TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 366

ТРУДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

ХУ

Обработка информации

Функциональный анализ

ТАЛЛИН 1974

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№366 1974

ТРУДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

ХУ

Обработка информации

Функциональный анализ

Таллин 1974

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 366 1974

УДК 681.3

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ АНАЛИЗА ДАННЫХ

Л.К. Быханду

I. Введение

Хотя методы анализа данных развиваются уже со времен Гаусса, последние десятилетия привели к революционным событиям в этой области. Появление ЭВМ дало возможность использовать весь арсенал статистических и аналитических методов, который был ранее создан, но ввиду вычислительных трудностей сравнительно мало применялся. Но скоро выяснились первые трудности. Оказалось, что в теории методов анализа данных много нерешенных вопросов. Ограниченный объем быстродействующей памяти ЭВМ делает программы не очень эффективными, и наконец, ограниченная точность вычислений на ЭВМ вместе с плохой обусловленностью метода наименьших квадратов дают часто результаты с низким качеством.

Практика показала, что много неясного было уже в самих основах познания – в измерении. Усилия ученых многих стран были подытожены в элегантной математической форме П. Суппесом и Дж. Зинесом в 1963 году в статье "Основы теории измерения" [I]. Пусть мы имеем конечную последовательность вида $\mathcal{A} = (A, R_1, R_2, \dots, R_n)$, где A – непустое множество объектов, $R_1, R_2, \dots, R_n$ – отношения в A. Такая последовательность называется системой с отношениями. Относительно объектов и отношений в принципе ограничений нет. Приведем один пример такой системы. Множество A – все люди в Таллине, отношение R_1 – такое двухместное отношение в A, что для всех a и b из A отношение aR_1b имеет место в том и только в том случае, если a с b одного пола.

Понятно, что отношения в системе могут быть сколь угодно местными.

Система с отношениями $\mathcal{A} = (A, R_1, \dots, R_n)$ является системой типа s для n-элементной последовательности, положительных чисел, если для каждого $i = 1,\dots,n$ отношение R_i есть m_i-местное отношение. Две системы с отношениями подобны, если они одного типа.

Для теории обработки данных имеет важное значение понятие изоморфизма двух подобных систем с отношениями.

Пусть $\mathcal{A} = (A, R_1, \dots, R_n)$ и $\mathcal{B} = (B, S_1, \dots, S_n)$ подобные системы с отношениями. $\mathcal{B}$ называется изоморфным образом $\mathcal{A}$, если имеется f-взаимно-однозначное отображение A в B, такое, что для каждого $i = 1,\dots,n$ и каждой последовательности $(a_1, \dots, a_{m_i})$ элементов из A отношение $R_i(a_1, \dots, a_{m_i})$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $S_i(f(a_1),\dots, f(a_{m_i}))$. Мы можем просто говорить, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Отсюда вытекает важное для практики следствие. Если эмпирической системе с отношениями соответствует изоморфная числовая система с отношениями, то все изоморфные образы числовой системы являются также моделями эмпирической системы. В практической работе поэтому надо уметь из бесконечного числа изоморфных моделей выбирать те модели, которые легче всего интерпретируемы.

2. Описание системы многомерных объектов

Множество всех наблюдаемых объектов составляет генеральную совокупность. Объекты могут различаться по значениям характеризующих их признаков. Описание объекта - это совокупность значений всех наблюдаемых признаков. Наконец множество всех возможных описаний составляет пространство описаний.

Для моделирования системы объектов можно рассматривать изоморфные числовые системы в разных пространствах. Для наших целей лучше всего подходит действительное линейное векторное пространство.

Каждый объект описывается как элемент O_i m-мерного действительного линейного векторного пространства O. Все элементы O_i имеют m координат

$$O_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}).$$

Допустим, что исследователь имеет данные относительно n объектов. Тогда все данные можно представить в виде $n \cdot m$ -матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}.$$

Эти объекты можно представить как точки в d-размерном эвклидовом пространстве, где $d = \min(m,n)$. Практически во всех таблицах данных имеется избыточность, т.е. взаимоотношения между теми же объектами можно представить в пространстве с меньшей размерностью, чем d. Обычно этот переход совершается так.

I. Вычисляются средние признаков $x_{\cdot j}$ и средние квадратические отклонения s_j. Эта работа требует $O(mn)$ действий.

2. Все столбцы матрицы X нормируются

$$\dot{x}_{ij} = (x_{ij} - x_{\cdot j})/s_j ,$$

так что $\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_{ij} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \dot{x}^2_{ij} = 1$ для всех j. Количество действий $O(mn)$.

3. Вычисляется корреляционная матрица $R = X'X$, это требует $O(nm^2)$ действий.

4. Вычисляются главные компоненты и собственные значения матрицы R ($O(m^3)$ действий).

Янг доказал [7], что если мы имеем дело со множеством функций распределений объектов

$$F = \left\{ f(x),\ E(x) = 0,\ E(x'x) = S \right\},$$

где матрица S имеет собственные значения $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m$ и собственные векторы $u_1, \ldots, u_m$, то наилучшим представлением матрицы X будут новые признаки, которые получаются выбором подпространства, соответствующего первым наибольшим собственным значениям матрицы S.

Метод главных компонент применяют на практике для нахождения линейных комбинаций признаков с большими дисперсиями. Главная компонента, соответствующая наибольшему собственному значению, является такой линейной комбинацией признаков, которая больше всего варьируется на заданной системе объектов. Последним по величине собственным значениям соответствуют линейные комбинации признаков, которые имеют малые дисперсии.

По существу переход к главным компонентам сводится к повороту координатных осей. Именно для нормированной матрицы X существует ортогональное линейное преобразование $U = B'X$, такое, что ковариационная матрица для U будет

$$E(UU') = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$ собственные значения матрицы X, а столбцы матрицы B являются собственными векторами, соответствующими собственным значениям[2].

5. На основании полученных собственных векторов и собственных значений выбирается из них такое их количество, что они с достаточной для практики точностью описывают систему признаков.

6. Для каждого объекта вычисляются значения собственных векторов $O(nm)$ операции, которые анализируются методами факторного анализа (в интерпретационном смысле) или методами регрессионного анализа на главных компонентах [3].

Хотя эта методика принципиально решает задачу анализа данных, препятствием ее широкого применения является трудоемкость вычислений и большой объем требуемой внутренней памяти ЭВМ.

3. <u>Двойственность матрицы данных</u>

Матрица данных $X = (x_{ij})$, $i = 1(1)n$, $j = 1(1)m$ дает нам в руки не только информацию о системе признаков через матрицу $X'X$, а также о системе объектов. Так как собственные значения у матриц $X'X$ и XX' одинаковые [2], то для нахождения собственных векторов матрицы XX' остается только помножить равенство

$$(X'X)z = \lambda z$$

слева на X:

$$XX'Xz = \lambda Xz,$$

т.е. вектор Xz является собственным вектором матрицы XX'. Это простое свойство очень полезно в практической работе.

Найдем ту матрицу $X'X$ или XX', порядок которой меньше. Для этой матрицы вычисляем собственные значения и векторы, а потом легко получить дуальное представление для другой матрицы (дуальное, потому, что например, знание собственных векторов для признаков дает нам сразу и собственные векторы для объектов). Другими словами, собственные векторы дают нам новые координаты объектов. Если ограничиться первыми координатами, то в этой системе объекты, похожие по своим значениям признаков, находятся близко друг к другу.

Но как было сказано, классический метод подходит здесь только в случае не очень большого количества признаков.

4. Новая стратегия анализа структуры таблицы данных

Обычные методы исследования таблиц данных X сводят проблему к матрицам $X'X$ или XX'. С другой стороны, из теории экстремумов квадратичных форм известно следующее. Пусть D - симметрическая матрица порядка $m\times m$, $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m$ - ее собственные числа и $d_1,\ldots,d_m$ соответствующие им собственные векторы. Тогда имеют место простые соотношения

$$D=\lambda_1 d_1 d_1'+\cdots+\lambda_m d_m d_m',$$

$$I=d_1 d_1'+\cdots+d_m d_m'.$$

Дальше имеет место теорема [2]:

Пусть C - какая-либо матрица порядка k, тогда

$$\inf_C \|D-C\|=\sqrt{\lambda_{k+1}^2+\cdots+\lambda_m^2}$$

и $\inf$ достигается, если

$$C=\lambda_1 d_1 d_1'+\cdots+\lambda_k d_k d_k'.$$

Другими словами, среди всех матриц фиксированного ранга k лучшим приближением в эвклидовой норме для матрицы D является именно матрица C, составленная из собственных значений и векторов D.

Нам требуется еще доказать факт, что векторные пространства, порожденные $n\times m$ - матрицей X и матрицей XX' -совпадают. Действительно, если a - вектор-столбец такой, что $a'X=0$, то $a'XX'=0$. Обратно, если $a'XX'=0$, то $a'XX'a=0$ и $a'X=0$. Следовательно, каждый вектор, ортогональный X, ортогонален также XX'. Отсюда следует, что векторные пространства, порожденные столбцами X и XX', совпадают.

Это естественное совпадение векторных пространств X и XX' и особенно стоящая перед нами задача исследования структуры матрицы X, а не XX' или $X'X$ заставляет нас задумываться, нет ли более прямолинейных путей к результату.

Оказывается, такие варианты имеются и они очень эффективные.

Матрица данных $X=(x_{ij})$, $i=1(1)n$, $j=1(1)m$ описывает точки в m-мерном пространстве заданных признаков. Геометрическое истолкование метода главных компонент состоит в нахождении такого ортогонального поворота системы осей, чтобы оси располагались вдоль направлений наибольших разбросов объектов.

Вместо того, чтобы сразу найти оптимальный поворот осей (это требует $O(nm)+O(nm^2)+O(m^3)$ операций), постараемся подойти к оптимальному повороту итеративным путем. Сперва совершаем какой-либо постоянный поворот всего пространства, потом выбираем кандидаты на собственные направления и уточняем эти направления до нужной точности. На первый взгляд здесь трудно что-нибудь выиграть в количестве вычислений. Поворот осей в пространстве означает умножение матрицы данных A на $m\times m$-матрицу поворота P, что требует $O(nm^2)$ операций. Если мы уже заранее знаем, что поворот будет неоптимальным, тогда возникает вопрос о целесообразности такого подхода. Здесь очень полезным оказывается полученный И.Гудом [6] в 1958 году результат о разложении ортогональных матриц одного заданного класса на прямые произведения. К этому классу относятся т.н. быстрый метод Фурье, преобразования Адамара - Уолша, Хаара и др.

Матрица Адамара порядка H_{2^k} определяется так [5],

$$H_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$H_{2^{k+1}}=\begin{pmatrix}H_{2^k} & H_{2^k}\\ H_{2^k} & -H_{2^k}\end{pmatrix}.$$

Эти матрицы играют важную роль в теории оптимального планирования эксперимента [4], но там возможностью прямого разложения не пользуются. Легко заметить, что

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2,$$

$$H_{2^k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}^k = (\hat{H})^k.$$

Простая структура каждого элемента разложения предлагает нам очень эффективную схему вычислений. Если требуется найти произведение xH_{2^k}, используем к раз схему $x\hat{H}$ и общее количество операций будет вместо $O(m\times m)$ только $O(m\cdot\log_2 m) = O(mk)$. Для всей матрицы данных XH требует $O(nm\log_2 m)$ операций. При больших матрицах выигрыш будет ощутимым (например, при $m=500$, количество операций уменьшается $m/\log_2 m \approx \approx 50$ раз). Кроме того эту схему очень легко запрограммировать.

