TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 135 1958

И. А. КИЙСС

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1958

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 135 1958

И. А. КИЙСС

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1958

Основной зависимостью в теории ползучести бетона является взаимосвязь между деформацией и напряжением, изменяющимися во времени. В нелинейной теории упругоползучего тела (теория Маслова—Арутюняна) эту зависимость обычно[1] представляют в виде

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(\tau_0)}{E(\tau_0)}+F\left[\sigma(\tau_0)\right]\cdot C(t,\tau_0)+\int_{\tau_0}^{t}\frac{1}{E(\tau)}\cdot\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau+ \tag{1a}$$

$$+\int_{\tau_0}^{t}C(t,\tau)\cdot\frac{\partial F\left[\sigma(\tau)\right]}{\partial\tau}\cdot d\tau,$$

где τ — момент времени изменения напряжения $\sigma(\tau)$; t — конечный момент времени, для которого определяется деформация $\varepsilon(t)$, $E(\tau)$, $C(t,\tau)$, $F\left[\sigma(\tau)\right]$ — функции, виды которых зависят от деформативных свойств бетона.

Несколько точнее позволяет учесть деформативные свойства бетона следующая формула:

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{\tau_0}^{t}\sigma(\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau-\int_{\tau_0}^{t}f\left[\frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}\right]\cdot\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{1b}$$

где $E(\tau)$, $C(t,\tau)$, $f\left[\frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}\right]$ — функции, виды которых зависят от деформативных свойств бетона; $R(\tau)$ — предел прочности бетона в момент времени τ[5] (см. также [17]).

Формулы (1а) и (1b) являются практически применимыми, но базируются на известных допущениях, которые

---

[1] См. напр. [1, 2, 3, 4].

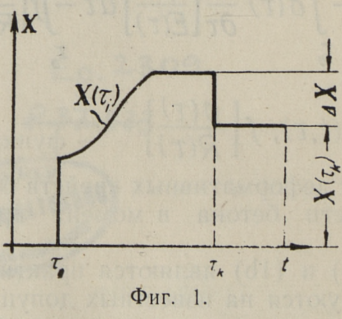
в некоторых случаях могут ухудшить точность расчетов. На совещании по теории расчета и конструированию железобетона (в Москве 1956 г.) проф. Фрайфельд предлагал исходить при составлении теории деформации бетона из уравнения неравновесного процесса деформации, базирующегося на по возможности общих предположениях [6][1]. В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы, которые возникают, если применять такую зависимость при приближенных вычислениях.

Поскольку зависимость деформации от напряжения и зависимость напряжения от деформации являются аналогичными, и поскольку аналогичные зависимости действуют также при силе и перемещении и также при явлениях вне области ползучести бетона, в настоящей статье применяются обобщенные понятия «фактор» и «действие», вместо слов «напряжение» и «деформация».

I. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ФАКТОРОМ И ЕГО ДЕЙСТВИЕМ

1. Выражение действия

Пусть: X — фактор, Y — действие, τ — момент времени изменения фактора, t — момент времени, для которого определяется действие, τ_0 — момент времени возникновения фактора; Y_{*k} — действие фактора в момент времени t, когда фактор изменяется в промежутке времени (τ_0, τ_k) по закону $X_k(\tau_i)$ $(\tau_0 \leqslant \tau_i \leqslant \tau_k)$, в момент времени τ_k получает прирост ΔX и тогда остается постоянным до времени t, имея значение $X(\tau_k)$ (см. фиг. 1)



Фиг. 1.

[1] См. также [7].

Действие Y_{*k} можно представить в виде

$$Y_{*k} = Y_{*k}[\tau_k, X(\tau_k), t].$$

Вид функции

$$Y_{*k}[\tau_k, X(\tau_k), t] - Y_{*k}[\tau_k, X(\tau_k) - \Delta X, t]$$

зависит от следующих обстоятельств: 1) от вида функции $X_k(\tau_i)$ (например, деформативные свойства бетона зависят от давления, при котором он твердеет), 2) от значений фактора $X(\tau_k)$ и $X(\tau_k) - \Delta X$ и прироста ΔX (например, деформативные свойства бетона являются различными при сжатии и растяжении, при нагрузке и разгрузке [8]).[1]

Рассмотрим случай, когда фактор в промежутке времени (τ_0, τ_m) изменяется ступенчато. В этом случае действие $Y(t)$ можно представить в виде

$$Y(t) = Y_{*0}[\tau_0, X(\tau_0), t] + \sum_{k=1}^{m} \left\{ Y_{*k}[\tau_k, X(\tau_k), t] - Y_{*k}[\tau_k, X(\tau_{k-1}), t] \right\}, \tag{2}$$

если при функции Y_{*k} функция $X_k(\tau_i)$ соответствует изменению фактора в промежутке времени (τ_0, τ_k). Допустим, что в промежутке времени (τ_0, t) действует т. н. закон наложения, т. е. что

$$Y_{*k}[\tau_k, X(\tau_k), t] - Y_{*k}[\tau_k, X(\tau_{k-1}), t] = Y_*[\tau_k, X(\tau_k), t] - Y_*[\tau_k, X(\tau_{k-1}), t] \tag{2a}$$

при каждом значении k $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$.

В данном случае $Y_*[\tau_k, X, t]$ — действие факотра $X(\tau)$, если при $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_k$ $X(\tau) = X(\tau_0)$ и при $\tau_k \leqslant \tau \leqslant t$ $X(\tau) = X = \text{const}$.

Если закон наложения не имеет место, тогда функция $Y_*[\tau_k, X, t]$ является эмпирической. Общий функциональный вид его можно выбрать по предположению, что имеет место закон наложения. Значения численных параметров и постоянных в этом функциональном виде необходимо определить на основе действия изменяемого во времени

[1] В работах П. И. Васильева дается выражение для подсчета деформаций ползучести с учетом их частичного восстановления в период разгружения [8] стр. 5.

фактора (определенное экспериментальным путем). При этом изменения фактора в экспериментах и в расчетах должны быть приблизительно в соответствии.

