

№ 6.7
629

ISSN 0136-3549

3134-3823

TALLINNA
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI
TOIMETISED

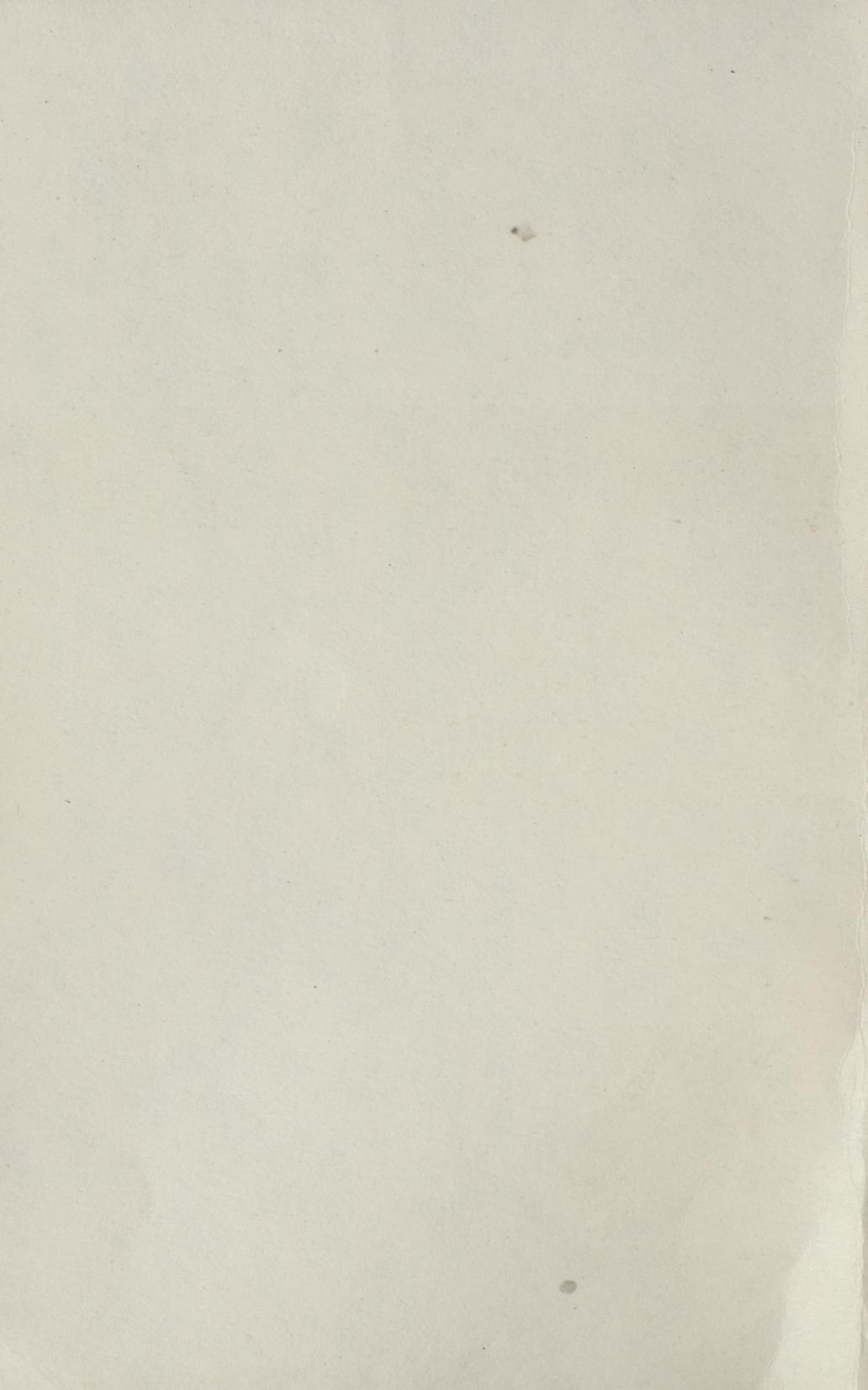
629

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

ТРИ
'86

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ И ЦЕПЕЙ
С ПОМОЩЬЮ ЭВМ





К ПОНЯТИЮ НЕПРЕРЫВНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

УДК 681.5+621.3



● АНАЛИЗ
И
СИНТЕЗ
СЛОЖНЫХ
СИСТЕМ
И
ЦЕПЕЙ
С
ПОМОЩЬЮ
ЭВМ

Электротехника и автоматика XXX11

Таллин 1986



ТПИ
ЭВМ

ТАЛЛИННИ ПОЛИТЕХНИСКИ ИНСТИТУДИ ТРУМДЭ

ТАЛЛИННИ ПОЛИТЕХНИСКИ ИНСТИТУДИ

УДК 681.3+681.3



АНГАНА
N
СННТЕЗ
СЛОЖНЫХ
СИСТЕМ
N
ЦЕПЕЙ
С
ПОМОЩЬЮ
ЭВМ

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Труды ТПИ

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ
И ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ
Электротехника и автоматика ХХХІІ
На русском языке
Отв. ред. Х. Мяги (Е. Рюстерн)
Техн. ред. А. Андриевская

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 13.11.86

Подписано к печати 3.02.87

МВ-01336

Формат 60x90/16

Печ. л. 8,75 + 0,25 приложение

Уч.-изд. л. 7,2

Тираж 300

Зак. № 43

Цена 1 руб. 10 коп.

Таллинский политехнический институт и электротехника

200108, Таллин, Эхитаяте геэ, 5

Ротапринт ТПИ, 200006, Таллин, ул. Коскла, 2/9

© Таллинский политехнический институт, 1986



1986 июль

К ПОНЯТИЮ НЕПРЕРЫВНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

I. Физическая модель процесса и элементы НТС

Введение

Непрерывные технологические процессы (НТП) относятся к широко распространенным объектам моделирования и управления. По своей природе НТП являются типичными сложными системами — состоят из множества элементов, причем сложность их поведения обусловлена сложностью взаимосвязей между этими элементами [1]. Несмотря на очевидную необходимость и целесообразность к настоящему времени отсутствует достаточно систематический подход к непрерывным технологическим системам (НТС) как специфическому объекту исследования. В имеющихся работах НТС (химико-технологическая система) отождествляется с НТП [1] или же рассматривается как некоторая совокупность подходящим образом соединенных математических моделей [2]. Более обоснованный подход к НТС, учитывающий особенности физических явлений в НТП и иерархию используемых понятий (аппарат — фаза — компонент), развит в работах [3—5]. Общей чертой существующих работ является недостаточно четкое разграничение понятий, относящихся к НТП как физической реальности и НТС как математической модели.

Построение методики математического моделирования НТП требует в первую очередь упорядочения основных понятий, к которым, несомненно, относится понятие НТС. Для этого необходимо ответить на следующие вопросы:

- что понимать под элементом НТС,
- что понимать под НТС,
- как строить НТС, если заданы цель моделирования, элементы НТС и структура их взаимосвязей.

При нахождении ответа на эти вопросы мы используем двухступенчатый переход от НПП к НТС, где на промежуточном этапе появляется физическая модель НПП в виде совокупности элементов процесса, взаимосвязанных обобщенными потоками. Развиваемая в настоящей работе методология построения НТС опирается на теорию явлений переноса, описываемых макроскопическими балансовыми моделями [6]. Значительное влияние на становление наших взглядов на НТС оказали идеи теории цепей (особенно теории мультипортов) [7], ячеечных моделей [8] и метода конечного элемента [9].

В первой части работы построена физическая модель НПП в виде совокупности элементов, взаимосвязанных физическими потоками вещества и энергии. Для математического описания каждого такого элемента используется набор элементов НТС, типы и свойства которых являются основным объектом исследования первой части настоящей работы.

2. Физическая модель НПП

Под НПП понимаем совокупность аппаратов, взаимосвязанных технологическими потоками и выполняющих непрерывное в пространстве преобразование входящих потоков сырья и энергии с заданными свойствами в выходящие потоки продуктов с желаемыми свойствами. НПП взаимодействует с окружающей его средой. Под окружающей средой мы понимаем физическое пространство, в котором находится технологическое оборудование и другие НПП, служащие источниками сырья и энергии для рассматриваемого процесса или потребителями его продуктов. Характерно, что наряду с организованными (технологическими) потоками сырья, энергии и продуктов, между НПП и окружающей средой существуют неорганизованные потоки вещества и энергии, например, утечки вещества из аппаратов или емкостей и потери тепла.

Обрабатываемые в НПП вещества могут находиться в различных агрегатных состояниях (газовые, жидкие, твердые, дисперсные), причем типичным является наличие в одном аппарате вещества одновременно в нескольких агрегатных состояниях. В химическом смысле потоки обрабатываемых веществ чаще всего являются многокомпонентными, т.е. состоят из множества разноименных химически индивидуальных веществ. Для важного

класса процессов переработки нефти, газа и твердых топлив характерно появление т.н. сложных смесей, являющихся многокомпонентными смесями с очень большим числом (порядка сотен и тысяч) трудноидентифицируемых компонентов [10].

Все понятия, относящиеся к НТП (технологический поток, технологический аппарат, окружающая среда, многокомпонентная и сложная смесь), являются объектами физической реальности. Более абстрактно целесообразно рассматривать НТП как физическую систему, состоящую из технологических аппаратов, взаимосвязанных технологическими потоками и связанную с окружающей средой потоками вещества и энергии.

Построение математической модели НТП начинается с разграничения объекта моделирования, т.е. "вырезки" его из окружающей среды. Физически НТП представляет собой элемент пространства с объемом V , занимаемым технологическим оборудованием и, быть может, прилегающими к нему частями окружающей среды. Вещество внутри этого объема целесообразно рассматривать как сплошную среду, которая может быть однофазной (гомогенной) или многофазной (гетерогенной). В гомогенной среде отсутствуют поверхности раздела, по которым соприкасаются части процесса, отличающиеся друг от друга по составу и свойствам. В пределах одной фазы вещество может быть физически однородным или неоднородным. Для НТП типичны многофазность и значительная неоднородность вещества в объеме V .

Элементы процесса получаются в результате разбиения сплошной среды, заполняющей объем V , на конечные непересекающиеся элементы V_i , $i=1, \dots, n$, причем $V_i \cap V_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Если считать, что V_i обозначает одновременно элемент процесса и его физический объем, тогда должно удовлетворяться условие

$$\sum_{i=1}^n V_i = V. \quad (I)$$

Следует подчеркнуть, что границы полученных элементов процесса (ЭП) умозрительны и не обязательно совпадают с видимыми границами технологических аппаратов или трубопроводов. Определяющим при разбиении НТП на ЭП является требование однофазности вещества в пределах объема V_i .

Каждый ЭП обменивается с окружающей его средой (другими ЭП) веществом и/или энергией. Таким образом, элемент процесса – это однофазный, конечный элемент сплошной среды вместе со связывающими его с окружающей средой потоками вещества и/или энергии, в котором происходит физико-химическое превращение вещества.

Физически ЭП может быть и совокупностью разобренных элементов сплошной среды, вместе образующих одну фазу. Такое явление характерно для пористых и дисперсных сплошных сред. С другой стороны, гомогенная среда (одна фаза) может быть разбита на конечное, большее единицы, число элементов. Поэтому число ЭП n не зависит ни от числа фаз и компонентов, ни от числа технологических аппаратов.

Если сплошная среда внутри ЭП является сложной смесью, тогда обычное понятие компонента смеси оказывается неэффективным и придется перейти к обобщенным понятиям точечного компонента или агрегированного компонента [10]. Отметим, что все понятия, относящиеся к ЭП, являются физическими абстракциями.

Термодинамическое состояние вещества в ЭП, согласно правилу фаз [11], полностью определяется $(N+2)$ подходящим образом выбранными переменными, где N – число компонентов. При описании состояния ЭП чаще применяются два комплекта переменных термодинамического состояния:

1) $(N+2)$ экстенсивные переменные (например, N количеств или потоков компонентов, количества или потоки энергии и импульса);

2) одна экстенсивная и $(N+1)$ – интенсивная переменная (общее количество или общий поток массы, $(N-1)$ – мольная, весовая или объемная доля компонентов, температура и давление).

Однако возможны и другие комбинации интенсивных и экстенсивных переменных термодинамического состояния вещества. Мы будем далее пользоваться первым способом описания как наиболее естественно связанным с балансовыми моделями НП, поскольку сбалансировать можно только экстенсивные величины.

Интенсивные и экстенсивные переменные термодинамического состояния ЭП соответствуют продольным и поперечным

переменным, используемым в теории цепей комплементарными парами [7]. В термодинамическом описании состояния НПП такая полная комплементарность отсутствует (для потоков компонентов нет комплементарной поперечной переменной) и поэтому непосредственное применение хорошо разработанных моделей и методов теории цепей для моделирования НПП невозможно, хотя известны попытки соответствующего обобщения теории цепей [12].

Каждый физический поток, связывающий ЭП с окружающей средой, можно рассматривать состоящим из не более чем $(N+2)$ абстрактных — обобщенных потоков: общего массового потока, потока энергии (тепла), потоков компонентов и потока импульса. Обозначим обобщенный поток через $q_{\nu k}(t)$.

В ЭП V_i вещество, энергия и импульс могут накапливаться. Аккумуляция k -й экстенсивной переменной термодинамического состояния сплошной среды $x_k(t)$ является интегралом от соответствующего обобщенного потока:

$$x_k(t) = x_k(t_0) + \int_{t_0}^t q_{\nu k}(t) dt, \quad (2)$$

где под $q_{\nu k}(t)$ необходимо понять алгебраическую сумму одноименных обобщенных потоков, инцидентных рассматриваемому ЭП.

Сопоставим каждому элементу НПП V_i вершину некоторого графа, а каждому обобщенному потоку $q_{\nu k}$ — ребро. Тогда, с учетом взаимосвязей элементов, получим поточковый мультиграф НПП $G_n = (\mathcal{E}, \mathcal{Q})$, где \mathcal{E} — конечное множество ЭП, а \mathcal{Q} — конечное множество обобщенных потоков. В отличие от потокового мультиграфа, принятого в работе [1], наш поточковый мультиграф G_n не ориентирован. Это обусловлено тем, что первичным свойством нашей физической модели НПП является связанность ЭП обобщенными потоками, а направленность этих потоков уже вторична и во многих случаях может меняться даже в ходе процесса.

Если сохранить в поточковом мультиграфе G_n только ребра, соответствующие одноименным обобщенным потокам, то в качестве его частей можно выделить общий материальный поточковый граф G_m , энергетический (тепловой) поточковый граф G_n , поточковые графы компонентов G_j , $j = 1, \dots, N$ и поточковый граф импульса G_v . Из того, что для полного описания каж-

дой фазы требуются $(N+2)$ переменные состояния, еще не следует, что все перечисленные потоковые графы G_m, G_n, G_j и G_v изоморфны. Это обусловлено тем, что не все физические потоки содержат все N компонентов и кроме того, имеются потоки энергии (тепла) без сопутствующего потока вещества.

Термодинамическое состояние НТП описывается гипервектором $\tilde{x}(t) = (q^T(t), x^T(t))^T$, где $q(t)$ - гипервектор обобщенных потоков между ЭП, а $x(t)$ - гипервектор аккумуляций экстенсивных величин в ЭП. Размерность вектора состояния \tilde{x} : $n_{\tilde{x}} = \dim \tilde{x}(t)$ однозначно определена структурой потокового мультиграфа G_n и удовлетворяет неравенству:

$$n_{\tilde{x}} \leq (N+2)|\Theta| + |Q|. \quad (3)$$

Из приведенного можно сделать вывод, что понятие термодинамического состояния НТП связано с его модельным представлением в виде совокупности однофазных элементов сплошной среды, взаимосвязанных физическими потоками, и наконец, выбором параметров состояния для этих элементов и потоков.

3. Элементы НТС

Математическая модель НТП, которую назовем НТС, строится из элементов, являющихся абстрактными математическими объектами, сопоставленными элементам процесса. Принятое нами понятие элемента НТС имеет много аналогичного с понятием элемента цепи из работы [7] и является специфическим мультипортом, учитывающим некоторые фундаментальные свойства НТП.

Элементом НТС назовем семерку

$$E = (\Pi, \Sigma, \mathcal{F}, \Psi_{\Pi}, \Psi_{\Sigma}, T, \Xi),$$

где Π - конечное непустое множество портов: $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_v)$,
 Σ - конечное множество псевдопортов: $\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s)$,
 \mathcal{F} - пространство возможных для портовых и псевдопортовых переменных функций времени,
 Ψ_{Π} - отношение $\Psi_{\Pi} \subset \Pi \times (\mathcal{F} \times \mathcal{F})$, согласно которому каждому порту π_i соответствует упорядоченная пара портовых переменных $(q_i(t), x_i(t))$ с возможными значениями $(q_i(t), x_i(t)) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

Ψ_{Σ} - отношение $\Psi_{\Sigma} \subset \Sigma \times (\mathcal{F} \times \mathcal{F})$, согласно которому каждому псевдопорту σ_j соответствует упорядоченная пара псевдопортовых переменных $(v_j(t), w_j(t))$ с возможными значениями $(v_j(t), w_j(t)) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

\mathbb{T} - множество моментов времени,

Ξ - отображение пространства $(\mathcal{F} \times \mathcal{F})^{\text{пу}\Sigma}$ на себя, определяющее множество всех допустимых совокупностей переменных на всех портах и псевдопортах элемента.

Из определения следует, что с каждым портом элемента НТС связана пара переменных $(q_i(t), x_i(t))$, которые интерпретируем как обобщенный поток и интеграл по времени от него типа (2). Совокупность 2ν портовых переменных полностью определяет состояние элемента НТС, причем такое определение состояния не претендует на минимальность.

С каждым псевдопортом также связана пара переменных $(v_j(t), w_j(t))$, которые интерпретируем как параметры элемента НТС. Их попарное появление дает нам возможность при построении НТС из заданного набора элементов рассматривать порты и псевдопорты структурно равноправными. Отметим, что множество псевдопортов может быть и пустым.

Важнейшим свойством элемента НТС является его неориентированность. Определение элемента постулирует лишь, что с каждым элементом связаны множества переменных, описывающих его состояние и параметры, но не указывает направления движения информации, как это характерно для моделей пространства состояний. Такая неориентированность дает возможность многоцелевого использования каждого элемента НТС путем определения направлений обобщенных потоков и направления движения информации (входов и выходов).

Множество моментов времени есть некоторое упорядоченное подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}_1$. На основании свойств множества \mathbb{T} элементы НТС делятся на элементы с непрерывным временем и элементы с дискретным временем. В элементах НТС с непрерывным временем множество \mathbb{T} совпадает с множеством вещественных чисел: $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1$. В элементах с дискретным временем множество моментов времени эквивалентно множеству целых чисел: $\mathbb{T} \sim \mathbb{N}$. Будем множество

моментов времени для непрерывного случая обозначать через T_c и для дискретного - через T_d .

4. Собственные уравнения элемента

Отображение Ξ накладывает на изменение портовых и псевдопортовых переменных элемента НТС определенные связи. Задаем это отображение системой собственных уравнений элемента НТС:

$$\mathcal{F}_E(q^E(t), x^E(t), p^E(t), t) = 0, t \in T, \quad (4)$$

где $\mathcal{F}_E(\cdot)$ - собственный оператор элемента,

$q^E(t)$ - вектор потоков элемента $q^E = (q_1, \dots, q_\nu)^T$,

$x^E(t)$ - вектор аккумуляций элемента $x^E = (x_1, \dots, x_\nu)^T$,

$p^E(t)$ - вектор параметров элемента $p^E = ((\nu_1, w_1), \dots, (\nu_s, w_s))^T$.

Параметрами элемента НТС могут быть координаты векторов потоков и аккумуляций других элементов системы, конструктивные параметры технологического оборудования, физико-химические параметры сплошной среды или ее компонентов и т.п.

Система собственных уравнений элемента НТС состоит из трех групп уравнений, куда входят:

1) уравнение баланса потоков,

2) уравнения динамической связи между парами переменных состояния элемента $q_i(t)$ и $x_i(t)$,

3) определяющие уравнения, связывающие переменные состояния и параметры элемента.

Обязательным компонентом системы собственных уравнений элемента является уравнение баланса потоков. Остальные две группы уравнений могут и отсутствовать.

В случае элемента НТС с непрерывным временем уравнение баланса потоков имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{\nu} q_i(t) = 0, t \in T_c, \quad (5)$$

где ν - число портов элемента.

Для элемента с дискретным временем это же уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{\nu} \bar{q}_i(t_k) = 0, \quad t_k \in T_d \quad (6)$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{q}_i(t_k)$ - суммарный за интервал дискретности $\tau_k = (t_k - t_{k-1})$ i -й поток.

Уравнение баланса (6) можно рассматривать как результат интегрирования мгновенного баланса (5) через интервал дискретности τ_k . Таким образом, в элементах НТС с непрерывным временем соблюдается мгновенный баланс потоков, а в элементах с дискретным временем - интегральный через интервал дискретности баланс потоков.

В случае элементов НТС с непрерывным временем уравнения динамической связи между парами переменных состояния имеют вид:

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^t q_i(t) dt. \quad (7)$$

В силу обратимости собственных уравнений (4), уравнение (7) можно представить и в явном относительно $q_i(t)$ виде

$$q_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = \dot{x}_i(t). \quad (8)$$

Обозначим через J_X^E множество индексов тех потоков, для которых составлены уравнения типа (7) или (8). Очевидно, $0 \leq |J_X^E| \leq \nu$.

Возможность формулировки соотношений (7) или (8) предполагает определенную гладкость пространства возможных для портовых (и псевдопортовых) переменных функций времени \mathcal{F} . Поэтому в случае элементов НТС с непрерывным временем будем предполагать, что $\mathcal{F} = C^1$, где C^1 - класс непрерывно дифференцируемых функций.

В случае элементов НТС с дискретным временем уравнения динамической связи между парами переменных состояния имеют вид:

$$x_i(t_k) = x_i(t_0) + \tilde{q}_i(t_k), \quad t_k \in T_d, \quad (9)$$

где

$$\tilde{q}_i(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} q_i(t) dt. \quad (10)$$

Величину $\bar{q}_i(t_k)$ можно интерпретировать как суммарный за период $(t_k - t_0)$, $k = 1, 2, \dots$, i -й поток. Если этот период разбит на k интервалов дискретности $\tau_j = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, \dots, k$, тогда уравнение (9) представляется в виде

$$x_i(t_k) = x_i(t_0) + \sum_{j=1}^k \bar{q}_i(t_j), \quad (II)$$

а при $t_0 = t_{k-1}$

$$x_i(t_k) = x_i(t_{k-1}) + \bar{q}_i(t_k), \quad (I2)$$

используем далее в качестве основной формы уравнений динамической связи между $\bar{q}_i(t_k)$ и $x_i(t_k)$. С привлечением понятия среднего за интервал дискретности τ_k потока $\check{q}_i(t_k)$ можно уравнение (I2) представить в виде

$$x_i(t_k) = x_i(t_{k-1}) + \tau_k \check{q}_i(t_k). \quad (I3)$$

Число уравнений типа (I2) или (I3) также может меняться в пределах от 0 до ν .

С учетом сделанных замечаний относительно различий элементов НТС с непрерывным и дискретным временем, представим собственные уравнения элемента с дискретным временем в виде:

$$\bar{F}_E(\bar{q}^E(t_k), x^E(t_k), \bar{p}^E(t_k), t_k) = 0, \quad (I4)$$

где $\bar{F}_E(\cdot)$ - собственный оператор элемента НТС с дискретным временем.

Отличное от элемента с непрерывным временем обозначение вектора параметров $\bar{p}^E(t_k)$ подчеркивает его возможно отличающийся от $p^E(t)$ смысл, аналогично различию между $\bar{q}^E(t_k)$ и $q^E(t)$.

В операторной записи система определяющих уравнений элемента НТС не отличается от системы собственных уравнений элемента и в случае непрерывного времени имеет вид

$$F'_E(q^E(t), x^E(t), p^E(t), t) = 0, t \in T_c. \quad (I5)$$

где $F'_E(\cdot)$ - определяющий оператор элемента НТС.

Как следует из вышеприведенного определяющие уравнения (I5) могут и отсутствовать.

Будем входящие в собственные уравнения элемента НТС координаты векторов потоков, аккумуляций и параметров называть переменными элемента и обозначать их соответственно векторами $\theta^E = (q^{ET}, x^{ET}, p^{ET})^T$ и $\bar{\theta}^E = (\bar{q}^{ET}, \bar{x}^{ET}, \bar{p}^{ET})^T$.

Обозначим число собственных уравнений (4) или (I4) через n_{FE} , а число переменных элемента НТС — через $n_{\theta E}$. Относительно соотношения этих двух чисел предположим

$$n_{FE} \leq n_{\theta E}, \quad (I6)$$

что на практике всегда выполняется. Учитывая состав собственных уравнений элемента НТС получим, что $n_{FE} \geq 1$, причем равенство достигается, если система (4) или (I4) состоит только из уравнения баланса (5) или (6).

Собственные уравнения элемента НТС (4) или (I4) можно использовать для выражения подходящим образом выбранных переменных, если остальные заданы. Вычисляемость некоторого набора переменных элемента из системы его собственных уравнений определяется рангом элемента. Рангом элемента НТС ρ_E назовем максимальное число переменных, вычисляемых из системы собственных уравнений (4) или (I4). Нетрудно убедиться, что ранг элемента НТС равен рангу функциональной матрицы его собственного оператора $F_E(\cdot)$ (или $\bar{F}_E(\cdot)$)

$$\rho_E(t) = \text{rank} \left. \frac{\partial F_E(\cdot)}{\partial \theta^E} \right|_{\theta^E = \theta^E(t)} \quad (I7)$$

и в общем случае зависит от времени.

В понятиях физической модели НП можно элементу НТС дать следующую интерпретацию. Каждый элемент НТС описывает макроскопический баланс одного типа обобщенных потоков в некотором элементе НП и, возможно, дополнительные зависимости между обобщенными потоками, интегралами от них (аккумуляциями) и параметрами этого элемента НТС. Таким образом, каждому элементу процесса сопоставляется множество элементов НТС, согласно числу сбалансированных экстенсивных переменных, которое не превышает $(N+2)$. Каждому обобщенному потоку в свою очередь соответствует один порт элемента НТС.

5. Типы элементов НТС

В п. 3 было установлено, что на основе свойств множества моментов времени T элементы НТС делятся на элементы с непрерывным и дискретным временем. В зависимости от функциональных свойств собственного оператора $\mathcal{F}_E(\cdot)$ или $\bar{\mathcal{F}}_E(\cdot)$ можно выделить более узкие классы элементов НТС, схематично показанные на рис. 1.

Предположим, что собственный оператор элемента НТС относится к классу дифференциальных, интегральных или разностных операторов первого порядка, где независимой переменной является время $t \in T$, и обозначим через s алгебраизированный оператор дифференцирования или разностный оператор. Используя оператор s , можно систему собственных уравнений (4) (или (14)) представить в виде

$$\mathcal{F}_{Es}(\theta^E(t), s, t) = 0, \quad (18)$$

где $\mathcal{F}_{Es}(\cdot)$ - известная вектор-функция.

Элемент НТС, описываемый системой (18), назовем динамическим. Если же в собственных уравнениях оператор s отсутствует:

$$\mathcal{F}_{Es}(\theta^E(t), t) = 0 \quad (19)$$

тогда имеем дело со статическим элементом НТС.

Элементы НТС с собственными уравнениями типа (18) и (19) нестационарны, что выражается также в возможной зависимости их ранга ρ_E от времени. Стационарные элементы НТС описываются в общем нелинейными собственными уравнениями:

$$\mathcal{F}_{Es}(\theta^E(t), s) = 0 \quad (20)$$

и характеризуются постоянством ранга. Далее мы ограничимся рассмотрением нелинейных НТС, элементы которых стационарны.

Важным частным случаем элементов НТС являются линейные элементы, которые в общем, нестационарном случае, описываются матричными уравнениями

$$\mathcal{R}_E(s, t) \theta^E(t) = 0, \quad (21)$$

где $\mathcal{R}_E(s, t)$ - матрица, элементы которой суть дробно-рациональные функции оператора s с коэффициентами, зависящими от времени.



Рис. 1. Классификация элементов НТС на основании функциональных свойств собственных уравнений.

В стационарном линейном элементе НТС собственные уравнения имеют вид

$$\mathfrak{B}_E(s) \Theta^E(t) = 0, \quad (22)$$

где $\mathfrak{B}_E(s)$ - матрица с дробнорациональными элементами.

В случае статического линейного элемента НТС связи между переменными задаются системой алгебраических уравнений

$$\mathcal{B}_E(t) \Theta^E(t) = 0, \quad (23)$$

где $\mathcal{B}_E(t)$ - числовая матрица размерности $(n_{\mathcal{F}_E} \times n_{\Theta^E})$ и ранга $\rho_E(t)$.

Если элемент НТС (23) еще и стационарный, тогда \mathcal{B}_E - постоянная матрица с вещественными элементами.

Если все переменные элемента НТС $\Theta^E(t)$ суть детерминированные функции времени, тогда такой элемент назовем детерминированным. Если же в числе координат вектора $\Theta^E(t)$ есть случайные функции или сам оператор $\mathcal{F}_E(\cdot)$ стохастический, то такой элемент НТС назовем стохастическим. Как будет показано в п. 7 имеются источники стохастичности двух типов: стохастические модели потоков и стохастические модели измерений.

Наряду с классификацией элементов НТС на основании функциональных свойств их собственных операторов можно провести их классификацию по типу баланса, описываемому уравнением (5) или (6). Анализ особенностей элементов общего и покомпонентного материального баланса, энергетического (теплового) баланса и баланса импульса выходит за рамки настоящей работы.

6. Детерминированные элементы НТС

Детерминированным элементом НТС с непрерывным временем назовем элемент с системой собственных уравнений

$$\begin{aligned} 1^T q^E(t) &= 0 \\ x^E(t) &= x^E(t_0) + \int_{t_0}^t q^E(t) dt \\ \mathcal{F}_E^T(q^E(t), x^E(t), p^E(t)) &= 0 \\ t \in T_c, \end{aligned} \quad (24)$$

где $q^E(t), x^E(t)$ и $p^E(t)$ - детерминированные вектор-функции времени, $1^T = (1, 1, \dots, 1)$,

$q^E(t)$ - вектор, координатами которого являются потоки $q_j(t)$ с $j \in J_x^E$.

Простейшим является детерминированный элемент НТС, система собственных уравнений которого состоит только из

уравнения баланса (5). Такой элемент имеет ранг $\rho_E=1$ и как следует из определения ранга элемента, из его собственного уравнения (5) можно выразить любой из ν потоков:

$$q_\ell(t) = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^{\nu} q_i(t). \quad (25)$$

Если $\nu=1$, тогда из уравнения (5) следует $q_1(t) \equiv 0$. Таким образом, однопортовый элемент НТС является в некотором смысле вырожденным и практического интереса не представляет.

В элементе ранга 1 параметры, а следовательно, и псевдопорты отсутствуют, т.е. $\Sigma = \emptyset$. Множество переменных такого элемента содержит только переменные состояния $q_i(t)$ и $x_i(t)$, $i=1, \dots, \nu$, причем все переменные типа аккумуляции $x_i(t)$ не определены. Поэтому элемент НТС ранга 1 всегда статический.

Детерминированный элемент НТС, в котором определяющие уравнения отсутствуют, описывается системой

$$\begin{aligned} 1^T q^E(t) &= 0 \\ x^E(t) &= x^E(t_0) + \int_{t_0}^t q^E(t) dt \end{aligned} \quad (26)$$

или равноценной ей системой

$$\begin{aligned} 1^T q^E(t) &= 0 \\ \dot{x}^E(t) &= q^E(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Важным частным случаем элемента типа (26) или (27) является элемент НТС с одноэлементным множеством $J_x^E = \{a\}$:

$$\begin{aligned} 1^T q^E(t) &= 0 \\ \dot{x}_a(t) &= q_a(t), \end{aligned} \quad (28)$$

где $q_a(t)$ - поток аккумуляции в элементе НТС.

Выражая из уравнения баланса (5) поток $q_a(t)$ и подставляя в динамическое уравнение связи системы (28), получим новое уравнение элемента

$$\dot{x}_a(t) = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq a}}^{\nu} q_i(t), \quad (29)$$

заменяющее систему (28), в котором поток аккумуляции исключен.

Элементы типа (26) или (27) имеют ранг $\rho_E = |J_x^E| + 1$ и являются простейшими динамическими детерминированными элементами НТС с непрерывным временем. Поэтому будем называть их тривиальными динамическими элементами.

Система определяющих уравнений (15) описывает причинные связи между потоками, аккумуляциями и параметрами. Предположим далее, что определяющий оператор элемента НТС (24) $\mathcal{F}_E^*(\cdot)$ – статический, т.е. $\mathcal{F}_E^*(\cdot)$ – суть вектор-функция от $\Theta(t)$. Анализ макроскопических балансовых моделей НП показывает, что такое предположение вполне оправдано.

Используем часть определяющих уравнений (15) для выражения потоков:

$$q_k(t) = q_k(\Theta(t)), \quad (30)$$

где $q_k(t)$ – известные, в общем нелинейные, функции.

Полученные уравнения (30) описывают зависимость рассматриваемого потока $q_k(t)$ от остальных потоков, аккумуляций и параметров элемента НТС. Поэтому целесообразно называть уравнения (30) детерминированными моделями потоков. Число таких уравнений, очевидно, не может превышать числа портов ν .

Детерминированные элементы НТС (24) являются динамическими, причем их динамичность обусловлена наличием между некоторыми потоками и аккумуляциями динамических связей типа (7) или (8). В статическом детерминированном элементе НТС с непрерывным временем уравнения (7) или (8) отсутствуют:

$$\begin{aligned} 1^T q^E(t) &= 0 \\ \mathcal{F}_E^*(q^E(t), x^E(t), p^E(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

хотя переменные типа аккумуляции могут присутствовать в определяющих уравнениях.

Детерминированный элемент НТС с дискретным временем описывается системой собственных уравнений

$$\begin{aligned} 1^T \bar{q}^E(t_k) &= 0 \\ x^E(t_k) &= x^E(t_{k-1}) + \bar{q}^E x^E(t_k) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\bar{\mathcal{F}}_E'(\bar{q}^E(t_k), x^E(t_k), \bar{p}^E(t_k)) = 0.$$

Относительно элемента с дискретным временем (33) справедливы все выводы, полученные для детерминированного элемента НТС с непрерывным временем. Собственные уравнения (32) могут быть составлены и для осредненных за интервал дискретности τ_k потоков $\check{q}_e(t_k)$.