Выбирается строка матрицы данных X и дополняется нулями до ближайшей степени двойки. Приводим схему для $m=8$

$$\begin{array}{llll}
x_1 & x_1+x_2=z_1 & z_1+z_2=g_1 & g_1+g_2=f_1 \\
x_2 & x_3+x_4=z_2 & z_3+z_4=g_2 & g_3+g_4=f_2 \\
x_3 & x_5+x_6=z_3 & z_5+z_6=g_3 & g_5+g_6=f_3 \\
x_4 & x_7+x_8=z_4 & z_7+z_8=g_4 & g_7+g_8=f_4 \\
x_5 & x_1-x_2=z_5 & z_1-z_2=g_5 & g_1-g_2=f_5 \\
x_6 & x_3-x_4=z_6 & z_3-z_4=g_6 & g_3-g_4=f_6 \\
x_7 & x_5-x_6=z_7 & z_5-z_6=g_7 & g_5-g_6=f_7 \\
x_8 & x_7-x_8=z_8 & z_7-z_8=g_8 & g_7-g_8=f_8.
\end{array}$$

Аналогичным образом производим преобразование для всей матрицы данных:

$$F = (X \vdots 0) H.$$

Геометрически это означает постоянное вращение под углом 45^0. Вычисляем для всех столбцов сумму квадратов элементов

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}^2 \qquad (I)$$

и упорядочим f_j в порядке убывания. Отношения $f_j / \sum_{j=1}^{2^k} f_j$ показывают относительный вклад каждой оси в общую сумму квадратов.

То, что столбцы матрицы F после нормировки будут сравнительно хорошими приближениями к собственным векторам матрицы X, следует из следующего рассуждения. Пусть A – симметричная матрица порядка $m \times m$, $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_m$ – её собственные числа и $a_1, \dots, a_m$ – соответствующие им собственные векторы. Мы знаем, что $A = \lambda_1 a_1 a_1' + \dots + \lambda_m a_m a_m'$. Справедливо следующее утверждение

$$\sup_G \frac{G'AG}{G'G} = \lambda_1, \quad \inf_G \frac{G'AG}{G'G} = \lambda_m.$$

Так как любой вектор G можно записать в виде $c_1 a_1 + \dots + c_m a_m$, то

$$\frac{G'AG}{G'G} = \frac{c_1^2 \lambda_1 + \dots + c_m^2 \lambda_m}{c_1^2 + \dots + c_m^2}.$$

Очевидно, супремум и инфимум этого выражения относительно векторов $(c_1, \dots, c_m)$ равны соответственно λ_1 и λ_m, при этом супремум достигается при $G = a_1$, а инфимум – при $G = a_m$. Если учесть, что в нашем случае $A = X'X$ и в качестве G мы взяли один из столбцов H_j матрицы преобразований H, то из отношения

$$\max_j \frac{H_j' X' X H_j}{H_j' H_j} = \max_j \frac{(XH_j)'(XH_j)}{H_j' H_j}$$

следует, что вектор XH_j с максимальной нормой является приближением к первому собственному вектору. Упорядочение по норме всех векторов f_j дает нам приближение к системе собственных векторов матрицы XX', т.е. векторы f_j будут новыми координатами объектов.

5. Уточнение полученных приближений.

Для оценки точности полученных векторов или если требуется дальнейшее их уточнение, можно использовать следующий простой прием. Мы ищем матрицу T, такую, чтобы

$$FT = B,$$

где B ортогональная по столбцам матрица. Тогда $B'B=T'F^2T$ является диагональной матрицей и на диагонали будут квадраты собственных чисел матрицы F (и одновременно, матрицы X). Вместо того, чтобы сразу попробовать найти матрицу T, выбираем два столбца p и r матрицы F, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 > \sum_{i=1}^{n} r_i^2.$$

Теперь преобразуем только эти два столбца так, чтобы в новых координатах $\sum_{i=1}^{n} P_i^2$ стала еще больше, а $\sum_{i=1}^{n} R_i^2$ уменьшилась (конечно, ввиду ортогональности $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i^2 + \sum_{i=1}^{n} R_i^2$).

Для этого найдем поворот

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

такой, чтобы $g = \sum_{i=1}^{n} P_i^2$ была максимальной. Найдем производную от g по φ:

$$\frac{dg}{d\varphi} = 2\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{dP_i}{d\varphi}.$$

Так как

$$P_i = p_i\cos\varphi + r_i\sin\varphi$$

$$R_i = -p_i\sin\varphi + r_i\cos\varphi,$$

то

$$\frac{dP_i}{d\varphi} = -p_i\sin\varphi + r_i\cos\varphi = R_i,$$

так что

$$\frac{dg}{d\varphi} = 2\sum_{i=1}^{n} P_i R_i. \qquad (2)$$

Это выражение должно равняться нулю. Таким образом, максимизация $\sum_{i=1}^{n} P_i^2$ достаточна для ортогонализации двух векторов. Если подставить в (2) P_i и R_i и приравнять выражение нулю, получим

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sum_{i=1}^{n} p_i r_i}{\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 - r_i^2)}.$$

Нас интересует максимизация $\sum_{i=1}^{n} p_i^2$ при предположении, что $\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 - r_i^2) > 0$. Поэтому знак φ выбираем равным знаку $\sum_{i=1}^{n} p_i r_i$. При помощи найденного угла φ можем составить матрицу преобразования и выполнить его.

Но в практике лучше сперва оценить эффект определенного только что преобразования:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \cos^2\varphi + \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \sin^2\varphi + \sum_{i=1}^{n} p_i r_i \sin 2\varphi - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i r_i \sin 2\varphi - \sum_{i=1}^{n}(p_i^2 - r_i^2)\sin^2\varphi =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(p_i^2 - r_i^2)\cdot\left[\frac{\sin 2\varphi\cdot \operatorname{tg} 2\varphi}{2} - \sin^2\varphi\right].$$

На такую величину увеличивается сумма квадратов первого столбца и соответственно уменьшается вторая сумма. Последняя формула дает нам возможность оценить, стоит ли вообще использовать столбец r для усиления столбца p . Если эффект меньше заданного относительного уровня (напр. 0,01),то лучше не проводить поворот.

В методе преобразования двух столбцов нетрудно увидеть вариант метода вращений Якоби для симметрической матрицы. Скалярное произведение $\sum_{i=1}^{n} p_i r_i$ дает элемент ковариационной матрицы, который методом вращений и преобразуется в нуль. Если бы мы провели попарно повороты для всех признаков, то по существу пришлось бы практически найти ту же ковариационную матрицу, которую мы вначале постарались избежать. Поэтому можно здесь предложить следующий прием, который учитывает, что мы имеем дело с матрицей данных. Обычно данные как измерения являются положительными величинами. Если это не так, или если ввиду различных единиц измерения нам необходимо провести нормирование данных, тогда для наших целей выгодно использовать следующий вариант

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{x_{j\,max} - x_{ij}}{x_{j\,max} - x_{j\,min}},$$

который дает $0 \leq \tilde{x}_{ij} \leq 1$.

Если это предположение выполнено, тогда во время вычисления сумм квадратов элементов матрицы F найдем и суммы элементов столбцов. Наибольшие по абсолютному значению суммы и показывают нам порядок испытания признаков f.

6. Пример.

Пусть мы имеем после нормировки следующие начальные данные

I00	0	9	II	95	I00	0	0
88	75	I9	8	30	82	56	I7
39	2	3	0	37	56	5	0
94	84	0	26	27	71	43	9
6	I00	8I	87	I9	0	7I	62
98	I	I2	4	75	86	5	6
35	I6	0	24	3	42	22	II
24	48	I00	79	I00	9	65	56
0	30	50	I00	6I	3I	I00	I00
4	53	90	25	0	5	24	59

После преобразования Адамара получается матрица.

	3I5	93	275	97	-75	I03	-II5	I07
	375	II	I75	-89	5	37	97	93
	I42	26	I26	I0	-54	54	-50	58
	354	-26	I98	-42	54	-6	I06	II4
	426	-72	-I76	-78	I22	-I28	52	-98
	287	93	233	79	-57	II7	-67	99
	I53	-33	39	-7	-3	23	I5	93
	48I	97	-II9	37	2I	-I03	-95	-I27
	472	-50	-228	50	-II2	-II0	-I2	-I0
	260	-24	-I36	-84	84	56	20	-I43
$\sum f_i$	3265	II5	387	-27	-I5	43	-49	I86

Производим нормировку I и III преобразованного признака (как имеющих наибольшие $\sum f_j^2$) и получим:

I : 0,288; 0,343; 0,I30; 0,324; 0,390; 0,263; 0,I40; 0,440; 0,432; 0,238

III: 0,478; 0,303; 0,2I8; 0,343; -0,305; 0,404; 0,068; -0,206; -0,395; -0,236;

С другой стороны, два первых собственных вектора матрицы XX' такие:

0,299; 0,349; 0,134:, 0,331; 0,382; 0,271; 0,140; 0,439; 0,423; 0,227

0,482; 0,237; 0,224; 0,247; -0,405; 0,425; 0,094; -0,254; -0,329; -0,271;

Как видно, полученные приближения к собственным векторам довольно хорошие.

Проверим потребность использования стратегии уточнения, изложенной в предыдущем пункте. Наибольшие суммы в столбцах 1, 3, 8 и 2. После вычисления величины нужного угла поворота для пар (1,3), (1,8) и (1,2) найдем относительную долю улучшения суммы квадратов первого столбца:

(1,3) - 0,0019; (1,8) - 0,0002; (1,2) - 0,001.

Если учитывать обстоятельство, что относительная точность графика не превышает половины процента, то первая ось (собственный вектор) найдена с достаточной для практики точностью. Для уточнения второго собственного вектора можно использовать пары (3,8), (3,2) и т.д.

Программы для этой методики постепенного улучшения описаний объектов составлены на языке МАЛГОЛ и успешно используются в ВЦ ТПИ.

7. Заключение.

Описан один подход к анализу данных, эффективно использующий совпадение векторных пространств матрицы данных и ее ковариационной матрицы.

Литература

1. П. Суппес, Дж. Зинес. Основы теории измерений. Сб. "Психологические измерения". 9-110, М., 1967.
2. С.Р. Рао. Линейные статистические методы и их применение. Изд-во "Наука", М., 1968.
3. И. Петерсен. Применение метода главных компонент для описания технологических процессов с коррелированными входными параметрами. Изв. АН ЭССР, сер.физ.мат.,1965, т. 14, № 4, 540-547.
4. В.З. Бродский. Многофакторные регулярные планы. Изд-во МГУ, М., 1972.

5. R. P a l e y. On orthogonal matrices. Jour. Math. and Physics. 1933, vol. 12., 311-320.
6. I. G o o d. The interaction algorithm and practical Fourier analysis. J. Roy. Stat. Soc., 1958., vol. B 20, p. 361.
7. T. Y o u n g. The reliability of linear feature extraction. IEEE Transactions on Computers, 1971, vol. 20, No 9, 967-971.

L. Vyhandu

Some Problems of Data Analysis

Summary

In this paper a strategy of data analysis based on the equivalence of the vector spaces of data matrix and its covariance matrix is given.

0,299; 0,349; 0,134; 0,381; 0,362; [illegible]
0,423; 0,227
0,462; 0,237; 0,224; 0,247; -0,405; 0,423; [illegible]
-0,329; -0,271.

Как видно, полученные приближения к собственным векторам довольно хорошие.

Проверим потребность использования стратегии уточнения, изложенной в предыдущем пункте. Наибольшие суммы в столбцах 1, 3, 8 и 2. После вычисления величины нужного угла поворота для пар (1,3), (1,8) и (1,2) найдем относительную долю улучшения суммы квадратов первого столбца:

(1,3) - 0,0019; (1,8) - 0,0002; (1,2) - 0,001.

Если учитывать обстоятельство, что относительная точность графика [illegible] то первая ось (собственный вектор) найдена с достаточной для практики точностью. Для уточнения второго собственного вектора можно использовать пары (3,8), (3,2) и т.д.

Программы для этой методики постепенного улучшения описаний объектов [illegible] используются в ВЦ ТГУ.

7. Заключение.

Описан один подход к анализу данных, эффективно использующий совпадение векторных пространств матрицы данных и ее ковариационной матрицы.

