

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 266

**ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СРЕДСТВ
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ**

СБОРНИК ТРУДОВ VI

Под общей редакцией доктора технических наук,
профессора А. И. Вольдек

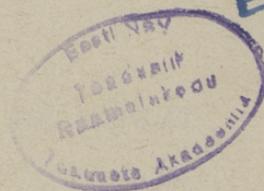
ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СРЕДСТВ
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ

СБОРНИК ТРУДОВ

VI

Под общей редакцией доктора технических наук,
профессора А. И. Вольдек

ТАЛЛИН 1968



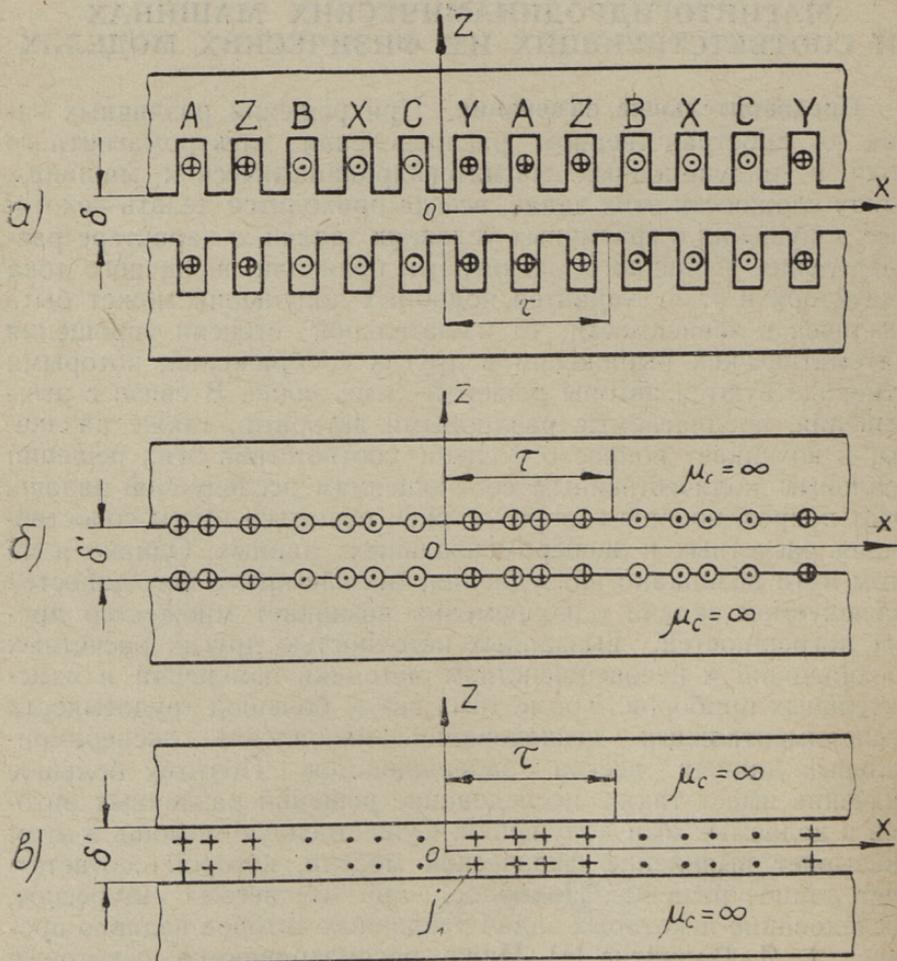
Ep. 8764

А. И. Вольдек

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ В ИНДУКЦИОННЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МАШИНАХ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Предварительные замечания. При решении различных задач о пространственном распределении электромагнитного поля в индукционных магнитогидродинамических машинах, ввиду сложности этих задач, всегда приходится делать некоторые допущения о граничных условиях задачи, о характере распределения первичного магнитного поля или первичного тока индуктора и т. п. Характер подобных допущений может быть различен в зависимости от желательной степени упрощения математических выражений и других соображений, которыми руководствуются авторы решений этих задач. В связи с этим решения, предлагаемые различными авторами, также различны, и возникает вопрос о степени соответствия этих решений реальным количественным соотношениям исследуемой задачи. Этот вопрос, вообще говоря, должен решаться путем сопоставления расчетных и экспериментальных данных. Однако и на этом пути возникают затруднения, так как кроме погрешностей исследуемой задачи одновременно возникает множество других погрешностей, вызванных неточностью других расчетных соотношений и несовершенством методики измерений и измерительных приборов. Кроме того, ввиду большой трудоемкости экспериментальных исследований накопление экспериментальных данных всегда задерживается. Поэтому большое значение имеет также исследование решений различных авторов и делаемых ими допущений. Существенную помощь в этом оказывает выявление физической модели, которой соответствует данное решение. Подобное, при том весьма интересное, исследование некоторых задач различных авторов недавно произвел А. Я. Вилнитис [1]. Ниже рассматриваются некоторые дополнительные вопросы из этого же комплекса.

Модель индуктора, соответствующая задаче автора о поперечном краевом эффекте. В работе автора настоящей статьи [2] было дано первое в хронологическом отношении решение задачи о распределении токов в слое жидкого металла плоской индукционной МГД машины конечной ширины. Для упрощения задачи принималось, что по толщине слоя жидкого металла, заполняющего весь зазор между сердечниками индуктора, первичное и вторичное электромагнитное поле не изменяются (поле плоскопараллельное в направлении, перпендикулярном слою жидкого металла). Некоторые авторы, в том числе и А. Я. Вилнитис комментируют эту задачу, как соответствующую бесконечно тонкому слою металла. Возможно, од-



Фиг. 1. Распределение первичного тока в бесконечно длинных индукторах

нако, иное толкование условий этой задачи, имеющее определенные преимущества. Вопрос сводится к тому, каким образом идеализируется пространственное распределение токов обмоток индуктора.

У реального индуктора проводники с токами лежат в пазах (фиг. 1, а) и поле в зазоре имеет весьма сложную структуру. Если пренебречь обстоятельствами вторичного порядка, то для исследования электромагнитных процессов в зазоре можно принять (фиг. 1, б), что сердечники индуктора лишены пазов, имеют $\mu_c = \infty$ и на их внутренних поверхностях имеются бесконечно тонкие слои тока (поверхностные токи), представляющие собой бегущие синусоидальные волны тока или линейной токовой нагрузки. Для учета насыщения и влияния пазов вместо реального зазора δ при этом принимают в расчет эквивалентный зазор

$$\delta' = k_\mu k_\delta \delta,$$

где k_μ — коэффициент насыщения и k_δ — коэффициент зазора.

Идеализация индукторов электрических машин и других устройств согласно фиг. 1, б принимается многими авторами. В этом случае в зазоре существуют компоненты магнитной индукции B_{1x} и B_{1z} (будем принимать пока, что ширина индукторов бесконечна).