7. Стохастические элементы НТС

Стохастическим элементом НТС с непрерывным временем назовем элемент, описываемый системой собственных уравнений:

$$\begin{aligned} 1^T q^E(t) &= 0 \\ x^E(t) &= x^E(t_0) + \int_{t_0}^t q^{xE}(t) dt \\ q^{vE}(t) &= g^{vE}(v^E(t)) \\ y^E(t) &= h^E(q^E(t), x^E(t), p^{sE}(t), w^E(t)) \\ \mathcal{F}_{sE}(q^E(t), x^E(t), p^{sE}(t)) &= 0 \\ t &\in T_c, \end{aligned} \quad (33)$$

где $v^E(t)$ и $w^E(t)$ - случайные векторные процессы,

$g^{vE}(\cdot)$ - оператор модели потоков,

$y^E(t)$ - вектор измеряемых технологических параметров, функционально связанных с $q^E(t)$ и $x^E(t)$,

$h^E(\cdot)$ - оператор модели технологических измерений,

$\mathcal{F}_{sE}(\cdot)$ - определяющий оператор элемента.

Параметрами стохастического элемента с непрерывным временем являются $v^E(t)$, $y^E(t)$, $p^{sE}(t)$ и $w^E(t)$, причем координатами вектора $p^{sE}(t)$ могут быть потоки и аккумуляции других элементов НТС.

Система моделей потоков, моделей технологических измерений и определяющих уравнений стохастического элемента:

$$\begin{aligned} q^{vE}(t) &= g^{vE}(v^E(t)) \\ y^E(t) &= h^E(q^E(t), x^E(t), p^{sE}(t), w^E(t)) \\ \mathcal{F}_{sE}(q^E(t), x^E(t), p^{sE}(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

является частным случаем системы определяющих уравнений (15), откуда выражены вектор потоков $q^{vE}(t)$ и вектор из-

меряемых технологических параметров $y^E(t)$, как подвектор вектора параметров. Через $q^{vE}(t)$ обозначен подвектор вектора потоков $q^E(t)$, координатами которого являются те потоки, для которых составлены стохастические модели потоков.

В состав определяющих уравнений элемента $F_{SE}(\cdot) = 0$ могут входить выражения оцениваемых, но не измеряемых технологических параметров, а также детерминированные модели потоков типа (30). Относительно оператора $F_{SE}(\cdot)$ предположим, что он является статическим, т.е. $F_{SE}(\cdot)$ — суть вектор-функция.

Как и в случае детерминированных элементов НТС, стохастические модели потоков, модели технологических измерений, а также определяющие уравнения из системы (34) могут в числе собственных уравнений (33) отсутствовать. В предельном случае отсутствия всей системы (34) приходим к тривиальному детерминированному элементу (26).

Случайный процесс $v^E(t)$ порождает изменение во времени вектора потоков $q^{vE}(t)$. Стохастическую модель потоков:

$$q^{vE}(t) = g^{vE}(v^E(t)) \quad (35)$$

можно рассматривать как решение некоторого векторного стохастического дифференциального уравнения

$$dq^{vE}(t) = g^{vE}(dv^E(t)), \quad (36)$$

где $g^{vE}(\cdot)$ — известная, в общем нелинейная, вектор-функция.

В простейшем случае этим уравнением будет

$$dq^{vE}(t) = dv^E(t). \quad (37)$$

Число моделей потоков типа (35) или (36) может меняться в пределах от 0 до v .

Случайный векторный процесс $w^E(t)$ моделирует ошибки измерения технологических параметров, связанных с потоками и аккумуляциями рассматриваемого элемента. Число таких параметров не ограничено. Предположим, что оператор модели технологических измерений $h^E(\cdot)$ является статическим, т.е. $h^E(\cdot)$ — суть вектор-функция. Наиболее распространенным типом модели технологических измерений является модель с аддитивным шумом измерений:

$$y^E(t) = h^E(q^E(t), x^E(t), p^{sE}(t)) + w^E(t). \quad (38)$$

Предположим также, что $y_{i\ell}(t)$ и $w_{i\ell}(t)$ образуют упорядоченную пару переменных, сопоставленную некоторому псевдопорту $\sigma_\ell \in \Sigma$. В частном случае модели измерений могут в стохастическом элементе НТС (33) и отсутствовать.

В статическом стохастическом элементе НТС отсутствуют динамические уравнения связи типа (7) или (8) и стохастические модели потоков (35):

$$\begin{aligned} 1^T q^E(t) &= 0 \\ y^E(t) &= h^E(q^E(t), x^E(t), p^{sE}(t), w^E(t)) \\ \bar{F}_{sE}(q^E(t), x^E(t), p^{sE}(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

В квазистационарном стохастическом элементе НТС отсутствуют только динамические уравнения связи типа (7) или (8):

$$\begin{aligned} 1^T q^E(t) &= 0 \\ q^v E(t) &= g^v E(v^E(t)) \\ y^E(t) &= h^E(q^E(t), x^E(t), p^{sE}(t), w^E(t)) \\ \bar{F}_{sE}(q^E(t), x^E(t), p^{sE}(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, статические и квазистационарные элементы НТС являются частными случаями динамического стохастического элемента (33).

Стохастическим элементом НТС с дискретным временем назовем элемент, описываемый собственными уравнениями:

$$\begin{aligned} 1^T \bar{q}^E(t_k) &= 0 \\ x^E(t_k) &= x^E(t_{k-1}) + \bar{q}^{x^E}(t_k) \\ \bar{q}^v E(t_k) &= \bar{g}^v E(\bar{v}^E(t_k)) \\ \bar{y}^E(t_k) &= \bar{h}^E(\bar{q}^E(t_k), x^E(t_k), \bar{p}^{sE}(t_k), \bar{w}^E(t_k)) \\ \bar{F}_{sE}(\bar{q}^E(t_k), x^E(t_k), \bar{p}^{sE}(t_k)) &= 0 \\ t_k &\in T_d, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\bar{v}^E(t_k)$ и $\bar{w}^E(t_k)$ - случайные векторные последовательности.

Случайная последовательность $\bar{v}^E(t_k)$ порождает изменение во времени вектора потоков $\bar{q}^v E(t_k)$, описываемое разностным уравнением

$$\bar{q}^{vE}(t_k) = \bar{q}^{vE}(t_{k-1}), \bar{v}^E(t_k), \quad (42)$$

где $\bar{q}^{vE}(\cdot)$ - известная вектор-функция.

Простейшим случаем уравнения (42) является

$$\bar{q}^{vE}(t_k) = \bar{q}^{vE}(t_{k-1}) + \bar{v}^E(t_k). \quad (43)$$

Аналогично стохастическому элементу с непрерывным временем (33) модель технологических измерений чаще всего принимается с аддитивным шумом измерений:

$$y^E(t_k) = \bar{h}^E(\bar{q}^E(t_k), x^E(t_k), \bar{p}^{sE}(t_k)) + \bar{w}^E(t_k). \quad (44)$$

В частном случае модели потоков (42), технологических измерений (44), а также определяющие уравнения $\bar{F}_{sE}(\cdot) = 0$ могут в системе (41) отсутствовать.

Л и т е р а т у р а

1. Кафаров В.В., Перов В.Л., Мешалкин В.П. Принципы математического моделирования химико-технологических систем. - М.: Химия, 1974. - 343 с.
2. Островский Г.М., Волин Ю.М. Моделирование сложных химико-технологических схем. - М.: Химия, 1975.
3. Каллас Ю.И. Математическое моделирование химико-технологических систем // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1975. - № 387. - С. 173-176.
4. Каллас Ю.И. Математическое моделирование многофазных химико-технологических систем // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1977. - № 418. С. 15-19.
5. Арна О. Балансовые модели в АСУ непрерывными технологическими процессами / ТПИ. - Таллин, 1985. - 84 с.
6. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. - М.: Химия, 1974. - 687 с.
7. Силлама Х.В. Основы синтеза схемных структур соединения многополюсных цепей. - Таллин: Валгус, 1983. - 416 с.

8. G o d f r e y K.R. Compartmental models and their application. London, 1983. - 364 p.

9. З е н к е в и ч О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 328 с.

10. А а р н а О.А. К математическому моделированию пиролиза сложных смесей // Журнал прикладной химии. - 1979. - Т. 52. - № 7. - С. 1564-1567.

11. Б е н е д е к П., Л а с л о А. Научные основы химической технологии. - Л.: Химия, 1970. - 376 с.

12. S i n g e r D. An extension of the network theory // Int. F. Syst. Sci. - 1973. - Vol. 4, N 3. - P. 416-472.

О. Aarna

Towards the Concept of Continuous Technological System

I. Physical Process Model and System Elements

Abstract

For continuous technological process (CTP) modelling a two-step procedure is proposed, where in the intermediate stage physical process model appears as a collection of finite process elements, interconnected by mass, energy and momentum flows. The concept of continuous technological system (CTS) element is introduced and its properties and types are studied. CTS element is a building block of CTP mathematical model, describing balance relations of a single type of generalized flows in a process element.

К ПОНЯТИЮ НЕПРЕРЫВНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

II. НТС и балансовые модели пространства состояний

В первой части настоящей работы [1] была предложена физическая модель непрерывного технологического процесса (НТП) в виде совокупности элементов процесса, взаимосвязанных обобщенными потоками и введено понятие элемента непрерывной технологической системы (НТС) как строительного блока математических моделей процесса, в котором отражены отношения баланса потоков. В этой части показано, как в результате попарного соединения портов и псевдопортов элементов получают НТС различного типа и исследованы их связи с моделями прогноза и оценки состояния НТП.

I. Понятие НТС

Пусть задано конечное непустое множество элементов НТС $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_m\}$. Непрерывная технологическая система — это двойка $\mathcal{T} = (\mathcal{E}, S)$, где S — непустое множество соединений между портами и псевдопортами элементов: $S \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, а $\mathcal{P} = (\Pi_1, \dots, \Pi_m, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m)$, причем Π_i — множество портов i -го элемента, а Σ_i — множество псевдопортов i -го элемента, $i = 1, \dots, m$. В множестве соединений S имеются элементы трех типов: $s(\pi_{im}, \pi_{jn})$, $s(\pi_{im}, \sigma_{jp})$ и $s(\sigma_{iq}, \sigma_{jp})$, где $\pi_{im} \in \Pi_i$, $\pi_{jn} \in \Pi_j$, $\sigma_{jp} \in \Sigma_j$ и $\sigma_{iq} \in \Sigma_i$, причем $i, j = 1, \dots, m$; $m = 1, \dots, \nu_i$, $n = 1, \dots, \nu_j$; $p = 1, \dots, s_j$; $q = 1, \dots, s_i$; $\nu_i (\nu_j)$ — число портов i -го (j -го) элемента НТС, $s_i (s_j)$ — число псевдопортов i -го (j -го) элемента НТС.

Образование элементов множества S подчиняется следующим правилам:

1) диагональ прямого произведения $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ не принадлежит множеству S , т.е. $s(\pi_{im}, \pi_{in}) \notin S$ и $s(\sigma_{jp}, \sigma_{jp}) \notin S$;

2) каждый порт i -го элемента НТС $\pi_{im} \in \mathcal{P}$ может быть соединен одним и только одним портом j -го элемента НТС $\pi_{jn} \in \mathcal{P}$, причем $i \neq j$;

3) каждый порт $\pi_{im} \in \mathcal{P}$ может быть соединен с несколькими псевдопортами других элементов $\sigma_{ij} \in \mathcal{P}$, $i \neq j$;

4) каждый псевдопорт $\sigma_{ip} \in \mathcal{P}$ может быть соединен с несколькими псевдопортами $\sigma_{iq} \in \mathcal{P}$;

5) имеются псевдопорты $\sigma_{jp} \in \mathcal{P}$, которые не могут быть соединены с другими портами $\pi_{im} \in \mathcal{P}$ (см. п. 4).

Если множество соединений S содержит только элементы типа $s(\pi_{im}, \pi_{jn})$, тогда структура связей элементов НТС полностью определяется потоковым мультиграфом НПП $G_n = (\mathcal{N}, Q)$ [1], и каждый элемент $s(\pi_{im}, \pi_{jn}) \in S$ соответствует ровно одному элементу множества потоков $Q: q_{ij} \in Q$, где q_{ij} - внутренний обобщенный поток. В силу того, что $i \neq j$ мы исключим возможность наличия в графе G_n петель. В случае множества S , состоящего только из элементов типа $s(\sigma_{jp}, \sigma_{iq})$, связи между элементами НТС осуществляются через общие параметры, сопоставленные псевдопортам.

Каждый элемент множества S типа $s(\pi_{im}, \pi_{jn})$ можно интерпретировать как пару уравнений связи:

$$\begin{aligned} q_{im}(t) - q_{jn}(t) &= 0 \\ x_{im}(t) - x_{jn}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_{im}(t), x_{jn}(t)$ - интегралы по времени (аккумуляции) потоков $q_{im}(t)$ и $q_{jn}(t)$. Аналогичные пары уравнений связи соответствуют соединениям $s(\pi_{im}, \sigma_{jp})$:

$$\begin{aligned} q_{im}(t) - v_{jp}(t) &= 0 \\ x_{im}(t) - w_{jp}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и $s(\sigma_{jp}, \sigma_{iq})$:

$$\begin{aligned} v_{jp}(t) - v_{iq}(t) &= 0 \\ w_{jp}(t) - w_{iq}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $v_{iq}(t), w_{iq}(t), v_{jp}(t)$ и $w_{jp}(t)$ - параметры элементов НТС. В векторной записи можно уравнения связи (1)-(3) предста-

ВИТЬ В ВИДЕ

$$\tilde{\theta}^{E_i}(t) - \tilde{\theta}^{E_j}(t) = 0, \quad (4)$$

где $\tilde{\theta}^{E_i}(t)$ и $\tilde{\theta}^{E_j}(t)$ - подвекторы векторов переменных элементов E_i и E_j , координатами которых являются потоки, аккумуляции и параметры, входящие в эти уравнения.

С учетом определения НТС ее можно аналитически представить как совокупность собственных уравнений элементов вместе с уравнениями связи (4):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{E_i}(\theta^{E_i}(t), t) &= 0 \\ \tilde{\theta}^{E_i}(t) - \tilde{\theta}^{E_j}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$i, j = 1, \dots, m$. Используем уравнения связи (4) для исключения из системы (5) половины переменных, входящих в уравнения связи. Для этого производим везде в собственных уравнениях элементов подстановку

$$\bar{\theta}^{E_i}(t) = \tilde{\theta}^{E_j}(t), \quad (6)$$

$i, j = 1, \dots, m$. В результате получим систему собственных уравнений НТС:

$$\mathcal{F}(q(t), x(t), p(t), t) = 0, \quad (7)$$

где $\mathcal{F}(\cdot)$ - собственный оператор НТС,

$q(t)$ - гипервектор обобщенных потоков,

$x(t)$ - гипервектор аккумуляций,

$p(t)$ - гипервектор параметров.

Координаты векторов потоков, аккумуляций и параметров образуют вектор переменных НТС $\theta(t) = (q^T(t), x^T(t), p^T(t))^T$. Поскольку собственные уравнения НТС (6) формально совпадают с собственными уравнениями элементов, то для НТС действительна классификация, приведенная в работе [1].

Аналогично рангу элемента определим ранг НТС ρ как максимальное число переменных системы, выражаемых из собственных уравнений (7):

$$\rho(t) = \text{rank} \left. \frac{\partial \mathcal{F}(\cdot)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta(t)}. \quad (8)$$

Ранги НТС и ее элементов удовлетворяют неравенству

$$\rho(t) \leq \sum_{i=1}^m \rho_i(t), \quad (9)$$

причем точное значение ранга системы зависит от структуры соединений элементов.

2. Подсистемы и иерархические НТС

При описании НТС характерно повторное появление однотипных фрагментов системы, соответствующих типовым технологическим аппаратам, их частям или агрегатам, составленным из типовых аппаратов. Поэтому нецелесообразно использовать непосредственно способ описания системы, вытекающий из ее определения, а применять более крупные блоки, которые назовем подсистемами НТС.

Подсистемой НТС назовем семерку $P = (\Pi, \Sigma, \mathcal{F}, \Psi_{\Pi}, \Psi_{\Sigma}, T, \Xi)$, где Π - конечное непустое множество векторных портов:

$$\Pi = \{ \pi_1, \dots, \pi_r \},$$

Σ - конечное множество векторных псевдопортов:

$$\Sigma = \{ \sigma_1, \dots, \sigma_s \},$$

\mathcal{F} - пространство возможных для векторных портовых и псевдопортовых переменных функций времени,

Ψ_{Π} - отношение $\Psi_{\Pi} \subset \prod_{i=1}^r (\mathcal{F} \times \mathcal{F})^{\dim \pi_i}$, согласно которому каж-

дому векторному порту π_i соответствует кортеж упорядоченных пар $\{(q_k(t), x_k(t)), k=1, \dots, r_k\}$ с возможными значениями $\{(q_k(t), x_k(t)), k=1, \dots, r_k\} \in (\mathcal{F} \times \mathcal{F})^{\dim \pi_i}$,

Ψ_{Σ} - отношение $\Psi_{\Sigma} \subset \prod_{j=1}^s (\mathcal{F} \times \mathcal{F})^{\dim \sigma_j}$, согласно

которому каждому векторному псевдопорту σ_j соответствует кортеж упорядоченных пар $\{(v_\ell(t), w_\ell(t)), \ell=1, \dots, s_\ell\}$ с возможными значениями $\{(v_\ell(t), w_\ell(t)), \ell=1, \dots, s_\ell\} \in \prod_{j=1}^s (\mathcal{F} \times \mathcal{F})^{\dim \sigma_j}$,

T - множество моментов времени,

Ξ - отображение пространства $\prod_{i=1}^r (\mathcal{F} \times \mathcal{F})^{\dim \pi_i} \times$

$\times \prod_{j=1}^s (\mathcal{F} \times \mathcal{F})^{\dim \sigma_j}$ на себя, определяющее множество

всех допустимых совокупностей переменных на всех векторных портах и векторных псевдопортах подсистемы.

В определении подсистемы НТС $\dim \pi_i$ и $\dim \sigma_j$ обозначают соответственно размерность i -го векторного порта и размерность j -го векторного псевдопорта, где под размерностью понимается число портов или псевдопортов, образующих рассмат-

риваемый векторный порт или псевдопорт. Очевидно, $\dim \pi_i \geq 1$ и $\dim \sigma_j \geq 1$.

С каждым векторным портом связано $\dim \pi_i$ пар переменных $(q_k(t), x_k(t))$, а с каждым векторным псевдопортом $\dim \sigma_j$ пар переменных $(v_p(t), w_p(t))$. Совокупность $\sum_{i=1}^r \dim \pi_i$ пар переменных $(q_k(t), x_k(t))$ полностью описывает состояние подсистемы, а совокупность $\sum_{j=1}^s \dim \sigma_j$ пар переменных $(v_p(t), w_p(t))$ образует вектор параметров подсистемы НТС.

Аналогично НТС подсистема описывается системой собственных уравнений (7). В силу определения подсистемы существует множество различных подсистем НТС, имеющих одинаковую систему собственных уравнений, но отличающихся способом объединения портов и псевдопортов элементов в векторные порты и векторные псевдопорты.

Если размерности всех векторных портов и векторных псевдопортов подсистемы равны единице, тогда понятие подсистемы формально совпадает с понятием элемента НТС. Для полного совпадения необходимо, чтобы система собственных уравнений подсистемы содержала только одно уравнение баланса потоков. С учетом того, что элемент НТС является частным случаем подсистемы, целесообразно обобщить понятие НТС, приведенное в п. I.

Непрерывная технологическая система — это двойка $\mathcal{T} = (\mathcal{E}, \mathcal{S})$, где \mathcal{E} — конечное непустое множество подсистем: $\mathcal{E} = \{P_1, \dots, P_m\}$, \mathcal{S} — непустое множество соединений между векторными портами и векторными псевдопортами подсистем: $\mathcal{S} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, а $\mathcal{P} = (\Pi_1, \dots, \Pi_{m_p}, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{m_p})$, причем Π_i — множество векторных портов i -й подсистемы, а Σ_i — множество векторных псевдопортов i -й подсистемы, $i = 1, \dots, m_p$. При образовании элементов множества соединений $s(\pi_{im}, \pi_{jn}), s(\pi_{im}, \sigma_{jp}), s(\sigma_{iq}, \sigma_{jp})$ остаются в силе все правила, приведенные в п. I. Дополнительно необходимо учитывать, что соединить можно только векторные порты и векторные псевдопорты одинаковой размерности.

Обобщенное определение НТС по своей природе рекурсивно, поскольку задает систему как совокупность подходящим

образом соединенных подсистем, которые в свою очередь являются НТС. Это дает нам возможность строить иерархические НТС.

3. Детерминированные НТС

Допустим, что множество δ состоит из элементов НТС ранга 1 [1]. В данном случае элементами множества соединений могут быть только $s(\pi_{im}, \pi_{jn})$. Система собственных уравнений рассматриваемой НТС имеет вид:

$$\begin{aligned} 1^T q^{Ei}(t) &= 0 \\ q_{im}(t) - q_{jn}(t) &= 0 \\ x_{im}(t) - x_{jn}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$i, j = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, \nu_i; \quad n = 1, \dots, \nu_j,$$

где $q^{Ei}(t)$ - вектор потоков i -го элемента.

Аккумуляции $x_{im}(t)$, $x_{jn}(t)$ хотя и входят в множество переменных системы, но не определены.

После исключения половины потоков и аккумуляций, входящих в уравнения связи из системы (10), она преобразуется в линейную систему алгебраических уравнений относительно вектора потоков $q(t)$:

$$\mathcal{O}q(t) = 0, \quad (11)$$

где \mathcal{O} - матрица с элементами $\{0, 1\}$.

Матрицу \mathcal{O} целесообразно интерпретировать как специфическую матрицу инциденций потокового мультиграфа $G_n = (\mathcal{E}, Q)$. Для этого представим гипервектор потоков в следующем блочном виде:

$$q(t) = (q^{mT}(t), q^{hT}(t), q^{1T}(t), \dots, q^{NT}(t), q^{\nu T}(t))^T,$$

где $q^m(t)$ - вектор общих потоков массы,

$q^h(t)$ - вектор потоков энергии (тепла),

$q^1(t), \dots, q^N(t)$ - векторы потоков компонентов,

$q^\nu(t)$ - вектор потоков импульса.

Если элементы НТС, образующие рассматриваемую систему, также сгруппировать по типу описываемого ими баланса: элементы общего материального баланса δ_m , элементы энергетического (теплого) баланса δ_h , элементы покомпонентного материального баланса $\delta_1, \dots, \delta_N$ и элементы баланса импульса δ_ν , тогда матрица \mathcal{O} становится блочнодиагональной:

$$A = \text{diag} (A_m, A_h, A_1, \dots, A_N, A_v), \quad (I2)$$

где A_m - матрица инцидентий общего материального потокового графа G_m ,

A_h - матрица инцидентий энергетического (теплового) потокового графа G_h ,

A_1, \dots, A_N - матрицы инцидентий потоковых графов компонентов G_1, \dots, G_N ,

A_v - матрица инцидентий потокового графа импульса G_v .

Матрица A имеет размерность $(|\delta| \times |Q|)$, причем $|\delta| \leq |Q|$.

Если все элементы НПС являются тривиальными динамическими [I], тогда система описывается совокупностью уравнений:

$$\begin{aligned} 1^T q^{Ei}(t) &= 0 \\ x^{Ei}(t) &= x^{Ei}(t_0) + \int_{t_0}^t q^{x^{Ei}}(t) dt \\ q_{im}(t) - q_{jn}(t) &= 0 \\ x_{im}(t) - x_{jn}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (I3)$$

$$i, j = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, v_i; \quad n = 1, \dots, v_j,$$

где $x^{Ei}(t)$ - вектор аккумуляций i -го элемента.

После исключения половины переменных, входящих в уравнения связи, собственные уравнения тривиальной динамической НПС принимают вид:

$$\begin{aligned} A q(t) &= 0 \\ x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t q^x(t) dt, \end{aligned} \quad (I4)$$

где $q^x(t)$ - подвектор вектора потоков $q(t)$, координатами которого являются потоки, входящие в динамические уравнения связи.

Систему (I4) можно представить в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} A q(t) &= 0 \\ \dot{x}(t) &= q^x(t), \end{aligned} \quad (I5)$$

где второе уравнение также можно рассматривать как систему уравнений связи типа (I) и использовать его для исключения из уравнений баланса (II) вектора потоков $q^x(t)$.

Если НПС является совокупностью связанных уравнениями (4) динамических детерминированных элементов [I], тогда она описывается собственными уравнениями:

$$A q(t) = 0$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t q^x(t) dt \quad (I6)$$

$$F'(q(t), x(t), p(t)) = 0,$$

где $F'(\cdot)$ - определяющий оператор НТС.

Учитывая принятое в работе [1] предположение о статичности операторов $F'_{Ei}(\cdot)$, определяющий оператор НТС также является статическим, т.е. $F'(\cdot)$ - суть вектор-функция. Уравнения (I6) описывают динамическую детерминированную НТС.

Статическая детерминированная НТС описывается системой собственных уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha q(t) &= 0 \\ F'(q(t), x(t), p(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (I7)$$

полученной из системы (I6) исключением динамических уравнений связи. Все вышерассмотренные детерминированные НТС (II), (I4), (I6) и (I7) относятся к системам с непрерывным временем. Учитывая аналогию между элементами НТС с непрерывным и дискретным временем, проанализированную в работе [1], мы не будем тут приводить собственных уравнений детерминированных НТС с дискретным временем.

4. Стохастические НТС

Допустим, что элементами множества \mathcal{E} являются статические стохастические элементы НТС [1]. Стохастическая НТС, построенная из таких элементов, описывается системой собственных уравнений и называется статической стохастической НТС:

$$\begin{aligned} \alpha q(t) &= 0 \\ y(t) &= h(q(t), x(t), p^s(t), w(t)) \\ F_s(q(t), x(t), p^s(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (I8)$$

где $y(t)$ - гипервектор измеряемых технологических параметров,

$p^s(t)$ - вектор параметров,

$h(\cdot)$ и $F_s(\cdot)$ - известные, в общем нелинейные, вектор-функции.

В статической стохастической НТС вектор аккумуляций $x(t)$ функционально относится к параметрам модели.

Если все элементы НТС являются квазистационарными [1], тогда соответствующая стохастическая НТС также называется

квазистационарной и описывается собственными уравнениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}1 \quad q(t) &= 0 \\ q^v(t) &= g^v(v(t)) \\ y(t) &= h(q(t), x(t), p^s(t), w(t)) \\ \mathcal{F}_s(q(t), x(t), p^s(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

где $q^v(t)$ - подвектор вектора потоков $q(t)$, изменение которого порождается случайным векторным процессом $v(t)$.

Из анализа системы (19) следует еще одно правило соединения портов при образовании НТС из элементов (подсистем).

Если $\varepsilon(\pi_{im}, \pi_{jn}) \in \mathcal{S}$, тогда из принадлежности потока $q_{im}(t)$ к подвектору $q^{vEi}(t)$ следует, что поток $q_{jn}(t)$ не может быть координатой вектора $q^{vEj}(t)$.

В общем случае все элементы стохастической НТС являются динамическими [1]. Тогда собственными уравнениями рассматриваемой динамической стохастической НТС являются:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}1 \quad q(t) &= 0 \\ x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t q^x(t) dt \\ q^v(t) &= g^v(v(t)) \\ y(t) &= h(q(t), x(t), p^s(t), w(t)) \\ \mathcal{F}_s(q(t), x(t), p^s(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

частными случаями которой оказываются статическая стохастическая НТС (18) и квазистационарная стохастическая НТС (19). Отметим, что система (20) может и не содержать определяющих уравнений $\mathcal{F}_s(\cdot) = 0$.

5. Гибридные НТС

В п. 3 и 4 мы рассматривали НТС, построенные из однотипных элементов. Наряду с такими НТС, очевидно, возможны и системы, полученные в результате соединения разнотипных элементов. Назовем их гибридными НТС. При анализе гибридных НТС возникают два вопроса:

- какие типы элементов НТС могут образовать гибридные системы,
- каковы собственные уравнения гибридных НТС.

Если исходить из классификации элементов НГС, приведенной в работе [1], то мы сразу отвергнем возможность образования гибридных систем из элементов с различными свойствами множества моментов времени.

В рамках классов НГС с непрерывным и дискретным временем следующим важным признаком является детерминированность или стохастичность собственного оператора системы. Если гибридную НГС образуют только детерминированные или только стохастические элементы разного типа, например, динамические детерминированные и элементы ранга 1, тогда полученная система относится к более общему типу, в данном примере является динамической детерминированной. Поэтому в таких случаях нет смысла говорить о гибридной НГС.

Истинно гибридная НГС получается, если среди элементов множества \mathcal{E} имеются как детерминированные, так и стохастические элементы НГС. Обозначим подмножество детерминированных элементов через \mathcal{E}_d , а подмножество стохастических — через \mathcal{E}_s , $\mathcal{E} = \mathcal{E}_d \cup \mathcal{E}_s$.

Пусть элементы НГС из множества \mathcal{E}_d образуют детерминированную подсистему $P_d = (\mathcal{E}_d, \mathcal{S}_d)$, а элементы из множества \mathcal{E}_s образуют стохастическую подсистему $P_s = (\mathcal{E}_s, \mathcal{S}_s)$. Гибридной назовем НГС $\mathcal{T} = (\{P_d, P_s\}, \mathcal{S})$, где в качестве элементов множества \mathcal{S} возможны соединения портов и псевдопортов детерминированной и стохастической подсистем, описываемые уравнениями связи:

$$\tilde{\Theta}^d(t) - \tilde{\Theta}^s(t) = 0, \quad (21)$$

где $\tilde{\Theta}^d(t)$ — подвектор вектора переменных детерминированной подсистемы,

$\tilde{\Theta}^s(t)$ — подвектор вектора переменных стохастической подсистемы.

Пусть даны динамическая детерминированная подсистема, описываемая системой собственных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_d q^d(t) &= 0 \\ x^d(t) &= x^d(t_0) + \int_{t_0}^t q^d(t) dt \\ \mathcal{F}'_d(q^d(t), x^d(t), p^d(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

и динамическая стохастическая подсистема с собственными уравнениями

$$\begin{aligned}
 \alpha_s q^s(t) &= 0 \\
 x^s(t) &= x^s(t_0) + \int_{t_0}^t q^{x^s}(t) dt \\
 q^v(t) &= g^v(v(t)) \\
 y(t) &= h(q^s(t), x^s(t), p^s(t), w(t)) \\
 \mathcal{F}_s(q^s(t), x^s(t), p^s(t)) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Система собственных уравнений гибридной НТС (21)–(23) с точностью до обозначения вектора параметров $\tilde{p}(t)$ совпадает с системой собственных уравнений динамической стохастической НТС (20).

Из приведенного следует, что хотя мы запретили только образование гибридных НТС из элементов или подсистем с разнотипными множествами моментов времени, гибридные системы не приводят к появлению нового класса НТС.

6. Детерминированные НТС и модели прогноза состояния НП

В этом пункте проанализированы взаимоотношения между введенными нами НТС, как специфическим классом математических моделей НП, и моделями прогноза состояния, связывающими входы непрерывного технологического объекта управления с его состоянием.

Важнейшим свойством НТС является ее неориентированность, т.е. отсутствие predetermined направления движения информации. С другой стороны, в НТС отсутствуют также такие понятия, связанные с направлением движения информации, как входы и выходы. Из понятий моделей пространства состояний имеются только переменные состояния в виде совокупности пар портовых переменных элементов. Поэтому для перехода от НТС к моделям пространства состояний необходимо задать множество входных и выходных переменных.

Второй момент ориентации НТС связан с отсутствием направлений обобщенных потоков. Известно, что направление физического потока, например, межфазного потока вещества, может в НП меняться [2]. Поэтому целесообразно по аналогии с теорией цепей [3] задаться условными направлениями потоков, т.е. условиться в их положительных направлениях.

Задание направлений обобщенных потоков означает преобразование потокового мультиграфа НПП $G_n=(\Theta, Q)$ в направленный потоковый мультиграф $\Gamma_n=(\Theta, Q)$ с блочнодиагональной матрицей инциденций:

$$A = \text{diag} (A_m, A_n, A_1, \dots, A_N, A_\nu) \quad (24)$$

с элементами $\{0, 1, -1\}$. Для упрощения терминологии будем направленный и ненаправленный потоковый мультиграф различать по матрице инциденций A или \mathcal{A} .

Детерминированную НТС (16) можно представить в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} q(t) &= 0 \\ \dot{x}(t) &= q^x(t) \\ \mathcal{F}'(q(t), x(t), p(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Для перехода от НТС (25) к модели прогноза состояния НПП необходимо определить, какие переменные рассматриваемой НТС будут входами, а какие – состояниями новой модели. Входами (управлениями и возмущениями) НПП как объекта управления являются некоторые обобщенные потоки (например, общие материальные потоки) или параметры этих потоков (например, температуры). Поэтому координатами вектора входов $u(t)$ будут некоторые координаты вектора потоков $q(t)$ и вектора параметров $p(t)$. Как будет показано ниже, состоянием модели прогноза состояния НПП является вектор аккумуляций $x(t)$.

Задаем в НТС (25) направления потоков, т.е. заменим матрицу \mathcal{A} на матрицу A :

$$\begin{aligned} A q(t) &= 0 \\ \dot{x}(t) &= q^x(t) \\ \mathcal{F}'(q(t), x(t), p(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

и предположим, что из системы уравнений

$$\begin{aligned} A q(t) &= 0 \\ \mathcal{F}'(q(t), x(t), p(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

можно выразить вектор потоков

$$q^x(t) = G(x(t), q^{\bar{x}}(t), p(t)), \quad (28)$$

где $G(\cdot)$ – некоторая, в общем нелинейная вектор-функция, $q^x(t)$ – вектор, координатами которого являются пото-

ки, не вошедшие в вектор $q^x(t)$, т.е. $q(t) = (q^{xT}(t), q^{\bar{x}T}(t))^T$.

В общем случае из системы (27) можно выразить не только вектор $q^x(t)$, но и другие подходящим образом выбранные переменные НТС, например, прогнозируемые технологические или технико-экономические показатели.