Обозначая $\Delta\tau=\tau_k-\tau_{k-1}$,[1] получим от (2) и (2а),

$$Y(t)=Y_{*0}[\tau_0,X(\tau_0),t]+\sum_{k=1}^{m}\{Y_*[\tau_k,X(\tau_{k-1}+\Delta\tau),t]-Y_*[\tau_k,X(\tau_{k-1}),t]\}. \tag{3}$$

Предполагая, что функция Y_* является непрерывной, можем написать: если $\Delta\tau\to 0$ и $m\to\infty$, тогда

$$Y(t)=Y_{*0}[\tau_0,X(\tau_0),t]+$$

$$+\lim_{\substack{\Delta\tau\to 0\\ m\to\infty}}\sum_{k=1}^{m}\{Y_*[\tau_k,X(\tau_{k-1}+\Delta\tau),t]-Y_*[\tau_k,X(\tau_{k-1}),t]\}=$$

$$=Y_{*0}[\tau_0,X(\tau_0),t]+$$

$$+\lim_{\substack{\Delta\tau\to 0\\ m\to\infty}}\sum_{k=1}^{m}\frac{Y_*[\tau_k,X(\tau_{k-1}+\Delta\tau),t]-Y_*[\tau_k,X(\tau_{k-1}),t]}{X(\tau_{k-1}+\Delta\tau)-X(\tau_{k-1})}\cdot$$

$$\cdot\frac{X(\tau_{k-1}+\Delta\tau)-X(\tau_{k-1})}{\Delta\tau}\Delta\tau=$$

$$=Y_{*0}[\tau_0,X(\tau_0),t]+\int_{\tau_0}^{\tau'\leq t}\frac{\partial}{\partial X(\tau)}Y_*[\tau,X(\tau),t]\cdot\frac{d}{d\tau}X(\tau)d\tau,$$

где $\tau'=\tau_m$, при $m\to\infty$. (4)

Рассуждая так же, получим, что приростом действия $\Delta Y(t)$, соответствующим изменению фактора в течение

---

[1] Если $Y_{*0}=Y_*$, то формуле 19а в [7] стр. 35 можно придать вид формулы (4). Но поскольку исходные предположения и физикальные сущности функций Y_* и $f+P^*$ (в [7]) не совпадают, то формулы (4) и 19а в [7] не являются идентичными. При выведении формулы 19а в [7] введено допущение о независимости деформации последействия от предшествующей деформации и предположено, что нагрузка монотонно возрастает. При выведении формулы (4) такие ограничения не оказались необходимыми.

некоторого промежутка времени (τ_{g-1}, τ_g), где действует закон наложения, является:

$$\Delta_g Y(t) = \int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_{*g}[\tau, X(\tau), t] \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau) \, d\tau. \quad (5)$$

Здесь $Y_{*g}[\tau, X, t]$ — действие фактора $X(\tau_i)$, если при $\tau_{g-1} \leqslant \tau_i \leqslant \tau$ $X(\tau_i) = X(\tau_{g-1})$ и при $\tau \leqslant \tau_i \leqslant t$ $X(\tau_i) = X$.

Если фактор изменяется по произвольному закону (но не ступенчато), тогда на основе формулы (5) получим, что его действие $Y(t)$ можно определить из следующего выражения[1]

$$Y(t) = Y_{*0}[\tau_0, X(\tau_0), t] + \sum_{g=1}^{h} \int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_{*g}[\tau, X(\tau), t] \frac{d}{d\tau} X(\tau) d\tau. \quad (6)$$

При применении выражения (6) необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства:

1. Вид функции Y_{*g}, применяемой при $\tau_{g-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_g$

а) зависит от процесса изменения фактора $X(\tau)$ до момента времени τ_{g-1};

б) может оказаться различным при возрастании и убывании фактора $X(\tau)$ $(\tau_{g-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_g)$ и также при отрицательном и положительном его значении.

2. Промежутки времени (τ_{g-1}, τ_g) целесообразно выбрать так, что фактор $X(\tau)$, при $\tau_{g-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_g$, либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает.

3. Выражение (6) основывается на допущении, что в пределах промежутка времени (τ_{g-1}, τ_g) имеет место закон наложения.

О мгновенном изменении фактора

Изменение фактора называется мгновенным, если изменение происходит в промежутке времени $\Delta\tau \to 0$. Экспериментальное определение действия такого мгновенного изменения фактора и применение соответствующих дан-

[1] Отсюда видно, что в [16] стр. 4 формула (1) базируется на допущениях, которые там не отмечаются.

ных в расчетах окажется обычно неудобным. Поэтому представляет интерес определить наибольший промежуток времени $\Delta\tau > 0$, при котором изменение фактора, происходящее в течение времени $\Delta\tau$, можно считать мгновенным.

Предположим, что Y_{*g} — монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция от τ и монотонно возрастающая функция от X; $X(\tau)$ — монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция от $\tau (\tau_{g-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_g)$.

Если $\Delta\tau = \tau_g - \tau_{g-1} \to 0$, тогда

$$\Delta Y(t)_{\Delta\tau\to 0} \to Y_{*g}[\tau_g, X(\tau_g), t] - Y_{*g}[\tau_g, X(\tau_{g-1}), t].$$

Если при $\Delta\tau > 0$

$$Y_{*g}[\tau_g, X(\tau_g), t] - Y_{*g}[\tau_{g-1}, X(\tau_g), t] \to 0$$

при

$$|X(\tau_g)| > |X(\tau_{g-1})|,$$

или (7)

$$Y_{*g}[\tau_g, X(\tau_{g-1}), t] - Y_{*g}[\tau_{g-1}, X(\tau_{g-1}), t] \to 0$$

при

$$|X(\tau_g)| < |X(\tau_{g-1})|,$$

тогда на основе принятых предположений

$$Y_{*g}[\tau_g, X(\tau), t] \to Y_{*g}[\tau, X(\tau), t] \quad (\tau_{g-1} \leq \tau \leq \tau_g).$$

Из (5) в этом случае вытекает, что при $\Delta\tau > 0$

$$\Delta_g Y(t)_{\Delta\tau>0} \to Y_{*g}[\tau_g, X(\tau_g), t] - Y_{*g}[\tau_g, X(\tau_{g-1}), t] \to \Delta_g Y(t)_{\Delta\tau\to 0}$$

При принятых предположениях в отношении функций Y_{*g} и $X(\tau)$ отсюда следует, что если выполнены условия (7), то изменение фактора в промежутке времени (τ_{g-1}, τ_g) можно считать мгновенным.

