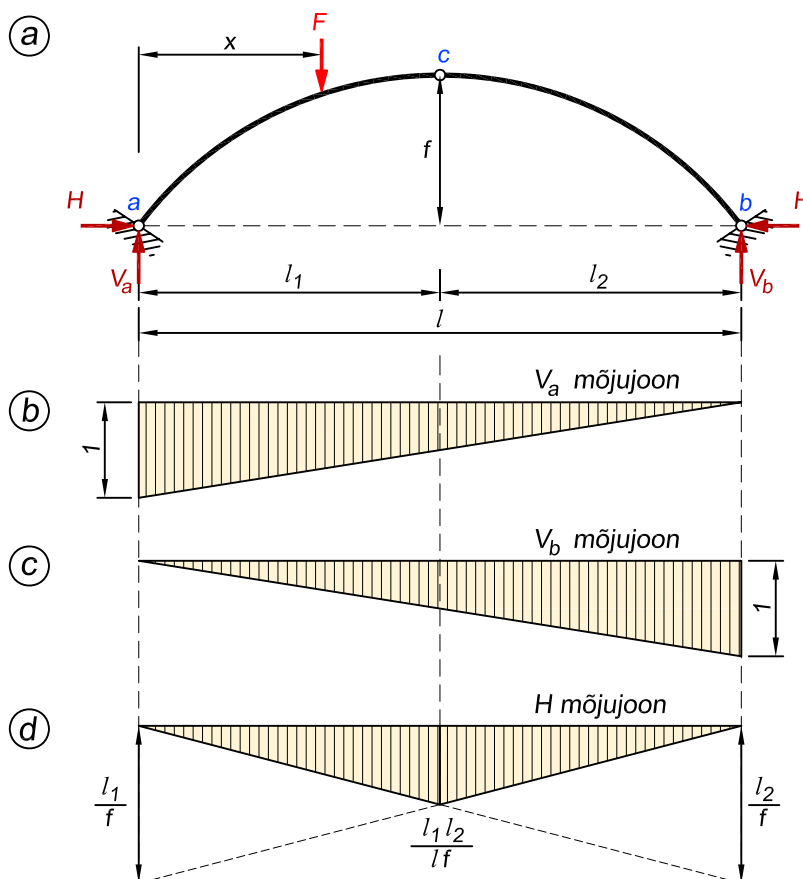
$$V_a = 1 \frac{l-x}{l}; \quad V_b = 1 \frac{x}{l} \quad (7.99)$$

Valemid (7.99) ühtivad lihttala toereaktsioonide V_a^0 ja V_b^0 avaldistega ning V_a ja V_b mõjujooned on samasugused kui lihttala toereaktsioonide mõjujooned (joonis 7.38, b ja c).

Horisontaalreaktsiooni H arvutame valemiga (7.14)

$$H = \frac{M_c^0}{f} \quad (7.100)$$

Ühikjõu mõjumisel vasakul pool liigendit c ($0 \leq x \leq l_1$) saame avaldise H mõjujoone



Joonis 7.38. Kaare toereaktsioonide mõjujooned

vasakpoolse sirge jaoks. Lihttala momendi M_c^0 arvutame paremalt poolt tulles, kuna siis jääb selle avaldisse ainult toereaktsioon. Vasakult tulles peaks arvestama ka ühikjõudu. Saame

$$M_c^0 = V_b l_2 = \frac{x}{l} l_2; \quad H = \frac{V_b l_2}{f} = \frac{x}{l} \cdot \frac{l_2}{f} \quad (7.101)$$

Kui $x = 0$, siis $H = 0$; kui $x = l_1$, siis $H = \frac{l_1 l_2}{l f}$. Lõigu pikkus mõjujoone vasakpoolse sirge pikenduse ja nulljoone vahel toe b vertikaalil on $\frac{l_2}{f}$ (joonis 7.38, d).

Ühikjõu mõjumisel paremal pool liigendit c ($l_1 \leq x \leq l$) saame avaldise H mõjujoone parempoolse sirge jaoks. Nüüd leiame lihttala momendi M_c^0 kaare vasaku poolega, kuna nii väldime ühikjõudu. Horisontaalreaktsiooni avaldiseks saame nüüd

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{V_a l_1}{f} = \frac{l-x}{l} \cdot \frac{l_1}{f} \quad (7.102)$$

Kui $x = l_1$, siis $H = \frac{l-l_1}{l} \frac{l_1}{f} = \frac{l_1 l_2}{l f}$; kui $x = l$, siis $H = 0$. Mõjujoone parempoolse sirge pikenduse ja nulljoone vaheline lõik toe a vertikaalil on $\frac{l_1}{f}$.

Toereaktsiooni H mõjujoon on kolmnurk, mille nullpunktid on tugede ja suurim ordinaat liigendi c vertikaalil.

7.10.2. Paindemomendi mõjujoon

Paindemomendi mõjujoone ordinaadid leiame valemiga (7.38), mida kasutasime ka sisejõudude arvutamisel

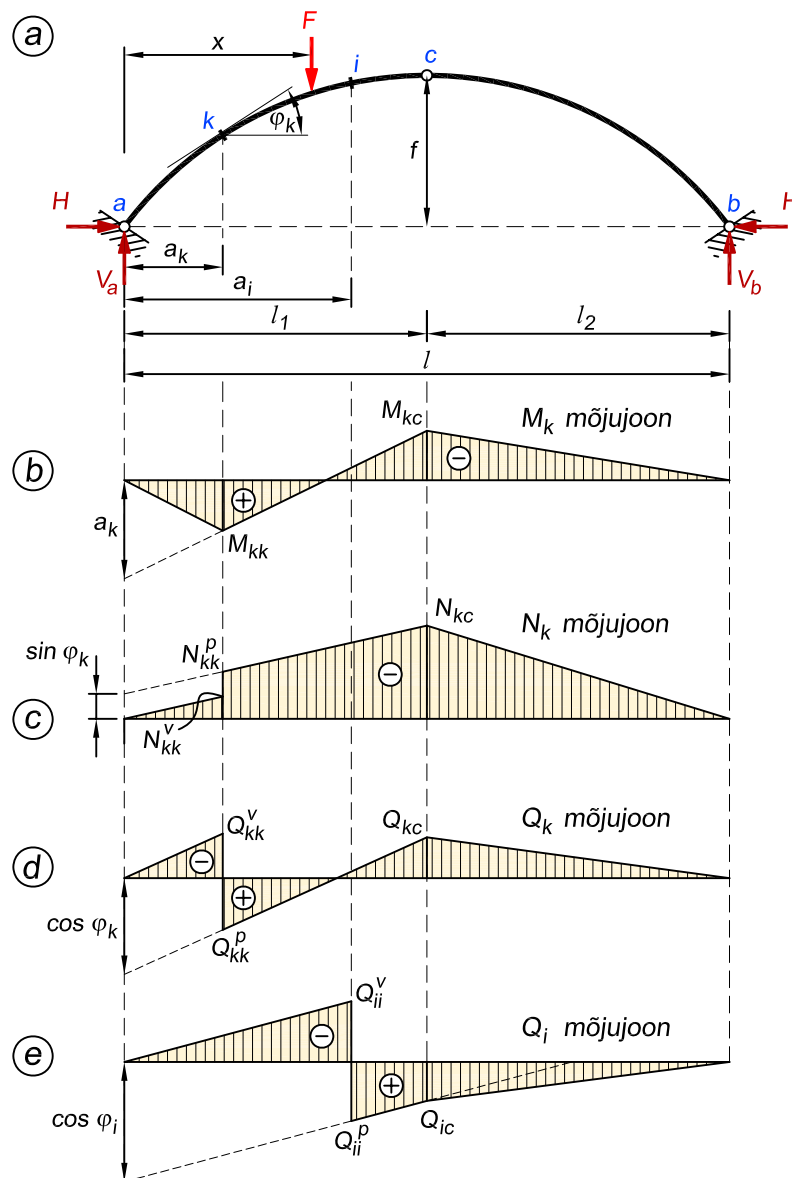
$$M_k = M_k^0 - Hy \quad (7.103)$$

Kui sisejõudude puhul kasutasime tegelikke koormuseid, siis nüüd tuleb arvutused teha ühikjõuga.

Jätame siinkohal esitamata pikema tõestuse kaare paindemomendi mõjujoone kuju moodustumise kohta ja mainime lühidalt, et see mõjujoon koosneb kolmest sirgest.

Joonisel 7.39, b on esitatud paindemomendi M_k mõjujoon. Kuna vaadeldav lõige k paikneb kaare vasakul poolel, siis mõjujoone vasakpoolne sirge on toeliigendist a kuni lõikeni k , keskmine sirge paikneb lõike k ja lukuliigendi c vahel ning parempoolne sirge lukuliigendist c parempoolse toeni b .

Kuna mõjujoone vasakpoolse ja keskmise sirge ordinaadid lõike k kohal on võrdsed ning samuti ka mõjujoone keskmise ja parempoolse sirge ordinaadid liigendi c kohal, siis võime paindemomendi mõjujoone praktilisel koostamisel arvutada ainult nende lõigete kohal olevad ordinaadid M_{kk} ja M_{kc} . Selleks paigutame ühikjõu kordamööda kummassegi lõikesse ja leiame neile ühikjõu asetustele vastavad avaldise (7.103) väärtused, mis ongi mõjujoone ordinaatideks. Esimene indeks paindemomendi tähise M juures näitab lõiget, kus paindemomendi leiame, ja teine indeks, millises lõikes mõjub ühikjõud.



Joonis 7.39. Kaare sisejõudude mõjujooned

7.10.3. Pikijõu mõjujoon

Pikijõu mõjujoone (joonis 7.39, c) ordinaadid arvutame avaldisega (7.44)

$$N_k = -Q_k^0 \sin \varphi - H \cos \varphi \quad (7.104)$$

Sarnaselt paindemomendile koosneb ka pikijõu mõjujoon kolmest sirgest. Vasakpoolne ja keskmine sirge on paralleelsed ja teineteise suhtes vertikaalsuunas nihutatud $\sin \varphi_k$ võrra, mis tuleneb avaldisest (7.104) esimesest liikmest. Mõjujoone praktilisel kujutamisel arvutame avaldisega (7.104) ordinaadid lõike k ja liigendi c kohal: N_{kk}^p ja N_{kc} .

7.10.4. Põikjõu mõjujoon

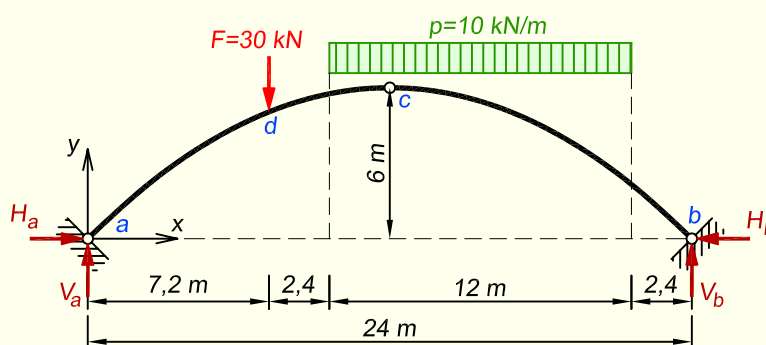
Põikjõu mõjujoone (joonis 7.39, *d* ja *e*) ordinaadid leiame avaldisega (7.41)

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (7.105)$$

Ka põikjõu mõjujoon koosneb kolmest sirgest. Kui vaadeldav lõige on lukuliigendist *c* vasakul pool, siis on vasakpoolne ja keskmine sirge paralleelsed. Keskmise ja parempoolse sirge ordinaadid liigendi *c* vertikaalil on võrdsed. Mõjujoone kujutamiseks leiame avaldisega (7.105) ordinaadid lõike *k* ja liigendi *c* kohal: Q_{kk}^p ja Q_{kc} . Lõike *k* kohal on mõjujoonel aste, mille suurus on $\cos \varphi_k$.

Põikjõu mõjujooned on kahesuguse kujuga. Toe ligidal asuva ristlõike mõjujoone keskmine sirge lõikab nulljoont (joonis 7.39, *d*). Lukuliigendi lähedal asuva ristlõike põikjõu mõjujoone keskmine sirge ordinaadid on ühemärgilised (joonis 7.39, *e*). Põikjõu mõjujoone kolmas kuju on erijuht, mis vastab ristlõikele, kus kaare telje puutuja on paralleelne toeliigendi ja lukuliigendi ühendussirgega. Selle lõike põikjõu mõjujoone ordinaat lukuliigendi kohal võrdub nulliga. Vaadeldavast lõikest teisel pool lukuliigendit ühtib mõjujoone sirge nulljoonega.

NÄIDE 7.5. Koostada joonisel 7.40 kujutatud kolme liigendiga kaare horisontaalreaktsiooni *H* ning lõike *d* sisejõudude mõjujooned. Arvutada sisejõud lõikes *d* mõjujoonte abil ja võrrelda neid näites 7.1 saadud tulemustega. Kaare parameetrid on kõik samad nagu näites 7.1.



Joonis 7.40. Kaare arvutuskeem

LAHENDUS

1. Horisontaalreaktsiooni mõjujoone (joonis 7.41, *b*) suurima ordinaadi saame, kui ühikjõud mõjub liigendi *c* kohal

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{0,5 \cdot 12}{6} = 1$$

2. Sisejõudude mõjujoonte (joonis 7.41, *c*, *d* ja *e*) kujutamiseks arvutame nende keskmine sirgete ordinaadid lukuliigendi *c* ja lõike *d* kohal. Seetõttu leiame mõjujoonte ordinaatide arvutamisel esmalt toereaktsioonid kahel juhul.

1) Ühel juhul mõjub ühikjõud liigendi c kohal ($x = 12$ m)

$$V_a = V_b = 0,5; \quad H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{0,5 \cdot 12}{6} = 1,0$$

2) Teisel juhul mõjub ühikjõud lõike d kohal ($x = 7,2$ m)

$$V_a = 1 \cdot \frac{16,8}{24} = 0,7; \quad V_b = 1 \cdot \frac{7,2}{24} = 0,3; \quad H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{0,3 \cdot 12}{6} = 0,6$$

Lõike d sisejõudude mõjujoonte keskmiste sirgete võrrandid on järgmised

$$M_d = M_d^0 - Hy = V_a a - Hy_d$$

$$Q_d = Q_d^0 \cos \varphi_d - H \sin \varphi_d = V_a \cos \varphi_d - H \sin \varphi_d$$

$$N_d = -Q_d^0 \sin \varphi_d - H \cos \varphi_d = -V_a \sin \varphi_d - H \cos \varphi_d$$

Puutuja kaldenurga siinus ja koosinus lõike d kohal on

$$\sin \varphi_d = 0,3714; \quad \cos \varphi_d = 0,9285$$

Mõjujoonte ordinaadid, kui ühikjõud paikneb liigendi c kohal, on

$$M_d = 0,5 \cdot 7,2 - 1,0 \cdot 5,04 = -1,4400 \text{ m}$$

$$Q_d = 0,5 \cdot 0,9285 - 1,0 \cdot 0,3714 = 0,0929$$

$$N_d = -0,5 \cdot 0,3714 - 1,0 \cdot 0,9285 = -1,1142$$

Mõjujoonte ordinaadid, kui ühikjõud paikneb vahetult lõikest d paremal, on

$$M_d = 0,7 \cdot 7,2 - 0,6 \cdot 5,04 = 2,0160 \text{ m}$$

$$Q_d^p = 0,7 \cdot 0,9285 - 0,6 \cdot 0,3714 = 0,4271$$

$$N_d^p = -0,7 \cdot 0,3714 - 0,6 \cdot 0,9285 = -0,8171$$

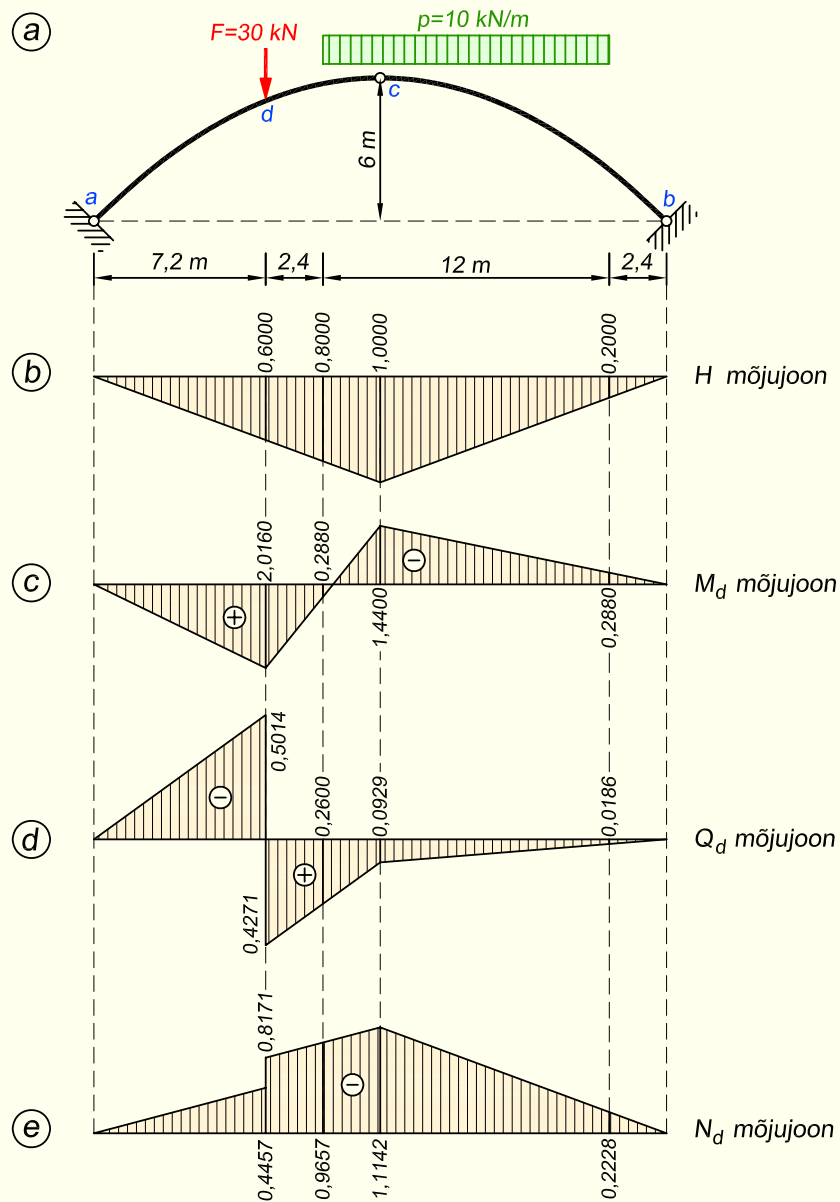
Mõjujoonte ordinaadid, kui ühikjõud paikneb vahetult lõikest d vasakul, on

$$M_d = 2,0160 \text{ m}$$

$$Q_d^v = 0,4271 - 0,9285 = -0,5014$$

$$N_d^v = -0,8171 + 0,3714 = -0,4457$$

kuna koormuse liikumisel üle lõike muutuvad põikjõud ja pikijõud lõikes vastavalt $F \cos \varphi$ ja $F \sin \varphi$ võrra. Mõjujooned koostame ühikjõuga ja seetõttu praegu $F = 1$. Q_d^v arvutamisel läheb aste negatiivses suunas, kuna lõikest d vasakule liikuv koormus hakkab seda lõiget mõjutama negatiivse põikjõuga. N_d^v puhul läheb aste positiivses suunas, kuna koormuse liikumisel lõikest k vasakule, selles lõikes pikijõud väheneb.



Joonis 7.41. Kaare mõjujooned

3. Leiame horisontaalse reaktsiooni ning sisejõudude väärtused mõjujoonte abil, milleks korrutame koondjõu tema alla jääva mõjujoone ordinaadiga ning lauskoormuse tema alla jääva mõjujoone osa pindalaga

$$H = 30 \cdot 0,6 + 10 \cdot \left(\frac{0,8 + 1}{2} \cdot 2,4 + \frac{1 + 0,2}{2} \cdot 9,6 \right) = 97,2 \text{ kN}$$

$$M_d = 30 \cdot 2,016 + 10 \cdot \left(\frac{0,2880 - 1,4400}{2} \cdot 2,4 - \frac{1,4400 + 0,2880}{2} \cdot 9,6 \right) = -36,29 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Q_d^v = 30 \cdot 0,4271 + 10 \cdot \left(\frac{0,2600 + 0,0929}{2} \cdot 2,4 + \frac{0,0929 + 0,0186}{2} \cdot 9,6 \right) = 22,40 \text{ kN}$$

$$Q_d^p = 30 \cdot (-0,5014) + 10 \cdot \left(\frac{0,2600 + 0,0929}{2} \cdot 2,4 + \frac{0,0929 + 0,0186}{2} \cdot 9,6 \right) = -5,46 \text{ kN}$$

$$N_d^v = -30 \cdot 0,8171 + 10 \cdot \left(-\frac{0,9657 + 1,1142}{2} \cdot 2,4 - \frac{1,1142 + 0,2228}{2} \cdot 9,6 \right) = -113,65 \text{ kN}$$

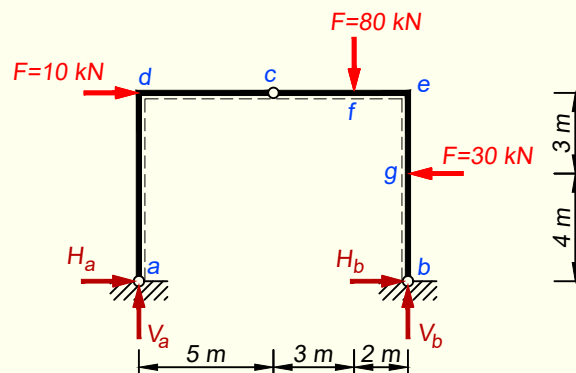
$$N_d^p = -30 \cdot 0,4457 + 10 \cdot \left(-\frac{0,9657 + 1,1142}{2} \cdot 2,4 - \frac{1,1142 + 0,2228}{2} \cdot 9,6 \right) = -102,50 \text{ kN}$$

Tulemused on samad, nagu me saime näites 7.1 otsese arvutuse teel.

7.11. Kolme liigendiga raam

Kolme liigendiga raami arvutamisel kehtivad samad reeglid nagu kolme liigendiga kaare puhulgi, aga varraste sirgjoonelise kuju tõttu muutub siin arvutus lihtsamaks.

NÄIDE 7.6. Koostada joonisel 7.42 kujutatud raami paindemomendi, põikjõu ja pikkjõu epüürid.



Joonis 7.42. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Esmalt teeme mingi oletuse toereaktsioonide suundade kohta ja märgime need oletatavad suunad joonisele 7.42.

Ainult vertikaalsest koormusest tekiks raamil väljast sissepoole suunatud horisontaalsed reaktsioonid. Horisontaalsed koormused võivad oma suuruselt lähtuvalt neid aga

ümber pöörata. Sõlmes d olev koormus on teistega võrreldes väike ja seetõttu ilmselt midagi ei muuda. Kuna parempoolsel postil on aga küllaltki suur horisontaalne koormus, siis see võib sõlmes b tekkiva toereaktsiooni ümber pöörata. Seetõttu märgime selle suunaga seest välja. Arvutamise tulemusena saadavad toereaktsioonide märgid näitavad, kas meie oletused olid õiged.

Arvutust alustame vertikaalsete toereaktsioonide leidmisest raami toeliigendite a ja b suhtes koostatud momentide tasakaalutingimustest. Vastupäeva pöörded märgime plussmärgiga ja päripäeva pöörded miinusega.

$$\begin{aligned}\sum M_b = 0; & \quad -V_a \cdot 10 - 10 \cdot 7 + 80 \cdot 2 + 30 \cdot 4 = 0; & \quad V_a = 21 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; & \quad V_b \cdot 10 + 30 \cdot 4 - 80 \cdot 8 - 10 \cdot 7 = 0; & \quad V_b = 59 \text{ kN}\end{aligned}$$

Kontrolliks kirjutame vertikaalsete toereaktsioonide ja raamile rakendatud koormuste tasakaalu tingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = -21 - 59 + 80 = 0$$

Horisontaalsed toereaktsioonid leiame sarnaselt kaarele. Selleks vaatame raami ühte poolt ja kirjutame sellele ühele poolele mõjuvate jõudude taskaalutingimuse raami lukuliigendi c suhtes

$$\begin{aligned}\sum M_c^v = 0; & \quad H_a \cdot 7 - 21 \cdot 5 = 0; & \quad H_a = 15 \text{ kN} \\ \sum M_c^p = 0; & \quad H_b \cdot 7 + 59 \cdot 5 - 30 \cdot 3 - 80 \cdot 3 = 0; & \quad H_b = 5 \text{ kN}\end{aligned}$$

Kontrolliks kirjutame horisontaalsete toereaktsioonide ja raamile rakendatud koormuste tasakaalu tingimuse horisontaalteljele

$$\sum X = 15 + 5 + 10 - 30 = 0$$

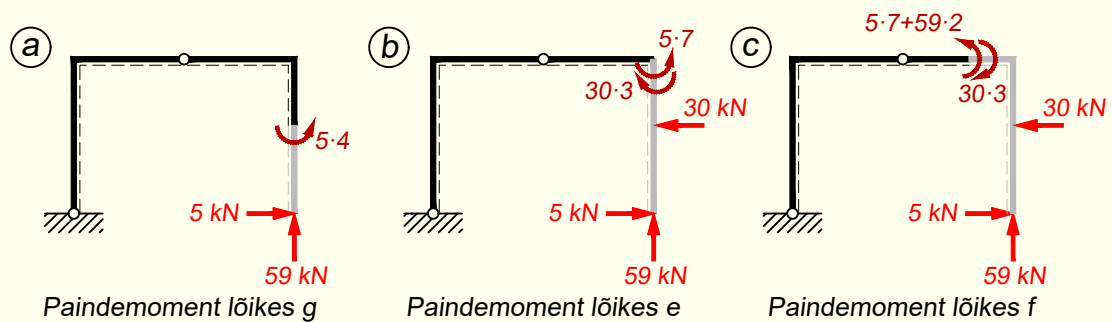
2. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutus

Sisejõudude arvutamisel kasutame lõikemeetodit ja taandamisvõtet. Varda mingis ristlõikes sisejõu arvutamisel teeme sellest kohast lõike ja eemaldame lõikest ühele poole jääva arvutusskeemi osa. Seejärel vaatame kõiki eemaldatud osale mõjuvaid jõudusid ja taandame need meid huvitavasse lõikesse.

Paindemomendi ordinaatide arvutamisel leiame kõigi lõikest ühele poole jäävate jõudude momentide summa ristlõike nulljoone suhtes.

Paindemomendi arvutamisel loetakse raami välimine pool negatiivseks ja sisemine pool positiivseks. Sageli tähistatakse varraste positiivne pool katkendjoonega (joonis 7.42). Kui jõud põhjustab tõmbe katkendjoonega tähistatud poolel, siis annab ta positiivse paindemomendi. Ja vastupidiselt, kui jõud tekitab tõmbe katkendjoone vastaspoolel, siis annab ta negatiivse paindemomendi.

Leiame esmalt paindemomentide väärtused raami parempoolsel osal. Sel juhul on mõistlik arvutust alustada parema toe poolt.



Joonis 7.43. Skeemid paindemomentide arutamiseks. Halliga on näidatud lõikega eemaldatav arvutusskeemi osa

Toel b on liigendsõlm ja selles lõikes võrdub paindemoment nulliga: $M_b = 0$.

Järgmisena arvutame paindemomendi lõikes g . Eemaldame sellest lõikest allapoole jääva arvutusskeemi osa ning taandame eemaldatud osale vastava jõusüsteemi lõikesse g (joonis 7.43, a). Kuna vertikaalne toereaktsioon on täpselt posti suunaline, siis tema paindemomendi arvutuses arvesse ei lähe ja järgi jääb horisontaalne reaktsioon, mis põhjustab tõmbe posti sisemisel küljel, kuna on suunatud raami seest välja. Toereaktsiooni taandamisel lõikesse g tekkiva paindemomendi noolekese märgime seetõttu nii, et noole saba jääb raami sisemisele ehk tõmmatud poolele (joonis 7.43, a). Paindemomendiks saame nüüd

$$M_g = 5 \cdot 4 = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Nurgasõlmes e paindemomendi arutamiseks eemaldame sellest lõikest allapoole jääva arvutusskeemi osa ja taandame sellele osale vastava jõusüsteemi lõikesse e (joonis 7.43, b). Horisontaalne toereaktsioon põhjustab tõmbe raami sisemisel poolel ja annab seetõttu positiivse paindemomendi, lõikes g paiknev horisontaalne koormus aga tõmbab posti välimist poolt ja annab negatiivse paindemomendi

$$M_e = 5 \cdot 7 - 30 \cdot 3 = -55 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

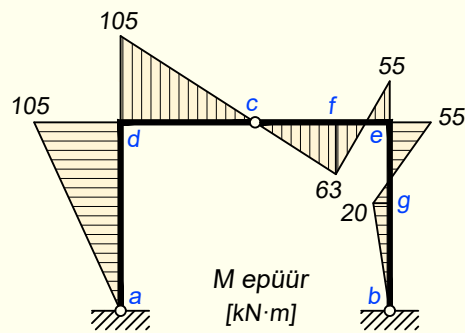
Lõikes f paindemomendi arutamisel eemaldame sellest lõikest paremale jääva arvutusskeemi osa ja taandame ärajäetud osale mõjuvad jõud lõikesse f (joonis 7.43, c). Nüüd tuleb arvestada ka vertikaalset toereaktsiooni, mis põhjustab koos horisontaalse reaktsiooniga tõmbe raami sisemisel poolel. Lõikes g paiknev jõud aga tõmbab raami välimist poolt.

$$M_f = 5 \cdot 7 + 59 \cdot 2 - 30 \cdot 3 = 63 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Raami parempoolsel osal on paindemomendid nüüd arvatud. Lõikes c paikneb liigend, kus paindemoment peab võrduma nulliga: $M_c = 0$.

Edasi liigume raami vasaku poole juurde, kus toel a võrdub paindemoment liigendi tõttu nulliga: $M_a = 0$. Jääb veel arvutada ordinaat nurgasõlmes d , kus teeme arvutuse vasaku toe poolt tulles ja kasutades horisontaalset toereaktsiooni, mis tõmbab posti välimist külge

$$M_d = -15 \cdot 7 = -105 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 7.44. Paindemomendi epüür

Kuna lõikes c ühtegi koondjõudu ei ole, siis ei tohi selles kohas olla ka paindemomendi epüüris murdepunkti, mis tähendab, et epüür peab liigendist sirgelt läbi minema. See võimaldab kontrollida paremalt ja vasakult arvutatud epüüride õigsust.

3. Põikjõu epüüri ordinaatide arvutus

Põikjõu ordinaatide arvutamisel leiame kõigi lõikest ühele poole jäävate jõudude projektsioonide summa vaadeldavas lõikes varda teljega risti olevale teljele.

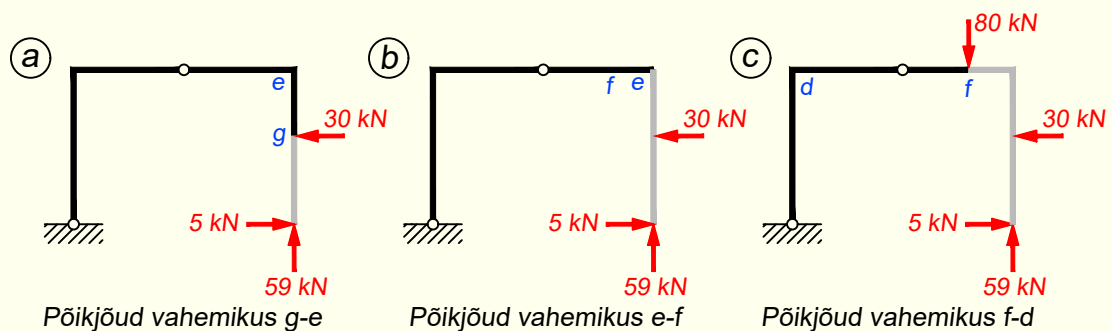
Põikjõu märgi määramisel tuleb vaadata, millises suunas jõud vardaosa pöörab: päripäeva pööre annab positiivse ja vastupäeva pööre negatiivse põikjõu.

Alustame arvutust parema toe poolt ja leiame esimesena põikjõu posti vahemikus $b-g$. Selle vardaosa alumises otsas on horisontaalne toereaktsioon, mis pöörab seda vardaosa tema teise otsa suhtes vastupäeva ja annab seetõttu sinna negatiivse põikjõu

$$Q_{b-g} = -5 \text{ kN}$$

Vahemikus $g-e$ põikjõu leidmiseks eemaldame lõikest g allapoole jääva arvutusskeemi osa (joonis 7.45, a) ja taandame ärajäetud osale mõjuvad jõud lõikesse g

$$Q_{g-e} = -5 + 30 = 25 \text{ kN}$$



Joonis 7.45. Skeemid põikjõudude arvutamiseks. Halliga on näidatud lõikega eemaldatav arvutusskeemi osa

Vahemikus $e-f$ põikjõu arvutamiseks eemaldame lõikest e allapoole jääva arvutuskeemi osa (joonis 7.45, b) ja taandame ärajäetud osale mõjuvad jõud lõikesse e . Kuna horisontaalsed jõud on vardaosa $e-f$ pikiteljesuunalised, siis põikjõudu nad ei mõjuta. Põikjõu saame vertikaalsest toereaktsioonist, mis hakkab vardaosa $e-f$ pöörama tema teise otsa suhtes vastupäeva ja annab seetõttu negatiivse põikjõu

$$Q_{e-f} = -59 \text{ kN}$$

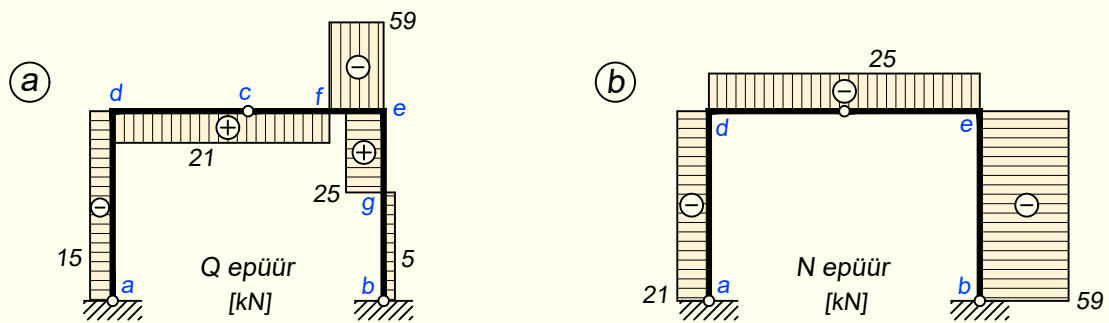
Vahemikus $f-d$ saame põikjõu, eemaldades lõikest f paremale jääva arvutuskeemi osa (joonis 7.45, c) ja taandades ärajäetud osale mõjuvad jõud lõikesse f . Arvesse lähevad ainult vertikaalsed jõud, kuna horisontaalsed on vardaosa $f-d$ pikiteljesuunalised. Vertikaalne toereaktsioon pöörab vardaosa $f-d$ tema teise otsa suhtes vastupäeva ja annab negatiivse põikjõu, lõikes f olev koormus pöörab aga päripäeva ja seetõttu annab positiivse põikjõu

$$Q_{f-d} = -59 + 80 = 21 \text{ kN}$$

Vasakpoolse posti põikjõu saame vasaku toe poolt arvutades. Posti alumises otsas on horisontaalne toereaktsioon, mis pöörab posti tema teise otsa suhtes vastupäeva ja tekitab sinna negatiivse põikjõu

$$Q_{a-d} = -15 \text{ kN}$$

Kuna põikjõu epüüris on aste ainult selles kohas, kus paikneb koondjõud, siis ei saa liigendi c kohal epüüris mingit astet olla. Põikjõu epüür peab liigendi c kohalt sirgelt läbi minema.



Joonis 7.46. Põikjõu ja pikijõu epüürid

4. Pikijõu epüüri ordinaatide arvutus

Pikijõu ordinaatide arvutamisel leiame kõigi lõikest ühele poole jäävate jõudude projektsioonide summa vaadeldavas lõikes varda pikiteljele.

Pikijõu märgi määramisel tuleb vaadata, kas jõud tõmbab või surub varrast. Kui vardas tekib tõmme, siis on pikijõud positiivne. Kui vardas tekib surve, siis on pikijõud negatiivne.

Postide pikijõudude leidmisel alustame arvutust vastava toe poolt. Seetõttu annab vasakpoolne vertikaalne toereaktsioon vasaku posti ja parempoolne reaktsioon parema posti pikijõu

$$N_{b-e} = -59 \text{ kN}; \quad N_{a-d} = -21 \text{ kN}$$

Raami horisontaalse osa $d-e$ pikijõu võime arvutada nii vasakult kui ka paremalt poolt tulles. Paremt poolt arvutades eemaldame lõikest e allapoole jääva osa ja taandame ärajäetud osale mõjuvad jõud lõikesse e

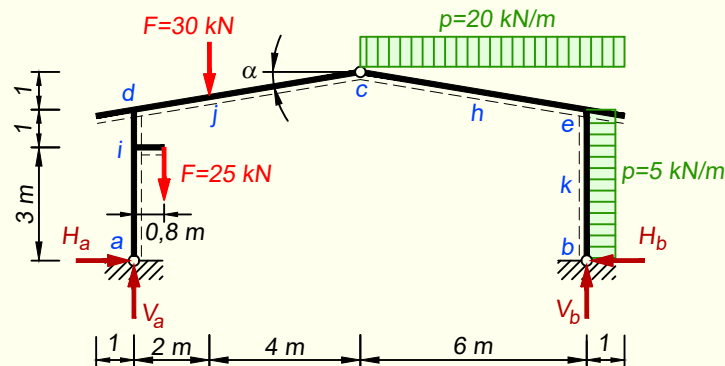
$$N_{e-d} = 5 - 30 = -25 \text{ kN}$$

Vasakult poolt arvutades eemaldame lõikest d allapoole jääva osa ja taandame ärajäetud osale mõjuvad jõud lõikesse d

$$N_{d-e} = -15 - 10 = -25 \text{ kN}$$

Pikijõu epüüris on aste ainult selles kohas, kus paikneb koondjõud. Kuna liigendi c kohal ühtegi jõudu ei ole, siis ei ole seal ka epüüris mingit astet. Pikijõu epüür peab selle liigendi kohalt sirgelt läbi minema.

NÄIDE 7.7. Koostada joonisel 7.47 kujutatud raami paindemomendi, põikjõu ja pikijõu epüürid. Näide pärineb õpikust [30].



Joonis 7.47. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Esmalt leiame vertikaalsed toereaktsioonid raami toeliigendite a ja b suhtes koostatud momentide tasakaalutingimuste abil

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 12 + 25 \cdot 11,2 + 30 \cdot 10 + 20 \cdot 7 \cdot 2,5 + 5 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad V_a = 80,83 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 12 - 25 \cdot 0,8 - 30 \cdot 2 - 20 \cdot 7 \cdot 9,5 + 5 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad V_b = 114,17 \text{ kN}$$

Kontrolliks kirjutame toereaktsioonide ja raamile rakendatud koormuste tasakaalu tingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = -80,83 - 114,17 + 25 + 30 + 20 \cdot 7 = 0$$

Horisontaalsed toereaktsioonid leiame raami lukuliigendi c suhtes kirjutatud tasakaalu võrranditest kummagi raami poole kohta

$$\sum M_c^v = 0; \quad H_a \cdot 5 - 80,83 \cdot 6 + 25 \cdot 5,2 + 30 \cdot 4 = 0; \quad H_a = 47,00 \text{ kN}$$

$$\sum M_c^p = 0; \quad -H_b \cdot 5 + 114,17 \cdot 6 - 5 \cdot 4 \cdot 3 - 20 \cdot 7 \cdot 3,5 = 0; \quad H_b = 27,00 \text{ kN}$$

Kontrolliks kirjutame horisontaalsete toereaktsioonide ja raamile rakendatud koormuste tasakaalu tingimuse horisontaalteljele

$$\sum X = 47 - 27 - 5 \cdot 4 = 0$$

2. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutus

Paindemomendi ordinaatide arvutamisel arvestame kõiki vaadeldavast lõikest ühele poole jäävaid jõudusid. Iga ordinaadi puhul tasub vaadata, kummal pool lõiget on vähem jõudusid ja arvutuses kasutada siis seda raami poolt.

Paindemomendi arvutuses loetakse raami varraste sisemised pooled positiivseks ja välimised negatiivseks. Seega, kui jõud põhjustab tõmmet varda sisemisel poolel, võetakse ta arvutuses positiivsena. Joonisel 7.47 on varraste positiivsed pooled näidatud katkendjoonega.

Leides paindemomendi epüüri ordinaate raami vasakul poolel, on mõistlik arvutust alustada vasaku toe poolt. Kasutades arvutamisel taandamisvõtet, eemaldame vaadeldavast lõikest vasakule poole jääva arvutusskeemi osa ja taandame eemaldatud osale vastava jõusüsteemi sellesse lõikesse.

$$M_{ia} = -47 \cdot 3 = -141 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{id} = -47 \cdot 3 + 25 \cdot 0,8 = -121 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{i,konsool} = -25 \cdot 0,8 = -20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_d = -47 \cdot 4 + 25 \cdot 0,8 = -168 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_j = 80,83 \cdot 2 - 47 \cdot 4,333 - 25 \cdot 1,2 = -72 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Raami parempoolsel osal paiknevates lõigetes paindemomendi arvutamisel võiks kasutada vastavast lõikest paremale jäävaid jõudusid. Sel juhul eemaldame vaadeldavast lõikest paremale jääva arvutusskeemi osa ja taandame eemaldatud osale vastava jõusüsteemi meid huvitavasse lõikesse.

$$M_k = -27 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = -64 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

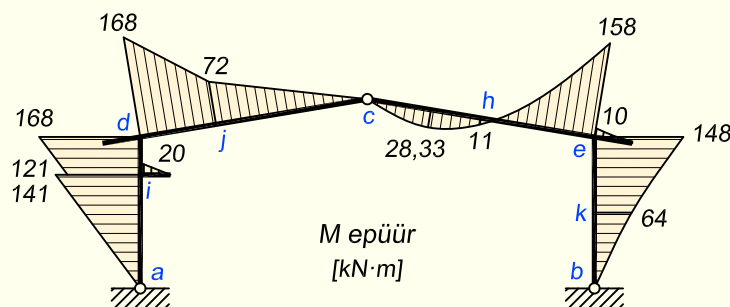
$$M_{eb} = -27 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 = -148 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{e,konsool} = -20 \cdot 1 \cdot 0,5 = -10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ec} = -27 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = -158 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_h = 114,17 \cdot 3 - 27 \cdot 4,5 - 5 \cdot 4 \cdot 2,5 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 11 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ce,max} = 114,17 \cdot 4,317 - 27 \cdot 4,720 - 5 \cdot 4 \cdot 2,720 - 20 \cdot 5,317 \cdot 5,317 \cdot 0,5 = 28,33 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



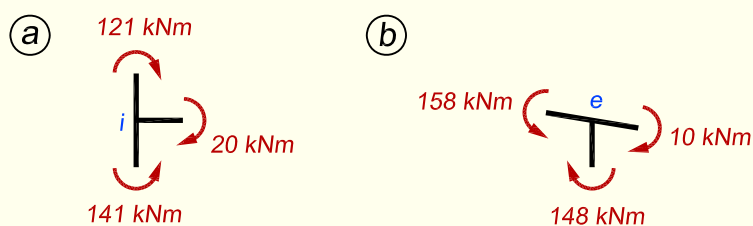
Joonis 7.48. Paindemomendi epüür

Kui sõlmedes on paindemomendi ordinaadid arvatud, siis võiks kontrollida sõlmede tasakaalu. Selleks lõikame sõlme arvutuskeemist välja ning märgime kõigile liituvatele varrastele peale nooled, mis kujutavad paindemomenti selles vardas. Noole saab peab jääma varda tõmmatud poolele, mida näeme paindemomendi epüürilt. Lisades igale noolele juurde tema arvulise väärtuse, peavad need pärast summeerimist õigete märkidega andma kokku nulli.

Meie arvutuskeemis on sõlmedeks, mida saab niimoodi kontrollida, konsooli toe-sõlm *i* (joonis 7.49, *a*) ja parempoolne nurgasõlm *e* (joonis 7.49, *b*). Järgnevas arvutuses tuleb märkide valimisel jälgida noole pöördesuunda.

$$M_{ia} + M_{i,konsool} + M_{id} = 141 - 20 - 121 = 0$$

$$M_{ec} + M_{e,konsool} + M_{eb} = 158 - 10 - 148 = 0$$



Joonis 7.49. Sõlmede *i* ja *e* tasakaalu kontroll

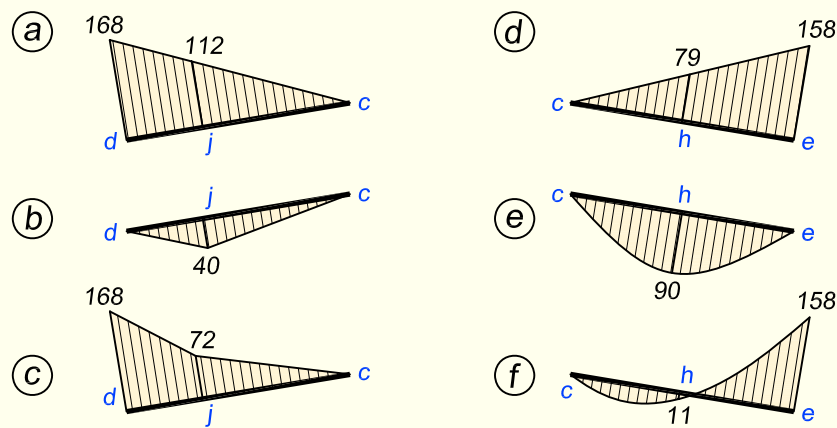
Sõlmede vahel olevates lõigetes saab paindemomendi ordinaadid arvutada, lisaks eespool näidatudle, ka epüüride liitmise teel. Siin arvutuskeemis on sellisteks kohtadeks lõiked *j*, *h* ja *k*.

Lõikes j paindemomendi leidmisel lähtume nurgasõlmes teadaolevast ordinaadist $-168 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Selle ordinaadi abil saadavale kolmnurksele epüürile (joonis 7.50, a) liidame juurde koondjõust tekkiva sama sildega lihttala epüüri (joonis 7.50, b), mille tulemusena saame lõpliku raami epüüri ja ordinaadi lõikes j (joonis 7.50, c)

$$M_j = -168 \cdot \frac{4}{6} + \frac{30 \cdot 4 \cdot 2}{6} = -112 + 40 = -72 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lõikes h paindemomendi leidmisel alustame arvutust nurgasõlmes olevast ordinaadist $-158 \text{ kN}\cdot\text{m}$, mille abil saadavale kolmnurksele epüürile (joonis 7.50, d) liidame juurde lauskoormusest põhjustatud sama sildega lihttala epüüri (joonis 7.50, e), mille tulemusena saame lõpliku raami epüüri ja ordinaadi lõikes h (joonis 7.50, f)

$$M_h = -158 \cdot 0,5 + \frac{20 \cdot 6^2}{8} = -79 + 90 = 11 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 7.50. Epüüride liitmine lõigetes j ja h paindemomendi arvutamiseks

3. Põikjõu epüüri ordinaatide arvutus

Arvestame kõiki vaadeldavast lõikest ühele poole jäävaid jõudusid. Leiame nende projektsioonide summa vaadeldavas lõikes varda teljega risti olevale teljele. Põikjõud on positiivne, kui ta püüab vardaosa pöörata päripäeva.

Lähtudes võimalikult väikesest töömahukusest, võiks raami vasakpoolsel osal paiknevates lõigetes põikjõu arvutamisel kasutada vastavast lõikest vasakule jäävaid jõudusid.

$$\sin \alpha = 0,1644; \quad \cos \alpha = 0,9864$$

$$Q_{a-i} = Q_{i-d} = -47 \text{ kN}; \quad Q_{i,konsool} = 25 \text{ kN}$$

$$Q_{d-j} = (80,83 - 25) \cdot 0,9864 - 47 \cdot 0,1644 = 47,34 \text{ kN}$$

$$Q_{j-c} = (80,83 - 25 - 30) \cdot 0,9864 - 47 \cdot 0,1644 = 17,75 \text{ kN}$$

$$Q_{j-c} = 47,34 - 30 \cdot 0,9864 = 17,75 \text{ kN}$$

Raami parempoolsel osal paiknevates lõigetes põikjõu arvutamisel võiks kasutada vastavast lõikest paremale jäävaid jõudusid.

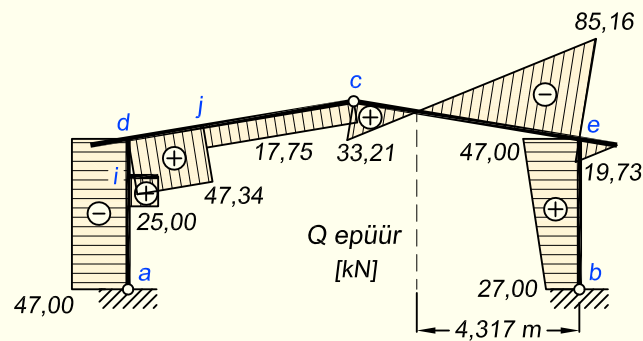
$$Q_b = 27 \text{ kN}; \quad Q_{eb} = 27 + 5 \cdot 4 = 47 \text{ kN}$$

$$Q_{e, \text{konsool}} = 20 \cdot 1 \cdot 0,9864 = 19,73 \text{ kN}$$

$$Q_{ec} = (-114,17 + 20 \cdot 1) \cdot 0,9864 + (27 + 5 \cdot 4) \cdot 0,1644 = -85,16 \text{ kN}$$

$$Q_{ce} = (-114,17 + 20 \cdot 7) \cdot 0,9864 + (27 + 5 \cdot 4) \cdot 0,1644 = 33,21 \text{ kN}$$

$$Q_{ce} = -85,16 + 20 \cdot 6 \cdot 0,9864 = 33,21 \text{ kN}$$



Joonis 7.51. Põikjõu epüür

Vardas $e-c$ leiame Q epüüri nullkoha kauguse parempoolselt järgmiselt

$$s = \frac{Q_{ec}}{p \cdot \cos \alpha} = \frac{85,16}{20 \cdot 0,9864} = 4,317 \text{ m}$$

Põikjõu epüüri ordinaate saame arvutada ka teisiti, kasutades selleks varraste tasakaalutingimusi.

Lauskoormusega kaldvardas $c-e$ põikjõu leidmiseks koostame tasakaaluvõrrandid varda otste suhtes, kasutades joonist 7.52, kus on näidatud nimetatud vardale mõjuvad jõud. Tundmatud põikjõud märgime joonisele positiivse suunaga, s.t nad peavad varrast pöörama päripäeva.

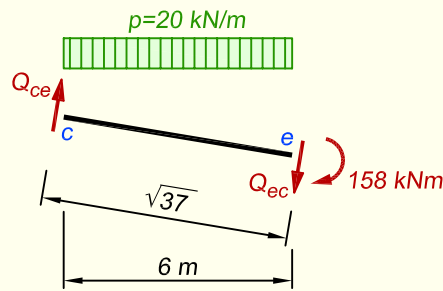
Tasakaaluvõrrandist punkti e suhtes saame põikjõu varda vasakpoolses otsas

$$\sum M_e = 0; \quad -Q_{ce} \cdot \sqrt{37} + 20 \cdot 6 \cdot 3 - 158 = 0; \quad Q_{ce} = 33,21 \text{ kN}$$

Tasakaaluvõrrandist punkti c suhtes saame põikjõu varda parempoolses otsas

$$\sum M_c = 0; \quad -Q_{ec} \cdot \sqrt{37} - 20 \cdot 6 \cdot 3 - 158 = 0; \quad Q_{ec} = -85,16 \text{ kN}$$

Joonisel 7.52 ei ole näidatud vardale mõjuvaid pikijõude, kuna need on varda telje sihilised ja seetõttu varda otstes olevate punktide suhtes momenti ei anna.



Joonis 7.52. Varda $c-e$ tasakaal

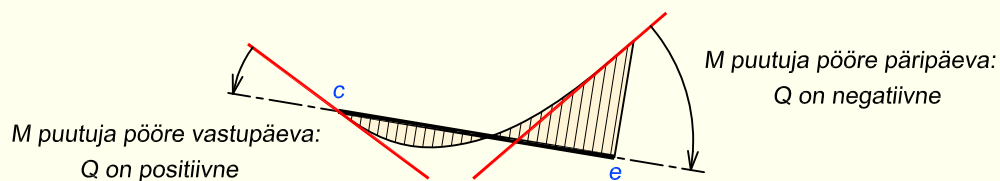
Varrastes, kus paindemoment muutub lineaarselt, saame põikjõu arvutada lihtsamalt, kasutades valemit

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta x}$$

kus ΔM on paindemomendi muut lõigu ulatuses ja Δx on lõigu pikkuse muut.

Põikjõu märgi saame kätte paindemomendi epüüri puutuja abil. Selleks joonestame M epüürile puutuja ning hakkame teda pöörama selliselt, et ta muutuks paralleelseks varda teljega. Vastupäeva pööre annab meile positiivse ja päripäeva pööre negatiivse põikjõu.

Näitena kontrollime põikjõu märke eespool arvatud vardas $c-e$. Joonestame puutuja paindemomendi epüüri vasakpoolsele osale (joonisel 7.53 vasakpoolne punane joon). Selleks, et ta muutuks paralleelseks varda teljega, peame teda pöörama vastupäeva, mis annab meile varda vasakusse otsa positiivse põikjõu. Seejärel joonestame puutuja paindemomendi epüüri parempoolsele osale (joonisel 7.53 parempoolne punane joon). Seda puutujat hakkame pöörama päripäeva, et ta muutuks varda teljega paralleelseks. Järelikult peab varda parempoolses otsas olema negatiivne põikjõud. Saadud märgid sobivad eespool arvatud ja joonisel 7.51 kujutatud epüüriga.



Joonis 7.53. Põikjõu epüüri märgi määramine paindemomendi epüüri abil

Leiame eespool mainitud valemiga põikjõu väärtused lineaarselt muutuva paindemomendiga varrastes, kasutades märgi leidmisel joonisega 7.53 kirjeldatud meetodikat.

$$Q_{a-i} = - \left| \frac{141}{3} \right| = -47 \text{ kN} \qquad Q_{i-d} = - \left| \frac{168 - 121}{1} \right| = -47 \text{ kN}$$

$$Q_{d-j} = \left| \frac{168 - 72}{\sqrt{4,1111}} \right| = 47,34 \text{ kN} \quad Q_{j-c} = \left| \frac{72}{\sqrt{16,4444}} \right| = 17,75 \text{ kN}$$

Varraste tasakaalul põhineva arvutusmeetodi puuduseks on asjaolu, et paindemomendi ordinaatide arvutamisel tehtud viga kandub edasi ka põikjõu arvutusse. Eespool kirjeldatud taandamisvõtte väldib seda probleemi, kuna on paindemomendi arvutusest sõltumatu.

4. Pikijõu epüüri ordinaatide arvutus

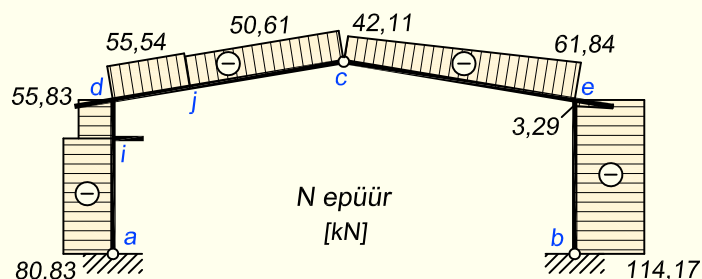
Pikijõu arvutamisel arvestame kõiki vaadeldavast lõikest ühele poole jäävaid jõudusid ning leiame nende projektsioonide summa vaadeldavas lõikes varda teljele. Positiivne pikijõud on tõmbejõud.

Raami vasakpoolisel osal paiknevates lõigetes pikijõu leidmisel alustame arvutust raami vasaku toe poolt, kuna siis on avaldistes vähem liikmeid.

$$\begin{aligned} N_{a-i} &= -80,83 \text{ kN} \\ N_{i-d} &= -80,83 + 25 = -55,83 \text{ kN} \\ N_{d-j} &= (-80,83 + 25) \cdot 0,1644 - 47 \cdot 0,9864 = -55,54 \text{ kN} \\ N_{j-c} &= (-80,83 + 25 + 30) \cdot 0,1644 - 47 \cdot 0,9864 = -50,61 \text{ kN} \\ N_{c-e} &= -55,54 + 30 \cdot 0,1644 = -50,61 \text{ kN} \end{aligned}$$

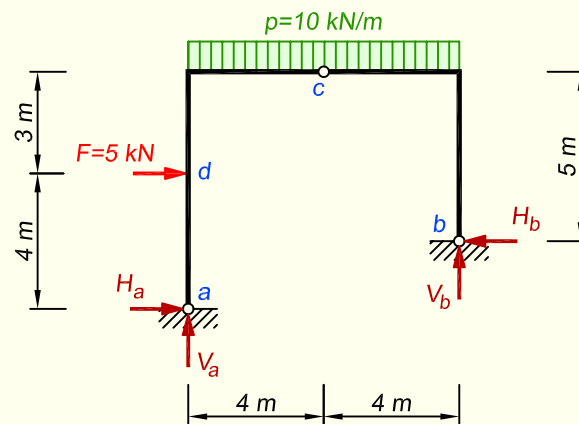
Raami parempoolisel osal paiknevates lõigetes pikijõu leidmisel alustame arvutust raami parema toe poolt.

$$\begin{aligned} N_{b-e} &= -114,17 \text{ kN} \\ N_{e,konsool} &= 20 \cdot 1 \cdot 0,1644 = 3,29 \text{ kN} \\ N_{ec} &= (-114,17 + 20 \cdot 1) \cdot 0,1644 + (-27 - 5 \cdot 4) \cdot 0,9864 = -61,84 \text{ kN} \\ N_{ce} &= (-114,17 + 20 \cdot 7) \cdot 0,1644 + (-27 - 5 \cdot 4) \cdot 0,9864 = -42,11 \text{ kN} \\ N_{ce} &= -61,84 + 20 \cdot 6 \cdot 0,1644 = -42,11 \text{ kN} \end{aligned}$$



Joonis 7.54. Pikijõu epüür

NÄIDE 7.8. Leida joonisel 7.55 kujutatud kolme liigendiga raami toereaktsioonid.



Joonis 7.55. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

Siin ülesandes läheb toereaktsioonide arvutamine keerukamaks, kuna raami toed on erineval kõrgusel. Esmalt leiame toereaktsioonid raami vasakpoolsel toel. Kirjutame välja momentide tasakaalu tingimuse kogu raamile toeliigendi *b* suhtes

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 8 + H_a \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 10 \cdot 8 \cdot 4 = 0$$

millest avaldame

$$V_a = \frac{H_a \cdot 2 + 310}{8}$$

Seejärel vaatleme raami vasaku poole tasakaalu ja kirjutame momentide tasakaalu tingimuse lukuliigendis *c*, kasutades leitud V_a avaldist

$$\begin{aligned} \sum M_c^v = 0; \quad & -\frac{H_a \cdot 2 + 310}{8} \cdot 4 + H_a \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \\ & -6H_a = -60 \quad \Rightarrow \quad H_a = 10 \text{ kN} \end{aligned}$$

Reaktsiooni V_a leiame saadud H_a väärtuse abil

$$V_a = \frac{10 \cdot 2 + 310}{8} = 41,25 \text{ kN}$$

Sarnaselt leiame toereaktsioonid raami toel *b*. Kirjutame välja momentide tasakaalu tingimuse kogu raamile toeliigendi *a* suhtes

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 8 + H_b \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 10 \cdot 8 \cdot 4 = 0$$

millest avaldame

$$V_b = \frac{-H_b \cdot 2 + 340}{8}$$

Seejärel vaatleme raami parema poole tasakaalu ja kirjutame momentide tasakaalu tingimuse lukuliigendis c , kasutades leitud V_b avaldist

$$\sum M_c^p = 0; \quad \frac{-H_b \cdot 2 + 340}{8} \cdot 4 - H_b \cdot 5 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$6H_b = 90 \quad \Rightarrow \quad H_b = 15 \text{ kN}$$

Reaktsiooni V_b leiame saadud H_b väärtuse abil

$$V_b = \frac{-15 \cdot 2 + 340}{8} = 38,75 \text{ kN}$$

Kontroll

$$\sum X = 5 + 10 - 15 = 0$$

$$\sum Z = -41,25 - 38,75 + 8 \cdot 10 = 0$$

7.12. Mitmesildelised ja -korruselised raamid

Mitmesildelised ja mitmekorruselised raamid koosnevad põhi- ja lisaosadest. Siin tuleb arvutamise järjekorra valikul lähtuda samadest põhimõtetest, millest oli eespool juttu mitmesildelise tala juures: koormused kanduvad lisaosadelt edasi põhiosadele, vastupidi aga mitte. Seetõttu arvutame algul lisaosade sisejõud ja toereaktsioonid. Põhiosa sisejõudude leidmisel arvestame lisaks põhiosale rakendatud koormusele ka lisaosade toereaktsioone.

Joonisel 7.56, *a* on kujutatud kolmesildeline raam. Selles arvutusskeemis on põhiosadeks raami äärmised silded *a-b-c* ja *d-e-f*, kuna need raami osad on geomeetriselt muutumatud ka ülejäänud elementide puudumisel. Vardad *g-h* ja *h-i* moodustavad lisaosa, kuna need vardad vajavad geomeetriselise muutumatuse tagamiseks ka kõrvalolevate põhiosade olemasolu.

Algul arvutame lisaosa *g-h-i* toereaktsioonid ja sisejõud (joonis 7.56, *b*).

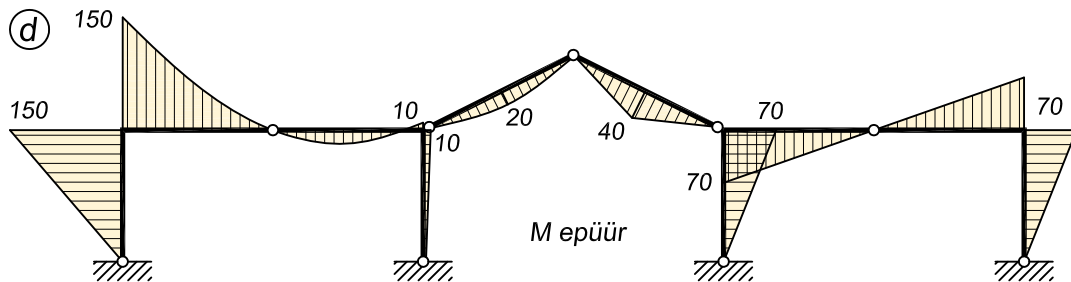
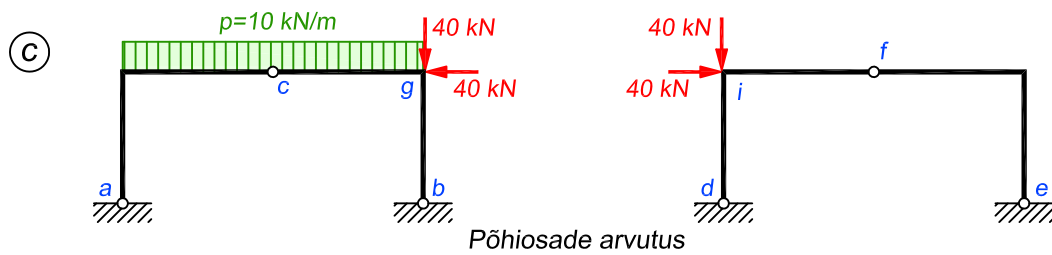
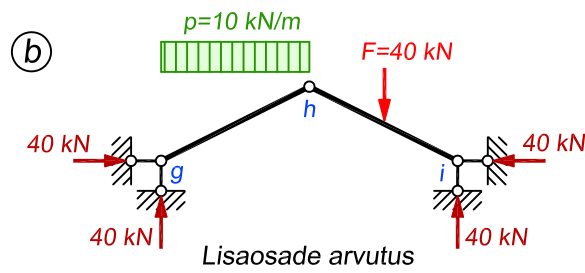
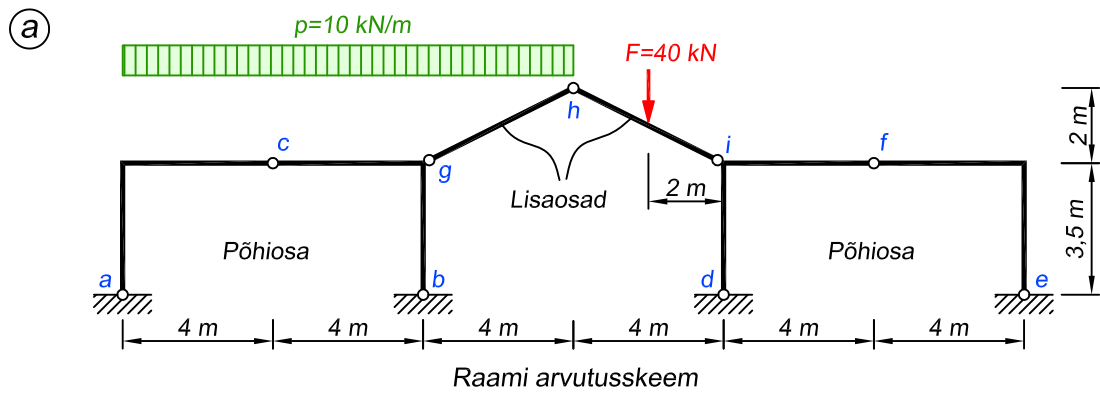
Põhiosade *a-b-c* ja *d-e-f* arvutamisel rakendame sõlmedesse *g* ning *i* lisaosa toereaktsioonid vastupidiste suundadega (joonis 7.56, *c*).

Raami paindemomendi epüür on näidatud joonisel 7.56, *d*.

Joonisel 7.57, *a* on esitatud teine kolmesildeline raam. Siin on põhiosaks keskmine sille, kuna see moodustub geomeetriselt muutumatust kolme liigendiga raamist *a-b-c*. Lisaosadeks on äärmistes silletes olevad vardad *f-g*, *g-d*, *e-h* ja *h-i*, kuna need elemendid on geomeetriselt muutumatud ainult siis, kui on olemas ka keskmine sille.

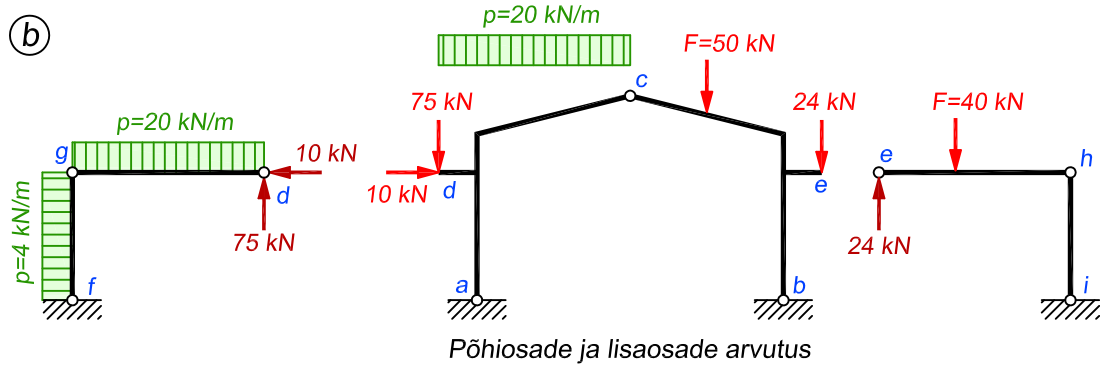
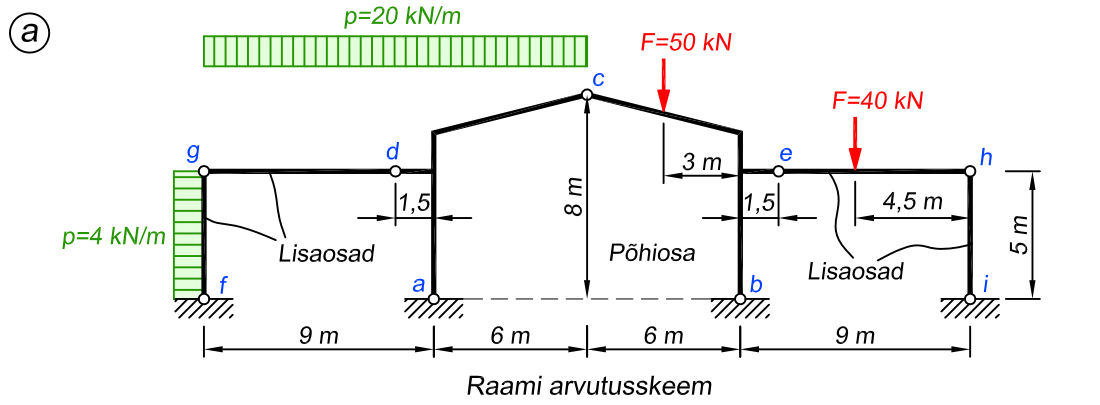
Algul leiame sisejõud ja toereaktsioonid lisaosades *f-g*, *g-d*, *e-h* ja *h-i* (joonis 7.57, *b*). Põhiosa *a-b-c* arvutamisel rakendame lõigetesse *d* ja *e* lisaosade *g-d* ning *e-h* reaktsioonid vastupidise suunaga (joonis 7.57, *b*).

Joonisel 7.58, *a* kujutatud kolmekorruselise raami põhiosaks on alumine raam *a-b-c* ning lisaosadeks teise ja kolmanda korruse raamid. Kõigi korruste raamid eraldivõetuna kujutavad endast kolme liigendiga raame.

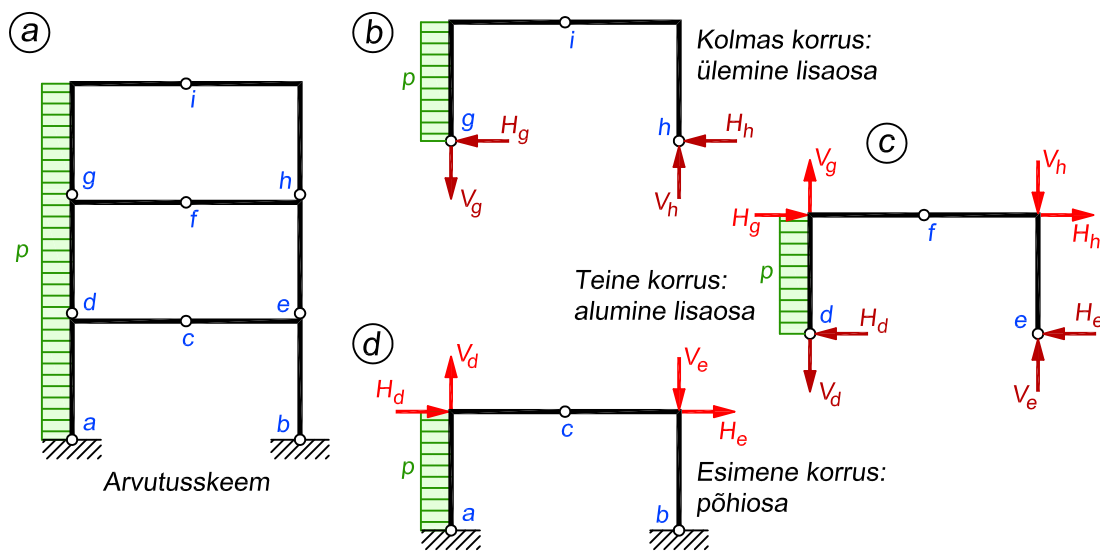


Joonis 7.56. Kolmesildeline raam põhiosadega äärmistes silletes

Arvutust alustame kolmanda korruse raamiga $g-h-i$, kuna see on kõige ülemine lisaosa ning leiame selle toereaktsioonid ja sisejõud (joonis 7.58, *b*). Seejärel rakendame kolmanda korruse raami toereaktsioonid teise korruse raamile $d-e-f$ ning leiame selle toereaktsioonid ja sisejõud (joonis 7.58, *c*). Viimasena arvutame alumise korruse raami $a-b-c$, rakendades sellele lisaks koormusele ka teise korruse raamilt edasiantavad koormused (joonis 7.58, *d*).

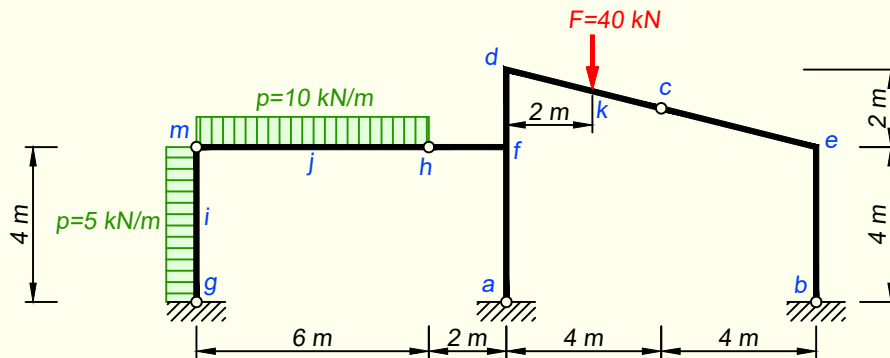


Joonis 7.57. Kolmesildeline raam põhiosaga keskmises sildes



Joonis 7.58. Kolmekorruseline raam

NÄIDE 7.9. Koostada joonisel 7.59 kujutatud kahesildelise raami paindemomendi, põikjõu ja pikijõu epüürid.

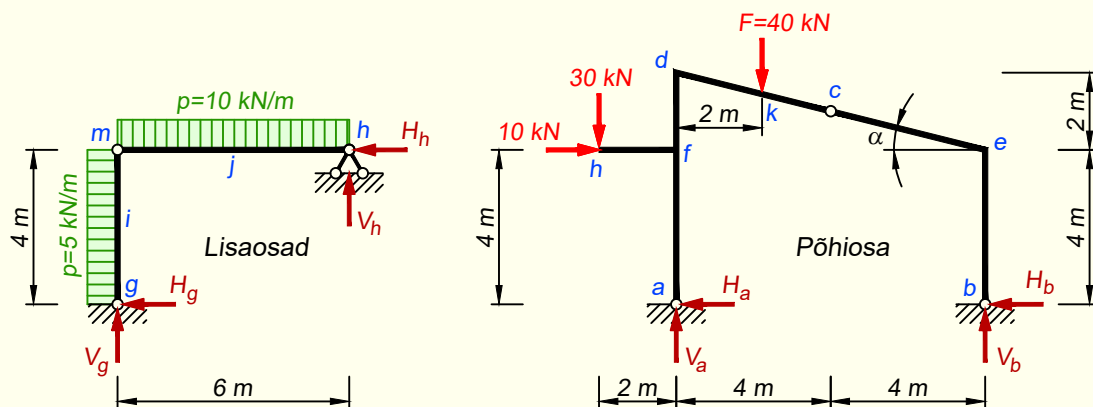


Joonis 7.59. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Enne toereaktsioonide leidmist tuleb raam jagada põhiosaks ja lisaosadeks (joonis 7.60). Põhiosaks on raami parempoolne osa $a-d-c-e-b$, kuna see moodustab kolme liigendiga raami ja on geomeetriselt muutumatu ka ilma vasakpoolse silde elementideta. Elementid $g-m$ ja $m-h$ on lisaosadeks, kuna need iseseisvalt püsti ei seisa ja vajavad geomeetriselt muutumatuse tagamiseks ka raami parempoolse osa olemasolu.



Joonis 7.60. Põhiosa ja lisaosad

Algul leiame toereaktsioonid lisaosadele, mis töötavad lihttaladena. Horisontaalsed reaktsioonid tekivad vardal $g-m$ olevast koormusest ning vertikaalsed vardal $m-h$ olevast koormusest

$$H_g = H_h = 5 \cdot 2 = 10 \text{ kN}; \quad V_g = V_h = 10 \cdot 3 = 30 \text{ kN}$$

Põhiosa toereaktsioonide arvutamisel rakendame lisaosade toereaktsioonid liigendi h kohal vastupidiste suundadega põhiosale (joonis 7.60). Põhiosa toereaktsioonid arvutame nagu tavalisel kolme liigendiga raamil.

Arvutame vertikaalsed toereaktsioonid toeliigendite a ja b suhtes kirjutatud tasakaalu võrranditest

$$\begin{aligned}\sum M_b = 0; & \quad -V_a \cdot 8 - 10 \cdot 4 + 30 \cdot 10 + 40 \cdot 6 = 0; \quad V_a = 62,5 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; & \quad V_b \cdot 8 - 40 \cdot 2 - 10 \cdot 4 + 30 \cdot 2 = 0; \quad V_b = 7,5 \text{ kN}\end{aligned}$$

Kontrolliks kirjutame toereaktsioonide ja raamile rakendatud koormuste tasakaalu tingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = -62,5 - 7,5 + 40 + 30 = 0$$

Horisontaalsed toereaktsioonid leiame raami lukuliigendi c suhtes kirjutatud tasakaalu võrranditest kummagi raami poole kohta

$$\begin{aligned}\sum M_c^v = 0; & \quad -H_a \cdot 5 - 62,5 \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 2 = 0; \quad H_a = 4,0 \text{ kN} \\ \sum M_c^p = 0; & \quad -H_b \cdot 5 + 7,5 \cdot 4 = 0; \quad H_b = 6,0 \text{ kN}\end{aligned}$$

Kontrolliks kirjutame horisontaalsete toereaktsioonide ja raamile rakendatud koormuste tasakaalu tingimuse horisontaalteljele

$$\sum X = 10 - 4 - 6 = 0$$

2. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutus

Lisaosadel on mõlemas otsas liigendid. Seetõttu leiame paindemomendid ainult varaste keskmistes lõigetes. Seda saame teha lauskoormusega koormatud lihttala paindemomendi valemiga

$$M_i = \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad M_j = \frac{10 \cdot 6^2}{8} = 45 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Põhiosa paindemomentide väärtused arvutame vastavalt kolme liigendiga raami reeglitele.

Alustame arvutust vasaku toe poolt

$$\begin{aligned}M_a &= 0 \\ M_{fa} &= 4 \cdot 4 = 16 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{fh} &= -30 \cdot 2 = -60 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{fd} &= 4 \cdot 4 - 30 \cdot 2 = -44 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_d &= 4 \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 30 \cdot 2 = -56 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_k &= 62,5 \cdot 2 + 4 \cdot 5,5 - 10 \cdot 1,5 - 30 \cdot 4 = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Parema toe poolt tulles saame

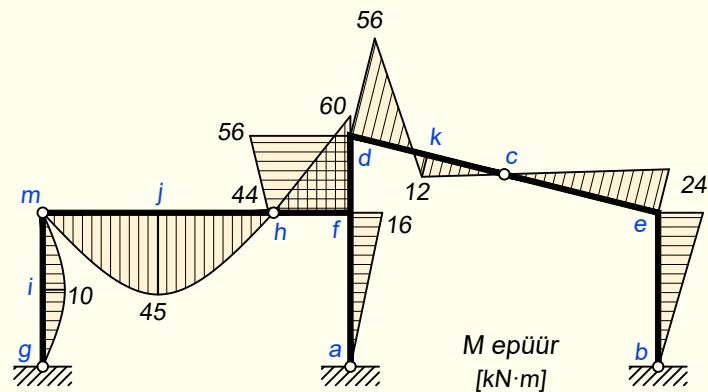
$$M_b = 0; \quad M_c = 0$$

$$M_e = -6 \cdot 4 = -24 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_k = 7,5 \cdot 6 - 6 \cdot 5,5 = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_d = -6 \cdot 6 + 7,5 \cdot 8 - 40 \cdot 2 = -56 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kuna vardad $d-c$ ja $c-e$ on sama sirge peal ning liigendi c kohal ei ole koondjõudu, siis ei tohi liigendi kohal ka paindemomendi epüüris murdepunkti olla ja epüür peab sellest liigendist sirgelt läbi minema.



Joonis 7.61. Paindemomendi epüür

3. Põikjõu epüüri ordinaatide arvutus

Lisaosade põikjõudude väärtused arvutame nagu lihttaladel varda vastava otsa toe-reaktsiooni kaudu

$$Q_{gm} = 10 \text{ kN}; \quad Q_{mg} = -10 \text{ kN}; \quad Q_{mh} = 30 \text{ kN}; \quad Q_{hm} = -30 \text{ kN}$$

Põhiosa põikjõudude väärtused arvutame vastavalt kolme liigendiga raami reeglitele.

$$\sin \alpha = 0,2425; \quad \cos \alpha = 0,9702$$

Alustame arvutust vasaku toe poolt

$$Q_{a-f} = 4 \text{ kN}; \quad Q_{h-f} = -30 \text{ kN}$$

$$Q_{f-d} = 4 - 10 = -6 \text{ kN}$$

$$Q_{d-k} = 62,5 \cdot 0,9702 - 4 \cdot 0,2425 + 10 \cdot 0,2425 - 30 \cdot 0,9702 = 32,99 \text{ kN}$$

$$Q_{k-e} = 32,99 - 40 \cdot 0,9702 = -5,82 \text{ kN}$$

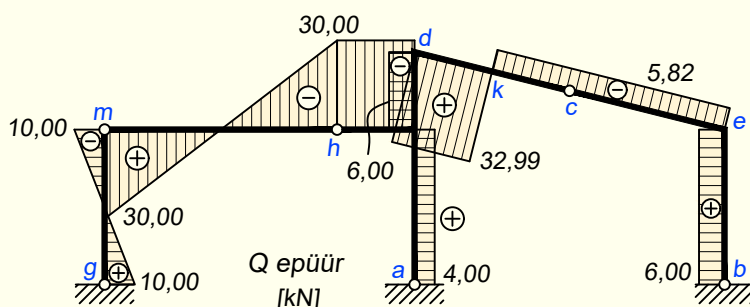
Parema toe poolt tulles saame

$$Q_{b-e} = 6 \text{ kN}$$

$$Q_{e-k} = 6 \cdot 0,2425 - 7,5 \cdot 0,9702 = -5,82 \text{ kN}$$

$$Q_{k-d} = -5,82 + 40 \cdot 0,9702 = 32,99 \text{ kN}$$

Kuna liigendi c kohal ühtegi koondjõudu ei ole, siis ei tohi selles kohas ka põikjõu epüüris mingit muutust olla ja epüür peab liigendi kohalt sirgelt läbi minema.



Joonis 7.62. Põikjõu epüür

4. Pikijõu epüüri ordinaatide arvutus

Lisaosade pikijõududeks saame

$$N_{g-m} = -30 \text{ kN}; \quad N_{m-h} = -10 \text{ kN}$$

Põhiosa pikijõududeks saame vasaku toe poolt arvutades

$$N_{a-f} = -62,5 \text{ kN}; \quad N_{h-f} = -10 \text{ kN}$$

$$N_{f-d} = -62,5 + 30 = -32,5 \text{ kN}$$

$$N_{d-k} = 62,5 \cdot 0,2425 + 4 \cdot 0,9702 - 30 \cdot 0,2425 - 10 \cdot 0,9702 = 2,06 \text{ kN}$$

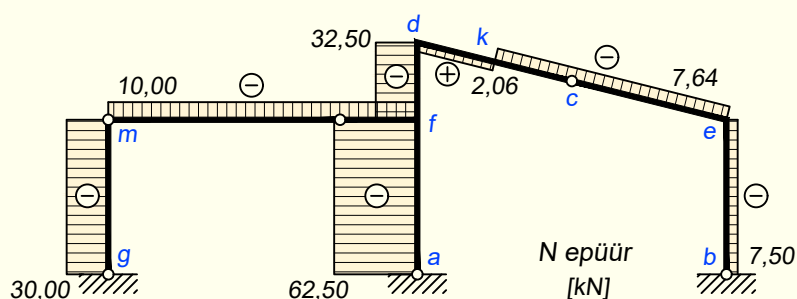
ja parema toe poolt tulles

$$N_{b-e} = -7,5 \text{ kN}$$

$$N_{e-k} = -7,5 \cdot 0,2425 - 6 \cdot 0,9702 = -7,64 \text{ kN}$$

$$N_{k-d} = -7,64 + 40 \cdot 0,2425 = 2,06 \text{ kN}$$

Kuna liigendi c kohal ühtegi koondjõudu ei ole, siis ei tohi seal ka pikijõu epüüris mingit muutust olla ja epüür peab liigendi kohalt sirgelt läbi minema.



Joonis 7.63. Pikijõu epüür

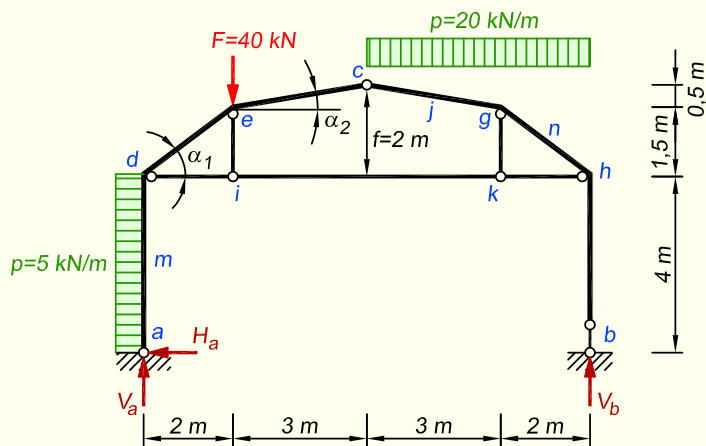
7.13. Tõmbiga kolme liigendiga kaar ja raam

Tõmbiga kolme liigendiga kaare ja raami (joonis 7.9) toereaktsioonid arvutame analoogiliselt lihttala toereaktsioonidega. Tõmbi sisejõu N_t leiame analoogiliselt kaare või raami horisontaalse reaktsiooniga H

$$N_t = \frac{M_c^0}{f} \quad (7.106)$$

kus f on liigendi c kaugus tõmbist. Vertikaalsest koormusest tekib tõmbis tõmme ning kaares ja raamis surve.

NÄIDE 7.10. Koostada joonisel 7.64 kujutatud tõmbiga raami paindemomendi, põikjõu ja pikijõu epüürid.



Joonis 7.64. Tõmbiga raami arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Kuna tugi b on liikuv liigendtugi ja horisontaalset reaktsiooni vastu ei võta, siis peab toe a horisontaalne reaktsioon olema võrdne horisontaalse lauskoormusega

$$\sum X = 0; \quad -H_a + 5 \cdot 4 = 0; \quad H_a = 20 \text{ kN}$$

Vertikaalsed toereaktsioonid leiame raami toeliigendite a ja b suhtes koostatud momentide tasakaalutingimuste abil

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad & -V_a \cdot 10 - 5 \cdot 4 \cdot 2 + 40 \cdot 8 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0; \quad V_a = 53 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad & V_b \cdot 10 - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 40 \cdot 2 - 20 \cdot 5 \cdot 7,5 = 0; \quad V_b = 87 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontrolliks kirjutame toereaktsioonide ja raamile rakendatud koormuste tasakaalu tingi-

muse vertikaalteljele

$$\sum Z = -53 - 87 + 40 + 20 \cdot 5 = 0$$

2. Tõmbi sisejõu leiame raami lukuliigendi c suhtes kirjutatud tasakaaluvõrrandist raami ühe poole kohta

$$\sum M_c^v = 0; \quad N_{i-k} \cdot 2 - 53 \cdot 5 - 20 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \cdot 4 + 40 \cdot 3 = 0$$

$$N_{i-k} = \frac{53 \cdot 5 + 20 \cdot 6 - 5 \cdot 4 \cdot 4 - 40 \cdot 3}{2} = \frac{M_c^0}{f} = 92,5 \text{ kN}$$

Kontrolliks kasutame tasakaalutingimust raami teise poole kohta

$$\sum M_c^p = 0; \quad -N_{i-k} \cdot 2 + 87 \cdot 5 - 20 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0; \quad N_{i-k} = 92,5 \text{ kN}$$

Tõmbi varrastes $e-i$ ja $g-k$ pikijõudu ei esine, mis jäeldub sõlmede i ja k vertikaalsuunalisest tasakaalust.

3. Pändemomendi epüüri ordinaatide arvutus

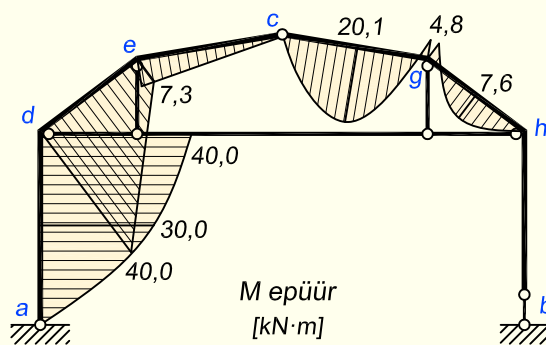
$$M_d = 20 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_e = 53 \cdot 2 + 20 \cdot 5,5 - 5 \cdot 4 \cdot 3,5 - 92,5 \cdot 1,5 = 7,25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_g = 87 \cdot 2 - 92,5 \cdot 1,5 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = -4,75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_m = \frac{40}{2} + \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad M_j = \frac{20 \cdot 3^2}{8} - \frac{4,75}{2} = 20,1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_n = \frac{20 \cdot 2^2}{8} - \frac{4,75}{2} = 7,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 7.65. Pändemomendi epüür

4. Põikjõu epüüri ordinaatide arvutus

$$\sin \alpha_1 = 0,6; \quad \cos \alpha_1 = 0,8; \quad \sin \alpha_2 = 0,1644; \quad \cos \alpha_2 = 0,9864$$

$$Q_{ad} = 20 \text{ kN}; \quad Q_{da} = 20 - 5 \cdot 4 = 0 \text{ kN}$$

$$Q_{d-e} = 53 \cdot 0,8 - (5 \cdot 4 - 20 + 92,5) \cdot 0,6 = -13,1 \text{ kN}$$

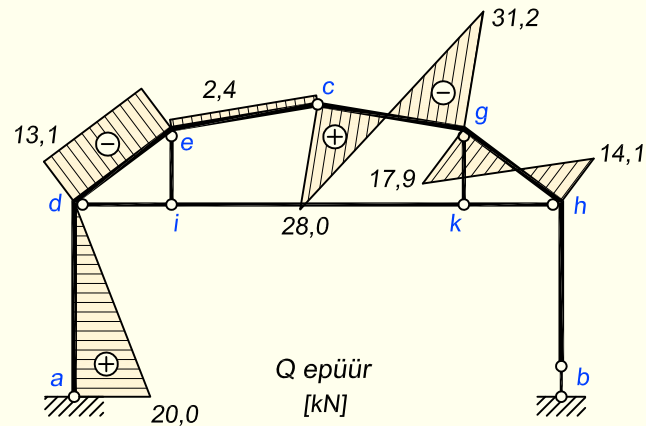
$$Q_{e-c} = (53 - 40) \cdot 0,9864 - (5 \cdot 4 - 2 + 92,5) \cdot 0,1644 = 12,82 - 15,21 = -2,4 \text{ kN}$$

$$Q_{cg} = 12,82 + 15,21 = 28,0 \text{ kN}$$

$$Q_{gc} = (20 \cdot 2 - 87) \cdot 0,9864 + 15,21 = -31,2 \text{ kN}$$

$$Q_{gh} = (20 \cdot 2 - 87) \cdot 0,8 + 92,5 \cdot 0,6 = 17,9 \text{ kN}$$

$$Q_{hg} = -87 \cdot 0,8 + 92,5 \cdot 0,6 = 14,1 \text{ kN}$$



Joonis 7.66. Põikjõu epüür

5. Pikijõu epüüri ordinaatide arvutus

$$N_{a-d} = -53 \text{ kN}; \quad N_{b-h} = -87 \text{ kN}$$

$$N_{d-e} = -53 \cdot 0,6 - (5 \cdot 4 - 20 + 92,5) \cdot 0,8 = -105,8 \text{ kN}$$

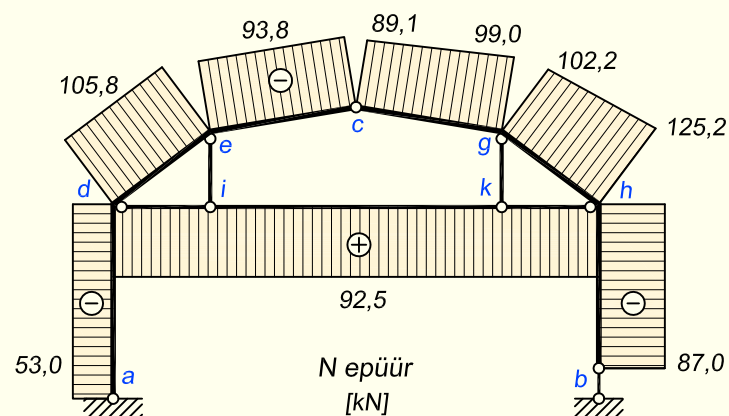
$$N_{e-c} = -(53 - 40) \cdot 0,1644 - 92,5 \cdot 0,9864 = -2,14 - 91,24 = -93,4 \text{ kN}$$

$$N_{cg} = 2,14 - 91,24 = -89,1 \text{ kN}$$

$$N_{gc} = -(87 - 20 \cdot 2) \cdot 0,1644 - 91,24 = -99,0 \text{ kN}$$

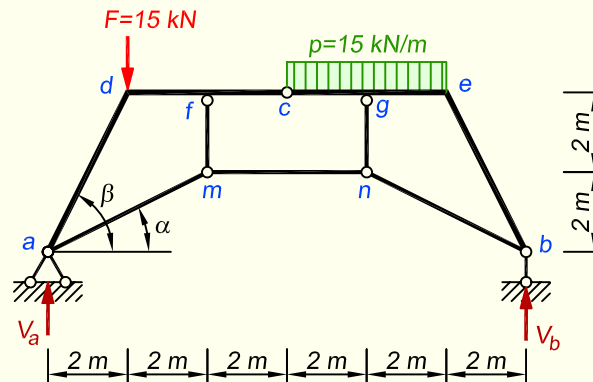
$$N_{gh} = -(87 - 20 \cdot 2) \cdot 0,6 - 92,5 \cdot 0,8 = -102,2 \text{ kN}$$

$$N_{hg} = -87 \cdot 0,6 - 92,5 \cdot 0,8 = -126,2 \text{ kN}$$



Joonis 7.67. Pikijõu epüür

NÄIDE 7.11. Arvutada joonisel 7.68 kujutatud murtud tõmbiga kolme liigendiga raami sisejõud.



Joonis 7.68. Murtud tõmbiga raami arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 12 + 15 \cdot 10 + 15 \cdot 4 \cdot 4 = 0; \quad V_a = 32,5 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 12 - 15 \cdot 2 + 15 \cdot 4 \cdot 8 = 0; \quad V_b = 42,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontrolliks kirjutame toereaktsioonide ja raamile rakendatud koormuste tasakaalu tingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = -32,5 - 42,5 + 15 + 15 \cdot 4 = 0$$

2. Tõmbi varraste pikijõudude arvutus

Tõmbi $m-n$ pikijõu leiame liigendi c suhtes koostatud momentide tasakaalu tingimusest (joonis 7.69, a)

$$\sum M_c^v = 0; \quad N_{m-n} \cdot 2 - 32,5 \cdot 6 + 15 \cdot 4 = 0; \quad N_{m-n} = 67,50 \text{ kN}$$

Kontrolliks kirjutame tasakaalutingimuse raami parema poole kohta

$$\sum M_c^p = 0; \quad -N_{m-n} \cdot 2 + 42,5 \cdot 6 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad N_{m-n} = 67,50 \text{ kN}$$

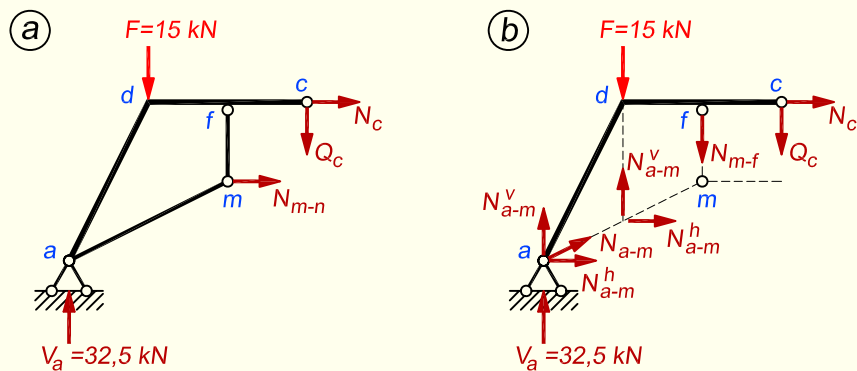
Tõmbide $a-m$ ja $m-f$ sisejõud leiame sõlme m suhtes koostatud tasakaalutingimustest

$$\sin \alpha = 0,4472; \quad \cos \alpha = 0,8944; \quad \tan \alpha = 0,5$$

$$\sum X = 0; \quad -N_{a-m} \cos \alpha + N_{m-n} = 0; \quad N_{a-m} = \frac{N_{m-n}}{\cos \alpha} = \frac{67,5}{0,8944} = 75,47 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0; \quad -N_{m-f} + N_{m-a} \sin \alpha = 0$$

$$N_{m-f} = N_{m-a} \sin \alpha = N_{m-n} \tan \alpha = 67,5 \cdot 0,5 = 33,75 \text{ kN}$$



Joonis 7.69. Raami osa $a-d-c$

3. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutus

Sõlmes d paindemomendi arvutamiseks lahutame tõmbi $a-m$ pikijõu kaheks komponendiks (joonis 7.69, b). Vertikaalne komponent on võrdne tõmbi $m-f$ pikijõuga

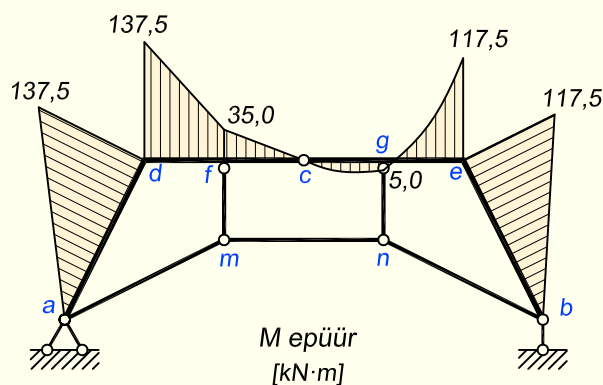
$$N_{a-m}^v = N_{m-f} = 33,75 \text{ kN}$$

ja horisontaalne komponent tõmbi $m-n$ pikijõuga

$$N_{a-m}^h = N_{m-n} = 67,50 \text{ kN}$$

Tõmbi $a-m$ pikijõu lahutame komponentideks sõlme d läbival vertikaalil, kuna sel juhul on vertikaalse komponendi moment null. Nüüd saame tõmbi pikijõu komponentide abil lõikes d paindemomendiks

$$M_d = 32,5 \cdot 2 - 67,5 \cdot 3 = -137,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 7.70. Paindemomendi epüür

Kui tõmbi $a-m$ pikijõud lahutada komponentideks toeliigendis a , siis annavad mõlemad momendi sõlme d suhtes

$$M_d = 32,5 \cdot 2 - 67,5 \cdot 4 + 33,75 \cdot 2 = -137,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Edasi arvutame välja ka kõik ülejäänud paindemomendi epüüri ordinaadid

$$M_e = 42,5 \cdot 2 - 67,5 \cdot 3 = -117,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(M_e = 42,5 \cdot 2 - 67,5 \cdot 4 + 33,75 \cdot 2 = -117,5 \text{ kN}\cdot\text{m})$$

$$M_f = 32,5 \cdot 4 - 15 \cdot 2 - 67,5 \cdot 2 = -35 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(M_f = 32,5 \cdot 4 - 15 \cdot 2 + 33,75 \cdot 4 - 67,5 \cdot 4 = -35 \text{ kN}\cdot\text{m})$$

$$(M_f = -17,5 \cdot 2 = -35 \text{ kN}\cdot\text{m, kus } Q_c = 17,5 \text{ kN})$$

$$M_g = 42,5 \cdot 4 - 67,5 \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(M_g = 17,5 \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \text{ kN}\cdot\text{m, kus } Q_c = 17,5 \text{ kN})$$

Kuna kõik tõmbi vardad on mõlemast otsast liigenditega ja otseselt koormamata, siis tekivad nendes varrestes ainult pikijõud. Seetõttu pole vajadust tõmbi varrestes paindemomendi ega põikjõudu arvutada.

4. Põikjõu epüüri ordinaatide arvutus

$$\sin \beta = 0,8944; \quad \cos \beta = 0,4472$$

$$Q_{a-d} = (32,5 + 33,75) \cdot 0,4472 - 67,5 \cdot 0,8944 = -30,75 \text{ kN}$$

$$Q_{d-f} = 32,5 + 33,75 - 15 = 51,25 \text{ kN}$$

$$Q_{f-c} = 51,25 - 33,75 = 17,5 \text{ kN}$$

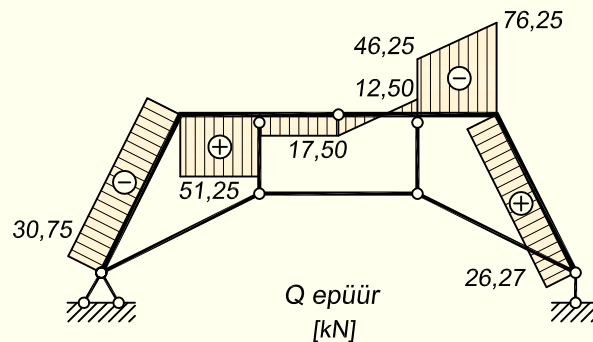
$$Q_{b-e} = (-42,5 - 33,75) \cdot 0,4472 + 67,5 \cdot 0,8944 = 26,27 \text{ kN}$$

$$Q_{eg} = -42,5 - 33,75 = -76,25 \text{ kN}$$

$$Q_{ge} = -76,25 + 15 \cdot 2 = -46,25 \text{ kN}$$

$$Q_{gc} = -46,25 + 33,75 = -12,5 \text{ kN}$$

$$Q_{cg} = -12,5 + 15 \cdot 2 = 17,5 \text{ kN}$$



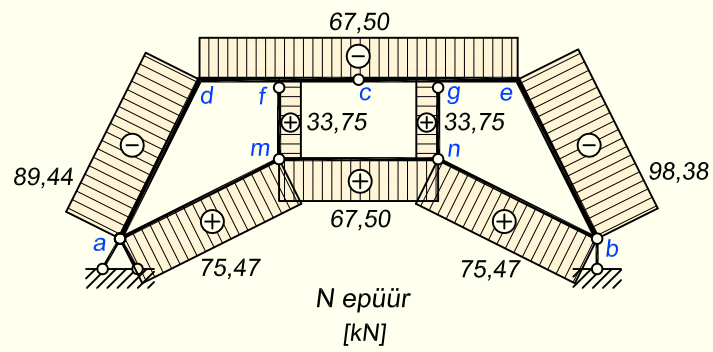
Joonis 7.71. Põikjõu epüür

5. Pikijõu epüüri ordinaatide arvutus

$$N_c = -N_{m-n} = -67,5 \text{ kN}$$

$$N_{a-d} = -(32,5 + 33,75) \cdot 0,8944 - 67,5 \cdot 0,4472 = -89,44 \text{ kN}$$

$$N_{b-e} = -(42,5 + 33,75) \cdot 0,8944 - 67,5 \cdot 0,4472 = -98,38 \text{ kN}$$



Joonis 7.72. Pikijõu epüür

Peatükk 8

TASANDSÕRESTIKUD

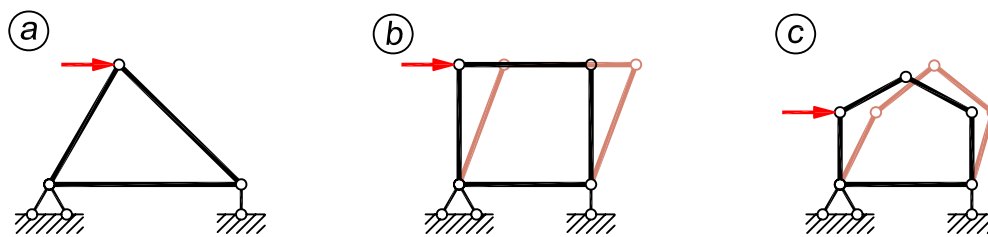
8.1. Sissejuhatus

Sõrestikuks nimetatakse saledatest varrastest moodustatud konstruktsiooni, mille vardad on ühendatud ainult otspunktides ning mis säilitab geomeetrilise muutumatusena ka siis, kui selle kõik jäigad sõlmed asendada liigendsõlmedega.

Üldjuhul moodustavad sõrestike vardad kolmnurkse võrgustiku, kuna kolmnurk on lihtsaim geomeetriselt muutumatu kujund, mis säilitab oma kuju ka liigendsõlmede korral. Fotol 8.1 on näha Tallinnas paikneva Tondiraba jäähalli liimpuidust valmistatud 62 m sildega katusesõrestikud, mis koosnevad kolmnurkadest.



Foto 8.1. Tallinna Tondiraba jäähalli katusesõrestikud (foto: Arcwood)

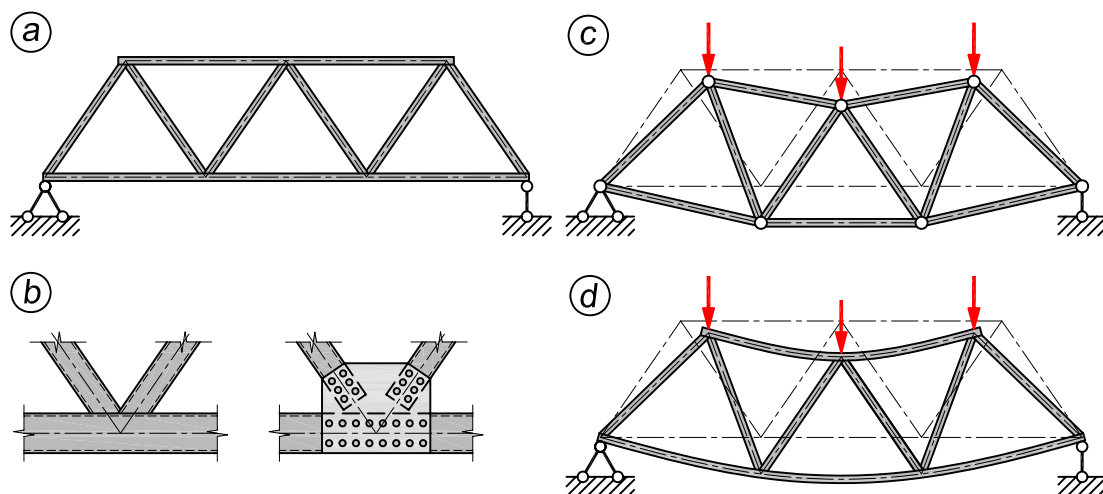


Joonis 8.1. Kolmnurkse arvutuskeemi võrdlus teiste kujunditega

Joonisel 8.1, *a* on kujutatud kolmest vardast moodustatud arvutuskeem, mille puhul on selgelt näha, et koormuse mõjul ei saa selle kuju muutuda ilma elementide deformatsioonidega (paindumise ja pikkuse muutuseta). Joonisel 8.1, *b* ja *c* on aga näidatud neli- ja viisnurkne skeem, mis vajuvad koormuse mõjul kokku ilma elementide deformeerumiseta ehk teisiti öeldes, need konstruktsioonid saavad kuju muuta, ilma et ükski nende element painduks või muudaks oma pikkust. Kuid siinjuures tuleb kindlasti lisada ka seda, et mõningad sõrestikud võivad sisaldada lisaks kolmnurkadele ka teisi kujundeid.

Jäigad ja liigendsõlmed

Tegelikud sõrestiku sõlmed konstrueeritakse üldiselt jäikadena. Näiteks joonisel 8.2, *a* kujutatud terrassõrestiku sõlmed tehakse kas keevis- või poltliitega (joonis 8.2, *b*), mis jäävad väga kaugemale hõõrdevabast liigendist. Sellele vaatamata, kasutatakse arvutustes tavaliselt liigendsõlmi. Hõõrdevabad liigendid võimaldavad ühes sõlmes ühendatud varraste vastastikust pööret, kusjuures vardad jäävad sirgeks (joonis 8.2, *c*) ja neis tekivad ainult pikijõud. Jäikade sõlmede puhul ei saa ühes sõlmes ühendatud vardad vastastikku pöörduda. Sõrestiku koormamisel pöörduvad ühes sõlmes jäigalt ühendatud varraste otsristlõiked võrdse nurga võrra,



Joonis 8.2. Sõrestikkonstruktsioon ja selle deformeerumine koormamisel

mistõttu esialgselt sirged vardad kõverduvad (joonis 8.2, *d*) ja nüüd tekib varrestes lisaks pikijõule ka paindemoment.

Sõlmede jäikuse arvestamisel on sõrestiku arvutuskeem paljukordselt staatikaga määratu ja sisejõudude leidmine nõuab suurt arvutustööd. Pikkade ja saledate varrestega sõrestikus on sõlmede jäikusest tekkivad paindepinged väikesed ning moodustavad mõne protsendi pingetest, mis saadakse liigendsõlmedega arvutuskeemi järgi lahendamisel. Seepärast kasutatakse ülesande lahendamisel eeldust, et sõrestiku arvutuskeemi sõlmed on hõõrdevabad liigendid. Kuna liigendites ei kanta edasi paindemomenti, siis arvestatakse, et sõrestiku vardad töötavad ainult pikijõule.

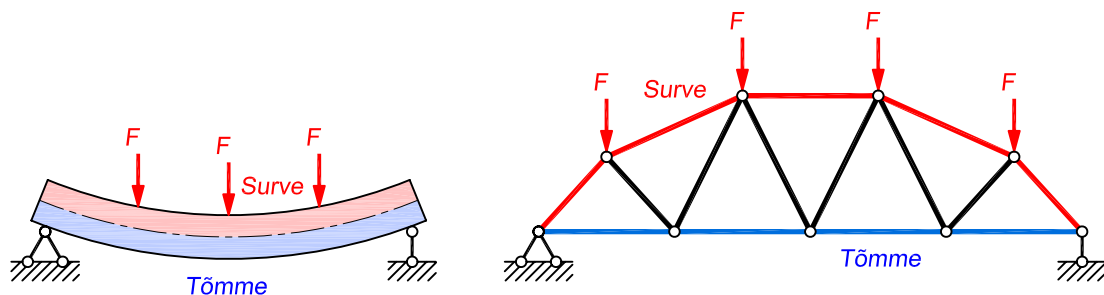
Siinjuures on aga oluline see, et iga konstruktsiooni puhul tuleb kindlasti analüüsida liigendsõlmede hüpoteesi paikapidavust, sest suure ristlõikega varraste või ekstsentriliste sõlmede puhul võib osutuda vajalikuks ka tekkivate paindemomentide arvestamine ja sel juhul tuleb arvutuses kasutada jäiku sõlmi.

Talasõrestiku võrdlus lihttalaga

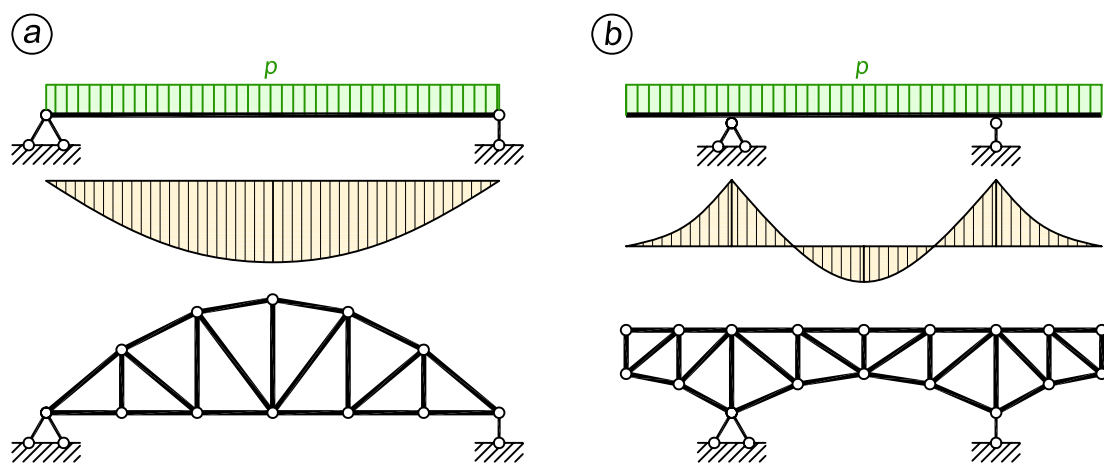
Sõrestikke kasutatakse samadel eesmärkidel nagu talasid, ainult et nendega kaetavad avad on palju suuremad kui talade puhul.

Talasõrestiku tööpõhimõte on sarnane lihttalale (joonis 8.3). Ülevalt alla suunatud koormuse korral on lihttalal ülemised kiud surutud ja alumised tõmmatud, samuti on sõrestikul ülemise vöö vardad (sõrestiku elementide nimetusi vt jooniselt 8.7) surutud ja alumise vöö vardad tõmmatud ehk teisiti öeldes, talas esineva paindemomendi võtavad sõrestikul vastu vöövardad oma pikijõuga. Talal võtab põikjõudu vastu täisseinaline osa, sõrestikul on täisseinaline osa asendatud võrguvarrestega. Seetõttu võib sõrestikku vaadelda kui tala, millest on eemaldatud liigne materjal.

Sageli on mõistlik sõrestiku kõrgust varieerida vastavalt lihttala paindemomendi epüürile. Näiteks on ühtlase lauskoormusega talal suurim paindemoment silde keskel ja sellest lähtuvalt võiks ka sõrestiku kõrgus olla suurim just silde keskel (joonis 8.4, *a*). Kui sõrestik jätkub üle tugede, siis sellele vastava konsoolidega tala paindemomendi epüüril võivad piisavalt pikkade konsoolide korral toeordinaadid olla suuremad, kui on silde keskel olev ordinaat (joonis 8.4, *b*). Sel juhul tasub ka sõrestik projekteerida tugede kohal kõrgem kui sildes. Siin on heaks näiteks New Yorgis paiknev Queensboro sild (foto 8.2).



Joonis 8.3. Lihttala ja sõrestiku surutud ja tõmmatud osade võrdlus



Joonis 8.4. Sõrestiku kõrguse muutmine vastavalt tala M epüürile

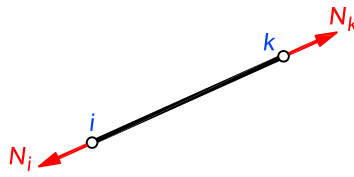
Sõrestiku kasutamise eelis võrreldes talaga seisneb selles, et sama silde ja sama kõrgusega konstruktsiooni korral võimaldab sõrestiku kasutamine projekteerijal säästa suures koguses materjali ja alandada seega konstruktsiooni maksumust. Võime ka öelda teisiti – võrdse materjalikoguse juures saab sõrestikuga sillata oluliselt pikema ava kui talaga.



Foto 8.2. Queensboro sild New Yorgis (foto: Wikimedia Commons)

Sõrestiku varrad

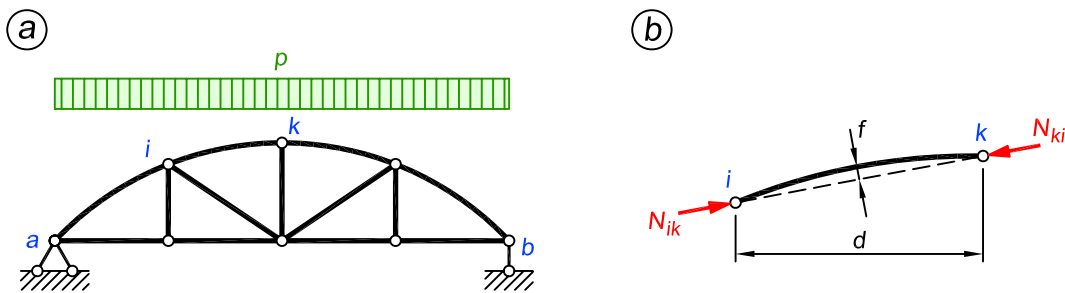
Arvutusskeemis on sõrestiku varras kujutatud lõiguga, mis ühtib varda geomeetrilise teljega. Tasandsõrestiku varraste telgjooned asetsevad ühes tasandis. Varraste ristlõiked on sümmeetrilised ja sümmeetriatelg asub sõrestiku tasandis. Sõlme geomeetriliseks tsentriks nimetatakse punkti, milles lõikuvad sõlmes ühendatud varraste telgjooned.



Joonis 8.5. Sõrestikust eemaldatud sirge varras otses paiknevate ja teiste varraste mõju väljendavate jõududega

Sõrestik konstrueeritakse tavaliselt sirgete varrastega ja koormus rakendatakse ainult sõlmedesse (siin võib ka muidugi erandeid olla). Sel juhul on vardad sõlmede vahel otseselt koormamata ja hõõrdevabade liigendite eeldusel tekivad varrastes ainult pikijõud. Teiste varrastega otstest hõõrdevabade liigenditega ühendatud sirge varda eemaldamisel ülejäänud sõrestikust asendatakse teiste varraste mõju sõlmedes i ja k mõjuvate jõududega N_i ning N_k (joonis 8.5). Varras on nende kahe jõu mõjul tasakaalus ainult siis, kui need jõud on võrdsed, vastassuunalised ja asetsevad samal sihil. Seepärast põhjustavad sihil i - k mõjuvad jõud N_i ja N_k sirges vardas ainult pikijõu.

Sõlmede vahel ühtlaselt jaotatud koormusega otseselt koormatud vardad projekteeritakse vahel ka kõveratena (joonis 8.6). Sõlmede i ja k sihil mõjuvad jõud N_{ik} ning N_{ki} põhjustavad kõveras vardas peale pikijõu ka paindemomente ja põikjõude. Varda kõverus valitakse nii, et jõust N_{ik} põhjustatud suurim paindemoment $M = -N_{ik}f$ (joonis 8.6, b) on võrdne, kuid vastupidise märgiga, ühtlaselt jaotatud koormusest põhjustatud suurima paindemomendiga $M = pd^2/8$, kus p on koormuse intensiivsus piki horisontaali ja d on sõlmede i ning k vahelise lõigu horisontaalprojektsioon.



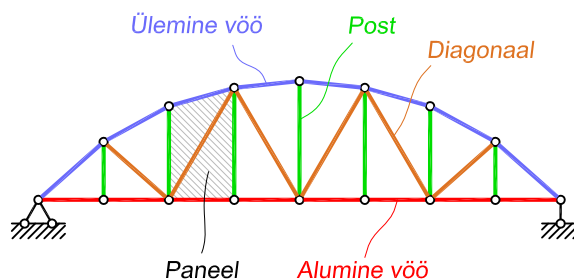
Joonis 8.6. Kõverate koormatud varrastega sõrestik

Sõrestiku jäikus

Kui omas tasapinnas on sõrestikud väga jäigad, siis ristisuunas on nad väga painduvad ja selles suunas tuleb neid stabiilsuse kao ohu tõttu tugevdada. Kuna harilikult kasutatakse nii hoone- kui sillakonstruktsioonides rohkem kui ühte kõrvutiasetsevat sõrestikku, siis seotakse need sõrestikud omavahel varrastega, nii et tekib jäik karbitaoline konstruktsioon.

8.2. Sõrestikskeemide põhimõisted ja liigitus

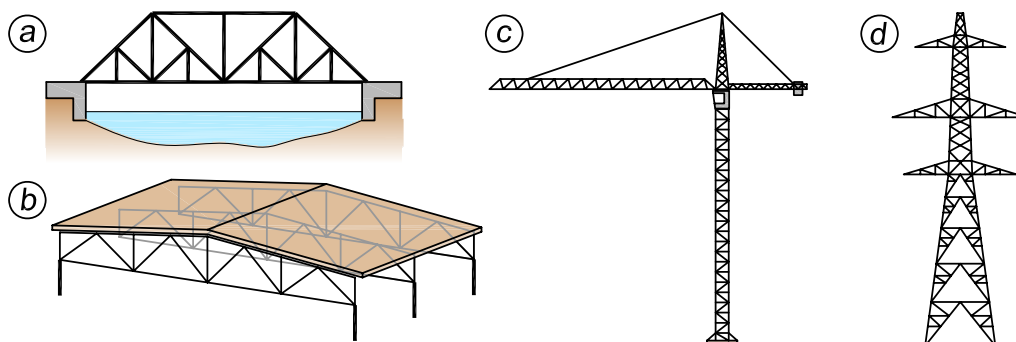
Sõrestiku ülemised vardad moodustavad *ülemise vöö* ja alumised vardad *alumise vöö* (joonis 8.7). Vöödevahelised vardad moodustavad sõrestiku *võrgu*. Võrgu vertikaalseid vardaid nimetatakse *postideks* ja kaldvardaid *diagonaalideks*. Toe pool kõrgemal asuva otsaga diagonaali nimetatakse langevaks ja madalamal asuva otsaga tõusvaks diagonaaliks. Kahe posti vahele jääv osa on sõrestiku *paneel*. Horisontaalse vöö kahe naabersõlme vahekaugust nimetatakse *paneeli pikkuseks*.



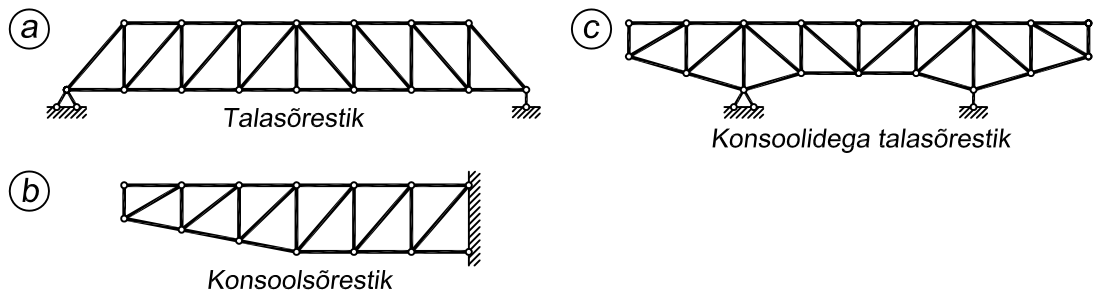
Joonis 8.7. Sõrestiku elementide nimetused

Sõrestikke liigitatakse järgmiste tunnuste järgi:

1. **ülesanne** – sillasõrestikud (joonis 8.8, a); katusesõrestikud (b); kraanasõrestikud (c); kõrgepingeliinide sõrestikmastid (d); raadiomastid; tornisõrestikud jne;
2. **toereaktsioonid** – talasõrestikud (joonis 8.9, a); konsoolsõrestikud (joonis 8.9, b); konsoolidega talasõrestikud (joonis 8.9, c); kaar- ja raamsõrestikud, rippõrestikud (joonis 9.2, c); kombineeritud sõrestikud (näiteks kaarele toetuv talasõrestik joonisel 9.2, b);
3. **kuju** – paralleelvöödega sõrestikud (joonis 8.10, a); polügonaalvööga sõrestikud, mille üks vöö on hulknurkne (b); kolmnurksõrestikud (c); kõvera vööga sõrestikud, mille



Joonis 8.8. Erineva ülesandega sõrestikke

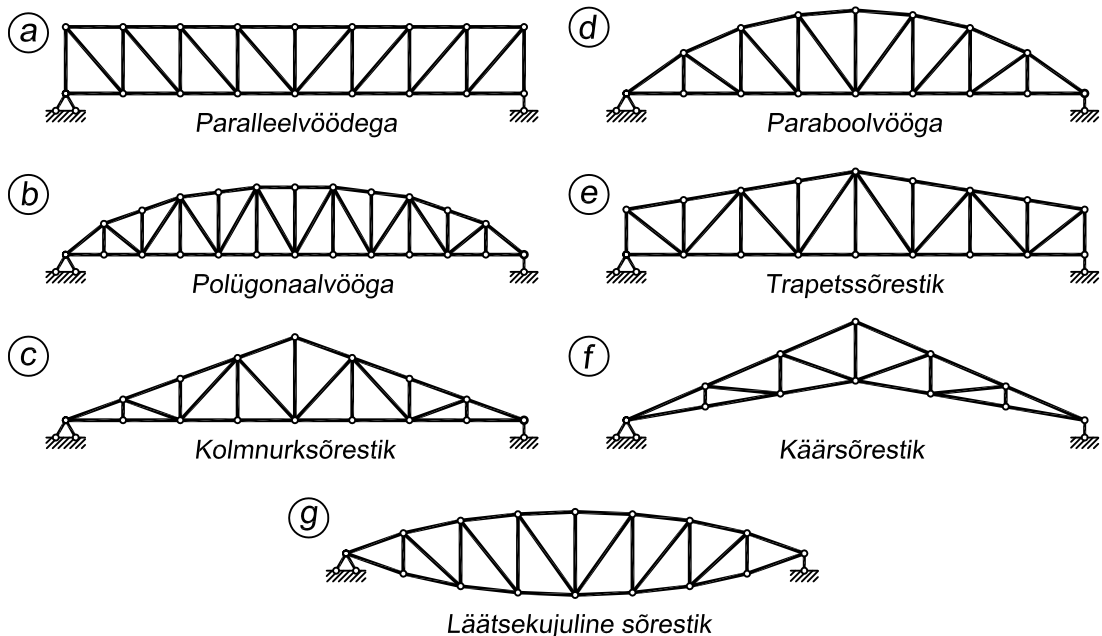


Joonis 8.9. Erineva toetusega sõrestikke

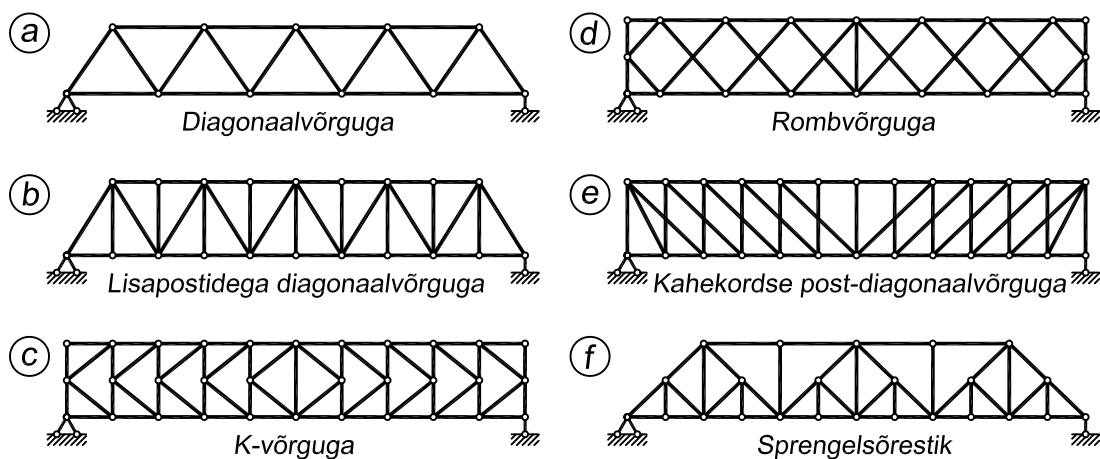
vöövardad on sirged, kuid sõlmede tsentrid asuvad kõverjoonel (näiteks paraboolvööga sõrestik joonisel *d*); kõverad võivad olla ka mõlemad vööd; trapetsõrestikud (*e*); käärsõrestikud (*f*); läätsekujulised sõrestikud (*g*);

4. **võrk** – diagonaalvõrguga sõrestikud (joonis 8.11, *a*); post-diagonaalvõrguga sõrestikud (joonis 8.10, *a*); lisapostidega diagonaalvõrguga sõrestikud (joonis 8.11, *b*); K-võrguga sõrestikud (*c*); rombivõrguga sõrestikud (*d*); kahekordse post-diagonaalvõrguga sõrestikud (*e*) ja sprenge sõrestikud (*f*), mis koosnevad diagonaal- või post-diagonaal- võrguga sõrestikust ja lisaelementidest, mida nimetatakse sprengeks.

Inglisekeelsetes maades kasutatakse paljude sõrestike puhul inseneride nimesid, kes selle kujuga sõrestiku esimesena laialdaselt kasutusele võttis. Toome siin välja kolm

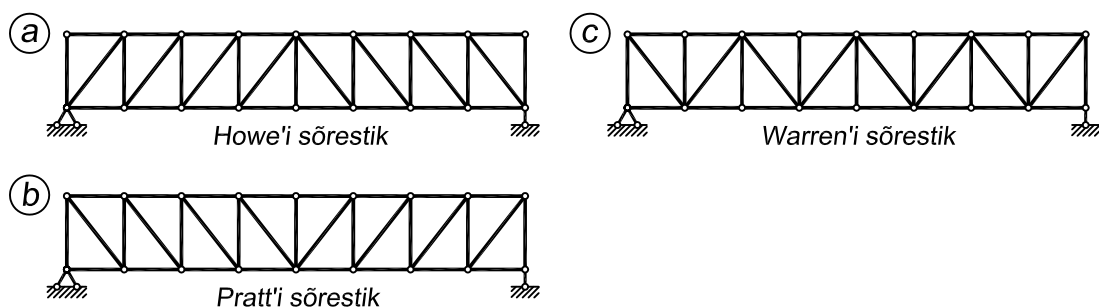


Joonis 8.10. Erineva vööde kujuga sõrestikke



Joonis 8.11. Erineva võrguga sõrestikke

näidet, mis erinevad üksteisest diagonaalide pikijõu märgi poolest – surutud diagonaalidega Howe'i sõrestik (joonis 8.12, *a*), tõmmatud diagonaalidega Pratt'i sõrestik (*b*), vaheldumisi tõmmatud ja surutud diagonaalidega Warreni sõrestik (*c*). Lisame veel juurde, et kuigi siin joonisel on sõrestikud esitatud paralleelvõõdega, ei ole need nimetused seotud võõde kujuga.



Joonis 8.12. Sõrestike nimetamine diagonaalide suunast lähtuvalt

Diagonaal-, post-diagonaal-, K-võrguga ja lisapostidega diagonaalvõrguga sõrestikke nimetatakse *lihtvõrguga sõrestikeks*. Lihtvõrguga sõrestiku võrk koosneb kolmnurkadest, kusjuures vardad ei löiku üksteisega.

8.3. Sisejõudude arvutus staatika meetodiga

Tingimuse $2s = v + t$, milles $2s$ on tasakaalutingimuste ja $v + t$ tundmatute arv, rahuldamisel on geometriliselt muutumatu sõrestik staatikaga määratav (avaldis 2.3).

Tala-, konsool- ja konsoolidega talasõrestike tugede kinemaatilised tingimused on samad

kui täisseinisel talal või konsoolil. Niisuguste sõrestike toereaktsioonid arvutame analoogiliselt täisseinalise tala või konsooli toereaktsioonidega.

Sirgetest varrastest moodustatud ja ainult sõlmedes koormatud sõrestikul on tundmatuteks varrastes tekkivad pikijõud. Tundmatute pikijõudude arvutamiseks koostame $2s - 3$ üksteisest sõltumatut tasakaaluvõrrandit. Tasakaaluvõrrandite koostamisel kasutame *lõikemeetodit*. Sõrestiku arvutusskeemist eraldame ühe sõlme või osa sõrestikust ja teiste osade mõjud asendame läbilõigatud varraste pikijõududega. Eraldatud sõlme või sõrestikuosa tasakaalu tingimustest leiame läbilõigatud varraste pikijõud. Lahendamise otstarbekus nõuab, et võrrandis oleks ainult üks tundmatu. Võrrandis võib olla ka rohkem tundmatuid, kui kõik tundmatud peale ühe on arvutatavad eelnevatest võrranditest.

Tasakaaluvõrrandite koostamisel oletame pikijõud tõmbejõududena ja märgime suunaga sõlme poolt. Arvutuse tulemusena saadud miinusmärk näitab, et oletus oli vale ja varda pikijõuks on survejõud ning õige suund on sõlme poole.

Lihtvõrguga sõrestike varraste pikijõudude arvutamisel kasutame järgmisi võtteid: *sõlme eraldamise, momendipunkti ja projektsioonide võte*. Neist momendipunkti ja projektsioonide võtet nimetatakse ka *Ritteri lõikemeetodiks* saksa ehitusinseneri ja professori August Ritteri (1826–1908) järgi.

Mittelihtvõrguga sõrestike varraste pikijõud ei ole alati leitavad eelmärgitud võtetega. Mittelihtvõrguga sümmeetrilise sõrestiku puhul kasutame *koormuse lahutamise võtet*, mitte-sümmeetrilise sõrestiku puhul *varraste asendamise võtet* või *kinemaatika meetodit*.

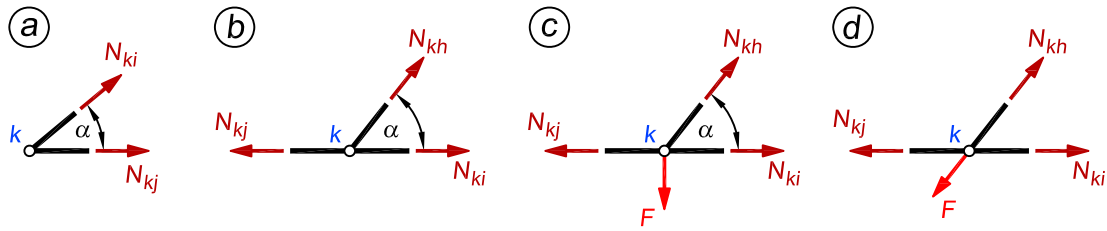
8.4. Sõlmede eraldamise võte

Lõikega eraldame sõrestiku arvutusskeemist sõlme ja koostame selle jaoks projektsioonide tasakaalu tingimused. Tasandil on võimalik iga sõlme jaoks koostada ainult kaks teineteisest sõltumatut projektsioonide tasakaalu tingimust. Pikijõudude leidmist alustame sõlmest, kus on ühendatud kaks varrast. Esimese tasakaalutingimusena kirjutame projektsioonide summa teljele, mis on risti ühe tundmatu pikijõu sihiga. Kui teises projektsioonide võrrandis on kaks pikijõudu, siis ühe elimineerime esimese võrrandi abil. Järgnevalt eraldame sõlme, milles on tundmatud ainult kahe varda pikijõud, jne. Eelviimase sõlme kohta koostatud kahes tasakaalutingimuses on ainult üks tundmatu pikijõud. Ühest võrrandist leiame tundmatu pikijõu ja teine võrrand jääb arvutuse kontrollimiseks. Viimases sõlmes ei ole ühtegi tundmatut ja sõlme kohta koostatud tasakaalutingimustega kontrollime eelnevat arvutust.

Üksteisest sõltumatute tasakaaluvõrrandite üldarv on $2s$. Neist kolme kasutasime lahendamise algul toereaktsioonide arvutamiseks. Seepärast on s sõlme kohta koostatud $2s$ tasakaalutingimusest $2s - 3$ sõltumatud võrrandid; kolme viimast võrrandit kasutame kontrollimiseks.

Sõlmede eraldamise võtte puuduseks on asjaolu, et ühes sõlmes tehtud viga levib ka järgmistesse sõlmedesse.

Sõrestiku pikijõudude arvutamisel sõlmede eraldamise võttega on suurema osa varraste pikijõud arvutatavad alles pärast paljude teiste varraste pikijõudude leidmist. Mõnes sõlmes on võimalik arvutada varraste pikijõud, ilma eelnevalt teiste varraste pikijõudusid leidmata.



Joonis 8.13. Sõrestikust eemaldatud sõlmed

Joonisel 8.13, a kujutatud sõlme projektsioonide tingimusest

$$\sum Z = 0; \quad -N_{ki} \sin \alpha = 0 \quad (8.1)$$

järeldub, et $N_{ki} = 0$, kuna $\sin \alpha \neq 0$, ja järelikult ka $N_{kj} = 0$. Sellest järeldub, et koormamata sõlmes, mis on moodustatud kahest mitte ühel sirgel asuvast vardast, on varraste pikijõud nullid. Varrast, mille pikijõud on null, nimetame edaspidi nullvardaks.

Joonisel 8.13, b kujutatud sõlme projektsioonide tingimustest

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad N_{ki} - N_{kj} + N_{kh} \cos \alpha &= 0 \\ \sum Z = 0; \quad -N_{kh} \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

järeldub, et $N_{kh} = 0$ ja $N_{ki} = N_{kj}$.

Kui koormamata sõlmes on ühendatud kolm varrast, millest kaks asuvad ühel sirgel, siis ühel sirgel asuvate varraste pikijõud on võrdsed ja kolmanda varda pikijõud on null. Sellise sõlme koormamisel jõuga F (joonis 8.13, c) leiame kolmanda varda pikijõu projektsioonide tingimusest kahe ühel sirgel asuva varda ristteljele

$$\sum Z = 0; \quad -N_{kh} \sin \alpha + F = 0 \quad (8.3)$$

millest $N_{kh} = -\frac{F}{\sin \alpha}$.

Projektsioonide tingimusest kahe varda teljele

$$\sum X = 0; \quad N_{ki} + N_{kh} \cos \alpha - N_{kj} = 0 \quad (8.4)$$

võib avaldada

$$N_{ki} - N_{kj} = N_{kh} \cos \alpha = F \cot \alpha \quad (8.5)$$

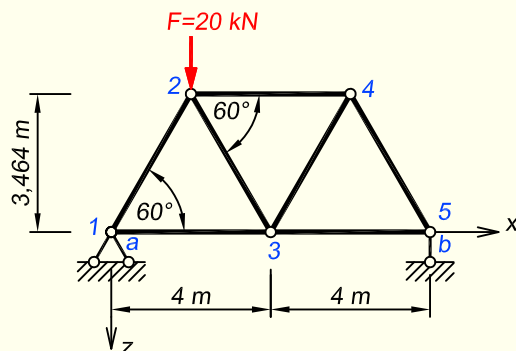
Sel juhul $N_{ki} \neq N_{kj}$.

Kui jõud F mõjub kolmanda varda sihil (joonis 8.13, d), siis on selle varda pikijõud võrdne jõuga F ja varraste $k-i$ ning $k-j$ pikijõud on võrdsed. Tasakaalutingimustest

$$\begin{aligned} \sum Z = 0; \quad -N_{kh} \sin \alpha + F \sin \alpha &= 0 \\ \sum X = 0; \quad N_{ki} - N_{kj} + N_{kh} \cos \alpha - F \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

järeldub, et $N_{kh} = F$ ja $N_{ki} = N_{kj}$.

NÄIDE 8.1. Leida joonisel 8.14 kujutatud sõrestiku varraste pikijõud sõlmede eraldamise teel.



Joonis 8.14. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Vaadeldaval sõrestikul on viis sõlme ($s = 5$), mistõttu tasakaalutingimuste üldarv on

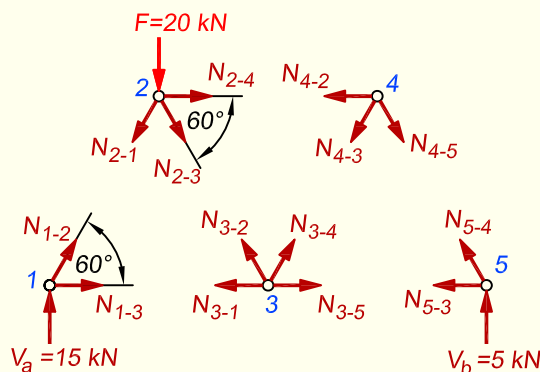
$$2s = 2 \cdot 5 = 10$$

Kahest tasakaalutingimusest leiame vertikaalsed toereaktsioonid. Selleks kirjutame momentide tasakaalutingimused mõlema toeliigendi suhtes

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 8 + 20 \cdot 6 = 0; \quad V_a = 15 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 8 - 20 \cdot 2 = 0; \quad V_b = 5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kolmandast tasakaalutingimusest $\sum X = 0$ järeldub, et horisontaalne reaktsioon toe a juures on null.

Koostame skeemi, kus eraldame sõrestikust kõik sõlmed (joonis 8.15) ja märgime sinna ka kõigi varraste pikijõud. Tundmatud pikijõud märgitakse skeemile suunaga sõlme eemale, kuna siis on tasakaalutingimusest saadav pikijõud kohe õige märgiga.



Joonis 8.15. Sõlmede eraldamine

Märgid pikijõudude arvutamiseks kirjutatavates tasakaalutingimustes valime vastavalt jõudude suundadele joonisel 8.15. Kui seejärel on vaja tasakaalutingimusse sisestada mõni eelnevalt välja arvatud pikijõud, lisame ta sinna koos oma tegeliku märgiga.

Pikijõudude arvutamisel tuleb esmalt määrata, millises järjekorras me sõlmi vaatame. Oluline on siin see, et arvutatavas sõlmes ei oleks rohkem kui kaks tundmatut pikijõudu. Arvutust tuleb seetõttu alustada sõlmest, kus liitub kaks varrast, kuna suurema varraste arvuga sõlmedes jääb tasakaalutingimustesse rohkem kui üks tundmatu.

Pikijõudude arvutamist alustame sõlmest 1, kus kirjutame tasakaalutingimused kummagi telje suunas

$$\begin{aligned}\sum Z = 0; & \quad -N_{1-2} \sin 60^\circ - V_a = 0; & \quad N_{1-2} = -17,32 \text{ kN} \\ \sum X = 0; & \quad N_{1-3} + N_{1-2} \cos 60^\circ = 0; & \quad N_{1-3} = 8,66 \text{ kN}\end{aligned}$$

Seejärel eraldame sõlme 2, kuna seal liituvast kolmest vardast ühe pikijõud on meil eelnevast arvutusest teada. Arvutame varraste 2-3 ja 2-4 pikijõud

$$\begin{aligned}\sum Z = 0; & \quad N_{2-3} \sin 60^\circ + N_{2-1} \sin 60^\circ + 20 = 0; & \quad N_{2-3} = -5,77 \text{ kN} \\ \sum X = 0; & \quad N_{2-4} + N_{2-3} \cos 60^\circ - N_{2-1} \cos 60^\circ = 0; & \quad N_{2-4} = -5,77 \text{ kN}\end{aligned}$$

Järgnevalt liigume sõlme 3, kus liituvast neljast vardast kahe pikijõud on meil teada. Selles sõlmes arvutame varraste 3-4 ja 3-5 pikijõud

$$\begin{aligned}\sum Z = 0; & \quad -N_{3-4} \sin 60^\circ - N_{3-2} \sin 60^\circ = 0; & \quad N_{3-4} = 5,77 \text{ kN} \\ \sum X = 0; & \quad N_{3-5} - N_{3-1} + N_{3-4} \cos 60^\circ - N_{3-2} \cos 60^\circ = 0; & \quad N_{3-5} = 2,89 \text{ kN}\end{aligned}$$

Kümnest sõltumatust tasakaaluvõrrandist on meil praeguseks ära kasutatud üheksa. Sõlmes 4 on üks tundmatu pikijõud N_{4-5} ja selle arvutamiseks on jäänud üks tasakaalutingimus

$$\sum Z = 0; \quad N_{4-5} \sin 60^\circ - N_{4-3} \sin 60^\circ = 0; \quad N_{4-5} = -5,77 \text{ kN}$$

Tasakaalutingimust $\sum X = 0$ kasutame kontrollimiseks

$$N_{4-5} \cos 60^\circ - N_{4-3} \cos 60^\circ - N_{4-2} = 0$$

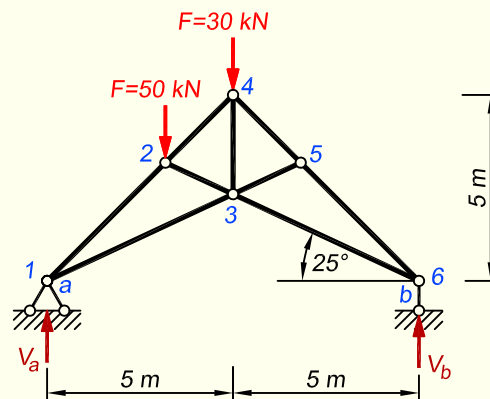
mis on rahuldatud.

Sõlme 5 tasakaalutingimusi kasutame samuti kontrollimiseks

$$\begin{aligned}\sum X = 0; & \quad -N_{5-3} - N_{5-4} \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Z = 0; & \quad -V_b - N_{5-4} \sin 60^\circ = 0\end{aligned}$$

mis mõlemad on rahuldatud.

NÄIDE 8.2. Leida joonisel 8.16 kujutatud käärsõrestiku varraste pikijõud sõlmede eraldamise teel.



Joonis 8.16. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Vertikaalsed toereaktsioonid leiame kummagi toeliigendi suhtes koostatud momentide tasakaalutingimusest

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 10 + 50 \cdot 6,82 + 30 \cdot 5 = 0; \quad V_a = 49,1 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 10 - 30 \cdot 5 - 50 \cdot 3,18 = 0; \quad V_b = 30,9 \text{ kN} \end{aligned}$$

Pikijõudude arvutamist alustame sõlmest 1 (joonis 8.17, a). Siin ülesandes tuleb kasutusele võtta abiteljed, mille tähistame s ja t , kuna xz -teljestiku kasutamisel jääks tasakaalutingimustesse rohkem kui üks tundmatu. Asetame sõlme 1 abiteljed nii, et s -telje paikneb varda 1-3 suunas. Kirjutame tasakaalutingimused kummagi telje suunas ning arvutame varraste 1-2 ja 1-3 pikijõud

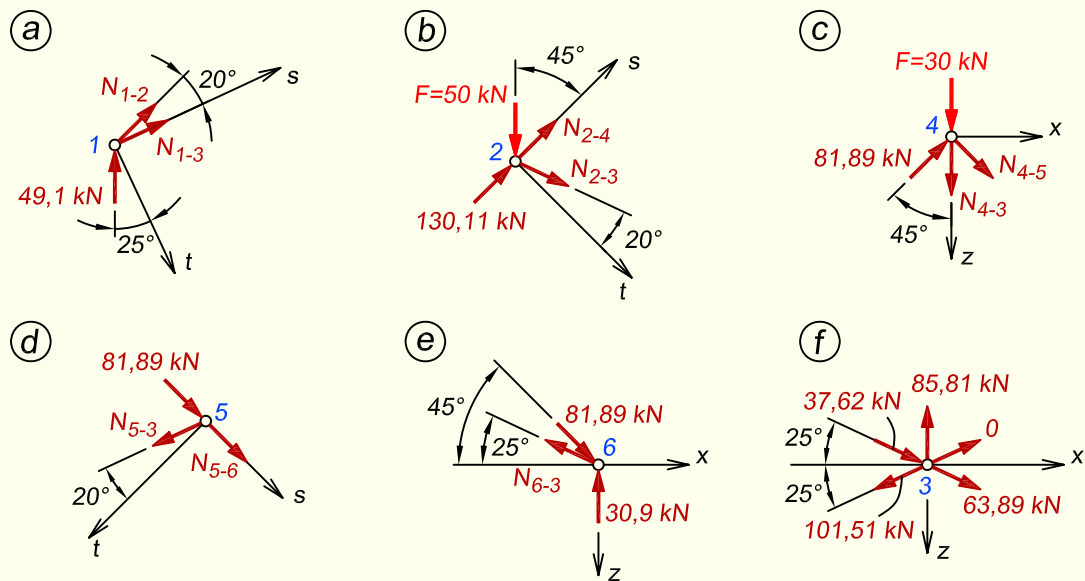
$$\begin{aligned} \sum t = 0; \quad -N_{1-2} \sin 20^\circ - 49,1 \cos 25^\circ = 0; \quad N_{1-2} = -130,11 \text{ kN} \\ \sum s = 0; \quad N_{1-3} - 130,11 \cos 20^\circ + 49,1 \sin 25^\circ = 0; \quad N_{1-3} = 101,51 \text{ kN} \end{aligned}$$

Edasi liigume sõlme 2 (joonis 8.17, b), kus paigutame s -telje varda 2-4 suunas. Eelnevalt välja arvatud varda 1-2 pikijõu kanname sõlme skeemile peale tema teadaoleva suunaga – survejõud märgitakse suunaga sõlme poole. Leiame varraste 2-3 ja 2-4 pikijõud

$$\begin{aligned} \sum t = 0; \quad N_{2-3} \cos 20^\circ + 50 \sin 45^\circ = 0; \quad N_{2-3} = -37,62 \text{ kN} \\ \sum s = 0; \quad N_{2-4} + 130,11 - 50 \cos 45^\circ - 37,62 \sin 20^\circ = 0; \quad N_{2-4} = -81,89 \text{ kN} \end{aligned}$$

Seejärel eraldame sõlme 4 (joonis 8.17, c), kus kasutame xz -teljestikku, ning arvutame varraste 4-5 ja 4-3 pikijõud

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad N_{4-5} \sin 45^\circ + 81,89 \sin 45^\circ = 0; \quad N_{4-5} = -81,89 \text{ kN} \\ \sum Z = 0; \quad N_{4-3} + 30 - 81,89 \cos 45^\circ \cdot 2 = 0; \quad N_{4-3} = 85,81 \text{ kN} \end{aligned}$$



Joonis 8.17. Sõlmede eraldamine

Järgnevalt eraldame sõlme 5 (joonis 8.17, d), kus paigutame s -telje varda 5-6 suunas. Leiame varraste 5-3 ja 5-6 pikijõud

$$\begin{aligned} \sum t = 0; \quad N_{5-3} \cos 20^\circ = 0; \quad N_{5-3} = 0 \\ \sum s = 0; \quad N_{5-6} + 81,89 = 0; \quad N_{5-6} = -81,89 \text{ kN} \end{aligned}$$

Sõlmes 6 (joonis 8.17, e) on üks tundmatu pikijõud N_{6-3} , mille arvutame tasakaalutingimusest x -teljele

$$\sum X = 0; \quad -N_{6-3} \cos 25^\circ + 81,89 \cos 45^\circ = 0; \quad N_{6-3} = 63,89 \text{ kN}$$

Tasakaalutingimust z -telje suunas kasutame kontrollimiseks

$$\sum Z = 0; \quad -30,9 + 81,89 \sin 45^\circ - 63,89 \sin 25^\circ = 0$$

Sõlmes 3 (joonis 8.17, f) ühtegi tundmatut pikijõudu ei ole ja siin kasutame tasakaalutingimusi kontrollimiseks

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad -101,51 \cos 25^\circ + 37,62 \cos 25^\circ + 63,89 \cos 25^\circ + 0 = 0 \\ \sum Z = 0; \quad -85,81 + 101,51 \sin 25^\circ + 37,62 \sin 25^\circ + 63,89 \sin 25^\circ + 0 = 0 \end{aligned}$$

Mõlemad tingimused on rahuldatud.

8.5. Momendipunkti võte

Pikijõu leidmisel niisuguses vardas, mis asub arvutuse alustamise sõlmest kaugel, on sõlmede eraldamise võte ebaproduktiivne. Sel juhul on lihtvõrguga sõrestiku puhul otstarbekas rakendada momendipunkti võtet. Selle meetodi puhul eraldame sõrestiku arvutuskeemi lõikega kaheks osaks. Lõige tehakse tavaliselt läbi kolme varda, mis kõik ei kuulu ühe sõlme juurde (joonis 8.18, lõige I-I). Sõrestiku kaheks eraldatud arvutuskeemist vaatleme seda osa, millele mõjub vähem jõudusid. Teise osa mõju asendame läbilõigatud varraste pikijõududega, mille rakendame ärajäetud varraste asemele (joonis 8.19).

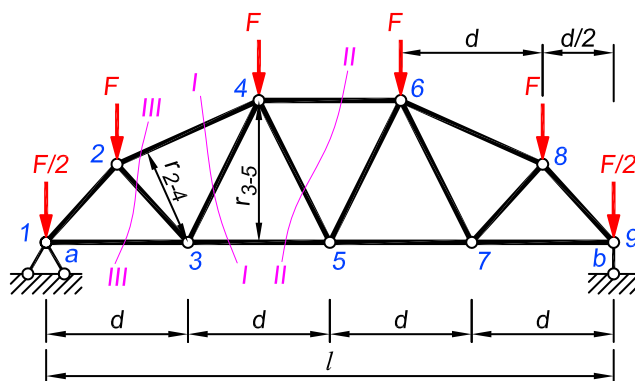
Tundmatute pikijõudude leidmiseks kasutame momentide tasakaalu tingimust. Tasakaalus olevale sõrestiku arvutuskeemi osale rakendatud kõigi jõudude (välisjõudude ja läbilõigatud varraste mõju asendavate pikijõudude) momentide summa sõrestiku tasandi suvalise punkti suhtes võrdub nulliga. Otstarbekas on koostada momentide tasakaalu tingimus tasandi selle punkti suhtes, kus lõikuvad kahe läbilõigatud varda sihid. Joonistel 8.19, 8.20 ja 8.21 on niisugusteks punktideks sõlmed 4 ja 3 ning punkt c , mis on varraste 2-4 ja 3-5 sihtide lõikepunkt. Neid punkte nimetatakse *momendipunktideks*. Momentide summa koostamisel momendipunkti, s.o kahe läbilõigatud varda sihi lõikepunkti suhtes on tasakaaluvõrrandis tundmatuks kolmanda varda pikijõud.

Alumise vöö varda 3-5 pikijõu arvutamiseks võib teha kaks lõiget: I-I ja II-II, mis läbivad kolme varrast ning lahutavad sõrestiku arvutuskeemi kaheks osaks. Mõlema lõike puhul lõikuvad kahe ülejäänud varda (lõike I-I puhul vardad 2-4 ja 3-4 ning lõike II-II puhul vardad 4-6 ja 4-5) sihid sõlmes 4. Vasakpoolsele osale (joonis 8.19, a) rakendatud jõudude momentide tasakaalu tingimusest sõlme 4 suhtes

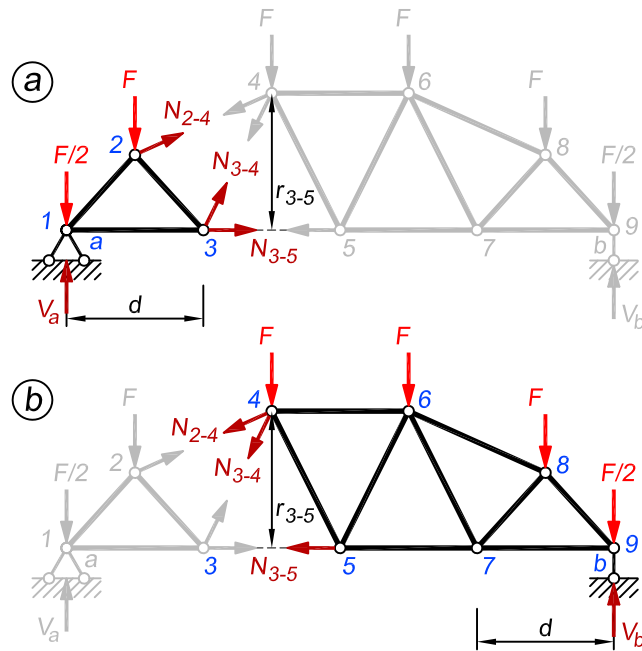
$$\sum M_4 = 0; \quad N_{3-5}r_{3-5} - V_a \cdot 1,5d + \frac{F}{2} \cdot 1,5d + F \cdot d = 0 \quad (8.7)$$

avaldame varda 3-5 pikijõu

$$N_{3-5} = \frac{(1,5V_a - 1,75F)d}{r_{3-5}} = \frac{M_4}{r_{3-5}} \quad (8.8)$$



Joonis 8.18. Momendipunkti võte



Joonis 8.19. Varda 3-5 pikijõu arvutus. Momendipunkt on sõlme 4

kus M_4 on vasakpoolsele osale rakendatud jõudude momentide summa kahe ülejäänud varda (2-4 ja 3-4) sihtide lõikepunkti (sõlme 4) suhtes ja r_{3-5} on momendipunkti (sõlme 4) kaugus vardast 3-5.

Sama arvutuse võime välja kirjutada ka sõrestiku parema poolega (joonis 8.19, b), kasutades samuti momentide tasakaalu tingimust sõlme 4 suhtes

$$\sum M_4 = 0; \quad -N_{3-5}r_{3-5} + V_b \cdot 2,5d - \frac{F}{2} \cdot 2,5d - F \cdot 2d - F \cdot d = 0 \quad (8.9)$$

millest avaldame varda 3-5 pikijõu

$$N_{3-5} = \frac{(2,5V_b - 4,25F)d}{r_{3-5}} = \frac{M_4}{r_{3-5}} \quad (8.10)$$

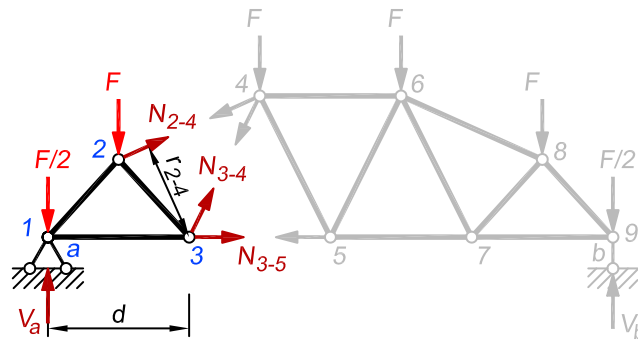
kus M_4 on sõrestiku parempoolsele osale rakendatud jõudude momentide summa sõlme 4 suhtes ning võrdub momentide summaga M_4 sõrestiku vasaku poole arvutusest. Järelikult peame mõlema sõrestiku poolega saama ühesuguse pikijõu väärtuse ja seetõttu tasub alati valida arvutuseks see sõrestiku osa, millel paikneb vähem jõudusid.

Ülemise vöö varda 2-4 pikijõu arvutame lõikega I-I või III-III. Mõlema lõike puhul on kahe ülejäänud läbilõigatud varda ühiseks punktiks (momendipunktiks) sõlm 3. Momentide tasakaalu tingimus momendipunkti (joonis 8.20) suhtes annab järgmise võrrandi

$$\sum M_3 = 0; \quad -N_{2-4}r_{2-4} - V_a \cdot d + \frac{F}{2} \cdot d + F \cdot \frac{d}{2} = 0 \quad (8.11)$$

millest

$$N_{2-4} = -\frac{(V_a - F)d}{r_{2-4}} = -\frac{M_3}{r_{2-4}} \quad (8.12)$$



Joonis 8.20. Varda 2-4 pikijõu arvutus. Momendipunkt on sõlmes 3

Ülevalt alla mõjuva vertikaalse koormuse puhul tugede vahel asuva momendipunkti suhtes on koormuse momendid positiivsed ($M_3 > 0$; $M_4 > 0$) ning talasõrestikel on alumise vöö vardad tõmmatud ja ülemise vöö vardad surutud.

Diagonaali 3-4 momendipunktiks on lõikega $I-I$ läbilõigatud ülemise vöö varda 2-4 ja alumise vöö varda 3-5 sihtide lõikepunkt c (joonis 8.21)

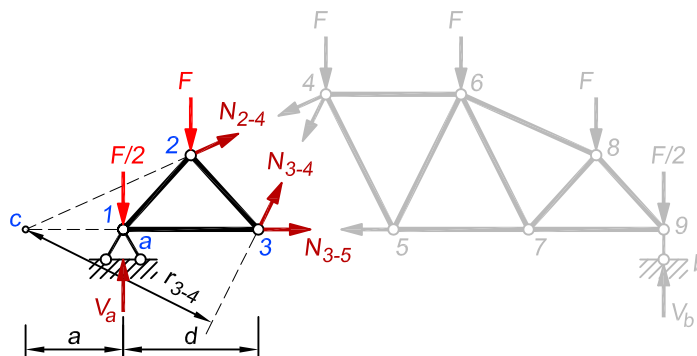
$$\sum M_c = 0; \quad N_{3-4}r_{3-4} + V_a \cdot a + \frac{F}{2} \cdot a - F \cdot \left(a + \frac{d}{2}\right) = 0 \quad (8.13)$$

millest

$$N_{3-4} = \frac{-V_a a + \frac{F(3a+d)}{2}}{r_{3-4}} = \frac{M_c}{r_{3-4}} \quad (8.14)$$

Pikijõu märgi sõltumine momendipunkti asukohast

Olenevalt vööde kujust asetsevad võrguvarraste momendipunktid kas väljaspool tugesisid või tugede vahel. Kui momendipunkt asub tugede vahel, siis vertikaalse koormuse puhul, ole-nemata koormuse asukohast sõrestikul, on võrguvarda pikijõud ühemärgiline. Väljaspool tu-



Joonis 8.21. Varda 3-4 pikijõu arvutus. Momendipunkt on punktis c

gesid asuva momendipunkti puhul (joonis 8.21) võib võrguvarras olla olenevalt koormuse asukohast kas tõmmatud või surrutud.

Olgu koormatud lõikest $I-I$ paremal asetsev sõrestiku osa. Vasakpoolse osa tasakaalu tingimusest momendipunkti c suhtes

$$\sum M_c = 0; \quad N_{3-4}r_{3-4} + V_a a = 0 \quad (8.15)$$

leiame, et diagonaali 3-4 pikijõud on negatiivne

$$N_{3-4} = -\frac{V_a a}{r_{3-4}} \quad (8.16)$$

Kui on koormatud lõikest $I-I$ vasakul asetsev sõrestiku osa, siis parempoolse osa momentide tasakaalu tingimusest momendipunkti c suhtes

$$\sum M_c = 0; \quad -N_{3-4}r_{3-4} + V_b(a+l) = 0 \quad (8.17)$$

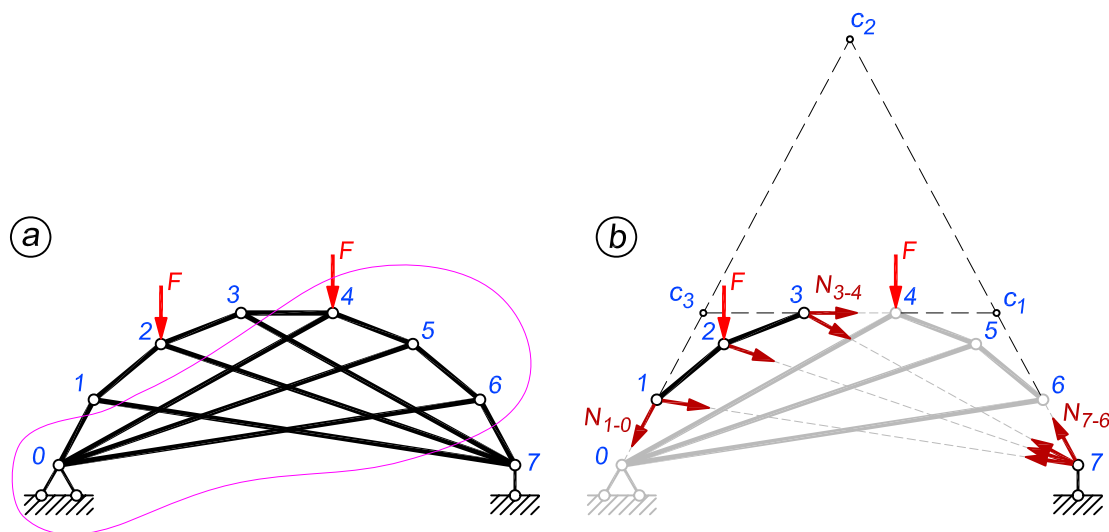
leiame, et diagonaali 3-4 pikijõud on positiivne

$$N_{3-4} = \frac{V_b(a+l)}{r_{3-4}} \quad (8.18)$$

Need märgid kehtivad tõusvate diagonaalide jaoks, mille momendipunkt asetseb väljaspool sillet. Langevate diagonaalide jaoks on märgid vastupidised.

Keeruka kujuga sõrestike arvutamine

Iga sõrestikku ei saa eraldada kaheks osaks niimoodi, et oleks läbi lõigatud ainult kolm varrast. Mõnel juhul saab koostada ühe tundmatuga momentide tasakaalu võrrandi ka siis, kui lõikame läbi rohkem kui kolm varrast.



Joonis 8.22. Erikujuga sõrestikus lõike tegemine

Joonisel 8.22, *a* kujutatud sõrestikust eraldame suletud lõikega ühe osa, kusjuures lõikame läbi kuus varrast. Vardad 1-0, 3-4 ja 7-6 on läbi lõigatud üks kord ning vardad 1-7, 2-7 ja 3-7 kaks korda. Paarisarv kordi läbi lõigatud varraste pikijõudude moment esineb tasakaaluvõrrandis paarisarv kordi. Momendid on võrdsed ja vastupidiste märkidega, tasakaalustavad teineteist ning langevad võrrandist välja. Võrrandisse jäävad ainult paaritu arv kordi läbi lõigatud varraste 1-0, 3-4 ja 7-6 pikijõudude momendid. See võimaldab koostada võrrandid ühe tundmatuga.

Varda 1-0 pikijõu leidmiseks koostame momentide tasakaalu tingimuse varraste 3-4 ja 7-6 sihtide lõikepunkti c_1 suhtes ning varrastel 3-4 ja 7-6 vastavalt punktide c_2 ja c_3 suhtes (joonis 8.22, *b*).

8.6. Projektsioonide võtte

Vaatleme paralleelvöödega post-diagonaalvõrguga sõrestikku (joonis 8.23). Sellel sõrestikul saame vöövarraste pikijõud leida momendipunkti võttega, mida kirjeldasime eelmises peatükis. Selleks, et esitada paralleelvöödega sõrestiku üks iseloomulik omadus, vaatamegi alustuseks, kuidas leida siin teise ja kolmanda paneeli vöövarraste pikijõud.

Kolmandas paneelis arvutame vöövarraste pikijõud lõike *I-I* abil. Ülemise vöö varda 6-8 ja alumise vöö varda 5-7 momendipunktideks on vastavalt sõlmed 5 ja 8. Ühel pool lõiget *I-I* sõrestikule rakendatud jõudude momentide tasakaalu tingimustest momendipunktide suhtes leiame vöövarraste pikijõud

$$N_{5-7} = \frac{M_8}{h}; \quad N_{6-8} = -\frac{M_5}{h} \quad (8.19)$$

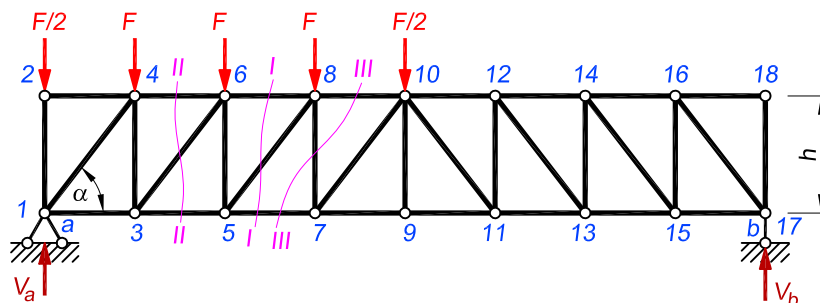
kus h on sõrestiku kõrgus ning M_5 ja M_8 on ühel pool lõiget sõrestikule mõjuvate jõudude momentide summad momendipunktide suhtes.

Analoogiliselt leiame teises paneelis lõike *II-II* abil vöövarraste pikijõud

$$N_{3-5} = \frac{M_6}{h}; \quad N_{4-6} = -\frac{M_3}{h} \quad (8.20)$$

Vertikaalse koormuse puhul on momendid sõlmede 5 ja 6 suhtes võrdsed

$$M_5 = M_6 \quad (8.21)$$



Joonis 8.23. Projektsioonide võtte

Järelikult

$$N_{6-8} = -N_{3-5} \quad (8.22)$$

Jõuame post-diagonaalvõrguga paralleelvöödega sõrestiku olulise omaduseni: samade diagonaalide vahel paiknevate ülemise ja alumise vöö varraste pikijõud on võrdsed, kuid vastupidise märgiga.

Paralleelvöödega sõrestiku diagonaali ega posti pikijõudu ei saa leida momentide tasakaalu tingimusest, kuna momendipunkt on lõpmatuses.

Diagonaali 5-8 pikijõu leidmiseks kasutame kahe läbilõigatud paralleelse vöö (lõige *I-I*) risttelje suunas kirjutatud jõudude projektsioonide tasakaalu tingimust. Vaatleme esmalt lõikest vasakule jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.24, *a*)

$$\sum Z = 0; \quad -N_{5-8} \sin \alpha - V_a + \frac{F}{2} + F + F = 0 \quad (8.23)$$

millest saame pikijõu

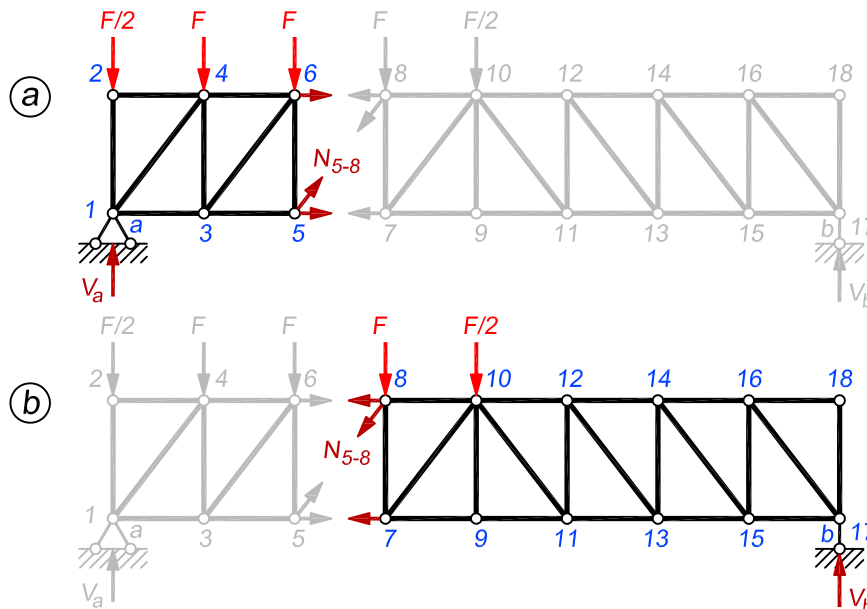
$$N_{5-8} = -\frac{V_a - 2,5F}{\sin \alpha} = -\frac{Q_3}{\sin \alpha} \quad (8.24)$$

kus Q_3 on sõrestikuga võrdse sildega lihttala põikjõud kolmandas paneelis sõlmede 6 ja 8 vahel (täpsemalt vaata sõrestiku pikijõudude arvutamist lihttala abil peatükist 8.8). Lõikest paremal pool sõrestikule mõjuvate jõudude projektsioonide tingimusest (joonis 8.24, *b*)

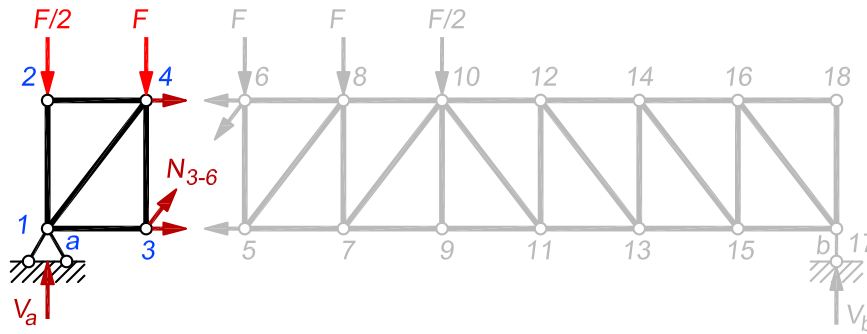
$$\sum Z = 0; \quad N_{5-8} \sin \alpha - V_b + \frac{F}{2} + F = 0 \quad (8.25)$$

saame sama tulemuse

$$N_{5-8} = \frac{V_b - 1,5F}{\sin \alpha} = -\frac{Q_3}{\sin \alpha} \quad (8.26)$$



Joonis 8.24. Diagonaali 5-8 pikijõu arvutus



Joonis 8.25. Diagonaali 3-6 pikijõu arvutus

Diagonaali 3-6 pikijõu leiame analoogiliselt teises paneelis (lõige *II-II*), vaadates praegusel juhul lõikest vasakule jäävat sõrestikuosa (joonis 8.25)

$$N_{3-6} = -\frac{Q_2}{\sin \alpha} \quad (8.27)$$

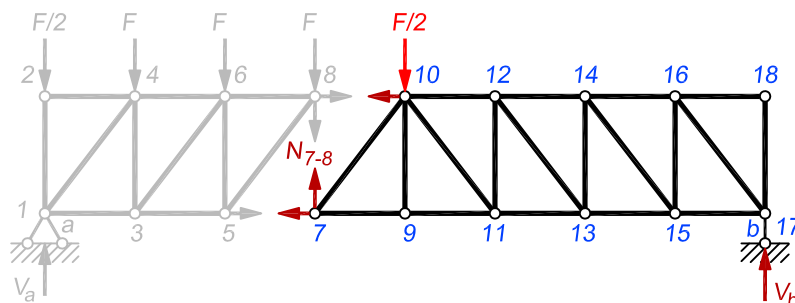
Paralleelvõõdega sõrestiku diagonaalide pikijõud on proportsionaalsed sõrestikuga võrdse sildega lihttala samast koormusest põhjustatud põikjõududega. Ühtlase koormuse puhul on äärmiste paneelide diagonaalide pikijõud suuremad kui keskmistes paneelides. Tõusva diagonaali pikijõud on positiivse põikjõu puhul sõrestiku keskkohast vasakul pool negatiivne ja paremal pool positiivne. Negatiivse põikjõu puhul on märgid vastupidised.

Posti 7-8 pikijõu saamiseks teeme lõike *III-III* ja kirjutame paralleelsete võõde risttelje suunas jõudude projektsioonide tasakaalu tingimuse, vaadeldes praegusel juhul lõikest paremale jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.26)

$$\sum Z = 0; \quad -N_{7-8} - V_b + \frac{F}{2} = 0 \quad (8.28)$$

millest posti pikijõud

$$N_{7-8} = -V_b + \frac{F}{2} = Q_4 \quad (8.29)$$



Joonis 8.26. Posti 7-8 pikijõu arvutus

Lõige III-III läbib ülemist vööd neljandas ja alumist vööd kolmandas paneelis. Põikjõu indeks vastab paneelile, kus lõige läbib koormatud vööd. Tõusvate diagonaalidega post-diagonaalvõrguga sõrestiku posti pikijõud on positiivse põikjõu puhul sõrestiku keskkohast vasakul pool positiivne ja paremal pool negatiivne. Negatiivse põikjõu puhul on märgid vastupidised.

Langevate diagonaalidega post-diagonaalvõrguga sõrestiku posti ja diagonaali pikijõud on vastupidiste märkidega, võrreldes tõusvate diagonaalidega sõrestiku posti ja diagonaali pikijõududega.

8.7. Erinevate võtete kombineerimine

Ühegi sõrestiku puhul ei ole mõistlik kõiki vardaid arvutada ainult ühe võttega, sest see võib kujuneda väga keeruliseks ja töömahukaks. Alati tasub mõelda, millise võttega saab huvipakkuva varda pikijõu kõige lihtsamalt kätte. Seetõttu kujuneb üldjuhul sõrestiku arvutus selliseks, kus tuleb kombineerida eespool kirjeldatud kolme võtet. Järgnevalt toomegi välja tüüpjuhud, mis võivad sõrestike arvutamisel esineda, ja esitame lühidalt soovitused, kuidas neile läheneda.

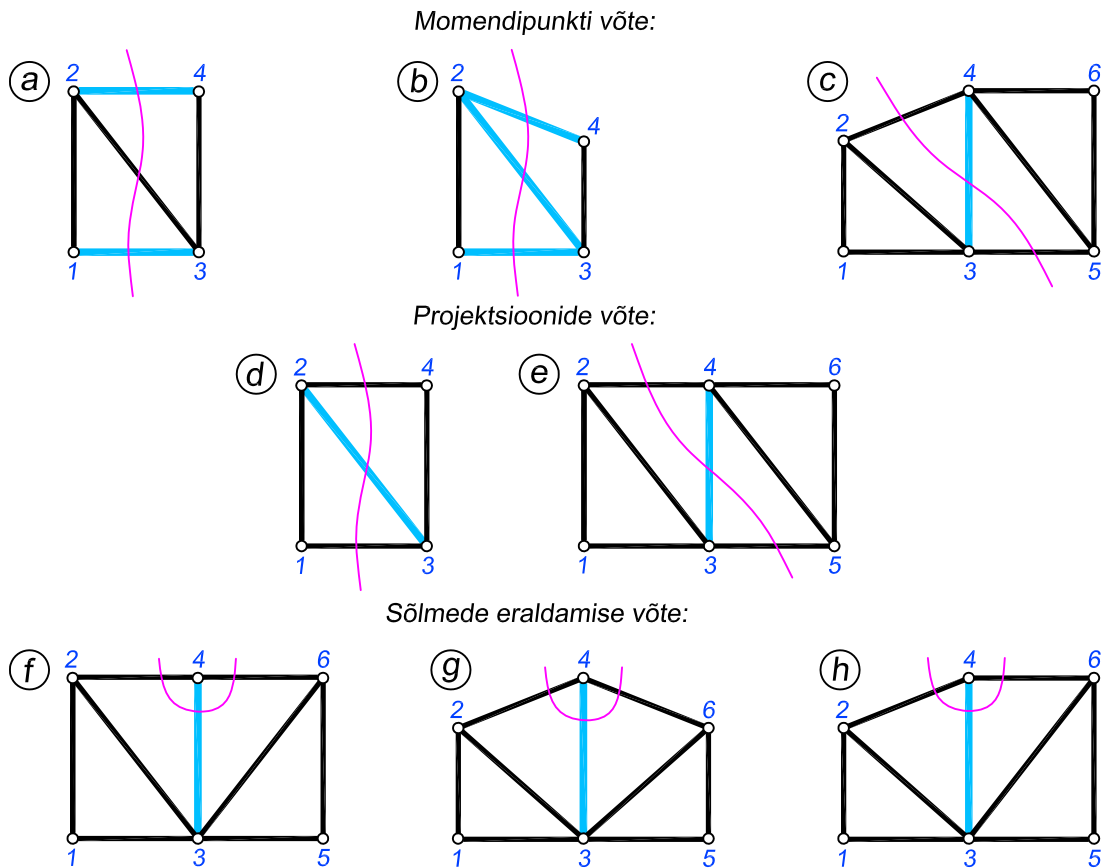
Talasõrestike arvutamisel ei oma tähtsust, milline on vaadeldava sõrestiku üldine kuju, vaid oluline on varraste paiknemine ainult arvutatava vardaga paneelis või kummalgi pool seda varrast paiknevates paneelides. Joonisel 8.27 on kujutatud sõrestikust välja lõigatud ühe kuni kahe paneeli pikkune osa, kus on näidatud, mis meetodit on erinevate varraste puhul kõige mõistlikum kasutada.

Momendipunkti võte: ülemise ja alumise vöö vardad, sõltumata sõrestiku kujust (skeemid *a* ja *b*); diagonaalid mitteparalleelsete vöödega paneelis (skeem *b*); postid paneelide vahel, kus diagonaalid liituvad postiga selle erinevates otstes ning lõige oleks tehtud läbi mitteparalleelsete vööde (skeem *c*).

Lisame siia ka mõned selgitused. Vöövardaid on kasulik momendipunkti võttega arvutada seetõttu, kuna neil on momendipunkt alati olemas: see paikneb diagonaali ja teise vöö varda lõikumise kohas. Näiteks skeemidel *a* ja *b* on varda 1-3 momendipunktiks sõlm 2 ning varda 2-4 momendipunktiks sõlm 3. Lisaks väldib momendipunkti võte seda, et tasakaalutingimustes esineksid peale arvutatava varda ka veel teiste varraste pikijõud.

Diagonaali saab momendipunkti võttega arvutada siis, kui vöövardad on mitteparalleelsed, kuna paralleelsete vöövarraste korral paikneks momendipunkt lõpmatuses. Skeemil *b* kujutatud diagonaali 2-3 momendipunktiks on vöövarraste 1-3 ja 2-4 sihtide lõikumise koht. Projektsioonide võtet ei tasu selle diagonaali puhul kasutada, kuna läbilõigatud varras 2-4 on kaldu ja annaks seetõttu samuti vertikaalteljele projektsiooni, mis tuleks arvesse võtta. Kui varras 2-4 on eelnevalt välja arvutatud, siis sellest probleemi ei ole, aga momendipunkti võte väldib kõigi kõrvaliste varraste pikijõudude kasutamise vajadust diagonaali arvutuses.

Skeemil *c* kujutatud posti 3-4 arvutamiseks teeme kaldu lõike ning kuna vöövardad 2-4 ja 3-5 on mitteparalleelsed, siis on momendipunkt nende sihtide lõikumise kohas. Posti 3-4 arvutamiseks ei ole mõistlik kasutada projektsioonide võtet, kuna läbilõigatud varras 2-4 on kaldu ja annab seetõttu projektsiooni vertikaalteljele. Samuti ei ole mõistlik posti 3-4 arvutamiseks kasutada sõlmede eraldamise võtet, kuna ükskõik kumma otsmise sõlme eraldamisel



Joonis 8.27. Soovitused erinevate arvutusmeetodite valikuks sõltuvalt sõrestiku kujust ja varraste paiknemisest. Arvutatavad vardad on näidatud sinisega

tuleks tasakaalutingimuses arvesse võtta ka teiste selles sõlmes liituvate varraste pikijõud.

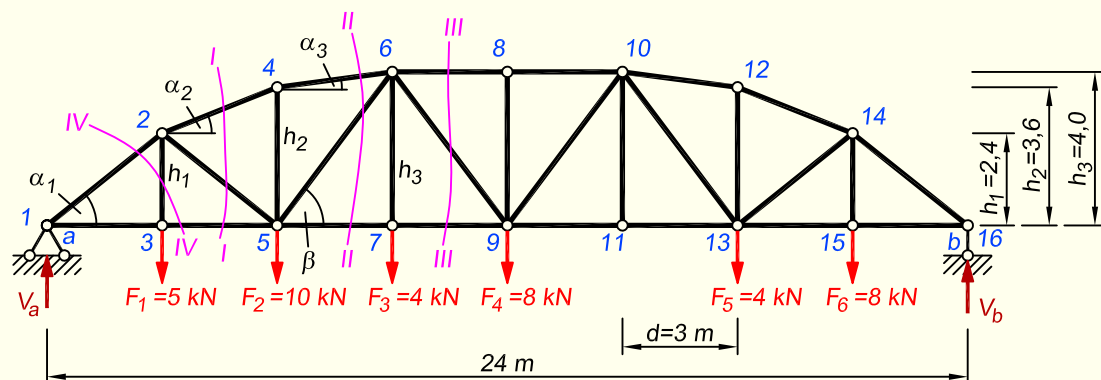
Projektsioonide võte: diagonaalid paralleelsete vöödega paneelides (skeem *d*); postid paralleelvöödega sõrestiku paneelide vahel, kus diagonaalid liituvad postiga selle erinevates otstes (skeem *e*).

Skeemil *d* ja *e* on diagonaali ja posti arvutamiseks projektsioonide võttega sama põhjus: kaks ülejäänud läbilõigatud varrast on paralleelsed ja momendipunkt lõpmatuses. Ei ole hea kasutada ka sõlmede eraldamise võtet, sest arvestada tuleb kõiki sõlmes liituvaid vardaid ja see tähendaks nii mainitud diagonaali kui posti puhul veel lisaks mõne varda arvutamist. Näiteks skeemil *e* võime posti 3-4 arvutamiseks eraldada sõlme 3 või 4. Ühel juhul tuleb tasakaalutingimuses arvestada lisaks varrast 2-3, teisel juhul varrast 4-5. Projektsioonide võte aga väldib seda, et me otsitavale vardale veel lisaks peaksime midagi arvutama.

Sõlmede eraldamise võte: post, sõltumata sõrestiku kujust, kui sellest kummalegi poole jäävad diagonaalid liituvad postiga selle samas otsas (skeemid *f*, *g* ja *h*).

Kolmel alumisel skeemil ei tasuks momendipunkti ega projektsioonide võtet kasutada, kuna nende puhul tuleb sõrestik kaheks osaks eraldada kaldlõikega, mis läbib liiga suurt arvu vardaid ja muudab seetõttu nende võtete kasutamise keerukaks.

NÄIDE 8.3. Leida joonisel 8.28 esitatud sõrestiku vasakpoolse osa varraste pikijõud.



Joonis 8.28. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonid V_a ja V_b leiame toeliigendite a ja b suhtes koostatud momentide tasakaalutingimustest

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 24 + 5 \cdot 21 + 10 \cdot 18 + 4 \cdot 15 + 8 \cdot 12 + 4 \cdot 6 + 8 \cdot 3 = 0$$

$$V_a = 20,375 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 24 - 8 \cdot 21 - 4 \cdot 18 - 8 \cdot 12 - 4 \cdot 9 - 10 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 0$$

$$V_b = 18,625 \text{ kN}$$

Kontrollime tasakaalutingimusega

$$\sum Z = -20,375 - 18,625 + 5 + 10 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 0$$

2. Pikijõudude arvutus

Pikijõudude arvutamisel kasutame momendipunkti, projektsioonide ja sõlmede eraldamise võtet. Igas vardas on võimalik leida pikijõudu kõigi nende kolme meetodiga, aga alati on neist üks see, millega on arvutus lühem ning vigade tekkimise või edasikandumise võimalus väiksem.

Oluline on meeles pidada, et tasakaalutingimustes tuleb arvestada kõiki sõrestiku vaadeldavale osale mõjuvaid jõudusid, kaasa arvatud läbilõigatud varraste pikijõudusid.

Sõlmede 3 ja 7 kohta koostatud jõudude projektsioonide tasakaalu tingimustest $\sum X = 0$ järeldub, et sõrestiku alumise vöö varraste 1-3 ja 3-5 ning 5-7 ja 7-9 pikijõud on paarikaupa võrdsed

$$N_{1-3} = N_{3-5} \quad \text{ja} \quad N_{5-7} = N_{7-9}$$

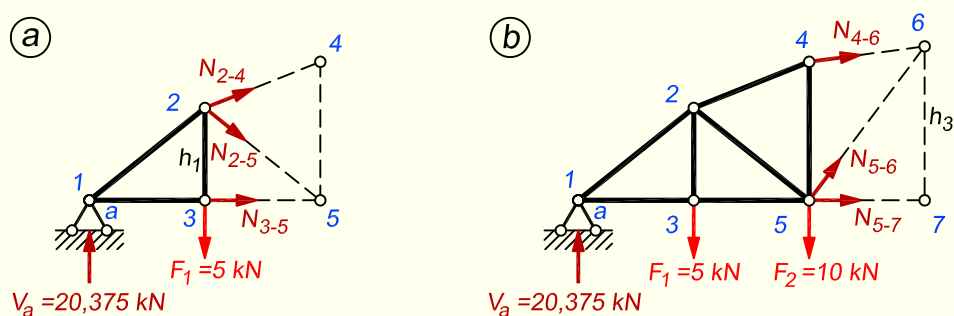
Varras 3-5 (I-3)

Varda 3-5 pikijõu leidmiseks teeme lõike I-I (joonis 8.28), asendame läbilõigatud vardad nende pikijõudusid tähistavate noolekestega (joonis 8.29, a) ja vaatleme vasakul

pool lõiget oleva sõrestikuosa tasakaalu, kuna see sõrestikuosa on väiksema arvu jõududega. Kasutame lahendamiseks momendipunkti võtet. Kuna tasakaalutingimuses tuleb arvestada kõiki lõikest ühele poole jäävaid jõudusid, siis peame momendipunkti valima sellisesse kohta, mille suhtes läbilõigatud varraste 2-5 ja 2-4 pikijõud (mis on samuti tundmatud) ei anna mingisugust momenti. Seega peab punkt olema kohas, kus mõlema jõu õlg on null. Varda 3-5 momendipunktiks on nende kahe ülejäänud läbilõigatud varda sihtide lõikepunkt – sõlm 2. Selle sõlme suhtes koostame momentide tasakaalu tingimuse

$$\sum M_2 = 0; \quad N_{3-5} \cdot h_1 - V_a \cdot d = 0$$

$$N_{3-5} \cdot 2,4 - 20,375 \cdot 3 = 0; \quad N_{3-5} = N_{1-3} = 25,47 \text{ kN}$$



Joonis 8.29. Varraste 3-5 ja 5-7 pikijõud

Varras 5-7 (7-9)

Varda 5-7 pikijõu leidmiseks teeme lõike II-II ja vaatleme vasakul pool lõiget oleva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.29, b). Varda 5-7 momendipunktiks on sõlm 6, kuna seal lõikuvad kaks ülejäänud läbilõigatud varrast 4-6 ja 5-6. Sõlme 6 suhtes koostame momentide tasakaalu tingimuse

$$\sum M_6 = 0; \quad N_{5-7} \cdot h_3 - V_a \cdot 3d + F_1 \cdot 2d + F_2 \cdot d = 0$$

$$N_{5-7} \cdot 4 - 20,375 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 3 = 0$$

$$N_{5-7} = N_{7-9} = 30,84 \text{ kN}$$

Varras 1-2

Ülemise vöö varda 1-2 pikijõu leidmiseks teeme lõike IV-IV, kasutame momendipunkti võtet ja koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 3 suhtes (joonis 8.30, a). Varda pikijõu õla ehk pöörderaadiuse r_{1-2} saamiseks momendipunkti suhtes tuleb leida sõlmest 3 vardale 1-2 tõmmatud ristsirge pikkus.

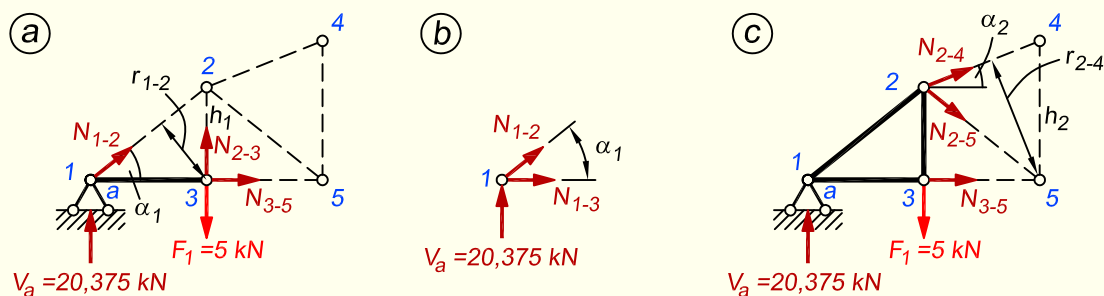
$$\sum M_3 = 0; \quad -N_{1-2} \cdot r_{1-2} - V_a \cdot d = 0$$

$$r_{1-2} = h_1 \cos \alpha_1 = 2,4 \cdot 0,7809 = 1,8741 \text{ m}$$

$$-N_{1-2} \cdot 1,8741 - 20,375 \cdot 3 = 0; \quad N_{1-2} = -32,62 \text{ kN}$$

Varda 1-2 pikijõudu on võimalik leida ka sõlme eraldamise teel. Selleks lõikame arvutuskeemist välja sõlme 1 (joonis 8.30, b) ning koostame selles sõlmes mõjuvate jõudude projektsioonide tasakaalutingimuse vertikaalteljele

$$\begin{aligned} \sum Z = 0; \quad & -N_{1-2} \cdot \sin \alpha_1 - V_a = 0 \\ & -N_{1-2} \cdot 0,6247 - 20,375 = 0; \quad N_{1-2} = -32,62 \text{ kN} \end{aligned}$$



Joonis 8.30. Varraste 1-2 ja 2-4 pikijõud

Varras 2-4

Varda 2-4 pikijõu leidmiseks teeme lõike *I-I* ja koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 5 suhtes (joonis 8.30, c)

$$\begin{aligned} \sum M_5 = 0; \quad & -N_{2-4} \cdot r_{2-4} - V_a \cdot 2d + F_1 \cdot d = 0 \\ r_{2-4} = h_2 \cos \alpha_2 = & 3,6 \cdot 0,9285 = 3,3425 \text{ m} \\ -N_{2-4} \cdot 3,3425 - & 20,375 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 0; \quad N_{2-4} = -32,09 \text{ kN} \end{aligned}$$

Varras 4-6

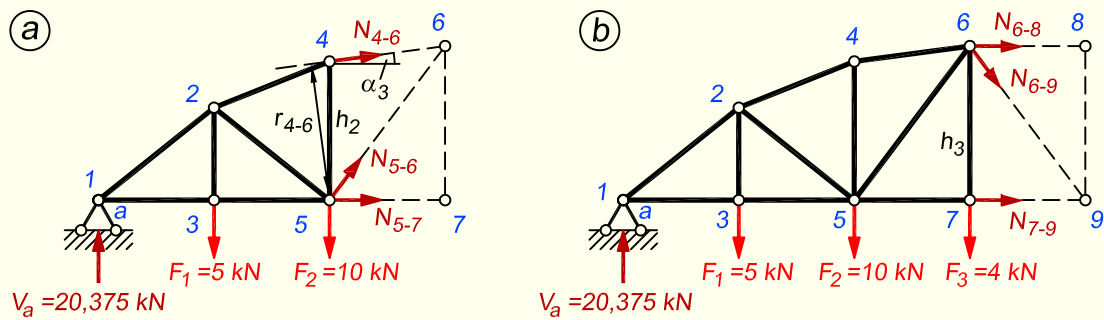
Varda 4-6 pikijõu leidmiseks teeme lõike *II-II* ja koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 5 suhtes (joonis 8.31, a)

$$\begin{aligned} \sum M_5 = 0; \quad & -N_{4-6} \cdot r_{4-6} - V_a \cdot 2d + F_1 \cdot d = 0 \\ r_{4-6} = h_2 \cos \alpha_3 = & 3,6 \cdot 0,9912 = 3,5684 \text{ m} \\ -N_{4-6} \cdot 3,5684 - & 20,375 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 0; \quad N_{4-6} = -30,06 \text{ kN} \end{aligned}$$

Varras 6-8

Varda 6-8 momendipunktiks on sõlm 9 (lõige *III-III*), mille suhtes koostame momentide tasakaalu tingimuse (joonis 8.31, b):

$$\begin{aligned} \sum M_9 = 0; \quad & -N_{6-8} \cdot h_3 - V_a \cdot 4d + F_1 \cdot 3d + F_2 \cdot 2d + F_3 \cdot d = 0 \\ & -N_{6-8} \cdot 4 - 20,375 \cdot 12 + 5 \cdot 9 + 10 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 0; \quad N_{6-8} = -31,88 \text{ kN} \end{aligned}$$



Joonis 8.31. Varraste 4-6 ja 6-8 pikijõud

Varras 2-5

Paneelis, milles ülemise ja alumise vöö varraste sihid ei ole paralleelsed, leiame diagonaali pikijõu momendipunkti suhtes koostatud tasakaalu tingimusest. Diagonaali momendipunktiks on samas paneelis asuvate ülemise ja alumise vöö varraste sihtide lõikepunkt.

Diagonaali 2-5 puhul teeme lõike *I-I* ja momendipunktiks on varraste 2-4 ja 3-5 sihtide lõikepunkt (joonis 8.32). Leiame momendipunkti k_1 kauguse toe a vertikaalst.

Võrrandist

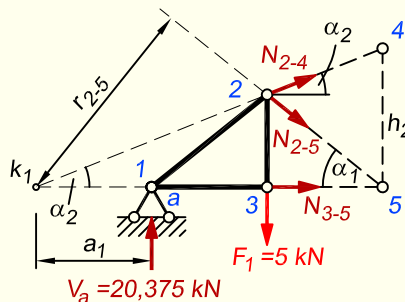
$$\frac{h_2}{2d + a_1} = \tan \alpha_2$$

avaldame

$$a_1 = \frac{h_2}{\tan \alpha_2} - 2d = \frac{3,6}{0,4} - 6 = 3,0 \text{ m}$$

Momendipunkti k_1 kaugus diagonaali 2-5 sihist

$$r_{2-5} = (a_1 + 2d) \sin \alpha_1 = 9 \cdot 0,6247 = 5,6223 \text{ m}$$



Joonis 8.32. Varda 2-5 pikijõud

Kirjutame välja momentide tasakaalu tingimuse

$$\begin{aligned} \sum M_{k_1} = 0; \quad & -N_{2-5} \cdot r_{2-5} + V_a \cdot a_1 - F_1(a_1 + d) = 0 \\ & -N_{2-5} \cdot 5,6223 + 20,375 \cdot 3 - 5 \cdot 6 = 0; \quad N_{2-5} = 5,54 \text{ kN} \end{aligned}$$

Varras 5-6

Diagonaali 5-6 momendipunktiks on pärast lõike II-II tegemist varraste 4-6 ja 5-7 sihtide lõikepunkt k_2 (joonis 8.33). Leiame momendipunkti k_2 kauguse toe a vertikaalst.

Võrrandist

$$\frac{h_3}{3d + a_2} = \tan \alpha_3$$

avaldame

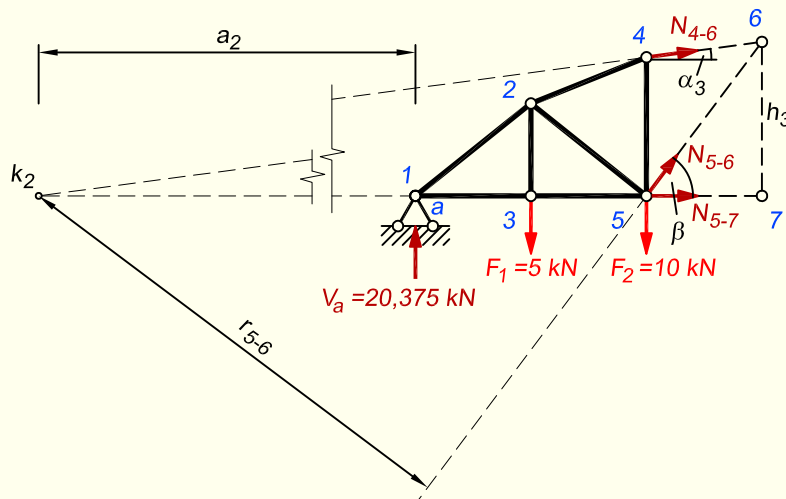
$$a_2 = \frac{h_3}{\tan \alpha_3} - 3d = \frac{4,0}{0,4/3} - 9 = 21 \text{ m}$$

Momendipunkti k_2 kaugus diagonaali 5-6 sihist

$$r_{5-6} = (a_2 + 2d) \sin \beta = 27 \cdot 0,8 = 21,6 \text{ m}$$

Kirjutame välja momentide tasakaalu tingimuse

$$\begin{aligned} \sum M_{k_2} = 0; \quad N_{5-6} \cdot r_{5-6} + V_a \cdot a_2 - F_1(a_2 + d) - F_2(a_2 + 2d) &= 0 \\ N_{5-6} \cdot 21,6 + 20,375 \cdot 21 - 5 \cdot 24 - 10 \cdot 27 &= 0; \quad N_{5-6} = -1,75 \text{ kN} \end{aligned}$$



Joonis 8.33. Varda 5-6 pikijõud

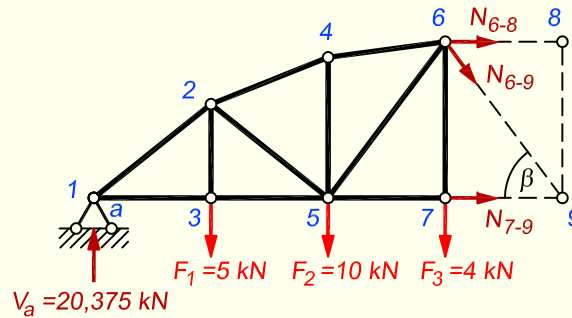
Varras 6-9

Neljandas paneelis on ülemise ja alumise vöö vardad paralleelsed. Teeme lõike III-III. Diagonaali 6-9 pikijõu leiame projektsioonide tasakaalu tingimusest vertikaalteljele (joonis 8.34). Momendipunkti võtet ei saa siin kasutada, kuna paralleelsetel vöövarrastel puudub lõikepunkt ja momentide tasakaalutingimuse kasutamisel jääks ühe vöövarda pikijõud sinna avaldisse sisse. Kui see on varem välja arvatud, siis probleemi ei teki, aga mõistlik oleks siin kasutada ikkagi projektsioonide võtet, kuna see väldib eelnevalt

arvutatud pikijõudude kasutamist ja seega võimalike varasemate vigade edasikandumist.

$$\sum Z = 0; \quad N_{6-9} \sin \beta - V_a + F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

$$N_{6-9} \cdot 0,8 - 20,375 + 5 + 10 + 4 = 0; \quad N_{6-9} = 1,72 \text{ kN}$$



Joonis 8.34. Varda 6-9 pikijõud

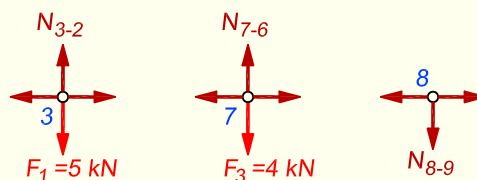
Vardad 3-2, 7-6, 8-9

Sõlmede 3, 7 ning 8 (joonis 8.35) tasakaalu tingimustest vertikaalteljele leiame postide 3-2, 7-6 ning 8-9 pikijõud

$$\sum Z = 0; \quad -N_{3-2} + F_1 = 0; \quad N_{3-2} = F_1 = 5 \text{ kN}$$

$$-N_{7-6} + F_3 = 0; \quad N_{7-6} = F_3 = 4 \text{ kN}$$

$$N_{8-9} = 0$$



Joonis 8.35. Varraste 3-2, 7-6 ja 8-9 pikijõud

Varras 4-5

Posti 4-5 pikijõu leiame sõlme 4 eraldamise teel jõudude projektsioonide tasakaalu tingimusest vertikaalteljele. Eraldatud sõlme skeemi koostamiseks on nüüd kaks võimalust. Esimese variandi korral märgime kõigi varraste pikijõud skeemile tundmatutena ja nooled paigutame seetõttu suunaga sõlmest eemale (joonis 8.36, a)

$$\sum Z = 0; \quad N_{4-5} + N_{4-2} \sin \alpha_2 - N_{4-6} \sin \alpha_3 = 0$$

$$N_{4-5} = -N_{4-2} \sin \alpha_2 + N_{4-6} \sin \alpha_3$$

Asetades sellesse ülemise vöö varraste 4-2 ja 4-6 pikijõudude väärtused

$$N_{4-2} = -32,09 \text{ kN} \quad \text{ja} \quad N_{4-6} = -30,06 \text{ kN}$$

saame

$$N_{4-5} = 32,09 \cdot 0,3714 - 30,06 \cdot 0,1322 = 7,94 \text{ kN}$$



Joonis 8.36. Varda 4-5 pikijõud

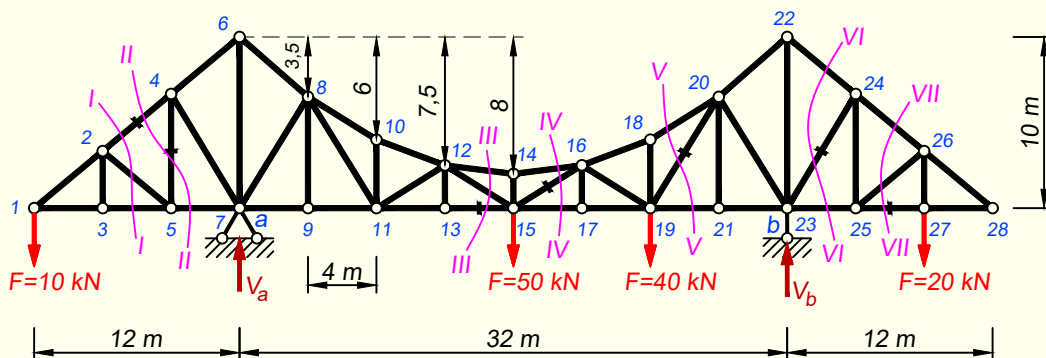
Teise variandi korral märgime vöövarraste pikijõud sõlme skeemile peale kohe õige suuna ja arvulise väärtusega (joonis 8.36, b). Tõmmatud varda pikijõudu tähistav nooleke märgitakse suunaga sõlmest eemale ja surutud varda oma suunaga sõlme poole. Kuna meie sõrestikul on ülemine vöö surutud, siis peavad järelikult mõlemad noolekesed olema suunatud sõlme poole. Noole juurde kirjutame pikijõu väärtuse ilma miinuseta, sest märk on arvesse võetud juba noole suuna valikul. Sõlme vertikaalsuunalisest tasakaalust saame

$$\sum Z = 0; \quad N_{4-5} - 32,09 \sin \alpha_2 + 30,06 \sin \alpha_3 = 0$$

$$N_{4-5} = 32,09 \cdot 0,3714 - 30,06 \cdot 0,1322 = 7,94 \text{ kN}$$

Näeme, et tulemus on sama nagu esimese variandi korral.

NÄIDE 8.4. Leida joonisel 8.37 kujutatud konsoolidega talasõrestiku tähistatud varraste pikijõud.



Joonis 8.37. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonid V_a ja V_b leiame toeliigendite b ja a suhtes koostatud momentide tasakaalutingimustest

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 32 + 10 \cdot 44 + 50 \cdot 16 + 40 \cdot 8 - 20 \cdot 8 = 0; \quad V_a = 43,75 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 32 + 10 \cdot 12 - 50 \cdot 16 - 40 \cdot 24 - 20 \cdot 40 = 0; \quad V_b = 76,25 \text{ kN}$$

Kontrollime tasakaalutingimusega

$$\sum Z = -43,75 - 76,25 + 10 + 50 + 40 + 20 = 0$$

2. Pikijõudude arvutus

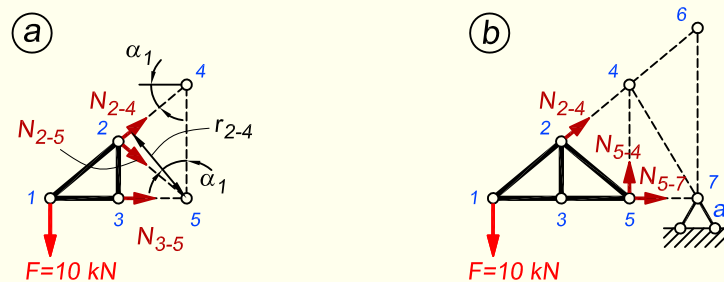
Varras 2-4

Varras 2-4 paikneb sõrestiku konsoolse osas. Konsoolse sõrestiku pikijõudude leidmine toimub sarnaselt tavalise talasõrestiku arvutusele. Varda 2-4 pikijõu arvutamiseks teeme lõike $I-I$ ja vaatame lõikest vasakule jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.38, *a*), kuna praegusel juhul on konsoolse osas mõistlik arvutada just konsooli vaba otsa poolt. Kaks ülejäänud läbilõigatud varrast 2-5 ja 3-5 lõikuvad sõlmes 5, mida kasutame momendi-punktina. Koostame mainitud sõlme suhtes momentide tasakaalu tingimuse

$$\sum M_5 = 0; \quad -N_{2-4} \cdot r_{2-4} + 10 \cdot 8 = 0; \quad N_{2-4} = 15,62 \text{ kN}$$

$$r_{2-4} = \cos \alpha_1 \cdot 6,6667 = 5,1215 \text{ m}$$

Näeme, et erinevalt talasõrestikust on siin ülemine vöö tõmmatud, mis on sarnane tavalisele konsoolile, kus samuti on ülalt alla suunatud koormuse korral varda ülemised kiud tõmmatud.



Joonis 8.38. Varraste 2-4 ja 5-4 pikijõud

Varras 5-4

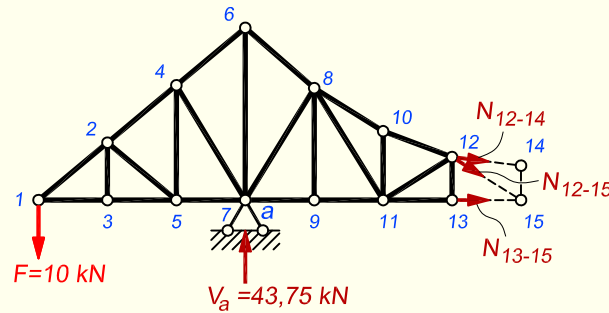
Varda 5-4 pikijõu leidmiseks teeme lõike $II-II$ ja vaatame lõikest vasakule jääva konsoolse osa vaba otsa tasakaalu (joonis 8.38, *b*). Koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 1 suhtes

$$\sum M_1 = 0; \quad N_{5-4} \cdot 8 = 0; \quad N_{5-4} = 0$$

Varras 13-15

Varda 13-15 pikijõu leidmiseks teeme lõike III-III ja vaatame lõikest vasakule poole jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.39). Momendipunktiks on sõlm 12, mille suhtes koostame momentide tasakaalu tingimuse

$$\sum M_{12} = 0; \quad N_{13-15} \cdot r_{13-15} + 10 \cdot 24 - 43,75 \cdot 12 = 0; \quad N_{13-15} = 114 \text{ kN}$$
$$r_{13-15} = 2,5 \text{ m}$$

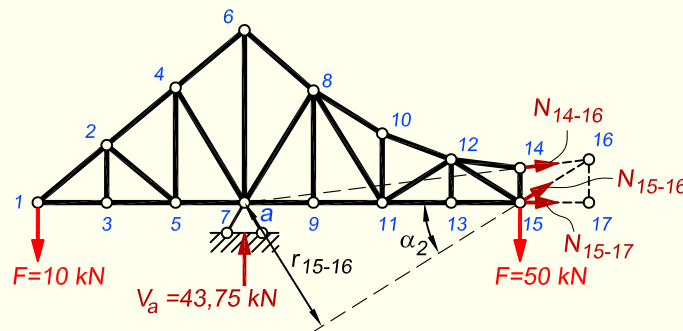


Joonis 8.39. Varda 13-15 pikijõud

Varras 15-16

Varda 15-16 pikijõu leidmiseks teeme lõike IV-IV. Momendipunkt satub sõlme 7, mis on toesõlm. Vaatame sõrestiku vasaku osa tasakaalu (joonis 8.40) ja kirjutame momentide tasakaalu tingimuse

$$\sum M_7 = 0; \quad N_{15-16} \cdot r_{15-16} - 50 \cdot 16 + 10 \cdot 12 = 0; \quad N_{15-16} = 80,19 \text{ kN}$$
$$r_{15-16} = \cos \alpha_2 \cdot 16 = 8,480 \text{ m}$$



Joonis 8.40. Varda 15-16 pikijõud

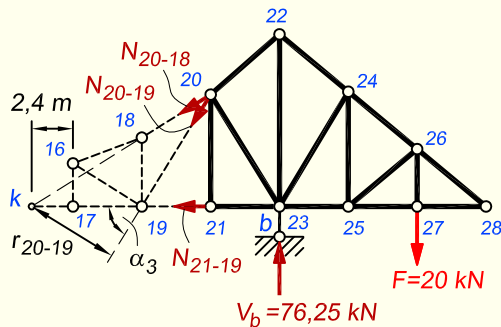
Varras 20-19

Varda 20-19 pikijõu leidmiseks teeme lõike V-V. Momendipunkt satub küll alumisele vööle, kuid ei lange kokku ühegi sõlmega. Tähistame selle tähega k (joonis 8.41). Kirjutame punkti k suhtes momentide tasakaalu tingimuse, mille jaoks vaatame sõrestiku

parema poole tasakaalu

$$\sum M_k = 0; \quad -N_{20-19} \cdot r_{20-19} + 76,25 \cdot 14,4 - 20 \cdot 22,4 = 0; \quad N_{20-19} = 119,25 \text{ kN}$$

$$r_{20-19} = \sin \alpha_3 \cdot 6,4 = 5,4509 \text{ m}$$



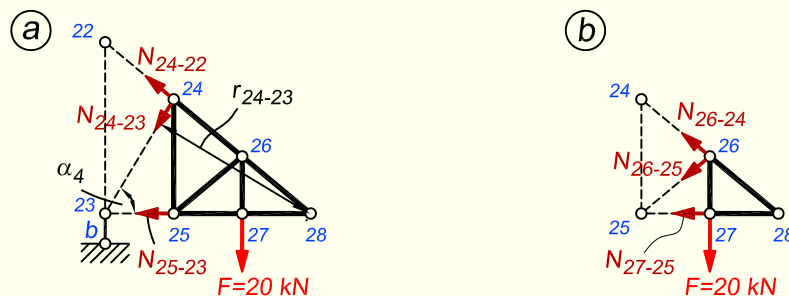
Joonis 8.41. Varda 20-19 pikijõud

Varras 24-23

Varras 24-23 paikneb sõrestiku konsoolse osas. Teeme lõike VI-VI ja vaatame lõikest paremale jääva konsoolse osa vaba otsa tasakaalu (joonis 8.42, a). Kirjutame sõlme 28 suhtes momentide tasakaalu tingimuse

$$\sum M_{28} = 0; \quad N_{24-23} \cdot r_{24-23} + 20 \cdot 4 = 0; \quad N_{24-23} = -7,77 \text{ kN}$$

$$r_{24-23} = \sin \alpha_4 \cdot 12 = 0,8575 \cdot 12 = 10,29 \text{ m}$$



Joonis 8.42. Varraste 24-23 ja 27-25 pikijõud

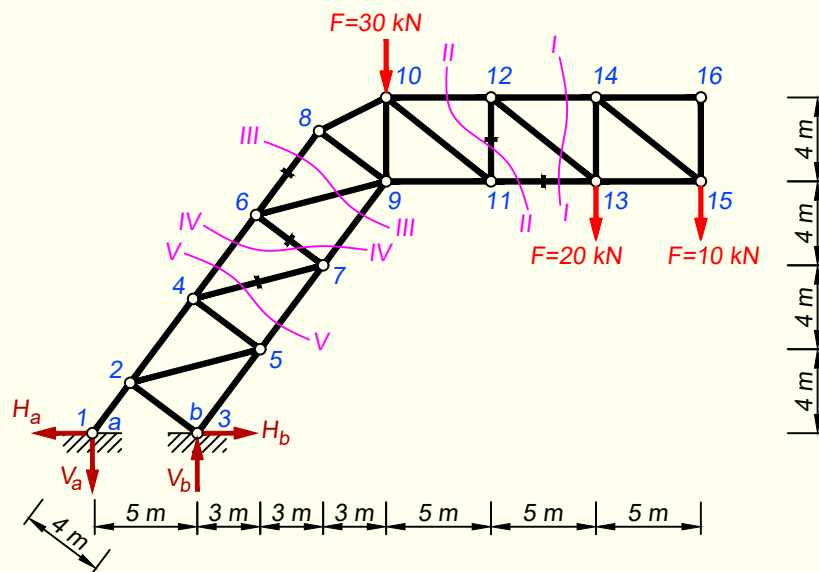
Varras 27-25

Varda 27-25 pikijõu leidmiseks teeme lõike VII-VII ja vaatame lõikest paremale jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.42, b). Momendipunktiks on sõlm 26, mille suhtes kirjutame tasakaalutingimuse

$$\sum M_{26} = 0; \quad -N_{27-25} \cdot r_{27-25} = 0; \quad N_{27-25} = 0$$

Näeme, et erinevalt talasõrestikust on konsoolse osa alumine vöö surutud. Paralleele võib siin tõmmata tavalise konsooliga, millel samuti on alumised kiud surutud, kui koormus on suunatud alla.

NÄIDE 8.5. Leida joonisel 8.43 kujutatud sõrestiku tähistatud varraste pikijõud.



Joonis 8.43. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Konsoolsõrestik on toepinnaga ühendatud ainult ühes otsas, mistõttu tekivad toereaktsioonid ka ainult selles otsas. Toereaktsioonid tekivad mõlema vöö kinnituspunktis ehk siin ülendas vaadeldaval sõrestikul sõlmedes *I* ja *3*. Toereaktsioonide iseloom sõltub sõrestiku kujust ja koormustest.

Vertikaalne koormus põhjustab vertikaalsete toereaktsioonide tekkimise. Kuna koormused püüavad sõrestiku vaba otsa lükata allapoole, siis tekib sellest sõrestiku pöördumine ümber oma toepoolse otsa ja seetõttu on vertikaalsed reaktsioonid vastupidiste suundadega.

Toereaktsioonid V_a ja V_b leiame toeliigendite *b* ja *a* suhtes koostatud momentide tasakaalutingimustest

$$\sum M_b = 0; \quad V_a \cdot 5 - 30 \cdot 9 - 20 \cdot 19 - 10 \cdot 24 = 0; \quad V_a = 178 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 5 - 30 \cdot 14 - 20 \cdot 24 - 10 \cdot 29 = 0; \quad V_b = 238 \text{ kN}$$

Kontrollime tasakaalutingimusega

$$\sum Z = 178 - 238 + 30 + 20 + 10 = 0$$

Horisontaalsete reaktsioonide esinemise määrab ära varda *I-2* asend. See varras on samaväärne liikuva liigendtoega, kus tekib toereaktsioon, mis on toe pikitelje suunaline. Kuna varras *I-2* on kaldu, siis sõlmes *I* tekib ka viltune toereaktsioon, mille saame

jagada vertikaalseks komponendiks V_a ja horisontaalseks komponendiks H_a . Kuna arvutuskeemil horisontaalseid jõudusid ei ole, siis peavad horisontaalsed toereaktsioonid olema teineteisega võrdsed ja vastassuunalised.

Reaktsiooni H_a arvutame varda 1-2 teises otsas oleva sõlme 2 suhtes kirjutatud momentide tasakaalutingimusest vertikaalse reaktsiooni kaudu

$$\sum M_2 = 0; \quad -H_a \cdot 2,4 + 178 \cdot 1,8 = 0; \quad H_a = 133,5 \text{ kN} \Rightarrow H_b = 133,5 \text{ kN}$$

2. Pikijõudude arvutus

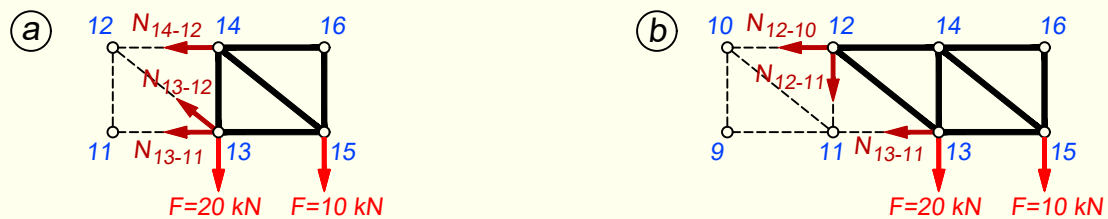
Pikijõudude arvutamisel võime vaadata lõikest nii sõrestiku toe kui ka vaba otsa poole jäävat osa. Kui kõik vardad arvutame lõikest vaba otsa poole jääva sõrestikuosa järgi, siis pole toereaktsioone vaja arvutada.

Varras 13-11

Varda 13-11 pikijõu leidmiseks teeme lõike I-I (joonis 8.43) ja vaatame lõikest paremale jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.44, a). Momendipunktiks on sõlm 12, mille suhtes kirjutame momentide tasakaalutingimuse

$$\sum M_{12} = 0; \quad -N_{13-11} \cdot r_{13-11} - 20 \cdot 5 - 10 \cdot 10 = 0; \quad N_{13-11} = -50 \text{ kN}$$

$$r_{13-11} = 4 \text{ m}$$



Joonis 8.44. Varraste 13-11 ja 12-11 pikijõud

Varras 12-11

Varda 12-11 pikijõu leidmiseks teeme lõike II-II ja vaatame lõikest paremale jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.44, b). Kuna kaks ülejäänud läbilõigatud varrast on paralleelsed, siis kasutame siin jõudude projektsioonide tasakaalu tingimust vertikaalteljele

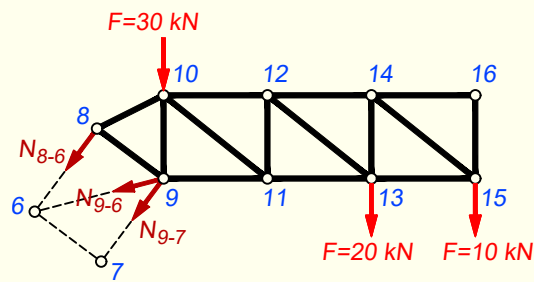
$$\sum Z = 0; \quad N_{12-11} + 20 + 10 = 0; \quad N_{12-11} = -30 \text{ kN}$$

Varras 8-6

Varda 8-6 pikijõu leidmiseks teeme lõike III-III ja vaatame lõikest paremale jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.45, a). Momendipunktiks on sõlm 9, mille suhtes kirjutame momentide tasakaalutingimuse

$$\sum M_9 = 0; \quad N_{8-6} \cdot r_{8-6} - 20 \cdot 10 - 10 \cdot 15 = 0; \quad N_{8-6} = 87,5 \text{ kN}$$

$$r_{8-6} = 4 \text{ m}$$



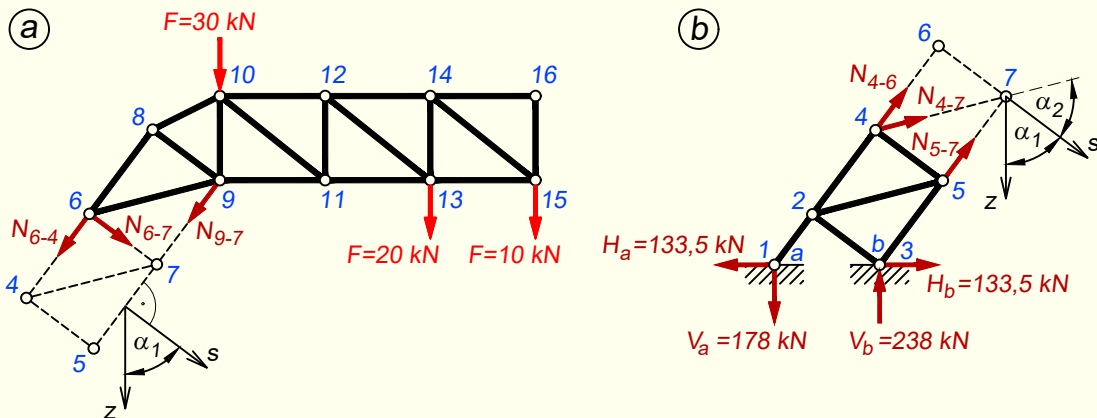
Joonis 8.45. Varda 8-6 pikijõud

Varras 6-7

Varda 6-7 pikijõu leidmiseks teeme lõike IV-IV ja vaatame lõikest paremale jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.46, a). Kasutame projektsioonide tasakaalutingimust vöovarrastega risti olevale teljele s , kuna nii vabaneme avaldises läbilõigatud vöovarraste pikijõududest

$$\sum s = 0; \quad N_{6-7} + (30 + 20 + 10) \cdot \cos \alpha_1 = 0; \quad N_{6-7} = -36 \text{ kN}$$

$$\cos \alpha_1 = 0,6$$



Joonis 8.46. Varraste 6-7 ja 4-7 pikijõud

Varras 4-7

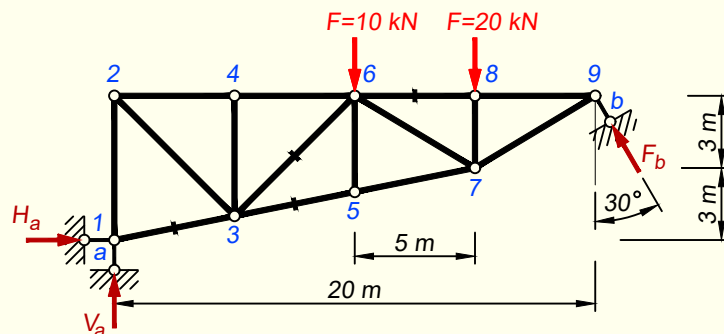
Varda 4-7 pikijõu leidmiseks teeme lõike V-V ja vaatame lõikest vasakule poole jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.46, b). Kasutame projektsioonide tasakaalutingimust vöovarrastega risti olevale teljele s

$$\sum s = 0; \quad N_{4-7} \cdot \cos \alpha_2 + (178 - 238) \cdot \cos \alpha_1 = 0; \quad N_{4-7} = 57,63 \text{ kN}$$

$$\cos \alpha_1 = 0,6; \quad \cos \alpha_2 = 0,6247$$

Horisontaalsed reaktsioonid kaovad siit avaldisest ära, kuna need on võrdsed ja vastassuunalised.

NÄIDE 8.6. Leida joonisel 8.47 kujutatud viltuse toega sõrestiku tähistatud varraste pikijõud.



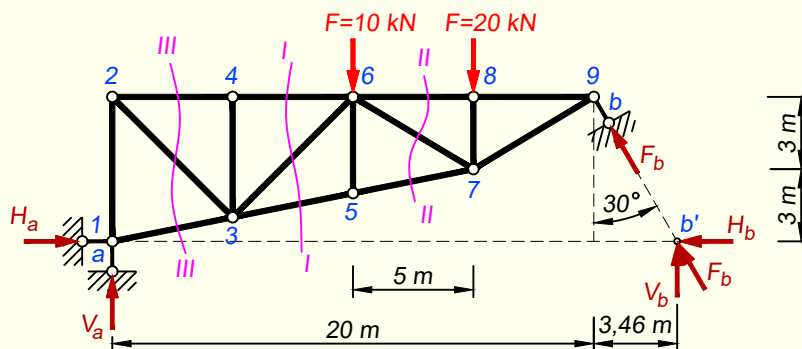
Joonis 8.47. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Vaadeldava sõrestiku arvutuse muudab keerukamaks kaldu olev tugi, mille toereaktsiooni F_b saame jagada kaheks komponendiks. Seetõttu tekivad sellel sõrestikul ka horisontaalsed toereaktsioonid.

Toereaktsioonide arvutamiseks jagame parempoolse toereaktsiooni F_b kaheks komponendiks punktis b' , mis jääb toega a samale kõrgusele (joonis 8.48).



Joonis 8.48. Sõrestiku arvutuskeem pärast kaldu oleva toereaktsiooni jagamist komponentideks

Komponentideks jagamine punktis b' võimaldab meil välja kirjutada vertikaalsete toereaktsioonide leidmiseks momentide tasakaalutingimused punktide a ja b' suhtes, kuna sel juhul kaovad tundmatud horisontaalsed reaktsioonid avaldistest ära.

Arvutame toereaktsioonid V_a ja V_b

$$\sum M_{b'} = 0; \quad -V_a \cdot 23,46 + 10 \cdot 13,46 + 20 \cdot 8,46 = 0; \quad V_a = 12,95 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 23,46 - 10 \cdot 10 - 20 \cdot 15 = 0; \quad V_b = 17,05 \text{ kN}$$

Kontrollime tasakaalutingimusega

$$\sum Z = -12,95 - 17,05 + 10 + 20 = 0$$

Horisontaalsete toereaktsioonide leidmiseks kirjutame momentide tasakaalutingimused sõlme 9 suhtes. Vasakpoolse horisontaalse reaktsiooni saame sõlmest 9 vasakule jäävate jõududega ja parempoolse reaktsiooni sellest paremale jäävate jõududega

$$\sum M_9^v = 0; \quad H_a \cdot 6 - 12,95 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 5 = 0; \quad H_a = 9,83 \text{ kN}$$

$$\sum M_9^p = 0; \quad -H_b \cdot 6 + 17,05 \cdot 3,46 = 0; \quad H_b = 9,83 \text{ kN}$$

Kuna sõrestikul horisontaalseid koormuseid ei ole, siis peavad horisontaalsed reaktsioonid olema teineteisega võrdsed.

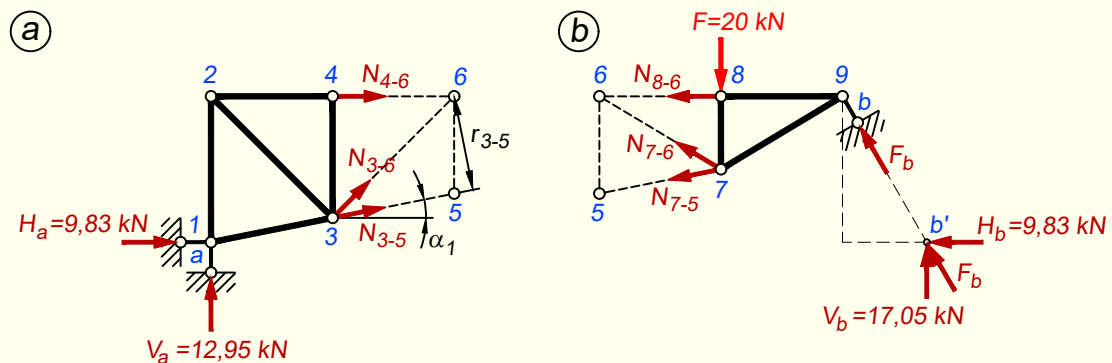
2. Pikijõudude arvutus

Varras 3-5

Varda 3-5 pikijõu arvutamiseks teeme lõike *I-I* (joonis 8.48) ja vaatame lõikest vasakule jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.49, a). Momendipunkt paikneb sõlmes 6, kuna seal lõikuvad kaks ülejäänud läbilõigatud varrast. Kirjutame sõlme 6 suhtes momentide tasakaalutingimuse

$$\sum M_6 = 0; \quad N_{3-5} \cdot r_{3-5} - 12,95 \cdot 10 + 9,83 \cdot 6 = 0; \quad N_{3-5} = 17,98 \text{ kN}$$

$$r_{3-5} = \cos \alpha_1 \cdot 4 = 0,9806 \cdot 4 = 3,922 \text{ m}$$



Joonis 8.49. Varraste 3-5 ja 8-6 pikijõud

Varras 8-6

Varda 8-6 pikijõu arvutamiseks teeme lõike *II-II* ja vaatame lõikest paremale jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.49, b). Kaldu oleva toereaktsiooni asemel kasutame selle

komponente. Momendipunktiks on sõlm 7, mille suhtes kirjutame momentide tasakaalutingimuse

$$\sum M_7 = 0; \quad N_{8-6} \cdot r_{8-6} + 17,05 \cdot 8,46 - 9,83 \cdot 3 = 0; \quad N_{8-6} = -38,25 \text{ kN}$$

$$r_{8-6} = 3 \text{ m}$$

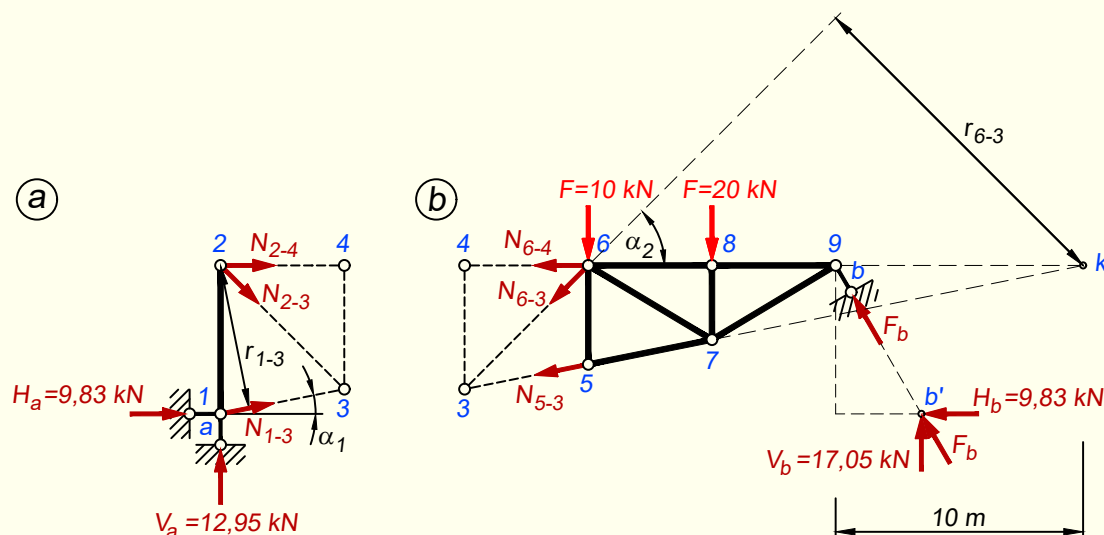
Varras I-3

Varda I-3 pikijõu arvutamiseks teeme lõike III-III ja vaatame lõikest vasakule jääva sõrestikuosa tasakaalu (joonis 8.50, a). Momendipunkt paikneb sõlmes 2, kuna seal lõikuvad kaks ülejäänud läbilõigatud varrast. Kirjutame momendipunkti suhtes tasakaalutingimuse

$$\sum M_2 = 0; \quad N_{1-3} \cdot r_{1-3} + 9,83 \cdot 6 = 0; \quad N_{1-3} = -10,02 \text{ kN}$$

$$r_{1-3} = \cos \alpha_1 \cdot 6 = 0,9806 \cdot 6 = 5,884 \text{ m}$$

Selgus, et alumise vöö vardasse tekib survejõud. See on põhjustatud viltusest toest, mis tekitab sõrestikule horisontaalsed toereaktsioonid. Horisontaalsed toereaktsioonid võivad muuta vastupidiseks harjumuspäraseid talasõrestiku pikijõudude märgid.



Joonis 8.50. Varraste I-3 ja 6-3 pikijõud

Varras 6-3

Varda 6-3 pikijõu arvutamiseks kasutame lõiget I-I ja vaatame lõikest paremale jääva sõrestikuosa tasakaalu. Momendipunktiks on kahe ülejäänud läbilõigatud varda 6-4 ning 5-3 sihtide lõikepunkt k (joonis 8.50, b), mis paikneb 10 m kaugusel sõlmest 9. Kirjutame momendipunkti suhtes tasakaalutingimuse

$$\sum M_k = 0; \quad N_{6-3} \cdot r_{6-3} - 17,05 \cdot 6,54 - 9,83 \cdot 6 + 10 \cdot 20 + 20 \cdot 15 = 0$$

$$r_{6-3} = \sin \alpha_2 \cdot 20 = 0,7071 \cdot 20 = 14,142 \text{ m}; \quad N_{6-3} = -23,30 \text{ kN}$$

8.8. Talasõrestiku pikijõudude arvutus lihttala M ja Q epüüride abil

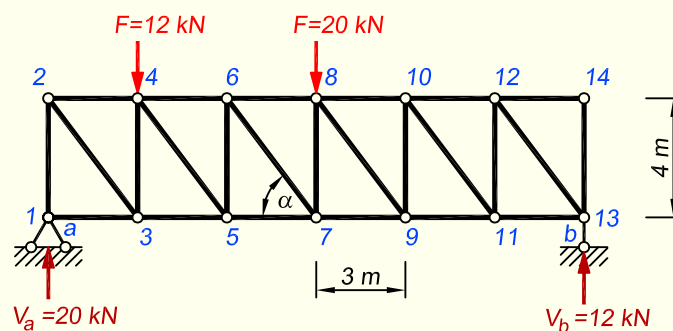
Sõrestiku peatüki sissejuhatuses oli juttu sellest, et talasõrestik töötab sarnaselt lihttalaga ja erinevad nad teineteisest ainult selle poolest, et tala täisseinaline osa on sõrestikul asendatud võrguvarrastega. Nende kahe konstruktsioonitüübi sarnasus võimaldab sõrestiku pikijõudusid arvutada lihttala paindemomendi ja põikjõu epüüri abil.

Kui vertikaalne koormus on suunatud ülalt alla, siis on lihttala alumine serv tõmmatud ja ülemine surutud. Samuti on sõrestikul alumine vöö tõmmatud, ülemine surutud. Lihttallas tekkiv paindemoment asendub sõrestiku puhul vöövarraste pikijõududega ja seetõttu kasutame vööde pikijõudude arvutamiseks lihttala paindemomendi epüüri. Pikijõu mingis vardas saame, kui selle varda momendipunkti kohal olev lihttala M epüüri ordinaat jagada sõrestiku kõrgusega.

Siit paistab välja ka üks sõrestiku väga oluline omadus, mis on seotud murru nimetajas oleva kõrgusega – mida suurem on sõrestiku kõrgus, seda väiksemad on vöövarraste pikijõud. Seega, kui tahame liiga suuri pikijõudusid vähendada, siis kõige lihtsam võimalus selleks on sõrestik kõrgemaks muuta. Siin saab jälle paralleeli tõmmata lihttalaga, mille paindekandevõime on samuti otseselt seotud ristlõike kõrgusega. Kui soovime tala ülemistes ja alumistes kiududes tekkivaid paindepingeid vähendada, saame seda teha ristlõike kõrguse suurendamisega.

Võrguvarraste ülesanne on vastu võtta põikjõudu ja seetõttu saame nii diagonaalide kui ka postide pikijõud arvutada lihttala põikjõu epüüri abil. Täpsemalt vaatleme seda näites.

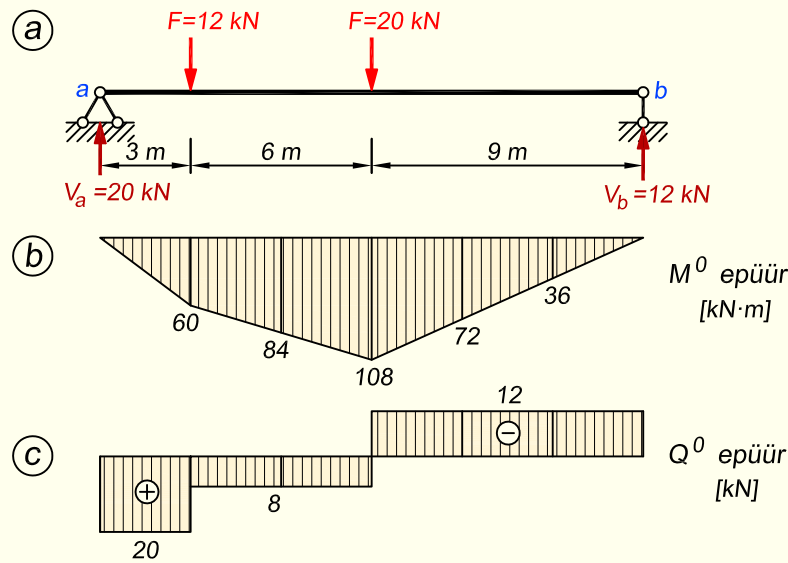
NÄIDE 8.7. Leida joonisel 8.51 kujutatud sõrestiku varraste pikijõud, kasutades selleks sõrestikuga võrdse sildega lihttala M ja Q epüüre.



Joonis 8.51. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

1. Ülesande lahendamist alustame vaadeldava sõrestikuga võrdse silde ja koormusega lihttalale paindemomendi ja põikjõu epüüride koostamisest (joonis 8.52). Jätame epüüride ordinaatide arvutuse siin esitamata ja toome ära ainult lõplikud epüürid.



Joonis 8.52. Sõrestikuga võrdse sildega lihttala sisejõudude epüürid

2. Vöövarraste pikijõud arvutame lihttala paindemomendi epüüri (joonis 8.52, b) abil.

Pikijõu mingis vardas leiame selle varda momendipunkti kohal oleva lihttala M epüüri ordinaadi ja sõrestiku kõrguse suhtena. Arvutame esmalt alumise vöö varraste pikijõud.

Näiteks varda 3-5 momendipunkti leidmiseks lõikame sõrestiku teises paneelis läbi ja näeme, et kaks ülejäänud läbilõigatud varrast 4-5 ja 4-6 lõikuvad sõlmes 4. Järelikult on see sõlm varda 3-5 momendipunktiks. Varda pikijõu arvutamiseks leiame nüüd momendipunkti kohale jääva ordinaadi lihttala M epüürist, milleks on 60 kN·m. Selle jagame sõrestiku kõrgusega ja saamegi varda 3-5 pikijõu.

$$N_{1-3} = \frac{0}{4} = 0 \text{ kN}; \quad N_{3-5} = \frac{60}{4} = 15 \text{ kN}; \quad N_{5-7} = \frac{84}{4} = 21 \text{ kN}$$

$$N_{7-9} = \frac{108}{4} = 27 \text{ kN}; \quad N_{9-11} = \frac{72}{4} = 18 \text{ kN}; \quad N_{11-13} = \frac{36}{4} = 9 \text{ kN}$$

Ülemise vöö varrastel võtame jagatise negatiivsena

$$N_{2-4} = -\frac{60}{4} = -15 \text{ kN}; \quad N_{4-6} = -\frac{84}{4} = -21 \text{ kN}; \quad N_{6-8} = -\frac{108}{4} = -27 \text{ kN}$$

$$N_{8-10} = -\frac{72}{4} = -18 \text{ kN}; \quad N_{10-12} = -\frac{36}{4} = -9 \text{ kN}; \quad N_{12-14} = -\frac{0}{4} = 0 \text{ kN}$$

Näeme, et paralleelvöödega sõrestikul on samade diagonaalide vahele jäävate vöövarraste pikijõud võrdsed ja vastupidise märgiga

$$N_{3-5} = -N_{2-4}; \quad N_{5-7} = -N_{4-6}; \quad N_{7-9} = -N_{6-8} \quad \text{jne}$$

3. Diagonaalide pikijõud arvutame lihttala põikjõu epüüri (joonis 8.52, c) abil.

Arvestama peab ka varda kaldenurka. Kasutame siin näites diagonaali ja horisontaaltelje vahelist nurka ning pikijõu saamiseks jagame vaadeldava diagonaaliga paneeli alla jääva lihttala Q epüüri ordinaadi mainitud kaldenurga siinusega.

Diagonaali pikijõu märgi saame samuti kätte Q epüürist. Teeme lõike läbi vaadeldava diagonaaliga paneeli ning lähtume põikjõu märgireeglist, mille kohaselt positiivne põikjõud püüab varda osa (või siin näites arvutusskeemi osa) pöörata päripäeva.

Kui soovime teada diagonaali 4-5 pikijõu märki, teeme lõike I-I (joonis 8.53, a) ning vaatame seejärel kaheks eraldatud sõrestiku osasid. Kuna diagonaali 4-5 all on lihttala Q epüür positiivne, siis tuleb selle diagonaali pikijõudu kujutavad nooled skeemile kanda nii, et nad hakkavad kumbagi sõrestiku poolt pöörama päripäeva ümber vastava sõrestiku osa toesõlme (joonis 8.53, b). Pärast jõudude pealekandmist skeemile näeme, et need on suunatud kummastki sõlmest eemale ja seetõttu tähistavad tõmbejõudu. Järelikult on diagonaal 4-5 tõmmatud.

Diagonaali 10-11 märgi leidmiseks teeme lõike II-II (joonis 8.53, a). Lihttala Q epüüril on diagonaali 10-11 all negatiivne osa ja järelikult kaheks eraldatud sõrestiku skeemile tuleb selle varda pikijõudu tähistavad nooled märkida nii, et nad hakkavad sõrestiku osasid pöörama vastupäeva ümber toesõlmede (joonis 8.53, c). Näeme, et sellele tingimusele vastavad jõud on suunatud sõlme poole ja seega on tegemist survejõuga.

$$\sin \alpha = 0,8$$

$$N_{2-3} = \frac{20}{0,8} = 25 \text{ kN}; \quad N_{4-5} = N_{6-7} = \frac{8}{0,8} = 10 \text{ kN}$$

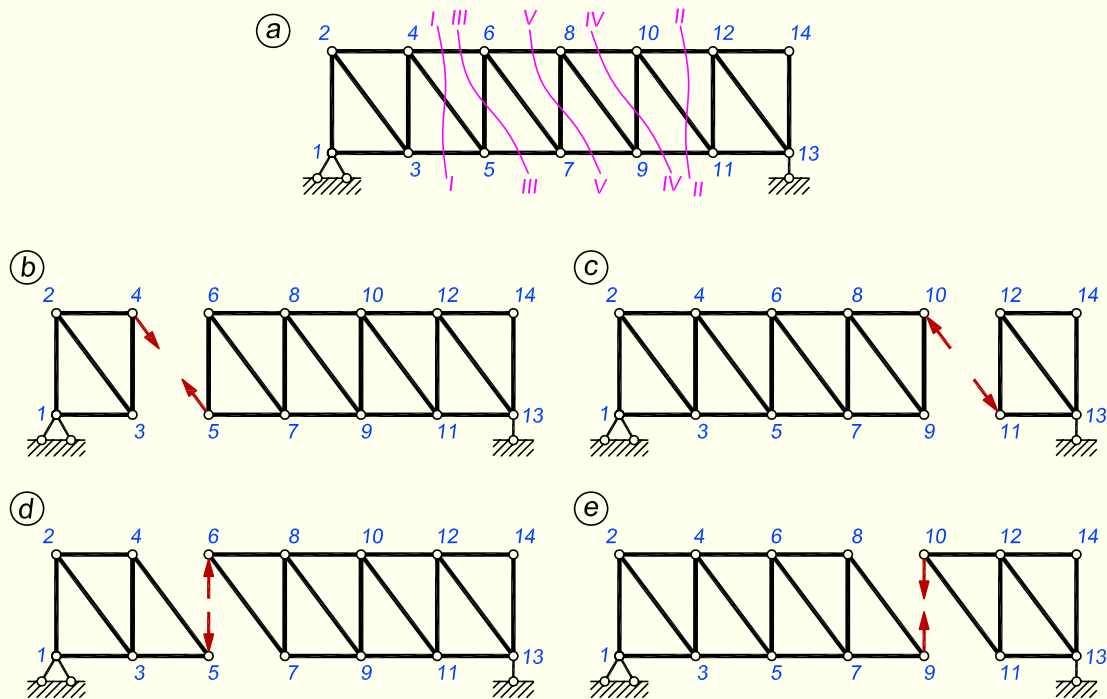
$$N_{8-9} = N_{10-11} = N_{12-13} = -\frac{12}{0,8} = -15 \text{ kN}$$

Lisame siia veel juurde, et praktilisel ülesande lahendamisel ei ole vaja vaadata mõlemat sõrestiku poolt, kuna liigendsõlmedega sõrestikul on vardad kogupikkuses ühemärgilise pikijõuga ja õige märgi saab kätte ükskõik kumma poole pöördesuunast.

Lühidalt võib diagonaalide pikijõudude märgid kokku võtta järgmiselt – kui diagonaal vasakult paremale langeb, siis on tema pikijõu märk sama nagu Q epüüri oma. Kui diagonaal vasakult paremale tõuseb, on tema märk Q epüüri märgile vastupidine.

4. Postide pikijõudude arvutamisel kasutame sarnaselt diagonaalidele lihttala põikjõu epüüri. Kui post jääb epüüri konstantsesse osasse, on posti pikijõud arvuliselt võrdne Q epüüri vastava ordinaadiga. Sõltuvalt sõrestikule rakendatud koormuste asukohast võib post olla ka Q epüüri astme kohal. Sel juhul saame õige ordinaadi valida lõike tegemise abil. Eraldame sõrestiku kaldlõikega kaheks. Kummale poole lõiget jääb posti koormuse otsasõlm, sealt valime Q epüüri ordinaadi. Juhul kui koormus on mõlemal vööl ja koormatud on posti mõlemad otsasõlmed, tekib erandolukord, aga seda siin näites ei käsitle.

Posti pikijõu märgi saame samuti Q epüürist. Teeme lõike läbi vaadeldava posti ja kasutame põikjõu märgireeglit.



Joonis 8.53. Võrguvarraste arvutus

Posti 5-6 pikijõu märgi määramiseks teeme lõike *III-III* (joonis 8.53, a) ning vaatame seejärel kaheks eraldatud sõrestiku osasid. Kuna posti 5-6 all on lihttala Q epüür positiivne, siis tuleb selle posti pikijõudu kujutavad nooled skeemile kanda nii, et nad hakkavad kumbagi sõrestiku poolt pöörama päripäeva (joonis 8.53, d) ümber vastava sõrestiku poole toesõlme. Näeme, et sellele tingimusele vastavad jõud on suunatud sõlme poole ja seega on postis 5-6 tegemist survejõuga.

Kui soovime teada posti 9-10 pikijõu märki, teeme lõike *IV-IV* (joonis 8.53, a). Lihttala Q epüüriil on posti 9-10 all negatiivne osa ja järelkult kaheks eraldatud sõrestiku skeemile tuleb selle varda pikijõudu tähistavad nooled kanda nii, et nad hakkavad sõrestiku osasid pöörama vastupäeva ümber toesõlmede (joonis 8.53, e). Sellele tingimusele vastavad jõud on suunatud sõlmest eemale ja järelkult on post 9-10 tõmmatud.

Vardad 3-4 ja 7-8 on sellised postid, mis satuvad koormuste asukoha tõttu Q epüüri astme kohale. Posti 7-8 vaatlemisel teeme lõike *V-V* (joonis 8.53, a). Esmalt määrame, millist Q epüüri ordinaati arvutuses kasutada. Kuna varda koormuseta ots jääb lõikest vasakule, siis kasutame ka Q epüüriil astmest vasakul olevat ordinaati. Edasi määrame pikijõu märgi, mida teeme sarnaselt eespool kirjeldatule. Varda 3-4 puhul on lahenduskaik sarnane.

$$N_{1-2} = -20 \text{ kN}; \quad N_{3-4} = -20 \text{ kN}; \quad N_{5-6} = -8 \text{ kN}$$

$$N_{7-8} = -8 \text{ kN}; \quad N_{9-10} = 12 \text{ kN}; \quad N_{11-12} = 12 \text{ kN}$$

8.9. Varraste asendamise võtte

Eespool kirjeldatud meetodeid (sõlmede eraldamine, sõrestiku eraldamine lõikega kaheks osaks) kasutame lihtvõrguga sõrestike puhul. Mittelihtvõrguga sõrestike puhul muutub nende meetodite rakendamine tülikaks, kuna tasakaalutingimustesse jääb liiga palju tundmatuid – sõlmede eraldamise korral liitub sõlmes rohkem kui kaks tundmatut sisejõudu; sõrestiku eraldamisel lõikega kaheks osaks läbib lõige rohkem kui kolme tundmatu sisejõuga varrast. Seetõttu võib mittelihtvõrguga sõrestike varraste sisejõudude arvutamiseks kasutada *varraste asendamise võtet*, mida nimetatakse ka *Hennebergi meetodiks*.

Varraste asendamise võtte puhul eemaldame sõrestiku arvutusskeemist ühe varda ja selle mõju asendame sisejõuga, mida märgime tähega X . Varda eemaldamine staatikaga määratavast sõrestikust muudab sõrestiku mehhanismiks. Kujumuutumatus kindlustamiseks asetame sõrestiku arvutusskeemist ärajäetud varda asemele uue varda mingisse teise kohta. Uut skeemi nimetatakse sõrestiku *asendavaks arvutusskeemiks* ja uut varrast, mida märgime tähega a , *asendusvardaks*. Asendav arvutusskeem peab olema geomeetriselt muutumatu ja niisuguse struktuuriga, mis lubab rakendada sisejõudude leidmiseks eelkirjeldatud lihtsaid võtteid.

Joonisel 8.54, a kujutatud sõrestiku arvutusskeemist eemaldame varda 2-6, tema mõju asendame sõlmedes 2 ja 6 varda sisejõuga X ning kujumuutumatus tagamiseks paneme uue varda ehk asendusvarda sõlmede 3 ja 6 vahele (joonis 8.54, b).

Eemaldatud varda 2-6 mõju asendava sisejõu X (joonis 8.54, b) määrame tingimusest, et asendusvarda a sisejõud võrdub nulliga, kuna seda varrast ei ole sõrestiku tegelikus arvutusskeemis. Selle tingimuse rahuldamisel on sõrestiku asendava arvutusskeemi kõigi teiste varraste sisejõud võrdsed sõrestiku tegeliku arvutusskeemi varraste sisejõududega.

Asendava sõrestiku suvalise varda k sisejõu väljendame jõudude mõju sõltumatuse printsiibi alusel

$$N_k = N'_{kp} + N'_{kx} \quad (8.30)$$

kus N'_{kp} on koormusest põhjustatud sisejõud asendava arvutusskeemi vardas k (joonis 8.54, c) ning N'_{kx} ärajäetud varda asemele rakendatud kaksikjõust X põhjustatud sisejõud asendava arvutusskeemi vardas k (joonis 8.54, d).

Varda k sisejõu N'_{kx} väljendame korrutisena

$$N'_{kx} = n'_{kx} X \quad (8.31)$$

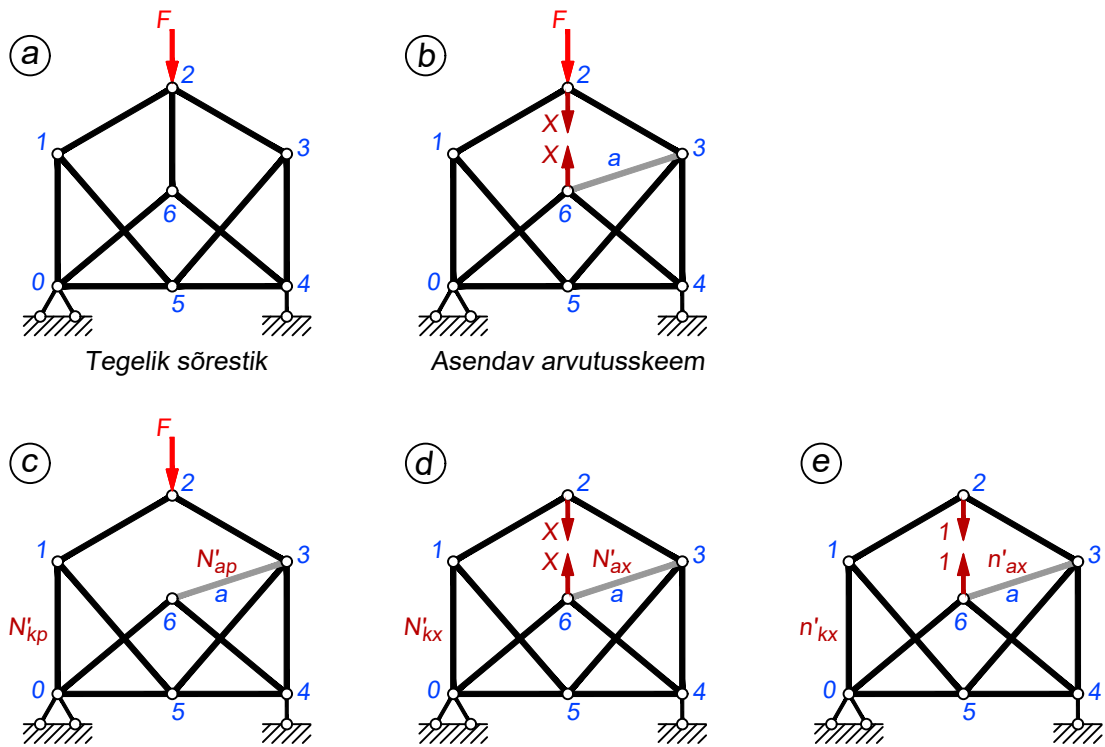
kus X on eemaldatud varda sisejõud tegelikus arvutusskeemis ning n'_{kx} jõududest $X = 1$ põhjustatud sisejõud sõrestiku asendavas arvutusskeemis (joonis 8.54, e).

Nüüd võib avaldise (8.30) esitada kujul

$$N_k = N'_{kp} + n'_{kx} X \quad (8.32)$$

mis kehtib ka asendusvarda a jaoks

$$N_a = N'_{ap} + n'_{ax} X \quad (8.33)$$



Joonis 8.54. Varraste asendamise võtte

kus N'_{ap} on koormusest põhjustatud sisejõud asendusvardas (joonis 8.54, c) ning n'_{ax} kaksikjõududest põhjustatud sisejõud asendusvardas (joonis 8.54, e).

Kuna tegelikus arvutuskeemis varrast a ei ole, siis tingimus $N_a = 0$ annab võrrandi

$$N'_{ap} + n'_{ax}X = 0 \quad (8.34)$$

millest avaldame sisejõu X

$$X = -\frac{N'_{ap}}{n'_{ax}} \quad (8.35)$$

Kui $n'_{ax} = 0$, siis $X = -\frac{N'_{ap}}{0} = \infty$; või kui ka $N'_{ap} = 0$, siis $X = \frac{0}{0}$. Sellest järeldub: kui $n'_{ax} = 0$ ja asendav arvutuskeem on geomeetriliselt muutumatu, siis sõrestiku tegelik arvutuskeem on hetkmuutuv.

Eemaldatud varda sisejõu (8.35) asetamisel avaldusse (8.32) saame valemi suvalise varda k sisejõu arvutamiseks

$$N_k = N'_{kp} - n'_{kx} \frac{N'_{ap}}{n'_{ax}} \quad (8.36)$$

Kahe varda asendamine

Kahe varda asendamisel leiame sõrestiku asendava arvutuskeemi varrastes sisejõud koormusest, esimese eemaldatud varda asemele rakendatud kaksikjõust $X_1 = 1$ ja teise eemaldatud

varda asemele rakendatud kaksikjõust $X_2 = 1$.

Sõrestiku varraste sisejõud arvutame valemiga

$$N_k = N'_{kp} + n'_{k1}X_1 + n'_{k2}X_2 \quad (8.37)$$

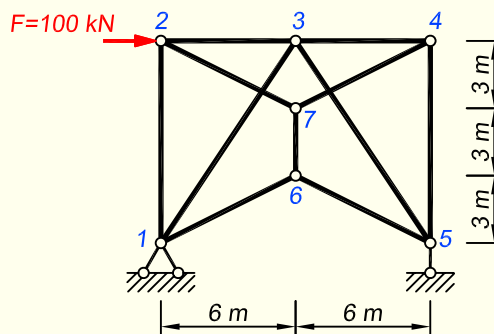
kus N'_{kp} on asendava sõrestiku varda k sisejõud, mis on põhjustatud sõrestikule mõjuvast koormusest ning n'_{k1} ja n'_{k2} on kaksikjõududest $X_1 = 1$ ja $X_2 = 1$ põhjustatud sisejõud asendava arvutusskeemi vardas k .

Eemaldatud varraste sisejõudude X_1 ja X_2 leidmiseks koostame võrrandisüsteemi tingimuste põhjal, et asendusvarraste a ja b sisejõud võrduvad nulliga

$$\begin{aligned} N_a &= N'_{ap} + n'_{a1}X_1 + n'_{a2}X_2 \\ N_b &= N'_{bp} + n'_{b1}X_1 + n'_{b2}X_2 \end{aligned} \quad (8.38)$$

kus N'_{ap} ja N'_{bp} on koormusest põhjustatud sisejõud asendusvarrastes a ja b ; n'_{a1} ja n'_{b1} on esimese eemaldatud varda asemele rakendatud kaksikjõust $X_1 = 1$ põhjustatud sisejõud asendusvarrastes a ja b ; n'_{a2} ja n'_{b2} on teise eemaldatud varda asemele rakendatud kaksikjõust $X_2 = 1$ põhjustatud sisejõud asendusvarrastes a ja b .

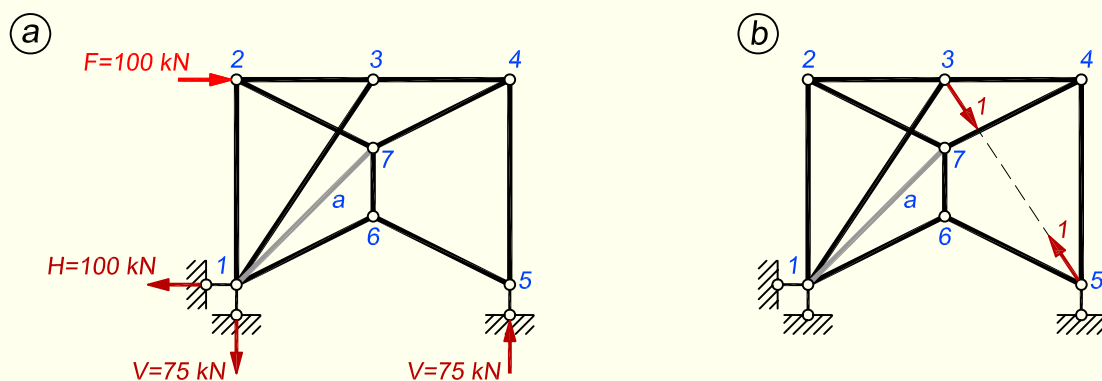
NÄIDE 8.8. Arvutada varraste asendamise võttega joonisel 8.55 kujutatud sõrestiku varraste pikijõud.



Joonis 8.55. Sõrestiku arvutusskeem

LAHENDUS

Eemaldame varda 3-5 ja asendame selle vardaga 1-7. Koormusest põhjustatud sisejõud asendava arvutusskeemi varrastes leiame sõlmede eraldamise võttega (joonis 8.56, a). Algul vaatleme sõlme 5 ning seejärel sõlmi 4, 6, 3, 7, 2 ja 1. Saadud tulemused on esitatud tabeli 8.1 teises veerus.



Joonis 8.56. Asendav arvutuskeem

Järgnevalt leiame eemaldatud varda 3-5 asemele rakendatud kaksikjõust $X_1 = 1$ põhjustatud sisejõud asendava arvutuskeemi varrastes (joonis 8.56, b). Tulemused on esitatud tabeli 8.1 kolmandas veerus.

Tabel 8.1. Sisejõudude arvutamine

| Varras | N'_{kp} , [kN] | n'_{kx} , [-] | $n'_{kx}X$, [kN] | N_k , [kN] |
|--------|------------------|-----------------|-------------------|--------------|
| 1-2 | -25,00 | 0 | 0,0 | -25,0 |
| 2-3 | -150,00 | 0 | 0,0 | -150,0 |
| 3-4 | -150,00 | -1,109 | 100,0 | -50,0 |
| 4-5 | -75,00 | -0,555 | 50,0 | -25,0 |
| 5-6 | 0 | -0,620 | 55,9 | 55,9 |
| 1-6 | 0 | -0,620 | 55,9 | 55,9 |
| 2-7 | 55,90 | 0 | 0,0 | 55,9 |
| 7-4 | 167,71 | 1,240 | -111,8 | 55,9 |
| 6-7 | 0 | -0,555 | 50,0 | 50,0 |
| 1-3 | 0 | -1,000 | 90,1 | 90,1 |
| 3-5 | - | 1,000 | -90,1 | -90,1 |
| a | 141,42 | 1,569 | -141,4 | 0,0 |

Võrrandid (8.33) ja (8.34) annavad meile

$$N_a = N'_{ap} + n'_{ax}X = 0$$

ehk

$$141,42 + 1,569X = 0$$

millest saame eemaldatud varda pikijõuks

$$X = -\frac{141,42}{1,569} = -90,13 \text{ kN}$$

Valemiga (8.32) arvutame varraste sisejõud

$$N_k = N'_{kp} + n'_{kx}X$$

Varraste sisejõud on esitatud tabeli 8.1 viimases veerus.

8.10. Koormuse lahutamise võtte

Mittelihtvõrguga sõrestiku arvutus lihtsustub tunduvalt, kui sõrestik on sümmeetriline. Kui on ainult kolm toesidet, siis need ei tarvitse asetseada sümmeetriliselt. Mittesümmeetriliselt asetsevates toesidemetes peavad toereaktsioonid olema otseselt arvutatavad tasakaalutingimustest.

Koormuse lahutamise võtet kasutame sümmeetriliste arvutusskeemide sisejõudude ja toereaktsioonide leidmisel. Sümmeetrilises arvutusskeemis põhjustab sümmeetriline koormus sümmeetrilisi ja antisümmeetrilise koormus antisümmeetrilisi sisejõudusid. Sümmeetriliselt asetsevates elementides esinevad sisejõud on sümmeetrilise koormuse puhul võrdsed ja antisümmeetrilise koormuse puhul suuruselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega.

Kui sümmeetrilist sõrestikku ei ole võimalik lahendada sõlmede eraldamise, momendipunkti ega projektsioonide võttega, siis lahutame koormuse sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks koormuseks selliselt, et nende summa moodustab tegeliku koormuse. Seejärel leiame eelnimetatud võtetega sisejõud eraldi mõlemast koormusest ja lõplike sisejõudude saamiseks liidame need.

Koormuse lahutamine sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks

Joonisel 8.57, a kujutatud sõrestikule mõjuv koormus on lahutatud sümmeetriliseks (joonis 8.57, b) ja antisümmeetriliseks (joonis 8.57, c). Sõrestikujundil on kolm toesidet. Vertikaalsed toesidemed on sümmeetrilised, horisontaalne toeside ei ole. Tingimusest

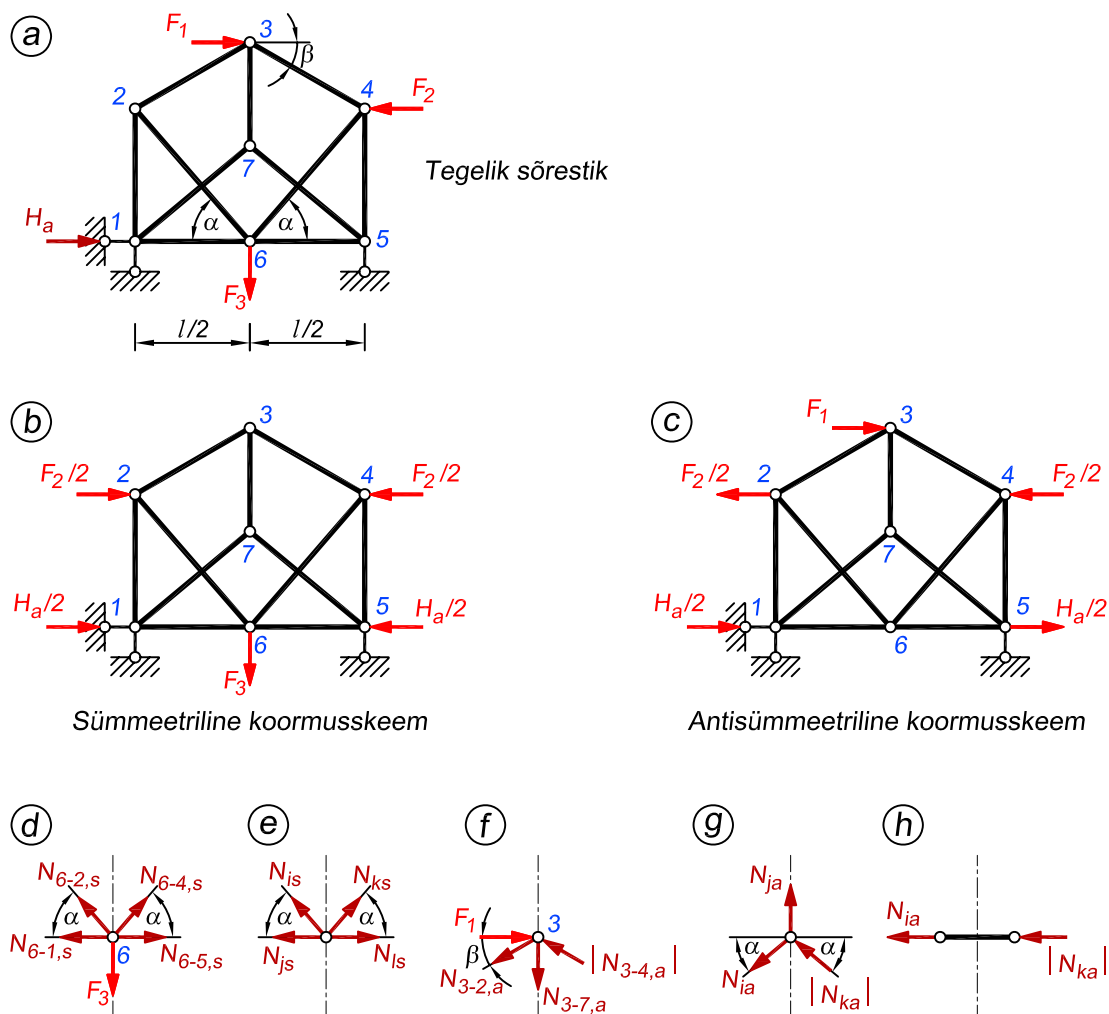
$$\sum X = 0; \quad H_a + F_1 - F_2 = 0 \quad (8.39)$$

leiame horisontaalne toereaktsiooni

$$H_a = F_2 - F_1 \quad (8.40)$$

Edaspidisel ülesande lahendamisel käsitleme toereaktsiooni H_a koormusena, mille lahutame samuti sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks.

Kui osa koormusest on sümmeetriline (jõud F_3), siis kanname selle tervikuna sümmeetrilise koormusskeemi. Antisümmeetrilise koormuse osa (jõud F_1) kanname tervikuna antisümmeetrilise koormusskeemi. Suvalisest koormusest (jõud F_2 ja toereaktsioon H_a) kanname pool sümmeetrilise ja pool antisümmeetrilise koormusskeemi. Teisel pool sümmeetriatelge rakendame pool koormust sümmeetrilises koormusskeemis sümmeetriliselt ja antisümmeetrilises skeemis sellele vastupidise suunaga.



Joonis 8.57. Koormuse lahutamise võte

Koormuse lahutamine sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks annab lisaks tasakaalutingimustele veel mõned lisatingimused sümmeetriateljel asuvates sõlmedes ühendatud varraste sisejõudude leidmiseks (joonisel 8.57, a sõlmed 3, 6, 7).

Sümmeetriline koormusskeem

Lahendamist alustame sümmeetriateljel asuvast sõlmest. Sümmeetrilises koormusskeemis alustame sõlmest 6 (joonis 8.57, b ja d). Tasakaalutingimus

$$\sum X = 0; \quad N_{6-5,s} - N_{6-1,s} + N_{6-4,s} \cos \alpha - N_{6-2,s} \cos \alpha = 0 \quad (8.41)$$

on rahuldatud, kuna sümmeetrilises koormusskeemis

$$N_{6-2,s} = N_{6-4,s}; \quad N_{6-1,s} = N_{6-5,s} \quad (8.42)$$

Tasakaalutingimusest

$$\sum Z = 0; \quad -N_{6-2,s} \sin \alpha - N_{6-4,s} \sin \alpha + F_3 = 0 \quad (8.43)$$

leiame tingimuse (8.42) alusel

$$N_{6-2,s} = N_{6-4,s} = \frac{F_3}{2 \sin \alpha} \quad (8.44)$$

Sümmeetrilises koormusskeemis arvutame järgnevalt sisejõud sõlmes 2 ühendatud varrestes ja edasi sõlmedes 1 ning 3.

Joonisel 8.57, e on kujutatud sümmeetrilise koormusskeemi sümmeetriateljel asuv koormamata sõlm. Tasakaalutingimus

$$\sum X = 0; \quad N_{ks} \cos \alpha - N_{is} \cos \alpha + N_{ls} - N_{js} = 0 \quad (8.45)$$

on rahuldatud, kuna

$$N_{is} = N_{ks}; \quad N_{js} = N_{ls} \quad (8.46)$$

Tasakaalutingimus

$$\sum Z = 0; \quad -N_{is} \sin \alpha - N_{ks} \sin \alpha = 0 \quad (8.47)$$

on ainult siis rahuldatud, kui

$$N_{is} = N_{ks} = 0 \quad (8.48)$$

kuna $\sin \alpha \neq 0$ ja tingimus (8.46) peab olema rahuldatud. Joonisel 8.57, e kujutatud sümmeetrilise koormusskeemi sümmeetriateljel asuvas koormamata sõlmes ühendatud diagonaalide sisejõud on nullid (8.48).

Antisümmeetriline koormusskeem

Antisümmeetrilises koormusskeemis (joonis 8.57, c) vaatleme sümmeetriateljel asuvate sõlmede 3 ja 7 (joonis 8.57, f ja g) tasakaalu.

Antisümmeetrilises koormusskeemis

$$N_{3-2,a} = -N_{3-4,a} \quad (8.49)$$

ja sõlme 3 tasakaalu tingimusest

$$\sum X = 0; \quad F_1 - N_{3-2,a} \cos \beta - |N_{3-4,a}| \cos \beta = 0 \quad (8.50)$$

leiame

$$N_{3-2,a} = |N_{3-4,a}| = \frac{F_1}{2 \cos \beta} \quad (8.51)$$

Tasakaalutingimusest

$$\sum Z = 0; \quad N_{3-2,a} \sin \beta - |N_{3-4,a}| \sin \beta + N_{3-7,a} = 0 \quad (8.52)$$

leiame, kuna $N_{3-2,a} = |N_{3-4,a}|$, et

$$N_{3-7,a} = 0 \quad (8.53)$$

Võrrandist (8.53) jäeldub, et antisümmeetrilises koormusskeemis sümmeetriateljel asuvas vardas (joonisel 8.57, *c* varras 3-7) on sisejõud null. Sõlme 7 tasakaalust leiame, et ka varraste 7-1 ja 7-5 sisejõud on nullid. Järgnevalt lahendame sõlmed 2 ja 1. Lõplike sisejõudude saamiseks liidame mõlema koormusskeemi varraste sisejõud.

Joonisel 8.57, *g* kujutatud antisümmeetrilise koormusskeemi sümmeetriateljel asuva sõlme tasakaalu tingimusest

$$\sum X = 0; \quad -N_{ia} \cos \alpha - |N_{ka}| \cos \alpha = 0 \quad (8.54)$$

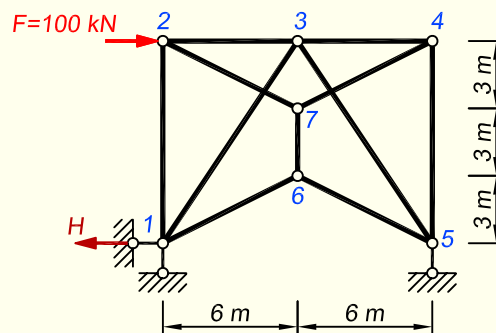
jäeldub, et

$$N_{ia} = |N_{ka}| = 0 \quad (8.55)$$

kuna $\cos \alpha \neq 0$ ja $N_{ia} = -N_{ka}$. Tasakaalutingimusest $\sum Z = 0$ saame, et ka $N_{ja} = 0$. Järelikult joonisel 8.57, *g* kujutatud antisümmeetrilise koormusskeemi sümmeetriateljel asuvas koormamata sõlmes ühendatud varraste sisejõud on nullid.

Kui antisümmeetrilises skeemis varras asub risti sümmeetriateljel (joonis 8.57, *h*), siis selle varda sisejõud võrdub nulliga: $N_{ia} = |N_{ka}| = 0$.

NÄIDE 8.9. Arvutada koormuse lahutamise võttega joonisel 8.58 kujutatud sõrestiku varraste pikijõud.



Joonis 8.58. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

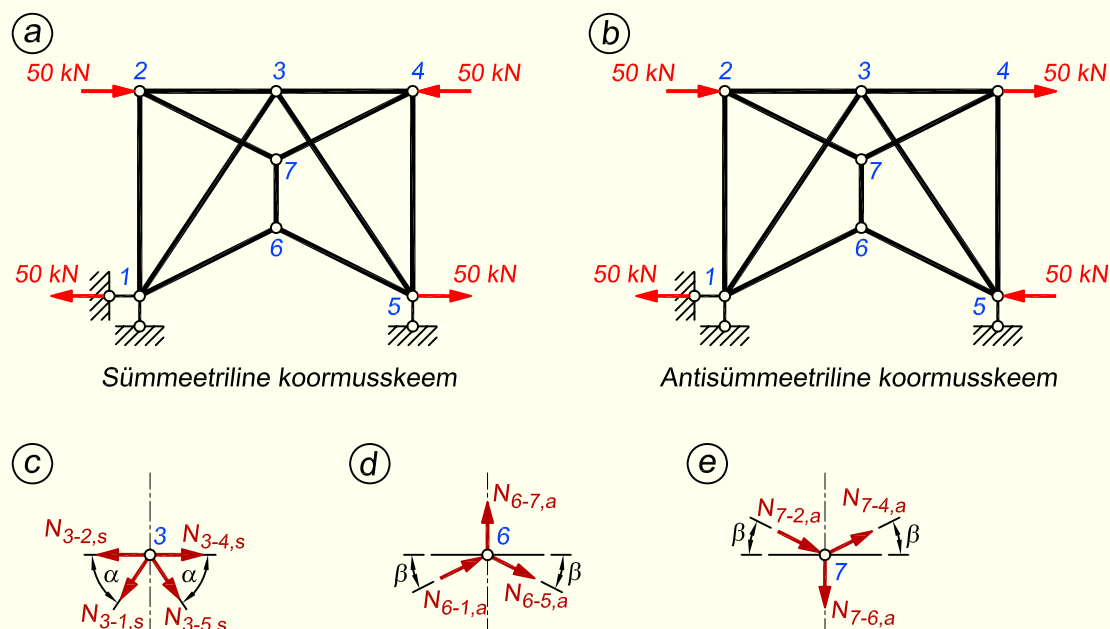
Sõrestikul on kolm toesidet. Vertikaalsed toesidemed on sümmeetrilised, horisontaalne aga mitte. Horisontaalse toereaktsiooni arvutame tasakaalutingimusest

$$\sum X = 0; \quad F - H = 0; \quad H = F = 100 \text{ kN}$$

Ülesande edasisel lahendamisel käsitleme toereaktsiooni H koormusena, mille lahutame sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks.

Jõud F paikneb sõlmes 2. Koormuse lahutamisel rakendame sümmeetrilises ja antisümmeetrilises skeemis sõlme 2 jõu $0,5F$. Teisel pool sümmeetriatelge sõlme 2 süm-

meetriliselt asetsevasse sõlme 4 rakendame sümmeetrilises koormusskeemis $0,5F$ sümmeetriliselt, antisümmeetrilises koormusskeemis aga vastupidiselt sümmeetrilises koormusskeemis sõlmes 4 mõjuva jõuga (joonis 8.59, a ja b). Samuti lahutame reaktsiooni H komponentideks sõlmedesse 1 ja 5.



Joonis 8.59. Koormuse lahutamine sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks koormuseks

Ülesande lahendamist alustame sümmeetriateljelt. Sümmeetrilises koormusskeemis vaatleme sõlme 3 tasakaalutingimusi (joonis 8.59, c)

$$\sum X = 0; \quad -N_{3-2,s} - N_{3-1,s} \cos \alpha + N_{3-4,s} + N_{3-5,s} \cos \alpha = 0$$

$$\sum Z = 0; \quad N_{3-1,s} \sin \alpha + N_{3-5,s} \sin \alpha = 0$$

Tasakaalutingimus $\sum X = 0$ on rahuldatud, kuna sümmeetrilises koormusskeemis

$$N_{3-2,s} = N_{3-4,s} \quad \text{ja} \quad N_{3-1,s} = N_{3-5,s}$$

Kuna $\sin \alpha \neq 0$ ning varraste 1-3 ja 3-5 sisejõud on võrdsed ja samade märkidega, siis tasakaalutingimus $\sum Z = 0$ on rahuldatud ainult sel juhul, kui

$$N_{3-1,s} = N_{3-5,s} = 0$$

Pärast sümmeetrilise koormusskeemi vertikaalsete toereaktsioonide arvutamist (antud koormuse puhul võrduvad need nulliga) leiame sõlme 1 tasakaalutingimustest varraste 1-2 ja 1-6 sisejõud. Seejärel leiame sõlme 2 tasakaalutingimustest varraste 2-3 ja

2-7 sisejõud ning edasi sõlmes 7 varda 7-6 sisejõu. Sõlme 6 tasakaalutingimus $\sum Z = 0$ jääb kontrollimiseks.

Antisümmeetrilises koormusskeemis vaatleme sõlmede 6 ja 7 tasakaalutingimusi. Varraste 6-1 ja 6-5, samuti varraste 2-7 ja 7-4 sisejõud antisümmeetrilises koormusskeemis on arvuliselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega (joonis 8.59, *d* ja *e*).

Sõlme 6 tasakaalutingimused

$$\sum X = 0; \quad N_{6-1,a} \cos \beta + N_{6-5,a} \cos \beta = 0$$

$$\sum Z = 0; \quad -N_{6-7,a} - N_{6-1,a} \sin \beta + N_{6-5,a} \sin \beta = 0$$

ning sõlme 7 tasakaalutingimused

$$\sum X = 0; \quad N_{7-2,a} \cos \beta + N_{7-4,a} \cos \beta = 0$$

$$\sum Z = 0; \quad N_{7-6,a} + N_{7-2,a} \sin \beta - N_{7-4,a} \sin \beta = 0$$

on rahuldatud ainult siis, kui sisejõud

$$N_{6-1,a} = N_{6-5,a} = N_{6-7,a} = N_{7-2,a} = N_{7-4,a} = 0$$

Sõlme 2 tasakaalutingimustest leiame, et

$$N_{2-1,a} = 0; \quad N_{2-3,a} = -50 \text{ kN}$$

Sõlmede 1 või 3 tasakaalutingimusest leiame varda 1-3 sisejõu.

Lõplike sisejõudude saamiseks liidame mõlema koormusskeemi varraste sisejõud. Sümmetrilise ja antisümmeetrilise koormusskeemi, samuti ka varraste lõplikud sisejõud on esitatud tabelis 8.2.

Tabel 8.2. Sisejõudude arvutamine

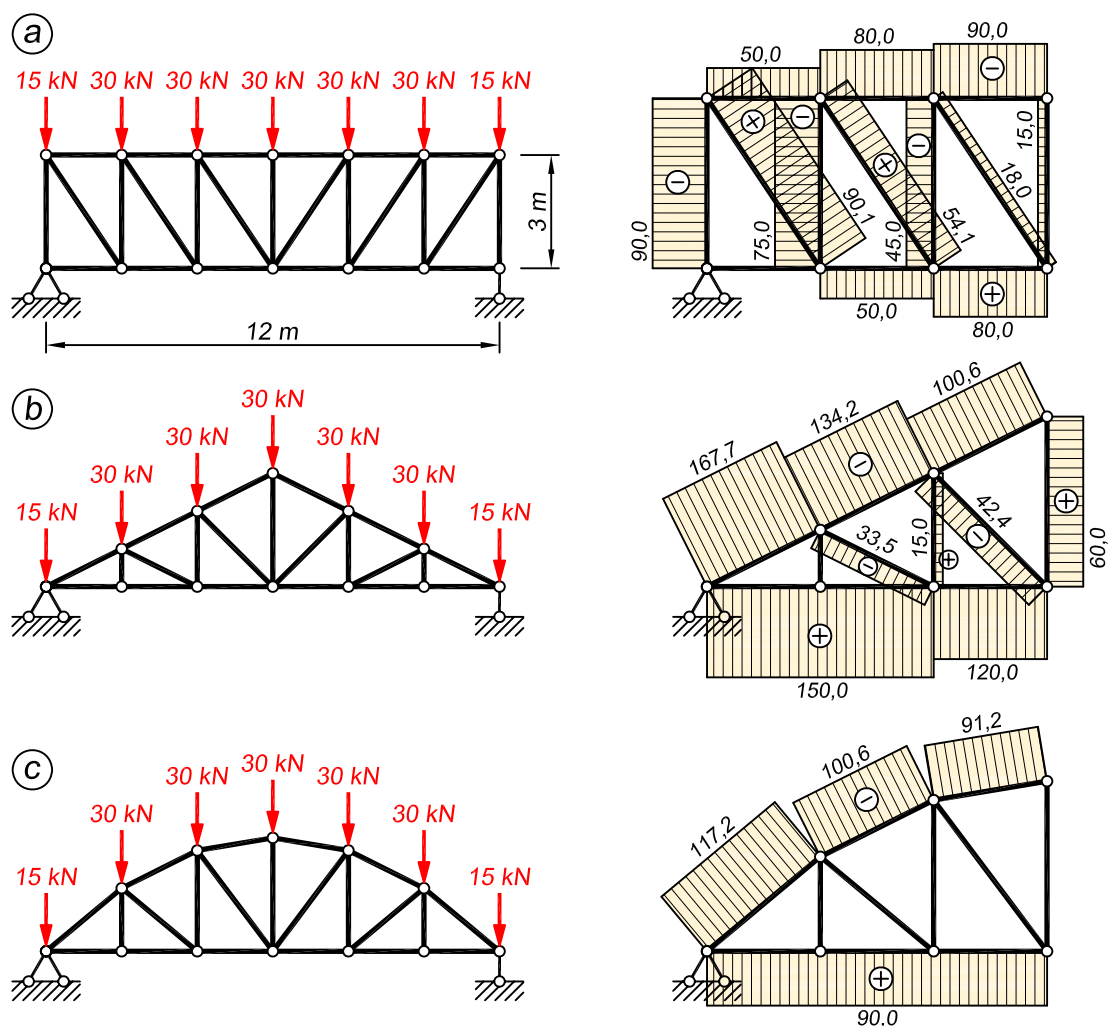
| Varras | N_s , [kN] | N_a , [kN] | $N = N_s + N_a$, [kN] |
|--------|--------------|--------------|------------------------|
| 1-2 | -25,0 | 0 | -25,0 |
| 4-5 | -25,0 | 0 | -25,0 |
| 2-3 | -100,0 | -50,0 | -150,0 |
| 3-4 | -100,0 | 50,0 | -50,0 |
| 1-6 | 55,9 | 0 | 55,9 |
| 6-5 | 55,9 | 0 | 55,9 |
| 2-7 | 55,9 | 0 | 55,9 |
| 7-4 | 55,9 | 0 | 55,9 |
| 7-6 | 50,0 | 0 | 50,0 |
| 1-3 | 0,0 | 90,1 | 90,1 |
| 3-5 | 0,0 | -90,1 | -90,1 |

8.11. Erineva kujuga sõrestike varraste pikijõudude võrdlus

Pikijõud vöövarrastes olenevad sõrestiku kõrguse ja silde suhtest ning vööde kujust. Võrdse sildega ja ühesuguse vöö kuju puhul on kõrgema sõrestiku vöödes pikijõud väiksemad kui madalama sõrestiku vöödes.

Kõige suuremad pikijõud vöödes tekivad kolmnurksõrestikus (joonis 8.60), kusjuures tugede lähedal on pikijõud suuremad kui silde keskel. Kõige väiksemad pikijõud vöödes on paralleelsete vöödega sõrestikes ja tugede lähedal on need väiksemad kui silde keskel.

Paraboolvööga sõrestikus on pikijõudude jaotus väga ühtlane. Ühtlasel koormusel on alumise vöö pikijõud konstantne. Ülemise vöö varraste pikijõud on tugede juures veidi suuremad. Ühtlase koormuse puhul on diagonaalvarraste pikijõud nullid ja postid töötavad ainult kohalikele koormusele, kui koormus mõjub alumise vöö sõlmedes.



Joonis 8.60. Paralleelsete vöödega, kolmnurksõrestiku ja paraboolvööga sõrestiku pikijõudude võrdlus. Sõrestike sümmeetria tõttu on pikijõud näidatud ainult sõrestiku vasakule poolele

Kõige suuremad pikijõud võrguvarrastes on paralleelvöödega sõrestikes tugede lähedal. Kolmnurksõrestikus on võrguvarraste pikijõud veidi väiksemad kui paralleelvöödega sõrestikus, kusjuures tugede lähedal on pikijõud väiksemad kui silde keskel.

8.12. Pikijõudude arvutamine kinemaatika meetodiga

Kinemaatika meetodi kasutamisel eemaldame arvutusskeemist varda, mille pikijõudu tahame leida. Ärajäetud varda mõju asendame kaksikjõuga X_r .

Varda pikijõu X_r leiame virtuaalsiirete printsiibi alusel mehhanismi pooluste plaanist, lähedes sellest, et konstruktsioonile rakendatud tasakaalus olevate jõudude virtuaaltöö konstruktsiooni elementide virtuaalsiiretel peab võrduma nulliga.

Sõrestiku tugede tingimustele vastava mehhanismi pooluste plaani puhul leiame pikijõu X_r võrrandist

$$\sum F_k \delta p_k + X_r \delta r = 0 \quad (8.56)$$

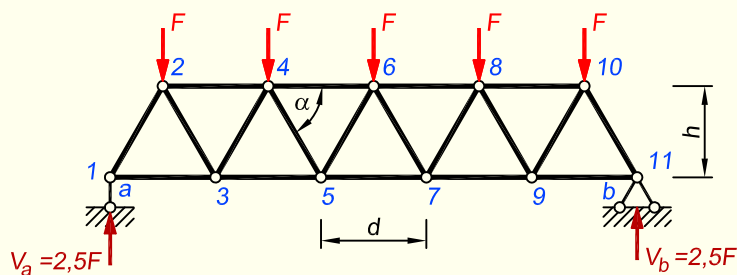
ja tugede tingimustele mittevastava pooluste plaani puhul võrrandist

$$\sum F_k \delta p_k + \sum R_c \delta c + X_r \delta r = 0 \quad (8.57)$$

kus δp_k , δr , δc on jõule F_k , kaksikjõule X_r ja eemaldatud toesidemes c tekkivale reaktsioonile R_c vastavad virtuaalsiirded.

Tugede tingimustele mittevastava pooluste plaani kasutamine võimaldab sageli mehhanismi siirdeid lihtsamalt kujutada. Sel juhul me eemaldame mõne toesideme ning anname mehhanismile siirde, mis vastab sellele ärajäetud sidemele. Ärajäetud sideme asemele rakendame sellele vastava reaktsiooni. Täpsemalt on seda kirjeldatud järgnevas näites.

NÄIDE 8.10. Leida kinemaatika meetodi abiga joonisel 8.61 kujutatud sõrestiku alumise vöö varda 5-7 ja diagonaali 4-5 pikijõud.



Joonis 8.61. Sõrestiku arvutuskeem

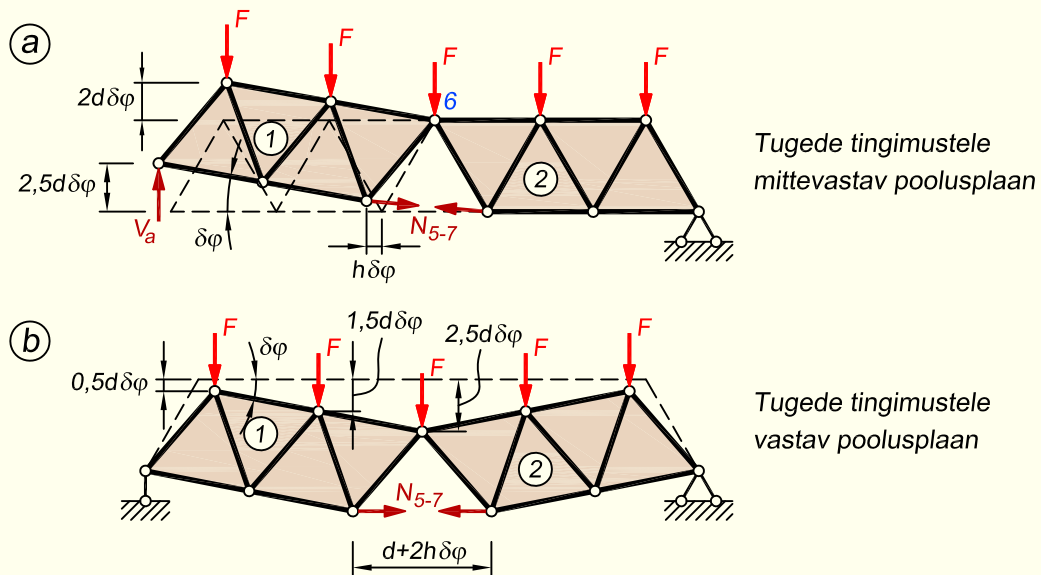
LAHENDUS

Varras 5-7

Esmalt eemaldame varda 5-7 ja selle mõju asendamiseks rakendame sõlmedesse 5 ja 7 kaksikjõud (joonis 8.62, a). Varda 5-7 eemaldamisega tekkinud mehhanism koosneb kahest geomeetriliselt muutumatust kujundist 1 ja 2, mille vastastikuse liikumise hetk-

poolus asub ülemise vöö sõlmes 6. Mehhanismi kujund 1 toetub ühesidemelisele toele a ja kujund 2 kaheksidemelisele toele b .

Mehhanismi virtuaalsiirete lihtsamaks kujutamiseks eemaldame toe a ja selle asemele lisame kujundile 2 ühe sideme. Selle tulemusena jääb kujund 2 paigale ja kujund 1 pöörduv ümber kujundite 1 ja 2 vastastikuse liikumise hetkpooluse sõlmes 6 (joonis 8.62, a).



Joonis 8.62. Varda 5-7 pikijõu arvutus

Kuna mehhanismi sellise siirdumise korral ei ole tugede kinnitustingimused täidetud ($\delta a \neq 0$), siis varda pikijõu arvutamiseks kasutame avaldist (8.57)

$$-F \cdot 2d \delta\varphi - F \cdot d \delta\varphi + V_a \cdot 2,5d \delta\varphi - N_{5-7} \cdot h \delta\varphi = 0$$

millest avaldame peale toereaktsiooni $V_a = 2,5F$ lisamist varda 5-7 pikijõu

$$N_{5-7} = 3,25F \frac{d}{h}$$

Teine võimalus poolusplaani kujutamiseks on jätta mõlemad toed paika ja anda mõlemale kujundile 1 ja 2 pööre ümber vastava toe (joonis 8.62, b).

Kuna nüüd on tugede kinnitustingimused täidetud ($\delta a = 0$ ja $\delta b = 0$), siis kasutame varda pikijõu jaoks avaldist (8.56)

$$2(F \cdot 0,5d \delta\varphi + F \cdot 1,5d \delta\varphi) + F \cdot 2,5d \delta\varphi - N_{5-7} \cdot 2h \delta\varphi = 0$$

millega jõuame samale tulemusele nagu juba eespool

$$N_{5-7} = 3,25F \frac{d}{h}$$

Varras 4-5

Diagonaali 4-5 pikijõu arvutamiseks eemaldame varda 4-5 ja rakendame ärajäetud varda asemele kaksikjõu (joonis 8.63). Mehhanismi kujundid 1 ja 2 on teineteisega ühendatud kahe paralleelse vardaga: vöövarrastega 4-6 ja 3-5. Mehhanismi siirdumisel jäävad kujundid 1 ja 2 seetõttu paralleelseks.

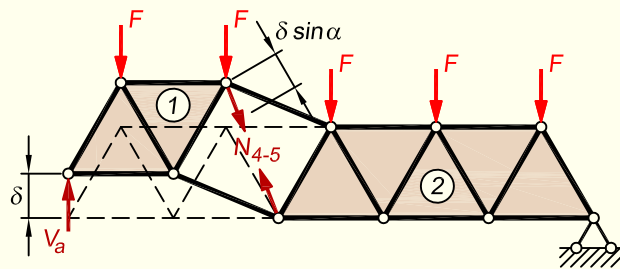
Mehhanismi virtuaalsiirete lihtsamaks kujutamiseks eemaldame toe a ja selle asemele lisame kujundile 2 ühe sideme. Kujund 2 jääb mehhanismi siirdumisel liikumatuks ja kujund 1 nihkub vertikaalselt siirde δ võrra.

Mehhanismile rakendatud kõigi jõudude tööde summast, mis võrdub nulliga

$$(V_a - F - F) \delta - N_{4-5} \cdot \delta \sin \alpha = 0$$

avaldame diagonaali 4-5 pikijõu

$$N_{4-5} = -\frac{0,5F}{\sin \alpha}$$



Joonis 8.63. Varda 4-5 pikijõu arvutus

8.13. Liitvarrastega sõrestikud

Sõlmedevaheline koormus

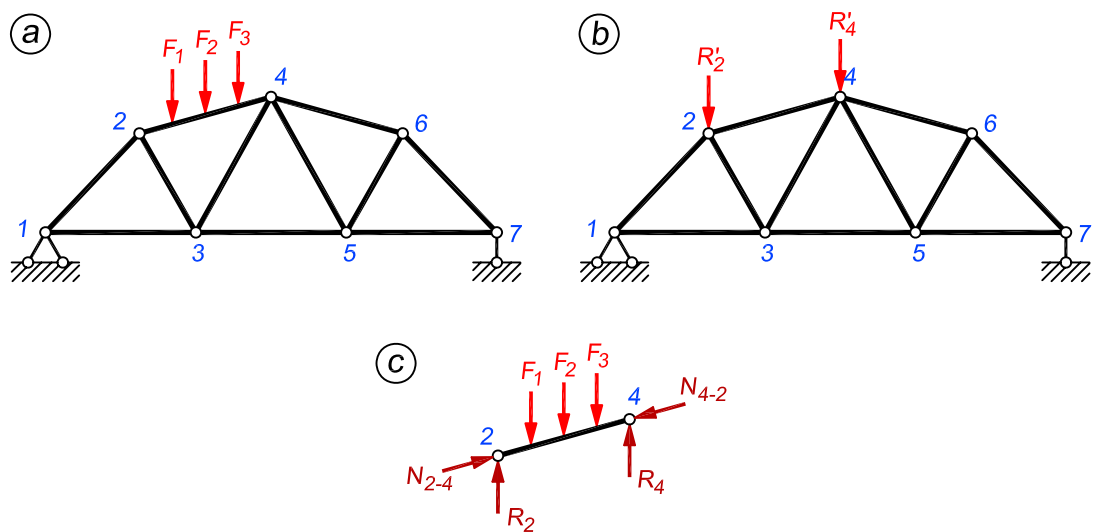
Sõrestiku koormamisel sõlmede vahel tekivad koormatud varrastes lisaks pikijõududele ka paindemomendid, mis mõlemad põhjustavad normaalpingeid. Suurimad pinged leiame ekstsentrilise tõmbe-surve valemiga

$$\max_{\min} \sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \quad (8.58)$$

Pikijõudude leidmiseks asendame vardale mõjuva koormuse (joonis 8.64, a) temale ekvivalentsete jõududega R'_2 ning R'_4 (joonis 8.64, b). Selleks lahutame vardale mõjuva koormuse resultandi kaheks komponendiks nendes sõlmedesse, mille vahel varras asub

$$R'_2 + R'_4 = F_1 + F_2 + F_3 \quad (8.59)$$

Koormuse asendamisel temale ekvivalentse koormusega muutuvad sisejõud ainult otseselt koormatud vardas (joonisel 8.64, a vardas 2-4). Teiste varraste pikijõud ei muutu. Seega



Joonis 8.64. Sõlmede vahel koormatud sõrestik

joonistel 8.64, *a* ja *b* kujutatud koormustest põhjustatud varraste (välja arvatud varda 2-4) sisejõud on võrdsed. Joonisel 8.64, *b* esitatud koormusest tekivad varrastes ainult pikijõud.

Lõplike sisejõudude N , M , Q leidmiseks sõlmede vahel koormatud vardas 2-4 rakendame lisaks vardale mõjuvale koormusele (F_1 , F_2 , F_3) ja koormust sõlmedes tasakaalustavatele jõududele ehk vertikaalsetele reaktsioonidele (R_2 , R_4) veel varda telje sihis kaks võrdset vastupidise suunaga jõudu N_{2-4} ning N_{4-2} (joonis 8.64, *c*). Jõud N_{2-4} ja N_{4-2} võrduvad koormatud varda sõlmedes mõjuvatest jõududest R'_2 ning R'_4 põhjustatud varda 2-4 pikijõuga, mis on arvatud joonise 8.64, *b* järgi. Tõmbejõu rakendame suunaga sõlmest eemale ja survejõu suunaga sõlme poole.

Liitvarrastega sõrestiku mõiste

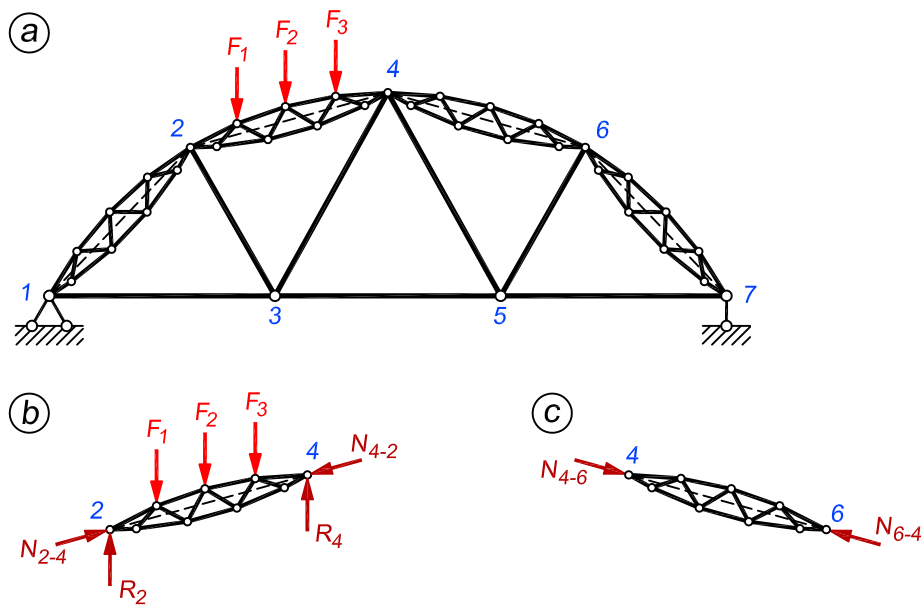
Sõlmede vahel koormatud sõrestikus (joonis 8.64, *a*) paindemomentidest vabanemiseks asendame täisseinalised vardad sõrestikvarrastega, kusjuures jõud rakendame sõrestikvarraste sõlmedesse (joonis 8.65, *a*).

Sõrestikku, milles kõik või osa vardaid on sõrestikvardad, nimetatakse liitvarrastega sõrestikuks.

Sõrestikvarraste telgjoontel täisseinaliste varrastega asendamisel saadud uut sõrestikku nimetatakse liitvarrastega sõrestiku *põhisõrestikuks*. Joonisel 8.65, *a* on see kujutatud katkendjoonega, mis ühtib joonisel 8.64 kujutatud sõrestikuga.

Liitvarrastega sõrestiku arvutus

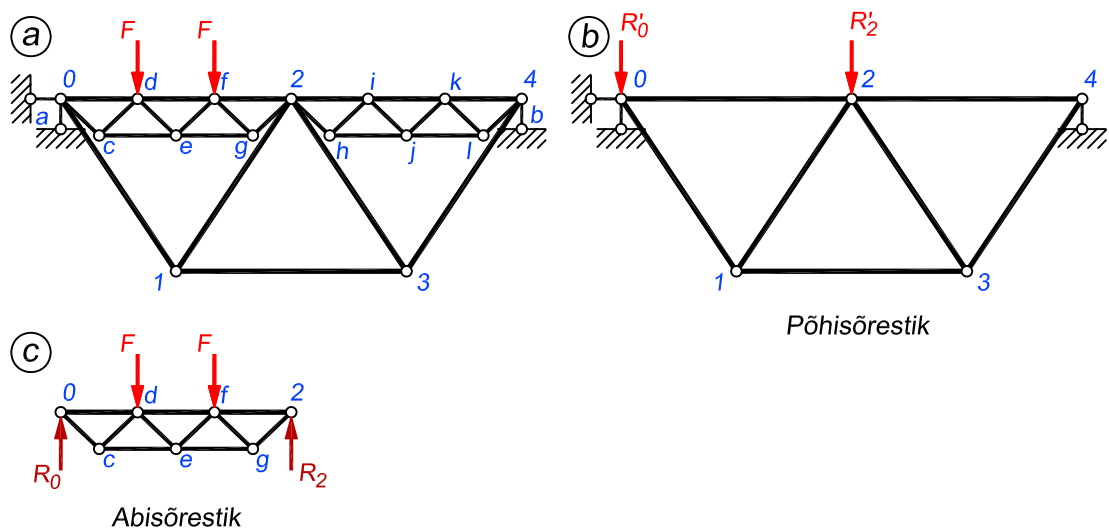
Liitvarrastega sõrestiku arvutus on analoogiline sõlmede vahel koormatud põhisõrestiku arvutusega. Esmalt asendame liitvarrastega sõrestiku sõrestikvardale mõjuva koormuse (joonis



Joonis 8.65. Liitvarrastega sõrestik

8.65, a) temaga ekvivalentsete jõududega R'_2 ja R'_4 , mille rakendame põhisõrestiku sõlmedesse (joonis 8.64, b), ning arvutame pikijõud põhisõrestiku varrastes. Liitvarrastega sõrestiku täisseinaliste varraste pikijõud on võrdsed põhisõrestiku vastavate varraste pikijõududega.

Koormatud sõrestikvarda elementide pikijõud arvutame sõrestikvardale mõjuvast koormusest, seda tasakaalustavatest jõududest ja sõrestikvarda otstesse rakendatud kahest põhisõrestiku varda pikijõuga võrdsest vastassuunalisest jõust (joonis 8.65, b). Koormamata sõrestikvarda elementide pikijõud arvutame kahest sõrestikvarda telje sihilisest põhisõrestiku varda pikijõuga võrdsest ja vastassuunalisest jõust (joonis 8.65, c).



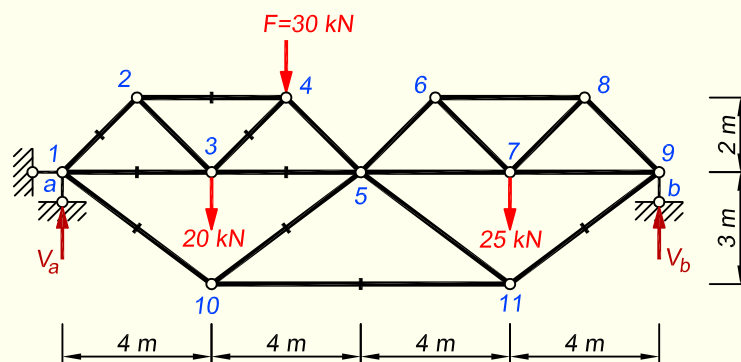
Joonis 8.66. Liitvarrastega sõrestik

Mõnikord ühtivad osa liitvarda elemente põhisoestiku vardaga (joonis 8.66, a). Liitvaraste ülemise vöö vardad 0-d, d-f, f-2 ja 2-i, i-k, k-4 ühtivad põhisoestiku (joonis 8.66, b) ülemise vöö varrastega 0-2 ja 2-4. Liitvaraste teistes elementides tekivad pikijõud ainult liitvarda sõlmedes mõjuvatest jõududest.

Liitvarda 0-2 elementides arvutame pikijõud kui abisoestikus, mis on toetatud sõlmedes 0 ja 2 (joonis 8.66, c). Liitvarda ülemise vöö varraste lõplikud pikijõud saame abisoestiku ja põhisoestiku varraste pikijõudude liitmise teel.

Liitvarda 2-4 elementide 2-h, h-i, i-j, j-k, k-l, l-4, h-j ja j-l pikijõud võrduvad nulliga, sest liitvarda sõlmed i ja k on koormamata.

NÄIDE 8.11. Leida joonisel 8.67 kujutatud sõrestiku tähistatud varraste pikijõud.



Joonis 8.67. Sõrestiku arvutuskeem

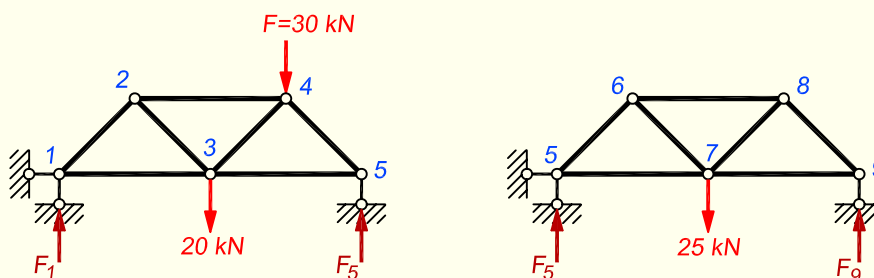
LAHENDUS

Tegemist on liitvarrastega sõrestikuga, kus põhisoestiku ülemise vöö täisseinalised vardad 1-5 ja 5-9 (joonis 8.69) on asendatud sõrestikvarrastega 1-2-3-4-5 ja 5-6-7-8-9.

Asendame sõrestikvarrastele mõjuva koormuse temaga ekvivalentse koormusega, mille rakendame põhisoestiku sõlmedesse. Selleks leiame esmalt sõrestikvarraste toereaktsioonid (joonis 8.68).

Vasakpoolse sõrestikvarda toereaktsioonid on

$$F_1 = 17,5 \text{ kN}; \quad F_5 = 32,5 \text{ kN}$$



Joonis 8.68. Sõrestikvardad

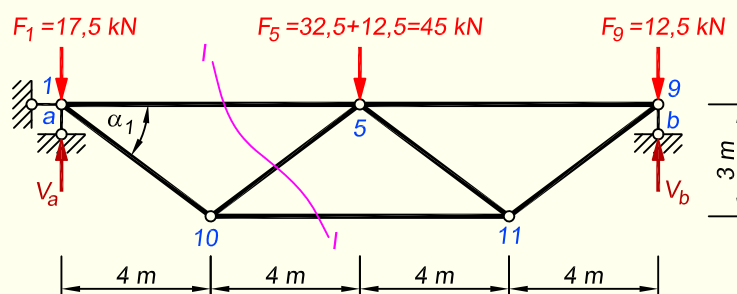
Parempoolse sõrestikvarda toereaktsioonid on

$$F_5 = 12,5 \text{ kN}; \quad F_9 = 12,5 \text{ kN}$$

Pärast sõrestikvarraste toereaktsioonide kandmist põhisõrestiku sõlmedesse (joonis 8.69) saame arvutada põhisõrestiku toereaktsioonid ja varraste pikijõud.

$$\sin \alpha_1 = 0,6; \quad \cos \alpha_1 = 0,8$$

$$V_a = \frac{45 \cdot 8}{16} + 17,5 = 40 \text{ kN}; \quad V_b = \frac{45 \cdot 8}{16} + 12,5 = 35 \text{ kN}$$



Joonis 8.69. Põhisõrestik

Varras 10-11

Teeme lõike $I-I$ ja vaatame sõrestiku vasaku poole tasakaalu. Koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 5 suhtes

$$\sum M_5 = 0; \quad N_{10-11} \cdot 3 + (-40 + 17,5) \cdot 8 = 0; \quad N_{10-11} = 60 \text{ kN}$$

Varras 1-5

Koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 6 suhtes

$$\sum M_6 = 0; \quad -N_{1-5} \cdot 3 + (-40 + 17,5) \cdot 4 = 0; \quad N_{1-5} = -30 \text{ kN}$$

Varras 1-10

Koostame sõlme 1 tasakaalutingimuse horisontaalteljele

$$\sum X = 0; \quad N_{1-10} \cdot 0,8 - 30 = 0; \quad N_{1-10} = 37,5 \text{ kN}$$

Varras 10-5

Teeme lõike $I-I$ ja vaatleme sõrestiku vasaku poole tasakaalu. Koostame projektsioonide tasakaalu tingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = 0; \quad -N_{10-5} \cdot 0,6 - 40 + 17,5 = 0; \quad N_{10-5} = -37,5 \text{ kN}$$

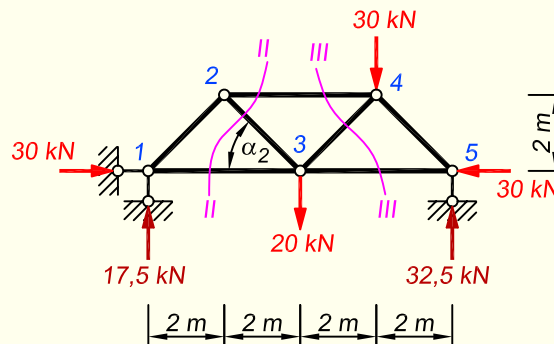
Varras 9-11

Koostame sõlme 9 tasakaalutingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = 0; \quad N_{9-11} \cdot 0,6 - 35 + 12,5 = 0; \quad N_{9-11} = 37,5 \text{ kN}$$

Sõrestikvarda elementide pikijõudude arvutamiseks tuleb sõrestikvarda otsesse rakendada põhisõrestiku arvutamisel saadud ülemise vöö varraste pikijõud (joonis 8.70). Kuna põhisõrestiku ülemine vöö on surutud, märgime need jõud suunaga sõrestikvarda poole.

$$\sin \alpha_2 = 0,7071; \quad \cos \alpha_2 = 0,7071$$



Joonis 8.70. Vasakpoolne sõrestikvarras

Varras 1-3

Teeme lõike II-II ja koostame momentide tasakaalutingimuse sõlme 2 suhtes

$$\sum M_2 = 0; \quad N_{1-3} \cdot 2 - 17,5 \cdot 2 + 30 \cdot 2 = 0; \quad N_{1-3} = -12,5 \text{ kN}$$

Varras 3-5

Teeme lõike III-III ja koostame momentide tasakaalutingimuse sõlme 4 suhtes

$$\sum M_4 = 0; \quad -N_{3-5} \cdot 2 + 32,5 \cdot 2 - 30 \cdot 2 = 0; \quad N_{3-5} = 2,5 \text{ kN}$$

Varras 2-4

Teeme lõike II-II või III-III ja koostame momentide tasakaalutingimuse sõlme 3 suhtes

$$\sum M_3 = 0; \quad -N_{2-4} \cdot 2 - 17,5 \cdot 4 = 0; \quad N_{2-4} = -35 \text{ kN}$$

Varras 1-2

Koostame sõlme 1 tasakaalutingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = 0; \quad -N_{1-2} \cdot 0,7071 - 17,5 = 0; \quad N_{1-2} = -24,75 \text{ kN}$$

Varras 3-4

Teeme lõike III-III ja vaatleme sõrestiku parema poole tasakaalu. Koostame projektsioonide tasakaalutingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = 0; \quad N_{3-4} \cdot 0,7071 + 30 - 32,5 = 0; \quad N_{3-4} = 3,54 \text{ kN}$$

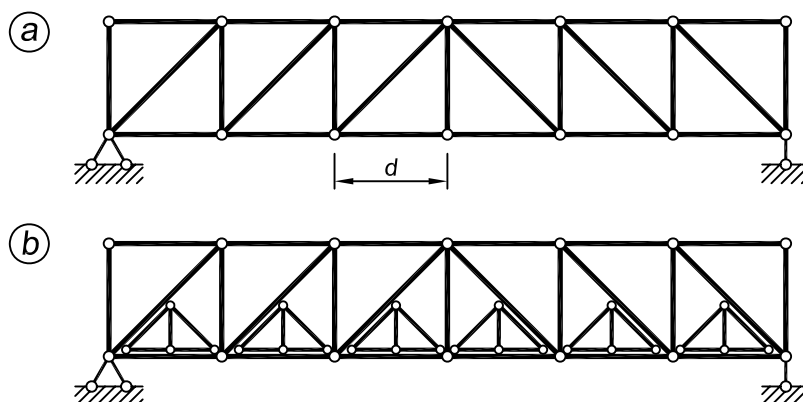
8.14. Sprengelsõrestikud

Sprengelsõrestiku mõiste

Sprengelsõrestike kasutamiseks tekib vajadus suuremate avade sildamisel.

Kuna konstruktiivselt osutub otstarbekaks asetada sõrestiku diagonaalid nii, et nad moodustavad vööde ja postidega ligikaudu 45-kraadised nurgad, siis suuremate sillete korral, kui sõrestiku kõrgus suureneb, muutub ühtlasi ka paneeli pikkus suuremaks. See aga omakorda põhjustab nii silla- kui ka katusekonstruktsioonide puhul omakaalu suurenemise, kuna sõlmede vahekauguse kasvamine nõuab neile toetuvate konstruktsioonide elementide ristlõigete suurenemist. Sellise olukorra vältimiseks kasutatakse sõrestiku paneelide sisemist osadeks jagamist väikeste abisõrestike abil, mis tekitavad ühele või teisele vööle igasse paneeli lisa-sõlmed.

Joonisel 8.71, *a* kujutatud tavalisel sõrestikul on paneeli pikkuseks d . Kui me soovime koormuseid sõrestikule toetada tihedamalt, siis paigutame vastavale vööle kolmnurksed abisõrestikud, nagu joonisel 8.71, *b* on tehtud alumise vöö puhul. Lisatud abisõrestikud tekitavad kõigi paneelide keskele ühe uue sõlme ja seega saame nüüd koormuseid toetada sõrestikule kaks korda tihedamalt ehk sammuga $d/2$.

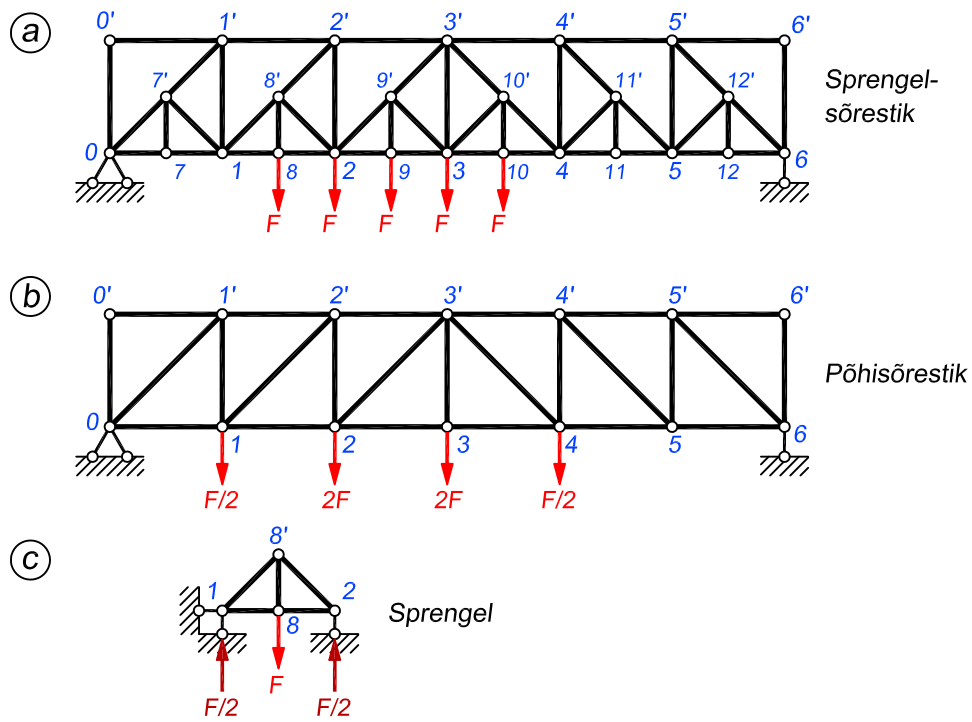


Joonis 8.71. Sprengelsõrestiku moodustamine abisõrestike lisamisega

Joonisel 8.71, *b* esitatud skeemil näeme, et osa algse sõrestiku ja lisatud abisõrestike varrastest kattuvad ja tekitavad topeltvardad. Tegelikult selliseid topeltvardaid muidugi ei kasutata, kattuvad vardad projekteeritakse ühe vardana ja sprengelsõrestik näeb välja selline, nagu kujutatud joonisel 8.72, *a*.

Sprengelsõrestikku (joonis 8.72, *a*) käsitleme kui liitvarrastega sõrestikku, mille saame põhisõrestikust (joonis 8.72, *b*), kui põhisõrestiku alumise või ülemise vöö iga varras asendada põhisõrestiku sõlmedesse toetuva väikese abisõrestikuga, mida nimetatakse sprenglikuks (joonis 8.72, *c*).

Sprengel kannab tema sõlme rakendatud vertikaalse koormuse üle põhisõrestiku sõlmedesse vertikaalsete komponentidena. Joonisel 8.72, *c* on välja toodud teise paneeli sprengel,



Joonis 8.72. Sprengelsõrestik

mis toetub põhisõrestiku sõlmedesse 1 ja 2. Nendesse sõlmedesse kantakse edasi sprengli sõlme 8 rakendatud koormus.

Kirjeldatud sprengelsõrestiku heaks näiteks on Kanadas asuv Wellandi kanali raudteesild nr 15 (foto 8.3), mille arvutuskeemi on kasutatud ka näiteülesandes 8.12.

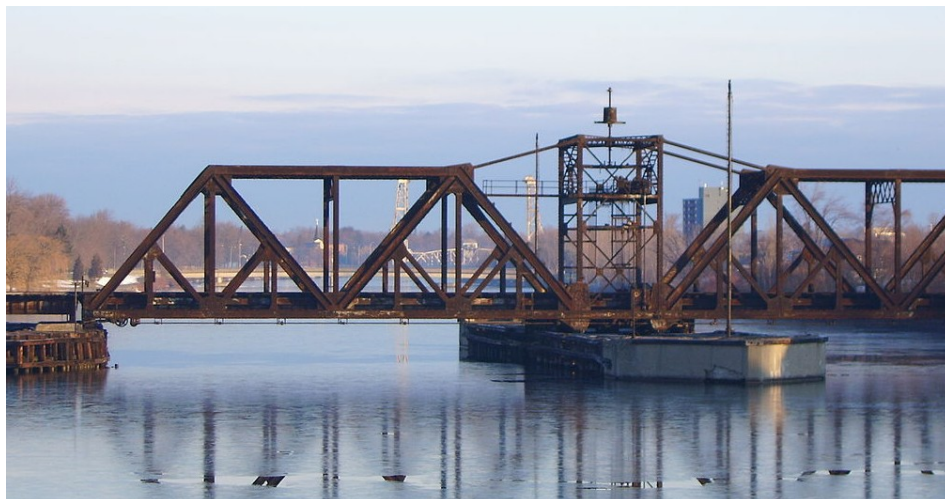
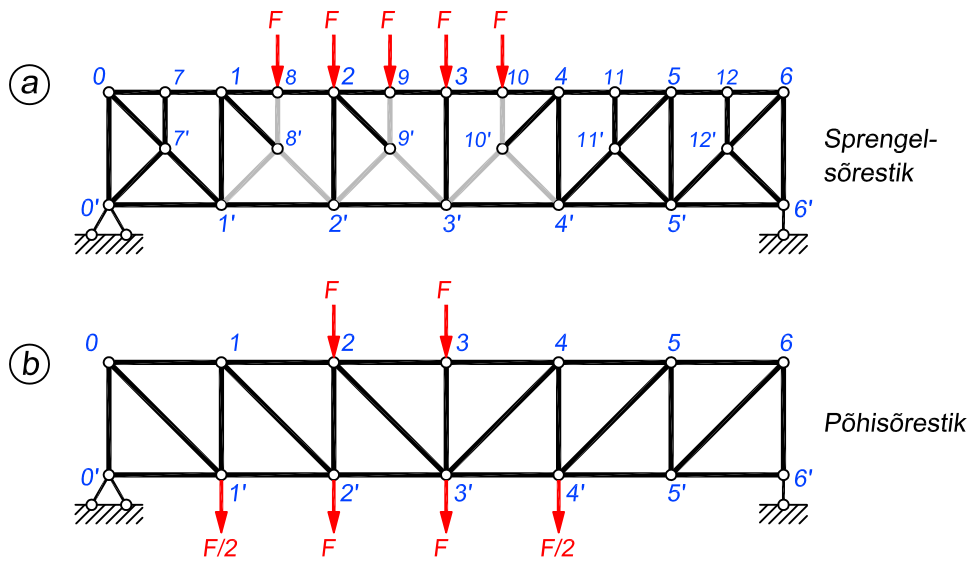


Foto 8.3. Wellandi kanali sild 15 Kanadas (foto: Wikimedia Commons)



Joonis 8.73. Kahe sprengelvööga sõrestik

Võib kasutada ka kahe sprengelvööga sõrestikke (joonis 8.73, a). Sel juhul kannavad sprengli vardad ühe vöö peal paiknevad koormused teise vöö põhisõrestiku sõlmedesse. Joonisel 8.73, a kujutatud sõrestikul asuvad koormused ülemisel vöö. Kuna sõlmed 2 ja 3 on põhisõrestiku sõlmed, siis neis paiknevad koormused jäävad sinna ka põhisõrestiku skeemil (joonis 8.73, b). Sõlmed 8, 9 ja 10 on sprengli sõlmed ja nendesse rakendatud koormused kantakse sprengli varraste (joonisel näidatud hallidena) kaudu põhisõrestiku alumise vöö sõlmedesse 1', 2', 3' ja 4'.