С учетом состава вектора входов $u(t)$ проводим перегруппировку аргументов вектор-функции $G(\cdot)$:

$$q^x(t) = G(x(t), u(t), \tilde{p}(t)). \quad (29)$$

где в состав нового вектора параметров $\tilde{p}(t)$ входят те координаты векторов $q(t)$ и $p(t)$, которые не являются входами модели прогноза состояния НТП. Подставляя модель потоков (29) в систему динамических уравнений связи

$$\dot{x}(t) = q^x(t), \quad (30)$$

получим модель прогноза состояния НТП в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = G(x(t), u(t), \tilde{p}(t)), \quad (31)$$

где вектором состояния является вектор аккумуляций.

Вектор состояния модели (31) отличается от вектора термодинамического состояния НТП [1] в двух отношениях:

- в составе вектора состояния модели динамики НТП (31) нет обобщенных потоков,
- наряду с аккумуляциями экстенсивных переменных в элементах НТП в составе вектора состояния $x(t)$ могут быть и интегралы от входящих и выходящих потоков элементов.

Из модели (31) легко получить модель стационарного состояния НТП ($\dot{x}(t) = 0$) и линеаризованные модели.

Модель прогноза состояния НТП с дискретным временем имеет вид

$$x(t_k) = \bar{G}(x(t_{k-1}), \bar{u}(t_k), \tilde{p}(t_k)), \quad (32)$$

где нелинейную вектор-функцию $\bar{G}(\cdot)$ можно рассматривать как результат интегрирования функции $G(\cdot)$ через интервал дискретности (t_{k-1}, t_k) .

7. Стохастические НТС и модели оценки состояния НПП

В этом пункте исследованы отношения между статическими, квазистационарными и динамическими стохастическими НТС и полученными из них моделями оценки состояния НПП, относящимися к моделям пространства состояний типа "состояние - выход".

Вводим в потоковый мультиграф НПП направления потоков и заменим в статической стохастической НТС (20) матрицу \mathcal{A} на матрицу A :

$$\begin{aligned} Aq(t) &= 0 \\ y(t) &= h(q(t), x(t), p^s(t), w(t)) \\ \mathcal{F}_s(q(t), x(t), p^s(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Предположим сначала, что в системе (33) отсутствуют определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} Aq(t) &= 0 \\ y(t) &= h(q(t), x(t), p^s(t), w(t)), \end{aligned} \quad (34)$$

а матрица A имеет полный строчный ранг. Если вектор выбрать таким образом, что

$$\dim q^v(t) = \dim q(t) - \text{rank } A, \quad (35)$$

тогда из системы уравнений баланса потоков

$$Aq(t) = 0 \quad (36)$$

можно выразить вектор зависимых потоков $q^d(t)$ размерности $\text{rank } A$:

$$q^d(t) = A_i q^v(t), \quad (37)$$

где $A_i = -A_d^{-1} A_v$, причем $A = (A_d, A_v)$, а $\det A_d \neq 0$.

Подставив выражение (37) в модель технологических измерений из системы (34), получим новую модель измерений

$$y(t) = h^v(q^v(t), x(t), p^s(t), w(t)), \quad (38)$$

где $h^v(\cdot)$ - вектор-функция, полученная из $h(\cdot)$ в результате этой подстановки.

Если рассматривать векторы $x(t)$ и $p^s(t)$ как параметры с известными значениями, тогда модель (38) приобретает вид

$$y(t) = h^v(q^v(t), w(t)). \quad (39)$$

Модель технологических измерений (39) вместе с выражением зависимых потоков (37) назовем статической балансовой мо-

делью НПП. Вектором состояния этой модели является $q^v(t)$, а вектором выхода модели является $y(t)$.

Модель технологических измерений (39) может быть использована для нахождения оценок вектора $q^v(t)$, если задан вектор выхода $y(t)$ и известны статистические характеристики случайного вектора $w(t)$. Зная вектор оценок $\hat{q}^v(t)$, можно по формуле (37) вычислить и оценку вектора зависимых потоков $\hat{q}^d(t)$.

Проанализируем теперь влияние определяющих уравнений. Систему уравнений баланса потоков и определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} A q(t) &= 0 \\ \mathcal{F}_s(q(t), x(t), p^s(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

можно использовать для выражения трех групп переменных:

- вектора зависимых потоков $q^d(t)$,
- вектора аккумуляций $x(t)$, являющегося параметром модели измерений и определяющих уравнений,
- некоторого подвектора параметров $p'(t)$, например, оцениваемых технологических параметров.

Выразим эти векторы как функции вектора независимых потоков $q^v(t)$ и оставшихся параметров $\tilde{p}(t)$:

$$\begin{aligned} q^d(t) &= G_d(q^v(t), \tilde{p}(t)) \\ x(t) &= G_x(q^v(t), \tilde{p}(t)) \\ p'(t) &= G_p(q^v(t), \tilde{p}(t)), \end{aligned} \quad (41)$$

где $G_d(\cdot), G_x(\cdot)$ и $G_p(\cdot)$ - известные, в общем нелинейные, вектор-функции.

После подстановки выражений (41) в модель технологических измерений из системы (33) получим новую модель измерений:

$$y(t) = h^v(q^v(t), \tilde{p}(t), w(t)), \quad (42)$$

которая при известных параметрах $\tilde{p}(t)$ совпадает с моделью (39). Статическая балансовая модель НПП (41), (42) обладает расширенными по сравнению с моделью (37), (39) возможностями, поскольку при меньшей размерности вектора состояния (числе независимых потоков) позволяет с применением формул (41) оценивать большее число параметров процесса.

Производим в квазистационарной стохастической НТС (19) замену матрицы \mathcal{M} на матрицу A и рассмотрим $q^v(t)$ как вектор состояния некоторой модели оценки состояния НПП, а $y(t)$ — как выход этой модели. Квазистационарная балансовая модель НПП с непрерывным временем имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q}^v(t) &= g^v(v(t)) \\ y(t) &= h^v(q^v(t), \tilde{p}(t), w(t)) \\ \dot{q}^d(t) &= G_d(q^v(t), \tilde{p}(t)) \\ x(t) &= G_x(q^v(t), \tilde{p}(t)) \\ p'(t) &= G_p(q^v(t), \tilde{p}(t)) \end{aligned} \quad (43)$$

и отличается от статической модели (41), (42) только наличием стохастической модели потоков. Полученные статическая и квазистационарная балансовая модель НПП являются обобщениями известных из литературы балансовых моделей оценки состояния НПП [5].

Динамическую стохастическую НТС (20) можно после замены матрицы \mathcal{M} на матрицу A представить в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} A q(t) &= 0 \\ \dot{x}(t) &= q^x(t) \\ \dot{q}^v(t) &= g^v(v(t)) \\ y(t) &= h(q(t), x(t), p^s(t), w(t)) \\ \mathcal{F}_s(q(t), x(t), p^s(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Оставим пока вопрос о векторе состояния модели оценки состояния, соответствующей НТС (44) открытым и будем считать, что вектором выхода этой модели будет $y(t)$.

Рассмотрим сперва динамическую стохастическую НТС без определяющих уравнений

$$\begin{aligned} A q(t) &= 0 \\ \dot{x}(t) &= q^x(t) \\ \dot{q}^v(t) &= g^v(v(t)) \\ y(t) &= h(q(t), x(t), p^s(t), w(t)). \end{aligned} \quad (45)$$

Система уравнений (46) содержит как и в случае квазистационарной НТС (19), подсистему:

$$\begin{aligned} A q(t) &= 0 \\ \dot{q}^v(t) &= g^v(v(t)), \end{aligned} \quad (46)$$

которая должна однозначно определить вектор потоков $q(t)$.

Это означает, что система (46) определяет вектор потоков $q(t)$ через стохастический оператор $q^v(\cdot)$:

$$\begin{aligned} q^v(t) &= q^v(v(t)) \\ q^d(t) &= A_i q^v(t). \end{aligned} \quad (47)$$

Вектор $q^x(t)$, входящий в систему динамических уравнений связи (30), является некоторым подвектором вектора потоков $q(t)$ и в общем случае содержит координаты подвекторов $q^v(t)$ и $q^d(t)$: $q^x(t) = (q^{v^T}(t), q^{d^T}(t))^T$. Используя уравнения (47), выразим вектор $q^x(t)$ через вектор независимых потоков $q^v(t)$:

$$q^x(t) = \begin{pmatrix} q^v(t) \\ q^d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\bar{v}} \\ A_i \bar{d} \end{pmatrix} q^v(t), \quad (48)$$

где $P_{\bar{v}}$ - пермутационная матрица, приводимая перестановкой строк и столбцов к виду $P_{\bar{v}} = (I_{\bar{v}}, 0)$, причем $I_{\bar{v}}$ - единичная матрица, а $A_i \bar{d}$ - матрица, образованная из строк матрицы A_i , соответствующих координатам вектора $q^d(t)$.

Подставив выражение (48) в систему уравнений (45), получим динамическую балансовую модель НПП:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\frac{P_{\bar{v}}}{A_i \bar{d}} \right) q^v(t) \\ q^v(t) &= q^v(v(t)) \\ y(t) &= h^v(q^v(t), x(t), p^s(t), w(t)) \\ q^d(t) &= A_i q^v(t), \end{aligned} \quad (49)$$

вектором состояния которой является $\tilde{x}^v(t) = (q^{v^T}(t), x^T(t))^T$. Заметим, что если дополнить вектор состояния модели (49) вектором зависимых потоков $q^d(t)$, тогда получим вектор, включающий вектор термодинамического состояния НПП [1].

Важный частный случай динамической балансовой модели (49) получается, если принять

$$q^x(t) = q^d(t) = q^a(t), \quad (50)$$

где $q^a(t)$ - вектор потоков аккумуляции в элементах НПП. Тогда модель задается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{ia} q^v(t) \\ q^v(t) &= q^v(v(t)) \end{aligned} \quad (51)$$

$$y(t) = h^v(q^v(t), x(t), p^s(t), w(t)),$$

где последнее уравнение из системы (49) опущено, поскольку оно совпадает с первым уравнением. Именно частный случай (51) рассматривался ранее в литературе [5] и эта модель называлась динамической балансовой моделью НП.

Рассмотрим теперь динамическую стохастическую НТС (44) и предположим, что из системы (27) выражены вектор зависимых потоков $q^d(t)$ и возможно, некоторые параметры $p'(t)$:

$$\begin{aligned} q^d(t) &= G_d(q^v(t), x(t), \tilde{p}(t)) \\ p'(t) &= G_p(q^v(t), x(t), \tilde{p}(t)). \end{aligned} \quad (52)$$

С учетом уравнений (52), выражение вектора $q^x(t)$ (48) принимает вид

$$q^x(t) = \begin{pmatrix} q^{\bar{v}}(t) \\ q^{\bar{d}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{\bar{v}}(t) \\ -\frac{P_{\bar{y}} q^v(t)}{G'_d(q^v(t), x(t), \tilde{p}(t))} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

где $G'_d(\cdot)$ - вектор-функция, образованная из координат вектор-функции $G_d(\cdot)$, соответствующих подвектору $q^{\bar{d}}(t)$.

После подстановки выражений векторов $q^x(t)$, $q^d(t)$ и $p'(t)$ в уравнения (44), получим динамическую балансовую модель НП в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{\bar{v}}(t) &= q^{\bar{v}}(t) \\ \dot{x}^{\bar{d}}(t) &= G'_d(q^v(t), x(t), \tilde{p}(t)) \\ q^v(t) &= g^v(v(t)) \\ y(t) &= h^v(q^v(t), x(t), \tilde{p}(t), w(t)) \\ q^d(t) &= G_d(q^v(t), x(t), \tilde{p}(t)) \\ p'(t) &= G_p(q^v(t), x(t), \tilde{p}(t)), \end{aligned} \quad (54)$$

где вектор аккумуляций $x(t)$ разбит на два блока, соответствующие разбиению вектора $q^x(t)$ в уравнении (53).

В результате добавления к динамической НТС (45) определяющих уравнений $F_s(\cdot) = 0$ мы получим динамическую балансовую модель НП (54), размерность вектора состояния которой в общем случае ниже, чем у модели (49). Это связано с уменьшением числа независимых потоков. Однако такое уменьшение размерности вектора состояния достигается за счет усложнения структуры уравнений состояния.

Л и т е р а т у р а

1. А а р н а О. К понятию непрерывной технологической системы I. Физическая модель процесса и элементы НТС// Наст. сб. с. 3-23.

2. Б е р д Р., С т ь ю а р т В., Л а й т ф у т Е. Явления переноса. - М.: Химия, 1974. - 688 с.

3. С е ш у С., Р и д М.Б. Линейные графы и электрические цепи. - М.: Высшая школа, 1971. - 448 с.

4. А а р н а О. Балансовые модели в АСУ непрерывными технологическими процессами. - Таллин: ТПИ, 1985. - 84 с.

5. А а р н а О. Оценивание состояния химико-технологических процессов // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1985. - № 592. - С. 17-38.

O. Aarna

Towards the Concept of Continuous Technological System

II. Continuous Technological Systems and State Space Balance Models

Abstract

The concept of continuous technological system (CTS) is introduced and its properties and types are studied. CTS is a specific mathematical model of continuous technological process (CTP), constituting a collection of properly connected CTS elements. The concept of CTS subsystem is also introduced as a generalization of CTS element, which enables hierarchical system representation. Relations between deterministic CTS and CTP state prediction models as well as relations between stochastic CTS and CTP state estimation models are analyzed.

СИНТЕЗ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ ВЫХОДОВ СТАДИЙ МНОГОСТАДИЙНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

I. Введение

В настоящей статье рассматривается задача определения скалярных функций полезности (ФП) для выходов технологических стадий (ТС) многостадийных технологических процессов (ТП) в условиях значительного разброса характеристик изготавливаемой продукции. При этом исходим из того, что ФП для выходов ТС предназначены для решения задач управления ТС на базе байесовских критериев типа минимизации риска (максимизации полезности). В частности, при типичной для многостадийных ТП двухуровневой структуре системы управления ФП для выходов ТС могут рассматриваться как средство координации систем управления ТС, являющихся локальными системами по отношению к системе управления ТП как к координатору. В таком случае исходя из ФП для выхода ТП как задающего воздействия разрабатываются ФП для выходов ТС. Затем ФП для ТС применяются для оценивания эффективности функционирования ТС и решения различных задач управления ТС (в частности, для оптимальной настройки ТС и для оценки эффективности алгоритмов уменьшения разброса выходов ТС) [1]. Подобный декомпозиционный подход к управлению многостадийными ТП позволяет уменьшить размерность решаемых задач оптимизации и целесообразен, в частности, при большом числе ТС и большой длительности технологического цикла и, соответственно, при значительном запаздывании поступающей в координатор информации.

Задача синтеза ФП ТС в настоящей статье рассматривается в скалярной постановке для статического объекта с полной информацией, т.е. предполагается одномерность выходов

ТП и ТС, отсутствие дрейфов в ТП и известность модели связи выхода ТП с выходом ТС и распределений случайных величин.

2. Определение функции полезности

Предположим, что качество готовой продукции после завершения ТП характеризуется значением скалярной переменной ω , являющейся случайной величиной с плотностью распределения $\varphi_{\omega}(\omega)$. Пусть значение ω статистически предсказуемо по значению выхода y некоторой ТС; y характеризует качество полуфабриката после завершения данной ТС и является случайной величиной с плотностью распределения $\varphi_y(y)$. Тогда ω можно называть целевым выходом ТП, а зависимость ω от y можно описать условной плотностью распределения

$$\varphi_{\omega|y}(\omega | y; U_+),$$

где U_+ является совокупностью режимов ТС, последующих (за данной ТС).

Предположим, что U_+ зафиксирована и что зависимость ω от y представима в виде

$$\omega = f(y) + \eta, \quad (I)$$

где $f(y)$ - детерминированная функция;

η - приведенный к выходу ω шум с плотностью распределения $\varphi_{\eta}(\eta)$, нулевым средним значением $\mu_{\eta} = 0$ и дисперсией σ_{η}^2 ;

y, η - независимые случайные величины.

Если в модели (I) обозначить $z = f(y)$, $\omega = z + \eta$ и обратная функция $\varphi(z) = f^{-1}(z)$ является однозначной, то ввиду независимости z и η (y и η) плотность $\varphi_{\omega}(\omega)$ выражается в виде

$$\varphi_{\omega}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\eta}(\omega - z) \varphi_z(z) dz, \quad \varphi_z(z) = \varphi_y[\varphi(z)] \cdot |\varphi'(z)|$$

и условная плотность $\varphi_{\omega|y}(\omega | y)$ распределения ω при заданном y в виде

$$\varphi_{\omega|y}(\omega | y) = \varphi_{\eta}[\omega - f(y)]. \quad (2)$$

Обозначим ФП для ω как выхода ТП через $g_{\omega}(\omega)$. Тогда критерий эффективности функционирования ТП выражается как ожидаемое значение G_{ω} полезности $y_{\omega}(\omega)$ в виде среднего значения для $g_{\omega}(\omega)$ по распределению ω с плотностью

$\varphi_{\omega}(\omega)$:

$$G_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\omega}(\omega) \varphi_{\omega}(\omega) d\omega. \quad (3)$$

Соответственно значение ФП для y как выхода ТС определяется как ожидаемое значение G_{ω} при заданном значении y . Обозначая ФП для y через $g_y(y)$, имеем

$$g_y(y) = G_{\omega} | y = M [g_{\omega}(\omega) | y]. \quad (4)$$

Таким образом, для модели (I) ФП $g_y(y)$ выражается в виде

$$g_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\omega}(\omega) \varphi_{\omega|y}(\omega | y) d\omega.$$

С учетом (2) $g_y(y)$ выражается в виде

$$g_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\omega}(\omega) \varphi_{\eta}[\omega - f(y)] d\omega \quad (5)$$

или

$$g_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\omega}[\eta + f(y)] \varphi_{\eta}(\eta) d\eta.$$

Применение ФП $g_{\omega}(\omega)$ и $g_y(y)$ в задачах оптимизации ТП и ТС связано с определением зависимости значений интегралов типа (3) от некоторых параметров. В частности, применение $g_y(y)$ в оптимизационных задачах управления ТС приводит к нахождению оптимальных значений θ^* параметров θ по критерию $\Gamma(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g_y(y) \varphi_y(y; \theta) dy \rightarrow \max_{\theta}$,

где параметрами θ могут быть, например, технологический режим ТС или параметры алгоритма уменьшения разброса. В таких случаях линейное преобразование ФП $\alpha + \beta g_y(y)$, $\beta > 0$ не изменяет местонахождения θ^* максимума $\Gamma^* = \Gamma(\theta^*)$. Поэтому при необходимости допустимо линейное преобразование ФП, в частности, переход к следующему неотрицательному виду $\tilde{g}_y(y)$ для ограниченной снизу ФП $g_y(y)$:

$$\tilde{g}_y(y) = [g_y(y) - A] / B, \quad A > -\infty, \quad 0 < B < \infty,$$

$$A = \min_y g_y(y), \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} [g_y(y) - A] dy,$$

вместе с

$$\tilde{g}_y(y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_y(y) dy = 1. \quad (6)$$

Таким образом, ФП $g_y(y)$ определяется функциями $g_\omega(\omega)$, $f(y)$ и $\varphi_\eta(\eta)$. Отметим крайние случаи уровня шума η по значению дисперсии σ_η^2 . При $\sigma_\eta^2 = 0$ между y и ω имеется детерминированная связь, нет необходимости усреднения по (4) и ФП $g_y(y)$ выражается как значение ФП $g_\omega(\omega)$ при заданном y , т.е. при $\sigma_\eta^2 = 0$ имеем $g_y(y) = g_\omega[f(y)]$. При $\sigma_\eta^2 \rightarrow \infty$ для ограниченной $g_\omega(\omega)$ получим $\max_y g_y(y) \rightarrow A$, т.е. максимальное значение $g_y(y)$ приближается к нулю и $g_y(y)$ "размазывается" по оси y при условиях (6).

3. Линейная гауссовская модель

Рассмотрим линейную модель с гауссовским шумом:

$$\omega = a + by + \eta, \quad \eta \sim N(0, \sigma_\eta), \quad (7)$$

где a, b - коэффициенты модели;

y, η - независимы.

Для модели (7) условная плотность распределения (2) имеет вид

$$\varphi_{\omega|y}(\omega|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\eta} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (\omega - a - by)^2\right]$$

и ФП $g_y(y)$, согласно (7), выражается в виде

$$g_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\eta} \int_{-\infty}^{\infty} g_\omega(\omega) \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (\omega - a - by)^2\right] d\omega. \quad (8)$$

Рассмотрим $g_y(y)$ для модели (7) при двух типичных в практике видов $g_\omega(\omega)$: допусковой ФП $g_\omega(\omega)$ и кусочно-постоянной ФП $g_\omega(\omega)$ [2].

1. Допусковая ФП. Если условия бездефектности изготавливаемой продукции заданы в виде допуска $\varepsilon_\omega \leq \omega \leq \lambda_\omega$, то ФП $g_\omega(\omega)$ представима в виде индикаторной функции попадания в допуск $[\varepsilon_\omega, \lambda_\omega]$ (допусковой ФП):

$$g_\omega(\omega) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_\omega \leq \omega \leq \lambda_\omega, \\ 0, & \omega < \varepsilon_\omega, \omega > \lambda_\omega. \end{cases}$$

Для такой $g_\omega(\omega)$ с учетом (8) получим

$$g_y(y) = \Phi_0\left(\frac{\lambda_\omega - a - by}{\sigma_\eta}\right) - \Phi_0\left(\frac{\varepsilon_\omega - a - by}{\sigma_\eta}\right), \quad (9)$$

где

$$\Phi_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}.$$

Численное значение $\Phi\Pi$ (9) дает вероятность получения бездефектной по ω продукции при заданном значении выхода ТС y . $\Phi\Pi$ (9) имеет при $\sigma_\eta > 0$ один максимум в точке $y = (\varepsilon_{\omega} + \lambda_{\omega} - 2\alpha)$, являющейся точкой симметрии $g_y(y)$; $0 \leq g_y(y) \leq 1$.

2. Кусочно - постоянная $\Phi\Pi$. Если после завершения $\Pi\Pi$ изготавливаемая продукция распределяется по значению ω на m классов с различной полезностью (ценой) h_i , то $\Phi\Pi$ $g_w(\omega)$ представима в виде кусочно-постоянной $\Phi\Pi$:

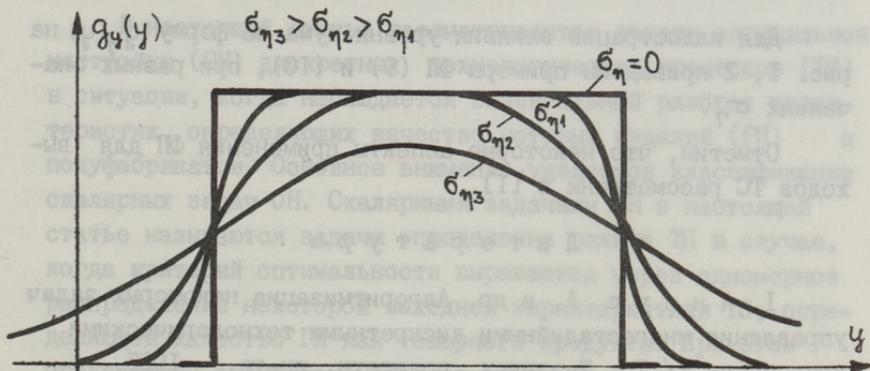


Рис. 1. Примеры $g_y(y)$ для допусковой $g_w(\omega)$.

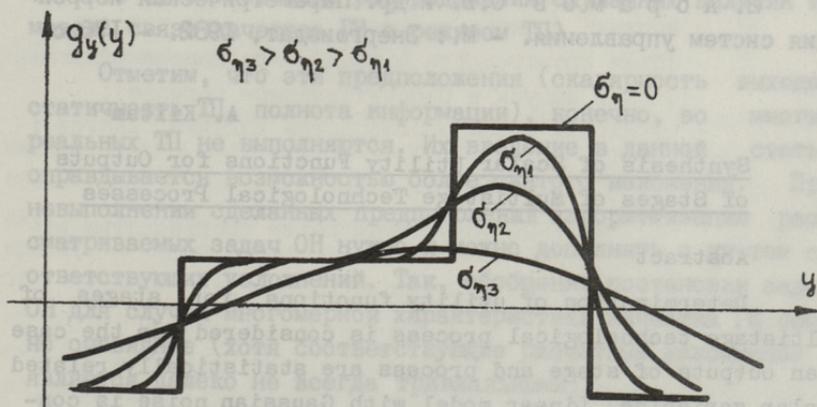


Рис. 2. Примеры $g_y(y)$ для кусочно-постоянной $g_w(\omega)$.

$$g_{\omega}(\omega) = h_i, \omega_{i-1} \leq \omega < \omega_i, i = \overline{1, m},$$

где ω_i - границы классов, при $\omega_0 = -\infty, \omega_m = \infty$.

Для такой $g_{\omega}(\omega)$ получим $g_y(y)$ в виде

$$g_y(y) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \Phi_0 \left[\frac{\omega_i - a - by}{\sigma_{\eta}} \right], \quad (10)$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} -h_i, & i = 0, \\ h_i - h_{i-1}, & i = \overline{1, m-1}, \\ h_m, & i = m. \end{cases}$$

Для иллюстрации влияния уровня шума на форму $g_y(y)$ на рис. 1, 2 приведены примеры ФП (9) и (10), при разных значениях σ_{η} .

Отметим, что некоторые аспекты применения ФП для выходов ТС рассмотрены в [1].

Л и т е р а т у р а

1. А н н у с А. и др. Алгоритмизация некоторых задач управления многостадийными дискретными технологическими процессами // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1985, - № 592. - С. 163-174.

2. А б р а м о в О.В. и др. Параметрическая коррекция систем управления. - М.: Энергоиздат, 1982. - 176 с.

A. Kiitam

Synthesis of Scalar Utility Functions for Outputs of Stages of Multistage Technological Processes

Abstract

Determination of utility functions for stages of multistage technological process is considered for the case when outputs of stage and process are statistically related scalar variables. Linear model with Gaussian noise is considered as a special case; examples of corresponding utility functions are presented.

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ СКАЛЯРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЙ НАСТРОЙКИ ДИСКРЕТНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение

В настоящей статье рассматриваются задачи оптимальной настройки (ОН) дискретных технологических процессов (ТП) в ситуации, когда наблюдается значительный разброс характеристик, определяющих качество готовых изделий (ГИ) и полуфабрикатов. Основное внимание уделяется классификации скалярных задач ОН. Скалярными задачами ОН в настоящей статье называются задачи определения режима ТП в случае, когда критерий оптимальности выражается через одномерное распределение некоторой выходной характеристики ТП, определяющей качество ГИ как товарного продукта. При этом предположим отсутствие дрейфов (т.е. ТП рассматривается как статический объект) и наличие полной информации об объекте (т.е. известны распределения случайных величин и модель связи качества ГИ с режимом ТП).

Отметим, что эти предположения (скалярность выхода, статичность ТП, полнота информации), конечно, во многих реальных ТП не выполняются. Их введение в данной статье оправдывается возможностью более сжатого изложения. При невыполнении сделанных предположений алгоритмизацию рассматриваемых задач ОН нужно и можно дополнять с учетом соответствующих усложнений. Так, обобщение постановки задач ОН для случая многомерной характеристики качества ГИ обычно очевидное (хотя соответствующие расчетные усложнения являются далеко не всегда тривиальными).

При алгоритмизации задач ОН, ввиду предположения полноты информации, исходим из оптимальности по байесовским

критериям минимизации среднего риска (максимизации ожидаемой полезности), что приводит при управлении техническими системами к более естественным алгоритмам управления по сравнению с альтернативным минимаксным подходом [1, 2].

2. Задачи обеспечения необходимого номенклатурного распределения

Известно, что во многих дискретных ТП с высоким уровнем стохастичности технологии возникает необходимость распределения ГИ на классы (сорта, типономиналы) с отличающейся ценой и/или отличающимися условиями спроса. Такая ситуация, возникающая, в частности, для многих ТП производства электронных и электротехнических изделий [3-9], является отправной точкой для большинства ниже рассматриваемых задач ОН.

Введем следующие обозначения:

- ω - выходная переменная ТП, определяющая качество ГИ (случайная величина);
- U - режим ТП (детерминированный вектор);
- Ω_U - область допустимой вариации режима ТП;
- $\varphi(\omega, U)$ - плотность распределения выхода ω (зависит от U);
- m - количество классов (сортов, типономиналов);
- i - индекс класса;
- p_i - вероятность получения изделий i -го класса;
- ω_{i-1} - нижняя граница значений ω для i -го класса;
- ω_i - верхняя граница значений ω для i -го класса;
- l_i - объем производства изделий i -го класса (фактический выпуск в рассматриваемом периоде);
- l_Σ - суммарный объем производства изделий (запуск):

$$l_\Sigma = \sum_{i=1}^m l_i;$$
- $l_{\Sigma \max}$ - максимальный допустимый объем производства изделий;
- L - вектор выпуска изделий: $L = \{l_i\} = (l_1, \dots, l_m)$;
- n_i - необходимый объем производства изделий i -го класса (зафиксированный планом, заказами или договорными обязательствами необходимый объем выпуска для рассматриваемого периода);
- n_Σ - суммарный необходимый объем производства изде-

лий:

$$n_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m n_i;$$

N - вектор плана: $N = \{n_i\} = (n_1, \dots, n_m)$.

Отметим, что при необходимости (в частности, если желательно выполнение условия $\sum_{i=1}^m p_i = 1$) в состав классов

(ω_{i-1}, ω_i) включаются также классы для учета дефектных изделий (брака). Обычно эти классы являются крайними, тогда

$$-\infty = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1} < \omega_m = \infty.$$

Задачу обеспечения необходимого номенклатурного распределения можно сформулировать как задачу нахождения такого режима U , который обеспечивает получение необходимого количества изделий согласно заданному номенклатурному плану выпуска $\{n_i, i = \overline{1, m}\}$. Из-за наличия в ТП случайных возмущений можно говорить об управлении фактическим номенклатурным выпуском $\{l_i\}$ только в вероятностном смысле, поэтому соответствующие задачи ОН также формулируются в вероятностной постановке.

С позиции предприятия или его подразделения часто основной целью управления ТП является повышение или максимизация вероятности выполнения плана. Соответствующая задача ОН формулируется в виде следующей одноэтапной задачи стохастического программирования:

$$P\{l_i(U) \geq n_i, i = \overline{1, m}\} \rightarrow \max_U \quad (I)$$

при ограничениях $U \in \Omega_U, \sum_{i=1}^m l_i = l_{\Sigma}$.

Решение задачи (I) дает оптимальный режим U^* , который максимизирует вероятность выполнения плана при заданном объеме производства l_{Σ} . Таким образом, задача (I) подходит для ОН ТП в случае фиксированного объема производства (например, в случае предельной нагруженности технологического оборудования). В случае же нефиксированного l_{Σ} задачу обеспечения необходимого номенклатурного распределения часто целесообразно сформулировать в виде задачи минимизации объема производства (иначе: минимизация запуска, минимизация коэффициента перепроизводства) [4-6]. Соответствующую задачу стохастического программирования можно сформулировать в двух вариантах:

1) минимизируется объем производства $l_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m l_i$ при условии, что вероятность невыполнения номенклатурного плана в целом не превышает некоторого заданного уровня α (α близка к нулю):

$$l_{\Sigma} \rightarrow \min \quad (2)$$

при ограничениях $U \in \Omega_U, P\{l_i(U) \geq n_i, i = \overline{1, m}\} \geq 1 - \alpha;$

2) требуется, чтобы вероятности невыполнения номенклатурного плана по отдельным классам не превышали бы заданных уровней α_i (задача с построчными вероятностными ограничениями [10]):

$$l_{\Sigma} \rightarrow \min \quad (3)$$

при ограничениях $U \in \Omega_U, P\{l_i(U) \geq n_i\} \geq 1 - \alpha_i, i = \overline{1, m}.$

Вектор выпуска L распределен по мультиномиальному распределению, а объемы выпуска изделий по классам l_i распределены по биномиальному распределению со средним значением $\mu(l_i)$ и дисперсией $\sigma^2(l_i)$ в виде

$$\mu(l_i) = l_{\Sigma} p_i(U), \sigma^2(l_i) = l_{\Sigma} p_i(U) [1 - p_i(U)], p_i(U) = \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} \varphi_{\omega}(\omega, U) d\omega. \quad (4)$$

Соответственно для представления задач (1)–(3), являющихся задачами частично целочисленного стохастического программирования, в виде эквивалентных детерминированных задач необходимо применять функции распределения или квантили биномиального и мультиномиального распределений. При этом для упрощения расчетов при решении задачи с учетом того, что в практических задачах числа l_i являются достаточно большими, можно заменить точное распределение l_i аппроксимирующим распределением (в частности, гауссовским распределением).

Дальнейшее упрощение задач (2) и (3) возможно переходом к их асимптотике. Это связано с тем, что коэффициенты вариации $v(l_i)$ для l_i , выражающиеся в виде $v(l_i) = \sigma(l_i) / \mu(l_i) = \sqrt{[1 - p_i(U)] p_i(U)} / \sqrt{l_{\Sigma}}$, приближаются при $l_{\Sigma} \rightarrow \infty$ к нулю для всех классов (если $p_i > 0, \forall i$). Соответственно при большом объеме производства $l_{\Sigma} \gg 0$ можно (если $v(l_i) \ll 1$ и уровни риска α, α_i являются умеренными) пренебречь случайностью l_i и заменить l_i соответствующими средними значениями $\mu(l_i)$. Таким образом, асимптотический вариант задач (2) и (3) имеет вид задачи минимизации запуска $l_{\Sigma} \rightarrow \min$ при ограничениях $U \in \Omega_U,$

$l_{\Sigma} p_i(U) \geq n_i, i = \overline{1, m}$ или вид задачи минимизации коэффициента перепроизводства ξ :

$$\xi \rightarrow \min$$

при ограничениях $U \in \Omega_U, \xi p_i(U) \geq \pi_i, i = \overline{1, m}; \pi_i = n_i/n_{\Sigma}$.

Основные трудности при настройке ТП посредством решения вышеуказанных задач ОН связаны с определением объема производства l_{Σ} в (1) и уровней риска α в (2) и α_i в (3). Их обоснованный выбор является самостоятельной сложной задачей, приводящей, например, в (2) к определению компромисса затрат между уменьшением α и увеличением l_{Σ} . Поэтому значительный интерес представляет подход, при котором задачи ОН формулируются посредством прямого учета различных затрат, связанных с обеспечением выполнения номенклатурного плана по классам [3, II].