2. Выражение фактора

Выражение фактора аналогично выражению действия (6):

$$X(t)=X_{*0}[\tau_0,Y(\tau_0),t]+\sum_{g=1}^{h}\int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g}\frac{\partial}{\partial Y(t)}X_{*g}[\tau,Y(\tau),t]\cdot\frac{d}{d\tau}Y(\tau)\cdot d\tau. \tag{8}$$

Если в промежутке времени (τ_{g-1},τ_g) имеет место закон наложения, то X_{*g} — фактор при действии, которое остается постоянным в промежутке времени (τ, t), $\tau\geqslant\tau_{g-1}$. В выражении фактора (8) функции X_{*g} и $Y(\tau)$ должны отвечать условиям, аналогичным тем, которые установлены относительно Y_{*g} и $X(\tau)$ при выводе формулы действия (6).

Фактор $X(t)$ можно определить либо из выражения (6), либо из (8). При этом выражения (6) и (8) могут дать значения фактора, несколько отличающиеся друг от друга. Причина этого — в допущении, на котором базируются выражения (6) и (8), т. е. принято, что в отдельные промежутки времени (τ_{g-1},τ_g) действует закон наложения.

Обычно известна только одна из функций X_* и Y_*. Если, например, известно только Y_*, тогда для определения фактора $X(t)$, необходимо решить уравнение (6), котое является нелинейным интегральным уравнением типа Вольтерра. Методы решения уравнения (6) рассматриваются в следующей главе. Они применимы также при решении уравнения (8) относительно действия $Y(t)$.

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАКТОРА ИЗ ВЫРАЖЕНИЯ ДЕЙСТВИЯ

1. Упрощение задачи

Пусть известны следующие функции:

$$Y=Y[t,X(t)]$$

и

$$Y_{*g}=Y_{*g}[\tau,X,t]\quad(g=0,1,2,\ldots,h),$$

где фактор $X(t)$ — неизвестная функция времени t, Y —

действие фактора X(t). На основе первой части, фактор X(t) можно определить из следующего выражения действия:

$$Y[t, X(t)] = Y_{*0}[\tau_0, X(\tau_0)t] + \sum_{g=1}^{h} \int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_{*g}[\tau, X(\tau), t] \cdot \frac{d}{d\tau} X(\tau) \cdot d\tau. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) можно построить по отдельным промежуткам времени, продолжительность которых выбирается произвольно. Например, пусть известны значения фактора $X(\tau)$ в промежутке времени (τ_0, τ_{g-1}). Тогда значения фактора $X(\tau)$ в промежутке времени (τ_{g-1}, τ_g) можно найти из следующего уравнения:

$$Y_g[t, X(t)] = Y_{*g}[\tau_{g-1}, X(\tau_{g-1}), t] + \int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g = t} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_{*g}[\tau, X(\tau), t] \frac{d}{d\tau} X(\tau) \cdot d\tau, \tag{10}$$

где $Y_g[t, X(t)]$ известная функция времени t и фактора X(t), определяемая из следующей формулы:

$$Y_g[t, X(t)] = Y[t, X(t)] - Y_{*0}[\tau_0, X(\tau_0), t] + Y_{*g}[\tau_{g-1}, X(\tau_{g-1}), t] - \sum_{j=1}^{g-1} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_{*j}[\tau, X(\tau), t] \cdot \frac{d}{d\tau} X(\tau) d\tau$$

где $t = \tau$.

Решение уравнения (10) сводится к решению уравнения (11):

$$Y(t) = Y_*[\tau_a, X(\tau_a), t] + \int_{\tau_a}^{t} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*[\tau, X(\tau), t] \cdot \frac{d}{d\tau} X(\tau) \cdot d\tau, \tag{11}$$

где τ_a — начальный момент наблюдаемого частичного промежутка времени, $Y(t)$ — какая-нибудь целесообразно выбранная функция времени t и

$$Y_*[\tau, X(\tau), t] = Y_{*g}[\tau, X(\tau), t] - Y_g[t, X(\tau)] + Y(t). \quad (11a)$$

Действительно, на основе уравнения (10) можем написать:

$$\begin{aligned} Y(t) = {} & Y_{*g}[\tau_{g-1}, X(\tau_{g-1}), t] - Y_g[t, X(t)] + Y(t) + \\ & + \int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g = t} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_{*g}[\tau, X(\tau), t] \cdot \frac{d}{d\tau} X(\tau) \cdot d\tau = \\ & = Y_{*g}[\tau_{g-1}, X(\tau_{g-1}), t] - Y_g[t, X(\tau_{g-1})] + Y(t) + \\ & + \int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g = t} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} \left\{ Y_{*g}[\tau, X(\tau), t] - Y_g[t, X(\tau)] \right\} \frac{d}{d\tau} X(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11b)$$

Имея в виду обозначение (11a) и зная, что

$$\frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y(t) = 0,$$

получаем от (11b) уравнение (11).

2. Способ среднего значения

Теорема о среднем значении

Если $X(\tau)$ является непрерывной, монотонно возрастающей или монотонно убывающей функцией времени τ и если

$$\frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*[\tau, X(\tau), t]$$

является непрерывной, монотонно возрастающей или монотонно убывающей функцией времени τ и $X(\tau)$ при любом значении $t\,(t \geqslant \tau)$, то всегда имеется такое среднее значение ξ времени τ $(\tau_0 \leqslant \xi \leqslant t)$, при котором имеет место следующее равенство:

$$\int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*[\tau, X(\tau), t] \cdot \frac{d}{d\tau} X(\tau) \cdot d\tau = \\ = Y_*[\xi, X(t), t] - Y_*[\xi, X(\tau_0), t]. \tag{12}$$

Доказательство

Рассмотрим случай монотонно возрастающей функции. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*[\tau_0, X(\tau), t] \leqslant \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*[\tau, X(\tau), t] \leqslant \\ \leqslant \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*[t, X(\tau), t]. \tag{13}$$

Из неравенств (13) вытекает (если $\frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*$ является монотонно возрастающей функцией от $X(\tau)$, что

$$\int_{X(\tau_0)}^{X(t)} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*[\tau_0, X(\tau), t] \cdot dX(\tau) \leqslant \int_{X(\tau_0)}^{X(t)} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*[\tau, X(\tau), t] \cdot dX(\tau) \leqslant \\ \leqslant \int_{X(\tau_0)}^{X(t)} \frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*[t, X(\tau), t] \cdot dX(\tau)$$

или

$$Y_*[\tau_0, X(t), t] - Y_*[\tau_0, X(\tau_0), t] \leqslant Y_*[\tau, X(t), t] - Y_*[\tau, X(\tau_0), t] \leqslant \\ \leqslant Y_*[t, X(t), t] - Y_*[t, X(\tau_0), t]. \tag{14}$$