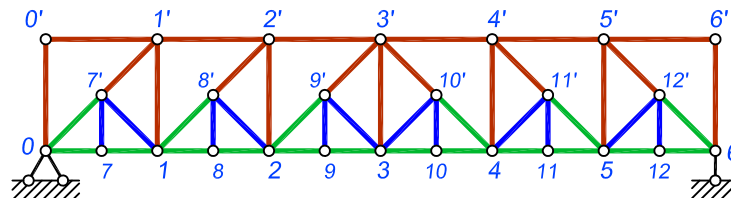
Sprengelsõrestiku vardad

Sprengelsõrestikus on kolme liiki vardaid.

Ainult põhisõrestiku varrasteks on joonisel 8.74 ülemise vöö vardad, postid ja diagonaalvarraste ülemised pooled 7'-1', 8'-2', ... (joonisel kujutatud pruuniga).

Ainult sprengli juurde kuuluvad sprenglite postid 7-7', 8-8', ..., ning diagonaalid 1-7', 2-8', ... (joonisel kujutatud sinisega).

Põhisõrestiku ja sprengli ühised elemendid on kolmandat liiki varrasteks. Nendeks on



Joonis 8.74. Sprengelsõrestiku vardad

kujutatud sõrestikul alumise vöö vardad ja diagonaalide alumised pooled $0-7'$, $1-8'$, ... (joonisel kujutatud rohelisega). Lisaks võime mainida, et põhisõrestiku ja sprenqli ühisteks elementideks on vardad, mis joonisel 8.71, b on näha topeltvarrastena.

Sprengelsõrestiku arvutus

Sprengelsõrestiku varraste pikijõudude arvutamiseks kasutame samu arvutusmeetodeid nagu tavaliste sõrestike puhulgi, kuid tähelepanu tuleb pöörata mõningatele nüanssidele. Oluline on siin see, et kõigi varraste pikijõud on arvutatavad sprengelsõrestiku algsest arvutuskeemist, kuid paljudel juhtudel muutub selline lähenemine keerukaks, kuna eelnevalt oleks vaja arvutada ka mitme teise varda pikijõud. Seetõttu on kasulik osa arvutusi teha hoopiski põhisõrestiku või sprenqli skeemist.

Vaatame joonisel 8.75, a kujutatud sõrestikku, millel sprengelvööks on ülemine vöö. Ainult põhisõrestiku juurde kuuluvad vardad oleks mõistlik arvutada siin just põhisõrestiku skeemist (joonis 8.75, b). **Diagonaali $9'-3'$** puhul teeksime algses arvutuskeemis lõike $I-I$, mis läbib aga nelja varrast ja nõuab seetõttu eelnevalt veel ühe varda pikijõu arvutamist. Lähtume aga sellest, et

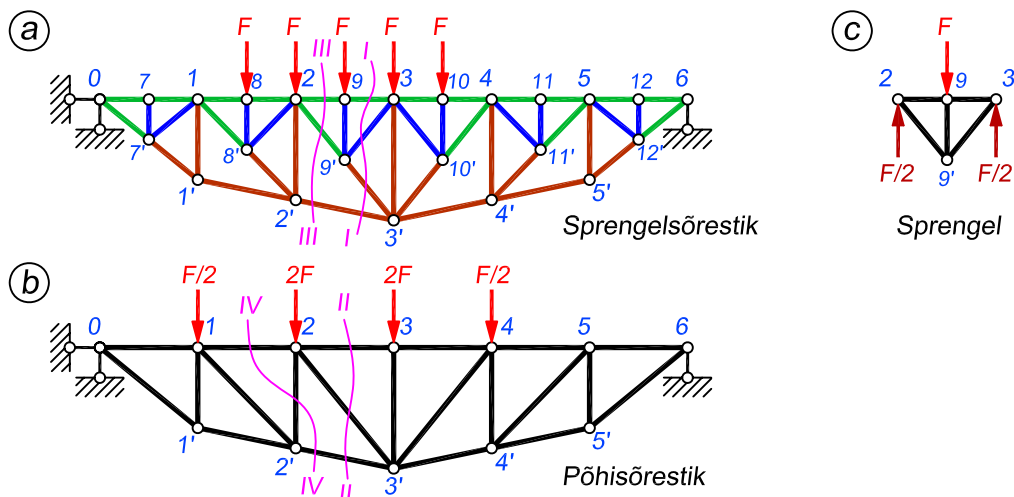
$$N_{9'-3'}^{\text{sprengelsõrestik}} = N_{2-3'}^{\text{põhisõrestik}} \quad (8.60)$$

ja kasutame arvutamiseks põhisõrestiku lõiget $II-II$.

Alumise vöö varda $2'-3'$ puhul ei ole tähtsust, kas kasutame sprengelsõrestiku skeemi ja lõiget $III-III$ või põhisõrestiku lõiget $II-II$.

Aga näiteks **posti $2-2'$** puhul tasub kindlasti kasutada põhisõrestiku lõiget $IV-IV$, sest sprengelsõrestikus jääks, olenemata lõike asukohast, igal juhul lõikesse rohkem kui kolm varrast.

Ainult sprenqli juurde kuuluvates varrastes tekivad pikijõud kohalikust koormusest, kui sprenqli sõlm on koormatud (joonis 8.75, c). Seetõttu arvutame **sprenqli posti $9-9'$** ja **diago-**



Joonis 8.75. Sprengelsõrestiku arvutamine

naali 3-9' pikijõud sprengli arvutusskeemist. Sprenglite sõlmed 7, 11 ja 12 on koormamata ning varraste 7-7', 7'-1, 11-11', 4-11', 12-12' ja 5-12' pikijõud on nullid.

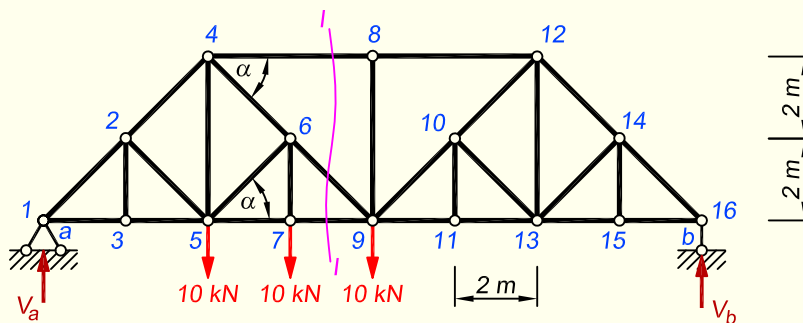
Nii põhisoestiku kui sprengli juurde kuuluvaks vardaks on **diagonaal 2-9'**, mille pikijõu võime arvutada sprengelsõrestiku skeemist lõikega III-III. Aga võime seda teha ka eraldi põhisoestikus lõikega II-II ning sprenglis ja seejärel tulemused summeerida, kuna

$$N_{2-9'}^{sprengelsõrestik} = N_{2-3'}^{põhisõrestik} + N_{2-9'}^{sprengel} \quad (8.61)$$

Sarnane on olukord **ülemise vöö vardaga 2-9**, mille puhul saame kasutada sprengelsõrestiku lõiget III-III või summeerime põhisoestiku ja sprengli vastavate varraste pikijõud

$$N_{2-9}^{sprengelsõrestik} = N_{2-3}^{põhisõrestik} + N_{2-9}^{sprengel} \quad (8.62)$$

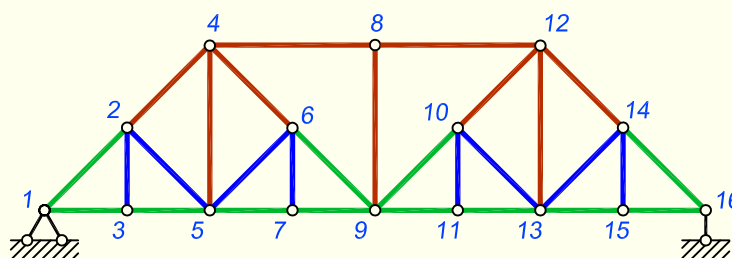
NÄIDE 8.12. Leida joonisel 8.76 kujutatud sprengelsõrestiku teise paneeli varraste pikijõud.



Joonis 8.76. Sprengelsõrestiku arvutusskeem

LAHENDUS

Jagame ülesandes esitatud sõrestiku põhisoestikuks ja sprengliteks. Joonisel 8.77 on pruuniga näidatud ainult põhisoestiku juurde kuuluvad vardad, sinisega ainult sprengli vardad ja rohelistega põhisoestiku ja sprengli ühised vardad.



Joonis 8.77. Sprengelsõrestiku varraste jagunemine. Pruunid – põhisoestiku vardad, sinised – sprengli vardad, rohelised – põhisoestiku ja sprengli ühised vardad

Meid huvitavas teises paneelis on ainult põhisoestiku varrasteks ülemise vöö var-

ras 4-8, postid 4-5, 8-9 ning diagonaali ülemine pool 4-6. Ainult sprengli varrasteks on sprengli post 6-7 ja diagonaal 5-6. Nii põhisõrestiku kui sprengli elementideks on alumise vöö vardad 5-7, 7-9 ja diagonaali alumine pool 6-9.

Põhisõrestik on näidatud joonisel 8.78 ja sprengel joonisel 8.79.

1. Toereaktsioonide arvutus

Esmalt leiame vertikaalsed toereaktsioonid sõrestiku toeliigendite a ja b suhtes koostatud momentide tasakaalutingimuste abil

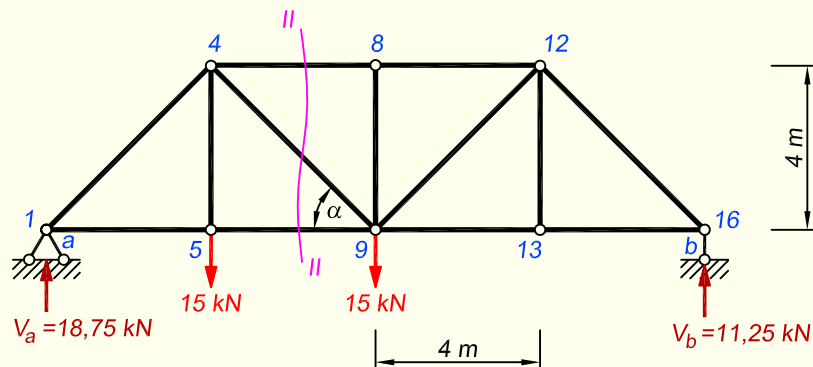
$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad & -V_a \cdot 16 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 8 = 0; \quad V_a = 18,75 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad & V_b \cdot 16 - 10 \cdot 4 - 10 \cdot 6 - 10 \cdot 8; \quad V_b = 11,25 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontrolliks kirjutame toereaktsioonide ja sõrestikule rakendatud koormuse tasakaalu tingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = -18,75 - 11,25 + 3 \cdot 10 = 0$$

2. Pikijõudude arvutus

Põhisõrestiku arvutamisel kanname sprengli sõlmes oleva koormuse põhisõrestiku sõlmedesse.



Joonis 8.78. Põhisõrestik

Varras 4-8

Varda 4-8 pikijõudu saab leida nii esialgselt sõrestiku arvutusskeemist, tehes lõike $I-I$ (joonis 8.76), kui põhisõrestiku skeemist, tehes lõike $II-II$ (joonis 8.78). Eraldades sõrestiku lõikega $I-I$ kaheks osaks ja vaadates parema poole tasakaalu, saame momendipunkti võtet kasutades

$$\sum M_9 = 0; \quad N_{4-8} \cdot 4 + 11,25 \cdot 8 = 0; \quad N_{4-8} = -22,50 \text{ kN}$$

Täpselt sama tuleb praegusel juhul ka avaldis, kui kasutame põhisõrestiku skeemi.

Varras 8-9

Sõlme 8 tasakaalutingimusest vertikaalteljele $\sum Z = 0$ saame, et $N_{8-9} = 0$.

Varras 4-5

Varda 4-5 pikijõu leiame põhisõrestiku skeemist (joonis 8.78) sõlme 5 eraldamise teel. Sõlme vertikaalsuunalisest tasakaalust $\sum Z = 0$ saame, et $N_{4-5} = 15$ kN.

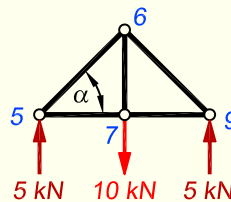
Varras 4-6

Varras 4-6 on ainult põhisõrestiku varras ja tema pikijõu saame samuti põhisõrestiku skeemist, kasutades lõiget II-II (joonis 8.78). Kuna varras 4-6 on ainult põhisõrestiku varras, siis $N_{4-6} = N_{4-9}$. Vaatame sõrestiku vasakut poolt ja kirjutame projektsioonide tasakaalutingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = 0; \quad N_{4-9} \cdot \sin \alpha + 15 - 18,75 = 0; \quad N_{4-9} = 5,30 \text{ kN}$$

ja seega $N_{4-6} = 5,30$ kN.

Sprengli varraste pikijõudude leidmiseks vaatame sprengli arvutuskeemi joonisel 8.79.



Joonis 8.79. Sprengel

Varras 6-7

Vardas 6-7 saame pikijõu sõlme 7 tasakaalutingimusest vertikaalteljele

$$\sum Z = 0; \quad -N_{6-7} + 10 = 0; \quad N_{6-7} = 10 \text{ kN}$$

Varras 5-6

Vardas 5-6 saame pikijõu sõlme 5 tasakaalutingimusest vertikaalteljele

$$\sum Z = 0; \quad -N_{5-6} \cdot \sin \alpha - 5 = 0; \quad N_{5-6} = -7,07 \text{ kN}$$

Teise paneeli kolm järgi jäänud varrast 5-7, 7-9 ja 6-9 on sprengli ja põhisõrestiku ühised vardad. Selliste varraste arvutamiseks on kaks moodust. Võimaluse korral on mõistlik leida nende pikijõud esialgselt arvutuskeemist, aga võime lahendamiseks kasutada ka eraldi põhisõrestikku ja sprenglit ning seejärel saadud tulemused kokku panna.

Vardad 5-7 ja 7-9

Sõlme 7 horisontaalsuunalisest tasakaalutingimusest järeldub, et nende varraste pikijõud on võrdsed: $N_{5-7} = N_{7-9}$. Kasutades lahendamiseks sprengelsõrestiku arvutusskeemi, teeme lõike $I-I$ (joonis 8.76) ning valime momendipunktiks sõlme 4, mis paikneb kahe ülejäänud varda 4-8 ja 6-9 sihtide lõikumise punktis. Vaatame sõrestiku paremat poolt ja kirjutame tasakaalutingimuse

$$\sum M_4 = 0; \quad -N_{7-9} \cdot 4 - 10 \cdot 4 + 11,25 \cdot 12 = 0; \quad N_{7-9} = 23,75 \text{ kN}$$

Varras 6-9

Kasutame sprengelsõrestiku arvutusskeemi ja teeme lõike $I-I$. Vaatame sõrestiku paremat poolt ja kirjutame jõudude projektsioonide tasakaalutingimuse vertikaalteljele

$$\sum Z = 0; \quad -N_{6-9} \cdot \sin \alpha + 10 - 11,25 = 0; \quad N_{6-9} = -1,77 \text{ kN}$$

Sama tulemuse peame saama ka siis, kui leiame ta, kasutades põhisõrestiku ja sprengli arvutusskeemi. Kuna varras 6-9 on alumine pool põhisõrestiku vardast 4-9, mille pikijõuks saime eespool 5,30 kN, siis järelikult $N_{6-9}^{\text{põhisõrestik}} = 5,30 \text{ kN}$. Sprengli arvutusskeemist näeme, et varraste 5-6 ja 6-9 pikijõud peavad olema võrdsed ja kuna neist esimese arvutasime eespool välja, siis ka $N_{6-9}^{\text{sprengel}} = -7,07 \text{ kN}$. Nüüd liidame mõlemast skeemist saadud tulemused kokku

$$N_{6-9} = 5,30 - 7,07 = -1,77 \text{ kN}$$

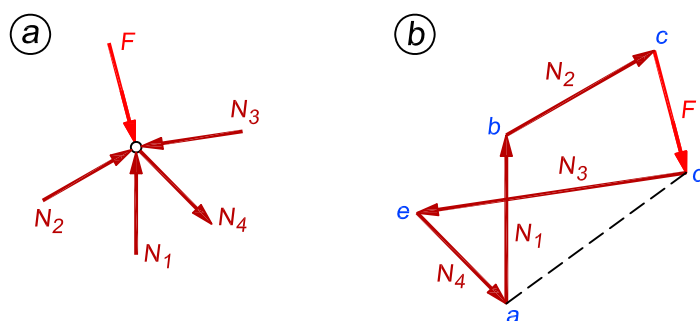
8.15. Maxwell-Cremona diagramm

Sõrestiku kõigi varraste pikijõudude graafilisel leidmisel konstrueeritakse Maxwell-Cremona diagramm, millele panid aluse Inglise füüsik James C. Maxwell ja Itaalia matemaatik Luigi Cremona.

Selle meetodi puhul põhineb pikijõudude määramine jõu tasakaalustamisel kahe jõuga, mille sihid lõikuvad jõu sihiga ühes punktis.

Tasakaalus sõlme jõudude hulknurk

Geomeetriliselt muutumatu sõrestiku sõlmes mõjuvad välis- ja sisejõud on tasakaalus ja moodustavad kinnise jõudude hulknurga. See jõuhulknurk on määratud, kui on teada kõik välis- ja sisejõud peale kahe sisejõu. Olgu joonisel 8.80, *a* kujutatud sõlmele mõjuvatest sisejõududest teada varraste 1 ja 2 pikijõud N_1 ja N_2 ning välisjõud F . Tundmatuteks on varraste 3 ja 4 pikijõud N_3 ja N_4 . Tundmatud pikijõud määrame jõuhulknurga abil (joonis 8.80, *b*), milles pikijõudude N_1 ja N_2 ning välisjõu F resultandi $a-d$ tasakaalustame varraste 3 ja 4 sihiliste jõududega N_3 ja N_4 . Pikijõu N_3 suund jõuhulknurgas on tipust d tippu e , mis ülekantuna sõlme (joonis 8.80, *a*), mõjub sõlme poole ja on seetõttu survejõud. Pikijõu N_4 suund jõuhulknurgas on tipust e tippu a , mis ülekantuna sõlme mõjub sõlme poolt ja on järelikult tõmbejõud.



Joonis 8.80. Jõuhulknurga koostamine sõlmele

Sel viisil koostame iga sõlme jaoks jõuhulknurga ja määrame pikijõud sõrestiku kõigis varrastes.

Kui koostame jõuhulknurgad iga sõlme kohta eraldi, siis esinevad varraste pikijõud neis kaks korda: esimest korda kui tundmatu pikijõud sõlmes ja teist korda kui tuntud jõud esimese sõlme naabersõlmes. Pikijõudude kahekordne kujutamine suurendab viga ja nõuab rohkem aega.

Selle vältimiseks ühendame sõlmede jaoks eraldi joonestatud jõuhulknurgad üheks kompaktsaks diagrammiks, milles iga välis- ja sisejõud on kujutatud ainult üks kord.

Jõudude tähistamine diagrammil

Sisejõudude diagrammi koostamisel tähistame välis- ja sisejõud järgmiselt. Sõrestiku välis-kontuuril kahe naabervälisjõuga ja vööga piiratud pinda tähistame tähega (joonis 8.81, a). Neid pindasid nimetame edaspidi *väljadeks*. Välis- ja sisejõud märgime kahe tähega, mis näitavad, milliste väljade vahel jõud asub. Toereaktsiooni V_a ja sõlmes 2 rakendatud jõu F tähistame vastavalt $a-b$ ning $c-d$, kuna nad asuvad väljade a ja b ning c ja d vahel. Tähed märgime järjekorras, kuidas kohtame neid päripäeva liikumisel ümber sõrestiku.

Välisjõudude hulknurga moodustamine

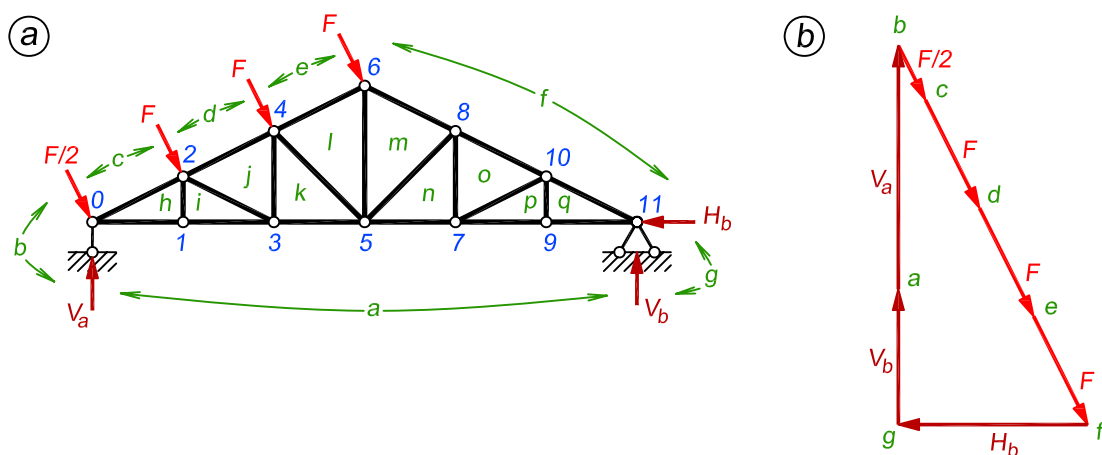
Välisjõudude hulknurga kujutame järjekorras, nagu kohtame neid jõudusid päripäeva liikumisel ümber sõrestiku.

Toereaktsioon V_a asub väljade a ja b vahel. Seepärast tähistame jõuvektori V_a alg- ja lõpp-punkti vastavalt tähtedega a ning b . Sõlmes 0 rakendatud jõud $F/2$ asub väljade b ja c vahel, mistõttu jõu algpunkti märgime tähega b ja lõpp-punkti tähega c jne (joonis 8.81, b).

Sisejõudude diagrammi koostamine

Sisejõudude diagrammi kujutamist alustame sõlmest, mis on moodustatud kahest vardast. Joonisel 8.81, a kujutatud sõrestikul on nendeks sõlmed 0 ja 11.

Sõlmes 0 on tuntud jõududeks reaktsioon V_a ja jõud $F/2$ ning tundmatuteks varraste $c-h$ (varras 0-2, mis asub väljade c ja h vahel) ja $h-a$ (varras 0-1, mis asub väljade h ja a

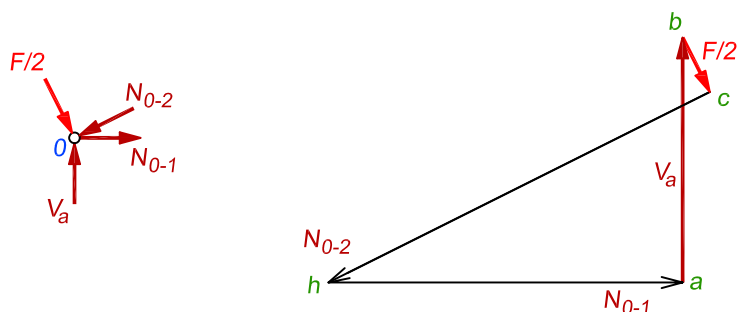


Joonis 8.81. Sõrestiku arvutuskeem ja välisjõudude hulknurk

vahel) pikijõud. Need neli jõudu $a-b$, $b-c$, $c-h$ ja $h-a$ on tasakaalus ja hulknurk kinnine (joonis 8.82). Jõuhulknurga neljast tipust a , b , c ja h on kolm tippu a , b ja c välisjõudude hulknurgas määratud. Tipu h leidmiseks lahutame tuntud jõudude resultandi jõuhulknurgas $a-b-c$ kaheks komponendiks tundmatute pikijõudude sihtidele. Punktidest c ja a tõmbame varrastega $c-h$ ja $h-a$ paralleelsed sirged. Nende sirgete lõikepunkt määrab jõuhulknurga tipu h . Jõuhulknurga küljed $c-h$ ja $h-a$ kujutavad jõu mõõtkavas varraste $c-h$ ja $h-a$ pikijõudusid.

Pikijõudude märgid leiame jõuhulknurga $a-b-c-h-a$ abil. Kinnises jõuhulknurgas on jõudude kulg pidev, mis lubab ühe jõu suuna järgi määrata kõigi teiste jõudude suunad. Reaktsiooni V_a suund on tipust a tippu b , jõu $F/2$ suund on tipust b tippu c . Järelikult on varda $c-h$ pikijõud suunatud tipust c tippu h ning varda $h-a$ pikijõud tipust h tippu a . Kandes jõuhulknurgas leitud pikijõudude suunad sõlme 0 juures sõrestiku varrastele nähtub, et varda $c-h$ pikijõud on suunatud sõlme poole, seega varras on surutud. Varda $h-a$ pikijõud on suunatud sõlmest eemale, seega varras on tõmmatud.

Järgnevalt kanname pikijõudusid kujutavad sirged $c-h$ ja $h-a$ sisejõudude diagrammile ilma nende pikijõudude suundadeta (joonis 8.85, a). Varda pikijõud esineb diagrammi kahe naabersõlme jõuhulknurgas vastupidiste suundadega, mis tähendab, et sisejõudude diagram-

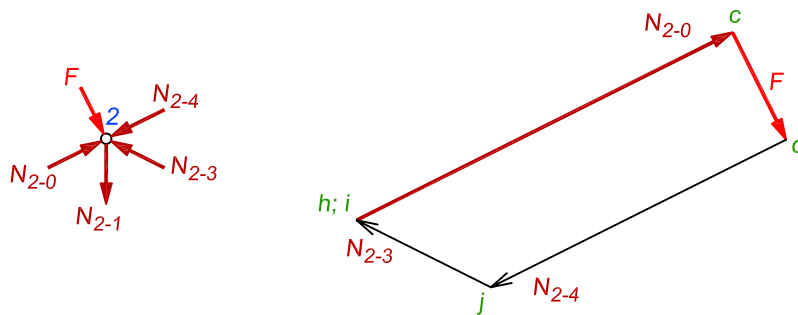


Joonis 8.82. Sõlme 0 tasakaal ja jõuhulknurk

mi lõpetades oleks nooleke iga sirge mõlemas otsas, millel puudub mõte. Seetõttu märgime pikijõudude suunad ainult sõrestiku sõlmede juures, mitte aga diagrammi jõuhulknurkades.

Seejärel vaatleme sõlme 0 naabersõlme, milles on tundmatud ainult kahe varda pikijõud. **Sõlmes 1** on tundmatuteks varraste $h-i$ ja $i-a$ pikijõud. Nende määramiseks moodustame jõuhulknurga $a-h-i-a$, mille tipud a ja h on kujutatud sõlme 0 jõuhulknurgas. Tipu i leiame punktidest h ja a varrastega $h-i$ ja $i-a$ paralleelselt tõmmatud sirgete lõikumise punktina (joonis 8.85, a). Osutub, et nende sirgete lõikepunkt i ühtib punktiga h . Järelikult varda $h-i$ pikijõud on null, varda $i-a$ pikijõud on võrdne varda $a-h$ pikijõuga. Jõuhulknurgas on varda $a-h$ pikijõud suunatud paremalt vasakule ja varda $i-a$ pikijõud vasakult paremale. Mõlemad pikijõud on suunatud sõlmest 1 eemale, järelikult on mõlemad vardad tõmmatud.

Edasi liigume **sõlme 2**, kus tundmatuteks on varraste $d-j$ ja $j-i$ pikijõud. Nende leidmiseks moodustame jõuhulknurga $c-d-j-i-h-c$ (joonis 8.83). Tipu j saame punktidest d ja i varrastega $d-j$ ja $j-i$ paralleelselt tõmmatud sirgete lõikumise punktina. Saadud hulknurga külgede $d-j$ ja $j-i$ pikkused kujutavad jõu mõõtkavas mõõdetuna vastavate varraste pikijõudude suuruseid.

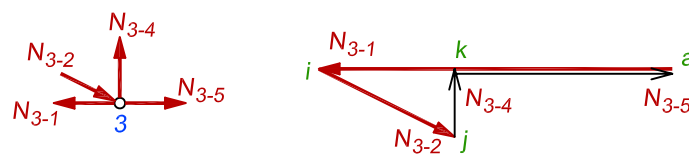


Joonis 8.83. Sõlme 2 tasakaal ja jõuhulknurk

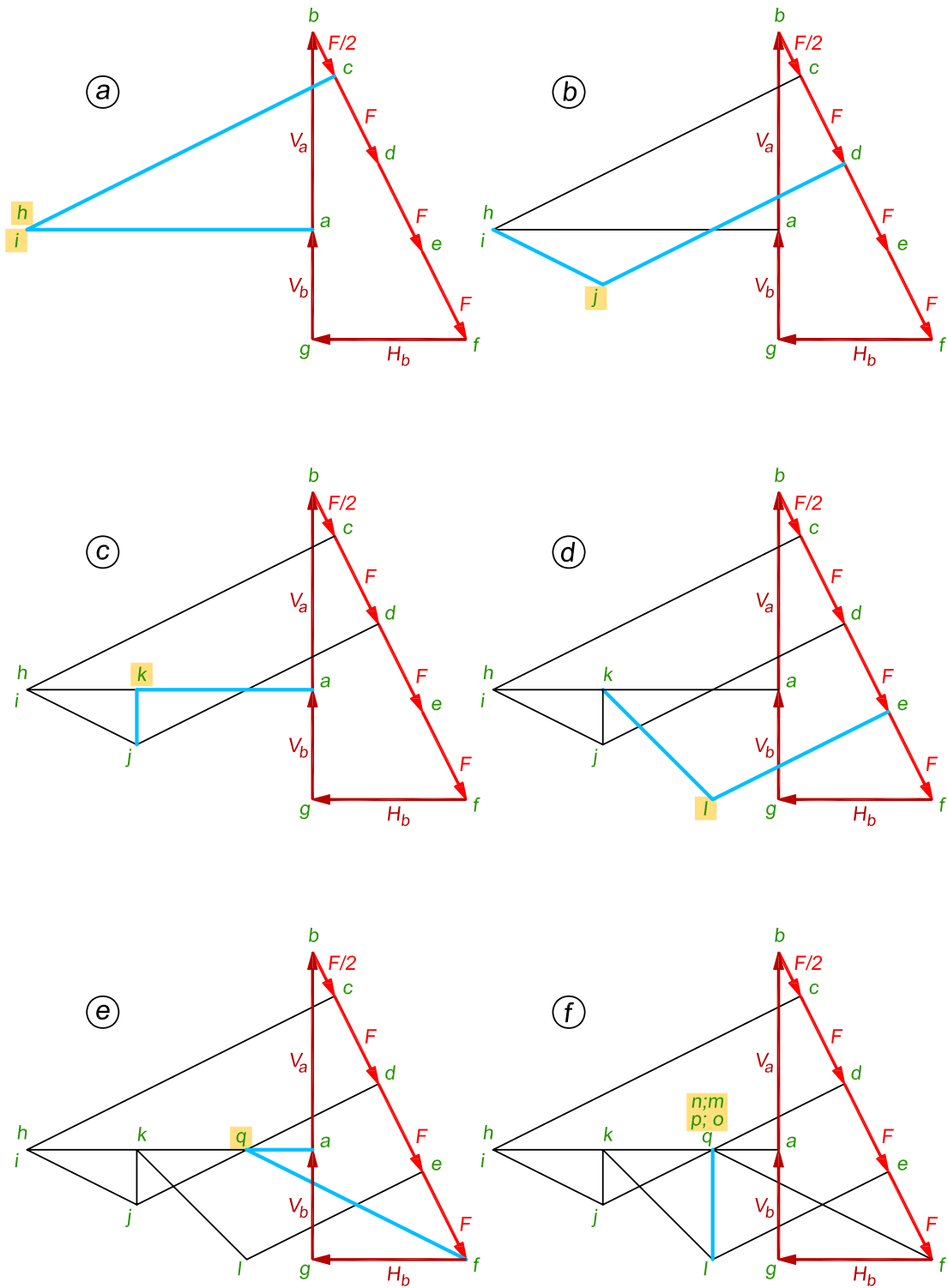
Sõlme rakendatud koormuse F suund määrab jõudude kulgemise hulknurgas. Kuna jõud F on suunatud tipust c tippu d , siis jõud $d-j$ peab liikuma tipust d tippu j ning sealt edasi jõud $j-i$ tipust j tippu i . Kandes need jõud sõlme 2 skeemile, näeme, et mõlemad jõud on suunatud sõlme poole ja järelikult on need vardad surutud.

Sisejõudude diagramm peale sõlme 2 läbimist näeb välja selline, nagu on kujutatud joonisel 8.85, b.

Sõlmes 3 on tundmatuteks varraste $j-k$ ja $k-a$ pikijõud, mille leidmiseks moodustame hulknurga $a-i-j-k-a$ (joonis 8.84). Tipu k asukoha määramiseks tõmbame punktidest a ja j varrastega $k-a$ ja $j-k$ paralleelsed sirged (joonis 8.85, c).



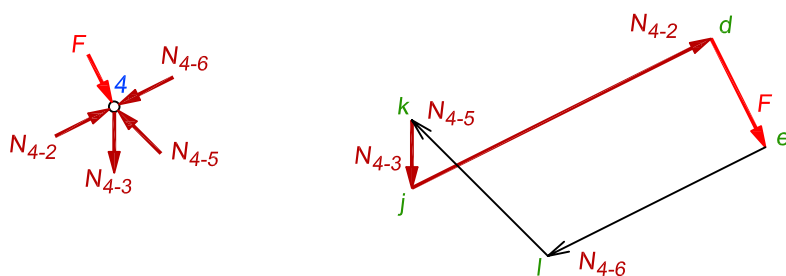
Joonis 8.84. Sõlme 3 tasakaal ja jõuhulknurk



Joonis 8.85. Sisejõudude diagrammi koostamine

Pikijõudude märgid saame kätte sõlme skeemi pealt. Kuna eelnevalt arvutusest on teada, et varras $a-i$ peab olema tõmmatud, siis on tema pikijõudu kujutav nooleke suunaga sõlme eemale ehk paremalt vasakule. Varda $i-j$ kohta on eelnevalt teada, et see on surutud ja tema pikijõudu kujutav nooleke seetõttu suunaga sõlme poole ehk siin paremale alla. Jõudude pideva kulgemise tingimuse tõttu on nüüd hulknurgast kergesti nähtav, et jõud $j-k$ peab liikuma tipust j tippu k , mis on suunaga sõlme eemale ja see varras on tõmmatud. Varda $k-a$ pikijõu nooleke liigub tipust k tippu a , mis on samuti sõlme eemale ja ka see varras on tõmmatud.

Järgnevalt liigume **sõlme 4** ning leiame varraste $e-l$ ja $l-k$ pikijõud. Selleks tuleb moodustada jõudude hulknurk $d-e-l-k-j-d$, millega määrame tippu l asukoha (joonis 8.85, d ; joonis 8.86). Selleks tõmbame teadaolevatest punktidest e ja k vastavalt varrastega $e-l$ ja $l-k$ paralleelsed sirged.



Joonis 8.86. Sõlme 4 tasakaal ja jõuhulknurk

Pikijõudude märkide teadasaamiseks vaatame jõudude kulgemist hulknurgas. Teada on koormuse F ja kahe eelnevalt leitud varra pikijõudusid kujutavate noolekeste suunad. Piisab aga ainult ühest jõust ja valime selleks koormuse F , mis liigub tipust d tippu e . See määrab ära, et pikijõud $e-l$ on suunatud tipust e tippu l ning pikijõud $l-k$ tipust l tippu k . Sõlme skeemile kantuna on need noolekesed suunaga sõlme poole ja järelikult on mõlemad vardad surutud.

Sõrestiku keskkohast paremal pool asuvate sõlmede jaoks moodustame jõuhulknurgad, lähtudes **sõlmest 11**. Sõlmele 11 vastaval jõuhulknurgal $f-g-a-q$ puudub tipp q , mille leiame sirgetega $a-q$ ja $q-f$ (joonis 8.85, e).

Analoogiliselt sõlme 11 jaoks kujutatud jõuhulknurgaga moodustame hulknurgad **sõlmede 9, 10, 7 ja 8** jaoks, mille tulemusel väljadele p, o, n ja m vastavad tipud jõuhulknurgas ühtivad tipuga q (joonis 8.85, f). Järelikult on varraste $m-n, n-o, o-p$ ja $p-q$ pikijõud nullid.

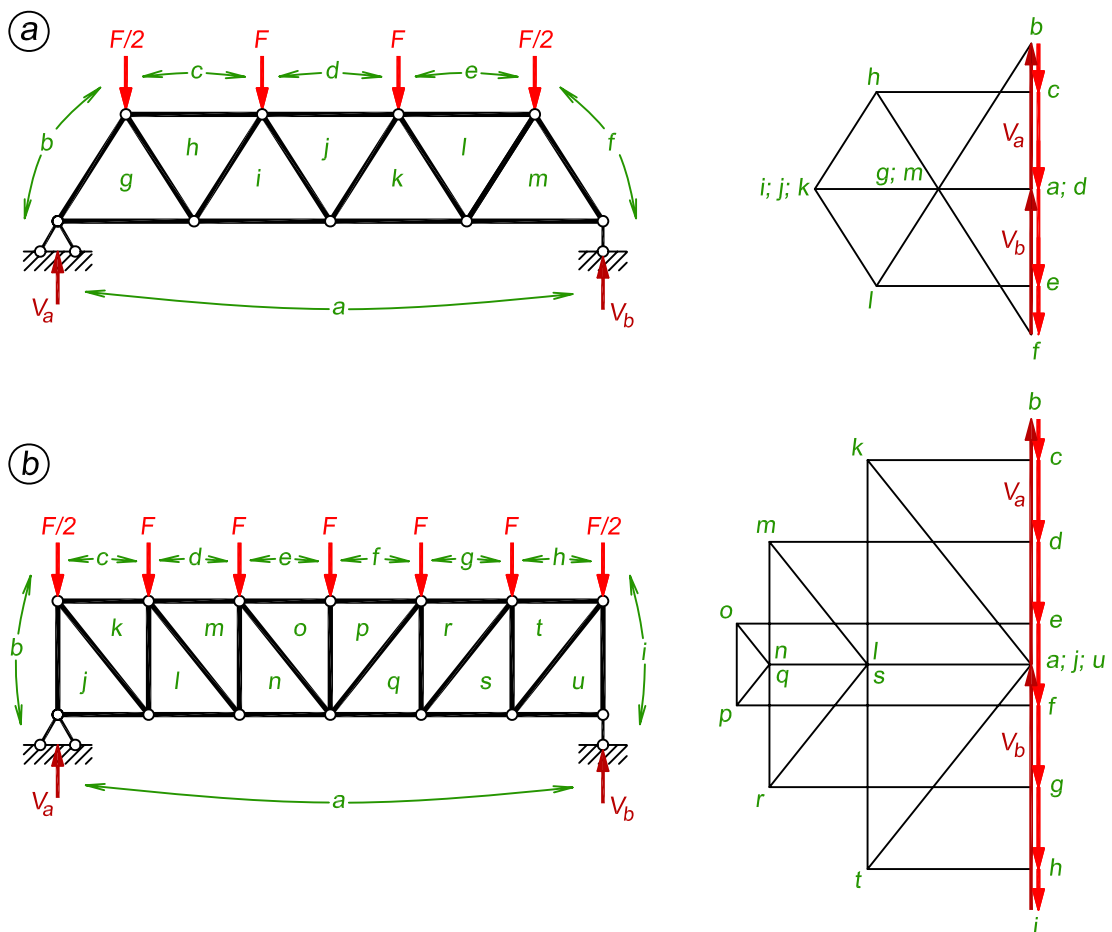
Seni ei ole me vaadelnud **sõlmedele 5 ja 6** vastavaid jõuhulknurki. Nendes on ainult üks tundmatu pikijõud $l-m$. Sisejõudude diagrammis on need punktid juba leitud ja ühendame nad omavahel sirgega (joonis 8.85, f). Viimase tundmatu pikijõuga varra siht on kontrollimiseks: kui sisejõudude diagrammi punktide m ja l ühendussirge on paralleelne vardaga $m-l$, siis on diagramm moodustatud õigesti. Kui sirged ei ole paralleelsed, siis tasandame viga, muutes diagrammi pikijõude.

Sõrestiku üht välja piiravate varraste pikijõud koonduvad diagrammi ühte punkti. See punkt on märgitud sama tähega kui varrastega piiratud väli. Sõrestiku ühes sõlmes mõjuvad välisjõud ja varraste pikijõud moodustavad diagrammis kinnise jõuhulknurga, mille tipud asuvad samas järjekorras, kui väljad ümber vastava sõlme.

Tavaliselt ei ole sõrestiku lahendamisel vajadust iga sõlme jõudude hulknurka eraldi skeemina välja joonestada, vaid piisab sisejõudude diagrammi joonise tegemisest. Pikijõudude märkide saamiseks tuleb sel juhul vaadata ühte konkreetset sõlme puudutatavat osa diagrammist ja mõelda selle sõlme jõudude kulgemise suunale.

Veel mõned näited

Joonisel 8.87 on koostatud sisejõudude diagrammid diagonaalvõrguga (joonis 8.87, a) ning post-diagonaalvõrguga (joonis 8.87, b) paralleelvõodega sõrestike jaoks.

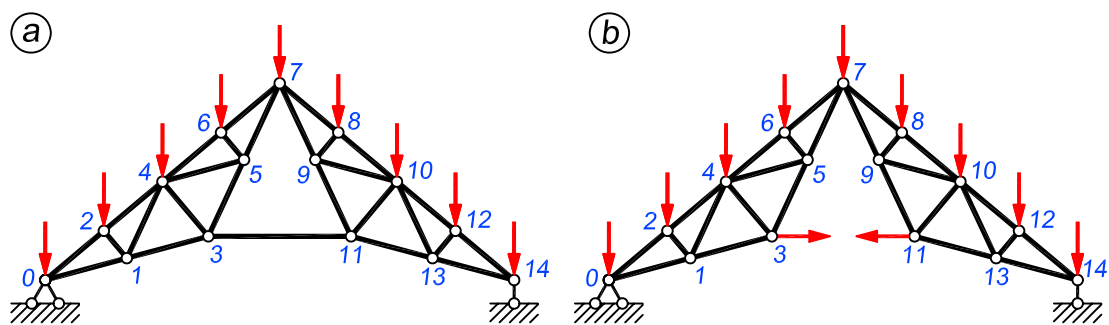


Joonis 8.87. Sisejõudude diagrammid diagonaalvõrguga ning post-diagonaalvõrguga paralleelvõodega sõrestikele

Keerukamaid juhtumeid

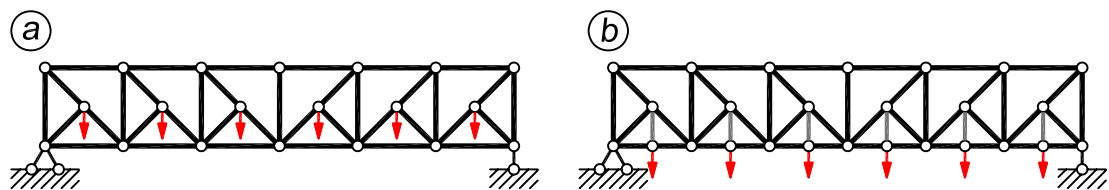
Mõnikord tekitab sisejõudude diagrammi koostamisel raskusi sõlm, kus tuntud jõudude resultant tuleb lahutada kolmele sihile, näiteks joonisel 8.88, a kujutatud sõrestiku sõlmed 3 ja 11.

Sel juhul arvutame varda 3-11 pikijõu analüütiliselt ja rakendame selle välisjõuna sõlmedesse 3 ning 11 (joonis 8.88, b). Edasi koostame diagrammi tavalisel viisil.



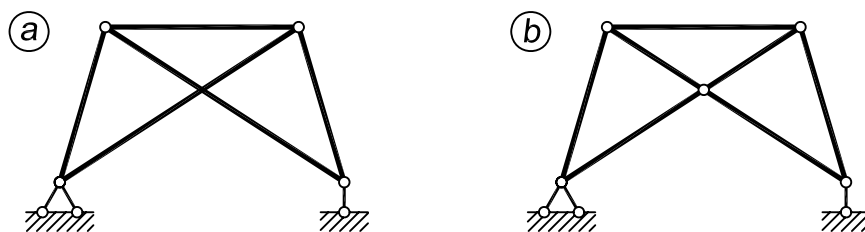
Joonis 8.88. Varda 3-11 asendamine tema pikijõuga, mille rakendame sõrestikule välisjõuna

Kui jõud mõjuvad sõrestiku kontuuri sees asetsevates sõlmedes (joonis 8.89, a), siis diagrammi tavalisel viisil konstrueerida ei saa. Siis kasutame järgmist võtet. Sõrestiku sees mõjuvad välisjõud kanname piki nende sihte üle sõrestiku kontuurile, kuhu lisame fiktiivsed sõlmed. Välisjõu tegeliku rakenduspunkti ja fiktiivse sõlme vahele asetame lisavarda (joonis 8.89, b). Edasi konstrueerime diagrammi tavalisel viisil.



Joonis 8.89. Sõrestiku kontuuri sees paikneva jõuga lahendamine

Teineteisega lõikuvate, kuid lõikepunktis sõlme mitte moodustavate varrastega sõrestike (joonis 8.90) sisejõudude diagrammi koostamisel asetame lõikumispunkti fiktiivse sõlme. Edasi koostame diagrammi tavalisel viisil. Fiktiivse sõlme võib paigutada ainult kahe varda lõikumiskohta.



Joonis 8.90. Lõikuvate, kuid lõikepunktis sõlme mitte moodustavate varrastega sõrestiku lahendamine fiktiivse sõlme abil

8.16. Talasõrestike mõjujooned

8.16.1. Mõjujoonte konstrueerimise meetodid

Liikuva koormuse puhul kasutame sõrestike arvutamisel mõjujooni. Sõrestikuvarda pikijõu mõjujoon on graafik, mis kujutab sõrestikul liikuvast ühikjõust tingitud pikijõudu vardas. Seejuures tuleb vahet teha, kas koormus mõjub ülemise või alumise vöö sõlmedes, kuna erinevatel vöödel paiknev koormus võib varda pikijõudu erinevalt mõjutada. Sellele vastavalt öeldakse, et sõrestik on kas sõiduteega üleval või sõiduteega all.

Sõrestiku varraste pikijõud arvutame mõjujoontega ka siis, kui sõrestikku koormatakse mitmesuguste erinevate ajutiste koormustega.

Koormus kantakse sõrestikule üle tavaliselt sõlmedes ja seepärast, vastavalt sõlmkoormustele, on sõrestiku naabersõlmede vahel mõjujoonte osad sirged.

Analoogiliselt sõrestiku varraste pikijõudude arvutamisele liikumatu koormuse puhul saab moodustada sõrestiku varraste pikijõudude mõjujooned samuti kas staatika või kinemaatika meetodiga. Käesolevas raamatus vaatleme ainult staatika meetodit.

Staatika meetodi kasutamisel eraldame sõrestiku arvutusskeemi lõikega kaheks osaks (lõikemeetod) ja koostame ühe osa jaoks tasakaaluvõrrandid. Tasakaaluvõrrandite kirjutamisel lähtume samadest võtetest nagu pikijõudude leidmiselgi: momendipunkti, projektsioonide ja sõlmede eraldamise võttest. Saadud tasakaaluvõrranditest avaldame läbilõigatud varraste pikijõud ühikjõu asukoha funktsioonina ja kujutame mõjujooned.

Talasõrestike varraste pikijõudude mõjujooned saab kujutada ka sõrestiku toereaktsiooni ning sõrestikuga võrdse sildega tala paindemomendi või põikjõu mõjujoone abil.

8.16.2. Momendipunkti võte

Mõjujoonte moodustamisel staatika tasakaalutingimustega eraldame sõrestiku arvutusskeemi lõikega kaheks osaks, nii et lõige läbiks seda varrast, mille pikijõu mõjujoont kujutame. Kui sõrestiku arvutusskeemi saab eraldada kaheks osaks, lõigates läbi ainult kolm varrast, siis varda pikijõu mõjujoone avaldise tuletamiseks kasutame momentide või projektsioonide tasakaalu tingimust.

Järgnevalt rakendame momentide tasakaalu tingimust: kõigi ühel pool lõiget arvutusskeemi osale rakendatud jõudude momentide summa tasandi suvalise punkti suhtes võrdub nulliga. Momendipunktiks võtame kahe teise läbilõigatud varda sihi lõikepunkti, mistõttu momentide tasakaalu tingimuse alusel koostatud võrrand ei sisalda nende varraste pikijõude. Mõjujoone kujutamiseks koostame kaks võrrandit. Talasõrestike puhul vaatleme vasakul pool lõiget asuva sõrestikuosa tasakaalu, kui ühikjõud mõjub paremal pool lõiget, ja lõikest paremal pool oleva sõrestikuosa tasakaalu, kui ühikjõud asub vasakul pool lõiget.

Kui ühikjõud asub paremal pool lõiget, siis avaldame varda pikijõu sõrestiku arvutusskeemi vasakule osale rakendatud jõudude momentide tasakaalu tingimusest, mille koostame varda momendipunkti suhtes.

Joonisel 8.91, *a* esitatud sõrestiku arvutusskeemis teeme lõike *I-I* ja leiame varraste 4-6, 5-7 ja 4-7 pikijõu mõjujooned. Asugu sõidutee alumisel vööl.

Ülemise vöö varda 4-6 puhul vaatame esmalt sõrestiku arvutuskeemi vasakpoolse osa tasakaalu (joonis 8.91, b). Ühikjõud mõjub sel juhul paremal pool lõiget ($3d \leq x \leq l$, kus x on ühikjõu kaugus vasakust toest) ning arvutuskeemi vasakpoolsele osale mõjuvate jõudude momentide tasakaalu tingimusest varda 4-6 momendipunkti, s.t sõlme 7 suhtes

$$\sum M_7 = 0; \quad -N_{4-6}r_{4-6} - V_a \cdot 3d = 0 \quad (8.63)$$

avaldame varda 4-6 pikijõu

$$N_{4-6} = -\frac{3dV_a}{r_{4-6}} \quad (3d \leq x \leq l) \quad (8.64)$$

Avaldis (8.64) on varda 4-6 pikijõu mõjujoone parempoolse sirge võrrandiks. Mõjujoone parempoolse sirge 7'-b (joonis 8.91, d) kujutamiseks kanname toe a vertikaalile lõigu $-\frac{3d}{r_{4-6}}$ ($V_a = 1$), mille otspunktist a' tõmbame sirge toe b vertikaalil nullpunkti b ($V_a = 0$).

Avaldisest (8.64) näeme, et varda pikijõud on võrdne momendipunkti suhtes koostatud toereaktsiooni V_a momendiga, mis on jagatud momendipunkti kaugusega varda sihist.

Kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget, siis on varda pikijõud võrdne momendipunkti suhtes koostatud toereaktsiooni V_b momendiga, mis on jagatud momendipunkti kaugusega varda sihist.

Ehk üldisemalt

$$\text{Ordinaat toe kohal} = \frac{\text{toereaktsiooni õlg momendipunkti suhtes}}{\text{pikijõu õlg momendipunkti suhtes}} \quad (8.65)$$

Varda pikijõud on positiivne, kui varda oletatud tõmbejõu ja toereaktsiooni momendid momendipunkti suhtes on erinevate märkidega, ja negatiivne, kui momendid on samamärgilised.

Kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget ($0 \leq x \leq 2d$), siis arvutuskeemi parempoolsele osale (joonis 8.91, c) mõjuvate jõudude momentide tasakaalu tingimusest

$$\sum M_7 = 0; \quad N_{4-6}r_{4-6} + V_b \cdot 5d = 0 \quad (8.66)$$

avaldame varda N_{4-6} pikijõu

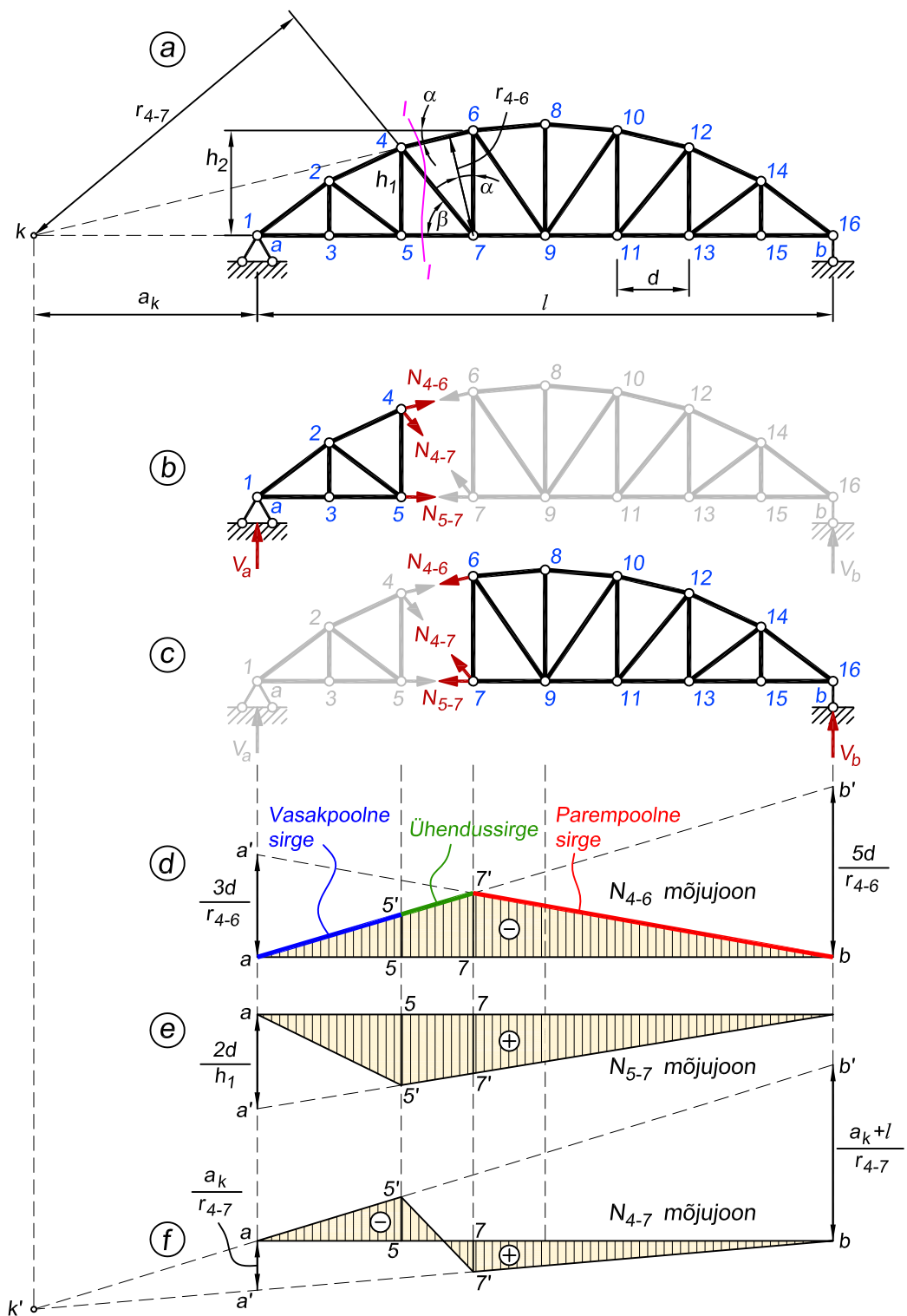
$$N_{4-6} = -\frac{5dV_b}{r_{4-6}} \quad (0 \leq x \leq 2d) \quad (8.67)$$

Mõjujoone vasakpoolse sirge $a-5'$ (8.67) kujutamiseks kanname parempoolse toe b vertikaalile lõigu $-\frac{5d}{r_{4-6}}$ ($V_b = 1$), mille otspunktist b' tõmbame sirge toe a vertikaalil nullpunkti a ($V_b = 0$).

Läbilõigatud paneelis, ühikjõu mõjumisel sõlmede 5 ja 7 vahel ($2d \leq x \leq 3d$), mõjujoone kujutamiseks ühendame punktid $5'$ ja $7'$ sirglõiguga, mis ühtib sirgega $a-b'$.

Varda 4-6 pikijõu avaldiste (8.64) ja (8.67) lugejad väljendavad ühel pool lõiget mõjuvate jõudude momenti momendipunkti 7 suhtes

$$\begin{aligned} M_7 &= 3dV_a \quad (3d \leq x \leq l) \\ M_7 &= 5dV_b \quad (0 \leq x \leq 2d) \end{aligned} \quad (8.68)$$



Joonis 8.91. Mõjujonte koostamine momendipunkti võttega varrastele 4-6, 5-7 ja 4-7

Moment M_7 on võrdne sõrestikuga sama sildega lihttala paindemomendiga lõikes 7. Ülemise vöö varda 4-6 pikijõu mõjujoone avaldise võib esitada nüüd kujul

$$N_{4-6} = -\frac{M_7}{r_{4-6}} = -\frac{M_7}{h_2 \cos \alpha} \quad (8.69)$$

Kuna lihttala paindemomendi M_7 mõjujoone vasak- ja parempoolne sirge lõikuvad sõrestiku sõlme 7 läbival vertikaalil, siis ka varda 4-6 pikijõu mõjujoone vasak- ja parempoolse sirge lõikepunkt $7'$ asub momendipunkti 7 vertikaalil. Seega varda 4-6 pikijõu N_{4-6} mõjujoone vasakpoolse sirge $a-5'$ kujutamiseks ühendame mõjujoone parempoolse sirge ja momendipunkti 7 vertikaali lõikepunkti $7'$ vasaku toe vertikaalil nullpunktiga a .

Alumise vöö varda 5-7 pikijõu mõjujoone leiame sama lõikega $I-I$ (joonis 8.91). Kui ühikjõud asub paremal pool lõiget $I-I$ ($3d \leq x \leq l$), siis sõrestiku arvutuskeemi vasakpoolse osa tasakaalu tingimusest alumise vöö varda 5-7 momendipunkti suhtes

$$\sum M_4 = 0; \quad N_{5-7}h_1 - V_a \cdot 2d = 0 \quad (8.70)$$

avaldame varda 5-7 pikijõu mõjujoone parempoolse sirge võrrandi (joonis 8.91, e)

$$N_{5-7} = \frac{2dV_a}{h_1} = \frac{M_4}{h_1} \quad (3d \leq x \leq l) \quad (8.71)$$

Mõjujoone parempoolse sirge kujutamiseks kanname toe a vertikaalile lõigu $a-a'$ pikkusega $\frac{2d}{h_1}$ ($V_a = 1$) ja ühendame sirglõigu otspunkti a' toe b vertikaalil nullpunktiga b ($V_a = 0$). Mõjujoone vasakpoolse sirge ($0 \leq x \leq 2d$) kujutamiseks tõmbame momendipunktist vertikaalse sirge kuni lõikumiseni parempoolse sirgega punktis $5'$, mille ühendame nullpunktiga a vasaku toe vertikaalil. Läbilõigatud paneeli kohal, sõlmede 5 ja 7 vahel ($2d \leq x \leq 3d$), ühendame mõjujoone kujutamiseks sõlmede 5 ja 7 kohal olevate mõjujoone ordinaatide otspunktid $5'$ ning $7'$ sirglõiguga.

Läbilõigatud paneelis mitteparalleelsete vöövarraste puhul kujutame ka võrguvarraste mõjujooned momentide tasakaalu tingimusega.

Diagonaali 4-7 momendipunktiks on vöövarraste 4-6 ja 5-7 sihtide lõikepunkt k (joonis 8.91, a). Arvutuskeemi vasakpoolse osa (ühikjõud on parempoolsel osal: $3d \leq x \leq l$) momentide tasakaalu tingimusest

$$\sum M_k = 0; \quad -N_{4-7}r_{4-7} + V_a a_k = 0 \quad (8.72)$$

avaldame mõjujoone parempoolse sirge võrrandi

$$N_{4-7} = \frac{V_a a_k}{r_{4-7}} \quad (8.73)$$

Sirge kujutamiseks kanname vasaku toe vertikaalile lõigu $\frac{a_k}{r_{4-7}}$ ja ordinaadi otspunkti a' ühendame nullpunktiga b parempoolse toe vertikaalil. Mõjujoonena on see kehtiv sõlmest 7 kuni toeni b (joonis 8.91, f).

Arvutuskeemi parempoolse osa momentide tasakaalu tingimusest

$$\sum M_k = 0; \quad N_{4-7}r_{4-7} + V_b (a_k + l) = 0 \quad (8.74)$$

avaldame mõjujoone vasakpoolse sirge võrrandi (ühikjõud mõjub sõrestiku vasakpoolsel osal: $0 \leq x \leq 2d$)

$$N_{4-7} = -\frac{V_b(a_k + l)}{r_{4-7}} \quad (8.75)$$

Sirge kujutamiseks kanname parempoolse toe vertikaalile lõigu $-\frac{a_k+l}{r_{4-7}}$. Lõigu otspunkti b' ühendame nullpunktiga a vasakpoolse toe vertikaalil. Mõjujoonena on see kehtiv toest a kuni sõlmeni 5. Läbilõigatud paneelis ühendame mõjujoone kujutamiseks sõlmede 5 ja 7 kohal olevate ordinaatide otspunktid $5'$ ning $7'$ sirglõiguga (joonis 8.91, *f*).

Kolmnurkade $a-k'-a'$ ja $b'-k'-b$ sarnasusest tuleneb, et mõjujoone parempoolse sirge $7'-b$ ja vasakpoolse sirge $a-5'$ pikenduste lõikepunkt k' asub momendipunktide k vertikaalil.

Posti 6-7 pikijõu N_{6-7} mõjujoone kujutamiseks teeme lõike *II-II* (joonis 8.92). Posti momendipunkti k suhtes koostatud arvutusskeemi vasaku osa momentide tasakaalu tingimusest

$$\sum M_k = 0; \quad N_{6-7}(a_k + 3d) + V_a a_k = 0 \quad (8.76)$$

avaldame pikijõu N_{6-7} mõjujoone parempoolse sirge $9'-b$ ($4d \leq x \leq l$) võrrandi

$$N_{6-7} = -\frac{V_a a_k}{a_k + 3d} \quad (8.77)$$

Mõjujoone vasakpoolse sirge kujutamiseks pikendame parempoolset sirget $b-9'$ läbi punkti a' kuni lõikumiseni momendipunkti k vertikaaliga punktis k' . Sirge $k'-a$ pikendus $a-7'$ on mõjujoone vasakpoolne sirge. Läbilõigatud paneelis, sõlmede 7 ja 9 vahel, on mõjujoone sirgeks lõik $7'-9'$.

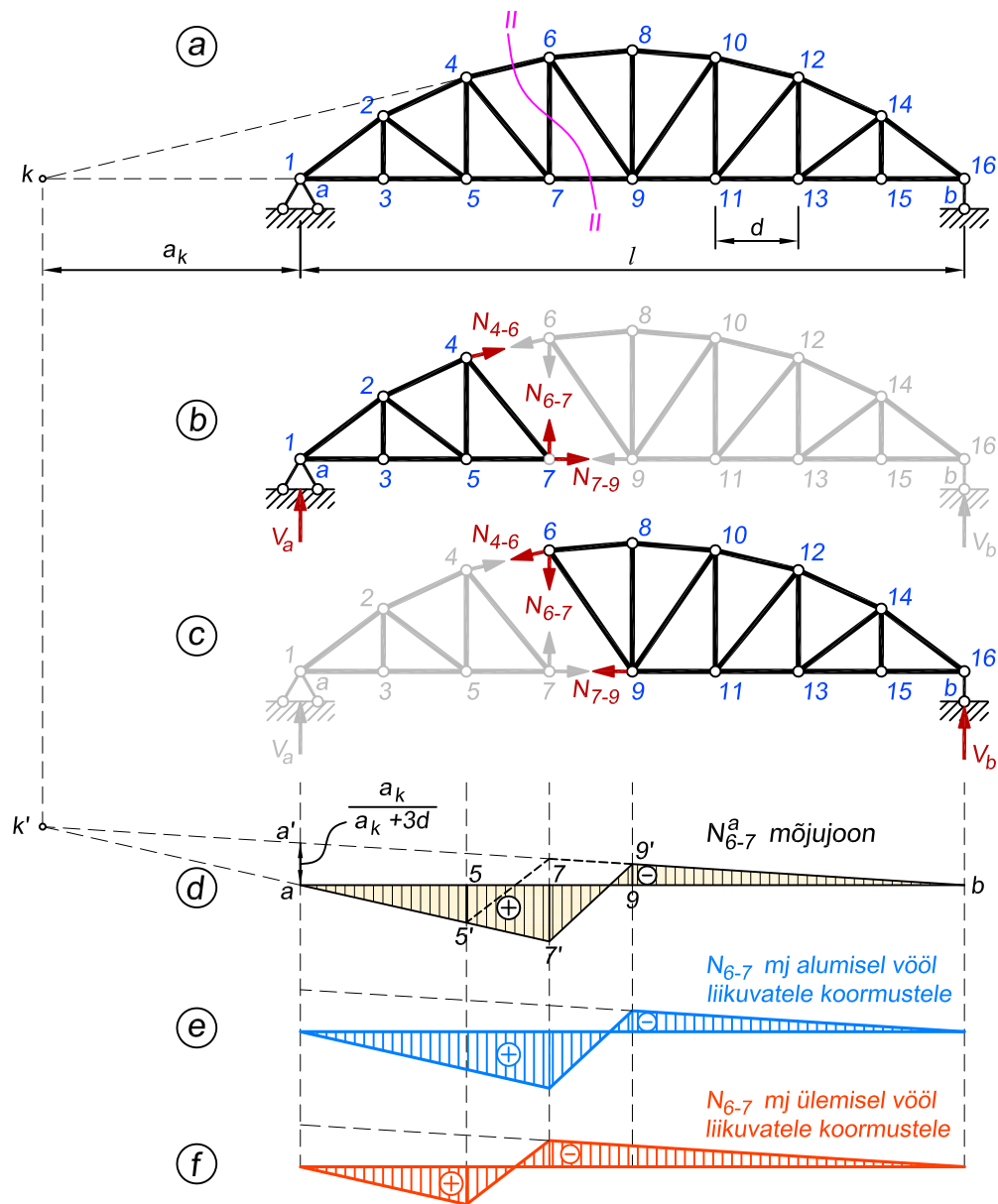
Post-diagonaalvõrguga sõrestiku posti pikijõu mõjujoon oleneb sõidutee asukohast. Kui koormus mõjub ülemisel vööl, siis on koormatud vöö läbi lõigatud antud näite puhul kolmandas paneelis ja sirglõigu, mis ühendab mõjujoone parempoolset sirget vasakpoolse sirgega, tõmbame kolmandas paneelis. Joonisel 8.92, *d* on see näidatud katkendjoonega.

Mainitud olukorra tekkimine tähendab seda, et vaadeldavat varrast mõjutavad ülemisel ja alumisel vööl liikuvad koormused erinevalt. Sellistel juhtudel saab mõjujoont kujutada kahel erineval viisil. Üheks variandiks ongi joonisel 8.92, *d* näidatud skeem, kus kaks mõjujoont on kujutatud ühel joonisel, üks neist pideva ja teine katkendjoonega. Teise variandi korral võib need mõjujooned ka täiesti eraldi skeemidena esitada, nagu on näidatud joonisel 8.92, *e* ja *f*.

Mõjujoonte märkidest

Momendipunkti asukoht määrab ära mõjujoonte kuju ehk selle, kas need on ühe või kahe-märgilised.

1. Kui momendipunkt paikneb tugede vahel, siis on mõjujoon ühemärgiline. See tähendab, et varras on alati ühemärgilise pikijõuga, sõltumata koormuse asukohast. Siin käsitletud sõrestikul on nendeks ülemise vöö varras 4-6, mis on alati surutud, ning alumise vöö varras 5-7, mis on alati tõmmatud.



Joonis 8.92. Mõjujoone koostamine momendipunkti võttega vardale 6-7

2. Kui momendipunkt paikneb väljaspool tugesid, siis on mõjujoon kahemärgiline. Selliste varraste pikijõu märk sõltub koormuse asukohast. Näiteks on diagonaal 4-7 surutud, kui koormus paikneb kolmandas paneelis asuvast mõjujoone nullpunktist vasakul, ning tõmmatud, kui koormus paikneb sellest nullpunktist paremal. Samuti võivad tõmme ja surve vahelduda postis 6-7.
3. Kui momendipunkt on parema või vasaku toe vertikaalil, siis vastavalt mõjujoone vasakpoolne või parempoolne sirge ühtib mõjujoone abstsissiteljega. Selline olukord tekib näiteks kolmnurksõrestiku puhul.

8.16.3. Projektsioonide võtte

Joonisel 8.93, *a* esitatud sõrestiku vöövarraste mõjujooned saame kujutada momentide tasakaalu tingimustega. Enne projektsioonide võtte juurde minekut esitame ka nende mõjujoonte skeemid. Siin on tegemist olukorraga, kus alumisel ja ülemisel vööl liikuvad koormused mõjutavad varrast erinevalt.

Lähtume praegu sellest, et koormus liigub alumisel vööl. Alumise vöö varda 5-7 mõjujoon on hulknurk $a-5'-7'-b$ (joonis 8.93, *b*) ja ülemise vöö varda 4-6 mõjujoon on kolmnurk $a-5'-b$ (joonis 8.93, *c*).

Kui koormus liigub ülemisel vööl, siis on mõjujoon mõnevõrra erinev ülalkirjeldatust – alumise vöö varda mõjujoon on kolmnurk $a-6'-b$ ja ülemise vöö varda 4-6 mõjujoon hulknurk $a-4'-6'-b$. Need mõjujooned on näidatud joonisel 8.93, *b* ja *c* katkendjoonega.

Võrguvarraste mõjujoonte kujutamiseks kasutame projektsioonide tasakaalu tingimust: ühel pool lõiget arvutusskeemile mõjuvate jõudude projektsioonide summa paralleelsete vöövarraste ristteljele võrdub nulliga.

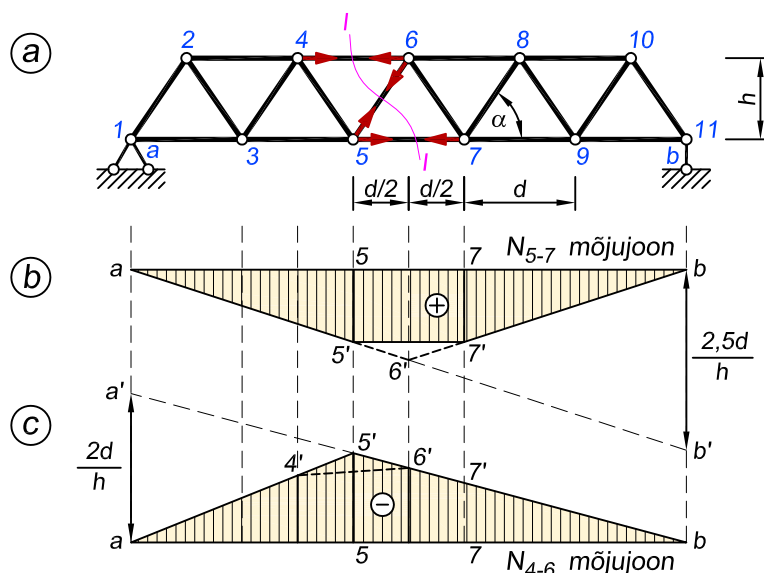
Vaatame **diagonaali 5-6** ja teeme lõike *I-I*. Kui ühikjõud mõjub lõikest paremal, siis arvutusskeemi vasakpoolsele osale mõjuvate jõudude (joonis 8.94, *b*) projektsioonide tingimusest

$$\sum Z = 0; \quad -N_{5-6} \sin \alpha - V_a = 0 \quad (8.78)$$

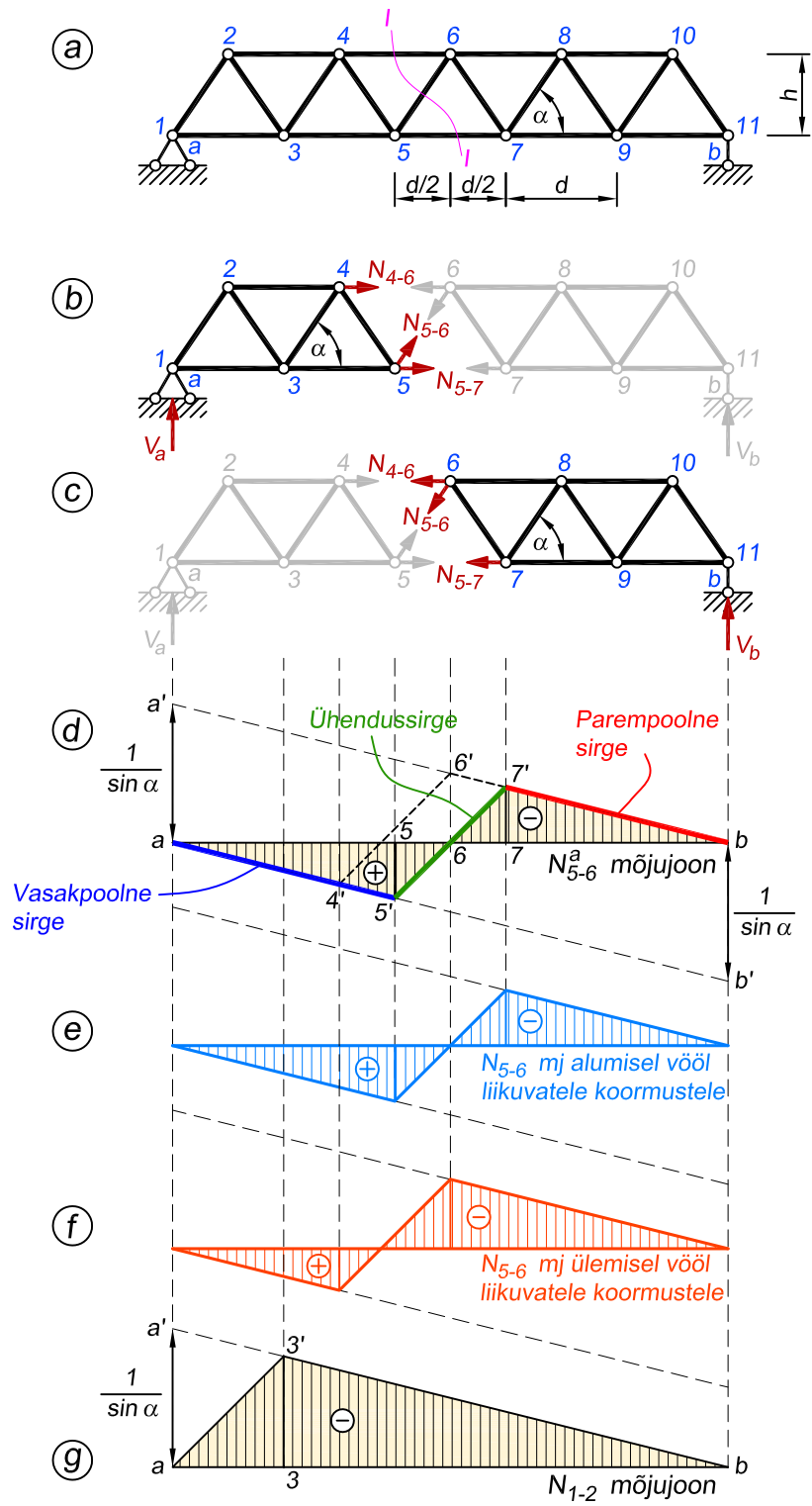
avaldame diagonaali pikijõu mõjujoone parempoolse sirge võrrandi

$$N_{5-6} = -\frac{V_a}{\sin \alpha} \quad (8.79)$$

Vasakpoolse toe vertikaalile kanname lõigu $-\frac{1}{\sin \alpha}$, mille otspunkti *a'* ja nullpunkti *b* ühendame sirgega (joonis 8.94, *d*). Mõjujoone parempoolseks sirgeks on sirglõik $7'-b$.



Joonis 8.93. Paralleelvööde ja diagonaalvõrguga sõrestiku vöövarraste mõjujooned



Joonis 8.94. Paralleelvöödega sõrestiku võrguvarraste mõjujooned

Kui ühikjõud mõjub vasakul (joonis 8.94, c) pool lõiget, siis tasakaalutingimusest

$$\sum Z = 0; \quad N_{5-6} \sin \alpha - V_b = 0 \quad (8.80)$$

avaldame diagonaali vasakpoolse sirge võrrandi

$$N_{5-6} = \frac{V_b}{\sin \alpha} \quad (8.81)$$

Mõjujoone vasakpoolseks sirgeks on sirglõik $a-5'$. Läbilõigatud paneeli kohal, sõlmede 5 ja 7 vahel, on mõjujooneks sirge $5'-7'$.

Diagonaali 5-6 puhul on tegemist vardaga, mida alumise ja ülemise vöö peal liikuvad koormused mõjutavad erinevalt. See järeldub lõike tegemise asukohast: kui koormus mõjub alumisel vööl, siis on koormatud vöö läbi lõigatud sõlmede 5 ja 7 vahel, kui aga koormus liigub ülemisel vööl, siis on koormatud vöö läbi lõigatud sõlmede 4 ja 6 vahel. Ülemise vöö koormustele kehtiv mõjujoon on joonisel 8.94, d kujutatud katkendjoonega $a-4'-6'-b$. Selleks, et mõlema mõjujoone kuju oleks selgesti arusaadav, toome nad joonisel 8.94, e ja f eraldi välja.

Kahemärgiline mõjujoon tähendab seda, et vardas 5-6 võib esineda nii tõmbe- kui ka survejõud sõltuvalt koormuse asukohast. Kui koormus paikneb alumisel vööl sõrestiku kesk-kohast vasakul, siis on varras tõmmatud, ja kui paremal, siis surutud.

Kui üldjuhul on diagonaalide mõjujooned kahemärgilised, siis vaadeldava sõrestiku kõige äärmine diagonaal 1-2 (samuti ka 10-11) on erandlik, kuna selle mõjujoon on ühemärgiline. See diagonaal on järelikult alati surutud. Esitame tema mõjujoone ilma arvutuseta (joonis 8.94, g), kuna toeordinaadi avaldis tuleb tal sama nagu eespool vaadatud vardal 5-6.

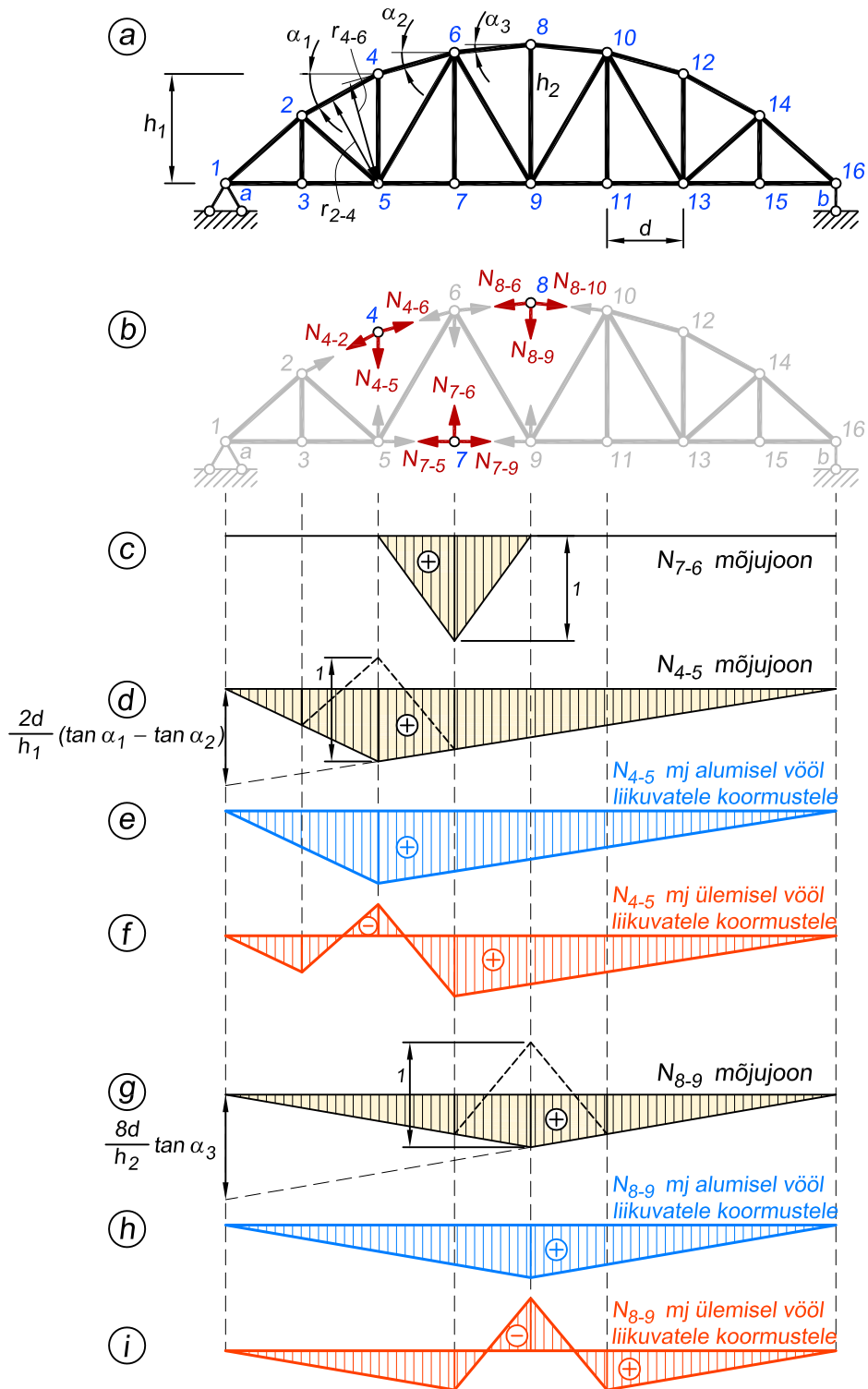
8.16.4. Sõlmede eraldamise võte

Joonisel 8.95, a esitatud sõrestiku vöö- ja diagonaalvarraste pikijõudude mõjujooned kujutame momentide tasakaalu tingimustega. Postide pikijõudude mõjujooned kujutame sõrestiku arvutusskeemist eraldatud sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustega (joonis 8.95, b). Vaatleme sõlmi, milles ei ole diagonaale. Niisugused sõlmed on alumisel vööl 3, 7, 11 ja 15 ning ülemisel vööl 4, 8 ja 12. Tasakaalutingimuste koostamisel vaatleme kahte olukorda: kui sõlm on koormatud ja kui sõlm on koormamata. Alumise vöö sõlmes 7 (samuti ka sõlmedes 3, 11 ja 15) on ühendatud kolm varrast, kusjuures kaks vöövarrast asuvad ühel sirgel.

Postis 7-6 tekib pikijõud ainult siis, kui sõlm 7 on koormatud (koormus vahemikus $2d \leq x \leq 4d$). Kui sõlm 7 on koormamata (koormus vahemikus $0 \leq x \leq 2d$ või $4d \leq x \leq l$), siis posti 7-6 pikijõud võrdub nulliga. Kui ühikjõud mõjub sõlmes 7 ($x = 3d$), siis projektsioonide tingimusest $\sum Z = 0$

$$-N_{7-6} + 1 = 0 \quad (8.82)$$

saame posti pikijõu $N_{7-6} = 1$, mis on mõjujoone ordinaadiks sõlme 7 all (joonis 8.95, c). Kui koormus ei ole kolmandas ega neljandas paneelis ($0 \leq x \leq 2d$ või $4d \leq x \leq l$), siis sõlme 7 tasakaalust järgneb, et $N_{7-6} = 0$ ning teiste sõlmede all on mõjujoone ordinaadid nullid (joonis 8.95, c). Ülemisel vööl liikuv koormus posti 7-6 ei mõjuta, mistõttu ülemise vöö



Joonis 8.95. Mõjujoonte koostamine sõlmede eraldamise võttega

koormustele on mõjujoon kogu silde ulatuses nullsirge. Seega mõjutavad ülemise ja alumise vöö koormused posti 7-6 erinevalt.

Postide 4-5, 8-9 ja 12-13 pikijõudude mõjujooned moodustame vastavalt sõlmede 4, 8 ja 12 tasakaalutingimuste alusel. Kui sõidutee on alumisel vööl, siis on mainitud sõlmed koormamata.

Posti 4-5 puhul avaldame sõlme 4 tasakaalutingimusest

$$\sum Z = 0; \quad N_{4-5} - N_{4-6} \sin \alpha_2 + N_{4-2} \sin \alpha_1 = 0 \quad (8.83)$$

varda pikijõu

$$N_{4-5} = -N_{4-2} \sin \alpha_1 + N_{4-6} \sin \alpha_2 \quad (8.84)$$

Elimineerides avaldisest (8.84) ülemise vöö varraste 4-2 ja 4-6 pikijõud

$$N_{4-2} = -\frac{M_5}{r_{4-2}} = -\frac{M_5}{h_1 \cos \alpha_1}; \quad N_{4-6} = -\frac{M_5}{r_{4-6}} = -\frac{M_5}{h_1 \cos \alpha_2} \quad (8.85)$$

saame varda 4-5 pikijõu avaldise kujul

$$N_{4-5} = (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \frac{M_5}{h_1} \quad (8.86)$$

Posti 4-5 pikijõu mõjujoone ordinaadid on proportsionaalsed momendi M_5 mõjujoone ordinaatidega. Proportsionaalsustegur on $\frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{h_1}$. Vasaku toe vertikaalile kanname lõigu $\frac{2d(\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)}{h_1}$ (joonis 8.95, d).

Siiani vaatasime olukorda, kus sõlm 4 oli koormamata ja postis 4-5 tekkis seetõttu pikijõud ainult ülemise vöö varraste pikijõudude resultandist. Kui koormus mõjub ülemisel vööl sõlmes 4, siis hakkab see koormus lisaks vöövarraste resultandile mõjutama posti ka otseselt. Nüüd tuleb algse mõjujoone ordinaat sõlme 4 kohal nihutada ühe ühiku võrra negatiivses suunas, kuna sõlmes 4 paiknev koormus on suunaga posti poole ja tekitab sinna survejõu. Sel juhul on mõjujoon selline nagu näidatud joonisel 8.95, d katkendjoonega.

Selleks, et paremini aru saada, millised on varda 4-5 mõjujooned alumisel ja ülemisel vööl liikuvatele koormustele, toome nad joonisel 8.95, e ja f eraldi välja.

Posti 8-9 mõjujoone jaoks vaatame sõlme 8 tasakaalu tingimust

$$\sum Z = 0; \quad N_{8-9} + 2N_{8-6} \sin \alpha_3 = 0 \quad (8.87)$$

millest saame

$$N_{8-9} = -2N_{8-6} \sin \alpha_3 = 2 \tan \alpha_3 \frac{M_9}{h_2} \quad (8.88)$$

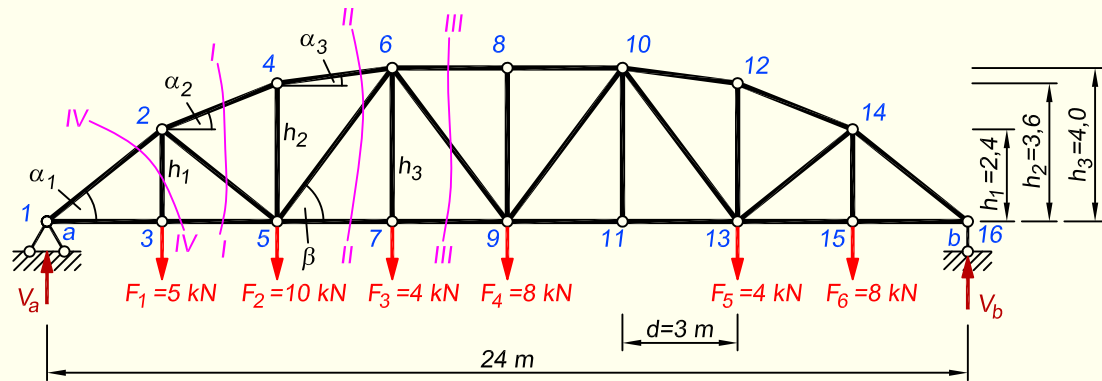
kuna $N_{8-6} = -\frac{M_9}{h_2 \cos \alpha_3}$. Mõjujoon on kujutatud joonisel 8.95, g.

Ka seda varrast mõjutavad alumise ja ülemise vöö peal paiknevad koormused erinevalt. Kui koormus mõjub ülemisel vööl sõlmes 8, siis on posti 8-9 pikijõud

$$N_{8-9} = \frac{4d}{h_2} \tan \alpha_3 - 1 \quad (8.89)$$

Mõjujoon on kujutatud joonisel 8.95, g katkendjoonega. Parema selguse huvides esitame mõlemad mõjujooned ka eraldi joonisel 8.95, h ja i.

NÄIDE 8.13. Kujutada joonisel 8.96 kujutatud sõrestiku vasakpoolse osa varraste pikijõudude mõjujooned, arvutada mõjujoonte abil varraste pikijõud ja võrrelda neid näites 8.3 otseselt leitud pikijõududega.



Joonis 8.96. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Mõjujoonte koostamisel liigub sõrestikul ühikjõud. Kui ühikjõud paikneb läbilõigatud paneelist paremal, siis vaatleme sõrestiku vasaku osa tasakaalu. Kui ühikjõud paikneb läbilõigatud paneelist vasakul, siis vaatleme sõrestiku parempoolse osa tasakaalu.

1. Vöovarraste pikijõudude mõjujoonte leidmisel kasutame momentide tasakaalu tingimust momendipunkti suhtes.

Vöovarraste mõjujooned on kujutatud joonisel 8.99.

Varda 3-5 (1-3) mj

Varda 3-5 mõjujoone koostamiseks teeme lõike *I-I*, vaatame sõrestiku vasakpoolse osa tasakaalu (joonis 8.97, *a*) ja kirjutame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 2 suhtes

$$\sum M_2 = 0; \quad N_{3-5} \cdot h_1 - V_a \cdot d = 0, \quad \text{kus } V_a = 1$$

$$N_{3-5} \cdot 2,4 - 1 \cdot 3 = 0; \quad N_{3-5} = N_{1-3} = 1,25$$

Saadud väärtusega võrdse lõigu kanname toe *a* vertikaalile ($V_a = 1$), lõigu otspunkti ühendame toe *b* vertikaalil nullpunktiga ($V_a = 0$). Saadud sirge on mõjujoone parempoolseks sirgeks parempoolse toe ja selle paneeli vahel, kus on vastav varras. Kuna momendipunkt on tugede vahel, siis on mõjujoon ühemärgiline ja seetõttu mõjujoone vasakpoolse sirge (vasakpoolse toe ja vaadeldava vardaga paneeli vahel) kujutamiseks ühendame mõjujoone parempoolse sirge ja momendipunkti vertikaali lõikepunkti toe *a* vertikaalil nullpunktiga.

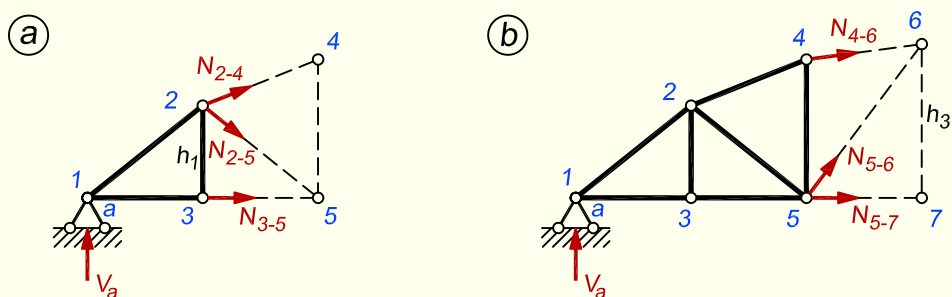
Varda 5-7 (7-9) mj

Varda 5-7 mõjujoone leidmiseks teeme lõike *II-II*, vaatame sõrestiku vasakpoolse osa

tasakaalu (joonis 8.97, b) ja koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 6 suhtes

$$\begin{aligned} \sum M_6 = 0; \quad N_{5-7} \cdot h_3 - V_a \cdot 3d = 0 \\ N_{5-7} \cdot 4 - 1 \cdot 9 = 0; \quad N_{5-7} = N_{7-9} = 2,25 \end{aligned}$$

Kanname saadud väärtuse toe a vertikaalile, millega saame kätte mõjujoone parempoolse sirge. Vasakpoolse sirge saamiseks lähtume taas sellest, et mõjujoone mõlemad sirged peavad lõikuma momendipunkti all. Olemasoleva parempoolse sirge ja momendipunkti vertikaali lõikepunkti ühendame seetõttu vasaku toe nullpunktiga.



Joonis 8.97. Varraste 3-5 ja 5-7 mõjujoonte koostamine

Varda 1-2 mj

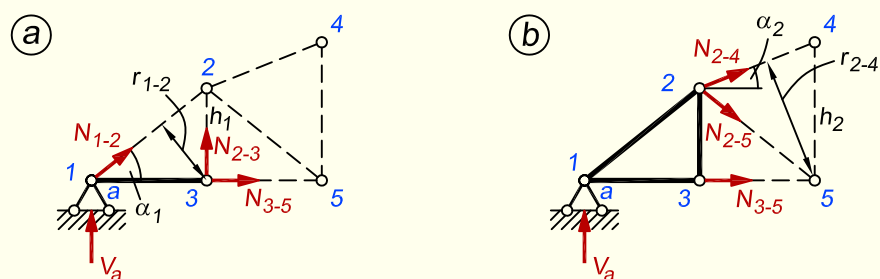
Ülemise vöö varda 1-2 mõjujoone leidmiseks teeme lõike $IV-IV$ ja koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 3 suhtes (joonis 8.98, a)

$$\begin{aligned} \sum M_3 = 0; \quad -N_{1-2} \cdot r_{1-2} - V_a \cdot d = 0 \\ -N_{1-2} \cdot 1,8741 - 1 \cdot 3 = 0; \quad N_{1-2} = -1,6008 \end{aligned}$$

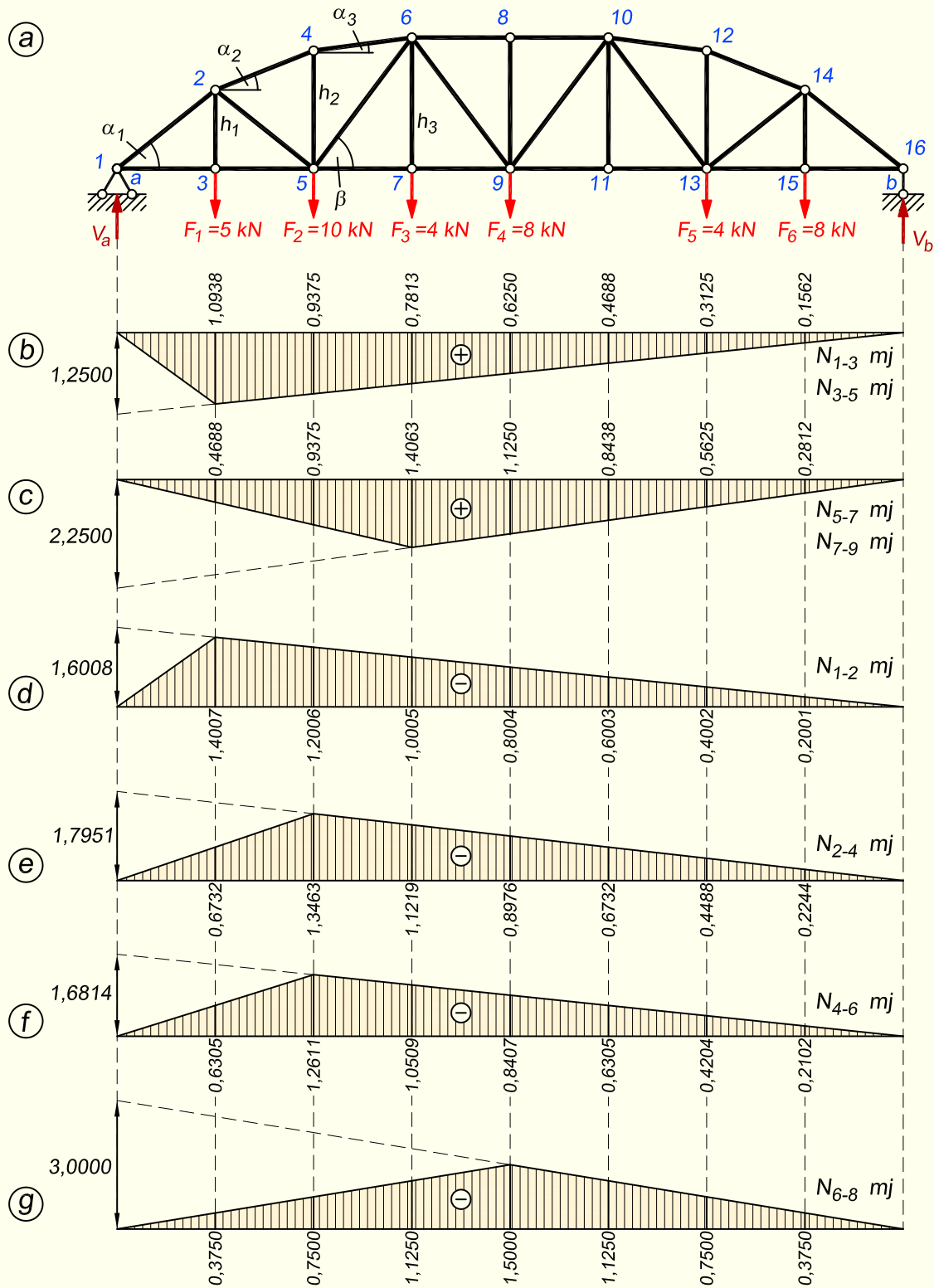
Varda 2-4 mj

Varda 2-4 mõjujoone leidmiseks teeme lõike $I-I$ ja koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 5 suhtes (joonis 8.97, b)

$$\begin{aligned} \sum M_5 = 0; \quad -N_{2-4} \cdot r_{2-4} - V_a \cdot 2d = 0 \\ -N_{2-4} \cdot 3,3425 - 1 \cdot 6 = 0; \quad N_{2-4} = -1,7951 \end{aligned}$$



Joonis 8.98. Varraste 1-2 ja 2-4 mõjujoonte koostamine

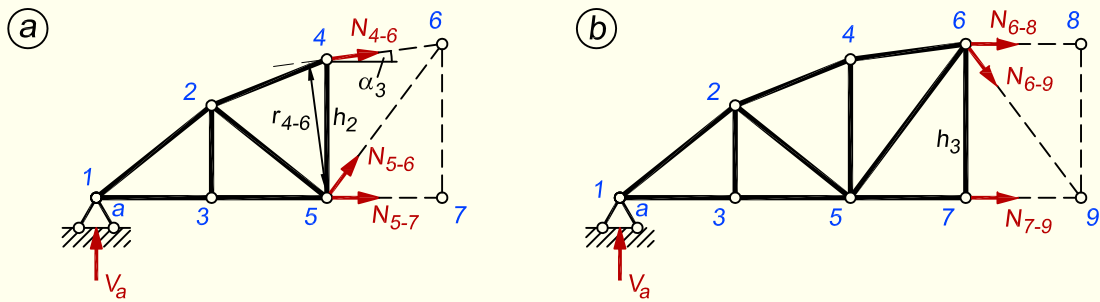


Joonis 8.99. Vöovarraste mõjujooned

Varda 4-6 mj

Varda 4-6 mõjujoone leidmiseks teeme lõike II-II ja koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 5 suhtes (joonis 8.100, a)

$$\begin{aligned}\sum M_5 = 0; \quad & -N_{4-6} \cdot r_{4-6} - V_a \cdot 2d = 0 \\ & -N_{4-6} \cdot 3,5684 - 1 \cdot 6 = 0; \quad N_{4-6} = -1,6814\end{aligned}$$



Joonis 8.100. Varraste 4-6 ja 6-8 mõjujoonte koostamine

Varda 6-8 mj

Varda 6-8 puhul teeme lõike III-III ja koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme 9 suhtes (joonis 8.100, b)

$$\begin{aligned}\sum M_9 = 0; \quad & -N_{6-8} \cdot h_3 - V_a \cdot 4d = 0 \\ & -N_{6-8} \cdot 4 - 1 \cdot 12 = 0; \quad N_{6-8} = -3\end{aligned}$$

2. Järgnevalt võtame vaatluse alla diagonaalide (võrguvarjad) mõjujooned.

Kui diagonaal asub paneelis, mille ülemise ja alumise vöö varraste sihid ei ole paralleelsed, saab diagonaali pikijõu mõjujoone koostada analoogiliselt, kasutades momendipunkti võtet.

Kui momendipunkt asub sõrestiku tugede vahelt väljas, siis on mõjujoon kahemärgiline ja leida tuleb mõlema toe vertikaalil olevate lõikude pikkused. Mõjujoone konstrueerimisel võib lähtuda ka sellest, et mõjujoone sirgete lõikumise punkt on momendipunkti all. Sel juhul piisab ühest tasakaalutingimusest. Kui aga momendipunkt on kaugel ja joonise lehelt väljas, siis on parem leida ordinaadid ikkagi mõlema toe kohal.

Diagonaalide mõjujooned on kujutatud joonisel 8.102.

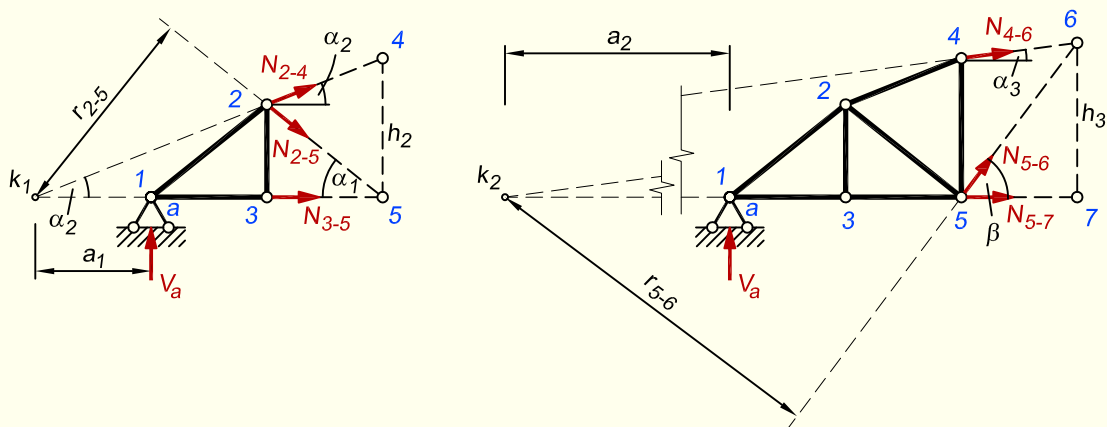
Varda 2-5 mj

Kirjutame momentide tasakaalu tingimuse (lõige I-I) punkti k_1 suhtes (joonis 8.101, a), kasutades sõrestiku vasakpoolset osa

$$\begin{aligned}\sum M_{k_1} = 0; \quad & -N_{2-5} \cdot r_{2-5} + V_a \cdot a_1 = 0 \\ & -N_{2-5} \cdot 5,6223 + 1 \cdot 3 = 0; \quad N_{2-5} = 0,5336\end{aligned}$$

Kuna momendipunkt paikneb sõrestiku tugede vahelt väljas, siis on mõjujoon kahemärgiline. Kuna mõjujoone mõlemad sirged lõikuvad momendipunkti all, siis piisaks jällegi ainult ühe toe kohal oleva ordinaadi arvutamisest, aga kahemärgiliste mõjujoonte korral on seda sageli lihtsam koostada, kui arvutada väärtused siiski mõlema toe kohal. Kirjutame tasakaalutingimuse ka sõrestiku parema poolega

$$\begin{aligned}\sum M_{k_1} &= 0; & N_{2-5} \cdot r_{2-5} + V_b \cdot (a_1 + 24) &= 0 \\ & & N_{2-5} \cdot 5,6223 + 1 \cdot 27 &= 0; & N_{2-5} &= 4,8023\end{aligned}$$



Joonis 8.101. Varraste 2-5 ja 5-6 mõjujoonte koostamine

Varda 5-6 mj

Kirjutame välja momentide tasakaalu tingimuse (lõige II-II) punkti k_2 suhtes (joonis 8.101, b)

$$\begin{aligned}\sum M_{k_2} &= 0; & N_{5-6} \cdot r_{5-6} + V_a \cdot a_2 &= 0 \\ & & N_{5-6} \cdot 21,6 + 1 \cdot 21 &= 0; & N_{5-6} &= -0,9722\end{aligned}$$

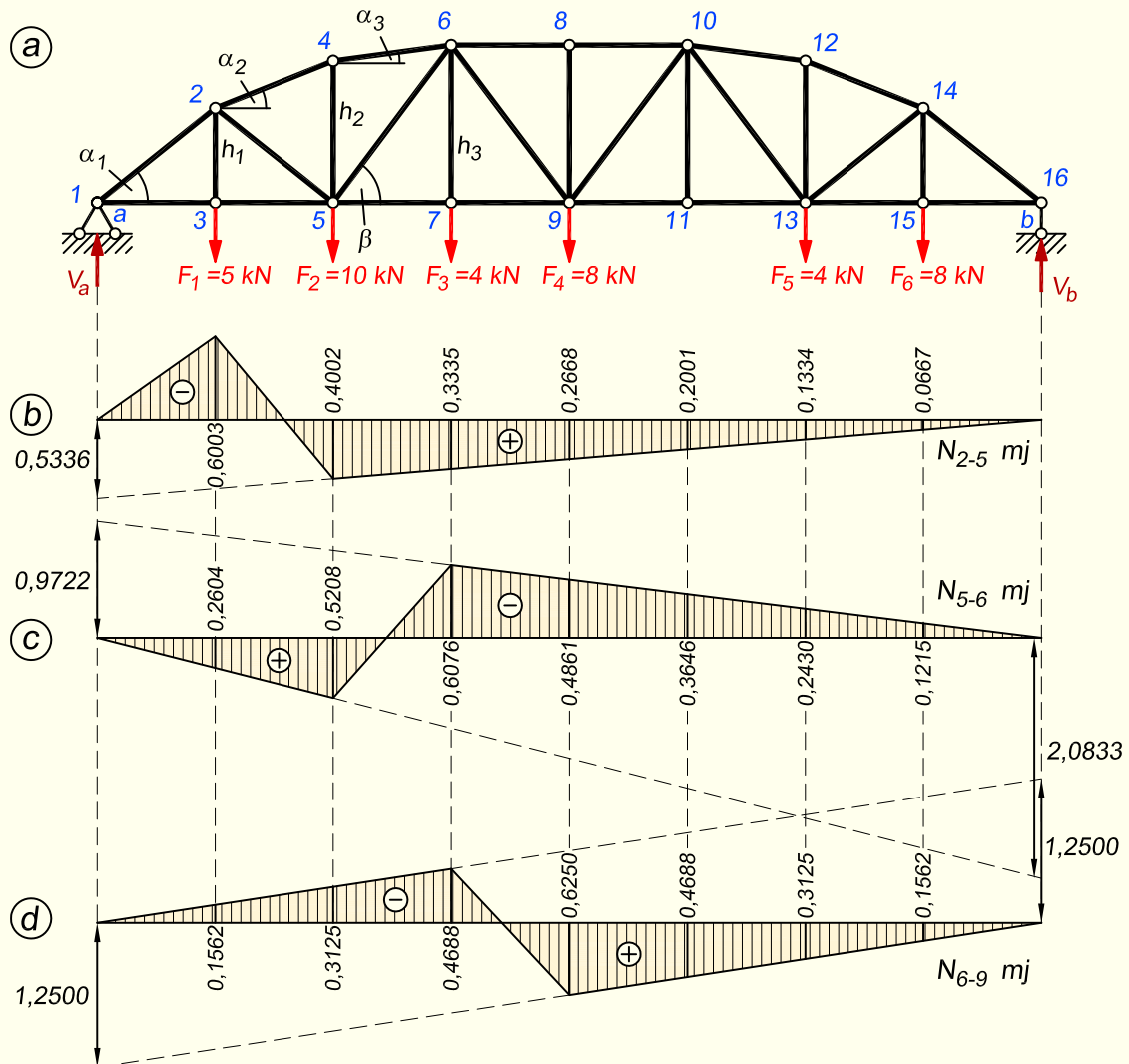
Ka selle varda mõjujoon on tugede vahelt väljas asuva momendipunkti tõttu kahemärgiline ja leiame seetõttu ordinaadi ka parempoolse toe kohal

$$\begin{aligned}\sum M_{k_2} &= 0; & -N_{5-6} \cdot r_{5-6} + V_b \cdot (a_2 + 24) &= 0 \\ & & -N_{5-6} \cdot 21,6 + 1 \cdot 45 &= 0; & N_{5-6} &= 2,0833\end{aligned}$$

Varda 6-9 mj

Kuna neljandas paneelis on vöövardad paralleelsed, siis peale lõike III-III tegemist kasutame projektsioonide võtet. Sarnaselt eelmistele varrastele, tuleb ka siin leida lõigu pikkused mõlema toe vertikaalil.

$$\begin{aligned}\sum Z &= 0; & N_{6-9} \sin \beta - V_a &= 0; & N_{6-9} \cdot 0,8 - 1 &= 0; & N_{6-9} &= 1,25 \\ \sum Z &= 0; & -N_{6-9} \sin \beta - V_b &= 0; & -N_{6-9} \cdot 0,8 - 1 &= 0; & N_{6-9} &= -1,25\end{aligned}$$



Joonis 8.102. Võrguvarraste mõjujooned: diagonaalid

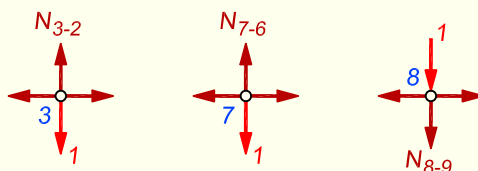
3. Viimasena vaatame postide (võrguvarrad) mõjujooni. Postide mõjujooned on kujutatud joonisel 8.104.

Varraste 2-3, 6-7 ja 8-9 mj

Postide 2-3, 6-7 ja 8-9 puhul kasutame sõlmede eraldamise võtet ja lõikame sõrestikust välja vastavalt sõlmed 3, 7 ja 8 (joonis 8.103) ning vaatame nende tasakaalu.

$$\begin{aligned} \sum Z = 0; \quad -N_{2-3} + 1 = 0; \quad N_{2-3} &= 1 \\ \sum Z = 0; \quad -N_{6-7} + 1 = 0; \quad N_{6-7} &= 1 \\ \sum Z = 0; \quad N_{8-9} - 1 = 0; \quad N_{8-9} &= -1 \end{aligned}$$

Vardas 2-3 tekib pikijõud ainult siis, kui ühikjõud on esimeses või teises paneelis alumisel vöö (alumise vöö varrastel olev koormus kandub varraste otste reaktsioonidena üle sõlme 3). Postis 6-7 tekib pikijõud, juhul kui ühikjõud on kolmandas või neljandas paneelis alumisel vöö (varrastel olev koormus kandub varraste otste reaktsioonidena sõlme 7). Postis 8-9 põhjustab pikijõudu ainult neljandas ja viiendas paneelis ülemisel vöö (varrastel olev koormus). Seetõttu paiknevad kõigi kolme posti mõjujooned ainult nimetatud paneelides. Ülemisel vöö liikuv koormus postides 2-3 ja 6-7 pikijõudu ei tekita, kuna siis kaob ära joonisel 8.103 esitatud skeemidelt ühikjõud ja sõlme tasakaalust lähtuvalt peavad ka postide pikijõud olema sel juhul nullid. Järelikult nende kahe posti puhul on ülemisel vöö liikuvale koormusele mõjujooneks terves silde pikkuses nulljoon. Postis 8-9, aga vastupidiselt, ei tekita pikijõudu alumise vöö koormus ning alumisel vöö liikuvatele koormustele on mõjujoon seetõttu täispikkuses nulljoon. Joonisel 8.104, *b*, *c* ja *d* on näidatud varraste 2-3, 6-7 ja 8-9 mõjujooned eraldi nii alumisel kui ülemisel vöö liikuvatele koormustele.



Joonis 8.103. Sõrestikust eraldatud sõlmed 3, 7 ja 8

Varda 4-5 mj

Posti 4-5 pikijõu avaldasime ülemise vöö varraste 4-2 ja 4-6 pikijõudude kaudu sõlme 4 eraldamise teel jõudude projektsioonide tasakaalu tingimusest. Mõjujoone koostamise toimime analoogiliselt. Koostame projektsioonide tasakaalu tingimuse vertikaalteljele (joonis 8.105, *a*)

$$\sum Z = 0; \quad N_{4-5} + N_{4-2} \sin \alpha_2 - N_{4-6} \sin \alpha_3 = 0$$

$$N_{4-5} = -N_{4-2} \sin \alpha_2 + N_{4-6} \sin \alpha_3$$

ning asetades sellesse ülemise vöö varraste mõjujoonte avaldised

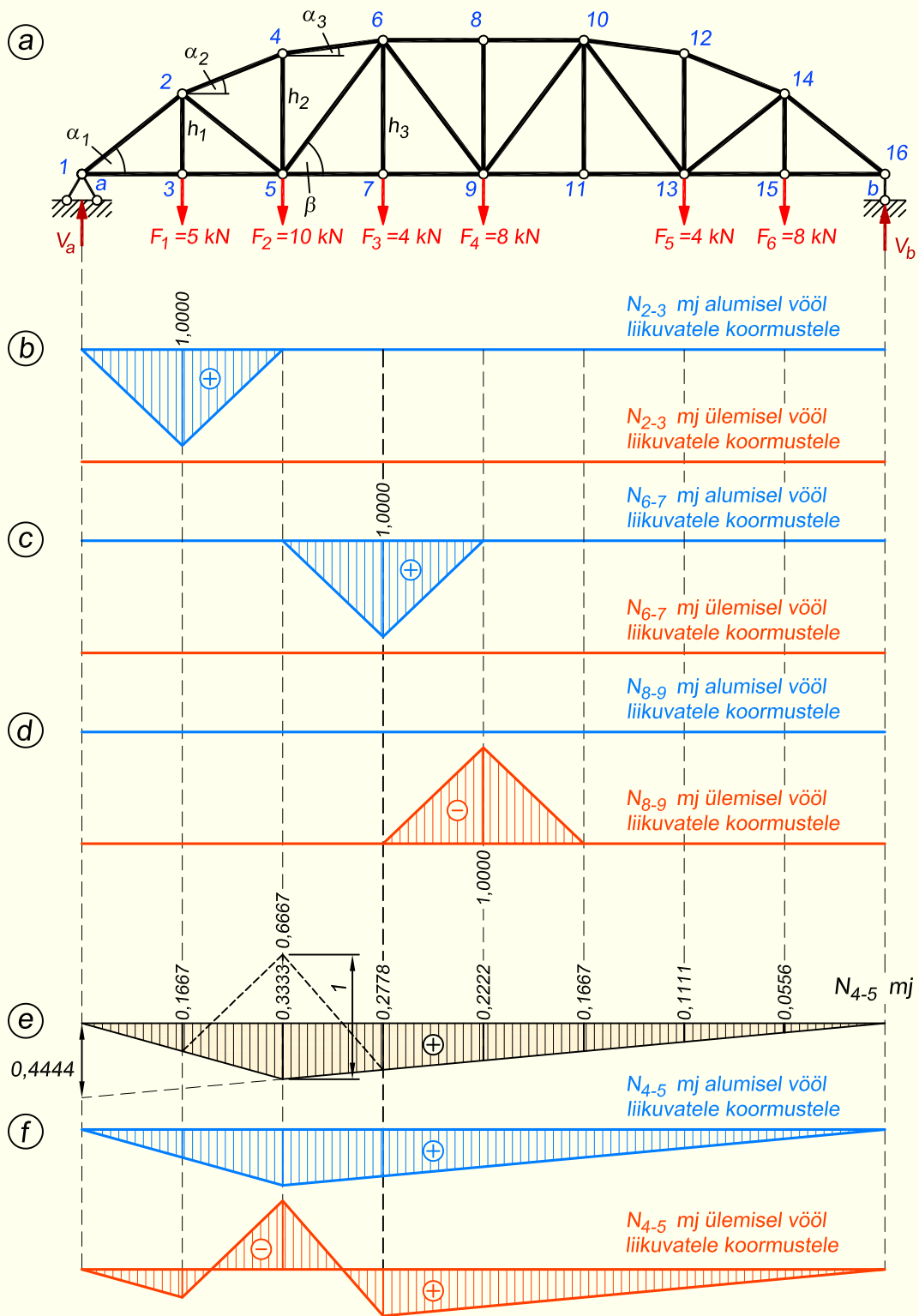
$$N_{4-2} = -\frac{V_a \cdot 2d}{h_2 \cos \alpha_2} \quad \text{ja} \quad N_{4-6} = -\frac{V_a \cdot 2d}{h_2 \cos \alpha_3}$$

saame

$$N_{4-5} = \frac{V_a \cdot 2d}{h_2 \cos \alpha_2} \sin \alpha_2 - \frac{V_a \cdot 2d}{h_2 \cos \alpha_3} \sin \alpha_3$$

$$N_{4-5} = \frac{V_a \cdot 2d}{h_2} (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_3) = \frac{6}{3,6} \left(0,4 - \frac{0,4}{3} \right) = 0,4444$$

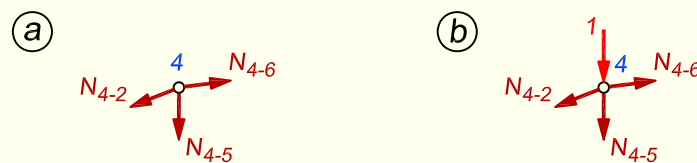
Saadud väärtuse kanname toe *a* vertikaalile.



Joonis 8.104. Võrguvarraste mõjujooned: postid

Sarnaselt eelmisele kolmele vardale on ka sellel vardal alumise ja ülemise vöö koormuste mõjujoontes erinevusi. Mõlema vöö koormustele on mõjujooned kõigis teistes paneelides ühesugused, välja arvatud teises ja kolmandas paneelis. Alumise vöö koormustele kehtib mõjujoone pideva joonega ja viirutatud osa ning ülemise vöö koormustele katkendjoonega näidatud ja mõjujoone negatiivsele poolele minev osa. Erinevus kahe mõjujoone ordinaatide vahel on väärtusega 1. Joonisel 8.104, *e* on esitatud varda 4-5 mõjujoon selliselt, kus mõlema vöö koormustele kehtivad mõjujooned on koos ühe skeemi peal. Joonisel 8.104, *f* on need mõjujooned eraldi välja toodud.

Erinevus kahe vöö koormuste mõjujoonte vahel on tingitud sellest, kuidas vardasse 4-5 pikijõud tekib. Nagu eespool oli juba näha, saame posti 4-5 pikijõu sõlme 4 tasakaalust. Kui sõlmes 4 otsest koormust ei paikne, tekib posti pikijõud ainult ülemise vöö varraste 2-4 ja 4-6 pikijõudude resultandist (joonis 8.105, *a*). Selline olukord esineb siis, kui koormus mõjub suvalises kohas alumisel vööl ning samuti siis, kui koormus paikneb ülemisel vööl sõlmest 2 vasakul või sõlmest 6 paremal. Kui koormus satub sõlme 4, siis mõjutab ta posti 4-5 juba otseselt lisaks vöövarraste resultandile (joonis 8.105, *b*). Sõlmes 4 paiknev ja ülevalt alla suunatud koormus on suunaga posti poole ja seega tekitab seal survet. Seetõttu ongi katkendjoonega näidatud mõjujoone ordinaat viidud ühe ühiku võrra negatiivses suunas.



Joonis 8.105. Sõrestikust eraldatud sõlm 4

4. Pikijõudude arvutamiseks mõjujoonte abil korrutame koormused nende all olevate mõjujoonte ordinaatidega ja iga korrutise puhul arvestame ka vastava ordinaadi märki. Kui mõnda varrast mõjutavad erinevatel vöödel paiknevad koormused erinevalt, siis tuleb praegusel juhul kasutada alumise vöö koormuste mõju väljendavat mõjujoont, kuna meie näites paiknevad kõik koormused alumisel vööl.

$$N_{1-3} = N_{3-5} = 5 \cdot 1,0938 + 10 \cdot 0,9375 + 4 \cdot (0,7813 + 0,3125) + 8(0,6250 + 0,1562) = 25,47 \text{ kN}$$

$$N_{5-7} = N_{7-9} = 5 \cdot 0,4688 + 10 \cdot 0,9375 + 4 \cdot (1,4063 + 0,5625) + 8(1,1250 + 0,2812) = 30,84 \text{ kN}$$

$$N_{1-2} = -5 \cdot 1,4007 - 10 \cdot 1,2006 - 4 \cdot (1,0005 + 0,4002) - 8 \cdot (0,8004 + 0,2001) = -32,62 \text{ kN}$$

$$N_{2-4} = -5 \cdot 0,6732 - 10 \cdot 1,3463 - 4 \cdot (1,1219 + 0,4488) - 8 \cdot (0,8976 + 1,1220) = -32,09 \text{ kN}$$

$$N_{4-6} = -5 \cdot 0,6305 - 10 \cdot 1,2611 - 4 \cdot (1,0509 + 0,4204) - 8 \cdot (0,8407 + 0,2102) = -30,06 \text{ kN}$$

$$N_{6-8} = -5 \cdot 0,3750 - 10 \cdot 0,7500 - 4 \cdot (1,1250 + 0,7500) - 8 \cdot (1,5000 + 0,3750) = -31,88 \text{ kN}$$

$$N_{2-5} = -5 \cdot 0,6003 + 10 \cdot 0,4002 + 4 \cdot (0,3335 + 0,1334) + 8 \cdot (0,2668 + 0,0667) = 5,54 \text{ kN}$$

$$N_{5-6} = 5 \cdot 0,2604 + 10 \cdot 0,5208 - 4 \cdot (0,6076 + 0,2430) - 8 \cdot (0,4861 + 0,1215) = -1,75 \text{ kN}$$

$$N_{6-9} = -5 \cdot 0,1562 - 10 \cdot 0,3125 + 4 \cdot (-0,4688 + 0,3125) + 8 \cdot (0,6250 + 0,1562) = 1,72 \text{ kN}$$

$$N_{2-3} = 5 \cdot 1 = 5 \text{ kN}; \quad N_{6-7} = 4 \cdot 1 = 4 \text{ kN}; \quad N_{8-9} = 0$$

$$N_{4-5} = 5 \cdot 0,1667 + 10 \cdot 0,3333 + 4 \cdot (0,2778 + 0,1111) + 8 \cdot (0,2222 + 0,0556) = 7,94 \text{ kN}$$

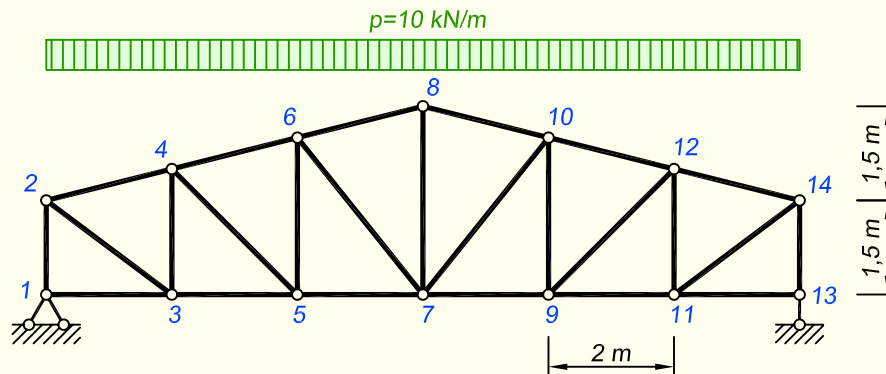
Kanname nii otse (näitest 8.3) kui ka mõjujoonte järgi arvutades saadud pikijõudude väärtused tabelisse 8.3.

Tabel 8.3. Otseselt ja mõjujoonte abil leitud pikijõudude võrdlus

| Varras | N otseselt, [kN] | N mõjujoontega, [kN] |
|------------|--------------------|------------------------|
| 1-3 ja 3-5 | 25,47 | 25,47 |
| 5-7 ja 7-9 | 30,84 | 30,84 |
| 1-2 | -32,62 | -32,62 |
| 2-4 | -32,09 | -32,09 |
| 4-6 | -30,06 | -30,06 |
| 6-8 | -31,88 | -31,88 |
| 2-5 | 5,54 | 5,54 |
| 5-6 | -1,75 | -1,75 |
| 6-9 | 1,72 | 1,72 |
| 2-3 | 5,00 | 5,00 |
| 6-7 | 4,00 | 4,00 |
| 8-9 | 0 | 0 |
| 4-5 | 7,94 | 7,94 |

Järeldus: otseselt ja mõjujoonte järgi leitud pikijõud on võrdsed.

NÄIDE 8.14. Joonisel 8.106 on kujutatud katusesõrestik ja ülemisele vööle rakendatav lauskoormus, mis kujutab katusele sadanud lumest põhjustatud koormust. Leida mõjujoone abil diagonaali 6-7 ekstremaalsed pikijõudude väärtused.



Joonis 8.106. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

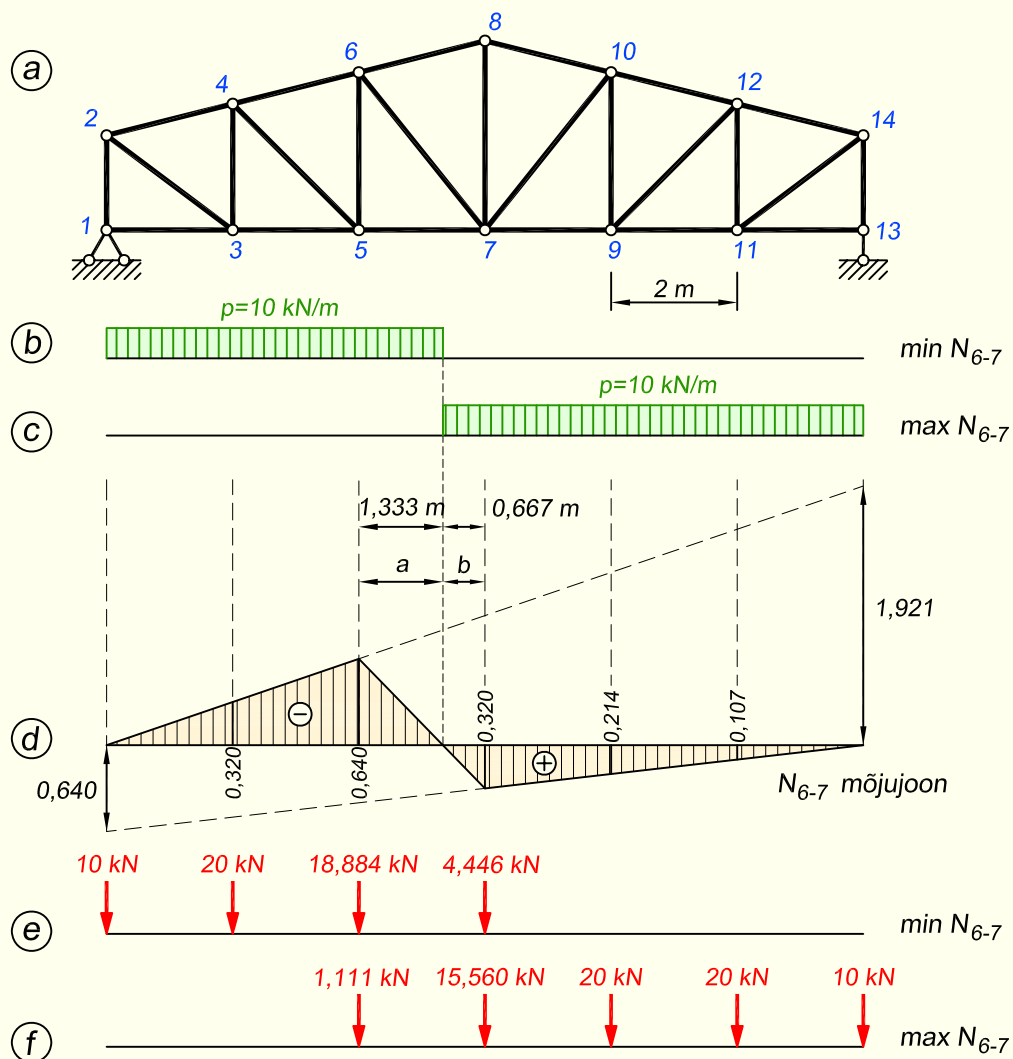
Esmalt tuleb koostada vardale 6-7 mõjujoon. Jätame pikema arvutuse esitamata, mainime ainult lühidalt, et kuna see varras on kolmandas paneelis, siis teeme läbi kolmanda paneeli vertikaalse lõike. Kaks ülejäänud läbilõigatud varrast on mitteparalleelsed vöövardad, mille sihtide lõikepunkt asub vasakul sõrestikust väljaspool sõrestiku toest 6 m kaugusel. Selle valime momendipunktiks. Kuna momendipunkt on tugede vahelt väljas, siis on mõjujoon kahemärgiline ja tasakaalutingimustest saame vasaku ja parema toe kohal olevateks ordinaatideks vastavalt 0,640 ja $-1,921$. Mõjujoon on esitatud joonisel 8.107, d.

Lumekoormus on ajutine koormus ning ajutisest koormusest minimaalsete ja maksimaalsete pikijõudude arvutuse teeme mõjujoonte abil. Minimaalne tähendab ekstremaalset miinusmärgiga pikijõudu (ehk suurimat võimalikku survejõudu) ja maksimaalne ekstremaalset plussmärgiga pikijõudu (ehk suurimat võimalikku tõmbejõudu). Kuna lumi võib katusele sadada suvalisse kohta ja paikneda katusel suvalises ulatuses, siis näitavad just mõjujooned ära selle, millises piirkonnas asuv lumi tekitab varrastes suurimaid pikijõude. Seetõttu tuleb min arvutuses paigutada lumekoormus mõjujoone negatiivse ala ning max arvutuses positiivse ala peale (joonis 8.107, b ja c).

Ajutisest koormusest on mõistlik arvutus teha sellisena, et kasutame etteantud lauskoormust, mitte ei taanda seda sõlmedesse koondjõududeks. Kasutades lauskoormust, saame N_{6-7} min ja max väärtuseks

$$\min N_{6-7} = -10 \cdot \frac{0,640 \cdot 5,333}{2} = -17,07 \text{ kN}$$

$$\max N_{6-7} = 10 \cdot \frac{0,320 \cdot 6,667}{2} = 10,67 \text{ kN}$$



Joonis 8.107. Ekstremaalsete pikijõudude arvutamine

Mõjujoone nullkoha paiknemise saame kätte kolmanda paneeli ordinaatide järgi avaldisest

$$\frac{a}{b} = \frac{0,640}{0,320} \Rightarrow \frac{a}{2-a} = \frac{0,640}{0,320}$$

mis annab

$$a = 1,333 \text{ m}$$

Kui tahame kasutada koondjõudusid, siis kujuneb arvutus mõnevõrra keerukamaks, kuna probleemseks osutub sõrestiku paneel, kus mõjujoon muudab märki ehk siis sõlmedes 6 ja 8 olevad koormused. Teiste sõlmedega on lihtne ja seal taandame lauskoormuse sõlmedesse nagu on näidatud joonisel 1.22: $F = 10 \cdot 2 = 20 \text{ kN}$ sisemisele sõlmele ja $F/2 = 10 \text{ kN}$ nurgasõlmele.

Kolmandas paneelis paikneb aga lauskoormus ainult osaliselt nii min kui ka max arvutuse puhul ja seetõttu tuleb välja selgitada, kui palju sellest kandub paneeli vasakusse serva sõlme 6 ja kui palju paremasse serva sõlme 8. Seda saame teha lihttala toereaktsioonide mõjujoonte abil (joonis 8.108). Sõlmkoormused $\min N_{6-7}$ arvutuses on

$$F_6 = F_{6,2} + F_{6,3} = 10 + 10 \cdot \frac{1 + 0,333}{2} \cdot 1,333 = 18,884 \text{ kN}$$

$$F_8 = F_{8,3} = 10 \cdot \frac{0,667 \cdot 1,333}{2} = 4,446 \text{ kN}$$

kus F järel indeksis olev teine number näitab paneeli, mille lauskoormusest me selle koondjõu saame. Sõlmkoormused $\max N_{6-7}$ arvutuses on

$$F_6 = F_{6,3} = 10 \cdot \frac{0,333 \cdot 0,667}{2} = 1,111 \text{ kN}$$

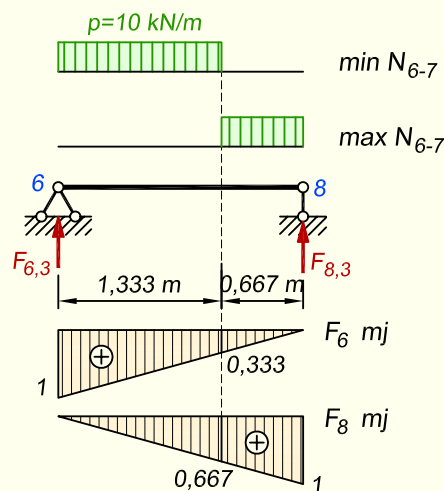
$$F_8 = F_{8,3} + F_{8,4} = 10 \cdot \frac{0,667 + 1}{2} \cdot 0,667 + 10 = 15,560 \text{ kN}$$

Kõik arvutuseks vajalikud koondjõud on näidatud joonisel 8.108, *e* ja *f*. Nüüd saame N_{6-7} min ja max väärtuseks

$$\min N_{6-7} = -20 \cdot 0,32 - 18,884 \cdot 0,64 + 4,446 \cdot 0,32 = -17,1 \text{ kN}$$

$$\max N_{6-7} = 20 \cdot 0,107 + 20 \cdot 0,214 + 15,560 \cdot 0,32 - 1,111 \cdot 0,64 = 10,7 \text{ kN}$$

Jõudsimme samade tulemusteni nagu eespool lauskoormusega arvutades.



Joonis 8.108. Lauskoormuse jaotamine kolmanda paneeli tugede vahel

Kui mõjujoon on ainult ühemärgiline, siis on koondjõududega arvutus siin näidatust oluliselt lihtsam, kuna sel juhul ei teki olukorda, kus mõni paneel on ainult osaliselt koormatud.

8.16.5. Kolmnurksõrestik

Kolmnurksõrestiku (joonis 8.109, a) keskmise posti 8-9 ja äärmiste postide 2-3 ning 14-15 pikijõudude mõjujooned moodustame sõlmede projektsioonide tasakaalu tingimuste abil. Kõigi teiste varraste pikijõudude mõjujooned kujutame momendipunkti võttega.

Ülemise vöö varda 4-6 momendipunktiks on sõlm 7. Vasaku toe vertikaalile kantava löigu pikkus on $\frac{3d}{r_{4-6}} = \frac{3d}{3d \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$. Sama pikkuse saame ka kõigi teiste keskmisest postist vasakul asuvate ülemise vöö varraste jaoks (joonis 8.109, b).

Alumise vöö varda 5-7 momendipunktiks on sõlm 4. Vasaku toe vertikaalile kantava löigu pikkus on $\frac{2d}{0,5h} = \frac{4d}{h} = \cot \alpha$. Sama löigu pikkus on ka teistel keskmisest postist vasakul pool asuvate alumise vöö varraste mõjujoontel (joonis 8.109, c).

Diagonaali 4-7 momendipunktiks on sõlm 1. Kui koormus asub paremal pool löiget I-I, siis tingimusest $\sum M_1 = 0$: $N_{4-7}r_{4-7} = 0$ järeldub, et $N_{4-7} = 0$ ja mõjujoone parempoolne sirge ühtib abstsisssteljega.

Momendipunkti ühtimise tõttu toeliigendiga a vaatleme arvutusskeemi vasaku osa tasakaalu ka siis, kui ühikjõud mõjub vasakul pool löiget. Tingimusest $\sum M_1 = 0$

$$-1x - N_{4-7}r_{4-7} = 0 \quad (8.90)$$

kus x on ühikjõu kaugus vasakust toest, avaldame diagonaali 4-7 mõjujoone vasakpoolse sirge võrrandi

$$N_{4-7} = -\frac{x}{r_{4-7}} = 0 \quad (0 \leq x \leq 2d) \quad (8.91)$$

Kui $x = 2d$, siis

$$N_{4-7} = -\frac{2d}{r_{4-7}} = -\frac{2d}{3d \sin \beta} = -\frac{2}{3 \sin \beta} \quad (8.92)$$

mis on mõjujoone maksimaalseks ordinaadiks. Mõjujoone vasakpoolne sirge jääb selle ordinaadi ja vasaku toe nullpunkti vahele.

Samas võime vaadelda ka arvutusskeemi parema poole tasakaalu ja leida ordinaadi parempoolse toe kohal. Tasakaalutingimuseks on sel juhul

$$\sum M_1 = 0; \quad N_{4-7}r_{4-7} + V_b \cdot 8d = 0 \quad (8.93)$$

millest

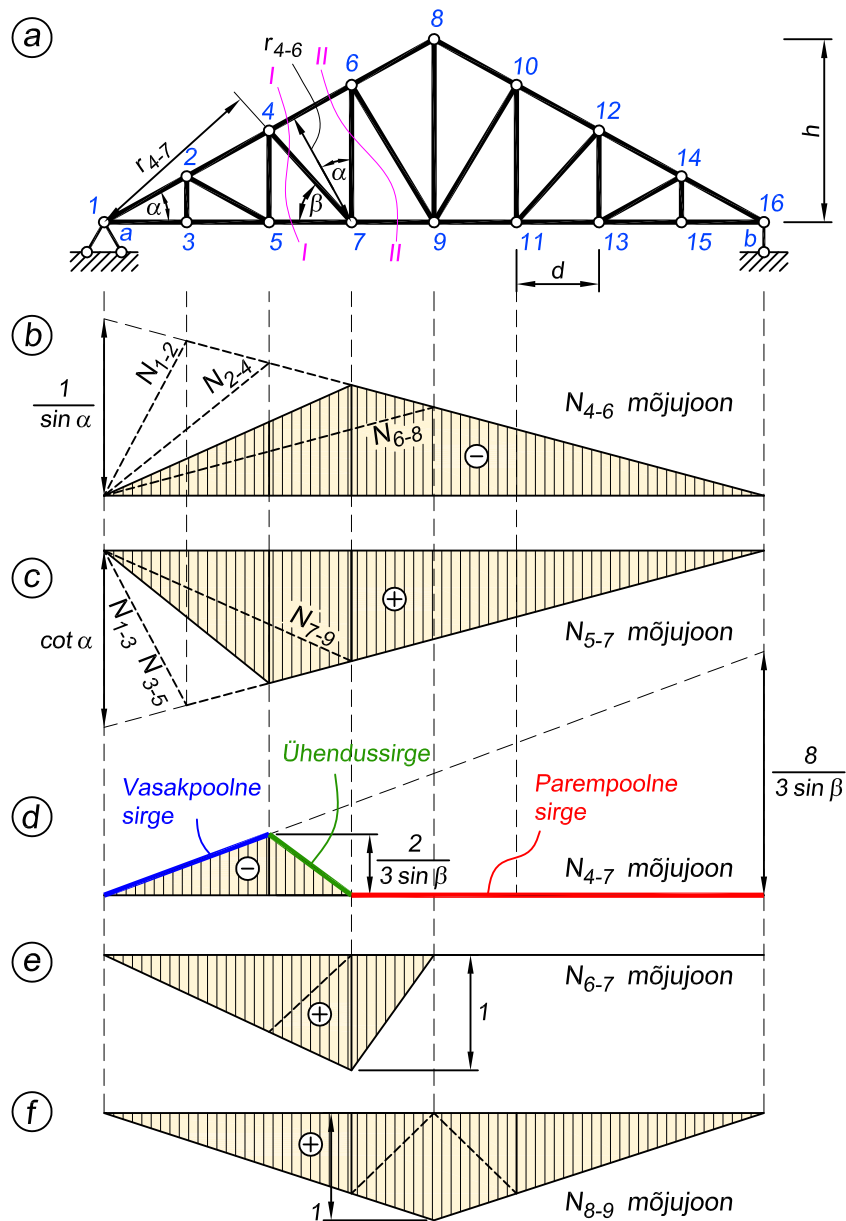
$$N_{4-7} = -\frac{8d}{r_{4-7}} = -\frac{8d}{3d \sin \beta} = -\frac{8}{3 \sin \beta} \quad (8.94)$$

Saadud ordinaadi ühendame vasaku toe kohal nullpunktiga. Nii saame kätte mõjujoone vasakpoolse sirge. Kuna eespool sai mainitud, et parempoolne sirge ühtib nulljoonega, siis on nüüd vaja veel määrata ühendussirge, mille paigutame tavapäraselt läbilõigatud paneeli (joonis 8.109, d).

Sõrestiku vasaku poole postide momendipunktiks on sõlm 1. Nende postide mõjujoonte parempoolsed sirged ühtivad abstsisssteljega.

Posti 6-7 mõjujoone koostamiseks teeme lõike II-II. Ühikjõu mõjumisel vasakul pool löiget avaldame tingimusest $\sum M_1 = 0$

$$-1x + N_{6-7}3d = 0 \quad (8.95)$$



Joonis 8.109. Kolmnurksõrestiku mõjujooned

posti 6-7 pikijõu mõjujoone vasakpoolse sirge võrrandi

$$N_{6-7} = \frac{x}{3d} \quad (0 \leq x \leq 3d) \quad (8.96)$$

Suurim ordinaat $N_{6-7} = 1$ on posti vertikaalil ($x = 3d$) (joonis 8.109, e).

Sarnaselt vardale 4-7 võime ka siin vaadelda arvutuskeemi parema poole tasakaalu ja leida parempoolse toe kohal oleva ordinaadi.

Poste mõjutavad ülemise ja alumise vöö peal paiknevad koormused erinevalt, mistõttu on nende koormustele ka mõjujooned natuke erinevad. Järeldub see lõike tegemise asukohast.

Posti 6-7 puhul kasutasime löiget *II-II*, mis alumist vööd läbib neljandas ja ülemist vööd kolmandas paneelis. Kuna vasak- ja parempoolset sirget ühendav ühendussirge peab paiknema läbilõigatud paneelis, siis joonisel 8.109, *e* pideva joonega kujutatud mõjujoon kehtib alumisel vööl olevatele koormustele ja kolmandas paneelis katkendjoonega näidatud variant ülemise vöö koormustele.

Posti 8-9 mõjujoone koostamisel sõlme 8 kohta koostatud tasakaalutingimustest

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & -N_{8-6} \cos \alpha + N_{8-10} \cos \alpha &= 0 \\ \sum Z &= 0; & N_{8-9} + N_{8-6} \sin \alpha + N_{8-10} \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (8.97)$$

leiame

$$N_{8-6} = N_{8-10} \quad (8.98)$$

$$N_{8-9} = -N_{8-6} \sin \alpha - N_{8-10} \sin \alpha = -2N_{8-6} \sin \alpha \quad (8.99)$$

ja kuna $N_{8-6} = -\frac{M_9}{h \cos \alpha} = -\frac{M_9}{4d \sin \alpha}$, siis

$$N_{8-9} = \frac{M_9}{2d} \quad (8.100)$$

Mõjujoone suurim ordinaat on sõlme 9 kohal, kus $M_9 = 2d$, $N_{8-9} = \frac{2d}{2d} = 1$ (joonis 8.109, *f*).

Ka siin tuleb vahet teha erinevatel mõjujoontel, mis kehtivad erinevate vööde peal olevatele koormustele. Joonisel 8.109, *f* on pideva joonega näidatud mõjujoon alumise vöö koormustele ja katkendjoonega ülemise vöö koormustele.

8.16.6. Sprengelsõrestik

Sprengelsõrestiku (joonis 8.110, *a*) varrastes, mis kuuluvad ainult sprengli juurde (2-3, 2-5, 5-6, 6-7, ...), tekivad pikijõud ainult siis, kui vastava sprengli sõlm (3, 7, ...) on koormatud. Joonisel 8.110, *b* on kujutatud **sprengli posti 10-11** pikijõu mõjujoon.

Varraste, milles ühe paneeli pikkuse sõrestikuosa (joonis 8.111, *a*) sprenglisõlme koormamisel pikijõud võrduvad nulliga, mõjujooned ühtivad sprenglita sõrestiku varraste mõjujoontega (joonis 8.91 ja 8.92). Joonisel 8.110, *a* kujutatud sprengelsõrestikul on niisugusteks varrasteks postid, ülemise vöö vardad ja diagonaalide ülemised pooled, sest ühe paneeli pikkuse sõrestiku (joonis 8.111, *a*) sõlme 11 koormamisel on **postide 8-9 ja 12-13, ülemise vöö varda 8-12 ning diagonaali ülemise poole 8-10** pikijõud nullid.

Sprengelsõrestiku (joonis 8.110, *a*) sprengli sõlme 11 tasakaalu tingimusest $\sum X = 0$ järel dub, et **varraste 9-11 ja 11-13** pikijõud on võrdsed ja momendipunkti sõlme 8 (löige *I-I*) suhtes koostatud momentide tasakaalu tingimusest saame

$$N_{9-11} = N_{11-13} = \frac{M_8}{h_1} \quad (8.101)$$

Mõjujoone parempoolse sirge ($6d \leq x \leq l$) kujutamiseks kanname toe *a* vertikaalile löigu $\frac{4d}{h_1}$ (joonis 8.110, *c*). Mõjujoone vasakpoolse sirge ($0 \leq x \leq 5d$) kujutamiseks ühendame momendipunkti 8 vertikaali ja mõjujoone parempoolse sirge pikenduse löikepunkti 9' toe *a*

vertikaalil nullpunktiga a . Seda sirget pikendame paremale poole kuni sõlme 11 vertikaaliga lõikumiseni punktis $11'$ (läbilõigatud paneelini). Läbilõigatud paneelis, sõlmede 11 ja 13 vahel, on mõjujoone sirgeks $11'-13'$.

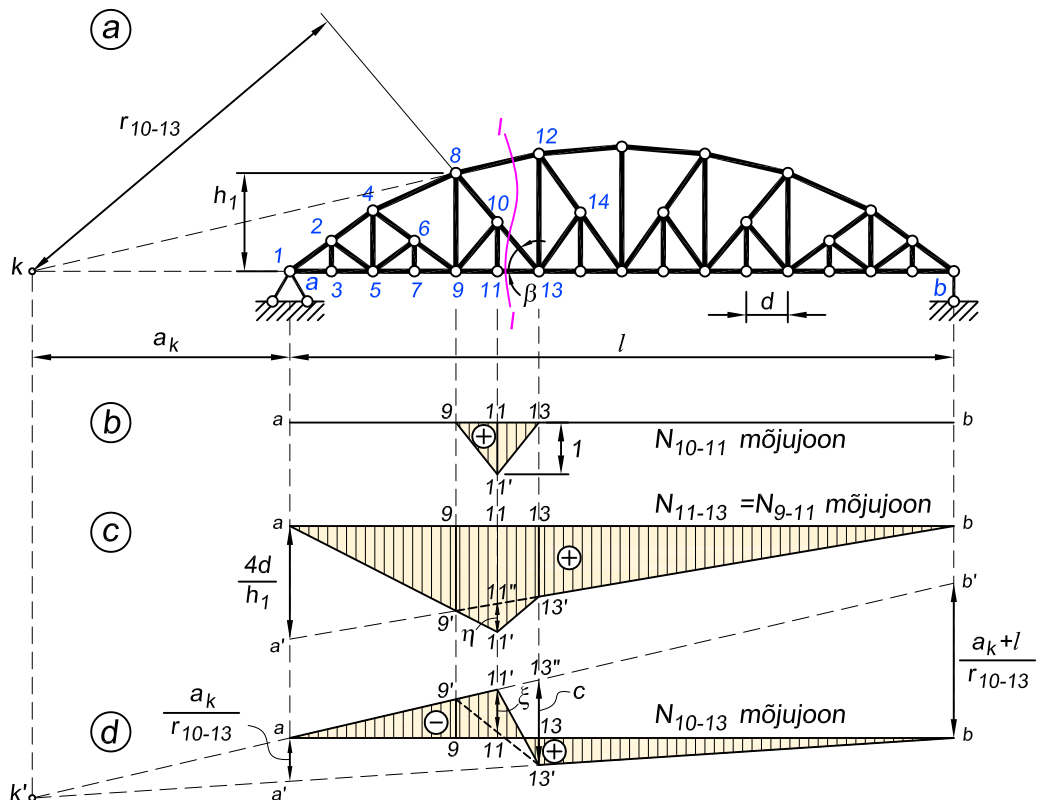
Varda $9-11$ või $11-13$ mõjujoont $a-9'-11'-13'-b$ võib vaadelda põhisõrestiku mõjujoone $a-9'-b$ ja sprengli mõjujoone $9'-11'-13'$ summana. Sõlmede 11 , 10 ja 9 tasakaalu tingimustest leiame sprengli varraste pikijõud (joonis 8.111)

$$\begin{aligned} N_{10-11} &= 1 \\ N_{9-10} = N_{10-13} &= -\frac{1}{2 \sin \beta} \\ N_{9-11} = N_{11-13} &= \frac{1}{2} \cot \beta \end{aligned} \quad (8.102)$$

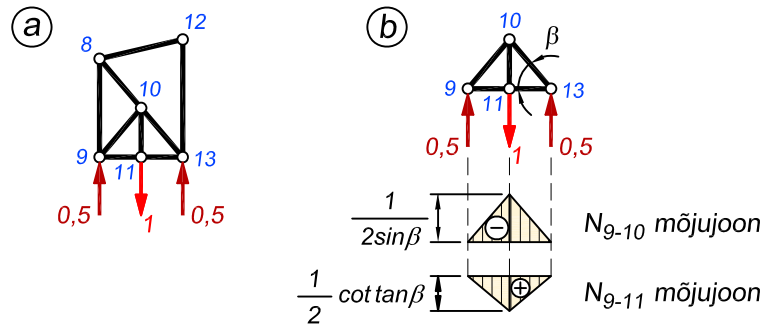
Mõjujooned on kujutatud joonisel 8.111, b .

Alumise vöö varda $9-11$ ($11-13$) pikijõu mõjujoone kolmnurkade $a-9'-a'$ ja $11'-9'-11''$ sarnasuse põhjal kehtib võrdus

$$\frac{4d}{h_1} = \frac{\eta}{d} \quad (8.103)$$



Joonis 8.110. Sprengelsõrestiku mõjujooned



Joonis 8.111. Ühe paneeli pikkune sõrestiku osa

millest

$$\eta = \frac{d}{h_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2d}{h_1} = \frac{1}{2} \cot \tan \beta \quad (8.104)$$

mis võrdub sprengli varraste 9-11 ja 11-13 pikijõuga (8.102), kui sprengli sõlm 11 on koormatud (joonis 8.111, b).

Diagonaali alumise poole 10-13 pikijõu mõjujoone kujutamisel lõike *I-I* abil on momendipunktiks ülemise ja alumise vöö varraste sihtide lõikepunkt *k*. Vasakpoolse toe vertikaalile kanname lõigu $\frac{a_k}{r_{10-13}}$, mille otspunkti *a'* läbib parempoolse sirge ($6d \leq x \leq l$) siht. Vasakpoolse sirge siht lõikub parempoolse sirge pikendusega momendipunkti vertikaalil punktis *k*. Vasakpoolne sirge on kehtiv sõlmeni 11 ($0 \leq x \leq 5d$). Läbilõigatud paneelis, sõlmede 11 ja 13 vahel, on mõjujoone sirgeks 11'-13' (joonis 8.110, d).

Seda sprengelsõrestiku diagonaalvarda mõjujoont *a-11'-13'-b* võib vaadelda kui põhisõrestiku diagonaali 8-13 mõjujoone *a-9'-13'-b* ja sprengli diagonaali 10-13 mõjujoone 9'-11'-13' liitmise tulemust. Kolmnurkade 13'-*k'*-13'' ja *a'-k'-a* sarnasuse põhjal kehtib võrdus

$$\frac{c}{\frac{a_k}{r_{10-13}}} = \frac{a_k + 6d}{a_k} \quad (8.105)$$

millest

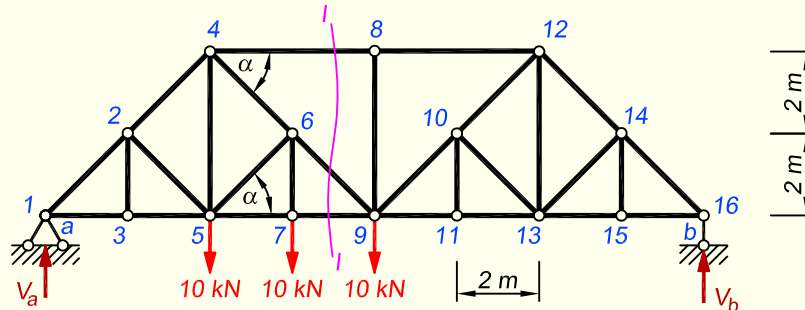
$$c = \frac{a_k + 6d}{a_k} \cdot \frac{a_k}{r_{10-13}} = \frac{a_k + 6d}{(a_k + 6d) \sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta} \quad (8.106)$$

Ja kuna $\xi = \frac{c}{2}$, siis

$$\xi = \frac{1}{2 \sin \beta} \quad (8.107)$$

mis võrdub sprengli diagonaalvarda pikijõuga (8.102), kui sprengli sõlm on koormatud.

NÄIDE 8.15. Koostada joonisel 8.112 kujutatud sprengelesõrestiku teise paneeli varraste pikijõudude mõjujooned, arvutada mõjujoonte abil varraste pikijõud ja võrrelda neid näites 8.12 otseselt leitud pikijõududega.

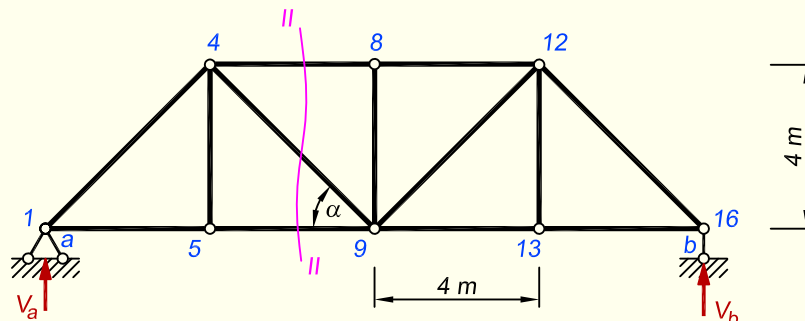


Joonis 8.112. Sprenglesõrestiku arvutusskeem

LAHENDUS

Mõjujoonte koostamisel tuleb sarnaselt pikijõudude arvutusele mõelda sellele, kas vaadeldava varda puhul me saame lahendamisel kasutada sprengelesõrestiku esialgset skeemi või tuleb see jagada põhisesõrestikuks ja sprenglikuks. Arvutusskeemi jagamisel osadeks tuleb välja selgitada, kas uuritav varras on ainult põhisesõrestiku varras, ainult sprengli varras või kuulub nii põhisesõrestiku kui sprengli juurde.

1. Esmalt võtame vaatluse alla ainult põhisesõrestiku vardad (joonis 8.113).



Joonis 8.113. Põhisesõrestik

Varda 4-5 mj

Posti 4-5 pikijõu avaldasime sõlme 5 vertikaalsuunalisest tasakaalust. Samast sõlmest lähtume ka mõjujoone koostamisel (joonis 8.113). Selle varda mõjujoone koostamisel saame kasutada ainult põhisesõrestiku skeemi, kuna esialgses arvutusskeemis ei õnnestu teha läbi selle varda ühtegi lõiget nii, et tasakaalutingimusse ei jääks liiga palju tundmatuid. Näeme, et vardas 4-5 tekib pikijõud ainult siis, kui koormus liigub alumisel vööl sõlmede 1 ja 9 vahel. Seetõttu peab ka mõjujoon olema ainult selles vahemikus (joonis 8.115, b).

Varda 8-9 mj

Posti 8-9 puhul vaatame sõlme 8 tasakaalu. Siin ei ole tähtsust, kas kasutada esialgset või põhisõrestiku skeemi. Mõlemal juhul saame posti ülemise otsa sõlme 8 probleemi-deta välja lõigata. Pikijõud tekib selles vardas ainult siis, kui koormus liigub ülemisel vööl sõlmede 4 ja 12 vahel. Mõjujoon on kujutatud joonisel 8.115, c.

Varda 4-8 mj

Ülemise vöö varda 4-8 mõjujoone võime koostada nii põhisõrestiku kui esialgse skeemi järgi. Põhisõrestiku skeemis teeme lõike II-II (joonis 8.113). Vaatame sõrestiku vasaku poole tasakaalu ning kasutame momendipunkti võtet. Kirjutame tasakaalutingimuse sõlme 9 suhtes

$$\sum M_9 = 0; \quad -N_{4-8} \cdot 4 - V_a \cdot 8 = 0; \quad N_{4-8} = -2$$

Mõjujoone kujutamiseks kanname saadud tulemuse vasaku toe vertikaalile. See annab meile mõjujoone parempoolse sirge. Lähtudes sellest, et vasak- ja parempoolne sirge peavad lõikuma momendipunkti all, saame kätte ka vasaku sirge asukoha. Mõjujoon on kujutatud joonisel 8.115, d.

Varda 4-8 mõjujoone saaksime koostada ka sõrestiku esialgse arvutusskeemi abil. Selleks teeme lõike I-I (joonis 8.112) ja, vaadates sõrestiku vasaku poole tasakaalu momendipunkti võttega punkti 9 suhtes, jõuame samale tulemusele, nagu on eespool toodud avaldis.

Varda 4-6 mj

Varras 4-6 on ainult põhisõrestiku varras ja tema mõjujoone saame koostada, vaadates põhisõrestiku skeemil (joonis 8.113) varrast 4-9, kuna 4-6 on selle ülemine pool. Selle varda puhul tuleb kasutada ainult põhisõrestiku skeemi, kuna esialgses arvutusskeemis ei saa teha sobivat lõiget. Kasutame lõiget II-II ja projektsioonide võtet, kuna kaks ülejäänud läbilõigatud varrast 4-8 ja 5-9 on paralleelsed. Lõikest vasakult poolt saame tasakaalutingimuseks

$$\sum Z = 0; \quad N_{4-9} \sin \alpha - V_a = 0; \quad N_{4-9} = 1,4142$$

Lõikest paremalt poolt saame sama tulemuse vastupidise märgiga. Mõjujoon on esitatud joonisel 8.115, e.

2. Vardad 5-6 ja 6-7 on ainult sprengli juurde kuuluvad vardad ja nendes tekivad piki-jõud ainult siis, kui koormus on rakendatud sprengli keskmisesse sõlme 7. Nende var-raste mõjujoonte koostamisel lähtume sprengli arvutusskeemist joonisel 8.114.

Varda 5-6 mj

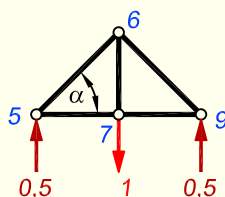
Paigutame ühikjõu sõlme 7 ning vaatame jõudude tasakaalu sõlmes 5, kus saame aval-dada varda 5-6 pikijõu väärtuse sõlme eraldamise võttega

$$\sum Z = 0; \quad N_{5-6} \sin \alpha - 0,5 = 0; \quad N_{5-6} = -0,7071$$

Saadud tulemus on mõjujoone ordinaadiks sõlme 7 all, kuna ühikjõud paiknes meil selles sõlmes. Mõjujoon asub sõlmede 5 ja 9 vahel (joonis 8.115, f) ja kehtib ta ainult alumisel vööl liikuvatele koormustele. Ülemise vöö koormused vardas 5-6 pikijõudu ei tekita ja nendele on mõjujoon terve sõrestiku pikkuses nulljoon.

Varda 6-7 mj

Sprengli posti 6-7 pikijõu saame sõlme 7 tasakaalutingimusest vertikaalteljele. Selle varda mõjujoon paikneb samuti ainult sõlmede 5 ja 9 vahel (joonis 8.115, g). Ka selles vardas tekib pikijõud ainult alumisel vööl liikuvatest koormustest.



Joonis 8.114. Sprengel

3. Vardad 6-9, 5-7 ja 7-9 on põhisõrestiku ja sprengli ühised vardad.

Varda 6-9 mj

Sellele vardale saame mõjujoont koostada kahel erineval moel. Esimesel juhul lähtume põhisõrestiku varda 4-9 mõjujoonest, mis meil eespool on esitatud joonisel 8.115, e varda 4-6 mõjujoonena, ja liidame sellele juurde sprengli varda 6-9 mõjujoone, mis on sprengli sümmeetria tõttu täpselt samasugune nagu eespool koostatud mõjujoon vardale 5-6 (joonis 8.115, f). Varda 6-9 mõjujoon on kujutatud joonisel 8.115, h, kus baasina kasutatav varda 4-9 mõjujoon on sõlmede 4 ja 9 vahel näidatud katkendjoonega.

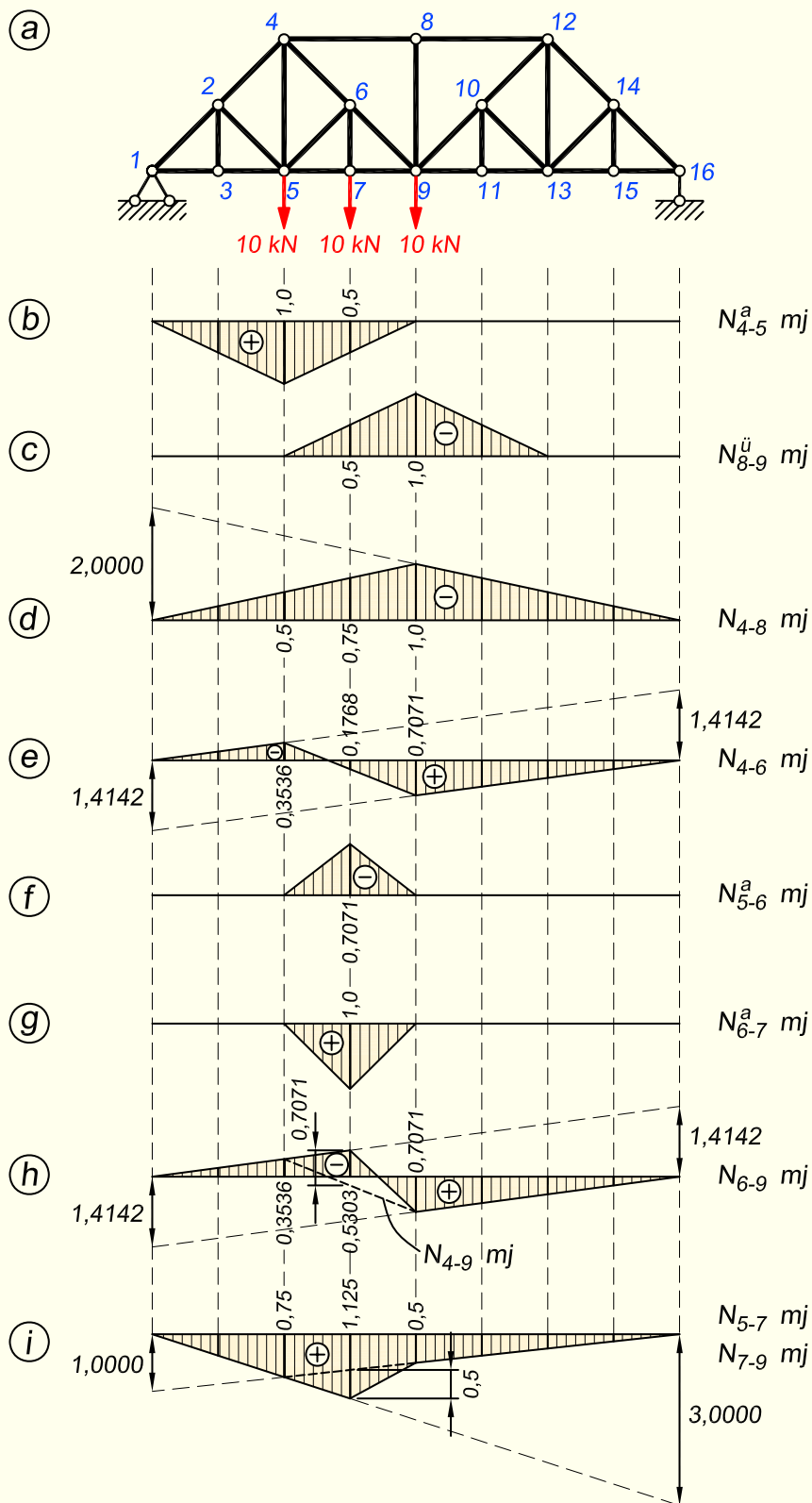
Teisel juhul lähtume joonisest 8.112 ja teeme lõike *I-I*. Kasutame projektsioonide võtet, nagu tegime seda varda 4-6 mõjujoone koostamisel. Kui mõjujoone vasaku ja parema sirge oleme paika pannud, siis kolmanda, neid ühendava sirge paigutame vahemikku, kus sõrestik on läbi lõigatud ehk sõlmede 6 ja 9 vahele.

Varda 5-7 (7-9) mj

Sõlme 7 horisontaalsuunalisest tasakaalust näeme, et varraste 5-7 ja 7-9 pikijõud peavad olema võrdsed. Järelikult on ka nende mõjujooned ühesugused. Seetõttu võime kasutada joonist 8.112 ja teeme lõike *I-I*, mis läbib varrast 7-9. Kasutame momendipunkti võtet ja vaatame lõikest paremale jäävat osa

$$\sum M_4 = 0; \quad -N_{7-9} \cdot 4 + V_b \cdot 12 = 0; \quad N_{7-9} = 3$$

Kolmas, ühendav sirge peab olema vahemikus, kus sõrestik on läbi lõigatud ehk sõlmede 7 ja 9 vahel. Mõjujoon on kujutatud joonisel 8.115, i.



Joonis 8.115. Mõjujooned

Teisel juhul võime kokku panna põhisõrestiku varda 5-9 ja sprengli varda 7-9 mõjujooned. Põhisõrestiku varda 5-9 toe kohal oleva ordinaadi arvutus kujuneb momendi-punkti võttega samasuguseks nagu viimatinäidatud avaldis. Sprengli varda 7-9 mõjujoone tuletamiseks kasutame joonist 8.114. Vaatame sõlme 9 tasakaalu horisontaalsuunas

$$\sum X = 0; \quad -N_{7-9} - N_{6-9} \cos \alpha = 0; \quad N_{7-9} = -N_{6-9} \cos \alpha$$

Kuna sprengli varrastel 5-6 ja 6-9 on ühesugused mõjujooned, siis saame kirjutada, et

$$N_{7-9} = 0,7071 \cdot \cos \alpha = 0,5$$

Saadud mõjujoone ordinaat paikneb sõlme 7 all, kuna ühikjõud oli seal. Lisame sprengli varda 7-9 mõjujoone põhisõrestiku varda 5-9 mõjujoonele ja nii toimides saame joonisel 8.115, *i* kujutatud mõjujoone.

4. Pikijõudude arvutamiseks mõjujoonte abil korrutame koormused nende all olevate mõjujoonte ordinaatidega

$$N_{4-5} = 10(1 + 0,5) = 15 \text{ kN}$$

$$N_{8-9} = 0$$

$$N_{4-8} = 10(-0,5 - 0,75 - 1) = -22,5 \text{ kN}$$

$$N_{4-6} = 10(-0,3536 + 0,1768 + 0,7071) = 5,30 \text{ kN}$$

$$N_{5-6} = -10 \cdot 0,7071 = -7,07 \text{ kN}$$

$$N_{6-7} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ kN}$$

$$N_{6-9} = 10(-0,3536 - 0,5303 + 0,7071) = -1,77 \text{ kN}$$

$$N_{5-7} = N_{7-9} = 10(0,75 + 1,125 + 0,5) = 23,75 \text{ kN}$$

Saadud tulemused ühtivad täpselt näites 8.12 otsese arvutuse teel saadud pikijõududega.

8.16.7. Konsoolsõrestik

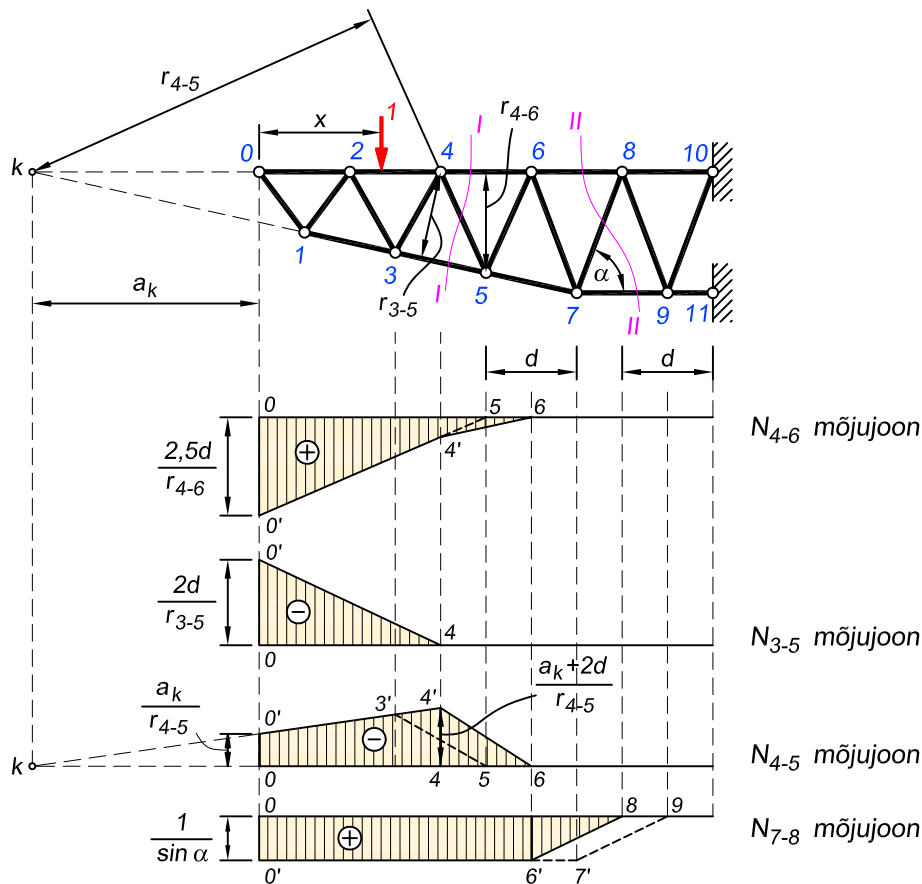
Konsoolsõrestiku varraste pikijõudude mõjujoonte kujutamisel on otstarbekas vaadelda lõikega eraldatud arvutusskeemi vaba otsa tasakaalu. Ühikjõu mõjumisel lõike ja toe vahel on läbilõigatud varraste sisejõud nullid.

Lõikest *I-I* (joonis 8.116) vasakul pool asuva osa tasakaalu tingimusest $\sum M_5 = 0$

$$-N_{4-6}r_{4-6} + (2,5d - x) \cdot 1 = 0 \quad (8.108)$$

saame ülemise vöö varda 4-6 mõjujoone võrrandi vahemiku $0 \leq x \leq 2d$ jaoks

$$N_{4-6} = \frac{2,5d - x}{r_{4-6}} \quad (8.109)$$



Joonis 8.116. Konsolsõrestiku mõjujooned

Sõlme 0 kohal ($x = 0$) on ordinaadiks $N_{4-6} = \frac{2,5d}{r_{4-6}}$ ja kui $x = 2,5d$, siis $N_{4-6} = 0$. Läbilõigatud paneeli ulatuses on mõjujooneks sirge $4'-6$. Kui koormus liigub alumisel vööl, on mõjujoone sirge $4'-5$

Alumise vöö varda 3-5 momendipunktiks on sõlm 4 , mille kaugus konsooli vabast otsast on $2d$ ja varda 3-5 sihist r_{3-5} . Sõlme 0 vertikaalile kanname lõigu $0-0'$, mille pikkus on $\frac{2d}{r_{3-5}}$. Momendipunkti vertikaalil on mõjujoone ordinaat null.

Diagonaali 4-5 pikijõu mõjujoone kujutamiseks kanname sõlme 0 vertikaalile lõigu $0-0'$ pikkusega $\frac{a_k}{r_{4-5}}$, milles a_k ja r_{4-5} on momendipunkti k kaugus vastavalt sõlme 0 vertikaalile ja diagonaali 4-5 sihist. Läbi lõigu otspunkti $0'$ ja momendipunkti vertikaalil asuva nullpunkti k tõmbame sirge kuni läbilõigatud paneelini. Parem pool lõiget on mõjujoone ordinaadid nullid ja läbilõigatud paneelis on mõjujooneks sirge $4'-6$. Kui koormus liigub alumisel vööl, siis on mõjujooneks sirge $3'-5$.

Lõike II-II puhul on läbilõigatud vööde vardad paralleelsed. **Diagonaali 7-8** pikijõu mõjujoone kujutame tasakaalutingimusega $\sum Z = 0$. Kui ühikjõud on paremal pool lõiget, siis $N_{7-8} = 0$ ja kui vasakul pool lõiget, siis $N_{7-8} = \frac{1}{\sin \alpha}$. Läbilõigatud paneelis muutub mõjujoon lineaarselt. Alumisel vööl liikuva koormuse korral kehtib mõjujoonena $6'-7'-9$.

8.16.8. Konsoolidega talasõrestik

Konsoolidega talasõrestiku (joonis 8.117, *a*) tugede vahel asuvate varraste pikijõudude mõjujooned kujutame analoogiliselt talasõrestiku varraste pikijõudude mõjujoontega (joonis 8.117, *g*, *h* ja *i*). Vasakpoolsed sirged läbivad nullpunkti toe *a* vertikaalil ja on mõjujooneks vasaku konsooli otsast kuni läbilõigatud paneelini. Parempoolsed sirged läbivad nullpunkti toe *b* vertikaalil ja on mõjujooneks läbilõigatud paneelist kuni parempoolse konsooli otsani.

Konsooli varrastes tekivad sisejõud ainult samal konsoolil lõike ja vaba otsa vahel mõjuvast koormusest. Läbilõigatud paneelist toe pool ühtivad konsooli varraste pikijõu mõjujooned abstsisssteljega (joonis 8.117, *b*, *c*, *d* ja *e*).

Ühikjõu mõjumisel paremal pool tuge *a* on vasakpoolse konsooli varraste sisejõud nullid. Järelikult on sõlmes *a* ühendatud alumise vöö varraste pikijõud nullid ja posti pikijõud (surve) võrdub toereaktsiooniga V_a (joonis 8.117, *f*).

Ühikjõu mõjumisel vasakul pool tuge *a* punkti k_2 suhtes koostatud momentide tasakaalu tingimusest

$$-N_{7-8} \cdot a_2 - V_a \cdot a_2 - N_{5-8} \cdot \sin \beta_1 \cdot a_2 + 1 \cdot (a_2 - x) = 0 \quad (8.110)$$

leiame posti pikijõu

$$N_{7-8} = V_a + N_{5-8} \cdot \sin \beta_1 - 1 + \frac{x}{a_2} = 0 \quad (8.111)$$

Momentide tasakaalu tingimusest punkti k_1 suhtes

$$N_{5-8} \cdot \sin \beta_1 \cdot a_1 - 1 \cdot (a_1 + x) = 0 \quad (8.112)$$

avaldame diagonaali 5-8 pikijõu

$$N_{5-8} = \frac{1 + \frac{x}{a_1}}{\sin \beta_1} \quad (8.113)$$

Valemiga (8.113) elimineerime avaldisest (8.111) diagonaali sisejõu N_{5-8}

$$N_{7-8} = V_a + \frac{x}{a_1} + \frac{x}{a_2} \quad (8.114)$$

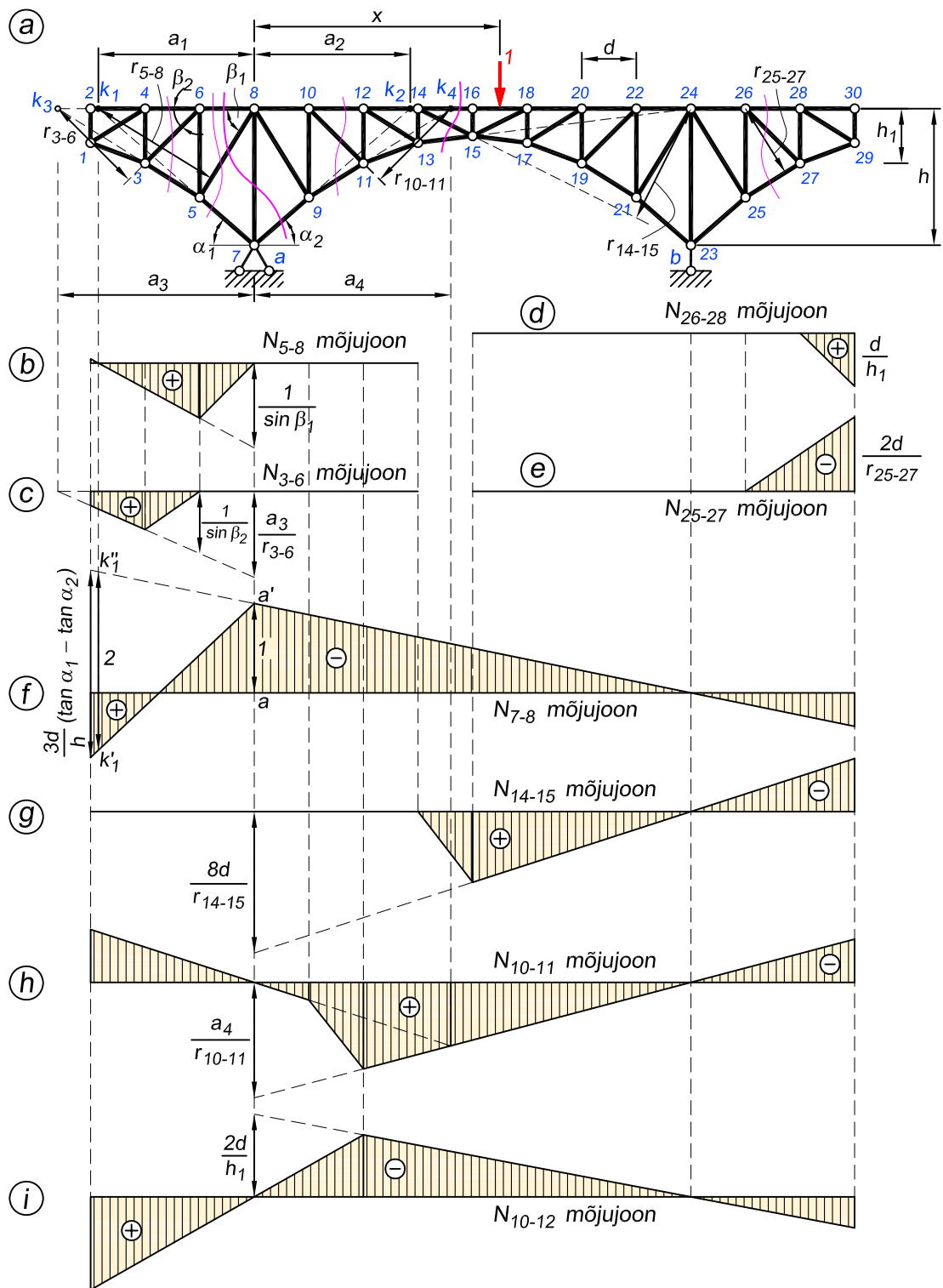
Joonisel 8.117, *a* esitatud sõrestikul $a_1 = a_2$. Kui $x = -a_1$, siis $N_{7-8} = V_a + 2$ ja vertikaalse lõigu $k'_1-k''_1$ pikkus toereaktsiooni V_a mõjujoone sirge $b-k''_1$ ning posti 7-8 mõjujoone vasakpoolse sirge $a'-k'_1$ vahel on kaks mõjujoone ordinaadi ühikut.

Kui $a_1 \neq a_2$, kusjuures $a_1 = h \cdot \cot \tan \alpha_1$ ja $a_2 = h \cdot \cot \tan \alpha_2$, siis posti pikijõu N_{7-8} avaldis (8.114) omab kuju

$$N_{7-8} = V_a + \frac{x(\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2)}{h} \quad (8.115)$$

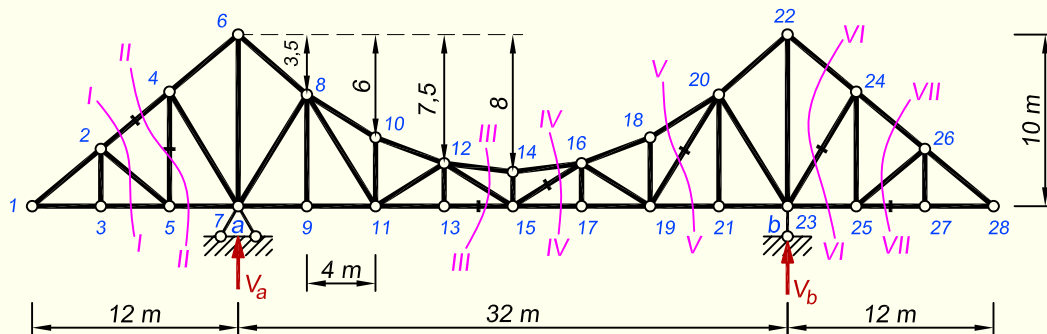
Ühikjõu mõjumisel konsooli vabal otsal ($x = -3d$) on

$$N_{7-8} = V_a - \frac{3d(\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2)}{h} \quad (8.116)$$



Joonis 8.117. Konsoolidega talasõrestik

NÄIDE 8.16. Koostada joonisel 8.118 kujutatud konsoolidega talasõrestiku tähistatud varraste pikijõudude mõjujooned. Sõrestiku parameetrid on samad nagu näites 8.4.



Joonis 8.118. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Varda 2-4 mj

Varras 2-4 jääb sõrestiku konsoolseesse osasse. Konsoolse osa varraste pikijõudude mõjujoonte koostamisel on kasulik vaadelda lõikega eraldatud arvutuskeemi vaba otsa tasakaalu, kuna ühikjõu mõjumisel lõike ja toe vahel on läbilõigatud varraste sisejõud nullid. Lõikest I-I vasakul pool asuva osa (joonis 8.119, a) tasakaalutingimusest momendipunkti 5 suhtes saame

$$\sum M_5 = 0; \quad -N_{2-4} \cdot r_{2-4} + 1 \cdot (8 - x) = 0$$

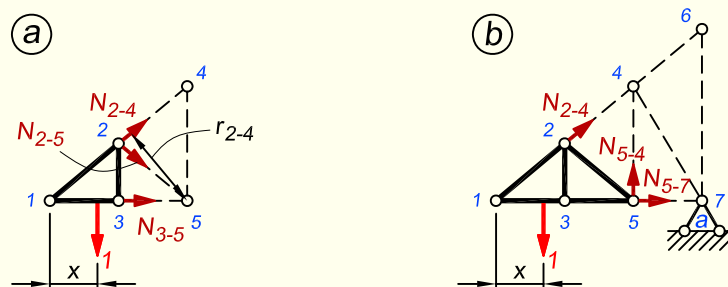
Kui ühikjõud paikneb sõlmes I (ehk $x = 0$), saame

$$-N_{2-4} \cdot 5,1215 + 1 \cdot 8 = 0; \quad N_{2-4} = 1,5620$$

Kui ühikjõud liigub sõlme 3 (ehk $x = 4$ m), saame

$$-N_{2-4} \cdot 5,1215 + 1 \cdot 4 = 0; \quad N_{2-4} = 0,7810$$

Momendipunkti vertikaalil ehk sõlme 5 kohal on mõjujoone ordinaat null. Mõjujoon on esitatud joonisel 8.121, b.



Joonis 8.119. Varraste 2-4 ja 5-4 mõjujoonte koostamine

Varda 5-4 mj

Varda 5-4 mõjujoone koostamiseks teeme lõike II-II. Lõikest vasakule jääva sõrestikuosa (joonis 8.119, b) tasakaalu tingimusest momendipunkti I suhtes saame

$$\sum M_1 = 0; \quad N_{5-4} \cdot r_{5-4} - 1 \cdot x = 0$$

Kui ühikjõud paikneb sõlmes 5 (ehk $x = 8$ m), saame

$$N_{5-4} \cdot 8 - 1 \cdot 8 = 0; \quad N_{5-4} = 1$$

Sõlme I ehk momendipunkti vertikaalil on mõjujoone ordinaat null. Läbi lõigatud paneelist paremal, sõlmes 7, on mõjujoone ordinaat null. Kuna posti 5-4 mõjujoone koostamiseks oli vaja teha kaldlõige läbi kahe paneeli, siis on ka alumise ja ülemise vöö koormustele mõjujooned erinevad. Ülemises vöös on läbi lõigatud varras 2-4 ja seetõttu sellest vardast paremal, sõlmes 4, on mõjujoone ordinaat null. Mõjujoon on esitatud joonisel 8.121, c.

Varraste 13-15, 15-16 ja 20-19 mõjujoonte ordinaadid tugede kohal leiame sarnaselt tavapärasele talasõrestikule.

Varda 13-15 mj

Varda 13-15 mõjujoone (joonis 8.121, d) koostamiseks teeme lõike III-III ja vaatame lõikest vasakule poole jääva sõrestikuosa tasakaalu. Koostame momentide tasakaalu tingimuse sõlme I2 kohta

$$\sum M_{I2} = 0; \quad N_{13-15} \cdot r_{13-15} - V_a \cdot 12 = 0; \quad N_{13-15} = 4,8$$
$$r_{13-15} = 2,5 \text{ m}$$

Konsoolidega talasõrestikul tuleb mõjujoone mõlemat sirget kummaltki poolt üle toe pikendada kuni sõrestiku otsani.

Varda 15-16 mj

Varda 15-16 mõjujoone (joonis 8.121, e) koostamiseks teeme lõike IV-IV. Momendipunkt paikneb sõlmes 7, mis on toesõlm. Kirjutame momentide tasakaalu tingimuse, vaadates sõrestiku paremat poolt

$$\sum M_7 = 0; \quad -N_{15-16} \cdot r_{15-16} + V_b \cdot 32 = 0; \quad N_{15-16} = 3,7736$$
$$r_{15-16} = 8,480 \text{ m}$$

Vardal, mille momendipunkt satub toesõlme, on mõjujoone üheks sirgeks nullsirge. Praegusel juhul oli momendipunkt vasakpoolisel toel ja seetõttu on mõjujoone parempoolne sirge null.

Varda 20-19 mj

Varda 20-19 mõjujoone (joonis 8.121, f) leidmiseks teeme lõike V-V. Vaatame lõikest paremale poole jääva sõrestikuosa tasakaalu. Kirjutame punkti k suhtes momentide tasakaalu tingimuse

$$\sum M_k = 0; \quad -N_{20-19} \cdot r_{20-19} + V_b \cdot 14,4 = 0; \quad N_{20-19} = 2,6418$$
$$r_{20-19} = 5,4509 \text{ m}$$

Vaadates lõikest vasakule jääva sõrestikuosa tasakaalu, saame tasakaalutingimuseks

$$\sum M_k = 0; \quad -N_{20-19} \cdot r_{20-19} + V_a \cdot 17,6 = 0; \quad N_{20-19} = 3,2288$$

Mõjujoone vasak- ja parempoolse sirge lõikepunkt paikneb momendipunkti vertikaalil. Kui vöovarrastel (nagu näiteks varras 13-15) on samas kohas ka mõjujoone murdepunkt ja seetõttu on vaja leida ordinaat ainult ühe toe vertikaalil, siis võrguvarrastel ei pruugi see alati nii olla. Siin tuleb tähelepanu pöörata sellele, et mõjujoone vasak- ja parempoolset sirget ühendav kolmas sirge peab paiknema paneelis, kus sõrestik on läbi lõigatud. Praegusel juhul on selleks paneel sõlmede 19 ja 21 vahel.

Varda 24-23 mj

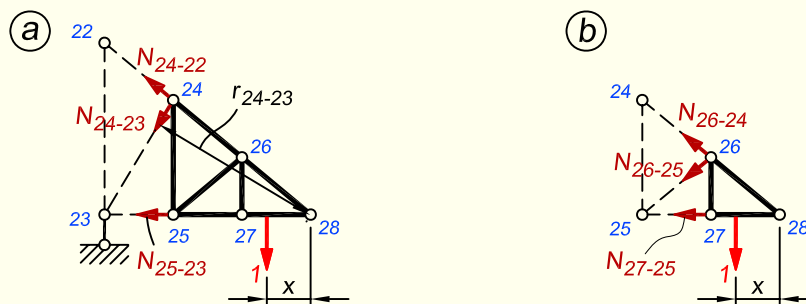
Varda 24-23 mõjujoone koostamiseks teeme lõike VI-VI. Lõikest paremale jääva sõrestikuosa (joonis 8.120, a) tasakaalu tingimusest sõlme 28 suhtes saame

$$\sum M_{28} = 0; \quad N_{24-23} \cdot r_{24-23} + 1 \cdot x = 0$$

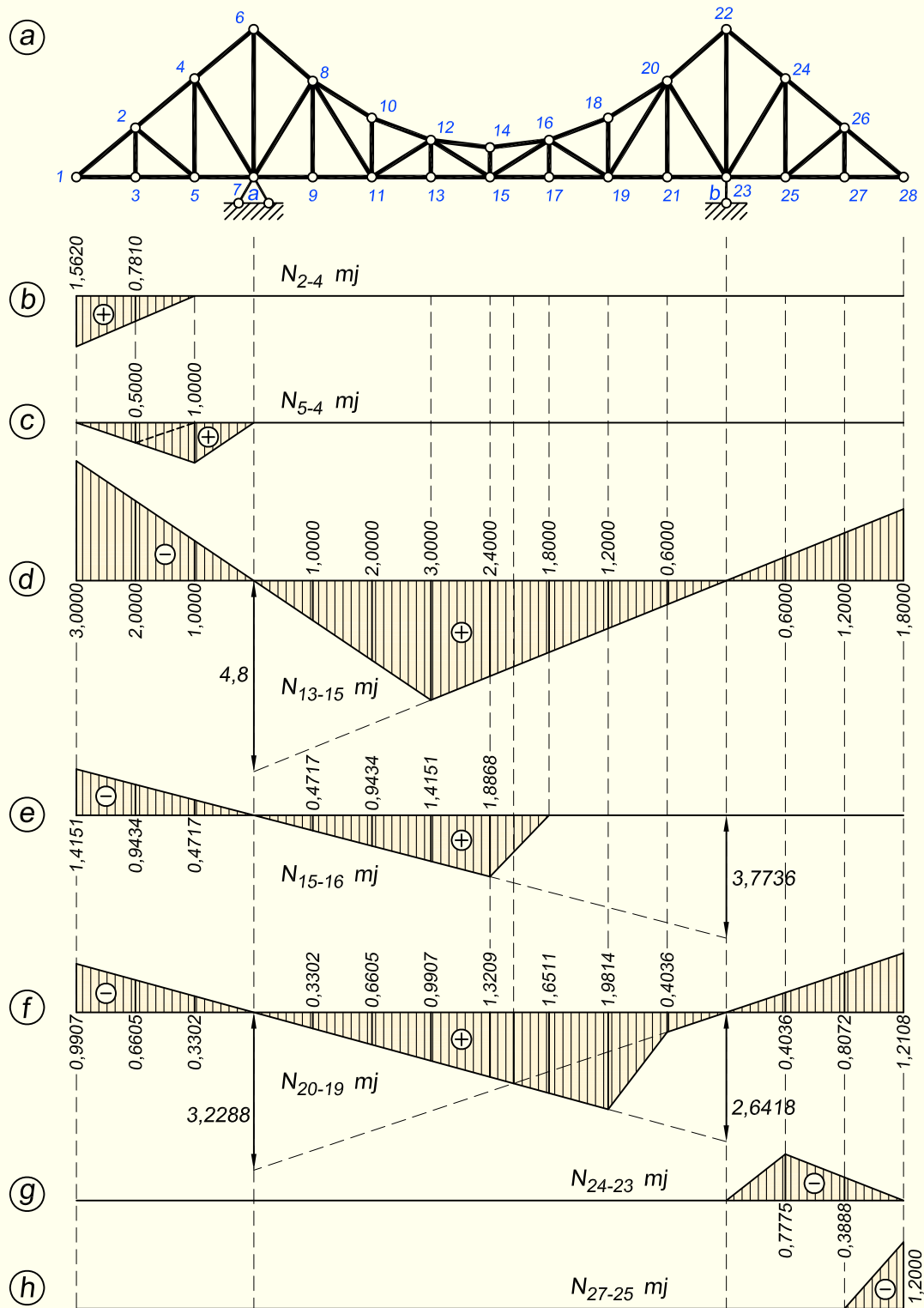
Kui ühikjõud paikneb sõlmes 25 ($x = 8 \text{ m}$), saame

$$N_{24-23} \cdot 10,29 + 1 \cdot 8 = 0; \quad N_{24-23} = 0,7775$$

Sõlme 28 ehk momendipunkti vertikaalil on mõjujoone ordinaat null. Läbilõigatud paneelist vasakul, sõlmes 23, on mõjujoone ordinaat null. Mõjujoon on kujutatud joonisel 8.121, g.



Joonis 8.120. Varraste 24-23 ja 27-25 mõjujoonte koostamine



Joonis 8.121. Mõjujooned

Varda 27-25 mj

Varda 27-25 mõjujoone koostamiseks teeme lõike VII-VII. Lõikest paremale jääva sõrestikuosa (joonis 8.120, b) tasakaalu tingimusest sõlme 26 suhtes saame

$$\sum M_{26} = 0; \quad -N_{27-25} \cdot r_{27-25} - 1 \cdot (4 - x) = 0$$

Kui ühikjõud paikneb sõlmes 28 ($x = 0$), saame

$$-N_{27-25} \cdot 3,3333 - 1 \cdot 4 = 0; \quad N_{27-25} = -1,2$$

Sõlme 26 ehk momendipunkti vertikaalil on mõjujoone ordinaat null. Mõjujoon on kujutatud joonisel 8.121, h.

Peatükk 9

KOMBINEERITUD KONSTRUKTSIOONID

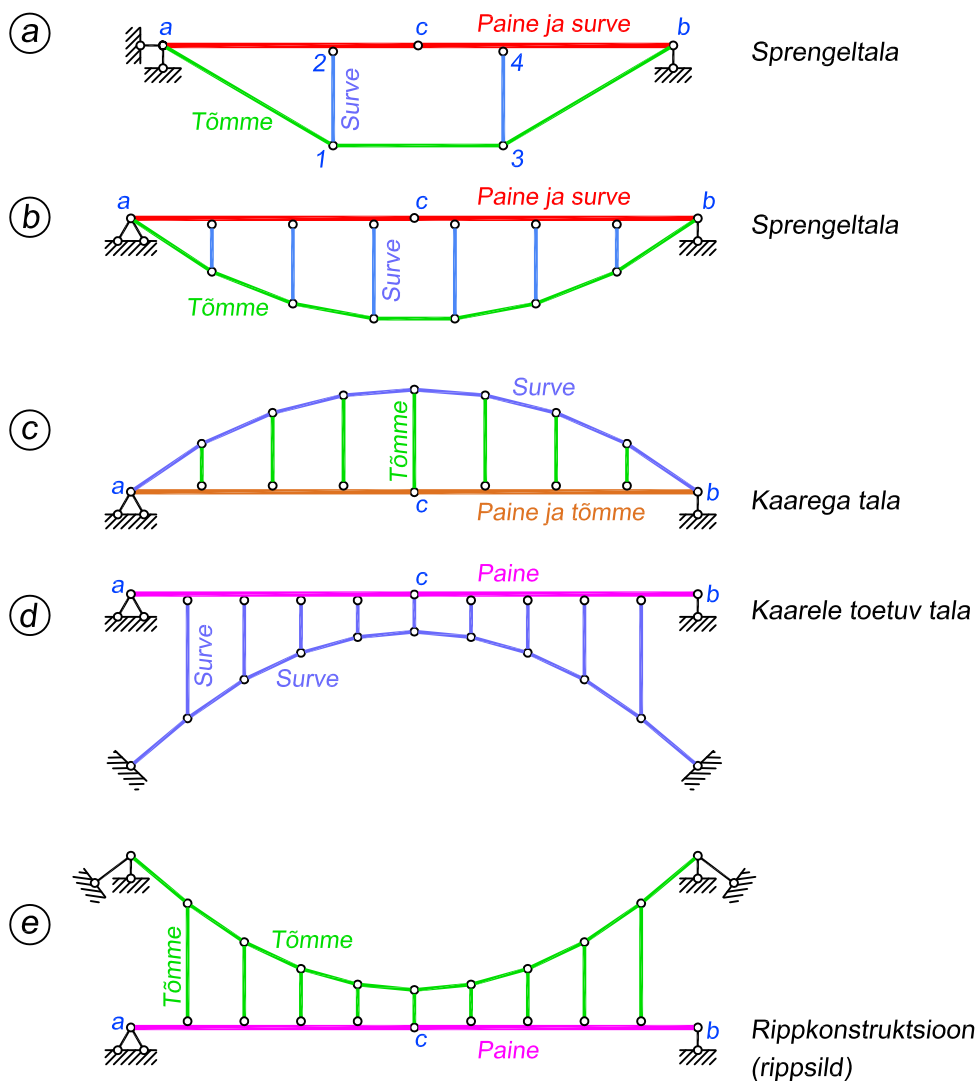
9.1. Sissejuhatus

Kombineeritud konstruktsioone kasutatakse peamiselt suurte avade sildamisel ja seetõttu on nad enamlevinud sillakonstruktsioonides. Kuid samuti kasutatakse neid ka staadionide ja suurte hallide katmisel. Fotol 9.1 on kujutatud Londonis paiknev Millennium Dome, mis on kaetud rippkatusega.

Kombineeritud konstruktsioonis töötab osa elemente ainult survele või tõmbele ja teine osa elemente paindele (joonis 9.1, *d* ja *e*), paindele ja tõmbele (joonis 9.1, *c*) või paindele ja survele (joonis 9.1, *a*, *b*). Survele või tõmbele töötavaid vertikaalseid elemente nimetatakse postideks, kui nendes tekivad survejõud (joonis 9.1, *a*, *b* ja *d*), ja riputiteks, kui nendes tekivad tõmbejõud (joonis 9.1, *c* ja *e*). Teised tõmbele või survele töötavad elemendid moodustavad varrasahela ehk varrasketi.



Foto 9.1. Millennium Dome Londonis (foto: Wikimedia Commons)



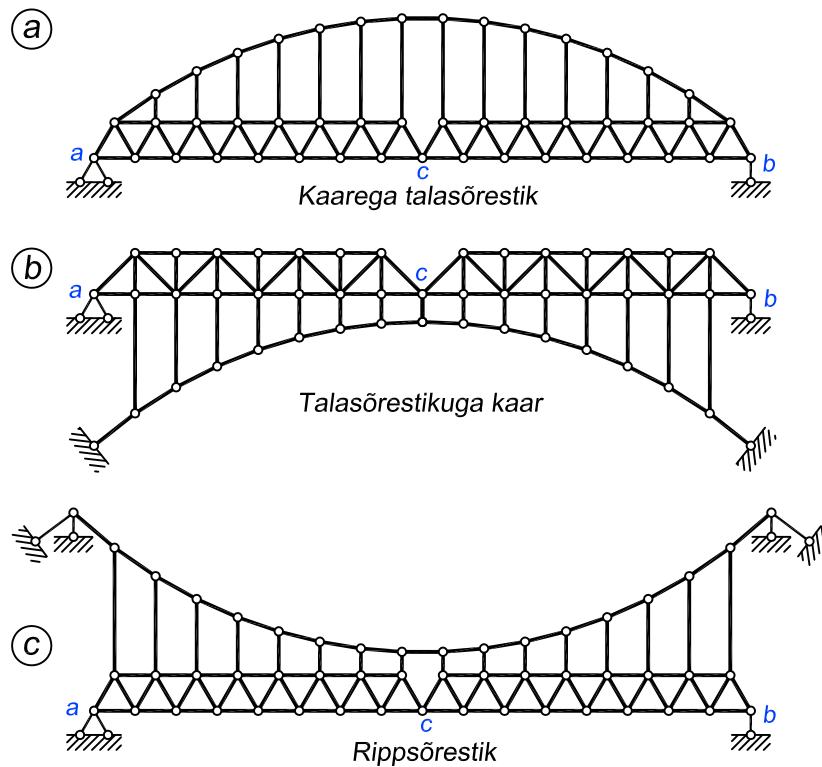
Joonis 9.1. Kombineeritud konstruktsioonide näited. Värvid näitavad varrastes esinevaid seisjõudusid

Lihtne kombineeritud konstruktsioon on *sprengeltala* (joonis 9.1, a). Elementides *a-c* ja *c-b* tekivad paindemomendid, põik- ja pikijõud (surve). Varraskett *a-1-3-b* on tõmmatud ning postid *1-2* ja *3-4* surutud.

Kaarega talal, mille arvutuskeem on esitatud joonisel 9.1, c, on varraskett surutud. Elementides *a-c* ja *c-b* tekivad paindemomendid ja tõmbejõud.

Kaljuste nõlvadega kuristike sildamisel kasutatakse *kaarele toetuvat tala* (joonis 9.1, d). Varraskett ja postid on surutud. Tavaliselt ehitatakse niisugune konstruktsioon ilma vahepealse liigendita *c* ja on siis staatikaga ühekordselt määratu.

Rippkonstruktsiooni (rippsilla) arvutuskeem on esitatud joonisel 9.1, e. Varrasahel ja ripputid on tõmmatud. Paindele töötavaid elemente *a-c* ja *c-b* nimetatakse *jäikustalaks*. Kuna rippkonstruktsioonide teema on teiste siinkäsitletavate konstruktsioonidega võrreldes oluli-

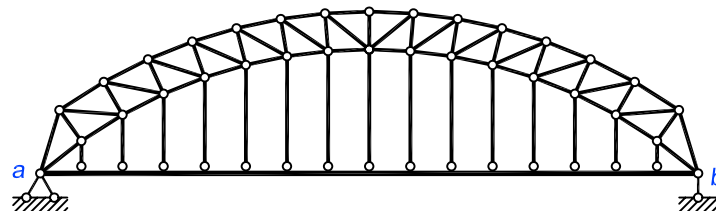


Joonis 9.2. Kombineeritud konstruktsioonid, kus täisseinaline tala on asendatud sõrestikelemendiga

selt mahukam, siis on rippkonstruktsioonidele pühendatud eraldi peatükk 10.

Paindele töötavate täisseinaliste elementide (joonisel 9.1 vardad $a-c$ ja $c-b$) asemel kasutatakse ka sõrestikelemente (joonisel 9.2). Joonisel 9.2, a ja b kujutatud konstruktsioone nimetatakse vastavalt *kaarega talasõrestikuks* ja *talasõrestikuga kaareks*. Joonisel 9.2, c on kujutatud *rippsõrestik*.

Sõrestikuga võib asendada ka varrasahela. Joonisel 9.1, c kujutatud arvutuskeemis saame varrasahela asemel kasutada kaarsõrestikku (joonisel 9.3). Joonisel näidatud arvutuskeem on staatikaga määramatu. Sellise konstruktsiooni ilmekaks näiteks on fotol 9.2 kujutatud Sydney sadamasild.



Joonis 9.3. Varrrasahela asendamine kaarsõrestikuga



Foto 9.2. Sydney sadamasild (foto: Wikimedia Commons)

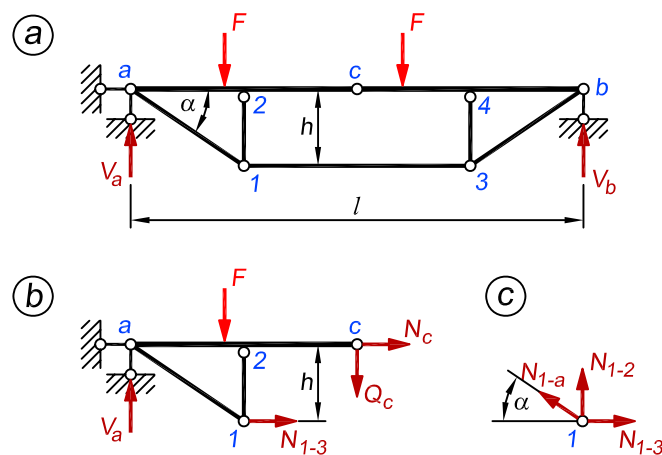
9.2. Sprengeltala

Sprengeltala (joonis 9.4, a) sisejõud arvutame analoogiliselt murtud tõmbiga kolme liigendiga raami sisejõududega. Toereaktsioonid on võrdsed sama sildega lihttala toereaktsioonidega. Liigendi c kohta koostatud paindemomendi tingimusest (joonis 9.4, b)

$$M_c = -M_c^0 + N_{1-3}h = 0 \quad (9.1)$$

avaldame tõmbi varda $1-3$ pikijõu

$$N_{1-3} = \frac{M_c^0}{h} \quad (9.2)$$



Joonis 9.4. Sprengeltala arvutus

Sõlme I kohta koostatud tasakaalutingimusest (joonis 9.4, c)

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & -N_{1-a} \cos \alpha + N_{1-3} &= 0 \\ \sum Z &= 0; & -N_{1-a} \sin \alpha - N_{1-2} &= 0 \end{aligned} \quad (9.3)$$

leiame tõmbi varda $I-a$ ja posti $I-2$ pikijõud

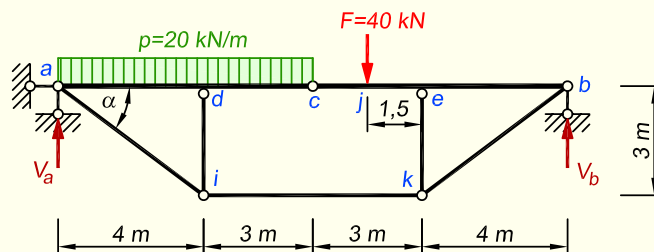
$$\begin{aligned} N_{1-a} &= \frac{N_{1-3}}{\cos \alpha} \\ N_{1-2} &= -N_{1-a} \sin \alpha = -N_{1-3} \tan \alpha \end{aligned} \quad (9.4)$$

Tala osades $a-c$ ja $c-b$ paindemomentide ja põikjõudude leidmisel arvestame peale koormuse veel tõmbi ja postide sisejõude. Pikijõud talas on

$$N_c = -N_{1-3} \quad (9.5)$$

Joonisel 9.1, b ja c esitatud arvutuskeemides leiame paindemomendid, põik- ja pikijõud analoogiliselt sprengettala sisejõududega. Joonisel 9.1, c kujutatud tala pikijõud on vastupidiste märkidega joonisel 9.1, a ja b esitatud talade pikijõududega. Joonisel 9.1, c kujutatud arvutuskeemis on kaar surutud, riputid ja tala $a-c-b$ tõmmatud.

NÄIDE 9.1. Arvutada joonisel 9.5 kujutatud sprengettala paindemomendid, põik- ja pikijõud.



Joonis 9.5. Sprengeltala arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Toereaktsioonid leiame momentide tasakaalutingimustest kummagi toe suhtes

$$\begin{aligned} \sum M_b &= 0; & -V_a \cdot 14 + 20 \cdot 7 \cdot 10,5 + 40 \cdot 5,5 &= 0; & V_a &= 120,71 \text{ kN} \\ \sum M_a &= 0; & V_b \cdot 14 - 20 \cdot 7 \cdot 3,5 - 40 \cdot 8,5 &= 0; & V_b &= 59,29 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontroll vertikaalsuunas

$$\sum Z = -120,71 - 59,29 + 20 \cdot 7 + 40 = 0$$

2. Pikijõudude arvutus

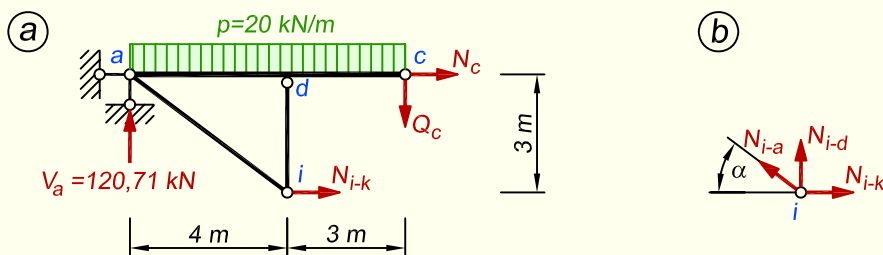
Leiame tõmbi $i-k$ pikijõu liigendi c kohta koostatud paindemomendi tingimusest (joonis 9.6, a)

$$M_c = -M_c^0 + N_{i-k}h = 0$$

millest

$$N_{i-k} = \frac{M_c^0}{h} = \frac{120,71 \cdot 7 - 20 \cdot 7 \cdot 3,5}{3} = 118,32 \text{ kN}$$

kus M_c^0 on sama sildega lihttala paindemoment lõike c kohal.



Joonis 9.6. Sprengeltala arvutus

Sõlme i kohta koostatud tasakaalutingimuste abil leiame tõmbi $a-i$ ja posti $i-d$ pikijõud (joonis 9.6, b)

$$\sin \alpha = 0,6 \quad \cos \alpha = 0,8$$

$$\sum X = 0; \quad -N_{i-a} \cos \alpha + N_{i-k} = 0; \quad N_{i-a} = \frac{N_{i-k}}{\cos \alpha} = \frac{118,32}{0,8} = 147,90 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0; \quad -N_{i-d} - N_{a-i} \sin \alpha = 0; \quad N_{i-d} = -N_{a-i} \sin \alpha = -147,90 \cdot 0,6 = -88,74 \text{ kN}$$

Arvutuskeemi horisontaalsuunalisest tasakaalust saame varda $a-c$ pikijõu

$$\sum X = 0; \quad N_c = -N_{i-k} = -118,32 \text{ kN}$$

Sõlme k horisontaalsuunaline tasakaal annab meile, et varda $k-b$ pikijõud peab võrduma varda $i-a$ pikijõuga: $N_{k-b} = 147,90 \text{ kN}$. Sõlme k vertikaalsuunalisest tasakaalust saame, et varda $k-e$ pikijõud on võrdne varda $i-d$ pikijõuga: $N_{k-e} = -88,74 \text{ kN}$.

3. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutus

$$M_d = 120,71 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 - 118,32 \cdot 3 = -32,12 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_e = 59,29 \cdot 4 - 118,32 \cdot 3 = -117,80 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_r = 120,71 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 - 118,32 \cdot 1,5 = 23,94 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_j = 59,29 \cdot 5,5 - 118,32 \cdot 3 = -28,87 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_s = 120,71 \cdot 5,5 - 20 \cdot 5,5 \cdot 2,75 - 118,32 \cdot 3 = 6,45 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

4. Põikjõu epüüri ordinaatide arvutus

$$Q_{ad} = V_a - N_{a-i} \sin \alpha = 120,71 - 147,9 \cdot 0,6 = 31,97 \text{ kN}$$

$$Q_{da} = 31,97 - 20 \cdot 4 = -48,03 \text{ kN}$$

$$Q_{dc} = -48,03 + 88,74 = 40,71 \text{ kN}$$

$$Q_{c-j} = 40,71 - 20 \cdot 3 = -19,29 \text{ kN}$$

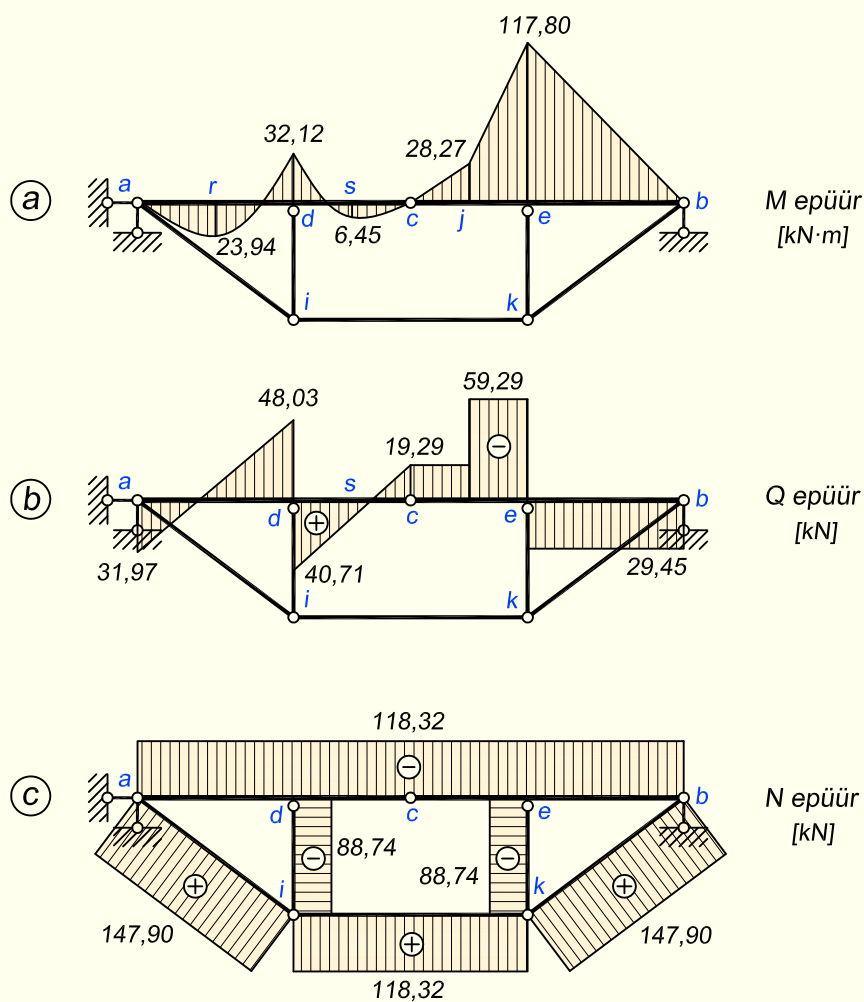
$$Q_{j-e} = -19,29 - 40 = -59,29 \text{ kN}$$

$$Q_{e-b} = -59,29 + 88,74 = 29,45 \text{ kN}$$

Kontroll

$$Q_{b-e} = -V_b + N_{b-k} \sin \alpha = -59,29 + 147,9 \cdot 0,6 = 29,45 \text{ kN}$$

Sisejõudude epüürid on esitatud joonisel 9.7.



Joonis 9.7. Sprengeltala sisejõudude epüürid

9.3. Kaarele toetuv tala

Kaarele toetuva tala heaks näiteks on fotol 9.3 kujutatud USAs paiknev Bixby Creeki sild. Mainitud silla elementide töötamise skeem on ülevaatlilikult näha joonisel 9.1, *d*.

9.3.1. Sisejõud

Kaarele toetuval talal (joonis 9.8) on neli tuge: jäikustalal kaks (*a* ja *b*) ning varrasahelal samuti kaks (*0* ja *10*). Jäikustala toereaktsioonid tähistame V_{a1} ja V_{b1} . Varrasahela äärmiste elementide *0-1* ja *9-10* sirgeid pikendame kuni lõikumiseni jäikustala toeliigendite vertikaalidega lõigetes *m* ja *n*. Nendesse lõigetes rakendame varrasahela vertikaalsed ja horisontaalsed toereaktsioonid V_{a2} ja H_m ning V_{b2} ja H_n .

Postide puhul varrasahela suvalise sõlme *j* kohta koostatud tasakaalutingimusest $\sum X = 0$ (joonis 9.8, *c*)

$$N_{j+1} \cos \alpha_{j+1} - N_j \cos \alpha_j = 0 \quad (9.6)$$

leiame, et varrasahela elementide pikijõudude horisontaalsed komponendid on võrdsed

$$N_j \cos \alpha_j = N_{j+1} \cos \alpha_{j+1} = \text{const.} = H \quad (9.7)$$

Tingimusest (9.7) järeldub, et

$$H_m = H_n = H \quad (9.8)$$

Jäikustala toeliigendit *b* läbiva vertikaali ja varrasahela elemendi *9-10* telje lõikepunkti *n* suhtes koostatud momentide tasakaalu tingimusest $\sum M_n = 0$

$$(-V_{a1} - V_{a2})l + \sum F_i b_i = 0 \quad (9.9)$$

avaldame vertikaalsete toereaktsioonide V_{a1} ja V_{a2} summa

$$V_{a1} + V_{a2} = \frac{1}{l} \sum F_i b_i = 0 \quad (9.10)$$

Avaldisest (9.10) järeldub, et vertikaalsete toereaktsioonide summa on võrdne lihttala toereaktsiooniga

$$V_{a1} + V_{a2} = V_a^0 \quad (9.11)$$

Tasakaalutingimusest $\sum M_m = 0$ leiame, et

$$V_{b1} + V_{b2} = \frac{1}{l} \sum F_i a_i = V_b^0 \quad (9.12)$$

Joonisel 9.8, *b* kujutatud osa on eraldatud arvutusskeemist lõikega läbi liigendite *c* ja 5. Ärajäetud arvutusskeemi osade mõju on asendatud jõududega. Paindemomendi tingimusest liigendi *c* kohta ($M_c = 0$)

$$M_c^0 - H(f+h) + Hh = 0 \quad (9.13)$$



Foto 9.3. Bixby Creeki sild USAs (foto: Wikimedia Commons)

avaldame

$$H = \frac{M_c^0}{f} \quad (9.14)$$

kus M_c^0 on lõikega eraldatud osale mõjuvate vertikaalsete jõudude moment liigendi c suhtes ja f liigendi c vertikaalil asuva sõlme 5 kaugus sirgest $m-n$.

Valemist (9.14) järeldeb, et kaarele toetuva tala varrasahela elemendi pikijõu horisontaalne komponent H on võrdne kolme liigendiga kaare horisontaalse toereaktsiooniga, kui kaare sille võrdub jääkustala sildega ja kaare kõrgus on võrdne kaarega tala liigendi c vertikaalil asuva varrasahela sõlme (sõlm 5) ja sirge $m-n$ vahelise lõiguga. Seda omadust kasutatakse kaarega tala mõjujoonte kujutamiseks.

Varrasahela esimese elemendi $0-1$ pikijõu N_{0-1} vertikaalse komponendi $V_{a2} = N_{0-1} \sin \alpha_1$ avaldame horisontaalse komponendi funktsioonina

$$V_{a2} = H \tan \alpha_1 \quad (9.15)$$

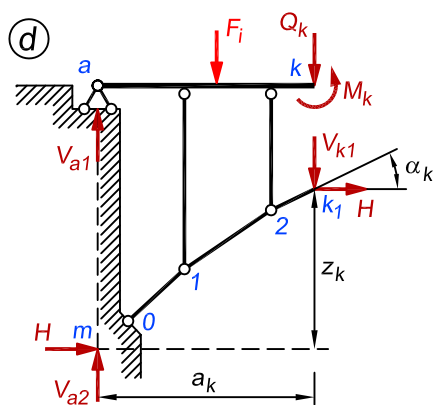
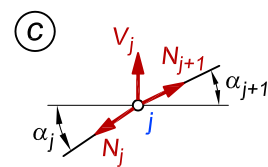
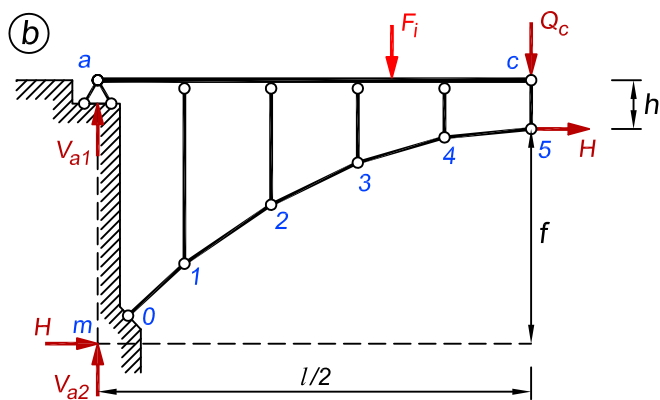
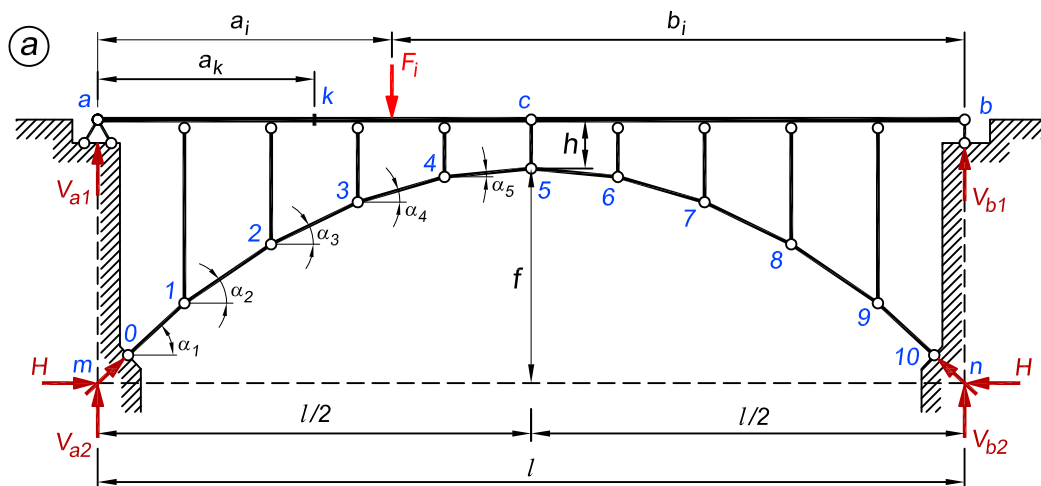
ja analoogiliselt ka viimase elemendi puhul

$$V_{b2} = H \tan \alpha_n \quad (9.16)$$

Sümmeetrilise arvutusskeemi puhul ($\alpha_1 = \alpha_n$) on äärmiste elementide vertikaalsed komponendid võrdsed: $V_{a2} = V_{b2}$.

Jääkustala toereaktsioonid leime avaldistega (9.11), (9.12), (9.15) ja (9.16)

$$\begin{aligned} V_{a1} &= V_a^0 - V_{a2} = V_a^0 - H \tan \alpha_1 \\ V_{b1} &= V_b^0 - V_{b2} = V_b^0 - H \tan \alpha_n \end{aligned} \quad (9.17)$$



Joonis 9.8. Kaarele toetuv tala

Tingimusest $N_j \cos \alpha_j = H$ (9.7) ja sõlme j (joonis 9.8, c) kohta koostatud tasakaalutingimusest $\sum Z = 0$

$$N_j \sin \alpha_j - N_{j+1} \sin \alpha_{j+1} - V_j = 0 \quad (9.18)$$

avaldame varrasahela elementide pikijõud

$$N_j = \frac{H}{\cos \alpha_j} \quad (9.19)$$

ja postide pikijõud

$$V_j = N_j \sin \alpha_j - N_{j+1} \sin \alpha_{j+1} = H (\tan \alpha_j - \tan \alpha_{j+1}) \quad (9.20)$$

Lõikega läbi punktide k ja k_1 eraldatud osa (joonis 9.8, d) tasakaalutingimustest saame paindemomendi ja põikjõu avaldised

$$M_k = M_k^0 - H z_k \quad (9.21)$$

$$Q_k = Q_k^0 - H \tan \alpha_k \quad (9.22)$$

kus M_k^0 ja Q_k^0 on paindemoment ja põikjõud lihttalas, z_k on varrasahela telje (punkti k_1) kaugus sirgest m - n lõike k vertikaalil ning α_k on nurk varrasahela elemendi ja horisontaali vahel lõike k kohal.

9.3.2. Mõjujooned

Kaarele toetuva tala (joonis 9.9, a) toereaktsioonid ja sisejõud olenevad varrasahela elementide pikijõudude horisontaalkomponendist (9.14)

$$H = \frac{M_c^0}{f}$$

Kui $0 \leq x \leq x_c = \frac{l}{2}$, siis

$$H = \frac{V_b^0 l}{2f} = \frac{x}{2f} \quad (9.23)$$

ja kui $x_c = \frac{l}{2} \leq x \leq l$, siis

$$H = \frac{V_a^0 l}{2f} = \frac{l-x}{2f} \quad (9.24)$$

H mõjujoon on kujutatud joonisel 9.9, b .

Varrasahela elemendi j ja riputi j pikijõudude N_j ning V_j (9.19, 9.20) mõjujooned saame H mõjujoone ordinaatide korrutamisel vastavalt teguritega $\frac{1}{\cos \alpha_j}$ ja $(\tan \alpha_j - \tan \alpha_{j+1})$.

Jäikustala toereaktsiooni V_{a1} mõjujoon (joonis 9.9, d) koosneb kahest sirgest ja ordinaatid leiame avaldisega (9.17): $V_{a1} = V_a^0 - H \tan \alpha_1$. Toe b vertikaalil on toereaktsiooni V_{a1}

mõjujoone ordinaat null. Ühikjõu mõjumisel liigendite a ja c vahel leiame toereaktsiooni V_{a1} avaldistega (9.17) ja (9.23)

$$V_{a1} = V_a^0 - V_b^0 \frac{l}{2f} \tan \alpha_1 = \frac{l-x}{l} - \frac{x}{2f} \tan \alpha_1 \quad (9.25)$$

Kui $x = 0$, siis $V_{a1} = 1$ ja kui $x = \frac{l}{2}$, siis

$$V_{a1} = \frac{1}{2} - \frac{l}{4f} \tan \alpha_1 \quad (9.26)$$

Jäikustala suvalise lõike k paindemomendi ja põikjõu mõjujooned kujutame analoogiliselt kolme liigendiga kaare mõjujoontega.

Paindemomendi mõjujoone (joonis 9.9, e) keskmine sirge ($a_k \leq x \leq \frac{l}{2}$)

$$M_k = \frac{l-x}{l} a_k - \frac{x}{2f} y_k \quad (9.27)$$

ja vasakpoolne sirge lõikuvad lõike k vertikaalil ($x = a_k$) ning keskmine sirge (9.27) ja parempoolne sirge liigendi c vertikaalil ($x = \frac{l}{2}$).

Kui $x = a_k$, siis

$$M_k = \frac{l-a_k}{l} a_k - \frac{a_k}{2f} y_k = a_k \left(\frac{l-a_k}{l} - \frac{y_k}{2f} \right) \quad (9.28)$$

ja kui $x = \frac{l}{2}$, siis

$$M_k = \frac{a_k}{2} - \frac{l}{4f} y_k \quad (9.29)$$

Sõlmkoormuse tõttu on mõjujoon kahe posti vahel sirge.

Põikjõu mõjujoone (joonis 9.9, f) keskmine sirge ($a_k < x \leq \frac{l}{2}$)

$$Q_k = \frac{l-x}{l} - \frac{x}{2f} \tan \alpha_k \quad (9.30)$$

on paralleelne vasakpoolse sirgega ja lõikub parempoolse sirgega liigendi c vertikaalil.

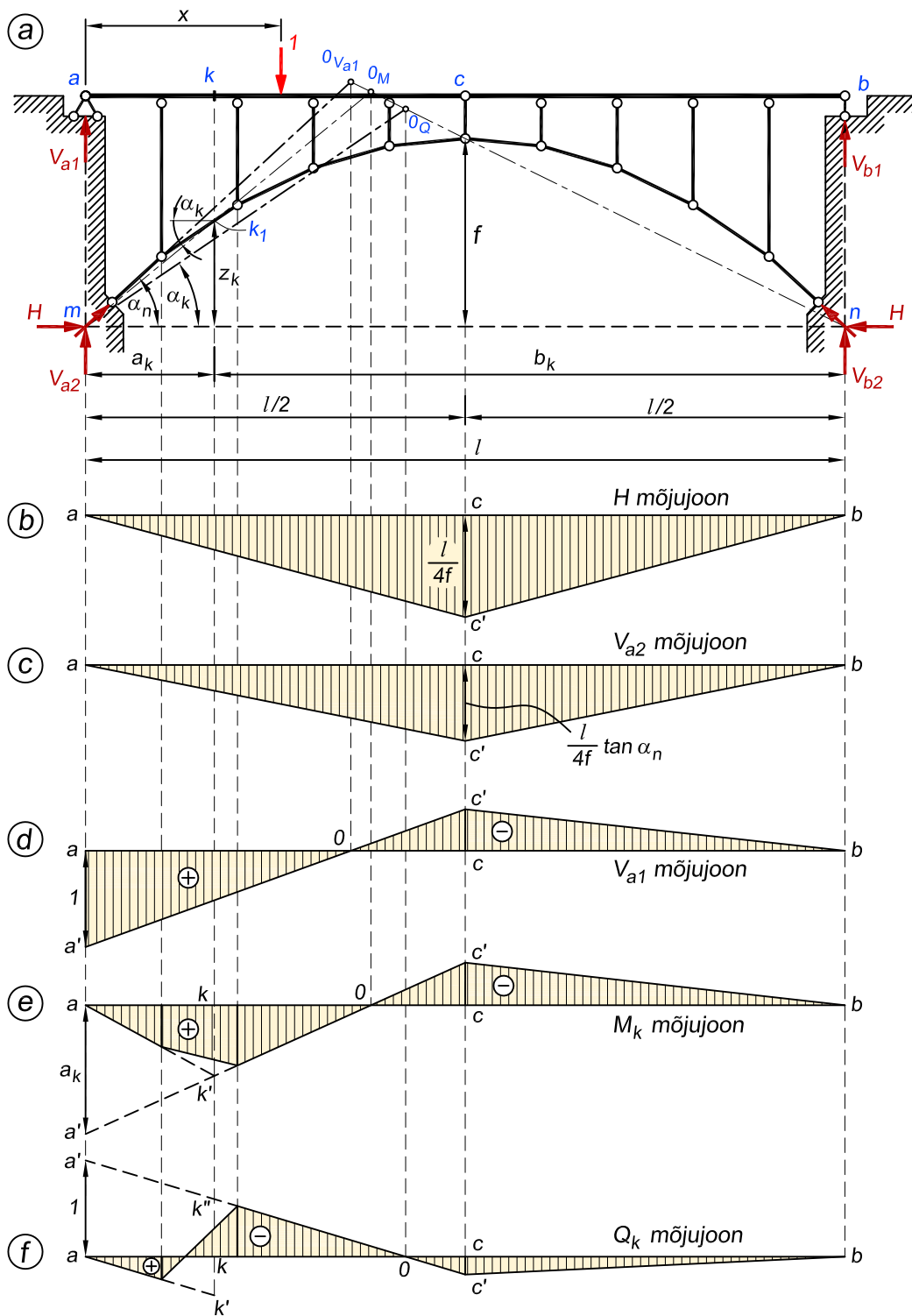
Kui $x = a_k + 0$, siis

$$Q_k = \frac{l-a_k}{l} - \frac{a_k}{2f} \tan \alpha_k \quad (9.31)$$

ja kui $x = \frac{l}{2}$, siis

$$Q_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{4f} \tan \alpha_k \quad (9.32)$$

Sõlmkoormuse tõttu on mõjujoon kahe posti vahel sirge.



Joonis 9.9. Kaarele toetuva tala mõjujooned

Peatükk 10

RIPPKONSTRUKTSIOONID

10.1. Sissejuhatus

Rippkonstruktsioone kasutatakse suurte avade sildamisel. Selle konstruktsiooniliigi kõige levinumad esindajad on ripsillad ja rippkatused.

Sildeavade pikkuste osas puuduvad ripsildadel teiste konstruktsiooniliikide hulgas konkurendid. Ühe kilomeetri piiri ületasid ripsillad juba 1931. aastal, kui valmis George Washingtoni sild USAs 1067 meetri pikkuse keskmise sildeavaga. Möödunud sajandi lõpus hakasid sildeavad lähenema juba kahele kilomeetrile, kui aastal 1998 valmis Akashi-Kaikyo sild Jaapanis (foto 10.1), mille keskmine sildeava on 1991 meetri pikkune.

Rippkatuste tõsisem areng sai alguse 1950. aastatel. Sel ajal hakati rippkonstruktsioone põhjalikumalt uurima ka TTÜ ehitusteaduskonnas seoses Tallinna laululava (foto 10.2) kõlaekraani projekteerimistöödega.

Tallinna laululava ehitati 1960. aasta üldlaulupeoks ja sel ajal oli ta erakordne ehitiskogu maailmas. Tema ainulaadsus seisnes selles, et kuigi toleks ajaks oli rippkatuseid juba



Foto 10.1. Akashi-Kaikyo sild Jaapanis (foto: Wikimedia Commons)

mõnda aega kasutatud, olid nad kõik kogu perimeetril seinale või postidele toetuva massiivse raudbetoonist äärelükkemega, meie laululava kõlaekraani esikaar sildega umbes 80 m ripub aga kogu pikkuses õhus. Lava rippkatuse keerukad arvutused ja mudelkatsetused viidi läbi professor Heinrich Lauulu juhtimisel, kelle mälestusi mainitud tegevustest saab lugeda tema enda artiklist [22].

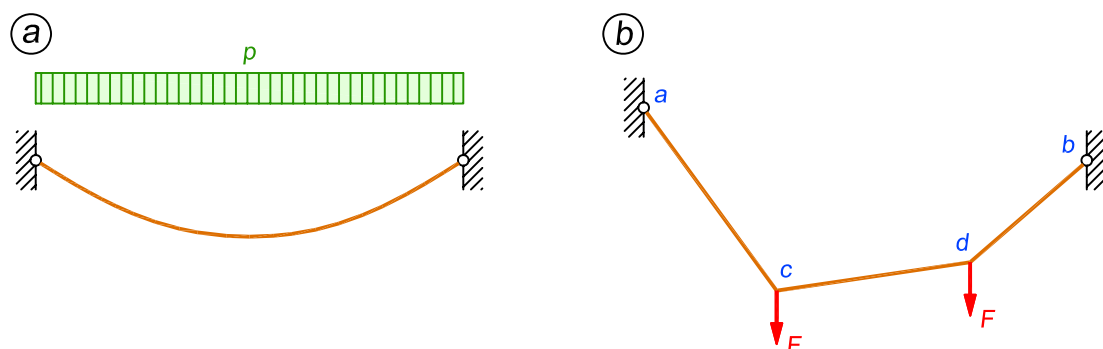
Rippkonstruktsioonide põhielementideks on terastroosid, mida nimetatakse *kaabli-teks*. Kaablid võivad olla moodustatud nii spiraalsetest keerdudest kui ka paralleeltraatidest kimpudest. Üldjuhul on kaablid vabalt painduvad ja nende paindejäikuse arvestamisest loobutakse. Vahel kasutatakse kaablite asemel ka väiksema või suurema paindejäikusega vardaid [20].

Paindejäikuse puudumise tõttu ei teki kaablis kunagi paindemomenti ega põikjõudu, kaabli sisejõud mõjuvad igas punktis alati tangentsiaalselt. Seetõttu on kaablid konstruktsioonielemendid, milles saavad esineda ainult pikisuunalised tõmbejõud.

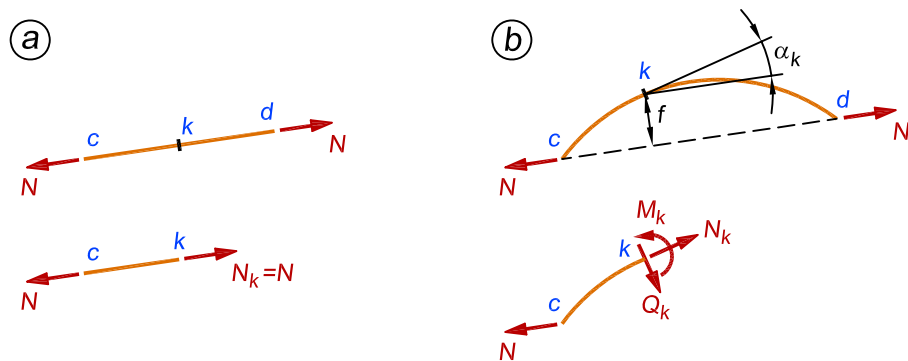
Kaabli kuju sõltub koormusest. Lauskoormusega koormatud kaabel on kõverjooneline (joonis 10.1, a). Koondjõududega kaablil on jõudude rakenduskohtades murdepunktid (joonis 10.1, b), kaabli koormamata osa on alati sirgjooneline ning pikijõud kaabli selles osas alati konstantne (eeldusel, et kaablis esineb pikijõud, sest pikijõu puudumisel võib kaabel olla suvalise kujuga). Selle tõestamiseks vaatame joonist 10.1, b, kus kaabel on koormatud kahe



Foto 10.2. Tallinna laululava kõlaekraan (foto: Wikimedia Commons)



Joonis 10.1. Kaabli kuju lauskoormuse ja koondjõudude korral



Joonis 10.2. Kaabli koormamata osa sirgjoonelisuse tõestus

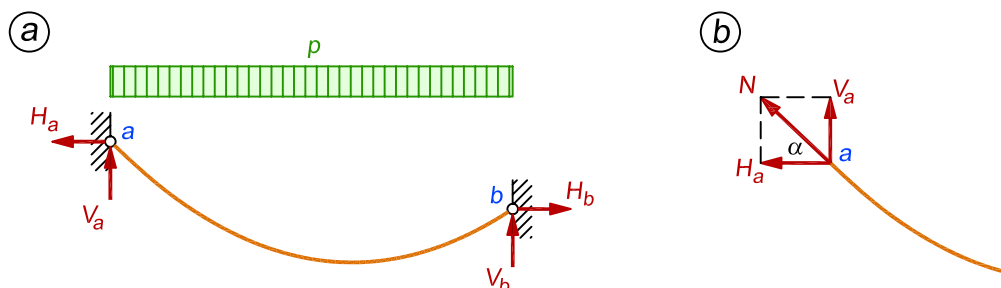
koondjõuga. Eraldame kaablist lõigu $c-d$. Kuna sellele lõigule mõjuvad ainult kaabli sisejõud, siis peavad need teineteist ära tasakaalustama ning on seega võrdsed ($N_{cd} = N_{dc} = N$) ja vastassuunalised. Joonisel 10.2, a on lõik $c-d$ kujutatud sirgena ning seal esineb suvalises vahepealses lõikes k ainult pikijõud: $N_k = N$. Joonisel 10.2, b on lõik $c-d$ kujutatud kõverana ning seal esinevad lisaks pikijõule ($N_k = N \cos \alpha_k$) ka paindemoment ($M_k = Nf$) ja põikjõud ($Q_k = N \sin \alpha_k$), mis oleks aga võimalik ainult siis, kui kõis oleks jäik. Järelikult peab kaabli koormuseta osa olema sirge.

Rippkonstruktsioonide puhul jäetakse kaabli omakaal sageli arvestamata, kuid konstruktsioonides, kus kaabli omakaal võib oluliseks osutuda, tuleb seda ka arvesse võtta. Järgnevates peatükkides vaatleme arvutust nii kaabli omakaaluga kui ka ilma selleta.

Arvutustes eeldame, et kaabel on konstantse pikkusega ega pikene koormamisel. See võimaldab tasakaalutingimustes arvestada kaablit või selle osa jäiga kehana.

10.2. Vertikaalne koormus

Vaatleme kaablit, mis on koormatud ainult vertikaalse koormusega (joonis 10.3, a). Selleks, et arvutuskeem oleks horisontaalsuunas tasakaalus, peavad horisontaalsed toereaktsioonid



Joonis 10.3. Toereaktsioonid vertikaalsest koormusest

olema võrdsed ja vastupidise suunaga. See järeldub x -telje suunas kirjutatavast tasakaalutimusest

$$\sum X = 0; \quad -H_a + H_b = 0; \quad H_a = H_b = H \quad (10.1)$$

Siit saame teha veel ühe olulise järelduse. Kui lõigata arvutuskeem suvalisest kohast läbi, siis olenemata lõike asukohast, peab kaabli pikijõu horisontaalne komponent olema alati võrdne horisontaalse toereaktsiooniga.

Jooniselt 10.3, b näeme, et kaabli pikijõu komponendid, mida tugeudel käsitleme toereaktsioonidena, on omavahel seotud järgmise avaldisega

$$V = H \tan \alpha \quad (10.2)$$

kus α on kaabli puutuja kaldenurk horisontaali suhtes vaadeldavas punktis. Kaabli pikijõud avaldub komponentide kaudu

$$N = \sqrt{H^2 + V^2} \quad (10.3)$$

ehk

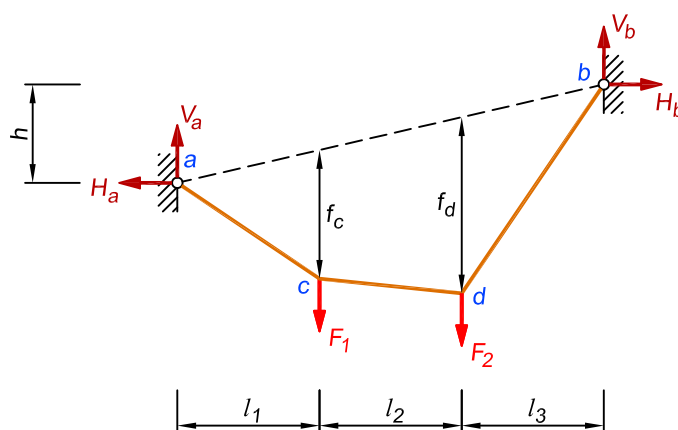
$$N = H \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \quad (10.4)$$

Sageli on mõistlik kaabli suvalises punktis arvutada pikijõudu horisontaalse reaktsiooni ja kaabli kaldenurga koosinuse suhtega vaadeldavas punktis

$$N = \frac{H}{\cos \alpha} \quad (10.5)$$

10.3. Koondjõududega kaabel

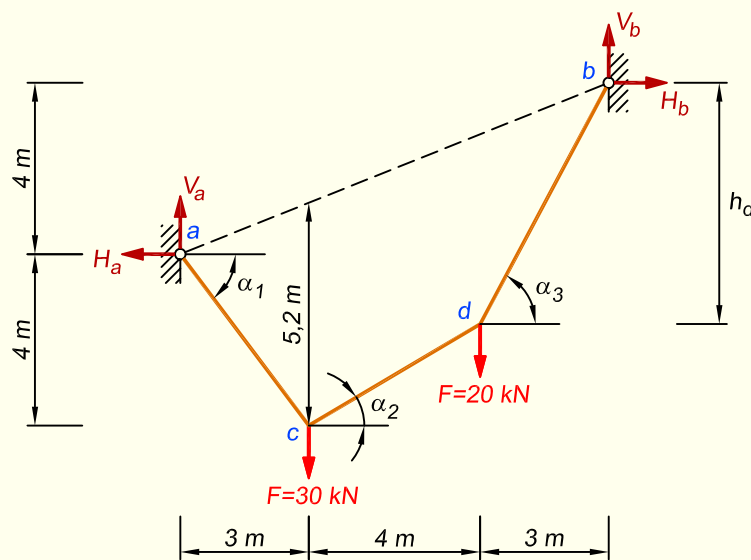
Vaatleme joonisel 10.4 kujutatud kaablit, mis on koormatud kahe koondjõuga ning eeldame, et teada on kaugused l_1, l_2, l_3 ja h ning koormused F_1 ja F_2 . Tundmatuteks on sel juhul toereaktsioonid kummalgi toel (V_a, H_a, V_b, H_b), kaablilõikude sisejõud ($N_{a-c}, N_{c-d}, N_{d-b}$) ning



Joonis 10.4. Kahe koondjõuga kaabel

punktide c ja d rippe väärtused (f_c, f_d) – kokku üheksa tundmatut. Ülesannet lahendades saame kirjutada kõigis neljas sõlmpunktis kaks tasakaalutingimust ($\sum X = 0, \sum Z = 0$), millega saame kokku kaheksa võrrandit. Lisaks on vaja ühte võrrandit kaabli geomeetriast lähtudes. Siin võime ette anda näiteks kaabli kogupikkuse või ühe rippe väärtuse (kas f_c või f_d). Kui kaabli kogupikkus on antud, saame selle siduda Pythagorase teoreemi abil üksikute kaablilõikude pikkustega. Selline arvutuskäik läheb aga keeruliseks ja lihtsam on ülesannet lahendada, valides teadaolevaks suuruseks ühe rippe väärtuse. Sel juhul saab lihtsalt arvutada teise või ülejäänud rippled ning nende abil leida kaabli kogupikkuse. Järgnevas näites kasutame viimastinimetatud varianti ja anname lähteülesandes ette ühe rippe suuruse.

NÄIDE 10.1. Määrata joonisel 10.5 kujutatud koondjõududega koormatud kaabli iga kaablilõigu pikkused ning kaugus h_d , kui kõik muud mõõdud on teada.



Joonis 10.5. Kaabli arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Esmalt leiame toereaktsioonid vasakpoolsel toel. Kirjutame välja momentide tasakaalu tingimuse kogu arvutuskeemile toeliigendi b suhtes

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 10 - H_a \cdot 4 + 30 \cdot 7 + 20 \cdot 3 = 0$$

Seejärel avaldame vasakpoolse horisontaalse toereaktsiooni. Kui näiteks kolme liigendiga kaarel ja raamil tuli seda teha lukuliigendi suhtes kirjutatud momentide tasakaalutingimuse abil, siis kaabli puhul ei ole punkti asukoht oluline, kuna kaabli paindemoment on igas lõikes võrdne nulliga. Kasutame punkti c , kuna selle kõrgus on meil teada. Vasakpoolse horisontaalse toereaktsiooni leidmiseks vaatame punktist c vasakule jäävat

arvutusskeemi osa, mille abil saame momentide tasakaalu tingimuseks

$$\sum M_c^y = 0; \quad H_a \cdot 4 - V_a \cdot 3 = 0; \quad H_a = \frac{3}{4}V_a$$

Asetame saadud tulemuse vertikaalse reaktsiooni avaldisse

$$-V_a \cdot 10 - \frac{3}{4}V_a \cdot 4 + 30 \cdot 7 + 20 \cdot 3 = 0; \quad V_a = 20,77 \text{ kN}$$

Nüüd saame ka horisontaalse reaktsiooni arvutada

$$H_a = \frac{3}{4}V_a = \frac{3}{4} \cdot 20,77 = 15,58 \text{ kN}$$

Parempoolsete toereaktsioonide arvutamiseks kirjutame välja momentide tasakaalu tingimuse kogu arvutusskeemile toeliigendi a suhtes

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 10 - H_b \cdot 4 - 20 \cdot 7 - 30 \cdot 3 = 0$$

Seejärel avaldame parempoolse horisontaalse reaktsiooni. Kuna punkti c kõrgus on teada, siis kirjutame tema suhtes momentide tasakaalutingimuse arvutusskeemi parema poolega

$$\sum M_c^p = 0; \quad -H_b \cdot 8 + V_b \cdot 7 - 20 \cdot 4 = 0; \quad H_b = \frac{7V_b - 80}{8} = \frac{7}{8}V_b - 10$$

Asetame saadud tulemuse vertikaalse reaktsiooni avaldisse

$$V_b \cdot 10 - \left(\frac{7}{8}V_b - 10 \right) \cdot 4 + 20 \cdot 7 + 30 \cdot 3 = 0; \quad V_b = 29,23 \text{ kN}$$

Nüüd saame ka horisontaalse reaktsiooni arvutada

$$H_b = \frac{7}{8} \cdot 29,23 - 10 = 15,58 \text{ kN}$$

Kontrollime toereaktsioone

$$\begin{aligned} \sum X &= -15,58 + 15,58 = 0 \\ \sum Z &= 30 + 20 - 20,77 - 29,23 = 0 \end{aligned}$$

2. Kõrguse h_d arvutus

Kõrguse h_d saame leida punkti d suhtes kirjutatud momentide tasakaalutingimusest. Kuna punktist d paremale jääb vähem jõudusid, siis vaatame arvutusskeemi seda osa.

$$\sum M_d^p = 0; \quad -15,58 \cdot h_d + 29,23 \cdot 3 = 0; \quad h_d = 5,63 \text{ m}$$

3. Kaablilõikude pikijõudude arvutus

Pikijõudude arvutuse saame teha avaldisega (10.5)

$$N = \frac{H}{\cos \alpha}$$

kus arvestame iga kaablilõigu kaldenurka horisontaali suhtes

$$N_{a-c} = \frac{H}{\cos \alpha_1} = \frac{15,58}{0,6} = 25,97 \text{ kN}$$

$$N_{c-d} = \frac{H}{\cos \alpha_2} = \frac{15,58}{0,8603} = 18,11 \text{ kN}$$

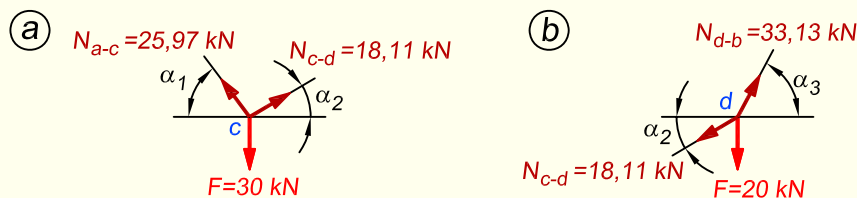
$$N_{d-b} = \frac{H}{\cos \alpha_3} = \frac{15,58}{0,4703} = 33,13 \text{ kN}$$

4. Sõlmede tasakaalu kontroll

Kontrollime sõlmede c ja d tasakaalu leitud sisejõudude abil. Kirjutame mõlemas sõlmes tasakaalutingimused vertikaaltelje suunas

$$\sum Z = -N_{a-c} \cdot \sin \alpha_1 - N_{c-d} \cdot \sin \alpha_2 + 30 = -25,97 \cdot 0,8 - 18,11 \cdot 0,5097 + 30 = 0$$

$$\sum Z = N_{c-d} \cdot \sin \alpha_2 - N_{d-b} \cdot \sin \alpha_3 + 20 = 18,11 \cdot 0,5097 - 33,13 \cdot 0,8825 + 20 = 0$$



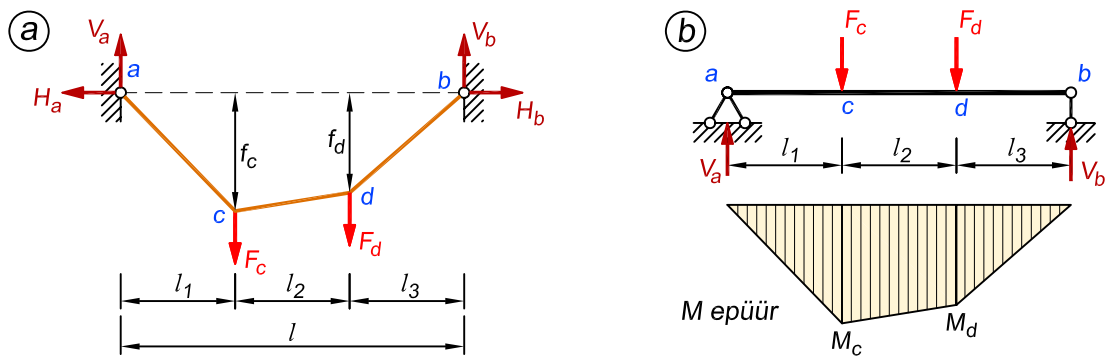
Joonis 10.6. Sõlmede c ja d tasakaalu kontroll

10.4. Kaabli üldine teoreem

Kaabli teoreemi tuletamiseks vaatame eelmises peatükis kirjeldatud lihtsamat varianti, kui kaabli toed on samal kõrgusel (joonis 10.7, a).

Kirjutame välja tasakaalutingimuse kaabli vasakpoolse vertikaalse toereaktsiooni leidmiseks

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a l + F_c (l_2 + l_3) + F_d l_3 = 0 \quad (10.6)$$



Joonis 10.7. Kahe koondjõuga kaabel ja lihttala

Kui võrrelda saadud avaldist joonisel 10.7, b kujutatud lihttalaga, mis on kaabliga võrdse sildega ja sama koormusega, näeme, et kaabli toereaktsiooni avaldis ühtib lihttala toereaktsiooni avaldisega. Siin tuleb aga kindlasti kohe rõhutada seda, et mainitud järeldus kehtib, juhul kui kaabli toed on samal kõrgusel. Kui toed on erineval kõrgusel, siis tuleb arvutus teha nii, nagu eelmises peatükis näidatud.

Järgnevalt kirjutame avaldise kaabli vasakpoolse horisontaalse reaktsiooni jaoks. Teeme seda punkti c suhtes

$$\sum M_c^v = 0; \quad -V_a l_1 + H_a f_c = 0 \quad (10.7)$$

ehk

$$H_a f_c = V_a l_1 \quad (10.8)$$

Nüüd vaatame, milliseks kujuneb joonisel 10.7, b näidatud lihttala paindemomendi arvutus lõike c kohal

$$M_c^0 = V_a l_1 \quad (10.9)$$

Näeme, et avaldise (10.8) ja (10.9) paremad pooled on võrdsed, järelikult peavad võrdsed olema ka vasakud pooled, millest saame

$$H f_c = M_c^0 \quad (10.10)$$

Saadud valem esitab kaabli teoreemi, mille saame sõnastada järgmiselt.

Vertikaalsete koormustega koormatud kaabli ükskõik millises punktis on selle punkti rippe korrutis kaabli horisontaalse reaktsiooniga võrdne samas punktis tekkiva lihttala paindemomendi väärtusega, kui lihttala on kaabliga võrdse sildega ja koormatud samade koormustega.

Kaabli teoreem annab meile olulise valemi kaabli horisontaalse reaktsiooni arvutamiseks lihttala paindemomendi epüüri abil

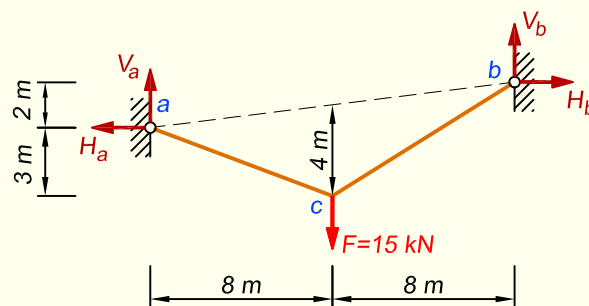
$$H = \frac{M_c^0}{f} \quad (10.11)$$

mille kohaselt kaabli horisontaalne reaktsioon on võrdne mingis suvalises punktis valitud lihttala paindemomendi epüüri ordinaadi ja selles punktis esineva kaabli rippe jagatisega. Kui meenutada eestpoolt kolme liigendiga kaare teemat, siis selgub, et kaabli horisontaalse reaktsiooni arvutamise avaldis on sama nagu kaarel. Edaspidi tõestame, et see kehtib ka lauskoormusega koormatud kaabli korral.

Valem (10.11) kehtib, sõltumata sellest, kas kaabli toed on samal või erineval kõrgusel. Nii samal kui erineval kõrgusel tugede korral tuleb ripet mõõta tugesid ühendavast sirgest.

Jooniselt 10.7 näeme ka seda, et kaabli kuju on sama nagu lihttala paindemomendi epüüril. Siit saame veel ühe olulise põhitõe: **kaabel võtab alati samasuguse kuju, nagu on kaabliga identse koormusega lihttala paindemomendi epüüril.**

NÄIDE 10.2. Leida joonisel 10.8 kujutatud kaabli horisontaalsed toereaktsioonid lihttala paindemomendi epüüri abil ja kontrollida neid tasakaalutingimustega.

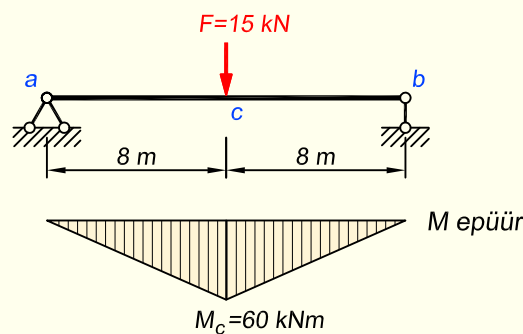


Joonis 10.8. Kaabli arvutuskeem

LAHENDUS

1. Reaktsioonide arvutus lihttala paindemomendi epüüri abil

Esmalt koostame kaabliga võrdse sildega ja sama koormusega lihttala paindemomendi epüüri (joonis 10.9).



Joonis 10.9. Kaabliga võrdse sildega ja koormusega lihttala M epüür

Järgnevalt lähtume kaabli teoreemist ja kasutame valemit (10.11). Me võime valida tala suvalise lõike paindemomendi ja sellele lõikele vastava kaabli rippe väärtuse, aga kõige lihtsam on praegu arvutust teha silde keskel, kuna seal on meil nii paindemomendi kui rippe väärtus kohe teada

$$H = \frac{M_c^0}{f_c} = \frac{60}{4} = 15 \text{ kN}$$

Kuna kaabel on koormatud ainult vertikaalse koormusega, siis peavad mõlemal toel horisontaalsed toereaktsioonid olema võrdsed

$$H_a = H_b = H = 15 \text{ kN}$$

2. Reaktsioonide arvutus tasakaalutingimustega

Kirjutame välja momentide tasakaalu tingimuse kogu kaablile toeliigendi b suhtes

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 16 - H_a \cdot 2 + 15 \cdot 8 = 0$$

Nüüd vaatleme kaabli vasaku poole tasakaalu ja kirjutame momentide tasakaalu tingimuse punkti c suhtes

$$\sum M_c^y = 0; \quad -V_a \cdot 8 + H_a \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_a = \frac{8}{3}V_a$$

Asetame saadud H_a avaldise esimesena leitud võrrandisse

$$-V_a \cdot 16 - \frac{8}{3}V_a \cdot 2 + 15 \cdot 8 = 0$$

mis annab meile vertikaalse reaktsiooni ja seejärel saame kätte ka horisontaalse reaktsiooni

$$V_a = 5,625 \text{ kN}; \quad H_a = \frac{8}{3} \cdot 5,625 = 15 \text{ kN}$$

Toereaktsioonide arvutamiseks võime kasutada ka võrrandisüsteemi, mille moodustame kahest esimesena avaldatud võrrandist

$$\begin{aligned} -16V_a - 2H_a &= -120 \\ -8V_a + 3H_a &= 0 \end{aligned}$$

mille lahendamisel saame samad tulemused nagu eespoolgi

$$V_a = 5,625 \text{ kN}; \quad H_a = 15 \text{ kN}$$

Kokkuvõtteks võime öelda, et tasakaalutingimustega saime samad tulemused nagu lihttala paindemomendi epüüri abil.

10.5. Lauskoormusega kaabel

Tuletame võrrandi, mis kirjeldab horisontaalsuunas ühtlaselt jaotunud lauskoormusega kaabli kuju. Selleks vaatame joonisel 10.10, a kujutatud kaablit ning kirjutame tasakaalutingimused sellest eraldatud lõpmata lühikese osa dx kohta (joonis 10.10, b).

Horisontaalsuunalisest tasakaalutingimusest $\sum X = 0$ saame, et $H = \text{const}$.

Vertikaalsuunaline tasakaalutingimus annab

$$\begin{aligned} \sum Z = 0; \quad -V + p \cdot dx + V + dV &= 0 \\ p dx + dV &= 0 \\ p &= -\frac{dV}{dx} \end{aligned} \quad (10.12)$$

Momentide tasakaalutingimus lõigu dx parempoolse punkti suhtes

$$\begin{aligned} \sum M = 0; \quad H \cdot dz - V \cdot dx + p \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} &= 0 \\ H dz &= V dx \\ V &= H \frac{dz}{dx} \end{aligned} \quad (10.13)$$

Viimasest tulemusest avaldame z esimese ja teise tuletise

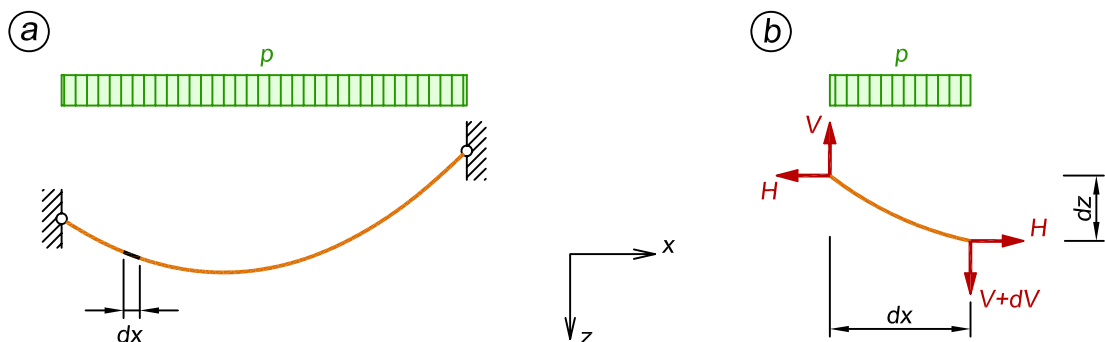
$$\frac{dz}{dx} = \frac{V}{H}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dV}{dx} \quad (10.14)$$

mis, arvestades avaldist (10.12), annab

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{p}{H} \quad (10.15)$$

Integreerime

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{H} (px + C_1) \quad (10.16)$$



Joonis 10.10. Kaabel ja sellest eraldatud lõpmata lühike osa

ja peale teistkordset integreerimist saame kaabli võrrandiks

$$z(x) = -\frac{1}{H} \left(\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2 \right) \quad (10.17)$$

Saadud avaldis on kaabli võrrandi üldkuju, milles olevad integreerimiskonstandid leiame rajatingimustest. Järgnevalt vaatleme kahte erinevat juhtu. Esimesel juhul on toed samal kõrgusel ja arvutuskeem vertikaaltelje suhtes sümmeetriline, teisel juhul on toed erinevatel kõrgustel.

10.5.1. Toed samal kõrgusel

Kui toed paiknevad samal kõrgusel (joonis 10.11), siis võime asetada koordinaatide alguspunkti vasakpoolsesse toesõlme.

Kaabli võrrandi (10.17) integreerimiskonstandid C_1 ja C_2 leiame rajatingimustest, mis arvestavad, et mõlemal toel on vertikaalsuunaline koordinaat võrdne nulliga

$$\begin{aligned} 1. \quad z(0) = 0: \quad C_2 &= 0 \\ 2. \quad z(l) = 0: \quad -\frac{pl^2}{2H} - \frac{C_1l}{H} &= 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{pl}{2} \end{aligned} \quad (10.18)$$

Asetame saadud väärtused võrrandisse (10.17)

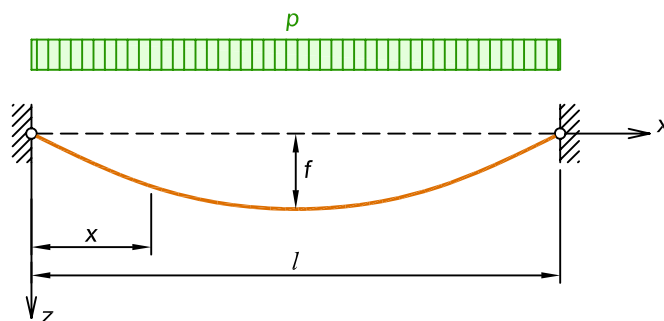
$$z(x) = -\frac{px^2}{2H} + \frac{pl}{2H}x \quad (10.19)$$

millest pärast teisendusi saame

$$z(x) = \frac{px}{2H} (l-x) \quad (10.20)$$

Kaabli horisontaalse reaktsiooni leidmiseks kasutame tuletatud võrrandit poole silde peal ($x = \frac{l}{2}$), kus $z = f$

$$z\left(\frac{l}{2}\right) = f = \frac{p \cdot \frac{l}{2}}{2H} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^2}{8H} \quad (10.21)$$



Joonis 10.11. Kaabel samal kõrgusel tugedega

millest horisontaalne reaktsioon on

$$H = \frac{pl^2}{8f} \quad (10.22)$$

Valemist on näha, et ühtlase lauskoormusega koormatud kaabli horisontaalne reaktsioon on võrdne kaabliga võrdse sildega lihttala paindemomendi ja kaabli rippe jagatisega.

Asetame avaldise (10.22) võrrandisse (10.20) ning pärast teisendusi saame

$$z(x) = \frac{4fx}{l^2}(l-x) \quad (10.23)$$

mis on kolme liigendiga kaare teemast tuttav ruutparabooli valem.

10.5.2. Toed erinevatel kõrgustel

Kui toed asuvad erinevatel kõrgustel (joonis 10.12), siis asetame teljestiku alguspunkti kaabli madalaimasse punkti.

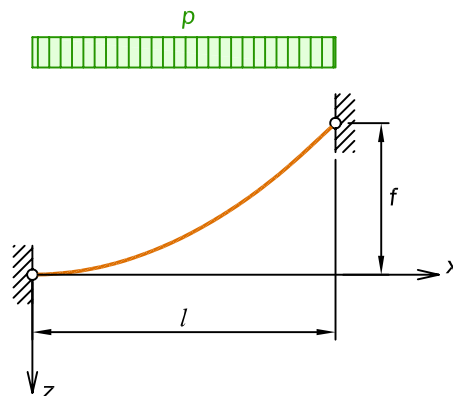
Võrrandi (10.17) integreerimiskonstandid C_1 ja C_2 leiame rajatingimustest, arvestades, et alumisel toel, kus vertikaalne koordinaat võrdub nulliga, on ka kaabli puutuja kaldenurk null

$$\begin{aligned} 1. \quad z(0) = 0: \quad C_2 &= 0 \\ 2. \quad z'(0) = 0: \quad C_1 &= 0 \end{aligned} \quad (10.24)$$

Juhul kui puutuja kaldenurk toel erineb nullist, tuleb see rajatingimusena ette anda. Seda olukorda on käsitletud näites 10.5.

Asetame saadud integreerimiskonstantide väärtused kaabli võrrandisse (10.17)

$$z(x) = -\frac{px^2}{2H} \quad (10.25)$$



Joonis 10.12. Kaabel erinevatel kõrgustel tugedega

Kaabli horisontaalse reaktsiooni leidmiseks kasutame tuletatud võrrandit silde lõpus ($x = l$), kus $z = -f$

$$z(l) = -f = -\frac{pl^2}{2H} \quad (10.26)$$

millest horisontaalne reaktsioon on

$$H = \frac{pl^2}{2f} \quad (10.27)$$

Asetame avaldise (10.27) võrrandisse (10.25) ning pärast teisendusi saame kaabli kuju kirjeldavaks võrrandiks

$$z(x) = -\frac{x^2}{l^2}f \quad (10.28)$$

Kaabli pikijõu saamiseks kasutame selle horisontaal- ja vertikaalkomponenti ning valemit (10.4)

$$N = H\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = H\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = H\sqrt{1 + \left(\frac{px}{H}\right)^2} \quad (10.29)$$

millest saame

$$N(x) = \sqrt{H^2 + (px)^2} \quad (10.30)$$

Kaabli puutuja kaldenurga tangensi suvalises punktis saame avaldisega

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dx} \quad (10.31)$$

millele vastavalt diferentseerime avaldist (10.28) ja saame

$$\tan \alpha = \frac{2fx}{l^2} \quad (10.32)$$

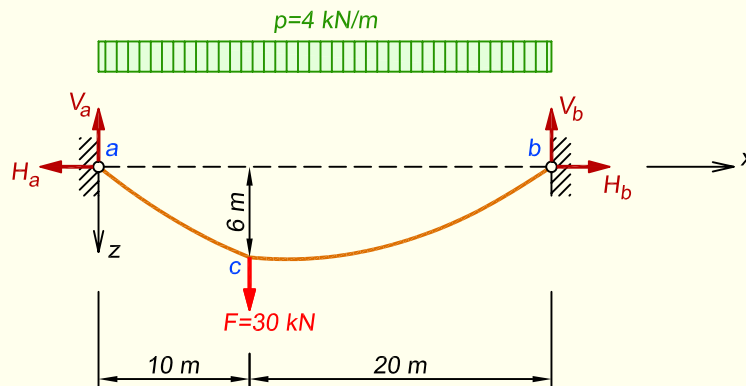
Kaabli diferentsiaalse osa (joonis 10.10, b) pikkus on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{px}{H}\right)^2} \quad (10.33)$$

Üle kogu silde (joonis 10.12) integreerides saame kaabli pikkuseks [1]

$$s = \int_0^l ds = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{px}{H}\right)^2} dx = \frac{l}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{pl}{H}\right)^2} + \frac{H}{2p} \ln \left[\frac{pl}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{pl}{H}\right)^2} \right] \quad (10.34)$$

NÄIDE 10.3. Tuletada joonisel 10.13 kujutatud lauskoormuse ja koondjõuga koor-
matud kaabli kuju kirjeldavad avaldised.



Joonis 10.13. Kaabli arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonide arvutus

Esmalt leiame vertikaalsed toereaktsioonid. Kirjutame välja momentide tasakaalu tingimused kummagi toe suhtes

$$\begin{aligned} \sum M_b = 0; \quad & -V_a \cdot 30 + 30 \cdot 20 + 4 \cdot 30 \cdot 15 = 0; \quad V_a = 80 \text{ kN} \\ \sum M_a = 0; \quad & V_b \cdot 30 - 30 \cdot 10 - 4 \cdot 30 \cdot 15 = 0; \quad V_b = 70 \text{ kN} \end{aligned}$$

Horisontaalsed reaktsioonid leiame punktist *c* kummalegi poole jäävate arvutuskeemi osade tasakaalust

$$\begin{aligned} \sum M_c^v = 0; \quad & H_a \cdot 6 - 80 \cdot 10 + 4 \cdot 10 \cdot 5 = 0; \quad H_a = 100 \text{ kN} \\ \sum M_c^p = 0; \quad & -H_b \cdot 6 + 70 \cdot 20 - 4 \cdot 20 \cdot 10 = 0; \quad H_b = 100 \text{ kN} \end{aligned}$$

2. Kaabli võrrandite tuletamine

Kuna koondjõu asukoha tõttu ei ole arvutuskeem sümmeetriline, siis kirjeldavad kaabli kuju vahemikus *a-c* ja *c-b* erinevad võrrandid.

Asetame koordinaatide alguspunkti sõlme *a*. Valime vahemikul *a-c* mingi suvalise lõike *x* (joonis 10.14, *a*) ja kirjutame selle suhtes välja momentide tasakaalutingimuse kõigi lõikest *x* vasakule jäävate jõududega

$$\sum M_x^v = 0; \quad 100 \cdot h(x) - 80 \cdot x + 4 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

millest saame

$$h(x) = 0,8x - 0,02x^2$$

Saadud avaldis kirjeldab kaabli kuju vahemikus $a-c$.

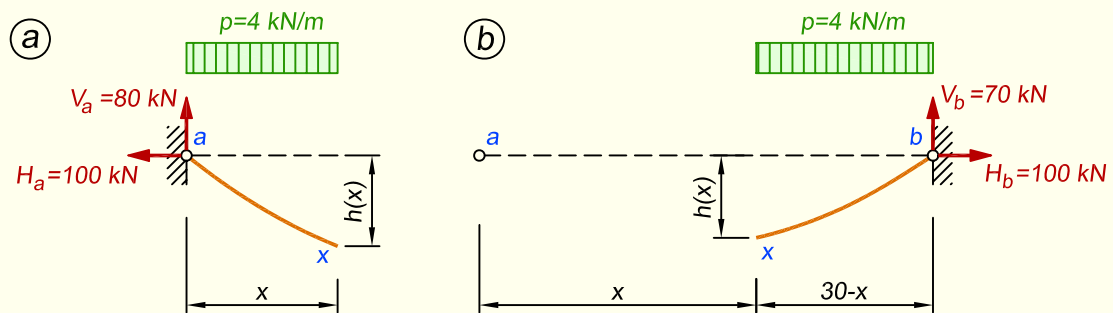
Järgnevalt vaatleme vahemikku $c-b$, kus kirjutame suvalise lõike x (joonis 10.14, b) suhtes momentide tasakaalutingimuse kõigi sellest lõikest paremale jäävate jõududega. Koordinaatide alguspunkt on endiselt sõlmes a .

$$\sum M_x^p = 0; \quad -100 \cdot h(x) + 70(30-x) - 4(30-x) \cdot \frac{30-x}{2} = 0$$

millest saame

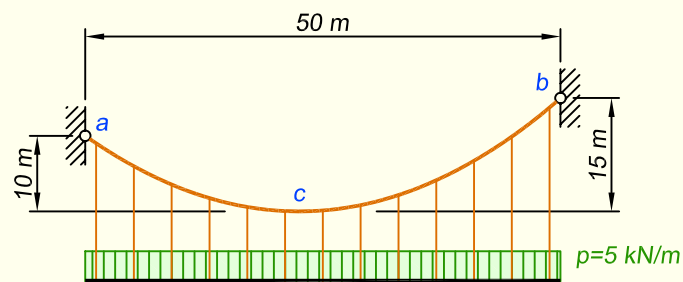
$$h(x) = 3 + 0,5x - 0,02x^2$$

Saadud avaldis kirjeldab kaabli kuju vahemikus $c-b$.



Joonis 10.14. Eraldatud kaabli lõigud

NÄIDE 10.4. Joonisel 10.15 kujutatud arvutuskeemis toetab kaabel $a-b$ ühtlase lauskoormusega koormatud tala. Määrata kaabli pikijõud tugede a ja b juures ning kaabli madalaimas punktis c .



Joonis 10.15. Arvutuskeem

LAHENDUS

Koordinaattelgede alguspunkti paigutame kaabli madalaimasse punkti c (joonis 10.16). Tähistame selle punkti kauguse toest b tähega t . Punkti c kaugus toest a on sel juhul $50 - t$.

Vastavalt valemile (10.25) saame kirjutada

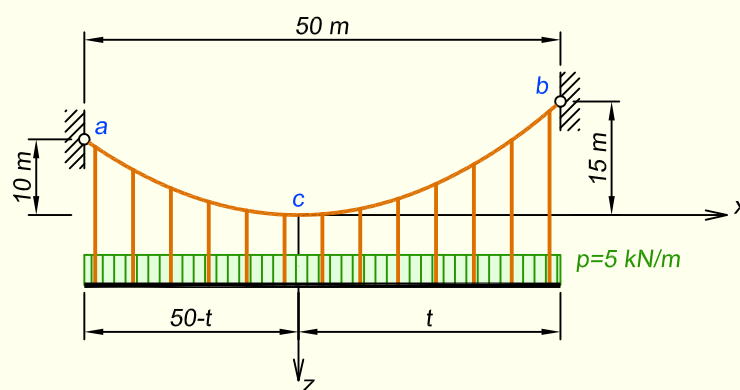
$$z(x) = -\frac{px^2}{2H} = -\frac{5x^2}{2H} = -2,5\frac{x^2}{H}$$

Kaabli parempoolses otsas

$$z(t) = -2,5\frac{t^2}{H} \Rightarrow -15 = -2,5\frac{t^2}{H}$$

millest horisontaalne reaktsioon

$$H = \frac{t^2}{6}$$



Joonis 10.16. Skeem telgede ja kaugustega

Kasutades kaabli vasakpoolses otsas avaldist (10.25), saame

$$-10 = -2,5\frac{[-(50-t)]^2}{H}$$

Ümarate sulgude ees on miinusmärk, kuna tugi *a* paikneb *x*-telje negatiivsel poolel. Asetame siia eespool kaabli parema poolega tuletatud horisontaalse reaktsiooni avaldise

$$-10 = -6 \cdot 2,5\frac{[-(50-t)]^2}{t^2}$$

ning pärast teisendamisi saame ruutvõrrandi

$$0,5t^2 - 150t + 3750 = 0$$

millest kaugus *t* on

$$t = 27,53 \text{ m}$$

ja järelikult horisontaalne reaktsioon

$$H = \frac{t^2}{6} = \frac{27,53^2}{6} = 126,32 \text{ kN}$$

Kaabli pikijõu tugede juures võime arvutada mitut moodi. Kasutame siin valemit (10.5)

$$N = \frac{H}{\cos \alpha}$$

mille jaoks on vaja teada kaabli kaldenurga koosinust kummagi toe juures. Esmalt leiame mõlemas kohas kaldenurga tangensi, milleks kasutame valemit (10.31)

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dx}$$

Kasutame ülesande alguses vastavalt valemile (10.25) tuletatud avaldist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-2,5 \frac{x^2}{H} \right) = -\frac{5x}{126,32} = -0,0396x$$

Kaabli vasakpoolsel toel $x_a = -(50 - 27,53) = -22,47$ m ning kaldenurga tangens ja koosinus on järelikult

$$\tan \alpha_a = -0,0396x = -0,0396 \cdot (-22,47) = 0,8898 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha_a = 0,7471$$

Kaabli pikijõud võrdub seal

$$N_a = \frac{H}{\cos \alpha_a} = \frac{126,32}{0,7471} = 169,1 \text{ kN}$$

Kontrollime arvutust valemiga (10.30)

$$N_a = \sqrt{H^2 + (px)^2} = \sqrt{126,32^2 + (5 \cdot 22,47)^2} = 169,1 \text{ kN}$$

Kaabli parempoolsel toel $x_b = 27,53$ m ning kaldenurga tangens ja koosinus on järelikult

$$\tan \alpha_b = -0,0396x = -0,0396 \cdot 27,53 = -1,0902 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha_b = 0,6760$$

Kaabli pikijõud võrdub

$$N_b = \frac{H}{\cos \alpha_b} = \frac{126,32}{0,6760} = 186,9 \text{ kN}$$

Kuna kaabli madalaimas punktis on puutuja horisontaalne, siis seal on pikijõud võrdne horisontaalse toereaktsiooniga

$$N_c = 126,3 \text{ kN}$$

NÄIDE 10.5. Arvutada joonisel 10.17 näidatud Jaapanis paikneva maailma pikima sildeavaga Akashi-Kaikyo ripp silla pea- ja ankurduskaabli ning riputite sisejõud. Tule-tada võrrand ankurduskaabli kuju kirjeldamiseks.

LAHENDUS

Ripp silla arvutust alustame keskmisest sildest.

1. Peakaabli sisejõudude arvutus

Horisontaalsed reaktsioonid leiame valemiga (10.22), kuna peakaabli toed on samal kõrgusel (joonis 10.18, a)

$$H = \frac{pl^2}{8f} = \frac{600 \cdot 1991^2}{8 \cdot 200} = 1486530 \text{ kN} = 1486,5 \text{ MN}$$

Peakaabli vertikaalse reaktsiooni leiame avaldisega (10.2)

$$V_{c1} = H \tan \alpha = 1486,5 \cdot 0,4018 = 597,3 \text{ MN}$$

Peakaabli vertikaalse reaktsiooni arvutamisel võime lähtuda ka sellest, et kogu sille on kaetud ühtlase lauskoormusega ja pool sellest peab tulema ühele toele

$$V_{c1} = p \cdot \frac{l}{2} = 600 \cdot 995,5 = 597300 \text{ kN} = 597,3 \text{ MN}$$

Peakaabli puutuja kaldenurga tangensi pülooni kõrval (joonis 10.18, b) saame avaldisega (10.32)

$$\tan \alpha = \frac{2fx}{l^2} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 995,5}{995,5^2} = 0,4018$$

Peakaabli puutuja kaldenurga koosinus pülooni kõrval

$$\cos \alpha = 0,9279$$

Peakaabli maksimaalne sisejõud tekib suurima kaldenurgaga kohas ehk pülooni kõrval. Arvutamiseks kasutame avaldist (10.5)

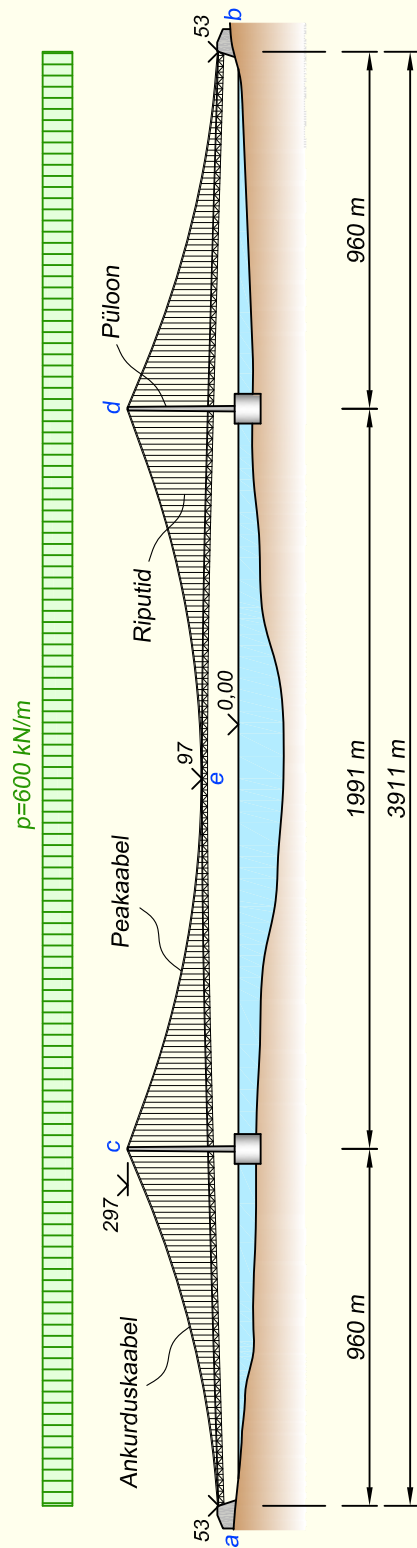
$$N_{\max} = N_{ce} = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{1486,5}{0,9279} = 1602 \text{ MN}$$

Maksimaalse sisejõu võib leida ka avaldisega (10.3) Pythagorase teoreemi abil

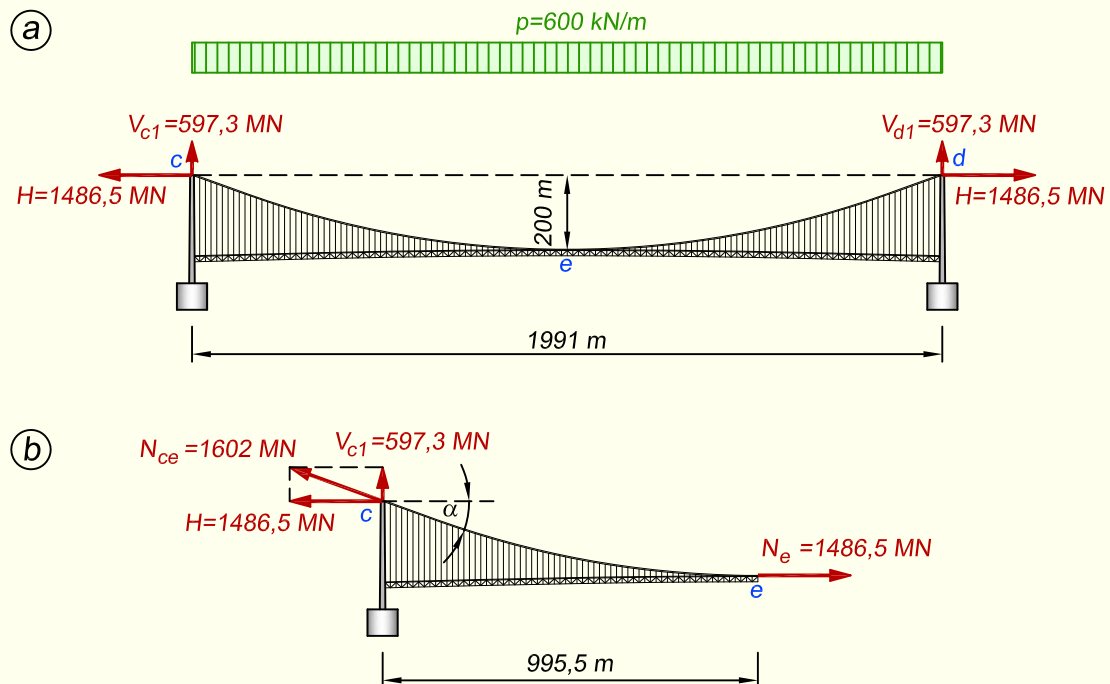
$$N_{\max} = N_{ce} = \sqrt{1486,5^2 + 597,3^2} = 1602 \text{ MN}$$

Peakaabli madalaimas punktis e tekib minimaalne pikijõud, mis võrdub horisontaalse reaktsiooniga

$$N_{\min} = N_e = H = 1486,5 \text{ MN}$$



Joonis 10.17. Akashi-Kaikyo silla skeem mõõtude ja koormusega



Joonis 10.18. Peakaabli arvutus

2. Ankurduskaabli sisejõudude arvutus

Ankurduskaabli arvutuse jaoks vaatame vasakpoolset sillet vahemikus $a-c$ (joonis 10.19). Esmalt rakendame ankurduskaabli ülemisse otsa lõikesse c peakaablist tingitud horisontaalse koormuse $H = 1486,5$ MN. Kuna ankurduskaablile rohkem horisontaalseid jõudusid ei mõju, siis arvutuskeemi horisontaalsuunalisest tasakaalust ($\sum X = 0$) lähtudes peab ankurduskaabli alumises otsas lõikes a tekkima horisontaalne reaktsioon $H = 1486,5$ MN.

Ankurduskaabli vertikaalsed toereaktsioonid leiame tasakaalutingimustest kummagi kaabli otsa suhtes

$$\sum M_c = 0; \quad V_a \cdot 960 - 1486,5 \cdot 244 + \frac{600 \cdot 960 \cdot 480}{1000} = 0; \quad V_a = 89,8 \text{ MN}$$

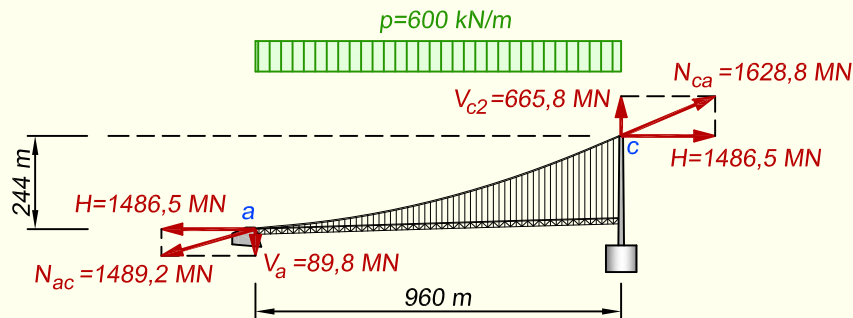
$$\sum M_a = 0; \quad V_{c2} \cdot 960 - 1486,5 \cdot 244 - \frac{600 \cdot 960 \cdot 480}{1000} = 0; \quad V_{c2} = 665,8 \text{ MN}$$

Ankurduskaabli minimaalne pikijõud tekib alumisel toel, kus puutuja kaldenurk on väikseim

$$N_{\min} = N_{ac} = \sqrt{89,8^2 + 1486,5^2} = 1489,2 \text{ MN}$$

Ankurduskaabli maksimaalne pikijõud tekib ülemisel toel, kus puutuja kaldenurk on suurim

$$N_{\max} = N_{ca} = \sqrt{665,8^2 + 1486,5^2} = 1628,8 \text{ MN}$$



Joonis 10.19. Ankurduskaabli arvutus

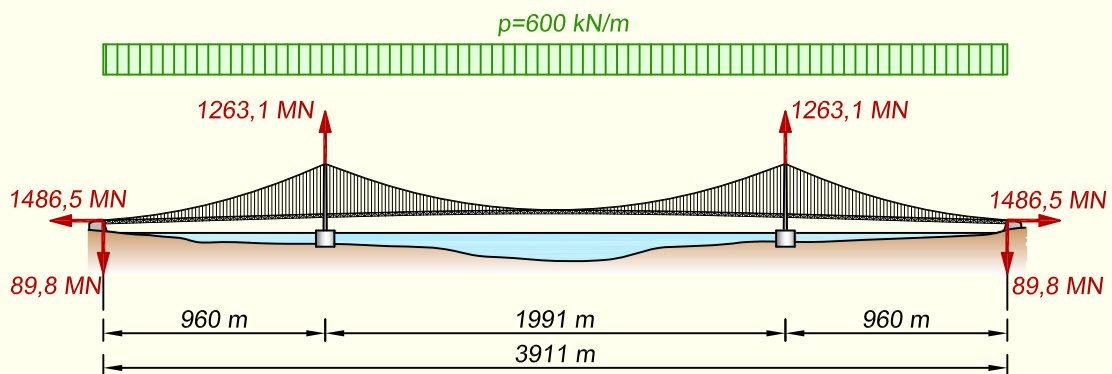
3. Toereaktsioonid

Püloonidele kanduva vertikaalse koormuse saame peakaabli ja ankurduskaabli vertikaalsete reaktsioonide summeerimisel

$$V_c = V_{c1} + V_{c2} = 597,3 + 665,8 = 1263,1 \text{ MN}$$

Toereaktsioonide kontroll vertikaalsuunas (joonis 10.20)

$$\sum Z = 89,8 \cdot 2 - 1263,1 \cdot 2 + \frac{600 \cdot 3911}{1000} = 0$$



Joonis 10.20. Toereaktsioonid

4. Pea- ja ankurduskaabli tugevusarvutus

Pea- ja ankurduskaablid on valmistatud kõrgtugevast terasest. Kaablis (joonis 10.21) on 290 traadikimpu, neist igäühes 127 traati. Seega on kaablis $290 \cdot 127 = 36830$ traati. Traadi diameeter on 5,23 mm ja tõmbetugevus on 1800 MPa. Kaablis olevate traatide

ristlõike summaarne pindala on

$$A = \frac{\pi \cdot 0,00523^2}{4} \cdot 36830 = 0,791 \text{ m}^2$$

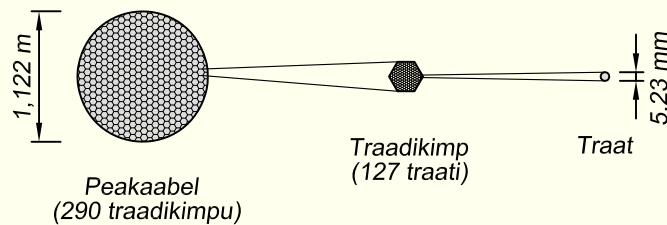
Kuna kaableid on kaks, siis ühes kaablis on maksimaalne sisejõud

$$N_{\max} = 1628,8 \cdot 0,5 = 814,4 \text{ MN}$$

Maksimaalne pinge on

$$\max \sigma = \frac{814,4 \text{ MN}}{0,791 \text{ m}^2} = 1030 \text{ MPa}$$

mis on väiksem kui lubatav pinge.



Joonis 10.21. Kaabel

5. Riputite arvutus

Riputite diameeter on 87 mm ning ristlõike pindala seega

$$A = \frac{\pi \cdot 0,087^2}{4} = 0,005945 \text{ m}^2$$

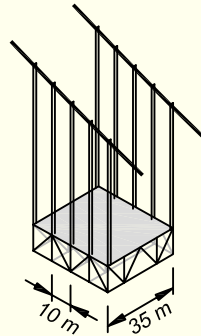
Riputite tuleva koormuse arvutamisel lähtume joonisest 10.22, kus on näidatud riputite paiknemine. Silla iga kümnemeetrise lõigu kohta on neli riputit: kaks silla ühes ja kaks teise servas. Ühele riputite tulev koormus on järelikult

$$\frac{10 \cdot 600}{4} = 1500 \text{ kN}$$

Maksimaalne pinge on

$$\max \sigma = \frac{1,5 \text{ MN}}{0,005945 \text{ m}^2} = 252 \text{ MPa}$$

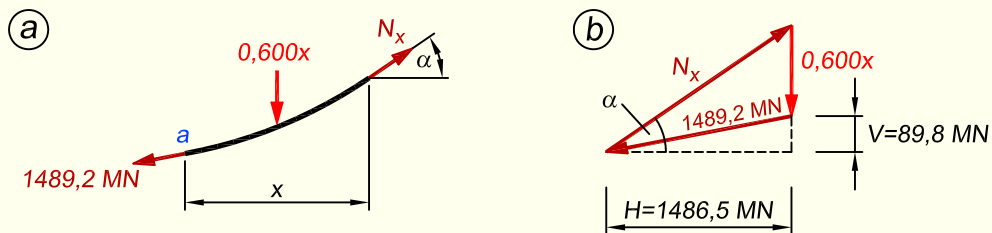
mis on väiksem kui lubatav pinge.



Joonis 10.22. Riputite paiknemise skeem

6. Ankurduskaabli võrrandi tuletamine

Ankurduskaabli võrrandi tuletame kahe erineva meetodiga. Esimesel juhul vaatame alumise toesõlme poolt kaabli lõiku, mille horisontaalprojektsiooni pikkus on x (joonis 10.23, a). Kanname joonisele kõik lõigule x mõjuvad jõud – toereaktsiooni 1489,2 MN, kaablilõigu teises otsas esineva pikijõu N_x , mis on tundmatu, ning lauskoormuse resultandi $0,600x$.



Joonis 10.23. Ankurduskaabli võrrandi tuletamine

Tasakaalus oleva arvutuskeemi korral peavad jõud moodustama kinnise jõuhulknurga, mis on näidatud joonisel 10.23, b. Edasiseks arvutuseks jagame toereaktsiooni vertikaalseks ja horisontaalseks komponendiks ning kanname ka need lõigud joonisele. Vastavalt avaldisele (10.31) saame joonise 10.23, b abil avaldada kaabli puutuja kalde-nurga tangensi

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dx} = -\frac{0,600x + 89,8}{1486,5}$$

$$\frac{dz}{dx} = -0,0004036x - 0,0604104$$

Kaabli võrrandi saamiseks integreerime saadud avaldist

$$z(x) = \int (-0,0004036x - 0,0604104) dx$$

$$z(x) = -\frac{0,0004036x^2}{2} - 0,0604104x - C_1$$

millest võrrand lõplikul kujul on

$$z(x) = -0,0002018x^2 - 0,0604104x$$

Teisel juhul lähtume kaabli võrrandi üldkujust (10.17)

$$z(x) = -\frac{1}{H} \left(\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2 \right)$$

ja anname ette rajatingimused alumisel toel a , kus on teada vertikaalne koordinaat ja kaabli kaldenurga tangens

$$z(0) = 0; \quad \tan \alpha = \frac{dz}{dx} = -\frac{89,8}{1486,5} = -0,0604104$$

Neist esimese rajatingimusega saame kaabli võrrandist

$$z(0) = -\frac{1}{H} \left(\frac{p \cdot 0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{C_2}{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Teise rajatingimuse kasutamiseks peame kaabli võrrandit (10.17) diferentseerima

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{H} (px + C_1)$$

Kuna kaabli alguses $x = 0$, siis saame kirjutada, et

$$\frac{C_1}{H} = 0,0604104 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0,0604104H$$

Asetame saadud integreerimiskonstandid kaabli võrrandisse (10.17)

$$z(x) = -\frac{1}{H} \left(\frac{px^2}{2} + 0,0604104Hx + 0 \right)$$

mis peale lauskoormuse ning horisontaalse reaktsiooni lisamist annab

$$z(x) = -\frac{0,600x^2}{2 \cdot 1486,5} - 0,0604104x$$

ja pärast teisendamist

$$z(x) = -0,0002018x^2 - 0,0604104x$$

Saime sama tulemuse nagu eelmiseги lahenduskäiguga.

10.5.3. Kaabli pikitelje suunas jaotatud koormus

Joonisel 10.24, *a* kujutatud kaabel on koormatud muutuva lauskoormusega, mis on jaotatud kaabli pikitelje suunas. Joonisel 10.24, *b* on näidatud kaabli diferentsiaalosa ning sellele mõjuv resultantjõud

$$p dx = q ds \quad (10.35)$$

millest

$$p = q \frac{ds}{dx} = q \frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{dx} \quad (10.36)$$

Koormusele q vastavaks horisontaalsuunas jaotatud lauskoormuseks p on

$$p = q \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad (10.37)$$

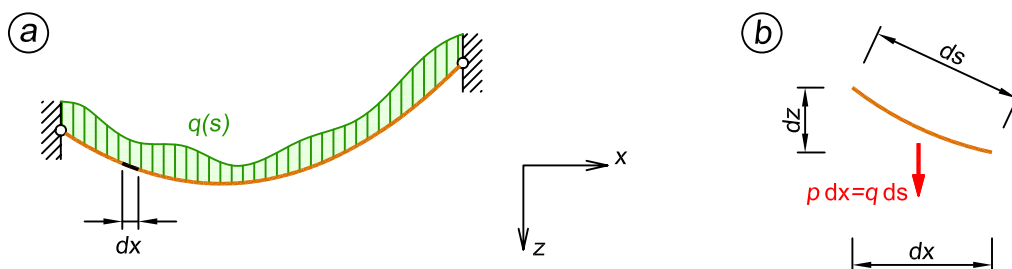
Asetades selle avaldisse (10.15), saame

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{q}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad (10.38)$$

ehk

$$z'' = -\frac{q}{H} \sqrt{1 + (z')^2} \quad (10.39)$$

mis on kaabli pikkuse suunas jaotunud koormusega kaabli asukohta kirjeldava avaldise $z(x)$ teist järku tuletis.



Joonis 10.24. Kaabel, mis on koormatud pikitelje suunas jaotunud muutuva lauskoormusega

10.5.4. Omakaaluga koormatud kaabel

Kui kaabel on koormatud omakaaluga, siis koormus q on kaabli telje suunas konstantne (joonis 10.25). Lahendame avaldise (10.39), võttes uueks muutujaks $y(x)$ selliselt, et $\sinh y = z'$. Sel juhul teisendub avaldis (10.39) järgmiselt

$$(\sinh y)' = -\frac{q}{H} \sqrt{1 + (\sinh y)^2} \quad (10.40)$$

Kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise valemit $(\sin u)' = u' \cos u$ ning hüperboolse siinuse ja koosinuse omavahelist seost, saame

$$y' \cosh y = -\frac{q}{H} \cosh y \Rightarrow y' = -\frac{q}{H} \Rightarrow y = -\frac{q}{H}x - C_1 \quad (10.41)$$

Kuna $z' = \sinh y$, siis

$$z' = \sinh\left(-\frac{q}{H}x - C_1\right) \quad (10.42)$$

millest integreerimise tulemusena (kasutame valemit $\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax$) saame

$$z(x) = \frac{H}{q} \cosh\left(-\frac{q}{H}x - C_1\right) + C_2 \quad (10.43)$$

Tuletatud avaldises (10.43) esinevad integreerimiskonstandid C_1 ja C_2 leiame rajatingimustest, arvestades, et alumisel toel, kus vertikaalne koordinaat võrdub nulliga, on ka kaabli puutuja kaldenurk null

1. $z(0) = -\frac{H}{q} \cosh C_1 + C_2 = 0$
2. $z'(0) = \sinh C_1 = 0$

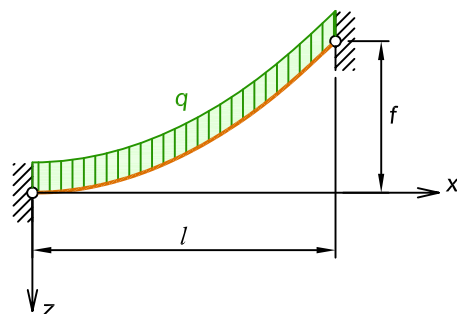
(10.44)

Neist teine tingimus annab tulemuseks $C_1 = 0$, seejärel saab esimesest tingimusest $C_2 = \frac{H}{q}$. Asetades leitud integreerimiskonstandid avaldisse (10.43), saame kaabli kuju kirjeldavaks võrrandiks

$$z(x) = -\frac{H}{q} \left(\cosh \frac{qx}{H} - 1 \right) \quad (10.45)$$

Kaabli pikijõu saamiseks kasutame selle horisontaal- ja vertikaalkomponenti, valemit (10.4) ning tuletist avaldisest (10.45)

$$N = H \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = H \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = H \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{qx}{H}\right)} \quad (10.46)$$



Joonis 10.25. Omakaaluga koormatud kaabel

millest saame

$$N(x) = H \cosh \frac{qx}{H} \quad (10.47)$$

Kaabli diferentsiaalse osa (joonis 10.24, b) pikkus on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{qx}{H}\right)} = \cosh \frac{qx}{H} dx \quad (10.48)$$

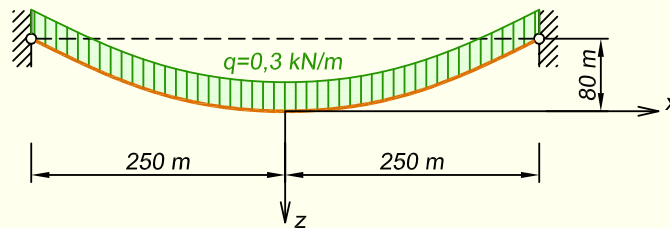
Kogu silde pikkusele (joonis 10.25) saame

$$s = \int_0^l ds = \int_0^l \cosh \frac{qx}{H} dx \quad (10.49)$$

mis integreerimise tulemusena annab kaabli pikkuseks

$$s = \frac{H}{q} \sinh \frac{ql}{H} \quad (10.50)$$

NÄIDE 10.6. Joonisel 10.26 on kujutatud kaabel, mis on koormatud ainult omakaaluga. Arvutada kaabli horisontaalreaktsioon, suurim ja väikseim pikijõud ning kaabli pikkus.



Joonis 10.26. Kaabli arvutuskeem

LAHENDUS

Koordinaattelgede alguspunkti paigutame kaabli madalaimasse punkti. Seetõttu tähistame järgnevat arvutustes $l = 250 \text{ m}$.

Esmalt leiame horisontaalse reaktsiooni, milleks kasutame kaabli võrrandit (10.45). Kirjutame võrrandi välja parempoolse toe kohal, kus kaabli kaugus x -teljest on võrdne kaabli rippe väärtusega $f = 80 \text{ m}$

$$z(l) = -\frac{H}{q} \left(\cosh \frac{qx}{H} - 1 \right) = f$$

millest

$$-\frac{H}{0,3} \left(\cosh \frac{0,3 \cdot 250}{H} - 1 \right) = -80 \Rightarrow \cosh \frac{75}{H} - 1 + \frac{24}{H} = 0$$

Saadud avaldis on mittelineaarne ja horisontaalse reaktsiooni saame kätte katsetamise teel, kus anname ette H väärtused mingi sammuga ja leiame, millise väärtuse korral on avaldis võrdne nulliga

| H , [kN] | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 |
|------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| avaldise väärtus | 0,0018 | 0,0000 | -0,0017 | -0,0034 | -0,0050 | -0,0065 |

Muutes horisontaalset reaktsiooni vahemikus 120...125, näeme, et avaldise nullkoht on kohal

$$H = 121 \text{ kN}$$

Kaabli väikseim pikijõud on koordinaatteljestiku nullpunktis, kus kaabli puutuja on horisontaalne. Pikijõud võrdub seal horisontaalse reaktsiooniga, aga samuti saame selle kätte ka valemiga (10.47)

$$N_{\min} = H = N(0) = H \cosh \frac{qx}{H} = 121 \cdot \cosh \frac{0,3 \cdot 0}{121} = 121 \text{ kN}$$

Suurim pikijõud esineb kohas, kus puutuja kaldenurk on suurim ehk toel

$$N_{\max} = N(l) = 121 \cdot \cosh \frac{0,3 \cdot 250}{121} = 145 \text{ kN}$$

Kaabli pikkuse saame avaldisega (10.50)

$$s = 2 \cdot \frac{H}{q} \sinh \frac{ql}{H} = 2 \cdot \frac{121}{0,3} \sinh \frac{0,3 \cdot 250}{121} = 532,6 \text{ m}$$

10.6. Viltuse koormusega kaabel

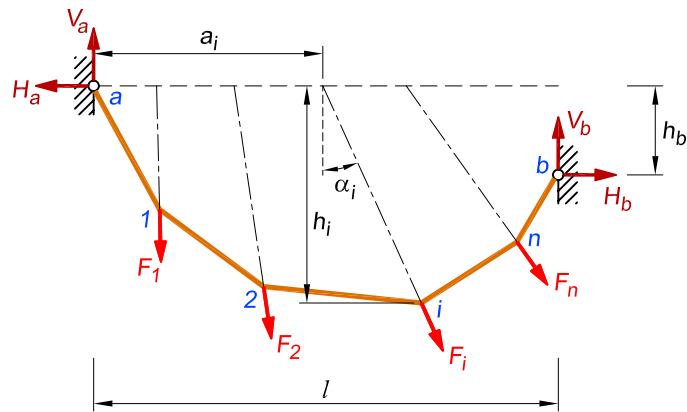
Kui seni käsitlesime kaabli arvutust vertikaalsetest koormustest, siis siin peatükis vaatleme kaablit, mis on koormatud viltuste jõududega.

Joonisel 10.27 on kaablile rakendatud n koondjõudu, mille mõjusirgete kaugused vasakust toest a_i ja kaldenurgad α_i on teada. Koormuste rakenduspunktide i kõrgused h_i on tundmatud peale ühe.

Kirjutame joonise 10.27 abil jõudude momentide tasakaalutingimuse parempoolse toe b suhtes

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a l + H_a h_b + \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i (l - a_i) - \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i h_b = 0 \quad (10.51)$$

kus kõik jõud on jagatud vertikaalseks ning horisontaalseks komponendiks jõu mõjusirge ning tuge a läbiva horisontaali lõikumise punktis. Võime saadud tulemust veel teisendada



Joonis 10.27. Kaabel viltuste koormustega

kujule

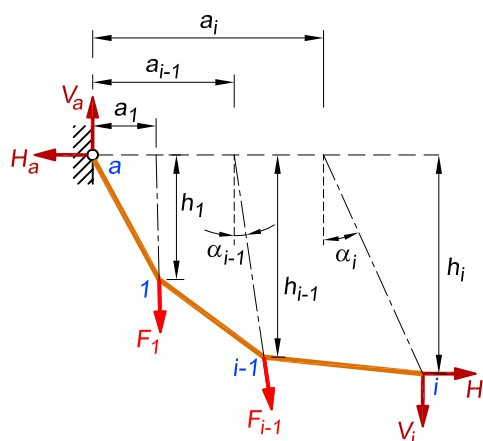
$$V_a l - H_a h_b = \sum_{i=1}^n F_i [(l - a_i) \cos \alpha_i - h_b \sin \alpha_i] \quad (10.52)$$

Järgnevalt kirjutame momentide tasakaalutingimused kõigi punktide $1, 2, \dots, n$ suhtes, vaadeldes iga punkti puhul sellest vasakule jäävat arvutusskeemi osa. Tasakaalutingimus punkti i suhtes (joonis 10.28) on

$$\begin{aligned} \sum M_i = 0; \quad & -V_a (a_i + h_i \tan \alpha_i) + H_a h_i + F_1 \cos \alpha_1 (a_i + h_i \tan \alpha_i - a_1) + \\ & + F_{i-1} \cos \alpha_{i-1} (a_i + h_i \tan \alpha_i - a_{i-1}) - F_1 \sin \alpha_1 h_i - F_{i-1} \sin \alpha_{i-1} h_i = 0 \end{aligned} \quad (10.53)$$

Võttes osa liikmeid kokku, saame

$$V_a (a_i + h_i \tan \alpha_i) - H_a h_i = \sum_{j=1}^{i-1} F_j [(a_i + h_i \tan \alpha_i - a_j) \cos \alpha_j - h_i \sin \alpha_j] \quad (10.54)$$



Joonis 10.28. Punktist i vasakule poole jääv kaabli osa

Avaldis (10.52) ning avaldis (10.54), kus $i = 1, \dots, n$, annavad $n + 1$ võrrandit, kus tundmatuteks on vasakpoolse toe a reaktsioonid V_a ja H_a ning punktide i kõrgused h_i , kus $i = 1, \dots, n$, välja arvatud ühe punkti kõrgus, mis on teadaolev väärtus. Moodustub võrrandisüsteem tundmatute määramiseks [1].

Kaabli mingi osa i pikijõu arvutamiseks koostame punktist i vasakule jääva arvutuskeemi osa horisontaal- ja vertikaalsuunalised tasakaalutingimused

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad -H_a + H_i + F_1 \sin \alpha_1 + F_{i-1} \sin \alpha_{i-1} = 0 \\ \sum Z = 0; & \quad -V_a + V_i + F_1 \cos \alpha_1 + F_{i-1} \cos \alpha_{i-1} = 0 \end{aligned} \quad (10.55)$$

millest saame kaabli pikijõu horisontaal- ja vertikaalsuunalise komponendi

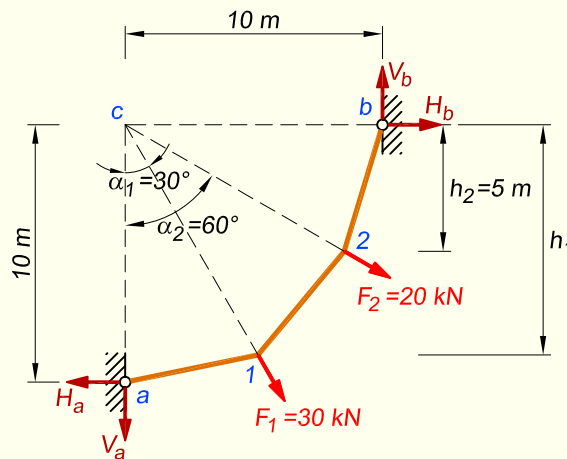
$$H_i = H_a - \sum_{j=1}^{i-1} F_j \sin \alpha_j; \quad V_i = V_a - \sum_{j=1}^{i-1} F_j \cos \alpha_j \quad (10.56)$$

kus $i = 1, \dots, n + 1$

Kaabli osa i pikijõu leiame komponentide abil

$$N_i = \sqrt{H_i^2 + V_i^2} \quad (10.57)$$

NÄIDE 10.7. Joonisel 10.29 on kujutatud kaabel, mis on koormatud kahe viltuse koondjõuga. Jõu F_2 rakenduspunkti kõrgus on teada. Arvutada punkti I kõrgus ning kaabli üksikute osade pikijõud.



Joonis 10.29. Kaabli arvutuskeem

LAHENDUS

Kirjutame jõudude momentide summa parempoolse toesõlme b suhtes, jagades jõud F_1 ja F_2 komponentideks punktis c . Kuna horisontaalsed komponendid on sel juhul suuna-

tud täpselt toesõlme b suunas, siis taanduvad nemad välja

$$\sum M_b = 0; \quad V_a \cdot 10 - H_a \cdot 10 + 30 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ + 20 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ = 0$$

mis peale teisendusi annab

$$V_a - H_a = -15 - 10\sqrt{3} \quad (1. \text{ võrrand})$$

Samale tulemusele oleksime jõudnud ka, kasutades valemit (10.52)

Järgnevalt kirjutame momentide tasakaalutingimused punktide 1 ja 2 suhtes, vaadeldes mõlema punkti puhul sellest vasakule jäävat arvutuskeemi osa. Tasakaalutingimus punkti 1 suhtes on

$$\sum M_1 = 0; \quad V_a \cdot \tan 30^\circ \cdot h_1 - H_a(10 - h_1) = 0$$

ehk

$$V_a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot h_1 - H_a(10 - h_1) = 0 \quad (2. \text{ võrrand})$$

Tasakaalutingimus punkti 2 suhtes on

$$\sum M_2 = 0; \quad V_a \cdot \tan 60^\circ \cdot 5 - H_a \cdot 5 - 30 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ + 30 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 \cdot \tan 60^\circ = 0$$

ehk

$$V_a \cdot \sqrt{3} \cdot 5 - H_a \cdot 5 - 30 \cdot 5 \cdot 0,5 + 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 0$$

mis pärast teisendusi annab

$$H_a = V_a\sqrt{3} + 30 \quad (3. \text{ võrrand})$$

Asetame kolmanda võrrandi esimesse võrrandisse

$$V_a - V_a\sqrt{3} - 30 + 15 + 10\sqrt{3} = 0$$

millest vertikaalne reaktsioon vasakul toel

$$V_a = -\frac{5\sqrt{3} - 15}{2} = 3,17 \text{ kN}$$

Saadud tulemuse asetame kolmandasse võrrandisse, mis annab horisontaalse reaktsiooni vasakul toel

$$H_a = -\frac{5\sqrt{3} - 15}{2}\sqrt{3} + 30 = \frac{15\sqrt{3} + 45}{2} = 35,49 \text{ kN}$$

Kõrguse h_1 leidmiseks kasutame leitud toereaktsioone, mille asetame teise võrrandisse

$$-\frac{5\sqrt{3} - 15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot h_1 - \frac{15\sqrt{3} + 45}{2} (10 - h_1) = 0$$

mis annab

$$h_1 = \frac{50(\sqrt{3} + 3)}{14 + 6\sqrt{3}} = 9,70 \text{ m}$$

Kaabli üksikute osade horisontaal- ja vertikaalkomponendid arvutame lõikemeetodi abil, vaadates kaabli mingist osast kõiki vasakule poole jäävaid jõudusid. Arvutuse lihtsustamiseks kasutame punktidesse 1 ja 2 rakendatud jõudude komponente (joonis 10.30)

$$H_{a-1} = H_a = 35,49 \text{ kN}$$

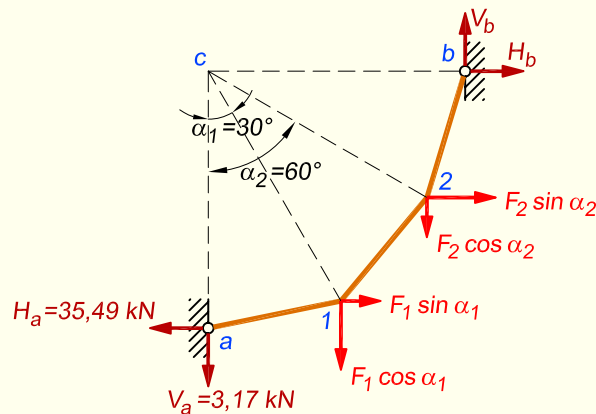
$$V_{a-1} = V_a = 3,17 \text{ kN}$$

$$H_{1-2} = H_a - F_1 \sin \alpha_1 = 35,49 - 30 \cdot 0,5 = 20,49 \text{ kN}$$

$$V_{1-2} = V_a + F_1 \cos \alpha_1 = 3,17 + 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 29,15 \text{ kN}$$

$$H_{2-b} = H_a - F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2 = 35,49 - 30 \cdot 0,5 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,17 \text{ kN}$$

$$V_{2-b} = V_a + F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 = 3,17 + 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot 0,5 = 39,15 \text{ kN}$$



Joonis 10.30. Kaabli üksikute osade horisontaal- ja vertikaalkomponentide arvutus

Kaabli pikijõud arvutame komponentide abil

$$N_{a-1} = \sqrt{H_{a-1}^2 + V_{a-1}^2} = \sqrt{35,49^2 + 3,17^2} = 35,63 \text{ kN}$$

$$N_{1-2} = \sqrt{H_{1-2}^2 + V_{1-2}^2} = \sqrt{20,49^2 + 29,15^2} = 35,66 \text{ kN}$$

$$N_{2-b} = \sqrt{H_{2-b}^2 + V_{2-b}^2} = \sqrt{3,17^2 + 39,15^2} = 39,66 \text{ kN}$$

Peatükk 11

SIIRETE ARVUTUS

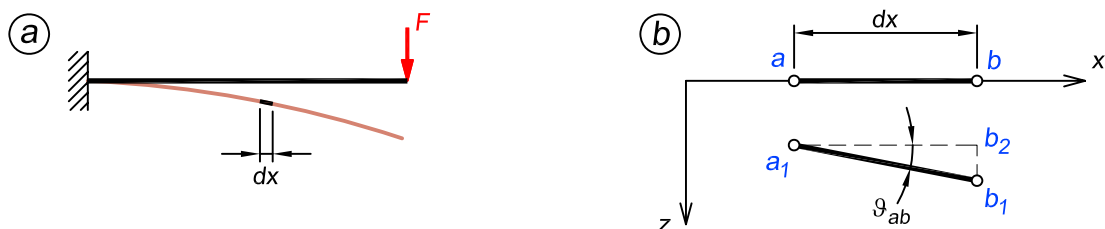
11.1. Sissejuhatus

Siirde ja deformatsiooni mõiste

Koormuse rakendamisel muutub konstruktsiooni esialgne kuju – konstruktsioon deformeerub. See kujumuutus on põhjustatud konstruktsiooni moodustavate materjaliosakeste omavahelise asendi muutumisest. *Deformatsiooniks* nimetatakse varda mõõtmete ja kuju muutumist. Ehitise deformeerumisel siirduvad kõik või peaaegu kõik tema punktid uude kohta. *Siirdeks* nimetatakse konstruktsioonielemendi mingi punkti või sirge asendi muutust oma algasendi suhtes. Selleks, et tagada konstruktsiooni kasutuskõlbulikkus, tuleb vältida liialt suurte deformatsioonide teket. Lisaks koormusele võivad varraste deformatsioone põhjustada ka temperatuuri muutused ning tugede vajumised.

Siirde mõiste täpsemaks selgitamiseks vaatame joonist 11.1, kus on kujutatud koondjõuga koormatud konsooli deformeerumine. Varda elementaarse osakese dx otspunkti a (joonis 11.1, b) siirdeks on siire $a-a_1$. Lineaarse elemendi asendi muutuse määrame tema pöörde ja sellel elemendil suvaliselt valitud punkti siirdega. Näiteks lineaarse elemendi $a-b$ asend pärast konstruktsiooni deformeerumist on määratud punkti a siirdega $a-a_1$ ja elemendi $a-b$ pöördega ϑ_{ab} . Lineaarse elemendi pöörde ϑ_{ab} on elemendi uue sihi a_1-b_1 ja esialgse sihi $a-b$ vaheline nurk ($a_1-b_2 \parallel a-b$).

Ehituskonstruktsioonid peavad olema tugevad, püsivad ja jäigad. Viimast tingimust iseloomustatakse konstruktsiooni elementide siirete ja nende elementide põhimõõtmete suhtega.



Joonis 11.1. Konsooli deformeerumine ning selle elementaarse osakese dx siirdumine

Seepärast on vaja projekteeritava konstruktsiooni jäikuse hindamiseks arvutada siirded, mis tekivad konstruktsiooni kasutamisel. Tähtsamaid ja unikaalsemaid ehitisi kontrollitakse lisaks veel mudelkatsetest määratud siirete võrdlemisega teoreetiliselt arvatud siiretega.

Projekteerimispraktikas juhtub väga sageli, et konstruktsiooni ristlõike lõplike mõõtmete määramisel saab otsustavaks mitte kandevõime, vaid deformatsioonid. Näiteks võib vahelae-tala arvutamisel selguda, et kandevõime on sellel igati tagatud ja purunemiseohtu seetõttu pole, aga deformatsioonid on lubatust suuremad, mis tähendab tala liigset läbivajumist.

Lisaks eespool esitatud vajadustele nõuab iga staatikaga määramatu ehitise arvutus peale staatika tasakaaluvõrrandite veel projekteeritava konstruktsiooni elementide siirdeid sisal-davate võrrandite koostamist ja lahendamist.

Seepärast on konstruktsioonide siirete arvutamine ehitismehaanika üheks põhiülesan-deks.

Lineaarselt deformeeruvad konstruktsioonid

Edaspidi vaatleme ainult lineaarselt deformeeruvaid konstruktsioone, kus on täidetud järg-mised tingimused:

1. pinged ja deformatsioonid on lineaarses sõltuvuses;
2. varda ristlõiked on elastses staadiumis, mis tähendab, et pinged muutuvad ristlõikes alates nulljoonest kuni äärmiste kiududeni lineaarselt;
3. pärast koormuse eemaldamist taastab konstruktsioon oma esialgse kuju.

Lineaarselt deformeeruvate konstruktsioonide puhul kehtib jõudude mõju sõltumatuse printsiip, mille kohaselt konstruktsiooni suvalise punkti k siire Δ_k avaldub lineaarse funk-t-sioonina konstruktsioonile mõjuvatest välisjõududest F_1, F_2, \dots, F_n

$$\Delta_k = \delta_{k1}F_1 + \delta_{k2}F_2 + \dots + \delta_{kn}F_n = \sum_{i=1}^n \delta_{ki}F_i \quad (11.1)$$

kus δ_{ki} on punkti k siire, mis on põhjustatud ühikjõust kohas i ($F_i = 1$).

Virtuaalsiirete printsiip

Kõige üldisem meetod konstruktsioonide tasakaalu uurimisel põhineb virtuaalsiirete print-siibil. Eespool on meil peatükis 3.3 sellest printsiibist juba juttu olnud, nüüd sõnastame vir-tuaalsiirete printsiibi veidi teistsugusel kujul, et see oleks sobivam lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni siirete arvutamise avaldiste tuletamiseks.

Kui konstruktsioon on temale rakendatud koormuse mõjul tasakaalus, siis konstruktsioo-ni elementide virtuaalsiiretel võrdub välis- ja sisejõudude tööde summa nulliga.

Eelneva definitsiooni saame välja kirjutada kujul

$$W_v + W_s = 0 \quad (11.2)$$

kus W_v on välisjõudude ja W_s sisejõudude virtuaaltöö virtuaalsiiretel.

Võrrandist (11.2) järeldub, et sisejõudude töö on võrdne välisjõudude tööga, kuid vastupidise märgiga

$$W_s = -W_v \quad (11.3)$$

Valdav osa ehitisi töötavad tingimustes, mille juures pinged materjalis ei ületa elastsuspääri. Kuna materjali elastsetest deformatsioonidest põhjustatud siirded on võrreldes konstruktsiooni mõõtmetega väga väikesed, siis rakendatakse virtuaalsiirete printsiipi ka konstruktsioonide tegelikel siiretel.

Siirete ja tööde klassifikatsioon

Enne edasiliikumist peame täpsustama siirde ja töö mõistet, kuna mõlemad jagunevad mitmeks alaliigiks.

Mehaanikas eristatakse kolme liiki siirdeid: *võimalikud siirded*, *tegelikud siirded* ja *virtuaalsiirded* [17]. Võimalikeks siireteks nimetatakse siirdeid antud asendist, mis on koosõlas sidemetega. Võimalikke siirdeid on üldjuhul lõpmata palju. Tegelik siire on üks võimalikest ja nimelt see, mis realiseerub arvutusskeemile rakendatud jõudude toimel. Juhul kui arvutusskeemi sidemed on statsionaarsed (nagu nad ehituskonstruktsioonide puhul on), siis ühtib virtuaalsiirete klass võimalike siirete klassiga ja tegelik siire on üks virtuaalsiiretest.

Ehitismehaanikas kasutatakse kolme erinevat töö mõistet:

1. *aktiivtöö* (vanemas kirjanduses ka *tegelik töö*) on jõudude töö virtuaalsiiretel, kui need siirded on põhjustatud vaadeldavate jõudude poolt;
2. *passiivtöö* (vanemas kirjanduses ka *võimalik töö*) on jõudude töö virtuaalsiiretel, kui need siirded ei ole põhjustatud vaadeldavate jõudude poolt;
3. *täiendustöö* on virtuaaljõudude töö siiretel, kui need siirded on põhjustatud vaadeldavate jõudude poolt.

11.2. Aktiivtöö

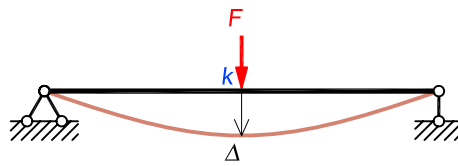
11.2.1. Välisjõudude töö

Töö defineeritakse jõu ja selle poolt põhjustatud siirde korrutisena. Kui jõud on kogu siirdumise kestel konstantne, siis väljendame jõu tööd järgmise avaldisega

$$W = F\Delta \quad (11.4)$$

kus tegur F esitab jõudu ja tegur Δ on jõu rakenduspunkti siirde komponent jõu sihil. Töö on positiivne, kui jõud ja siire on samas suunas, ning negatiivne, kui jõud ja siire on vastupidistes suundades.