Найдем теперь такое распределение тока бесконечно длинного индуктора с $\mu_c = \infty$ и гладкими поверхностями сердечников (фиг. 1, в), при котором создается такое синусоидальное бегущее магнитное поле, когда $B_{1x} = 0$, а B_{1z} не зависит от координаты z . Тогда индукция в зазоре

$$B_{1z} = B_{1m} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)}, \quad (1)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Из равенства

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

следует, что

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial z} - \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} = \mu_0 j_{1y}$$

Подставив сюда приведенные выше значения B_{1x} и B_{1z} , получим значение плотности тока в области зазора

$$j_x = j_y = \frac{i\pi}{\mu_0 \tau} B_{1m} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)} \quad (2)$$

Так как B_{1m} не зависит от z , то и j_x не зависит от z . Следовательно, в данном случае (фиг. 1, в) первичный ток распределен по всему зазору с равномерной по оси z объемной плотностью j_x . Амплитуда этой плотности тока согласно (2)

$$J_{1m} = \frac{\pi}{\mu_0 \tau} B_{1m} \quad (3)$$

С другой стороны, исходя из амплитуд линейной токовой нагрузки A_{1m} и амплитуды намагничивающей силы обмотки индуктора F_{1m} [3]

$$J_{1m} = \frac{A_{1m}}{\delta'} = \frac{\sqrt{2} A_1 k_{об1}}{\delta'} = \frac{\pi F_{1m}}{\delta' \tau} \quad (4)$$

где $k_{об1}$ — обмоточный коэффициент индуктора.

Если приравнять правые части равенств (3) и (4), то получим известное соотношение

$$B_{1m} = \frac{\mu_0}{\delta'} F_{1m} \quad (5)$$

Распределение тока по фиг. 1, в представляет дальнейшую по сравнению с фиг. 1, б идеализацию задачи, когда ток первичной обмотки предполагается распределенным равномерно по всей толщине зазора. Можно представить себе, что по всему зазору фиг. 1, в распределены бесконечно тонкие изолированные проводники с током, не препятствующие протеканию жидкого металла. Конечно, такое распределение тока на практике невозможно, как, впрочем, невозможно и распределение тока по фиг. 1, б. Однако нет никаких препятствий к тому, чтобы распределение по фиг. 1, в взять в определенных случаях за основу электромагнитных процессов в индукционной машине.

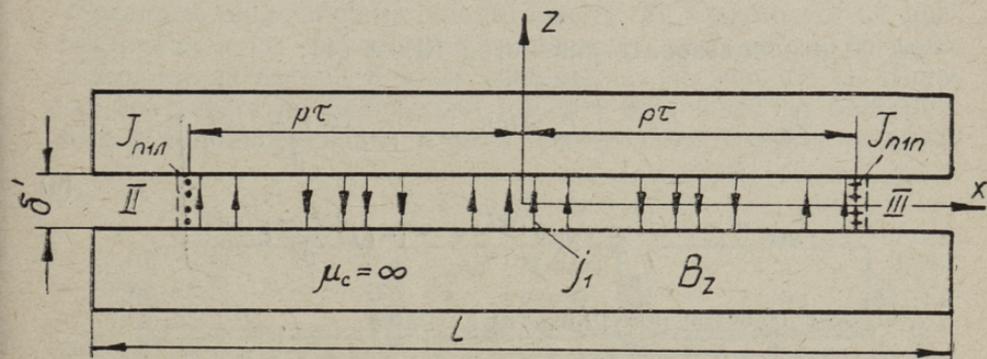
Естественно, что когда $B_{1x} = 0$ и поэтому интенсивность первичного поля по толщине зазора не изменяется, то и плотность индуцируемых в жидком металле вторичных токов и индукция вторичного поля по толщине зазора изменяться не будут. Расчетные соотношения при этом сильно упрощаются и будут достаточно точными для инженерных расчетов в большинстве практических случаев, когда толщинный поперечный эффект не проявляется.

Распределение первичного тока по фиг. 1, в соответствует задаче автора о вторичном поперечном краевом эффекте [2].

Модель индуктора конечной длины с компенсацией пульсирующих полей. Представим себе сначала индуктор длиной l , сердечники которого имеют $\mu_c = \infty$ и лишены пазов, но объемная плотность тока

$$j_1 = J_{1m} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)}$$

распределена в зазоре на длине $2p\tau < l$, где p — число пар полюсов (фиг. 2). Первичное магнитное поле при этом будет существовать по всей длине индуктора, причем на активном участке I длиной $2p\tau$ кроме нормального бегущего поля, как известно, будут существовать также пульсирующие составляющие поля. Однако для эффективной работы машины необходимо, чтобы на активном участке I существовало только чисто бегущее поле, определяемое равенством (1), а на концевых участках II и III должно быть $B_{Hz} = B_{Hx} = 0$. Рассмотрим, при каких условиях возможно существование такого поля.



Фиг. 2. Модель распределения первичного тока индуктора ограниченной длины ($p=2$)

Для создания в зоне I бегущего поля, определяемого равенством (1), в зазоре в пределах этой зоны должно существовать такое же распределение плотности тока, определяемое равенством (2), как в случае фиг. 1, в. Согласно условию на границах зон I, II, III, магнитная индукция должна меняться скачком, что возможно только в случае [4], когда на границах этих зон существуют слои поверхностных токов с некоторыми поверхностными плотностями тока $I_{пл}$ и $I_{пя}$ (фиг. 2). Совершая обходы по часовой стрелке вокруг участков поверхностных токов фиг. 2 высотой dz , составим выражения для поверхностного ротора напряженности поля:

$$dz [H_{0z}]_{x=-p\tau} - dz [H_{1z}]_{x=-p\tau} = dz J_{n1\lambda},$$

$$dz [H_{1z}]_{x=+p\tau} - dz [H_{0z}]_{x=+p\tau} = dz J_{n1n}.$$

Имея в виду, что $H_{0z} = H_{1z} = 0$, и подставив

$$H_{1z} = \frac{B_{1z}}{\mu_0}$$

по равенству (1), получим

$$J_{n1\lambda} = - \frac{B_{1m}}{\mu_0} e^{i(\omega t + p\pi)},$$

$$J_{n1n} = + \frac{B_{1m}}{\mu_0} e^{i(\omega t - p\pi)}$$

или, если использовать равенства (3) и (4):

$$\left. \begin{aligned} J_{n1\lambda} &= - (-1)^p \frac{\tau}{\pi} J_{1m} e^{i\omega t} = - (-1)^p \frac{F_{1m}}{\delta'} e^{i\omega t}, \\ J_{n1n} &= + (-1)^p \frac{\tau}{\pi} J_{1m} e^{i\omega t} = + (-1)^p \frac{F_{1m}}{\delta'} e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Общие объемы поверхностных токов

$$\left. \begin{aligned} \delta' J_{n1\lambda} &= - (-1)^p F_{1m} e^{i\omega t}, \\ \delta' J_{n1n} &= + (-1)^p F_{1m} e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Нетрудно установить, что каждый из этих токов равен с обратным знаком половине суммарного тока обмотки на протяжении полюсного деления, прилегающего соответственно к левой и правой крайним зонам.