На основе условий, установленных в отношении $\frac{\partial}{\partial X(\tau)} Y_*$ и $X(\tau)$ из неравенств (13) вытекают также следующие неравенства:

$$\int_{\tau_0}^{t}\frac{\partial}{\partial X(\tau)}Y_*[\tau_0,X(\tau),t]\frac{d}{d\tau}X(\tau)\cdot d\tau \leqslant$$

$$\leqslant\int_{\tau_0}^{t}\frac{\partial}{\partial X(\tau)}Y_*[\tau,X(\tau).t]\frac{d}{d\tau}X(\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant\int_{\tau_0}^{t}\frac{\partial}{\partial X(\tau)}Y_*[t,X(\tau),t]\frac{d}{d\tau}X(\tau)\cdot d\tau ,$$

или

$$Y_*[\tau_0,X(t),t]-Y_*[\tau_0,X(\tau_0),t]\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\tau_0}^{t}\frac{\partial}{\partial X(\tau)}Y_*[\tau,X(\tau),t]\cdot\frac{d}{d\tau}X(\tau)\cdot d\tau \leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant Y_*[t,X(t),t]-Y_*[t,X(\tau_0),t].$$

Поскольку крайние значения среднего выражения в неравенстве (14) равны крайним значениям среднего выражения в неравенстве (15) и Y_* является непрерывной функцией времени τ, из неравенств (14) и (15) следует, что действительно имеется такое $\tau=\xi$, при котором выполняется равенство (12).

Аналогично доказывается теорема о среднем значении при монотонно убывающей функции.

Способ среднего значения [1]

Допустим, что длительность частичного промежутка времени (τ_{g-1}, τ_g) такова, что является возможным выбрать с достаточной точностью предполагаемое среднее значение ξ_g, где

$$\tau_{g-1}\leqslant \xi_g \leqslant \tau_g$$

[1] Предложение применить способ среднего значения (метод Крылова—Боголюбова в линейной теории ползучести сделано Швецовым [9].

Применяя теорему о среднем значении, получим из уравнения (9), что

$$Y[t,X(t)]\cong Y_{*0}[\tau_0,X(\tau_0),t]+\sum_{g=1}^{h}\{Y_{*g}[\xi_g,X(\tau_g),t]-$$

$$-Y_{*g}[\xi_g,X(\tau_{g-1}),t]\},\tag{20}$$

где $t=\tau_h$.

Если известны значения фактора $X(\tau_0)$ и $X(\tau_g)$ $(g=1,2,\ldots,h-1)$, тогда значение фактора $X(t)$, $(t=\tau_h)$ определяется из следующего алгебраического уравнения:

$$Y[t,X(t)]-Y_{*h}[\xi_h,X(t),t]=\sum_{g=1}^{h}\{Y_{*g-1}[\xi_{g-1},X(\tau_{g-1}),t]-$$

$$-Y_{*g}[\xi_g,X(\tau_{g-1}),t]\}.\tag{20a}$$

Решая уравнение (9) два раза и принимая при этом один раз $\xi=\tau_{g-1}$ и другой раз $\xi_g=\tau_g$, получаем границы, в пределах которых находится точное значение фактора.

Пример.

Пусть

$$Y_*[\tau,X(\tau),t]=X(\tau)\frac{t-\tau+2}{t-0{,}2X(\tau)+5},$$ [1]

$$Y[t,X(t)]=Y(t)=const=10,\quad t=15,\quad \tau_0=5.\tag{21}$$

На основе (21) уравнение (20) приобретает вид

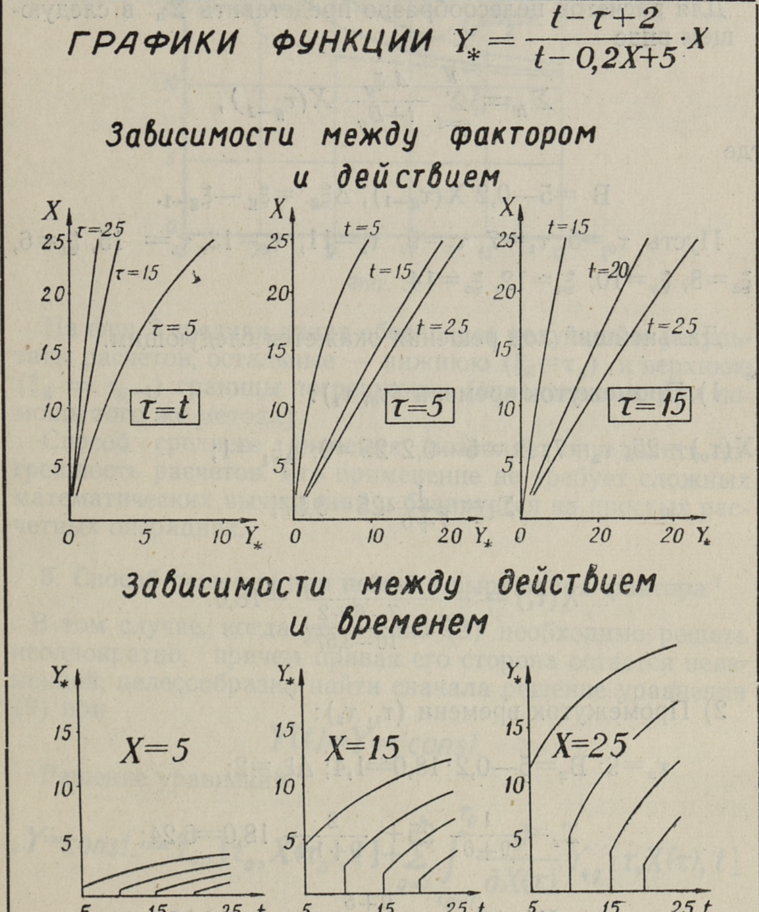
$$10-X(t)\frac{t-\xi_h+2}{t-0{,}2X(t)+5}=$$

$$=\sum_{g=1}^{h}\left[\frac{t-\xi_{g-1}+2}{t-0{,}2X(\tau_{g-1})+5}X(\tau_{g-1})-\frac{t-\xi_g+2}{t-0{,}2X(\tau_{g-1})+5}X(\tau_{g-1})\right].$$

[1] См. фиг. 2.