Järgnevalt tuletame avaldise jõu aktiivtöö leidmiseks.



Joonis 11.2. Välisjõu tehtav aktiivtöö

Aktiivtööks nimetatakse niisugust tööd, mida teevad konstruktsioonile rakendatud jõud siiretel, mis on põhjustatud nende samade jõudude poolt.

Koormuse rakendamine põhjustab konstruktsiooni deformeerumist. Kui koormus kasvab pikkamööda, nii et konstruktsiooni elementide deformeerumine on aeglane ja seetõttu ka deformeerumisel tekkivad inertsjõud on võrreldes teiste mõjuvate jõududega kaduvväikesed, siis nimetatakse koormuse rakendamist staatiliseks.

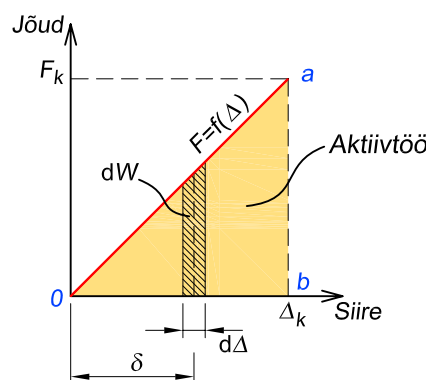
Vaatame joonisel 11.2 kujutatud lihttala, mis on löikes k koormatud koondjõuga. Tähistame konstruktsioonile staatiliselt mõjuva koormuse F ning temale vastava siirde Δ . Kui koormus ja siire kasvavad koos alates nullist kuni suurusteni vastavalt F_k ja Δ_k , siis saame jõu-siirde graafikuks joonisel 11.3 kujutatud joone $0-a$. Jõu poolt tehtavaks tööks on sellest graafikust allapoole jääva kolmnurga $0ab$ pindala, mis joonisel on näidatud kollasega.

Tehtava töö leidmiseks tuleb nüüd arvutada mainitud pindala. Praegusel juhul, kuna käsitleme lineaarselt deformeeruvaid konstruktsioone, on jõu-siirde graafik sirgjoon ja selle alla jääv pindala lihtsa kujuga. Aga esitame selle arvutuse ikkagi üldisemal kujul. Selleks jagame siirde lõpmata lühikesteks osadeks $d\Delta$, mille ulatuses loeme jõu konstantseks. Igale sellisele osale vastav elementaartöö on

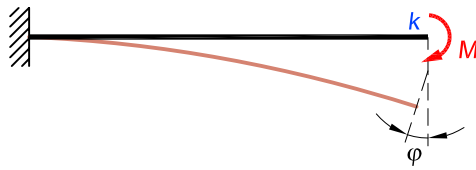
$$dW = Fd\Delta \tag{11.5}$$

Kogu töö saame elementaartööde summana, integreerides vahemikus 0 kuni Δ_k

$$W = \int_0^{\Delta_k} Fd\Delta \tag{11.6}$$



Joonis 11.3. Elementaarne töö ja kogutöö. Aktiivtöö on tähistatud halli kolmnurgaga



Joonis 11.4. Koondmomendi tehtav aktiivtöö

kus integraalimärgialune osa väljendab jõu-siirde graafiku alla jääva lõpmata väikese osa pindala, mis joonisel on tähistatud viirutusega. Kuna integraalimärgi all on koormus F muutuva suurusega, siis on vaja määrata funktsioon $F = f(\Delta)$, mis kirjeldab koormuse ja siirde omavahelist seost. Siin on koormuse ja siirde vahel lineaarne seos $F = \frac{F_k \delta}{\Delta_k}$ ning töö avaldiseks kujuneb

$$W = \int_0^{\Delta_k} \frac{F_k \delta}{\Delta_k} d\Delta \quad (11.7)$$

millest integreerimise tulemusena saame valemi kogu välisjõudude aktiivtöö leidmiseks koormuse staatilisel suurenemisel nullist kuni väärtuseni F_k

$$W_v = \frac{1}{2} F_k \Delta_k \quad (11.8)$$

Avaldis (11.8) esitab *Clapeyroni teoreemi*, mis sõnastatult on järgmine.

Jõu staatilisel rakendamisel konstruktsioonile väljendub töö elastsete deformatsioonide puhul jõu ja siirde lõppsuuruste poole korrutisena.

See on õige ainult siis, kui konstruktsioon ei ole koormatud teiste jõududega, sellel ei ole algpingeid ja see on lineaarselt deformeeruv, s.t siirded on proportsionaalsed mõjuva jõuga (joonis 11.3).

Sarnase valemiga jõuame, kui konstruktsioon on koormatud lõikes k momendiga M (joonis 11.4), mis põhjustab varda pöördumise nurga φ võrra. Kui moment ja varda pööre kasvavad koos nullist kuni suurusteni vastavalt M_k ja φ_k , siis on momendi tehtavaks tööks

$$W_v = \frac{1}{2} M_k \varphi_k \quad (11.9)$$

Mitme jõu üheaegsel staatilisel rakendamisel elastsele lineaarselt deformeeruvale konstruktsioonile arvutame nende jõudude töö järgmise valemiga

$$W_v = \frac{1}{2} \sum F_k \Delta_k \quad (11.10)$$

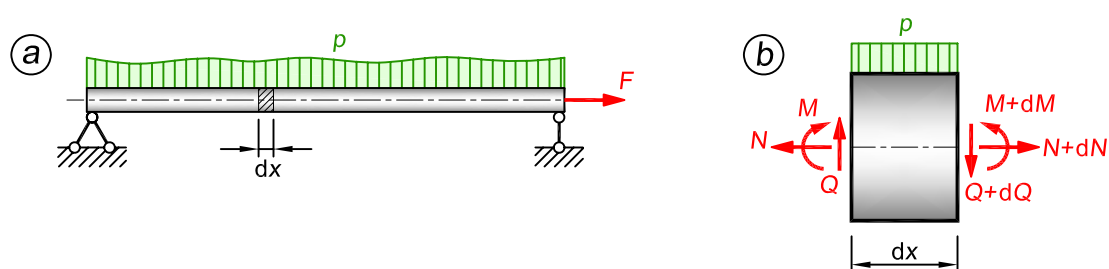
kus F_k on jõud ja Δ_k jõule F_k vastav lõppsiire, mis on põhjustatud kõigist jõududest.

Kui konstruktsioonile mõjub ainult üks jõud (joonised 11.2 ja 11.4), siis selle välisjõu aktiivtöö $W_v = \frac{1}{2} F \Delta > 0$, kuna siire on jõu suunas. Kui konstruktsioonile mõjub palju välisjõudusid, siis võib mõne välisjõu töö olla negatiivne, kuid kõigi välisjõudude tööde summa on ikka positiivne: $W_v = \frac{1}{2} \sum F_k \Delta_k > 0$.

11.2.2. Sisejõudude töö

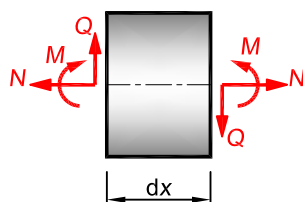
Konstruksioonile mõjuvate välis- ja sisejõudude tööde summa võrdub nulliga (valem 11.2) ja kuna välisjõudude töö on positiivne, siis sisejõudude töö on negatiivne (valem 11.3: $W_s = -W_v < 0$).

Sisejõudude töö vaatlemisel piirdume sirgetest varrastest koosnevate tasandkonstruktsioonidega ja eeldame, et ristlõigete tasapinnalisuse hüpotees on kehtiv. Sisejõudude töö arvutamiseks eraldame vardast kahe, varda teljega perpendikulaarse lõikega lõpmatult lühikese elemendi pikkusega dx (joonis 11.5). Kahe naaberosa mõju sellele eraldatud elemendile asendame jõududega, mis arvuliselt on võrdsed terve varda nendes lõigetes (joonis 11.5, a) esinevate sisejõududega. Eraldatud elemendi suhtes mõjuvad need jõud välisjõududena (joonis 11.5, b).



Joonis 11.5. Varras ja sellest eraldatud lõpmatult lühike element pikkusega dx

Eraldatud elemendi pikkus dx on lõpmatult lühike ja seepärast on temale mõjuvad sisejõudude juurdekasvud dN , dM , dQ ja koormus pdx hüljatavalt väikesed ning jätame ära. Eraldatud elemendile mõjuvad nüüd võrdsed, kuid vastupidiste suundadega jõud N , M , Q (joonis 11.6).



Joonis 11.6. Elemendile pikkusega dx mõjuvad jõud pärast juurdekasvude hülgamist

Pikijõu töö

Elemendile rakendatud pikijõud N põhjustab elemendi pikenemise

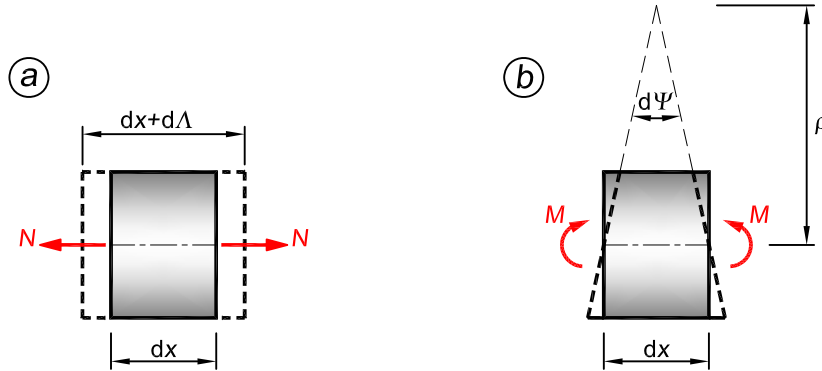
$$d\Lambda = \frac{Ndx}{EA} \quad (11.11)$$

võrra (joonis 11.7, a), kus A on varda ristlõikepindala ja E materjali normaalelastsusmoodul. Korrutist EA nimetatakse ristlõike *pikkejäikuseks*.

Pikijõu N töö elemendi pikenemisel $d\Lambda$ koormuse staatilisel rakendamisel on

$$dW_N = \frac{1}{2}N d\Lambda = \frac{1}{2}N \frac{Ndx}{EA} = \frac{N^2 dx}{2EA} \quad (11.12)$$

Elementaarse osa pikenemisel pikijõu N mõjul $d\Lambda$ võrra paindemoment M ja põikjõud Q tööd ei tee.



Joonis 11.7. Pikijõu töö ja paindemomendi töö

Paindemomendi töö

Elemendi otstes mõjuvad kaks võrdset momenti põhjustavad elemendi kõverdumise (joonis 11.7, b). Telgjoon ainult kõverdub, ei lühene ega pikene. Kõverus (meenutame, et kõveruseks nimetatakse kõverusraadiuse ρ pöördväärtust) elemendi pikkusel on konstantne: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$, mille tulemusena otsristlõiked pöörduvad teineteise suhtes nurga

$$d\Psi = \frac{dx}{\rho} = \frac{Mdx}{EI} \quad (11.13)$$

võrra, kus I on varda ristlõike inertsimoment. Korrutist EI nimetatakse ristlõike *paindejäikuseks*.

Momendi M töö pöördel $d\Psi$ koormuse staatilisel rakendamisel on nüüd

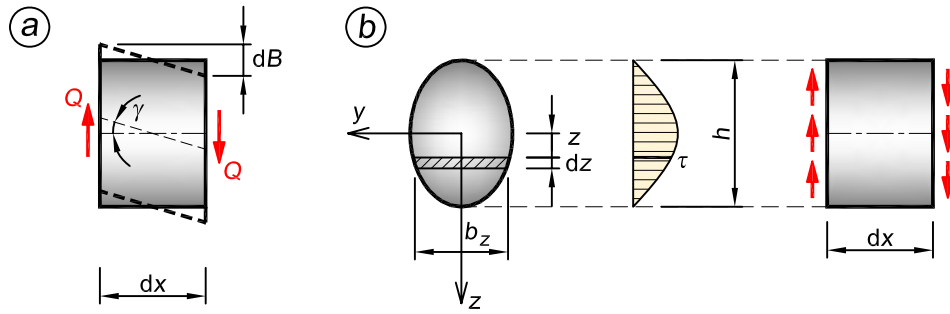
$$dW_M = \frac{1}{2}M d\Psi = \frac{1}{2}M \frac{Mdx}{EI} = \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (11.14)$$

Pöördel $d\Psi$ pikijõud N ja põikjõud Q tööd ei tee.

Põikjõu töö

Elementaarsed tangentsiaaljõud τdA , mille resultant varda ristlõikes võrdub põikjõuga (joonis 11.8, a), ei ole ühtlaselt jaotatud ja y -teljega paralleelsel ribal arvutame nad valemiga

$$\tau dA = \frac{QS}{Ib_z} dA \quad (11.15)$$



Joonis 11.8. Põikjõu töö

kus S on allpool (või ülalpool) seda riba asetseva ristlõikeosa staatiline moment y -telje suhtes, b_z on riba laius ja dA riba pindala (joonis 11.8, b).

Varda dx pikkuse elemendi ühe külgtahu lihe teise suhtes on

$$dB = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx \quad (11.16)$$

kus G on nihkeelastsusmoodul ja γ nihkenurk.

Elementaarse tangentsiaaljõu τdA töö siirdel dB koormuse staatilisel rakendamisel väljendame korrutisega

$$\frac{1}{2} \tau dA dB = \frac{1}{2} \tau dA \gamma dx \quad (11.17)$$

ja kogu elementaarsete tangentsiaaljõudude tööde summa ristlõikes leiame integreerimise teel

$$dW_Q = \int_A \frac{1}{2} \tau dA \gamma dx = \frac{dx}{2} \int_A \tau^2 \frac{dA}{G} = \frac{dx}{2G} \int_A \frac{Q^2 S^2}{I^2 b_z^2} dA = \frac{Q^2 dx}{2GA} \cdot \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b_z^2} dA = k \frac{Q^2 dx}{2GA} \quad (11.18)$$

kus

$$k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b_z^2} dA \quad (11.19)$$

on dimensioonita suurus, mis oleneb ristlõike kujust ja nimetatakse seetõttu *kujuteguriks*.

Ristkülikristlõikel, mille kõrgus on h ja laius b , $A = bh$, $I = \frac{bh^3}{12}$, $S = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$,

$$k = \frac{36}{h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)^2 dz = 1,2 \quad (11.20)$$

Ringristlõike $k = \frac{32}{27} \approx 1,18$. I-ristlõike jaoks leiame k ligikaudselt valemiga $k \approx \frac{A}{A_s}$, milles A_s on ristlõike seina pindala.

Põikjõu Q põhjustatud siirdel pikijõud N ja paindemoment M tööd ei tee.

Kogu töö

Kuna ükski jõududest N , M , Q kahe teise jõu poolt põhjustatud siiretel tööd ei tee, siis nende üheaegsel mõjumisel saame kogu elementaarse töö üksikute tööde (avaldised 11.12, 11.14 ja 11.18) liitmisel

$$dW = \frac{N^2 dx}{2EA} + \frac{M^2 dx}{2EI} + k \frac{Q^2 dx}{2GA} \quad (11.21)$$

Välisjõudude töö varda ulatuses leiame pikijõudude, paindemomentide ja põikjõudude summaarse elementaarse töö dW integreerimisel varda pikkusel

$$W_v = \int_0^{l_j} \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^{l_j} \frac{M^2 dx}{2EI} + k_j \int_0^{l_j} \frac{Q^2 dx}{2GA} \quad (11.22)$$

Välisjõudude tööst räägime siin põhjusel, mida mainisime käesoleva peatüki alguses: vardast eraldatud lõpmatult lühikese elemendi suhtes mõjuvad need jõud N , M ja Q välisjõududena (joonised 11.5 ja 11.6).

Kogu töö terve konstruktsiooni jaoks leiame nende integraalide summeerimisega üle kõigi varraste

$$W_v = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum_{j=1}^v k_j \int_0^{l_j} \frac{Q^2 dx}{2GA} \quad (11.23)$$

kus v on varraste (integreerimisvahemike) arv.

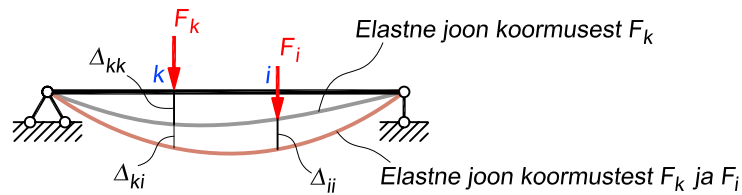
Sisejõudude töö on võrdne, kuid vastupidise märgiga välisjõudude tööga

$$W_s = - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{N^2 dx}{2EA} - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{M^2 dx}{2EI} - \sum_{j=1}^v k_j \int_0^{l_j} \frac{Q^2 dx}{2GA} \quad (11.24)$$

11.3. Välis- ja sisejõudude passiivtöö

Passiivtöö puhul vaatleme algolukorrana konstruktsioonile mõjuvast koormusest F_k põhjustatud deformeerunud tasakaaluolukorda, mille puhul tala saab ristlõikes k siirde Δ_{kk} . Selles tasakaaluolukorras esinevad sisejõud märgime N_k , M_k , Q_k . Uute võimalike siiretena kujutame siirdeid, mis on põhjustatud deformeerunud tasakaaluolukorras olevale konstruktsioonile rakendatud mõnest teisest koormusest F_i või mõne muu põhjuse poolt. Ristlõikes i lisandub talale siire Δ_{ii} . Esialgse koormuse rakenduspunktis k lisandub siire Δ_{ki} . Selles olukorras ei põhjustanud ristlõike k siiret koormus F_k , vaid see jõud liikus kaasa varda deformeerumisel, mis oli põhjustatud koormusest F_i . Seega tegi koormus F_k passiivtööd.

Koormuse F_i põhjustatud sisejõudusid tähistame N_i , M_i , Q_i . Koormuse staatilisel rakedamisel kasvavad koormus ja sisejõud nullist kuni oma lõplike suurusteni ning seepärast on välis- ja sisejõudude aktiivtööde avaldistes (11.10) ja (11.24) tegur 1/2. Passiivtöö vaatlemisel eeldame, et algolukorras mõjuvate välis- ja sisejõudude suurused ning suunad virtuaalsiirete ajal ei muutu ja seepärast passiivtööde avaldistes puudub tegur 1/2. Kuna passiivtöö tegemisel jõudude suurus ei muutu, siis saame siin jõu-siirde graafikuks horisontaalse sirge $c-a$ (joonis 11.10, a). Passiivtööd kujutab sellest joonest allapoole jääva ristküliku $cab0$ pindala.



Joonis 11.9. Passiivtöö

Välisjõu F_k ja sisejõudude N_k, M_k, Q_k tööde summa virtuaalsiiretel, mille on põhjustanud koormus F_i , võrdub võrrandi (11.2) alusel nulliga

$$F_k \Delta_{ki} - \sum \int M_k \frac{M_i dx}{EI} - \sum \int N_k \frac{N_i dx}{EA} - \sum k_j \int Q_k \frac{Q_i dx}{GA} = 0 \quad (11.25)$$

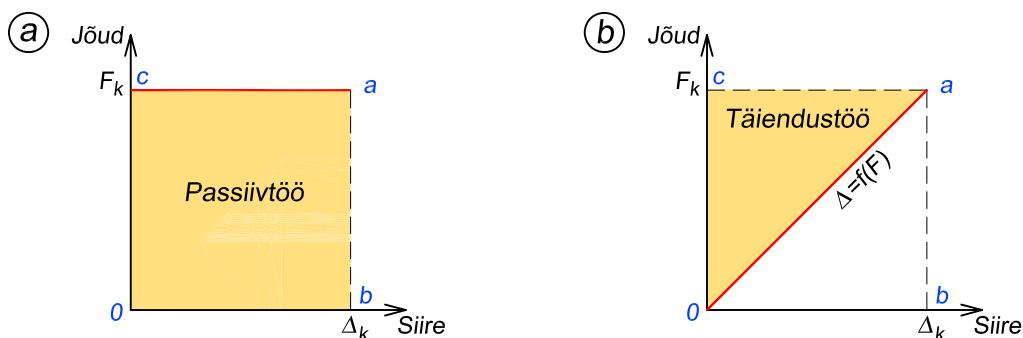
kus Δ_{ki} on jõule F_k vastav siire, mis on põhjustatud koormusest F_i .

Lisame siia veel mõningad selgitused, kuidas on valemis (11.25) saadud sisejõudude tööde avaldised $M_k \frac{M_i dx}{EI}$, $N_k \frac{N_i dx}{EA}$ ja $Q_k \frac{Q_i dx}{GA}$. Need avaldised tekivad sarnaselt, nagu leidsime eespool sisejõudude aktiivtööd kujutavad avaldised (11.12), (11.14) ja (11.18). Kui aktiivtöö puhul korrutasime sisejõu tema enda põhjustatud siirdega, mistõttu lõppvalemis tuli kasutada vastava sisejõu ruutu, siis nüüd passiivtöö korral korrutame ühest koormusest tekitatud sisejõu (näiteks M_k) temale vastava siirdega, mis on põhjustatud teisest koormusest (paindemomendile M_k vastav siire koormusest F_i on $\frac{M_i dx}{EI}$).

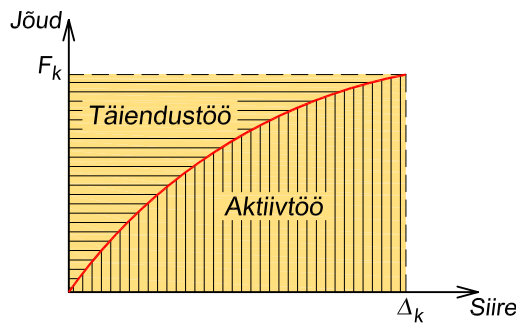
Lisaks aktiiv- ja passiivtööle eristatakse veel täiendustöö mõistet. Täiendustööd kujutab jõu-siirde graafikust ülespoole jääv kolmnurkne ala Oac (joonis 11.10, b). Täiendustööle ei ole sellist füüsikalist tähendust nagu näiteks välisjõudude aktiivtööle, kuid joonistelt 11.3 ja 11.10 näeme, et koormuse pikkamööda rakendamisel saame välisjõudude aktiivtöö ning täiendustöö summaks

$$W_v + W^t = F_k \Delta_k \quad (11.26)$$

Seega täiendab täiendustöö aktiivtööd selliselt, et nende pindalade summa kujundab ristküliku. Ristküliku pindala kujutab jõu F_k passiivtööd siirdel Δ_k : $W = F_k \Delta_k$. Lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni korral ehk nii kaua, kuni kehtib Hooke'i seadus, on aktiivtöö võrdne



Joonis 11.10. Passiivtöö ning täiendustöö graafikud



Joonis 11.11. Koormuse ja siirde vaheline mittelineaarne sõltuvus

täiendustööga. Teisiti võime seda öelda ka, et konstruktsiooni deformatsioonienergia ja täiendusenergia on võrdsed

$$U = V' \quad (11.27)$$

Kui materjali käitumine on mittelineaarne, siis on koormuse-siirde graafik kõverjooneline ja aktiivtöö ei ole enam täiendustööga võrdne (joonis 11.11).

11.4. Potentsiaalenergia

Konstruktsiooni koormamisel teevad välisjõud, mis põhjustavad konstruktsiooni deformeermist, positiivset tööd. Välisjõudude tehtud töö akumuleerub elastses konstruktsioonis *deformatsioonienergiana*. Osa välisjõudude tööst kulutatakse hõõrdumise ületamiseks, osa muundub soojuseks jne. Kuna need on väga väikesed, siis elastsete konstruktsioonide puhul eeldatakse, et koormuse rakendamisel muundub välisjõudude töö deformatsioonienergiaks ehk *sisejõudude potentsiaalenergiaks*. Koormuse rakendamisel püüavad sisejõud takistada välisjõudude põhjustatavat konstruktsiooni deformeermist ja teevad seejuures negatiivset tööd.

Koormusest vabanemisel on deformatsioonid vastupidiste märkidega. Välisjõud, mis hoiavad konstruktsiooni deformeernud olukorras, teevad koormusest vabanemisel negatiivset tööd. Sisejõud, mis koormusest vabanemisel viivad konstruktsiooni tagasi esialgsesse mitedeformeernud olukorda ja kulutavad seejuures deformatsioonienergiat, teevad positiivset tööd. Konstruktsiooni koormusest vabanemisel muundub deformatsioonienergia sisejõudude tööks. Deformatsioonienergia U (sisejõudude potentsiaalenergia Π_s) on võrdne sisejõudude aktiivtööga, kuid vastupidise märgiga

$$U = \Pi_s = -W_s \quad (11.28)$$

või, kui kasutada avaldist (11.24), saame

$$U = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum_{j=1}^v k_j \int_0^{l_j} \frac{Q^2 dx}{2GA} \quad (11.29)$$

Kuna sisejõudude töö on negatiivne, siis deformatsioonienergia on positiivne. See järel-
dub ka valemist (11.29), kus on sisejõud N , M ja Q ruudus. Jõudude grupist põhjustatud

potentsiaalenergia ei võrdu igast üksikust jõust eraldi põhjustatud potentsiaalenergiate summaga. Teisiti öeldes, potentsiaalenergia kohta jõudude mõju sõltumatuse printsiip ei kehti, kuna summa ruut ei võrdu üksikute liikmete ruutude summaga.

Paljude ehitismehaanika ülesannete lahendamisel uuritakse *konstruktsiooni täielikku potentsiaalenergiat*, mis koosneb sisejõudude potentsiaalenergiast ja välisjõudude potentsiaalenergiast

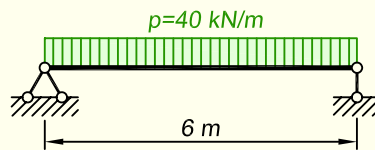
$$\Pi = \Pi_s + \Pi_v \quad (11.30)$$

kus

$$\Pi_v = -W_v \quad (11.31)$$

Välisjõudude potentsiaalenergia oleneb energia valitud algtasandist. Ehitismehaanikas loetakse välisjõudude potentsiaalenergia nulliks deformeerunud tasakaaluolukorras. Seepärast arvutatakse täielikku potentsiaalenergiat tööde summana, mida teevad sise- ja välisjõud üleminekul deformeerunud tasakaaluolukorrast deformeerumata olukorda. Sellest järgneb, et sisejõudude potentsiaalenergia on positiivne ja välisjõudude potentsiaalenergia on negatiivne.

NÄIDE 11.1. Arvutada joonisel 11.12 kujutatud tala deformatsioonienergia. Tala on valmistatud terasprofiilist HE180B, mille ristlõike inertsimoment on $I_y = 3831 \text{ cm}^4$, ristlõike pindala on $A = 65,3 \text{ cm}^2$, seina paksus 8,5 mm ning ristlõike kõrgus 18 cm. $E = 210 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$.



Joonis 11.12. Arvutuskeem

LAHENDUS

Kasutame deformatsioonienergia valemit (11.29), millest jätame ära pikijõudu puudutava osa

$$U = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum_{j=1}^v k_j \int_0^{l_j} \frac{Q^2 dx}{2GA}$$

Kirjutame avaldised, mis väljendavad ühtlase lauskoormusega koormatud lihttala paindemomendi ja põikjõu epüüri muutumist ehk teisiti öeldes, näitavad, kuidas arvutada sisejõudude epüüride ordinaate suvalises lõikes x (joonis 11.13)

$$M(x) = \frac{pl}{2}x - px\frac{x}{2} = \frac{p}{2}(lx - x^2)$$

$$Q(x) = \frac{pl}{2} - px = \frac{p}{2}(l - 2x)$$

Asetame saadud avaldised deformatsioonienergia valemisse ja integreerime üle kogu

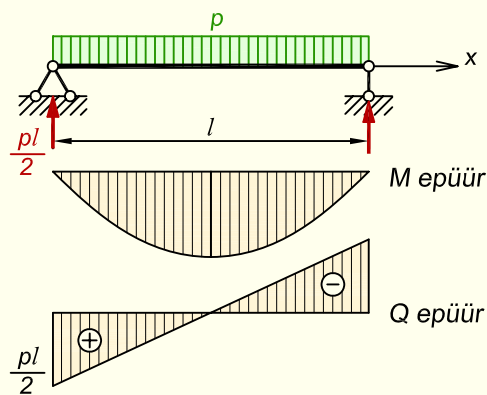
silde pikkuse

$$U = \int_0^l \frac{p^2}{4 \cdot 2EI} (lx - x^2) dx + k \int_0^l \frac{p^2}{4 \cdot 2GA} (l - 2x) dx =$$

$$= \frac{p^2}{8EI} \int_0^l (lx - x^2) dx + \frac{kp^2}{8GA} \int_0^l (l - 2x) dx$$

mis pärast integreerimist annab

$$U = \frac{p^2 l^3}{24} \left(\frac{l^2}{10EI} + \frac{k}{GA} \right)$$



Joonis 11.13. Paindemomendi ja põikjõu epüürid

Leiame kujuteguri k , mis vastavalt peatükis 11.2.2 esitatule on I-profilide korral varda ristlõike pindala ja seina pindala suhe

$$k = \frac{A}{A_s} = \frac{65,3}{0,85 \cdot 18} = 4,27$$

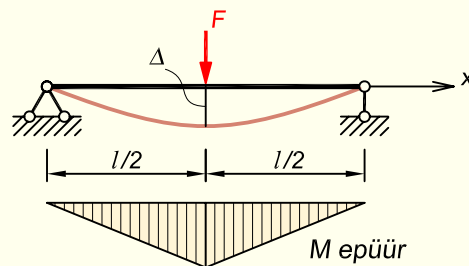
Asetades kõik vajalikud väärtused eespool saadud deformatsioonienergia avaldisse, saame lõpptulemusena

$$U = \frac{40^2 \cdot 6^3}{24} \left(\frac{6^2}{10 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 3831 \cdot 10^{-8}} + \frac{4,27}{80 \cdot 10^6 \cdot 65,3 \cdot 10^{-4}} \right) =$$

$$= 14400 \left(4,47 \cdot 10^{-4} + 8,17 \cdot 10^{-6} \right) = 6,55 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sulgudes olevatest liikmetest esimene väljendab paindemomendi mõju ning teine põikjõu mõju. Selgub, et põikjõu mõju moodustab paindemomendi omast ainult 1,8%.

NÄIDE 11.2. Arvutada joonisel 11.14 kujutatud tala keskmise löike vertikaalsiire koormusest. Kasutada deformatsioonienergia ja välisjõudude töö avaldisi.



Joonis 11.14. Arvutuskeem

LAHENDUS

Lähtudes valemist (11.3) ja (11.28), peab välisjõudude töö võrduma deformatsioonienergiaga

$$W_v = U$$

Välisjõudude töö avaldiseks saame valemi (11.8) abil

$$W_v = \frac{1}{2} F \Delta$$

kuna tala koormamisel jõuga F siirdub jõu rakenduspunkt Δ võrra.

Deformatsioonienergia arvutame valemiga (11.29), millest kasutame ainult paindemomendi osa

$$U = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{M^2 dx}{2EI}$$

Kuna paindemomendi epüüris on koormuse kohal murdepunkt, siis tuleb integreerimine viia läbi kahes osas. Paindemomendi avaldis vahemikus $0 \leq x \leq l/2$ on

$$M = \frac{F}{2} x$$

Praegusel juhul on paindemomendi epüür murdepunkti suhtes sümmeetriline, mistõttu kirjutame deformatsioonienergia avaldise ühe poole kohta välja ja korrutame kahega. Deformatsioonienergia on

$$U = 2 \int_0^{l/2} \frac{M^2 dx}{2EI} = 2 \int_0^{l/2} \frac{\frac{F^2 x^2}{4}}{2EI} dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{F^2 x^2}{8EI} dx = \frac{2}{8} \cdot \frac{F^2}{EI} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{F^2 l^3}{96EI}$$

Võrdsustame välisjõudude töö ja deformatsioonienergia avaldised

$$\frac{1}{2} F \Delta = \frac{F^2 l^3}{96EI}$$

millest saame avaldada siirde

$$\Delta = \frac{F l^3}{48EI}$$

11.5. Vastastikkuse teoreemid

11.5.1. Tööde vastastikkuse teoreem

Tööde vastastikkuse teoreemi tuletamisel vaatleme konstruktsiooni kahte tasakaaluolukorda. Esimeses tasakaaluolukorras on konstruktsioon koormatud jõuga F_k (joonis 11.15, a) ja teises tasakaaluolukorras jõuga F_i (joonis 11.15, b).

Algul vaatleme esimeses koormusolukorras mõjuvate välis- ja sisejõudude (F_k , M_k , N_k , Q_k) virtuaaltööd (võrrand 11.25) siiretel, mis on põhjustatud teisest koormusest F_i (joonis 11.15, a).

Esimeses koormusolukorras koormame tala jõuga F_k , mis põhjustab lõikes k siirde Δ_{kk} (siire kohas k , mis on põhjustatud jõust F_k). Seejärel rakendame talale koormuse F_i . Nüüd lisandub talale lõikes i siire Δ_{ii} (siire kohas i , mis on põhjustatud jõust F_i) ning lõikes k siire Δ_{ki} (siire kohas k , mis on põhjustatud jõust F_i). Nüüd ei tekitanud lõikes k siiret jõud F_k , vaid see liikus kaasa jõu F_i põhjustatud siirdel ja tegi seetõttu passiivtööd. Virtuaalsiirete printsiibi alusel koostatud võrrandist (11.25) saab avaldada järgmise seose

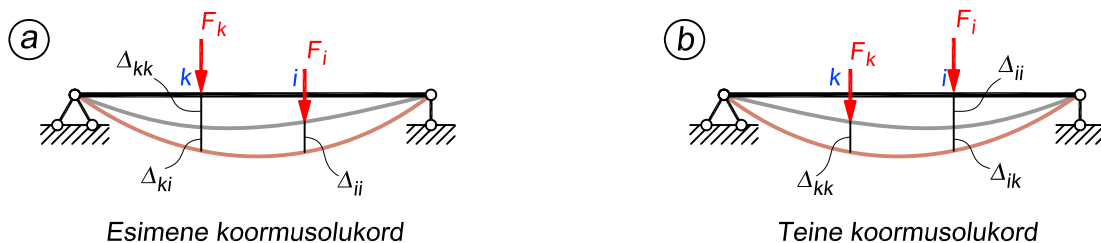
$$F_k \Delta_{ki} = \sum \int M_k \frac{M_i dx}{EI} + \sum \int N_k \frac{N_i dx}{EA} + \sum k_j \int Q_k \frac{Q_i dx}{GA} \quad (11.32)$$

Võrrandis (11.32) on vasakul pool võrdusmärki esimese koormusolukorra välisjõudude ja paremal pool võrdusmärki vastupidiste märkidega sisejõudude virtuaaltöö siiretel, mille on põhjustanud teise koormusolukorra jõud.

Järgnevalt vaatleme virtuaaltööd, mida teevad teise koormusolukorra välis- ja sisejõud esimese koormusolukorra jõudude põhjustatud siiretel (joonis 11.15, b). Esimesest koormusolukorrast erineb see olukord jõudude rakendamise järjekorra poolest. Nüüd rakendame esmalt koormuse F_i , mis põhjustab tala lõikes i siirde Δ_{ii} . Pärast koormuse F_k rakendamist lisandub lõikes i talale siire Δ_{ik} . Nüüd teeb koormus F_i passiivtööd koormuse F_k põhjustatud siirdel. Kui viia virtuaalsiirete printsiibi alusel koostatud võrrandis sisejõudude tööd väljendavad liikmed paremale poole võrdusmärki, siis saame järgmise võrduse

$$F_i \Delta_{ik} = \sum \int M_i \frac{M_k dx}{EI} + \sum \int N_i \frac{N_k dx}{EA} + \sum k_j \int Q_i \frac{Q_k dx}{GA} \quad (11.33)$$

Kirjeldataud koormusolukorrad erinevad teineteisest jõudude rakendamise järjekorra poolest. Jõudude mõju sõltumatus printsiibi põhjal on koormamise lõpus mõlema olukorra siir-



Joonis 11.15. Koormusolukorrad tööde vastastikkuse teoreemi tuletamisel

ded teineteisega võrdsed. Kuna siirded on ühesugused, siis ka nende olukordade sisejõudude potentsiaalenergiad ja sisejõudude tööd on ühesugused.

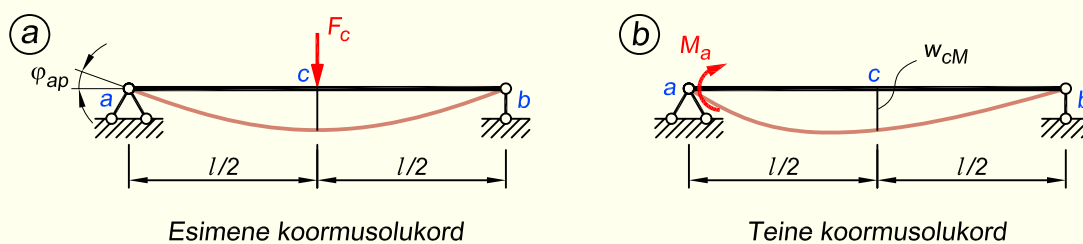
Kuna võrrandite (11.32) ja (11.33) paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vasakud pooled

$$F_k \Delta_{ki} = F_i \Delta_{ik} \quad (11.34)$$

Saadud seos väljendab *tööde vastastikkuse teoreemi* (E. Betti).

Esimese koormusolukorra välisjõudude (või sisejõudude) virtuaaltöö teise koormusolukorra jõudude põhjustatud siiretel on võrdne teise koormusolukorra välisjõudude (sisejõudude) virtuaaltööga esimese koormusolukorra jõudude põhjustatud siiretel.

NÄIDE 11.3. Joonisel 11.16 on kujutatud lihttala kaks erinevat koormusolukorda. Koormusena on talale rakendatud esimeses tasakaaluolukorras silde keskel jõud F_c ning teises tasakaaluolukorras toeristlõikes a moment M_a . Tõestada tööde vastastikkuse teoreemi kehtivus, mis tähendab, et $F_c w_{cM} = M_a \varphi_{ap}$.



Joonis 11.16. Koormusolukorrad

LAHENDUS

Siirded kummaski tasakaaluolukorras leiame tala elastse joone diferentsiaalvõrrandi

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

integreerimise teel.

1. Esimeses koormusolukorras (joonis 11.16, a), kui $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$, on paindemomendi avaldiseks

$$M = \frac{1}{2} F_c x$$

Järgnevalt integreerime elastse joone diferentsiaalvõrrandit

$$EI w'' = -\frac{1}{2} F_c x$$

kaks korda, mille tulemusena saame

$$EI w' = -\frac{1}{4} F_c x^2 + C_1$$

$$EIw = -\frac{1}{12}F_c x^3 + C_1 x + C_2$$

Integreerimiskonstandid määratakse järgmistest rajatingimustest

$$1. w(0) = 0: \quad -\frac{1}{12}F_c 0 + C_1 0 + C_2 = 0$$

$$2. w'(l/2) = 0: \quad -\frac{1}{4}F_c \frac{l^2}{4} + C_1 = 0$$

mis annavad meile

$$C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{1}{16}F_c l^2$$

Tala elastse joone võrrandiks kujuneb nüüd

$$w = -\frac{1}{12EI}F_c x^3 + \frac{1}{16EI}F_c l^2 x = \frac{F_c x}{48EI} (3l^2 - 4x^2)$$

ning tala ristlõike pöördenurgaks

$$w' = \frac{F_c l^2}{16EI} \left(1 - 4\frac{x^2}{l} \right)$$

Tala pöördenurgaks kohal $x = 0$ saame

$$w' = \varphi_{ap} = \frac{F_c l^2}{16EI}$$

2. Teises koormusolukorras (joonis 11.16, b) on paindemomendi avaldiseks

$$M = M_a - \frac{M_a}{l} \cdot x = M_a \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

Analoogiliselt esimesele koormusolukorrale integreerime elastse joone diferentsiaalvõrrandit kaks korda

$$EIw'' = -M_a \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

$$EIw' = -M_a \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) + C_1$$

$$EIw = -M_a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} \right) + C_1 x + C_2$$

Rajatingimused $w(0) = 0$ ning $w(l) = 0$ annavad meile integreerimiskonstantide väärtusteks

$$C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{1}{3}M_a l$$

Tala elastse joone võrrand on

$$w = -\frac{M_a}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} \right) + \frac{M_a l x}{3EI}$$

millest peale teisendusi saame

$$w = \frac{M_a l^2}{2EI} \frac{x}{l} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{3l^2} \right)$$

Tala vertikaalsiire kohal $x = \frac{l}{2}$ on

$$w_{cM} = \frac{M_a l^2}{16EI}$$

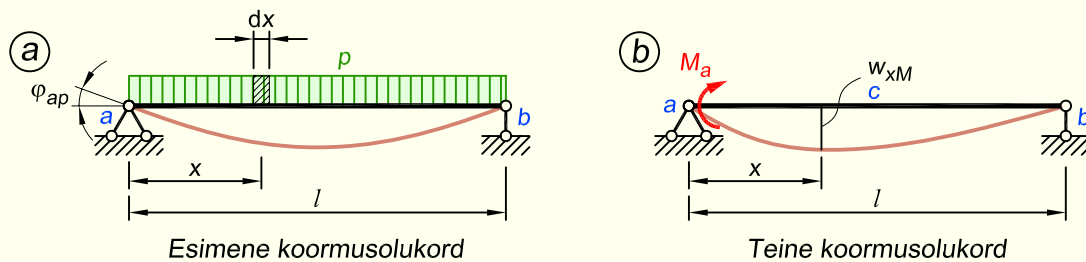
3. Tööde vastastikkuse teoreem

$$F_c w_{cM} = M_a \varphi_{ap}$$

on rahuldatud, kuna

$$F_c w_{cM} = \frac{F_c M_a l^2}{16EI} \quad \text{ja} \quad M_a \varphi_{ap} = \frac{M_a F_c l^2}{16EI}$$

NÄIDE 11.4. Joonisel 11.17 on kujutatud lihttala kaks erinevat koormusolukorda. Koormusena on talale rakendatud esimeses tasakaaluolukorras ühtlane lauskoormus p ning teises tasakaaluolukorras toeristlõikes a moment M_a . Tõestada tööde vastastikkuse teoreemi kehtivus, mis tähendab, et $\int p dx \cdot w = M_a \varphi_{ap}$.



Joonis 11.17. Koormusolukorrad

LAHENDUS

Siirded kummaski tasakaaluolukorras leiame sarnaselt näitele 11.3, integreerides tala elastse joone diferentsiaalvõrrandit

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

1. Esimeses koormusolukorras (joonis 11.17, a) on paindemomendi avaldiseks

$$M = \frac{px}{2}(l-x)$$

Integreerime elastse joone diferentsiaalvõrrandit kaks korda

$$EIw'' = -\frac{px}{2}(l-x); \quad EIw' = -\frac{px^2}{4}\left(l - \frac{2}{3}x\right) + C_1$$

$$EIw = -\frac{px^3}{12}\left(l - \frac{1}{23}x\right) + C_1x + C_2$$

Rajatingimustest $w(0) = 0$ ja $w'(l/2) = 0$ määrame integreerimiskonstandid

$$C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{pl^3}{24}$$

Tala elastse joone võrrand ning ristlõike pöördenurga avaldis on nüüd

$$w = \frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

$$w' = \frac{pl^3}{24EI} \left(1 - 6\frac{x^2}{l^2} + 4\frac{x^3}{l^3} \right)$$

Tala pöördenurgaks kohal $x = 0$ saame

$$w' = \Phi_{ap} = \frac{pl^3}{24EI}$$

2. Teises koormusolukorras (joonis 11.17, b) on lahenduskäik täpselt sama nagu näites 11.3, mistõttu siin seda kordama ei hakka. Tala elastse joone võrrand on

$$w = \frac{M_a l^2}{2EI} \frac{x}{l} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{3l^2} \right)$$

3. Kontrollime tööde vastastikkuse teoreemi kehtivust. Esimese koormusolukorra välisjõu (ühtlaselt jaotatud koormus p) töö teise koormusolukorra (moment M_a) poolt põhjustatud siiretel w leiame integreerimise teel

$$\int_0^l p dx \cdot w = \int_0^l p \frac{M_a l^2}{2EI} \frac{x}{l} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{3l^2} \right) dx = \frac{pM_a l^3}{24EI}$$

Teise koormusolukorra välisjõu töö esimese koormusolukorra jõu põhjustatud siiretel on

$$M_a \Phi_{ap} = \frac{M_a p l^3}{24EI}$$

Seega tööde vastastikkuse teoreem $\int p dx \cdot w = M_a \Phi_{ap}$ on rahuldatud.

11.5.2. Siirete vastastikkuse teoreem

Siirete vastastikkuse teoreem on tööde vastastikkuse teoreemi (11.34) erijuht. Kui esimeses ja ka teises koormusolukorras mõjub ainult üks ühikjõud, siis tööde vastastikkuse teoreemi alusel on

$$1_k \delta_{ki} = 1_i \delta_{ik} \quad (11.35)$$

või

$$\delta_{ki} = \delta_{ik} \quad (11.36)$$

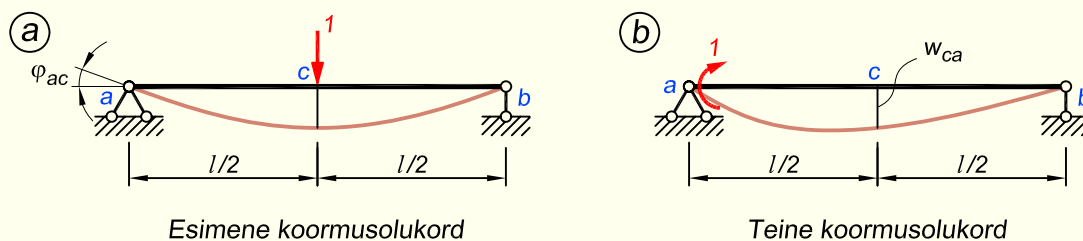
Ühikjõududest põhjustatud siirded tähistame väikese tähega δ , kusjuures esimene indeks näitab, millisele jõule see siire vastab, ja teine indeks näitab, millisest ühikjõust see siire on põhjustatud.

Võrdus (11.36) väljendab *siirete vastastikkuse teoreemi* (J. Maxwell).

Kohas k mõjuvale jõule 1_k vastav siire, mis on põhjustatud ühikjõust kohas i , võrdub jõule 1_i vastava siirdega, mis on põhjustatud ühikjõust kohas k .

Ühikjõust põhjustatud siirde δ_{ki} dimensiooni leiame siirde Δ_k dimensiooni jagamisel siiret põhjustava jõu dimensiooniga.

NÄIDE 11.5. Joonisel 11.18 on kujutatud lihttala kaks erinevat koormusolukorda. Koormusena on talale rakendatud esimeses tasakaaluolukorras silde keskel lõikes c ühikjõud ning teises tasakaaluolukorras toerislõikes a ühikmoment. Tõestada siirete vastastikkuse teoreemi kehtivus, mis tähendab, et $\varphi_{ac} = w_{ca}$.



Joonis 11.18. Koormusolukorrad

LAHENDUS

Ühikjõust 1_c põhjustatud tala kõverdunud telje võrrandi leiame näite 11.3 esimesest koormusolukorrast, asendades avaldises koormuse F ühikjõuga

$$w = \frac{1 \cdot x}{48EI} (3l^2 - 4x^2)$$

Ristlõike pöörde leiame saadud avaldise diferentseerimisega

$$w' = \frac{l^2}{16EI} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right)$$

Tala pöördenurgaks kohal $x = 0$ saame

$$w' = \varphi_{ac} = \frac{l^2}{16EI}$$

Ühikjõust 1_c põhjustatud pöörde φ_{ac} dimensiooniks on 1/kN.

Tala keskmise lõike c vertikaalsiirde w_{ca} , mis on põhjustatud toelõikes a mõjuvast ühikmomendist, arvutame näite 11.3 teise koormusolukorra all toodud valemiga, asendades momendi M ühikmomendiga

$$w = \frac{1 \cdot l^2 x}{2EI l} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{3l^2} \right)$$

Tala vertikaalsiire kohal $x = \frac{l}{2}$ on

$$w_{ca} = \frac{l^2}{16EI}$$

Ühikmomendist 1_a põhjustatud vertikaalsiirde w_{ca} dimensiooniks on 1/kN.

Järelikult

$$\varphi_{ac} = w_{ca}$$

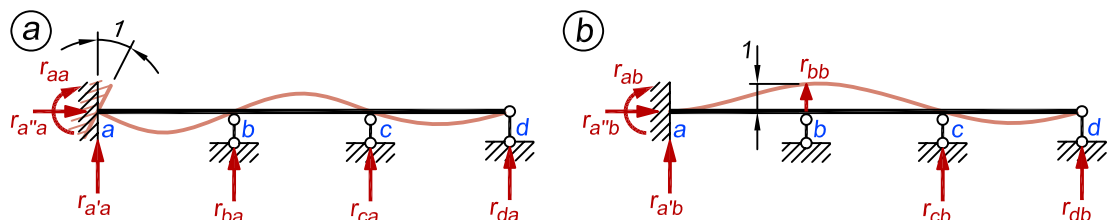
ja siirete vastastikkuse teoreem on rahuldatud.

11.5.3. Reaktsioonide vastastikkuse teoreem

Staatikaga määratud konstruktsiooni toe siire ei põhjusta sisejõude ega toereaktsioone. Vastupidiselt sellele aga staatikaga määratu konstruktsiooni toe siire võib tekitada konstruktsioonis nii toereaktsioone kui sisejõude.

Joonisel 11.19 on kujutatud staatikaga määratu jätkuvtala kaks erinevat deformatsiooniolukorda. Esimeses olukorras (joonis 11.19, a) on tugi a pöörduv ühiknurga võrra ja teises olukorras (joonis 11.19, b) on toe b vertikaalsiire võrdne ühikuga.

Ühiksiirdest põhjustatud reaktsiooni märgime väikese tähega r , millel on kaks indeksit. Esimene indeks tähistab sidet, mille reaktsiooni vaatleme, ja teine indeks näitab, missuguse



Joonis 11.19. Deformatsiooniolukorrad reaktsioonide vastastikkuse teoreemi tuletamisel

sideme ühiksiirdest on reaktsioon põhjustatud.

Toe a kolme reaktsioonikomponenti tähistame järgmiselt: momenti r_a , vertikaalset ja horisontaalset jõudu vastavalt $r_{a'}$ ja $r_{a''}$.

Tööde vastastikkuse teoreemi alusel koostatud võrrand

$$r_{aa} \cdot 0 + r_{a'a} \cdot 0 + r_{a''a} \cdot 0 + r_{ba} \cdot 1 + r_{ca} \cdot 0 + r_{da} \cdot 0 = r_{ab} \cdot 1 + r_{a'b} \cdot 0 + r_{a''b} \cdot 0 + r_{bb} \cdot 0 + r_{cb} \cdot 0 + r_{db} \cdot 0 \quad (11.37)$$

mille vasak pool esitab esimese olukorra välisjõudude tööd teise olukorra siiretel ja parem pool teise olukorra välisjõudude tööd esimese olukorra siiretel, annab järgmise võrduse

$$r_{ab} = r_{ba} \quad (11.38)$$

Võrrand (11.38) väljendab *reaktsioonide vastastikkuse teoreemi* (J. Rayleigh).

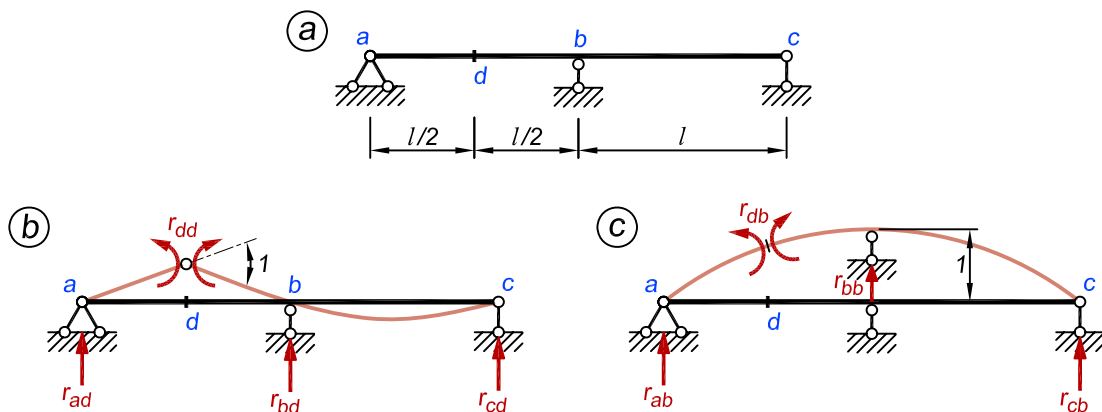
Sideme b ühiksiirdest põhjustatud reaktsioon sidemes a võrdub sideme a ühiksiirdest põhjustatud reaktsiooniga sidemes b .

Reaktsiooni dimensiooni leiame jõu dimensiooni jagamisel reaktsiooni põhjustava siirde dimensiooniga.

Reaktsioon r_{ab} antud näite puhul on moment, mis on põhjustatud ühiksiirdest, ja tema dimensioon on $\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m} = \text{kN}$. Reaktsioon r_{ba} on jõud, mis on põhjustatud ühikpöördest, ja tema dimensioon on $\text{kN}/1 = \text{kN}$. Reaktsioonide r_{ab} ja r_{ba} dimensioonid on võrdsed.

Reaktsioonide vastastikkuse teoreemi võib rakendada ka sisejõudude puhul. Näitena vaatleme kaheksildelist tala (joonis 11.20, a).

Ülesandeks on leida reaktsioon r_{bd} esimeses deformeerunud olukorras (joonis 11.20, b). Niisuguse deformeerunud olukorra tekitamiseks paneme ristlõikesse d liigendi ja selle kõrval rakendame kaks võrdset vastupidi mõjuvat momenti, mis põhjustavad liigendi kõrval asetsevate ristlõigete pöörde teineteise suhtes ühiknurga võrra. Ülesande lahendamiseks anname toele b ühiksiirde ja leiame paindemomendi ristlõikes d (joonis 11.20, c). Reaktsioonide vastastikkuse teoreemi alusel $r_{bd} = r_{db}$. Lihttala silde keskel rakendatud jõud F põhjustab selles



Joonis 11.20. Reaktsiooni r_{bd} leidmine, lähtudes reaktsioonide vastastikkuse teoreemist

lõikes läbipainde $\Delta = \frac{Fl^3}{48EI}$ (vt näide 11.2). Teises deformeerunud olukorras on $\Delta = 1$, $F = r_{bb}$ ja sildeks $2l$. Seega $r_{bb} = \frac{6EI}{l^3}$, $r_{ab} = \frac{r_{bb}}{2} = \frac{3EI}{l^3}$ ja $r_{db} = r_{ab} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3EI}{2l^2}$ kN.

11.5.4. Reaktsiooni ja siirde vastastikkuse teoreem

Reaktsiooni ja siirde vastastikkuse teoreemi tõestamisel kasutame tööde vastastikkuse teoreemi. Teoreemi tõestamisel vaatleme elastset konstruktsiooni kahes erinevas tasakaaluolukorras.

Joonisel 11.21 on esitatud kolmesildelise tala kaks tasakaaluolukorda. Esimeses olukorras mõjub talale suvalisel kohal k ühikjõud (joonis 11.21, a). Ühikjõust põhjustatud reaktsioonid r'_{ak} , r'_{bk} , r'_{ck} ja r'_{dk} märgime kriipsuga, kuna ilma kriipsuta tähistatakse ühiksiirdest põhjustatud reaktsioone.

Teises tasakaaluolukorras on üks toeside (joonisel 11.21, b tugi c) nihkunud ühiksiirde võrra. Kohas k mõjuvale ühikjõule vastavat siiret tähistame δ'_{kc} . Ühiksiirdest põhjustatud siiret tähistame tähega δ ja märgime juurde kriipsukese, kuna tähega δ ilma kriipsuta tähistasime ühikjõust põhjustatud siiret.

Esimese tasakaaluolukorra välisjõudude virtuaaltöö teise olukorra siiretel on

$$W_{v1} = 1_k \delta'_{kc} + r'_{ak} \cdot 0 + r'_{bk} \cdot 0 + r'_{ck} \cdot 1 + r'_{dk} \cdot 0 \quad (11.39)$$

ja teise tasakaaluolukorra välisjõudude virtuaaltöö esimese olukorra siiretel on

$$W_{v2} = r_{ac} \cdot 0 + r_{bc} \cdot 0 + r_{cc} \cdot 0 + r_{dc} \cdot 0 = 0 \quad (11.40)$$

Tööde vastastikkuse teoreemi põhjal on saadud tööde avaldised (11.39) ja (11.40) võrdsed ($W_{v1} = W_{v2}$), mis annab meile

$$1_k \delta'_{kc} + r'_{ck} \cdot 1 = 0 \quad (11.41)$$

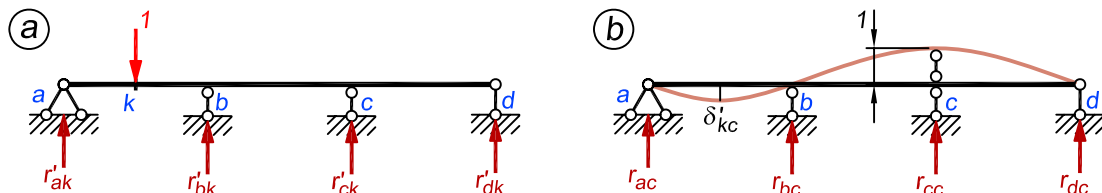
millest

$$r'_{ck} = -\delta'_{kc} \quad (11.42)$$

Võrrand (11.42) väljendab *reaktsiooni ja siirde vastastikkuse teoreemi* (J. Rayleigh).

Kohas k mõjuvast ühikjõust põhjustatud reaktsioon sidemes c on võrdne, kuid vastupidise märgiga, kohas k mõjuvale ühikjõule vastava siirdega, mis on põhjustatud sideme c ühiksiirdest.

Reaktsiooni r'_{ck} dimensiooni leiame koormusest põhjustatud sideme c reaktsiooni dimensiooni jagamisel reaktsiooni r'_{ck} põhjustava jõu 1_k dimensiooniga. Siirde δ'_{kc} dimensiooni leiame jõule 1_k vastava siirde dimensiooni jagamisel sideme c siirde dimensiooniga.



Joonis 11.21. Tasakaaluolukorrad reaktsiooni ja siirde vastastikkuse teoreemi tuletamisel

11.6. Siirded mitmesugustest välismõjudest

11.6.1. Välismõjud

Ehituskonstruksioonide arvutamisel liigitatakse siirded kolme rühma, olenevalt sellest, millisest välismõjust need on põhjustatud:

1. koormusest põhjustatud siirded;
2. temperatuuri muutumisest põhjustatud siirded;
3. toe- või muude sidemete nihkumisest põhjustatud siirded.

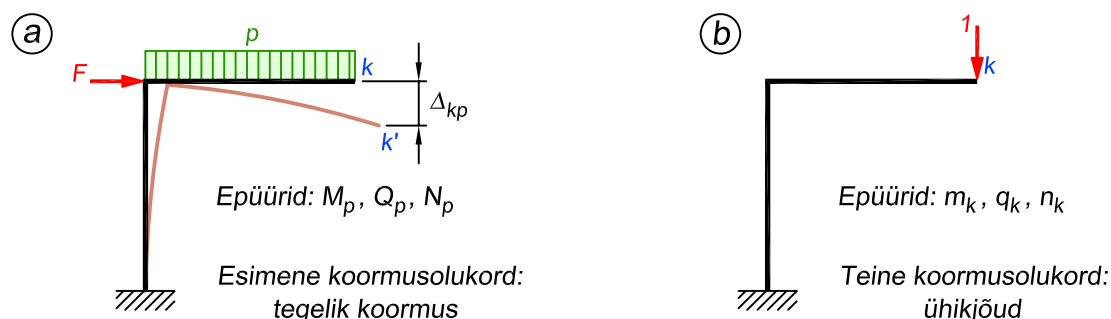
11.6.2. Koormusest põhjustatud siirded

Ühe kõige universaalsema arvutusmeetodi konstruksioonides tekkivate siirete arvutamiseks esitas juba 1864. aastal J.C. Maxwell. Liialt keeruka käsituslaadi tõttu jäi see aga esialgu tähelepanuta. Maxwellist sõltumatult tuletas sama meetodi kümme aastat hiljem C.O. Mohr, kes avaldas selle peaaegu praegusel ajal kasutataval kujul. Tänapäeval on *Mohr-Maxwelli meetod* kujunenud üheks enamkasutatavaks siirete arvutamise meetodiks.

Järgnevalt kasutame selle meetodi peamise valemi tuletamiseks virtuaalsiirete printsiipi ning lähtume valemist (11.2), mille kohaselt peab tasakaalus konstruksiooni välis- ja sisejõudude tööde summa võrduma nulliga.

Joonisel 11.22, a on kujutatud lauskoormuse ja koondjõuga koormatud arvutuskeem ning selle deformeerumine temale rakendatud koormuste mõjul. Konsoolse varda vaba ots k siirdub nii vertikaal- kui horisontaalsuunas asukohta k' . Olgu ülesandeks arvutada punkti k siirde vertikaalsuunaline komponent Δ_{kp} .

Konstruksiooni mingi punkti siirde arvutamisel vaatleme konstruksiooni arvutuskeemi kahte tasakaaluolukorda. Ühe olukorrana vaatleme tegeliku koormuse poolt põhjustatud tasakaaluolukorda (joonis 11.22, a) ja arvutuskeemis tekkivaid sisejõude tähistame sel juhul M_p , N_p ja Q_p . Indeks „ p “ on koormuse üldtähis ja siin ei tehta vahet, mis liiki koormused arvutuskeemile mõjuvad. Teise olukorrana vaatleme tasakaaluolukorda, kus arvutuskeemile mõjub



Joonis 11.22. Koormusolukorrad siirete arvutamisel koormusest

ainult üks leitavale siirdele vastav ühikjõud (joonis 11.22, b). Selles tasakaaluolukorras esinevad sisejõud tähistame väikeste tähtedega m_k , n_k ja q_k . Epüüri tähise järel olev indeks näitab, millises lõikes paiknevast ühikjõust mainitud epüürid tekivad. Kuna praegu on eesmärgiks arvutada lõike k vertikaalsiire, siis on ühikjõud rakendatud sinna lõikesse vertikaalsuunas.

Järgnevalt kirjutame välis- ja sisejõudude tööde summa avaldise. Selleks vaatleme ühikjõuga koormatud konstruktsiooni (ehk praegusel juhul teise koormusolukorra) välis- ja sisejõudude virtuaaltööd tegeliku koormuse (ehk esimese koormusolukorra) põhjustatud siiretel

$$1_k \Delta_{kp} - \sum \int m_k \frac{M_p dx}{EI} - \sum \int n_k \frac{N_p dx}{EA} - \sum k_j \int q_k \frac{Q_p dx}{GA} = 0 \quad (11.43)$$

Saadud avaldises väljendab esimene liige ühikjõu 1_k tööd temale vastaval siirdel Δ_{kp} esimesest koormusolukorrast. Avaldise järgmised liikmed annavad sisejõudude töö: teine liige väljendab teise koormusolukorra sisejõu m_k tööd talle vastaval siirdel $\frac{M_p dx}{EI}$ esimesest koormusolukorrast jne.

Jagades võrrandi (11.43) ühikjõuga 1_k ning viies sisejõudude tööd kujutavad liikmed paremale poole võrdusmärki, saame siirete arvutamiseks *Mohr-Maxwelli valemi*, mida lühemalt kutsutakse ka *Mohri integraaliks*

$$\Delta_{kp} = \sum \int m_k \frac{M_p dx}{EI} + \sum \int n_k \frac{N_p dx}{EA} + \sum k_j \int q_k \frac{Q_p dx}{GA} \quad (11.44)$$

Tala- ja raamkonstruktsioonide, mille varraste ristlõike kõrguse ja pikkuse suhe $h/l < 0,1$, siirete arvutamisel valemiga (11.44) on kolmanda liikme mõju võrreldes esimese liikmega väike. Enamikul inseneripraktikas esinevatest juhtudest moodustab põikjõu osatähtsus paindemomendi omast umbes 1%. Kui konstruktsiooni varraste pikijõud on väikesed, siis nende mõju siiretele on samuti väike ja siirded arvutame valemi (11.44) esimese liikmega, mis arvestab paindedeformatsioonide mõju

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k M_p}{EI} dx \quad (11.45)$$

Kuid vahel ei saa põikjõu mõjust loobuda. Tõsine vajadus põikjõu arvestamiseks tekib näiteks õhukeseseinaliste talade puhul, eriti siis, kui tala on pikkusega võrreldes kõrge. Tugevusõpetuse õpikus [19] on näidatud, et sel juhul võib põikjõu osatähtsus siirde arvutamises moodustada paindemomendist isegi 10%.

Konstruktsioonides, kus paindemomendid ja põikjõud on võrreldes pikijõududega väikesed, arvutame siirded valemi (11.44) teise liikmega

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{n_k N_p}{EA} dx \quad (11.46)$$

Kui pikijõud varda ulatuses on konstantsed, siis projekteeritakse varras konstantse ristlõikega (sõrestik) ja siirded leiame summeerimise teel

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \frac{n_{jk} N_{jp} l_j}{EA_j} \quad (11.47)$$

Ruumkonstruktsioonis tekib kuus sisejõudu: pikijõud N_x , põikjõud Q_y , Q_z , paindemomendid M_y , M_z ja väändemoment T ning siirded arvutame valemiga

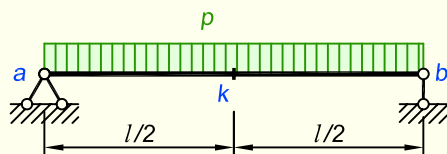
$$\Delta_{kp} = \sum \int \left(\frac{m_y M_y}{EI_y} + \frac{m_z M_z}{EI_z} + \frac{n_x N_x}{EA} + k_y \frac{q_y Q_y}{GA} + k_z \frac{q_z Q_z}{GA} + \frac{tT}{GI_t} \right) dx \quad (11.48)$$

Valemis (11.48) viimase liikme nimetaja GI_t tähistab väändejäikust. Ümmarguse ristlõikega vardal $GI_t = G \frac{\pi d^4}{32}$ ja ristkülikristlõikega vardal $GI_t = G k_t h b^3$, kus teguri k_t väärtused on antud lisa B tabelis B.1

Tingituna virtuaalsiirete printsiibi iseloomust on Mohr-Maxwelli valemi kasutamisel vastuseks saadava siirde märk seotud rakendatava ühikjõu suunaga: kui vastus on positiivne, siis toimub siire ühikjõu suunas, ja vastupidi, kui arvutuse tulemus on negatiivne, siis on siire ühikjõule vastupidise suunaga.

Siirete arvutamise valemi (11.44) integraalide lahendamiseks saab kasutada nii analüütilist arvutust kui ka numbrilist integreerimist. Järgnevas näites on kasutatud analüütilist arvutust. Lihtsam on aga kasutada ülesannete lahendamisel numbrilist integreerimist, millest on räägitud peatükis 11.6.6.

NÄIDE 11.6. Arvutada joonisel 11.23 kujutatud lauskoormusega koormatud lihttala keskmise ristlõike k vertikaalsiire ning toelõike a pööre.



Joonis 11.23. Lauskoormusega koormatud lihttala

LAHENDUS

Siirde arvutamisel kasutame valemit (11.45) millega arvestame ainult paindemomentide mõju

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k M_p}{EI} dx$$

1. Ristlõike k vertikaalsiire

Kui on vaja leida ristlõike k vertikaalsiiret, siis rakendame sinna lõikesse vertikaalse ühikjõu. Koormusest ja ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüürid on näidatud joonisel 11.24, a ja b .

Analüütilise integreerimise jaoks on vaja esitada avaldised, mis kirjeldavad m_k ja M_p epüüride muutumist sõltuvalt x -koordinaadi muutumisest.

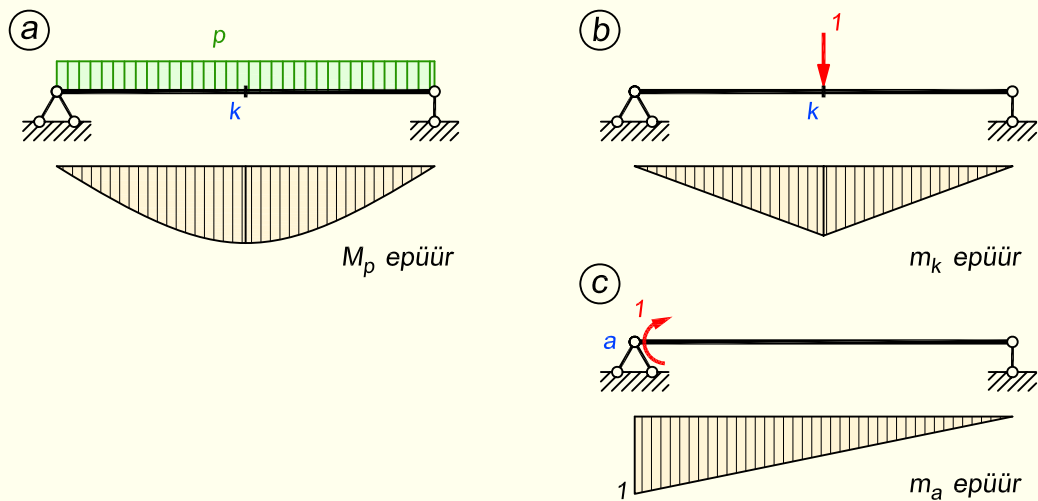
Ühikjõust ning koormusest põhjustatud paindemomendi epüüride ordinaadid on vastavalt

$$m_k(x) = \frac{1}{2}x; \quad M_p(x) = \frac{pl}{2}x - px \frac{x}{2} = \frac{px}{2}(l-x)$$

Ristlõike k vertikaalsiirde leidmisel peame integreerimise avaldise kirjutama poole silde kohta, kuna ühikjõu epüüril on lõike k kohal murdepunkt ja see jagab tala kaheks integreerimisvahemikuks. Kuna epüürid on mõlemas vahemikus ühesugused, siis korrutame kirjutatava avaldise kahega.

$$w_{kp} = 2 \int_0^{l/2} \frac{m_k M_p}{EI} dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{\frac{1}{2} x \frac{px}{2} (l-x)}{EI} dx = \frac{p}{2EI} \int_0^{l/2} (lx^2 - x^3) dx =$$

$$= \frac{p}{2EI} \left(\frac{lx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{l/2} = \frac{p}{2EI} \left(\frac{l^4}{24} - \frac{l^4}{64} \right) = \frac{5pl^4}{384EI}$$



Joonis 11.24. Koormusest ning ühikjõust ja -momendist põhjustatud paindemomendi epüürid

2. Ristlõike a pööre

Kui soovime arvutada toelõike a pööret, rakendame sinna ühikmomendi, millest põhjustatud paindemomendi epüür on näidatud joonisel 11.24, c . Epüüri ordinaadid saame arvutada valemiga

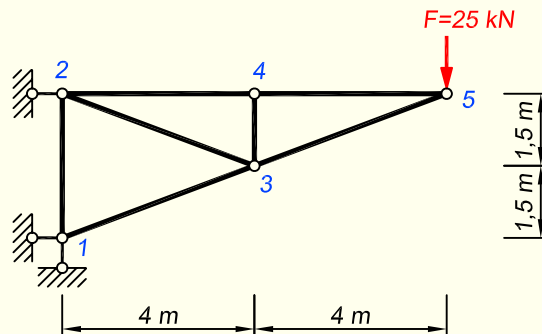
$$m_a(x) = 1 - \frac{1}{l}x = \frac{l-x}{l}$$

Lõike a pöörde arutamisel kasutame integreerimise avaldises M_p ja m_a epüüre. Kuna kummaski epüüris murdepunkti ei ole, saame siin kirjutada avaldise kogu silde kohta

$$\varphi_{ap} = \int_0^l \frac{m_a M_p}{EI} dx = \int_0^l \frac{l-x}{l} \cdot \frac{px(l-x)}{2EI} dx = \frac{p}{2EI} \int_0^l x(l-x)(l-x) dx = \frac{pl^3}{24EI}$$

Pikemalt on koormusest põhjustatud siirdeid käsitletud näidetes 11.13 ja 11.14.

NÄIDE 11.7. Arvutada joonisel 11.25 kujutatud sõrestiku sõlme 5 vertikaalsiire koormusest. Varraste andmed: elastsusmoodul $E = 210 \text{ GPa}$ ja ristlõike pindala $A = 20 \text{ cm}^2$.



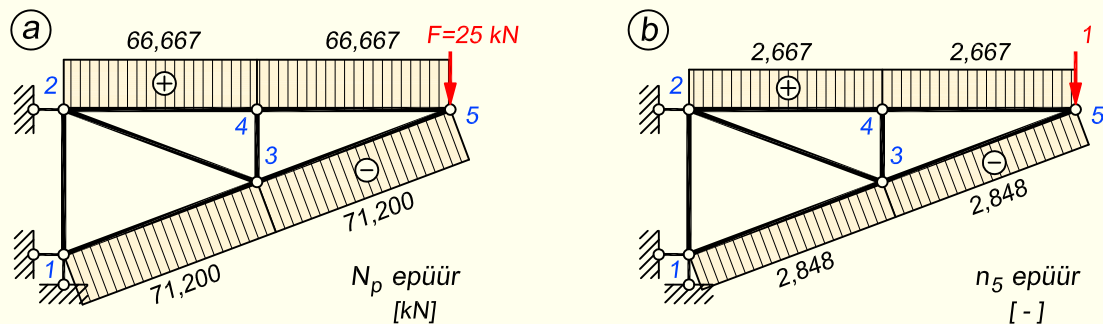
Joonis 11.25. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Kuna arvutuskeemiks on sõrestik, mille varrastes esinevad ainult pikijõud, siis kasutame siirde arvutamisel valemit (11.47)

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \frac{n_{jk} N_{jp} l_j}{EA_j}$$

Arvutame esmalt koormusest $F = 25 \text{ kN}$ tekkivad pikijõud sõrestiku varrastes (joonis 11.26, a). Kuna soovime teada sõlme 5 vertikaalsiiret, siis rakendame sinna vertikaalse ühikjõu ja leiame ka sellest tekkivad varraste pikijõud (joonis 11.26, b).



Joonis 11.26. Varraste pikijõud koormusest (N_p) ja sõlmes 5 paiknevast ühikjõust (n_5)

Varraste ristlõike pikkejäikus on

$$EA = 210 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 420 \cdot 10^3 \text{ kN}$$

Järgnevalt saame siirde avaldise välja kirjutada vastavalt eespool toodud valemile. Arvestame kahte alumise ja kahte ülemise vöö varrast, kuna võrguvarrastes praegusel

juhul pikijõud puudub

$$w_{5p} = \frac{2,848 \cdot 71,200 \cdot \sqrt{18,25}}{EA} \cdot 2 + \frac{2,667 \cdot 66,667 \cdot 4}{EA} \cdot 2 =$$

$$= \frac{3155 \text{ kN}\cdot\text{m}}{420 \cdot 10^3 \text{ kN}} = 0,0075 \text{ m} = 7,5 \text{ mm}$$

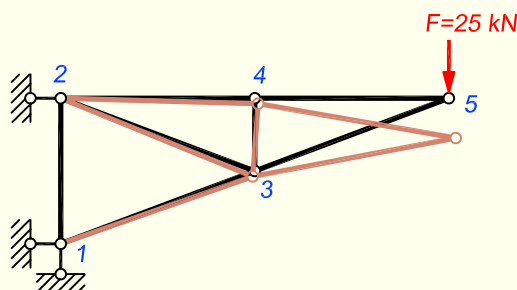
Saadud tulemus on positiivne, mis tähendab, et siire toimub ühikjõuga samas suunas ehk ülevalt alla. See on täiesti ootuspärane, kuna tegelik koormus on samuti suunatud alla ja hakkab seetõttu sinneriiki suruma ka sõlme 5.

Sageli on aga mõistlik teha see arvutus tabeli kujul, seda eriti suurema varraste arvuga sõrestiku korral. Näidatud on see tabelis 11.1, kus teise ja kolmandasse veergu kanname vastavalt ühikjõu ja koormusepüüri ordinaadid ning neljandasse veergu varraste pikkused. Viimases veerus korrutame mainitud väärtused. Viimase veeru liikmete summeerimisel saame valemi (11.47) lugeja ja jõume nii samasuguse tulemuseni, nagu eelnevalt näitasime ilma tabelit kasutamata.

Tabel 11.1. Sõrestiku sõlme siirde arvutamine

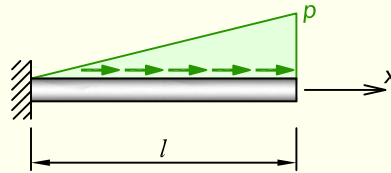
| Varras | n_{j5} , [-] | N_{jp} , [kN] | l_j , [m] | $n_{j5}N_{jp}l_j$ |
|------------|----------------|-----------------|----------------|-------------------|
| 1-3 | -2,848 | -71,200 | $\sqrt{18,25}$ | 866,3 |
| 3-5 | -2,848 | -71,200 | $\sqrt{18,25}$ | 866,3 |
| 2-4 | 2,667 | 66,667 | 4 | 711,2 |
| 4-5 | 2,667 | 66,667 | 4 | 711,2 |
| 1-2 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| 3-4 | 0 | 0 | 1,5 | 0 |
| 2-3 | 0 | 0 | $\sqrt{18,25}$ | 0 |
| $\Sigma =$ | | | | 3155 kN·m |

Selleks, et paremini mõista sõrestiku deformeerumist, lisame siia juurde ka selle deformeerunud kuju, mis on näidatud joonisel 11.27. Joonise ilmekuse huvides on seal sõlmede siirdeid tegelikkusega võrreldes oluliselt suurendatud.



Joonis 11.27. Sõrestiku deformeerumine

NÄIDE 11.8. Arvutada joonisel 11.28 kujutatud konsoolse varda vaba otsa horisontaalsiire koormusest. Varras on koormatud enda pikiteljesuunalise lineaarselt muutuva lauskoormusega. Pikkejäikus on EA .



Joonis 11.28. Arvutuskeem

LAHENDUS

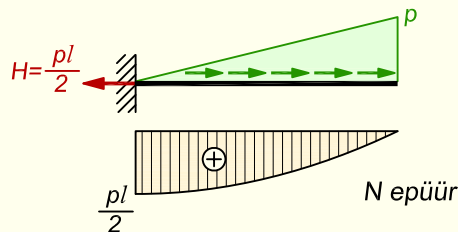
Kui arvutuskeem koosneb ainult ühest vardast, siis on kõige lihtsam arvutada küsitud siiret, kasutades tugevusõpetusest tuttavat valemit (B.1)

$$\Delta = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

kus meie näite konstantse pikkejäikuse tõttu saame selle integraalimärgi ette tuua

$$\Delta = \frac{1}{EA} \int_0^l N(x) dx$$

Siirde valemis esineva integraali arvutamiseks peame leidma pikijõu epüüri pindala. N epüür on kujutatud joonisel 11.29.



Joonis 11.29. Pikijõu epüür

Muutuva lauskoormuse tõttu on pikijõu epüür kõverjooneline ja seetõttu on vaja leida funktsioon, mis kirjeldab selle epüüri muutumist.

Varda vasakus otsas tekkiva toereaktsiooni saame lauskoormuse pindala järgi

$$H = \frac{pl}{2}$$

See on ka N epüüri ordinaadiks varda vasakus otsas.

Edasi lähtume valemist (1.10), mille kohaselt on pikijõu tuletis võrdne vastasmärgiga võetud pikikoormuse intensiivsusega

$$\frac{dN(x)}{dx} = -p(x)$$

Integreerides seda valemit, saame

$$N(x) = -\int_0^x p(x)dx = -\int_0^x p\frac{x}{l}dx = -\frac{px^2}{2l}$$

kus integraalimärgi all olevas osas $p\frac{x}{l}$ kirjeldab lauskoormuse muutumist. Saadud avaldise lisame juurde epüüri vasaku otsa ordinaadile ja nii saamegi funktsiooni, mis kirjeldab N epüüri muutumist

$$N(x) = \frac{pl}{2} - \frac{px^2}{2l}$$

Nüüd saame varda vaba otsa horisontaalsiirde välja arvutada

$$u = \frac{1}{EA} \int_0^l N(x)dx = \frac{1}{EA} \int_0^l \left(\frac{pl}{2} - \frac{px^2}{2l} \right) dx = \frac{pl^2}{3EA}$$

Kui soovime siirde arvutada Mohri integraali abil, siis kasutame seda kujul (11.46)

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{n_k N_p}{EA} dx$$

Lisaks koormuseepüürile on meil vaja sel juhul ka ühikjõu epüüri, milleks rakendame varda otsa horisontaalse ühikjõu. Tekkiv epüür on kogu varda ulatuses konstantne ning ordinaadiga 1. See aga tähendab, et integraalimärgi alla jääb lõpptulemusena järgi sama $N(x)$ avaldis, mille me eespool juba saime ning varda otsa siirde u avaldis saab ka olema täpselt sama, nagu korra esitasime.

11.6.3. Temperatuuri muutusest põhjustatud siirded

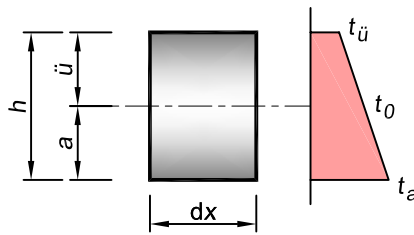
Joonisel 11.30 on kujutatud vardast eraldatud elementaarne osa pikkusega dx . Arvutuskeemidel märgime varda positiivse poole sageli katkendjoonega. Temperatuuri muutust katkendjoonega märgitud poolel tähistame t_a , vastaspoolel t_{ii} ja varda telgjoonel t_0 .

Siirete arvutamisel eeldame, et temperatuuri muutumine varraste ristlõigetel on tasandiline, s.t piki üht peatelge on temperatuur konstantne ja piki teist peatelge muutub temperatuur lineaarselt.

Temperatuuri tõusmise loeme positiivseks ja langemise negatiivseks.

Temperatuuri tõusmisel varda elementaarse osa alumised ja ülemised kiud pikenevad vastavalt

$$d\Lambda_a = \alpha t_a dx \quad \text{ja} \quad d\Lambda_{ii} = \alpha t_{ii} dx \quad (11.49)$$



Joonis 11.30. Temperatuuri muutumine varda ristlõikes

ning varda telgjoonel

$$d\Lambda = \alpha t_0 dx \quad (11.50)$$

võrra, kus α on materjali temperatuuri-joonpaisumistegur.

Temperatuuri muutuse telgjoonel (joonis 11.30) arvutame valemiga

$$t_0 = \frac{\ddot{u}t_a + at_{\ddot{u}}}{a + \ddot{u}} \quad (11.51)$$

Kui ristlõige on mõlema peatelje suhtes sümmeetriline ($a = \ddot{u}$), siis

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_a + t_{\ddot{u}}) \quad (11.52)$$

Edaspidi vaatleme temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamist kahes osas.

Temperatuuri ühtlane muutumine

Joonisel 11.31, a on kujutatud konsoolne varras ning sellest eraldatud elementaarne osa dx , mille alumisel ja ülemisel poolel tõuseb temperatuur võrdselt: $t_a = t_{\ddot{u}} = t_0$. Selline temperatuuri muutus põhjustab varda erinevatel pooltel kiudude võrdset pikenedamist, mille tõttu varras pikeneb oma telje suunas.

Siirdeid, kus varda kõik kiud pikenevad võrdselt varda telgjoonega $d\Lambda = \alpha t_0 dx$ võrra, nimetatakse *ühtlasest temperatuuri muutusest põhjustatud siireteks*.

Temperatuuri mitteühtlane muutumine

Joonisel 11.31, b kujutatud vardale mõjub temperatuuri mitteühtlane muutus: varda ülemisel ja alumisel poolel muutub temperatuur erinevalt. Nüüd pikenevad varda ülemised ja alumised kiud erinevalt, millest tingitud varda kõverdumist nimetatakse *temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud deformatsiooniks*. Varda kõverdumisel pöörduvad elementaarse osa otsristlõiked teineteise suhtes nurga $d\Psi$ võrra.

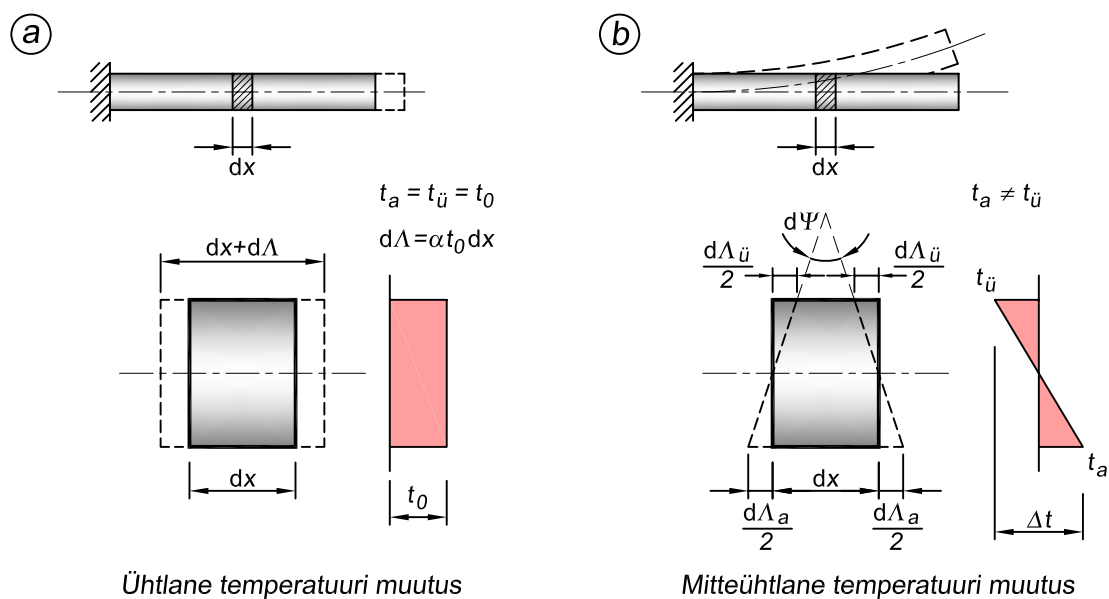
Ristlõike pöörde arvutame valemiga

$$d\Psi = \frac{d\Lambda_a - d\Lambda_{\ddot{u}}}{h} = \frac{\alpha t_a dx - \alpha t_{\ddot{u}} dx}{h} = \alpha \frac{t_a - t_{\ddot{u}}}{h} dx = \alpha \frac{\Delta t}{h} dx \quad (11.53)$$

kus h on ristlõike kõrgus ja

$$\Delta t = t_a - t_{\ddot{u}} \quad (11.54)$$

on varda alumiste ja ülemiste kiudude temperatuuri muutuste vahe.

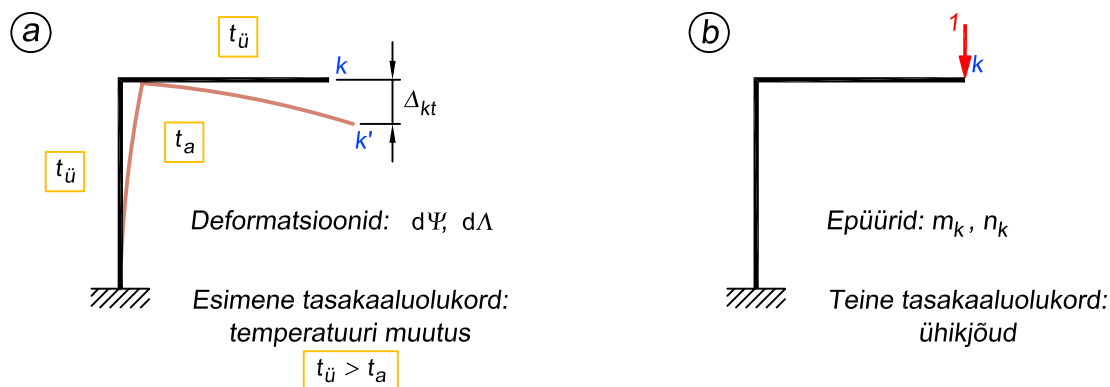


Joonis 11.31. Varda kaju muutumine ühtlase ja mitteühtlase temperatuuri muutuse korral

Temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamise üldvalem

Temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamiseks tuletame valemi virtuaalsiirete printsiibi alusel, mille jaoks vaatame kahte tasakaaluolukorda.

Joonisel 11.32, a on kujutatud arvutuskeem, mida mõjutab temperatuuri muutus. Kuna konstruktsiooni sellel küljel, mille tähiseks on $t_{\ddot{u}}$, tõuseb temperatuur rohkem kui t_a tähisega küljel, siis ka $t_{\ddot{u}}$ pooltel pikenevad varda kiud rohkem ja arvutuskeem deformeerub, nii nagu on kujutatud joonisel 11.32, a. Lõige k siirdub asukohta k' . Nimetame seda esimeseks tasakaaluolukorraks. Olgu meie ülesandeks arvutada lõike k siire vertikaalsuunas, mida tähistame Δ_{kt} , kus indeksis tagumine liige näitab, et me arvutame temperatuuri muutusest tingitud



Joonis 11.32. Tasakaaluolukorrad siirete arvutamisel temperatuuri muutusest

siiret. Teiseks tasakaaluolukorraks on olukord, kus me rakendame arvutusskeemile otsitavale siirdele vastava ühikjõu (joonis 11.32, b).

Nüüd saame välja kirjutada välis- ja sisejõudude tööde summa avaldise. Ühikjõuga koor-
matud arvutusskeemi (ehk teise tasakaaluolukorra) välis- ja sisejõudude tööde summa tem-
peratuuri muutusest (ehk esimese tasakaaluolukorra) põhjustatud siiretel võrdub nulliga

$$1_k \Delta_{kt} - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_k d\Psi - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} n_k d\Lambda = 0 \quad (11.55)$$

kus esimene liige väljendab ühikjõu tööd temale vastaval siirdel esimesest olukorrast, ning ülejäänud kaks liiget esitavad sisejõudude tööd: teine liige väljendab teise tasakaaluolukorra sisejõu m_k tööd temale vastaval siirdel $d\Psi$ esimesest tasakaaluolukorrast; kolmas liige annab teise olukorra sisejõu n_k töö temale vastaval siirdel $d\Lambda$ esimesest olukorrast.

Pärast ühikjõuga läbijagamist ja sisejõudude tööde paremale poole võrdusmärki viimist saame

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_k d\Psi + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} n_k d\Lambda \quad (11.56)$$

Temperatuuri muutusest põhjustatud varda elementaarse osa siirded $d\Psi$ ja $d\Lambda$ arvutame valemitega (11.50) ja (11.53), mistõttu saame siirete arvutamiseks avaldise

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_k \alpha \frac{\Delta t}{h} dx + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} n_k \alpha t_0 dx \quad (11.57)$$

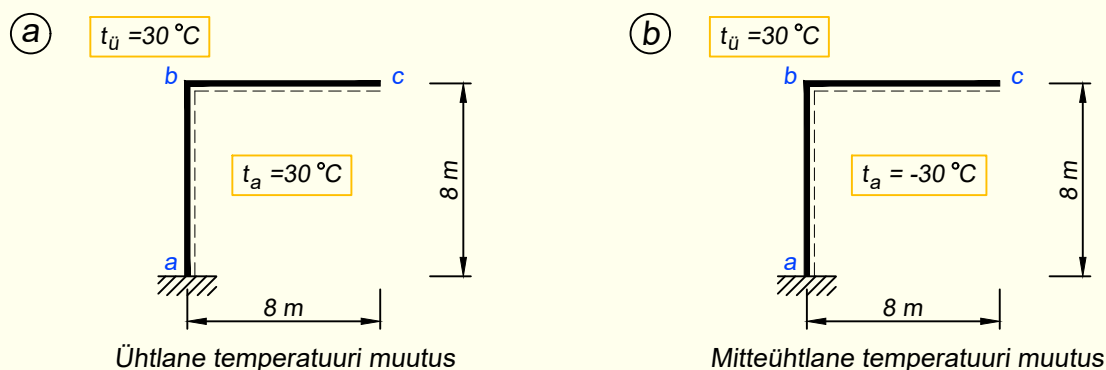
Kui integreerimise vahemiku ulatuses on varras samast materjalist ($\alpha_j = \text{const.}$) ja tem-
peratuuri muutus ühesugune ($\Delta t_j = \text{const.}$, $t_{0j} = \text{const.}$) ning varda ristlõike kõrgus konstantne
($h_j = \text{const.}$), siis arvutame siirded valemiga

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \alpha_j \frac{\Delta t_j}{h_j} \int_0^{l_j} m_k dx + \sum_{j=1}^v \alpha_j t_{0j} \int_0^{l_j} n_k dx \quad (11.58)$$

Avaldise (11.58) integraalid $\int m_k dx$ ja $\int n_k dx$ kujutavad ühikjõust 1_k põhjustatud painde-
momenti ja pikijõu epüüri pindalasisid integreerimisvahemiku ulatuses. Selle avaldise esimene
summa on positiivne, kui paindemomendi epüüri pindala ja temperatuuri mitteühtlane muu-
tus $\Delta t = t_a - t_{ii}$ on sama märgiga, ning negatiivne, kui nad on vastasmärkidega. See eeldab,
et **tähis t_a märgitakse varda sellele poolele, kus paindemoment on positiivne.** Märki võib
määrata ka varda deformeerunud kuju järgi: kui ühikjõust ja temperatuuri muutusest põh-
justatud varda kõverused on ühesugused, siis on korutus positiivne ning vastupidisel juhul
negatiivne.

Kui varda telgjoonel temperatuuri muutus t_0 ja ühikjõust põhjustatud pikijõu epüüri pind-
ala on sama märgiga, siis on avaldise (11.58) teine summa positiivne, ja kui erinevate märki-
degaga, siis negatiivne.

NÄIDE 11.9. Arvutada joonisel 11.33 kujutatud arvutusskeemi sõlmede b ja c horisontaalsiirdeid näidatud temperatuuri muutustest. Vasakpoolsel skeemil toimub ühtlane temperatuuri muutus, kus temperatuur tõuseb varraste mõlemal poolel võrdselt. Parem-poolisel skeemil toimub mitteühtlane temperatuuri muutus, kus varda ühel poolel temperatuur tõuseb ja teisel poolel samapalju langeb. Varraste profiiliks on IPE400, mille ristlõike kõrgus on $h = 400$ mm. Temperatuuri joonpaisumistegur on $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$.



Joonis 11.33. Arvutusskeem erinevate temperatuuri muutustega

LAHENDUS

Temperatuuri muutusest põhjustatud siirded arvutame valemiga (11.58)

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \alpha_j \frac{\Delta t_j}{h_j} \int_0^{l_j} m_k dx + \sum_{j=1}^v \alpha_j t_{0j} \int_0^{l_j} n_k dx$$

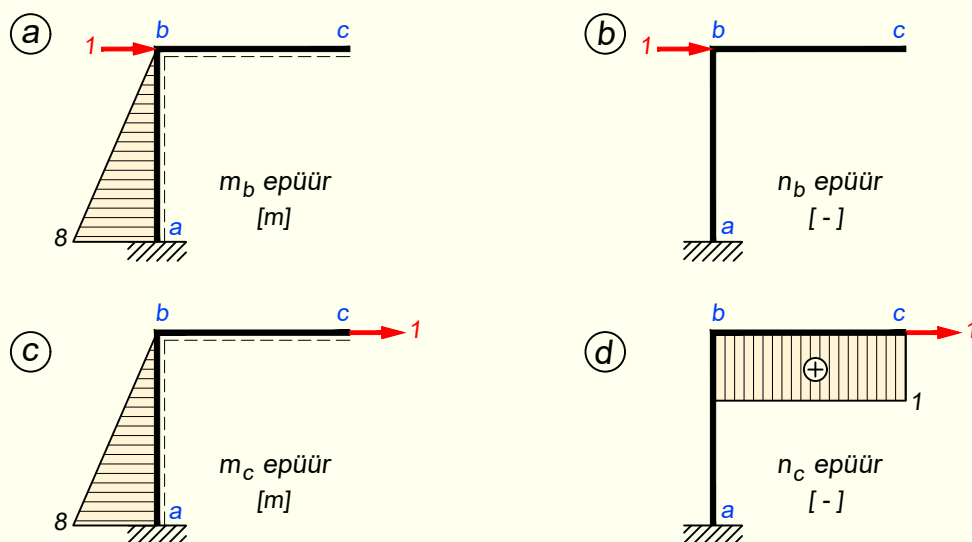
kus valemi esimene pool arvestab varraste kõverdumisest ja teine pool varraste pikkuse muutumisest põhjustatud deformatsioone. Kuna siin valemis peavad parameetri Δt ja paindemomendi epüüri m_k märgid omavahel vastavuses olema, siis tähistame temperatuuri muutusega t_a seotud varda poole katkendjoonega ja loeme selle m_k epüüri positiivseks pooleks.

1. Ühikjõududest põhjustatud epüüride koostamine

Siin ülesandes on küsitud lõigete b ja c horisontaalsiirdeid, mistõttu peame nendesse lõigetesse rakendama horisontaalsed ühikjõud ning koostama ühikjõududest põhjustatud paindemomendi ja pikijõu epüürid.

Kasutatava ühikjõu puhul on oluline, et see on horisontaalne. Kas ühikjõud on suunatud vasakule või paremale, sellel tähtsust ei ole, kuna vastuse märk näitab siirde suunda. Kui vastus tuleb positiivne, siis on siire meie poolt valitud ühikjõuga samasuunaline, ja vastupidi, negatiivne vastus näitab, et siire toimub ühikjõule vastassuunas.

Sõlme b rakendatud ühikjõust põhjustatud paindemomendi ja pikijõu epüürid on näidatud joonisel 11.34, a ja b . Sõlmes c paiknevast ühikjõust tekkivad epüürid on kujutatud joonisel 11.34, c ja d .



Joonis 11.34. Paindemomendi m ja pikijõu n epüürid

2. Siirded u_b ja u_c ühtlasest temperatuuri muutusest

Esimesena arvutame sõlmede b ja c horontaalsiirded joonisel 11.33, a kujutatud temperatuuri ühtlasest muutusest.

Selleks, et toimuvat varraste deformeerumist paremini mõista, on see kujutatud joonisel 11.35, a . Kui temperatuur tõuseb varda mõlemal küljel samapalju, siis ka varda mõlema külje kiud pikenevad võrdselt. Sellisel juhul varras pikeneb, aga ei kõverdu. Post $a-b$ hakkab pikinema ja sõlm b siirdub ülespoole. Kuna posti $a-b$ deformeerumine toimub ainult pikisuunas, siis sõlmel b horontaalsiire puudub. Koos posti pikeningega liigub ülespoole ka varras $b-c$, mis samuti pikeneb ja põhjustab sõlme c paremale siirdumise.

Temperatuuri muutuste vahe varda ühe ja teise poole vahel saame valemiga (11.54)

$$\Delta t = t_a - t_{\bar{u}} = 30 - 30 = 0$$

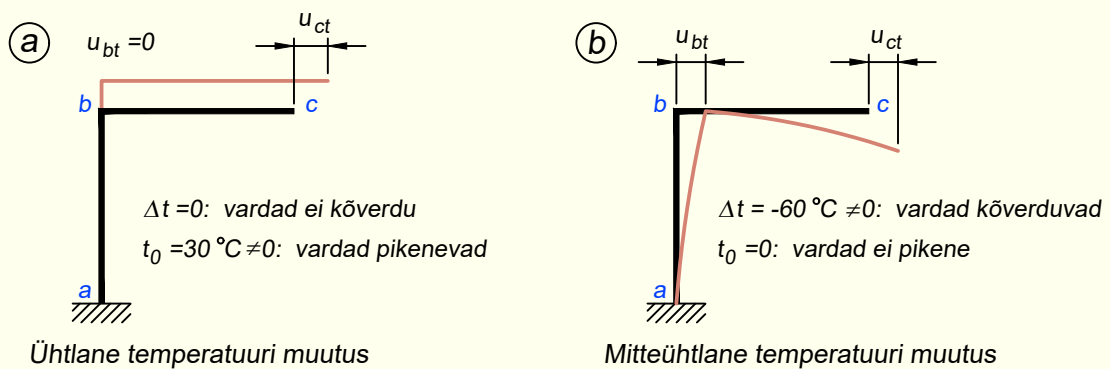
Temperatuuri muutuse varraste telgjoonel saame valemiga (11.52)

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_a + t_{\bar{u}}) = \frac{1}{2}(30 + 30) = 30^\circ\text{C}$$

Sõlmede b ja c horontaalsiireteks saame valemiga (11.58)

$$u_{bt} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{0}{0,4} \cdot \frac{-8 \cdot 8}{2} + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \cdot 0 = 0$$

$$u_{ct} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{0}{0,4} \cdot \frac{-8 \cdot 8}{2} + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \cdot 1 \cdot 8 = 0,0029 \text{ m} = 2,9 \text{ mm}$$



Joonis 11.35. Varraste deformeerumine erinevatest temperatuuri muutustest

3. Siirded u_b ja u_c mitteühtlasest temperatuuri muutusest

Järgmisena arvutame sõlmede b ja c horisontaalsiirded joonisel 11.33, b kujutatud temperatuuri mitteühtlasest muutusest.

Varraste deformeerumine mitteühtlasest temperatuuri muutusest on kujutatud joonisel 11.35, b . Kui temperatuur muutub varda kummalgi küljel erinevalt, siis ka varda kiudude pikkus muutub erinevalt. Praegusel juhul posti $a-b$ vasakul küljel temperatuur tõuseb ja paremal küljel langeb. See tingib vasaku külje kiudude pikenemise ja parema külje kiudude lühenemise, mis kokkuvõttes põhjustavad posti kõverdumise ja sõlme b siirdumise paremale. Varda $b-c$ ülemisel poolel temperatuur tõuseb ja alumisel langeb, mistõttu see varras kõverdub selliselt, et kumerus tekib ülespoole.

Temperatuuri muutuste vahe varda ühe ja teise poole vahel on

$$\Delta t = t_a - t_{\bar{u}} = -30 - 30 = -60\text{ °C}$$

Temperatuuri muutus varraste telgjoonel on

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_a + t_{\bar{u}}) = \frac{1}{2}(-30 + 30) = 0$$

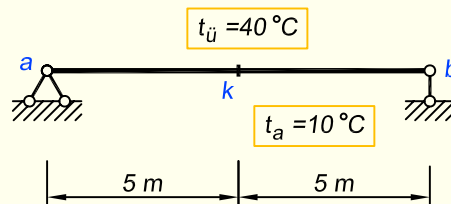
Sõlmede b ja c horisontaalsiireteks saame valemiga (11.58)

$$u_{bt} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-60}{0,4} \cdot \frac{-8 \cdot 8}{2} + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 0 \cdot 0 = 0,0576\text{ m} = 57,6\text{ mm}$$

$$u_{ct} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-60}{0,4} \cdot \frac{-8 \cdot 8}{2} + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 8 = 0,0576\text{ m} = 57,6\text{ mm}$$

Kokkuvõtvalt saame öelda, et kui $\Delta t = 0$ ja $t_0 \neq 0$ (joonis 11.35, a), siis toimub ainult varraste pikisuunaline deformatsioon. Kui $\Delta t \neq 0$ ja $t_0 = 0$ (joonis 11.35, b), siis toimub ainult varraste kõverdumine. Kui aga mõlemad parameetrid on nullist erinevad, siis esinevad ka mõlemad deformatsioonid korraga.

NÄIDE 11.10. Arvutada joonisel 11.36 kujutatud terastala keskmise lõike k vertikaalsiire ja toeristlõike b horontaalsiire, kui temperatuur tala alumisel poolel tõuseb 10°C võrra ja ülemisel poolel 40°C võrra. Tala profiiliks on IPE330, mille ristlõike kõrgus on $h = 330$ mm. Temperatuuri joonpaisumistegur on $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$.



Joonis 11.36. Arvutusskeem

LAHENDUS

Temperatuuri muutusest põhjustatud siirded arvutame valemiga (11.58)

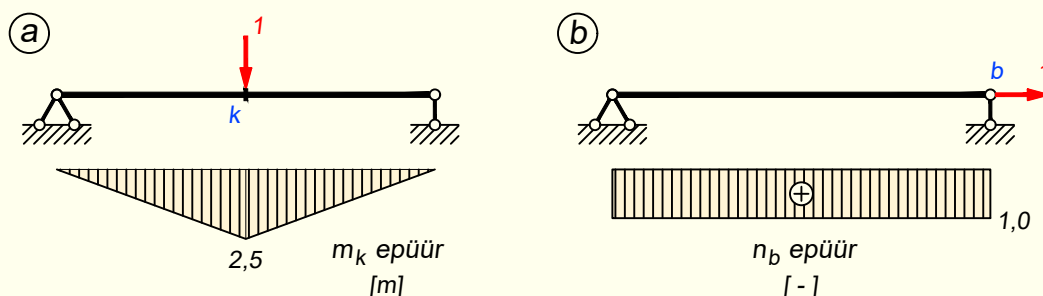
$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \alpha_j \frac{\Delta t_j}{h_j} \int_0^{l_j} m_k dx + \sum_{j=1}^v \alpha_j t_{0j} \int_0^{l_j} n_k dx$$

1. Ühikjõududest põhjustatud epüüride koostamine

Kuna peame arvutama lõike k vertikaalsiirde, siis rakendame sinna vertikaalse ühikjõu ning toelõike b horontaalsiirde leidmiseks rakendame sinna horontaalse ühikjõu. Mõlemast ühikjõust koostame paindemomendi ja pikijõu epüürid (joonis 11.37).

Selgub aga, et lõikes k olev jõud tekitab ainult paindemomendi epüüri ja lõikes b olev jõud vastupidiselt ainult pikijõu epüüri. See tähendab, et lõike k vertikaalsiirde arvutamisel jääb valemist (11.58) järgi ainult esimene pool ja lõike b horontaalsiirde arvutamisel tagumine pool.

Siin kasutame kummagi siirde jaoks valemi erinevaid osasid, kuna nendel siiretel temperatuuri muutusest on erinevad põhjustajad. Lõike k siire tekib tala alumise ja ülemise poole temperatuuri muutuste erinevusest, mistõttu varras muutub kõveraks ja sellele siirdele vastab m epüür. Toeristlõike b siire tekib temperatuuri tõusust põhjustatud varda pikenedmisest ja sellele siirdele vastab n epüür.



Joonis 11.37. Paindemomendi m ja pikijõu n epüürid

2. Ristlõike k vertikaalsiirde arvutus

Ristlõike k vertikaalsiirde arvutame valemi (11.58) esimese poolega, mille jaoks on vaja leida temperatuuri muutuste vahe tala alumiste ja ülemiste kiudude vahel valemiga (11.54)

$$\Delta t = t_a - t_{\bar{u}} = 10 - 40 = -30^\circ\text{C}$$

Lõike k vertikaalsiirdeks saame seejärel

$$w_{kt} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-30}{0,33} \cdot \frac{2,5 \cdot 10}{2} = -0,0136 \text{ m} = -13,6 \text{ mm}$$

Saadud siire on negatiivne, mis tähendab, et see toimub ühikjõule vastupidises suunas ehk alt üles. See on ka loogiline, kuna temperatuur tala ülemisel poolel tõuseb rohkem, mistõttu ülemised kiud pikenevad alumistest rohkem ja tala kõverdub ülespoole.

3. Ristlõike b horisontaalsiirde arvutus

Toelõike b horisontaalsiirde arvutame valemi (11.58) teise poolega, mille jaoks on vaja temperatuuri muutust tala telgjoonel valemiga (11.52)

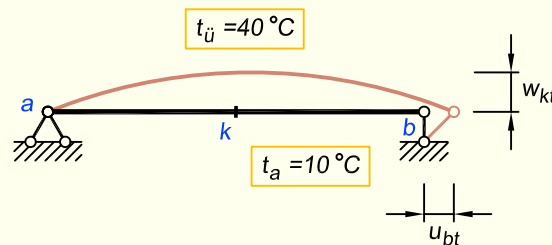
$$t_0 = \frac{1}{2} (t_a + t_{\bar{u}}) = \frac{1}{2} (10 + 40) = 25^\circ\text{C}$$

Toelõike b horisontaalsiirdeks saame

$$u_{bt} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 25 \cdot 1 \cdot 10 = 0,003 \text{ m} = 3 \text{ mm}$$

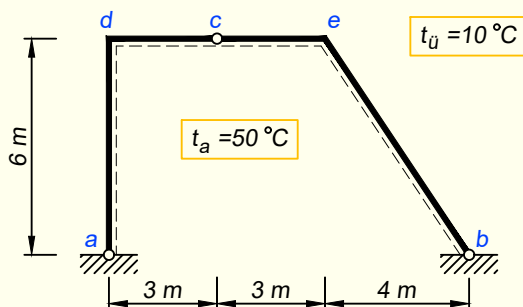
Positiivne vastus näitab, et lõike b siire on ühikjõuga samas suunas vasakult paremale. Tulemus on kooskõlas sellega, et temperatuuri tõusul tala paisub ja pikeneb ning kuna vasakus otsas on liikumatu liigendtüüp, siis järelikult peabki tala parempoolne ots-ristlõige paremale siirduma.

Selleks, et paremini mõista tala deformeerumist, esitame selle deformeerunud kuju joonisel 11.38, kus joonise ilmekuse huvides on nii tala kõverdumist kui ka pikennemist tegelikkusega võrreldes oluliselt suurendatud.



Joonis 11.38. Tala deformeerumine temperatuuri muutumise mõjul

NÄIDE 11.11. Arvutada joonisel 11.39 kujutatud kolme liigendiga raami sõlme e vertikaalsiire ja sõlme d pööre, kui temperatuur raami sisemisel poolel tõuseb 50°C võrra ja välimisel poolel 10°C võrra. Tala profiiliks on IPE360, mille ristlõike kõrgus on $h = 360$ mm. Temperatuuri joonpaisumistegur on $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$.



Joonis 11.39. Arvutuskeem

LAHENDUS

Temperatuuri muutusest põhjustatud siirded arvutame valemiga (11.58)

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \alpha_j \frac{\Delta t_j}{h_j} \int_0^{l_j} m_k dx + \sum_{j=1}^v \alpha_j t_{0j} \int_0^{l_j} n_k dx$$

1. Ühikjõududest põhjustatud epüüride koostamine

Sõlme e vertikaalsiirde arvutamiseks rakendame sinna vertikaalse ühikjõu ning sõlme d pööre leidmiseks rakendame sinna ühikmomendi. Nii ühikjõust kui ka ühikmomendist koostame paindemomendi ja pikijõu epüürid (joonis 11.40).

2. Sõlme e vertikaalsiirde arvutus

Sõlme e vertikaalsiirde arvutamisel kasutame epüüre jooniselt 11.40, a ja b . Enne siirde arvutamist on vaja leida temperatuuri muutuste vahe raami sisemiste ja välimiste kiudude vahel valemiga (11.54)

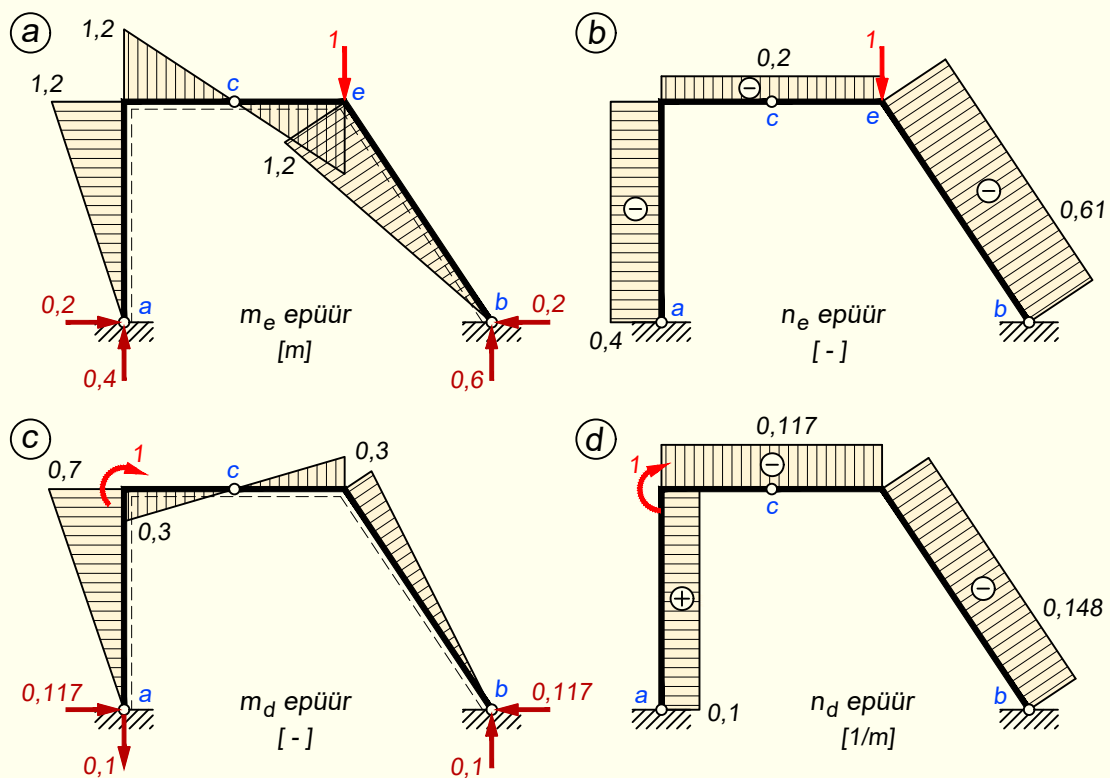
$$\Delta t = t_a - t_{\bar{u}} = 50 - 10 = 40^\circ\text{C}$$

ning temperatuuri muutus varda telgjoonel valemiga (11.52)

$$t_0 = \frac{1}{2} (t_a + t_{\bar{u}}) = \frac{1}{2} (50 + 10) = 30^\circ\text{C}$$

Sõlme e vertikaalsiirdeks saame nüüd

$$w_{et} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{40}{0,36} \left(-\frac{1,2 \cdot 6}{2} - \frac{1,2 \cdot 3}{2} + \frac{1,2 \cdot 3}{2} + \frac{1,2 \cdot 7,21}{2} \right) + \\ + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 (-0,4 \cdot 6 - 0,2 \cdot 6 - 0,61 \cdot 7,21) = -0,0019 \text{ m} = -1,9 \text{ mm}$$



Joonis 11.40. Paindemomendi m ja pikijõu n epüürid

kus sulgudes olevad avaldised kujutavad paindemomendi m_e ja pikijõu n_e epüüride pindalasisid, mille puhul tuleb arvestada ka epüüridel olevaid märke.

Saadud vastuse miinusmärk näitab, et siire toimub ühikjõule vastupidises suunas ehk alt üles.

2. Sõlme d pöörde arvutus

Sõlme d pöörde arvutamisel kasutame epüüre jooniselt 11.40, c ja d . Parameetrid Δt ja t_0 on eelnevalt juba välja arvatud ja seetõttu saame kasutada neid väärtuseid.

Sõlme d pöördeks saame

$$\begin{aligned} \varphi_{dt} = & 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{40}{0,36} \left(-\frac{0,7 \cdot 6}{2} + \frac{0,3 \cdot 3}{2} - \frac{0,3 \cdot 3}{2} - \frac{0,3 \cdot 7,21}{2} \right) + \\ & + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 (0,1 \cdot 6 - 0,117 \cdot 6 - 0,148 \cdot 7,21) = -0,0047 \text{ rad} \end{aligned}$$

kus negatiivne vastus näitab, et pööre toimub ühikmomendile vastupidises suunas ehk vastupäeva.

Lisame siia veel ka selle märkuse, et kuna parameetrid Δt ja t_0 tulid mõlemad nullist erinevad, siis järelkult selles ülesandes arvatavad siirded on seotud nii varraste kõverdumise kui ka pikisuunalise deformeerumisega.

11.6.4. Toesidemete nihkumisest põhjustatud siirded

Tugede nihkumisest põhjustatud siirete arvutamise valemi tuletamiseks vaatame taas kahte tasakaaluolukorda.

Joonisel 11.41, *a* on kujutatud raam ning selle pöördumine parempoolse toe vajumisest Δc võrra. See on esimeseks tasakaaluolukorraks. Olgu ülesandeks arvutada raami parempoolse nurgasõlme *k* horisontaalsiire Δ_{kr} , kus indeksi tagumine liige viitab sellele, et me arvutame toe liikumisest tingitud siiret. Teise tasakaaluolukorrana vaatleme olukorda, kus rakendame arvutusskeemile otsitavale siirdele vastava ühikjõu ja leiame sellest tekkivad toereaktsioonid (joonis 11.41, *b*).

Virtuaalsiirete printsiibi alusel võrdub ühikjõuga koormatud arvutusskeemi välis- ja sisejõudude tööde summa tugede (või mõne teise sideme) nihkumisest põhjustatud siiretel nulliga

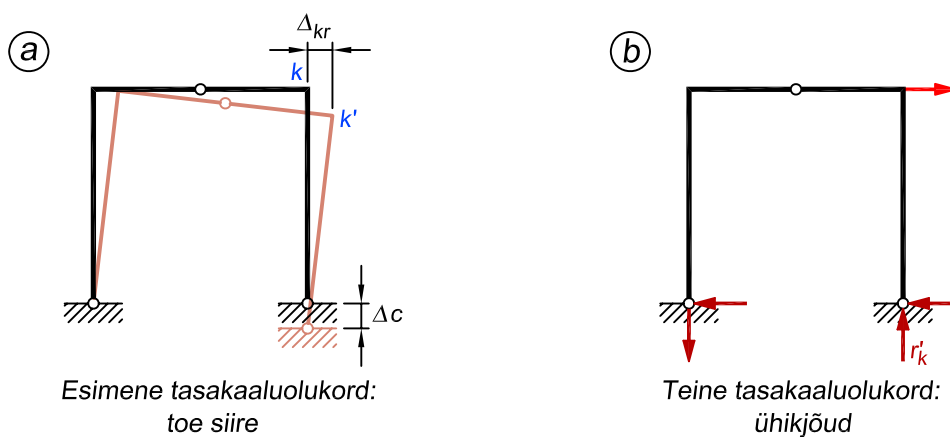
$$1_k \Delta_{kr} + \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} = 0 \quad (11.59)$$

kus Δc_j on toesideme *j* siire ja r'_{jk} ühikjõust põhjustatud reaktsioon sidemes *j*. Kuna staatikaga määratava konstruktsiooni tugede nihkumine sisejõude ei põhjusta, siis elemendid ei deformeeru ja võrrandis (11.59) ei esine sisejõudude tööd. Seetõttu kujutavad avaldise mõlemad liikmed välisjõudude tööd (toereaktsioonid mõjuvad arvutusskeemile samuti kui välisjõud) ja on seepärast ka mõlemad positiivsed.

Võrrandist (11.59) avaldame siirde

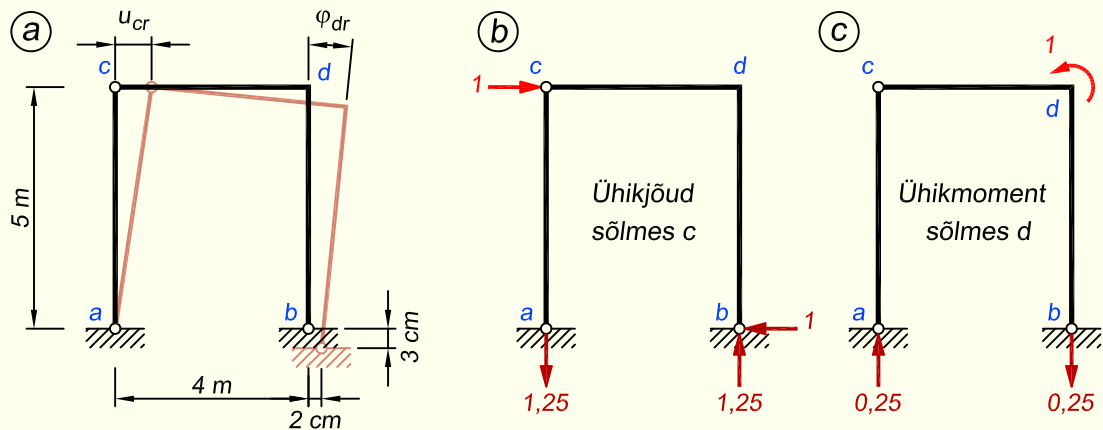
$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} \quad (11.60)$$

kus korrutis $\Delta c_j r'_{jk}$ on positiivne, kui siirde ja reaktsiooni suunad ühtivad, ja negatiivne, kui nad on vastassuunalised. Mainitud reegel ei puuduta summa märgi ees olevat miinusmärki, mis peab seal igal juhul olema.



Joonis 11.41. Tasakaaluolukorrad siirete arvutamisel toe nihkumisest

NÄIDE 11.12. Leida joonisel 11.42, a kujutatud arvutuskeemi sõlme c horisontaalsiire ja sõlme d pööre, kui tugi b on vajunud 3 cm allapoole ja nihkunud 2 cm paremale.



Joonis 11.42. Siirded toe nihkumisest

LAHENDUS

Tugede nihkumisest põhjustatud siirded leiame valemiga (11.60)

$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk}$$

1. Sõlme c horisontaalsiirde arvutamiseks rakendame sinna sõlme horisontaalse ühikjõu ning leiame sellest tekkivad toereaktsioonid (joonis 11.42, b).

Valemiga (11.60) arvutame siirde

$$u_{cr} = -(-0,03 \cdot 1,25 - 0,02 \cdot 1) = 0,0575 \text{ m} = 57,5 \text{ mm}$$

kus sulgudes olevad korrutised on mõlemad negatiivsed, kuna etteantud siire ja sellele vastav toereaktsioon on erinevates suundades. Saadud positiivne tulemus näitab, et sõlme c siire toimub ühikjõuga samas suunas ehk vasakult paremale.

2. Sõlme d pöördet arvutamiseks rakendame sinna sõlme ühikmomendi ja leiame sellest tekkivad toereaktsioonid (joonis 11.42, c).

Valemiga (11.60) arvutame sõlme pöördet

$$\varphi_{dr} = -(0,03 \cdot 0,25) = -0,0075 \text{ rad}$$

kus sulgudes olev korrutis on positiivne, kuna toe siire ja sellele vastav reaktsioon on samasuunalised. Miinusmärgiga vastus näitab, et sõlme pööre toimub ühikmomendile vastassuunas ehk päripäeva, mis on selgelt näha ka jooniselt 11.42, a.

Pikemalt on tugede nihkumisest põhjustatud siirdeid käsitletud näites 11.14.

11.6.5. Kokkuvõte kasutatavatest ühikjõududest

Järgnevalt esitame mõned arvutustes sagedamini esinevad ühikjõud.

Joonisel 11.43, a on kolme liigendiga raam koormatud ühtlaselt jaotatud horisontaalse koormusega ja vertikaalse koondatud jõuga.

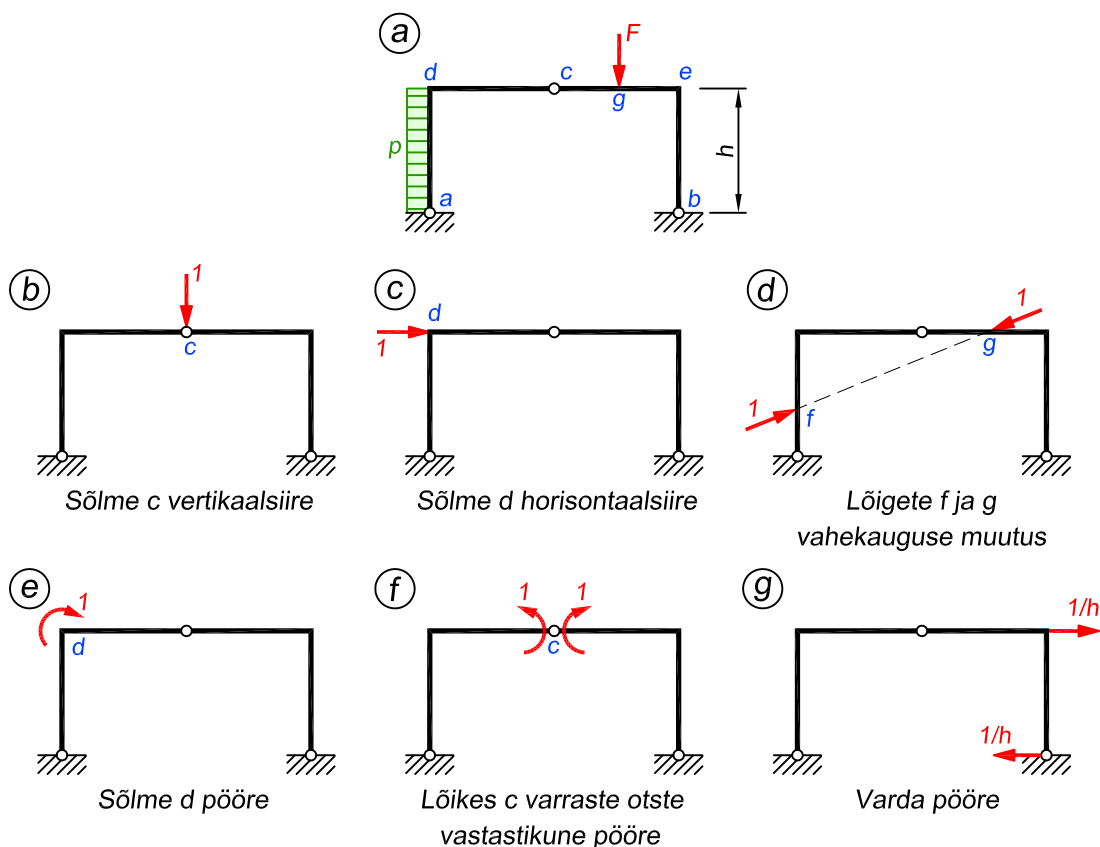
Suvalise punkti siirde arvutamiseks rakendame sinna leitava siirde sihis ühikjõu (joonisel 11.43, b liigendi c vertikaalsiire ja joonisel 11.43, c sõlme d horisontaalsiire). Kui arvutuse tulemus on positiivne, siis siirde ja ühikjõu suunad ühtivad. Kui arvutuse tulemus on negatiivne, siis siire ja ühikjõud on vastupidiste suundadega.

Kahe punkti vahekauguse muutuse arvutamiseks rakendame nendesse punktidesse kaks ühel sirgel asetsevat vastupidise suunaga ühikjõudu (joonis 11.43, d).

Ristlõike või sõlme pöörde arvutamisel rakendame sinna ühikmomendi (joonis 11.43, e).

Kahe ristlõike vastastikuse pöördenurga arvutamisel rakendame nendesse ristlõigetesse kaks vastupidi suunatud ühikmomenti (joonis 11.43, f). Kui ühikmomentid rakendada samas suunas, siis saame arvutuse tulemusena nende ristlõigete pöördenurkade summa.

Varda pöörde arvutamisel rakendame vardale jõupaari, mille moment võrdub ühega. Nii-sugune jõupaar koosneb varda mõlemas otsas risti varda teljega mõjuvast jõust, mille suurus on $\frac{1}{l}$, kus l on varda pikkus (joonis 11.43, g).



Joonis 11.43. Enamlevinud ühikjõud

11.6.6. Koormusest põhjustatud siirete valemi integraalide arvutamine

Sirgetest varrastest koosneva tasandkonstruktsiooni elementide siirded arvutame valemiga (11.44), milles on paindemomentide, piki- ja põikjõudude integraalid. Järgnevalt vaatleme ainult paindemomentide integreerimist, kuid saadud tulemused kehtivad ka piki- ja põikjõudude integraalide kohta.

Kui arvestame ainult paindemomentide mõju, siis leiame siirded valemiga (11.45)

$$\Delta_{kp} = \sum \int m_k \frac{M_p}{EI} dx \quad (11.61)$$

kus M_p ja m_k on vastavalt koormusest ning ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaadid. Siirde leidmisel jaotame konstruktsiooni osadeks ehk integreerimisvahemikeks. Integreerimisvahemikeks võivad olla kas üksikud vardad või veel väiksemad elemendid. Iga vahemiku jaoks arvutame integraali ning lõpptulemuse saamiseks liidame need.

Integreerimisvahemikud tuleb valida arvutuses kasutatavate M_p ja m_k epüüride järgi, lähtudes sellest, et vahemiku ulatuses ei tohi kumbki epüür sisaldada murdepunkte, astmeid ega üleminekuid ühelt funktsioonilt teisele.

Teisiti öeldes peab ühe integreerimisvahemiku ulatuses kirjeldama epüüri kuju sama funktsioon. Kohas, kus epüüri kuju kirjeldav funktsioon muutub, tuleb valida järgmine vahemik.

Simpsoni valem

Kui ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür integreerimisvahemiku a - b ulatuses on lineaarne ja koormuse epüüri ordinaat jagatud paindejäikusega EI muutub lineaarselt või kujutab teise astme parabooli, siis võib rakendada *Simpsoni valemit*

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{l}{6} (f_a + 4f_c + f_b) \quad (11.62)$$

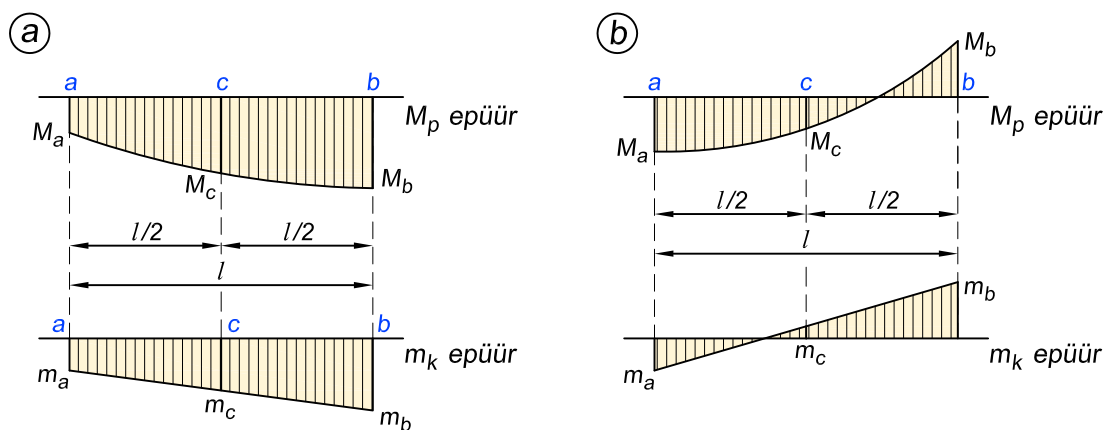
kus l on integreerimisvahemiku a - b pikkus, f_a ja f_b on integreeritava funktsiooni väärtused vahemiku piirpunktides a ja b ning f_c on integreeritava funktsiooni väärtus vahemiku a - b keskel. Vahemiku a - b ulatuses arvutame integraali (11.61) Simpsoni valemiga (11.62)

$$\int_a^b m_k \frac{M_p}{EI} dx = \frac{l}{6} \left(m_{ak} \frac{M_{ap}}{EI_a} + 4m_{ck} \frac{M_{cp}}{EI_c} + m_{bk} \frac{M_{bp}}{EI_b} \right) \quad (11.63)$$

Kui vahemiku a - b ulatuses jäikus EI on konstantne, siis võib valemi (11.63) kirjutada järgmiselt

$$\frac{1}{EI} \int_a^b m_k M_p dx = \frac{l}{6EI} (m_{ak} M_{ap} + 4m_{ck} M_{cp} + m_{bk} M_{bp}) \quad (11.64)$$

Valemities (11.63) ja (11.64) on korrutis mM positiivne, kui ühikjõust ja koormusest põhjustatud epüüride ordinaadid on varda samal poolel (joonisel 11.44, a ja b ordinaadid m_a, M_a ning m_b, M_b) ja negatiivne, kui epüüride m ja M ordinaadid on vastupidiste märkidega, s.t ordinaadid on varda erinevatel pooltel (joonisel 11.44, b ordinaadid m_c ja M_c).



Joonis 11.44. Arvutus Simpsoni valemiga

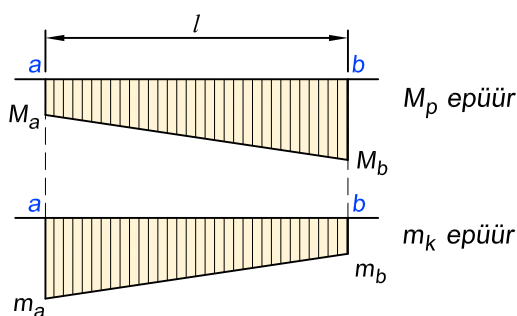
Trapetsivalem

Kui mõlemad epüürid (M_p ja m_k) on lineaarsed ehk teisiti öeldes trapetsikujulised (joonis 11.45) ja $EI = \text{const.}$, siis saab keskmised ordinaadid arvutada otsmiste ordinaatide kaudu tavaliste aritmeetiliste keskmistena

$$m_c = \frac{m_a + m_b}{2}; \quad M_c = \frac{M_a + M_b}{2} \quad (11.65)$$

Valem (11.64) omandab nüüd uue kuju, mida lähtuvalt epüüride kujust nimetatakse *trapetsivalemiks*

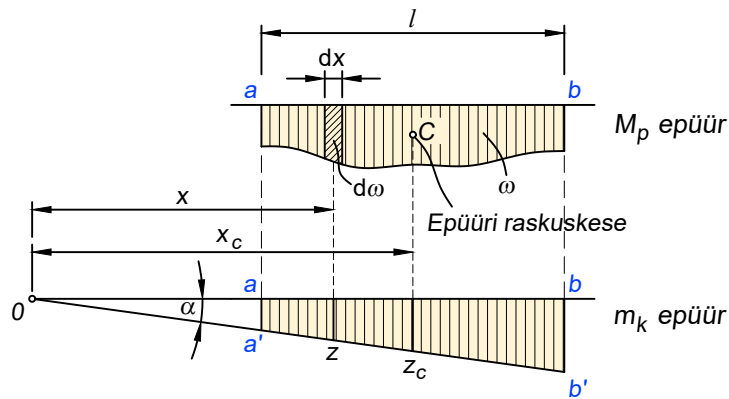
$$\frac{1}{EI} \int_a^b m_k M_p dx = \frac{l}{6EI} [2(m_a M_a + m_b M_b) + m_a M_b + m_b M_a] \quad (11.66)$$



Joonis 11.45. Arvutus trapetsivalemiga

Vereštšagini võte

Järgnevalt vaatleme siirde valemi integraalide arvutamise teist moodust, kui vähemalt üks epüüridest on lineaarselt muutuv. Olgu vahemikus a - b ühikjõust põhjustatud epüür lineaarne ja varda jäikus konstantne.



Joonis 11.46. Arvutus Vereštšagini võttega

Ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüüri kujutava sirge $a'-b'$ ja telgjoone $a-b$ vahelise nurga tähistame α ning nende sirgete pikenduste lõikepunkti O võtame koordinaatide alguspunktiks (joonis 11.46). Ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaat on nüüd

$$m_k = z = x \tan \alpha \quad (11.67)$$

ja siirde valemi integraali võib teisendada järgmiselt

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI} \int_a^b m_k M_p dx = \frac{\tan \alpha}{EI} \int_a^b x \cdot M_p dx \quad (11.68)$$

kus $M_p dx = d\omega$ on koormusest põhjustatud epüüri elementaarne pindala ja x on selle pinna raskuskeskme kaugus koordinaatide algusest.

Integraali

$$\int_a^b x \cdot M_p dx \quad (11.69)$$

väärtus on võrdne koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri staatilise momendiga punkti O suhtes. Paindemomendi epüüri staatilise momendi leiame epüüri kogu pinna ja selle raskuskeskme kauguse korrutisena ωx_c ning

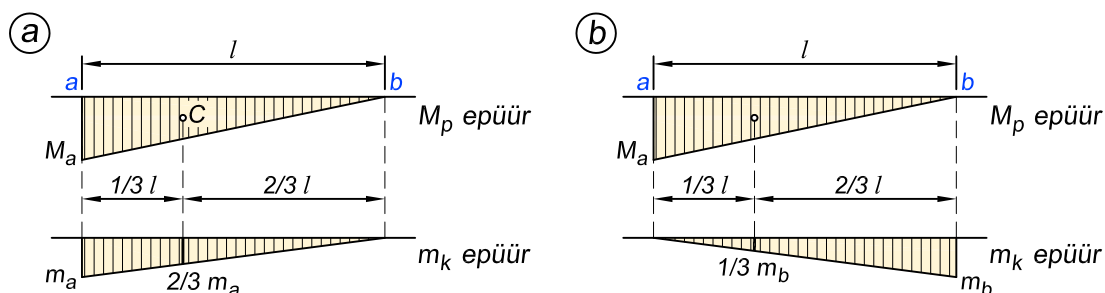
$$\tan \alpha \int_a^b x \cdot M_p dx = \tan \alpha \cdot \omega x_c = \omega z_c \quad (11.70)$$

kus ω on koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pindala, x_c on selle pinna raskuskeskme kaugus punktist O ja $z_c = x_c \tan \alpha$ on koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pinna raskuskeskme kohal olev ordinaat teises lineaarselt muutuv epüüris.

Nüüd

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI} \int_a^b m_k M_p dx = \frac{1}{EI} \omega z_c \quad (11.71)$$

Järelikult paindemomendi epüüride m_k ja M_p ordinaatide korrutise integraal vahemikus $a-b$ on võrdne korrutisega, mille üheks teguriks on kõverjoonelise epüüri pindala vahemikus



Joonis 11.47. Arvutus Vereštšagini võttega kolmnurksete epüüride korral

a - b ja teiseks teguriks kõverjoonelise epüüri pinna raskuskeskme kohal olev ordinaat teises lineaarselt muutuv epüüris. Korrutis ω_{z_c} on positiivne, kui koormusest põhjustatud paindemomendi epüür M_p ja ordinaat z_c on sama märgiga, s.t mõlemad on kantud vardast ühele ja samale poole.

Niisuguste integraalide lahendamise moodust nimetatakse *Vereštšagini võtteks*, mis kokkuvõtvalt sõnastatuna on järgmine: **ühe epüüri pindala tuleb korrutada tema raskuskeskme asukohale vastava ordinaadiga teisest epüürist**. Kui üks epüür on kõverjooneline, siis tuleb pindala võtta igal juhul kõverjoonelise epüüri oma. Kui mõlemad epüürid on lineaarsed, siis ei ole tähtsust, kummast epüürist võtta pindala ja kummast ordinaat, kuna mõlemat pidi peab sama tulemuseni jõudma.

Kui varda jäikus on muutuv, siis ei saa seda tuua integraalimärgi ette ja enne Vereštšagini võtte kasutamist on vaja koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaadid redutseerida, korrutades neid teguriga I_0/I . Inertsimomendi I_0 väärtus on vabalt valitav. Valemi (11.71) asemel tuleb kasutada siis järgmist avaldist

$$\Delta_{kp} = \sum \int_a^b m_k \frac{M_p}{EI} dx = \frac{1}{EI_0} \int_a^b m_k \left(M_p \frac{I_0}{I} \right) dx = \frac{1}{EI_0} \omega_{Ry_c} \quad (11.72)$$

kus ω_R on koormusest põhjustatud redutseeritud paindemomendi ($M_p I_0/I$) epüüri pindala.

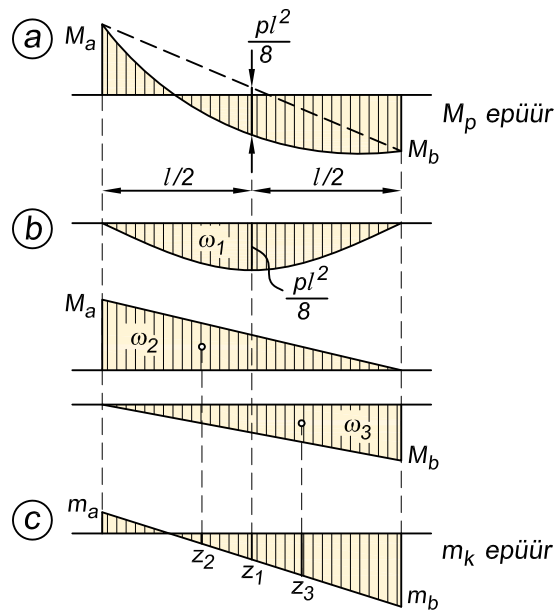
Vereštšagini võtte kolmnurksete epüüride korral

Vereštšagini võtte (11.71) integraali arvutamisel, kui $EI = \text{const.}$, annab lihtsad valemid kolmnurksete epüüride jaoks. Joonisel 11.47, a on mõlemal epüüril suurim ordinaat kohakuti ja integraali väärtuseks on

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI} \int_a^b M_p m_k dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_a l}{2} \cdot \frac{2}{3} m_a = \frac{l}{3EI} M_a m_a \quad (11.73)$$

Joonisel 11.47, b on epüüride suurimad ordinaadid integreerimisvahemiku erinevates otses ja integraali väärtuseks sellel juhul on

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI} \int_a^b M_p m_k dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_a l}{2} \cdot \frac{1}{3} m_b = \frac{l}{6EI} M_a m_b \quad (11.74)$$



Joonis 11.48. Arvutamine koormusest põhjustatud M epüüri jagamisel osadeks

Vereštšagini võtte koormusest põhjustatud epüüri jagamisel osadeks

Koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri võib jõudude mõju sõltumatus printsiibi alusel vaadelda kui üksikutest koormustest põhjustatud paindemomendi epüüride algebralist summat. See lubab siirde arvutamisel vaadelda epüüri lihtsate pindalade summa või vahena.

Joonisel 11.48, a on koormusest põhjustatud paindemomendi epüür kujutatud kogu koormusest ja joonisel 11.48, b eraldi kolmeks jaotatud koormusest. Integraali (11.71) väärtuseks on

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI} \int_a^b M_p m_k dx = \frac{1}{EI} (\omega_1 z_1 - \omega_2 z_2 + \omega_3 z_3) \quad (11.75)$$

kus

$$z_1 = \frac{m_b - m_a}{2}; \quad z_2 = \frac{1}{3}m_b - \frac{2}{3}m_a; \quad z_3 = \frac{2}{3}m_b - \frac{1}{3}m_a \quad (11.76)$$

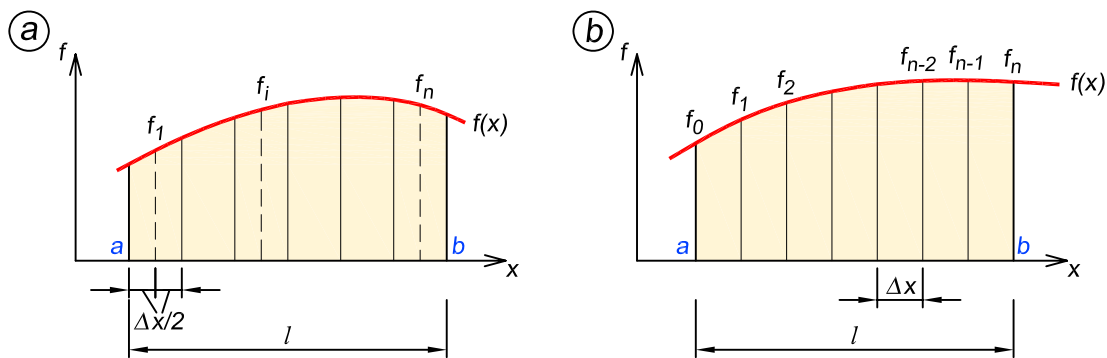
Funktsioonide numbriline integreerimine üldkujul

Kõverate varrastega konstruktsioonidel (kaartel) on nii koormusest kui ka ühikjõust põhjustatud epüürid kõverjoonelised ning seetõttu ei saa siirete valemi integraalide arvutamiseks kasutada eespool toodud valemeid. Esitame siin funktsioonide numbrilise integreerimise valemid üldkujul.

Funktsiooni

$$f(x) = m_k \frac{M_p}{EI} \quad (11.77)$$

numbrilisel integreerimisel jaotame integreerimisvahemiku $a-b$ n võrdseks osaks (joonis 11.49),



Joonis 11.49. Integreerimisvahemiku jagamine n võrdseks osaks

kus osakeste pikkused on

$$\Delta x = \frac{l}{n} \quad (11.78)$$

Kõige lihtsamal numbrilisel integreerimisel arvutame funktsiooni $f(x)$ väärtused osakeste keskkohal f_1, f_2, \dots, f_n (joonis 11.49, a) ja integraali ligikaudse väärtuse leiame summeerimise teel

$$\int_a^b m_k \frac{M_p}{EI} dx \approx \int_a^b f(x) dx \approx \Delta x (f_1 + f_2 + \dots + f_n) = \Delta x \sum_{i=1}^n f_i \quad (11.79)$$

Osakeste erinevate pikkuste puhul ($\Delta x \neq \text{const.}$) arvutame integraali järgmiselt

$$\int_a^b f(x) dx \approx f_1 \Delta x_1 + f_2 \Delta x_2 + \dots + f_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f_i \Delta x_i \quad (11.80)$$

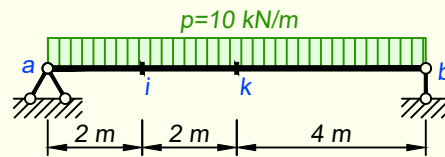
Trapetsivalemi kasutamisel jagame integreerimisvahemiku $a-b$ n võrdseks osaks (joonis 11.49, b), funktsiooni $f(x)$ väärtused arvutame osakeste vahekohtades $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n$ ja integraali ligikaudse väärtuse leiame avaldisega

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right) \quad (11.81)$$

Kui funktsioon $f(x)$ on mittelineaarne, siis paraboolse interpolatsiooni võte annab tulemuse väiksema veaga. Sel juhul jagame integreerimisvahemiku $a-b$ paarisarvuliseks n võrdseks osaks (joonis 11.49, b) ja integraali ligikaudse väärtuse leiame *Simpsoni* valemiga

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} \Delta x (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \quad (11.82)$$

NÄIDE 11.13. Arvutada joonisel 11.50 kujutatud arvutusskeemi ristlõigete k ja i vertikaalsiirded koormusest.



Joonis 11.50. Arvutusskeem

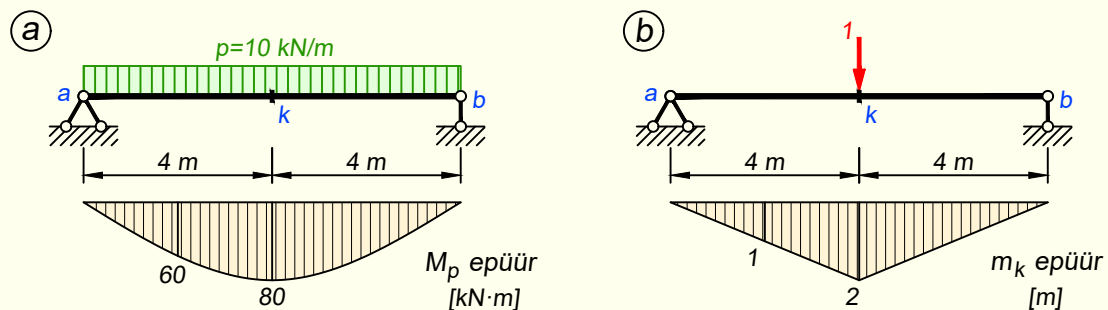
LAHENDUS

Koormusest põhjustatud siirete leidmiseks kasutame valemit (11.45)

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k M_p}{EI} dx$$

1. Ristlõike k vertikaalsiire

Vastavalt valemile (11.45) tuleb integreerida kahe epüüri ordinaatide korrutisi. Üheks epüüriks on arvutusskeemil paiknevast tegelikust koormusest põhjustatud M_p epüür (joonis 11.51, a). Teise epüüri koostame arvutusskeemile rakendatud ühikjõust, mis tuleb paigutada sellesse lõikesse, mille siiret soovime arvutada. Kuna siin ülesandes on eesmärgiks leida ristlõike k vertikaalsiire, siis paneme sinna lõikesse vertikaalse ühikjõu ja koostame m_k epüüri (joonis 11.51, b), kus indeks k viitab ühikjõu asukohale.



Joonis 11.51. Paindemomendi epüürid koormusest ja lõikes k paiknevast ühikjõust

Siirde arvutamiseks tuleb nüüd arvutusskeem jagada integreerimisvahemikeks. Vahemike määramisel peame arvestama mõlema epüüri ja nendes esinevate murdepunkti-dega. M_p epüür on kogu ulatuses ühtlane ruutparabool, aga m_k epüüril on üks murdepunkt, mis jagab tala kaheks integreerimisvahemikuks $a-k$ ja $k-b$.

Kuna meil on kaks integreerimisvahemikku, siis koosneb siirde avaldis kahest osast

$$w_{kp} = \int_a^k \frac{m_k M_p}{EI} dx + \int_k^b \frac{m_k M_p}{EI} dx$$

Praegusel juhul on epüürid mõlema vahemiku ulatuses ühesugused, mistõttu võime avaldise välja kirjutada tala ühe poole $a-k$ kohta ja siis korrutame selle kahega. Integreerimise teeme siin arvutuses Simpsoni valemiga (11.64) ja seetõttu on joonisel 11.51 näidatud ordinaadid nii vahemiku $a-k$ otstes kui ka keskel.

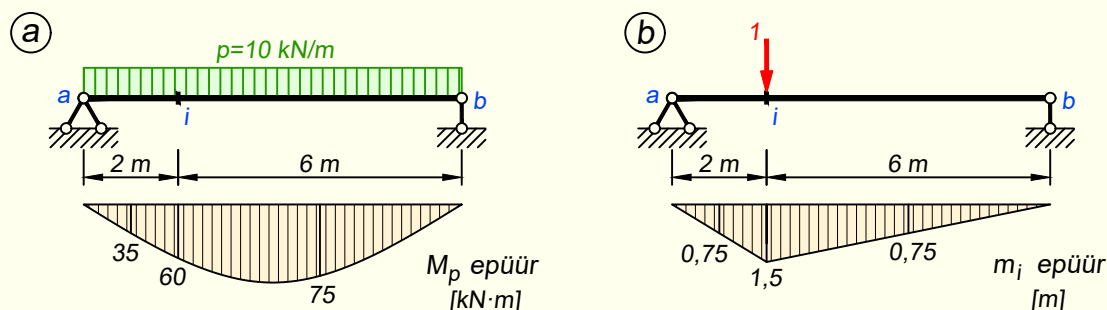
$$w_{kp} = 2 \cdot \int_a^k \frac{m_k M_p}{EI} dx = 2 \cdot \frac{4}{6EI} (0 + 4 \cdot 1 \cdot 60 + 2 \cdot 80) = \frac{533,33}{EI}$$

Positiivne vastus tähendab, et ristlõike k siire toimub ühikjõuga samas suunas.

2. Ristlõike i vertikaalsiire

Ristlõike i vertikaalsiirde arvutamiseks rakendame sellesse lõikesse ühikjõu, nagu see on näha joonisel 11.52, b . Koormusest põhjustatud epüür on samasugune nagu eelmiseski arvutuses, muutuvad ainult kasutatavate ordinaatide asukohad, kuna need peavad vastama integreerimisvahemikele (joonis 11.52, a).

Siirde arvutamise jaoks jagame arvutuskeemi integreerimisvahemikeks. Sarnaselt eelmisele arvutusele koormusest põhjustatud epüür siin ülesandes vahemikeks jagamist ei mõjuta, kuna see on terve tala ulatuses ühtlane ruutparabool. Ühikjõu epüüril on aga lõike i kohal murdepunkt, mis jagab tala selle koha pealt kaheks integreerimisvahemikuks. Nii saame vahemikud $a-i$ ja $i-b$. Siirde arvutamisel kasutame Simpsoni valemit ja seetõttu on mõlemas integreerimisvahemikus vaja vahemiku otsmisi ja keskmist ordinaati, mis on joonisel 11.52, a ja b näidatud.



Joonis 11.52. Paindemomendi epüürid koormusest ja lõikes i paiknevast ühikjõust

Kahe integreerimisvahemiku tõttu kujuneb siirde arvutamise avaldis kaheosaliseks

$$w_{ip} = \int_a^i \frac{m_i M_p}{EI} dx + \int_i^b \frac{m_i M_p}{EI} dx$$

Ristlõike i vertikaalsiirdeks saame

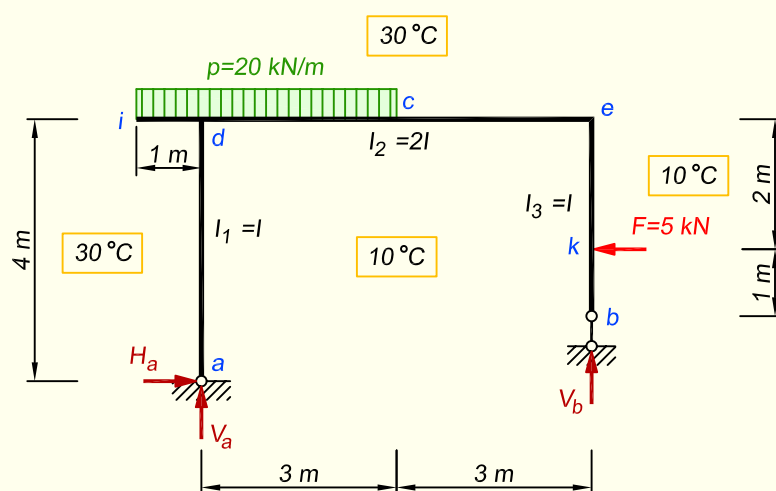
$$w_{ip} = \frac{2}{6EI} (0 + 4 \cdot 0,75 \cdot 35 + 1,5 \cdot 60) + \frac{6}{6EI} (1,5 \cdot 60 + 4 \cdot 0,75 \cdot 75 + 0) = \frac{380}{EI}$$

NÄIDE 11.14. Arvutada joonisel 11.53 kujutatud arvutusskeemi konsooli otsristlõike i vertikaalsiire, toeristlõike a pööre ja toeristlõike b horisontaalsiire kolmest välimõjust: 1) koormusest, 2) temperatuuri muutusest, 3) tugede siiretest.

Materjali elastsusmoodul on $E = 210 \text{ GPa}$. Temperatuuri joonpaisumistegur on $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$. Varraste ristlõiked on sümmeetrilised. Inertsimomendid postidel $I_1 = I_3 = I = 5010 \text{ cm}^4$, riivil ja konsoolil $I_2 = I_k = 2I = 10020 \text{ cm}^4$. Ristlõigete kõrgused postidel $h_1 = h_3 = 22 \text{ cm}$, riivil ja konsoolil $h_2 = h_k = 27 \text{ cm}$.

Temperatuur tõuseb sisemisel poolel 10°C , välimisel poolel vasakul ja üleval 30°C ning paremal 10°C võrra.

Tugi b vajub $\Delta b_v = 0,4 \text{ cm}$, tugi a vajub $\Delta a_v = 2,5 \text{ cm}$ ja nihkub vasakule $\Delta a_h = 0,3 \text{ cm}$ võrra.



Joonis 11.53. Arvutusskeem

LAHENDUS

Tasakaalutingimusega $\sum X = 0$ leiame horisontaalse toereaktsiooni

$$H_a = 5 \text{ kN}$$

Vertikaalsed toereaktsioonid leiame toesõlmede suhtes koostatud momentide tasakaalutingimustest

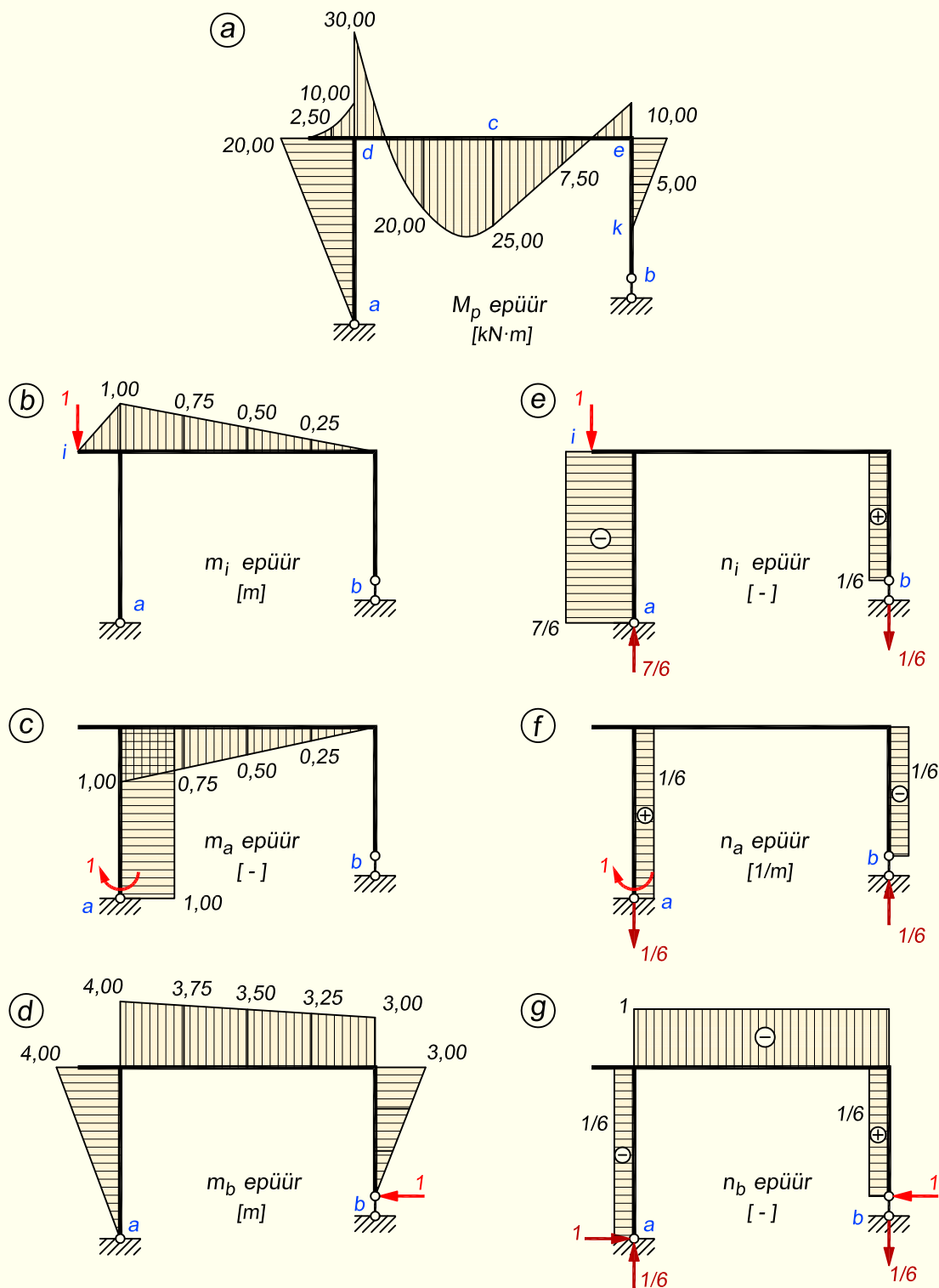
$$\sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 6 + 4 \cdot 20 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 0; \quad V_a = 68,33 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 6 - 4 \cdot 20 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 0; \quad V_b = 11,67 \text{ kN}$$

Koormusest põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 11.54, a.

1. Koormusest põhjustatud siirete leidmiseks kasutame valemit (11.45)

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k M_p}{EI} dx$$



Joonis 11.54. Paindemomendi ja pikijõu epüürid koormusest ja ühikjõududest

Ristlõike paindejäikus on

$$EI = 210 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 5010 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 = 10,521 \cdot 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Konsooli otsristlõike i vertikaalsiirde arvutamiseks rakendame sinna vertikaalse ühikjõu ja arvutame sellest paindemomendid. Vastav epüür on kujutatud joonisel 11.54, b.

Ristlõike *i* vertikaalsiire on

$$\begin{aligned} w_{ip} &= \frac{1}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot 2,5 \cdot 0,5 + 10 \cdot 1) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (30 \cdot 1 - 4 \cdot 20 \cdot 0,75 - 25 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (-25 \cdot 0,5 - 4 \cdot 7,5 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0) = -\frac{14,375}{EI} = -\frac{14,375}{10,52 \cdot 10^3} = \\ &= -0,00136 \text{ m} = -1,36 \text{ mm} \end{aligned}$$

Selles avaldises on kolm osa, kuna kasutame kolme integreerimisvahemikku *i-d*, *d-c* ja *c-e*. Kõigis vahemikes teeme arvutuse Simpsoni valemiga.

Saadud negatiivne tulemus näitab seda, et tegelik siire on rakendatud ühikjõule vastassuunas ehk alt üles.

Toeristlõike a pöörde arvutamiseks rakendame sinna ühikmomendi ja leiame paindemomendi epüüri ordinaadid. Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 11.54, c.

Ristlõike *a* pööre on

$$\begin{aligned} \varphi_{ap} &= -\frac{20 \cdot 4 \cdot 0,5}{EI} \cdot 1 + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (-30 \cdot 1 + 4 \cdot 20 \cdot 0,75 + 25 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (25 \cdot 0,5 + 4 \cdot 7,5 \cdot 0,25 + 0) = -\frac{24,375}{EI} = -\frac{24,375}{10,52 \cdot 10^3} = -0,00234 \text{ rad} \end{aligned}$$

Siin avaldises kasutame kolme integreerimisvahemikku *a-d*, *d-c* ja *c-e*. Neist esimeses teeme integreerimise Vereštšagini võttega ja kahes ülejäänus Simpsoni valemiga.

Saadud negatiivne tulemus näitab seda, et tegelik pööre on rakendatud ühikmomendile vastassuunas ehk vastupäeva.

Toeristlõike b horisontaalsiirde arvutamiseks rakendame sinna horisontaalse ühikjõu ja leiame paindemomendi epüüri. Epüür on kujutatud joonisel 11.54, d.

Ristlõike *b* horisontaalsiirdeks saame

$$\begin{aligned} u_{bp} &= \frac{4}{3 \cdot EI} \cdot 20 \cdot 4 + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (30 \cdot 4 - 4 \cdot 20 \cdot 3,75 - 25 \cdot 3,5) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (-25 \cdot 3,5 - 4 \cdot 7,5 \cdot 3,25 + 10 \cdot 3) + \frac{2}{6 \cdot EI} (10 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 2 + 0) = \\ &= \frac{24,375}{EI} = \frac{24,375}{10,52 \cdot 10^3} = 0,00232 \text{ m} = 2,32 \text{ mm} \end{aligned}$$

Siin avaldises kasutame nelja integreerimisvahemikku *a-d*, *d-c*, *c-e* ja *e-k*. Neist esimeses teeme integreerimise kolmnurkadele mõeldud Vereštšagini võttega ja kolmes ülejäänus Simpsoni valemiga.

Saadud positiivne tulemus näitab seda, et siire on rakendatud ühikjõuga samas suunas ehk paremalt vasakule.

2. Temperatuuri muutusest põhjustatud siirded leiame valemiga (11.58)

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \alpha_j \frac{\Delta t_j}{h_j} \int_0^{l_j} m_k dx + \sum_{j=1}^v \alpha_j t_{0j} \int_0^{l_j} n_k dx$$

Kuna siin ülesandes on vardad sümmeetrilise ristlõikega, siis leiame temperatuuri muutuse varda telgjoonel valemiga (11.52)

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_a + t_{\ddot{u}})$$

Vasakpoolses postis ja riivis

$$t_{01} = t_{02} = \frac{1}{2}(10 + 30) = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Parempoolses postis

$$t_{03} = \frac{1}{2}(10 + 10) = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Temperatuuri muutuste vahe varda alumiste ja ülemiste kiudude vahel arvutame valemiga (11.54)

$$\Delta t = t_a - t_{\ddot{u}}$$

Vasakpoolses postis ja riivis saame temperatuuri muutuste vaheks

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = 10 - 30 = -20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

konsoolis

$$\Delta t_k = 30 - 30 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

ja parempoolses postis

$$\Delta t_3 = 10 - 10 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Ristlõike *i* vertikaalsiirde arvutamiseks temperatuuri muutusest kasutame sellesse lõikesse rakendatud ühikjõust põhjustatud paindemomendi ja pikijõu epüüre (joonis 11.54, *b* ja *e*) ning leiame nende pindalad.

Ristlõike *i* vertikaalsiirdeks saame

$$\begin{aligned} w_{it} &= 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{-20}{0,27} \cdot \frac{-1 \cdot 6}{2} + 1,2 \cdot 10^{-5} \left(-20 \cdot 4 \cdot \frac{7}{6} + 20 \cdot 0 + 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \right) = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 133,9 = 1,61 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,61 \text{ mm} \end{aligned}$$

Ka arvutuses temperatuuri muutusest näitab vastuse ees olev märk, kas siire toimub ühikjõuga samas suunas või mitte. Järelikult siin siirdub ristlõige *i* allapoole.

Toeristlõike *a* pöörde arvutamiseks temperatuuri muutusest kasutame sellesse lõikesse rakendatud ühikmomendist põhjustatud paindemomendi ja pikijõu epüüre (joonis 11.54, *c* ja *f*).

Ristlõike *a* pöördeks kujuneb

$$\begin{aligned}\varphi_{ar} &= 1,2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{-20}{0,22} \cdot 1 \cdot 4 + \frac{-20}{0,27} \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} \right) + 1,2 \cdot 10^{-5} \left(20 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} + 20 \cdot 0 - 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \right) = \\ &= -1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 577,5 = -0,00693 \text{ rad}\end{aligned}$$

Toeristlõike *b* horisontaalsirde leidmiseks rakendame sinna horisontaalse ühikjõu ja kasutame arvutamisel saadud paindemomendi ja pikijõu epüüre (joonis 11.54, *d* ja *g*).

Ristlõike *b* horisontaalsiire on

$$\begin{aligned}u_{br} &= 1,2 \cdot 10^{-5} \left[\frac{-20}{0,22} \cdot \frac{-4 \cdot 4}{2} + \frac{-20}{0,27} \cdot (-6) \cdot 3,5 + 0 \right] + \\ &+ 1,2 \cdot 10^{-5} \left(-20 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} - 20 \cdot 1 \cdot 6 + 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \right) = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 2154,5 = 0,02585 \text{ m} = 25,9 \text{ mm}\end{aligned}$$

3. Tugede nihkumisest põhjustatud siirded leiame valemiga (11.60)

$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk}$$

Nimetatud valemis esinev korrutis on positiivne, kui toe liikumine Δc_j ja reaktsioon r'_{jk} on samasuunalised, ja negatiivne, kui vastassuunalised.

Ristlõike *i* vertikaalsiirdeks saame

$$w_{ir} = - \left(-2,5 \cdot \frac{7}{6} + 0,4 \cdot \frac{1}{6} \right) = 2,85 \text{ cm}$$

Saadud positiivne tulemus näitab, et konsooli otsmine lõige *i* siirdub ühikjõuga samas suunas ehk allapoole.

Ristlõike *a* pööre on

$$\varphi_{ar} = - \left(0,025 \cdot \frac{1}{6} - 0,004 \cdot \frac{1}{6} \right) = -0,0035 \text{ rad}$$

Ristlõige *a* pöörduv ühikmomendile vastupidises suunas ehk vastupäeva.

Ristlõike *b* horisontaalsiire on

$$u_{br} = - \left(-2,5 \cdot \frac{1}{6} + 0,4 \cdot \frac{1}{6} - 0,3 \cdot 1 \right) = 0,65 \text{ cm}$$

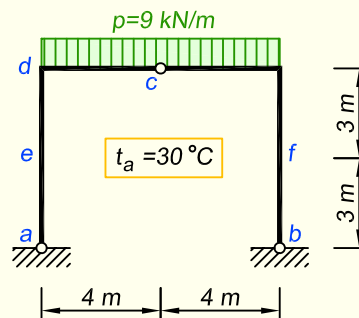
Vastavalt ühikjõu suunale siirdub ristlõige *b* vasakule.

NÄIDE 11.15. Arvutada joonisel 11.55 kujutatud raamile järgmised siirded: 1) lõikes c liituvate varraste otsristlõigete vastastikune pöördumine koormusest, 2) lõigete e ja f vahelise kauguse muutumine temperatuuri muutusest ning 3) varda d - c pöördumine toe a siiretest.

Raam on valmistatud terasprofiilist IPE300, mille ristlõike inertsimoment on $I_y = 8356 \text{ cm}^4$ ning ristlõike kõrgus on $h = 30 \text{ cm}$. Elastusmoodul on $E = 210 \text{ GPa}$ ja temperatuuri joonpaisumistegur $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$.

Temperatuur tõuseb raami sisemisel poolel $30 \text{ }^\circ\text{C}$.

Tugi a vajub $\Delta a_v = 4 \text{ cm}$ ja nihkub vasakule $\Delta a_h = 3 \text{ cm}$ võrra.



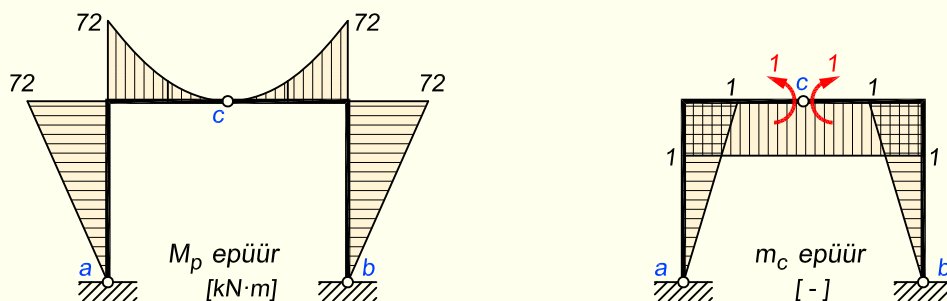
Joonis 11.55. Arvutuskeem

LAHENDUS

1. Lõikes c liituvate varraste otsristlõigete vastastikuse pöördumise leidmiseks koormusest kasutame valemit (11.45)

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k M_p}{EI} dx$$

Kui soovime leida kahe ristlõike vastastikust pööret, siis peame nendesse lõigetesse rakendama vastupidi suunatud ühikmomendid. Koormusest ning ühikmomentidest tekivad paindemomendi epüürid on kujutatud joonisel 11.56.



Joonis 11.56. Koormusest ning ühikmomentidest põhjustatud paindemomendi epüürid

Ristlõike paindejäikus on

$$EI = 210 \cdot 10^6 \cdot 8356 \cdot 10^{-8} = 17548 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Lõikes c liituvate varraste pöördumine teineteise suhtes on

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{cp} &= \frac{8}{6 \cdot EI} (-1 \cdot 72 + 0 - 1 \cdot 72) - \frac{6}{3 \cdot EI} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 2 = -\frac{480}{EI} = \\ &= -\frac{480}{17548} = -0,0274 \text{ rad} = -1,6^\circ \end{aligned}$$

Siin arvutuses on võetud horisontaalsed vardad üheks integreerimisvahemikuks, kuna kummalgi epüüril ei toimu selles vahemikus epüüri kuju kirjeldava funktsiooni muutumist – koormusepüür on ühtlane ruutparabool ning ühikmomentide epüür sirge.

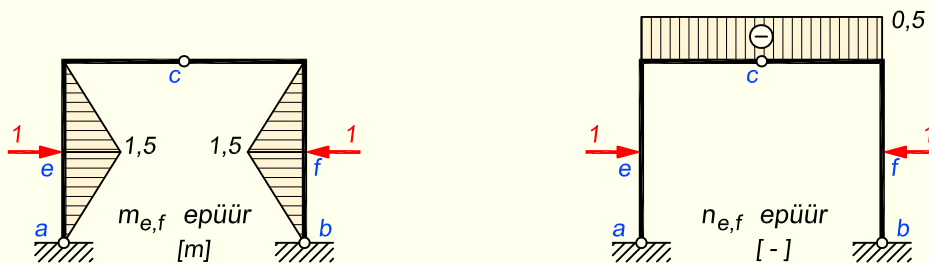
Vastuses olev miinusmärk tähendab, et pööre on ühikmomentidele vastupidise suunaga, mis on ka igati mõistetav, kuna koormuse mõjul siirdub lõige c allapoole ning põhjustab sellega varraste otsristlõigete pöördumise vastupidiselt ühikmomentidele.

Raami deformeerunud kuju on näidatud joonisel 11.59, *a*.

2. Temperatuuri muutusest põhjustatud lõigete e ja f vahekauguse muutumise leiame valemiga (11.58)

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \alpha_j \frac{\Delta t_j}{h_j} \int_0^{l_j} m_k dx + \sum_{j=1}^v \alpha_j t_{0j} \int_0^{l_j} n_k dx$$

Kui eesmärgiks on leida kahe punkti vahelise kauguse muutus, siis tuleb nendesse punktidesse rakendada ühel sirgel asuvad ja vastupidi suunatud ühikjõud (joonis 11.57).



Joonis 11.57. Ühikjõududest põhjustatud paindemomendi ja pikijõu epüürid

Temperatuuri muutuste vahe varda alumiste ja ülemiste kiudude vahel on

$$\Delta t = 30 \text{ }^\circ\text{C}$$

Temperatuuri muutus varda telgjoonel on

$$t_0 = \frac{1}{2} (t_a + t_{ii}) = \frac{1}{2} (30 + 0) = 15 \text{ }^\circ\text{C}$$

Lõigete e ja f vahekauguse muuduks saame

$$\Delta u_{e-f,t} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{30}{0,3} \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 6}{2} \right) \cdot 2 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot (-0,5 \cdot 8) = 0,01 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

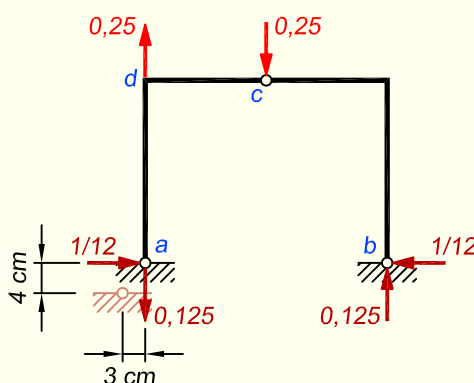
Vastuse plussmärk näitab, et vahekauguse muutumine toimub ühikjõududega samas suunas ja järelikult lõiked e ja f lähenevad teineteisele. See on mõistetav, kuna raami sees temperatuur tõuseb ja varraste sisemised kiud hakkavad pikinema ning raam võtab kuju, nagu on näidatud joonisel 11.59, b .

3. Toe a nihkumisest põhjustatud varda $d-c$ pöördumise leiame valemiga (11.60)

$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk}$$

Varda pöörde leidmiseks rakendame vardale jõupaari, mille moment võrdub ühega (joonis 11.58). Sellise jõupaari saame, kui rakendame varda kummassegi otsa varda teljega risti mõjuva jõu, mille suuruseks on $\frac{1}{l}$, kus l on varda pikkus. Kuna varda $d-c$ pikkus on 4 m, siis siin ülesandes moodustavad jõupaari kaks jõudu suurusega

$$\frac{1}{4} = 0,25$$



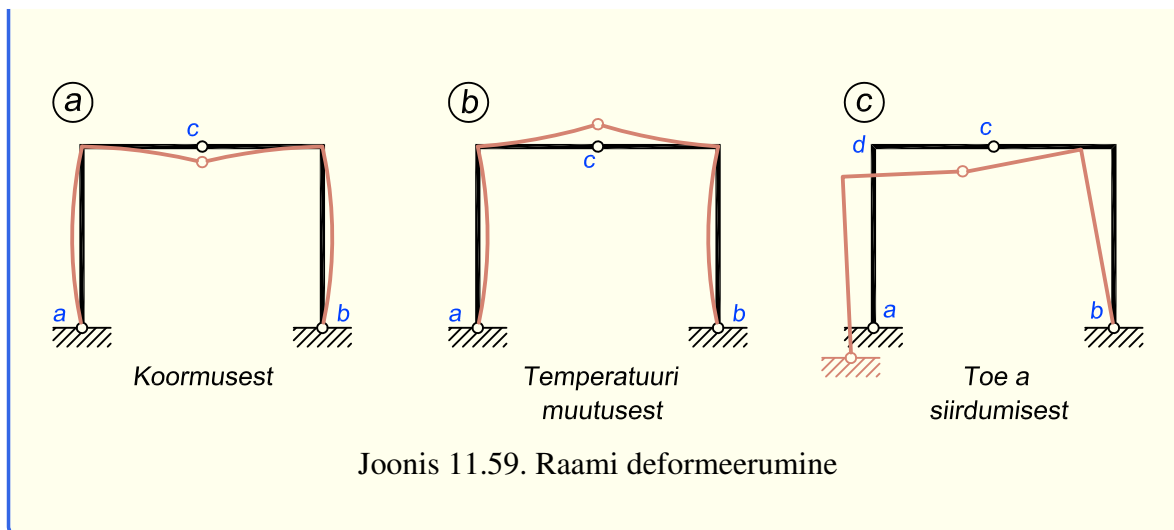
Joonis 11.58. Jõupaarist põhjustatud toereaktsioonid

Nüüd leiame jõupaarist tekkivad toereaktsioonid ning arvutame varda $d-c$ pöörde

$$\vartheta_{d-c,r} = - \left(-0,03 \cdot \frac{1}{12} \right) - (0,04 \cdot 0,125) = -0,0025 \text{ rad} = -0,14^\circ$$

Kuna jõupaari pöordesuund on päripäeva, siis vastuse miinusmärk tähendab, et varras $d-c$ pöördub vastupäeva.

Raami deformeerunud kuju on näidatud joonisel 11.59, c .



11.7. Siirete arvutamine Castigliano teise teoreemi abil

11.7.1. Castigliano teine teoreem

Castigliano teoreemi tuletamiseks on erinevaid võimalusi. Kasutame siin selleks materjale raamatutest [26] ja [12].

Vaatame joonisel 11.60, *a* näidatud tala, mida koormame järk-järgult jõududega F_i ja F_k . Nendele jõududele vastavad siirded on Δ_i ja Δ_k . Järgnevalt määrame siirde Δ_i suuruse.

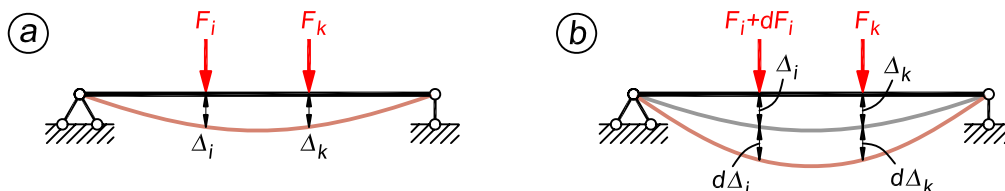
Välisjõudude töö vastavalt avaldisele (11.10) on

$$W = \frac{1}{2} F_i \Delta_i + \frac{1}{2} F_k \Delta_k \quad (11.83)$$

Kui koormus F_i kasvab dF_i võrra, siis tala läbipaine suureneb ja mõlema koormuse rakenduspunktile vastavad siirded saavad juurdekasvu vastavalt $d\Delta_i$ ja $d\Delta_k$ (joonis 11.60, *b*).

Töö, mis tehakse dF_i rakendamisel, on

$$dW = \left(F_i + \frac{1}{2} dF_i \right) d\Delta_i + F_k d\Delta_k \quad (11.84)$$



Joonis 11.60. Castigliano teoreemi tuletamine

F_i ja F_k on siin avaldises ilma kordajata $1/2$, kuna nemad teevad passiivtööd. Avame sulud ning jättes ära lõpmata väikese teist järku suuruse $\frac{1}{2}dF_i d\Delta_i$, saame

$$dW = F_i d\Delta_i + F_k d\Delta_k \quad (11.85)$$

Nüüd rakendame koormused $F_i + dF_i$ ja F_k korraga talale. Sel juhul on välisjõudude töö

$$W = \frac{1}{2}(F_i + dF_i)(\Delta_i + d\Delta_i) + \frac{1}{2}F_k(\Delta_k + d\Delta_k) \quad (11.86)$$

Avame sulud ning jätame ära diferentsiaalide korrutise, mis on lõpmata väike teist järku suurus. Tulemuseks saame

$$W = \frac{1}{2}F_i \Delta_i + \frac{1}{2}F_i d\Delta_i + \frac{1}{2}dF_i \Delta_i + \frac{1}{2}F_k \Delta_k + \frac{1}{2}F_k d\Delta_k \quad (11.87)$$

Selleks, et teada saada muutust töös võrreldes olukorraga, kus mõjus ainult koormus F_i , lahutame avaldisest (11.87) maha avaldise (11.83)

$$dW = \frac{1}{2}F_i \Delta_i + \frac{1}{2}F_i d\Delta_i + \frac{1}{2}dF_i \Delta_i + \frac{1}{2}F_k \Delta_k + \frac{1}{2}F_k d\Delta_k - \frac{1}{2}F_i \Delta_i - \frac{1}{2}F_k \Delta_k \quad (11.88)$$

mille tulemusena saame

$$dW = \frac{1}{2}F_i d\Delta_i + \frac{1}{2}dF_i \Delta_i + \frac{1}{2}F_k d\Delta_k \quad (11.89)$$

Avaldisest (11.85) saame, et

$$F_k d\Delta_k = dW - F_i d\Delta_i \quad (11.90)$$

Asetades selle avaldisse (11.89) ning tehes vajalikud teisendused, saame avaldada meid huvitava siirde Δ_i

$$\Delta_i = \frac{dW}{dF_i} \quad (11.91)$$

Kuna konstruktsioonile rakendatud välisjõudude töö on võrdne deformatsioonienergiaga ning sageli mõjub konstruktsioonile rohkem jõudusid, kirjutame selle avaldise välja deformatsioonienergia osatuletise abil

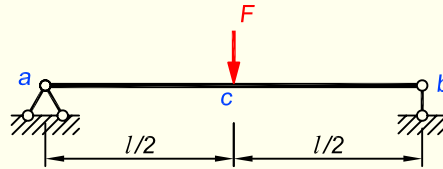
$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (11.92)$$

mis väljendab *Castigliano teist teoreemi*.

Lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni deformatsioonienergia osatuletis mistahes jõu järgi on võrdne sellele jõule vastava siirdega.

Castigliano teoreemi abil võib arvutada lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni suvalise punkti siiret. Kui vaadeldavas punktis pole jõudu, siis rakendame sinna fiktiivse jõu F_f . Valemiga (11.29) arvutame deformatsioonienergia, diferentseerime seda fiktiivse jõu F_f järgi ja pärast seda võrrutame deformatsioonienergia osatuletise avaldises fiktiivse jõu nulliga. Allesjäänud osa kujutab otsitavat siiret.

NÄIDE 11.16. Arvutada joonisel 11.61 näidatud lihttala keskmise lõike c vertikaalsiire w_{cp} , kui selles lõikes mõjub koondatud jõud F . Deformatsioonienergia arvutamisel arvestada ainult paindemomentide mõju. Paindejäikus EI on konstantne.

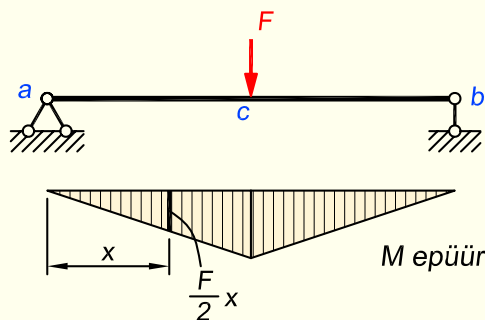


Joonis 11.61. Arvutuskeem

LAHENDUS

Koostame jõust F põhjustatud paindemomendi epüüri (joonis 11.62) ning esitame avaldise, mis kirjeldab paindemomendi epüüri ordinaate vahemikus $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$M(x) = \frac{F}{2} \cdot x$$



Joonis 11.62. Paindemomendi epüür

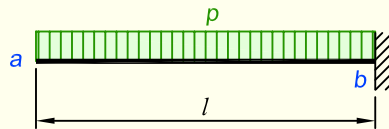
Kuna tala mõlema poole epüür on ühesugune, siis kirjutame valemi (11.29) järgi leitava deformatsioonienergia avaldise ainult ühe poole kohta ja korrutame selle kahega

$$U = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2}{2EI} dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{F^2 x^2}{8EI} dx = \frac{F^2}{4EI} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{F^2}{4EI} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{F^2 l^3}{96EI}$$

Ristlõike c vertikaalsiirde arvutame valemiga (11.92)

$$w_{cp} = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{2Fl^3}{96EI} = \frac{Fl^3}{48EI}$$

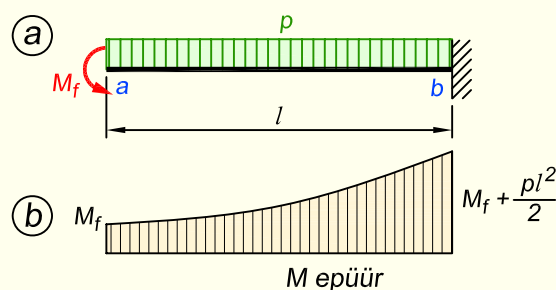
NÄIDE 11.17. Arvutada joonisel 11.63 näidatud lauskoormusega konsooli vaba otsa pööre. Deformatsioonienergia arvutamisel arvestada ainult paindemomentide mõju. Paindejäikus EI on konstantne.



Joonis 11.63. Arvutuskeem

LAHENDUS

Konsooli otsal ei mõju pöördele vastavat jõudu ehk momenti ja seepärast rakendame sinna fiktiivse momendi M_f (joonis 11.64, a).



Joonis 11.64. Paindemomendi epüür

Paindemomendi epüüri (joonis 11.64, b) ordinaadid konsoolis on nüüd

$$M(x) = -M_f - \frac{px^2}{2}$$

Deformatsioonienergia on

$$\begin{aligned} U &= 2 \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(-M_f - \frac{px^2}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(M_f^2 + M_f px^2 + \frac{p^2 x^4}{4} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2EI} \left(M_f^2 l + M_f \frac{pl^3}{3} + \frac{p^2 l^5}{20} \right) \end{aligned}$$

Deformatsioonienergia osatuletis fiktiivse momendi M_f järgi on

$$\frac{\partial U}{\partial M_f} = \frac{1}{2EI} \left(2M_f + \frac{pl^3}{3} \right)$$

Ja kuna $M_f = 0$, siis ristlõike a pööre

$$\varphi_a = \frac{pl^3}{6EI}$$

11.7.2. Castigliano teoreem taladele ja raamidele

Eelnevas peatükis tuletatud valem (11.92) kirjeldab Castigliano teoreemi üldkujul. Ülesannete lahendamisel on mõistlik kasutada seda teisendatuna. Järgnevalt esitame valemid taladele ja raamidele, mille lahendamisel arvutame deformatsioonienergia paindemomendist lähtudes, ning järgmises peatükis sõrestikele, mille deformatsioonienergia sõltub pikijõust.

Talade ja raamide deformatsioonienergia, arvestades ainult paindemomentide mõju, avaldub valemiga

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \quad (11.93)$$

Asetades selle Castigliano teoreemi üldvalemisse (11.92), saame

$$\Delta_i = \frac{\partial}{\partial F_i} \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \quad (11.94)$$

Siin tuleb esmalt M võtta ruutu, integreerida ja seejärel leida osatuletis. Sageli on aga lihtsam diferentseerida enne integreerimist. Sel juhul omandab valem kuju

$$\Delta_i = \int_0^l \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial F_i} \right) dx \quad (11.95)$$

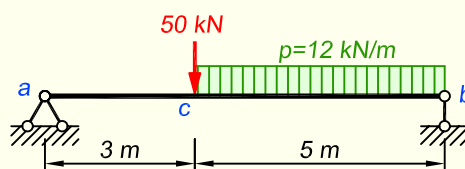
kus Δ_i on arvutusskeemi lõike i siire, F_i on lõike i siirde Δ_i sihiline jõud ja M on tala või raami paindemoment, mis on põhjustatud nii tegelikest koormustest kui jõust F_i ning mida väljendatakse x -koordinaadi funktsioonina.

Kui on vaja arvutada mingi lõike pöördenurka, kasutame valemit

$$\varphi_i = \int_0^l \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial M_i} \right) dx \quad (11.96)$$

kus M_i on lõikesse i rakendatud moment.

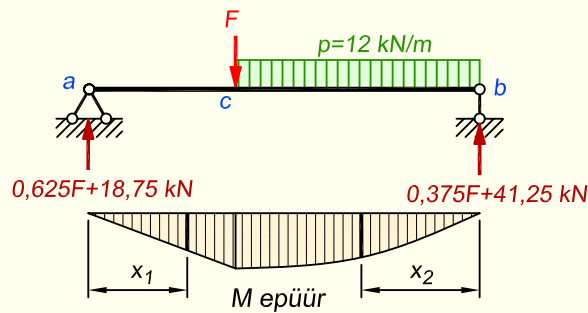
NÄIDE 11.18. Arvutada joonisel 11.65 näidatud tala lõike c vertikaalsiire. Varda ristlõike inertsimoment on $I_y = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ja elastsusmoodul $E = 210 \text{ GPa}$.



Joonis 11.65. Tala arvutusskeem

LAHENDUS

Asendame lõikes c paikneva koormuse 50 kN fiktiivse jõuga F (joonis 11.66).



Joonis 11.66. Toereaktsioonid ja M epüür

Arvutame tala toereaktsioonid joonisel 11.66 näidatud skeemile ning kirjeldame paindemomendi epüüri muutumist x -koordinaadi abiga. Kuna sellel arvutuskeemil toimub M epüüris muutus lõike c kohal, siis tuleb kasutada kahte x -koordinati: x_1 väljendab paindemomendi väärtust vahemikus $a-c$ ning x_2 väljendab paindemomendi vahemikus $b-c$. Kirjutame välja paindemomendid ja nende osatuletised kummagi vahemiku kohta.

Vahemik $a-c$

$$M = (0,625F + 18,75) \cdot x_1; \quad \frac{\partial M}{\partial F} = 0,625x_1$$

Vahemik $b-c$

$$M = (0,375F + 41,25) \cdot x_2 - 12 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} = (0,375F + 41,25) \cdot x_2 - 6x_2^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial F} = 0,375x_2$$

Arvestame, et vastavalt lähteülesandele $F = 50$ kN. Seega vahemikus $a-c$

$$M = (0,625 \cdot 50 + 18,75) \cdot x_1 = 50x_1$$

ja vahemikus $b-c$

$$M = (0,375 \cdot 50 + 41,25) \cdot x_2 - 6x_2^2 = 60x_2 - 6x_2^2$$

Kasutame nüüd Castigliano teoreemi valemit (11.95) ja leiame lõike c vertikaalsirde

$$\begin{aligned} w_{cp} &= \int_0^l \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial F_i} \right) dx = \int_0^3 \frac{50x_1 \cdot 0,625x_1}{EI} dx + \int_0^5 \frac{(60x_2 - 6x_2^2) \cdot 0,375x_2}{EI} dx = \\ &= \int_0^3 \frac{31,25x_1^2}{EI} + \int_0^5 \frac{22,5x_2^2 - 2,25x_2^3}{EI} = \\ &= \frac{31,25}{EI} \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^3 + \left(\frac{22,5}{EI} \cdot \frac{x_2^3}{3} - \frac{2,25}{EI} \cdot \frac{x_2^4}{4} \right) \Big|_0^5 = \\ &= \frac{281,25}{EI} + \frac{585,94}{EI} = \frac{867,19 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{33600 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} = 0,00258 \text{ m} = 25,8 \text{ mm} \end{aligned}$$

kus

$$EI = 210 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = 33600 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

11.7.3. Castigliano teoreem sõrestikele

Sõrestikuvarda deformatsioonienergia (eeldusel, et elastsusmoodul E ja ristlõike pindala A on varda ulatuses konstantsed) avaldub

$$U = \frac{N^2 l}{2EA} \quad (11.97)$$

Asetades selle valemisse (11.92), saame

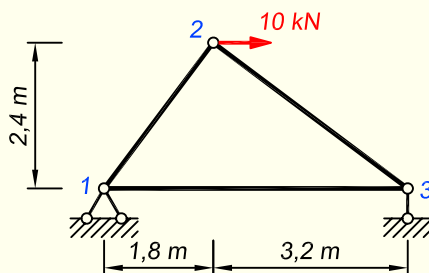
$$\Delta_i = \frac{\partial}{\partial F_i} \sum \frac{N^2 l}{2EA} \quad (11.98)$$

Sageli on lihtsam teha esmalt diferentseerimine ja seejärel summeerida, mistõttu avaldatakse valem sõrestiku siirete leidmiseks järgmiselt

$$\Delta_i = \sum \frac{Nl}{EA} \left(\frac{\partial N}{\partial F_i} \right) \quad (11.99)$$

kus Δ_i on sõrestiku sõlmpunkti i siire, F_i on sõlmpunkti i siirde Δ_i sihiline jõud, N on sõrestiku varraste pikijõud ja l on varraste pikkused.

NÄIDE 11.19. Arvutada joonisel 11.67 näidatud sõrestiku sõlme 2 vertikaalsiire. Varraste ristlõikepindala $A = 300 \text{ mm}^2$ ja elastsusmoodul $E = 210 \text{ GPa}$.

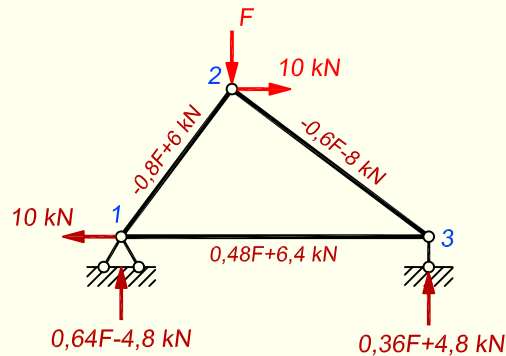


Joonis 11.67. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Kuna vaja on leida sõlme 2 vertikaalsiire, siis rakendame sinna fiktiivse vertikaalse koormuse F (joonis 11.68).

Arvutame sõrestiku toereaktsioonid ja sisejõud (joonis 11.68) nii tegelikust kui fiktiivsest koormusest sõrestike lahendamiseks kasutatavate meetoditega. Arvutuses võib kasutada fiktiivset ja tegelikku koormust korraga, aga soovi korral võib need ka eraldi arvesse võtta ja lõpliku N saamiseks kokku liita.



Joonis 11.68. Toereaktsioonid ja sisejõud

Siirde leidmiseks kasutame valemit (11.99)

$$\Delta_i = \sum \frac{Nl}{EA} \left(\frac{\partial N}{\partial F_i} \right)$$

mille liikmed arvutame varraste kaupa järgnevas tabelis. Esimeses veerus on varda tähis, teises veerus pikkus. Kolmandas veerus on varda pikijõud, kus avaldise esimene osa on fiktiivsest koormusest ja teine osa tegelikust koormusest. Neljandas veerus võtame pikijõust osatuletise F järgi. Kuna fiktiivset koormust tegelikkuses ei eksisteeri, siis tabeli eelviimases veerus näitame varraste sisejõud ainult tegelikust koormusest. Järgnevalt teeme arvutuse, mis on näidatud viimase veeru päises.

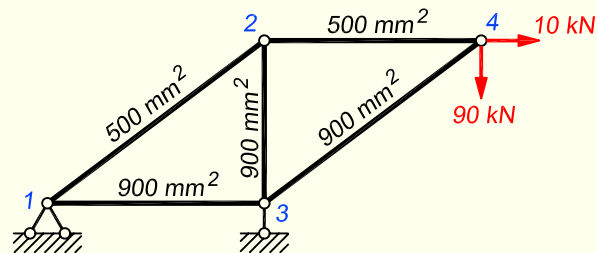
Tabel 11.2. Sõrestiku sõlme siirde arvutamine

| Varras | l , [m] | N , [kN] | $\frac{\partial N}{\partial F}$ | N , kui $F = 0$, [kN] | $Nl \left(\frac{\partial N}{\partial F} \right)$ |
|--------|-----------|---------------|---------------------------------|--------------------------|---|
| 1-2 | 3 | $-0,8F + 6,0$ | -0,8 | 6,0 | -14,4 |
| 2-3 | 4 | $-0,6F - 8,0$ | -0,6 | -8,0 | 19,2 |
| 1-3 | 5 | $0,48F + 6,4$ | 0,48 | 6,4 | 15,36 |
| | | | | Σ | 20,16 kN·m |

Pärast tabeli viimase veeru väärtuste summeerimist arvutame valemiga (11.99) sõlme 2 vertikaalsiirde

$$w_{2p} = \sum \frac{Nl}{EA} \left(\frac{\partial N}{\partial F_i} \right) = \frac{20,16 \text{ kN}\cdot\text{m}}{210 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0,0003 \text{ m}^2} = 0,00032 \text{ m} = 0,32 \text{ mm}$$

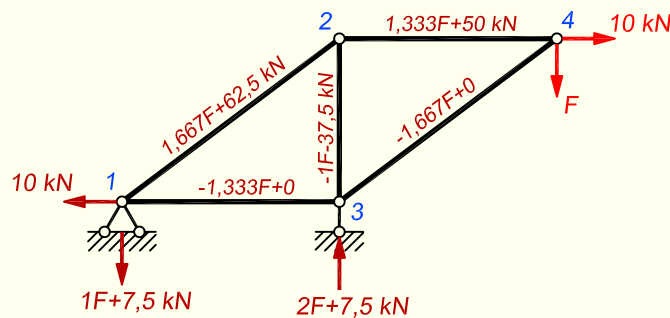
NÄIDE 11.20. Arvutada joonisel 11.69 näidatud sõrestiku sõlme 4 vertikaalsiire. Varraste ristlõikepindalad on näidatud joonisel. Elastsusmoodul on $E = 210 \text{ GPa}$.



Joonis 11.69. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Asendame sõlmes 4 paikneva koormuse 90 kN fiktiivse jõuga F (joonis 11.70).



Joonis 11.70. Toereaktsioonid ja sisejõud

Arvutame sõrestiku varraste sisejõud joonisel 11.70 näidatud skeemist lähtudes ning kanname saadud tulemused näitega 11.19 sarnasesse tabelisse. Kuna me asendasime sõlme 4 tegeliku koormuse fiktiivse jõuga F , siis siin ülesandes võtame tabeli eelviimase veeru arvutamisel F väärtuseks 90 kN.

Tabel 11.3. Sõrestiku sõlme siirde arvutamine

| Varras | l , [m] | N , [kN] | $\frac{\partial N}{\partial F}$ | N , kui $F = 90 \text{ kN}$, [kN] | $Nl \left(\frac{\partial N}{\partial F} \right)$ |
|--------|-----------|-----------------|---------------------------------|--------------------------------------|---|
| 1-3 | 4 | $-1,333F + 0$ | -1,333 | -120 | 639,8 |
| 2-4 | 4 | $1,333F + 50$ | 1,333 | 170 | 906,4 |
| 1-2 | 5 | $1,667F + 62,5$ | 1,667 | 212,5 | 1771,2 |
| 2-3 | 3 | $-1F - 37,5$ | -1 | -127,5 | 382,5 |
| 3-4 | 5 | $-1,667F + 0$ | -1,667 | -150 | 1250,3 |

Arvutame valemiga (11.99) sõlme 4 vertikaalsiirde, kasutades selleks andmeid tabeli viimasest veerust. Järgneva avaldise jagame kaheks sõltuvalt varraste ristlõikepindaladest

$$w_{4p} = \sum \frac{Nl}{EA} \left(\frac{\partial N}{\partial F_i} \right) = \frac{906,4 + 1771,2}{210 \cdot 10^6 \cdot 0,0005} + \frac{639,8 + 382,5 + 1250,3}{210 \cdot 10^6 \cdot 0,0009} = 0,0375 \text{ m} = 37,5 \text{ mm}$$

11.8. Tala elastse joone diferentsiaalvõrrand

11.8.1. Diferentsiaalseosed

Elastseks jooneks nimetatakse varda kõverdunud telge. Järgnevalt tuletame elastse joone kuju kirjeldava diferentsiaalvõrrandi, mis seob talas tekkiva paindemomendi tala elastse joone läbipainde ja pöördenurgaga.

Selleks vaatleme joonisel 11.71, a kujutatud tala, mis on koormatud vertikaalsete jõududega. Tala deformeerumine toimub seetõttu xz -tasandis. Varasemast on meil teada, et saledate varraste puhul on siirded põhjustatud peamiselt paindedeformatsioonist ja põikjõu mõju lõpptulemusele on väga väike, mistõttu keskendume järgnevalt just paindemomendile.

Kui paindemomendi tõttu tala lõpmatult lühike element pikkusega dx deformeerub, siis selle elemendi otsristlõiked pöörduvad teineteise suhtes nurga $d\Psi$ võrra (joonis 11.71, b). Sellise deformeerumise tulemusena tekib ristlõike nulljoonest ülespoole jäävates kiududes surve ja need lühenevad. Ristlõike nulljoonest allapoole jäävates kiududes tekib aga vastupidiselt tõmme ja need pikenevad. Nulljoont läbivad kiud küll kõverduvad, aga ei pikene ega lühene, vaid säilitavad oma esialgse pikkuse dx . Tekkiv kaar dx kujutab ühte osa elastsest joonest. Kaare kõverusraadiuse tähistame ρ , mida mõõdame kõvera keskpunktist o kõverani dx .

Kuna kiudude pikkuse muutumine sõltub kiudude kaugusest nulljoonest, siis vaatleme järgnevalt ristlõike ülemist serva (kaugusel c nulljoonest), kus deformeerumise käigus kiud lühenevad pikkuse $d l$ võrra. Suhtelise lühenemise saame nüüd avaldada kiudude pikkuse muudu ja esialgse pikkuse jagatisena

$$\varepsilon_x(c) = -\frac{d l}{dx} \quad (11.100)$$

Avaldame ülemiste kiudude algse pikkuse dx ning lühenemise $d l$ nurga $d\Psi$ kaudu

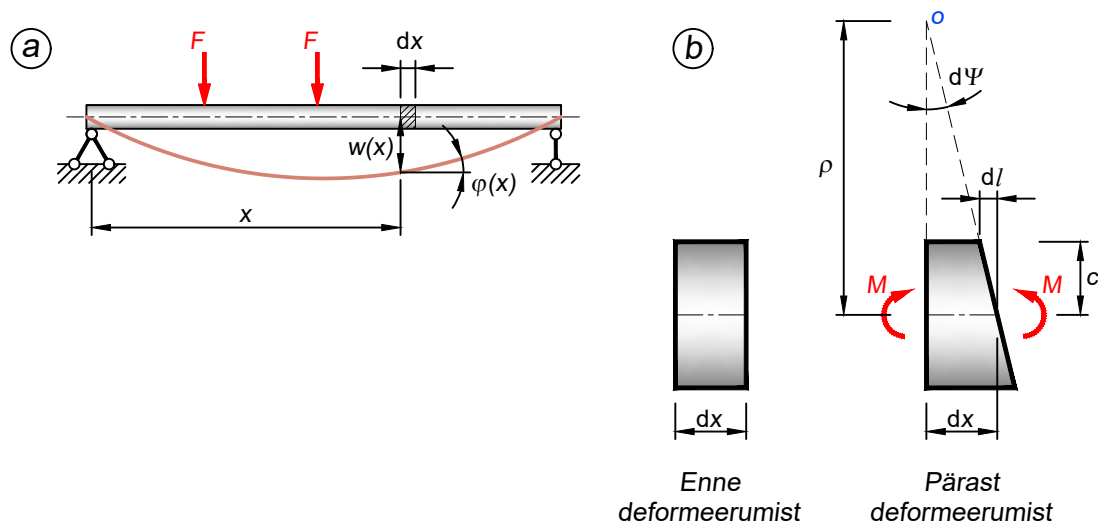
$$dx = \rho d\Psi; \quad d l = c d\Psi \quad (11.101)$$

Nüüd saame suhteliseks lühenemiseks

$$\varepsilon_x(c) = -\frac{c d\Psi}{\rho d\Psi} = -\frac{c}{\rho} \quad (11.102)$$

või teisiti kirjutades

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon_x(c)}{c} \quad (11.103)$$



Joonis 11.71. Tala ja sellest eraldatud lõpmatult lühikese elemendi deformeerumine

Kui materjal käitub elastselt, siis kehtib Hooke'i seadus, mis ütleb, et

$$\epsilon_x(c) = \frac{\sigma_x(c)}{E} \quad (11.104)$$

kus \$E\$ on materjali normaalelastsusmoodul ja \$\sigma_x\$ on paindepinge, mis ülemistes kiududes on surve tõttu negatiivne

$$\sigma_x(c) = -\frac{M_y(x)}{I_y(x)}c \quad (11.105)$$

Kasutades avaldise (11.104) ja (11.105), saame valemi (11.103) avaldada kujul

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y(x)}{EI_y(x)} \quad (11.106)$$

Diferentsiaalgeomeetriast saame joone kõveruse \$\kappa\$ (ehk kõverusraadiuse pöördväärtuse)

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (11.107)$$

Kuna elastse joone kõverus tugevusõpetuses on vastupidise märgiga võrreldes joone kõverusega diferentsiaalgeomeetrias (vt õpikust [21] lk 44), siis saame valemi (11.106) alusel nüüd

$$\frac{M_y(x)}{EI_y(x)} = -\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (11.108)$$

kus \$\frac{dw}{dx}\$ on joone pöördnurk, mille teine aste on üliväike võrreldes ühega. Seetõttu võime kõveruse valemis murru nimetaja lugeda võrdseks ühega.

Avaldise (11.108) saame nüüd esitada kujul

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y(x)} \quad (11.109)$$

mis on tala elastse joone diferentsiaalvõrrand.

Lähtudes elastse joone diferentsiaalvõrrandist ning seostest (1.8) ja (1.9)

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = Q_z(x); \quad \frac{dQ_z(x)}{dx} = -p_z(x) \quad (11.110)$$

saame konstantse jäikusega talale esitada järgnevad diferentsiaalseosed

$$\frac{dw}{dx} = \varphi_y(x) \quad (11.111)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y} \quad (11.112)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{Q_z(x)}{EI_y} \quad (11.113)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p_z(x)}{EI_y} \quad (11.114)$$

Kui tala on muutuva jäikusega, avaldub viimane seos

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = p(x) \quad (11.115)$$

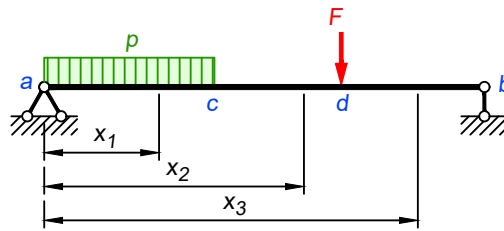
mida nimetatakse *Euler-Bernoulli tala võrrandiks*. Seda avaldist võime vaadelda varda painde kõige üldisema diferentsiaalvõrrandina.

Diferentsiaalseosed annavad meile infot paindele allutatud vardas esinevate suuruste üldise muutumise kohta. Näiteks piirkonnas, kus talale on rakendatud ühtlane lauskoormus p , muutub põikjõud lineaarselt, paindemoment teise, pöördenurk kolmanda ja elastne joon neljanda astme kõvera järgi.

11.8.2. Diferentsiaalvõrrandi otsene integreerimine

Tala elastse joone diferentsiaalvõrrandi (11.109) integreerimisel saame pöörde $\varphi_y(x)$ avaldise ning teistkordsel integreerimisel siirde $w(x)$ avaldise. Lisaks võime kasutada ka diferentsiaalseid (11.113) kuni (11.115).

Kõigil integreerimistel saadavad integreerimiskonstandid määrame raja- ja pidevustingimustest, millest tuleb juttu allpool. Kui meil on antud lauskoormus p_z koordinaadi x funktsioonina ja kasutame avaldist (11.114), siis tuleb siirde $w(x)$ avaldise saamiseks leida neli



Joonis 11.72. Tala jagamine vahemikeks

integreerimiskonstanti. Kui aga teada on paindemoment ja kasutame valemit (11.109), peame leidma ainult kaks integreerimiskonstanti. Millisest valemist arvutust alustada, sõltub ülesande iseloomust. Üldiselt on lihtsam määrata paindemoment M_y koordinaadi x funktsioonina ja piirduda kahekordse integreerimisega.

Kui tala on koormatud mitme koondjõu ja lauskoormusega, siis tuleb tala jagada vahemikeks ja paindemomentide avaldised kirjutada iga vahemiku kohta. Sel juhul integreerime valemiga (11.109) iga vahemiku eraldi.

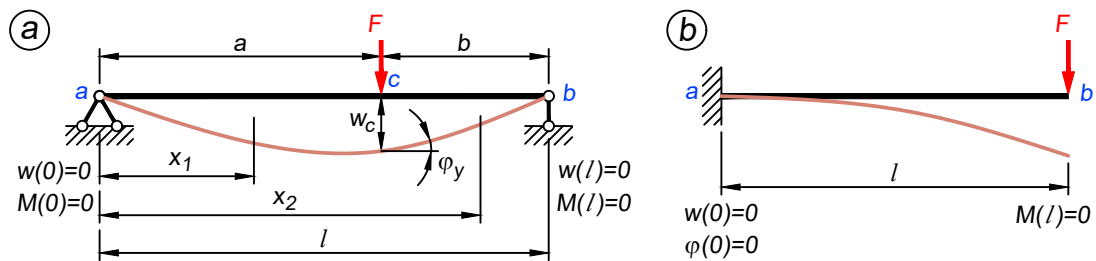
Joonisel 11.72 kujutatud tala on koormatud lauskoormuse ja koondjõuga. Seetõttu jagame tala kolmeks vahemikuks $a-c$, $c-d$ ja $d-b$, kus paindemomendid avaldame vastavalt koordinaatide x_1 , x_2 ja x_3 abil. Kui nüüd teha ära valemi (11.109) integreerimine ning leida seejärel ka integreerimiskonstantide väärtused, siis saame avaldised pöörde ja siirde (ehk elastse joone) määramiseks eraldi igas vahemikus.

Raja- ja pidevustingimused

Integreerimisel tekkivate integreerimiskonstantide leidmisel kasutame teadaolevaid *raja-* ja *pidevustingimusi*. Rajatingimustena kasutame siirde, pöörde, paindemomendi ja põikjõu väärtuseid arvutusskeemi mingis punktis, kus need on teada või lihtsalt määratavad.

Joonisel 11.73, a kujutatud lihttalal ei saa toimuda tugede kohal vertikaalsiirdeid, mis annab meile tala alguses ja lõpus kokku kaks rajatingimust: $w(0) = 0$ ja $w(l) = 0$. Kuna tala otstes on liigendtoed ja liigendis paindemomenti ei esine, siis saame veel kaks rajatingimust: $M(0) = 0$ ja $M(l) = 0$.

Joonisel 11.73, b kujutatud konsoolil on vasakus otsas jäik tugi, mistõttu seal on nii siire



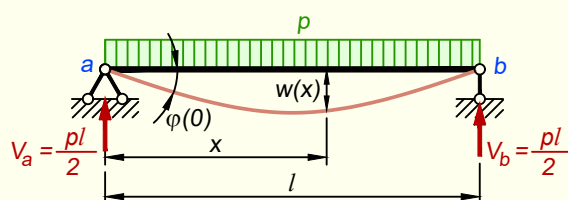
Joonis 11.73. Skeemid raja- ja pidevustingimuste määramiseks

kui ka pööre võrdsed nulliga: $w(0) = 0$ ja $\varphi(0) = 0$. Lisaks saame ühe rajatingimuse varda parempoolses otsast, kuna seal ei teki paindemomenti: $M(l) = 0$.

Pidevustingimused väljendavad seda, et elastne joon peab olema sujuv kõver kogu arvutuskeemi ulatuses ning ei tohi omada katkestusi ega murdepunkte integreerimisvahemike kokkupuute kohtades.

Joonisel 11.73, a kujutatud tala jagame koondjõu kohal kaheks vahemikuks pikkustega a ja b . Vasakpoolses vahemikus avaldame integreeritava funktsiooni koordinaadi x_1 kaudu ($0 \leq x_1 \leq a$) ning parempoolses vahemikus koordinaadi x_2 kaudu ($a \leq x_2 \leq l$). Kui avaldised pöörde ja siirde jaoks on leitud mõlemas vahemikus, peavad nad punktis c andma samad tulemused, selleks et elastne joon oleks pidev. Järelikult peavad vahemike kokkupuute kohas kehtima tingimused: $w_1(a) = w_2(a)$ ja $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ ehk $\frac{dw_1(a)}{dx_1} = \frac{dw_2(a)}{dx_2}$.

NÄIDE 11.21. Tuletada joonisel 11.74 kujutatud tala elastse joone ja selle pöördenurga avaldised ning leida pööre vasakul toel ja tala suurim läbipaine.



Joonis 11.74. Tala arvutuskeem elastse joonega

LAHENDUS

Kasutame tala elastse joone diferentsiaalvõrrandit (11.109)

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)}$$

kus paindemoment tala lõikes x avaldub

$$M(x) = \frac{pl}{2}x - px\frac{x}{2}$$

Asetame paindemomendi avaldise diferentsiaalvõrrandisse, mis omandab kuju

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{plx}{2EI} + \frac{px^2}{2EI}$$

Integreerime seda, mis annab pöörde avaldise

$$\varphi(x) = \frac{dw}{dx} = -\frac{plx^2}{4EI} + \frac{px^3}{6EI} + C_1$$

Teistkordsel integreerimisel saame siirde avaldise (ehk elastse joone võrrandi)

$$w(x) = -\frac{plx^3}{12EI} + \frac{px^4}{24EI} + C_1x + C_2$$

Integreerimiskonstandid C_1 ja C_2 saame rajatingimustest tugele a ja b kohal

$$1. w(0) = 0: -\frac{pl \cdot 0}{12EI} + \frac{p \cdot 0^4}{24EI} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$2. w(l) = 0: -\frac{pl^4}{12EI} + \frac{pl^4}{24EI} + C_1l = 0$$

mis annavad meile

$$C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{pl^3}{24EI}$$

Nüüd lisame saadud integreerimiskonstandid pöörde ning elastse joone võrrandisse, misjärel saavad need kuju

$$\varphi(x) = -\frac{plx^2}{4EI} + \frac{px^3}{6EI} + \frac{pl^3}{24EI}$$

$$w(x) = -\frac{plx^3}{12EI} + \frac{px^4}{24EI} + \frac{pl^3x}{24EI}$$

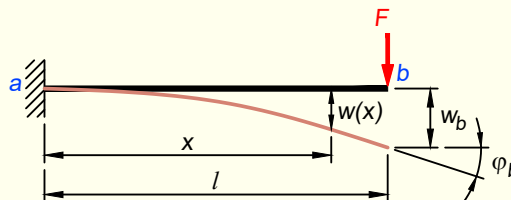
Leiame tala ristlõike pöörde toel a

$$\varphi_a = \varphi(0) = \frac{pl^3}{24EI}$$

Arvutame tala maksimaalse läbipainde. Kuna tala arvutuskeem on sümmeetriline, siis tekib suurim läbipaine silde keskel

$$w_{\max} = w(l/2) = -\frac{pl^4}{96EI} + \frac{pl^4}{384EI} + \frac{pl^4}{48EI} = \frac{5pl^4}{384EI}$$

NÄIDE 11.22. Tuletada joonisel 11.75 kujutatud konsooli elastse joone ja selle pöördenurga avaldised ning leida pööre ja siire konsooli vabas otsas.



Joonis 11.75. Konsooli arvutuskeem elastse joonega

LAHENDUS

Kasutame tala elastse joone diferentsiaalvõrrandit (11.109)

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)}$$

kus paindemoment tala lõikes x avaldub

$$M(x) = -F(l-x)$$

Asetame paindemomendi avaldise diferentsiaalvõrrandisse, mis omandab kuju

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{F(l-x)}{EI}$$

Integreerides saame pöörde ja siirde avaldised

$$\varphi(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{Flx}{EI} - \frac{Fx^2}{2EI} + C_1$$

$$w(x) = \frac{Flx^2}{2EI} - \frac{Fx^3}{6EI} + C_1x + C_2$$

Integreerimiskonstandid C_1 ja C_2 saame rajatingimustest toe a kohal

$$1. w(0) = 0: \quad \frac{Fl \cdot 0}{2EI} - \frac{F \cdot 0^3}{6EI} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$2. \varphi(0) = 0: \quad \frac{Fl \cdot 0}{EI} - \frac{F \cdot 0^2}{2EI} + C_1 = 0$$

mis annavad meile

$$C_2 = 0; \quad C_1 = 0$$

Lisame leitud integreerimiskonstandid pöörde ja elastse joone võrrandisse, mis seejärel saavad lõpliku kuju

$$\varphi(x) = \frac{Flx}{EI} - \frac{Fx^2}{2EI}$$

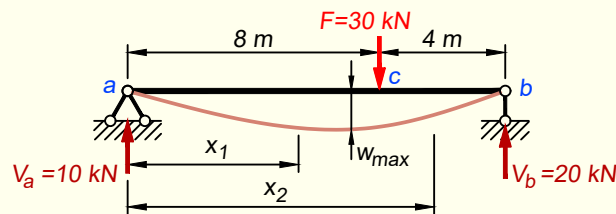
$$w(x) = \frac{Flx^2}{2EI} - \frac{Fx^3}{6EI}$$

Arvutame pöörde ja siirde konsooli vabas otsas ehk kohal $x = l$

$$\varphi_b = \varphi(l) = \frac{Fl^2}{EI} - \frac{Fl^2}{2EI} = \frac{Fl^2}{2EI}$$

$$w_b = w(l) = \frac{Fl^3}{2EI} - \frac{Fl^3}{6EI} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

NÄIDE 11.23. Arvutada joonisel 11.76 kujutatud tala suurim läbipaine.



Joonis 11.76. Tala arvutusskeem elastse joonega

LAHENDUS

Avaldame vasakpoolse toereaktsiooni kaudu paindemomendi vahemikus *a-c*

$$M_1 = 10x_1$$

ja vahemikus *c-b*

$$M_2 = 10x_2 - 30(x_2 - 8) = -20x_2 + 240$$

Asetame paindemomendi M_1 avaldise elastse joone diferentsiaalvõrrandisse (11.109) ja teeme ära selle integreerimised

$$\frac{d^2w_1}{dx_1^2} = -\frac{10x_1}{EI}$$

$$\varphi_1 = \frac{dw_1}{dx_1} = -\frac{5x_1^2}{EI} + C_1$$

$$w_1 = -\frac{5x_1^3}{3EI} + C_1x_1 + C_2$$

Järgnevalt asetame paindemomendi M_2 avaldise elastse joone diferentsiaalvõrrandisse ja teeme samuti ära selle integreerimised

$$\frac{d^2w_2}{dx_2^2} = \frac{20x_2}{EI} - \frac{240}{EI}$$

$$\varphi_2 = \frac{dw_2}{dx_2} = \frac{10x_2^2}{EI} - \frac{240x_2}{EI} + C_3$$

$$w_2 = \frac{10x_2^3}{3EI} - \frac{120x_2^2}{EI} + C_3x_2 + C_4$$

Integreerimiskonstantide C_1 kuni C_4 leidmiseks kasutame kahte rajatingimust tugede *a* ja *b* kohal, kus on teada, et vertikaalsiire peab võrduma nulliga: $w_1(0) = 0$ ja $w_2(12) = 0$. Lisaks tuleb kasutada ka kahte pidevustingimust, millega väljendame seda, et lõike *c* kohal ei tohi elastses joones olla murdepunkti ega astet. See tähendab, et talaosade *a-c* ja

c - b järgi arvatud elastse joone pöördenurk lõikes c peab olema sama ning sama peab olema ka vertikaalsiire: $\varphi_1(8) = \varphi_2(8)$ ja $w_1(8) = w_2(8)$.

Saame järgmised avaldised

$$\begin{aligned} 1. w_1(0) = 0: & \quad -\frac{5 \cdot 0}{3EI} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \\ 2. w_2(12) = 0: & \quad \frac{10 \cdot 12^3}{3EI} - \frac{120 \cdot 12^2}{EI} + C_3 \cdot 12 + C_4 = 0 \\ 3. \varphi_1(8) = \varphi_2(8): & \quad -\frac{5 \cdot 8^2}{EI} + C_1 = \frac{10 \cdot 8^2}{EI} - \frac{240 \cdot 8}{EI} + C_3 \\ 4. w_1(8) = w_2(8): & \quad -\frac{5 \cdot 8^3}{3EI} + C_1 \cdot 8 + C_2 = \frac{10 \cdot 8^3}{3EI} - \frac{120 \cdot 8^2}{EI} + C_3 \cdot 8 + C_4 \end{aligned}$$

millest esimene annab kohe ühe integreerimiskonstandi: $C_2 = 0$.

Kolm ülejäänud avaldist teisendame kujule

$$\begin{aligned} -\frac{11520}{EI} + 12C_3 + C_4 &= 0 \\ \frac{960}{EI} + C_1 - C_3 &= 0 \\ \frac{15360}{3EI} + 8C_1 - 8C_3 - C_4 &= 0 \end{aligned}$$

Saadud kolmest võrrandist koosneva süsteemi lahendamisel leiame integreerimiskonstantide väärtusteks

$$C_1 = \frac{1920}{9EI}; \quad C_3 = \frac{10560}{9EI}; \quad C_4 = -\frac{7680}{3EI}$$

Integreerimiskonstantide abil saame pöörde ja siirde avaldisteks vahemikus a - c

$$\varphi_1 = -\frac{5x_1^2}{EI} + \frac{1920}{9EI}; \quad w_1 = -\frac{5x_1^3}{3EI} + \frac{1920x_1}{9EI}$$

ning vahemikus c - b

$$\varphi_2 = \frac{10x_2^2}{EI} - \frac{240x_2}{EI} + \frac{10560}{9EI}; \quad w_2 = \frac{10x_2^3}{3EI} - \frac{120x_2^2}{EI} + \frac{10560x_2}{9EI} - \frac{7680}{3EI}$$

Kuna arvutuskeem ei ole silde keskkoha suhtes sümmeetriline, siis me ei tea esialgu täpset maksimaalse läbipainde asukohta. Täpse asukoha määramiseks lähtume sellest, et maksimaalse siirde asukohas on elastse joone puutuja horisontaalne ehk tõusunurk võrdub nulliga. Eeldusel, et see paikneb vahemikus a - c , saame võrrandi

$$\varphi_1 = -\frac{5x_1^2}{EI} + \frac{1920}{9EI} = 0$$

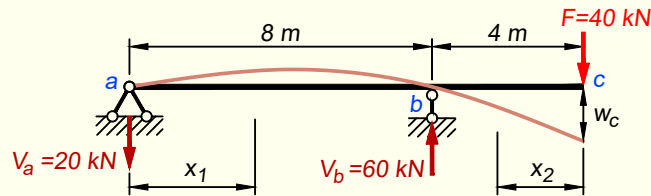
millest

$$x_1 = 6,532 \text{ m}$$

Asetame selle vertikaalsiirde avaldisse ja leiame maksimaalse läbipainde

$$w_{\max} = w_1(6,532) = -\frac{5 \cdot 6,532^3}{3EI} + \frac{1920 \cdot 6,532}{9EI} = \frac{929}{EI}$$

NÄIDE 11.24. Arvutada joonisel 11.77 kujutatud konsooliga tala konsooli vaba otsa läbipaine.



Joonis 11.77. Konsooliga tala arvutuskeem elastse joonega

LAHENDUS

Siin ülesandes kasutame erinevate suundadega x -koordinaate. Tala sildes $a-b$ avaldame kõik arvutatavad parameetrid koordinaadi x_1 kaudu, mille alguspunkt on toel a ning positiivne suund paremale. Konsooli $c-b$ ulatuses kasutame koordinaati x_2 , mille alguspunkt on varda otsas c ning positiivne suund vasakule. Sellise valiku teeme, kuna nii muutub konsooli kohal paindemomendi avaldis lihtsamaks.

Avaldame vasakpoolse toereaktsiooni kaudu paindemomendi vahemikus $a-b$

$$M_1 = -20x_1$$

ja koormuse kaudu vahemikus $c-b$

$$M_2 = -40x_2$$

Kirjutame paindemomendi M_1 avaldise elastse joone diferentsiaalvõrrandisse (11.109) ja integreerime

$$\frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = \frac{20x_1}{EI}$$

$$\varphi_1 = \frac{dw_1}{dx_1} = \frac{10x_1^2}{EI} + C_1$$

$$w_1 = \frac{10x_1^3}{3EI} + C_1x_1 + C_2$$

Järgnevalt asetame paindemomendi M_2 avaldise elastse joone diferentsiaalvõrrandisse ja samuti integreerime

$$\frac{d^2 w_2}{dx_2^2} = \frac{40x_2}{EI}$$

$$\varphi_2 = \frac{dw_2}{dx_2} = \frac{20x_2^2}{EI} + C_3$$

$$w_2 = \frac{20x_2^3}{3EI} + C_3x_2 + C_4$$

Integreerimiskonstandid leiame raja- ja pidevustingimuste abil. Kasutame kolme rajatingimust tugede kohal, kus teame, et vertikaalsirdeid seal toimuda ei saa: $w_1(0) = 0$, $w_1(8) = 0$ ja $w_2(4) = 0$.

Lisaks kasutame ühte pidevustingimust, mis ütleb, et toe b kohal tekkiv varda pööre peab tulema sama nii vahemiku $a-b$ kui ka vahemiku $c-b$ abil arvutades: $\varphi_1(8) = -\varphi_2(4)$. Pidevustingimuses on nurga φ_2 ees miinusmärk, kuna x_1 on positiivne ühes ja x_2 teises suunas, mistõttu toel b on φ_1 positiivne ja φ_2 negatiivne. See järeldeb tugevusõpetusest tuttavast märgireeglist, mis ütleb, et nurka loeme positiivseks, kui x -koordinaadi kasvades kasvab ka pöördest põhjustatud siire.

Saame järgmised avaldised

$$\begin{aligned} 1. w_1(0) = 0: & \quad \frac{10 \cdot 0}{3EI} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \\ 2. w_1(8) = 0: & \quad \frac{10 \cdot 8^3}{3EI} + C_1 \cdot 8 = 0 \\ 3. w_2(4) = 0: & \quad \frac{20 \cdot 4^3}{3EI} + C_3 \cdot 4 + C_4 \\ 4. \varphi_1(8) = -\varphi_2(4): & \quad \frac{10 \cdot 8^2}{EI} + C_1 = -\frac{20 \cdot 4^2}{EI} - C_3 \end{aligned}$$

Esimene rajatingimus annab ühe integreerimiskonstandi: $C_2 = 0$.

Kolm ülejäänud avaldist teisendame kujule

$$\begin{aligned} \frac{5120}{3EI} + 8C_1 &= 0 \\ \frac{1280}{3EI} + 4C_3 + C_4 &= 0 \\ \frac{640}{EI} + C_1 + \frac{320}{EI} + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

millest esimene avaldis annab integreerimiskonstandi C_1 ning kolmest võrrandist koosneva süsteemi lahendamisel saame ka ülejäänud konstandid

$$C_1 = -\frac{5120}{24EI}; \quad C_3 = -\frac{17920}{24EI}; \quad C_4 = \frac{2560}{EI}$$

Kuna küsitakse siiret lõikes c , avaldame elastse joone võrrandi konsooli kohal

$$w_2 = \frac{20x_2^3}{3EI} - \frac{17920x_2}{24EI} + \frac{2560}{EI}$$

Konsooli vaba otsa siirde arvutamisel võtame x_2 võrdseks nulliga

$$w_c = w_2(0) = \frac{2560}{EI}$$

11.9. Siirete arvutamine maatrikskujul

11.9.1. Muutusmaatriks

Konstruksioonide arvutamisel maatriksitega esitame kõik lähteandmed maatrikskujul. *Muutusmaatriks* esitab konstruksiooni elementidele mõjuvate ühikjõudude ja nendele vastavate siirete vahelisi seoseid.

Jõule F_k vastav siire avaldub vastavalt valemile (11.1) lineaarse funktsioonina konstruksioonile mõjuvatest jõududest F_k, F_i, \dots, F_n

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \delta_{kk}F_k + \delta_{ki}F_i + \dots + \delta_{kn}F_n \\ \Delta_i &= \delta_{ik}F_k + \delta_{ii}F_i + \dots + \delta_{in}F_n \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= \delta_{nk}F_k + \delta_{ni}F_i + \dots + \delta_{nn}F_n\end{aligned}\tag{11.116}$$

ehk maatrikskujul väljendatult

$$\begin{pmatrix} \Delta_k \\ \Delta_i \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{kk} & \delta_{ki} & \dots & \delta_{kn} \\ \delta_{ik} & \delta_{ii} & \dots & \delta_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{nk} & \delta_{ni} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_k \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}\tag{11.117}$$

mida võime esitada ka lühemalt

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}\mathbf{F}\tag{11.118}$$

kus \mathbf{d} on *siirete vektor* ja \mathbf{F} on *koormusvektor*. Keskmise maatriks \mathbf{D} on n -järku ruutmaatriks ja esitab jõududele F_k, F_i, \dots, F_n vastavaid siirdeid, mis on põhjustatud igast eraldi mõjuvast jõust.

Järgnevalt vaatleme konstantse ristlõikega varrast või selle osa pikkusega l_j . Varda pikkejäikus on EA_j ja paindejäikus EI_j . Joonisel 11.78, a kujutatud vardale on rakendatud parempoolsesse otsa tõmbejõud F_j ning sellele vastavaks siirdeks on varda pikenemine

$$\Delta l_j = \frac{l_j}{EA_j} \cdot F_j = \delta_j F_j\tag{11.119}$$

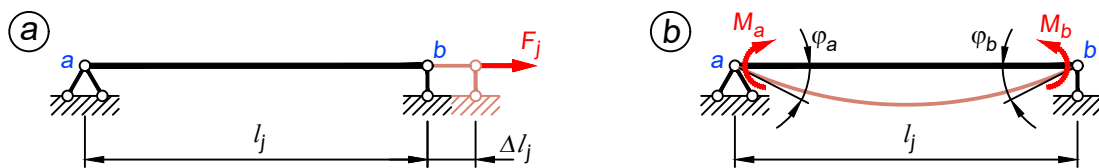
Ühikjõust põhjustatud varda pikenemine, väljendatuna maatrikskujul

$$\delta_j = \frac{l_j}{EA_j} [1]\tag{11.120}$$

on konstantse ristlõikega sirge varda *pikke muutusmaatriks*.

Joonisel 11.78, b kujutatud tala toeristlõigete pöörded φ_a ja φ_b arvutame vastavalt võrranditele (11.116)

$$\begin{aligned}\varphi_a &= \delta_{aa}M_a + \delta_{ab}M_b \\ \varphi_b &= \delta_{ba}M_a + \delta_{bb}M_b\end{aligned}\tag{11.121}$$



Joonis 11.78. Koondjõu ja momentidega vardad

või maatrikskujul

$$\begin{Bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_a \\ M_b \end{Bmatrix} \quad (11.122)$$

Kui kasutada ühikjõududest põhjustatud siirdeid

$$\delta_{aa} = \delta_{bb} = \frac{l_j}{3EI_j}; \quad \delta_{ab} = \delta_{ba} = \frac{l_j}{6EI_j} \quad (11.123)$$

siis võime avaldise (11.122) esitada järgmiselt

$$\begin{Bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_a \\ M_b \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_j \begin{Bmatrix} M_a \\ M_b \end{Bmatrix} \quad (11.124)$$

kus

$$\mathbf{B}_j = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11.125)$$

on konstantse ristlõikega sirge varda *painde muutusmaatriks*.

11.9.2. Siirete arvutamine

Siirded paindedeformatsioonist

Valemi (11.44) rakendamist maatrikskujul käsitleme algul ainult selle esimese, paindedeformatsiooni arvestava liikmega (11.45)

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k M_p}{EI} dx \quad (11.126)$$

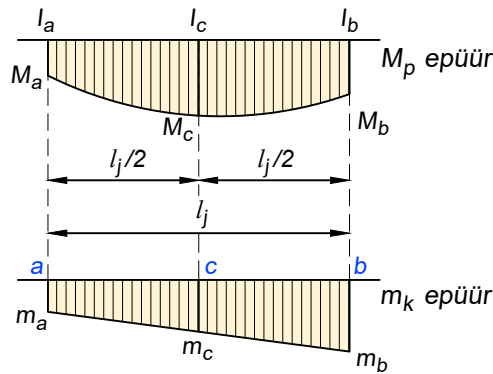
Järgnevalt vaatleme üht integreerimisvahemikku pikkusega l_j (joonis 11.79).

Kui ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür m_k muutub lineaarselt ja koormuse epüüri ordinaat jagatud paindejäikusega ($\frac{M_p}{EI}$) muutub teise astme parabooli järgi või on lineaarne, siis on valemiga (11.63) arvatud tulemus täpne. Esitame selle avaldise siin teisendatuna

$$\Delta_{kp} = \frac{l_0}{6EI_0} (\alpha_{aj} m_{ak} M_{ap} + 4\alpha_{cj} m_{ck} M_{cp} + \alpha_{bj} m_{bk} M_{bp}) \quad (11.127)$$

kus

$$\alpha_{ij} = \frac{EI_0 l_j}{EI_i l_0} \quad (i = a, b, c) \quad (11.128)$$



Joonis 11.79. Epüürid koormusest ja ühikjõust

Kui $\frac{M_p}{EI}$ kujutab kolmanda või kõrgema astme parabooli, siis on valemiga (11.127) ar-
vutatud tulemus ligikaudne. Viga on seda väiksem, mida väiksem on integreerimisvahemik
 l_j .

Maatrikskuju esitatuna on valem (11.127) järgmine

$$\Delta_{kp} = \{ m_{ak} \quad m_{ck} \quad m_{bk} \} \frac{l_0}{6EI_0} \begin{bmatrix} \alpha_{aj} & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha_{cj} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{bj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{ap} \\ M_{cp} \\ M_{bp} \end{Bmatrix} \quad (11.129)$$

ehk lühemalt

$$\Delta_{kp} = \mathbf{Y}_{kj}^T \mathbf{B}_j \mathbf{M}_{0j} \quad (11.130)$$

kus

$$\mathbf{Y}_{kj}^T = \{ m_{ak} \quad m_{ck} \quad m_{bk} \} \quad (11.131)$$

on ühikjõust 1_k põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaatidest moodustatud vektor trans-
poneeritud kujul ja

$$\mathbf{B}_j = \frac{l_0}{6EI_0} \begin{bmatrix} \alpha_{aj} & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha_{cj} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{bj} \end{bmatrix} \quad (11.132)$$

on vahemiku j painde muutusmaatriks ning

$$\mathbf{M}_{0j} = \begin{Bmatrix} M_{ap} \\ M_{cp} \\ M_{bp} \end{Bmatrix} \quad (11.133)$$

on koormusest põhjustatud paindemomentide vektor.

Kui mõlemad epüürid m_k ja M_p on integreerimisvahemiku ulatuses lineaarsed, siis saa-
me keskmised ordinaadid avaldada otsmiste ordinaatide kaudu ning maatriksite (11.131),
(11.132) ja (11.133) asemel võime kirjutada

$$\mathbf{Y}_{kj}^T = \{ m_{ak} \quad m_{bk} \} \quad (11.134)$$

$$\mathbf{B}_j = \frac{l_0}{6EI_0} \begin{bmatrix} \alpha_{aj} + \alpha_{cj} & \alpha_{cj} \\ \alpha_{cj} & \alpha_{cj} + \alpha_{bj} \end{bmatrix} \quad (11.135)$$

$$\mathbf{M}_{0j} = \begin{Bmatrix} M_a \\ M_b \end{Bmatrix} \quad (11.136)$$

Kui elemendi l_j ulatuses on jäikus konstantne, siis $\alpha_{aj} = \alpha_{cj} = \alpha_{bj} = \alpha_j$ ja valem (11.135) ühtib valemiga (11.125)

$$\mathbf{B}_j = \frac{l_0}{6EI_0} \begin{bmatrix} 2\alpha_j & \alpha_j \\ \alpha_j & 2\alpha_j \end{bmatrix} = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11.137)$$

Siirde Δ_{kp} arvutamisel summeerime arvutustulemused üle kõigi elementide

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \mathbf{Y}_{kj}^T \mathbf{B}_j \mathbf{M}_{0j} \quad (11.138)$$

mis maatrikssümboolikas omab kuju

$$\Delta_{kp} = \left\{ \mathbf{Y}_{k1}^T \quad \mathbf{Y}_{k2}^T \quad \dots \quad \mathbf{Y}_{kv}^T \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{01} \\ \mathbf{M}_{02} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{0v} \end{Bmatrix} \quad (11.139)$$

ehk

$$\Delta_{kp} = \mathbf{Y}_k^T \mathbf{B} \mathbf{M}_0 \quad (11.140)$$

Avaldises (11.140) on maatriks \mathbf{B} kvaasidiagonaalne ja koosneb üksikute elementide muutusmaatriksitest ning sisaldab v rida ja veergu. Siirete vektori \mathbf{d} arvutamisel on vaja avaldises (11.139) rea \mathbf{Y}_k^T asemel kirjutada n rida, s.t vektor \mathbf{Y}_k^T asendada maatriksiga \mathbf{Y}^T , mille ridade arv võrdub vektori \mathbf{d} dimensiooniga. Maatriksi \mathbf{Y}^T elementideks on vastavatest ühikjõududest põhjustatud epüüride ordinaadid.

Seega saame siirete vektori arvutamiseks valemi

$$\mathbf{d} = \mathbf{Y}^T \mathbf{B} \mathbf{M}_0 \quad (11.141)$$

Siirded pikke- ja lõikedeformatsioonist

Varraste pikke- ja lõikedeformatsioone arvestades kasutame eespool esitatud maatrikseid, kus paindedeformatsioonile vastavad sümbolid m_k , M_p , EI_0 ja α_j asendame pikkedeformatsioonile vastavate sümbolitega

$$n_k, N_p, EA_0 \quad \text{ja} \quad \beta_j = \frac{EA_0 l_j}{E_j A_j l_0} \quad (11.142)$$

või lõikedeformatsioonile vastavate sümbolitega

$$q_k, Q_p, EA_0 \quad \text{ja} \quad \gamma_j = k_j \frac{EA_0 l_j}{G_j A_j l_0} \quad (11.143)$$

Kui pikijõud on varraste ulatuses konstantsed (näiteks sõrestikes), siis arvutame siirded valemiga

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \frac{n_{jk} N_{jp} l_j}{EA_j} \quad (11.144)$$

ehk maatriksümboolikas sarnaselt valemile (11.140)

$$\Delta_{kp} = \mathbf{Y}_{kN}^T \mathbf{B}_N \mathbf{N}_0 \quad (11.145)$$

kus

$$\mathbf{Y}_{kN}^T = \{ n_{k1} \quad n_{k2} \quad \dots \quad n_{kv} \} \quad (11.146)$$

on ühikjõust 1_k põhjustatud pikijõu epüüri ordinaatidest moodustatud vektor transposeeritud kujul ja

$$\mathbf{B}_N = \frac{l_0}{EA_0} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_v \end{bmatrix} \quad (11.147)$$

on pikke muutusmaatriks ning

$$\mathbf{N}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{01} \\ \mathbf{N}_{02} \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{0v} \end{Bmatrix} \quad (11.148)$$

on koormusest põhjustatud pikijõudude vektor.

Siirete vektori, mis on põhjustatud pikkest, arvutame analoogiliselt valemiga (11.141)

$$\mathbf{d}_N = \mathbf{Y}_N^T \mathbf{B}_N \mathbf{N}_0 \quad (11.149)$$

Erinevate siirete koos arvutamine

Painde- ja pikkedeformatsioonide koos arvutamisel liidame siirete vektorid (11.141) ja (11.148)

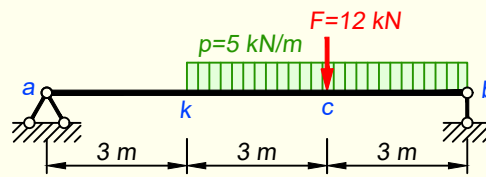
$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_M + \mathbf{d}_N \quad (11.150)$$

mis pikemalt väljakirjutatuna on

$$\mathbf{d} = \{ \mathbf{Y}_M^T \quad \mathbf{Y}_N^T \} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_M & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{N}_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{Y}_M^T \mathbf{B}_M \mathbf{M}_0 + \mathbf{Y}_N^T \mathbf{B}_N \mathbf{N}_0 = \mathbf{d}_M + \mathbf{d}_N \quad (11.151)$$

Kui ühikjõududest ja koormusest põhjustatud epüüridel on naaberelementide külgnevad ordinaadid võrdsed (ühe elemendi viimane ordinaat on võrdne järgmise elemendi esimese ordinaadiga) ehk epüürid on pidevad, siis saab eespool toodud maatriksite ja vektorite suurust vähendada. Selle kohta leiab infot õpiku [29] peatükist 16.72.

NÄIDE 11.25. Arvutada joonisel 11.80 kujutatud tala lõike k vertikaalsiire.

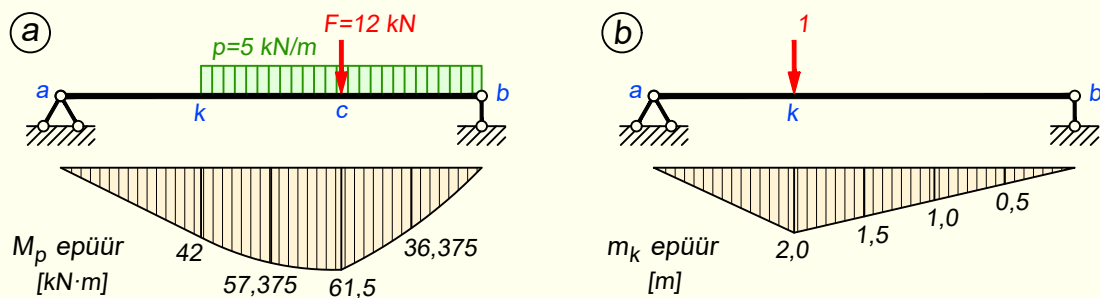


Joonis 11.80. Tala arvutusskeem

LAHENDUS

Koostame talale koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri M_p ja lõikesse k rakendatavast ühikjõust tekkiva m_k epüüri (joonis 11.81).

Kuna elemendi $a-k$ ulatuses on mõlemad epüürid sirgjoonelised, siis piisab integreerimisest, kui märgime epüüridele ordinaadid ainult elemendi otste kohal. Elementide $k-c$ ja $c-b$ ulatuses on koormusepüür kõverjooneline, mistõttu tuleb integreerimisel arvestada lisaks elementide otstele ka keskmisi ordinaate.



Joonis 11.81. Koormusest ja ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüürid

Lõike k siirde arvutamiseks kasutame valemist (11.140)

$$\Delta_{kp} = \mathbf{Y}_k^T \mathbf{B} \mathbf{M}_0$$

Vektori \mathbf{Y}_k^T koostame ühikjõust põhjustatud epüüri ordinaatidest. Ordinaatide kirjutamist vektorisse alustame epüüri vasakust otsast ja liigume edasi paremale. Elemendi $a-k$ kohalt võtame ainult elemendi otsmised ordinaadid, järgmise kahe elemendi puhul aga lisaks otsmistele ka keskmised

$$\mathbf{Y}_k^T = \{ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1,5 \quad 1 \quad 1 \quad 0,5 \quad 0 \}$$

Muutusmaatriksi \mathbf{B} moodustamiseks koostame muutusmaatriksid esmalt üksikutele elementidele. Muutusmaatriksites esinevad tegurid α_j leiame valemiga (11.128). Kuna praegusel juhul on kõik elemendid ühesugused, siis saame kõigile ühise teguri

$$\alpha_{a-k} = \alpha_{k-c} = \alpha_{c-b} = \frac{EI_0 l_j}{EI l_0} = \frac{EI \cdot 3}{EI \cdot 3} = 1$$

Kuna elemendi $a-k$ ulatuses on mõlemad epüürid sirgjoonelised, siis kirjutame muutusmaatriksi vastavalt valemile (11.137)

$$\mathbf{B}_{a-k} = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ning elementide $k-c$ ja $c-b$ puhul kõvera M_p epüüri tõttu vastavalt valemile (11.132)

$$\mathbf{B}_{k-c} = \mathbf{B}_{c-b} = \frac{l_0}{6EI_0} \begin{bmatrix} \alpha_{aj} & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha_{cj} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{bj} \end{bmatrix} = \frac{3}{6EI} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Järgnevalt moodustame muutusmaatriksi \mathbf{B} , paigutades elementide muutusmaatriksid selle peadiagonaalile

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektori \mathbf{M}_0 koostame koormusest põhjustatud epüüri ordinaatidest

$$\mathbf{M}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 42 \\ 42 \\ 57,375 \\ 61,5 \\ 61,5 \\ 36,375 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

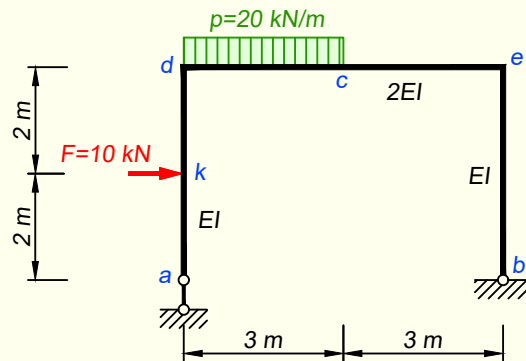
Arvutame löike k siirde

$$w_{kp} = \mathbf{Y}_k^T \mathbf{B} \mathbf{M}_0 =$$

$$= \{ 0 \ 2 \ 2 \ 1,5 \ 1 \ 1 \ 0,5 \ 0 \} \frac{1}{2EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 42 \\ 42 \\ 57,375 \\ 61,5 \\ 61,5 \\ 36,375 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{396}{EI}$$

NÄIDE 11.26. Arvutada joonisel 11.82 kujutatud murtud varda lõike c vertikaalsiire, liigendi a horisontaalsiire ja toeristlõike b pööre. Varraste paindejäikuste EI erinevused on näidatud joonisel.



Joonis 11.82. Murtud varda arvutuskeem

LAHENDUS

Koostame arvutuskeemile koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri M_p (joonis 11.83, a) ning kolm epüüri ühikjõududest ja -momendist (joonis 11.83, b , c ja d), mis vastavad lähteülesandes küsitud siiretele.

Siirete arvutamiseks kasutame valemit (11.141)

$$\mathbf{d} = \mathbf{Y}^T \mathbf{B} \mathbf{M}_0$$

Maatriksi \mathbf{Y}^T koostame ühikjõududest ja -momendist põhjustatud paindemomendi epüüride ordinaatidest. Ordinaatide kirjutamist maatriksisse alustame arvutuskeemi vasaku toe poolt ja liigume edasi paremale. Vasakpoolse posti alumine osa $a-k$ ei paindu ja seetõttu me seda arvutustes ei arvesta. Kõverjoonelise koormusepüüri tõttu võtame elemendi $d-c$ kohalt lisaks otsmistele ka keskmise ordinaadi. Teiste varraste juures piirdume otsmistele ordinaatidega.

Maatriksi \mathbf{Y}^T esimesele reale kirjutame m_c epüüri, teisele reale m_a epüüri ja kolmandale reale m_b epüüri ordinaadid

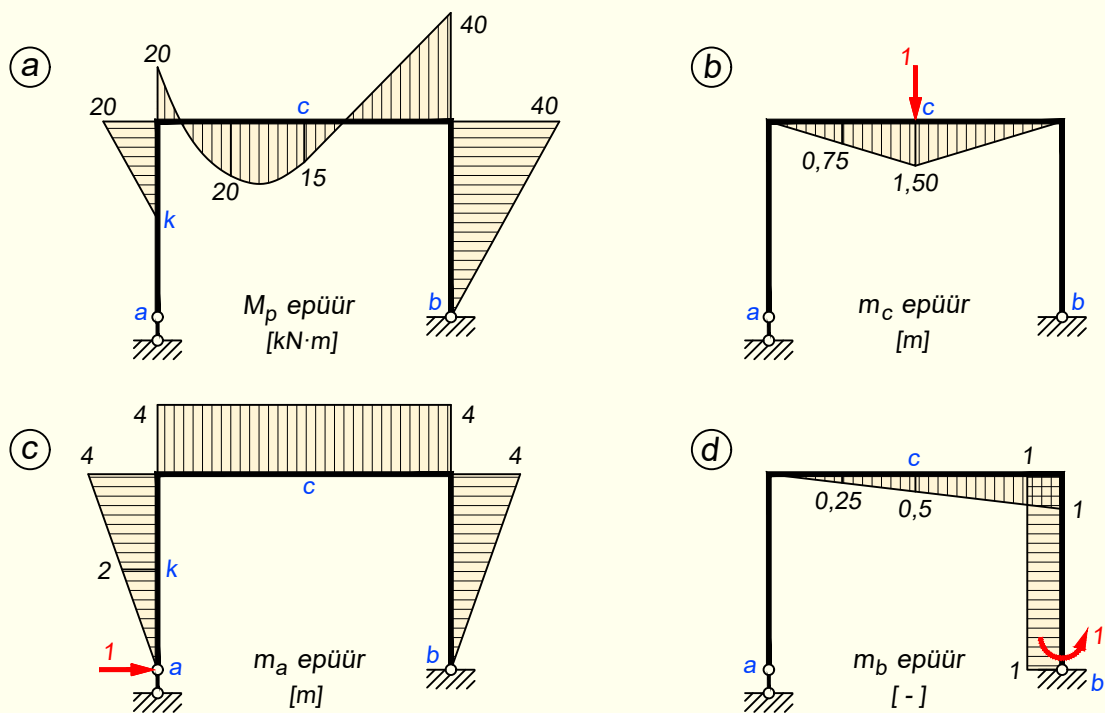
$$\mathbf{Y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,75 & 1,5 & 1,5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Muutusmaatriksites esinevad tegurid α_j leiame valemiga (11.128)

$$\alpha_j = \frac{EI_0 l_j}{EI l_0}$$

kus suurused EI_0 ja l_0 valime järgmiselt

$$EI_0 = EI; \quad l_0 = 2 \text{ m}$$



Joonis 11.83. Koormusest ja ühikjõududest põhjustatud paindemomendi epüürid

Tegurid α_j saame üksikutele elementidele

$$\alpha_{k-d} = \frac{EI \cdot 2}{EI \cdot 2} = 1; \quad \alpha_{d-c} = \alpha_{c-e} = \frac{EI \cdot 3}{2EI \cdot 2} = 0,75; \quad \alpha_{e-b} = \frac{EI \cdot 4}{EI \cdot 2} = 2$$

Elementide $k-d$, $c-e$ ja $e-b$ ulatuses on nii koormusepüür kui ka ühikjõudude epüürid sirgjoonelised ja seetõttu kirjutame nende elementidele muutusmaatriksid vastavalt valemile (11.137)

$$\mathbf{B}_j = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

millest saame

$$\mathbf{B}_{k-d} = \frac{2}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{c-e} = \frac{2}{6EI} \begin{bmatrix} 1,5 & 0,75 \\ 0,75 & 1,5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{e-b} = \frac{2}{6EI} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

kus algselt tulevad \mathbf{B}_{c-e} ja \mathbf{B}_{e-b} avaldised teiste arvuliste väärtustega, aga siin on need teisendatud sellisele kujule, et kõigil maatriksitel oleks sulgude ees olev osa ühesugune.

Elementide $d-c$ puhul on koormusepüür kõverjooneline ja selle elementide muutusmaatriksi saame vastavalt valemile (11.132)

$$\mathbf{B}_{d-c} = \frac{l_0}{6EI_0} \begin{bmatrix} \alpha_{aj} & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha_{cj} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{bj} \end{bmatrix} = \frac{2}{6EI} \begin{bmatrix} 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 \end{bmatrix}$$

Moodustame muutusmaatriksi \mathbf{B} kogu arvutuskeemile

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Vektori \mathbf{M}_0 koostame koormusest põhjustatud epüüri ordinaatidest

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -20 \\ 20 \\ 15 \\ 15 \\ -40 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

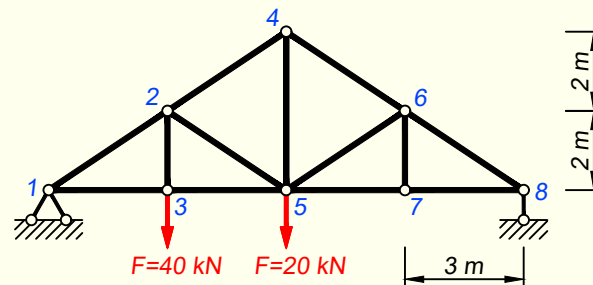
Arvutame siirete vektori \mathbf{d}

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \begin{pmatrix} w_c \\ u_a \\ \varphi_b \end{pmatrix} = \mathbf{Y}^T \mathbf{B} \mathbf{M}_0 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,75 & 1,5 & 1,5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{3EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -20 \\ 20 \\ 15 \\ 15 \\ -40 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 16,88 \\ 280,00 \\ -90,63 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ehk

$$w_c = \frac{16,88}{EI}; \quad u_a = \frac{280,00}{EI}; \quad \varphi_b = -\frac{90,63}{EI}$$

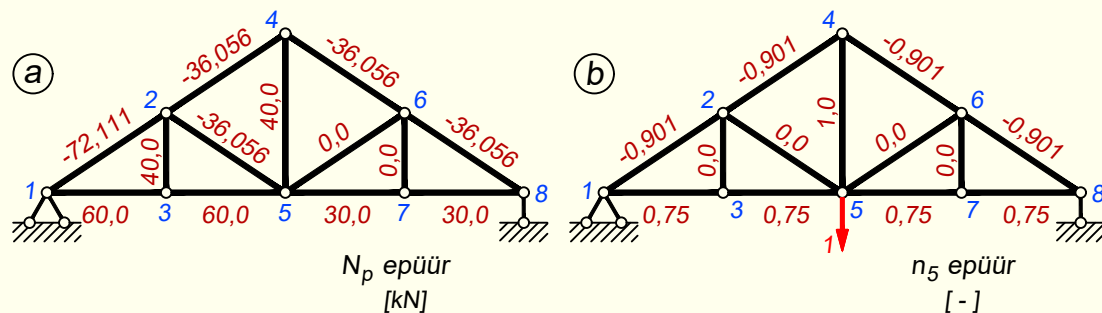
NÄIDE 11.27. Arvutada joonisel 11.84 kujutatud sõrestiku sõlme 5 vertikaalsiire. Vöovarraste pikkejäikus EA on kaks korda suurem kui võrguvarrastel.



Joonis 11.84. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Koostame sõrestikule koormusest põhjustatud pikijõu epüüri N_p (joonis 11.85, a). Kuna ülesandes on küsitud sõrestiku sõlme 5 vertikaalsiiret, siis rakendame sinna ühikjõu ja arvutame sellest tekkivate sisejõudude epüüri n_5 (joonis 11.85, b).



Joonis 11.85. Varraste pikijõud koormusest ja sõlmes 5 paiknevast ühikjõust

Siirde arvutamiseks kasutame valemist (11.145)

$$\Delta_{kP} = \mathbf{Y}_{kN}^T \mathbf{B}_N \mathbf{N}_0$$

Vektori \mathbf{Y}_{kN}^T koostame ühikjõust põhjustatud pikijõu epüüri ordinaatidest. Vardad märgime vektorisse järjekorras: alumine vöö, ülemine vöö, postid, diagonaalid.

$$\mathbf{Y}_{kN}^T = \{ 0,75 \quad 0,75 \quad 0,75 \quad 0,75 \quad -0,901 \quad -0,901 \quad -0,901 \quad -0,901 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \}$$

Muutusmaatriksis esinevad tegurid β_j leiame valemiga (11.142)

$$\beta_j = \frac{EA_0 l_j}{E_j A_j l_0}$$

kus suurused EA_0 ja l_0 valime järgmiselt (baasvardaks on alumise vöö varras)

$$EA_0 = 2EA; \quad l_0 = 3 \text{ m}$$

Tegurid β_j saame üksikutele elementidele

$$\beta_{1-3} = \beta_{3-5} = \beta_{5-7} = \beta_{7-8} = \frac{2EA \cdot 3}{2EA \cdot 3} = 1$$

$$\beta_{1-2} = \beta_{2-4} = \beta_{4-6} = \beta_{6-8} = \frac{2EA \cdot 3,606}{2EA \cdot 3} = 1,202$$

$$\beta_{2-3} = \beta_{6-7} = \frac{2EA \cdot 2}{EA \cdot 3} = 1,333; \quad \beta_{4-5} = \frac{2EA \cdot 4}{EA \cdot 3} = 2,667$$

$$\beta_{2-5} = \beta_{5-6} = \frac{2EA \cdot 3,606}{EA \cdot 3} = 2,404$$

Moodustame muutusmaatriksi \mathbf{B}_N kogu arvutuskeemile

$$\mathbf{B}_N = \frac{3}{2EA} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,202 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,202 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,202 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,202 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,404 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,404 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektori \mathbf{N}_0 koostame koormusest põhjustatud epüüri ordinaatidest

$$\mathbf{N}_0 = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 30 \\ 30 \\ -72,111 \\ -36,056 \\ -36,056 \\ -36,056 \\ 40 \\ 40 \\ 0 \\ -36,056 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Arvutame sõlme 5 siirde

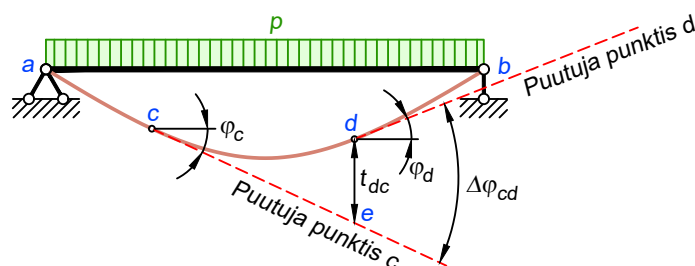
$$w_{5p} = \mathbf{Y}_{kN}^T \mathbf{B}_N \mathbf{N}_0 = \frac{655,4}{EA}$$

11.10. Siirete arvutamine M epüüri pindala abil

Eelmises peatükis näitasime, et varda elastse joone pöörded ja siirded on seotud paindemomendi M ja paindejäikusega EI . Käesolevas peatükis vaadeldava meetodi ja selle kohta käivad kaks teoreemi esitas esimesena Otto Mohr ja hiljem umbes 1873. aasta paiku sõnastas üldisel kujul Charles E. Greene. Nimetatud teoreemid võimaldavad elastse joone pöörded ja siirdeid arvutuskeemi teatud punktides määrata paindemomendi epüüri pindala abil. Seda meetodit on mugav kasutada, kui paindemomendi epüür koosneb lihtsatest kujunditest. Selline olukord esineb tavaliselt koondjõudude ja -momentide korral.

Esimene teoreem võimaldab arvutada elastse joone kaldenurga muutust elastsel joonel paikneva kahe punkti vahel. Joonisel 11.86 on kujutatud lauskoormusega tala ja selle elastne joon. Elastsel joonel tähistame punktid c ja d ning tõmbame mõlemas punktis elastsele joonele puutujad, mille kaldenurgad horisontaali suhtes on vastavalt φ_c ja φ_d . Nurk φ_c on positiivne, kuna x -koordinaadi kasvades muutub pöördest põhjustatud siire z -telje positiivses suunas. Nurk φ_d on aga vastupidiselt negatiivne, kuna x -koordinaadi suurenedes z -telje suunaline siire väheneb. Kahe puutuja vaheline nurk, mida esimese teoreemi abil saab arvutada, on tähistatud $\Delta\varphi_{cd}$.

Teise teoreemi abil saab arvutada vertikaalset kaugust elastse joone mingi punkti ja elastse joone mõnest teisest punktist tõmmatud puutuja vahel. Joonisel 11.86 on selliseks kauguseks näiteks elastse joone punktist d vertikaalsuunas mõõdetav kaugus t_{dc} punktist c tõmmatud puutujale punktis e .



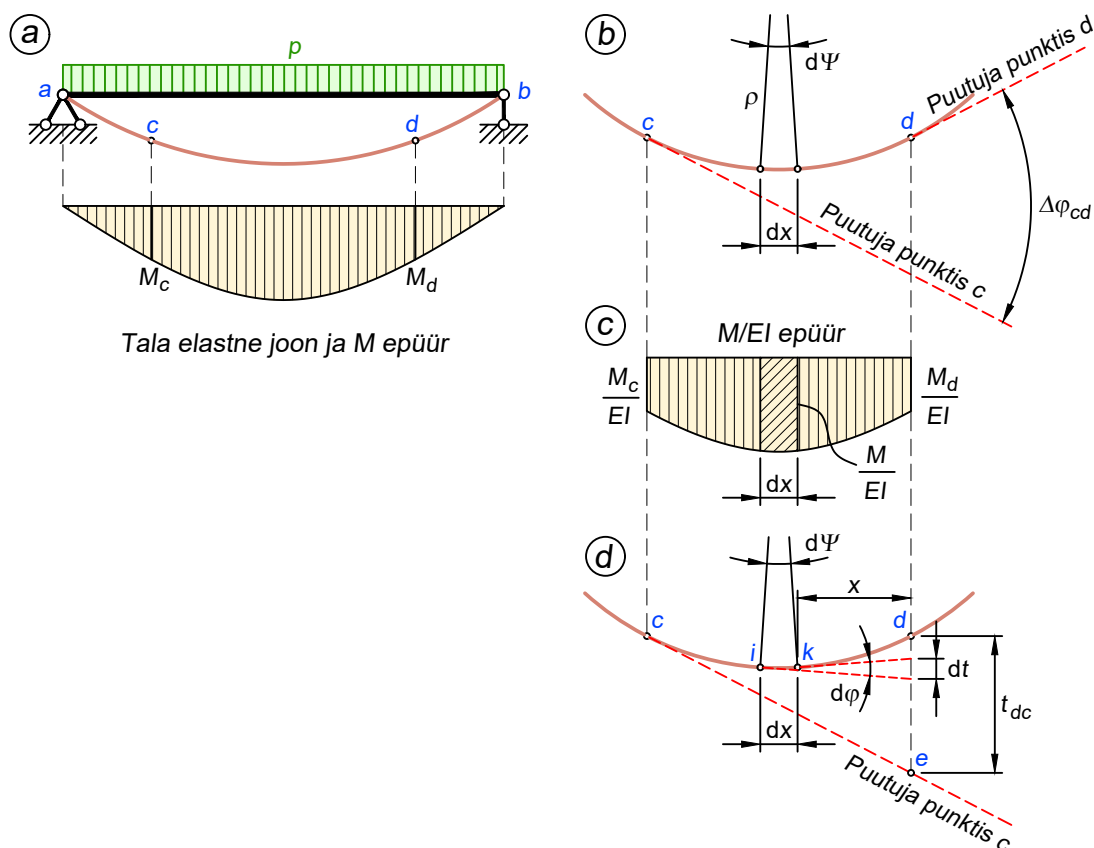
Joonis 11.86. Arvutatavad väärtused

11.10.1. Teoreemide tuletamine

Esimene teoreem

Vaatleme joonisel 11.87, a kujutatud lauskoormusega tala koos selle deformeerunud kuju näitava elastse joone ja sellele vastava paindemomendi epüüri. Tähistame elastsel joonel kaks punkti c ja d ning tala nendes lõigetes esinevad paindemomendid vastavalt M_c ja M_d .

Punktides c ja d elastsele joonele tõmmatud puutujate vahelise nurga $\Delta\varphi_{cd}$ (joonis 11.87, b) arvutamiseks lähtume esmalt elastse joone lõpmatult lühikesest elemendist dx . Elastse joone kõverdudes selle elemendi otsristlõiked pöörduvad teineteise suhtes nurga $d\Psi$ võrra.



Joonis 11.87. Elastse joone skeemid teoreemide tuletamiseks

Valemist (11.106) on teada, et $\frac{1}{\rho} = \frac{M_y(x)}{EI_y(x)}$ ja avaldistest (11.101) teame, et $dx = \rho d\Psi$. Nende avaldiste baasil saame elemendi dx paindenurga kohta kirjutada

$$d\Psi = \frac{M}{EI} dx \quad (11.152)$$

Selleks, et leida punktide c ja d tõmmatud puutujate vaheline nurk $\Delta\varphi_{cd}$ (mis võrdub nende punktide vahelise lõigu ulatuses tekkiva paindenurgaga), tuleb elementarpaindenurgad kogu punktide c ja d vahelise elastse joone osa ulatuses summeerida. Teeme seda integreerimise abil

$$\Delta\varphi_{cd} = - \int_c^d d\Psi = - \int_c^d \frac{M}{EI} dx \quad (11.153)$$

kus miinusmärk tuleb sellest, et vastavalt tugevusõpetusest pärinevale märgireeglile peab telje pööre olema varda paindenurgale vastupidise märgiga. Järelikult on positiivse paindemomendi korral lõigete c ja d vaheline paindenurk positiivne ning punkti c puutujast mõõdetud nurk punkti d puutujani negatiivne. Ülesannete lahendamisel on oluline, et kui nurk on siin kirjeldatule vastupidine (vastupäeva suuna asemel päripäeva), siis on ka märk vastupidine.

Integraalimärgi all oleva avaldise selgitamiseks koostame esmalt $\frac{M}{EI}$ epüüri, mille saame, kui paindemomendi epüüri ordinaadid jagame läbi varda paindejäikusega EI (joonis 11.87, c). Kui EI on kogu varda ulatuses konstantne, siis on $\frac{M}{EI}$ epüür sama kujuga nagu paindemomendi

epüür. Valemis (11.153) kujutab $\frac{M}{EI} dx$ endast $\frac{M}{EI}$ epüüri pindala elemendi dx pikkusel lõigul (joonisel 11.87, c kaldu viirutusega osa). Integreerides seda punktide c ja d vahel, saame $\frac{M}{EI}$ epüüri pindala kogu selle vahemiku ulatuses.

Selle baasil saame sõnastada esimese teoreemi.

Elastse joone kahest punktist tõmmatud puutujate vaheline nurk võrdub M/EI epüüri pindalaga nende samade punktide vahel.

Tulenevalt avaldises (11.153) olevate liikmete ühikutest, saame nurga $\Delta\varphi_{cd}$ radiaanides.

Teine teoreem

Teise teoreemi tuletamiseks vaatleme joonisel 11.87, d kujutatud skeemi, kus on elastse joone lõpmatult lühikese elemendi dx alguspunktist i ja lõpp-punktist k tõmmatud puutujad. Nende puutujate vaheline nurk $d\varphi$ on arvuliselt võrdne elemendi dx ulatuses tekkiva paindenurgaga $d\Psi$, aga on sellele vastupidise märgiga.

Punkti d vertikaalil on puutujate vaheline kaugus avaldatav valemiga

$$dt = x d\varphi = -x d\Psi \quad (11.154)$$

millest saame pärast paindenurga asendamist avaldisega (11.152)

$$dt = -x \frac{M}{EI} dx \quad (11.155)$$

Kauguse t_{dc} leidmiseks tuleb elemendiga dx seotud dt avaldist integreerida kogu punktide c ja d vahelise elastse joone osa ulatuses

$$t_{dc} = - \int_c^d dt = - \int_c^d x \frac{M}{EI} dx \quad (11.156)$$

kus $\frac{M}{EI} dx$ on $\frac{M}{EI}$ epüüri lõigu dx pindala ja x on selle kaugus punktist d .

Seetõttu võime valemis (11.156) esinevat integraali tõlgendada punktide c ja d vahele jääva $\frac{M}{EI}$ epüüri pinna staatilise momendina punkti d suhtes.

Siit jõuame teise teoreemini.

Elastse joone punktist d mõõdetud vertikaalne kaugus punktist c tõmmatud puutujani võrdub punktide c ja d vahele jääva M/EI epüüri pinna staatilise momendiga punkti d suhtes.

Lahenduse käigus saadud vastuse märk näitab, kuidas paikneb elastse joone punkt teisest punktist tõmmatud puutuja suhtes. Positiivse paindemomendi korral tuleb t_{dc} negatiivne, mis tähendab seda, et punkt d on punktist c tõmmatud puutujast üleval pool ehk z -telje negatiivses suunas.

Kuigi avaldise (11.156) integreerimise võib teha analüütiliselt, esitades paindemomendi M koordinaadi x funktsioonina, on seda lihtsam teha graafiliselt, kasutades M epüüri üksikute osade pindalade ja pinnakeskmete asukohtade määramisel lisas A toodud tabelit A.8.

11.10.2. Teoreemide kasutamine

Paindemomendi epüüri pindala abil siirete arvutamine võimaldab leida nurkasid ja kauguseid ainult elastse joone puutujate vahel. See arvutusmeetod ei anna otse kätte arvutusskeemi punktide siirdeid, vaid need tuleb siduda elastse joone puutujatega. Seetõttu tuleb valida, milliseid puutujaid kasutada, et nendevahelised nurgad ja kaugused viiks ülesande lahenduseni.

Kuidas seda meetodit rakendada ja milliste arvutusskeemide puhul see otstarbekas on, sõltub arvutusskeemi kujust, sidemetest ja koormusest. Järgnevalt vaatame mõningaid variante.

Konsool

Konsoolse arvutusskeemi puhul on teada elastse joone puutuja kaldenurk jäigal toel, kuna seal varras pöörduda ei saa: $\varphi_a = 0$ (joonis 11.88). Järelikult on punktis a puutuja horisontaalne. Soovides arvutada konsooli vaba otsa siiret ja pööret, valime teise puutuja punkti b .

Esimese teoreemi abil saame kätte konsooli vaba otsa pöördet, sest see teoreem võimaldab määrata kahe puutuja vahelise nurga. Kuna puutuja punktis a säilitab varda deformeerudes oma esialgse horisontaalse asendi, siis kahe puutuja vaheline nurk on ühtlasi punktis b tekkinud pöördet nurgaks

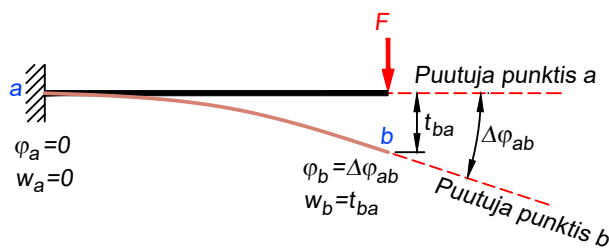
$$\varphi_b = \Delta\varphi_{ab} \quad (11.157)$$

kus $\Delta\varphi_{ab}$ võrdub M/EI epüüri pindalaga punktide a ja b vahel.

Teise teoreemi abil arvutame konsooli vaba otsa vertikaalsiirde. Kuna punktist a tõmmatud puutuja asukoht on teada, siis leiame punktist b mõõdetava vertikaalse kauguse mainitud puutujani

$$w_b = t_{ba} \quad (11.158)$$

kus t_{ba} võrdub M/EI epüüri pinna staatilise momendiga punkti b suhtes.

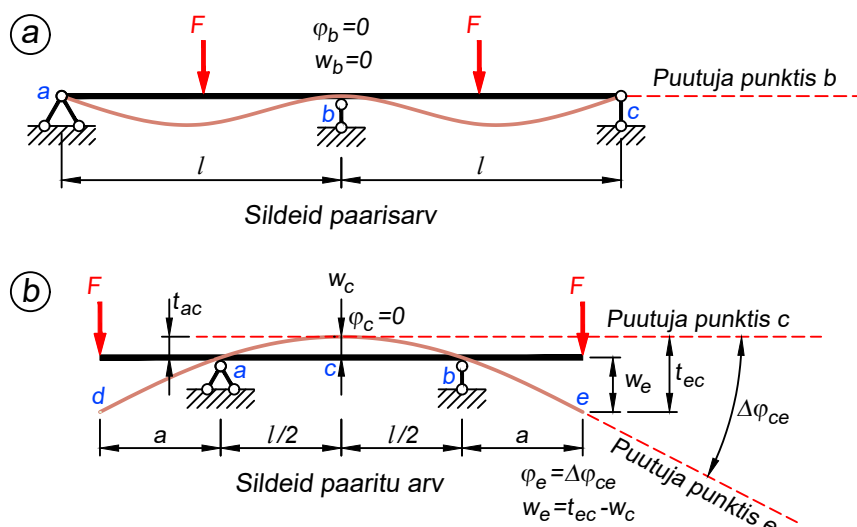


Joonis 11.88. Konsool

Sümmeetriline arvutusskeem sümmeetrilise koormusega

Joonisel 11.89 on kujutatud kaks tala, mis on oma keskpunkti suhtes sümmeetrilised ja ka koormatud sümmeetriliselt. See tingib, et ka elastne joon on tala keskpunkti suhtes sümmeetriline ja sümmeetriateljel on elastse joone kaldenurk võrdne nulliga.

Joonisel 11.89, a kujutatud tala on kahesildeline ja keskmine tugi paikneb sümmeetriateljel. Selle toe kohal on nii elastse joone pööre kui ka siire võrdsed nulliga: $\varphi_b = 0$ ja $w_b = 0$.



Joonis 11.89. Erinevate silte arvuga sümmeetrilised arvutuskeemid

Edasine lahenduskäik on sarnane eespool kirjeldatud konsoolile. Kuna sümmeetriateljel on elastse joone puutuja horisontaalne ja kattub esialgse kõverdumata tala pikiteljega, siis võtame selle puutuja arvutustes aluseks.

Esimesest teoreemist lähtudes saame öelda, et elastse joone kaldenurk ükskõik millises punktis võrdub M/EI epüüri pindalaga selle punkti ja sümmeetriatelje vahel. Teise teoreemi abil saame arvutada elastse joone suvalise punkti vertikaalsiirde.

Kui talal on paaritu arv sildeid, siis läheb vertikaalsiirete arvutus natuke keerukamaks, pöörete arvutamisel midagi uut ei lisandu. Jooniselt 11.89, b näeme, et sümmeetriateljel on elastse joone pöörde võrdne nulliga ($\varphi_c = 0$), aga mitte siire ($w_c \neq 0$). Arvutustes võtame aluseks punktist c tõmmatud puutuja.

Elastse joone pöörde suvalises punktis saame esimese teoreemi abil, arvutades punkti c ja meid huvitava punkti vahelise M/EI epüüri pindala. Kui soovime leida tala parempoolse konsooli vaba otsa e pööret, siis arvutame punktide c ja e tõmmatud puutujate vahelise nurga

$$\varphi_e = \Delta\varphi_{ce} \quad (11.159)$$

kus $\Delta\varphi_{ce}$ on võrdne M/EI epüüri pindalaga punktide c ja e vahel.

Elastse joone mingi punkti vertikaalsiirde arvutamise muudab raskemaks asjaolu, et punktist c tõmmatud puutuja ei kattu esialgse sirge tala pikiteljega, vaid on sellest ülevalpool siirde w_c võrra. Seetõttu ei ole sellest puutujast mõõdetud kaugus meid huvitava punkti tegelik siire. Enne teiste punktide siirete leidmist tuleb esmalt arvutada kauguse w_c väärtus, mille leidmisel lähtume sellest, et kaugus w_c on võrdne puutuja kaugusega elastsest joonest toe kohal: $w_c = t_{ac}$. Viimati nimetatut saame kätte teise teoreemi abil, kasutades M/EI epüüri pinda punktide a ja c vahel. Kui eesmärgiks on arvutada parempoolse konsooli vaba otsa vertikaalsiire, siis leiame esmalt kauguse t_{ec} teise teoreemi abil ning seejärel lahutame sealt maha siirde w_c

$$w_e = t_{ec} - w_c \quad (11.160)$$

Ebasümmeetriline arvutuskeem

Kui arvutuskeem on ebasümmeetriline või on sümmeetriline arvutuskeem koormatud ebasümmeetriliselt, siis ei ole algselt teada, kus täpselt paikneb elastse joone punkt, mille puutuja on horisontaalne.

Joonisel 11.90 on kujutatud silde keskkoha suhtes sümmeetriline tala, mille koormus asub silde parempoolisel osal. Sellise koormuse tõttu ei paikne tala suurima läbipainde koht (ehk koht, kus elastse joone puutuja on horisontaalne) enam silde keskel, vaid on sellest natuke paremale nihkunud. Kuna täpset asukohta ilma teiste arvutusmeetodite rakendamiseta leida ei saa, siis kasutame horisontaalse puutuja asemel kaldu olevat elastse joone puutujat ühel tugedest. Joonisel 11.90 on selleks valitud punktist a tõmmatud puutuja.

Teise teoreemi abil arvutame kauguse t_{ba} , milleks kasutame punktide a ja b vahel olevat M/EI epüüri pindala ja selle staatilist momenti punkti b suhtes.

Punktist a tõmmatud puutuja kaldenurga tangens avaldub

$$\tan \varphi_a = \frac{t_{ba}}{l} \quad (11.161)$$

Kuna väikeste nurkade puhul võetakse nurga tangens võrdseks selle nurga endaga, siis saame

$$\varphi_a = \frac{t_{ba}}{l} \quad (11.162)$$

Tala löike c kohal on elastse joone kaldenurk

$$\varphi_c = \varphi_a + \Delta\varphi_{ac} \quad (11.163)$$

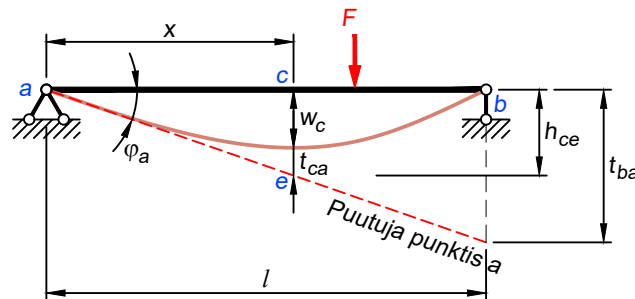
kus $\Delta\varphi_{ac}$ on punktide a ja c puutujate vaheline kaldenurk, mis võrdub M/EI epüüri pindalaga punktide a ja c vahel.

Punkti c vertikaalsiirde w_c arvutamiseks leiame esmalt kauguse h_{ce} , mis väikese nurga tõttu võrdub

$$h_{ce} = \varphi_a x \quad (11.164)$$

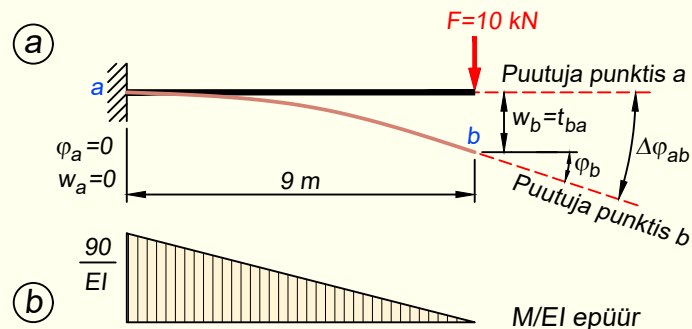
Teise teoreemi abil saame kauguse t_{ca} , mis võimaldab leida punkti c siirde

$$w_c = h_{ce} - t_{ca} \quad (11.165)$$



Joonis 11.90. Ebasümmeetriliselt koormatud tala

NÄIDE 11.28. Arvutada joonisel 11.91, *a* kujutatud konsooli vaba otsa pööre ja läbipaine. $E = 210 \text{ GPa}$ ja $I = 30000 \text{ cm}^4$.



Joonis 11.91. Konsooli arvutusskeem elastse joonega ja M/EI epüür

LAHENDUS

1. Arvutame paindemomendi konsooli jäigal toel ja koostame M/EI epüüri (joonis 11.91, *b*). Konsool deformeerub koormuse mõjul allapoole, nagu on kujutatud joonisel 11.91, *a*. Siirete arvutamisel võtame aluseks elastse joone punktist *a* tõmmatud puutuja, kuna see on horisontaalne. Teise puutuja paigutame punkti *b*.

2. Pöörde φ_b saame leida esimese teoreemi abil. Jooniselt näeme, et ülesandes küsitud konsooli vaba otsa pööre φ_b võrdub punkti *a* puutujast mõõdetud nurgaga $\Delta\varphi_{ab}$ punkti *b* puutujani: $\varphi_b = \Delta\varphi_{ab}$. Nurga $\Delta\varphi_{ab}$ leiame, kasutades punktide *a* ja *b* vahele jäävat M/EI epüüri pindala.

Konsooli otsa pöördeks saame

$$\varphi_b = \Delta\varphi_{ab} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-90 \cdot 9}{EI} = \frac{405}{EI} = \frac{405 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{63000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2} = 0,0064 \text{ rad}$$

kus ristlõike paindejäikus on

$$EI = 210 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 30000 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 = 63000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Saadud nurk tuli positiivne, kuna *x*-koordinaadi kasvades vertikaalsiire suureneb.

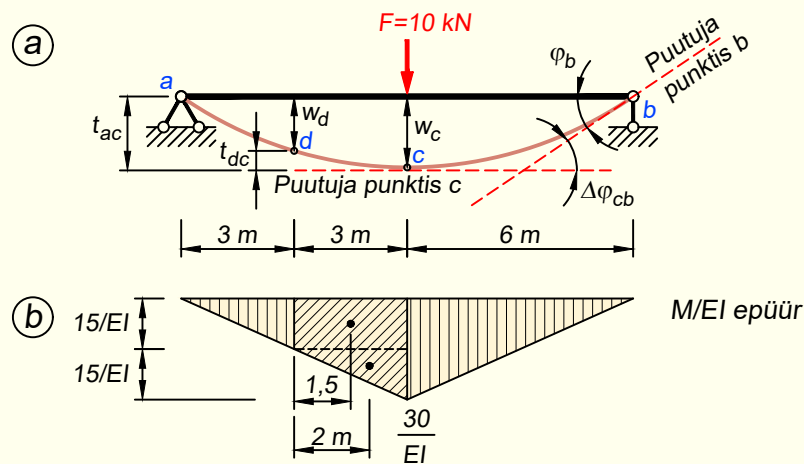
3. Siirde w_b saame leida teise teoreemi abil. Otsitav siire võrdub elastse joone punktist *b* mõõdetud vertikaalse kaugusega punkti *a* puutujani: $w_b = t_{ba}$. Kauguse t_{ba} saame leida M/EI epüüri pinna staatilise momendina punkti *b* suhtes.

Konsooli otsa siirdeks saame

$$w_b = t_{ba} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-90 \cdot 9}{EI} \cdot 6 = \frac{2430}{EI} = \frac{2430 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{63000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2} = 0,039 \text{ m}$$

Saadud siire tuli positiivne, mis tähendab, et elastse joone punkt *b* on punktist *a* tõmmatud puutujast allpool ehk *z*-telje positiivses suunas.

NÄIDE 11.29. Arvutada joonisel 11.92, *a* kujutatud tala lõike *b* pööre ja lõike *d* siire.



Joonis 11.92. Tala arvutusskeem elastse joonega ja M/EI epüür

LAHENDUS

Arvutuses kasutatakse M/EI epüür on esitatud joonisel 11.92, *b*.

1. Pöörde φ_b leiame esimese teoreemi abil. Pööre φ_b võrdub elastse joone punktide *c* ja *b* puutujate vahelise nurgaga: $\varphi_b = \Delta\varphi_{cb}$. Esimest teoreemi rakendades kasutame punktide *c* ja *b* vahele jäävat M/EI epüüri pindala.

Tala parempoolse otsa *b* pöördeks saame

$$\varphi_b = \Delta\varphi_{cb} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{30 \cdot 6}{EI} = -\frac{90}{EI}$$

2. Siirde w_d leidmisel arvestame sellega, et $w_d = w_c - t_{dc}$, mistõttu arvutame esmalt siirde w_c silde keskel. Järgnevates arvutustes leiame kõik siirded absoluutväärtustena ja nende vastastikuse paiknemise määramisel lähtume joonisest 11.92, *b*.

Siirdeks w_c kujuneb

$$w_c = t_{ac} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30 \cdot 6}{EI} \cdot 4 = \frac{360}{EI}$$

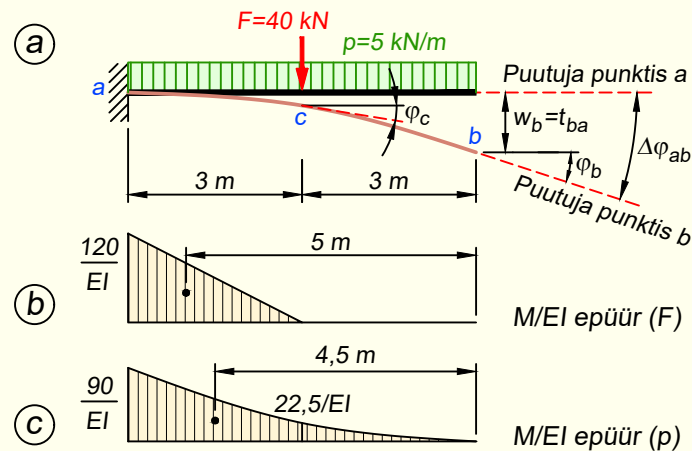
Kauguse t_{dc} saame teise teoreemi abil. Leiame punktide *d* ja *c* vahele jääva M/EI epüüri pinna (joonisel kaldu viirutusega) staatilise momendi punkti *d* suhtes. Arvutamise mugavuse huvides jagame kasutatava epüüri pinna ristkülikuks ja kolmnurgaks

$$t_{dc} = \frac{15}{EI} \cdot 3 \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{15 \cdot 3}{EI} \cdot 2 = \frac{112,5}{EI}$$

Siirdeks w_d saame

$$w_d = w_c - t_{dc} = \frac{360}{EI} - \frac{112,5}{EI} = \frac{247,5}{EI}$$

NÄIDE 11.30. Arvutada joonisel 11.93, *a* kujutatud konsooli lõigete *b* ja *c* pöörded ning lõike *b* siire.



Joonis 11.93. Konsooli arvutusskeem elastse joonega ja M/EI epüürid eraldi kummastki koormusest

LAHENDUS

Ülesande lahendamise lihtsuse huvides esitame M/EI epüürid kummastki koormusest eraldi (joonis 11.93, *b* ja *c*). Sel juhul on need epüürid lihtsa kujuga, mille pindalad ja pinnakeskmete asukohad saame tabelist A.8.

1. Pöörde φ_b leiame esimese teoreemi abil, arvutades punktide *a* ja *b* puutujate vahelise nurga $\Delta\varphi_{ab}$. Selleks määrame mõlema M/EI epüüri pindalad ja summeerime

$$\varphi_b = \Delta\varphi_{ab} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-120 \cdot 3}{EI} - \frac{-90 \cdot 6}{3EI} = \frac{360}{EI}$$

2. Pöörde φ_c leiame samuti esimese teoreemi abil, arvutades punktide *a* ja *c* puutujate vahelise nurga $\Delta\varphi_{ac}$. Kasutame selleks M/EI epüüride pindalaid punktide *a* ja *c* vahel

$$\varphi_c = \Delta\varphi_{ac} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-120 \cdot 3}{EI} - \left(\frac{-90 \cdot 6}{3EI} + \frac{22,5 \cdot 3}{3EI} \right) = \frac{337,5}{EI}$$

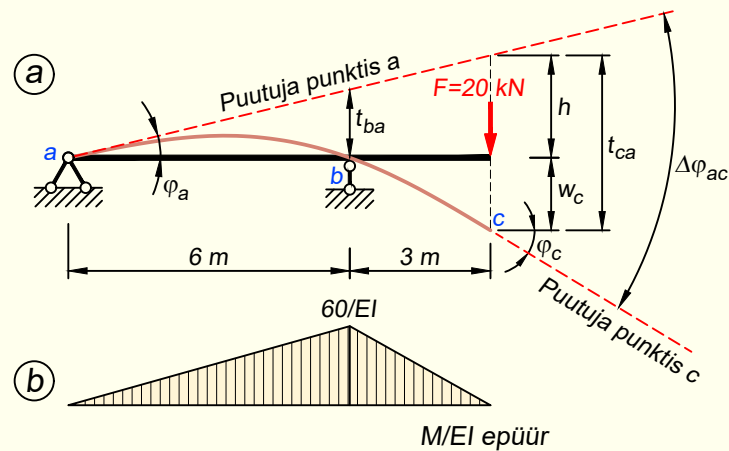
Teise variandina võime selle pöörde arvutada, lähtudes pöördest φ_b , millest lahutame maha pöörete φ_b ja φ_c erinevuse $\Delta\varphi_{cb}$

$$\varphi_c = \varphi_b - \Delta\varphi_{cb} = \frac{360}{EI} - \frac{22,5 \cdot 3}{3EI} = \frac{337,5}{EI}$$

3. Siirde w_b leiame teise teoreemi abil kaugusena t_{ba} , mis võrdub mõlema M/EI epüüri pinna staatiliste momentide summamana punkti *b* suhtes

$$w_b = t_{ba} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-120 \cdot 3}{EI} \cdot 5 - \frac{-90 \cdot 6}{3EI} \cdot 4,5 = \frac{1710}{EI}$$

NÄIDE 11.31. Arvutada joonisel 11.94, *a* kujutatud tala lõigete *a* ja *c* pöörded ning lõike *c* siire.



Joonis 11.94. Tala arvutusskeem elastse joonega ja M/EI epüür

LAHENDUS

1. Pöörde φ_a leidmisel lähtume väikeste nurkade korral kehtivast seosest $\varphi_a \approx \tan \varphi_a$, millest saame $\varphi_a = \frac{t_{ba}}{6}$, kus kauguse t_{ba} leiame teise teoreemi abil. Kasutame M/EI epüüri (joonis 11.94, *b*) ning arvutame punktide *a* ja *b* vahelise epüüri pinna staatilise momendi punkti *b* suhtes

$$t_{ba} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-60 \cdot 6}{EI} \cdot 2 = \frac{360}{EI}$$

Tala vasaku otsa pöördeks saame

$$\varphi_a = -\frac{t_{ba}}{6} = -\frac{360}{6EI} = -\frac{60}{EI}$$

kus miinusmärk lisandub, kuna *x*-koordinaadi kasvades muutub siire *z*-telje negatiivses suunas, mis tähendab negatiivset nurka.

2. Pöörde φ_c arvutamisel võtame aluseks eelnevalt leitud nurga φ_a , millele lisame juurde punktide *a* ja *c* puutujate vahelise nurga: $\varphi_c = \varphi_a + \Delta\varphi_{ac}$. Nurga $\Delta\varphi_{ac}$ leiame esimese teoreemi abil, kasutades M/EI epüüri pindala punktide *a* ja *c* vahel

$$\Delta\varphi_{ac} = \frac{1}{2} \cdot \frac{60 \cdot 9}{EI} = \frac{270}{EI}$$

Konsooli otsa pöördeks kujuneb

$$\varphi_c = \varphi_a + \Delta\varphi_{ac} = -\frac{60}{EI} + \frac{270}{EI} = \frac{210}{EI}$$

3. Siirde w_c saame leida avaldisest $w_c = t_{ca} - h$, kus kauguse t_{ca} arvutame punktide a ja c vahelise M/EI epüüri pinna staatilise momendina punkti c suhtes. Järgnevat arvutustes leiame kõik kaugused absoluutväärtustena ja nende vastastikuse paiknemise määrame jooniselt 11.94, b .

Kauguseks t_{ca} kujuneb

$$t_{ca} = \frac{1}{2} \cdot \frac{60 \cdot 9}{EI} \cdot \frac{9+3}{3} = \frac{1080}{EI}$$

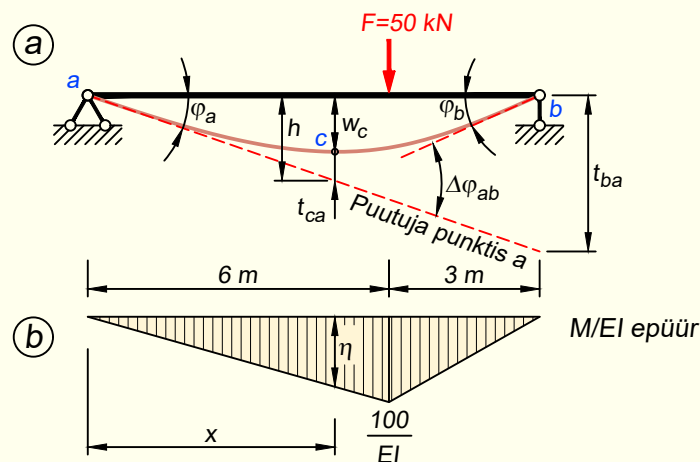
ning kauguse h leiame nurga φ_a ja tala pikkuse kaudu

$$h = 9\varphi_a = 9 \cdot \frac{60}{EI} = \frac{540}{EI}$$

Konsooli otsa vertikaalsiirdeks saame

$$w_c = t_{ca} - h = \frac{1080}{EI} - \frac{540}{EI} = \frac{540}{EI}$$

NÄIDE 11.32. Arvutada joonisel 11.95, a kujutatud tala löigete a ja c pöörded ning leida maksimaalse läbipainde asukoht ja väärtus.



Joonis 11.95. Tala arvutuskeem elastse joonega ja M/EI epüür

LAHENDUS

1. Pöörde φ_a leidmisel lähtume väikeste nurkade korral kehtivast seosest $\varphi_a \approx \tan \varphi_a$, millest saame $\varphi_a = \frac{t_{ba}}{9}$.

Kauguse t_{ba} leiame teise teoreemi abil. Kasutame M/EI epüüri (joonis 11.95, b) ning arvutame punktide a ja b vahelise epüüri pinna staatilise momendi punkti b suhtes

$$t_{ba} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{100 \cdot 9}{EI} \cdot \frac{9+3}{3} = -\frac{1800}{EI}$$

kus miinusmärk näitab, et elastse joone punkt b on punkti a puutujast ülevalpool.

Tala vasaku otsa pöördeks saame

$$\varphi_a = \frac{t_{ba}}{9} = \frac{1800}{9EI} = \frac{200}{EI}$$

kus teeme arvutuse plussmärgiga, kuna x -koordinaadi kasvades siire suureneb ja järelikult on tegemist positiivse nurgaga. Siinkohal tasub mainida, et eelnevalt leitud t_{ba} märk on seelses arvutuses kohaliku tähtsusega ega ole seotud nurga φ_a suunaga, mille märgi määrame ikkagi üldise märgireegli järgi.

2. Pöörde φ_b arvutamisel võtame aluseks eelnevalt leitud nurga φ_a , millele lisame juurde punktide a ja b puutujate vahelise nurga: $\varphi_b = \varphi_a + \Delta\varphi_{ab}$. Nurga $\Delta\varphi_{ab}$ leiame esimese teoreemi abil, kasutades M/EI epüüri pindala punktide a ja b vahel

$$\Delta\varphi_{ab} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{100 \cdot 9}{EI} = -\frac{450}{EI}$$

Tala parempoolse otsa pöördeks saame

$$\varphi_b = \varphi_a + \Delta\varphi_{ab} = \frac{200}{EI} - \frac{450}{EI} = -\frac{250}{EI}$$

3. Maksimaalse läbipainde koha tähistame löikega c , mis paikneb tala vasakust otsast kaugusel x (joonis 11.95). Kohas, kus tekib maksimaalne läbipaine, on elastse joone puutuja horisontaalne: $\varphi_c = 0$. Seetõttu kirjutame avaldise φ_c arvutamiseks ja võrdsustame selle nulliga. Lähtume eelnevalt arvatud nurgast φ_a ja liidame sellele juurde punktide a ja c puutujate vahelise nurga

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \varphi_a + \Delta\varphi_{ac} \\ 0 &= \frac{200}{EI} - \frac{1}{2} \cdot x\eta\end{aligned}$$

kus M/EI epüüri ordinaadi η saame avaldada sarnaste kolmnurkade abil

$$\eta = \frac{100}{6EI} \cdot x$$

Asetades selle φ_c avaldise, saame kätte x ning sellest omakorda ka η väärtuse

$$x = 4,899 \text{ m}; \quad \eta = \frac{81,65}{EI}$$

Siirde w_c saame avaldisest

$$w_c = h - t_{ca}$$

kus kauguse h leiame nurga φ_a kaudu ($h = \varphi_a x$) ja kauguse t_{ca} teise teoreemi abil

$$w_{\max} = w_c = h - t_{ca} = \frac{200}{EI} \cdot 4,899 - \frac{1}{2} \cdot 4,899 \cdot \frac{81,65}{EI} \cdot \frac{4,899}{3} = \frac{653,2}{EI}$$

Osa II

STAATIKAGA MÄÄRAMATUD ARVUTUSSKEEMID

Peatükk 12

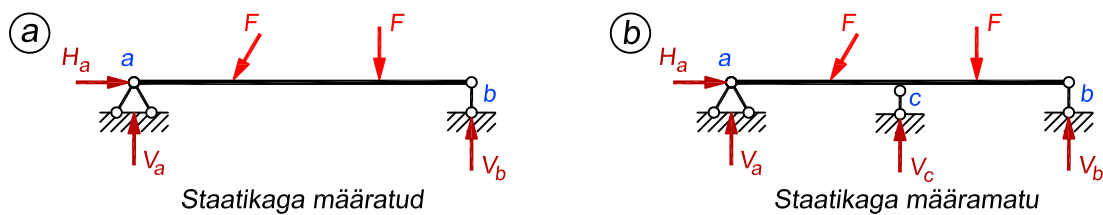
STAATIKAGA MÄÄRAMATUTE ARVUTUSSKEEMIDE ARVUTAMINE

12.1. Staatikaga määramatu arvutusskeem

Raamatu esimeses osas vaatlesime selliseid ehituskonstruksioone, mille toereaktsioonid ja sisejõud on leitavad staatika tasakaalutingimuste abil. Selliseid konstruksioone nimetatakse staatikaga määratud konstruksioonideks. Paljude konstruksioonitüüpide puhul on aga tundmatuid rohkem kui nende leidmiseks kasutatavaid tasakaalutingimusi. Selliseid konstruksioone nimetatakse *staatikaga määramatuteks* ja nende arvutamisele on pühendatud käesoleva raamatu teine osa.



Foto 12.1. Pühajärve veekeskuse ühekordselt staatikaga määramatu liimpuidust raamkonstruktsioon. Arvutuses loetakse ülemised nurgasõlmed jäikadeks ning alumised liigendsõlmedeks (foto: Arcwood)



Joonis 12.1. Staatikaga määratud ja määramatu arvutuskeemi võrdlus

Eelnevast on meile teada, et tasakaalus oleva tasandkonstruktsiooni iga elemendi kohta saame kirjutada kolm üksteisest sõltumatut tasakaaluvõrrandit.

Võrdleme joonisel 12.1 kujutatud talasid. Skeemil *a* kujutatud talal on kolm toesidet, mis tagavad selle geomeetrilise muutumatuse. Kuna tekkiva kolme toereaktsiooni arvutamiseks on kasutada kolm staatika tasakaalutingimust, siis on tundmatute ja tasakaalutingimuste arv võrdne ja arvutuskeem staatikaga määratud. Skeemil *b* on lisatud tala keskele veel üks tugi, mistõttu tekkivaid tundmatuid toereaktsioone on nüüd neli, mille arvutamiseks jääb kolmest tasakaaluvõrrandist väheks. See arvutuskeem on järelikult staatikaga määramatu.

Konstruktsiooni arvutuskeem on staatikaga määramatu, kui kõik sisejõud ja toereaktsioonid ei ole arvutatavad ainult tasakaaluvõrranditest.

Staatikaga määramatu ülesande lahendamise nõuab lisaks staatika tasakaaluvõrranditele veel ka täiendavate jõududevaheliste seoste arvestamist. Selleks me koostame võrrandid konstruktsiooni deformeerunud olukorra pidevustingimuste alusel. *Pidevustingimused* (nimetatakse ka *siirete sobivusvõrranditeks* või *deformatsioonide sobivusvõrranditeks*) väljendavad seda, et konstruktsiooni erinevate osade deformatsioonid peavad üksteisega kooskõlas olema, kuna konstruktsiooni terviklikkus tingib selle üksikute osade siirete omavahelise sõltuvuse. Lisaks peab konstruktsiooni deformeerunud kuju vastama toetingimuste määratud geometriale. Kuna siirded on seotud sisejõududega, siis võimaldavad kirjeldatud lisaseosed meil kirjutada välja rohkem võrrandeid, nii et võrrandite arv võrdsustub tundmatute arvuga.

Kokkuvõttes: staatikaga määramatu konstruktsiooni puhul on sisejõude ja toereaktsioone võimalik arvutada ainult koos siiretega, s.t pidevustingimuste abil.

Kuigi staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutamine on staatikaga määratud konstruktsioonide omast oluliselt tülikam, kasutatakse neid ehituses väga laialdaselt ja võib öelda, et need on isegi enamlevinud.

Üheks oluliseks põhjuseks on siin see, et staatikaga määramatutes konstruktsioonides on pinged ja deformatsioonid üldjuhul oluliselt väiksemad kui sarnase kujuga staatikaga määratud konstruktsioonides. See on tingitud liigsidemetega skeemi jäikadest sõlmedest, mis takistavad deformatsioone ja võimaldavad sisejõudude ümberjaotumist erinevate varraste vahel.

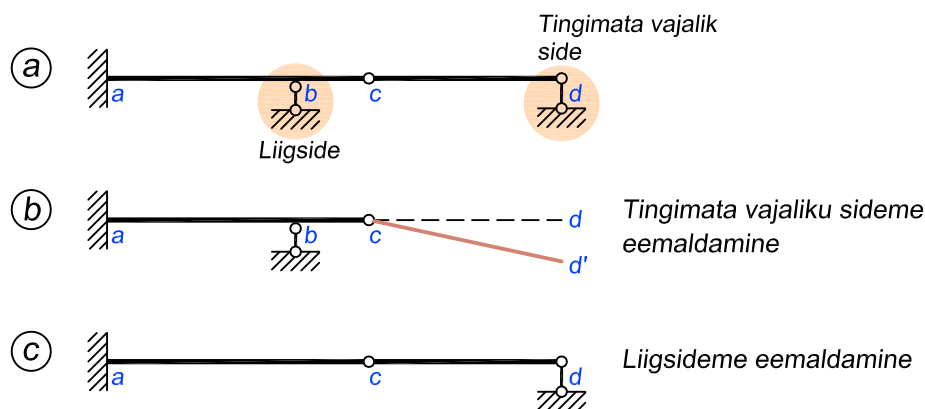
Sisejõudude ümberjaotamise omadus muudab staatikaga määramatud konstruktsioonid ka ohutumaks ülekoormuse korral, kuna võimaldab osa sisejõudusid üle kanda vähem koormatud aladele.

12.2. Staatikaga määramatute konstruktsioonide omadused

1. Staatikaga määramatul konstruktsioonil on *liigside*meid. Liigside on niisugune element, mille eemaldamisel ülejäänud konstruktsiooniosa on ikka geomeetriselt muutumatu.

Tingimata vajalikes sidemetes on sisejõud leitavad tasakaalutingimustega. Tingimata vajaliku sideme eemaldamisel muutub osa konstruktsioonist geomeetriselt muutuvas.

Näiteks toesideme *d* eemaldamine muudab joonisel 12.2, a kujutatud tala osa *c-d* geomeetriselt muutuvas (joonis 12.2, b). Toe *b* eemaldamisel on aga allesjäänud konstruktsiooniosa geomeetriselt muutumatu (joonis 12.2, c). Tugi *d* on tingimata vajalik side ja tugi *b* on liigside.



Joonis 12.2. Staatikaga määramatu konstruktsiooni tingimata vajalikud ja liigside

2. Staatikaga määramatul konstruktsioonil on lõpmata palju lahendeid, mis rahuldavad tasakaalutingimusi, kuid ainult üks neist rahuldab ka deformatsioonide pidevuse tingimusi.
3. Temperatuuri muutus, tugede siirded ja konstruktsiooni elementide mõõtmete mittevastavus projektile võib põhjustada staatikaga määramatus konstruktsioonis sisejõudusid. Staatikaga määratavas arvutusskeemis ja tingimata vajalikes sidemetes need mõjud sisejõudusid ei põhjusta.
4. Staatikaga määramatus konstruktsioonis võivad esineda pinged ka ilma koormuseta. Neid pingeid nimetatakse eelpingeteks.
5. Staatikaga määramatu konstruktsiooni sisejõud olenevad varraste jäikusest.

Kui temperatuur on konstantne ja toed ei siirdu, siis olenevad sisejõud ainult varraste jäikuste suhetest, mistõttu pole vaja teada jäikuste absoluutsuuruseid. Kui kogu konstruktsioon on samast materjalist ja mõjub ainult koormus, siis elastsustegurid ei mõjuta

sisejõudude jaotust. Erinevatest materjalidest koosneva konstruktsiooni puhul tuleb ka elastsustegureid arvestada.

6. Tasakaalus koormus põhjustab sisejõudusid ka väljaspool koormuse rakendamise ulatust.

12.3. Arvutamise meetodid

Staatikaga määratu konstruktsiooni arvutamisel esineb kaht liiki tundmatuid. Varrastes tekkivad sisejõud (M , Q , N) ja toereaktsioonid (R) on *staatikalised tundmatud* ning sõlmede siirded (u , w , φ) on *kinemaatilised tundmatud* (vanemas kirjanduses nimetatud ka *geomeetrilisteks tundmatuteks*). Kõiki tundmatuid me ei arvuta üheaegselt. Esialgu leitavaid tundmatuid, mille arvutamiseks on vaja võrrandite süsteem koostada ja lahendada, nimetatakse *lisatundmatuteks*. Ülejäänud teised tundmatud arvutame järgnevalt koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena. Olenevalt sellest, missugused tundmatud võtame lisatundmatuteks, on kolm põhilist arvutusmeetodit: jõumeetod, deformatsioonimeetod ja segameetod.

Jõumeetodi puhul võtame lisatundmatuteks sisejõud ja reaktsioonid, s.t staatikalised tundmatud. Lisatundmatute arvutamiseks koostame võrrandisüsteemi kinemaatiliste pidevustingimuste alusel. Nendest kinemaatiliste pidevustingimuste alusel koostatud võrranditest arvutatavad lisatundmatud on staatikaga määratud, kuna neid ei ole võimalik leida ainult tasakaaluvõrranditest. Ülejäänud sisejõud ja reaktsioonid arvutame koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena tasakaalutingimustest.

Deformatsioonimeetodi (ehk teise nimetusega *siirdemeetodi*) puhul valime lisatundmatuteks raami sõlmede siirded. Kinemaatiliste tundmatute (sõlmede siirete) arvutamiseks koostame võrrandisüsteemi sõlmede tasakaalutingimuste alusel. Sisejõud ja reaktsioonid leiame järgnevalt koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena.

Segameetodi puhul valime lisatundmatuteks osalt siirded ja osalt sisejõud. Lisatundmatutele sisejõududele vastavalt koostame võrrandid kinemaatiliste pidevustingimuste alusel ja lisatundmatutele siiretele vastavalt sõlmede tasakaalutingimuste põhjal.

Lõplike elementide meetod (LEM) on kõige kaasaegsem arvutusmeetod, mis sarnaneb deformatsioonimeetodile, kuid on sellega võrreldes viidud oluliselt universaalsemale kujule. Lisaks on LEMile iseloomulik, et selle meetodiga saab arvutada nii staatikaga määratud kui määratud arvutuskeeme. Tundmatuteks on LEMis kinemaatilised tundmatud ehk sõlmede siirded.

Lisaks mainitutele on veel palju arvutusmeetodeid staatikaga määratud konstruktsioonide arvutamiseks, aga siin tõime välja kõige üldisemad ja olulisemad meetodid, mis ühtlasi kirjeldavad ka tundmatute leidmist kõige ilmekamalt.

Peatükk 13

JÕUMEETOD

13.1. Sissejuhatus

Jõumeetod on kujunenud aegade jooksul üheks kõige klassikalisemaks staatikaga määramatute konstruktsioonide lahendamise meetodiks. Jõumeetod annab hea ülevaate staatikaga määramatute konstruktsioonide käitumisest, mistõttu tasub selliste konstruktsioonide tundmaõppimist alustada just mainitud meetodi abil.

Jõumeetodis on tundmatuteks sisejõud ja reaktsioonid, mida nimetatakse *staatikalisteks tundmatuteks*. Tundmatute iseloom ehk see, et tegemist on jõududega, määrab ka arvutusmeetodi nimetuse. Siin tasub küll mainida, et ingliskeelses kirjanduses kasutatakse selle meetodi puhul mitmeid erinevaid nimetusi.

Mainitud sisejõudusid ja reaktsioone ei saa arvutada otse staatika tasakaalutingimustest, kuna staatikaga määramatu skeemi puhul on tundmatuid rohkem kui nende leidmiseks kasutada olevaid üksteisest sõltumatuid tasakaaluvõrrandeid. Seetõttu tuleb tundmatute arvutamiseks koostada võrrandisüsteem arvutusskeemi deformeerunud olukorra pidevustingimuste alusel. Need pidevustingimused väljendavad seda olulist tõde, et konstruktsiooni erinevate osade siirded ja deformatsioonid peavad omavahel kooskõlas olema. Näiteks raami jäigas sõlmes ühendatud varraste otsad peavad kõik pöörduma võrdse nurga võrra. Samuti peavad arvutusskeemi deformeerumisel kõik vardad säilitama terviklikkuse ehk vardad võivad painduda, aga mitte murduda. Pidevustingimuste kasutamine tähendab seda, et nüüd tuleb meil sisejõudude leidmiseks appi võtta siirete arvutamine.

Kuid me ei saa võrrandisüsteemist kätte kõiki vajalikke sisejõudusid ja reaktsioone, vaid ainult osa. Neid tundmatuid, mille me esmalt leiame, nimetatakse *lisatundmatuteks* ja nende arv võrdub selle arvutusskeemi staatikaga määramatuse astmega. Pärast võrrandisüsteemi lahendamist ja lisatundmatute leidmist saame nende abil arvutada ka kõiki ülejäänud sisejõude ja reaktsioone.

Jõumeetodiga saab arvutada nii talasid, raame, kaari kui sõrestikke, aga mugavam on arvutust teha madalama staatikaga määramatuse astmega arvutusskeemide puhul, kuna määramatuse astme suurenedes töömaht kasvab eksponentsiaalselt. Seetõttu on jõumeetod mõistlik ühe-, kahe- või ka kolmekordse määramatuse astme juures.

Jõumeetod oli üks esimesi meetodeid staatikaga määramatute konstruktsioonide lahendamiseks. Esimesena esitas jõumeetodi 1864. aastal James Clerk Maxwell, kuid tema esitusviis oli liialt keerukas, mistõttu esialgu jäi see tähelepanuta. Tema lahenduskäik sisaldas ka siirete vastastikkuse teoreemi sõnastamist, millest oli meil juttu peatükis 11.5.2. Kümme aastat hiljem jõudis Maxwellist sõltumatult sarnasele tulemusele ka Christian Otto Mohr, kuid tema esitus oli juba väga lähedane selle tänapäevasele kujule. Hiljem täiustas jõumeetodit ka Heinrich Müller-Breslau ja avaldas selle 1886. aastal.

13.2. Jõumeetodi idee

Vaatleme jõumeetodi idee selgitamiseks lihtsat ühekordselt staatikaga määramata tala (joonis 13.1, a). See tala on ühekordselt määramata, kuna tal on neli toesidet – kolm vasakus ja üks parempoolses otsas. Eemaldame arvutusskeemist ühe liigsideme ja muudame ta niimoodi staatikaga määratavaks. Sel teel saadud uut staatikaga määratavat skeemi nimetatakse *põhiskeemiks*. Liigsideid saab kõrvaldada mitmest erinevast kohast, aga valime praegu selleks parempoolse toe b sideme. Eemaldatud sideme mõju asendame reaktsiooniga X_b , mis on esialgu tundmatu (joonis 13.1, b).

Kuna jõudude mõju sõltumatuse printsiibi alusel saame vaadata üksikute jõudude mõju arvutusskeemile eraldi, siis vaatleme siin varda deformeerumist tundmatu reaktsiooni X_b ning koormuse p mõjul. Reaktsioon X_b põhjustab varda otsa siirdumise ülespoole Δ_{bb} võrra (joonis 13.1, c), koormus p painutab varda otsa alla Δ_{bp} võrra (joonis 13.1, d). Siirete tähistamiseks järel olevates kahetähelistes indeksites tähistab esimene täht siirde toimumise kohta ja teine täht siirde põhjustajat. Δ_{bp} on järelikult tundmatu X_b suunaline siire, mis on põhjustatud koormusest.

Tegelikus arvutusskeemis ei saa varda ots b koormuse ja reaktsiooni koosmõju tulemusena vertikaalsuunas siirduda ning sama nõude esitame samuti põhiskeemile. Seetõttu peab eemaldatud sidet asendav reaktsioon X_b olema sellise suurusega, et see siire võrduks nulliga ka põhiskeemis. Nüüd saame koostada mõlema ülalkirjeldatud siirde abil toe b kohta pidevustingimuse, mille võrdsustame nulliga

$$\Delta_{bb} + \Delta_{bp} = 0 \quad (13.1)$$

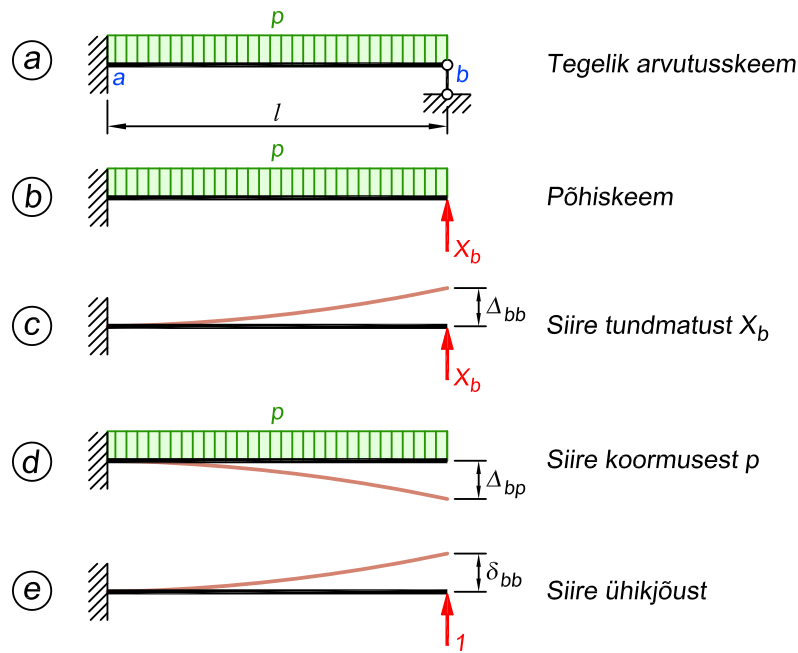
Tundmatute reaktsioonide poolt põhjustatavaid siirdeid on kasulik avaldada teisiti. Selleks rakendame punkti b tundmatu X_b suunalise ühikjõu (joonis 13.1, e), mille poolt põhjustatava siirde tähistame δ_{bb} . Indeksid on ühikjõudude puhul sama sisuga nagu reaktsioonide puhulgi: δ_{bb} tähistab tundmatu X_b sihis toimuvat siiret, mis on põhjustatud ühikjõust $X_b = 1$. Tegelik reaktsioon põhjustab X_b korda suurema siirde kui ühikjõud ja seetõttu saame kirjutada, et

$$\Delta_{bb} = \delta_{bb} X_b \quad (13.2)$$

ning võrrand omandab kuju

$$\delta_{bb} X_b + \Delta_{bp} = 0 \quad (13.3)$$

Tundmatu X_b arvutamiseks tuleb nüüd leida siirete δ_{bb} ja Δ_{bp} avaldised, mida saab teha näiteks peatükis 11 kirjeldatud Mohr-Maxwelli valemit kasutades, mis eeldab põhiskeemile



Joonis 13.1. Jõumeetodi idee

mitmete paindemomendi epüüride koostamist: koormusest ja ühikjõust. Lihtsamate arvutus-skeemide korral, nagu ka siin vaadeldav skeem, saab sageli vajalikud valemid käesoleva raamatu lisast A.6. Konsoolile rakendatud ühikjõust ja lauskoormusest tekkivad siirded saame arvutada valemitega

$$\delta_{bb} = -\frac{l^3}{3EI}; \quad \Delta_{bp} = \frac{pl^4}{8EI} \quad (13.4)$$

Võrrand lõplikul kujul on

$$-\frac{l^3}{3EI}X_b + \frac{pl^4}{8EI} = 0 \quad (13.5)$$

millest tundmatu väärtuseks saame

$$X_b = \frac{3}{8}pl \quad (13.6)$$

Edasi on juba lihtne leida ülejäänud toereaktsioonid tavaliste staatika tasakaalutingimustega ning seejärel ka sisejõudude epüürid.

13.3. Staatikaga määramatuse aste

Staatikaga määramatuse astet saab arvutada mitmete valemitega ja eri liiki konstruktsioonide puhul tasub mõelda, milline neist konkreetsel juhul kõige mõistlikum on.

Näiteks liigendita suletud kontuuridest koosneva raami (joonis 13.2) staatikaga määramatuse astme leiame valemiga

$$n = 3m \quad (13.7)$$

kus m on suletud kontuuride arv. Iga liigendita suletud kontuur on kolmekordselt staatikaga määratu. Järelkult saab liigendita suletud kontuurist eemaldada kolm sidet niimoodi, et allesjäänud osa on geomeetriselt muutumatu.

Kui konstruktsioonis on nii liigendita kui ka liigenditega suletud kontuure, siis leiame staatikaga määratuse astme valemiga

$$n = 3m - l_1 \quad (13.8)$$

kus m on suletud kontuuride arv ja l_1 on lihtliigendite arv, kusjuures toeliigendis vaatame toepinda ühe kujundina ja seetõttu lähevad arvesse ka toeliigendid (võrdle valemiga 13.9).

Kui konstruktsioonis liigendita suletud kontuure ei esine, siis võime leida staatikaga määratuse astme valemiga

$$n = 2l + t - 3k \quad (13.9)$$

kus l on lihtliigendite arv, kusjuures siin me ei arvesta toeliigendeid, t on toesidemete arv ja k geomeetriselt muutumatute elementide arv. Selle valemi sisu on põhjalikult kirjeldatud peatükis 2.1.

Kui konstruktsioonides esineb ainult varrastest moodustatud liigendita suletud kontuure, siis saame kasutada valemit

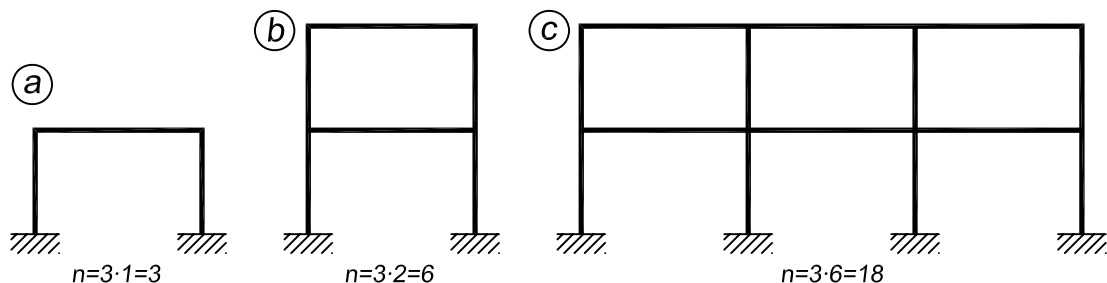
$$n = 3m_1 + 2l + t - 3k \quad (13.10)$$

kus m_1 on ainult varrastest (mitte varrastest ja toepindadest) moodustatud liigendita suletud kontuuride arv. Liigendites esinevad sisejõud ja toereaktsioonide komponendid $2l + t$ koos liigendita suletud kontuuride lisatundmatutega $3m_1$ moodustavad tundmatute üldarvu $3m_1 + 2l + t$. Üldine tasakaalutingimuste arv on $3k$. Tundmatute üldarvu ja tasakaalutingimuste vahe on staatikaga määratuse aste (13.10).

Sõrestike staatikaga määratuse astme leiame valemiga

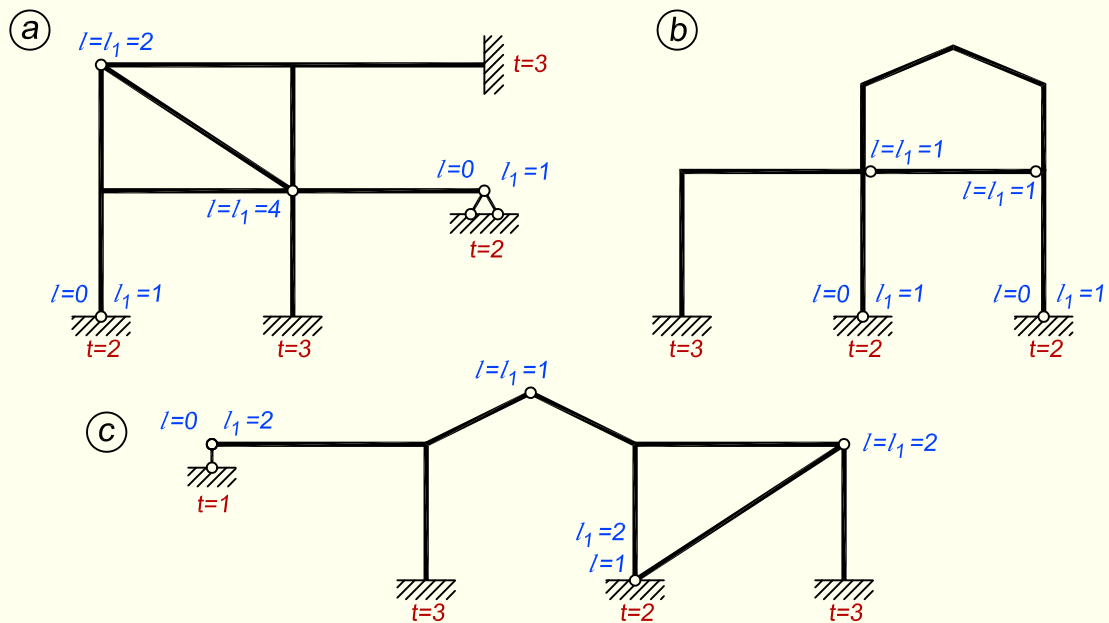
$$n = v + t - 2s \quad (13.11)$$

kus v on varraste arv, t on toesidemete arv ja s sõlmede arv. Sisejõudude ja toereaktsioonide üldarv on $v + t$ ja tasakaaluvõrrandite arv $2s$.



Joonis 13.2. Liigendita suletud kontuuridest koosnevad staatikaga määratud raamid

NÄIDE 13.1. Leida joonisel 13.3 kujutatud raamide staatikaga määramatuse aste.



Joonis 13.3. Raamide arvutuskeemid

LAHENDUS

Kasutame staatikaga määramatuse astme leidmiseks valemeid (13.8) ja (13.9). Lihtliigendite ja toesidemete arv on näidatud joonisel.

Skeem a

Sellel arvutuskeemil on lihtliigendite arv $l = 6$, toesidemete arv $t = 10$, elementide (kujundite, mille moodustavad jäigalt üksteise külge kinnitatud vardad) arv $k = 5$, suletud kontuuride arv $m = 5$ ja lihtliigendite arv $l_1 = 8$.

Staatikaga määramatuse astmeks saame

$$n = 2l + t - 3k = 2 \cdot 6 + 10 - 3 \cdot 5 = 7; \quad n = 3m - l_1 = 3 \cdot 5 - 8 = 7$$

Skeem b

Sellel arvutuskeemil on lihtliigendite arv $l = 2$, toesidemete arv $t = 7$, elementide arv $k = 2$, suletud kontuuride arv $m = 3$ ja lihtliigendite arv $l_1 = 4$.