3. Задачи максимизации полезности по номенклатурному объему выпуска

Полезность различных вариантов распределения фактического выпуска $\{l_i\}$ при заданном номенклатурном плане $\{n_i\}$ в зависимости от условий производства и реализации изделий может быть охарактеризована различными технико-экономическими показателями. В данном случае исходим из того известного положения, что естественным обобщающим критерием полезности, отражающим эффективность функционирования ТП, является прибыль q [3, II]. Значение q зависит от L и N ; $q(L, N)$ определяется как разность дохода от реализации и затрат на производство (себестоимости) изделий за рассматриваемый период. Соответствующие задачи ОН типа $q(L, N) \rightarrow \max$ далее называются задачами максимизации полезности по номенклатурному объему выпуска или сокращенно (L, N) -задачами.

В зависимости от особенностей производственного процесса, условий стимулирования выполнения номенклатурного плана $\{n_i\}$ и условий реализации изделий (спроса) зависимость q от фактического выпуска $\{l_i\}$ может быть достаточно разнообразной. Рассмотрим некоторые характерные виды зависимости q от $\{n_i\}$ и $\{l_i\}$. Обозначим через h_i цену (доход от реализации) изделия i -го класса и через c себестоимость изделия. Предположим, что c не зависит от i , а h_i и c не зависят от объемов производства. Условие выпол-

нения плана (заказов, договорных обязательств) в целом выражается в виде совокупности неравенств $l_i \geq n_i$, каждое из которых дает условие выполнения плана по i -му классу. Если ввести индикаторную функцию достижения необходимого объема выпуска по i -му классу в виде

$$I_i = I_i(l_i, n_i) = \begin{cases} 1, & l_i \geq n_i, \\ 0, & l_i < n_i, \end{cases}$$

то индикаторная функция достижения номенклатурного объема в целом выражается в виде произведения

$$I = I(L, N) = \prod_{i=1}^m I_i(l_i, n_i) = \prod_{i=1}^m I_i.$$

Основные составляющие расчета q связаны с выражением типа $\sum_{i=1}^m l_i h_i - c l_{\Sigma}$. Но, как отмечалось, здесь возможны различные усложнения ввиду неточного совпадения фактического выпуска L с необходимым выпуском N . Назовем затраты, обусловленные недостижением необходимого выпуска, d - штрафом (потерями недостижения), а затраты, обусловленные превышением необходимого выпуска, e - штрафом (эффектом превышения).

Рассмотрим сперва зависимость $q = f(L, N)$ в области недостижения необходимого номенклатурного объема (при $I = 0$). Естественно предполагать, что весь план обеспечен непосредственным спросом, т.е. при $l_i < n_i$ все изделия сразу реализуются. Соответственно q выражается при $l_i < n_i, i = \overline{1, m}$ в виде

$$q = \sum_{i=1}^m l_i h_i - \sum_{i=1}^m l_i c - d, \quad (5)$$

где d - штраф (потери) из-за недостижения объемов по $\{n_i\}$.

d - штраф d может выражаться, в частности, в следующих вариантах:

1) фиксированный штраф из-за недостижения необходимого номенклатурного объема в целом: $d_1 = (1 - I) \tau$;

2) фиксированные штрафы τ_i из-за недостижения необходимого объема по i -му классу:

$$d_2 = \sum_{i=1}^m (1 - I_i), \text{ или } d_2 = \sum_{i=1}^m (1 - I_i) \delta_i \tau_0, \text{ или } d_2 = \sum_{i=1}^m (1 - I_i) \tau_0,$$

где τ_0 - штраф по классу;

s_i - коэффициент приоритетности i -го класса;

3) линейный штраф с потерями γ за каждое изделие невыполнения [II]:

$$d_3 = \sum_{i=1}^m (1 - I_i) \gamma (n_i - l_i) \cdot s_i,$$

где $s_i = 1$ при равной приоритетности классов;

4) отсутствие штрафа: $d_4 = 0$ (соответствует ситуации отсутствия плана или договорных обязательств при функционировании ПП в условиях предельной производительности и дефицитности ПИ).

Возможны также комбинации этих вариантов, например, $d = d_1 + d_3$, и более сложные функции штрафа (например, ступенчатые функции штрафа с учетом структуры заказов в объеме плана $\{n_i\}$ или кусочно-линейные функции штрафа).

Характер зависимости $q = f(L, N)$ в области превышения номенклатурного плана (при $I = 1$) определяется в основном условиями спроса на сверхплановую продукцию. При $I = 1$ q представима в виде суммы

$$q = q_0 + e, \quad q_0 = \sum_{i=1}^m (h_i - c) n_i, \quad (6)$$

где q_0 обозначает прибыль от реализации продукции в плановом объеме $\{n_i\}$;

e - штраф e отражает эффект превышения $\{n_i\}$ с учетом дохода от реализации и затрат на изготовление сверхплановых изделий.

Эффект превышения e представим в виде

$$e = q_+ - c_+ - r, \quad c_+ = \sum_{i=1}^m I_i c (l_i - n_i), \quad (7)$$

где q_+ - дополнительный доход от реализации сверхплановых изделий;

c_+ - дополнительная стоимость изготовления сверхплановых изделий;

r - дополнительные затраты, связанные с реализацией сверхплановых изделий (в частности, с их хранением).

Обозначим через ε_i эффект из-за повышения по i -му классу и предположим, что функция полезности в области пре-

вышения имеет для всех классов одинаковый вид $\varepsilon = \varepsilon(l, n)$.

Тогда $e = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i = \sum_{i=1}^m I_i \cdot \varepsilon(l_i, n_i)$. Вид функции $\varepsilon(l, n)$ в зависимости от условий спроса может сильно отличаться между крайностями полной дефицитности и полного отсутствия спроса. Возможны, в частности, следующие варианты функции $\varepsilon(l, n)$:

1) сверхплановые изделия реализуются по той же цене и незамедлительно (случай полной дефицитности):

$$e_1 = q_{+} - c_{+} = \sum_{i=1}^m I_i (h_i - c)(l_i - n_i);$$

2) сверхплановые изделия реализуются по той же цене, но не гарантированно, а с вероятностью $\beta_i, \beta_i \leq 1$:

$$e_2 = q_{+} - c_{+} = \sum_{i=1}^m I_i (\beta_i h_i - c)(l_i - n_i).$$

Здесь величине β_i можно придать также смысл дисконт-фактора, характеризующего потери в цене, связанные с возможностью реализации только в следующем периоде [II];

3) изделия реализуются по той же цене, но через некоторое время, в течение которого они подлежат хранению на складе ГИ. Затраты на хранение зависят от среднего времени хранения, объема склада и др. При равномерной интенсивности спроса и фиксированной стоимости хранения одного изделия в единицу времени зависимость затрат на хранение от количества изделий, согласно сумме арифметической прогрессии, описывается параболой. Соответственно типичной аппроксимацией для функции потерь на хранение изделий является квадратичная функция, и имеем

$$e_3 = q_{+} - c_{+} - r = \sum_{i=1}^m I_i (h_i - c)(l_i - n_i) - \sum_{i=1}^m I_i \varkappa (l_i - n_i)^2,$$

где коэффициент пропорциональности \varkappa определяется интенсивностью спроса и удельной стоимостью хранения [3]. При других условиях хранения и спроса (при более точной аппроксимации) затраты на хранение описываются, например, зависимостью в виде

$$r = \sum_{i=1}^m I_i [\varkappa_1 (l_i - n_i)^2 + \varkappa_2 (l_i - n_i)],$$

где \varkappa_1 и \varkappa_2 - положительные коэффициенты;

4) при повышении объема по договорным обязательствам сверхплановая продукция не имеет спроса:

$$e_4 = -\sum_{i=1}^m I_i c(l_i - n_i);$$

e_4 совпадает с e_2 при $\beta_i = 0, i = \overline{1, m}$.

Возможны, естественно, и более сложные варианты $\varepsilon(l, n)$.

Формула (5) для расчета q_j при $I = 0$ представима в виде

$$q_j = q_0 - q_- - d, \quad q_- = \sum_{i=1}^m (1 - I_i)(h_i - c)(n_i - l_i), \quad (8)$$

где q_- интерпретируется как недополученная прибыль из-за недостижения необходимых объемов n_i по всем или нескольким классам.

С учетом (6), (7) и (8) q_j для всего диапазона изменения $\{l_i\}$ представима в виде

$$q_j = q_0 - q_- - d + e, \quad e = q_+ - c_+ - r, \quad (9)$$

где потери недостижения d и эффект превышения e можно найти по вышеприведенным выражениям, в зависимости от конкретных условий стимулирования и реализации.

Рассмотрим в качестве частного случая ситуацию, когда на выходе ТП отсутствует распределение ГИ по типономиналам, и годность ГИ определяется ее попаданием в допуск $\varepsilon_{\omega} \leq \omega \leq \lambda_{\omega}$. Эту ситуацию можно рассматривать как случай с числом классов $m = 1$. Соответственно для этого случая введем обозначения $l = l_1, n = n_1, h = h_1, I = I_1(l)$ с $I = 0$ при $l < n$ и $I = 1$ при $l \geq n$; пусть фиксирован максимальный допустимый объем $l = l_{\Sigma \max}$ производства изделий ($l \leq l_0$). Тогда вышеприведенные формулы для расчета d -штрафа d - и e -штрафа e в (9) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} d_1 = d_2 = (1 - I) \tau; & \quad e_1 = I(h - c)(l - n); \\ d_3 = (1 - I) \nu(n - l); & \quad e_2 = I(\beta h - c)(l - n); \\ d_4 = 0; & \quad e_3 = I(h - c)(l - n) - I \varkappa(l - n)^2; \\ & \quad e_4 = -I c(l - n). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $\tau, \nu, \beta, \varkappa$ - положительные числовые коэффициенты ($\beta \leq 1$).

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведены некоторые примеры формы функции полезности $q_j(l)$, соответствующие различным комбинациям d и e по (10) при естественном условии $h > c$.

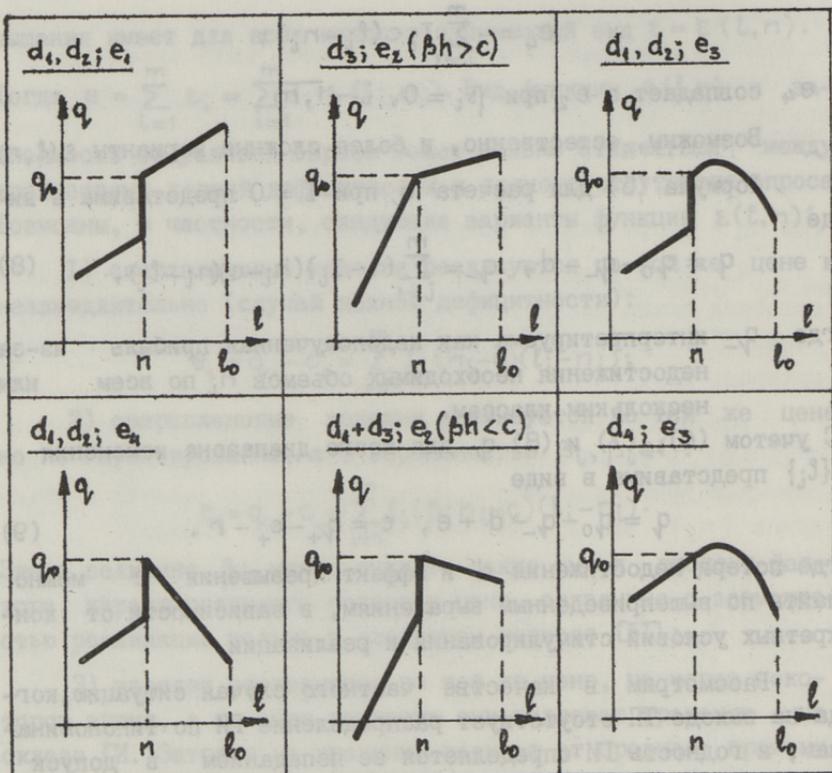


Рис. 1. Примеры функции полезности $q(l)$.

Вектор L выпуска изделий по классам является из-за случайности выхода ω случайным вектором с плотностью распределения $\varphi_L(L)$, которая зависит от режима ΠU посредством плотности $\varphi_\omega(\omega, U)$ и границ интервалов $\{\omega\}$. Поэтому задача ОН формулируется как задача максимизации ожидаемой полезности Q в виде среднего значения по функции полезности $q(L, N)$. Соответственно, в зависимости от фиксированности суммарного объема l_Σ производства изделий (запуска), получим два варианта задачи ОН:

а) задачу одновременной оптимизации режима и запуска

$$Q = M[q(L, N)] = \int q(L, N) \varphi_L(L) dL \rightarrow \max_{U, l_\Sigma} \quad (II)$$

при ограничениях $U \in \Omega_U, l_\Sigma \leq l_{\Sigma \max}$;

б) задачу оптимизации режима при заданном запуске

$$Q = M [q(L, N)] \rightarrow \max_U \quad (I2)$$

при ограничениях $U \in \Omega_U, \sum_{i=1}^m l_i = l_\Sigma$.

Аналогично соображениям по задачам (2) и (3) можно при больших l_Σ , если $v(l_i) \ll 1$, и в задачах (II) и (I2) перейти к их асимптотическим вариантам. Это означает замену среднего значения $M[q(L, N)]$ его приближенным значением $q(M[L], N)$, рассчитываемым как значение функции полезности $q(L, N)$ в точке, соответствующей средним значениям $\mu(l_i)$ выпуска по классам, согласно (4). Соответственно асимптотическая аппроксимация, например, для (II) имеет вид

$$q_L = q(\{\mu(l_i)\}, N) \rightarrow \max_{U, l_\Sigma}$$

при

$$U \in \Omega_U, l_\Sigma \leq l_{\Sigma \max}, \mu(l_i) = l_\Sigma \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} \varphi_\omega(\omega, U) d\omega.$$

Отметим, что в некоторых случаях может представлять интерес совмещение (L, N) -задач максимизации полезности с вероятностными ограничениями по достижению объемов $\{n_i\}$. В частности, это уместно для комбинаций d -штрафа и e -штрафа типа $(d_1, e_1), (d_2, e_2)$ и др., при больших значениях штрафов τ, τ_i . В таких случаях задача ОН имеет, например, вид

$$Q = \int q(L, N) \varphi_L(L) dL \rightarrow \max_{U, l_\Sigma}$$

при ограничениях $U \in \Omega_U, l_\Sigma \leq l_{\Sigma \max}, P\{l_i(U) \geq n_i, i = \overline{1, m}\} \geq 1 - \alpha$.

Переходим к рассмотрению алгоритмизации задач ОН в ситуации, когда отсутствует точный номенклатурный план $\{n_i\}$, а также могут отсутствовать четкие основы для конструирования функции полезности $q(L, N)$. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда к моменту необходимости настройки ТП не сформировался четкий "портфель заказов" по классам, или если цены h_i известны неоднозначно. В подобных случаях L и N не фигурируют в постановке задач ОН, и целевые функционалы для задач ОН формулируются прямо на основе плотности распределения $\varphi_\omega(\omega, U)$ выхода ω . Соответствующие задачи ОН можно с некоторой условностью разделить на два типа задач, рассматриваемых далее: задачи настройки по эталонному распределению и задачи максимизации полезности по выходу.

4. Задачи настройки по эталонному распределению

Алгоритмизация задач ОН в виде задач настройки по эталонному распределению представляется целесообразной прежде всего тогда, когда отсутствует четкий номенклатурный план или "портфель заказов", но можно прогнозировать приближенное распределение спроса по классам изделий (в частности, на основе опыта по предыдущим периодам планирования с учетом наблюдаемых трендов спроса). Тогда можно зафиксировать приближенное желаемое распределение изделий по выходу ω ; это распределение далее называется эталонным распределением. Отметим, что настройку ПП по эталонному распределению можно рассматривать как в некотором смысле сглаженный подход к настройке, при котором быстрые колебания спроса компенсируются с помощью склада ГИ.

Задачи ОН по эталонному распределению разделяются на три типа: по группированному распределению, по негруппированному распределению и по числовым характеристикам. Общим для этих типов задач является минимизация некоторого расстояния Δ между эталонным распределением с плотностью $\varphi_{\pi}(\omega)$ и фактическим распределением с плотностью $\varphi_{\omega}(\omega, U)$:

$$\Delta [\varphi_{\omega}(\omega, U), \varphi_{\pi}(\omega)] \rightarrow \min, U \in \Omega_U. \quad (I3)$$

В задачах ОН по группированному распределению задано желаемое распределение $\{\pi_i\}$ изделий по классам и минимизируется расстояние между группированными распределениями $\{p_i\}$ и $\{\pi_i\}$:

$$\Delta [\{p_i(U), \{\pi_i\}] = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta [p_i(U), \pi_i] \rightarrow \min, U \in \Omega_U, (I4)$$

где $\sum_{i=1}^m \pi_i = \sum_{i=1}^m p_i(U) = 1, p_i(U) = \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} \varphi_{\omega}(\omega, U) d\omega;$

α_i - коэффициент приоритетности близости по i -му классу (при равной приоритетности классов $\alpha_i = 1$);

$\delta [p_i, \pi_i]$ - функция расстояния, например, в виде

$$\delta [p_i, \pi_i] = |p_i - \pi_i|^a, a > 0.$$

При большом числе классов можно иногда задачу (I4) аппроксимировать путем сглаживания группированного распределения $\{\pi_i\}$ некоторым непрерывным распределением с плотностью $\varphi_{\pi}(\omega)$. Целесообразность такой аппроксимации определяется возможностью упрощения решения получаемой задачи ОН по негруппированному распределению (в частности, возможностью получения аналитического решения). Соответствующая задача ОН имеет вид

$$\Delta [\varphi_{\omega}(\omega, U), \varphi_{\pi}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \delta[\varphi_{\omega}(\omega, U), \varphi_{\pi}(\omega)] d\omega \rightarrow \min, U \in \Omega_U, \quad (I5)$$

где $\delta_{\omega}[\varphi_{\omega}(\omega), \varphi_{\pi}(\omega)]$ — функция расстояния;

$\delta(\omega)$ — весовая функция, отражающая приоритетность достижения близости плотностей $\varphi_{\omega}(\omega)$ и $\varphi_{\pi}(\omega)$ при различных значениях ω .

Другая возможность аппроксимации задачи (I4) состоит в переходе к требованию близости распределения ω к эталонному распределению лишь по некоторым числовым характеристикам (по среднему значению, моде, дисперсии и др.). Такой переход целесообразен при упрощении решения задачи ОН, а также в случае, когда можно зафиксировать лишь некоторые характеристики распределения $\{\pi_i\}$ (желаемый центр настройки по среднему значению, местонахождение класса с наибольшим спросом и т.п.). В таком случае возникает задача ОН по числовым характеристикам, например, в виде

$$\Delta [\Gamma, \Gamma_{\pi}] = \sum_{j=1}^K \xi_j \delta[\gamma_j(U), \gamma_{\pi j}] \rightarrow \min, U \in \Omega_U, \quad (I6)$$

где Γ — вектор числовых характеристик, с размерностью K ;
 Γ_{π} — вектор желаемых значений составляющих вектора Γ ;
 ξ_j — нормирующий множитель для j -й характеристики γ_j .

В качестве частного случая (I6) отметим задачу оптимальной квадратичной настройки ПП по среднему значению: $K=1$, $\gamma = \gamma_1 = \mu_{\omega}$, $\delta[\mu_{\omega}, \mu_{\pi}] = [\mu_{\omega} - \mu_{\pi}]^2$; задача имеет вид

$$[\mu_{\omega}(U) - \mu_{\pi}]^2 \rightarrow \min, U \in \Omega_U, \mu_{\omega}(U) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \varphi_{\omega}(\omega, U) d\omega, \quad (I7)$$

где μ_{π} — центр настройки ПП по среднему значению μ_{ω} .

5. Задачи максимизации полезности по выходу

Задачи максимизации полезности (минимизации риска) по выходу ω представимы в виде задач максимизации среднего значения некоторой функции полезности $g(\omega)$:

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \varphi_{\omega}(\omega, U) d\omega \rightarrow \max_U, U \in \Omega_U. \quad (18)$$

Алгоритмизация задач ОН в виде (18) является целесообразной, в частности, в таких случаях, когда отсутствует четкий номенклатурный план $\{n_i\}$ и не удается с достаточной достоверностью прогнозировать распределение спроса по классам, но нет особых затруднений при реализации ПИ. В такой ситуации посредством выбора $g(\omega)$ можно настроить ПИ на выпуск изделий наиболее выгодных классов или на выпуск дефицитных классов. В первом случае (18) родственна (L, N) -задаче, в частности, при $\rho_{\Sigma} \gg 0$ и комбинации d - и e -штрафов типа (d_4, e_1) . Во втором случае $g(\omega)$ также конструируется с учетом вида d - и e -штрафов, согласно требованиям и критериям вышестоящей координирующей системы управления [3].

Соответственно, при распределении изделий по классам (ω_{i-1}, ω) с ценами h_i и себестоимостью c типичным видом $g(\omega)$ является кусочно-постоянная функция: $g(\omega) = h_i - c$, $\omega_{i-1} \leq \omega < \omega_i$. При такой $g(\omega)$ задача ОН (18) принимает вид

$$G = \sum_{i=1}^m h_i p_i(U) - c \rightarrow \max_U, U \in \Omega_U, p_i(U) = \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} \varphi_{\omega}(\omega, U) d\omega. \quad (19)$$

При большом числе классов иногда целесообразно кусочно-постоянную $g(\omega)$ в (19) аппроксимировать некоторой непрерывной функцией (если это позволяет упростить решение задачи, в частности, найти аналитическое решение. Отметим, что задачи (18) близки к задачам параметрической коррекции [12], а решение U^* задачи (19) не зависит от c .

В частном случае, когда отсутствуют классы с различной ценой h_i и годность изделия определяется его попаданием в допуск $[\varepsilon_{\omega}, \lambda_{\omega}]$, задача (18) принимает вид

$$G = h \int_{\varepsilon_{\omega}}^{\lambda_{\omega}} \varphi_{\omega}(\omega, U) d\omega - c \rightarrow \max_U, U \in \Omega_U. \quad (20)$$

Решение этой задачи совпадает с решением задачи ОН ПП по критерию максимизации вероятности бездефектности, имеющей вид

$$P(\varepsilon_{\omega} \leq \omega \leq \lambda_{\omega}) = \int_{\varepsilon_{\omega}}^{\lambda_{\omega}} \varphi_{\omega}(\omega, U) d\omega \rightarrow \text{mgx}, \quad U \in \mathcal{F}_U. \quad (21)$$

Отметим еще некоторые частные случаи задачи (18). При $g(\omega) = -(\omega - \omega_0)^2$ получим задачу минимизации квадратичных потерь относительно заданного центра настройки ПП ω_0 . При $g(\omega) = \pm \omega$ получим задачу экстремизации среднего значения μ_{ω} , при $g(\omega) = -(\omega - \mu_{\omega})^2$ задачу минимизации дисперсии σ^2_{ω} . Примеры функции полезности для (18) приведены на рис. 2; для каждого примера указан номер соответствующей задачи или вид $g(\omega)$.

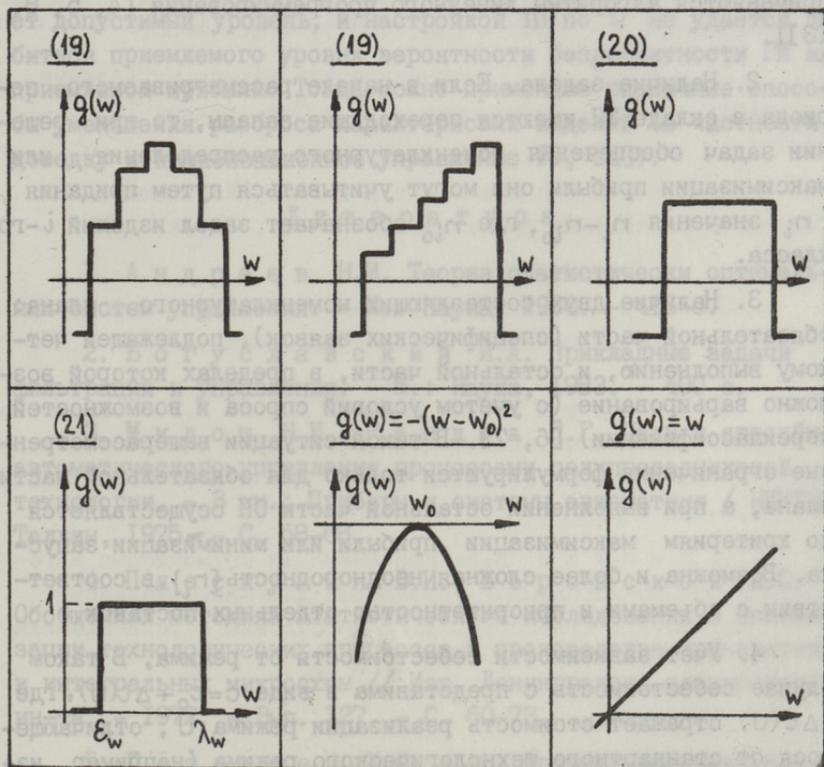


Рис. 2. Примеры функции полезности $g(w)$.

6. Некоторые смежные аспекты

Отметим некоторые дополнительные аспекты и усложнения, которые при необходимости приходится учитывать при алгоритмизации и решении задач настройки ПП.

1. Наличие переклассификации. В некоторых случаях целесообразно применять переклассификацию изделий из одного класса в другой. Это, в частности, возможно при частичном перекрытии соседних классов или при допустимости реализации изделий высших классов по ценам, соответствующим низким классам [4, 5, 7]. В таких случаях в алгоритм решения задач ОН, в частности (L, N)-задач или задач настройки по эталонному распределению включается подалгоритм нахождения оптимального правила переклассификации (обычно для этого применяются алгоритмы линейного программирования [4, 5, 8, 13]).

2. Наличие задела. Если в начале рассматриваемого периода в складе ПП имеются переходящие запасы, то при решении задач обеспечения номенклатурного распределения или максимизации прибыли они могут учитываться путем придания n_i значения $n_i - n_{i0}$, где n_{i0} обозначает задел изделий i -го класса.

3. Наличие двух составляющих номенклатурного плана: обязательной части (специфических заявок), подлежащей четкому выполнению, и остальной части, в пределах которой возможно варьирование (с учетом условий спроса и возможностей переклассификации) [6, 7]. В такой ситуации вышерассмотренные ограничения формулируются только для обязательной части плана, а при выполнении остальной части ОН осуществляется по критериям максимизации прибыли или минимизации запуска. Возможна и более сложная неоднородность $\{n_i\}$, в соответствии с объемами и приоритетностью отдельных поставок.

4. Учет зависимости себестоимости от режима. В таком случае себестоимость c представима в виде $c = c_0 + \Delta c(U)$, где $\Delta c(U)$ отражает стоимость реализации режима U , отличающегося от стандартного технологического режима (например, из-за энергоемкости или длительности). Иногда существенны также зависимость c от объема производства, различие себестоимости изделий различных классов и др.

5. Неоднозначность решения. При решении некоторых задач ОП с учетом характера зависимости плотности $\varphi_{\omega}(\omega, U)$ от U может возникать многоэкстремальная ситуация; например, в задаче (I7) условие $\mu_{\omega}(U) = \mu_{\pi}$ удовлетворено при различных U . Тогда постановку задачи ОП целесообразно дополнить некоторыми критериями или ограничениями согласно способам мультикритериальных задач оптимизации. В частности, для получения однозначного решения можно потребовать максимальной близости решения U^* к стандартному технологическому режиму U_0 ($\Delta(U, U_0) \rightarrow \min$) или того, чтобы U^* отличалось бы от U_0 по минимальному количеству составляющих вектора U .

6. Совмещение настройки ТП с уменьшением разброса. Это актуально в случае, когда разброс характеристик ГИ превышает допустимый уровень, и настройкой ТП по U не удается добиться приемлемого уровня вероятности бездефектности ГИ или приемлемой прибыли. Тогда можно применять различные способы уменьшения разброса характеристик изделий (в частности, доводку и компенсационное управление [9, 14]).

Л и т е р а т у р а

1. А н д р е е в Н.И. Теория статистически оптимальных систем управления. - М.: Наука, 1980. - 416 с.
2. Б о г у с л а в с к и й И.А. Прикладные задачи фильтрации и управления. - М.: Наука, 1983. - 400 с.
3. М и л о ш Н.И., Р а н д м а Р.Г. Цели и способы автоматического управления процессами полупроводниковой технологии. - В кн.: Приборы и системы автоматизации / НИИТЭЗ; Таллин, 1975. - С. 58-68.
4. П л е с к у н и н В.И., Б о р о в с к о й А.С. Обобщенная методика статистического исследования и оптимизации технологических процессов в производстве транзисторов и интегральных микросхем // Изв. Ленинградск. электротехн. ин-та. - 1972. - Вып. 127. - С. 60-73.
5. П е т е р с е й И.Ф. и др. Оптимальное распределение изделий по типам при постоянной технологии // Электронная техника. - Сер. Ю. - 1969. - Вып. I(26). - С. 77-83.

6. К о р о б о в В.Д., Л е й д м а н Г.А. Управление номенклатурным выпуском планарных транзисторов на этапе сборки // Электронная техника. - Сер. 2. - 1974. - Вып. 7(87). - С. 110-113.

7. М е л а м е д С.С. и др. Типовые модули субоптимального планирования производства силовых полупроводниковых приборов // Электротехническая промышленность.-Сер. Общестраслевые вопросы. - 1977. - Вып. 7(458). С. 1-3.

8. П е с и к о в Э.В. Об одной задаче стохастического программирования в системе управления производством с вероятностным характером технологии // Изв. Ленинградск. электротехн. ин-та. - 1975. - Вып. 173. - С. 61-65.

9. Т а л а л а й А.М. Методы определения центра настройки в АСУ ТП и смежных областях // Измерения, контроль, автоматизация. - 1984. - Вып. 4(52). - С. 52-65.

10. Ю д и н Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. - М.: Сов. радио, 1974. - 400 с.

11. П е р в о з в а н с к и й А.А. Математические модели в управлении производством. - М.: Наука, 1975. - 616 с.

12. А б р а м о в О.В., и др. Параметрическая коррекция систем управления. - М.: Энергоиздат, 1982. - 176 с.

13. К а п л у н М.И., Л ы с е н к о В.Г. Применение линейного программирования для оптимизации плана производства // Электронная техника. - Сер. 7. - 1975.- Вып. 4(68). - С. 86-94.

14. К и й т а м А.А. Приближенная оптимизация алгоритмов компенсационного управления для многостадийных технологических процессов. I // Автоматика и телемеханика. - 1981. - № 8. - С. 172-178.

Algorithmization of Some Scalar Optimal Adjustment Tasks for Discrete Technological Processes

Abstract

Algorithmization of optimal adjustment tasks for discrete technological processes characterized by high stochasticity level of technology is presented for the case when optimality criterion depends on univariate distribution of quality characteristic of manufactured devices. Following types of optimal adjustment tasks are considered: obtaining desired nomenclatural distribution, utility maximization due to the nomenclatural output volume, adjustment due to the desired distribution, utility maximization due to the output. Some related aspects are also considered.

скольких параметрах [1, 2, 3]. Однако в этих работах не был еще принят во внимание тот факт, что система ФАП с переменным фазовым детектором по своей сущности является неавтономной. Неавтономность заключается в том, что значения параметров системы и, следовательно, также свойства системы зависят от уровня амплитуды входного сигнала. Данная статья является развитием вышеотмеченных работ [1, 2, 3]. В ней находят рассмотрение влияние отклонения амплитуды от номинального значения на длительность переходных процессов в системе.

2. Описание системы

Рассматриваемая система ФАП на рис. 1 состоит из переменного фазового детектора ФД, фильтра нижних частот

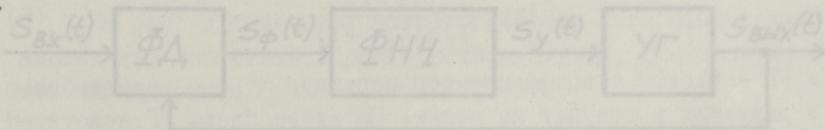


Рис. 1. Структура системы ФАП.

ФНЧ и управляемого генератора УГ. Предполагая, что на входе действует синусоидальный сигнал

$$S_{вх}(t) = A \sin \theta_1(t), \tag{1}$$

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЕ

ФАП ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1. Постановка проблемы

Оптимизация параметров системы фазовой автоподстройки (ФАП) третьего порядка с целью получения наискорейшего затухания переходных процессов нашла уже рассмотрение в нескольких статьях [1, 2, 3]. Однако в этих работах не был еще принят во внимание тот факт, что система ФАП с перемножающим фазовым детектором по своей сущности является неавтономной. Неавтономность заключается в том, что значения параметров системы и, следовательно, также свойства системы зависят от уровня амплитуды входного сигнала. Данная статья является развитием вышеотмеченных работ [1, 2, 3]. В ней находит рассмотрение влияние отклонения амплитуды от номинального значения на длительность переходных процессов в системе.

2. Описание системы

Рассматриваемая система ФАП на рис. 1 состоит из перемножающего фазового детектора ФД, фильтра нижних частот

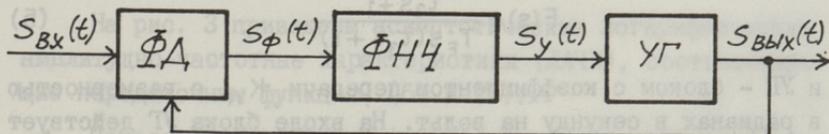


Рис. 1. Структура системы ФАП.

ФНЧ и управляемого генератора УГ. Предполагая, что на входе действует синусоидальный сигнал

$$S_{\text{вх}}(t) = A \sin \theta_1(t), \quad (1)$$

где

$$\theta_1(t) = \omega t + \psi, \quad (2)$$

с выхода системы получается косинусоидальный нормированный сигнал

$$S_{\text{вых}}(t) = 1 \cos \theta_2(t), \quad (3)$$

где

$$\theta_2(t) = \omega t + \psi + \Phi(t), \quad (4)$$

$\Phi(t)$ – погрешность фазы.