Литература

1. П. Суппес, Дж. Зиннес. Основы теории измерений. Сб. "Психологические измерения", [illegible] М., 1967.
2. С.Р. Рао. Линейные статистические методы и их применение. Изд-во "Наука", М., 1968.
3. [illegible] Применение метода главных компонент для описания [illegible] процессов с коррелированными входными параметрами. Изв. АН ЭССР, сер.физ.мат., 1965, т. 14, № 4, 540-547.
4. В.З. Бродский. Многофакторные регулярные планы. Изд-во МГУ, М., 1976.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 366 1974
УДК 681.3.01

Т.Й. Микли

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИКЕ СОСТАВЛЕНИЯ ПРОГРАММ

В настоящей статье рассматривается проблема составления рабочих программ из модулей в рамках одной системы модульного программирования. Описание этой системы и диспетчера можно найти в [2]. Диспетчер этой системы не позволяет работы с разделением времени. Задачами диспетчера являются:

- составление рабочих программ,
- включение модулей в систему,
- исправление модулей,
- дублирование и другие работы обслуживающего характера.

Данная работа описывает реализованную в рамках этого диспетчера методику составления рабочих программ из модулей, записанных на магнитной ленте, которая обеспечивает линейное движение ленты во время составления рабочих программ.

Хотя в данной статье используются общеизвестные понятия теории графов [1], в интересах компактного изложения материала, остановимся на некоторых из них.

Пусть X - конечное множество. Всякое $R \subseteq X \times X$ называется <u>бинарным отношением</u> на множестве X. Каждому бинарному отношению можно поставить в соответствие граф, вершинами которого являются элементы множества X и дугами всевозможные пары $(a,b) \in R$. Если отношение R симметричное, т.е. $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$, то соответствующий граф называют неориентированным, в противном случае - ориентированным. Произведением двух бинарных отношений R_1 и R_2 называется отношение

$$R_1 R_2 = \{(a,b) / (\exists c)[(a,c) \in R_1 \,\&\, (c,b) \in R_2\}.$$

Степень отношения определяется так:

$$R^1 = R, \quad R^{n+1} = R^1 R^n \quad (n \geqslant 1).$$

Еще определяем следующие понятия:

Транзитивное замыкание отношения R:

$$R^+ = \{(a,b)/(\exists a)[(a,b) \in R^n]\}.$$

Рефлексивное транзитивное замыкание отношения R:

$$R^* = R^+ \cup \{(a,a)/a \in X\}.$$

Обозначаем множество всех модулей в теке через

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

и пусть они находятся в теке на НМЛ в порядке возрастания индекса.

Определение I. Мы говорим, что модуль a_i предшествует модулю a_j, если в модуле a_i имеется обращение к модулю a_j (обозначаем через $a_i < a_j$).

Теперь можно представить схему обращений в некоторой системе модулей при помощи ориентированного графа $(A,<)$, где A - множество модулей и $<$ - отношение предшествования.

При помощи отношения предшествования определяем три подмножества A.

I. Множество промежуточных модулей.

$$K_1 = \{b/b \in A \& (\exists a)[a < b] \& (\exists c)[b < c]\}.$$

2. Множество висящих модулей

$$K_2 = \{b/b \in A \& \neg(\exists c)[b < c]\}.$$

3. Множество корневых модулей

$$K_3 = \{b/b \in A \& \neg(\exists a)[a < b]\}.$$

Составление программы начинается всегда с модуля, принадлежащего к третьему классу. Остальные модули, которые входят в состав рабочей программы, являются модулями первого и второго класса. Множество модулей $S(a)$ (нужных для составления рабочей программы, начинающейся с некоторого модуля $a \in K_3$) определяем как рефлексивное транзитивное замыкание соответствующего графа, т.е.

$$S(a) = \{b/a <^* b\}.$$

Далее рассмотрим, как реализовать составление рабочей программы. Здесь имеются следующие возможности:

I. Нам заранее известен граф предшествования в виде списка для теки модулей и для каждого модуля индекс упорядочения.

2. Граф предшествования заранее не известен и список требуемых модулей накапливается прмяо в процессе составления программы.

В первом случае можно добиться линейного прохождения магнитной ленты путем нахождения требуемого множества модулей через транзитивное замыкание графа предшествования и его упорядочения по индексам. Во втором случае во время составления программы явно не хватает информации для упорядочения индексов требуемого множества.

Часто для нахождения транзитивного замыкания используется техника булевых матриц, но в нашем случае с вершинами графа тесно связана дополнительная информация и целесообразнее отображать граф в виде списка и составить соответствующий алгоритм, работающий на этих списках.

Исходя из сказанного в данной реализации граф предшествования представлен следующим путем. Каждой вершине a_i сопоставлен вектор

$$A_i = (NIMI, A, P, TP, TPA, TSNR, SA, AL, NR, T),$$

где NIMI - название модуля,

A - начальный адрес перед загрузкой,

P - длина модуля,

TP - число рабочих ячеек,

TPA - начальный адрес рабочих ячеек,

TSNR - номер зоны, где модуль находится (индекс),

SA - относительный адрес модуля в зоне НМЛ,

NR - порядковый номер модуля,

AL - указатель на список LOET, где отмечены все порядковые номера модулей, непосредственно зависящих от модуля a_i,

T - признак для контроля. В начале работы диспетчера всегда T = 0. При генерировании программы, если модуль включается в ее состав, T = I.

Из расположенных в ряд векторов A_i составлен список NIM. К каждому вектору A_i мы можем обратиться при помощи его порядкового номера.

Четверка (NIMI, A, P, TP) служит начальными данными для работы диспетчера (заказом) при добавлении нового модуля в систему. Остальные данные диспетчер формирует автоматически, в том числе и список непосредственно зависящих модулей LOET. При корректировке модулей модуль записывается на старом месте, если не следует корригировать данные в списке NIM. В другом случае список корригируется и модуль записывается в новое свободное место на НМЛ. Конечно, приведенные здесь данные списка NIM зависят от конкретной ЭВМ и вообще от операционной системы. Мы не будем анализировать эти данные. Заметим, что алгоритм реализован для ЭВМ Раздан-3.

Далее опишем реализованный в нашей системе модульного программирования алгоритм для нахождения упорядоченного транзитивного замыкания и составления рабочей программы. В соответствии с определением I мы составляем список KNIM (соответствующий множеству S) из объектов списка NIM. В качестве начальных данных используется еще модуль с порядковым номером i. KNIM является списком типа очередь [3]. Разница лишь в том, что данные не удаляются. Список имеет для указателя PVIIT и VVIIT. При помощи PVIIT в список добавляются объекты, а VVIIT показывает, какие объекты списка просмотрены. Для представления алгоритма мы используем методику, использованную в монографии [3], т.е. используются основы предложения языка АЛГОЛ. Различием является то, что запись вида А (В) означает переменную А с адресом В. Тривиальные части алгоритма опускаем. Для упрощения принимаем, что объект A_i помещается в одной адресуемой единице. Пустой указатель называем NIL. Заметим, что пустой указатель имеет модули второго класса.

Алгоритм:

S1 : Составление списка KNIM.

```
          PVIIT ← 0;
          VVIIT ← 0;
          KNIM (PVIIT) ← NIM(i);
          PVIIT ← PVIIT + 1;
     N:   V ← AL(VVIIT);
          JF V = NIL THEN GOTO S;
     M:   JF LOET(V) = 0 THEN GOTO S;
          i ← LOET (V);
          JF T(i) = 1 THEN GOTO L;
          KNIM (PVIIT) ← NIM(i);
          PVIIT ← PVIIT + 1;
          T(i) ← 1;
     L:   V ← V + 1;
          GOTO M;
     S:   VVIIT ← VVIIT + 1;
          JF VVIIT > PVIIT THEN S2;
          GOTO N.
```

Алгоритм заканчивает работу, так как предполагается, что среди модулей всегда имеются модули второго класса и это приводит к ситуации, что VVIIT будет больше, чем PVIIT.

S2 : Используя данные P и A вычисляются действительные адреса модулей в памяти ЭВМ.

S3 : Сортировка списка KNIM в возрастающем порядке признака TSNR. После сортировки объекты в списке находятся в том же порядке, как и модули на НМЛ.

S4 : Чтение модулей с НМЛ. Для чтения используется сортированный список KNIM, что обеспечивает прохождения НМЛ в линейном порядке.

Литература

1. О. О р е. Теория графов. Изд-во "Мир", М., 1968.
2. Т.Й. М и к л и. Организация программирования в системе "СОДИ"."Тр. Таллинск. политехн. ин-та". № 313, 1971, с. 15.
3. D.E. K n u t h. The art of computer programming. Vol.1. Addison - Wesley, Mass. 1969.

r – признак копирования.

Параметры deg и loc определяют некоторый массив слов (ячеек) $[loc, loc+deg]$, который будем называть <u>набором кодослова</u> K. В системе STEX набор любого кодослова K содержит либо только кодослова, либо только данные. В первом случае в кодослове K вид $p = 0$, во втором – вид $p = 1$. Будем говорить, что кодослово вида $p = 1$ определяет <u>атом</u>. В зависимости от типа q, соответствующее атому кодослово определяет либо некоторое поле данных, либо атом "внутри" кодослова (двоичный элемент, указатель и т.д. [2]).

В системе STEX выделено одно <u>главное кодослово</u> системы ROOT. Структура кодослов системы STEX имеет следующие свойства (см. также [1]):

1) все кодослова, за исключением главного кодослова ROOT, принадлежат по крайней мере одному набору некоторого кодослова;

2) любое кодослово достижимо из главного кодослова ROOT.

Последнее свойство нуждается в пояснениях. Пусть K – некоторое кодослово. Обозначим i-тый элемент (слово) набора кодослова K через "$K.i$". Если этот элемент, в свою очередь, является некоторым кодословом L, то j-тый элемент набора кодослова L можно обозначить через "$L.j$" или же через "$K.i.j$". В общем случае, выражение вида

$$K.i_1.i_2.\cdots.i_k$$

называется [2] <u>составным именем с базой K</u>.

Свойство достижимости можно теперь выразить так. Если K – некоторое кодослово, то существует составное имя с базой ROOT:

$$ROOT.i_0.i_1.\cdots.i_k, \qquad (1)$$

которое определяет кодослово K.

Следует заметить, что составное имя "$K.i$" имеет смысл лишь при выполнении следующего условия:

$$0 \leqslant i-1 \leqslant deg(K).$$

При работе с системой STEX пользователь не имеет непосредственного доступа к элементам структуры данных. Доступ к любому кодослову осуществляется только с помощью составных имен вида (I). Это, конечно, создает определенные трудности, но в то же время позволяет системе корректно проводить такие операции, как гашение и "сборка мусора".

2. <u>Описание системы</u>

Будем считать, что система STEX оформлена как программный сегмент. Обмен информации между системой и пользователем осуществляется некоторым стандартным способом (например, через общую область). Для защиты структуры данных весьма существенно, чтобы системные параметры (включая главное кодослово ROOT) были бы скрыты от пользователя.

Система STEX непосредственно не занимается вопросами распределения оперативной памяти, возлагая эти функции на специальную подсистему MEM, которая осуществляет динамическое распределение памяти по принципу "кусочно-свободной" памяти [3,4]. Отметим, что такая система для ЭВМ "Минск-32" описана в [3].

Кодослово К, в котором параметры $p = I$ и $q = 0$, будем называть <u>кодословом типа NIL</u> (пустое кодослово). В системе STEX принято следующее правило: структура может продолжать свой "рост", начиная только с кодослов типа NIL.

Набор главного кодослова системы ROOT будем называть массивом BASE.

Если К - некоторое кодослово, то значением имени К будем считать адрес местонахождения этого кодослова.

Теперь рассмотрим некоторые основные операторы системы STEX.

<u>Оператор START</u>.

Исходные данные: формат кодослова, длина массива BASE-m.