Staatikaga määramatuse aste

$$n = 2l + t - 3k = 2 \cdot 2 + 7 - 3 \cdot 2 = 5; \quad n = 3m - l_1 = 3 \cdot 3 - 4 = 5$$

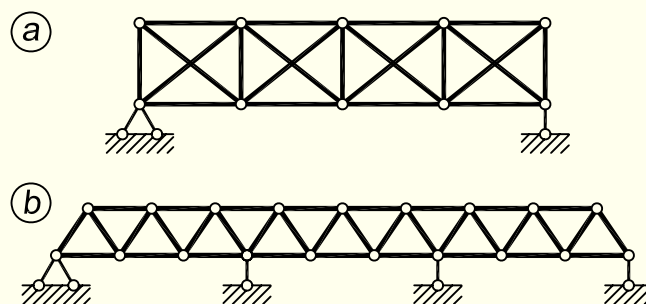
Skeem c

Viimasel arvutuskeemil on lihtliigendite arv $l = 4$, toesidemete arv $t = 9$, elementide arv $k = 4$, suletud kontuuride arv $m = 4$ ja lihtliigendite arv $l_1 = 7$.

Staatikaga määramatuse aste

$$n = 2l + t - 3k = 2 \cdot 4 + 9 - 3 \cdot 4 = 5; \quad n = 3m - l_1 = 3 \cdot 4 - 7 = 5$$

NÄIDE 13.2. Leida joonisel 13.4 kujutatud sõrestike staatikaga määramatuse aste.



Joonis 13.4. Sõrestike arvutuskeemid

LAHENDUS

Skeem a

Ülemisel sõrestikul on varraste arv $v = 21$, toesidemete arv $t = 3$ ja sõlmede arv $s = 10$. Staatikaga määramatuse astme leiame valemiga (13.11)

$$n = v + t - 2s = 21 + 3 - 2 \cdot 10 = 4$$

Lisame siia veel juurde, et kuna sellel sõrestikul on kolm toesidet, siis toereaktsioonide suhtes on ta staatikaga määratud ja seetõttu saab toereaktsioonid leida tavaliste staatika tasakaalutingimustega. Sisejõudude suhtes on ta aga staatikaga määramatu.

Skeem b

Alumisel skeemil kujutatud sõrestikul on varraste arv $v = 35$, toesidemeid on $t = 5$ ja sõlmi $s = 19$. Staatikaga määramatuse aste on

$$n = v + t - 2s = 35 + 5 - 2 \cdot 19 = 2$$

See sõrestik on, vastupidiselt eelmisele, toereaktsioonide suhtes staatikaga määramatu. Arvutuskeemil on kokku viis toesidet ja järelkult kaks neist on liigsidemed.

13.4. Põhiskeem ja lisatundmatud

Staatikaga määramatu ülesande lahendamisel leiame kõigepealt *staatikaga määramatuse astme* n . Järgnevalt moodustame staatikaga määratud *põhiskeemi*, milleks eemaldame staatikaga määramatust arvutuskeemist n liigsidet. Staatikaga määramatu konstruktsiooni lahendamisel asendame ärajäetud sidemete mõju reaktsioonidega, mis tekivad nendes sidemetes staatikaga määramatus konstruktsioonis. Jõumeetodi puhul nimetatakse neid ärajäetud sidemete asemel põhiskeemile rakendatud jõudusid *lisatundmatuteks*.

Põhiskeemi moodustamisel võib arvutuskeemist eemaldada nii *välis-* kui *sisesidemeid*. Välissidemeteks on toesidemed. Toesidemete kõrvaldamisel rakendame nende asemel põhi-

skeemile lisatudmatutena neile vastavad toereaktsioonid. Sisesidemed võtavad vastu sisejõudusid. Seega on sisesidemete eemaldamisel lisatudmatuteks vastavates lõigetes esinevad sisejõud.

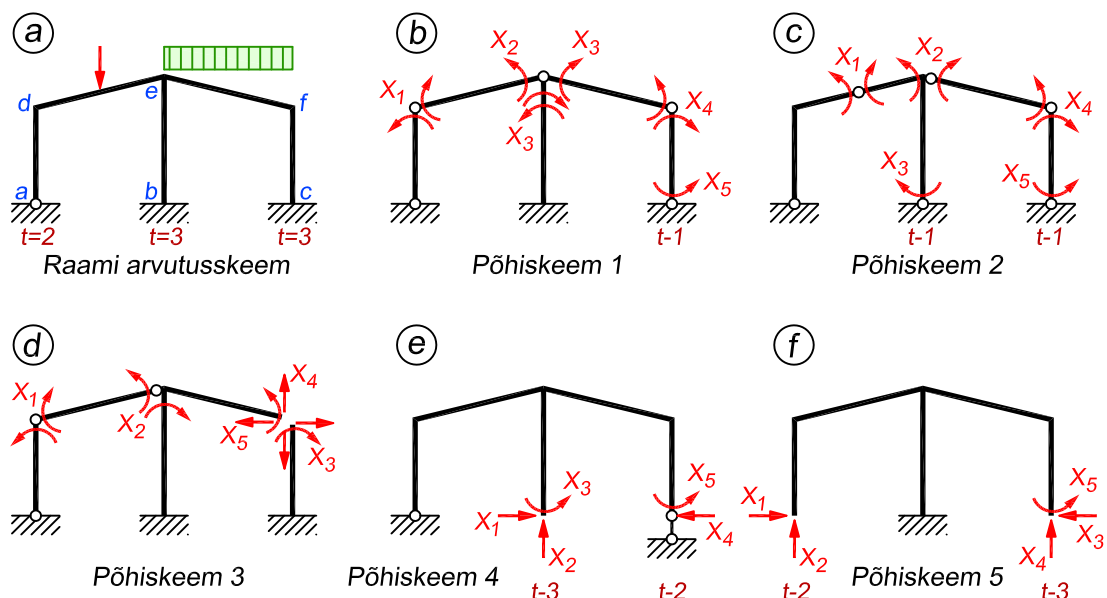
Põhiskeemi moodustamine

Joonisel 13.5 on näitena esitatud viis põhiskeemi, mis on saadud viiekordselt staatikaga määramatust arvutuskeemist (joonis 13.5, a) erinevate liigsidemete eemaldamisega.

Joonisel 13.5, b ja c on lisatud viis liigendit, millega on eemaldatud viis paindemomenti vastuvõtvat sidet ja lisatudmatuteks on paindemomendid. Sõlme *e* on nendel skeemidel lisatud erinev arv liigendeid: skeemil *b* kaks liigendit, mistõttu seal on lisatudmatuteks kaks paindemomenti, ja skeemil *c* üks liigend ühe lisatudmatu paindemomendiga. Toesõlmed *b* ja *c* on tegelikus arvutuskeemis jäigad, mis tähendab seal kolme toesideme olemasolu ($t = 3$). Kui lisada jäika toesõlme nüüd liigend, siis põhjustab see ühe toesideme kadumise ja lisatudmatuteks on seal momendireaktsioonid.

Joonisel 13.5, d on varda *d-e* otsristlõigetes *d* ja *e* pandud liigendid. Nendes lõigetes on lisatudmatuteks paindemomendid. Raami parempoolne osa *b-e-f-c* moodustab suletud kontuuri, mis on kolmekordselt staatikaga määramatu. Lõikes *f* on suletud kontuur lõigatud läbi, millega kaovad ära kolme sisejõudu vastuvõtvad sidemed ja lisatudmatuteks on seetõttu paindemoment X_3 , posti pikijõud X_4 ja põikjõud X_5 .

Joonisel 13.5, e on eemaldatud staatikaga määramatust skeemist viis toesidet. Neist kolm oleme ära võtnud keskmise jäiga toe kõrvaldamisega ning kaks sidet parempoolse jäiga toe asendamisega liikuva liigendtoega selliselt, et alles jääb vertikaalne toeside. Saadud põhiskeem toetub kahele liigendtoele ning lisatudmatuteks on keskmise toereaktsiooni kolm



Joonis 13.5. Näiteid jõumeetodi põhiskeemi moodustamisest

komponenti ($X_1 = H_b$, $X_2 = V_b$ ja $X_3 = M_b$) ning toe c reaktsiooni kaks komponenti ($X_4 = H_c$ ja $X_5 = M_c$).

Joonisel 13.5, f on samuti eemaldatud viis toesidet. Kaks sidet on kadunud vasakpoolse liigendtoe ning kolm sidet parempoolse jäiga toe kõrvaldamisega. Põhiskeemi keskmine post on kinnitatud jäigalt ja tekkinud on sisult konsoolne arvutuskeem. Lisatundmatuteks on toe a reaktsiooni kaks komponenti ($X_1 = H_a$ ja $X_2 = V_a$) ning toe c reaktsiooni kolm komponenti ($X_3 = H_c$, $X_4 = V_c$ ja $X_5 = M_c$).

Põhiskeemi koostamisel tuleb tähelepanu pöörata mõningatele omadustele ja seetõttu täiesti juhuslikult sidemeid eemaldada ei saa. Võtame kokku põhiskeemi kõige olulisemad omadused.

Põhiskeem peab olema staatikaga määratud ning ükski selle osa ei tohi olla geomeetriselt muutuv ega hetkmuutuv.

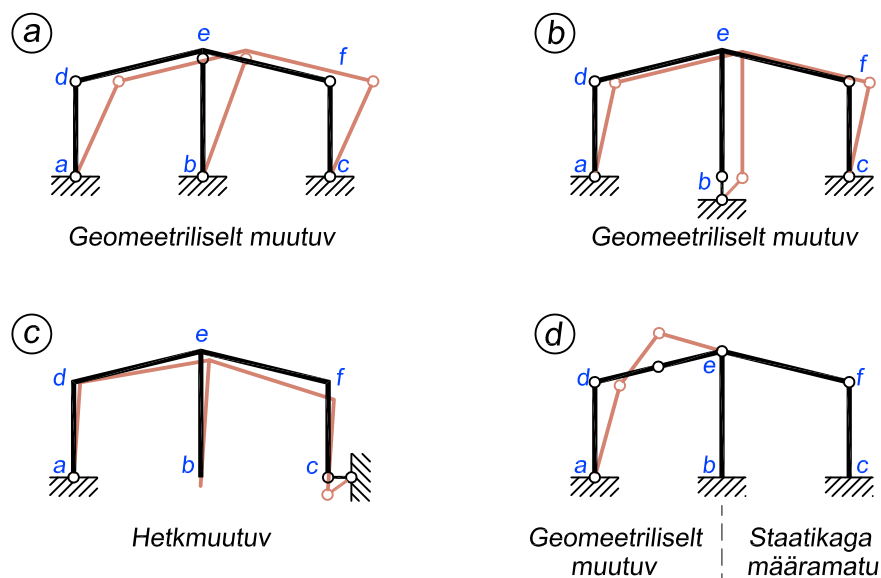
Mittesobivad põhiskeemid

Joonisel 13.6 on näidatud eelnevalt käsitletud raamile neli kõlbmatut põhiskeemi.

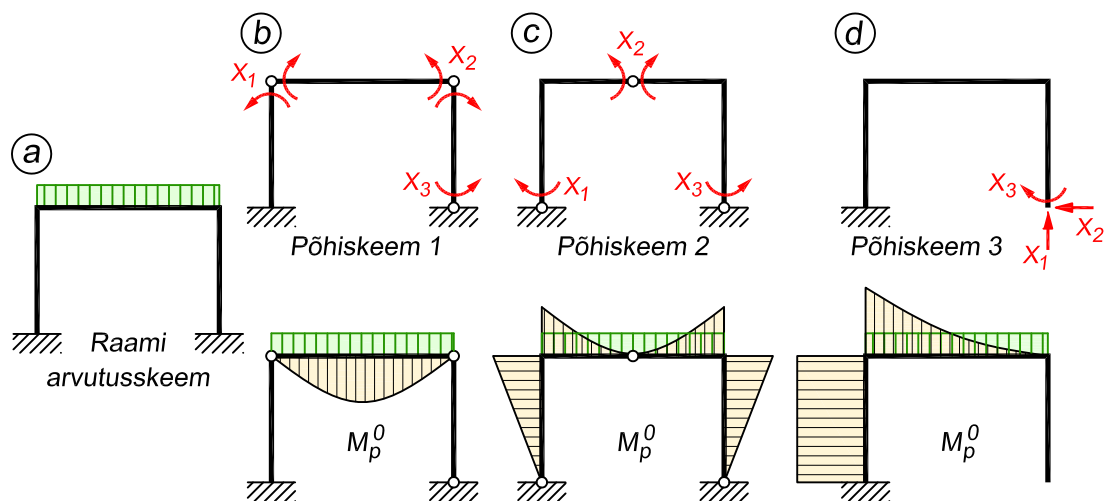
Joonisel 13.6, a ja b on üks kujund kinnitatud kolme paralleelse vardaga, mistõttu skeem on geomeetriselt muutuv ja saab seetõttu vabalt liikuda.

Joonisel 13.6, c on kujund kinnitatud liigendiga a ja toesidemega c , kusjuures sideme c siht läbib liigendit a ning skeem on järelkult hetkmuutuv.

Joonisel 13.6, d on liigendid paigutatud selliselt, et põhiskeemi vasakpoolses sildes on neid liiga palju ja see on geomeetriselt muutuv. Parempoolne sille moodustab aga kahe liigendiga suletud kontuuri, mistõttu see osa on ühekordselt staatikaga määratu.



Joonis 13.6. Kõlbmatud põhiskeemid



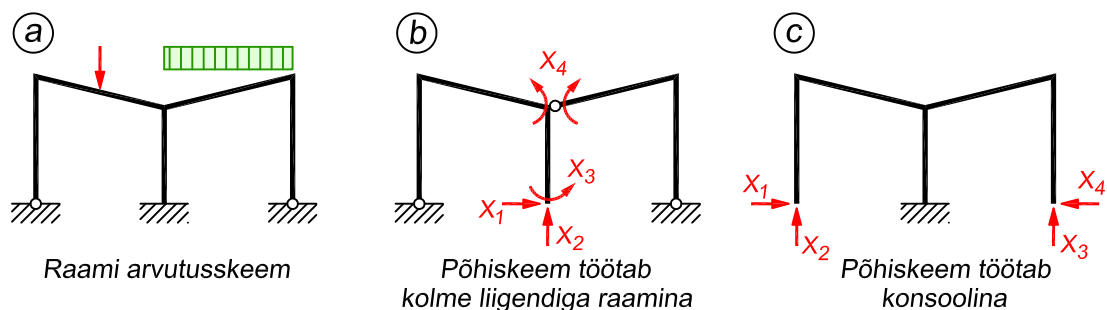
Joonis 13.7. Lahendamiseks sobivaima põhiskeemi valimine

Otstarbeka põhiskeemi valimine

Staatikaga määratu skeemi lahendamisel võib kasutada suvalist geomeetriselt muutumatut põhiskeemi, mis on saadud määratust skeemist liigsidemete eemaldamisega. Iga põhiskeem ei ole aga otstarbekas. Peab olema niisugune põhiskeem, millega on lihtsam arvutada. Jõumeetodi puhul on põhiline ja väga oluline koht ühiktundmatustest ja koormusest põhjustatud sisejõudude epüüride arvutamisel staatikaga määratavas põhiskeemis ning järgnevalt nende epüüride kasutamisel siirete leidmisel. Otstarbeka staatikaga määratava põhiskeemi tunnuseks on sisejõudude epüüride lihtsus.

Näitena on toodud joonisel 13.7 ühesildelise suletud raami kolm erinevat põhiskeemi lisatundmatutega ja koormusest põhjustatud paindemomendi epüüriga. Lihtsaim paindemomendi epüür M_p^0 on kujutatud joonisel 13.7, b: paindemomendid tekivad ainult raami ühes vardas, kahes ülejäänud vardas on paindemomendid nullid.

Võimalikult lihtsa põhiskeemi koostamiseks tuleb mõelda ka sellele, mis liiki konstruktsiooni me ühe või teise sideme eemaldamisel saame. Joonisel 13.8, a on kujutatud neljakord-



Joonis 13.8. Põhiskeemi moodustamine raami ja konsoolina

selt staatikaga määramatu raam. Joonisel 13.8, b näidatud põhiskeemi oleme moodustanud, nii et see töötab kolme liigendiga raamina. Sellele skeemile ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud sisejõudude epüüride koostamine nõuab eelnevalt raami toereaktsioonide arvutamist. Joonisel 13.8, c esitatud põhiskeem töötab aga konsoolina ja siin ei ole epüüride jaoks vaja toereaktsioone leida. Seetõttu on praegusel juhul konsoolne põhiskeem edasiseks kasutamiseks märgatavalt lihtsam kui raami skeem.

13.5. Võrrandid lisatundmatute arvutamiseks

Staatikaga määramatu ülesande lahendamise raskus seisneb lisatundmatute X_i väärtuse leidmises. Lisatundmatute arvutamiseks koostame võrrandid staatikaga määramatu konstruktsiooni deformeerunud olukorra kinemaatiliste pidevustingimuste alusel.

Kinemaatiliste pidevustingimuste alusel koostatud võrrandid väljendavad seda, et eemaldatud sidemetele vastavaid siirdeid ja deformatsioone ei saa tegelikult arvutuskeemis tekkida ja seetõttu peavad need võrduma nulliga ka põhiskeemis.

Võrrandite lahendamisega leiame lisatundmatud X_i .

Arvutuskeemi suvalise punkti siiret saame arvutada jõudude mõju sõltumatuse printsiibi põhjal

$$\Delta_k = \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{k0} \quad (13.12)$$

kus

$$\Delta_{k0} = \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kr} \quad (13.13)$$

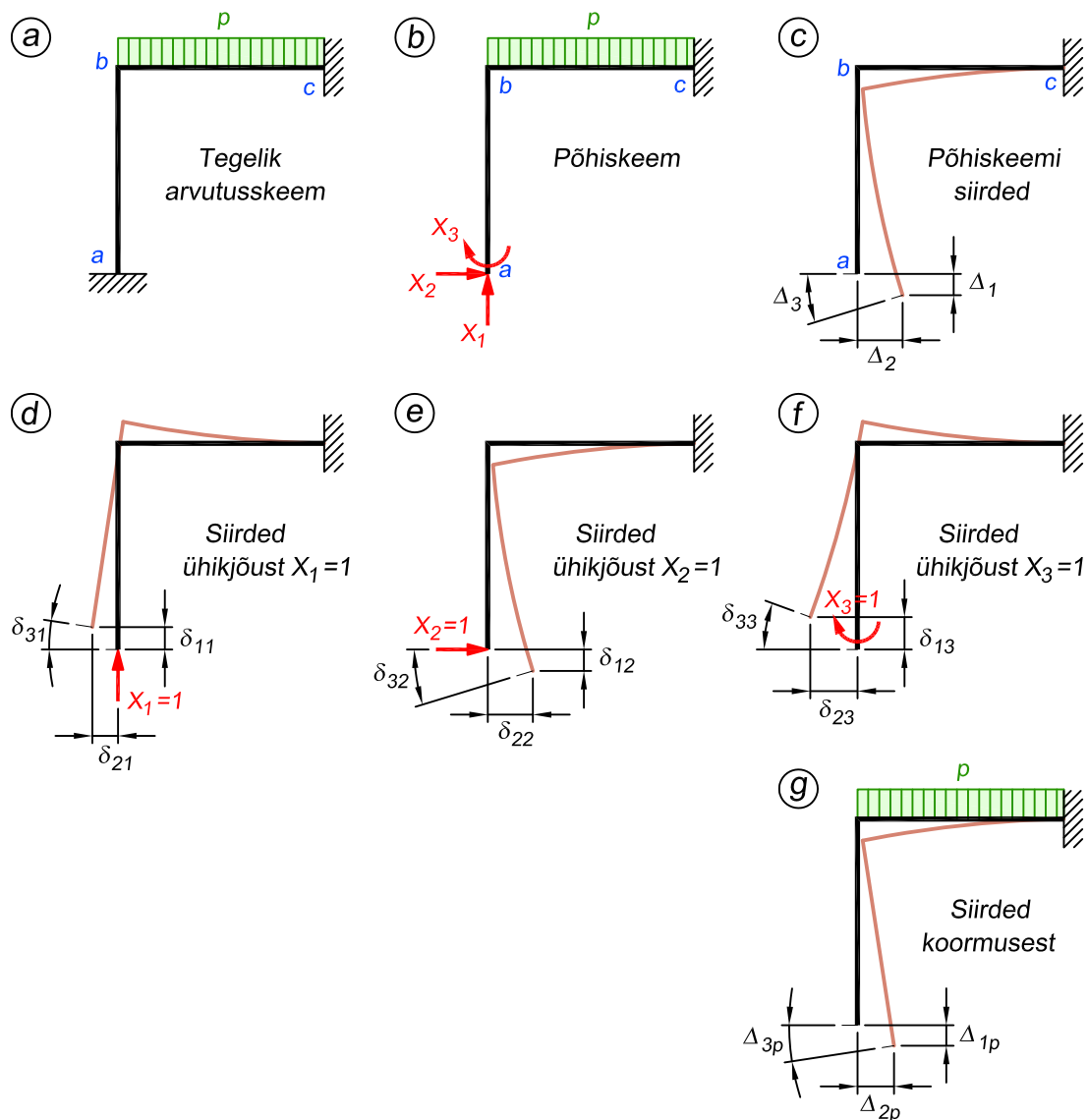
või avaldis (13.12) lühemalt väljakirjutatuna

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ki}X_i + \Delta_{k0} \quad (13.14)$$

kus δ_{ki} , Δ_{kp} , Δ_{kt} , Δ_{kr} on põhiskeemi ristlõike k siirded, mis on põhjustatud vastavalt lisatundmatust $X_i = 1$, koormusest, temperatuuri muutusest ja tugede siiretest. Valemit (13.12) kasutame edaspidi jõumeetodi võrrandisüsteemi koostamiseks.

Staatikaga määratava põhiskeemi saame staatikaga määramatust arvutuskeemist n liigsideme eemaldamisega. Lisaks koormusele rakendame põhiskeemile ärajäetud sidemete asemel staatikaga määramatu arvutuskeemi nendes sidemetes tekkivate reaktsioonidega võrdsed jõud (lisatundmatud) ning põhiskeemi deformatsiooniolukord on siis ekvivalentne staatikaga määramatu arvutuskeemi deformatsiooniolukorraga. Nende kahe deformatsiooniolukorra ekvivalentsuse alusel koostame võrrandid lisatundmatute leidmiseks.

Joonisel 13.9, a on kujutatud staatikaga määramatu konstruktsiooni arvutuskeem koos temale mõjuva koormusega. Raami staatikaga määramatuse aste $n = 3$ (suletud kontuur ilma liigenditeta). Põhiskeemi moodustamiseks eemaldame jäiga toe a ning lisatundmatuteks võtame seetõttu posti alumises otsas tekkivad toereaktsioonid: vertikaalse $V_a = X_1$, horisontaalse $H_a = X_2$ ja momendireaktsiooni $M_a = X_3$. Joonisel 13.9, b on esitatud staatikaga määratav põhiskeem koos koormuse ja lisatundmatutega X_1 , X_2 ja X_3 . Põhiskeemis lisatundmatutele



Joonis 13.9. Lisatundmatud ja siirded kolmekordselt staatikaga määratatu raami põhiskeemis

vastavad siirded, mis on põhjustatud nii lisatundmatutest kui koormusest, on kujutatud joonisel 13.9, c.

Tundmatule X_1 vastav siire Δ_1 on põhiskeemis posti alumise otsa ristlõike a siire toepinna suhtes vertikaalsuunas. Staatikaga määratus arvutusskeemis on aga post kinnitatud jäigalt toepinna külge ega saa seetõttu siirduda. Järelikult peab põhiskeemi ja tegeliku arvutusskeemi ekvivalentsuse tingimuse tõttu ka põhiskeemis lisatundmatule X_1 vastav siire võrduma nulliga: $\Delta_1 = 0$.

Tundmatule X_2 vastav siire Δ_2 staatikaga määratavas põhiskeemis on posti alumise otsa ristlõike a siire toepinna suhtes horisontaalsuunas. Staatikaga määratus skeemis moo-

dustab aga posti alumine ots toepinnaga ühise ristlõike ja peab seetõttu jääma liikumatuks. Koormuse ja lisatundmatutega staatikaga määratava põhiskeemi ning koormusega staatikaga määratu arvutusskeemi ekvivalentsuse tingimusest järeldub, et põhiskeemis: $\Delta_2 = 0$.

Tundmatule X_3 vastav siire Δ_3 põhiskeemis on posti alumise otsa ristlõike a pööre toepinna suhtes. Staatikaga määratus arvutusskeemis moodustavad nad ühise ristlõike, mistõttu seda pööret toimuda ei saa. Järelikult peab ka staatikaga määratavas põhiskeemis tundmatule X_3 vastav siire võrduma nulliga: $\Delta_3 = 0$.

Seetõttu peavad eemaldatud sidemetele vastavad reaktsioonid X_1 , X_2 ja X_3 olema sellise suurusega, et neile vastavad siirded põhiskeemis võrduksid nulliga. Avaldise (13.12) järgi koostame nüüd kolm võrrandit, kus siirded Δ_1 , Δ_2 ja Δ_3 avaldame ühikjõududest ja koormusest põhjustatud siirete summana. Ühikjõududest ja koormusest põhjustatud siirete komponendid on näidatud joonisel 13.9, d kuni g . Joonisel on näidatud ühikjõududest põhjustatud siirded, aga võrrandisüsteemis peavad olema siirded tegelikest reaktsioonidest, mis on X_i korda suuremad. Seetõttu on vaja võrrandites siirded ühikjõududest läbi korrutada tundmatute reaktsioonidega. Nii saame võrrandisüsteemiks

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0 \\ \Delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0 \\ \Delta_3 &= \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0\end{aligned}\tag{13.15}$$

Esimese võrrandi esimene liige $\delta_{11}X_1$ on staatikaga määratavas põhiskeemis tundmatule X_1 vastav siire, mis on põhjustatud samast jõust X_1 . Tegur δ_{11} on tundmatule X_1 vastav siire, mis on põhjustatud ühiktundmatust $X_1 = 1$. Teine ja kolmas liige $\delta_{12}X_2$ ning $\delta_{13}X_3$ on tundmatule X_1 vastavad siirded, mis on põhjustatud vastavalt tundmatutest X_2 ja X_3 . Tegurid δ_{12} ja δ_{13} on tundmatule X_1 vastavad siirded, mis on põhjustatud ühiktundmatutest $X_2 = 1$ ja $X_3 = 1$. Viimane liige Δ_{1p} on koormusest põhjustatud lisatundmatule X_1 vastav siire põhiskeemis.

Esimeses võrrandis väljendab liikmete summa põhiskeemis tundmatule X_1 vastavat siiret, mis on põhjustatud kõigist lisatundmatutest ja koormusest.

Teises võrrandis olev liikmete summa väljendab põhiskeemis tundmatule X_2 vastavat siiret, mis on põhjustatud lisatundmatutest ja koormusest.

Sarnaselt väljendab kolmanda võrrandi liikmete summa põhiskeemis tundmatule X_3 vastavat siiret, mis on põhjustatud lisatundmatutest ja koormusest.

Kui arvutusskeem on n korda staatikaga määratu, siis saame avaldise (13.14) alusel n võrrandit

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{10} = 0 \\ \Delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{20} = 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_k &= \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{k0} = 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n0} = 0\end{aligned}\tag{13.16}$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ki}X_i + \Delta_{k0} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)\tag{13.17}$$

Võrrandisüsteemi (13.16) või (13.17) nimetatakse *jõumeetodi kanooniliseks võrrandisüsteemiks*, kuna ta vastab ehituskonstruksiooni iseloomust sõltumatule kindlale reeglipärale – kanoonile. Võrrandisüsteemi (13.16) lahendamisel leiame tundmatud X_i .

Võrrandisüsteemi (13.16) tundmatute ees olevatest kordajatest (siiretest) moodustatud determinant

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \cdots & \delta_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{vmatrix} \quad (13.18)$$

on positiivne ja ei võrdu nulliga.

Kahe ühesuguse indeksiga siiret δ_{kk} nimetatakse peasiirdeks ja erinevate indeksitega siiret δ_{ki} kõrvalsiirdeks. Peasiirded asetsevad peadiagonaalil, mille siht on ülevalt vasakult paremale alla. Peasiirded on alati positiivsed ($\delta_{kk} > 0$). Kõrvalsiirded on siirete vastastikkuse teoreemi põhjal peadiagonaali suhtes sümmeetrilised: $\delta_{ki} = \delta_{ik}$. Kõrvalsiire võib olla positiivne, negatiivne ja võrduda nulliga.

13.6. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajate ja vabaliikmete arvutus

Võrrandisüsteemi (13.17) tundmatute kordajad (ühiktundmatutest põhjustatud siirded) ja vabaliikmed (koormusest, temperatuuri muutusest ja tugede nihkumisest põhjustatud siirded) arvutame valemitega (11.44), (11.57), (11.60).

$$\delta_{ki} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k m_i}{EI_j} + \frac{n_k n_i}{EA_j} + k_j \frac{q_k q_i}{GA_j} \right) dx \quad (13.19)$$

$$\delta_{kk} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k^2}{EI_j} + \frac{n_k^2}{EA_j} + k_j \frac{q_k^2}{GA_j} \right) dx \quad (13.20)$$

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k M_p^0}{EI_j} + \frac{n_k N_p^0}{EA_j} + k_j \frac{q_k Q_p^0}{GA_j} \right) dx \quad (13.21)$$

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \alpha_j \left(\frac{\Delta t_j}{h_j} m_k + t_{0j} n_k \right) dx \quad (13.22)$$

$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} \quad (13.23)$$

$$\Delta_{k0} = \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kr} \quad (13.24)$$

Esitatud valemite kasutamiseks tuleb eelnevalt koostada põhiskeemi jaoks hulk sisejõudude epüüre. Tavaliselt raamkonstruktsioonide puhul loobutakse piki- ja põikjõu mõju arvestamisest ning piirduetakse paindemomendiga, mis oluliselt vähendab vajaminevate epüüride arvu. Näiteks joonisel 13.9 kujutatud raamile võrrandisüsteemi tundmatute kordajate ja vabaliikmete arvutamiseks koostame paindemomendi epüürid ühikjõududest X_1, X_2, X_3 ning koormusest p (joonis 13.10).

Staatikaga määratu ülesande praktilisel lahendamisel korrutame võrrandisüsteemi (13.17) tundmatute kordajad ja vabaliikmed suvalise jäikusega EI_0 . Tavaliselt võetakse selleks varda jäikus, mida konstruktsioonis esineb kõige rohkem. Kanoonilised võrrandid (13.17) on siis järgmise kujuga

$$\sum_{i=1}^n EI_0 \delta_{ki} X_i + EI_0 \Delta_{k0} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (13.25)$$

Kanooniliste võrrandite (13.25) tundmatute kordajad arvutame nüüd valemitega

$$EI_0 \delta_{ki} = \sum_{j=1}^v \left(\int_0^{l'_j} m_k m_i dx + \frac{I_0}{A_0} \int_0^{l''_j} n_k n_i dx + k_j \frac{E_j I_0}{G_j A_0} \int_0^{l''_j} q_k q_i dx \right) \quad (13.26)$$

$$EI_0 \delta_{kk} = \sum_{j=1}^v \left(\int_0^{l'_j} m_k^2 dx + \frac{I_0}{A_0} \int_0^{l''_j} n_k^2 dx + k_j \frac{E_j I_0}{G_j A_0} \int_0^{l''_j} q_k^2 dx \right) \quad (13.27)$$

ja vabaliikmed valemitega

$$EI_0 \Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \left(\int_0^{l'_j} m_k M_p^0 dx + \frac{I_0}{A_0} \int_0^{l''_j} n_k N_p^0 dx + k_j \frac{E_j I_0}{G_j A_0} \int_0^{l''_j} q_k Q_p^0 dx \right) \quad (13.28)$$

$$EI_0 \Delta_{kt} = EI_0 \sum_{j=1}^v \alpha_j \left(\int_0^{l'_j} \frac{\Delta t}{h} m_k dx + \int_0^{l'_j} t_0 n_k dx \right) \quad (13.29)$$

$$EI_0 \Delta_{kr} = -EI_0 \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} \quad (13.30)$$

mis on saadud valemite (13.19) kuni (13.23) korrutamisel jäikusega EI_0 ja milles l'_j ja l''_j on varraste redutseeritud pikkused. Varda redutseeritud pikkusteks l'_j ja l''_j on vastavalt varda j tegeliku pikkuse ning paindejäikuste suhte EI_0/EI_j korrutis

$$l'_j = l_j \cdot \frac{EI_0}{EI_j} \quad (13.31)$$

ja tegeliku pikkuse ning pikkejäikuste suhte EA_0/EA_j korrutis

$$l''_j = l_j \cdot \frac{EA_0}{EA_j} \quad (13.32)$$

Kui konstruktsiooni kõik vardad on samast materjalist ($E = \text{const.}$), siis varraste redutseeritud pikkuste avaldistest (13.31) ja (13.32) saab taandada normaalelastsusmooduli E

$$l'_j = l_j \cdot \frac{I_0}{I_j} \quad (13.33)$$

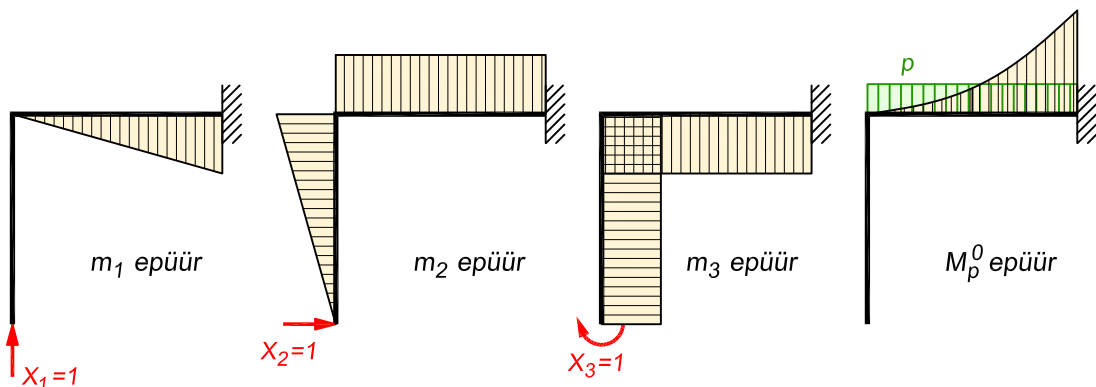
$$l''_j = l_j \cdot \frac{A_0}{A_j} \quad (13.34)$$

ning varraste redutseeritud pikkused olenevad ainult ristlõike inertsimomentide ja pindalade suhetest. Siirete avaldistes (13.26), (13.27) ja (13.28) paindemomendi ja pikijõu integraalid ei olene sellest, mis materjalist on konstruktsioon. Põikjõu integraali märgi ees on normaal- ja nihkeelastsuse moodulite suhe $E_j/G_j = 2(1 + \nu_j)$ ning need liikmed olenevad varda materjali Poissoni tegurist ν_j .

Eelnevast saame teha olulise järelduse – **sisejõudude arvutamisel koormusest lisatundmatute väärtused ei olene varraste jäikuse absoluutsuurustest, vaid olenevad jäikuste suhetest.** Kui muuta konstruktsiooni kõigi varraste jäikusi, korrutades neid sama teguriga, siis sisejõud ei muutu, tingimusel, et mõjub ainult koormus (temperatuur on konstantne ja toed ei nihku) ning arvestatakse ainult paindemomentide mõju raamides ja pikijõudude mõju sõrestikes.

Kuna kanooniliste võrrandite (13.25) temperatuuri muutusest ja tugede siiretest põhjustatud vabaliikmed (13.29), (13.30) olenevad jäikusest EI_0 , lisatundmatute X_i kordajad aga jäikuste suhetest, mis järeldub valemite (13.26), (13.27), (13.31), (13.32), siis temperatuuri muutuse ja tugede siirete puhul on lisatundmatud seda suuremad, mida suuremad on varraste jäikused. Sama tulemus järeldub ka kanooniliste võrrandite (13.17) ja siirete (13.19), (13.20), (13.22), (13.23) avaldistest. Temperatuuri muutusest ja tugede nihkumistest põhjustatud siirded Δ_{kt} , Δ_{kr} (13.22), (13.23) ei olene varraste jäikusest. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajad δ_{ki} , δ_{kk} (13.19), (13.20) on aga pöördvõrdelised varraste jäikustega ja järelikult on temperatuuri muutusest ja tugede siiretest põhjustatud lisatundmatud seda suuremad, mida suuremad on varraste jäikused.

Siit võime teha järelduse – **temperatuuri muutmise ja tugede nihkumise puhul on sisejõud seda suuremad, mida suuremad on varraste jäikused.**



Joonis 13.10. Põhiskeemi paindemomendi epüürid võrrandisüsteemi tundmatute kordajate ja vabaliikmete arvutamiseks joonisel 13.9 kujutatud raamile

13.7. Sisejõudude epüürid staatikaga määramatus arvutus-skeemis

13.7.1. Koormusest põhjustatud sisejõudude epüürid

Kanooniliste võrrandite lahendamisele leiame lisatundmatud X_1, X_2, \dots, X_n . Pärast lisatundmatute X_i leidmist saame sisejõud arvutada jõudude mõju sõltumatuse printsiibi alusel

$$M_k = m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + \dots + m_{kn}X_n + M_{kp}^0 \quad (13.35)$$

$$Q_k = q_{k1}X_1 + q_{k2}X_2 + \dots + q_{kn}X_n + Q_{kp}^0 \quad (13.36)$$

$$N_k = n_{k1}X_1 + n_{k2}X_2 + \dots + n_{kn}X_n + N_{kp}^0 \quad (13.37)$$

ehk

$$M_k = \sum_{i=1}^n m_{ki}X_i + M_{kp}^0 \quad (13.38)$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^n q_{ki}X_i + Q_{kp}^0 \quad (13.39)$$

$$N_k = \sum_{i=1}^n n_{ki}X_i + N_{kp}^0 \quad (13.40)$$

kus m_{ki}, q_{ki}, n_{ki} on lisatundmatust $X_i = 1$ ning $M_{kp}^0, Q_{kp}^0, N_{kp}^0$ koormusest põhjustatud paindemoment, põik- ja pikijõud staatikaga määratava põhiskeemi ristlõikes k .

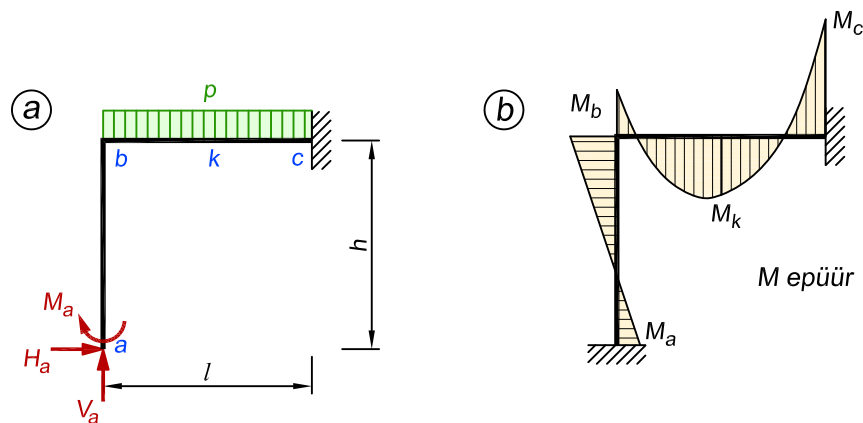
Sirgete varrastega konstruktsioonide sisejõudude epüüride arvutamisel leiame tavaliselt eeltoodud valemitega ainult paindemomendi epüüri ordinaadid (13.35), kuna põikjõud arvutame paindemomentide abil varraste kohta koostatud momentide tasakaalu tingimustest ja pikijõud pärast põikjõudude leidmist sõlmede kohta koostatud projektsioonide tasakaalu tingimustest.

Sisejõud tähistame sageli kahetähelise indeksiga. Esimene täht näitab lõiget, kus mõjub sisejõud, teine täht tähistab vardale rakendatud lähima koondatud jõu rakenduspunkti või kui koondatud jõudu vardale ei mõju, siis varda teise otsa ristlõiget. Kahetäheline tähistamine on vajalik, et sõlmes teha vahet, millise liituva varda otsas me arvutust teeme. Kui sõlmes liituvate varraste otstes on sisejõud võrdsed (näiteks kahest vardast koosnevas sõlmes, kus paindemomendid on ühesugused), siis piisab indeksis ka ühest tähest.

Paindemomendi arvutus

Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamiseks on kaks varianti.

Ühe variandi korral asendame põhiskeemis tundmatud X_i nende arväärtustega, mis me võrrandisüsteemist oleme saanud (joonis 13.11, a). Seejärel leiame nende abil kõik tundmatud ordinaadid, kasutades arvutamisel põhiskeemi. Saame seda teha seetõttu, et põhiskeem,



Joonis 13.11. Põhiskeem leitud toereaktsioonidega ning paindemomendi epüür

millele on rakendatud ärajäetud sidemete asemele nende sidemetele vastavad reaktsioonid, peab olema samaväärne tegeliku arvutusskeemiga. Lõplik paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 13.11, b.

Teine variant on enamlevinud ja selle puhul lähtume valemist (13.35) ning kasutame ülesande alguses koostatud lisatundmatustest X_i ja koormusest tekkivaid põhiskeemi paindemomendi epüüre (joonis 13.10). Nimetatud valemiga saab arvutada staatikaga määramatu raami paindemomendi epüüri ordinaate arvutusskeemi suvalises lõikes, kuid lahenduskaigu võib valida ka nii, et selliselt arvutame ordinaadid ainult varraste otstes.

Varraste vahepealsetes lõigetes võime paindemomendi väärtused leida ka tavalise epüüride liitmise teel, mida on skemaatiliselt kirjeldatud kolme liigendiga raami peatükis näites 7.7. Selle meetodi puhul arvestame vaadeldava varda otsmisi ordinaate ning vardal paiknevast koormusest tekkivat paindemomendi epüüri, mille saame, kui tegemist oleks lihttalaga

$$M_k = M_{kp}^0 + M_{vas} \cdot \xi'_k + M_{par} \cdot \xi_k \quad (13.41)$$

kus M_{kp}^0 on paindemoment lõikes k , vaadeldes vastavat varrast lihttalana, M_{vas} ja M_{par} on varda kummagi otsa paindemomendid, ξ'_k ja ξ_k on lõike k asukohta määravad parameetrid, kus ξ'_k on lõike kaugus paremast toest jagatud silde pikkusega ja ξ_k on lõike kaugus vasakust toest jagatud silde pikkusega.

Joonisel 13.11, b esitatud staatikaga määramatu raami M epüüri ordinaadi lõikes k võime nüüd arvutada

$$M_k = \frac{pl^2}{8} + M_b \cdot \xi'_k + M_c \cdot \xi_k \quad (13.42)$$

Põikjõu arvutus

Põikjõu arvutuse selgitamiseks eraldame arvutusskeemist varda $b-c$ (joonis 13.12, a) koos sellele mõjuva koormusega ning rakendame varda otsristlõigetes seal mõjuvad sisejõud.

Tundmatud põik- ja pikijõud rakendame positiivsete suundadega vastavalt märkide reeglitele, teadaolevad paindemomendid aga vastavalt M epüürile. M epüüri ordinaadid joonestame varda tõmmatud poolele. Joonisel 13.11, b on varda $b-c$ otste kohal olevad paindemomendi epüüri ordinaadid ülalpool. Vastavate suundadega rakendame momendid varda otstesse (joonis 13.12, a). Võrrandist

$$\sum M_c = 0; \quad -Q_{bc} \cdot l_{bc} + p \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M_b - M_c = 0 \quad (13.43)$$

leime põikjõu

$$Q_{bc} = \frac{1}{2}pl + \frac{M_b - M_c}{l_{bc}} \quad (13.44)$$

ja võrrandist

$$\sum M_b = 0; \quad -Q_{cb} \cdot l_{bc} - p \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M_b - M_c = 0 \quad (13.45)$$

põikjõu

$$Q_{cb} = -\frac{1}{2}pl + \frac{M_b - M_c}{l_{bc}} \quad (13.46)$$

kus l_{bc} on varda $b-c$ pikkus. Pikijõud N_{bc} ja N_{cb} kaovad tasakaalutingimustest ära, kuna on varda telje suunalised ja seetõttu kummagi otsa suhtes momenti ei anna. See võimaldabki meil raami arvutuses põikjõu leida enne pikijõudude määramist.

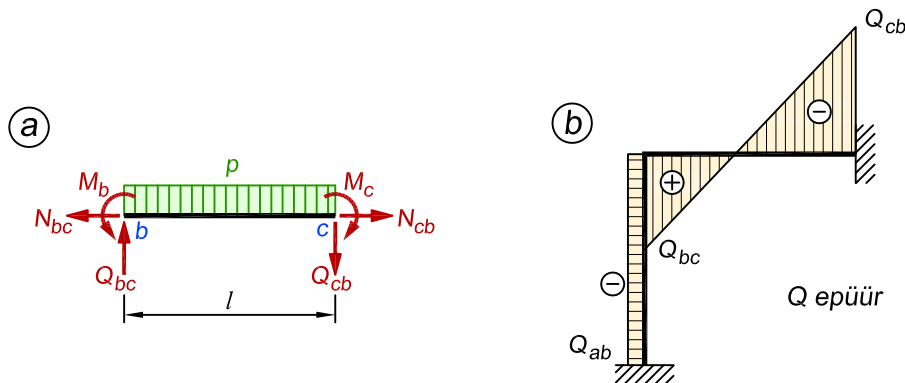
Põikjõudude Q_{bc} ja Q_{cb} avaldisi (13.44) ning (13.46) võib esitada üldisel kujul järgmiselt

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{M_{par} - M_{vas}}{l} \quad (13.47)$$

kus Q_k^0 on põikjõud vardale mõjuvast koormusest, kui varda mõlemas otsas on liigendid, M_{par} on paindemoment varda parempoolses otsas, M_{vas} on paindemoment varda vasakpoolses otsas ja l on varda pikkus. Paindemomendid M_{par} ja M_{vas} on positiivsed, kui vastavas lõikes varda alumine pool on tõmmatud, ning negatiivsed, kui varda ülemine pool on tõmmatud.

Vaadeldaval raamil on post koormamata ja põikjõud seal seetõttu konstantne

$$Q_{ab} = \frac{M_b - M_a}{h} \quad (13.48)$$



Joonis 13.12. Põikjõu epüüri koostamine

Pikijõu arvutus

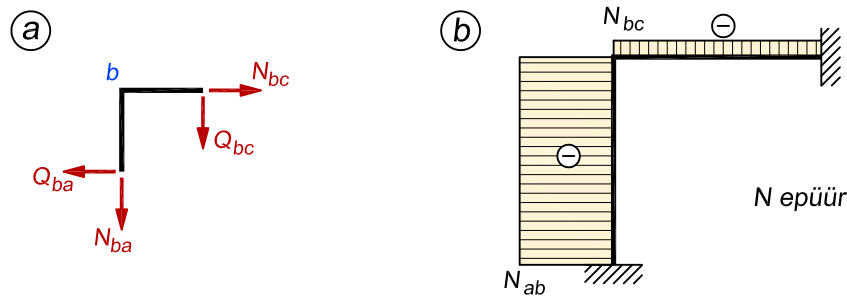
Pikijõu epüüri ordinaatide arvutamiseks eraldame sõlmed varrastest (joonis 13.13, a). Eraldatud sõlmedele rakendame positiivsete suundadega piki- ja põikjõud: pikijõud suunaga sõlme poolt ja põikjõud sõlme suhtes päripäeva. Tavaliselt märgitakse aga põikjõud sõlme skeemile tema tegeliku suunaga, mida näeb Q epüürilt. Positiivse põikjõu kanname joonisele pöörde-suunaga sõlme suhtes päripäeva ja negatiivse põikjõu suunaga vastupäeva.

Iga sõlme kohta on võimalik koostada ainult kaks sõltumatut projektsioonide tingimust. Seepärast vaatleme keerukamate raamide puhul esimesena niisugust sõlme, kus on ühendatud ainult kaks varrast, ja järgnevalt niisuguse sõlme tasakaalu, kus on ainult kaks tundmatut pikijõudu. Kaldvarraste puhul tuleb kindlasti arvestada jõudude projektsioonide tingimuste kirjutamisel ka nurkasid.

Käesoleval juhul eraldame raami sõlme b ning projektsioonide tingimustest $\sum X = 0$; $\sum Z = 0$ leiame vastavalt riivi ja posti pikijõu

$$\sum X = 0; \quad N_{bc} - Q_{ba} = 0; \quad N_{bc} = Q_{ba} \quad (13.49)$$

$$\sum Z = 0; \quad N_{ba} + Q_{bc} = 0; \quad N_{ba} = -Q_{bc} \quad (13.50)$$



Joonis 13.13. Pikijõu epüüri koostamine. Sõlme b skeemil on mõlemad põikjõud märgitud positiivsete suundadega

13.7.2. Temperatuuri muutusest ja tugede siiretest põhjustatud sisejõudude epüürid

Kanooniliste võrrandite (13.25) vabaliikmed arvutame temperatuuri muutuse korral valemiga (13.29) ja tugede siirete puhul valemiga (13.30). Kanooniliste võrrandite lahendamisel saadud lisatundmatutega X_{it} , X_{ir} arvutame paindemomendid valemiga (13.35) analoogiliste avaldistega, temperatuuri muutuse korral

$$M_{kt} = m_{k1}X_{1t} + m_{k2}X_{2t} + \dots + m_{kn}X_{nt} \quad (13.51)$$

ja tugede nihkumisel

$$M_{kr} = m_{k1}X_{1r} + m_{k2}X_{2r} + \dots + m_{kn}X_{nr} \quad (13.52)$$

Valemi (13.35) liikmele M_{kp}^0 vastavad liikmed valemites (13.51) ja (13.52) puuduvad, kuna temperatuuri muutus ja tugede siirded ei põhjusta staatikaga määratavas arvutusskeemis sisejõude. Seetõttu muutuvad temperatuuri muutusest ja tugede siiretest põhjustatud paindemomendid sirgete varrastega staatikaga määratulates raamides lineaarselt.

Põikjõud raami vardas on konstantne ja selle arvutame valemiga

$$Q = \frac{M_{par} - M_{vas}}{l} \quad (13.53)$$

13.8. Staatikaga määratutute konstruktsioonide siirete arvutus

13.8.1. Siirded koormusest

Staatikaga määratutavate konstruktsioonide koormusest põhjustatud siirded arvutame valemiga (11.44), mille tuletasime virtuaalsiirete printsiibi alusel. Vaatlesime konstruktsiooni arvutusskeemi kahte koormusolukorda: ühikjõust ja tegelikust koormusest põhjustatud olukorda. Sarnaselt saame arvutada ka staatikaga määratutavate konstruktsioonide siirdeid. Vaatleme kolme varianti, mis erinevad üksteisest selle poolest, kas kasutame arvutamisel tegelikku arvutusskeemi või põhiskeemi.

Variant 1

Ühikjõuga koormatud staatikaga määratutu konstruktsiooni arvutusskeemi välis- ja sisejõudude tööde summa koormusest põhjustatud konstruktsiooni siiretel võrdub nulliga. Selle printsiibi alusel koostatud võrrandist saame siirete arvutamiseks järgmise avaldise

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k M_p}{EI} + \frac{n_k N_p}{EA} + k_j \frac{q_k Q_p}{GA} \right) dx \quad (13.54)$$

kus Δ_{kp} on koormusest põhjustatud siire staatikaga määratutus konstruktsioonis, M_p , N_p , Q_p , m_k , n_k , q_k on vastavalt koormusest ja arvutusskeemi ristlõikes k mõjuvast ühikjõust põhjustatud sisejõud staatikaga määratutus arvutusskeemis. Avaldisest (13.54) järeldub, et siirete Δ_{kp} leidmiseks tuleb arvutada koormusest ja iga siirde jaoks ühikjõust põhjustatud sisejõud staatikaga määratutus arvutusskeemis.

Variant 2

Kuna konstruktsiooni deformeerunud olukord ei muutu, kui konstruktsioonist eemaldatud sideme mõju asendada selles sidemes esineva reaktsiooniga, siis on võimalik sellist mahukat arvutamist vähendada. Arvutusskeem muutub staatikaga määratutavaks, kui eemaldada n liigsidet. Lisaks tegelikule koormusele rakendame saadud staatikaga määratutavale arvutusskeemile eemaldatud sidemete asemele reaktsioonid, mis tekivad nendes sidemetes staatikaga

määramatus arvutusskeemis. Eemaldatud sidemete asemele rakendatud jõud mõjuvad nüüd välisjõududena ja neid võib vaadelda ühise koormusena koos tegeliku koormusega. Siirete arvutamisel, kui arvutusskeemile on rakendatud ühikjõud, jätame koormuse ära. Koos tegeliku koormusega jätame nüüd ära ka eemaldatud sidemete asemel mõjuvad reaktsioonid. Järelikult võib ühikjõu rakendada suvalisele staatikaga määratavale arvutusskeemile, mille saame antud staatikaga määramatust arvutusskeemist n liigsideme eemaldamisega. Valemi (13.54) asemel võime nüüd kirjutada järgmise avaldise

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k^0 M_p}{EI} + \frac{n_k^0 N_p}{EA} + k_j \frac{q_k^0 Q_p}{GA} \right) dx \quad (13.55)$$

kus m_k^0, n_k^0, q_k^0 on ühikjõust põhjustatud sisejõud staatikaga määratavas põhiskeemis.

Ühikjõuga koormatud staatikaga määramatu arvutusskeemi virtuaaltöö avaldises, mille koostame tegelike siirete jaoks, ei esine liigsidemete reaktsioonide tööd, kuna nendele reaktsioonidele vastavad siirded staatikaga määramatu konstruktsiooni tegelikus deformeerunud olukorras võrduvad nulliga. Seega ärajäetud sidemete reaktsioonid, mis staatikaga määratavas arvutusskeemis mõjuvad välisjõududena, ei tee tööd, ja ka nendele reaktsioonidele vastavate sisejõudude töö võrdub siis nulliga. Staatikaga määramatute konstruktsioonide siirete arvutamisel võime koostada virtuaaltöö avaldise ühikjõuga koormatud staatikaga määratava arvutusskeemi jõudude jaoks, ja järelikult on põhjendatud avaldise (13.55) kasutamine valemi (13.54) asemel.

Variant 3

Staatikaga määramatute konstruktsioonide siirete arvutamiseks võib tuletada valemi ka järgmisel viisil. Staatikaga määramatule konstruktsioonile mõjuva koormuse ja sisejõudude virtuaaltöö staatikaga määramatule arvutusskeemile rakendatud ühikjõu 1_k poolt põhjustatud siiretel võrdub nulliga

$$\sum F_i \delta_{ik} - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(M_p \frac{m_k}{EI} + N_p \frac{n_k}{EA} + k_j Q_p \frac{q_k}{GA} \right) dx = 0 \quad (13.56)$$

millest

$$\sum F_i \delta_{ik} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(M_p \frac{m_k}{EI} + N_p \frac{n_k}{EA} + k_j Q_p \frac{q_k}{GA} \right) dx \quad (13.57)$$

Võrduse (13.57) ja valemi (13.54) paremad pooled on võrdsed ning järelikult

$$\sum F_i \delta_{ik} = \Delta_{kp} \quad (13.58)$$

Koormuse ja koormuse poolt põhjustatud staatikaga määratava põhiskeemi sisejõudude M_p^0, N_p^0, Q_p^0 virtuaaltöö staatikaga määramatule arvutusskeemile rakendatud ühikjõu 1_k poolt põhjustatud siiretel võrdub samuti nulliga

$$\sum F_i \delta_{ik} - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(M_p^0 \frac{m_k}{EI} + N_p^0 \frac{n_k}{EA} + k_j Q_p^0 \frac{q_k}{GA} \right) dx = 0 \quad (13.59)$$

millest

$$\sum F_i \delta_{ik} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(M_p^0 \frac{m_k}{EI} + N_p^0 \frac{n_k}{EA} + k_j Q_p^0 \frac{q_k}{GA} \right) dx \quad (13.60)$$

Võrrandite (13.58) ja (13.60) vasakud pooled on võrdsed ning järelikult on võrdsed ka nende paremad pooled

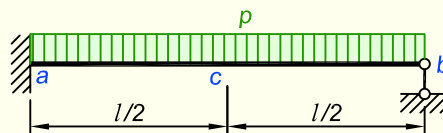
$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{M_p^0 m_k}{EI} + \frac{N_p^0 n_k}{EA} + k_j \frac{Q_p^0 q_k}{GA} \right) dx \quad (13.61)$$

Kokkuvõtteks

Staatikaga määramatutes konstruktsioonides võib siirdeid arvutada kolmel erineval viisil.

1. Arvutame sisejõud koormusest ja ühikjõust staatikaga määramatus arvutusskeemis (S_p , s_k) ja kasutame valemit (13.54).
2. Arvutame sisejõud koormusest staatikaga määramatus arvutusskeemis (S_p) ja ühikjõust staatikaga määratavas põhiskeemis (s_k^0) ning siirdeid arvutame valemiga (13.55).
3. Arvutame sisejõud koormusest põhiskeemis (S_p^0) ja ühikjõust staatikaga määramatus arvutusskeemis (s_k) ning siirdeid leiame valemiga (13.61).

NÄIDE 13.3. Arvutada joonisel 13.14 kujutatud tala lõike c vertikaalsiire peatükis 13.8.1 esitatud kolmel erineval viisil.



Joonis 13.14. Tala arvutusskeem

LAHENDUS

Ülesanne on ühekordselt staatikaga määramatu. Lisatundmatuks võtame toemomendi M_a (joonis 13.15, a). Lisatundmatule M_a vastav siire on toeristlõike a pööre, mis staatikaga määramatus arvutusskeemis on null. Kinemaatiline pidevusvõrrand toemomendi M_a leidmiseks on

$$\varphi_a = \delta_{aa} M_a + \Delta_{ap} = 0$$

milles

$$\delta_{aa} = \frac{l}{3EI} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l}{3EI}$$

on põhiskeemi toeristlõike a pööre ühiktundmatust $m_a = 1$ (joonis 13.15, b) ja

$$\Delta_{ap} = \frac{l}{6EI} \left(0 + 4 \cdot 0,5 \cdot \frac{pl^2}{8} + 0 \right) = \frac{pl^3}{24}$$

on toeristlõike a pööre koormusest (joonis 13.15, c).

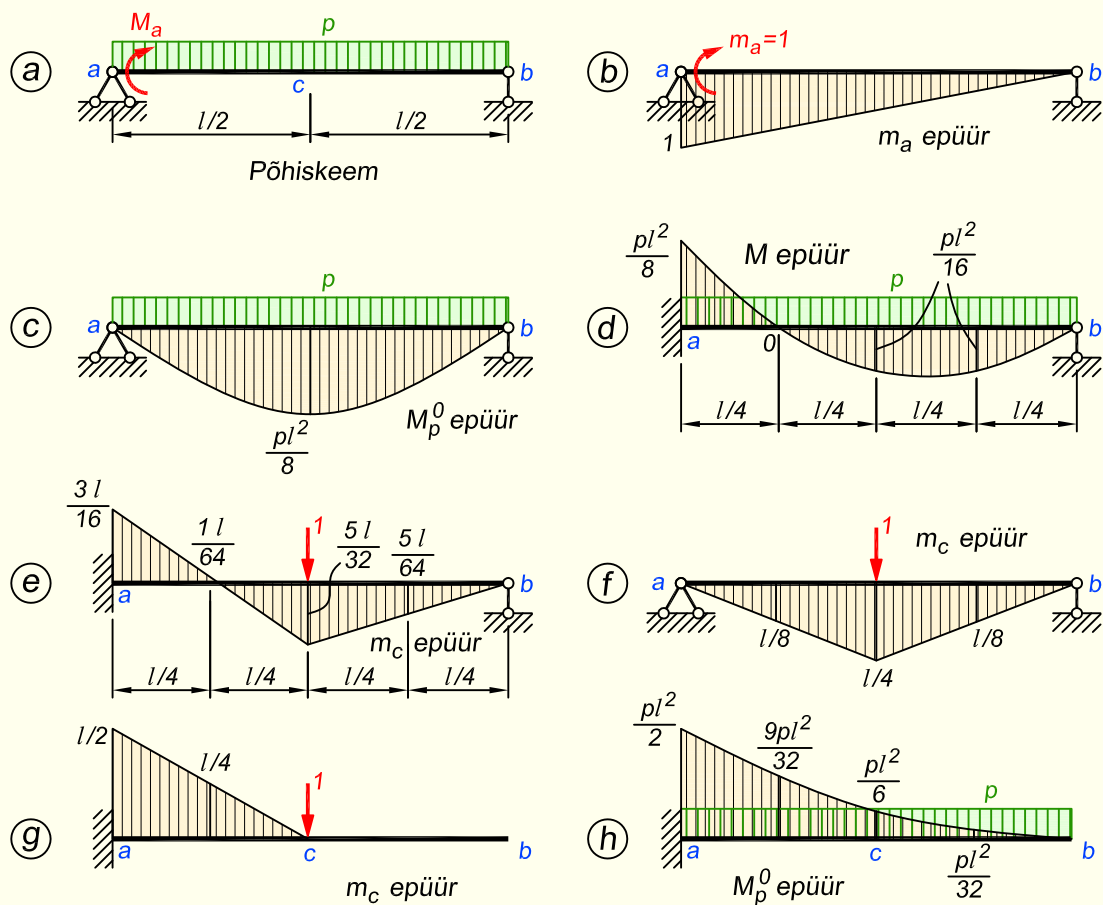
Pidevusvõrrand omandab kuju

$$\frac{l}{3EI}M_a + \frac{pl^3}{24} = 0$$

millest

$$M_a = -\frac{pl^2}{8}$$

Staatikaga määramatu tala (joonis 13.14) paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 13.15, d .



Joonis 13.15. Põhiskeem ja epüürid

1. Arvutame sisejõud koormusest ja ühikjõust staatikaga määramatus arvutuskeemis.

Esmalt kasutame siirde arvutamisel valemit (13.54), milleks rakendame vertikaalse ühikjõu staatikaga määramatu tala lõikesse c ja arvutame paindemomendi epüüri ordinaadid. Epüür on kujutatud joonisel 13.15, e ilma arvutust esitamata.

Ristlõike c vertikaalsiire valemiga (13.54) on

$$w_{cp} = \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{3l}{16} \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{l}{64} \cdot 0 + \frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{16} \right) + \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{5l}{64} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

Siit on näha, et sulgude ees olev liige on ühesugune ja soovi korral võiksime avaldise mõlemad osad ühtedesse sulgudesse kirjutada

$$w_{cp} = \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{3l}{16} \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{l}{64} \cdot 0 + \frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{16} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{5l}{64} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

2. Arvutame sisejõud koormusest staatikaga määramatus arvutusskeemis ja ühikjõust staatikaga määratavas põhiskeemis.

Valemiga (13.55) siirde arvutamisel rakendame ühikjõu staatikaga määratavale põhiskeemile. Kaks erinevat põhiskeemi koos paindemomendi epüüri on esitatud joonisel 13.15, f ja g .

Vastavalt nendele epüüridele leiame valemiga (13.55) ristlõike c vertikaalsiirdeks

$$w_{cp} = \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(0 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{l}{8} \cdot 0 + \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{16} \right) + \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{l}{4} \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

$$w_{cp} = \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{l}{4} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

Siirete arvutamine on seda lihtsam, mida lihtsam on ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür staatikaga määratud põhiskeemis.

3. Arvutame sisejõud koormusest põhiskeemis ja ühikjõust staatikaga määramatus arvutusskeemis.

Siirde leidmisel valemiga (13.61) arvutame ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüüri staatikaga määramatus arvutusskeemis (joonis 13.15, e) ja koormusest põhjustatud epüüri põhiskeemis (joonis 13.15, c).

$$w_{cp} = \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(-4 \cdot \frac{l}{64} \cdot \frac{3}{32} + \frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{8} \right) + \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{5l}{64} \cdot \frac{3}{32} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

Sama tulemuse saame ka siis, kui koormus rakendada konsoolile. Epüür on esitatud joonisel 13.15, h . Vertikaalsiire on

$$w_{cp} = \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{3l}{16} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{l}{64} \cdot \frac{9}{32} - \frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{8} \right) + \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(-\frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{5l}{64} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

Siin ülesandes ei ole vertikaalsiirde arvutamisel võetud arvesse põikjõudude mõju.

13.8.2. Siirded temperatuuri muutusest

Temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamiseks tuletame valemi virtuaalsiirete printsiibi alusel. Antud juhul lubab virtuaalsiirete printsiip – ühikjõuga koormatud staatikaga määratu arvutusskeemi välis- ja sisejõudude tööde summa konstruktsiooni temperatuuri muutusest põhjustatud siiretel võrdub nulliga – koostada võrrandi, millest avaldame

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(m\alpha \frac{\Delta t}{h} + n\alpha t_0 \right) dx \quad (13.62)$$

kus m ja n on ühikjõust põhjustatud paindemoment ning pikijõud staatikaga määramatus arvutusskeemis.

Siirete arvutamine valemiga (13.62) on mõistlik mõne siirde leidmiseks. Suurema hulga siirete arvutamiseks saame valemi järgmiselt. Temperatuuri muutumisel tekivad staatikaga määramatus konstruktsioonis sisejõud, mida tähistame M_t , N_t , Q_t . Konstruktsiooni deformeerunud olukord ei muutu, kui eemaldada liigsidemed ja nende asemele rakendada staatikaga määratavale põhiskeemile ärajäetud sidemete reaktsioonid (lisatundmatud X_{it}). Lisatundmatud X_{it} mõjuvad põhiskeemile välisjõududena ja nendest põhjustatud epüürid tähistame, nagu varem märkisime, M_t , N_t , Q_t . Staatikaga määratu arvutusskeemi deformeerunud olukorra vaatlemise võime asendada sellega ekvivalentse staatikaga määratava põhiskeemi, millele mõjuvad lisatundmatud ja temperatuuri muutus, deformeerunud olukorra vaatlemisega. Virtuaalsiirete printsiibi alusel saame järgmise valemi siirete arvutamiseks

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k^0 M_t}{EI} + \frac{n_k^0 N_t}{EA} + k_j \frac{q_k^0 Q_t}{GA} \right) dx + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(m_k^0 \alpha \frac{\Delta t}{h} + n_k^0 \alpha t_0 \right) dx \quad (13.63)$$

kus m_k^0 , n_k^0 , q_k^0 on ühikjõust 1_k põhjustatud sisejõud staatikaga määratavas põhiskeemis ja M_t , N_t , Q_t on temperatuuri muutusest põhjustatud sisejõud staatikaga määramatus arvutusskeemis.

13.8.3. Siirded tugede nihkumisest

Mõne üksiku siirde arvutamisel rakendame ühikjõu staatikaga määramatule arvutusskeemile ja leiame nende sidemete reaktsioonid, mis nihkuvad. Vajaliku siirde leiame nüüd valemiga

$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r_{jk} \quad (13.64)$$

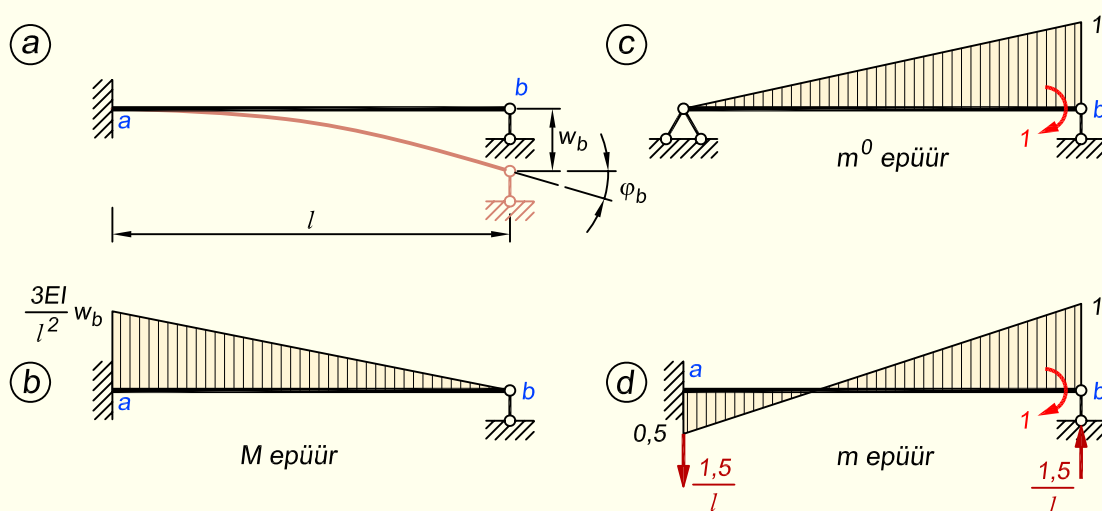
kus Δc_j on sideme j siire ja r_{jk} on ühikjõust l_k põhjustatud reaktsioon staatikaga määratu arvutusskeemi sidemes j .

Suurema hulga siirete arvutamisel rakendame ühikjõud staatikaga määratavale põhiskeemile ja siirded leiame järgmise avaldisega

$$\Delta_{kr}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k^0 M_r}{EI} + \frac{n_k^0 N_r}{EA} + k_j \frac{q_k^0 Q_r}{GA} \right) dx - \sum_{j=1}^m \Delta_{c_j} r_{jk}^0 \quad (13.65)$$

kus m_k^0, n_k^0, q_k^0 on ühikjõust 1_k põhjustatud sisejõud, r_{jk}^0 on reaktsioon staatikaga määratavas põhiskeemis ning M_r, N_r, Q_r on tugede siiretest põhjustatud sisejõud staatikaga määramatus arvutusskeemis.

NÄIDE 13.4. Arvutada joonisel 13.16, a kujutatud tala toeristlõike b pööre φ_b toe b vajumisest w_b võrra.



Joonis 13.16. Siirde arvutus toe nihkumisest

LAHENDUS

Konsooli vabale otsale rakendatud jõust põhjustatud konsooli otsa siirde arvutame valemiga

$$w_b = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Seda valemit saame kasutada toereaktsiooni F_b leidmiseks. Kuna

$$w_b = \frac{F_b l^3}{3EI}$$

siis toereaktsiooniks saame

$$F_b = \frac{3EIw_b}{l^3}$$

ja toemomendiks

$$M_a = F_b l = \frac{3EIw_b}{l^2}$$

Toe b vajumisest põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 13.16, b . Staatikaga määratavale põhiskeemile rakendatud ühikmomendist $m_b = 1$ põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 13.16, c .

Ristlõike b pöörde leiame nüüd avaldisega (13.65) põikjõudude mõju arvestamata

$$\varphi_{br} = \frac{l}{6EI} \cdot 1 \cdot \frac{3EI}{l^2} w_b - \left(-w_b \cdot \frac{1}{l} \right) = 1,5 \frac{w_b}{l}$$

Kui ühikmoment rakendada staatikaga määramatule skeemile (joonis 13.16, d), siis arvutame toeristlõike pöörde valemiga (13.64)

$$\varphi_{br} = - \left(-w_b \cdot \frac{1,5}{l} \right) = 1,5 \frac{w_b}{l}$$

Toereaktsioonid on näidatud joonisel 13.16, d ilma arvutust esitamata.

13.9. Arvutuse kontroll

13.9.1. Võrrandisüsteemi kordajate ja vabaliikmete kontrollimine

Vigade vältimiseks ja ülesleidmiseks on vaja kogu arvutust kontrollida. Vigadeta lahendamise aluseks on õige põhiskeemi valik ja ühiktundmatutest ning koormusest põhjustatud sisejõudude arvutamine staatikaga määratavas põhiskeemis. Põhiskeemi staatikaga määratud sisejõudude epüüre kontrollime tasakaalutingimustega.

Järgnevalt kontrollime kanooniliste võrrandite tundmatute kordajaid ja vabaliikmeid. Nende kontrollimine tugineb jõudude mõju sõltumatuse printsiibile, mille põhjal jõudude grupist põhjustatud siire võrdub eraldi igast jõust põhjustatud siirete summaga. Seetõttu kujutab kontroll endast põhiskeemi summaarsete siirete arvutamist ühiktundmatutest ja koormusest.

Tundmatute kordajate kontroll

Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate kontrolli võib teha kahte moodi.

Esimese variandi korral me kontrollime võrrandeid üksikhaaval. Võrrandisüsteemi võrrandis k on tundmatu X_i ees olev tegur δ_{ki} tundmatule X_k vastav siire, mis on põhjustatud ühikjõust $X_i = 1$. Tundmatule X_k vastava summaarse siirde, mis on põhjustatud kõigist ühiktundmatutest ($\sum_{i=1}^n X_i = 1$), tähistame indeksiga Σ : $\delta_{k\Sigma}$. Summaarset siiret $\delta_{k\Sigma}$ võib arvutada kahel viisil, kas võrrandi k kõigi tundmatute kordajate liitmise teel

$$\delta_{k\Sigma} = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kn} = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} \quad (13.66)$$

või tundmatust $X_k = 1$ ja kõigist ühiktundmatutest ($\sum_{i=1}^n X_i = 1$) põhjustatud epüüride ordi-

naatide korrutiste integreerimisega

$$\delta_{k\Sigma} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k m_\Sigma}{EI} + \frac{n_k n_\Sigma}{EA} + k_j \frac{q_k q_\Sigma}{GA} \right) dx \quad (13.67)$$

kus

$$\begin{aligned} m_\Sigma &= m_1 + m_2 + \dots + m_n \\ n_\Sigma &= n_1 + n_2 + \dots + n_n \\ q_\Sigma &= q_1 + q_2 + \dots + q_n \end{aligned} \quad (13.68)$$

Summaarsete epüüride m_Σ , n_Σ , q_Σ ordinaadid on soovitatav arvutada põhiskeemile rakendatud ühiktundmatutest ($\sum_{i=1}^n X_i = 1$), mitte aga leida liitmise teel valemitega (13.68). Neid valemiteid kasutatakse kõigist ühiktundmatutest põhjustatud summaarsete epüüride arvatud ordinaatide kontrollimiseks. Kui ka ainult ühest tundmatust põhjustatud epüürid ei ole õigesti arvatud, siis valemitega (13.68) leitud summaarsete epüüride ordinaadid ei ole õiged. Seepärast on tingimata vaja tasakaalutingimustega kontrollida summaarsete epüüride õigsust.

Kui epüüride m_Σ , n_Σ , q_Σ ordinaate korrutada vastavalt epüüride m_k , n_k , q_k ordinaatidega ja integreerida, siis vigadeta arvutamisel võrdub integraalide summa (13.67) võrrandi k tundmatute kordajate summaga $\delta_{k\Sigma}$ (13.66).

Teise variandi korral me kontrollime kõik võrrandid korraga. Epüüride m_Σ , n_Σ , q_Σ ordinaatide teiste astmete integraalide summa valemi (13.67) järgi, kus täht k on asendatud märgiga Σ

$$\delta_{\Sigma\Sigma} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_\Sigma^2}{EI} + \frac{n_\Sigma^2}{EA} + k_j \frac{q_\Sigma^2}{GA} \right) dx \quad (13.69)$$

võrdub vigadeta arvutamisel võrrandisüsteemi kõigi tundmatute kordajate summaga

$$\delta_{\Sigma\Sigma} = \sum_{k=1}^v \sum_{i=1}^v \delta_{ki} \quad (13.70)$$

See kontrollib korraga kõigi tundmatute ees olevaid kordajaid, kuid vea puhul ei ole teada, millises võrrandis on viga tehtud.

Vabaliikmete kontroll

Põhiskeemi koormuse epüüride M_p^0 , N_p^0 , Q_p^0 ja ühikjõudude summaarsete epüüride m_Σ , n_Σ , q_Σ ordinaatide korrutiste integreerimine valemiga

$$\Delta_{\Sigma p} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_\Sigma M_p^0}{EI} + \frac{n_\Sigma N_p^0}{EA} + k_j \frac{q_\Sigma Q_p^0}{GA} \right) dx \quad (13.71)$$

annab vigadeta arvutamisel kanooniliste võrrandite koormusliikmete (vabaliikmete) summa

$$\Delta_{\Sigma p} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np} = \sum_{j=1}^n \Delta_{jp} \quad (13.72)$$

Sisult kujutab see arvutus endast kõigile tundmatutele vastavate koormusest põhjustatud siirete summa leidmist.

Pärast tundmatute kordajate ja vabaliikmete kontrollimist lahendame võrrandisüsteemi. Pärast võrrandisüsteemi lahendamist on vaja kontrollida leitud lisatundmatute väärtusi. Lisatundmatud peavad samaselt rahuldama kõiki kanoonilisi võrrandeid.

13.9.2. Sisejõudude epüüride kontroll

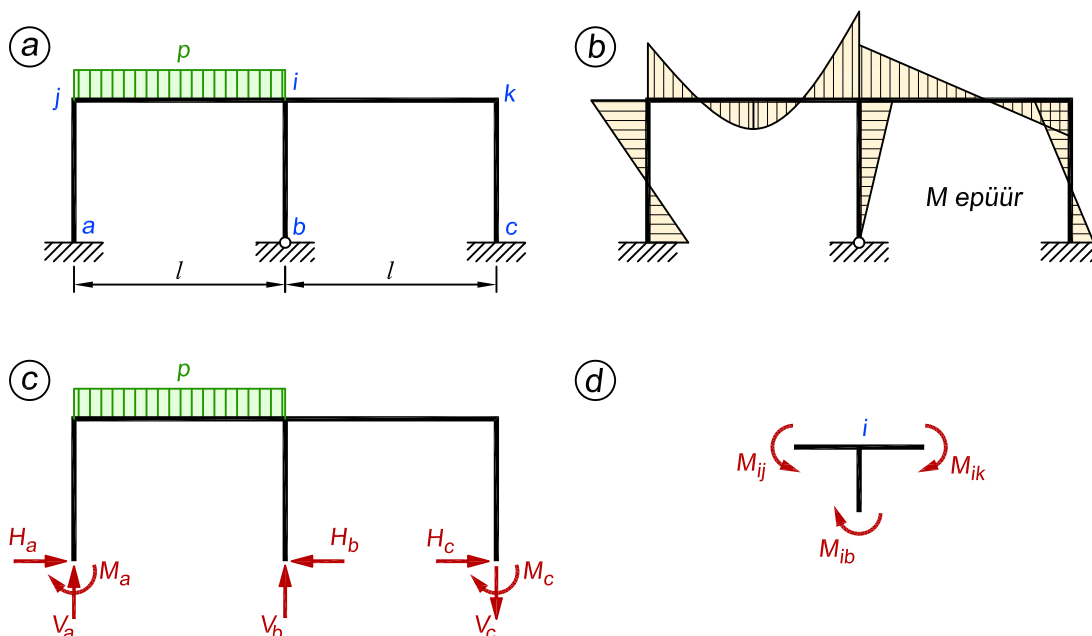
Staatikaline kontroll

Staatikalise kontrolliga veendume, kas epüürid staatikaga määratud põhiskeemi jaoks on koostatud õigesti. Kui arvutuskeem tervikuna ja arvutuskeemist eraldatud mis tahes osa eraldi rahuldab tasakaalutingimusi, siis on ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud epüürid staatikaga määratud põhiskeemi jaoks õiged. Lisaks võimaldab staatikaline kontroll hinnata lõpliku paindemomendi epüüri baasil arvatud põikjõu ja pikijõu epüüride korrektsust.

Joonisel 13.17, *a* esitatud viiekordselt staatikaga määramatu raami paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 13.17, *b*. Raamist eraldatud sõlmele rakendatud momendid peavad rahuldama momentide tasakaalu tingimusi. Näiteks joonisel 13.17, *d* kujutatud sõlme *i* jaoks

$$M_{ij} - M_{ib} - M_{ik} = 0 \quad (13.73)$$

Raam koos sellele mõjuva koormuse ja toereaktsioonidega (joonis 13.17, *c*) peab olema tasakaalus. Toereaktsioonid saame lõplikelt sisejõudude epüüridelt. Järgnevalt kirjutame välja



Joonis 13.17. Raami arvutuse staatikaline kontroll

kolm staatika tasakaalutingimust

$$\sum X = 0; \quad H_a - H_b + H_c = 0 \quad (13.74)$$

$$\sum Z = 0; \quad -V_a - V_b + V_c + pl = 0 \quad (13.75)$$

$$\sum M_a = 0; \quad -M_a - \frac{pl^2}{2} + V_b l - V_c \cdot 2l - M_c = 0 \quad (13.76)$$

Kuid lahendi staatikaline kontroll ei ütle meile lõplikku tõde, sest võimaldab küll kontrollida epüüride koostamise korrektsust, aga ei näita, kas lisatundmatud on õigesti arvatud ja kas paindemomendi epüür on õige. Kui ühiktundmatustest ja koormusest põhjustatud epüürid staatikaga määratud põhiskeemi jaoks on õiged ning valemiga (13.35) arvutamisel ei ole tehtud viga, siis on tasakaalutingimused rahuldatud lisatundmatute suvaliste väärtuste puhul.

Kinemaatikaline kontroll

Lõplikke sisejõudude epüüre M_p , N_p , Q_p kontrollime kinemaatiliste pidevustingimuste abil. Seda nimetatakse *kinemaatikaliseks kontrolliks*. Kui deformatsiooniolukord, mis vastab epüüridele M_p , N_p , Q_p , on ekvivalentne staatikaga määramatu arvutusskeemi deformatsiooniolukorraga, siis on lõppepüürid M_p , N_p , Q_p õiged. Valemiga (13.55) arvutame mõned siirded, mis staatikaga määramatus arvutusskeemis võrduvad nulliga. Niisugusteks siireteks on lisatundmatutele X_i vastavad siirded. Valemi (13.55) järgi integreerime põhiskeemis suvalisest ühiktundmatust $X_i = 1$ põhjustatud sisejõudude epüüride m_i^0 , n_i^0 , q_i^0 ordinaatide ja staatikaga määramatu skeemi sisejõudude epüüride M_p , N_p , Q_p ordinaatide korrutisi ning nende integraalide summa peab võrduma nulliga

$$\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i^0 M_p}{EI} + \frac{n_i^0 N_p}{EA} + k_j \frac{q_i^0 Q_p}{GA} \right) dx = 0 \quad (13.77)$$

kuna lisatundmatutele vastavad siirded staatikaga määramatus arvutusskeemis on nullid. Võrrandite (13.77) koostamisel tuleb arvestada samade integraalidega, millega arvutasime kanooniliste võrrandite siirdeid. Kui kanooniliste võrrandite kordajad ja vabaliikmed arvutasime ainult paindemomentide mõjuga, siis võrrandid (13.77) tuleb arvutada samuti ainult paindemomentide integraalidega

$$\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{m_i^0 M_p}{EI} dx = 0 \quad (13.78)$$

Seega paindemomendi M_p epüüri ja ühiktundmatu $X_i = 1$ epüüri m_i^0 ordinaatide korrutiste, mis on jagatud paindejäikusega EI , integraalide summa võrdub nulliga. Sama tulemuse saame vigadeta arvutamisel ka M_p ja m_Σ epüüridega

$$\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{m_\Sigma M_p}{EI} dx = 0 \quad (13.79)$$

Kui raami vardad on samast materjalist, siis esitame integraalide summa (13.78) järgmisel kujul

$$EI_0\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_i^0 M_p \frac{I_0}{I} dx = 0 \quad (13.80)$$

Kui tundmatute leidmisel on siirded arvatud ka piki- ja põikjõudude mõjuga, siis tuleb seda arvestada ka kontrollimisel.

Kokkuvõtvalt võib öelda, et ülesande lahendamisel jõumeetodiga on kasulik teha pärast paindemomendi lõppepüüri koostamist kinemaatikaline kontroll ning hiljem peale põikjõu ja pikijõu epüüride valmimist staatikaline kontroll.

Temperatuuri muutusest ja tugede siiretest põhjustatud epüüride kontroll

Temperatuuri muutusest ja tugede siiretest põhjustatud paindemomendi epüüride ordinaadid arvutame vastavalt valemitele (13.51) ja (13.52)

$$M_{kt} = m_{k1}X_{1t} + m_{k2}X_{2t} + \dots + m_{kn}X_{nt} \quad (13.81)$$

$$M_{kr} = m_{k1}X_{1r} + m_{k2}X_{2r} + \dots + m_{kn}X_{nr} \quad (13.82)$$

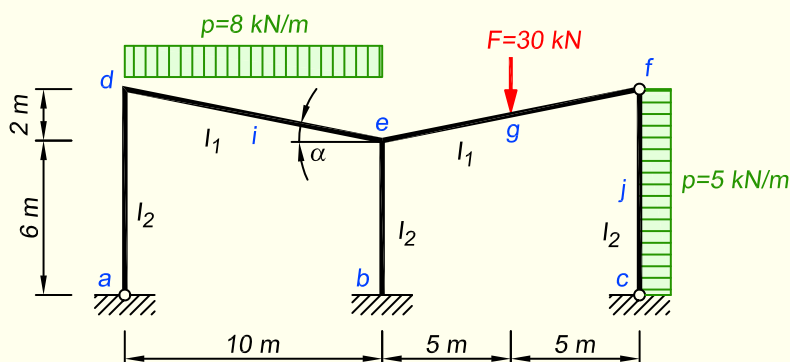
Nendes valemities puuduvad koormusest põhjustatud paindemomendi avaldise (13.35) liikmele M_p^0 vastavad liikmed, kuna temperatuuri muutus ja tugede siirded ei põhjusta sisejõude staatikaga määratavas põhiskeemis. Integraalide summa $\sum \int_0^{l_j} m_i M_p^0 dx$ võrdub võrrandisüsteemi võrrandi i vabaliikmega Δ_{ip} . Kuna avaldistes (13.51) ja (13.52) puudub epüürile M_p^0 analoogiline liige, siis integraalide summa epüüri M_t või M_r ja lisatundmatu $X_i = 1$ epüüri ordinaatide korrutistest ($\sum \int_0^{l_j} m_i M_t dx$ või $\sum \int_0^{l_j} m_i M_r dx$) ei võrdu nulliga, vaid võrrandi i vabaliikmega vastupidise märgiga

$$\sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_i M_t dx = -EI_0\Delta_{it} \quad (13.83)$$

$$\sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_i M_r dx = -EI_0\Delta_{ir} \quad (13.84)$$

Kui kanooniliste võrrandite siirded on arvatud paindemomentide, piki- ja põikjõudude mõjuga, siis kontrollimisel tuleb samuti teha.

NÄIDE 13.5. Koostada joonisel 13.18 kujutatud raami paindemomendi, põik- ja pikijõu epüürid, kasutades selleks jõumeetodit. Varraste inertsimomentide suhe on $I_1/I_2 = 2$.



Joonis 13.18. Raami arvutuskeem

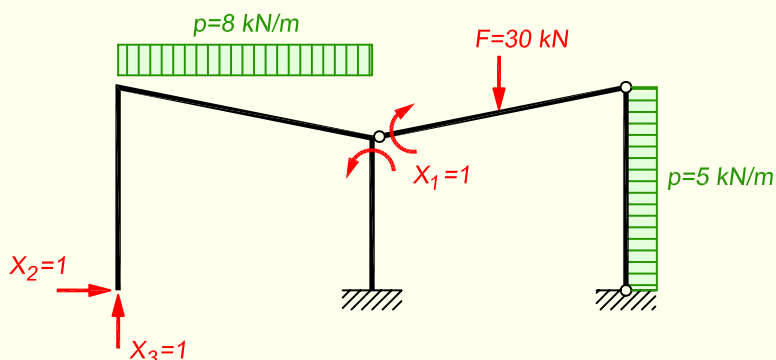
LAHENDUS

1. Leiame raami staatikaga määramatuse astme valemiga (13.8)

$$n = 3m - l_1 = 3 \cdot 2 - 3 = 3$$

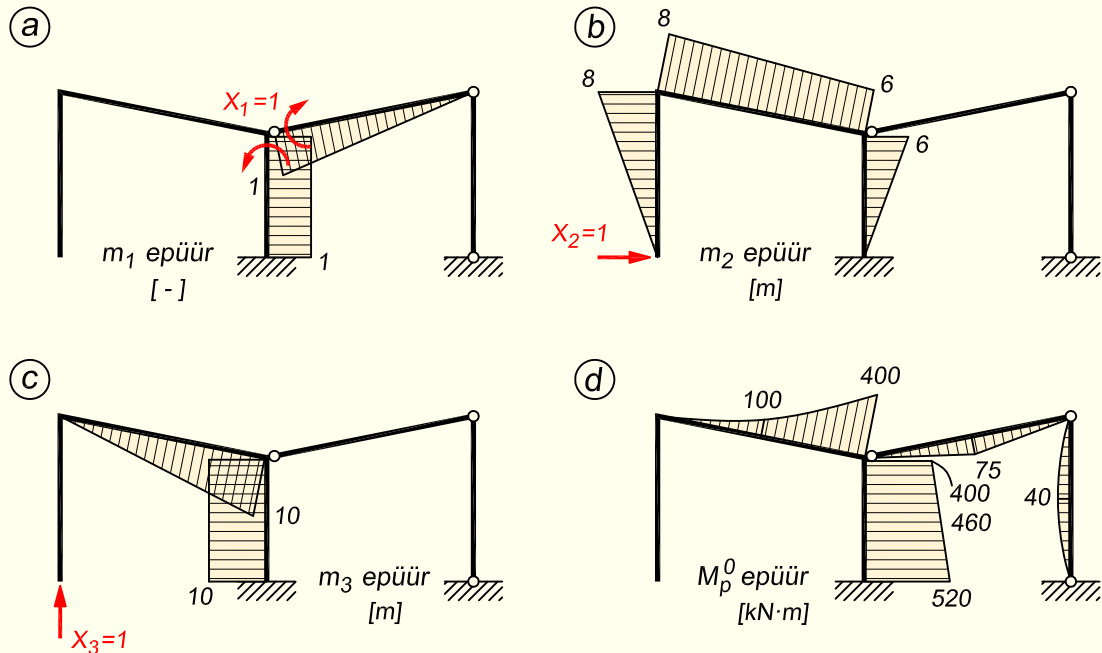
2. Staatikaga määratud põhiskeemi koostamine

Raami staatikaga määratud põhiskeemi koostamiseks eemaldame arvutuskeemist staatikaga määramatuse astmele vastava arvu liigsidemeid. Kuna siin ülesandes $n = 3$, siis tuleb eemaldada kolm sidet. Selleks paigutame varda $e-f$ vasakpoolsesse otsa liigendi ning eemaldame posti $a-d$ toe a . Liigendi lisamisega vabanesime ühest sidemest ja liigendtoe a eemaldamisega kahest sidemest. Ärajäetud sidemete asemel rakendame põhiskeemile lisatundmatud. Lisatundmatuteks on paindemoment X_1 , toe a reaktsiooni horisontaalne komponent X_2 ja vertikaalne komponent X_3 . Põhiskeem koormuse ja lisatundmatutega on kujutatud joonisel 13.19.



Joonis 13.19. Staatikaga määratud põhiskeem koormuse ja lisatundmatutega

3. Järgnevalt koostame ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud paindemomendi epüürid (joonis 13.20).



Joonis 13.20. Lisatundmatutest ja koormusest põhjustatud epüürid põhiskeemis

4. Jõumeetodi võrrandisüsteem lisatundmatute arvutamiseks on järgmine

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0$$

5. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate ja vabaliikmete leidmine

Arvestada tuleb ristlõigete erinevaid paindejäikuseid. Tundmatute kordajad δ_{ki} ja vabaliikmed Δ_{kp} arvutame EI_0 -kordsed. Järgnevas avaldistes on nimetatud tegevuse tõttu näha murrulises osas jäikuste suhet. Varrastel, mille jäikus on suurem, on murru nimetajasse lisatud 2.

Ühikjõududest põhjustatud siirded leiame lisatundmatutest põhjustatud epüüride ordinaatide korrutiste integreerimise teel, kusjuures δ järel oleva indeksi numbrid näitavad seda, milliseid epüüre tuleb vaadata.

$$EI_0\delta_{11} = 1 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{\sqrt{104}}{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 = 7,6997 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{12} = 1 \cdot 6 \cdot 3 = 18 \text{ m}^2$$

$$EI_0\delta_{13} = -1 \cdot 6 \cdot 10 = -60 \text{ m}^2$$

$$EI_0\delta_{22} = \frac{8}{3} \cdot 8 \cdot 8 + \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 7 \cdot 7 + 6 \cdot 6) + \frac{6}{3} \cdot 6 \cdot 6 = 494,22 \text{ m}^3$$

$$EI_0\delta_{23} = -10 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (0 - 4 \cdot 7 \cdot 5 - 6 \cdot 10) = -349,97 \text{ m}^3$$

$$EI_0\delta_{33} = 10 \cdot 6 \cdot 10 + \frac{\sqrt{104}}{3 \cdot 2} \cdot 10 \cdot 10 = 769,97 \text{ m}^3$$

Koormusest põhjustatud siirded leiame lisatundmatutest ja koormusest põhjustatud põhiskeemi epüüride abil.

$$EI_0\Delta_{1p} = 1 \cdot 6 \cdot 460 + \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (0 + 4 \cdot 0,75 \cdot 37,5 + 0,5 \cdot 75) + \\ + \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (0,5 \cdot 75 + 4 \cdot 0,25 \cdot 37,5 + 0) = 2855,61 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI_0\Delta_{2p} = \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (0 + 4 \cdot 7 \cdot 100 + 6 \cdot 400) + \frac{6}{6} (6 \cdot 400 + 4 \cdot 3 \cdot 460 + 0) = 12339,2 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

$$EI_0\Delta_{3p} = \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (0 - 4 \cdot 5 \cdot 100 - 10 \cdot 400) - 10 \cdot 6 \cdot 460 = -32699,0 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

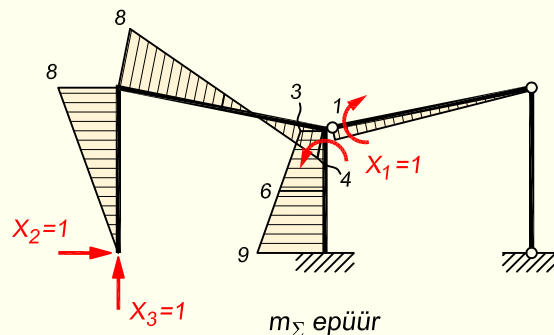
Jõumeetodi võrrandisüsteem koos leitud arvkoordajatega

$$7,6997 X_1 + 18,000 X_2 - 60,000 X_3 + 2855,61 = 0$$

$$18,000 X_1 + 494,22 X_2 - 349,97 X_3 + 12339,2 = 0$$

$$-60,000 X_1 - 349,97 X_2 + 769,97 X_3 - 32699,0 = 0$$

6. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate ja koormusest põhjustatud vabaliikmete kontrollimiseks koostame summaarse ühiklisatundmatutest põhjustatud paindemomendi epüüri m_Σ (joonis 13.21). See epüür tuleb kindlasti koostada mitte eespool olevate epüüride summeerimise teel, vaid arvutades samaaegselt arvutuskeemile rakendatud ühik-tundmatutest toereaktsioonid ja leides seejärel epüüri ordinaadid. Kui liita kokku varem koostatud epüürid, siis seal tehtud viga kandub edasi summaarsesse epüüri ja sel juhul kontroll seda ei näita.



Joonis 13.21. Lisatundmatutest põhjustatud summaarne epüür

Järgnevalt integreerime epüüride m_Σ ja m_1 ordinaatide korrutist, mille tulemusena saame lisatundmatule X_1 vastava EI_0 -kordse siirde, mis on põhjustatud kõigist ühiklisatundmatutest

$$EI_0\delta_{1\Sigma} = \frac{\sqrt{104}}{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 6 \cdot 6 = -34,300$$

See peab võrduma esimese võrrandi tundmatute kordajate algebralise summaga

$$EI_0\delta_{1\Sigma} = 7,6997 + 18 - 60 = -34,300$$

Edasi teeme sama epüüridega m_2 ja m_3

$$EI_0\delta_{2\Sigma} = \frac{8}{3} \cdot 8 \cdot 8 + \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 7 \cdot 2 - 6 \cdot 4) + \frac{6}{6} (-6 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 6 + 0) = 162,25$$

$$EI_0\delta_{2\Sigma} = 18 + 494,22 - 349,97 = 162,25$$

$$EI_0\delta_{3\Sigma} = \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (0 - 4 \cdot 5 \cdot 2 + 10 \cdot 4) + 10 \cdot 6 \cdot 6 = 360$$

$$EI_0\delta_{3\Sigma} = -60 - 349,97 + 769,97 = 360$$

Epüürist m_Σ leitav integraalide summa

$$EI_0\delta_{\Sigma\Sigma} = \frac{8}{3} \cdot 8 \cdot 8 + \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4) + \frac{\sqrt{104}}{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{6}{6} (3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 9 \cdot 9) = 487,95$$

peab võrduma kõigi tundmatute kordajate summaga

$$EI_0\delta_{\Sigma\Sigma} = 7,6997 + 494,22 + 769,97 + 2 \cdot (18 - 60 - 349,97) = 487,95$$

Võrrandite koormusest põhjustatud vabaliikmete kontrollimiseks integreerime summaarse m_Σ ja koormuse epüüri M_p^0 ordinaatide korrutist

$$EI_0\Delta_{\Sigma p} = \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (0 + 4 \cdot 2 \cdot 100 - 4 \cdot 400) + \frac{6}{6} (-3 \cdot 400 - 4 \cdot 6 \cdot 460 - 9 \cdot 520) + \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2 \cdot 2} (0 + 4 \cdot 0,75 \cdot 37,5 + 0,5 \cdot 75) + \frac{\sqrt{104}}{3 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 0,5 \cdot 75 = -17504$$

mis peab võrduma koormusest põhjustatud vabaliikmete summaga

$$EI_0\Delta_{\Sigma p} = 2855,61 + 12339,2 - 32699,0 = -17504$$

Nimetatud kontrollid näitavad ainult seda, kas integreerimised on õigesti tehtud, mitte põhiskeemi koostamise ja ühiktundmatutest põhjustatud epüüride ordinaatide arvutamise õigsust. Kui integreerimisel ei ole viga tehtud, võivad kontrollid välja tulla, isegi

kui ühiktundmatutest tekkivad epüürid on valed, kuna nendes epüürides esinevad vead võivad olla täpselt samal kujul uuesti tehtud summaarse epüüri koostamisel.

Pärast tundmatute kordajate ja vabaliikmete kontrollimist lahendame võrrandisüsteemi, mille tulemusena saame lisatundmatute väärtused

$$X_1 = -85,895 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad X_2 = 5,1527 \text{ kN}; \quad X_3 = 38,117 \text{ kN}$$

Juhul kui võrrandisüsteem on lahendatud käsitsi, siis tuleb kontrollida, kas saadud tulemused rahuldavad kõiki võrrandeid. Järgnevas kontrollis on näidatud ka kõigi võrrandisüsteemi liikmete ühikud. Peale tundmatute kordajate ja tundmatute väärtuste korutamist peavad ühe võrrandi elementidel olema samad ühikud.

$$\begin{aligned} -7,6997 \text{ m} \cdot 85,895 \text{ kN}\cdot\text{m} + 18,000 \text{ m}^2 \cdot 5,1527 \text{ kN} - 60,000 \text{ m}^2 \cdot 38,117 \text{ kN} + \\ + 2855,61 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 = 0 \\ -18,000 \text{ m}^2 \cdot 85,895 \text{ kN}\cdot\text{m} + 494,22 \text{ m}^3 \cdot 5,1527 \text{ kN} - 349,97 \text{ m}^3 \cdot 38,117 \text{ kN} + \\ + 12339,2 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 = 0 \\ 60,000 \text{ m}^2 \cdot 85,895 \text{ kN}\cdot\text{m} - 349,97 \text{ m}^3 \cdot 5,1527 \text{ kN} + 769,97 \text{ m}^3 \cdot 38,117 \text{ kN} - \\ - 32699,0 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 = 0 \end{aligned}$$

7. Paindemomendi epüüri ordinaadid leiame valemiga (13.35)

$$M_k = m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + m_{k3}X_3 + M_{kp}^0$$

$$M_d = 0 - 8 \cdot 5,1527 + 0 + 0 = -41,222 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ed} = 0 - 6 \cdot 5,1527 + 10 \cdot 38,117 - 400 = -49,746 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

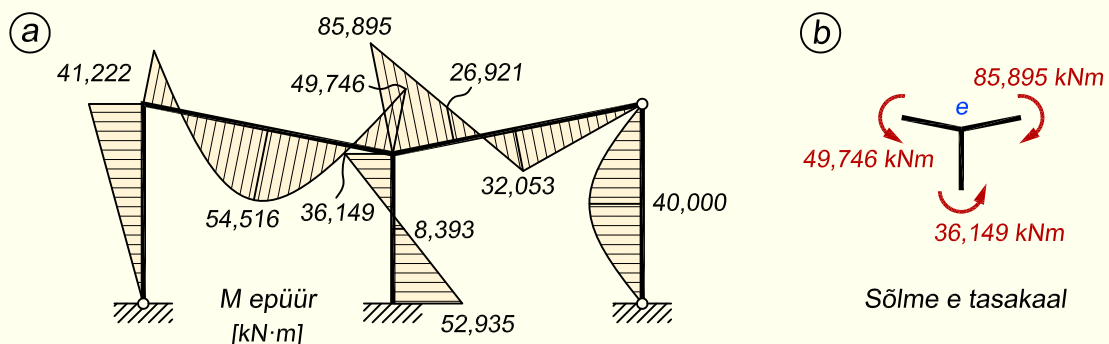
$$M_{eb} = -1 \cdot 85,895 + 6 \cdot 5,1527 - 10 \cdot 38,117 + 400 = -36,149 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{eg} = -1 \cdot 85,895 + 0 + 0 + 0 = -85,895 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_b = -1 \cdot 85,895 + 0 - 10 \cdot 38,117 + 520 = 52,935 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_g = -0,5 \cdot 85,895 + 0 + 0 + 75 = 32,053 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_i = 0 - 7 \cdot 5,1527 + 5 \cdot 38,117 - 100 = 54,516 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 13.22. Paindemomendi epüür ja sõlme e tasakaalu kontroll

Lõiked g ja i on avalõiked ja nendes saab paindemomendi leida lisaks nimetatud valemile ka tavalise epüüride liitmise teel, mis ei ole seotud jõumeetodiga. Selleks leiame vaadeldavas vardas tekkiva epüüri, juhul kui tegemist oleks lihttalaga ja riputame saadud epüüri eespool leitud toordinaatide vahele üles. Kasutame valemit (13.41)

$$M_k = M_{kp}^0 + M_{vas} \cdot \xi'_k + M_{par} \cdot \xi_k$$

ja saame

$$M_g = \frac{30 \cdot 5 \cdot 5}{10} - 85,895 \cdot 0,5 - 0 = 32,053 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_i = \frac{8 \cdot 10^2}{8} - 41,222 \cdot 0,5 - 49,746 \cdot 0,5 = 54,516 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lõige j paikneb vardas $c-f$, millel mõlemas otsas on liigend ja mis seega töötab nagu staatikaga määratud varras. Selles lõikes on paindemoment võrdne põhiskeemi paindemomendiga

$$M_j = \frac{5 \cdot 8^2}{8} = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kui sõlmedes on paindemomendi ordinaadid arvatud, siis võiks kontrollida sõlmede tasakaalu. Selleks lõikame sõlme arvutuskeemist välja ning märgime kõigile liituvatele varrastele peale nooled, mis kujutavad paindemomenti selles vardas. Noole saba peab jääma varda tõmmatud poolele. Lisades igale noolele juurde tema arvulise väärtuse, peavad need peale summeerimist õigete märkidega andma kokku nulli.

Meie arvutuskeemis on sõlmeks, mida saab niimoodi kontrollida, keskmine ülemine sõlm e (joonis 13.22, b). Märkide valimisel tuleb jälgida noole pöördesuunda.

$$M_{eg} + M_{ed} + M_{eb} = 85,895 - 49,746 - 36,149 = 0$$

Sõlmede tasakaalu kontroll annab aga vähe informatsiooni kogu epüüri õigsuse kohta. Järgnevalt kontrollime lahendust kinemaatilise kontrolli abil, milleks arvutame lisatundmatule $X_i = 1$ vastavad siirded staatikaga määramatus arvutuskeemis, mis pidevustingimustele vastavalt peavad võrduma nulliga.

$$EI_0 \Delta_{1p} = 1 \cdot 6 \cdot 8,393 + \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2 \cdot 2} (-1 \cdot 85,895 - 4 \cdot 0,75 \cdot 26,921 + 0,5 \cdot 32,053) + \frac{\sqrt{104}}{3 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 0,5 \cdot 32,053 = 0$$

$$EI_0 \Delta_{2p} = \frac{8}{3} \cdot 8 \cdot 41,222 + \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (8 \cdot 41,222 - 4 \cdot 7 \cdot 54,516 + 6 \cdot 49,746) + \frac{6}{6} (-6 \cdot 36,149 + 4 \cdot 3 \cdot 8,393 + 0) = 0$$

$$EI_0 \Delta_{3p} = \frac{\sqrt{104}}{6 \cdot 2} (0 + 4 \cdot 5 \cdot 54,516 - 10 \cdot 49,746) - 10 \cdot 6 \cdot 8,393 = 0$$

8. Põikjõu epüüri ordinaadid leiame valemiga (13.47)

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{M_{par} - M_{vas}}{l}$$

Kaldvardas tuleb lihttala põikjõu arvutamisel arvestada ka nurgaga.

$$\sin \alpha = 0,1961; \quad \cos \alpha = 0,9806$$

$$Q_{ad} = \frac{-41,222 - 0}{8} = -5,153 \text{ kN}$$

$$Q_{de} = 8 \cdot 5 \cdot 0,9806 + \frac{-49,746 + 41,222}{\sqrt{104}} = 38,388 \text{ kN}$$

$$Q_{ed} = -8 \cdot 5 \cdot 0,9806 + \frac{-49,746 + 41,222}{\sqrt{104}} = -40,060 \text{ kN}$$

$$Q_{eg} = 15 \cdot 0,9806 + \frac{0 + 85,895}{\sqrt{104}} = 23,132 \text{ kN}$$

$$Q_{fg} = -15 \cdot 0,9806 + \frac{0 + 85,895}{\sqrt{104}} = -6,286 \text{ kN}$$

$$Q_{be} = \frac{-36,149 - 52,935}{6} = -14,847 \text{ kN}$$

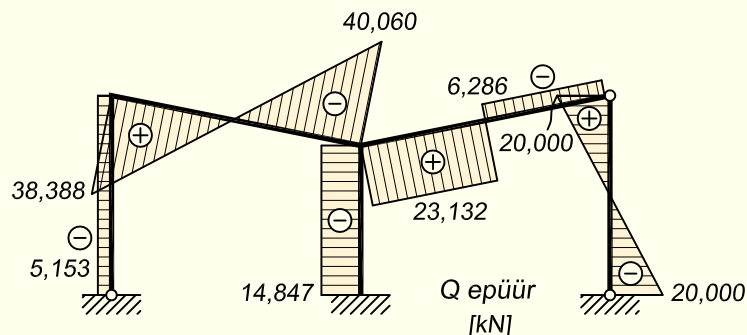
Koondjõuga koormatud varrastes võib põikjõu leida ka nii, et jagame varda jõu koha pealt osadeks ja vaatame kumbagi poolt eraldi. Kuna nüüd ei jää vaadeldava lõigu ulatusse ühtegi koormust, siis sellega väldime lihttala põikjõu arvutamist ja avaldis muutub lühemaks. Varda $e-f$ põikjõu arvutus oleks sel juhul järgmine

$$Q_{eg} = \frac{32,053 + 85,895}{\frac{\sqrt{104}}{2}} = 23,132 \text{ kN}; \quad Q_{fg} = \frac{0 - 32,053}{\frac{\sqrt{104}}{2}} = -6,286 \text{ kN}$$

Lauskoormusega varraste tükeldamisel mõtet ei ole, kuna igal juhul jääb vaadeldava lõigu peale mingi osa koormusest ja tuleb välja kirjutada ka lihttala põikjõu osa.

Vardal $c-f$ on mõlemas otsas liigend, mistõttu see töötab nagu staatikaga määratud varras.

$$Q_{fc} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ kN}; \quad Q_{cf} = -5 \cdot 4 = -20 \text{ kN}$$



Joonis 13.23. Põikjõu epüür

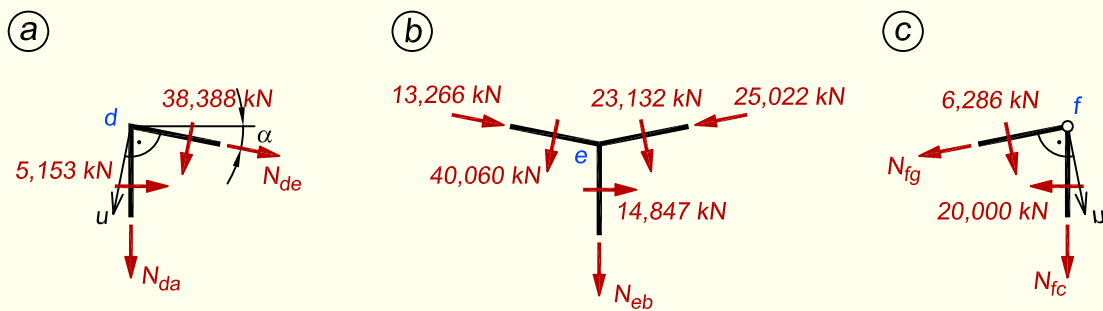
9. Pikijõu epüüri ordinaadid leiame sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest. Selleks lõikame sõlme arvutuskeemist välja ja märgime põikjõu epüüri abil sõlme joonisele seal esinevate põikjõudude väärtused. Noole suuna valikul tuleb lähtuda põikjõu märgist. Positiivset põikjõudu tähistav nooleke pöörab ümber sõlme päripäeva.

Samuti märgime sõlme joonisele tundmatud pikijõud. Soovitav on need jõud märkida suunaga sõlmest eemale, kuna sel juhul on tasakaalutingimusest saadav pikijõu märk kohe õige.

$$\sin \alpha = 0,1961; \quad \cos \alpha = 0,9806$$

Sõlm *d* (joonis 13.24, *a*)

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad N_{de} \cdot 0,9806 + 5,153 - 38,388 \cdot 0,1961 &= 0; \quad N_{de} = 2,422 \text{ kN} \\ \sum u = 0; \quad N_{da} \cdot 0,9806 + 38,388 - 5,153 \cdot 0,1961 &= 0; \quad N_{da} = -38,117 \text{ kN} \end{aligned}$$



Joonis 13.24. Sõlmede tasakaal

Sõlm *f* (joonis 13.24, *c*)

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad -N_{fg} \cdot 0,9806 - 20 + 6,286 \cdot 0,1961 &= 0; \quad N_{fg} = -19,139 \text{ kN} \\ \sum u = 0; \quad N_{fc} \cdot 0,9806 + 6,286 - 20 \cdot 0,1961 &= 0; \quad N_{fc} = -2,411 \text{ kN} \end{aligned}$$

Sõlm *e* (joonis 13.24, *b*)

Selles sõlmes arvutuse tegemiseks on esmalt vaja teada sõlmes liituvate riivide pikijõudusid. Need me saame leida, lähtudes sõlmedes *d* ja *f* arvutatud riivide ülemiste otste sisejõududest ja arvestades kummalgi vardal paiknevat koormust.

$$N_{ed} = 2,422 - 8 \cdot 10 \cdot 0,1961 = -13,266 \text{ kN}$$

$$N_{eg} = -19,139 - 30 \cdot 0,1961 = -25,022 \text{ kN}$$

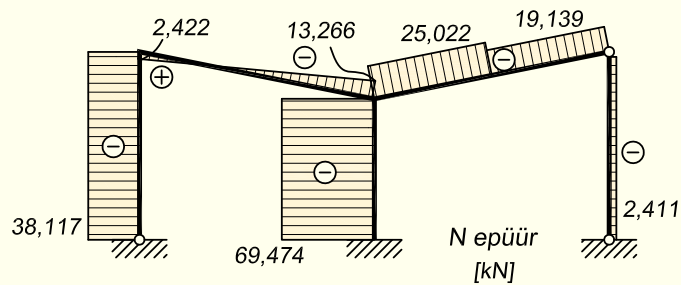
Sõlmes *e* on nüüd tundmatuks ainult posti pikijõud ja horisontaalsuunalist tasakaalutingimust saame kasutada kontrolliks

$$\sum X = (13,266 - 25,022) \cdot 0,9806 + 14,847 + (23,132 - 40,060) \cdot 0,1961 = 0$$

Posti pikijõu saame

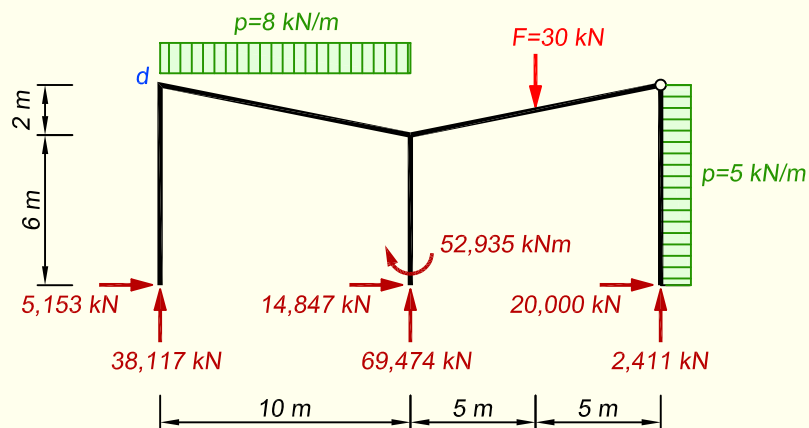
$$\sum Z = 0; \quad -N_{eb} + (40,060 + 23,132) \cdot 0,9806 + (13,266 + 25,022) \cdot 0,1961 = 0$$

$$N_{eb} = -69,474 \text{ kN}$$



Joonis 13.25. Pikijõu epüür

10. Ülesande lõpus tuleb teha staatikaline kontroll (joonis 13.26), milleks kirjutame välja koormuste ja toereaktsioonide tasakaalutingimused. Need kirjutame horisontaal- ja vertikaaltelje suunas ning lisaks kirjutame ka momentide summa punkti d suhtes.



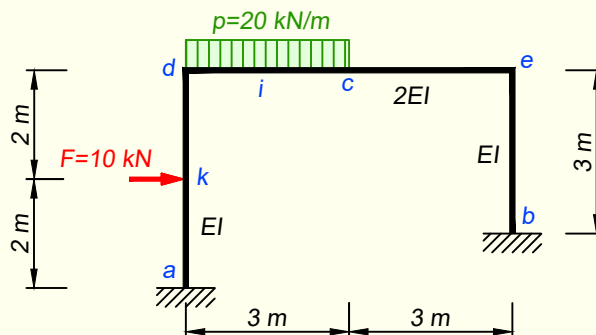
Joonis 13.26. Staatikaline kontroll

$$\sum X = -5 \cdot 8 + 5,153 + 14,847 + 20 = 0$$

$$\sum Z = 8 \cdot 10 + 30 - 38,117 - 69,474 - 2,411 = 0$$

$$\sum M_d = -8 \cdot 10 \cdot 5 - 30 \cdot 15 - 5 \cdot 8 \cdot 4 + 5,153 \cdot 8 + 14,847 \cdot 8 + 20 \cdot 8 + 69,474 \cdot 10 + 2,411 \cdot 20 - 52,935 = 0$$

NÄIDE 13.6. Koostada joonisel 13.27 kujutatud raami paindemomendi, põik- ja pikijõu epüürid, kasutades selleks jõumeetodit. Varraste paindejäikuste erinevus on näidatud joonisel.



Joonis 13.27. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

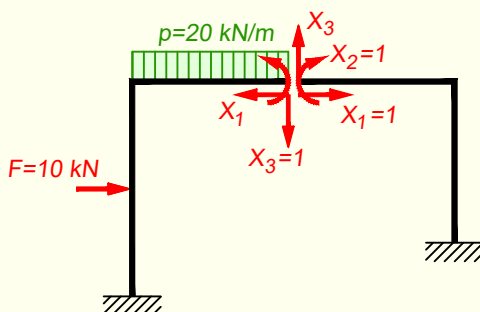
1. Leiame raami staatikaga määramatuse astme valemiga (13.7)

$$n = 3m = 3 \cdot 1 = 3$$

2. Staatikaga määratud põhiskeemi koostamine

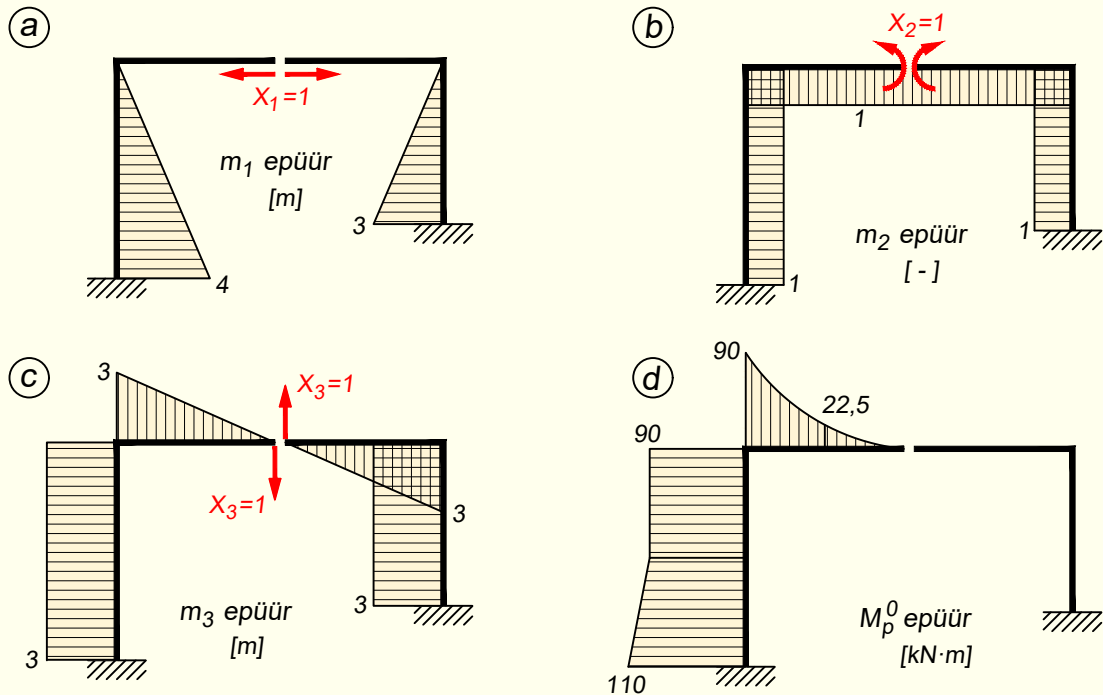
Raami staatikaga määratud põhiskeemi koostamiseks eemaldame arvutuskeemist staatikaga määramatuse astmele vastava arvu liigsidemeid. Siin ülesandes saime määramatuse astmeks $n = 3$ ja seetõttu eemaldame raami esialgselt arvutuskeemist kolm sidet. Selleks eraldame ristlõike c kohal raami lõikega kaheks osaks. Tekib kahest konsoolist koosnev põhiskeem, kus üheks konsooliks on raami vasakpoolne osa $a-d-c$ ja teiseks konsooliks parempoolne osa $b-e-c$.

Kuna me lõikasime raami varda ristlõike c kohalt läbi, siis ei saa selles lõikes esineda enam ühtegi sisejõudu. Lisatundmatuteks on seetõttu ristlõike c pikijõud X_1 , paindemoment X_2 ja põikjõud X_3 . Staatikaga määratud põhiskeem koos lisatundmatutega on kujutatud joonisel 13.28.



Joonis 13.28. Staatikaga määratud põhiskeem koormuse ja lisatundmatutega

3. Järgnevalt koostame ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud paindemomendi epüürid (joonis 13.29).



Joonis 13.29. Lisatundmatutest ja koormusest põhjustatud epüürid põhiskeemis

4. Jõumeetodi võrrandisüsteem lisatundmatute arvutamiseks on järgmine

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0$$

5. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate ja vabaliikmete leidmine

Arvestame ristlõigete erinevaid paindejäikuseid. Postide paindejäikus on EI ja riivi paindejäikus $2EI$. Tundmatute kordajad δ_{ki} ja vabaliikmed Δ_{kp} arvutame EI_0 -kordsed, valides postide jäikuse sellega võrdseks. Suurema jäikusega varrastel on seetõttu murru nimetajasse lisatud 2.

$$EI_0\delta_{11} = \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{3}{3} \cdot 3 \cdot 3 = 30\frac{1}{3} \text{ m}^3$$

$$EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1,5 = 12,5 \text{ m}^2$$

$$EI_0\delta_{13} = EI_0\delta_{31} = -3 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1,5 = -10,5 \text{ m}^3$$

$$EI_0\delta_{22} = 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{6}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 = 10 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{23} = EI_0\delta_{32} = -1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 1 = -3 \text{ m}^2$$

$$EI_0\delta_{33} = 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{3}{3 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 72 \text{ m}^3$$

Koormusest põhjustatud siirded leiame lisatundmatutest ja koormusest põhjustatud põhiskeemi epüüride abil

$$EI_0\Delta_{1p} = -\frac{2}{6} (4 \cdot 110 + 4 \cdot 3 \cdot 100 + 2 \cdot 90) - 90 \cdot 2 \cdot 1 = -786 \frac{2}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

$$EI_0\Delta_{2p} = -1 \cdot 2 \cdot 100 - 1 \cdot 2 \cdot 90 - \frac{3}{6 \cdot 2} (1 \cdot 90 + 4 \cdot 1 \cdot 22.5 + 0) = -425 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI_0\Delta_{3p} = 3 \cdot 2 \cdot 100 + 3 \cdot 2 \cdot 90 + \frac{3}{6 \cdot 2} (3 \cdot 90 + 4 \cdot 1,5 \cdot 22,5 + 0) = 1241 \frac{1}{4} \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

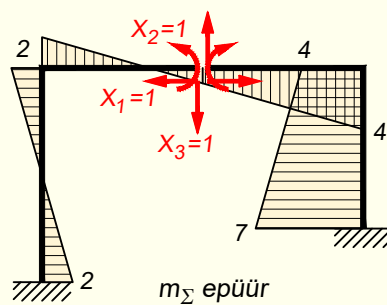
Jõumeetodi võrrandisüsteem, kus siirded on asendatud EI_0 -kordsete siiretega, on järgmine

$$30 \frac{1}{3} X_1 + 12,5 X_2 - 10,5 X_3 - 786 \frac{2}{3} = 0$$

$$12,5 X_1 + 10 X_2 - 3 X_3 - 425 = 0$$

$$-10,5 X_1 - 3 X_2 + 72 X_3 + 1241 \frac{1}{4} = 0$$

6. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate ja koormusest põhjustatud vabaliikmete kontrollimiseks koostame summaarse ühiklisatundmatutest põhjustatud paindemomendi epüüri m_Σ (joonis 13.30).



Joonis 13.30. Lisatundmatutest põhjustatud summaarne epüür

Järgnevalt integreerime epüüride m_Σ ja m_1 ordinaatide korrutist

$$EI_0\delta_{1\Sigma} = \frac{4}{6} (4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 0 + 0) + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 6 = 32 \frac{1}{3}$$

See peab võrduma esimese võrrandi tundmatute kordajate algebralise summaga

$$EI_0\delta_{1\Sigma} = 30\frac{1}{3} + 12,5 - 10,5 = 32\frac{1}{3}$$

Integreerime nüüd epüüride m_Σ ja m_2 ning m_Σ ja m_3 ordinaatide korrutisi

$$EI_0\delta_{2\Sigma} = 1 \cdot 4 \cdot 0 + \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 5,5 = 19,5$$

$$EI_0\delta_{3\Sigma} = 3 \cdot 4 \cdot 0 + \frac{6}{6 \cdot 2} (3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 4) + 3 \cdot 3 \cdot 5,5 = 58,5$$

Saadud tulemused peavad olema võrdsed võrrandisüsteemi vastavalt teise ja kolmanda võrrandi tundmatute EI_0 -kordsete kordajate algebralise summaga

$$EI_0\delta_{2\Sigma} = 12,5 + 10 - 3 = 19,5$$

$$EI_0\delta_{3\Sigma} = -10,5 - 3 + 72 = 58,5$$

Epüürist m_Σ leitav integraalide summa

$$EI_0\delta_{\Sigma\Sigma} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{6}{6 \cdot 2} (2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4) + \frac{3}{6} (4 \cdot 4 + 4 \cdot 5,5 \cdot 5,5 + 7 \cdot 7) = 110\frac{1}{3}$$

peab võrduma võrrandisüsteemi kõigi tundmatute kordajate summaga

$$EI_0\delta_{\Sigma\Sigma} = 30\frac{1}{3} + 10 + 72 + 2(12,5 - 10,5 - 3) = 110\frac{1}{3}$$

Kontrollid näitavad, et tundmatute kordajad oleme arvutanud õigesti.

Tundmatute kordajate kontrollimisel võime valida, milliseid eespool näidatud avaldisi kasutada. Me võime piirduda ainult viimasena kirjeldatud $EI_0\delta_{\Sigma\Sigma}$ arvutusega. Kui see välja tuleb, siis on korruga kõigi võrrandite kordajad ära kontrollitud. Kui see kontroll aga välja ei tule, siis ei anna see infot, millises võrrandis võib viga olla. Sel juhul tuleb teha üksikhaaval kontrollid $EI_0\delta_{1\Sigma}$, $EI_0\delta_{2\Sigma}$ ja $EI_0\delta_{3\Sigma}$.

Kanooniliste võrrandite koormusest põhjustatud vabaliikmete kontrollimiseks integreerime summaarse m_Σ ja koormuse epüüri M_p^0 ordinaatide korrutist

$$EI_0\Delta_{\Sigma p} = -\frac{2}{6} (110 \cdot 2 + 4 \cdot 100 \cdot 1 + 90 \cdot 0) + 90 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{3}{6 \cdot 2} (90 \cdot 2 + 4 \cdot 22,5 \cdot 0,5 + 0) = 29\frac{7}{12}$$

mis peab võrduma koormusest põhjustatud vabaliikmete summaga

$$EI_0\Delta_{\Sigma p} = -786\frac{2}{3} - 425 + 1241,25 = 29\frac{7}{12}$$

Pärast tundmatute kordajate ja vabaliikmete kontrollimist lahendame võrrandisüsteemi, mille tulemusena saame lisatundmatute väärtused

$$X_1 = 10,640 \text{ kN}; \quad X_2 = 24,804 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad X_3 = -14,654 \text{ kN}$$

7. Paindemomendi epüüri ordinaadid leiame valemiga (13.35)

$$M_k = m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + m_{k3}X_3 + M_{kp}^0$$

$$M_a = 4 \cdot 10,640 + 1 \cdot 24,804 + 3 \cdot 14,654 - 110 = 1,326 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_k = 2 \cdot 10,640 + 1 \cdot 24,804 + 3 \cdot 14,654 - 90 = 0,046 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_d = 0 + 1 \cdot 24,804 + 3 \cdot 14,654 - 90 = -21,234 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_i = 0 + 1 \cdot 24,804 + 1,5 \cdot 14,654 - 22,5 = 24,285 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = X_2 = 24,804 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_e = 0 + 1 \cdot 24,804 - 3 \cdot 14,654 + 0 = -19,158 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_b = 3 \cdot 10,640 + 1 \cdot 24,804 - 3 \cdot 14,654 + 0 = 12,762 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lõiked i ja k on avalõiked ja nendes saab paindemomendi leida ka valemiga (13.41)

$$M_k = M_{kp}^0 + M_{vas} \cdot \xi'_k + M_{par} \cdot \xi_k$$

mille abil saame

$$M_i = \frac{20 \cdot 3^2}{8} - 21,234 \cdot 0,5 + 24,804 \cdot 0,5 = 24,285 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_k = \frac{10 \cdot 2 \cdot 2}{4} + 1,326 \cdot 0,5 - 21,234 \cdot 0,5 = 0,046 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Paindemomendi võime arvutada ka teisiti, asendades põhiskeemis tundmatud X_i nende tegelike arvuliste väärtustega (joonis 13.31). Edasi arvutame raami paindemomendid põhiskeemi konsoolsete osade järgi, nii nagu me tavalist konsooli arvutame. Konsoolisel osal $a-d-c$ alustame arvutust konsooli vaba otsa c poolt ja liigume arvutustega edasi jäiga toe a suunas. Parempoolsel konsoolil alustame arvutust samuti lõike c juurest.

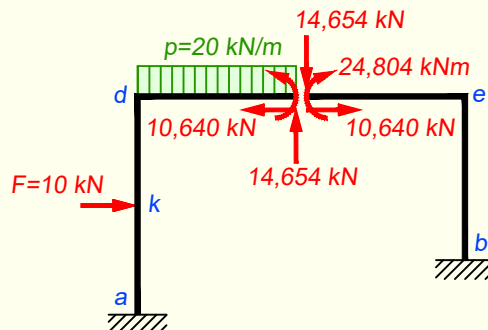
$$M_d = 24,804 + 14,654 \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = -21,234 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_k = 10,640 \cdot 2 + 24,804 + 14,654 \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0,046 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

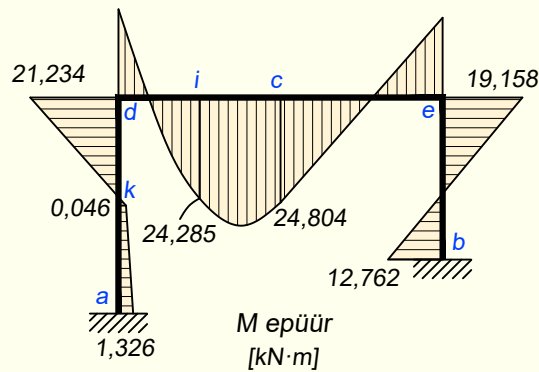
$$M_a = 10,640 \cdot 4 + 24,804 + 14,654 \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 10 \cdot 2 = 1,326 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_e = 24,804 - 14,654 \cdot 3 = -19,158 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_b = 24,804 + 10,640 \cdot 3 - 14,654 \cdot 3 = 12,762 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 13.31. Põhiskeem tundmatute X_i tegelike väärtustega



Joonis 13.32. Paindemomendi epüür

8. Kinemaatikaline kontroll

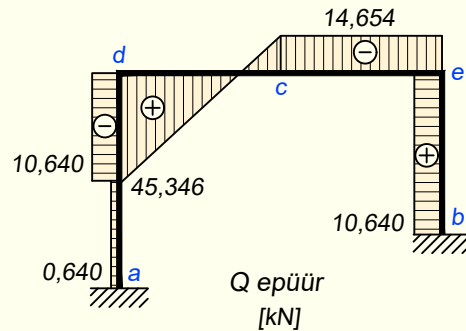
Järgnevalt kontrollime paindemomendi epüüri õigsust. Vastavalt pidevustingimustele on lisatundmatutele vastavad siirded nullid. Kui üldiselt tuleb kontrollid teha kõigi põhiskeemi m epüüridega, siis praegusel juhul piisab ka näiteks m_2 epüüri kasutamisest, kuna see katab ära kogu arvutuskeemi kõik vardad. Arvutame nüüd lisatundmatule X_2 vastava siirde, mida teeme epüüride m_2 ja M abil

$$\begin{aligned}
 EI_0\Delta_{2p} = & 1 \cdot \frac{1,326 + 0,046}{2} \cdot 2 + 1 \cdot \frac{0,046 - 21,234}{2} \cdot 2 + \\
 & + \frac{3}{6 \cdot 2} (-1 \cdot 21,234 + 4 \cdot 1 \cdot 24,285 + 1 \cdot 24,804) + 1 \cdot \frac{24,804 - 19,158}{2} \cdot \frac{3}{2} + \\
 & + 1 \cdot \frac{12,762 - 19,158}{2} \cdot 3 = 0,002 \approx 0
 \end{aligned}$$

9. Põikjõu epüüri ordinaadid leiame valemiga (13.47)

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{M_{par} - M_{vas}}{l}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{a-k} &= \frac{0,046 - 1,326}{2} = -0,640 \text{ kN} \\
 Q_{k-d} &= \frac{-21,234 - 0,046}{2} = -10,640 \text{ kN} \\
 Q_{dc} &= 30 + \frac{24,804 + 21,234}{3} = 45,346 \text{ kN} \\
 Q_{cd} &= -30 + \frac{24,804 + 21,234}{3} = -14,654 \text{ kN} \\
 Q_{c-e} &= \frac{-19,158 - 24,804}{3} = -14,654 \text{ kN} \\
 Q_{b-e} &= \frac{12,762 + 19,158}{3} = 10,640 \text{ kN}
 \end{aligned}$$



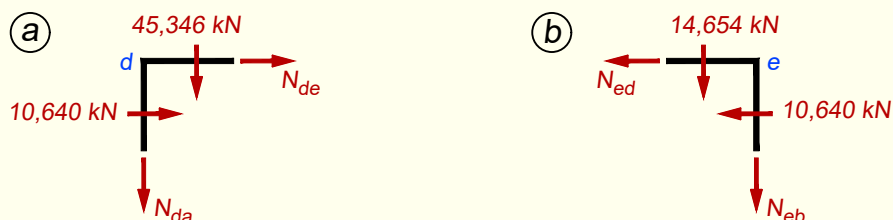
Joonis 13.33. Põikjõu epüür

Sarnaselt paindemomendile võime ka põikjõu arvutamiseks kasutada põhiskeemi, kus tundmatud X_i on asendatud nende tegelike väärtustega (joonis 13.31). Põikjõud arvutame nii nagu tavalises konsoolis. Konsoolses osas $a-d-c$ alustame arvutust lõike c poolt ja liigume edasi jäiga toe a suunas. Parempoolsel konsoolil $b-e-c$ alustame samuti lõike c poolt ja liigume jäiga toe b suunas.

$$\begin{aligned}
 Q_c &= -14,654 \text{ kN} \\
 Q_{dc} &= -14,654 + 20 \cdot 3 = 45,346 \text{ kN} \\
 Q_{d-k} &= -10,640 \text{ kN} \\
 Q_{k-a} &= -10,640 + 10 = -0,640 \text{ kN} \\
 Q_{c-e} &= -14,654 \text{ kN} \\
 Q_{e-b} &= 10,640 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

10. Pikijõu epüüri ordinaadid leiame sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest. Selleks lõikame sõlme arvutusskeemist välja ja märgime põikjõu epüüri abil sõlme joonisele seal esinevate põikjõudude väärtused. Noole suuna valikul tuleb lähtuda põikjõu märgist. Positiivset põikjõudu tähistav nooleke pöörab ümber sõlme päripäeva.

Samuti märgime sõlme joonisele tundmatud pikijõud. Soovitav on need jõud märkida suunaga sõlmest eemale, kuna sel juhul on tasakaalutingimusest saadav pikijõu märk kohe õige (joonis 13.34).



Joonis 13.34. Sõlmede tasakaal

Sõlm d (joonis 13.34, a)

$$\sum X = 0; \quad N_{de} + 10,640 = 0; \quad N_{de} = -10,640 \text{ kN}$$

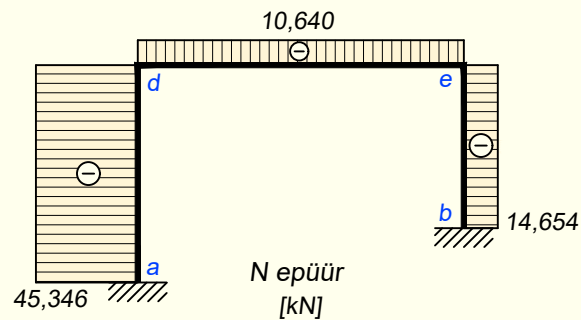
$$\sum Z = 0; \quad N_{da} + 45,346 = 0; \quad N_{da} = -45,346 \text{ kN}$$

Sõlm e (joonis 13.34, b)

$$\sum X = 0; \quad -N_{ed} - 10,640 = 0; \quad N_{fg} = -10,640 \text{ kN}$$

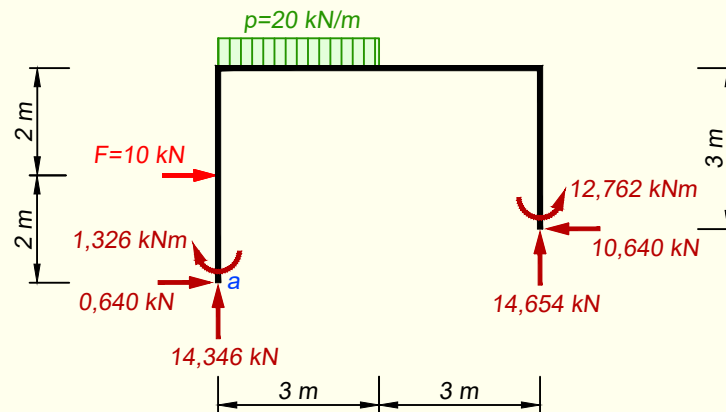
$$\sum Z = 0; \quad N_{eb} + 14,654 = 0; \quad N_{eb} = -14,654 \text{ kN}$$

Lisaks võib pikijõu epüüri koostada ka joonise 13.31 abil. Selle arvutuse jätame siin esitamata.



Joonis 13.35. Pikijõu epüür

11. Ülesande lõpus tuleb teha staatikaline kontroll (joonis 13.36), milleks kirjutame välja koormuste ja toereaktsioonide tasakaalutingimused. Need kirjutame horisontaal- ja vertikaaltelje suunas ning lisaks kirjutame ka momentide summa punkti a suhtes.



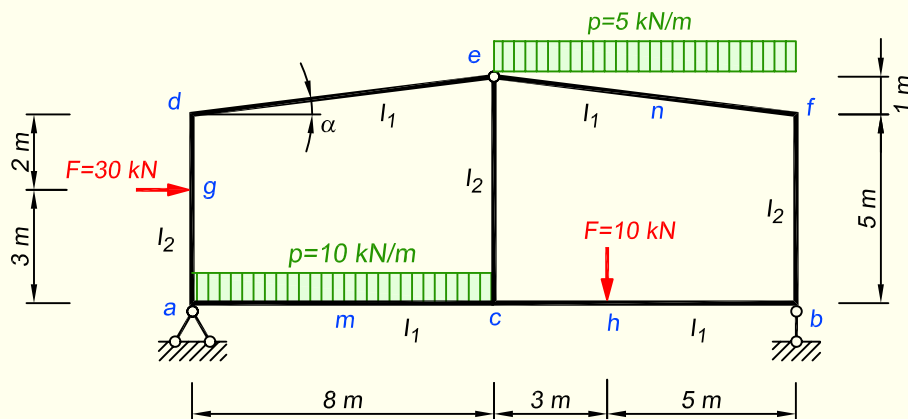
Joonis 13.36. Staatikaline kontroll

$$\sum X = 0,640 + 10 - 10,640 = 0$$

$$\sum Z = -45,346 + 20 \cdot 3 - 14,654 = 0$$

$$\sum M_a = -1,326 - 10 \cdot 2 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 + 12,762 + 10,640 \cdot 1 + 14,654 \cdot 6 = 0$$

NÄIDE 13.7. Koostada joonisel 13.37 kujutatud raami paindemomendi, põik- ja pikijõu epüürid. Varraste inertsimomentide suhe $I_1/I_2 = 2$. Siirete leidmisel arvestada ainult paindemomentide mõju.



Joonis 13.37. Raami arvutuskeem

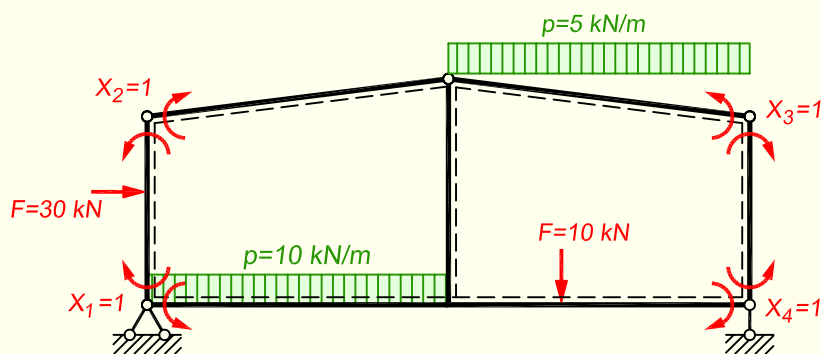
LAHENDUS

1. Leiame raami staatikaga määramatuse astme valemiga (13.8)

$$n = 3m - l_1 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

2. Staatikaga määratud põhiskeemi koostamine

Raami staatikaga määratud põhiskeemi koostamiseks eemaldame arvutuskeemist staatikaga määramatuse astmele vastava arvu liigsidemeid. Kuna siin ülesandes $n = 4$, siis lisame raamile neli liigendit. Ärajäetud sidemete asemel rakendame põhiskeemile lisatundmatud. Lisatundmatuteks on paindemomendid X_1 , X_2 , X_3 ja X_4 . Põhiskeem koormuse ja lisatundmatutega on kujutatud joonisel 13.38.



Joonis 13.38. Staatikaga määratud põhiskeem koormuse ja lisatundmatutega

3. Järgnevalt koostame ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud paindemomendi epüürid.

Ühiktundmatust X_1 epüüri koostamiseks leiame esimesena toereaktsioonid (joonis 13.39, a). Selgub, et nii vertikaalsed reaktsioonid kui ka horisontaalne reaktsioon on võrdsed nulliga.

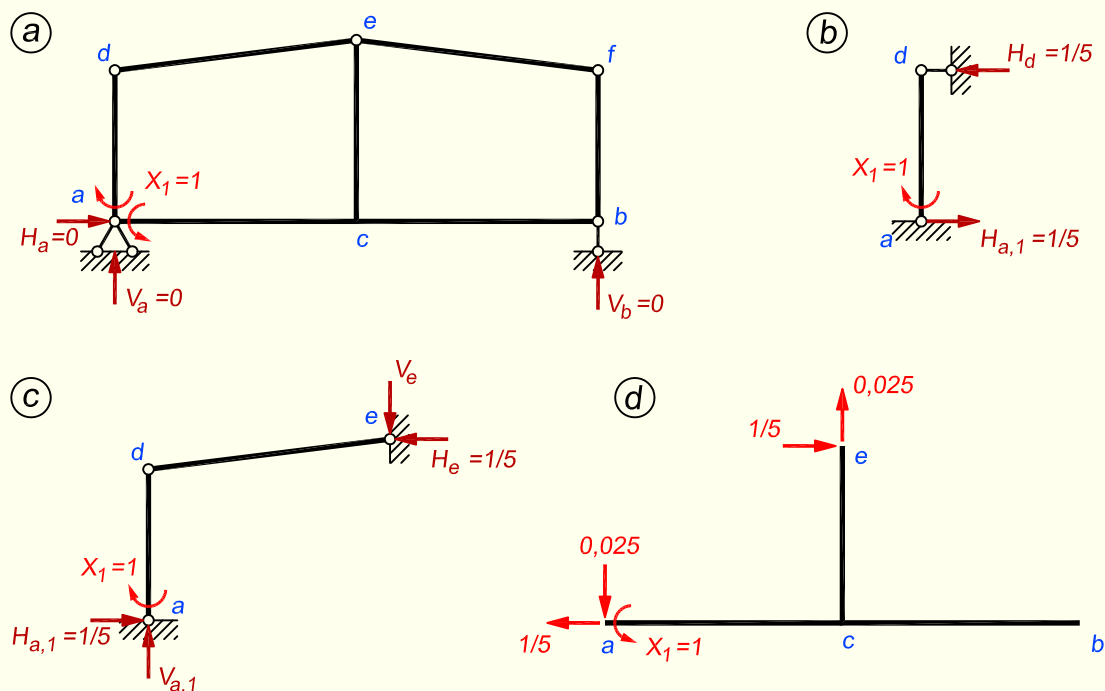
Seejärel lõikame arvutusskeemist välja varda $a-d$ (joonis 13.39, b) ning leiame sellele rakendatud momendist tekkivad horisontaalsed toereaktsioonid

$$H_{a,1} = H_d = \frac{1}{5}$$

Lõikame arvutusskeemist välja varrastest $a-d$ ja $d-e$ koosneva osa (joonis 13.39, c). Varda $a-d$ leitud horisontaalsed toereaktsioonid kanname nüüd sellele skeemile ning ta-sakaalutingimusest kas liigendi a või e suhtes saame leida vertikaalsed reaktsioonid

$$\sum M_a = 0; \quad -V_e \cdot 8 + \frac{1}{5} \cdot 6 - 1 = 0; \quad V_e = V_{a,1} = 0,025$$

Varrastes $e-f$ ja $f-b$ saab esineda ainult pikijõud, kuna otsest koormust neil ei paikne. Tegemist on sõrestiku varrastega. Kuna sõlmes f liitub ainult kaks sõrestiku varrast, mis ei asu samal sirgel, siis peavad nende pikijõud olema võrdsed nulliga.



Joonis 13.39. Lisatundmatust $X_1 = 1$ põhjustatud m_1 epüüri koostamiseks vajalike reaktsioonide leidmine

Viimasena eraldame arvutuskeemist osa, mis koosneb alumistest riividest ja keskmisest postist ning kanname eespool leitud teiste varraste toereaktsioonid sellele osale (joonis 13.39, d). Kuna vardad $e-f$ ja $f-b$ on nullvardad, siis skeemi parempoolsele osale ühtegi jõudu ei tule.

Peale kõigi vajalike jõudude kandmist arvutuskeemile saame arvutada m_1 epüüri ordinaadid.

m_1 epüür on esitatud joonisel 13.41, a.

Ühiktundmatust X_2 põhjustatud m_2 epüüri koostamine on sarnane juba vaadeldud lahenduskäiguga. Esmalt leiame toereaktsioonid ning seejärel eraldame arvutuskeemist samad osad nagu m_1 epüüri koostamisel.

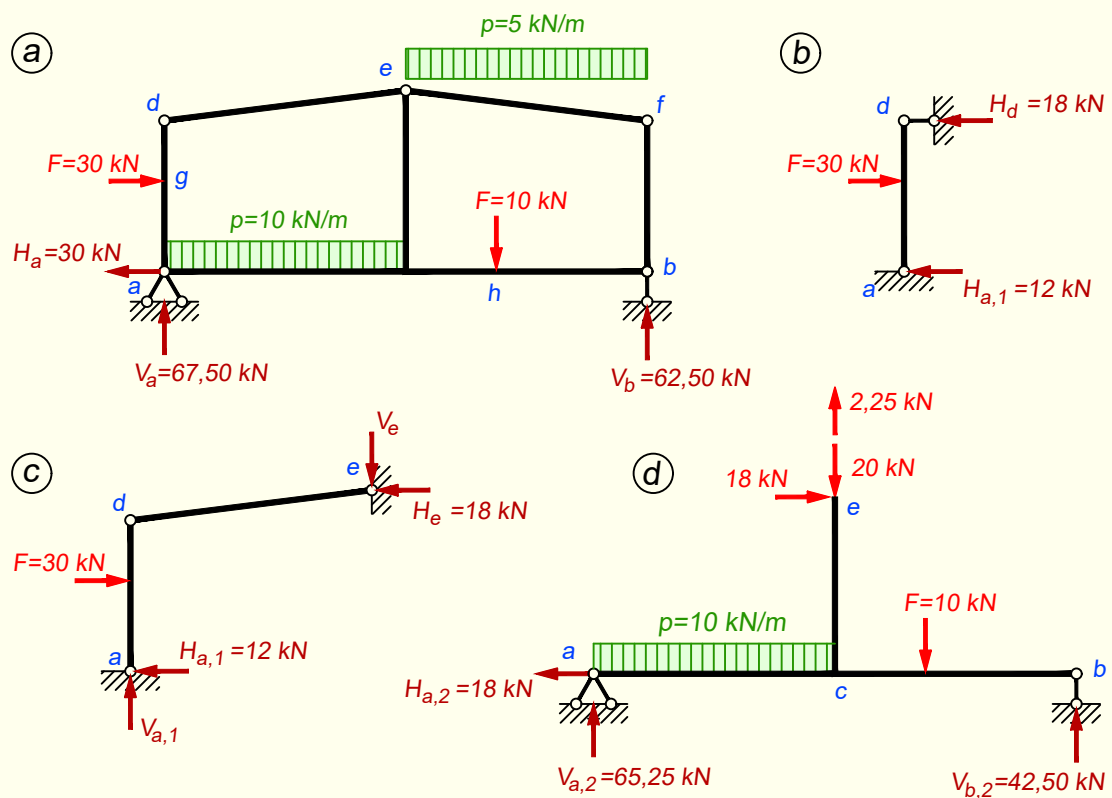
m_3 epüür on m_2 epüüri peegelpilt ning m_4 on m_1 epüüri peegelpilt.

Ühiktundmatustest põhjustatud m epüürid on esitatud joonisel 13.41, a, b, c ja d.

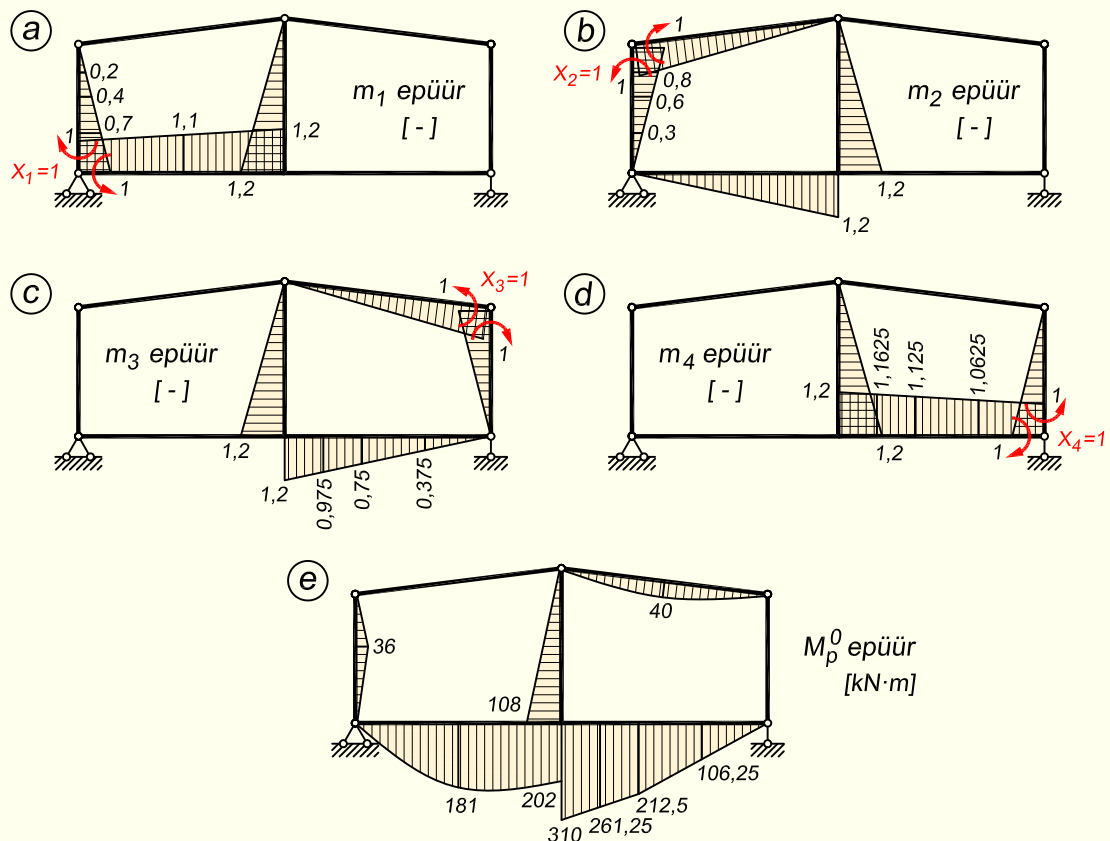
M_p^0 epüüri koostamisel leiame esmalt toereaktsioonid (joonis 13.40, a). Toereaktsioonide leidmiseks kasutame tasakaalutingimusi kummagi toeliigendi suhtes

$$\sum M_b = 0; \quad -V_a \cdot 16 - 30 \cdot 3 + 10 \cdot 8 \cdot 12 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \cdot 4 = 0; \quad V_a = 67,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0; \quad V_b \cdot 16 - 30 \cdot 3 - 10 \cdot 8 \cdot 4 - 10 \cdot 11 - 5 \cdot 8 \cdot 12 = 0; \quad V_b = 62,5 \text{ kN}$$



Joonis 13.40. Koormusest põhjustatud M_p^0 epüüri koostamiseks vajalike reaktsioonide leidmine



Joonis 13.41. Lisatundmatutest ja koormusest põhjustatud epüürid põhiskeemis

Eraldame arvutuskeemist varda $a-d$ ning leiame koormusest 30 kN tekkivad horisontaalsed toereaktsioonid (joonis 13.40, b)

$$H_{a,1} = 12 \text{ kN}; \quad H_d = 18 \text{ kN}$$

Järgnevalt vaatame koos vardaid $a-d$ ja $d-e$ ning arvestame ka leitud horisontaalseid toereaktsioone (joonis 13.40, c). Varraste tasakaalust leiame neile mõjuvad vertikaalsed toereaktsioonid

$$\sum M_a = 0; \quad -V_e \cdot 8 + 18 \cdot 6 - 30 \cdot 3 = 0; \quad V_e = V_{a,1} = 2,25 \text{ kN}$$

Saadud toereaktsioone tuleb arvestada ülejäänud arvutuskeemi tasakaalu vaatlemisel (joonis 13.40, d). Kirjutame välja tasakaalutingimused ja leiame toereaktsioonide väärtused

$$\sum M_b = 0; \quad -V_{a,2} \cdot 16 - 18 \cdot 6 + 10 \cdot 8 \cdot 12 + 10 \cdot 5 + 20 \cdot 8 - 2,25 \cdot 8 = 0$$

$$V_{a,2} = 65,25 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0; \quad V_{b,2} \cdot 16 - 18 \cdot 6 - 10 \cdot 8 \cdot 4 - 10 \cdot 11 - 20 \cdot 8 + 2,25 \cdot 8 = 0$$

$$V_{b,2} = 42,50 \text{ kN}$$

Arvutuskeemi osadeks jagamisel saadud vertikaalsed toereaktsioonid $V_{a,1}$ ja $V_{a,2}$ peavad kokku andma kogu arvutuskeemi toereaktsiooni V_a

$$V_a = V_{a,1} + V_{a,2} = 2,25 + 65,25 = 67,50 \text{ kN}$$

Samuti peavad olema tasakaalus toereaktsioonid toel b .

Edasi saame arvutada M_p^0 epüüri ordinaadid. Epüür on esitatud joonisel 13.41, e .

4. Kanooniline võrrandisüsteem lisatundmatute arvutamiseks on järgmine

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2p} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} = 0$$

$$\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} = 0$$

5. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate ja vabaliikmete leidmine

Arvestada tuleb ristlõigete erinevaid paindejäikuseid. Tundmatute kordajad δ_{ki} ja vabaliikmed Δ_{kp} arvutame EI_0 -kordsed. Järgnevas avaldistes on nimetatud tegevuse tõttu näha murrulises osas jäikuste suhet. Varrastel, mille jäikus on suurem, on murru nimetajasse lisatud 2.

Ühikjõududest põhjustatud siirded

$$EI_0\delta_{11} = \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 1,2 + \frac{8}{6 \cdot 2} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 1,2 \cdot 1,2) = 9,4 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 1,2 + \frac{8}{6 \cdot 2} (1 \cdot 0 - 4 \cdot 1,1 \cdot 0,6 - 1,2 \cdot 1,2) = -4,7667 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{13} = EI_0\delta_{31} = \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 2,88 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{14} = EI_0\delta_{41} = -\frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 1,2 = -2,88 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{22} = \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 1,2 + \frac{\sqrt{65}}{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{8}{3 \cdot 2} \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 7,8104 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{23} = EI_0\delta_{32} = -\frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 1,2 = -2,88 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{24} = EI_0\delta_{42} = \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 2,88 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{33} = EI_0\delta_{22} = 7,8104 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{34} = EI_0\delta_{12} = -4,7667 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{44} = EI_0\delta_{11} = 9,4 \text{ m}$$

Koormusest põhjustatud siirded

$$EI_0\Delta_{1p} = \frac{2}{3} \cdot 0,4 \cdot 36 + \frac{3}{6} (1 \cdot 0 + 4 \cdot 0,7 \cdot 18 + 0,4 \cdot 36) + \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 108 + \frac{8}{6 \cdot 2} (1 \cdot 0 - 4 \cdot 1,1 \cdot 181 - 1,2 \cdot 202) = -391,33 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI_0\Delta_{2p} = \frac{2}{6} (0,6 \cdot 36 + 4 \cdot 0,8 \cdot 18 + 1 \cdot 0) + \frac{3}{3} \cdot 0,6 \cdot 36 - \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 108 + \frac{8}{6 \cdot 2} (0 + 4 \cdot 0,6 \cdot 181 + 1,2 \cdot 202) = 240,00 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

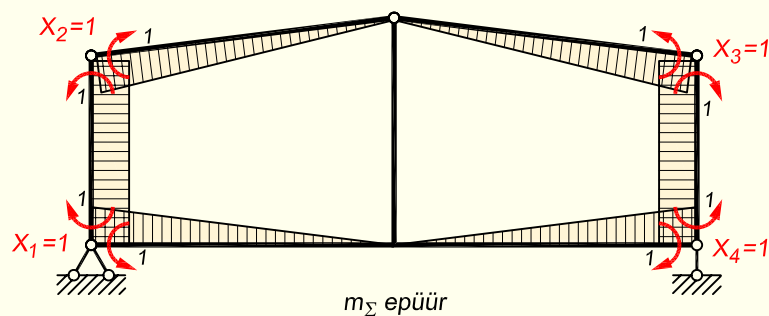
$$EI_0\Delta_{3p} = \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 108 + \frac{\sqrt{65}}{6 \cdot 2} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 40 + 0) + \frac{3}{6 \cdot 2} (1,2 \cdot 310 + 4 \cdot 0,975 \cdot 261,25 + 0,75 \cdot 212,5) + \frac{5}{3 \cdot 2} \cdot 0,75 \cdot 212,5 = 833,32 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI_0\Delta_{4p} = -\frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 108 + \frac{3}{6 \cdot 2} (-1,2 \cdot 310 - 4 \cdot 1,1625 \cdot 261,25 - 1,125 \cdot 212,5) + \frac{5}{6 \cdot 2} (-1,125 \cdot 212,5 - 4 \cdot 1,0625 \cdot 106,25 - 0) = -1003,43 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Jõumeetodi kanooniline võrrandisüsteem leitud arvkoordajatega

$$\begin{aligned} 9,4X_1 - 4,7667X_2 + 2,88X_3 - 2,88X_4 + 391,33 &= 0 \\ -4,7667X_1 + 7,8104X_2 - 2,88X_3 + 2,88X_4 + 240,00 &= 0 \\ 2,88X_1 - 2,88X_2 + 7,8104X_3 - 4,7667X_4 + 833,32 &= 0 \\ -2,88X_1 + 2,88X_2 - 4,7667X_3 + 9,4X_4 - 1003,43 &= 0 \end{aligned}$$

6. Võrrandisüsteemi tundmatute koordajate ja koormusest põhjustatud vabaliikmete kontrollimiseks koostame summaarse ühiklisatundmatutest põhjustatud paindemomendi epüüri m_Σ (joonis 13.42).



Joonis 13.42. Lisatundmatutest põhjustatud summaarne epüür

Järgnevalt integreerime epüüride m_Σ ja m_1 ordinaatide korrutist, mille tulemusena saame lisatundmatule X_1 vastava EI_0 -kordse siirde, mis on põhjustatud kõigest ühiklisatundmatutest

$$EI_0\delta_{1\Sigma} = 5 \cdot 1 \cdot 0,5 + \frac{8}{6 \cdot 2} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 1,1 \cdot 0,5 + 0) = 4,6333$$

See peab võrduma esimese võrrandi tundmatute kordajate algebralise summaga

$$EI_0\delta_{1\Sigma} = 9,4 - 4,7667 + 2,88 - 2,88 = 4,6333$$

Edasi teeme sama epüüridega m_2 , m_3 ja m_4

$$EI_0\delta_{2\Sigma} = 5 \cdot 1 \cdot 0,5 + \frac{\sqrt{65}}{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{8}{6 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1,2 = 3,0437$$

$$EI_0\delta_{2\Sigma} = -4,7667 + 7,8104 - 2,88 + 2,88 = 3,0437$$

$$EI_0\delta_{3\Sigma} = EI_0\delta_{2\Sigma} = 3,0437; \quad EI_0\delta_{3\Sigma} = 2,88 - 2,88 + 7,8104 - 4,7667 = 3,0437$$

$$EI_0\delta_{4\Sigma} = EI_0\delta_{1\Sigma} = 4,6333; \quad EI_0\delta_{4\Sigma} = -2,88 + 2,88 - 4,7667 + 9,4 = 4,6333$$

Epüürist m_Σ leitav integraalide summa

$$EI_0\delta_{\Sigma\Sigma} = \left(5 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{8}{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{\sqrt{65}}{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 \right) \cdot 2 = 15,354$$

peab võrduma kõigi tundmatute kordajate summaga

$$EI_0\delta_{\Sigma\Sigma} = 9,4 + 7,8104 + 7,8104 + 9,4 + \\ + 2(-4,7667 + 2,88 - 2,88 + 2,88 - 2,88 - 4,7667) = 15,354$$

Kanooniliste võrrandite koormusest põhjustatud vabaliikmete kontrollimiseks integreerime summaarse m_Σ ja koormuse epüüri M_p^0 ordinaatide korrutist

$$EI_0\delta_{\Sigma p} = 2 \cdot 1 \cdot 18 + 3 \cdot 1 \cdot 18 + \frac{\sqrt{65}}{6 \cdot 2} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 40 + 0) + \frac{8}{6 \cdot 2} (0 - 4 \cdot 0,5 \cdot 181 - 0) + \\ + \frac{3}{6 \cdot 2} (0 - 4 \cdot 0,1875 \cdot 261,25 - 0,375 \cdot 212,5) + \\ + \frac{5}{6 \cdot 2} (-0,375 \cdot 212,5 - 4 \cdot 0,6875 \cdot 106,25 - 0) = -321,44$$

mis peab võrduma koormusest põhjustatud vabaliikmete summaga

$$EI_0\delta_{\Sigma p} = -391,33 + 240,00 + 833,32 - 1003,43 = -321,44$$

7. Võrrandite lahendamisega leiame tundmatud

$$X_1 = 71,079 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad X_2 = -58,481 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad X_3 = -94,267 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad X_4 = 98,640 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

8. Paindemomendi epüüri ordinaadid leiame valemiga (13.35). Arvestades ülesandes esitatud raami staatikaga määramatuse astet, võtab valem kuju

$$M_k = m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + m_{k3}X_3 + m_{k4}X_4 + M_{kp}^0$$

Raami lõigetes, kuhu olid paigutatud lisatundmatud, saame paindemomendi epüüri ordinaadid võrrandisüsteemi lahenditena

$$M_a = X_1 = 71,079 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad M_d = X_2 = -58,481 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_f = X_3 = -94,267 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad M_b = X_4 = 98,640 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Teistes lõigetes peame arvutamiseks kasutama nimetatud valemite

$$M_{ca} = 1,2 \cdot 71,079 + 1,2 \cdot 58,481 + 0 + 0 - 202 = -46,528 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cb} = 0 + 0 + 1,2 \cdot 94,267 + 1,2 \cdot 98,640 - 310 = -78,512 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ce} = -1,2 \cdot 71,079 - 1,2 \cdot 58,481 + 1,2 \cdot 94,267 + 1,2 \cdot 98,640 - 108 = -31,984 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

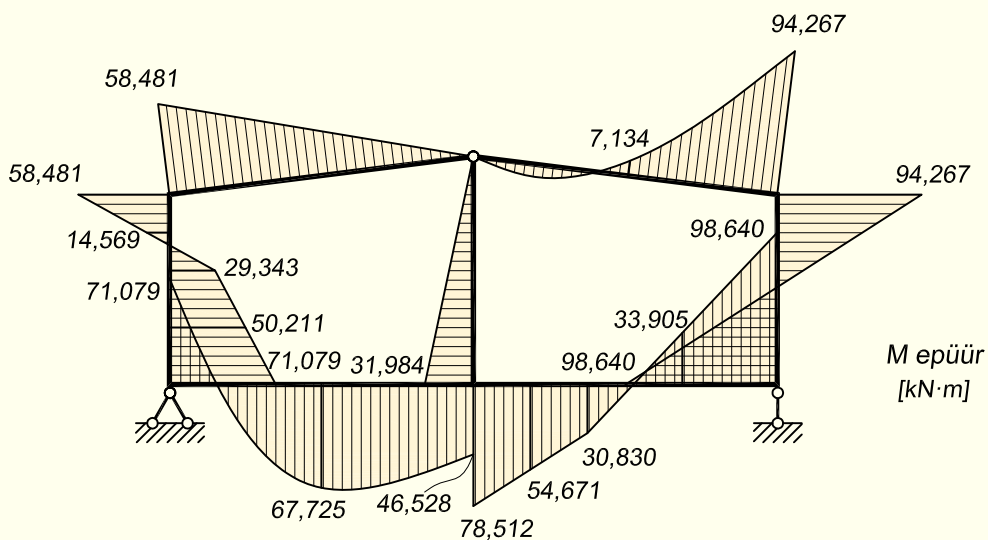
või valemite (13.41)

$$M_g = \frac{30 \cdot 3 \cdot 2}{5} + 71,079 \cdot \frac{2}{5} - 58,481 \cdot \frac{3}{5} = 29,343 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_m = -\frac{10 \cdot 8^2}{8} - 46,528 \cdot 0,5 + 71,079 \cdot 0,5 = -67,725 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_n = \frac{5 \cdot 8^2}{8} - 94,267 \cdot 0,5 = -7,134 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_h = -\frac{10 \cdot 3 \cdot 5}{8} + 98,640 \cdot \frac{3}{8} - 78,512 \cdot \frac{5}{8} = -30,830 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 13.43. Paindemomendi epüür

Järgnevalt kontrollime lahendust, milleks arvutame lisatundmatutele $X_i = 1$ vastavad siirded, mis pidevustingimustele vastavalt peavad võrduma nulliga. Selleks kasutame lõplikku paindemomendi epüüri jooniselt 13.43 ning põhiskeemi epüüre jooniselt 13.41.

$$EI_0\Delta_{1p} = \frac{2}{6} (0,4 \cdot 29,343 - 4 \cdot 0,2 \cdot 14,569 + 0) + \\ + \frac{3}{6} (1 \cdot 71,079 + 4 \cdot 0,7 \cdot 50,211 + 0,4 \cdot 29,343) + \\ + \frac{8}{6 \cdot 2} (-1,2 \cdot 46,528 - 4 \cdot 1,1 \cdot 67,725 + 1 \cdot 71,079) + \\ + \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 31,984 = 0$$

$$EI_0\Delta_{2p} = -\frac{\sqrt{65}}{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 58,481 + \frac{2}{6} (0,6 \cdot 29,343 - 4 \cdot 0,8 \cdot 14,569 - 1 \cdot 58,481) + \\ + \frac{3}{6} (0 + 4 \cdot 0,3 \cdot 50,211 + 0,6 \cdot 29,343) + \\ + \frac{8}{6 \cdot 2} (1,2 \cdot 46,528 + 4 \cdot 0,6 \cdot 67,725 + 0) - \\ - \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 31,984 = 0$$

$$EI_0\Delta_{3p} = \frac{\sqrt{65}}{6 \cdot 2} (0 - 4 \cdot 0,5 \cdot 7,134 - 1 \cdot 94,267) + \frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 31,984 + \\ + \frac{3}{6 \cdot 2} (0,75 \cdot 30,830 + 4 \cdot 0,975 \cdot 54,671 + 1,2 \cdot 78,512) + \\ + \frac{5}{6 \cdot 2} (0 - 4 \cdot 0,375 \cdot 33,905 + 0,75 \cdot 30,830) + \\ + \frac{5}{6} (-1 \cdot 94,267 + 4 \cdot 0,5 \cdot 2,187 + 0) = 0$$

$$EI_0\Delta_{4p} = -\frac{6}{3} \cdot 1,2 \cdot 31,984 + \\ + \frac{3}{6 \cdot 2} (-1,125 \cdot 30,830 - 4 \cdot 1,1625 \cdot 54,671 - 1,2 \cdot 78,512) + \\ + \frac{5}{6 \cdot 2} (1 \cdot 98,640 + 4 \cdot 1,0625 \cdot 33,905 - 1,125 \cdot 30,830) + \\ + \frac{5}{6} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 2,187 + 1 \cdot 98,640) = 0$$

9. Põikjõu epüüri ordinaadid leiame valemiga (13.47)

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{M_{par} - M_{vas}}{l}$$

$$\sin \alpha = 0,1240; \quad \cos \alpha = 0,9923$$

$$Q_{de} = \frac{0 + 58,481}{\sqrt{65}} = 7,254 \text{ kN}$$

$$Q_{ef} = 5 \cdot 4 \cdot 0,9923 + \frac{-94,267 - 0}{\sqrt{65}} = 8,154 \text{ kN}$$

$$Q_{fe} = -5 \cdot 4 \cdot 0,9923 + \frac{-94,267 - 0}{\sqrt{65}} = -31,538 \text{ kN}$$

$$Q_{ac} = 10 \cdot 4 + \frac{71,079 + 46,528}{8} = 54,701 \text{ kN}$$

$$Q_{ca} = -10 \cdot 4 + \frac{71,079 + 46,528}{8} = -25,299 \text{ kN}$$

$$Q_{ch} = 10 \cdot \frac{5}{8} + \frac{-78,512 - 98,640}{8} = -15,894 \text{ kN}$$

$$(Q_{ch} = \frac{-78,512 + 30,830}{3} = -15,894 \text{ kN})$$

$$Q_{bh} = -10 \cdot \frac{3}{8} + \frac{-78,512 - 98,640}{8} = -25,894 \text{ kN}$$

$$(Q_{bh} = \frac{-30,830 - 98,640}{5} = -25,894 \text{ kN})$$

$$Q_{ag} = 30 \cdot \frac{2}{5} + \frac{-58,481 - 71,079}{5} = -13,912 \text{ kN}$$

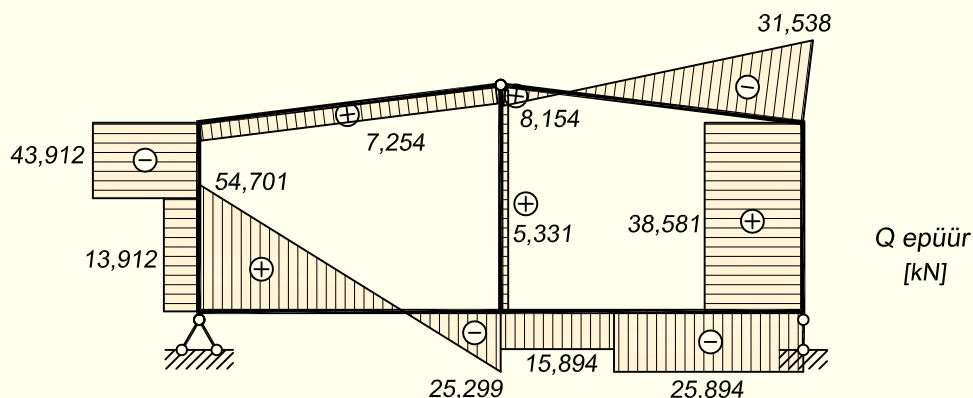
$$(Q_{ag} = \frac{29,343 - 71,079}{3} = -13,912 \text{ kN})$$

$$Q_{dg} = -30 \cdot \frac{3}{5} + \frac{-58,481 - 71,079}{5} = -43,912 \text{ kN}$$

$$(Q_{dg} = \frac{-58,481 - 29,343}{2} = -43,912 \text{ kN})$$

$$Q_{ce} = \frac{0 + 31,984}{6} = 5,331 \text{ kN}$$

$$Q_{fb} = \frac{98,640 + 94,267}{5} = 38,581 \text{ kN}$$



Joonis 13.44. Põikjõu epüür

10. Pikijõu epüüri ordinaadid leiame sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest.

$$\sin \alpha = 0,1240; \quad \cos \alpha = 0,9923$$

Sõlm *d* (joonis 13.45, *a*)

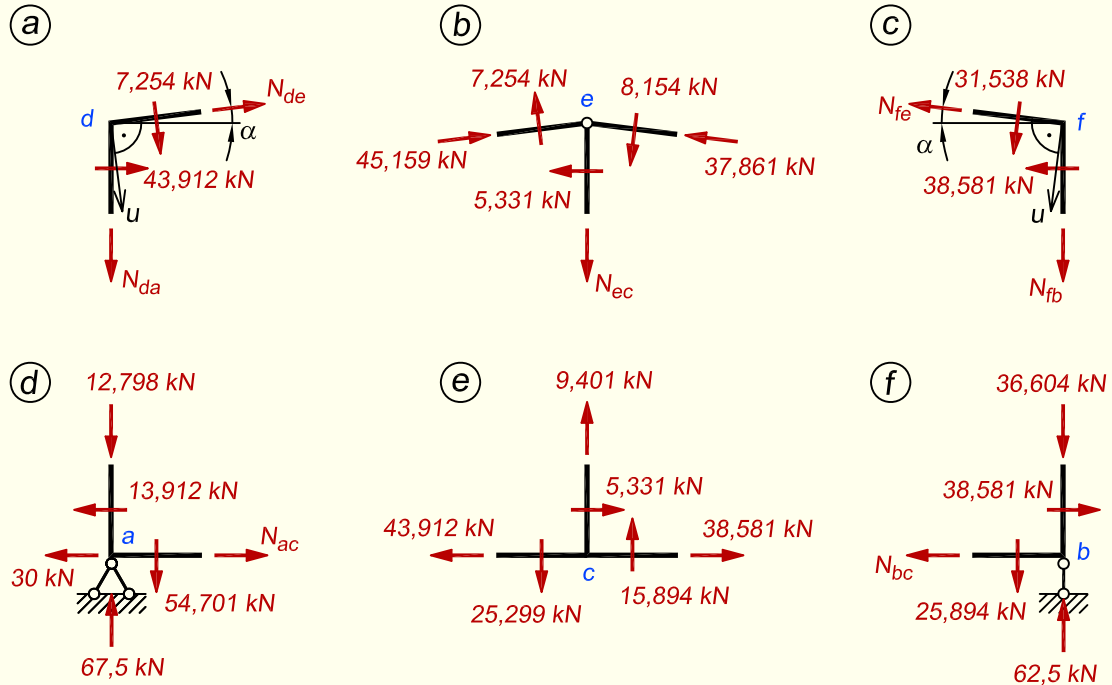
$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad N_{de} \cdot 0,9923 + 43,912 + 7,254 \cdot 0,1240 = 0; \quad N_{de} = -45,159 \text{ kN} \\ \sum u = 0; \quad N_{da} \cdot 0,9923 + 7,254 + 43,912 \cdot 0,1240 = 0; \quad N_{da} = -12,798 \text{ kN} \end{aligned}$$

Sõlm *f* (joonis 13.45, *c*)

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad -N_{fe} \cdot 0,9923 - 38,581 - 31,538 \cdot 0,1240 = 0; \quad N_{fe} = -42,821 \text{ kN} \\ \sum u = 0; \quad N_{fb} \cdot 0,9923 + 31,538 + 38,581 \cdot 0,1240 = 0; \quad N_{fb} = -36,604 \text{ kN} \end{aligned}$$

Lähtudes sõlmes *f* saadud N_{fe} väärtusest ja arvestades vardal *e-f* paiknevat lauskoormust, saame leida pikijõu varda *e-f* ülemises otsas

$$N_{ef} = -42,821 + 5 \cdot 8 \cdot 0,1240 = -37,861 \text{ kN}$$



Joonis 13.45. Sõlmede tasakaal

Sõlmes *e* (joonis 13.45, *b*) on tundmatuks ainult posti pikijõud, seetõttu jääb horisontaalsuunaline tasakaalutingimus kontrolliks.

$$\sum X = 45,159 \cdot 0,9923 - 37,861 \cdot 0,9923 - 7,254 \cdot 0,1240 - 8,154 \cdot 0,1240 - 5,331 = 0$$

$$\sum Z = 0; \quad N_{ec} - 45,159 \cdot 0,1240 - 37,861 \cdot 0,1240 - 7,254 \cdot 0,9923 + 8,154 \cdot 0,9923 = 0; \quad N_{ec} = 9,401 \text{ kN}$$

Sõlmes *a* (joonis 13.45, *d*) on posti pikijõud juba teada, mistõttu saab vertikaalsuunalist tasakaalutingimust kasutada kontrolliks.

$$\sum Z = -67,5 + 12,798 + 54,701 = 0$$

$$\sum X = 0; \quad N_{ac} - 13,912 - 30 = 0; \quad N_{ac} = 43,912 \text{ kN}$$

Sõlm *b* (joonis 13.45, *f*)

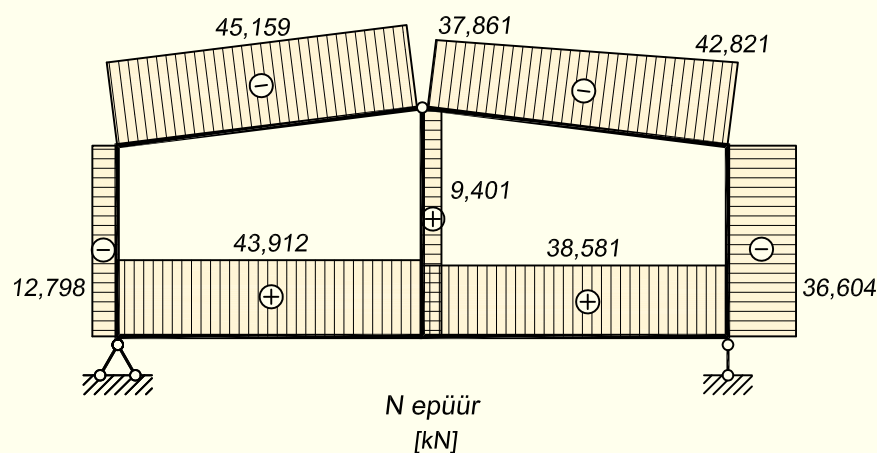
$$\sum Z = -62,5 + 36,604 + 25,894 = 0$$

$$\sum X = 0; \quad -N_{bc} + 38,581 = 0; \quad N_{bc} = 38,581 \text{ kN}$$

Sõlmes *c* (joonis 13.45, *e*) ei ole enam ühtegi tundmatut ja siin jäävad mõlemad tasakaalutingimused kontrolliks

$$\sum Z = -9,401 - 15,894 + 25,299 = 0$$

$$\sum X = -43,912 + 38,581 + 5,331 = 0$$



Joonis 13.46. Pikijõu epüür

11. Raami staatikaliseks kontrolliks kirjutame välja koormuste ja toereaktsioonide tasakaalutingimused. Siin ülesandes esitatud raami kontroll tuleks teha kahes osas.

Esimesena teeme raami üldkontrolli, nagu näidatud joonisel 13.47, a

$$\sum X = 30 + 43,912 - 38,581 - 5,331 - 30 = 0$$

$$\sum Z = 5 \cdot 8 + 9,401 - 67,5 + 54,701 - 62,5 + 25,894 = 0$$

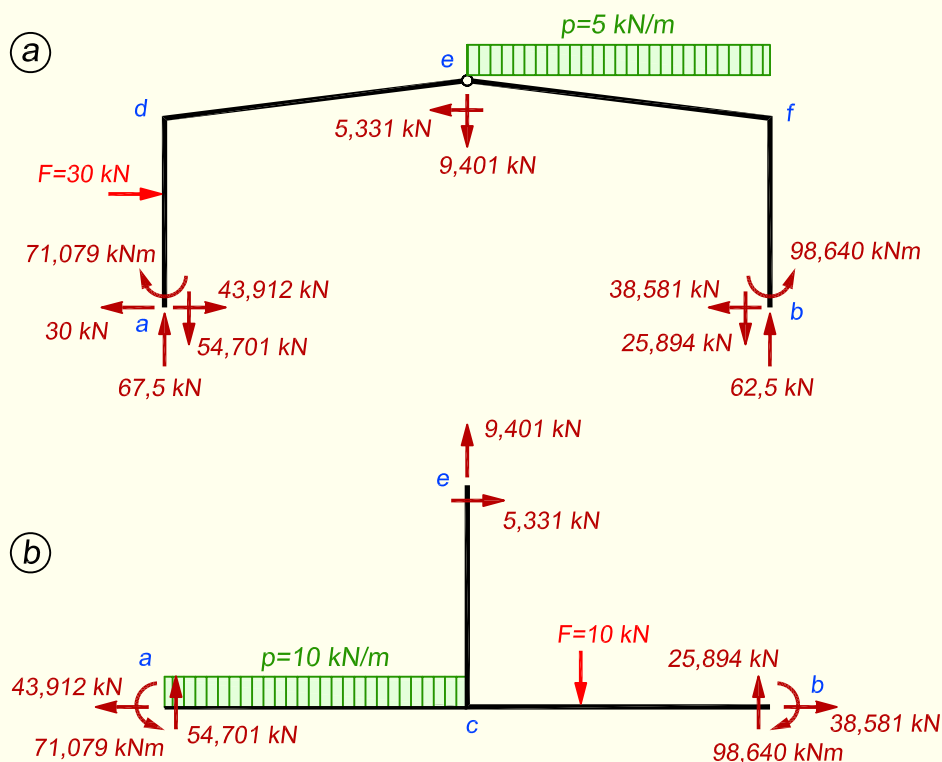
$$\sum M_a = -30 \cdot 3 - 5 \cdot 8 \cdot 12 + 5,331 \cdot 6 - 9,401 \cdot 8 + 62,5 \cdot 16 - 25,894 \cdot 16 - 71,079 + 98,640 = 0$$

Lisaks teeme kontrolli raamist eraldatud osale, mis koosneb alumistest riividest ja keskmisest postist (joonis 13.47, b)

$$\sum X = -43,912 + 5,331 + 38,581 = 0$$

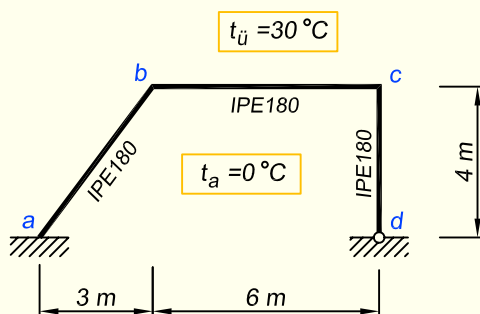
$$\sum Z = 10 \cdot 8 + 10 - 54,701 - 9,401 - 25,894 = 0$$

$$\sum M_c = -54,701 \cdot 8 + 25,894 \cdot 8 - 5,331 \cdot 6 + 10 \cdot 8 \cdot 4 - 10 \cdot 3 + 71,079 - 98,640 = 0$$



Joonis 13.47. Staatikaline kontroll

NÄIDE 13.8. Koostada joonisel 13.48 kujutatud raamile paindemomendi ja pöikjõu epüür temperatuuri muutusest, kui raamist väljaspool tõusis temperatuur 30 °C võrra ja seespool jäi muutumatuks. Raam on valmistatud terasprofiilist IPE180, mille ristlõike inertsimoment on $I_y = 1317\text{ cm}^4$. Terase elastsusmoodul on 210 GPa , temperatuuri joonpaisumistegur on $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$.



Joonis 13.48. Raami arvutuskeem

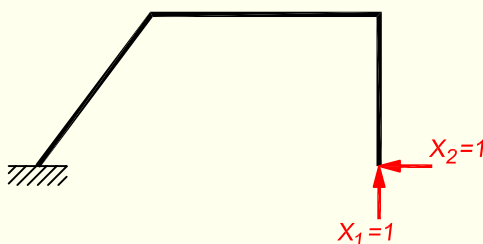
LAHENDUS

1. Leiame raami staatikaga määramatuse astme valemiga (13.8)

$$n = 3m - l_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

2. Staatikaga määratud põhiskeemi koostamine

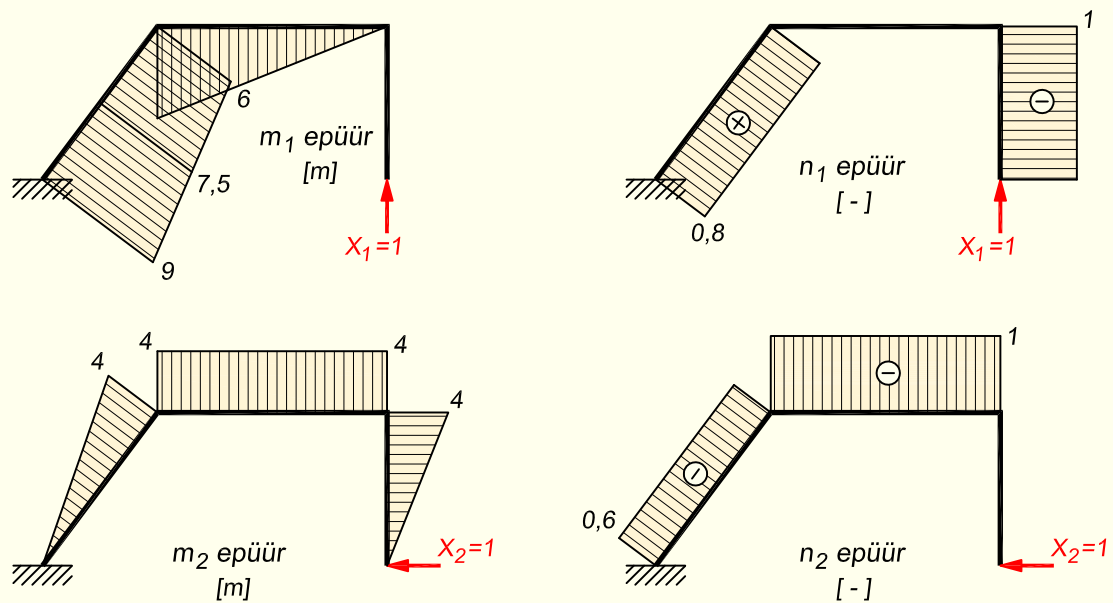
Staatikaga määratud põhiskeemi koostamiseks eemaldame arvutuskeemist kaks liigset, mida saame teha toe d eemaldamise teel. Ärajäetud sidemete asemel rakendame põhiskeemile lisatundmatud, milleks on toereaktsioonid X_1 ja X_2 . Põhiskeem lisatundmatutega on kujutatud joonisel 13.49.



Joonis 13.49. Staatikaga määratud põhiskeem lisatundmatutega

3. Ühiktundmatutest epüüride koostamine

Temperatuuri muutuse korral on võrrandisüsteemi liikmete arvutamiseks vaja lisaks ühiktundmatutest põhjustatud paindemomendi epüüridele ka pikijõu epüüre. Vastavad epüürid tundmatutest X_1 ja X_2 on esitatud joonisel 13.50.



Joonis 13.50. Lisatundmatutest põhjustatud epüürid

4. Jõumeetodi võrrandisüsteem lisatundmatute arvutamiseks on järgmine

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0$$

5. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate ja vabaliikmete leidmine

Võrrandisüsteemi tundmatute kordajad leiame sarnaselt arvutusele koormusest

$$EI_0\delta_{11} = \frac{6}{3} \cdot 6 \cdot 6 + \frac{5}{6} (6 \cdot 6 + 4 \cdot 7,5 \cdot 7,5 + 9 \cdot 9) = 357 \text{ m}^3$$

$$EI_0\delta_{12} = -4 \cdot 6 \cdot 3 - \frac{5}{6} (0 + 4 \cdot 2 \cdot 7,5 + 4 \cdot 6) = -142 \text{ m}^3$$

$$EI_0\delta_{22} = \frac{5}{3} \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot 4 = 144 \text{ m}^3$$

Vabaliikmed arvutame temperatuuri muutuse korral valemiga (13.29)

$$EI_0\Delta_{kt} = EI_0 \sum_{j=1}^v \alpha_j \left(\int_0^{l_j} \frac{\Delta t}{h} m_k dx + \int_0^{l_j} t_{0n_k} dx \right)$$

Leiame selleks esmalt EI väärtuse

$$EI = 210 \cdot 10^6 \cdot 1317 \cdot 10^{-8} = 2765,7 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Temperatuuri muutuse varda telgjoonel leiame valemiga (11.52)

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_a + t_{\bar{u}}) = \frac{1}{2}(0 + 30) = 15^\circ\text{C}$$

Temperatuuri muutuste vahe varda alumiste ja ülemiste kiudude vahel arvutame valemiga (11.54)

$$\Delta t = t_a - t_{\bar{u}} = 0 - 30 = -30^\circ\text{C}$$

Nüüd saame välja kirjutada avaldised vabaliikmete arvutamiseks

$$EI_0\Delta_{1t} = 2765,7 \cdot \left[1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-30}{0,18} \left(\frac{9+6}{2} \cdot 5 + \frac{6 \cdot 6}{2} \right) + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot (0,8 \cdot 5 - 1 \cdot 4) \right] = -306,99 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$EI_0\Delta_{2t} = 2765,7 \cdot \left[1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-30}{0,18} \left(-\frac{4 \cdot 5}{2} - 4 \cdot 6 - \frac{4 \cdot 4}{2} \right) + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot (-0,6 \cdot 5 - 1 \cdot 6) \right] = -227,84 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

Saame võrrandisüsteemi

$$357X_1 - 142X_2 - 306,99 = 0$$

$$-142X_1 + 144X_2 - 227,84 = 0$$

Võrrandite lahendamiselega leiame tundmatud

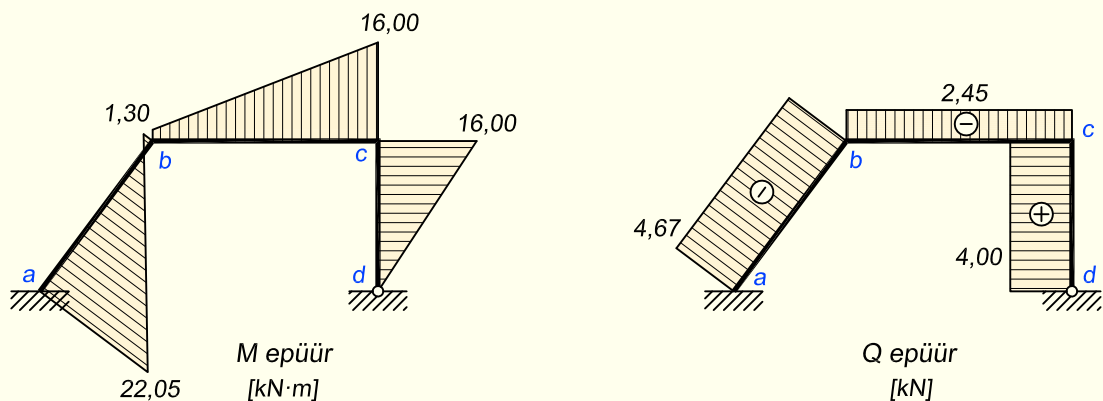
$$X_1 = 2,45 \text{ kN}; \quad X_2 = 4,00 \text{ kN}$$

6. Paindemomendi epüüri ordinaadid arvutame, asendades põhiskeemis (joonis 13.49) tundmatud nende arvväärtustega

$$M_a = 2,45 \cdot 9 = 22,05 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_b = 2,45 \cdot 6 - 4,00 \cdot 4 = -1,30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = -4,00 \cdot 4 = -16,00 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 13.51. Paindemomendi ja põikjõu epüürid

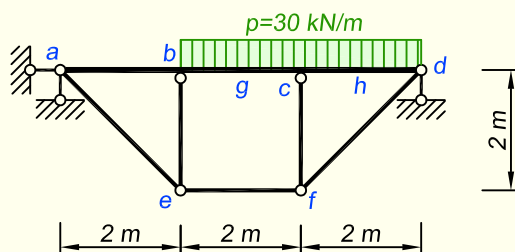
7. Põikjõu epüüri ordinaadid võime arvutada sarnaselt paindemomendile põhiskeemist, kus tundmatud on asendatud nende arvväertustega

$$Q_{d-c} = 4,00 \text{ kN}; \quad Q_{c-b} = -2,45 \text{ kN}$$

Kaldvardas $a-b$ on lihtsam kasutada valemit (13.53)

$$Q_{a-b} = \frac{M_{par} - M_{vas}}{l} = \frac{-1,30 - 22,05}{5} = -4,67 \text{ kN}$$

NÄIDE 13.9. Koostada joonisel 13.52 kujutatud spregeltala paindemomendi, põik- ja pikijõu epüürid. Varraste ristlõike inertsimoment on $I = 0,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ ja ristlõike pindala $A = 0,01 \text{ m}^2$. Siirete leidmisel arvestada nii paindemomentide kui pikijõudude mõju.



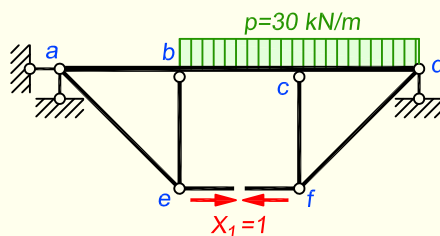
Joonis 13.52. Spregeltala arvutuskeem

LAHENDUS

1. Leiame arvutuskeemi staatikaga määramatuse astme valemiga (13.9)

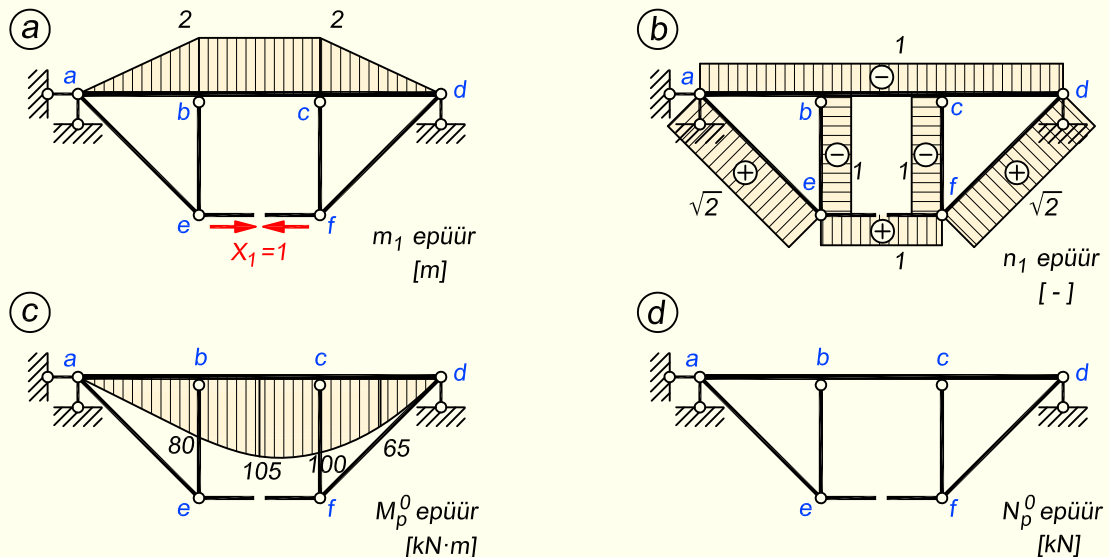
$$n = 2l + t - 3k = 2 \cdot 8 + 3 - 3 \cdot 6 = 1$$

2. Staatikaga määratud põhiskeemi koostamiseks eemaldame arvutuskeemist ühe liigsideme. Selleks lõikame läbi varda $e-f$, milles esineb ainult pikijõud ja valime mainitud sisejõu lisatundmatuks X_1 . Põhiskeem koormuse ja lisatundmatuga on kujutatud joonisel 13.53.



Joonis 13.53. Staatikaga määratud põhiskeem koormuse ja lisatundmatuga

3. Järgnevalt koostame ühiktundmatust ja koormusest põhjustatud epüürid (joonis 13.54). Selles ülesandes töötab suur osa vardaid ainult pikijõule, mistõttu tuleb lisaks paindemomentidele ka pikijõu osa arvutuses arvesse võtta. Seepärast koostame lisatundmatust tekkiva paindemomendi m_1 ja pikijõu n_1 epüüri (skeemid *a* ja *b*). Koormusest tuleb koostada samuti nii paindemomendi M_p^0 kui pikijõu N_p^0 epüür (skeemid *c* ja *d*). Viimane neist jääb siin küll kogu arvutus skeemi ulatuses nulliks.



Joonis 13.54. Lisatundmatust ja koormusest põhjustatud epüürid

4. Jõumeetodi võrrand lisatundmatu arvutamiseks on järgmine

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

5. Võrrandisüsteemi tundmatu kordaja ja vabaliikme arvutame tavapärase epüüride ordinaatide korrutamise teel. Lisaks paindemomendile peame siin aga arvestama ka piki jõudu.

Täiesti täpse lahenduskäiguga võrreldes kasutame vaadeldavas ülesandes lihtsustust. Kuigi jooniselt 13.54, *b* on näha, et n_1 epüür paikneb kõigis varrestes, jagame järgnevas arvutuses arvutus skeemi vardad paindele töötavateks ja pikijõule töötavateks. Sprengeltala varraste *a-b*, *b-c* ja *c-d* puhul arvestame ainult paindemomentide mõju. Ülejäänud vardad töötavad pikijõule.

Tundmatu kordajaks saame

$$\delta_{11} = \frac{2}{3EI} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{EI} + \frac{6 + \sqrt{128}}{EA} = \frac{40}{3EI} + \frac{6 + \sqrt{128}}{EA}$$

kus avaldise kaks esimest liiget on seotud paindemomendiga ja arvutame m_1 epüürist (joonis 13.54, *a*). Kolmas liige tuleb pikijõust ja selle leidmiseks kasutame tabelit 13.1, kuna konstantsete sisejõudude korral on arvutust mugavam tabelis teha.

Tabel 13.1. Pikijõule töötavate varraste arvutus

| Varras | $n_1, [-]$ | $N_p^0, [\text{kN}]$ | $l, [\text{m}]$ | $n_1 N_p^0 l, [\text{kN}\cdot\text{m}]$ | $n_1 n_1 l, [\text{m}]$ |
|------------|------------|----------------------|-----------------|---|----------------------------|
| <i>a-e</i> | $\sqrt{2}$ | 0 | $\sqrt{8}$ | 0 | $2\sqrt{8}$ |
| <i>e-f</i> | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| <i>f-d</i> | $\sqrt{2}$ | 0 | $\sqrt{8}$ | 0 | $2\sqrt{8}$ |
| <i>e-b</i> | -1 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| <i>f-c</i> | -1 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| $\Sigma =$ | | | | 0 | $6 + \sqrt{128} \text{ m}$ |

Vabaliige on

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= -\frac{2}{3EI} \cdot 2 \cdot 80 - \frac{2}{6EI} (2 \cdot 80 + 4 \cdot 2 \cdot 105 + 2 \cdot 100) - \frac{2}{6EI} (2 \cdot 100 + 4 \cdot 1 \cdot 65 + 0) = \\ &= -\frac{3960}{6EI} \end{aligned}$$

mille saame m_1 ja M_p^0 epiüride abil. Kuna koormus selles arvutuskeemis N_p^0 epiüri ei tekita (joonis 13.54, *d*; tabel 13.1, kolmas ja viies veerg), siis koosneb vabaliige ainult paindemomendi osast.

6. Võrrandi moodustamine

Koostame võrrandi vastavalt punktis 4 toodud avaldisele

$$\left(\frac{40}{3EI} + \frac{6 + \sqrt{128}}{EA} \right) X_1 - \frac{3960}{6EI} = 0$$

Korrutame võrrandi läbi avaldisega EI , mille tulemusena saame

$$\left[\frac{40}{3} + \frac{I}{A} (6 + \sqrt{128}) \right] X_1 - \frac{3960}{6} = 0$$

Järgnevalt peame määrama, millega võrdub $\frac{I}{A}$

$$\frac{I}{A} = \frac{0,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4}{0,01 \text{ m}^2} = 0,0008 \text{ m}^2$$

Järelikult saab võrrand kuju

$$\left[\underbrace{\frac{40}{3}}_{\text{m}^3} + \underbrace{0,0008}_{\text{m}^2} \underbrace{(6 + \sqrt{128})}_{\text{m}} \right] X_1 - \underbrace{660}_{\text{kN}\cdot\text{m}^3} = 0$$

ja siit

$$13,3472X_1 - 660 = 0$$

mis annab meile lisatundmatu väärtuseks

$$X_1 = 49,449 \text{ kN}$$

7. Paindemomendi epüüri ordinaadid leiame valemiga (13.35). Arvestades staatikaga määramatuse astet, võtab valem kuju

$$M_k = m_{k1}X_1 + M_{kp}^0$$

$$M_b = -2 \cdot 49,449 + 80 = -18,898 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

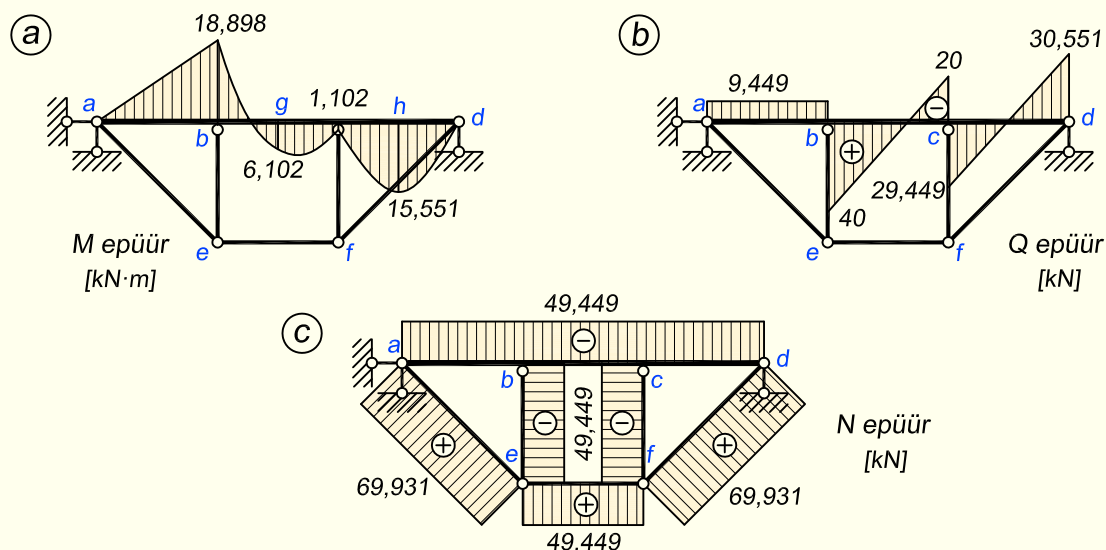
$$M_c = -2 \cdot 49,449 + 100 = 1,102 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Varraste keskmistes lõigetes on paindemomendid

$$M_g = \frac{30 \cdot 2^2}{8} - 18,898 \cdot 0,5 + 1,102 \cdot 0,5 = 6,102 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_h = \frac{30 \cdot 2^2}{8} + 1,102 \cdot 0,5 + 0 = 15,551 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

8. Põikjõu epüüri ordinaatide arvutuse jätame esitamata, kuna seda tuleb teha tavapäraselt paindemomendi epüüri abil.



Joonis 13.55. Sisejõudude epüürid

9. Pikijõu epüüri ordinaadid

Varda $e-f$ pikijõud on võrdne lisatundmatu X_1 väärtusega

$$N_{e-f} = X_1 = 49,449 \text{ kN}$$

Ülejäänud varraste pikijõud arvutame valemiga (13.37), mis meie ülesande staatikaga määramatuse astmele vastavalt on

$$N_k = n_{k1}X_1 + N_{kp}^0$$

$$N_{a-e} = N_{f-d} = 49,449 \cdot \sqrt{2} = 69,931 \text{ kN}$$

$$N_{e-b} = N_{f-c} = -49,449 \cdot 1 = -49,449 \text{ kN}$$

$$N_{a-b} = N_{b-c} = N_{c-d} = -49,449 \cdot 1 = -49,449 \text{ kN}$$

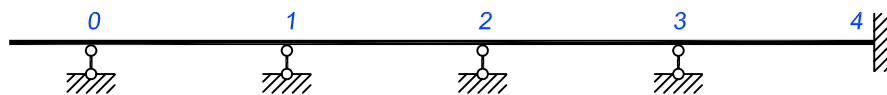
Peatükk 14

JÄTKUVTALA

14.1. Sissejuhatus

Jätkuvtalaks nimetatakse liigenditeta mitmesildelist tala.

Jätkuvtala vahepealsed toed on liigendtoed (joonisel 14.1 toed 1...3), otsmised võivad olla nii liigend- kui jäigad toed ning tala võib lõppeda ka konsoolse otsaga.



Joonis 14.1. Jätkuvtala skeem

Jätkuvtala kasutatakse nii ühiskondlikes kui ka tööstushoonetes ja sillaehituses mitme järjestikuse ava sildamisel, kuna võrreldes tavaliste lihttaladega võimaldab see väiksemate paindemomentide tõttu materjali kokku hoida. Joonisel 14.2 on toodud kaks näidet terasest ja raudbetoonist jätkuvtaladest.

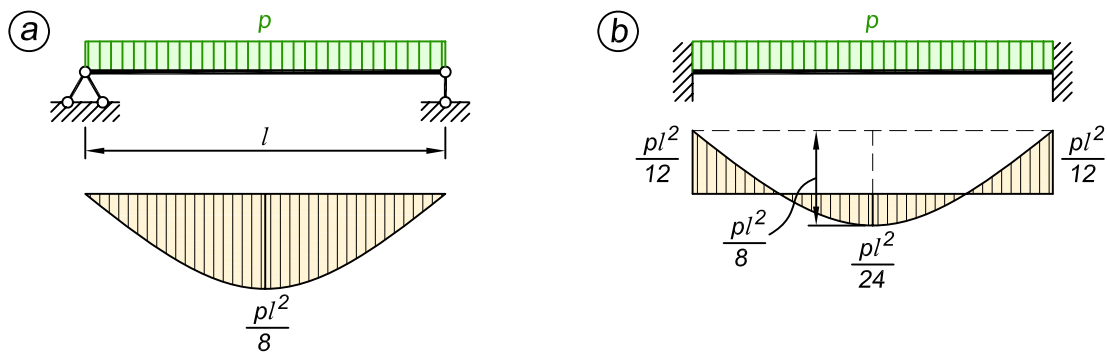


(a) Terasest kraanatala



(b) Donghai sild Shanghais (pikkus 32,5 km)

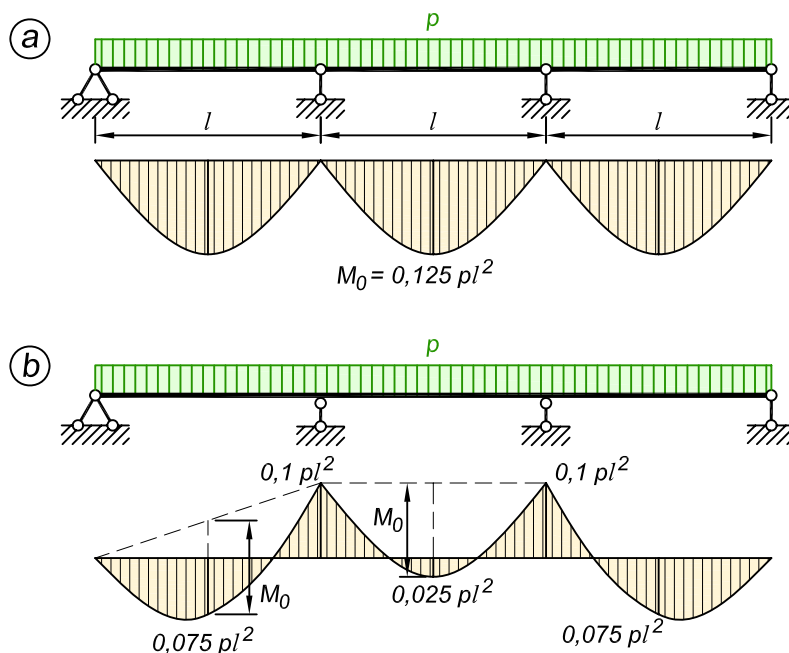
Joonis 14.2. Terasest ja raudbetoonist jätkuvtalade näiteid (fotod: Wikimedia Commons)



Joonis 14.3. Lihttala ja staatikaga määramata tala võrdlus

Järgnevalt võrdleme lihttala ja staatikaga määramatute talade paindemomente. Selleks võtame esmalt vaatluse alla paindemomendi epüüri ordinaatide sõltuvuse ühesildelise tala otse kinnitusest. Joonisel 14.3 on esitatud kaks tala, millest vasakpoolne on tavaline liigendtuge- dega lihttala ja parempoolne jäikade tuge- dega staatikaga määramatu tala. Jooniselt näeme, et jäikade tuge- dega talas on paindemomendid oluliselt väiksemad kui lihttalas – skeemil *b* on maksimaalne sisejõud 1/3 võrra väiksem kui skeemil *a*.

Jätkuvtala osad, mis katavad kõrvutiasetse- vaid sildeid, on üksteise külge jäigalt ühendatud ja see tekitab sarnase olukorra joonisel 14.3, *b* näidatule. Joonisel 14.4, *a* on kolm järjestikust ava sillatud lihttaladega ning skeemil *b* ühe pideva jätkuvtalaga. Jätkuvtala- las on nii tuge- del kui sillete keskel tekkivad paindemomendid väiksemad lihttala maksimaalsest momendist M_0 .



Joonis 14.4. Jätkuvtala võrdlus üksikute lihttaladega

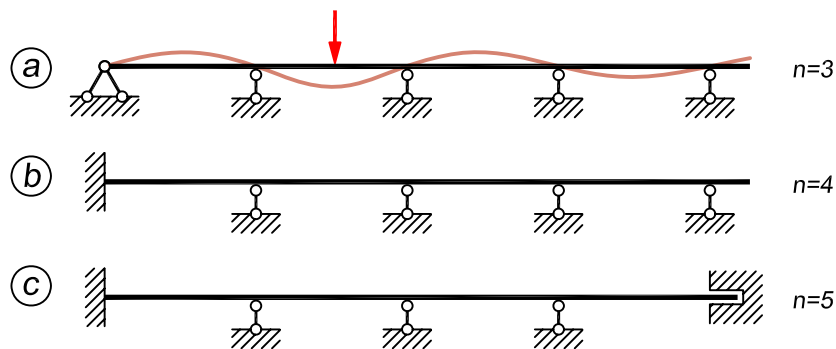
Sisejõud ja toereaktsioonid tekivad jätkuvtalas ka mittekoormatud silletes, mis järeldub joonisel 14.5, a kujutatud tala deformeerunud kujust. Deformeerunud kuju on joonestatud kõvera joonena.

14.2. Staatikaga määramatuse aste

Geomeetriselt muutumatu kujund vajab tasandil kinnitamiseks kolme toesidet. Jätkuvtalal on toesidemeid rohkem kui kolm ja ta on toereaktsioonide suhtes staatikaga määramatu. Staatikaga määramatuse astme leiame valemiga

$$n = t - 3 \quad (14.1)$$

kus t on toesidemete arv. Joonisel 14.5, a, b ja c esitatud kolmel talal on igäühel viis tuge. Toesidemete arv on aga 6, 7 ja 8 ning staatikaga määramatuse aste vastavalt 3, 4 ja 5.



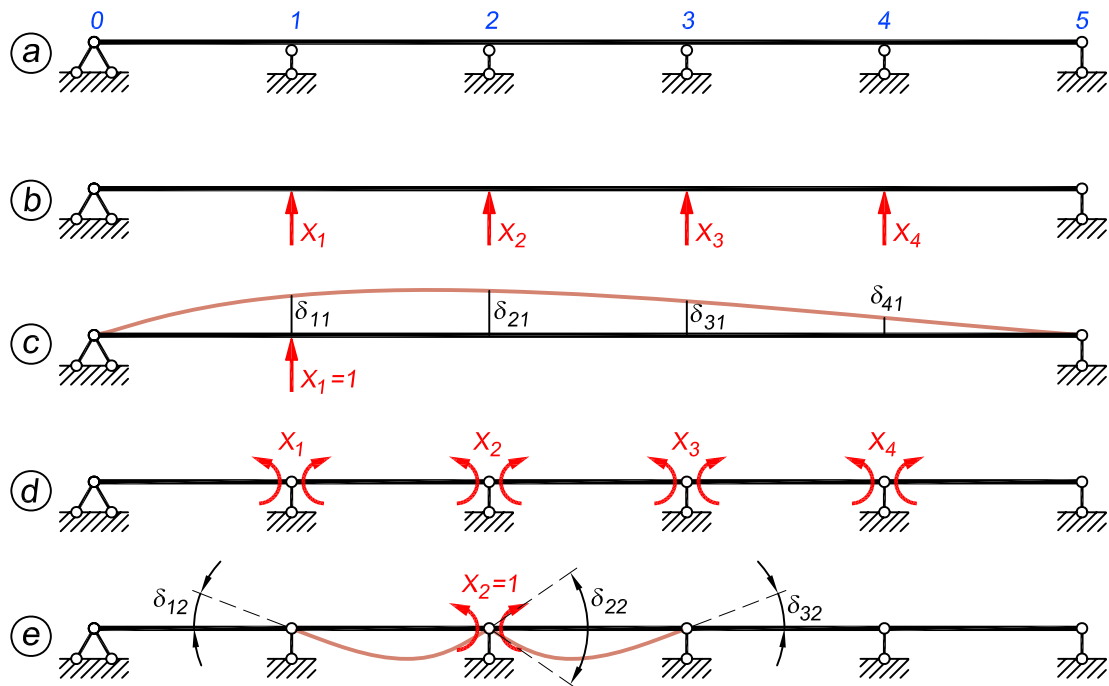
Joonis 14.5. Jätkuvtalade skeeme

14.3. Põhiskeem ja lisatundmatud

Õigesti valitud põhiskeem rahuldab kahte tingimust: koormusest ja ühiktundmatutest põhjustatud sisejõud põhiskeemis on kergelt arvatavad ning kanoonilistes võrrandites on võimalikult palju kõrvalsiirdeid võrdsed nulliga. Joonisel 14.6, b esitatud põhiskeem – tala kahel toel – mille saab n vahepealse toe eemaldamisega, rahuldab esimest tingimust. Lisatundmatuteks on vahepealsete tuge toereaktsioonid. Tundmatust $X_1 = 1$ põhjustatud põhiskeemi deformeerunud kujust (joonis 14.6, c) järeldub, et $\delta_{1i} = \delta_{i1} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ja seega esimene võrrand

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0 \quad (14.2)$$

sisaldab n tundmatut. Sama kehtib ka kõigi teiste võrrandite kohta. Järelikult niisugune põhiskeem ei ole kasulik.



Joonis 14.6. Jätkuvtala põhiskeemi moodustamine

Joonisel 14.6, *d* kujutatud põhiskeem koosneb üksteise kõrval asetsevatest lihttaladest. Lisatundmatuteks on tugede ristlõigetes tekkivad paindemomendid X_1, X_2, \dots, X_n , mida nimetatakse *toemomentideks*. Lisatundmatule X_i vastavaks siirdeks on

$$\varphi_i = \varphi_{ii} + \varphi_{i,i+1} \quad (14.3)$$

kus φ_{ii} ja $\varphi_{i,i+1}$ on toest i vasakul asuva naabertala parempoolse ja paremal asuva naabertala vasakpoolse toeristlõike pööre. Esimene indeks tähistab tuge ja teine indeks sillet. Tundmatu X_2 põhjustab põhiskeemis deformatsioone ainult kahes sildes: toest 2 (joonis 14.6, *a*) vasakul ja paremal pool asuvas naabertalas (joonis 14.6, *e*). Sama kehtib iga teise lisatundmatu X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) kohta, kui äärmised toed on liigendtoed või konsoolidega (joonis 14.5, *a*). Seega iga lisatundmatu toemoment põhjustab staatikaga määratavas põhiskeemis (joonis 14.6, *d*) deformatsioone ainult kahes naabertalas. Äärmise jäiga toe lisatundmatu (paindemoment) põhjustab deformatsioone ainult äärmises sildes. Seega kanoonilistes võrrandites on ainult kas kaks või üks (esimeses ja viimases võrrandis) kõrvalsiiret nullist erinevad.

14.4. Kanoonilised võrrandid. Kolme momendi võrrand

14.4.1. Koormuse mõju

Järgnevalt vaatleme jätkuvtala suvalist tuge i ja sellest toest kummalegi poole jäävat kahte sillet (joonis 14.7, *a*). Lisatundmatu tekitab põhiskeemis ainult kahe naabersilde talades deformatsioone. Lisatundmatule X_i vastavad siiret φ_i põhjustavad kolm momenti X_{i-1}, X_i ja X_{i+1}

(joonis 14.7, b, c ja d). Tundmatud X_{i-2} ja X_{i+2} , samuti ülejäänud lisatundmatud ei põhjusta silletes i ja $i+1$ deformatsioone ning lisatundmatule X_i vastavat siiret. Tundmatule X_i vastav kanooniline võrrand on järgmine

$$\delta_{i,i-1}X_{i-1} + \delta_{ii}X_i + \delta_{i,i+1}X_{i+1} + \Delta_{ip} = 0 \quad (14.4)$$

Võrrandit (14.4) nimetatakse *kolme momendi võrrandiks*, kuna võrrandis on kolm tundmatut paindemomenti. Niisuguse võrrandi koostame jätkuvtala iga tundmatu toemomendi jaoks, mille tulemusena saame n võrrandiga süsteemi. Esimeses ja viimases võrrandis on kaks tundmatut ning vahepealsetes võrrandites on igapähe kolm tundmatut momenti.

Võrrandi (14.4) siirete $\delta_{i,i-1}$, δ_{ii} , $\delta_{i,i+1}$ ja Δ_{ip} arvutamiseks rakendame põhiskeemile järjekorras momendid $X_{i-1} = 1$, $X_i = 1$ ja $X_{i+1} = 1$ ning koormuse. Nendest põhjustatud paindemomendi epüürid m_{i-1} , m_i ning m_{i+1} ja M_p^0 on esitatud joonisel 14.7. Siirete leidmisel me põikjõudude mõju ei arvesta. Võrrandi (14.4) tundmatute kordajad arvutame valemiga

$$EI_0\delta_{ik} = \sum \int m_i m_k \frac{I_0}{I} dx \quad (14.5)$$

mis annab

$$\begin{aligned} EI_0\delta_{i,i-1} &= \int_0^{l_i} m_i m_{i-1} \frac{I_0}{I} dx = \frac{l_i \cdot 1 \cdot 1 I_0}{6 I_i} \\ EI_0\delta_{ii} &= \int_0^{l_i} m_i^2 \frac{I_0}{I} dx + \int_0^{l_{i+1}} m_i^2 \frac{I_0}{I_{i+1}} dx = \frac{l_i \cdot 1 \cdot 1 I_0}{3 I_i} + \frac{l_{i+1} \cdot 1 \cdot 1 I_0}{3 I_{i+1}} \\ EI_0\delta_{i,i+1} &= \int_0^{l_{i+1}} m_i m_{i+1} \frac{I_0}{I_{i+1}} dx = \frac{l_{i+1} \cdot 1 \cdot 1 I_0}{6 I_{i+1}} \end{aligned} \quad (14.6)$$

Võttes kasutusele redutseeritud pikkuse $l'_i = l_i \frac{I_0}{I_i}$, saame siirete arvutamiseks järgmised valemid

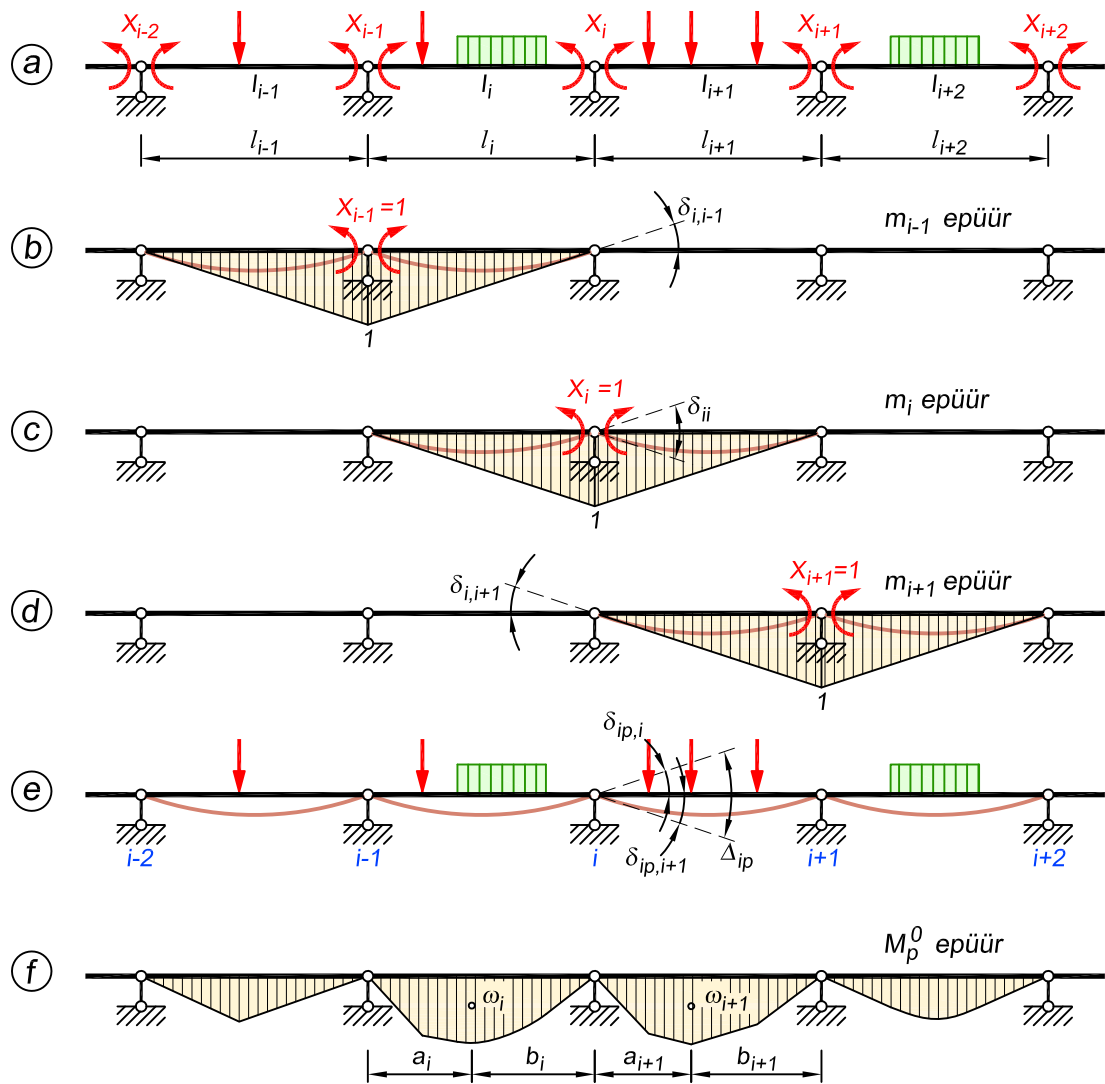
$$\begin{aligned} EI_0\delta_{i,i-1} &= \frac{l_i I_0}{6 I_i} = \frac{l'_i}{6} \\ EI_0\delta_{ii} &= \frac{l_i I_0}{3 I_i} + \frac{l_{i+1} I_0}{3 I_{i+1}} = \frac{l'_i}{3} + \frac{l'_{i+1}}{3} \\ EI_0\delta_{i,i+1} &= \frac{l_{i+1} I_0}{6 I_{i+1}} = \frac{l'_{i+1}}{6} \end{aligned} \quad (14.7)$$

Võrrandi vabaliikme Δ_{ip} arvutame valemiga

$$EI_0\Delta_{ip} = \sum \int m_i M_p^0 \frac{I_0}{I} dx \quad (14.8)$$

Kui $I_i = \text{const.}$ ja $I_{i+1} = \text{const.}$, siis integraalide arvutamisel kasutame Vereštšagini võtet, mille tulemusel saame

$$EI_0\Delta_{ip} = \frac{I_0 a_i}{I_i l_i} \omega_i + \frac{I_0 b_{i+1}}{I_{i+1} l_{i+1}} \omega_{i+1} \quad (14.9)$$



Joonis 14.7. Skeemid kolme momendi võrrandi koostamiseks

kus ω_i ja ω_{i+1} on põhiskeemi koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pindalad silletes i ning $i+1$ (joonis 14.7, e, f); a_i, b_i, a_{i+1} ja b_{i+1} on nende pindade raskuskeskmete kaugused toevvertikaalidest; $\frac{a_i}{l_i}$ ja $\frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}$ on tundmatust $X_i = 1$ põhjustatud paindemomendi epüüri m_i ordinaadid koormusest põhjustatud epüüri M_p^0 pindade ω_i ja ω_{i+1} raskuskeskmete kohal.

Kui siirded (14.7) ja (14.9) asetada võrrandisse (14.4), kusjuures iga liiget on korrutatud teguriga 6 ja vabaliige on viidud paremale poole võrdusmärgi, saab kolme momendi võrrandi järgmise kuju

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6 \frac{I_0}{I_i} \frac{a_i \omega_i}{l_i} - 6 \frac{I_0}{I_{i+1}} \frac{b_{i+1} \omega_{i+1}}{l_{i+1}} \quad (14.10)$$

ehk

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} - 6A_{i+1}^f \frac{I_0}{I_{i+1}} \quad (14.11)$$

kus

$$B_i^f = \frac{a_i \omega_i}{l_i}; \quad A_{i+1}^f = \frac{b_{i+1} \omega_{i+1}}{l_{i+1}} \quad (14.12)$$

on *tinglikust koormusest* põhjustatud toereaktsioonid: B_i^f on sildes i parempoolne ja A_{i+1}^f on sildes $i+1$ vasakpoolne. Tinglikuks (fiktiivseks) koormuseks on tegelikust koormusest põhjustatud paindemomendi epüür põhiskeemis M_p^0 . Tingliku koormuse mõistet selgitame allpool.

Kanooniliste võrrandite koostamisel tuleb rakendada kolme momendi võrrandit n korda.

Valemid vabaliikmete arvutamiseks on esitatud tabelis 14.1 ning täielikumalt lisas A.2.

Toereaktsioonid tinglikust koormusest

Vaatame vabaliikmete arvutust näitena lauskoormuse põhjal ning enne tingliku koormuse juurde asumist teeme seda varasemast tuttava põhiskeemi epüüride integreerimise teel.

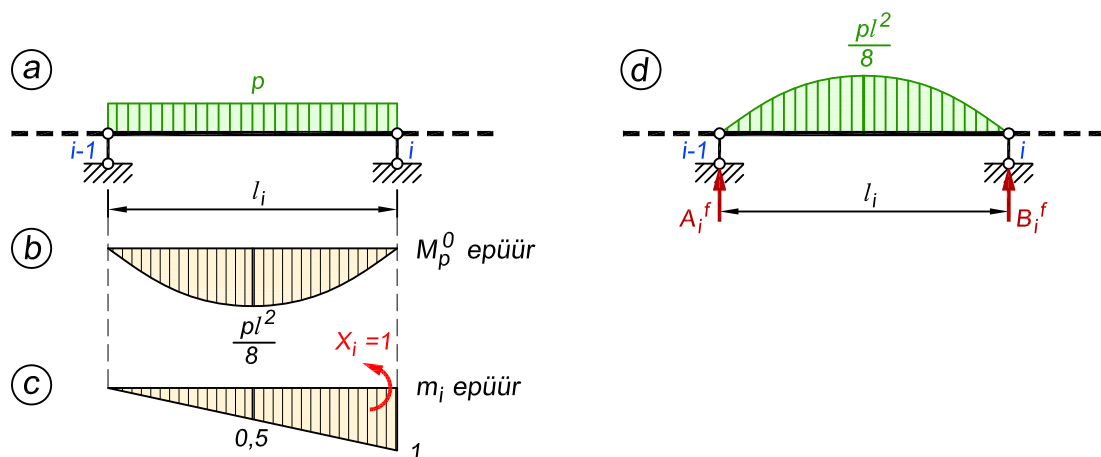
Joonisel 14.8, a kujutatud jätkuvtala sille i on koormatud lauskoormusega, mis põhjustab põhiskeemis paindemomendi epüüri M_p^0 (joonis 14.8, b). Toele i rakendatavast ühiklisatundmatust $X_i = 1$ põhjustatud epüür m_i selles sildes on kujutatud joonisel 14.8, c.

Vastavalt avaldisele (14.8) saame Simpsoni valemi abil

$$EI_0 \Delta_{ip} = \frac{l'_i}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{pl_i^2}{8} \cdot 0,5 + 0 \right) = \frac{1}{24} pl_i^2 l'_i \quad (14.13)$$

kus sulgavaldis ees peame kasutama erinevate jäikustega tala puhul silde redutseeritud pikust. Pärast teguriga 6 läbikorrutamist on vabaliikmeks

$$6EI_0 \Delta_{ip} = \frac{1}{4} pl_i^2 l'_i \quad (14.14)$$



Joonis 14.8. Tingliku koormuse reaktsioonide A_i^f ja B_i^f tuletamine

Järgnevalt tuletame vabaliikme tingliku koormuse abil. Tingliku koormusena kasutame M_p^0 epüüri jooniselt 14.8, b. Saadud lauskoormusest (joonis 14.8, d) peame leidma fiktiivsed toereaktsioonid A_i^f ja B_i^f . Kuna lauskoormus on sümmeetriline, siis jaguneb ta võrdset kummagi toe vahel ja arvutuse esitame praegu, lähtudes reaktsioonist A_i^f .

Tinglikuks koormuseks on ühtlasest lauskoormusest tekkinud paindemomendi epüür, mis on ruutparabooli kujuga. Seetõttu kirjeldame lauskoormuse muutumist tala ulatuses ruutparabooli valemiga, mille leiame meile sobival kujul kolme liigendiga kaare telgjoone võrrandite hulga avaldisena (7.1). Kuna siin on lauskoormuse maksimaalseks väärtuseks $\frac{pl_i^2}{8}$, siis saame

$$p(x) = 4 \cdot \frac{pl_i^2}{8} \cdot \frac{xl_i' - x^2}{l_i'^2} = \frac{pl_i^2}{2l_i'^2} (xl_i' - x^2) \quad (14.15)$$

Tugede vahel võrdse jagunemise tõttu kasutame integreerimisel koormust poole silde ulatuses vahemikus $0 < x < \frac{l_i'}{2}$.

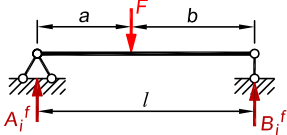
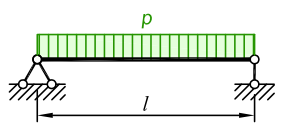
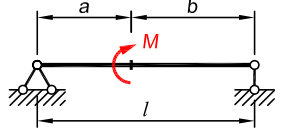
$$A_i^f \frac{I_0}{I_i} = \int_0^{\frac{l_i'}{2}} \frac{pl_i^2}{2l_i'^2} (xl_i' - x^2) dx = \frac{pl_i^2}{2l_i'^2} \left(\frac{x^2 l_i'}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{l_i'}{2}} = \frac{1}{24} pl_i^2 l_i' \quad (14.16)$$

millest pärast teguriga 6 läbikorrutamist saame

$$6A_i^f \frac{I_0}{I_i} = 6B_i^f \frac{I_0}{I_i} = \frac{1}{4} pl_i^2 l_i' \quad (14.17)$$

Tabel 14.1. Valemid kolme momendi võrrandi vabaliikmete arvutamiseks

$$\xi = \frac{a}{l}; \quad \xi' = \frac{b}{l}$$

| Nr | Skeem | $6 \frac{I_0}{I_i} A_i^f$ | $6 \frac{I_0}{I_i} B_i^f$ |
|----|---|---------------------------------|--------------------------------|
| 1 |  | $Fl_i l_i' \xi \xi' (1 + \xi')$ | $Fl_i l_i' \xi \xi' (1 + \xi)$ |
| 2 |  | $\frac{1}{4} pl_i^2 l_i'$ | $\frac{1}{4} pl_i^2 l_i'$ |
| 3 |  | $-Ml_i' (1 - 3\xi'^2)$ | $Ml_i' (1 - 3\xi^2)$ |

Jõudsime samale tulemusele nagu eespool Simpsoni valemit kasutades. Jätkuvtala puhul esitataksegi vabaliikmete arvutus tabelites tinglikust koormusest põhjustatud fiktiivsete toereaktsioonide abil.

14.4.2. Temperatuuri mitteühtlase muutuse mõju

Jätkuvtala, millel ainult üks on liikumatu ja teised on liikuvad liigendtoed, temperatuuri ühtlane muutus sisejõude ei põhjusta.

Temperatuuri mitteühtlase muutumise korral, kui tala ülemise ja alumise pinna temperatuuri muutus on erinev, tingib tala kõverdumine sisejõude. Kui tala ristlõike kõrgus silletes i ja $i + 1$ on konstantne, on kolme momendi võrrand järgmine

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6EI_0 \Delta_{it} \quad (14.18)$$

kus siirde Δ_{it} (joonis 14.9) arvutame valemiga (11.58)

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \frac{\Delta t_i}{h_i} \int_0^l m_i dx \quad (14.19)$$

Kuna ühiktundmatu $X_i = 1$ põhjustab epüüri m_i ainult kahe silde ulatuses (joonis 14.9), siis saame avaldise

$$\Delta_{it} = \alpha \frac{\Delta t_i}{h_i} \int_0^{l_i} \frac{x}{l_i} dx + \alpha \frac{\Delta t_{i+1}}{h_{i+1}} \int_0^{l_{i+1}} \frac{l_{i+1} - x}{l_{i+1}} dx \quad (14.20)$$

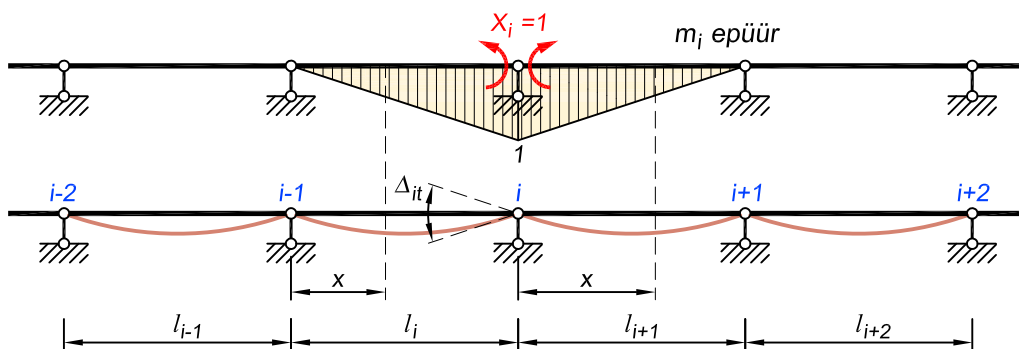
mis pärast integreerimist on järgmine

$$\Delta_{it} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\Delta t_i l_i}{h_i} + \frac{\Delta t_{i+1} l_{i+1}}{h_{i+1}} \right) \quad (14.21)$$

Avaldises (14.21) tähistavad h_i ja h_{i+1} ristlõigete kõrgusi silletes i ning $i + 1$.

Asetades siirde (14.21) võrrandisse (14.18), saame temperatuuri mitteühtlasest muutumisest põhjustatud toemomentide arvutamiseks kolme momendi võrrandi järgmisel kujul

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -3EI_0 \alpha \left(\frac{\Delta t_i l_i}{h_i} + \frac{\Delta t_{i+1} l_{i+1}}{h_{i+1}} \right) \quad (14.22)$$



Joonis 14.9. Kolme momendi võrrandi koostamine temperatuuri mitteühtlasest muutusest

14.4.3. Tugede vajumise mõju

Jätkvtala tugede vajumine, kui tala jääb sirgeks, ei põhjusta sisejõude. Tugede vajumine, kui tala kõverdub, tekitab talas paindemomente ja põikjõude. Jätkvtala iga silde ulatuses muutub paindemoment lineaarselt. Toemomendid arvutame kolme momendi võrrandiga

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6EI_0 \Delta_{ir} \quad (14.23)$$

kus Δ_{ir} on tugede mitteühtlasest vajumisest põhjustatud tala murdenurk toe i juures staatikaga määratavas põhiskeemis (joonis 14.10).

Staatikaga määratava skeemi talade pöördenurgad arvutame valemitega

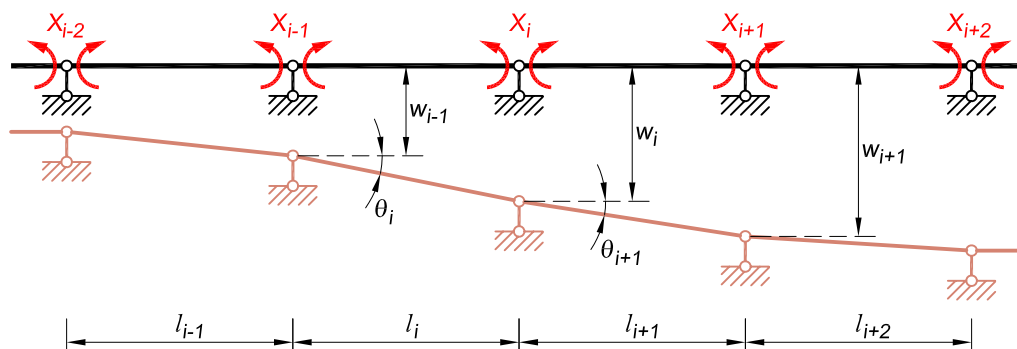
$$\theta_i = \frac{w_i - w_{i-1}}{l_i}; \quad \theta_{i+1} = \frac{w_{i+1} - w_i}{l_{i+1}} \quad (14.24)$$

Tugede mitteühtlasest vajumisest põhjustatud murdenurga toel i arvutame järgmise valemiga

$$\Delta_{ir} = \theta_{i+1} - \theta_i = \frac{w_{i+1} - w_i}{l_{i+1}} - \frac{w_i - w_{i-1}}{l_i} \quad (14.25)$$

Kui siire (14.25) asetada võrrandisse (14.23), siis saame tugede mitteühtlasest vajumisest põhjustatud toemomentide arvutamiseks kolme momendi võrrandi järgmisel kujul

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6EI_0 \left(\frac{w_{i+1} - w_i}{l_{i+1}} - \frac{w_i - w_{i-1}}{l_i} \right) \quad (14.26)$$



Joonis 14.10. Kolme momendi võrrandi koostamine tugede vajumisest

14.5. Sisejõudude epüürid ja toereaktsioonid

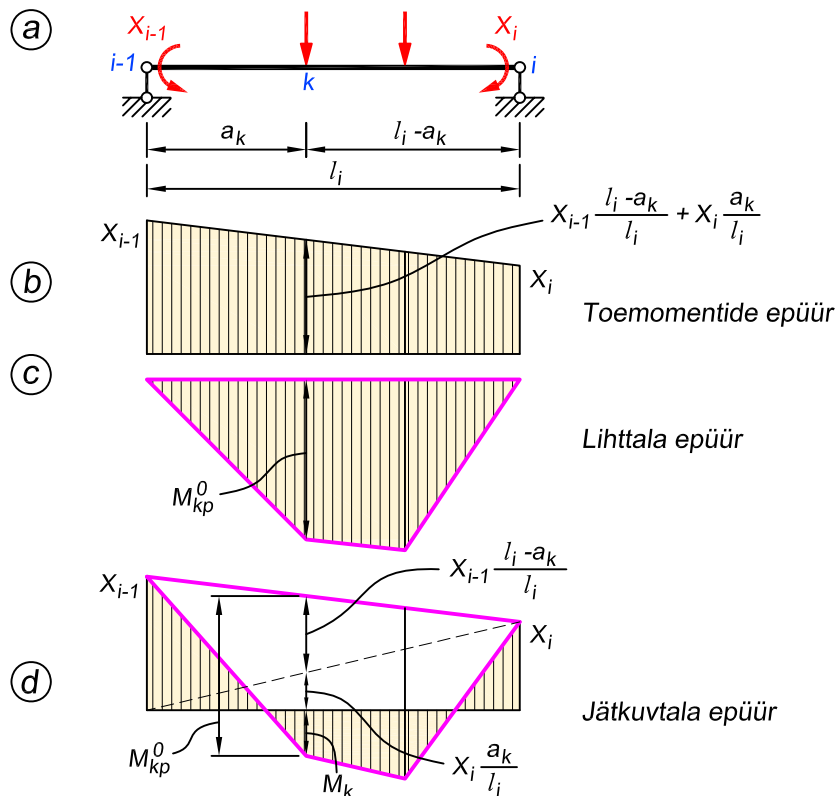
Jätkvtala paindemomendi ja põikjõu epüüride ordinaatide arvutamisel vaatleme iga sillet eraldi temale mõjuva koormuse ja kanoonilistest võrranditest leitud lisatundmatute toemomentidega (joonis 14.11, a).

Paindemomendi sildes i lõikes k arvutame järgmise avaldisega

$$M_k = M_{kp}^0 + X_{i-1} \cdot \xi'_k + X_i \cdot \xi_k \quad (14.27)$$

kus M_{kp}^0 on paindemoment lõikes k , vaadeldes vastavat sillet lihttalana, X_{i-1} ja X_i on sildest vasakule ja paremale jäävad toemomendid, $\xi = \frac{a_k}{l_i}$ ja $\xi' = \frac{l_i - a_k}{l_i}$ on kauguste suhted, mis määravad lõike k asukoha.

Saadud valemi sisu selgitame joonise 14.11 abil. Joonisel 14.11, *b* on kujutatud võrrandisüsteemist saadud jätkuvtala toemomentide epüür ning joonisel 14.11, *c* lihttala paindemomendi epüür. Kui nüüd kanda lihttala paindemomendi epüür toemomentide ordinaatide tippe ühendavale sirglõigule, siis saame jätkuvtala epüüri, mis on esitatud joonisel 14.11, *d*. Saadud jooniselt näeme, et jätkuvtala epüüri ordinaadi M_k leidmiseks tuleb positiivsele lihttala epüüri ordinaadile M_{kp}^0 juurde liita toemomentide epüürist negatiivne ordinaat, mille arvutame toemomentide väärtuste abil, jagades trapetsikujulise epüüri kaheks kolmnurgaks, nagu on näidatud katkendjoonega joonisel 14.11, *d*. Kolmnurgad annavad meile toemomentide epüüri ordinaadiks lõike k kohal $X_{i-1} \frac{l_i - a_k}{l_i} + X_i \frac{a_k}{l_i}$ ehk $X_{i-1} \cdot \xi'_k + X_i \cdot \xi_k$.



Joonis 14.11. Jätkuvtala paindemomendi epüüri koostamine

Põikjõud leiame paindemomendi epüüri abil avaldisega

$$Q_k = Q_{kp}^0 + \frac{X_i - X_{i-1}}{l_i} \quad (14.28)$$

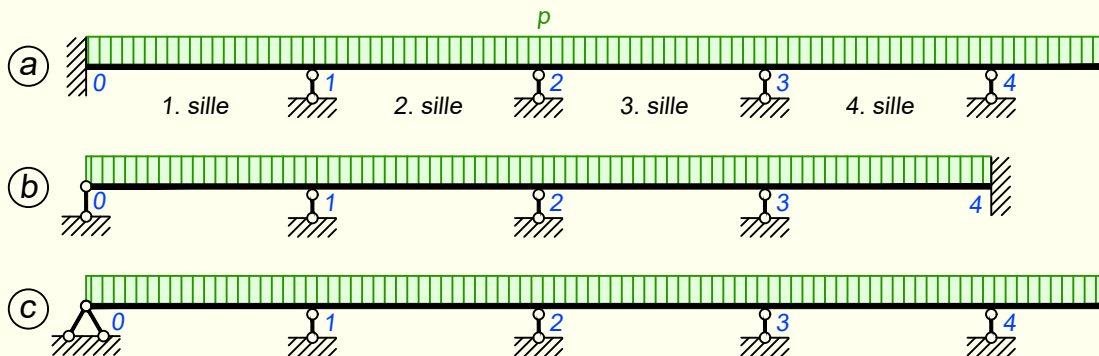
kus Q_{kp}^0 on põikjõud lõikes k , vaadeldes vastavat sillet lihttalana ning X_{i-1} ja X_i on sildest kummalegi poole jäävad toemomendid.

Toereaktsioonid leiame põikjõudude kaudu, lähtudes sellest, et Q epüüris olev aste peab olema võrdne selle astme kohal oleva koondjõuga. Seetõttu kasutame arvutuses toest kummalegi poole jäävaid põikjõu väärtuseid

$$R_i = Q_{i,i+1} - Q_{i,i-1} = R_{i,i+1}^0 + \frac{X_{i+1} - X_i}{l_{i+1}} + R_{ii}^0 + \frac{X_{i-1} - X_i}{l_i} \quad (14.29)$$

kus $Q_{i,i+1}$ ja $Q_{i,i-1}$ on vaadeldavast toest paremale ja vasakule jäävad põikjõu ordinaadid, $R_{i,i+1}^0$ on toel i tekkiv lihttala reaktsioon silde $i + 1$ koormusest, R_{ii}^0 on toel i tekkiv lihttala reaktsioon silde i koormusest.

NÄIDE 14.1. Koostada joonisel 14.12 kujutatud jätkuvtaladele võrrandisüsteemid sisejõudude arvutamiseks kolme momendi võrrandiga.



Joonis 14.12. Jätkuvtalade arvutusskeemid

LAHENDUS

Jätkuvtala arvutamine sõltub selle otste kinnitustest, kuna see määrab ära tundmatute toemomentide paiknemise asukoha. Siin on küsimus selles, kas tundmatuteks on ainult vahepealsete tugede toemomendid või on tundmatuks ka otsmine toemoment.

Järgnevalt vaatame jätkuvtala lahendamist mitme erineva otste kinnitusega variandi korral.

Kolme momendi võrrandiga lahendamisel tuleb esmalt leida tala staatikaga määratlemise aste valemiga (14.1)

$$n = t - 3$$

Joonisel 14.12, a ja b kujutatud taladel on see $n = t - 3 = 7 - 3 = 4$. Skeemil c on see

$n = t - 3 = 6 - 3 = 3$. Järelikult tuleb kahe esimese tala lahendamiseks koostada nelja tundmatuga ja viimase tala jaoks kolme tundmatuga võrrandisüsteem.

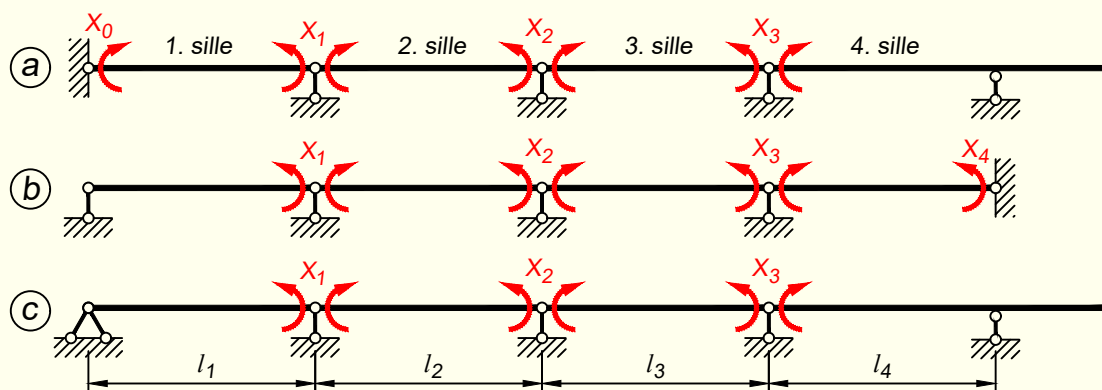
Pärast määramatuse astme leidmist moodustame staatikaga määratud põhiskeemi, mille jaoks eemaldame arvutusskeemist määramatuse astmele vastava arvu liigsideid. Liigsidemete eemaldamiseks paigutame liigendid nende tugele, kus on tundmatud toemomendid.

Skeemil *a* tekivad tundmatud momendid tugele $0...3$. Nendele tugele lisame liigendid (joonis 14.13, *a*). Toe 4 moment tundmatu ei ole, kuna see on konsooli toelõige. Konsool on aga tavaline staatikaga määratud element ja seetõttu saame tema toemomendi lihtsalt välja arvutada konsooli enda peal olevast koormusest.

Skeemil *b* on vasakpoolne tugi liigenditugi, kus paindemomenti tekkida ei saa. Järelikult sellel toel midagi tundmatu ei ole ja tundmatud toemomendid tekivad tugele $1...4$, kuhu lisame liigendid (joonis 14.13, *b*).

Skeemil *c* olev tala on mõlemas otsas liigenditugega ja sellel talal saavad tundmatud toemomendid tekkida ainult vahepealsetel tugele $1...3$, kuhu lisame liigendid (joonis 14.13, *c*).

Kunagi ei tohi liigendit paigutada sellisele toele, kus ei ole tundmatut toemomenti. Seetõttu tuleb enne põhiskeemi moodustamist alati mõelda sellele, millised on need toemomendid, mille me saame kohe välja arvutada ja millised on tundmatud momendid, mille jaoks läheb vaja kolme momendi võrrandi. Liigsidemete eemaldamine peab vastama samale reeglile, millest oli juba jõumeetodi juures juttu: põhiskeem peab olema staatikaga määratud ning ükski selle osa ei tohi olla geomeetriselt muutuv ega hetkmuutuv.



Joonis 14.13. Põhiskeemid

Järgnevalt koostame võrrandid vastavalt kolme momendi võrrandi üldvalemile (14.11)

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} - 6A_{i+1}^f \frac{I_0}{I_{i+1}}$$

kus l' on silde redutseeritud pikkus ning I_0/I_i on jäikuste suhe, mida läheb vaja siis, kui silded on erinevate jäikustega. Konstantse jäikusega sillete puhul $l' = l$ ja $\frac{I_0}{I_i} = 1$.

Võrrandis olevad indeksid i on sillete ja tugede järjekorranumbrid, kusjuures üldvalemi kehtimiseks peavad silded ja toed olema nummerdatud selliselt, et silde number kattub temast paremale jääva toe numbriga.

Iga tundmatu toemomendi kohta tuleb kirjutada üks võrrand. Kolme momendi võrrandi liikmed tulevad alati ühe põhimõtte järgi:

1. võrrandi esimeses liikmes on vaadeldavast toest vasakule jääv sille korrutatud sellest vasakule jääva toemomendiga;
2. võrrandi keskmises liikmes on vaadeldava toe moment ise korrutatud temast kummalegi poole jäävate sillete kahekordse summaga;
3. võrrandi kolmandas liikmes on vaadeldavast toest paremale jääv sille korrutatud sellest paremale jääva toemomendiga.

Võrrandid võib välja kirjutada kas lähtudes sellest mainitud põhimõttest või siis kirjutades võrrandis indeksite asemel igale poole i õiged väärtused.

Skeemil a oleva tala võrrandisüsteemiks kujuneb

$$\begin{aligned} i = 0: & \quad 2l_1 X_0 + l_1 X_1 = -6A_1^f \\ i = 1: & \quad l_1 X_0 + 2(l_1 + l_2) X_1 + l_2 X_2 = -6B_1^f - 6A_2^f \\ i = 2: & \quad l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) X_2 + l_3 X_3 = -6B_2^f - 6A_3^f \\ i = 3: & \quad l_3 X_2 + 2(l_3 + l_4) X_3 + l_4 M_4 = -6B_3^f - 6A_4^f \end{aligned}$$

kus halli taustaga on igas võrrandis näidatud toemoment, mille kohta vastav võrrand on kirjutatud.

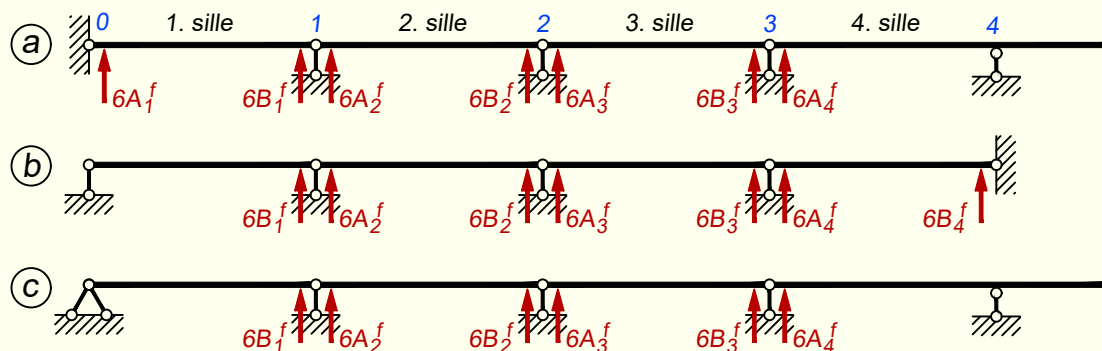
Skeemil b oleva tala võrrandisüsteemiks kujuneb

$$\begin{aligned} i = 1: & \quad 2(l_1 + l_2) X_1 + l_2 X_2 = -6B_1^f - 6A_2^f \\ i = 2: & \quad l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) X_2 + l_3 X_3 = -6B_2^f - 6A_3^f \\ i = 3: & \quad l_3 X_2 + 2(l_3 + l_4) X_3 + l_4 M_4 = -6B_3^f - 6A_4^f \\ i = 4: & \quad l_4 X_3 + 2l_4 X_4 = -6B_4^f \end{aligned}$$

Skeemil c oleva tala võrrandisüsteemiks kujuneb

$$\begin{aligned} i = 1: & \quad 2(l_1 + l_2) X_1 + l_2 X_2 = -6B_1^f - 6A_2^f \\ i = 2: & \quad l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) X_2 + l_3 X_3 = -6B_2^f - 6A_3^f \\ i = 3: & \quad l_3 X_2 + 2(l_3 + l_4) X_3 + l_4 M_4 = -6B_3^f - 6A_4^f \end{aligned}$$

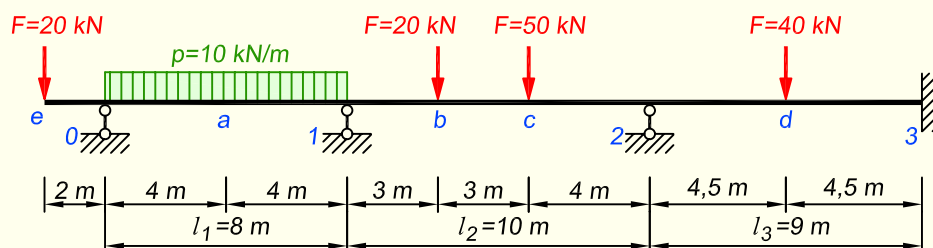
Võrrandi parem pool moodustub fiktiivsetest reaktsioonidest A_i^f ja B_i^f , mis paiknevad selliselt, et A_i^f on silde vasakpoolne ja B_i^f on silde parempoolne fiktiivne reaktsioon. Fiktiivsed reaktsioonid nummerdatakse sillete järjekorranumbritega.



Joonis 14.14. Fiktiivsed reaktsioonid

Fiktiivsed reaktsioonid võib võrranditesse kirjutada ühe variandi korral vastavalt valemis olevale indeksile i . Teise variandi korral lähtume põhimõttest, et igasse võrrandisse lähivad need reaktsioonid, mis paiknevad selle toe kõrval, mille kohta see võrrand on kirjutatud. Selle variandi puhul saab abivahendina kasutada joonist 14.14.

NÄIDE 14.2. Arvutada joonisel 14.15 kujutatud jätkuvtala toemomendid kolme momendi võrrandiga ning kujutada paindemomendi ja põikjõu epüürid. EI on konstantne.



Joonis 14.15. Jätkuvtala arvutuskeem

LAHENDUS

Tala staatikaga määramatuse astme leiame valemiga (14.1)

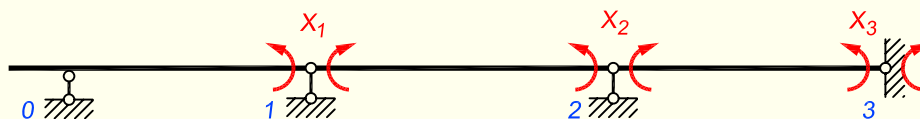
$$n = t - 3 = 6 - 3 = 3$$

Kolme momendi võrrandiga lahendamisel tuleb meil eemaldada kolm liigset. Selleks paigutame tugele kolm liigendit, kuna iga liigendi lisamisega kõrvaldame ühe paindemomenti vastuvõtva sideme. Liigendid tuleb paigutada nendele tugele, kus esinevad tundmatud toemomendid. Praegusel juhul on nendeks toed 1, 2 ja 3. Lisatundmatuteks on seega toemomendid X_1 , X_2 ja X_3 . 0-toele me liigendit ei paiguta, kuna tala lõpeb vasakus otsas konsooliga, mis on staatikaga määratud element ja seetõttu ei ole toemoment 0-toel tundmatu.

Alati tuleb lähtuda sellest, et pärast liigendite lisamist ei oleks tala põhiskeemi ükski osa geomeetriselt muutuv ega ka staatikaga määratu. Kui me paigutaksime 0-toele

liigendi ja mõne teise toe jätaksime ilma (kokku peab olema lisatud kolm liigendit), siis asenduks konsool vardaga, mis oleks ülejäänud arvutusskeemiga ühendatud liigendiga ja seetõttu on geomeetriselt muutuv. Samal ajal oleks tala mõni teine osa staatikaga määratu, kuna seal oleks liigselt sidemeid.

Tala põhiskeem koos lisatundmatutega on esitatud joonisel 14.16.



Joonis 14.16. Põhiskeem

Kolme momendi võrrandiga lahendamisel kasutame avaldist (14.11)

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} - 6A_{i+1}^f \frac{I_0}{I_{i+1}}$$

Tugede 1, 2 ja 3 kohta koostatud kolme momendi võrrandid on järgmised

$$i = 1: \quad l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2) X_1 + l_2 X_2 = -6B_1^f - 6A_2^f$$

$$i = 2: \quad l_2 X_1 + 2(l_2 + l_3) X_2 + l_3 X_3 = -6B_2^f - 6A_3^f$$

$$i = 3: \quad l_3 X_2 + 2l_3 X_3 = -6B_3^f$$

kus

$$M_0 = -F_e \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$6B_1^f = \frac{1}{4} p l_1^3 = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 8^3 = 1280 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$6A_2^f = F_b l_2^2 \xi_b \xi'_b (1 + \xi'_b) + F_c l_2^2 \xi_c \xi'_c (1 + \xi'_c) = \\ = 20 \cdot 10^2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot (1 + 0,7) + 50 \cdot 10^2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot (1 + 0,4) = 2394 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$6B_2^f = F_b l_2^2 \xi_b \xi'_b (1 + \xi_b) + F_c l_2^2 \xi_c \xi'_c (1 + \xi_c) = \\ = 20 \cdot 10^2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot (1 + 0,3) + 50 \cdot 10^2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot (1 + 0,6) = 2466 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$6A_3^f = 6B_3^f = 40 \cdot 9^2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot (1 + 0,5) = 1215 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Valemid kolme momendi võrrandi vabaliikmete arvutamiseks on esitatud lisas A.2.

Pärast sillete pikkuste ning arvutatud väärtuste asetamist võrranditesse saame järgmise võrrandisüsteemi

$$36 X_1 + 10 X_2 = -3354$$

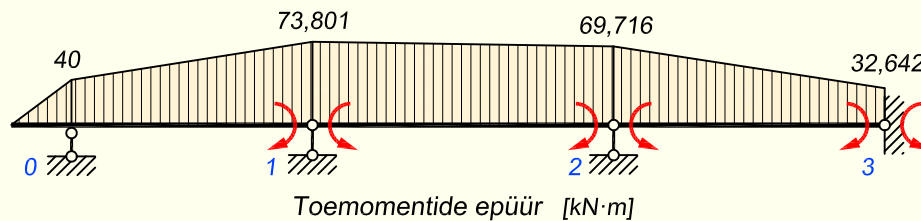
$$10 X_1 + 38 X_2 + 9 X_3 = -3681$$

$$9 X_2 + 18 X_3 = -1215$$

mille lahendamiseks leiame lisatundmatud

$$X_1 = -73,801 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad X_2 = -69,716 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad X_3 = -32,642 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Saadud lisatundmatud on jätkuvtala toemomentide väärtusteks. Koostame nendega toemomentide epüüri (joonis 14.17). Kuna momendid on kõik negatiivsed, siis kanname nad nulljoonest ülespoole.

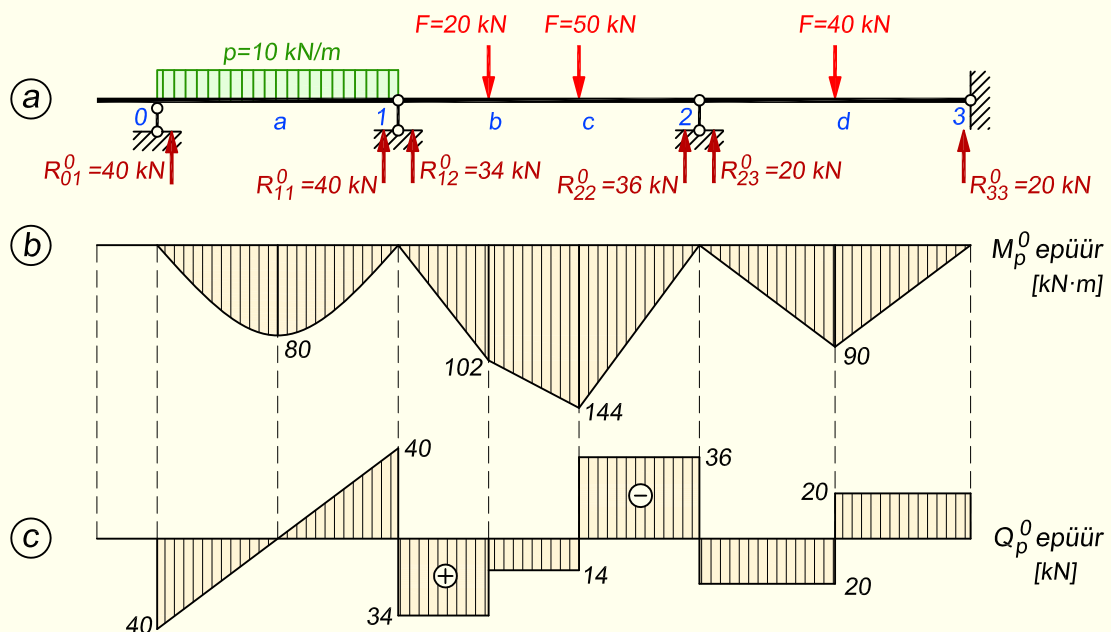


Joonis 14.17. Paindemomendi epüür toemomentidest

Järgnevalt arvutame paindemomendi epüüri ordinaadid silletes olevates lõigetes a , b , c ja d , mida saame teha avaldisega (14.27)

$$M_k = M_{kp}^0 + X_{i-1} \cdot \xi'_k + X_i \cdot \xi_k$$

Kuna siin valemis on vaja lihttala paindemomendi ordinaate nimetatud lõigetele, siis koostame igale sildele M_p^0 epüüri (joonis 14.18, b). Lihttalade toereaktsioonid on näidatud joonisel 14.18, a. Reaktsiooni tähise R järel olevas indeksis näitab esimene number tuge, kus reaktsioon tekib, ja teine sillet, mille koormus seda reaktsiooni põhjustab.

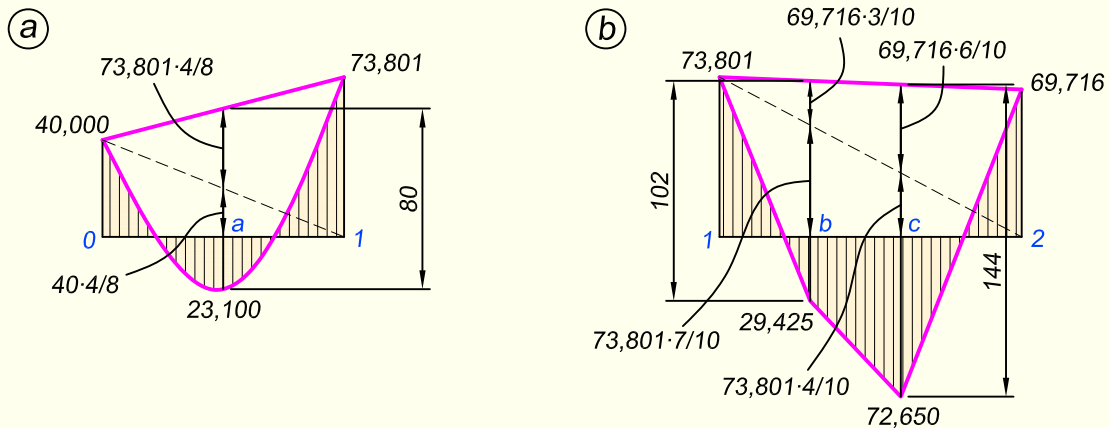


Joonis 14.18. Lihttalade toereaktsioonid, paindemomendi ja põikjõu epüürid

Esimese silde lõikes a saame paindemomendiks valemi (14.27) abil

$$M_a = 80 - 40 \cdot \frac{4}{8} - 73,801 \cdot \frac{4}{8} = 23,100 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Joonisel 14.19, a on näidatud, kuidas kanda lihttala epüür toemomentide ordinaatide tippu ühendavale sirgele. Samuti on joonisel näidatud eelneva arvutuse üksikute osade otstarve ehk millised ordinaadid tuleb summeerida, et saada jätkuvtala paindemomendi väärtust.



Joonis 14.19. Esimesele ja teisele sildele jätkuvtala epüüri koostamine. Lihttala epüür on kujutatud lilla joonega

Teise silde momentide M_b ja M_c arvutamiseks on vaja leida lihttala toereaktsioonid teises sildes koormustest F_b ja F_c (joonis 14.18, a)

$$R_{12}^0 = 20 \cdot \frac{7}{10} + 50 \cdot \frac{4}{10} = 34 \text{ kN}; \quad R_{22}^0 = 20 \cdot \frac{3}{10} + 50 \cdot \frac{6}{10} = 36 \text{ kN}$$

Nende abil saame leida lihttala paindemomendid M_b^0 ja M_c^0

$$M_b^0 = 34 \cdot 3 = 102 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad M_c^0 = 36 \cdot 4 = 144 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

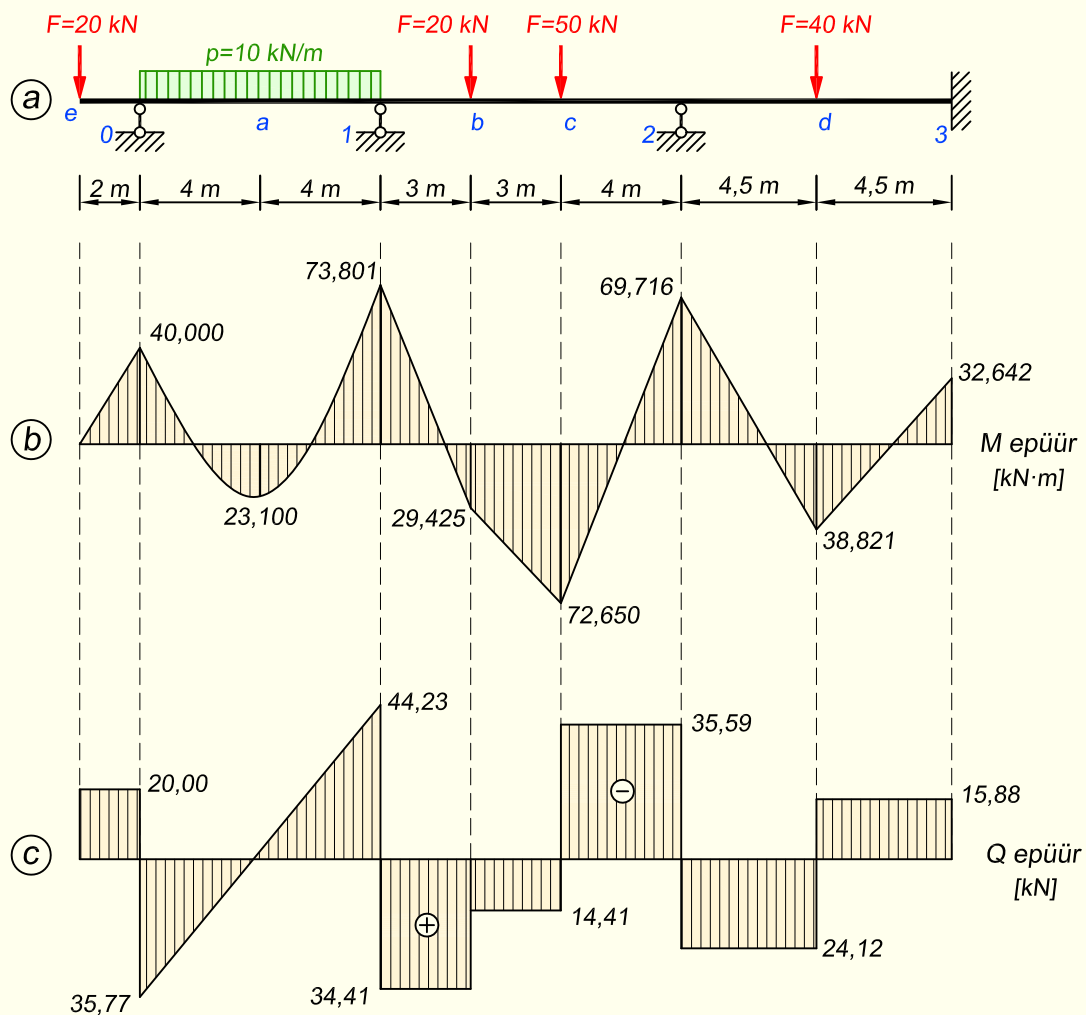
Jätkuvtala epüüri ordinaadid (joonis 14.19, b) on

$$M_b = 102 - 73,801 \cdot \frac{7}{10} - 69,716 \cdot \frac{3}{10} = 29,425 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = 144 - 73,801 \cdot \frac{4}{10} - 69,716 \cdot \frac{6}{10} = 72,650 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kolmandas sildes on koormus täpselt ava keskel ja seega lihttala toereaktsiooni ja paindemomendi leidmine lihtne

$$M_d = 90 - 69,716 \cdot \frac{4,5}{9} - 32,642 \cdot \frac{4,5}{9} = 38,821 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 14.20. Jätkuvtala paindemomendi ja põikjõu epüürid

Jätkuvtala paindemomendi epüür on esitatud joonisel 14.20, b.

Põikjõu epüüri ordinaadid leiame avaldisega (14.28)

$$Q_k = Q_{kp}^0 + \frac{X_i - X_{i-1}}{l_i}$$

Kuna selle arvutuse jaoks on vaja lihttala põikjõu ordinaate, siis koostame igale sildele Q_p^0 epüüri (joonis 14.18, c). Edasi arvutame jätkuvtala epüüri ordinaadid vastavalt valemile

$$Q_{01} = 40 + \frac{-73,801 + 40}{8} = 35,77 \text{ kN}$$

$$Q_{10} = -40 + \frac{-73,801 + 40}{8} = -44,23 \text{ kN}$$

$$Q_{1-b} = 34 + \frac{-69,716 + 73,801}{10} = 34,41 \text{ kN}$$

$$Q_{2-c} = -36 + \frac{-69,716 + 73,801}{10} = -35,59 \text{ kN}$$

$$Q_{b-c} = \frac{72,650 - 29,425}{3} = 14,41 \text{ kN}$$

$$Q_{2-d} = 20 + \frac{-32,642 + 69,716}{9} = 24,12 \text{ kN}$$

$$Q_{3-d} = -20 + \frac{-32,642 + 69,716}{9} = -15,88 \text{ kN}$$

$$Q_{konsool} = -20 \text{ kN}$$

Jätkuvtala põikjõu epiüür on esitatud joonisel 14.20, c. Lisame siia juurde, et koondjõududega koormatud varrastes võib kõigis varda osades arvutada põikjõu selliselt, nagu on praegu siin näidatud vahemiku $b-c$ kohta – arvestades koondjõudude vahelist varda-osa lihttalana. Sel juhul puudub arvutusest liige Q_{kp}^0 , kuna vaadeldava lõigu pikkuses pole ühtegi koormust, mis annaks lihttalasse põikjõu. Kindlasti tuleb paindemomendi ordinaadid võtta siis selle lõigu otstest ja pikkuseks l_i samuti selle lõigu pikkus.

Toereaktsioonid leiame põikjõudude kaudu avaldisega (14.29)

$$R_i = Q_{i,i+1} - Q_{i,i-1}$$

$$R_0 = Q_{01} - Q_{konsool} = 35,77 + 20 = 55,77 \text{ kN}$$

$$R_1 = Q_{12} - Q_{10} = 34,41 + 44,23 = 78,64 \text{ kN}$$

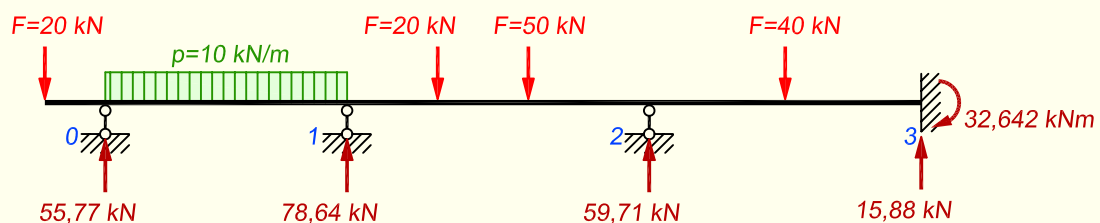
$$R_2 = Q_{23} - Q_{21} = 24,12 + 35,59 = 59,71 \text{ kN}$$

$$R_3 = -Q_{32} = 15,88 \text{ kN}$$

Arvutuse õigsust kontrollime talale mõjuva koormuse ja toereaktsioonide tasakaalutingimustega (joonis 14.21)

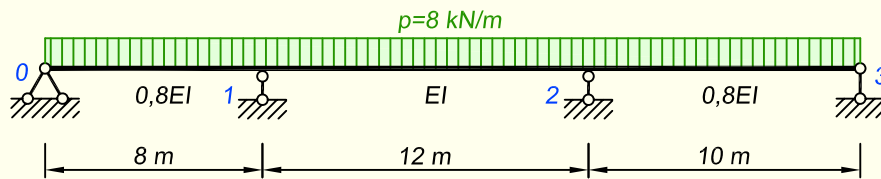
$$\sum Z = -55,77 - 78,64 - 59,71 - 15,88 + 20 + 10 \cdot 8 + 20 + 50 + 40 = 0$$

$$\sum M_3 = 20 \cdot 29 + 10 \cdot 8 \cdot 23 + 20 \cdot 16 + 50 \cdot 13 + 40 \cdot 4,5 - 55,77 \cdot 27 - 78,64 \cdot 19 - 59,71 \cdot 9 - 32,642 = 0$$



Joonis 14.21. Staatikaline kontroll

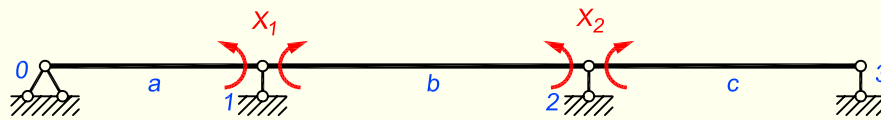
NÄIDE 14.3. Arvutada joonisel 14.22 kujutatud erinevate jäikustega silletega jätkuvtala toemomendid kolme momendi võrrandiga ning koostada sisejõudude epüürid.



Joonis 14.22. Jätkuvtala arvutuskeem

LAHENDUS

Tala staatikalise määratuse aste on $n = 2$. Liigsidemed eemaldame keskmistelt tuge-
delt. Tala põhiskeem koos lisatundmatutega on esitatud joonisel 14.23.



Joonis 14.23. Põhiskeem

Kuna sillete jäikused on erinevad, siis tuleb esmalt välja arvutada sillete redutseeritud pikkused

$$l'_1 = l_1 \cdot \frac{I_0}{I_1} = 8 \cdot \frac{1}{0,8} = 10 \text{ m}; \quad l'_2 = l_2 = 12 \text{ m}; \quad l'_3 = l_3 \cdot \frac{I_0}{I_3} = 10 \cdot \frac{1}{0,8} = 12,5 \text{ m}$$

Kolme momendi võrrandiga lahendamisel kasutame avaldist (14.11)

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} - 6A_{i+1}^f \frac{I_0}{I_{i+1}}$$

Tugede 1 ja 2 kohta koostatud kolme momendi võrrandid on järgmised

$$i = 1: \quad 2(l'_1 + l'_2) X_1 + l'_2 X_2 = -6B_1^f \frac{I_0}{I_1} - 6A_2^f \frac{I_0}{I_2}$$

$$i = 2: \quad l'_2 X_1 + 2(l'_2 + l'_3) X_2 = -6B_2^f \frac{I_0}{I_2} - 6A_3^f \frac{I_0}{I_3}$$

kus

$$6B_1^f \frac{I_0}{I_1} = \frac{1}{4} p l_1^2 l'_1 = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 8^2 \cdot 10 = 1280 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$6A_2^f \frac{I_0}{I_2} = 6B_1^f \frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 12^2 \cdot 12 = 3456 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$6A_3^f \frac{I_0}{I_3} = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot 12,5 = 2500 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Asetame redutseeritud silded ja vabaliikmed võrranditesse, mille tulemusena saame võrrandisüsteemi

$$44X_1 + 12X_2 = -4736$$

$$12X_1 + 49X_2 = -5956$$

ja selle lahendamisega leiame lisatundmatud

$$X_1 = -79,817 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad X_2 = -102,004 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sillete keskmistes lõigetes a , b ja c leiame ordinaadid avaldisega (14.27)

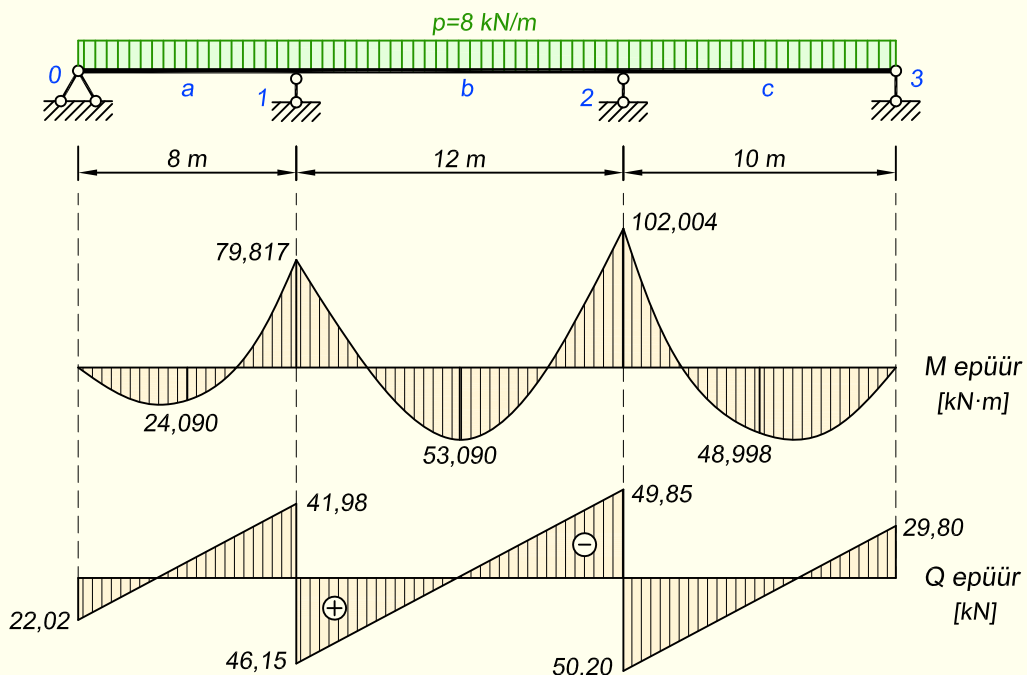
$$M_k = M_{kp}^0 + X_{i-1} \cdot \xi'_k + X_i \cdot \xi_k$$

$$M_a = \frac{8 \cdot 8^2}{8} - 79,817 \cdot 0,5 = 24,090 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_b = \frac{8 \cdot 12^2}{8} - 79,817 \cdot 0,5 - 102,004 \cdot 0,5 = 53,090 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = \frac{8 \cdot 10^2}{8} - 102,004 \cdot 0,5 = 48,998 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Põikjõu epüüri ordinaatide arvutuse jätame siin esitamata. Sisejõudude epüürid on esitatud joonisel 14.24.



Joonis 14.24. Paindemomendi ja põikjõu epüürid

14.6. Jätkuvtalade arvutus fookussuhetega

14.6.1. Fookuste ja fookussuhete mõiste

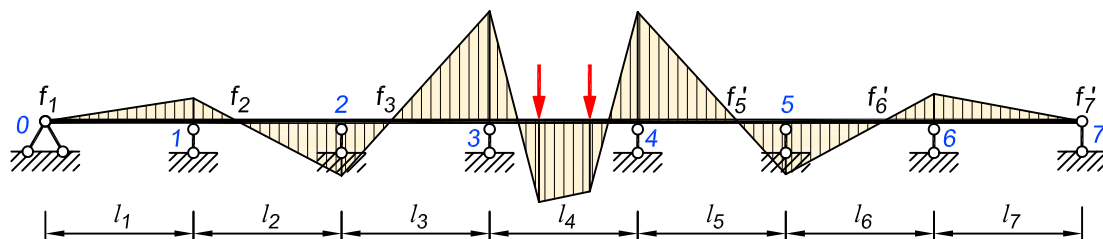
Fookused

Jätkuvtala arvutamisel fookussuhetega koormatakse korraga ainult üht sillet (joonis 14.25). Kui talal paikneb koormus mitme silde peal, siis tehakse arvutus iga silde koormusest eraldi.

Vertikaalse koormuse puhul on koormatud silde toemomendid negatiivsed. Koormamata silde toemomendid on erinevate märkidega. Koormatud sildest kaugemal asetseval toel on toemoment väiksem kui koormatud sildele lähemal asetseval toel. Kuna koormamata silde paindemomendid on erinevate märkidega, siis on igas koormamata sildes paindemomendi epüüris üks nullpunkt.

Koormamata sildes asuvat paindemomendi epüüri nullpunkti nimetatakse *fookuseks*.

Fookus asub koormatud sildest kaugemal asetsevale toele lähemal. Koormatud sildest vasakul asetsevates koormamata silletes on nullpunktid (joonisel 14.25 fookused f_1 , f_2 ja f_3) silde vasakule toele lähemal ja neid nimetatakse *vasakpoolseteks fookusteks*. Koormatud sildest paremal nimetatakse koormamata silde paindemomendi epüüri nullpunkte (f'_5 , f'_6 ja f'_7) *parempoolseteks fookusteks*.

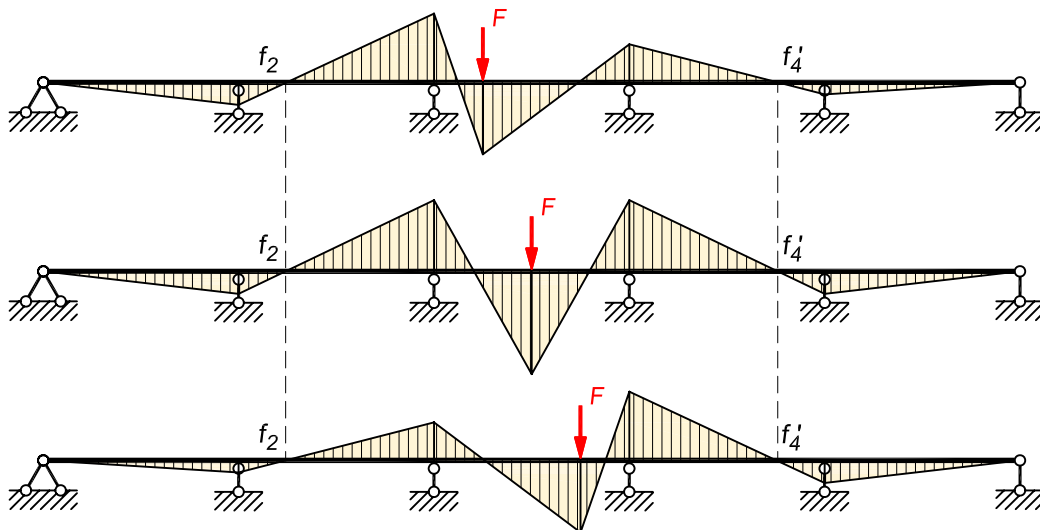


Joonis 14.25. Fookused

Koormatud sildes koormuse asetuse ja iseloomu muutumisel, samuti koormuse suuruse muutumisel jäävad paindemomendi epüüri nullpunktid koormamata silletes, s.t fookused samadesse ristlõigetesse. **Fookuste asukohad ei olene koormusest – sellel tõsiasijal baseerub fookussuhetega arvutus.** Joonisel 14.26 kujutatud jätkuvtala keskmises sildes koormuse asukoht muutub, koos sellega suurenevad või vähenevad toemomendid, kuid fookused f_2 ja f'_4 vastavalt teises ja neljandas sildes jäävad muutumatuks.

Koormatud silde paindemomendi epüüri nullpunktid olenevad koormusest ja ei ole seepärast fookused.

Igas sildes on kaks fookust: vasakpoolne f_i ja parempoolne f'_i , kuna koormus võib olla vaadeldavast sildest kas vasakul või paremal pool. Joonisel 14.27 on mõlemad fookused näidatud kolmandale sildele.



Joonis 14.26. Koormamata silletes fookuste asukohad ei muutu

Fookussuhted

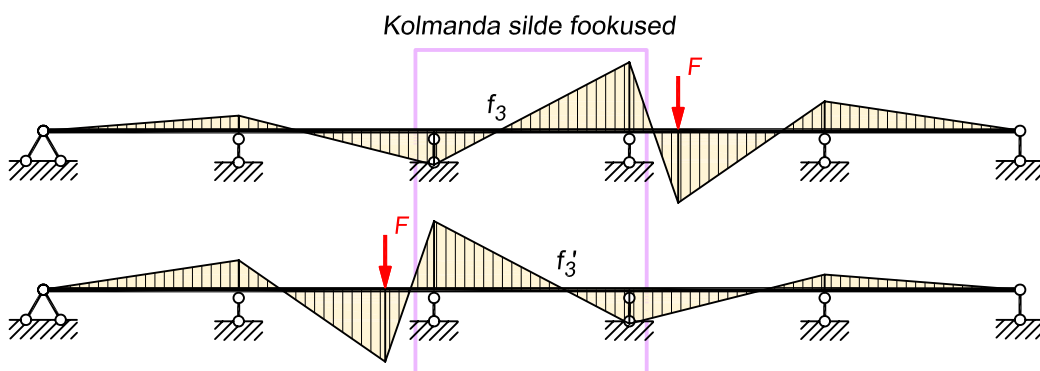
Vasakpoolseks fookussuhteks nimetatakse vasakpoolse fookuse kauguste suhet parem- ja vasakpoolsest toest (joonis 14.28, a).

Kasutades joonisel olevaid kauguseid, saame

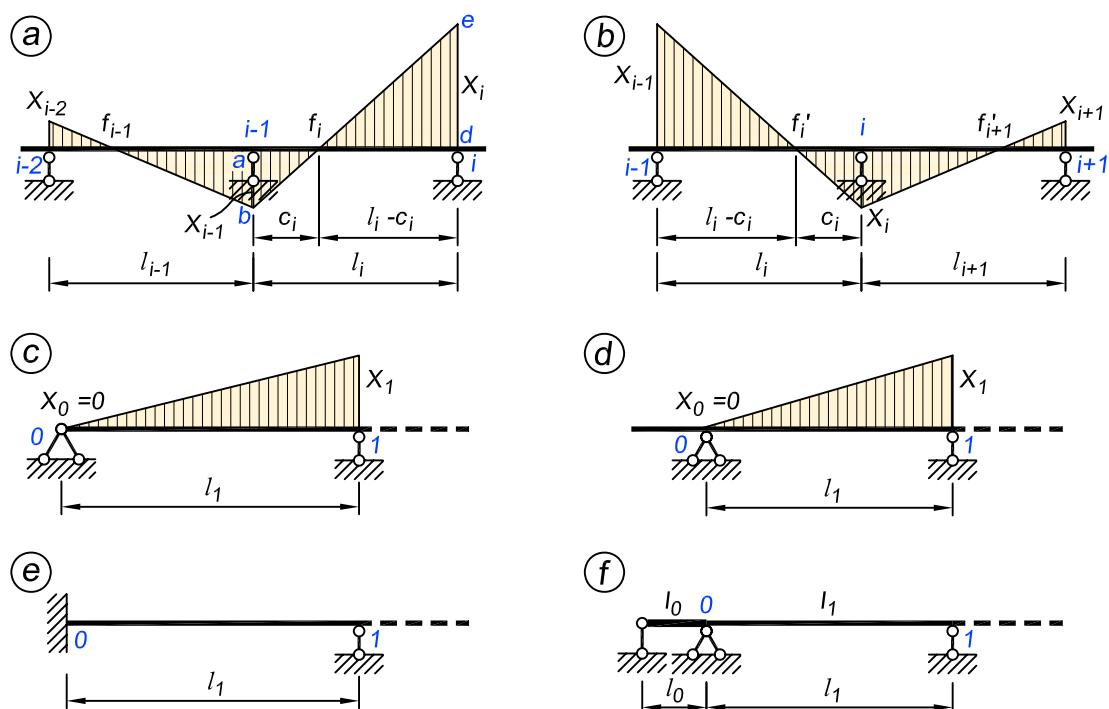
$$k_i = \frac{l_i - c_i}{c_i} \quad (14.30)$$

kus l_i on silde ja c_i on vasakpoolse fookuse f_i kaugus vasakpoolsest toest. Paindemomendi epüür on lineaarselt muutuv ning kolmnurkade $a-b-f_i$ ja $d-e-f_i$ sarnasuse põhjal saame

$$\frac{l_i - c_i}{c_i} = \frac{|X_i|}{|X_{i-1}|} \quad (14.31)$$



Joonis 14.27. Igas sildes on nii vasakpoolne kui parempoolne fookus



Joonis 14.28. Skeemid fookussuhete arvutamiseks

Seoste (14.30) ja (14.31) alusel võime kirjutada

$$k_i = -\frac{X_i}{X_{i-1}} \quad (14.32)$$

Momentide suhte ees on miinusmärk, kuna koormamata sildes on toemomendid erinevate märkidega. Koormatud sildest vasakul asuva koormamata silde vasakpoolne toemoment on arvutatav parempoolse toemomendi ja selle silde vasakpoolse fookussuhtega

$$X_{i-1} = -\frac{X_i}{k_i} \quad (14.33)$$

Kolme momendi võrrand koormamata silde i vasakpoolse toe $i-1$ kohta, eeldusel et $l_i = \text{const.}$ ja $l_{i-1} = \text{const.}$ (joonis 14.28, a), on järgmine

$$l'_{i-1}X_{i-2} + 2(l'_{i-1} + l'_i)X_{i-1} + l'_iX_i = 0 \quad (14.34)$$

Kui võrrandit (14.34) jagada momendiga X_{i-1} ja kasutada fookussuhet (14.33): $k_i = -\frac{X_i}{X_{i-1}}$ ning $\frac{X_{i-2}}{X_{i-1}} = \frac{-1}{k_{i-1}}$, siis saame järgmise võrrandi

$$\frac{-l'_{i-1}}{k_{i-1}} + 2(l'_{i-1} + l'_i) - l'_ik_i = 0 \quad (14.35)$$

millest saame vasakpoolsete fookussuhete valemi

$$k_i = 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right) \quad (14.36)$$

Analoogiliselt eespool kirjeldatule saame tuletada valemi ka parempoolsete fookussuhete arvutamiseks (joonis 14.28, b)

$$k'_i = 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right) \quad (14.37)$$

kusjuures

$$X_i = -\frac{X_{i-1}}{k'_i} \quad (14.38)$$

Parempoolseks fookussuhteks nimetatakse parempoolse fookuse kauguste suhet vasak- ja parempoolsest toest (joonis 14.28, b).

Sildes i leiame fookussuhte k_i vasakpoolse silde $i - 1$ fookussuhte k_{i-1} abil. Vasakpoolsete fookussuhete arvutamist alustame seepärast esimesest sildest. Kui jätkuvtala esimene tugi on liigendtugi konsooliga või ilma (joonis 14.28, d ja c), siis esimese silde fookus ühtib toeliigendiga ja esimese silde vasakpoolne fookussuhe on

$$k_1 = -\frac{X_1}{X_0} = \frac{X_1}{0} = \infty \quad (14.39)$$

Avaldisega (14.36) arvutame järgnevalt teise, kolmanda jne silde fookussuhted k_i .

Kui jätkuvtala esimene tugi on jäik (joonis 14.28, e), siis võib selle asendada skeemiga, mis on kujutatud joonisel 14.28, f. Silde 0 inertsimoment $I_0 = \infty$ ja redutseeritud silde $l'_0 = 0$. Avaldise (14.39) järgi $k_0 = \infty$ ja sildes 1 leiame fookussuhte valemiga (14.36)

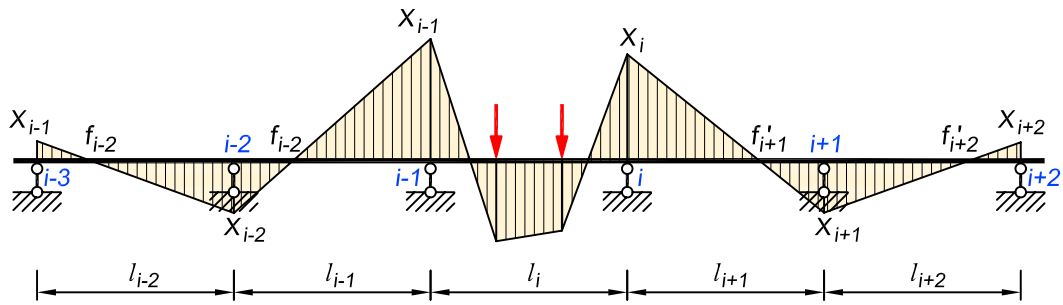
$$k_1 = 2 + \frac{l'_0}{l'_1} \left(2 - \frac{1}{k_0} \right) = 2 + \frac{0}{l'_1} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2 \quad (14.40)$$

Kui esimeses sildes on ristlõige konstantne ja esimene tugi on jäik, siis vasakpoolne fookussuhe $k_1 = 2$.

Parempoolseid fookussuhteid hakkame arvutama viimasest sildest ja liigume järgemööda edasi vasakule poole.

14.6.2. Koormatud silde toemomendid

Kui jätkuvtatal on koormatud ainult üks silde ja koormatud silde toemomendid on teada, siis arvutatakse toemomendid koormamata silletes fookussuhete abil võrranditega (14.33) ja (14.38). Järgnevalt tuletame võrrandid koormatud silde toemomentide arvutamiseks.



Joonis 14.29. Koormatud silde toemomendid

Olgu koormatud ainult silde i (joonis 14.29). Toemomentide X_i ja X_{i-1} arvutamiseks koostame koormatud silde tugede $i-1$ ja i jaoks kolme momendi võrrandid

$$\begin{aligned} l'_{i-1}X_{i-2} + 2(l'_{i-1} + l'_i)X_{i-1} + l'_iX_i &= -6A_i^f \frac{I_0}{I_i} \\ l'_iX_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})X_i + l'_{i+1}X_{i+1} &= -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} \end{aligned} \quad (14.41)$$

Võrranditest (14.41) elimineerime momendid X_{i-2} ja X_{i+1} valemitega (14.33) ning (14.38)

$$X_{i-2} = -\frac{X_{i-1}}{k_{i-1}}; \quad X_{i+1} = -\frac{X_i}{k'_{i+1}} \quad (14.42)$$

misjärel saame

$$\begin{aligned} -l'_{i-1} \frac{X_{i-1}}{k_{i-1}} + 2(l'_{i-1} + l'_i)X_{i-1} + l'_iX_i &= -6A_i^f \frac{I_0}{I_i} \\ l'_iX_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})X_i - l'_{i+1} \frac{X_i}{k'_{i+1}} &= -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} \end{aligned} \quad (14.43)$$

Kui võrrandid (14.43) jagada silde i redutseeritud pikkusega l'_i

$$\begin{aligned} -\frac{l'_{i-1}}{l'_i} \frac{X_{i-1}}{k_{i-1}} + 2\left(\frac{l'_{i-1}}{l'_i} + 1\right)X_{i-1} + X_i &= -6A_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \\ X_{i-1} + 2\left(1 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i}\right)X_i - \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \frac{X_i}{k'_{i+1}} &= -6B_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \end{aligned} \quad (14.44)$$

ja rühmitada liikmed, siis saavad nad kuju

$$\begin{aligned} \left[2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right)\right] X_{i-1} + X_i &= -6A_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \\ X_{i-1} + \left[2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right)\right] X_i &= -6B_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \end{aligned} \quad (14.45)$$

ehk

$$\begin{aligned} k_i X_{i-1} + X_i &= -\frac{6A_i^f}{l_i} \\ X_{i-1} + k'_i X_i &= -\frac{6B_i^f}{l_i} \end{aligned} \quad (14.46)$$

kuna $\frac{1}{l_i} = \frac{l_0}{l_i l'_i}$. Võrrandisüsteemi (14.46) lahend annab avaldised koormatud silde toemomente arvutamiseks

$$\begin{aligned} X_{i-1} &= -\frac{6A_i^f k'_i - 6B_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)} \\ X_i &= -\frac{6B_i^f k_i - 6A_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)} \end{aligned} \quad (14.47)$$

Kui jätkuvtalal on koormatud rohkem kui üks silde, siis arvutame toemomendid eraldi iga silde koormusest ja summeerime.

Kui äärmised toed on liigendoed (s.t $k_1 = \infty$ ja $k'_{n+1} = \infty$), siis tekib avaldistes (14.47) määramatus $\frac{\infty}{\infty}$, millest tuleb vabaneda.

Esimeses sildes (kus $k_1 = \infty$) saame toemomendid seetõttu järgmiselt

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_1 &= -\frac{6B_1^f k_1 - 6A_1^f}{l_1 (k_1 k'_1 - 1)} \cdot \frac{1}{k_1} = -\frac{6B_1^f - \frac{6A_1^f}{k_1}}{l_1 \left(k'_1 - \frac{1}{k_1}\right)} \end{aligned} \quad (14.48)$$

ehk

$$X_1 = -\frac{6B_1^f}{l_1 k'_1} \quad (14.49)$$

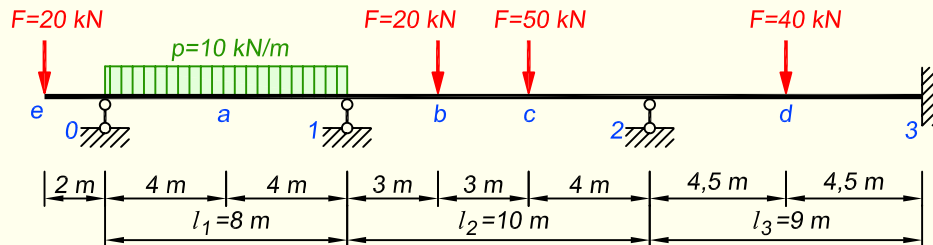
Viimasest sildest (kus $k'_{n+1} = \infty$) saame toemomendid

$$\begin{aligned} X_n &= -\frac{6A_{n+1}^f k'_{n+1} - 6B_{n+1}^f}{l_{n+1} (k_{n+1} k'_{n+1} - 1)} \cdot \frac{1}{k'_{n+1}} = -\frac{6A_{n+1}^f - \frac{6B_{n+1}^f}{k'_{n+1}}}{l_{n+1} \left(k_{n+1} - \frac{1}{k'_{n+1}}\right)} \\ X_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (14.50)$$

ehk

$$X_n = -\frac{6A_{n+1}^f}{l_{n+1} k_{n+1}} \quad (14.51)$$

NÄIDE 14.4. Arvutada joonisel 14.30 kujutatud jätkuvtala toemomendid fookussuhetega ning kujutada paindemomendi ja põikjõu epüürid eraldi iga silde koormusest. Tala andmed on samad nagu näites 14.2.



Joonis 14.30. Jätkuvtala arvutusskeem

LAHENDUS

Toemomentide arvutamisel fookussuhetega leiame toemomendid eraldi iga silde koormusest ja seejärel liidame.

Alustame fookussuhete arvutamisest.

Vasakpoolsed fookussuhted leiame valemiga (14.36)

$$k_i = 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right)$$

Arvutamist alustame tala esimesest sildest ja liigume edasi paremale. Kuna esimene tugi on liigendtugi, siis vastavalt valemile (14.39) on esimese silde vasakpoolne fookussuhe $k_1 = \infty$.

$$k_1 = \infty$$

$$k_2 = 2 + \frac{l_1}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k_1} \right) = 2 + \frac{8}{10} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 3,6$$

$$k_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) = 2 + \frac{10}{9} \left(2 - \frac{1}{3,6} \right) = 3,9136$$

Parempoolsed fookussuhted leiame valemiga (14.37)

$$k'_i = 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right)$$

Arvutust alustame viimasest sildest ja liigume edasi vasakule. Kuna viimane tugi on jäik, siis on viimase silde parempoolne fookussuhe $k'_3 = 2$.

$$k'_3 = 2$$

$$k'_2 = 2 + \frac{l_3}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k'_3} \right) = 2 + \frac{9}{10} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3,35$$

$$k'_1 = 2 + \frac{l_2}{l_1} \left(2 - \frac{1}{k'_2} \right) = 2 + \frac{10}{8} \left(2 - \frac{1}{3,35} \right) = 4,1269$$

Edasi leiame toemomendid eraldi iga silde koormusest.

Konsooli otsale rakendatud jõud (joonis 14.31, a) põhjustab toemomendi

$$X_{0k} = -20 \cdot 2 = -40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

kus indeksis $0k$ esimene liige näitab toemomendi asukohta ja teine liige seda, kus paikneb koormus. Sellest jõust põhjustatud teised toemomendid arvutame valemiga (14.38)

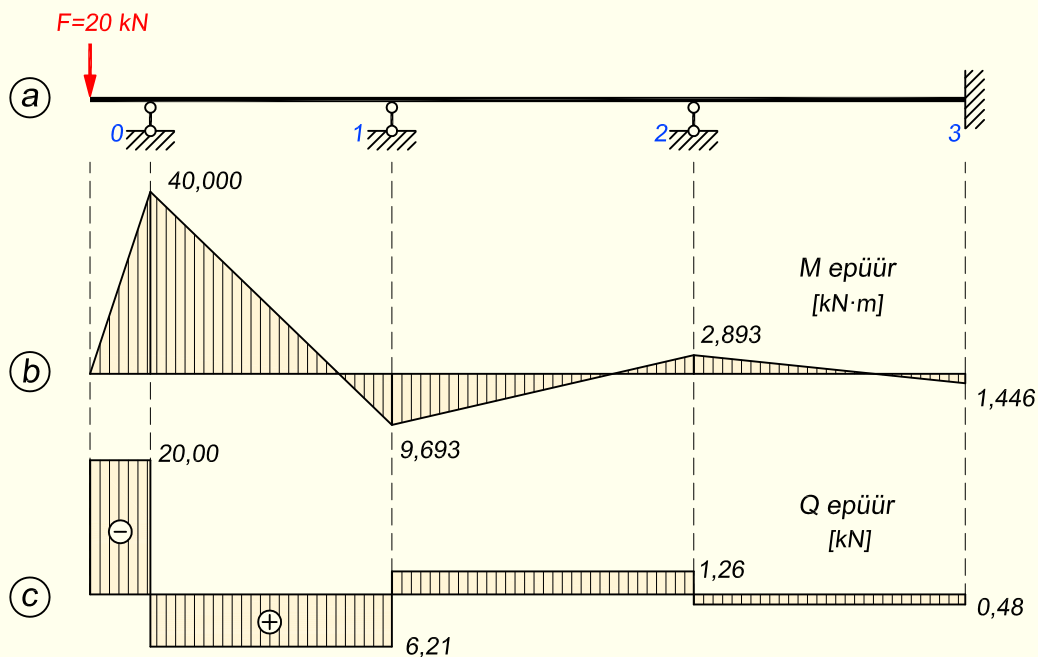
$$X_i = -\frac{X_{i-1}}{k'_i}$$

$$X_{1k} = -\frac{X_{0k}}{k'_1} = \frac{40}{4,1269} = 9,693 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_{2k} = -\frac{X_{1k}}{k'_2} = -\frac{9,693}{3,35} = -2,893 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_{3k} = -\frac{X_{2k}}{k'_3} = \frac{2,893}{2} = 1,446 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Konsooli koormusest põhjustatud paindemomendi ja põikjõu epüürid on kujutatud joonisel 14.31, b ja c.



Joonis 14.31. Konsooli koormusest põhjustatud paindemomendi ja põikjõu epüürid

Esimese silde koormusest (joonis 14.32, a) põhjustatud toemomendi X_{11} leiame valemiga (14.49)

$$X_{11} = -\frac{6B_1^f}{l_1 k'_1} = -\frac{1280}{8 \cdot 4,1269} = -38,770 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Esimese silde koormusest põhjustatud teised toemomendid

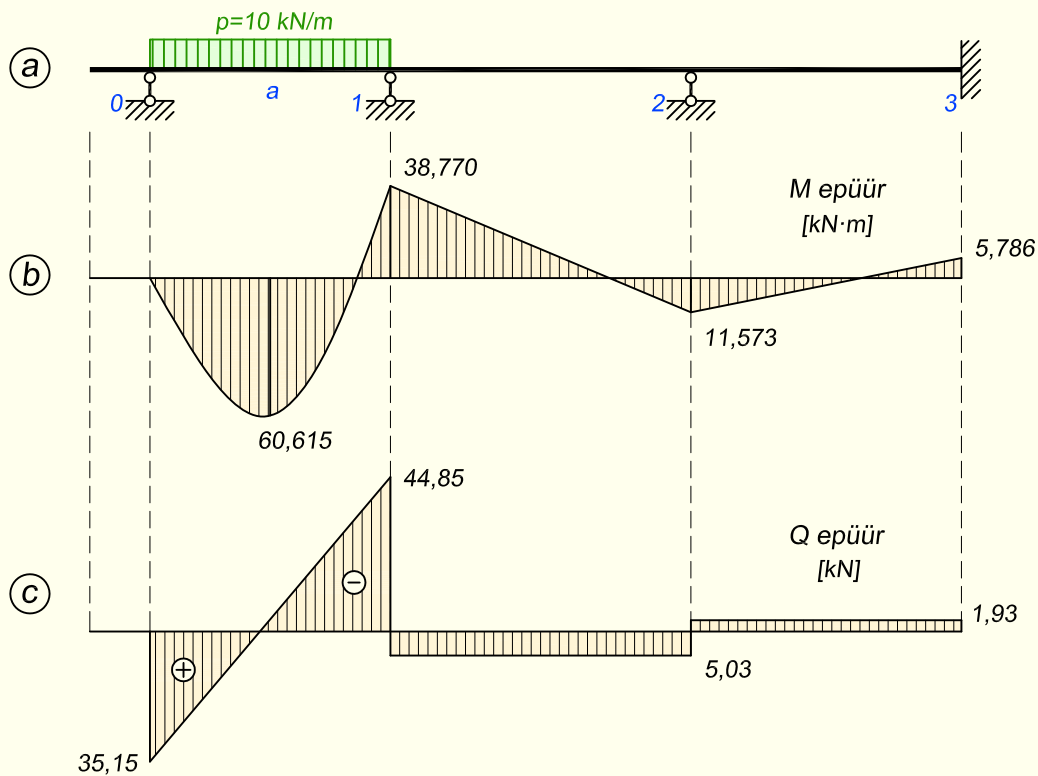
$$X_{21} = -\frac{X_{11}}{k'_2} = \frac{38,770}{3,35} = 11,573 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_{31} = -\frac{X_{21}}{k'_3} = -\frac{11,573}{2} = -5,786 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Avamomendi M_a arvutame vastavas lõikes tekkiva lihttala paindemomendi ja toemomentide abil samuti, nagu tegime eespool kolme momendi võrrandi puhul.

$$M_a = \frac{10 \cdot 8^2}{8} - \frac{38,770 \cdot 4}{8} = 60,615 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Esimese silde koormusest põhjustatud paindemomendi ja põikjõu epüürid on kujutatud joonisel 14.32, b ja c.



Joonis 14.32. Esimese silde koormusest põhjustatud paindemomendi ja põikjõu epüürid

Teise silde koormusest (joonis 14.33, a) põhjustatud koormatud silde toemomendid leiame valemitega (14.47)

$$X_{i-1} = -\frac{6A_i^f k'_i - 6B_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)}; \quad X_i = -\frac{6B_i^f k_i - 6A_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)}$$

$$X_{12} = -\frac{6A_2^f k_2' - 6B_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2394 \cdot 3,35 - 2466}{10(3,6 \cdot 3,35 - 1)} = -50,216 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_{22} = -\frac{6B_2^f k_2 - 6A_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2466 \cdot 3,6 - 2394}{10(3,6 \cdot 3,35 - 1)} = -58,622 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Toemoment X_{32}

$$X_{32} = -\frac{X_{22}}{k_3'} = \frac{58,622}{2} = 29,311 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

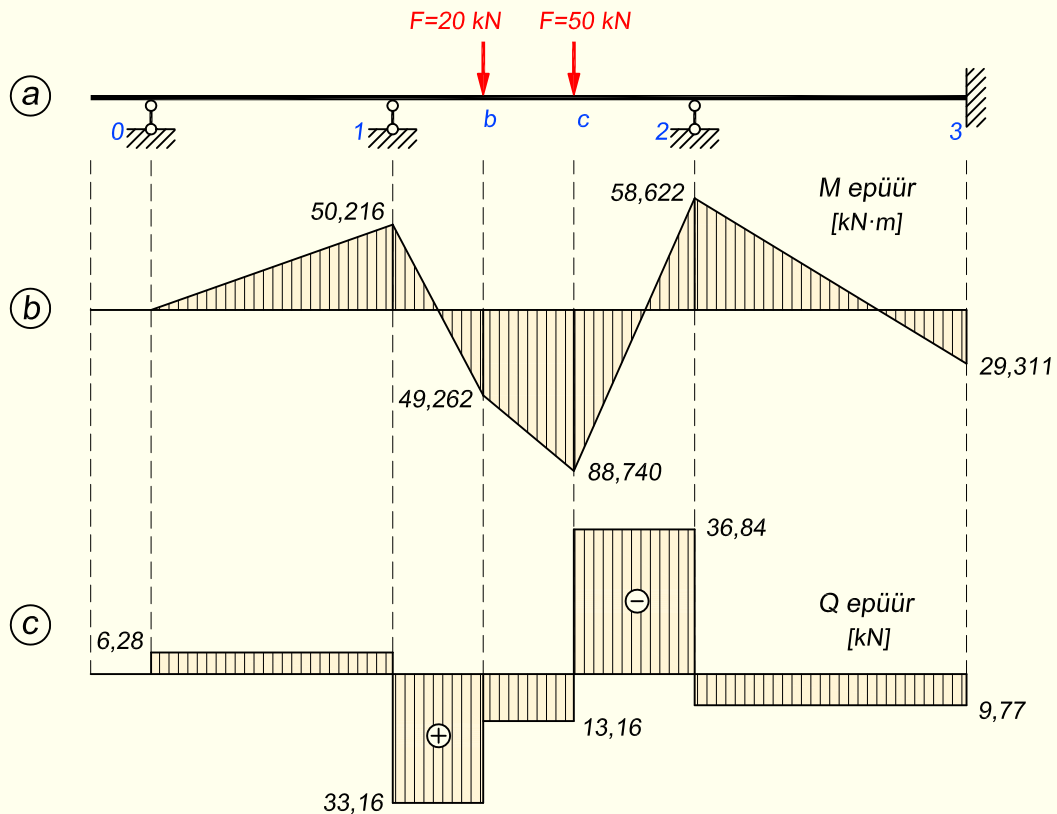
Avamomendid M_b ja M_c

$$M_b = 102 - \frac{50,216 \cdot 7}{10} - \frac{58,622 \cdot 3}{10} = 49,262 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = 144 - \frac{50,216 \cdot 4}{10} - \frac{58,622 \cdot 6}{10} = 88,740 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

kus lihttala momentide $M_b^0 = 102 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ja $M_c^0 = 144 \text{ kN}\cdot\text{m}$ arvutus on näidatud kolme momendi võrrandiga lahendamise juures.

Teise silde koormusest põhjustatud paindemomendi ja põikjõu epüürid on kujutatud joonisel 14.33, b ja c.



Joonis 14.33. Teise silde koormusest põhjustatud paindemomendi ja põikjõu epüürid

Kolmanda silde koormusest (joonis 14.34, a) põhjustatud koormatud silde toemendid leiame samuti valemitega (14.47), kuna äärmine tugi on jäik ja seetõttu ei saa siin avas kasutada lihtsustatud valemit.

$$X_{23} = -\frac{6A_3^f k_3' - 6B_3^f}{l_3 (k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1215 \cdot 2 - 1215}{9(3,9136 \cdot 2 - 1)} = -19,774 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_{33} = -\frac{6B_3^f k_3 - 6A_3^f}{l_3 (k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1215 \cdot 3,9136 - 1215}{9(3,9136 \cdot 2 - 1)} = -57,613 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

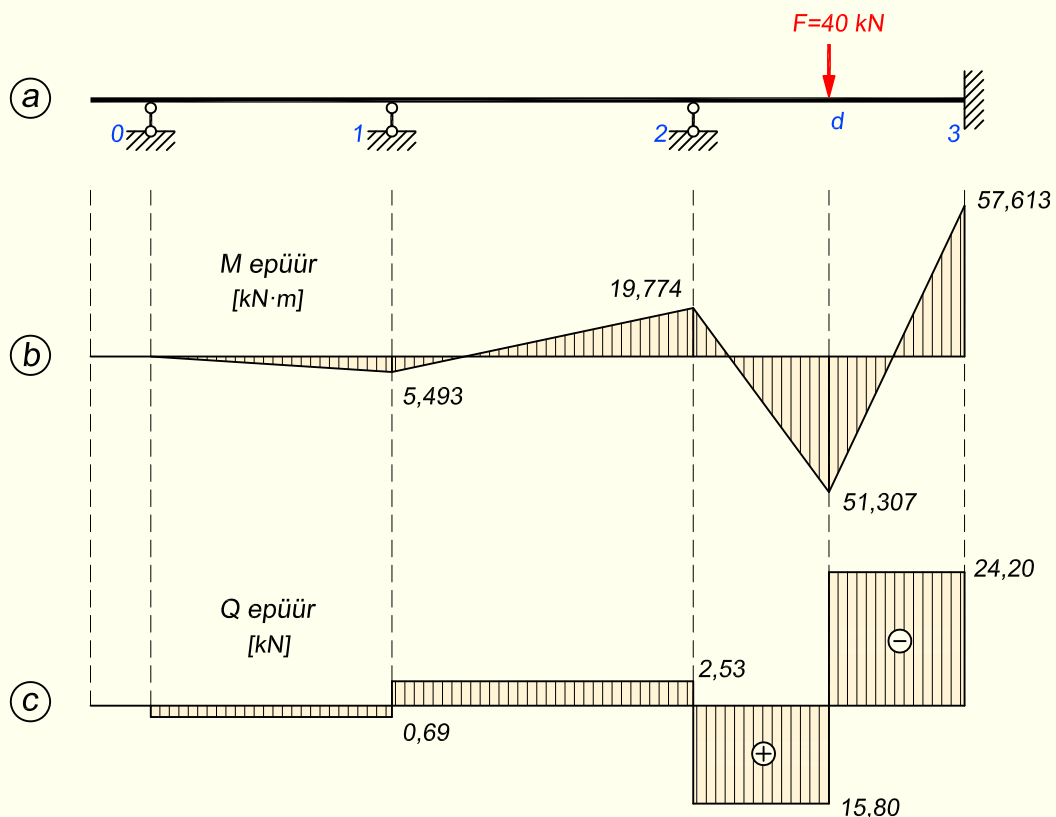
Toemoment X_{13}

$$X_{13} = -\frac{X_{23}}{k_2} = \frac{19,774}{3,6} = 5,493 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Avamoment M_d

$$M_d = 20 \cdot 4,5 - \frac{19,774 \cdot 4,5}{9} - \frac{57,613 \cdot 4,5}{9} = 51,307 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kolmanda silde koormusest põhjustatud paindemomendi ja põikjõu epüürid on kujutatud joonisel 14.34, b ja c.



Joonis 14.34. Kolmanda silde koormusest põhjustatud paindemomendid ja põikjõud

Selleks, et saada toemomendid kogu koormusest, peame üksikute avade koormustest saadud toemomendid kokku liitma

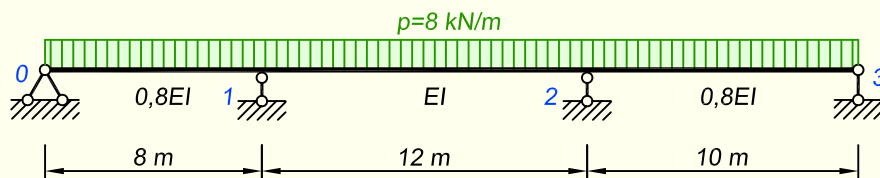
$$X_1 = X_{1k} + X_{11} + X_{12} + X_{13} = 9,693 - 38,770 - 50,216 + 5,493 = -73,80 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_2 = X_{2k} + X_{21} + X_{22} + X_{23} = -2,893 + 11,573 - 58,622 - 19,774 = -69,72 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_3 = X_{3k} + X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1,446 - 5,787 + 29,311 - 57,613 = -32,64 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Saadud tulemused ühtivad näites 14.2 kolme momendi võrrandiga saadud toemomentidega.

NÄIDE 14.5. Arvutada joonisel 14.35 kujutatud erinevate jäikustega silletega jätkuvtala toemomendid fookussuhetega. Tala andmed on samad nagu näites 14.3.



Joonis 14.35. Jätkuvtala arvutuskeem

LAHENDUS

Kuna tala andmed on samad nagu näites 14.3, siis saame sillete redutseeritud pikkused sealt võtta

$$l'_1 = 10 \text{ m}; \quad l'_2 = 12 \text{ m}; \quad l'_3 = 12,5 \text{ m}$$

Arvutust alustame fookussuhete leidmisest, kus tuleb kasutada sillete redutseeritud pikkuseid.

Vasakpoolsed fookussuhted

$$k_1 = \infty$$

$$k_2 = 2 + \frac{l'_1}{l'_2} \left(2 - \frac{1}{k_1} \right) = 2 + \frac{10}{12} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 3,6667$$

$$k_3 = 2 + \frac{l'_2}{l'_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) = 2 + \frac{12}{12,5} \left(2 - \frac{1}{3,6667} \right) = 3,6582$$

Parempoolsed fookussuhted

$$k'_3 = \infty$$

$$k'_2 = 2 + \frac{l'_3}{l'_2} \left(2 - \frac{1}{k'_3} \right) = 2 + \frac{12,5}{12} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 4,0833$$

$$k'_1 = 2 + \frac{l'_2}{l'_1} \left(2 - \frac{1}{k'_2} \right) = 2 + \frac{12}{10} \left(2 - \frac{1}{4,0833} \right) = 4,1061$$

Kuigi fiktiivsed reaktsioonid on näites 14.3 juba arvatud, tuleb need siin uuesti leida, kuna fookussuhetega arvutuses ei kasutata fiktiivsete reaktsioonide puhul redutseeritud pikkuseid.

$$6B_1^f = \frac{1}{4}pl_1^3 = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 8^3 = 1024 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$6A_2^f = 6B_1^f = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 12^3 = 3456 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$6A_3^f = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 10^3 = 2000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Toemomentide arvutamisel esimese silde koormusest lähtume sellest, et silde vasakpoolne tugi on liigendtugi ja seetõttu toemomendi X_{11} saame valemiga (14.49)

$$X_{11} = -\frac{6B_1^f}{l_1 k_1'} = -\frac{1024}{8 \cdot 4,1061} = -31,173 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_{21} = -\frac{X_{11}}{k_2'} = \frac{31,173}{4,0833} = 7,634 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Toemomentide arvutamisel teise silde koormusest tuleb kasutada üldvalemeid (14.47), kuna see on sisemine silde.

$$X_{12} = -\frac{6A_2^f k_2' - 6B_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{3456 \cdot 4,0833 - 3456}{12 (3,6667 \cdot 4,0833 - 1)} = -63,554 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_{22} = -\frac{6B_2^f k_2 - 6A_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{3456 \cdot 3,6667 - 3456}{12 (3,6667 \cdot 4,0833 - 1)} = -54,967 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Toemomentide arvutamisel kolmanda silde koormusest lähtume sellest, et silde parempoolne tugi on liigendtugi ja seetõttu kasutame toemomendi X_{23} leidmiseks valemit (14.51)

$$X_{23} = -\frac{6A_3^f}{l_3 k_3} = -\frac{2000}{10 \cdot 3,6582} = -54,672 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_{13} = -\frac{X_{23}}{k_2} = \frac{54,672}{3,6667} = 14,910 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Toemomentide saamiseks kogu koormusest summeerime üksikute sillete koormustest saadud toemomendid

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + X_{13} = -31,173 - 63,554 + 14,910 = -79,82 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + X_{23} = 7,634 - 54,967 - 54,672 = -102,00 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Saadud tulemused ühtivad näites 14.3 kolme momendi võrrandiga saadud toemomentidega.

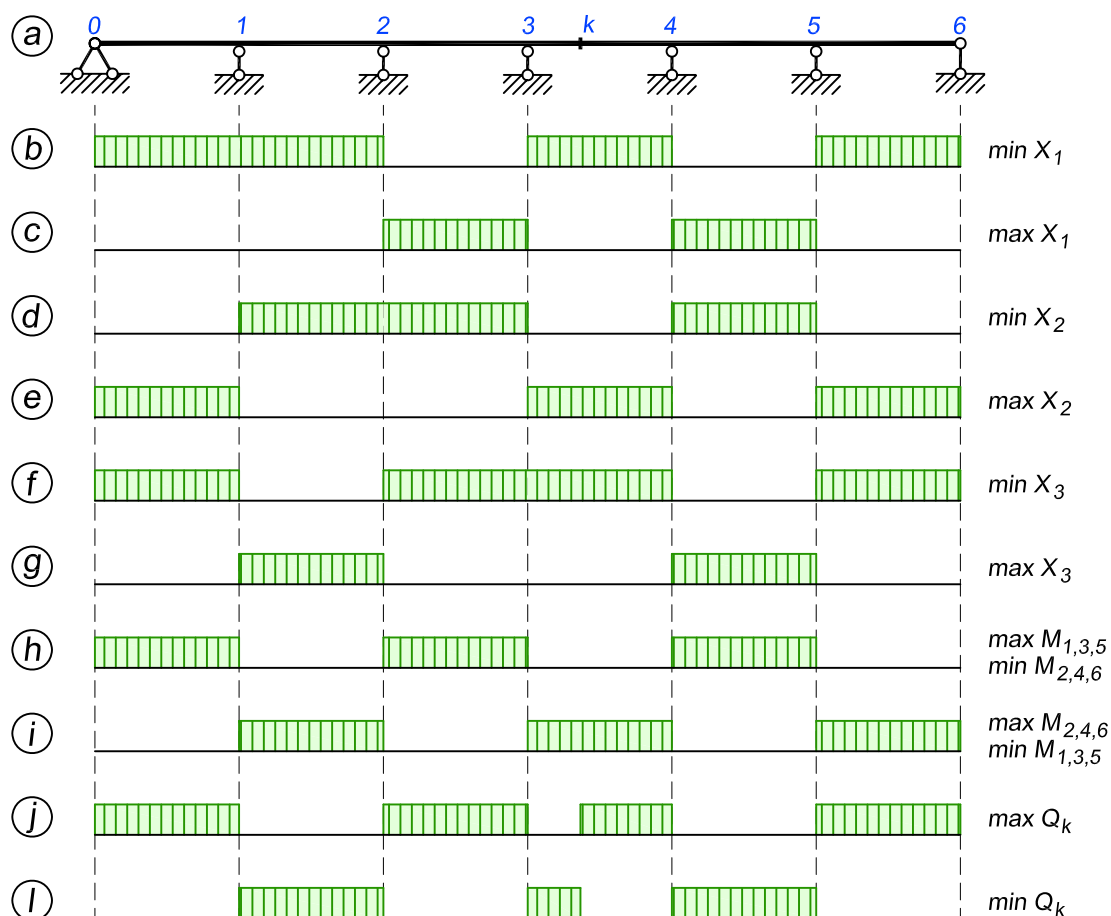
14.7. Suurimate paindemomentide ja põikjõudude epüürid

Konstruksioonide arvutamisel rakendame koormused terve konstruktsiooni ja iga üksiku osa jaoks kõige ebasoodsamates kombinatsioonides.