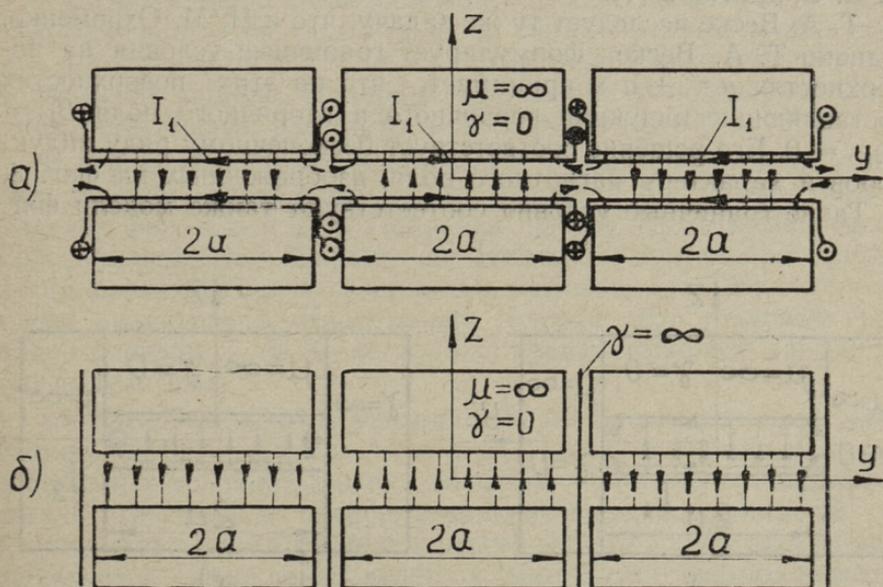
Очевидно, что поверхностные токи фиг. 2 представляют собой токи корригирующих элементов обмотки индуктора, призванных компенсировать пульсирующие поля индуктора [5, 6]. Очевидно также, что поле индуктора фиг. 2 не изменится, если концы сердечников в зонах II и III обрезать по координатам $x = \pm p\tau$ и отбросить. Задание первичного поля

в задаче автора о вторичном продольном краевом эффекте [7] соответствует модели фиг. 2.

Преимущества расчетных моделей фиг. 1, в и 2 заключаются в том, что при конечной величине зазора и конечной толщине слоя жидкого металла получаются простые по своему виду решения задач о различных краевых эффектах.

Модели, соответствующие задачам Н. М. Охременко и Т. А. Веске о распределении электромагнитного поля в активной зоне плоской индукционной магнетогидродинамической машины конечной ширины [8—10]. Указанные авторы решали задачу, аналогичную задаче автора в [2], однако с учетом изменения поля по координате z фиг. 1.

Н. М. Охременко задавал на внутренних поверхностях индуктора бегущую синусоидальную волну линейной нагрузки аналогично фиг. 1, б и раскладывал решение в ряде Фурье вдоль оси y , направленной на фиг. 1 перпендикулярно плоскости чертежа. Он учитывал также наличие в общем случае тепловых изоляционных слоев между каналом для жидкого металла и сердечниками индуктора. Н. М. Охременко не рассматривали не исследовал граничных условий на боковых поверхностях активной зоны машины, но полученное им решение соответствует физической модели, состоящей из бесконечного в направлении оси y ряда идентичных машин, установ-



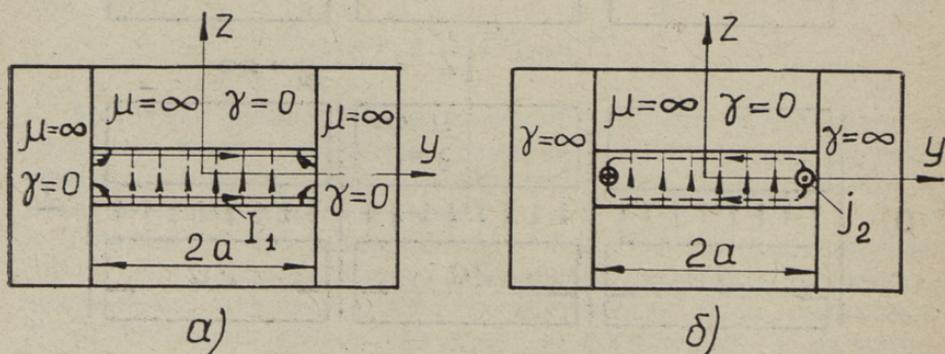
Фиг. 3. Первый вид расчетных моделей Н. М. Охременко и Т. А. Веске

ленных вплотную друг к другу, причем направления токов в обмотках индукторов этих машин чередуются. На фиг. 3, *a* схематически изображен участок такого ряда машин, состоящий из трех машин, причем необходимо представить себе, что первичные обмотки с токами I_1 изготовлены из бесконечно тонких проводников, уложенных в активных и лобовых зонах вплотную на поверхностях сердечников, а сами сердечники соседних машин сдвинуты вплотную друг к другу.

На фиг. 3, *a* в виде отдельных линий магнитной индукции показан также характер первичного магнитного поля индукторов такого ряда. Подобный же в общем характер имеет и вторичное магнитное поле. Как следует из фиг. 3, *a*, распределение составляющих индукции B_{1x} и B_{1z} по оси y соответствует четным функциям, а распределение B_{1y} — нечетной функции. В плоскостях $y = \pm a$ магнитные линии направлены перпендикулярно этим плоскостям и поэтому ничего не изменится, если на фиг. 3, *a* все индукторы, за исключением среднего, удалить, и области $y > a$ и $y < -a$ заполнить шихтованной электротехнической сталью с $\mu = \infty$ и электрической проводимостью $\gamma = 0$. При этом получим вторую модель (фиг. 4, *a*), соответствующую задаче Н. М. Охременко.

Автор настоящей статьи указывал на модель вида фиг. 3, *a* и ранее. На модели вида фиг. 3, *a* и 4, *a* указывает также А. Я. Вилнитис в [1].

Т. А. Веске исследует ту же задачу, что и Н. М. Охременко. Однако Т. А. Веске формулирует граничные условия на поверхностях $y = \pm a$ и принимает, что на этих поверхностях составляющие индукции первичного и вторичного поля $B_{1y} = B_{2y} = 0$. Его решение соответствует бесконечному ряду индукторов и характеру магнитного поля, изображенных на фиг. 3, б. Такие граничные условия соответствуют также модели фиг.



Фиг. 4. Второй вид расчетных моделей Н. М. Охременко и Т. А. Веске

4, б, в которой области $y > a$ и $y < -a$ заполнены сверхпроводником $\gamma = \infty$. На модели фиг. 3, б также надо представить себе, что индукторы отделяются друг от друга бесконечно тонкими сверхпроводящими пластинками. Пунктирными линиями на фиг. 4, б показан характер линии вторичного тока при проявлении толщинного поверхностного эффекта. Очевидно, что плотность вторичного тока имеет также составляющую по оси z .