Отсюда следует, что

$$X(t)=\frac{t+5}{0{,}2+\dfrac{t-\xi_h+2}{10-\Sigma_h}},$$



Фиг. 2. Этот вид функции Y_* можно применять для описания деформативных свойств бетона. Если здесь $Y=\sigma$, $X=\varepsilon$ и $t=t(z)$ (z — время в днях), тогда эта формула позволяет учитывать, что зависимость деформации бетона от напряжения, которая в раннем возрасте бетона нелинейная, при твердении бетона изменяется почти линейной.

где

$$\Sigma_h = \sum_{g=1}^{h} \left[\frac{t-\xi_{g-1}+2}{t-0{,}2X(\tau_{g-1})+5} - \frac{t-\xi_g+2}{t-0{,}2X(\tau_{g-1})+5} \right] \cdot X(\tau_{g-1}).$$

Для расчетов целесообразно представить Σ_h в следующем виде

$$\Sigma_h = \sum_{g=1}^{h} \frac{\Delta \xi_g}{t+B_g} X(\tau_{g-1}),$$

где

$$B = 5-0{,}2\,X(\tau_{g-1}),\ \Delta\xi_g = \xi_g - \xi_{g-1}.$$

Пусть $\tau_0=5$, $\tau_1=7$, $\tau_2=9$, $\tau_3=11$, $\tau_4=13$, $\tau_5=15$, $\xi_1=6$, $\xi_2=8$, $\xi_3=10$, $\xi_4=12$, $\xi_5=14$.

Дальнейший ход решения окажется следующим.

1) Промежуток времени (τ_0, τ_1):

$X(\tau_0)=25$; $\tau_1=7$; $B_1=5-0{,}2\cdot 25=0$; $\Delta\xi_1=1$;

$$\Sigma_1 = \frac{1}{7+0}\,25 = 3{,}57;$$

$$X(\tau_1) = \frac{7+5}{0{,}2+\dfrac{7-6+2}{10-3{,}57}} = 18{,}0.$$

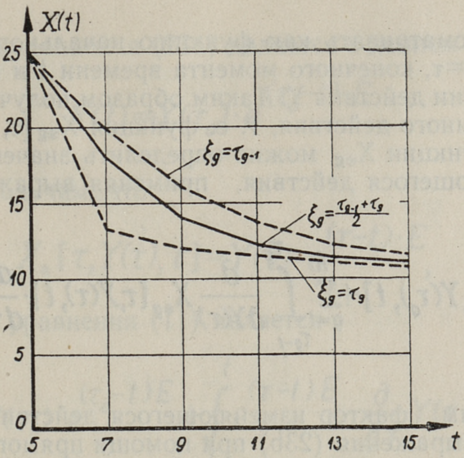
2) Промежуток времени (τ_1, τ_2):

$\tau_2=9$; $B_2=5-0{,}2\cdot 18{,}0=1{,}4$; $\Delta\xi_2=2$;

$$\Sigma_2 = \frac{1}{9+0}\,25 + \frac{2}{9+1{,}4}\,18{,}0 = 6{,}24;$$

$$X(\tau_2) = \frac{9+5}{0{,}2+\dfrac{9-8+2}{10-6{,}24}} = 14{,}05.$$

Аналогично получаем, что $X(\tau_3)=12{,}19$, $X(\tau_4)=11{,}30$ $X(\tau_5)=10{,}97$



Фиг. 3.

На фиг. 3 средняя линия обозначает полученные результаты расчетов, остальные — нижнюю ($\xi_g=\tau_g$) и верхнюю ($\xi_g = \tau_{g-1}$) границы погрешности (определенные при помощи того же метода).

Способ среднего значения позволяет определить погрешность расчетов. Его применение не требует сложных математических вычислений и базируется на простых расчетных операциях.

3. Способ решения при помощи выражения фактора [1]

В том случае, когда уравнение (9) необходимо решать неоднократно, причем правая его сторона остается неизменной, целесообразно найти сначала решение уравнения (9) при

$$Y(t)=Y=const.$$

Решение уравнения

$$Y=const.=Y_{*0}[\tau_0,X(\tau_0),t]+\sum_{g=1}^{h}\int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g}\frac{\partial}{\partial X(\tau)}Y_{*g}[\tau,X(\tau),t]\cdot\frac{d}{d\tau}X(\tau)\cdot d\tau \qquad (23a)$$

[1] О применении напряжений релаксации бетона в теории ползучести бетона см. [10].

можно рассматривать как функцию начального момента времени $\tau_0=\tau$, конечного момента времени t и постоянного во времени действия Y. Таким образом получается фактор постоянного действия, т. е. функция $X_{*g}[\tau, Y, t]$. При помощи функции X_{*g} можно определить значение фактора изменяющегося действия, применяя выражение фактора:

$$X(t)=X_{*0}[\tau_0, Y(\tau_0), t]+\sum_{g=1}^{h}\int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g}\frac{\partial}{\partial Y(\tau)}X_{*g}[\tau, Y(\tau), t]\cdot\frac{d}{d\tau}Y(\tau)\cdot d\tau. \tag{23b}$$

Как видим, фактор изменяющегося действия определяется из выражения (23b) при помощи прямого интегрирования.

Никаких затруднений не представляет определение фактора из следующего выражения, базирующегося на теореме о среднем значении

$$X(t)\approx X_{*0}[\tau_0, Y(\tau_0), t]+\sum_{g=1}^{h}\Big\{X_{*g}[\xi_g, Y(\tau_g), t]- \tag{23c}$$

$$-X_{*g}[\xi_g, Y(\tau_{g-1}), t]\Big\}.$$

Вопрос о точном решении уравнения (23a) остается в настоящей статье открытым. Для приближенного определения аналитического вида функции $X_*(\tau, Y, t)$ можно применять семейство решений уравнения (23a), полученных при помощи способа среднего значения и отвечающих различным значениям τ_0 и Y. Способ решения при помощи выражения фактора окажется более эффективным в тех случаях, когда удается решить уравнение (23a) аналитическим — хотя бы приближенным путем.

Пример 1.

Пусть
$$Y_*=(t-\tau+\frac{1}{E})\cdot X,^{1)}$$

где E — некоторая постоянная.

---

[1] Если $Y=\varepsilon$, $Y=\sigma$ и $t=t(z)$ (z — время в днях), тогда эта формула представляет выражение деформации бетона, широко примененное при расчетах железобетонных конструкций по линейной теории ползучести бетона (см. напр. [11,, 12, 13]).