Погрешность фазы $\Phi(t)$ вызывает сигнал ошибки $S_\Phi(t)$, который пропорционален $\sin \Phi(t)$. Этот сигнал ошибки проходит ФНЧ и в виде управляющего сигнала $S_y(t)$ действует на входе УГ таким образом, чтобы значение погрешности $\Phi(t)$ имело бы минимальное значение.

3. Линейная модель системы

В линейной модели на рис. 2 фазовый детектор ФД линеаризован путем замены его синусоидальной нелинейности линейной зависимостью, имея в виду, что $\sin \Phi \approx \Phi$, если $\Phi < 30^\circ$. В результате линеаризации модель ФД состоит из сравнивающего устройства – сумматора Σ , звена с коэффициентом передачи $A/2$ с размерностью в вольтах, где A – амплитуда входного сигнала (I), и звена с безразмерным коэффициентом передачи $K_{\text{ФД}}$. На входах сумматора Σ действуют фазовые сигналы $\theta_1(s)$ и $\theta_2(s)$, а на выходе – погрешность фазы $\Phi(s)$, см. (1-4), где s – переменная Лапласа. С выхода модели ФД получается изображение сигнала ошибки $S_\Phi(s)$ – низкочастотной составляющей продукта перемножения входного и выходного сигналов [2]. ФНЧ представлен своей передаточной функцией

$$F(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{T_F s (\tau_3 s + 1)} \quad (5)$$

и УГ – блоком с коэффициентом передачи $K_{\text{УГ}}$ с размерностью в радианах в секунду на вольт. На входе блока УГ действует изображение управляющего сигнала $S_y(s)$, а с выхода получается изображение $\theta_2(s)$ фазового сигнала (4).

Передаточная функция [2, 3] разомкнутой системы следующая:

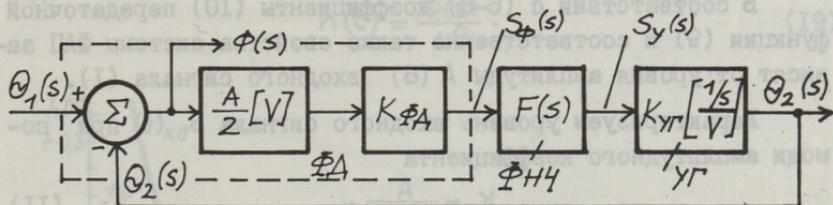


Рис. 2. Линейная модель системы.

$$G(s) = F(s) \cdot L(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{T_A^2 s^2 (\tau_3 s + 1)}, \quad (6)$$

где

$$L(s) = \frac{1}{T_L s} \quad (7)$$

является передаточной функцией разомкнутой системы без ФНЧ, причём

$$\frac{1}{T_L} = K_L = K_{\Phi A} \cdot K_{\text{УП}} \left[\frac{1}{s} \right]. \quad (8)$$

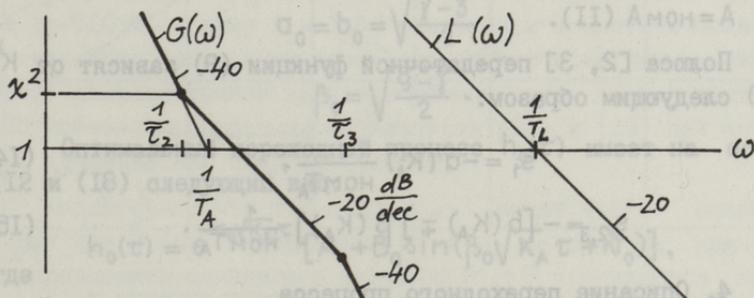


Рис. 3. ЛАЧХ разомкнутой системы.

На рис. 3 приведены асимптотические логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ), соответствующие передаточным функциям (6) и (7).

Передаточная функция замкнутой системы ФАП следующая:

$$H(s) = \frac{\Phi(s)}{\Theta_1(s)} = \frac{T_A^2 s^2 \left(\frac{x}{y} T_A s + 1 \right)}{\frac{x}{y} T_A^3 s^3 + T_A^2 s^2 + x T_A s + 1}, \quad (9)$$

где

$$y = \frac{\tau_2}{\tau_3}, \quad x = \frac{\tau_2}{T_A} \quad \text{и} \quad T_A = \sqrt{T_F \cdot T_L}. \quad (10)$$

В соответствии с (6-8) коэффициенты (10) передаточной функции (9) и соответственно также свойства системы ФАП зависят от уровня амплитуды A (8) входного сигнала (1).

Характеризуем уровень входного сигнала $S_{bx}(t)$ при помощи амплитудного коэффициента

$$K_A = \frac{A}{\text{ном} A}, \quad (II)$$

где $\text{ном} A$ соответствует номинальному значению уровня сигнала $S_{bx}(t)$, который обеспечивает требуемые условия для затухания переходных процессов. Используя определения (10), выражаем постоянную времени T_A и параметр x при помощи коэффициента K_A (II):

$$T_A = \frac{\text{ном} T_A}{\sqrt{K_A}}, \quad (I2)$$

$$x = \text{опт} x \cdot \sqrt{K_A}, \quad (I3)$$

где $\text{ном} T_A$ - номинальное значение постоянной времени T_A (10), $\text{опт} x$ - оптимальное значение параметра x (10), обеспечивающие наискорейшее затухание переходных процессов при $A = \text{ном} A$ (II).

Полюса [2, 3] передаточной функции (9) зависят от K_A (II) следующим образом:

$$s_1 = -\alpha(K_A) \frac{1}{\text{ном} T_A}, \quad (I4)$$

$$s_{2,3} = -[b(K_A) \mp j \beta(K_A)] \frac{1}{\text{ном} T_A}. \quad (I5)$$

4. Описание переходного процесса

Рассмотрим случай, при котором входным воздействием является скачкообразное изменение фазы:

$$\theta_1(\tau) \Big|_{\tau > 0} = \Delta \theta, \quad (I6)$$

где

$$\tau = \frac{t}{\text{ном} T_A}. \quad (I7)$$

Переходный процесс (рис. 4) имеет в данном случае следующий общий вид:

$$h(\tau) = A e^{-\alpha\tau} + B e^{-\beta\tau} \sin(\beta\tau + \delta), \quad (I8)$$

где

$$h(\tau) = \frac{\Phi(\tau)}{\Delta\theta}. \quad (19)$$

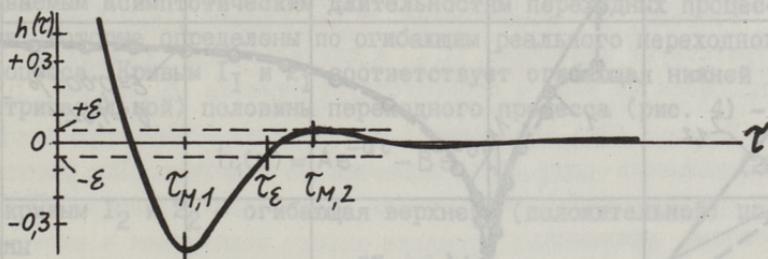


Рис. 4. Конечная часть переходного процесса.

Если система ФАП является адаптивной и способной поддерживать $x = \text{онт}x$ (13) независимо от уровня амплитуды A входного сигнала (1), то при $5 \leq \gamma < 9$ [2, 3]:

$$\text{онт}x = \frac{\gamma}{3} \sqrt{\frac{2}{\gamma-3}} \quad (20)$$

и коэффициенты корней (14) и (15) имеют следующие оптимальные значения:

$$a_0 = b_0 = \sqrt{\frac{\gamma-3}{2}} \quad (21)$$

и

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{9-\gamma}{2}}. \quad (22)$$

Оптимальный переходный процесс $h_0(\tau)$ имеет на основе (12) и (18) следующий вид:

$$h_0(\tau) = e^{-a_0 \sqrt{K_A} \tau} [A_0 + B_0 \sin(\beta_0 \sqrt{K_A} \tau + \delta_0)], \quad (23)$$

где

$$A_0 = -\frac{2(\gamma-3)}{9-\gamma}, \quad B_0 = 3 \frac{\sqrt{2(\gamma-1)}}{9-\gamma} \quad (24)$$

и

$$\delta_0 = \arctg \frac{\gamma+3}{\sqrt{(9-\gamma)(\gamma-3)}}. \quad (25)$$

5. Анализ переходных процессов

Зависимости длительностей t_ϵ переходных процессов от значений амплитудного коэффициента K_A (II) даны на рис. 5 в приведенном виде

$$\tau_\epsilon = \frac{t_\epsilon}{\text{ном}T_A} \quad (26)$$

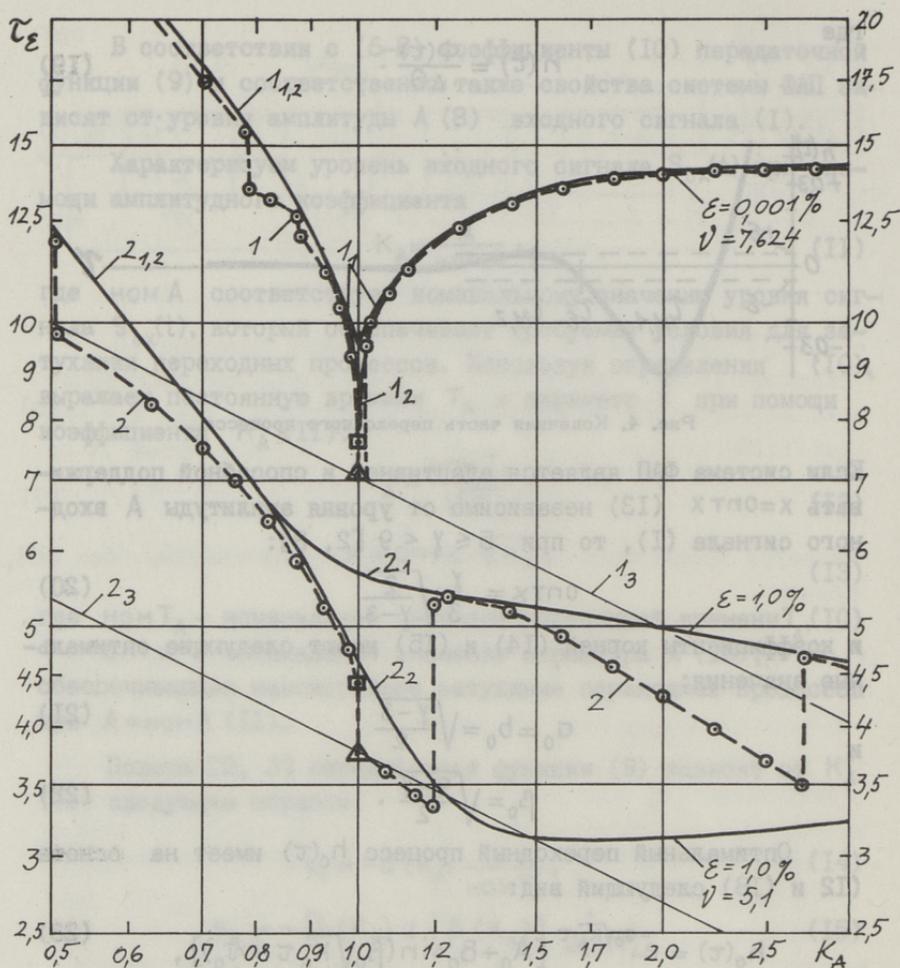


Рис. 5. Зависимости длительностей τ_{ε} переходных процессов от амплитудного коэффициента K_A ($x=opt x$ и $y=opt y$) для $K_A=1$.

пунктирными линиями 1 ($\varepsilon = 0,001\%$) и 2 ($\varepsilon = 1\%$), где $\varepsilon\%$ — допустимая относительная динамическая погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Phi(\tau_{\varepsilon})}{\Delta\theta_1} 100\%. \quad (27)$$

Ввиду колебательности переходных процессов (рис. 4), кривые 1 и 2 на рис. 5 являются разрывчатыми линиями, конкретные значения которых обозначены нулями ○, только разрывчатая часть при $K_A=1$ обозначена фигурами □ и Δ.

Разрывность кривых 1 и 2 не позволяет их описывать регулярными и наглядными функциями. Поэтому на рис. 5 приведены еще кривые I_1 ; I_2 и I_1 ; 2_2 , соответствующие так называемым асимптотическим длительностям переходных процессов, которые определены по огибающим реального переходного процесса. Кривым I_1 и 2_1 соответствует огибающая нижней (отрицательной) половины переходного процесса (рис. 4) -

$$h_1(\tau) = Ae^{-a\tau} - Be^{-b\tau}, \quad (28)$$

а кривым I_2 и 2_2 - огибающая верхней (положительной) половины

$$h_2(\tau) = Ae^{-a\tau} + Be^{-b\tau}. \quad (29)$$

Анализ кривых на рис. 5 показывает, что длительности τ_ε реальных переходных процессов (кривые 1 и 2) ни в коем случае не превышают длительностей (кривые I_1 и 2_1) огибающих (28). В то же время при $K_A < 1$ длительности реальных процессов (кривые 1 и 2) не превышают также и длительностей (кривые I_2 и 2_2) огибающих (29), причем при приближении значения K_A к единице ($K_A \rightarrow 1$), например, в случае $0,8 \leq K_A < 1$ для $\varepsilon = 1\%$ (кривые 2 и 2_2) и в случае $0,9 \leq K_A < 1$ для $\varepsilon = 0,001\%$ (кривые 1 и I_2), реальная и асимптотическая длительности переходных процессов практически равны между собой. Вышеизложенное дает нам возможность воспользоваться относительно простыми выражениями (28) и (29) при анализе динамических свойств системы.

Характерно, что точно при $K_A = 1$ имеет место разрыв кривых 1 и 2 (см. изображения \square и Δ на рис. 5), причем при превышении единичного значения ($K_A > 1$) проявляются непрерывные, но ограниченные (до следующего разрыва) отрезки кривых 1 и 2, например, в области $1,00 < K_A < 1,19$ у кривой 2 ($\varepsilon = 1\%$) и в области $1,00 < K_A < 1,01$ у кривой 1 ($\varepsilon = 0,001\%$). Именно в этих пределах необходимо поддерживать значения K_A для того, чтобы не испортить оптимальных динамических свойств неавтономной системы ФАП.

Вышеописанное поведение кривых на рис. 5 поясняется колебательным характером переходного процесса на рис. 4. Анализ численных результатов показал, что минимальную длительность имеет такой переходный процесс, второе экстремальное значение которого $h_0(\tau_{m,2})$ достигает, но пока еще

не получает значения допустимой динамической погрешности ε (27), то есть:

$$\varepsilon - h_0(\tau_{m,2}) \rightarrow 0. \quad (30)$$

Отметим, что обозначения \square на кривых 1 и 2 (рис. 5) соответствуют значениям $\tau_{m,2}$, а длительности τ_ε переходного процесса на рис. 4 соответствуют отметки Δ на рис. 5.

Условие (30) выполняется при $x = \text{опт}x$ (20) и $y = \text{опт}y$, но зависимость $\text{опт}y = f(\varepsilon)$ пока еще не известна. Для решения этой проблемы найдем экстремумы переходного процесса (23). На основе уравнения

$$\frac{\partial h_0(\tau)}{\partial(\tau)} = 0, \quad (31)$$

получим, что четные ($n = 2k$) экстремальные значения переходного процесса $h_0(\tau_{m,n})$ имеют место при

$$\tau_{m,2k} = \frac{2k\pi}{\beta_0} = kT_0, \quad (32)$$

где

$$T_0 = \frac{2\pi}{\beta_0}. \quad (33)$$

На основе (22), (32) и (33) получим, что при $n = 2$

$$\tau_{m,2} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{9-\gamma}}. \quad (34)$$

Подставляя (34) в выражение переходного процесса (23) и приравнявая $h_0(\tau_{m,2}) = \varepsilon$, получим:

$$\text{опт}y = \frac{3 \left[1 + 3 \left(\frac{\ln \varepsilon}{2\pi} \right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{\ln \varepsilon}{2\pi} \right)^2}. \quad (35)$$

Используя выражения (34) и (35), можно непосредственно определить длительности переходных процессов в точках \square кривых 1 и 2 (рис. 5):

$$\tau_{\varepsilon \square} = \tau_{m,2} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{9 - \text{опт}y}}. \quad (36)$$

Для определения длительностей переходных процессов в точках Δ кривых 1 и 2 (рис. 5) можно с успехом воспользоваться следующей эмпирической формулой:

$$\tau_{\varepsilon \Delta} \approx \tau_{\varepsilon \square} - 0,7 \quad (37)$$

погрешность расчета по которой не превышает нескольких процентов при $\varepsilon < 1\%$.

6. Выводы

Вышеприведенный анализ показывает, что длительность переходных процессов является весьма чувствительной к отклонениям амплитуды входного сигнала от номинального значения (см. рис. 5). Например, отклонения в пределах $\pm 20\%$ могут вызывать удлинение переходных процессов до увеличения их в 2 раза. Для обеспечения оптимальных динамических свойств системы необходима адаптация значений параметров системы к изменениям уровня входного сигнала. На рис. 5 приведены прямые I_3 и 2_3 , которые характеризуют длительности переходных процессов при $\varepsilon = 0,001\%$ и $\varepsilon = 1,0\%$ соответственно, если автоматически поддерживается оптимальное значение $\chi = \text{opt} \chi$ независимо от значения коэффициента K_A . При больших отклонениях амплитуды ($K_A > 1,5$) мы получаем выигрыш в уменьшении длительности переходных процессов в несколько раз, если наша система является адаптивной к изменениям амплитуды входного сигнала.

Л и т е р а т у р а

1. М и н М. Динамический синтез высокоточных следящих систем // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1983. - № 550. - С. 35-40.

2. М и н М. Фазовая автоподстройка координатных сигналов в векторных измерительных преобразователях // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1985. - № 592. - С. 103-110.

3. M i n M. A method for design of the time optimal third order phase locked loop // Proc. Europ. Conf. on Circuit Theory and Design (ECCTD' 85). - Prague, Sept. 1985. - Part I. - P. 325-328.

Transient Processes in the Nonautonomous
Third-Order PLL System

Abstract

The action of the input signal level nonstability to the transient time of the third-order phase locked loop (PLL) system is considered. It is shown, that relatively high sensitivity of dynamic characteristics to the input signal amplitude becomes evident, and, as it follows, an adaptive PLL system is needed to obtain suboptimal phase step response.

ПОВТОРНЫЙ РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ МЕТОДОМ РЕДУКЦИИ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СТРОГОГО ЧАСТИЧНОГО
УПОРЯДОЧЕНИЯ ИСКЛЮЧАЕМЫХ УЗЛОВ

I. Введение

В ходе расчета на ЭВМ задач анализа цепей нередко приходится решать уравнения линейной цепи, причем

1) часть элементов линейной цепи такие, что значения их параметров могут в процессе повторного расчета то изменяться (практически непредсказуемым образом), то оставаться латентными (неизменными);

2) структура этой цепи в процессе повторного расчета не изменяется и является обычно сильно разреженной.

Вопросы, связанные с повышением скорости расчета цепей путем использования их разреженности и латентности, рассмотрены во многих публикациях, например, в [2-5] и в [6, 7]. Большинство этих работ посвящено применению (модифицированного) узлового метода в сочетании с расчленением задачи расчета на одинаковые, однотипные, независимые (параллельно решаемые) и т.д. подзадачи и с использованием перечисленных свойств подзадач. При этом линейные уравнения цепи представляются в матричной форме и решаются с помощью разных модификаций метода Гаусса (LU-разложения).

Ниже рассматривается процесс повторного расчета линейной цепи методом редукции, так как этот метод имеет по сравнению с матричными методами узлового анализа некоторые преимущества [1]. Предлагается способ гибкой организации расчетов на уровне узлов цепи. Обсуждаются возможности использования разреженности и латентности цепи с целью уменьшения объема вычислений (мультипликативных операций).

Основой для дальнейшего изложения является работа [1], где на базе унифицированной формы описания элементов цепи^I сформулированы простые и удобные для ЭВМ правила преобразования звезда-сеть для линейной активной адмитансной цепи.

2. Редукция цепи и цепи редукции

Обозначим через $C=(X, D)$ или $C^n=(X^n, D^n)$ цепь с множеством узлов $X=X^n$ и с множеством элементов $D=D^n$, причем индекс n указывает, что $|X^n|=n$. Элемент $d \in D^n$ представим с помощью пары (γ, α) , где γ - параметр элемента (проводимость) и α - однозначное отображение множества зажимов элемента во множество узлов цепи, заданное, например, перечислением в определенном порядке зажимов соответствующих инцидентных узлов. В [1] указано, что рассматриваемые элементы имеют несколько различных эквивалентных описаний в виде пары (γ, α) .

Предположим, что элементы $x_i \in X^n$ помечены (индексированы), согласно некоторому взаимно однозначному отображению $\beta: X^n \rightarrow I^n = \{1, 2, \dots, n\}$, так, что $\beta(x_i) = i$.

Рассмотрим процесс редукции цепи $C^n=(X^n, D^n)$, согласно β , в ходе которого узлы $x_i \in X^n$ исключаются из цепи посредством преобразования звезда-сеть в порядке убывания i .

При исключении из $C^i=(X^i, D^i)$ очередного узла x_i ($i = n, n-1, \dots, 1$)

1) множество инцидентных к x_i элементов S^i заменяется на эквивалентное множество элементов S_0^i , причем обеспечивается взаимно однозначное соответствие между подмножествами $D_\gamma = \{(\gamma, \alpha) | (\gamma, \alpha) \in S^i \wedge \alpha = \gamma\} \subset S^i$ и элементами $(\gamma, \gamma) \in S_0^i$, где

$$\gamma_\gamma = \sum_{(\gamma, \alpha) \in D_\gamma} \gamma$$

2) в цепь добавляются элементы, определяемые на основе элементов $d \in S_0^i$, согласно правилам преобразования звез-

^I Хотя это и не указано в [1], независимые источники тока, как и все другие элементы, представимы в виде динзоров (только управляющие зажимы последних должны тогда присоединяться к двум дополнительным узлам с неизменными узловыми напряжениями IB и OB).

да-сеть, и образующие множество M^i (причем для описания этих новых элементов используются в первую очередь те описания $d'=(y',\alpha')$, для которых найдутся такие $d=(y,\alpha)\in D^i$, что $\alpha=\alpha'$);

3) из цепи удаляется узел x_i и элементы $d\in S_0^i$.

В результате этого цепь C^i преобразуется в цепь C^{i-1} , где

$$X^{i-1} = X^i \setminus x_i; \quad \text{и} \quad D^{i-1} = D^i \cup M^i \setminus S_0^i.$$

В ходе редукции цепи C можно формировать множества элементов $D_I = \bigcup_{i=1}^n S_0^i$ и $D_{II} = \bigcup_{i=1}^n S_0^i$ и цепи $C_I = (X, D_I) \cup C_{II} = (X, D_{II})$,

которые называем соответственно первичной и вторичной цепями редукции для C .

Цепь $C_{\Sigma} = (X, D_{\Sigma})$, где D_{Σ} является объединением множеств, которые получены из D_I и D_{II} путем присвоения их элементам дополнительного параметра - признака принадлежности к D_I или к D_{II} , называем (полной) цепью редукции для C .

Нетрудно убедиться в том, что на структуре C_{Σ} (на C_I и C_{II}) удастся реализовать соответствующую β редукцию цепей, которые отличаются от C только значениями параметров γ их элементов и что для этого следует

1) изменять нужным образом значения параметра γ элементов цепи редукции C_{Σ} и

2) исключить из рассмотрения ненужные узлы и элементы цепи C_{Σ} .

3. Редукция цепи и графы упорядочения

В ходе исключения из C узла x_i , т.е. преобразования C^i в C^{i-1} , изменяется структура цепи у узлов, смежных с x_i , которые образуют множество $A^i \subset X^{i-1}$. Точнее - в цепь C^{i-1} и в цепь редукции C_I включаются элементы $d \in M^i$, т.е. изменяются окрестности (звезды) узлов, которые инцидентны элементам множества M^i и образуют множество Z^i . Из правил преобразования звезда-сеть [1] следует, что $Z^i \subset A^i$.

Тогда для выполнения в ходе редукции цепи C на структуре C_Σ исключения узла $x_{i-1} \in A^i \setminus Z_i$ (если такой узел существует) не должно быть выполнено исключение x_i , а лишь временное исключение инцидентных к x_i элементов, то есть решается выполнить исключение x_{i-1} на структуре $C_\Sigma^{i-1} = (X^{i-1}, D_\Sigma^{i-1})$ до исключения x_i на структуре $C_\Sigma^i = (X^i, D_\Sigma^i)$. (Тут и в дальнейшем $D_\Sigma^i = D_\Sigma(X^i)$ - множество, содержащее все $d \in D_\Sigma$, которые инцидентны только к узлам множества X^i , и только эти элементы.) Но исключение на C_Σ узлов $x_k \in Z^i$ до исключения x_i неосуществимо, т.е. определены отношения строгого частичного упорядочения $x_i > x_k$:

$$x_k \in Z^i \Rightarrow x_i > x_k.$$

Множество всех определенных структурой C_Σ отношений $x_i > x_k$, где $x_i, x_k \in X$, можно представить с помощью таких ациклических орграфов $G = (X, E)$, что в G найдется путь $P(x_i, x_k)$ от x_i к x_k тогда и только тогда, когда $x_i > x_k$. Эти графы будем называть графами упорядочения.

Наиболее экономно представляет интересующие нас отношения строгого частичного упорядочения базисный граф упорядочения $G_0 = (X, E_0)$, который получают из G удалением всех дуг (x_j, x_k) , для которых в G можно найти путь $P(x_j, x_k) \neq (x_j, x_k)$.

Формирование графа $G_0 = (X, E_0)$ осуществимо в ходе редукции цепи $C = (X, D)$ параллельно с формированием $C_\Sigma = (X, D_\Sigma)$. Например, для получения представления G_0 в виде множеств $X^{(k)}$ $k = 1, 2, \dots, n$, где $X^{(k)}$ - множество всех вершин графа G_0 , откуда направлены дуги в $x_k \in X$, следует вместе с исключением каждого $x_i \in X$ выполнить операции одной и той же группы A или B , причем

группа A содержит операции над множествами $X_G^{(k)}$ $k = 1, 2, \dots, n$, которые вначале являются пустыми, а в итоге превращаются во множества тех вершин графа G_0 , откуда достижимы вершины x_k $k = 1, 2, \dots, n$:

- 1) для $k = 1, 2, \dots, i-1$ при $x_k \in Z^i$

$$X_G^{(k)'} = X_G^{(k)} \cup X_G^{(i)} \cup x_i;$$
- 2)
$$X_G^{(i)} = X_G^{(i)} \setminus \bigcup_{x_j \in X_G^{(i)}} X_G^{(j)},$$

3) уничтожение ненужного $X_G^{(i)}$;

группа B содержит операции над множествами $X^{(k)}$ и $X_L^{(k)}$ $k = 1, 2, \dots, n$, которые вначале являются пустыми, а в итоге превращаются во множества тех вершин графа G_0 , откуда найдутся пути соответственно длиной I и только длиной $> I$ к вершинам x_k $k = 1, 2, \dots, n$:

$$1) X_G^{(i)} = X^{(i)} \cup X_L^{(i)},$$

2) для $k = 1, 2, \dots, i-1$ при $x_k \in Z^i$

$$X^{(k)'} = (X^{(k)} \setminus X_G^{(i)}) \cup x_i,$$

$$X_L^{(k)'} = X_L^{(k)} \cup X_G^{(i)},$$

3) уничтожение ненужных $X_G^{(i)}$ и $X_L^{(i)}$.

Если цепь C состоит только из двухполюсников (и среди них нет параллельных элементов), то мы можем рассматривать

1) C - как простой неориентированный граф и

2) C_{II} - как соответствующий графу триангулированный (triangulated, см. [8, 9]) граф. В случае такой цепи все $Z^i = A^i$ и базисный граф упорядочения является деревом $T_0 = (X, E_0)$.

Для получения представления T_0 в виде $X^{(k)}$ $k=1, 2, \dots, n$ можно исходить из множеств $X_L = \emptyset$ и $X_G^{(k)} = \emptyset$ $k = 1, 2, \dots, n$ и выполнить в ходе редукции вместо операции группы A или B операции группы B :

1) для $k = 1, 2, \dots, i-1$ при $x_k \in A^i$

$$X_G^{(k)'} = X_G^{(k)} \cup X_G^{(i)} \cup x_i$$

2) $X^{(i)} = X_G^{(i)} \setminus X_L$,

3) $X_L^i = X^{(i)} \cup X_L = X_G^{(i)} \cup X_L$,

4) уничтожение ненужного $X_G^{(i)}$.

В общем случае полученное таким путем T_0 можно рассматривать (и использовать) как древовидное приближение графа G_0 .

Существенно учесть следующее: G_0 определяют все допустимые последовательности исключения узлов цепи C на C_Σ , но T_0 определяет все последовательности исключения узлов, обеспечивающие формирование на основе C одной и той же C_Σ .

4. Повторный расчет цепи

Предположим, что для цепи C найдены цепь редукции C_{Σ} и соответствующее последней дерево $T_0 = (X, E_0)$. Пусть цепь \tilde{C} отличается от C только значениями параметров у некоторых элементов, инцидентные узлы которых образуют множество \tilde{X} . Пусть множество X^* содержит только все $x \in \tilde{X}$ и все $z \in X$, для которых найдется такой $x \in \tilde{X}$, что в дереве T_0 существует путь $P(x, z)$.

Тогда мы можем выполнить расчет цепи $\tilde{C} = (X, \tilde{D})$ по следующему алгоритму:

1) преобразуем $C_{\Sigma} = (X, D_{\Sigma})$ в цепь $\hat{C}_{\Sigma} = (X, (D_{\Sigma} \setminus D) \cup \tilde{D})$ (т.е. C_{Σ} в \hat{C}_{Σ}), изменяя значения параметров элементов $d \in D$ и формируя в то же время и множество \tilde{X} ;

2) на основе T_0 и \tilde{X} определяем X^* и соответствующую графу T_0 упорядочение узлов $x \in X^*$ в виде $\beta_*: X^* \rightarrow I^* = \{1, 2, \dots, |X^*|\}$;

3) выполняем на \hat{C}_{Σ} редукцию цепи \tilde{C} , т.е. преобразуем \hat{C}_{Σ} в \tilde{C}_{Σ} , выполняя в соответствии с β_* редукцию на подцепи $\hat{C}_{\Sigma}^* = (X^*, \hat{D}_{\Sigma}(X^*))$;

4) выполняем в соответствии с β обратный ход расчета цепи \tilde{C} , т.е. вычисляем на \tilde{C}_{Σ} (точнее — на \hat{C}_{Σ}) напряжения узлов $x_i \in X$ в порядке увеличения i .

Таким образом можно избежать повторения исключения узлов $x_i \in X \setminus X^*$.

В случае, когда необходимо вычислить узловые напряжения только для узлов некоторого множества $\tilde{X} \subset X$, может оказаться целесообразным замена этапа 4) предложенного алгоритма на этапы, похожие на 2) и 3) с использованием \tilde{X} в роли X^* .

5. Постановка задачи выбора C_{Σ} и T_0

Важной характерной величиной как для процесса расчета цепи C по предложенному алгоритму, так и для определяющих во многом этот процесс C_{Σ} и T_0 является m_{cp} — среднее число мультипликативных операций, необходимых для однократного расчета цепи в процессе многократного повторного расчета.

Для расчета цепи C желательно выбрать C_{Σ} и T_0 так, чтобы значение m_{cp} оказалось минимальным (или близким к этому). При выборе C_{Σ} и T_0 следовало бы учесть

1) структуру цепи C , т.е. разреженность и ее распределение по цепи;

2) закономерности изменения параметров элементов цепи в процессе повторного расчета, т.е. латентность и ее распределение по цепи и по времени.

Латентность и ее распределение трудно точно охарактеризовать и учесть. На практике используется подход [3], который основывается на понятии типа изменчивости элемента и на присвоении элементам разных типов изменчивости соответствующих их типам разных эмпирических весовых коэффициентов (приоритетов). При этом как значения, так и способ учета этих коэффициентов зависят от процесса, в ходе которого их применяют.

Исходя из этого сформулируем следующую проблему: как можно в случае разреженной цепи C , которая обладает значительной латентностью, причем распределение последней равномерное (т.е. вероятности изменения всех элементов цепи равны, независимы и не изменяются), найти

1) оценку качества выбранной для C пары C_{Σ} и T_0 в виде m_{cp} ;

2) пару C_{Σ} и T_0 , которая является оптимальной для C в смысле m_{cp} .

Желая избежать громоздких расчетов и использовать возможности изложенного в п.п. 2-4 подхода, упрощаем эту проблему и делаем следующее предположение: все узлы цепи C могут с равной вероятностью попасть в множество \tilde{X} , причем всегда $|\tilde{X}| = 1$.

Это означает, что

1) в ходе расчета цепи могут одновременно изменяться параметры только тех элементов, которые инцидентны только узлам C (вершинам T_0 из единственного множества вершин таких путей графа T_0), которые имеют общую исходную вершину;

2) все узлы цепи могут с равной вероятностью оказаться этой единственной исходной вершиной.

В результате введенного упрощения латентность перераспределяется по цепи так, что изменениям локальной разреженности соответствуют противоположные изменения локальной латентности, т.е. влияния разреженности и латентности будут как бы компенсировать друг друга.

Для величины m_{cp} , значение которой следует выбором C_{Σ} и T_0 минимизировать, получим в этом случае выражение

$$m_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_G^{(i)}| \cdot m_{ni} + \sum_{i=1}^n m_{oi},$$

где m_{ni} и m_{oi} - числа мультипликативных операций, выполняемых соответственно при исключении узла x_i и при вычислении напряжения узла x_i на обратном ходу,

$|X_G^{(i)}|$ - мощность множества X_G^i непосредственно перед исключением x_i .

Этим здесь и ограничимся.

6. Примеры

Рассмотрим два примера, представленные на рисунках 1 и 2. Там изображены состоящие из дисторов цепи C (их изменения в процессе редукции указаны стрелками), соответствующие им разные, но D_{II} -минимальные (т.е. минимальные в смысле $|D_{II}|$) цепи редукции C_{II} и соответствующие последним (имеющие те же буквенные индексы) первичные цепи редукции C_I и базисные графы упорядочения T_0 .

Оба примера позволяют убедиться в том, что при повторном расчете цепи по предложенному алгоритму

1) D_{II} -минимальность цепи редукции не обеспечивает минимального значения m_{cp} ;

2) при обеспеченной D_{II} -минимальности, в случае увеличения степени разветвленности базисного графа упорядочения (цепи редукции и процесса однократного расчета цепи), значение m_{cp} уменьшается.