Решения Н. М. Охременко и Т. А. Веске, естественно, отражают явления в реальной машине лишь приближенно. Особенностью решения Н. М. Охременко является то, что y модели фиг. 3, а и 4, а в точках $y = \pm a$ и $z = \pm \delta'/2$ индукция $B = \infty$ и в прилегающих областях магнитная индукция несомненно получается значительно большей, чем в реальной машине. Правда, у одиночной машины на острых углах сердечника $y = \pm a$ и $z = \pm \delta/2$ теоретически также $B = \infty$. Однако у реальной машины в окрестностях этих острых углов падение магнитного потенциала составляет лишь часть полной н. с. обмотки, а на моделях фиг. 3, а и 4, а в этих точках и в их окрестностях действует полная н. с. обмотки. Поэтому решение Н. М. Охременко несомненно приводит к заметному завышению электромагнитных сил и напора, когда ширина индуктора и толщина слоя тепловой изоляции относительно малы. Наоборот, когда толщина слоя тепловой изоляции велика, возможно заметное занижение сил и напоров ввиду того, что в областях $y \approx \pm a$ и $z \approx 0$ на фиг. 3, а и 4, а B_{1z} значительно меньше, чем в реальной машине. Подобные отклонения и подтверждаются соответствующими расчетами и экспериментами [11, 12].

В реальных машинах в области $y \approx \pm a$, $z \approx 0$ в результате выпучивания первичного поля индукция B_{1z} меньше, чем в моделях фиг. 4, а и 4, б. Поправку на это сделать нетрудно. Если, однако, этой поправкой не делать, то при слабом проявлении поверхностного толщинного эффекта, при относительно узком индукторе и относительно толстом слое тепловой изоляции решение Т. А. Веске должно давать несколько завышенные результаты.

Согласно граничным условиям Т. А. Веске вторичное магнитное поле в области $y > +a$ и $y < -a$ не проникает. Однако в реальных условиях в этих областях существует некоторое, хотя и относительно слабое, вторичное поле, которое является в сущности магнитным полем рассеяния вторичной цепи. Пренебрежение этим полем ведет к некоторому, видимо относительно небольшому, завышению напора.

Следует также отметить, что решение Т. А. Веске является более простым по форме, чем решение Н. М. Охременко. Это

обусловлено тем, что Т. А. Веске, аналогично работе автора настоящей статьи [2]; выражает величины вторичного поля через величины первичного поля, благодаря чему для вторичных величин получаются относительно простые выражения, тем более, что и первичное поле у Т. А. Веске имеет более простую структуру, чем у Н. М. Охременко. Решение Н. М. Охременко имеет значительно более сложный вид, так как он ищет результирующее магнитное поле, а это поле всегда является значительно более сложным, чем первичное и вторичное поля по отдельности. Кроме того, структура поля в решении Н. М. Охременко усложняется в результате своеобразия граничных условий на поверхностях $y = \pm a$.

Решение А. Я. Вилнитиса [13] относится к той же задаче, которую рассматривают Н. М. Охременко и Т. А. Веске, но А. Я. Вилнитис принимает, что проводящее тело (канал) ограниченной ширины располагается между бесконечно широкими сердечниками индуктора. Первичное поле при этом будет таким же, как у Т. А. Веске, однако вторичное поле получает возможность распространения так же в области $y > +a$ и $y < -a$ с магнитной проницаемостью $\mu \approx \mu_0$, как это имеет место в действительности. Решение при этом получается более сложным, чем у Т. А. Веске, но и более точным. Конечно, и при этом граничные условия на поверхностях $y = \pm a$ будут воспроизводиться не вполне точно, поскольку в действительности ширина индуктора не бесконечна. Но погрешность будет уже небольшой, так как для удовлетворительного соответствия реальных условий с расчетной моделью достаточно, чтобы первичное поле распространялось хотя бы на небольшое расстояние за пределы канала. Вследствие выпучивания первичного поля такие условия соблюдаются. Вторичное поле при $y > +a$ и $y < -a$ быстро убывает, и можно считать, что условия воспроизведения этого поля на поверхностях $y = \pm a$ также будут близки к действительности. Необходимо сравнить расчетные данные по формулам А. Я. Вилнитиса с расчетными данными других авторов и с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Вилнитис. Поперечный краевой эффект в плоских индукционных магнитогидродинамических машинах. Сб. «Движение проводящих тел в магнитном поле». Изд-во «Зинатне», Рига 1966.
2. А. И. Вольдек. Токи и усилия в слое жидкого металла плоских линейных индукционных насосов. Известия высших учебных заведений. Электромеханика, 1959, № 1.

3. А. И. Вольдек. Некоторые общие соотношения для линейных индукционных насосов. Труды Таллинского политехнического института, серия А, 1964, № 214.
4. Е. И. Тамм. Основы теории электричества, Изд-во «Наука», 1966.
5. А. И. Вольдек. Пульсирующие составляющие магнитного поля индукционных машин и насосов с разомкнутым магнитопроводом. Научные доклады Высшей школы — Электромеханика и автоматика, 1959, № 2.
6. А. И. Вольдек. Компенсация пульсирующего магнитного поля в асинхронных машинах и индукционных насосах с разомкнутым магнитопроводом. Электричество, 1965, № 4.
7. А. И. Вольдек. Продольный краевой эффект во вторичной цепи индукционных машин и насосов для жидких металлов с разомкнутым магнитопроводом. Известия высших учебных заведений — Электромеханика, 1960, № 3.
8. Н. М. Охременко. Магнитное поле плоского индукционного насоса. Электричество, 1964, № 8.
9. Н. М. Охременко. Исследование пространственного распределения магнитных полей и электромагнитных явлений в индукционных насосах. Магнитная гидродинамика, 1965, № 1.
10. Т. А. Веске. Решение уравнений магнитного поля плоской линейной индукционной машины с учетом вторичных поперечного и толщинного краевых эффектов. Магнитная гидродинамика, 1965, № 1.
11. А. К. Везе. К определению пондеромоторных сил, действующих на проводящую полосу конечной ширины в бегущем магнитном поле одностороннего индуктора. Магнитная гидродинамика, 1966, № 3.
12. Я. Я. Лиелпетер, Р. А. Петрович и Л. Я. Ульманис. О поперечном краевом эффекте в индукционных машинах. Пятое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Теория индукционных МГД машин I (препринты докладов), Рига 1966.
13. А. Я. Вилнитис. Проводящее тело прямоугольного сечения в зазоре между двумя бесконечными плоскими индукторами бегущего поля с синусоидальной поверхностной токовой нагрузкой. Пятое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Теория индукционных МГД машин III (препринты докладов), Рига 1966.

A. I. Voldek

About Solving of Some Problems About Electromagnetic Fields in Magnetohydrodynamic Induction Machines and Physical Models Relating to Them

Summary

In this article the critical analysis of the articles published by different authors in public scientific technical journals and collected works of the USSR is given, and dedicated to the analytic solution of the problems on the electromagnetic

processes in the active zone of the inductive magnitohydrodynamic machines. Nonconsiderations and final conditions of different authors corresponding to these conditions physical models, the grades of correspondence to them, real physical conditions, characteristics and amount of arising errors in solving are being analysed.