Jätkuvtala arvutamisel leiame niisugused koormuste kombinatsioonid, mis põhjustavad tala ristlõigetes suurimad paindemomendid ja põikjõud: $\max M$ ja $\min M$ ning $\max Q$ ja $\min Q$.

Ühe silde koormamisel ajutise vertikaalse koormusega on koormatud silde toemomendid negatiivsed (joonis 14.25, avaldised (14.47)), naabersillete koormatud sildest kaugemal olevad momendid on positiivsed ja edasi vahelduvate märkidega. Järelikult tekib minimaalne toemoment siis, kui ajutise koormusega koormata toe naabersilded ja teised silded üle ühe (joonis 14.36, *b*, *d* ja *f*). Maksimaalse toemomendi, mis on absoluutväärtuselt tavaliselt minimaalsest toemomendist väiksem, saame nende sillete koormamisega, mis on minimaalse toemomendi puhul koormamata (joonis 14.36, *c*, *e* ja *g*).

Joonisel 14.25 kujutatud epüürialt on näha, et jätkuvtala sillete keskmistes lõigetes on paindemoment positiivne koormatud sildes ja kummalegi poole üle ühe asuvates silletes. Jä-



Joonis 14.36. Suurimad paindemomendid ja põikjõud

relikult koormusskeem joonisel 14.36, h põhjustab maksimaalsed sildemomendid esimeses, kolmandas ja viiendas sildes ning koormusskeem joonisel 14.36, i teises, neljandas ja kuuendas sildes. Minimaalsed sildemomendid koormusskeemist joonisel 14.36, h tekivad teises, neljandas ja kuuendas sildes ning koormusskeemist joonisel 14.36, i esimeses, kolmandas ja viiendas sildes.

Koormusskeem, mis põhjustab minimaalse toemomendi, tekitab samas toes maksimaalse toereaktsiooni. Minimaalne reaktsioon tekib koormusskeemiga, mis põhjustab samal toel maksimaalse toemomendi.

Nende lõigete jaoks, mis asuvad silde vasaku fookuse ja vasaku toe või parema fookuse ja parema toe vahel, ei ole võimalik koormuse kõige ebasoodsamat asetust ilma paindemomendi mõjujooneta kindlaks määrata.

Lõikes k (joonis 14.36, a) tekib $\max Q$ koormusskeemiga j ja $\min Q$ koormusskeemiga l .

Kui ajutine koormus mõjub kindlaksmääratud asukohas ja võib olla eemaldatud ainult sillete kaupa, siis saab arvutada suurimad sisejõud tala kõigis ristlõigetes mõjujoonteta. Ajutisest koormusest põhjustatud paindemomendi epüürid arvutame eraldi iga silde koormusest. $\max M$ või $\max Q$ epüüri kujutamisel liidame igas lõikes omakaalust põhjustatud epüüri ordinaadile ajutiste koormuste epüüride need ordinaadid, mis on vaadeldava lõike kohal positiivsed. $\min M$ või $\min Q$ epüüri ordinaatide arvutamisel liidame omakaalust põhjustatud epüüri ordinaatidele ajutiste koormuste epüüride negatiivsed ordinaadid. Ühele abstsisssteljele kantult moodustavad maksimaalsete ja minimaalsete paindemomentide (või põikjõudude) epüürid suurimate paindemomentide (või põikjõudude) epüüri.

NÄIDE 14.6. Koostada joonisel 14.37 kujutatud jätkuvtala suurimate paindemomentide epüür. Omakaal on $g = 5 \text{ kN/m}$, ajutine koormus on esitatud joonisel 14.37, b .

LAHENDUS

Omakaalust põhjustatud paindemomendi epüür on esitatud joonisel 14.37, c . Eraldi iga silde ajutisest koormusest põhjustatud paindemomendi epüürid on toodud joonistel 14.37, d ja e .

Järgnevalt leiame toe- ja sildemomentide väärtused erinevate koormusvariantide puhul.

Toemomendid, kui ajutine koormus paikneb esimeses avas

$$X_1 = -19,039 - 24,231 = -43,270 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_2 = -13,846 + 6,923 = -6,923 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

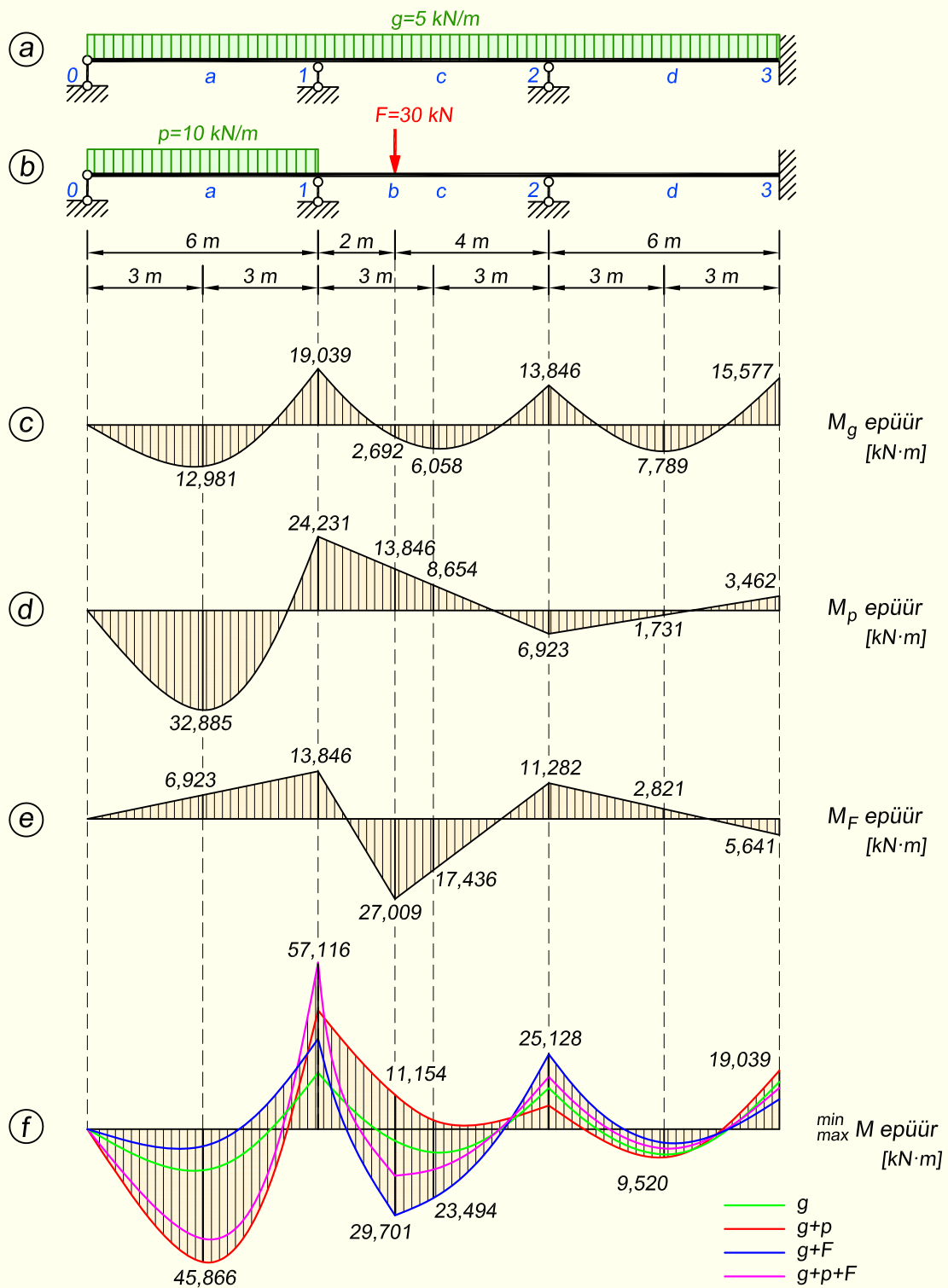
$$X_3 = -15,577 - 3,462 = -19,039 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Toemomendid, kui ajutine koormus paikneb teises avas

$$X_1 = -19,039 - 13,846 = -32,885 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_2 = -13,846 - 11,282 = -25,128 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_3 = -15,577 + 5,641 = -9,936 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 14.37. Tala arvutuskeem ja paindemomentide epüürid

Toemomendid, kui ajutine koormus paikneb nii esimeses kui ka teises avas

$$X_1 = -19,039 - 24,231 - 13,846 = -57,116 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_2 = -13,846 + 6,923 - 11,282 = -18,205 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_3 = -15,577 - 3,462 + 5,641 = -13,398 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sarnaselt arvutame ordinaadid ka sildelõigetes.

Erinevatest koormusskeemidest põhjustatud paindemomendi epüüride ordinaadid nii toe- kui sildelõigetes on esitatud tabelis 14.2. Suurimate paindemomentide epüür on esitatud joonisel 14.37, f.

Tabel 14.2. Erinevate koormusskeemide toe- ja sildemomendid

| Koormused | X_1 | X_2 | X_3 | M_a | M_b | M_c | M_d |
|-------------|---------|---------|---------|--------|---------|--------|-------|
| g | -19,039 | -13,846 | -15,577 | 12,981 | 2,692 | 6,058 | 7,789 |
| $g + p$ | -43,270 | -6,923 | -19,039 | 45,866 | -11,154 | -2,596 | 9,520 |
| $g + F$ | -32,885 | -25,128 | -9,936 | 6,058 | 29,701 | 23,494 | 4,968 |
| $g + p + F$ | -57,116 | -18,205 | -13,398 | 38,943 | 15,855 | 14,840 | 6,699 |

14.8. Mõjujooned

Jätkuvtala mõjujooni saab koostada nii staatika kui ka kinemaatika meetodiga, mida käsitlesume pikemalt juba staatikaga määratud mitmesildelise tala juures. Jätkuvtala puhul muutub aga nende mõlema meetodi rakendamine oluliselt arvutusmahukamaks. Lisaks tuleb siin arvestada veel sellega, et jätkuvtalal (nagu kõigil staatikaga määramatutel arvutusskeemidel) koosnevad mõjujooned kõverjoontest, mis tähendab, et enam ei piisa ordinaatide arvutamisest mõnedes üksikutes konstruktsiooni punktides. Mõjujoone täpse joonise saamiseks tuleb nüüd selle ordinaate arvutada paljudes lõigetes.

14.8.1. Staatika meetod

Mõjujoonte koostamist alustame toemomentide mõjujoontest. Toemomentide mõjujoonte abil koostame järgnevalt teiste ristlõigete jaoks sildemomentide, põikjõudude ja toereaktsioonide mõjujooned.

Toemomentide (lisatundmatute) mõjujoonte ordinaadid saab staatika meetodi puhul arvutada mitmel erineval moel: näiteks fookussuhetega või mõjuarvudega. Käesolevas raamatus käsitleme ainult fookussuhetega arvutamist.

Toemomendi mõjujoone koostamine fookussuhete abil

Mõjujooned me koostame ühikjõu abil. Vertikaalse ühikjõu puhul lihtsustub koormusest ole-
nevate tegurite A_i^f ja B_i^f määramine koormatud silde toemomentide arvutamise valemite
(14.47), kus nimetatud tegurite jaoks saab kirjutada (kasutades tabelist 14.1 esimest skeemi)

$$\begin{aligned} 6B_i^f &= 1 \cdot l_i^2 \xi \xi' (1 + \xi) = l_i^2 f_\xi \\ 6A_i^f &= 1 \cdot l_i^2 \xi \xi' (1 + \xi') = l_i^2 f_{\xi'} \end{aligned} \quad (14.52)$$

Funktsioonid f_ξ ja $f_{\xi'}$ võib edaspidi võtta tabelist 14.3 või arvutada avaldistega

$$f_\xi = \xi \xi' (1 + \xi); \quad f_{\xi'} = \xi \xi' (1 + \xi') \quad (14.53)$$

Tabel 14.3. Funktsioonide f_ξ ja $f_{\xi'}$ väärtused sõltuvalt ühikjõu asukohast sildel

| ξ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | ξ' |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|
| f_ξ | 0,000 | 0,099 | 0,192 | 0,273 | 0,336 | 0,375 | 0,384 | 0,357 | 0,288 | 0,171 | 0,000 | $f_{\xi'}$ |
| ξ' | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,0 | ξ |

Vertikaalse ühikjõu puhul on valemite (14.47) järgmine kuju

$$\begin{aligned} X_{i-1} &= -\frac{(k'_i f_{\xi'} - f_\xi) l_i}{k_i k'_i - 1} \\ X_i &= -\frac{(k_i f_\xi - f_{\xi'}) l_i}{k_i k'_i - 1} \end{aligned} \quad (14.54)$$

ehk

$$\begin{aligned} X_{i-1} &= c_{i1} f_\xi + c_{i2} f_{\xi'} \\ X_i &= c_{i1} f_{\xi'} + c_{i3} f_\xi \end{aligned} \quad (14.55)$$

kus

$$c_{i1} = \frac{l_i}{k_i k'_i - 1}; \quad c_{i2} = -k'_i c_{i1} = -\frac{l_i k'_i}{k_i k'_i - 1}; \quad c_{i3} = -k_i c_{i1} = -\frac{l_i k_i}{k_i k'_i - 1} \quad (14.56)$$

Kui esimene tugi on liigendtugi, siis $k_1 = \infty$ ja ühikjõu mõjumisel esimesel sildel saame koormatud silde parempoolse toemomendi X_i avaldisest järgmise valemi

$$X_1 = -\frac{f_\xi l_i}{k'_i} \quad (14.57)$$

Mõjujoone ordinaatide arvutamisel jaotame iga silde näiteks viieks või kümneks võrdseks osaks, rakendame ühikjõu järjekorras nendesse lõigetesse (mistõttu vanemas kirjanduses nimetatakse seda ka mõjujoonte koostamiseks punktiivisi koormamisega), koormatud sildes arvutame toemomendid avaldistega (14.55) ning koormamata silletes fookussuhete valemitega (14.33) ja (14.38).

Mõjujoone põhimõtteline kuju on näidatud joonisel 14.41, c leheküljel 664.

Sildemomendi mõjujoon

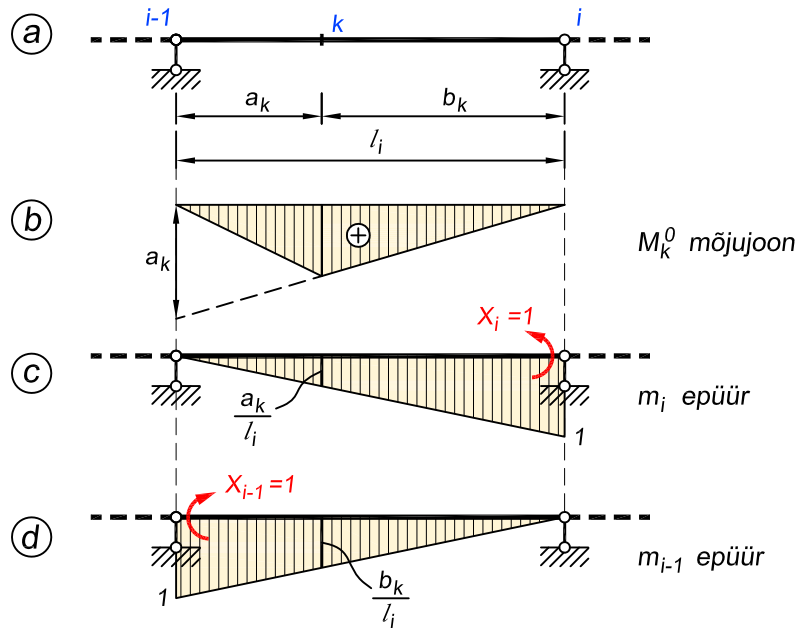
Ristlõike k (joonis 14.38, *a*) paindemomendi (sildemomendi) mõjujoone ordinaadid arvutame sama silde toemomentide mõjujoonte abil

$$M_{kx} = M_{kx}^0 + X_{i-1,x} \cdot \xi' + X_{ix} \cdot \xi \quad (14.58)$$

kus M_{kx}^0 on põhiskeemi lõike k paindemomendi mõjujoone ordinaat (joonis 14.38, *b*), $X_{i-1,x}$ ja X_{ix} on toemomentide mõjujoonte ordinaadid ning kordajad $\xi = \frac{a_k}{l_i}$ ja $\xi' = \frac{b_k}{l_i}$ on ühiktoemomentidest $X_i = 1$ ja $X_{i-1} = 1$ põhjustatud paindemomendi epüüride m_i ja m_{i-1} ordinaadid põhiskeemis lõike k kohal (joonis 14.38, *c* ja *d*).

Sildemomendi mõjujoone kuju oleneb ristlõike asukohast sildes. Kui ristlõige k asetseb ava vasak- ja parempoolse fookuse vahel, siis on mõjujoone ordinaadid selle silde ulatuses positiivsed ja naabersilletes negatiivsed. Kui lõige asetseb toe ja fookuse vahel (kas vasakpoolse toe ja vasaku fookuse või parema fookuse ja parempoolse toe vahel), siis on mõjujoone ordinaadid samas sildes nii positiivsed kui ka negatiivsed – lõike k kohal ja tema lähedal asuva toe juures positiivsed ja kaugemaloleva toe juures negatiivsed.

Mõjujoone põhimõtteline kuju on näidatud joonisel 14.41, *e* leheküljel 664.



Joonis 14.38. Sildemomendi mõjujoone koostamine

Põikjõu mõjujoon

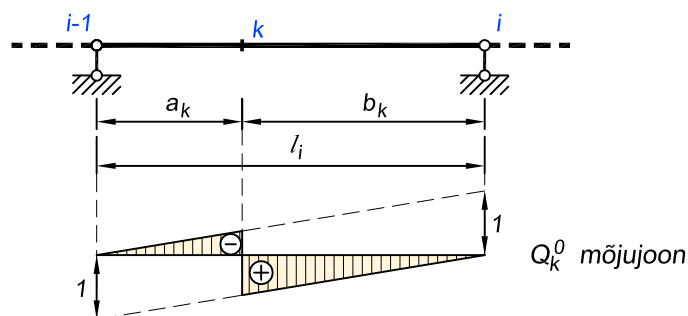
Põikjõu mõjujoone ordinaatide arvutamisel lähtume toemomentide mõjujoontest ja teeme seda järgmise valemi abil

$$Q_{kx} = Q_{kx}^0 + \frac{X_{ix} - X_{i-1,x}}{l_i} \quad (14.59)$$

kus Q_{kx}^0 on staatikaga määratud põhiskeemi mõjujoone ordinaat (joonis 14.39) ning $X_{i-1,x}$ ja X_{ix} on vaadeldava silde vasak- ja parempoolse toemomendi mõjujoone ordinaadid. Avaldise murruline liige esitab toemomentidest põhjustatud põikjõudu põhiskeemis.

Põikjõu mõjujoone koostamisel jagame selle silde, kus asetseb vaadeldav ristlõige, parem- ja vasakpoolse toemomendi mõjujoonte ordinaatide vahe silde pikkusega ja liidame põhiskeemi põikjõu mõjujoone ordinaadile.

Mõjujoone põhimõtteline kuju on näidatud joonisel 14.41, g leheküljel 664.



Joonis 14.39. Q_k^0 mõjujoon jätkuvtala põikjõu mõjujoone koostamiseks

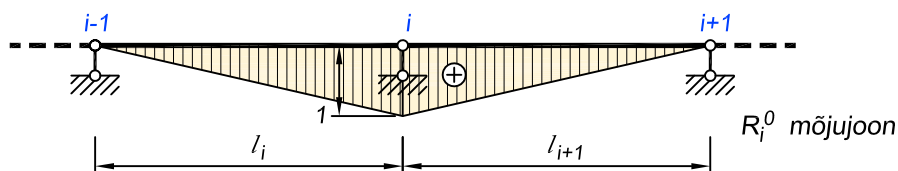
Toereaktsiooni mõjujoon

Toereaktsiooni mõjujoone ordinaadid arvutame valemiga

$$R_{ix} = R_{ix}^0 + \frac{X_{i-1,x} - X_{ix}}{l_i} + \frac{X_{i+1,x} - X_{ix}}{l_{i+1}} \quad (14.60)$$

kus R_{ix}^0 on staatikaga määratud põhiskeemi toereaktsiooni mõjujoone ordinaat (joonis 14.40).

Mõjujoone põhimõtteline kuju on näidatud joonisel 14.41, i leheküljel 664.



Joonis 14.40. R_i^0 mõjujoon jätkuvtala toereaktsiooni mõjujoone koostamiseks

14.8.2. Kinemaatika meetod

Kinemaatika meetodi puhul eemaldame sideme, mille reaktsiooni mõjujoont koostame. Järgnevalt anname sideme eemaldamisega saadud arvutuskeemile virtuaalsiirde selliselt, et eemaldatud sideme reaktsioonile vastav siire $\delta r = 1$ toimuks positiivsele reaktsioonile vastassuunas. Nii saadud tala deformeerunud kuju (vertikaalsiirde epüür) esitab (reaktsiooni ja siirde vastastikkuse teoreemi $r'_{kx} = -\delta'_{xk}$ põhjal) reaktsiooni mõjujoont.

Teise mõjujoonte konstrueerimise viisi puhul rakendame eemaldatud sideme asemele ühikjõu (või ühikmomendi) ning kasutame sellest põhjustatud tala deformeerunud kuju mõjujoone koostamiseks.

Mõjujoonte skeemide koostamine tala deformeerunud kuju abil

Mõjujoonte moodustamiseks tala deformeerunud kuju abil vaatame joonisel 14.41, *a* kujutatud jätkuvtala.

Toemomendi mõjujoone kujutamiseks paneme toeristlõikesse liigendi ning rakendame kummalegi poole liigendit varraste otstesse positiivsed momendid. Järgnevalt leiame varraste vastastikkusest virtuaalsest ühikpöördest $\delta r = 1$ põhjustatud tala deformeerunud kuju, kusjuures ühikpöörde anname positiivsetele momentidele vastassuunas (joonis 14.41, *b*). Saadud deformeerunud kuju esitab toemomendi mõjujoont (joonis 14.41, *c*).

Sildmomendi mõjujoone koostamiseks lisame vastavasse lõikesse k samuti liigendi ning rakendame mõlemale poole liigendit positiivsed momendid. Järgnevalt anname varrastele virtuaalse ühikpöörde $\delta r = 1$ positiivse paindemomendi vastassuunas, milleks tuleb liigendit allapoole nihutada (joonis 14.41, *d*). Mõjujoon on kujutatud joonisel 14.41, *e*.

Põikjõu mõjujoone koostamiseks eemaldame vaadeldavast lõikest k põikjõudu vastu võtva sideme, ehk teisiti öeldes, lõikame tala selle koha pealt läbi. Mõlemale vardapoolsele anname teineteise suhtes virtuaalse ühiksiirde $\delta r = 1$ positiivsele põikjõule vastassuunas (joonis 14.41, *f*). Selleks tuleb vasakpoolset vardaotsa nihutada üles ja parempoolset alla. Mõjujoon on kujutatud joonisel 14.41, *g*.

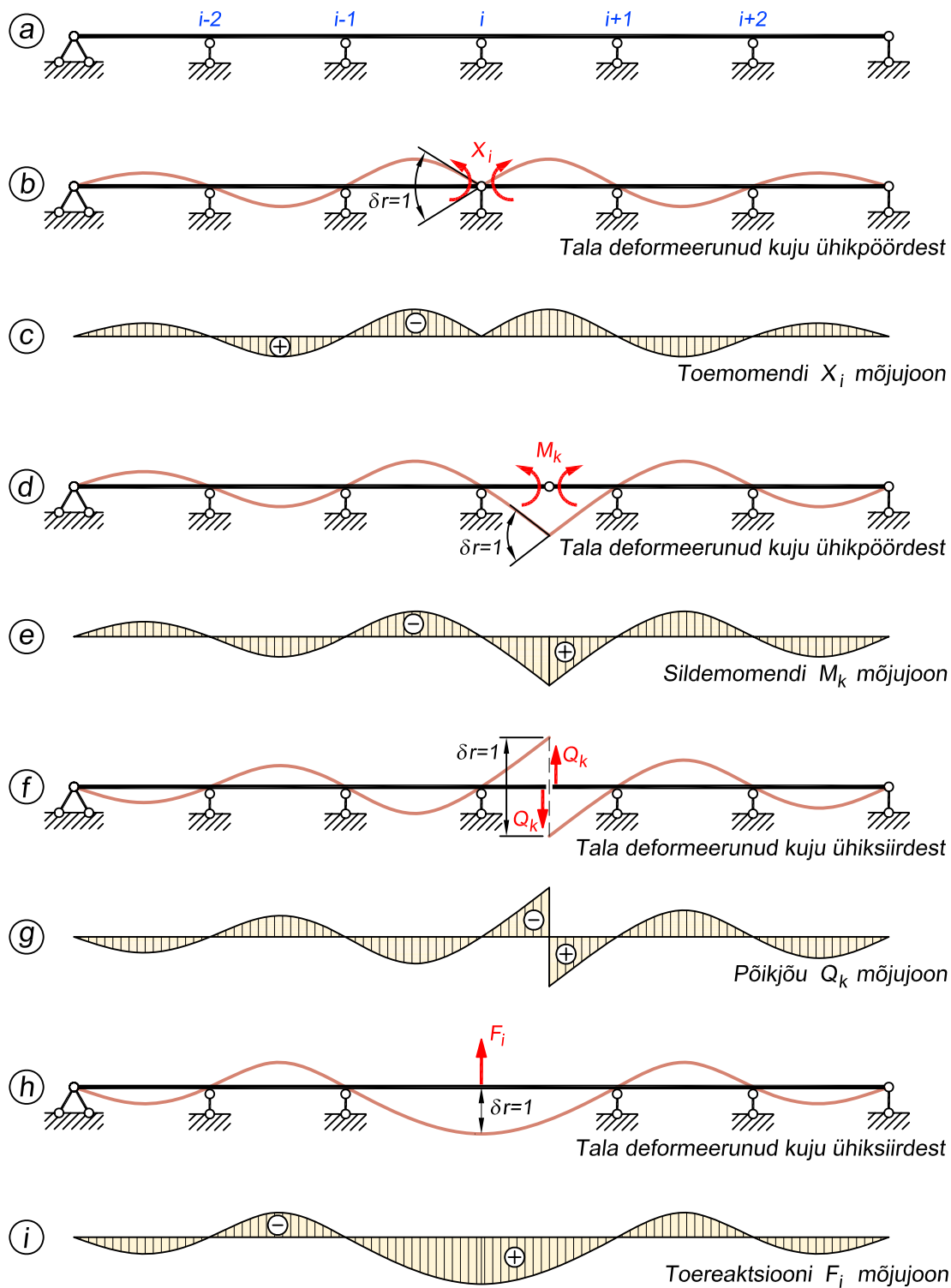
Toereaktsiooni mõjujoone kujutamiseks eemaldame vaadeldava toe ehk võtame ära toereaktsiooni vastuvõtva sideme ja anname talale selles kohas virtuaalse ühiksiirde $\delta r = 1$ positiivsele reaktsioonile vastassuunas ehk ülalt alla (joonis 14.41, *h*). Mõjujoon on kujutatud joonisel 14.41, *i*.

Toemomendi mõjujoone ordinaatide arvutamine elastse joone võrrandiga

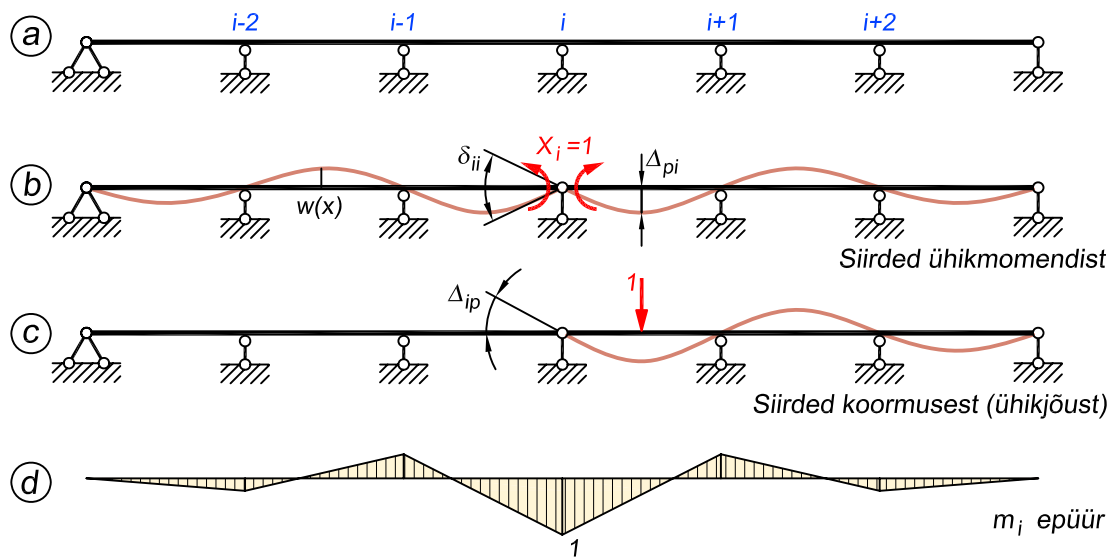
Eelnevalt kirjeldasime seda, kuidas ühiksiirdest põhjustatud tala deformeerunud kuju abil saada kätte mõjujoonte põhimõttelised skeemid. Nüüd tuletame avaldise, millega saame toemomendi mõjujoone ordinaadid täpselt välja arvutada. Teistele mõjujoone tüüpidele jätame siinkohal arvutused esitamata, kuna kõik ülejäänud mõjujooned saab arvutada toemomentide mõjujoonte abil, nagu seda oli kirjeldatud staatika meetodi juures.

Toemomendi X_i mõjujoone ordinaatide arvutamiseks võtame esmalt appi jõumeetodi. Selleks rakendame eemaldatud sideme asemele ühikmomendi $X_i = 1$ (joonis 14.42, *b*). Ühikmomendist põhjustatud pööret toel i tähistame δ_{ij} . Jõumeetodi võrrandi kirjutamiseks paneme arvutusskeemile liikuma ka koormuse, milleks mõjujoone koostamise tõttu kasutame ühikjõudu (joonis 14.42, *c*). Koormusest põhjustatud ja ühikmomendile X_i vastavat pööret tähistame Δ_{ip} .

Kuna tegelikus arvutusskeemis moodustavad vardad toel i ühise ristlõike (joonis 14.42, *a*) ega saa seetõttu teineteise suhtes pöörduda, siis esitame sama nõude ka praegu siin kasutatavale $n - 1$ korda staatikaga määramatule põhiskeemile: saadud põhiskeemis peab eemaldatud



Joonis 14.41. Toe- ja sildemomendi, põikjõu ja toereaktsiooni mõjujoonte koostamine kineemaatika meetodiga



Joonis 14.42. Toemomendi mõjujoone ordinaatide arvutamine tala elastse joone abil

sideme sihiline siire võrduma nulliga. Lähtudes jõumeetodist, saame kirjutada võrrandi

$$\delta_{ii}X_i + \Delta_{ip} = 0 \quad (14.61)$$

Siirete vastastikkuse teoreemi (11.36) põhjal $\Delta_{ip} = \Delta_{pi}$ ja toemomendi mõjujoone ordinaadid arvutame nüüd valemiga

$$X_i = -\frac{\Delta_{pi}}{\delta_{ii}} \quad (14.62)$$

kus Δ_{pi} on liikuva ühikjõu sihiline siire, mis on põhjustatud sisejõust X_i .

Siire Δ_{pi} esitab tala deformeerunud kuju ja avaldise (14.62) saame kirjutada teistsugusel kujul

$$X_i = -\frac{w(x)}{\delta_{ii}} \quad (14.63)$$

kus nimetajas oleva väärtuse saame põhiskeemi m_i epüürist (joonis 14.42, d)

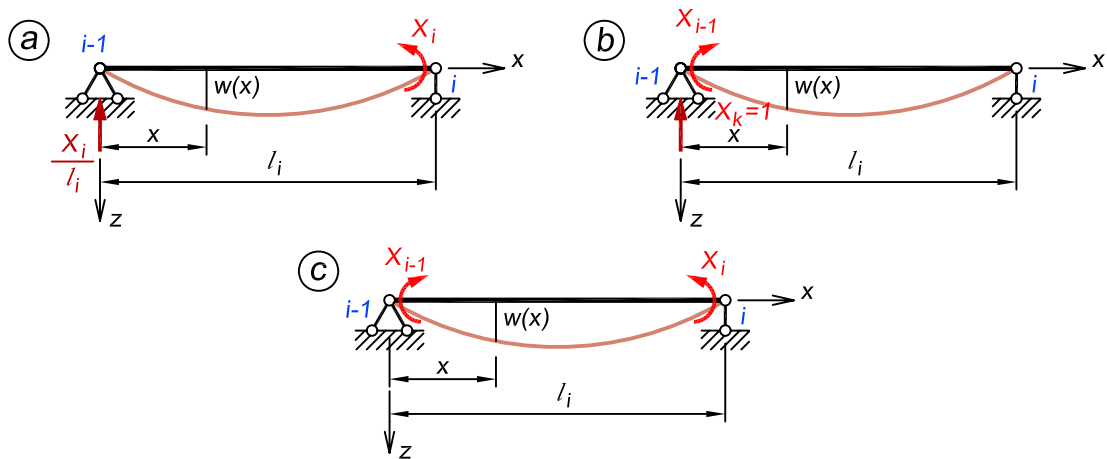
$$EI\delta_{ii} = \int m_i m_i dx \quad (14.64)$$

Valemi (14.63) lugejas oleva avaldise $w(x)$ leidmiseks tuletame koondmomendiga koor-
matud lihttala (joonis 14.43, a) läbipainde valemi. Lähtudes tala elastse joone universaalvõr-
randist

$$EI_y w = EI_y w_0 + EI_y \varphi_{y0} x + \sum \mathcal{M} \frac{(x - a_M)^2}{2!} + \sum F \frac{(x - a_F)^3}{3!} + \sum p \frac{(x - a_p)^4}{4!} \quad (14.65)$$

saame kirjutada

$$EIw = EIw_0 + EI\varphi_0 x - \frac{X_i x^3}{l_i 6} \quad (14.66)$$



Joonis 14.43. Koondmomentidega koormatud lihttala

Rajatingimused on järgmised

1. $w(0) = 0$, millest jäeldub, et $EIw_0 = 0$
2. $w(l_i) = 0$, seega

$$EI\varphi_0 \cdot l_i - \frac{X_i l_i^3}{6} = 0 \quad (14.67)$$

ja

$$EI\varphi_0 = \frac{X_i l_i}{6} \quad (14.68)$$

Saame elastse joone võrrandi lõppkujul

$$EIw(x) = \frac{X_i l_i}{6} x - \frac{X_i x^3}{6} = \frac{X_i x (l_i^2 - x^2)}{6l_i} \quad (14.69)$$

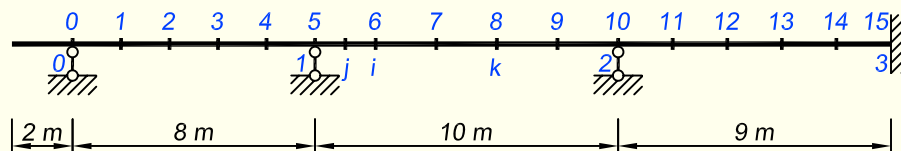
Toemomendi X_{i-1} (joonis 14.43, b) puhul saame kasutada sama valemit, tehes asendused $X_i \rightarrow X_{i-1}$ ja $x \rightarrow l_i - x$.

$$EIw(x) = \frac{X_{i-1} (l_i - x) [l_i^2 - (l_i - x)^2]}{6l_i} \quad (14.70)$$

Tala elastse joone võrrandi kahe toemomendi korral (joonis 14.43, c) saame avaldiste (14.69) ja (14.70) liitmisel

$$w(x_i) = \frac{x(l_i - x)}{6l_i EI} [X_{i-1} (2l_i - x_i) + X_i (l_i + x_i)] \quad (14.71)$$

NÄIDE 14.7. Koostada joonisel 14.44 kujutatud jätkuvtala toemomentide X_1 , X_2 ja X_3 , sildemomentide M_k , M_i ja M_j , põikjõudude Q_k ja Q_i ning toereaktsiooni R_2 mõjujooned. Tala andmed on samad nagu näidetes 14.2 ja 14.4.



Joonis 14.44. Jätkuvtala arvutusskeem

LAHENDUS

Jagame kõik silded viieks osaks ja tähistame tekkivad lõiked numbritega 0...15.

1. Toemomentide mõjujoonte arvutamine staatika meetodiga

Fookussuhted saame näitest 14.4

$$k_1 = \infty; \quad k_2 = 3,6; \quad k_3 = 3,9136; \quad k'_3 = 2; \quad k'_2 = 3,35; \quad k'_1 = 4,1269$$

Ühikjõuga koormatud sildes arvutame toemomentide mõjujoonte ordinaadid valemitega (14.55)

$$X_{i-1} = c_{i1}f_{\xi} + c_{i2}f_{\xi'}; \quad X_i = c_{i1}f_{\xi'} + c_{i3}f_{\xi}$$

kus

$$c_{i1} = \frac{l_i}{(k_i k'_i - 1)}; \quad c_{i2} = -k'_i c_{i1} = -\frac{l_i k'_i}{(k_i k'_i - 1)}; \quad c_{i3} = -k_i c_{i1} = -\frac{l_i k_i}{(k_i k'_i - 1)}$$

Arvutame iga silde jaoks toemomentide leidmisel vajalikud konstandid.

1. sildes

$$c_{11} = \frac{l_1}{(k_1 k'_1 - 1)} = \frac{8}{\infty \cdot 4,1269 - 1} = 0$$

$$c_{13} = -\frac{l_1 k_1}{(k_1 k'_1 - 1)} = -\frac{l_1}{k'_1 - \frac{1}{k_1}} = -\frac{8}{4,1269 - \frac{1}{\infty}} = -1,9385$$

2. sildes

$$c_{21} = \frac{l_2}{(k_2 k'_2 - 1)} = \frac{10}{3,6 \cdot 3,35 - 1} = 0,9042$$

$$c_{22} = -k'_2 c_{21} = -3,35 \cdot 0,9042 = -3,0291$$

$$c_{23} = -k_2 c_{21} = -3,6 \cdot 0,9042 = -3,2551$$

3. sildes

$$c_{31} = \frac{l_3}{(k_3 k'_3 - 1)} = \frac{9}{3,9136 \cdot 2 - 1} = 1,3183$$

$$c_{32} = -k'_3 c_{31} = -2 \cdot 1,3183 = -2,6366$$

$$c_{33} = -k_3 c_{31} = -3,9136 \cdot 1,3183 = -5,1593$$

Kui ühikjõud mõjub konsooli vabal otsal (joonis 14.45, b), siis saame toemomentideks

$$M_{0k} = -1 \cdot 2 = -2 \text{ m}$$

$$X_{1k} = -\frac{M_{0k}}{k'_1} = \frac{2}{4,1269} = 0,4846 \text{ m}$$

$$X_{2k} = -\frac{X_{1k}}{k'_2} = -\frac{0,4846}{3,35} = -0,1447 \text{ m}$$

$$X_{3k} = -\frac{X_{2k}}{k'_3} = \frac{0,1447}{2} = 0,0724 \text{ m}$$

See arvutus annab meile kõigi toemomentide mõjujoonte ordinaadid konsooli otsa kohal (joonis 14.48), kuna näitab ära, millised on toemomentide väärtused ühikjõu paiknemisel konsooli otsal.

Kui ühikjõud asub esimesel sildel (joonis 14.45, c), siis toemomendi X_1 arvutame koormatud silde parempoolse toemomendi X_i valemiga (14.55)

$$X_{11} = c_{11} f_{\xi'} + c_{13} f_{\xi} = 0 \cdot f_{\xi'} - 1,9385 f_{\xi} = -1,9385 f_{\xi}$$

Samuti võib kasutada avaldist (14.57)

$$X_{11} = -\frac{f_{\xi} l_1}{k'_1} = -\frac{f_{\xi} 8}{4,1269} = -1,9385 f_{\xi}$$

Teiste toemomentide jaoks saame avaldised fookussuhetega

$$X_{21} = -\frac{X_{11}}{k'_2} = \frac{1,9385}{3,35} f_{\xi} = 0,5787 f_{\xi}$$

$$X_{31} = -\frac{X_{21}}{k'_3} = -\frac{0,5787}{2} f_{\xi} = -0,2894 f_{\xi}$$

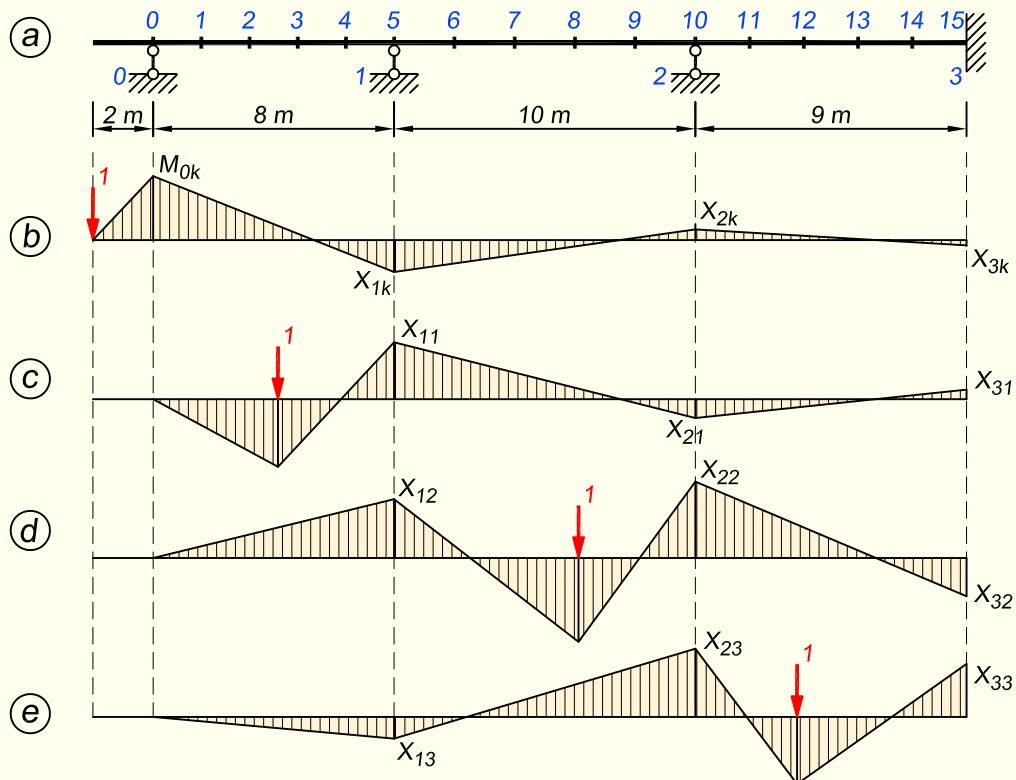
Kasutades saadud avaldise löigete 1...4 puhul ja arvestades igale lõikele vastavat f_{ξ} väärtust, saame toemomentide mõjujoonte ordinaadid esimeses sildes

$$X_{1,1} = -1,9385 \cdot 0,192 = -0,3722; \quad X_{1,2} = -1,9385 \cdot 0,336 = -0,6513$$

$$X_{1,3} = -1,9385 \cdot 0,384 = -0,7444; \quad X_{1,4} = -1,9385 \cdot 0,288 = -0,5583$$

$$X_{2,1} = 0,5787 \cdot 0,192 = 0,1111; \quad X_{2,2} = 0,5787 \cdot 0,336 = 0,1944$$

$$X_{2,3} = 0,5787 \cdot 0,384 = 0,2222; \quad X_{2,4} = 0,5787 \cdot 0,288 = 0,1667$$



Joonis 14.45. Painedemomendi epüürid ühikjõu mõjumisel erinevatel silletel

$$X_{3,1} = -0,2894 \cdot 0,192 = -0,0556; \quad X_{3,2} = -0,2894 \cdot 0,336 = -0,0972$$

$$X_{3,3} = -0,2894 \cdot 0,384 = -0,1111; \quad X_{3,4} = -0,2894 \cdot 0,288 = -0,0833$$

Toemomentide avaldistes esinevate funktsioonide f_ξ ja $f_{\xi'}$ väärtused võib võtta tabelist 14.3 vastavalt ühikjõu asukohale sildel või arvutada valemite (14.52) näidatud avaldistega

$$f_\xi = \xi \xi' (1 + \xi); \quad f_{\xi'} = \xi \xi' (1 + \xi')$$

Kui ühikjõud asub teisel sildel (joonis 14.45, d), siis toemomendid X_1 ja X_2 arvutame valemitega (14.55)

$$X_{12} = c_{21} f_\xi + c_{22} f_{\xi'} = 0,9042 f_\xi - 3,0291 f_{\xi'}$$

$$X_{22} = c_{21} f_{\xi'} + c_{23} f_\xi = 0,9042 f_{\xi'} - 3,2551 f_\xi$$

Toemomendi X_3 leiame fookussuhetega

$$X_{32} = -\frac{X_{22}}{k'_3} = -\frac{0,9042 f_{\xi'} - 3,0291 f_\xi}{2} = -0,4521 f_{\xi'} + 1,6276 f_\xi$$

Saadud avaldised annavad lõigetele 6...9 vastavaid f_ξ ja $f_{\xi'}$ väärtuseid kasutades toemomentide mõjujoonte ordinaadid teises sildes

$$\begin{aligned} X_{1,6} &= 0,9042 \cdot 0,192 - 3,0291 \cdot 0,288 = -0,6988; & X_{1,7} &= 0,9042 \cdot 0,336 - 3,0291 \cdot 0,384 = -0,8594 \\ X_{1,8} &= 0,9042 \cdot 0,384 - 3,0291 \cdot 0,336 = -0,6706; & X_{1,9} &= 0,9042 \cdot 0,288 - 3,0291 \cdot 0,192 = -0,3212 \\ X_{2,6} &= 0,9042 \cdot 0,288 - 3,0291 \cdot 0,192 = -0,3646; & X_{2,7} &= 0,9042 \cdot 0,384 - 3,0291 \cdot 0,336 = -0,7465 \\ X_{2,8} &= 0,9042 \cdot 0,336 - 3,0291 \cdot 0,384 = -0,9461; & X_{2,9} &= 0,9042 \cdot 0,192 - 3,0291 \cdot 0,288 = -0,7639 \\ X_{3,6} &= -0,4521 \cdot 0,288 + 1,6276 \cdot 0,192 = 0,1823; & X_{3,7} &= -0,4521 \cdot 0,384 + 1,6276 \cdot 0,336 = 0,3733 \\ X_{3,8} &= -0,4521 \cdot 0,336 + 1,6276 \cdot 0,384 = 0,4731; & X_{3,9} &= -0,4521 \cdot 0,192 + 1,6276 \cdot 0,288 = 0,3819 \end{aligned}$$

Kui ühikjõud asub kolmandal sildel (joonis 14.45, e), siis arvutame toemomendid X_2 ja X_3 valemitega (14.55)

$$\begin{aligned} X_{23} &= c_{31}f_\xi + c_{32}f_{\xi'} = 1,3183f_\xi - 2,6366f_{\xi'} \\ X_{33} &= c_{31}f_{\xi'} + c_{33}f_\xi = 1,3183f_{\xi'} - 5,1593f_\xi \end{aligned}$$

Toemomendi X_1 leiame fookussuhetega

$$X_{13} = -\frac{X_{23}}{k'_2} = -\frac{1,3183f_\xi - 2,6366f_{\xi'}}{3,6} = -0,3662f_\xi + 0,7324f_{\xi'}$$

Leiame mõjujoonte ordinaadid lõigetes 11...14

$$\begin{aligned} X_{1,11} &= -0,3662 \cdot 0,192 + 0,7324 \cdot 0,288 = 0,1406; & X_{1,12} &= -0,3662 \cdot 0,336 + 0,7324 \cdot 0,384 = 0,1582 \\ X_{1,13} &= -0,3662 \cdot 0,384 + 0,7324 \cdot 0,336 = 0,1055; & X_{1,14} &= -0,3662 \cdot 0,288 + 0,7324 \cdot 0,192 = 0,0352 \\ X_{2,11} &= 1,3183 \cdot 0,192 - 2,6366 \cdot 0,288 = -0,5062; & X_{2,12} &= 1,3183 \cdot 0,336 - 2,6366 \cdot 0,384 = -0,5695 \\ X_{2,13} &= 1,3183 \cdot 0,384 - 2,6366 \cdot 0,336 = -0,3797; & X_{2,14} &= 1,3183 \cdot 0,288 - 2,6366 \cdot 0,192 = -0,1266 \\ X_{3,11} &= 1,3183 \cdot 0,288 - 5,1593 \cdot 0,192 = -0,6109; & X_{3,12} &= 1,3183 \cdot 0,384 - 5,1593 \cdot 0,336 = -1,2273 \\ X_{3,13} &= 1,3183 \cdot 0,336 - 5,1593 \cdot 0,384 = -1,5382; & X_{3,14} &= 1,3183 \cdot 0,192 - 5,1593 \cdot 0,288 = -1,2328 \end{aligned}$$

Toemomentide mõjujooned on kujutatud joonisel 14.48, b, c, d.

2. Toemomentide mõjujoonte arvutamine kinemaatika meetodiga

Toemomentide arvutamisel kinemaatika meetodiga kasutame valemit (14.63)

$$X_i = -\frac{w(x)}{\delta_{ii}}$$

kus tala elastse joone arvutame valemiga (14.71)

$$w(x_i) = \frac{x(l_i - x_i)}{6l_iEI} [X_{i-1}(2l_i - x_i) + X_i(l_i + x_i)]$$

Mõjujoonte ordinaatide arvutus on esitatud tabelis 14.4, kus iga toemomendi mõjujoone puhul on esmalt näidatud $w(x)$ arvutuse tulemused ja seejärel nende jagamisel δ_{ii} väärtustega saadud mõjujoone ordinaadid.

δ_{ii} arvutame vastavalt valemile (14.64)

$$EI\delta_{ii} = \int m_i m_i dx$$

ja lähtudes joonisel 14.46 esitatud m_i epüüridest

$$\delta_{11} = \int m_1 m_1 dx = \frac{8}{3} \cdot 1^2 + \frac{10}{6} \cdot \left[1^2 + 4 \cdot \left(\frac{1 - 0,2985}{2} \right)^2 + 0,2985^2 \right] +$$

$$+ \frac{9}{6} \cdot \left[0,2985^2 + 4 \cdot \left(\frac{0,1493 - 0,2985}{2} \right)^2 + 0,1493^2 \right] = \frac{5,5025}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int m_2 m_2 dx = \frac{8}{3} \cdot 0,2778^2 + \frac{10}{6} \cdot \left[0,2778^2 + 4 \cdot \left(\frac{1 - 0,2778}{2} \right)^2 + 1^2 \right] +$$

$$+ \frac{9}{6} \cdot [1^2 + 4 \cdot 0,25^2 + 0,5^2] = \frac{5,1204}{EI}$$

$$\delta_{33} = \int m_3 m_3 dx = \frac{8}{3} \cdot 0,0710^2 + \frac{10}{6} \cdot \left[0,0710^2 + 4 \cdot \left(\frac{0,0710 - 0,2555}{2} \right)^2 + 0,2555^2 \right] +$$

$$+ \frac{9}{6} \cdot \left[0,2555^2 + 4 \cdot \left(\frac{1 - 0,2555}{2} \right)^2 + 1^2 \right] = \frac{2,6167}{EI}$$

3. Sildemomentide mõjujoonte arvutamine

Sildemomendi, põikjõu ja toereaktsiooni mõjujooned arvutame eelnevalt leitud toemomentide mõjujoonte abil.

Sildemomendi mõjujoone lõikele k koostame toemomentide X_1 ja X_2 mõjujoonte abil, kuna lõige k jääb nendevahelisse sildesse, kasutades selleks valemite (14.58)

$$M_{kx} = M_{kx}^0 + X_{i-1,x} \cdot \xi' + X_{ix} \cdot \xi$$

kus vastavalt lõike k asukohale saame joonise 14.38, c ja d abil kordajate ξ ja ξ' väärtusteks

$$\xi = \frac{a_k}{l} = \frac{6}{10} = 0,6; \quad \xi' = \frac{b_k}{l} = \frac{4}{10} = 0,4$$

Lõike k paindemomendi mõjujoone avaldiseks kujuneb

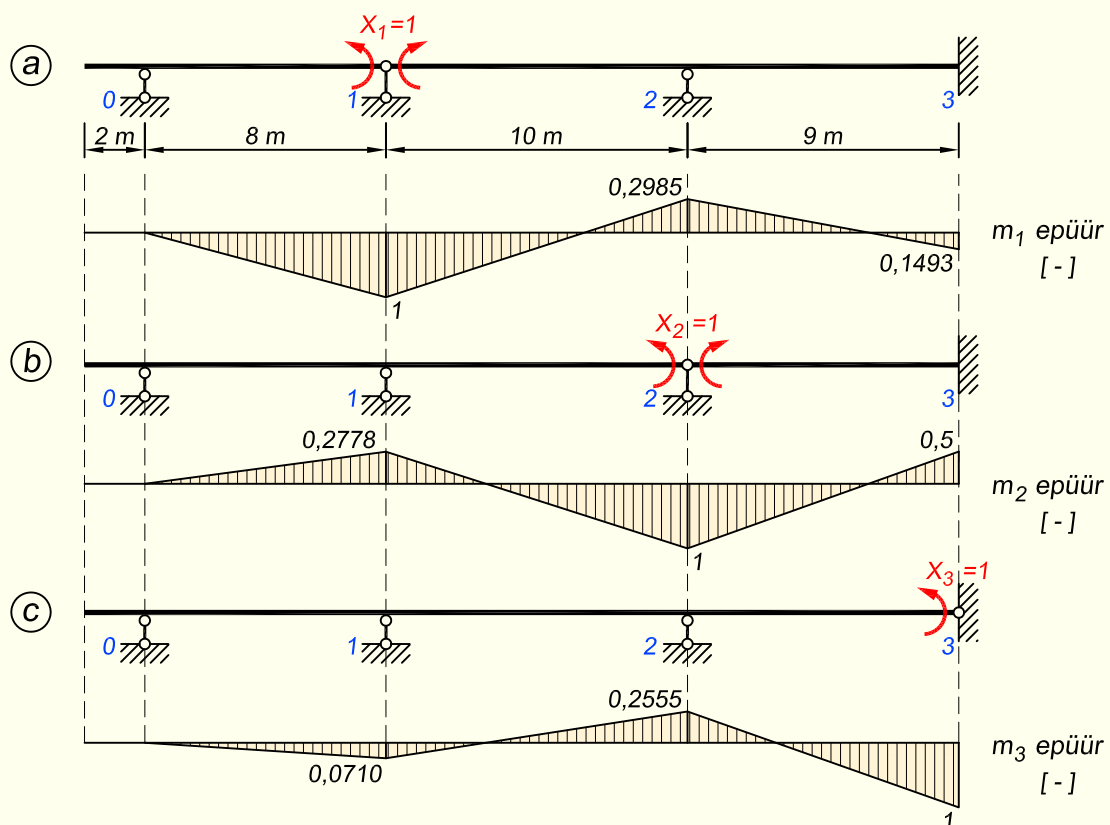
$$M_{kx} = M_{kx}^0 + X_{1x} \cdot 0,4 + X_{2x} \cdot 0,6$$

M_k^0 mõjujoone ordinaadid teises sildes leiame joonise 14.47, b abil. Teistes silletes on need nullid.

Arvutame lõike k paindemomendi mõjujoone ordinaadid kõigis lõigetes

$$M_{k,1} = 0 - 0,4 \cdot 0,3722 + 0,6 \cdot 0,1111 = -0,0822; \quad M_{k,2} = 0 - 0,4 \cdot 0,6513 + 0,6 \cdot 0,1944 = -0,1439$$

$$M_{k,3} = 0 - 0,4 \cdot 0,7444 + 0,6 \cdot 0,2222 = -0,1644; \quad M_{k,4} = 0 - 0,4 \cdot 0,5583 + 0,6 \cdot 0,1667 = -0,1233$$



Joonis 14.46. Põhiskeemi m_i epüürid

$$\begin{aligned}
 M_{k,6} &= 0,8 - 0,4 \cdot 0,6988 - 0,6 \cdot 0,3646 = 0,3017; & M_{k,7} &= 1,6 - 0,4 \cdot 0,8594 - 0,6 \cdot 0,7465 = 0,8083 \\
 M_{k,8} &= 2,4 - 0,4 \cdot 0,6706 - 0,6 \cdot 0,9461 = 1,5641; & M_{k,9} &= 1,2 - 0,4 \cdot 0,3212 - 0,6 \cdot 0,7639 = 0,6132 \\
 M_{k,11} &= 0 + 0,4 \cdot 0,1406 - 0,6 \cdot 0,5062 = -0,2475; & M_{k,12} &= 0 + 0,4 \cdot 0,1582 - 0,6 \cdot 0,5695 = -0,2784 \\
 M_{k,13} &= 0 + 0,4 \cdot 0,1055 - 0,6 \cdot 0,3797 = -0,1856; & M_{k,14} &= 0 + 0,4 \cdot 0,0352 - 0,6 \cdot 0,1266 = -0,0619 \\
 M_{k,konsool} &= 0 + 0,4 \cdot 0,4846 - 0,6 \cdot 0,1447 = 0,1070
 \end{aligned}$$

Lõike k paindemomendi mõjujoon on näidatud joonisel 14.48, e .

Lõigete i ja j mõjujoonte ordinaadid arvutame vastavalt valemitega

$$M_{ix} = M_{ix}^0 + X_{1x} \cdot 0,8 + X_{2x} \cdot 0,2$$

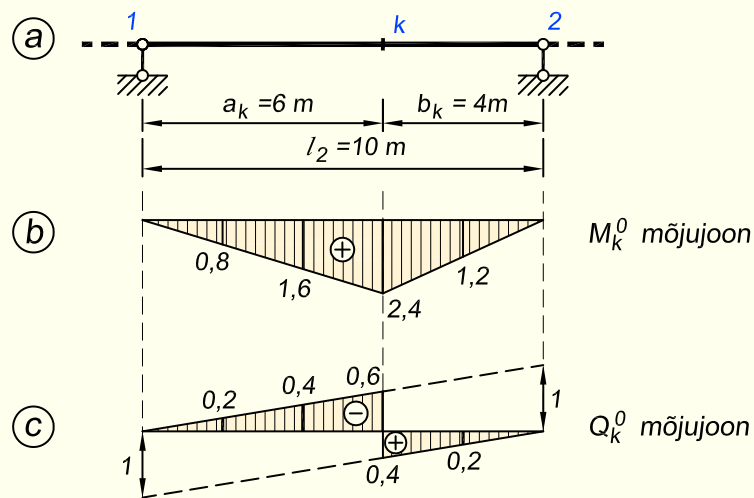
$$M_{jx} = M_{jx}^0 + X_{1x} \cdot 0,9 + X_{2x} \cdot 0,1$$

Nende arvutuse jätame esitamata ja toome ära ainult mõjujooned joonisel 14.48, f ja g .

Lõiked i ja j asetsevad silde vasakpoolse toe ja vasakpoolse fookuse vahel (näiteülesande 14.4 andmete baasil saame, et fookus paikneb toest 2,174 m kaugusel), mistõttu on nende mõjujoonte ordinaadid teises sildes nii positiivsed kui ka negatiivsed, erinevalt lõike k mõjujoonest, mis on kogu teise silde ulatuses positiivne.

Tabel 14.4. Mõjujoonte ordinaatide arvutamine

| Lõige | konsool | 8 | | | | | | | | 10 | | | | | | | 9 | | |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------|---------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----|--|--|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | |
| l_i | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_i | -2,0 | 1,6 | 3,2 | 4,8 | 6,4 | 8 | 2,0 | 4,0 | 6,0 | 8,0 | 10 | 1,8 | 3,6 | 5,4 | 7,2 | 9 | | | |
| $w(x)$ | 0 | 2,0480 | 3,5840 | 4,0960 | 3,0720 | 0 | 3,8448 | 4,7284 | 3,6896 | 1,7672 | 0 | -0,7737 | -0,8704 | -0,5803 | -0,1934 | 0 | | | |
| X_1 mj | 0,4846 | 0 | -0,3722 | -0,6513 | -0,7444 | -0,5583 | 0 | -0,6987 | -0,8593 | -0,6705 | -0,3212 | 0 | 0,1406 | 0,1582 | 0,1055 | 0,0352 | 0 | | |
| $w(x)$ | 0 | -0,5689 | -0,9956 | -1,1378 | -0,8533 | 0 | 1,8667 | 3,8222 | 4,8444 | 3,9111 | 0 | 2,5920 | 2,9160 | 1,9440 | 0,6480 | 0 | | | |
| X_2 mj | -0,1447 | 0 | 0,1111 | 0,1944 | 0,2222 | 0,1667 | 0 | -0,3646 | -0,7465 | -0,9461 | -0,7638 | 0 | -0,5062 | -0,5695 | -0,3797 | -0,1266 | 0 | | |
| $w(x)$ | 0 | 0,1454 | 0,2544 | 0,2907 | 0,2180 | 0 | -0,4770 | -0,9767 | -1,2379 | -0,9994 | 0 | 1,5985 | 3,2114 | 4,0250 | 3,2257 | 0 | | | |
| X_3 mj | 0,0724 | 0 | -0,0556 | -0,0972 | -0,1111 | -0,0833 | 0 | 0,1823 | 0,3732 | 0,4731 | 0,3819 | 0 | -0,6109 | -1,2273 | -1,5382 | -1,2327 | 0 | | |
| M_{kx}^0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,8 | 1,6 | 2,4 | 2,4 | 1,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| M_k mj | 0,1070 | 0 | -0,0822 | -0,1439 | -0,1644 | -0,1233 | 0 | 0,3018 | 0,8084 | 1,5641 | 0,6132 | 0 | -0,2475 | -0,2784 | -0,1856 | -0,0619 | 0 | | |
| M_{ix}^0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,6 | 1,2 | 0,8 | 0,4 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| M_l mj | 0,3587 | 0 | -0,2755 | -0,4822 | -0,5511 | -0,4133 | 0 | 0,9681 | 0,3633 | 0,0744 | -0,0097 | 0 | 0,0112 | 0,0127 | 0,0084 | 0,0028 | 0 | | |
| Q_{kx}^0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,2 | -0,4 | -0,6 / 0,4 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| Q_k mj | -0,0629 | 0 | 0,0483 | 0,0846 | 0,0967 | 0,0725 | 0 | -0,1666 | -0,3887 | -0,6276 | 0,1557 | 0 | -0,0647 | -0,0728 | -0,0485 | -0,0162 | 0 | | |
| Q_{ix}^0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,2 / 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| Q_l mj | -0,0629 | 0 | 0,0483 | 0,0846 | 0,0967 | 0,0725 | 0 | -0,1666 | 0,6113 | 0,3724 | 0,1557 | 0 | -0,0647 | -0,0728 | -0,0485 | -0,0162 | 0 | | |
| R_{2x}^0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,2 | 0 | | |
| R_2 mj | 0,0871 | 0 | -0,0668 | -0,1170 | -0,1337 | -0,1003 | 0 | 0,2273 | 0,5131 | 0,7852 | 0,9716 | 1 | 0,8531 | 0,5997 | 0,3198 | 0,0933 | 0 | | |



Joonis 14.47. Põhiskeemi M_k^0 ja Q_k^0 mõjujoon

4. Põikjõu mõjujoonte arvutamine

Lõike k põikjõu mõjujoone ordinaadid arvutame teise silde toemomentide mõjujoonte abil valemiga (14.59)

$$Q_{kx} = Q_{kx}^0 + \frac{X_{ix} - X_{i-1,x}}{l_i}$$

millest lähtuvalt saame mõjujoone avaldiseks

$$Q_{kx} = Q_{kx}^0 + \frac{X_{2x} - X_{1x}}{l_2}$$

kus Q_k^0 mõjujoone ordinaadid teises sildes leiame jooniselt 14.47, c.

Arvutame lõike k põikjõu mõjujoone ordinaadid kõigis lõigetes

$$Q_{k,1} = (0,1111 + 0,3722)/10 = 0,0483; \quad Q_{k,2} = (0,1944 + 0,6513)/10 = 0,0846$$

$$Q_{k,3} = (0,2222 + 0,7444)/10 = 0,0967; \quad Q_{k,4} = (0,1667 + 0,5583)/10 = 0,0725$$

$$Q_{k,6} = -0,2 + (-0,3646 + 0,6988)/10 = -0,1666; \quad Q_{k,7} = -0,4 + (-0,7465 + 0,8594)/10 = -0,3887$$

$$Q_{k,8} = -0,6 + (-0,9461 + 0,6706)/10 = -0,6276; \quad Q_{k,9} = 0,4 + (-0,9461 + 0,6706)/10 = 0,3725$$

$$Q_{k,9} = 0,2 + (-0,7639 + 0,3212)/10 = 0,1557$$

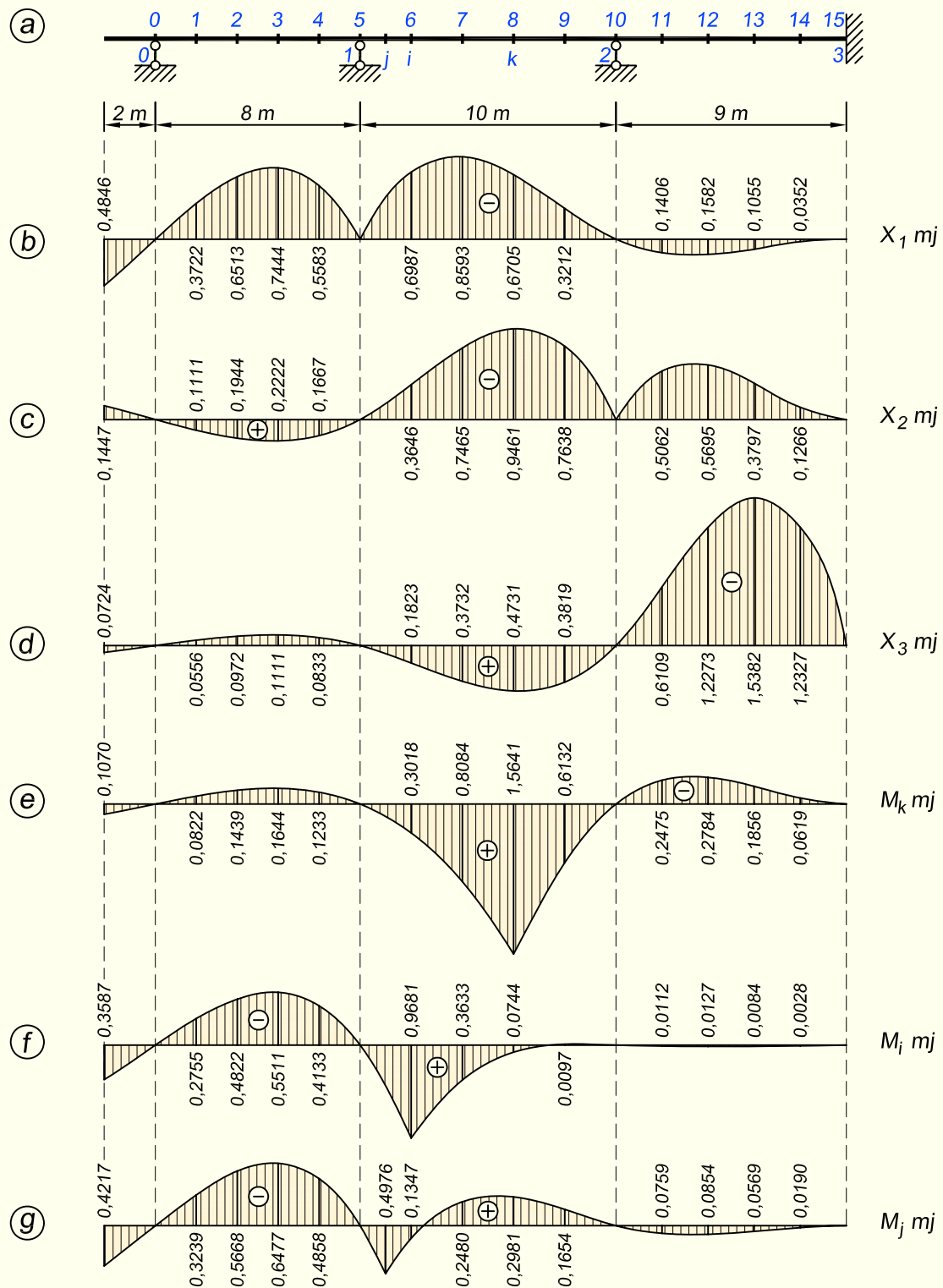
$$Q_{k,11} = (-0,5062 - 0,1406)/10 = -0,0647; \quad Q_{k,12} = (-0,5695 - 0,1582)/10 = -0,0728$$

$$Q_{k,13} = (-0,3797 - 0,1055)/10 = -0,0485; \quad Q_{k,14} = (-0,1266 - 0,0352)/10 = -0,0162$$

$$Q_{k,konsool} = (-0,1447 - 0,4846)/10 = -0,0629$$

Lõike k põikjõu mõjujoon on näidatud joonisel 14.50, b.

Lõike i põikjõu mõjujoone arvutused jätame esitamata ja näitame ära ainult mõjujoone joonisel 14.50, c.



Joonis 14.48. Pändemomentide mõjujooned

5. Toereaktsiooni mõjujoone arvutamine

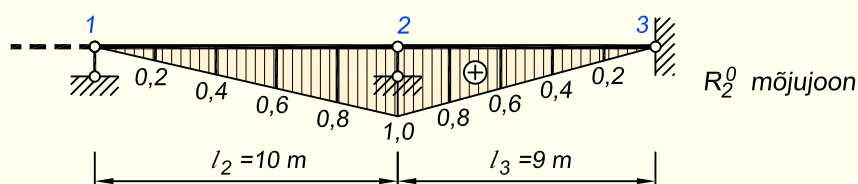
Toe 2 reaktsiooni mõjujoone ordinaatide leidmiseks kasutame valemit (14.59)

$$R_{ix} = R_{ix}^0 + \frac{X_{i-1,x} - X_{ix}}{l_i} + \frac{X_{i+1,x} - X_{ix}}{l_{i+1}}$$

ja mõjujoone avaldiseks kujuneb

$$R_{2x} = R_{2x}^0 + \frac{X_{1x} - X_{2x}}{l_2} + \frac{X_{3x} - X_{2x}}{l_3}$$

kus R_2^0 mõjujoone ordinaadid teises ja kolmandas sildes ehk vaadeldavast toest kummalgi poole jäävates silletes leiame jooniselt 14.49.



Joonis 14.49. R_2^0 mõjujoon

Arvutame toe 2 reaktsiooni mõjujoone ordinaadid kõigis lõigetes

$$R_{2,1} = (-0,3722 - 0,1111)/10 + (-0,0556 - 0,1111)/9 = -0,0669$$

$$R_{2,2} = (-0,6513 - 0,1944)/10 + (-0,0972 - 0,1944)/9 = -0,1170$$

$$R_{2,3} = (-0,7444 - 0,2222)/10 + (-0,1111 - 0,2222)/9 = -0,1337$$

$$R_{2,4} = (-0,5583 - 0,1667)/10 + (-0,0833 - 0,1667)/9 = -0,1003$$

$$R_{2,6} = 0,2 + (-0,6988 + 0,3646)/10 + (0,1823 + 0,3646)/9 = 0,2273$$

$$R_{2,7} = 0,4 + (-0,8594 + 0,7465)/10 + (0,3733 + 0,7465)/9 = 0,5131$$

$$R_{2,8} = 0,6 + (-0,6706 + 0,9461)/10 + (0,4731 + 0,9461)/9 = 0,7852$$

$$R_{2,9} = 0,8 + (-0,3212 + 0,7639)/10 + (0,3819 + 0,7639)/9 = 0,9716$$

$$R_{2,11} = 0,8 + (0,1406 + 0,5062)/10 + (-0,6109 + 0,5062)/9 = 0,8530$$

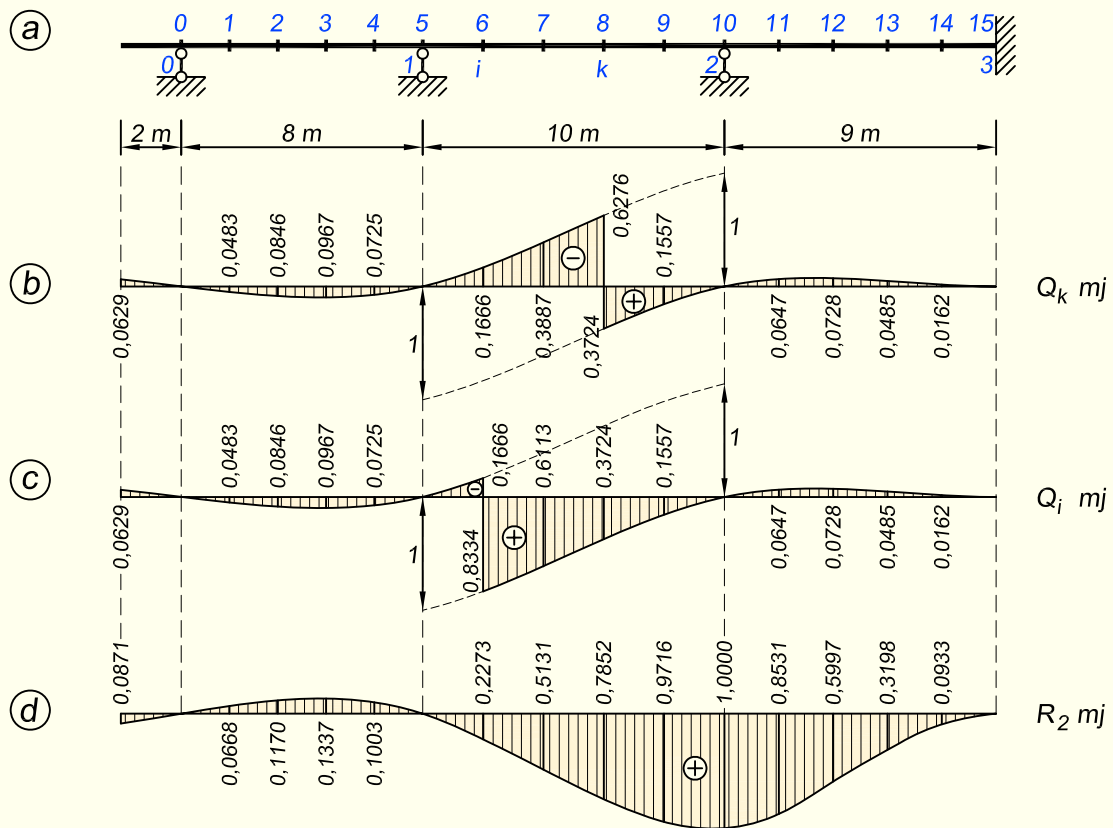
$$R_{2,12} = 0,6 + (0,1582 + 0,5695)/10 + (-1,2273 + 0,5695)/9 = 0,5997$$

$$R_{2,13} = 0,4 + (0,1055 + 0,3797)/10 + (-1,5382 + 0,3797)/9 = 0,3198$$

$$R_{2,14} = 0,2 + (0,0352 + 0,1266)/10 + (-1,2328 + 0,1266)/9 = 0,0933$$

$$R_{2,konsool} = (0,4846 + 0,1447)/10 + (0,0724 + 0,1447)/9 = 0,0871$$

Toe 2 reaktsiooni mõjujoon on näidatud joonisel 14.48, g.



Joonis 14.50. Põikjõu ja toereaktsiooni mõjujooned

Peatükk 15

KAARED

15.1. Sissejuhatus

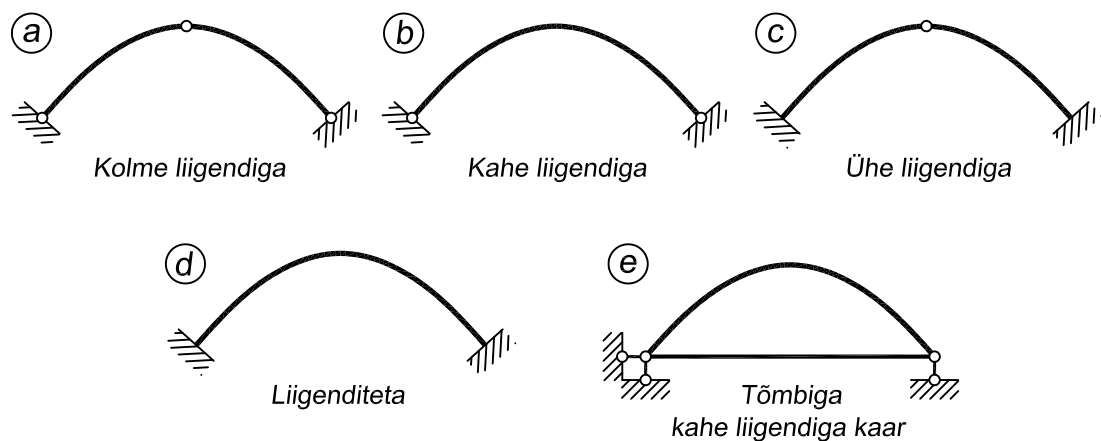
Kaared leiavad laialdast kasutamist tsiviil-, tööstus- ja sillaehituses (foto 15.1). Olenevalt liigendite arvust nimetatakse neid kas kolme, kahe, ühe liigendiga või liigenditeta kaarteks (joonis 15.1). Kolme liigendiga kaar on staatikaga määratav, teised kaared aga staatikaga määramatud.

Staatikaga määramatute kaarte arvutamisel on väga tähtsad tugede siirded, kuna tuge-
de nihkumine põhjustab konstruktsioonis lisapingeid. Toeristlõigete siirded olenevad tuge-
de (tõmbiga kaarel ka tõmbi) elastsusomadustest ja kaarele mõjuvast koormusest. Erinevat liiki
kaarte puhul on tuge-
de siirete mõju erineva ohtlikkusega.

Kahe liigendiga kaare toe horisontaalne siire on ohtlik, kuid vertikaalne vajumine mitte.
Horisontaalse toereaktsiooni vältimiseks võib kahe liigendiga kaare projekteerida tõmbiga
(joonis 15.1, e).



Foto 15.1. Tartu kaarsild (foto: Wikimedia Commons)



Joonis 15.1. Kaarkonstruktsioonide tüübid

Liigenditeta kaare toe kõik siirdekomponendid põhjustavad kaares sisejõudude muutust, kuid mõlema toe võrdne vajumine ei põhjusta. Lisaks on liigenditeta kaar tundlik ka toeristlõike pöördumise suhtes.

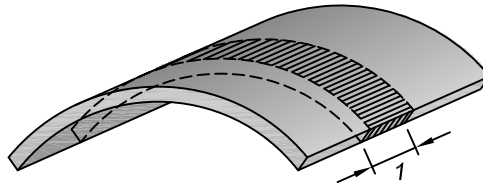
Kahe liigendiga kaarel on paindemomendid tugede juures väikesed ja suurenevad tunduvalt silde keskkoha poole. Liigenditeta kaarel on paindemomentide jaotus ühtlasem, kuid vundamendid on raskemas olukorras kui kahe liigendiga kaarel.

Kaare paksus ja laius (kaare ristlõike kõrgus ja laius) on samas suurusjärgus, kuid tunduvalt väiksemad kui kaare silde. Kui ristlõike laius on tunduvalt suurem ristlõike kõrgusest ja on samas suurusjärgus kui silde, siis nimetatakse konstruktsiooni võlviks (joonis 15.2). Kui koormus on võlvi laiusel konstantne, siis jaotame võlvi arvutamisel ühiklaiusega ribadeks. Riba koos temale mõjuva koormusega arvutame kaarena.

Kaare telgjooneks võtame parabooli, ringi kaare, aheljoone või muutumatule koormusele vastava survejoone. Kaare kuju projekteerime nii, et suurimad arvutuslikud pinged kaare ristlõigetel ligikaudu võrduksid üksteisega. Muutumatu koormuse puhul ühtib kaare telje ökonoomne kuju survejoonega või lõikub sellega mitmes punktis. Sel juhul võrduvad paindest põhjustatud normaalpinged nulliga või on väga väikesed.

Staatikaga määratatu kaare survejoone leidmine nõuab eelnevalt lisatundmatute arvutamist. Lisatundmatud omakorda olenevad kaare kujust ja deformatsioonidest. Telje kuju leiame järkjärgulise lähenemisega. Algul võtame kaare telgjooneks parabooli, ringi kaare, aheljoone või staatikaga määratud kolme liigendiga kaare survejoone. Järgnevalt arvutame lisatundmatud ja leiame staatikaga määratatu kaare survejoone. Nüüd muudame esialgset kaare telje kuju vastavalt staatikaga määratatu kaare survejoonele ja kordame arvutust, kuni kaare telgjoon rahuldab temale esitatud nõudeid. Kuju valikul arvestame täiendavalt ka kaare telje lühenemist normaaljõudude mõjul.

Liikuva koormuse puhul on kaare telje kuju valik veelgi raskem. Kui ühtlaselt jaotatud ajutine liikuv koormus on võrreldes alalise koormusega suur, siis võtame kaare telgjoone niisuguse, et kaare ühe poole ajutise koormuse jaoks leitud survejoone suurimad kõrvalekalded telgjoonest oleksid kaare mõlemal poolel ligikaudu võrdsed.



Joonis 15.2. Völv

Kaare sisejõud olenevad peale kaare telje kuju veel ka kaare ristlõike mõõtmetest. Kaare luku ja kanna ristlõike mõõtmed valitakse kogemuste põhjal või määratakse algul ligikaudsete valemitega. Lõplikud ristlõike mõõtmed ja kuju peavad vastama arvutuslike sisejõudude jaotusele.

Sümmeetriliste kaarte puhul võib ristlõike inertsimomendi muutuse piki kaare telge valida näiteks järgmiste avaldistega:

1. liigenditeta kaare jaoks

$$\frac{I_c}{I \cos \varphi} = 1 - (1 - n) \left(\frac{x}{l_1} \right)^r \quad (15.1)$$

2. kahe liigendiga kaare jaoks

$$\frac{I_c}{I \cos \varphi} = 1 + (n - 1) \left(\frac{x}{l_1} \right)^r \quad (15.2)$$

kus x on kaare telje abstsiss (koordinaatide alguspunkt paikneb lukuristlõike raskuskeskmes), φ on nurk kaare telje puutuja ja horisontaali vahel, I_c on lukuristlõike inertsimoment, I on asukohas x paikneva ristlõike inertsimoment, l_1 on pool sillet ning parameeter n on arvutatav valemiga

$$n = \frac{I_c}{I_k \cos \varphi_k} \quad (15.3)$$

kus I_k on kaare kannaristlõike inertsimoment ja φ_k on nurk telje ja puutuja vahel kaare kannas.

Enamikul juhtudel võetakse valemites (15.1) ja (15.2) $r = 1$ ja sageli ka $n = 1$. Seejärel saame avaldiste (15.1) ja (15.2) asemel

$$\frac{I_c}{I \cos \varphi} = 1 \quad \text{ehk} \quad I = \frac{I_c}{\cos \varphi} \quad (15.4)$$

Väikese kõverusega kaarkonstruktsioonides ($\frac{\rho}{h} > 5$, kus ρ on kõverusraadius ja h on kaare paksus ehk ristlõike kõrgus) arvutatakse siirded avaldisega

$$\Delta_{kp} = \sum \int \left(\frac{m_k M_p}{EI} + \frac{n_k N_p}{EA} + \frac{m_k N_p}{EA \rho} + \frac{n_k M_p}{EA \rho} + k_j \frac{q_k Q_p}{GA} \right) ds \quad (15.5)$$

Piki- ja põikjõu mõju siiretele, võrreldes paindemomendi mõjuga, oleneb koormusest, kaare kujust ja mõõtmetest ning hinnatakse arvutustulemuste järgi.

15.2. Kahe liigendiga kaar

15.2.1. Jõumeetodi põhiskeem ja võrrand

Kahe liigendiga kaar (joonis 15.3, a) on staatikaga ühekordselt määratu. Põhiskeemina kasutame kõverat tala. Lisatundmatuks võtame toereaktsiooni F_b horisontaalse komponendi $H_b = X_1$ (joonis 15.3, b).

Ühiktundmatust $X_1 = 1$ põhjustatud sisejõud põhiskeemis leiame valemitega

$$m_1 = -y; \quad n_1 = -\cos \varphi; \quad q_1 = -\sin \varphi \quad (15.6)$$

Epüürid on kujutatud joonisel 15.3, c, d ja e.

Vertikaalsest koormusest põhjustatud sisejõud põhiskeemis arvutame avaldistega

$$M_p^0 = M^0; \quad N_p^0 = -Q^0 \sin \varphi; \quad Q_p^0 = Q^0 \cos \varphi \quad (15.7)$$

kus M^0 ja Q^0 on paindemoment ja põikjõud kaarega võrdse sildega lihttalas.

Kanoonilisest võrrandist

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 \quad (15.8)$$

avaldame lisatundmatu

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \quad (15.9)$$

Lamedate kaartepuhul, kui kõveruse mõju ei arvestata, leiame võrrandi tundmatu kordaja ja vabaliikme tavaliste jõumeetodi juurest tuttavate valemitega

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{m_1 m_1}{EI} ds + \int_0^s \frac{n_1 n_1}{EA} ds + k \int_0^s \frac{q_1 q_1}{GA} ds \quad (15.10)$$

$$\Delta_{1p} = \int_0^s \frac{m_1 M_p^0}{EI} ds + \int_0^s \frac{n_1 N_p^0}{EA} ds + k \int_0^s \frac{q_1 Q_p^0}{GA} ds \quad (15.11)$$

mis, arvestades valemeid (15.6), annab meile pärast lukuristlõike jäikusega EI_c läbikorrutamist

$$EI_c \delta_{11} = \int_0^s y^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int_0^s \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^s \sin^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds \quad (15.12)$$

$$EI_c \Delta_{1p} = - \int_0^s y M_p^0 \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int_0^s \cos \varphi N_p^0 \frac{A_c}{A} ds - k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^s \sin \varphi Q_p^0 \frac{A_c}{A} ds \quad (15.13)$$

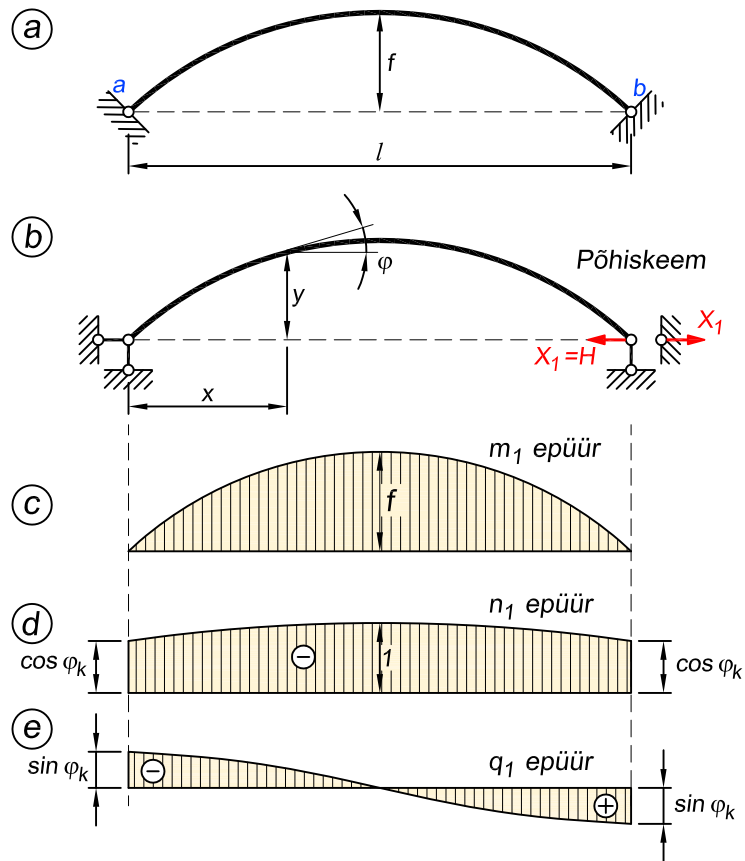
kus I_c on lukuristlõike inertsimoment ja A_c on lukuristlõike pindala.

Arvutamise lihtsustamiseks avaldame kõik integreeritavad funktsioonid abstsissi x kaudu, kusjuures

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi} \quad (15.14)$$

Siirete avaldised on siis järgmised

$$EI_c \delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \frac{I_c}{A_c} \int_0^l \cos \varphi \frac{A_c}{A} dx + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^l \sin \varphi \tan \varphi \frac{A_c}{A} dx \quad (15.15)$$



Joonis 15.3. Kahe liigendiga kaare põhiskeem ja selle epüürid

$$EI_c \Delta_{1p} = - \int_0^l y M_p^0 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} - \frac{I_c}{A_c} \int_0^l N_p^0 \frac{A_c}{A} dx - k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^l Q_p^0 \tan \varphi \frac{A_c}{A} dx \quad (15.16)$$

Vertikaalse koormuse puhul kujuneb vabaliikmeks

$$\begin{aligned} EI_c \Delta_{1p} &= - \int_0^l y M^0 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \frac{I_c}{A_c} \int_0^l Q^0 \sin \varphi \frac{A_c}{A} dx - k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^l Q^0 \sin \varphi \frac{A_c}{A} dx = \\ &= - \int_0^l y M^0 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \left(1 - k \frac{E}{G}\right) \frac{I_c}{A_c} \int_0^l Q^0 \sin \varphi \frac{A_c}{A} dx \end{aligned} \quad (15.17)$$

Pärast lisatundmatute arvutamist avaldisega (15.9) leiame sisejõud koormusest järgmiste valemitega

$$M = M_p^0 + m_1 X_1; \quad Q = Q_p^0 + q_1 X_1; \quad N = N_p^0 + n_1 X_1 \quad (15.18)$$

millest saame avaldiste (15.6) abil

$$M = M_p^0 - y X_1; \quad Q = Q_p^0 - \sin \varphi X_1; \quad N = N_p^0 - \cos \varphi X_1 \quad (15.19)$$

15.2.2. Analüütiliselt määratud telgjoonega kaar

Analüütiliselt väljendatava telgjoonega $[y = f(x)]$ kaare jaoks avaldame siirete valemite esinevad trigonomeetrilised funktsioonid analüütiliselt

$$\begin{aligned}\tan \varphi &= \frac{dy}{dx} \\ \cos \varphi &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \\ \sin \varphi &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \tan \varphi \cos \varphi = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\end{aligned}\quad (15.20)$$

Funktsioon $\cos \varphi$ on positiivne kogu kaare pikkusel, $\sin \varphi$ on vasakul pool sümmeetriatelge positiivne ja paremal pool negatiivne.

Lamedatel kaartel on põikjõu mõju siirdele $EI_c \delta_{11}$ väike ja ligikaudse arvutuse juures võib valemist (15.15) jätta ära kolmanda integraali, misjärel saame

$$EI_c \delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \frac{I_c}{A_c} \int_0^l \cos \varphi \frac{A_c}{A} dx \quad (15.21)$$

ja esitame selle järgmisel kujul

$$EI_c \delta_{11} = (1 + \mu) \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} = (1 + \mu) EI_c \delta_{11,m} \quad (15.22)$$

kus

$$\mu = \frac{\frac{I_c}{A_c} \int_0^l \cos \varphi \frac{A_c}{A} dx}{\int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi}} = \frac{EI_c \delta_{11,n}}{EI_c \delta_{11,m}} \quad (15.23)$$

Viimase murru lugeja ja nimetaja väljendavad vastavalt pikijõu ja paindemomendi mõju. Murru lugeja on nimetajaga võrreldes väike ja oluline on ta lamedate kaarte juures. Järelikult on ka pikijõu mõju oluline ainult lamedate kaarte puhul.

Ligikaudsel arvutamisel võib lamedate kaarte puhul võtta $\cos \varphi \approx 1$ ja $\frac{A_c}{A} \approx 1$, mille tulemusel valemi (15.23) lugeja väärtuseks on

$$EI_c \delta_{11,n} \approx \frac{I_c}{A_c} \cdot l \quad (15.24)$$

Ruutparaboolikujulise teljega kaar

Järgnevalt vaatleme kahe liigendiga kaart, mille telgjooneks on parabool, mis võrrandina avaldub

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2} = 4f\xi(1-\xi) = 4f\xi\xi' \quad (15.25)$$

kus

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \xi' = \frac{x'}{l} = \frac{l-x}{l} \quad (15.26)$$

ja ristlõike inertsimoment muutub vastavalt avaldisele

$$\frac{I_c}{I \cos \varphi} = 1 \quad (15.27)$$

Saame

$$EI_c \delta_{11,m} = \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I \cos \varphi} dx = \int_0^l y^2 dx = l \int_0^1 y^2 d\xi = \frac{8}{15} f^2 l \quad (15.28)$$

$$EI_c \delta_{11} = \frac{8}{15} f^2 l (1 + \mu) \quad (15.29)$$

$$\mu = \frac{\frac{I_c l}{A_c}}{\frac{8}{15} f^2 l} = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{I_c}{A_c} \quad (15.30)$$

Kui kaarele mõjub koondatud jõud F (joonis 15.4, a), siis

$$\begin{aligned} EI_c \Delta_{1p} &= - \int_0^l M_p^0 y \frac{I_c}{I \cos \varphi} dx = - \int_0^l M_p^0 y dx = \\ &= -4F f l^2 \left(\xi' \int_0^\xi \eta^2 \eta' d\eta + \xi \int_0^{\xi'} \eta \eta'^2 d\eta \right) = \\ &= 4F f l^2 \left[(1 - \xi) \int_0^\xi \eta^2 (1 - \eta) d\eta + \xi \int_0^{1-\xi} \eta (1 - \eta)^2 d\eta \right] \end{aligned} \quad (15.31)$$

mis pärast integreerimist on järgmine

$$EI_c \Delta_{1p} = \frac{F f l^2}{3} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \quad (15.32)$$

Horisontaalne toereaktsioon on

$$H = X_1 = - \frac{EI_c \Delta_{1p}}{EI_c \delta_{11}} = \frac{5 l}{8 f} \frac{F}{1 + \mu} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \quad (15.33)$$

Avaldistega (15.19) leiame lõplikud sisejõud kaares. Näiteks paindemomendi lukuristlõikes c , kui $\xi \leq 1/2$, arvutame valemiga

$$M_c = \frac{F l}{8} \left[4\xi - \frac{5}{1 + \mu} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \right] \quad (15.34)$$

H mõjujoone ja lukuristlõike paindemomendi M_c mõjujoone ordinaatide arvutamisel tuleb avaldistes (15.33) ja (15.34) võtta $F = 1$.

Kui kaarele mõjub ühtlaselt jaotatud koormus vasakust toest pikkusel αl (joonis 15.4, b), siis

$$\begin{aligned} EI_c \Delta_{1p} &= - \int_0^l M_p^0 y \frac{I_c}{I \cos \varphi} dx = - \int_0^l M_p^0 y dx = \\ &= -2p f l^3 \left[\alpha (2 - \alpha) \int_0^\alpha \xi^2 \xi' d\xi - \int_0^\alpha \xi^3 \xi' d\xi + \alpha^2 \int_0^{\alpha'} \xi \xi'^2 d\xi \right] \end{aligned} \quad (15.35)$$

Pärast integreerimist saame avaldise

$$EI_c \Delta_{1p} = -\frac{1}{6} p f l^3 \alpha^2 (1 - \alpha^2 + 0,4\alpha^3) \quad (15.36)$$

Nüüd võrdub horisontaalne toereaktsioon

$$H = \frac{5}{16} \frac{p l^2}{f(1+\mu)} \alpha^2 (1 - \alpha^2 + 0,4\alpha^3) \quad (15.37)$$

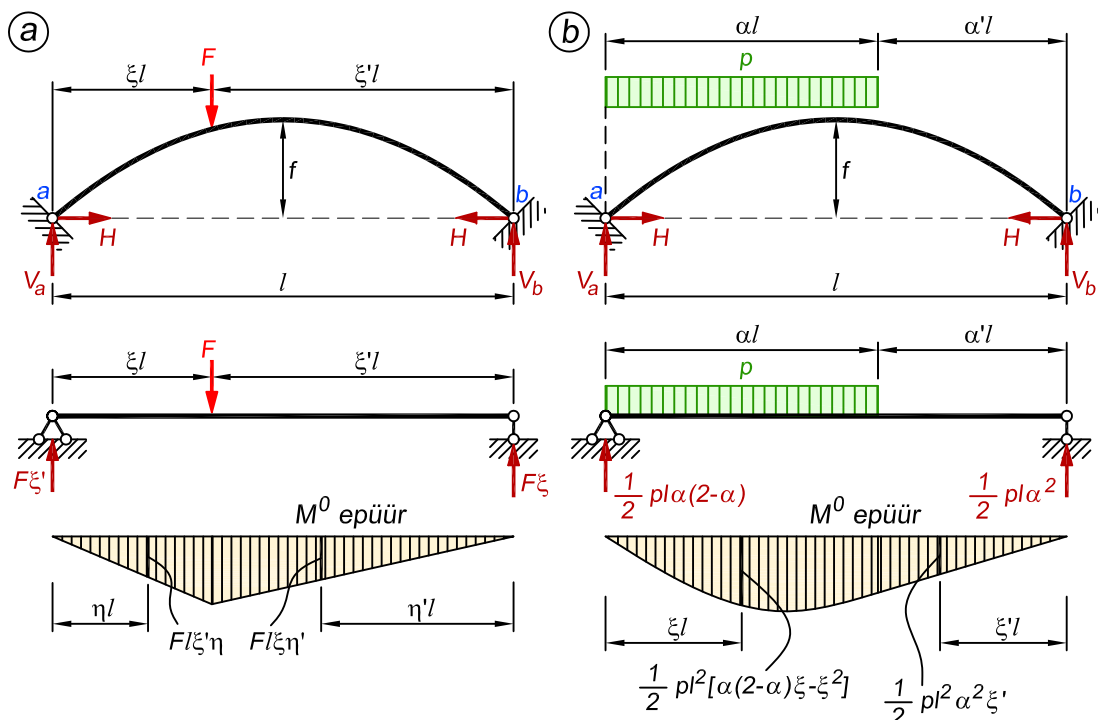
Kui pool sillet on koormatud ($\alpha = \frac{1}{2}$), siis

$$H = \frac{p l^2}{16 f(1+\mu)}; \quad V_a = \frac{3}{8} p l; \quad V_b = \frac{1}{8} p l \quad (15.38)$$

$$M_c = \frac{p l^2}{16} \frac{\mu}{1+\mu} \quad (15.39)$$

Kui terve sille on koormatud ($\alpha = 1$), siis

$$H = \frac{p l^2}{8 f(1+\mu)}; \quad V_a = V_b = \frac{p l}{2}; \quad M_c = \frac{p l^2}{8} \frac{\mu}{1+\mu} \quad (15.40)$$



Joonis 15.4. Ruutparaboolikujulise teljega kaar koondjõu või lauskoormusega

Ringjoonekujulise teljega kaar

Kaar on konstantse ristlõikega (joonis 15.5, a). Kaare telje parameetrid on

$$R = \frac{f}{2} \left[1 + \left(\frac{l_1}{f} \right)^2 \right]; \quad \sin \varphi_k = \frac{l_1}{R}; \quad \cos \varphi_k = \frac{R-f}{R} \quad (15.41)$$

$$x = l_1 - R \sin \varphi; \quad y = R \cos \varphi - (R - f) \quad (15.42)$$

Jõumeetodi võrrandi tundmatu kordajaks saame

$$EI\delta_{11} = R^3 (\varphi_k - 3 \sin \varphi_k \cos \varphi_k + 2\varphi_k \cos^2 \varphi_k) + R \frac{I}{A} (\varphi_k + \sin \varphi_k \cos \varphi_k) \quad (15.43)$$

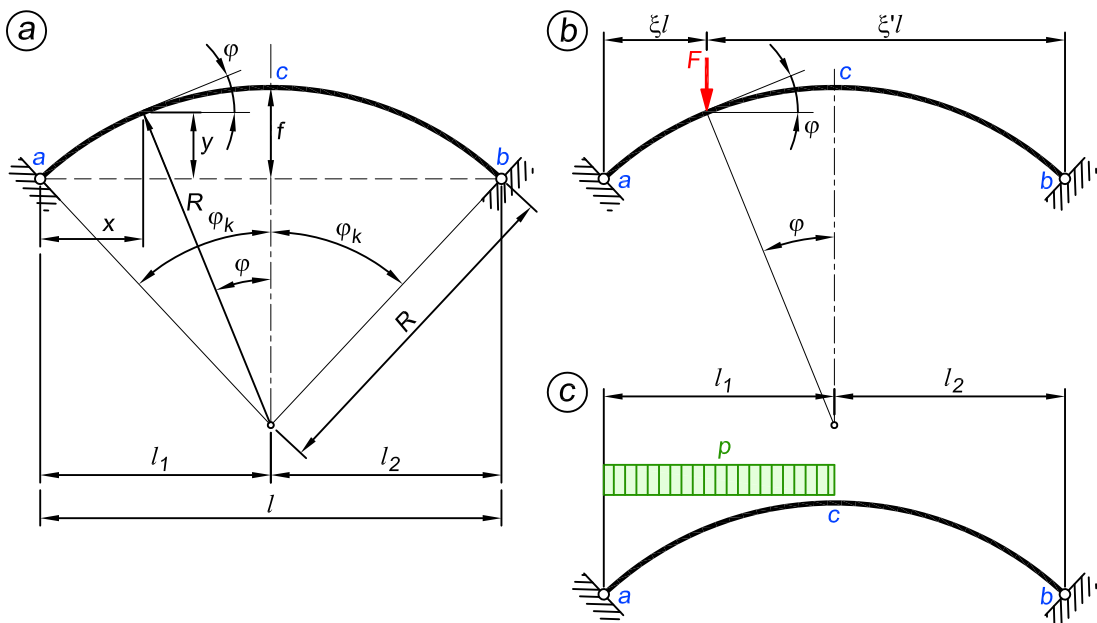
Kui kaarele mõjub koondatud jõud F (joonis 15.5, b), siis võrrandi vabaliige on

$$EI\Delta_{1p} = \frac{FRl^2}{2} \xi (1 - \xi) + (R - f) R^2 [(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - (\cos \varphi_k + \varphi_k \sin \varphi_k)] \quad (15.44)$$

Avaldisega (15.9) leiame horisontaalreaktsiooni X_1 ja valemitega (15.19) sisejõud. Horisontaalreaktsiooni $X_1 = H$ mõjujoone ordinaatide arvutamisel tuleb valemis (15.44) võtta $F = 1$.

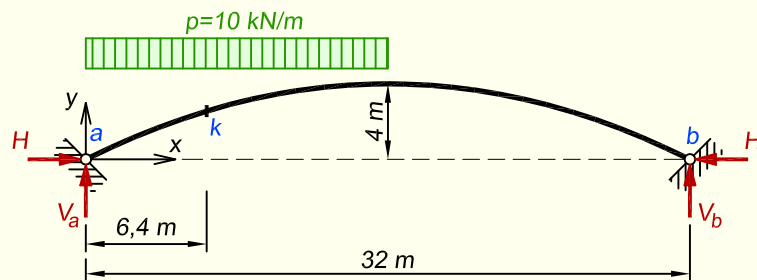
Kui pool sillet on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega (joonis 15.5, c), siis

$$EI\Delta_{1p} = \frac{pR^4}{4} \left[\sin \varphi_k \left(\frac{4}{3} \sin^2 \varphi_k - \cos^2 \varphi_k \right) + \varphi_k \cos \varphi_k (1 - 2 \sin^2 \varphi_k) \right] \quad (15.45)$$



Joonis 15.5. Ringjoonekujulise teljega kaar koondjõu või lauskoormusega

NÄIDE 15.1. Koostada joonisel 15.6 kujutatud kahe liigendiga kaare sisejõudude M , Q ja N epüürid. Lisaks koostada horisontaalreaktsiooni H ning löike k sisejõudude M_k , Q_k ja N_k mõjujooned. Kaare telgjooneks on ruutparabool. Kaare ristlõike mõõtmed lukuristlõikes on $b_c = 0,65$ m ja $h_c = 1,3$ m ning ristlõikepindala $A_c = 0,845$ m². Lukuristlõike inertsimoment on $I_c = 0,12$ m⁴ ning vastavalt valemile (15.4) muutub inertsimoment $\frac{I_c}{I \cos \varphi} = 1$.



Joonis 15.6. Kaare arvutuskeem

LAHENDUS

1. Toereaktsioonid leiame valemitega (15.38)

$$H = \frac{pl^2}{16f(1+\mu)} = \frac{10 \cdot 32^2}{16 \cdot 4(1+0,01664)} = 157,38 \text{ kN}$$

$$V_a = \frac{3}{8}pl = \frac{3}{8} \cdot 10 \cdot 32 = 120 \text{ kN}; \quad V_b = \frac{1}{8}pl = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 32 = 40 \text{ kN}$$

kus valemiga (15.30) on leitud μ väärtus

$$\mu = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{I_c}{A_c} = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{0,12}{0,845} = 0,01664$$

2. Sisejõudude arvutus

Kaare telgjooneks on ruutparabool, mille ordinaadid arvutame valemiga (15.25)

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

Kaare telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse leiame ruutparaboolikujulise telje puhul kolme liigendiga kaare teema juures esitatud valemitega (7.4)

$$\sin \varphi = \frac{1-2\xi}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2 + (1-2\xi)^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2 (1-2\xi)^2}}$$

kus $\xi = \frac{x}{l}$.

Tabel 15.1. Kaare sisejõudude arvutus

| x | y | $\sin \varphi$ | $\cos \varphi$ | M^0 , [kN·m] | Q^0 , [kN] | M , [kN·m] | Q , [kN] | N , [kN] |
|------|------|----------------|----------------|----------------|--------------|--------------|------------|------------|
| 0,0 | 0,00 | 0,4472 | 0,8944 | 0,0 | 120 | 0,00 | 36,95 | -194,43 |
| 3,2 | 1,44 | 0,3714 | 0,9285 | 332,8 | 88 | 106,17 | 23,26 | -178,81 |
| 6,4 | 2,56 | 0,2874 | 0,9578 | 563,2 | 56 | 160,31 | 8,42 | -166,83 |
| 9,6 | 3,36 | 0,1961 | 0,9806 | 691,2 | 24 | 162,40 | -7,33 | -159,03 |
| 12,8 | 3,84 | 0,0995 | 0,9950 | 716,8 | -8 | 112,46 | -23,62 | -155,80 |
| 16,0 | 4,00 | 0,0000 | 1,0000 | 640,0 | -40 | 10,48 | -40,00 | -157,38 |
| 19,2 | 3,84 | -0,0995 | 0,9950 | 512,0 | -40 | -92,34 | -24,14 | -160,58 |
| 22,4 | 3,36 | -0,1961 | 0,9806 | 384,0 | -40 | -144,80 | -8,36 | -162,17 |
| 25,6 | 2,56 | -0,2873 | 0,9578 | 256,0 | -40 | -146,89 | 6,91 | -162,24 |
| 28,8 | 1,44 | -0,3714 | 0,9285 | 128,0 | -40 | -98,63 | 21,31 | -160,98 |
| 32,0 | 0,00 | -0,4472 | 0,8944 | 0,0 | -40 | 0,00 | 34,61 | -158,65 |

Kaare sisejõudude M , Q ja N arvutamiseks jagame kaare silde kümneks võrdse pikkusega osaks. Seejärel arvutame sisejõud kõigis nendes lõigetes valemitega (15.19), lähtudes sellest, et $X_1 = H = 157,38$ kN

$$M = M_p^0 - yX_1; \quad Q = Q_p^0 - \sin \varphi X_1; \quad N = N_p^0 - \cos \varphi X_1$$

ja arvestades ka valemid (15.7)

$$M_p^0 = M^0; \quad N_p^0 = -Q^0 \sin \varphi; \quad Q_p^0 = Q^0 \cos \varphi$$

Kaare sisejõudude arvutus on esitatud tabelis 15.1.

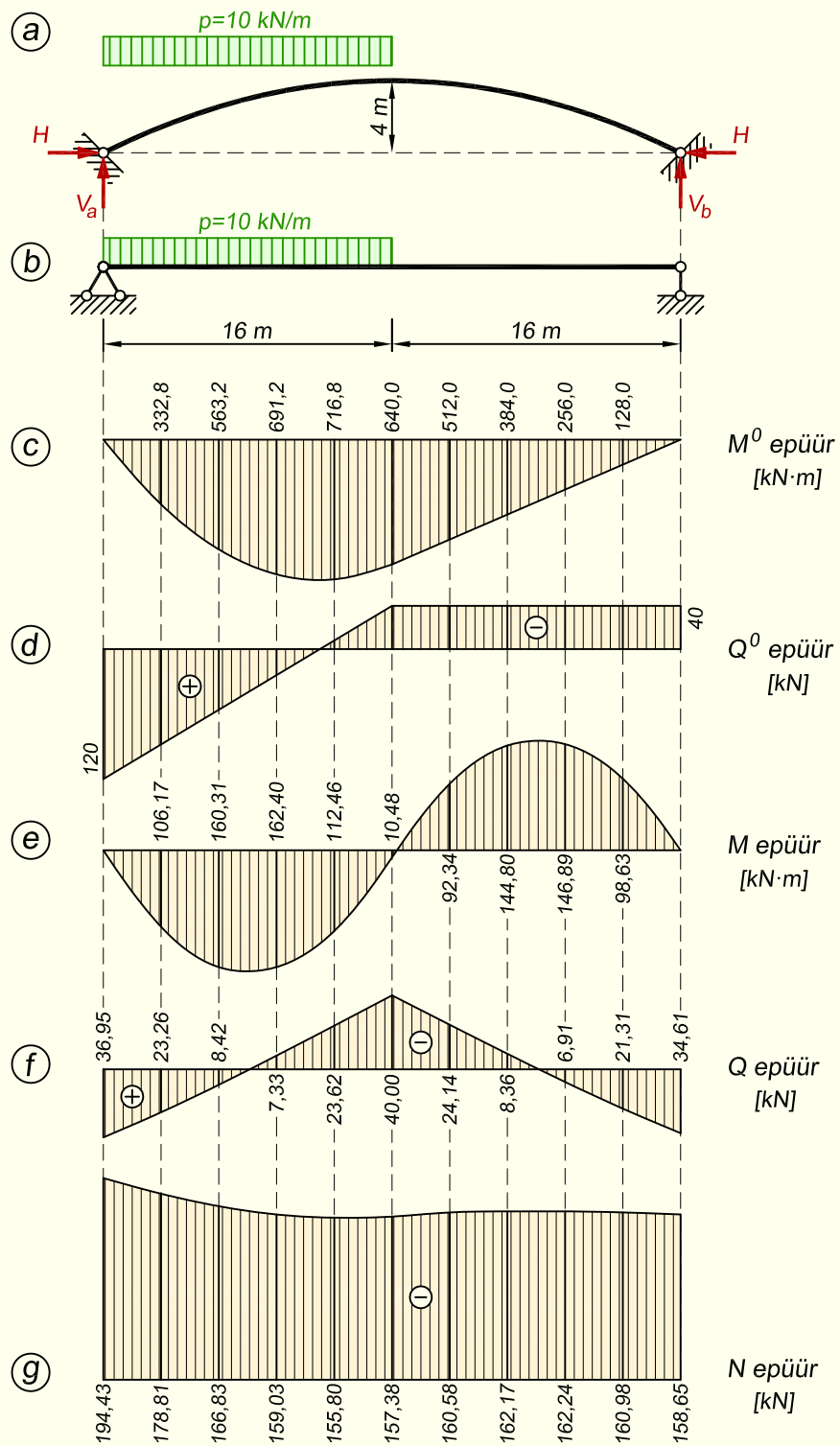
Joonisel 15.7, b on näidatud kaarega võrdse sildega lihttala ning joonisel 15.7, c ja d selle tala paindemomendi M^0 ja põikjõu Q^0 epüürid. Kaare sisejõudude epüürid on esitatud joonisel 15.7, e, f ja g .

3. Mõjujoonte koostamine

Esimesena koostame horisontaalse toereaktsiooni H mõjujoone, kuna selle ordinaate läheb vaja sisejõudude mõjujoonte koostamisel. Toereaktsiooni H mõjujoone ordinaadid arvutame valemiga (15.33), võttes $F = 1$

$$H = \frac{5l}{8f} \frac{F}{1+\mu} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) =$$

$$= \frac{5 \cdot 32 \cdot 1}{8 \cdot 4 (1 + 0,01664)} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) = 4,9182 (\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$$



Joonis 15.7. Kaare ja sellega võrdse sildega lihttala sisejõudude epüürid

Tabel 15.2. Kaare mõjujoonte ordinaatide arvutus

| x | ξ | H mj, [-] | M_{kx}^0 mj, [m] | Q_{kx}^0 mj, [-] | M_k mj, [m] | Q_k mj, [-] | N_k mj, [-] |
|------|-------|-------------|--------------------|--------------------|---------------|---------------|---------------|
| 0,0 | 0,0 | 0,0000 | 0,00 | 0,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3,2 | 0,1 | 0,4825 | 2,56 | -0,1 | 1,3249 | -0,2344 | -0,4334 |
| 6,4 | 0,2 | 0,9128 | 5,12 | -0,2 | 2,7832 | -0,4539 | -0,8168 |
| 6,4 | 0,2 | 0,9128 | 5,12 | 0,8 | 2,7832 | 0,5039 | -1,1042 |
| 9,6 | 0,3 | 1,2497 | 4,48 | 0,7 | 1,2807 | 0,3113 | -1,3982 |
| 12,8 | 0,4 | 1,4637 | 3,84 | 0,6 | 0,0930 | 0,1540 | -1,5743 |
| 16,0 | 0,5 | 1,5369 | 3,20 | 0,5 | -0,7346 | 0,0372 | -1,6158 |
| 19,2 | 0,6 | 1,4637 | 2,56 | 0,4 | -1,1870 | -0,0375 | -1,5169 |
| 22,4 | 0,7 | 1,2497 | 1,92 | 0,3 | -1,2793 | -0,0718 | -1,2832 |
| 25,6 | 0,8 | 0,9128 | 1,28 | 0,2 | -1,0568 | -0,0708 | -0,9318 |
| 28,8 | 0,9 | 0,4825 | 0,64 | 0,1 | -0,5951 | -0,0429 | -0,4909 |
| 32,0 | 0,0 | 0,0000 | 0,00 | 0,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

Saadud horisontaalse reaktsiooni mõjujoone avaldisega arvutame mõjujoone ordinaadid kaare kõigis lõigetes, kasutades vastava lõike ξ väärtust. Mõjujoonte ordinaatide arvutus on esitatud tabelis 15.2. Horisontaalreaktsiooni mõjujoon on kujutatud joonisel 15.8, e.

Lõike k sisejõudude mõjujoonte ordinaadid arvutame valemitega (15.19)

$$M_{kx} = M_{px}^0 - y_k X_1 = M_{kx}^0 - y H_x = M_{kx}^0 - 2,56 H_x$$

$$Q_{kx} = Q_{px}^0 - \sin \varphi_k X_1 = \cos \varphi_k Q_{kx}^0 - \sin \varphi_k H_x = 0,9578 Q_{kx}^0 - 0,2874 H_x$$

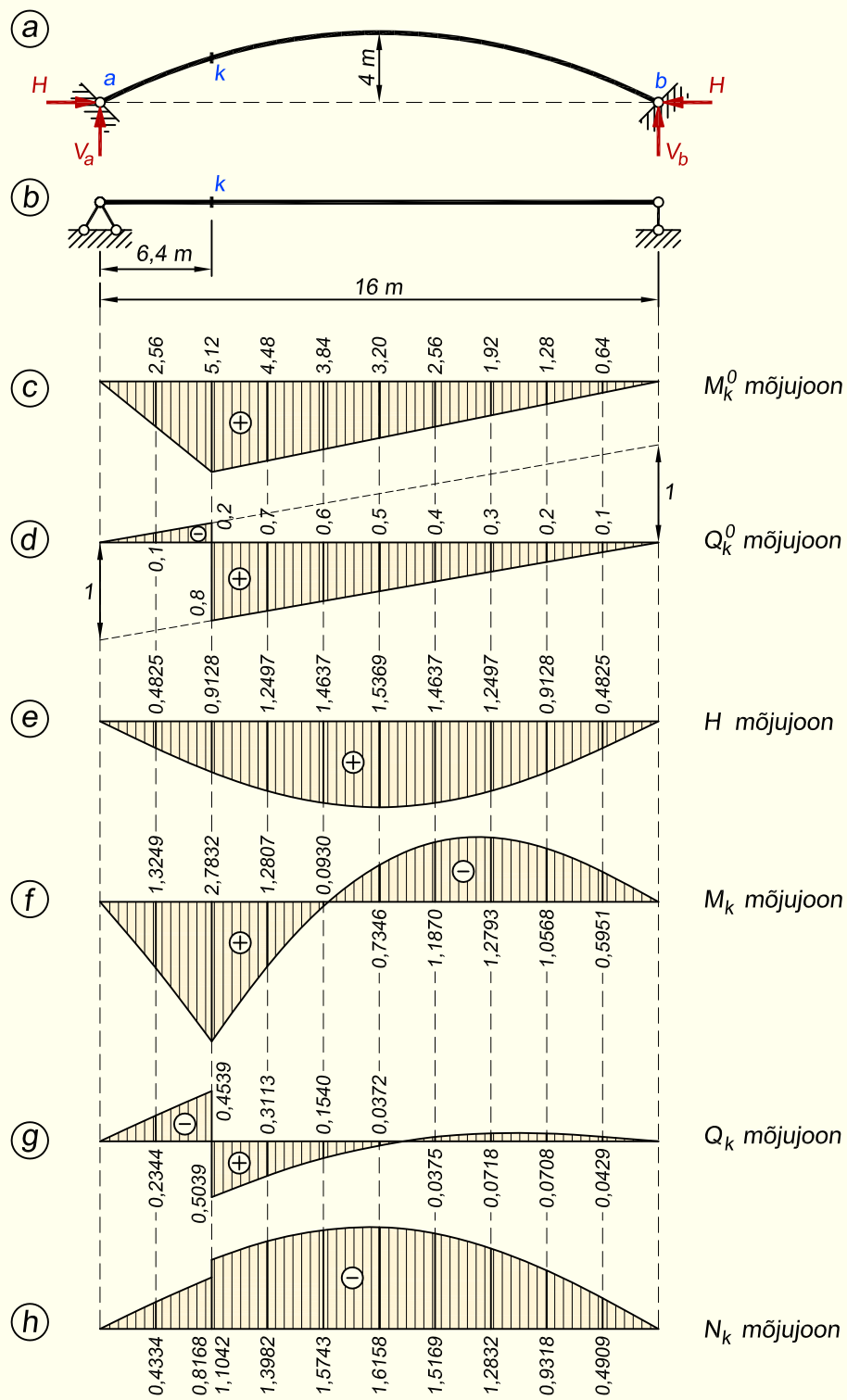
$$N_{kx} = N_{px}^0 - \cos \varphi_k X_1 = -\sin \varphi_k Q_{kx}^0 - \cos \varphi_k H_x = -0,2874 Q_{kx}^0 - 0,9578 H_x$$

Nendes avaldistes on M_{kx}^0 ja Q_{kx}^0 kaarega võrdse sildega lihttala (joonis 15.8, b) lõike k paindemomendi ja põikjõu mõjujoone ordinaadid. H_x on kaare horisontaalreaktsiooni mõjujoone ordinaat. Lihttala lõike k paindemomendi ja põikjõu mõjujooned on esitatud joonisel 15.8, c ja d.

Kaare telje puutuja kaldenurga siinus ja koosinus lõike k kohal on

$$\sin \varphi_k = 0,2874; \quad \cos \varphi_k = 0,9578$$

Kaare lõike k mõjujooned on kujutatud joonisel 15.8, f, g ja h.



Joonis 15.8. Kaare ja sellega võrdse sildega lihttala mõjujooned

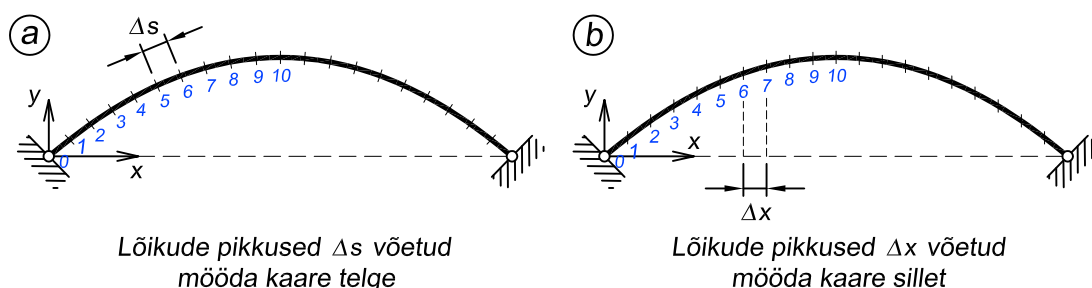
15.2.3. Analüütiliselt määratatu telgjoonega kaar

Kui kaare telgjoon ei ole analüütiliselt määratav, siis siirete δ_{11} ja Δ_{1p} avaldistes integraalide arvutamine suletud kujul ei ole võimalik ning siis kasutame numbrilist integreerimist. Siirete arvutamisel võime kasutada näiteks Simpsoni valemit (11.82)

$$\int_0^s f(s) ds \approx \frac{\Delta s}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n] \quad (15.46)$$

Valemi (15.46) kasutamine nõuab integreeritava vahemiku jaotamist paarisarvuks võrdse pikkusega osaks Δs . Lõikude pikkuseid Δs me arvestame mööda kaare telge (joonis 15.9, a).

Arvutamise lihtsustamiseks avaldame kõik funktsioonid abstsissi x kaudu. Numbrilisel integreerimisel jaotame sel juhul kaare silde paarisarvuks võrdseks osaks pikkusega Δx (joonis 15.9, b).

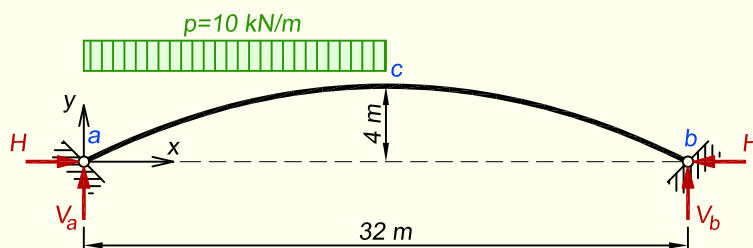


Joonis 15.9. Integreerimisvahemiku jaotamine osadeks

Jätame siin esitamata horisontaalse reaktsiooni mõjujoone koostamise meetoodika, mille kohta saab lugeda õpikust [29].

Järgnevas näites vaatleme kaare arvutamisel joonisel 15.9, b kujutatud varianti. Joonisel 15.9, a kujutatud lõikudeks jagamisel kasutatava lahenduskäigu kohta leiab materjali näiteks õpikust [28].

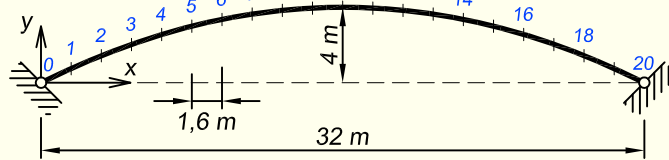
NÄIDE 15.2. Arvutada joonisel 15.10 kujutatud kahe liigendiga kaare horisontaalne toereaktsioon H numbrilise integreerimisega. Ülesande andmed on samad kui näites 15.1. Kaare telgjooneks valime ruutparabooli, et numbrilise integreerimise tulemust võrrelda suletud kujul integreerimisega saadud tulemustega.



Joonis 15.10. Kaare arvutuskeem

LAHENDUS

Jagame kaare silde kahekümneks võrdse pikkusega lõiguks, nagu on näidatud joonisel 15.11.



Joonis 15.11. Kaare silde jaotamine lõikudeks

Jõumeetodi võrrandi tundmatu kordaja leiame avaldisega

$$EI_c \delta_{11} = 2 \int_0^{s/2} y^2 \frac{I_c}{I} ds + 2 \frac{I_c}{A_c} \int_0^{s/2} \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds = 2 \int_0^{l/2} y^2 dx + 2 \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \cos \varphi \frac{A_c}{A} dx =$$

$$= 2 \int_0^{l/2} y^2 dx + 2 \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx$$

kus $\frac{A_c}{A} = \sqrt[3]{\cos \varphi}$ on saadud, lähtudes kaare ristlõike inertsimomendi muutumisest vastavalt valemile $I = \frac{I_c}{\cos \varphi}$, ning arvestades seda, et $I = \frac{bh^3}{12}$, $I_c = \frac{bh_c^3}{12}$, $A = bh$ ja $A_c = bh_c$.

Simpsoni valemiga (15.46) numbriliseks integreerimiseks vajalikud suurused on esitatud tabelis 15.3.

Tabel 15.3. Siirde $EI_c \delta_{11}$ arvutamiseks vajalikud suurused

| Lõige | x | y | y ² | cos φ | $\sqrt[3]{\cos \varphi}$ | cos φ $\sqrt[3]{\cos \varphi}$ |
|-------|------|------|----------------|--------|--------------------------|--------------------------------|
| 0 | 0,0 | 0,00 | 0,0000 | 0,8944 | 0,9635 | 0,8618 |
| 1 | 1,6 | 0,76 | 0,5776 | 0,9119 | 0,9697 | 0,8843 |
| 2 | 3,2 | 1,44 | 2,0736 | 0,9285 | 0,9756 | 0,9058 |
| 3 | 4,8 | 2,04 | 4,1616 | 0,9439 | 0,9809 | 0,9259 |
| 4 | 6,4 | 2,56 | 6,5536 | 0,9578 | 0,9857 | 0,9442 |
| 5 | 8,0 | 3,00 | 9,0000 | 0,9701 | 0,9899 | 0,9604 |
| 6 | 9,6 | 3,36 | 11,2896 | 0,9806 | 0,9935 | 0,9742 |
| 7 | 11,2 | 3,64 | 13,2496 | 0,9889 | 0,9963 | 0,9853 |
| 8 | 12,8 | 3,84 | 14,7456 | 0,9950 | 0,9983 | 0,9934 |
| 9 | 14,4 | 3,96 | 15,6816 | 0,9988 | 0,9996 | 0,9983 |
| 10 | 16,0 | 4,00 | 16,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

$$\begin{aligned}
EI_c \delta_{11} &= 2 \cdot \frac{1,6}{3} [0,0000 + 4(0,5776 + 4,1616 + 9,0000 + 13,2496 + 15,6816) + \\
&+ 2(2,0736 + 6,5536 + 11,2896 + 14,7456) + 16,0000] + \\
&+ 2 \cdot \frac{0,12}{0,845} \cdot \frac{1,6}{3} [0,8618 + 4(0,8843 + 0,9259 + 0,9604 + 0,9853 + 0,9983) + \\
&+ 2(0,9058 + 0,9442 + 0,9742 + 0,9934) + 1,0000] = \\
&= 273,07 + 4,32 = 277,39 \text{ m}^3
\end{aligned}$$

kus $I_c = 0,12 \text{ m}^4$ ja $A_c = 0,845 \text{ m}^2$.

Võrrandi vabaliikme saame järgmise avaldisega

$$EI_c \Delta_{1p} = - \int_0^s y M_p^0 \frac{I_c}{I} ds = - \int_0^s y M_p^0 \cos \varphi ds = - \int_0^l y M_p^0 dx$$

Simpsoni valemiga numbriliseks integreerimiseks vajalikud suurused on esitatud tabelis 15.4.

Tabel 15.4. Siirde $EI_c \Delta_{1p}$ arvutamiseks vajalikud suurused

| Lõige | x | y | M_p^0 | yM_p^0 | Lõige | x | y | M_p^0 | yM_p^0 |
|-------|------|------|---------|----------|-------|------|------|---------|----------|
| 0 | 0,0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 10 | 16,0 | 4,00 | 640,00 | 2560,00 |
| 1 | 1,6 | 0,76 | 179,20 | 136,19 | 11 | 17,6 | 3,96 | 576,00 | 2280,96 |
| 2 | 3,2 | 1,44 | 332,80 | 479,23 | 12 | 19,2 | 3,84 | 512,00 | 1966,08 |
| 3 | 4,8 | 2,04 | 460,80 | 940,03 | 13 | 20,8 | 3,64 | 448,00 | 1630,72 |
| 4 | 6,4 | 2,56 | 563,20 | 1441,79 | 14 | 22,4 | 3,36 | 384,00 | 1290,24 |
| 5 | 8,0 | 3,00 | 640,00 | 1920,00 | 15 | 24,0 | 3,00 | 320,00 | 960,00 |
| 6 | 9,6 | 3,36 | 691,20 | 2322,43 | 16 | 25,6 | 2,56 | 256,00 | 655,36 |
| 7 | 11,2 | 3,64 | 716,80 | 2609,15 | 17 | 27,2 | 2,04 | 192,00 | 391,68 |
| 8 | 12,8 | 3,84 | 716,80 | 2752,51 | 18 | 28,8 | 1,44 | 128,00 | 184,32 |
| 9 | 14,4 | 3,96 | 691,20 | 2737,15 | 19 | 30,4 | 0,76 | 64,00 | 48,64 |
| 10 | 16,0 | 4,00 | 640,00 | 2560,00 | 20 | 32,0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

$$\begin{aligned}
EI_c \Delta_{1p} &= - \frac{1,6}{3} [0,00 + 4(136,19 + 940,03 + 1920,00 + 2609,15 + 2737,15 + \\
&+ 2280,96 + 1630,72 + 960,00 + 391,68 + 48,64) + \\
&+ 2(479,23 + 1441,79 + 2322,43 + 2752,51 + 2560,00 + \\
&+ 1966,08 + 1290,24 + 655,36 + 184,32) + 0,00] = -43692 \text{ kN} \cdot \text{m}^3
\end{aligned}$$

Horisontaalse toereaktsiooni leiame nüüd avaldisega

$$H = X_1 = -\frac{EI_c \Delta_{1p}}{EI_c \delta_{11}} = \frac{43692}{277,39} = 157,51 \text{ kN}$$

Ülesandes 15.1 saime analüütilise arvutuse tulemuseks $H = 157,38 \text{ kN}$, mistõttu võime öelda, et tulemused langevad täpselt kokku.

15.2.4. Kahe liigendiga kaare survejoon

Kahe liigendiga kaare survejoone konstrueerime sarnaselt kolme liigendiga kaare survejoonele. Survejoone kauguse kaare telgjoonest leiame valemiga $e = \frac{M}{N}$.

Vertikaalse koormuse puhul võib arvutada teisiti. Paindemomendi kaare ristlõikes k leiame valemiga

$$M_k = M_k^0 - X_1 y = M_k^0 - Hy \quad (15.47)$$

või

$$M_k = H(y^* - y) = H\eta \quad (15.48)$$

kus

$$\eta = y^* - y \quad (15.49)$$

on vertikaalne lõik survejoone ja kaare telgjoone vahel.

Survejoone ordinaadid leiame valemiga

$$y^* = \frac{M_k^0}{H} \quad (15.50)$$

ja kanname toeliigendeid ühendavale sirgele $a-b$.

15.2.5. Tõmbiga kahe liigendiga kaar

Vertikaalne koormus põhjustab tõmbiga kahe liigendiga kaares ainult vertikaalseid toereaktsioone (joonis 15.12, a). Horisontaalne jõud kaare kannaliigendites võetakse vastu tõmbiga. Tõmb tehakse kas samast materjalist kui kaar või ka mõnest teisest materjalist. Näiteks puitkonstruktsioonides kasutatakse sageli terasest tõmbi.

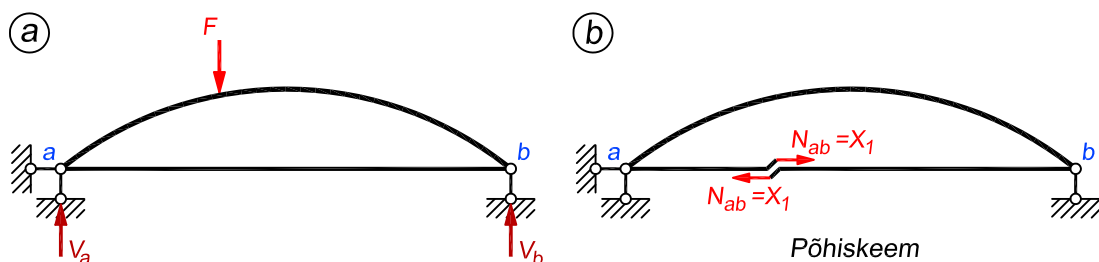
Põhiskeemina kasutame üldjuhul kõverat tala, mille saame tõmbi läbilõikamisega. Lisatundmatuks võtame siis tõmbi pikijõu (joonis 15.12, b).

Ühiktundmatu $X_1 = 1$ põhjustab kaares sisejõud, mida väljendame samade valemitega nagu tõmbita kaarel

$$m_1 = -y; \quad n_1 = -\cos \varphi; \quad q_1 = -\sin \varphi \quad (15.51)$$

Ühiktundmatu $X_1 = 1$ põhjustab tõmbis konstantse pikijõu

$$n_1^t = 1 \quad (15.52)$$



Joonis 15.12. Tõmbiga kahe liigendiga kaar ja selle põhiskeem

Kaarele mõjuv koormus ei tekita staatikaga määratava põhiskeemi tõmbis sisejõudusid. Jõumeetodi kanoonilisest võrrandist

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 \quad (15.53)$$

avaldame lisatundmatu ehk tõmbi pikijõu

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \quad (15.54)$$

Siirded arvutame valemitega

$$EI_c \delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I \cos \varphi} dx + \frac{I_c}{A_c} \int_0^l \cos \varphi \frac{A_c}{A} dx + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^l \sin \varphi \tan \varphi \frac{A_c}{A} dx + \frac{EI_c}{E_t A_t} \cdot 1l \quad (15.55)$$

$$EI_c \Delta_{1p} = - \int_0^l y M_p^0 \frac{I_c}{I \cos \varphi} dx - \frac{I_c}{A_c} \int_0^l N_p^0 \frac{A_c}{A} dx - k \frac{E}{G} \frac{I_c}{A_c} \int_0^l Q_p^0 \tan \varphi \frac{A_c}{A} dx \quad (15.56)$$

kus A_t on tõmbi ristlõike pindala ja E_t on tõmbi materjali normaalelastsusmoodul.

Siire $EI_c \delta_{11}$ koosneb neljast osast

$$EI_c \delta_{11} = EI_c \delta_{11,m} + EI_c \delta_{11,n} + EI_c \delta_{11,q} + EI_c \delta_{11,t} \quad (15.57)$$

kus kolme esimese liikme summa on tõmbita kahe liigendiga kaarele vastav siire $EI_c \delta_{11,k}$.

Tõmbiga kaarel järelikult

$$EI_c \delta_{11} = EI_c \delta_{11,k} + EI_c \delta_{11,t} \quad (15.58)$$

Avaldis lisatundmatu jaoks on nüüd järgmine

$$X_1 = \frac{EI_c \Delta_{1p}}{EI_c \delta_{11,k} + EI_c \delta_{11,t}} \quad (15.59)$$

Avaldisest (15.59) järeldub, et tõmbis on pikijõud väiksem kui samast koormusest kahe liigendiga kaare horisontaalne toereaktsioon. See on tingitud tõmbi pikenemisest. Mida väiksem on tõmbi pikkejäikus $E_t A_t$, seda väiksem on tõmbis pikijõud.

Tõmbiga kaares arvutame sisejõud samade valemitega nagu ilma tõmbita kahe liigendiga kaares

$$M = M_p^0 - yX_1; \quad Q = Q_p^0 - \sin \varphi X_1; \quad N = N_p^0 - \cos \varphi X_1 \quad (15.60)$$

Paindemomendi avaldisest järeldub, et tõmbi pikijõu vähenemisega kaasneb paindemomentide suurenemine kaares.

15.2.6. Temperatuuri muutuse ja tugede siirete mõju

Kahe liigendiga kaare horisontaalse reaktsiooni, mis on põhjustatud temperatuuri muutusest, leiame võrrandist

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t} = 0 \quad (15.61)$$

millest saame

$$H = X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = -\frac{EI_c \Delta_{1t}}{EI_c \delta_{11}} \quad (15.62)$$

Lisatundmatule vastava siirde Δ_{1t} , mis on põhjustatud temperatuuri muutusest, leiame valemiga (11.57)

$$\Delta_{1t} = \int_0^s \alpha n_1 t_0 ds + \int_0^s \alpha m_1 \frac{\Delta t}{h} ds \quad (15.63)$$

või kui $\alpha = \text{const.}$, $\Delta t = \text{const.}$ ja $t_0 = \text{const.}$, siis

$$\Delta_{1t} = -\alpha t_0 \int_0^s \cos \varphi ds - \alpha \Delta t \int_0^s \frac{y}{h} ds \quad (15.64)$$

Arvutamise lihtsustamiseks avaldame kõik integreeritavad funktsioonid abstsissi x kaudu, kasutades valemit (15.14), mille järgi $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$.

Valemi (15.64) asemel võib seetõttu kirjutada

$$\Delta_{1t} = -\alpha t_0 l - \alpha \Delta t \int_0^l \frac{y}{h \cos \varphi} dx \quad (15.65)$$

Tõmbiga kahe liigendiga kaare jaoks on valem (15.65) järgmine

$$\Delta_{1t} = -(\alpha - \alpha_t) t_0 l - \alpha \Delta t \int_0^l \frac{y}{h \cos \varphi} dx \quad (15.66)$$

kus α_t on tõmbi temperatuuri-joonpaisumistegur.

Pärast lisatundmatu arvutamist avaldisega (15.62) leiame sisejõud temperatuuri muutusest järgmiste valemitega

$$M_t = -yX_{1t}; \quad Q_t = -\sin \varphi X_{1t}; \quad N_t = -\cos \varphi X_{1t} \quad (15.67)$$

Kui kahe liigendiga kaare kannaliigendid on samal kõrgusel, siis tugede ebäühtlane vajumine kaares horisontaalset reaktsiooni ei põhjusta.

Kaare tugede siiretest põhjustatud silde suurenemisel Δl võrra on lisatundmatule X_1 vastav siire võrdne silde suurenemisega: $\Delta_{1r} = \Delta l$.

Kaare silde suurenemisel Δl võrra tekkiva toereaktsiooni saame valemiga

$$H = X_1 = -\frac{\Delta l}{\delta_{11}} = -\frac{EI_c \Delta l}{EI_c \delta_{11}} \quad (15.68)$$

Pärast lisatundmatu arvutamist leiame sisejõud tugede siiretest järgmiste valemitega

$$M_r = -yX_{1r}; \quad Q_r = -\sin \varphi X_{1r}; \quad N_r = -\cos \varphi X_{1r} \quad (15.69)$$

15.3. Liigenditeta sümmeetriline kaar

15.3.1. Põhiskeem ja sisejõudude epüürid

Liigenditeta kaar on kolmekordselt staatikaga määramatu (joonis 15.13, a). Liigenditeta sümmeetriliste kaarte arvutamisel kasutame kolme põhiskeemi: kolme liigendiga kaar, kõver tala ja kaks konsooli (joonis 15.13, b, c ja d).

Lisatundmatute valikul on soovitav, et kanoonilistes võrrandites

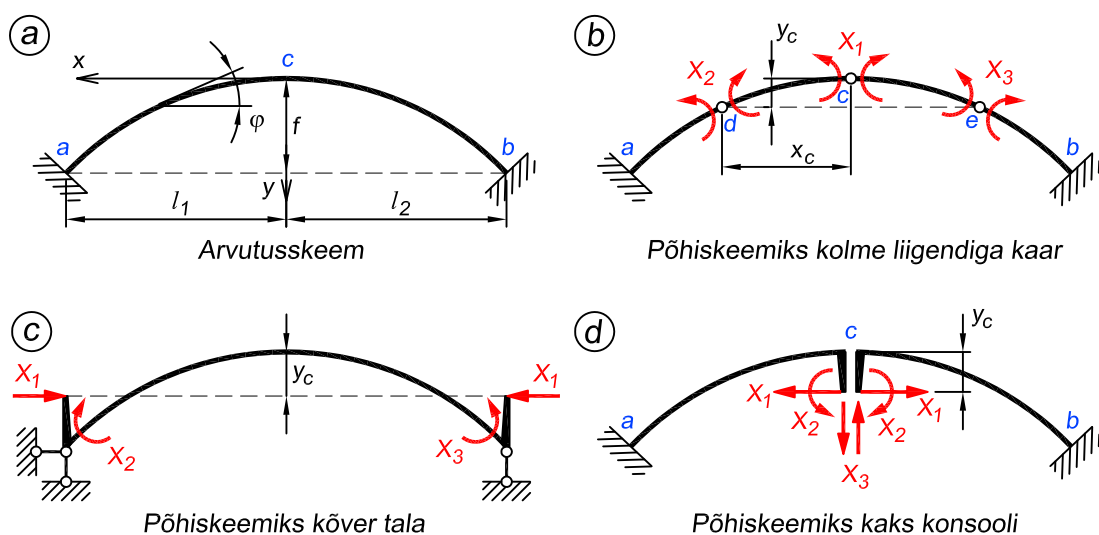
$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0\end{aligned}\quad (15.70)$$

kõik kõrvalsiirded võrduksid nulliga. Kuna mainitud siirded arvutame põhiskeemi epüüride abil, siis tuleb lisatundmatud valida selliselt, et nendest põhjustatud epüüride ordinaatide korrutiste integreerimine annaks tulemuseks nulli.

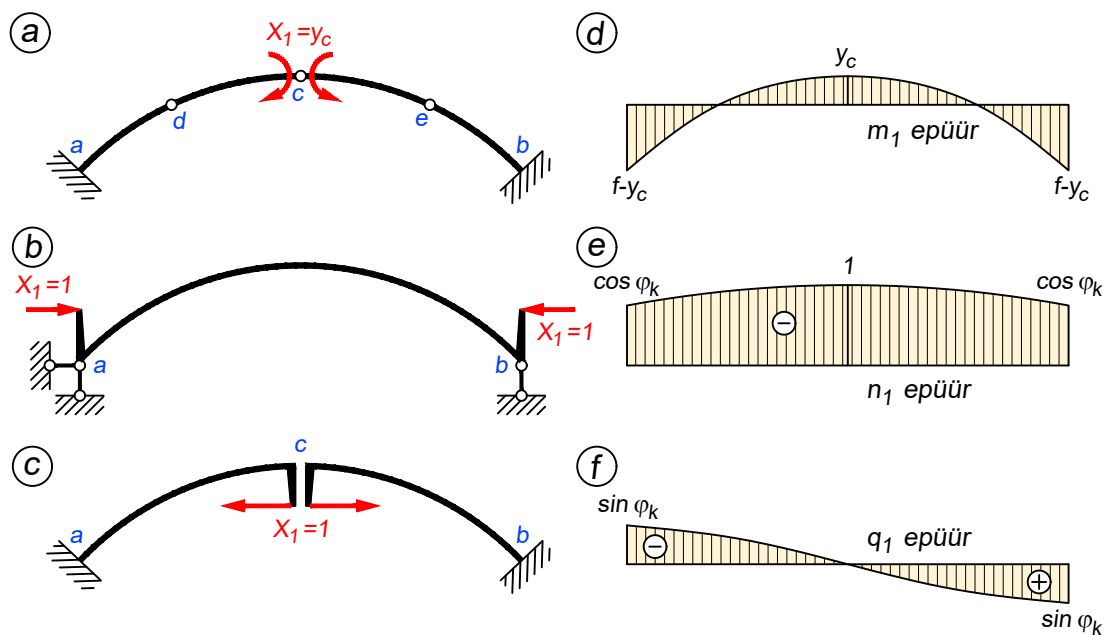
Joonisel 15.13, c ja d on kasutatud abivahendina jäiku konsooli. Jäikade konsoolide kasutamine võimaldab suletud kontuuriga arvutusskeemi põhiskeemi valida otstarbekamalt, muutes rohkem kõrvalsiirdeid nulliks. Jäikade konsoolide kasutamine põhineb omadusel, et arvutusskeemi siirdeolukord ja sisejõud ei muutu, kui antud skeem asendatakse teise väliselt erineva, kuid kinemaatilisel ja staatikalisel ekvivalentse arvutusskeemiga. Jäikade konsoolide kasutamise kohta leiab lisamaterjali õpiku [29] peatükist 18.24.

Kolme liigendiga kaare ja kõvera tala põhiskeemiga (joonis 15.13, b ja c) arvutamisel on lisatundmatu X_1 sümmeetriline, kuid lihtlisatundmatud X_2 ja X_3 ei ole sümmeetrilised ega antisümmeetrilised.

Kahe konsooliga põhiskeemiga (joonis 15.13, d) arvutamisel on lisatundmatud X_1 ja X_2 sümmeetrilised ning X_3 antisümmeetriline.



Joonis 15.13. Liigenditeta sümmeetrilise kaare põhiskeemid



Joonis 15.14. Ühiktundmatu X_1 ja sellest põhjustatud epüürid

Kolme liigendiga kaare ja kõvera tala põhiskeemiga arvutamisel tuleb seepärast tavaliste lihtlisatundmatute X_2 ja X_3 asemel kasutada *grupptundmatuid*. Sümmeetriliste arvutuskeemide puhul on sageli otstarbekas võtta lisatundmatuteks üksikute jõudude asemel jõudude grupid. Grupptundmatuks nimetatakse neid korraga mitmes (või ka ühes) ristlõikes esinevaid sisejõude ja toereaktsioone, mis on võetud ühe lisatundmatuna. Grupptundmatute kasutamise kohta leiab täiendavat infot õpiku [29] peatükist 18.23.

Kolme liigendiga kaare ja kõvera tala põhiskeemi kasutamisel valime grupptundmatu X_2 sümmeetrilisena ning grupptundmatu X_3 antisümmeetrilisena. Selliselt valitud tundmatutega on kõigi kolme põhiskeemiga arvutamisel kõrvalsiirded võrdsed nulliga

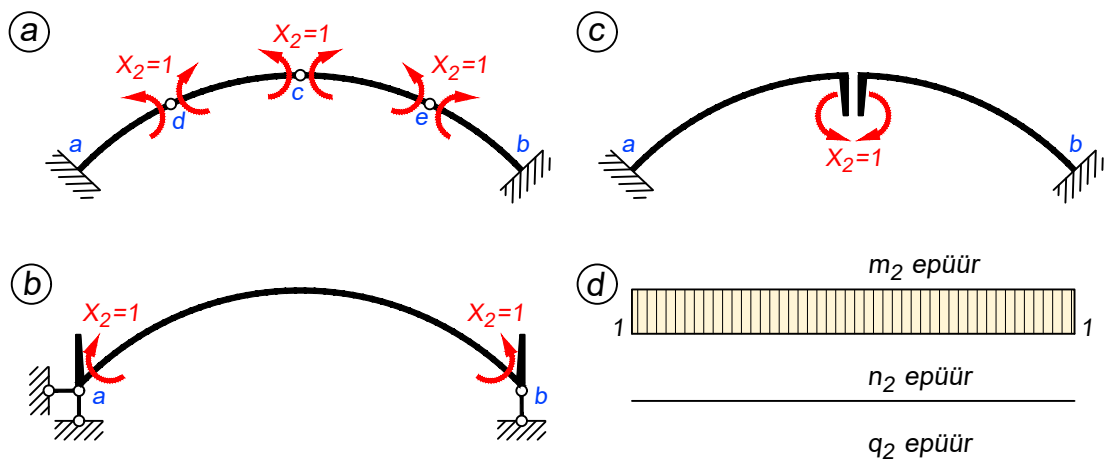
$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0 \quad (15.71)$$

Kui kahe konsooliga põhiskeemi jäikade konsoolide otsad on kaare elastsuskeskmes, siis saame ka kolmanda kõrvalsiirde võrdseks nulliga

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0 \quad (15.72)$$

Kaare elastsuskeskme ordinaadi y_c leiame võrrandist, mille koostame tingimuse (15.72) alusel. Tingimuse (15.72) alusel koostatud võrrandist leiame ka kolme liigendiga kaare põhiskeemis liigendite d ja e ning kõvera tala puhul jäikade konsoolide otste ordinaadi y_c . Sümmeetriliste tundmatutega X_1 ja X_2 , antisümmeetrilise tundmatuga X_3 ning tingimuse (15.72) rahuldamise korral on kõik kõrvalsiirded nullid. Kanoonilistest võrranditest

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0; \quad \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0; \quad \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \quad (15.73)$$



Joonis 15.15. Ühiktundmatu X_2 ja sellest põhjustatud epüürid

leiame tundmatud

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} \quad (15.74)$$

Võtame kasutusele järgmised ühiktundmatud:

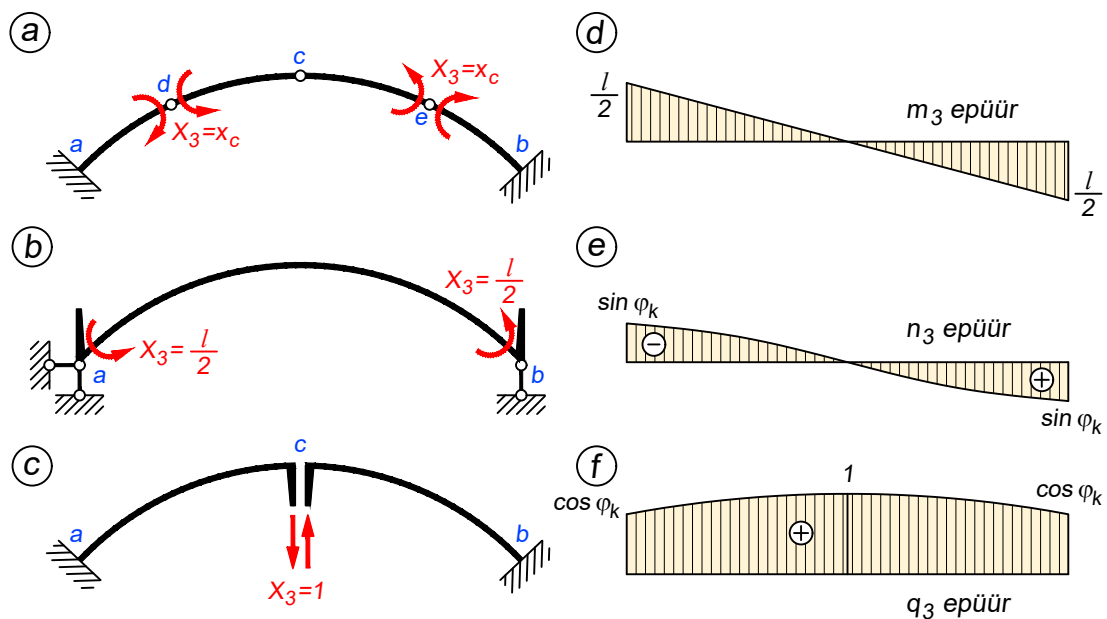
1. kolme liigendiga kaares sümmeetriline tundmatu $X_1 = y_c$ (joonis 15.14, a), sümmeetriline grupptundmatu $X_2 = 1$ (joonis 15.15, a) ja antisümmeetriline grupptundmatu $X_3 = x_c$ (joonis 15.16, a). Kaugused y_c ja x_c on näidatud joonisel 15.13;
2. kõvera tala puhul sümmeetrilised grupptundmatud $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ (joonis 15.14, b ja 15.15, b) ja antisümmeetriline grupptundmatu $X_3 = l/2$ (joonis 15.16, b);
3. kahe konsooliga põhiskeemis tundmatud $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ (joonis 15.14, c, 15.15, c ja 15.16, c).

Sel juhul on kõigi kolme põhiskeemi jaoks nendest tundmatutest põhjustatud sisejõudude avaldised ühesugused

$$\begin{aligned} m_1 &= y - y_c; & n_1 &= -\cos \varphi; & q_1 &= -\sin \varphi \\ m_2 &= 1; & n_2 &= 0; & q_2 &= 0 \\ m_3 &= -x; & n_3 &= -\sin \varphi; & q_3 &= \cos \varphi \end{aligned} \quad (15.75)$$

Kuna kõigi kolme põhiskeemi jaoks on tinglikest ühiktundmatutest põhjustatud sisejõudude avaldised samad (15.75), siis kaare elastsuskeskme ordinaadi y_c leidmisel ja peasiirete δ_{11} , δ_{22} ning δ_{33} arvutamisel ei ole vaja märkida, millist põhiskeemi nendest kolmest on kasutatud. Seda on vaja teha ainult koormusliikmete Δ_{1p} , Δ_{2p} ja Δ_{3p} arvutamisel.

Tingimusest, et siire $\delta_{12} = 0$, määrame liigendite d ja e (joonis 15.13, b) ja jääkade konsoolide otste (joonis 15.13, c ja d) asukohad, s.t kaare elastsuskeskme ordinaadi y_c .



Joonis 15.16. Ühiktundmatu X_3 ja sellest põhjustatud epüürid

Võrrand $EI_c \delta_{12} = 0$, väljendatuna valemiga (15.5), on järgmine

$$EI_c \delta_{12} = \int m_1 m_2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_1 n_2 \frac{A_c}{A} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_1 n_2}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \frac{n_1 m_2}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{A_c} \int q_1 q_2 \frac{A_c}{A} ds = 0 \quad (15.76)$$

või, kui arvestada avaldisi (15.75), siis

$$EI_c \delta_{12} = \int (y - y_c) \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{\cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds = 0 \quad (15.77)$$

Võrrandist (15.77) avaldame ordinaadi y_c

$$y_c = \frac{\int y \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{\cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds}{\int \frac{I_c}{I} ds} \quad (15.78)$$

Kui avaldises (15.78) esinevaid integraale ei ole võimalik integreerida suletud kujus, siis integreerime neid numbriliselt. Sümmetrilise kaare puhul teeme integreerimise poole kaare pikkusel.

Koormusest põhjustatud siirete Δ_{1p} , Δ_{2p} ja Δ_{3p} arvutamiseks on soovitatav lahutada koormus sümmetriliseks ja antisümmetriliseks. Sümmetriline koormus põhjustab siirded Δ_{1p} ja Δ_{2p} ning antisümmetriline koormus siirde Δ_{3p} .

Siirded arvutame järgmiste avaldistega ($i = 1, 2, 3$)

$$EI_c \delta_{ii} = \int m_i^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_i^2 \frac{A_c}{A} ds + 2 \frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_i n_i}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{A_c} \int q_i^2 \frac{A_c}{A} ds \quad (15.79)$$

$$EI_c \Delta_{ip} = \int m_i M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_i N_p^0 \frac{A_c}{A} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_i N_p^0}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds + \\ + \frac{I_c}{A_c} \int \frac{n_i M_p^0}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{A_c} \int q_i Q_p^0 \frac{A_c}{A} ds \quad (15.80)$$

kus M_p^0, N_p^0, Q_p^0 on paindemoment, piki- ja põikjõud liigenditeta kaarest kolme sideme eemaldamisega saadud staatikaga määratavas põhiskeemis.

Kui valemitesse (15.79) ja (15.80) viia sisejõudude avaldised (15.75), siis on nad järgmised

$$EI_c \delta_{11} = \int (y - y_c)^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds - \\ - 2 \frac{I_c}{A_c} \int \frac{(y - y_c) \cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{A_c} \int \sin^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds \\ EI_c \delta_{22} = \int \frac{I_c}{I} ds \quad (15.81)$$

$$EI_c \delta_{33} = \int x^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \sin^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds + \\ + 2 \frac{I_c}{A_c} \int \frac{x \sin \varphi}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{A_c} \int \cos^2 \varphi \frac{A_c}{A} ds$$

$$EI_c \Delta_{1p} = \int (y - y_c) M_p^0 \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \cos \varphi N_p^0 \frac{A_c}{A} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \frac{(y - y_c) N_p^0}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds - \\ - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{\cos \varphi M_p^0}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds - k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{A_c} \int \sin \varphi Q_p^0 \frac{A_c}{A} ds$$

$$EI_c \Delta_{2p} = \int M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \frac{N_p^0}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds \quad (15.82)$$

$$EI_c \Delta_{3p} = - \int x M_p^0 \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \sin \varphi N_p^0 \frac{A_c}{A} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{x N_p^0}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds - \\ - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{\sin \varphi M_p^0}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds + k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{A_c} \int \cos \varphi Q_p^0 \frac{A_c}{A} ds$$

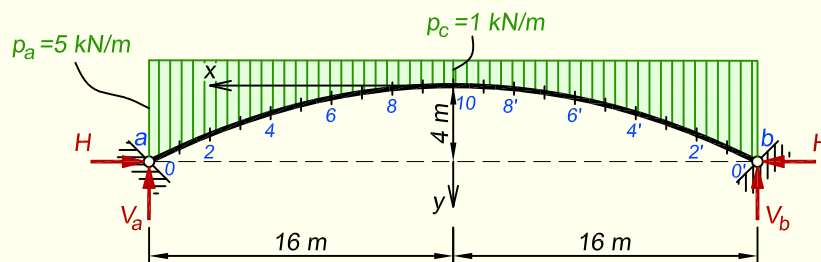
Liigenditeta kaare sisejõud arvutame järgmiste avaldistega

$$\begin{aligned} M_p &= M_p^0 + (y - y_c) X_1 + X_2 - x X_3 \\ Q_p &= Q_p^0 - \sin \varphi X_1 + \cos \varphi X_3 \\ N_p &= N_p^0 - \cos \varphi X_1 - \sin \varphi X_3 \end{aligned} \quad (15.83)$$

NÄIDE 15.3. Arvutada numbrilise integreerimisega joonisel 15.17 kujutatud liigenditeta kaare lisatundmatud ja koostada sisejõudude epüürid. Kaare ristlõike mõõtmed lukuristlõikes on $b_c = 0,65$ m ja $h_c = 1,3$ m ning ristlõikepindala $A_c = 0,845$ m². Lukuristlõike inertsimoment on $I_c = 0,12$ m⁴. Kaare ristlõige on konstantse laiusega ja kõrgus muutub selliselt, et

$$I = \frac{I_c}{\cos \varphi} \quad \text{ja} \quad A = \frac{A_c}{\sqrt[3]{\cos \varphi}}$$

Kaare telgjooneks on ruutparabool. Kaar on koormatud muutuva lauskoormusega. Nihke- ja normaalelastsusmoodul on teineteisega seotud seosega $G = 0,425E$.



Joonis 15.17. Kaare arvutuskeem

LAHENDUS

Kaare silde jagame kahekümneks võrdseks osaks (joonis 15.17) ning teljestiku alguspunkti paneme lukuristlõikesse. Numbrilisel integreerimisel avaldame kõik funktsioonid abstsissi x kaudu.

Kui teljestiku alguspunkt on lukuristlõikes, siis arvutame kaare telje ordinaadid ruutparaboolikujulise telje korral valemiga $y = \frac{4fx^2}{l^2}$.

Kaare geomeetrilised andmed on esitatud tabelis 15.5.

Kaare elastsuskeskme ordinaadi y_c arvutame valemiga (15.78)

$$y_c = \frac{\int y \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{\cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{A_c}{A} ds}{\int \frac{I_c}{I} ds}$$

arvestades seoseid

$$\frac{I_c}{I} = \cos \varphi; \quad \frac{A_c}{A} = \sqrt[3]{\cos \varphi}; \quad ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$$

mistõttu saame nüüd

$$y_c = \frac{\int_0^{l/2} y dx - \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \frac{1}{\rho} \sqrt[3]{\cos \varphi} dx}{\int_0^{l/2} dx}$$

Tabel 15.5. Kaare geometrilised andmed

| Lõige | x | y | $\sin \varphi$ | $\cos \varphi$ | $\tan \varphi$ | $\sqrt[3]{\cos \varphi}$ | ρ | $\frac{\sqrt[3]{\cos \varphi}}{\rho}$ |
|-------|------|------|----------------|----------------|----------------|--------------------------|--------|---------------------------------------|
| 0 | 16,0 | 4,00 | 0,4472 | 0,8944 | 0,50 | 0,9635 | 44,72 | 0,0215 |
| 1 | 14,4 | 3,24 | 0,4104 | 0,9119 | 0,45 | 0,9697 | 42,20 | 0,0230 |
| 2 | 12,8 | 2,56 | 0,3714 | 0,9285 | 0,40 | 0,9756 | 39,98 | 0,0244 |
| 3 | 11,2 | 1,96 | 0,3304 | 0,9439 | 0,35 | 0,9809 | 38,06 | 0,0258 |
| 4 | 9,6 | 1,44 | 0,2874 | 0,9578 | 0,30 | 0,9857 | 36,42 | 0,0271 |
| 5 | 8,0 | 1,00 | 0,2425 | 0,9701 | 0,25 | 0,9899 | 35,05 | 0,0282 |
| 6 | 6,4 | 0,64 | 0,1961 | 0,9806 | 0,20 | 0,9935 | 33,94 | 0,0293 |
| 7 | 4,8 | 0,36 | 0,1483 | 0,9889 | 0,15 | 0,9963 | 33,09 | 0,0301 |
| 8 | 3,2 | 0,16 | 0,0995 | 0,9950 | 0,10 | 0,9983 | 32,48 | 0,0307 |
| 9 | 1,6 | 0,04 | 0,0499 | 0,9988 | 0,05 | 0,9996 | 32,12 | 0,0311 |
| 10 | 0,0 | 0,00 | 0,0000 | 1,0000 | 0,00 | 1,0000 | 32,00 | 0,0313 |

Järgnevalt teeme saadud y_c valemi üksikute osade integreerimised Simpsoni valemi-
ga (15.46), mis annab meile tabeli 15.5 abil järgmised avaldised

$$\int_0^{l/2} y \, dx = \frac{1,6}{3} [0,00 + 4(0,04 + 0,36 + 1,00 + 1,96 + 3,24) + \\ + 2(0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56) + 4,00] = 21,3333 \, \text{m}^2$$

$$\frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \frac{1}{\rho} \sqrt[3]{\cos \varphi} \, dx = \frac{0,12}{0,845} \cdot \frac{1,6}{3} [0,0313 + 4(0,0311 + 0,0301 + 0,0282 + \\ + 0,0258 + 0,0230) + 2(0,0307 + 0,0293 + 0,0271 + 0,0244) + 0,0215] = 0,0628 \, \text{m}^2$$

$$\int_0^{l/2} dx = 16 \, \text{m}$$

kus kaare kõverusraadiuse ρ leidmisel arvestame sellega, et joone kõverusraadius ρ on joone kõveruse κ pöördväärtus. Nii saame

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \rho = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

mis ruutparaboolikujulise telje korral annab

$$\rho = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{64f^2x^2}{l^4}\right)^3}}{\frac{8f}{l^2}}$$

Kaare elastsuskeskme ordinaat on

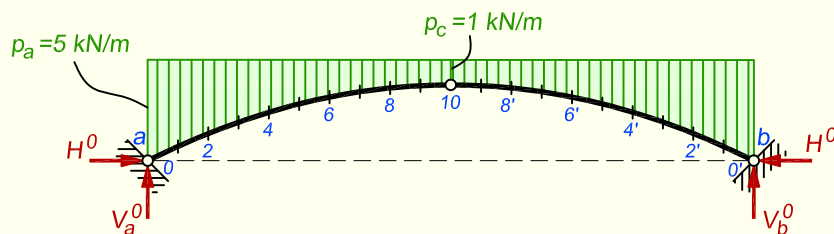
$$y_c = \frac{21,3333 - 0,0628}{16} = 1,3294 \text{ m}$$

ja kui me kõveruse mõju ei arvesta, siis

$$y_c = \frac{21,3333}{16} = 1,3333 \text{ m}$$

Kõveruse mõju $\frac{1,3333-1,3294}{1,3333} \cdot 100 = 0,3\%$ on väike ja seetõttu me seda järgnevatel arvutustel ei arvesta.

Koormusest põhjustatud siirete leidmiseks arvutame sisejõudude M_p^0 , N_p^0 ja Q_p^0 epüüride ordinaadid kolme liigendiga kaare jaoks, mille kaks liigendit on kannaristlõigetel (joonis 15.18).



Joonis 15.18. Kolme liigendiga kaar siirete $EI_c \Delta_{ip}$ arvutamiseks

Kolme liigendiga kaare toereaktsioonid on

$$V_a^0 = \frac{1}{2} p_c l + \frac{1}{3} (q_a - q_c) \cdot \frac{l}{2} = 1 \cdot 16 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 16 = \frac{112}{3} \text{ kN}$$

$$H^0 = \frac{\frac{112}{3} \cdot 16 - 16 \cdot 8 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 16}{4} = \frac{160}{3} \text{ kN}$$

Pikijõud lukuliigendis on $N_c^0 = -H^0 = -\frac{160}{3} \text{ kN}$.

Sisejõud staatikaga määratavas põhiskeemis arvutame järgmiste avaldistega

$$M_x^0 = -N_c^0 y - \frac{1}{2} p_c x^2 - \frac{1}{12} \cdot \frac{4(p_x - p_c)}{l^2} \cdot x^4 = \frac{160}{3} y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{768}$$

$$N_x^0 = -N_c^0 \cos \varphi - \left[p_c x + \frac{1}{3} \cdot \frac{4(p_x - p_c)}{l^2} \cdot x^3 \right] \sin \varphi =$$

$$= -\frac{160}{3} \cos \varphi - \left(x + \frac{x^3}{192} \right) \sin \varphi$$

$$Q_x^0 = -\frac{160}{3} \sin \varphi + \left(x + \frac{x^3}{192} \right) \cos \varphi$$

Tulemused on esitatud tabelis 15.7.

Tabel 15.6. Siirde $EI_c\delta_{11}$ arvutamiseks vajalikud suurused

| Lõige | x | $y - y_c$ | $(y - y_c)^2$ | $\cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi}$ | $\sin \varphi \tan \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi}$ |
|-------|------|-----------|---------------|---------------------------------------|--|
| 0 | 16,0 | 2,6667 | 7,1113 | 0,8618 | 0,2154 |
| 1 | 14,4 | 1,9067 | 3,6355 | 0,8843 | 0,1791 |
| 2 | 12,8 | 1,2267 | 1,5048 | 0,9058 | 0,1449 |
| 3 | 11,2 | 0,6267 | 0,3928 | 0,9259 | 0,1134 |
| 4 | 9,6 | 0,1067 | 0,0114 | 0,9442 | 0,0850 |
| 5 | 8,0 | -0,3333 | 0,1111 | 0,9604 | 0,0600 |
| 6 | 6,4 | -0,6933 | 0,4807 | 0,9742 | 0,0390 |
| 7 | 4,8 | -0,9733 | 0,9473 | 0,9853 | 0,0222 |
| 8 | 3,2 | -1,1733 | 1,3766 | 0,9934 | 0,0099 |
| 9 | 1,6 | -1,2933 | 1,6726 | 0,9983 | 0,0025 |
| 10 | 0,0 | -1,3333 | 1,7777 | 1,0000 | 0,0000 |

Antisümmeetriline lisatundmatu X_3 võrdub nulliga, kuna koormus on sümmeetriline. Seetõttu ei ole vaja arvutada siirdeid $EI_c\delta_{33}$ ega $EI_c\Delta_{3p}$.

Siirded $EI_c\delta_{11}$ ja $EI_c\delta_{22}$ arvutame valemitega (15.81) ning siirded $EI_c\Delta_{1p}$ ja $EI_c\Delta_{2p}$ valemitega (15.82), kusjuures kõveruse mõju jätame arvestamata. Kuna arvutusskeem on sümmeetriline, siis teeme integreerimised poole silde ulatuses. Kui siirete avaldistesse (15.81) ja (15.82) viia seosed $\frac{I_c}{I} = \cos \varphi$, $\frac{A_c}{A} = \sqrt[3]{\cos \varphi}$ ja $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$, siis saame need järgmisel kujul

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}EI_c\delta_{11} &= \int_0^{l/2} (y - y_c)^2 dx + \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx + \\ &+ k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} \sin \varphi \tan \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \\ \frac{1}{2}EI_c\delta_{22} &= \int_0^{l/2} dx = 16 \text{ m} \\ \frac{1}{2}EI_c\Delta_{1p} &= \int_0^{l/2} (y - y_c) M_p^0 dx - \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} N_p^0 \sqrt[3]{\cos \varphi} dx - \\ &- k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{A_c} \int_0^{l/2} Q_p^0 \tan \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \\ \frac{1}{2}EI_c\Delta_{2p} &= \int_0^{l/2} M_p^0 dx \end{aligned}$$

Integreerimiseks vajalikud funktsioonide väärtused on esitatud tabelites 15.6 ja 15.7.

Tabel 15.7. Siirete $EI_c\Delta_{1p}$ ja $EI_c\Delta_{2p}$ arvutamiseks vajalikud suurused

| Lõige | M_p^0 | $(y - y_c)M_p^0$ | N_p^0 | $N_p^0 \sqrt[3]{\cos \varphi}$ | Q_p^0 | $Q_p^0 \tan \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi}$ |
|-------|---------|------------------|---------|--------------------------------|---------|---|
| 0 | 0,000 | 0,000 | -64,399 | -62,048 | 9,541 | 4,596 |
| 1 | 13,133 | 25,040 | -60,927 | -59,083 | 5,428 | 2,369 |
| 2 | 19,661 | 24,118 | -58,329 | -56,904 | 2,218 | 0,866 |
| 3 | 21,325 | 13,364 | -56,456 | -55,379 | -0,141 | -0,048 |
| 4 | 19,661 | 2,098 | -55,167 | -54,380 | -1,716 | -0,508 |
| 5 | 16,000 | -5,333 | -54,328 | -53,782 | -2,587 | -0,640 |
| 6 | 11,469 | -7,951 | -53,821 | -53,470 | -2,845 | -0,565 |
| 7 | 6,989 | -6,802 | -53,541 | -53,343 | -2,595 | -0,388 |
| 8 | 3,277 | -3,845 | -53,404 | -53,316 | -1,953 | -0,195 |
| 9 | 0,845 | -1,093 | -53,348 | -53,326 | -1,044 | -0,052 |
| 10 | 0,000 | 0,000 | -53,333 | -53,333 | 0,000 | 0,000 |

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}EI_c\delta_{11} &= \frac{1,6}{3}[1,7777 + 4(1,6726 + 0,9473 + 0,1111 + 0,3928 + 3,6355) + \\ &+ 2(1,3766 + 0,4807 + 0,0114 + 1,5048) + 7,1113] + \\ &+ \frac{0,12}{0,845} \cdot \frac{1,6}{3}[1,0000 + 4(0,9983 + 0,9853 + 0,9604 + 0,9259 + 0,8843) + \\ &+ 2(0,9934 + 0,9742 + 0,9442 + 0,9058) + 0,8618] + \\ &+ 1,2 \frac{1}{0,425} \cdot \frac{0,12}{0,845} \cdot \frac{1,6}{3}[0,0000 + 4(0,0025 + 0,0222 + 0,0600 + 0,1134 + \\ &+ 0,1791) + 2(0,0099 + 0,0390 + 0,0850 + 0,1449) + 0,2154] = \\ &= 22,759 + 2,160 + 0,488 = 25,407 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}EI_c\Delta_{1p} &= \frac{1,6}{3}[0,000 + 4(-1,093 - 6,802 - 5,333 + 13,364 + 25,040) + \\ &+ 2(-3,845 - 7,951 + 2,098 + 24,118) + 0,000] + \\ &- \frac{0,12}{0,845} \cdot \frac{1,6}{3}[-53,333 + 4(-53,326 - 53,343 - 53,782 - 55,379 - 59,083) + \\ &+ 2(-53,316 - 53,470 - 54,380 - 56,904) - 62,048] - \\ &- 1,2 \frac{1}{0,425} \cdot \frac{0,12}{0,845} \cdot \frac{1,6}{3}[0,000 + 4(-0,052 - 0,388 - 0,640 - 0,048 + \\ &+ 2,369) + 2(-0,195 - 0,565 - 0,508 + 0,866) + 4,596] = \\ &= 69,092 + 125,059 - 1,872 = 192,279 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

Tabel 15.8. Kaare sisejõudude arvutus

| Lõige | M_p^0 | $(y - y_c) X_1$ | M | Q_p^0 | $\sin \varphi X_1$ | Q | N_p^0 | $\cos \varphi X_1$ | N |
|-------|---------|-----------------|--------|---------|--------------------|-------|---------|--------------------|--------|
| 0 | 0,000 | -20,182 | -31,56 | 9,541 | -3,385 | 12,93 | -64,399 | -6,769 | -57,63 |
| 1 | 13,133 | -14,430 | -12,67 | 5,428 | -3,106 | 8,53 | -60,927 | -6,901 | -54,03 |
| 2 | 19,661 | -9,284 | -1,00 | 2,218 | -2,811 | 5,03 | -58,329 | -7,027 | -51,30 |
| 3 | 21,325 | -4,743 | 5,20 | -0,141 | -2,500 | 2,36 | -56,456 | -7,143 | -49,31 |
| 4 | 19,661 | -0,808 | 7,48 | -1,716 | -2,175 | 0,46 | -55,167 | -7,249 | -47,92 |
| 5 | 16,000 | 2,522 | 7,15 | -2,587 | -1,836 | -0,75 | -54,328 | -7,342 | -46,99 |
| 6 | 11,469 | 5,247 | 5,34 | -2,845 | -1,484 | -1,36 | -53,821 | -7,421 | -46,40 |
| 7 | 6,989 | 7,366 | 2,98 | -2,595 | -1,123 | -1,47 | -53,541 | -7,484 | -46,06 |
| 8 | 3,277 | 8,880 | 0,78 | -1,953 | -0,753 | -1,20 | -53,404 | -7,530 | -45,87 |
| 9 | 0,845 | 9,788 | -0,74 | -1,044 | -0,378 | -0,67 | -53,348 | -7,559 | -45,79 |
| 10 | 0,000 | 10,090 | -1,29 | 0,000 | 0,000 | 0,00 | -53,333 | -7,568 | -45,77 |

$$\frac{1}{2} EI_c \Delta_{2p} = \frac{1,6}{3} [0,000 + 4(0,845 + 6,989 + 16,000 + 21,325 + 13,133) + 2(3,277 + 11,469 + 19,661 + 19,661) + 0,000] = 182,026 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Lisatundmatud saame nüüd vastavalt valemitele (15.74)

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{192,279}{25,407} = -7,568 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = -\frac{182,026}{16} = -11,377 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_3 = 0$$

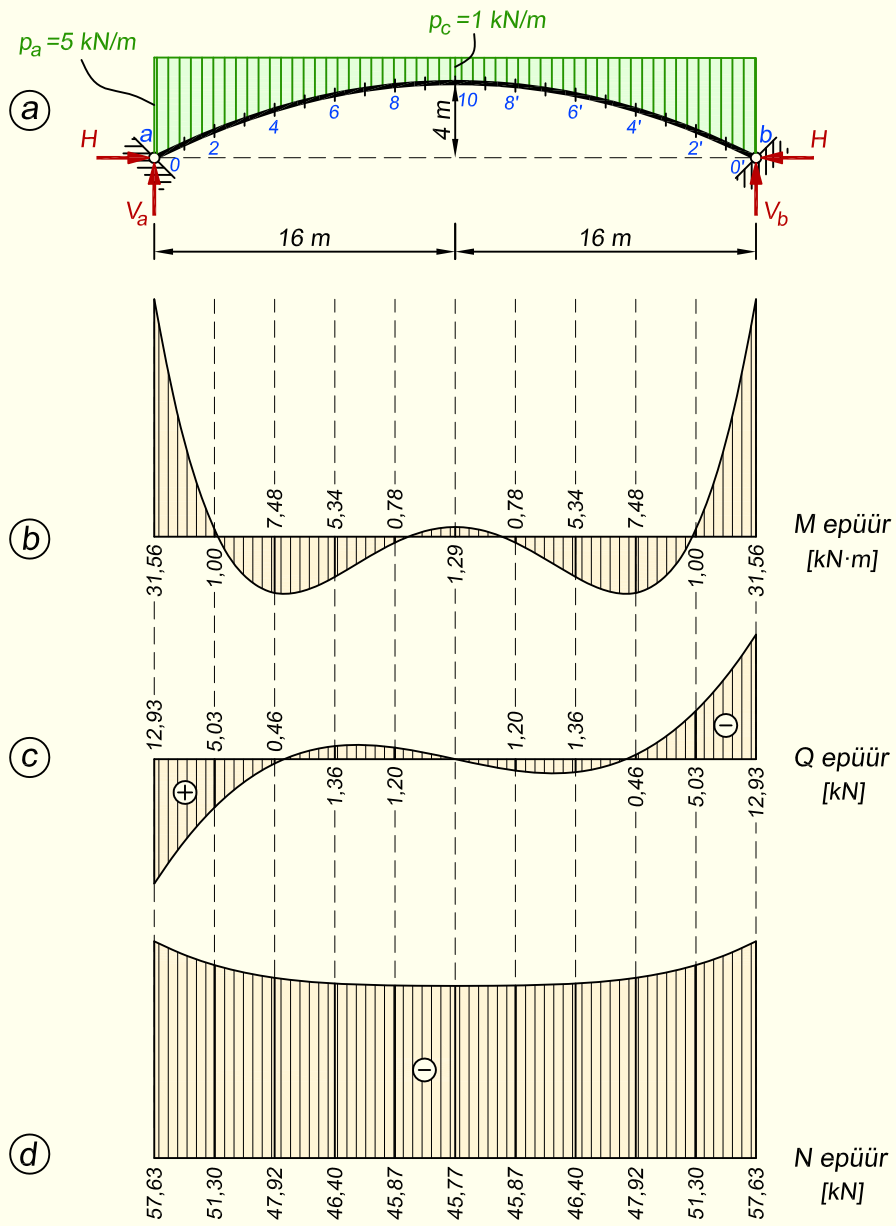
Valemitega (15.83) arvutame sisejõudude epüüride ordinaadid

$$M_p = M_p^0 + (y - y_c) X_1 + X_2 = M_p^0 - 7,658(y - y_c) - 11,377$$

$$Q_p = Q_p^0 - \sin \varphi X_1 = Q_p^0 + 7,568 \sin \varphi$$

$$N_p = N_p^0 - \cos \varphi X_1 = N_p^0 + 7,568 \cos \varphi$$

Sisejõudude arvutused on esitatud tabelis 15.8. Sisejõudude epüürid on kujutatud joonisel 15.19, b, c ja d.



Joonis 15.19. Kaare sisejõudude epüürid

15.3.2. Mõjujooned

Lisatundmatute mõjujoonte ordinaadid võib arvutada reaktsiooni ja siirde vastastikkuse teoreemi alusel. Vertikaalsiirde epüür, mis on põhjustatud liigside negatiivsest ühiksiirdest, ühtib selle sideme reaktsiooni mõjujoonega. Kui eemaldatud sideme asemele rakendame ühikjõu, siis sellest jõust põhjustatud vertikaalsiirde epüüri ordinaadid on proportsionaalsed eemaldatud sideme reaktsiooni mõjujoone ordinaatidega. Proportsionaalsustegur on

$$-\frac{1}{\delta_{ii}^{(n-i)}} \quad (15.84)$$

s.t ühiktundmatust põhjustatud vertikaalsiirde epüüri ordinaadid on vastupidiste märkidega lisaside reaktsiooni mõjujoone ordinaatidega ja $\delta_{ii}^{(n-i)}$ korda suuremad.

Liigenditeta kaar on kolmekordselt staatikaga määramatu. Ühe liigside eemaldamisega saadud arvutusskeem on kaks korda staatikaga määramatu. Eemaldatud liigside asemele rakendatud ühiktundmatust põhjustatud vertikaalsiirde epüüri ordinaadid tuleks arvutada järelikult kahekordselt staatikaga määramatus skeemis. Joonistel 15.14, 15.15 ja 15.16 kujutatud lisatundmatute ja põhiskeemidega ei põhjusta üks tundmatu teistele tundmatutele vastavaid siirdeid: kõik kõrvalsiirded on nullid. Järelikult staatikaga määratavale põhiskeemile rakendatud ühiktundmatust põhjustatud vertikaalsiirde epüür ühtib kahekordselt staatikaga määramatule skeemile rakendatud ühiktundmatust põhjustatud vertikaalsiirde epüüriega.

Sümmeetrilise kaare lisatundmatute mõjujoonte ordinaatide arvutamisel kasutame tavaliselt põhiskeemina tala või kahte konsooli, kuna vertikaalsiirde epüüride koostamine nende jaoks on lihtne. Nende põhiskeemide ja lisatundmatutega võrduvad kõik kõrvalsiirded nulliga ja ühiktundmatu rakendamine staatikaga määratavale põhiskeemile.

Sama tulemuse saame ka siirete vastastikkuse teoreemi alusel. Kuna mõjujoonte ordinaadid arvutame vertikaalse ühikjõu jaoks, siis lisatundmatute valemite (15.74) võib koormusest põhjustatud siirded Δ_{1p} , Δ_{2p} ja Δ_{3p} asendada ühikjõust põhjustatud siiretega δ_{1p} , δ_{2p} ning δ_{3p} . Valemid (15.74) on siis järgmised

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\delta_{3p}}{\delta_{33}} \quad (15.85)$$

ja siirete vastastikkuse teoreemi põhjal võime need esitada kujul

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\delta_{p3}}{\delta_{33}} \quad (15.86)$$

Lisatundmatutele vastavad siirded δ_{1p} , δ_{2p} ja δ_{3p} on põhjustatud staatikaga määratavale põhiskeemile rakendatud vertikaalsest ühikjõust. Tundmatute X_1 , X_2 ja X_3 avaldiste (15.86) lugejad δ_{p1} , δ_{p2} ja δ_{p3} kujutavad aga ühiktundmatutest põhjustatud vertikaalsiirde epüüride w_i ordinaate ühikjõu kohal. Ühiktundmatust $X_i = 1$ põhjustatud vertikaalsiirde epüüri ordinaat ühikjõu kohal $\delta_{pi} = w_{xi}$ (mille võtame vastupidise märgiga ja jagame peasiirdega δ_{ii}), kujutab lisatundmatu X_i mõjujoone ordinaati lõikes, mille abstsissiks on x . Ühiktundmatust põhjustatud vertikaalsiirde epüüride ordinaadid arvutatakse tavaliselt maatriksite abil.

15.3.3. Temperatuuri muutuse mõju

Temperatuuri muutus põhjustab liigenditeta kaares sisejõude. Järgnevalt eeldame, et temperatuuri muutus kaare ristlõigetel on ühesugune: temperatuur muutub kogu kaare ulatuses alumises kius t_a , ülemises kius $t_{\bar{u}}$ ja telgjoonel t_0 °C võrra.

Joonistel 15.14, 15.15, 15.16 esitatud põhiskeemide puhul leiame lisatundmatud valemitega

$$X_{1t} = -\frac{EI_c \Delta_{1t}}{EI_c \delta_{11}}; \quad X_{2t} = -\frac{EI_c \Delta_{2t}}{EI_c \delta_{22}}; \quad X_{3t} = -\frac{EI_c \Delta_{3t}}{EI_c \delta_{33}} \quad (15.87)$$

kus

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= -\alpha t_0 \int_0^s \cos \varphi \, ds + \alpha \Delta t \int_0^s \frac{y - y_c}{h} \, ds = \\ &= -\alpha t_0 \int_0^l dx + \alpha \Delta t \int_0^l \frac{y - y_c}{h \cos \varphi} \, dx = \\ &= -\alpha t_0 l + \alpha \Delta t \int_0^l \frac{y - y_c}{h \cos \varphi} \, dx \quad (15.88) \\ \Delta_{2t} &= \alpha \Delta t \int_0^s \frac{ds}{h} = \alpha \Delta t \int_0^l \frac{dx}{h \cos \varphi} \\ \Delta_{3t} &= 0 \end{aligned}$$

kus

$$\Delta t = t_a - t_{\bar{u}} \quad (15.89)$$

Siire $\Delta_{3t} = 0$, kuna temperatuuri muutus on lukuristlõike suhtes sümmeetriline.

Temperatuuri muutusest põhjustatud sisejõud arvutame pärast lisatundmatute leidmist valemitega

$$\begin{aligned} M_t &= (y - y_c) X_{1t} + X_{2t} \\ Q_t &= -\sin \varphi X_{1t} \\ N_t &= -\cos \varphi X_{1t} \end{aligned} \quad (15.90)$$

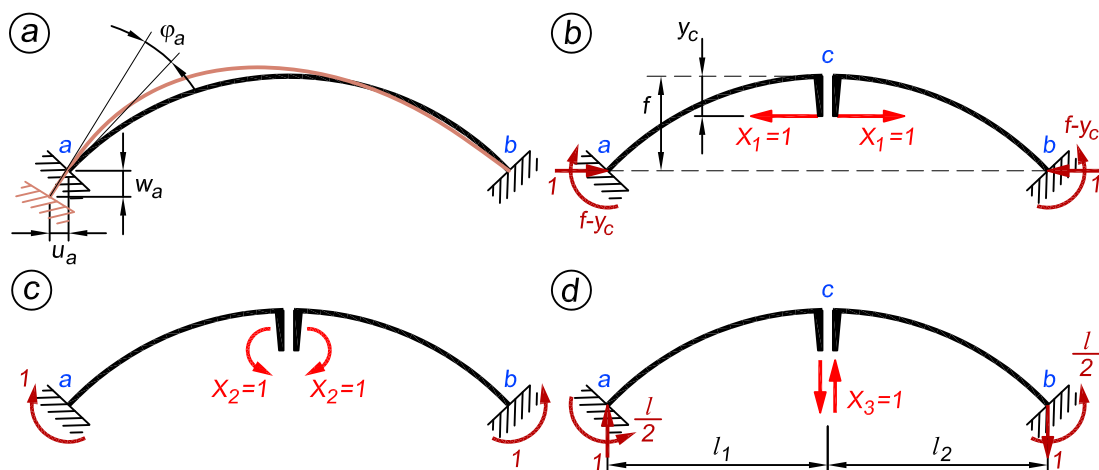
15.3.4. Tugede siirete mõju

Liigenditeta kaare toe siirdest ja pöördest (joonis 15.20, a) tekivad kaares sisejõud. Joonistel 15.14, 15.15 ja 15.16 esitatud põhiskeemidega leiame lisatundmatud valemitega

$$X_{1r} = -\frac{EI_c \Delta_{1r}}{EI_c \delta_{11}}; \quad X_{2r} = -\frac{EI_c \Delta_{2r}}{EI_c \delta_{22}}; \quad X_{3r} = -\frac{EI_c \Delta_{3r}}{EI_c \delta_{33}} \quad (15.91)$$

Lisatundmatutele vastavad siirded, mis on põhjustatud toe siirdest või pöördest, arvutame valemiga (11.60)

$$\Delta_{kr} = -\sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} \quad (15.92)$$



Joonis 15.20. Kaare toe a siire ja pööre ning põhiskeemid

kus r'_{jk} on ühiktundmatust põhjustatud reaktsioon liigsidemes ja Δc_j on selle sideme siire või pööre.

Joonistel 15.14, 15.15 ja 15.16 esitatud põhiskeemide ja lisatundmatutega on ühiktundmatust põhjustatud reaktsioonid võrdsed. Toereaktsioonid leiame kahe konsooliga põhiskeemis (joonis 15.20, b , c ja d). Lisatundmatutele vastavad siirded, mis on põhjustatud toe a siirdest ja pöörddest, on järgmised

$$\begin{aligned}\Delta_{1r} &= u_a + (f - y_c) \varphi_a \\ \Delta_{2r} &= \varphi_a \\ \Delta_{3r} &= w_a - \frac{l}{2} \varphi_a\end{aligned}\tag{15.93}$$

Kui tugi b nihkub paremale u_b , vajub w_b ja pöördub päripäeva nurga φ_b võrra, siis liidame siiretele (15.93) järgmised siirded

$$\begin{aligned}\Delta_{1r} &= u_b + (f - y_c) \varphi_b \\ \Delta_{2r} &= \varphi_b \\ \Delta_{3r} &= -w_b + \frac{l}{2} \varphi_b\end{aligned}\tag{15.94}$$

Tugede siiretest põhjustatud sisejõud arvutame valemitega

$$\begin{aligned}M_r &= (y - y_c) X_{1r} + X_{2r} - x X_{3r} \\ Q_r &= -\sin \varphi X_{1r} + \cos \varphi X_{3r} \\ N_r &= -\cos \varphi X_{1r} + \sin \varphi X_{3r}\end{aligned}\tag{15.95}$$

Võrrandites (15.91) antud murdude nimetajad ei olene kaare jäikusest. Lugejad on aga suuremad, kui kaare jäikus on suurem. Tugede kindlaksmääratud siirete puhul on sisejõud kaares seda suuremad, mida suurem on kaare jäikus.

Peatükk 16

SÕRESTIKUD

16.1. Sissejuhatus

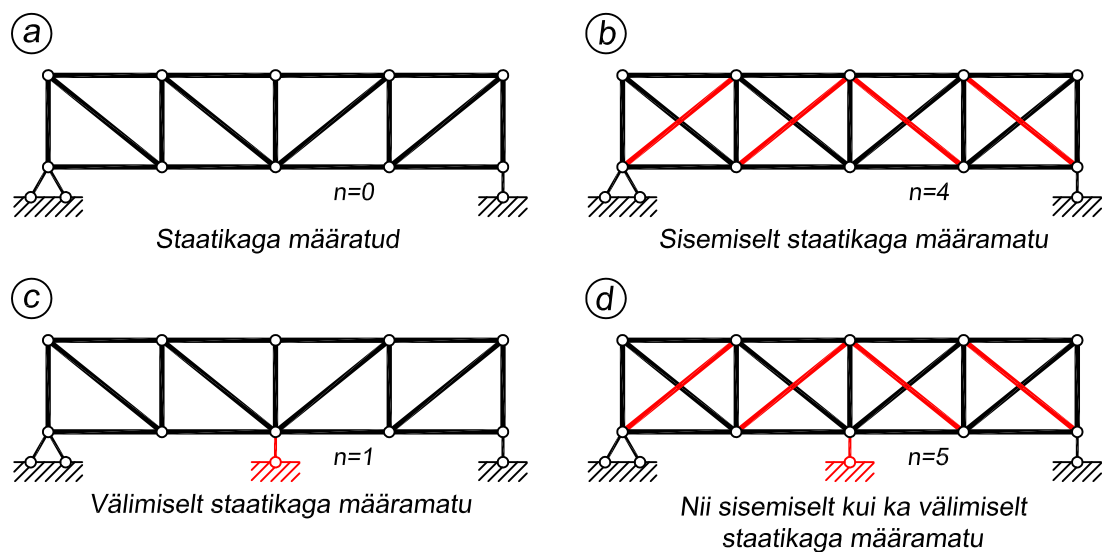
Ehituskonstruktsioonides kasutatavate sõrestike vardad on sõlmedes üldjuhul ühendatud jäigalt. Peatükis 8 selgitasime, et saledate varrastega sõrestikus on varraste paindest põhjustatud normaalpinged võrreldes pikijõududest põhjustatud pingetega väikesed. See lubab sõrestike arvutusskeemides kasutada liigendsõlmi. Järgnevalt käsitleme niisuguseid sõrestikke, mille arvutusskeem on ka liigendsõlmede kasutamisel staatikaga määramatu.

Siin on heaks näiteks Jaapanis asuv Ikitsuki sild (foto 16.1), mille arvutusskeemiks on mitmesildeline talasõrestik. Sarnaselt jätkuvtalale on ka mitmesildeline sõrestik staatikaga määramatu.

Sõrestik võib olla staatikaga määramatu nii sisejõudude suhtes (*sisemiselt määramatu*) kui ka toereaktsioonide suhtes (*välimiselt määramatu*).



Foto 16.1. Ikitsuki sild Jaapanis (foto: Wikimedia Commons)



Joonis 16.1. Staatikaga määratud ja määramatute sõrestike võrdlus. Liigsidemed on joonisel näidatud punasega

Sisemine määramatus tekib, kui sõrestikul on vardaid rohkem kui on vaja geomeetrilise muutumatus tagamiseks. Kõik need lisavardad on liigsidemeteks ja sel juhul ei ole varraste pikijõud arvutatavad staatika tasakaalutingimustega. Selline olukord tekib, juhul kui sõrestiku paneelis on teineteisega lõikuvad diagonaalid.

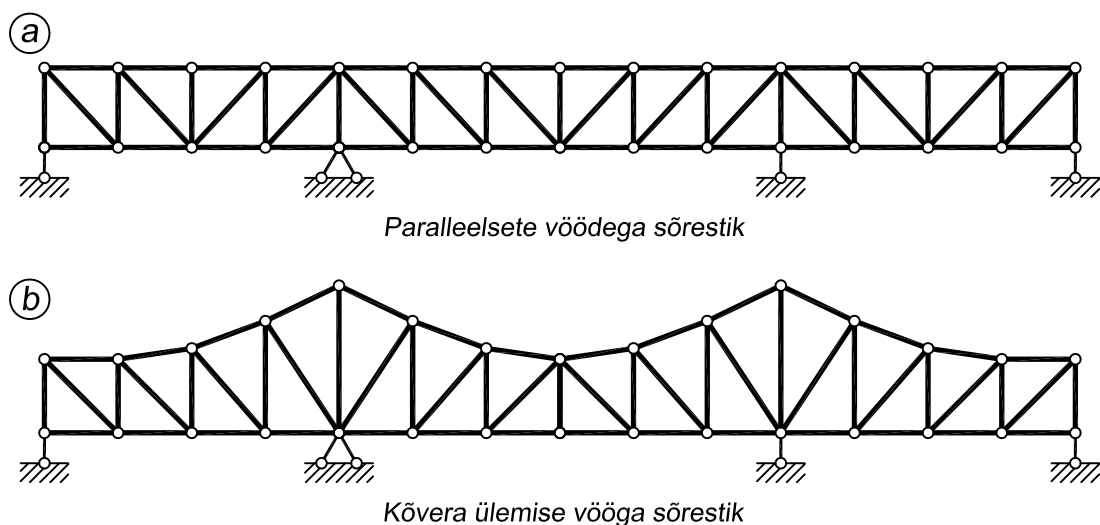
Välimine määramatus tekib, kui arvutuskeemil on toereaktsioonide komponente rohkem kui on vaja geomeetrilise muutumatus jaoks. Sel juhul on toesidemed liigsidemeteks ja toereaktsioone ei saa leida staatika tasakaalutingimustega.

Joonisel 16.1, a on kujutatud harilik staatikaga määratud talasõrestik, millel on kolm toesidet ja paneelides puuduvad lõikuvad diagonaalid. Selle sõrestiku kõik toereaktsioonid ja sisejõud on arvutatavad staatika tasakaalutingimustega.

Sisemiselt staatikaga määramatu sõrestik on kujutatud joonisel 16.1, b. Sellele sõrestikule on igasse paneeli lisatud veel üks diagonaal. Iga lisadiagonaal on üheks liigsidemeks, mistõttu see sõrestik on neljakordselt staatikaga määramatu: $n = 4$. Toesidemeid on aga kolm ja need on arvutatavad tasakaalutingimustest. Seetõttu toereaktsioonide suhtes on see arvutuskeem staatikaga määratud.

Joonisel 16.1, c on aga vastupidine olukord. Siin on neli toesidet, millest üks on liigside ja seetõttu on see arvutuskeem välimiselt staatikaga määramatu: $n = 1$. Kuna paneelides lõikuvad diagonaale ei ole, siis sisejõudude suhtes on see sõrestik staatikaga määratud. Järelikult, kui meil on toereaktsioonid teada, siis saame varraste pikijõud leida tavaliste tasakaalutingimustega.

Joonisel 16.1, d esitatud sõrestik on nii sisemiselt kui ka välimiselt staatikaga määramatu, kuna sellel arvutuskeemil on neli lisavarrast ja üks lisatoeside. Järelikult on see sõrestik viiekordselt staatikaga määramatu: $n = 5$. Siin ei ole võimalik ei sisejõudusid ega toereaktsioone arvutada tasakaalutingimustega.



Joonis 16.2. Mõned mitmesildelise sõrestiku variandid

Staatikaga määramatuse astme valem

Eelnevalt vaatlesime staatikaga määramatuse astme leidmist visuaalsel teel, loendades liigsideid. Sõrestiku staatikaga määramatuse astme saame leida valemiga (13.11)

$$n = v + t - 2s \quad (16.1)$$

kus v on varraste arv, t on toesidemete arv ja s sõlmede arv. Kuna selle valemi kasutamist on käsitletud näites 13.2 leheküljel 556, siis praegu sellel enam pikemalt ei peatu.

Mitmesildeliste sõrestike variandid

Levinuim mitmesildeline talasõrestik on paralleelsete vöödega, nagu on kujutatud joonisel 16.2, a. Sellist sõrestikku kasutatakse nii hoone- kui sillakonstruktsioonides.

Paralleelsete vöödega mitmesildelises sõrestikus on vöövarraste sisejõud vahepealsete tugede juures tunduvalt suuremad kui mujal. Seepärast projekteeritakse mitmesildelised sõrestikud sagedasti mitteparalleelsete vöödega (joonis 16.2, b). Meenutame peatükist 8.5, et varda pikijõu suurus on seotud varda kaugusega selle momendipunktist: mida suurem see kaugus on, seda väiksem on varda pikijõud. Kõvera vöö kasutamine võimaldab tugede juures sõrestiku kõrgust suurendada ja sellega ühtlasi vöövarraste pikijõudusid vähendada.

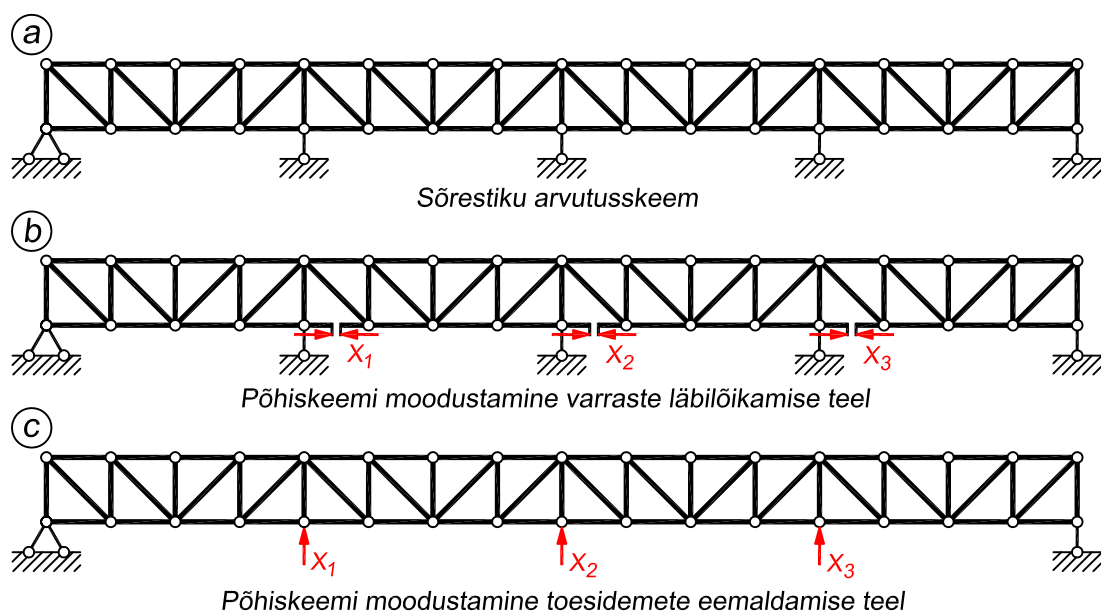
Kõvera vööga sõrestik on kasutusel peamiselt sillakonstruktsioonina. Sellise kujuga on ka fotol 16.1 kujutatud sild.

Mitteparalleelsete vööde korral on tavaliselt üks vöö sirge ja teine kõver, kusjuures kõver võib olla nii alumine kui ka ülemine vöö. Kuid esineb ka juhtumeid, kus mõlemad vööd on kõverad.

16.2. Jõumeetodi põhiskeem ja lisatundmatud

Järgnevalt käsitleme staatikaga määramatute sõrestike arvutust jõumeetodiga, mistõttu tuleb ülesande lahendamist alustada põhiskeemi koostamisest.

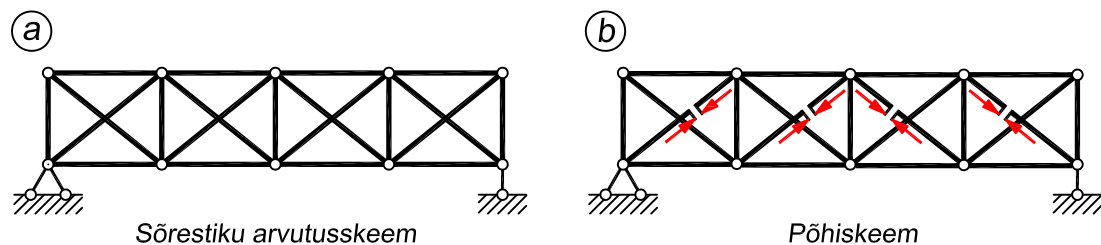
Mitmesildeliste talasõrestike puhul osutuvad põhiskeemid, mis on saadud varraste läbilõikamisega, paremaks kui liigtoesidemeteta põhiskeemid. Näiteks joonisel 16.3, *b* kujutatud põhiskeem on lihtsamini lahendatav kui joonisel 16.3, *c* esitatud põhiskeem. Esimeses põhiskeemis põhjustab koormus sisejõude ainult selles sildes, kus ta mõjub, samas kui teises põhiskeemis tekivad sisejõud üle kogu sõrestiku.



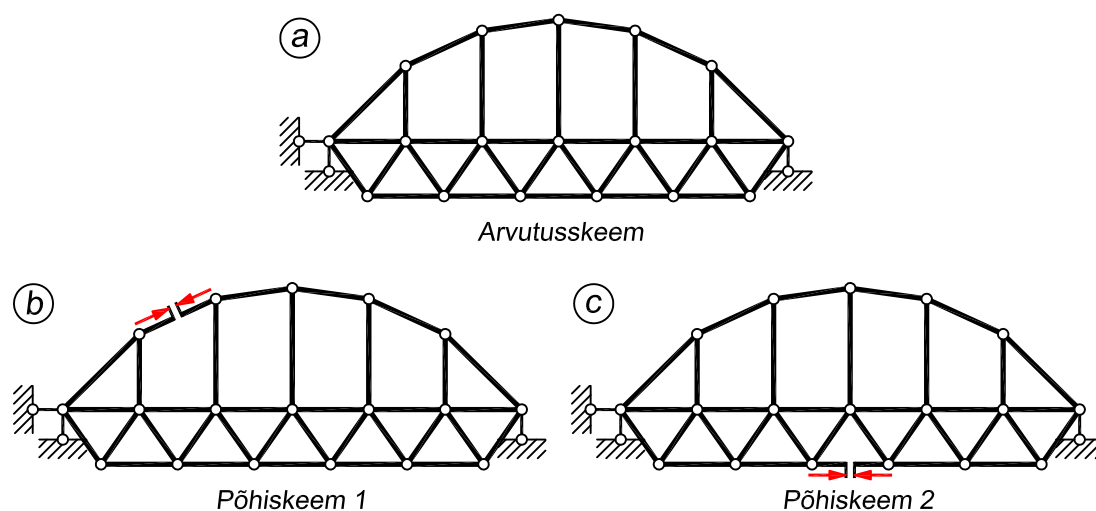
Joonis 16.3. Põhiskeemi moodustamise variante staatikaga määramatule sõrestikule

Sarnane olukord tekib jätkuvtala lahendamisel kolme momendi võrrandiga. Peatükis 14.3 näitasime, et põhiskeem üksteise kõrval asetsevatest lihttaladest on mõistlikum kui põhiskeem vahepealsete tugede eemaldamisega.

Joonisel 16.4, *a* esitatud sõrestik on toereaktsioonide suhtes staatikaga määratav, kuid sisejõudude suhtes neljakordselt staatikaga määratav. Lihtsaima põhiskeemi saame nelja langeva või tõusva diagonaali läbilõikamisega (joonis 16.4, *b*).



Joonis 16.4. Põhiskeemi moodustamine diagonaalide läbilõikamise teel



Joonis 16.5. Kombineeritud sõrestikkonstruksiooni põhiskeemi moodustamise variante

Kombineeritud sõrestikkonstruksiooni (joonis 16.5, a) põhiskeemina kasutame joonisel 16.5, b või c kujutatud skeeme. Joonisel 16.5, b esitatud põhiskeemil on lisatundmatuks varrasahela läbilõigatud varda pikijõud ning joonisel 16.5, c kujutatud skeemil talasõrestiku vöövarda pikijõud. Esimese arvutus on lihtsam, kuna koormusest, mis on rakendatud talasõrestiku sõlmedes, tekivad sisejõud ainult talasõrestiku varrastes.

Lisatundmatuteks on joonistel 16.3, 16.4 ja 16.5 sõrestiku läbilõigatud varraste pikijõud või eemaldatud tugelele vastavad reaktsioonid.

16.3. Võrrandisüsteem

Lisatundmatud leiame jõumeetodi kanoonilisest võrrandisüsteemist

$$\sum_{i=1}^n EA_0 \delta_{ki} X_i + EA_0 \Delta_{k0} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (16.2)$$

kus vabaliige on

$$EA_0 \Delta_{k0} = EA_0 \Delta_{kp} + EA_0 \Delta_{kt} + EA_0 \Delta_{kr} \quad (16.3)$$

kus Δ_{kp} , Δ_{kt} ja Δ_{kr} on põhiskeemi siirded vastavalt koormusest, temperatuuri muutusest ja tugele siiretest.

Võrrandisüsteemi (16.2) tundmatute kordajad arvutame valemiga

$$EA_0 \delta_{ki} = \sum_{j=1}^v n_{jk} n_{ji} \frac{EA_0}{EA_j} l_j \quad (16.4)$$

ja vabaliikmed valemitega

$$EA_0\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v n_{jk} N_{jp}^0 \frac{EA_0}{EA_j} l_j \quad (16.5)$$

$$EA_0\Delta_{kt} = EA_0 \sum_{j=1}^v \alpha_j t l_j n_{jk} \quad (16.6)$$

$$EA_0\Delta_{kr} = EA_0 \sum_{j=1}^v n_{jk} \Delta l_j - EA_0 \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} \quad (16.7)$$

Viimase valemi esimese summa korrutise tegur Δl_j on varda tegeliku ja projekteeritud pikkuse vahe, mis arvestab sõrestiku valmistamise ebatäpsuse mõju.

16.4. Varraste pikijõud

Pikijõud varrastes arvutame valemiga (13.37)

$$N_j = n_{j1}X_1 + n_{j2}X_2 + \dots + n_{jn}X_n + N_{jp}^0 \quad (16.8)$$

ehk

$$N_j = \sum_{i=1}^n n_{ji}X_i + N_{jp}^0 \quad (16.9)$$

kus n_{ji} on lisatundmatust $X_i = 1$ ja N_{jp}^0 koormusest põhjustatud pikijõud staatikaga määratava põhiskeemi vardas j .

Tehes arvutust temperatuuri muutusest ja tugede siiretest, puudub valemis (16.8) viimane liige, kuna temperatuuri muutus ja tugede siirded ei tekita staatikaga määratud põhiskeemis sisejõude.

16.5. Arvutuse kontroll

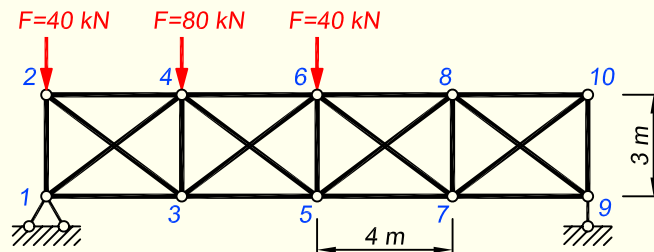
Valemiga (16.8) arvutatud sõrestiku varraste pikijõudusid kontrollime kinemaatiliste pidevustingimustega.

Koormusest põhjustatud pikijõudude puhul peavad olema rahuldatud tingimused

$$\sum_{j=1}^v n_{ji} N_{jp} \frac{EA_0}{EA_j} l_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16.10)$$

Temperatuuri muutumisest ja tugede siiretest põhjustatud pikijõudude puhul võrrandite (16.10) paremad pooled ei võrdu nulliga, vaid kanooniliste võrrandite vabaliikmetega vastupidiste märkidega.

NÄIDE 16.1. Arvutada joonisel 16.6 kujutatud sõrestiku varraste sisejõud ning sõlme 6 vertikaalsiire. Ülemise vöö varraste, toepostide ja äärmistes paneelides tõusvate diagonaalide ristlõigete pindalad on $A_0 = 40 \text{ cm}^2$; alumise vöö varraste $A = 0,8A_0$; äärmiste paneelide langevate diagonaalide ja keskmiste paneelide võrguvarraste $A = 0,5A_0$; elastsusmoodul $E = 210 \text{ GPa}$.



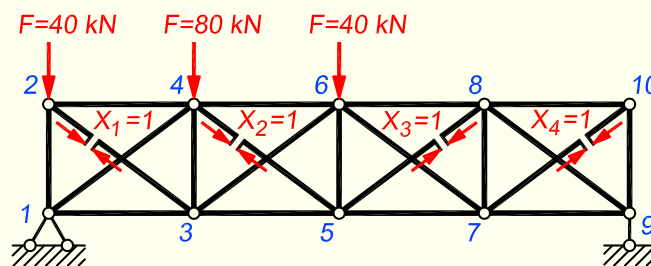
Joonis 16.6. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Sõrestiku staatikaga määratuse astme leiame valemiga (16.1)

$$n = v + t - 2s = 21 + 3 - 2 \cdot 10 = 4$$

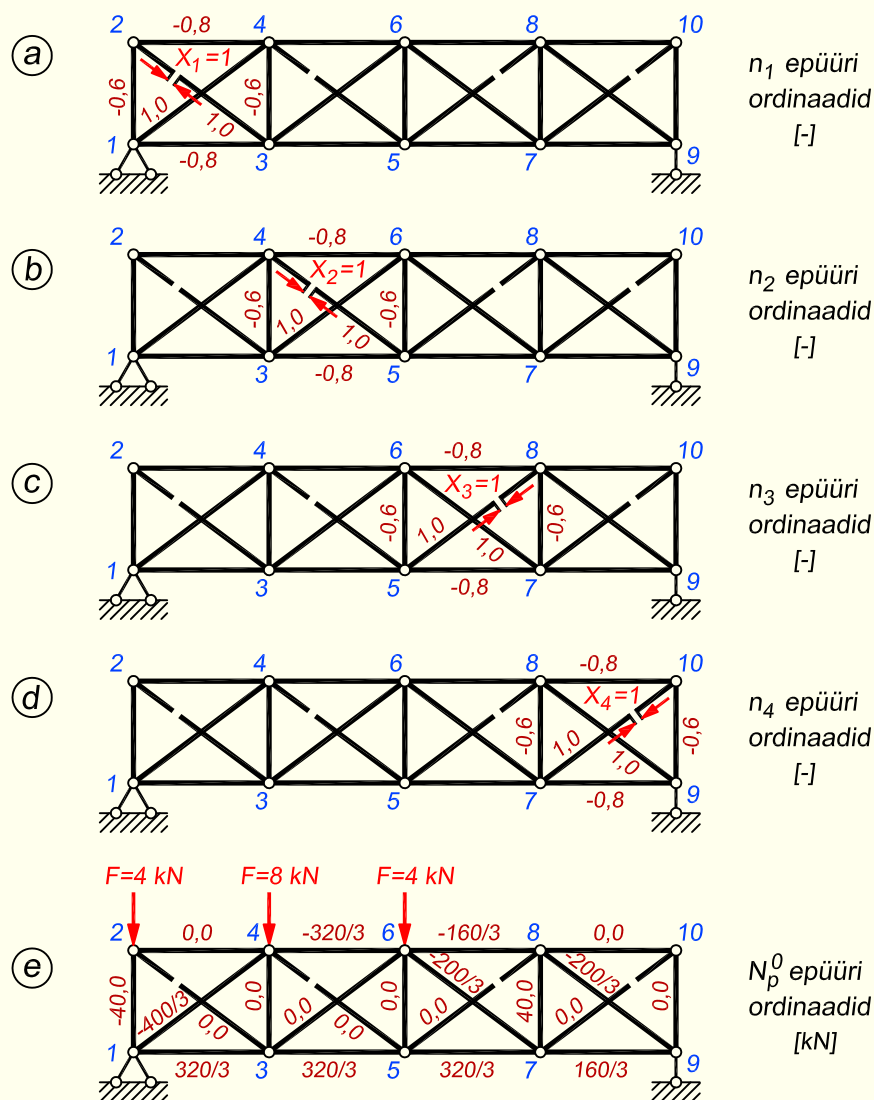
Lisatundmatuteks võtame langevate diagonaalide pikijõud. Põhiskeem koos lisatundmatutega on esitatud joonisel 16.7.



Joonis 16.7. Staatikaga määratud põhiskeem koormuse ja lisatundmatutega

Niisuguse põhiskeemi puhul põhjustab iga lisatundmatu sisejõude ainult selle paneeli varrastes, kus ta on rakendatud. Ühiktundmatutest põhjustatud sisejõud on näidatud joonisel 16.8, a , b , c ja d . Sealt saame järeldada, et $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$, $\delta_{14} = \delta_{41} = 0$, $\delta_{24} = \delta_{42} = 0$ ja kanoonilised võrrandid on järgmised

$$\begin{aligned} EA_0\delta_{11}X_1 + EA_0\delta_{12}X_2 + EA_0\Delta_{1p} &= 0 \\ EA_0\delta_{21}X_1 + EA_0\delta_{22}X_2 + EA_0\delta_{23}X_3 + EA_0\Delta_{2p} &= 0 \\ EA_0\delta_{32}X_2 + EA_0\delta_{33}X_3 + EA_0\delta_{34}X_4 + EA_0\Delta_{3p} &= 0 \\ EA_0\delta_{43}X_3 + EA_0\delta_{44}X_4 + EA_0\Delta_{4p} &= 0 \end{aligned}$$



Joonis 16.8. Ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud sisejõud põhiskeemis

Sõrestiku arvutamisel on mõistlik esitada arvutus tabeli kujul. Varraste geomeetrilised andmed ning põhiskeemi varraste sisejõud koormusest ja ühiktundmatutest on esitatud tabelis 16.1.

Võrrandisüsteemis esinevad siirded arvutame valemitega (16.4) ja (16.5)

$$EA_0 \delta_{ki} = EA_0 \delta_{ik} = \sum n_i n_k \frac{EA_0}{EA_j} l = \sum n_i n_k l''$$

$$EA_0 \Delta_{kp} = \sum n_k N_p^0 \frac{EA_0}{EA_j} l = \sum n_k N_p^0 l''$$

Tabel 16.1. Sõrestiku varraste geomeetrilised andmed ja põhiskeemi sisejõud

| Varras | $\frac{A_0}{A}$ | l , [m] | $\frac{A_0}{A} \cdot l = l''$, [m] | n_1 , [-] | n_2 , [-] | n_3 , [-] | n_4 , [-] | N_p^0 , [kN] |
|--------|-----------------|-----------|-------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|
| 1-3 | 1,25 | 4 | 5 | -0,8 | 0 | 0 | 0 | 320/3 |
| 3-5 | 1,25 | 4 | 5 | 0 | -0,8 | 0 | 0 | 320/3 |
| 2-4 | 1 | 4 | 4 | -0,8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4-6 | 1 | 4 | 4 | 0 | -0,8 | 0 | 0 | -320/3 |
| 1-4 | 1 | 5 | 5 | 1,0 | 0 | 0 | 0 | -400/3 |
| 2-3 | 2 | 5 | 10 | 1,0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3-6 | 2 | 5 | 10 | 0 | 1,0 | 0 | 0 | 0 |
| 4-5 | 2 | 5 | 10 | 0 | 1,0 | 0 | 0 | 0 |
| 1-2 | 1 | 3 | 3 | -0,6 | 0 | 0 | 0 | -40,0 |
| 3-4 | 2 | 3 | 6 | -0,6 | -0,6 | 0 | 0 | 0 |
| 5-6 | 2 | 3 | 6 | 0 | -0,6 | -0,6 | 0 | 0 |
| 7-8 | 2 | 3 | 6 | 0 | 0 | -0,6 | -0,6 | 40,0 |
| 9-10 | 1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | -0,6 | 0 |
| 5-8 | 2 | 5 | 10 | 0 | 0 | 1,0 | 0 | 0 |
| 6-7 | 2 | 5 | 10 | 0 | 0 | 1,0 | 0 | -200/3 |
| 7-10 | 2 | 5 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1,0 | 0 |
| 8-9 | 1 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1,0 | -200/3 |
| 6-8 | 1 | 4 | 4 | 0 | 0 | -0,8 | 0 | -160/3 |
| 8-10 | 1 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | -0,8 | 0 |
| 5-7 | 1,25 | 4 | 5 | 0 | 0 | -0,8 | 0 | 320/3 |
| 7-9 | 1,25 | 4 | 5 | 0 | 0 | 0 | -0,8 | 160/3 |

Siirete arvutus on näidatud tabelis 16.2. Seal on esitatud võrrandisüsteemi peadiagonaalil olevad siirded δ_{kk} ning vabaliikmed Δ_{kp} . Tabeli päises on esimesel real näidatud arvutatav siire ja teisel real, kuidas selle saame.

Peasiirded on

$$EA_0\delta_{11} = EA_0\delta_{44} = 24,00 \text{ m}$$

$$EA_0\delta_{22} = EA_0\delta_{33} = 30,08 \text{ m}$$

Kõrvalsiirded on

$$EA_0\delta_{12} = EA_0\delta_{21} = EA_0\delta_{23} = EA_0\delta_{32} = EA_0\delta_{43} = EA_0\delta_{34} = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 6 = 2,16 \text{ m}$$

Tabel 16.2. Siirete arvutus

| Varras | $EA_0\delta_{11}$ | $EA_0\delta_{22}$ | $EA_0\delta_{33}$ | $EA_0\delta_{44}$ | $EA_0\Delta_{1p}$ | $EA_0\Delta_{2p}$ | $EA_0\Delta_{3p}$ | $EA_0\Delta_{4p}$ |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | $n_1^2 l''$ | $n_2^2 l''$ | $n_3^2 l''$ | $n_4^2 l''$ | $n_1 N_p^0 l''$ | $n_2 N_p^0 l''$ | $n_3 N_p^0 l''$ | $n_4 N_p^0 l''$ |
| 1-3 | 3,20 | 0 | 0 | 0 | -426,67 | 0 | 0 | 0 |
| 3-5 | 0 | 320 | 0 | 0 | 0 | -426,67 | 0 | 0 |
| 2-4 | 2,56 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4-6 | 0 | 2,56 | 0 | 0 | 0 | 341,33 | 0 | 0 |
| 1-4 | 5,00 | 0 | 0 | 0 | -666,67 | 0 | 0 | 0 |
| 2-3 | 10,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3-6 | 0 | 10,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4-5 | 0 | 10,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1-2 | 1,08 | 0 | 0 | 0 | 72,00 | 0 | 0 | 0 |
| 3-4 | 2,16 | 2,16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5-6 | 0 | 2,16 | 2,16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7-8 | 0 | 0 | 2,16 | 2,16 | 0 | 0 | -144,00 | -144,0 |
| 9-10 | 0 | 0 | 0 | 1,08 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5-8 | 0 | 0 | 10,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6-7 | 0 | 0 | 10,00 | 0 | 0 | 0 | -666,67 | 0 |
| 7-10 | 0 | 0 | 0 | 10,00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8-9 | 0 | 0 | 0 | 5,00 | 0 | 0 | 0 | -333,33 |
| 6-8 | 0 | 0 | 2,56 | 0 | 0 | 0 | 170,67 | 0 |
| 8-10 | 0 | 0 | 0 | 2,56 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5-7 | 0 | 0 | 3,20 | 0 | 0 | 0 | -426,67 | 0 |
| 7-9 | 0 | 0 | 0 | 3,20 | 0 | 0 | 0 | -213,33 |
| Σ | 24,00 | 30,08 | 30,08 | 24,00 | -1021,34 | -85,34 | -1066,67 | -690,66 |

Võrrandisüsteemi vabaliikmed on

$$EA_0\Delta_{1p} = -1021,34 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad EA_0\Delta_{2p} = -85,34 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$EA_0\Delta_{3p} = -1066,67 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad EA_0\Delta_{4p} = -690,66 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Asetades leitud siirete väärtused võrrandisüsteemi, saame

$$24,00X_1 + 2,16X_2 - 1021,34 = 0$$

$$2,16X_1 + 30,08X_2 + 2,16X_3 - 85,34 = 0$$

$$2,16X_2 + 30,08X_3 + 2,16X_4 - 1066,67 = 0$$

$$2,16X_3 + 24,00X_4 - 690,66 = 0$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel saame tundmatute väärtusteks

$$X_1 = 42,796 \text{ kN}; \quad X_2 = -2,663 \text{ kN}; \quad X_3 = 33,804 \text{ kN}; \quad X_4 = 25,735 \text{ kN}$$

Tabel 16.3. Sisejõudude arvutus

| Varras | n_1X_1 , [kN] | n_2X_2 , [kN] | n_3X_3 , [kN] | n_4X_4 , [kN] | N_p^0 , [kN] | N_p , [kN] |
|--------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|--------------|
| 1-3 | -34,24 | 0 | 0 | 0 | 106,67 | 72,43 |
| 3-5 | 0 | 2,13 | 0 | 0 | 106,67 | 108,80 |
| 2-4 | -34,24 | 0 | 0 | 0 | 0 | -34,24 |
| 4-6 | 0 | 2,13 | 0 | 0 | -106,67 | -104,54 |
| 1-4 | 42,80 | 0 | 0 | 0 | -133,33 | -90,53 |
| 2-3 | 42,80 | 0 | 0 | 0 | 0 | 42,80 |
| 3-6 | 0 | -2,66 | 0 | 0 | 0 | -2,66 |
| 4-5 | 0 | -2,66 | 0 | 0 | 0 | -2,66 |
| 1-2 | -25,68 | 0 | 0 | 0 | -40,00 | -65,68 |
| 3-4 | -25,68 | 1,60 | 0 | 0 | 0 | -24,08 |
| 5-6 | 0 | 1,60 | -20,28 | 0 | 0 | -18,68 |
| 7-8 | 0 | 0 | -20,28 | -15,44 | 40,00 | 4,28 |
| 9-10 | 0 | 0 | 0 | -15,44 | 0 | -15,44 |
| 5-8 | 0 | 0 | 33,80 | 0 | 0 | 33,80 |
| 6-7 | 0 | 0 | 33,80 | 0 | -66,67 | -32,87 |
| 7-10 | 0 | 0 | 0 | 25,74 | 0 | 25,74 |
| 8-9 | 0 | 0 | 0 | 25,74 | -66,67 | -40,93 |
| 6-8 | 0 | 0 | -27,04 | 0 | -53,33 | -80,37 |
| 8-10 | 0 | 0 | 0 | -20,59 | 0 | -20,59 |
| 5-7 | 0 | 0 | -27,04 | 0 | 106,67 | 79,63 |
| 7-9 | 0 | 0 | 0 | -20,59 | 53,33 | 32,74 |

Pikijõud varrastes leiame valemiga (16.8)

$$N_j = n_{j1}X_1 + n_{j2}X_2 + n_{j3}X_3 + n_{j4}X_4 + N_{jp}^0$$

Arvutus on esitatud tabelis 16.3.

Leitud pikijõudusid kontrollime tingimustega (16.10)

$$\sum_{j=1}^v n_{ji}N_{jp} \frac{EA_0}{EA_j} l_j = 0$$

Tabelis 16.4 on esitatud ainult kontroll pikijõuga n_1 : $\sum n_{j1}N_{jp}l_j'' = 0$, 11, mis ühtib arvutustäpsuse ühikuga ja mille võib seepärast praktiliselt lugeda nulliks. Ülesande lahendamisel tuleks kontroll teha kõigi pikijõududega n_j .

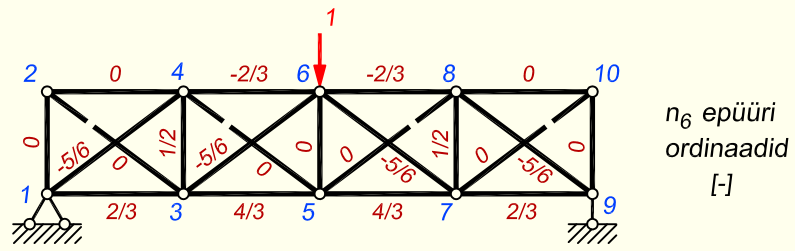
Tabel 16.4. Pikijõudude kontroll ja sõlme 6 vertikaalsiirde arvutus

| Varras | $n_1, [-]$ | $n_6, [-]$ | $l'', [m]$ | $N_p, [kN]$ | $n_1 N_p l''$ | $n_6 N_p l'', [kN \cdot m]$ |
|--------|------------|------------|------------|-------------|---------------|-----------------------------|
| 1-3 | -0,8 | 2/3 | 5 | 72,43 | -289,72 | 241,4 |
| 3-5 | 0 | 4/3 | 5 | 108,80 | 0 | 725,3 |
| 2-4 | -0,8 | 0 | 4 | -34,24 | 109,57 | 0 |
| 4-6 | 0 | -2/3 | 4 | -104,54 | 0 | 278,8 |
| 1-4 | 1,0 | -5/6 | 5 | -90,53 | -452,65 | 377,2 |
| 2-3 | 1,0 | 0 | 10 | 42,80 | 428,00 | 0 |
| 3-6 | 0 | -5/6 | 10 | -2,66 | 0 | 22,2 |
| 4-5 | 0 | 0 | 10 | -2,66 | 0 | 0 |
| 1-2 | -0,6 | 0 | 3 | -65,68 | 118,22 | 0 |
| 3-4 | -0,6 | 1/2 | 6 | -24,08 | 86,69 | -72,2 |
| 5-6 | 0 | 0 | 6 | -18,68 | 0 | 0 |
| 7-8 | 0 | 1/2 | 6 | 4,28 | 0 | 12,8 |
| 9-10 | 0 | 0 | 3 | -15,44 | 0 | 0 |
| 5-8 | 0 | 0 | 10 | 33,80 | 0 | 0 |
| 6-7 | 0 | -5/6 | 10 | -32,87 | 0 | 273,9 |
| 7-10 | 0 | 0 | 10 | 25,74 | 0 | 0 |
| 8-9 | 0 | -5/6 | 5 | -40,93 | 0 | 170,6 |
| 6-8 | 0 | -2/3 | 4 | -80,37 | 0 | 214,3 |
| 8-10 | 0 | 0 | 4 | -20,59 | 0 | 0 |
| 5-7 | 0 | 4/3 | 5 | 79,63 | 0 | 530,9 |
| 7-9 | 0 | 2/3 | 5 | 32,74 | 0 | 109,1 |
| | | | | Σ | 0,11 | 2884,3 |

Sõlme 6 vertikaalsiirde arvutamisel rakendame sellesse sõlme vertikaalse ühikjõu ning leiame tekkivad varraste pikijõud (joonis 16.9). Sõlme 6 vertikaalsiirde leiame avaldisega

$$w_6 = \sum_{j=1}^v \frac{n_6 N_p l''}{EA_0} = \frac{2884,3 \text{ kN} \cdot \text{m}}{210 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0,004 \text{ m}^2} = 0,0034 \text{ m} = 3,4 \text{ mm}$$

kus $n_6 N_p l''$ väärtus on leitud tabelis 16.4.



Joonis 16.9. Sõlme 6 rakendatud ühikjõust tekkivad sisejõud põhiskeemis

Peatükk 17

DEFORMATSIOONIMEETOD

17.1. Sissejuhatus

Eespool käsitlesime staatikaga määramatute arvutusskeemide (raamid, talad) lahendamist jõumeetodiga, kus lisatundmatuteks on staatikaga määramatud sisejõud ja reaktsioonid (ehk teisiti öeldes *staatikalised tundmatud*). Jõumeetodi puhul leiame lisatundmatud kinemaatiliste pidevustingimuste alusel koostatud võrranditest. Pärast lisatundmatute leidmist arvutame ülejäänud sisejõud ja reaktsioonid koormuse ning lisatundmatute funktsioonidena. Pärast sisejõudude määramist saame arvutada ka siirded ja pöörded.

Deformatsioonimeetod töötab vastupidises järjekorras. Siin on lisatundmatuteks sõlmede pöörded ja siirded ning varraste pöörded (ehk teisiti öeldes *kinemaatilised tundmatud*). Nende lisatundmatute arvu nimetatakse *kinemaatilise määramatuse astmeks* (vanemas kirjanduses nimetatud ka *geomeetrilise määramatuse astmeks*). Tundmatute siirete ja pöörete leidmiseks kasutame sõlmede ja varraste kohta kirjutatud tasakaaluvõrrandeid. Pärast siirete leidmist saame arvutada kõik sisejõud ja reaktsioonid koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena.

Kui staatikaga määramatu arvutusskeemi kinemaatilise määramatuse aste on väiksem, võrdne või veidi suurem staatikaga määramatuse astmest, siis võiks ülesande lahendada deformatsioonimeetodiga.

Deformatsioonimeetodi arendas 1920. aastatel välja Taani ehitusinsener ja õppejõud Asger Skovgaard Ostenfeld (1866–1931). Meetodit arendas edasi Ludwig Mann (1871–1959), kes võttis kasutusele *pöördenurgameetodi*, kus tundmatuteks on jäikade sõlmede pöörded ja varraste pöörded. Käesolevas raamatus käsitlemegi deformatsioonimeetodit pöördenurgameetodina.

Arvutamisel kasutatavad eeldused

Staatikaga määramatu raami deformeerunud olukorra esitamisel kasutame kahte eeldust (nagu ka tavaliselt raami lahendamisel jõumeetodiga).

1. Piki- ja põikjõududest põhjustatud deformatsioonid võime hüljata. Sirgetest ja jäikadest elementidest moodustatud konstruktsioonide paindele töötavates varrastes on piki-

ja nihkedeformatsioonidest põhjustatud siirded võrreldes paindedeformatsioonist põhjustatud siiretega väga väikesed, mistõttu võime piki- ja põikjõudude mõju jätta arvestamata.

2. Sirge varda paindest põhjustatud otste lähenemise loeme nulliks. Siin tugineme ehitismehaanika põhilisele eeldusele, mille kohaselt konstruktsioonelementide deformatsioonidest põhjustatud siirded on võrreldes elementide mõõtmetega nii väikesed, et võime hüljata erinevuse paindunud varda otsmiste ristlõigete raskuskeskmeid ühendava kõõlu ja esialgse sirge varda pikkuse vahel.

Nimetatud eeldustele tuleb lisada, et temperatuuri muutusest põhjustatud sisejõudude leidmisel arvestame ka pikideformatsioone. Teine erisus puudutab kõverat varrast, mille paindel ei jää otsmiste ristlõigete vahekaugus algkaugusega võrdseks.

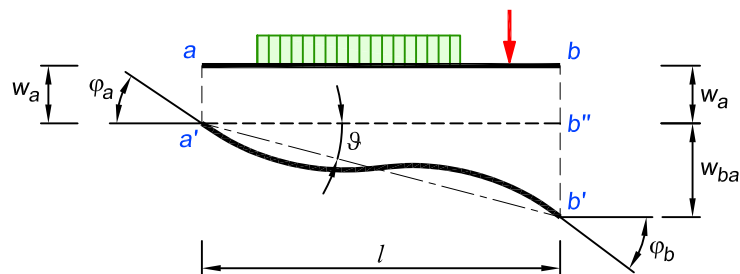
Sirgete varraste kohta kehtivate eelduste rakendamisel jäävad konstruktsiooni koormamisel raami sõlmede geomeetriliste tsentrite vahekaugused muutumatuks, mis vähendab tundmatute arvu ja muudab seetõttu arvutuse lihtsamaks.

17.2. Deformatsioonimeetodi idee

Deformatsioonimeetodi idee selgitamiseks vaatame esmalt, kuidas toimub sirge varda deformeerumine.

Koormusest põhjustatud varraste deformatsioonide tagajärjel sõlmed pöörduvad ja siirduvad. Joonisel 17.1 on kujutatud raamist eraldatud sirge varras $a-b$ ja varda paindunud kuju deformeerunud olukorras $a'-b'$. Varda $a-b$ siirdumist deformeerunud olukorda $a'-b'$ võib vaadelda koosnevana mitmest üksteisest sõltumatu siirdest.

1. Varras $a-b$ siirdub asukohta $a'-b''$, nii et tema mõlemad otsad siirduvad võrdse suuruse w_a võrra.
2. Varda ühe otsa siire toimub risti varda teljega. Näiteks varda otsa b nihkumine suuruse w_{ba} võrra asukohta b' , mille tagajärjel sõlmede a ja b geomeetrilisi tsentreid ühendav sirge $a'-b'$ moodustab esialgse teljega nurga ϑ . See nurk tähistab varda pööret ja võrdub $\vartheta = \frac{w_{ba}}{l}$, kuna väikeste nurkade korral loetakse nurga tangens võrdseks selle nurga endaga.



Joonis 17.1. Raamist eraldatud sirge varda deformeerumine

3. Sõlm a pöörduv nurga φ_a võrra.
4. Sõlm b pöörduv nurga φ_b võrra.
5. Varda telg paindub koormuse mõjul. Varda otsad ei siirdu ega pöördu.

Kuna varda a - b siirdumine deformeerunud olukorda a' - b' koosneb üksikutest siiretest, siis on varda deformeerunud olukord määratud koormusega, sõlmede pööretega φ_a ja φ_b ning varda pöördetega ϑ . Pärast nimetatud pöördenurkade leidmist saame välja arvutada ka kõik vajalikud sisejõud ja reaktsioonid.

Järgnevalt vaatame pöördenurkade leidmiseks vajaliku tasakaaluvõrrandi moodustamist.

Deformatsioonimeetodi tasakaaluvõrrand

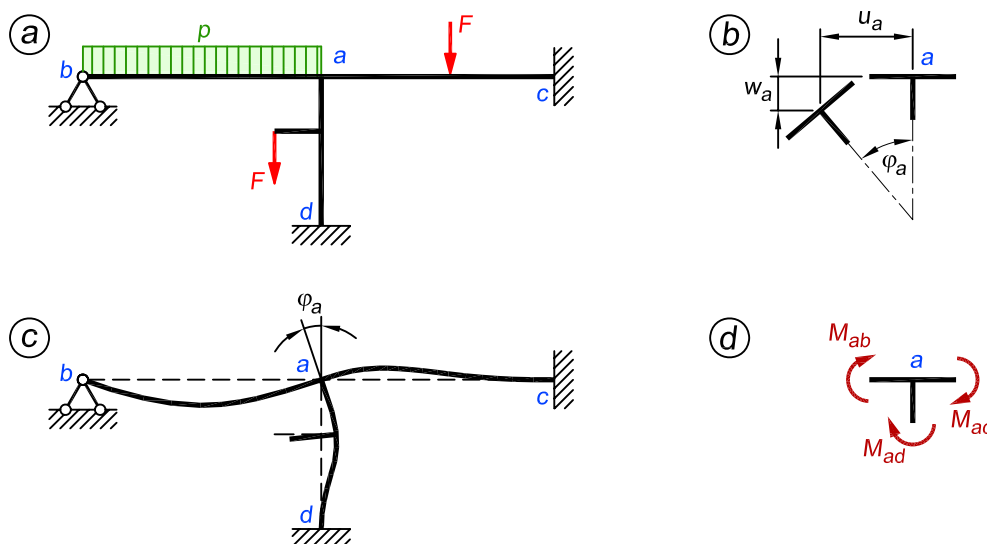
Joonisel 17.2, a kujutatud raami arvutamisel jõumeetodiga tuleb koostada ja lahendada viis võrrandit viie tundmatuga, kuna raami staatikaga määramatuse aste on viis.

Raami deformatsiooniolukord on määratud koormusega ning sõlme a kolme siirdega u_a , w_a ja φ_a (joonis 17.2, b). Eespool esitatud eelduste rakendamisel on siirded u_a ja w_a nullid ning jääb ainult üks tundmatu – sõlme a pööre φ_a . Joonisel 17.2, a esitatud raami kinemaatilise määramatuse aste on seetõttu üks. Raami deformeerunud kuju koos tundmatu pöördetega φ_a on näidatud joonisel 17.2, c .

Lisatundmatu φ_a leiame sõlme a kohta koostatud momentide tasakaalu tingimusest

$$\sum M_a = 0; \quad M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} = 0 \quad (17.1)$$

Sõlme tasakaalu vaatlemisel võtame päripäeva mõjuvad momendid positiivsed (joonis 17.2, d).



Joonis 17.2. Raami deformeerumine

Kuna varda deformeerumine (ja koos sellega paindemomendi tekkimine) on seotud varda otste pöörete ja siirdumisega, siis paindemomendid võrrandis (17.1) on avaldatavad lineaarsete funktsioonidena sõlme a siiretest u_a , w_a , φ_a

$$\begin{aligned} M_{ab} &= M_{ab,p} + m_{ab,u}u_a + m_{ab,w}w_a + m_{ab,\varphi}\varphi_a \\ M_{ac} &= M_{ac,p} + m_{ac,u}u_a + m_{ac,w}w_a + m_{ac,\varphi}\varphi_a \\ M_{ad} &= M_{ad,p} + m_{ad,u}u_a + m_{ad,w}w_a + m_{ad,\varphi}\varphi_a \end{aligned} \quad (17.2)$$

ja kuna vaadeldava raami puhul $u_a = 0$ ning $w_a = 0$, siis

$$\begin{aligned} M_{ab} &= M_{ab,p} + m_{ab,\varphi}\varphi_a \\ M_{ac} &= M_{ac,p} + m_{ac,\varphi}\varphi_a \\ M_{ad} &= M_{ad,p} + m_{ad,\varphi}\varphi_a \end{aligned} \quad (17.3)$$

Saadud avaldistes on $M_{ab,p}$, $M_{ac,p}$ ja $M_{ad,p}$ koormusest põhjustatud paindemomendid sõlmes a vastavalt varrastes $a-b$, $a-c$ ning $a-d$, kui kõik kolm siiret võrduvad nulliga: $u_a = 0$, $w_a = 0$ ja $\varphi_a = 0$.

Avaldistes (17.2) esinevad sõlme a sisejõud $m_{ab,\varphi}$, $m_{ac,\varphi}$, $m_{ad,\varphi}$ on põhjustatud sõlme a ühikpöördest $\varphi_a = 1$. Valemid nende arvutamiseks saab tuletada jõumeetodi või tala diferentsiaalvõrrandi abil.

Valemite liikmed $m_{ab,\varphi}\varphi_a$, $m_{ac,\varphi}\varphi_a$ ja $m_{ad,\varphi}\varphi_a$ on sõlmes a tekkivad paindemomendid selle sõlme tegelikust pöördest φ_a .

Asetades paindemomentide avaldised (17.3) tasakaaluvõrrandisse (17.1), saame järgmise võrrandi

$$M_{ab,p} + m_{ab,\varphi}\varphi_a + M_{ac,p} + m_{ac,\varphi}\varphi_a + M_{ad,p} + m_{ad,\varphi}\varphi_a = 0 \quad (17.4)$$

ehk

$$(m_{ab,\varphi} + m_{ac,\varphi} + m_{ad,\varphi})\varphi_a + (M_{ab,p} + M_{ac,p} + M_{ad,p}) = 0 \quad (17.5)$$

Tundmatu φ_a kordaja ja vabaliikme võrrandis (17.5) tähistame vastavalt

$$\begin{aligned} r_{aa} &= m_{ab,\varphi} + m_{ac,\varphi} + m_{ad,\varphi} \\ r_{ap} &= M_{ab,p} + M_{ac,p} + M_{ad,p} \end{aligned} \quad (17.6)$$

Deformatsioonimeetodi tasakaaluvõrrandi (17.5) võib esitada nüüd kujul

$$r_{aa}\varphi_a + r_{ap} = 0 \quad (17.7)$$

millest leiame lisatundmatu sõlme a pöörde

$$\varphi_a = -\frac{r_{ap}}{r_{aa}} \quad (17.8)$$

ja avaldistega (17.3) arvutame paindemomendid sõlmes a .

17.3. Kinemaatilise määramatuse aste

Kui konstruktsioon on koormatud, siis koormuse mõjul see deformeerub, mille tagajärjel sõlmed pöörduvad ja siirduvad. Sõlmede siirdumine tähendab ühtlasi varraste pöördumist. Üksteisest sõltumatud sõlmede ja varraste pöörded on deformatsioonimeetodi puhul lisatundmatuteks ja nende arvu nimetatakse *kinemaatilise määramatuse astmeks*.

Jõumeetodiga ülesannet lahendades lähtusime staatikaga määramatuse astmest, mis näitas, kui palju on vaja kirjutada kinemaatilisi pidevustingimusi tundmatute sisejõudude ja reaktsioonide leidmiseks. Deformatsioonimeetodis annab kinemaatilise määramatuse aste tundmatute pöörete arvutamiseks vajalike tasakaaluvõrrandite arvu. Seetõttu ei ole meil praegu staatikaga määramatuse astet vaja teada, kuigi lahendame staatikaga määramatut ülesannet.

Kinemaatilise määramatuse astme leidmiseks tuleb välja selgitada üksteisest sõltumatute sõlmede ja varraste pöörete arv. Sõltumatuks pöördeks nimetatakse sellist pööret, mis saab toimuda teisi pöörded mõjutamata. Valem määramatuse astme leidmiseks koosneb seetõttu kahest osast, millest kumbki näitab ära vastavate lisatundmatute arvu ülesande lahendamisel. Esiteks võtame arvesse vabade jäikade sõlmede arvu, kuna jäikades sõlmedes on tundmatuteks nende sõlmede pöörded. Teiseks on vaja määrata selle raami varrasahela vabadusaste, mis näitab, kui palju saab olla raami varraste pöördumisel üksteisest sõltumatuid siirdeolukordi.

Sirgetest varrastest moodustatud raami kinemaatilise määramatuse astme leidmise üldvalemi võime seetõttu välja kirjutada järgmiselt

$$n^* = n_s + w \quad (17.9)$$

kus n_s on vabade jäikade sõlmede arv ning w on raami varrasahela vabadusaste.

Jäikade sõlmede kokkulugemisel arvestame ainult vabu sõlmi ehk neid sõlmi, mis ei ole seotud toepinnaga, kuna jäikadel tugeudel puuduvad varrastel pöördenurgad ja seetõttu ühtlasi ka tundmatud. Kuna valemi liige n_s võrdub alati vabade jäikade sõlmede arvuga, siis selle leidmine piirdubki visuaalsel teel arvutusskeemi jooniselt vastavate sõlmede loendamise ja millised sõlmed lugeda jäikadeks ja millised liigendsõlmedeks, seda on allpool täpsemalt selgitatud.

Vabadusastmega w on olukord keerulisem. Lihtsate arvutusskeemide puhul on seda samuti võimalik määrata visuaalsel teel, keerukamate raamide puhul tuleb aga kasutada vastavat valemit.

Vabadusastme arvutame varrasahelale, mille saame esialgselt raamist kõigi jäikade sõlmede asendamisel liigendsõlmedega. Vabadusastme arvutamisel lähtume samadest valemist, millega puutusime kokku peatükis 3.1.

Kuna varrasahelal on kõigis sõlmedes liigendid, siis võime seda vaadelda sõrestikskeemina ja seetõttu kasutada sõrestiku vabadusastme valemit (3.4)

$$w = 2s - v - t \quad (17.10)$$

kus s on sõlmede arv, v on varraste arv ja t on toesidemete arv.

Aga võime kasutada ka üldist vabadusastme valemit (3.1)

$$w = 3k - 2l - t \quad (17.11)$$

kus k on kujundite (ehk praegusel juhul varraste) arv, l on lihtliigendite arv (kusjuures me ei arvesta toeliigendeid) ja t on toesidemete arv.

Kinemaatilise määramatuse astme valemil (17.9) esineb ka erandjuhtum, kui raami varrasahela vabadusaste (17.10) või (17.11) võrdub nulliga või on negatiivne. Sel juhul võrdub kinemaatilise määramatuse aste vabade jäikade sõlmede arvuga

$$n^* = n_s, \quad \text{kui } w \leq 0 \quad (17.12)$$

Jäigad ja liigendsõlmed

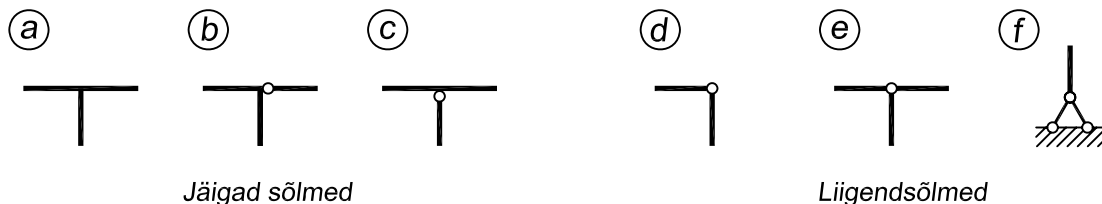
Kui sõlmes on kõik vardad ühendatud jäigalt või vastupidi, kõik vardad on ühendatud liigendiga, siis on sõlme tüüpi lihtne määrata. Kui aga mõned vardad on jäigalt ühendatud ja mõned liigendiga, läheb see keerulisemaks. Joonisel 17.3, a, b, c on esitatud raami jäigad ja d, e, f liigendsõlmed.

Kui sõlmes liituvad mitme erineva kinnitustüübiga vardad, siis ütleb lihtne reegel, et kui vähemalt kaks varrast on omavahel ühendatud jäigalt, siis on tegemist jäiga sõlmega ja selle sõlme pööre on üks tundmatu. Sellised sõlmed on kujutatud joonisel 17.3, b ja c .

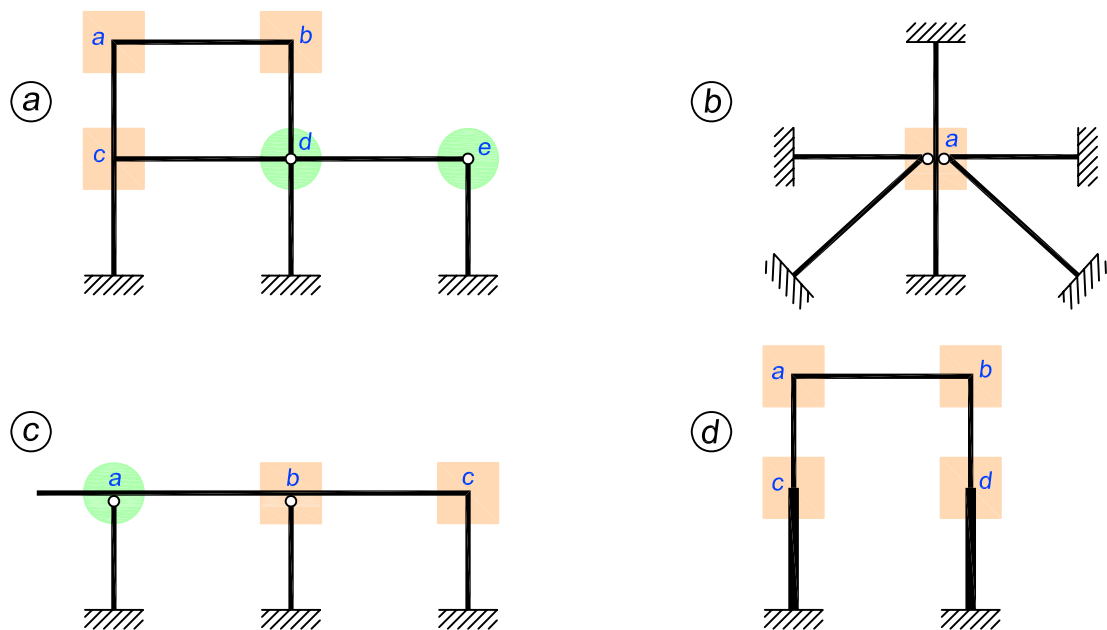
Joonisel 17.4, a kujutatud raamil on sõlme tüüpi lihtne määrata – sõlmed a, b ja c on jäigad, ning d ja e liigendsõlmed.

Kui sõlm koosneb mitmest erinevast varraste grupist, kus ühe grupi vardad on omavahel ühendatud jäigalt, samas erinevad varraste grupid liituvad üksteisega liigenditega, siis tuleb seda sõlme arvestada nii mitme jäiga sõlmena, kui palju on seal varraste gruppe. Joonisel 17.4, b kujutatud raami sõlm a vastab kolmele jäigale sõlmemele, kus ühe sõlme moodustavad kaks vasakpoolset varrast, teise sõlme püstised vardad ning kolmanda sõlme kaks parempoolset varrast.

Samas tuleb alati mõelda sellele, milliseid elemente me varrasteks loeme. Vardana ei arvestata ühest otsast kinnitatud elementi ehk konsooli. Sellest lähtuvalt võib joonisel 17.3, c kujutatud sõlm erinevates arvutusskeemides olla nii jäik kui ka liigendsõlm. Võrdleme joonisel 17.4, c kujutatud raami sõlmi a ja b , mis väliselt tunduvad ühesugused, aga deformatsioonimeetodi seisukohalt on täiesti erinevad. Sõlmest a vasakule poole jääb konsool, mida me vardana ei arvesta ja järelikult liituvad nimetatud sõlmes kaks varrast (post ja riiv), mis on



Joonis 17.3. Raami sõlmede tüübid



Joonis 17.4. Jäigad ja liigendsõlmed: jäigad sõlmed on tähistatud punase nelinurga ja liigendsõlmed roheline ringiga

teineteisega ühendatud liigendiga. Järelikult on seal tegemist liigendsõlmega. Sõlmes b liituvad aga kolm elementi (post ja kaks riivi), millest ükski ei ole konsool ja seetõttu arvestame neid kõiki varrastena. Vardad $b-a$ ja $b-c$ on teineteisega ühendatud jäigalt ja seetõttu on sõlm b jäik sõlm.

Kui sirgel vardal poole pealt ristlõige muutub, siis tuleb see koht lugeda ka sõlmeks. Nii on joonisel 17.4, d esitatud raamil jäigad sõlmed võetud lisaks nurkadele ka postide keskele, kuna seal läheb alumine jäigem osa üle peenemaks ülemiseks osaks.

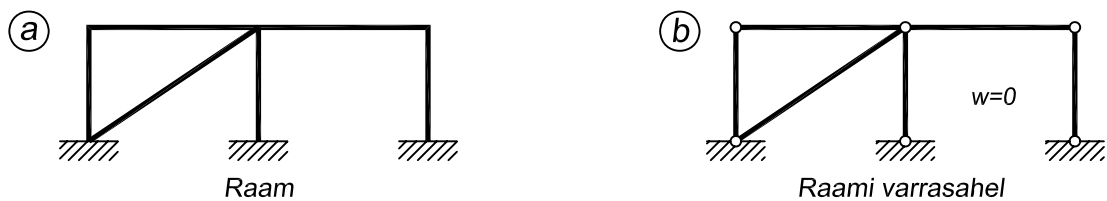
Raami varraste pöörded

Raami vardad on sõlmedes omavahel ühendatud ja varraste pöörded on teineteisest geomeetriselt sõltuvad. Tasakaalutingimuste välja kirjutamiseks on meil vaja teada varraste pöördenurki, mille arvutame raami varrasahela abil. Varrasahela saame raamist kõigi jäikade sõlmede asendamisel liigendsõlmedega. Varrasahelale arvutame välja vabadusaste, mis väljendab üksteisest sõltumatute siirdeolukordade arvu.

Kui varrasahela vabadusaste on null või negatiivne ($w \leq 0$), siis koormuse mõjumisel raami sõlmed küll pöörduvad, aga vardad mitte. Sellisele raamile ei ole vaja seetõttu varraste pöördenurki arvutada ning tasakaalutingimused on seotud ainult sõlmede pööretega.

Joonisel 17.5 on esitatud raam ning selle varrasahel. Varrasahela vabadusaste on $w = 2s - v - t = 2 \cdot 6 - 6 - 6 = 0$. Jooniselt võime ka ilma arvutamata näha, et raami vasakpoolses sildes on diagonaal, mis takistab postide pöördumist.

Kui varrasahela vabadusaste on võrdne ühega ($w = 1$), siis on raami kõigi varraste pöörded üksteisest sõltuvad. Sel juhul valime ühe varda baasvardaks, millele anname pöör-



Joonis 17.5. Nullvabadusastmega varrasahelal pöörded puuduvad

de (tavaliselt ühikpöörde) ja avaldame kõigi teiste varraste pöördenurgad selle funktsioonide-na. Baasvarda pööret tähistame ψ .

Joonisel 17.6, a on kujutatud raami deformeerumine horisontaalse koormuse F mõjul ning joonisel 17.6, b selle raami varrasahel, mille vabadusastmeks on $w = 2 \cdot 4 - 3 - 4 = 1$. Järelikult esineb sellel arvutuskeemil üks võimalik siirdeolukord. Pöörete arvutamisel on baasvardaks valitud varras $a-c$. Baasvarda pöörde tähistame seetõttu $\vartheta_{ac} = \psi = 1$. Riiv $a-b$ on ühendatud toepinna külge kahe vertikaalse postiga ja saab ainult horisontaalselt nihkuda. Järelikult on varda $a-b$ pööre null ($\vartheta_{ab} = 0$).

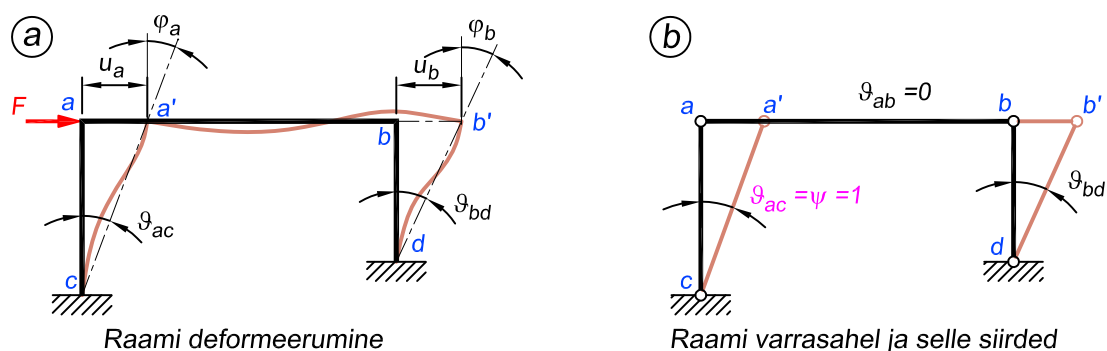
Posti $b-d$ pöörde leiame baasvarda pöörde ψ funktsioonina. Peatükis 17.1 toodud eelduste järgi on sõlmede a ja b horisontaalsed siirded võrdsed ning tingimusest $u_a = u_b$ ehk $\vartheta_{ac}l_{ac} = \vartheta_{bd}l_{bd}$ leiame varda $b-d$ pöörde siirdeolukorras $\psi = 1$

$$\vartheta_{bd} = \vartheta_{ac} \frac{l_{ac}}{l_{bd}} \quad (17.13)$$

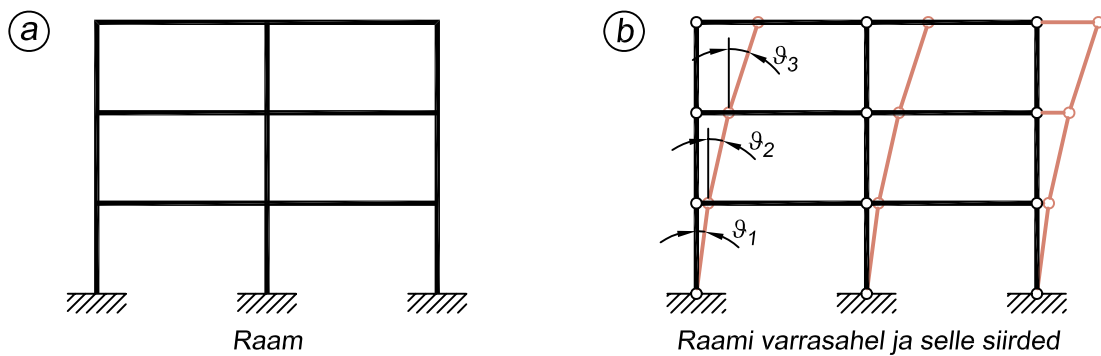
Varraste sõltumatute pöörete asemel võib võtta lisatundmatuteks ka sõlmede siirded. Sisulist erinevust ei ole, kuna üldjuhul sõlmede siirded arvutame poolusplaani varraste pöörete funktsioonidena. Vaadeldaval raamil on sõlmede siirete ja varraste pöörete vahel seosed

$$u_a = l_{ac}\vartheta_{ac}; \quad u_b = l_{bd}\vartheta_{bd} \quad (17.14)$$

ning seepärast ei ole sisulist erinevust tundmatute φ_a , φ_b , ψ ja tundmatute φ_a , φ_b , u_a vahel (valime praegu tundmatuks näiteks sõlme a siirde, kuna $u_a = u_b$).



Joonis 17.6. Raami deformeerumine koormuse mõjul ja varraste pöörded



Joonis 17.7. Raami postide pöördumine

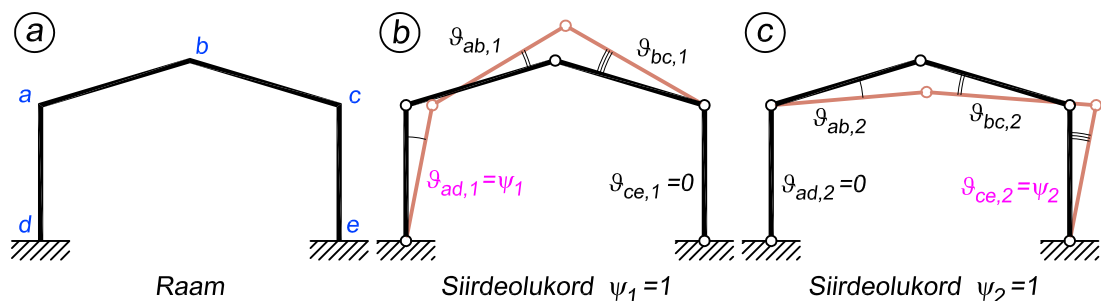
Kui varrasahela vabadusaste on ühest suurem ($w > 1$), siis ei ole kõigi varraste pöörded üksteisest sõltuvad. Näiteks joonisel 17.7 kujutatud raami varrasahela vabadusaste on $w = 2 \cdot 12 - 15 - 6 = 3$, mis tähendab, et sellel raamil saab olla kolm üksteisest sõltumatut siirdeolukorda. Sama korruse postid pöörduvad võrdse nurga võrra, kuna need on omavahel riividega ühendatud, kuid erinevatel korrustel võivad pöörded olla erinevad.

Varrasahelat vaatleme nii mitme üksteisest erineva ühe vabadusastmega kinemaatilise ketina, kui suur on varraste sõltumatute pöördenurkade arv w . Igas ühe vabadusastmega kinemaatilises ketis valime ühe varda baasvardaks ja anname sellele pöörde ning teiste varraste pöörded avaldame selle sõltumatu pöörde funktsioonidena. Baasvarda pöörde ($c = 1, 2, \dots, w$) igas siirdeolukorras tähistame nüüd ψ_c , kus indeks c tähistab siirdeolukorra numbrit ($c = 1, 2, \dots, w$). Raami varraste lõplikud pöörded avaldame nende sõltumatute pöörete kaudu

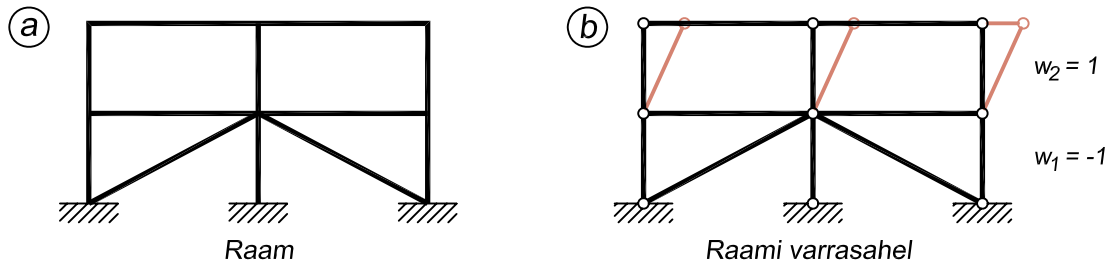
$$\vartheta_{jk} = \vartheta_{jk,1}\psi_1 + \vartheta_{jk,2}\psi_2 + \dots + \vartheta_{jk,w}\psi_w = \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c}\psi_c \quad (17.15)$$

kus $\vartheta_{jk,c}$ on varda j - k pööre siirdeolukorras $\psi_c = 1$.

Joonisel 17.8 kujutatud raami varrasahela vabadusaste $w = 2 \cdot 5 - 4 - 4 = 2$. Raamil on järelikult kaks teineteisest sõltumatut siirdeolukorda. Näiteks siirdeolukorras $\psi_1 = 1$ ei pöördu parempoolne (joonis 17.8, b) ja siirdeolukorras $\psi_2 = 1$ vasakpoolne post (joonis 17.8, c).



Joonis 17.8. Raami kaks teineteisest sõltumatut siirdeolukorda



Joonis 17.9. Erinevatel korrustel võib vabadusaste olla erinev

Joonisel 17.8, a on baasvarda pöördeks $\psi_1 = \vartheta_{ad,1}$ ja joonisel 17.8, b $\psi_2 = \vartheta_{ce,2}$. Varraste pöörded avaldame baasvarraste kaudu valemiga (17.15)

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{ad} &= \vartheta_{ad,1}\psi_1 + \vartheta_{ad,2}\psi_2 = \vartheta_{ad,1}\psi_1 + 0 \cdot \psi_2 = \vartheta_{ad,1}\psi_1 \\
 \vartheta_{ab} &= \vartheta_{ab,1}\psi_1 + \vartheta_{ab,2}\psi_2 \\
 \vartheta_{bc} &= \vartheta_{bc,1}\psi_1 + \vartheta_{bc,2}\psi_2 \\
 \vartheta_{ce} &= \vartheta_{ce,1}\psi_1 + \vartheta_{ce,2}\psi_2 = 0 \cdot \psi_1 + \vartheta_{ce,2}\psi_2 = \vartheta_{ce,2}\psi_2
 \end{aligned}
 \tag{17.16}$$

Keerukamate raamide korral võib esineda olukord, kus raami erinevate osade vabadusastet tuleb kontrollida eraldi. Näiteks tingimus $w \leq 0$ on vajalik, kuid mitte küllaldane selleks, et raami vardad ei pöörduks. Valemi (17.10) järgi arvutades on joonisel 17.9 kujutatud raami varrasahela üldine vabadusaste $w = 2 \cdot 9 - 12 - 6 = 0$, mis võiks tähendada, et sellel skeemil vardad pöörduda ei saa. Kuid siin tuleb vaadata kumbagi korrust eraldi. Kuna raami alumisel korrusel on üks liigne varras ja $w_1 = 2 \cdot 6 - 7 - 6 = -1$ ning ülemise korruse vabadusaste $w_2 = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$, siis raami kinemaatilise määramatuse astme arvutamisel tuleb lähtuda teise korruse vabadusastmest: $n^* = n_s + w_2 = 6 + 1 = 7$.

Kaldu olevate riivide ja viltuste postidega raamide varrasahela varraste pöörded leiame poolusplaanist. Varrasahela ühele vardale anname siirdeolukorras $\psi_c = 1$ (kus $c = 1, 2, \dots, w$) ühikpöörde ja teiste varraste pöörded arvutame poolusplaanist selle varda pöörde funktsioonidena.

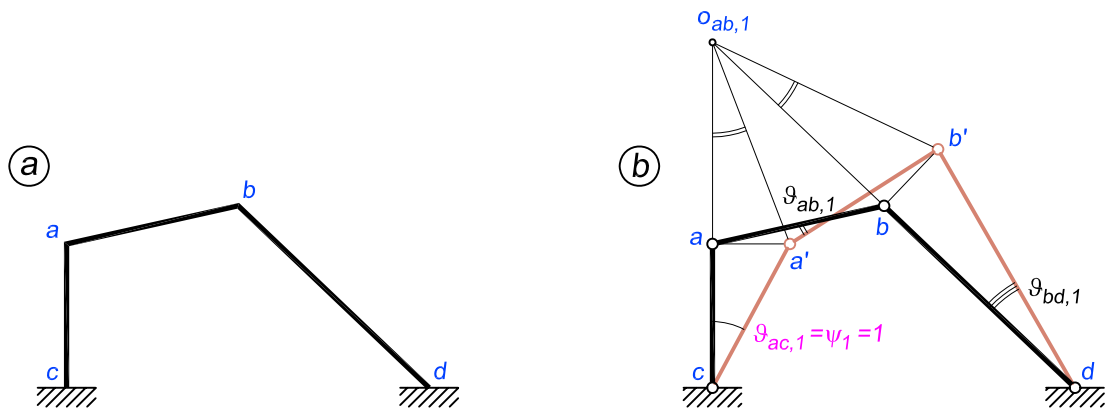
Varda pööre päripäeva ümber peapooluse on positiivne.

Joonisel 17.10 kujutatud raami varrasahela vabadusaste on $w = 2 \cdot 4 - 3 - 4 = 1$. Varrasahela siirdeolukorras $\psi_1 = 1$ (joonis 17.10, b) pöörduvad vardad $a-c$ ja $b-d$ ümber toesõlmede c ning d , mis on ka nende varraste peapoolusteks.

Varras $a-b$ toetub varrastele $a-c$ ja $b-d$. Vastavalt peatükis 3.2 kirjeldatule paikneb kahele mitteparalleelsele vardale toetuva kolmanda varda peapoolus teda toetavate varraste sihtide lõikumise punktis. Seega on sirgete $a-c$ ja $b-d$ lõikepunkt $o_{ab,1}$ varda $a-b$ peapooluseks. Sellega on kõigi varraste peapoolused leitud.

Siirdeolukorras $\psi_1 = 1$ anname vardale $a-c$ pöörde $\vartheta_{ac,1} = 1$. Kolmnurkadel $c-a-d'$ ja $o_{ab,1}-a-d'$ on ühine külg $a-d'$. Sellest tingimusest

$$l_{ac}\vartheta_{ac,1} = -l_{ao_{ab,1}}\vartheta_{ab,1} \tag{17.17}$$



Joonis 17.10. Kaldvarrastega raami pöörded

leiame varda $a-b$ pöörded

$$\vartheta_{ab,1} = -\frac{\vartheta_{ac,1}l_{ac}}{l_{a-o_{ab,1}}} = -\frac{1l_{ac}}{l_{a-o_{ab,1}}} \quad (17.18)$$

Kolmnurkade $o_{ab,1}-b-b'$ ja $d-b-b'$ ühise külje $b-b'$ võrdseuse tingimusest

$$-l_{b-o_{ab,1}}\vartheta_{ab,1} = l_{bd}\vartheta_{bd,1} \quad (17.19)$$

arvutame varda $b-d$ pöörded

$$\vartheta_{bd,1} = -\frac{\vartheta_{ab,1}l_{b-o_{ab,1}}}{l_{bd}} \quad (17.20)$$

või asendades pöörded $\vartheta_{ab,1}$ avaldisega (17.18)

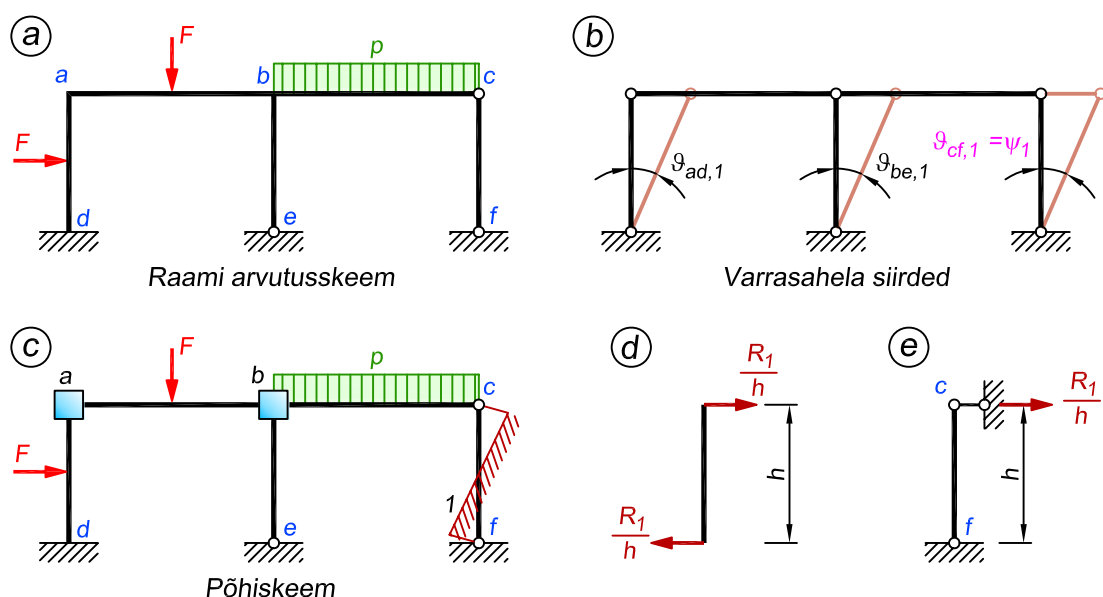
$$\vartheta_{bd,1} = \frac{\frac{1l_{ac}}{l_{a-o_{ab,1}}}l_{b-o_{ab,1}}}{l_{bd}} \quad (17.21)$$

Kolmnurkade võrdsete külgede tingimustes (17.17) ja (17.19) on korrutise, mille üheks teguriks on $\vartheta_{ab,1}$, ees miinusmärk, sest $\vartheta_{ab,1}$ on negatiivne. Varda $a-b$ pööre on negatiivne, kuna varras pöördub peapooluse $o_{ab,1}$ suhtes vastupäeva.

17.4. Kinemaatiliselt määratud põhiskeem

Raami arvutamisel deformatsioonimeetodiga teeme arvutused kinemaatiliselt määratud põhiskeemi järgi. Raam on kinemaatiliselt määratud, kui kõik lisatundmatute suurused on antud. Deformatsioonimeetodi puhul on lisatundmatuteks kinemaatilised suurused – sõlmede ja varraste pöörded, mis on põhiskeemis võrdsed nulliga. Sellise skeemi saame, kui staatikaga määramatule arvutusskeemile paneme lisaedmed, mis takistavad sõlmede ja varraste pöördumist. Lisada tuleb nii mitu sidet, kui suur on kinemaatilise määramatuse aste. Kinemaatilise määramatuse astme leiame valemitega (17.9) või (17.12)

$$n^* = n_s + w, \quad \text{kus} \quad w = 2s - v - t \quad (17.22)$$



Joonis 17.11. Põhiskeemi moodustamine deformatsioonimeetodiga lahendades

Sõlmede pöördumist takistavate sidemete arv võrdub vabade jäikade sõlmede arvuga n_s . Igasse jäika sõlme paneme ühe sõlme pööret takistava sideme. Varraste pöördumist takistavate sidemete arv võrdub raami varrasahela vabadusastmega w . Varraste pöördumist takistavad sidemed asetame nii, et ükski varras ei saa pöörduda. Pärast sidemete lisamist on kinemaatilist määratud põhiskeemis koormusest põhjustatud sõlmede ja varrasde pöörded nullid

$$\varphi_j = 0; \quad \psi_c = 0 \quad (c = 1, 2, \dots, w) \quad (17.23)$$

Joonisel 17.11, a kujutatud raamil on kaks vaba jäika sõlme a ja b ning varrasahelal on üks võimalik siirdeolukord (joonis 17.11, b). Raami kinemaatilise määramatuse aste on seega $n^* = n_s + w = 2 + 1 = 3$. Seda, et esineb ainult üks siirdeolukord, võime määrata varrasahela skeemi visuaalselt hinnates, või vabadusastme arvutamise teel, kus $w = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$.

Joonisel 17.11, c on esitatud kinemaatilist määratud põhiskeem, mille mõlemas jäigas sõlmes a ja b on sõlme pöördumist takistav side ning ühel postil varda pöördumist takistav side. Millisele postile me selle sideme lisame, sellel tähtsust ei ole, kuna siirdeolukorras $\psi_1 = 1$ pöörduvad kõik postid koos. Esitatud põhiskeemil on see parempoolsel postil. Sõlmede pööret takistavaid sidemeid tähistame neile vastavate sõlmede tähistega a ja b . Varraste pööret takistavaid sidemeid tähistame numbritega alates ühest, kusjuures see peab kattuma sideme poolt takistatud siirdeolukorra numbriga.

Märgime veel, et sõlme pandud lisaside takistab ainult kinemaatilist määratud põhiskeemi sõlme pööret, kuid ei takista sõlme siiret. Vardale pandud lisaside takistab kinemaatilist määratud põhiskeemis varda pööret, kuid ei takista varda siiret.

Kuna lisasidemed takistavad sõlmede ja varrasde pöördumist, siis nendes tekkivad reaktsioonid on momendid. Posti c - f pööret takistavas sidemes l tekkivat reaktsioonmomenti võime esitada jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude

suurusteks on reaktsioonmoment jagatud varda pikkusega: $\frac{R_1}{h}$ (joonis 17.11, *d*). Kui varda ühe otsa siire on null (joonisel 17.11 toesõlm *f*), siis võime varda pöoret takistava sideme asendada varda vaba sõlme siiret takistava sidemega (joonis 17.11, *e*). Selle sideme paneme risti varda teljega ja sidemes tekkivat reaktsiooni vaatleme kui jõupaari komponenti suurusega $\frac{R_1}{h}$, milles R_1 on reaktsioonmoment ja h varda pikkus.

Varda pöoret takistava sideme võib panna ka postile *a-d* või *b-e*. Selle asukoht ei ole kindlaks määratud (eespool mainisime, et praegusel juhul pöörduvad kõik postid koos), nagu on sõlmede pöoret takistavate sidemete puhul. Arvutuse juures ei tarvitse näidata varda pöoret takistava sideme asukohta, vaid näitame varrasahela võimaliku siirdeolukorra sideme puudumisel. Joonisel 17.11, *b* on näidatud vaadeldava raami võimalik siirdeolukord.

Raamide arvutamisel ei ole oluline, kus asuvad varda pöoret või sõlme siiret takistavad sidemed. Oluline on, et sellise sideme eemaldamisel varrasahela võimalikus siirdeolukorras pöördunud varraste arv oleks minimaalne. Varrasahela võimalike siirdeolukordade $\psi_c = 1$ ($c = 1, 2, \dots, w$) valik on suvaline, kuid nad ei tohi olla üksteisest lineaarselt sõltuvad.

Korrasraamide põhiskeem

Korrasraamide arvutamisel on sõlmede ja varraste pöoret takistavate sidemetega kinemaatilisel määratud põhiskeem tunduvalt kasulikum kui sõlmede pöoret ja siiret takistavate sidemetega põhiskeem.

Joonisel 17.12, *a* esitatud raam on 12 korda kinemaatilisel määratu. Vabade jäikade sõlmede arv $n_s = 9$ ja varraste liikumise vabadusaste $w = 2 \cdot 12 - 15 - 6 = 3$. Varrasahela varraste pöoret takistavate sidemetega põhiskeem on näidatud joonisel 17.12, *b* ja sõlmede siiret takistavate sidemetega joonisel 17.12, *c*.

Joonistel 17.12, *d*, *e* ja *f* on kujutatud varrasahela kolm võimalikku siirdeolukorda $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 1$ ja $\psi_3 = 1$. Siirdeolukorrad $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 1$ ja $\psi_3 = 1$ saame vastavalt esimese, teise ja kolmanda korruse posti pöoret takistava sideme eemaldamisel. Igal niisugusel võimalikul siirdeolukorral on pöördunud ainult ühe korruse postid.

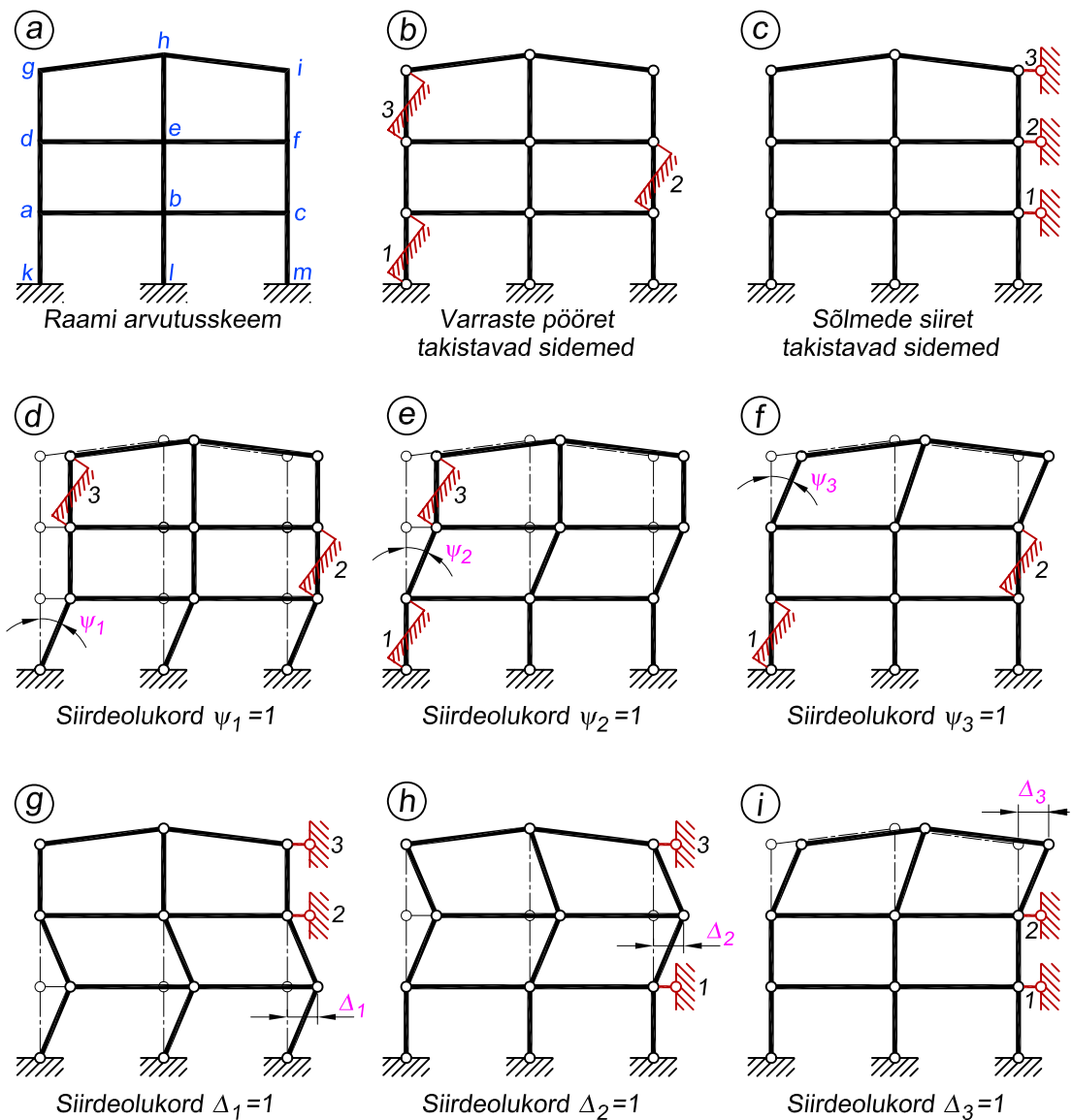
Joonistel 17.12, *g*, *h* ja *i* on näidatud võimalikud siirdeolukorrad $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$ ja $\Delta_3 = 1$, mille saame vastavalt sõlme *c*, *f* või *i* siiret takistava sideme eemaldamisel. Nendel siirdeolukordadel on pöördunud kahe korruse postid ja ainult ühel siirdeolukorral, mis vastab ülemise korruse posti ülemise sõlme siiret takistavale sidemele, on pöördunud ühe (ülemise) korruse postid.

Deformatsiooni- ja jõumeetodi põhiskeemide võrdlus

Deformatsiooni- ja jõumeetodi põhiskeemid erinevad teineteisest täielikult.

Jõumeetodi staatikaga määratava põhiskeemi saame staatikaga määratutust arvutusskeemist liigsete sidemete eemaldamisega. Deformatsioonimeetodi kinemaatilisel määratud põhiskeemi saame aga vastupidiselt staatikaga määratule arvutusskeemile lisasidemete juurdepanemisega.

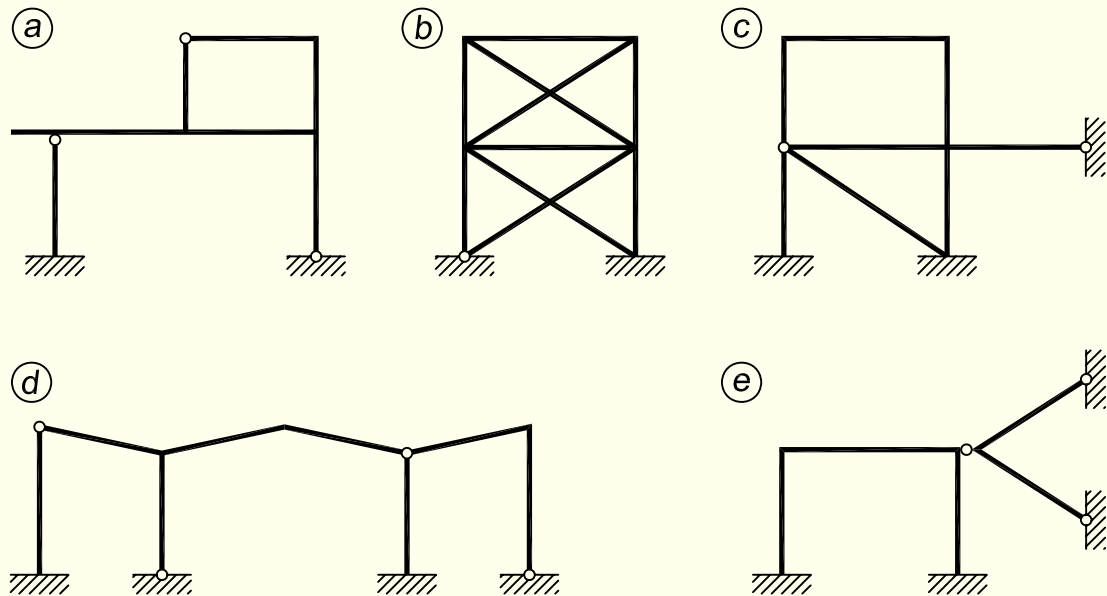
Jõumeetodi staatikaga määratav põhiskeem võib olla mitmesugune, kuna n korda staatikaga määratutust arvutusskeemist on võimalik eemaldada n liigset sidet erinevatest kohtadest.



Joonis 17.12. Korrusraami varrasahela võimalikud siirdeolukorrad

Deformatsioonimeetodi põhiskeem on kinemaatiliselt määratud ning sõlmede ja varraste pöörded on nullid. Seepärast on igal raamil ainult üks kinemaatiliselt määratud põhiskeem. Raamide lahendamisel, mille varrasahela vabadusaste on suurem kui üks ($w > 1$), võivad aga esineda teatud erinevused. Need on tingitud sellest, et baasvarraste sõltumatud pöörded $\psi_c = 1$ ($c = 1, 2, \dots, w$), mis määravad varraste pöördenurgad, on valitud erinevalt.

NÄIDE 17.1. Arvutada joonisel 17.13 kujutatud arvutuskeemide kinemaatilise määramatuse aste ja koostada põhiskeemid. Skeemil *b* mööduvad diagonaalid teineteisest lõikumata ja seetõttu pole selles kohas ka sõlme.



Joonis 17.13. Arvutuskeemid

LAHENDUS

Skeem *a*

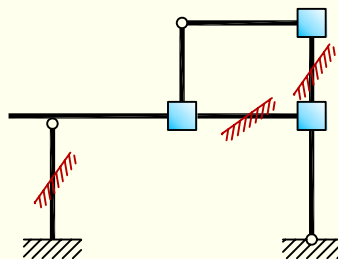
Kasutame valemit (17.9)

$$n^* = n_s + w = 3 + 3 = 6$$

kus varrasahela (joonis 17.15) vabadusaste on

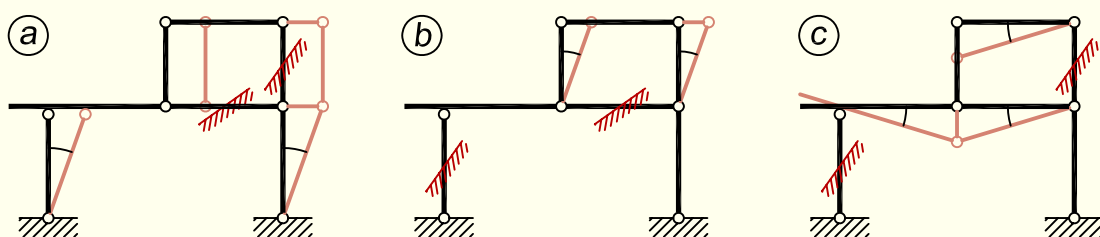
$$w = 2s - v - t = 2 \cdot 7 - 7 - 4 = 3$$

Arvutuskeem on kuuekordselt kinemaatiliselt määramata. Vabade jäikade sõlmede arv n_s näitab, et sõlmede pööret takistavaid sidemeid tuleb lisada kolm. Vabadusaste w näitab, et varraste pööret takistavaid sidemeid on samuti kolm. Põhiskeem koos nimetatud sidemetega on näidatud joonisel 17.14.



Joonis 17.14. Skeemi *a* põhiskeem

Selleks, et paremini mõista, milliste varraste juurde märkida varraste pööret takistavad sidemed, vaatame joonisel 17.15 esitatud kolme võimalikku varrasahela siirete skeemi. Side, mis on paigutatud vasakpoolse posti külge (joonis 17.14), takistab raami esimese korruse postide pöördumist. Selle sideme eemaldamisel tekib siirdeolukord on näidatud joonisel 17.15, a. Pöörduvad ainult esimese korruse postid, teised vardad säilitavad oma esialgse asendi ja nihkuvad ainult uude asukohta. Kumba posti külge see side esimesel korrusel panna, sellel tähtsust ei ole, sest mõlemal juhul takistab see ühesugust siiret.



Joonis 17.15. Skeemi a kolm võimalikku varrasahela siirete skeemi

Joonisel 17.15, b on esitatud siirdeolukord, mis tekib, kui teise korruse postidelt side eemaldada. Kumba posti juurde põhiskeemis see side märkida, jällegi tähtsust ei ole, kuna mõlemad postid pöörduvad ühtemoodi ja takistab see side järeltõttu ühte siirdeolukorda.

Joonisel 17.15, c on esitatud siirdeolukord, mis tekib, kui eemaldada side riividelt. Selle sideme võib märkida ükskõik millisele horisontaalsele vardale, kuna kõigi kolme varda pöörded on üksteisest sõltuvad ja esineda saab üks võimalik siirdeolukord.

Skeem b

Selle arvutuskeemi puhul leiame esmalt varrasahela (joonis 17.16, a) vabadusastme

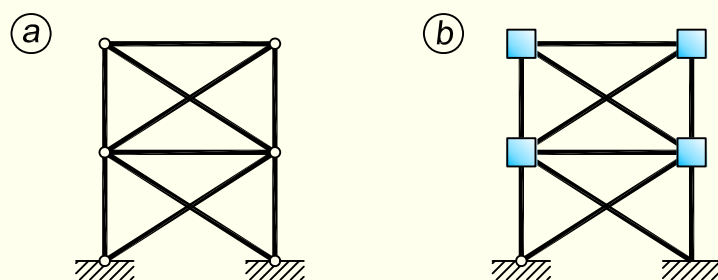
$$w = 2 \cdot 6 - 10 - 4 = -2$$

Selgub, et vabadusaste on negatiivne ja vastavalt valemile (17.12) võrdub seetõttu kinemaatilise määramatuse aste vabade jäikade sõlmede arvuga

$$n^* = n_s = 4$$

Lisame arvutuskeemile neli sõlmede pööret takistavat sidet (joonis 17.16, b). Kuna vabadusaste on negatiivne, siis varraste pööret takistavaid sidemeid me sellele arvutuskeemile ei pane.

See on arvutuskeem, mille varrasahela puhul on ilmselge, et meil ei ole võimalik varrastele mingisuguseid pöörded anda, kuna mõlemal korrusel on mitu diagonaali. Seetõttu polekski vaja vabadusastet arvutada, vaid võime kohe lähtuda valemist (17.12).



Joonis 17.16. Skeemi *b* varrasahel ja põhiskeem

Skeem *c*

Selle arvutuskeemi varrasahela (joonis 17.17, *a*) üldine vabadusaste ei anna meile piisavalt infot ja siin tuleb vaadata korruseid eraldi. Esimese korruse varrasahela vabadusaste on

$$w_1 = 2 \cdot 5 - 5 - 6 = -1$$

Teise korruse varrasahela vabadusastmeks saame

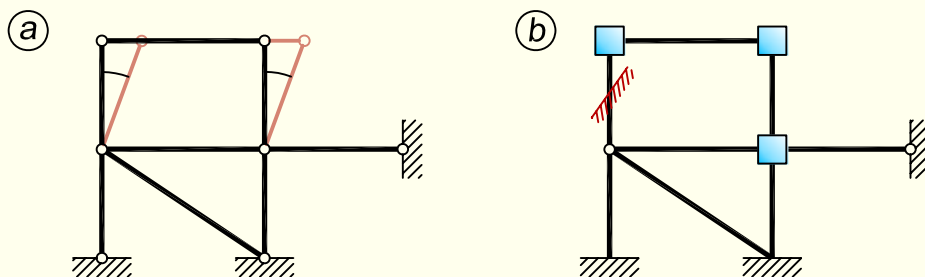
$$w_2 = 2 \cdot 4 - 3 - 4 = 1$$

Raami kinemaatilise määramatuse aste on seega

$$n^* = n_s + w_2 = 3 + 1 = 4$$

ja lisada tuleb kolm sõlmede pööret takistavat sidet ning üks varraste pööret takistav side teise korruse postidele (joonis 17.17, *b*). Joonisel 17.17, *a* on näidatud võimalik siirdeolukord varraste pööret takistava sideme eemaldamisel.

Ka see on arvutuskeem, kus piisava kogemuse korral võib loobuda vabadusastmete arvutamisest. Varrasahelat visuaalselt hinnates on näha, et esimese korruse varraste pöördumist takistab nii diagonaal kui ka paremal olev tugi. Seetõttu pole esimesele korrusele vaja lisada ühtegi varraste pööret takistavat sidet. Teise korruse vardad moodustavad aga nelinurga, mille postidele saame ilma igasuguse takistuseta anda pöörde. Selle pöörde takistamiseks lisame postidele sideme.



Joonis 17.17. Skeemi *c* ainuke võimalik varrasahela siirete skeem ja põhiskeem

Skeem d

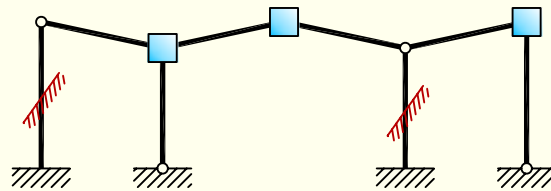
Kasutame siin tavalist valemit (17.9)

$$n^* = n_s + w = 3 + 2 = 5$$

kus

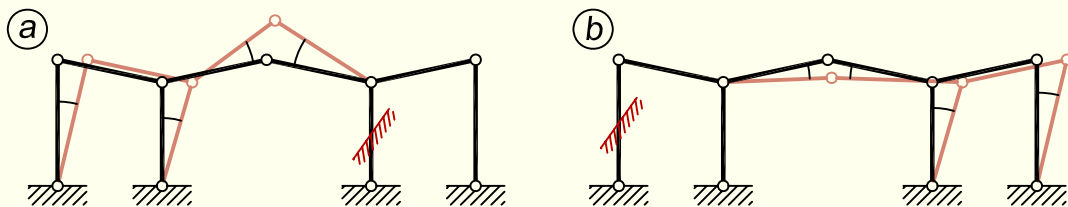
$$w = 2 \cdot 9 - 8 - 8 = 2$$

Põhiskeemi moodustamiseks lisame arvutuskeemile kolm sõlmede ning kaks varraste pööret takistavat sidet (joonis 17.18). Ühe varraste pööret takistava sideme paigutame raami vasaku poole ühele postile ning teise sideme raami parema poole ühele postile. Kummalgi raami poolel ei ole oluline, millisele postile side paigutada, kuna ühe poole postid pöörduvad koos.



Joonis 17.18. Skeemi d põhiskeem

Varraste pööret takistavate sidemete paigutuse mõistmiseks lähtume joonisest 17.19, kus on esitatud kaks võimalikku siirdeolukorda. Joonisel 17.19, a on näidatud siirdeolukord, mis tekib vasakpoolse sideme eemaldamisel ning joonisel 17.19, b siirdeolukord parempoolse sideme eemaldamisel.



Joonis 17.19. Skeemi d kaks võimalikku varrasahela siirete skeemi

Selle arvutuskeemi siirdeolukorrad on tingitud riivide erinevusest keskmises ja äärmistes silletes. Äärmistes silletes on postid omavahel ühendatud ühe vardaga ja seetõttu peavad pöörduma koos. Keskmises sildes on aga kaks kaldriivi, mis saavad teineteise suhtes pöörduda ja võimaldavad seega erinevalt pöörduda ka sildest kummalegi poole jäävatel postidel.

Skeem e

Raami joonist visuaalselt hinnates on selgelt näha, et varraste pöörideid siin olla ei saa.

Seetõttu võrdub kinemaatilise määramatuse aste vastavalt valemile (17.12) vabade jäikade sõlmede arvuga

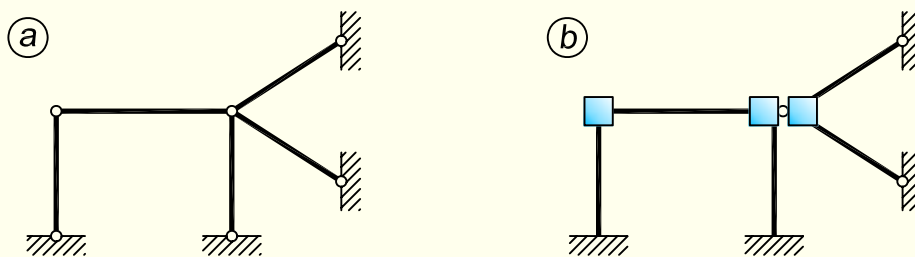
$$n^* = n_s = 3$$

kus vabade jäikade sõlmedena lähevad arvesse ülemine vasak nurgasõlm ning üleval keskmises sõlmes kummalgi pool liigendit olevad kaks jäika nurka.

Aga katsume ka arvutuslikult tõestada, et vardad ei saa pöörduda. Kasutame selleks tavapärasest vabadusastme valemit (17.10). Raami varrasahela (joonis 17.20, a) vabadusastmeks saame

$$w = 2 \cdot 6 - 5 - 8 = -1$$

Kuna vabadusaste on negatiivne, siis raami vardad pöörduda ei saa ning kinemaatilise määramatuse aste võrdub vabade jäikade sõlmede arvuga, nagu ülensande alguses sai kirja pandud. Põhiskeemi moodustamiseks paigutame vabadesse jäikadesse sõlmedesse sõlme pööret takistavad sidemed. Negatiivse vabadusastme tõttu varraste pööret takistavaid sidemeid me ei kasuta. Raami kinemaatiliselt määratud põhiskeem on esitatud joonisel 17.20, b.



Joonis 17.20. Skeemi e varrasahel ja põhiskeem

17.5. Varda otste kinnituumomentide leidmine koormusest

Kinnituumomentideks nimetatakse kinemaatiliselt määratud põhiskeemis koormusest ning sõlmede ja varraste pööretest põhjustatud paindemomente varraste otses. Neid läheb meil edaspidi vaja deformatsioonimeetodi tasakaaluvõrrandite väljakirjutamiseks.

17.5.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras

Lauskoormus

Kinnituumomendid M_{jp} ja M_{kp} koormusest (joonis 17.21, a ja b) leiame jõumeetodiga. Valemid tuletame sirgete ja konstantse ristlõikega varraste jaoks. Staatikaga määratava põhiskeemi saame, kui jäikade otsatugedega tala asendada lihttalaga. Põhiskeem ja lisatundmatud on näidatud joonisel 17.21, c. Eelduse $\varepsilon = 0$ tõttu on lisatundmatuid kaks. Kinemaatilistele

tingimustele $\varphi_j = 0$ ja $\varphi_k = 0$ vastavalt koostame kaks võrrandit lisatundmatute määramiseks

$$\begin{aligned}\delta_{jj}M_{jp} + \delta_{jk}M_{kp} + \Delta_{jp} &= 0 \\ \delta_{kj}M_{jp} + \delta_{kk}M_{kp} + \Delta_{kp} &= 0\end{aligned}\quad (17.24)$$

Momendid M_{jp} ja M_{kp} on positiivsed, kui nad varda suhtes mõjuvad vastupäeva (joonis 17.21, a, c, e ja f). Koormusest ning ühiktundmatutest $M_{jp} = 1$ ja $M_{kp} = 1$ põhjustatud epüürid on kujutatud joonisel 17.21, d, e ja f. Võrrandisüsteemis (17.24) esinevad siirded on järgmised

$$\delta_{jj} = \int_0^l \frac{m_j m_j}{EI} dx = \frac{l}{3EI}; \quad \delta_{jk} = \delta_{kj} = \int_0^l \frac{m_j m_k}{EI} dx = -\frac{l}{6EI}; \quad \delta_{kk} = \int_0^l \frac{m_k m_k}{EI} dx = \frac{l}{3EI} \quad (17.25)$$

$$\Delta_{jp} = \int_0^l \frac{m_j M_p^0}{EI} dx = -\frac{pl^3}{24EI}; \quad \Delta_{kp} = \int_0^l \frac{m_k M_p^0}{EI} dx = \frac{pl^3}{24EI} \quad (17.26)$$

milles EI on varda paindejäikus.

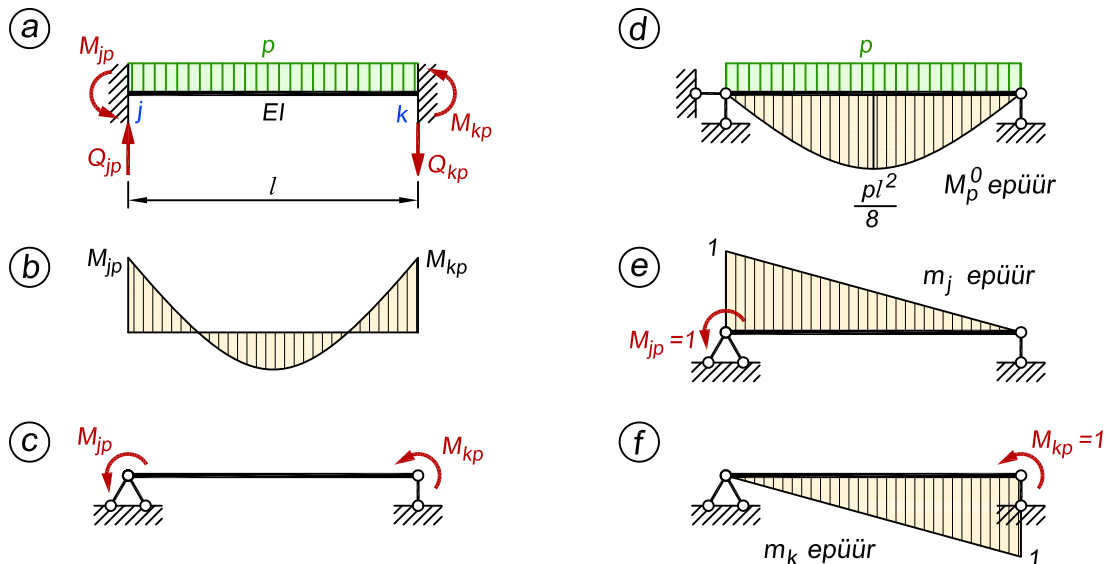
Võrrandisüsteemi (17.24) lahend on järgmine

$$M_{jp} = \frac{pl^2}{12}; \quad M_{kp} = -\frac{pl^2}{12} \quad (17.27)$$

Põikjõud varda otstes on

$$Q_{jp} = \frac{pl}{2}; \quad Q_{kp} = -\frac{pl}{2} \quad (17.28)$$

Valemid varda otste kinnituumomentide arvutamiseks sõltuvalt koormuse tüübist on antud tabelis 17.1 leheküljel 751.



Joonis 17.21. Lauskoormus mõlemast otsast jäigalt kinnitatud vardal

Koondjõud

Kui varras on koormatud koondjõuga (joonis 17.22, a), siis on põhiskeem ja lisatundmatud samad nagu lauskoormuse korralgi. Staatikaga määratav põhiskeem ja lisatundmatud on näidatud joonisel 17.22, c. Kasutame lahendamisel võrrandisüsteemi (17.24).

Koormusest ning ühiktundmatutest $M_{jp} = 1$ ja $M_{kp} = 1$ põhjustatud epüürid on kujutatud joonisel 17.22, d, e ja f. Võrrandisüsteemis (17.24) esinevad siirded on järgmised

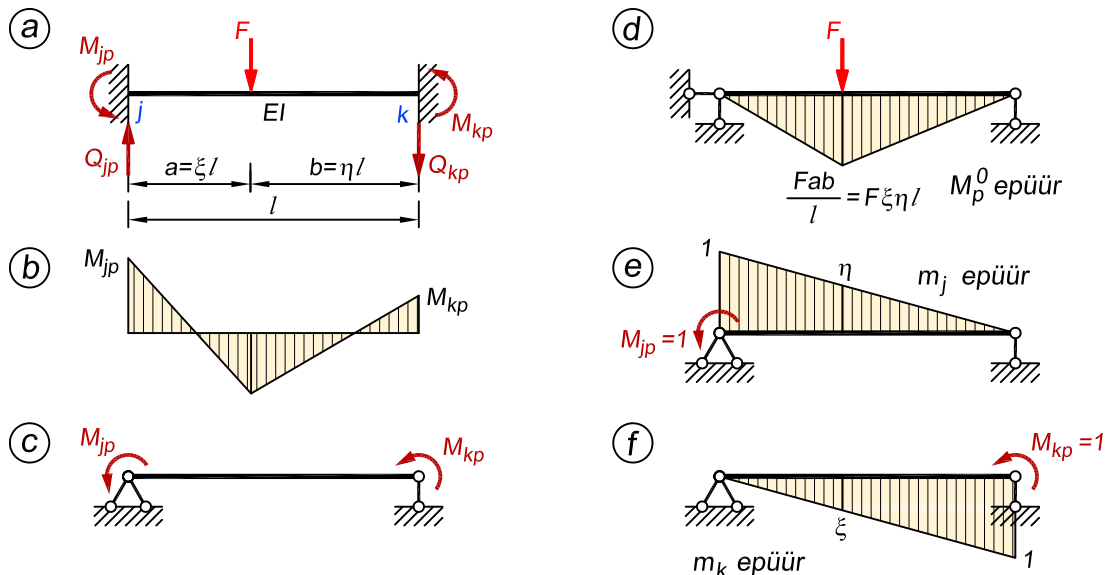
$$\delta_{jj} = \int_0^l \frac{m_j m_j}{EI} dx = \frac{l}{3EI}; \quad \delta_{jk} = \delta_{kj} = \int_0^l \frac{m_j m_k}{EI} dx = -\frac{l}{6EI}; \quad \delta_{kk} = \int_0^l \frac{m_k m_k}{EI} dx = \frac{l}{3EI} \quad (17.29)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{jp} &= \int_0^l \frac{m_j M_p^0}{EI} dx = -\frac{\xi l}{6EI} \left(0 + 4 \cdot \frac{F\xi\eta l}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} + F\xi\eta^2 l \right) - \frac{\eta l}{3EI} \cdot F\xi\eta l \cdot \eta = \\ &= -\frac{1}{3EI} F\xi\eta l^2 \left[\frac{1}{2}\xi + \eta(\xi + \eta) \right] = -\frac{1}{3EI} F\xi\eta l^2 \left(\frac{1}{2}\xi + \eta \right) \end{aligned} \quad (17.30)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{kp} &= \int_0^l \frac{m_k M_p^0}{EI} dx = \frac{\xi l}{3EI} \cdot F\xi\eta l \cdot \xi + \frac{\eta l}{6EI} \left(F\xi\eta l \cdot \xi + 4 \cdot \frac{F\xi\eta l}{2} \cdot \frac{1+\xi}{2} + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{3EI} F\xi\eta l^2 \left[\frac{1}{2}\eta + \xi(\xi + \eta) \right] = \frac{1}{3EI} F\xi\eta l^2 \left(\frac{1}{2}\eta + \xi \right) \end{aligned} \quad (17.31)$$

Võrrandisüsteemi (17.24) lahend on järgmine

$$M_{jp} = Fa\eta^2; \quad M_{kp} = -Fb\xi^2 \quad (17.32)$$



Joonis 17.22. Koondjõud mõlemast otsast jäigalt kinnitatud vardal

Põikjõu määramiseks varda otstes kasutame jõumeetodist tuttavat valemit, aga arvestame ka deformatsioonimeetodi paindemomendi märgireeglit

$$Q = Q^0 + \frac{M_{kp} + M_{jp}}{l} \quad (17.33)$$

Põikjõud varda vasakus ja paremas otsas saame seega avaldistest

$$Q_{jp} = F\eta + \frac{-Fb\xi^2 + Fa\eta^2}{l}; \quad Q_{kp} = -F\xi + \frac{-Fb\xi^2 + Fa\eta^2}{l} \quad (17.34)$$

millest

$$Q_{jp} = F\eta^2(1 + 2\xi); \quad Q_{kp} = -F\xi^2(1 + 2\eta) \quad (17.35)$$

17.5.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras

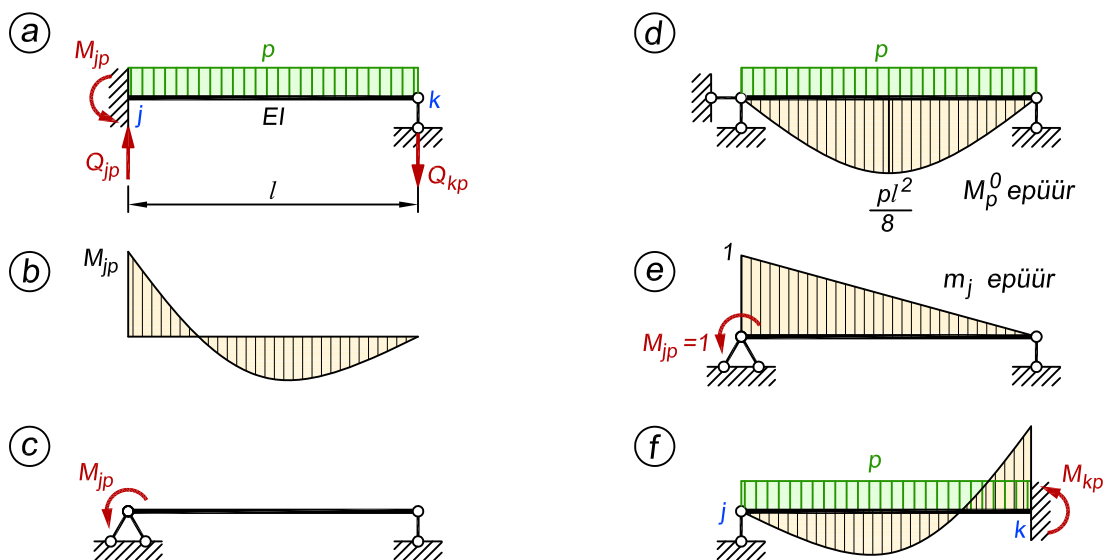
Lauskoormus

Lisatundmatuks võtame sõlmes j tekkiva kinnitusmomendi M_{jp} (joonis 17.23, *a* ja *b*). Staatikaga määratav põhiskeem on näidatud joonisel 17.23, *c*. Kinnitusmomendi M_{jp} suuruse leiame võrrandist

$$\delta_{jj}M_{jp} + \Delta_{jp} = 0 \quad (17.36)$$

Siirded δ_{jj} ja Δ_{jp} arvutame staatikaga määratud põhiskeemi paindemomendi epüüride abil (joonis 17.23, *d*, *e*)

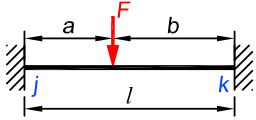
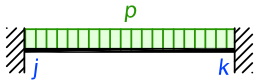
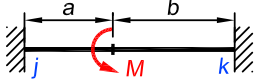
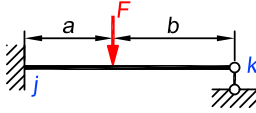
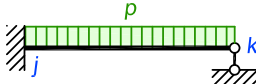
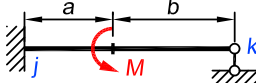
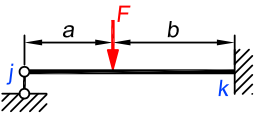
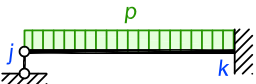
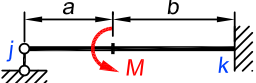
$$\delta_{jj} = \int_0^l \frac{m_j m_j}{EI} dx = \frac{l}{3EI} \quad (17.37)$$



Joonis 17.23. Lauskoormus ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud vardal

Tabel 17.1. Kinnitismomendid koormusest

$$\xi = \frac{a}{l}; \quad \eta = \frac{b}{l}$$

| Nr | Koormusskeem | M_{jp} | M_{kp} |
|----|---|-------------------------------|------------------------------|
| 1 |  | $Fa\eta^2$ | $-Fb\xi^2$ |
| 2 |  | $\frac{pl^2}{12}$ | $-\frac{pl^2}{12}$ |
| 3 |  | $M\eta(2-3\eta)$ | $M\xi(2-3\xi)$ |
| 4 |  | $\frac{1}{2}Fl\eta(1-\eta^2)$ | — |
| 5 |  | $\frac{pl^2}{8}$ | — |
| 6 |  | $\frac{1}{2}M(1-3\eta^2)$ | — |
| 7 |  | — | $-\frac{1}{2}Fl\xi(1-\xi^2)$ |
| 8 |  | — | $-\frac{pl^2}{8}$ |
| 9 |  | — | $-\frac{1}{2}M(1-3\xi^2)$ |

$$\Delta_{jp} = \int_0^l \frac{m_j M_p^0}{EI} dx = -\frac{2l}{3EI} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{pl^3}{24EI} \quad (17.38)$$

Võrrandi (17.36) lahendiks on

$$M_{jp} = \frac{pl^2}{8} \quad (17.39)$$

Kui jääk kinnitus on varda parempoolses otsas (joonis 17.23, f), siis on kinnitusemomendi märk vastupidine

$$M_{kp} = -\frac{pl^2}{8} \quad (17.40)$$

Põikjõu avaldiste tuletamiseks kasutame varda vasakpoolse jääga toe korral valemit

$$Q = Q^0 + \frac{M_{jp}}{l} \quad (17.41)$$

Põikjõud varda vasakus ja paremas otsas saame seega avaldistest

$$Q_{jp} = \frac{pl}{2} + \frac{pl^2}{8l}; \quad Q_{kp} = -\frac{pl}{2} + \frac{pl^2}{8l} \quad (17.42)$$

millest

$$Q_{jp} = \frac{5}{8}pl; \quad Q_{kp} = -\frac{3}{8}pl \quad (17.43)$$

Kui jääk tugi on paremal pool (joonis 17.23, f), siis on põikjõu valemid

$$Q_{jp} = \frac{3}{8}pl; \quad Q_{kp} = -\frac{5}{8}pl \quad (17.44)$$

Koondjõud

Koondjõuga koormatud vardal (joonis 17.24, a) on põhiskeem ja lisatundmatu samad nagu lauskoormuse korralgi. Staatikaga määratav põhiskeem ja lisatundmatu on näidatud joonisel 17.24, c. Kasutame lahendamisel võrrandisüsteemi (17.36).

Koormusest ning ühiktundmatust $M_{jp} = 1$ põhjustatud epüürid on kujutatud joonisel 17.24, d ja e. Võrrandisüsteemis (17.36) esinevad siirded on järgmised

$$\delta_{jj} = \int_0^l \frac{m_j m_j}{EI} dx = \frac{l}{3EI} \quad (17.45)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{jp} &= \int_0^l \frac{m_j M_p^0}{EI} dx = -\frac{\xi l}{6EI} \left(0 + 4 \cdot \frac{F\xi\eta l}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} + F\xi\eta^2 l \right) - \frac{\eta l}{3EI} \cdot F\xi\eta l \cdot \eta = \\ &= -\frac{1}{3EI} F\xi\eta l^2 \left[\frac{1}{2}\xi + \eta(\xi + \eta) \right] = -\frac{1}{3EI} F\xi\eta l^2 \left(\frac{1}{2}\xi + \eta \right) \end{aligned} \quad (17.46)$$

Võrrandi (17.36) lahendiks on

$$M_{jp} = \frac{1}{2}Fl\eta(1-\eta^2) \quad (17.47)$$

Kui jäik kinnitus on varda parempoolses otsas (joonis 17.24, f), siis on kinnitumoment

$$M_{kp} = -\frac{1}{2}Fl\xi(1-\xi^2) \quad (17.48)$$

Põikjõu avaldiste tuletamiseks kasutame varda vasakpoolse jäiga toe korral valemit (17.41). Põikjõud varda vasakus ja paremas otsas saame seega avaldistest

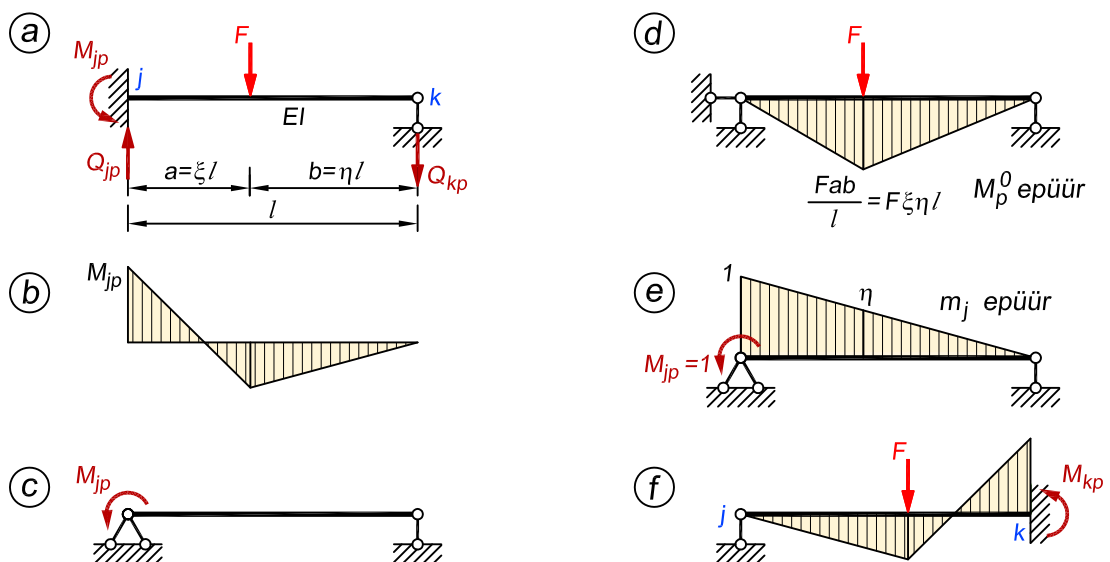
$$Q_{jp} = F\eta + \frac{Fl\eta(1-\eta^2)}{2l}; \quad Q_{kp} = -F\xi + \frac{Fl\eta(1-\eta^2)}{2l} \quad (17.49)$$

millest

$$Q_{jp} = \frac{1}{2}F\eta(3-\eta^2); \quad Q_{kp} = -\frac{1}{2}F\xi^2(3-\xi) \quad (17.50)$$

Kui jäik tugi on paremal pool (joonis 17.24, f), siis on põikjõu valemid

$$Q_{jp} = \frac{1}{2}F\xi(3-\xi^2); \quad Q_{kp} = -\frac{1}{2}F\eta^2(3-\eta) \quad (17.51)$$



Joonis 17.24. Koondjõud ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud vardal

17.6. Varda otste kinnitusemomentide leidmine sõlmede ja varraste pööretest

Sõlmede ja varraste pööretest põhjustatud kinnitusemomentide leidmiseks kasutame tala diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI} \quad (17.52)$$

Kuna koormus puudub ($p(x) = 0$), siis saame kirjutada

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = 0 \quad (17.53)$$

Saadud avaldis on neljandat järku homogeenne diferentsiaalvõrrand, mille lahendamiseks integreerime seda neli korda

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = C_1 \quad (17.54)$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = C_1 x + C_2 \quad (17.55)$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (17.56)$$

$$w(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (17.57)$$

Nelja tundmatu integreerimiskonstandiga polünoom (17.57) esitab elastse joone kuju ja seda kasutame varda otste kinnitusemomentide leidmiseks lähtuvalt rajatingimustest. Varda pöörde ehk siirde esimese tuletise korral kasutame avaldist (17.56).

17.6.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras

Sõlme pööre

Anname varda j - k parempoolsele sõlmele k pöörde $\varphi_k = 1$ (joonis 17.25, a).

Leiame kinnitusemomendid, kasutades avaldise (17.56) ja (17.57). Integreerimiskonstantide $C_1 \dots C_4$ määramisel lähtume neljast rajatingimusest, mille abil saame järgmised võrrandid

$$\begin{aligned} 1. \quad w(0) = 0: & \quad C_4 = 0 \\ 2. \quad \varphi(0) = w'(0) = 0: & \quad C_3 = 0 \\ 3. \quad w(l) = 0: & \quad C_1 \frac{l^3}{6} + C_2 \frac{l^2}{2} = 0 \\ 4. \quad \varphi(l) = w'(l) = -1: & \quad C_1 \frac{l^2}{2} + C_2 l = -1 \end{aligned} \quad (17.58)$$

Parempoolses otsas rajatingimuseks olev pööre on negatiivne vastavalt tehnilise mehaanika märgireeglile, mille kohaselt x -koordinaadi kasvades on vähenev nurk negatiivne.

Avaldades kolmandast võrrandist konstandi C_1

$$C_1 = -C_2 \frac{3}{l} \quad (17.59)$$

ja asetades selle viimasesse võrrandisse, saame konstandi C_2 väärtuseks

$$C_2 = \frac{2}{l} \quad (17.60)$$

ning sealt omakorda konstandi C_1 lõpliku tulemuse

$$C_1 = -\frac{2}{l} \cdot \frac{3}{l} = -\frac{6}{l^2} \quad (17.61)$$

Elastse joone võrrand on siis

$$w(x) = -\frac{6}{l^2} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{2}{l} \cdot \frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{l^2} + \frac{x^2}{l} \quad (17.62)$$

ja paindemomendi avaldis

$$M(x) = -EIw''(x) = -EI \left(-\frac{6x}{l^2} + \frac{2}{l} \right) \quad (17.63)$$

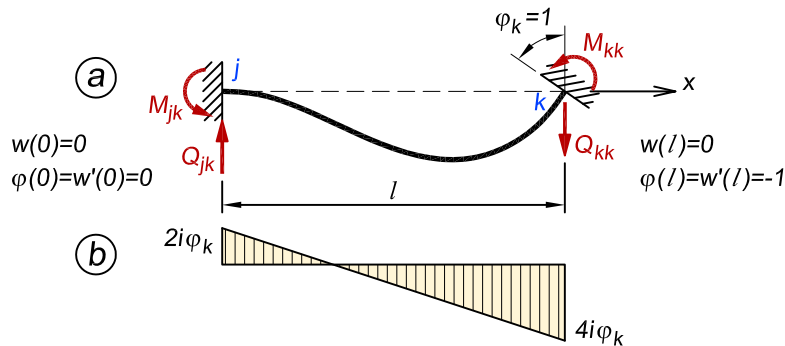
Paindemomendi varda alguses ja lõpus saame

$$M(0) = -EI \left(-\frac{6 \cdot 0}{l^2} + \frac{2}{l} \right) = -\frac{2EI}{l}; \quad M(l) = -EI \left(-\frac{6 \cdot l}{l^2} + \frac{2}{l} \right) = \frac{4EI}{l} \quad (17.64)$$

Märgid näitavad, et varda alguses on tõmmatud ülemine pool ja varda lõpus alumine pool. Arvestades deformatsioonimeetodi paindemomendi märgireeglit ning seda, et $i = \frac{EI}{l}$ ja $\varphi = 1$, saame kinnitusemomendid varda otstes sõlme k pöördest (joonis 17.25, b)

$$M_{jk} = 2i\varphi_k; \quad M_{kk} = 4i\varphi_k \quad (17.65)$$

kus M järel indeksis teine liige k näitab, millisest pöördest on kinnitusmoment põhjustatud.



Joonis 17.25. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda sõlme pööre

Kuna sõlmede ja varraste pöörete korral ei esine koormusest põhjustatavat põikjõudu, siis leiame põikjõu valemiga

$$Q = \frac{M_{kk} + M_{jk}}{l} \quad (17.66)$$

Põikjõu sõlme k pöördest φ_k saame avaldisega

$$Q_{jk} = Q_{kk} = \frac{M_{kk} + M_{jk}}{l} = \frac{4i\varphi_k + 2i\varphi_k}{l} \quad (17.67)$$

millest

$$Q_{jk} = Q_{kk} = \frac{6i}{l}\varphi_k \quad (17.68)$$

Sõlmede ja varraste pööretest põhjustatud kinnituumomendid on toodud tabelis 17.2 leheküljel 760.