Что касается однократного полного расчета цепи, то пример 2 (рис. 2) показывает, что D_{II} -минимальность цепи редукции не гарантирует минимального числа необходимых мультипликативных операций, т.е. минимального

В заключение подчеркиваем отмеченную в п. 3 связь изложенного с теорией триангулированных графов, развитой в работе [8]. Если на рассмотреть параметры

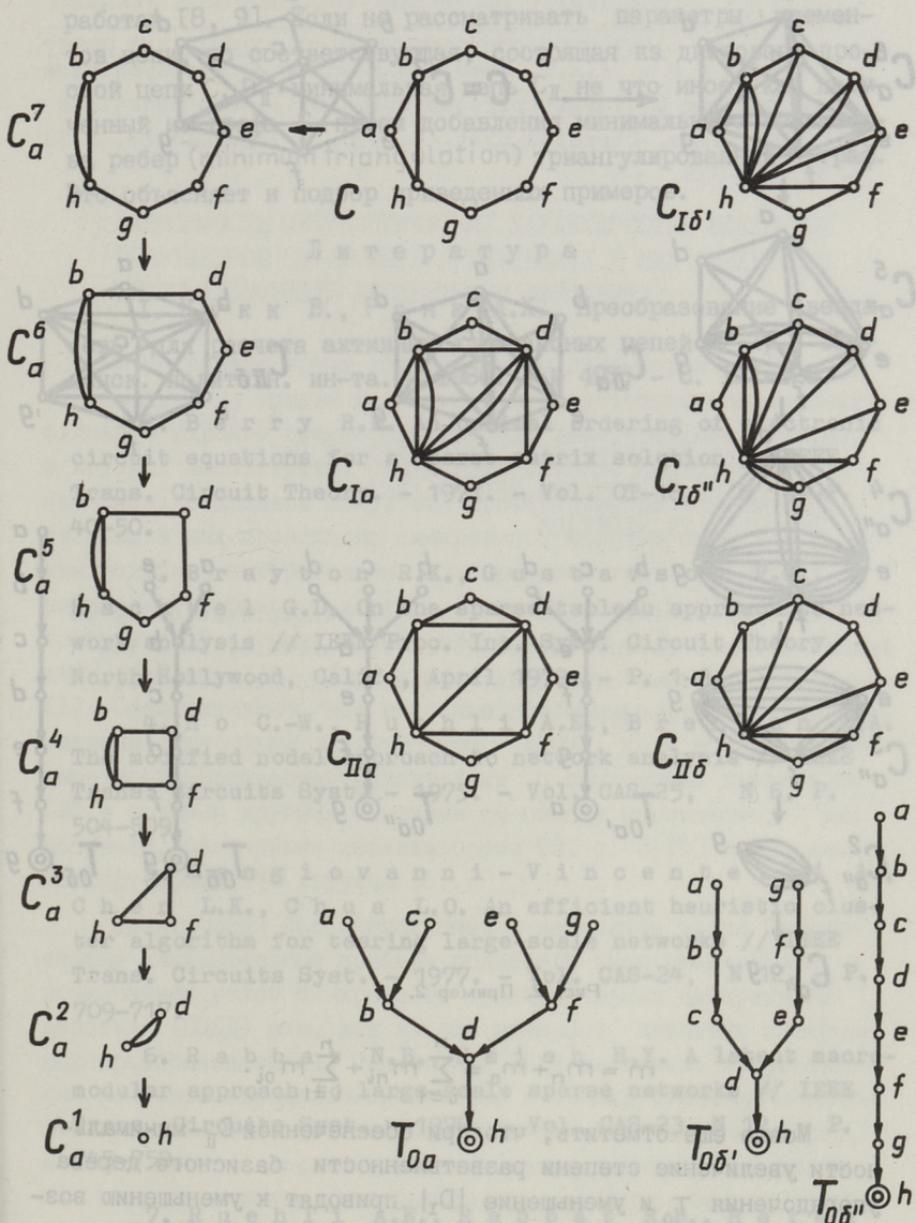


Рис. 1. Пример 1.

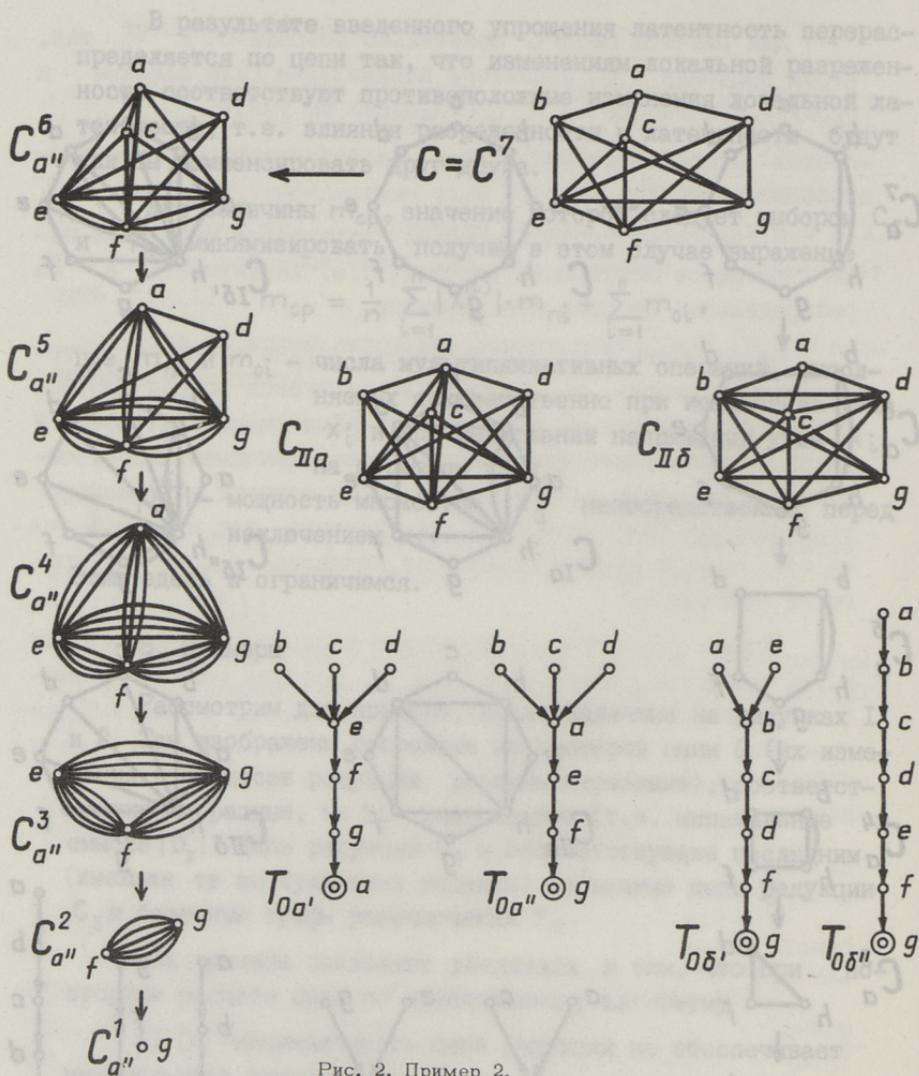


Рис. 2. Пример 2.

$$m = m_n + m_0 = \sum_{i=1}^n m_{ni} + \sum_{i=1}^n m_{oi}.$$

Можно еще отметить, что при обеспеченной D_{II} -минимальности увеличение степени разветвленности базисного дерева упорядочения T_0 и уменьшение $|D_I|$ приводят к уменьшению возможности появления и распространения в процессе расчета ошибок округления (так как уменьшают суммарное число вычислительных операций, необходимых для расчета на C_Σ и согласно T_C каждого узлового напряжения в отдельности).

В заключение подчеркиваем отмеченную в п. 3 связь изложенного с теорией триангулированных графов, развитой в работах [8, 9]. Если не рассматривать параметры элементов цепи, то соответствующая, состоящая из дисторов простой цепи C, D_{II} -минимальная цепь C_{II} не что иное, как полученный из графа C путем добавления минимального количества ребер (minimum triangulation) триангулированный граф. Это объясняет и подбор приведенных примеров.

Л и т е р а т у р а

1. К у к к В., Р о н к А.Х. Преобразование звезда-сетель для расчета активных адмитансных цепей // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1980. - № 497. - С. 121-128.

2. B e r g y R.D. An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution // IEEE Trans. Circuit Theory. - 1971. - Vol. CT-18, N 1.-P. 40-50.

3. B r a y t o n R.K., G u s t a v s o n F.G., H a c h t e l G.D. On the sparse tableau approach to network analysis // IEEE Proc. Int. Symp. Circuit Theory. - North Hollywood, Calif., April 1972. - P. 1-3.

4. H o C.-W., R u e h l i A.E., B r e n n a n P.A. The modified nodal approach to network analysis // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1975. - Vol. CAS-25, N 6. P. 504-509.

5. S a n g i o v a n n i - V i n c e n t e l l i A., C h e n L.K., C h u a L.O. An efficient heuristic cluster algorithm for tearing large-scale networks // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1977. - Vol. CAS-24, N 12. - P. 709-717.

6. R a b b a t N.B., H s i e h H.Y. A latent modular approach to large-scale sparse networks // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1976. - Vol. CAS-23, N 12. - P. 745-752.

7. R u e h l i A.E., R a b b a t R.B., H s i e h H.Y. Macromodelling - an approach for analysing large-scale circuits // Computer-Aided Design. - 1978. - Vol. 10, N 2. - P. 121-129.

8. R o s e D.J. Triangulated graphs and the elimination process // J. Math. Anal. Appl. - 1970. - Vol. 32. N 3. - P. 597-609.

9. J e s s J.A.G. Some new results on decomposition and pivoting of large sparse systems of linear equations // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1976. - Vol. CAS-23, N 12. - P. 729-738.

A. Ronk

Multiple Solution of Linear Circuit Using
Reduction Method and Strict Partial
Elimination Ordering

Abstract

The paper deals with problems of multiple solution of sparse but not latent admittant active circuit. Solution technique is based on reduction method and strict partial elimination ordering.

ЗАВИСИМОСТЬ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕКТОРНЫХ ВОЛЬТМЕТРОВ ОТ СВОЙСТВ ПРИМЕНЯЕМЫХ В НИХ СИНХРОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДИСКРЕТНОГО ДЕЙСТВИЯ

В настоящее время при измерении параметров слабых и сопровождаемых шумами и помехами низкочастотных переменных сигналов широкое применение находят измерительные приборы, в которых используется синхронный принцип преобразования сигналов. Благодаря тому, что преобразование измеряемого сигнала в них происходит синхронно с опорным сигналом U_0 , все подобные измерительные приборы позволяют измерить определенные параметры вектора \vec{U} измеряемой гармонической составляющей сигнала — либо его модуль U и/или фазу φ , либо синфазную U_c и/или квадратурную U_k ее составляющие [1]. Следовательно, все подобные приборы могут быть условно названы векторными вольтметрами (ВВМ), хотя конкретно они чаще всего называются усилителями с синхронным детектором [2] и разными другими близкими по смыслу названиями, как например, векторными анализаторами [3, с. 3-15] или даже векторметрами [4] (группа В5).

Практически все выпускаемые в настоящее время промышленные измерительные приборы подобного вида реализованы с применением узлов синхронного преобразования дискретного действия (СПДД) или, как их еще называют, ключевых синхронных преобразователей. Применение СПДД позволило изготовителям получить определенный выигрыш в конструктивном исполнении и в схемотехническом решении низкочастотных приборов, а также достичь довольно высоких показателей по определенным метрологическим характеристикам приборов, как например, по стабильности коэффициента преобразования [2].

Однако применение СПДД приносит определенные ограничения относительно некоторых других метрологических харак-

теристик. Содержанием настоящей статьи и является анализ зависимости таких метрологических характеристик ВВМ от свойств применяемых в них СПДД.

Метрологическими характеристиками ВВМ, которые в значительной мере зависят от свойств применяемых в ВВМ СПДД, считаем основную погрешность, погрешность в диапазоне рабочих частот и погрешность от помех. Эти показатели можно считать и основными метрологическими характеристиками ВВМ из числа характеристик, установленных вольтметрам стандартами [5, 6] и частными техническими требованиями.

Векторный вольтметр (ВВМ) в приведенном выше определении, как правило, может быть рассмотрен состоящим из следующих функциональных узлов: предусилитель ПУ, узел синхронного преобразования СП, фильтрующих усилителей постоянного тока ФУПТ и формирователя опорных сигналов ФОС (рис. 1). В большинстве ВВМ усиленный сигнал преобразуется СП в сигналы \hat{U}'_c и \hat{U}'_k , соответствующие составляющим U_c и U_k сигнала \dot{U} . Реже применяется решение с обратной связью, указанной на рис. 1 пунктирной линией, позволяющее измерить мо-

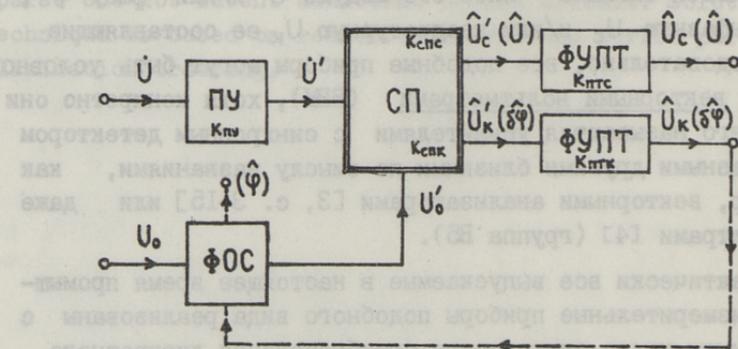


Рис. 1. Структурная схема типичного ВВМ.

дуль U и фазу φ сигнала \dot{U} (соответствующие величины на рис. 1 указаны в скобках). В некоторых видах ВВМ значение \hat{U} и $\hat{\varphi}$ получают из \hat{U}_c и \hat{U}_k посредством вычислительных средств [2].

Характерным для ВВМ является то, что в каждом последующем узле сигнального тракта происходит сужение полосы пропускания для сигнала, которая, как правило, содержит кроме

полезной измеряемой составляющей еще и другие гармоники сигнала, сетевые помехи, радиопомехи и шумовые составляющие. Степень подавления этих составляющих каждым узлом при конкретной измерительной обстановке бывает разной. В связи с этим возникает задача оптимального распределения коэффициента передачи между узлами, как при разработке ВЕМ, так и в ходе измерений при их помощи.

Узел СП является в функциональном смысле основным узлом ВЕМ и его свойства сказываются на большинстве из метрологических характеристик ВЕМ. Свойства узла СП во многом зависят от применяемого в нем принципа преобразования сигнала.

Свойства СПДД сильно зависят от их схемотехнического и конструктивного решения. Особенно это заметно в части верхнего предела рабочего диапазона частот, который может быть от десятков килогерц (у простейших СПДД на ОУ) до мегагерц у решений, направленных на расширение рабочего диапазона частот [7]. Однако целый ряд показателей у СПДД имеет более четко выраженное однообразие. Рассмотрим из них основные.

Коэффициент преобразования у большинства СПДД выбран значением в пределах 1...10, редко до 100 или выше. Его значение может быть установлено с погрешностью порядка 0,1 % [3, с. 49-62] и его стабильность в лабораторных условиях применения ВЕМ обычно того же порядка [2].

Смещение нуля выхода у СПДД прямого преобразования на низких рабочих частотах и при низких значениях коэффициента передачи типично имеет значение порядка милливольт, но начинает расти примерно с 10 кГц пропорционально частоте. При верхней границе бесперегрузочного функционирования, типично равном примерно 10 В, динамический диапазон СПДД по входу составляет около 80 дБ. Того же порядка обычно и смещение нуля от некогерентной помехи.

У СПДД с преобразованием смесительного типа эти показатели на несколько десятичных порядков лучше, но у них наблюдается чувствительность к побочным составляющим сигнала на комбинационных частотах [2]. Для удержания ее в допустимых для конкретного случая применения пределах разработчикам придется выдерживать определенные со-

отношения частоты преобразования и ширины полосы пропускания фильтров в тракте преобразования сигнала [3, с. 29-37].

Чувствительность СПДД к высшим нечетным гармоникам сравнительно высока у простейших ключевых СПДД [1]. У СПДД квазигармонического типа (с многоуровневой ступенчатой весовой функцией) теоретически чувствительность к ближайшим гармоникам отсутствует (например, до 10-го при трехуровневой аппроксимации), но практически удается снизить ее до значения порядка 0,1 % от чувствительности к основной гармонике. Это связано с неточностью реализации аппроксимации. Вопрос достаточности разреженности спектральной чувствительности таких СПДД - проблема сложная [3, с. 73-84]. При необходимости придется пользоваться преобразователями смешительного типа [2], однако потери в точности по фазе при этом неизбежны [7].

Зависимость метрологических характеристик ВЕМ от свойств применяемого в нем СПДД - сравнительно сложна. Однако, так как фазовые погрешности могут быть без особых допущений рассмотрены отдельно от погрешностей по амплитуде [3, с. 3-15], вопрос может быть рассмотрен несколько упрощенно, с присвоением фазовых погрешностей опорному каналу.

При таком упрощенном подходе определенные характеристики ВЕМ, например, погрешность от гармоник, могут быть рассмотрены полностью определенными соответствующими свойствами СПДД, например, его чувствительностью к гармоникам.

Основная погрешность ВЕМ образуется как сумма частных погрешностей ПУ, СП и ФУПТ, которые в свою очередь могут быть разделены на мультипликативные и аддитивные составляющие. Удельный вес составляющих погрешности в рабочем диапазоне частот и в диапазоне неинформативных составляющих сигнала может изменяться значительно. Обычно у приборов даны граничные значения этих составляющих погрешностей на одной рабочей частоте (на частоте калибровки) и значения их допустимого роста во всем рабочем диапазоне частот.

Без особой ошибки можно сказать, что погрешность на частоте калибровки состоит практически из мультипликативных составляющих погрешностей функциональных узлов, так как аддитивные составляющие при калибровке, как правило, хорошо скомпенсированы. Удельная доля функциональных узлов при

образовании основной погрешности у большинства современных ВЕМ примерно равна и может быть сравнительно мала, так что возможно достичь основной погрешности ВЕМ порядка 0,5 % [3, с. 3-15].

Частотная погрешность ВЕМ определяется в основном частотными свойствами ПУ и СП. Свойства ПУ сравнительно точно описываемы его передаточной функцией и вводимые им частотные погрешности могут быть в значительной мере скомпенсированы или учтены [7].

Частотные свойства СП имеют более сложный характер. Из двух основных причин частотных погрешностей СП - частотной зависимости импеданса весовых цепей и процесса переключения электронных ключей, обе вызывают частотнозависимую мультипликативную погрешность, описываемую частотной характеристикой, а вторая вызывает еще и аддитивную погрешность, значение которой также является частотнозависимым [3, с. 17-27]. Эта погрешность характеризуется через значение смещения нуля выхода или же через динамический диапазон СП по выходу $D_{\text{ВЫХ}}$ [2]. В последнем случае смещение нуля выхода $\delta U_{\text{ВЫХ}}$ может быть найдено через значение динамического резерва по выходу $R_{\text{ВЫХ}}$ и максимально допустимого выходного сигнала $U_{\text{ВЫХ}}^{\text{МАКС}}$ через формулу

$$\delta U_{\text{ВЫХ}}^{\text{ЧАСТ}} = \frac{R_{\text{ВЫХ}}}{D_{\text{ВЫХ}}} \cdot U_{\text{ВЫХ}}^{\text{МАКС}},$$

а соответствующая приведенная погрешность через формулу

$$\gamma_{\text{СП}}^{\text{ЧАСТ}} = \frac{\delta U_{\text{ВЫХ}}^{\text{ЧАСТ}}}{U_{\text{ВЫХП}}},$$

где $U_{\text{ВЫХП}}$ - значение выходного напряжения, соответствующее конечному (или номинальному) значению поддиапазона измерения.

Погрешность ВЕМ от некогерентных помех связана с появлением смещения выхода СП при воздействии сильных помех на его вход. Переменные составляющие сигнала при этом могут быть сравнительно легко подавлены (см. рис. 2). Появление смещения объясняется в основном детектированием помех из-за нелинейности ключевых элементов [2]. Со стороны помехоустойчивости СП характеризуется коэффициентом подавления помех

$$D_{\text{пом}} = \frac{\delta U_{\text{Вых}}^{\text{пом}}}{K_{\text{сп}} U_{\text{пом}}}$$

где $\delta U_{\text{Вых}}^{\text{пом}}$ - смещение выхода СП от воздействия помехи,
 $U_{\text{пом}}$ - напряжение помехи,
 $K_{\text{сп}}$ - коэффициент передачи СП.

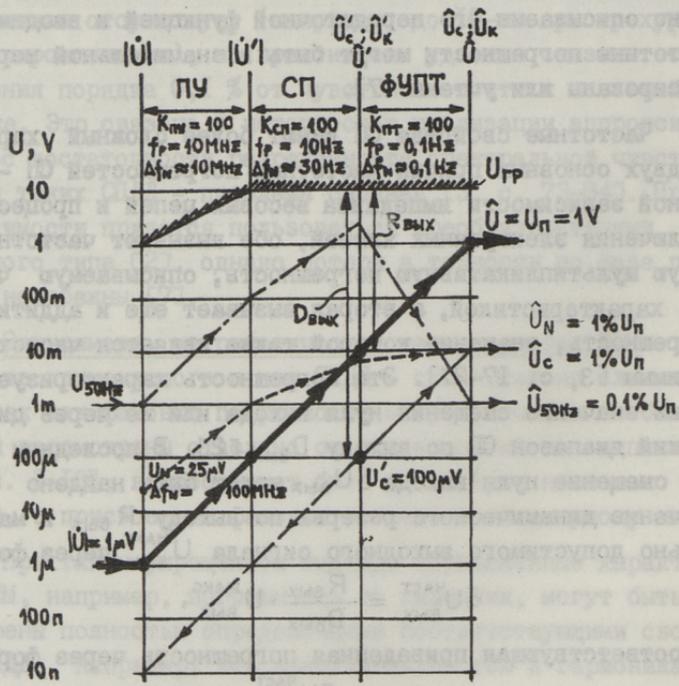


Рис. 2. Диаграмма уровней сигналов в ВВМ со структурой по рис. 1. Пример для случая $\dot{U} = 1 \mu\text{V}$, $U_n = 1\text{V}$, $K_{\text{пу}} = K_{\text{сп}} = K_{\text{пт}} = 100$:

- \dot{U}, U - измеряемое напряжение
- $U_{50\text{Hz}}$ - помеха, дающая биения с частотой 50
- U_N - напряжение шума
- U_n - напряжение, соответствующее номинальному значению поддиапазона
- U_c - напряжение смещения
- $U_{\text{ГР}}$ - граница безперегрузочного функционирования
- f_p - частота полюса
- Δf_N - эквивалентная шумовая полоса.

Зная значения $D_{\text{пом}}$, $K_{\text{сп}}$ и $U_{\text{пом}}$ нетрудно определить погрешность от помехи, поступая аналогично определению частотной погрешности.

К примеру рассмотрим образование погрешности ВВМ, основные функциональные узлы которого имеют показатели, приведенные на рис. 2.

Предположим, что сумма мультипликативных погрешностей последовательных звеньев не превышает 0,5%. Если при поддиапазоне $1 \mu V$ смещение нуля выхода СП не превышает $100 \mu V$, смещение выхода ВВМ не превышает 1% от U_n . Следовательно, суммарная погрешность не превышает 1,5% от U_n . К этому прибавляется случайная составляющая со среднеквадратичным значением, равном 1% от U_n , вызванная шумом предусилителя.

Предполагаем теперь, что в диапазоне рабочих частот смещение нуля выхода СП не превышает $2000 \mu V$, а сумма мультипликативных погрешностей звеньев не превышает 5%. Тогда суммарная детерминированная погрешность ВВМ не превышает 25%, а случайная составляющая погрешности остается равной 1% от U_n .

Предположим еще, что на вход поступает помеха с уровнем $1 mV$ (1000-кратная перегрузка по входу). При коэффициенте ослабления этой помехи в СП, равном 80 дБ, смещение нуля выхода СП от него не превышает $1000 \mu V$, чему соответствует дополнительная погрешность ВВМ, равная 10% от U_n .

В заключение можно сказать следующее:

Широкий динамический диапазон современных решений СПДД (до порядка 100 дБ) позволяет снизить уровень подаваемого на его вход сигнала и соответственно уменьшить коэффициент усиления ПУ. При этом уменьшаются частотные погрешности ВВМ (вызванные ПУ) или же появляется возможность расширить диапазон рабочих частот ВВМ. Можно считать достижимым расширение рабочего диапазона частот до $1 MHz$ на поддиапазоне измерения $1 \mu V$.

Основным источником погрешности измерения при мегагерцных рабочих частотах и на микровольтных поддиапазонах измерения является смещение нуля выхода СП, увеличивающееся с ростом рабочей частоты. Аддитивный характер вызванной смещением нуля погрешности ВВМ и наличие у приборов возможности компенсации смещения нуля перед измерением позволяют сказать, что погрешность ВВМ для режимов работы, при

которых появляется большая аддитивная погрешность, следует представлять в виде двухчленной формулы - в виде суммы мультипликативной и аддитивной составляющих. Это позволяет при необходимости учитывать компенсируемую при измерении аддитивную часть погрешности и тем самым увеличить точность проводимых при помощи ВЕМ измерений.

Л и т е р а т у р а

1. Д е х т я р е н к о П.И. Синхронное детектирование в измерительной технике и автоматике. - Киев, 1965. - 316 с.
2. М е а д е М.Л. Advances in lock-in amplifiers // Journal of Physics: Sci Instrum. - 1982. - Vol. 15, N 4, - P. 395-403.
3. Синхронные измерительные преобразователи. Теория, схемы и применения // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1984. - № 583. - 100 с.
4. ГОСТ 15094-69. Приборы электронные радиоизмерительные. Классификация, наименования и обозначения. - М., 1980, - 20 с.
5. ГОСТ 9781-78. Вольтметры электронные. Общие технические требования. Методы испытаний. - М., 1979. - 14 с.
6. ГОСТ 8.006-71. ГСИ. Вольтметры фазочувствительные. Методы и средства поверки. - М., 1976. - II с.
7. П а р в е Т.Э. Способы уменьшения погрешностей измерения параметров вектора синхронными преобразователями дискретного действия // Тр. Таллинск. политехн. ин-та, - 1985. - № 592. - С. III-II9.
8. М а е в с к и й С.М., Б а т у р е в и ч Е.К., П а в л о в В.Г. Корреляционные методы измерения фазовых сдвигов. - Киев, 1983. - 16 с.
9. М и н М. Фазовая автоподстройка координатных сигналов в векторных измерительных преобразователях // Тр. Таллинск. политехн. ин-та, - 1985. - № 592. - С. 103-110.

Dependence of the Metrological Characteristics
of the Vector Voltmeters on the Characteristics
of the Used Synchronous Transducers of Discrete
Operation

Abstract

The problem of the dependence of the metrological characteristics of the vector voltmeters such as accuracy, selectivity and others on analogical qualities of the synchronous transducers of discrete operation used in the voltmeters is discussed. Some quantitative estimations of these characteristics are also given.

Цель данной статьи является дать классификацию моделям подвижностей, опубликованным в литературе, а также сравнить их с разными экспериментальными результатами.

По возможности даются новые, более точные, коэффициенты для отдельных моделей. Отметим, что теоретически вопросы рассеивания довольно хорошо исследованы, но сущность многих механизмов и их взаимное влияние чрезвычайно сложное. Поэтому точное моделирование этих процессов является очень трудной задачей. Кроме того, при моделировании полупроводниковых структур требуются простые, но в то же время точные формулы, учитывающие разные механизмы рассеивания. Справедливо выражение: что хорошо известно — это еще не хорошо известно. Следовательно, для одной цели можно использовать одну модель, а для другой — иную. Например, при исследовании физических процессов в полупроводниковой структуре очень важно физически правильно и в то же время точно описывающие разные механизмы рассеивания, чтобы определить те механизмы, которые являются важными (определя-

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДВИЖНОСТЕЙ НОСИТЕЛЕЙ

I. Рассеивание на акустических фонах и на нейтральной и ионизированной примеси

При получении уравнения транспорта вводят время релаксации для электронов и дырок (τ_n, τ_p), которые определяют скорость изменения вектора момента для электронов и дырок соответственно. Следовательно, они описывают среднее время между актами рассеивания электронов и дырок. Но для характеристики рассеивания принято использовать понятие подвижности носителей. Как известно (см. например [1], электроны и дырки главным образом рассеиваются на термических вибрациях решетки, на ионизированной примеси, на нейтральной примеси, на вакансах, на дислокациях на поверхности и на других носителях.

Целью данной статьи является дать классификацию моделям подвижностей, опубликованным в литературе, а также сравнить их с разными экспериментальными результатами.

По возможности даются новые, более точные, коэффициенты для отдельных моделей. Отметим, что теоретически вопросы рассеивания довольно хорошо исследованы, но сущность многих механизмов и их взаимное влияние чрезвычайно сложное. Поэтому точное моделирование этих процессов является очень трудной задачей. Кроме того, при моделировании полупроводниковых структур требуются простые, но в то же время точные формулы, учитывающие разные механизмы рассеивания. Справедливо выражение: что хорошо физикам — это еще не хорошо инженерам. Следовательно, для одной цели можно использовать одну модель, а для другой — иную. Например, при исследовании физических процессов в полупроводниковой структуре очень важны физически правильные и в то же время точно описывающие разные механизмы рассеивания, чтобы определить те механизмы, которые являются важными (опреде-

ляющими) для данной структуры. С другой стороны, при комплексном моделировании (полупроводниковых приборов) и ИС на физическую основу можно обратить меньше внимания, т.е. рассеивание учитывается качественно, без точного описания физики процесса. Примером последнего являются попытки описать подвижность носителей в канале МДП транзистора с помощью полиномов [2].

Большое количество разных моделей дает инженерам возможность выбрать более подходящую модель и, таким образом, большие системы проектирования и испытания элементов РЭА должны содержать выбор по разным моделям. В дальнейшем рассматриваем модели разных механизмов рассеивания отдельно.

Рассеивание на вибрациях решетки, т.е. рассеивание на акустических фононах.

Для моделирования рассеивания на акустических фононах часто используют следующую очень простую формулу:

$$\mu_{\nu}^L = \mu_{\nu}^0 \left(\frac{T}{300} \right)^{-\alpha_{\nu}}, \quad (1)$$

где ν обозначает (n) электронов или (p) дырок.

Величины μ_{ν}^0 и α_{ν} приведены в таблице I (также рис. I).

В работе [23] предложена другая формула для температур от 4,2 до 600 К:

$$\mu_{\nu}^L = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{\nu}^1 \left(\frac{T}{300} \right)^{-\alpha_{\nu}^1} + \frac{1}{\mu_{\nu}^2 \left(\frac{T}{300} \right)^{-\alpha_{\nu}^2}}}, \quad (2)$$

где $\mu_n^1 = 4195 \text{ см}^2/\text{Вс}$; $\mu_n^2 = 2153 \text{ см}^2/\text{Вс}$; $\mu_p^1 = 2502 \text{ см}^2/\text{Вс}$;

$\mu_p^2 = 591 \text{ см}^2/\text{Вс}$; $\alpha_{n,p}^1 = 1,5$; $\alpha_n^2 = 3,13$; $\alpha_p^2 = 3,25$.

Данная модель учитывает рассеивание на акустических колебаниях, а также рассеивание на оптических и междолинных фононах по закону Маттисена. Используя вышеуказанную методику, можно получить и более развитую модель, но это не оправдывается, так как требуется дополнительная работа для подготовки такой модели в программе моделирования.

Рассеивание на ионах примеси — процесс, зависящий главным образом от концентрации примеси и температуры. Первая теоретическая модель опубликована в работе [24]

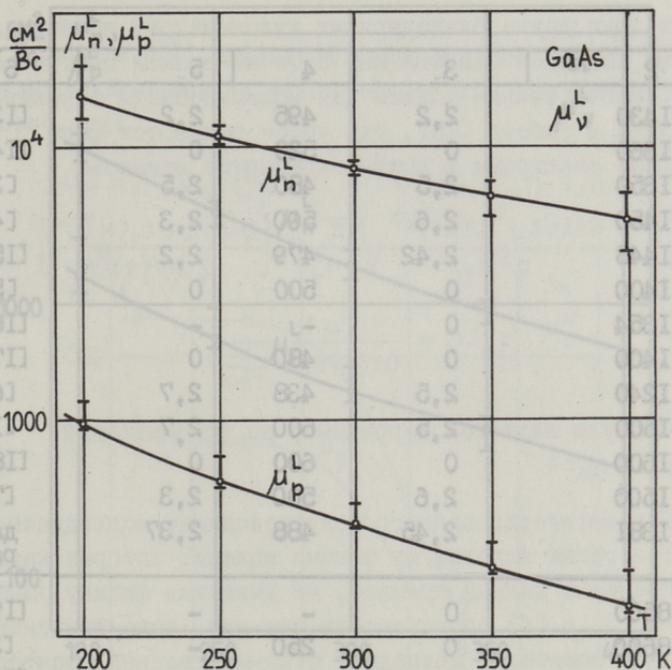


Рис. 1. Зависимость подвижности от температуры
а) для Ge.