УДК 621.318.38

А. И. Вольдек

ПРОДОЛЬНЫЙ КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ ВО ВТОРИЧНОЙ ЦЕПИ ЛИНЕЙНЫХ ИНДУКЦИОННЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МАШИН

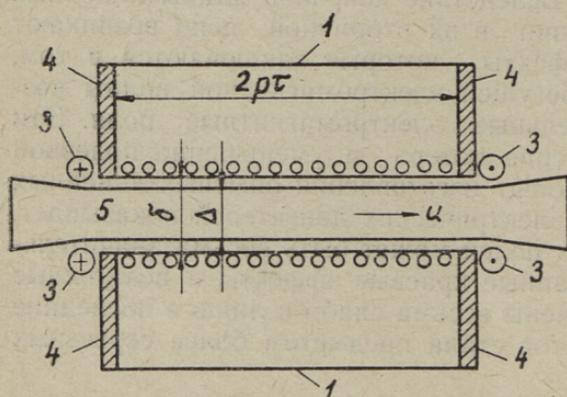
Постановка задачи. Вследствие конечной длины линейных индукционных МГД машин в их вторичной цепи возникают продольные краевые эффекты, которые заключаются в том, что кроме нормальной бегущей электромагнитной волны возникают также дополнительные электромагнитные поля. Эти поля вызывают увеличение потерь и уменьшение полезной мощности. Многолетний опыт изготовления опытных линейных и дуговых асинхронных электрических двигателей показывает, что вредное влияние этих полей может быть весьма значительным. Тем не менее указанные краевые эффекты и возможные меры их подавления изучены весьма слабо и лишь в последние годы теория этих эффектов стала предметом более серьезных исследований.

Первая работа в этой области была выполнена автором настоящей статьи [1]. Для упрощения задачи в этой работе было принято, что сердечники плоской линейной МГД машины простираются в обе стороны до бесконечности, а активная зона занимает участок конечной длины. Такое допущение принимается и авторами всех последующих работ. Кроме того, в [1] задача была сведена к одномерной и в результате указанных допущений было получено решение весьма простого вида. Однако в [1] была рассмотрена машина без компенсационных элементов и других средств подавления краевых эффектов, а анализа мощностей и потерь произведено не было. Поэтому была выявлена в основном лишь качественная картина явлений. Позднее было опубликовано ряд работ иностранных авторов.

Р. Н. Судан [2] рассматривал двухмерную задачу и получил решение в виде ряда. Им получены также выражения для

полезной и затраченной мощностей, которые оказались громоздкими и были проанализированы лишь качественно. Некоторые критические замечания о работе Р. Н. Судана сделаны в [3]. Рассматриваемая задача исследовалась также Дж. Фануки [4]. П. Пешка, С. Кальм и Ф. Энгельн [5] рассмотрели двухмерную задачу в полубесконечном генераторе, выход которой удален на бесконечность. Решение также получено в виде рядов и приведены результаты некоторых численных расчетов.

Анализ решений [2, 3, 4, 5] является весьма затруднительным. Кроме того в этих работах не исследуются возможные способы подавления краевых эффектов и их эффективность. Поэтому в настоящей работе ставится задача получения простых решений с учетом возможных способов ограничения краевых эффектов. Рассматриваемый при этом общий случай охватывает также задачу, рассмотренную в [1].

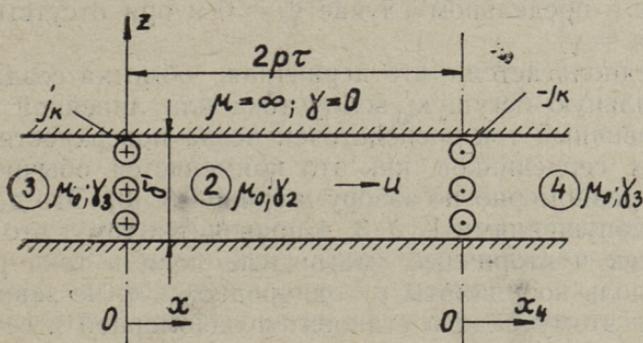


Фиг. 1. Схематическое устройство плоской линейной машины

На фиг. 1 представлен эскиз плоской линейной МГД машины, где: 1 — шихтованные ферромагнитные сердечники, 2 — многофазные обмотки, 3 — компенсационные элементы обмоток, 4 — короткозамкнутые витки или экраны, охватывающие сердечники, 5 — канал для жидкого металла.

Компенсационные элементы 3 предназначены для подавления пульсирующих полей, создаваемых обмотками 2 вследствие конечной длины машины [6, 7]. Влияние этих элементов на вторичные краевые эффекты еще не исследовалось и подлежит изучению. В общем случае можно установить также [6] экраны 4, которые способствуют подавлению полей краевых эффектов. Очевидно, что при четном числе полюсов $2r$ потокоцепление этих экранов с нормальным бегущим полем равно нулю и поэтому на это поле экраны влияния не оказывают.

В основу математического исследования электромагнитных процессов и краевых эффектов положим упрощенную модель машины, изображенную на фиг. 2. В этой модели приняты следующие упрощения:



Фиг. 2. Идеализированная расчетная схема плоской индукционной машины

1. Ферромагнитные сердечники с $\mu = \infty$ и $\gamma = 0$ простираются по направлению оси x в обе стороны до бесконечности.

2. Ширина машины в направлении оси y бесконечно велика, т. е. поперечные краевые эффекты не учитываются.

3. Сердечники лишены пазов, а их влияние учитывается увеличением зазора от величины δ до величины

$$\delta' = k_{\delta} k_{\mu} \delta,$$

где k_{δ} — известный в теории электрических машин коэффициент зазора и k_{μ} — коэффициент насыщения магнитной цепи, равный отношению полной намагничивающей силы магнитной цепи к намагничивающей силе зазора.

4. Неферромагнитный зазор величиной δ' полностью заполнен жидким металлом, который движется в направлении координаты x с однородной по всему сечению скоростью u . При этом вместо истинной электропроводности жидкого металла γ_m всюду надо пользоваться ее расчетной проводимостью

$$\gamma_2 = \frac{\gamma_m \Delta}{k_{\delta} k_{\mu} \delta}.$$

5. Допускается, что электропроводность жидкого металла во входной (3) и выходной (4) зонах γ_3 может отличаться от

ее значения в активной зоне γ_2 . Полагая $\gamma_3 \neq \gamma_2$, можно учесть влияние изоляционных перегородок, которые можно установить в жидком металле на входе и выходе с целью препятствовать протеканию токов в этих зонах и тем самым ограничить влияние краевых эффектов. В частности, при наличии перегородок в предельном случае $\gamma_3 = 0$ и при отсутствии перегородок $\gamma_3 = \gamma_2$.