Varda pööre

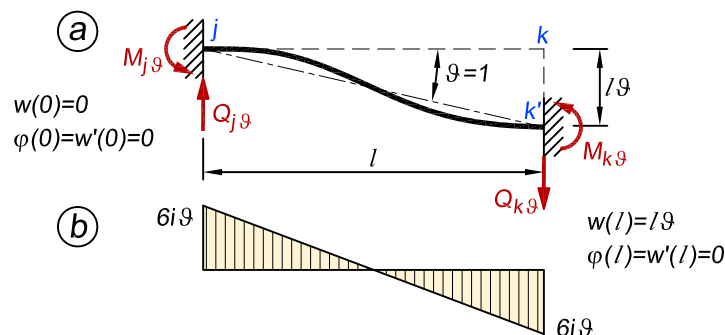
Anname vardale j - k pöördet $\vartheta = 1$, nii et varda parempoolne ots k siirdub ülevalt alla (joonis 17.26, a). Vertikaalsiire on $l \cdot \tan \vartheta$. Väikeste pöördenurkade korral loetakse, et $\tan \vartheta \approx \vartheta$ ja seetõttu saame vertikaalsiirdeks $l\vartheta$.

Rajatingimused ja neile vastavad võrrandid on

1. $w(0) = 0$: $C_4 = 0$
2. $\varphi(0) = w'(0) = 0$: $C_3 = 0$
3. $w(l) = l\vartheta$: $C_1 \frac{l^3}{6} + C_2 \frac{l^2}{2} = l\vartheta$ (17.69)
4. $\varphi(l) = w'(l) = 0$: $C_1 \frac{l^2}{2} + C_2 l = 0$

Kaks viimast võrrandit annavad konstantide C_1 ja C_2 väärtusteks

$$C_1 = -\frac{12}{l^2}\vartheta; \quad C_2 = \frac{6}{l}\vartheta \quad (17.70)$$



Joonis 17.26. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda pööre

Elastse joone võrrandiks kujuneb

$$w(x) = -\frac{12}{l^2}\vartheta \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{6}{l}\vartheta \cdot \frac{x^2}{2} = -\frac{2x^3}{l^2}\vartheta - \frac{3x^2}{l}\vartheta \quad (17.71)$$

ja paindemomendi avaldis on

$$M(x) = -EIw''(x) = -EI\left(\frac{-12x}{l^2} + \frac{6}{l}\right)\vartheta \quad (17.72)$$

Paindemoment varda alguses ja lõpus on

$$M(0) = -\frac{6EI}{l}\vartheta; \quad M(l) = -EI\left(-\frac{12 \cdot l}{l^2} + \frac{6}{l}\right)\vartheta = \frac{6EI}{l}\vartheta \quad (17.73)$$

Varda alguses on tõmmatud ülemine ja lõpus alumine pool. Varda pöördest $\vartheta_{jk} = 1$ tekkivad kinnitusemomendid varda otses saame (joonis 17.26, b)

$$M_{j\vartheta} = 6i\vartheta_{jk}; \quad M_{k\vartheta} = 6i\vartheta_{jk} \quad (17.74)$$

kus M järel indeksis teine liige ϑ näitab, millisest pöördest on kinnitusemoment põhjustatud.

Põikjõu varda j - k pöördest ϑ saame avaldisega

$$Q_{j\vartheta} = Q_{k\vartheta} = \frac{M_{k\vartheta} + M_{j\vartheta}}{l} = \frac{6i\vartheta_{jk} + 6i\vartheta_{jk}}{l} \quad (17.75)$$

millest

$$Q_{j\vartheta} = Q_{k\vartheta} = \frac{12i}{l}\vartheta_{jk} \quad (17.76)$$

17.6.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras

Sõlme pööre

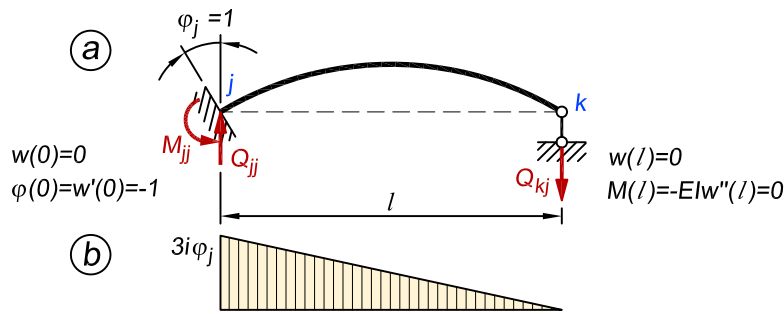
Anname vasakult otsast jäigalt ja paremalt liigendiga kinnitatud varda j - l sõlmele j pööre $\varphi_j = 1$ (joonis 17.27, a).

Rajatingimused ja neile vastavad võrrandid on

1. $w(0) = 0: \quad C_4 = 0$
2. $\varphi(0) = w'(0) = -1: \quad C_3 = -1$
3. $w(l) = 0: \quad C_1 \frac{l^3}{6} + C_2 \frac{l^2}{2} - l = 0 \quad (17.77)$
4. $M(l) = -EIw''(l) = 0: \quad -EI(C_1 l + C_2) = 0 \Rightarrow C_1 l + C_2 = 0$

Kaks viimast võrrandit annavad konstantide C_1 ja C_2 väärtusteks

$$C_1 = -\frac{3}{l^2}; \quad C_2 = \frac{3}{l} \quad (17.78)$$



Joonis 17.27. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda sõlme pööre

Elastse joone võrrandiks saame

$$w(x) = -\frac{3}{l^2} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{3}{l} \cdot \frac{x^2}{2} - x = -\frac{x^3}{2l^2} + \frac{3x^2}{2l} - x \quad (17.79)$$

ning paindemomendi avaldiseks

$$M(x) = -EIw''(x) = -EI \left(-\frac{3x}{l^2} + \frac{3}{l} \right) \quad (17.80)$$

Paindemoment varda alguses on

$$M(0) = -\frac{3EI}{l} \quad (17.81)$$

Jäigas sõlmes on tõmmatud varda ülemine pool. Sõlme j pöördest $\varphi_j = 1$ tekkiva kinnitusemomendi varda otsas j saame (joonis 17.27, b)

$$M_{jj} = 3i\varphi_j \quad (17.82)$$

Põikjõu sõlme j pöördest φ_j saame avaldisega

$$Q_{jj} = Q_{kj} = \frac{M_{jj}}{l} \quad (17.83)$$

millest

$$Q_{jj} = Q_{kj} = \frac{3i}{l}\varphi_j \quad (17.84)$$

Varda pööre

Vasakult otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud vardale pööre $\vartheta = 1$ andmisel liigub varda parempoolne ots alla $l\vartheta$ võrra (joonis 17.28, a).

Rajatingimused ja neile vastavad võrrandid on

1. $w(0) = 0$: $C_4 = 0$
 2. $\varphi(0) = w'(0) = 0$: $C_3 = 0$
 3. $w(l) = l\vartheta$: $C_1 \frac{l^3}{6} + C_2 \frac{l^2}{2} = l\vartheta$
 4. $M(l) = -EIw''(l) = 0$: $-EI(C_1l + C_2) = 0 \Rightarrow C_1l + C_2 = 0$
- (17.85)

Kaks viimast võrrandit annavad konstantide C_1 ja C_2 väärtusteks

$$C_1 = -\frac{3}{l^2}\vartheta; \quad C_2 = \frac{3}{l}\vartheta \quad (17.86)$$

Elastse joone võrrandiks kujuneb

$$w(x) = -\frac{3}{l^2}\vartheta \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{3}{l}\vartheta \cdot \frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{2l^2}\vartheta + \frac{3x^2}{2l}\vartheta \quad (17.87)$$

ja paindemomendi avaldis on

$$M(x) = -EIw''(x) = -EI\left(\frac{-6x}{2l^2} + \frac{6}{2l}\right)\vartheta = -EI\left(-\frac{3x}{l^2} + \frac{3}{l}\right)\vartheta \quad (17.88)$$

Paindemomendi varda alguses saame

$$M(0) = -\frac{3EI}{l}\vartheta \quad (17.89)$$

Jäigas sõlmes on tõmmatud varda ülemine pool. Varda pöördest $\vartheta_{jl} = 1$ tekkiva kinnitusmomendi varda otsas j saame (joonis 17.28, b)

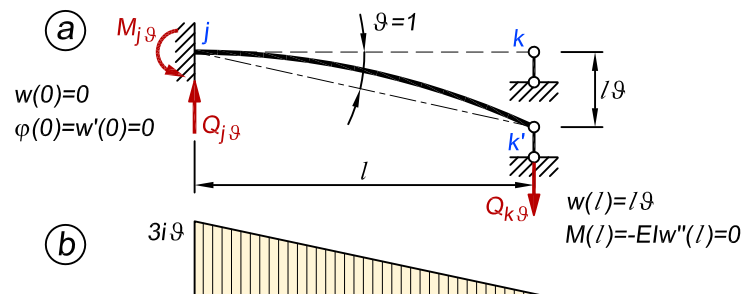
$$M_{j\vartheta} = 3i\vartheta_{jl} \quad (17.90)$$

Põikjõu varda j - k pöördest ϑ saame avaldisega

$$Q_{j\vartheta} = Q_{k\vartheta} = \frac{M_{j\vartheta}}{l} \quad (17.91)$$

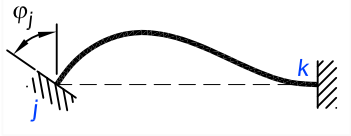
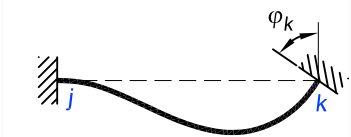
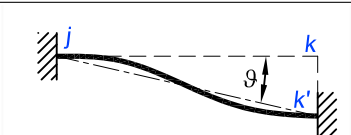
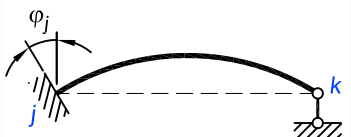
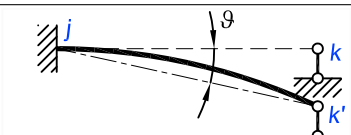
millest

$$Q_{j\vartheta} = Q_{k\vartheta} = \frac{3i}{l}\vartheta_{jl} \quad (17.92)$$



Joonis 17.28. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda pööre

Tabel 17.2. Kinnitusmomendid sõlmede ja varraste pööretest

| Nr | Koormusskeem | M_j | M_k |
|----|---|--------------------|--------------------|
| 1 |  | $4i\varphi_j$ | $2i\varphi_j$ |
| 2 |  | $2i\varphi_k$ | $4i\varphi_k$ |
| 3 |  | $6i\vartheta_{jk}$ | $6i\vartheta_{jk}$ |
| 4 |  | $3i\varphi_j$ | — |
| 5 |  | $3i\vartheta_{jl}$ | — |

17.7. Koormusest ning sõlmede ja varraste pööretest põhjustatud summaarsed reaktsioonid

Järgnevalt esitame peatükkides 17.5 ja 17.6 tuletatud avaldiste põhjal valemid summaarseste reaktsioonide leidmiseks koormusest ning sõlmede ja varraste pööretest **üksikus vardas**. **Raami arvutuskeemi puhul kasutatavad valemid esitame edaspidi.**

Toome siinkohal veel eraldi välja eespool mainitud deformatsioonimeetodi paindemomendi märgireegli, mis erineb teiste meetodite omast.

Varda j - k otstes mõjuvad momendid M_j ja M_k on positiivsed, kui nad varda suhtes mõjuvad vastupäeva (joonised 17.21, a ja 17.25).

Seetõttu tuleb pärast paindemomendi ordinaatide arvutamist alati kujutada varda otsa positiivse suunaga momendinooleke ja vastavalt sellele märkida ordinaadid varda õigele poolele: positiivne ordinaat läheb noole saba ja negatiivne ordinaat noole teraviku poolele.

17.7.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras

Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda j - k otstes arvutame paindemomendid, summeerides kinnitusemomendid koormusest, kui sõlmed ei siirdu, valemitega (17.27) ja (17.32), sõlmede j ja k pööretest φ_j ja φ_k valemiga (17.65) ning varda pöördest ϑ_{jk} valemiga (17.74)

$$\begin{aligned} M_j &= M_{jp} + 4i\varphi_j + 2i\varphi_k + 6i\vartheta_{jk} \\ M_k &= M_{kp} + 2i\varphi_j + 4i\varphi_k + 6i\vartheta_{jk} \end{aligned} \quad (17.93)$$

Põikjõud arvutame tavaliselt paindemomentide kaudu

$$Q_j = Q_{jp}^0 + \frac{M_j + M_k}{l}; \quad Q_k = Q_{kp}^0 + \frac{M_j + M_k}{l} \quad (17.94)$$

kuid võib arvutada ka pöörete funktsioonina

$$Q_j = Q_{jp} + \frac{6i}{l}(\varphi_j + \varphi_k) + \frac{12i}{l}\vartheta_{jk}; \quad Q_k = Q_{kp} + \frac{6i}{l}(\varphi_j + \varphi_k) + \frac{12i}{l}\vartheta_{jk} \quad (17.95)$$

Kui varras ei pöördu ($\vartheta_{jk} = 0$), siis leiame paindemomendid ja põikjõud valemitega

$$M_j = M_{jp} + 4i\varphi_j + 2i\varphi_k; \quad M_k = M_{kp} + 2i\varphi_j + 4i\varphi_k \quad (17.96)$$

$$Q_j = Q_{jp} + \frac{6i}{l}(\varphi_j + \varphi_k); \quad Q_k = Q_{kp} + \frac{6i}{l}(\varphi_j + \varphi_k) \quad (17.97)$$

Kui sõlm k on jäik toesõlm, siis $\varphi_k = 0$ ja avaldistes (17.93), (17.95) puuduvad pöörret φ_k sisaldavad liikmed. Paindemomendid ja põikjõud arvutame siis valemitega

$$M_j = M_{jp} + 4i\varphi_j + 6i\vartheta_{jk}; \quad M_k = M_{kp} + 2i\varphi_j + 6i\vartheta_{jk} \quad (17.98)$$

$$Q_j = Q_{jp} + \frac{6i}{l}\varphi_j + \frac{12i}{l}\vartheta_{jk}; \quad Q_k = Q_{kp} + \frac{6i}{l}\varphi_j + \frac{12i}{l}\vartheta_{jk} \quad (17.99)$$

17.7.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras

Kui varda üks ots on jäik ja teine liigendiga, siis leiame koormusest, sõlme j pöördest φ_j ja varda pöördest ϑ_{jl} põhjustatud paindemomendi valemiga

$$M_j = M_{jp} + 3i\varphi_j + 3i\vartheta_{jl} \quad (17.100)$$

Põikjõud arvutame paindemomentide kaudu

$$Q_j = Q_{jp}^0 + \frac{M_j}{l}; \quad Q_k = Q_{kp}^0 + \frac{M_j}{l} \quad (17.101)$$

või koormuse ja pöörete φ_j ning ϑ_{jk} funktsioonina

$$Q_j = Q_{jp} + \frac{3i}{l}(\varphi_j + \vartheta_{jl}); \quad Q_k = Q_{kp} + \frac{3i}{l}(\varphi_j + \vartheta_{jl}) \quad (17.102)$$

Kui varras ei pöördu ($\vartheta_{jk} = 0$), siis arvutame momendi ja põikjõu valemitega

$$M_j = M_{jp} + 3i\varphi_j \quad (17.103)$$

$$Q_j = Q_{jp} + \frac{3i}{l}\varphi_j; \quad Q_k = Q_{kp} + \frac{3i}{l}\varphi_j \quad (17.104)$$

Kui sõlm j on jäik toesõlm ($\varphi_j = 0$), siis on reaktsioonid järgmised

$$M_j = M_{jp} + 3i\vartheta_{jl} \quad (17.105)$$

$$Q_j = Q_{jp} + \frac{3i}{l}\varphi_j; \quad Q_k = Q_{kp} + \frac{3i}{l}\varphi_j \quad (17.106)$$

17.8. Kanoonilised võrrandid

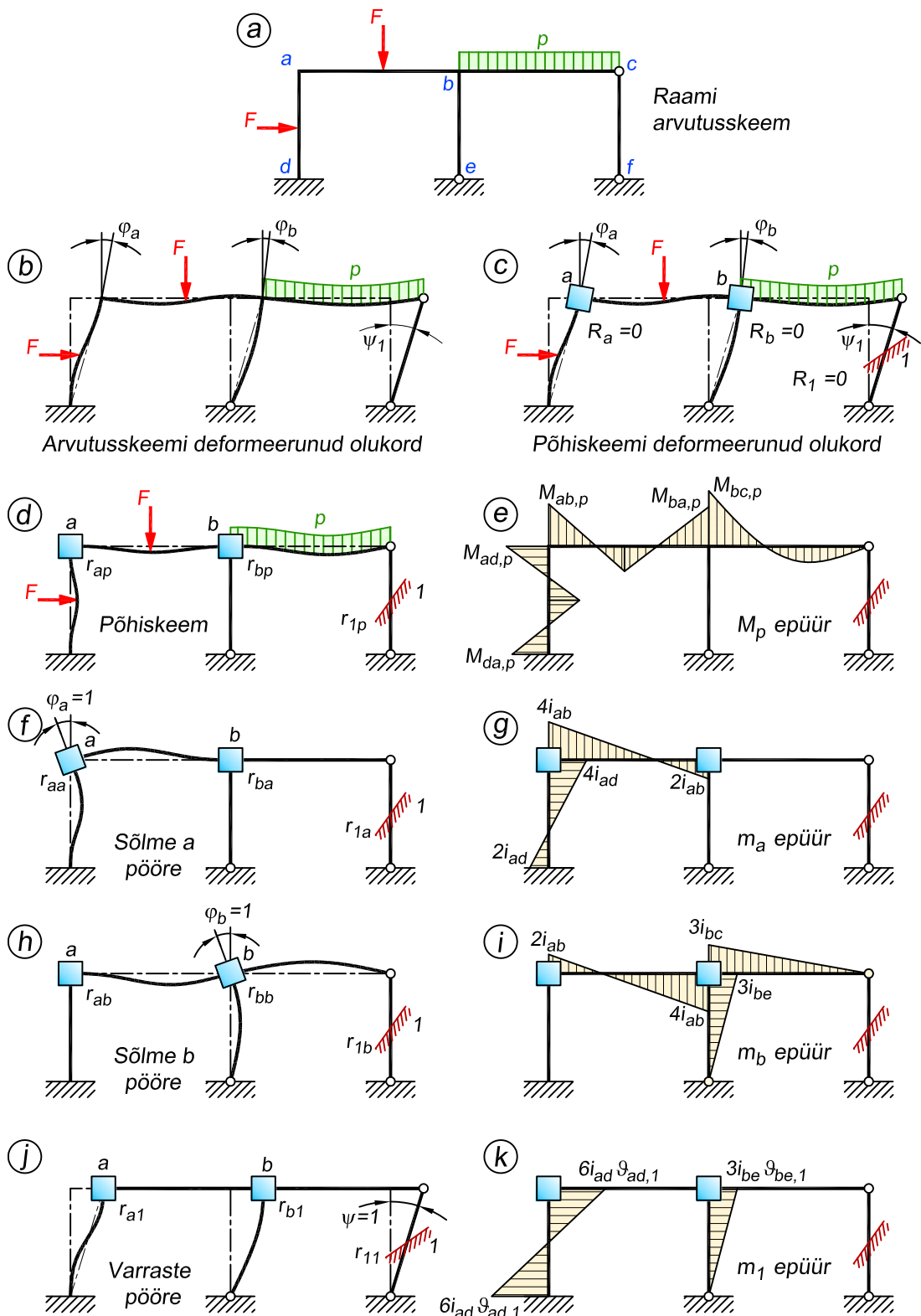
Kinemaatilisel määratud põhiskeemi saame, kui lisame staatikaga määramatule arvutusskeemile lisasidemed. Joonisel 17.29, *a* kujutatud raam on kolm korda kinemaatilisel määramatu: $n^* = n_s + w = 2 + 1 = 3$. Lisatundmatuteks on sõlmede a ja b pöörded φ_a ja φ_b ning postide pööre ψ_1 . Kinemaatilisel määratud põhiskeem koos raamile mõjuva koormusega on kujutatud joonisel 17.29, *d*.

Lisatundmatud leiame koormusest põhjustatud staatikaga määramatu arvutusskeemi deformeerunud olukorra (joonis 17.29, *b*) ja koormusest ning sõlmede ja varraste pööretest põhjustatud kinemaatilisel määratud põhiskeemi deformeerunud olukorra (joonis 17.29, *c*) ekvivalentsuse tingimuste alusel koostatud võrranditest. Kui kinemaatilisel määratud põhiskeemi, millele mõjub koormus, sõlmi pöörata nurkade φ_a ja φ_b ning poste nurga ψ_1 võrra, mis on võrdsed koormusest põhjustatud raami vastavate elementide pööretega, siis ei ole mingit erinevust raami arvutusskeemi tegeliku deformeerunud olukorra (joonis 17.29, *b*) ja samasse olukorda viidud põhiskeemi deformeerunud olukorra (joonis 17.29, *c*) vahel: siirded, sisejõud ja reaktsioonid on võrdsed.

Järgnevalt rakendame kinemaatilisel määratud põhiskeemi tegeliku olukorraga ekvivalentse deformeerunud olukorra (joonis 17.29, *c*) uurimisel jõudude mõju sõltumatuse printsiipi. Kasutame kinemaatilisel määratud põhiskeemi selleks, et lahutada esialgse arvutusskeemi tegelik deformeerunud olukord (joonis 17.29, *b*) üksikuteks koormusest ja lisatundmatutest põhjustatud deformeerunud olukordadeks. Lisatundmatutest põhjustatud deformeerunud olukorrad kujutame kvalitatiivselt – ühikpööretest (joonis 17.29, *f, h, j*). Tegelik deformeerunud olukorra saame, kui liidame kinemaatilisel määratud põhiskeemi koormusest põhjustatud siiretele (joonis 17.29, *d*) ühikpööretest põhjustatud siirded, mis on korrutatud lisatundmatute vastavate tegelike suurustega φ_a , φ_b ja ψ_1 .

Kinemaatilisel määratud põhiskeemi sõlme a ühikpöördest $\varphi_a = 1$ tekivad lisasidemetes a , b ja l reaktsioonid r_{aa} , r_{ba} ning r_{la} (joonis 17.29, *f*). Esimene indeks tähistab sidet, milles tekib reaktsioon, ja teine näitab põhjust. Kinemaatilisel määratud põhiskeemi sõlme a ühikpöördest $\varphi_a = 1$ põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.29, *g*. Sõlme a tegelikust pöördest φ_a põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes a , b ja l on vastavalt

$$r_{aa}\varphi_a, \quad r_{ba}\varphi_a, \quad r_{la}\varphi_a \quad (17.107)$$



Joonis 17.29. Skeemid võrrandisüsteemi tuletamiseks

Kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sõlme b ühikpöördest $\varphi_b = 1$ (joonis 17.29, h) tekivad lisasidemetes reaktsioonid r_{ab} , r_{bb} ja r_{1b} . Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.29, i . Tegelikule pöördele φ_b vastavad reaktsioonid lisasidemetes on

$$r_{ab}\varphi_b, \quad r_{bb}\varphi_b, \quad r_{1b}\varphi_b \quad (17.108)$$

Postide ühikpöördest $\psi_1 = 1$ tekivad kinemaatiliselt määratud põhiskeemi lisasidemetes reaktsioonid r_{a1} , r_{b1} ja r_{11} (joonis 17.29, j). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.29, k . Tegelikust pöördest ψ_1 põhjustatud reaktsioonid on järgmised

$$r_{a1}\psi_1, \quad r_{b1}\psi_1, \quad r_{11}\psi_1 \quad (17.109)$$

Koormusest põhjustatud reaktsioonid kinemaatiliselt määratud põhiskeemi lisasidemetes (joonis 17.29, d) tähistame

$$r_{ap}, \quad r_{bp}, \quad r_{1p} \quad (17.110)$$

Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.29, e .

Tegelikku deformeerunud olukorda viidud kinemaatiliselt määratud põhiskeem (joonis 17.29, c) töötab nagu lisasidemeteta staatikaga määramatu arvutuskeem ja selles tegelikus deformeerunud olukorras on summaarsed reaktsioonimomendid kõigis lisasidemetes, kuna neid lisasidemeid tegelikul arvutuskeemil ei ole, võrdsed nulliga

$$\begin{aligned} r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{a1}\psi_1 + r_{ap} &= 0 \\ r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{b1}\psi_1 + r_{bp} &= 0 \\ r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + r_{11}\psi_1 + r_{1p} &= 0 \end{aligned} \quad (17.111)$$

Esimene võrrand on koostatud lisasideme a kohta: esimene liige on sõlme a pöördest φ_a , teine liige sõlme b pöördest φ_b , kolmas liige posti $a-b$ pöördest ψ_1 ja viimane liige koormusest põhjustatud reaktsioon kinemaatiliselt määratud põhiskeemis. Teine ja kolmas võrrand on koostatud vastavalt lisasidemete b ja 1 kohta. Võrrandid (17.111) on tasakaaluvõrrandid. Tundmatu φ_a kordajad r_{aa} , r_{ba} , r_{1a} on kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sõlme a ühikpöördest $\varphi_a = 1$ (joonis 17.29, f) põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes

$$r_{aa} = r_{aa}(a-d) + r_{aa}(a-b); \quad r_{ba} = r_{ba}(b-a); \quad r_{1a} = r_{1a}(a-d) \quad (17.112)$$

Reaktsioon r_{aa} on kahe momendi summa, kuna siirdeolukorras $\varphi_a = 1$ on paindunud mõlemad sõlmes a jäigalt ühendatud vardad $a-d$ ja $a-b$. Reaktsioon r_{ba} on üheliikmeline, sest siirdeolukorras $\varphi_a = 1$ on sõlmes b jäigalt ühendatud varrastest paindunud ainult varras $b-a$. Lisatundmatute kordajate reaktsioonide kohta kehtib vastastikkus $r_{1a} = r_{a1}$. Siirdeolukorras $\psi_1 = 1$ on sõlmes a jäigalt ühendatud varrastest paindunud ainult varras $a-d$. Varras $a-b$ on jäänud sirgeks. Reaktsioon $r_{1a} = r_{a1}$ koosneb vaadeldava raami puhul ühest liikmest.

Analoogiliselt siirdeolukorra $\varphi_b = 1$ jaoks (joonis 17.29, h)

$$r_{bb} = r_{bb}(b-a) + r_{bb}(b-e) + r_{bb}(b-c); \quad r_{ab} = r_{ba} = r_{ab}(a-b); \quad r_{1b} = r_{b1} = r_{1b}(b-e) \quad (17.113)$$

Reaktsioon r_{11} koosneb kahest liikmest, sest siirdeolukorras $\psi_1 = 1$ on paindunud kaks varrast $a-d$ ja $b-e$ (joonis 17.29, j). Varras $c-f$ on küll pöördunud, kuid on jäänud sirgeks ja ei tekita seepärast reaktsiooni lisasidemes I

$$r_{11} = r_{11}(a-d) + r_{11}(b-e) \quad (17.114)$$

Koormusest põhjustatud momentide summad kinemaatilisel määratud põhiskeemi lisasidemetes, kui $\varphi_a = 0$, $\varphi_b = 0$ ja $\psi_1 = 0$ (joonis 17.29, d), on võrrandite vabaliikmeteks

$$r_{ap} = M_{ad,p} + M_{ab,p}; \quad r_{bp} = M_{ba,p} + M_{bc,p}; \quad r_{1p} = M_{1p}(a-d) \quad (17.115)$$

Pärast võrrandisüsteemi (17.111) lahendamist leiame sõlmede ja varraste pöörete abil valemitega (17.93) ja (17.100) paindemomendi epüüri ordinaadid.

Põik- ja pikijõu epüüride ordinaadid arvutame sõlmede ja varraste tasakaalu tingimustest pärast paindemomendi epüüri koostamist. Epüüre kontrollime tasakaalutingimustega.

Kinemaatilise määramatuse astmele $n^* = n_s + w$ vastavalt saab koostada n_s võrrandisüsteemi (17.111) kahe esimese võrrandi tüüpi võrrandit sõlme pööret takistava sideme kohta ja w võrrandisüsteemi (17.111) viimase võrrandi tüüpi võrrandit varda pööret takistava sideme kohta. Olgu sõlmede pööret takistavad sidemed tähistatud a, b, \dots, n , kusjuures nende sidemete arv on n_s ja varraste pööret takistavad sidemed $1, 2, \dots, w$. Kanoonilised võrrandid on siis järgmised

$$\begin{aligned} r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + \dots + r_{an}\varphi_n + r_{a1}\psi_1 + \dots + r_{aw}\psi_w + r_{ap} &= 0 \\ r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + \dots + r_{bn}\varphi_n + r_{b1}\psi_1 + \dots + r_{bw}\psi_w + r_{bp} &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{na}\varphi_a + r_{nb}\varphi_b + \dots + r_{nn}\varphi_n + r_{n1}\psi_1 + \dots + r_{nw}\psi_w + r_{np} &= 0 \\ r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + \dots + r_{1n}\varphi_n + r_{11}\psi_1 + \dots + r_{1w}\psi_w + r_{1p} &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{wa}\varphi_a + r_{wb}\varphi_b + \dots + r_{wn}\varphi_n + r_{w1}\psi_1 + \dots + r_{ww}\psi_w + r_{wp} &= 0 \end{aligned} \quad (17.116)$$

Võrrandisüsteemi (17.116) nimetatakse *deformatsioonimeetodi kanooniliseks võrrandisüsteemiks*.

17.9. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajad ja vabaliikmed

Võrrandisüsteemi moodustamisel on lisatundmatuteks vabade jäikade sõlmede pöörded φ_j ja varraste sõltumatud pöörded ψ_c . Tundmatute sõlmede pöörete arv võrdub vabade jäikade sõlmede arvuga n_s ning tundmatute varraste pöörete arv raami varrasahela vabadusastmega w . Kinemaatilisel määratud põhiskeemi iga vaba jäiga sõlme j pööret takistava sideme kohta koostame momentide tasakaalu tingimuse $R_j = 0$. Samuti koostame momentide tasakaalu tingimuse $R_c = 0$ iga varraste pööret takistava sideme c kohta. Selle tulemusena saame võrrandisüsteemi (17.116).

Sõlmede pööret takistavate sidemete kohta kirjutatavad võrrandid võib üldkujul väljendada järgmiselt

$$r_{jj}\varphi_j + \sum_k r_{jk}\varphi_k + \sum_{c=1}^w r_{jc}\psi_c + r_{jp} = 0 \quad (j = a, b, \dots, n; \text{ kokku } n_s \text{ võrrandit}) \quad (17.117)$$

kus olevad liikmed esitavad kinemaatiliselt määratud põhiskeemi lisasidemes j tekkivaid reaktsioone sõlme j enda ja selle naabersõlme k pöördest, varraste pöördumisest ning koormusest.

Varraste pööret takistavate sidemete kohta kirjutatavad võrrandid saame väljendada

$$\sum_j r_{cj}\varphi_j + \sum_{b=1}^w r_{cb}\psi_b + r_{cp} = 0 \quad (c = 1, 2, \dots, w; \text{ kokku } w \text{ võrrandit}) \quad (17.118)$$

mille liikmed esitavad põhiskeemi lisasidemes c tekkivaid reaktsioone jäiga sõlme j pöördest, varraste pöördumisest ja koormusest.

Võrrandisüsteemi tundmatute kordajad leiame valemitega

$$r_{jj} = 4 \sum_k i_{jk} + 3 \sum_l i_{jl} \quad (17.119)$$

$$r_{jk} = 2i_{jk} \quad (17.120)$$

$$r_{jc} = r_{cj} = 6 \sum_k i_{jk}\vartheta_{jk,c} + 3 \sum_l i_{jl}\vartheta_{jl,c} \quad (17.121)$$

$$r_{cc} = 12 \sum_k i_{jk}\vartheta_{jk,c}^2 + 3 \sum_l i_{jl}\vartheta_{jl,c}^2 \quad (17.122)$$

$$r_{cb} = 12 \sum_k i_{jk}\vartheta_{jk,c}\vartheta_{jk,b} + 3 \sum_l i_{jl}\vartheta_{jl,c}\vartheta_{jl,b} \quad (17.123)$$

ning vabaliikmed

$$r_{jp} = \sum_k M_{jk,p} + \sum_l M_{jl,p} \quad (17.124)$$

$$r_{cp} = \sum_k (M_{jk,p} + M_{kj,p} + S_{jk,c})\vartheta_{jk,c} + \sum_l (M_{jl,p} + S_{jl,c})\vartheta_{jl,c} + \sum_L S_{L,c}\vartheta_{L,c} \quad (17.125)$$

Järgnevalt vaatame pikemalt, kuidas mainitud valemid saadud on.

17.9.1. Sõlme pööret takistavas sidemes j tekkivad reaktsioonid

Kinemaatiliselt määratud põhiskeemi lisasidemes j tekkivad momendid on põhjustatud sõlme j pöördest $r_{jj}\varphi_j$, naabersõlmede k pöördest $\sum_k r_{jk}\varphi_k$, sõlmes j jäigalt kinnitatud varraste pöördest $\sum_c r_{jc}\psi_c$ ja koormusest r_{jp} .

Lisasidemes j tekivad momendid ainult sõlmes j jäigalt kinnitatud varrastest.

Reaktsioon r_{jj}

Reaktsiooni r_{jj} , mis tekib lisasidemes j sõlme j ühikpöördest $\varphi_j = 1$, arvutame valemiga (17.119)

$$r_{jj} = 4 \sum_k i_{jk} + 3 \sum_l i_{jl}$$

Valemis (17.119) summeerime niisuguste varraste jäikused, mis on sõlmes j jäigalt ühendatud, kusjuures summeerimine k järgi kehtib niisuguste varraste kohta, mis on ka teisest otsast jäigalt kinnitatud, ja l järgi niisuguste varraste kohta, mille teises otsas on liigend.

Reaktsioon r_{jj} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu varrast on sõlmes j jäigalt ühendatud.

Reaktsioon r_{jk}

Mõlemas sõlmes (j ja k) jäigalt kinnitatud varda sõlme k pöördumine ühiknurga $\varphi_k = 1$ võrra tekitab sõlmes j momendi, mille leiame valemiga (17.120)

$$r_{jk} = 2i_{jk}$$

Reaktsioon r_{jk} koosneb alati ühest liikmest.

Reaktsioon r_{jc}

Reaktsiooni r_{jc} , mis tekib lisasidemes j siirdeolukorras $\psi_c = 1$, arvutame valemiga (17.121)

$$r_{jc} = 6 \sum_k i_{jk} \vartheta_{jk,c} + 3 \sum_l i_{jl} \vartheta_{jl,c}$$

kus $\vartheta_{jk,c}$ on sõlmedes j ja k jäigalt ühendatud varda pööre siirdeolukorras $\psi_c = 1$ ning $\vartheta_{jl,c}$ on sõlmes j jäigalt ja sõlmes l liigendiga ühendatud varda pööre siirdeolukorras $\psi_c = 1$.

Reaktsioon r_{jc} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu sõlmes j jäigalt ühendatud varrast on pöördunud siirdeolukorras $\psi_c = 1$.

Reaktsioon r_{jp}

Sõlmes j jäigalt kinnitatud varrastele mõjuv koormus tekitab kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sidemes j momendi (17.124)

$$r_{jp} = \sum_k M_{jk,p} + \sum_l M_{jl,p}$$

kus kinnitusemomendid $M_{jk,p}$ ja $M_{jl,p}$ võime arvutada tabelis 17.1 toodud valemitega.

Reaktsioon r_{jp} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu sõlmes j jäigalt kinnitatud varrast on koormatud.

17.9.2. Varraste pööret takistavas sidemes c tekivad reaktsioonid

Varraste pööret takistavate sidemete kohta koostatud tasakaaluvõrrandites (17.118) esinevate reaktsioonide arvutusvalemid (17.122), (17.123) ja (17.125) tuleme virtuaalsiirete printsiibi alusel.

Reaktsioon r_{cj}

Vaba jäiga sõlme j pöördest $\varphi_j = 1$ põhjustatud reaktsioonmomendi r_{cj} leidmiseks varda pööret takistavas sidemes c (joonis 17.30, d) eraldame jäigad sõlmed varrastest liigenditega. Siirdeolukorraga $\varphi_j = 1$ ekvivalentse pinge- ja deformatsiooniolukorra säilitamiseks rakendame sellele kinemaatilisele ketile välisjõududena iga jäiga sõlme ja varda vahele pandud liigendi juurde kaks vastupidi mõjuvat momenti (joonis 17.30, f), mis on ekvivalentsed siirdeolukorras $\varphi_j = 1$ varraste otstes tekkinud momentidega. Kinemaatilisele ketile rakendatud tasakaalus jõudude tööde summa virtuaalsiiretel võrdub nulliga. Reaktsioonid võtame sõlme pöördest tekkinud deformatsiooniolukorrast $\varphi_j = 1$ (joonis 17.30, d ja f). Virtuaalsiirded võtame varraste pöördest tekkinud siirdeolukorrast $\psi_c = 1$ (joonis 17.30, c ja e). Sõlmele rakendatud momendid ei tee tööd, kuna siirdeolukorras $\psi_c = 1$ sõlmed ei pöördu. Tööd teevad ainult sõlmes j jäigalt ühendatud ja siirdeolukorras $\psi_c = 1$ pöördunud varrastele rakendatud momendid. Kuna momentidel loeme positiivseks vastupäeva pöörde ja varrastel päripäeva pöörde, siis tulevad r_{cj} avaldises momentide ja varraste pöördnurkade korrutised negatiivsed

$$r_{cj} \cdot 1 - (M_{jk,\varphi} + M_{kj,\varphi}) \vartheta_{jk,c} - M_{jl,\varphi} \vartheta_{jl,c} = 0 \quad (17.126)$$

Võrrandist (17.126) avaldame reaktsiooni r_{cj} , kusjuures momendid väljendame varraste jääkuste kaudu (tabel 17.2, joonis 17.30, f)

$$r_{cj} = (4i_{jk} + 2i_{jk}) \vartheta_{jk,c} + 3i_{jl} \vartheta_{jl,c} = 6i_{jk} \vartheta_{jk,c} + 3i_{jl} \vartheta_{jl,c} \quad (17.127)$$

Reaktsioon r_{cj} on momentide, mis on põhjustatud sõlme ühikpöördest $\varphi_j = 1$, summa varda pööret takistavas sidemes c .

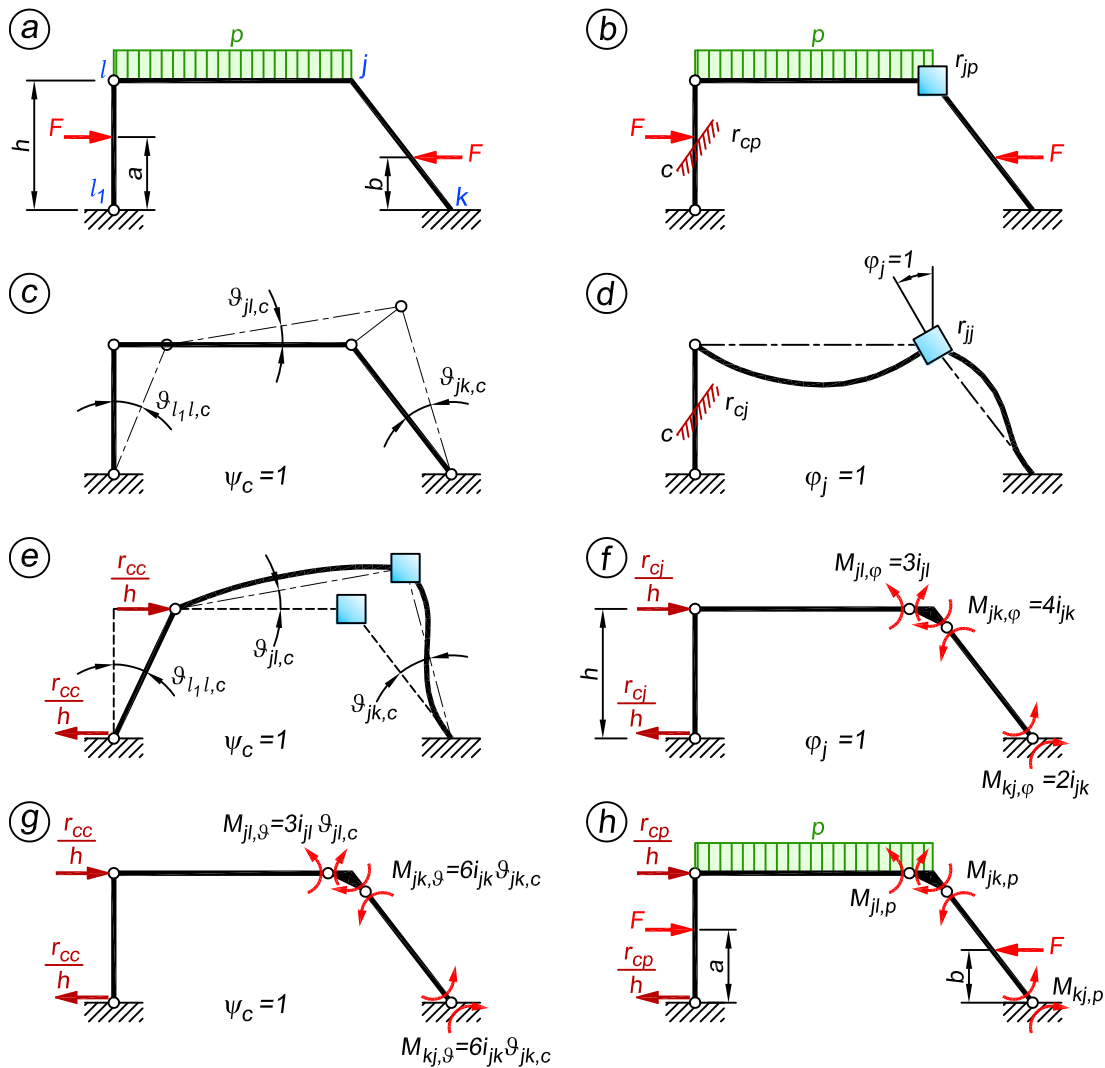
Joonisel 17.30 kujutatud raamil on sõlmes j jäigalt ühendatud kaks varrast. Kui sõlmes j on jäigalt ühendatud rohkem vardaid, siis reaktsiooni arvutamisel summeerime kõigi nende varraste momendid, mille tulemusel saame valemi (17.121)

$$r_{cj} = r_{jc} = 6 \sum_k i_{jk} \vartheta_{jk,c} + 3 \sum_l i_{jl} \vartheta_{jl,c}$$

Reaktsioon r_{cc}

Reaktsiooni r_{cc} arvutamiseks varda pööret takistavas sidemes c siirdeolukorras $\psi_c = 1$ tuleme valemi sarnaselt. Siirdeolukorras $\psi_c = 1$ tekkinud reaktsioonide (joonis 17.30, e ja g) töö virtuaalsiiretel $\psi_c = 1$ (joonis 17.30, c ja e) on

$$r_{cc} \cdot 1 - (M_{jk,\vartheta} + M_{kj,\vartheta}) \vartheta_{jk,c} - M_{jl,\vartheta} \vartheta_{jl,c} = 0 \quad (17.128)$$



Joonis 17.30. Võrrandisüsteemi liikmete arvutamine

Võrrandist (17.128) avaldame reaktsiooni r_{cc} , kusjuures momendid väljendame varraste jäikuste kaudu (tabel 17.2, joonis 17.30, g)

$$r_{cc} = (6i_{jk}\vartheta_{jk,c} + 6i_{jk}\vartheta_{jk,c})\vartheta_{jk,c} + 3i_{jl}\vartheta_{jl,c}\vartheta_{jl,c} = 12i_{jk}\vartheta_{jk,c}^2 + 3i_{jl}\vartheta_{jl,c}^2 \quad (17.129)$$

Joonisel 17.30 kujutatud raamil on siirdeolukorras $\psi_c = 1$ pöördunud kolm varrast. Vardal $l-l_1$ on mõlemas otsas liigendid ja tema pööre ei põhjusta reaktsiooni sidemes c . Seda põhjustavad vardad $j-l$ ja $j-k$. Kui arvataval raamil on sõlmedes jäigalt ühendatud vardaid siirdeolukorras $\psi_c = 1$ pöördunud rohkem, siis reaktsioonid summeerime valemiga (17.122)

$$r_{cc} = 12 \sum_k i_{jk} \vartheta_{jk,c}^2 + 3 \sum_l i_{jl} \vartheta_{jl,c}^2$$

Reaktsioon r_{cc} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu k ja l varrast on pöördunud siirdeolukorras $\psi_c = 1$.

Reaktsioon r_{cb}

Reaktsioonmomendi r_{cb} ($w > 1$) arvutamiseks tuletame valemi analoogiliselt. Vaatleme siirdeolukorras $\psi_b = 1$ tekkinud momentide virtuaaltööd siirdeolukorras $\psi_c = 1$, mille tulemusel saadud võrrandist leiame reaktsioonmomendi (17.123)

$$r_{cb} = 12 \sum_k i_{jk} \vartheta_{jk,c} \vartheta_{jk,b} + 3 \sum_l i_{jl} \vartheta_{jl,c} \vartheta_{jl,b}$$

Valemist (17.123) järeldub, et reaktsioon r_{cb} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu sama indeksetega k ja l varrast on pöördunud siirdeolukordades $\psi_c = 1$ ja $\psi_b = 1$.

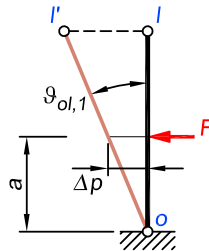
Reaktsioon r_{cp}

Kinemaatilisel määratud põhiskeemis koormusest põhjustatud reaktsiooni arvutamiseks varda pöört takistavas sidemes c tuletame valemi samuti virtuaalsiirete printsiibi alusel. Koormuse ja kinemaatilisel määratud põhiskeemi reaktsioonide (joonis 17.30, b ja h) tööde summa siirdeolukorras $\psi_c = 1$ võrdub nulliga

$$r_{cp} \cdot 1 - (M_{jk,p} + M_{kj,p} + S_{jk,c}) \vartheta_{jk,c} - (M_{jl,p} + S_{jl,c}) \vartheta_{jl,c} - S_{l_1l,c} \vartheta_{l_1l,c} = 0 \quad (17.130)$$

kus $S_{jk,c}$, $S_{jl,c}$ ja $S_{l_1l,c}$ on vastavalt varrastele $j-k$, $j-l$ ja l_1-l rakendatud koormuste staatilised momendid nende varraste peapooluste suhtes siirdeolukorras $\psi_c = 1$. Koormuse staatiline moment siirdeolukorras $\psi_c = 1$ varda peapooluse suhtes, korrutatuna sama siirdeolukorra varda pöördega, väljendab koormuse tööd siirdeolukorras $\psi_c = 1$ (joonis 17.31)

$$W_p = F \Delta p = F a \vartheta_{ol,1} = S \vartheta_{ol,1} \quad (17.131)$$



Joonis 17.31. Koormuse staatiline moment

Koormuse staatiline moment peapooluse suhtes vastupäeva on positiivne ja päripäeva negatiivne. Võrrandist (17.130) avaldame reaktsiooni sidemes c

$$r_{cp} = (M_{jk,p} + M_{kj,p} + S_{jk,c}) \vartheta_{jk,c} + (M_{jl,p} + S_{jl,c}) \vartheta_{jl,c} + S_{l_1l,c} \vartheta_{l_1l,c} \quad (17.132)$$

Suurema varraste arvuga raami puhul liidame kõik koormuse põhjustatud virtuaalsed tööd siirdeolukorras $\psi_c = 1$ ja saadud võrrandist avaldame reaktsiooni (17.125) varda pöört takistavas sidemes c

$$r_{cp} = \sum_k (M_{jk,p} + M_{kj,p} + S_{jk,c}) \vartheta_{jk,c} + \sum_l (M_{jl,p} + S_{jl,c}) \vartheta_{jl,c} + \sum_L S_{L,c} \vartheta_{L,c}$$

kus k tähistab mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varrast, l ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga ühendatud varrast ning L mõlemas otsas liigendiga kinnitatud varrast.

17.10. Sisejõudude epüürid ja nende kontroll

Võrrandisüsteemi (17.116) lahendamisele leiame lisatundmatud vabade jäikade sõlmede pöörded φ_j ja varraste pöörded määravad geomeetriselised parameetrid ψ_c ehk teisiti öeldes, igast siirdeolukorrast baasvarraste pöörded.

Varraste lõplikud pöörded arvutame valemiga (17.15)

$$\vartheta_{jk} = \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c} \psi_c; \quad \vartheta_{jl} = \sum_{c=1}^w \vartheta_{jl,c} \psi_c \quad (17.133)$$

Paindemomendid arvutame pärast lisatundmatute leidmist. Valemid selleks saame avaldistest (17.93) ja (17.100), arvestades ka varraste pöörete arvutamise avaldise (17.133)

$$\begin{aligned} M_{jk} &= M_{jp} + 4i_{jk}\varphi_j + 2i_{jk}\varphi_k + 6i_{jk} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c} \psi_c \\ M_{kj} &= M_{kp} + 2i_{jk}\varphi_j + 4i_{jk}\varphi_k + 6i_{jk} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c} \psi_c \end{aligned} \quad (17.134)$$

$$M_{jl} = M_{jp} + 3i_{jl}\varphi_j + 3i_{jl} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jl,c} \psi_c \quad (17.135)$$

Põikjõud arvutame varraste tasakaalu tingimustest paindemomendi epüüri ordinaatide abil valemitega (17.94), (17.101)

$$Q_{jk} = Q_{jp}^0 + \frac{M_j + M_k}{l_{jk}}; \quad Q_{kj} = Q_{kp}^0 + \frac{M_j + M_k}{l_{jk}} \quad (17.136)$$

$$Q_{jl} = Q_{jp}^0 + \frac{M_j}{l_{jl}}; \quad Q_{lj} = Q_{lp}^0 + \frac{M_j}{l_{jl}} \quad (17.137)$$

või kasutades jõumeetodi juurest tuttavat valemit

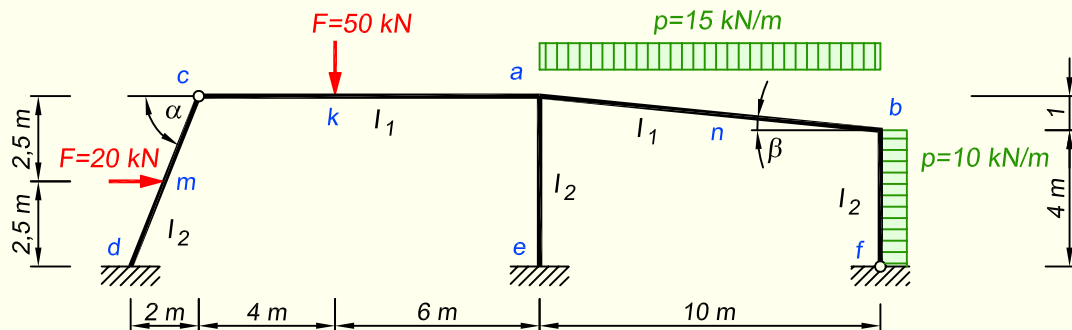
$$Q_k = Q_k^0 + \frac{M_{par} - M_{vas}}{l} \quad (17.138)$$

Iga valemi juures peab tähelepanu pöörama paindemomendi märkidele. Valemis (17.138) tuleb märke arvestada tavalise reegli alusel, mille kohaselt raami sisemine pool loetakse positiivseks ja välimine negatiivseks. Valemities (17.136) ja (17.137) võtame paindemomendi märgid vastavalt deformatsioonimeetodi reeglile.

Pikijõud arvutame pärast põikjõudude leidmist sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest.

Epüüride õigsust kontrollime staatikalise ja kinemaatilise kontrolliga, millest oli pike-malt juttu jõumeetodi teema all peatükis 13.9.2.

NÄIDE 17.2. Koostada joonisel 17.32 kujutatud raami paindemomendi, põik- ja pikijõu epiüürid, kasutades selleks deformatsioonimeetodit. Varraste inertsimomentide suhe on $I_1/I_2 = 2$.



Joonis 17.32. Raami arvutusskeem

LAHENDUS

1. Varraste suhtelised jäikused leiame valemiga

$$i = \frac{EI}{l}$$

Valime varda $a-e$ baasvardaks ja võtame i_{ae} väärtuse võrdseks ühega. See on meil baasjäikuseks. Avaldame siit EI

$$i_{ae} = \frac{EI}{l_{ae}} = \frac{EI}{5} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m} \Rightarrow EI = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

ja leiame selle abil teiste varraste suhtelised jäikused

$$i_{bf} = \frac{EI}{l_{bf}} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_{cd} = \frac{EI}{l_{cd}} = \frac{5}{5,3852} = 0,9285 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$i_{ac} = \frac{2EI}{l_{ac}} = \frac{2 \cdot 5}{10} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_{ab} = \frac{2EI}{l_{ab}} = \frac{2 \cdot 5}{10,0499} = 0,9950 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2. Raami kinemaatilise määramatuse astme leiame valemiga (17.9)

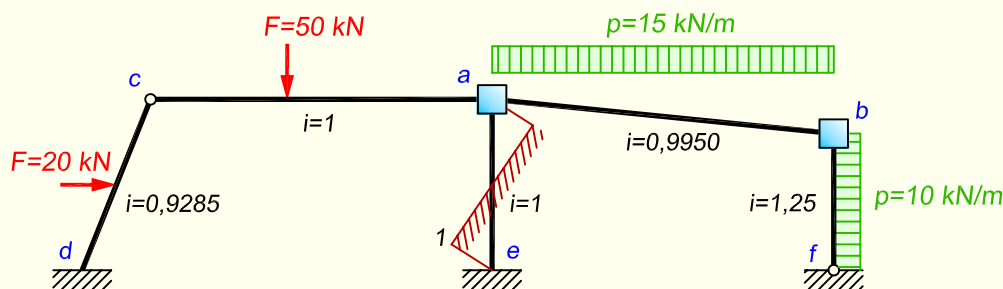
$$n^* = n_s + w = 2 + 1 = 3$$

kus varrasahela (joonis 17.34) vabadusaste on

$$w = 2s - v - t = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$$

Lisatundmatuteks on sõlmede pöörded φ_j ja varraste pöörded ψ_c . Lisatundmatute arv φ_j on võrdne vabade jäikade sõlmede arvuga $n_s = 2$, seega on tundmatuteks sõlmede a ja b pöörded φ_a ja φ_b . Lisatundmatute arv ψ_c võrdub raami varrasahela vabadusastmega $w = 1$ ja seega on tundmatuks varraste pööre ψ_1 ühes võimalikus siirdeolukorras.

3. Kinemaatiliselt määratud põhiskeem koormuste, lisatundmatute ja varraste suhteliste jäikustega on esitatud joonisel 17.33.



Joonis 17.33. Kinemaatiliselt määratud põhiskeem

4. Leiame varraste pöörded. Varrasahela siirete skeem on esitatud joonisel 17.34. Valime sarnaselt suhteliste jäikuste arvutusele ka siin keskmise posti $a-e$ baasvardaks. Anname vardale $a-e$ ühikpöörde $\vartheta_{ae,1} = \psi_1 = 1$, kus ψ_1 tähistab baasvarda pööret. Järgnevalt leiame teiste varraste pöörded, mis sõltuvad baasvarda $a-e$ pöördest.

Varras $a-c$ toetub liigendis a vardale $a-e$ ja liigendis c vardale $c-d$. Punkt, mille ümber hakkab varras $a-c$ pöörduma ehk varda $a-c$ peapoolus $o_{ac,1}$, paikneb seetõttu varraste $a-e$ ja $c-d$ sihtide lõikumispunktis.

Raami kuju ja mõõtude abil arvutame sõlme a ja peapooluse $o_{ac,1}$ vahelise kauguse $l_{ao} = 25$ m.

Kolmnurkadel $e-a-d'$ ja $o-a-d'$ on ühine külg $a-d'$. Sellest tingimusest saame leida varda $a-c$ pöörded

$$l_{ae}\vartheta_{ae,1} = -l_{ao}\vartheta_{ac,1}$$

$$\vartheta_{ac,1} = -\frac{l_{ae}\vartheta_{ae,1}}{l_{ao}} = -\frac{5 \cdot 1}{25} = -0,2$$

Kolmnurkadel $o-c-c'$ ja $d-c-c'$ on ühine külg $c-c'$. Sellest tingimusest leiame varda $c-d$ pöörded

$$-l_{co}\vartheta_{ac,1} = l_{cd}\vartheta_{cd,1}$$

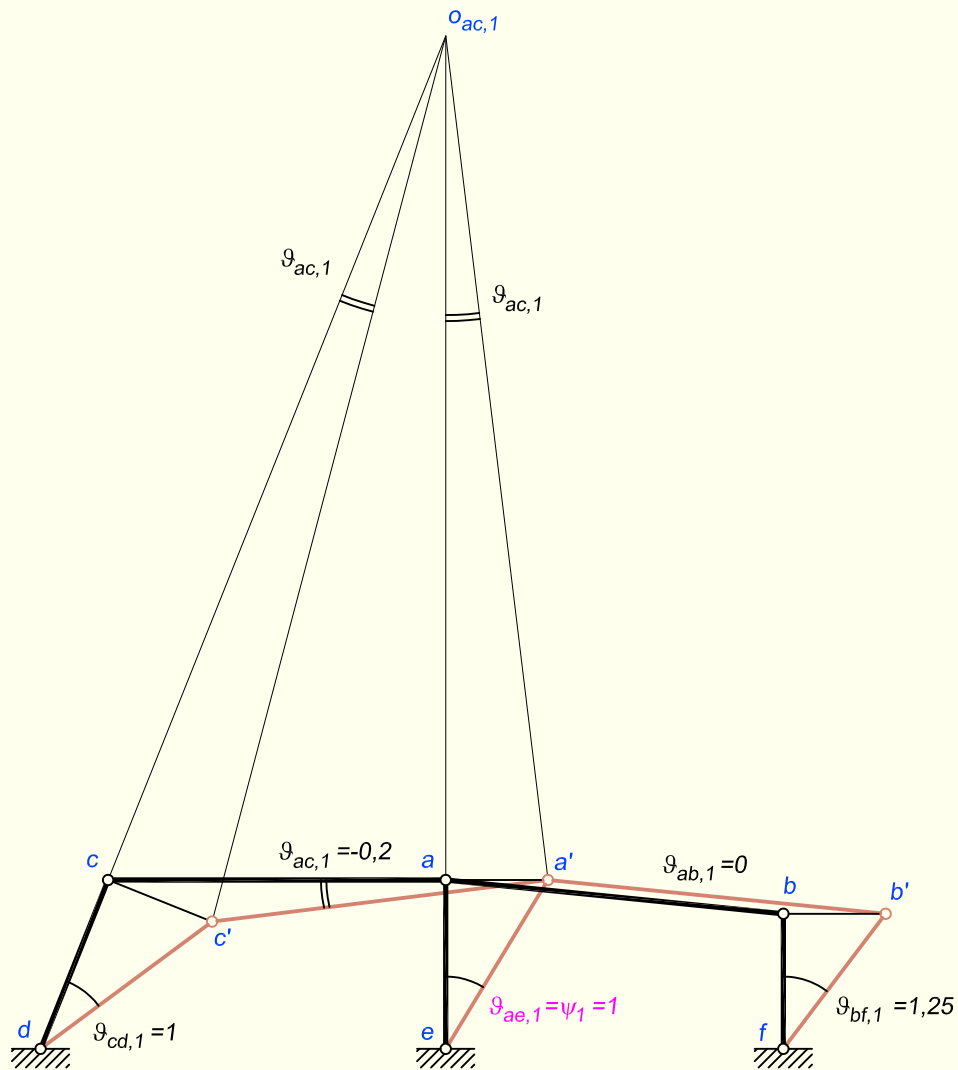
$$\vartheta_{cd,1} = -\frac{l_{co}\vartheta_{ac,1}}{l_{cd}} = \frac{26,9258 \cdot 0,2}{5,3852} = 1$$

Post $b-f$ on postist $a-e$ lühem ja seetõttu peab tema pöördenurk olema suurem. Pöörded saame postide $a-e$ ja $b-f$ pikkuste suhtest

$$\vartheta_{bf,1} = \frac{l_{ae}}{l_{bf}} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Varras $a-b$ toetub kahele paralleelsele vardale ja tema pööre on seetõttu võrdne nulliga

$$\vartheta_{ab,1} = 0$$



Joonis 17.34. Varrasahela siirete skeem. Baasvarda pööre on tähistatud ψ_1

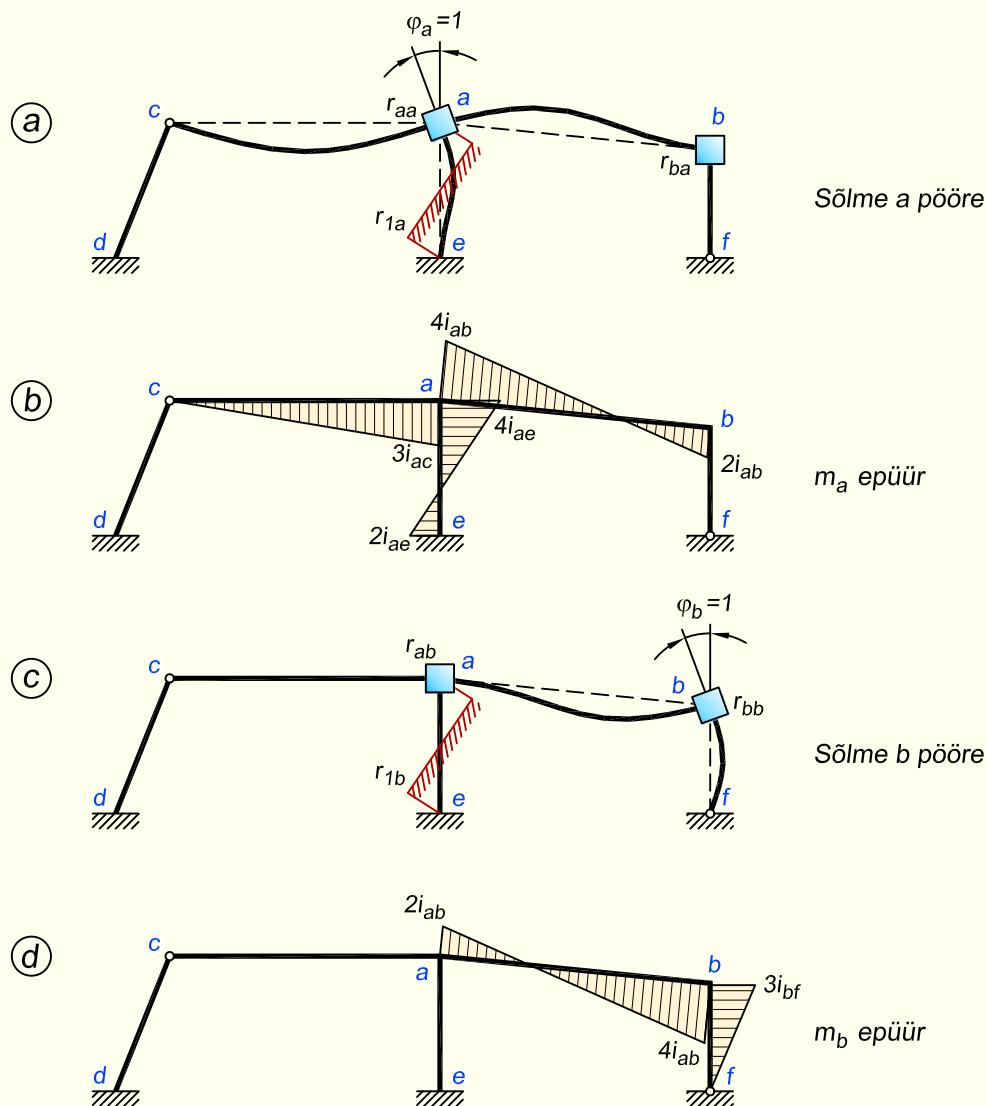
5. Deformatsioonimeetodi kanooniline võrrandisüsteem

Lähtuvalt kinemaatilise määramatuse astmest tuleb meil koostada võrrandisüsteem kolme võrrandiga, kus kaks esimest võrrandit on sõlmede pööret takistavate sidemete a ja b kohta ning viimane võrrand varraste pööret takistava sideme l kohta. Kolme tundmatuga võrrandisüsteemi üldkuju on

$$r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{a1}\psi_1 + r_{ap} = 0$$

$$r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{b1}\psi_1 + r_{bp} = 0$$

$$r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + r_{11}\psi_1 + r_{1p} = 0$$

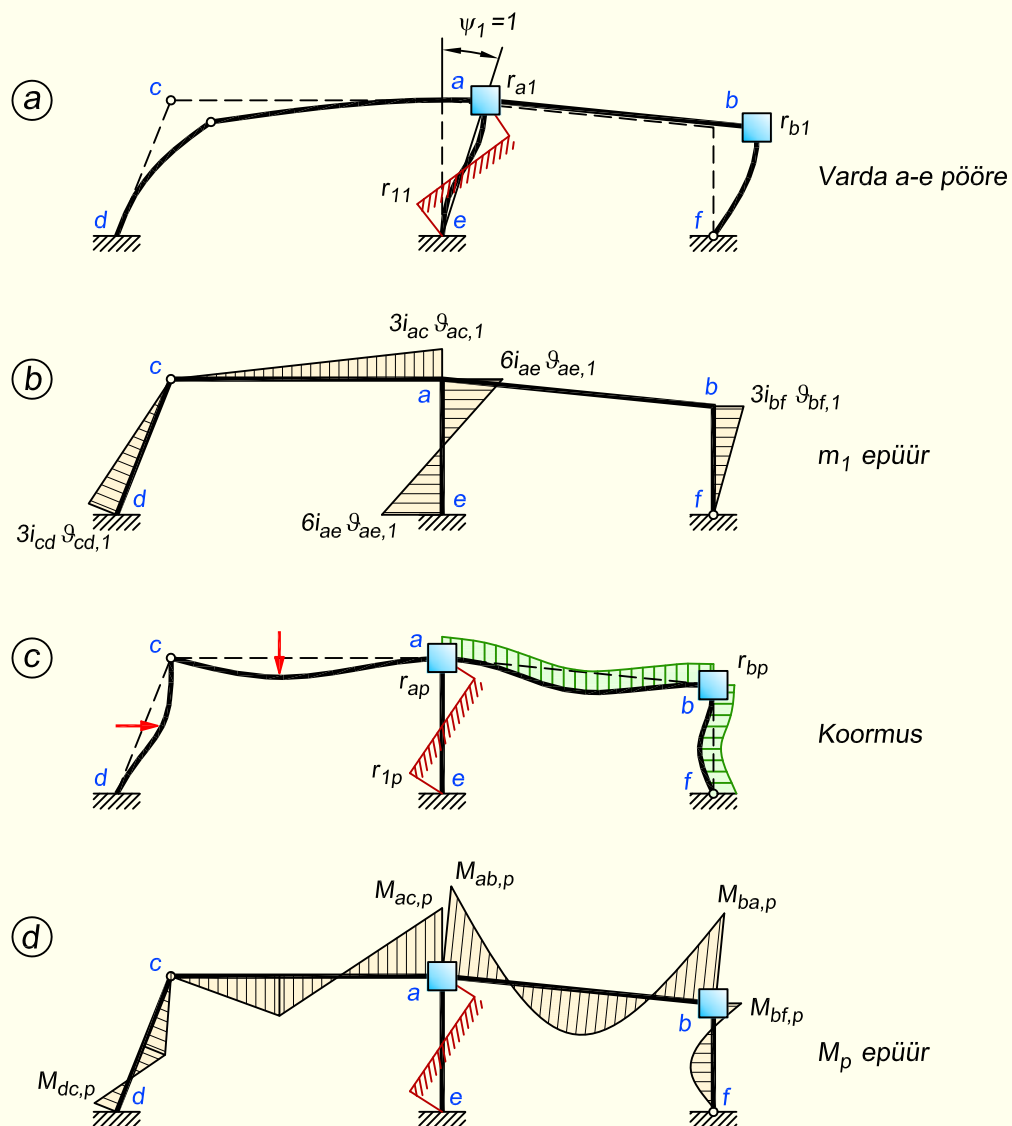


Joonis 17.35. Reaktsioonid sõlmede a ja b pöördest

Kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sõlme a ühikpööre $\varphi_a = 1$ põhjustab lisasidemetes a , b ja l reaktsioone r_{aa} , r_{ba} ja r_{1a} (joonis 17.35, a). Sõlme a ühikpöördest põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.35, b. Sõlme a tegelikust pöördest φ_a põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes on $r_{aa}\varphi_a$, $r_{ba}\varphi_a$ ning $r_{1a}\varphi_a$.

Järgnevalt selgitame võrrandisüsteemi liikmete tähendust. Reaktsiooni tähises näitab esimene indeks sidet, kus reaktsioon tekib, ning teine põhjust.

Kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sõlme b ühikpööre $\varphi_b = 1$ põhjustab lisasidemetes reaktsioone r_{ab} , r_{bb} ja r_{1b} (joonis 17.35, c). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.35, d. Sõlme b tegelikust pöördest φ_b põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes on $r_{ab}\varphi_b$, $r_{bb}\varphi_b$ ning $r_{1b}\varphi_b$.



Joonis 17.36. Reaktsioonid varda a-e pöördest ning koormusest

Postide ühikpööre $\psi_1 = 1$ põhjustab lisasidemetes reaktsioone r_{a1} , r_{b1} ning r_{11} (joonis 17.36, a). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.36, b. Tegelikust pöördest ψ_1 põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes on $r_{a1}\psi_1$, $r_{b1}\psi_1$ ning $r_{11}\psi_1$.

Koormus põhjustab kinemaatilisel määratud põhiskeemi lisasidemetes reaktsioone r_{ap} , r_{bp} ning r_{1p} (joonis 17.36, c). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.36, d.

Võrrandisüsteemi esimene võrrand on koostatud lisasideme a kohta. Võrrandi esimene liige on sõlme a pöördest φ_a , teine liige sõlme b pöördest φ_b , kolmas liige posti a-e pöördest ψ_1 ning neljas liige koormusest põhjustatud reaktsioon kinemaatilisel määratud põhiskeemi lisasidemes a. Sama põhimõtte järgi on koostatud ka kõik ülejäänud võrrandid, mis väljendavad vastavalt lisasidemetes b ja I tekkivat reaktsiooni.

6. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate arvutus

Tundmatute kordajad ehk reaktsioonid lisasidemetes võime arvutada jooniste 17.35 ja 17.36 abil või kasutades järgmisi valemeid.

Sõlme j ühikpöördest põhjustatud reaktsioon r_{jj} lisasidemes j on valemi (17.119) abil järgmine

$$r_{jj} = 4 \sum_k i_{jk} + 3 \sum_l i_{jl}$$

kus k tähistab mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varrast ning l tähistab sõlmes j jäigalt ja teises otsas liigendiga kinnitatud varrast. Selle valemi puhul vaatame kõiki sõlmes j jäigalt ühendatud vardaid ning nendes esinevaid reaktsioone, mis on põhjustatud selle sama sõlme ühikpöördest.

Jäiga naabersõlme k ühikpöördest põhjustatud reaktsiooni lisasidemes j leiame valemiga (17.120)

$$r_{jk} = 2i_{jk}$$

Siin valemis arvestame jääkade sõlmede j ja k vahele jäävat varrast.

Reaktsiooni r_{jc} , mis tekib lisasidemes j siirdeolukorras $\psi_c = 1$, arvutame valemiga (17.121)

$$r_{jc} = r_{cj} = 6 \sum_k i_{jk} \vartheta_{jk,c} + 3 \sum_l i_{jl} \vartheta_{jl,c}$$

Selle valemi puhul vaatame kõiki sõlmes j jäigalt ühendatud vardaid ja nendes tekkivaid reaktsioone varraste pööretest.

Reaktsiooni r_{cc} varda pöoret takistavas sidemes c siirdeolukorras $\psi_c = 1$ arvutame valemiga (17.122)

$$r_{cc} = 12 \sum_k i_{jk} \vartheta_{jk,c}^2 + 3 \sum_l i_{jl} \vartheta_{jl,c}^2$$

Siin arvestame arvutusskeemi kõiki neid vardaid, mis pöörduvad.

Järgnevalt leiame reaktsioonid ülesandes esitatud raamile, kasutades toodud valemeid.

Lisasidemes a tekkiv reaktsioon sõlme a pöördest

$$r_{aa} = 3i_{ac} + 4(i_{ae} + i_{ab}) = 3 \cdot 1 + 4(1 + 0,9950) = 10,9800 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ilma valemist kasutamata jõuame samale tulemusele, lähtudes joonisest 17.35, b , kuna seal on kujutatud sõlme a pöördest põhjustatud paindemomendi epüür. Liidame jooniselt kokku kõik sidemes a tekkivad kinnitusemomendid.

Lisasidemes a tekkiva reaktsiooni sõlme b pöördest arvutame

$$r_{ab} = 2i_{ab} = 2 \cdot 0,9950 = 1,9900 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sama tulemuse saame jooniselt 17.35, d , kuna seal on kujutatud sõlme b pöördest põhjustatud paindemomendi epüür. Liidame kokku kõik sidemes a tekkivad kinnitusemomendid.

Lisasidemes a tekkiv reaktsioon postide pöördest

$$r_{a1} = 3i_{ac}\vartheta_{ac,1} + 6i_{ae}\vartheta_{ae,1} = -3 \cdot 1 \cdot 0,2 + 6 \cdot 1 \cdot 1 = 5,4000 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sama tulemuse saame jooniselt 17.36, b , kuna seal on kujutatud varraste pöördest põhjustatud paindemomendi epüür. Ka siin liidame jooniselt kokku kõik sidemes a tekivad kinnituspõrdestid.

Lisasidemes b tekkiv reaktsioon sõlme b pöördest

$$r_{bb} = 3i_{bf} + 4i_{ab} = 3 \cdot 1,25 + 4 \cdot 0,9950 = 7,7300 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Siin läheme tagasi joonise 17.35, d juurde, kus on sõlme b pöördest põhjustatud paindemomendi epüür ja vaatame, millised kinnituspõrdestid sidemes b tekivad.

Lisasidemes b tekkiv reaktsioon postide pöördest

$$r_{b1} = 3i_{bf}\vartheta_{bf,1} = 3 \cdot 1,25 \cdot 1,25 = 4,6875 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Vaatame jooniselt 17.36, b varraste pöördest põhjustatud paindemomendi epüüri ja näeme, et sidemes b esineb seal üks kinnituspõrdest.

Lisasidemes I tekkiva reaktsiooni postide pöördest (joonis 17.36, b) saame

$$\begin{aligned} r_{11} &= 3 \left(i_{cd}\vartheta_{cd,1}^2 + i_{bf}\vartheta_{bf,1}^2 + i_{ac}\vartheta_{ac,1}^2 \right) + 12i_{ae}\vartheta_{ae,1}^2 = \\ &= 3 \left(0,9285 \cdot 1^2 + 1,25 \cdot 1,25^2 + 1 \cdot 0,2^2 \right) + 12 \cdot 1 \cdot 1^2 = 20,7649 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Vaatame endiselt joonist 17.36, b ja summeerime kõik pöörduvate varraste otste kinnituspõrdestid.

Võrrandisüsteemi peadiagonaali suhtes sümmeetriliselt paiknevad liikmed on teineteisega võrdsed.

7. Võrrandisüsteemi vabaliikmete arvutus

Vabaliikmete arvutamisel tuleb esimesena arvutada kinnituspõrdestid kinemaatilise määratud põhiskeemis (joonis 17.36, d). Valemid kinnituspõrdestide arvutamiseks valime tabelite abil sõltuvalt koormusest ja varda otste kinnitusest. Kinnituspõrdestide arvutamisel tuleb tähelepanu pöörata deformatsioonimeetodi märgireeglile, mille kohaselt positiivne paindemoment mõjub varda otsale vastupäeva.

$$M_{ab,p} = \frac{1}{12}pl^2 = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 10^2 = 125 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ba,p} = -\frac{1}{12}pl^2 = -\frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 10^2 = -125 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{dc,p} = \frac{1}{2}Fl\eta(1-\eta^2) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5 \cdot 0,5(1-0,5^2) = 18,75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ac,p} = -\frac{1}{2}Fl\xi(1-\xi^2) = -\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10 \cdot 0,4(1-0,4^2) = -84 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bf,p} = \frac{1}{8}pl^2 = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 4^2 = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Vabaliikmed ehk koormusliikmed leiame järgmiste valemite abil.

Sõlme pööret takistavas lissidesemes j tekkiv reaktsioon koormusest valemiga (17.124)

$$r_{jp} = \sum_k M_{jk,p} + \sum_l M_{jl,p}$$

Varda pööret takistavas sidemes c tekkiv reaktsioon koormusest valemiga (17.125)

$$r_{cp} = r_{cp} = \sum_k (M_{jp} + M_{kp} + S_{jk,c}) \vartheta_{jk,c} + \sum_l (M_{jp} + S_{jl,c}) \vartheta_{jl,c}$$

kus S on vardale rakendatud koormuse staatiline moment varda peapooluse suhtes siirdeolukorras $\psi_c = 1$. Staatilise momendi puhul arvestame sellega, et jõu pöördesuund ümber peapooluse on vastupäeva positiivne ja päripäeva negatiivne.

Koormusliikmed ülesandes esitatud raamile on

$$r_{ap} = M_{ab,p} + M_{ac,p} = 125 - 84 = 41 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{bp} = M_{ba,p} + M_{bf,p} = -125 + 20 = -105 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} r_{1p} &= (M_{dc,p} + S_{cd,1}) \vartheta_{cd,1} + (M_{ac,p} + S_{ac,1}) \vartheta_{ac,1} + (M_{bf,p} + S_{bf,1}) \vartheta_{bf,1} = \\ &= (18,75 - 20 \cdot 2,5) \cdot 1 + (-84 + 50 \cdot 6) (-0,2) + (20 + 10 \cdot 4 \cdot 2) \cdot 1,25 = 50,55 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

8. Võrrandisüsteem arvkoordajatega

$$10,9800\varphi_a + 1,9900\varphi_b + 5,4000\psi_1 + 41 = 0$$

$$1,9900\varphi_a + 7,7300\varphi_b + 4,6875\psi_1 - 105 = 0$$

$$5,4000\varphi_a + 4,6875\varphi_b + 20,7649\psi_1 + 50,55 = 0$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel leiame lisatundmatud

$$\varphi_a = -4,354; \quad \varphi_b = 17,951; \quad \psi_1 = -5,354$$

9. Paindemomendi epüüri ordinaadid arvutame pärast lisatundmatute leidmist valemitega (17.134) ja (17.135)

$$M_{jk} = M_{jp} + 4i_{jk}\varphi_j + 2i_{jk}\varphi_k + 6i_{jk} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c}\psi_c$$

$$M_{kj} = M_{kp} + 2i_{jk}\varphi_j + 4i_{jk}\varphi_k + 6i_{jk} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c}\psi_c$$

$$M_{jl} = M_{jp} + 3i_{jl}\varphi_j + 3i_{jl} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jl,c}\psi_c$$

Alustame ordinaatide arvutamist sõlmes a liituvates varrastes

$$\begin{aligned} M_{ab} &= M_{ab,p} + 4i_{ab}\varphi_a + 2i_{ab}\varphi_b = 125 - 4 \cdot 0,9950 \cdot 4,354 + 2 \cdot 0,9950 \cdot 17,951 = \\ &= 143,394 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$M_{ae} = 4i_{ae}\varphi_a + 6i_{ae}\vartheta_{ae,1}\psi_1 = -4 \cdot 1 \cdot 4,354 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5,354 = -49,540 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} M_{ac} &= M_{ac,p} + 3i_{ac}\varphi_a + 3i_{ac}\vartheta_{ac,1}\psi_1 = -84 - 3 \cdot 1 \cdot 4,354 + 3 \cdot 1 \cdot 0,2 \cdot 5,354 = \\ &= -93,850 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Kontroll sõlmes *a*

$$M_{ab} + M_{ae} + M_{ac} = 143,394 - 49,540 - 93,850 = 0,004$$

Momendid sõlmes *b*

$$M_{ba} = M_{ba,p} + 2i_{ab}\varphi_a + 4i_{ab}\varphi_b = -125 - 2 \cdot 0,9950 \cdot 4,354 + 4 \cdot 0,9950 \cdot 17,951 = -62,219 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bf} = M_{bf,p} + 3i_{bf}\varphi_b + 3i_{bf}\vartheta_{bf,1}\psi_1 = 20 + 3 \cdot 1,25 \cdot 17,951 - 3 \cdot 1,25 \cdot 1,25 \cdot 5,354 = 62,219 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

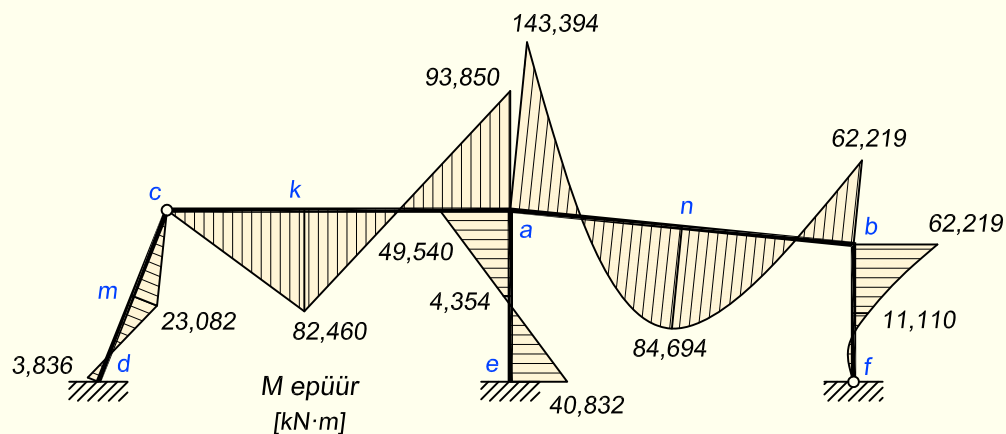
Kontroll sõlmes *b*

$$M_{ba} + M_{bf} = -62,219 + 62,219 = 0$$

Momendid jäikades toesõlmedes

$$M_e = 2i_{ae}\varphi_a + 6i_{ae}\vartheta_{ae,1}\psi_1 = -2 \cdot 1 \cdot 4,354 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5,354 = -40,832 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_d = M_{dc,p} + 3i_{cd}\vartheta_{cd,1}\psi_1 = 18,75 - 3 \cdot 0,9285 \cdot 1 \cdot 5,354 = 3,836 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 17.37. Paindemomendi epüür

Kui paindemomendi epüüri ordinaadid varraste otstes on leitud, siis on soovitatavad enne arvutusega edasi minemist kanda joonisele. Meeles peab pidama deformatsioonimeetodi märgireeglit, mistõttu tuleb varda otsa kujutada vastupäeva suunaga momendi nooleke ja ordinaat kanda õigele varda poolele, lähtudes märgist ja noole asendist: positiivne ordinaat läheb noole saba poole ja negatiivne noole teraviku poole.

Momendid varraste vahepealsetes lõigetes arvutame tavalise valemiga

$$M_k = M_k^0 + M_{vas} \cdot \xi'_k + M_{par} \cdot \xi_k$$

kus arvestame lihttala epüüri riputamist varda jäikadest otsasõlmedest tingitud paindemomendi ordinaatide vahele. Kuna see valem ei ole seotud deformatsioonimeetodiga, vaid kujutab tavalist epüüride liitmist, siis siin me ei arvesta ordinaatide puhul deformatsioonimeetodi märke, mille saime eespool olevas arvutuses. Lähtume tavapärasest reeglist, et raami sisemine pool on positiivne ja välimine negatiivne.

$$M_k = \frac{50 \cdot 4 \cdot 6}{10} - 93,850 \cdot \frac{4}{10} = 82,460 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_m = \frac{20 \cdot 2,5 \cdot 2,5}{5} - 3,836 \cdot 0,5 = 23,082 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_n = \frac{15 \cdot 10^2}{8} - 143,394 \cdot 0,5 - 62,219 \cdot 0,5 = 84,694 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_l = \frac{10 \cdot 4^2}{8} - 62,219 \cdot 0,5 = -11,110 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

10. Paindemomendi epüüri ordinaate saab arvutada ka sõlmede ja varraste pöörete skeemide abil (joonised 17.35 ja 17.36). Selleks me leiame kõigis paindemomendi epüüri jaoks vajalikes lõigetes (ehk praegusel juhul varraste otstes) igast pöördest põhjustatud kinnitusemomentid. Kui võrrandisüsteemi tundmatute kordajate määramisel arvestasime ühikpööretega, siis nüüd tuleb kasutada võrrandisüsteemi lahendamisel saadud pöörete väärtuseid.

Kinnitusemomentid sõlme *a* pöördest saame joonise 17.35, *b* abil. Kõik joonisel olevad reaktsioonid tuleb korrutada φ_a väärtusega. Varrastes, kus epüüri ei ole, võrduvad kinnitusemomentid nulliga ja need võib jätta välja kirjutamata. Selleks, et erinevatest pööretest põhjustatud kinnitusemomentidel hiljem vahet teha, märgime kinnitusemomenti tähise juurde indeksi viimasele kohale pöörde tähise.

$$M_{ac,a} = 3i_{ac}\varphi_a = -3 \cdot 1 \cdot 4,354 = -13,062 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ae,a} = 4i_{ae}\varphi_a = -4 \cdot 1 \cdot 4,354 = -17,416 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ab,a} = 4i_{ab}\varphi_a = -4 \cdot 0,9950 \cdot 4,354 = -17,329 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ea,a} = 2i_{ae}\varphi_a = -2 \cdot 1 \cdot 4,354 = -8,708 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ba,a} = 2i_{ab}\varphi_a = -2 \cdot 0,9950 \cdot 4,354 = -8,664 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kinnitusemomentid sõlme *b* pöördest saame joonise 17.35, *d* abil. Ühikpöördest põhjustatud epüüri ordinaadid tuleb siin läbi korrutada φ_b väärtusega.

$$M_{ba,b} = 4i_{ab}\varphi_b = 4 \cdot 0,9950 \cdot 17,951 = 71,445 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bf,b} = 3i_{bf}\varphi_b = 3 \cdot 1,25 \cdot 17,951 = 67,316 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ab,b} = 2i_{ab}\varphi_b = 2 \cdot 0,9950 \cdot 17,951 = 35,722 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kinnitusemomentid varda *a-e* pöördest saame joonise 17.36, *b* abil. Ühikpöördest põhjustatud epüüri ordinaadid korrutame ψ_1 väärtusega.

$$M_{dc,1} = 3i_{cd}\vartheta_{cd,1}\psi_1 = -3 \cdot 0,9285 \cdot 1 \cdot 5,354 = -14,914 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ac,1} = 3i_{ac}\vartheta_{ac,1}\psi_1 = 3 \cdot 1 \cdot 0,2 \cdot 5,354 = 3,212 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ae,1} = 6i_{ae}\vartheta_{ae,1}\psi_1 = -6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5,354 = -32,124 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ea,1} = 6i_{ae}\vartheta_{ae,1}\psi_1 = -6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5,354 = -32,124 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bf,1} = 3i_{bf}\vartheta_{bf,1}\psi_1 = -3 \cdot 1,25 \cdot 1,25 \cdot 5,354 = -25,097 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Paindemomendi epüüri ordinaadid arvutame, summeerides vastavas lõikes koormusest põhjustatud kinnitusemomendi ning sõlmede ja varraste pööretest saadud kinnitusemomendid

$$M_{jk} = M_{jk,p} + M_{jk,a} + M_{jk,b} + M_{jk,1}$$

$$M_{ab} = M_{ab,p} + M_{ab,a} + M_{ab,b} = 125 - 17,329 + 35,722 = 143,394 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ae} = M_{ae,a} + M_{ae,1} = -17,416 - 32,124 = -49,540 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ac} = M_{ac,p} + M_{ac,a} + M_{ac,1} = -84 - 13,062 + 3,212 = -93,850 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ba} = M_{ba,p} + M_{ba,a} + M_{ba,b} = -125 - 8,664 + 71,445 = -62,219 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bf} = M_{bf,p} + M_{bf,b} + M_{bf,1} = 20 + 67,316 - 25,097 = 62,219 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ea} = M_{ea,a} + M_{ea,1} = -8,708 - 32,124 = -40,832 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{dc} = M_{dc,p} + M_{dc,1} = 18,75 - 14,914 = 3,836 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kui võrrelda saadud avaldise eespool valemite järgi tehtud paindemomendi arvutusega, siis näeme, et mõlemal juhul sisaldavad nad täpselt samu liikmeid. Sisuliselt toimub arvutus mõlemal juhul pööretest põhjustatud epüüride järgi, valemities on see arvutus lihtsalt üldisel kujul välja toodud.

11. Kinemaatikaline kontroll

Pärast paindemomendi epüüri koostamist teeme kinemaatikalise kontrolli. Selleks eemaldame arvutusskeemist staatikaga määramatuse astmele vastava arvu sidemeid ning arvutame lisatundmatutele $X_i = 1$ vastavad siirded, mis pidevustingimustele vastavalt peavad võrduma nulliga. Staatikaga määramatuse aste on

$$n = 3m - l_1 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

Ühiktundmatutest põhjustatud paindemomendi epüürid on kujutatud joonisel 17.38.

Erinevate paindejäikuste tõttu tuleb leida varraste redutseeritud pikkused. Võtame aluseks postide paindejäikuse

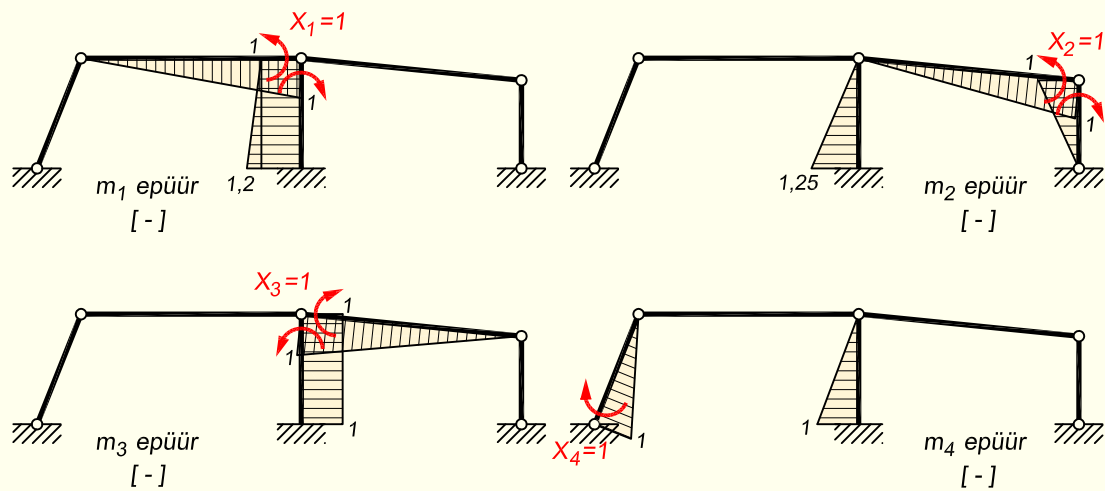
$$EI_2 = EI_0$$

Varraste redutseeritud pikkused

$$l'_{ae} = l_{ae} = 5 \text{ m}; \quad l'_{dc} = l_{dc} = 5,3852 \text{ m}; \quad l'_{bf} = l_{bf} = 4 \text{ m}$$

$$l'_{ac} = l_{ac} \cdot \frac{EI_0}{EI_1} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ m}; \quad l'_{ab} = l_{ab} \cdot \frac{EI_0}{EI_1} = 10,0499 \cdot \frac{1}{2} = 5,0250 \text{ m}$$

$$EI_0\Delta_1 = \frac{2}{3} \cdot 82,460 \cdot 0,4 + \frac{3}{6} [2(82,460 \cdot 0,4 - 93,850 \cdot 1) + 82,460 \cdot 1 - 93,850 \cdot 0,4] + \\ + \frac{5}{6} [2(49,540 \cdot 1 - 40,832 \cdot 1,2) + 49,540 \cdot 1,2 - 40,832 \cdot 1] = -0,0007$$



Joonis 17.38. Ühiktundmatutest põhjustatud paindemomendi epüürid

$$EI_0\Delta_2 = \frac{5}{6}(-40,832 \cdot 1,25 + 4 \cdot 4,354 \cdot 0,625 + 49,540 \cdot 0) +$$

$$+ \frac{5,0250}{6}(143,394 \cdot 0 + 4 \cdot 84,694 \cdot 0,5 - 62,219 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{4}{6}(-62,219 \cdot 1 - 4 \cdot 11,110 \cdot 0,5 + 0) = -0,001$$

$$EI_0\Delta_3 = -1 \cdot 5 \cdot 4,354 + \frac{5,0250}{6}(-143,394 \cdot 1 + 4 \cdot 84,694 \cdot 0,5 + 62,219 \cdot 0) = 0$$

$$EI_0\Delta_4 = \frac{5,3852 \cdot 0,5}{6}[2(-3,836 \cdot 1 + 23,082 \cdot 0,5) - 3,836 \cdot 0,5 + 23,082 \cdot 1] +$$

$$= \frac{5,3852 \cdot 0,5}{3} \cdot 23,082 \cdot 0,5 + \frac{5}{6}(49,540 \cdot 0 + 4 \cdot 4,354 \cdot 0,5 - 40,832 \cdot 1) = 0,002$$

12. Põikjõu epüüri ordinaatide arvutus

Põikjõu epüüri ordinaadid leiame jõumeetodist tuttava valemiga (17.138)

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{M_{par} - M_{vas}}{l}$$

Selle valemi puhul me ei vaata enam seda, mis märgiga olid M ordinaadid saadud arvutusest, vaid lähtume ainult epüürist ja sellest, et raami sisemised ordinaadid võtame positiivsetena ja välimised negatiivsetena.

$$\sin \alpha = 0,9285; \quad \cos \alpha = 0,3714; \quad \sin \beta = 0,0995; \quad \cos \beta = 0,9950$$

$$Q_{d-m} = Q_{dm}^0 + \frac{-M_d}{l_{dc}} = 20 \cdot 0,5 \cdot 0,9285 + \frac{3,836}{5,3852} = 9,997 \text{ kN}$$

$$Q_{c-m} = Q_{cm}^0 + \frac{-M_d}{l_{dc}} = -20 \cdot 0,5 \cdot 0,9285 + \frac{3,836}{5,3852} = -8,573 \text{ kN}$$

$$Q_{c-k} = Q_{ck}^0 + \frac{M_{ac}}{l_{ac}} = 50 \cdot \frac{6}{10} + \frac{-93,850}{10} = 20,615 \text{ kN}$$

$$Q_{a-k} = Q_{ak}^0 + \frac{M_{ac}}{l_{ac}} = -50 \cdot \frac{4}{10} + \frac{-93,850}{10} = -29,385 \text{ kN}$$

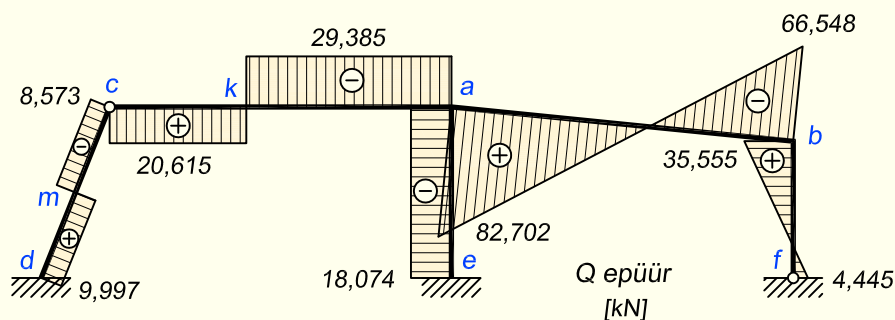
$$Q_{a-e} = \frac{M_{ae} - M_{ea}}{l_{ae}} = \frac{-49,540 - 40,832}{5} = -18,074 \text{ kN}$$

$$Q_{ab} = Q_{ab}^0 + \frac{M_{ba} - M_{ab}}{l_{ab}} = 15 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 0,9950 + \frac{-62,219 + 143,394}{10,0499} = 82,702 \text{ kN}$$

$$Q_{ba} = Q_{ba}^0 + \frac{M_{ba} - M_{ab}}{l_{ab}} = -15 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 0,9950 + \frac{-62,219 + 143,394}{10,0499} = -66,548 \text{ kN}$$

$$Q_{bf} = Q_{bf}^0 + \frac{-M_{bf}}{l_{bf}} = 10 \cdot 4 \cdot 0,5 + \frac{62,219}{4} = 35,555 \text{ kN}$$

$$Q_{fb} = Q_{fb}^0 + \frac{-M_{bf}}{l_{bf}} = -10 \cdot 4 \cdot 0,5 + \frac{62,219}{4} = -4,445 \text{ kN}$$



Joonis 17.39. Põikjõu epüür

Põikjõu epüüri ordinaate võime koondjõuga koormatud vardas arvutada ka nii, et jagame koormuse kohalt varda kaheks ja arvestame seejärel kummagi lõigu otsmisi paindemomendi ordinaate ning nende lõikude pikkuseid. Varda osadeks jagamisega läheb valem lühemaks, kuna siis kaob ära lihttala põikjõud Q_k^0 .

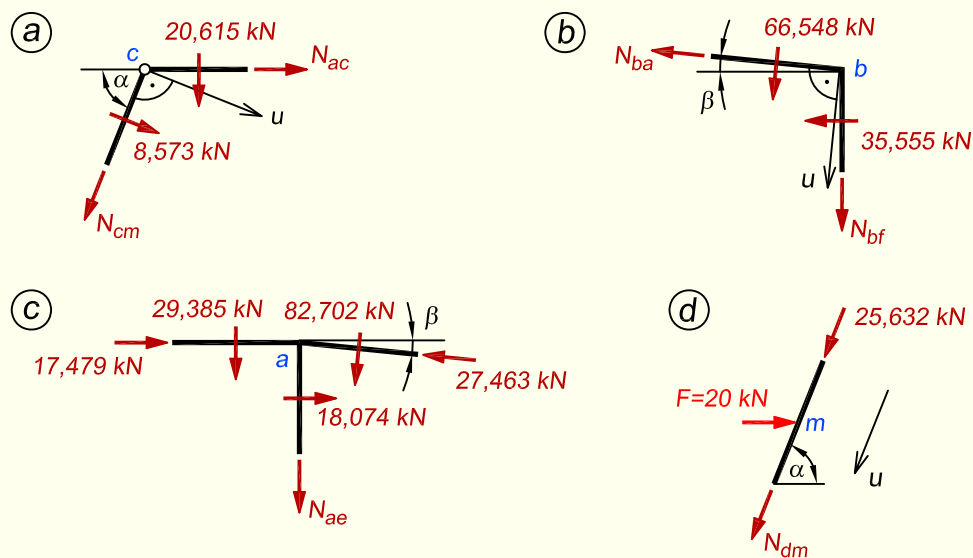
$$Q_{d-m} = \frac{M_m - M_d}{l_{dm}} = \frac{23,082 + 3,836}{5,3852 \cdot 0,5} = 9,997 \text{ kN}$$

$$Q_{c-m} = \frac{-M_m}{l_{mc}} = \frac{-23,082}{5,3852 \cdot 0,5} = -8,573 \text{ kN}$$

$$Q_{c-k} = \frac{M_k}{l_{ck}} = \frac{82,460}{4} = 20,615 \text{ kN}$$

$$Q_{a-k} = \frac{M_{ak} - M_k}{l_{ak}} = \frac{-93,850 - 82,460}{6} = -29,385 \text{ kN}$$

13. Pijkjõu epüüri ordinaadid leiame sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest, kasutades pijkjõu epüüri väärtuseid. Raamist eraldatud sõlmed koos neile mõjuvate jõududega on näidatud joonisel 17.40.



Joonis 17.40. Raamist eraldatud sõlmed

Sõlm *c* (joonis 17.40, *a*)

$$\sum u = 0; \quad N_{ac} \cdot 0,9285 + 8,573 + 20,615 \cdot 0,3714 = 0$$

$$N_{ac} = \frac{-8,573 - 20,615 \cdot 0,3714}{0,9285} = -17,479 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0; \quad N_{cm} \cdot 0,9285 + 8,573 \cdot 0,3714 + 20,615 = 0$$

$$N_{cm} = \frac{-8,573 \cdot 0,3714 - 20,615}{0,9285} = -25,632 \text{ kN}$$

Sõlm *b* (joonis 17.40, *b*)

$$\sum X = 0; \quad -N_{ba} \cdot 0,9950 - 35,555 - 66,548 \cdot 0,0995 = 0$$

$$N_{ba} = \frac{-35,555 - 66,548 \cdot 0,0995}{0,9950} = -42,388 \text{ kN}$$

$$\sum u = 0; \quad N_{bf} \cdot 0,9950 + 66,548 + 35,555 \cdot 0,0995 = 0$$

$$N_{bf} = \frac{-66,548 - 35,555 \cdot 0,0995}{0,9950} = -70,438 \text{ kN}$$

Sõlm a (joonis 17.40, c)

$$N_{ab} = N_{ba} + p \cdot l \cdot \sin \beta = -42,388 + 15 \cdot 10 \cdot 0,0995 = -27,463 \text{ kN}$$

$$\sum X = 17,479 + 18,074 - 27,463 \cdot 0,9950 - 82,702 \cdot 0,0995 = 0$$

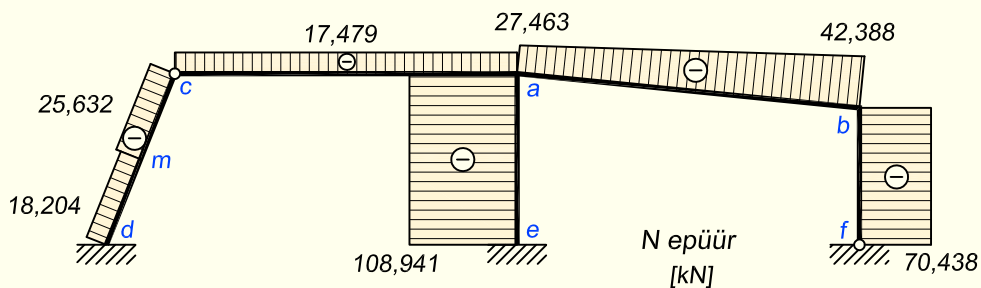
$$\sum Z = 0; \quad N_{ae} + 29,385 + 82,702 \cdot 0,9950 - 27,463 \cdot 0,0995 = 0$$

$$N_{ae} = -29,385 - 82,702 \cdot 0,9950 + 27,463 \cdot 0,0995 = -108,941 \text{ kN}$$

Lõige m (joonis 17.40, d)

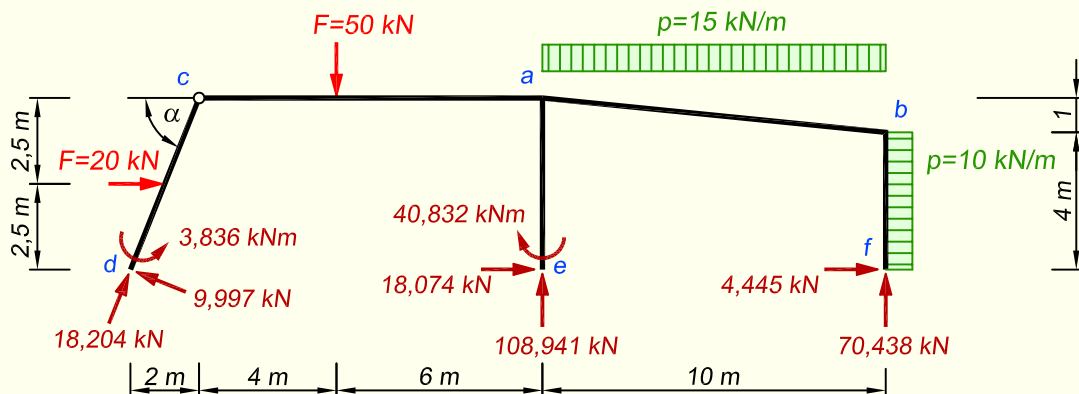
$$\sum u = 0; \quad N_{dm} + 25,632 - 20 \cdot 0,3714 = 0$$

$$N_{dm} = -25,632 + 20 \cdot 0,3714 = -18,204 \text{ kN}$$



Joonis 17.41. Pikijõu epüür

14. Piki- ja põikjõu epüüride õigsust kontrollime raamile mõjuva koormuse ja toereaktsioonide tasakaalutingimustega (joonis 17.42). Toereaktsioonid leiame M , Q ja N epüürit. Seejärel kirjutame projektsioonide tasakaalutingimused mõlema telje suunas ning momentide tasakaalutingimuse mingi punkti suhtes.



Joonis 17.42. Staatikiline kontroll

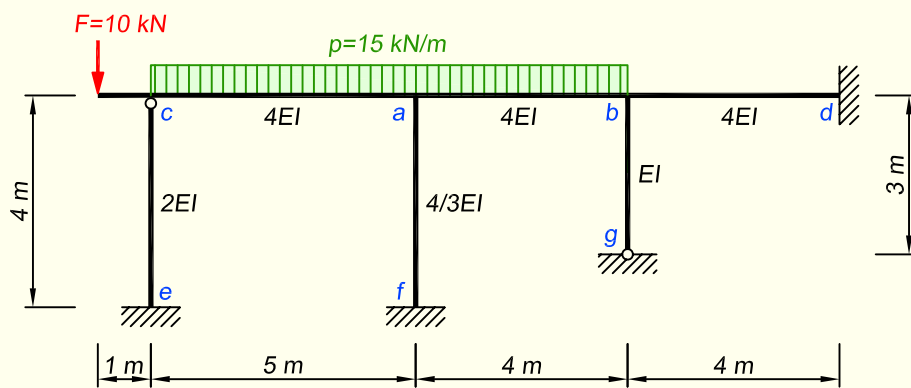
$$\sin \alpha = 0,9285; \quad \cos \alpha = 0,3714$$

$$\sum X = 20 - 10 \cdot 4 + 18,204 \cdot 0,3714 - 9,997 \cdot 0,9285 + 18,074 + 4,445 = 0$$

$$\sum Z = 50 + 15 \cdot 10 - 18,204 \cdot 0,9285 - 9,997 \cdot 0,3714 - 108,941 - 70,438 = 0$$

$$\sum M_c = 20 \cdot 2,5 - 50 \cdot 4 - 15 \cdot 10 \cdot 15 - 10 \cdot 4 \cdot 3 - 9,997 \cdot 5,3852 + 18,074 \cdot 5 + \\ + 108,941 \cdot 10 + 4,445 \cdot 5 + 70,438 \cdot 20 + 3,836 - 40,832 = 0$$

NÄIDE 17.3. Koostada võrrandisüsteem joonisel 17.43 kujutatud raami lahendamiseks deformatsioonimeetodi abil. Varraste paindejäikuste erinevused on näidatud joonisel.



Joonis 17.43. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

1. Varraste suhtelised jäikused leiame valemiga

$$i = \frac{EI}{l}$$

Võtame i_{bg} väärtuse võrdseks ühega, avaldame siit EI ja leiame selle abil teiste varraste suhtelised jäikused

$$i_{bg} = \frac{EI}{l} = \frac{EI}{3} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m} \Rightarrow EI = 3 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$i_{ce} = \frac{2EI}{l} = \frac{2 \cdot 3}{4} = 1,5 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_{af} = \frac{4/3EI}{l} = \frac{4/3 \cdot 3}{4} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

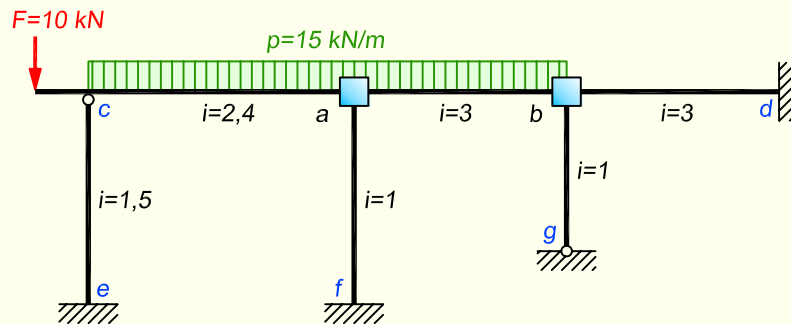
$$i_{ca} = \frac{4EI}{l} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2,4 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_{ab} = i_{bd} = \frac{4EI}{l} = \frac{4 \cdot 3}{4} = 3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2. Raami kinemaatilise määramatuse astme leiame valemiga

$$n^* = n_s + w = n_s + 2s - v - t = 2 + 2 \cdot 7 - 6 - 8 = 2 + 0 = 2$$

Vaadeldaval raamil on varrasahela vabadusaste null ja seetõttu ei saa koostada varrasahela siirete skeemi. Lisatundmatuteks on sõlmede a ja b pöörded φ_a ja φ_b .

3. Kinemaatilisel määratud põhiskeem koormuse, lisatundmatute ja varraste suhteliste jäikustega on esitatud joonisel 17.44.



Joonis 17.44. Kinemaatilisel määratud põhiskeem

4. Deformatsioonimeetodi kanooniline võrrandisüsteem

Nullvabadusastme tõttu puuduvad võrrandisüsteemist varraste pööretele vastavad liikmed ja alles jääb ainult sõlmede pööretele vastav osa. Esimese võrrandi kirjutame lisasideme a reaktsioonide ning teise võrrandi lisasideme b reaktsioonide kohta. Sõlmede a ja b ühikpööretest põhjustatud paindemomendi epüürid on kujutatud joonisel 17.45.

$$r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{ap} = 0$$

$$r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{bp} = 0$$

5. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate leidmine

$$r_{aa} = 3i_{ac} + 4(i_{af} + i_{ab}) = 3 \cdot 2,4 + 4(1 + 3) = 23,2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{ab} = r_{ba} = 2i_{ab} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

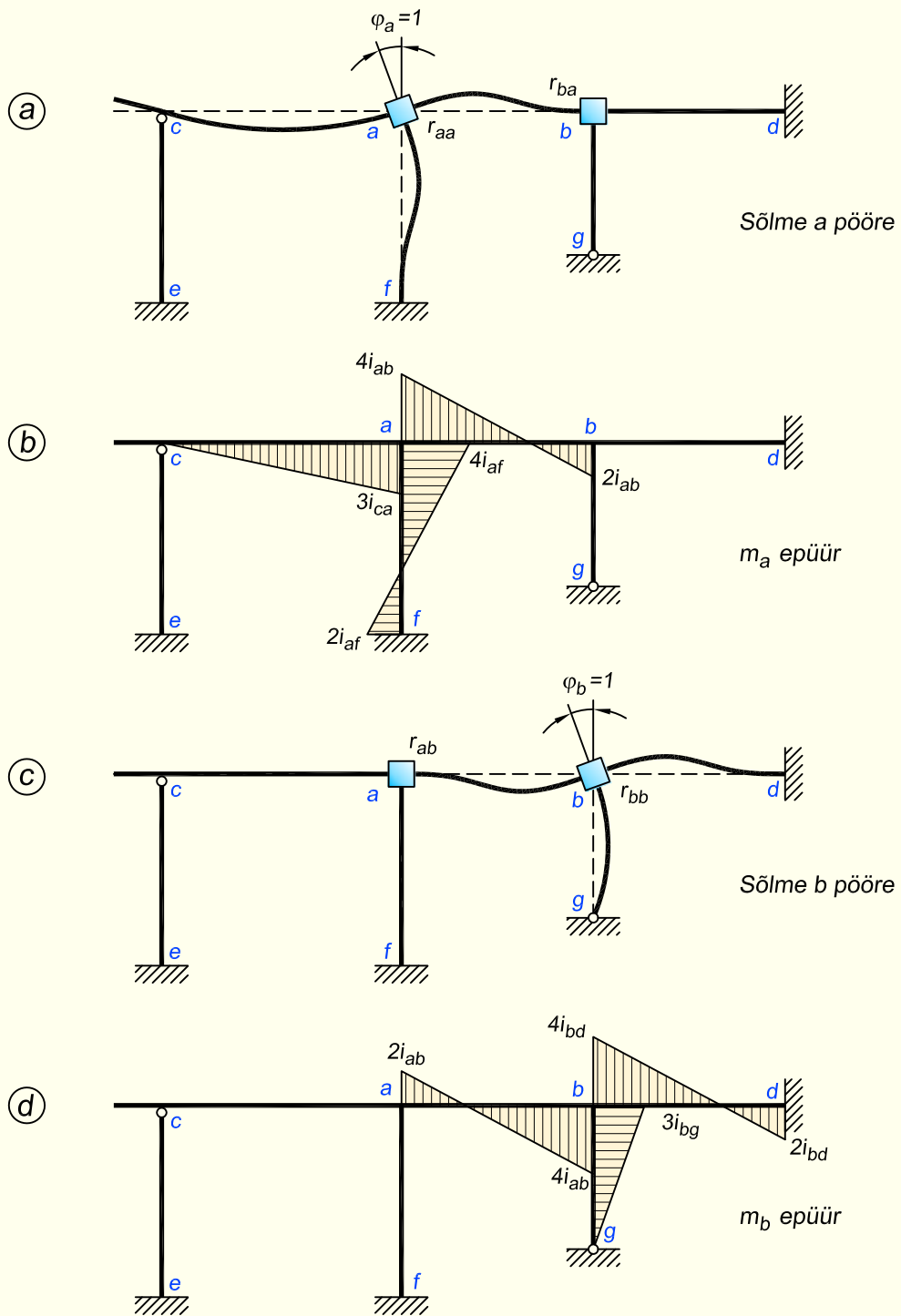
$$r_{bb} = 3i_{bg} + 4(i_{ab} + i_{bd}) = 3 \cdot 1 + 4(3 + 3) = 27 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

6. Võrrandisüsteemi vabaliikmete leidmine

Vabaliikmete leidmisel tuleb esimesena arvutada kinnitusemomendid kinemaatilisel määratud põhiskeemis. Varda a - b otstes saame kinnitusemomendid arvutada otse tabeli tüüpskeemi järgi

$$M_{ab,p} = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 4^2 = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ba,p} = -\frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 4^2 = -20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 17.45. Reaktsioonid sõlmede a ja b pöördest

Kinnitusmomendi $M_{ac,p}$ arvutus on natuke keerukam. Varras $c-a$ toetub küll vasakus otsas postile liigendiga, aga me ei saa teda vaadata kui ühest otsast liigendiga kinnitatud varrast, kuna konsoolil on koormus ja paindemoment varda $c-a$ lõikes c ei ole null. Kinnitusmomendi $M_{ac,p}$ kujunemist vaatame joonise 17.46 abil, kus varras $c-a$ on muust arvutusskeemist eraldatud ja kujutab ühekordselt staatikaga määramata tala. Koormusest F tekkinud M epüür on näidatud joonisel 17.46, b , kus ordinaat lõike a kohal on saadud ordinaadist lõikes c vastavalt jätkuvtala fookussuhetega arvutamisele jäiga otsa- toe korral ($k'_1 = 2$). Lauskoormusest tekkinud epüür, arvestades varrast $c-a$ vasakult otsast liigendkinnitusega vardana, on näidatud joonisel 17.46, c . Kinnitusmomendiks $M_{ac,p}$ on summaarse epüüri (joonis 17.46, d) ordinaat lõike a kohal.

$$M_{ac,p} = -\frac{1}{8} \cdot 15 \cdot 5^2 + \frac{10}{2} = -46,875 + 5 = -41,875 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Koormusliikmed on

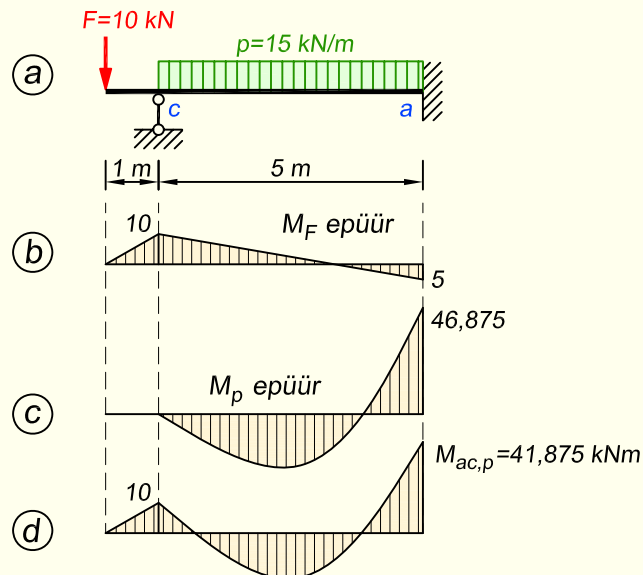
$$r_{ap} = M_{ac,p} + M_{ab,p} = -41,875 + 20 = -21,875 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{bp} = M_{ba,p} = -20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

7. Võrrandisüsteem arvukordajatega

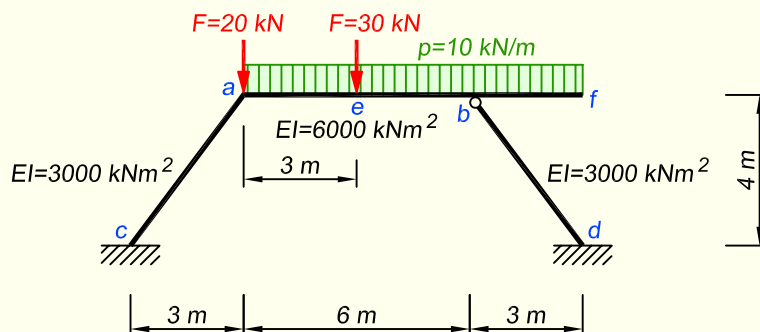
$$23,2\varphi_a + 6\varphi_b - 21,875 = 0$$

$$6\varphi_a + 27\varphi_b - 20 = 0$$



Joonis 17.46. Kinnitusmomendi $M_{ac,p}$ arvutus

NÄIDE 17.4. Koostada joonisel 17.47 kujutatud raami paindemomendi, põik- ja pikijõu epüürid, kasutades selleks deformatsioonimeetodit. Varraste paindejäikused on näidatud joonisel.



Joonis 17.47. Raami arvutusskeem

LAHENDUS

1. Varraste suhtelised jäikused leiame valemiga

$$i = \frac{EI}{l}$$

$$i_{ab} = \frac{6000}{6} = 1000 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_{ac} = i_{bd} = \frac{3000}{5} = 600 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kuna sisejõudude leidmisel võib kasutada suhteliste jäikuste relatiivseid väärtusi, siis jagame mõlemad tulemused läbi tuhandega ja saame

$$i_{ab} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_{ac} = i_{bd} = 0,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2. Raami kinemaatilise määramatuse astme leiame valemiga

$$n^* = n_s + w = 1 + 1 = 2$$

kus varrasahela (joonis 17.49) vabadusaste on

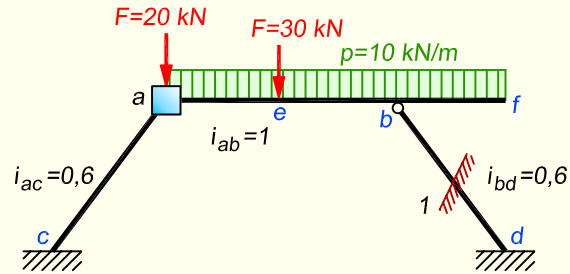
$$w = 2s - t - v = 2 \cdot 4 - 4 - 3 = 1$$

Lisatundmatuteks on sõlme a pööre φ_a ning varraste pööre ψ_1 .

3. Kinemaatiliselt määratud põhiskeem koormuse, lisatundmatute ja varraste suhteliste jäikustega on esitatud joonisel 17.48.

4. Varrasahela siirete skeem on esitatud joonisel 17.49.

Leiame varraste pöörded. Valime posti $b-d$ baasvardaks. Anname vardale $b-d$ ühikpöörde $\vartheta_{bd} = \psi_1 = 1$, kus ψ_1 tähistab baasvarda pööret. Järgnevalt leiame teiste varraste pöörded, mis sõltuvad baasvarda $b-d$ pöördest.



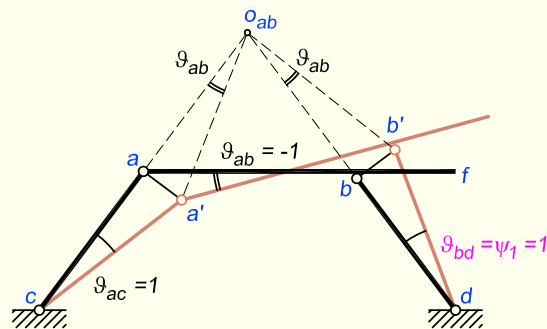
Joonis 17.48. Kinemaatiliselt määratud põhiskeem

Kuna varras $a-b$ toetub kahele mitteparalleelsele vardale, siis tema peapoolus paikneb nende varraste sihtide lõikumispunktis o_{ab} . Varda pöördenurga leiame kolmnurkadest $b-d-b'$ ja $b-o-b'$, millel on ühine külg $b-b'$. Raami kujust ja mõõtude tingituna on lõigud $b-d$ ja $b-o$ võrdse pikkusega, mis tähendab, et ka pöördenurgad on arvuliselt võrdsed. Kuna aga varras $a-b$ pöördub vastupäeva, siis tema nurk on negatiivne

$$\vartheta_{ab} = -\vartheta_{bd} = -1$$

Varda $a-c$ pöördenurga saame kolmnurkadest $a-c-a'$ ja $a-o-a'$, millel on ühine külg $a-a'$. Kuna ka siin on lõigud $a-c$ ja $a-o$ võrdse pikkusega, siis saame ilma arutamata varda $a-c$ pöördenurgaks

$$\vartheta_{ac} = -\vartheta_{ab} = 1$$



Joonis 17.49. Varrasahela siirete skeem. Baasvarda pööre on tähistatud ψ_1

5. Deformatsioonimeetodi kanooniline võrrandisüsteem

Lähtuvalt kinemaatilise määramatuse astmest tuleb meil koostada võrrandisüsteem kahe võrrandiga, kus esimene võrrand on sõlme pööret takistava sideme a kohta ning tei-

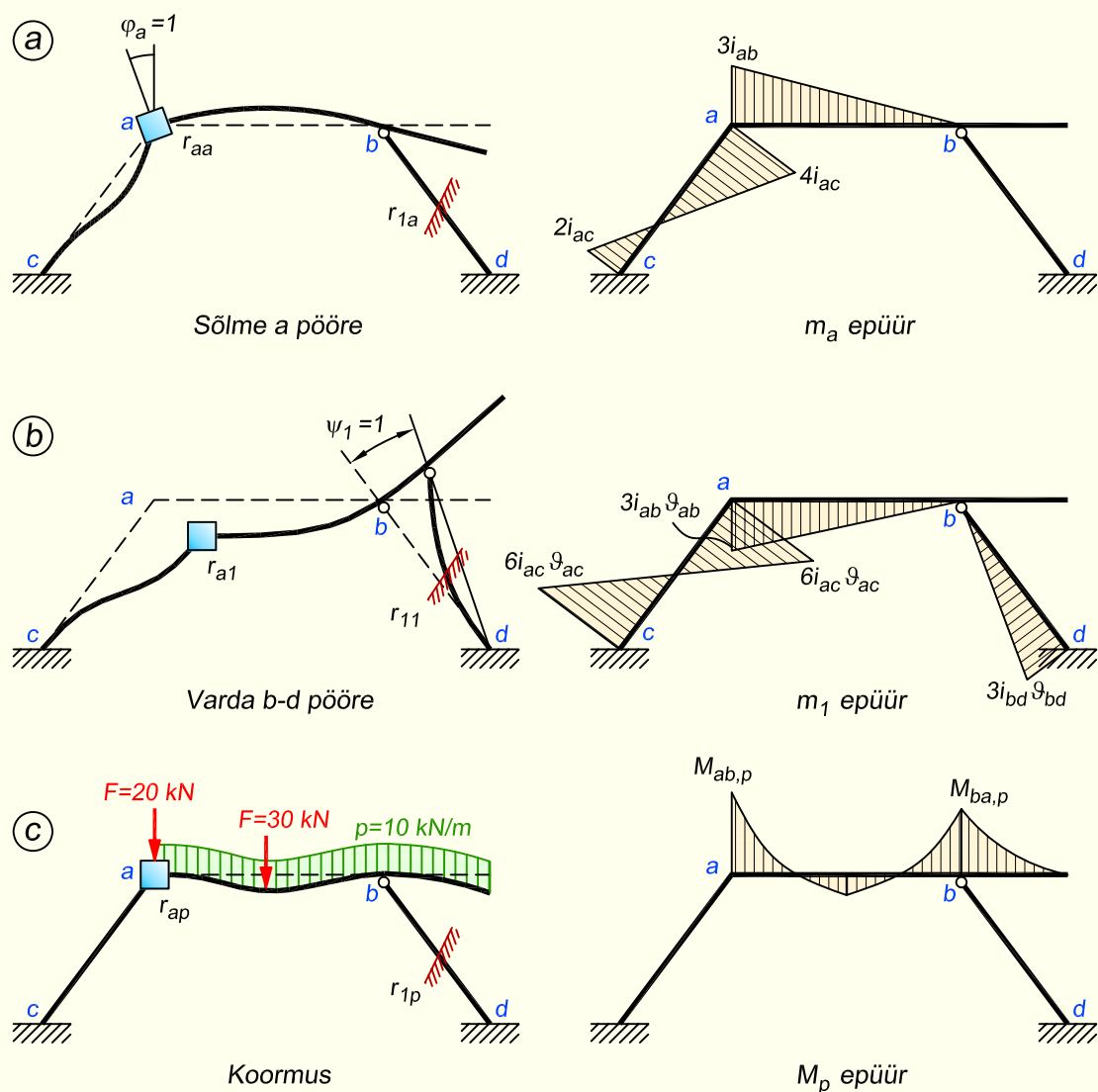
ne võrrand varraste pööret takistava sideme I kohta. Kahe tundmatuga võrrandisüsteemi üldkujul saame välja kirjutada järgmiselt

$$r_{aa}\varphi_a + r_{a1}\psi_1 + r_{ap} = 0$$

$$r_{1a}\varphi_a + r_{11}\psi_1 + r_{1p} = 0$$

6. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate arvutus

Tundmatute kordajad ehk reaktsioonid lisasidemetes võime arvutada joonise 17.50 abil või kasutades valemeid.



Joonis 17.50. Reaktsioonid sõlme a ja varda $b-d$ pöördest ning koormusest

Lisasidemes a tekkiv reaktsioon sõlme a pöördest

$$r_{aa} = 4i_{ac} + 3i_{ab} = 4 \cdot 0,6 + 3 \cdot 1 = 5,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lisasidemes a tekkiv reaktsioon varraste pöördest

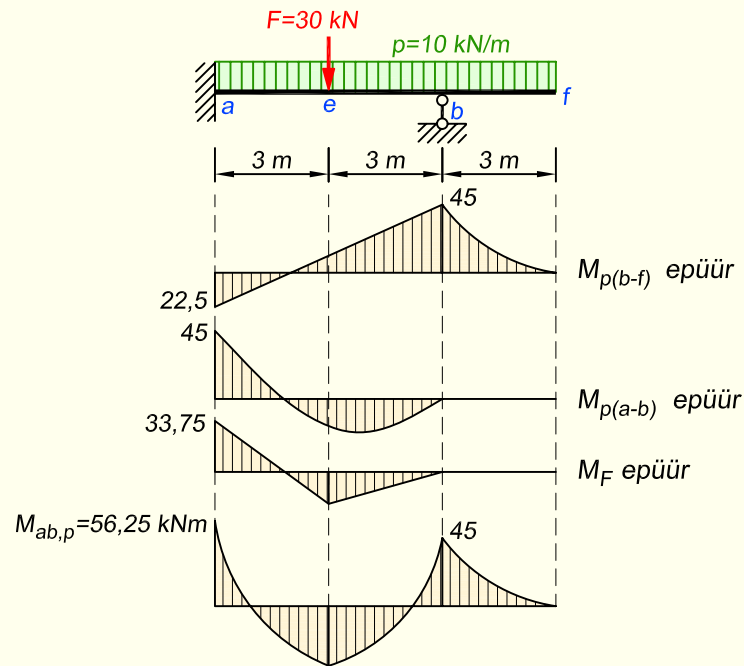
$$r_{a1} = 6i_{ac}\vartheta_{ac} + 3i_{ab}\vartheta_{ab} = 6 \cdot 0,6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 0,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lisasidemes l tekkiv reaktsioon postide pöördest

$$r_{11} = 12i_{ac}\vartheta_{ac}^2 + 3(i_{ab}\vartheta_{ab}^2 + i_{bd}\vartheta_{bd}^2) = 12 \cdot 0,6 \cdot 1^2 + 3(1 \cdot 1^2 + 0,6 \cdot 1^2) = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

7. Võrrandisüsteemi vabaliikmete arvutus

Vabaliikmete arvutamisel tuleb esimesena arvutada kinnitusemomendid kinemaatilistelt määratud põhiskeemis (joonis 17.50, c).



Joonis 17.51. Kinnitusemomendi $M_{ab,p}$ arvutus

Kinnitusemomendi $M_{ab,p}$ arvutamiseks jagame riivil paikneva koormuse osadeks, arvutame igale üksikule koormusele vastava kinnitusemomendi sõlmes a ja seejärel liidame kokku. Joonisel 17.51 on näidatud paindemomendi epüürid konsooli lauskoormusest, riivi lauskoormusest ja koondjõust ning viimasena summaarne epüür.

Konsooli lauskoormusest saame sõlme a ordinaadi, kasutades jätkuvtala fookussuhetega arvutamise reeglit, kus jäigas toes on ordinaat kaks korda väiksem kui eelmisel

toel. Arvestame ka deformatsioonimeetodi paindemomendi märgireeglit

$$M_a = -\frac{10 \cdot 3 \cdot 1,5}{2} = -22,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Riivi lauskoormusest arvutame paindemomendi tabeli valemiga, kasutades ühest otsast jäiga ja teisest liigendiga kinnitatud varda skeemi

$$M_a = \frac{1}{8}pl^2 = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 6^2 = 45 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Koondjõust arvutame paindemomendi samuti tabeli valemiga

$$M_a = \frac{1}{2}Fl\eta(1-\eta^2) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{3}{6} \cdot (1-0,5^2) = 33,75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lõplikuks kinnitusemomendiks saame

$$M_{ab,p} = -22,5 + 45 + 33,75 = 56,25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Vabaliikme r_{ap} saame kinnitusemomendist

$$r_{ap} = M_{ab,p} = 56,25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Vabaliikme r_{1p} arvutust saab teha kahte erinevat moodi. Esimese variandi korral kasutame täispikkuses varrast $a-f$, kus sel juhul vasaku otsa kinnitusemomendiks on $M_{ab,p}$ ning teises otsas ehk konsooli vabas otsas $M_{f,p} = 0$. Sõlmes a olev koondjõud oma paiknemise tõttu kinnitusemomente ei anna ja läheb arvesse ainult staatilise momendina.

$$\begin{aligned} r_{1p} &= S_{ac}\vartheta_{ac} + (M_{ab,p} + M_{f,p} + S_{ab})\vartheta_{ab} = \\ &= -20 \cdot 3 \cdot 1 + (56,25 + 0 - 10 \cdot 9 \cdot 1,5) \cdot (-1) = 18,75 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Teise variandi korral jagame horisontaalse varda kaheks – riiviks ja konsooliks. Sel juhul arvestame kummagi varda otste kinnitusemomente

$$\begin{aligned} r_{1p} &= S_{ac}\vartheta_{ac} + (M_{ab,p} + M_{ba,p} + S_{ab})\vartheta_{ab} + (M_{bf,p} + M_{f,p} + S_{bf})\vartheta_{bf} = \\ &= -20 \cdot 3 \cdot 1 + (56,25 - 45 + 0) \cdot (-1) + (45 + 0 - 10 \cdot 3 \cdot 4,5) \cdot (-1) = 18,75 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Siin on riivi koormuse staatiline moment null, kuna nii lauskoormuse resultandi kui koondjõu mõjusirged läbivad varda peapoolust.

Lisaks saab mitut moodi arvestada ka sõlmes a paiknevat koondjõudu. Kuna see koormus asub vardaid $a-b$ ja $a-c$ ühendavas sõlmes, võib tema staatilise momendi arvutada ükskõik kumma varda abil – ühel juhul on peapooluseks sõlm c , teisel juhul punkt o_{ab} . Eespool kirjutasime valemid välja posti abil, aga esitame need samad avaldised ka riivi kasutades

$$\begin{aligned} r_{1p} &= S_{ab}\vartheta_{ab} + (M_{ab,p} + M_{f,p} + S_{ab})\vartheta_{ab} \\ r_{1p} &= S_{ab}\vartheta_{ab} + (M_{ab,p} + M_{ba,p} + S_{ab})\vartheta_{ab} + (M_{bf,p} + M_{fb,p} + S_{bf})\vartheta_{bf} \end{aligned}$$

8. Võrrandisüsteem arvkoordajatega

$$5,4\varphi_a + 0,6\psi_1 + 56,25 = 0$$

$$0,6\varphi_a + 12,0\psi_1 + 18,75 = 0$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel leiame lisatundmatud

$$\varphi_a = -10,3003; \quad \psi_1 = -1,0475$$

9. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutus

Paindemomendid arvutame pärast lisatundmatute leidmist valemitega

$$M_{jk} = M_{jp} + 4i_{jk}\varphi_j + 2i_{jk}\varphi_k + 6i_{jk} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c}\psi_c$$

$$M_{jl} = M_{jp} + 3i_{jl}\varphi_j + 3i_{jl} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jl,c}\psi_c$$

$$M_{ac} = 4i_{ac}\varphi_a + 6i_{ac}\vartheta_{ac}\psi_1 = -4 \cdot 0,6 \cdot 10,3003 - 6 \cdot 0,6 \cdot 1 \cdot 1,0475 = -28,492 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

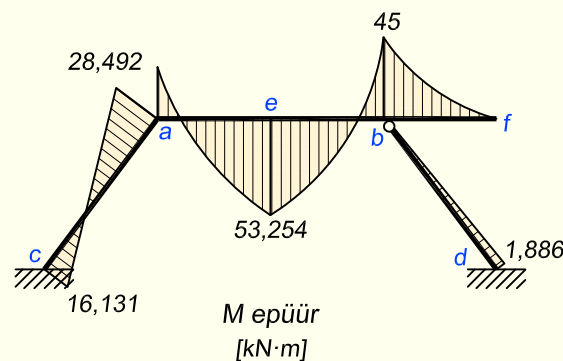
$$M_{ab} = M_{ab,p} + 3i_{ab}\varphi_a + 3i_{ab}\vartheta_{ab}\psi_1 = 56,25 - 3 \cdot 1 \cdot 10,3003 + 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,0475 = 28,492 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = 2i_{ac}\varphi_a + 6i_{ac}\vartheta_{ac}\psi_1 = -2 \cdot 0,6 \cdot 10,3003 - 6 \cdot 0,6 \cdot 1 \cdot 1,0475 = -16,131 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_d = 3i_{bd}\vartheta_{bd}\psi_1 = -3 \cdot 0,6 \cdot 1 \cdot 1,0475 = -1,886 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sildes oleva ordinaadi lõike e kohal leiame lihttala paindemomendi ja toeordinaatide abil, kasutades selleks jõumeetodist tuttavat valemit

$$M_e = \frac{10 \cdot 6^2}{8} + \frac{30 \cdot 3 \cdot 3}{6} - 28,492 \cdot 0,5 - 45 \cdot 0,5 = 53,254 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 17.52. Paindemomendi epüür

10. Paindemomendi epüüri ordinaate saab arvutada ka sõlmede ja varraste pöörete skeemide abil (joonis 17.50).

Kinnitusmomendid sõlme a pöördest saame joonise 17.50, a abil. Kõik joonisel olevad reaktsioonid tuleb korrutada võrrandisüsteemist saadud φ_a väärtusega. Varrastes, kus epüüri ei ole, võrduvad kinnitusmomendid nulliga ja need võib jätta välja kirjutamata. Selleks, et erinevatest pööretest põhjustatud kinnitusmomentidel hiljem vahet teha, märgime kinnitusmomendi indeksisse viimasele kohale pöörde tähise.

$$M_{ac,a} = 4i_{ac}\varphi_a = -4 \cdot 0,6 \cdot 10,3003 = -24,721 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ab,a} = 3i_{ab}\varphi_a = -3 \cdot 1 \cdot 10,3003 = -30,901 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{c,a} = 2i_{ac}\varphi_a = -2 \cdot 0,6 \cdot 10,3003 = -12,360 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kinnitusmomendid varda $b-d$ pöördest saame joonise 17.50, b abil. Ühikpöördest põhjustatud epüüri ordinaadid korrutame ψ_1 väärtusega

$$M_{ac,1} = 6i_{ac}\vartheta_{ac}\psi_1 = -6 \cdot 0,6 \cdot 1 \cdot 1,0475 = -3,771 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ab,1} = 3i_{ab}\vartheta_{ab}\psi_1 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,0475 = 3,143 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{c,1} = 6i_{ac}\vartheta_{ac}\psi_1 = -6 \cdot 0,6 \cdot 1 \cdot 1,0475 = -3,771 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{d,1} = 3i_{bd}\vartheta_{bd}\psi_1 = -3 \cdot 0,6 \cdot 1 \cdot 1,0475 = -1,886 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Paindemomendi epüüri ordinaadid arvutame, summeerides vastavas lõikes koormusest põhjustatud kinnitusmomendi ning sõlme a ja varda $b-d$ pööretest saadud kinnitusmomendid

$$M_{jk} = M_{jk,p} + M_{jk,a} + M_{jk,1}$$

$$M_{ac} = M_{ac,a} + M_{ac,1} = -24,721 - 3,771 = -28,492 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ab} = M_{ab,p} + M_{ab,a} + M_{ab,1} = 56,25 - 30,901 + 3,143 = 28,492 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = M_{c,a} + M_{c,1} = -12,360 - 3,771 = -16,131 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_d = M_{d,1} = -1,886 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

11. Põikjõu epüüri ordinaadid leiame jõumeetodist tuttava valemiga

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{M_{par} - M_{vas}}{l}$$

Selle valemi puhul me ei vaata enam seda, mis märgiga olid M ordinaadid saadud arvutusest, vaid lähtume ainult epüürist ja sellest, et raami sisemised ordinaadid võtame positiivsetena ja välimised negatiivsetena.

$$Q_{a-c} = \frac{-28,492 - 16,131}{5} = -8,925 \text{ kN}$$

$$Q_{ae} = 10 \cdot 3 + 30 \cdot 0,5 + \frac{-45 + 28,492}{6} = 42,249 \text{ kN}$$

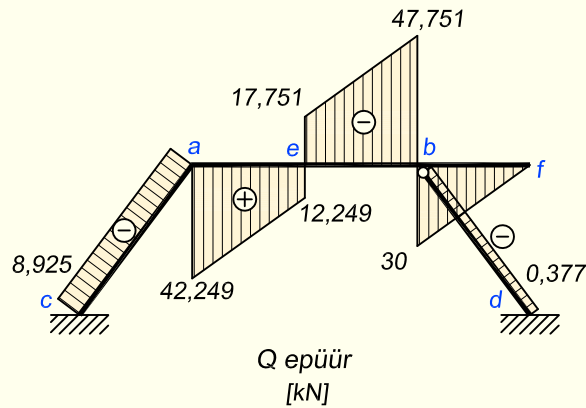
$$Q_{ea} = 42,249 - 10 \cdot 3 = 12,249 \text{ kN}$$

$$Q_{eb} = 12,249 - 30 = -17,751 \text{ kN}$$

$$Q_{be} = -17,751 - 10 \cdot 3 = -47,751 \text{ kN}$$

$$Q_{be} = -10 \cdot 3 - 30 \cdot 0,5 + \frac{-45 + 28,492}{6} = -47,751 \text{ kN}$$

$$Q_{bf} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ kN}; \quad Q_{b-d} = \frac{-1,886}{5} = -0,377 \text{ kN}$$



Joonis 17.53. Põikjõu epüür

12. Pikijõu epüüri ordinaadid leiame sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest, kasutades põikjõu epüüri väärtuseid.

$$\sin \alpha = 0,8; \quad \cos \alpha = 0,6;$$

Sõlm *a* (joonis 17.54, *a*)

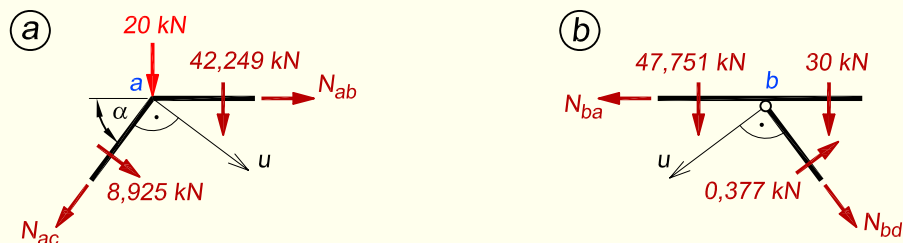
$$\sum Z = 0; \quad N_{ac} \cdot 0,8 + 20 + 42,249 + 8,925 \cdot 0,6 = 0; \quad N_{ac} = -84,505 \text{ kN}$$

$$\sum u = 0; \quad N_{ab} \cdot 0,8 + 8,925 + (20 + 42,249) \cdot 0,6 = 0; \quad N_{ab} = -57,843 \text{ kN}$$

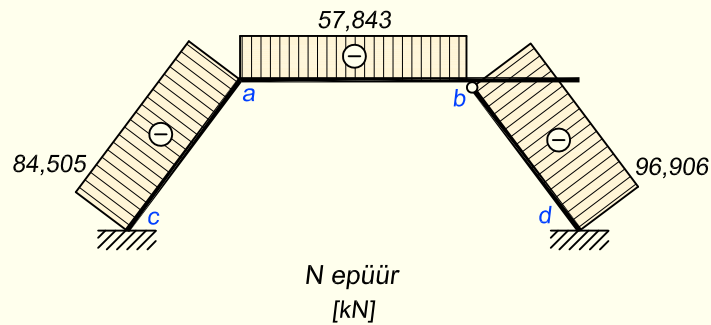
Sõlm *b* (joonis 17.54, *b*)

$$\sum Z = 0; \quad N_{bd} \cdot 0,8 + 47,751 + 30 - 0,377 \cdot 0,6 = 0; \quad N_{bd} = -96,906 \text{ kN}$$

$$\sum u = 0; \quad N_{ba} \cdot 0,8 - 0,377 + (47,751 + 30) \cdot 0,6 = 0; \quad N_{ba} = -57,843 \text{ kN}$$

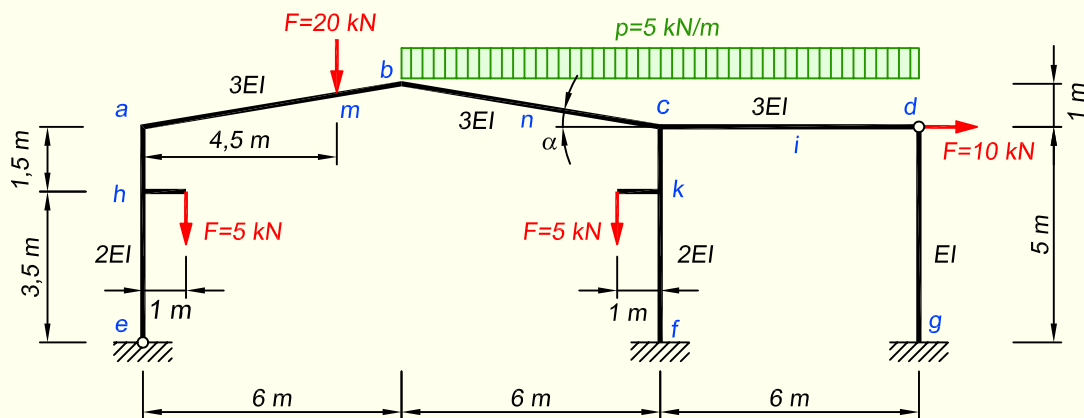


Joonis 17.54. Raamist eraldatud sõlmed



Joonis 17.55. Pikijõu epüür

NÄIDE 17.5. Koostada joonisel 17.56 kujutatud raami paindemomendi, põik- ja pikijõu epüürid, kasutades selleks deformatsioonimeetodit. Varraste paindejäikuste erinevused on näidatud joonisel.



Joonis 17.56. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

1. Varraste suhtelised jäikused leiame valemiga

$$i = \frac{EI}{l}$$

Võtame i_{dg} väärtuse võrdseks ühega, avaldame siit EI ja leiame selle abil teiste varraste suhtelised jäikused

$$i_{dg} = \frac{EI}{l} = \frac{EI}{5} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m} \Rightarrow EI = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$i_{ae} = i_{cf} = \frac{2EI}{l} = \frac{2 \cdot 5}{5} = 2 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_{ab} = i_{bc} = \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{37}} = 2,466 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$i_{cd} = \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 5}{6} = 2,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2. Raami kinemaatilise määratuse astme leiame valemiga (17.9)

$$n^* = n_s + w = 3 + 2 = 5$$

kus raami varrasahela vabadusaste on

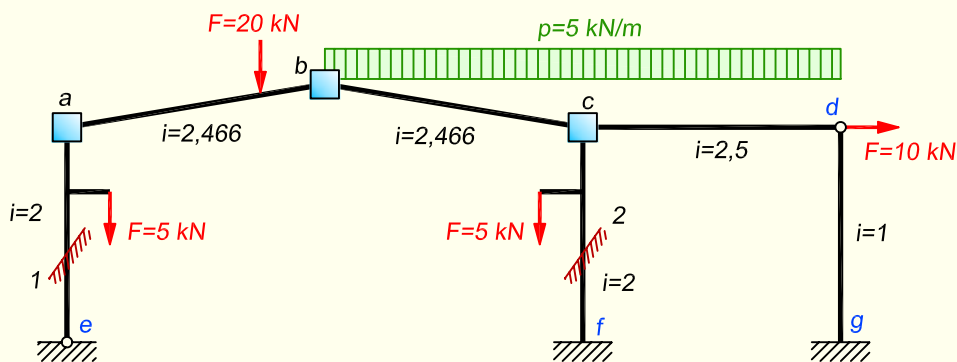
$$w = 2s - t - v = 2 \cdot 7 - 6 - 6 = 2$$

Lisatundmatuteks on sõlmede pöörded φ_j ja varraste pöörded ψ_c .

Lisatundmatute arv φ_j on võrdne vabade jäikade sõlmede arvuga n_s , seega on tundmatuteks sõlmede a , b ja c pöörded φ_a , φ_b ja φ_c .

Lisatundmatute arv ψ_c võrdub raami varrasahela vabadusastmega $w = 2$, seega on tundmatuteks varraste pöörded ψ_1 ja ψ_2 .

3. Kinemaatiliselt määratud põhiskeem koormuse, lisatundmatute ja varraste suhteliste jäikustega on esitatud joonisel 17.57.



Joonis 17.57. Kinemaatiliselt määratud põhiskeem

4. Varrasahela siirete skeemid erinevates siirdeolukordades on esitatud joonisel 17.58.

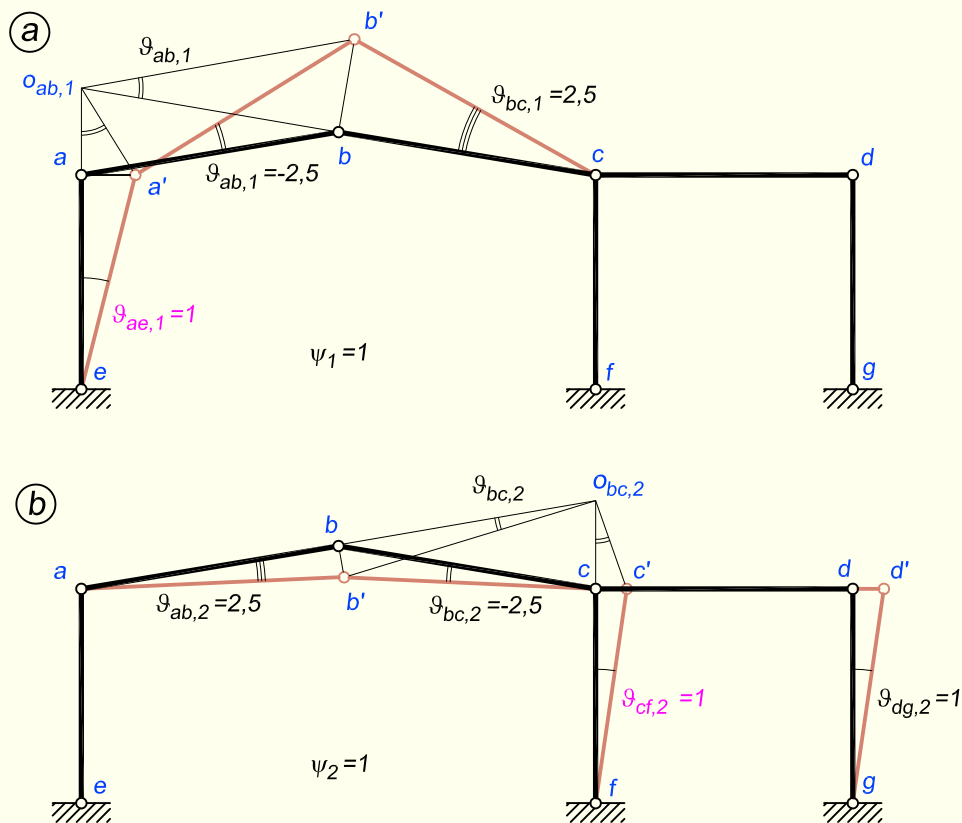
Siirdeolukorras $\psi_1 = 1$ eemaldame sideme l ja anname postile $a-e$ pöörde $\vartheta_{ae,1} = 1$ (joonis 17.58, a). Ülejäänud varraste pöördenurgad arvutame poolusplaanist.

Varras $a-b$ on liigendis a ühendatud vardaga $a-e$ ning liigendis b vardaga $b-c$. Varda $a-b$ peapoolus $o_{ab,1}$, mille ümber hakkab varras pöörduma, paikneb seetõttu varraste $a-e$ ja $b-c$ sihtide lõikumispunktis. Raami geometriast saame leida sõlme a ja peapooluse $o_{ab,1}$ vahelise kauguse $l_{ao} = 2$ m.

Kolmnurkadel $e-a-a'$ ja $o_{ab,1}-a-a'$ on ühine külg $a-a'$. Sellest tingimusest saame leida varda $a-b$ pöörde

$$l_{ae}\vartheta_{ae,1} = -l_{ao}\vartheta_{ab,1}$$

$$\vartheta_{ab,1} = -\frac{l_{ae}\vartheta_{ae,1}}{l_{ao}} = -\frac{5 \cdot 1}{2} = -2,5$$



Joonis 17.58. Varrasahela siirete skeemid

Kolmnurkadel $o_{ab,1}-b-b'$ ja $c-b-b'$ on ühine külg $b-b'$. Sellest tingimusest saame leida varda $b-c$ pöörde

$$-l_{ob}\vartheta_{ab,1} = l_{bc}\vartheta_{bc,1}$$

$$\vartheta_{bc,1} = -\frac{l_{ob}\vartheta_{ab,1}}{l_{bc}} = \frac{\sqrt{37} \cdot 2,5}{\sqrt{37}} = 2,5$$

Siirdeolukorras $\psi_2 = 1$ eemaldame sideme 2 ja anname postile $c-f$ siirde $\vartheta_{cf,2} = 1$ (joonis 17.58, b). Ülejäänud arvutuse teeme sarnaselt esimesele siirdeolukorrale.

Varras $b-c$ on liigendis b ühendatud vardaga $a-b$ ning liigendis c vardaga $c-f$. Varda $b-c$ peapoolus $o_{bc,2}$ paikneb seetõttu varraste $a-b$ ja $c-f$ sihtide lõikumispunktis. Raami geometriast saame leida sõlme c ja peapooluse $o_{bc,2}$ vahelise kauguse $l_{co} = 2$ m.

Kolmnurkadel $f-c-c'$ ja $o_{bc,2}-c-c'$ on ühine külg $c-c'$. Sellest tingimusest saame leida varda $b-c$ pöörde

$$l_{cf}\vartheta_{cf,2} = -l_{co}\vartheta_{bc,2}$$

$$\vartheta_{bc,2} = -\frac{l_{cf}\vartheta_{cf,2}}{l_{co}} = -\frac{5 \cdot 1}{2} = -2,5$$

Kolmnurkadel $o_{bc,2}$ - b - b' ja a - b - b' on ühine külg b - b' . Sellest tingimusest saame leida varda a - b pöörde

$$-l_{ob}\vartheta_{bc,2} = l_{ab}\vartheta_{ab,2}$$

$$\vartheta_{ab,2} = -\frac{l_{ob}\vartheta_{bc,2}}{l_{ab}} = \frac{\sqrt{37} \cdot 2,5}{\sqrt{37}} = 2,5$$

5. Deformatsioonimeetodi kanooniline võrrandisüsteem

Lähtuvalt kinemaatilise määramatuse astmest tuleb meil koostada võrrandisüsteem viie võrrandiga, kus kolm esimest võrrandit on sõlmede pöört takistavate sidemete a , b ja c kohta ning kaks viimast võrrandit varraste pöört takistavate sidemete 1 ja 2 kohta. Viie tundmatuga võrrandisüsteem üldkujul on

$$\begin{aligned} r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{ac}\varphi_c + r_{a1}\psi_1 + r_{a2}\psi_2 + r_{ap} &= 0 \\ r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{bc}\varphi_c + r_{b1}\psi_1 + r_{b2}\psi_2 + r_{bp} &= 0 \\ r_{ca}\varphi_a + r_{cb}\varphi_b + r_{cc}\varphi_c + r_{c1}\psi_1 + r_{c2}\psi_2 + r_{cp} &= 0 \\ r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + r_{1c}\varphi_c + r_{11}\psi_1 + r_{12}\psi_2 + r_{1p} &= 0 \\ r_{2a}\varphi_a + r_{2b}\varphi_b + r_{2c}\varphi_c + r_{21}\psi_1 + r_{22}\psi_2 + r_{2p} &= 0 \end{aligned}$$

Kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sõlme a ühikpoore $\varphi_a = 1$ põhjustab lisasidemetes a , b , 1 ja 2 reaktsioonid r_{aa} , r_{ba} , r_{1a} ning r_{2a} (joonis 17.59, a). Kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sõlme a ühikpöördest põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.59, b . Sõlme a tegelikust pöördest φ_a põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes on $r_{aa}\varphi_a$, $r_{ba}\varphi_a$, $r_{1a}\varphi_a$ ning $r_{2a}\varphi_a$.

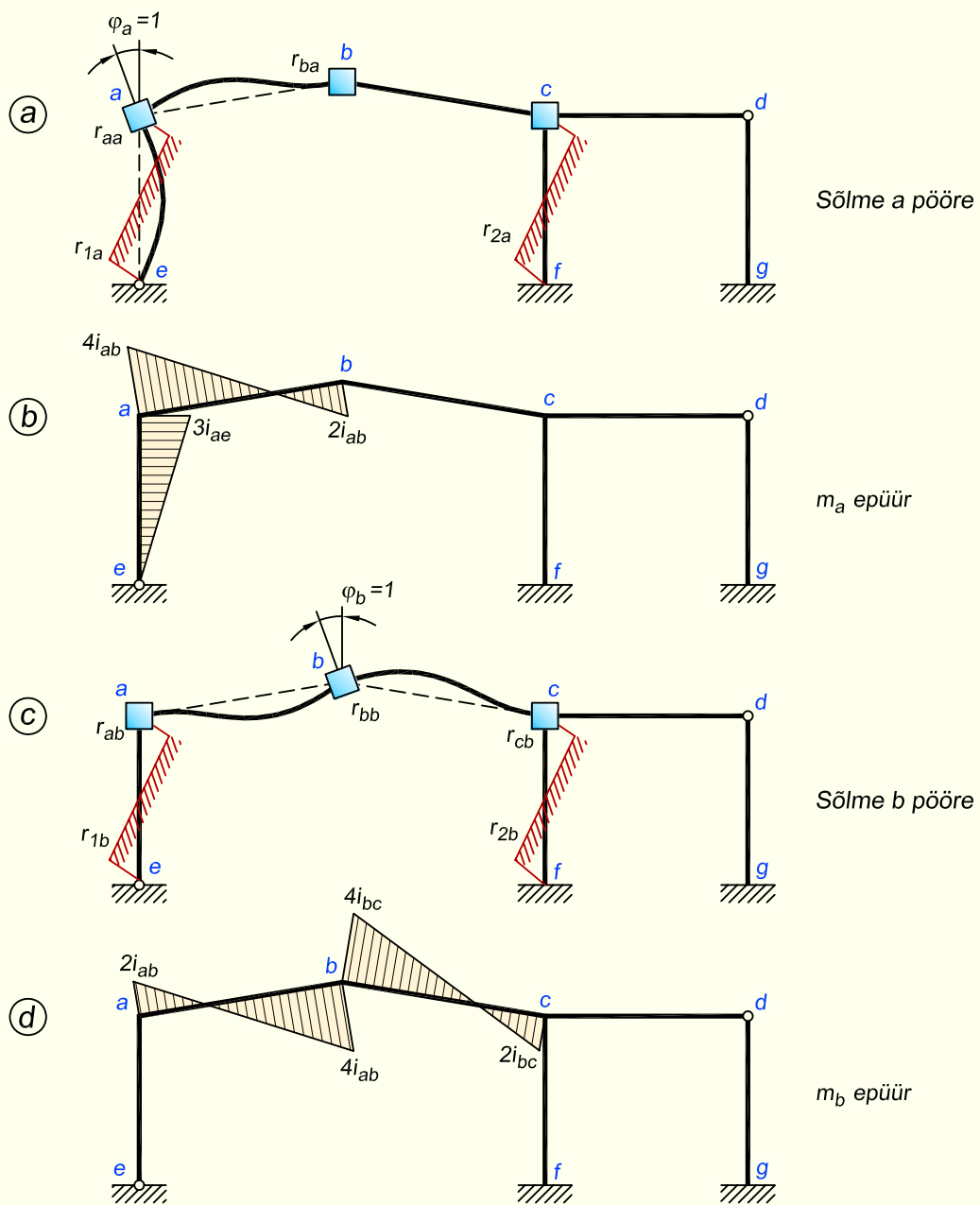
Kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sõlme b ühikpööre $\varphi_b = 1$ põhjustab lisasidemetes reaktsioonid r_{ab} , r_{bb} , r_{cb} , r_{1b} ning r_{2b} (joonis 17.59, c). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.59, d . Sõlme b tegelikust pöördest φ_b põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes on $r_{ab}\varphi_b$, $r_{bb}\varphi_b$, $r_{cb}\varphi_b$, $r_{1b}\varphi_b$ ning $r_{2b}\varphi_b$.

Kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sõlme c ühikpööre $\varphi_c = 1$ põhjustab lisasidemetes reaktsioonid r_{bc} , r_{cc} , r_{1c} ning r_{2c} (joonis 17.60, a). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.60, b . Sõlme c tegelikust pöördest φ_c põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes on $r_{bc}\varphi_c$, $r_{cc}\varphi_c$, $r_{1c}\varphi_c$ ning $r_{2c}\varphi_c$.

Postide ühikpööre $\psi_1 = 1$ põhjustab lisasidemetes reaktsioonid r_{a1} , r_{b1} , r_{c1} , r_{11} ning r_{21} (joonis 17.60, c). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.60, d . Tegelikust pöördest ψ_1 põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes on $r_{a1}\psi_1$, $r_{b1}\psi_1$, $r_{c1}\psi_1$, $r_{11}\psi_1$ ja $r_{21}\psi_1$.

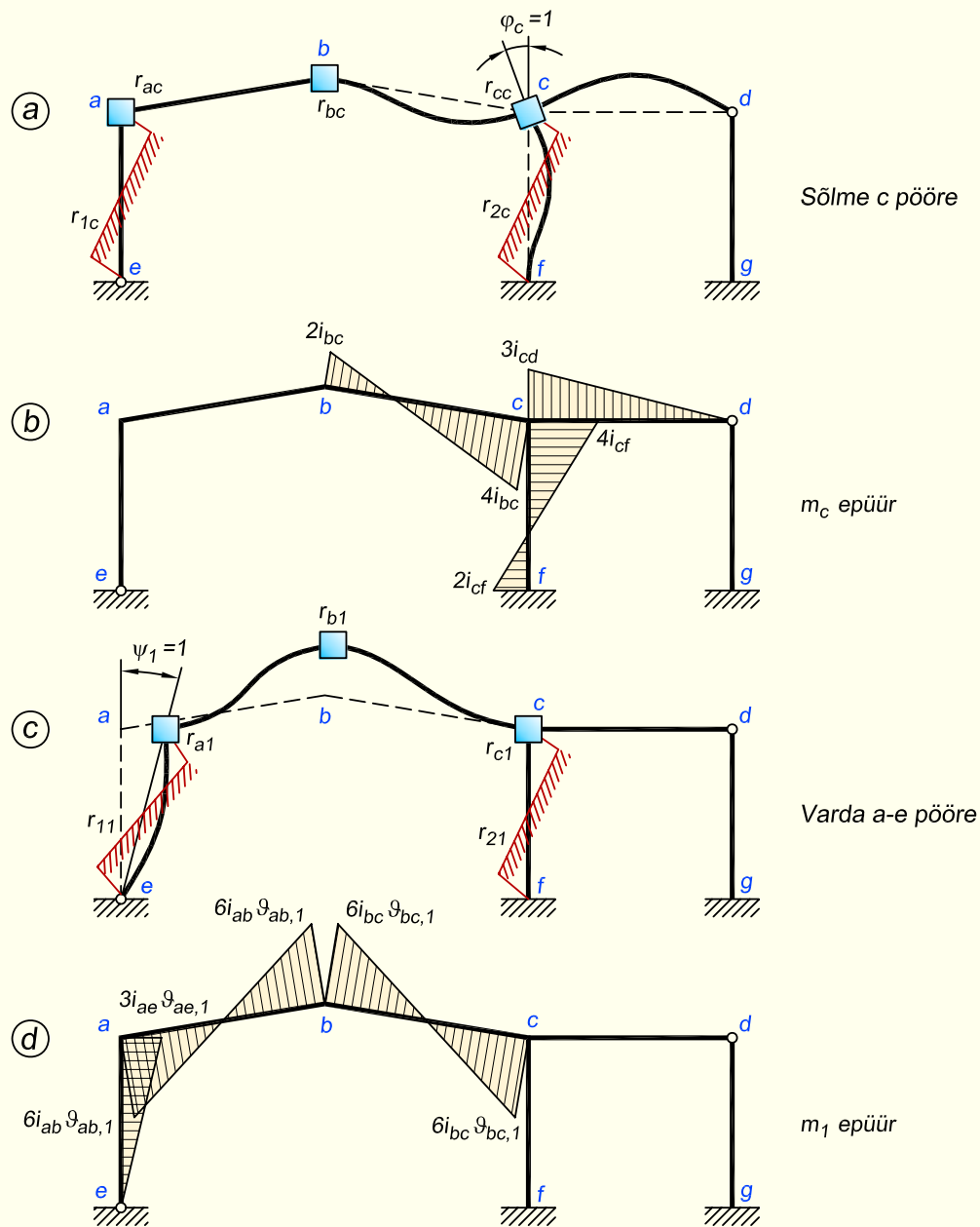
Postide ühikpööre $\psi_2 = 1$ põhjustab lisasidemetes reaktsioonid r_{a2} , r_{b2} , r_{c2} , r_{12} ning r_{22} (joonis 17.61, a). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.61, b . Tegelikust pöördest ψ_2 põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes on $r_{a2}\psi_2$, $r_{b2}\psi_2$, $r_{c2}\psi_2$, $r_{12}\psi_2$ ja $r_{22}\psi_2$.

Koormus põhjustab kinemaatiliselt määratud põhiskeemi lisasidemetes reaktsioonid r_{ap} , r_{bp} , r_{cp} , r_{1p} ning r_{2p} (joonis 17.61, c). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.61, d .



Joonis 17.59. Reaktsioonid sõlmede a ja b pöördest

Võrrandisüsteemi esimene võrrand on koostatud lissideme a kohta. Võrrandi esimene liige on sõlme a pöördest φ_a , teine liige sõlme b pöördest φ_b , kolmas liige sõlme c pöördest φ_c , neljas liige posti a - e pöördest ψ_1 , viies liige posti c - f pöördest ψ_2 ning kuues liige koormusest põhjustatud reaktsioon kinemaatiliselt määratud põhiskeemi lissidemes a . Sama põhimõtte järgi on koostatud ka kõik ülejäänud võrrandid, mis väljendavad vastavalt lissidemetes b , c , 1 ja 2 tekkivat reaktsiooni.



Joonis 17.60. Reaktsioonid sõlme c ja varda a - e pöördest

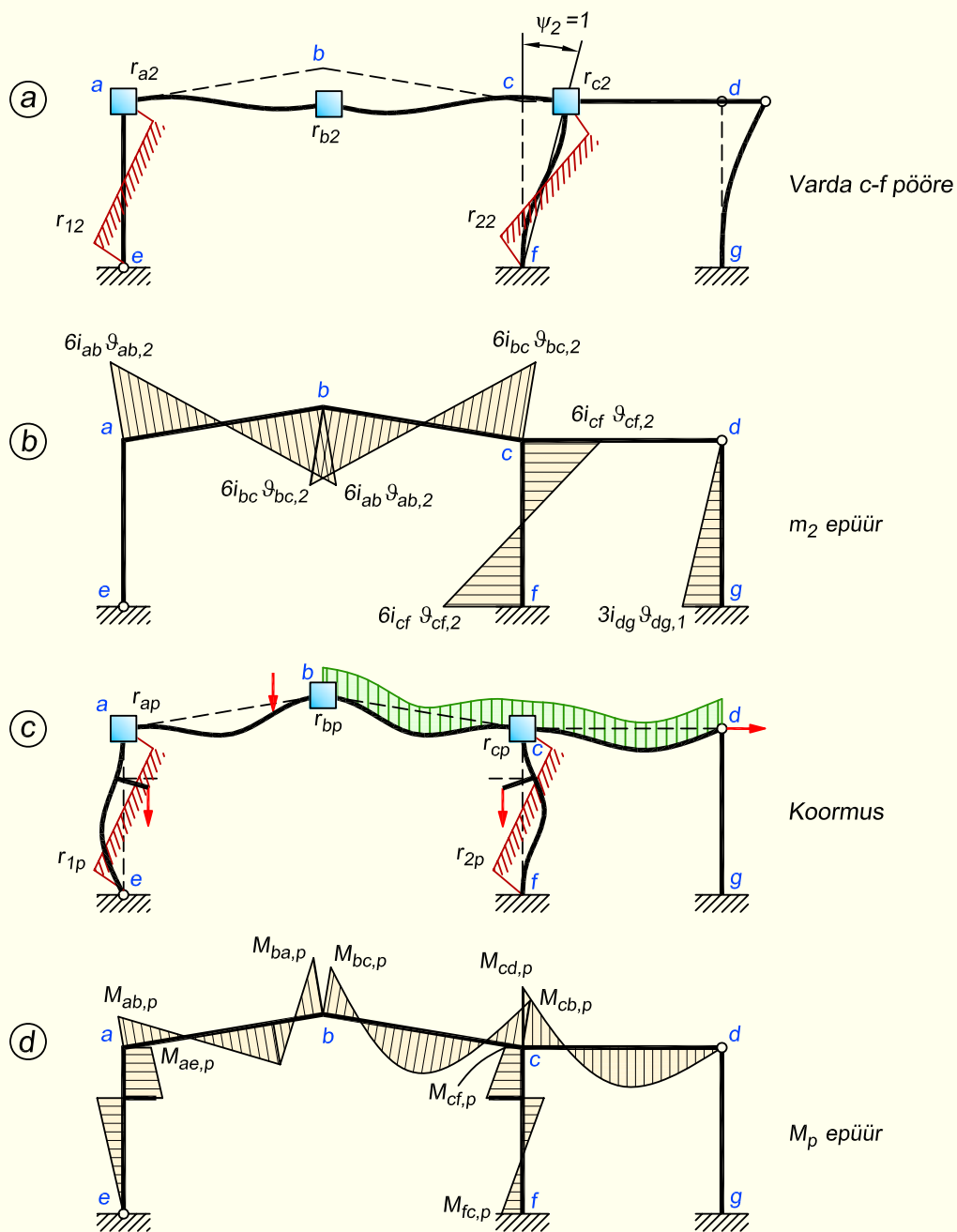
6. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate leidmine

Lisasidemes a tekkiv reaktsioon sõlme a pöördest (valemiga 17.119)

$$r_{aa} = 3i_{ae} + 4i_{ab} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2,466 = 15,864 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lisasidemes a tekkiv reaktsioon sõlme b pöördest (valemiga 17.120)

$$r_{ab} = 2i_{ab} = 2 \cdot 2,466 = 4,932 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 17.61. Reaktsioonid varda c-f pöördest ning koormusest

Lisasidemes a tekkiv reaktsioon postide pöördest ψ_1 (valemiga 17.121)

$$r_{a1} = 3i_{ae}\vartheta_{ae,1} + 6i_{ab}\vartheta_{ab,1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot 2,466 \cdot 2,5 = -30,99 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lisasidemes a tekkiv reaktsioon postide pöördest ψ_2 (valemiga 17.121)

$$r_{a2} = 3i_{ae}\vartheta_{ae,2} + 6i_{ab}\vartheta_{ab,2} = 3 \cdot 2 \cdot 0 + 6 \cdot 2,466 \cdot 2,5 = 36,99 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lisasidemes b tekkiv reaktsioon sõlme b pöördest (valemiga 17.119)

$$r_{bb} = 4(i_{ab} + i_{bc}) = 4(2,466 + 2,466) = 19,728 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lisasidemes b tekkiv reaktsioon sõlme c pöördest (valemiga 17.120)

$$r_{bc} = 2i_{bc} = 2 \cdot 2,466 = 4,932 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lisasidemes b tekkiv reaktsioon postide pöördest ψ_1 (valemiga 17.121)

$$r_{b1} = 6(i_{ab}\vartheta_{ab,1} + i_{bc}\vartheta_{bc,1}) = 6(-2,466 \cdot 2,5 + 2,466 \cdot 2,5) = 0$$

Lisasidemes b tekkiv reaktsioon postide pöördest ψ_2 (valemiga 17.121)

$$r_{b2} = 6(i_{ab}\vartheta_{ab,2} + i_{bc}\vartheta_{bc,2}) = 6(2,466 \cdot 2,5 - 2,466 \cdot 2,5) = 0$$

Lisasidemes c tekkiv reaktsioon sõlme c pöördest (valemiga 17.119)

$$r_{cc} = 3i_{cd} + 4(i_{bc} + i_{cf}) = 3 \cdot 2,5 + 4(2,466 + 2) = 25,364 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lisasidemes c tekkiv reaktsioon postide pöördest ψ_1 (valemiga 17.121)

$$\begin{aligned} r_{c1} &= 3i_{cd}\vartheta_{cd,1} + 6(i_{bc}\vartheta_{bc,1} + i_{cf}\vartheta_{cf,1}) = \\ &= 3 \cdot 2,5 \cdot 0 + 6(2,466 \cdot 2,5 + 2 \cdot 0) = +36,99 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Lisasidemes c tekkiv reaktsioon postide pöördest ψ_2 (valemiga 17.121)

$$\begin{aligned} r_{c2} &= 3i_{cd}\vartheta_{cd,2} + 6(i_{bc}\vartheta_{bc,2} + i_{cf}\vartheta_{cf,2}) = \\ &= 3 \cdot 2,5 \cdot 0 + 6(-2,466 \cdot 2,5 + 2 \cdot 1) = -24,99 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Lisasidemes I tekkiv reaktsioon postide pöördest ψ_1 (valemiga 17.122)

$$\begin{aligned} r_{11} &= 3(i_{ae}\vartheta_{ae,1}^2 + i_{cd}\vartheta_{cd,1}^2 + i_{dg}\vartheta_{dg,1}^2) + 12(i_{ab}\vartheta_{ab,1}^2 + i_{bc}\vartheta_{bc,1}^2 + i_{cf}\vartheta_{cf,1}^2) = \\ &= 3(2 \cdot 1^2 + 2,5 \cdot 0 + 1 \cdot 0) + 12(2,466 \cdot 2,5^2 + 2,466 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 0) = 375,9 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Lisasidemes I tekkiv reaktsioon postide pöördest ψ_2 (valemiga 17.123)

$$\begin{aligned} r_{12} &= 3(i_{ae}\vartheta_{ae,1}\vartheta_{ae,2} + i_{cd}\vartheta_{cd,1}\vartheta_{cd,2} + i_{dg}\vartheta_{dg,1}\vartheta_{dg,2}) + \\ &+ 12(i_{ab}\vartheta_{ab,1}\vartheta_{ab,2} + i_{bc}\vartheta_{bc,1}\vartheta_{bc,2} + i_{cf}\vartheta_{cf,1}\vartheta_{cf,2}) = \\ &= 3(2 \cdot 1 \cdot 0 + 2,5 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 1) + \\ &+ 12(-2,466 \cdot 2,5 \cdot 2,5 - 2,466 \cdot 2,5 \cdot 2,5 + 2 \cdot 0 \cdot 1) = -369,9 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Lisasidemes 2 tekkiv reaktsioon postide pöördest ψ_2 (valemiga 17.122)

$$\begin{aligned} r_{22} &= 3(i_{ae}\vartheta_{ae,2}^2 + i_{cd}\vartheta_{cd,2}^2 + i_{dg}\vartheta_{dg,2}^2) + 12(i_{ab}\vartheta_{ab,2}^2 + i_{bc}\vartheta_{bc,2}^2 + i_{cf}\vartheta_{cf,2}^2) = \\ &= 3(2 \cdot 0 + 2,5 \cdot 0 + 1 \cdot 1^2) + 12(2,466 \cdot 2,5^2 + 2,466 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 1^2) = 396,9 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi peadiagonaali suhtes sümmeetriliselt paiknevad liikmed on teineteisega võrdsed.

7. Võrrandisüsteemi vabaliikmete leidmine

Vabaliikmete leidmisel tuleb esimesena arvutada kinnituumomendid kinemaatilisel määratud põhiskeemis (joonis 17.61, d).

Kinnituumomentide arvutamisel tuleb tähelepanu pöörata deformatsioonimeetodi märkegile, mille kohaselt positiivne paindemoment mõjub varda otsale vastupäeva.

$$M_{ab,p} = Fa\eta^2 = 20 \cdot 4,5 \cdot \left(\frac{1,5}{6}\right)^2 = 5,625 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ba,p} = -Fb\xi^2 = -20 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{4,5}{6}\right)^2 = -16,875 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc,p} = \frac{1}{12}pl^2 = \frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 6^2 = 15 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cb,p} = -\frac{1}{12}pl^2 = -\frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 6^2 = -15 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cd,p} = \frac{1}{8}pl^2 = \frac{1}{8} \cdot 5 \cdot 6^2 = 22,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ae,p} = -\frac{1}{2}M(1 - 3\xi^2) = -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \left[1 - 3\left(\frac{3,5}{5}\right)^2\right] = 1,175 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cf,p} = -M\eta(2 - 3\eta) = 5 \cdot 1 \cdot \frac{3,5}{5} \cdot \left(2 - 3\frac{3,5}{5}\right) = -0,35 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{fc,p} = -M\xi(2 - 3\xi) = 5 \cdot 1 \cdot \frac{1,5}{5} \cdot \left(2 - 3\frac{1,5}{5}\right) = 1,65 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Koormusliikmed

$$r_{ap} = M_{ae,p} + M_{ab,p} = 1,175 + 5,625 = 6,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{bp} = M_{ba,p} + M_{bc,p} = -16,875 + 15 = -1,875 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{cp} = M_{cb,p} + M_{cd,p} + M_{cf,p} = -15 + 22,5 - 0,35 = 7,15 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} r_{1p} &= (M_{ab,p} + M_{ba,p} + S_{ab,1}) \vartheta_{ab,1} + (M_{bc,p} + M_{cb,p} + S_{cb,1}) \vartheta_{bc,1} + \\ &+ (M_{ae,p} + S_{ea,1}) \vartheta_{ae,1} = \\ &= (5,625 - 16,875 - 20 \cdot 4,5) \cdot (-2,5) + (15 - 15 + 5 \cdot 6 \cdot 3) \cdot 2,5 + \\ &+ (1,175 - 5 \cdot 1) \cdot 1 = 474,3 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{2p} &= (M_{ab,p} + M_{ba,p} + S_{ab,2}) \vartheta_{ab,2} + (M_{bc,p} + M_{cb,p} + S_{cb,2}) \vartheta_{bc,2} + \\ &+ (M_{cf,p} + M_{fc,p} + S_{cf,2}) \vartheta_{cf,2} + S_{dg,2} \vartheta_{dg,2} = \\ &= (5,625 - 16,875 - 20 \cdot 4,5) \cdot 2,5 + (15 - 15 + 5 \cdot 6 \cdot 3) \cdot (-2,5) + \\ &+ (-0,35 + 1,65 + 5 \cdot 1) \cdot 1 + 10 \cdot 5 \cdot 1 = -521,825 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

8. Võrrandisüsteem arvkoordajatega

$$\begin{aligned}
 15,864\varphi_a + 4,932\varphi_b & - 30,99\psi_1 + 36,99\psi_2 + 6,8 = 0 \\
 4,932\varphi_a + 19,728\varphi_b + 4,932\varphi_c & - 1,875 = 0 \\
 4,932\varphi_b + 25,364\varphi_c + 36,99\psi_1 - 24,99\psi_2 + 7,15 & = 0 \\
 -30,99\varphi_a & + 36,99\varphi_c + 375,9\psi_1 - 369,9\psi_2 + 474,3 = 0 \\
 36,99\varphi_a & - 24,99\varphi_c - 369,9\psi_1 + 396,9\psi_2 - 521,825 = 0
 \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi lahendamisele leiame lisatundmatud

$$\varphi_a = -5,2603; \quad \varphi_b = 1,1431; \quad \varphi_c = 1,0680; \quad \psi_1 = 0,5045; \quad \psi_2 = 2,3424$$

9. Paindemomendi epüüri ordinaadid arvutame valemitega (17.134) ja (17.135)

$$M_{jk} = M_{jp} + 4i_{jk}\varphi_j + 2i_{jk}\varphi_k + 6i_{jk} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c}\psi_c$$

$$M_{jl} = M_{jp} + 3i_{jl}\varphi_j + 3i_{jl} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jl,c}\psi_c$$

Alustame ordinaatide arvutamist sõlmes a liituvates varrastes

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= M_{ab,p} + 4i_{ab}\varphi_a + 2i_{ab}\varphi_b + 6i_{ab}(\vartheta_{ab,1}\psi_1 + \vartheta_{ab,2}\psi_2) = \\
 &= 5,625 - 4 \cdot 2,466 \cdot 5,2603 + 2 \cdot 2,466 \cdot 1,1431 + \\
 &+ 6 \cdot 2,466 \cdot (-2,5 \cdot 0,5045 + 2,5 \cdot 2,3424) = 27,359 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{ae} &= M_{ae,p} + 3i_{ae}\varphi_a + 3i_{ae}(\vartheta_{ae,1}\psi_1 + \vartheta_{ae,2}\psi_2) = \\
 &= 1,175 - 3 \cdot 2 \cdot 5,2603 + 3 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 0,5045 + 0 \cdot 2,3424) = -27,360 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

Kontroll sõlmes a

$$M_{ab} + M_{ae} = 27,359 - 27,360 = -0,001$$

Momendid sõlmes b

$$\begin{aligned}
 M_{ba} &= M_{ba,p} + 4i_{ab}\varphi_b + 2i_{ab}\varphi_a + 6i_{ab}(\vartheta_{ab,1}\psi_1 + \vartheta_{ab,2}\psi_2) = \\
 &= -16,875 + 4 \cdot 2,466 \cdot 1,1431 - 2 \cdot 2,466 \cdot 5,2603 + \\
 &+ 6 \cdot 2,466 \cdot (-2,5 \cdot 0,5045 + 2,5 \cdot 2,3424) = 36,441 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{bc} &= M_{bc,p} + 4i_{bc}\varphi_b + 2i_{bc}\varphi_c + 6i_{bc}(\vartheta_{bc,1}\psi_1 + \vartheta_{bc,2}\psi_2) = \\
 &= 15 + 4 \cdot 2,466 \cdot 1,1431 + 2 \cdot 2,466 \cdot 1,0680 + \\
 &+ 6 \cdot 2,466 \cdot (2,5 \cdot 0,5045 - 2,5 \cdot 2,3424) = -36,441 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

Kontroll sõlmes b

$$M_{ba} + M_{bc} = 36,441 - 36,441 = 0$$

Momendid sõlmes c

$$\begin{aligned}
 M_{cb} &= M_{cb,p} + 4i_{bc}\varphi_c + 2i_{bc}\varphi_b + 6i_{bc}(\vartheta_{bc,1}\psi_1 + \vartheta_{bc,2}\psi_2) = \\
 &= -15 + 4 \cdot 2,466 \cdot 1,0680 + 2 \cdot 2,466 \cdot 1,1431 + \\
 &+ 6 \cdot 2,466 \cdot (2,5 \cdot 0,5045 - 2,5 \cdot 2,3424) = -66,811 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_{cd} &= M_{cd,p} + 3i_{cd}\varphi_c = 22,5 + 3 \cdot 2,5 \cdot 1,0680 = 30,51 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_{cf} &= M_{cf,p} + 4i_{cf}\varphi_c + 6i_{cf}\vartheta_{cf,2}\psi_2 = \\
 &= -0,35 + 4 \cdot 2 \cdot 1,0680 + 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2,3424 = 36,303 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

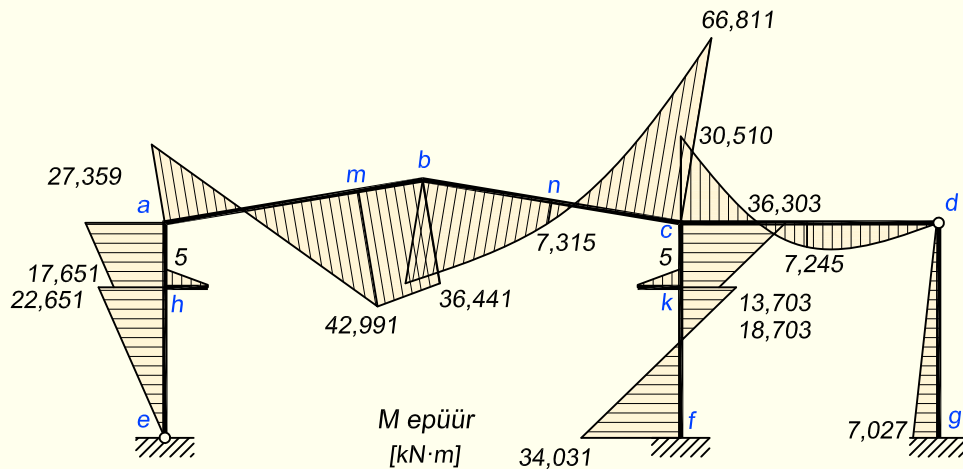
Kontroll sõlmes c

$$M_{cb} + M_{cd} + M_{cf} = -66,811 + 30,51 + 36,303 = 0,002$$

Momendid jäikades toesõlmedes

$$\begin{aligned}
 M_{fc} &= M_{fc,p} + 2i_{cf}\varphi_c + 6i_{cf}\vartheta_{cf,2}\psi_2 = \\
 &= 1,65 + 2 \cdot 2 \cdot 1,0680 + 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2,3424 = 34,031 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_{gd} &= 3i_{gd}\vartheta_{gd,2}\psi_2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2,3424 = 7,027 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

Paindemomendi ordinaatide kandmisel epüürile tuleb järgida deformatsioonimeetodi märgireeglit.



Joonis 17.62. Paindemomendi epüür

Momendid varraste vahepealsetes lõigetes arvutame valemiga

$$\begin{aligned}
 M_k &= M_{kp}^0 + M_{vas} \cdot \xi'_k + M_{par} \cdot \xi_k \\
 M_m &= -27,359 \cdot \frac{1,5}{6} + 36,441 \cdot \frac{4,5}{6} + \frac{20 \cdot 4,5 \cdot 1,5}{6} = 42,991 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_n &= 36,441 \cdot 0,5 - 66,811 \cdot 0,5 + \frac{5 \cdot 6^2}{8} = 7,315 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

$$M_i = -30,510 \cdot 0,5 + \frac{5 \cdot 6^2}{8} = 7,245 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ha} = -27,359 \cdot \frac{3,5}{5} + 5 \cdot 1 \cdot \frac{1,5}{5} = -17,651 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{he} = -27,359 \cdot \frac{3,5}{5} - 5 \cdot 1 \cdot \frac{3,5}{5} = -22,651 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{kc} = -36,303 \cdot \frac{3,5}{5} + 34,031 \cdot \frac{1,5}{5} + 5 \cdot 1 \cdot \frac{1,5}{5} = -13,703 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{kf} = -36,303 \cdot \frac{3,5}{5} + 34,031 \cdot \frac{1,5}{5} - 5 \cdot 1 \cdot \frac{3,5}{5} = -18,703 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

10. Kinemaatikaline kontroll

Peale paindemomendi epüüri koostamist teeme kinemaatikalise kontrolli. Selleks eemaldame arvutusskeemist staatikaga määramatuse astmele vastava arvu sidemeid ning arvutame lisatundmatutele $X_i = 1$ vastavad siirded, mis pidevustingimustele vastavalt peavad võrduma nulliga.

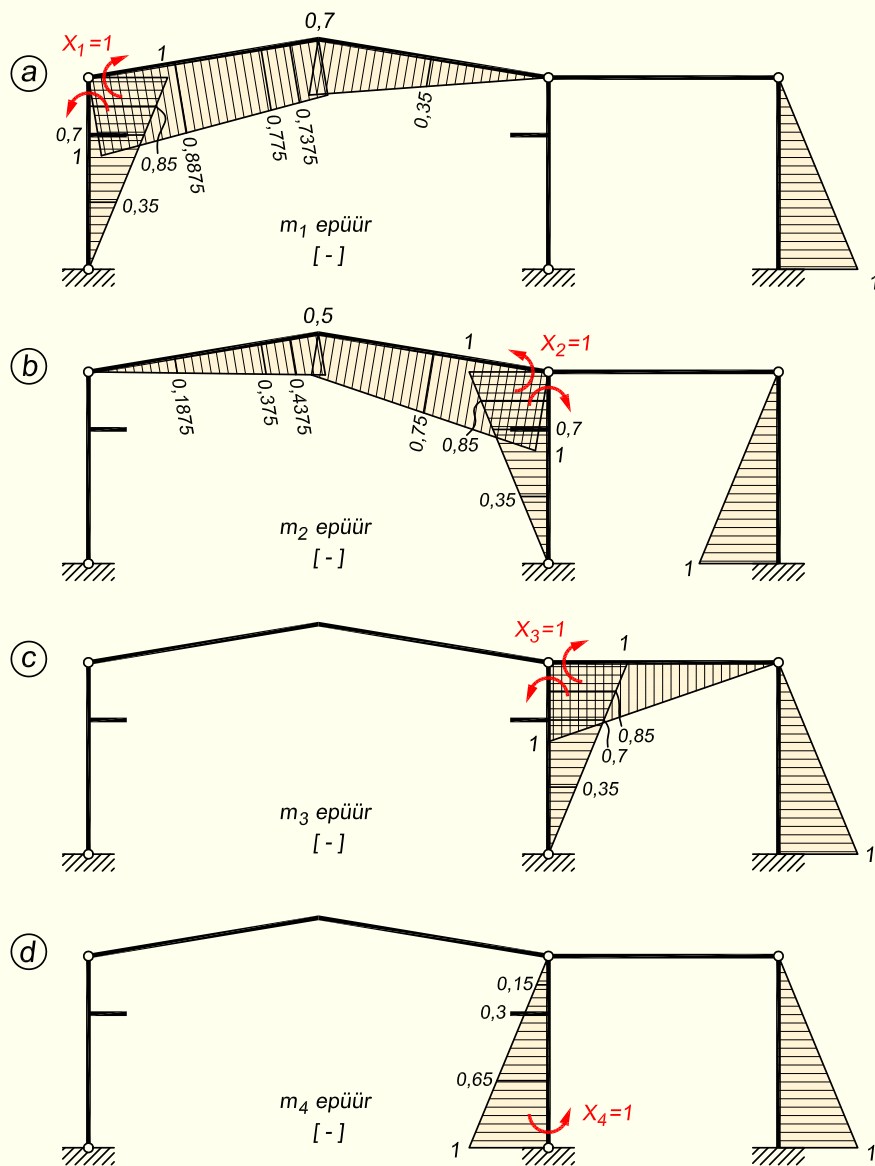
Leiame raami staatikaga määramatuse astme

$$n = 3m - l_1 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

Ühiktundmatutest põhjustatud paindemomendi epüürid on kujutatud joonisel 17.63. Arvestama peab ka varraste erinevate paindejäikustega.

$$\begin{aligned} EI_0 \Delta_1 = & -\frac{3,5}{2 \cdot 3} \cdot 0,7 \cdot 22,651 + \\ & + \frac{1,5}{2 \cdot 6} (0,7 \cdot 17,651 + 4 \cdot 0,85 \cdot 22,505 + 1 \cdot 27,359) + \\ & + \frac{\sqrt{20,8125}}{3 \cdot 6} (-1 \cdot 27,359 + 4 \cdot 0,8875 \cdot 7,816 + 0,775 \cdot 42,991) + \\ & + \frac{\sqrt{2,3125}}{3 \cdot 6} (0,775 \cdot 42,991 + 4 \cdot 0,7375 \cdot 39,716 + 0,7 \cdot 36,441) + \\ & + \frac{\sqrt{37}}{3 \cdot 6} (0,7 \cdot 36,441 + 4 \cdot 0,35 \cdot 7,315 + 0) - \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 7,027 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_0 \Delta_2 = & \frac{\sqrt{20,8125}}{3 \cdot 6} (0 + 4 \cdot 0,1875 \cdot 7,816 + 0,375 \cdot 42,991) + \\ & + \frac{\sqrt{2,3125}}{3 \cdot 6} (0,375 \cdot 42,991 + 4 \cdot 0,4375 \cdot 39,716 + 0,5 \cdot 36,441) + \\ & + \frac{\sqrt{37}}{3 \cdot 6} (0,5 \cdot 36,441 + 4 \cdot 0,75 \cdot 7,315 - 1 \cdot 66,811) - \\ & - \frac{1,5}{2 \cdot 6} (1 \cdot 36,303 + 4 \cdot 0,85 \cdot 25 + 0,7 \cdot 13,703) + \\ & + \frac{3,5}{2 \cdot 6} (-0,7 \cdot 18,703 + 4 \cdot 0,35 \cdot 7,664 + 0) + \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 7,027 = 0 \end{aligned}$$



Joonis 17.63. Ühiktundmatutest põhjustatud paindemomendi epüürid

$$\begin{aligned}
 EI_0\Delta_3 &= \frac{3,5}{2 \cdot 6} (0 - 4 \cdot 0,35 \cdot 7,664 + 0,7 \cdot 18,703) + \\
 &+ \frac{1,5}{2 \cdot 6} (0,7 \cdot 13,703 + 4 \cdot 0,85 \cdot 25 + 1 \cdot 36,303) + \\
 &+ \frac{6}{3 \cdot 6} (-1 \cdot 30,510 + 4 \cdot 0,5 \cdot 7,245 + 0) - \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 7,027 = 0 \\
 EI_0\Delta_4 &= \frac{3,5}{2 \cdot 6} (1 \cdot 34,031 + 4 \cdot 0,65 \cdot 7,664 - 0,3 \cdot 18,703) - \\
 &- \frac{1,5}{2 \cdot 6} (0,3 \cdot 13,703 + 4 \cdot 0,15 \cdot 25 + 0) - \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 7,027 = 0
 \end{aligned}$$

11. Põikjõu epüüri ordinaadid arvutame valemiga (17.138)

$$Q_k = Q_k^0 + \frac{M_{par} - M_{vas}}{l}$$

$$\sin \alpha = 0,1644 \quad \cos \alpha = 0,9864$$

$$Q_{e-a} = Q_{ea}^0 + \frac{M_{ae}}{l_{ae}} = -\frac{5}{5} + \frac{-27,359}{5} = -6,472 \text{ kN}$$

$$Q_{a-m} = Q_{am}^0 + \frac{M_{bm} - M_{am}}{l_{ab}} = 20 \cdot \frac{1,5}{6} \cdot 0,9864 + \frac{36,441 + 27,359}{\sqrt{37}} = 15,421 \text{ kN}$$

$$(Q_{a-m} = \frac{M_m - M_{am}}{l_{am}} = \frac{42,991 + 27,359}{\sqrt{20,8125}} = 15,421 \text{ kN})$$

$$Q_{b-m} = Q_{bm}^0 + \frac{M_{am} + M_{bm}}{l_{ab}} = -20 \cdot \frac{4,5}{6} \cdot 0,9864 + \frac{-27,359 - 36,441}{\sqrt{37}} = -4,307 \text{ kN}$$

$$(Q_{b-m} = \frac{M_{bm} - M_m}{l_{mb}} = \frac{36,441 - 42,991}{\sqrt{2,3125}} = -4,307 \text{ kN})$$

$$Q_{bc} = Q_{bc}^0 + \frac{M_{cb} - M_{bc}}{l_{bc}} = 5 \cdot 3 \cdot 0,9864 + \frac{-66,811 - 36,441}{\sqrt{37}} = -2,179 \text{ kN}$$

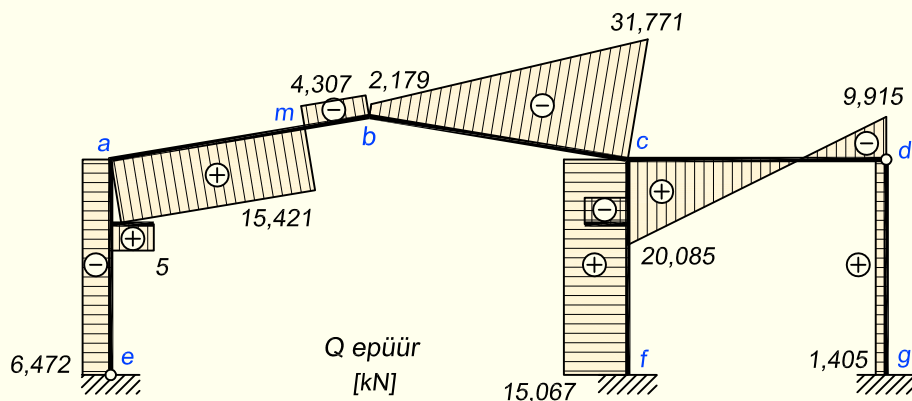
$$Q_{cb} = Q_{cb}^0 + \frac{M_{cb} - M_{bc}}{l_{bc}} = -5 \cdot 3 \cdot 0,9864 + \frac{-66,811 - 36,441}{\sqrt{37}} = -31,771 \text{ kN}$$

$$Q_{cd} = Q_{cd}^0 + \frac{-M_{cd}}{l_{cd}} = 5 \cdot 3 + \frac{30,510}{6} = 20,085 \text{ kN}$$

$$Q_{dc} = Q_{dc}^0 + \frac{-M_{cd}}{l_{cd}} = -5 \cdot 3 + \frac{30,510}{6} = -9,915 \text{ kN}$$

$$Q_{d-g} = \frac{M_g}{l_{dg}} = \frac{7,027}{5} = 1,405 \text{ kN}$$

$$Q_{c-f} = Q_{cf}^0 + \frac{M_{fc} - M_{cf}}{l_{cf}} = \frac{5}{5} + \frac{34,031 + 36,303}{5} = 15,067 \text{ kN}$$



Joonis 17.64. Põikjõu epüür

12. Pikijõud varrastes leiame sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest, kasutades põikjõu epüüri väärtuseid.

$$\sin \alpha = 0,1644 \quad \cos \alpha = 0,9864$$

Sõlm *a* (joonis 17.65, *a*)

$$\sum u = 0; \quad N_{a-h} \cdot 0,9864 + 6,472 \cdot 0,1644 + 15,421 = 0$$

$$N_{a-h} = \frac{-6,472 \cdot 0,1644 - 15,421}{0,9864} = -16,712 \text{ kN}$$

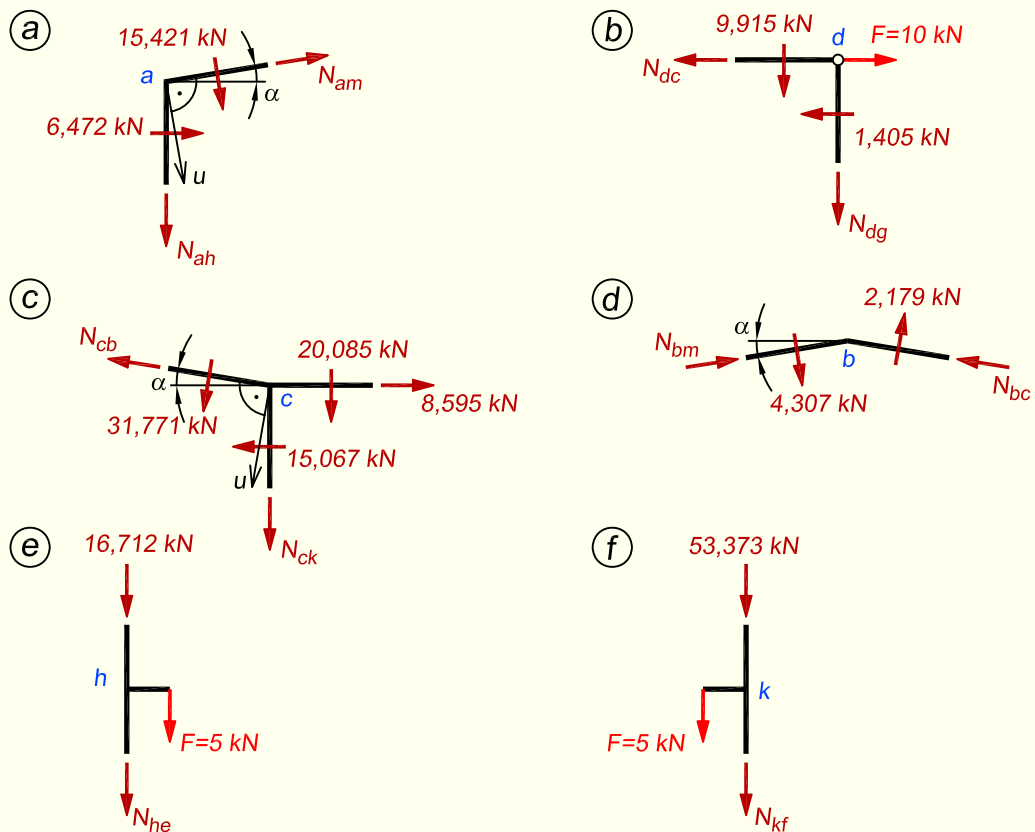
$$\sum X = 0; \quad N_{a-m} \cdot 0,9864 + 15,421 \cdot 0,1644 + 6,472 = 0$$

$$N_{a-m} = \frac{-15,421 \cdot 0,1644 - 6,472}{0,9864} = -9,131 \text{ kN}$$

Sõlm *d* (joonis 17.65, *b*)

$$\sum X = 0; \quad -N_{d-c} - 1,405 + 10 = 0; \quad N_{d-c} = -1,405 + 10 = 8,595 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0; \quad N_{d-g} + 9,915 = 0; \quad N_{d-g} = -9,915 \text{ kN}$$



Joonis 17.65. Raamist eraldatud sõlmed

Sõlm *c* (joonis 17.65, *c*)

$$\sum X = 0; \quad -N_{cb} \cdot 0,9864 + 8,595 - 15,067 - 31,771 \cdot 0,1644 = 0$$

$$N_{cb} = \frac{8,595 - 15,067 - 31,771 \cdot 0,1644}{0,9864} = -11,856 \text{ kN}$$

$$\sum u = 0$$

$$N_{c-k} \cdot 0,9864 + 31,771 + 20,085 \cdot 0,9864 - 8,595 \cdot 0,1644 + 15,067 \cdot 0,1644 = 0$$

$$N_{c-k} = \frac{-31,771 - 20,085 \cdot 0,9864 + 8,595 \cdot 0,1644 - 15,067 \cdot 0,1644}{0,9864} = -53,373 \text{ kN}$$

Sõlm *b* (joonis 17.65, *d*)

$$N_{b-m} = N_{a-m} + 20 \cdot 0,1644 = -9,131 + 20 \cdot 0,1644 = -5,843 \text{ kN}$$

$$N_{bc} = N_{cb} + p \cdot l \cdot \sin \alpha = -11,856 + 5 \cdot 6 \cdot 0,1644 = -6,924 \text{ kN}$$

Kontroll sõlmes *b* *x*-telje suunas

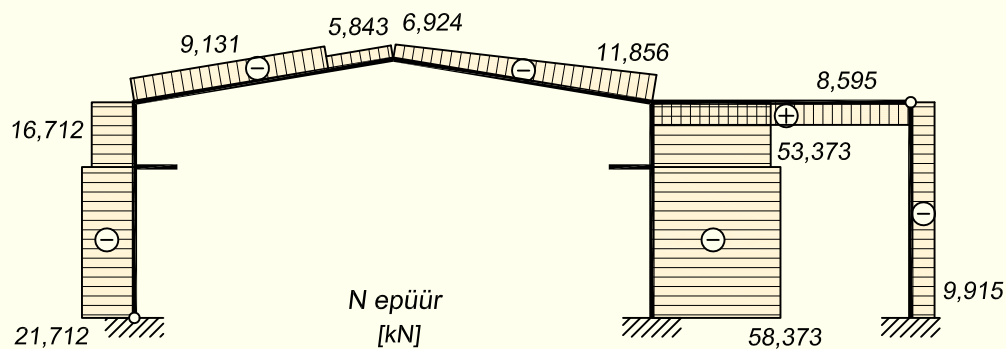
$$\sum X = (5,843 - 6,924) \cdot 0,9864 + (4,307 + 2,179) \cdot 0,1644 = 0$$

Sõlm *h* (joonis 17.65, *e*)

$$\sum Z = 0; \quad N_{h-e} + 5 + 16,712 = 0; \quad N_{h-e} = -21,712 \text{ kN}$$

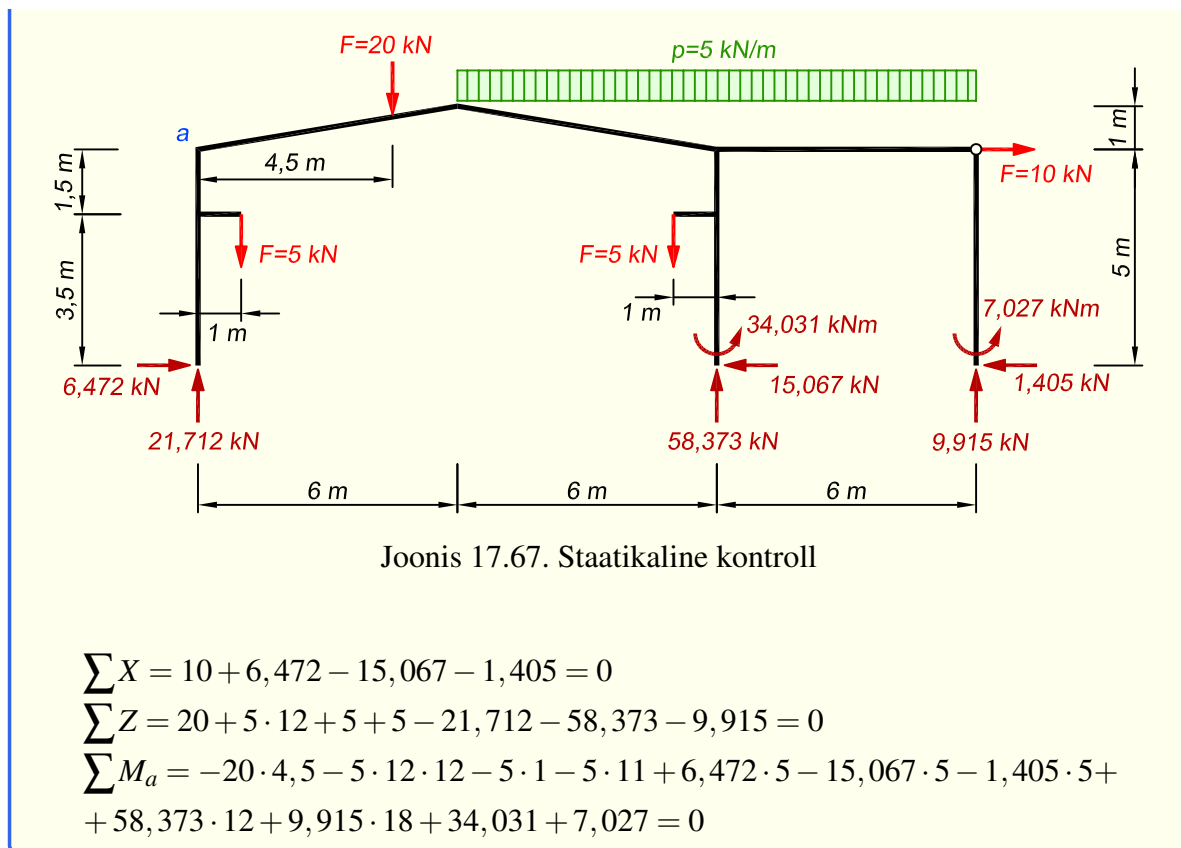
Sõlm *k* (joonis 17.65, *f*)

$$\sum Z = 0; \quad N_{k-f} + 5 + 53,373 = 0; \quad N_{k-f} = -58,373 \text{ kN}$$



Joonis 17.66. Pikijõu epüür

13. Piki- ja põikjõu epüüride õigsust kontrollime raamile mõjuva koormuse ja toereaktsioonide tasakaalutingimustega (joonis 17.67). Toereaktsioonid leiame *M*, *Q* ja *N* epüüridelt. Seejärel kirjutame projektsioonide tasakaalutingimused mõlema telje suunas ning momentide tasakaalutingimuse mingi punkti suhtes.



17.11. Temperatuuri muutuse ja tugede siirete mõju

17.11.1. Temperatuuri muutuse mõju

Temperatuuri muutusest põhjustatud sisejõudude arvutus on analoogiline koormusest põhjustatud sisejõudude arvutusega. Erinevus on kanooniliste võrrandite vabaliikmete leidmises.

Temperatuuri muutusest põhjustatud paindemomendid, põik- ja pikijõud arvutame kahes osas: temperatuuri mitteühtlasest muutusest $\Delta t = t_a - t_{\bar{u}}$, mis tingib varraste kõverdumise, ja temperatuuri ühtlasest muutusest t_0 , mis põhjustab nende pikenedamist või lühenemist. Temperatuuri muutusest tingitud varraste deformatsioonid tekitavad kinemaatilisel määratud põhiskeemis kinnitusmomente.

Temperatuuri mitteühtlane muutus

Temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud kinnitusmomendid arvutame valemitega

$$M_{jk,t} = EI\alpha \frac{\Delta t}{h_{jk}}; \quad M_{kj,t} = -EI\alpha \frac{\Delta t}{h_{jk}} \quad (17.139)$$

$$M_{jl,t} = \pm \frac{3}{2} EI\alpha \frac{\Delta t}{h_{jl}} \quad (17.140)$$

Valemities (17.139) tähistab j varda vasakpoolset ja k parempoolset sõlme ning h_{jk} ristlõike kõrgust. Valemis (17.140) on märk pluss, kui vardal on jäik sõlm vasakul ja liigendsõlm paremal, ning miinus, kui jäik sõlm paremal ja liigendsõlm vasakul.

Kanooniliste võrrandite vabaliikmed temperatuuri mitteühtlasest muutusest arvutame valemitega (17.124) ja (17.125), milles koormusest põhjustatud kinnitusemomentid asendame temperatuuri muutusest põhjustatud kinnitusemomentidega (17.139) ja (17.140)

$$r_{jk,\Delta t} = \sum_k M_{jk,\Delta t} + \sum_l M_{jl,\Delta t} \quad (17.141)$$

$$r_{c,\Delta t} = \sum_l M_{jl,\Delta t} \cdot \vartheta_{jl,c} \quad (17.142)$$

Valemis (17.142) esineb ainult niisuguse varda kinnitusemoment, mille ühes otsas on liigend ja teises otsas jäik sõlm. Mõlemas otsas jäigalt kinnitatud varda kinnitusemomentide algebraline summa on null (17.139).

Pärast võrrandite lahendamist arvutame sisejõud tavalisel viisil.

Temperatuuri ühtlane muutus

Temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud kinnitusemomentid kinemaatilisel määratud põhiskeemis arvutame valemitega

$$M_{jl,t} = \frac{3EI_{jl}}{l_{jl}} \vartheta_{jl,t} \quad (17.143)$$

$$M_{jk,t} = M_{kj,t} = \frac{6EI_{jk}}{l_{jk}} \vartheta_{jk,t} \quad (17.144)$$

kus $\vartheta_{jk,t}$ ja $\vartheta_{jl,t}$ on temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud varraste pöörded kinemaatilisel määratud põhiskeemis, kusjuures tähtedega jk on tähistatud mõlemast otsast jäigalt ning tähtedega jl ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud vardad.

Temperatuuri ühtlasest muutusest tingitud varraste pikenemised ja lühenemised arvutame valemiga

$$\Delta l = \alpha t_0 l \quad (17.145)$$

Varraste pikkuste muutuste Δl kaudu leiame kinemaatilisel määratud põhiskeemi sõlmede siirded, mis on vajalikud varraste pöörete arvutamiseks.

Võrrandite vabaliikmed leiame valemitega

$$r_{jt} = \sum_k M_{jk,t} + \sum_l M_{jl,t} \quad (17.146)$$

$$r_{ct} = \sum_k (M_{jk,t} + M_{kj,t}) \vartheta_{jk,c} + \sum_l M_{jl,t} \vartheta_{jl,c} \quad (17.147)$$

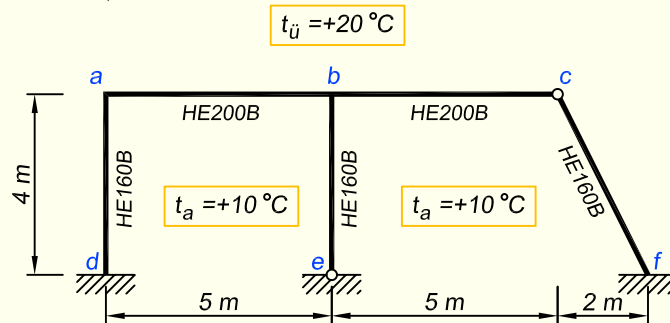
mis kinnitusemomentide (17.143) ja (17.144) sisseviimisel saavad kuju

$$r_{jt} = 6 \sum_k \frac{EI_{jk}}{l_{jk}} \vartheta_{jk,t} + 3 \sum_l \frac{EI_{jl}}{l_{jl}} \vartheta_{jl,t} \quad (17.148)$$

$$r_{ct} = 12 \sum_k \frac{EI_{jk}}{l_{jk}} \vartheta_{jk,t} \vartheta_{jk,c} + 3 \sum_l \frac{EI_{jl}}{l_{jl}} \vartheta_{jl,t} \vartheta_{jl,c} \quad (17.149)$$

kus k on mõlemas otsas jäigalt ja l ühes otsas jäigalt ning teises otsas liigendiga kinnitatud varras.

NÄIDE 17.6. Arvutada joonisel 17.68 kujutatud raami paindemomendi epüüri ordinaadid, mis on põhjustatud temperatuuri tõusust raamist väljaspool $+20^\circ\text{C}$ ja seespool $+10^\circ\text{C}$. Raami riivid on terasprofiilist HE200B, ristlõike kõrgusega 0,2 m ning inertsimomendiga $I_y = 5696 \text{ cm}^4$. Postide profiiliks on HE160B, ristlõikekõrgusega 0,16 m ning inertsimomendiga $I_y = 2492 \text{ cm}^4$. Terase elastsusmoodul on $E = 210 \text{ GPa}$ ning joonpaisumistegur $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$.



Joonis 17.68. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

Temperatuur raami sees ja väljas muutub erinevalt ja seetõttu tuleb siin ülesandes määrata eraldi ühtlasest ja mitteühtlasest temperatuuri muutusest põhjustatud paindemomendid.

1. Esmalt arvutame parameetrid, mida läheb tarvis mõlema arvutuse puhul.

Leiame varraste suhtelised jäikused

$$i_{ab} = i_{bc} = \frac{EI}{l} = \frac{210 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 5696 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4}{5} = 2392,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$i_{ad} = i_{be} = \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 2492 \cdot 10^{-8}}{4} = 1308,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$i_{cf} = \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 2492 \cdot 10^{-8}}{2\sqrt{5}} = 1170,2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

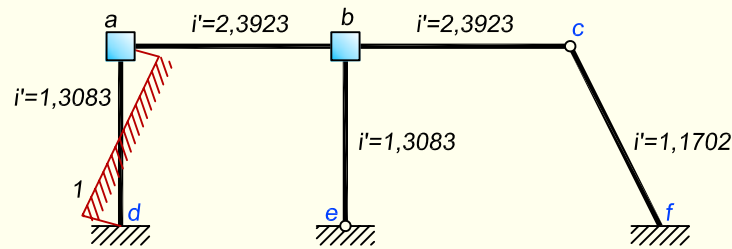
Ühikpööretest põhjustatud reaktsioonide leidmisel võtame jäikused 1000 korda väiksemad, mistõttu kanoonilistest võrranditest saadud tundmatud on 1000 korda suuremad ja nende korrutised ei muutu. Tuhat korda vähendatud jäikused on järgmised

$$i'_{ab} = i'_{bc} = 2,3923 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i'_{ad} = i'_{be} = 1,3083 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i'_{cf} = 1,1702 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Raami kinemaatilise määratuse astme leiame valemiga (17.9)

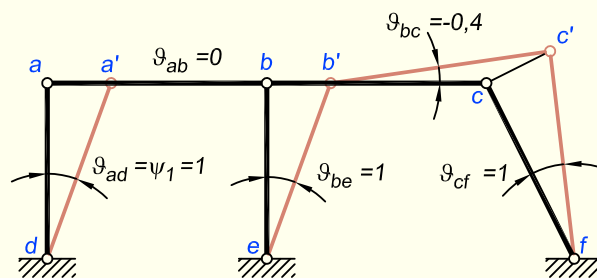
$$n^* = n_s + w = 2 + 1 = 3$$

Lisatundmatuteks on sõlmede a ja b pöörded φ_a ja φ_b ning varraste pööre ψ_1 . Kinemaatiliselt määratud põhiskeem lisatundmatute ja varraste suhteliste jäikustega on esitatud joonisel 17.69.



Joonis 17.69. Kinemaatiliselt määratud põhiskeem

Koostame varrasahela siirete skeemi, mille saame lisasideme I eemaldamisel. Baasvardaks võtame posti $a-d$. Kuna varraste pöördenurkade arvutust on eespool juba piisavalt selgitatud, siis jätame siinkohal selle esitamata ja toome ära ainult siirete skeemi joonisel 17.70.



Joonis 17.70. Varrrasahela siirete skeem lisasideme I puudumisel

Kirjutame välja võrrandisüsteemi üldkujul

$$r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{a1}\psi_1 + r_{at} = 0$$

$$r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{b1}\psi_1 + r_{bt} = 0$$

$$r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + r_{11}\psi_1 + r_{1t} = 0$$

Arvutame võrrandisüsteemi tundmatute kordajad sarnaselt arvutusele koormusest. Seetõttu jätame siin pikemad kommentaarid lisamata.

$$r_{aa} = 4(1,3083 + 2,3923) = 14,8024 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{bb} = 4 \cdot 2,3923 + 3(1,3083 + 2,3923) = 20,671 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{ab} = 2 \cdot 2,3923 = 4,7846 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{a1} = 6 \cdot 1,3083 \cdot 1 = 7,8498 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{b1} = 3 \cdot 1,3083 \cdot 1 - 3 \cdot 2,3923 \cdot 0,4 = 1,0541 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{11} = 12 \cdot 1,3083 \cdot 1^2 + 3 (1,3083 \cdot 1^2 + 2,3923 \cdot 0,4^2 + 1,1702 \cdot 1^2) = 24,2834 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Vabaliikmete arvutus sõltub sellest, kas temperatuur muutub ühtlaselt või mitteühtlaselt ja selle teeme edaspidi.

Temperatuuri ühtlane muutus varrastes $a-b$, $b-c$, $a-d$, $c-f$ on

$$t_0 = \frac{t_a + t_{\ddot{u}}}{2} = \frac{10 + 20}{2} = 15^\circ\text{C}$$

ning vardas $b-e$

$$t_0 = 10^\circ\text{C}$$

Temperatuuri mitteühtlane muutus varrastes $a-b$, $b-c$, $a-d$, $c-f$ on

$$\Delta t = t_a - t_{\ddot{u}} = 10 - 20 = -10^\circ\text{C}$$

ning vardas $b-e$

$$\Delta t = 0$$

2. Arvutus temperatuuri ühtlasest muutusest

Võrrandisüsteemi vabaliikmete leidmiseks on vaja arvutada kinnitusemomendid vastavalt valemitele (17.143) ja (17.144)

$$M_{jl,t} = \frac{3EI_{jl}}{l_{jl}} \vartheta_{jl,t}$$

$$M_{jk,t} = M_{kj,t} = \frac{6EI_{jk}}{l_{jk}} \vartheta_{jk,t}$$

mis sisaldavad varraste pöördenurki ühtlase temperatuurimuutuse poolt põhjustatud varraste pikenemisest. Seetõttu peame koostama varraste pöörete skeemi temperatuuri ühtlasest muutusest. Varraste pikenemised arvutame valemiga (17.145)

$$\Delta l = \alpha t_0 l$$

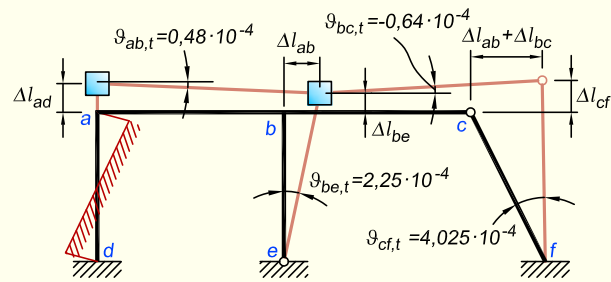
$$\Delta l_{ad} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 4 = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta l_{be} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 4 = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta l_{cf} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 2\sqrt{5} = 8,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta l_{ab} = \Delta l_{bc} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 5 = 9,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Varraste pikenemiste abil saame koostada pöörete skeemi, milles varda $a-d$ pöördenurk on sideme tõttu võrdne nulliga (joonis 17.71).



Joonis 17.71. Varraste pöörete skeem temperatuuri ühtlasel muutusel

Järgnevalt arvutame varraste pöördenurgad temperatuuri ühtlasest muutusest kineemaatilisel määratud põhiskeemis, arvestades, et väikeste nurkade korral $\tan \vartheta \approx \vartheta$.

$$\vartheta_{ad,t} = 0$$

$$\vartheta_{be,t} = \frac{\Delta l_{ab}}{l_{be}} = \frac{9,0 \cdot 10^{-4}}{4} = 2,25 \cdot 10^{-4}$$

$$\vartheta_{cf,t} = \frac{\Delta l_{ab} + \Delta l_{bc}}{l_{cf}} = \frac{(9,0 + 9,0) \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{5}} = 4,025 \cdot 10^{-4}$$

$$\vartheta_{ab,t} = \frac{\Delta l_{ad} - \Delta l_{be}}{l_{ab}} = \frac{(7,2 - 4,8) \cdot 10^{-4}}{5} = 0,48 \cdot 10^{-4}$$

$$\vartheta_{bc,t} = \frac{\Delta l_{be} - \Delta l_{cf}}{l_{bc}} = \frac{(4,8 - 8) \cdot 10^{-4}}{5} = -0,64 \cdot 10^{-4}$$

Nüüd saame leida kinnitusemomendid

$$M_{ab,t} = M_{ba,t} = 6i_{ab}\vartheta_{ab,t} = 6 \cdot 2392,3 \cdot 0,48 \cdot 10^{-4} = 0,6890 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{be,t} = 3i_{be}\vartheta_{be,t} = 3 \cdot 1308,3 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} = 0,8831 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc,t} = 3i_{bc}\vartheta_{bc,t} = -3 \cdot 2392,3 \cdot 0,64 \cdot 10^{-4} = -0,4593 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{fc,t} = 3i_{cf}\vartheta_{cf,t} = 3 \cdot 1170,2 \cdot 4,025 \cdot 10^{-4} = 1,4130 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Võrrandisüsteemi vabaliikmed on

$$r_{at} = M_{ab,t} = 0,6890 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{bt} = M_{ba,t} + M_{be,t} + M_{bc,t} = 0,6890 + 0,8831 - 0,4593 = 1,1128 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{1t} = M_{be,t}\vartheta_{be,1} + M_{bc,t}\vartheta_{bc,1} + M_{fc,t}\vartheta_{cf,1} =$$

$$= 0,8831 \cdot 1 + 0,4593 \cdot 0,4 + 1,4130 \cdot 1 = 2,4798 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Võrrandisüsteem koos arvukordajatega temperatuuri ühtlase muutuse korral

$$14,8024\varphi_a + 4,7846\varphi_b + 7,8498\psi_1 + 0,6890 = 0$$

$$4,7846\varphi_a + 20,671\varphi_b + 1,0541\psi_1 + 1,1128 = 0$$

$$7,8498\varphi_a + 1,0541\varphi_b + 24,2834\psi_1 + 2,4798 = 0$$

ning selle lahendid

$$\varphi_a = 0,0291; \quad \varphi_b = -0,0550; \quad \psi_1 = -0,1091$$

Nüüd saame leida paindemomendi epüüri ordinaadid, mida teeme sarnaselt arvutusele koormusest valemitega

$$M_{jk} = M_{jp} + 4i_{jk}\varphi_j + 2i_{jk}\varphi_k + 6i_{jk} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c}\psi_c$$

$$M_{jl} = M_{jp} + 3i_{jl}\varphi_j + 3i_{jl} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jl,c}\psi_c$$

Paindemomentide väärtusteks saame

$$M_{ad} = 4 \cdot 1,3083 \cdot 0,0291 - 6 \cdot 1,3083 \cdot 1 \cdot 0,1091 = -0,704 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ab} = 0,6890 + 4 \cdot 2,3923 \cdot 0,0291 - 2 \cdot 2,3923 \cdot 0,0550 = 0,704 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kontroll sõlmes *a*

$$M_{ad} + M_{ab} = -0,704 + 0,704 = 0$$

$$M_{ba} = 0,6890 - 4 \cdot 2,3923 \cdot 0,0550 + 2 \cdot 2,3923 \cdot 0,0291 = 0,302 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{be} = 0,8831 - 3 \cdot 1,3083 \cdot 0,0550 - 3 \cdot 1,3083 \cdot 1 \cdot 0,1091 = 0,239 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc} = -0,4593 - 3 \cdot 2,3923 \cdot 0,0550 + 3 \cdot 2,3923 \cdot 0,4 \cdot 0,1091 = -0,541 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

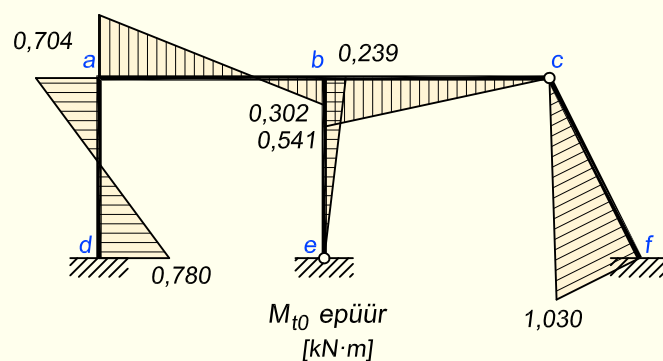
Kontroll sõlmes *b*

$$M_{ba} + M_{be} + M_{bc} = 0,302 + 0,239 - 0,541 = 0$$

$$M_{da} = 2 \cdot 1,3083 \cdot 0,0291 - 6 \cdot 1,3083 \cdot 1 \cdot 0,1091 = -0,780 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{fc} = 1,4130 - 3 \cdot 1,1702 \cdot 1 \cdot 0,1091 = 1,030 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.72.



Joonis 17.72. Paindemomendi epüür temperatuuri ühtlasest muutusest

Põikjõu epüüri ordinaadid saame vajadusel arvutada paindemomendi abil ning piki-
jõu epüüri ordinaadid sõlmede tasakaalust, nii nagu tegime seda koormuse puhul. See-
tõttu jätame siin ülesandes need epüürid esitamata.

3. Arvutus temperatuuri mitteühtlasest muutusest

Siin leiame esimesena kinnitusemomendid valemitega (17.139) ja (17.140)

$$M_{jk,t} = EI\alpha \frac{\Delta t}{h_{jk}}; \quad M_{kj,t} = -EI\alpha \frac{\Delta t}{h_{jk}}; \quad M_{jl,t} = \pm \frac{3}{2} EI\alpha \frac{\Delta t}{h_{jl}}$$

Kinnitusemomentideks saame

$$M_{da,\Delta t} = 210 \cdot 10^6 \cdot 2492 \cdot 10^{-8} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-10}{0,16} = -3,925 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ad,\Delta t} = 3,925 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ab,\Delta t} = 210 \cdot 10^6 \cdot 5696 \cdot 10^{-8} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-10}{0,2} = -7,177 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ba,\Delta t} = 7,177 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc,\Delta t} = \frac{3}{2} \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 5696 \cdot 10^{-8} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-10}{0,2} = -10,765 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{be,\Delta t} = 0$$

$$M_{fc,\Delta t} = -\frac{3}{2} \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 2492 \cdot 10^{-8} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-10}{0,16} = 5,887 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Võrrandisüsteemi vabaliikmed on

$$r_{at} = M_{ad,\Delta t} + M_{ab,\Delta t} = 3,925 - 7,177 = -3,252 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{bt} = M_{ba,\Delta t} + M_{bc,\Delta t} + M_{be,\Delta t} = 7,177 - 10,765 + 0 = -3,588 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{1t} = M_{bc,\Delta t} \vartheta_{bc,1} + M_{fc,\Delta t} \vartheta_{fc,1} = 10,765 \cdot 0,4 + 5,887 \cdot 1 = 10,193 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Võrrandisüsteem koos arvukordajatega temperatuuri mitteühtlase muutuse korral on

$$14,8024\varphi_a + 4,7846\varphi_b + 7,8498\psi_1 - 3,252 = 0$$

$$4,7846\varphi_a + 20,671\varphi_b + 1,0541\psi_1 - 3,588 = 0$$

$$7,8498\varphi_a + 1,0541\varphi_b + 24,2834\psi_1 + 10,193 = 0$$

ning selle lahendid

$$\varphi_a = 0,5022; \quad \varphi_b = 0,0872; \quad \psi_1 = -0,5859$$

Paindemomentide väärtusteks saame

$$M_{ad} = 3,925 + 4 \cdot 1,3083 \cdot 0,5022 - 6 \cdot 1,3083 \cdot 1 \cdot 0,5859 = 1,954 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ab} = -7,177 + 4 \cdot 2,3923 \cdot 0,5022 + 2 \cdot 2,3923 \cdot 0,0872 = -1,954 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ba} = 7,177 + 4 \cdot 2,3923 \cdot 0,0872 + 2 \cdot 2,3923 \cdot 0,5022 = 10,414 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

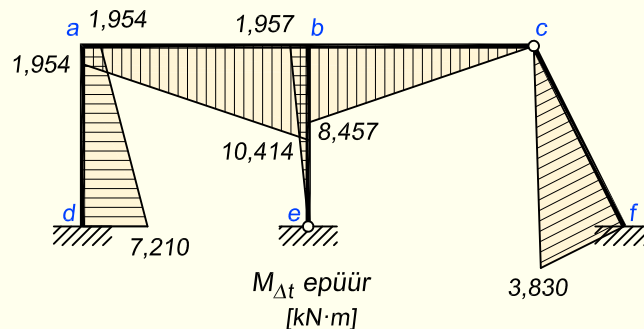
$$M_{be} = 3 \cdot 1,3083 \cdot 0,0872 - 3 \cdot 1,3083 \cdot 1 \cdot 0,5859 = -1,957 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc} = -10,765 + 3 \cdot 2,3923 \cdot 0,0872 + 3 \cdot 2,3923 \cdot 0,4 \cdot 0,5859 = -8,457 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{da} = -3,925 + 2 \cdot 1,3083 \cdot 0,5022 - 6 \cdot 1,3083 \cdot 1 \cdot 0,5859 = -7,210 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{fc} = 5,887 - 3 \cdot 1,1702 \cdot 1 \cdot 0,5859 = 3,830 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 17.73.



Joonis 17.73. Paindemomendi epüür temperatuuri mitteühtlasest muutusest

17.11.2. Tugede siirete mõju

Tugede siiretest põhjustatud sisejõud leiame analoogiliselt temperatuuri muutusest tingitud sisejõududega.

Tugede pöörded

Tugede pööretest tingitud kinnitusemomendid kinemaatilisel määratud põhiskeemis arvutame mõlemast otsast jäigalt kinnitatud vardas valemitega

$$M_{kj,r} = 4 \frac{EI_{kj}}{l_{kj}} \varphi_{kr}; \quad M_{jk,r} = 2 \frac{EI_{kj}}{l_{kj}} \varphi_{kr} \quad (17.150)$$

ja jäiga toega k , kuid teises otsas liigendiga kinnitatud vardas valemiga

$$M_{kl,r} = 3 \frac{EI_{kl}}{l_{kl}} \varphi_{kr} \quad (17.151)$$

kus φ_{kr} on jäiga toe pööre.

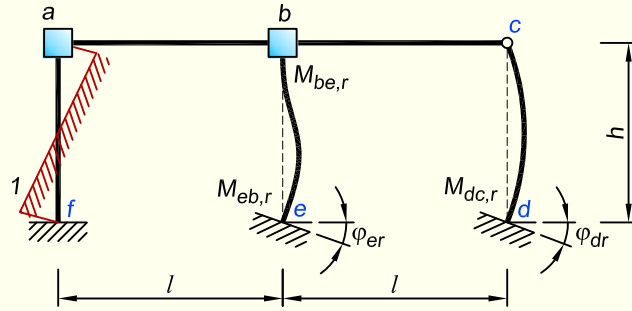
Tugede pööretest põhjustatud kanooniliste võrrandite vabaliikmed leiame valemitega

$$r_{jr} = 2 \sum_k \frac{EI_{jk}}{l_{jk}} \varphi_{kr} \quad (17.152)$$

$$r_{cr} = 6 \sum_k \frac{EI_{jk}}{l_{jk}} \varphi_{kr} \vartheta_{jk,c} + 3 \sum_l \frac{EI_{kl}}{l_{kl}} \varphi_{kr} \vartheta_{kl,c} \quad (17.153)$$

Valemities (17.152) ja (17.153) tähistab k jäika toesõlme, jk tähistab toesõlmes ja teises otsas jäigalt kinnitatud varrast ning kl märgib toesõlmes jäigalt ja teises otsas liigendiga kinnitatud varrast.

NÄIDE 17.7. Joonisel 17.74 on kujutatud raami kinemaatiliselt määratud põhiskeemi tugede e ja d pöördumine. Kirjutada sellele skeemile võrrandisüsteemi vabaliikmete avaldised.



Joonis 17.74. Kinemaatiliselt määratud põhiskeemi tugede pöörded

LAHENDUS

Joonisel 17.74 on näidatud raami kinemaatiliselt määratud põhiskeemi tugede pööretest tingitud kinnitusemomendid, mille saame valemitega (17.150) ja (17.151)

$$M_{be,r} = 2 \frac{EI_{be}}{h} \varphi_{er}; \quad M_{eb,r} = 4 \frac{EI_{be}}{h} \varphi_{er}; \quad M_{dc,r} = 3 \frac{EI_{cd}}{h} \varphi_{dr}$$

Kanooniliste võrrandite vabaliikmed tugede pööretest arvutame vastavalt avaldistele (17.152) ja (17.153)

$$r_{ar} = 0; \quad r_{br} = 2 \frac{EI_{be}}{h} \varphi_{er}$$

$$r_{1r} = 6 \frac{EI_{be}}{h} \varphi_{er} \vartheta_{be,1} + 3 \frac{EI_{cd}}{h} \varphi_{dr} \vartheta_{cd,1} = 6 \frac{EI_{be}}{h} \varphi_{er} \cdot 1 + 3 \frac{EI_{cd}}{h} \varphi_{dr} \cdot 1$$

Tugede nihkumine

Tugede siiretest tingitud kinnitusemomendid kinemaatiliselt määratud põhiskeemis arvutame analoogiliselt temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud momentidega

$$M_{jk,r} = M_{kj,r} = 6 \frac{EI_{jk}}{l_{jk}} \vartheta_{jk,r} \tag{17.154}$$

$$M_{jl,r} = 3 \frac{EI_{jl}}{l_{jl}} \vartheta_{jl,r} \tag{17.155}$$

kus $\vartheta_{jk,r}$ ja $\vartheta_{jl,r}$ on kinemaatiliselt määratud põhiskeemi tugede siiretest põhjustatud varraste pöörded.

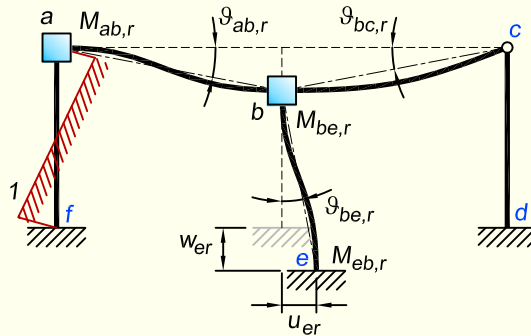
Kanooniliste võrrandite vabaliikmed leiame valemitega

$$r_{jr} = 6 \sum_k \frac{EI_{jk}}{l_{jk}} \vartheta_{jk,r} + 3 \sum_l \frac{EI_{jl}}{l_{jl}} \vartheta_{jl,r} \quad (17.156)$$

$$r_{cr} = 12 \sum_k \frac{EI_{jk}}{l_{jk}} \vartheta_{jk,r} \vartheta_{jk,c} + 3 \sum_l \frac{EI_{jl}}{l_{jl}} \vartheta_{jl,r} \vartheta_{jl,c} \quad (17.157)$$

Valemis (17.156) on tähistatud vaba jäiga sõlme j jäika naaber-toesõlme tähega k ja liigendiga naaber-toesõlme tähega l . Valemis (17.157) olevad korrutised summeerime varda jk pöörete $\vartheta_{jk,r}$ ja $\vartheta_{jk,c}$ esimese indeksi jk järgi, teine indeks pöörde $\vartheta_{jk,r}$ juures tähistab põhjust.

NÄIDE 17.8. Joonisel 17.75 on kujutatud raami kinemaatilisel määratud põhiskeemi toe e nihkumine paremale ja vajumine allapoole. Kirjutada sellele skeemile võrrandisüsteemi vabaliikmete avaldised.



Joonis 17.75. Kinemaatilisel määratud põhiskeemi toe nihkumine

LAHENDUS

Joonisel 17.75 on näidatud tugede siiretest tingitud kinnitusmomendid, mille leiame valemitega (17.154) ja (17.155)

$$M_{ab,r} = M_{ba,r} = 6 \frac{EI_{ab}}{l} \vartheta_{ab,r} = 6 \frac{EI_{ab}}{l} \frac{w_{er}}{l}; \quad M_{bc,r} = 3 \frac{EI_{bc}}{l} \vartheta_{bc,r} = 3 \frac{EI_{bc}}{l} \frac{w_{er}}{l}$$

$$M_{be,r} = M_{eb,r} = 6 \frac{EI_{be}}{h} \vartheta_{be,r} = 6 \frac{EI_{be}}{h} \frac{u_{er}}{h}$$

Kanooniliste võrrandite vabaliikmed toe nihkumisest saame leida vastavalt avaldis-tele (17.156) ja (17.157)

$$r_{ar} = M_{ab,r} = 6 \frac{EI_{ab}}{l} \frac{w_{er}}{l}$$

$$r_{br} = M_{ba,r} + M_{bc,r} + M_{be,r} = \left(3 \frac{EI_{bc}}{l} + 6 \frac{EI_{ab}}{l} \right) \frac{w_{er}}{l} + 6 \frac{EI_{be}}{h} \frac{u_{er}}{h}$$

$$r_{1r} = 12 \frac{EI_{be}}{h} \vartheta_{be,r} \vartheta_{be,1} = 12 \frac{EI_{be}}{h} \cdot \frac{-u_{er}}{h} \cdot 1 = -12 \frac{EI_{be}}{h} \cdot \frac{u_{er}}{h}$$

17.12. Jätkuvtala arvutamine deformatsioonimeetodiga

17.12.1. Liigend-ääretudega jätkuvtala

Jätkuvtala arvutamisel jõumeetodiga (kasutades näiteks kolme momendi võrrandit) on lisatundmatuteks toemomendid. Staatikaga määramatuse aste on liigend-ääretudega jätkuvtala ühe võrra väiksem sillete arvust

$$n = m - 1 \quad (17.158)$$

kus m on sillete arv. Jätkuvtala arvutamisel deformatsioonimeetodiga on lisatundmatuteks toeristlõigete (sõlmede) pöörded. Kinemaatilise määramatuse aste on samuti ühe võrra väiksem sillete arvust

$$n^* = m - 1 \quad (17.159)$$

Esimese lisa sideme a ja viimase lisa sideme n (joonis 17.76) jaoks on võrrandid järgmised

$$r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{ap} = 0; \quad r_{no}\varphi_o + r_{nn}\varphi_n + r_{np} = 0 \quad (17.160)$$

kus

$$r_{aa} = 3i_{al} + 4i_{ab}; \quad r_{ab} = 2i_{ab}; \quad r_{nn} = 4i_{no} + 3i_{nm}; \quad r_{no} = 2i_{no} \quad (17.161)$$

Vahepealse lisa sideme $j = b, c, \dots, o$ kohta koostatud võrrand omab kuju

$$r_{jk}\varphi_k + r_{jj}\varphi_j + r_{jk'}\varphi_{k'} + r_{jp} = 0 \quad (17.162)$$

kus φ_k ja $\varphi_{k'}$ on toe j naaberristlõigete pöörded.

Ühikpööretest põhjustatud reaktsioonid on

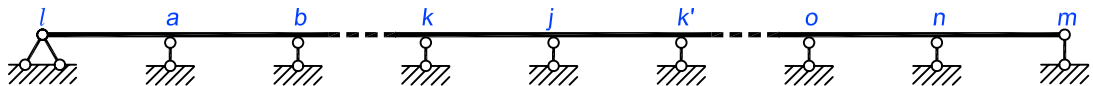
$$r_{jj} = 4(i_{jk} + i_{jk'}); \quad r_{jk} = 2i_{jk}; \quad r_{jk'} = 2i_{jk'} \quad (17.163)$$

Võrrandite (17.160) ja (17.162) vabaliikmed on järgmised

$$r_{ap} = M_{al,p} + M_{ab,p}; \quad r_{jp} = M_{jk,p} + M_{jk',p}; \quad r_{np} = M_{no,p} + M_{nm,p} \quad (17.164)$$

kus koormusest põhjustatud kinnitusmomendid $M_{jk,p}$ arvutame tabelis 17.1 esitatud valemitega.

Paindemomendid ja põikjõud leiame nagu raamis, mille vardad ei pöördu.



Joonis 17.76. Liigend-ääretudega jätkuvtala

17.12.2. Jäikade ääretugedega jätkuvtala

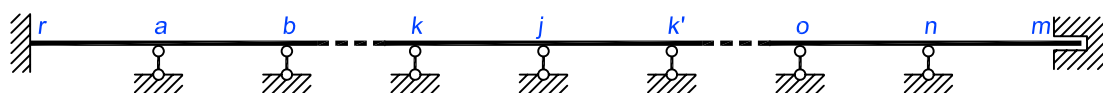
Jäikade ääretugedega jätkuvtala staatikaga määramatuse aste on ühe võrra suurem sillete arvust

$$n = m + 1 \quad (17.165)$$

kuid kinemaatilise määramatuse aste on sama kui liigendtugedega talal

$$n^* = m - 1 \quad (17.166)$$

sest äärmiste tugede pöörded on nullid: $\varphi_r = 0$, $\varphi_m = 0$ (joonis 17.77).



Joonis 17.77. Jäikade ääretugedega jätkuvtala

Esimene võrrand toeristlõike a ja viimane võrrand toeristlõike n jaoks on samad kui liigend-ääretugedega talal (17.160), kuid reaktsioonid nendes võrrandites arvutame valemitega

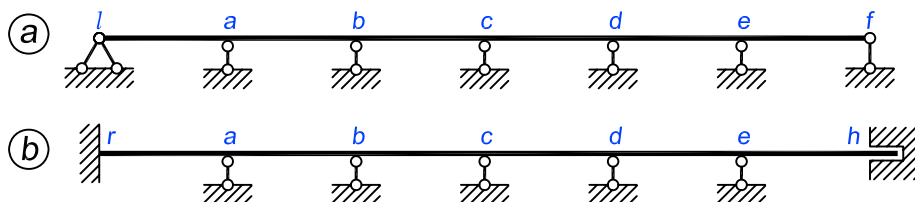
$$r_{aa} = 4(i_{ar} + i_{ab}); \quad r_{ab} = 2i_{ab}; \quad r_{nn} = 4(i_{no} + i_{nm}); \quad r_{no} = 2i_{no} \quad (17.167)$$

Vahepealsete toeristlõigete jaoks on võrrandid ja reaktsioonid samad nagu eespool vaadeldud liigend-ääretugedega talal (17.162), (17.163).

Näiteks kuuesildelise liigend- ja jäikade ääretugedega tala (joonis 17.78) jaoks on kanoonilised võrrandid samad

$$\begin{aligned} r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b &+ r_{ap} = 0 \\ r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{bc}\varphi_c &+ r_{bp} = 0 \\ r_{cb}\varphi_b + r_{cc}\varphi_c + r_{cd}\varphi_d &+ r_{cp} = 0 \\ r_{dc}\varphi_c + r_{dd}\varphi_d + r_{de}\varphi_e + r_{dp} &= 0 \\ r_{ed}\varphi_d + r_{ee}\varphi_e + r_{ep} &= 0 \end{aligned} \quad (17.168)$$

Kõik ühikpööretest põhjustatud reaktsioonid, välja arvatud r_{aa} ja r_{ee} arvutame mõlema tala puhul valemitega (17.163).



Joonis 17.78. Kuuesildelised liigend- ja jäikade ääretugedega jätkuvtalad

Erinevad reaktsioonid:

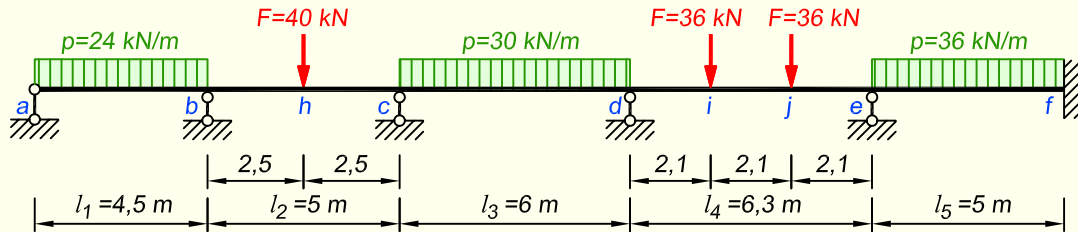
1. liigend-ääretudega talal

$$r_{aa} = 4 \left(\frac{3}{4} i_{al} + i_{ab} \right); \quad r_{ee} = 4 \left(i_{ed} + \frac{3}{4} i_{ef} \right) \quad (17.169)$$

2. jäikade ääretudega talal

$$r_{aa} = 4(i_{ar} + i_{ab}); \quad r_{ee} = 4(i_{ed} + i_{eh}) \quad (17.170)$$

NÄIDE 17.9. Koostada joonisel 17.79 kujutatud jätkuvtalale paindemomendi epüür. Tala on terasprofiilist IPE330, mille ristlõike inertsimoment on $I_y = 11770 \text{ cm}^4$. Materjali elastsusmoodul $E = 210 \text{ GPa}$.



Joonis 17.79. Jätkuvtala arvutuskeem

LAHENDUS

1. Arvutame kõigile silletele suhtelised jäikused, mille jaoks leiame esmalt EI väärtuse

$$EI = 210 \cdot 10^6 \cdot 11770 \cdot 10^{-8} = 24717 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Sillete jäikusteks saame nüüd

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{EI}{l_1} = \frac{24717}{4,5} = 5492,7 \text{ kN}\cdot\text{m}; & i_3 &= \frac{24717}{6} = 4119,5 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ i_2 &= i_5 = \frac{24717}{5} = 4943,4 \text{ kN}\cdot\text{m}; & i_4 &= \frac{24717}{6,3} = 3923,3 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Kuna koormusest põhjustatud sisejõudude suurused ei olene varraste jäikuste absoluutsetest suurustest, vaid jäikuste suhetest, vähendame jäikuseid tuhat korda, et arvused oleks hõlpsam käsitleda

$$i_1 = 5,4927 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_2 = i_5 = 4,9434 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_3 = 4,1195 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad i_4 = 3,9233 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2. Kinemaatilise määramatuse astmeks saame sillete arvu järgi

$$n^* = m - 1 = 5 - 1 = 4$$

kuna tundmatuteks on vahepealsete toelõigete b , c , d ja e pöörded. Parempoolsel toel pööret ei toimu. Vasakpoolsel toel küll pööre esineb, aga kuna see on liigendsõlm, siis

vastavalt deformatsioonimeetodi põhimõtetele me seda pööret tundmatute hulka ei loe: arvesse lähevad jäikade sõlmede pöörded.

3. Vastavalt kinemaatilise määramatuse astmele kirjutame välja võrrandisüsteemi üldkuul, lähtudes valemistest (17.160) ja (17.162)

$$\begin{aligned} r_{bb}\Phi_b + r_{bc}\Phi_c &+ r_{bp} = 0 \\ r_{cb}\Phi_b + r_{cc}\Phi_c + r_{cd}\Phi_d &+ r_{cp} = 0 \\ r_{dc}\Phi_c + r_{dd}\Phi_d + r_{de}\Phi_e + r_{dp} &= 0 \\ r_{ed}\Phi_d + r_{ee}\Phi_e + r_{ep} &= 0 \end{aligned}$$

4. Tundmatute kordajate arvutamisel kasutame valemeid (17.161), (17.163) ja (17.167)

$$\begin{aligned} r_{bb} &= 3i_1 + 4i_2 = 3 \cdot 5,4927 + 4 \cdot 4,9434 = 36,2517 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ r_{bc} &= 2i_2 = 2 \cdot 4,9434 = 9,8868 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ r_{cc} &= 4(i_2 + i_3) = 4(4,9434 + 4,1195) = 36,2516 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ r_{cd} &= 2i_3 = 2 \cdot 4,1195 = 8,239 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ r_{dd} &= 4(i_3 + i_4) = 4(4,1195 + 3,9233) = 32,1712 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ r_{de} &= 2i_4 = 2 \cdot 3,9233 = 7,8466 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ r_{ee} &= 4(i_4 + i_5) = 4(3,9233 + 4,9434) = 35,4668 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

5. Võrrandisüsteemi vabaliikmete arvutamiseks on esmalt vaja leida kinnitusemomendid kinemaatiliselt määratud põhiskeemis. Teeme seda tabeli 17.1 abil

$$\begin{aligned} M_{ba,p} &= -\frac{1}{8}pl_1^2 = -\frac{1}{8} \cdot 24 \cdot 4,5^2 = -60,75 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{bc,p} &= Fa\eta^2 = 40 \cdot 2,5 \cdot 0,5^2 = 25,0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{cb,p} &= -Fb\xi^2 = -40 \cdot 2,5 \cdot 0,5^2 = -25,0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{cd,p} &= \frac{1}{12}pl_3^2 = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 6^2 = 90,0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{dc,p} &= -\frac{1}{12}pl_3^2 = -\frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 6^2 = -90,0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{de,p} &= F_i a_i \eta_i^2 + F_j a_j \eta_j^2 = 36 \cdot 2,1 \left(\frac{4,2}{6,3}\right)^2 + 36 \cdot 4,2 \left(\frac{2,1}{6,3}\right)^2 = 50,4 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{ed,p} &= -F_i b_i \xi_i^2 - F_j b_j \xi_j^2 = -36 \cdot 4,2 \left(\frac{2,1}{6,3}\right)^2 - 36 \cdot 2,1 \left(\frac{4,2}{6,3}\right)^2 = -50,4 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{ef,p} &= \frac{1}{12}pl_5^2 = \frac{1}{12} \cdot 36 \cdot 5^2 = 75,0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{fe,p} &= -\frac{1}{12}pl_5^2 = -\frac{1}{12} \cdot 36 \cdot 5^2 = -75,0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Seejärel saame arvutada vabaliikmed valemitega (17.164)

$$r_{bp} = M_{ba,p} + M_{bc,p} = -60,75 + 25,0 = -35,75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{cp} = M_{cb,p} + M_{cd,p} = -25,0 + 90,0 = 65 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{dp} = M_{dc,p} + M_{de,p} = -90,0 + 50,4 = -39,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{ep} = M_{ed,p} + M_{ef,p} = -50,4 + 75,0 = 24,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

6. Võrrandisüsteem koos arvukordajatega on

$$\begin{aligned} 36,2517\varphi_b + 9,8868\varphi_c & - 35,75 = 0 \\ 9,8868\varphi_b + 36,2516\varphi_c + 8,2390\varphi_d & + 65 = 0 \\ 8,2390\varphi_c + 32,1712\varphi_d + 7,8466\varphi_e - 39,6 & = 0 \\ 7,8466\varphi_d + 35,4668\varphi_e + 24,6 & = 0 \end{aligned}$$

ning selle lahendid

$$\varphi_b = 1,7431; \quad \varphi_c = -2,7755; \quad \varphi_d = 2,2313; \quad \varphi_e = -1,1873$$

7. Paindemomendi epüüri ordinaadid tugeudel arvutame samade valemitega nagu raami puhulgi, jättes ära valemi viimase liikme, mis on seotud varraste pöördumisega

$$M_{jk} = M_{jp} + 4i_{jk}\varphi_j + 2i_{jk}\varphi_k$$

$$M_{jl} = M_{jp} + 3i_{jl}\varphi_j$$

Paindemomendi väärtusteks saame

$$M_{ba} = M_{ba,p} + 3i_1\varphi_b = -60,75 + 3 \cdot 5,4927 \cdot 1,7431 = -32,03 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} M_{bc} &= M_{bc,p} + 4i_2\varphi_b + 2i_2\varphi_c = 25,0 + 4 \cdot 4,9434 \cdot 1,7431 - 2 \cdot 4,9434 \cdot 2,7755 = \\ &= 32,03 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{cb} &= M_{cb,p} + 2i_2\varphi_b + 4i_2\varphi_c = -25,0 + 2 \cdot 4,9434 \cdot 1,7431 - 4 \cdot 4,9434 \cdot 2,7755 = \\ &= -62,65 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{cd} &= M_{cd,p} + 4i_3\varphi_c + 2i_3\varphi_d = 90,0 - 4 \cdot 4,1195 \cdot 2,7755 + 2 \cdot 4,1195 \cdot 2,2313 = \\ &= 62,65 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{dc} &= M_{dc,p} + 2i_3\varphi_c + 4i_3\varphi_d = -90,0 - 2 \cdot 4,1195 \cdot 2,7755 + 4 \cdot 4,1195 \cdot 2,2313 = \\ &= -76,10 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

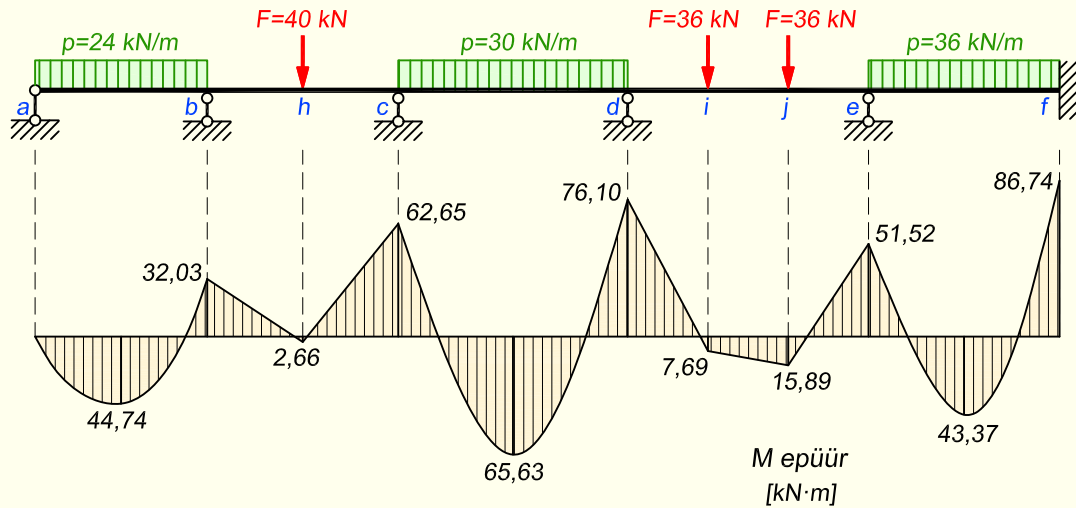
$$\begin{aligned} M_{de} &= M_{de,p} + 4i_4\varphi_d + 2i_4\varphi_e = 50,4 + 4 \cdot 3,9233 \cdot 2,2313 - 2 \cdot 3,9233 \cdot 1,1873 = \\ &= 76,10 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{ed} &= M_{ed,p} + 2i_4\varphi_d + 4i_4\varphi_e = -50,4 + 2 \cdot 3,9233 \cdot 2,2313 - 4 \cdot 3,9233 \cdot 1,1873 = \\ &= -51,52 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$M_{ef} = M_{ef,p} + 4i_5\varphi_e = 75,0 - 4 \cdot 4,9434 \cdot 1,1873 = 51,52 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_f = M_{fe,p} + 2i_5\varphi_e = -75,0 - 2 \cdot 4,9434 \cdot 1,1873 = -86,74 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sildes olevate ordinaatide arvutamine ei ole seotud enam deformatsioonimeetodiga, vaid need tuleb leida toeordinaatide abil, nii nagu me seda ükskõik millise tala või raami puhul teeme. Seetõttu siin seda arvutust esitatud ei ole ja toome ära ainult paindemomendi epüüri.



Joonis 17.80. Paindemomendi epüür

Peatükk 18

LÕPLIKE ELEMENTIDE MEETOD

18.1. Sissejuhatus

18.1.1. Lühiülevaade lõplike elementide meetodist (LEM)

Lõplike elementide meetod on tänapäeval väga laialt levinud numbriline arvutusmeetod diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks. Lisaks ehituskonstruksioonide sisejõudude, pingete ja deformatsioonide arvutamisele kasutatakse seda ka näiteks laeva-, lennuki- ja masinaehituses, selle abil saab modelleerida vedeliku voolamist mitmesugustes erinevates keskkondades, lahendada süsteemide võnkumise, soojusülekanne ning elektrostaatika ülesandeid ja palju muud. Ehituskonstruksioonide sisejõudude leidmise tarkvara põhineb üldjuhul lõplike elementide meetodil.

LEM on arvutusmeetod, kus uuritav arvutusskeem jagatakse lõplikuks arvuks elementideks. Iga elemendi jaoks kirjutatakse välja tasakaalutingimused, mis seejärel ühendatakse kogu arvutusskeemi kirjeldavaks tervikuks. Olenevalt lahendusmeetodist saab tundmatuteks valida sõlmpunktide siirded või elementide sisejõud. Käesolevas peatükis vaatleme ainult neist esimesena mainitud meetodit, mida nimetatakse jäikusmeetodiks. Sel juhul on lahendamise käigus kirjutatavateks avaldisteks tasakaalutingimused sõlmpunktide siirete kohta. Kui siirded on teada, saab nende abil välja arvutada elementide sisejõud.

LEM-i puhul kirjutatakse tasakaalutingimused maatrikskujul ja seega on tegemist maatriksarvutusega.

18.1.2. Põhilised sammud LEM-i kasutamisel

1. Objekti jagamine elementideks.
2. Valitakse mingi tundmatute muutumise funktsioon ühe elemendi piires. Kõige sagedamini kasutatavateks funktsioonideks on lineaarne, ruut- või kuuppolünoom.
3. Elementide jäikusmaatriksite ja tasakaaluvõrrandite koostamine.
4. Üksikute elementide kohta kirjutatud võrrandid seotakse omavahel kogu uuritavat objekti kirjeldavaks võrrandisüsteemiks.

5. Lisatakse rajatingimused.
6. Võrrandisüsteemi lahendamine sõlmpunktides olevate tundmatute suhtes, mis annab tulemusena sõlmpunktide siirded.
7. Sõlmpunktide siirete abil toereaktsioonide, sisejõudude ja pingete arvutamine.
8. Tulemuste hindamine, lahti mõtestamine ja kontrollimine.
9. Vajadusel võrgu tihendamine ja arvutuse kordamine.

18.1.3. Elementide põhitüübid

Arvutusskeemi jagamine elementideks on esimene oluline samm ülesande lahendamisel lõplike elementide meetodi abil. Lähtuvalt konstruktsiooni liigist ja keerukusest tuleb valida sobivad elementide tüübid ja suurus. Elemendid peaksid olema piisavalt väikesed, et tagada nõutav arvutustäpsus, aga samas jällegi võimalikult suured, et mitte liigselt kasvatada arvutusmahtu. Mida keerulisem on konstruktsiooni mingi piirkond või mida järsemat tulemuste (näiteks sisejõud, pinged, deformatsioonid) muutumist on oodata, seda väiksemad elemendid tuleb valida. Lihtsama kujuga piirkondades ning kohtades, kus tulemused muutuvad aeglasemalt, pole väikeste elementide järgi vajadust, kuna arvutustäpsusele see palju juurde ei anna, küll aga kasvatab arvutusmahtu.

Ühemõõtmelised elemendid

Kõige lihtsamaks elemenditüübiks on ühemõõtmeline element (joonis 18.1). Kuigi konstruktsioonelementidel on olemas ka ristlõike pindala, eeldatakse tundmatu suuruse muutumist ainult varda pikisuunas. Selliseid elemente kasutatakse tavaliselt talade, sõrestike ja raamide lahendamisel.

Lihtsaimal juhul on elemendiks sirglõik sõlmpunktidega elemendi otstes. Seda nimetatakse ka lineaarseks elemendiks. Arvutamisel kasutatakse siin lineaarseid polünoome.

Kõrgemat järku elementidel on sõlmpunktid lisaks elemendi otstele ka vahepeal ja need elemendid võivad olla nii sirged kui ka kõverjoonelised. Kolmesõlmelise elemendi arvutamisel kasutatakse ruutpolünoome ja neljasõlmelise elemendi korral kuuppolünoome.



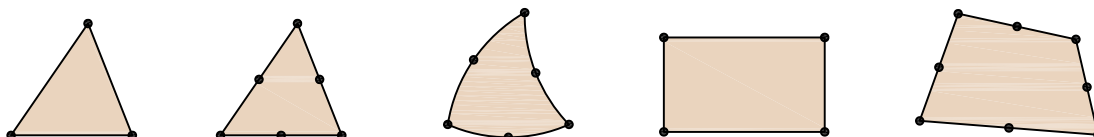
Joonis 18.1. Ühemõõtmelised elemendid

Erinevate konstruktsioonide lahendamisel jagunevad ühemõõtmelised elemendid omakorda veel selle järgi, mis on meil valitud sõlmpunktides tundmatuteks. Peatükkides 18.5, 18.6 ja 18.7 kirjeldatakse sõrestiku-, tala- ja raamielemendi kasutamist.

Kahemõõtmelised elemendid

Kahemõõtmeliste elementidena (joonis 18.2) kasutatakse peamiselt kahte tüüpi elemente – kolmnurkseid ja nelinurkseid. Lihtsamad elemendid on sirgjooneliste servadega ja sõlmpunktidega ainult elemendi nurkades. Kõrgemat järku elementide puhul võetakse sõlmpunktid lisaks nurkadele ka elemendi külgedele ja sel juhul võivad servad olla kõverjoonelised.

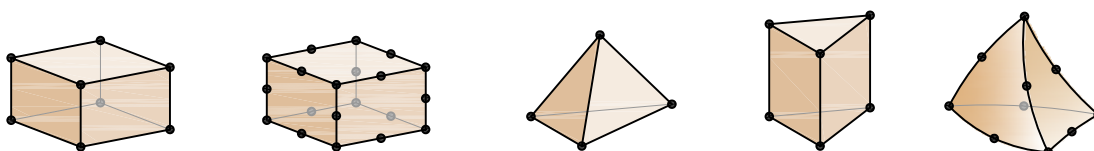
Selliseid elemente kasutatakse plaatide arvutamisel. Kuigi plaadil on ka paksus, lahendatakse seda kahemõõtmelise objektina. Seejuures võib plaadi paksus olla kas konstantne või muutuv. Paksusega arvestatakse valitud plaatide või koorikute teooria raames.



Joonis 18.2. Kahemõõtmelised elemendid

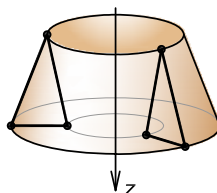
Kolmemõõtmelised elemendid

Kõige enamkasutatavad kolmemõõtmelised elemendid (joonis 18.3) on risttahukas, tetraeder, rööptahukas ja prisma, kuid vajadusel arvutatakse ka mitmesuguste muude kujunditega. Elementide servad võivad olla nii sirged kui ka kõverjoonelised, viimaste kasutamisel peavad sõlmpunktid lisaks nurkadele olema ka elemendi külgedel. Lisasõlmede kohta tuleb ära märkida ka see, et need ei pea olema serva keskel.



Joonis 18.3. Kolmemõõtmelised elemendid

Kolmemõõtmelisi elemente kasutatakse juhul, kui on vaja arvestada elementide mõõtmekõiki kolmes suunas. Sellisel juhul kasutatakse elastsusteooria võrrandeid.



Joonis 18.4. Telgsümmeetriline element

Vahel tuleb tegeleda ka telgsümmeetriliste kehadega (joonis 18.4), mis saadakse, kui mingi tasapinnaline kujund (näiteks kolmnurk või ristkülik) pöörleb ümber enda tasandis paikneva telje. Kui koormus ja rajatingimused on samuti telgsümmeetrilised, saab lahendada ainult selle tasapinnalise kujundi.

18.1.4. LEMi eelised ja puudused

Lõplike elementide meetodil on palju eeliseid.

1. Ei ole vaja teha vahet, kas arvutusskeem on staatikaga määratud või määramatu. Mõistetele, nagu staatikaga määramatuse või kinemaatilise määramatuse aste, siin tähelepanu ei pöörata.
2. Ülesannete valik, mille lahendamiseks saab LEMi kasutada, on väga lai: sellega on võimalik lahendada staatika, dünaamika ja stabiilsuse ülesandeid ning seda erinevate konstruktsioonitüüpide korral alates lihtsatest tala-, raam- ja sõrestikskeemidest keeruliste plaat-, koorik- ja kombineeritud konstruktsioonideni.
3. Materjali omadused naaberelementides võivad olla erinevad, mis võimaldab LEMi kasutamist rohkem kui ühest materjalist koosnevate konstruktsioonide arvutamisel.
4. Elementide mõõtmed võivad uuritavas objektis olla erinevad.
5. Seda meetodit saab kasutada väga keerulise piirjoonega objektide puhul. Keerulistes servapiirkondades võetakse võrk oluliselt tihedam kui muudes lihtsamates piirkondades.
6. Saab lahendada keeruliste rajatingimustega ülesandeid.
7. Võimaldab koostada universaalse lahenduse mingisuguste kehade klassi jaoks.

Meetodi puuduseks on väga suure mahuga arvutused, mistõttu käsitsi lahendamisel puudub mõte. Lisaks on see meetod vähese ülevaatlikkusega, võrreldes paljude teiste arvutusmeetoditega.

18.2. LEMi matemaatilised alused

Lõplike elementide meetodit võib matemaatilisest küljest vaadelda kui erijuhtumit *Galjorkini* ja *Rayleigh-Ritzi* meetoditest, mida kasutatakse diferentsiaalvõrrandite ligikaudseks lahendamiseks. Diferentsiaalvõrrandi täpsel lahendamisel saadakse nn tugev lahend, mis rahuldab kõiki etteantud rajatingimusi (olulisi ehk kinemaatilisi ja loomulikke ehk staatilisi) ning samuti ka diferentsiaalvõrrandit igas punktis.

Galjorkini meetodi puhul otsitakse nn nõrka lahendit. Seda eeldatakse mingil üldkujul, mis sisaldab ühte või enam tundmatut parameetrit. Nende väärtused leitakse tingimusest, et ligikaudse lahendi erinevus täpselt oleks minimaalne. Nõrk lahend rahuldab ainult olulisi rajatingimusi.

Rayleigh-Ritzi meetodi korral kasutatakse variatsioonarvutust, millega otsitakse potentsiaalenergia funktsiooni miinimumi.

Järgnevas peatükis tuletame pikisuunas koormatud varde deformatsioone kirjeldava diferentsiaalvõrrandi ning esitame selle täpse lahendi. Seejärel leiame Galjorkini ja Rayleigh-Ritzi meetoditega ka ligikaudse lahendi. Edaspidi näitame konkreetsete elementide tüüpide juures, kuidas Galjorkini ja Rayleigh-Ritzi meetoditega tuletada elementide võrrandid.

18.2.1. Varraste pikiteljesuunaline deformatsioon

Pikideformatsioone kirjeldav diferentsiaalvõrrand

Pikideformatsioone kirjeldava diferentsiaalvõrrandi tuletamiseks vaatame joonisel 18.5, a kujutatud ühest otsast jäigalt kinnitatud ja teljesuunalise lauskoormusega koormatud varrast. Varda ristlõikepindala tähistame A ja materjali elastsusmooduli E .

Varda pikijõud on seotud ristlõikes tekkiva normaalpingega järgmiselt

$$N(x) = \sigma A \quad (18.1)$$

Eeldusel, et tegemist on elatse materjaliga, on normaalpinge ja normaalmoone omavahel seotud elastsusmooduliga $\sigma = \varepsilon E$ ja saame

$$N(x) = \varepsilon EA \quad (18.2)$$

Väikeste deformatsioonide korral on normaalmoone $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ ja pikijõu avaldiseks kujuneb

$$N(x) = \frac{du}{dx} EA \quad (18.3)$$

Joonisel 18.5, b on näidatud vardast eraldatud lõpmatult lühike element pikkusega dx ja sellele mõjuvad jõud. Kirjutame välja tasakaalutingimuse $\sum X = 0$

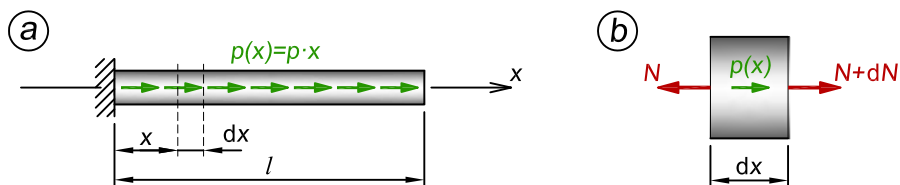
$$-N(x) + N(x) + dN + p(x) \cdot dx = 0 \quad (18.4)$$

millest saame

$$\frac{dN}{dx} + p(x) = 0 \quad (18.5)$$

Arvestades nüüd avaldise (18.3) ja (18.5), saame varde pikideformatsioone kirjeldavaks diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + p(x) = 0 \quad (18.6)$$



Joonis 18.5. Konsoolne varras ja sellest eraldatud element pikkusega dx

Pikideformatsioone kirjeldava diferentsiaalvõrrandi täpne lahend

Vaatame joonisel 18.6 esitatud varrast, mis on ühest otsast jäigalt kinnitatud. See varras on vabas otsas koormatud koondjõuga ning kogu varda ulatuses lineaarselt muutuva teljesuunalise koormusega $p(x) = p \cdot x$.

Avaldis

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + p \cdot x = 0 \quad (18.7)$$

on teist järku diferentsiaalvõrrand ja selle täpse lahendi leidmiseks tuleb teda kaks korda integreerida ning seejärel kasutada rajatingimusi. Esimene integreerimine annab tulemuseks

$$EA \frac{du}{dx} + \frac{px^2}{2} = C_1 \quad (18.8)$$

ning teine integreerimine

$$EAu + \frac{px^3}{6} = C_1x + C_2 \quad (18.9)$$

Teisendame seda ning avaldame siit u

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left(C_1x + C_2 - \frac{px^3}{6} \right) \quad (18.10)$$

Ülesande lahendamisel on rajatingimusteks

$$u(0) = 0; \quad N(l) = \frac{du(l)}{dx} EA = F \quad (18.11)$$

Esimese rajatingimuse abil saame leida integreerimiskonstandi C_2

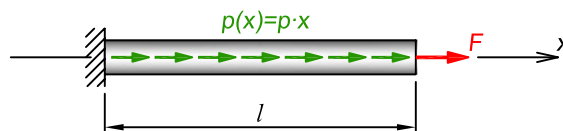
$$u(0) = \frac{1}{EA} C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (18.12)$$

Võtame avaldisest (18.10) tuletise

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{EA} \left(C_1 - \frac{px^2}{2} \right) \quad (18.13)$$

ja viime EA vasakule poole võrdusmärgi

$$\frac{du(l)}{dx} EA = C_1 - \frac{px^2}{2} \quad (18.14)$$



Joonis 18.6. Koondjõu ja lauspikikoormusega varras

Näeme, et avaldise vasak pool võrdub teise rajatingimusega ja seetõttu saame kirjutada

$$F = C_1 - \frac{px^2}{2} \quad (18.15)$$

mis annab integreerimiskonstandi C_1

$$C_1 = F + \frac{px^2}{2} \quad (18.16)$$

Seega on diferentsiaalvõrrandi täpne lahend

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left[\left(F + \frac{px^2}{2} \right) x - \frac{px^3}{6} \right] = \frac{x(6F + 3pl^2 - px^2)}{6EA} \quad (18.17)$$

18.2.2. Galjorkini meetodi kasutamine pikideformatsioone kirjeldava diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendi leidmiseks

Esitame Galjorkini meetodi sarnaselt, nagu seda on tehtud raamatus [2].

Galjorkini meetodis otsitakse diferentsiaalvõrrandi (18.6) ligikaudset lahendit. Lahendit eeldatakse mingil üldkujul, sageli näiteks n -järku polünoomina

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (18.18)$$

kus a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) on tundmatud parameetrid, mis määratakse nii, et viga täpse ja ligikaudse lahendi vahel oleks võimalikult väike. Ligikaudne lahend ei rahulda diferentsiaalvõrrandit kõikide x väärtuste puhul. Kui ligikaudne lahend asetada võrrandisse, saame määrata veafunktsiooni e

$$e(x) = \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du(x)}{dx} \right) + p(x) \neq 0 \quad (18.19)$$

Summaarse vea kogu lahendatava piirkonna jaoks saab, kui integreerida veafunktsiooni üle kogu määramispiirkonna. Selleks, et erimärgilised vead teineteist ära ei nulliks, korrutatakse summaarse veahinnangu saamiseks veafunktsioon $e(x)$ kaalufunktsiooniga $g_i(x)$

$$\int_{x_0}^{x_l} e(x)g_i(x)dx = 0; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (18.20)$$

Kaalufunktsioon tuleb valida nii, et integraal oleks võrdne nulliga. Saadud avaldist nimetatakse nõrgaks formuleeringuks. Diferentsiaalvõrrand on tugev formuleering, kuna see rahuldab kõiki rajatingimusi ja annab igas punktis täpse lahendi. Integraalvorm rahuldab ainult olulisi rajatingimusi ja ei pea tingimata rahuldama diferentsiaalvõrrandit igas punktis.

Galjorkini meetodis kasutatakse kaalufunktsioonidena ligikaudse lahendi osatuletisi

$$g_i(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial a_i}; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (18.21)$$

Asetades nüüd nõrga lahendi avaldise (18.20) veafunktsiooni (18.19) ja kaalufunktsiooni (18.21), saame integraalvõrrandite süsteemi

$$\int_{x_0}^{x_l} \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du(x)}{dx} \right) g_i(x) dx + \int_{x_0}^{x_l} p(x) g_i(x) dx = 0; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (18.22)$$

Rakendame avaldise (18.22) esimesele integraalile ositi integreerimist valemiga

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (18.23)$$

kus u ja v on muutujad üldvalemis. Olgu

$$u = g_i(x); \quad dv = \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du(x)}{dx} \right) dx \quad (18.24)$$

siis

$$du = \frac{dg_i}{dx} dx; \quad v = EA \frac{du(x)}{dx} \quad (18.25)$$

Ositi integreerides saame

$$\int_{x_0}^{x_l} \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du(x)}{dx} \right) g_i(x) dx = EA \frac{du(x)}{dx} g_i(x) \Big|_{x_0}^{x_l} - \int_{x_0}^{x_l} EA \frac{du}{dx} \frac{dg_i(x)}{dx} dx \quad (18.26)$$

ja lõpptulemusena avaldisest (18.22)

$$EA \frac{du(x_l)}{dx} g_i(x_l) - EA \frac{du(x_0)}{dx} g_i(x_0) - \int_{x_0}^{x_l} \frac{dg_i}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_0}^{x_l} p(x) g_i(x) dx = 0 \quad (18.27)$$

Avaldise kaks esimest liiget on seotud varda otstel mõjuvate jõududega, mis võimaldab need rajatingimustena kirjutada nõrka formuleeringusse. Kui varda vasakpoolses otsas mõjub jõud $F(x_0)$ ja parempoolses otsas on rakendatud jõud $F(x_l)$, siis

$$-EA \frac{du(x_0)}{dx} = F(x_0); \quad EA \frac{du(x_l)}{dx} = F(x_l) \quad (18.28)$$

ja nõrk formuleering on

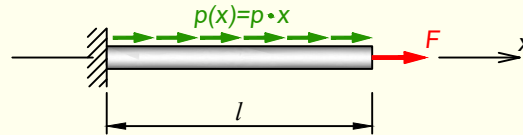
$$F(x_0) g_i(x_0) + F(x_l) g_i(x_l) - \int_{x_0}^{x_l} \frac{dg_i}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_0}^{x_l} p(x) g_i(x) dx = 0 \quad (18.29)$$

Viies avaldise (18.29) koormustega seotud liikmed paremale poole võrdusmärki, saame integraalvõrrandi

$$\int_{x_0}^{x_l} \frac{dg_i}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx = \int_{x_0}^{x_l} p(x) g_i(x) dx + F(x_0) g_i(x_0) + F(x_l) g_i(x_l) \quad (18.30)$$

mille vasakpoolset osa võib tõlgendada kui sisejõudude tööd ja parempoolset osa kui välisjõudude tööd virtuaalsiiretel g_i . Seega nõrk formuleering väljendab virtuaalsiirete printsiipi, mille kohaselt vardale virtuaalsiirde andmisel on välisjõudude töö võrdne sisejõudude tööga.

NÄIDE 18.1. Tuletada nõrka formuleeringut kasutades $u(x)$ avaldis, mis määrab joonisel 18.7 kujutatud varda mingi suvalise punkti horisontaalse siirde. Kasutada selleks lineaarset lahendit.



Joonis 18.7. Arvutuskeem

LAHENDUS

Varda deformeerumist kirjeldavale diferentsiaalvõrrandile (18.6)

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + p = 0$$

leiame ligikaudse lahendi lineaarse polünoomi kujul

$$u(x) = a_0 + a_1 x$$

Kasutame nõrka formuleeringu avaldist (18.29)

$$F(x_0)g_i(x_0) + F(x_l)g_i(x_l) - \int_{x_0}^{x_l} \frac{dg_i}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_0}^{x_l} p(x)g_i(x) dx = 0$$

esitatud lineaarse lahendi kordajate a_i leidmiseks.

Nõrka formuleeringu avaldis kirjeldab seda, kuidas erinevad tegurid mõjutavad varda deformeerumist. Varda deformatsioon on mõjutatud kahte liiki teguritest: koormustest ning varda materjali ja ristlõike omadustest. Kuna siin ülesandes on tegemist varda pikisuunalise deformatsiooniga, siis saame materjali ja ristlõike omadused kokku võtta pikkejäikusega EA .

Varda otses esinevad koondjõud võtame arvesse avaldise kahe esimese liikmega. Varda peal olevat lauskoormust arvestame avaldise viimase liikmega. Materjali ja ristlõike omadused on kirjutatud kolmandasse liikmesse. Koormuseid sisaldavad liikmed on selles avaldises kõik plussmärgiga, kuna x -telje positiivses suunas paiknevad koormused suurendavad varda deformeerumist. Pikkejäikust sisaldav kolmas liige on aga negatiivne, kuna materjal ja ristlõige töötavad deformeerumisele vastu.

Koordinaatteljestiku alguspunkt on varda vasakus otsas. Kuna seal on ka tugi, siis järelikult selles punktis võrdub horisontaalsiire nulliga. Siit saame oluliseks ehk kineemaatiliseks rajatingimuseks

$$u(0) = 0$$

mis annab nüüd $u(x)$ avaldiseks

$$u(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 = 0$$

See avaldis saab nulliga võrduda ainult olukorras, kus

$$a_0 = 0$$

Järelikult muutub meil $u(x)$ avaldis lühemaks

$$u(x) = a_1x$$

ja leida tuleb veel kordaja a_1 .

Kordaja a_1 saamiseks tuleb määrata nõrga formuleeringu avaldise (18.29) kõigi liikmete väärtused.

Alustame avaldise kolmandast liikmest, kus on sulgudes siirde u tuletis $\frac{du}{dx}$. Seetõttu võtame $u(x)$ avaldisest tuletise

$$\frac{du}{dx} = a_1$$

Järgnevalt liigume kaalufunktsiooni g_i juurde, millega on seotud nõrga formuleeringu kõik liikmed. Kaalufunktsiooni üldavaldis (18.21) on

$$g_i(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial a_i}$$

mis tähendab osatuletiste võtmist $u(x)$ avaldisest kordajate a_i järgi. Siin ülesandes on meil ainult üks kordaja a_1 .

Kaalufunktsiooni saamiseks võtame nüüd tuletise avaldisest $u(x) = a_1x$

$$g_1(x) = \frac{\partial u}{\partial a_1} = x$$

Kuna nõrga formuleeringu avaldise kolmandas liikmes sisaldub kaalufunktsiooni tuletis, siis leiame ka selle

$$\frac{dg_1}{dx} = 1$$

Nõrga formuleeringu avaldise kahe esimese liikme jaoks tuleb leida kaalufunktsiooni g_1 väärtused kohal $x = 0$ ja $x = l$, milleks kasutame eespool saadud kaalufunktsiooni avaldist $g_1(x) = x$

$$g_1(0) = 0; \quad g_1(l) = l$$

Saadud tulemus $g_1(0) = 0$ määrab ära, et nõrga formuleeringu avaldisest kaob ära esimene liige.

Kirjutades kõik saadud väärtused nõrga lahendi avaldisse, saame

$$Fl - \int_0^l EAa_1 dx + \int_0^l px \cdot x dx = 0$$

Selle avaldise puhul tuleb alati mõelda ka märkidele. Juhul kui mõni koormus on telje negatiivses suunas, siis kirjutame temale vastava liikme valemis miinusmärgiga.

Integreerimine annab tulemuseks

$$Fl - EAa_1x \Big|_0^l + \frac{px^3}{3} \Big|_0^l = 0$$

ja siit saame

$$Fl - EAa_1l + \frac{pl^3}{3} = 0$$

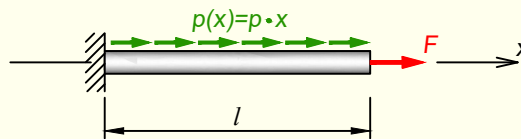
Võrrandi lahendamiseks leiame kordaja

$$a_1 = \left(Fl + \frac{pl^3}{3} \right) \frac{1}{EA l} = \frac{3F + pl^2}{3EA}$$

Ligikaudseks lineaarseks lahendiks saame

$$u(x) = a_1x = \frac{3F + pl^2}{3EA}x$$

NÄIDE 18.2. Tuletada nõrka formuleeringut kasutades $u(x)$ avaldis, mis määrab joonisel 18.8 kujutatud varda mingi suvalise punkti horisontaalse siirde. Kasutada selleks teist järku lahendit. Arvutuskeem on sama nagu näites 18.1.



Joonis 18.8. Arvutuskeem

LAHENDUS

Varda deformeerumist kirjeldavale diferentsiaalvõrrandile (18.6) otsime nõrka lahendit ruutpolünoomi kujul

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Kasutame lahendi nõrka formuleeringut (18.29)

$$F(x_0)g_i(x_0) + F(x_l)g_i(x_l) - \int_{x_0}^{x_l} \frac{dg_i}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_0}^{x_l} p(x)g_i(x) dx = 0$$

esitatud ruutpolünoomi kordajate a_i leidmiseks.

Oluline rajatingimus on

$$u(0) = 0$$

millest saame

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$$

Järelikult muutub $u(x)$ avaldis ühe liikme võrra lühemaks ja on

$$u(x) = a_1x + a_2x^2$$

Võtame saadud avaldisest tuletise

$$\frac{du}{dx} = a_1 + 2a_2x$$

Kaalufunktsiooni üldavaldis (18.21) on $g_i(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial a_i}$.
Kaalufunktsioonid ja nende tuletised on

$$g_1 = \frac{\partial u}{\partial a_1} = x; \quad \frac{\partial g_1}{\partial x} = 1; \quad g_2 = \frac{\partial u}{\partial a_2} = x^2; \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = 2x$$

Kaalufunktsioonide g_1 ja g_2 väärtused kohal $x = 0$ ja $x = l$ on

$$g_1(0) = 0; \quad g_1(l) = l; \quad g_2(0) = 0; \quad g_2(l) = l^2$$

Saadud tulemused $g_1(0) = 0$ ja $g_2(0) = 0$ määravad ära, et nõrga formuleeringu avaldisest kaob ära esimene liige.

Kirjutades kõik saadud väärtused nõrga lahendi avaldisse, saame esimeseks võrrandiks

$$Fl - \int_0^l EA(a_1 + 2a_2x) dx + \int_0^l px \cdot x dx = 0 \\ \Rightarrow Fl - EA(a_1l + a_2l^2) + \frac{pl^3}{3} = 0$$

ja teiseks võrrandiks

$$Fl^2 - \int_0^l EA(a_1 + 2a_2x) 2x dx + \int_0^l px \cdot x^2 dx = 0 \\ \Rightarrow Fl^2 - EA\left(a_1l^2 + \frac{4}{3}a_2l^3\right) + \frac{pl^4}{4} = 0$$

Võrrandite lahendamisega leiame kordajad

$$a_1 = \frac{12F + 7pl^2}{12EA}; \quad a_2 = -\frac{pl}{4EA}$$

Ligikaudseks teist järku lahendiks saame

$$u(x) = a_1x + a_2x^2 = \frac{12F + pl(7l - 3x)}{12EA}x$$

18.2.3. Rayleigh-Ritzi meetod

Rayleigh-Ritzi meetodi puhul kasutame variatsioonarvutust ja leiame varda deformatsioone kirjeldava diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendi konstruktsiooni potentsiaalenergia funktsiooni miinimumi tingimusest, mis sõnastatakse järgmiselt.

Kõigist kinemaatilistest võimalikest (ehk sidemete poolt võimaldatud) siiretest realiseerub selline siire, mille puhul konstruktsiooni potentsiaalenergia funktsioon saavutab minimaalse väärtuse.

Siin peatükis käsitleme ainult pikisuunas koormatud varrast. Seetõttu lähtume joonisel 18.6 kujutatud vardast ja tuletame sellele potentsiaalenergia avaldise.

Tugevusõpetusest on teada, et pikisuunalise koormusega varda deformatsioonienergia avaldub valemiga

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV \quad (18.31)$$

kus σ_x on normaalpinge ja ϵ_x on normaalmoone. Integreerimine toimub selles valemis üle elemendi ruumala V .

Pikideformatsioonide puhul eeldame, et pinge ja moone on varda ristlõike ulatuses konstantsed ning seetõttu saame deformatsioonienergia valemi esitada kujul, kus me integreerime ainult elemendi pikkuse suunas

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_x \epsilon_x A dx \quad (18.32)$$

kus A on varda ristlõike pindala.

Lähtudes normaalpinge ja -moone vahelisest seosest $\sigma_x = E\epsilon_x = E \frac{du}{dx}$ (ehk Hooke'i seadusest), saame

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (18.33)$$

Välisjõud teevad varda pikenedamisel tööd

$$W_v = \int_0^l p(x)u(x)dx + \sum F_i u(x_i) \quad (18.34)$$

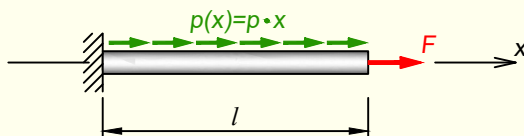
kus $p(x)$ on vardale mõjuv pikisuunaline lauskoormus, F_i on koondjõud ja $u(x_i)$ on koondjõu F_i rakenduspunktis esinev siire. Kuna lauskoormus on jaotatud üle kogu varda, siis temale vastavat siiret $u(x)$ tuleb integreerida samuti kogu varda pikkuses.

Deformatsioonienergia ja välisjõudude töö valemite baasil saame esitada pikisuunas deformeeruvale vardale potentsiaalenergia funktsiooni avaldise

$$\Pi = U - W_v = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l p(x)u(x)dx - \sum F_i u(x_i) \quad (18.35)$$

Potentsiaalenergia funktsiooni miinimumi leidmist vaatame järgnevates näidetes.

NÄIDE 18.3. Tuletada Rayleigh-Ritzi meetodit kasutades $u(x)$ avaldis, mis määrab joonisel 18.9 kujutatud varda mingi suvalise punkti horisontaalse siirde. Kasutada selleks lineaarset lahendit. Arvutuskeem on sama nagu näites 18.1.



Joonis 18.9. Arvutuskeem

LAHENDUS

Varda deformeerumist kirjeldavale diferentsiaalvõrrandile (18.6) leiame ligikaudse lahendi lineaarse polünoomi kujul

$$u(x) = a_0 + a_1x$$

Kasutame ülesande lahendamisel potentsiaalenergia funktsiooni (18.35)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l p(x)u(x)dx - \sum F_i u(x_i)$$

mille minimeerimise abil leiame mainitud lineaarse polünoomi kordajad.

Näites 18.1 me saime, et $a_0 = 0$ ja seetõttu

$$u(x) = a_1x$$

Järgnevalt leiame kordaja a_1 .

Lähtudes esitatud $u(x)$ avaldisest ning sellest, et vaadeldavas ülesandes $p(x) = px$ ja $u(x_i) = a_1l$, saame potentsiaalenergia funktsiooni esitada kujul

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left[\frac{d(a_1x)}{dx} \right]^2 dx - \int_0^l pa_1x^2 dx - Fa_1l$$

Tehes ära saadud avaldise esimeses liikmes diferentseerimise

$$\frac{d(a_1x)}{dx} = a_1$$

ning seejärel ka mõlemad integreerimised

$$\Pi = \frac{1}{2} EA a_1^2 \int_0^l dx - pa_1 \int_0^l x^2 dx - Fa_1l = \frac{1}{2} EA a_1^2 x \Big|_0^l - pa_1 \frac{x^3}{3} \Big|_0^l - Fa_1l$$

saame potentsiaalenergia avaldiseks

$$\Pi = \frac{1}{2} EA a_1^2 l - \frac{1}{3} pa_1 l^3 - Fa_1l$$

Potentsiaalenergia funktsiooni minimeerimiseks tuleb võtta saadud avaldisest osatuletis a_1 järgi ja võrdsustada see nulliga

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = EAa_1 l - \frac{1}{3}pl^3 - Fl = 0$$

Sellest võrrandist avaldame kordaja a_1

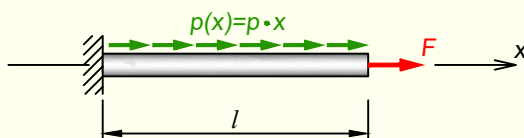
$$a_1 = \frac{3F + pl^2}{3EA}$$

mille abil saame esitada lineaarse lahendi

$$u(x) = a_1 x = \frac{3F + pl^2}{3EA} x$$

Jõudsimme samale tulemusele nagu näites 18.1 Galjorkini meetodiga.

NÄIDE 18.4. Tuletada Rayleigh-Ritzi meetodit kasutades $u(x)$ avaldis, mis määrab joonisel 18.10 kujutatud varda mingi suvalise punkti horisontaalse siirde. Kasutada selleks teist järku lahendit. Arvutuskeem on sama nagu näites 18.2.



Joonis 18.10. Arvutuskeem

LAHENDUS

Varda deformeerumist kirjeldavale diferentsiaalvõrrandile (18.6) leiame ligikaudse lahendi ruutpolünoomi kujul

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Kasutame ülesande lahendamisel potentsiaalenergia funktsiooni (18.35)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l p(x)u(x) dx - \sum F_i u(x_i)$$

mille minimeerimise abil leiame mainitud ruutpolünoomi kordajad.

Näites 18.2 me saime, et $a_0 = 0$ ja seetõttu

$$u(x) = a_1 x + a_2 x^2$$

Järgnevalt leiame kordajad a_1 ja a_2 .

Lähtudes esitatud $u(x)$ avaldisest ning sellest, et vaadeldavas ülesandes $p(x) = px$ ja $u(x_i) = a_1l + a_2l^2$, saame potentsiaalenergia funktsiooni esitada kujul

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left[\frac{d(a_1x + a_2x^2)}{dx} \right]^2 dx - \int_0^l px (a_1x + a_2x^2) dx - F (a_1l + a_2l^2)$$

Teeme ära saadud avaldise esimeses liikmes diferentseerimise

$$\left[\frac{d(a_1x + a_2x^2)}{dx} \right]^2 = (a_1 + 2a_2x)^2 = a_1^2 + 4a_1a_2x + 4a_2^2x^2$$

ning seejärel ka integreerimised avaldises

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} EA \int_0^l (a_1^2 + 4a_1a_2x + 4a_2^2x^2) dx - p \int_0^l (a_1x^2 + a_2x^3) dx - F (a_1l + a_2l^2) = \\ &= \frac{1}{2} EA \left(a_1^2x + 4a_1a_2 \frac{x^2}{2} + 4a_2^2 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^l - p \left(a_1 \frac{x^3}{3} + a_2 \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^l - F (a_1l + a_2l^2) \end{aligned}$$

mille tulemusena saame potentsiaalenergia funktsiooni avaldiseks

$$\Pi = \frac{1}{2} EAa_1^2l + EAa_1a_2l^2 + \frac{2}{3} EAa_2^2l^3 - \frac{1}{3} pa_1l^3 - \frac{1}{4} pa_2l^4 - Fa_1l - Fa_2l^2$$

Potentsiaalenergia funktsiooni minimeerimiseks võtame saadud avaldisest osatuletised kordajate a_1 ja a_2 järgi ja võrdsustame need nulliga

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} &= EAa_1l + EAa_2l^2 - \frac{1}{3} pl^3 - Fl = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} &= EAa_1l^2 + \frac{4}{3} EAa_2l^3 - \frac{1}{4} pl^4 - Fl^2 = 0 \end{aligned}$$

Saadud võrrandite lahendamisega leiame kordajad

$$a_1 = \frac{12F + 7pl^2}{12EA}; \quad a_2 = -\frac{pl}{4EA}$$

mille abil saame teist järku lahendiks

$$u(x) = a_1x + a_2x^2 = \frac{12F + pl(7l - 3x)}{12EA}x$$

Jõudsime samale tulemusele nagu näites 18.2 Galjorkini meetodiga.

18.3. Interpolatsioonifunktsioonid

Ülesande lahendamisel lõplike elementide meetodiga saame otsitavad suurused (üldjuhul siirde ja sisejõud) esmalt arvutusskeemi sõlmpunktides. Järgnevalt kerkib küsimus, kuidas leida siirete ja sisejõudude väärtused ka sõlmpunktide vahel.

Interpolatsioonifunktsioone kasutatakse selleks, et arvutusskeemi sõlmpunktides antud väärtuste kaudu leida otsitavad suurused ka sõlmedevahelises piirkonnas.

Millist interpolatsiooni kasutada, sõltub elemendi tüübist ja elemendi vabadusastmete arvust sõlmes. Teisiti öeldes tuleb lähtuda sellest, mis liiki suurused on sõlmpunktis antud: kas ainult siire või siire koos pöördega. Lisaks peame vaatama, milline funktsioon kirjeldab antud suuruste muutumist sõlmpunktide vahel.

Näiteks sõrestikuelemendi korral, milles esinevad ainult pikijõud ja mis on kirjeldatud teist järku diferentsiaalvõrrandiga, kasutame ainult sõlmes antud siiret – sõlme vabadusaste on üks. Siirde tuletist ehk pööret ei arvesta. Talaelementi kirjeldatakse neljandat järku diferentsiaalvõrrandiga, mispuhul on olulisteks rajatingimusteks sõlmes nii siire kui ka pööre – sõlme vabadusaste on kaks.

Järgnevalt vaatame kolme interpolatsiooni liiki:

1. lineaarne interpolatsioon;
2. Lagrange'i interpolatsioon;
3. Hermite'i interpolatsioon.

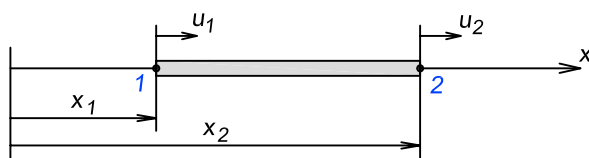
18.3.1. Lineaarne interpolatsioon

Joonisel 18.11 on näidatud sõrestikuelement kahe sõlmega. Teljesuunalised siirded u_1 ja u_2 on vabadusastmed, mida on kummaski sõlmes üks ja see element on vabadusastmega kaks. Elemendi sisemiste punktide siirete lähendit otsime lineaarse polünoomi kujul

$$u(x) = a_0 + a_1x \quad (18.36)$$

Arvestades, et

$$\begin{aligned} \text{kohal } x = x_1 \text{ siire on } u(x_1) &= u_1 \\ \text{kohal } x = x_2 \text{ siire on } u(x_2) &= u_2 \end{aligned} \quad (18.37)$$



Joonis 18.11. Kahe sõlmega lineaarne element

avalduvad sõlmede siirded

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1 x_1 \\ u_2 &= a_0 + a_1 x_2 \end{aligned} \quad (18.38)$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame tundmatute konstantide väärtusteks

$$a_0 = -\frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_1 - x_2}; \quad a_1 = -\frac{u_2 - u_1}{x_1 - x_2} \quad (18.39)$$

Asetades need avaldisse (18.43), saame sõlmedevahelised siirded sõlmväärtuste kaudu

$$u(x) = -\frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_1 - x_2} - \frac{u_2 - u_1}{x_1 - x_2} x \quad (18.40)$$

Grupeerides liikmed u_1 ja u_2 järgi ümber, saame sõlmedevahelised siirded avaldada

$$u(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 \quad (18.41)$$

ehk teisiti kirjutades

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) u_i \quad (18.42)$$

Maatrikskujul väljendatuna avaldub see

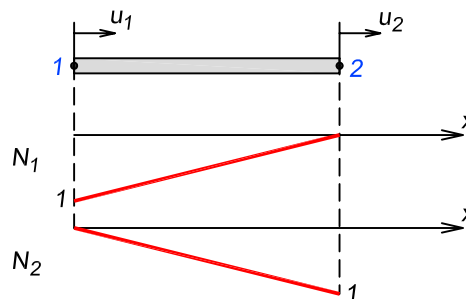
$$u(x) = \{ N_1 \quad N_2 \} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (18.43)$$

kus

$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}; \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (18.44)$$

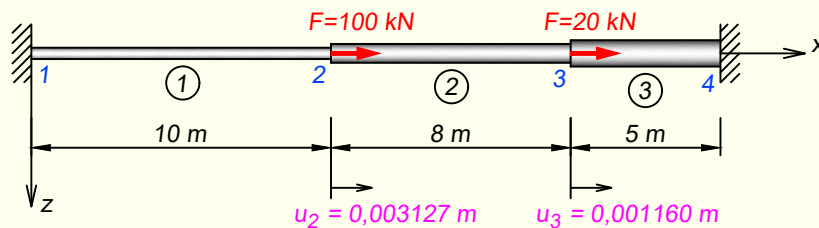
on interpolatsioonifunktsioonid ehk kujufunktsioonid, mis on näidatud joonisel 18.12.

Interpolatsioonifunktsioon N_1 on sõlme 1 kohal võrdne ühega ja sõlme 2 kohal nulliga, samal ajal funktsioon N_2 on võrdne ühega sõlme 2 kohal ja nulliga sõlme 1 kohal. Seega väljendab funktsioon N_1 siirde u_1 mõju elemendi mingi lõike x siirdele $u(x)$ ja funktsioon N_2 väljendab siirde u_2 mõju lõike x siirdele $u(x)$.



Joonis 18.12. Lineaarse interpolatsiooni kujufunktsioonide graafikud

NÄIDE 18.5. Joonisel 18.13 kujutatud astmeliselt muutuval vardal on teada sõlmpunktide 2 ja 3 horisontaalsed siirded: $u_2 = 0,003127$ m ja $u_3 = 0,001160$ m (arvutus on esitatud näites 18.14 leheküljel 878). Tuletada lineaarse interpolatsiooni abil avaldis, mis kirjeldab siiret $u(x)$ teises elemendis. Leida horisontaalne siire teises elemendis 3 m kaugusel elemendi vasakust otsast.



Joonis 18.13. Arvutuskeem ja sõlmpunktide siirded

LAHENDUS

1. Siirde $u(x)$ avaldise tuletamine teisele elemendile

Lähteülesandest on meil teada arvutuskeemi sõlmpunktide siirded. Nüüd on vaja tuletada avaldis, millega saame neid teadaolevaid siirdeid interpoleerida üle kogu teise elemendi. Ehk teisiti öeldes on meil vaja $u(x)$ avaldist, millega saame siirde arvutada teise elemendi suvalises punktis koordinaadiga x .

Kuna teise elemendi ulatuses ühtegi koormust ei ole, vaid koormused paiknevad ainult elemendi otsasõlmedes, ning elemendi ristlõike pindala on konstantne, siis on vahepealsete punktide siirded otsmistest lineaarses sõltuvuses. Seetõttu saame siin kasutada lineaarset interpolatsiooni.

Koordinaatide alguspunkt paikneb sõlmes 1.

Siirde $u(x)$ avaldise tuletamiseks kasutame valemit (18.43)

$$u(x) = \{ N_1 \quad N_2 \} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

ehk

$$u(x) = N_1 u_2 + N_2 u_3$$

kus siirete indeksid on esitatud juba vastavalt käesolevale ülesandele.

Interpolatsioonifunktsioonid avalduvad valemitega (18.44)

$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}; \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

kus $x_1 = 10$ m tähistab teise elemendi algust ja $x_2 = 18$ m tähistab teise elemendi lõppu.

Nüüd saame interpolatsioonifunktsioonideks

$$N_1 = \frac{x - 18}{10 - 18} = -\frac{x - 18}{8}; \quad N_2 = \frac{x - 10}{18 - 10} = \frac{x - 10}{8}$$

Kirjutame välja siirde avaldise

$$\begin{aligned}u(x) &= N_1 u_2 + N_2 u_3 = -\frac{x-18}{8} u_2 + \frac{x-10}{8} u_3 = \\&= -(0,125x - 2,25) u_2 + (0,125x - 1,25) u_3 = \\&= -(0,125x - 2,25) \cdot 0,003127 + (0,125x - 1,25) \cdot 0,001160 = \\&= -0,000391x + 0,007036 + 0,000145x - 0,001450 = \\&= -0,000246x + 0,005586\end{aligned}$$

Saadud avaldis

$$u(x) = -0,000246x + 0,005586$$

võimaldab arvutada siiret ükskõik millises teise elemendi punktis.

2. Siirde arvutamine teises elemendis 3 m kaugusel selle vasakust otsast (variant 1)

Kui soovime arvutada siiret teises elemendis mingis kindlas kohas, siis kasutame eelnevalt tuletatud avaldist ja koordinaadi x asemele kirjutame meid huvitava löike asukohta. Kuna siirde avaldis on tuletatud arvutuskeemi üldkoordinaate arvestades, siis tuleb selle löike asukoht anda samuti üldises koordinaadistikus, mille alguspunkt on sõlmes I . Teise elemendi algusest 3 m kaugusel paiknev löige asub 13 m kaugusel sõlmest I , mistõttu arvutuses kujuneb x -koordinaadiks 13 m

$$u(13) = -0,000246 \cdot 13 + 0,005586 = 0,00239 \text{ m}$$

Eespool mainisime, et vaadeldaval arvutuskeemil on elemendi vahepealsete punktide siirded otsmistest lineaarses sõltuvuses. Seetõttu peab saadud $u(13)$ väärtus jääma sõlmede 2 ja 3 siirete u_2 ja u_3 vahele. Siirete suuruseid analüüsides näeme, et see tingimus on täidetud.

3. Siirde arvutamine teises elemendis 3 m kaugusel selle vasakust otsast (variant 2)

Kui meil on vaja leida siire ainult ühes konkreetses löikes, siis võime loobuda üldise $u(x)$ avaldise tuletamisest ja sel juhul kirjutame interpolatsioonifunktsioonid välja selle konkreetse löike x -koordinaati arvestades. Praegusel juhul $x = 13$ m.

$$N_1 = \frac{13-18}{10-18} = \frac{-5}{-8} = 0,625; \quad N_2 = \frac{13-10}{18-10} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Kirjutame välja siirde avaldise

$$\begin{aligned}u(13) &= N_1 u_2 + N_2 u_3 = 0,625 u_2 + 0,375 u_3 = \\&= 0,625 \cdot 0,003127 + 0,375 \cdot 0,001160 = 0,00239 \text{ m}\end{aligned}$$

millega saime sama tulemuse nagu eespool oleva arvutusega.

18.3.2. Lagrange'i interpolatsioon

Lineaarset interpolatsiooni saab kasutada ainult siis, kui koormused on rakendatud elemendi otstesse ja kui elemendi ristlõikepindala ei muutu pikitelje suunas. Kui elemendil on jaotatud koormus või elemendi ristlõike pindala muutub, siis ei ole pikiteljesuunaline siire elemendi sees enam lineaarne.

Sellisel juhul saab kasutada *Lagrange'i* interpolatsiooni.

Kui meil on vaja avaldada n punkti (x_i, u_i) , kus $i = 1, 2, \dots, n$ läbiv $n - 1$ astme polünoom, siis Lagrange'i interpolatsiooni avaldis on järgmine

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(x)u_i = \{ \mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \mathcal{L}_3 \quad \dots \} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (18.45)$$

kus Lagrange'i interpolatsioonifunktsioonid avalduvad kujul

$$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (18.46)$$

ehk pikemalt lahtikirjutatuna

$$\mathcal{L}_i(x) = \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n} \quad (18.47)$$

Kasutades saadud valemit, avaldub lineaarne interpolatsioon ($n = 2$) kujul

$$u(x) = \mathcal{L}_1(x)u_1 + \mathcal{L}_2(x)u_2 \quad (18.48)$$

kus

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}; \quad \mathcal{L}_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (18.49)$$

mis on samasugused funktsioonid, nagu on tuletatud eelmises peatükis.

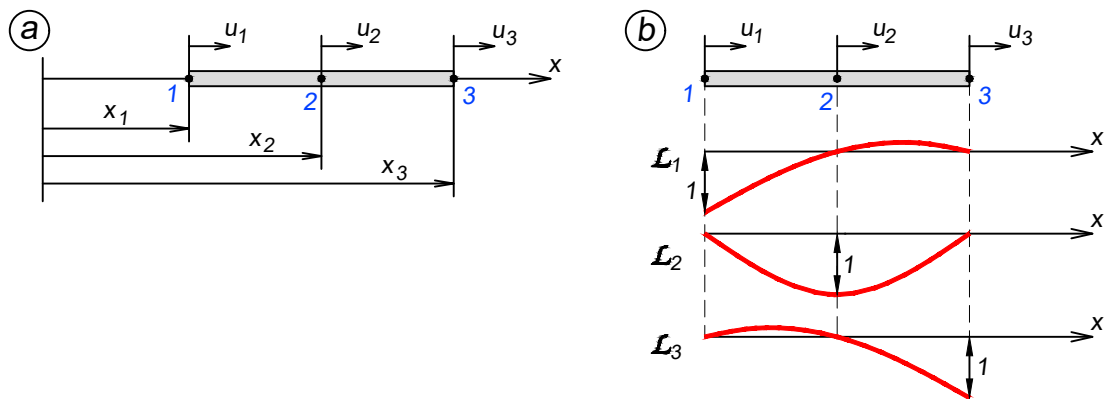
Joonisel 18.14, a on näidatud kolmesõlmeline element, millele võib ruutpolünoomi (kus $n = 3$) välja kirjutada järgmiselt

$$u(x) = \mathcal{L}_1(x)u_1 + \mathcal{L}_2(x)u_2 + \mathcal{L}_3(x)u_3 \quad (18.50)$$

kus

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}; \quad \mathcal{L}_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}; \quad \mathcal{L}_3(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \quad (18.51)$$

Interpolatsioonifunktsioonide graafikud on kujutatud joonisel 18.14, b .



Joonis 18.14. Kolmesõlmeline element

NÄIDE 18.6. Moodustada Lagrange'i interpolatsioonifunktsioonide abil polünoom, mis läbib tabelis antud nelja punkti. Esitada funktsiooni graafik.

Tabel 18.1. Punktide koordinaadid

| Punkt | x | $w(x)$ |
|-------|-----|--------|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1,5 |
| 3 | 2 | 5 |
| 4 | 3 | 2 |

LAHENDUS

Punkte, mida graafik peab läbima, on neli. Seetõttu siin ülesandes lineaarset interpolatsiooni kasutada ei saa, sest lineaarselt saab interpoleerida ainult läbi kahe punkti. Seetõttu kasutame selle ülesande lahendamisel Lagrange'i interpolatsiooni.

Kuna $n = 4$, siis vastavalt valemile (18.45) kujuneb Lagrange'i interpolatsiooni avaldis järgmiseks

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 \mathcal{L}_i(x)w_i = \{ \mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \mathcal{L}_3 \quad \mathcal{L}_4 \} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

Neli interpolatsioonifunktsiooni vastavalt avaldisele (18.46) on

$$\mathcal{L}_1 = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_1-x_3} \cdot \frac{x-x_4}{x_1-x_4}; \quad \mathcal{L}_2 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{x-x_4}{x_2-x_4}$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_3-x_2} \cdot \frac{x-x_4}{x_3-x_4}; \quad \mathcal{L}_4 = \frac{x-x_1}{x_4-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_4-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_4-x_3}$$

Nende avaldiste koostamisel lähtume sellest, et ühes avaldises esinev murruliste liikmete arv peab olema ühe võrra väiksem sõlmpunktide arvust. Esmalt paneme paika murru nimetaja esimese liikme, mille indeks kattub interpolatsioonifunktsiooni indeksiga. Seejärel lisame nimetaja tagumise liikme selle arvestusega, et ei tekiks nulliga jagamist. Ehk teisiti öeldes ei tohi nimetajasse sattuda kahte sama indeksiga liiget. Viimasena paneme paika lugeja tagumise liikme, mis peab kattuma tema alla jääva nimetaja tagumise liikmega.

Arvestades, et $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ ja $x_4 = 3$, saame

$$\mathcal{L}_1 = \frac{x-1}{-1} \cdot \frac{x-2}{-2} \cdot \frac{x-3}{-3} = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{x}{1} \cdot \frac{x-2}{-1} \cdot \frac{x-3}{-2} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)x = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{x}{2} \cdot \frac{x-1}{1} \cdot \frac{x-3}{-1} = -\frac{1}{2}(x-1)(x-3)x = -\frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x)$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{x}{3} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{1} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)x = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

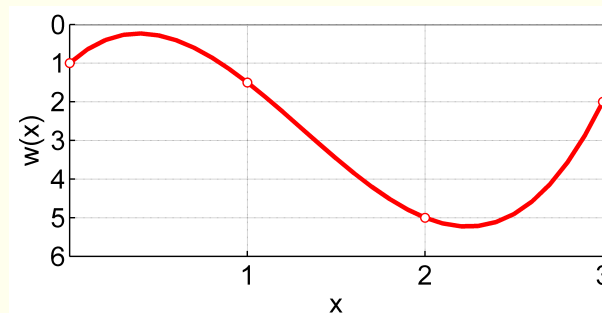
Nelja punkti läbivaks polünoomiks saame

$$w(x) = \mathcal{L}_1 w_1 + \mathcal{L}_2 w_2 + \mathcal{L}_3 w_3 + \mathcal{L}_4 w_4 = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \cdot 1 + \\ + \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot 1,5 - \frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x) \cdot 5 + \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot 2$$

millest

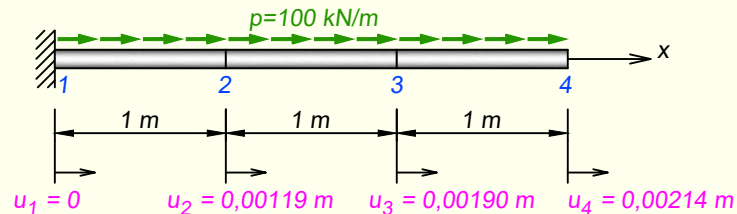
$$w(x) = -\frac{19}{12}x^3 + \frac{25}{4}x^2 - \frac{25}{6}x + 1$$

Funktsiooni $w(x)$ graafik on näidatud joonisel 18.15.



Joonis 18.15. Funktsiooni graafik, mis läbib nelja etteantud punkti

NÄIDE 18.7. Joonisel 18.16 kujutatud pikisuunalise lauskoormusega konsoolisel vardal on teada sõlmpunktide 2, 3 ja 4 horisontaalsed siirded: $u_2 = 0,00119$ m, $u_3 = 0,00190$ m ja $u_4 = 0,00214$ m. Tuletada Lagrange'i interpolatsiooni abil $u(x)$ avaldis, mis kirjeldab siiret selle varda suvalises lõikes. Leida horisontaalne siire varda keskmises lõikes, kus $x = 1,5$ m.



Joonis 18.16. Arvutusskeem ja sõlmpunktide siirded

LAHENDUS

1. Siirde $u(x)$ avaldise tuletamine

Lähteülesandest on meil teada arvutusskeemi sõlmpunktide siirded. Nüüd on vaja tuletada avaldis, millega saame neid teadaolevaid siirdeid interpoleerida üle kogu varda. Siin ei saa kasutada sõlmpunktide vahel lineaarset interpolatsiooni, kuna vardas esinev pikijõud ei ole konstantne: varda vaba otsa juurest vasakule liikudes pikijõud järjest suureneb, mistõttu ei ole sõlmpunktide vahelised siirded enam lineaarses seoses.

Siirde $u(x)$ avaldise tuletamiseks kasutame valemite (18.45), mis selle ülesande sõlmpunktide arvu korral on

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 \mathcal{L}_i(x) u_i = \{ \mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \mathcal{L}_3 \quad \mathcal{L}_4 \} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Interpolatsioonifunktsioonid kirjutame välja vastavalt valemile (18.46). Kuna sõlmpunkte on neli, siis ka interpolatsioonifunktsioone on neli. Nendest jääb järgi küll ainult kolm, kuna siire $u_1 = 0$. Igas interpolatsioonifunktsioonis olev murruliste liikmete arv on ühe võrra väiksem sõlmpunktide arvust, seega on neid liikmeid kolm.

Interpolatsioonifunktsioonide üldavaldised on

$$\mathcal{L}_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x - x_4}{x_2 - x_4} \qquad \mathcal{L}_3 = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x - x_4}{x_3 - x_4}$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{x - x_1}{x_4 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_4 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

mille kirjutame välja samade põhimõtete järgi nagu eelmises näites. Jätame siinkohal nende funktsioonide moodustamise kirjelduse teistkordselt esitamata.

Järgnevalt teisendame neid avaldise, arvestades lähteülesandest teadaolevaid sõlm-punktide koordinaate: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ m, $x_3 = 2$ m ja $x_4 = 3$ m

$$\mathcal{L}_2 = \frac{x}{1} \cdot \frac{x-2}{-1} \cdot \frac{x-3}{-2} = \frac{1}{2} (x-2)(x-3)x = \frac{1}{2} (x^3 - 5x^2 + 6x)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{x}{2} \cdot \frac{x-1}{1} \cdot \frac{x-3}{-1} = -\frac{1}{2} (x-1)(x-3)x = -\frac{1}{2} (x^3 - 4x^2 + 3x)$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{x}{3} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{1} = \frac{1}{6} (x-1)(x-2)x = \frac{1}{6} (x^3 - 3x^2 + 2x)$$

Viimase sammuna tuletame $u(x)$ avaldise

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{L}_2 u_2 + \mathcal{L}_3 u_3 + \mathcal{L}_4 u_4 = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot 0,00119 - \frac{1}{2} (x^3 - 4x^2 + 3x) \cdot 0,00190 + \\ &+ \frac{1}{6} (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot 0,00214 \end{aligned}$$

mis annab meile

$$u(x) = 1,667 \cdot 10^{-6} x^3 - 2,450 \cdot 10^{-4} x^2 + 1,433 \cdot 10^{-3} x$$

2. Siirde arvutamine kohas $x = 1,5$ m (variant 1)

Kui soovime arvutada siiret varda keskel kohas $x = 1,5$ m, siis kasutame saadud avaldist, kus x asendame tema väärtusega 1,5 m

$$u(1,5) = 1,667 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5^3 - 2,450 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5^2 + 1,433 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 = 0,00160 \text{ m}$$

3. Siirde arvutamine kohas $x = 1,5$ m (variant 2)

Kui meil on vaja leida siire ainult kohas $x = 1,5$ m, siis võime loobuda üldise $u(x)$ avaldise tuletamisest ja sel juhul kirjutame interpolatsioonifunktsioonid välja selle konkreetse löike x -koordinaati arvestades. Praegusel juhul $x = 1,5$ m.

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1,5}{1} \cdot \frac{1,5-2}{-1} \cdot \frac{1,5-3}{-2} = 0,5625; \quad \mathcal{L}_3 = \frac{1,5}{2} \cdot \frac{1,5-1}{1} \cdot \frac{1,5-3}{-1} = 0,5625$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1,5}{3} \cdot \frac{1,5-1}{2} \cdot \frac{1,5-2}{1} = -0,0625$$

Kirjutame välja siirde avaldise

$$\begin{aligned} u(1,5) &= \mathcal{L}_2 u_2 + \mathcal{L}_3 u_3 + \mathcal{L}_4 u_4 = \\ &= 0,5625 \cdot 0,00119 + 0,5625 \cdot 0,00190 - 0,0625 \cdot 0,00214 = 0,00160 \text{ m} \end{aligned}$$

18.3.3. Hermite'i interpolatsioon

Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid kahesõlmelisele elemendile

Lahendades tala paindeülesannet, peavad elemendi mõlemas sõlmes olema rahuldatud kaks rajatingimust: siire ja selle esimene tuletis ehk ristlõike pöördenurk. Lagrange'i interpolatsiooni aga ei saa kasutada, kui sõlmpunktides on ette antud lahend ja selle tuletis. Sellisel juhul kasutatakse interpoleerimiseks meetodit, mida nimetatakse *Hermite'i* interpolatsiooniks.

Hermite'i interpolatsioonifunktsioonide tuletamiseks vaatame kahesõlmelist elementi (joonis 18.17), mille mõlemas otsas esinevad siire ja pööre.

Kuna meil on neli sõlmtundmatut, kasutame kuuppolünoomi nelja konstandiga

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (18.52)$$

mille tuletis on

$$w'(x) = -a_1 - 2a_2x - 3a_3x^2 \quad (18.53)$$

Arvestades, et

$$\begin{aligned} \text{kohal } x=0: w_1 = a_0 \text{ ja } w'_1 = -a_1 \\ \text{kohal } x=l: w_2 = a_0 + a_1l + a_2l^2 + a_3l^3 \text{ ja } w'_2 = -a_1 - 2a_2l - 3a_3l^2 \end{aligned} \quad (18.54)$$

saame kahest esimesest avaldisest kordajad a_0 ja a_1 , kahe viimase lahendamisega leiame kordajad a_2 ja a_3 , mille väärtusteks saame

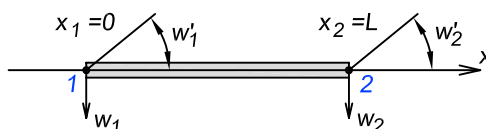
$$a_2 = -\frac{3w_1 - 3w_2 - 2lw'_1 - lw'_2}{l^2}; \quad a_3 = -\frac{-2w_1 + 2w_2 + lw'_1 + lw'_2}{l^3} \quad (18.55)$$

Ja interpolatsioonipolünoom saab kuju

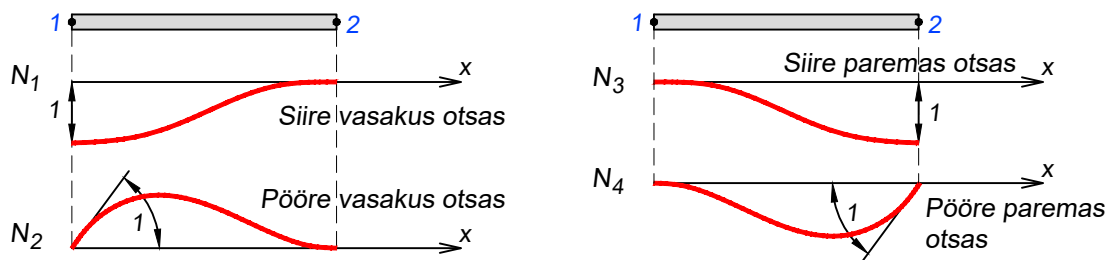
$$w(x) = w_1 - xw'_1 - \frac{x^2(3w_1 - 3w_2 - 2lw'_1 - lw'_2)}{l^2} - \frac{x^3(-2w_1 + 2w_2 + lw'_1 + lw'_2)}{l^3} \quad (18.56)$$

Grupeerides liikmed siirete ja nende tuletiste järgi ümber, saame polünoomi avaldada järgmiselt

$$w(x) = w_1 \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) + w'_1 \left(\frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} - x \right) + w_2 \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) + w'_2 \left(\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \right) \quad (18.57)$$



Joonis 18.17. Kahesõlmeline element sõlmpunktides antud siirde ja pöördega



Joonis 18.18. Hermite'i kujufunktsioonide graafikud

mis maatrikskujul väljendatuna on

$$w(x) = \{ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} \quad (18.58)$$

kus interpolatsioonifunktsioonid on

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}; \quad N_2 = \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} - x; \quad N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}; \quad N_4 = \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \quad (18.59)$$

Funktsioonid on näidatud joonisel 18.18, kus N_1 väljendab elemendi suvalise sisepunkti siirde sõltuvust elemendi vasaku otsa vertikaalsiirdest ning N_2 elemendi vasaku otsa pöördest. N_3 väljendab elemendi sisepunkti siirde sõltuvust parema otsa vertikaalsiirdest ja N_4 parema otsa pöördest.

Hermite'i interpolatsiooni üldvalem

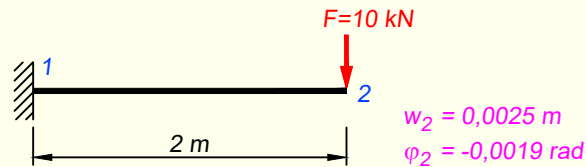
Kui on antud n punktis x_1, x_2, \dots, x_n funktsiooni väärtused w_i ja nende tuletised w'_i , saame leida $2n - 1$ astme polünoomi, mis läbib neid punkte ning järgib igas punktis etteantud kaldenurka, järgmise valemiga

$$w(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)u_i + \sum_{i=1}^n Q_i(x)u'_i = \{ P_1 \quad Q_1 \quad \dots \quad P_n \quad Q_n \} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ \vdots \\ w_n \\ w'_n \end{Bmatrix} \quad (18.60)$$

kus $P_i(x)$ ja $Q_i(x)$ on $2n - 1$ astme polünoomid, mis avaldatakse Lagrange'i interpolatsioonifunktsiooni abil

$$\begin{aligned} P_i(x) &= [1 - 2(x - x_i) \mathcal{L}'_i(x_i)] [\mathcal{L}_i(x)]^2 \\ Q_i(x) &= -(x - x_i) [\mathcal{L}_i(x)]^2 \end{aligned} \quad (18.61)$$

NÄIDE 18.8. Leida Hermite'i interpolatsiooni abil polünoom, mis kirjeldab joonisel 18.19 kujutatud konsooli läbipainet. Arvutus annab sõlmpunkti 2 siirdeks $w_2 = 0,0025$ m ja pöördeks $\varphi_2 = w_2' = -0,0019$ rad.



Joonis 18.19. Arvutusskeem ja sõlmpunkti 2 siirde

LAHENDUS

Siirde avaldise kirjutame vastavalt valemile (18.58), kuhu elemendi otste siirete kirjutamise järel saame

$$w(x) = \{ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0025 \\ -0,0019 \end{Bmatrix}$$

Kuna esimesed kaks siiret on nullid, siis võime piirduda ainult interpolatsioonifunktsioonide N_3 ja N_4 arvutamisega, mida teeme avaldistega (18.59)

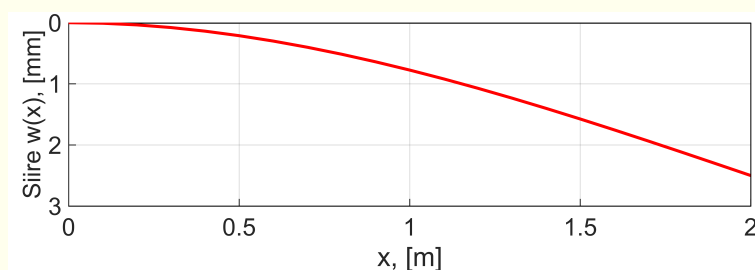
$$N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} = \frac{3x^2}{4} - \frac{2x^3}{8} = 0,75x^2 - 0,25x^3$$

$$N_4 = \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} = 0,5x^2 - 0,25x^3$$

Siirde interpolatsioonipolünoomiks kujuneb

$$\begin{aligned} w(x) &= N_3 w_2 + N_4 \varphi_2 = (0,75x^2 - 0,25x^3) \cdot 0,0025 + (0,5x^2 - 0,25x^3) \cdot (-0,0019) = \\ &= 0,001875x^2 - 0,000625x^3 - 0,00095x^2 + 0,000475x^3 = \\ &= -0,00015x^3 + 0,000925x^2 \end{aligned}$$

Konsooli läbipainde graafik on esitatud joonisel 18.20.



Joonis 18.20. Konsooli läbipainet kujutav graafik

NÄIDE 18.9. Leida Hermite'i interpolatsiooni üldvalemit kasutades funktsioon, mis läbib järgnevas tabelis antud punkte, arvestades ka antud kallet nendes punktides.