Решением уравнения (23а) является в данном случае

$$X(t)=Y(\tau_0)\cdot e^{(\tau_0-t)\cdot E}.$$

Отсюда получим, что

$$X_*[\tau,Y(\tau),t]=Y(\tau)\cdot e^{(\tau-t)\cdot E},$$

и решением уравнения (11) является

$$X(t)=Y(\tau_0)\,e^{(\tau_0-t)E}+\int_{\tau_0}^{t} e^{(\tau-t)E}\,\frac{\partial}{\partial\tau}Y(\tau)\,d\tau$$

Пример 2.

Рассмотрим решение уравнения (11), если Y_* определено формулой (21). Для решения уравнения (11) в случае, когда

$$Y=const,$$

допустим, что

$$\frac{X(t)}{t-0{,}2X(t)+5}\approx\frac{\varphi(t)}{t-0{,}2\cdot\varphi(\tau_0)+5}$$

откуда получается, что

$$X(t)\approx\frac{\varphi(t)}{1+\frac{1}{5(t+5)}[\varphi(t)-\varphi(\tau_0)]} \tag{24}$$

В этом случае уравнение (11) имеет следующий вид:

$$Y=const\cong\frac{(t-\tau_0+2)\varphi(\tau_0)}{t-0{,}2\varphi(\tau_0)+5}+\int_{\tau_0}^{t}\frac{t-\tau+2}{t-0{,}2\varphi(\tau_0)+5}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(\tau)\cdot d\tau. \tag{24a}$$

Отсюда при помощи дифференцирования получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решением которого является

$$\varphi(t)=Y\left(1+\frac{\tau_0+3-0{,}2Y}{2+0{,}2Y}\,e^{\frac{\tau_0-t}{2}}\right). \tag{25}$$

Из (24) и (25) вытекает, что

$$X_*[\tau,Y,t]\cong\frac{\varphi_*(\tau,Y,t)}{1+\frac{1}{5(t+5)}\left[\varphi_*(\tau,Y,t)-\varphi_*(\tau,Y,\tau)\right]},$$

где

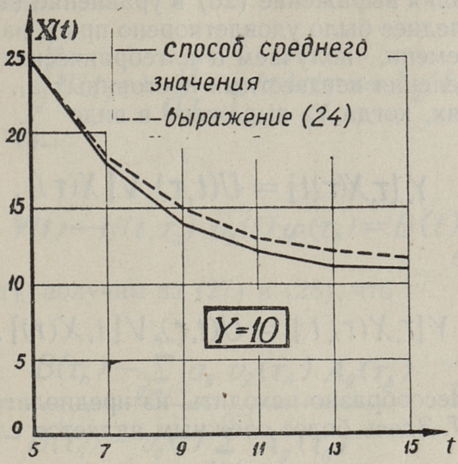
$$\varphi_*[\tau,Y,t]=Y\left(1+\frac{\tau+3-0{,}2Y}{2+0{,}2Y}\right)e^{\frac{\tau-t}{2}}.$$

Для определения значений фактора при $Y(t)\neq\text{const.}$ можно теперь применять выражение (23c), где

$$X_*[\xi_g,Y(\tau_g),t]\cong$$

$$\cong\frac{\varphi_*[\xi_g,Y(\tau_g),t]}{1+\frac{1}{5(1+5)}\left\{\varphi_*[\xi_g,Y(\tau_g),t]-\varphi_*[\xi_g,Y(\tau_g),\xi_g]\right\}}.$$

Чтобы получить представление об условиях применения и точности приближенного выражения (24), сравним расчетные результаты, полученные при помощи выражения (24) и при помощи способа среднего значения (см. стр. 17).



Фиг. 4.

Как видно из фиг. 4, разница расчетных результатов, полученных при помощи этих способов, является незначительной, когда $t \leqslant 15$ и $Y \leqslant 10$.

4. Способ решения при помощи предполагаемого вида фактора [1]

Способ решения при помощи предполагаемого вида фактора является эффективным тогда, когда известен приблизительный функциональный вид фактора, и необходимо лишь уточнить его.

Предположение в отношении функционального вида фактора можно делать прямо или косвенно. В первом случае предполагается, что в каком-нибудь промежутке времени (τ_{g-1}, τ_g) фактор выражается в следующем виде

$$X(\tau) = X(\tau_{g-1}) + \sum_{i=1}^{n} u_i(\tau, a_i), \qquad (26)$$

где $u_i(\tau, a_i)$ является известной функцией τ, которая содержит неизвестную постоянную a_i.

---

[1] Предложение применить такой способ в теории ползучести бетона сделано Будановым [12].

Подставляя выражение (26) в уравнение (11) и требуя, чтобы последнее было удовлетворено при n различных моментах времени, получаем n алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных a_i.

В случаях, когда Y_* выражено в виде

$$Y_*[\tau, X(\tau), t] = U(t,\tau)\ V[X(\tau)],$$

или в виде

$$Y[\tau, X(\tau), t] = U(t,\tau)\ V[t, X(\tau)],$$

иногда целесообразно исходить из предполагаемого вида функции V. Здесь более сложным является случай, когда

$$V = V[t, X(\tau)].$$

В этом случае можно применить следующий прием. Допустим, что в промежутке времени (τ_{g-1}, τ_g)

$$\frac{\partial}{\partial\tau} V[\tau, X(\tau)] \cong a_g \cdot v_g(t) \frac{\partial}{\partial\tau} \varphi(\tau), \tag{26a}$$

где a_g — известная постоянная, $v_g(t)$ — целесообразно выбранная функция и $\varphi(\tau)$ — решение следующего уравнения:

$$Y(t) = U(t,\tau_0) \cdot v_0(t) \cdot \varphi(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t} U(t,\tau) \cdot v_0(t) \cdot \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau) \cdot d\tau, \tag{27}$$

где $v_0(t) = v_{g=0}(t)$. Если удастся решить уравнение (27), то неизвестные постоянные a_g можно определить теперь из следующего уравнения:

$$Y(t) = U(t,\tau_0) \cdot v_0(t) \cdot \varphi(\tau_0) + \sum_{g=1}^{h} a_g \cdot v_g(t) \cdot \int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g} U(t,\tau) \cdot \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau) \cdot d\tau. \tag{28}$$

Обозначим

$$\int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g} U(t,\tau)\cdot\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau)\cdot d\tau = A_g(t)$$