6. Предполагается, что первичная обмотка создает чисто синусоидальную бегущую волну тока или линейной нагрузки и что первичный ток сосредоточен не на поверхностях ферромагнитных сердечников, как это применяется обычно, а распределен равномерно по зазору шириной δ' [8]. Это допущение вместе с допущениями 1, 2, 3, 4 приводит к тому, что как первичные, так и вторичные магнитные поля и токи распределяются вдоль координаты z однородно, т. е. не зависят от z . Благодаря этому задача становится одномерной и ее решение и анализ весьма сильно упрощаются. Вместе с тем реальные соотношения при этих допущениях существенным образом не нарушаются, так как обычно $\tau \gg \delta$ и толщина слоя жидкого металла меньше эквивалентной глубины проникновения, вследствие чего зависимость электромагнитных величин от координаты z на практике является слабой.

7. Токи компенсирующих элементов 3 обмотки индуктора и короткозамкнутых витков 4 распределены в виде слоев поверхностных токов на границах активной зоны с поверхностными плотностями j_k и $-j_k$ (см. фиг. 2). Это допущение является естественным следствием допущения 6 и имеет такое же значение.

Оси координат x, y, z жестко связаны с неподвижным индуктором, причем ось y направлена за плоскость чертежа фиг. 2. При принятых предположениях векторы векторного потенциала \bar{A} , напряженности электрического поля \bar{E} и плотности тока \bar{j} имеют только компоненты, направленные по оси y , а вектор \bar{B} — только компоненту, направленную по оси z .

В соответствии с изложенным плотность тока первичной обмотки в зазоре

$$j_1 = j_{1y} = I_{1m} \cos(\omega_1 t - \alpha x),$$

где угловая частота первичного тока

$$\omega_1 = 2\pi f_1$$

и

$$\alpha = \frac{\pi}{\tau}.$$

В дальнейшем перейдем к комплексным амплитудам электромагнитных величин и тогда комплексная амплитуда первичной плотности тока

$$\dot{J}_1 = J_{1m} e^{-i\alpha x} \quad (1)$$

причем

$$J_{1m} = \frac{\sqrt{2} A_{л1} K_{об1}}{\delta'} \quad (2)$$

где $A_{л1}$ — суммарная линейная токовая нагрузка первичной обмотки на обоих сердечниках индуктора, определяемая обычным в теории электрических машин образом, $k_{об1}$ — обмоточный коэффициент основной гармоники.

Комплексная амплитуда поверхностной плотности тока компенсационных элементов обмотки на границе зон 3 и 2 фиг. 2 согласно [7, 8],

$$\dot{J}_{кл} = -\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \dot{J}_1 dx.$$

Подставив сюда правую часть равенства (1), получим

$$\dot{J}_{кл} = \frac{iJ_{1m}}{\alpha} \quad (3)$$

На границе зон 2 и 4 комплексная амплитуда поверхностной плотности тока компенсационных элементов обмотки

$$\dot{J}_{кп} = -\dot{J}_{кл} \quad (4)$$

Общие выражения для векторного потенциала. Для расчета интересующих нас величин удобно пользоваться векторным потенциалом магнитного поля \bar{A} . Составим дифференциальное уравнение для \bar{A} , исходя из уравнений Максвелла.

Имеем

$$\text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \Delta \bar{A}.$$

Так как

$$\text{div } \bar{A} = 0$$

и

$$\text{rot rot } \bar{A} = \text{rot } \bar{B},$$

то

$$\Delta \bar{A} = -\mu_0 \text{rot } \bar{H}.$$

Далее,

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \bar{j}_1 = \delta [\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}] + \bar{j}_1,$$

где \bar{j}_1 — плотность тока первичной обмотки в зазоре, а \bar{j} — плотность вторичного тока в жидком металле.

Так как в рассматриваемом случае

$$\bar{u} = \bar{u}(u, 0, 0), \quad \bar{B} = \bar{B}(0, 0, B),$$

то $\bar{u} \times \bar{B}$ имеет только компоненту по оси y , равную $-uB$. Кроме того, как известно

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}.$$

Поэтому

$$\Delta A = \mu_0 \delta \frac{\partial A}{\partial t} + \mu_0 \delta u B - \mu_0 j_1.$$

Кроме того, в рассматриваемом случае

$$B = B_z = \operatorname{rot}_z \bar{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

или

$$B = \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Таким образом, уравнение для векторного потенциала имеет вид

$$\Delta A - \mu_0 \delta \frac{\partial A}{\partial t} - \mu_0 \delta u \frac{\partial A}{\partial x} = -\mu_0 j_1.$$

Величинам в зонах 2, 3 и 4 фиг. 2 будем приписывать соответственно индексы 2, 3, 4.

Перейдем к комплексной форме записи уравнений, полагая

$$A = \dot{A} e^{i\omega t}, \quad j_1 = J_{1m} e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

Тогда уравнение для суммарного векторного потенциала первичных и вторичных токов для зоны 2 приобретает вид:

$$\frac{d^2 \dot{A}_2}{dx^2} - i\omega \mu_0 \delta_2 \dot{A}_2 - \mu_0 \delta_2 u \frac{d\dot{A}_2}{dx} = -\mu_0 J_{1m} e^{-i\alpha x}, \quad (5)$$

В зонах 3 и 4 $j_1 = 0$ и поэтому

$$\frac{d^2 \dot{A}_3}{dx^2} - i\omega_1 \mu_0 \delta_3 \dot{A}_3 - \mu_0 \delta_3 U \frac{d \dot{A}_3}{dx} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \dot{A}_4}{dx^2} - i\omega_1 \mu_0 \delta_3 \dot{A}_4 - \mu_0 \delta_3 U \frac{d \dot{A}_4}{dx} = 0. \quad (7)$$

Решение неоднородного уравнения (5) состоит из частного решения \dot{A}_z , соответствующего правой части этого уравнения, и общего решения \dot{A}_k уравнения (5) с правой частью, равной нулю.

Частное решение \dot{A}_z представляет векторный потенциал нормального бегущего поля, существующего в бесконечно длинной машине. Оно должно зависеть от x таким же образом, как правая часть уравнения (5) и поэтому

$$\dot{A}_z = \dot{A}_m e^{-i\alpha x} \quad (8)$$

Подставив \dot{A}_z по (8) в (5) вместо \dot{A}_2 , для амплитуды векторного потенциала бегущего поля получим

$$\dot{A}_m = \frac{\mu_0 J_{1m}}{\alpha^2 (1 + i\varepsilon)}, \quad (9)$$

где
$$\varepsilon = \frac{\mu_0 \hat{\delta}_2 S \omega_1}{\alpha^2} = \frac{\mu_0 \hat{\delta}_\mu S \omega_1}{\alpha^2} \frac{\Delta}{K_\delta K_\mu \delta} \quad (10)$$

представляет собой магнитное число Рейнольдса. При этом

$$S = 1 - \frac{\alpha U}{\omega_1} = 1 - \frac{U}{2\tau f_1} \quad (11)$$

представляет скольжение жидкого металла относительно бегущего со скоростью $2\tau f_1$ магнитного поля.