Tabel 18.2. Punktide andmed

| Punkt | x_i | w_i | w'_i |
|-------|-------|-------|--------|
| 1 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 5 | 4 |

LAHENDUS

Arvutame antud punktidele Lagrange'i interpolatsioonifunktsioonide väärtused

$$\mathcal{L}_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 1}{-1} = 1 - x; \quad \mathcal{L}_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x}{1} = x$$

Lagrange'i interpolatsioonifunktsioonide tuletised

$$\mathcal{L}'_1 = -1; \quad \mathcal{L}'_2 = 1$$

Tuletised etteantud punktides

$$\mathcal{L}'_1(0) = -1; \quad \mathcal{L}'_2(1) = 1$$

Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid vastavalt avaldistele (18.61)

$$P_1 = [1 - 2(x - 0)(-1)](1 - x)^2 = (1 + 2x)(1 - 2x + x^2) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$P_2 = [1 - 2(x - 1) \cdot 1]x^2 = (1 - 2x + 2)x^2 = -2x^3 + 3x^2$$

$$Q_1 = (x - 0)(1 - x)^2 = x(1 - 2x + x^2) = x^3 - 2x^2 + x$$

$$Q_2 = -(x - 1)x^2 = -x^3 + x^2$$

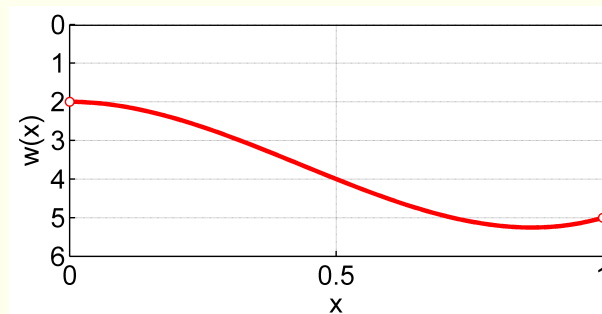
Funktsiooni leiame avaldisega (18.60)

$$w(x) = \left\{ \begin{array}{cccc} 2x^3 - 3x^2 + 1 & -2x^3 + 3x^2 & x^3 - 2x^2 + x & -x^3 + x^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{array} \right\} =$$

$$= (2x^3 - 3x^2 + 1) \cdot 2 + (-2x^3 + 3x^2) \cdot 0 + (x^3 - 2x^2 + x) \cdot 5 + (-x^3 + x^2) \cdot 4 =$$

$$= -10x^3 + 13x^2 + 2$$

Funktsioon on esitatud joonisel 18.21. Punktis 1 (kohal $x = 0$) on funktsiooni kalle 0 ja punktis 2 (kohal $x = 1$) on kalle 4.



Joonis 18.21. Funktsioon, mis läbib kahte etteantud punkti vajaliku kaldega

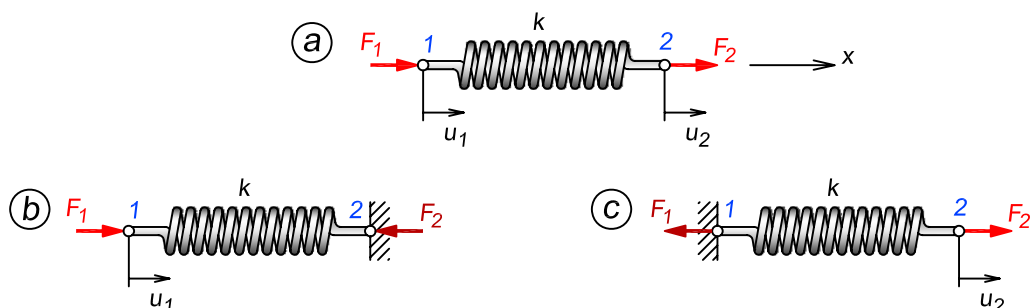
18.4. Jäikusmaatriksi mõiste. Vedruelemendi jäikusmaatriks

18.4.1. Jäikusmaatriksi definitsioon

Elemendi jäikusmaatriks \mathbf{K} on maatriks, mis avaldises $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{d}$ seob omavahel sõlmpunktide siirded \mathbf{d} ja koormused \mathbf{F} . Kui arvutuskeem koosneb rohkem kui ühest elemendist, siis seob arvutuskeemi jäikusmaatriks omavahel kogu arvutuskeemi sõlmpunktide siirded ja koormused.

18.4.2. Elastse vedru jäikusmaatriks

Jäikusmaatriksi moodustamist vaatame elastse vedru (joonis 18.22, a) näitel, mis võtab vastu ainult oma telje suunalist tõmbejõudu. Vedru jäikuse tähiseks võtame k . Vedru otspunktideks on sõlmed 1 ja 2, kus esinevad vastavalt siirded u_1 ja u_2 . Lõplike elementide meetodis märgitakse tundmatud siirded telje positiivses suunas, mistõttu siin on mõlemad siirded suunaga



Joonis 18.22. Elastne vedru

vasakult paremale. Vedru otstesse rakendame jõud F_1 ja F_2 , mis peavad samuti olema mõlemad telje positiivses suunas.

Kinnitame vedru sõlmpunktis 2 (joonis 18.22, b). Sellisel juhul siire $u_2 = 0$ ning tekkinud toereaktsioon F_2 on vastupidine vedru vasakusse otsa rakendatud jõuga F_1 . Hooke'i seaduse ja vedru tasakaalu alusel saame seosed

$$\begin{aligned} F_1 &= ku_1 \\ F_2 &= -F_1 = -ku_1 \end{aligned} \quad (18.62)$$

Parema mõistmise huvides võiks jõu, jäikuse ja siirde vahelise seose välja kirjutada ka kujul $u = F/k$. Ehk mida suurem on vedru jäikus, seda väiksem on tema otsa siire koormuse mõjul.

Kinnitame vedru sõlmpunktis 1 (joonis 18.22, c). Nüüd $u_1 = 0$ ning Hooke'i seaduse ja vedru tasakaalu alusel saame seosed

$$\begin{aligned} F_2 &= ku_2 \\ F_1 &= -F_2 = -ku_2 \end{aligned} \quad (18.63)$$

Kasutades superpositsiooniprintsiipi, saab need kaks valemigrupi ühendada võrrandisüsteemiks

$$\begin{aligned} F_1 &= ku_1 - ku_2 \\ F_2 &= -ku_1 + ku_2 \end{aligned} \quad (18.64)$$

Kirjutades saadud võrrandisüsteemi maatrikskujul, saame

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (18.65)$$

ehk

$$\mathbf{F} = \mathbf{Kd} \quad (18.66)$$

kus

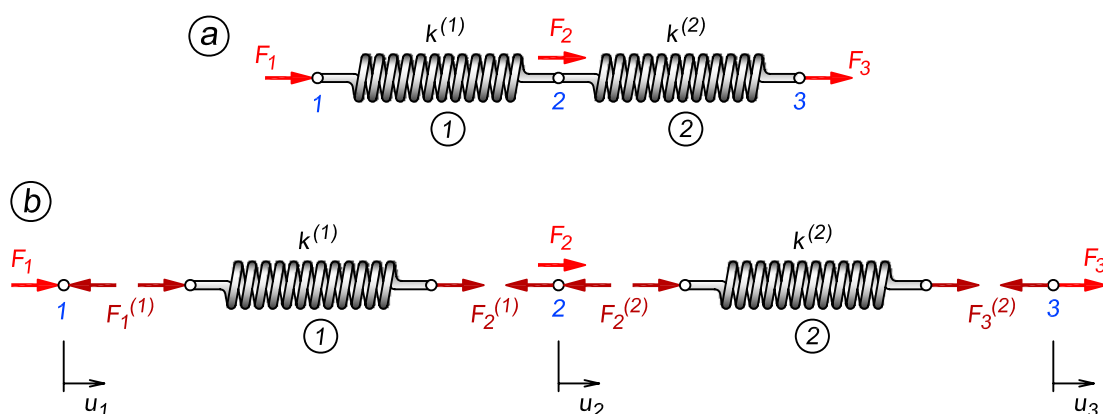
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (18.67)$$

on vedru jäikusmaatriks, \mathbf{d} on siirete vektor ja \mathbf{F} on koormusvektor.

18.4.3. Konstruktsiooni jäikusmaatriksi moodustamine

Vaatleme kahest vedrust 1 ja 2 koosnevat süsteemi, mis on sõlmpunktides 1, 2 ja 3 koormatud kolme jõuga F_1 , F_2 ja F_3 (joonis 18.23).

Kasutame siin ja edaspidi tähistusviisi, kus mingi sümboli järel olev alaindeks tähistab sõlme numbrit ja sulgudes ülaindeks elemendi numbrit. Joonistel on elementide numbrid ümbritsetud ringiga.



Joonis 18.23. Vedrusüsteem

Kirjutame sõlmpunktide kohta tasakaalutingimused

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_1^{(1)} \\
 F_2 &= F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\
 F_3 &= F_3^{(2)}
 \end{aligned}
 \tag{18.68}$$

Mõlema vedru kohta saame välja kirjutada tasakaaluvõrrandid

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}
 \tag{18.69}$$

$$\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}
 \tag{18.70}$$

kus avaldiste vasakul pool olevat maatriksit nimetatakse vedru jäikusmaatriksiks.

Konstruksiooni jäikusmaatriksi moodustamiseks tuleb vaadata, milliste siiretega kumbki vedru seotud on. Element 1 on seotud teljesuunaliste siiretega u_1 ja u_2 , element 2 on seotud teljesuunaliste siiretega u_2 ja u_3 . Seetõttu ei saa elementide jäikusmaatrikseid lihtsalt kokku liita, vaid tuleb neid laiendada konstruktsiooni jäikusmaatriksi suuruseni. Laiendamiseks me lisame elemendi jäikusmaatriksisse null-read ja -veerud nende siirete kohta, millega see element ei ole seotud.

Elemendi 1 jäikusmaatriksisse lisame nullid kolmandasse ritta ja kolmandasse veergu, kuna see element ei ole seotud kolmanda siirdega.

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \end{Bmatrix}
 \tag{18.71}$$

Elemendi 2 jäikusmaatriksisse lisame nullid esimesse ritta ja esimesse veergu, kuna see element ei ole seotud esimese siirdega.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (18.72)$$

Summeerides saadud tulemused, kirjutame välja võrrandisüsteemi kogu konstruktsiooni lahendamiseks

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (18.73)$$

kus siirete vektoris on ära jäetud astendajas olevad vedrude numbrid, kuna $u_1 = u_1^{(1)}$, $u_2 = u_2^{(1)} = u_2^{(2)}$ ja $u_3 = u_3^{(2)}$. Koormusvektor on saadud vastavalt avaldistele (18.68), kuna $F_3^{(1)} = 0$ ja $F_1^{(2)} = 0$.

Kirjutades avaldise (18.73) maatrikskujul, jõuame eestpoolt tuttava valemmini $\mathbf{F} = \mathbf{Kd}$, kus \mathbf{K} on nüüd konstruktsiooni jäikusmaatriks, \mathbf{d} on siirete vektor ja \mathbf{F} on koormusvektor.

Praktilisel lahendamisel ei ole suuremate arvutusskeemide puhul mõistlik hakata iga elemendi jäikusmaatriksit laiendama konstruktsiooni jäikusmaatriksi suuruseni ja võrrandisüsteemi saab moodustada ka vähem töömahukat meetodit kasutades. Selleks tähistatakse elemendi jäikusmaatriksi read ja veerud siiretega, millega see element seotud on. Esimene rida ja veerg tähistatakse elemendi alguspunkti siirdega ja teine rida ning veerg elemendi lõpppunkti siirdega.

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \end{matrix} \quad (18.74)$$

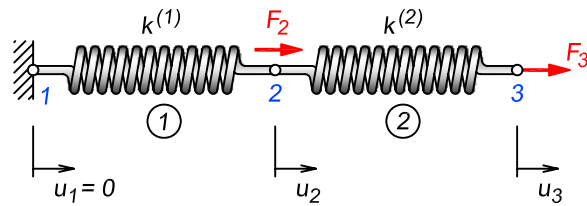
Konstruktsiooni jäikusmaatriksi read ja veerud tähistatakse samuti kõigi esinevate siiretega ja edasi on juba lihtne vastavalt rea- ja veerutähistele tõsta arvud elementide jäikusmaatriksitest konstruktsiooni jäikusmaatriksisse.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} \quad (18.75)$$

18.4.4. Rajatingimused

Võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (18.76)$$



Joonis 18.24. Kahest vedrust koosnev süsteem

lahendamiseks on esmalt vaja ette anda rajatingimused. Nende puudumine tähendab, et süsteemil puuduvad kinnitused, mistõttu ta saab vabalt liikuda ega võta vastu mingisuguseid koormuseid.

Rajatingimusi on kahte liiki. Ühte liiki rajatingimused esinevad kohtades, kus liikumine on täielikult takistatud. Neid nimetatakse homogeenseteks rajatingimusteks. Teisteks rajatingimusteks on lahendamisel etteantud siirded, mis võivad kujutada näiteks arvutusskeemi tugede vajumisi. Selliseid rajatingimusi nimetatakse mittehogeenseteks.

Kinnitame vedrusüsteemi sõlmpunktis 1 (joonis 18.24), kus selle tulemusena siire võrdub nulliga: $u_1 = 0$. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (18.77)$$

kus tundmatuteks on u_2 , u_3 ning F_1 . F_1 on sõlmpunktis 1 tekkiv toereaktsioon. F_2 ja F_3 on arvutusskeemile rakendatavad teadaolevad koormused.

Tundmatute siirete u_2 ja u_3 leidmiseks eemaldame võrrandisüsteemist teadaolevale siirdele $u_1 = 0$ vastava osa ehk esimese rea ja jäikusmaatriksist ka esimese veeru ning lahendame saadud võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (18.78)$$

Toereaktsiooni F_1 saame arvutada pärast tundmatute u_2 ja u_3 leidmist, asetades need esimesse võrrandisse

$$F_1 = \begin{Bmatrix} -k^{(1)} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (18.79)$$

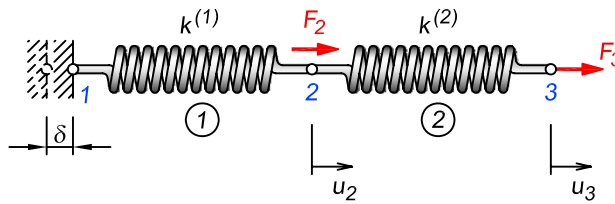
ehk

$$F_1 = -k^{(1)} \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 \quad (18.80)$$

Esimese võrrandi esimese liikme võib ära jätta, kuna u_1 on võrdne nulliga.

Nullist erinevate siirete arvestamine

Vahel võivad teadaolevad siirded olla ka nullist erinevad, näiteks juhul kui mõni tugi nihkub koormamisel mingi pikkuse võrra.



Joonis 18.25. Nullist erineva rajatingimuse kasutamine

Joonisel 18.25 esitatud arvutusskeemil siirdub koormamisel vasak sõlm 1 teadaoleva väärtuse δ võrra paremale. Nüüd saame avaldise (18.76) kirjutada välja järgnevalt

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (18.81)$$

Selleks, et paremini mõista võrrandisüsteemi teisendamist, kirjutame selle välja koolimatemaatikast tuttavaj kujul

$$\begin{aligned} k^{(1)}\delta - k^{(1)}u_2 + 0u_3 &= F_1 \\ -k^{(1)}\delta + (k^{(1)} + k^{(2)})u_2 - k^{(2)}u_3 &= F_2 \\ 0\delta - k^{(2)}u_2 + k^{(2)}u_3 &= F_3 \end{aligned} \quad (18.82)$$

Kuna tundmatud on siirded u_2 ja u_3 , siis kasutame edasi teist ja kolmandat võrrandit. δ on teadaolev väärtus, mistõttu viime seda sisaldava liikme paremale poole võrdusmärki ja saame

$$\begin{aligned} (k^{(1)} + k^{(2)})u_2 - k^{(2)}u_3 &= F_2 + k^{(1)}\delta \\ -k^{(2)}u_2 + k^{(2)}u_3 &= F_3 \end{aligned} \quad (18.83)$$

Kirjutame tuletatud võrrandisüsteemi välja maatrikskujul

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 + k^{(1)}\delta \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (18.84)$$

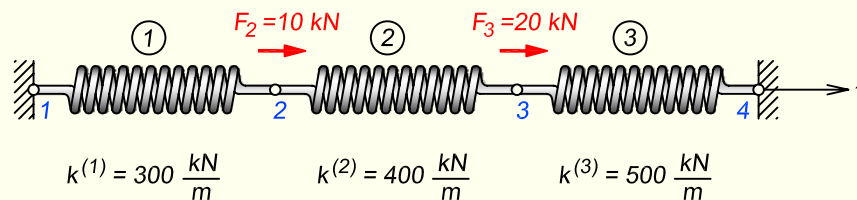
Võrrandisüsteemi lahendamisega leiame tundmatute siirete väärtused. Toereaktsiooni F_1 saame algse võrrandisüsteemi esimesest võrrandist

$$F_1 = \begin{Bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (18.85)$$

ehk

$$F_1 = k^{(1)}\delta - k^{(1)}u_2 \quad (18.86)$$

NÄIDE 18.10. Leida joonisel 18.26 kujutatud vedrusüsteemi sõlmpunktide 2 ja 3 siirete, toereaktsioonide, ning vedrude sisejõudude väärtused. Vedrusüsteem on sõlmpunktides 2 ja 3 koormatud jõududega $F_2 = 10 \text{ kN}$ ja $F_3 = 20 \text{ kN}$. Vedrude jäikused k on näidatud joonisel.



Joonis 18.26. Vedrusüsteemi arvutuskeem

LAHENDUS

Ülesande lahendamist alustame igale üksikule elemendile jäikusmaatriksi koostamisega vastavalt valemile (18.67). Jäikusmaatriksite read ja veerud tähistame siiretega, mis vastava elemendi otses esinevad.

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 300 & -300 \\ -300 & 300 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ 400 & -400 \\ -400 & 400 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} u_3 & u_4 \\ 500 & -500 \\ -500 & 500 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

Moodustame elementide jäikusmaatriksitest konstruktsiooni jäikusmaatriksi, nagu on kirjeldatud avaldistega (18.74) ja (18.75). Selleks tõstame elementide jäikusmaatriksitest arvud vastavalt rea- ja veerutähisele konstruktsiooni jäikusmaatriksisse

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 300 & -300 & 0 & 0 \\ -300 & 300+400 & -400 & 0 \\ 0 & -400 & 400+500 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

Kirjutame välja tasakaaluvõrrandite süsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$\begin{bmatrix} 300 & -300 & 0 & 0 \\ -300 & 700 & -400 & 0 \\ 0 & -400 & 900 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 = 10 \\ F_3 = 20 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

kus teadaolevad siirded u_1 ja u_4 märgime nulliks ning koormusvektorisse kirjutame sõlmpunktidesse 2 ja 3 rakendatud koormused. Mõlemad koormused on siin positiivsed, kuna nad on suunatud x -telje positiivses suunas.

Võrrandisüsteemi lahendamiseks eraldame sellest tundmatutele siiretele u_2 ja u_3 vastava osa ehk siirete ja koormusvektorist teise ja kolmanda rea ning jäikusmaatriksist teise ja kolmanda rea ning veeru. Saame

$$\begin{bmatrix} 700 & -400 \\ -400 & 900 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel leiame tundmatute siirete väärtusteks

$$u_2 = 0,03617 \text{ m}; \quad u_3 = 0,03830 \text{ m}$$

Kirjutades leitud siirded võrrandisüsteemi, saame järgnevalt arvutada toereaktsioonid. Võrrandisüsteem võtab kuju

$$\begin{bmatrix} 300 & -300 & 0 & 0 \\ -300 & 700 & -400 & 0 \\ 0 & -400 & 900 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,03617 \\ 0,03830 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 10 \\ 20 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

Toereaktsioonid F_1 ja F_4 leiame esimesest ja viimasest võrrandist. Kuna siirded u_1 ja u_4 on nullid, siis jäävad mõlemasse võrrandisse alles jäikusmaatriksi kaks keskmist veergu ja reaktsioonide arvutamise avaldiseks saame

$$\begin{bmatrix} -300 & 0 \\ 0 & -500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,03617 \\ 0,03830 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

millest

$$F_1 = -300 \cdot 0,03617 + 0 = -10,85 \text{ kN}$$

$$F_4 = 0 - 500 \cdot 0,03830 = -19,15 \text{ kN}$$

Mõlemad tulemused on negatiivsed ja seega on toereaktsioonid x -telje negatiivses suunas.

Toereaktsioonide ja arvutuskeemile rakendatud koormuste summa horisontaalteljele peab andma nulli

$$\sum X = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -10,85 + 10 + 20 - 19,15 = 0$$

Üksikute vedrude sisejõud leiame avaldise $\mathbf{F} = \mathbf{Kd}$ abil. Iga vedru puhul kasutame tema jäikusmaatriksit ning vedru alg- ja lõpp-punkti siirdeid.

Esimese vedru pikijõu arvutame avaldisega

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & -300 \\ -300 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,03617 \end{Bmatrix}$$

millest

$$F_1^{(1)} = -10,85 \text{ kN}; \quad F_2^{(1)} = 10,85 \text{ kN}$$

Jooniselt 18.27, a näeme, et vedru sisejõud vastab vedrusüsteemi vasakpoolsele toe-reaktsioonile F_1 .

Teise vedru pikijõud

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & -400 \\ -400 & 400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,03617 \\ 0,03830 \end{Bmatrix}$$

millest

$$F_2^{(2)} = -0,85 \text{ kN}; \quad F_3^{(2)} = 0,85 \text{ kN}$$

Kontrollime sõlme 2 tasakaalu (joonis 18.27, d). Kuna sõlmes liituvad vedrud on tõmmatud, siis märgime joonisele mõlemad jõud suunaga sõlmest eemale. Lisaks raken-dame sinna väliskoormuse. Jõudude summa x -teljele tuleb null ja sõlm on tasakaalus.

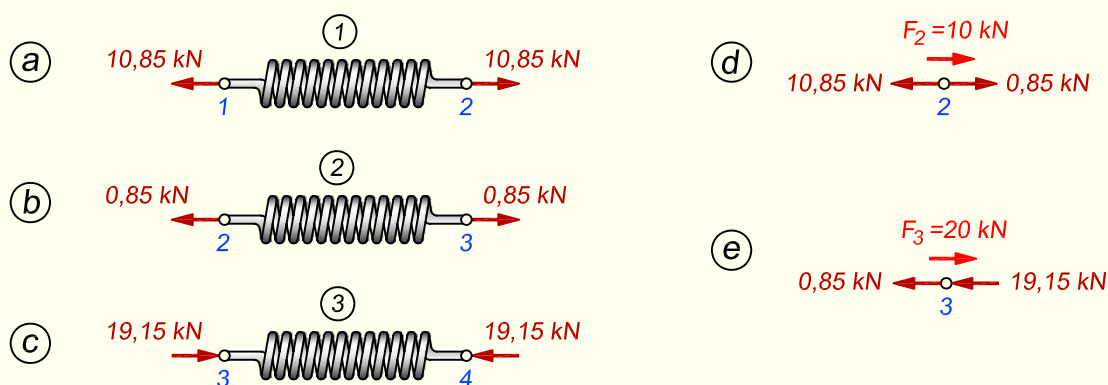
Kolmanda vedru pikijõud

$$\begin{Bmatrix} F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & -500 \\ -500 & 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,03830 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

millest

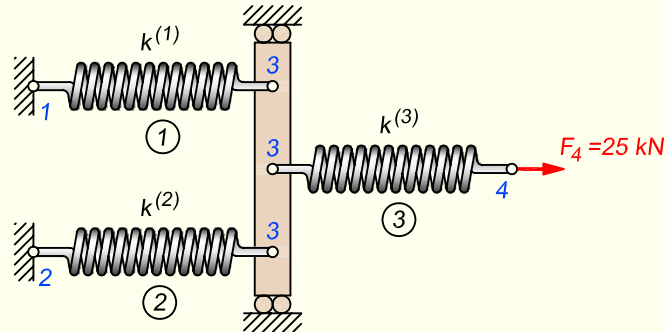
$$F_3^{(3)} = 19,15 \text{ kN}; \quad F_4^{(3)} = -19,15 \text{ kN}$$

Jooniselt 18.27, c näeme, et vedru sisejõud vastab vedrusüsteemi parempoolsele toe-reaktsioonile F_4 . Kontrollime ka sõlme 3 tasakaalu (joonis 18.27, e). Kuna sõlmes liitu-vad vedrud 2 ja 3, millest esimene on tõmmatud ja teine surutud, siis märgime joonisele jõud suunaga vastavalt sõlmest eemale ja sõlme poole. Lisame sinna ka väliskoormuse. Jõudude summa x -teljele tuleb null.



Joonis 18.27. Vedrude ja sõlmede tasakaal

NÄIDE 18.11. Koostada võrrandisüsteem joonisel 18.28 kujutatud vedrusüsteemi sõlmpunktide siirete arvutamiseks. Vedrude jäikused k on näidatud joonisel. Arvutuskeemi keskel olev vertikaalne osa saab horizontaalsuunas nihkuda, aga ei saa pöörduda.



Joonis 18.28. Vedrusüsteemi arvutuskeem

LAHENDUS

Kuna skeemi keskel olev vertikaalne osa pöörduda ei saa, siis järelikult selle külge kinnitatud vedrude otste siirded on võrdsed ja võime need tähistada sama sõlmenumbriga. Samas ei tohi me esimese ega teise elemendi vasakpoolses otsas olevaid sõlmpunkte tähistada sama numbriga, kuna vedrude erineva jäikuse korral tekivad seal erinevad toe-reaktsioonid ja seetõttu on meil vaja ka kahte sõlme.

Kirjutame välja elementide jäikusmaatriksid

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_3 \end{matrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} u_3 & u_4 \\ k^{(3)} & -k^{(3)} \\ -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

Moodustame võrrandisüsteemi

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ k^{(1)} & 0 & -k^{(1)} & 0 \\ 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(1)} & -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = 0 \\ F_4 = 25 \end{Bmatrix}$$

18.4.5. Vedru jäikusmaatriksi tuletamine Rayleigh-Ritzi meetodiga

Tuletades vedru jäikusmaatriksit Rayleigh-Ritzi meetodiga, kasutame variatsioonarvutust ja leiame elemendi jäikusmaatriksi potentsiaalenergia funktsiooni miinimumi tingimusest.

Meenutame varasemast, et vastavalt sellele tingimusele realiseerub kõigist kinemaatiliselt võimalikest siiretest selline siire, mille puhul konstruktsiooni (ehk praegusel juhul vedru) potentsiaalenergia funktsioon saavutab minimaalse väärtuse.

Vedru sisejõud on elastne konservatiivne jõud, kuna selle suurus sõltub ainult vedru alg- ja lõppasendist ega sõltu siirdumise trajektooriga. Konservatiivsel mehaanilisel süsteemil on olemas potentsiaalenergia.

Vaatame joonisel 18.29, a kujutatud vedru. Rakendades vedru vabale otsale koormuse F , vedru pikeneb ja saab mingi siirde u (joonis 18.29, b).

Vedru deformatsioonienergia on

$$U = \frac{1}{2}ku^2 \quad (18.87)$$

Konstantne välisjõud F teeb vedru pikenemisel tööd

$$W_v = Fu \quad (18.88)$$

Väljavenitatud asendis on vedru deformatsioonienergia maksimaalne. Kui vedru ots vabastada koormusest, siis nihkub see tagasi algasendisse. Välisjõud F , mis takistab vedru kokkutõmbumist, teeb negatiivset tööd.

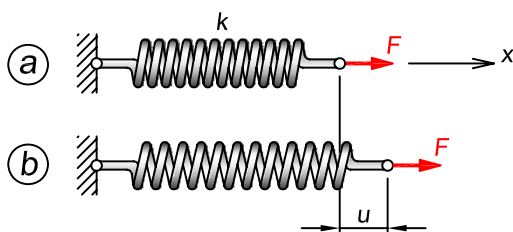
Elastse vedru potentsiaalenergia funktsioon (joonis 18.30) on

$$\Pi = \Pi_s + \Pi_v \quad (18.89)$$

kus Π_s on vedru sisejõudude potentsiaalenergia ja Π_v on välisjõudude potentsiaalenergia. Kuna $\Pi_s = U$ ja $\Pi_v = -W_v$, siis saame kirjutada

$$\Pi = U - W_v = \frac{1}{2}ku^2 - Fu \quad (18.90)$$

Järgnevalt lähtume potentsiaalenergia funktsiooni miinimumi tingimusest. Selle kohaselt vedrule koormuse rakendamisel saab vedru vaba ots siirde, mis vastab joonisel 18.30 kujutatud potentsiaalenergia funktsiooni graafiku minimaalsele väärtusele. Kuna mainitud punktis



Joonis 18.29. Vedru deformeerumine

on graafiku puutuja horisontaalne, siis peab seal funktsiooni tuletis võrduma nulliga. Seetõttu võtame potentsiaalenergia funktsioonist tuletise ja võrdsustame selle nulliga

$$\frac{d\Pi}{du} = ku_0 - F = 0 \quad (18.91)$$

kus u_0 vastab siirdele tasakaaluasendis ja võrdub

$$u_0 = \frac{F}{k} \quad (18.92)$$

Siiani vaatlesime vedru, millel saab siirduda ainult üks otsasõlm ja seetõttu on tegemist ühe vabadusastmega süsteemiga. Mitme vabadusastmega süsteemide puhul tuleb potentsiaalenergia funktsiooni minimeerimiseks kasutada variatsioonarvutust, kus me leiame funktsiooni Π esimese variatsiooni ja võrdsustame selle nulliga

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial u_2}\delta u_2 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial u_n}\delta u_n = 0 \quad (18.93)$$

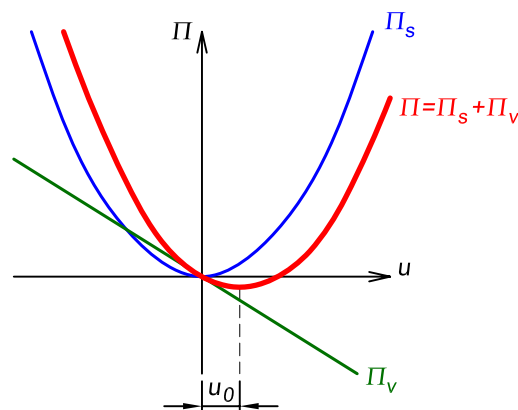
Kuna tingimus (18.93) peab olema täidetud iga δu_i väärtuse puhul, siis peavad kõik avaldise kordajad võrduma nulliga

$$\frac{\partial\Pi}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial\Pi}{\partial u_2} = 0; \quad \frac{\partial\Pi}{\partial u_n} = 0 \quad (18.94)$$

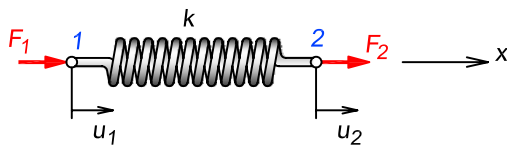
Tuletame nüüd vedruelemendi võrrandisüsteemi ja sealhulgas jäikusmaatriksi, kasutades selleks potentsiaalenergia funktsiooni miinimumi tingimust. Vaatame joonist 18.31, kus mõlemad vedru otsad saavad siirduda.

Kasutades valemit (18.90), saame vedru potentsiaalenergiaks

$$\Pi = \frac{1}{2}k(u_2 - u_1)^2 - F_1u_1 - F_2u_2 \quad (18.95)$$



Joonis 18.30. Sisejõudude, välisjõudude ja kogu potentsiaalenergia funktsioon



Joonis 18.31. Elastne vedru

kus $u_2 - u_1$ on vedru deformeerumine. Lihtsustame leitud potentsiaalenergia avaldist

$$\Pi = \frac{1}{2}k(u_2^2 - 2u_2u_1 + u_1^2) - F_1u_1 - F_2u_2 \quad (18.96)$$

Kuna siin saavad siirduda vedru mõlemad otsad, siis on tegemist kahe vabadusastmega süsteemiga ja potentsiaalenergia minimeerimiseks tuleb meil võtta avaldisest (18.96) osatuletised kummagi siirde järgi ning võrdsustada need nulliga

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= \frac{1}{2}k(-2u_2 + 2u_1) - F_1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &= \frac{1}{2}k(2u_2 - 2u_1) - F_2 = 0 \end{aligned} \quad (18.97)$$

Avaldiste (18.97) lihtsustamise tulemusel jõuame võrrandisüsteemini

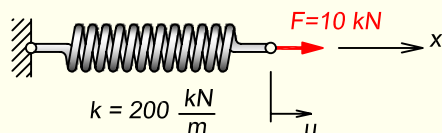
$$\begin{aligned} ku_1 - ku_2 &= F_1 \\ -ku_1 + ku_2 &= F_2 \end{aligned} \quad (18.98)$$

Kirjutades selle võrrandisüsteemi maatrikskujul, saame

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (18.99)$$

Jõudsime sama tulemuseni nagu peatükis 18.4.2.

NÄIDE 18.12. Arvutada joonisel 18.32 kujutatud vedru parempoolse otsa siire, kasutades selleks potentsiaalenergia miinimumi tingimust. Esitada ka potentsiaalenergia funktsiooni graafik. Vedru jäikus k on näidatud joonisel.



Joonis 18.32. Vedru arvutuskeem

LAHENDUS

Ülesande lahendamisel lähtume valemist (18.90)

$$\Pi = U - W_v = \frac{1}{2}ku^2 - Fu$$

Kuna siin on tegemist ühe vabadusastmega süsteemiga, siis võtame potentsiaalenergia funktsioonist tuletise ja võrdsustame selle nulliga

$$\frac{d\Pi}{du} = ku - F = 200 \cdot u - 10 = 0$$

millest

$$u = \frac{10}{200} = 0,05 \text{ m}$$

Järelikult pikeneb vedru ülesandes antud koormuse mõjul 5 cm.

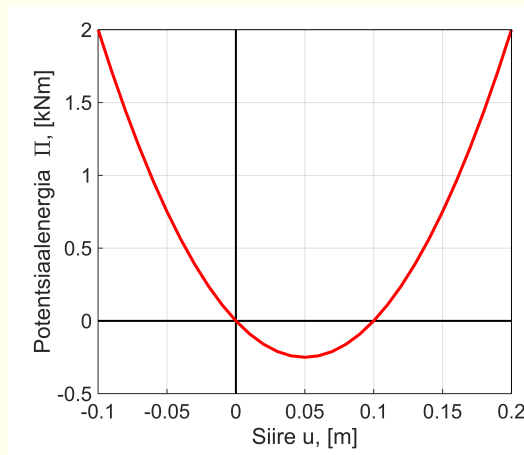
Kasutades arvatud siiret ning lähteandmeid, saame leida, milline potentsiaalenergia vastab tasakaaluasendile vedru deformeerunud olukorras

$$\Pi = \frac{1}{2}ku^2 - Fu = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0,05^2 - 10 \cdot 0,05 = -0,25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Viimasena leiame avaldise, mis kirjeldab potentsiaalenergia funktsiooni graafikut

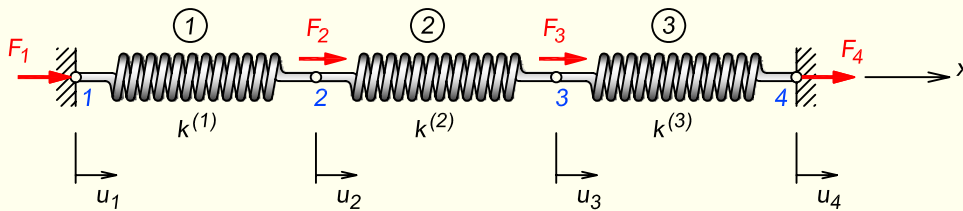
$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot u^2 - 10 \cdot u$$

Graafik on esitatud joonisel 18.33, kus näeme, et funktsiooni miinum tõepoolest vastab siirdele $u = 5 \text{ cm}$.



Joonis 18.33. Potentsiaalenergia graafik

NÄIDE 18.13. Koostada joonisel 18.34 kujutatud vedruskeemile võrrandisüsteem, kasutades selleks variatsiooniprintsiipi.



Joonis 18.34. Vedrusüsteemi arvutuskeem

LAHENDUS

Ülesande lahendamisel lähtume valemist (18.90)

$$\Pi = U - W_v = \frac{1}{2}ku^2 - Fu$$

mille abil saame kirjutada

$$\begin{aligned} \Pi &= U - W_v = \\ &= \frac{1}{2}k^{(1)}(u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2}k^{(2)}(u_3 - u_2)^2 + \frac{1}{2}k^{(3)}(u_4 - u_3)^2 - F_1u_1 - F_2u_2 - F_3u_3 - F_4u_4 \end{aligned}$$

Kuna vaadeldav arvutuskeem kujutab endast mitme vabadusastmega süsteemi, siis peame potentsiaalenergia minimeerimiseks võtma saadud avaldisest osatuletised u_1 , u_2 , u_3 ja u_4 järgi ning võrdsustama tulemused vastavalt valemitele (18.94) nulliga

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = -k^{(1)}(u_2 - u_1) - F_1 = k^{(1)}u_1 - k^{(1)}u_2 - F_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = k^{(1)}(u_2 - u_1) - k^{(2)}(u_3 - u_2) - F_2 = -k^{(1)}u_1 + k^{(1)}u_2 + k^{(2)}u_2 - k^{(2)}u_3 - F_2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = k^{(2)}(u_3 - u_2) - k^{(3)}(u_4 - u_3) - F_3 = -k^{(2)}u_2 + k^{(2)}u_3 + k^{(3)}u_3 - k^{(3)}u_4 - F_3 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = k^{(3)}(u_4 - u_3) - F_4 = -k^{(3)}u_3 + k^{(3)}u_4 - F_4 = 0$$

Need avaldised saame kirjutada võrrandisüsteemina

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

18.5. Sõrestikuelement

18.5.1. Elemendi jäikusmaatriks

Siin vaatleme sõrestiku vardale jäikusmaatriksi moodustamist varda kohalikus koordinaatteljestikus (\hat{x}, \hat{z}).

Kinnitame varda sõlmpunktis 2 (joonis 18.35, a). Sellisel juhul siire $\hat{u}_2 = 0$ ja saame seosed

$$\hat{F}_1 = \frac{EA}{l}\hat{u}_1; \quad \hat{F}_2 = -\hat{F}_1 = -\frac{EA}{l}\hat{u}_1 \quad (18.100)$$

\hat{F}_2 on negatiivne, kuna varda tasakaalu tõttu peab ta olema jõuga \hat{F}_1 võrdne, aga vastassuunaline ning praegu seetõttu \hat{x} -telje negatiivses suunas.

Kinnitame varda sõlmpunktis 1 joonis 18.35, b. Nüüd $\hat{u}_1 = 0$ ning saame seosed

$$\hat{F}_2 = \frac{EA}{l}\hat{u}_2; \quad \hat{F}_1 = -\hat{F}_2 = -\frac{EA}{l}\hat{u}_2 \quad (18.101)$$

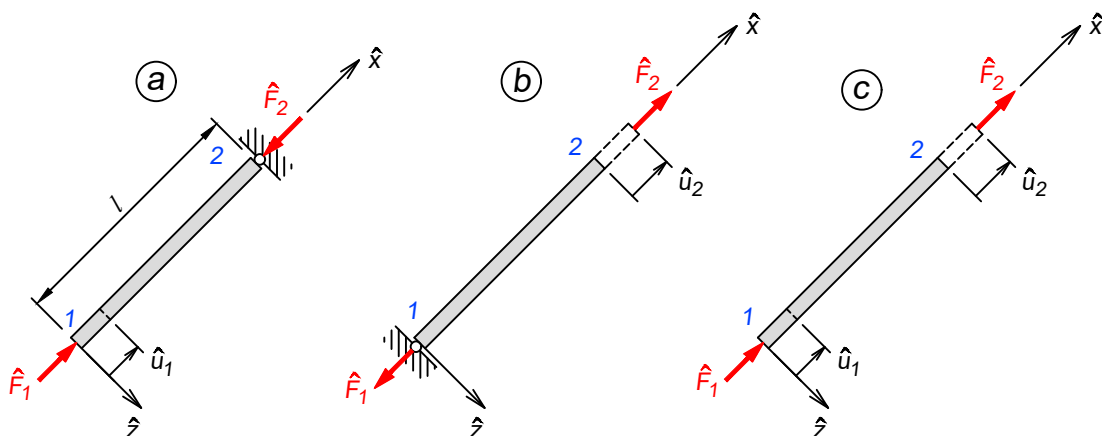
Nüüd on \hat{F}_1 negatiivne, kuna ta on \hat{x} -telje negatiivses suunas.

Kasutades superpositsiooniprintsiipi, ühendame need kaks valemigrupi

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 &= \frac{EA}{l}\hat{u}_1 - \frac{EA}{l}\hat{u}_2 \\ \hat{F}_2 &= -\frac{EA}{l}\hat{u}_1 + \frac{EA}{l}\hat{u}_2 \end{aligned} \quad (18.102)$$

ehk maatrikskujul esitatuna

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (18.103)$$



Joonis 18.35. Skeemid sõrestikuelemendi jäikusmaatriksi tuletamiseks

või

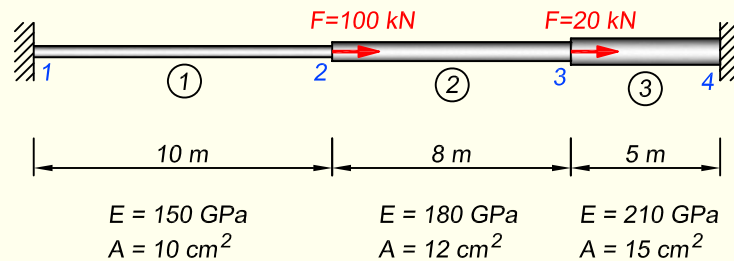
$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} \quad (18.104)$$

kus

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18.105)$$

on elemendi jäikusmaatriks varda kohalikus teljestikus, $\hat{\mathbf{d}}$ on siirete vektor varda kohalikus teljestikus ja $\hat{\mathbf{F}}$ on koormusvektor varda kohalikus teljestikus.

NÄIDE 18.14. Leida joonisel 18.36 kujutatud astmelise varda sõlmpunktide 2 ja 3 horisontaalsiire, toereaktsioonid ning pikijõud vardas. Arvutuskeem on sõlmpunktides 2 ja 3 koormatud varda teljesuunaliste koormustega. Varda üksikute osade parameetrid on näidatud joonisel.

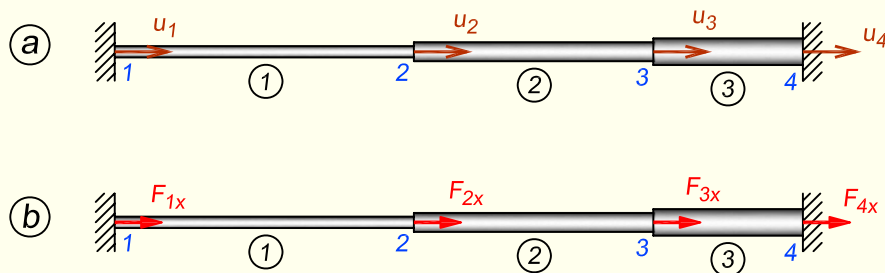


Joonis 18.36. Astmelise varda arvutuskeem

LAHENDUS

Kuna vaadeldavas arvutuskeemis esinevad ainult pikijõud, siis saame kasutada sõrestikuelemendi jäikusmaatriksit. Kõik siirded toimuvad varda telje suunas ja see võimaldab meil kasutada kohalikes koordinaatides antud jäikusmaatriksit.

Siirete ja koormusvektori moodustamisel saame piirduda x -telje suunaliste komponentidega. Siirded on näidatud joonisel 18.37, *a* ja koormusvektori komponendid joonisel 18.37, *b*.



Joonis 18.37. Siirete ja koormusvektor

Kirjutame välja siirete ja koormusvektori

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} = 100 \\ F_{3x} = 20 \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

Elementide jäikusmaatriksid koostame valemiga 18.105. Kuna varraste parameetrid on erinevad, siis ei saa EA/l sulgude ette tuua, vaid peame kasutama valemit kujul

$$\mathbf{K}^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

Arvutame vajalikud väärtused jäikusmaatriksite koostamiseks

$$\frac{E_1 A_1}{l_1} = \frac{150 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{10 \text{ m}} = 15000 \text{ kN/m}$$

$$\frac{E_2 A_2}{l_2} = 27000 \text{ kN/m}; \quad \frac{E_3 A_3}{l_3} = 63000 \text{ kN/m}$$

Kirjutame välja elementide jäikusmaatriksid. Read ja veerud tähistame elementide alguses ja lõpus esinevate siiretega. Valime kõigil elementidel alguseks varda vasakpoolse ja lõpuks varda parempoolse otsa.

$$\mathbf{K}^{(1)} = 10^3 \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = 10^3 \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ 27 & -27 \\ -27 & 27 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = 10^3 \begin{bmatrix} u_3 & u_4 \\ 63 & -63 \\ -63 & 63 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

Moodustame elementide jäikusmaatriksitest konstruktsiooni jäikusmaatriksi. Selleks tõstame elementide jäikusmaatriksitest arvud vastavalt rea- ja veerutähisele konstruktsiooni jäikusmaatriksisse.

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 15 & -15 & 0 & 0 \\ -15 & 15+27 & -27 & 0 \\ 0 & -27 & 27+63 & -63 \\ 0 & 0 & -63 & 63 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

Kirjutame välja tasakaaluvõrrandite süsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$10^3 \begin{bmatrix} 15 & -15 & 0 & 0 \\ -15 & 42 & -27 & 0 \\ 0 & -27 & 90 & -63 \\ 0 & 0 & -63 & 63 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} = 100 \\ F_{3x} = 20 \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

Vastavalt teadaolevatele siiretele $u_1 = u_4 = 0$ eemaldame võrrandisüsteemist esimese ja neljanda rea ning jäikusmaatriksist ka esimese ja neljanda veeru. Alles jääv osa annab meile võrrandisüsteemi lõplikul kujul

$$10^3 \begin{bmatrix} 42 & -27 \\ -27 & 90 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel leiame tundmatute siirete väärtusteks

$$u_2 = 0,003127 \text{ m}; \quad u_3 = 0,001160 \text{ m}$$

Sõlm 2 nihkub paremale 3,1 mm ja sõlm 3 nihkub samuti paremale 1,2 mm.

Toereaktsioonide leidmiseks kasutame võrrandisüsteemi esimest ja viimast võrrandit ning leitud siirdeid. Kuna siirded u_1 ja u_4 on nullid, siis jätame nimetatud võrranditest välja esimese ja neljanda liikme ning saame

$$10^3 \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -63 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,003127 \\ 0,001160 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

millest toereaktsioonid on

$$F_{1x} = 10^3 \begin{Bmatrix} -15 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,003127 \\ 0,001160 \end{Bmatrix} = -15000 \cdot 0,003127 + 0 = -46,9 \text{ kN}$$

$$F_{4x} = 10^3 \begin{Bmatrix} 0 & -63 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,003127 \\ 0,001160 \end{Bmatrix} = 0 - 63000 \cdot 0,001160 = -73,1 \text{ kN}$$

Toereaktsioonide ja arvutusskeemile rakendatud koormuste summa horisontaalteljele peab andma nulli

$$\sum X = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = -46,9 + 100 + 20 - 73,1 = 0$$

Üksikute elementide sisejõud leiame avaldise $\mathbf{F} = \mathbf{Kd}$ abil. Iga elemendi puhul kasutame tema jäikusmaatriksit ning varda alg- ja lõpp-punkti siirdeid. Kuna pikijõu märgi saame õigesti varda lõpus, siis võime kasutada jäikusmaatriksi viimast rida.

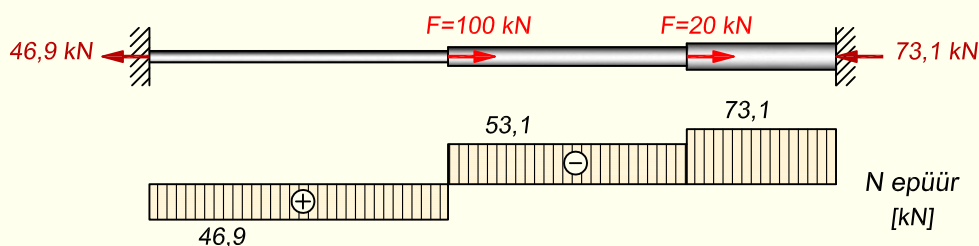
$$N^{(1)} = 10^3 \begin{Bmatrix} -15 & 15 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,003127 \end{Bmatrix} = 0 + 15000 \cdot 0,003127 = 46,9 \text{ kN}$$

$$N^{(2)} = 10^3 \begin{Bmatrix} -27 & 27 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,003127 \\ 0,001160 \end{Bmatrix} = -27000 \cdot 0,003127 + 27000 \cdot 0,001160 = -53,1 \text{ kN}$$

$$N^{(3)} = 10^3 \begin{Bmatrix} -63 & 63 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,001160 \\ 0 \end{Bmatrix} = -63000 \cdot 0,001160 + 0 = -73,1 \text{ kN}$$

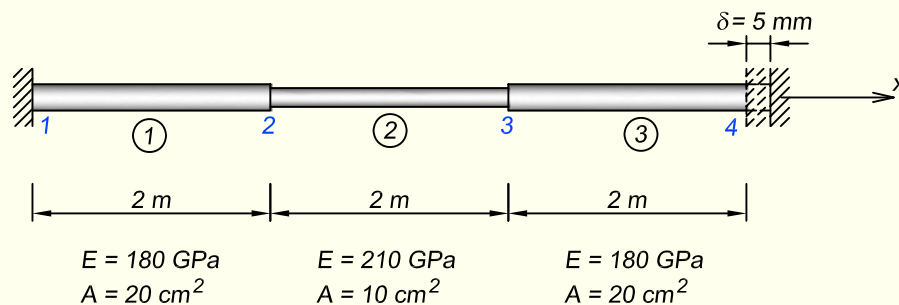
Pikijõu epüür on esitatud joonisel **18.38**.

Kuna esimese ja teise elemendi liitumiskohas sõlmpunktis 2 on rakendatud koormus 100 kN, siis peab nende kahe elemendi pikijõudude erinevus olema sellega võrdne. Nii me arvutusest ka saime. Teise ja kolmanda elemendi pikijõud peavad teineteisest erinema sõlmpunktis 3 paikneva 20 kN võrra, mille me samuti arvutusest saime. Esimese elemendi pikijõud on arvuliselt võrdne vasakpoolse toereaktsiooniga ja kolmanda elemendi pikijõud parempoolse toereaktsiooniga.



Joonis 18.38. Toereaktsioonid ja pikijõu epüür

NÄIDE 18.15. Leida joonisel 18.39 kujutatud astmelise varda sõlmpunktide 2 ja 3 siirded ning varda pikijõud, kui on teada, et varda parempoolne tugi siirdub x -telje positiivses suunas 5 mm.



Joonis 18.39. Astmelise varda arvutuskeem

LAHENDUS

Arvutame vajalikud väärtused jäikusmaatriksite koostamiseks

$$\frac{E_1 A_1}{l_1} = \frac{E_3 A_3}{l_3} = 180000 \text{ kN/m}; \quad \frac{E_2 A_2}{l_2} = 105000 \text{ kN/m}$$

Kirjutame välja elementide jäikusmaatriksid

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}^{(3)} = 10^3 \begin{bmatrix} 180 & -180 \\ -180 & 180 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}^{(2)} = 10^3 \begin{bmatrix} 105 & -105 \\ -105 & 105 \end{bmatrix}$$

Moodustame elementide jäikusmaatriksitest konstruktsiooni jäikusmaatriksi

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 180 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & 285 & -105 & 0 \\ 0 & -105 & 285 & -180 \\ 0 & 0 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

Kirjutame välja tasakaaluvõrrandite süsteemi $\mathbf{Kd}=\mathbf{F}$

$$10^3 \begin{bmatrix} 180 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & 285 & -105 & 0 \\ 0 & -105 & 285 & -180 \\ 0 & 0 & -180 & 180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ \delta = 0,005 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} = 0 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

Kasutame tundmatutele siiretele vastavaid võrrandeid, millest $u_1 = 0$ tõttu eemaldame esimese veeru. Alles jääb osa, mis eelmises avaldises on näidatud hallika taustaga.

$$10^3 \begin{bmatrix} 285 & -105 & 0 \\ -105 & 285 & -180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \delta = 0,005 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Arvestades, et $-180 \cdot 10^3$ on $\delta = 0,005$ kordaja, teeme ära nimetatud korrutamise ja viime saadud tulemuse vabaliikmena teisele poole võrdusmärki. Võrrandisüsteem lõplikul kujul on

$$10^3 \begin{bmatrix} 285 & -105 \\ -105 & 285 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 900 \end{Bmatrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel leiame tundmatute siirete väärtusteks

$$u_2 = 0,00135 \text{ m}; \quad u_3 = 0,00365 \text{ m}$$

Toereaktsioonide leidmiseks kasutame võrrandisüsteemi esimest ja viimast võrrandit ning leitud siirdeid. Kuna siire u_1 on võrdne nulliga, siis jätame nimetatud võrranditest välja esimese liikme ning saame

$$10^3 \begin{bmatrix} -180 & 0 & 0 \\ 0 & -180 & 180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,00135 \\ 0,00365 \\ 0,005 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

millest toereaktsioonid on

$$F_{1x} = 10^3 \{ -180 \ 0 \ 0 \} \begin{Bmatrix} 0,00135 \\ 0,00365 \\ 0,005 \end{Bmatrix} = -243 \text{ kN}$$

$$F_{4x} = 10^3 \{ 0 \ -180 \ 180 \} \begin{Bmatrix} 0,00135 \\ 0,00365 \\ 0,005 \end{Bmatrix} = 243 \text{ kN}$$

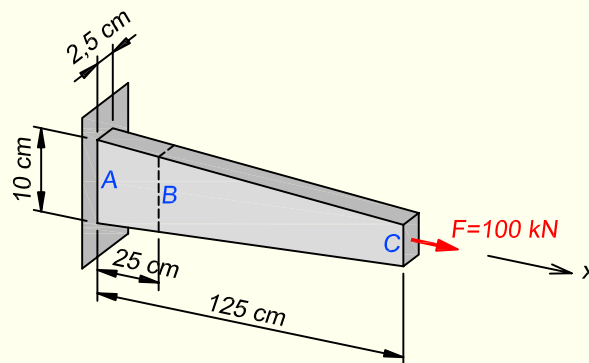
Kuna arvutuskeemi vahepealsetes sõlmedes koormuseid ei ole, peab pikijõud kogu varda ulatuses olema konstantne ning võrduma seega toereaktsioonidega.

NÄIDE 18.16. Joonisel 18.40 on kujutatud ristkülikulise ristlõikega ja otsast ahenev varras, mis on pikitelje suunas koormatud tõmbejõuga 100 kN. Materjali elastsusmoodul $E = 70$ GPa. Ristlõike kõrgus muutub varra pikkuse suunas järgmise avaldise kohaselt: $h(x) = 10 - 0,04x$. Leida pinge varra vasakpoolsest otsast 25 cm kaugusel paiknevas ristlõikes, siire varra otsas ning deformatsioonienergia igas elemendis, kasutades lähendamisel kahte arvutusmudelit.

Arvutusmudel 1: kaks konstantse ristlõikega elementi AB ja BC .

Arvutusmudel 2: konstantse ristlõikega element AB ja kaks konstantse ristlõike ja võrdse pikkusega elementi, mis saadakse piirkonna BC jagamisel pooleks.

Vaadeldava näite originaal pärineb raamatust [34].

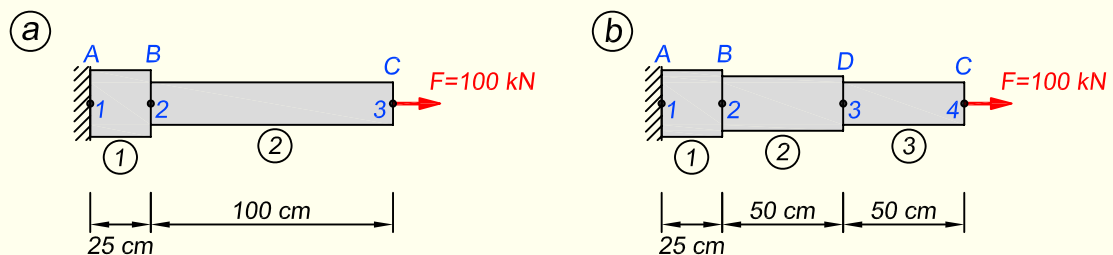


Joonis 18.40. Muutuva ristlõikega konsool

LAHENDUS

Joonisel 18.41 on näidatud mõlemad arvutusmudelit. Kummaski mudelis leiame ristlõigete pindalad iga elemendi keskkohas. Ristlõiked muutuvad varra pikkuse suunas järgmise seosega

$$A(x) = 2,5 \cdot h(x) = 2,5(10 - 0,04x) = 25 - 0,1x$$



Joonis 18.41. Konsooli arvutusmudelit

Arvutusmudel 1

Kirjutame välja siirete ja koormusvektori

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} = 0 \\ F_{3x} = 100 \end{Bmatrix}$$

Joonisel 18.41, a näidatud arvutusskeemi elementide ristlõigete pindalad elementide keskkohas on

$$A^{(1)} = A(12,5) = 25 - 0,1 \cdot 12,5 = 23,75 \text{ cm}^2$$

$$A^{(2)} = A(75) = 25 - 0,1 \cdot 75 = 17,5 \text{ cm}^2$$

Arvutame vajalikud väärtused jäikusmaatriksite koostamiseks

$$\frac{E_1 A_1}{l_1} = \frac{70 \cdot 2375}{0,25} = 665000 \text{ kN/m}; \quad \frac{E_2 A_2}{l_2} = \frac{70 \cdot 1750}{1,0} = 122500 \text{ kN/m}$$

Kirjutame välja elementide jäikusmaatriksid

$$\mathbf{K}^{(1)} = 10^3 \begin{bmatrix} 665 & -665 \\ -665 & 665 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = 10^3 \begin{bmatrix} 122,5 & -122,5 \\ -122,5 & 122,5 \end{bmatrix}$$

Moodustame elementide jäikusmaatriksitest konstruktsiooni jäikusmaatriksi

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 665 & -665 & 0 \\ -665 & 787,5 & -122,5 \\ 0 & -122,5 & 122,5 \end{bmatrix}$$

Kirjutame välja tasakaaluvõrrandite süsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$10^3 \begin{bmatrix} 665 & -665 & 0 \\ -665 & 787,5 & -122,5 \\ 0 & -122,5 & 122,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} = 0 \\ F_{3x} = 100 \end{Bmatrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamiseks tuleb meil eemaldada teadaolevale siirdele $u_1 = 0$ vastav esimene rida ja veerg

$$10^3 \begin{bmatrix} 787,5 & -122,5 \\ -122,5 & 122,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel leiame tundmatute siirete väärtusteks

$$u_2 = 0,0001504 \text{ m} = 0,1504 \text{ mm}$$

$$u_3 = 0,0009667 \text{ m} = 0,9667 \text{ mm}$$

Normaalpinge arvutamiseks mingis punktis kasutame avaldist

$$\sigma_x^{(n)} = E^{(n)} \epsilon_x^{(n)} = E^{(n)} \sum_{i=1}^j u_i^{(n)} \frac{d\mathcal{L}_i}{dx}$$

Normaalpinge punktis B elemendis 1

$$\begin{aligned} \sigma_B^{(1)} &= E \left[u_1^{(1)} \frac{d\mathcal{L}_1}{dx} + u_2^{(1)} \frac{d\mathcal{L}_2}{dx} \right]_{x=25} = E \left[u_1 \left(\frac{1}{-l_1} \right) + u_2 \left(\frac{1}{l_1} \right) \right] = \\ &= 70000 \cdot \frac{0,1504}{250} = 42,11 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Normaalpinge punktis B elemendis 2

$$\begin{aligned} \sigma_B^{(2)} &= E \left[u_1^{(2)} \frac{d\mathcal{L}_1}{dx} + u_2^{(2)} \frac{d\mathcal{L}_2}{dx} \right]_{x=25} = E \left[u_2 \left(\frac{1}{-l_2} \right) + u_3 \left(\frac{1}{l_2} \right) \right] = \\ &= 70000 \cdot \left(\frac{0,1504}{-1000} + \frac{0,9667}{1000} \right) = 57,14 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Pikijõud elementides saame leida valemiga

$$N^{(n)} = A^{(n)} \sigma_x^{(n)}$$

Pikijõududeks saame

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= A^{(1)} \sigma_B^{(1)} = 2375 \cdot 42,11 \cdot 10^{-3} = 100 \text{ kN} \\ N^{(2)} &= A^{(2)} \sigma_B^{(2)} = 1750 \cdot 57,14 \cdot 10^{-3} = 100 \text{ kN} \end{aligned}$$

Deformatsioonienergia saame arvutada igas elemendis valemiga

$$U^{(n)} = \frac{1}{2} (u_2^{(n)} - u_1^{(n)}) N^{(n)}$$

Deformatsioonienergia elementides

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \frac{1}{2} (u_2 - u_1) N^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot 0,1504 \cdot 100 = 7,5 \text{ J} \\ U^{(2)} &= \frac{1}{2} (u_3 - u_2) N^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot (0,9667 - 0,1504) \cdot 100 = 40,8 \text{ J} \end{aligned}$$

Arvutusmudel 2

Kirjutame välja siirete ja koormusvektori

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} = 0 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{4x} = 100 \end{Bmatrix}$$

Joonisel 18.41, b näidatud arvutusskeemi elementide ristlõigete pindalad elementide keskkohas on

$$A^{(1)} = A(12,5) = 23,75 \text{ cm}^2$$

$$A^{(2)} = A(50) = 25 - 0,1 \cdot 50 = 20 \text{ cm}^2$$

$$A^{(3)} = A(100) = 25 - 0,1 \cdot 100 = 15 \text{ cm}^2$$

Arvutame vajalikud väärtused jäikusmaatriksite koostamiseks

$$\frac{E_1 A_1}{l_1} = 665000 \text{ kN/m}; \quad \frac{E_2 A_2}{l_2} = \frac{70 \cdot 2000}{0,5} = 280000 \text{ kN/m}$$

$$\frac{E_3 A_3}{l_3} = \frac{70 \cdot 1500}{0,5} = 210000 \text{ kN/m}$$

Kirjutame välja elementide jäikusmaatriksid

$$\mathbf{K}^{(1)} = 10^3 \begin{bmatrix} 665 & -665 \\ -665 & 665 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = 10^3 \begin{bmatrix} 280 & -280 \\ -280 & 280 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = 10^3 \begin{bmatrix} 210 & -210 \\ -210 & 210 \end{bmatrix}$$

Moodustame elementide jäikusmaatriksitest konstruktsiooni jäikusmaatriksi

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 665 & -665 & 0 & 0 \\ -665 & 945 & -280 & 0 \\ 0 & -280 & 490 & -210 \\ 0 & 0 & -210 & 210 \end{bmatrix}$$

Kirjutame välja tasakaaluvõrrandite süsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$10^3 \begin{bmatrix} 665 & -665 & 0 & 0 \\ -665 & 945 & -280 & 0 \\ 0 & -280 & 490 & -210 \\ 0 & 0 & -210 & 210 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} = 0 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{4x} = 100 \end{Bmatrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamiseks tuleb meil eemaldada teadaolevale siirdele $u_1 = 0$ vastav esimene rida ja veerg

$$10^3 \begin{bmatrix} 945 & -280 & 0 \\ -280 & 490 & -210 \\ 0 & -210 & 210 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel leiame tundmatute siirete väärtusteks

$$u_2 = 0,0001504 \text{ m} = 0,1504 \text{ mm}$$

$$u_3 = 0,0005075 \text{ m} = 0,5075 \text{ mm}$$

$$u_4 = 0,0009837 \text{ m} = 0,9837 \text{ mm}$$

Normaalpinge punktis B elemendis 1 on sama nagu eelmise arvutusmudeli puhul, kuna sõlmpunkti 2 siire ei muutunud

$$\sigma_B^{(1)} = 42,11 \text{ MPa}$$

Normaalpinge punktis B elemendis 2

$$\begin{aligned}\sigma_B^{(2)} &= E \left[u_1^{(2)} \frac{d\mathcal{L}_1}{dx} + u_2^{(2)} \frac{d\mathcal{L}_2}{dx} \right]_{x=25} = E \left[u_2 \left(\frac{1}{-l_2} \right) + u_3 \left(\frac{1}{l_2} \right) \right] = \\ &= 70000 \cdot \left(\frac{0,1504}{-500} + \frac{0,5075}{500} \right) = 49,99 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Normaalpinge punktis D elemendis 3

$$\begin{aligned}\sigma_D^{(3)} &= E \left[u_1^{(3)} \frac{d\mathcal{L}_1}{dx} + u_2^{(3)} \frac{d\mathcal{L}_2}{dx} \right]_{x=25} = E \left[u_3 \left(\frac{1}{-l_3} \right) + u_4 \left(\frac{1}{l_3} \right) \right] = \\ &= 70000 \cdot \left(\frac{0,5075}{-500} + \frac{0,9837}{500} \right) = 66,67 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Pikijõududeks saame

$$N^{(2)} = A^{(2)} \sigma_B^{(2)} = 2000 \cdot 49,99 \cdot 10^{-3} = 100 \text{ kN}$$

$$N^{(3)} = A^{(3)} \sigma_D^{(3)} = 1500 \cdot 66,67 \cdot 10^{-3} = 100 \text{ kN}$$

Deformatsioonienergia elemendis 1 on sama nagu eelmise arvutusmudeli puhul

$$U^{(1)} = 7,5 \text{ J}$$

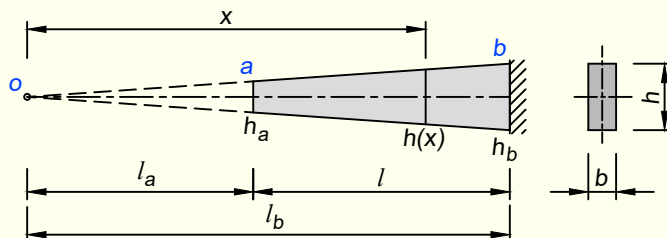
Deformatsioonienergia elementides 2 ja 3

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} (u_3 - u_2) N^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot (0,5075 - 0,1504) \cdot 100 = 17,9 \text{ J}$$

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} (u_4 - u_3) N^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot (0,9837 - 0,5075) \cdot 100 = 23,8 \text{ J}$$

Analüütiline arvutus

Analüütilise arvutuse jaoks kasutame joonist 18.42, mille abil tuletame avaldise muutuva ristlõikega varda otspunkti siirde arvutamiseks. Joonisel 18.42 on varras paigutatud nii, et kõiki kaugusi saaksime lugeda koordinaatide alguspunktiks valitud koonuse tipust x -telje positiivses suunas.



Joonis 18.42. Siirde valemi tuletamine

Jooniselt näeme, et

$$\frac{l_a}{l_b} = \frac{h_a}{h_b}; \quad \frac{h(x)}{h_a} = \frac{x}{l_a} \Rightarrow h(x) = \frac{h_a x}{l_a}$$

Ristlõike suurus muutub vastavalt avaldisele

$$A(x) = b \cdot h(x) = \frac{bh_a x}{l_a}$$

Varda otsa siire

$$u = \int \frac{N(x) dx}{EA(x)} = \int_{l_a}^{l_b} \frac{Fl_a dx}{Ebh_a x} = \frac{Fl_a}{Ebh_a} \int_{l_a}^{l_b} \frac{dx}{x} = \frac{Fl_a}{Ebh_a} \ln|x|_{l_a}^{l_b} = \frac{Fl_a}{Ebh_a} (\ln|l_b| - \ln|l_a|)$$

Ülesandes esitatud varda ristlõike C horisontaalsirdeks saame

$$u_C = \frac{100 \cdot 1250}{70 \cdot 25 \cdot 50} \cdot (\ln|2500| - \ln|1250|) = 0,99 \text{ mm}$$

Tabel 18.3. Mudelite ja analüütilise arvutuse tulemuste võrdlus

| | u_C [mm] | Pinged punktis B σ_B , [MPa] | | | Deformatsioonienergia U , [J] | | |
|--------------|---------------|---------------------------------------|---------|----------|---------------------------------|----------------|----------------|
| | | B vas | B par | Keskmine | Element 1 | Element 2 | Element 3 |
| Mudel 1 | 0,97 | 42,11 | 57,14 | 49,63 | 7,5 | 40,8 | - |
| Mudel 2 | 0,98 | 42,11 | 49,99 | 46,05 | 7,5 | 17,9 | 23,8 |
| Analüütiline | 0,99 | 44,44 | 44,44 | 44,44 | | | |

Analüüsime saadud tulemusi.

Mudeli 1 puhul on elemendi 2 deformatsioonienergia oluliselt suurem kui elemendil 1. Mida ühtlasemalt on deformatsioonienergia jaotunud üle elementide, seda paremad on arvutustulemused. Piirkondades, kus elementidel on kõrged deformatsioonienergia väärtused, tuleks võrk võtta tihedam, s.t elemendid väiksemad.

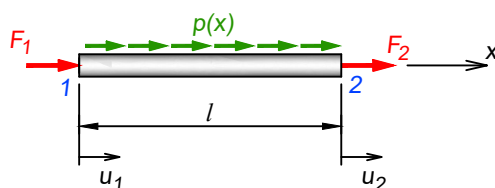
Siirded punktis C on kõigi lahenduskäikude puhul peaaegu võrdsed, analüütilise ehk täpse lahendusega sobib kokku paremini mudel 2.

Kui arvutada pinged punktis B , siis annab samuti parema tulemuse mudel 2. Analüütiline arvutus on tehtud tavapärase valemi järgi

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

18.5.2. Pikkele töötava elemendi jäikusmaatriksi tuletamine Galjorkini meetodi abil

Siin peatükis vaatame pikkele töötavat elementi, mis on koormatud lisaks otsasõlmedes paiknevatele sõlmkoormustele ka kogu elemendi ulatuses mõjuva pikisuunalise lauskoormusega (joonis 18.43). Lauskoormuse tõttu on tegemist natuke üldisema käsitlusviisiga, võrreldes tavalise sõrestikuelemendiga, millel lauskoormust ei ole. Selline lähenemine aga võrrandisüsteemis palju ei muuda. Muutub ainult koormuste osa, elemendi jäikusmaatriks tuleb ikkagi selline nagu sõrestikuelemendi puhul.



Joonis 18.43. Pikkele töötav element

Jäikusmaatriksi tuletamiseks kasutame nõrga formuleeringu avaldist (18.29)

$$F(x_0)g_i(x_0) + F(x_l)g_i(x_l) - \int_{x_0}^{x_l} \frac{dg_i}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_0}^{x_l} p(x)g_i(x)dx = 0 \quad (18.106)$$

kus siiret $u(x)$ aproksimeerime avaldisega

$$u(x) = \{ N_1 \quad N_2 \} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (18.107)$$

ning kaalufunktsiooni $g(x)$ avaldisega

$$g(x) = \{ a_1 \quad a_2 \} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \quad (18.108)$$

Kaalufunktsioonid elemendi alguses ja lõpus tähistame vastavalt $g(x_1)$ ja $g(x_2)$. Kaalufunktsioonid leiame lineaarse interpolatsiooni kujufunktsioonide väärtuste järgi elemendi alguses ja lõpus. Kujufunktsiooni N_1 väärtused on $N_1(x_1) = 1$ ja $N_1(x_2) = 0$. Kujufunktsiooni N_2 väärtused on $N_2(x_1) = 0$ ja $N_2(x_2) = 1$. Sellest lähtuvalt saame

$$g(x_1) = \{ a_1 \quad a_2 \} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = a_1; \quad g(x_2) = \{ a_1 \quad a_2 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = a_2 \quad (18.109)$$

Valemi (18.106) kaks esimest liiget väljendavad sõlmkoormuste osa, mille saame nüüd

$$F(x_0)g_i(x_0) + F(x_l)g_i(x_l) = F_1g(x_1) + F_2g(x_2) = F_1a_1 + F_2a_2 = \{ a_1 \quad a_2 \} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (18.110)$$

Asendame valemis (18.106) siirde $u(x)$, kaalufunktsiooni $g(x)$ ning nende tuletised

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \int_0^l \left\{ \begin{array}{c} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \end{array} \right\} EA \left\{ \begin{array}{c} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \end{array} \right\} dx \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} + \\ + \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \int_0^l p(x) \left\{ \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \end{array} \right\} dx = 0 \end{aligned} \quad (18.111)$$

Jagame avaldise (18.111) vektoriga $\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}$ ning teeme ära vektorite $\frac{dg}{dx}$ ja $\frac{du}{dx}$ omavalhelise korrutamise, misjärel saame tasakaaluvõrrandite süsteemi

$$\int_0^l p(x) \left\{ \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \end{array} \right\} dx + \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} \right\} = \int_0^l EA \left[\begin{array}{cc} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{array} \right] dx \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} \quad (18.112)$$

kus paremal pool võrdusmärgi paikneb elemendi jäikusmaatriks.

Jäikusmaatriksi saamiseks lõplikul kujul leiame esmalt lineaarsete kujufunktsioonide N_1 ja N_2 tuletised

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x_1-x_2} - \frac{x_2}{x_1-x_2} \right) = \frac{1}{x_1-x_2} \quad (18.113)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x_2-x_1} - \frac{x_1}{x_2-x_1} \right) = \frac{1}{x_2-x_1} = -\frac{1}{x_1-x_2} \quad (18.114)$$

ning seejärel teeme saadud tuletiste korrutiste integreerimised, millest esitame siin ainult jäikusmaatriksi esimese rea liikmete arvutused

$$\int_0^l EA \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = EA \int_0^l \frac{1}{x_1-x_2} \cdot \frac{1}{x_1-x_2} dx = EA \int_0^l \frac{dx}{(x_1-x_2)^2} = EA \int_0^l \frac{dx}{l^2} = EA \frac{1}{l} \quad (18.115)$$

$$\int_0^l EA \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = EA \int_0^l \frac{1}{x_1-x_2} \cdot \frac{-1}{x_1-x_2} dx = -EA \int_0^l \frac{dx}{(x_1-x_2)^2} = -EA \int_0^l \frac{dx}{l^2} = -EA \frac{1}{l} \quad (18.116)$$

Pärast saadud tulemuste asetamist avaldisse (18.112) jõuame pikkele töötavat elementi kirjeldava võrrandisüsteemini

$$\int_0^l p(x) \left\{ \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \end{array} \right\} dx + \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} \right\} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} \quad (18.117)$$

ehk

$$\mathbf{F} = \mathbf{Kd} \quad (18.118)$$

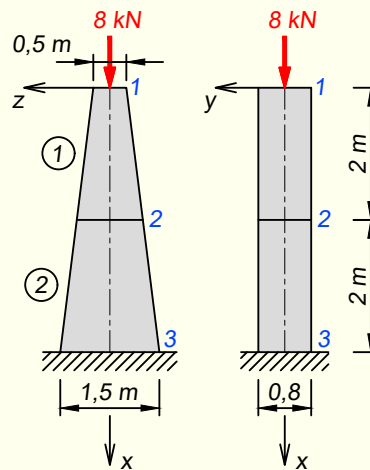
kus

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18.119)$$

on tavaline sõrestikuelemendi jäikusmaatriks, mille tuletasime eelnevalt ka peatükis 18.5.1.

Valemi (18.117) võrdusmärgist vasakule jäävate liikmete summa annab meile koormusvektori \mathbf{F} , kusjuures esimese liikme abil taandame elemendile mõjuva lauskoormuse eelnevalt sõlmedesse sõlmkoormusteks.

NÄIDE 18.17. Leida joonisel 18.44 kujutatud muutuva ristlõikega varda ülemise ja keskmise ristlõike vertikaalsiirdeid, arvestades nii posti ülemisse otsa rakendatud koormust kui ka posti omakaalu. Post on valmistatud betoonist, mille elastsusmoodul on $E = 29 \text{ GPa}$ ja tihedus on $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$.



Joonis 18.44. Arvutuskeem

LAHENDUS

1. Koormust ja posti ristlõiget kirjeldavad avaldised

Betooni omakaal läheb arvesse lauskoormusena, kuna see on jaotunud üle kogu konstruktsiooni. Omakaalukoormus $G(x)$ mingis lõikes x võrdub sellest lõikest ülespoole jääva betooni massiga. Seetõttu tuleb lõikest x ülespoole jääv posti ruumala korrutada betooni tihedusega

$$G(x) = 0,8 \cdot \frac{0,5 + (0,5 + 0,25x)}{2} \cdot x \cdot 25 = 10x + 2,5x^2 \text{ kN}$$

kus murruline osa kujutab posti trapetsikujulise külje pindala lõikest x ülalpool.

Lauskoormuse saame omakaalu avaldise diferentseerimisel

$$p(x) = \frac{dG}{dx} = \frac{d(10x + 2,5x^2)}{dx} = 5(2 + x) \text{ kN/m}$$

Posti ristlõike pindala allapoole liikudes suureneb ja seetõttu avaldame pindala seotuna x -koordinaadiga

$$A(x) = 0,8(0,5 + 0,25x) = 0,4 + 0,25x = \frac{1}{4}(1,6 + x) \text{ m}^2$$

Kuna ülesandes on küsitud siirdeid posti ülemises ja keskmises ristlõikes, siis jagame posti elementideks ja sõlmpunktideks, nii nagu on kujutatud joonisel 18.44.

2. Elemendi 1 võrrandid

Võrrandite koostamiseks kasutame valemit (18.117), aga arvestame ka sellega, et praegusel juhul posti ristlõike pindala muutub ja seetõttu tuleb seda integreerida üle elemendi pikkuse. Elementi 1 kirjeldavaks võrrandisüsteemiks saame

$$\int_0^2 p(x) \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} dx + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{E}{l} \int_0^2 A(x) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Saadud avaldise esimeses liikmes esinevad kujufunktsioonid on

$$N_1 = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-2}{0-2} = 1-0,5x; \quad N_2 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{2-0} = 0,5x$$

Asetades sõlmkoormused F_1 ja F_2 ning kujufunktsioonide, lauskoormuse $p(x)$ ja pindala $A(x)$ avaldised elemendi 1 võrrandisüsteemi, saame

$$5 \int_0^2 (2+x) \begin{Bmatrix} 1-0,5x \\ 0,5x \end{Bmatrix} dx + \begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{2 \cdot 4} \int_0^2 (1,6+x) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

kus lauskoormust sisaldava liikme integreerimised on

$$\int_0^2 (2+x)(1-0,5x) dx = \int_0^2 (2-0,5x^2) dx = \left(2x - 0,5 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 (2+x)0,5x dx = \int_0^2 (x+0,5x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 0,5 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{10}{3}$$

ning jäikusmaatriksis esinev integraal annab maatriksi ülemise vasakpoolse liikme jaoks

$$\int_0^2 1(1,6+x) dx = \left(1,6x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 5,2$$

Elemendi 1 võrranditeks saame nüüd

$$5 \begin{Bmatrix} 8/3 \\ 10/3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{2 \cdot 4} \begin{bmatrix} 5,2 & -5,2 \\ -5,2 & 5,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

3. Elemendi 2 võrrandid

Siin kirjutame elementi kirjeldava võrrandisüsteemi välja sarnaselt eelmisele elemendile

$$\int_2^4 p(x) \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} dx + \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{E}{l} \int_2^4 A(x) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Saadud avaldises esinevad kujufunktsioonid on

$$N_1 = \frac{x-x_3}{x_2-x_3} = \frac{x-4}{2-4} = 2-0,5x; \quad N_2 = \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{x-2}{4-2} = 0,5x-1$$

Asetame sõlmkoormused F_2 ja F_3 ning kujufunktsioonide, lauskoormuse $p(x)$ ja pindala $A(x)$ avaldised elemendi 2 võrrandisüsteemi, misjärel saame

$$5 \int_2^4 (2+x) \begin{Bmatrix} 2-0,5x \\ 0,5x-1 \end{Bmatrix} dx + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{2 \cdot 4} \int_2^4 (1,6+x) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

kus lauskoormust sisaldava liikme integreerimised on

$$\int_2^4 (2+x)(2-0,5x) dx = \int_2^4 (4+x-0,5x^2) dx = \left(4x + \frac{x^2}{2} - 0,5 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{14}{3}$$

$$\int_2^4 (2+x)(0,5x-1) dx = \int_2^4 (-2+0,5x^2) dx = \left(-2x + 0,5 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{16}{3}$$

ning jäikusmaatriksis esinev integraal annab maatriksi ülemise vasakpoolse liikme jaoks

$$\int_2^4 1(1,6+x) dx = \left(1,6x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^4 = 9,2$$

Elemendi 2 võrranditeks saame nüüd

$$5 \begin{Bmatrix} 14/3 \\ 16/3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{2 \cdot 4} \begin{bmatrix} 9,2 & -9,2 \\ -9,2 & 9,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

4. Võrrandisüsteem

Võrrandisüsteemi $\mathbf{F} = \mathbf{Kd}$ moodustame mõlema elemendi võrranditest. Kuna sõlm-punkte on kolm ja igas sõlmpunktis on üks siirde komponent, siis peab tekkiv konstruktsiooni jäikusmaatriks olema 3×3 maatriks. Koormusvektori \mathbf{F} moodustamiseks summeerime koondjõudude vektori ja lauskoormuse taandamisel sõlmpunktidesse tekkiva vektori.

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{Bmatrix} 21,3333 \\ 40 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{29 \cdot 10^6}{2 \cdot 4} \begin{bmatrix} 5,2 & -5,2 & 0 \\ -5,2 & 14,4 & -9,2 \\ 0 & -9,2 & 9,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

kus F_3 on toel tekkiv tundmatu toereaktsioon.

Võrrandisüsteemi lahendamiseks eraldame sellest tundmatutele siiretele vastava osa ehk kaks esimest võrrandit. Nullsiirde tõttu kaob mõlemast võrrandist ära viimane liige ja alles jäävad need liikmed, mis eelnevas avaldises on näidatud hallika taustaga.

$$\begin{Bmatrix} 21,3333 \\ 40 \end{Bmatrix} = \frac{29 \cdot 10^6}{8} \begin{bmatrix} 5,2 & -5,2 \\ -5,2 & 14,4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

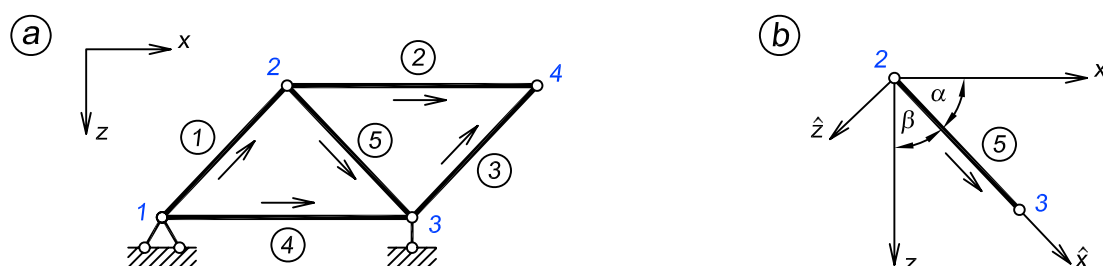
Lahendades võrrandisüsteemi, saame sõlmpunktide siirded

$$u_1 = 2,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}; \quad u_2 = 1,84 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

18.5.3. Kohalik ja üldteljestik

Lõplike elementide meetodiga lahendades kasutatakse kahte koordinaatsüsteemi. Ehituskonstruksioonile mõjuvaid koormuseid ja sõlmpunktide siirdeid kirjeldatakse konstruktsiooni *üldteljestiku* (x, z) abil. Siin kasutatakse ka mõistet *globaalne teljestik*. Igal vardal on oma teljestik, mis on seotud ainult ühe konkreetse vardaga. Seda nimetatakse *kohalikuks teljestikuks* (\hat{x}, \hat{z}), mille puhul sageli kasutatakse ka mõistet *lokaalne teljestik*. Kohaliku teljestiku \hat{x} -telg ühtib varda teljega (joonis 18.45).

Kui arvutuskeemil on vaja näidata ka varraste kohalikud teljestikud, siis piisab sellest, kui iga varda juurde märkida tema \hat{x} -telje positiivne suund, nagu on näidatud joonisel 18.45.



Joonis 18.45. Teljestikud

Üksikute elementide asendid üldteljestiku suhtes määratakse elementide suunakoosinuste abil

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x_{lõpus} - x_{alguses}}{l} \\ \cos \beta &= \frac{z_{lõpus} - z_{alguses}}{l} \end{aligned} \quad (18.120)$$

kus

$$l = \sqrt{(x_{lõpus} - x_{alguses})^2 + (z_{lõpus} - z_{alguses})^2} \quad (18.121)$$

on elemendi pikkus. Lühendamise huvides kasutame edaspidi valemite tähiseid

$$c = \cos \alpha; \quad s = \cos \beta \quad (18.122)$$

Edaspidi kasutame tähistust, kus sümbol $\hat{\quad}$ mingi maatriksi tähise kohal näitab, et see on kirjutatud kohalikes koordinaatides (näiteks $\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{d}}$) ja maatriksi tähis ilma selle sümbolita näitab, et see on kirjutatud üldkoordinaatides (näiteks $\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{d}$).

18.5.4. Siirete teisendusmaatriks

Siirete teisendamine üldteljestikust kohalikkude teljestikku

Vaadeldes varrast üldkoordinaatides, saame anda kummalegi varda otsale kaks üldtelgedesuunalist siiret: horisontaalse ja vertikaalse. Järgnevalt vaatame neid kõiki nelja situatsiooni eraldi ja avaldame kõigil juhtudel varda kohalike telgede suunalised siirde komponendid.

Kinnitame varda parempoolse otsa ja anname varda vasakpoolsele otsale horisontaalse siirde (joonis 18.46, a). Sõlmpunktis 1 saame varda kohalike telgede suunalisteks siirde komponentideks

$$\hat{u}_1 = u_1 \cos \alpha; \quad \hat{w}_1 = -u_1 \cos \beta \quad (18.123)$$

Järgnevalt anname varda vasakpoolsele otsale vertikaalsuunalise siirde (joonis 18.46, b). Sõlmpunktis 1 saame varda kohalike telgede suunalisteks siirde komponentideks

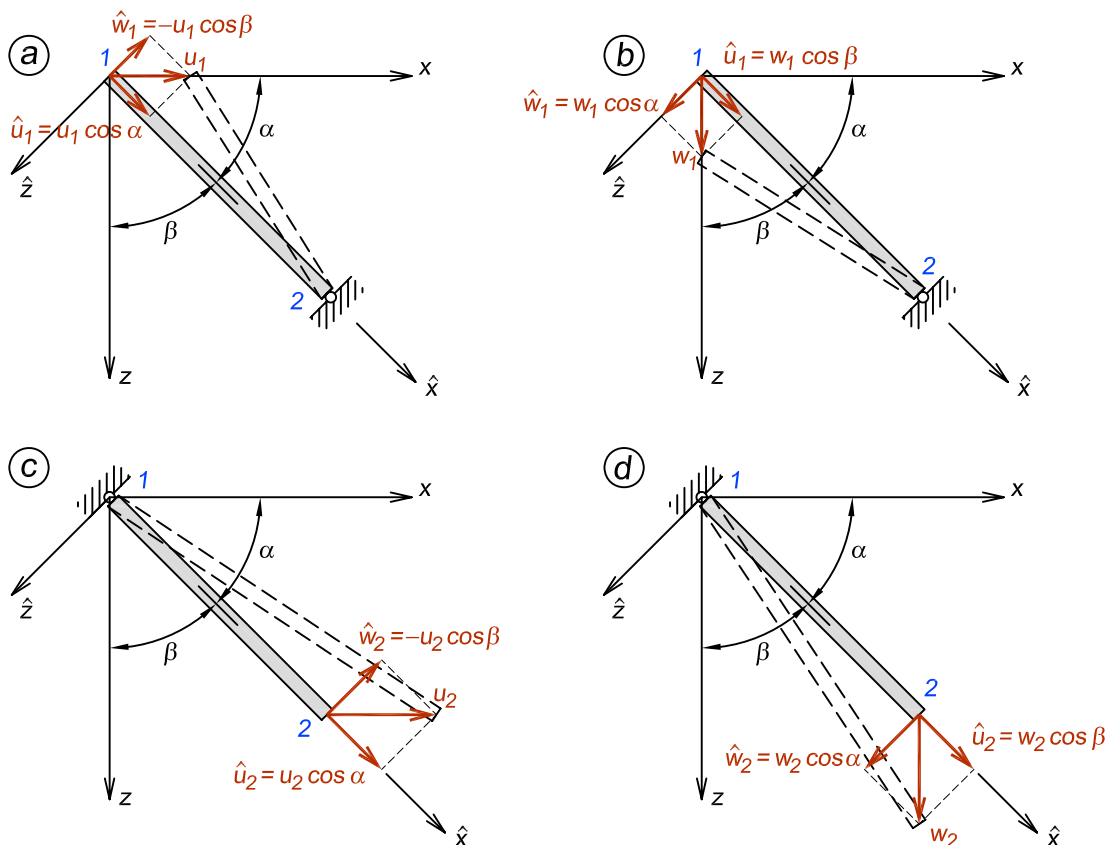
$$\hat{u}_1 = w_1 \cos \beta; \quad \hat{w}_1 = w_1 \cos \alpha \quad (18.124)$$

Kinnitame varda vasakpoolse otsa ning anname varda parempoolsele otsale horisontaalse siirde (joonis 18.46, c). Sõlmpunktis 2 saame siirde komponentideks

$$\hat{u}_2 = u_2 \cos \alpha; \quad \hat{w}_2 = -u_2 \cos \beta \quad (18.125)$$

Järgnevalt anname varda parempoolsele otsale vertikaalsuunalise siirde (joonis 18.46, d). Sõlmpunktis 2 saame siirde komponentideks

$$\hat{u}_2 = w_2 \cos \beta; \quad \hat{w}_2 = w_2 \cos \alpha \quad (18.126)$$



Joonis 18.46. Siirete teisendamine: üldine → kohalik

Saadud tulemuste põhjal kirjutame välja võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= u_1 \cos \alpha + w_1 \cos \beta \\ \hat{w}_1 &= -u_1 \cos \beta + w_1 \cos \alpha \\ \hat{u}_2 &= u_2 \cos \alpha + w_2 \cos \beta \\ \hat{w}_2 &= -u_2 \cos \beta + w_2 \cos \alpha\end{aligned}\quad (18.127)$$

ehk maatrikskujul esitatuna

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}\quad (18.128)$$

Avaldise (18.128) võime kirjutada ka järgmisel kujul

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{T} \mathbf{d}\quad (18.129)$$

kus

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}\quad (18.130)$$

on siirete teisendusmaatriks, mis teisendab üldtelgedesuunalised siirded kohalike telgede suunalisteks siireteks.

Lühemal kujul, kui me soovime saada ainult varda pikitelje suunalisi kohalikke siirdeid, on võrrandisüsteem järgmine

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}\quad (18.131)$$

kus teisendusmaatriks on

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}\quad (18.132)$$

Siirete teisendamine kohalikust teljestikust üldteljestikku

Näidatud teisenduse pöördteisendus on kohalikest siiretest üldtelgedesuunaliste siirete leidmine. Sarnaselt eespool näidatule anname varda mõlemale otsale kaks siiret, nüüd aga kohalike telgede suunas (joonis 18.47).

Esmalt anname varda vasakule otsale varda pikitelje- ning ristteljesuunalised siirded, mille tulemusena üldtelgedesuunalised siirded on

$$u_1 = \hat{u}_1 \cos \alpha; \quad w_1 = \hat{u}_1 \cos \beta; \quad u_2 = -\hat{w}_1 \cos \beta; \quad w_2 = \hat{w}_1 \cos \alpha\quad (18.133)$$

Seejärel anname varda pikitelje- ja ristteljesuunalised siirded varda parempoolsele otsale, millest saame

$$u_2 = \hat{u}_2 \cos \alpha; \quad w_2 = \hat{u}_2 \cos \beta; \quad u_2 = -\hat{w}_2 \cos \beta; \quad w_2 = \hat{w}_2 \cos \alpha \quad (18.134)$$

Nende avaldiste põhjal kirjutame välja võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u}_1 \cos \alpha - \hat{w}_1 \cos \beta \\ w_1 &= \hat{u}_1 \cos \beta + \hat{w}_1 \cos \alpha \\ u_2 &= \hat{u}_2 \cos \alpha - \hat{w}_2 \cos \beta \\ w_2 &= \hat{u}_2 \cos \beta + \hat{w}_2 \cos \alpha \end{aligned} \quad (18.135)$$

mis maatrikskujul esitatuna on

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \end{Bmatrix} \quad (18.136)$$

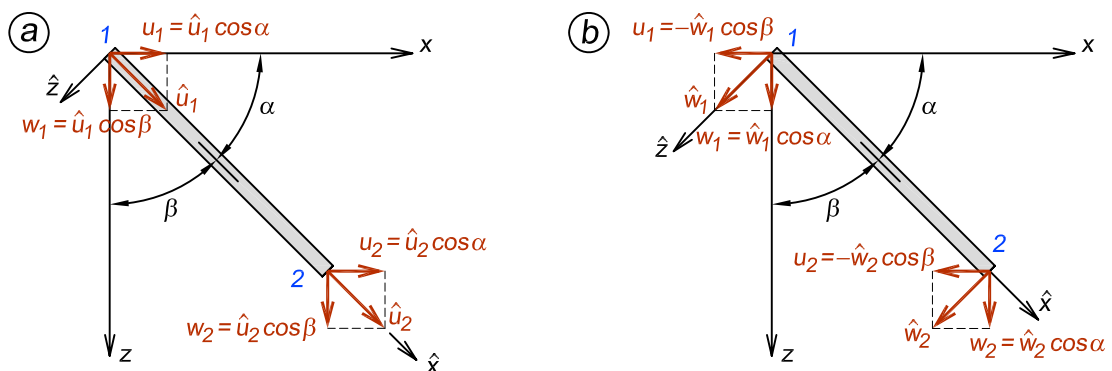
ehk lühemalt

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{d}} \quad (18.137)$$

kus

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (18.138)$$

on teisendusmaatriksi (18.130) transposeeritud maatriks.



Joonis 18.47. Siirete teisendamine: kohalik \rightarrow üldine

Kui on antud ainult varda pikitelje suunalised siirded, siis on võrrandisüsteemiks

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (18.139)$$

kus nüüd kasutame teisendusmaatriksi (18.132) transposeeritud maatriksiksit

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (18.140)$$

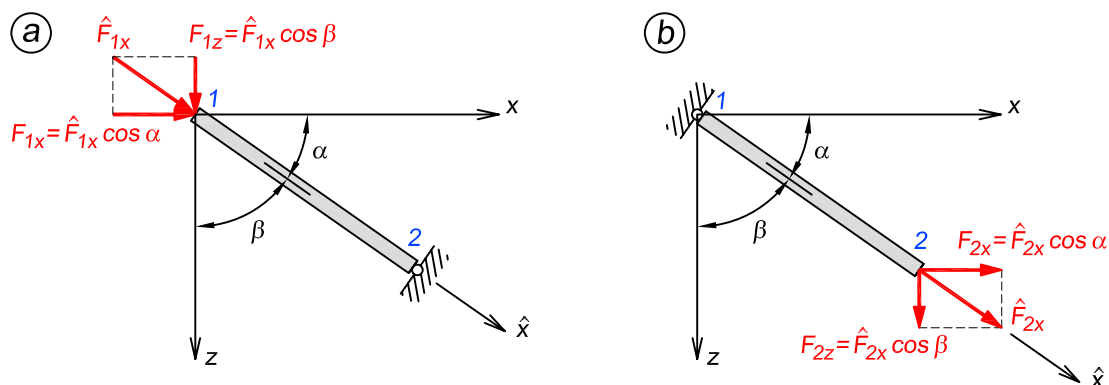
18.5.5. Jõudude teisendusmaatriks

Kinnitame varda parempoolse otsa ning rakendame vasakpoolsesse otsa varda pikitelje suunalise jõu \hat{F}_{1x} (joonis 18.48, a). Sõlmpunktis 1 saame üldtelgedesuunalisteks jõukomponentideks

$$F_{1x} = \hat{F}_{1x} \cos \alpha; \quad F_{1z} = \hat{F}_{1x} \cos \beta \quad (18.141)$$

Kinnitame varda vasakpoolse otsa ning rakendame parempoolsesse otsa varda pikitelje suunalise jõu \hat{F}_{2x} (joonis 18.48, b). Sõlmpunktis 2 saame üldtelgedesuunalisteks jõukomponentideks

$$F_{2x} = \hat{F}_{2x} \cos \alpha; \quad F_{2z} = \hat{F}_{2x} \cos \beta \quad (18.142)$$



Joonis 18.48. Jõudude teisendamine: kohalik \rightarrow üldine

Eelnevad avaldised saame kirjutada maatrikskujul

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (18.143)$$

või

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{F}} \quad (18.144)$$

kus

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (18.145)$$

on teisendusmaatriksi (18.132) transponeeritud maatriks ja teisendab kohalikes koordinaatides antud jõud üldtelgede suunalisteks jõududeks. Saadud valem on sama, nagu siirete teisendamiseks tuletatud avaldis (18.140).

Kui jõud on antud lisaks varda pikiteljele ka varda risttelje suunas, siis on võrrandisüsteem järgmine

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{1z} \\ \hat{F}_{2x} \\ \hat{F}_{2z} \end{Bmatrix} \quad (18.146)$$

kus teisendusmaatriksi transponeeritud maatriks on

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (18.147)$$

Avaldise (18.143) pöördteisenduseks on üldtelgede suunalistest jõududest varda kohaliku teljestiku suunaliste jõudude tuletamine

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2z} \end{Bmatrix} \quad (18.148)$$

või

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{T} \mathbf{F} \quad (18.149)$$

kus

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad (18.150)$$

on sama nagu siirete teisendusmaatriks (18.132).

18.5.6. Jäikusmaatriks üldkoordinaatides

Peatükis (18.5.1) vaatasime jäikusmaatriksi ja tasakaaluvõrrandite koostamist üksikule vardale, kus jõud ja siirded olid varda pikitelje suunalised. Kui aga arvutuskeemis on rohkem kui üks varras ja need vardad paiknevad erinevate nurkade all, siis paiknevad ka nende varraste kohalikud teljestikud üksteise suhtes erinevalt ja sel juhul ei saa konstruktsiooni jäikusmaatriksi moodustamisel otse kokku liita elementide kohalike teljestike suhtes koostatud jäikusmaatrikseid. Selleks, et vältida hilisemat teisendamist üldkoordinaatidesse, tasub elementide jäikusmaatriksid koostada kohe üldkoordinaatides.

Järgnevalt tuletame selleks vajaliku avaldise. Kasutame selleks kahte erinevat lähenemisviisi.

Variant 1

Elemendi jäikusmaatriksi saamiseks üldkoordinaatides ühendame omavahel eespool saadud tulemused. Avaldisest (18.104) on meil teada, et

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} \quad (18.151)$$

Asetame selle avaldisse (18.144) $\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{F}}$, mis annab meile

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} \quad (18.152)$$

Saadud avaldisse asetame valemi (18.129) $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{T}\mathbf{d}$, mille tulemusena saame

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{d} \quad (18.153)$$

Kuna $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{d}$, siis järelikult

$$\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T} = \mathbf{K} \quad (18.154)$$

ja

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad (18.155)$$

Peale maatriksite korrutamist saame elemendi jäikusmaatriksi üldkoordinaatides

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \quad (18.156)$$

Variant 2

Selle meetodi juures teeme läbi neli arvutust, kus igas ühes anname ühele üldteljesuunalisele siirdele (varda otsmised siirded u_1, w_1, u_2 ja w_2) nullist erineva väärtuse, samas kui ülejäänud jäävad nulliks. Kasutame peatükis 18.5.4 esitatud jooniseid.

Esimesena anname sõlmpunktile I horisontaalsuunalise siirde (joonis 18.46, a).

Varda pikiteljesuunalise jõu ja varda otspunkti siirde vaheline seos on näidatud peatükis (18.5.1), kus EA/l on varda jäikus

$$\hat{F}_{1x} = \frac{EA}{l} \hat{u}_1 \quad (18.157)$$

Elemendi pikiteljesuunalise jõu \hat{F}_{1x} saab jagada üldtelgedesuunalisteks komponentideks

$$F_{1x} = \hat{F}_{1x} \cos \alpha; \quad F_{1z} = \hat{F}_{1x} \cos \beta \quad (18.158)$$

Asetades valemi (18.157) avaldistesse (18.158) ning arvestades seda, et $\hat{u}_1 = u_1 \cos \alpha$, saame

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \hat{F}_{1x} \cos \alpha = \left(\frac{EA}{l} \cos \alpha \right) \hat{u}_1 = \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha \right) u_1 \\ F_{1z} &= \hat{F}_{1x} \cos \beta = \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \right) \hat{u}_1 = \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \cos \alpha \right) u_1 \end{aligned} \quad (18.159)$$

Leitud avaldised sisaldavad jõudusid ja siirdeid üldtelgede suunas.

Sarnaselt peatükis (18.5.1) tehtud teisendustele kirjutame nüüd ka kaldvarda puhul avaldised sõlmpunkti 2 kohta, kus esinevad jõud peavad vastavalt varda tasakaalule olema võrdsed ja vastassuunalised sõlmpunkti I jõududele

$$\begin{aligned} F_{2x} &= -F_{1x} = - \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha \right) u_1 \\ F_{2z} &= -F_{1z} = - \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \cos \alpha \right) u_1 \end{aligned} \quad (18.160)$$

Anname sõlmpunktile I vertikaalsiirde (18.46, b). Asetades nüüd valemi (18.157) avaldistesse (18.158) ning arvestades seda, et $\hat{u}_1 = w_1 \cos \beta$, saame

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \hat{F}_{1x} \cos \alpha = \left(\frac{EA}{l} \cos \alpha \right) \hat{u}_1 = \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \cos \alpha \right) w_1 \\ F_{1z} &= \hat{F}_{1x} \cos \beta = \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \right) \hat{u}_1 = \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \beta \right) w_1 \\ F_{2x} &= -F_{1x} = - \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \cos \alpha \right) w_1 \\ F_{2z} &= -F_{1z} = - \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \beta \right) w_1 \end{aligned} \quad (18.161)$$

Järgnevalt teeme sarnased teisendused läbi ka sõlmpunktiga 2. Varda pikitelje suunalise jõu ja varda otspunkti siirde vaheline seos

$$\hat{F}_{2x} = \frac{EA}{l} \hat{u}_2 \quad (18.162)$$

Elemendi pikitelje suunalise jõu \hat{F}_{2x} jagame üldtelgede suunalisteks komponentideks

$$F_{2x} = \hat{F}_{2x} \cos \alpha; \quad F_{2z} = \hat{F}_{2x} \cos \beta \quad (18.163)$$

Anname sõlmpunktile 2 horontaalsiirde (joonis 18.46, c) ja arvestame, et $\hat{u}_2 = u_2 \cos \alpha$

$$\begin{aligned} F_{2x} &= \hat{F}_2 \cos \alpha = \left(\frac{EA}{l} \cos \alpha \right) \hat{u}_2 = \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha \right) u_2 \\ F_{2z} &= \hat{F}_2 \cos \beta = \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \right) \hat{u}_2 = \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \cos \alpha \right) u_2 \\ F_{1x} &= -F_{2x} = - \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha \right) u_2 \\ F_{1z} &= -F_{2z} = - \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \cos \alpha \right) u_2 \end{aligned} \quad (18.164)$$

Anname sõlmpunktile 2 vertikaalsiirde (joonis 18.46, d) ja arvestame, et $\hat{u}_2 = w_2 \cos \beta$

$$\begin{aligned} F_{2x} &= \hat{F}_2 \cos \alpha = \left(\frac{EA}{l} \cos \alpha \right) \hat{u}_2 = \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \cos \alpha \right) w_2 \\ F_{2z} &= \hat{F}_2 \cos \beta = \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \right) \hat{u}_2 = \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \beta \right) w_2 \\ F_{1x} &= -F_{2x} = - \left(\frac{EA}{l} \cos \beta \cos \alpha \right) w_2 \\ F_{1z} &= -F_{2z} = - \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \beta \right) w_2 \end{aligned} \quad (18.165)$$

Ühendades superpositsiooniprintsiibi alusel kõik leitud avaldised, saame järgmise võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \frac{EA}{l} [(\cos^2 \alpha) u_1 + (\cos \beta \cos \alpha) w_1 - (\cos^2 \alpha) u_2 - (\cos \beta \cos \alpha) w_2] \\ F_{1z} &= \frac{EA}{l} [(\cos \beta \cos \alpha) u_1 + (\cos^2 \beta) w_1 - (\cos \beta \cos \alpha) u_2 - (\cos^2 \beta) w_2] \\ F_{2x} &= \frac{EA}{l} [-(\cos^2 \alpha) u_1 - (\cos \beta \cos \alpha) w_1 + (\cos^2 \alpha) u_2 + (\cos \beta \cos \alpha) w_2] \\ F_{2z} &= \frac{EA}{l} [-(\cos \beta \cos \alpha) u_1 - (\cos^2 \beta) w_1 + (\cos \beta \cos \alpha) u_2 + (\cos^2 \beta) w_2] \end{aligned} \quad (18.166)$$

mis maatrikskujul kirjutades on järgmine

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2z} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (18.167)$$

18.5.7. Varda pikijõud

Pärast võrrandisüsteemi lahendamist saab leida elementides tekkivad pikijõud. Elemendis pikijõu leidmiseks kasutame avaldist

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} \quad (18.168)$$

Kuna valem (18.168) sisaldab siirdeid varda kohalikus teljestikus, aga sõlmpunktide siirdeid on saadud üldkoordinaatides, siis tuleb kasutada teisendust. Arvestades, et

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{T}\mathbf{d} \quad (18.169)$$

saame

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{d} \quad (18.170)$$

mis pikemalt väljakirjutatuna annab

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (18.171)$$

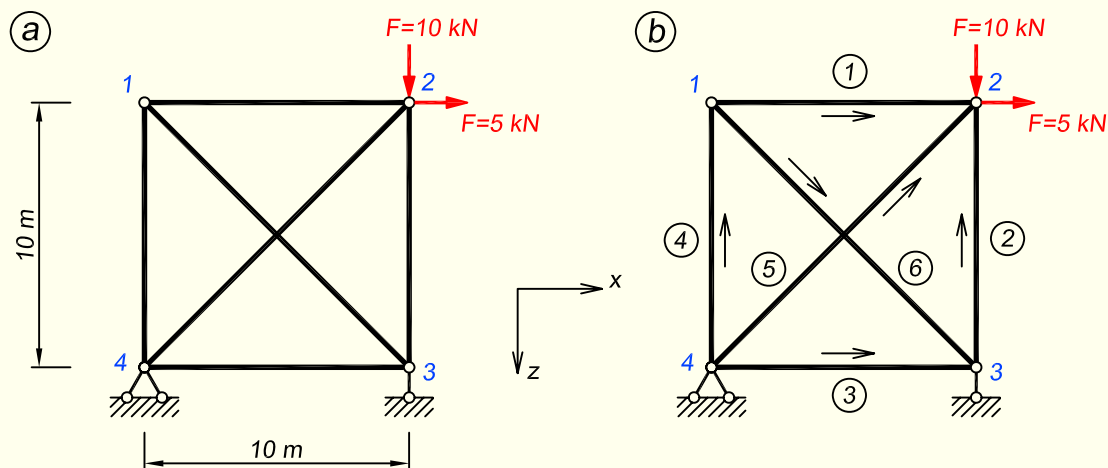
Pärast $\hat{\mathbf{K}}$ ja \mathbf{T} maatriksite korrutamist saame

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (18.172)$$

Avaldis (18.172) annab sisejõud varda alguses ja lõpus. Kuna $F_1 = -F_2$ ja tegelik pikijõu märk langeb kokku varda lõpus oleva sisejõu märgiga, saame pikijõu arvutamiseks valemi

$$N = \{\hat{F}_2\} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c \quad s \} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (18.173)$$

NÄIDE 18.18. Leida joonisel 18.49, a kujutatud staatikaga määramatu sõrestiku varraste pikijõud. EA on konstantne.



Joonis 18.49. Sõrestiku arvutuskeem

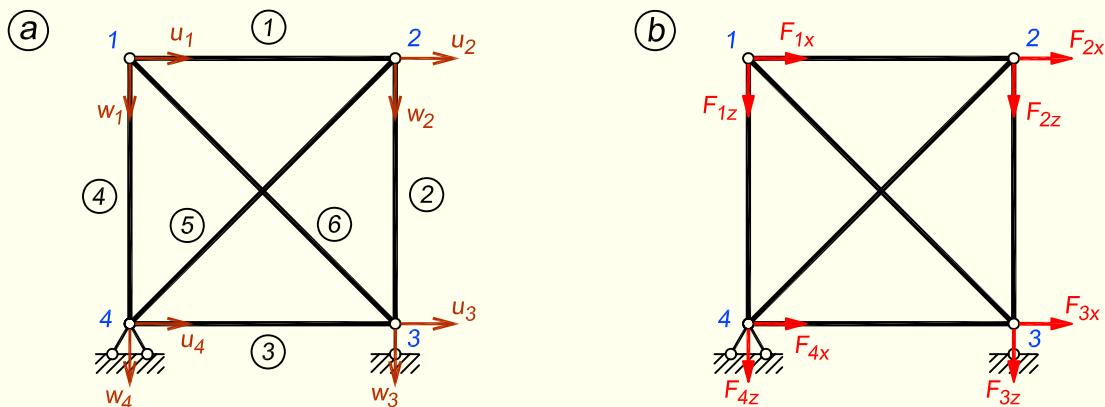
LAHENDUS

Jagame arvutuskeemi elementideks, nagu on näidatud joonisel 18.49, b. Elementideks valime üksikud vardad. Joonisel on näidatud ka iga elemendi \hat{x} -telje positiivne suund, mis määrab ühtlasi ära ka elemendi alguse ja lõpu. On see määratud selliselt, et \hat{x} -telg suundub alati elemendi algsõlmest lõpusõlme. Sellel mingisugust tähtsust ei ole, milline suund elemendile valida, oluline on ainult see, et ühel elemendil on algus ja lõpp kogu ülesande käigus sama.

Siin ülesandes kasutame arvutustes sõrestikuelementi, kuna varraste otstes on liigendid ja varrastes tekivad ainult pikijõud. Sel juhul on tundmatuteks ainult sõlmede siirded.

Tundmatud siirded on näidatud joonisel 18.50, a, kus horizontaalsuunalised siirde komponendid on tähistatud u ja vertikaalsuunalised w . Siirete vektori moodustame joonisel 18.50, a esitatud siirete u ja w komponentide abil, märkides need vektorisse vastavalt sõlmede nummerdamise järjekorrale. Osa siiretest on meil juba teada, sest toesidemete suunas on siirded võrdsed nulliga. Teadaolevad väärtused paneme samuti siirete vektorisse kohe kirja.

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ w_4 = 0 \end{pmatrix}$$



Joonis 18.50. Siirete ja koormusvektori komponendid

Koormusvektori moodustamine toimub sarnaselt siirete vektorile. Meil on vaja teada kõigi sõlmkoormuste horisontaal- ja vertikaalsuunalisi komponente. Nimetatud komponendid on näidatud joonisel 18.50, b. Moodustame koormusvektori

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = 0 \\ F_{1z} = 0 \\ F_{2x} = 5 \\ F_{2z} = 10 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4z} \end{Bmatrix}$$

Koormusvektoris tähistavad F_{3z} , F_{4x} ja F_{4z} toereaktsioone (mis samuti on sõlmpunktidele väliskoormusteks) ja on meil tundmatud.

Konstruktsiooni jäikusmaatriksi koostamiseks arvutame esmalt üksikute elementide jäikusmaatriksid, milleks kasutame valemit 18.156

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

kus suunakoosinused arvutame valemitega (18.120)

$$\cos \alpha = \frac{x_{lõpus} - x_{alguses}}{l}; \quad \cos \beta = \frac{z_{lõpus} - z_{alguses}}{l}$$

ning varraste pikkused valemiga (18.121)

$$l = \sqrt{(x_{lõpus} - x_{alguses})^2 + (z_{lõpus} - z_{alguses})^2}$$

Varraste pikkused ja suunakoosinused on toodud tabelis 18.4.

Tabel 18.4. Varraste pikkused ja suunakoosinused

| Element | Pikkus, [m] | $\cos \alpha$ | $\cos \beta$ |
|---------|-------------|---------------|--------------|
| 1 | 10 | 1 | 0 |
| 2 | 10 | 0 | -1 |
| 3 | 10 | 1 | 0 |
| 4 | 10 | 0 | -1 |
| 5 | 14,1421 | 0,7071 | -0,7071 |
| 6 | 14,1421 | 0,7071 | 0,7071 |

Nüüd saame arvutada elementide jäikusmaatriksid

$$\mathbf{K}^{(1)} = EA \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & u_2 & w_2 \\ 0,1 & 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{matrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = EA \begin{bmatrix} u_3 & w_3 & u_2 & w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ w_3 \\ u_2 \\ w_2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = EA \begin{bmatrix} u_4 & w_4 & u_3 & w_3 \\ 0,1 & 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_4 \\ w_4 \\ u_3 \\ w_3 \end{matrix} \quad \mathbf{K}^{(4)} = EA \begin{bmatrix} u_4 & w_4 & u_1 & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_4 \\ w_4 \\ u_1 \\ w_1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(5)} = EA \begin{bmatrix} u_4 & w_4 & u_2 & w_2 \\ 0,0354 & -0,0354 & -0,0354 & 0,0354 \\ -0,0354 & 0,0354 & 0,0354 & -0,0354 \\ -0,0354 & 0,0354 & 0,0354 & -0,0354 \\ 0,0354 & -0,0354 & -0,0354 & 0,0354 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_4 \\ w_4 \\ u_2 \\ w_2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(6)} = EA \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & u_3 & w_3 \\ 0,0354 & 0,0354 & -0,0354 & -0,0354 \\ 0,0354 & 0,0354 & -0,0354 & -0,0354 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0,0354 & 0,0354 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0,0354 & 0,0354 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u_3 \\ w_3 \end{matrix}$$

Moodustame konstruktsiooni jäikusmaatriksi. Selleks, et kanda elemendi jäikusmaatriksis olevad arvud konstruktsiooni jäikusmaatriksisse, tähistame elemendi jäikusmaat-

riksi read ja veerud vastava elemendi otstes olevate sõlmpunktide siirete tähistega. Samuti tähistame konstruktsiooni jäikusmaatriksi read ja veerud. Edasi kanname arvud ühest maatriksist teise vastavalt nende rea- ja veerutähistele.

$$\mathbf{K} = EA \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & u_2 & w_2 & u_3 & w_3 & u_4 & w_4 \\ 0,1354 & 0,0354 & -0,1 & 0 & -0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 \\ 0,0354 & 0,1354 & 0 & 0 & -0,0354 & -0,0354 & 0 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,1354 & -0,0354 & 0 & 0 & -0,0354 & 0,0354 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,1354 & 0 & -0,1 & 0,0354 & -0,0354 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 & 0,1354 & 0,0354 & -0,1 & 0 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0 & -0,1 & 0,0354 & 0,1354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,0354 & -0,1 & 0 & 0,1354 & -0,0354 \\ 0 & -0,1 & 0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 & -0,0354 & 0,1354 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ w_4 \end{matrix}$$

Konstruktsiooni jäikusmaatriksist, siirete vektorist ja koormusvektorist moodustame võrrandisüsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$EA \begin{bmatrix} 0,1354 & 0,0354 & -0,1 & 0 & -0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 \\ 0,0354 & 0,1354 & 0 & 0 & -0,0354 & -0,0354 & 0 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,1354 & -0,0354 & 0 & 0 & -0,0354 & 0,0354 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,1354 & 0 & -0,1 & 0,0354 & -0,0354 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 & 0,1354 & 0,0354 & -0,1 & 0 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0 & -0,1 & 0,0354 & 0,1354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,0354 & -0,1 & 0 & 0,1354 & -0,0354 \\ 0 & -0,1 & 0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 & -0,0354 & 0,1354 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ w_4 = 0 \end{matrix} = \begin{matrix} F_{1x} = 0 \\ F_{1z} = 0 \\ F_{2x} = 5 \\ F_{2z} = 10 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4z} \end{matrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamiseks eraldame suurest süsteemist tundmatutele siiretele u_1, w_1, u_2, w_2 ja u_3 vastava osa ehk read 1 kuni 5 ja jäikusmaatriksist veerud 1 kuni 5

$$EA \begin{bmatrix} 0,1354 & 0,0354 & -0,1 & 0 & -0,0354 \\ 0,0354 & 0,1354 & 0 & 0 & -0,0354 \\ -0,1 & 0 & 0,1354 & -0,0354 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,1354 & 0 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 & 0,1354 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ 0 \end{matrix}$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame sõlmpunktide siirded üldkoordinaatides

$$\begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \end{matrix} = \frac{1}{EA} \begin{matrix} 145,7107 \\ -30,1777 \\ 175,8883 \\ 119,8223 \\ 30,1777 \end{matrix}$$

Leiame varraste pikijõud, kasutades selleks valemit (18.173)

$$N^{(1)} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c \quad s \} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{10} \{ -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \} \begin{Bmatrix} 145,7107 \\ -30,1777 \\ 175,8883 \\ 119,8223 \end{Bmatrix} =$$

$$= 3,02 \text{ kN}$$

$$N^{(2)} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c \quad s \} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{10} \{ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \} \begin{Bmatrix} 30,1777 \\ 0 \\ 175,8883 \\ 119,8223 \end{Bmatrix} =$$

$$= -11,98 \text{ kN}$$

$$N^{(3)} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c \quad s \} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} u_4 \\ w_4 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{10} \{ -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30,1777 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= 3,02 \text{ kN}$$

$$N^{(4)} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c \quad s \} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} u_4 \\ w_4 \\ u_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{10} \{ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 145,7107 \\ -30,1777 \end{Bmatrix} =$$

$$= 3,02 \text{ kN}$$

$$N^{(5)} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c \quad s \} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} u_4 \\ w_4 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14,1421} \{ -0,7071 \quad 0,7071 \quad 0,7071 \quad -0,7071 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 175,8883 \\ 119,8223 \end{Bmatrix} = 2,80 \text{ kN}$$

$$N^{(6)} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c \quad s \} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} =$$

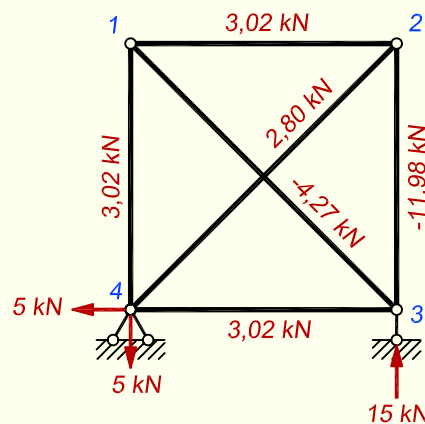
$$= \frac{1}{14,1421} \{ -0,7071 \quad -0,7071 \quad 0,7071 \quad 0,7071 \} \begin{Bmatrix} 145,7107 \\ -30,1777 \\ 30,17773 \\ 0 \end{Bmatrix} = -4,27 \text{ kN}$$

Toereaktsioonide leidmiseks kasutame võrrandisüsteemi kolme viimast võrrandit ning leitud siirdeid

$$\begin{Bmatrix} F_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4z} \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} -0,0354 & -0,0354 & 0 & -0,1 & 0,0354 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,0354 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,0354 & -0,0354 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} 145,7107 \\ -30,1777 \\ 175,8883 \\ 119,8223 \\ 30,1777 \end{Bmatrix}$$

Saame toereaktsioonid

$$F_{3z} = -15 \text{ kN}; \quad F_{4x} = -5 \text{ kN}; \quad F_{4z} = 5 \text{ kN}$$



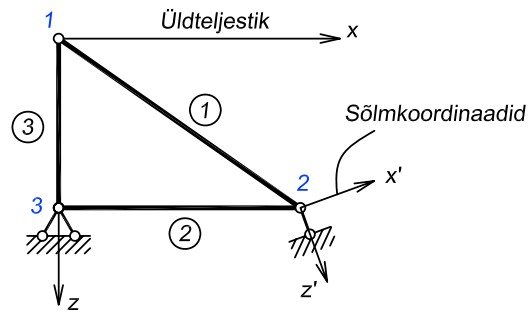
Joonis 18.51. Toereaktsioonid ja varraste pikijõud

18.5.8. Kaldtoed

Seniajani vaatasime arvutuskeeme, mille toesidemed olid orienteeritud üldkoordinaattelgede suunas. Sõrestik võib aga olla toetatud ka sellise liikuva liigendtoega, mis on üldtelgede suhtes kaldu. Sel juhul ei ole siiretena väljendatavad rajatingimused enam üldises xz -teljestikus, vaid kohalikus $x'z'$ -teljestikus, mida nimetatakse *sõlmkoordinaatideks*. Kui vaadata joonist 18.52, siis sõlmes 2 on siire takistatud ainult z' -telje suunas. x' -telje suunas on siire võimalik ja seetõttu on siirdel olemas komponendid mõlema üldtelje suhtes. Võrrandisüsteemi koostamisel ei saa sellises toesõlmes märkida nulliks siirdeid vertikaalse ja horisontaalse üldtelje suunas.

Sellise ülesande lahendamiseks on vaja tuletada siirete ja jõudude teisendusmaatriksid, arvestades sõlmkoordinaate. Sealt edasi saame avaldada jäikusmaatriksi elementidele, mis kinnituvad viltusele toele.

Joonisel 18.52 on kaldtoele kinnituvateks elementideks vardad 1 ja 2. Neist esimese võtame aluseks järgnevas teisendustes.



Joonis 18.52. Kaldtoega sõrestik

Siirete teisendusmaatriks

Kinnitades elemendi parempoolse otsa ja andes vasakpoolsele otsale sõlmpunktis 1 siirded üldtelgede suunas (joonis 18.53, a), saame varda pikitelje suunalisteks siirde komponentideks

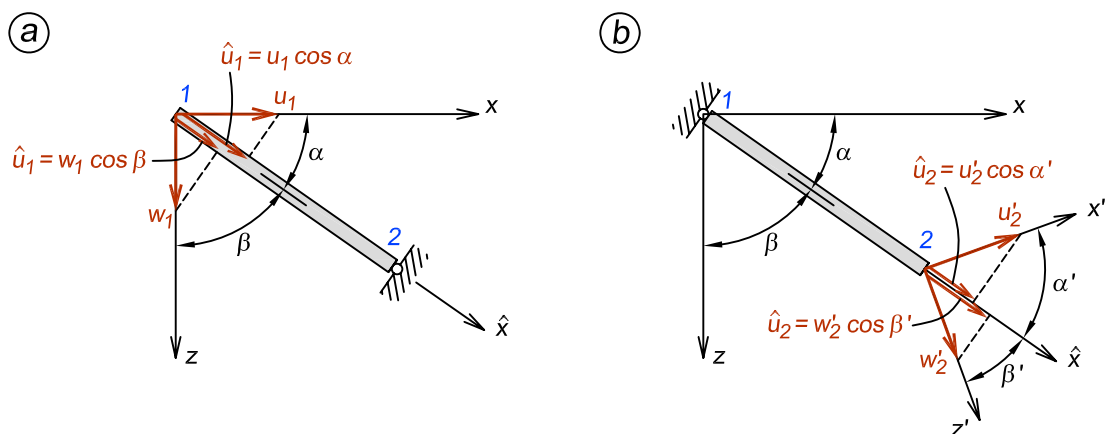
$$\hat{u}_1 = u_1 \cos \alpha; \quad \hat{w}_1 = w_1 \cos \beta \quad (18.174)$$

Kinnitades elemendi vasakpoolse otsa ja andes elemendi parempoolsele otsale sõlmpunktis 2 siirded sõlmkoordinaatide suunas (joonis 18.53, b), saame varda pikitelje suunalisteks siirde komponentideks

$$\hat{u}_2 = u'_2 \cos \alpha'; \quad \hat{w}_2 = w'_2 \cos \beta' \quad (18.175)$$

Saadud tulemuste põhjal kirjutame välja võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= u_1 \cos \alpha + w_1 \cos \beta \\ \hat{u}_2 &= u'_2 \cos \alpha' + w'_2 \cos \beta' \end{aligned} \quad (18.176)$$



Joonis 18.53. Siirete komponendid

ehk maatrikskujul esitatuna

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' & s' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2' \\ w_2' \end{Bmatrix} \quad (18.177)$$

Jõudude teisendusmaatriks

Kinnitame varda parempoolse otsa ning rakendame vasakpoolsesse otsa varda pikitelje suunalise jõu \hat{F}_{1x} (joonis 18.54, a). Sõlmpunktis 1 saame üldtelgedesuunalisteks jõukomponentideks

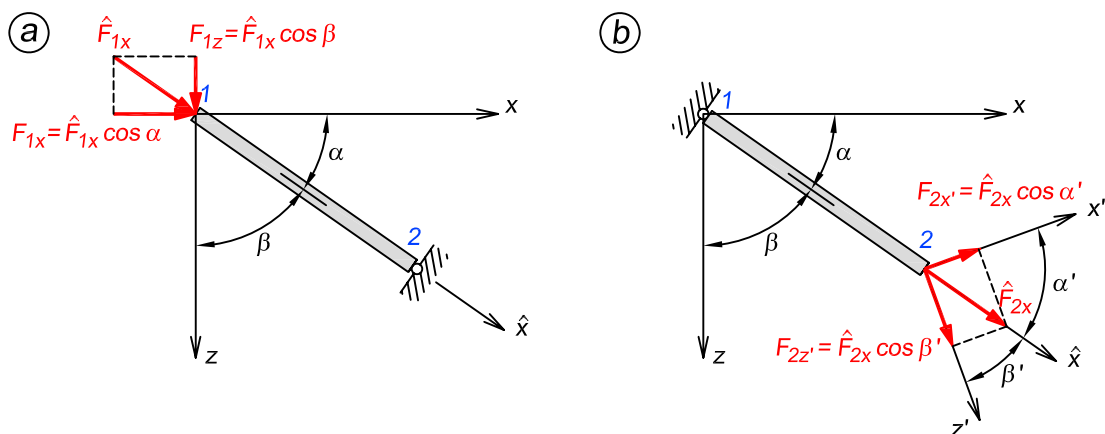
$$F_{1x} = \hat{F}_{1x} \cos \alpha; \quad F_{1z} = \hat{F}_{1x} \cos \beta \quad (18.178)$$

Kinnitame varda vasakpoolse otsa ning rakendame parempoolsesse otsa varda pikitelje suunalise jõu \hat{F}_{2x} (joonis 18.54, b). Sõlmpunktis 2 saame sõlmkoordinaatide suunalisteks jõukomponentideks

$$F_{2x'} = \hat{F}_{2x} \cos \alpha'; \quad F_{2z'} = \hat{F}_{2x} \cos \beta' \quad (18.179)$$

Eelnevad avaldised saame kirjutada maatrikskujul

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ F_{2x'} \\ F_{2z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c' \\ 0 & s' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (18.180)$$



Joonis 18.54. Jõudude komponendid

Elemendi jäikusmaatriks

Elemendi jäikusmaatriksi tuletame valemiga (18.154)

$$\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{T} = \mathbf{K} \quad (18.181)$$

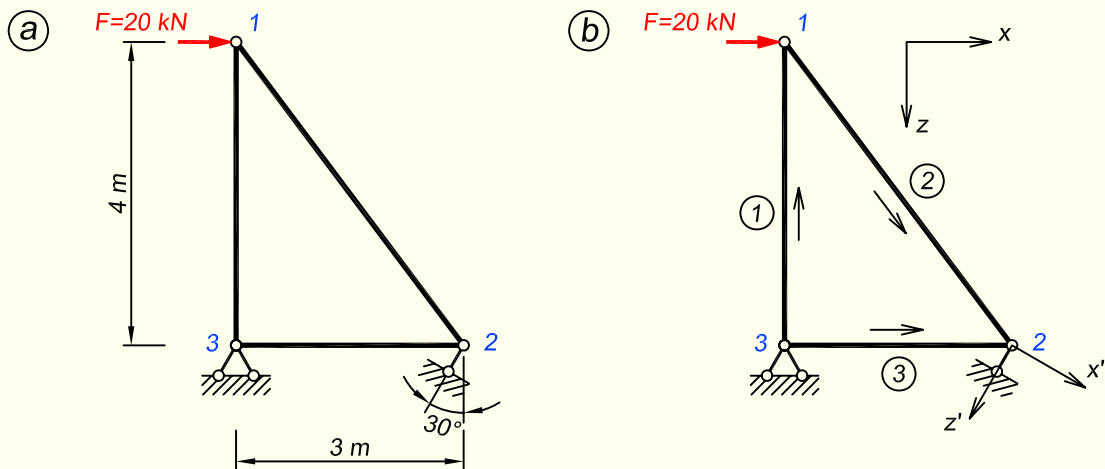
millest

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c' \\ 0 & s' \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' & s' \end{bmatrix} \quad (18.182)$$

Peale maatriksite korrutamist saame elemendi jäikusmaatriksi üldkoordinaatides

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -cc' & -s'c \\ sc & s^2 & -sc' & -ss' \\ -cc' & -sc' & c'^2 & s'c' \\ -s'c & -ss' & s'c' & s'^2 \end{bmatrix} \quad (18.183)$$

NÄIDE 18.19. Leida joonisel 18.55, a kujutatud arvutuskeemi varraste pikkjõud. EA on konstantne.



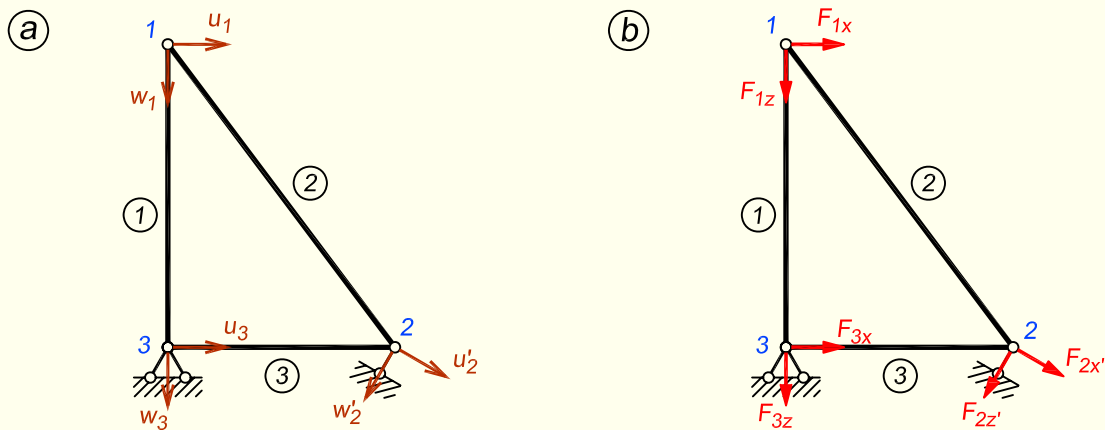
Joonis 18.55. Sõrestiku arvutuskeem

LAHENDUS

Jagame arvutuskeemi elementideks, nagu on näidatud joonisel 18.55, b. Seal on märgitud iga elemendi juurde ka tema kohaliku \hat{x} -telje positiivne suund ning sõlmkoordinaadid sõlmes 2.

Siirete ja koormusvektori komponendid on esitatud joonisel 18.56.

Nüüd saame arvutada elementide jäikusmaatriksid.



Joonis 18.56. Siirete ja koormusvektori komponendid

Element 1. Kuna selle elemendi üheski otsas kaldtuge ei ole, arvutame tema jäikusmaatriksi tavalise valemiga (18.156).

$c = 0, s = -1$.

$$\mathbf{K}^{(1)} = EA \begin{bmatrix} u_3 & w_3 & u_1 & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ w_3 \\ u_1 \\ w_1 \end{matrix}$$

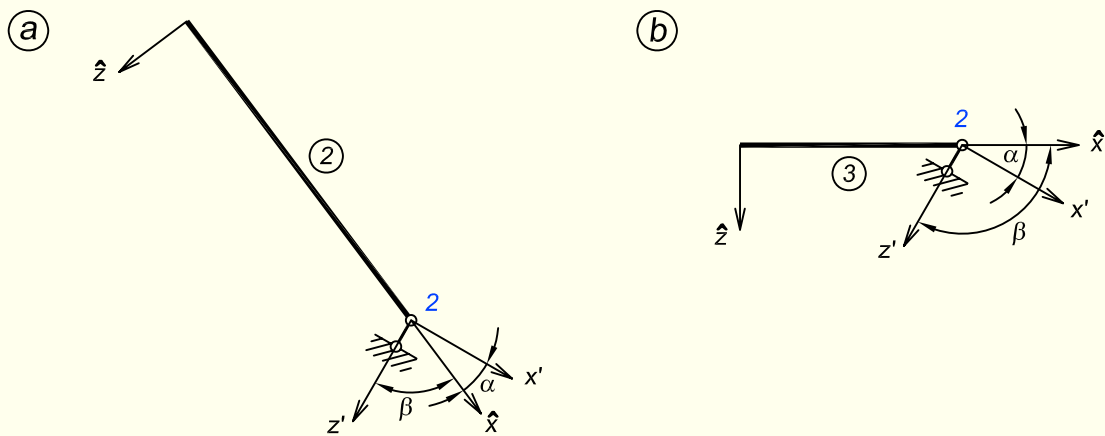
Teisel ja kolmandal elemendil on lõpp kinnitatud kaldtoega sõlme, mistõttu nende varraste jäikusmaatriksid leiame valemiga (18.183).

Element 2 (joonis 18.57, a). $c = 0,6, s = 0,8, c' = 0,9196, s' = 0,3928$.

$$\mathbf{K}^{(2)} = EA \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & u'_2 & w'_2 \\ 0,0720 & 0,0960 & -0,1104 & -0,0471 \\ 0,0960 & 0,1280 & -0,1471 & -0,0628 \\ -0,1104 & -0,1471 & 0,1691 & 0,0722 \\ -0,0471 & -0,0628 & 0,0722 & 0,0309 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u'_2 \\ w'_2 \end{matrix}$$

Element 3 (joonis 18.57, b). $c = 1, s = 0, c' = 0,8660, s' = -0,5$.

$$\mathbf{K}^{(3)} = EA \begin{bmatrix} u_3 & w_3 & u'_2 & w'_2 \\ 0,3333 & 0 & -0,2887 & 0,1667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2887 & 0 & 0,2500 & -0,1443 \\ 0,1667 & 0 & -0,1443 & 0,0833 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ w_3 \\ u'_2 \\ w'_2 \end{matrix}$$



Joonis 18.57. Kaldtoega vardad

Moodustame konstruktsiooni jäikusmaatriksi

$$\mathbf{K} = EA \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & u'_2 & w'_2 & u_3 & w_3 \\ 0,0720 & 0,0960 & -0,1104 & -0,0471 & 0 & 0 \\ 0,0960 & 0,3780 & -0,1471 & -0,0628 & 0 & -0,2500 \\ -0,1104 & -0,1471 & 0,4191 & -0,0721 & -0,2887 & 0 \\ -0,0471 & -0,0628 & -0,0721 & 0,1142 & 0,1667 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2887 & 0,1667 & 0,3333 & 0 \\ 0 & -0,2500 & 0 & 0 & 0 & 0,2500 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u'_2 \\ w'_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{matrix}$$

Kirjutame välja võrrandisüsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$EA \begin{bmatrix} 0,0720 & 0,0960 & -0,1104 & -0,0471 & 0 & 0 \\ 0,0960 & 0,3780 & -0,1471 & -0,0628 & 0 & -0,2500 \\ -0,1104 & -0,1471 & 0,4191 & -0,0721 & -0,2887 & 0 \\ -0,0471 & -0,0628 & -0,0721 & 0,1142 & 0,1667 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2887 & 0,1667 & 0,3333 & 0 \\ 0 & -0,2500 & 0 & 0 & 0 & 0,2500 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u'_2 \\ w'_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{matrix} = \begin{matrix} F_{1x} = 20 \\ F_{1z} = 0 \\ F_{2x'} = 0 \\ F_{2z'} \\ F_{3x} \\ F_{3z} \end{matrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamiseks eraldame suurest süsteemist tundmatutele siiretele vastava osa ehk read 1 kuni 3 ja jäikusmaatriksist ka veerud 1 kuni 3

$$EA \begin{bmatrix} 0,0720 & 0,0960 & -0,1104 \\ 0,0960 & 0,3780 & -0,1471 \\ -0,1104 & -0,1471 & 0,4191 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u'_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame sõlmpunktide siirded

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2' \end{Bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} 608,3554 \\ -106,7158 \\ 122,7978 \end{Bmatrix}$$

Leitud siirete abil arvutame varraste pikijõud

$$N^{(1)} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c \quad s \} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ u_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \{ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 608,3554 \\ -106,7158 \end{Bmatrix} = 26,7 \text{ kN}$$

$$N^{(2)} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c' \quad s' \} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2' \\ w_2' \end{Bmatrix} = \frac{1}{5} \{ -0,6 \quad -0,8 \quad 0,9196 \quad 0,3928 \} \begin{Bmatrix} 608,3554 \\ -106,7158 \\ 122,7978 \\ 0 \end{Bmatrix} = -33,3 \text{ kN}$$

$$N^{(3)} = \frac{EA}{l} \{ -c \quad -s \quad c' \quad s' \} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ u_2' \\ w_2' \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \{ -1 \quad 0 \quad 0,8660 \quad -0,5 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 122,7978 \\ 0 \end{Bmatrix} = 35,4 \text{ kN}$$

Toereaktsioonide leidmiseks kasutame võrrandisüsteemi kolme viimast võrrandit

$$\begin{Bmatrix} F_{2z'} \\ F_{3x} \\ F_{3z} \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} -0,0471 & -0,0628 & -0,0721 \\ 0 & 0 & -0,2887 \\ 0 & -0,2500 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} 608,3554 \\ -106,7158 \\ 122,7978 \end{Bmatrix}$$

Saame toereaktsioonid

$$F_{2z'} = -30,8 \text{ kN}; \quad F_{3x} = -35,5 \text{ kN}; \quad F_{3z} = 26,7 \text{ kN}$$

18.5.9. Temperatuuri muutusest põhjustatud lisapinged

Staatikaga määramatutes konstruktsioonides võib temperatuuri muutus tekitada lisapingeid. Sageli tuleb nendega projekteerimisel arvestada, kuna temperatuuri tõus põhjustab varraste pikenemist materjali paisumise tõttu ning kui pikenemine on takistatud, võib see viia suurte survepingete tekkimiseni ja nende mõjul varda nõtkumiseni.

Oluline on siinjuures rõhutada, et staatikaga määratud arvutuskeemide puhul temperatuuri muutus lisapingeid ei põhjusta, kuna puuduvad liigsidemed ja konstruktsioon saab temperatuuri mõjul vabalt paisuda või kahaneda. Staatikaga määramatul skeemil on aga liigsidemed, mis hakkavad takistama konstruktsiooni mõõtmete muutumist ning see tekitab sisejõudusid ja reaktsioone.

Temperatuuri muutusest tekkivate reaktsioonide kirjeldamiseks vaatame joonist 18.58, a , kus on kujutatud kahe jäiga toe vahel paiknev varras pikkusega l . Temperatuuri muutuse tähistame ΔT ja arvestame praegu, et tegemist on temperatuuri tõusmisega. Kasutades temperatuuri muutusest põhjustatud siirete valemit (11.58) ja lihtsustades selle teist poolt, saame kirjutada, et vaadeldav varras pikeneks ilma jäikade tugeveta Δl_t võrra

$$\Delta l_t = \alpha \cdot \Delta T \cdot l \quad (18.184)$$

Kui vardale rakendada survejõud F , siis varda pikkus muutuks Δl_p võrra

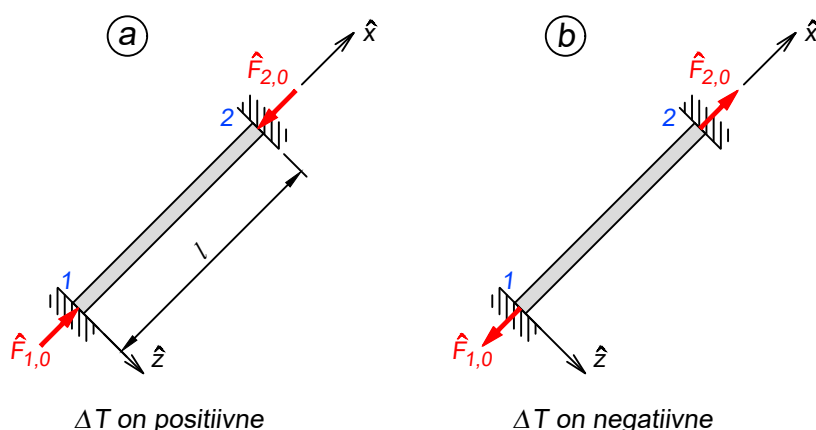
$$\Delta l_p = \frac{F_0 l}{EA} \quad (18.185)$$

Võrdsustades need avaldised ($\Delta l_t = \Delta l_p$), saame pärast teisendamist

$$F_0 = EA\alpha\Delta T \quad (18.186)$$

mis on temperatuuri muutusest tekkivaks reaktsiooniks varda jäikades otstes. Kirjutame leitud avaldise kummagi otsa kohta eraldi vastavate märkidega

$$\hat{F}_{1,0} = EA\alpha\Delta T; \quad \hat{F}_{2,0} = -EA\alpha\Delta T \quad (18.187)$$



Joonis 18.58. Reaktsioonid temperatuuri muutusest

Kui temperatuur langeb (joonis 18.58, *b*), siis tekib vastupidine olukord – varras tahab kokku tõmbuda ja reaktsioonid pöörduvad seetõttu vastupidiseks ning märgid muutuvad.

Leitud jõudude (18.187) teisendamiseks üldkoordinaatidesse, kasutame avaldist (18.143), mille abil saame

$$\begin{Bmatrix} F_{1x,0} \\ F_{1z,0} \\ F_{2x,0} \\ F_{2z,0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} EA\alpha\Delta T \\ -EA\alpha\Delta T \end{Bmatrix} = EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix} \quad (18.188)$$

Kui sõrestikku mõjutab temperatuuri muutus, kujuneb võrrandisüsteem järgmiseks

$$\mathbf{Kd} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F} \quad (18.189)$$

kus \mathbf{F}_0 on lisakoormusvektor temperatuuri muutusest tekkivatest reaktsioonidest, mis sisuliselt rakendatakse täiendavate jõududena sõrestiku sõlmedesse.

Sarnaselt avaldisele (18.170) saame

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{Td} + \hat{\mathbf{F}}_0 \quad (18.190)$$

millest peatükis 18.5.7 näidatud teisendamise tulemusena on pikijõud elemendi lõpus

$$N = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} + \hat{F}_{2,0} \quad (18.191)$$

NÄIDE 18.20. Joonisel 18.59, *a* kujutatud sõrestiku varda 4-2 temperatuur tõuseb 50 kraadi võrra. Leida arvutusskeemi varrastes tekkivad sisejõud. Varraste parameetrid on võrdsed: $E = 210$ GPa, ristlõike pindala on 10 cm^2 . Temperatuuri joonpaisumistegur on $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$. Sõrestiku kuju on sama nagu näites 18.18.

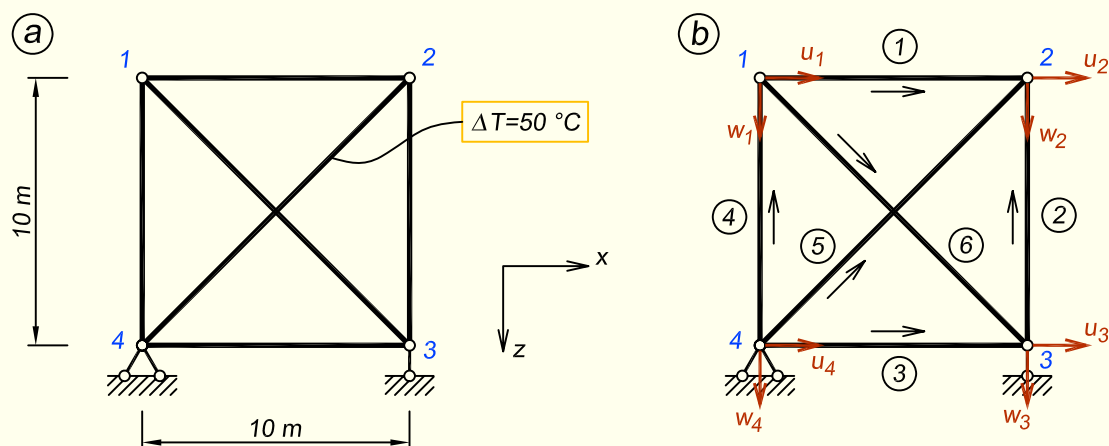
LAHENDUS

Arvutame temperatuuri tõusust tekkivad reaktsioonid üldkoordinaatides valemi (18.188) abil. Kuna temperatuuri muutus põhjustab varda 4-2 pikkuse muutumist, siis tekivad lisareaktsioonid selle varda otsasõlmedes 4 ja 2. Kasutame näites 18.18 leitud elemendi 5 suunakoosinuseid

$$c = \cos \alpha = 0,7071; \quad s = \cos \beta = -0,7071$$

Lisareaktsioonideks saame

$$\begin{Bmatrix} F_{4x,0} \\ F_{4z,0} \\ F_{2x,0} \\ F_{2z,0} \end{Bmatrix} = EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix} = EA \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \begin{Bmatrix} 0,7071 \\ -0,7071 \\ -0,7071 \\ 0,7071 \end{Bmatrix} = EA \begin{Bmatrix} 0,00042426 \\ -0,00042426 \\ -0,00042426 \\ 0,00042426 \end{Bmatrix}$$



Joonis 18.59. Sõrestiku arvutuskeem

Kuna elementide jäikusmaatriksid ja konstruktsiooni jäikusmaatriks on koostatud näites 18.18, siis siin ei hakka neid uuesti tuletama ja kirjutame kohe välja võrrandisüsteemi vastavalt valemile (18.189)

$$EA \begin{bmatrix} 0,1354 & 0,0354 & -0,1 & 0 & -0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 \\ 0,0354 & 0,1354 & 0 & 0 & -0,0354 & -0,0354 & 0 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,1354 & -0,0354 & 0 & 0 & -0,0354 & 0,0354 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,1354 & 0 & -0,1 & 0,0354 & -0,0354 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 & 0,1354 & 0,0354 & -0,1 & 0 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0 & -0,1 & 0,0354 & 0,1354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,0354 & -0,1 & 0 & 0,1354 & -0,0354 \\ 0 & -0,1 & 0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 & -0,0354 & 0,1354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ w_4 = 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ EA \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,00042426 \\ 0,00042426 \\ 0 \\ 0 \\ 0,00042426 \\ -0,00042426 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = 0 \\ F_{1z} = 0 \\ F_{2x} = 0 \\ F_{2z} = 0 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4z} \end{Bmatrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamiseks eraldame suurest süsteemist tundmatutele siiretele u_1, w_1, u_2, w_2 ja u_3 vastava osa ehk read 1 kuni 5

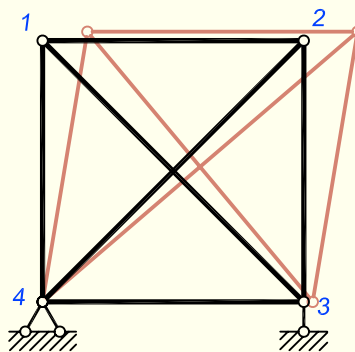
$$EA \begin{bmatrix} 0,1354 & 0,0354 & -0,1 & 0 & -0,0354 \\ 0,0354 & 0,1354 & 0 & 0 & -0,0354 \\ -0,1 & 0 & 0,1354 & -0,0354 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,1354 & 0 \\ -0,0354 & -0,0354 & 0 & 0 & 0,1354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} +$$

$$+ EA \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,00042426 \\ 0,00042426 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Kui koormustega arvutamisel on võrrandisüsteemi vabaliikmeteks koormusvektori väärtused, siis nüüd kasutame vabaliikmetena temperatuuri muutusest põhjustatud reaktsioone. Lahendades võrrandisüsteemi, saame sõlmpunktide siirded üldkoordinaatides. Praegusel juhul tulevad siirded ühikuga [m].

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0060 \\ -0,0012 \\ 0,0072 \\ -0,0012 \\ 0,0012 \end{Bmatrix}$$

Selleks, et paremini ette kujutada, mis sõrestikuga toimub, toome vastavalt võrrandisüsteemi lahenditele välja sõrestiku deformeerunud kuju pärast temperatuuri tõusu (joonis 18.60).



Joonis 18.60. Sõrestiku deformeerumine. Joonise ilmekuse huvides on sõlmede siirdeid tegelikkusega võrreldes oluliselt suurendatud.

Vardas 5, mida temperatuuri muutus mõjutab, leiame pikijõu valemiga (18.191)

$$\begin{aligned} N^{(5)} &= \frac{EA}{l} \begin{Bmatrix} -c & -s & c & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ w_4 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} + \hat{F}_{2,0} = \\ &= \frac{210 \cdot 1000}{14,1421} \begin{Bmatrix} -0,7071 & 0,7071 & 0,7071 & -0,7071 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0072 \\ -0,0012 \end{Bmatrix} - \\ &- 210 \cdot 1000 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = -37,8 \text{ kN} \end{aligned}$$

Sõrestiku ülejäänud varraste puhul kaob ära valemi viimane liige

$$N^{(1)} = \frac{210 \cdot 1000}{10} \{ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \} \begin{Bmatrix} 0,0060 \\ -0,0012 \\ 0,0072 \\ -0,0012 \end{Bmatrix} = 25,2 \text{ kN}$$

$$N^{(2)} = \frac{210 \cdot 1000}{10} \{ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \} \begin{Bmatrix} 0,0012 \\ 0 \\ 0,0072 \\ -0,0012 \end{Bmatrix} = 25,2 \text{ kN}$$

$$N^{(3)} = \frac{210 \cdot 1000}{10} \{ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0012 \\ 0 \end{Bmatrix} = 25,2 \text{ kN}$$

$$N^{(4)} = \frac{210 \cdot 1000}{10} \{ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0060 \\ -0,0012 \end{Bmatrix} = 25,2 \text{ kN}$$

$$N^{(6)} = \frac{210 \cdot 1000}{14,1421} \{ -0,7071 \ -0,7071 \ 0,7071 \ 0,7071 \} \begin{Bmatrix} 0,0060 \\ -0,0012 \\ 0,0012 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= -37,8 \text{ kN}$$

Kuna siin ülesandes vaadeldaval sõrestikul on kolm toesidet, siis on ta staatikaga määratatu ainult sisejõudude suhtes. Toereaktsioonide suhtes on ta staatikaga määratud. Teame, et staatikaga määratud arvutuskeemis temperatuuri muutus toereaktsioonide ei põhjusta ja järelikult peavad praegu kõik toereaktsioonid olema võrdsed nulliga. Veenume selles arvutusega, milleks kasutame võrrandisüsteemi kolme viimast võrrandit

$$\begin{Bmatrix} F_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4z} \end{Bmatrix} =$$

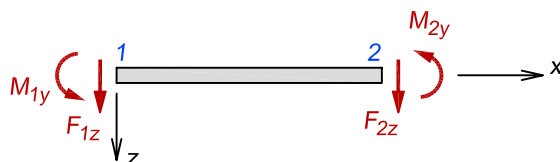
$$= EA \begin{bmatrix} -0,0354 & -0,0354 & 0 & -0,1 & 0,0354 \\ 0 & 0 & -0,0354 & 0,0354 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,0354 & -0,0354 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,0060 \\ -0,0012 \\ 0,0072 \\ -0,0012 \\ 0,0012 \end{Bmatrix} +$$

$$+ EA \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,00042426 \\ -0,00042426 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

18.6. Talaelement

18.6.1. Talaelemendi jäikusmaatriks

Talaelemendil tekib mõlemas otsas kaks sisejõudu: põikjõud ja paindemoment. Joonisel 18.61 on näidatud nende positiivsed suunad. Positiivsed põikjõud on suunatud z -telje positiivses suunas ning momentide positiivne pööre on vastu päeva.



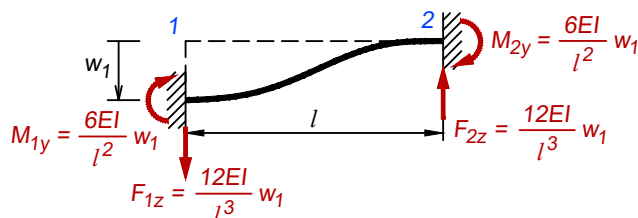
Joonis 18.61. Kinnituskimomentide ja -jõudude positiivsed suunad

Vertikaalsiirete ja pöörete positiivsed suunad on samad nagu sisejõududel.

Kuna horisontaalse talaelemendi kohalik teljestik kattub arvutusskeemi üldteljestikuga, siis järgnevatel teisendustes jätame ära kohaliku teljestiku tähised.

Vaatame üksikhaaval eespool mainitud siirdeid ja leiame, milliseid sisejõudusid need vardas põhjustavad.

Andes varda vasakule otsale vertikaalse siirde w_1 (suund vastavalt selle siirde positiivsele suunale), kui kõik ülejäänud siirded jäävad nulliks, tekivad põikjõud ja paindemomendid vastavalt joonisele 18.62.



Joonis 18.62. Tala vasakpoolse otsa vertikaalsiire

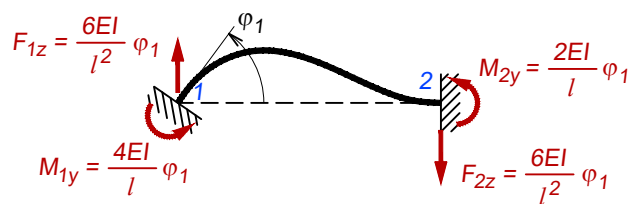
Arvestades joonisel 18.62 näidatud positiivseid suundasid, kirjutame

$$F_{1z} = \frac{12EI}{l^3}w_1; \quad M_1 = -\frac{6EI}{l^2}w_1; \quad F_{2z} = -\frac{12EI}{l^3}w_1; \quad M_2 = -\frac{6EI}{l^2}w_1 \quad (18.192)$$

Kui anname varda vasakule otsale pöörde φ_1 ning samal ajal jäävad ülejäänud siirded nulliks, tekivad põikjõud ja paindemomendid vastavalt joonisele 18.63.

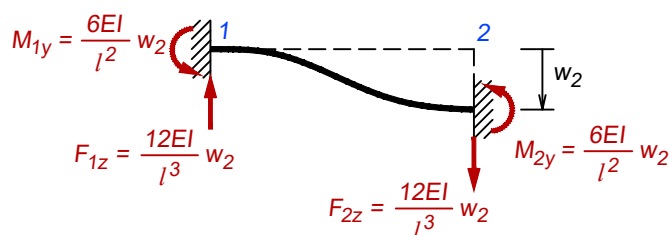
Arvestades joonisel 18.63 näidatud positiivseid suundasid, kirjutame

$$F_{1z} = -\frac{6EI}{l^2}\varphi_1; \quad M_1 = \frac{4EI}{l}\varphi_1; \quad F_{2z} = \frac{6EI}{l^2}\varphi_1; \quad M_2 = \frac{2EI}{l}\varphi_1 \quad (18.193)$$



Joonis 18.63. Tala vasakpoolse otsa pööre

Sarnaselt teeme varda parempoolse otsaga, kus anname sellele vertikaalse siirde w_2 , mille tulemusena saame põikjõud ja paindemomendid, nagu on näidatud joonisel 18.64.

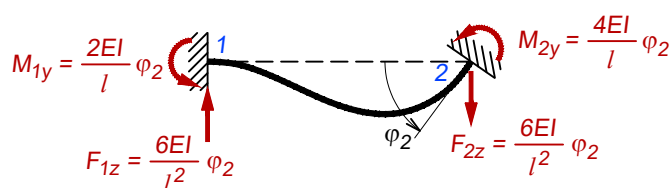


Joonis 18.64. Tala parempoolse otsa vertikaalsiire

Arvestades märke, saame

$$F_{1z} = -\frac{12EI}{l^3} w_2; \quad M_1 = \frac{6EI}{l^2} w_2; \quad F_{2z} = \frac{12EI}{l^3} w_2; \quad M_2 = \frac{6EI}{l^2} w_2 \quad (18.194)$$

Seejärel anname varda parempoolsele otsale pöördet φ_2 , nagu on näidatud joonisel 18.65.



Joonis 18.65. Tala parempoolse otsa pööre

Avaldised õigete märkidega

$$F_{1z} = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_2; \quad M_1 = \frac{2EI}{l} \varphi_2; \quad F_{2z} = \frac{6EI}{l^2} \varphi_2; \quad M_2 = \frac{4EI}{l} \varphi_2 \quad (18.195)$$

Ühendades superpositsiooniprintsiibi alusel kõik leitud avaldised, saame välja kirjutada

võrrandisüsteemi talaelemendi lahendamiseks

$$\begin{aligned}
 F_{1z} &= \frac{12EI}{l^3}w_1 - \frac{6EI}{l^2}\varphi_1 - \frac{12EI}{l^3}w_2 - \frac{6EI}{l^2}\varphi_2 \\
 M_{1y} &= -\frac{6EI}{l^2}w_1 + \frac{4EI}{l}\varphi_1 + \frac{6EI}{l^2}w_2 + \frac{2EI}{l}\varphi_2 \\
 F_{2z} &= -\frac{12EI}{l^3}w_1 + \frac{6EI}{l^2}\varphi_1 + \frac{12EI}{l^3}w_2 + \frac{6EI}{l^2}\varphi_2 \\
 M_{2y} &= -\frac{6EI}{l^2}w_1 + \frac{2EI}{l}\varphi_1 + \frac{6EI}{l^2}w_2 + \frac{4EI}{l}\varphi_2
 \end{aligned} \tag{18.196}$$

mis maatrikskujul kirjutades on järgmine

$$\begin{Bmatrix} F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2z} \\ M_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \tag{18.197}$$

ehk

$$\mathbf{F} = \mathbf{Kd} \tag{18.198}$$

kus

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{18.199}$$

on talaelemendi jäikusmaatriks, \mathbf{d} on siirete vektor ja \mathbf{F} on koormusvektor.

Kui elementide parameetrid on võrdsed, siis võime valemi (18.199) avaldada ka kujul

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{18.200}$$

Kokkuvõtvalt võib jäikusmaatriksi kohta öelda seda, et tema liikmed iseloomustavad elemendis tekkivaid sisejõudusid, kui nendele liikmetele vastavad siirded on nullist erinevad. Näiteks, kui me anname varda vasakpoolsele otsale pöörde φ_1 , siis tekivad vardas sisejõud, mida väljendavad jäikusmaatriksi teise veeru liikmed, kuna teine veerg on seotud mainitud pöördega φ_1 .

18.6.2. Jäikusmaatriksi tuletamine Galjorkini meetodi abil

Võtame aluseks *Euler-Bernoulli tala võrrandi*, mis kujutab endast neljandat järku diferentiaalvõrrandit

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = p(x) \tag{18.201}$$

Otsitavat ligikaudset lahendit eeldame kuuppolünoomina

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (18.202)$$

Edasine lahenduskäik on sarnane peatükis 18.2.2 kirjeldatule ja seetõttu piirdume siin osaliselt lühema kirjeldusega.

Moodustame veafunktsiooni

$$e(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) - p(x) \neq 0 \quad (18.203)$$

Korrutame veafunktsiooni $e(x)$ kaalufunktsiooniga $g(x)$ ning integreerime üle tala pikkuse, mille tulemusena moodustame nõrga formuleeringu

$$\int_0^l e(x)g(x)dx = 0 \quad (18.204)$$

Asetades nüüd nõrga lahendi avaldisse (18.204) veafunktsiooni ja kaalufunktsiooni, saame integraalvõrrandite süsteemi

$$\int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) g(x)dx - \int_0^l p(x)g(x)dx = 0 \quad (18.205)$$

Rakendame avaldise (18.205) esimesele integraalile ositi integreerimist valemiga

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (18.206)$$

Olgu

$$u = g(x); \quad dv = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dx \quad (18.207)$$

siis

$$du = \frac{dg(x)}{dx} dx; \quad v = \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) \quad (18.208)$$

Pärast esimest ositi integreerimist saame

$$g(x) \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{dg(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) - \int_0^l p(x)g(x)dx = 0 \quad (18.209)$$

Teisel integreerimisel arvestame, et

$$u = \frac{dg(x)}{dx}; \quad dv = \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dx \quad \text{ja} \quad du = \frac{d^2g(x)}{dx^2} dx; \quad v = EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (18.210)$$

Pärast teist ositi integreerimist saame

$$g(x) \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) \Big|_0^l - \frac{dg(x)}{dx} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) \Big|_0^l + \int_0^l \frac{d^2g(x)}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dx - \int_0^l p(x)g(x)dx = 0 \quad (18.211)$$

Arvestades, et paindemoment on võrdeline siirde teise tuletisega ja põikjõud paindemomendi tuletisega

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}; \quad Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (18.212)$$

võime avaldise (18.211) asemel kirjutada

$$-g(x)Q(x)|_0^l + g'(x)M(x)|_0^l + \int_0^l \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) dx - \int_0^l p(x)g(x)dx = 0 \quad (18.213)$$

Tala siirdeid aproksimeerime Hermite'i polünoomidega

$$w(x) = \left\{ \begin{matrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \Phi_1 \\ w_2 \\ \Phi_2 \end{matrix} \right\} \quad (18.214)$$

Sarnaselt aproksimeerime kaalufunktsiooni

$$g(x) = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \right\} \quad (18.215)$$

Asendades avaldises (18.213) siirde $w(x)$, kaalufunktsiooni $g(x)$ ning nende tuletised, saame

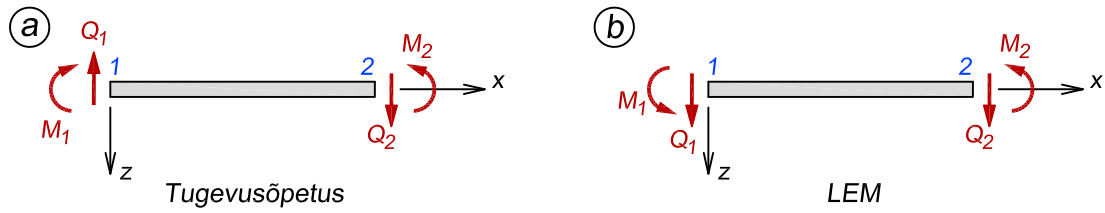
$$\begin{aligned} & g(-Q)|_{x=l} - g(-Q)|_{x=0} - \frac{dg}{dx}(-M)|_{x=l} + \frac{dg}{dx}(-M)|_{x=0} + \\ & + \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \end{matrix} \right\} \int_0^l \left\{ \begin{matrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{matrix} \right\} EI \left\{ \begin{matrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{matrix} \right\} dx \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \Phi_1 \\ w_2 \\ \Phi_2 \end{matrix} \right\} = \\ & = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \end{matrix} \right\} \int_0^l \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \right\} p(x) dx \end{aligned} \quad (18.216)$$

Rajatingimuste puhul arvestame kaalufunktsiooni väärtuseid sõlmedes

$$g(0) = g_1 = a_1; \quad g(l) = g_2 = a_2; \quad g'(0) = g'_1 = -b_1; \quad g'(l) = g'_2 = -b_2 \quad (18.217)$$

mille abil saame avaldise (18.216) esimese nelja liikme asemel kirjutada

$$-a_2 Q_2 + a_1 Q_1 - b_2 M_2 + b_1 M_1 \quad (18.218)$$



Joonis 18.66. Tugevusõpetuse ja LEMi märgireeglitele vastavad positiivsed suunad

Arvestame LEMi märgireeglite erinevust tugevusõpetuse omadest (joonis 18.66), mis muudab varda alguses märgid vastupidiseks

$$-a_2Q_2 - a_1Q_1 - b_2M_2 - b_1M_1 \quad (18.219)$$

ja seega annab avaldis (18.216) meile

$$\begin{aligned}
 & - \{ a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2 \} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \\
 & + \{ a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2 \} \int_0^l \begin{Bmatrix} \frac{d^2N_1}{dx^2} \\ \frac{d^2N_2}{dx^2} \\ \frac{d^2N_3}{dx^2} \\ \frac{d^2N_4}{dx^2} \end{Bmatrix} EI \begin{Bmatrix} \frac{d^2N_1}{dx^2} & \frac{d^2N_2}{dx^2} & \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_4}{dx^2} \end{Bmatrix} dx \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \\
 & = \{ a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2 \} \int_0^l \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} p(x) dx
 \end{aligned} \quad (18.220)$$

Jagades avaldise mõlemad pooled vektoriga $\{ a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2 \}$, saame tulemuseks

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l EI \begin{bmatrix} \frac{d^2N_1}{dx^2} \frac{d^2N_1}{dx^2} & \frac{d^2N_1}{dx^2} \frac{d^2N_2}{dx^2} & \frac{d^2N_1}{dx^2} \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_1}{dx^2} \frac{d^2N_4}{dx^2} \\ \frac{d^2N_2}{dx^2} \frac{d^2N_1}{dx^2} & \frac{d^2N_2}{dx^2} \frac{d^2N_2}{dx^2} & \frac{d^2N_2}{dx^2} \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_2}{dx^2} \frac{d^2N_4}{dx^2} \\ \frac{d^2N_3}{dx^2} \frac{d^2N_1}{dx^2} & \frac{d^2N_3}{dx^2} \frac{d^2N_2}{dx^2} & \frac{d^2N_3}{dx^2} \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_3}{dx^2} \frac{d^2N_4}{dx^2} \\ \frac{d^2N_4}{dx^2} \frac{d^2N_1}{dx^2} & \frac{d^2N_4}{dx^2} \frac{d^2N_2}{dx^2} & \frac{d^2N_4}{dx^2} \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_4}{dx^2} \frac{d^2N_4}{dx^2} \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \\
 & = \int_0^l \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} p(x) dx + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (18.221)$$

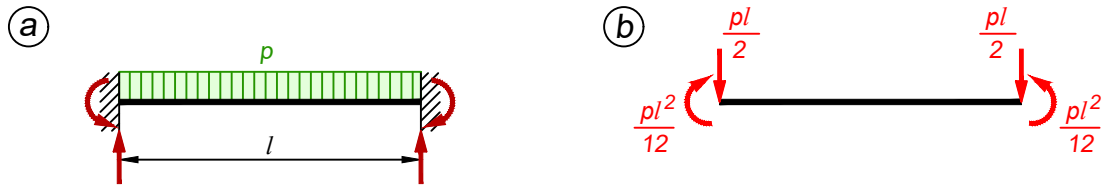
Viime läbi diferentseerimised ja integreerimised. Näitena võtame avaldises (18.221) toodud maatriksist esimese rea esimese veeru elemendi, mis on näidatud hallika taustaga

$$\begin{aligned} \int_0^l EI \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx &= EI \int_0^l \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) \right]^2 dx = \\ &= EI \int_0^l \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right)^2 dx = \frac{12EI}{l^3} \end{aligned} \quad (18.222)$$

Jõudsiame samasuguse tulemuseni, nagu on valemi (18.199) esimese rea esimene liige. Viies läbi näidatud tegevuse kõigi avaldise (18.221) maatriksi elementidega, saame järelikult talaelemendi jäikusmaatriksi. Avaldis (18.221) kujutab endast tavalist võrrandisüsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$. Võrdusmärgist paremal olev integraalimärgi alune liige on seotud lauskoormuse arvestamisega, millest räägime järgnevas peatükis.

18.6.3. Sõlmede vahel koormatud element

Kui talaelement on koormatud sõlmede vahel, siis nimetatakse seda *elementkoormuseks*. Näiteks võib vardal paikneda lauskoormus. Elementkoormus tuleb taandada sõlmpunktidesse, milleks leiame nimetatud koormusest tekkivad reaktsioonid (edaspidi tähistatud \mathbf{F}_0) elemendi otstes (joonis 18.67, a). Saadud väärtused lisame koormusvektori moodustamisel otseselt sõlme rakendatud koormustele ehk elementkoormus läheb arvutamisel arvesse, nagu on näidatud joonisel 18.67, b. Lisareaktsioonide arvutamisel vaatleme elementi eraldiseisva vardana, nagu deformatsioonimeetodi puhulgi.



Joonis 18.67. Elementkoormuse taandamine sõlmedesse

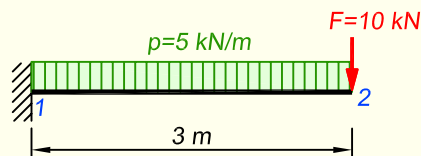
Võtame aluseks avaldise (18.221) võrdusmärgist paremal oleva integraalimärgialuse osa, millele vastavalt peame integreerima Hermite'i kujufunktsioone. Kui elemendil on ühtlane lauskoormus ($p = \text{const.}$), siis kujuneb avaldiseks

$$p \int_0^l \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} dx = p \begin{Bmatrix} \int_0^l N_1 dx \\ \int_0^l N_2 dx \\ \int_0^l N_3 dx \\ \int_0^l N_4 dx \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} \int_0^l \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) dx \\ \int_0^l \left(\frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} - x \right) dx \\ \int_0^l \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) dx \\ \int_0^l \left(\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \right) dx \end{Bmatrix} \quad (18.223)$$

mille tulemusena saame lauskoormuse taandamisel elemendi otstesse sinna rakendatavad sõlmkoormused

$$\begin{Bmatrix} F_{1z,0} \\ M_{1y,0} \\ F_{2z,0} \\ M_{2y,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{pl}{2} \\ -\frac{pl^2}{12} \\ \frac{pl}{2} \\ \frac{pl^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (18.224)$$

NÄIDE 18.21. Moodustada koormusvektor joonisel 18.68 kujutatud konsoolile.



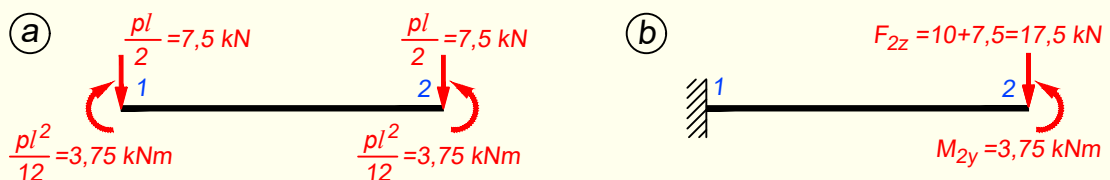
Joonis 18.68. Arvutuskeem

LAHENDUS

Esmalt taandame lauskoormuse sõlmedesse vastavalt valemile (18.224)

$$\begin{Bmatrix} \frac{pl}{2} \\ -\frac{pl^2}{12} \\ \frac{pl}{2} \\ \frac{pl^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7,50 \\ -3,75 \\ 7,50 \\ 3,75 \end{Bmatrix}$$

Saadud tulemus on näha joonisel 18.69, a.

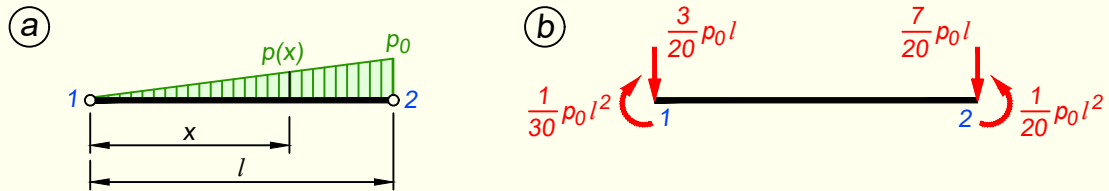


Joonis 18.69. Lauskoormuse taandamine sõlmedesse ning koormusvektori komponendid

Järgnevalt moodustame koormusvektori. Seda teeme joonise 18.69, b abil, kus on näidatud lõplikud sõlmkoormused, mida kasutame selle ülesande lahendamisel. Kuna sõlmes 1 tekivad toereaktsioonid, siis need jäävad koormusvektorisse tundmatutena. Sõlmes 2 peame alge sõlmkoormuse ja lauskoormuse taandamisel saadud koormuse omavahel summeerima

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2z} = 17,5 \\ M_{2y} = 3,75 \end{Bmatrix}$$

NÄIDE 18.22. Taandada joonisel 18.70, *a* kujutatud talaelemendil paiknev kolm-nurkkoormus elemendi otstes paiknevatesse sõlmpunktidesse.



Joonis 18.70. Arvutuskeem ja koormusvektori komponendid

LAHENDUS

Lauskoormuse väärtus elemendi parempoolses otsas on p_0 . Selle kaudu saame avaldada, milline on koormus elemendi suvalises lõikes koordinaadiga x

$$p(x) = \frac{p_0}{l} \cdot x$$

Lauskoormuse taandamiseks sõlmedesse kasutame avaldise (18.221) võrdusmärgist paremale jäävat integraalimärgialust osa

$$\int_0^l \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} p(x) dx = \frac{p_0}{l} \int_0^l x \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} dx$$

kus $N_1 \dots N_4$ on Hermite'i kujufunktsioonid ning $p(x)$ on asendatud eelnevalt tuletatud avaldisega.

Sõlmkoormuste saamiseks teeme järgnevalt ära nõutud integreerimised. Kuna kujufunktsioone on neli, siis peame tegema neli teisendust, millest igaüks annab ühe sõlmkoormuse. Esimese avaldise integreerimise esitame pikemalt kirjutatuna, ülejäänud kolme puhul piirdume lühema esitusviisiga.

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{l} \int_0^l x N_1 dx &= \frac{p_0}{l} \int_0^l x \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) dx = \frac{p_0}{l} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{4l^2} + \frac{2x^5}{5l^3} \right) \Big|_0^l = \\ &= \frac{p_0}{l} \cdot \left(\frac{l^2}{2} - \frac{3l^4}{4l^2} + \frac{2l^5}{5l^3} \right) = \frac{p_0}{l} \cdot \frac{10l^5 - 15l^5 + 8l^5}{20l^3} = \frac{3}{20} p_0 l \end{aligned}$$

$$\frac{p_0}{l} \int_0^l x N_2 dx = \frac{p_0}{l} \int_0^l x \left(\frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} - x \right) dx = \frac{p_0}{l} \left(\frac{2x^4}{4l} - \frac{x^5}{5l^2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^l = -\frac{1}{30} p_0 l^2$$

$$\frac{p_0}{l} \int_0^l x N_3 dx = \frac{p_0}{l} \int_0^l x \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) dx = \frac{p_0}{l} \left(\frac{3x^4}{4l^2} - \frac{2x^5}{5l^3} \right) \Big|_0^l = \frac{7}{20} p_0 l$$

$$\frac{p_0}{l} \int_0^l x N_4 dx = \frac{p_0}{l} \int_0^l x \left(\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \right) dx = \frac{p_0}{l} \left(\frac{x^4}{4l} - \frac{x^5}{5l^2} \right) \Big|_0^l = \frac{1}{20} p_0 l^2$$

Saadud sõlmkoormused on esitatud joonisel 18.70, *b*.

18.6.4. Sisejõud sõlmpunktide kohal

Põikjõud ja paindemomendid talaelemendi otstes saame leida, kasutades avaldist (18.198), millele on lisatud sõlmedevahelisest koormusest tekkivad lisareaktsioonid

$$\mathbf{F} = \mathbf{Kd} + \mathbf{F}_0 \quad (18.225)$$

Selles valemis tuleb jälgida ka vektori \mathbf{F}_0 liikmete märke. Märkide selgitamiseks tuleme tagasi peatüki 18.6.3 juurde, kus oli juttu koormusvektori moodustamisest. Joonisel 18.67, a näitasime lauskoormuse taandamisel sõlmedesse tekkivad reaktsioonid, mis koormusvektorisse kandmisel tuleb ümber pöörata, nagu on kujutatud joonisel 18.67, b. Sisejõudude arvutamisel me neid reaktsioone aga ümber ei pööra ja valemi (18.225) järgi arvutamisel kirjutame vektorisse \mathbf{F}_0 jõud selliste suundadega, nagu need on joonisel 18.67, a.

18.6.5. Siirded ja sisejõud kogu elemendi ulatuses

Eelnevalt oli juttu sisejõudude arvutusest talaelemendi sõlmpunktides, mida sai teha sõlmpunktide siirete abil valemiga (18.225). Selle valemiga ei saa aga leida sõlmedevahelises piirkonnas sisejõudusid, mis muutub oluliseks lauskoormusega koormatud varrastel, kus näiteks paindemomendi epüür on kõverjooneline.

Täpse lahendi saamiseks kasutame Hermite'i interpolatsioonipolünoome, millega saab siirete sõlmväärtustest arvutada siirded kogu elemendi ulatuses ja nende abil paindemomendi ning põikjõu väärtused.

Lauskoormuseta element

Kui elemendil ei ole lauskoormust, saab elemendi punktide siirded arvutada valemiga

$$w(x) = \{ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} \quad (18.226)$$

kus N_1, N_2, N_3 ja N_4 on kujufunktsioonid ehk Hermite'i polünoomid ning w_1, w'_1, w_2, w'_2 on siirded ja pöörded elemendi alguses ja lõpus.

Hermite'i kujufunktsioonid arvutame järgnevatel avaldistega

$$N_1 = 1 - \frac{3\hat{x}^2}{l^2} + \frac{2\hat{x}^3}{l^3}; \quad N_2 = \frac{2\hat{x}^2}{l} - \frac{\hat{x}^3}{l^2} - \hat{x}; \quad N_3 = \frac{3\hat{x}^2}{l^2} - \frac{2\hat{x}^3}{l^3}; \quad N_4 = \frac{\hat{x}^2}{l} - \frac{\hat{x}^3}{l^2} \quad (18.227)$$

mida on täiendatud, võrreldes peatükis 18.3.3 esitatud üldavaldistega. Siin on kasutatud tähistust

$$\hat{x} = x - x_1 \quad (18.228)$$

kus \hat{x} on elemendi kohaliku teljestiku koordinaat, x on arvutuskeemi üldteljestiku koordinaat ja x_1 on elemendi alguspunkti koordinaat üldteljestikus. Selline tähistusviis võimaldab kõiki elementide jaoks siirde avaldised välja kirjutada mitte elemendi kohalikus teljestikus, vaid üldteljestikus koordinaadiga x .

Aga loomulikult saame arvutuse teha ka elementide kohalikes teljestikes, mis sageli osutub lihtsamaks. Nende lahenduskäikude erinevust on kirjeldatud pikemalt näites 18.24 leheküljel 939.

Pärast siirde avaldise tuletamist saab arvutada paindemomendi

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (18.229)$$

ja sellest omakorda põikjõu

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (18.230)$$

Lauskoormusega element

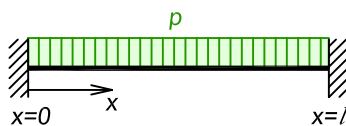
Lauskoormusega elementide puhul ei anna valem (18.226) korrektset tulemust. Selle põhjus peitub lõplike elementide meetodi lahenduskäigus, kus me võrrandisüsteemi koostamisel taandame kõik elementkoormused sõlmedesse koondjõududeks. Seetõttu annab valem (18.226) korrektse lahendi just sellistele koondjõududele.

Lauskoormusega koormatud varrastel tuleb valemile (18.226) juurde liita lauskoormust puudutav osa ja avaldis võtab kuju

$$w(x) = \{ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + w_f \quad (18.231)$$

Valemi liikme w_f tuletamiseks vaatame jäikade otsatügedega ja lauskoormusega koormatud varrast (joonis 18.71) ning kasutame tala diferentsiaalvõrrandit

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - p = 0, \quad \text{kus} \quad 0 < x < l \quad (18.232)$$



Joonis 18.71. Lauskoormusega koormatud jäikade otsatügedega tala

Rajatingimused on

$$w(0) = 0; \quad w'(0) = \varphi(0) = 0; \quad w(l) = 0; \quad w'(l) = \varphi(l) = 0 \quad (18.233)$$

Teisendame avaldise (18.232) kujule

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{EI} \quad (18.234)$$

Kuna see on neljandat järku diferentsiaalvõrrand, tuleb seda neli korda integreerida

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{px}{EI} + C_1 \quad (18.235)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{px^2}{2EI} + C_1 x + C_2 \quad (18.236)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{px^3}{6EI} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (18.237)$$

$$w(x) = \frac{px^4}{24EI} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (18.238)$$

Kaks viimast avaldist on vastavalt pöörde ja siirde arvutamiseks.

Kasutades rajatingimusi $w(0) = 0$ ja $\varphi(0) = w'(0) = 0$, annavad avaldised (18.237) ja (18.238) integreerimiskonstantide C_4 ning C_3 väärtuseks

$$C_4 = 0; \quad C_3 = 0 \quad (18.239)$$

Kahe ülejäänud rajatingimusega $w(l) = 0$ ja $\varphi(l) = w'(l) = 0$ saame avaldise (18.237) ja (18.238) abil välja kirjutada võrrandid

$$\frac{pl^4}{24EI} + C_1 \frac{l^3}{6} + C_2 \frac{l^2}{2} = 0; \quad \frac{pl^3}{6EI} + C_1 \frac{l^2}{2} + C_2 l = 0 \quad (18.240)$$

mille lahendamine annab integreerimiskonstandid C_2 ning C_1

$$C_2 = \frac{pl^2}{12EI}; \quad C_1 = -\frac{pl}{2EI} \quad (18.241)$$

Asetades saadud integreerimiskonstantide väärtused avaldise (18.238)

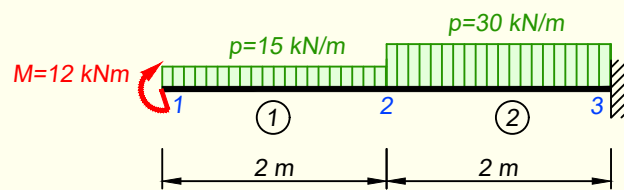
$$w(x) = \frac{px^4}{24EI} - \frac{pl}{2EI} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{pl^2}{12EI} \cdot \frac{x^2}{2} \quad (18.242)$$

saame pärast teisendusi valemi jäikade otsatugedega ja lauskoormusega koormatud tala siirete arvutamiseks

$$w_f(\hat{x}) = \frac{p\hat{x}^2(\hat{x}-l)^2}{24EI} \quad (18.243)$$

kus üldkoordinaat x on asendatud elemendi kohaliku koordinaadiga \hat{x} .

NÄIDE 18.23. Leida joonisel 18.72 kujutatud konsooli sisejõud. EI on konstantne.



Joonis 18.72. Arvutuskeem

LAHENDUS

1. Elementideks ja sõlmpunktideks jagamine

Jagame arvutuskeemi elementideks ja sõlmpunktideks nii, nagu on näidatud joonisel 18.72. Kuna konsool on koormatud kahe erineva lauskoormusega, siis valime elementid nende koormuste järgi. Konsooli keskmises lõikes toimub koormuse muutus ja selle lõike kohalt jagame varda kaheks elementiks pikkusega 2 m.

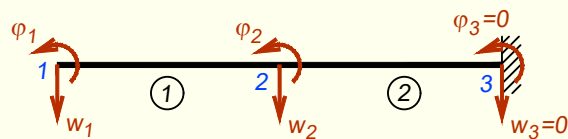
Sõlmi võib nummerdada suvalises järjekorras, aga edasine lahenduskäik on lihtsam, kui teha nummerdamine vasakult paremale.

Kui sõrestikuelemendi puhul pidime määrama ka elementide kohalikud teljestikud, siis talaelemendi jäikusmaatriksi kasutamisel on vaikumisi eelduseks, et elemendi algus on vasakus otsas ja lõpp paremas otsas.

2. Siirete vektor

Ülesande lahendamisel talaelemendiga on sõlmpunktides kaks tundmatut siiret: vertikaalsiire w ja pööre φ .

Joonisel 18.73 on kujutatud siirete vektori komponendid. Siirete vektori koostamiseks käime järjest läbi kõik sõlmed ja märgime igasse sõlme mõlemad komponendid.



Joonis 18.73. Siirete vektori komponendid

Positiivne suund on vertikaalsiirdel alla ning pöördel vastupäeva. Joonisel kujutame kõik siirded positiivsete suundadega.

Siirded märgime vektorisse vastavalt sõlmede nummerdamise järjekorrale. Igas sõlmes tuleb esimesena kirja panna vertikaalsiire w ja seejärel pööre φ . Nende järjekord on ära määratud talaelemendi jäikusmaatriksiga ja seetõttu ei tohi neid ära vahetada.

Osa siiretest on meil juba teada, kuna toesidemetele vastavaid siirdeid ei saa toimuda.

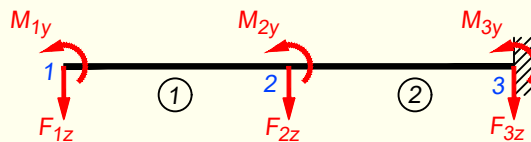
Näiteks on kolmandas sõlmes jäik tugi, kus on takistatud nii vertikaalsiire kui ka pööre. Teadaolevad nullsiirded märgime siirete vektorisse.

Joonise 18.73 abil moodustame siirete vektori

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

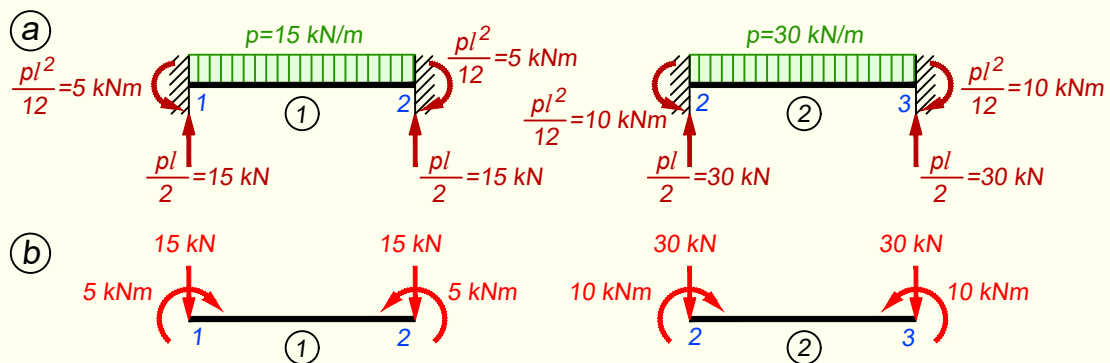
3. Koormusvektor

Koormusvektori komponendid peavad täpselt vastama siirete vektori komponentidele. Seetõttu märgime igasse sõlme kaks komponenti (joonis 18.74). Vertikaalsiirdele vastab vertikaalne jõud ning pöördel vastab moment. Jõudude positiivsed suunad vastavad siirete positiivsetele suundadele ja momendi positiivne suund vastab pöördel suunale.



Joonis 18.74. Koormusvektori komponendid

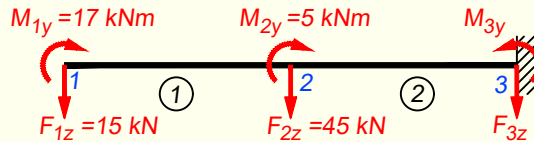
Lauskoormus tuleb taandada vastava elemendi otstes olevatesse sõlmedesse sõlmekoormusteks. Selleks arvutame lauskoormusest tekkivad reaktsioonid mõlema elemendi otstes, kasutades joonisel 18.75, a näidatud skeeme.



Joonis 18.75. Lauskoormuse taandamine sõlmedesse

Reaktsioonid leiame igal juhul jäikade otstega skeemi järgi, sõltumata sellest, milline on elemendi otste kinnitus arvutusskeemis. Leitud reaktsioonidel tuleb lõplike sõlm-

koormuste saamiseks suunad ümber pöörata, nagu on näidatud joonisel 18.75, b. Koormusvektori liikmed, arvestades lauskoormuse taandamisel saadud sõlmkoormuseid ning konsooli otsa rakendatud momenti, on esitatud joonisel 18.76.



Joonis 18.76. Konsoolile mõjuvad sõlmkoormused

Joonisel 18.76 on momentide nooled esitatud õigete suundadega ja seetõttu ei ole arvulisele väärtusele märki ette pandud. Kuna momendid pööravad päripäeva, siis sellest tulenev miinusmärk on lisatud koormusvektorisse. Elemendi 2 parempoolseid reaktsioone me koormusvektorisse ei kasuta, kuna need kattuvad arvutusskeemi tundmatute toereaktsioonidega. Elemendi 2 parempoolsed reaktsioonid võtame arvesse alles ülesande lõpus sisejõudude ja toereaktsioonide arvutuses. Koormusvektoriks saame

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1z} = 15 \\ M_{1y} = -17 \\ F_{2z} = 45 \\ M_{2y} = -5 \\ F_{3z} \\ M_{3y} \end{Bmatrix}$$

kus F_{3z} ja M_{3y} tähistavad tundmatuid toereaktsioone, mis on sõlmpunktile 3 väliskoormuseks.

4. Elementide jäikusmaatriksid

Kuna vaadeldavas ülesandes on elemendid konstantse paindejäikusega EI ja ka elementide pikkused on võrdsed, siis kasutame jäikusmaatriksite koostamiseks valemit (18.200)

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Nii saame elementide jäikusmaatriksiteks

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} w_1 & \varphi_1 & w_2 & \varphi_2 \\ 12 & -12 & -12 & -12 \\ -12 & 16 & 12 & 8 \\ -12 & 12 & 12 & 12 \\ -12 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{matrix}; \quad \mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} w_2 & \varphi_2 & w_3 & \varphi_3 \\ 12 & -12 & -12 & -12 \\ -12 & 16 & 12 & 8 \\ -12 & 12 & 12 & 12 \\ -12 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{matrix}$$

Elemendi jäikusmaatriksi read ja veerud tähistame elemendi alguse ja lõpu siiretega. Tähistamise teeme selliselt, et jäikusmaatriksi kaks esimest rida ja veergu on seotud elemendi alguse siiretega. Kaks viimast rida ja veergu on seotud elemendi lõpu siiretega.

5. Konstruksiooni jäikusmaatriks

Konstruksiooni jäikusmaatriksi moodustamiseks selgitame esmalt välja selle suuruse, mille saame teada sõlmpunktide siirete arvu järgi. Jooniselt 18.73 näeme, et kolmes sõlmpunktis on kokku kuus siiret ja seetõttu peab konstruksiooni jäikusmaatriks olema 6×6 maatriks. Tähistame maatriksi read ja veerud sõlmpunktide siiretega selliselt, et nende järjekord vastab siirete vektori liikmete järjekorrale. Ridade ja veergude tähistega järgi tõstame elementide jäikusmaatriksid konstruksiooni jäikusmaatriksisse.

Saame konstruksiooni jäikusmaatriksi

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} w_1 & \varphi_1 & w_2 & \varphi_2 & w_3 & \varphi_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & -12 & -12 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 16 & 12 & 8 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 24 & 0 & -12 & -12 \\ -12 & 8 & 0 & 32 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} & \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

6. Võrrandisüsteem

Moodustame võrrandisüsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & -12 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 16 & 12 & 8 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 24 & 0 & -12 & -12 \\ -12 & 8 & 0 & 32 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1z} = 15 \\ M_{1y} = -17 \\ F_{2z} = 45 \\ M_{2y} = -5 \\ F_{3z} \\ M_{3y} \end{Bmatrix}$$

Võrrandisüsteemi lahendamiseks eraldame tundmatutele siiretele vastava osa ehk neli esimest võrrandit. Nullsiirete tõttu kaovad ära kõigi võrrandite kaks viimast liiget ja jäävad alles need liikmed, mis eelnevas avaldises on näidatud hallika taustaga.

Võrrandisüsteem lõplikul kujul on

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & -12 & -12 \\ -12 & 16 & 12 & 8 \\ -12 & 12 & 24 & 0 \\ -12 & 8 & 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ -17 \\ 45 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame sõlmpunktide siirded

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{l^3}{EI} \begin{pmatrix} 56,75 \\ 16,50 \\ 22,00 \\ 17,00 \end{pmatrix}$$

7. Elementide sisejõud

Sisejõud üksikutes elementides leiame valemiga (18.225)

$$\mathbf{F} = \mathbf{Kd} + \mathbf{F}_0$$

Siirete vektoris \mathbf{d} peame kasutama vastava elemendi alguse ja lõpu siirdeid.

Elemendi 1 sisejõud on

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= \begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{(1)}\mathbf{d} + \mathbf{F}_0^{(1)} = \\ &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & -12 & -12 \\ -12 & 16 & 12 & 8 \\ -12 & 12 & 12 & 12 \\ -12 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \frac{l^3}{EI} \begin{pmatrix} 56,75 \\ 16,50 \\ 22,00 \\ 17,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ -15 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -30 \\ -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kus vektori \mathbf{F}_0 liikmete märgid määrame joonise 18.75, a abil.

Elemendi 2 sisejõud on

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(2)} &= \begin{pmatrix} Q_2 \\ M_2 \\ Q_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{d} + \mathbf{F}_0^{(2)} = \\ &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & -12 & -12 \\ -12 & 16 & 12 & 8 \\ -12 & 12 & 12 & 12 \\ -12 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \frac{l^3}{EI} \begin{pmatrix} 22,00 \\ 17,00 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ 10 \\ -30 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \\ -90 \\ -138 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ordinaatide kandmisel epüüridele (joonis 18.77) peame arvestama sellega, et sisejõudude vektorites $\mathbf{F}^{(1)}$ ja $\mathbf{F}^{(2)}$ ühtivad märgid lõplike ordinaatide märkidega elemendi lõpus. See tähendab, et elemendi alguses tuleb märgid ära vahetada ja elemendi lõpus jäävad märgid muutumatuks. Lõplikeks ordinaatideks saame seetõttu

$$Q_1^{(1)} = 0; \quad M_1^{(1)} = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad Q_2^{(1)} = -30 \text{ kN}; \quad M_2^{(1)} = -18 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Q_2^{(2)} = -30 \text{ kN}; \quad M_2^{(2)} = -18 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad Q_3^{(2)} = -90 \text{ kN}; \quad M_3^{(2)} = -138 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

8. Toereaktsioonid

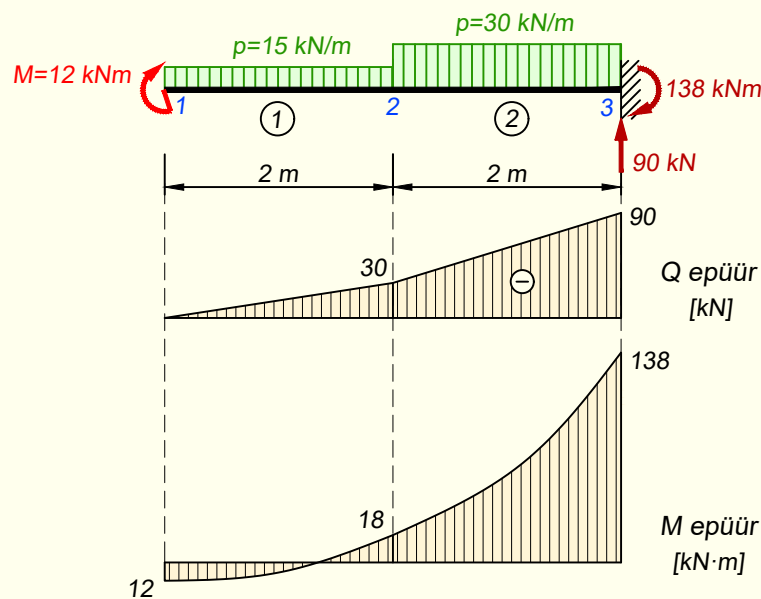
Toereaktsioonide saamiseks kasutame võrrandisüsteemi kahte viimast võrrandit ja leitud siirdeid. Nullsiirete tõttu kaovad ära nendest kahest võrrandist kaks viimast liiget.

Kuna arvutuskeem sisaldab lauskoormust, tuleb selle reaktsioonid siin ka arvesse võtta sarnaselt sisejõudude arvutusele. Selleks on vaja võrrandisüsteemi kordajate maatriksi ja leitud siirete vektori korrutisele juurde liita lauskoormuse reaktsioonid, mille märgid määrame joonise 18.75, a abil.

$$\begin{Bmatrix} F_{3z} \\ M_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & 8 \end{bmatrix} \frac{l^3}{EI} \begin{Bmatrix} 56,75 \\ 16,50 \\ 22,00 \\ 17,00 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -30 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

Saame toereaktsioonid (joonis 18.77)

$$F_{3z} = -90 \text{ kN}; \quad M_{3y} = -138 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



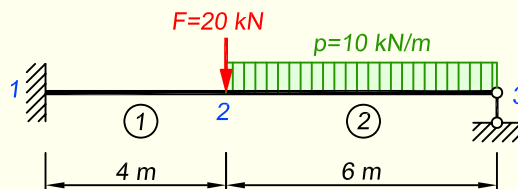
Joonis 18.77. Toereaktsioonid ning põikjõu ja paindemomendi epüürid

9. Staatikaline kontroll

Staatikalise kontrolli tegemisel kirjutame jõudude tasakaalu tingimuse vertikaalteljele ning momentide tasakaalu tingimuse arvutuskeemi mingi punkti suhtes

$$\begin{aligned} \sum Z &= 15 \cdot 2 + 30 \cdot 2 - 90 = 0; \\ \sum M_3 &= 15 \cdot 2 \cdot 3 + 30 \cdot 2 \cdot 1 - 12 - 138 = 0 \end{aligned}$$

NÄIDE 18.24. Leida joonisel 18.78 kujutatud tala sisejõud. Tuletada talale vertikaalsiirde $w(x)$ avaldised ja esitada vertikaalsiirde graafik. Tala materjali elastsusmoodul on $E = 210 \text{ GPa}$, ristlõike inertsimoment on $I = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$.



Joonis 18.78. Arvutuskeem

LAHENDUS

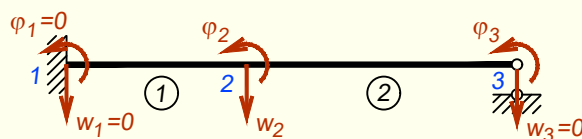
1. Elementideks ja sõlmpunktideks jagamine

Jagame tala elementideks ja sõlmpunktideks, nagu on näidatud joonisel 18.78. Arvutuskeem koosneb kahest elemendist, millest üks ulatub vasakust toest kuni koondjõuni ja teine koondjõust kuni parempoolse toeni. Koondjõud $F = 20 \text{ kN}$ paikneb sõlmes 2 ja on sõlmkoormuseks. Lauskoormus $p = 10 \text{ kN/m}$ on rakendatud elemendile 2 ja on elementkoormuseks.

Üldjuhul ongi mõistlik paigutada sõlmpunktid koondjõudude alla, et saaks neid arvestada sõlmkoormustena. Kui koondjõu all sõlmpunkti ei ole, siis läheb ta arvesse elementkoormusena sarnaselt lauskoormusele. Sel juhul tuleb see jõud taandada elemendi otsmistesse sõlmpunktidesse samuti sarnaselt lauskoormusele.

2. Siirete vektor

Kuna ülesande lahendamisel kasutame talaelementi, siis on tundmatuteks sõlmpunktide vertikaalsiirded ja pöörded. Tundmatud on esitatud joonisel 18.79, kus vertikaalsiirete tähis on w ning pööretel φ .



Joonis 18.79. Siirete vektori komponendid

Siirete vektori komponendid märgime joonisele positiivsete suundadega: vertikaalsiirded suunaga ülevalt alla ja pöörded suunatuna vastupäeva.

Osa siiretest on meil juba teada, kuna toesidemete suunas ei saa siirded toimuda. Siin ülesandes on vasak tugi jäik, mistõttu ei saa seal toimuda ei vertikaalsiiret ega pööret. Tala parempoolses otsas on liikuv liigendtugi, mis ei lase sellel sõlmpunktil vertikaal-

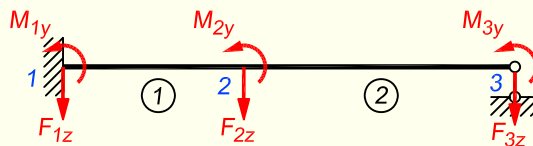
suunas liikuda. Samas aga pööre on sellel toel lubatud. Kõik teadaolevad nullsiirded märgime ka siirete vektorisse.

Joonise 18.79 abil moodustame siirete vektori

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

3. Koormusvektor

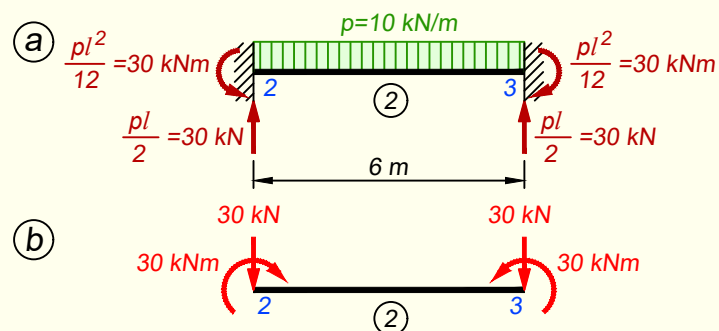
Kuna koormusvektor peab olema täpses vastavuses siirete vektoriga, siis märgime igasse sõlme kaks komponenti, millest üks on vertikaalne jõud ja teine on moment (joonis 18.80). Vertikaalse jõu positiivne suund on alla ja momendil vastupäeva.



Joonis 18.80. Koormusvektori komponendid

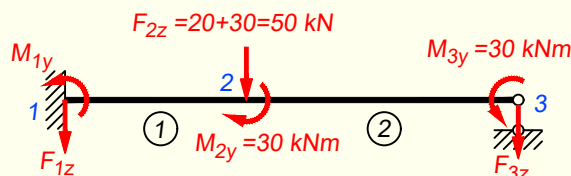
Koormusvektori moodustamiseks peame teadma sõlmkoormuste väärtuseid. Otse sõlme rakendatud koormuse $F = 20 \text{ kN}$ saame kanda kohe koormusvektorisse. Elementkoormusest $p = 10 \text{ kN/m}$ tuleb esmalt leida sõlmedes tekkivad reaktsioonid, mida teeme tavapärase deformatsioonimeetodi puhul kasutatavate valemitega.

Taandame elemendil 2 paikneva lauskoormuse sõlmedesse 2 ja 3, lähtudes joonisest 18.81, a. Sõltumata elemendi otste tegelikust kinnitusest kasutame siin alati jäikade otstega arvutuskeemi. Lõplike sõlmkoormuste saamiseks pöörame reaktsioonide suunad ümber (joonis 18.81, b).



Joonis 18.81. Lauskoormuse taandamine sõlmedesse

Joonisel 18.82 on näidatud lõplikud sõlmkoormused, mille kanname koormusvektorisse. Kuna elemendi 2 parempoolne reaktsioon on teadaoleva nullsiirde $w_3 = 0$ suunaline, siis seda me koormusvektoris ei kasuta.



Joonis 18.82. Talale mõjuvad sõlmkoormused

Teadaolevad jõud märgime joonisele nende tegelike suundadega ja seetõttu me joonisel ühelegi arvulisele väärtusele märki ette ei pane. Märgid lisame koormusvektorisse vastavalt jõudude suundadele joonisel.

Koormusvektoriks saame

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2z} = 50 \\ M_{2y} = -30 \\ F_{3z} \\ M_{3y} = 30 \end{Bmatrix}$$

kus F_{1z} , M_{1y} ja F_{3z} on tundmatud toereaktsioonid. Kuna F_{2z} ja M_{3y} on positiivsete suundadega, siis lähevad need koormusvektorisse ka positiivsetena. Moment M_{2y} pöörab aga päripäeva, mistõttu tema tuleb koormusvektorisse kirjutada miinusemärgiga.

Võrdleme siirete ja koormusvektorit ning kontrollime, kas on täidetud nõue, mille kohaselt ei tohi sama rea peal olla mõlema vektori liikmed korruga tundmatud ega ka korruga teadaolevad. Näeme, et siirete vektoris on esimesel, teisel ja viiendal real teadaolevad nullsiirded ja neile vastavad koormusvektoris tundmatud toereaktsioonid. Siirete vektoris on kolmandal, neljandal ja kuuendal real tundmatud siirded ja neile vastavad koormusvektoris teadaolevad jõud. Järelikult on need kaks vektorit teineteisega vastavuses.

4. Elementide jäikusmaatriksid

Elementide jäikusmaatriksid arvutame valemiga (18.199)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Elementide jäikusmaatriksiteks saame

$$\mathbf{K}^{(1)} = 10^2 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & \varphi_1 & w_2 & \varphi_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 70,875 & -141,75 & -70,875 & -141,75 \\ -141,75 & 378,00 & 141,75 & 189,00 \\ -70,875 & 141,75 & 70,875 & 141,75 \\ -141,75 & 189,00 & 141,75 & 378,00 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = 10^2 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_2 & \varphi_2 & w_3 & \varphi_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 21 & -63 & -21 & -63 \\ -63 & 252 & 63 & 126 \\ -21 & 63 & 21 & 63 \\ -63 & 126 & 63 & 252 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array}$$

Mõlema elemendi jäikusmaatriksi read ja veerud tähistame vastava elemendi alguses ja lõpus olevate sõlmpunktide siirete tähistega. Jäikusmaatriksi kaks esimest rida ja veergu on seotud elemendi algusega ning kaks viimast rida ja veergu elemendi lõpuga.

5. Konstruktsiooni jäikusmaatriks

Jooniselt 18.79 näeme, et sõlmpunktides esinevaid siirdeid on kokku kuus. Järelikult peab konstruktsiooni jäikusmaatriks olema 6×6 maatriks.

Nüüd tähistame konstruktsiooni jäikusmaatriksi read ja veerud sõlmpunktide siirete tähistega. Ridade ja veergude tähiste abil tõstame elementide jäikusmaatriksite liikmed konstruktsiooni jäikusmaatriksisse.

Nii saame konstruktsiooni jäikusmaatriksiks

$$\mathbf{K} = 10^2 \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} w_1 & \varphi_1 & w_2 & \varphi_2 & w_3 & \varphi_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 70,875 & -141,75 & -70,875 & -141,75 & 0 & 0 \\ -141,75 & 378 & 141,75 & 189 & 0 & 0 \\ -70,875 & 141,75 & 91,875 & 78,75 & -21 & -63 \\ -141,75 & 189 & 78,75 & 630 & 63 & 126 \\ 0 & 0 & -21 & 63 & 21 & 63 \\ 0 & 0 & -63 & 126 & 63 & 252 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array}$$

6. Võrrandisüsteem

Koostame võrrandisüsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$10^2 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 70,875 & -141,75 & -70,875 & -141,75 & 0 & 0 \\ -141,75 & 378 & 141,75 & 189 & 0 & 0 \\ -70,875 & 141,75 & 91,875 & 78,75 & -21 & -63 \\ -141,75 & 189 & 78,75 & 630 & 63 & 126 \\ 0 & 0 & -21 & 63 & 21 & 63 \\ 0 & 0 & -63 & 126 & 63 & 252 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2z} = 50 \\ M_{2y} = -30 \\ F_{3z} \\ M_{3y} = 30 \end{array} \right\}$$

Võrrandisüsteemi lahendamiseks eraldame tundmatutele siiretele w_2 , φ_2 ja φ_3 vastavad võrrandid ehk 3., 4. ja 6. võrrandi. Nullsiirete tõttu kaovad võrranditest ära 1., 2. ja 5. liige ning alles jäävad need liikmed, mis eelnevas avaldises on näidatud hallika taustaga.

$$10^2 \begin{bmatrix} 91,875 & 78,75 & -63 \\ 78,75 & 630 & 126 \\ -63 & 126 & 252 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ -30 \\ 30 \end{Bmatrix}$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame sõlmpunktide siirded

$$w_2 = 0,012114 \text{ m}; \quad \varphi_2 = -0,003149 \text{ rad}; \quad \varphi_3 = 0,005794 \text{ rad}$$

7. Elementide sisejõud

Sisejõud üksikutes elementides leiame avaldisega (18.225)

$$\mathbf{F} = \mathbf{Kd} + \mathbf{F}_0$$

Siirete vektoris \mathbf{d} peame kasutama vastava elemendi alguse ja lõpu siirdeid.

Vektori \mathbf{F}_0 liikmete märkide valimisel tuleb lähtuda reaktsioonide suundadest joonisel 18.81, a.

Elemendi 1 sisejõudude arvutamisel kaob valemist (18.225) ära liige \mathbf{F}_0 , kuna sellel elemendil pole elementkoormust ja seetõttu puuduvad ka reaktsioonid.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{d}^{(1)} = \\ &= 10^2 \begin{bmatrix} 70,875 & -141,75 & -70,875 & -141,75 \\ -141,75 & 378,00 & 141,75 & 189,00 \\ -70,875 & 141,75 & 70,875 & 141,75 \\ -141,75 & 189,00 & 141,75 & 378,00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,012114 \\ -0,003149 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -41,22 \\ 112,20 \\ 41,22 \\ 52,68 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Elemendi 2 sisejõududeks saame

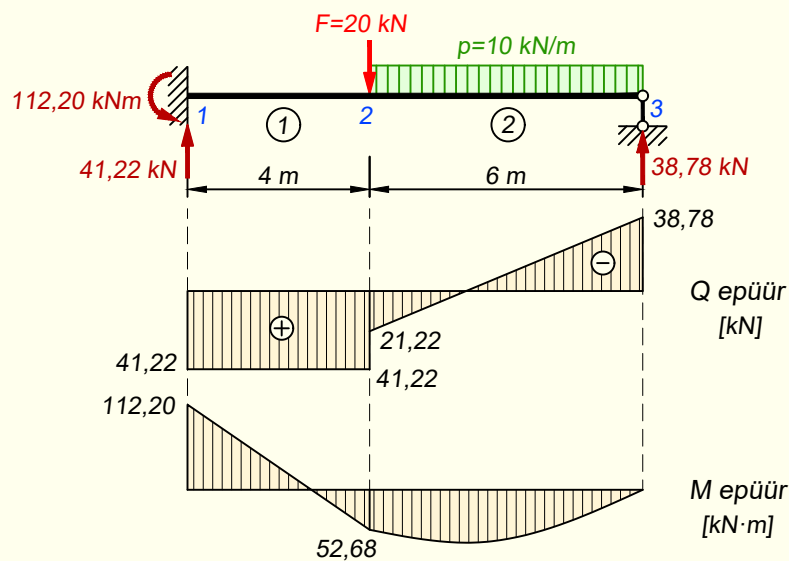
$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(2)} &= \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \\ Q_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{d}^{(2)} + \mathbf{F}_0^{(2)} = \\ &= 10^2 \begin{bmatrix} 21 & -63 & -21 & -63 \\ -63 & 252 & 63 & 126 \\ -21 & 63 & 21 & 63 \\ -63 & 126 & 63 & 252 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,012114 \\ -0,003149 \\ 0 \\ 0,005794 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -30 \\ 30 \\ -30 \\ -30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21,22 \\ -52,68 \\ -38,78 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Saadud tulemuste abil koostame talale sisejõudude epüürid (joonis 18.83). Sisejõudude lõplike märkide kindlakstegemisel pöörame tähelepanu märgireeglitele ja sellele,

kumma varda otsaga on tegemist. Sisejõudude vektorites $\mathbf{F}^{(1)}$ ja $\mathbf{F}^{(2)}$ ühtivad märgid lõplike ordinaatide märkidega elemendi lõpus. Seetõttu vahetame elemendi alguses märgid ära ja elemendi lõpus jäätame nad samaks. Lõplikeks ordinaatideks saame seetõttu

$$Q_1^{(1)} = 41,22 \text{ kN}; \quad M_1^{(1)} = -112,20 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad Q_2^{(1)} = 41,22 \text{ kN}; \quad M_2^{(1)} = 52,68 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Q_2^{(2)} = 21,22 \text{ kN}; \quad M_2^{(2)} = 52,68 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad Q_3^{(2)} = -38,78 \text{ kN}; \quad M_3^{(2)} = 0$$



Joonis 18.83. Toereaktsioonid ning põikjõu ja paindemomendi epüürid

8. Toereaktsioonid

Toereaktsioonide leidmiseks kasutame võrrandisüsteemi 1., 2. ja 5. võrrandit, leitud siirdeid ning ka lauskoormuse reaktsioone. Neist viimasena mainitud märgime järgnevas avaldises kõige parempoolsemasse vektorisse vastavalt otsitavatele toereaktsioonidele. Kuna F_{1z} ja M_{1y} on esimese elemendi vasakpoolsed reaktsioonid, aga sellel elemendil puudub elementkoormus, siis ka need liikmed on elementkoormuse reaktsioonide vektoris nullid. F_{3z} on toereaktsioon teise elemendi parempoolses otsas ja sellele vastava elementkoormuse reaktsiooni leiame jooniselt 18.81, a.

$$\begin{Bmatrix} F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{3z} \end{Bmatrix} = 10^2 \begin{bmatrix} -70,875 & -141,75 & 0 \\ 141,75 & 189 & 0 \\ -21 & 63 & 63 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,012114 \\ -0,003149 \\ 0,005794 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix}$$

Saame toereaktsioonid (joonis 18.83)

$$F_{1z} = -41,22 \text{ kN}; \quad M_{1y} = 112,20 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad F_{3z} = -38,78 \text{ kN}$$

9. Staatikaline kontroll

Staatikalise kontrolli tegemisel kirjutame jõudude tasakaalu tingimuse vertikaalteljele ning momentide tasakaalu tingimuse arvutuskeemi ühe punkti suhtes

$$\sum Z = 20 + 10 \cdot 6 - 41,22 - 38,78 = 0;$$

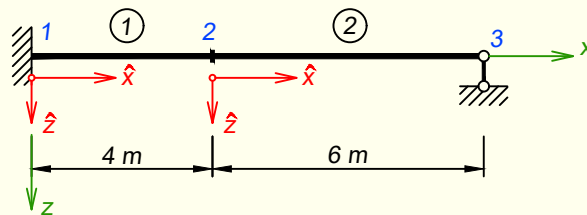
$$\sum M_3 = 20 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 3 - 41,22 \cdot 10 + 112,20 = 0$$

10. Vertikaalsiirde $w(x)$ avaldised

Eespool esitatud arvutus andis siirete ja sisejõudude väärtused sõlmpunktides. Vertikaalsiirde ja sisejõudude väärtused kogu arvutuskeemi ulatuses saab, kui kasutame Hermite'i interpolatsioonifunktsioone.

Meil ei piisa tala deformeerunud kuju esitamiseks ainult ühest avaldisest, kuna iga elemendi ulatuses kirjeldab tala deformeerumist erinev funktsioon. Seetõttu tuleb $w(x)$ avaldised tuletada eraldi igale elemendile.

Siirete avaldiste tuletamisel tuleb tähelepanu pöörata ka teljestikele, sest siin on oluline, kas me soovime $w(x)$ avaldised esitada elementide kohalikes teljestikes või arvutuskeemi üldteljestikus. Järgnevalt vaatame mõlemat varianti. Ülevaatlikkuse huvides on kõik need teljestikud näidatud joonisel 18.84.



Joonis 18.84. Arvutuses kasutatavad teljestikud. Punasega on näidatud elementide kohalikud $\hat{x}\hat{z}$ -teljed, rohelisega aga arvutuskeemi üldine xz -teljestik

11. Elemendi I vertikaalsiirde avaldis ja graafik

Vertikaalsiirde arvutame elemendis I vastavalt valemile (18.226)

$$w(x) = \{ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix}$$

Hermite'i kujufunktsioonid arvutame avaldistega (18.227)

$$N_1 = 1 - \frac{3\hat{x}^2}{l^2} + \frac{2\hat{x}^3}{l^3}; \quad N_2 = \frac{2\hat{x}^2}{l} - \frac{\hat{x}^3}{l^2} - \hat{x}; \quad N_3 = \frac{3\hat{x}^2}{l^2} - \frac{2\hat{x}^3}{l^3}; \quad N_4 = \frac{\hat{x}^2}{l} - \frac{\hat{x}^3}{l^2}$$

Arvutuseks vajalikud parameetrid on järgmised:

Vasakpoolne otsasõlm: $x_1 = 0$; parempoolne otsasõlm: $x_2 = 4$ m;

Kohalik koordinaat: $\hat{x} = x - x_1 = x$; elemendi pikkus: $l = 4$ m.

Elemendi I puhul ei ole vaja teljestikele mõelda, kuna selle elemendi kohaliku teljestiku alguspunkt kattub üldteljestiku alguspunktiga. Seetõttu saame, et $\hat{x} = x$.

Allpool olevast elemendi I siirete vektorist $\mathbf{d}^{(1)}$ näeme, et kaks esimest liiget selles võrduvad nulliga. Seetõttu ei ole meil vajadust arvutada kujufunktsioone N_1 ja N_2 , kuna valemi (18.226) järgi tuleks need järgmiseks nulliga läbi korrutada. Seetõttu piirdume kujufunktsioonide N_3 ja N_4 arvutamisega

$$N_3 = \frac{3x^2}{16} - \frac{2x^3}{64} = 0,1875x^2 - 0,03125x^3$$

$$N_4 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{16} = 0,25x^2 - 0,0625x^3$$

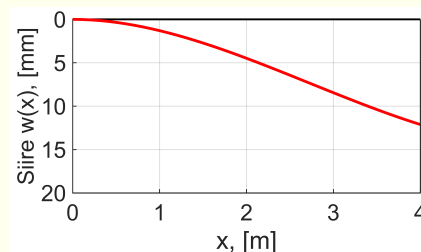
Arvestades, et esimese elemendi siirete vektor on

$$\mathbf{d}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,012114 \\ -0,003149 \end{Bmatrix}$$

saame siirde avaldiseks

$$\begin{aligned} w(x) &= \{ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,012114 \\ -0,003149 \end{Bmatrix} = \\ &= (0,1875x^2 - 0,03125x^3) \cdot 0,012114 - (0,25x^2 - 0,0625x^3) \cdot 0,003149 = \\ &= 0,002271375x^2 - 0,000378563x^3 - 0,00078725x^2 + 0,000196813x^3 = \\ &= -0,00018175x^3 + 0,00148413x^2 \end{aligned}$$

Elemendi I vertikaalsiirde graafik ehk selle elemendi deformeerunud kuju on esitatud joonisel 18.85.



Joonis 18.85. Elemendi I vertikaalsiirde $w(x)$ graafik

Siirde $w(x)$ abil saame valemiga (18.229)

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

välja arvutada paindemomendi avaldise

$$\begin{aligned} M(x) &= -210 \cdot 10^6 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} (-0,0010905x + 0,0029683) = \\ &= -37800 \cdot (-0,0010905x + 0,0029683) = 41,22x - 112,20 \end{aligned}$$

Paindemomendi tuletis annab põikjõu

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = 41,22$$

Kuna elemendil l puudub elementkoormus, siis on põikjõud kogu elemendi ulatuses konstantne, mida on näha ka saadud avaldisest.

12. Elemendi 2 vertikaalsiirde avaldis ja graafik (variant 1)

Vertikaalsiirde arvutame lauskoormusega elemendis 2 vastavalt valemile (18.231)

$$w(x) = \{ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{Bmatrix} + w_f$$

Arvutuseks vajalikud parameetrid on järgmised:

Vasakpoolne otsasõlm: $x_2 = 4$ m; parempoolne otsasõlm: $x_3 = 10$ m;

Kohalik koordinaat: $\hat{x} = x - x_2 = x - 4$; elemendi pikkus: $l = 6$ m.

Elemendi 2 kohaliku teljestiku alguspunkt ei kattu arvutuskeemi üldteljestiku alguspunktiga. Selleks, et tuletada $w(x)$ avaldis üldkoordinaatides, tuleb meil teljestikud omavahel ära siduda, mida tegime eelnevalt avaldisega $\hat{x} = x - 4$.

Arvutame kujufunktsioonid, millest jätame ära N_3 , kuna seda meil edaspidi vaja ei lähe siirete vektori (esitatud allpool) kolmandal real oleva nullsiirde tõttu.

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3(x-4)^2}{36} + \frac{2(x-4)^3}{216}; & N_2 &= \frac{2(x-4)^2}{6} - \frac{(x-4)^3}{36} - x + 4 \\ N_4 &= \frac{(x-4)^2}{6} - \frac{(x-4)^3}{36} \end{aligned}$$

Arvestades, et teise elemendi siirete vektor on

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0,012114 \\ -0,003149 \\ 0 \\ 0,005794 \end{Bmatrix}$$

saame siirde avaldiseks

$$w(x) = \{ N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \} \begin{Bmatrix} 0,012114 \\ -0,003149 \\ 0 \\ 0,005794 \end{Bmatrix} + w_f = \dots =$$

$$= 0,000038695x^3 - 0,00155784x^2 + 0,01375436x - 0,02045448 + w_f$$

Kuna element 2 on koormatud lauskoormusega, siis peame leidma valemist (18.243) saadava osa

$$w_f(\hat{x}) = \frac{p\hat{x}^2(\hat{x}-l)^2}{24EI}$$

Asetame meie ülesande väärtused nimetatud valemisse

$$w_f(x) = \frac{10 \cdot (x-4)^2(x-4-6)^2}{24 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4}} = \frac{(x-4)^2(x-10)^2}{90720}$$

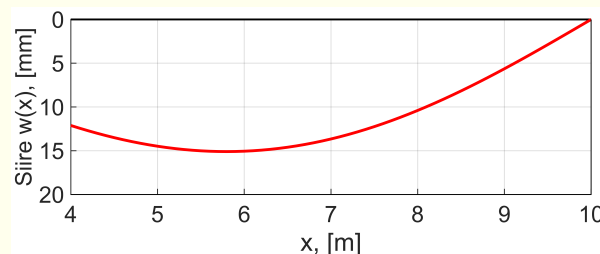
Lõplikuks siirde avaldiseks kujuneb

$$w(x) = 0,000038695x^3 - 0,00155784x^2 + 0,01375436x - 0,02045448 +$$

$$+ \frac{(x-4)^2(x-10)^2}{90720} =$$

$$= 0,000011023x^4 - 0,000269947x^3 + 0,001484488x^2 + 0,001408681x - 0,002817796$$

mis annab joonisel 18.86 kujutatud graafiku.



Joonis 18.86. Elemendi 2 vertikaalsiirde $w(x)$ graafik

Paindemoment on

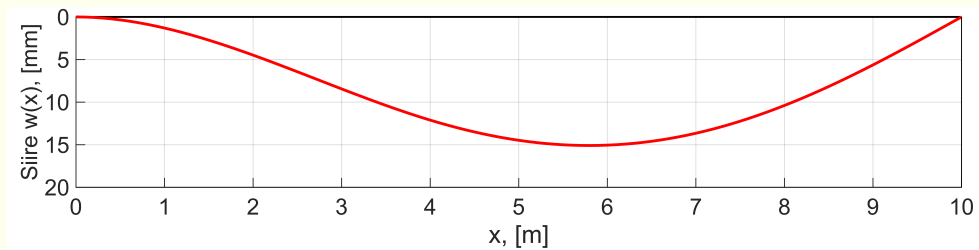
$$M(x) = -EI \frac{d^2w}{dx^2} = -37800 \cdot (+0,000132276x^2 - 0,001619682x + 0,002968976) =$$

$$= -5x^2 + 61,2058x - 112,23$$

ja põikjõud

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = -10x + 61,206$$

Kui joonised 18.85 ja 18.86 kokku panna, saame kogu tala deformeerumist kujutava vertikaalsiirde graafiku (joonis 18.87).



Joonis 18.87. Tala vertikaalsiirde $w(x)$ graafik

13. Elemendi 2 vertikaalsiirde avaldis ja graafik (variant 2)

Eelmises punktis esitatud arvutus elemendi 2 kohta läheb väga pikaks ja töömahu-kaks, kuna valemi $\hat{x} = x - 4$ tõttu tekivad kujufunktsioonide avaldistesse kaksliikmete ruudud ja kuubid. Seetõttu teeme siin lihtsustamise eesmärgil arvutuse sarnaselt elemendile 1 ja kasutame elemendi kohalikku teljestikku, mille alguspunkt on elemendi vasakus otsas.

Arvutuseks vajalikud parameetrid on järgmised:

Vasakpoolne otsasõlm: $\hat{x}_2 = 0$; parempoolne otsasõlm: $\hat{x}_3 = 6$ m;

Kujufunktsioonid tulevad sel juhul

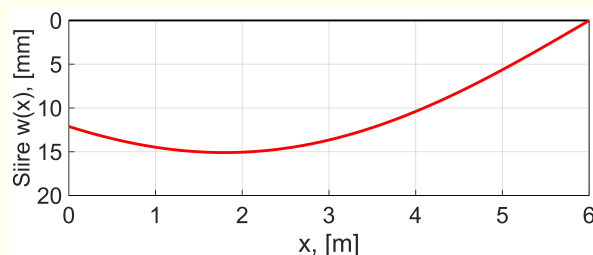
$$N_1 = 1 - \frac{3\hat{x}^2}{36} + \frac{2\hat{x}^3}{216}; \quad N_2 = \frac{2\hat{x}^2}{6} - \frac{\hat{x}^3}{36} - \hat{x}; \quad N_4 = \frac{\hat{x}^2}{6} - \frac{\hat{x}^3}{36}$$

Samuti muutub lihtsamaks ka valemi (18.231) lisaliige w_f .

Kuna edasised arvutused kujunevad sarnasteks eespool esitatutega, siis jätame need siin esitamata ja toome välja ainult siirde avaldise

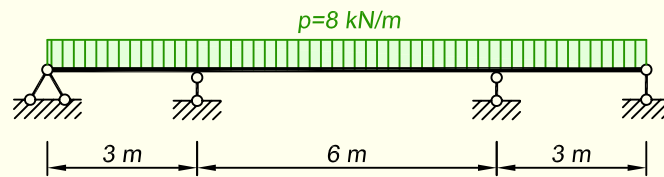
$$w(\hat{x}) = 0,000011023\hat{x}^4 - 0,00009358\hat{x}^3 - 0,000696675\hat{x}^2 + 0,003149\hat{x} + 0,012114$$

mis annab joonisel 18.88 kujutatud graafiku. Joonisel 18.86 esitatust erineb see selle poolest, et siin on kasutatud kohalikke \hat{x} -koordinaate vahemikus 0...6 m.



Joonis 18.88. Elemendi 2 vertikaalsiirde $w(\hat{x})$ graafik kohalikes koordinaatides

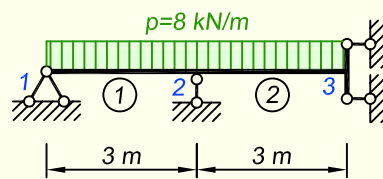
NÄIDE 18.25. Koostada võrrandisüsteem joonisel 18.89 kujutatud tala sisejõudude arvutamiseks. $EI = 30000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$.



Joonis 18.89. Arvutusskeem

LAHENDUS

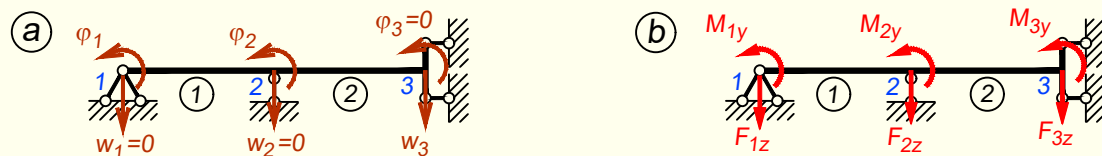
Siin ülesandes on tala nii kuju kui ka koormuse osas sümmeetriline ja see võimaldab ülesande lahenduskäigu teha lühemaks, kasutades arvutuses ainult ühte tala poolt, nagu on näidatud joonisel 18.90. Selleks me lõikame arvutusskeemi keskmise silde keskelt pooleks ja lõike kohale peame lisama toetingimused, et uus skeem oleks tegeliku olukorraga samaväärne. Kuna arvutusskeem on sümmeetriline, siis lõike tegemise kohal tegelikus arvutusskeemis toimub ainult vertikaalsiire, kuid ei toimu pööret ja sellele vastavalt paigutame uuele skeemile parempoolsesse otsa toesidemed, mis tekitavad sama olukorra – kaks liikutavat liigendtuge võimaldavad lõikel vertikaalsuunas siirduda, kuid ei võimalda pööret.



Joonis 18.90. Tala vasak pool

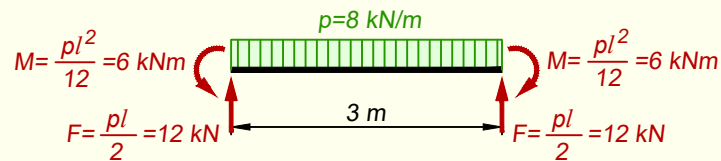
Valime kummaski sildes oleva varda üheks elemendiks ja toelõiked sõlmpunktideks (joonis 18.90).

Siirete ja koormusvektori komponendid on näidatud joonisel 18.91.



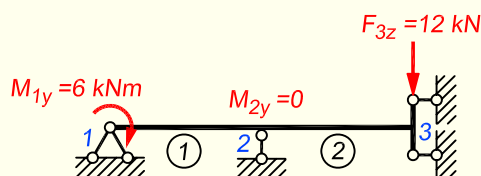
Joonis 18.91. Siirete ja koormusvektori komponendid

Koormusvektori jaoks tuleb leida elementkoormusest põhjustatud reaktsioonid (joonis 18.92).



Joonis 18.92. Elementkoormuse reaktsioonide arvutamine

Talale mõjuvad lõplikud sõlmkoormused saame jooniselt 18.93.



Joonis 18.93. Talale mõjuvad sõlmkoormused

Kirjutame välja siirete ja koormusvektori

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 \\ w_2 = 0 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 = 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1z} \\ M_{1y} = -6 \\ F_{2z} \\ M_{2y} = 0 \\ F_{3z} = 12 \\ M_{3y} \end{Bmatrix}$$

Elemendid on siin ülesandes ühesugused ja neile saame jäikusmaatriksi avaldada valemiga (18.200)

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}^{(2)} = \frac{30000}{27} \begin{bmatrix} 12 & -18 & -12 & -18 \\ -18 & 36 & 18 & 18 \\ -12 & 18 & 12 & 18 \\ -18 & 18 & 18 & 36 \end{bmatrix}$$

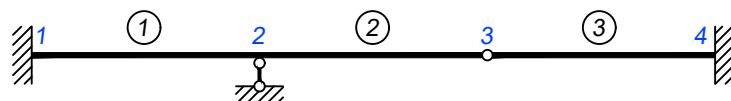
Võrrandisüsteemiks saame

$$\frac{30000}{27} \begin{bmatrix} 12 & -18 & -12 & -18 & 0 & 0 \\ -18 & 36 & 18 & 18 & 0 & 0 \\ -12 & 18 & 24 & 0 & -12 & -18 \\ -18 & 18 & 0 & 72 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & -12 & 18 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 18 & 36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 \\ w_2 = 0 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1z} \\ M_{1y} = -6 \\ F_{2z} \\ M_{2y} = 0 \\ F_{3z} = 12 \\ M_{3y} \end{Bmatrix}$$

Kui pärast siirete leidmist ning epüüride ordinaatide arvutamist koostada paindemomendi epüür, siis esmalt saame selle vaadeldud tala poolele. Teise poole epüür on sellega samasugune.

18.6.6. Liigendit sisaldav tala

Siiani oleme vaadanud talaelemendi kasutamist sellisel kujul, kus kaks järjestikku paiknevat elementi on sõlmpunktis ühendatud teineteisega jäigalt. Joonisel 18.94 kujutatud talal on sellisteks elemendid 1 ja 2, mis on sõlmpunktis 2 omavahel jäigalt ühendatud ja moodustavad seal ühise ristlõike, mis tala deformeerumisel pöörduv nurga φ_2 võrra. Sageli aga võib kahe elemendi vahel olla liigend, mis muudab arvutuskäigu keerukamaks, kuna liigendsõlme korral saavad kummalgi pool liigendit olla varrastel erinevad pöördenurgad. Joonisel 18.94 kujutatud talal on elemendid 2 ja 3 ühendatud sõlmpunktis 3 liigendiga ning seetõttu saavad mainitud sõlmes pöörduda erinevate nurkade $\varphi_3^{(2)}$ ja $\varphi_3^{(3)}$ võrra.



Joonis 18.94. Tala, milles üks elementidevaheline sõlmpunkt on jäik ja teine liigendiga

Liigendi esinemisel võrdub paindemoment varda vastavas otsas nulliga ja seetõttu elimineerime talaelemendi jäikusmaatriksist (18.200) nullmomendile vastava osa. Saame muudetud jäikusmaatriksi, kus soovitud moment võrdub nulliga ning elimineeritud on ka sellele vastav pööre.

Järgnevalt tuletame muudetud jäikusmaatriksid nii paremal kui ka vasakul otsas paikneva liigendiga elemendile. Kasutame selleks maatriksi staatilist kondensatsiooni.

Element liigendiga paremal

Võtame aluseks talaelemendi jäikusmaatriksi (18.200) ja jagame selle osadeks niimoodi, et eraldame viimase rea ja veeru, kuna need vastavad elemendi lõpus pöördele φ_2 ja paindemomendile $M_2 = 0$

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ \hline -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{array} \right] \quad (18.244)$$

Edasiste teisenduste jaoks esitame avaldise (18.244) järgmisel kujul

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{array} \right] \quad (18.245)$$

$\begin{matrix} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{matrix}$

Kondenseeritud jäikusmaatriksi ja koormusvektori saamiseks kasutame võrrandisüsteemi $\mathbf{F} = \mathbf{Kd}$, mille jagame osadeks

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_1 \\ 3 \times 1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 1 \times 1 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_1 \\ 3 \times 1 \\ \mathbf{d}_2 \\ 1 \times 1 \end{array} \right\} \quad (18.246)$$

kus

$$\mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2z} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F}_2 = \{ M_{2y} \}; \quad \mathbf{d}_1 = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{d}_2 = \{ \varphi_2 \} \quad (18.247)$$

Esitame avaldise (18.246) eraldi võrranditena

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{K}_{11}\mathbf{d}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{d}_2 \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{K}_{21}\mathbf{d}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{d}_2 \end{aligned} \quad (18.248)$$

Kui \mathbf{K}_{22} ei ole singulaarne, siis saame teisest võrrandist

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{K}_{22}^{-1}(\mathbf{F}_2 - \mathbf{K}_{21}\mathbf{d}_1) \quad (18.249)$$

Asetame leitud \mathbf{d}_2 väärtuse võrrandisüsteemi (18.248) esimesse võrrandisse

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21})\mathbf{d}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{F}_2 \quad (18.250)$$

misjärel saame võrrandisüsteemi

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{d}_1 \quad (18.251)$$

kus

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21} \quad (18.252)$$

on kondenseeritud jäikusmaatriks ja

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{F}_2 \quad (18.253)$$

on kondenseeritud koormusvektor.

Asetades maatriksi (18.244) tükeldamisel saadud osad avaldise (18.252), jõuame parempoolses otsas oleva liigendiga elemendi jäikusmaatriksini

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21} = \\ &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 \\ -6l & 4l^2 & 6l \\ -12 & 6l & 12 \end{bmatrix} - \frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} -6l \\ 2l^2 \\ 6l \end{Bmatrix} \frac{1}{4l^2} \{ -6l \quad 2l^2 \quad 6l \} = \\ &= \frac{3EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -l & -1 \\ -l & l^2 & l \\ -1 & l & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18.254)$$

Parempoolses otsas oleva liigendiga elemendi koormusvektori saame valemiga (18.253), mille liikmed \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 sõltuvad elemendil paikneva lauskoormuse iseloomust. Tuletame siin koormusvektori ühtlase lauskoormusega elemendile, kasutades selleks avaldise (18.247) ja ühtlase lauskoormuse taandamisel sõlmedesse kasutatavat valemit (18.224)

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{F}_2 = \frac{pl}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -l \\ 6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -6l \\ 2l^2 \\ 6l \end{Bmatrix} \frac{1}{4l^2} \frac{pl^2}{12} = \frac{pl}{8} \begin{Bmatrix} 5 \\ -l \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (18.255)$$

Element liigendiga vasakul

Kui talaelemendil paikneb liigend vasakpoolses otsas, siis eemaldame tavalisest jäikusmaatriksist (18.200) teise rea ja teise veeru, mis vastavad elemendi vasaku otsa pöördele φ_1 ja paindemomendile $M_1 = 0$.

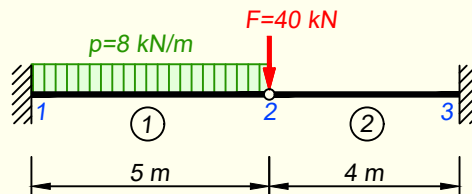
Sarnaselt eespool tuletatule avaldame elemendi jäikusmaatriksi

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & -6l \\ -12 & 12 & 6l \\ -6l & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -6l \\ 6l \\ 2l^2 \end{bmatrix} \frac{1}{4l^2} \{ -6l \quad 6l \quad 2l^2 \} = \\ &= \frac{3EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -l \\ -l & 1 & l \\ -l & l & l^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18.256)$$

ning ühtlase lauskoormusega elemendi koormusvektori

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{pl}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6l \\ 6l \\ 2l^2 \end{bmatrix} \frac{1}{4l^2} \left(-\frac{pl^2}{12} \right) = \frac{pl}{8} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ l \end{bmatrix} \quad (18.257)$$

NÄIDE 18.26. Koostada joonisel 18.95 kujutatud liigendit sisaldavale talale sisejõudude epüürid. EI on konstantne.



Joonis 18.95. Arvutuskeem

LAHENDUS

1. Jäikusmaatriksid ja võrrandisüsteem

Jagame arvutuskeemi elementideks ja sõlmpunktideks selliselt, nagu on näidatud joonisel 18.95.

Elementide jäikusmaatriksite moodustamisel teeme sellise valiku, et sõlmpunktis 2 paiknev liigend on osa elemendist 1. Seetõttu arvutame elemendi 1 jäikusmaatriksi valemiga (18.254) ning lauskoormuse taandame sõlmedesse valemiga (18.255)

$$\mathbf{K}^{(1)} = EI \begin{bmatrix} 0,0240 & -0,1200 & -0,0240 \\ -0,1200 & 0,6000 & 0,1200 \\ -0,0240 & 0,1200 & 0,0240 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \end{matrix} ; \quad \frac{8 \cdot 5}{8} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -25 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Elemendi 2 jäikusmaatriksi arvutame talaelemendi tavalise valemiga (18.200)

$$\mathbf{K}^{(2)} = 10^2 \begin{bmatrix} & w_2 & \varphi_2 & w_3 & \varphi_3 \\ 0,1875 & -0,3750 & -0,1875 & -0,3750 \\ -0,3750 & 1,0000 & 0,3750 & 0,5000 \\ -0,1875 & 0,3750 & 0,1875 & 0,3750 \\ -0,3750 & 0,5000 & 0,3750 & 1,0000 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{matrix}$$

Elementide jäikusmaatriksitest moodustame konstruktsiooni jäikusmaatriksi

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} & w_1 & \varphi_1 & w_2 & \varphi_2 & w_3 & \varphi_3 \\ 0,0240 & -0,1200 & -0,0240 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1200 & 0,6000 & 0,1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0240 & 0,1200 & 0,2115 & -0,3750 & -0,1875 & -0,3750 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3750 & 1,0000 & 0,3750 & 0,5000 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1875 & 0,3750 & 0,1875 & 0,3750 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3750 & 0,5000 & 0,3750 & 1,0000 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{matrix}$$

Koostame võrrandisüsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$EI \begin{bmatrix} 0,0240 & -0,1200 & -0,0240 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1200 & 0,6000 & 0,1200 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0240 & 0,1200 & 0,2115 & -0,3750 & -0,1875 & -0,3750 \\ 0 & 0 & -0,3750 & 1,0000 & 0,3750 & 0,5000 \\ 0 & 0 & -0,1875 & 0,3750 & 0,1875 & 0,3750 \\ 0 & 0 & -0,3750 & 0,5000 & 0,3750 & 1,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2z} = 40 + 15 = 55 \\ M_{2y} = 0 \\ F_{3z} \\ M_{3y} \end{Bmatrix}$$

kus F_{2z} arvutamisel on otsesele sõlmkoormusele juurde lisatud elemendi 1 peal paiknevast lauskoormusest põhjustatud reaktsioon, mis tekib lauskoormuse taandamisel sõlme ja mille me eespool välja arvutasime.

Võrrandisüsteemi lahendamiseks eraldame tundmatutele siiretele w_2 ja φ_2 vastavad võrrandid. Nullsiirete tõttu kaovad võrranditest ära esimesed kaks ja viimased kaks liiget ning alles jäävad need liikmed, mis eelnevas avaldises on näidatud hallika taustaga.

$$EI \begin{bmatrix} 0,2115 & -0,3750 \\ -0,3750 & 1,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 55 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame sõlmpunktide siirded

$$w_2 = \frac{564,37}{EI}; \quad \varphi_2 = \frac{211,64}{EI}$$

kus φ_2 on elemendi 2 vasaku otsa pöördenurk ehk $\varphi_2^{(2)}$. Elemendi 1 otsa pöördenurk $\varphi_2^{(1)}$ sõlmes 2 on liigendi tõttu sellest erinev. Elemendi 1 pöördenurka me aga ei tea, kuna selle elemendi jäikusmaatriksist me elimineerisime parempoolse otsa paindemomendi ja pöördenurga. Kui me oleksime valinud liigendi 2 osaks elemendist 2, siis sel juhul oleksime saanud selles sõlmes elemendi 1 pöördenurga.

2. Elementide sisejõud ja tala toereaktsioonid

Elemendi 1 sisejõududeks saame

$$\mathbf{F}^{(1)} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{d}^{(1)} + \mathbf{F}_0^{(1)} =$$

$$= EI \begin{bmatrix} 0,0240 & -0,1200 & -0,0240 \\ -0,1200 & 0,6000 & 0,1200 \\ -0,0240 & 0,1200 & 0,0240 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 564,37 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -25 \\ 25 \\ -15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -43,62 \\ 118,12 \\ 3,62 \end{Bmatrix}$$

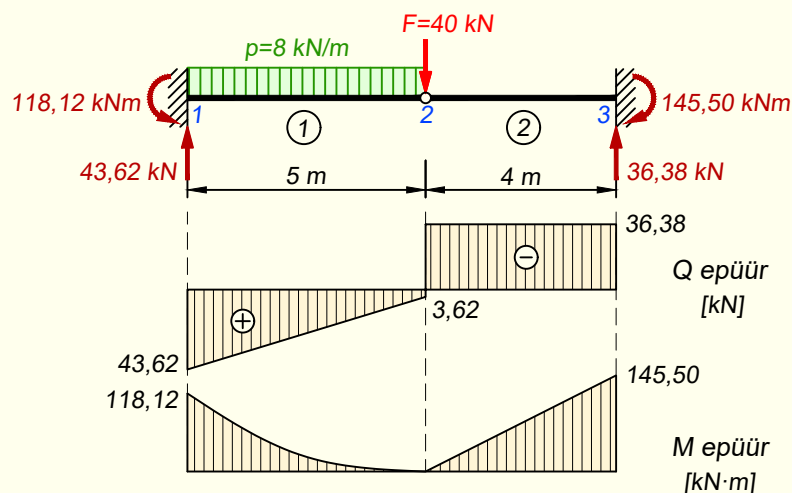
Elemendi 2 sisejõud on

$$\mathbf{F}^{(2)} = \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \\ Q_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{d}^{(2)} =$$

$$= EI \begin{bmatrix} 0,1875 & -0,3750 & -0,1875 & -0,3750 \\ -0,3750 & 1,0000 & 0,3750 & 0,5000 \\ -0,1875 & 0,3750 & 0,1875 & 0,3750 \\ -0,3750 & 0,5000 & 0,3750 & 1,0000 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 564,37 \\ 211,64 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36,38 \\ 0 \\ -36,38 \\ -145,50 \end{Bmatrix}$$

Toereaktsioonide leidmiseks eraldame võrrandisüsteemist tundmatutele toereaktsioonidele vastava osa ja kasutame leitud siirdeid ning lauskoormuse reaktsioone

$$\begin{Bmatrix} F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{3z} \\ M_{3y} \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} -0,0240 & 0 \\ 0,1200 & 0 \\ -0,1875 & 0,3750 \\ -0,3750 & 0,5000 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 564,37 \\ 211,64 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -25 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -43,62 \\ 118,12 \\ -36,38 \\ -145,50 \end{Bmatrix}$$

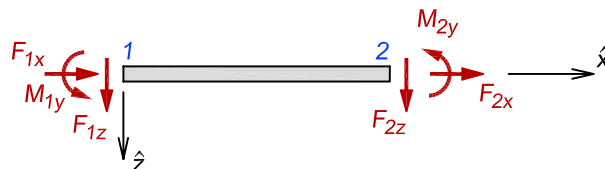


Joonis 18.96. Toereaktsioonid ning põikjõu ja paindemomendi epüürid

18.7. Raamielement

18.7.1. Jäikusmaatriks kohalikes koordinaatides

Raamielemendis esinevad kolm sisejõudu: pikijõud, põikjõud ja paindemoment. Joonisel 18.97 on näidatud raamielement koos vastavate reaktsioonide positiivsete suundadega.



Joonis 18.97. Kinnituskimomentide ja -jõudude positiivsed suunad

Kõigi mainitud sisejõududega oleme kokku puutunud juba eelmistes peatükkides, kus oli juttu sõrestikuelemendist (pikijõud) ja talaelemendist (põikjõud ja paindemoment). Eeldades, et pikijõud ei mõjuta põikjõudu ega paindemomenti ja ka vastupidi, ühendame avaldised (18.156) ja (18.199) superpositsiooniprintsiibi abil raamielemendi jäikusmaatriksiks kohalikes koordinaatides ja saame võrrandisüsteemi

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2z} \\ M_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (18.258)$$

ehk

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{d}} \quad (18.259)$$

kus

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (18.260)$$

on raamielemendi jäikusmaatriks kohalikes koordinaatides.

18.7.2. Siirete ja jõudude teisendusmaatriksid

Siirete teisendusmaatriks

Sarnaselt sõrestikuelemendile vaatleme ka siin varrast üldkoordinaatides ja anname kummalegi varda otsale kaks üldtelgedele suunalist siiret: horisontaalse ja vertikaalse. Järgnevalt vaatame neid situatsioone eraldi ja leiame varda otste siirded elemendi kohalikus teljestikus.

Kinnitame varda parempoolse otsa ja anname vasakpoolsele otsale x -telje suunalise siirde (joonis 18.98, a), millega kaasnevad sõlmpunktis 1 varda pikitelje ja sellega risti oleva telje suunalised siirded

$$\hat{u}_1 = u_1 \cos \alpha \quad \hat{w}_1 = -u_1 \cos \beta \quad (18.261)$$

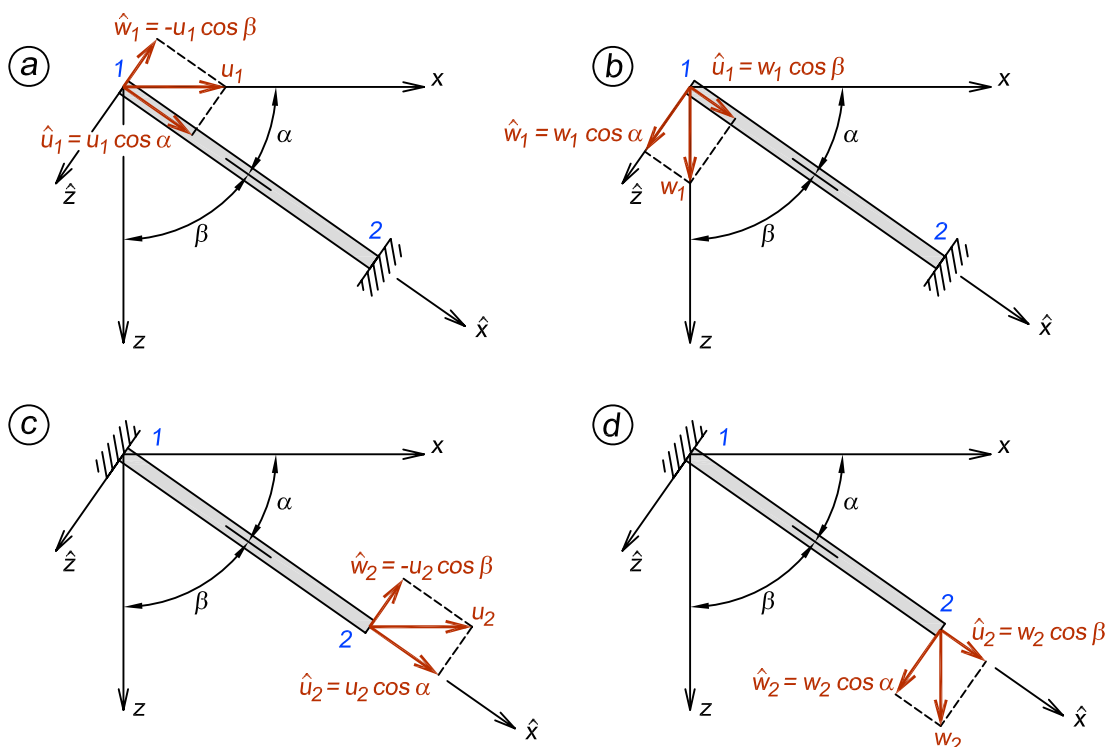
Anname varda vasakpoolsele otsale z -telje suunalise siirde (joonis 18.98, b), mis omakorda põhjustab sõlmpunktis 1 siirded varda pikitelje ning sellega risti oleva telje suunas

$$\hat{u}_1 = w_1 \cos \beta \quad \hat{w}_1 = w_1 \cos \alpha \quad (18.262)$$

Kuna \hat{y} - ja y -telg langevad kokku, siis varda otsristlõike pööre kohalikus ja üldteljestikus langevad samuti kokku ning seega

$$\hat{\phi}_1 = \phi_1 \quad (18.263)$$

Kinnitame varda vasakpoolse otsa ja anname parempoolsele otsale x -telje suunalise siirde (joonis 18.98, c), mis põhjustab sõlmpunktis 2 varda pikitelje ja sellega risti oleva telje



Joonis 18.98. Siirete teisendusmaatriksi avaldamine raamielemendile

suunalised siirded

$$\hat{u}_2 = u_2 \cos \alpha \quad \hat{w}_2 = -u_2 \cos \beta \quad (18.264)$$

Anname varda parempoolsele otsale z -telje suunalise siirde (joonis 18.98, d), millega kaasnevad sõlmpunktis 2 varda pikitelje ja sellega risti oleva telje suunalised siirded

$$\hat{u}_2 = w_2 \cos \beta \quad \hat{w}_2 = w_2 \cos \alpha \quad (18.265)$$

Kuna varda otsristlõike pööre kohalikus ja üldteljestikus langevad kokku, siis

$$\hat{\phi}_2 = \varphi_2 \quad (18.266)$$

Superpositsiooniprintsiibi põhjal saame välja kirjutada võrrandid

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= u_1 \cos \alpha + w_1 \cos \beta \\ \hat{w}_1 &= -u_1 \cos \beta + w_1 \cos \alpha \\ \hat{\phi}_1 &= \varphi_1 \\ \hat{u}_2 &= u_2 \cos \alpha + w_2 \cos \beta \\ \hat{w}_2 &= -u_2 \cos \beta + w_2 \cos \alpha \\ \hat{\phi}_2 &= \varphi_2 \end{aligned} \quad (18.267)$$

mis maatrikskujul esitatuna on

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (18.268)$$

ehk

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (18.269)$$

kus

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18.270)$$

on siirete teisendusmaatriks, mis teisendab üldkoordinaatides olevad siirded varda kohalikesse koordinaatidesse.

Avaldise (18.268) pöördteisendus on kohalikest siiretest üldtelgedesuunaliste siirete leidmine

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{\varphi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\varphi}_2 \end{Bmatrix} \quad (18.271)$$

ehk

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{d}} \quad (18.272)$$

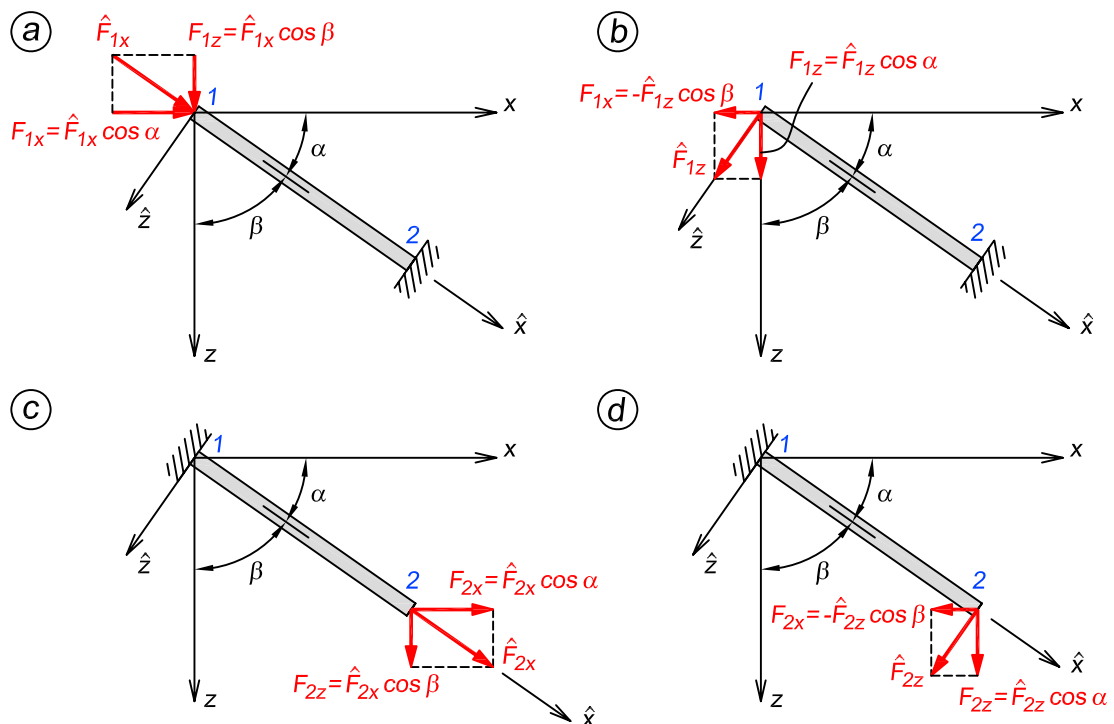
kus \mathbf{T}^T on teisendusmaatriksi (18.270) transposeeritud maatriks.

Jõudude teisendusmaatriks

Rakendades varda kummassegi otsa jõudude komponendid, mis on suunatud varda kohalike telgede suunas, saame määrata, kuidas teisendada jõudusid kohalikest üldkoordinaatidesse.

Kinnitame varda parempoolse otsa ning rakendame vasakpoolsesse otsa varda pikitelje suunalise jõu \hat{F}_{1x} (joonis 18.99, a). Sõlmpunktis 1 saame üldtelgedesuunalisteks jõukomponentideks

$$F_{1x} = \hat{F}_{1x} \cos \alpha \quad F_{1z} = \hat{F}_{1x} \cos \beta \quad (18.273)$$



Joonis 18.99. Jõudude teisendusmaatriksi avaldamine raamielemendile

Rakendame varda vasakpoolsesse otsa \hat{z} -telje suunalise jõu \hat{F}_{1z} (joonis 18.99, b). Sõlmpunktis 1 saame üldtelgedesuunalisteks jõukomponentideks

$$F_{1x} = -\hat{F}_{1z} \cos \beta \quad F_{1z} = \hat{F}_{1z} \cos \alpha \quad (18.274)$$

Momendi puhul mingit muutust ei toimu

$$M_{1y} = \hat{M}_{1y} \quad (18.275)$$

Järgnevalt kinnitame varda vasakpoolse otsa ning rakendame parempoolsesse otsa varda pikitelje suunalise jõu \hat{F}_{2x} (joonis 18.99, c). Sõlmpunktis 2 saame üldtelgede suunalisteks jõukomponentideks

$$F_{2x} = \hat{F}_{2x} \cos \alpha \quad F_{2z} = \hat{F}_{2x} \cos \beta \quad (18.276)$$

Rakendame nüüd varda parempoolsesse otsa \hat{z} -telje suunalise jõu \hat{F}_{2z} (joonis 18.99, d). Sõlmpunktis 2 saame üldtelgede suunalisteks jõukomponentideks

$$F_{2x} = -\hat{F}_{2z} \cos \beta \quad F_{2z} = \hat{F}_{2z} \cos \alpha \quad (18.277)$$

Momendi puhul mingit muutust ei toimu

$$M_{2y} = \hat{M}_{2y} \quad (18.278)$$

Superpositsiooniprintsiibi põhjal kirjutame välja võrrandid

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \hat{F}_{1x} \cos \alpha - \hat{F}_{1z} \cos \beta \\ F_{1z} &= \hat{F}_{1x} \cos \beta + \hat{F}_{1z} \cos \alpha \\ M_{1y} &= \hat{M}_{1y} \\ F_{2x} &= \hat{F}_{2x} \cos \alpha - \hat{F}_{2z} \cos \beta \\ F_{2z} &= \hat{F}_{2x} \cos \beta + \hat{F}_{2z} \cos \alpha \\ M_{2y} &= \hat{M}_{2y} \end{aligned} \quad (18.279)$$

mis maatrikskujul esitatuna on

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2z} \\ M_{2y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{1z} \\ \hat{M}_{1y} \\ \hat{F}_{2x} \\ \hat{F}_{2z} \\ \hat{M}_{2y} \end{pmatrix} \quad (18.280)$$

ehk

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{F}} \quad (18.281)$$

kus

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18.282)$$

on teisendusmaatriksi (18.270) transponeeritud maatriks ja teisendab kohalikes koordinaatides antud jõud üldtelgede suunalisteks.

Avaldise (18.280) pöördteisendus on üldtelgede suunalistest jõududest varda kohaliku teljestiku suunaliste jõudude tuletamine

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{1z} \\ \hat{M}_{1y} \\ \hat{F}_{2x} \\ \hat{F}_{2z} \\ \hat{M}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2z} \\ M_{2y} \end{Bmatrix} \quad (18.283)$$

ehk

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{T}\mathbf{F} \quad (18.284)$$

kus \mathbf{T} on teisendusmaatriks (18.270).

18.7.3. Jäikusmaatriks üldkoordinaatides

Raamielemendi jäikusmaatriksi esitamiseks üldkoordinaatides kasutame eelnevates peatükides tuletatud valemeid. Avaldisest (18.259) on meil teada, et

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} \quad (18.285)$$

Asetame selle avaldisse (18.281) $\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{F}}$, mille tulemusena saame

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} \quad (18.286)$$

Saadud avaldisse asetame valemi (18.269) $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{T}\mathbf{d}$, mis annab

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{d} \quad (18.287)$$

Kuna $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{d}$, siis järelikult

$$\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T} = \mathbf{K} \quad (18.288)$$

Peale maatriksite (18.282), (18.260) ja (18.270) korrutamist saame elemendi jäikusmaatriksi üldkoordinaatides, mis lühendatud kujul kirjutades on järgmine

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} F & G & H & -F & -G & -H \\ G & P & -Q & -G & -P & -Q \\ H & -Q & A & -H & Q & B \\ -F & -G & -H & F & G & -H \\ -G & -P & Q & G & P & Q \\ -H & -Q & B & -H & Q & A \end{bmatrix} \quad (18.289)$$

kus

$$\begin{aligned} A &= \frac{4EI}{l}; & B &= \frac{2EI}{l}; \\ F &= \left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 \right); & G &= \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs; & H &= \frac{6EI}{l^2} s; \\ P &= \left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 \right); & Q &= \frac{6EI}{l^2} c \end{aligned} \quad (18.290)$$

Raamielemendi jäikusmaatriks pikalt väljakirjutatuna

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \frac{6EI}{l^2} s & - \left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & - \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & - \frac{6EI}{l^2} s \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & - \frac{6EI}{l^2} c & - \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & - \left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & - \frac{6EI}{l^2} c \\ \frac{6EI}{l^2} s & - \frac{6EI}{l^2} c & \frac{4EI}{l} & - \frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & \frac{2EI}{l} \\ - \left(\frac{EA}{l} c^2 - \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & - \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & - \frac{6EI}{l^2} s & \left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & - \frac{6EI}{l^2} s \\ - \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & - \left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & \frac{6EI}{l^2} c & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & \frac{6EI}{l^2} c \\ - \frac{6EI}{l^2} s & - \frac{6EI}{l^2} c & \frac{2EI}{l} & - \frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (18.291)$$

18.7.4. Sisejõudude arvutamine

Varda sisejõudude leidmisel kohalikus koordinaatsüsteemis lähtume valemist

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{F}}_0 \quad (18.292)$$

Kuna avaldis (18.292) sisaldab siirdeid varda kohalikus teljestikus, aga sõlmpunktide siirdeid on meil võrrandisüsteemist saadud üldkoordinaatides, siis tuleb kasutada teisendust. Arvestades, et

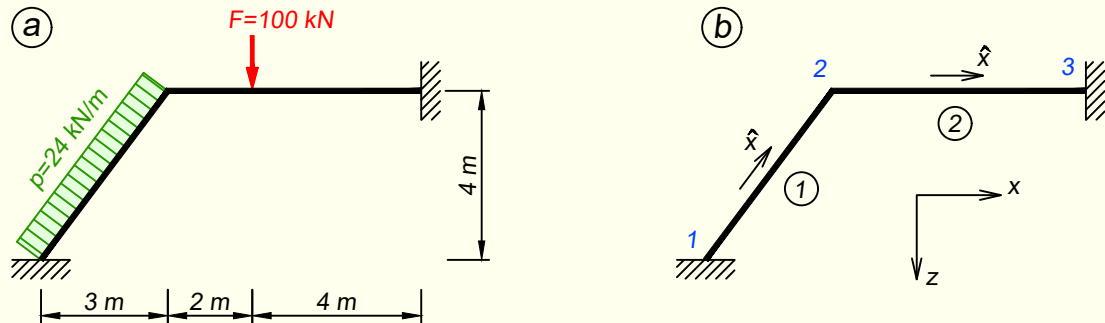
$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{T}\mathbf{d} \quad (18.293)$$

saame

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{d} + \hat{\mathbf{F}}_0 \quad (18.294)$$

kus $\hat{\mathbf{K}}$ on elemendi jäikusmaatriks kohalikes koordinaatides, \mathbf{T} on siirete teisendusmaatriks, \mathbf{d} on võrrandisüsteemist saadud siirdeid üldkoordinaatides ja $\hat{\mathbf{F}}_0$ on elementkoormusest põhjustatud reaktsioonid elemendi otstes.

NÄIDE 18.27. Leida joonisel 18.100, a kujutatud raami sisejõud. Raam on valmistatud terasest, mille elastsusmoodul on $E = 210 \text{ GPa}$. Varda ristlõike inertsimoment on $I = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ja ristlõike pindala on $A = 0,01 \text{ m}^2$.



Joonis 18.100. Raami arvutuskeem ja teljestikud

LAHENDUS

1. Elementideks ja sõlmpunktideks jagamine

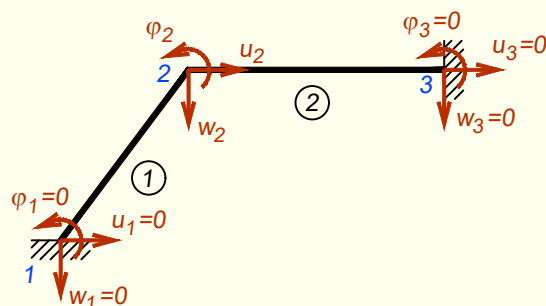
Jagame arvutuskeemi elementideks, nagu on näidatud joonisel 18.100, b. Elementideks valime üksikud vardad. Vardal 2-3 (elemendil 2) paikneb koondjõud F ja selle varda võiks jõu kohalt ka kaheks jagada. Siis koosneks arvutuskeem kolmest elemendist ning neljast sõlmpunktist, kusjuures üks sõlmpunkt paikneks siis koormuse F all ja sel juhul arvestaksime teda sõlmkoormusena. Kuna praegu valisime varda 2-3 üheks elemendiks, siis arvestame temal paiknevat koondjõudu elementkoormusena.

Joonisel 18.100, b on näidatud arvutuskeemi üldteljestik $\{x, z\}$ ja elementide kohalike \hat{x} -telgede positiivne suund.

2. Siirete vektor

Ülesande lahendamisel raamielemendiga on sõlmpunktides kolm tundmatut siiret: horizontaalsiire u , vertikaalsiire w ja pööre φ .

Vaadeldava raami sõlmpunktide siirded on esitatud joonisel 18.101.



Joonis 18.101. Siirete vektori komponendid

Positiivsed suunad on siiretel paremale ja alla ning pöördel suunaga vastupäeva. Joonisel kujutame kõik siirded positiivsete suundadega.

Siirete vektori moodustamiseks liigume järjest läbi kõigi sõlmpunktide ja märgime siirete komponendid vektorisse. Igas sõlmes paneme esimesena kirja horisontaalsiirde, seejärel vertikaalsiirde ja viimasena pöörde. Nende järjekord on paika pandud raamieleменти jäikusmaatriksiga ja seetõttu ei tohi seda ära muuta.

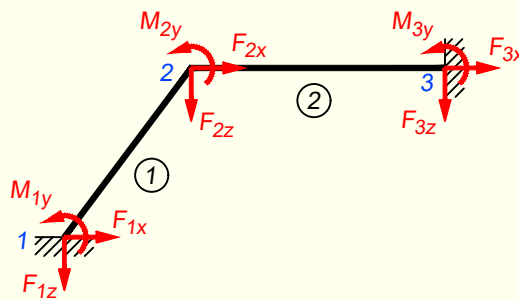
Osa siiretest on meil juba teada, sest sõlmed 1 ja 3 on jäigad toesõlmed ning seal on kõik siirded võrdsed nulliga. Teadaolevad nullsiirded kirjutame ka siirete vektorisse.

Siirete vektoriks saame

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_1 = 0 \\ w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 = 0 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \end{pmatrix}$$

3. Koormusvektor

Koormusvektori komponendid on näidatud joonisel 18.102. Kuna koormusvektori komponendid peavad vastama siirete vektori komponentidele, siis seetõttu märgime igasse sõlme kolm komponenti. Horisontaalsiirdele vastab horisontaalne jõud, vertikaalsiirdele vastab vertikaalne jõud ning pöördel vastab moment.



Joonis 18.102. Koormusvektori komponendid

Koormusvektori moodustamiseks peame leidma sõlmkoormuste väärtused. Siin ülesandes ei ole sõlmedes paiknevaid koormuseid, mille saaks kohe koormusvektorisse kirjutada. Elementkoormused tuleb esmalt taandada sõlmpunktidesse.

Elemendil 1 paiknevast lauskoormusest tekkivad reaktsioonid arvutame esmalt selle elemendi kohalikes koordinaatides (joonis 18.103, a) tavaliste deformatsioonimeetodi

juures kasutatud kinnitusemomentide ja -jõudude valemitega

$$\hat{F}_{1z}^{(1)} = \hat{F}_{2z}^{(1)} = -24 \cdot 2,5 = -60 \text{ kN}; \quad \hat{M}_{1y}^{(1)} = -\hat{M}_{2y}^{(1)} = \frac{24 \cdot 5^2}{12} = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

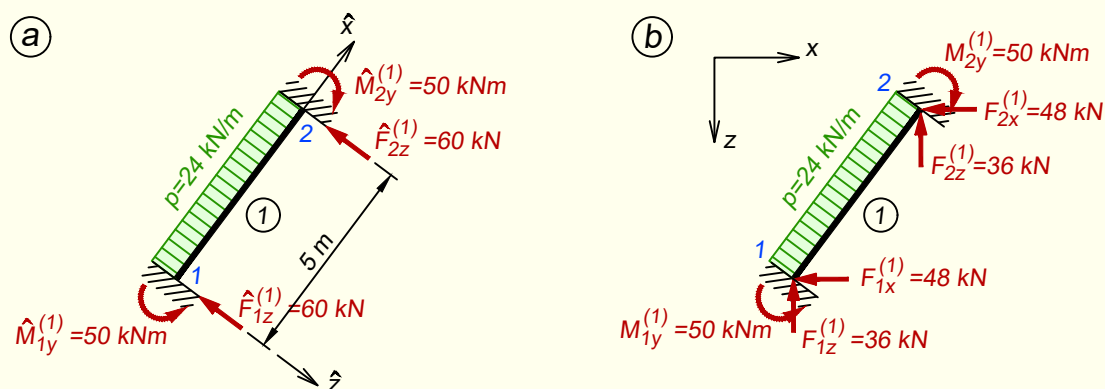
Seejärel teisendame need üldkoordinaatidesse valemiga (18.281), märkides reaktsioonid vektorisse $\hat{\mathbf{F}}^{(1)}$ märkidega, mis neil on varda kohalikus teljestikus. Saame

$$\begin{pmatrix} F_{1x}^{(1)} \\ F_{1z}^{(1)} \\ M_{1y}^{(1)} \\ F_{2x}^{(1)} \\ F_{2z}^{(1)} \\ M_{2y}^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{F}}^{(1)} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 50 \\ 0 \\ -60 \\ -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -36 \\ 50 \\ -48 \\ -36 \\ -50 \end{pmatrix}$$

kus suunakoosinused arvutame valemitega (18.120)

$$c = \frac{x_{lõpus} - x_{alguses}}{l} = \frac{3 - 0}{5} = 0,6; \quad s = \frac{z_{lõpus} - z_{alguses}}{l} = \frac{-4 - 0}{5} = -0,8$$

Vastusena saadud reaktsioonide vektoris näitavad jõudude ees olevad märgid nende suunda üldtelgede suhtes (joonis 18.103, b).

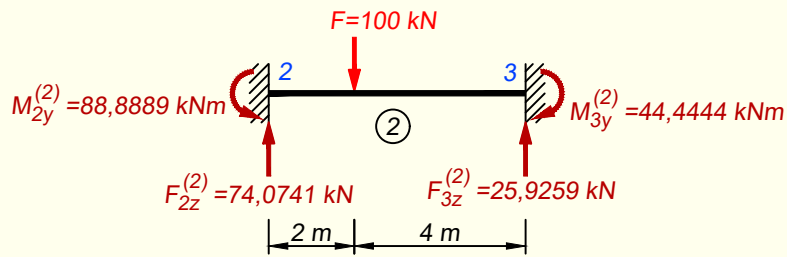


Joonis 18.103. Elemendi l koormuse taandamine sõlmedesse

Elemendi 2 reaktsioonid leiame samuti kinnitusemomentide ja -jõudude valemitega ja saame seda teha kohe üldkoordinaatides (joonis 18.104)

$$F_{2z}^{(2)} = -100 \cdot \frac{4^2}{6^3} (6 + 2 \cdot 2) = -74,0741 \text{ kN}; \quad F_{3z}^{(2)} = -100 \cdot \frac{2^2}{6^3} (6 + 2 \cdot 4) = -25,9259 \text{ kN}$$

$$M_{2y}^{(2)} = 100 \cdot 2 \left(\frac{4}{6} \right)^2 = 88,8889 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad M_{3y}^{(2)} = -100 \cdot 4 \left(\frac{2}{6} \right)^2 = -44,4444 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 18.104. Elemendi 2 koormuse taandamine sõlmedesse

Arvutame lõplikud sõlmkoormused sõlmes 2 jooniste 18.103, b ja 18.104 abil. Arvestame ka seda, et kui kasutame mingit reaktsiooni sõlmkoormusena, siis tuleb tema suund ümber pöörata.

$$F_{2x} = -F_{2x}^{(1)} = 48 \text{ kN}$$

$$F_{2z} = -F_{2z}^{(1)} - F_{2z}^{(2)} = 36 + 74,0741 = 110,0741 \text{ kN}$$

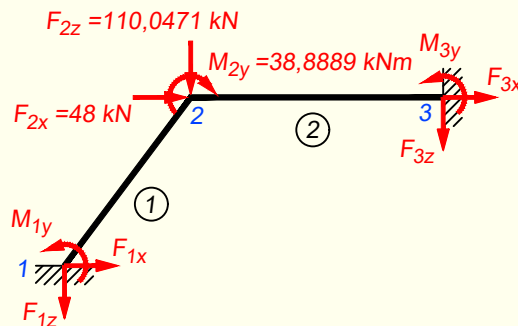
$$M_{2y} = -M_{2y}^{(1)} - M_{2y}^{(2)} = 50 - 88,8889 = -38,8889 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kanname saadud väärtused märkidele vastavate suundadega joonisele 18.105.

Moodustame joonise 18.105 abil koormusvektori

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2x} = 48 \\ F_{2z} = 110,0741 \\ M_{2y} = -38,8889 \\ F_{3x} \\ F_{3z} \\ M_{3y} \end{pmatrix}$$

kus F_{1x} , F_{1z} , M_{1y} , F_{3x} , F_{3z} ja M_{3y} tähistavad raami tundmatuid toereaktsioone.



Joonis 18.105. Raamile mõjuvad sõlmkoormused

4. Elementide jäikusmaatriksid

Koostame avaldise (18.291) abil elementide jäikusmaatriksid.

Elemendi 1 jäikusmaatriksiks (kus $c = 0,6$ ja $s = -0,8$) saame

$$\mathbf{K}^{(1)} = 10^3 \begin{bmatrix} & u_1 & w_1 & \varphi_1 & u_2 & w_2 & \varphi_2 \\ 152,36 & -200,73 & -3,63 & -152,36 & 200,73 & -3,63 & \\ -200,73 & 269,45 & -2,72 & 200,73 & -269,45 & -2,72 & \\ -3,63 & -2,72 & 15,12 & 3,63 & 2,72 & 7,56 & \\ -152,36 & 200,73 & 3,63 & 152,36 & -200,73 & 3,63 & \\ 200,73 & -269,45 & 2,72 & -200,73 & 269,45 & 2,72 & \\ -3,63 & -2,72 & 7,56 & 3,63 & 2,72 & 15,12 & \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{matrix}$$

Elemendi 2 jäikusmaatriksiks (kus $c = 1$ ja $s = 0$) saame

$$\mathbf{K}^{(2)} = 10^3 \begin{bmatrix} & u_2 & w_2 & \varphi_2 & u_3 & w_3 & \varphi_3 \\ 350 & 0 & 0 & -350 & 0 & 0 & \\ 0 & 1,05 & -3,15 & 0 & -1,05 & -3,15 & \\ 0 & -3,15 & 12,60 & 0 & 3,15 & 6,30 & \\ -350 & 0 & 0 & 350 & 0 & 0 & \\ 0 & -1,05 & 3,15 & 0 & 1,05 & 3,15 & \\ 0 & -3,15 & 6,30 & 0 & 3,15 & 12,60 & \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{matrix}$$

Tähistame elementide jäikusmaatriksite read ja veerud vastava elemendi alguses ja lõpus esinevate siiretega.

5. Konstruktsiooni jäikusmaatriks

Konstruktsiooni jäikusmaatriksi suuruse saame teada joonisel 18.101 esinevate siirete arvu järgi. Kuna kolme sõlme peale kokku on üheksa siiret, siis peab konstruktsiooni jäikusmaatriks olema 9×9 maatriks.

Tähistame maatriksi read ja veerud mainitud üheksa siirde tähistega. Nüüd saame tõsta elementide jäikusmaatriksite liikmed ridade ja veergude tähistega järgi konstruktsiooni jäikusmaatriksisse.

Konstruktsiooni jäikusmaatriks \mathbf{K} on

$$10^3 \begin{bmatrix} & u_1 & w_1 & \varphi_1 & u_2 & w_2 & \varphi_2 & u_3 & w_3 & \varphi_3 \\ 152,36 & -200,73 & -3,63 & -152,36 & 200,73 & -3,63 & 0 & 0 & 0 & \\ -200,73 & 269,45 & -2,72 & 200,73 & -269,45 & -2,72 & 0 & 0 & 0 & \\ -3,63 & -2,72 & 15,12 & 3,63 & 2,72 & 7,56 & 0 & 0 & 0 & \\ -152,36 & 200,73 & 3,63 & 502,36 & -200,73 & 3,63 & -350 & 0 & 0 & \\ 200,73 & -269,45 & 2,72 & -200,73 & 270,50 & -0,43 & 0 & -1,05 & -3,15 & \\ -3,63 & -2,72 & 7,56 & 3,63 & -0,43 & 27,72 & 0 & 3,15 & 6,30 & \\ 0 & 0 & 0 & -350 & 0 & 0 & 350 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,05 & 3,15 & 0 & 1,05 & 3,15 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,15 & 6,30 & 0 & 3,15 & 12,60 & \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{matrix}$$

6. Võrrandisüsteem

Järgnevalt moodustame võrrandisüsteemi $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

$$10^3 \begin{bmatrix} 152,36 & -200,73 & -3,63 & -152,36 & 200,73 & -3,63 & 0 & 0 & 0 \\ -200,73 & 269,45 & -2,72 & 200,73 & -269,45 & -2,72 & 0 & 0 & 0 \\ -3,63 & -2,72 & 15,12 & 3,63 & 2,72 & 7,56 & 0 & 0 & 0 \\ -152,36 & 200,73 & 3,63 & 502,36 & -200,73 & 3,63 & -350 & 0 & 0 \\ 200,73 & -269,45 & 2,72 & -200,73 & 270,50 & -0,43 & 0 & -1,05 & -3,15 \\ -3,63 & -2,72 & 7,56 & 3,63 & -0,43 & 27,72 & 0 & 3,15 & 6,30 \\ 0 & 0 & 0 & -350 & 0 & 0 & 350 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,05 & 3,15 & 0 & 1,05 & 3,15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,15 & 6,30 & 0 & 3,15 & 12,60 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} u_1 = 0 \\ w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 = 0 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{2x} = 48 \\ F_{2z} = 110,0741 \\ M_{2y} = -38,8889 \\ F_{3x} \\ F_{3z} \\ M_{3y} \end{pmatrix}$$

Eraldame võrrandisüsteemist tundmatutele siirtetele u_2 , w_2 ja φ_2 vastava osa ehk võrrandid 4...6. Nullsiirete tõttu kaovad nendest võrranditest ära liikmed 1...3 ja 7...9. Alles jäävad need liikmed, mis eelnevas avaldises on näidatud hallika taustaga.

$$10^3 \begin{bmatrix} 502,36 & -200,73 & 3,63 \\ -200,73 & 270,50 & -0,43 \\ 3,63 & -0,43 & 27,72 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 110,0741 \\ -38,8889 \end{pmatrix}$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame sõlmpunktide siirded üldkoordinaatides

$$u_2 = 0,00038 \text{ m}; \quad w_2 = 0,00069 \text{ m}; \quad \varphi_2 = -0,00144 \text{ rad}$$

7. Elementide sisejõud

Sisejõud üksikutes varrastes leiame avaldisega (18.294)

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{Td} + \hat{\mathbf{F}}_0$$

Elemendi I sisejõud on

$$\hat{\mathbf{F}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \hat{N}_1^{(1)} \\ \hat{Q}_1^{(1)} \\ \hat{M}_1^{(1)} \\ \hat{N}_2^{(1)} \\ \hat{Q}_2^{(1)} \\ \hat{M}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{K}}^{(1)}\mathbf{Td} + \hat{\mathbf{F}}_0^{(1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= 10^3 \begin{bmatrix} 420 & 0 & 0 & -420 & 0 & 0 \\ 0 & 1,81 & -4,54 & 0 & -1,81 & -4,54 \\ 0 & -4,54 & 15,12 & 0 & 4,54 & 7,56 \\ -420 & 0 & 0 & 420 & 0 & 0 \\ 0 & -1,81 & 4,54 & 0 & 1,81 & 4,54 \\ 0 & -4,54 & 7,56 & 0 & 4,54 & 15,12 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,00038 \\ 0,00069 \\ -0,00144 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \\ 50 \\ 0 \\ -60 \\ -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134,94 \\ -54,76 \\ 42,35 \\ -134,94 \\ -65,24 \\ -68,55 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

kus kasutame elemendi jäikusmaatriksit kohalikes koordinaatides. See maatriks tuleb siin arvutada, kuna eespool arvutasime elemendi jäikusmaatriksi üldkoordinaatides.

Elemendi 2 sisejõududeks saame

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{F}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} \hat{N}_2^{(2)} \\ \hat{Q}_2^{(2)} \\ \hat{M}_2^{(2)} \\ \hat{N}_3^{(2)} \\ \hat{Q}_3^{(2)} \\ \hat{M}_3^{(2)} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{K}}^{(2)} \mathbf{Td} + \hat{\mathbf{F}}_0^{(2)} = \\
&= 10^3 \begin{bmatrix} 350 & 0 & 0 & -350 & 0 & 0 \\ 0 & 1,05 & -3,15 & 0 & -1,05 & -3,15 \\ 0 & -3,15 & 12,60 & 0 & 3,15 & 6,30 \\ -350 & 0 & 0 & 350 & 0 & 0 \\ 0 & -1,05 & 3,15 & 0 & 1,05 & 3,15 \\ 0 & -3,15 & 6,30 & 0 & 3,15 & 12,60 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00038 \\ 0,00069 \\ -0,00144 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -74,0741 \\ 88,8889 \\ 0 \\ -25,9259 \\ -44,4444 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133,16 \\ -68,81 \\ 68,55 \\ -133,16 \\ -31,19 \\ -55,69 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

8. Toereaktsioonid

Tundmatud toereaktsioonid leiame neile vastavatest võrranditest ehk võrranditest 1...3 ja 7...9. Nullsiiretele vastavad liikmed kaovad võrranditest ära ja seetõttu jäävad alles veerud 4...6. Asetame leitud siirded võrranditesse ja liidame juurde eespool saadud

elementide toereaktsioonid sõlmedes 1 (joonis 18.103, b) ja 3 (joonis 18.104) õigete märkidega. Toereaktsioonide arvutus üldkoordinaatides on

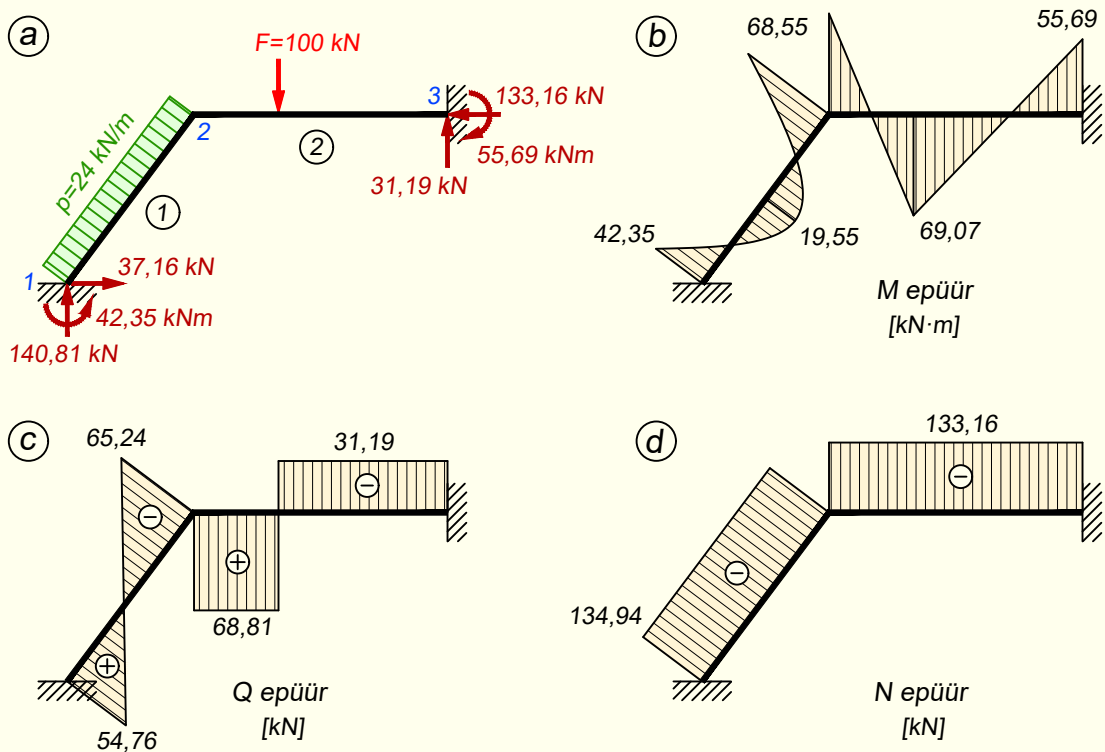
$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ M_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3z} \\ M_{3y} \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -152,36 & 200,73 & -3,63 \\ 200,73 & -269,45 & -2,72 \\ 3,63 & 2,72 & 7,56 \\ -350 & 0 & 0 \\ 0 & -1,05 & 3,15 \\ 0 & -3,15 & 6,30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,00038 \\ 0,00069 \\ -0,00144 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} -48 \\ -36 \\ 50 \\ 0 \\ -25,9259 \\ -44,4444 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 37,16 \\ -140,81 \\ 42,35 \\ -133,16 \\ -31,19 \\ -55,69 \end{Bmatrix}$$

Toereaktsioonid (joonis 18.106, a) eraldi välja tooduna on

$$F_{1x} = 37,16 \text{ kN}; \quad F_{1z} = -140,81 \text{ kN}; \quad M_{1y} = 42,35 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$F_{2x} = -133,16 \text{ kN}; \quad F_{2z} = -31,19 \text{ kN}; \quad M_{2y} = -55,69 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 18.106. Toereaktsioonid ja sisejõudude epüürid

Peatükk 19

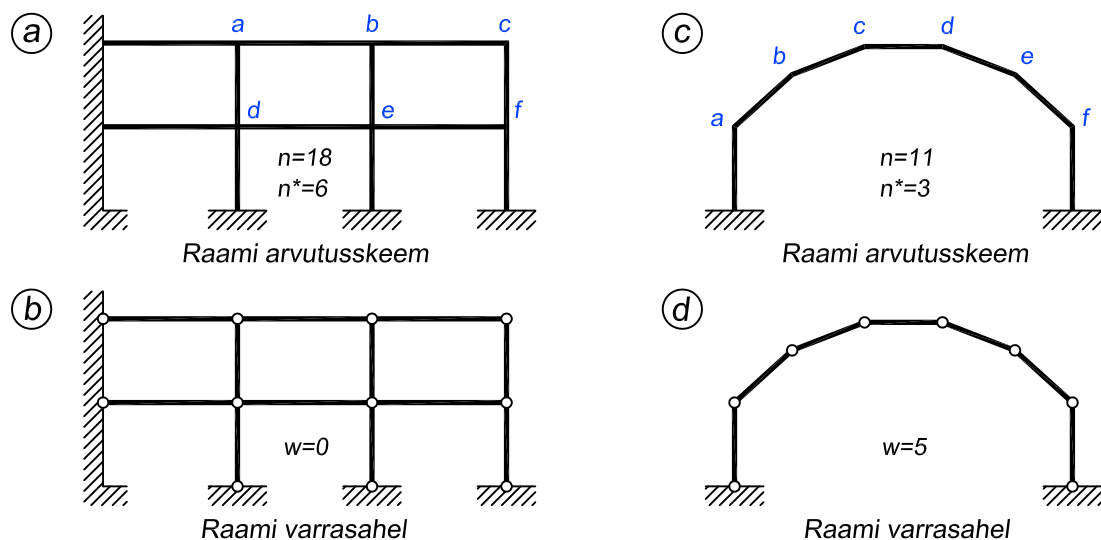
SEGAMEETOD

19.1. Sissejuhatus

Staatikaga määramatut raami, mille liigsidemete arv n on suur, kuid raami varrasahela vabadusaste w väike, on otstarbekas lahendada deformatsioonimeetodiga. Eriti kasulik on deformatsioonimeetod, kui vabadusaste võrdub nulliga: $w = 0$.

Joonisel 19.1, a kujutatud raami staatikaga määramatuse aste on $n = 6 \cdot 3 = 18$, raami varrasahela (joonis 19.1, b) vabadusaste on $w = 0$ ja kinemaatilise määramatuse aste $n^* = n_s + w = 6 + 0 = 6$. Deformatsioonimeetodiga lahendamisel on lisatundmatuteks kuue jäiga sõlme pöörded.

Joonisel 19.1, c kujutatud raamil on samuti kuus vaba jäika sõlme ($n_s = 6$), kuid varrasahela (joonis 19.1, d) vabadusaste on $w = 2 \cdot 8 - 7 - 4 = 5$. Kinemaatilise määramatuse aste seetõttu kasvab märgatavalt: $n^* = n_s + w = 6 + 5 = 11$. Samal ajal staatikaga määramatuse aste on $n = 3m = 3 \cdot 1 = 3$.



Joonis 19.1. Raamid ja nende varrasahelad

Arvutusskeemide puhul, kus liigsidemete arv n on väike, kuid varrasahela vabadusaste w suur (nagu joonisel 19.1, c), on kasulik rakendada jõumeetodit.

Jõumeetodiga lahendamisel on lisatundmatuteks sisejõud ja reaktsioonid ning põhiskeemi saame staatikaga määramatust arvutusskeemist liigsidemete eemaldamisega. Deformatsioonimeetodi puhul on lisatundmatuteks siirded ja põhiskeemi saame staatikaga määramatule arvutusskeemile lisasidemete juurdepanemisega.

Staatikaga määramatu arvutusskeemi, mille ühel osal on palju liigsidemeid ja väike vabadusaste ning teisel osal vastupidiselt on vähe liigsidemeid ja küllalt suur vabadusaste, lahendamisel on sobiv võtta lisatundmatuteks nii siirded kui ka sisejõud ja reaktsioonid. Seda meetodit, mille esitas vene teadlane A.A. Gvozdzjev 1927. aastal, nimetatakse *segameetodiks*.

19.2. Võrrandisüsteem ja sisejõudude arvutus

Segameetodi põhiskeemi moodustamisel eemaldame liigsidemed arvutusskeemi sellest osast, kus $n_I < n_I^*$, ja lisame sidemed sellele osale, kus $n_{II}^* < n_{II}$.

Kanoonilised võrrandid koostame eemaldatud liigsidemetele vastavate siirete kinemaatiliste pidevustingimuste (n_I võrrandit) ja juurdepanud sidemete tasakaalutingimuste (n_{II}^* võrrandit) alusel. Kinemaatiliste pidevustingimuste ja tasakaalutingimuste alusel koostatud võrrandites on tundmatute kordajateks ning vabaliikmeteks vastavalt siirded ja reaktsioonid.

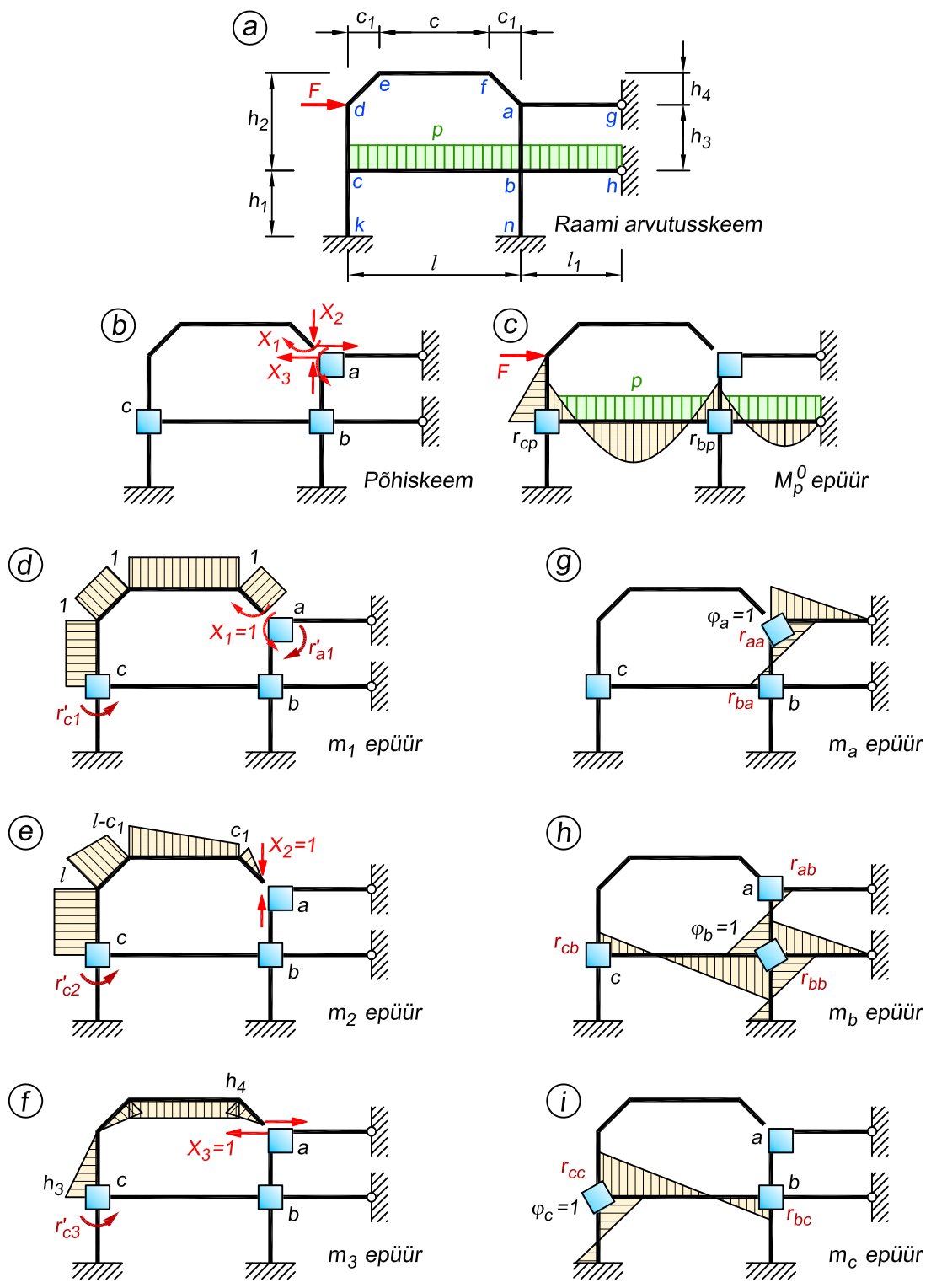
Staatikaga määramatu arvutusskeemi paindemomendi epüüri arvutame nii nagu jõu- ja deformatsioonimeetodi puhul jõudude mõju sõltumatuse printsiibi alusel.

Raami lahendamist segameetodiga selgitame joonisel 19.2, a kujutatud arvutusskeemiga. Raami kinemaatilise määramatuse aste on $n^* = n_s + w = 6 + 2 = 8$ ja staatikaga määramatuse aste on $n = 3m - l_1 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$.

Kolmest kontuurist koosneval arvutusskeemi osal $a-b-c-k-n-h-g-a$ on $n^* = 3$ ja $n = 7$ ning ülejäänud osal $c-d-e-f-a$ on $n^* = 5$ ja $n = 3$. Kuna arvutusskeemi esimesena mainitud osal on kinemaatilise määramatuse aste väiksem, siis seal võtame lisatundmatuteks sõlmede pöörded φ_a , φ_b ja φ_c , mistõttu paigutame põhiskeemi moodustamisel nendesse sõlmedesse sõlmede pööret takistavad sidemed (joonis 19.2, b). Teisena mainitud arvutusskeemi osal on väiksem staatikaga määramatuse aste ja seal valime tundmatuteks kolm sisejõudu X_1 , X_2 ja X_3 . Põhiskeemi moodustamisel lõikame varda $a-f$ selle alumises otsas sõlme a juures läbi, nagu on näidatud joonisel 19.2, b.

Kolme eemaldatud sideme kohta koostame kanoonilised võrrandid kinemaatiliste pidevustingimuste ja kolme juurdepanud sideme kohta tasakaalutingimuste alusel. Kokku saame kuus võrrandit

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta'_{1a}\varphi_a + \delta'_{1b}\varphi_b + \delta'_{1c}\varphi_c + \Delta_{1p} &= 0 \\
 \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta'_{2a}\varphi_a + \delta'_{2b}\varphi_b + \delta'_{2c}\varphi_c + \Delta_{2p} &= 0 \\
 \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta'_{3a}\varphi_a + \delta'_{3b}\varphi_b + \delta'_{3c}\varphi_c + \Delta_{3p} &= 0 \\
 r'_{a1}X_1 + r'_{a2}X_2 + r'_{a3}X_3 + r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{ac}\varphi_c + r_{ap} &= 0 \\
 r'_{b1}X_1 + r'_{b2}X_2 + r'_{b3}X_3 + r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{bc}\varphi_c + r_{bp} &= 0 \\
 r'_{c1}X_1 + r'_{c2}X_2 + r'_{c3}X_3 + r_{ca}\varphi_a + r_{cb}\varphi_b + r_{cc}\varphi_c + r_{cp} &= 0
 \end{aligned} \tag{19.1}$$



Joonis 19.2. Skeemid segameetodi põhimõtte selgitamiseks

Võrrandisüsteem (19.1) lühendatud kujul väljakirjutatuna on

$$\delta'_{i1}X_1 + \delta'_{i2}X_2 + \delta'_{i3}X_3 + \delta'_{ia}\varphi_a + \delta'_{ib}\varphi_b + \delta'_{ic}\varphi_c + \Delta_{ip} = 0, \quad \text{kus } i = 1, 2, 3 \quad (19.2)$$

$$r'_{j1}X_1 + r'_{j2}X_2 + r'_{j3}X_3 + r_{ja}\varphi_a + r_{jb}\varphi_b + r_{jc}\varphi_c + r_{jp} = 0, \quad \text{kus } j = a, b, c \quad (19.3)$$

Koormusest põhjustatud epüür põhiskeemis on esitatud joonisel 19.2, c. Ühikjõududest ja ühikmomendist põhjustatud epüürid põhiskeemis on esitatud joonisel 19.2, d, e, f ning sõlmede ühikpööretest põhjustatud epüürid joonisel 19.2, g, h, i.

Võrrandid (19.2) ja (19.3) sisaldavad kokku nelja erinevat liiki tundmatute kordajaid:

1. $\delta'_{i1}, \delta'_{i2}, \delta'_{i3}$ on ühikjõududest $X_1 = 1, X_2 = 1$ ja $X_3 = 1$ põhjustatud põhiskeemi siirded, mille leiame samuti nagu jõumeetodi puhul;
2. r_{ja}, r_{jb}, r_{jc} on sõlmede ühikpööretest $\varphi_a = 1, \varphi_b = 1$ ja $\varphi_c = 1$ põhjustatud reaktsioonid põhiskeemi lisasidemetes ja need arvutame nagu deformatsioonimeetodi puhul;
3. $\delta'_{ia}, \delta'_{ib}, \delta'_{ic}$ on lisatundmatutele X_i vastavad siirded, mis on põhjustatud sõlmede ühikpööretest $\varphi_a = 1, \varphi_b = 1$ ja $\varphi_c = 1$;
4. $r'_{j1}, r'_{j2}, r'_{j3}$ on ühikjõududest $X_1 = 1, X_2 = 1$ ja $X_3 = 1$ põhjustatud reaktsioonmomendid põhiskeemi lisasidemetes

$$\begin{aligned} r'_{a1} &= -1; & r'_{b1} &= 0; & r'_{c1} &= 1 \\ r'_{a2} &= 0; & r'_{b2} &= 0; & r'_{c2} &= l \\ r'_{a3} &= 0; & r'_{b3} &= 0; & r'_{c3} &= h_3 \end{aligned} \quad (19.4)$$

Reaktsiooni ja siirde vastastikkuse teoreemi põhjal

$$\begin{aligned} \delta'_{1a} &= -r'_{a1} = 1; & \delta'_{1b} &= -r'_{b1} = 0; & \delta'_{1c} &= -r'_{c1} = -1 \\ \delta'_{2a} &= -r'_{a2} = 0; & \delta'_{2b} &= -r'_{b2} = 0; & \delta'_{2c} &= -r'_{c2} = -l \\ \delta'_{3a} &= -r'_{a3} = 0; & \delta'_{3b} &= -r'_{b3} = 0; & \delta'_{3c} &= -r'_{c3} = -h_3 \end{aligned} \quad (19.5)$$

Võrrandi (19.2) vabaliige Δ_{ip} on koormusest põhjustatud põhiskeemi siire, mille arvutame nii nagu jõumeetodi puhul. Võrrandi (19.3) vabaliige r_{jp} on koormusest põhjustatud reaktsioon põhiskeemi lisasideses ja selle arvutame nagu deformatsioonimeetodi korral.

Sisejõudude arvutus

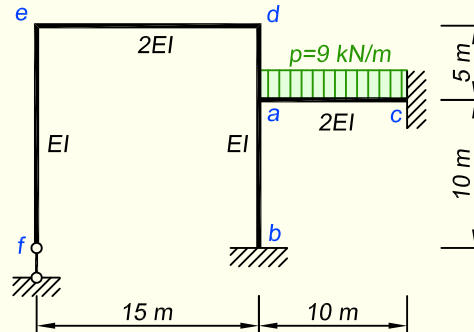
Pärast võrrandisüsteemi lahendamist arvutame paindemomendi epüüri ordinaadid raami suvalises lõikes k valemiga

$$M_k = M_{kp}^0 + m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + m_{k3}X_3 + m_{ka}\varphi_a + m_{kb}\varphi_b + m_{kc}\varphi_c \quad (19.6)$$

kus $M_{kp}^0, m_{k1}, m_{k2}, m_{k3}, m_{ka}, m_{kb}$ ja m_{kc} on koormuse ning ühiktundmatute $X_i = 1$ ja $\varphi_j = 1$ poolt põhjustatud paindemomendid põhiskeemi lõikes k .

Põikjõud ja pikijõud arvutame pärast paindemomendi epüüri koostamist samuti, nagu tegime seda jõumeetodi ja deformatsioonimeetodi puhul.

NÄIDE 19.1. Koostada joonisel 19.3 kujutatud raami paindemomendi epüür, kasutades selleks segameetodit. Varraste jäikuste erinevus on näidatud joonisel. Näite esialgne versioon pärineb raamatust [15].



Joonis 19.3. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

Raami staatikaga määramatuse ja kinemaatilise määramatuse aste on

$$n = 3m - l_1 = 3 \cdot 2 - 2 = 4; \quad n^* = n_s + w = 3 + 2 = 5$$

Vaadeldes raami üksikuid osasid eraldi, selgub, et vasakpoolse suletud kontuuri $f-e-d-a-b$ staatikaga määramatuse aste on $n = 1$ ning parempoolse suletud kontuuri $b-a-c$ kinemaatilise määramatuse aste on $n^* = 1$. Seetõttu saame segameetodit kasutades piirduda kahe tundmatuga võrrandisüsteemiga.

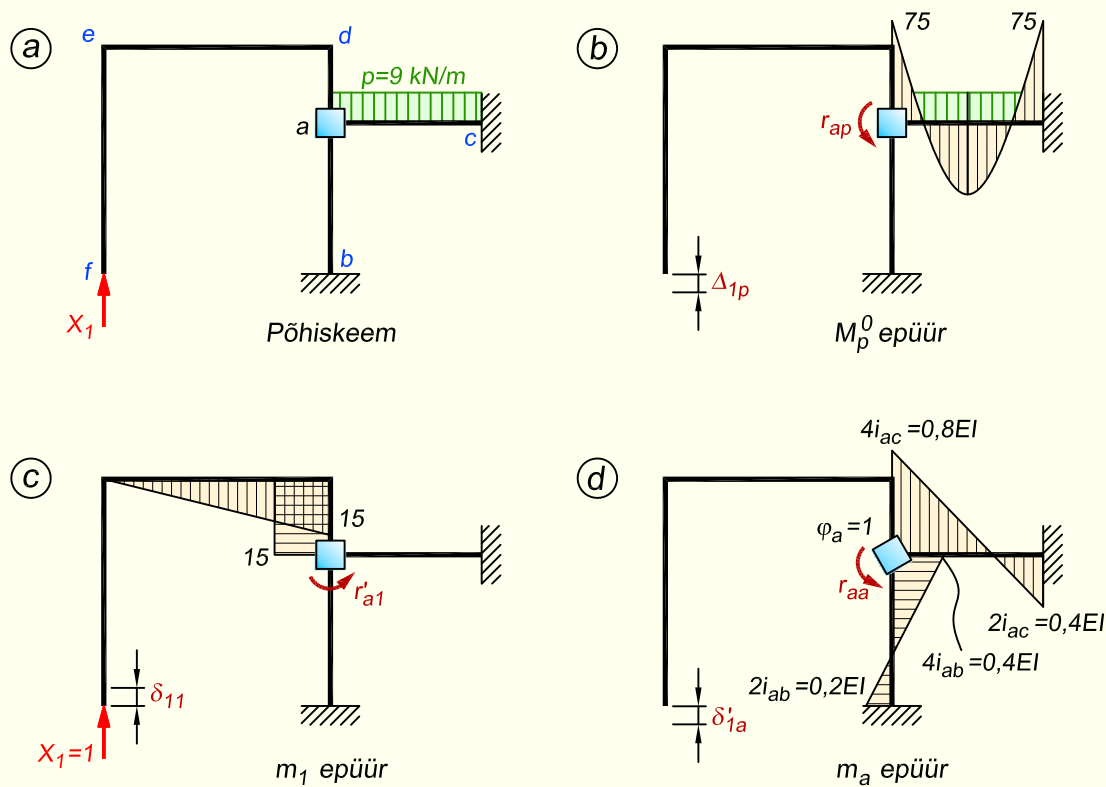
Põhiskeemi moodustame selliselt, et raami vasakpoolselt osalt eemaldame sõlmest f sealse ainukese toesideme, mistõttu seal on tundmatuks vertikaalne reaktsioon X_1 . Raami parempoolsele osale lisame sõlme a selle sõlme pöõret takistava sideme. Seal on tundmatuks sõlme pöõre φ_a . Põhiskeem on kujutatud joonisel 19.4, a .

Kirjutame välja võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta'_{1a}\varphi_a + \Delta_{1p} &= 0 \\ r'_{a1}X_1 + r_{aa}\varphi_a + r_{ap} &= 0 \end{aligned}$$

mille liikmetel on järgmine tähendus:

1. $\delta_{11}X_1$ on eemaldatud sideme sihis toimuv siire tundmatust jõust X_1 ;
2. $\delta'_{1a}\varphi_a$ on eemaldatud sideme sihis toimuv siire tundmatust pöõrdest φ_a ;
3. Δ_{1p} on eemaldatud sideme sihis toimuv siire koormusest;
4. $r'_{a1}X_1$ on põhiskeemi lisasidemes a tekkiv reaktsioon tundmatust jõust X_1 ;
5. $r_{aa}\varphi_a$ on põhiskeemi lisasidemes a tekkiv reaktsioon tundmatust pöõrdest φ_a ;
6. r_{ap} on põhiskeemi lisasidemes a tekkiv reaktsioon koormusest.



Joonis 19.4. Põhiskeem koos selle epüüride ning tekkivate siirete ja reaktsioonidega

Siirde δ_{11} arvutame vastavalt jõumeetodi reeglitele, kasutades selleks joonist 19.4, c

$$\delta_{11} = \frac{15}{3 \cdot 2EI} \cdot 15 \cdot 15 + \frac{15 \cdot 5 \cdot 15}{EI} = \frac{1687,5}{EI} \text{ m}^3$$

Siirde r_{aa} leiame nii nagu deformatsioonimeetodis, kasutades selleks joonist 19.4, d

$$r_{aa} = 4i_{ac} + 4i_{ab} = 4 \cdot \frac{2EI}{10} + 4 \cdot \frac{EI}{10} = 0,8EI + 0,4EI = 1,2EI \frac{1}{\text{m}}$$

Reaktsiooni r'_{a1} leiame jooniselt 19.4, c

$$r'_{a1} = 15 \text{ m}$$

Siirde δ'_{1a} saame vastavalt avaldistele 19.5

$$\delta'_{1a} = -r'_{a1} = -15 \text{ m}$$

Vabaliikme Δ_{1p} arvutame samuti nagu jõumeetodis, kasutades selleks epüüre joonisel 19.4, b ja c. Selgub, et see vabaliige võrdub praegu nulliga

$$\Delta_{1p} = 0$$

Vabaliikme r_{ap} saame vastavalt deformatsioonimeetodile, kasutades joonist 19.4, b

$$r_{ap} = 75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Võrrandisüsteem koos arvkoordajatega on nüüd

$$\begin{aligned} \frac{1687,5}{EI}X_1 - 15\varphi_a + 0 &= 0 \\ 15X_1 + 1,2EI\varphi_a + 75 &= 0 \end{aligned}$$

ja selle lahendid on

$$X_1 = -0,5 \text{ kN}; \quad \varphi_a = -\frac{56,25}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Paindemomendi epüüri ordinaadid arvutame valemiga (19.6)

$$M_k = M_{kp}^0 + m_{k1}X_1 + m_{ka}\varphi_a$$

$$M_{ac} = 75 - 0,8EI \cdot \frac{56,25}{EI} = 30,00 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

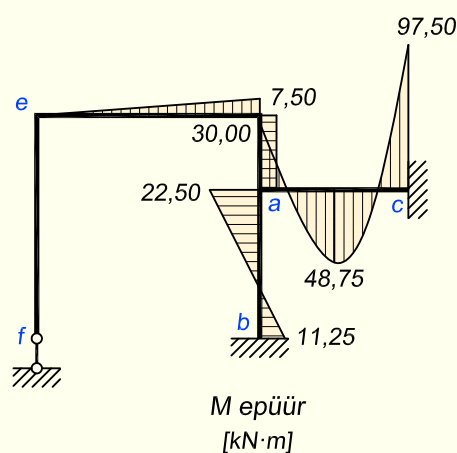
$$M_{ab} = -0,4EI \cdot \frac{56,25}{EI} = -22,50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_c = -75 - 0,4EI \cdot \frac{56,25}{EI} = -97,50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_b = -0,2EI \cdot \frac{56,25}{EI} = -11,25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

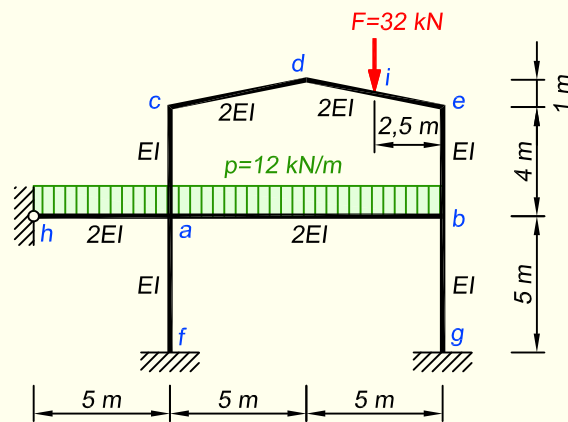
$$M_d = -15 \cdot 0,5 = -7,50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Eelnevalt leitud ordinaatidest neli esimest kanname epüürile peale vastavalt deformatsioonimeetodi märgireeglile, viimase aga vastavalt jõumeetodi omale.



Joonis 19.5. Paindemomendi epüür

NÄIDE 19.2. Koostada joonisel 19.6 kujutatud raami paindemomendi epüür, kasutades selleks segameetodit. Varraste jäikuste erinevus on näidatud joonisel.



Joonis 19.6. Raami arvutuskeem

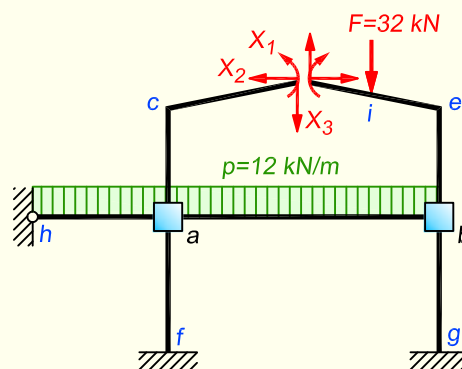
LAHENDUS

Raami staatikaga määramatuse ja kinemaatilise määramatuse aste on

$$n = 3m - l_1 = 3 \cdot 3 - 1 = 8; \quad n^* = n_s + w = 5 + 2 = 7$$

Staatikaga määramatuse aste jaguneb selliselt, et esimesel korrusel on see 5 ja teisel korrusel 3. Kinemaatilise määramatuse aste on esimesel korrusel 2 ja teisel korrusel 5.

Põhiskeemi moodustame nii, et lõikame raami teisel korrusel sõlme d kohalt läbi, kus lisatundmatuteks võtame sõlmes d esinevad sisejõud X_1 , X_2 ja X_3 . Esimesel korrusel lisame sõlmedesse a ja b sõlmede pööret takistavad sidemed. Seal on tundmatuteks sõlmede pöörded φ_a ja φ_b . Põhiskeem on kujutatud joonisel 19.7.



Joonis 19.7. Põhiskeem

Segameetodi rakendamine nõuab viiest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi lahendamist. Kolm esimest võrrandit koostame kinemaatiliste pidevustingimuste põhjal, mis

väljendavad seda, et lisatundmatutele X_1 , X_2 ja X_3 vastavad siirded peavad võrduma nulliga. Kaks viimast võrrandit kirjutame sõlmede a ja b kohta koostatud momentide tasakaalu tingimuste põhjal.

Segameetodi kanooniline võrrandisüsteem on järgmine

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta'_{1a}\varphi_a + \delta'_{1b}\varphi_b + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta'_{2a}\varphi_a + \delta'_{2b}\varphi_b + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta'_{3a}\varphi_a + \delta'_{3b}\varphi_b + \Delta_{3p} &= 0 \\ r'_{a1}X_1 + r'_{a2}X_2 + r'_{a3}X_3 + r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{ap} &= 0 \\ r'_{b1}X_1 + r'_{b2}X_2 + r'_{b3}X_3 + r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{bp} &= 0\end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi liikmete arvutamiseks vajalikud põhiskeemi epüürid koormusest, ühikjõududest ja sõlmede ühikpööretest on esitatud joonisel 19.8.

Leiame esmalt jõumeetodiga arvutatavad tundmatute kordajad

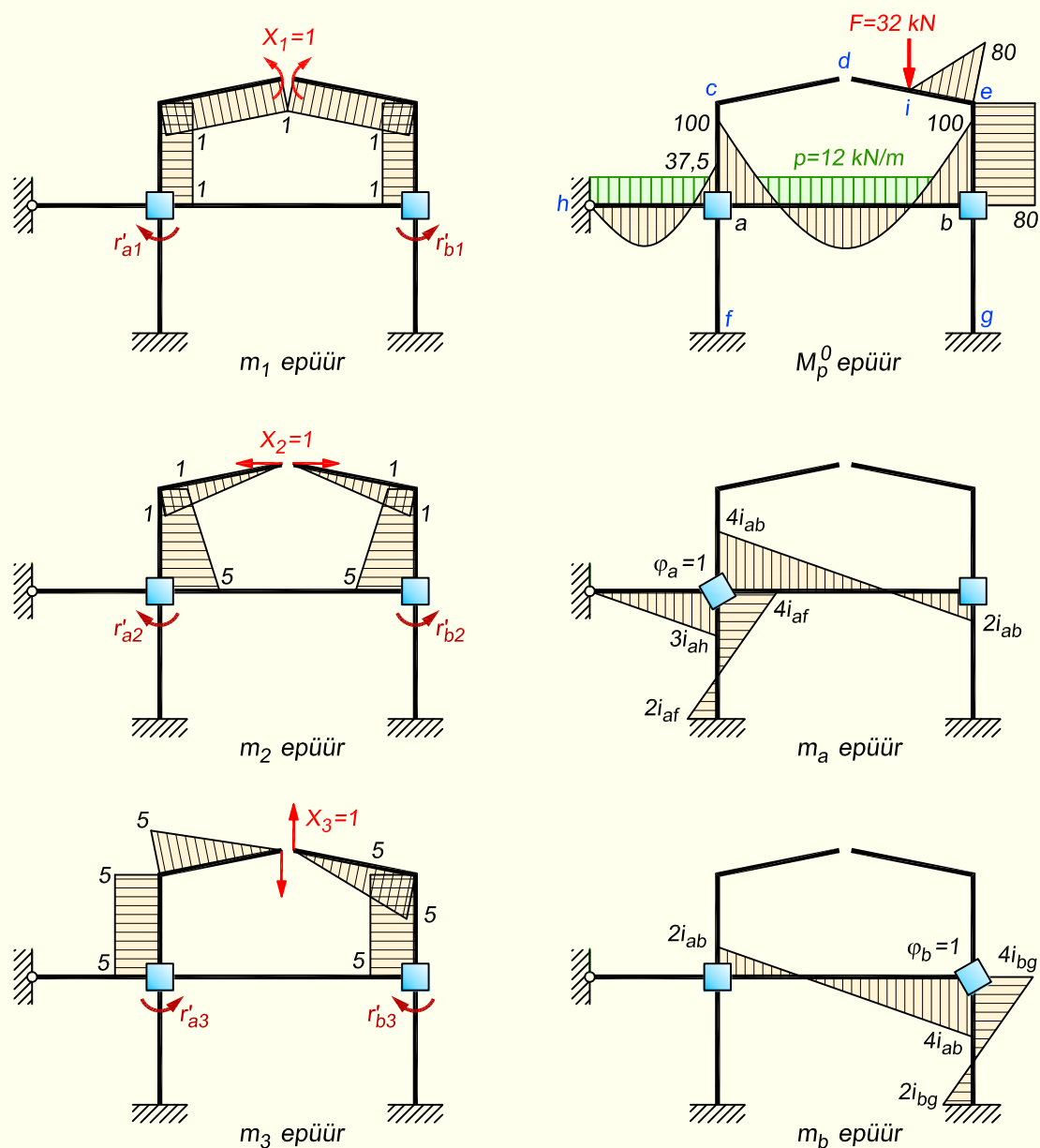
$$\begin{aligned}\delta_{11} &= 2 \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 1}{EI} + \frac{1 \cdot \sqrt{26} \cdot 1}{2EI} \right) = \frac{13,099}{EI} \text{ m} \\ \delta_{22} &= 2 \left[\frac{\sqrt{26}}{3 \cdot 2EI} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{4}{6EI} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5) \right] = \frac{84,366}{EI} \text{ m}^3 \\ \delta_{33} &= 2 \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 5}{EI} + \frac{\sqrt{26}}{3 \cdot 2EI} \cdot 5 \cdot 5 \right) = \frac{242,492}{EI} \text{ m}^3 \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = 2 \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 3}{EI} + \frac{1 \cdot \sqrt{26} \cdot 0,5}{2EI} \right) = \frac{26,550}{EI} \text{ m}^2 \\ \delta_{13} &= \delta_{31} = 0 \\ \delta_{23} &= \delta_{32} = 0\end{aligned}$$

Järgnevalt leiame jõumeetodiga arvutatavad vabaliikmed

$$\begin{aligned}\Delta_{1p} &= -\frac{1 \cdot 4 \cdot 80}{EI} - \frac{1 \cdot \sqrt{26} \cdot 40}{2 \cdot 2EI} = -\frac{370,990}{EI} \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\ \Delta_{2p} &= -\frac{80 \cdot 4 \cdot 3}{EI} + \frac{\sqrt{26}}{2 \cdot 6 \cdot 2EI} (0 - 4 \cdot 0,75 \cdot 40 - 1 \cdot 80) = -\frac{1002,492}{EI} \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \\ \Delta_{3p} &= -\frac{5 \cdot 4 \cdot 80}{EI} + \frac{\sqrt{26}}{2 \cdot 6 \cdot 2EI} (0 - 4 \cdot 3,75 \cdot 40 - 5 \cdot 80) = -\frac{1812,459}{EI} \text{ kN} \cdot \text{m}^3\end{aligned}$$

Nüüd leiame deformatsioonimeetodiga arvutatavad tundmatute kordajad

$$\begin{aligned}r_{aa} &= 4i_{ab} + 4i_{af} + 3i_{ah} = 4 \cdot \frac{2EI}{10} + 4 \cdot \frac{EI}{5} + 3 \cdot \frac{2EI}{5} = 2,8EI \frac{1}{\text{m}} \\ r_{ab} &= 2i_{ab} = 2 \cdot \frac{2EI}{10} = 0,4EI \frac{1}{\text{m}} \\ r_{bb} &= 4i_{ab} + 4i_{bg} = 4 \cdot \frac{2EI}{10} + 4 \cdot \frac{EI}{5} = 1,6EI \frac{1}{\text{m}}\end{aligned}$$



Joonis 19.8. Põhiskeemi epüürid koormusest ja ühiktundmatutest

Koormuse poolt lisasidemetes tekkivad reaktsioonid annavad meile vabaliikmed

$$r_{ap} = 100 - 37,5 = 62,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$r_{bp} = -100 - 80 = -180 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ühikjõudude poolt lisasidemetes põhjustatud reaktsioonid on

$$r'_{a1} = -1; \quad r'_{a2} = -5 \text{ m}; \quad r'_{a3} = 5 \text{ m}$$

$$r'_{b1} = 1; \quad r'_{b2} = 5 \text{ m}; \quad r'_{b3} = 5 \text{ m}$$

Sõlmede ühikpööretest põhjustatud ühikjõududele vastavad siirded on

$$\begin{aligned} \delta'_{1a} = -r'_{a1} = 1; & \quad \delta'_{2a} = -r'_{a2} = 5 \text{ m}; & \quad \delta'_{3a} = -r'_{a3} = -5 \text{ m} \\ \delta'_{1b} = -r'_{b1} = -1; & \quad \delta'_{2b} = -r'_{b2} = -5 \text{ m}; & \quad \delta'_{3b} = -r'_{b3} = -5 \text{ m} \end{aligned}$$

Võrrandisüsteem koos arvkoordajatega on nüüd

$$\begin{aligned} \frac{13,099}{EI}X_1 + \frac{26,550}{EI}X_2 + 0 + 1\varphi_a - 1\varphi_b - 370,990 &= 0 \\ \frac{26,550}{EI}X_1 + \frac{84,366}{EI}X_2 + 0 + 5\varphi_a - 5\varphi_b - 1002,492 &= 0 \\ 0 + 0 + \frac{242,492}{EI}X_3 - 5\varphi_a - 5\varphi_b - 1812,459 &= 0 \\ -1X_1 - 5X_2 + 5X_3 + 2,8EI\varphi_a + 0,4EI\varphi_b + 62,5 &= 0 \\ 1X_1 + 5X_2 + 5X_3 + 0,4EI\varphi_a + 1,6EI\varphi_b - 180 &= 0 \end{aligned}$$

ja selle lahendid on

$$\begin{aligned} X_1 = 4,343 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad X_2 = 14,122 \text{ kN}; \quad X_3 = 8,057 \text{ kN} \\ \varphi_a = -\frac{16,303}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^2; \quad \varphi_b = \frac{44,552}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

Paindemomendi epüüri ordinaadid arvutame valemiga (19.6)

$$M_k = M_{kp}^0 + m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + m_{k3}X_3 + m_{ka}\varphi_a + m_{kb}\varphi_b$$

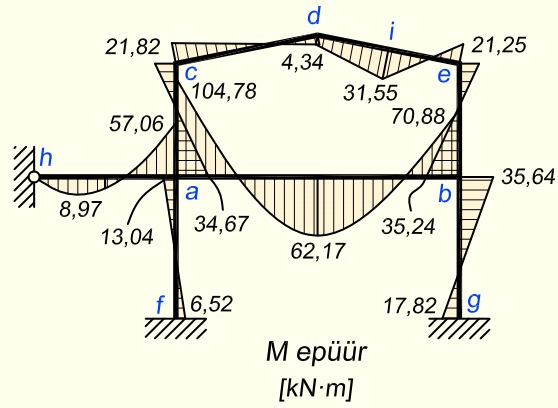
Raami teise korruse epüüri ordinaadid saame vastavalt jõumeetodile

$$\begin{aligned} M_c &= 1 \cdot 4,343 + 1 \cdot 14,122 - 5 \cdot 8,057 = -21,82 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_e &= -80 + 1 \cdot 4,343 + 1 \cdot 14,122 + 5 \cdot 8,057 = -21,25 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{ac} &= 1 \cdot 4,343 + 5 \cdot 14,122 - 5 \cdot 8,057 = 34,67 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{be} &= -80 + 1 \cdot 4,343 + 5 \cdot 14,122 + 5 \cdot 8,057 = 35,24 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Raami esimese korruse epüüri ordinaadid saame vastavalt deformatsioonimeetodile

$$\begin{aligned} M_{ah} &= -37,5 - 3 \cdot \frac{2EI}{5} \cdot \frac{16,303}{EI} = -57,06 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{ab} &= 100 - 4 \cdot \frac{2EI}{10} \cdot \frac{16,303}{EI} + 2 \cdot \frac{2EI}{10} \cdot \frac{44,552}{EI} = 104,78 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{af} &= -4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{16,303}{EI} = -13,04 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_f &= -2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{16,303}{EI} = -6,52 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{ba} &= -100 - 2 \cdot \frac{2EI}{10} \cdot \frac{16,303}{EI} + 4 \cdot \frac{2EI}{10} \cdot \frac{44,552}{EI} = -70,88 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{bg} &= 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{44,552}{EI} = 35,64 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_g &= 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{44,552}{EI} = 17,82 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Jõumeetodi abil leitud ordinaadid kanname epüürile peale vastavalt jõumeetodi märkeeglile ja deformatsioonimeetodiga saadud ordinaadid vastavalt deformatsioonimeetodi omale.