Таблица I

Материал	μ_n [см ² /Вс]	α_n	μ_p^0 [см ² /Вс]	α_p	Источник
I	2	3	4	5	6
Ge	3800	0	1900	0	[3]
	3900	1,66	1800	2,33	[4]
	3900	0	1800	0	[5]
	2694	1,6	1818	1,3	[6]
	3900	1,66	1900	2,33	[I]
	3800	1,66	1820	2,33	[7]
	3667	1,645	1840	2,07	данная работа
Si	1388,157	0	467,729	0	[8]
	1448	2,33	473	2,23	[9]
	1438	2,42	465	2,2	[10]
	1330	0	495	0	[11]
	1407,3	0	467,729	0	[12]

I	2	3	4	5	6
I430		2,2	495	2,2	[13]
I360		0	520	0	[14]
I350		2,5	480	2,5	[3]
I450		2,6	500	2,3	[4]
I448		2,42	479	2,2	[15]
I400		0	500	0	[5]
I354		0	-	-	[16]
I400		0	480	0	[17]
I240		2,5	438	2,7	[6]
I500		2,5	600	2,7	[1]
I600		0	600	0	[18]
I500		2,6	500	2,3	[7]
I381		2,45	488	2,37	данная работа
<hr/>					
GaAs	8500	0	-	-	[19]
	8600	0	250	-	[3]
	7500	0	-	-	[20]
	8500	1	400	2,1	[1]
	9000	1	500	2,1	[7]
	8000	2,3	400	2,5	[21]
	8400	1,5	390	2,2	данная работа
<hr/>					
InP	4500	0	150	0	[22]
<hr/>					
GaP	8500	0	435	0	[22]

$$\mu_I = \frac{64 \cdot \epsilon \epsilon_0^2 (2kT)^{3/2}}{q^3 N_I} \sqrt{\frac{\pi}{m^*}} g_{cw} \left(\frac{12 \pi \epsilon \epsilon_0 kT}{q^2 N_I^{1/3}} \right), \quad (3)$$

где

$$g_{cw}(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)} \quad \text{и} \quad N_I = \sum_{i=1}^n |z_i| N_i.$$

Формула (3) показывает обратную пропорциональность концентрации на маленьких и средних концентрациях примеси и получает более резкую зависимость при больших концентрациях ($\sim N_I^{-1/3}$). Функция $g_{cw}(x)$ моделирует влияние соседних ионизированных примесных атомов, которые экра-

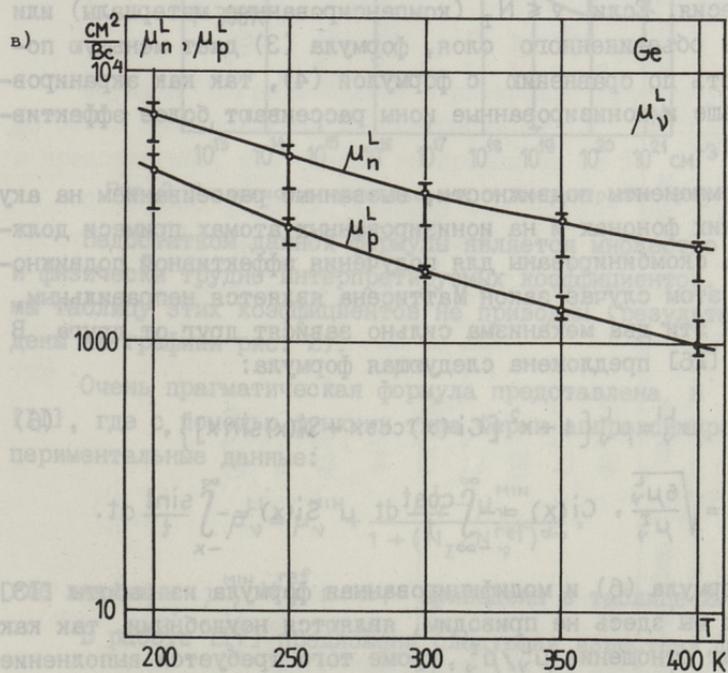
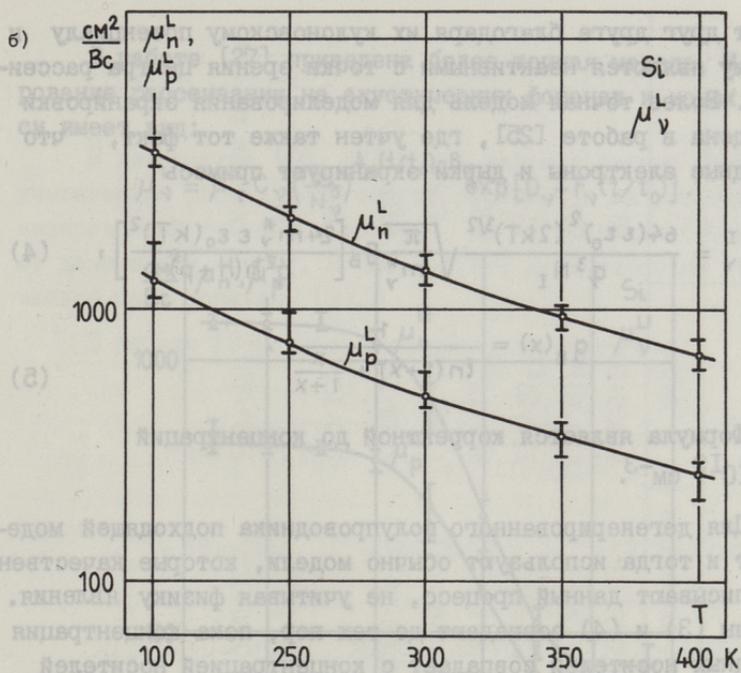


Рис. 1. Зависимость подвижности от температуры
б) для Si, в) для GeAs.

нируют друг друга благодаря их кулоновскому потенциалу и поэтому являются неактивными с точки зрения центра рассеивания. Более точная модель для моделирования экранировки приведена в работе [25], где учтен также тот факт, что свободные электроны и дырки экранируют примесь

$$\mu_{\nu}^{\text{I}} = \frac{64(\epsilon \epsilon_0)^2 (2kT)^{3/2}}{q^3 N_{\text{I}}} \sqrt{\frac{\pi}{m_{\nu}^*}} g_{\text{B}} \left[\frac{24 m_{\nu}^* \epsilon \epsilon_0 (kT)^2}{q^2 \hbar (n+p)} \right], \quad (4)$$

где

$$g_{\text{B}}(x) = \frac{1}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}. \quad (5)$$

Формула является корректной до концентраций $N_{\text{I}} \leq 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

Для дегенерированного полупроводника подходящей модели нет и тогда используют обычно модели, которые качественно описывают данный процесс, не учитывая физику явления. Формулы (3) и (4) совпадают до тех пор, пока концентрация свободных носителей совпадает с концентрацией носителей равновесия. Если $\nu \leq N_{\text{I}}$ (компенсированные материалы) или область объединенного слоя, формула (3) дает меньшую подвижность по сравнению с формулой (4), так как экранировка меньше и ионизированные ионы рассеивают более эффективно [26].

Компоненты подвижности, вызванные рассеиванием на акустических фононах и на ионизированных атомах примеси должны быть скомбинированы для получения эффективной подвижности. В этом случае закон Маттисена является неправильным, так как эти два механизма сильно зависят друг от друга. В работе [26] предложена следующая формула:

$$\mu_{\nu}^{\text{L}} = \mu_{\nu}^{\text{L}} \{ 1 + x^2 [\text{Ci}(x) \cos x + \text{Si}(x) \sin x] \}, \quad (6)$$

где
$$x = \sqrt{\frac{6\mu_{\nu}^{\text{L}}}{\mu_{\nu}^{\text{I}}}}, \quad \text{Ci}(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad \text{и} \quad \text{Si}(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Формула (6) и модифицированная формула из работы [13], которую мы здесь не приводим, являются неудобными, так как содержат отношение $\mu_{\nu}^{\text{L}}/\mu_{\nu}^{\text{I}}$, кроме того требуется выполнение условия $\mu_{\nu}^{\text{L}} < 1,35 \mu_{\nu}^{\text{I}}$, что также уменьшает универсальность данных формул.

В работе [27] приведена более точная модель. Моделирование рассеивания на акустических фононах и ионах примеси имеет вид:

$$\mu_{\nu}^{\text{Li}} = \mu_{\nu}^{\circ} C_{\nu} \left(\frac{N}{N_{\nu}^{\circ}} \right)^{A_{\nu}(t/t_0) - B_{\nu}} \exp [D_{\nu} - F_{\nu}(t/t_0)]. \quad (7)$$

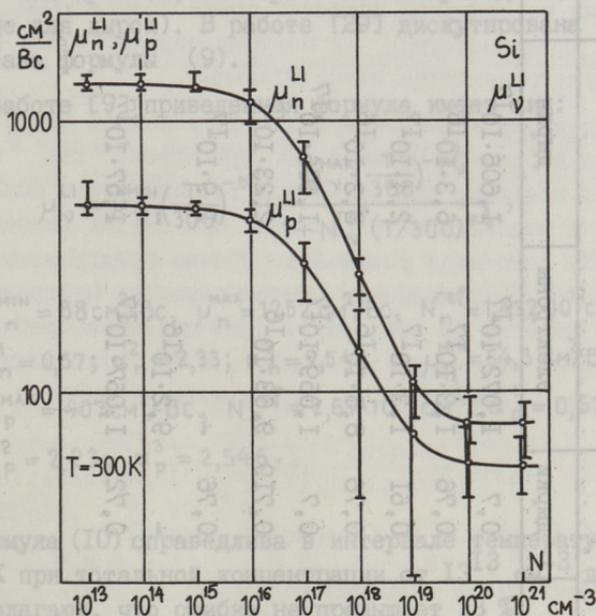


Рис. 2. Зависимость подвижностей от концентрации примеси.

Недостатком данной формулы является множество разных и физически трудно интерпретируемых коэффициентов. Поэтому мы таблицу этих коэффициентов не приводим (результаты введены на графики рис. 2).

Очень прагматическая формула представлена в работе [11], где с помощью функции типа Ферми аппроксимированы экспериментальные данные:

$$\mu_{\nu}^{\text{Li}} = \mu_{\nu}^{\text{MIN}} + \frac{\mu_{\nu}^{\text{L}} - \mu_{\nu}^{\text{MIN}}}{1 + (N_{\text{I}}/N_{\nu}^{\text{ref}})^{\alpha_{\nu}}}, \quad (8)$$

где величины μ_{ν}^{MIN} , N_{ν}^{ref} и α_{ν} приведены в таблице 2.

В работе [17] предложена следующая известная формула

$$\mu_{\nu}^{\text{Li}} = \frac{\mu_{\nu}^{\text{L}}}{\sqrt{1 + N_{\text{I}}/(N_{\nu}^{\text{ref}} + N_{\text{I}}/S_{\nu})}}, \quad (9)$$

Таблица 2

$\mu_{\gamma}^{\text{MIN}}$ [см ² /Вс]		α_{γ}		N_{γ}^{ref} [см ⁻³]		Источник
электроны	дырки	электроны	дырки	электроны	дырки	
55,24	49,705	0,733	0,7	$1,072 \cdot 10^{17}$	$1,606 \cdot 10^{17}$	[8]
92	47,7	0,91	0,76	$1,3 \cdot 10^{17}$	$6,3 \cdot 10^{16}$	[11]
92	65	0,91	0,61	$1,3 \cdot 10^{17}$	$2,4 \cdot 10^{17}$	[14]
65	47,7	0,72	0,76	$8,5 \cdot 10^{16}$	$6,3 \cdot 10^{16}$	[30]
71,12	49,705	0,7291	0,7	$1,059 \cdot 10^{17}$	$1,606 \cdot 10^{17}$	[12]
52,2	44,9	0,68	0,719	$9,68 \cdot 10^{16}$	$2,23 \cdot 10^{17}$	[31] (As)
-	47,7	-	0,76	-	$1,9 \cdot 10^{17}$	[28]
68,5	-	0,711	-	$9,2 \cdot 10^{16}$	-	[31] (P)
70,87	50,34	0,77	0,72	$1,067 \cdot 10^{17}$	$1,57 \cdot 10^{17}$	данная работа

где $N_n^{\text{ref}} = 3 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$; $S_n = 350$; $N_p^{\text{ref}} = 4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и $S_p = 81$.

В литературе [16, 28] можно найти и разные формулы, учитывающие рассеивание только электронов на решетке и ионизированной примеси, которые мы не приводим (отсутствуют данные для дырок). В работе [29] дискутирована теоретическая база формулы (9).

В работе [9] приведенная формула имеет вид:

$$\mu_{\nu}^{\text{LI}} = \mu_{\nu}^{\text{MIN}} \left(\frac{T}{300} \right)^{-\alpha_{\nu}^1} + \frac{\mu_{\nu}^{\text{MAX}} \left(\frac{T}{300} \right)^{-\alpha_{\nu}^2}}{1 + N_{\nu}^{\text{ref}} \left(\frac{T}{300} \right)^{\alpha_{\nu}^3}}, \quad (10)$$

где $\mu_n^{\text{MIN}} = 88 \text{ см}^2/\text{Вс}$, $\mu_n^{\text{MAX}} = 1252 \text{ см}^2/\text{Вс}$, $N_n^{\text{ref}} = 1,432 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$;
 $\alpha_n^1 = 0,57$; $\alpha_n^2 = 2,33$; $\alpha_n^3 = 2,546$ и $\mu_p^{\text{MIN}} = 54,3 \text{ см}^2/\text{Вс}$;
 $\mu_p^{\text{MAX}} = 407 \text{ см}^2/\text{Вс}$, $N_p^{\text{ref}} = 2,67 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $\alpha_p^1 = 0,57$;
 $\alpha_p^2 = 2,23$; $\alpha_p^3 = 2,546$.

Формула (10) справедлива в интервале температур от 250 до 500 К при тотальной концентрации от 13^{13} см^{-3} до 10^{20} см^{-3} и предполагают, что ошибка не превышает 13 %.

Последняя формула, которая комбинирует рассеивание на решетке и ионах предложена в работе [23]

$$\mu_{\nu}^{\text{LI}} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{\nu}^{\text{L}}} + \frac{1}{\mu_{\nu}^{\text{I}}}}, \quad (11)$$

где

$$\mu_{\nu}^{\text{I}} = \mu_{\nu}^{\text{O}} \left[1 + \frac{N_{\nu}^{\text{ref}}}{N_{\text{I}}} \left(\frac{T}{300} \right) \right] \quad (12)$$

и $\mu_n^{\text{O}} = 90 \text{ см}^2/\text{Вс}$, $N_n^{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; $\mu_p^{\text{O}} = 45 \text{ см}^2/\text{Вс}$;
 $N_p^{\text{ref}} = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

Формула действительна в пределах концентрации от 10^{11} до 10^{20} см^{-3} . Отметим, что обычно не отличают рассеивания основных или неосновных носителей на ионизированных атомах примеси. При высоких концентрациях, как показано в работе [32], ошибка может быть значительной.

Для GaAs отдельной модели при определении рассеивания на ионизированных атомах не существует. Причиной является то, что нет особенной нужды к таким моделям (также InP и GaP). Для Ge модели кремния являются совсем подходящими, надо только изменить постоянные в формулах. Отметим также, что в настоящее время очень мало занимаются с приборами из германия, исключив очень специальные силовые приборы (транзисторы), и поэтому моделирование германиевых структур является незначительным.

Следующим механизмом является механизм рассеивания на атомах нейтральной примеси. Данный эффект, как известно, является неважным при комнатной температуре и может быть неучтен в моделях, но в расчетах при низких температурах ($T < 77\text{K}$) его надо учитывать. Обычно предполагают, что подвижность, определяемая рассеиванием на нейтральной примеси, не зависит от температуры, но последние работы [33] показывают некоторую зависимость в пределах температуры окружающей среды меньше 50 К. Формула имеет вид:

$$\mu_{\nu}^N = \frac{0,41 q m_{\nu}^*}{a_B \hbar m_0 \epsilon \epsilon_0 N_N} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{kT}{E_{\nu}^N}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{E_{\nu}^N}{kT}} \right), \quad (13)$$

где $a_B = 5,29177 \cdot 10^{-11}$ м (боровский радиус),

$$E_{\nu}^N = 0,71 (m_{\nu}^*/m_0) \epsilon^{-2},$$

N_N - концентрация нейтральной примеси.

Результирующая подвижность определяется по закону Маттисена.

Таким образом рассмотрены три главных механизма рассеивания носителей. Даны новые, более точные коэффициенты для разных моделей. Результаты расчетов показаны на рис. 1, 2, а также в таблицах 1 и 2.

Л и т е р а т у р а

1. Зи С.М. Физика полупроводниковых приборов. - М.: Энергия, 1973.

2. Doganis K., Scharfetter D.L. General optimization and extraction of IC device model parameters // IEEE Trans. El. Dev. - 1983. - ED-30. - P. 1219-1228.

3. Grove A.S. Physic and technology of semiconductor devices. - N.Y.: J. Wiley & Sons, 1967.
4. Heywang W., Pötzl H.W. Bandstruktur und Stromtransport. - Heidelberg: Springer, 1976.
5. Paul R. Halbleiterphysik. - Heidelberg: Hüthig-Verlag, 1975.
6. Smith R.A. Semiconductors. - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.
7. Weast R.C., Astle M.J., CRC handbook of chemistry and physics. - Boca Raton, Florida: CRC Press, 1981.
8. Antoniadis D.A., Conzales A.G., Dutton R.W. Boron in near-intrinsic 100 and 111 silicon under inert and oxidation ambients // J. Electrochem. Soc. - 1978. - Vol. 125. - P. 813-819.
9. Arora N.D., Hauser J.R., Roulston D.J. Electron and hole mobilities in silicon as a function of concentration and temperature // IEEE Trans. El. Dev. - 1982. - ED-29. - P. 292-295.
10. Canali C., Majni G., Minder R., Ottaviani G. Electron and hole drift velocity measurements in silicon and their empirical relation to electric field and temperature // IEEE Trans. El. Dev. - 1975. - ED-22. - P. 1045-1047.
11. Gaughey D.M., Thomas R.E. Carrier mobilities in silicon empirically related to doping and field // Proc. IEEE. - 1967. - Vol. 52.-P. 2192-2193.
12. D'Avanzo D.C., Vanzani M., Dutton R.W. One-dimensional semiconductor analysis (SEDAN). - Stanford: Stanford Univ. Rep., G201-5, 1979.
13. Dorkel J.M., Leturcq Ph. Carrier mobilities in silicon semi-empirically related to temperature, doping and injection level // Solid-St. Electron. - 1981. - Vol. 24. - P. 821-825.
14. Engl W.L., Dirks H. Models of physical parameters // Introduction to the numerical analysis of se-

micronductor devices and integrated circuits. - Dublin: Boole Press, 1981. - P. 42-46.

15. J a c o b o n i C., C a n a l i C., O t t a v i a n i G., Q u a r a n t o A. A review of some charge transport properties of silicon // Solid-St. Electron. - 1977. - Vol. 20. - P. 77-89.

16. R o u l s t o n D.J., A r o r a N.D., C h a m b e r l a i n S.G. Modeling and measurement of mobility carrier lifetime versus doping in diffused layers of n+p silicon diodes // IEEE Trans. El. Dev. - 1982. - ED-29. - P. 284-291.

17. S c h a r f e t t e r D.L., G u m m e l H.K. Large-signal analysis of a silicon read diode oscillator // IEEE Trans. El. Dev. - 1969. - ED-16. - P. 64-77.

18. Y a m a g u c h i H. Field-dependent mobility model for two-dimensional numerical analysis of MOSFET's // IEEE Trans. El. Dev. - 1979. - ED-26. - P. 1068-1074.

19. A l l e y G.D. High voltage two-dimensional simulation permeable. Base transistors // IEEE Trans. El. Dev. - 1983. - ED-30. - P. 52-60.

20. N e w m a n D.S., F e r r y D.K., S i t e s J.R. Measurement and simulation of GaAs FET's under electron beam irradiation // IEEE Trans. El. Dev. - 1983. - ED-30. - P. 849-855.

21. M e y e r J.R., K r u e r M.R., B a r t o l i F., J. Optical heating in semiconductors: Laser damage in Ge, Si, InSb and GaAs // J. Appl. Phys. - 1980. - Vol. 51. - P. 5513-5522.

22. Б а р а н с к и й П.Т., К л о ч к о в В.П., П о т ы к е в и ч И.В. Полупроводниковая электроника: Справочник. - Киев; Наукова Думка, 1975.

23. S a h C.T., C h a n P.C.H., W a n g C-K., S a k R.L.J., Y a m a k a w a K.A., L u t w a c k R. Effect of zink impurity in silicon solar cell efficiency // IEEE Trans. El. Dev. - 1981. - ED-28. - P. 304-313.

24. C o n w e l l E.M., W e i s s k o p l V.F. Theory of impurity scattering in semiconductors // Phys. Rev. - 1950. - P. 338-390.

25. Brooks H. Scattering by ionized impurities in semiconductors // Phys. Rev. - 1951. - Vol. 83. - P. 879-883.
26. Debye P.P., Conwell E.M. Electrical properties of n-type germanium // Phys. Rev. - 1954. - Vol. 93. - P. 693-706.
27. Панг Т., Велмре Э. Зависимость подвижности электронов и дырок от температуры и концентрации примеси в кремнии // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. - 1977. - № 43 - С. 115-120.
28. Plunkett J.C., Stone J.L., Leu A. A computer algorithm for accurate and repeatable profile analysis using anodization and stripping of silicon // Solid-St. Electron. - 1977. - Vol. 20. - P. 447-453.
29. Thornmer K.K. Relation of drift velocity to low-field mobility and high-field saturation velocity // J. Appl. Phys. - 1980. - Vol. 51. - P. 2127-2136.
30. Heimeier H.H. Zweidimensionale numerische Lösung eines nichtlinearen Randwertproblems am Beispiel des Transistors im Stationären Zustand. Dissertation. - TU, Aachen, 1973.
31. Masetti G., Severi M., Solmi S. Modeling of carrier mobility against carrier concentration in arsenic-phosphorus- and boron doped silicon // IEEE Trans. El. Dev. - 1983. - ED-30. - P. 764-769.
32. Bennett H.S. Improved concepts for predicting the electrical behaviour of bipolar structures in silicon // IEEE Trans. El. Dev. - 1983. - ED-30. - P. 920-927.
33. Li S.S., Thorber W.R. The dopant and temperature dependence of electron mobility and resistivity in n-type silicon // Solid-St. Electron. - 1977. - Vol. 20. - P. 609-616.

T. Rang

The Modeling of Carrier Mobilities I

Scattering on Acoustic Phonons and on Neutral
and Ionized Impurity

Abstract

An overview of different models is given. More precise coefficients for different carrier mobility models are found.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДВИЖНОСТЕЙ НОСИТЕЛЕЙ

II. Рассеивание на носителях и поверхности,
эффект насыщения дрейфовой скорости носителей

В первой части были рассмотрены некоторые механизмы рассеивания. В этой части мы остановимся на следующих механизмах рассеивания.

Сперва остановимся на механизме рассеивания на носителях. Особенно важным является этот механизм в силовых полупроводниковых приборах, особенно во включенном состоянии, когда концентрация носителей может превышать концентрацию примеси, т.е. структура работает на уровне высокой инжекции.

Очень простое приближение для учета рассеивания на носителях предложено в работе [1], где использованы результаты работы [2] (формула (8) из I части), но введена эффективная концентрация примеси, определяемая следующим образом:

$$N_I^{\text{eff}} = 0,34 N_I + 0,66 (n+p). \quad (1)$$

Формула, учитывающая также рассеивания на акустических фононах и ионизированных атомах примеси имеет вид [3]

$$\mu_v^{\text{LIC}} = \mu_v^{\text{MIN}} + \frac{\mu_v^{\text{L}} - \mu_v^{\text{MIN}}}{1 + \left(\frac{N_I}{N_v^{\text{ref}}}\right)^{\alpha_v} + \left(\frac{\sqrt{np}}{14 N_v^{\text{ref}}}\right)^{\alpha_v}}. \quad (2)$$

В работе [4] предложено более корректное приближение:

$$\mu_c = \frac{A_1}{\sqrt{np} \ln[1 + R (np)^{-1/3}]}, \quad (3)$$

где

$$A_1 = 1,428 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-1} \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1} \text{ и } R_0 = 4,54 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}.$$

Результирующая подвижность получается с помощью суммирования формул (7) (из I части) и (3) данной части по закону Маттисена. С учетом температуры формула (3) принимает по данным работы [5] следующий вид:

$$\mu^c = \frac{A_0(T/300)^{3/2}}{\sqrt{n_p} \ln [1 + \rho(T/300)^2(n_p)^{-1/3}]}, \quad (4)$$

где $A_0 = 1,04 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-1} \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$ и $\rho = 7,45 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$.

После этого уравнение (4) комбинируем с компонентом подвижности μ_{ν}^I по формуле (5), получая μ_{ν}^{IC} с помощью закона Маттисена, и результат используется в формуле (6) на месте μ_{ν}^I для получения μ_{ν}^{LIC} ,

$$\mu_{\nu}^I = \frac{A_{\nu}^{\text{ref}}(T/300)^{3/2}}{N_I} g_b \left[\frac{N_{\nu}^{\text{ref}}(T/300)^2}{n+p} \right], \quad (5)$$

где $A_n^{\text{ref}} = 2,4 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-1} \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, $A_p = 5,2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-1} \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$,

$$N_n^{\text{ref}} = 1,37 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}, N_p^{\text{ref}} = 5,63 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} \text{ и } g_b$$

определяется по формуле (5) из первой части данной работы. Подвижность μ_{ν}^{LIC} определяется по формуле (5):

$$\mu_{\nu}^{LIC} = \mu_{\nu}^L \left[\frac{1,025}{1 + \left(2,126 \frac{\mu_{\nu}^L}{\mu_{\nu}^{IC}} \right)^{0,715}} - 0,025 \right]. \quad (6)$$

В работе [6] исследованы процессы рассеивания на носителях в режиме низкой инжекции для некомпенсированного кремния, где концентрация свободных носителей равна концентрации примеси. Предполагается подход, где оба механизма рассеивания, т.е. рассеивание на акустических фононах и на ионизированной примеси умножается т.н. фактором рассеивания

$$\mu_{\nu}^{LC} = \mu_{\nu}^L \min \left[\max \left(0,88; 1,0133 - \frac{N_I}{N_{\text{eff}}^1} \right), 1 \right], \quad (7)$$

$$\mu_{\nu}^{IC} = \mu_{\nu}^I \min \left[\max \left(0,62; 1,0409 - \frac{N_I}{N_{\text{eff}}^2} \right), 1 \right], \quad (8)$$

где $N_{\text{eff}}^1 = 1,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ и $N_{\text{eff}}^2 = 4,89 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

Эффективная подвижность получается при использовании формулы (6) из I части данной работы. Отметим, что вышеприведенное рассуждение ограничивается условием низкой инжекции, где влияние рассеивания на носителях является относительно малым. Следовательно, уравнения (7) и (8) не имеют особенного практического значения.

Все вышесказанное образуется на традиционном подходе, где предполагается применимость соотношения Эйнштейна. Более точный учет механизма электронно-дырочного рассеивания возможен на основе уравнений плотностей токов, выведенных из т.н. феноменологических уравнений движения электронов и дырок, представленных в работе [7]. Характерно, что в уравнениях плотности токов, полученных таким способом, диффузионные составляющие зависят одновременно от градиента концентрации носителей обоих типов, а подвижности и коэффициенты диффузии, в общем случае, не связаны с помощью соотношения Эйнштейна.

Для приближенного учета эффекта рассеивания носителей на носителях наиболее часто используется подход Флечера [8], в соответствии с которым подвижности суммируются по закону Маттисена.

На базе результатов работы [9] можно показать, что подвижности $\mu_{n,p}^c$ обозначают подвижность электронов, обусловленную только рассеиванием электронов на дырках, $\mu_{p,n}^c$ обозначает подвижность дырок, обусловленную только рассеиванием дырок на электронах при отсутствии других механизмов рассеивания, имеющую вид:

$$\mu_{n,p}^c = \frac{1}{p J^{eh}}; \quad \mu_{p,n}^c = \frac{1}{n J^{eh}}, \quad (9)$$

где функция J^{eh} учитывает электронно-дырочное рассеивание и находится из решения кинетического уравнения Больцмана.

Как показано в [9] точное определение величины J^{eh} связано с большими вычислительными трудностями. Однако для приближенного описания зависимости J^{eh} от концентрации электронов и дырок, а также от температуры можно использовать различные аппроксимации подвижности $\mu_{np, pn}^c$,

известные из литературы. В работе [10] указывается, что наилучшее совпадение с экспериментом дает аппроксимация Флечера [8], из которой для J^{eh} получается следующее выражение:

$$J^{eh} = AT^{-3/2} \ln [1 + 5 \cdot 10^6 T^2 (np)^{-1/3}], \quad (10)$$

где

$$A = 2,6 \cdot 10^{17} \text{ см}^2/\text{Вс}.$$

Для более точного учета электронно-дырочного рассеивания необходимо модифицировать уравнения плотностей токов. Для нулевого приближения теории Мейера [9] получаем формулу подвижности для рассеивания на носителях, которая справедлива для модифицированных выражений токов.

$$\mu_{\nu}^c = \mu_{\nu 0}^{LI} \frac{1 \mp (n-p) \mu_{po}^{LI} J^{eh}}{1 + (p \mu_{no}^{LI} + n \mu_{po}^{LI}) J^{eh}}. \quad (11)$$

Результаты расчетов показаны на рис. 1.

Следующий эффект, на котором мы остановимся - это насыщение дрейфовой скорости носителей на высоких величинах напряженности электрического поля, так как эффективная подвижность уменьшается из-за этого эффекта:

$$\vec{v}_{\nu} = \pm \mu_{\nu} \frac{\vec{E} J_{\nu}}{|J_{\nu}|}. \quad (12)$$

Вышеприведенное выражение справедливо для маленьких диффузионных токов. Очевидно, более подходящими являются формулы, использующие Квази-Ферми потенциал:

$$|\vec{v}_{\nu}| = \mu_{\nu}^* |\text{grad } \varphi_{\nu}|. \quad (13)$$

Направление градиента Квази-Ферми потенциала совпадает с направлением соответствующих плотностей токов. Иногда может возникнуть нетривиальная проблема, когда внутреннее произведение электрического поля и плотности тока является положительным (уравнение (12) со знаком "+") или отрицательным (уравнение (12) со знаком "-"). Такая ситуация может локально возникнуть в структуре, когда компонент диффузионного тока превалирует над компонентом дрейфового тока. Как показывает анализ, практически равным для расчетов является \vec{E} и φ_{ν} . В дальнейшем используем E_{ν} для обозначения модуля управляющих сил для носителей.

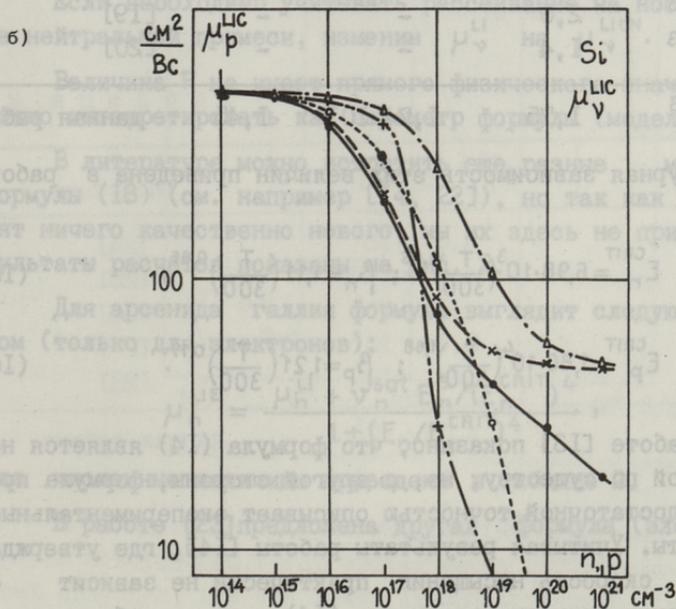
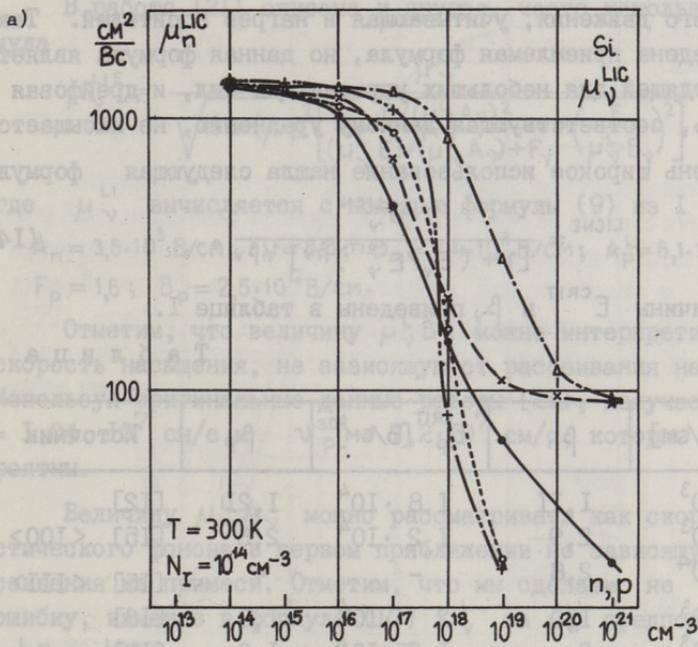


Рис. 1. Зависимости подвижности от концентрации носителей (рассеивание на носителях), а) - электроны, б) дырки.

В работе [11] теоретически исследована подвижность дрейфового движения, учитывающая и нагрев носителей. Также приведена приемлемая формула, но данная формула является подходящей для небольших управляющих сил, и дрейфовая скорость, соответствующая данному уравнению, не насыщается.

Очень широкое использование нашла следующая формула

$$\mu_{\nu}^{\text{LICNE}} = \frac{\mu_{\nu}^{\text{LICN}}}{[1 + (E_{\nu} \sqrt{E_{\nu}^{\text{CRIT}}})^{\beta_{\nu}}]^{\nu/\beta_{\nu}}}, \quad (14)$$

где величины E^{CRIT} и β_{ν} приведены в таблице I.

Т а б л и ц а I

E_n^{CRIT} [В/см]	β_n	E_p^{CRIT} [В/см]	β_p	Источник
$8,57 \cdot 10^3$	1,11	$1,8 \cdot 10^4$	1,21	[12]
$8,7 \cdot 10^3$	2,9	$1,2 \cdot 10^4$	2,6	[15] <100>
$1,4 \cdot 10^4$	2,8	-	-	[15] <III>
$7,396 \cdot 10^3$	1,0	$2 \cdot 10^4$	1,0	[16]
$8 \cdot 10^3$	2	$1,95 \cdot 10^4$	1,0	[17]
$2 \cdot 10^4$	1,0	-	-	[18]
$7,22 \cdot 10^3$	2,0	-	-	[19]
$7,1 \cdot 10^3$	1,4	-	-	[20]
$8,17 \cdot 10^3$	1,75	$1,74 \cdot 10^4$	1,45	данная работа

Температурная зависимость этих величин приведена в работе [10]

$$E_n^{\text{CRIT}} = 6,98 \cdot 10^3 \left(\frac{T}{300}\right)^{1,55}; \quad \beta_n = 1,11 \left(\frac{T}{300}\right)^{0,66}, \quad (15)$$

$$E_p^{\text{CRIT}} = 1,80 \cdot 10^4 \left(\frac{T}{300}\right)^{1,68}; \quad \beta_p = 1,21 \left(\frac{T}{300}\right)^{0,17}. \quad (16)$$

В работе [13] показано, что формула (14) является некорректной по существу, но, с другой стороны, формула проста и с достаточной точностью описывает экспериментальные результаты. Учитывая результаты работы [14], где утверждают, что скорость насыщения практически не зависит от концентрации примеси, уравнение (14) можно преобразовать в формулу, содержащую скорости насыщения.