и

$$Y(t) - U(t,\tau_0)\cdot v_0(t)\cdot\varphi(\tau_0) = B(t).$$

При $t=\tau_h$ получим из (27) и (28), что

$$a_h = \frac{B(\tau_h) - \sum_{g=1}^{h-1} a_g\, v_g(\tau_h)\, A_g(\tau_h)}{B(\tau_h) - v_0(\tau)\sum_{g=1}^{h-1} A_g(\tau_h)}\cdot\frac{v_0(\tau_h)}{v_h(\tau_h)}. \quad (29)$$

Из формулы (29) находим, что

$$a_1 = \frac{B(\tau_1)}{B(\tau_1)}\cdot\frac{v_0(\tau_1)}{v_1(\tau_1)} = \frac{v_0(\tau_1)}{v_1(\tau_1)},$$

$$a_2 = \frac{B(\tau_2) - \frac{v_0(\tau)}{v_1(\tau_1)}\, v_1(\tau_2)\cdot A_1(\tau_2)}{B(\tau_2) - v_0(\tau_2)\cdot A_1(\tau_2)}\,\frac{v_0(\tau_2)}{v_2(\tau_2)} \approx \frac{v_0(\tau_2)}{v_2(\tau_2)}$$

и с небольшой погрешностью

$$a_h \cong \frac{v_0(\tau_h)}{v_h(\tau_h)}. \quad (30)$$

$X(t)$ можно теперь определить из следующего уравнения, вытекающаго из (26а)

$$V[X(t),t] \cong V[X(\tau_0),t] + \sum_{g=1}^{h}\frac{v_0(\tau_0)}{v_g(\tau_g)}\, v_g(t)[\varphi(\tau_g) - \varphi(\tau_{g-1})]. \quad (31)$$

Пример.

1) Пусть Y_* определено формулой (21), т. е.

$$Y_*[\tau, X(\tau), t] = \frac{t-\tau+2}{t-0{,}2X(\tau)+5}\, X(\tau),$$

$$Y[X(t), t] = Y = const = 10 \quad \text{и} \quad \tau_0 = 5.$$

В данном случае

$$U(t,\tau) = t-\tau+2$$

$$V[t, X(\tau)] = \frac{X(\tau)}{t-0{,}2X(\tau)+5}\,. \tag{32}$$

Пусть в промежутке времени

$$\frac{\partial}{\partial\tau} V[t, X(\tau)] \approx \frac{\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau)}{t-0{,}2X(\xi_g)+5}\, a_g, \tag{32a}$$

где a_g постоянная, определяемая по формуле (30),

$$\tau_{g-1} \leqslant \xi_g \leqslant \tau_g\,.$$

Из (26а) и (32а) вытекает, что

$$v_g(t) = \frac{1}{t-0{,}2\varphi(\xi_g)+5}\,.$$

Принимая

$$v_0(t) = \frac{1}{t-0{,}2X(\tau_0)+5} = \frac{1}{t-0{,}2\varphi(\tau_0)+5},$$

тогда уравнения (24а) и (27) являются идентичными и $\varphi(\tau)$ определяется формулой (25).

Из формулы (25) находим, что

$\varphi(5) = 25$; $\varphi(6) = 19{,}12$; $\varphi(7) = 15{,}48$;
$\varphi(9) = 12{,}13$; $\varphi(15) = 10{,}00$.

Из формулы (24) находим значения фактора в первом приближении: $X(5)=25$; $X(6)=21{,}4$; $X(7)=18{,}4$; $X(9)=14{,}9$ и $X(15)=11{,}78$.

На основании этого возьмем следующие значения: $X(\xi_0)=25$; $X(\xi_1)=23$; $X(\xi_2)=20$; $X(\xi_3)=17{,}5$; $X(\xi_4)=14$.

На основе (31) можно теперь написать (принимая $\tau_0=5$; $\tau_1=6$; $\tau_2=7$; $\tau_3=9$; $\tau_4=15$), что

$$V[X(15),\,15]=\frac{25}{15}-\frac{6{,}4}{6}\cdot\frac{1}{15{,}4}(25-19{,}12)-$$

$$-\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{16}(19{,}2-15{,}48)-\frac{10{,}5}{9}\cdot\frac{1}{16{,}5}(15{,}48-12{,}13)-$$

$$-\frac{17{,}2}{15}\cdot\frac{1}{17{,}2}(12{,}13-10{,}0)=0{,}631$$

и из (32) вытекает, что во втором приближении

$$X(15)\cong\frac{0{,}631\ (15+5)}{1+0{,}2\cdot 0{,}631}=11{,}20.$$

Разность 1-го и 2-го приближений

$$\Delta=\frac{11{,}78-11{,}20}{11{,}20}\cdot 100=5{,}18\%.$$

Разность 2-го приближения и результата, полученного при помощи способа среднего значения (стр. 16):

$$\Delta=\frac{11{,}20-10{,}97}{10{,}97}\cdot 100=2{,}19\%.$$

III. К РАСЧЕТУ БАЛОК НА ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ [1]

Как пример применения способов, полученных в предыдущих частях, рассмотрим стержень под действием продольной и поперечной нагрузки. Пусть

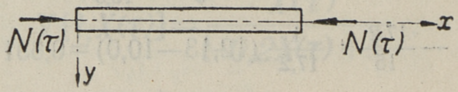
$$y=y(x,t)$$

[1] Об этом вопросе см. тоже [14, 15].

поперечнсе перемещение продольной оси балки на месте x. На основе выражения действия (6) можно написать, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = -Y_{*0}\{x, t, \tau_0, X[x, \tau_0, y(x,\tau_0)]\} -$$

$$-\sum_{g=1}^{h} \int_{\tau_{g-1}}^{\tau_g} \frac{\partial}{\partial X} Y_{*g}\{x, t, \tau, X[x, \tau, y(x,\tau)]\} \cdot \frac{d}{d\tau} X[x, \tau, y(x,\tau)] \cdot d\tau. \tag{33}$$



Фиг. 5.

Здесь

$$X[x, \tau, y(x,\tau)] = M(x,\tau) + y(x,\tau) \cdot N(\tau), \tag{34}$$

где $M(x, \tau)$ — изгибающий момент поперечной нагрузки и $N(\tau)$ — продольная сила стержня (фиг. 5); функция Y_{*g} описывает деформативные свойства стержня.