Действия. Активируются системы STEX и MEM. В ROOT засылается кодослово типа NIL. К кодослову ROOT применяется оператор DECL (при $N = m$, $p' = q' = 0$).

<u>Оператор DECL</u>.

Исходные данные: кодослово К типа NIL, натуральное число N, вид p', тип q'.

Действия. На место кодослова К формируется новое кодослово $K' = (p', q', 0, N-1, loc)$. Системой MEM активируется участок памяти с длиной N слов, начальный адрес которого засылается в кодослово K' на место параметра loc. Если $p' = 0$, то набор кодослова K' заполняется кодословами типа NIL.

Оператор LEVEL.

Исходные данные: составное имя с базой ROOT.

Действия. Проходится "путь", соответствующий исходному составному имени, и в результате выдается местонахождение (адрес) кодослова, определенного этим именем. Оператор LEVEL применим только к таким составным именам, которые определяют кодослово. В остальных случаях возникает ситуация ERROR (ошибка).

Оператор PERM.

Исходные данные: кодослова К и L.

Действия. Кодослова меняются местами.

Оператор COPY.

Исходные данные: кодослово К типа NIL, кодослово L (отличное от ROOT).

Действия. Кодослово L пересылается (копируется) на место кодослова К; при этом признак копирования $r(K) := 2$. Если $r(L) = 0$, то берется $r(L) := 1$.

Оператор EULER.

Исходные данные: составное имя с базой ROOT; некоторая процедура обработки кодослов.

Действия. Пусть К - кодослово, определенное заданным составным именем. Оператор EULER поочередно выдает заданной процедуре местонахождение (адреса) всех кодослов, достижимых из кодослова К.

Ниже приведено описание оператора EULER на псевдоалголе [4]. Просмотр кодослов осуществляется с помощью двухтрактового магазина. Параметры кодослова рассматриваются как функции от местонахождения адреса кодослова. В процедуре используется булевая процедура EQUALS (K_1, K_2), значение которой равно true, если кодослова K_1 и K_2 равны с точностью до параметра r.

Процедура осуществляет защиту от зацикливания просмотра.

Массив index [0 : k] состоит из индексов исходного составного имени.

Заметим, что осуществляемое оператором EULER движение по структуре кодослов фактически является прохождением некоторого эйлерово пути графа, который соответствует рассматриваемой системе кодослов.

```
procedure EULER (k, index, PROC);
integer k; integer array index; procedure PROC;
begin j:=0;  B:=ROOT;  A:= loc (B);
      for i: =0 step 1 until k-1 do begin
          t: = index [i] -1; if t < 0 then ERROR;
          if t > deg (B) then ERROR;  A: =A + t;
          if p (A) = 1 then ERROR;
          if r (A) ≠ 0 then begin nr [j] : =0; track[j] :=A;
                             j: =j+1  end;
          B : =A;  A: =loc (A)          end i;
LAST: nr[j] := 0;  track[j]: =A + index [k]- 1;
BOTTOM:  s: = j;  new: = true;
DOWN:   A: = track [j] ;
        if p (A) = 1 then go to EXIT;
        if r (A) = 0 then go to INSTACK;
      for i := 0 step 1 until j-1 do
          if EQUALS (A, track[i]) then begin
             if i ≥ s  then go to EXIT;
             j := i; go to BOTTOM  end;
INSTACK: j:= j+1;  nr[j]:= deg (A);
        track[j] := loc (A); go to DOWN;
EXIT:   PROC (A, new);  new := false;
```

```
NEXT:    nr[j] := nr[j] -1;  if nr[j] < 0 then go to UP;
         track[j] := track[j] +1; go to DOWN;
UP:      j := j-1;  if j ≥ s  then begin
             A := track[j]; go to EXIT end;

end EULER
```

Оператором EULER можно "просмотреть" все кодослова системы STEX. Для этого следует в приведенный алгоритм внести незначительные изменения.

Оператор DELETE.

Исходные данные: составное имя с базой ROOT.

Действия. Оператор DELETE освобождает (через систему MEM) память из-под всех кодослов и полей данных, достижимых из кодослова K, определенного исходным составным именем. Освобождение памяти гашением подструктуры производится с помощью оператора EULER.

Одновременно с гашением во вспомогательный список Г собираются все кодослова, в которых признак копирования $r \neq 0$. После полного гашения подструктуры просматриваются с помощью оператора EULER все сохранившиеся кодослова. Если при этом просмотре обнаруживается кодослово L, у которого в списке Г имеется копия (т.е. кодослово L', которое отличается от кодослова L не более чем по значению признака копирования r), то на место кодослова L засылается кодослово типа NIL. Одновременно с последним просмотром выполняется оператор GARCOL.

Оператор GARCOL.

Исходных данных нет.

Действия. Оператор GARCOL осуществляет "сборку мусора" в подчиненной системе MEM памяти. Алгоритм соответствующей процедуры описан в [3].

При реализации оператора GARCOL возникает следующая проблема: как с помощью оператора EULER просмотреть все кодослова системы STEX так, чтобы каждое кодослово обрабатывалось ("внутри" оператора EULER) ровно один раз? Введем следующее простое правило: все кодослова с признаком копирования $r = 2$ рассматриваются оператором EULER как конечные, т.е. как кодослова с видом $p = 1$. Можно показать, что соблюдение этого правила гарантирует (при данном списке операторов системы STEX) именно такой просмотр.

Вышеприведенный список основных операторов системы может быть расширен в зависимости от целей использования системы в конкретной задаче. Например, в статье [I] описан оператор DECLPL, предназначенный для отображения в памяти структур языка PL/1 по их описанию.

З а к л ю ч е н и е

По мнению авторов настоящей статьи система STEX удовлетворяет тем требованиям, которые предъявляются системам, предназначенным для отображения и обработки иерархических структур данных. Накладные расходы, связанные с генерацией структуры и доступом к отдельным частям структуры (операторы DECL и LEVEL), сравнительно небольшие. Наличие более "дорогих" операторов DELETE и GARCOL обеспечивает полноту системы операторов и достаточно гибкую тактику динамического распределения памяти.

Отметим, что один вариант системы STEX был реализован на ЭВМ "Раздан-3" в 1972 г.

Система STEX взята за основу при построении автоматизированной информационной системы ТПИ на базе ЭВМ "Минск-32".

Л и т е р а т у р а

I. М.О. Т о м б а к, Т.Й. М и к л и, К.К.-Э. А л л и к. Об отношении субординации. Труды ВЦ Тартуского гос. ун-та, вып. 30, Тарту, 1974, с. 8-22.

2. Дж. А и л и ф. Принципы построения базовой машины. М., "Мир", 1973.

3. К.К.-Э. А л л и к, Т.Й. М и к л и, К.И. Т е д е р с о о. Схема немагазинного распределения оперативной памяти ЭВМ "Минск-32". См. наст. сб., с. 31-36.

4. D. K n u t h. The art of computer programming. Vol 1. Fundamental algorithms. Menlo Park, Calif., Addison-Wesley, 1968.

5. J.K. I l i f f e, J o d e i t J a n e G. A dynamic storage allocation scheme. Computer J., 1962, 5, No 10, p. 200.

K. Allik, T. Mikli

Transforms of Data Structures in Core Memory

Summary

There is a low-level nonformal language described to handle data structures in core memory. The operators of the language are able to create and to delete hierarchical data structures.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 366 1974

УДК 681.3.01

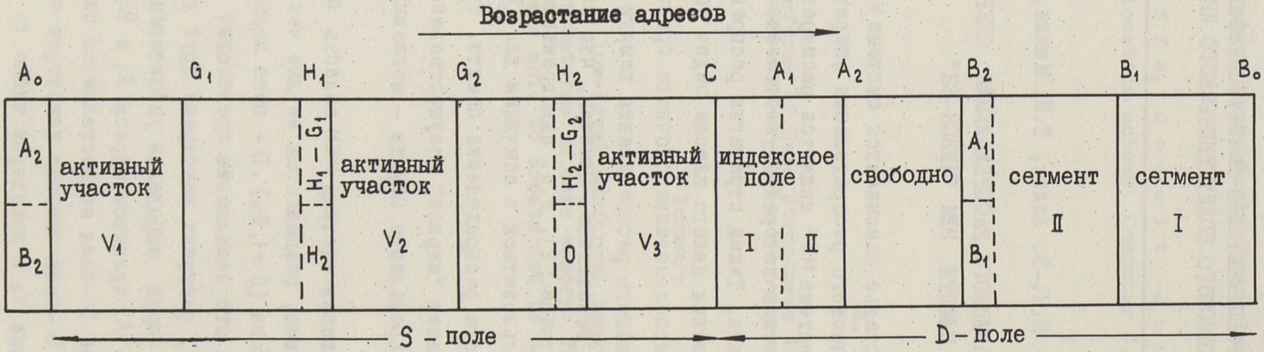
К.К.-Э. Аллик, Т.Й. Микли, К.Й. Тедерсоо

СХЕМА НЕМАГАЗИННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТИВНОЙ ПАМЯТИ ЭВМ "МИНСК-32"

В настоящей статье описывается система МЕМ, предназначенная для динамического распределения оперативной памяти ЭВМ "Минск-32". Система МЕМ является расширением операционной системы, с помощью которой осуществляется немагазинное распределение памяти. Такая стратегия распределения памяти необходима при решении целого класса задач обработки информации, в которых использование блочного принципа построения программ (и магазинного распределения памяти [1]) нежелательно или просто невозможно. Отметим, что система МЕМ независима от диспетчера [2], т.е. одновременно с работой системы МЕМ можно пользоваться и обычными для "Минск-32" способами динамического распределения памяти. Тем самым система МЕМ обеспечивает "мирное" сосуществование двух различных принципов распределения памяти - магазинного и "кусочно-свободного".

При использовании системы МЕМ область памяти $[A_0+1, B_0]$, выделенная программе, разделяется на две части: S - поле $[A_0+1, C]$ и D - поле $[C+1, B_0]$. D - поле полностью подчиняется диспетчеру и его заполнение происходит обычным способом (два магазина, растущих навстречу друг другу [2]). Свободный участок D -поля определен указателем заполнения памяти A_0 (в ячейке A_0 хранятся адреса A_i и B_i).

Распределение S -поля осуществляется системой МЕМ. В общем случае, в S -поле имеется некоторое число активных (занятых) участков V_k и некоторое число m неактивных (свободных) участков $U_j = [G_j, H_j]$, $j = 1,\ldots,m$.


Возрастание адресов
A₀
G₁
H₁
G₂
H₂
C
A₁
A₂
B₂
B₁
B₀
A₂
B₂
активный участок
V₁
H₁ – G₁
H₂
активный участок
V₂
H₂ – G₂
0
активный участок
V₃
индексное поле
I
II
свободно
A₁
B₁
сегмент
II
сегмент
I
S – поле
D – поле

Фиг. 1.

Свободные участки U_j объединены в цепочку; звенья связи этой цепочки хранятся в ячейках H_j (последняя ячейка свободного участка U_j). Звено связи имеет следующий вид (запись (x) означает "содержимое ячейки x"):

$(H_j) = \langle$длина U_j, указатель на $U_{j+1}\rangle$.

Точнее,

$(H_j) = \langle H_j - G_j \; H_{j+1}\rangle; \; j = 1, \ldots, m-1;$

$(H_m) = \langle H_m - G_m, 0\rangle.$

Системный параметр FL указывает на начало (ячейку H_1) этого списка.

Система MEM обеспечивает постоянность следующих свойств цепочки свободных участков:

1) $H_j < H_{j+1}; \; G_j < H_j;$

2) $G_{j+1} - H_j > 1.$ (I)

Отметим, что такая "кусочно-свободная" структура памяти подробно рассматривается в монографии [4].