Общее решение (5) имеет вид

$$\dot{A}_k = C_{21} e^{(\lambda_2 + \eta_2)x} + C_{22} e^{-(\lambda_2 - \eta_2)x}, \quad (12)$$

где C_{21} , C_{22} — постоянные интегрирования, а

$$\lambda_2^2 = \eta_2^2 + i\omega_1 \mu_0 \delta_2, \quad (13)$$

$$\eta_2 = \frac{\mu_0 \hat{\delta}_2 U}{2}. \quad (14)$$

Таким образом, полное решение (5)

$$\dot{A}_2 = \dot{A}_\delta + \dot{A}_\kappa = \dot{A}_m e^{-i\alpha x} + C_{21} e^{(\lambda_2 + \eta_2)x} + C_{22} e^{-(\lambda_2 - \eta_2)x} \quad (15)$$

Правильность решения (15) можно проверить подстановкой его в (5).

При $x = -\infty$ векторный потенциал \dot{A}_3 зоны 3 должен равняться нулю. Поэтому решение уравнения (6)

$$\dot{A}_3 = C_3 e^{(\lambda_3 + \eta_3)x}, \quad (16)$$

где C_3 — постоянная интегрирования, а

$$\lambda_3^2 = \eta_3^2 + i\omega_1 \mu_0 \delta_3, \quad (17)$$

$$\eta_3 = \frac{\mu_0 \delta_3 U}{2}. \quad (18)$$

При $x = \infty$ должно быть $\dot{A}_4 = 0$. Поэтому решение уравнения (7)

$$\dot{A}_4 = C'_4 e^{-(\lambda_3 - \eta_3)x}. \quad (19)$$

Для упрощения записей для зоны 4 вместо координаты x лучше рассматривать координату x_4 (фиг. 2), причем

$$x = 2\tau + x_4. \quad (20)$$

Тогда вместо (19) имеем

$$\dot{A}_4 = C_4 e^{-(\lambda_3 - \eta_3)x_4}, \quad (21)$$

где новая постоянная

$$C_4 = C'_4 e^{-(\lambda_3 - \eta_3)2\tau}. \quad (22)$$

Определение постоянных интегрирования. В общем случае согласно сказанному выше на границах зон 3, 2 и зон 2, 4 имеются поверхностные токи, соответствующие токам компенсирующих элементов обмотки и короткозамкнутого витка. Обозначим комплексную амплитуду суммарной поверхностной плотности этих токов на границе зон 3, 2 через \dot{I}_κ и на границе зон 2, 4 через — \dot{I}_κ .

Магнитные индукции имеют только составляющие по оси z . Составим для границ указанных зон выражения для поверхностного ротора магнитной индукции [9]. Тогда

$$\left. \begin{aligned} [\dot{B}_3]_{x=0} - [\dot{B}_2]_{x=0} &= \mu_0 \dot{J}_k, \\ [\dot{B}_2]_{x=2p\tau} - [\dot{B}_4]_{x_4=0} &= -\mu_0 \dot{J}_k. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Так как в нашем случае

$$\dot{B} = \frac{d\dot{A}}{dx},$$

то на основании (15), (16), (21) и (23)

$$(\lambda_3 + \eta_3) C_3 - [-i\alpha \dot{A}_m + (\lambda_2 + \eta_2) C_{21} - (\lambda_2 - \eta_2) C_{22}] = \mu_0 \dot{J}_k, \quad (24)$$

$$[-i\alpha \dot{A}_m + (\lambda_2 + \eta_2) C_{21} e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2p\tau} - (\lambda_2 - \eta_2) C_{22} e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2p\tau}] + (\lambda_3 - \eta_3) C_4 = -\mu_0 \dot{J}_k. \quad (25)$$

При этом принято во внимание, что

$$e^{-i\alpha 2p\tau} = e^{-i2\pi p} = 1,$$

так как p — целое число.

По обе стороны границ зон 2, 3 и 4 должны быть равны касательные составляющие напряженности электрического поля

$$\dot{E} = -i\omega_1 \dot{A},$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} [\dot{A}_3]_{x=0} &= [\dot{A}_2]_{x=0}, \\ [\dot{A}_2]_{x=2p\tau} &= [\dot{A}_4]_{x_4=0} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

На основании (15), (16), (21) и (26)

$$C_3 = \dot{A}_m + C_{21} + C_{22}, \quad (27)$$

$$\dot{A}_m + C_{21} e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2\rho\tau} + C_{22} e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2\rho\tau} = C_4 \quad (28)$$

Четыре уравнения граничных условий (24), (25), (27) и (28) позволяют определить четыре постоянных C_{21} , C_{22} , C_3 и C_4 . Решив эту систему уравнений, постоянные C_{21} и C_{22} можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} C_{21} &= \frac{D_{21\sigma}}{D} \dot{A}_m + \frac{D_{21i}}{D} \mu_0 j_k, \\ C_{22} &= \frac{D_{22\sigma}}{D} \dot{A}_m + \frac{D_{22i}}{D} \mu_0 j_k, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} D &= [(\lambda_2^2 - \eta_2^2) + 2(\lambda_2 \lambda_3 + \eta_2 \eta_3) + (\lambda_3^2 - \eta_3^2)] e^{\lambda_2 2\rho\tau} - \\ &- [(\lambda_2^2 - \eta_2^2) - 2(\lambda_2 \lambda_3 - \eta_2 \eta_3) + (\lambda_3^2 - \eta_3^2)] e^{-\lambda_2 2\rho\tau}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} D_{21\sigma} &= -(\lambda_3 - \eta_3 - i\alpha) [(\lambda_2 - \eta_2) + (\lambda_3 + \eta_3)] e^{-\eta_2 2\rho\tau} - \\ &- (\lambda_3 + \eta_3 + i\alpha) [(\lambda_2 - \eta_2) - (\lambda_3 - \eta_3)] e^{-\lambda_2 2\rho\tau}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} D_{21i} &= -[(\lambda_2 - \eta_2) + (\lambda_3 + \eta_3)] e^{-\eta_2 2\rho\tau} + \\ &+ [(\lambda_2 - \eta_2) - (\lambda_3 - \eta_3)] e^{-\lambda_2 2\rho\tau}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} D_{22\sigma} &= -(\lambda_3 + \eta_3 + i\alpha) [(\lambda_2 + \eta_2) + (\lambda_3 - \eta_3)] e^{\lambda_2 2\rho\tau} - \\ &- (\lambda_3 - \eta_3 - i\alpha) [(\lambda_2 + \eta_2) - (\lambda_3 + \eta_3)] e^{-\eta_2 2\rho\tau}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} D_{22i} &= [(\lambda_2 + \eta_2) + (\lambda_3 - \eta_3)] e^{\lambda_2 2\rho\tau} - \\ &- [(\lambda_2 + \eta_2) - (\lambda_3 + \eta_3)] e^{-\eta_2 2\rho\tau}. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичные выражения можно получить также для C_3 и C_4 , однако эти постоянные при известных C_{21} и C_{22} проще вычислять по (27) и (28).