На основе теоремы о среднем значении можно написать, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) \approx -Y_{*0}\{x, t, \tau_0, X[x, \tau_0, y(x,\tau_0)]\} -$$

$$-\sum_{g=1}^{h} \Big[Y_{*g}\{x, t, \xi_g, X[x, \tau_g, y(x,\tau_g)]\} - Y_{*g}\{x, t, \xi_g, X[x, \tau_{g-1}, y(x,\tau_{g-1})]\} \Big],$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) + Y_{*h}\{x, t, \xi_h, X[x, t, y(x,t)]\} \cong a_h(x,t), \tag{35}$$

где $a_h(x, t)$ является известной функцией, если значения фактора $X(\tau_i)$, при $\tau_0 \leqslant \tau_i \leqslant \tau_{h-1}$ являются известными,

$$a_h(x,t) = -Y_{*0}\left\{x, t, \tau_0, X[x, \tau_0, y(x, \tau_0)]\right\} -$$

$$-\sum_{g=1}^{h-1}\left[Y_{*g}\left\{x, t, \xi_g, X[x, \tau_g, y(x, \tau_g)]\right\} - Y_{*g}\left\{x, t, \xi_g, X[x, \tau_{g-1}, y(x, \tau_{g-1})]\right\}\right] +$$

$$+Y_{*h}\left\{x, t, \xi_h, X[x, \tau_{h-1}, y(x, \tau_{h-1})]\right\}.$$

Таким образом, решение уравнения (33) сводится к повторному решению уравнения (35), которое является дифференциальным уравнением второго порядка.

Учитывая, что продолжительность отдельного промежутка времени (τ_{g-1}, τ_g) выбирается произвольно, и что нелинейная зависимость между напряжением и деформацией вытекает только из деформации ползучести (см. [1]) возможно применение отдельных промежутков времени, при которых можно допустить, что

$$Y_{*g}\left\{x, t, \tau, X_*[x, \tau, y(x, \tau)]\right\} \cong K_g(x, t, \tau) \cdot X[x, t, y(x, \tau)],$$

где функция $K_g(x, t, \tau)$ описывает деформативные свойства стержня.

Из (35) получим в этом случае, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) + K_h(x, t, \xi_h) \cdot X[x, t, y(x, \xi_h)] \cong a_h(x,t),$$

или, имея в виду выражение (34), что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) + y(x,t) \cdot N(t) \cdot K_h(x, t, \xi_h) \cong a_h(x,t) - \qquad (36)$$

$$-M(t,x) \cdot K_h(x, t, \xi_h).$$

Таким образом, решение уравнения (33) сводится к повторному решению линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Если поперечное сечение стержня окажется постоянным и материал стержня однородным, тогда

$$K_h(x, t, \xi_h) = K_h(t, \xi_h)$$

и уравнение (36) сводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. Общим видом этого уравнения является

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) - \lambda^2 \cdot y(x) \cong f(x), \tag{36}$$

где

$$\lambda^2 = -N(t) \cdot K_h(t, \xi_h), \quad f(x) = a_h(x, t) - M(t, x) \cdot K_h(t, \xi_h)$$

и общим решением этого уравнения является

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + \frac{1}{2\lambda} \int e^{\lambda |x-u|} \cdot f(u) \cdot du,$$

где C_1 и C_2 — коэффициенты интегрирования, определяемые из граничных условий.

Заключение

В данной статье приводятся зависимости, позволяющие более уточненно учитывать деформативные свойства бетона. Применение уточненных зависимостей при приближенных вычислениях не представляет особых трудностей. Выведенные в статье расчетные способы применимы и при других физических явлениях вне области теории ползучести бетона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. 1952.
2. Манукян М. М. Напряженное состояние в сжатых железобетонных элементов с учетом нелинейной ползучести бетона. Изв. АН Арм. ССР (серия ФМЕТ наук), № 1, 1954.
3. Манукян М. М. Усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона, Изв. АН Арм. МИР (серия ФМЕТ наук), № 3, 1954.
4. Манукян М. М. Опеределение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона, Изв. АН Арм. ССР (серия ФМЕТ наук), № 6, 1954.
5. Васильев П. И. Об использовании последственных теорий для описания законов деформирования бетона. Известия Всесоюзного научно-исследовательского института гидротехники, том 53, 1955, стр. 292.
6. Фрайфельд С. Е. Основные вопросы теории деформаций бетона; Совещание по теории расчета и конструированию железобетона. Тезисы докладов. Москва—1956.
7. Фрайфельд С. Е. Об исходных предпосылках уравнений механического состояния реальных материалов (Труды Харьковск. Инж.-строит. ин-та, 1955, вып. 4, 15—69).
8. Блинков В. В. Исследование ползучести бетона при повторных длительно действующих нагрузках (автореферат), 1954.
9. Швецов А. В. Метод определения собственных напряжений в бетонных и железобетонных элементах с учетом изменяемости во времени деформативных свойств бетона (автореферат), 1951.
10. Васильев П. И. Приближенный способ учета деформаций ползучести при определении температурных напряжений в бетонных массивных плитах. Известия Всесоюзн. Н.-И. института гидротехники, том 47, 1952.
11. Улицкий И. И. Расчет бетонных и железобетонных арочных и комбинированных конструкций с учетом длительных процессов, 1950.
12. Буданов Н. А. Расчет железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона, 1949.
13. Леонгард Ф. Напряженно армированный железобетон и его практическое применение. 1957.

14. Фельдман М. Р. Продольный изгиб стержня с учетом пластического последействия. Известия АН Арм. ССР, серия ФМЕТ наук, том IX, № 1, 1956.

15. Розовский М. И. Полусимволический способ решения некоторых задач теории ползучести. Известия АН Арм. ССР, серия ФМЕТ наук, т. IX, № 5, 1956.

16. Кийсс И. А. К расчету железобетонных конструкций с учетом ползучести и релаксации бетона. Труды Таллинского политехнического института № 96, 1957.

17. Васильев П. И. Пластические свойства бетона и их влияние на работу бетонных сооружений. 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

И. А. Кийсс
К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА
Издательство
Таллинского Политехничнского Института
*
Редактор Х. Лауль
Технический редактор А. Тамм
Корректор В. Мянд

Сдано в набор 21. IV 1958. Подписано к печати 23. V 1958. Бумага 54×84 1/16. Печатных листов 2,0. По формату 60×92 печатных листов 1,64. Учетно-издательских листов 0,95. Тираж 800. МВ-03864.
Заказ № 3161.
Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк 2.

Цена 70 коп.

Цена 70 коп.