Главной особенностью описываемой схемы распределения памяти является то обстоятельство, что граница между S-полем и D-полем не фиксируется раз и навсегда, а может быть сдвинута в одну или другую сторону за счет уменьшения объема свободной памяти в одном и увеличения этого объема в другом поле. Дело в том, что индексное поле $[C+1, A_i]$ можно перемещать в памяти, не нарушая работы программы. Система MEM, осуществляя такой сдвиг, выполняет следующие действия:

1) исправляются значение системного параметра FSR, который определяет размер и местонахождение S-поля, и цепочка свободных участков в S-поле;

2) содержимое индексного поля переносится на новое место, исправляется базовый адрес индексного поля АБИ в ячейке уровня [2];

3) исправляются значение указателя заполнения памяти в ячейке A_0 и его предыдущие значения, которые, как известно [2], объединены в связанный список.

В системе MEM имеются две процедуры LEFT и RIGHT, с помощью которых система или пользователь может сдвигать границу между полями: в первом случае – K ячеек влево, т.е. в сторону начала S-поля; во втором - k ячеек вправо. Также предусмотрена возможность максимального сдвига границы в одну или другую сторону.

Положение границы между S-полем и D-полем, а также степень "сжатия" активных участков в S-поле, описывается специальными индикаторами, доступными пользователю.

Описываемая схема распределения памяти выдвигает следующее ограничение: перед загрузкой очередного сегмента необходимо применить процедуру LEFT.

Стратегия "кусочно-свободной" памяти не может быть эффективной без возможности "сборки мусора", т.е. собирания свободных участков [I,4]. Но так как "сборка мусора" подразумевает и одновременное собирание активных участков в S-поле, то для обеспечения корректности этой операции система обязана как-то извещать пользователя о том, что месторасположение его массивов изменилось. Следовательно, параметры массивов пользователя должны быть объединены в некоторый список, к которому система MEM имеет прямой доступ. Структура такого списка зависит, конечно, от задач пользователя системой MEM. В статье [3] описывается одна весьма общая списочная структура, которая удовлетворяет налагаемым системой MEM требованиям.

Опишем коротко алгоритм процедуры GARCOL ("сборка мусора"). Процедура "уплотняет" S-поле путем линейного сдвига всех активных участков влево (в сторону начала S-поля). Алгоритм описываемой процедуры в принципе совпадает с алгоритмом, приведенным в [5], и состоит из четырех этапов:

I) двигаясь по цепочке свободных (неактивных) участков для каждого активного участка V_j определяется величина сдвига Δ_j;

2) в списке массивов пользователя изменяются на соответствующие Δ_j значения указателей на начало этих массивов;

3) содержимое всех активных участков пересылается на новое, ранее запланированное место;

4) исправляются цепочка свободных участков и значения индикаторов.

В результате применения процедуры GARCOL S - поле состоит из двух частей - одного активного и одного свободного участков.

В заключение остановимся на двух основных функциях системы MEM - активации и деактивации участков памяти в S-поле.

При поступлении в систему запроса на активацию n ячеек памяти, система действует следующим образом. В цепочке свободных участков находится первый свободный участок $U_j = [G_j, H_j]$, длина которого не меньше n. Системой активируется участок памяти $[G_j, G_j+n-1]$, начальный адрес которого G_j является ответом на запрос. В ячейке H_j изменяется на n значение длины свободного участка U_j. Если участок U_j активируется полностью, то согласно свойствам (I) перестраивается цепочка свободных участков.

Если в S-поле нет свободного участка с длиной n ячеек, то система предварительно применяет или процедуру RIGHT, или производит "сборку мусора", или выполняет оба указанных действия.

Действия системы MEM при поступлении команды об освобождении некоторого участка в S-поле тривиальны, однако весьма трудоемкие из-за необходимости сохранения свойств (I).

Литература

I. С.С. Лавров, Л.И. Гончарова. Автоматическая обработка данных. Хранение информации в памяти ЭВМ. М., "Наука", I97I.

2. Н.Т. Кушнерев, М.Е. Неменман, В.И. Цагельский. Программирование для ЭВМ "Минск-32". М., "Статистика", I972.

3. К.К.-Э. Аллик, Т.Й. Микли. Отображение структур данных в памяти ЭВМ. См. наст. сб., с. 23-30.

4. D. Knuth. The art of computer programming. Vol.1. Fundamental algorithms. Menlo Park, Calif., Addison-Wesley, 1968.

5. B. W e g b r e i t. A generalized compactifying garbage collector. Computer J., 1972, 15, No 3, p. 204.

K. Allik, T. Mikli, K. Tedersoo

Nonstack Dynamical Scheme for Memory Allocation

Summary

Some possibilities of dynamical memory allocation for "Minsk-32" computer are described. The system guarantees a peaceful coexistence with a memory allocation given by "Minsk-32" OS.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 366 1974

УДК 517.948:513.8+519.4

М.А. Абель

ОТОБРАЖЕНИЯ МЕЖДУ АЛГЕБРАМИ ОГРАНИЧЕННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ А-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть A – комплексная банахова алгебра, X – топологическое пространство и $C^*(X,A)$ – множество всех ограниченных непрерывных функций из X в A. Как известно (см. [1,2]), множество $C^*(X,A)$ образует банахову алгебру, если алгебраические операции над функциями определить поточечно и норму через sup-нормы.

Пусть A и B – банаховы алгебры[1)], X и Y – топологические пространства, $\varphi: A \to B$ – ограниченное непрерывное отображение, $\psi: Y \to X$ – непрерывное отображение и $f \in C^*(X,A)$. Тогда функция $\varphi \circ f \circ \psi: Y \to B$ непрерывна на Y, как композиция непрерывных функций φ, f и ψ. Поскольку

$$\|(\varphi \circ f \circ \psi)(y)\|_B \leq \|\varphi\| \|f\|_{C^*(X,A)}$$

для всех $y \in Y$, то функция $\varphi \circ f \circ \psi$ ограничена. Поэтому $\varphi \circ f \circ \psi \in C^*(Y,B)$.

Пусть $F(\varphi, \psi): f \to \varphi \circ f \circ \psi$. Отображение $F(\varphi,\psi)$ отображает алгебру $C^*(X,A)$ в алгебру $C^*(Y,B)$. При этом ядро

$$\ker F(\varphi,\psi) = \{f \in C^*(X,A): f(x) \in \ker\varphi, \; x \in \psi(Y)\}.$$

В случае, когда ψ – сюръективное отображение,

$$\ker F(\varphi,\psi) = C^*(X, \ker\varphi).$$

Пусть теперь A – коммутативная банахова алгебра с единицей и ζ_A – преобразование Гельфанда алгебры A. Тогда $\zeta_A(A) \subset C^*(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C})$, где $\mathfrak{M}(A)$ – пространство максимальных идеалов алгебры A и $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Как известно (см. [3], с. 33-34), $\ker\zeta_A$ совпадает с радикалом

[1)] Здесь и всюду в дальнейшем вместо комплексной банаховой алгебры будем коротко говорить банахова алгебра или алгебра.

$\mathrm{Rad}\,A$ алгебры A. Поэтому, если отображение ψ - сюръективно, $\varphi = \zeta_A$ и $B = C^*(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C})$, то

$$\ker F(\varphi, \psi) = C^*(X, \mathrm{Rad}\,A).$$

В настоящей статье изучаются свойства отображения $F(\varphi, \psi)$ относительно свойств отображений φ и ψ. В § I найдены условия для инъективности (теорема I), гомеоморфности (теорема 2), морфности (теорема 3) и изоморфности (следствия 3 и 4) отображения $F(\varphi, \psi)$. В § 2 (теорема 4) найдены условия для замкнутости подалгебры $F(\varphi, \psi)[C^*(X,A)]$ в алгебре $C^*(У,B)$. В § 3 (теорема 6) рассматриваются условия для наполненности подалгебры $F(\varphi, \psi)[C^*(X,A)]$ в $C^*(У,B)$.

§ I. Свойства отображения $F(\varphi, \psi)$

В монографии [8] рассматриваются свойства отображения $F(\varphi, \psi)$ в случае, когда φ является тождественным отображением на А. Окажется, что аналогичные свойства остаются в силе и в случае, когда φ не является тождественным отображением. Действительно, справедливы следующие свойства:

<u>Теорема I</u>. Пусть А и В - банаховы алгебры, Х и У - топологические пространства, $\varphi: A \to B$-ограниченное непрерывное отображение и $\psi: У \to X$ - непрерывное отображение. Для того, чтобы отображение $F(\varphi, \psi): C^*(X,A) \to C^*(У,B)$ было инъекцией достаточно, а в случае, когда Х - вполне регулярное пространство, то и необходимо, чтобы отображение φ являлось инъекцией, а отображение ψ удовлетворяло условию[2)]

$$\mathrm{cl}_X[\psi(У)] = X. \qquad (I)$$

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть отображение φ неинъективно. Тогда в алгебре А существуют элементы a и b с $a \neq b$, такие, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Пусть f и g - функции, удовлетворяющие условиям $f(x) \equiv a$ и $g(x) \equiv b$ на Х. Функции $f, g \in C^*(X,A)$, причем $f \neq g$. Так как $\varphi\{f[\psi(y)]\} = \varphi(a)$ и $\varphi\{g[\psi(y)]\} = \varphi(b)$ для всех $y \in У$, то $F(\varphi,\psi)(f) = F(\varphi,\psi)(g)$. Значит, отображение $F(\varphi, \psi)$ не является инъекцией.

2) Через $\mathrm{cl}_X A$ обозначается замыкание подмножества $A \subset X$ относительно топологии пространства Х.

Пусть теперь X - вполне регулярное пространство, отображение φ инъективно и $\mathrm{cl}_X[\psi(Y)] \neq X$. Тогда существует такая непрерывная функция g, которая удовлетворяет условиям $\|g\| = 1$ и $g(x) \equiv 0$ на $\mathrm{cl}_X[\psi(Y)]$.

Пусть[3)] $a \in A\, a \neq \Theta_A$ и f - функция, удовлетворяющая условию $f(x) \equiv g(x)a$ на X. Тогда $f \in C^*(X,A)$ и $f \neq \Theta_{C^*(X,A)}$. Кроме того, $f[\psi(y)] \equiv \Theta_A$ на Y. Учитывая теперь инъективность отображения φ имеет место равенство $F(\varphi,\psi)(f) = \Theta_{C^*(Y,B)}$. Значит, для инъективности отображения $F(\varphi,\psi)$ необходимо выполнение условия (I).

<u>Достаточность</u>. Пусть f_1 и f_2 - такие функции из алгебры $C^*(X,A)$, что $F(\varphi,\psi)(f_1) = F(\varphi,\psi)(f_2)$. Тогда

$$\varphi\{f_1[\psi(y)]\} = \varphi\{f_2[\psi(y)]\}$$

для всех $y \in Y$. Так как φ - инъективное отображение, то $f_1(x) \equiv f_2(x)$ на $\psi(Y)$. Учитывая теперь условие (I), $f_1 = f_2$. Следовательно, отображение $F(\varphi,\psi)$ является инъекцией.

В случае, когда $A=B=\mathbb{C}$, теорема I, в частности, известна (см. [8], с. 96).

<u>Следствие I</u>. Пусть A и B - банаховы алгебры, X и Y - компактные хаусдорфы пространства, $\varphi: A \to B$ - ограниченное непрерывное отображение и $\psi: Y \to X$ - непрерывное отображение. Для того, чтобы отображение $F(\varphi,\psi): C^*(X,A) \to C^*(Y,B)$ было инъекцией, необходимо и достаточно, чтобы отображение φ являлось инъекцией, а отображение ψ являлось сюръекцией.

<u>Доказательство</u> следует из теоремы I, учитывая то, что $\psi(Y)$ - бикомпактное подпространство в X.

В случае, когда $A=B=\mathbb{C}$, следствие I известно (см. [8], с. 128, или [5], с. 42).

<u>Теорема 2</u>. Пусть A и B - банаховы алгебры, X и Y - топологические пространства, $\varphi: A \to B$ - аддитивное гомеоморфное отображение на B и $\psi: Y \to X$ - гомеоморфное отображение на X. Тогда отображение $F(\varphi,\psi): C^*(X,A) \to C^*(Y,B)$ является гомеоморфизмом.