Joonis 19.9. Paindemomendi epüür

Peatükk 20

MOMENTIDE JAOTAMISE MEETOD

20.1. Sissejuhatus

Enne arvutite kasutuselevõttu oli mitmekorruseliste raamide arvutamine väga töömahukas kõrge staatikaga määramatuse astme tõttu. Ameeriklasest ehitusinsener Hardy Cross (1885–1959) pani aluse momentide jaotamise meetodile, mis võimaldas selliseid raame suhteliselt lihtsalt ja kiirelt arvutada. Kui Cross selle meetodi esmakordselt avaldas 1930. aastal [3], tekitas see inseneride hulgas suurt huvi ja seda on loetud üheks väga oluliseks panuseks ehitusmehaanika arvutusmeetodite arengusse 20. sajandil. Meetodi looja auks nimetatakse seda ka *Crossi meetodiks*.

Tänapäeval on see meetod küll suurema osa oma aktuaalsusest kaotanud, kuid teatud juhtudel saab seda mugava abivahendina kasutada. Näiteks võib sellega kontrollida arvutiga saadud tulemuste õigsust või teha esialgset ligikaudset arvutust konstruktsiooni projekteerimise esimeses etapis.

Momentide jaotamise meetod võimaldab suure staatikaga määramatuse astmega raame ja jätkuvtalasid lahendada võrdlemisi lihtsalt. See meetod kujutab järkjärgulist lähenemist, kusjuures lahendit võib saada lähteandmete täpsusega.

Momentide jaotamise meetodi puhul kasutame deformatsioonimeetodi põhiskeemi, mis tähendab, et sõlmede ja varraste pöörded on takistatud. Algul leiame koormusest põhjustatud kinnitusmomendid kinemaatilisel määratud põhiskeemi varraste otsristlõigetel sarnaselt deformatsioonimeetodile. Kinnitusmomendid ei ole sõlmes tasakaalus ning järgnevalt tasakaalustame neid momentide jaotamise teel kuni soovitud (algandmete) täpsuseni. Tasakaalustamiseks eemaldame järgemööda igast jäigast sõlmest pööret takistava sideme, mis annab võimaluse sõlmel pöörduda ning momentidel ümber jaotuda.

Raamide arvutamisel momentide jaotamise meetodiga peame vahet tegema nullvabadusastmega (*siirdumatute sõlmedega raam*) ja nullist suurema vabadusastmega (*siirduvate sõlmedega raam*) raamide vahel. Nullvabadusastmega ($w = 0$) raami arvutamisel momentide jaotamise teel ei ole vaja võrrandeid koostada ega lahendada. Paindemomendid leiame lihtsate matemaatiliste tehete. Kui raami vabadusaste $w > 0$, siis on lahendi saamiseks vaja (peale lihtsate matemaatiliste tehete) koostada ja lahendada ka $w = 2s - v - t$ võrrandit. Mida väiksem on raami vabadusaste, seda efektiivsem on momentide jaotamise meetod.

20.2. Nullvabadusastmega raamide arvutamine

20.2.1. Põhimõisted ja meetodi idee

Joonisel 20.1, *a* esitatud skeemiga selgitame sõlme pöördel momentide jaotumist pöördunud sõlmes jäigalt ühendatud varrastes. Sõlm *j* on jäik sõlm, kus liitub kolm varrast. Kuna see sõlm ei ole fikseeritud toepinnaga, siis koormuse mõjul ta mingil määral pöördub, nagu on kujutatud raami deformeerunud skeemil joonisel 20.1, *b*.

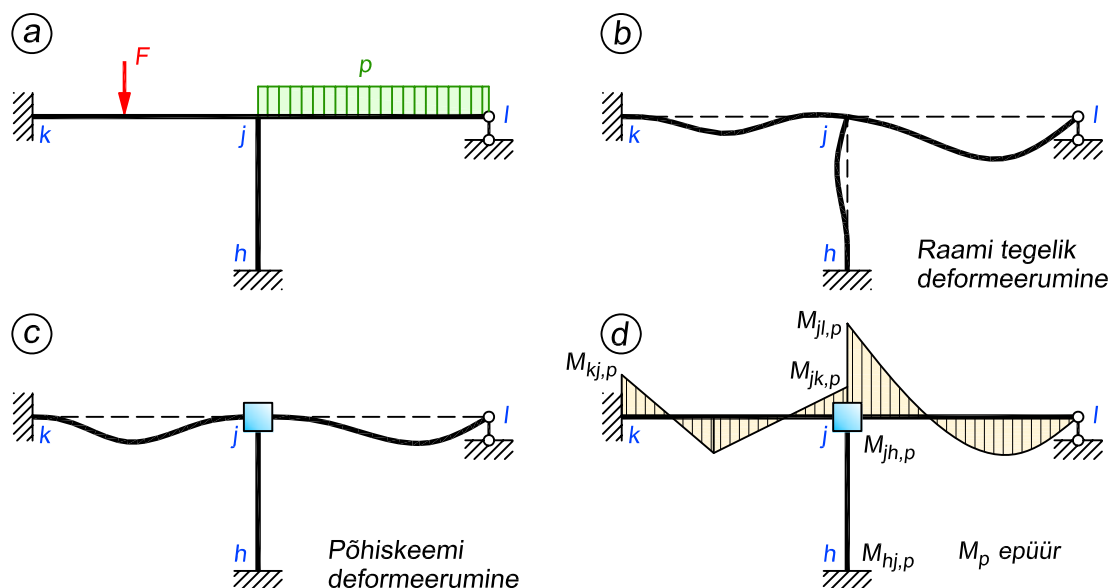
Tasakaalustamata moment

Kui nüüd moodustada raamile põhiskeem vastavalt deformatsioonimeetodi põhimõtetele, siis tuleb meil selleks lisada vabasse jäika sõlme *j* sõlme pööret takistav side. Nüüd deformeeruvad raami vardad koormuse mõjul vastavalt joonisel 20.1, *c* kujutatule. Koormusest tingitud põhiskeemi paindemomendi epüür (ehk kinnitusmomentide epüür) on näidatud joonisel 20.1, *d*. Kinnitusmomentideks nimetatakse kinemaatilisel määratud põhiskeemi varraste otses tekkivaid momente ($M_{jk,p}$, $M_{jh,p}$, $M_{jl,p}$, $M_{kj,p}$, $M_{hj,p}$), mille arvutame deformatsiooni-meetodi juures esitatud valemitega (tabel 17.1).

Kinnitusmomentide algebralist summat ühes sõlmes nimetatakse *tasakaalustamata momentiks*

$$M_{j\Sigma,p} = M_{jk,p} + M_{jh,p} + M_{jl,p} \quad (20.1)$$

kuna üldjuhul see ei võrdu nulliga. Seda näeme ka jooniselt 20.1, *d*, kus sõlmes *j* ei ole M_p epüüri ordinaadid tasakaalus.



Joonis 20.1. Raami deformeerumine tegelikus olukorras ja põhiskeemis

Tasakaalustav moment

Kui kinemaatiliselt määratud põhiskeemi sõlm j vabastada pööret takistavast sidemest (juhul kui pööret takistavaid sidemeid on rohkem kui üks, siis jäävad kõigi teiste sõlmede pööret takistavad sidemed alles ja need sõlmed ei pöördu), siis sõlm j pöördub tasakaalustamata momendi $M_{j\Sigma,p}$ tõttu niipalju, et momentide summa sõlmes muutub nulliks, s.t tasakaaluasendisse. Tingituna sõlme j pöördest muutuvad momendid sõlmes j ühendatud varraste jäikades otstes. Sõlme pöördel jaotub tasakaalustamata moment kindlas proportsioonis sõlmes ühendatud varrastele.

Tasakaalustamata momendi jaotumisel tekkinud momente nimetatakse *tasakaalustavateks momentideks*. Kuna sõlmes jäigalt ühendatud varrad pöörduvad võrdse nurga võrra, siis jaotub tasakaalustamata moment varrastele proportsionaalselt nende jäikustele. Tasakaalustav moment võrdub sõlmes liituvate varraste jäikuseid arvestava jaotusteguri μ ja tasakaalustamata momendi korrutisega, võetuna vastupidise märgiga

$$M_{jk}^t = -\mu_{jk}M_{j\Sigma,p} \quad (20.2)$$

Varda jäikus

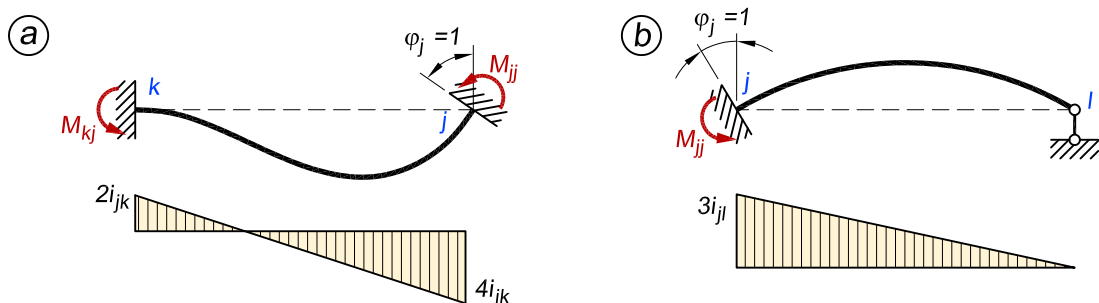
Vaatame joonist 20.2, a, kus mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda parempoolsele otsasõlmele j on antud ühikpööre $\varphi_j = 1$. Peatükis 17.6 näitasime valemiga (17.65), et sõlme pööre ja varda samas otsas tekkiv kinnitumoment on konstantse ristlõikega varda korral teineteisega seotud järgmiselt

$$M_{jj} = 4i_{jk}\varphi_j = \frac{4EI_{jk}}{l_{jk}}\varphi_j \quad (20.3)$$

kus avaldise murrulist osa nimetatakse *varda jäikuseks*. Arvestades sellega, et praegu on meil tegemist sõlme ühikpöördega $\varphi_j = 1$, siis võime saadud avaldise esitada kujul

$$M_{jj} = 4i_{jk} \quad (20.4)$$

Varda jäikus on järelikult võrdne vabas jäigas sõlmes tekkiva momendiga, mis on tingitud selle sõlme ühikpöördest. Teisiti võime jäikuse kohta öelda, et see võrdub momendiga, mida on vaja rakendada varda otsale j , selleks et seda pöörata ühiknurga võrra.



Joonis 20.2. Paindemomentide epüürid sõlmede pöördest

Kui varda üks ots on kinnitatud jäigalt ja teine ots liigendiga (joonis 20.2, b), siis on sõlme pööre ja varda samas otsas tekkinud kinnitumoment varda konstantse ristlõike puhul teineteisega seotud valemiga (17.82)

$$M_{jj} = 3i_{jl}\varphi_j = \frac{3EI_{jl}}{l_{jl}}\varphi_j \quad (20.5)$$

ja kuna $\varphi_j = 1$, siis

$$M_{jj} = 3i_{jl} \quad (20.6)$$

Jaotustegur

Sõlme j pööret takistava sideme eemaldamisel pöördub sõlm tasakaalustamata momendi $M_{j\Sigma,p}$ tõttu. Deformatsioonimeetodi tasakaaluvõrrandist

$$r_{jj}\varphi_j + M_{j\Sigma,p} = 0 \quad (20.7)$$

leiame sõlme j pöörde

$$\varphi_j = -\frac{M_{j\Sigma,p}}{r_{jj}} \quad (20.8)$$

kus

$$r_{jj} = 4(i_{jk} + i_{jh}) + 3i_{jl} \quad (20.9)$$

on sõlmes j jäigalt ühendatud varraste jäikuste summa (valemid (20.4) ja (20.6), joonis 20.3).

Sõlmes j jäigalt ühendatud varraste jäikuste summa üldvalemina kasutame deformatsioonimeetodi juures esitatud valemit (17.119)

$$r_{jj} = 4 \sum_k i_{jk} + 3 \sum_l i_{jl} \quad (20.10)$$

Eespool mainisime, et tasakaalustamata moment jaotub varrastele proportsionaalselt nende jäikusele. Seetõttu saame sõlme j pöördest tingitud tasakaalustavad momendid järgmiselt

$$M_{jk}^t = -\frac{4i_{jk}}{r_{jj}}M_{j\Sigma,p}; \quad M_{jh}^t = -\frac{4i_{jh}}{r_{jj}}M_{j\Sigma,p}; \quad M_{jl}^t = -\frac{3i_{jl}}{r_{jj}}M_{j\Sigma,p} \quad (20.11)$$

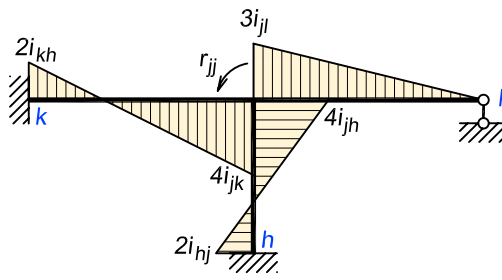
kus tasakaalustamata momendi $M_{j\Sigma,p}$ ees olevaid suhteid $\frac{4i_{jk}}{r_{jj}}$, $\frac{4i_{jh}}{r_{jj}}$ ja $\frac{3i_{jl}}{r_{jj}}$ nimetatakse *jaotusteguriteks*. Jaotustegurid näitavad, kuidas tasakaalustamata moment jaotub varrastele. Kui arvestada valemit (20.9), siis on nende avaldised järgmised

vardal j - k

$$\mu_{jk} = \frac{4i_{jk}}{4(i_{jk} + i_{jh}) + 3i_{jl}} = \frac{i_{jk}}{i_{jk} + i_{jh} + 0,75i_{jl}} \quad (20.12)$$

vardal j - h

$$\mu_{jh} = \frac{4i_{jh}}{4(i_{jk} + i_{jh}) + 3i_{jl}} = \frac{i_{jh}}{i_{jk} + i_{jh} + 0,75i_{jl}} \quad (20.13)$$



Joonis 20.3. Reaktsioonid sõlme j pöördest

vardal $j-l$

$$\mu_{jl} = \frac{3i_{jl}}{4(i_{jk} + i_{jh}) + 3i_{jl}} = \frac{0,75i_{jl}}{i_{jk} + i_{jh} + 0,75i_{jl}} \quad (20.14)$$

Jaotustegurid on proportsionaalsed varraste jäikustega. Mida jäigem on varras, seda suurem on tasakaalustav moment vardas.

Jaotustegurite summa sõlmes võrdub ühega

$$\mu_{jk} + \mu_{jh} + \mu_{jl} = 1 \quad (20.15)$$

Jaotusteguri mõlemas otsas jäigalt kinnitatud vardal arvutame valemiga

$$\mu_{jk} = \frac{i_{jk}}{\sum_k i_{jk} + 0,75 \sum_l i_{jl}} \quad (20.16)$$

ning sõlmes j jäigalt ja teises otsas liigendiga kinnitatud vardal

$$\mu_{jl} = \frac{0,75i_{jl}}{\sum_k i_{jk} + 0,75 \sum_l i_{jl}} \quad (20.17)$$

Kontrollarvutus peab võrduma ühega

$$\sum_k \mu_{jk} + \sum_l \mu_{jl} = 1 \quad (20.18)$$

Ülekandemoment

Sõlme j pööre põhjustab momentide muutumist sõlmes j jäigalt ühendatud varraste teises otsas jääkades sõlmedes k ja h (joonis 20.1, a). Neid momente nimetatakse *ülekandemomentideks*. Ülekandemoment on võrdne ülekandeteguri λ ja tasakaalustava momendi M^t korrutisega

$$M_{kj}^u = \lambda_{jk} M_{jk}^t \quad (20.19)$$

Ülekandetegur

Ülekandetegur λ on võrdne paigalseisvas ja pöörduvas sõlmes (järgalt ühendatud varda otses) tekkivate momentide suhtega

$$\lambda_{jk} = \frac{M_{kj}}{M_{jk}}; \quad \lambda_{jh} = \frac{M_{hj}}{M_{jh}} \quad (20.20)$$

Jooniselt 20.2, a näeme, et paigalseisvas sõlmes k tekkinud moment on kaks korda väiksem kui pöörduvas sõlmes j tekkinud moment. Järelikult on konstantse ristlõikega varda ülekandetegur

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad (20.21)$$

Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutus

Tasakaalustavad momendid joonisel 20.1, a kujutatud raamile leiame nüüd valemitega

$$M_{jk}^t = -\mu_{jk} M_{j\Sigma,p}; \quad M_{jh}^t = -\mu_{jh} M_{j\Sigma,p}; \quad M_{jl}^t = -\mu_{jl} M_{j\Sigma,p} \quad (20.22)$$

Ülekandemomendid jääkades sõlmedes k ja h arvutame tasakaalustavate momentide ja ülekandetegurite korrutistena

$$M_{kj}^u = \lambda_{jk} M_{jk}^t; \quad M_{hj}^u = \lambda_{jh} M_{jh}^t \quad (20.23)$$

mis konstantse ristlõikega varraste puhul on

$$M_{kj}^u = \frac{1}{2} M_{jk}^t; \quad M_{hj}^u = \frac{1}{2} M_{jh}^t \quad (20.24)$$

Paindemomendi epüüri (joonis 20.4) ordinaadid leiame liitmise teel

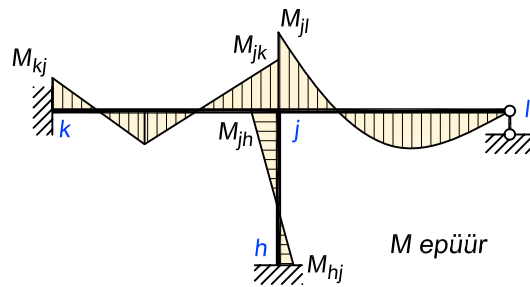
$$M_{jk} = M_{jk,p} + M_{jk}^t; \quad M_{jh} = M_{jh,p} + M_{jh}^t; \quad M_{jl} = M_{jl,p} + M_{jl}^t \quad (20.25)$$

$$M_{kj} = M_{kj,p} + M_{kj}^u; \quad M_{hj} = M_{hj,p} + M_{hj}^u \quad (20.26)$$

20.2.2. Arvutamise skeem

Järgnevalt esitame arvutamise skeemi nullvabadusastmega arvutusskeemi jaoks ($w = 0$).

1. Arvutame koormusest põhjustatud kinnitusmomentid kinemaatilisel määratud põhiskeemis.
2. Leiame jaotustegurid.
3. Raami kinemaatilisel määratud põhiskeemi ühest sõlmest eemaldame pööret takistava sideme. Tasakaalustamata momendi tõttu sõlm pöörduv. Järgnevalt arvutame sõlme pöördest tingitud tasakaalustavad momendid. Viimaste summa on võrdne tasakaalustamata momendiga (kinnitusmomentide algebraline summa sõlmes), kuid vastupidise märgiga. Pärast momentide tasakaalustamist paneme raami sõlme pööret takistava sideme tagasi.



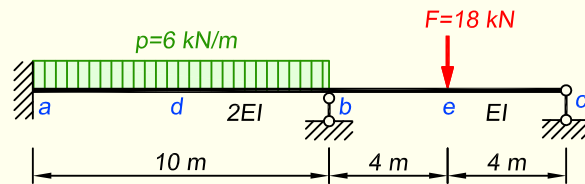
Joonis 20.4. Paindemomendi epüür

4. Leiame ülekandemomendid, mille saame tasakaalustava momendi korrutamisel ülekandeteguriga. Ülekandemomendid on tasakaalustavate momentidega samamärgilised.
5. Rakendame punktides 3 ja 4 kirjeldatud tehteid kõigi sõlmede kohta, kusjuures tasakaalustamata momentide leidmisel liidame koormusest põhjustatud kinnituspõhjustatud momentidele ka ülekandemomendid. Pärast kõigi sõlmede ühekordset tasakaalustamist esinevad sõlmedes ülekandemomendid, mille tõttu sõlmed ei ole tasakaalus.
6. Kordame punktides 3, 4 ja 5 kirjeldatud tehteid tasakaalustamata ülekandemomentidega, kuni ülekandemomendid on arvutustäpsusest väiksemad. Sõlme teistkordsel ja järgnevatel tasakaalustamistel on tasakaalustamata momentideks ülekandemomentide algebraline summa sõlmes.
7. Iga varda otsas liidame kinnituspõhjustatud momentide, tasakaalustavad ja ülekandemomendid, mille tulemusena saame arvutuskeemile mõjuvust põhjustatud paindemomendid.
8. Põik- ja pikijõud leiame varraste ja sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustega.
9. Sisejõude ja toereaktsioone kontrollime tasakaalutingimustega: $\sum X = 0$, $\sum Z = 0$ ja $\sum M = 0$.

Sõlmi võib tasakaalustada suvalises järjekorras. Otstarbekas on alustada sõlmest, kus tasakaalustamata moment on kõige suurem. Arvutuse esitame tabeli kujul. Tabeli päises märgime sõlmed, vardad ja jaotustegurid. Tasakaalustamine koosneb tsüklitest. Tsükli moodustab ühekordne tasakaalustamine kõigi sõlmede juures. Esimene arvutustsükkel koosneb kolmest reast: esimeses reas on kinnituspõhjustatud momentid, teises reas ülekandemomendid ja kolmandas reas tasakaalustavad momentid. Iga järgmine tsükkel koosneb tavaliselt kahest reast, kui sõlmed tasakaalustatakse samas järjekorras kui eelmises tsüklis: esimeses reas on ülekandemomendid ja teises reas tasakaalustavad momentid. Kui sõlmed tasakaalustame, võrreldes eelmise tsükliga, teises järjekorras, siis võib tsükkel koosneda kolmest reast: esimeses ja teises reas on ülekandemomendid ja kolmandas reas tasakaalustavad momentid.

Jätkuvtala arvutus toimub sarnaselt nullvabadusastmega raamile ja seetõttu me seda eraldi peatükina ei käsitle.

NÄIDE 20.1. Arvutada joonisel 20.5 kujutatud jätkuvtala paindemomendi epüüri ordinaadid. Tala sillete jäikuste erinevus on näidatud joonisel.



Joonis 20.5. Jätkuvtala arvutuskeem

LAHENDUS

Tala kinemaatilise määratuse aste $n^* = 1$. Tundmatuks on toelõike b pööre.

Varraste suhtelised jäikused leiame deformatsioonimeetodist tuttava valemiga

$$i = \frac{EI}{l}$$

Võtame teise silde suhtelise jäikuse i_{bc} väärtuse võrdseks ühega, avaldame siit EI ja leiame selle abil esimese silde suhtelise jäikuse

$$i_{bc} = \frac{EI}{l} = \frac{EI}{8} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m} \Rightarrow EI = 8 \text{ kN}\cdot\text{m}^2; \quad i_{ab} = \frac{2EI}{l} = \frac{2 \cdot 8}{10} = 1,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Arvutame kinnitusemomendid kinemaatiliselt määratud põhiskeemis (joonis 20.6). Kasutame selleks tabelit 17.1.

$$M_{ab,p} = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 10^2 = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

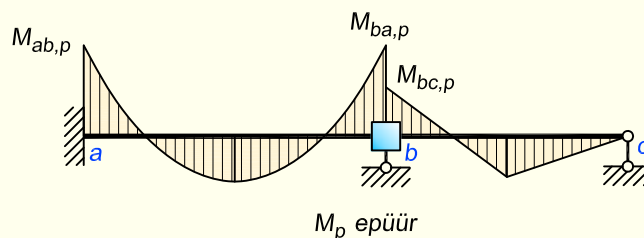
$$M_{ba,p} = -\frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 10^2 = -50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc,p} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 8 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5^2) = 27 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sõlmes b tekib tasakaalustamata moment

$$M_{b\Sigma,p} = M_{ba,p} + M_{bc,p} = -50 + 27 = -23 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Pärast sõlme b pööret takistava sideme eemaldamist hakkab sõlm tasakaalustamata momendi mõjul pöörduma.



Joonis 20.6. Kinnitusemomendid kinemaatiliselt määratud põhiskeemis

Leiame valemitega (20.16) ja (20.17) jaotustegurid sõlmes b . Need määravad ära, kuidas tasakaalustamata moment jaotub sõlmes liituvate varraste vahel.

$$\mu_{ba} = \frac{i_{ab}}{i_{ab} + 0,75i_{bc}} = \frac{1,6}{1,6 + 0,75 \cdot 1} = 0,6809$$

$$\mu_{bc} = \frac{0,75i_{bc}}{i_{ab} + 0,75i_{bc}} = \frac{0,75 \cdot 1}{1,6 + 0,75 \cdot 1} = 0,3191$$

Arvutame sõlme b pöördest põhjustatud tasakaalustavad momendid, kasutades selleks leitud jaotustegureid ja valemit (20.2)

$$M_{ba}^t = -\mu_{ba}M_{b\Sigma,p} = 0,6809 \cdot 23 = 15,66 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc}^t = -\mu_{bc}M_{b\Sigma,p} = 0,3191 \cdot 23 = 7,34 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kontrolliks liidame saadud tulemused kokku, kuna tasakaalustavate momentide summa peab võrduma vastupidise märgiga võetud tasakaalustamata momendiga

$$M_{ba}^t + M_{bc}^t = 15,66 + 7,34 = 23 = -M_{b\Sigma,p}$$

Leiame vardale ab ülekandemomendi avaldisega (20.19)

$$M_{ab}^u = \lambda_{ab}M_{ba}^t = \frac{1}{2} \cdot 15,66 = 7,83 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Viimasena arvutame paindemomendi epüüri ordinaadid. Sõlme b ordinaadid saame, kui liidame esialgsetele kinnituspomentidele juurde sõlme b pöördest tekkivad tasakaalustavad momendid

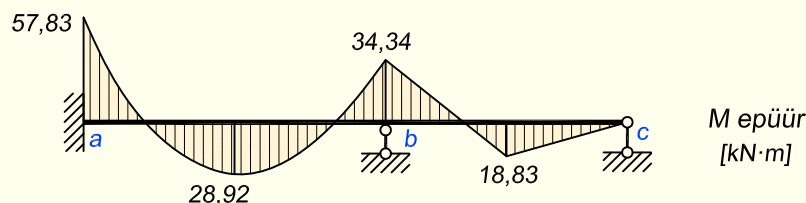
$$M_{ba} = M_{ba,p} + M_{ba}^t = -50 + 15,66 = -34,34 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc} = M_{bc,p} + M_{bc}^t = 27 + 7,34 = 34,34 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sõlme a ordinaadi saamiseks liidame esialgsele kinnituspomentile juurde ülekandemomendi

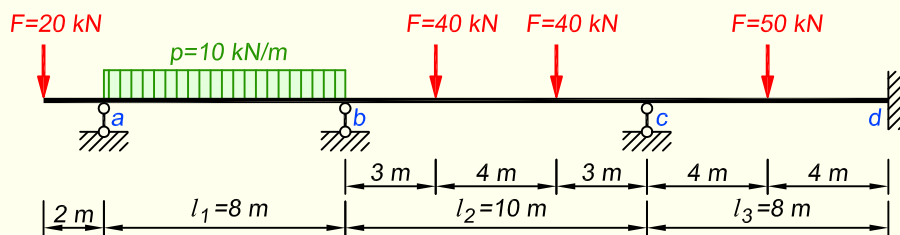
$$M_{ab} = M_{ab,p} + M_{ab}^u = 50 + 7,83 = 57,83 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Epüürile kanname ordinaadid vastavalt deformatsioonimeetodi paindemomendi märgireeglile. Silletes olevate lõigete d ja e ordinaatide arvutuse jätame siin esitamata.



Joonis 20.7. Paindemomendi epüür

NÄIDE 20.2. Arvutada joonisel 20.8 kujutatud jätkuvtala paindemomendi epüüri ordinaadid. Tala silded on konstantse jäikusega.



Joonis 20.8. Jätkuvtala arvutuskeem

LAHENDUS

Tala kinemaatilise määramatuse aste $n^* = 2$. Tundmatuteks on toelõigete b ja c pöörded. Varraste suhtelised jäikused leiame valemiga

$$i = \frac{EI}{l}$$

Võtame esimese (ja samuti kolmanda) silde suhtelise jäikuse i_{ab} väärtuse võrdseks ühega, avaldame siit EI ja leiame selle abil teise silde suhtelise jäikuse

$$i_{ab} = i_{cd} = \frac{EI}{l} = \frac{EI}{8} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m} \Rightarrow EI = 8 \text{ kN}\cdot\text{m}^2; \quad i_{bc} = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Arvutame kinnitusmomendid kinemaatiliselt määratud põhiskeemis (joonis 20.9). Kinnitusmomendi $M_{ba,p}$ leidmisel arvestame ka konsoolil olevat koondjõudu.

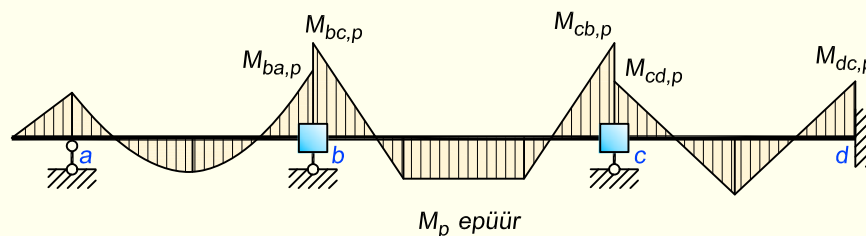
$$M_{ba,p} = -\frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 8^2 + 20 \cdot 2 \cdot 0,5 = -60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc,p} = 40 \cdot 3 \cdot 0,7^2 + 40 \cdot 7 \cdot 0,3^2 = 84 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cb,p} = -40 \cdot 7 \cdot 0,3^2 - 40 \cdot 3 \cdot 0,7^2 = -84 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cd,p} = 50 \cdot 4 \cdot 0,5^2 = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{dc,p} = -50 \cdot 4 \cdot 0,5^2 = -50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 20.9. Kinnitusmomendid kinemaatiliselt määratud põhiskeemis

Leiame jaotustegurid sõlmedes b ja c

$$\mu_{ba} = \frac{0,75i_{ab}}{i_{bc} + 0,75i_{ab}} = \frac{0,75 \cdot 1}{0,8 + 0,75 \cdot 1} = 0,4839$$

$$\mu_{bc} = \frac{i_{bc}}{i_{bc} + 0,75i_{ab}} = \frac{0,8}{0,8 + 0,75 \cdot 1} = 0,5161$$

$$\mu_{cb} = \frac{i_{bc}}{i_{bc} + i_{cd}} = \frac{0,8}{0,8 + 1} = 0,4444$$

$$\mu_{cd} = \frac{i_{cd}}{i_{bc} + i_{cd}} = \frac{1}{0,8 + 1} = 0,5556$$

Tasakaalustamata momendid sõlmedes b ja c on

$$M_{b\Sigma,p} = M_{ba,p} + M_{bc,p} = -60 + 84 = 24 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{c\Sigma,p} = M_{cb,p} + M_{cd,p} = -84 + 50 = -34 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Tasakaalustamist alustame sõlmest c , kus on absoluutväärtuselt suurim tasakaalustamata moment. Tasakaalustamine on esitatud tabelis 20.1.

Tala kinemaatilisel määratud põhiskeemi sõlme c pöördumist takistava sideme eemaldamisel pöördub sõlm c tasakaalustamata momendi tõttu, mille tõttu sõlme c varrastes c - b ja c - d tekivad tasakaalustavad momendid

$$M_{cb}^t = -\mu_{cb}M_{c\Sigma,p} = 0,4444 \cdot 34 = 15,1096 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cd}^t = -\mu_{cd}M_{c\Sigma,p} = 0,5556 \cdot 34 = 18,8904 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sõlme c pöördumisel tekivad ülekandemomendid sõlmedes b ja d

$$M_{bc}^{ii} = \lambda_{bc}M_{cb}^t = \frac{1}{2} \cdot 15,1096 = 7,5548 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{dc}^{ii} = \lambda_{cd}M_{cd}^t = \frac{1}{2} \cdot 18,8904 = 9,4452 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Pärast sõlme c tasakaalustamist ja ülekandemomentide leidmist paneme sõlme c pöördumist takistava sideme tagasi.

Järgnevalt tasakaalustame sõlme b . Tala kinemaatilisel määratud põhiskeemi sõlmest b eemaldame pöördumist takistava sideme. Tasakaalustamata moment, milleks on kinnitusmomentide $M_{ba,p}$ ja $M_{bc,p}$ ning sõlme c pöördumisest tekkiva ülekandemomendi M_{bc}^{ii} summa

$$M_{b\Sigma,p} = M_{ba,p} + M_{bc,p} + M_{bc}^{ii} = -60 + 84 + 7,5548 = 31,5548 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

põhjustab sõlme b pöördumise.

Sõlme b pöördumine põhjustab tasakaalustavad momendid sõlmes b

$$M_{ba}^t = -\mu_{ab}M_{b\Sigma,p} = -0,4839 \cdot 31,5548 = -15,2694 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc}^t = -\mu_{bc}M_{b\Sigma,p} = -0,5161 \cdot 31,5548 = -16,2854 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

ja ülekan demomendi sõlmes c

$$M_{cb}^{ii} = \lambda_{bc} M_{bc}^t = -\frac{1}{2} \cdot 16,2854 = -8,1427 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Pärast sõlme b tasakaalustamist on tasakaalustamise esimene etapp lõppenud, mida tabelis tähistame joone tõmbamisega tasakaalustavate momentide alla. Pärast sõlme b tasakaalustamist asetame sinna sõlme pööret takistava sideme tagasi.

Teist etappi alustame uuesti sõlmes c , kus lähtume sõlme b arvutuse lõpus saadud ülekan demomendist $M_{cb}^{ii} = -8,1427 \text{ kN}\cdot\text{m}$, mille tõttu ei ole sõlm c tasakaalus.

Vabastame sõlme c pööret takistavast sidemest ja leiame sõlme pöördumisel tekkivad tasakaalustavad momendid

$$M_{cb}^t = -\mu_{cb} M_{c\Sigma,p} = 0,4444 \cdot 8,1427 = 3,6186 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{cd}^t = -\mu_{cd} M_{c\Sigma,p} = 0,5556 \cdot 8,1427 = 4,5241 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sõlme c pöördumisel tekivad ülekan demomendid sõlmedes b ja d

$$M_{bc}^{ii} = \lambda_{bc} M_{cb}^t = \frac{1}{2} \cdot 3,6186 = 1,8093 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{dc}^{ii} = \lambda_{cd} M_{cd}^t = \frac{1}{2} \cdot 4,5241 = 2,2620 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Pärast sõlme c tasakaalustamist paneme sinna tagasi sõlme pööret takistava sideme ja liigume sõlme b , kus võtame aluseks eelmisest sõlmest saadud ülekan demomendi $M_{bc}^{ii} = 1,8093 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Mainitud ülekan demomendi tõttu on sõlm tasakaalustamata, mistõttu hakkab pärast pööret takistava sideme eemaldamist pöörduma. Leiame sõlmes b tekkivad tasakaalustavad momendid

$$M_{ba}^t = -\mu_{ab} M_{b\Sigma,p} = -0,4839 \cdot 1,8093 = -0,8755 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{bc}^t = -\mu_{bc} M_{b\Sigma,p} = -0,5161 \cdot 1,8093 = -0,9338 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

ja ülekan demomendi sõlmes c

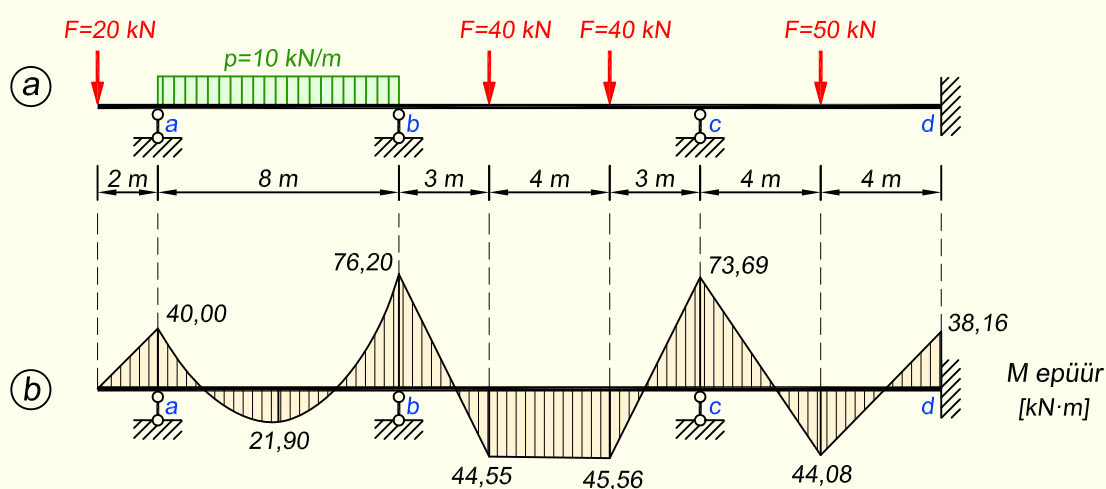
$$M_{cb}^{ii} = \lambda_{bc} M_{bc}^t = -\frac{1}{2} \cdot 0,9338 = -0,4669 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sellela on lõppenud tasakaalustamise teine etapp. Tasakaalustamist jätkame sarnaselt eespool kirjeldatule nii kaua, kuni ülekan demomendid on nõutavast arvutustäpsusest väiksemad. Tabelist 20.1 on näha, et siin ülesandeks tuleb selleks läbi teha neli etappi. Sõltuvalt ülesandest võib neid etappe vaja minna ka rohkem.

Viimasena arvutame paindemomendi epüüri ordinaadid, milleks liidame igas var- da otsas vastava kinnitusemomendi, tasakaalustavad ja ülekan demomendid. Tabelis 20.1 tuleb selleks omavahel summeerida kõik read alates neljandast reast. Paindemomendi epüüri lõplikud väärtused on esitatud tabeli viimases reas ning epüür joonisel 20.10, b .

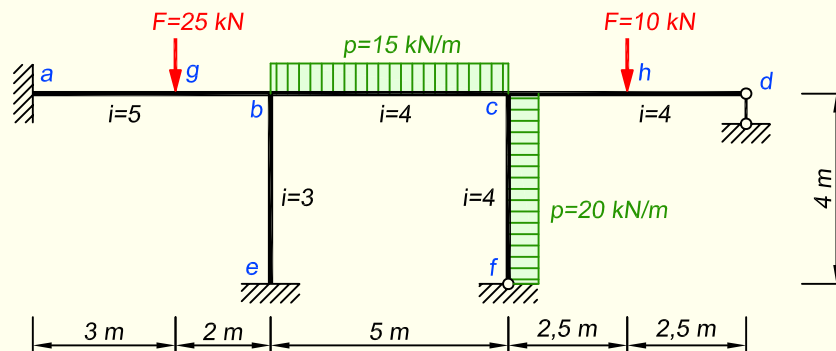
Tabel 20.1. Momentide tasakaalustamine

| Sõlm | b | | c | | d |
|----------------------------------|----------|----------|---------|---------|---------|
| Varras | b-a | b-c | c-b | c-d | d-c |
| Jaotustegur μ | 0,4839 | 0,5161 | 0,4444 | 0,5556 | - |
| Kinnitusmoment $M_{jk,p}$ | -60 | 84 | -84 | 50 | -50 |
| Ülekandemoment $M^{ü,I}$ | | 7,5548 | | | 9,4452 |
| Tasakaalustav moment $M^{t,I}$ | -15,2694 | -16,2854 | 15,1096 | 18,8904 | |
| Ülekandemoment $M^{ü,II}$ | | 1,8093 | -8,1427 | | 2,2620 |
| Tasakaalustav moment $M^{t,II}$ | -0,8755 | -0,9338 | 3,6186 | 4,5241 | |
| Ülekandemoment $M^{ü,III}$ | | 0,1037 | -0,4669 | | 0,1297 |
| Tasakaalustav moment $M^{t,III}$ | -0,0502 | -0,0535 | 0,2075 | 0,2594 | |
| Ülekandemoment $M^{ü,IV}$ | | 0,0059 | -0,0268 | | 0,0074 |
| Tasakaalustav moment $M^{t,IV}$ | -0,0029 | -0,0031 | 0,0119 | 0,0149 | |
| Paindemoment M_{jk} | -76,198 | 76,198 | -73,689 | 73,689 | -38,156 |



Joonis 20.10. Paindemomendi epüür

NÄIDE 20.3. Arvutada joonisel 20.11 kujutatud raami paindemomendi epüüri ordinaadid. Raami varraste suhtelised jäikused on näidatud joonisel.



Joonis 20.11. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

Raami kinemaatilise määramatuse aste $n^* = 2$. Tundmatuteks on sõlmede b ja c pöörded. Põhiskeemi moodustamisel lisame nendesse sõlmedesse sõlme pöört takistavad sidemed.

Kinnitusmomendid kinemaatiliselt määratud põhiskeemis on

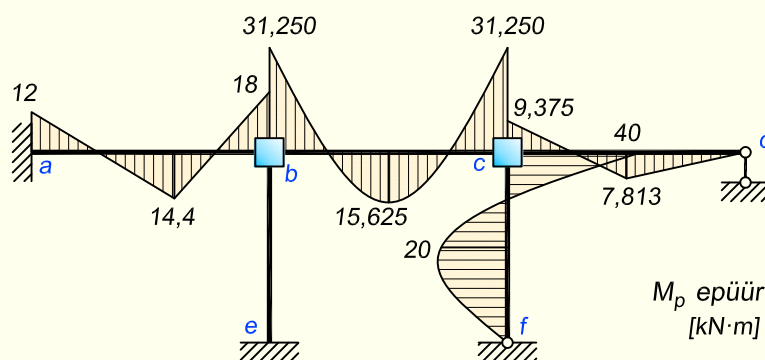
$$M_{ab,p} = 25 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad M_{ba,p} = -25 \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = -18 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc,p} = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 5^2 = 31,250 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad M_{cb,p} = -\frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 5^2 = -31,250 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cf,p} = -\frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 4^2 = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cd,p} = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5^2) = 9,375 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Paindemomendi epüür kinemaatiliselt määratud põhiskeemis M_p on kujutatud joonisel 20.12.



Joonis 20.12. Kinnitusmomendid kinemaatiliselt määratud põhiskeemis

Leiame jaotustegurid sõlmedes b ja c valemitega (20.16) ja (20.17)

$$\mu_{ba} = \frac{i_{ab}}{i_{ab} + i_{be} + i_{bc}} = \frac{5}{5 + 3 + 4} = 0,4167$$

$$\mu_{be} = \frac{i_{be}}{i_{ab} + i_{be} + i_{bc}} = \frac{3}{5 + 3 + 4} = 0,2500$$

$$\mu_{bc} = \frac{i_{bc}}{i_{ab} + i_{be} + i_{bc}} = \frac{4}{5 + 3 + 4} = 0,3333$$

$$\mu_{cb} = \frac{i_{bc}}{i_{bc} + 0,75i_{cf} + 0,75i_{cd}} = \frac{4}{4 + 0,75 \cdot 4 + 0,75 \cdot 4} = 0,4$$

$$\mu_{cf} = \frac{0,75i_{cf}}{i_{bc} + 0,75i_{cf} + 0,75i_{cd}} = \frac{0,75 \cdot 4}{4 + 0,75 \cdot 4 + 0,75 \cdot 4} = 0,3$$

$$\mu_{cd} = \frac{0,75i_{cd}}{i_{bc} + 0,75i_{cf} + 0,75i_{cd}} = \frac{0,75 \cdot 4}{4 + 0,75 \cdot 4 + 0,75 \cdot 4} = 0,3$$

Kõik vardad on konstantse jäikusega, mistõttu ülekandetegurid on kõigi varraste jaoks $\lambda = 0,5$.

Tasakaalustamata momendid sõlmedes saame kinnituumomentide liitmisel

$$M_{b\Sigma,p} = M_{ba,p} + M_{bc,p} = -18 + 31,250 = 13,250 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{c\Sigma,p} = M_{cb,p} + M_{cf,p} + M_{cd,p} = -31,250 + 40 + 9,3750 = 18,125 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sõlmede tasakaalustamist alustame sõlmest c , kus tasakaalustamata moment on suurem. Tasakaalustamine on näidatud tabelis 20.2.

Eemaldame sõlme c pööret takistava sideme ja arvutame välja tasakaalustavad momendid

$$M_{cb}^t = -\mu_{cb}M_{c\Sigma,p} = -0,4 \cdot 18,125 = -7,2500 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cf}^t = -\mu_{cf}M_{c\Sigma,p} = -0,3 \cdot 18,125 = -5,4375 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cd}^t = -\mu_{cd}M_{c\Sigma,p} = -0,3 \cdot 18,125 = -5,4375 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Kuna sõlm b on varda b - c kaudu ühendatud sõlmega c , siis leiame ülekandemomendi

$$M_{bc}^u = \lambda_{bc}M_{cb}^t = -\frac{1}{2} \cdot 7,2500 = -3,6250 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Järgnevalt tasakaalustame sõlme b , kus tasakaalustamata momendi lõpliku väärtuse saamiseks liidame koormustest põhjustatud kinnituumomentide summale ülekandemomendi

$$M_{b\Sigma,p} = M_{ba,p} + M_{bc,p} + M_{bc}^u = -18 + 31,250 - 3,6250 = 9,6250 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Arvutame välja tasakaalustavad momendid sõlmes b

$$M_{ba}^t = -\mu_{ba}M_{b\Sigma,p} = -0,4167 \cdot 9,6250 = -4,0104 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{be}^t = -\mu_{be}M_{b\Sigma,p} = -0,2500 \cdot 9,6250 = -2,4063 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc}^t = -\mu_{bc}M_{b\Sigma,p} = -0,3333 \cdot 9,6250 = -3,2083 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sõlme b pöördumine põhjustab ülekandemomendid sõlmedes a ja e

$$M_{ab}^{ii} = \lambda_{ab} M_{ba}^t = -0,5 \cdot 4,0104 = -2,0052 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{eb}^{ii} = \lambda_{eb} M_{be}^t = -0,5 \cdot 2,4063 = -1,2031 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lisaks põhjustab sõlme b pöördumine ülekandemomendi sõlmes c , mida kasutame järgnevalt tasakaalustamise teises etapis.

$$M_{cb}^{ii} = \lambda_{bc} M_{bc}^t = -0,5 \cdot 3,2083 = -1,6042 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sellela on tasakaalustamise esimene etapp läbi.

Teise etapi alustamiseks liigume tagasi sõlme c , kus uueks tasakaalustamata momendiks võtame eelnevalt mainitud sõlme b pöördest põhjustatud ülekandemomendi $M_{cb}^{ii} = -1,6042 \text{ kN}\cdot\text{m}$, mille tõttu ei ole sõlm c tasakaalus.

Vabastame sõlme c pööret takistavast sidemest ja leiame tekkivad tasakaalustavad momendid

$$M_{cb}^t = -\mu_{cb} M_{c\Sigma,p} = 0,4444 \cdot 1,6042 = 0,6417 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cf}^t = -\mu_{cf} M_{c\Sigma,p} = 0,4444 \cdot 1,6042 = 0,4813 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{cd}^t = -\mu_{cd} M_{c\Sigma,p} = 0,5556 \cdot 1,6042 = 0,4813 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sõlme c pöördumisel tekib ülekandemoment sõlmes b

$$M_{bc}^{ii} = \lambda_{bc} M_{cb}^t = \frac{1}{2} \cdot 0,6417 = 0,3208 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Järgnevalt tasakaalustame sõlme b , milleks eemaldame sealt sõlme pööret takistava sideme. Sõlme c pöördumisest põhjustatud ülekandemomendi $M_{bc}^{ii} = 0,3208 \text{ kN}\cdot\text{m}$ tõttu ei ole sõlm b tasakaalus ja selle momendi võtame uueks tasakaalustamata momendiks. Arvutame tasakaalustavad momendid sõlmes b

$$M_{ba}^t = -\mu_{ba} M_{b\Sigma,p} = -0,4167 \cdot 0,3208 = -0,1337 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{be}^t = -\mu_{be} M_{b\Sigma,p} = -0,2500 \cdot 0,3208 = -0,0802 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc}^t = -\mu_{bc} M_{b\Sigma,p} = -0,3333 \cdot 0,3208 = -0,1069 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sõlme b pöördumisest tekivad ülekandemomendid sõlmedes a , e ja c

$$M_{ab}^{ii} = \lambda_{ab} M_{ba}^t = -0,5 \cdot 0,1337 = -0,0668 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{eb}^{ii} = \lambda_{eb} M_{be}^t = -0,5 \cdot 0,0802 = -0,0401 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

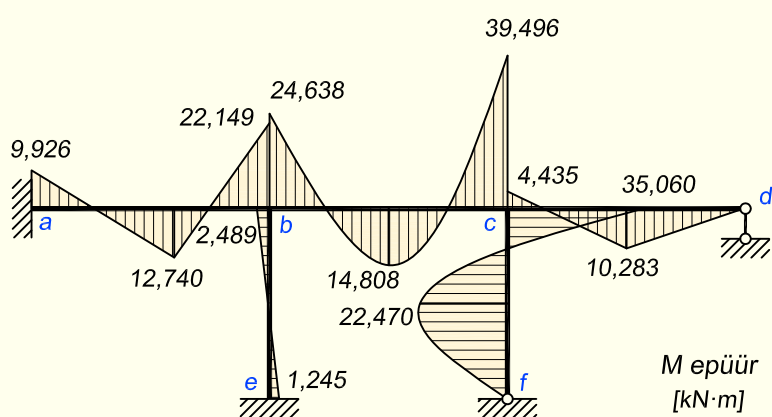
$$M_{cb}^{ii} = \lambda_{bc} M_{bc}^t = -0,5 \cdot 0,1069 = -0,0535 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Sellela on tasakaalustamise teine etapp lõppenud. Järgnev tasakaalustamine on sarnane eespool kirjeldatule. Peale neljandat tasakaalustamist sõlme c tagasi jõudes on tasakaalustamata moment juba piisavalt väike ja sellega võime tasakaalustamise lõppenuks lugeda.

Tabel 20.2. Momentide tasakaalustamine

| Sõlm | a | b | | | c | | | e |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|----------|---------|---------|---------|
| Varras | a-b | b-a | b-e | b-c | c-b | c-f | c-d | e-b |
| μ | - | 0,4167 | 0,25 | 0,3333 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | - |
| $M_{jk,p}$ | 12 | -18 | 0 | 31,2500 | -31,2500 | 40 | 9,3750 | 0 |
| $M^{\ddot{u},I}$ | -2,0052 | | | -3,6250 | | | | -1,2031 |
| $M^{t,I}$ | | -4,0104 | -2,4063 | -3,2083 | -7,2500 | -5,4375 | -5,4375 | |
| $M^{\ddot{u},II}$ | -0,0668 | | | 0,3208 | -1,6042 | | | -0,0401 |
| $M^{t,II}$ | | -0,1337 | -0,0802 | -0,1069 | 0,6417 | 0,4813 | 0,4813 | |
| $M^{\ddot{u},III}$ | -0,0022 | | | 0,0107 | -0,0535 | | | -0,0013 |
| $M^{t,III}$ | | -0,0045 | -0,0027 | -0,0036 | 0,0214 | 0,0160 | 0,0160 | |
| $M^{\ddot{u},IV}$ | -0,0001 | | | 0,0004 | -0,0018 | | | 0,0000 |
| $M^{t,IV}$ | | -0,0001 | -0,0001 | -0,0001 | 0,0007 | 0,0005 | 0,0005 | |
| M_{jk} | 9,926 | -22,149 | -2,489 | 24,638 | -39,496 | 35,060 | 4,435 | -1,245 |

Lõplikud paindemomendi epüüri ordinaadid saame, kui iga varda otsas liidame kin-
 nitusmomentid, tasakaalustavad ja ülekandemomentid. Tabelis 20.2 summeerime sel-
 leks väärtused alates neljandast reast. Saadud ordinaadid on esitatud tabeli viimasel real.
 Epüürile kanname ordinaadid vastavalt deformatsioonimeetodi paindemomendi märgi-
 reeglile.



Joonis 20.13. Paindemomendi epüür

20.3. Nullist suurema vabadusastmega raamide arvutamine

20.3.1. Meetodi idee

Järgnevalt käsitleme momentide jaotamise meetodit, kui raami vabadusaste $w > 0$. Selliseid raame nimetatakse siirduvate sõlmedega raamideks, kuna raami deformeerudes saavad selle sõlmed siirduda.

Nullist suurema vabadusastmega raamide arvutamisel peab sõlmede tasakaalustamisel arvestama peale sõlmede pööretest tingitud momentide ka varraste pööretest põhjustatud momente. Varraste pöördumisest põhjustatud momentide arvutamine nõuab võrrandisüsteemi koostamist ja lahendamist. Võrrandisüsteemis olevate võrrandite arv on võrdne raami varrasahela vabadusastmega w . Raami varraste pöörded ϑ_{jk} on määratud parameetrite ψ_c kaudu valemiga (17.15)

$$\vartheta_{jk} = \sum_c^w \vartheta_{jk,c} \psi_c \quad (20.27)$$

kus parameetrite ψ_c arv võrdub raami varrasahela vabadusastmega w (17.10).

Sõltumatud pöördenukad ψ_c arvutame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2 + \dots + a_{1c}\psi_c + \dots + a_{1w}\psi_w + a_{10} &= 0 \\ a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2 + \dots + a_{2c}\psi_c + \dots + a_{2w}\psi_w + a_{20} &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \\ a_{b1}\psi_1 + a_{b2}\psi_2 + \dots + a_{bc}\psi_c + \dots + a_{bw}\psi_w + a_{b0} &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \\ a_{w1}\psi_1 + a_{w2}\psi_2 + \dots + a_{wc}\psi_c + \dots + a_{ww}\psi_w + a_{w0} &= 0 \end{aligned} \quad (20.28)$$

mille võrrandid koostame virtuaalsiirete printsiibi alusel.

Parameetri ψ_c kordaja a_{bc} on töö, mida teevad momendid M_{jc}^* võimalikus siirdeolukorras $\psi_c = 1$. Moment M_{jc}^* on paindemoment varda otsristlõikes, mille leiame siirdeolukorda $\psi_c = 1$ viidud raami varraste kinnitusemomentide tasakaalustamisega. Siirdeolukorras $\psi_c = 1$ esinevad kinnitusemomendid tasakaalustame analoogiliselt koormusest põhjustatud kinnitusemomentide tasakaalustamisega nullvabadusastmega ($w = 0$) raamil.

Võrrandi b vabaliige a_{b0} on töö, mida teevad koormus ja momendid M_{jp}^* võimalikus siirdeolukorras $\psi_b = 1$. Moment M_{jp}^* on paindemoment varda otsristlõikes, mille leiame koormuse poolt põhjustatud kinemaatilist määratud põhiskeemi kinnitusemomentide tasakaalustamisel, kui raami vardad ei pöördu (parameetritele ψ_b vastavaid sidemeid me ei eemalda).

Pärast parameetrite ψ_c leidmist arvutame paindemomendid järgmise valemiga

$$M_j = M_{jp}^* + \sum_{c=1}^w M_{jc}^* \psi_c \quad (20.29)$$

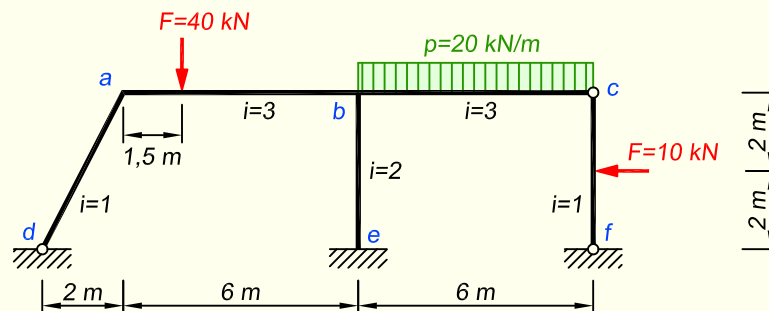
milles ψ_c on varraste pöördenuki määravate sõltumatute parameetrite väärtused, mille leiame võrrandisüsteemi lahendamisega.

20.3.2. Arvutamise skeem

Järgnevalt esitame arvutamise skeemi nullist suurema vabadusastmega raami jaoks.

1. Leiame ülekande- ja jaotustegurid.
2. Arvutame koormusest põhjustatud kinnitusmomendid kinemaatilisel määratud põhiskeemis ($M_{jk,p}$, $M_{jl,p}$).
3. Tasakaalustame koormuse poolt põhjustatud kinnitusmomendid. Tasakaalustamisel eemaldame üksteise järel ja paneme tagasi sidemed, mis takistavad sõlmede pöörideid. Varraste pöörideid takistavaid sidemeid me ei eemalda. Koormusest põhjustatud paindemomendid, kui raami vardad ei pöördu (pöörduvad ainult raami sõlmed), tähistame M_{jp}^* .
4. Viime raami siirdeolukorda $\psi_c = 1$ ($c = 1, 2, \dots, w$) ja arvutame kinnitusmomendid varraste pööretest: $M_{jk,c}$ ning $M_{jl,c}$. Siirdeolukorras $\psi_c = 1$ on sõlmede pöörideid nullid ($\varphi_j = 0$).
5. Tasakaalustame siirdeolukorras $\psi_c = 1$ ($c = 1, 2, \dots, w$) põhjustatud kinnitusmomendid, vabastades ja pannes tagasi ainult sõlmede pöörideid takistavad sidemed, jättes vabastamata varraste pöörideid takistavad sidemed. Selle juures toimime nii, kuidas on kirjeldatud nullvabadusastmega raami arvutamise skeemi punktides 3, 4, 5, 6 ja 7. Siirdeolukorras $\psi_c = 1$ ($c = 1, 2, \dots, w$) sõlmede tasakaalustamise tulemusel saadud momendid tähistame M_{jc}^* . Need momendid vastavad arvutusskeemi siirdeolukorrale, kus on alles siirdeolukorras $\psi_c = 1$ varraste pöörideid takistavad sidemed ja on eemaldatud sõlmede pöörideid takistavad sidemed ning sõlmed on pöördunud tasakaaluasendisse.
6. Parameetrite $\psi_c = 1$ ($c = 1, 2, \dots, w$) leidmiseks koostame ja lahendame võrrandisüsteemi (20.28).
7. Pärast parameetrite ψ_c leidmist võrrandisüsteemi (20.28) lahendamisega arvutame tegelikud paindemomendid valemiga (20.29).
8. Põik- ja pikijõud leiame varraste ja sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest.
9. Kontrollime lahendust.

NÄIDE 20.4. Koostada joonisel 20.14 kujutatud raami paindemomendi epüür. Raami varraste suhtelised jäikused on näidatud joonisel. Näide pärineb õpikust [28].



Joonis 20.14. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

Raami kinemaatilise määratuse aste on

$$n^* = n_s + w = 2 + 1 = 3$$

kus raami varrasahela vabadusastmeks on

$$w = 2s - v - t = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$$

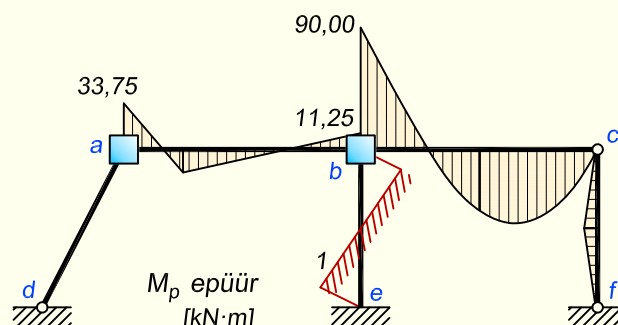
Kinnitusmomendid kinemaatiliselt määratud põhiskeemis on

$$M_{ab,p} = 40 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{4,5}{6}\right)^2 = 33,75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ba,p} = 40 \cdot 4,5 \cdot \left(\frac{1,5}{6}\right)^2 = -11,25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{bc,p} = \frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 6^2 = 90,00 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Paindemomendi epüür kinemaatiliselt määratud põhiskeemis on kujutatud joonisel 20.15.

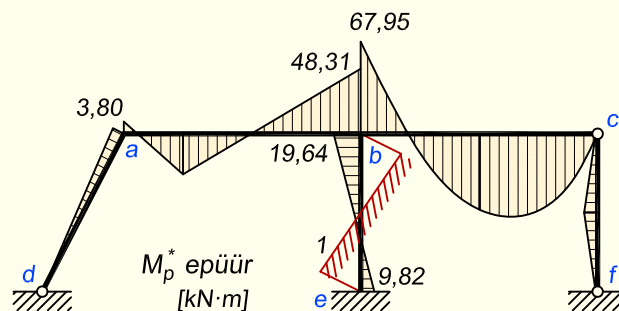


Joonis 20.15. Kinnitusmomendid koormusest kinemaatiliselt määratud põhiskeemis

Tabel 20.3. Koormusest põhjustatud momentide tasakaalustamine, kui vardad ei pöördu

| Sõlm | a | | b | | | e |
|--------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Varras | a-d | a-b | b-a | b-e | b-c | e-b |
| μ | 0,2 | 0,8 | 0,4140 | 0,2760 | 0,3100 | - |
| $M_{jk,p}$ | 0 | 33,75 | -11,25 | 0 | 90 | 0 |
| $M^{\ddot{u},I}$ | | -16,301 | | | | -10,868 |
| $M^{t,I}$ | -3,490 | -13,959 | -32,603 | -21,735 | -24,413 | |
| $M^{\ddot{u},II}$ | | 1,445 | -6,980 | | | 0,963 |
| $M^{t,II}$ | -0,289 | -1,156 | 2,890 | 1,926 | 2,164 | |
| $M^{\ddot{u},III}$ | | 0,120 | -0,578 | | | 0,080 |
| $M^{t,III}$ | -0,024 | -0,096 | 0,239 | 0,160 | 0,179 | |
| $M^{\ddot{u},IV}$ | | 0,010 | -0,048 | | | 0,007 |
| $M^{t,IV}$ | -0,002 | -0,008 | 0,020 | 0,013 | 0,015 | |
| $M_{jk,p}^*$ | -3,80 | 3,80 | -48,31 | -19,64 | 67,95 | -9,82 |

Pärast koormusest põhjustatud kinnitusemomentide leidmist kinemaatilisel määratud põhiskeemis teeme nende tasakaalustamise. Selleks eemaldame ja paigutame tagasi üksteise järel sõlmede pöret takistavad sidemed b ja a . Varraste pöret takistavat sidet I me ei eemalda. Kuna eelnevates näidetes on tasakaalustamist põhjalikult käsitletud, siis siin jätame täpsemad selgitused lisamata ja esitame ainult tasakaalustamise tabeli 20.3. Paindemomendi epüür $M_{jk,p}^*$ on kujutatud joonisel 20.16



Joonis 20.16. Paindemomendi epüür tasakaalustatud momentidega

Tabel 20.4. Momentide tasakaalustamine siirdeolukorras $\psi_1 = 1$

| Sõlm | a | | b | | | e |
|--------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | a-d | a-b | b-a | b-e | b-c | e-b |
| μ | 0,2 | 0,8 | 0,4140 | 0,2760 | 0,3100 | - |
| $M_{jk,1}$ | 3 | -6 | -6 | 12 | 0 | 12 |
| $M^{\ddot{u},I}$ | | -1,242 | | | | -0,828 |
| $M^{t,I}$ | 0,848 | 3,394 | -2,484 | -1,656 | -1,860 | |
| $M^{\ddot{u},II}$ | | -0,351 | 1,697 | | | -0,234 |
| $M^{t,II}$ | 0,070 | 0,281 | -0,702 | -0,468 | -0,526 | |
| $M^{\ddot{u},III}$ | | -0,029 | 0,140 | | | -0,019 |
| $M^{t,III}$ | 0,006 | 0,023 | -0,058 | -0,039 | -0,044 | |
| $M^{\ddot{u},IV}$ | | -0,002 | 0,012 | | | -0,002 |
| $M^{t,IV}$ | 0,000 | 0,002 | -0,005 | -0,003 | -0,004 | |
| $M_{jk,1}^*$ | 3,93 | -3,93 | -7,40 | 9,83 | -2,43 | 10,92 |

Arvutame kinnitusmomentid varraste pöördest siirdeolukorras $\psi_1 = 1$. Kasutame selleks tavapäraseid deformatsioonimeetodi juures vaadatud valemeid tabelist 17.2. Varraste pöördenurgad on näidatud joonisel 20.17, a ning varraste pöördest tekkinud paindemomendi epüür joonisel 20.17, b .

$$M_{ab,1} = M_{ba,1} = 6i_{ab}\vartheta_{ab,1} = -6 \cdot 1 \cdot 1 = -6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ad,1} = 3i_{ad}\vartheta_{ad,1} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{be,1} = M_{eb,1} = 6i_{be}\vartheta_{be,1} = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

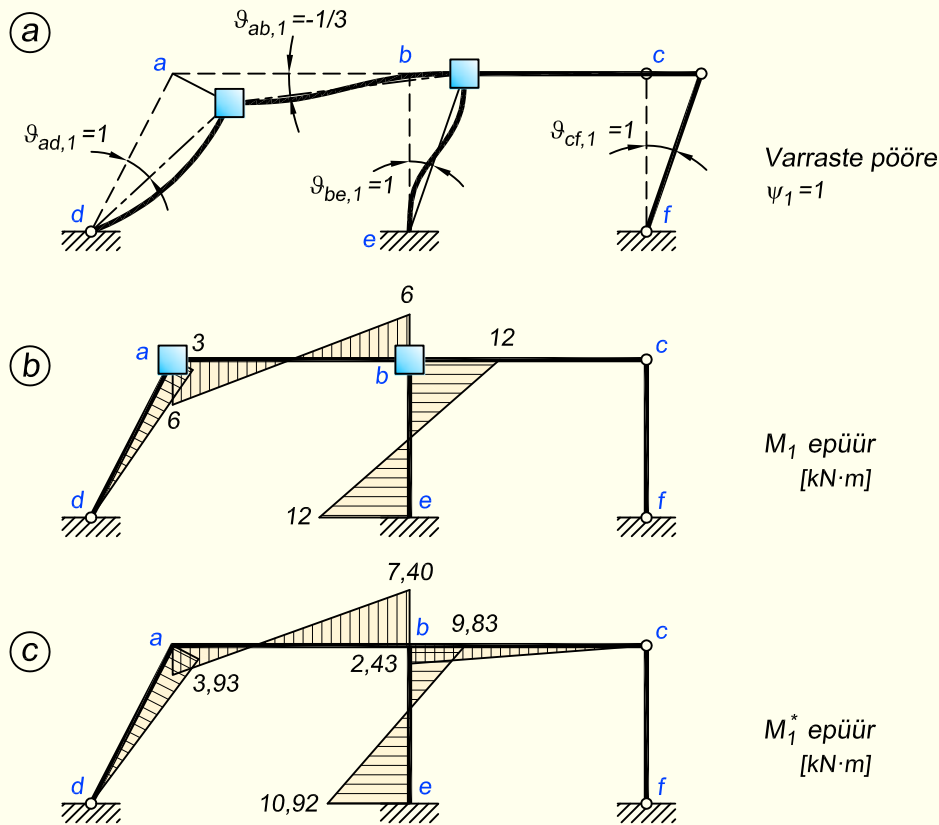
Tasakaalustame siirdeolukorras $\psi_1 = 1$ tekkinud momentid. Selleks vabastame ja asetame tagasi ainult sõlmede pööret takistavad sidemed, jättes eemaldamata sideme, mis takistab varraste pööret. Sõlmede tasakaalustamine on esitatud tabelis 20.4. Paindemomendi epüür $M_{jk,1}^*$ tasakaalustatud momentidega on kujutatud joonisel 20.17, c .

Raami varraste pöördenurki määrava parameetri ψ_1 tegeliku suuruse leiame võrrandist

$$a_{11}\psi_1 + a_{10} = 0$$

millest

$$\psi_1 = -\frac{a_{10}}{a_{11}}$$



Joonis 20.17. Varraste pööre ning sellest tekkinud tasakaalustamata ja tasakaalustatud paindemomendi epüür

Võrrandi vabaliige a_{10} on koormuse ja siirdumatute sõlmedega raamis koormuse poolt põhjustatud tasakaalustatud kinnitusemomentide $M_{jk,p}^*$ töö võimalikus siirdeolukorras $\psi_1 = 1$

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= M_{ad,p}^* \vartheta_{ad,1} + (M_{ab,p}^* + M_{ba,p}^* + S_{ab,1}) \vartheta_{ab,1} + (M_{be,p}^* + M_{eb,p}^*) \vartheta_{be,1} + S_{cf,1} \vartheta_{cf,1} = \\
 &= -3,80 \cdot 1 + (3,80 - 48,31 + 40 \cdot 4,5) \left(-\frac{1}{3}\right) + (-19,64 - 9,82) \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = \\
 &= -58,42 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

Võrrandi tundmatu ψ_1 kordaja a_{11} on siirdeolukorrast $\psi_1 = 1$ põhjustatud tasakaalustatud kinnitusemomentide $M_{jk,1}^*$ (tabel 20.4) töö võimalikus siirdeolukorras $\psi_1 = 1$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= M_{ad,1}^* \vartheta_{ad,1} + (M_{ab,1}^* + M_{ba,1}^*) \vartheta_{ab,1} + (M_{be,1}^* + M_{eb,1}^*) \vartheta_{be,1} = \\
 &= 3,93 \cdot 1 + (-3,93 - 7,40) \left(-\frac{1}{3}\right) + (9,83 + 10,92) \cdot 1 = 28,46 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

Tabel 20.5. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutus

| Sõlm | a | | b | | | e |
|---------------------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|
| | a-d | a-b | b-a | b-e | b-c | e-b |
| $M_{jk,p}^*$ | -3,80 | 3,80 | -48,31 | -19,64 | 67,95 | -9,82 |
| $\psi_1 M_{jk,1}^*$ | 8,06 | -8,06 | -15,17 | 20,15 | -4,98 | 22,39 |
| M_j | 4,26 | -4,26 | -63,48 | 0,51 | 62,97 | 12,57 |

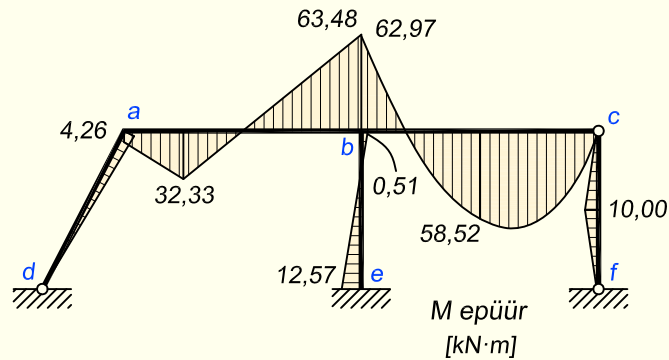
Parameetri ψ_1 saame nüüd

$$\psi_1 = -\frac{-58,42}{28,46} = 2,05$$

Paindemomendi epüüri ordinaadid saame nüüd valemiga (20.29)

$$M_j = M_{jp}^* + M_{j1}^* \psi_1$$

Paindemomendi arvutus on esitatud tabelis 20.5, kus lõplikud M epüüri ordinaadid on viimasel real. Epüürile kanname ordinaadid vastavalt deformatsioonimeetodi paindemomendi märgireeglile. Paindemomendi epüür on esitatud joonisel 20.18.



Joonis 20.18. Paindemomendi epüür

Peatükk 21

ARVUTUS PIIRKOORMUSE JÄRGI

21.1. Sissejuhatus

Lineaarne ehitismehaanika, mis käsitleb elastsest materjalist konstruktsioonide arvutust, võimaldab praktikale vajaliku täpsusega leida sisejõud ja pinged varraskonstruktsiooni elementides, määrata deformatsioonid ning arvutada siirded. Kuid lineaarsele ehitismehaanikale tuginev tugevusarvutus ei võimalda kindlaks määrata ehitise tugevust (kandevõimet), kuna püüab vältida materjali piirseisundi teket konstruktsiooni mistahes punktis. Samas aga plastse deformatsiooni teke konstruktsiooni üksikutes punktides ei põhjusta veel kogu konstruktsiooni piirseisundit. Kui materjali piirseisund tekib mõnes üksikus punktis, siis on konstruktsioon tihti võimeline edasi töötama ning sellele rakendatavat koormust saab veel suurendada. Purunemine toimub alles pärast seda, kui plastne piirkond muutub valdavaks varda mingis ristlõikes.

Konstruktsioonide tegeliku kandevõime võimaldab määrata *piirkoormusmeetod* ehk *kandevõimemeetod*.

Meenutame tugevusõpetusest, et *lubatavate pingete meetodi* ehk *piirpingemeetodi* korral loetakse konstruktsioon piirseisundis olevaks, kui arvutuskeemile rakendatud koormus tekitab piirseisundi vähemalt ühes konstruktsiooni punktis.

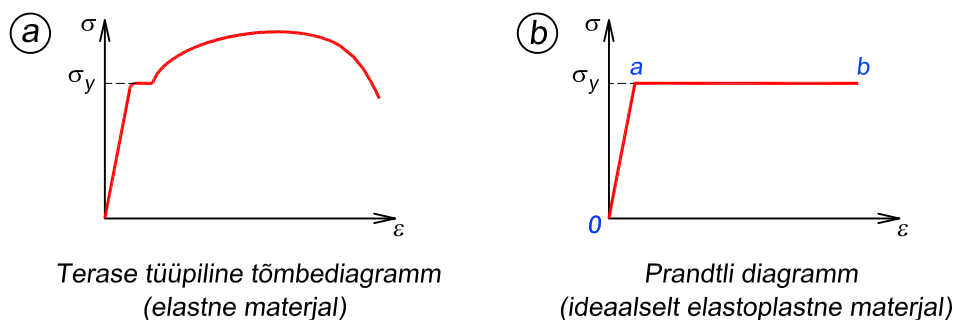
Piirkoormusmeetod võimaldab aga rakendada suuremat koormust, kuna üksikus punktis tekkinud plastne seisund ei põhjusta veel terve konstruktsiooni kandevõime kaotust. Selle arvutusmeetodi puhul saab koormust suurendada, kuni plastses seisundis piirkond laieneb sedavõrd palju, et konstruktsioon kaotab kandevõime kas liigsete plastsete deformatsioonide või purunemise tagajärjel.

Piirkoormuseks nimetatakse konstruktsiooni piirseisundile vastavat koormust, mille puhul on konstruktsiooni kandevõime täielikult ammendatud.

Suurimat koormust, mida konstruktsioonile võib rakendada, nimetatakse *lubatavaks koormuseks*

$$[F] = \frac{F_{lim}}{S} \quad (21.1)$$

kus $[F]$ on lubatav koormus, F_{lim} on piirkoormus ja S on varutegur, mis peab tagama ohutuse.



Joonis 21.1. Terase tüüpiline tõmbediagramm ning ideaalselt elastoplastse materjali käitumist kirjeldav *Prandtli* diagramm

Arvutustes kasutatakse sagedasti lihtsustatud tõmbediagrammi (joonis 21.1, b), mis annab piisavalt häid tulemusi plastse seisundi kirjeldamiseks. Lihtsustatud diagramm koosneb kahest sirgest. Esimene sirge $0-a$ vastab pingetele, mis on deformatsioonidega proportsionaalsed. Teine sirge $a-b$ vastab konstantsemale pingele – *voolavuspiirile* σ_y (nimetatakse ka *voolepiiriks*). Sellist diagrammi nimetatakse *Prandtli* diagrammiks ja seda võib kasutada, kui voolavusele vastav osa on nii pikk, et seda ehitise töötamisel kogu pikkuses ei kasutata. Nii-sugusele diagrammile vastavat materjali nimetatakse *ideaalselt elastoplastseks*.

Piirkoormusmeetodit saab kasutada konstruktsioonide puhul, millele rakendatav koormus on ajas püsiv, mistõttu ei ole vaja arvestada koormuse vaheldumisest tekkida võiva materjali väsimusega.

Kokkuvõtvalt saame öelda, et võrreldes piirpingemetodiga võimaldab piirkoormusmeetod konstruktsioone raskemalt koormata. Võrdse suurusega koormuste korral võimaldab piirkoormusmeetod saavutada materjali kokkuhoidu väiksemate ristlõigete kasutamise tulemusena.

Kuid paljude arvutuskeemide puhul ei ole plastne arvutus lubatud. Näiteks teraskonstruktsioonide korral jaotatakse varraste ristlõiked nelja ristlõikeklassi, mida tuleb enne tugevusarvutuse juurde asumist kontrollida, kuna need määravad ära plastse arvutuse võimalikkuse [25].

Tänapäeval kasutatakse ehituskonstruktsioonide projekteerimisel piirkoormusmeetodi edasiarendust, mida nimetatakse *arvutuslike piirseisundite meetodiks*. Selle meetodi puhul on ühtne varutegur asendatud diferentseeritud varutegurite süsteemiga, mis võtab arvesse nii koormuseid kui ka materjalide omadusi [27].

21.2. Arvutus pikijõule

Staatikaga määratavate konstruktsioonide, mille varrastes esinevad pikijõud, tugevusarvutused lubatavate pingete ja piirkoormusmeetodiga annavad sama tulemuse.

Staatikaga määratavate konstruktsioonide arvutus piirkoormusmeetodiga lubab samade varutegurite korral rakendada suuremat koormust, võrreldes lubatavate pingete meetodiga.

21.2.1. Üksik varras

Vaatame joonisel 21.2, a kujutatud varrast, mis on koormatud enda pikitelje suunalise koormusega. Koormuse mõjul varras pikeneb Δl võrra, mida nimetatakse pikkuse muuduks.

Varda ristlõikes tekivad rakendatud koormuse poolt põhjustatud normaalpinged

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{ehk} \quad \sigma = \frac{F}{A} \quad (21.2)$$

Pikkuse muudu jagamisel varda esialgse pikkusega saame varda suhtelise pikenemise

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (21.3)$$

Hooke'i seadus seob omavahel normaalmoonde, normaalpinge ja elastsusmooduli

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (21.4)$$

Valemite (21.2), (21.3) ja (21.4) baasil saame avaldada ühtlase ristlõikega varda pikkuse muudu, mis on võrdeline varda pikkuse ja pikijõuga ning pöördvõrdeline ristlõike pikkejäikusega

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (21.5)$$

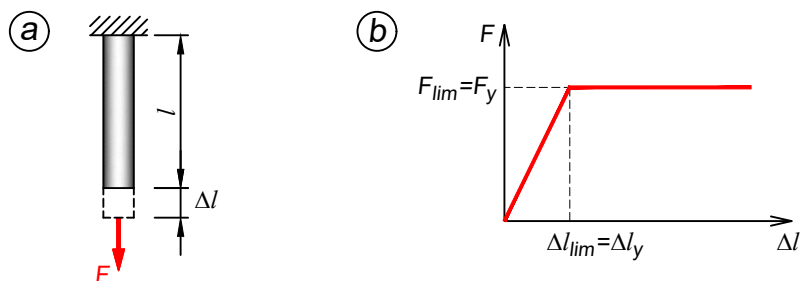
Kui koormust suurendada, siis varras jätkab pikenemist. Varras töötab elastses staadiumis (pinged ja deformatsioonid on omavahel lineaarses sõltuvuses) nii kaua, kuni koormus saavutab väärtuse F_y , mis vastab materjali voolavuspiirile σ_y . Edasi toimub varda pikenemine ilma koormust suurendamata (joonis 21.2, b). Varras on läinud plastsesse staadiumisse.

Voolavuspiirile vastav varda pikenemine on

$$\Delta l_y = \frac{N_y l}{EA} \quad (21.6)$$

Voolavuspiirile vastav varda pikijõud N_y ja piirkoormus F_{lim} on

$$N_y = \sigma_y A; \quad F_{lim} = F_y = \sigma_y A \quad (21.7)$$

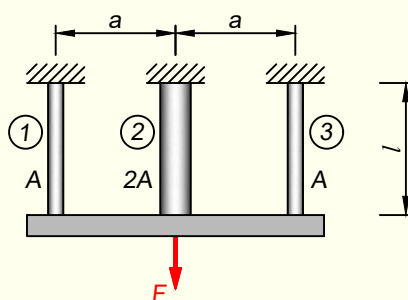


Joonis 21.2. Üksik varras pikiteljesuunalise koormusega

21.2.2. Mitme vardaga arvutuskeemid

Siin peatükis vaatame piirkoormuse leidmist staatikaga määramatutele arvutuskeemidele, kus pikijõud esineb rohkem kui ühes vardas. Alustame lihtsamatest paralleelsete varrastega variantidest ning seejärel tutvume ka mitteparalleelsete varrastega arvutuskeemidega.

NÄIDE 21.1. Leida joonisel 21.3 kujutatud arvutuskeemi piirkoormus. Koormus paikneb horisontaalse absoluutselt jäiga varda keskel. Mõlema äärmise posti ristlõike pindala on $A = 50 \text{ cm}^2$, keskmise posti ristlõike pindala on äärmiste omast kaks korda suurem. Vardad on valmistatud terasest, mille voolavuspiir on $\sigma_y = 355 \text{ MPa}$.



Joonis 21.3. Arvutuskeem

LAHENDUS

Arvutuskeemi koormamisel hakkab see deformeeruma selliselt, et horisontaalne varras siirdub allapoole. Absoluutse jäikuse tõttu säilitab see varras oma esialgse sirge kuju, mistõttu kõik vertikaalsed vardad pikenevad võrdselt: $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3$.

Kuna Δl , l ja E on kõigil varrastel võrdsed, siis saame valemist (21.3) ja (21.4), et ka ristlõikes esinev normaalpinge σ peab kõigil varrastel olema sama: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Valemi (21.2) teisendamisel kujule $N = \sigma A$ näeme, et võrdsete pingete korral peab keskmises vardas olema kaks korda suurema ristlõike pindala tõttu ka kaks korda suurem pikijõud: $N_1 = F/4$, $N_2 = F/2$, $N_3 = F/4$.

Kui koormus F suureneb, siis ka pinge σ suureneb kuni voolavuspiirini σ_y . Kuna pinged on varrastes võrdsed, siis tekib ka voolamine kõigis varrastes samaaegselt. Sel hetkel tekib piirseisund ja sellele vastavat koormust nimetatakse piirkoormuseks F_{lim} .

Üksiku varda piirkoormuse saame arvutada valemiga (21.7)

$$F_{lim} = \sigma_y A$$

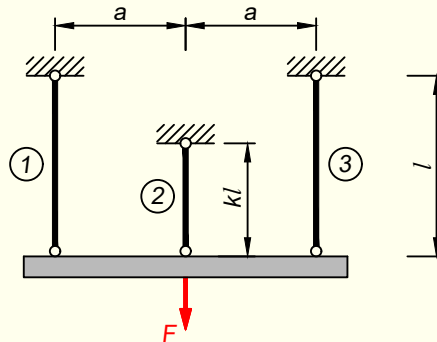
Kogu arvutuskeemi piirkoormuseks F_{lim} on üksikute varraste piirkoormuste summa

$$\begin{aligned} F_{lim} &= F_{1,lim} + F_{2,lim} + F_{3,lim} = \sigma_y A + \sigma_y 2A + \sigma_y A = 4\sigma_y A = \\ &= 4 \cdot 355 \cdot 1000 \cdot 0,005 = 7100 \text{ kN} \end{aligned}$$

Toome eraldi välja ka üksikute varraste piirkoormused

$$F_{1,lim} = F_{3,lim} = \sigma_y A = 1775 \text{ kN}; \quad F_{2,lim} = \sigma_y 2A = 3550 \text{ kN}$$

NÄIDE 21.2. Leida joonisel 21.4 kujutatud arvutuskeemi piirkoormus. Arvutus teha kahes osas: 1) kui mõnes postis tekib materjali voolamine, 2) kui kogu konstruktsiooni kandevõime ammandub. Koormus paikneb horisontaalselt jääga varda keskel. Kõik vardad on võrdse ristlõikepindalaga. Postide pikkuste erinevus on määratud parameetriga k .



Joonis 21.4. Arvutuskeem

LAHENDUS

1. Varraste pikijõudude avaldised elastses staadiumis

Tuletame avaldised, mis näitavad, kuidas on varraste pikijõud seotud üksteisega ja koormusega.

Absoluutse jäikuse tõttu säilitab horisontaalne varras oma esialgse sirge kuju, mistõttu kõik vertikaalsed vardad pikenevad võrdselt: $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3$.

Kuna varraste pikkuse muut on võrdne, siis saame avaldise (21.5) abil kirjutada

$$\frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{N_3 l_3}{EA}$$

Arvestades seda, et varraste pikkejäikus EA on sama ning $l_1 = l_3 = l$ ja $l_2 = kl$, saame

$$N_1 l = N_2 kl \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2 k$$

millest võime järeldada, et keskmise varda pikijõud on suurem kui äärmiste varraste pikijõud: $N_2 > N_1 = N_3$.

Kirjutame välja koormuse ja varraste pikijõudude tasakaalu tingimuse

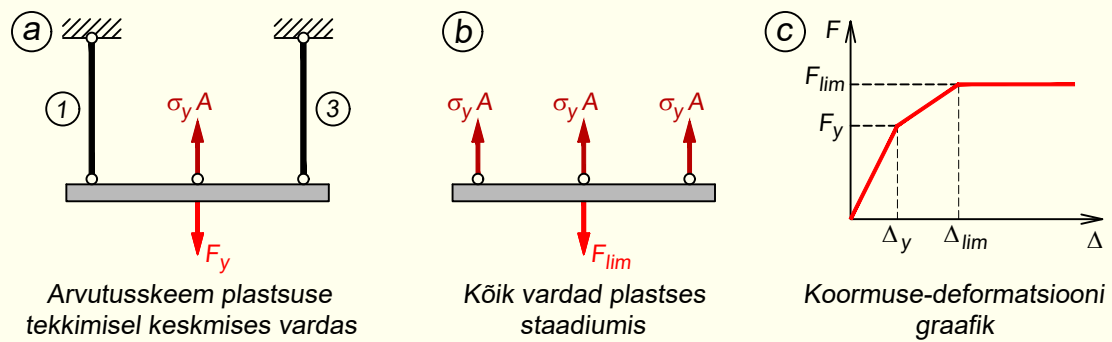
$$N_1 + N_2 + N_3 = F$$

Kuna $N_1 = N_3$, saame siit

$$2N_1 + N_2 = F$$

Asetades siia eespool leitud N_1 avaldise, saame

$$2N_2 k + N_2 = F \quad \Rightarrow \quad N_2 (2k + 1) = F$$



Joonis 21.5. Piirseisundi tekkimise staadiumid ning koormuse-deformatsiooni graafik

Nüüd saame varraste pikijõudude avaldisteks

$$N_2 = \frac{F}{2k+1}; \quad N_1 = N_2 k = \frac{kF}{2k+1}$$

2. Keskmise varras piirseisundis

Kuna keskmises vardas on pikijõud kõige suurem, siis koormuse suurendamisel saavutab pinge voolavuspiiri esimesena keskmises vardas (joonis 21.5, a). Keskmise varda voolavuspiiri saavutamise hetkele vastava koormuse F_y saame pikijõu N_2 avaldisest

$$N_2 = \frac{F_y}{2k+1} = \sigma_y A \quad \Rightarrow \quad F_y = \sigma_y A (2k+1)$$

Keskmises vardas piirseisundi tekkimise hetkele vastav varraste deformatsioon on

$$\Delta_y = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{\sigma_y A \cdot kl}{EA} = \frac{\sigma_y kl}{E}$$

3. Kogu arvutuskeem piirseisundis

Kui koormuse suurendamisel hakkavad voolama ka äärmised vardad, siis kaotab arvutuskeem tervikuna kandevõime (joonis 21.5, b). Kirjutame piirseisundi saabumise hetkele vastava jõudude tasakaalu tingimuse

$$F_{lim} - \sigma_y A - \sigma_y A - \sigma_y A = 0$$

millest saame piirkoormuseks

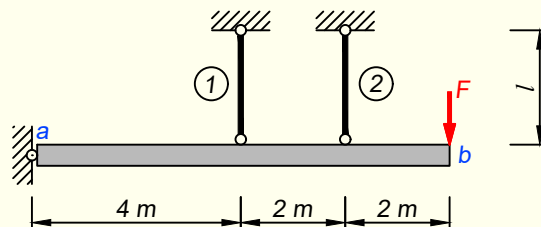
$$F_{lim} = 3\sigma_y A$$

Kandevõime kaotusele eelnev varraste deformatsioon on

$$\Delta_{lim} = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{\sigma_y A l}{EA} = \frac{\sigma_y l}{E}$$

Koormuse-deformatsiooni graafik on esitatud joonisel 21.5, c.

NÄIDE 21.3. Leida joonisel 21.6 kujutatud arvutusskeemi piirkoormus. Mõlema posti ristlõike pindala on $A = 4 \text{ cm}^2$. Vardad on valmistatud terasest, mille voolavuspiir on $\sigma_y = 355 \text{ MPa}$.



Joonis 21.6. Arvutusskeem

LAHENDUS

Varda a - b parempoolsesse otsa rakendatud koormus surub varda otsa alla, mistõttu postides 1 ja 2 tekivad tõmbejõud. Koormuse suurenemisel muutuvad kummaski vardas suuremaks ka pinged. Arvutusskeemi kandevõime ammendub, kui mõlemas postis jõuavad pinged voolavuspiirini.

Üksiku varda piirkoormuse saame arvutada valemiga (21.7)

$$F_{lim} = \sigma_y A$$

ja kuna mõlemad postid on ühesuguse ristlõikega, saame nende varraste piirkoormuseks

$$F_{1,lim} = F_{2,lim} = \sigma_y A = 355 \cdot 1000 \cdot 0,0004 = 142 \text{ kN}$$

Arvutusskeemi piirkoormuse saamiseks kirjutame joonise 21.7 põhjal talale mõjuvate jõudude momentide tasakaalutingimuse toeliigendi a suhtes

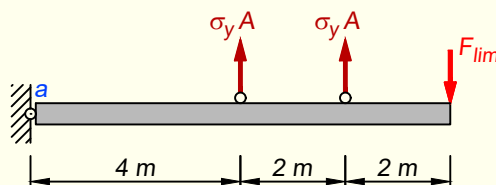
$$\sum M_a = 0; \quad F_{lim} \cdot 8 = \sigma_y A \cdot 4 + \sigma_y A \cdot 6$$

kuhu asetame postide piirkoormuste väärtused

$$F_{lim} \cdot 8 = 142 \cdot 4 + 142 \cdot 6$$

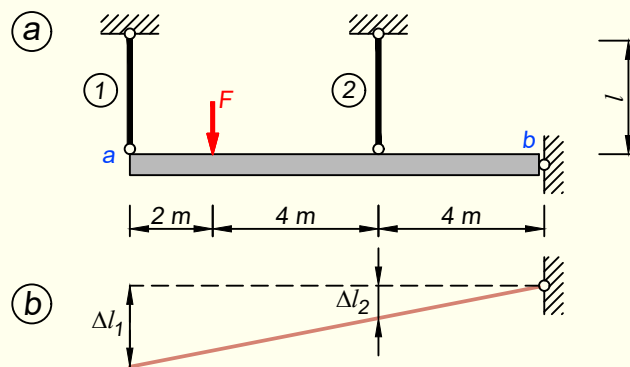
ja siit saame piirkoormuseks

$$F_{lim} = 177,5 \text{ kN}$$



Joonis 21.7. Talale mõjuvad jõud piirseisundi tekkimisel

NÄIDE 21.4. Leida joonisel 21.8, *a* kujutatud arvutuskeemi piirkoormus. Arvutus teha kahes osas: 1) kui ühes postis tekib materjali voolamine, 2) kui kogu konstruktsiooni kandevõime ammendub. Koormus on rakendatud horisontaalsele absoluutselt jäigale vardale. Mõlemad postid on võrdse ristlõikepindalaga.



Joonis 21.8. Arvutuskeem ja varda *a-b* pöördumine koormamisel

LAHENDUS

1. Varraste pikijõudude avaldised elastses staadiumis

Varrastes 1 ja 2 tekivad tõmbejõud ning varras *a-b* hakkab toeliigendi *b* suhtes pöörduma (joonis 21.8, *b*). Postid pikenevad Δl_1 ja Δl_2 võrra. Arvutuskeemi mõõtudest saame, et $\Delta l_1 = 2,5\Delta l_2$ ja siit omakorda leiame varraste pikijõudude seoseks $N_1 = 2,5N_2$.

Kirjutame vardale *a-b* mõjuvate jõudude (joonis 21.9, *a*) momentide tasakaalu tingimuse toeliigendi *b* suhtes

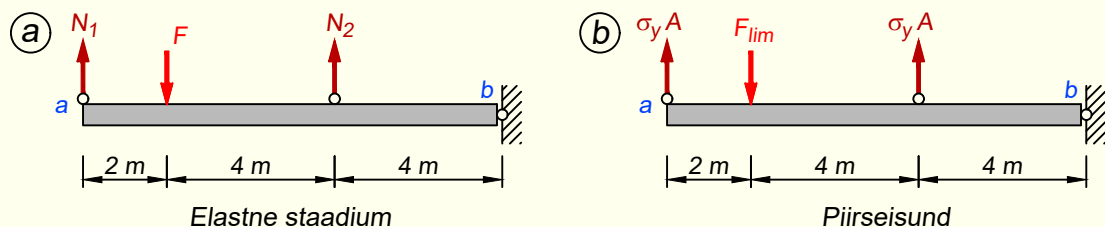
$$\sum M_b = 0; \quad N_1 \cdot 10 + N_2 \cdot 4 = F \cdot 8$$

Asetades siia eespool leitud N_1 avaldise, saame

$$2,5N_2 \cdot 10 + N_2 \cdot 4 = F \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad 29N_2 = 9F$$

Nüüd saame varraste pikijõudude avaldisteks

$$N_2 = \frac{8}{29}F; \quad N_1 = 2,5N_2 = 2,5 \cdot \frac{8}{29}F = \frac{20}{29}F$$



Joonis 21.9. Talale mõjuvad jõud elastses staadiumis ja piirseisundi tekkimisel

2. Vasakpoolne varras piirseisundis

Kuna vasakpoolses vardas on pikijõud suurem, siis koormuse suurendamisel saavutab pinge voolavuspiiri esimesena selles vardas. Vasakpoolse varda voolavuspiiri saavutamise hetkele vastava koormuse F_y saame pikijõu N_1 avaldisest

$$N_1 = \frac{20}{29}F_y = \sigma_y A \quad \Rightarrow \quad F_y = \frac{29}{20}\sigma_y A$$

3. Kogu arvutuskeem piirseisundis

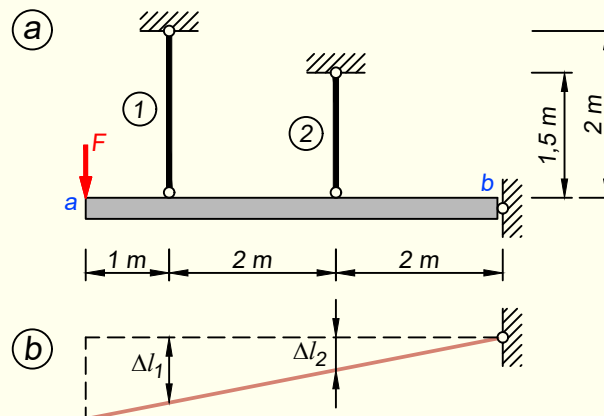
Kui koormuse suurendamisel hakkab voolama ka parempoolne varras, siis kaotab arvutuskeem tervikuna kandevõime. Kirjutame piirseisundi saabumise hetkele vastava jõudude (joonis 21.9, b) momentide tasakaalu tingimuse toeliigendi b suhtes

$$\sum M_b = 0; \quad F_{lim} \cdot 8 = \sigma_y A \cdot 10 + \sigma_y A \cdot 4$$

millest saame piirkoormuseks

$$F_{lim} = \frac{14}{8}\sigma_y A$$

NÄIDE 21.5. Leida joonisel 21.10, a kujutatud arvutuskeemi piirkoormus. Arvutus teha kahes osas: 1) kui ühes postis tekib materjali voolamine, 2) kui kogu konstruktsiooni kandevõime ammendub. Mõlema posti ristlõike pindala on $A = 50 \text{ cm}^2$. Vardad on valmistatud terasest, mille voolavuspiir on $\sigma_y = 355 \text{ MPa}$.



Joonis 21.10. Arvutuskeem ja varda a - b pöördumine koormamisel

LAHENDUS

Siin ülesandes ei ole selge, kummas postis voolamine esimesena tekib. Lühem varras on jäigem ja võiks sellest lähtuvalt suurema pikijõuga olla (vt näide 21.2). Samas on

aga pikema varda deformeerumine suurem: $\Delta l_1 = 2\Delta l_2$ (joonis 21.10, b). Seetõttu tuleb esmalt määrata suurema pikijõuga varras.

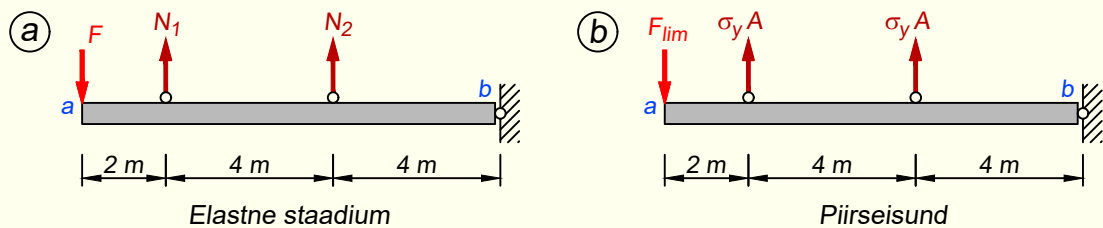
1. Varraste pikijõudude avaldised elastses staadiumis

Esmalt vaatame, kuidas on varraste pikijõud seotud koormusega. Selleks kirjutame vardale a - b mõjuvate jõudude (joonis 21.11, a) momentide tasakaalu tingimuse toelii-
gendi b suhtes

$$\sum M_b = 0; \quad N_1 \cdot 4 + N_2 \cdot 2 = F \cdot 5$$

millest saame

$$F = 0,8N_1 + 0,4N_2$$



Joonis 21.11. Talale mõjuvad jõud elastses staadiumis ja piirseisundi tekkimisel

Teiseks leiame, kuidas on koormused teineteisega seotud. Kirjutame vastavalt valemile (21.5) mõlema varda jaoks pikkuse muudu avaldise

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA}$$

Kuna $\Delta l_1 = 2\Delta l_2$, siis

$$\frac{N_1 l_1}{EA} = 2 \frac{N_2 l_2}{EA} \Rightarrow \frac{N_1 \cdot 2}{EA} = 2 \frac{N_2 \cdot 1,5}{EA}$$

Kuna pikkejäikus EA on mõlemal vardal sama, siis saame pikijõudude omavaheliseks seoseks

$$2N_1 = 3N_2 \Rightarrow N_1 = 1,5N_2$$

2. Vasakpoolne varras piirseisundis

Kuna vasakpoolses vardas on pikijõud suurem, siis koormuse suurendamisel hakkab see varras esimesena voolama. Piirseisundi tekkimise hetkel esineb vardas pikijõud

$$N_1 = \sigma_y A = 355 \cdot 1000 \cdot 0,005 = 1775 \text{ kN}$$

ning samal ajal on parempoolses vardas pikijõud

$$N_2 = N_1 / 1,5 = 1775 / 1,5 = 1183 \text{ kN}$$

Vasakpoolse varda voolamise algusele vastav koormus on

$$F_y = 0,8N_1 + 0,4N_2 = 0,8 \cdot 1775 + 0,4 \cdot 1183 = 1893 \text{ kN}$$

3. Kogu arvutuskeem piirseisundis

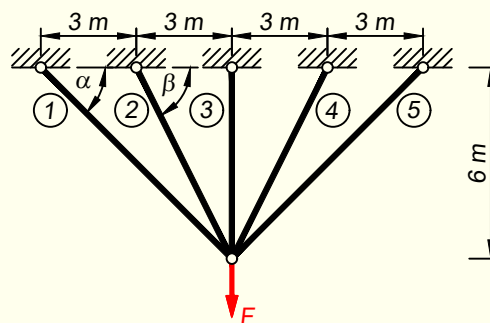
Kui koormust suurendada, siis mingil hetkel hakkab voolama ka parempoolne varras ja arvutuskeem tervikuna kaotab kandevõime (joonis 21.11, b). Sel juhul on pinged mõlemas vardas võrdsustunud voolavuspiiriga ja pikijõud on

$$N_2 = N_1 = \sigma_y A = 355 \cdot 1000 \cdot 0,005 = 1775 \text{ kN}$$

ja piirkoormuseks saame

$$F_{lim} = 0,8N_1 + 0,4N_2 = 0,8 \cdot 1775 + 0,4 \cdot 1775 = 2130 \text{ kN}$$

NÄIDE 21.6. Leida joonisel 21.12 kujutatud arvutuskeemi piirkoormus. Välimiste varraste 1 ja 5 ristlõike pindala on $A_1 = 5 \text{ cm}^2$, sisemistel varrastel 2...4 on ristlõike pindala $A_2 = 3 \text{ cm}^2$. Vardad on valmistatud terasest, mille voolavuspiir on $\sigma_y = 355 \text{ MPa}$.



Joonis 21.12. Arvutuskeem

LAHENDUS

Piirseisundi tekkimisel on pinge kõigis varrastes jõudnud voolavuspiirini. Seetõttu arvutame nii välimistele kui ka sisemistele varrastele piirkoormused

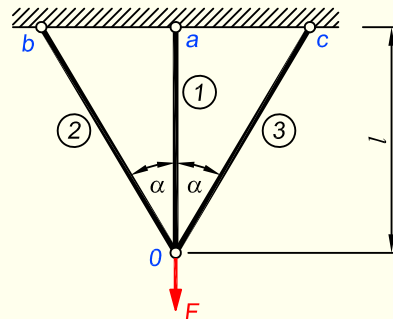
$$F_{1,lim} = F_{5,lim} = \sigma_y A_1 = 355 \cdot 1000 \cdot 0,0005 = 177,5 \text{ kN}$$

$$F_{2,lim} = F_{3,lim} = F_{4,lim} = \sigma_y A_2 = 355 \cdot 1000 \cdot 0,0003 = 106,5 \text{ kN}$$

Kogu arvutuskeemi piirkoormuse saamiseks kirjutame alumises sõlmes jõudude tasakaalu tingimuse vertikaalteljele

$$\begin{aligned} F_{lim} &= 2 \cdot F_{1,lim} \sin \alpha + 2 \cdot F_{2,lim} \sin \beta + F_{3,lim} = \\ &= 2 \cdot 177,5 \cdot 0,7071 + 2 \cdot 106,5 \cdot 0,8944 + 106,5 = 548 \text{ kN} \end{aligned}$$

NÄIDE 21.7. Leida joonisel 21.13 kujutatud arvutuskeemi sõlmes O rakendatud jõu piirväärtus, kui varraste 1, 2 ja 3 ristlõiked on võrdsed ja vardad on samast materjalist: $EA_1 = EA_2 = EA_3 = EA$.



Joonis 21.13. Arvutuskeem

LAHENDUS

Hooke'i seadusele alluvate deformatsioonide puhul on ülesanne ühekordselt staatikaga määratatu. Kuna arvutuskeem on vertikaaltelje suhtes sümmeetriline, siirdub sõlm O koormuse mõjul otse ülalt alla punkti O' (joonis 21.14, a).

Varras 1 pikeneb $\Delta l_1 = w$ võrra. Varda 2 pikenemise puhul lähtume algmõõtmete printsiibist, mille järgi võime väikeste deformatsioonide korral arvutused sooritada konstruktsiooni esialgsete mõõtmete abil. Seetõttu jätame siin arvestamata varrastevahelise nurga α muudu. Kuna arvutuskeemi deformeerumisel jäävad vardad sõlmes O omavahel seotuks, siis saame välja kirjutada siirete pidevuse võrrandi

$$\Delta l_1 \cos \alpha = \Delta l_2$$

ehk

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} \cos \alpha = \frac{N_2 l_2}{EA_2} \Rightarrow \frac{N_1 l}{EA} \cos \alpha = \frac{N_2 l}{EA}$$

millest

$$N_2 = N_1 \cos^2 \alpha$$

Sõlme O tasakaalu tingimusest $\sum Z = 0$ (joonis 21.14, b) leiame

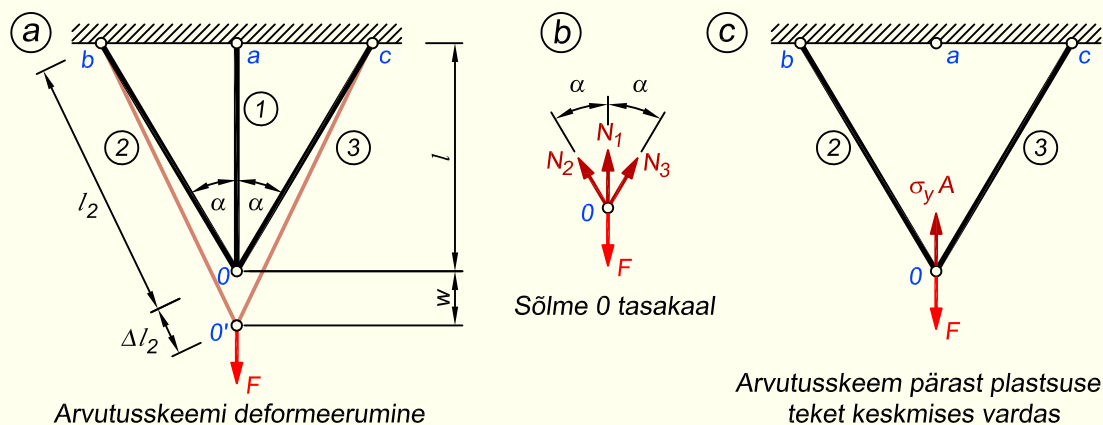
$$F = 2N_2 \cos \alpha + N_1 = 2N_1 \cos^3 \alpha + N_1 = N_1 (1 + 2 \cos^3 \alpha)$$

Pikijõud varrastes on järelilikult

$$N_1 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = N_3 = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

Tingimusel, et $\sigma_1 < \sigma_y$ ja $\sigma_2 = \sigma_3 < \sigma_y$ on pinged varrastes järgmised

$$\sigma_1 = \frac{F}{A(1 + 2 \cos^3 \alpha)}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{F \cos^2 \alpha}{A(1 + 2 \cos^3 \alpha)}$$



Joonis 21.14. Arvutusskeemi deformeerumine koormamise käigus

Saadud avaldistest järeldub, et keskmises vardas on pinge suurem kui äärmistes varrastes. Jõu suurenemisel saavutab pinge voolavuspiiri esimesena keskmises vardas. See vastab jõule (joonis 21.15)

$$F_y = \sigma_y A (1 + 2 \cos^3 \alpha)$$

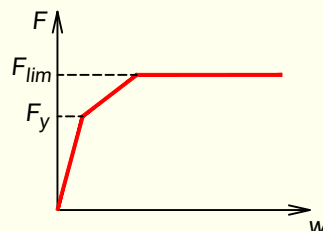
kusjuures $\sigma_2 = \sigma_y \cos^2 \alpha$. Edasisel jõu suurenemisel ($F_y < F < F_{lim}$) suureneb pinge äärmistes varrastes 2 ja 3, samal ajal keskmises vardas jääb ta konstantseks $\sigma_1 = \sigma_y$ (materjal voolab) ja jõud $N_1 = \sigma_y A$ (joonis 21.14, c). Keskmises vardas voolavuspiiriga võrdse pinge puhul on algul ühekordselt staatikaga määratatu arvutusskeem muutunud staatikaga määratavaks. Kui voolama hakkavad ka äärmised vardad, siis on arvutusskeem pürseisundis. Jõu F piirväärtuse, mis vastab äärmistes varrastes voolavuspiiriga võrdsetele pingetele ($\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_y$), leiame sõlme 0 tasakaalu tingimusest $\sum Z = 0$ (joonis 21.14, c)

$$F_{lim} - 2\sigma_y A \cos \alpha - \sigma_y A = 0$$

millest piirkoormuseks saame

$$F_{lim} = 2\sigma_y A \cos \alpha + \sigma_y A = \sigma_y A (1 + 2 \cos \alpha)$$

Edaspidisel deformatsioonide suurenemisel on kandevõime ammandatud, kuna konstruktsioonis tekivad lubamatud siirded. See vastab diagrammi (joonis 21.15) horisontaalsele osale, mis ei võimalda suuremat koormust vastu võtta.



Joonis 21.15. Sõlme 0 vertikaalsiirde sõltuvus koormusest

21.3. Piirpaindemoment ja plastne vastupanumoment

21.3.1. Sümmeetriline ristlõige

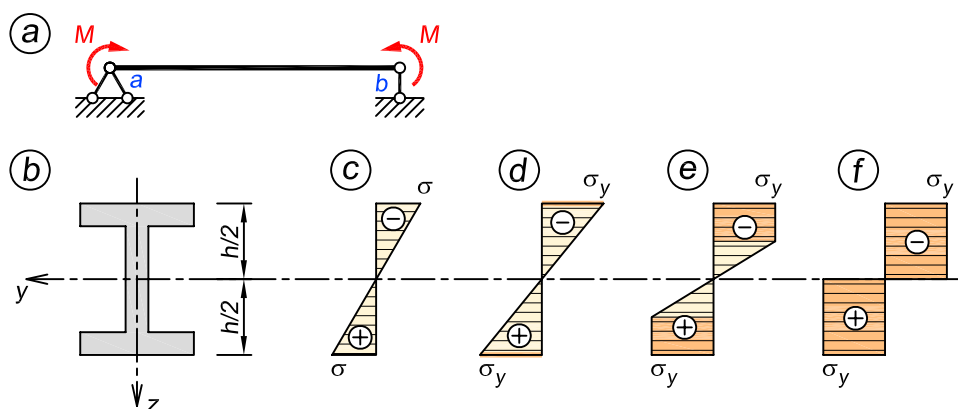
Täisseinalise tala puhtal paindel (moment on konstantne, joonis 21.16, *a*) on normaalpingete epiüür kolmnurkne (joonis 21.16, *c, d*), kui pinge äärmistes kiududes on voolavuspiirist väiksem või sellega võrdne ($\sigma \leq \sigma_y$). Väikese paindemomendi korral on tala kogu ristlõige elastses seisundis. Paindemomenti, mis vastab joonisel 21.16, *c* kujutatud pingediagrammile, tähistame

$$M_{el} = \sigma_y W_{el} \quad (21.8)$$

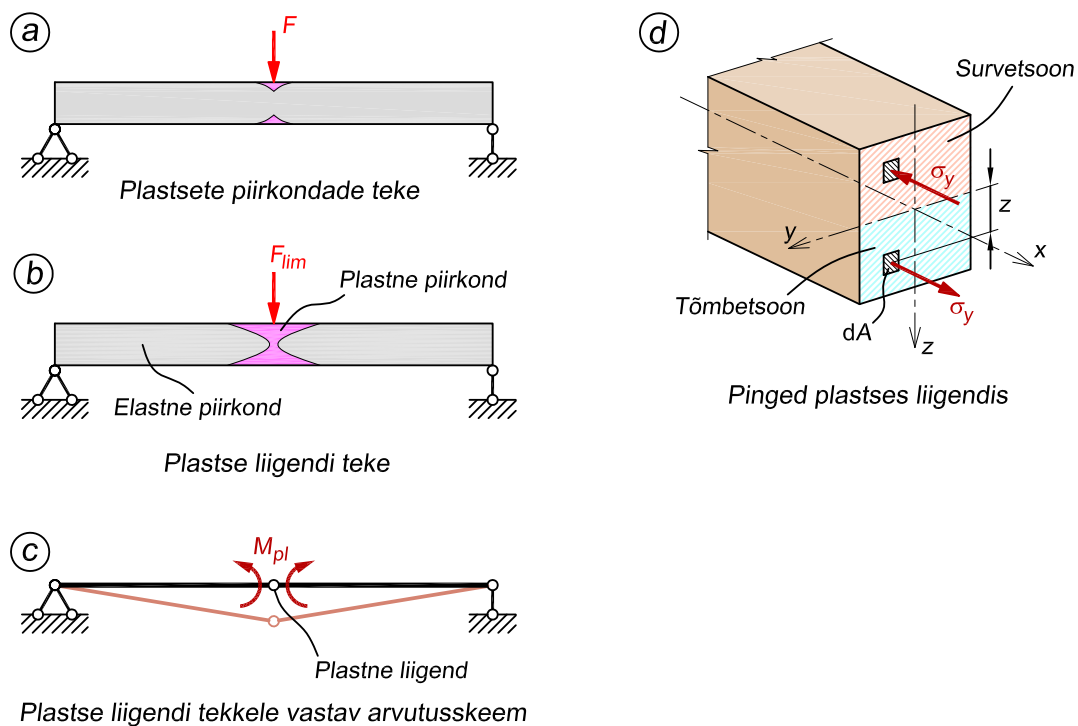
kus W_{el} on elastsele staadiumile vastav ristlõike *vastupanumoment* (uuemas kirjanduses ka *tugevusmoment*).

Paindemomendi kasvades jõuab suurim paindepinge ristlõike servas voolavuspiirini σ_y (joonis 21.16, *d*). Piirpingemeetodi kohaselt on tala nüüd ohtlikus seisundis. Tegelikult tala kandevõime aga ammenud ei ole, kuna plastne piirkond moodustab tala ristlõikest vaid tühise osa. Koormuse edasisel kasvamisel, eeldades elastoplastset materjali ja ristlõigete tasandhüpooteesi kehtimist, saame normaalpingete jaoks joonisel 21.16, *e* kujutatud diagrammi. Ristlõike ülemises ja alumises osas on pinge võrdne voolavuspiiriga. Keskmine osa, kus pinge on voolavuspiirist väiksem, töötab elastses olukorras ja seda nimetatakse elastseks tuumaks. Koormuse edasisel suurenemisel elastne tuum väheneb, kuni pinge ristlõike kõigis kiududes võrdub voolavuspiiriga (joonis 21.16, *f*). Koormuse edasine suurenemine ei ole võimalik, sest ristlõige ei ole võimeline suuremat momenti vastu võtma. Paindemomendil on suurim väärtus, mida ristlõige on võimeline vastu võtma.

Sellises piirulukorras olevat ristlõiget nimetatakse *plastseks liigendiks* ja sellele vastavat paindemomenti M_{pl} *piirmomendiks*. Plastne liigend töötab nagu tavaline liigend, mis lubab selles liigendis liituvate varraste vaba pöördumist üksteise suhtes. Plastne liigend erineb tavalisest liigendist selle poolest, et kui tavalises liigendis on paindemoment null, siis plastses liigendis säilib varraste pöördumise ajal konstantne moment M_{pl} .



Joonis 21.16. Paindepinged sümmeetrilise ristlõike korral



Joonis 21.17. Plastse liigendi kujunemine

Koondjõuga koormamisel hakkavad üldjuhul plastsed tsoonid arenema koormuse rakenduspunkti all äärmistes kiududes (joonis 21.17, a). Erandolukorras, kui on tegemist lühikeste ja kõrgete taladega, võib tangentsiaalpingete mõjul tekkida üks plastsete deformatsioonide ala ka ristlõike nulljoonel. Koormuse suurenedes plastsed tsoonid kasvavad ja tala kandevõime ammendub, kui need tsoonid ühinevad (joonis 21.17, b). Tekkinud on eespool mainitud plastne liigend, mis muudab tala mehhanismiks (joonis 21.17, c).

Piirmomendi valemi tuletamiseks vaatame plastsele liigendile vastavat tala ristlõiget (joonis 21.17, d). Vastavalt joonisel 21.16, f kujutatud paindepingete epüürile võrduvad nii ristlõike surve- kui ka tõmbetsooni kõigis punktides mõjuvad pinged voolavuspiiriga σ_y . Nüüd saame piirmomendi määrata elementaarjõudude momentide summana ristlõike nulljoone suhtes

$$M_{pl} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dA = 2\sigma_y \int_0^{h/2} z dA = 2\sigma_y S_0 \quad (21.9)$$

kus S_0 on ristlõike ülemise või alumise poole staatiline moment nulljoone suhtes.

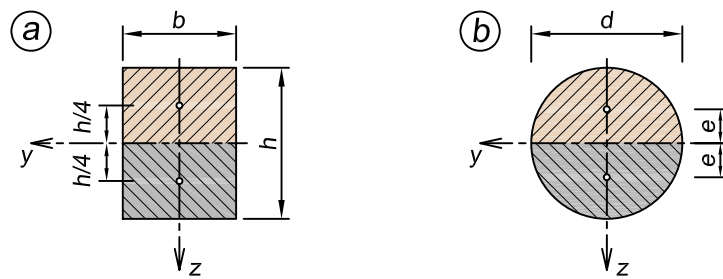
Piirmomendi avaldise (21.9) võime esitada kujul

$$M_{pl} = \sigma_y W_{pl} \quad (21.10)$$

kus

$$W_{pl} = 2S_0 \quad (21.11)$$

on ristlõike *plastne vastupanumoment*.



Joonis 21.18. Ristkülik- ja ringristlõige

Ristlõike plastse vastupanumomendi (21.11) ja vastupanumomendi W_{el} suhe

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_{el}} = \frac{\sigma_y W_{pl}}{\sigma_y W_{el}} = \frac{2S_0}{W_{el}} \quad (21.12)$$

näitab arvutuslike koormuste suhet piirulukorra ja lubatavate pingete meetodi järgi.

Ristkülikristlõige

Tuletame ristkülikristlõikele (joonis 21.18, a) plastse vastupanumomendi avaldise vastavalt valemile (21.11)

$$W_{pl} = 2S_0 = 2 \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4} \quad (21.13)$$

Ristküliku vastupanumomendi elastses staadiumis leiame lisast A.7

$$W_{el} = \frac{bh^2}{6} \quad (21.14)$$

Nüüd saame leida plastse vastupanumomendi ja vastupanumomendi suhte α avaldisega (21.12)

$$\alpha = \frac{W_{pl}}{W_{el}} = \frac{bh^2 \cdot 6}{4 \cdot bh^2} = 1,5 \quad (21.15)$$

Arvutus piirulukorra järgi lubab järelikult 50% suuremat arvutuslikku koormust.

Ringristlõige

Ringristlõike (joonis 21.18, b) puhul on vaja teada ühe poolringi raskuskeskme kaugust kogu ristlõike nulljoonest. Selle saame arvutada lisa A.7 abil valemiga

$$e = \frac{2d}{3\pi} \quad (21.16)$$

Seejärel arvutame plastse vastupanumomendi. Vastupanumomendi elastses staadiumis saame lisast A.7.

$$W_{pl} = 2S_0 = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{6}; \quad W_{el} = \frac{\pi d^3}{32} \quad (21.17)$$

Plastse vastupanumomendi ja vastupanumomendi suhteks tuleb

$$\alpha = \frac{W_{pl}}{W_{el}} = \frac{d^3 \cdot 32}{6 \cdot \pi d^3} = 1,7 \quad (21.18)$$

21.3.2. Mittesümmeetriline ristlõige

Mittesümmeetrilise ristlõike (joonis 21.19, a) puhul muutuvad pinged elastses staadiumis lineaarselt ja on ristlõike raskuskeset läbival y-teljel nullid (joonis 21.19, b). Pingeepüür läbib ristlõike raskuskeset nii kaua, kuni ristlõike keskmine osa töötab elastses olukorras (joonis 21.19, b, c, d). Pirolukorras aga tõmmatud ja surutud tsoone eraldav joon (nulljoon) ei läbi enam raskuskeset (joonis 21.19, e).

Pirolukorrale vastav sisejõudude moment võrdub piirmomendiga

$$M_{pl} = \sigma_y \int_{A_t} z dA + \sigma_y \int_{A_s} z dA \quad (21.19)$$

ehk

$$M_{pl} = \sigma_y S_t + \sigma_y S_s = \sigma_y (S_t + S_s) = \sigma_y W_{pl} \quad (21.20)$$

kus S_t ja S_s on tõmbe- ja survetsooni pindade staatilised momendid tsoonide eraldusjoone suhtes. Plastne vastupanumoment võrdub tõmmatud ja surutud tsoonide staatiliste momentide summaga

$$W_{pl} = S_t + S_s \quad (21.21)$$

Tasakaalutingimus varda pikiteljele $\sum X = 0$

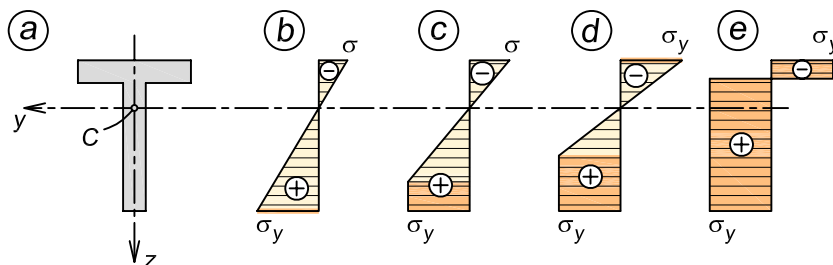
$$\sigma_y A_t - \sigma_y A_s = 0 \quad (21.22)$$

annab

$$A_t = A_s \quad (21.23)$$

Tõmbe- ja survetsooni eraldav joon jagab ristlõike pindala kaheks võrdseks osaks.

Siin käsitlesime puhast painet. Põikjõu mõju arvestamine vähendab arvutuslikku piirmomenti.



Joonis 21.19. Pinged mittersümmeetrilise ristlõike korral

21.4. Ühesildeline staatikaga määramatu tala

Leiame staatikaga määramatu tala piirmomentide ja piirkoormuste avaldised sõltuvalt koormuse tüübist ja toetingimustest, kasutades selleks esmalt staatika ja seejärel kinemaatika meetodit.

21.4.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda arvutus staatika meetodiga

Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala muutub mehhanismiks, s.t on piirlokorras, kolme plastse liigendi tekkimisel. Kuigi piirseisundi tekkimisel ei ole oluline plastsete liigendite moodustumise järjekord, vaatleme järgnevalt koos valemite tuletamisega ka liigendite tekkimise skeemi.

Koondjõuga tala

Joonisel 21.20, a kujutatud talas tekivad suurimad momendid lõigetes a , b ja c . Arvestades tala töötamist elastses staadiumis, millele vastav paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 21.20, b , ja kasutades piirpingemeetodit, tuleb tala ristlõike dimensioneerimisel aluseks võtta suurim talas esinev paindemoment, mis siin näites esineb lõikes a . Kui koormuse suurenmisel saavutab materjal nimetatud lõikes voolavuspiiri, loetakse piirpingemeetodi kohaselt konstruktsioon piirseisundis olevaks ning vastav koormus ohtlikuks koormuseks. Staatikaga määramatu konstruktsioon säilitab aga kujukindluse ja piirkoormusmeetod võimaldab talale rakendada suuremat koormust. Vastavalt sellele, millises varda ristlõikes hakkab materjal voolama, tekivad plastsed liigendid.

Koormuse suurendamisel moodustub plastne liigend esimesena toel a , mille tulemusena väheneb tala staatikaga määramatuse aste ühe võrra. Edasisel koormuse suurenmisel paindemoment lõikes a enam kasvada ei saa – tekkinud on piirmoment M_{pl} . Järgmisena moodustub plastne liigend lõikesse c . Tala kandevõime ammendub pärast kolmanda plastse liigendi tekkimist lõikesse b . Piirseisundile vastab joonisel 21.20, c kujutatud paindemomendi epüür.

Valemid piirmomendi ja piirkoormuse arvutamiseks tuletame piirmomentide võrdsuse tingimusest

$$M_a = M_c = M_b = M_{pl} \quad (21.24)$$

Kuna piirmomendid $M_{a,pl}$ ja $M_{c,pl}$ moodustavad lihttala paindemomendi M_c^0 , saame kirjutada

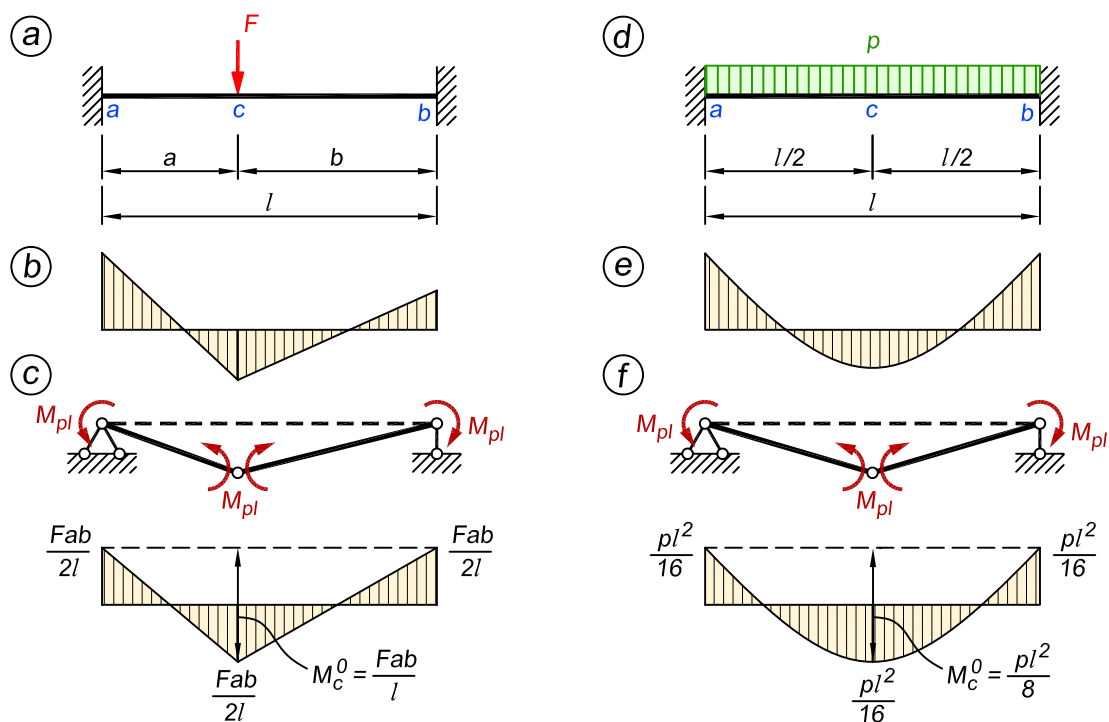
$$M_{a,pl} + M_{c,pl} = 2M_{pl} = M_c^0 = \frac{Fab}{l} \quad (21.25)$$

millest avaldame piirmomendi

$$M_{pl} = \frac{F_{lim}ab}{2l} \quad (21.26)$$

ja piirkoormuse

$$F_{lim} = \frac{2lM_{pl}}{ab} \quad (21.27)$$



Joonis 21.20. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras

Lauskoormusega tala

Ühtlase lauskoormusega tala (joonis 21.20, d) töötamisel elastses staadiumis tekkinud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 21.20, e. Toeordinaadid on silde keskmisest ordinaadist kaks korda suuremad, mistõttu saavutab materjal voolavuspiiri esmalt tugeudel ja koormuse kasvamisega tekivad sinna plastid liigendid. Tala kaotab kandevõime, kui koormuse edasise suurenenemisel tekib kolmas liigend silde keskele. Piir seisundile vastab joonisel 21.20, f kujutatud paindemomendi epüür.

Kuna kõik kolm piirmomenti peavad võrdsed olema, saame sarnaselt tuletuskäigule koondjõuga kasutada lihttala paindemomendi abi. Piirmoment on

$$M_{pl} = \frac{M_c^0}{2} = \frac{pl_{lim}l^2}{16} \quad (21.28)$$

ja piirkoormus

$$pl_{lim} = \frac{16M_{pl}}{l^2} \quad (21.29)$$

21.4.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda arvutus staatika meetodiga

Kui tala ühes otsas on jäik ja teisest otsast liigendkinnitus, siis kahe plastse liigendi tekkimisega muutub tala mehhanismiks (joonis 21.21).

Koondjõuga tala

Joonisel 21.21, *a* kujutatud tala korral lähtume piirmomentide võrdsuse tingimusest

$$M_a = M_c = M_{pl} \quad (21.30)$$

milles

$$M_c = M_c^0 - M_a \frac{b}{l} \quad (21.31)$$

ehk

$$M_{pl} = \frac{Fab}{l} - M_{pl} \frac{b}{l} \quad (21.32)$$

Avaldame piirmomendi

$$M_{pl} = \frac{F_{lim}ab}{l+b} \quad (21.33)$$

ja piirkoormuse

$$F_{lim} = \frac{M_{pl}(l+b)}{ab} \quad (21.34)$$

Nende valemite puhul peab tähelepanu juhtima sellele, et tähega *b* esitatud kauguse kohal peab siin alati olema vahemik koormusest tala liigendtoeni, olenemata sellest, kas liigendots on vasakul või paremal.

Lauskoormusega tala

Kui tala on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega (joonis 21.21, *b*), siis muutub piirkoormuse leidmine keerulisemaks, kuna sildes tekkiva plastse liigendi asukoht pole teada. Tähistame selle kauguse vasakust toest tähega *x*.

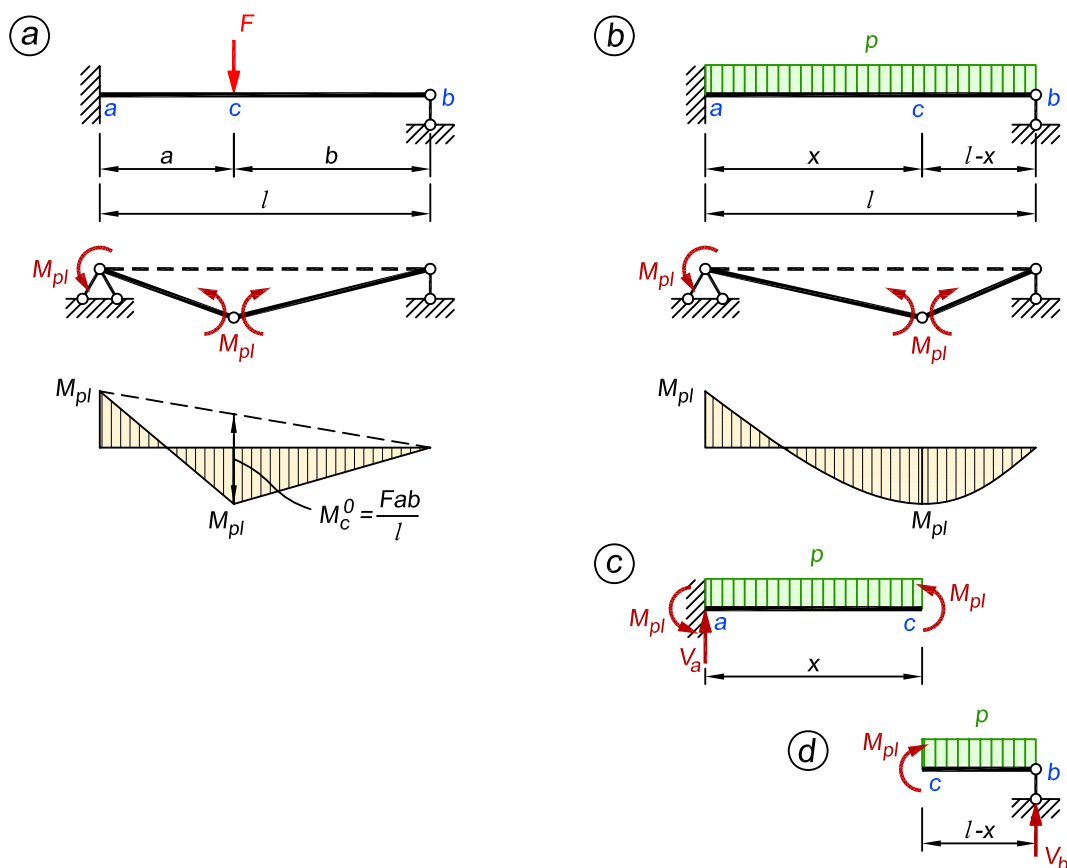
Kauguse *x* määramiseks jagame tala lõike *c* kohalt kaheks osaks ja vaatame seejärel kumagi osa tasakaalu.

Talaosa *a-c* momentide tasakaalutingimusest punkti *a* suhtes (joonis 21.21, *c*) saame

$$\sum M_a = 0; \quad M_{pl} + M_{pl} - \frac{px^2}{2} = 0 \quad (21.35)$$

millest avaldame

$$M_{pl} = \frac{px^2}{4} \quad (21.36)$$



Joonis 21.21. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras

Talaosa $b-c$ momentide tasakaalutingimuse kirjutame punkti b suhtes (joonis 21.21, d)

$$\sum M_b = 0; \quad -M_{pl} + \frac{p(l-x)^2}{2} = 0 \quad (21.37)$$

millest saame

$$M_{pl} = \frac{p(l^2 - 2lx + x^2)}{2} \quad (21.38)$$

Plastse liigendi asukoha x leidmiseks võrdsustame kummagi talaosa arvutusest saadud M_{pl} avaldised

$$\frac{px^2}{4} = \frac{p(l^2 - 2lx + x^2)}{2} \quad (21.39)$$

Teisendamise tulemusena jõuame ruutvõrrandini

$$-0,25x^2 + lx - 0,5l^2 = 0 \quad (21.40)$$

Võrrandi lahendamisel saadud kahest lahendist valime selle x väärtuse, mis jääb vahemikku $0 \leq x \leq l$

$$x = l(2 - \sqrt{2}) \quad (21.41)$$

Asetame leitud x väärtuse avaldisse (21.36)

$$M_{pl} = \frac{p}{4} l^2 (2 - \sqrt{2})^2 \quad (21.42)$$

Avaldame piirmomendi

$$M_{pl} = p_{lim} l^2 (1,5 - \sqrt{2}) \quad (21.43)$$

ja piirkoormuse

$$p_{lim} = 11,657 \frac{M_{pl}}{l^2} \quad (21.44)$$

21.4.3. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda arvutus kinemaatika meetodiga

Koondjõuga tala

Pirolukorraile vastava koormuse leidmisel kinemaatika meetodiga anname talale plastse liigendi tekkimise kohal jõu rakenduspunktis virtuaalsirde δc (joonis 21.22, a). Siirdumise käigus tehtav välisjõu virtuaaltöö on

$$W_v = F_{lim} \delta c \quad (21.45)$$

Edasises tuletuskäigus lähtume sellest, et välis- ja sisejõudude tööde summa peab võrduma nulliga

$$W_v + W_s = 0 \quad (21.46)$$

Plastsetes liigendites tehtava sisejõudude töö saamiseks on meil vaja teada tala pöördenurkasid plastsete liigendite kohal. Selleks määrame konstruktsiooni deformeerumisel tekivad nurgad. Toel a asuvas liigendis pöörduv tala nurga φ_a võrra ning toel b asuvas liigendis nurga φ_b võrra. Väikeste pöördenurkade korral arvestatakse, et $\tan \varphi \approx \varphi$ ja seega nurgad varda mõlema poole alg- ja siirdunud asendi vahel on

$$\varphi_a = \frac{\delta c}{a}; \quad \varphi_b = \frac{\delta c}{b} \quad (21.47)$$

Liigendis c peame lähtuma varda osade omavahelisest pöördest

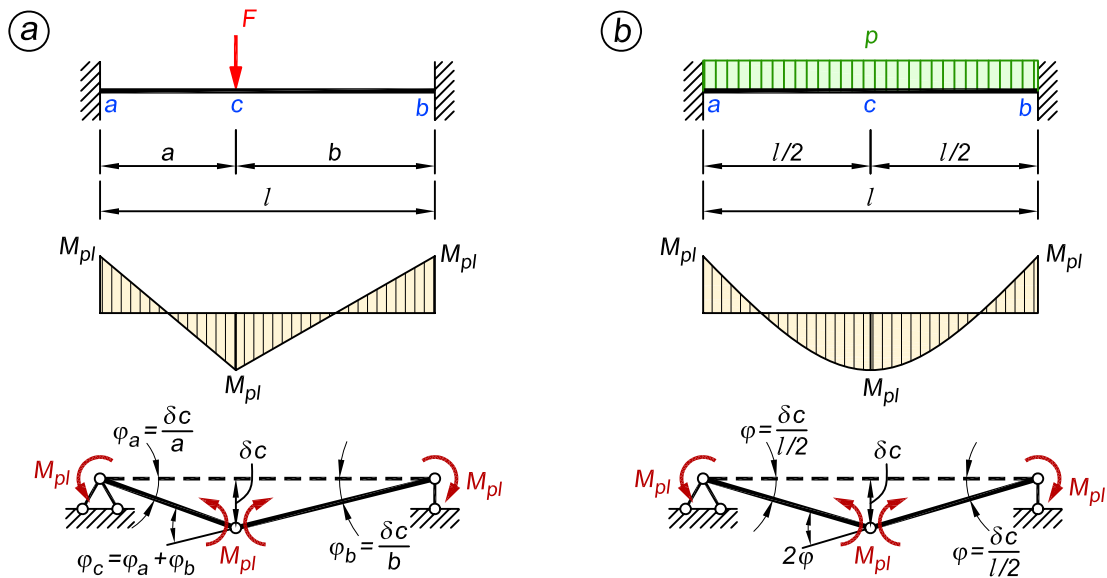
$$\varphi_c = \varphi_a + \varphi_b = \frac{\delta c}{a} + \frac{\delta c}{b} = \frac{\delta c (b + a)}{ab} = \frac{\delta c \cdot l}{ab} \quad (21.48)$$

Plastsetes liigendites tehtav sisejõudude töö võrdub plastse momendi ja pöördenurga korutisega

$$W_s = -M_{pl} \varphi_a - M_{pl} \varphi_b - M_{pl} \varphi_c \quad (21.49)$$

kus miinusmärgid tulevad sellest, et pöördenurgad on vastupidised momentidele. Asendades nurgad φ_a , φ_b ja φ_c nende avaldistega, saame

$$W_s = -M_{pl} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{l}{ab} \right) \delta c = -M_{pl} \frac{2l}{ab} \delta c \quad (21.50)$$



Joonis 21.22. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras

Võrdsustame välis- ja sisejõudude töö vastavalt valemile (21.46)

$$F_{lim} \delta c = M_{pl} \frac{2l}{ab} \delta c \quad (21.51)$$

millest avaldame piirmomendi ja piirkoormuse

$$M_{pl} = \frac{F_{lim} ab}{2l}; \quad F_{lim} = \frac{2l M_{pl}}{ab} \quad (21.52)$$

Jõudsime samade avaldisteni nagu staatika meetodiga tuletatud valemid (21.26) ja (21.27).

Lauskoormusega tala

Ühtlase lauskoormusega koormatud ja mõlemast otsast jäigalt kinnitatud talal tekib plastne liigend silde keskkohas, millele anname nüüd virtuaalsirde δc (joonis 21.22, b). Siirdumise käigus tehtav välisjõu virtuaaltöö on

$$W_v = p_{lim} \frac{l}{2} \delta c \quad (21.53)$$

kus $\frac{l}{2} \delta c$ on pindala, mis jääb tala esialgse ja siirdunud asendi vahele.

Tala deformeerumisel tekkivad nurgad tugede kohal on võrdsed

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi = \frac{\delta c}{l/2} = \frac{2\delta c}{l} \quad (21.54)$$

Lõikes c on nurk kaks korda suurem

$$\varphi_c = 2\varphi \quad (21.55)$$

Plastsetes liigendites tehtavaks sisejõudude tööks saame

$$W_s = -M_{pl}\varphi - M_{pl}\varphi - 2M_{pl}\varphi \quad (21.56)$$

Asendades nurga φ selle avaldisega, saame

$$W_s = -M_{pl} \left(\frac{2}{l} + \frac{2}{l} + \frac{4}{l} \right) \delta c = -M_{pl} \frac{8}{l} \delta c \quad (21.57)$$

Võrdsustame välis- ja sisejõudude töö vastavalt valemile (21.46)

$$p_{lim} \frac{l}{2} \delta c = M_{pl} \frac{8}{l} \delta c \quad (21.58)$$

millest avaldame piirmomendi ja piirkoormuse

$$M_{pl} = \frac{p_{lim} l^2}{16}; \quad p_{lim} = \frac{16M_{pl}}{l^2} \quad (21.59)$$

Jõudsime samade avaldisteni nagu staatika meetodiga tuletatud valemid (21.28) ja (21.29).

21.4.4. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda arvutus kinemaatika meetodiga

Koondjõuga tala

Anname talale plastse liigendi tekkimise kohal jõu rakenduspunktis virtuaalsiirde δc (joonis 21.23, a). Siirdumise käigus tehtav välisjõu virtuaaltöö on

$$W_v = F_{lim} \delta c \quad (21.60)$$

Konstruksiooni deformeerumisel tekkivad nurgad on

$$\varphi_a = \frac{\delta c}{a}; \quad \varphi_b = \frac{\delta c}{b}; \quad \varphi_c = \varphi_a + \varphi_b = \frac{\delta c \cdot l}{ab} \quad (21.61)$$

Leiame plastsetes liigendites tehtava sisejõudude töö. Kuna parempoolsel toel oli liigend juba alguses arvutusskeemis, siis seal sisejõudude tööd ei esine ning siin arvestame plastseid momente toel a ja liigendi c kohal

$$W_s = -M_{pl}\varphi_a - M_{pl}\varphi_c \quad (21.62)$$

Asendame nurgad φ_a ja φ_c nende avaldistega, misjärel saame

$$W_s = -M_{pl} \left(\frac{1}{a} + \frac{l}{ab} \right) \delta c = -M_{pl} \frac{b+l}{ab} \delta c \quad (21.63)$$

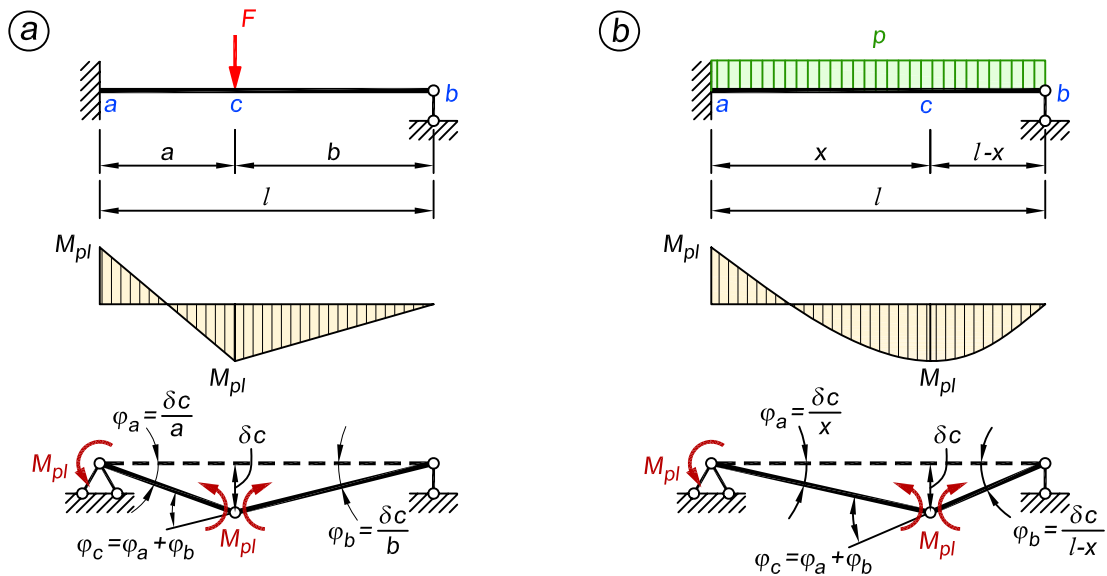
Võrdsustame välis- ja sisejõudude töö vastavalt valemile (21.46)

$$F_{lim} \delta c = M_{pl} \frac{b+l}{ab} \delta c \quad (21.64)$$

millest avaldame piirmomendi ja piirkoormuse

$$M_{pl} = \frac{F_{lim} ab}{l+b}; \quad F_{lim} = \frac{M_{pl} (l+b)}{ab} \quad (21.65)$$

Saime samad avaldised nagu staatika meetodiga leitud valemid (21.33) ja (21.34).



Joonis 21.23. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras

Lauskoormusega tala

Selle skeemi puhul ei ole sildes tekkiva plastse liigendi asukoht teada. Tähistame selle liigendi kauguse vasakust toest x -iga.

Anname plastsele liigendile virtuaalsirde δc . Siirdumise käigus tehtav välisjõu virtuaaltöö on

$$W_v = p_{lim} \frac{l}{2} \delta c \quad (21.66)$$

kus $\frac{l}{2} \delta c$ on pindala, mis jääb tala esialgse ja siirdunud asendi vahele.

Konstruksiooni deformeerumisel tekkivad nurgad on

$$\varphi_a = \frac{\delta c}{x}; \quad \varphi_b = \frac{\delta c}{l-x}; \quad \varphi_c = \varphi_a + \varphi_b = \frac{\delta c}{x} + \frac{\delta c}{l-x} \quad (21.67)$$

Plastsetes liigendites tehtav sisejõudude töö on

$$W_s = -M_{pl} \varphi_a - M_{pl} \varphi_c \quad (21.68)$$

Asendades nurgad φ_a ja φ_c nende avaldistega, saame

$$W_s = -M_{pl} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} \right) \delta c = -M_{pl} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{l-x} \right) \delta c \quad (21.69)$$

Võrdsustame välis- ja sisejõudude töö vastavalt valemile (21.46)

$$p_{lim} \frac{l}{2} \delta c = M_{pl} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{l-x} \right) \delta c \quad (21.70)$$

millest avaldame piirkoormuse

$$p_{lim} = \frac{2M_{pl}}{l} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{l-x} \right) \quad (21.71)$$

Plastse liigendi asukoht on esialgu veel tundmatu. Kaugus x peab olema selline, et piirkoormus p_{lim} oleks minimaalne. Miinimumi arvutamiseks leiame p_{lim} tuletise ja võrdsustame selle nulliga

$$\frac{dp_{lim}}{dx} = \frac{2M_{pl}}{l} \left[-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{(l-x)^2} \right] = 0 \quad (21.72)$$

Teisendame saadud avaldise ruutvõrrandi kujule ning lahendame selle ja leitud kahest lahendist valime x väärtuse, mis jääb vahemikku $0 \leq x \leq l$

$$x = l(2 - \sqrt{2}) \quad (21.73)$$

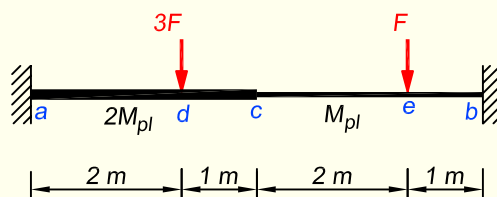
Asetame leitud x väärtuse piirkoormuse p_{lim} avaldisse (21.71)

$$p_{lim} = \frac{2M_{pl}}{l^2} \left(\frac{2}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{1 - 2 + \sqrt{2}} \right) \quad (21.74)$$

millest pärast lihtsustamist saame

$$p_{lim} = 11,657 \frac{M_{pl}}{l^2} \quad (21.75)$$

NÄIDE 21.8. Määrata piirkoormus joonisel 21.24 kujutatud ühesildelisele staatikaga määramatule talale. Tala koosneb kahest erineva ristlõikega osast. Väiksema ristlõikega osa piirmoment on $M_{pl} = 100 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

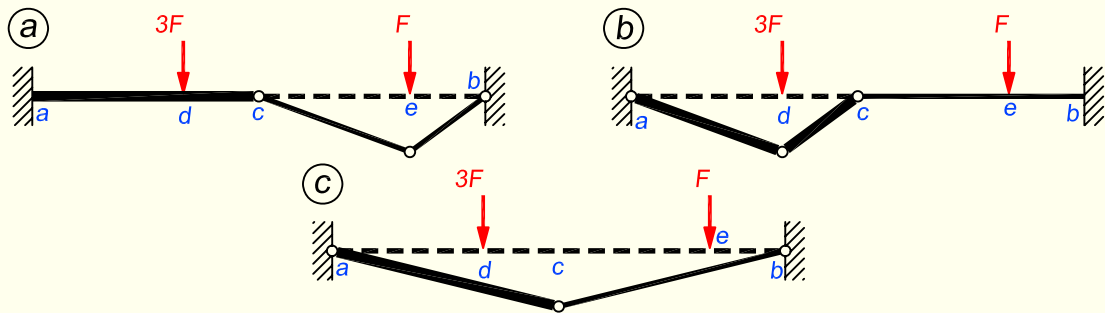


Joonis 21.24. Tala arvutusskeem

LAHENDUS

Ülesandes esitatud tala muutub mehhanismiks pärast kolme plastse liigendi tekkimist. Nüüd tuleb välja selgitada nende liigendite tekkimise kohad.

Joonisel 21.25 on näidatud kolm võimalikku plastsete liigendite tekkimise skeemi. Skeem b on neist kõige ebatõenäolisem ja arvatavasti realiseerub skeemil c näidatud variant, mistõttu edasises lahenduskäigus lähtume sellest.



Joonis 21.25. Võimalikud plastsete liigendite tekkimise variandid

Piirkoormuse määramisel kasutame kinemaatika meetodit ja lähtume sellest, et välis- ja sisejõudude tööde summa peab võrduma nulliga

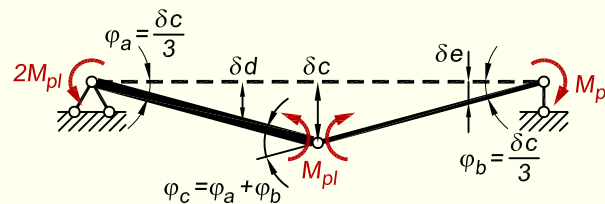
$$W_v + W_s = 0$$

Välisjõudude ja sisejõudude tööd saame määrata joonise 21.26 abil. Anname lõikes c tekkivale liigendile vertikaalsiirde δc , mille tõttu tala mõlemad pooled pöörduvad. Pöördenurgad tugeudel leiame lähtudes sellest, et väikeste nurkade korral $\tan \varphi \approx \varphi$

$$\varphi_a = \frac{\delta c}{3}; \quad \varphi_b = \frac{\delta c}{3}$$

Varraste vastastikune pööre liigendi c kohal on nende nurkade summa

$$\varphi_c = \varphi_a + \varphi_b = \frac{2}{3} \delta c$$



Joonis 21.26. Piirkoormuse arvutamine kinemaatika meetodiga

Nüüd saame kirja panna välisjõudude töö

$$W_v = 3F \cdot \delta d + F \cdot \delta e = 3F \frac{2}{3} \delta c + F \frac{1}{3} \delta c = \frac{7}{3} F \delta c$$

Sisejõudude töö puhul arvestame plastseid momente. Joonisel 21.26 on vasakule teele märgitud $2M_{pl}$, kuna sinna kinnitub suurema piirmomendiga varras. Parempoolsel

toel ning kahe varda liitumiskohas võtame piirmomendi väiksema varda järgi. Sisejõudude tööks saame

$$W_s = -2M_{pl}\varphi_a - M_{pl}\varphi_c - M_{pl}\varphi_b = -2M_{pl}\frac{\delta c}{3} - M_{pl}\frac{2}{3}\delta c - M_{pl}\frac{\delta c}{3} = -\frac{5}{3}M_{pl}\delta c$$

Võrdsustame välis- ja sisejõudude töö vastavalt eespool toodud avaldisele

$$\frac{7}{3}F\delta c = \frac{5}{3}M_{pl}\delta c$$

millest saame piirkoormuseks

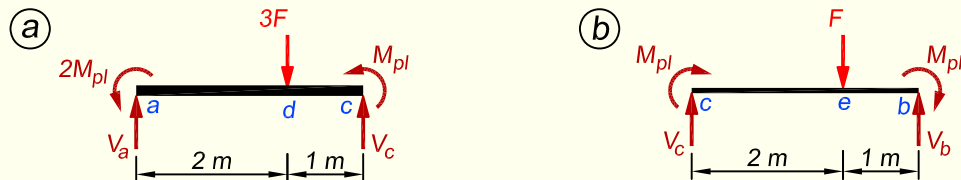
$$F_{lim} = \frac{5}{7}M_{pl} = \frac{5}{7} \cdot 100 = 71,43 \text{ kN}$$

Koostame paindemomendi epüüri ja kontrollime ega üheski lõikes ei lähe paindemomendi väärtus suuremaks, kui on selles talaosas piirmoment. Võtame esmalt vaatluse alla varda $a-c$ tasakaalu (joonis 21.27, a) ning arvutame vasakpoolse otsa toereaktsiooni, kasutades selleks momentide tasakaalutingimust varda teise otsa suhtes

$$\begin{aligned} \sum M_c = 0; \quad -V_a \cdot 3 + 2M_{pl} + 3F \cdot 1 + M_{pl} &= 0 \\ V_a = F + M_{pl} = 71,43 + 100 &= 171,43 \text{ kN} \end{aligned}$$

Leitud toereaktsiooni kasutame lõikes d paindemomendi arvutamiseks

$$M_d = 171,43 \cdot 2 - 200 = 142,86 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Joonis 21.27. Tala üksikute osade tasakaal

Järgnevalt vaatame varda $b-c$ tasakaalu (joonis 21.27, b) ning leiame selle parempoolse toereaktsiooni

$$\begin{aligned} \sum M_c = 0; \quad V_b \cdot 3 - M_{pl} - F \cdot 2 - M_{pl} &= 0 \\ V_b = \frac{2}{3}F + \frac{2}{3}M_{pl} = \frac{2}{3} \cdot 71,43 + \frac{2}{3} \cdot 100 &= 114,29 \text{ kN} \end{aligned}$$

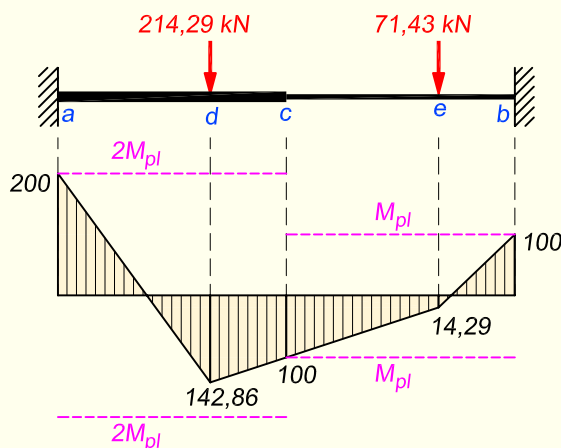
Leitud toereaktsiooni kasutame lõikes e paindemomendi arvutamiseks

$$M_e = 114,29 \cdot 1 - 100 = 14,29 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Nüüd saame koostada purunemisele eelneva hetke paindemomendi epüüri (joonis 21.28). Kui oleme märkinud ordinaadid lõigete d ja e kohale, siis arvutame nende abil kontrolliks ka paindemomendi väärtuse lõike c kohal, kus see ei tohi minna üle M_{pl} väärtuse

$$M_c = 142,86 \cdot \frac{2}{3} + 14,29 \cdot \frac{1}{3} = 100 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Joonisel 21.28 on kummagi talaosa kohal esitatud ka vastava varda piirmomendi väärtus (M_{pl} ja $2M_{pl}$). Näeme, et üheski lõikes epüür neid väärtuseid ei ületa.



Joonis 21.28. Piirmomentide epüür

21.5. Jätkuvtala

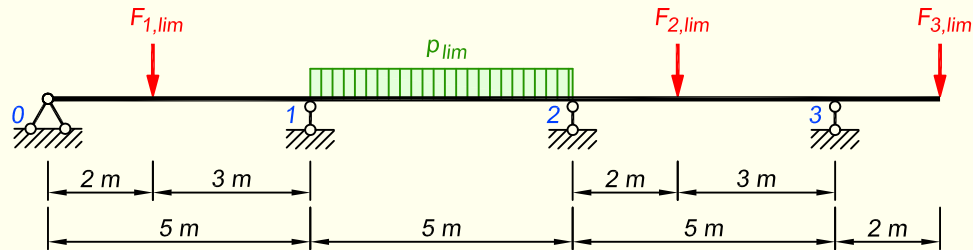
Jätkuvtala puhul võib tala iga sille muutuda mehhanismiks ja seega puruneda iseseisvalt, sõltumata kõrvalolevatest silletest. Seetõttu on minimaalne arv mehhanismide tekkimise võimalusi võrdne tala koormatud sillete arvuga. Koormuste keerukama paiknemise ning tala ristlõigete muutumise korral võib neid variante aga rohkem olla.

Ohtlikud kohad on jätkuvtatalal toelõiked ning sillete keskmiste lõigete piirkonnad.

21.5.1. Piirkoormuste arvutamine

Jätkuvtala piirkoormused leiame iga silde jaoks eraldi, kasutades selleks peatükis 21.4 tuletatud valemeid. Vahepealsetel tugeudel on piirmomendiks väiksem kahest naabersilde piirmomendist.

NÄIDE 21.9. Määrata piirkoormused joonisel 21.29 kujutatud jätkuvtallale. Tala valmistatakse terasprofiilist IPE220, mille plastne vastupanumoment on $W_{pl,y} = 285 \text{ cm}^3$. Terase voolavuspiir on $\sigma_y = 355 \text{ MPa}$.



Joonis 21.29. Jätkuvtala arvutuskeem

LAHENDUS

Plastse liigendi tekkimisele vastav piirpaimement on

$$M_{pl} = W_{pl,y} \sigma_y = 285 \cdot 10^{-6} \cdot 355 \cdot 10^3 = 101,18 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Jätkuvtallal tekib igas sildes mehhanism sõltumatult teistest silletest, mistõttu vaatame kõiki sildeid eraldi. Joonisel 21.30 on kujutatud üksikshaaval kõigi sillete mehhanismide skeemid ning kogu tala piirmomentide epüür. Kuna tala jäikus on konstantne, siis on M_{pl} kõigi sillete ja tugede kohal võrdse väärtusega.

Esimese silde piirkoormuse leiame joonise 21.21, a ning valemi (21.34) abil. Erinevalt nimetatud valemist kasutame siin avaldise lugejas tähist a , kuna selles kohas tuleb alati märkida koormuse kaugus liigendotsast ja praegu on selleks vasakpoolne kaugus.

$$F_{1,lim} = \frac{M_{pl}(l+a)}{ab} = \frac{101,18(5+2)}{3 \cdot 2} = 118,0 \text{ kN}$$

Teise silde piirkoormuse leiame joonise 21.20, d, f ning valemi (21.29) abil

$$p_{lim} = \frac{16M_{pl}}{l^2} = \frac{16 \cdot 101,18}{5^2} = 64,8 \text{ kN/m}$$

Kolmanda silde piirkoormuse leiame joonise 21.20, a, c ning valemi (21.27) abil

$$F_{2,lim} = \frac{2lM_{pl}}{ab} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 101,18}{2 \cdot 3} = 168,6 \text{ kN}$$

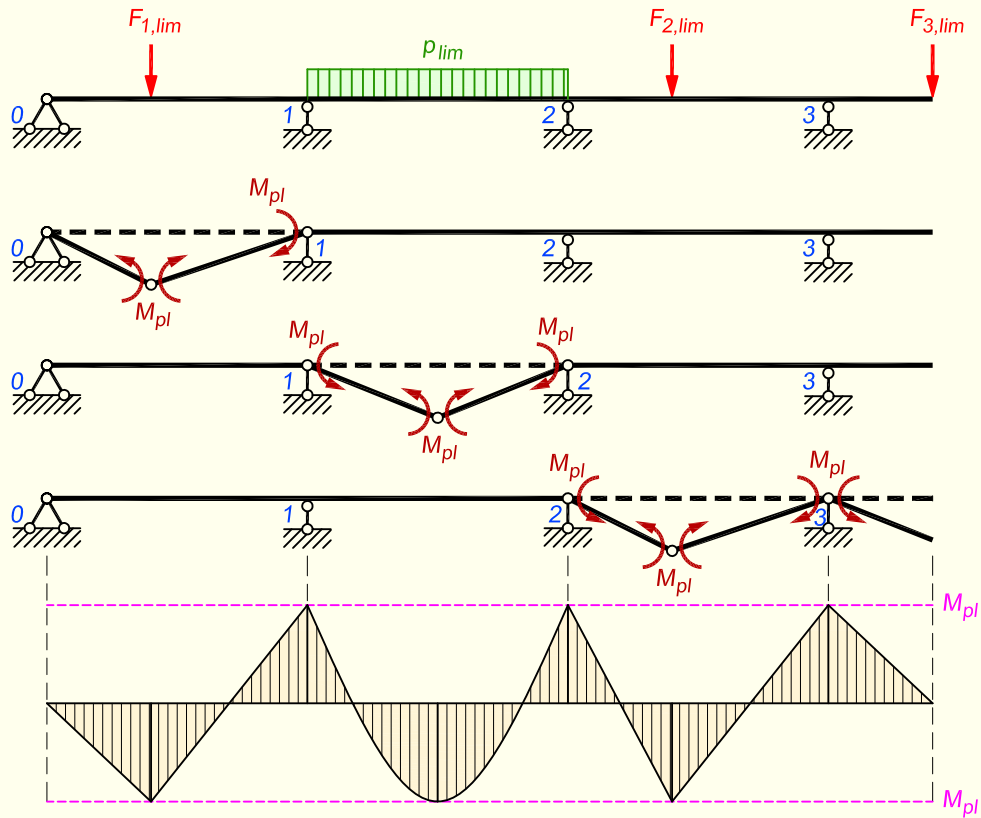
Juhul kui konsoolil koormust ei oleks, siis ei tekiks ka toemomenti kolmandal toel ja sel juhul arvutaksime kolmanda silde piirkoormuse sarnaselt esimesele sildele.

Kuna toel 3 tekkiv moment konsooli koormusest on

$$M_{pl} = F_{3,lim} \cdot l_{konsool}$$

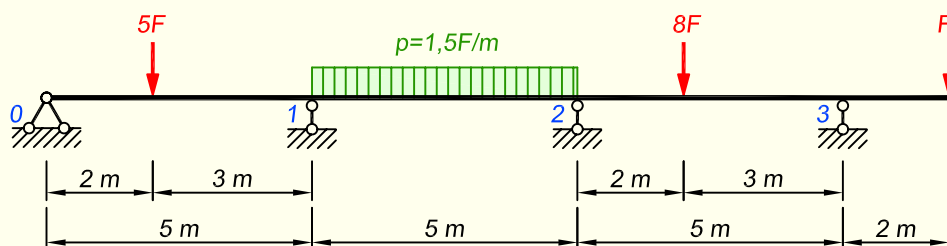
siis saame konsooli piirkoormuseks

$$F_{3,lim} = \frac{M_{pl}}{l_{konsool}} = \frac{101,18}{2} = 50,6 \text{ kN}$$



Joonis 21.30. Mehhanismide tekkimine üksikutes silletes ning piirmomentide epüür

NÄIDE 21.10. Määrata joonisel 21.31 kujutatud jätkuvtalale lubatav koormus F . Tala valmistatakse terasprofiilist IPE220, mille plastne vastupanumoment on $W_{pl,y} = 285 \text{ cm}^3$. Terase voolavuspiir on $\sigma_y = 355 \text{ MPa}$.



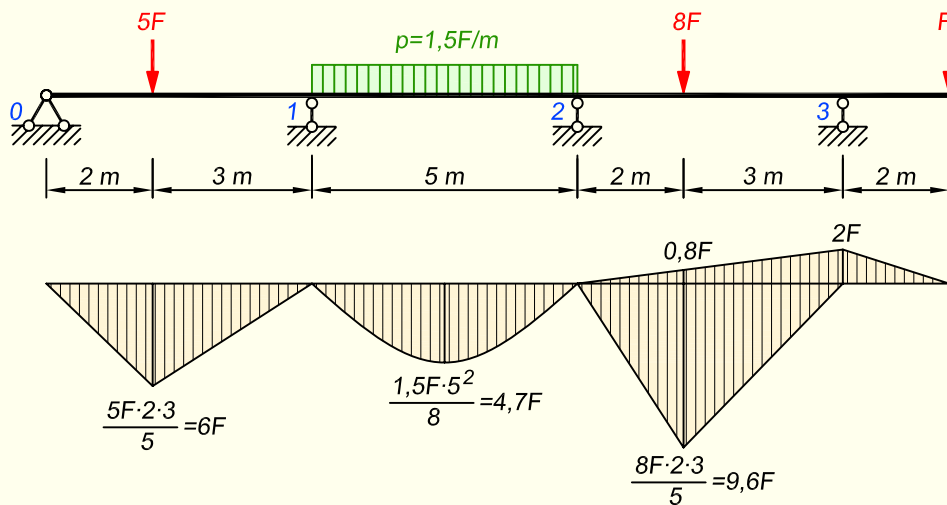
Joonis 21.31. Jätkuvtala arvutuskeem

LAHENDUS

Plastse liigendi tekkimisele vastav piirmoment on

$$M_{pl} = W_{pl,y} \sigma_y = 285 \cdot 10^{-6} \cdot 355 \cdot 10^3 = 101,18 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

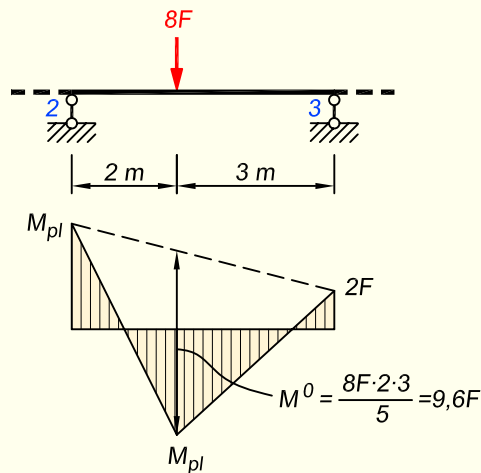
Siin näites on erinevates silletes paiknevate koormuste omavahelised suhted määratud ja koormuse F suurenemisel saabub piirseisund ühes nendest silletest esimesena. Nüüd tulebki määrata, millises sildes tala kandevõime teistest varem ammendub. Selleks koostame igale sildele seal mõjuvast koormusest lihttala paindemomendi epüürid, nagu on näidatud joonisel 21.32. Suurima ordinaadiga epüür näitabki otsitava silde.



Joonis 21.32. Lihttala epüürid üksikutele silletele

Kuigi talal on mõlemas otsas liigendtugi, ei saa esimest ja viimast sillet vaadata täpselt ühtmoodi. Kolmanda silde puhul tuleb arvestada ka konsooli koormusest põhjustatud negatiivset momenti sildes. Erinevate sillete epüüride võrdlemisel näeme, et neist kolmandas on lihttala paindemomendi ordinaat suurim ja järelikult saabub piirseisund selles sildes esimesena. Järgnevalt võtame koormuse määramisel aluseks tala kolmanda silde.

Kolmanda silde puhul me ei saa piirkoormuse määramisel kasutada eespool tuletatud üldvalemeid, sest praegune olukord ei vasta tüüpjuhtudele. Kuna otsmine tugi on liigendtugi, siis ei saa lähtuda sisemisele sildele tuletatud valemite, kus silde kummaski servas on võrdsed piirmomendid M_{pl} . Samas ei saa kasutada ka liigendotsaga vardale avaldatud valemeid, kuna konsooli koormuse tõttu ei ole paindemoment parempoolisel toel võrdne nulliga. Siin tuleb lähtuda joonisest 21.33, kus võrdsed piirmomendid on märgitud toele 2 ja koormuse rakenduspunkti. Tala kandevõime ammendub, kui nendes lõigetes tekivad plastsed liigendid. Toele 3 kanname konsooli koormusest tekkiva momendi. Edasine tegevus on täpselt sama nagu üldvalemite tuletamisel.



Joonis 21.33. Kolmas sille

Lähtume piirmomentide võrdsuse tingimusest ning kirjutame avaldise koormuse all oleva epüüri ordinaadi leidmiseks

$$M_{pl} = M^0 - M_{pl} \cdot \frac{3}{5} - 2F \cdot \frac{2}{5}$$

kus

$$M^0 = \frac{8F \cdot 2 \cdot 3}{5} = 9,6F$$

Saame tulemuseks

$$M_{pl} = 9,6F - 0,6M_{pl} - 0,8F$$

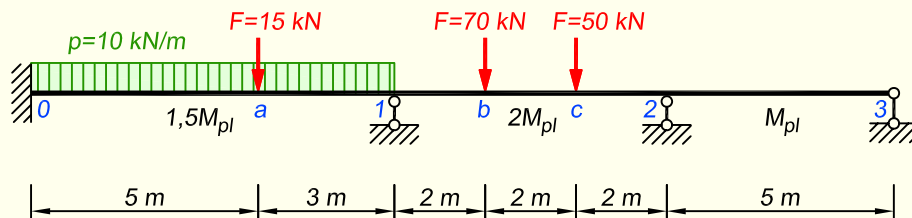
millest avaldame piirkoormuse

$$F_{lim} = \frac{1,6M_{pl}}{8,8} = \frac{1,6 \cdot 101,18}{8,8} = 18,4 \text{ kN}$$

21.5.2. Etteantud koormuste järgi ristlõigete dimensioneerimine

Kui lahendada on vaja vastupidine probleem ehk leida etteantud koormustele ja varutegurile vastavad ristlõike mõõtmed, siis tuleb staatika meetodiga lahendades esmalt koostada igale sildele paindemomendi epüür, vaadates iga sillet eraldiseisva otstest toetatud talana. Epüüride abil saab igale sildele välja arvutada piirmomendi nõutava minimaalse väärtuse. Kui tala projekteeritakse kogu pikkuses konstantse ristlõikega, siis tuleb võtta üksikute sillete piirmomentidest suurim ja selle järgi valida ristlõige.

NÄIDE 21.11. Joonisel 21.34 kujutatud jätkuvtalal on teada koormused ning erinevate sillete piirmomentide suhtelised väärtused. Leida piirmomendi M_{pl} minimaalne väärtus, arvestades, et tagatud oleks ka varutegur 1,25.



Joonis 21.34. Jätakuvtala arvutusskeem

LAHENDUS

Igale sildele tuleb arvutada piirmoment ja alustame esimesest sildest, kus teeme seda staatika meetodiga.

1. Esimese silde arvutamine staatika meetodiga

Esimeses sildes moodustub mehhanism pärast kolme plastse liigendi tekkimist (joonis 21.35, a).

Nendest liigenditest kaks tekivad kummagi toe peale ja nende asukohad on täpselt teada. Kolmanda liigendi, mis tekib silde, asukoht ei ole täpselt määratav. Kui koondjõud oleks silde keskel, siis paikneks liigend kindlasti selle all. Praegu aga asub see jõud silde keskkohast paremal pool ja tema suurus on suhteliselt väike, võrreldes kogu lauskoormusega, mistõttu kolmas liigend suure tõenäosusega tekib kuhugi silde keskele ehk koondjõust natuke vasakule poole. Tähistame selle löike tähega d ning tema kauguse vasakust toest x .

Vastavalt sellele saame piirmomentide epüüri (joonis 21.35, a), kus kõigi plastsete momentide väärtuseks on $1,5M_{pl}$. Kuigi toest 1 paremal on plastse momendi väärtus suurem, tuleb alati võtta kahest väärtusest väiksem.

Järgnevalt jagame tala esimeses sildes löike d kohalt kaheks ja vaatame kummagi poole tasakaalu (joonis 21.35, b ja c). Esimesena kirjutame momentide tasakaalutingimuse vasaku osa $0-d$ kohta punkti 0 suhtes

$$\sum M_0 = 0; \quad 1,5M_{pl} + 1,5M_{pl} - 10 \cdot \frac{x^2}{2} = 0$$

millest saame avaldada piirmomendi

$$M_{pl} = \frac{5}{3}x^2$$

Oluline on ka see, et tasakaalutingimuse kirjutasime punkti 0 suhtes eesmärgiga vabaneda toereaktsioonist V_0 , mis on tundmatu. Praegusel juhul on küll õlg reaktsioonil

V_d , aga kuna lõige d on paindemomendi maksimumi kohal, siis põikjõud selles kohas võrdub nulliga ja järelkult on ka reaktsiooni V_d väärtus null.

Edasi teeme sama talaosaga $d-1$, kirjutades tasakaalutingimuse punkti 1 suhtes

$$\sum M_1 = 0; \quad -1,5M_{pl} - 1,5M_{pl} + 15 \cdot 3 + 10 \cdot \frac{(8-x)^2}{2} = 0$$

millest peale teisendamisi avaldame piirmomendi

$$M_{pl} = \frac{5}{3}x^2 - \frac{80}{3}x + \frac{365}{3}$$

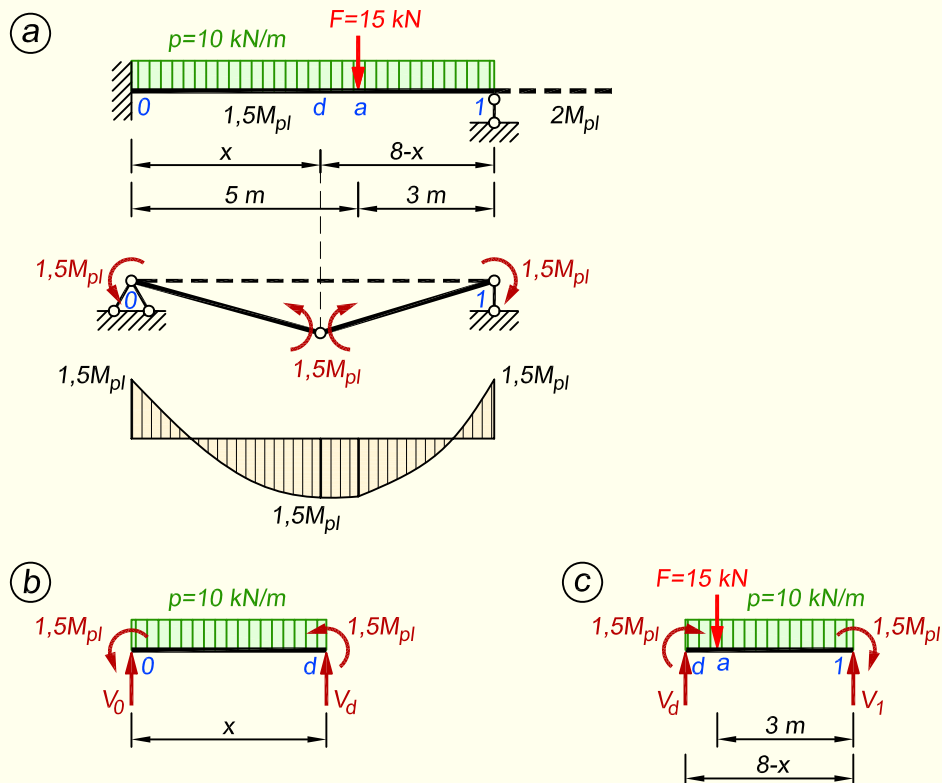
Nüüd võrdsustame mõlema talapoolega saadud avaldiste väärtused

$$\frac{5}{3}x^2 = \frac{5}{3}x^2 - \frac{80}{3}x + \frac{365}{3}$$

millest saame leida kauguse x

$$x = 4,563 \text{ m}$$

Näeme, et meie eeldus oli õige ja plastne liigend tekib silde keskkoha ja koondjõu vahelises piirkonnas.



Joonis 21.35. Esimese silde arvutamine staatika meetodiga

Tala vasaku poole plastse momendi avaldisega saame teada selle momendi väärtuse

$$M_{pl} = \frac{5}{3} \cdot 4,563^2 = 34,7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

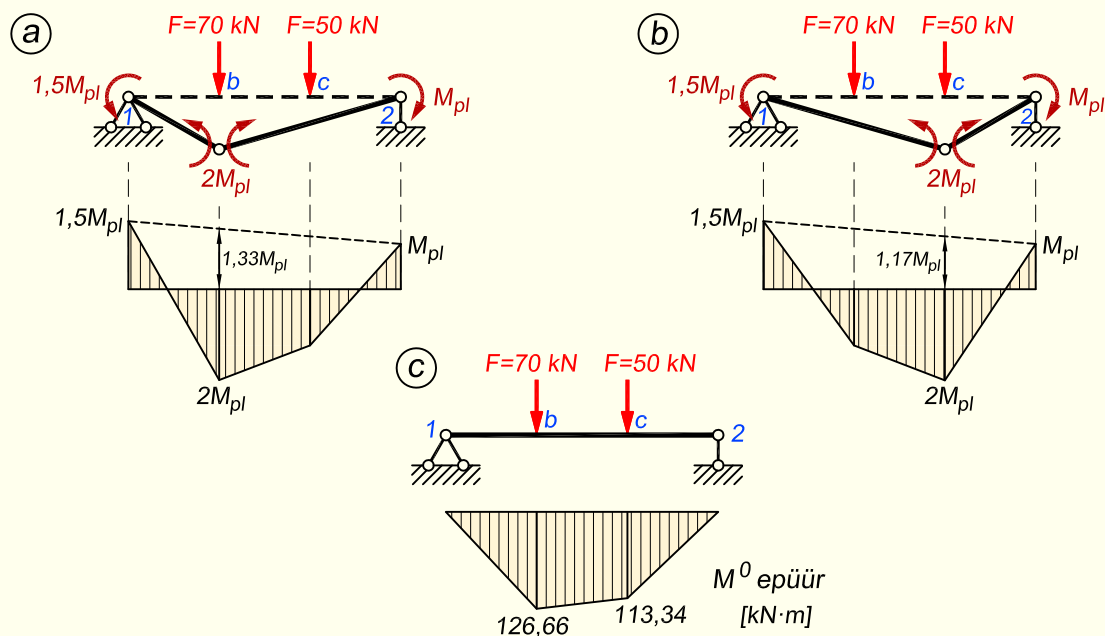
Edasi liigume teise sildesse ning teeme siin arvutuse nii staatika kui ka kinemaatika meetodiga.

2. Teise silde arvutamine staatika meetodiga

Teises sildes ei ole samuti kolmanda plastse liigendi tekkimise asukoht teada. Kindel on ainult see, et ta tekib ühe koondjõu all. Kui tala oleks konstantse jäikusega, siis on selge, et liigend satub suurema koormuse alla. Praegu on aga tegemist olukorraga, kus sildes ja selle otstes on ristlõiked erinevad ning see võib mõjutada ka plastse liigendi moodustumise kohta.

Järgnevalt arvutame läbi mõlemad variandid – liigend ühe koondjõu all ja liigend teise koondjõu all. Joonisel 21.36, a on näidatud olukord, kus liigend tekib suurema jõu all. Samuti on esitatud sellele vastav piirmomentide epüür. Sildes märgime maksimaalse ordinaadi tekkiva plastse liigendi kohale. Kuna kõrvalasetsevates silletes on piirmomendid väiksemad, tuleb tugede kohale valida väärtused nende järgi.

Kuna saadud epüür on tegelikult toemomentide epüüri ja lihttala epüüri summa, siis arvutame ka paindemomendi epüüri ordinaadid, vaadeldes teist sillet lihttalana (joonis 21.36, c).



Joonis 21.36. Teise silde arvutamine staatika meetodiga

Nüüd saame omavahel siduda mõlema epüüri väärtused lõike b kohal

$$2M_{pl} + 1,33M_{pl} = 126,66; \quad 3,33M_{pl} = 126,66$$

millest piirmoment

$$M_{pl} = 38,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Nüüd teeme sama protsessi läbi eeldades, et liigend moodustub väiksema jõu all (joonis 21.36, b). Nüüd märgime sildes tekkiva maksimaalse ordinaadi lõike c kohale. Kuna lihttala epüüri ordinaat lõike c kohal (joonis 21.36, c) on juba välja arvatud, saame jällegi mõlema epüüri väärtused selles lõikes omavahel siduda

$$2M_{pl} + 1,17M_{pl} = 113,34 \Rightarrow 3,17M_{pl} = 113,34$$

millest piirmoment

$$M_{pl} = 35,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

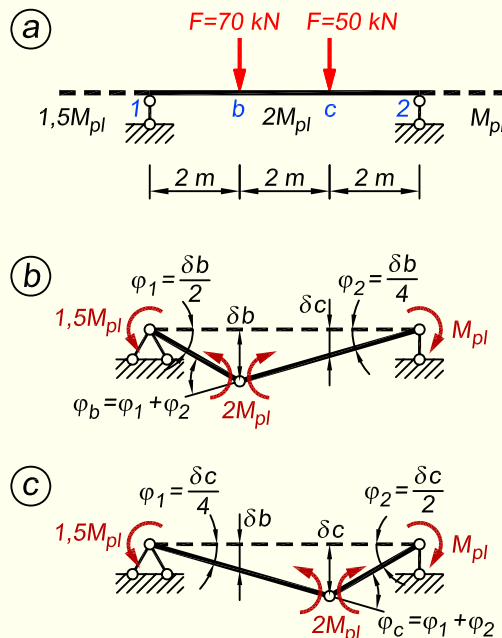
3. Teise silde arvutamine kinemaatika meetodiga

Kinemaatika meetodi puhul lähtume piirmomendi määramisel sellest, et välis- ja sisejõudude tööde summa peab võrduma nulliga

$$W_v + W_s = 0$$

Sarnaselt staatika meetodile teeme ka siin arvutuse läbi liigendi paiknemisega kumagi koondjõu all.

Joonisel 21.37, b on kujutatud olukord, kus lõikes b on tekkinud plastne liigend.



Joonis 21.37. Teise silde arvutamine kinemaatika meetodiga

Anneme tekkinud liigendile vertikaalsiirde δb . Selle tulemusena tala mõlemad pooled pöörduvad ning tekkivad pöördenurgad tugeudel 1 ja 2 ning löike b kohal on

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\delta b; \quad \varphi_2 = \frac{1}{4}\delta b; \quad \varphi_b = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{3}{4}\delta b$$

Välisjõudude töö on

$$W_v = 70 \cdot \delta b + 50 \cdot \delta c = 70 \cdot \delta b + 50 \cdot 0,5 \cdot \delta b = 95\delta b$$

Sisejõudude tööks saame

$$W_s = -1,5M_{pl}\varphi_1 - 2M_{pl}\varphi_b - M_{pl}\varphi_2 = -1,5M_{pl}\frac{1}{2}\delta b - 2M_{pl}\frac{3}{4}\delta b - M_{pl}\frac{1}{4}\delta b = -2,5M_{pl}\delta b$$

Kuna välis- ja sisejõudude tööde summa peab võrduma nulliga, siis võime kirjutada

$$95\delta b = 2,5M_{pl}\delta b$$

millest piirmomendiks saame

$$M_{pl} = 38,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Jõudsime sama tulemuseni nagu staatika meetodiga.

Järgnevalt teeme sarnase arvutuse, kuid eeldame, et plastne liigend tekib löikes c (joonis 21.37, c). Anneme liigendile vertikaalsiirde δc misjärel tekkivateks pöördenurkadeks saame

$$\varphi_1 = \frac{1}{4}\delta c; \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\delta c; \quad \varphi_c = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{3}{4}\delta c$$

Kirjutame välja välisjõudude töö

$$W_v = 70 \cdot \delta b + 50 \cdot \delta c = 70 \cdot 0,5 \cdot \delta c + 50 \cdot \delta c = 85\delta c$$

Sisejõudude tööks saame

$$W_s = -1,5M_{pl}\frac{1}{4}\delta c - 2M_{pl}\frac{3}{4}\delta c - M_{pl}\frac{1}{2}\delta c = -2,375M_{pl}\delta c$$

Kuna välis- ja sisejõudude tööde summa peab võrduma nulliga, siis saame nüüd kirjutada

$$85\delta c = 2,375M_{pl}\delta c$$

millest piirmomendiks saame

$$M_{pl} = 35,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Taas saime sama tulemuse nagu staatika meetodiga.

4. Piirmomendi M_{pl} minimaalse väärtuse määramine

Mõlema koormatud silde arvutusega saadud piirmomentidest tuleb valida suurim, et kandevõime oleks tagatud kogu tala ulatuses. Lisaks tuleb see korrutada lähteülesandes antud varuteguriga. Lõplikuks piirmomendiks saame

$$M_{pl} = 38,0 \cdot 1,25 = 47,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

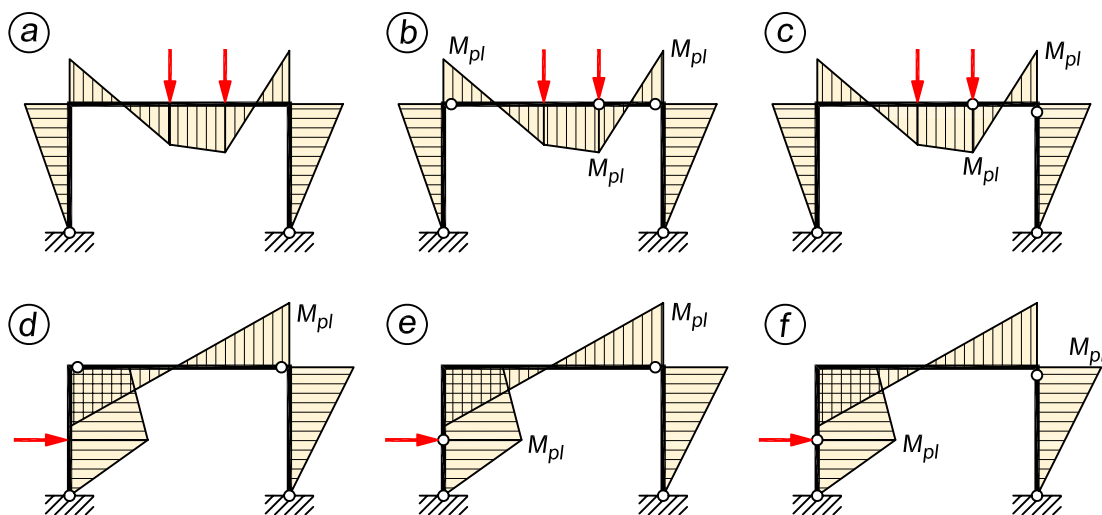
21.6. Raamid

Raamide (eriti kaarte) arvutus piirulukorra järgi on väga tülakas, kuna ei ole teada, kus tekivad plastsed liigendid. Võimalike variantide arv on tunduvalt suurem kui talades.

Näiteks kahe liigendiga raami piirulukorra võimalikud variandid plastsete liigenditega on kujutatud joonisel 21.38.

Vertikaalse koormuse puhul tekib üks piirulukord kolme plastse liigendiga riivis (joonis 21.38, b) ning teine piirulukorra variant on plastse liigendiga riivis ja postis (joonis 21.38, c). Horisontaalse koormuse puhul on piirulukorra võimalikud variandid järgmised: kaks plastset liigendit riivis (joonis 21.38, d), plastne liigend postis ja riivis (e) ning üks plastne liigend mõlemas postis (f).

Kõiki võimalikke plastsete liigendite tekkimise variante on vaja arvestada. Piirkoormuse määramisel võetakse nendele variantidele vastavatest koormustest väikseim ning ristlõike dimensioneerimisel suurim ristlõige.



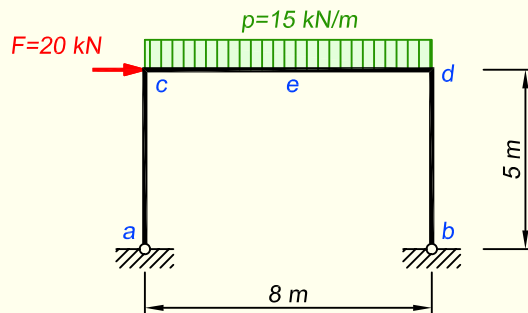
Joonis 21.38. Kahe liigendiga raami piirulukorra võimalikud variandid

NÄIDE 21.12. Leida joonisel 21.39 kujutatud raami piirmomendi M_{pl} minimaalne väärtus. Kõik raami vardad on ühesuguse ristlõikega.

LAHENDUS

1. Võimalikud piirulukordade skeemid

Vaadeldav raam on kahe liigendiga ja mehhanismiks muutumiseks peab temas tekima vähemalt kaks plastset liigendit. Milline piirulukorra variant realiseerub, sõltub jõudude suhtest ning raami mõõtudest. Joonisel 21.40 on näidatud kolm erinevat varianti plastsete liigendite tekkimiseks.



Joonis 21.39. Raami arvutuskeem

2. Piirlokord skeemil *a*

Joonisel 21.40, *a* on kujutatud piirlokord kolme plastse liigendiga riivis. Selline olukord võib esineda, kui vertikaalne koormus on horisontaalsest oluliselt suurem.

Kasutame ülesande lahendamisel kinemaatika meetodit ja lähtume sellest, et välis- ja sisejõudude tööde summa peab võrduma nulliga

$$W_v + W_s = 0$$

Siirete ja pöörete avaldamisel võtame aluseks näiteks riivi vasaku poole pöörde $\varphi_c = \varphi$. Riivi parema poole pööre on sellega võrdne $\varphi_d = \varphi$ ning lõikes *e* kaks korda suurem $\varphi_e = \varphi_c + \varphi_d = 2\varphi$.

Välisjõudude töö on

$$W_v = \frac{15 \cdot 8 \cdot \delta e}{2} = \frac{15 \cdot 8 \cdot 4\varphi}{2} = 240\varphi$$

kus $\frac{8 \cdot \delta e}{2}$ on pindala, mis jääb riivi esialgse ja siirdunud asendi vahele.

Sisejõudude tööks saame

$$W_s = -M_{pl}\varphi_c - M_{pl}\varphi_e - M_{pl}\varphi_d = -M_{pl}\varphi - M_{pl}2\varphi - M_{pl}\varphi = -4M_{pl}\varphi$$

Võrdsustame välis- ja sisejõudude tööd

$$240\varphi = 4M_{pl}\varphi$$

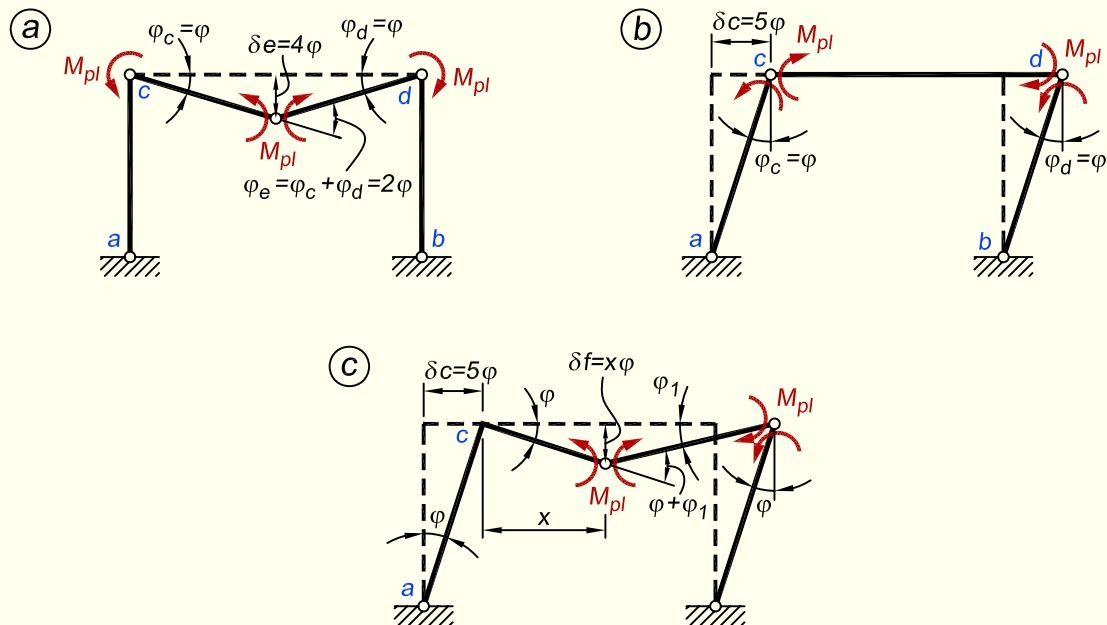
millest saame piirmomendiks

$$M_{pl} = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

3. Piirlokord skeemil *b*

Joonisel 21.40, *b* kujutatud piirlokord tekib plastsete liigendite moodustumisega ülemistes nurgasõlmedes. Selline olukord tekib, kui horisontaalne koormus on vertikaalsest oluliselt suurem.

Võtame aluseks vasaku posti pöörde φ , millega on võrdne ka parema posti pööre. Horisontaalse koormuse rakenduspunkti c siirde saame avaldada raami kõrguse ja posti pöördnurga kaudu $\delta c = 5\varphi$.



Joonis 21.40. Võimalikud plastsete liigendite tekkimise variandid

Välisjõudude töö on

$$W_v = 20 \cdot \delta c = 20 \cdot 5\varphi = 100\varphi$$

Sisejõudude töö on

$$W_s = -M_{pl}\varphi_c - M_{pl}\varphi_d = -M_{pl}\varphi - M_{pl}\varphi = -2M_{pl}\varphi$$

Võrdsustame välis- ja sisejõudude tööd

$$100\varphi = 2M_{pl}\varphi$$

millest saame piirmomendiks

$$M_{pl} = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

4. Piirlokord skeemil c

Joonisel 21.40, c kujutatud piirlokord on kahe eelmise kombineeritud variant. Sel juhul tekib üks plastne liigend parempoolses nurgasõlmes ning teine riivi keskmises piirkonnas, kus selle täpne asukoht on esialgu tundmatu. Tähistame selle lõike tähega f , tema kauguse vasakust nurgasõlmest olgu x .

Võtame aluseks vasaku posti pöörde φ , millega võrdub ka vasaku riivi pöördenurk, kuna riiv ja post on teineteisega jäigalt ühendatud. Samuti on parempoolse posti pööre φ . Ristlõike f vertikaalsiirde δf avaldamiseks kasutame selle lõike kaugust vasakust nurgast ning vasaku riivi pööret: $\delta f = \varphi x$. Parempoolse riivi pöördenurga φ_1 avaldamiseks kasutame ristlõike f vertikaalsiiret

$$\varphi_1 = \frac{\delta f}{8-x} = \frac{\varphi x}{8-x}$$

Välisjõudude töö on

$$W_v = 20 \cdot \delta c + \frac{15 \cdot 8 \cdot \delta f}{2} = 20 \cdot 5\varphi + \frac{15 \cdot 8 \cdot \varphi x}{2} = 100\varphi + 60\varphi x$$

kus $\frac{8 \cdot \delta f}{2}$ on pindala, mis jääb riivi esialgse ja siirdunud asendi vahele.

Sisejõudude töö on

$$\begin{aligned} W_s &= -M_{pl}(\varphi + \varphi_1) - M_{pl}(\varphi + \varphi_1) = \\ &= -2M_{pl}(\varphi + \varphi_1) = -2M_{pl} \left(\varphi + \frac{\varphi x}{8-x} \right) = -\frac{16M_{pl}\varphi}{8-x} \end{aligned}$$

Võrdsustame välis- ja sisejõudude tööd

$$100\varphi + 60\varphi x = \frac{16M_{pl}\varphi}{8-x}$$

millest saame piirmomendiks

$$M_{pl} = -3,75x^2 + 23,75x + 50$$

Kuna paindemomendi tuletis annab meile põikjõu, mis peab paindemomendi maksimumi kohal võrduma nulliga, siis võtame saadud avaldisest tuletise ja võrdsustame selle nulliga

$$\begin{aligned} \frac{dM_{pl}}{dx} &= -7,5x + 23,75 \\ -7,5x + 23,75 &= 0 \end{aligned}$$

Nii saame riivis tekkiva plastse liigendi kauguse vasakust nurgasõlmest

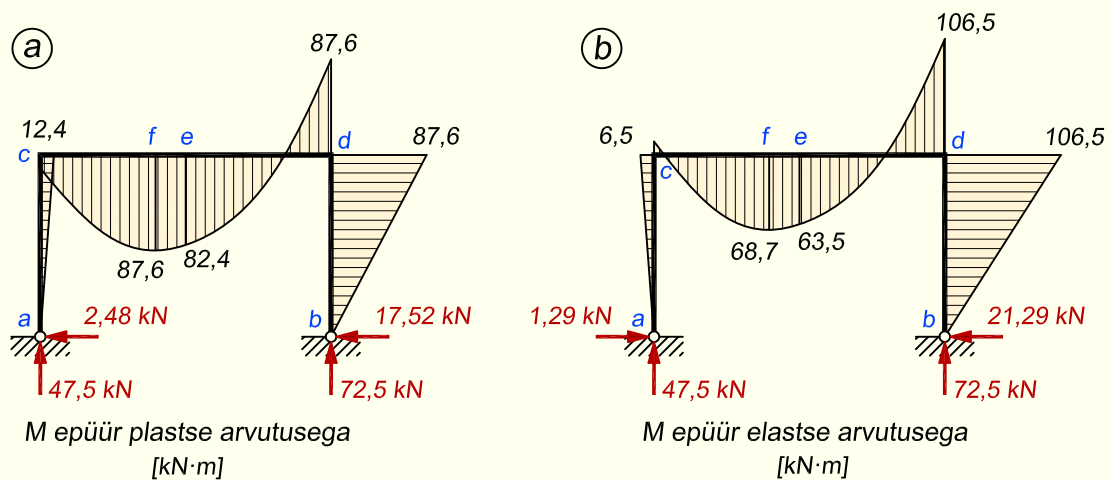
$$x = 3,17 \text{ m}$$

Seejärel saame välja arvutada plastse momendi

$$M_{pl} = -3,75 \cdot 3,17^2 + 23,75 \cdot 3,17 + 50 = 87,60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Erinevate piirlokordade arvutustega saadud piirmomentidest tuleb valida suurim, mistõttu viimasena saadud M_{pl} väärtus on ka kogu ülesande lõppvastuseks.

Paindemomendi epüür piirseisundis on esitatud joonisel 21.41, a. Võrdluseks on toodud joonisel 21.41, b ka elastse arvutusega saadav paindemomendi epüür.



Joonis 21.41. Paindemomendi epüürid plastses ja elastses staadiumis

Peatükk 22

LIGIKAUDSED ARVUTUSMEETODID

22.1. Sissejuhatus

Varasemates peatükkides käsitlesime staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutamise täpseid meetodeid. Nende kõrval on oluline koht ka ligikaudsetel arvutusmeetoditel, mida projekteerija saab kasutada nii konstruktsiooni sisejõudude esialgseks hindamiseks kui ka hiljem täpse arvutuse kontrollimiseks. Kui arvutusskeemi määramatuse aste on suur, võib keerukama konstruktsiooni lahendamine isegi arvutit kasutades kujuneda aja- ning töömahukaks. Ligikaudse lahendusega saab aga mõne lühikese ja kiire arvutusega teada konstruktsioonis esinevate sisejõudude suurused.

Ligikaudse arvutuse põhiline idee seisneb selles, et staatikaga määramatu arvutusskeem muudetakse staatikaga määratavaks. Talade ja raamide puhul püütakse selleks esmalt välja selgitada tegeliku arvutusskeemi paindemomendi epüüri nullkohad ja seejärel lisatakse vastavatesse lõigetes liigendid. Edasi lahendatakse saadud staatikaga määratud arvutusskeem.

Arvutuse esimeses etapis kasutatakse sageli ühe konstruktsioonitüübi asendamist mingi teise konstruktsiooniga, mis töötab sarnaselt. Näiteks on võimalik mitmesildelise jätkuva sõrestiku varrastes hinnata sisejõudusid samade silletega jätkuvtala abil.

Ligikaudset arvutust on hea kasutada ka siis, kui on vaja teada sisejõudu mingi keerukama konstruktsiooni üksikus elemendis. Täpse arvutuse korral tuleks lahendada konstruktsioon tervikuna, ligikaudsel lähenemisel piisab sageli ainult ühest vaadeldavast vardast.

Täpsuse poolest võib ligikaudne arvutus erineda täpsest 10–20%, kuid sellele vaatamata annavad saadud tulemused projekteerimise erinevates etappides palju kasulikku infot. Enne täpsemat lahendamist oleks ligikaudne arvutus kasulik, kuna teatavasti on staatikaga määramatute skeemide lahendamine seotud varraste jäikusega ning ligikaudne arvutus võimaldab määrata esialgsed ristlõigete parameetrid. Pärast täpset arvutust tasub seda ligikaudselt kontrollida, et leida võimalikke vigu. Keerukamate konstruktsioonide lahendamisel on lihtne teha vigu, mis võivad hiljem põhjustada konstruktsiooni liigse üledimensioneerimise või halvemal juhul selle purunemise. Isegi kui arvutamiseks kasutada projekteerimistarkvara, tuleb meeles pidada, et kuigi arvuti vigu ei tee, arvutab ta ikkagi täpselt seda, mida inimene talle ette annab ja kui lähteandmete sisestamisel on tehtud vigu, siis on ka tulemus vale.

Käesolevas peatükis on kasutatud materjale raamatutest [12] ja [23].

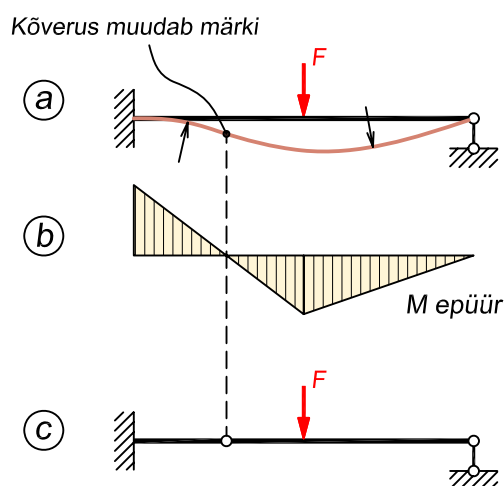
22.2. Arvutuse lihtsustamine

Arvutuse lihtsustamise põhimõtte esitamiseks meenutame, kuidas on omavahel seotud paindemoment ja varda kõverus. Tugevusõpetuse õpikus [19] näidatakse, et paindemoment on võrdeline varda kõverusega. Kõveruseks nimetatakse aga kõverusraadiuse pöördväärtust. Teisiti öeldes, mida suuremaks on muutunud esialgse sirge varda kõverus ning väiksemaks kõverusraadius, seda suurem on vastavas piirkonnas paindemoment. Lõikes, kus varda kõverus on null, on ka paindemoment null. Seda olulist tõsiasi saame kasutada staatikaga määramata konstruktsioonide lihtsustatud arvutuses. Kuna liigendis on paindemoment alati null, siis võime esialgse arvutusskeemi paindemomendi epüüri nullkohale vastavasse lõikesse (ehk kohta, kus kõverus muudab märki) lisada liigendi. Teades arvutusskeemi staatikaga määramatuse astet ning paigutades sobivatesse kohtadesse liigendid, saame staatikaga määramatu konstruktsiooni muuta staatikaga määratavaks ja lahendada seda niimoodi ligikaudselt.

Vaatame joonist 22.1, *a*, kus on esitatud nelja toesidemega ja seega ühekordselt staatikaga määramatu tala. Joonisel on näidatud varda deformeerumine koormuse mõjul ja kõverdunud varda kõverusraadiusi kujutavad noolekesed. Silde vasakpoolses otsas on varras kumer, tõmmatud on ülemine pool ja järelikult on paindemomendi epüür varda ülemisel poolel (joonis 22.1, *b*). Silde keskel ning parempoolses otsas on varras nõgus, tõmmatud on alumine pool ning paindemomendi epüür on samuti varda alumisel poolel. Kohas, kus kõverus muudab märki (kumer muutub nõgusaks), on ka paindemomendi nullkoht.

Arvutuse lihtsustamiseks võib paindemomendi nullkohta lisada liigendi (joonis 22.1, *c*), millega kõrvaldame ühe liigsideme ja muudame tala sellega staatikaga määratavaks.

Ligikaudse arvutuse läbiviimise põhiraskus seisneb konstruktsiooni deformeerunud kuju ja paindemomendi epüüri ettekujutamises, et liigendid õigetesse kohtadesse paigutada. Järgnevalt vaatame mõningaid põhimõtteid, kuidas ligikaudset arvutust teha.



Joonis 22.1. Arvutuse lihtsustamiseks liigendi lisamine vastavalt paindemomendi nullkohale

22.3. Vertikaalsete jõududega koormatud raam

Tüüpiline raamkonstruktsioon koosneb postidest ja riividest, mis on sõlmedes üksteisega jäigalt ühendatud. Enamlevinud hoone karkassi skeem on esitatud joonisel 22.2, *a*.

Raamkonstruktsiooni ligikaudseks arvutamiseks on mitu erinevat meetodit. Ühel juhul vaadeldakse raamist eraldatud ühte elementi, milleks võib olla näiteks koormatud riiv (joonis 22.2, *b*). Üksiku elemendi arvutus eraldiseisva vardana on seetõttu võimalik, et kõige rohkem mõjutab varrast tema enda peal paiknev koormus. Teistel varrastel on talle väiksem mõju ning mida kaugemal mingi element paikneb, seda vähem ta mõjutab vaadeldavat varrast.

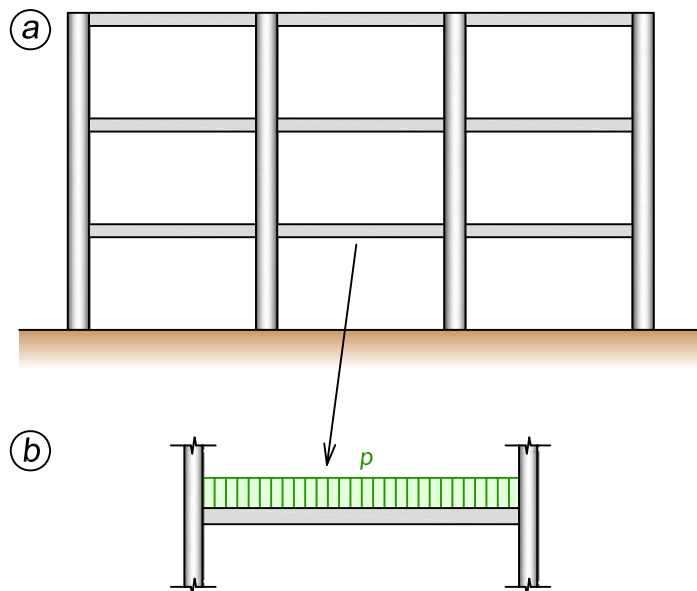
Enamasti võetakse arvesse siiski terve konstruktsiooni deformeerunud kuju.

Raami riivi arvutus üksiku vardana

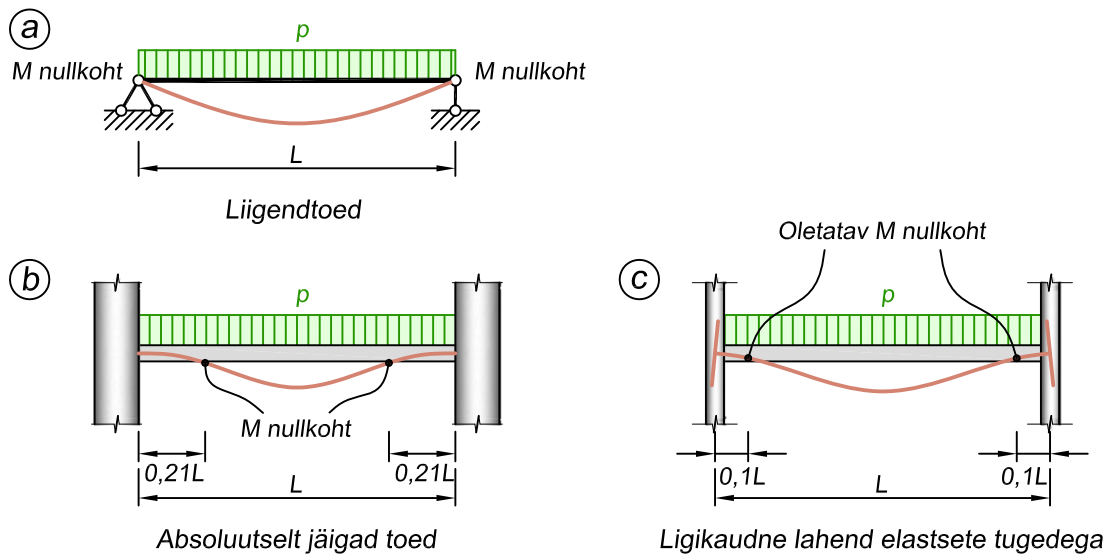
Võtame vaatluse alla joonisel 22.2, *b* kujutatud riivi, mis on koormatud ühtlase lauskoormusega. Kuna antud vardal on mõlemad otsad jäigalt kinnitatud, siis on tal kokku kuus toesidet ja järelikult on ta kolmekordselt staatikaga määramatu. Ligikaudseks arvutuseks peame seetõttu eemaldama kolm liigsidet.

Selgitame välja, milline on varda deformeerunud kuju ja kus paiknevad kõveruse märgimuutuse kohad, kuna seal on paindemoment null. Neisse kohtadesse lisame liigendid.

Paindemomendi nullkohtade paiknemine sõltub varda tugevate järeleandlikkusest. Liigendatudega vardal (joonis 22.3, *a*) on paindemoment toel null, kuna liigendtugi on kõige järeleandlikum ja seal saab varras vabalt pöörduda. Vastupidine variant on selline, kus toed on absoluutselt jäigad ega võimalda mingit pööret (joonis 22.3, *b*). Sel juhul saab täpsest arvutusest, et paindemomendi nullkohad paiknevad 0,21 silde pikkuse kaugusel kummastki toest.



Joonis 22.2. Raamkonstruktsioon ja sellest eraldatud riiv

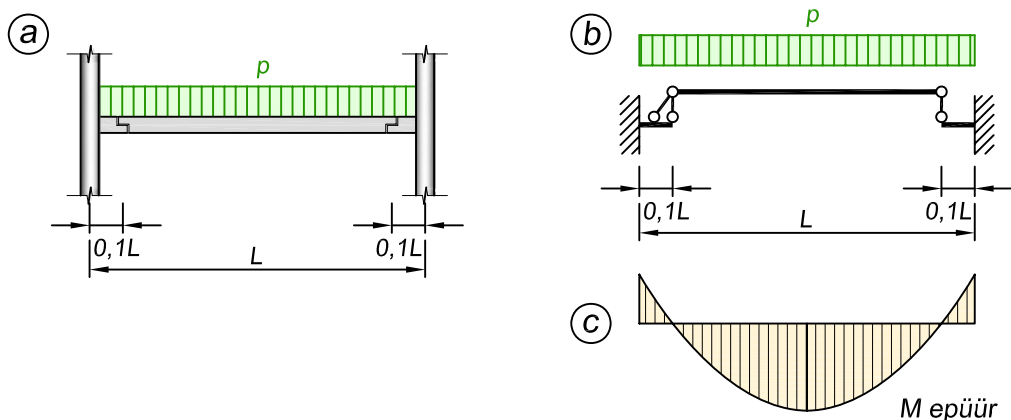


Joonis 22.3. Varda deformeerumine sõltuvalt tugede järeleandlikkusest

Ligikaudse arvutuse korral on küsimuseks, millist pööret toed võimaldavad. Siin oletame, et tegemist on elastsete tugegedega, mis võimaldavad mingil määral varda otsal pöörduda ja see pööre jääb kahe eespool kirjeldatud äärmusliku olukorra vahele (joonis 22.3, c). Seega võtame arvutuses aluseks, et paindemomendi null paikneb toest kaugusel

$$\frac{0L + 0,21L}{2} \approx 0,1L \quad (22.1)$$

Asetades nüüd riivi kummaski otsast $0,1L$ kaugusele liigendid, saame kolmest elementist koosneva skeemi (joonis 22.4, a), kus $0,8L$ pikkune tala toetub kummaski otsas $0,1L$ pikkustele konsoolidele.

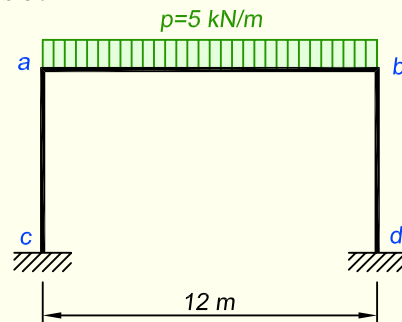


Joonis 22.4. Riivi jagamine staatikaga määratud elementideks

Kahe liigendi lisamisega vähendasime staatikaga määramatuse astet kahe võrra. Muutes tala ühe toe liikuvaks liigendtoeks, kõrvaldame arvutusest pikijõu mõju ja sellega oleme eemaldanud ka kolmanda liigsideme. Lõplik skeem riivi ligikaudseks arvutuseks on esitatud joonisel 22.4, *b*. Edasi on juba lihtne arvutada, kasutades tavalisi staatika tasakaalutingimusi ning arvestades konstruktsiooni jagunemist põhi- ja lisaosadeks, mis määrab ära elementide lahendamise järjekorra.

Joonisel 22.4, *c* on näidatud ka lõpptulemusena saadav paindemomendi epüür.

NÄIDE 22.1. Arvutada ligikaudselt paindemoment joonisel 22.5 kujutatud raami riivi *a-b* keskel ja nurgasõlmes *b*.



Joonis 22.5. Raami arvutusskeem

LAHENDUS

Raami riivi *a-b* vaatame joonisel 22.6, *a* kujutatud arvutusskeemi abil, kus riiv on muudetud staatikaga määratud elementideks. Kuna ligikaudsel arvutusel võetakse paindemomendi nullkohad $0,1L$ kaugusele tugedest, siis konsoolide *a-e* ja *f-b* pikkused on

$$0,1 \cdot 12 = 1,2 \text{ m}$$

Riivi osa *e-f* arvutame lihttalana joonise 22.6, *b* abil. Varda mõlemas otsas tekivad vertikaalsed toereaktsioonid

$$F_e = F_f = 5 \cdot 9,6 \cdot 0,5 = 24 \text{ kN}$$

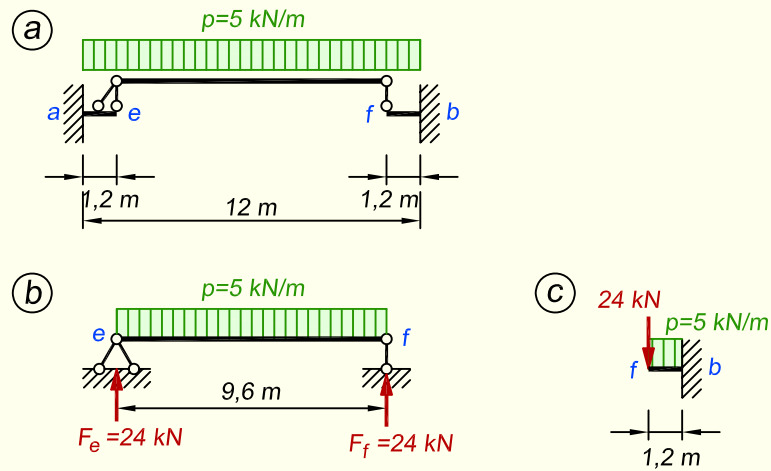
Paindemomendi riivi *a-b* keskel saame varda *e-f* abil

$$M_{max} = \frac{5 \cdot 9,6^2}{8} = 57,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Järgnevalt kanname reaktsiooni F_f vastupidise suunaga konsooli *f-b* otsale (joonis 22.6, *c*). Arvestades ka konsooli enda peal paiknevat lauskoormust, saame nurgasõlmes *b* paindemomendi väärtuseks

$$M_b = -24 \cdot 1,2 - 5 \cdot 1,2 \cdot 0,6 = -32,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Negatiivne tulemus tähendab, et nurgasõlmes on tõmmatud raami välimine pool.



Joonis 22.6. Raami riivi jagamine osadeks

22.4. Horisontaalsete jõududega koormatud raam

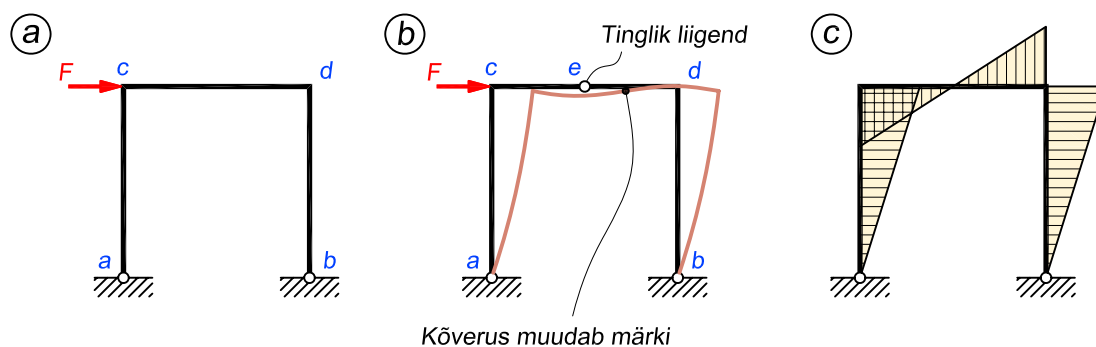
Staatikaga määramatu ühesildelise raami kaks tüüpilisemat juhtu on kahe liigendtoega ning liigenditeta raam.

Kahe liigendtoega raam

Kahe liigendtoega raam on kujutatud joonisel 22.7, a. Kuna ilma liigenditeta raam on kolmekordselt staatikaga määramatu ning iga liigend vähendab määramatuse astet ühe võrra, siis vaadeldav raam on ühekordselt staatikaga määramatu. Staatikaga määratava arvutuskeemi saamiseks tuleb meil seetõttu lisada üks liigend.

Kui soovime saada sisejõudusid kogu arvutuskeemile, siis tuleb seda vaadata tervikuna ning mõelda terve raami deformeerunud kujule. Joonisel 22.7, b on näidatud raami deformeerumine sõlme *c* rakendatud koormuse mõjul ning joonisel 22.7, c sellele vastav paindemomendi epüür. Näeme, et postid on kogu pikkuses samamärgilise kõverusega, kus kumer on mõlemal juhul varda parem pool ja ka paindemoment on seetõttu varda parempoolisel küljel. Riivis kõveruse märk muutub, kuna varda vasak ots on nõgus ja parem ots kumer. Kõveruse märgi muutus toimub riivi keskel ja seal on ka paindemomendi epüür null.

Kõveruse märgi muutuse kohta lõikesse *e* saame tinglikult lisada liigendi (joonis 22.7, b). Sellega oleme arvutuskeemi muutnud staatikaga määratud kolme liigendiga raamiks, mille toereaktsioonide ja sisejõudude arvutamine on lihtne.



Kõverus muudab märki

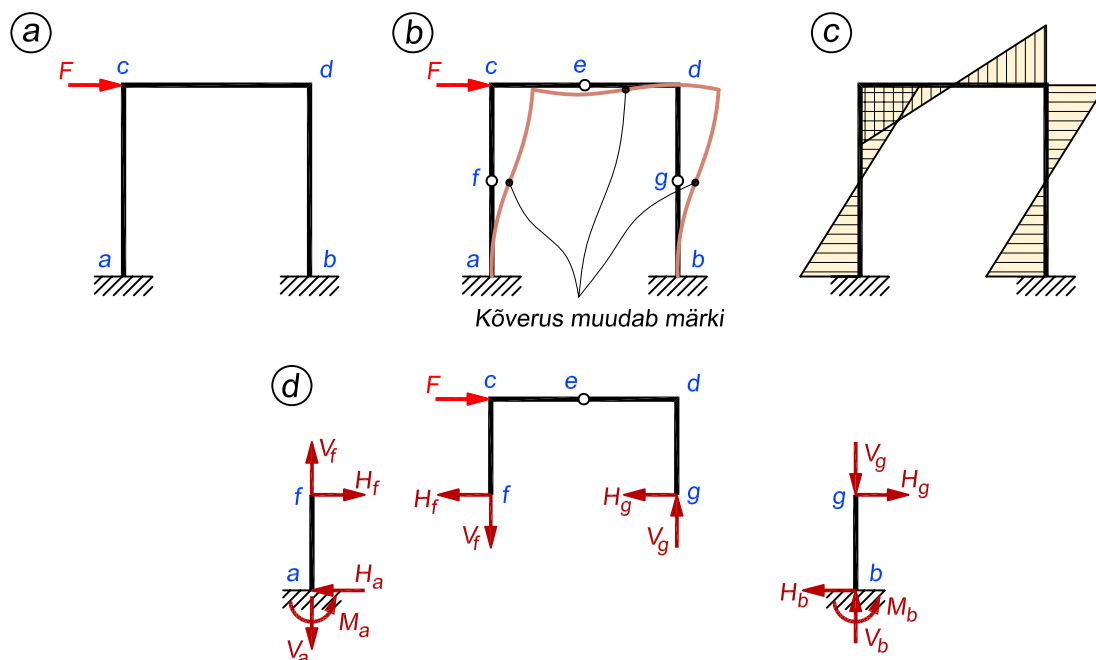
Joonis 22.7. Kahe liigendiga raam

Liigenditeta raam

Jäikade tugegedega liigenditeta raam on esitatud joonisel 22.8, a. See arvutuskeem on kolmekordselt määramatu ja ligikaudseks arvutuseks tuleb lisada kolm liigendit.

Liigendtugegedega raamist erineb vaadeldav raam selle poolest, et jäigad toed ei võimalda postide alumistel otstel pöörduda, mis põhjustab kõveruse märgi muutuse lisaks riivile ka postides (joonis 22.8, b). Samuti on paindemomendi epüür postides nüüd kahemärgiline (joonis 22.8, c).

Kõveruse märgi muutmise kohtadeks oletame kõigi varraste keskkohad ning vastavatesse lõigetes e, f ja g paigutame tinglikult liigendid (joonis 22.8, b). Saame kolme liigendiga



Joonis 22.8. Liigenditeta raam

raami, mille toeliigendid on nihutatud postide keskele. Sellist arvutuskeemi lahendame kahe osas. Esmalt vaatame osa $f-g-e$ kolme liigendiga raamina ning leiame tema toereaktsioonid ja sisejõud (joonis 22.8, d). Seejärel kanname lõigetes f ja g saadud reaktsioonid postide alumistele otstele $a-f$ ja $b-g$ ning leiame nende varraste sisejõud.

Elastsete tugelega raam

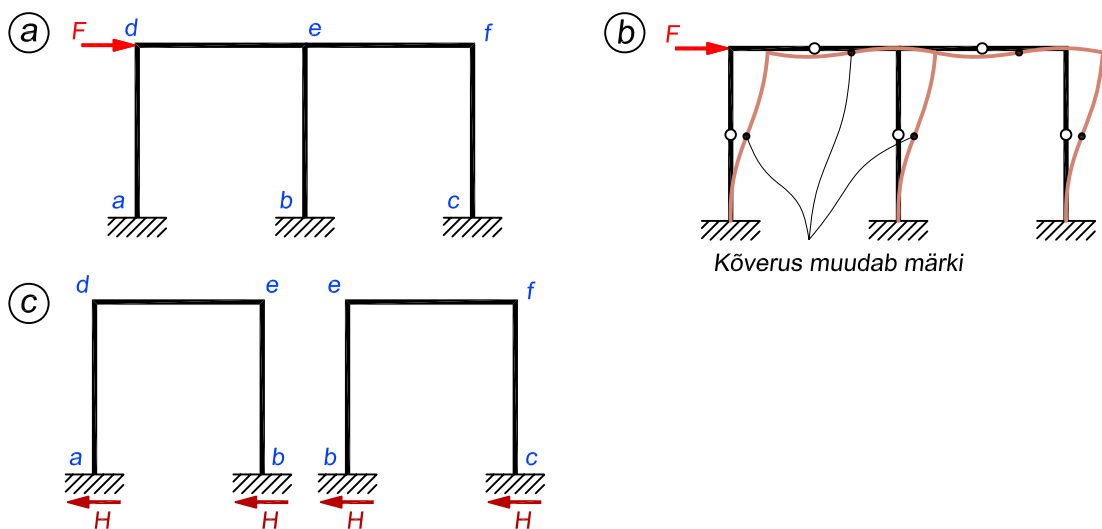
Alati ei pruugi toed olla absoluutselt jäigad, vaid võimaldavad mingil määral postide pööret. Sel juhul nihkub ka raami deformeerunud kuju kõveruse märgi muutuse koht postides. Täpset asukohta on esmalt raske ennustada, aga arvestada saab sellega, et ta jääb kahe eespool kirjeldatud juhtumi vahele. Kuna liigenditugele korral paikneb mainitud koht otse toel ja jäikade tugele korral posti keskel, siis elastsete tugele korral võetakse ta näiteks posti kolmandiku kõrguse peale. Riivis jääb see endiselt varda keskele.

Mida jäigem on tugi, seda kõrgemal paikneb kõveruse märgi muutuse koht. Kui tugele järelleandlikkus suureneb, siis hakkab see punkt postide keskkohast allapoole liikuma. Kui toed võimaldavad postil vabalt pöörduda, jõuab märgimuutuse koht otse toele ja siis on sisuliselt tegemist liigenditugeledega raamiga.

22.5. Hoone karkassi arvutamine raamina

Peatükis 22.4 käsitlesime ühesildelise raami arvutust horisontaalsest koormusest. Hoonete karkassid (näiteks joonisel 22.2) moodustatakse sisuliselt üksikute selliste raamide ühendamise teel ja töötavad sarnaselt. Seetõttu saame raamkarkasside arvutamisel kasutada eespool kirjeldatud põhimõtteid.

Joonisel 22.9, a on esitatud kaheksildeline raam, mille deformeerunud kuju nurgasõlmes

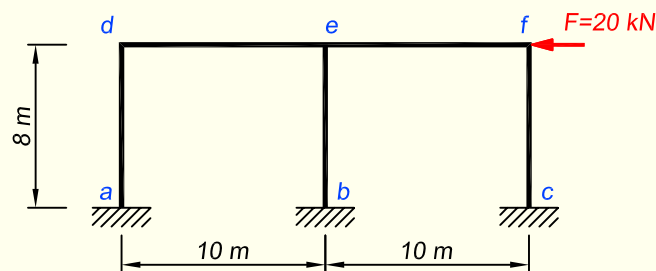


Joonis 22.9. Karkassi arvutamine raamina

olevast horisontaalsest jõust on näha joonisel 22.9, *b*. Sarnaselt ühesildelisele jäikade tugedega raamile tekivad ka siin kõveruse märgi muutused riivide ja postide keskel ning nendesse lõigetesse märgime tinglikult liigendid.

Teise olulise eelduse arvutusteks saame joonise 22.9, *c* abil, kus on toodud kaks üksikult seisvat raami, mille ühendamisel tekib vaadeldav kahesildeline karkass. Kuna keskmine karkassipost *b-e* moodustub kahe üksiku raami postidest, siis on tema alumises otsas tekkinud horisontaalne toereaktsioon kaks korda suurem kui äärmistel karkassipostidel. Seega, kui äärmiste postide horisontaalne toereaktsioon on H , siis sisemistel postidel on see $2H$.

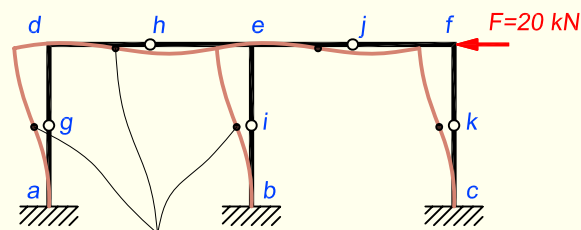
NÄIDE 22.2. Arvutada ligikaudselt joonisel 22.10 kujutatud raami toereaktsioonid ning kujutada paindemomendi epüüri.



Joonis 22.10. Raami arvutuskeem

LAHENDUS

Alustame sellest, et mõtleme raami deformeerunud kujule ja sellele, kus toimub varda kõveruse märgi muutumine. Kuna praegusel juhul on kõik sõlmed jäigad, siis loeme kõveruse märgi muutuse kohaks kõigi varraste keskmised lõiked, kuhu asetame tinglikult liigendid (joonis 22.11).



Joonis 22.11. Raami deformeerunud kuju ja tinglikud liigendid

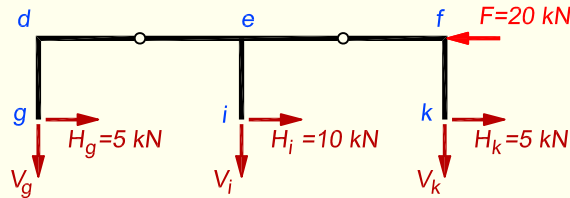
Eraldades arvutuskeemist liigenditest g , i ja k ülespoole jääva osa, saame leida horisontaalsete reaktsioonide väärtused (joonis 22.12). Kuna reaktsioonid ning raamile rakendatud koormus peavad olema tasakaalus ja keskmise posti reaktsioon on kaks korda suurem kui äärmistel postidel, saame kirjutada avaldise

$$H + 2H + H = -20$$

millest avaldame

$$H = 5 \text{ kN}$$

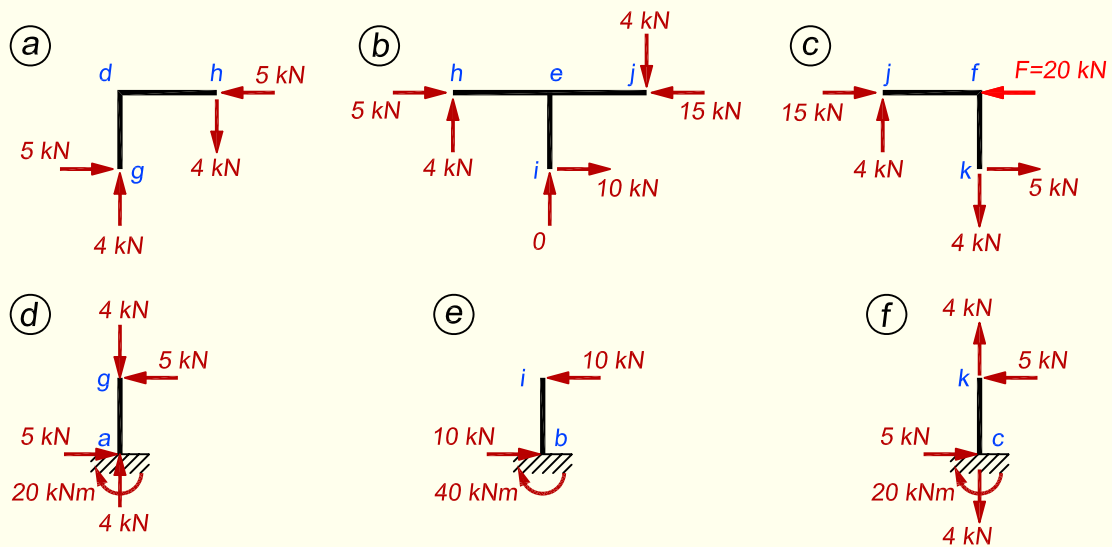
Reaktsioonide väärtused on näidatud joonisel 22.12.



Joonis 22.12. Horisontaalsete reaktsioonide määramine

Järgnevalt jagame raami liigendite kohalt üksikuteks osadeks ning vaatame nende osade tasakaalu. Arvutust alustame konstruktsiooni ühest nurgast ja valime siin selleks elemendi $g-d-h$ (joonis 22.13, a). Kuna lõikes g on horisontaalne reaktsioon teada, saame tasakaalust x -teljele leida varda $d-h$ pikijõu. Momentide tasakaalust ükskõik kumma varda otsa suhtes saame ühe vertikaalse reaktsiooni ja tasakaalust z -teljele peab teine sellega võrdne olema.

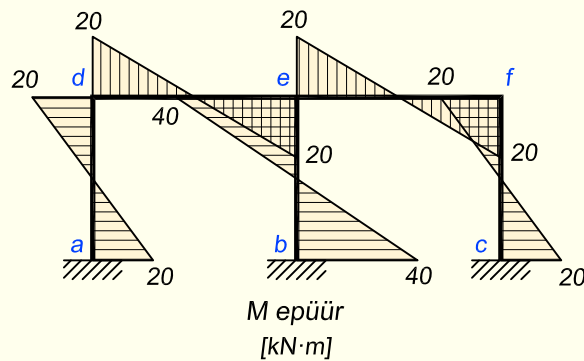
Edasi liigume elemendi $h-i-j$ juurde (joonis 22.13, b) ning sealt jõuame parempoolsesse nurka elemendini $j-f-k$ (joonis 22.13, c).



Joonis 22.13. Raami üksikute elementide tasakaal ning toereaktsioonid

Kui liigenditest g , i ja k ülespoole jäävad raami osad on arvatud, kanname nende reaktsioonid vastupidiste suundadega postide alumistele osadele $a-g$, $b-i$ ja $c-k$ (joonis 22.13, d, e, f). Postide alumiste osade tasakaalust saame kogu arvutuskeemi toereaktsioonid.

Raami ligikaudse arvutuse paindemomendi epüür on näidatud joonisel 22.14.

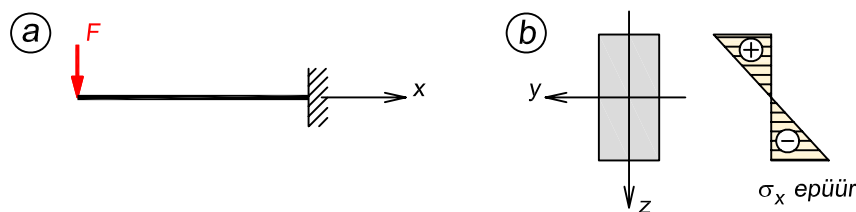


Joonis 22.14. Paindemomendi epüür

22.6. Hoone karkassi arvutamine konsoolina

Horisontaalsete koormuste korral on karkassi arvutamist konsoolina otstarbekas kasutada kõrgete ja saledate hoonete korral postide pikijõudude leidmiseks. Vaadeldav meetod baseerub tavalise konsooltala arvutusel varda teljega risti mõjuvale koormusele.

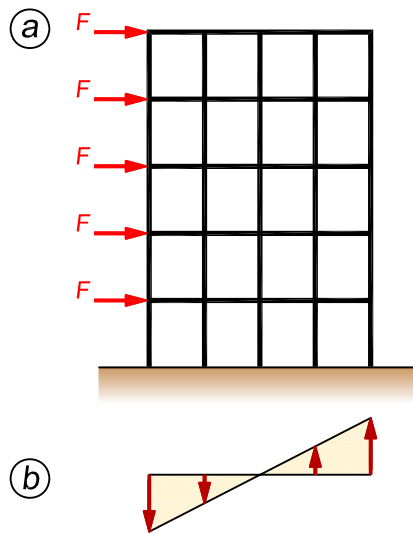
Joonisel 22.15, a on kujutatud koondjõuga koormatud konsool ning joonisel 22.15, b selle toeristlõikes tekkiv paindepingete epüür. Ühel pool nulljoont tekitavad tõmbepinged ja teisel pool survepinged.



Joonis 22.15. Paindepinged koondjõuga koormatud konsoolis

Sarnaselt tekivad horisontaalsete jõududega koormatud raami postides tõmbe- ja survejõud.

Joonisel 22.16, a kujutatud viiekorruseline raam on koormatud horisontaalsete jõududega, mis põhjustavad hoone vasakpoolses osas postide tõmbepingeid ja parempoolses osas survepingeid. Sarnaselt konsooli paindepingete epüürile eeldame ka siin pingete muutumist lineaarselt – postis esinev pinge on proportsionaalne tema kaugusega postide ristlõigete pinnakeskmest vaadeldaval korrusel. Postides esinevate tõmbe- ja survepingete epüür on kujutatud joonisel 22.16, b.

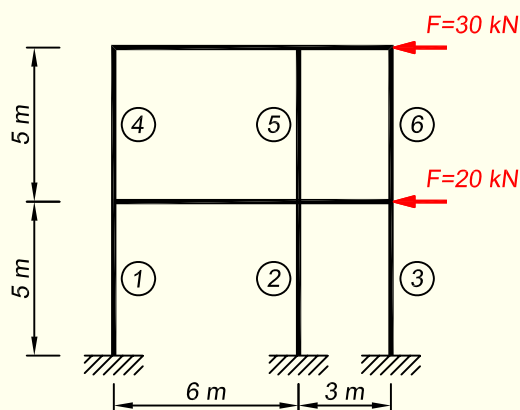


Joonis 22.16. Tõmbe- ja survepinged postides

Pingete ja postide ristlõigetega abil saab välja arvutada postide pikijõud. Erandjuhtumil, kui kõik postid on võrdsete ristlõigetega, on ka postis esinev pikijõud proportsionaalne vaadeldava posti kaugusega selle korruse postide ristlõigetega pinnakeskmest.

Muus osas toimub raami karkassi arvutus nii nagu sai kirjeldatud eelmises peatükis. Kui raami sõlmed on jäigad, siis eeldatakse deformeerunud kujul kõveruse märgi muutust varda keskel ja paigutatakse nii riivide kui ka postide kekmistesse lõigetesse tinglikult liigendid.

NÄIDE 22.3. Arvutada ligikaudselt joonisel 22.17 kujutatud raami postide pikijõud. Postide ristlõiked on võrdse pindalaga.



Joonis 22.17. Raami arvutusskeem

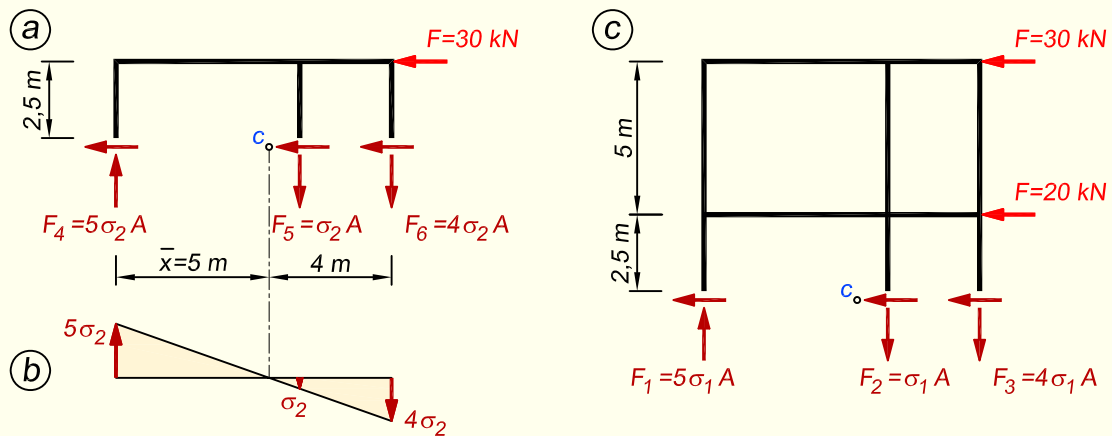
LAHENDUS

Arvutust alustame ülemiselt korruselt. Selleks eraldame arvutuskeemist osa, mis koosneb teise korruse riividest ja postide ülemisest poolest (joonis 22.18, a). Lõige tuleb kindlasti teha postide keskmise ristlõike kohalt, kuna vastavalt eelnevates peatükkides kirjeldatud on raami deformeerunud kuju kõveruse märgi muutumise koht varraste keskel. Selles kohas lõike tegemisel vabaneme paindemomendist, kuna see on null.

Leiame postide ristlõigete pinnakeskme asukoha. Teljestiku alguspunkti võtame kohakuti raami vasaku postiga. Pinnakeskme asukohaks saame

$$\bar{x} = \frac{0A + 6A + 9A}{A + A + A} = \frac{15A}{3A} = 5 \text{ m}$$

kus A on iga üksiku posti ristlõikepindala. Tähistame pinnakeskme tähega c .



Joonis 22.18. Arvutuskeemist eraldatud osad

Koostame pingepüüri (joonis 22.18, b). Epüüril tähistame baasiks võetava posti pinget σ_2 , kus indeks 2 tähendab teist korrust, ja avaldame teiste postide pinged selle kaudu. Võtame praegu aluseks keskmise posti, kuna temas esineb kõige väiksem pinget. Sarnaste kolmnurkade abil saame arvutada teiste postide pinged, mis on ka epüürile kantud.

Avaldame postide pikireaktsioonide väärtused

$$F_4 = 5\sigma_2 A; \quad F_5 = \sigma_2 A; \quad F_6 = 4\sigma_2 A$$

Kirjutame raamist eraldatud osale mõjuvate jõududega momentide tasakaalutingimuse punkti c suhtes

$$M_c = 30 \cdot 2,5 - 5\sigma_2 A \cdot 5 - \sigma_2 A \cdot 1 - 4\sigma_2 A \cdot 4 = 0$$

millest

$$42\sigma_2 A = 75$$

ja

$$\sigma_2 A = \frac{75}{42}$$

Postide pikijõud saame vastavalt eespool välja kirjutatud avaldistele

$$N_4 = -5\sigma_2 A = -5 \cdot \frac{75}{42} = -8,93 \text{ kN}$$

$$N_5 = \sigma_2 A = \frac{75}{42} = 1,79 \text{ kN}$$

$$N_6 = 4\sigma_2 A = 4 \cdot \frac{75}{42} = 7,14 \text{ kN}$$

Edasi liigume alumise korruse postide juurde. Teeme lõike läbi selle korruse postide keskkoha ja eraldame lõikest ülespoole jääva raami osa (joonis 22.18, c).

Kuna mõlema korruse postid on ühesugused, siis on ka pingete epüür sama ja seda kordama ei hakka. Muutub ainult σ indeks, mis esimese korruse postide puhul on 1.

Avaldame postide pikireaktsioonide väärtused

$$F_1 = 5\sigma_1 A; \quad F_2 = \sigma_1 A; \quad F_3 = 4\sigma_1 A$$

Kirjutame raamist eraldatud osale mõjuvate jõududega momentide tasakaalutingimuse punkti c suhtes

$$M_c = 30 \cdot 7,5 + 20 \cdot 2,5 - 5\sigma_1 A \cdot 5 - \sigma_1 A \cdot 1 - 4\sigma_1 A \cdot 4 = 0$$

millest

$$42\sigma_1 A = 275$$

ja

$$\sigma_1 A = \frac{275}{42}$$

Postide pikijõud saame vastavalt eespool välja kirjutatud avaldistele

$$N_1 = -5\sigma_1 A = -5 \cdot \frac{275}{42} = -32,74 \text{ kN}$$

$$N_2 = \sigma_1 A = \frac{275}{42} = 6,55 \text{ kN}$$

$$N_3 = 4\sigma_1 A = 4 \cdot \frac{275}{42} = 26,19 \text{ kN}$$

Osa III

LISAD

Lisa A

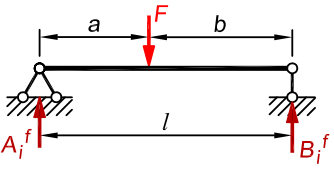
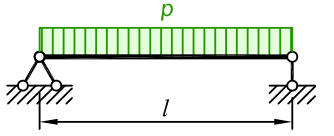
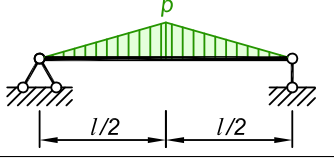
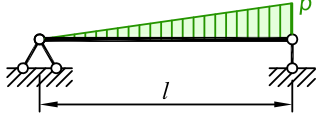
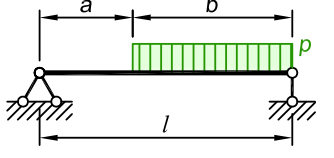
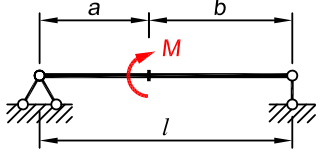
Tabelid

A.1. Siirete valemi integraalide arvutamine

| Nr | Epüürid | $\frac{1}{EI} \int_0^l M_p m_k ds$ |
|----|---------|--|
| 1 | | $\frac{l}{6EI} (M_a m_a + 4M_c m_c + M_b m_b)$ |
| 2 | | $\frac{l}{6EI} M_a m_b$ |
| 3 | | $\frac{l}{3EI} M_a m_a$ |
| 4 | | $\frac{l}{6EI} [2(M_a m_a + M_b m_b) + M_a m_b + M_b m_a]$ |
| 5 | | $\frac{l}{2EI} M_a m_a$ |
| 6 | | $\frac{l}{EI} M_c m_a$ |
| 7 | | $\frac{2l}{3EI} M_c m_c$ |

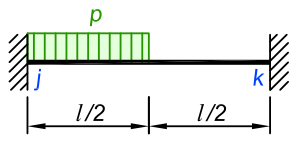
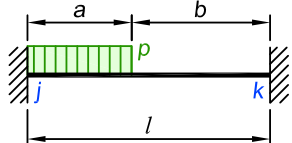
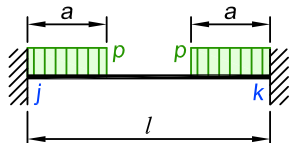
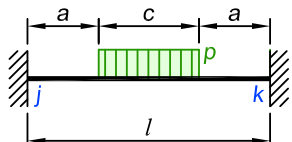
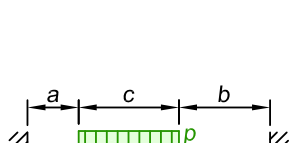
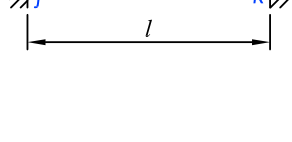
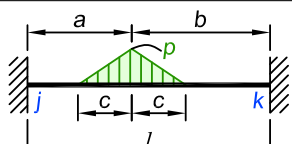
A.2. Kolme momendi võrrandi vabaliikmed

$$\xi = \frac{a}{l}; \quad \xi' = \frac{b}{l}$$

| Nr | Koormusskeem | $\frac{I_0}{I_i} A_i^f$ | $\frac{I_0}{I_i} B_i^f$ |
|----|---|--|--|
| 1 |  | $Fl_i l'_i \xi \xi' (1 + \xi')$ | $Fl_i l'_i \xi \xi' (1 + \xi)$ |
| 2 |  | $\frac{1}{4} p l_i^2 l'_i$ | $\frac{1}{4} p l_i^2 l'_i$ |
| 3 |  | $\frac{5}{32} p l_i^2 l'_i$ | $\frac{5}{32} p l_i^2 l'_i$ |
| 4 |  | $\frac{7}{60} p l_i^2 l'_i$ | $\frac{2}{15} p l_i^2 l'_i$ |
| 5 |  | $\frac{1}{4} p l_i^2 l'_i \xi'^2 (2 - \xi'^2)$ | $\frac{1}{4} p l_i^2 l'_i \xi'^2 (2 - \xi')^2$ |
| 6 |  | $-M l'_i (1 - 3\xi'^2)$ | $M l'_i (1 - 3\xi^2)$ |

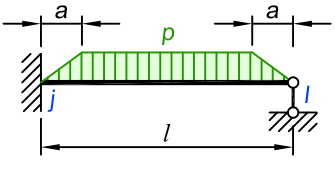
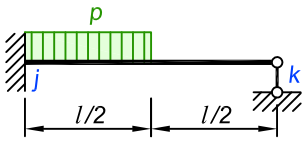
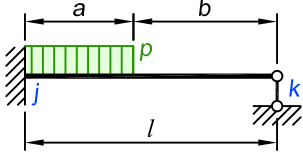
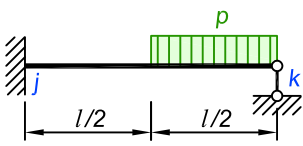
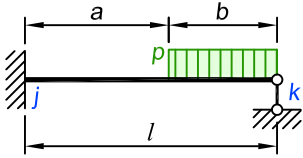
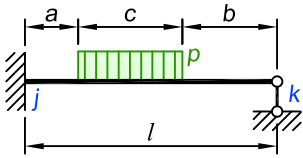
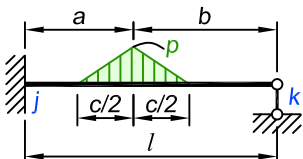
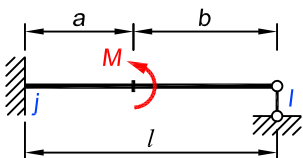
A.3. Toereaktsioonid jäikade otstega vardas

| Nr | Koormusskeem | Reaktsioonmomendid | Vertikaalsed reaktsioonid |
|----|--------------|---|---|
| 1 | | $M_j = Fa \frac{b^2}{l^2}$ $M_k = Fb \frac{a^2}{l^2}$ | $F_j = F \frac{b^2}{l^3} (l + 2a)$ $F_k = F \frac{a^2}{l^3} (l + 2b)$ |
| 2 | | $M_j = \frac{1}{8}Fl$ $M_k = \frac{1}{8}Fl$ | $F_j = \frac{1}{2}F$ $F_k = \frac{1}{2}F$ |
| 3 | | $M_j = \frac{2}{9}Fl$ $M_k = \frac{2}{9}Fl$ | $F_j = F$ $F_k = F$ |
| 4 | | $M_j = \frac{15}{48}Fl$ $M_k = \frac{15}{48}Fl$ | $F_j = \frac{3}{2}F$ $F_k = \frac{3}{2}F$ |
| 5 | | $M_j = \frac{1}{12}pl^2$ $M_k = \frac{1}{12}pl^2$ | $F_j = \frac{1}{2}pl$ $F_k = \frac{1}{2}pl$ |
| 6 | | $M_j = \frac{1}{30}pl^2$ $M_k = \frac{1}{20}pl^2$ | $F_j = \frac{3}{20}pl$ $F_k = \frac{7}{20}pl$ |
| 7 | | $M_j = \frac{5}{96}pl^2$ $M_k = \frac{5}{96}pl^2$ | $F_j = \frac{1}{4}pl$ $F_k = \frac{1}{4}pl$ |
| 8 | | $M_j = p \frac{1}{12l} (l^3 - 2a^2l + a^3)$ $M_k = p \frac{1}{12l} (l^3 - 2a^2l + a^3)$ | $F_j = \frac{1}{2}p(l - a)$ $F_k = \frac{1}{2}p(l - a)$ |

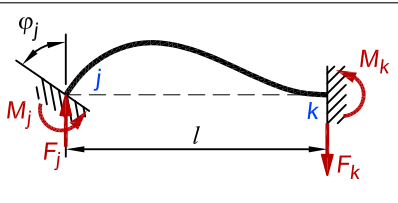
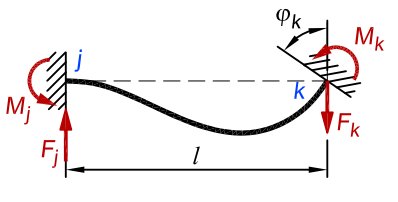
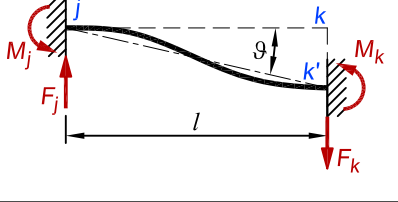
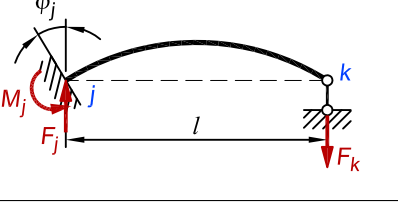
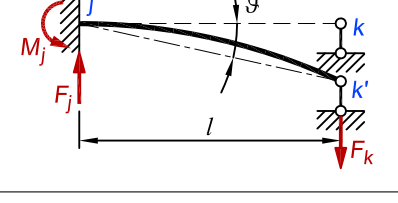
| Nr | Koormusskeem | Reaktsioonmomendid | Vertikaalsed reaktsioonid |
|----|---|---|---|
| 9 |  | $M_j = \frac{11}{192}pl^2$ $M_k = \frac{5}{192}pl^2$ | $F_j = \frac{78}{192}pl$ $F_k = \frac{18}{192}pl$ |
| 10 |  | $M_j = \frac{pa^2}{12l^2} (6b^2 + 3ab + al)$ $M_k = \frac{pa^3}{12l^2} (l + 3b)$ | $F_j = \frac{pa}{2l^3} (l^2a + 2l^2b + ab^2)$ $F_k = \frac{pa^2}{2l^3} (l^2 - b^2)$ |
| 11 |  | $M_j = p\frac{a^2}{6l} (3l - 2a)$ $M_k = p\frac{a^2}{6l} (3l - 2a)$ | $F_j = pa$ $F_k = pa$ |
| 12 |  | $M_j = p\frac{c}{24l} (3l^2 - c^2)$ $M_k = p\frac{c}{24l} (3l^2 - c^2)$ | $F_j = \frac{1}{2}pc$ $F_k = \frac{1}{2}pc$ |
| 13 |  | $M_j = p\frac{c}{12l^2} [12ab(l - a) + 4c^2(l - c) + 6b^2c + c^3]$ $M_k = p\frac{c}{12l^2} [12ab(l - b) + 4c^2(l - c) + 6a^2c + c^3]$ | $F_j = p\frac{c}{2l} (c + 2b) + \frac{1}{l} (M_j - M_k)$ $F_k = p\frac{c}{2l} (c + 2a) + \frac{1}{l} (M_k - M_j)$ |
| 14 |  | $M_j = \frac{pc}{6l^2} [6ab^2 + c^2(a - 2b)]$ $M_k = \frac{pc}{6l^2} [6a^2b + c^2(b - 2a)]$ | $F_j = p\frac{cb}{l} + \frac{1}{l} (M_j - M_k)$ $F_k = p\frac{ca}{l} + \frac{1}{l} (M_k - M_j)$ |
| 15 |  | $M_j = M\frac{b}{l^2} (2l - 3b)$ $M_k = -M\frac{a}{l^2} (2l - 3a)$ | $F_j = M\frac{6}{l^3} ab$ $F_k = -M\frac{6}{l^3} ab$ |

A.4. Toereaktsioonid jäiga ja liigendotsaga vardas

| Nr | Koormusskeem | Reaktsioonmomendid | Vertikaalsed reaktsioonid |
|----|--------------|--------------------------------|--|
| 1 | | $F \frac{b}{2l^2} (l^2 - b^2)$ | $F_j = F \frac{b}{2l^3} (3l^2 - b^2)$ $F_k = F \frac{a^2}{2l^3} (3l - a)$ |
| 2 | | $\frac{3}{16} Fl$ | $F_j = \frac{11}{16} F$ $F_k = \frac{5}{16} F$ |
| 3 | | $\frac{1}{3} Fl$ | $F_j = \frac{4}{3} F$ $F_k = \frac{2}{3} F$ |
| 4 | | $\frac{45}{96} Fl$ | $F_j = \frac{189}{96} F$ $F_k = \frac{99}{96} F$ |
| 5 | | $\frac{1}{8} pl^2$ | $F_j = \frac{5}{8} pl$ $F_k = \frac{3}{8} pl$ |
| 6 | | $\frac{1}{15} pl^2$ | $F_j = \frac{2}{5} pl$ $F_k = \frac{1}{10} pl$ |
| 7 | | $\frac{7}{120} pl^2$ | $F_j = \frac{9}{40} pl$ $F_k = \frac{11}{40} pl$ |
| 8 | | $\frac{5}{64} pl^2$ | $F_j = \frac{21}{64} pl$ $F_k = -\frac{11}{64} pl$ |

| Nr | Koormusskeem | Reaktsioonmomendid | Vertikaalsed reaktsioonid |
|----|---|--|--|
| 9 |  | $p \frac{1}{8l} (l^3 - 2a^2l + a^3)$ | $F_j = \frac{pl}{8} \left(5 - 4\frac{a}{l} - 2\frac{a^2}{l^2} + \frac{a^3}{l^3} \right)$ $F_k = \frac{pl}{8} \left(3 - 4\frac{a}{l} + 2\frac{a^2}{l^2} - \frac{a^3}{l^3} \right)$ |
| 10 |  | $\frac{9}{128}pl^2$ | $F_j = \frac{57}{128}pl$ $F_k = \frac{7}{128}pl$ |
| 11 |  | $p \frac{a^2}{8l^2} (4bl + a^2)$ | $F_j = pa - F_k$ $F_k = p \frac{a^2}{8l^3} (4l^2 - 4lb - a^2)$ |
| 12 |  | $\frac{7}{128}pl^2$ | $F_j = \frac{23}{128}pl$ $F_k = \frac{41}{128}pl$ |
| 13 |  | $p \frac{b^2}{8l^2} (2l^2 - b^2)$ | $F_j = \frac{pb^2}{8l^3} (6l^2 - b^2)$ $F_k = \frac{pb}{8l^3} (2l^2b + 8l^2a + b^3)$ |
| 14 |  | $\frac{pc}{4l^2} (2b + c) [a(l + b) + c(l - \frac{c}{2})]$ | $F_j = p \frac{c}{2l} (c + 2b) + \frac{M_j}{l}$ $F_k = p \frac{c}{2l} (c + 2a) - \frac{M_j}{l}$ |
| 15 |  | $p \frac{cb}{4l^2} [a(l + b) - \frac{c^2}{8}]$ | $F_j = p \frac{cb}{2l} + \frac{M_j}{l}$ $F_k = p \frac{ca}{2l} - \frac{M_j}{l}$ |
| 16 |  | $M \frac{1}{2l^2} (l^2 - 3b^2)$ | $F_j = M \frac{3}{2l^3} (l^2 - b^2)$ $F_k = -M \frac{3}{2l^3} (l^2 - b^2)$ |

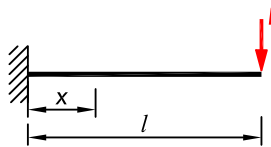
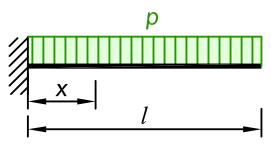
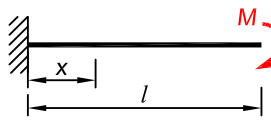
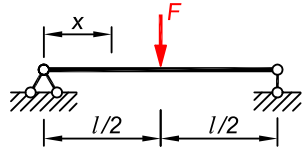
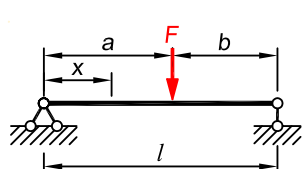
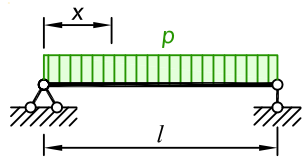
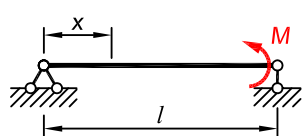
A.5. Toereaktsioonid sõlmede ja varraste pöõretest

| Siire | Koormusskeem | Reaktsioonmomendid | Vertikaalsed reaktsioonid |
|-------------|---|---|---|
| φ_j |  | $M_j = 4i_{jk}\varphi_j$ $M_k = 2i_{jk}\varphi_j$ | $F_j = F_k = \frac{6i_{jk}}{l}\varphi_j$ |
| φ_k |  | $M_k = 2i_{jk}\varphi_k$ $M_j = 4i_{jk}\varphi_k$ | $F_j = F_k = \frac{6i_{jk}}{l}\varphi_k$ |
| ϑ |  | $M_j = 6i_{jk}\vartheta$ $M_k = 6i_{jk}\vartheta$ | $F_j = F_k = \frac{12i_{jk}}{l}\vartheta$ |
| φ_j |  | $M_j = 3i_{jk}\varphi_j$ | $F_j = F_k = \frac{3i_{jk}}{l}\varphi_j$ |
| ϑ |  | $M_j = 3i_{jk}\vartheta$ | $F_j = F_k = \frac{3i_{jk}}{l}\vartheta$ |

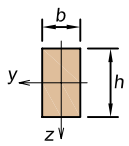
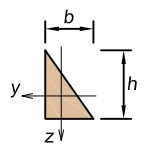
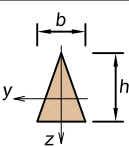
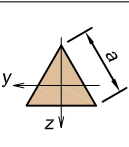
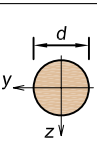
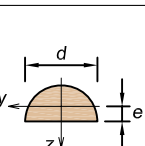
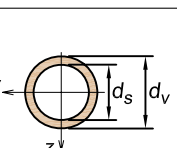
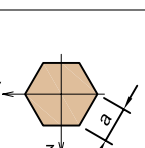
Eelnevates valemities tähistab i varda suhtelist jäikust, mis võõrdub

$$i = \frac{EI}{l}$$

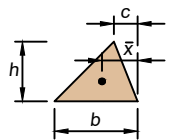
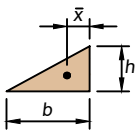
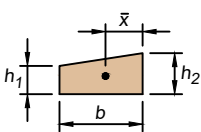
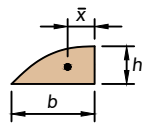
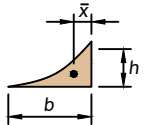
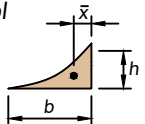
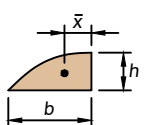
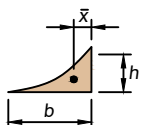
A.6. Talade läbipained ja elastse joone võrrandid

| Nr | Koormusskeem | Siire ja pööre | Elastne joon |
|----|---|---|---|
| 1 |  | $w_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI}$ $\Phi_{\max} = \frac{Fl^2}{2EI}$ | $w(x) = \frac{F}{6EI} (3lx^2 - x^3)$ |
| 2 |  | $w_{\max} = \frac{pl^4}{8EI}$ $\Phi_{\max} = \frac{pl^3}{6EI}$ | $w(x) = \frac{p}{24EI} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)$ |
| 3 |  | $w_{\max} = \frac{Ml^2}{2EI}$ $\Phi_{\max} = \frac{Ml}{EI}$ | $w(x) = \frac{M}{2EI} x^2$ |
| 4 |  | $w_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI}$ $\Phi_{\max} = \frac{Fl^2}{16EI}$ | $w(x) = \frac{F}{48EI} (3l^2x - 4x^3)$ vahemikus $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ |
| 5 |  | $w_{x=a} = \frac{Fa^2b^2}{3EI}$ $\Phi_1 = \frac{Fab}{6EI} (l + b)$ $\Phi_2 = \frac{Fab}{6EI} (l + a)$ | $w(x) = \frac{Fbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2)$ vahemikus $0 \leq x \leq a$ |
| 6 |  | $w_{\max} = \frac{5pl^4}{384EI}$ $\Phi_{\max} = \frac{pl^3}{24EI}$ | $w(x) = \frac{px}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3)$ |
| 7 |  | $w_{\max} = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $\Phi_1 = \frac{Ml}{6EI}$ $\Phi_2 = \frac{Ml}{3EI}$ | $w(x) = \frac{Mx}{6EI} (l^2 - x^2)$ |

A.7. Lihtkujundite inerts- ja vastupanumomendid

| Nr | Kujund | Inertsimomendid | Vastupanumomendid |
|----|--|--|---|
| 1 | Ristkülik  | $I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{b^3h}{12}$ | $W_y = \frac{bh^2}{6}$ $W_z = \frac{b^2h}{6}$ |
| 2 | Täisnurkne kolmnurk  | $I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{b^3h}{36}$ | $W_y = \frac{bh^2}{24}$ $W_z = \frac{b^2h}{24}$ |
| 3 | Võrdhaarne kolmnurk  | $I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{b^3h}{48}$ | $W_y = \frac{bh^2}{24}$ $W_z = \frac{b^2h}{24}$ |
| 4 | Võrdkülgne kolmnurk  | $I_y = I_z = \frac{a^4\sqrt{3}}{96}$ | $W_y = \frac{a^3}{32}$ $W_z = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ |
| 5 | Ring  | $I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64}$ | $W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ |
| 6 | Poolring  $e = \frac{2d}{3\pi}$ | $I_y = 0,0068598d^4$ $I_z = \frac{\pi d^4}{128}$ | $W_y = 0,023836d^3$ $W_z = \frac{\pi d^3}{64}$ |
| 7 | Rõngas  | $I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} (1 - \alpha^4)$ $\alpha = \frac{d_s}{d_v}$ | $W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} (1 - \alpha^4)$ |
| 8 | Kuusnurk  | $I_y = I_z = 0,5413a^4$ | $W_y = 0,625a^3$ $W_z = 0,5413a^3$ |

A.8. Kujundite pindalad ja pinnakeskmete asukohad

| Nr | Kujund | Pindala | Pinnakeskme asukoht \bar{x} |
|----|--|------------------------|----------------------------------|
| 1 | <p>Kolmnurk</p>  | $\frac{bh}{2}$ | $\frac{b+c}{3}$ |
| 2 | <p>Täisnurkne kolmnurk</p>  | $\frac{bh}{2}$ | $\frac{b}{3}$ |
| 3 | <p>Trapets</p>  | $\frac{b}{2}(h_1+h_2)$ | $\frac{b(2h_1+h_2)}{3(h_1+h_2)}$ |
| 4 | <p>Parabool</p>  | $\frac{2bh}{3}$ | $\frac{3b}{8}$ |
| 5 | <p>Parabool</p>  | $\frac{bh}{3}$ | $\frac{b}{4}$ |
| 6 | <p>Kuupparabool</p>  | $\frac{bh}{4}$ | $\frac{b}{5}$ |
| 7 | <p>n-järku parabool</p>  | $bh \frac{n}{n+1}$ | $\frac{b(n+1)}{2(n+2)}$ |
| 8 | <p>n-järku parabool</p>  | $bh \frac{1}{n+1}$ | $\frac{b}{n+2}$ |

Lisa B

Valemeid tugevusõpetusest

B.1. Varda põhideformatsioonid

B.1.1. Pikkedeformatsioon

Varda pikkuse muudu saame avaldisega

$$\Lambda(x) = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (\text{B.1})$$

kus $EA(x)$ on ristlõike pikkejäikus.

Kui varras on ühtlase ristlõikega ning konstantse pikijõuga, teiseneb valem kujule

$$\Lambda = \frac{Nl}{EA} \quad (\text{B.2})$$

B.1.2. Paindedeformatsioon

Varda mingi lõigu ulatuses tekkiva paindenurga saame

$$\Psi_y(x) = \int_0^l \frac{M_y(x)}{EI(x)} dx \quad (\text{B.3})$$

kus $EI(x)$ on ristlõike paindejäikus.

Ühtlase ristlõikega vardas konstantse paindemomendi korral on paindenurk

$$\Psi_y = \frac{M_y l}{EI} \quad (\text{B.4})$$

B.1.3. Lõikedeformatsioon

Varda otspindade vahelise lihke saame

$$B_z(x) = \int_0^l \frac{Q_z(x)}{GA_{red}(x)} dx \quad (\text{B.5})$$

kus $GA_{red}(x)$ on ristlõike lõikejäikus ja A_{red} on taandatud ristlõikepindala, mis võrdub

$$A_{red} = \frac{A}{k} \quad (\text{B.6})$$

kus k on dimensioonitu ristlõike kujutegur.

Ühtlase ristlõikega vardas konstantse põikjõu korral on lihe

$$B_z = \frac{Q_z l}{GA_{red}} \quad (\text{B.7})$$

B.1.4. Väändedeformatsioon

Varda otsristlõigete vaheline väändenurk on

$$\theta(x) = \int_0^l \frac{T(x)}{GI_t(x)} dx \quad (\text{B.8})$$

kus $GI_t(x)$ on ristlõike väändejäikus ja I_t on ristlõike väändeinertsimoment.

Ühtlase ristlõikega vardas konstantse väändemomendi korral on väändenurk

$$\theta = \frac{Tl}{GI_t} \quad (\text{B.9})$$

Ristkülikristlõike korral on väändeinertsimoment

$$I_t = k_t hb^3 \quad (\text{B.10})$$

kus k_t on ristlõike küljepikkuste suhtest $\frac{h}{b}$ sõltuv tegur (tabel B.1). Ümar- ja rõngasristlõike korral asendub väändeinertsimoment polaarinertsimomendiga I_p , mille väärtused on antud valemitega (B.23).

Tabel B.1. Teguri k_t väärtused

| | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\frac{h}{b}$ | 1 | 1,2 | 1,5 | 2 | 3 | 5 | 10 | ∞ |
| k_t | 0,141 | 0,166 | 0,196 | 0,229 | 0,263 | 0,291 | 0,312 | 0,333 |

B.2. Tala elastse joone universaalvõrrand

Tala elastse joone universaalvõrrand on järgmine

$$EI_y w = EI_y w_0 + EI_y \varphi_{y0} x + \sum \mathcal{M} \frac{\langle x - a_M \rangle^2}{2!} + \sum F \frac{\langle x - a_F \rangle^3}{3!} + \sum p \frac{\langle x - a_p \rangle^4}{4!} \quad (\text{B.11})$$

kus a_M , a_F ja a_p tähistavad vastavalt koondmomendi ja koondjõu rakenduspunktide ning lauskoormuse alguse kaugust (kusjuures eeldame, et edasi katab lauskoormus tala kuni lõpuni) koordinaatteljestiku alguspunktist.

Elastse joone pöörete universaalvõrrand on

$$EI_y \phi_y = EI_y \phi_{y0} + \sum \mathcal{M} \frac{\langle x - a_M \rangle^1}{1!} + \sum F \frac{\langle x - a_F \rangle^2}{2!} + \sum p \frac{\langle x - a_p \rangle^3}{3!} \quad (\text{B.12})$$

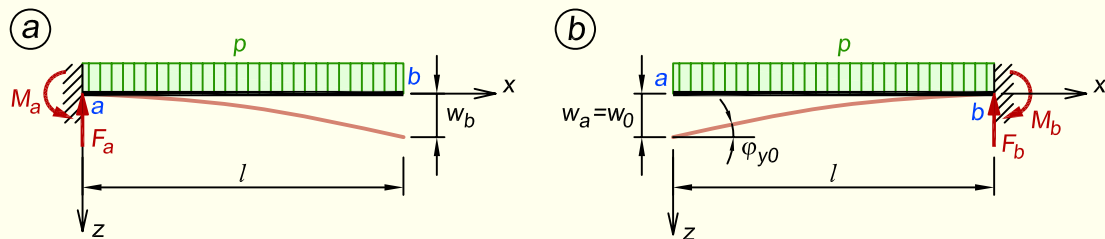
Võrrandites võtame plussmärgiga koormused, mis on suunatud z -telje positiivses suunas, ning vastupäeva pöördesuunaga momendi.

Kui arvutame mingi konkreetse üksiku punkti siiret, siis arvestame ainult neid koormuseid, mis jäävad koordinaatide alguse ja selle punkti vahele. Seda põhimõtet väljendab valemites (B.11) ja (B.12) teravsulgudes paiknevate funktsioonide kasutamine.

Algpärametrid $EI_y w_0$ ja $EI_y \phi_{y0}$ määrame rajatingimuste alusel.

Kuna lauskoormuse asukohta saame võrrandites kirjeldada ainult ühe koordinaadiga, siis tuleb katkeva või astmeliselt muutuva lauskoormuse korral kasutada võrrandites kahe või enama lauskoormuse summat, mis üksteist täiendavad või elimineerivad.

NÄIDE B.1. Leida joonisel B.1 kujutatud konsooli vaba otsa läbipaine kahes variandis, kui konsooli jäik ots on vasakul ja kui see on paremal.



Joonis B.1. Konsooli arvutuskeemid

LAHENDUS

1. Jäik ots on vasakul ning koordinaadistiku algus jäigal toel (joonis B.1, a)

Jõusüsteemi määramiseks leiame toereaktsioonid

$$M_a = \frac{pl^2}{2}; \quad F_a = pl$$

Elastse joone võrrandiks saame vastavalt avaldisele (B.11)

$$\begin{aligned} EI_y w(x) &= EI_y w_0 + EI_y \phi_{y0} x + \frac{pl^2}{2} \cdot \frac{\langle x-0 \rangle^2}{2} - pl \cdot \frac{\langle x-0 \rangle^3}{6} + p \cdot \frac{\langle x-0 \rangle^4}{24} = \\ &= EI_y w_0 + EI_y \phi_{y0} x + \frac{pl^2}{2} \frac{x^2}{2} - pl \frac{x^3}{6} + p \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

Leitud avaldises on kaks tundmatut algarvameetrit $EI_y w_0$ ja $EI_y \varphi_{y0}$, mille leidmiseks kasutame rajatingimusi

1. $w(0) = 0: EI_y w_0 = 0$
2. $\varphi(0) = 0: EI_y \varphi_{y0} = 0$

Elastse joone võrrand saab nüüd lõpliku kuju

$$EI_y w(x) = \frac{pl^2}{2} \frac{x^2}{2} - pl \frac{x^3}{6} + p \frac{x^4}{24}$$

mis kohal $x = l$ annab meile

$$EI_y w(l) = \frac{pl^4}{2} - \frac{pl^4}{6} + \frac{pl^4}{24} = \frac{pl^4}{8}$$

Siire konsooli lõpus tuleb

$$w_b = w(l) = \frac{pl^4}{8EI_y}$$

2. Jäik ots on paremal ning koordinaadistiku algus vabas otsas (joonis B.1, b)

Elastse joone võrrandiks saame

$$EI_y w(x) = EI_y w_0 + EI_y \varphi_{y0} x + p \cdot \frac{\langle x-0 \rangle^4}{24} = EI_y w_0 + EI_y \varphi_{y0} x + p \frac{x^4}{24}$$

Leiame elastse joone pöörete avaldise $EI_y \varphi_y(x)$ eelmise avaldise diferentseerimise teel

$$EI_y \varphi_y(x) = EI_y \varphi_{y0} + \frac{px^3}{6}$$

Järgnevalt kasutame rajatingimusi

1. $w(l) = 0: EI_y w(l) = 0$
2. $\varphi(l) = 0: EI_y \varphi_y(l) = EI_y \varphi_{y0} + \frac{pl^3}{6} = 0 \Rightarrow EI_y \varphi_{y0} = -\frac{pl^3}{6}$

Elastse joone võrrand annab nüüd esimese rajatingimuse abil

$$EI_y w(l) = EI_y w_0 - \frac{pl^3}{6} l + \frac{pl^4}{24} = 0$$

ja siit

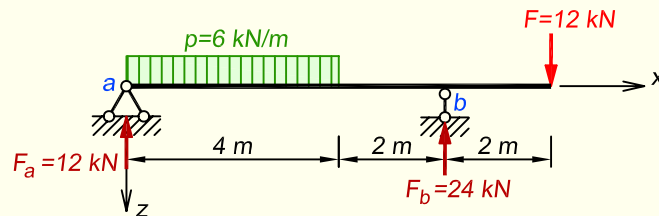
$$EI_y w_0 = \frac{pl^4}{6} - \frac{pl^4}{24} = \frac{pl^4}{8}$$

Siire konsooli alguses tuleb

$$w_a = w_0 = \frac{pl^4}{8EI_y}$$

Mõlemas asendis konsooliga jõudsiame samale tulemusele.

NÄIDE B.2. Koostada joonisel B.2 kujutatud tala elastse joone skeem iseloomulike punktide siirete põhjal. Tala valmistatakse terasprofiilist IPE200, mille ristlõike inertsi-moment $I_y = 1943 \text{ cm}^4$. Elastsusmoodul $E = 210 \text{ GPa}$.



Joonis B.2. Tala arvutuskeem

LAHENDUS

Elastse joone võrrandiks saame vastavalt avaldisele (B.11)

$$EI_y w(x) = EI_y w_0 + EI_y \phi_{y0} x - 12 \frac{x^3}{6} + 6 \frac{x^4}{24} - 6 \frac{\langle x-4 \rangle^4}{24} - 24 \frac{\langle x-6 \rangle^3}{6}$$

Elastse joone pöörete võrrandiks saame

$$EI_y \phi_y(x) = EI_y w'(x) = EI_y \phi_{y0} - 12 \frac{x^2}{2} + 6 \frac{x^3}{6} - 6 \frac{\langle x-4 \rangle^3}{6} - 24 \frac{\langle x-6 \rangle^2}{2}$$

Järgnevalt kasutame rajatingimusi

$$1. \quad w(0) = 0: \quad EI_y w_0 = 0$$

$$2. \quad w(6) = 0: \quad EI_y w(6) = EI_y \phi_{y0} \cdot 6 - 12 \frac{6^3}{6} + 6 \frac{6^4}{24} - 6 \frac{2^4}{24} = 0$$

Teisest rajatingimusest saame

$$EI_y \phi_{y0} = 18,667 \text{ kNm}^2$$

Elastse joone avaldis kohal $x = 8 \text{ m}$

$$EI_y w(8) = 18,667 \cdot 8 - 12 \frac{8^3}{6} + 6 \frac{8^4}{24} - 6 \frac{4^4}{24} - 24 \frac{2^3}{6} = 53,336 \text{ kNm}^3$$

Siire konsooli otsas

$$w(8) = \frac{53,336}{210 \cdot 10^6 \cdot 1943 \cdot 10^{-8}} = 0,0131 \text{ m} = 13,1 \text{ mm}$$

Arvutame ka pöördet konsooli otsas. Elastse joone pöörete võrrand on

$$EI_y \phi_y(8) = 18,667 - 12 \frac{8^2}{2} + 6 \frac{8^3}{6} - 6 \frac{4^3}{6} - 24 \frac{2^2}{2} = 34,667 \text{ kNm}^2$$

Pööre konsooli otsas

$$\varphi_y(8) = \frac{34,667}{210 \cdot 10^6 \cdot 1943 \cdot 10^{-8}} = 0,0085 \text{ rad} = 8,5 \text{ mrad}$$

Eeldame, et sildes jääb suurim läbipaine piirkonda $0 < x < 4$ m. Kuna pööre maksimaalse läbipainde kohal $\varphi = 0$, siis saame pöörete võrrandist

$$EI_y \varphi_y(x) = 18,667 - 12 \frac{x^2}{2} + 6 \frac{x^3}{6} = 0$$

Saime kuupvõrrandi, mille lahendamiseks kasutame *Newtoni* meetodit, mis võimaldab lahendada võrrandit $f(x) = 0$ järkjärgulise lähendamise teel juurtega x_0, x_1, x_2 jne, kus iga järgnev ja täpsem juur x_{n+1} avaldub eelmisest x_n järgnevalt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Siin ülesandes on funktsioon ja selle tuletis

$$f(x) = 18,667 - 6x^2 + x^3; \quad f'(x) = -12x + 3x^2$$

Valime alg lähendiks $x_0 = 2$ m, mille puhul $f(x_0) = 2,667$ ja $f'(x_0) = -12$ ning seetõttu

$$x_1 = 2 - \frac{2,667}{-12} = 2,22$$

Teise lähendi leidmiseks kasutame saadud x_1 väärtust, mille puhul $f(x_0) = 0,038$ ja $f'(x_0) = -11,855$ ning

$$x_2 = 2,22 - \frac{0,038}{-11,855} = 2,22$$

mis võrdub eelmise lähendiga ja seetõttu on võrrandi lahendiks. Järelikult esineb maksimaalne läbipaine kohal $x = 2,22$ m. Elastse joone võrrand suurima läbipainde kohal on

$$EI_y w(2,22) = 18,667 \cdot 2,22 - 12 \frac{2,22^3}{6} + 6 \frac{2,22^4}{24} = 25,63 \text{ kNm}^3$$

Siire kohal $x = 2,22$ m on

$$w(2,22) = \frac{25,63}{210 \cdot 10^6 \cdot 1943 \cdot 10^{-8}} = 0,0063 \text{ m} = 6,3 \text{ mm}$$

Teist ekstreemumit eeldame piirkonda $4 < x < 6$ m. Pöörete võrrand on

$$EI_y \varphi_y(x) = 18,667 - 6x^2 + x^3 - (x-4)^3 = 0$$

Siit saame tulemuseks ruutvõrrandi

$$6x^2 - 48x + 82,667 = 0$$

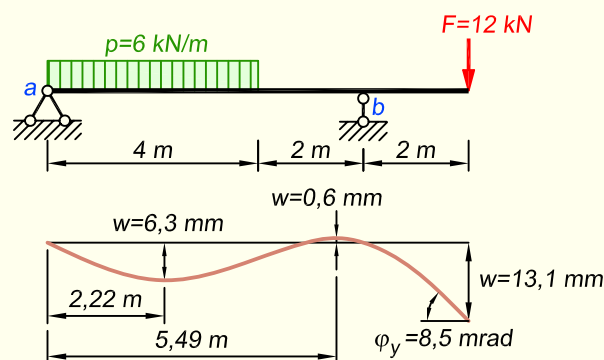
mille kahest lahendist jääb vaadeldavasse piirkonda $x = 5,49$ m ja see on ka teise ekstreemumi asukohaks. Elastse joone võrrand selles kohas on

$$EI_y w(5,49) = 18,667 \cdot 5,49 - 12 \frac{5,49^3}{6} + 6 \frac{5,49^4}{24} - 6 \frac{1,49^4}{24} = -2,58 \text{ kNm}^3$$

Siire kohal $x = 5,49$ m on

$$w(5,49) = \frac{-2,58}{210 \cdot 10^6 \cdot 1943 \cdot 10^{-8}} = -0,0006 \text{ m} = -0,6 \text{ mm}$$

Elastne joon suurimate siirete ja konsooli otsa pöördega on näidatud joonisel B.3.



Joonis B.3. Elastse joone skeem

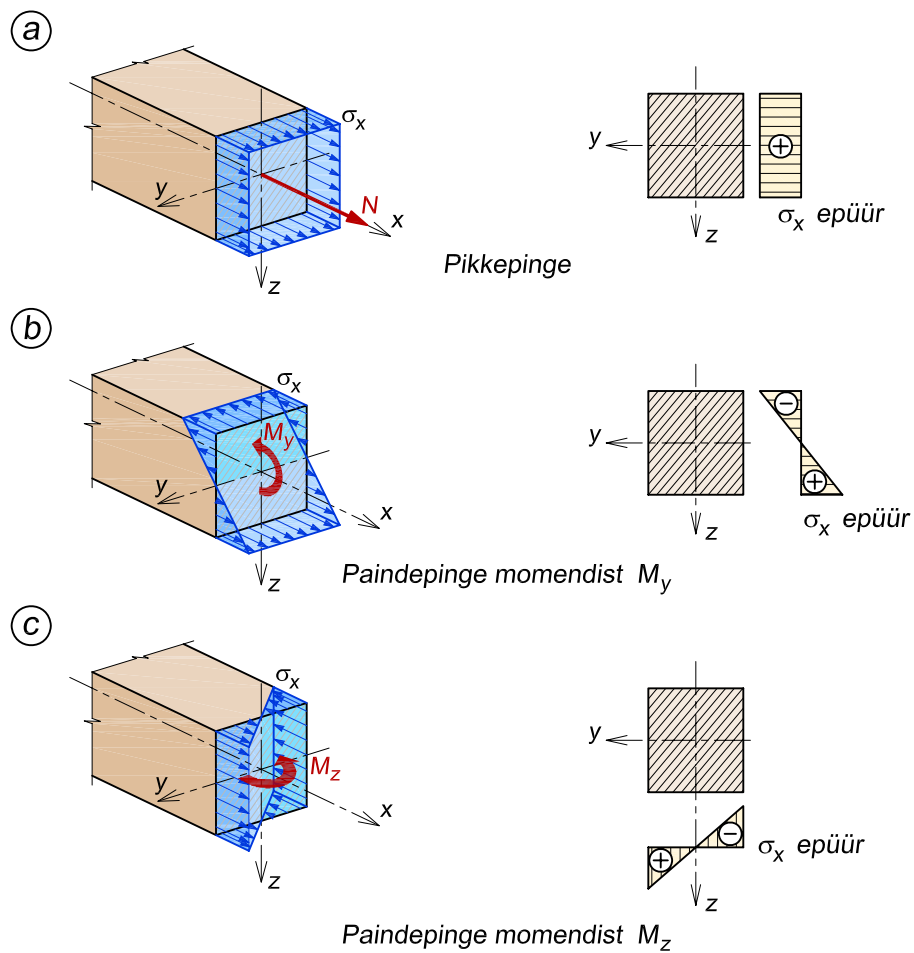
B.3. Pinged varda ristlõikes

B.3.1. Normaalpingeväli

Ristlõike normaalpingevälja üldkuju on

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (\text{B.13})$$

Esitatud valemis esineb mitu sisejõudu ja vastavat tööseisundit nimetatakse *lihttööseisundiks*. Kui vardas esineb ainult üks sisejõud koos talle vastava põhideformatsiooniga, siis on tegemist *lihttööseisundiga*.



Joonis B.4. Normaalsepingeväli varda ristlõikes

Pikkepinge

Kui varda ristlõikes mõjub ainult pikijõud, siis tekib vastavalt valemile (B.13) kogu ristlõike ulatuses ühtlane pikkepinge

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (\text{B.14})$$

kus N on vardas mõjuv pikijõud ning A ristlõikepindala.

Pikkepinge märk ühtib pikijõu märgiga: tõmbepinged loeme positiivseks ja survepinged negatiivseks. Ristlõike sepingeväli on kujutatud joonisel B.4, a.

Paindepinge

Kui varda ristlõikes tekib ainult paindemoment M_y , siis paindepinget selles ristlõikes kirjeldab valem

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \quad (\text{B.15})$$

kus M_y on paindemoment varda ristlõike peatelje y suhtes, I_y ristlõike inertsimoment sama telje suhtes ning z selle punkti koordinaat, milles pinget arvutatakse. Ristlõike pingeväli on kujutatud joonisel B.4, b.

Kui muud normaalpinged ristlõikes puuduvad ja esineb ainult paindemoment, siis sel juhul ühtib nulljoon peateljega y ja läbib seetõttu ristlõike raskuskeset.

Suurimate paindepingete väärtused $\max \sigma_t$ ja $\max \sigma_s$ saame arvutada nulljoone suhtes sümmeetrilises kujuga ristlõikes (joonis B.5, a) avaldisega

$$\max \sigma_{t,s} = \frac{M_y}{W_y} \quad (\text{B.16})$$

kus W_y on ristlõike vastupanumoment y -telje suhtes

$$W_y = \frac{I_y}{a} \quad (\text{B.17})$$

mis võrdub ristlõike inertsimomendiga nulljoone suhtes jagatuna nulljoonest kaugeimate punktide kaugusega.

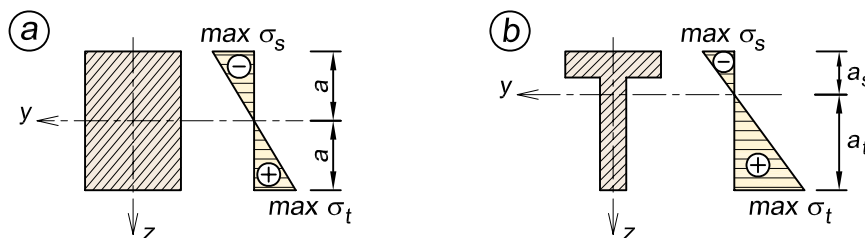
Nulljoone suhtes mittesümmeetrilise kujuga ristlõikes (joonis B.5, b) arvutame suurimad pinged valemitega

$$\max \sigma_{x,t} = \frac{M_y}{I_y} a_t; \quad \max \sigma_{x,s} = \frac{M_y}{I_y} a_s \quad (\text{B.18})$$

kus a_t ja a_s on vastavalt tõmmatud ja surutud kiudude suurim kaugus nulljoonest.

Kui varda ristlõikes tekib ainult paindemoment M_z , siis muutuvad eespool toodud valemities ainult indeksid

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y; \quad \max \sigma_{t,s} = \frac{M_z}{W_z} \quad (\text{B.19})$$



Joonis B.5. Suurimad paindepinged nulljoone suhtes sümmeetrilises ja mittesümmeetrilises ristlõikes

B.3.2. Nihkepingeväli

Väändepinged ümarristlõikes

Ümarristlõike väändepingevälja (joonis B.6) kirjeldab avaldis

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho \quad (\text{B.20})$$

kus T on ristlõikes esinev väändemoment, I_p ristlõike polaarinertsimoment ning ρ vaadeldava punkti kaugus ristlõike raskuskeskmest.

Ümarristlõike suurima väändepinge saame avaldisega

$$\max \tau = \frac{T}{W_p} \quad (\text{B.21})$$

kus W_p on polaarvastupanumoment, mis võrdub polaarinertsimomendiga jagatuna ristlõike punktide suurima kaugusega raskuskeskmest

$$W_p = \frac{I_p}{\max \rho} \quad (\text{B.22})$$

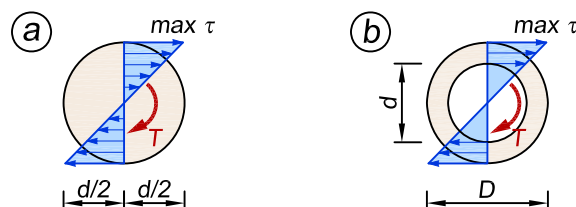
Ümar- ja rõngasristlõike polaarinertsimomendid on vastavalt

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) \quad (\text{B.23})$$

Ümar- ja rõngasristlõike polaarvastupanumomendid on vastavalt

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \quad (\text{B.24})$$

kus $c = \frac{d}{D}$ on rõnga sise- ja välisläbimõõdu suhe.



Joonis B.6. Väändepingeväli ümar- ja rõngasristlõikes

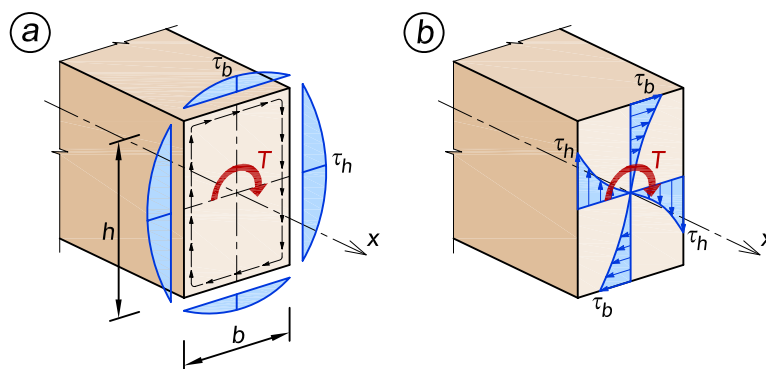
Väändepinged mitteümaristolõikes

Suurima väändepinge arvutame valemiga

$$\max \tau = \frac{T}{W_t} \quad (\text{B.25})$$

kus W_t on ristlõike väände vastupanumoment, mille avaldis sõltub ristlõike kujust.

Järgnevalt esitame valemid ristkülikulise ristlõike kohta. Väändepinged on ristlõike serval suunatud piki kontuuri, olles maksimaalsed serva keskel ja muutudes nurkades nulliks (joonis B.7, a). Ristlõike sümmeetriatelgedega on väändepinged ristis (joonis B.7, b).



Joonis B.7. Väändepingeväli ristkülikristlõikes

Suurim väändepinge ristlõikes $\max \tau = \tau_h$ esineb ristküliku pikemate külgede keskpunktides. Pinge τ_h arvutamisel kasutame vastupanumomenti

$$W_t = k_h h b^2 \quad (\text{B.26})$$

kus h ja b on ristküliku küljepikkused ning k_h küljepikkuste suhtest $\frac{h}{b}$ sõltuv tegur.

Lühemate külgede keskpunktides mõjuva väändepinge τ_b arvutame suurima väändepinge kaudu

$$\tau_b = k_b \tau_h \quad (\text{B.27})$$

kus k_b on samuti küljepikkuste suhtest $\frac{h}{b}$ sõltuv tegur. Tegurite k_h ja k_b väärtused on esitatud tabelis B.2.

Tabel B.2. Tegurite k_h ja k_b väärtused

| $\frac{h}{b}$ | 1 | 1,5 | 1,75 | 2 | 3 | 5 | 10 | ∞ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| k_h | 0,208 | 0,231 | 0,239 | 0,246 | 0,267 | 0,291 | 0,312 | 0,333 |
| k_b | 1,000 | 0,859 | 0,820 | 0,795 | 0,753 | 0,744 | 0,742 | 0,742 |

Lõikepinged

Ristlõikes esineva lõikepinge (joonis B.8, a) valemiks üldkujul on

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*} \quad (\text{B.28})$$

kus Q_z on ristlõikes mõjuv põikjõud, I_y ristlõike inertsimoment peatelje suhtes, b^* ristlõike laius selle punkti kohal, kus pinget arvutatakse (tärn viitab sellele, et ristlõike laius võib olla muutuv suurus) ning S_y^* vaadeldavat punkti läbivast pikilõike jäljest ühele poole jääva ristlõike osa (joonisel B.8, b viirutatud) staatiline moment peatelje suhtes

$$S_y^* = A^* z^* \quad (\text{B.29})$$

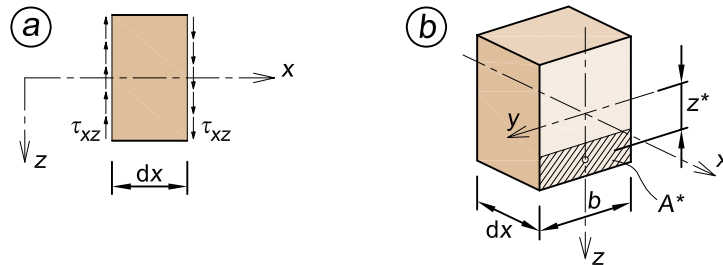
Ristkülikristlõike maksimaalse lõikepinge arvutamise valemiks kujuneb

$$\max \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{A} \quad (\text{B.30})$$

ning ringikujulisel ristlõikel

$$\max \tau_{xz} = \frac{4}{3} \frac{Q_z}{A} \quad (\text{B.31})$$

kus A on varda ristlõikepindala.



Joonis B.8. Varda lõigule dx mõjuvad lõikepinged

Lisa C

Maatriksalgebra

C.1. Maatriksi mõiste

Maatriksiks nimetatakse ridadesse ja veergudesse korrastatud elementide massiivi. Maatriksi elementideks võivad olla arvud, nende sümbolid, matemaatilised avaldised või teised maatriksid.

Maatriksit, milles on m rida ja n veergu, nimetatakse $(m \times n)$ -maatriksiks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

kus maatriksi suvalist elementi tähistame a_{ij} , milles esimene indeks i viitab reanumbrile ja teine indeks j veerunumbrile.

Reavektoriks nimetatakse maatriksit, milles on vaid üks rida

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] \quad (\text{C.2})$$

Veeruvektoriks nimetatakse maatriksit, milles on ainult üks veerg

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Ruutmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille ridade arv on võrdne veergude arvuga ($m = n$). *Ristkülikmaatriksiks* nimetatakse maatriksit, mille ridade arv on veergude arvust erinev ($m \neq n$).

Diagonaalmaatriksiks nimetatakse maatriksit, milles ainult peadiagonaalil olevad elemendid a_{ii} on nullist erinevad. Diagonaalmaatriksit, milles kõik peadiagonaalil paiknevad elemendid võrduvad ühega, nimetatakse *ühikmaatriksiks* ja tähistatakse tavaliselt \mathbf{I} .

C.2. Maatriksite liitmine ja lahutamine

Kahe maatriksi liitmine on võimalik siis, kui neil on ühesugune arv ridasid ja ühesugune arv veergusid.

Kahe maatriksi summa saame nende vastavate elementide liitmisel

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Kahe maatriksi vahe saame analoogse tehtega

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Maatriksite liitmisel kehtivad järgmised seaduspärasused

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}; \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (\text{C.6})$$

C.3. Maatriksite korrutamine

Maatriksi korrutamine reaalarvuga

Maatriksi \mathbf{A} korrutamisel reaalarvuga c tuleb maatriksi kõik elemendid korrutada antud arvuga, kusjuures saadav maatriks on samade mõõtmetega nagu algne maatriks \mathbf{A}

$$c\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Vektorite korrutamine

Reavektori ja veeruvektori korrutis on nende vektorite vastavate elementide korrutiste summa. Seda korrutist nimetatakse *vektorite skalaarkorrutiseks*

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_nc_m \quad (\text{C.8})$$

Vastupidises järjekorras korrutis ehk veeruvektori ja reavektori korrutis annab maatriksi, mille elementideks on vektori elementide korrutis. Seda korrutist nimetatakse *vektorite otsekorrutiseks*

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1b_1 & c_1b_2 & \dots & c_1b_n \\ c_2b_1 & c_2b_2 & \dots & c_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_mb_1 & c_mb_2 & \dots & c_mb_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Maatriksi korrutamine veeruvektoriga

Maatriksi \mathbf{A} korrutamisel veeruvektoriga \mathbf{c} saame veeruvektori, mille elemendid on maatriksi \mathbf{A} ridade elementide ja veeruvektori \mathbf{c} vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_m \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_m \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_m \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Reavektori korrutamine maatriksiga

Reavektori \mathbf{b} korrutamisel maatriksiga \mathbf{A} saame reavektori \mathbf{r}

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

kus

$$\begin{aligned} r_1 &= b_1a_{11} + b_2a_{21} + \dots + b_na_{m1} \\ r_2 &= b_1a_{12} + b_2a_{22} + \dots + b_na_{m2} \\ &\dots \\ r_n &= b_1a_{1n} + b_2a_{2n} + \dots + b_na_{mn} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Kahe maatriksi korrutamine

Maatriksite \mathbf{A} ja \mathbf{B} korrutamisel on oluline, et nende veergude ja ridade arvud oleks omavahel kooskõlas. See tingimus on täidetud, kui maatriksi \mathbf{A} veergude arv võrdub maatriksi \mathbf{B} ridade arvuga.

Maatriksite \mathbf{A} ja \mathbf{B} korrutiseks nimetatakse maatriksit, mille elemendid on maatriksi \mathbf{A} i -nda rea ja maatriksi \mathbf{B} j -nda veeru vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

ja teine näide

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

Maatriksite korrutamisel kehtivad järgmised seaduspärasused

$$\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}; \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}; \quad \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (\text{C.15})$$

$$c(\mathbf{AB}) = (c\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(c\mathbf{B}); \quad c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}; \quad (c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A} \quad (\text{C.16})$$

Maatriksite element-element korrutamine

Maatriksite element-element kaupa korrutamisel (matemaatikas nimetatakse seda *Hadamardi* korrutiseks) tuleb omavahel korrutada kahe maatriksi vastavad elemendid

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

C.4. Maatriksite transponeerimine

Maatriksi transponeerimine on maatriksi ridade ja veergude omavaheline vahetamine. Kui esialgne maatriks on \mathbf{A} , siis tema transponeeritud maatriks on \mathbf{A}^T

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Maatriksit nimetatakse *sümmeetriliseks maatriksiks*, kui $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Sümmeetriline saab olla ainult ruutmaatriks.

Maatriksite transponeerimisel kehtivad järgmised seaduspärasused

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}; \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T; \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{C.19})$$

C.5. Pöördmaatriksid

Pöördmaatriksiks antud ruutmaatriksile \mathbf{A} nimetatakse sellist maatriksit \mathbf{A}^{-1} , mille korral kehtib omadus

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (\text{C.20})$$

mis tähendab, et pöördmaatriks \mathbf{A}^{-1} on maatriks, millega maatriksi \mathbf{A} korrutamisel saame ühikmaatriksi \mathbf{I} .

Maatriksil \mathbf{A} eksisteerib pöördmaatriks ainult siis, kui maatriks \mathbf{A} on ruutmaatriks ning maatriksi \mathbf{A} determinant ei võrdu nulliga

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \quad (\text{C.21})$$

Ruutmaatriksit, mille determinant võrdub nulliga, nimetatakse singulaarseks maatriksiks. Kui maatriksi \mathbf{A} pöördmaatriks on võrdne transponeeritud maatriksiga

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad (\text{C.22})$$

siis on maatriks \mathbf{A} *ortogonaalne* ja

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad (\text{C.23})$$

Pöördmaatriksitele kehtivad järgmised seaduspärasused

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}; \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}; \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (\text{C.24})$$

C.6. Maatriksi determinant

Ruutmaatriksi \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

n -järku determinandiks nimetatakse reaalarvu

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{C.26})$$

Teist järku ($n = 2$) determinandi saame arvutada järgnevalt

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{C.27})$$

Kolmandat järku ($n = 3$) determinandi arvutame Sarruse reeglita järgmiselt

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Determinantidele kehtivad järgmised seaduspärasused

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}; \quad \det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}; \quad \det c\mathbf{A} = c^n \det \mathbf{A} \quad (\text{C.29})$$

Kirjandus

- [1] **Aalto, J.**, 2007. *Rakenteiden mekaniikan perusteet*. Loengumaterjal. Helsinki, 282 lk.
- [2] **Bhatti, M. A.**, 2005. *Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematics and MATLAB computations*. John Wiley and Sons, 720 lk.
- [3] **Cross, H.**, 1930. *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments*. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 56, 5, lk 919–928.
- [4] **Darkov, A., Kuznetsov, V.**, 1969. *Structural Mechanics*. Mir Publishers, 703 lk.
- [5] **Eek, R., Räämet, R.**, 1983. *Ehitusmehaanika näiteülesanded I*. TPI, 99 lk.
- [6] **Eek, R., Räämet, R., Lahe, A.**, 1983. *Ehitusmehaanika näiteülesanded II*. TPI, 100 lk.
- [7] **Ehituskonstruktori käsiraamat**, 2014. Kirjastus Ehitame, 577 lk.
- [8] **EVS-EN 1990:2002**. Eurokoodeks. Ehituskonstruksioonide projekteerimise alused.
- [9] **EVS-EN 1991-1-1:2002**. Eurokoodeks. Ehituskonstruksioonide koormused. Osa 1-1: Üldkoormused. Mahukaalud, omakaalud, hoonete kasuskoormused.
- [10] **EVS-EN 1991-1-3:2006**. Eurokoodeks. Ehituskonstruksioonide koormused. Osa 1-3: Üldkoormused. Lumekoormus.
- [11] **Hibbeler, R. C.**, 2005. *Mechanics of Materials*. Prentice-Hall, 870 lk.
- [12] **Hibbeler, R. C.**, 2009. *Structural Analysis*. Prentice-Hall, 667 lk.
- [13] **Jürgenson, A.**, 1985. *Tugevusõpetus*. Tallinn, Valgus, 458 lk.
- [14] **Kaljundi, J., Kalm, M., Kangilaski, E., Kreek, T., Masso, T., Raam, V.**, 1993. *Eesti arhitektuur. Oskussõnastik*. Tallinn, Valgus, 31 lk.
- [15] **Karnovsky, I. A., Lebed, O.**, 2010. *Advanced Methods of Structural Analysis*. Springer-Verlag, 593 lk.
- [16] **Kassimali, A.**, 2012. *Matrix Analysis of Structures*. Cengage Learning, 640 lk.
- [17] **Kenk, K., Kirs, J.**, 2013. *Mehaanika alused. Dünaamika. Analüütiline mehaanika*. TTÜ kirjastus, 471 lk.

- [18] **Kirs, J., Arjassov, G.**, 1999. *Sissejuhatus lõplike elementide meetodisse I*. TTÜ kirjastus, 72 lk.
- [19] **Klauson, A., Metsaveer, J., Põdra, P., Raukas, U.**, 2012. *Tugevusõpetus*. TTÜ kirjastus, 639 lk.
- [20] **Kulbach, V.**, 2007. *Kaabelkonstruktsioonidest Eestis ja maailmas: Tallinna Tehnikaülikooli uurimistöõde taustal*. Kogumikus: Teadusmõte Eestis (IV), Tehnikateadused (II). Tallinn, Teaduste Akadeemia Kirjastus, lk 49–63.
- [21] **Lahe, A.**, 2012. *Ehitusmehaanika*. TTÜ kirjastus, 764 lk.
- [22] **Laul, H.**, 1986. *Tallinna laululava akustilisest ekraanist*. Kogumikus: Ehitusinsenerid TPI-st. Tallinn, Valgus, lk 150–153.
- [23] **Leet, K. M., Uang, C-M., Gilbert, A. M.**, 2011. *Fundamentals of Structural Analysis*. McGraw-Hill, 787 lk.
- [24] **Logan, D. L.**, 2011. *A First Course in the Finite Element Method*. Cengage Learning, 798 lk.
- [25] **Loorits, K.**, 2008. *Teraskonstruktsioonide arvutus Eurokoodeks 3 järgi*. Eesti Teras- konstruktsiooniühing, 213 lk.
- [26] **McCormac, J. C.**, 2007. *Structural Analysis. Using Classical and Matrix Methods*. John Wiley and Sons, 584 lk.
- [27] **Otsmaa, V.**, 2014. *Betoonkonstruktsioonide arvutamine*. Eesti Betooniühing, Tallinna Tehnikaülikool, 531 lk.
- [28] **Räämet, R.**, 1964. *Ehitusmehaanika I*. Tallinn, Eesti Riiklik Kirjastus, 815 lk.
- [29] **Räämet, R.**, 1975. *Ehitusmehaanika*. Tallinn, Valgus, 688 lk.
- [30] **Räämet, R., Tärno, Ü.**, 2004. *Ehitusmehaanika I. Staatikaga määratud arvutussüsteemid*. TTÜ kirjastus, 155 lk.
- [31] **Räämet, R., Tärno, Ü.**, 2004. *Ehitusmehaanika II. Staatikaga määratud arvutussüsteemid*. TTÜ kirjastus, 123 lk.
- [32] **Thandavamoorthy, T. S.**, 2014. *Structural Analysis*. Oxford University Press, 1336 lk.
- [33] **Timoshenko, S. P.**, 1983. *History of strength of materials*. Dover Publications, 452 lk.
- [34] **Vable, M.**, 2008. *Intermediate Mechanics of Materials*. Oxford University Press, 604 lk.

Aineregister

A

aheljoon, 26, 680
ajutine arvutusolukord, 33
aktiivtöö, 443, 444
alaline arvutusolukord, 33
alaline koormus, 33
algmõõtmete printsiip, 30, 1020
alumine vöö, 278
arvutuskormus, 35
arvutuslike piirteisundite meetod, 1010
arvutusolukord, 33
arvutusskeem, 20, 28
asendav arvutusskeem, 316
asendusvarras, 316

B

baasjäikus, 772
baasvarda pööre, 736, 773
baasvarras, 735, 772
Betti teoreem, 456

C

Castigliano teine teoreem, 501
Clapeyroni teoreem, 445
Crameri valemid, 57
Cross, H., 985
Crossi meetod, 985

D

deformatsioon, 39, 441
deformatsioonide sobivusvõrrandid, 548
deformatsioonienergia, 451, 502, 505, 507, 872, 885
deformatsioonimeetod, 550, 729
deformatsioonimeetodi kanooniline võrrandisüsteem, 765

determinant, 1097
diagonaalmaatriks, 1093
diferentsiaalseosed, 45, 512
dimensioonitu ühikjõud, 100
dünaamiline koormus, 34

E

Eddy teoreem, 232
eelpinged, 549
elastne joon, 510
elastoplastne materjal, 1010
elastse joone diferentsiaalvõrrand, 512
elastse joone pöörete universaalvõrrand, 1083
elastse joone universaalvõrrand, 665, 1082
elementkoormus, 927
epüür, 43
erakorriline arvutusolukord, 33
erakorriline koormus, 33
esimest järku teooria, 30
Euler-Bernoulli tala võrrand, 512, 923

F

fiktiivne koormus, 627
fiktiivsed toereaktsioonid, 628
flutter, 26
fookus, 643
fookussuhted, 644, 646

G

Galjorkini meetod, 836, 839, 923
geomeetiline muutumus, 21, 74, 75, 91, 92
geomeetrilise määramatuse aste, 729
geomeetrilised tundmatud, 550

Gerberi tala, 145
globaalne teljestik, 894
grupptundmatu, 700

H

Hadamardi korrutis, 1096
hajutatud moment, 35
Hennebergi meetod, 316
Hermite'i interpolatsioon, 858
hetkmuutuv arvutuskeem, 57, 92
hetkmuutuvus, 57, 95
hetkpoolus, 78
homogeenne materjal, 20
homogeensed rajatingimused, 866
Hooke'i seadus, 20
Howe'i sõrestik, 280

I

integraalseosed, 46
interpolatsioon, 849
interpolatsioonifunktsioon, 849
isotroopne materjal, 20

J

jaotustegur, 988
joone kõverus, 705
joone kõverusraadius, 705
joonkoormus, 34
joonpaisumistegur, 472
jõudude mõju sõltumatus printsiip, 20, 70
jõumeetod, 550, 551
jõumeetodi kanooniline võrrandisüsteem, 563
jõupaar, 35
jäigad konsolidid, 699
jäik sõlm, 24
jäik tugi, 31
jäikus, 15
jäikusmaatriks, 833, 862, 872, 877, 921, 957
jäikusmeetod, 833
jäikustala, 394, 400
jätkuvtala, 621
jätkuvtala fookussuhted, 644, 646

jätkuvtala staatikaga määramatuse aste, 623

K

kaabel, 25, 408
kaalufunktsioon, 839
kaar, 23, 197, 679
kaare kõrgus, 198
kaare survejoon, 228
kaare telgjoon, 202
kaare tõus, 198
kaarega tala, 394
kaarega talasõrestik, 395
kaarsõrestik, 278
kahe liigendiga kaar, 198
kahesidemeline tugi, 30, 31
kandepiirseisund, 32
kandevõime, 1009
kandevõimemeetod, 1009
kannaliigend, 198
kanooniline võrrandisüsteem, 563, 765
kasuskoormus, 35
kasutuspiirseisund, 33
katusesõrestik, 278
kaudne koormus, 112, 113
kinemaatika meetod, 83, 115, 164, 327, 662, 1030, 1032
kinemaatikaline kontroll, 580, 587, 782
kinemaatiline kett, 75
kinemaatilise määramatuse aste, 729, 733
kinemaatilised pidevustingimused, 550, 560, 720
kinemaatilised rajatingimused, 836
kinemaatilised tundmatud, 550, 729
kinemaatilisel määratud põhiskeem, 739
kinnistugi, 31
kinnitusmomendid, 747, 754, 985
kohalik teljestik, 894
kolme liigendiga kaar, 198
kolme liigendiga raam, 200, 246
kolme momendi võrrand, 624, 625
kolmesidemeline tugi, 31
kolmnurksõrestik, 278, 326, 374
kombineeritud sõrestik, 278

konsoolidega talasõrestik, 278, 385
konsoolsõrestik, 278, 306
konstruktsiooni jäikusmaatriks, 864
koondatud koormus, 34
koondjõud, 34
koondmoment, 35
koorik, 21, 26
koorikkonstruktsioon, 21, 27
koormuse ebasoodsaim asetus, 125
koormuse lahutamise võte, 281, 320
koormusliikmed, 578
koormuspind, 37
koormusvektor, 135, 521
korrusskeem, 148
kraanasõrestik, 278
kriitiline jõud, 130
kujufunktsioon, 850
kujutegur, 448, 1082
kõrged kaared, 198
kõrvalpoolus, 78, 79
kõver tala, 197
kõverus, 447, 1054
kõverusraadius, 1054
käärsõrestik, 279, 285

L

Lagrange'i interpolatsioon, 853
lamedad kaared, 198
langevad diagonaalid, 278
lauskoormus, 34
lausmoment, 35
LEM, 833
libisev tugi, 31
ligikaudne arvutusmeetod, 1053
lihe, 1081
lihtliigend, 51
lihtlisatundmatu, 699, 700
lihttööseisund, 1087
lihtvõrguga sõrestik, 280
liigenditeta kaar, 198
liigendsõlm, 25
liigside, 75, 549
liikumatu liigendtugi, 30
liikuv liigendtugi, 30

liittööseisund, 1087
liitvarrastega sõrestik, 330
lineaarne interpolatsioon, 849
lisaosa, 148, 259
lisaosad, 739, 762, 976, 977
lisatundmatud, 550, 551, 556, 624, 729
lokaalne teljestik, 894
loomulikud rajatingimused, 836
lubatav koormus, 1009
lubatavate pingete meetod, 1009
lukuliigend, 198
lumekoormus, 36
lõige, 40
lõikedeformatsioon, 1081
lõikejäikus, 1082
lõikemeetod, 60, 281
lõplike elementide meetod, 550, 833

M

maatriks, 1093
maatriksi transponeerimine, 1096
massiivkonstruktsioon, 21
Maxwell-Cremona diagramm, 342
mehhanism, 75, 79
membraansisejõud, 27
mittehomogeensed rajatingimused, 866
Mohri integraal, 465
Mohr-Maxwelli meetod, 464
Mohr-Maxwelli valem, 465
momendipunkt, 287
momendipunkti võte, 287
moment, 35
momentide jaotamise meetod, 985
murtud varras, 201
muutusmaatriks, 521
muutuvkoormus, 33
mõjujoon, 99, 160, 240, 350, 403, 659
mõjumaatriks, 135
mõjusirge, 92
Müller-Breslau printsiip, 116

N

negatiivne sisepind, 42
negatiivsed kiud, 41

Newtoni meetod, 1086
normaalpingeväli, 1087
normaalsed kaared, 198
normkoormus, 35
nulljoon, 40, 1023, 1025, 1089
nullvarras, 282
nõrk formuleering, 840, 924
nõrk lahend, 836

O
olulised rajatingimused, 836
omakaal, 34
omakaalukoormused, 35
ortogonaalne maatriks, 1096
osavarutegur, 35

P
paigalseisev tugi, 30
paine muutusmaatriks, 522
painedeformatsioon, 1081
painedjäikus, 447, 1081
paindemomendi liigend, 85
paindemomendi mõjumaatriks, 136
paindemomendi märgireegel, 41
paindemomendi töö, 447
paindemoment, 40
painenurk, 1081
paindepinge, 1089
paine, 40
paneel, 113, 278
parempoolne fookus, 643
parempoolne fookussuhe, 646
passiivtöö, 443, 449
peakandur, 112
peapoolus, 78
peatala, 112
pesunöörireegel, 48
pidevustingimused, 513, 548, 551, 552, 560
piirkoormus, 1009
piirkoormusmeetod, 1009
piirmoment, 1022
piirpingemeetod, 1009
piirseisund, 32, 1009

pike, 40
pikijõu liigend, 85
pikijõu märgireegel, 43
pikijõu töö, 447
pikijõud, 40
pikitala, 112
pikke muutusmaatriks, 521
pikkedeformatsioon, 1081
pikkejäikus, 446, 1081
pikkepinge, 1088
pindkandur, 21, 26
pindkoormus, 34
pinna välisnormaal, 42
plaat, 21, 26
plaatkonstruktsioon, 21
plastne liigend, 1022, 1026, 1028, 1047
plastne vastupanumoment, 1023
polaarinertsimoment, 1090
polaarvastupanumoment, 1090
pooluste plaan, 78
positiivne sisepind, 42
positiivsed kiud, 41
post, 23
potentsiaalenergia, 451, 845, 872
potentsiaalenergia funktsioon, 845, 872
Prandtli diagramm, 1010
Pratti sõrestik, 280
projektsioonide võte, 291
punktkoormus, 34
põhideformatsioon, 39
põhiosa, 148, 259
põhiskeem, 552, 556, 623, 739, 974
põhisõrestik, 330, 335
põikjõu liigend, 85
põikjõu mõjumaatriks, 142
põikjõu märgireegel, 42
põikjõu töö, 447
põikjõud, 41
põiktala, 112
pöörde hetkkese, 78
pöördenergimeetod, 729
pöördmaatriks, 1096
püsikoormus, 33

püsisvus, 15

R

raam, 24, 200

raamsõrestik, 278

rajatingimused, 431, 457, 513, 666, 754, 756–758, 836, 838, 858, 866, 931

ratsionaalse teljega kaar, 230

Rayleigh-Ritzi meetod, 836, 845, 872

reaktsiooni ja siirde vastastikkuse teoreem, 463

reaktsioonide vastastikkuse teoreem, 462

reavektor, 1093

redutseeritud pikkus, 564, 565, 625

resultantjõu hulknurk, 228

resultantjõud, 228

riiv, 24

ripe, 26, 411, 414, 415

rippkonstruktsioon, 25, 394, 407

rippsõrestik, 278, 395

ristkülikmaatriks, 1093

ristlõike lõikejäikus, 1082

ristlõike nulljoon, 40, 1023, 1089

ristlõike paindejäikus, 1081

ristlõike pikkejäikus, 1081

ristlõike pingeväli, 1088

ristlõike tuum, 232

ristlõike väändejäikus, 1082

Ritteri lõikemeetod, 281

roomav kaar, 199

ruumkoormus, 34

ruutmaatriks, 1093

S

Sarruse reegel, 1097

segameetod, 550, 974

siirdemeetod, 550

siirdumatute sõlmedega raam, 985

siirduvate sõlmedega raam, 985

siire, 441

siirete sobivusvõrrandid, 548

siirete vastastikkuse teoreem, 460

siirete vektor, 521

sillasõrestik, 278

Simpsoni valem, 485, 490

singulaarne maatriks, 1096

sisejõu epüür, 43

sisejõu mõjumaatriks, 135

sisejõud, 39

sisejõudude diagramm, 343

sisejõudude kogutöö, 449

sisejõudude märgikokkulepped, 41

sisejõudude potentsiaalenergia, 451

sisejõudude töö, 442, 446

sisejõudude vektor, 134

sisemine määramatus, 715

sisepind, 42

sisesidemed, 556

sprengel, 279, 335

sprengelsõrestik, 279, 335

sprengeltala, 394, 396

staatika üldvõrrand, 82

staatikaga määramatu, 20, 52

staatikaga määramatuse aste, 52, 75, 76, 553, 623, 717

staatikaga määratav, 20, 52

staatikaline kontroll, 579, 590, 611, 640, 786, 815

staatikalised tundmatud, 550, 551, 729

staatiline kondensatsioon, 952

staatiline koormus, 34

staatiline moment, 448, 487, 770, 1023

staatilised rajatingimused, 836

stabiilsus, 15

stringer, 112

superpositsioon, 70

superpositsiooniprintsiip, 20, 70

survejoon, 228

survepinge, 1088

suunakoosinus, 894

sõlmede eraldamise võte, 281

sõlmkoordinaadid, 909

sõrestik, 25, 273

sõrestiku paneel, 278

sümmeetriline maatriks, 1096

Z

Žuravski teoreem, 45

T

taandamisvõte, 60
taandatud ristlõikepindala, 1082
tala, 22
tala diferentsiaalvõrrand, 754, 931
tala elastse joone diferentsiaalvõrrand, 512
tala elastse joone universaalvõrrand, 1082
talasõrestik, 278
talasõrestikuga kaar, 395
tasakaalustamata moment, 986
tasakaalustamisvõte, 60
tasakaalustavad momendid, 987
tegelik siire, 443
tegelik töö, 443
teisendusmaatriks, 896, 959
teist järku teooria, 30
temperatuuri muutus, 471
temperatuuri-joonpaisumistegur, 472
tingimata vajalik side, 549
tinglik koormus, 627
toemoment, 624
toereaktsioon, 30
toeside, 30
toetingimused, 30
toevarras, 30
transponeeritud maatriks, 1096
trapetsivalem, 486
trapetsõrestik, 279
tross, 25, 408
tugev lahend, 836
tugevus, 15
tugevusmoment, 1022
tuulekoormus, 36
tuulerõhk, 36
tuum, 232
tõmbediagramm, 1010
tõmbepinge, 1088
tõmbiga kaar, 201, 266
tõmbiga raam, 201, 266
tõusvad diagonaalid, 278
täiendustöö, 443, 450
tööde vastastikkuse teoreem, 456
tööseisund, 39, 1087

V

vabadusaste, 73
vantkonstruktsioon, 25
varda jäikus, 987
varda kõverus, 1054
varrasahel, 75, 393, 733, 735, 738, 741
varraskonstruktsioon, 21
varraste asendamise võte, 281, 316
Warreni sõrestik, 280
varutegur, 1009
vasakpoolne fookus, 643
vasakpoolne fookussuhe, 644
vastupanumoment, 1022, 1089
vedru jäikusmaatriks, 863, 872
veeruvektor, 1093
vektorite otsekorrutus, 1094
vektorite skalaarkorrutus, 1094
Vereštšagini võte, 488
virtuaaljõud, 81
virtuaalmoment, 81
virtuaalsiire, 81, 327, 443, 449
virtuaalsiirete printsiip, 82, 115, 185, 327, 442, 464, 473, 482, 575, 768
virtuaaltöö, 81, 327, 443, 455, 463, 465, 571, 770, 1030–1033
voolavuspiir, 1010
voolepiir, 1010
võimalik siire, 443
võimalik töö, 443
võrguvardad, 278
välimine määramatus, 715
välisjõudude hulknurk, 343
välisjõudude töö, 442, 445
välisnormaal, 42
välissidemed, 556
väljad, 343
väände vastupanumoment, 1091
väändedeformatsioon, 1082
väändeinertsimoment, 1082
väändejäikus, 466, 1082
väändemoment, 41, 1090
väändenurk, 1082
väändepinge, 1090

vääne, 40

Ü

ühesidemeline tugi, 30

ühikjõud, 100, 484

ühikmaatriks, 1093

üldkoordinaadid, 900, 962

üldteljestik, 894

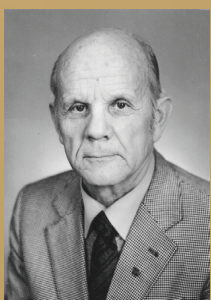
ülekandemoment, 989

ülekandetegur, 990

ülemine vöö, 278



Andrus Räämet on sündinud 10.05.1979 Tallinnas. Lõpetas 1997. aastal Tallinna Pelgulinna Gümnaasiumi. Õppis TTÜ ehitusteaduskonnas, mille lõpetas 2001. aastal tööstus- ja tsiviilehituse insenerina. Samal aastal alustas ka TTÜs ehitusmehaanika õpetamist. Aastal 2010 kaitses doktorikraadi (PhD). Tehnikaülikoolis on töötanud assistendi, lektori ja alates 2017. aastast vanemlektorina. Lisaks ehitusmehaanikale on õpetanud ka tehnilist mehaanikat. Ülikooliõpingute ajal töötas kaks aastat ka ehituskonstruktsioonide projekteerimisbüroos.



Raimund Räämet (11.06.1918–09.02.2004). Lõpetas 1937. aastal Tallinna Realgümnaasiumi ning 1947. aastal TPI tööstus- ja tsiviilehituse eriala. Samal aastal alustas tööd TPI ehitusmehaanika ja konstruktsioonide kateedris assistendina ja jätkas hiljem vanemõpetajana. Aastal 1954 kaitses kandidaadiväitekirja koorikkonstruktsioonide stabiilsuse alal ning samal aastal valiti ta ehitusmehaanika kateedri dotsendiks. Sellel ametikohtal töötas ehitusmehaanika kursuse keskse lektorina nelja aastakümne vältel kuni pensionile jäämiseni 1993. aastal.

Käesolev õpik on mõeldud peamiselt ehituserialade üliõpilastele, et anda ülevaade ehituskonstruktsioonide töötamisest, nendes tekkivatest sisejõududest ning konstruktsioonide deformeerumisest. Aga kindlasti leiavad siit kasulikku materjali ka tegevinsenerid, et varem õpitud meelde tuletada. Raamat on jagatud kahte ossa. Esimeses osas tutvustatakse erinevat liiki ehituskonstruktsioone ja kirjeldatakse staatikaga määratud konstruktsioonide sisejõudude ja siirete arvutust. Raamatu teine osa on pühendatud staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutusele. Varasemate õpikutega võrreldes on märgatavalt suurendatud lõplike elementide meetodi ja piirkoormusmeetodi mahtu. Lisaks on põhjalik rippkonstruktsioonide peatükk, mille kohta leidis siiani väga vähe eestikeelset kirjandust.