В работе [21] описана и другая, часто используемая формула

$$\mu_{\gamma}^{LIE} = \frac{\mu_{\gamma}^{LI}}{\sqrt{1 + (\mu_{\gamma}^L)^2 \left[\frac{E/(\mu_{\gamma}^L A_{\gamma})^2}{(\mu_{\gamma}^L E)/(\mu_{\gamma}^L A_{\gamma}) + F_{\gamma}} + \left(\frac{E}{\mu_{\gamma}^L B_{\gamma}} \right)^2 \right]}}, \quad (17)$$

где μ_{γ}^{LI} вычисляется с помощью формулы (9) из I части и

$$A_n = 3,5 \cdot 10^3 \text{ В/см}; F_n = 8,8; B_n = 7,4 \cdot 10^3 \text{ В/см}; A_p = 6,1 \cdot 10^3 \text{ В/см}; \\ F_p = 1,6; B_p = 2,5 \cdot 10^4 \text{ В/см}.$$

Отметим, что величину $\mu_{\gamma}^L B_{\gamma}$ можно интерпретировать как скорость насыщения, не зависящую от рассеивания на примеси. Используя оригинальные данные работы [21], получаем $v_n^{sat} = 1,04 \cdot 10^7$ см/с и $v_p^{sat} = 1,2 \cdot 10^7$ см/с, которые очень вероятны.

Величину $\mu_{\gamma}^L A_{\gamma}$ можно рассматривать как скорость акустического фона в первом приближении не зависящую от рассеивания на примеси. Отметим, что мы сделаем не большую ошибку, изменив в формуле (17) μ_{γ}^L на μ_{γ}^{LICN} предполагая, что $\mu_{\gamma}^L E = \mu_{\gamma}^{LICN} E$.

Если необходимо учитывать рассеивание на носителях и на нейтральной примеси, изменим μ_{γ}^{LI} на μ_{γ}^{LICN} .

Величина F не имеет прямого физического значения и ее можно интерпретировать как параметр формулы (модели).

В литературе можно встретить еще разные модификации формулы (18) (см. например [14, 22]), но так как они не вносят ничего качественно нового, мы их здесь не приводим. Результаты расчетов показаны на рис. 2.

Для арсенида галлия формула выглядит следующим образом (только для электронов):

$$\mu_n^{LIE} = \frac{\mu_n^{LI} + v_n^{sat} E_n^3 / (E_n^{CRIT})^4}{1 + (E_n / E_n^{CRIT})^4}, \quad (18)$$

где численные величины приведены в таблице 2.

В работе [23] предложена другая формула (электроны)

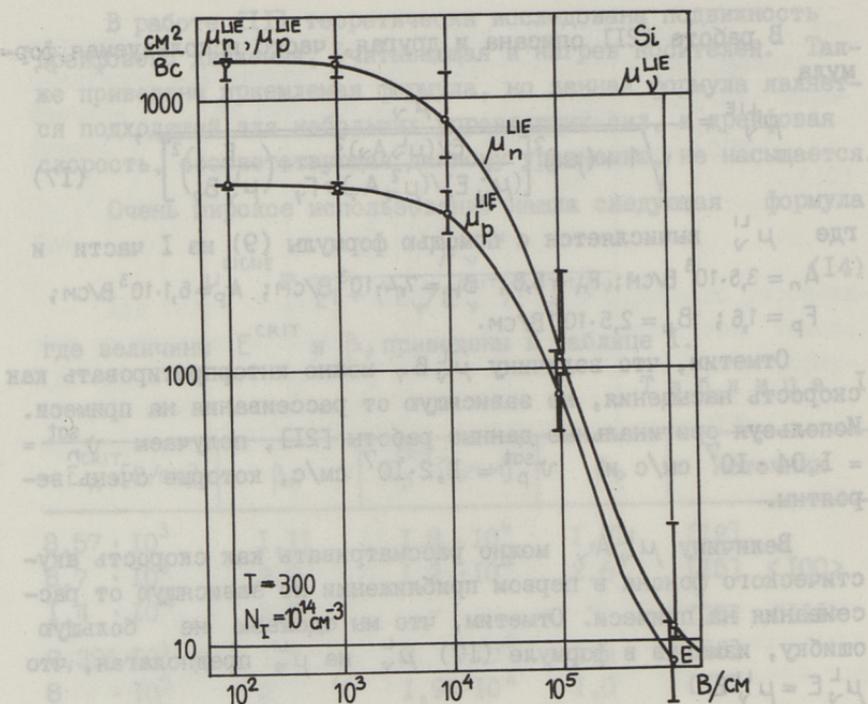


Рис. 2. Зависимость подвижности от напряженности электрического поля для Si.

Таблица 2

ν_n^{sat} [см/с]	E_n^{CRIT} [В/см]	Источник
$8,5 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^3$	[24]
$1,0 \cdot 10^7$	$4,0 \cdot 10^3$	[25]
$1,0 \cdot 10^7$	$2,691 \cdot 10^3$	[26]
$1,12 \cdot 10^7$	$5,7 \cdot 10^3$	[27]
$7,5 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^3$	[28]
$9,44 \cdot 10^6$	$4,08 \cdot 10^3$	данная работа

$$\mu_n^{LIE} = \begin{cases} \mu_n^{LI} \frac{8 + 0,1 \left(\frac{E_n}{E_n^{CRIT}} \right)^5}{8 + \left(\frac{E_n}{E_n^{CRIT}} \right)^5}, & E_n < 11027 \text{ В/см} \end{cases}$$

$$\left(\mu_n^{LI} \frac{E_{n2}^{CRIT}}{E_n}, \quad E_n < 11027 \text{ В/см}, \quad (I9) \right.$$

где $E_{n1}^{CRIT} = 3600 \text{ В/см}$ и $E_{n2}^{CRIT} = 1388 \text{ В/см}$.

Отметим, что особенно для таких полупроводников, как GaAs подобные модели отражают только качественно физику какого-то явления. Нельзя ожидать, что эти модели смогут удовлетворить во всех ситуациях. Как показано в работе [27], требуется совершенствование модели для токов, чтобы аккуратно моделировать миниатюрные приборы из GaAs. Результаты расчетов показаны на рис. 3.

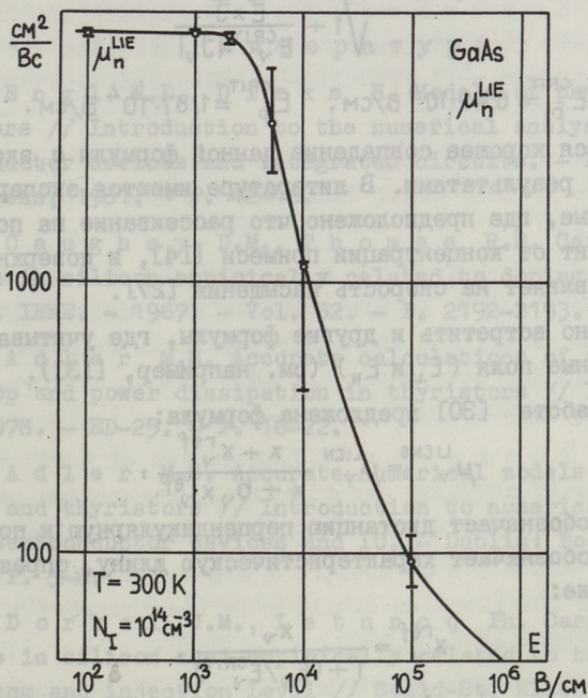


Рис. 3. Зависимость подвижности от напряженности электрического поля для GaAs.

В конце статьи остановимся еще на механизме рассеивания на поверхности. Этот эффект имеет особое значение во всех приборах, где ток течет и по поверхности (например, МДП структуры) прибора.

С точки зрения теории рассеивание на поверхности состоит из многих отдельных механизмов рассеивания, как например, рассеивание на неровностях поверхности, рассеивание на заряде переходного слоя и т.д. Этот механизм исследован очень слабо. Многие исследования, изучающие процессы на поверхности, представляют свои результаты на низких температурах или проводят эксперимент при низкой температуре, так как интерпретирование результатов при низких температурах намного проще.

Можно использовать модифицированную формулу (17), имеющую следующий вид [29]

$$\mu_{\nu}^{\text{LIES}} = \frac{\mu_{\nu}^{\text{LIC}}}{\sqrt{1 + \frac{E \times J}{E_{\nu}^{\text{GRIT}} |\vec{J}_{\nu}|}}}, \quad (20)$$

где $E_n^{\text{GRIT}} = 6,49 \cdot 10^4$ В/см, $E_p^{\text{GRIT}} = 1,87 \cdot 10^4$ В/см.

Отмечается хорошее совпадение данной формулы с экспериментальными результатами. В литературе имеются экспериментальные данные, где предположено, что рассеивание на поверхности не зависит от концентрации примеси [14], и поверхностное поле не влияет на скорость насыщения [27].

Можно встретить и другие формулы, где учитывают поверхностные поля (E_{\perp} и E_{\parallel}) (см. например, [13]).

В работе [30] предложена формула:

$$\mu_{\nu}^{\text{LICN}} = \mu_{\nu}^{\text{LICN}} \frac{x + x_{\nu}^{\text{ref}}}{x + b_{\nu} x_{\nu}^{\text{ref}}}, \quad (21)$$

где x обозначает дистанцию перпендикулярную к поверхности.
 x_{ν}^{ref} обозначает характеристическую длину, определяемую по формуле:

$$x_{\nu}^{\text{ref}} = \frac{x_{\nu}}{1 + (E_{\nu}/E_{\nu}^{\text{GRIT}})}, \quad (22)$$

где

$$x_n^0 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ см}, E_n^{\text{GRIT}} = 10^4 \text{ В/см}, x_p^0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ см} \text{ и}$$

$$E_p^{\text{GRIT}} = 8 \cdot 10^3 \text{ В/см}, b_{\nu} = E_{\perp} / E_{\nu}^{\text{GRIT}}, E_{\perp n}^{\text{GRIT}} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ В/см} \text{ и}$$

$$E_{\perp p}^{\text{GRIT}} = 3,8 \cdot 10^5 \text{ В/см}.$$

Заклучение. Рассмотрены разные модели рассеивания носителей и к этим механизмам соответствующие модели подвижности. Приведено сравнение разных моделей. Получены более точные коэффициенты для разных моделей подвижностей с помощью математической аппаратуры (обычно метод наименьших квадратов).

Отметим еще, что для расчетов практически неважно, какую конкретную формулу использовать, так как экспериментальные данные отличаются друг от друга еще больше. Следовательно, наши новые коэффициенты для разных формул являются более подходящими, поскольку они усредненные и усредненными являются и результирующие подвижности носителей.

Л и т е р а т у р а

1. E n g l W.L., D i r k s H. Models of physical parameters // Introduction to the numerical analysis of semiconductor devices and integrated circuits. - Dublin: Boole Press, 1981. - P. 42-46.
 2. C a u g h e y D.M., T h o m a s R.E. Carrier mobilities in silicon empirically related to doping and field // Proc. IEEE. - 1967. - Vol. 52. - P. 2192-2193.
 3. A d l e r M.S. Accurate calculations of the forward drop and power dissipation in thyristors // IEEE Trans. El. - 1978. - ED-25. - P. 16-22.
 4. A d l e r M.S. Accurate numerical models for transistors and thyristors // Introduction to numerical analysis of semiconductor devices and IC. - Dublin: Boole Press, 1981. - P. 5-8.
 5. D o r k e l J.M., L e t u r c q Ph. Carrier mobilities in silicon semi-empirically related to temperature, doping and injection level // Solid-St. Electron. - 1981. - Vol. 24. - P. 821-825.
 6. L i S.S., T h u r b e r W.R. The dopant and temperature dependence of electron mobility and resistivity in n-type silicon // Solid-St. Electron. - 1977. - Vol. 20. - P. 609-616.
- layers on silicon // IEEE Trans. El. Dev. Lett., - 1981. - EDL-2. - P. 171-173.

7. Авакьянц Т.М., Мурыгин В.И., Сандлер Л.С., Тешабаев А., Дровский А.В. Прямая ветвь вольт-амперной характеристики тонких диодов при высоких уровнях инжекции // Радиотехника и электроника - 1963. - Т. 8. - С. 1919-1926.

8. Fletcher N.H. The high current limit for semiconductor junction devices // Proc. IRE. - 1957. - Vol. 45. - P. 862-872.

9. Meyer J.R. Effect of electron-hole scattering on ambipolar diffusion in semiconductors // Phys. Rev. - 1980. - Vol. 21. - P. 1554-1558.

10. Krausse J. Die Abhängigkeit der Träger Beweglichkeit in Silizium von der Konzentration der freien Ladegunsträger - II // Solid-St. Electron. - 1972. - Vol. 15. - P. 1377-1381.

11. Shockley W. Hot electrons in germanium and Ohm's law // Bell Sept. Techn. J. - 1951. - Vol. 30. - P. 990-1034.

12. Canali C., Majni G., Minder R., Ottaviani G. Electron and hole drift velocity measurements in silicon and their empirical relation to electric field and temperature // IEEE Trans. El. Dev. - 1975. - ED-22.- P. 1045-1047.

13. Thornber K.K. Relation of drift velocity to low-field mobility and high-field saturation velocity // J. Appl. Phys. - 1980. - Vol. 51. - P. 2127-2136.

14. Sabnes A.G., Clemens J.T. Characterization of the electron mobility in the inverted 100 Si-surface // Proc. IEDM. - 1979. - P. 18-21.

15. Coen R.W., Muller R.S. Velocity of surface carriers in inversion layers on silicon // Solid-St. Electron. - 1980. - Vol. 23. - P. 35-40.

16. D'Avanzo D.C., Vanzani M., Dutton R.W. One dimensional semiconductor analysis (SEDAN). Stanford: Stanford Univ. Rep. G.201-5, 1979.

17. Heimeier H.H. Zweidimensionale numerische

Lösung eines nichtlinear Randwertproblems am Beispiel des Transistors in Stationären Zustand: Dissertation. - TU Aachen, 1973.

18. O k a H., N i s h i u c h i K., N a k a m u r a T., I s h i k a w a H. Computer analysis of a short channel BC MOSFET // IEEE Trans. El. Dev. - 1980. - ED-27. - P. 1514-1520.

19. O m u r a J., S a n o E., O h w a d a K.A. Negative drain conduction property in super-thin film buried-channel MOSFET on a buried insulator // IEEE Trans. El. Dev. - 1983. - ED-30. - P. 67-73.

20. W a r n e r R.M., J u D-H., G r u n g B.L. Electron velocity saturation of a BTJ collector junction under low-level condition // IEEE Trans. El. Dev. - 1983. - ED-30. - P. 230-236.

21. S c h a r f e t t e r D.L., G u m m e l H.K. Large signal analysis of a silicon read diode oscillator // IEEE Trans. El. Dev. - 1969. - ED-16. - P. 64-77.

22. J a g g i R. High-field drift velocities in silicon and germanium // Helv. Phys. Acta. - 1969. - Vol. 42. - P. 941-943.

23. A l l e y G.D. High voltage two dimensional simulation permeable base transistors // IEEE Trans. El. Dev. - 1983. - ED-30. - P. 52-60.

24. B a r n e s J.J., L o m a x R.J., H a d d a d G.I. Finite-element simulation of GaAs MOSFET's with lateral doping profiles and submicron gates // IEEE Trans. El. Dev. - 1976. - ED-23. - P. 1042-1048.

25. C u r t i c e W.R. Direct comparison of the electron temperature model with the particle mesh (Monte Carlo) model for the GaAs MESFET // IEEE Trans. El. Dev. - 1982. - ED-29. - P. 1042-1043.

26. L a w M. Simulation of recessed gate FET's. Workshop on CAD of VLSI Processes. Stanford, 1982.

27. C o o p e r J.A., N e l s o n D.F. Measurement of the high field drift velocity of electrons in inversion layers on silicon // IEEE Trans. El. Dev. Lett., - 1981. - EDL-2. - P. 171-173.

28. Newman D.S., Ferry D.K., Siees J.R. Measurement and simulation of GaAs FET's under electron beam irradiation // IEEE Trans. El. Dev. - 1983. - ED-30. - P. 849-855.

29. Weast R.C., Astle M.J. CRC handbook of chemistry and physics. - Boca Raton, Florida: CRC Press, 1981.

30. Selberherr S., Schütz A., Pötzl H. Two dimensional MOS-transistor modeling // Process and device simulation for integrated circuit design. - Hague: Martinus Nijhoff, 1983, p. 490-581.

T. Rang

The Modeling of Carrier Mobilities II

Scattering on Carriers and on Surface and the Effect of Velocity Saturation

Abstract

An overview of different models is given. More precise coefficients for different carrier mobility models are found.

УДК 65.012

В.П. Махитько, М.Г. Шендрик,
Б.Г. Тамм

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ СКЛАДСКОЙ СИСТЕМЫ

Многообразие параметров, технологических и объемно-планировочных решений, конструкций оборудования и характеристик, разнообразной номенклатуры материальных ресурсов, перерабатываемых на складе, позволяет отнести склад к большим системам [1].

Структурой складской системы является множество взаимосвязей и отношений между элементами складской системы, придающее ей целостность, упорядоченность, организацию.

Поступление и выдача материальных ресурсов со склада представляет собой стохастические процессы. Принимая или выдавая материальные ресурсы, складская система не остается постоянной, а переходит из одного состояния в другое. Поскольку внешние материальные потоки — стохастические процессы, то и пребывание складской системы в том или ином состоянии, а также переходы из одного состояния в другое являются процессами случайными. Такой случайный характер воздействия внешней среды на склад приводит к тому, что многие внутрискладские процессы также имеют стохастический характер (колебания складских ресурсов по составу и величине, состояние и загрузка отдельных участков склада и всего склада в целом и т.д.). Поэтому с позиций теории исследования операций функционирование складской системы можно рассматривать как развивающийся во времени случайный процесс, протекание и результат которого зависит от многих случайных факторов [2].

Складская система переходит из одного состояния в другое со средней интенсивностью. Вычисление средних характеристик интенсивности методами теории марковских про-

цессов или теории массового обслуживания [3] является при реализации сложным и трудоемким. Следовательно, изменения состояний складской системы должно быть описано методами, отличными от используемых в этих теориях. В качестве такого метода предлагается метод динамики средних [4], обеспечивающий при адекватном описании процесса наглядности модели.

Метод динамики средних является удобным математическим аппаратом изучения средних характеристик случайных процессов, протекающих в сложных системах. Таким образом, основной применимости метода динамики средних является именно то, что препятствует изучению явлений более подробными методами: сложность изучаемых процессов и большое число участвующих в них элементов. Кроме того, для начального анализа исследуемой системы этот метод является наиболее приемлемым из-за простоты подготовки исходных данных для моделирования.

Моделирование складских процессов методом динамики средних

В обобщенном виде склад можно рассматривать как сложную техническую систему, состоящую из множества взаимосвязанных элементов [1]:

$$S = \{s_j\}, \quad j = \overline{1, n},$$

где S - складская система;

s_j - элемент складской системы.

В складской системе каждому j -му элементу может быть поставлено в соответствие множество формальных признаков $\psi_j = \{\psi_i\}$, $i = \overline{1, k}$, характеризующих свойства и параметры j -го элемента. Если рассматриваемые элементы обладают одним и тем же набором признаков (характеристики, выполняемые функцией) существенных в рассматриваемой ситуации, то между такими элементами может быть установлено отношение эквивалентности. Элементы, между которыми можно установить отношение эквивалентности (взаимозаменяемости), назовем однотипными элементами.

Материальные потоки характеризуются многими техническими параметрами. Выделим из них три:

1) вид и физические свойства отдельных ресурсов (размер, масса и т.д.);

2) количественные характеристики партий (число в партии, число разных наименований);

3) временные характеристики материального потока (интервалы получения и выдачи).

В складскую систему поступает материальный поток ресурсов с некоторой скоростью $X(t)$, а из системы — со скоростью $Y(t)$, поэтому складская система не остается постоянной, а переходит из одного состояния в другое.

Цель складской системы (обеспечение ресурсами потребителя) достигается в результате взаимодействия организационных работ внутри склада и потоков материальных ресурсов при поступлении на склад и выдачи.

Исходя из вышеизложенного, составим следующую формализованную схему процесса функционирования складской системы.

1. Складская система рассматривается как система, основными элементами которой являются технические средства и материальные ресурсы.

2. В процессе функционирования складской системы материальные ресурсы, поступающие на склад с некоторой скоростью $X(t)$, переводятся техническими средствами из состояния "хранения" в состояние "выдача" со скоростью $Y(t)$.

Рассмотрим процедуру построения математической модели складской системы, используя аппарат динамики средних.

Предположим, что исследуемая складская система $S = \{S_j\}$ состоит из n однородных эквивалентных элементов. Каждый элемент S_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ в любой момент времени t может находиться в каком-либо из состояний ξ_1, \dots, ξ_n множества возможных состояний Ξ . Введем в рассмотрение случайную величину A_{ξ_i} , характеризующую количество элементов системы, находящихся в момент t в состоянии ξ_i ($i = 1, \dots, p$). Очевидно, для любого момента t сумма количеств элементов по всем состояниям равна общей численности элементов, то есть

$$\sum_{i=1}^p A_{\xi_i}(t) = N.$$

Переход S_e из состояния ξ_i в ξ_j осуществляется под воздействием некоторых потоков событий. Предположим, что эти потоки являются пуассоновскими с параметрами $\lambda_{ij}(t)$. Так как переход элементов $S_j \in S$ из состояния ξ_i в ξ_j обусловлен интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$, величина которой в частном случае характеризуется интенсивностью, то целесообразно определить для каждого момента времени $t \in T$ количество элементов $A_{\xi_i}(t)$. Исследовать поведение $A_{\xi_i}(t)$ ($\forall \xi_i \in \Xi$) с учетом $\lambda_{ij}(t)$ — это значит исследовать динамику изменения средних значений количеств элементов системы, находящихся в том или ином состоянии, т.е. найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $A_{\xi_i}(t)$:

$$M_{\xi_i}(t) = M[A_{\xi_i}(t)]; \quad D_{\xi_i}(t) = D[A_{\xi_i}(t)].$$

Процедура составления математической модели исследуемой системы с использованием метода динамики средних состоит в следующем:

1) элементы системы группируются по характерным признакам (однотипности);

2) для каждой отдельной группы определяются возможные состояния ее элементов;

3) определяются интенсивности переходов элементов системы из одного состояния во все возможные;

4) с учетом взаимодействий между отдельными группами элементов системы составляются уравнения материального баланса, получая таким образом возможность построения дифференциальных уравнений.

Процесс функционирования складской системы с дискретными состояниями целесообразно представить в виде графа состояний (рис. 1), где вершинами графа обозначены состояния складской системы, а дугами — переходы из одних состояний в другие. Над стрелками указываются средние интенсивности перехода. При этом состоянию ξ_1 соответствует отсутствие работы на складе, ξ_2 — склад находится в состоянии "прием", ξ_3 — в состоянии "выдача", ξ_4 — в состоянии "хранение". Возможны также переходы из состояния ξ_2 в состояние ξ_3 , из состояния ξ_4 в состояние ξ_1 .

Если учитывать дополнительные внутрискладские операции приема и комплектования материальных ресурсов, то оказыва-

ется, что возможны 16 состояний складской системы и 64 перехода системы из одних состояний в другие [2].

Рассмотрим граф состояния (рис. 1) для построения математической модели процесса и составления уравнений материального баланса.

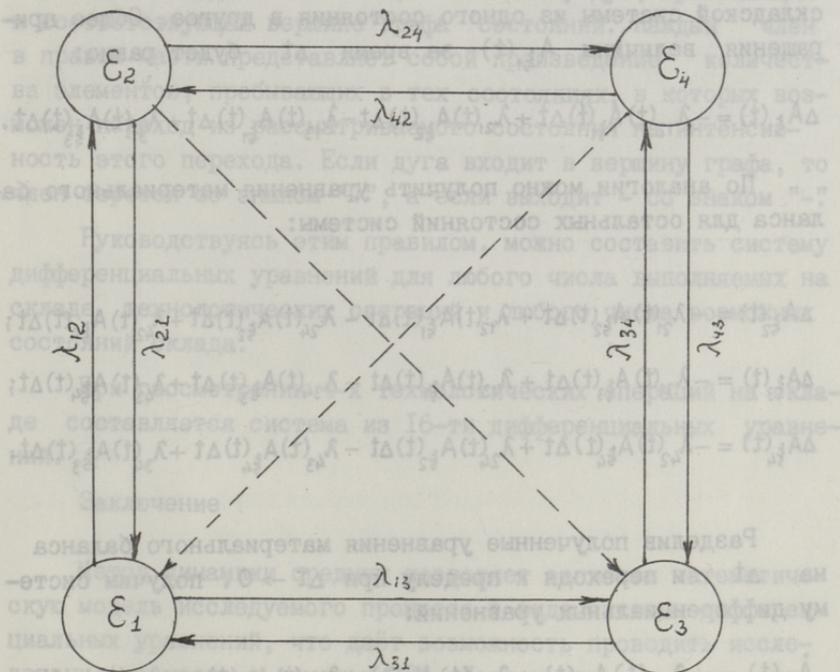


Рис. 1. Граф состояний и переходов складской системы.

Предположим, что в некоторый момент времени t в состоянии ξ_1 находятся $A_{\xi_1}(t)$ элементов складской системы. За промежуток времени Δt среднее значение величины $A_{\xi_1}(t)$ изменится на $\Delta \xi_1$ за счет:

а) перехода элементов из состояния $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ с интенсивностью $\lambda_{12}(t)$, а также из состояния $\xi_2 \rightarrow \xi_1$ с интенсивностью $\lambda_{21}(t)$;

б) перехода элементов из состояния $\xi_2 \rightarrow \xi_4$ с интенсивностью $\lambda_{24}(t)$, а также из состояния $\xi_4 \rightarrow \xi_2$ с интенсивностью $\lambda_{42}(t)$;

в) перехода элементов из состояния $\xi_4 \rightarrow \xi_3$ с интенсивностью $\lambda_{43}(t)$, а также из состояния $\xi_3 \rightarrow \xi_4$ с интенсивностью $\lambda_{34}(t)$;

г) перехода элементов из состояния $\xi_3 \rightarrow \xi_1$ с интенсивностью $\lambda_{31}(t)$, а также из состояния $\xi_1 \rightarrow \xi_3$ с интенсивностью $\lambda_{13}(t)$.

Величины $\lambda_{12}(t), \lambda_{21}(t), \lambda_{13}(t), \lambda_{31}(t), \lambda_{43}(t), \lambda_{34}(t), \lambda_{42}(t), \lambda_{24}(t)$ характеризуют среднюю интенсивность перехода элементов складской системы из одного состояния в другое. Общее приращения величины $A_{\xi_1}(t)$ за время Δt будет равно:

$$\Delta A_{\xi_1}(t) = -\lambda_{12}(t)A_{\xi_1}(t)\Delta t + \lambda_{21}(t)A_{\xi_2}(t)\Delta t - \lambda_{13}(t)A_{\xi_1}(t)\Delta t + \lambda_{31}(t)A_{\xi_3}(t)\Delta t.$$

По аналогии можно получить уравнения материального баланса для остальных состояний системы:

$$\Delta A_{\xi_2}(t) = -\lambda_{21}(t)A_{\xi_2}(t)\Delta t + \lambda_{12}(t)A_{\xi_1}(t)\Delta t - \lambda_{24}(t)A_{\xi_2}(t)\Delta t + \lambda_{42}(t)A_{\xi_4}(t)\Delta t;$$

$$\Delta A_{\xi_3}(t) = -\lambda_{31}(t)A_{\xi_3}(t)\Delta t + \lambda_{13}(t)A_{\xi_1}(t)\Delta t - \lambda_{34}(t)A_{\xi_3}(t)\Delta t + \lambda_{43}(t)A_{\xi_4}(t)\Delta t;$$

$$\Delta A_{\xi_4}(t) = -\lambda_{42}(t)A_{\xi_4}(t)\Delta t + \lambda_{24}(t)A_{\xi_2}(t)\Delta t - \lambda_{43}(t)A_{\xi_4}(t)\Delta t + \lambda_{34}(t)A_{\xi_3}(t)\Delta t.$$

Разделив полученные уравнения материального баланса на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{A}_{\xi_1}(t) = -\lambda_{12}(t)A_{\xi_1}(t) + \lambda_{21}(t)A_{\xi_2}(t) - \lambda_{13}(t)A_{\xi_1}(t) + \lambda_{31}(t)A_{\xi_3}(t);$$

$$\dot{A}_{\xi_2}(t) = -\lambda_{21}(t)A_{\xi_2}(t) + \lambda_{12}(t)A_{\xi_1}(t) - \lambda_{24}(t)A_{\xi_2}(t) + \lambda_{42}(t)A_{\xi_4}(t);$$

$$\dot{A}_{\xi_3}(t) = -\lambda_{31}(t)A_{\xi_3}(t) + \lambda_{13}(t)A_{\xi_1}(t) - \lambda_{34}(t)A_{\xi_3}(t) + \lambda_{43}(t)A_{\xi_4}(t);$$

$$\dot{A}_{\xi_4}(t) = -\lambda_{42}(t)A_{\xi_4}(t) + \lambda_{24}(t)A_{\xi_2}(t) - \lambda_{43}(t)A_{\xi_4}(t) + \lambda_{34}(t)A_{\xi_3}(t).$$

В качестве начальных условий принимается, что при $t=0$ система находится в состоянии ξ_1 (на складе нет работы), т.е. при $t=0$,

$$A_{\xi_1} = 1; \quad A_{\xi_2} = A_{\xi_3} = A_{\xi_4} = 0.$$

Таким образом, метод динамики средних применим при допущении о том, что переход системы из одного состояния в другое происходит под влиянием некоторого пуассоновского

потока событий. Число дифференциальных уравнений в складской системе равно числу возможных состояний склада. В левой части каждого уравнения стоят производственные состояния элементов складской системы по времени. Число членов в правой части каждого уравнения равно числу возможных переходов складской системы, т.е. числу дуг, примыкающих к соответствующей вершине графа состояний. Каждый член в правой части представляет собой произведение количества элементов, пребывающих в тех состояниях, в которых возможен переход из рассматриваемого состояния на интенсивность этого перехода. Если дуга входит в вершину графа, то член берется со знаком "+", а если выходит - со знаком "-".

Руководствуясь этим правилом, можно составить систему дифференциальных уравнений для любого числа выполняемых на складе технологических операций и любого числа возможных состояний склада.

При рассмотрении 4-х технологических операций на складе составляется система из 16-ти дифференциальных уравнений.

Заключение

Метод динамики средних позволяет записать математическую модель исследуемого процесса в виде системы дифференциальных уравнений, что даёт возможность проводить исследования процесса с помощью ЭВМ. Достоинством метода динамики средних является и тот факт, что решение задачи может быть получено при переменных параметрах исследуемой системы.

Л и т е р а т у р а

1. С м е х о в А.А. Автоматизированные склады. - М: Машиностроение, 1979.

2. М а л и к о в О.Б. Проектирование автоматизированных складов штучных грузов. - Л. Машиностроение, 1981.

3. В е н т ц е л ь Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. - М: Наука, 1980.

4. Д р у ж и н и н Н.К. Основные математико-статистические методы в экономических исследованиях. - М: Статистика, 1968.

V. Mahitko, M. Shendrik, B. Tamm

A Method for Modelling Storehouse Operations

Abstract

Modelling of a storehouse operation system by the method of dynamics in averages is described. A model is built for a storehouse operation system and a methodology is proposed to study random characteristics of the system. Modelling data preparation is simplified, using the method. An example given illustrates four inventory operations within a storehouse.

Закључење

Разделав поључене уравнење материјалног баланса методом динамике у просекима, описано је моделирање система рада складишта. Предложено је методологију за проучавање случајних карактеристика система. Припрема података за моделирање је једноставнија коришћењем ове методе. Примером је илустрирано четири операције инвентара унутар складишта.

$$A_1(t) = \dots + A_2(t) + \dots + A_n(t)$$

Математичко моделовање, 1979.

В. Махитко, М. Шендрић, Б. Тамм. Математичко моделовање система рада складишта. М.: Наука, 1980.

Таким образом, предложено је методологију за проучавање случајних карактеристика система. Припрема података за моделирање је једноставнија коришћењем ове методе. Примером је илустрирано четири операције инвентара унутар складишта.

С о д е р ж а н и е

1. О. Аарна. К понятию непрерывной технологической системы. I. Физическая модель процесса и элементы НТС.....3
2. О. Аарна. К понятию непрерывной технологической системы. II. НТС и балансовые модели пространства состояний.....25
3. А. Кийтам. Синтез скалярных функций полезности для выходов стадий многостадийных технологических процессов.....45
4. А. Кийтам. Алгоритмизация некоторых скалярных задач оптимальной настройки дискретных технологических процессов.....51
5. Р. Ланд, М. Мин. Переходные процессы в неавтономной системе ФАП третьего порядка.....71
6. А. Ронк. Повторный расчет линейной цепи методом редукции и частичное упорядочение исключаемых узлов.....81
7. Т. Парве. Зависимость метрологических характеристик векторных вольтметров от свойств применяемых в них синхронных преобразователей дискретного действия.....93
8. Т. Ранг. Моделирование подвижностей носителей. I. Рассеивание на акустических фонах и на нейтральной и ионизированной примеси.....103
9. Т. Ранг. Моделирование подвижностей носителей. II. Рассеивание на носителях и поверхности, эффект насыщения дрейфовой скорости носителей.....117
10. В. Махитько, М. Шендрик, Б. Тамм. Об одном методе моделирования складской системы.....131

EESTI AKADEEMILINE RAAMATUKOGU



1 0200 00082363 7

Цена 1.10