---

3) Здесь и всюду в дальнейшем нулевой элемент алгебры A обозначается через Θ_A.

Доказательство. Пусть $g \in C^*(Y,B)$. Тогда $\varphi^{-1} \circ g \circ \psi^{-1} \in C^*(X,A)$, причем $F(\varphi,\psi)(\varphi^{-1} \circ g \circ \psi^{-1}) = g$. Поэтому $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)] = C^*(Y,B)$. Так как отображение $F(\varphi,\psi)$ по теореме I и инъективно, то $F(\varphi,\psi)$ является биекцией. Кроме того,

$$\|F(\varphi,\psi)(f)\|_{C^*(Y,B)} \leq \|\varphi\| \|f\|_{C^*(X,A)} \qquad (2)$$

для всех $f \in C^*(X,A)$ и

$$\|F(\varphi,\psi)^{-1}(g)\|_{C^*(X,A)} = \|F(\varphi^{-1},\psi^{-1})(g)\|_{C^*(X,A)} \leq \|\varphi^{-1}\| \|g\|_{C^*(Y,B)}$$

для всех $g \in C^*(Y,B)$. Следовательно, $F(\varphi,\psi)$ и $F(\varphi,\psi)^{-1}$ непрерывны как ограниченные аддитивные операторы. Поэтому отображение $F(\varphi,\psi)$ является гомеоморфизмом.

Теорема 3. Пусть A и B – банаховы алгебры, X и Y – топологические пространства, $\varphi: A \to B$ – ограниченное непрерывное отображение и $\psi: Y \to X$ – непрерывное отображение. Для того, чтобы отображение $F(\varphi,\psi): C^*(X,A) \to C^*(Y,B)$ было морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы отображение φ являлось морфизмом.

Доказательство. Необходимость. Пусть $F(\varphi,\psi)$ – морфизм из $C^*(X,A)$ в $C^*(Y,B)$, элементы $a, b \in A$, а f и g – функции, удовлетворяющие условиям $f(x) \equiv a$ и $g(x) \equiv b$ на X. Тогда $f, g \in C^*(X,A)$, причем

$$\varphi(a+b) = [F(\varphi,\psi)(f+g)](y) = [F(\varphi,\psi)(f)](y) + [F(\varphi,\psi)(g)](y) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(ab) = [F(\varphi,\psi)(fg)](y) = [F(\varphi,\psi)(f)](y) \cdot [F(\varphi,\psi)(g)](y) = \varphi(a)\varphi(b),$$

$$\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$$

и

$$\varphi(\lambda a) = [F(\varphi,\psi)(\lambda f)](y) = \lambda[F(\varphi,\psi)(f)](y) = \lambda\varphi(a)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $y \in Y$. Следовательно, φ является морфизмом из A в B.

Достаточность. Пусть φ – морфизм из A в B. Нетрудно проверить, что отображение $F(\varphi,\psi)$ является морфизмом из $C^*(X,A)$ в $C^*(Y,B)$ для любого непрерывного отображения $\psi: Y \to X$.

Следствие 2. Пусть A - банахова алгебра, B - коммутативная полупростая банахова алгебра с единицей, X и Y - топологические пространства, $\varphi: A \to B$ - морфизм и $\psi: Y \to X$ - непрерывное отображение. Тогда отображение $F(\varphi, \psi): C^*(X,A) \to C^*(Y,B)$ является непрерывным морфизмом.

Доказательство. Так как алгебра B коммутативна и полупроста, то морфизм φ непрерывен[4] (см. [7], с. 75). Кроме того, непрерывный морфизм ограничен. Поэтому, по теореме 3, отображение $F(\varphi, \psi)$ является морфизмом из $C^*(X,A)$ в $C^*(Y,B)$. В силу коммутативности и полупростоты алгебры B, алгебра $C^*(Y,B)$ также коммутативна и полупроста (см. [2], с. 153). Следовательно, морфизм $F(\varphi, \psi)$ является непрерывным.

Следствие 3. Пусть A и B - банаховы алгебры, X и Y - топологические пространства, $\varphi: A \to B$ - непрерывный изоморфизм и $\psi: Y \to X$ - непрерывное отображение, удовлетворяющее условию (1). Тогда отображение $F(\varphi, \psi)$ является непрерывным изоморфизмом из $C^*(X,A)$ в $C^*(Y,B)$.

Доказательство. По теоремам 1 и 3 отображение $F(\varphi, \psi)$ является изоморфизмом из $C^*(X,A)$ в $C^*(Y,B)$. В силу справедливости неравенства (2) для всех $f \in C^*(X,A)$, изоморфизм $F(\varphi, \psi)$ является непрерывным.

Следствие 4. Пусть A и B - банаховы алгебры, X и Y - топологические пространства, φ - взаимно непрерывный изоморфизм алгебр A и B и ψ - гомеоморфизм пространств Y и X. Тогда отображение $F(\varphi, \psi)$ является взаимно непрерывным изоморфизмом алгебр $C^*(X,A)$ и $C^*(Y,B)$.

Доказательство следует из теорем 2 и 3.

В случае, когда A и B - коммутативные полупростые банаховы алгебры с единицей, следствие 4 известно (см. [2], с. 154).

§ 2. Замкнутость множества $F(\varphi, \psi)[C^*(X,A)]$

Для решения многих проблем важно узнать, когда множество $F(\varphi, \psi)[C^*(X,A)]$ является замкнутой подалгеброй в $C^*(Y,B)$. Ответ на этот вопрос дает

---

4) В случае, когда алгебра A также коммутативна, непрерывность морфизма φ доказана, например, в [3], с. 34. Условия непрерывности морфизма $\varphi: A \to B$ в случае, когда B не является полупростой алгеброй, найдены в [6].

Теорема 4. Пусть A и B - банаховы алгебры, X и $У$ - топологические пространства, $\varphi : A \to B$ - непрерывное изоморфное отображение и $\psi : У \to X$ - непрерывное отображение. Для замкнутости подалгебры $F(\varphi, \psi)[C^*(X,A)]$ в $C^*(У,B)$ достаточно, а в случае, когда ψ удовлетворяет условию (I), то и необходимо, чтобы $\varphi(A)$ была замкнутой в B.

Доказательство. Необходимость. Пусть подалгебра $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ замкнута в $C^*(У,B)$. Тогда $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ является банаховой алгеброй относительно топологии алгебры $C^*(У,B)$. Кроме того, по теоремам I и 3, отображение $F(\varphi,\psi)$ представляет собой изоморфизм из $C^*(X,A)$ на $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$. Поэтому (см. [4], с. 30) существует такая постоянная величина C, не зависящая от f, что

$$\|f\|_{C^*(X,A)} \leqslant C \|F(\varphi,\psi)(f)\|_{C^*(У,B)} \tag{3}$$

для всех $f \in C^*(X,A)$.

Пусть теперь $a \in A$ и f - функция, удовлетворяющая условию $f(x) \equiv a$ на X. Тогда $f \in C^*(X,A)$, причем $\|f\|_{C^*(X,A)} = \|a\|_A$ и $\|F(\varphi,\psi)(f)\|_{C^*(У,B)} = \|\varphi(a)\|_B$. Поэтому, учитывая неравенство (3), изоморфизм φ удовлетворяет условию

$$\|a\|_A \leqslant C\|\varphi(a)\|_B. \tag{4}$$

для всех $a \in A$, где C - постоянное, не зависимое от a. Следовательно, $\varphi(A)$ замкнута в B.

Достаточность. Пусть подалгебра $\varphi(A)$ замкнута в B,

$$J = \{f \in C^*(X,A) : f(x) = \Theta_A \text{ на } \psi(У)\}$$

и $\Psi : C^*(X,A)/J \to F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ - сюръективное отображение, определенное равенством

$$\Psi(f+J) = F(\varphi,\psi)(f)$$

для всех $f \in C^*(X,A)$. Так как, по теоремам I и 3, отображение $F(\varphi,\psi)$ есть морфизм, то и отображение Ψ является морфизмом. При этом (см. [8], с. 49), $\|\Psi\| = \|F(\varphi,\psi)\|$. Поэтому $\|\Psi\| = \sup\limits_{\|f\|_{C^*(X,A)}\leqslant 1} \|F(\varphi,\psi)(f)\|_{C^*(У,B)} \leqslant \sup\limits_{\|f\|_{C^*(X,A)}\leqslant 1} \|\varphi\|\|f\|_{C^*(X,A)} = \|\varphi\|.$

Учитывая последнее,

$$\|\Psi(f+J)\|_{C^*(У,B)} \leqslant \|\Psi\|\|f+J\|_{C^*(X,A)/J} \leqslant \|\varphi\|\|f+J\|_{C^*(X,A)/J}.$$

Следовательно, для всех $f \in C^*(X,A)$ справедливо неравенство

$$\|F(\varphi,\psi)(f)\|_{C^*(Y,B)} \leqslant \|\varphi\| \|f+J\|_{C^*(X,A)/J}. \qquad (5)$$

Пусть теперь

$$A_0 = \{ a \in A : \|a\|_A \leqslant M(f) \}$$

и

$$A_1 = \{ a \in A : \|a\|_A \geqslant M(f) \},$$

где

$$M(f) = C\|F(\varphi,\psi)(f)\|_{C^*(Y,B)},$$

а C – постоянное, определяемое изоморфизмом φ, которое в силу замкнутости подалгебры $\varphi(A)$ в B, удовлетворяет для всех $a \in A$ условию (4). Тогда A_0 и A_I являются замкнутыми подмножествами алгебры A. При этом $A = A_0 \cup A_I$. Пусть $\pi : A \to A_0$ – непрерывная сюръекция, определяемая равенством

$$\pi(a) = \begin{cases} a, & \text{если } a \in A_0 \\ \dfrac{M(f)a}{\|a\|_A}, & \text{если } a \in A_I \end{cases}$$

и $h = \pi \circ f$. Тогда $h \in C^*(X,A)$ при каждой фиксированной функции $f \in C^*(X,A)$. Учитывая неравенство (4),

$$\sup_{x \in \psi(Y)} \|f(x)\|_A = \sup_{y \in Y} \|(f \circ \psi)(y)\|_A \leqslant M(f).$$

Поэтому $f(x) \in A_0$ для всех $x \in \psi(Y)$ при каждой функции $f \in C^*(X,A)$. Так как $h(x) \equiv f(x)$ на $\psi(Y)$, то $h \in f+J$ и

$$\|f+J\|_{C^*(X,A)/J} \leqslant \|h\|_{C^*(X,A)} \leqslant M(f). \qquad (6)$$

Следовательно, по неравенствам (5) и (6)

$$C^{-1}\|f+J\|_{C^*(X,A)/J} \leqslant \|F(\varphi,\psi)(f)\|_{C^*(Y,B)} \leqslant \|\varphi\| \|f+J\|_{C^*(X,A)/J} \qquad (7)$$

для всех $f \in C^*(X,A)$, где C удовлетворяет условию (4). В силу замкнутости подмножества J, факторпространство $C^*(X,A)/J$ является полным пространством. Учитывая теперь неравенство (7), алгебра $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ образует полную подалгебру в $C^*(Y,B)$. Поэтому $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ замкнута в $C^*(Y,B)$. Теорема доказана.

<u>Следствие 5</u>. Пусть A – коммутативная полупростая банахова алгебра с единицей, X и Y – топологические пространства и $\psi : Y \to X$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее

условию (I). Для замкнутости подалгебры $F(\zeta_A, \psi)[C^*(X,A)]$ в $C^*(Y, C^*(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C}))$, необходимо и достаточно, чтобы $\zeta_A(A)$ была замкнута в $C^*(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C})$.

<u>Доказательство</u> следует из теоремы 4 при $B = C^*(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C})$ и $\varphi = \zeta_A$.

<u>Следствие 6</u>. Пусть A и B - банаховы алгебры, X и Y - топологические пространства, $\varphi : A \to B$ - непрерывный изоморфизм и $\psi : Y \to X$ - непрерывное отображение, удовлетворяющее условию (I). Для того, чтобы отображение $F(\varphi, \psi)$ было изометрией, необходимо и достаточно, чтобы φ являлось изометрией.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Изометричность отображения φ следует из изометричности отображения $F(\varphi, \psi)$, если функцию $f \in C^*(X,A)$ определять условием $f(x) \equiv a$, где $a \in A$.

<u>Достаточность</u>. Пусть φ является изометрией. Тогда $\varphi(A)$ замкнута в B с $\|\varphi\| = 1$, а в силу теоремы 4 подалгебра $F(\varphi, \psi)[C^*(X,A)]$ замкнута в $C^*(Y,B)$. Поэтому, учитывая неравенство (3) при $C = 1$ и неравенство (2), отображение $F(\varphi, \psi)$ является изометрией.

В случае, когда $A = B = \mathbb{C}$, следствие 6 известно (см. [8], с. 78).

<u>Следствие 7</u>. Пусть A - коммутативная полупростая банахова алгебра с единицей, X и Y - топологические пространства и $\psi : Y \to X$ - непрерывное отображение, удовлетворяющее условию (I). Для того, чтобы отображение $F(\zeta_A, \psi)$ отображало алгебру $C^*(X,A)$ изометрично в $C^*(Y, C^*(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C}))$, необходимо и достаточно, чтобы алгебра A удовлетворяла условию

$$\|a^2\|_A = \|a\|_A^2 \qquad (8)$$

для всех $a \in A$.

<u>Доказательство</u> следует из следствия 6 при $\varphi = \zeta_A$, поскольку отображение ζ_A изометрично тогда и только тогда, когда алгебра A удовлетворяет условию (8) для всех $a \in A$ (см. [3], с. 33).

Следствие 8. Пусть X - вполне регулярное T_I-пространство и A - банахова алгебра. Тогда алгебра[5] $C^*(\beta X, A)$ изометрически изоморфна замкнутой подалгебре алгебры $C^*(X,A)$.

Доказательство. Пусть ε-тождественное отображение на A и $\pi: X \to \beta X$ взаимно непрерывное инъективное отображение, удовлетворяющее условию $\mathrm{cl}_{\beta X} X = \beta X$. Тогда отображение $F(\varepsilon,\pi): C^*(\beta X, A) \to C^*(X,A)$ является изометрическим изоморфизмом, по теоремам I и 3 и следствию 6. Кроме того, в силу теоремы 4, подалгебра $F(\varepsilon,\pi)[C^*(\beta X, A)]$ алгебры $C^*(X,A)$ замкнута.

§ 3. Наполненность подалгебры $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$

Пусть A - алгебра с единицей. Подалгебра $B \subset A$ с единицей называется наполненной (см. [3], с. II), если каждый элемент из B, обратимый в A, отратим в B. Следующая теорема решает вопрос о наполненности подалгебры $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ в $C^*(Y,B)$.

Теорема 5. Пусть A и B - банаховы алгебры с единицей, X и Y - топологические пространства, $\varphi: A \to B$ - взаимно непрерывный изоморфизм и $\psi: Y \to X$-гомеоморфизм на X. Для того, чтобы $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ была наполненной подалгеброй в $C^*(Y,B)$, необходима и достаточна наполненность подалгебры $\varphi(A)$ в B.

Доказательство. Необходимость. Пусть $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$-наполненная подалгебра алгебры $C^*(Y,B)$. Тогда из обратимости функции $F(\varphi,\psi)(f) \in F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ в $C^*(Y,B)$ следует, что $[F(\varphi,\psi)(f)]^{-1} \in F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$. При этом функция f обратима в $C^*(X,A)$ и $[F(\varphi,\psi)(f)]^{-1} = F(\varphi,\psi)(f^{-1})$. Действительно, пусть $h \in C^*(X,A)$ - функция, удовлетворяющая условию

$$[F(\varphi,\psi)(f)]^{-1} = F(\varphi,\psi)(h).$$

В силу изоморфности отображения φ, из равенств

$$\varphi\{(fh)[\psi(y)]\} = \{F(\varphi,\psi)(f)\cdot F(\varphi,\psi)(h)\}(y) = e_B$$

и

$$\varphi\{(hf)[\psi(y)]\} = \{F(\varphi,\psi)(h)\cdot F(\varphi,\psi)(f)\}(y) = e_B$$

следует, что

---

5) Через βX обозначено Стоун-Чеховское расширение пространства X.

$$(fh)[\psi(y)] = (hf)[\psi(y)] = e_A$$

для всех $y \in Y$. Так как ψ - гомеоморфное отображение на, то

$$(fh)(x) \equiv (hf)(x) \equiv e_A$$

на X. Следовательно, функция f обратима в $C^*(X,A)$ и $h = f^{-1}$.

Пусть функция $f \in C^*(X,A)$ удовлетворяет условию $f(x) \equiv a$ на X, где $a \in A$ и $\varphi(a)$ - обратима в алгебре B. Тогда $[F(\varphi,\psi)(f)](y) \equiv \varphi(a)$ и $[F(\varphi,\psi)(f)]^{-1}(y) \equiv \varphi(a)^{-1}$ на Y, причем $[F(\varphi,\psi)(f)]^{-1} \in C^*(Y,B)$. В силу наполненности подалгебры $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ функция $[F(\varphi,\psi)(f)]^{-1} \in$ $\in F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$. Следовательно, функция f обратима в $C^*(X,A)$ и $f^{-1}(x) \equiv a^{-1}$ на X, где $a^{-1} \in A$. Поэтому, в силу изоморфности отображения φ, элемент $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \varphi(A)$. Значит, $\varphi(A)$ является наполненной подалгеброй в B.

<u>Достаточность</u>. Пусть $\varphi(A)$ - наполненная подалгебра в B, функция $f \in C^*(X,A)$ и функция $F(\varphi,\psi)(f)$ обратима в $C^*(Y,B)$. Тогда $[F(\varphi,\psi)(f)]^{-1} \in C^*(Y,\varphi(A))$, так как на Y

$$[F(\varphi,\psi)(f)]^{-1}(y) \equiv \left\{[F(\varphi,\psi)(f)](y)\right\}^{-1}.$$

Покажем теперь, что в данном случае

$$C^*(Y,\varphi(A)) = F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]. \qquad (9)$$

Если $f \in C^*(X,A)$, то всегда $F(\varphi,\psi)(f) \in C^*(Y,\varphi(A))$. Пусть теперь $g \in C^*(Y,\varphi(A))$. Тогда, в силу непрерывности отображений φ^{-1} и ψ^{-1} и ограниченности отображения φ^{-1}, функция $F(\varphi^{-1},\psi^{-1})(g) \in C^*(X,A)$. Так как $F(\varphi,\psi)[F(\varphi^{-1},\psi^{-1})(g)] = g$, то справедливо равенство (9). Поэтому $[F(\varphi,\psi)(f)]^{-1} \in$ $\in F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$. Значит, $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ является наполненной подалгеброй в $C^*(Y,B)$. Теорема доказана.

<u>Следствие 9</u>. Пусть A – равномерно замкнутая[6)] банахова алгебра с единицей, а X и Y - гомеоморфные топологические пространства с гомеоморфизмом ψ. Тогда $F(\zeta_A,\psi)[C^*(X,A)] =$ $C^*(Y,\zeta_A(A))$ **является наполненной подалгеброй** в $C^*(Y, C^*(\mathfrak{M}(A),\mathbb{C}))$.

<u>Доказательство</u> следует из теоремы 6 при $\varphi = \zeta_A$ и $B =$ $= C^*(\mathfrak{M}(A),\mathbb{C})$, учитывая равенство (9) и наполненность подалгебры $\zeta_A(A)$ в $C^*(\mathfrak{M}(A),\mathbb{C})$.

---

6) Коммутативная полупростая банахова алгебра A называется <u>равномерно замкнутой алгеброй</u>, если $\zeta_A(A)$ является замкнутой подалгеброй алгебры $C^*(\mathfrak{M}(A),\mathbb{C})$.

Следствие IO. Пусть B - банахова алгебра с единицей, A - замкнутая подалгебра алгебры B с единицей и X - топологическое пространство. Тогда алгебра $C^*(X,A)$ является наполненной подалгеброй алгебры $C^*(X,B)$ тогда и только тогда, когда A есть наполненная подалгебра алгебры B.

Доказательство. Пусть φ - каноническая инъекция алгебры A в B. Тогда φ взаимно непрерывно и изоморфно отображает A на A. Поэтому по теореме 6 получаем требуемое.

Литература

I. М. А б е л ь. Об алгебре ограниченных непрерывных функций со значениями в коммутативной банаховой алгебре с единицей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I97I, 277, 52-77.

2. М. А б е л ь. Некоторые свойства алгебр функций со значениями в банаховой алгебре. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, I45-I55.

3. Н. Б у р б а к и. Спектральная теория. М., I972.

4. Л. Л ю м и с. Введение в абстрактный гармонический анализ. М., I956.

5. W. G. B a d e. The Banach space C(S). Aarhus Univ., Lecture Notes, No 26, 1971.

6. H.G. D a l e s, J.P. M c C l u r e. Continuity of homomorphisms into certain commutative Banach algebras. Proc. London Math. Soc., 1973, 26, No 1, 69-81.

7. C. E. R i c k a r t. General theory of Banach algebras. Princeton, New-Jersey - London, 1960.

8. Z. S e m a d e n i. Banach space of continuous functions. Warszawa, 1971.

M. Abel

The Maps of Algebra of Bounded Continuous A-valued Functions

Summary

Let A be a complex Banach algebra, let X be a topological space and let $C^*(X,A)$ be the set of all bounded continuous functions from X into A. With the pointwise algebraic operation and sup-norm the set $C^*(X,A)$ forms a Banach algebra.

Let A and B be Banach algebras, let X and Y be topological spaces, let $\varphi : A \to B$ be a bounded continuous map and let $\psi : Y \to X$ be a continuous map. Since the function $\varphi \circ f \circ \psi \in C^*(Y,B)$ for any $f \in C^*(X,A)$ then $F(\varphi, \psi) : f \to \varphi \circ f \circ \psi$ maps $C^*(X,A)$ into $C^*(Y,B)$.

In the present paper the properties of map $F(\varphi, \psi)$ with respect to the properties of maps φ and ψ are considered. In §1 the conditions that the map $F(\varphi, \psi)$ be injection, morphism, homeomorphism and isomorphism are studied. The conditions when the subalgebra $F(\varphi, \psi)[C^*(X,A)]$ is closed in $C^*(Y,B)$ are found in §2. The conditions when from $[F(\varphi, \psi)(f)]^{-1} \in C^*(Y,B)$ with $f \in C^*(X,A)$ concludes that $[F(\varphi, \psi)(f)]^{-1} \in F(\varphi, \psi)[C^*(X,A)]$ are considered in §3.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 366 1974

УДК 519.1

Г.А. Вейнер

ДВЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ГРАФА ПОЛНЫМИ ПОДГРАФАМИ

1. Постановка задачи и основные понятия

Пусть на конечном непустом множестве S определены бинарное симметричное отношение $R \subset S \times S$ и отношение эквивалентности $E \subset S \times S$. Определим расстояние между отношениями следующим способом:

$$\rho(E) = |R - E| + |E - R|,$$

где $|A|$ обозначает число элементов множества A.

В дальнейшем рассмотрим проблему отыскания отношения эквивалентности E_0 такого, что

$$E_0 = \min \rho(E). \tag{1}$$

Назовём это отношение E_0 оптимальным разбиением.

Выразим теперь отношение R в виде графа $G = (S, U)$ со множеством вершин S и множеством ребер U. При этом предполагаем, что ребро $(a,b) \in U$ тогда и только тогда, когда пара $(a,b) \in R$. Свойство рефлексивности в дальнейшем неважно, поэтому на графе G опускаем петли. Граф $G_i = (S_i, U_i)$ назовём здесь подграфом графа G, если

1) $S_i \subset S$,

2) $U_i = (S_i \times S_i) \cap U$.

Подграф G_i назовём полным, если

$$U_i = S_i \times S_i - \{(a,a) \mid a \in S_i\}.$$

Полный подграф G_i будем называть максимальным, если не найдётся другого полного подграфа G_p, чтобы выполнялось условие $V_i \subset V_p$.

Назовём здесь вилкой подграф

$$K = (\{a,b,c\}, \{(a,b),(b,c)\})$$

графа G . Ребро $(a,c) \notin U$ соответствует вилке K.

Ясно, что нахождение оптимального разбиения - это просто потеря вилок при помощи удаления или введения ребер так, чтобы выполнялось условие (I).

2. Функции оценки

Определение I. Назовём здесь максимальные полные подграфы $G_i = (V_i, U_i)$ и $G_j = (V_j, U_j)$ графа G инцидентными, если $V_i \cap V_j \neq \phi$.

В дальнейшем предполагается, что граф G содержит, по крайней мере, одну пару инцидентных подграфов G_i и G_j, таких, которые удовлетворяют условиям:

1) $\{\{V_i - V_j\} \times \{V_j - V_i\}\} \cap U = \phi$;

2) если $G_i^{\vee} = \{G_{ik} \mid k = 1, 2, \ldots, p\}$ множество всех подграфов графа G, инцидентных графу G_i, исключая G_j, и $G_j^{\vee} = \{G_{im} \mid m = 1, 2, \ldots, q\}$ множество всех подграфов графа G, инцидентных графу G_j, исключая G_i, то при каждой паре $G_{ik} \in G_i^{\vee}$ и $G_{jm} \in G_j^{\vee}$

$$V_{ik} \cap V_{jm} = \phi.$$

Может случиться, что одно или оба множества $G_i^{\vee}$ и $G_j^{\vee}$ пустые.

Определение 2. Функцию

$$f(G_{i,j}) = \frac{\left|\bigcup_{k=1}^{p} V_{ik} - V_i\right| \cdot |V_i \cap V_j| + |V_i - V_j| \cdot |V_j - V_i|}{|V_i \cap V_j| \cdot |V_i - V_j|} =$$

$$= |V_i - V_j|^{-1} \cdot \left|\bigcup_{k=1}^{p} V_{ik} - V_i\right| + |V_i \cap V_j|^{-1} \cdot |V_j - V_i|$$

будем называть функцией оценки на графе G_i относительно G_j.

Конечно, существует в графе G множество таких вилок, рёбрами которых являются элементы множества $\{V_i \cap V_j\} \times \{V_i - V_j\}$. Мы можем эти вилки графа превратить в треугольники, добавив соответствующие рёбра. Обозначим это множество через $U_{\vee}$. Ясно, что для числителя первоначального вида функции $f(G_{i,j})$ выполняется условие $\left|\bigcup_{k=1}^{p} V_{ik} - V_i\right| \cdot |V_i \cap V_j| + |V_i - V_j| \cdot |V_j - V_i| = |U_{\vee}|$.

Определение 3. Функцию

$$f(G_i, G_j) = \begin{cases} \dfrac{f(G_{i,j})}{f(G_{j,i})} = s & \text{при } s \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{s} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

будем называть функцией оценки графов G_i и G_j.

Функции, которые здесь определяются, обобщают в какой-то мере функции, определённые в статье [I].

Мы можем связать, по аналогии со статьей [I] понятие последней функции с понятием вектора так, чтобы этот вектор был направлен от G_i в G_j, если $f(G_i, G_j) > 1$ и в обратном направлении, если $f(G_i, G_j) = \frac{1}{s}$.

3. Функции оценки в одном частном случае

Теперь допустим, что граф G имеет вид:

I) граф G состоит точно из одного максимального полного подграфа G_0 со множеством инцидентных подграфов $T = \{ G_i \mid i = 1, 2, \ldots, k \}$;

2) при каждой паре $G_p, G_q \in T$ выполняется условие $V_p \cap V_q = \phi$.

Обозначим ещё $|V_i \cap V_0| = v_i$, $|V_i| - v_i = m_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ и $|V_0| = v_0$.

Теорема. Если граф G

а) удовлетворяет условиям (I) и (2);

б) векторы функции $f(G_i, G_0)$ направлены в подграф G_0;

в) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{v_i^2}{v_0 - v_i} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{k} m_j \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} v_i \sum_{j=i+1}^{k} v_j$;

тогда не существует такого разбиения E_0, который имел бы классы $V_1, V_2, \ldots, V_k$ и $V_0 - \bigcup_{i=1}^{k} V_i$.

Доказательство. При удалении $G_1, G_2, \ldots, G_k$ разрушаем соответственно

$$v_1 (v_0 - v_1),$$
$$v_2 (v_0 - v_1 - v_2),$$
$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -}$$
$$v_i (v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_i),$$
$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -}$$
$$v_k (v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_k)$$

рёбер подграфа G_0 и всего

$$I = \sum_{i=1}^{k} v_i(v_0 - v_i) - \sum_{i=1}^{k-1} v_i \sum_{j=i+1}^{k} v_j$$

рёбер. Конкретное выражение функции $f(G_i, G_0)$ выполняет условие

$$(v_0 - v_i)^2 : [m_i(v_0 - v_i) + v_i(m_1 + \cdots + m_{i-1} + m_{i+1} + \cdots + m_k)] > 1.$$

Перепишем последнее неравенство следующим образом

$$(v_0 - v_i)v_i - \frac{v_i^2}{v_0 - v_i}(m_1 + \ldots + m_{i-1} + m_{i+1} + \cdots + m_k) > m_i v_i. \quad (\mathrm{I})$$

Суммируя неравенства (I) при $i = 1, 2, \ldots, k$, получим

$$\sum_{i=1}^{k} v_i(v_0 - v_i) - \sum_{i=1}^{k} \frac{v_i^2}{v_0 - v_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} m_j > \sum_{i=1}^{k} m_i v_i. \quad (2)$$

Заметим, что правая сторона неравенства (2) - число рёбер, которые надо было удалить, если принять V_0 одним классом эквивалентности. Условие (b) позволяет выписать неравенство $I > \sum_{i=1}^{k} m_i v_i$, что и доказывает теорему.

Для примера можем рассмотреть граф G, если

$$v_0 = 10, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 2, \quad m_1 = 4 \quad и \quad m_2 = 5.$$

Следствие. Если граф G_L имеет подграф G, который выполняет условия теоремы, то для G можно применить рассмотренную теорему.

Литература

I. Г. Вейнер. О двух функциях оценки при аппроксимации симметричного бинарного отношения отношением эквивалентности." Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 345, Таллин, 1973.

G. Veiner

Two Auxiliary Functions for Optimal Approximating Graph by Complete Subgraphs

Summary

This paper deals with the problem of finding an equivalence relation E, which best approximates a given symmetric relation R in the sense of minimizing the number of the elements of (E - R) U (R - E). Two auxiliary functions, which are both applied to one special case, are defined.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 366 1974

ТРУДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
XV

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Функциональный анализ

УДК 681.3

Некоторые проблемы теории анализа данных. Выхандy Л.К. "Труды Таллинского политехнического института", № 366, 1974, с. 3-15.

Описывается один подход к анализу данных, эффективно использующий совпадение векторных пространств матрицы данных и ее ковариационной матрицы.

Библиография 7.

УДК 681.3.01.

Об одной методике составления программ. Микли Т.Я. "Труды Таллинского политехнического института", № 366, 1974, с. 17-22.

В данной статье описывается [illegible] системы программирования. Схема ориентированный ацикличный граф модулей и < – отношение предшествования. Множество модулей $S(a)$, принадлежащих рабочей программе, определяется как рефлексивное транзитивное замыкание (*) графа, начиная с некоторого модуля a, $S(a) = \{b / a <^{*} b\}$. Граф представляется в ЭВМ в виде списка. В статье дается алгоритм нахождения транзитивного замыкания этого списка. Методика гарантирует [illegible]

Таллинский политехнический институт
ТРУДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХУ
Редактор М. Томбак. Техн. редактор В. Ранник
Утвержден коллегией Трудов ТПИ 22/04 1974

Подписано к печати 17/10 1974
Бумага 60x90/16
Печ. л. 3,5 + 0,25 прилож. Уч.-изд. л. 2,6
Тираж 350
МВ-05298
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9
Зак. № 622
Цена 26 коп.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 366 1974

ТРУДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

ХУ

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Функциональный анализ

УДК 681.3

Некоторые проблемы теории анализа данных. Выханду Л.К. "Труды Таллинского политехнического института", № 366, 1974, с. 3-15.

Описывается один подход к анализу данных, эффективно использующий совпадение векторных пространств матрицы данных и ее ковариационной матрицы.

Библиографий 7.

УДК 681.3.01.

Об одной методике составления программ. Микли Т.Й. "Труды Таллинского политехнического института", № 366, 1974, с. 17-22.

В данной статье описана проблема организации модульной системы программирования. Схема обращений рассматривается как ориентированный ациклический граф $(A, \prec)$, гда A - множество модулей и $\prec$ - отношение предшествования. Множество модулей $S(a)$, принадлежащих рабочей программе, определяется как рефлексивное транзитивное замыкание (*) графа, начиная с некоторого модуля a, $S(a) = \{b / a \prec^* b\}$. Граф представляется на ЭВМ в виде списка. В статье дается алгоритм нахождения транзитивного замыкания этого списка. Методика гарантирует линейное прохождение магнитной ленты при составлении рабочей программы из модулей.

Библиографий 3.

УДК 681.3.01

Отображение структур данных в памяти ЭВМ. Аллик К.К.-Э., Микли Т.Й. "Труды Таллинского политехнического института", № 366, 1974, с. 23 - 30.

Дается неформальное описание языка низкого уровня, предназначенного для отображения и обработки структур данных в оперативной памяти ЭВМ. Описаны операторы генерации и гашения хиерархических структур данных.

Библиографий 5.

УДК 681.3.01.

Схема немагазинного распределения оперативной памяти ЭВМ "Минск-32". Аллик К.К-Э., Микли Т.Й. Тедерсоо К.Й. "Труды Таллинского политехнического института", № 366, 1974, с. 31-36.

Описывается одна система динамического немагазинного распределения оперативной памяти ЭВМ "Минск-32". При распределении памяти описываемая система и ОС "Минск-32" находятся в "мирном" сосуществовании.

Фигур 1, библиографий 5.

УДК 517.948:513.8+519.4

Отображения между алгебрами ограниченных непрерывных А-значных функций. Абель М.А. "Труды Таллинского политехнического института", № 366, 1974, с. 37 - 48.

Пусть А и В - банаховы алгебры, X и У - топологические пространства, $\varphi : A \to B$ - ограниченное непрерывное отображение, $\psi : У \to X$ - непрерывное отображение и $F(\varphi,\psi): f \to \varphi \circ f \circ \psi$ отображение от алгебры $C^*(X,A)$ в алгебру $C^*(У,B)$. Относительно свойств отображений φ и ψ изучаются алгебраические и топологические свойства отображения $F(\varphi,\psi)$ и свойства подалгебры $F(\varphi,\psi)[C^*(X,A)]$ алгебры $C^*(У,B)$, обобщая известные результаты проф. З. Семадени.

Библиографий 8.

УДК 519.I

Две вспомогательные функции оптимального приближения графа полными подграфами. Вейнер Г.А. "Труды Таллинского политехнического института", № 366, 1974, с. 49 - 52.

В статье рассматривается проблема аппроксимации симметричного бинарного отношения R отношением эквивалентности E при условии, что сумма

$$|R - E| + |E - R|$$

минимальная. Определены две вспомогательные функции. Эти функции использованы в одном частном случае.

Библиографий I.

Цена 26 коп.