Электромагнитная мощность. Напряженность электрического поля, индуцируемого результирующим магнитным полем в зоне 2, в которой согласно нашим представлениям «рассыпана» первичная обмотка, равна

$$\dot{E}_2 = -i\omega A_2. \quad (35)$$

Электромагнитная мощность, соответствующая элементарному объему первичной обмотки:

$$dP'_{эм} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{E}_2 \dot{J}_1^* \right] dx dy dz, \quad (36)$$

где \dot{J}_1^* — сопряженный комплекс плотности первичного тока \dot{J}_1 по (1).

Знак минус в (36) написан по следующим соображениям.

В теории асинхронных машин [10] электромагнитная мощность принимается положительной, когда она передается с первичной стороны на вторичную, что соответствует двигательному режиму работы. При этом активная составляющая первичного тока направлена против *э.д.с.*, индуцируемой общим магнитным полем, вследствие чего для получения положительного знака электромагнитной мощности произведение $\dot{E} \cdot \dot{I}^*$ для первичной обмотки нужно брать со знаком минус. В соответствии с этим в индукционных магнитогидродинамических машинах электромагнитную мощность мы также считаем положительной в двигательном режиме.

Определенная электромагнитная мощность в общем случае развивается также токами в компенсирующих элементах обмотки и в короткозамкнутом витке. Элемент этой мощности

$$dP''_{эм} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[\dot{E}_2 \right]_{x=0} \dot{J}_k - \left[\dot{E}_2 \right]_{x=2\pi\tau} \dot{J}_k^* \right\} dy dz. \quad (37)$$

Полную электромагнитную мощность получим, если проинтегрируем (36) по всей зоне 2, а (37) по всей граничной поверхности зон 2 и 3 и сложим результаты. Интегрирование по y и z при этом сводится к умножению на $2c\delta'$, где $2c$ — ширина машины в направлении координаты y . Таким образом, на основании (36) и (37) получим

$$P_{ЭМ} = P'_{ЭМ} + P''_{ЭМ} = \frac{1}{2} 2c\delta\omega_1 \operatorname{Re} i \left\{ \int_0^{2\rho\tau} \dot{A}_2 \dot{J}_1 dx + [\dot{A}_2]_{x=0} \dot{J}_k - [\dot{A}_2]_{x=2\rho\tau} \dot{J}_k \right\}.$$

Подставив сюда сопряженное значение \dot{I}_1 по (1) и \dot{A}_2 по (15), после выполнения интегрирования и некоторых преобразований получим

$$P_{ЭМ} = P_{ЭМО} + P_{ЭМК}, \quad (38)$$

где

$$P_{ЭМО} = \frac{1}{2} 2c\delta\omega_1 2\rho\tau \frac{\mu_0 J_{1m}^2}{\alpha^2} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \quad (39)$$

представляет нормальную электромагнитную мощность, которая развивается при отсутствии краевых эффектов, и

$$P_{ЭМК} = \frac{1}{2} 2c\delta\omega_1 \operatorname{Re} \left\{ i C_{21} \left[e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2\rho\tau} - 1 \right] \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha} - \dot{J}_k \right] + \right. \\ \left. + i C_{22} \left[1 - e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2\rho\tau} \right] \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} + \dot{J}_k \right] \right\} \quad (40)$$

представляет мощность, обусловленную краевыми эффектами.

Можно показать, что выражение для $P_{ЭМО}$ полностью соответствует электромагнитной мощности нормальной асинхронной машины [10, 11].

Электромагнитная сила. Электромагнитные силы, действующие на индуктор и жидкий металл, равны по величине и обратны по знаку. Нас интересует электромагнитная сила $F_{ЭМ}$, действующая на жидкий металл, однако проще вычислить силу, действующую на индуктор, и взять ее согласно сказанному с обратным знаком.

Элементарная сила, действующая на элемент объема первичной обмотки, расположенной согласно нашим представлениям в зазоре, равна

$$dF'_{ЭМ} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{B}_2 \dot{J}_1] dx dy dz \quad (41)$$

Элементарная сила, соответствующая токам компенсирующих элементов обмотки и короткозамкнутого витка:

$$dF''_{ЭМ} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ [\dot{B}_2]_{x=0} \dot{J}_k - [\dot{B}_2]_{x=2\rho\tau} \dot{J}_k \right\} dy dz. \quad (42)$$

Проинтегрируем (42) по всему объему зоны 2 и (42) по всей пограничной поверхности зон 2 и 3 и сложим результаты с обратным знаком. При этом сначала получим

$$F_{3M} = -(F'_{3M} + F''_{3M}) = -\frac{1}{2} 2c\delta' Re \left\{ \int_0^{2\rho\tau} \dot{B}_2 \dot{J}_1 dx + [\dot{B}_2]_{x=0} \dot{J}_x - [\dot{B}_2]_{x=2\rho\tau} \dot{J}_x \right\}.$$

Подставив сюда

$$\dot{B}_2 = \frac{dA_2}{dx}$$

по (15) и сопряженное значение \dot{J}_1 по (1), после интегрирования и некоторых преобразований получим

$$F_{3M} = F_{3M0} + F_{3MK}, \quad (43)$$

где

$$F_{3M0} = \frac{1}{2} 2c\delta' 2\rho\tau \frac{\mu_0 J_{1m}^2}{\alpha} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \quad (44)$$

представляет нормальную электромагнитную силу, которая развивается при отсутствии краевых эффектов, а

$$F_{3MK} = -\frac{1}{2} 2c\delta' Re \left\{ (\lambda_2 + \eta_2) C_{21} \left[e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2\rho\tau} - 1 \right] \cdot \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha} - \dot{J}_x \right] - (\lambda_2 - \eta_2) C_{22} \left[1 - e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2\rho\tau} \right] \cdot \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} + \dot{J}_x \right] \right\} \quad (45)$$

представляет электромагнитную силу, обусловленную краевыми эффектами.

Механическая мощность и электрические потери в жидком металле. Механическая мощность P_{Mx} , развиваемая электромагнитными силами в жидком металле, определяется равенством

$$P_{Mx} = u F_{3M} = 2\tau f_1 (1-s) F_{3M} = \frac{\omega_1}{\alpha} (1-s) F_{3M} \quad (46)$$

На основании (39), (44) и (46) механическая мощность при отсутствии краевых эффектов

$$P_{Mx0} = (1-s) P_{3M0} \quad (47)$$

Это соотношение известно из теории асинхронных машин [10].

Механическая мощность, обусловленная электромагнитной силой краевого эффекта:

$$P_{МХК} = \frac{\omega_1}{\alpha} (1-s) F_{ЭМК}. \quad (48)$$

Полная механическая мощность

$$P_{МХ} = P_{МХО} + P_{МХК}. \quad (49)$$

Электрические потери в жидком металле

$$P_{ЭЛ2} = P_{ЭМ} - P_{МХ} = P_{ЭМ} - \frac{\omega_1}{\alpha} (1-s) F_{ЭМ}. \quad (50)$$

Электрические потери при отсутствии краевых эффектов на основании (39), (44) и (50)

$$P_{ЭЛ20} = P_{ЭМ0} - \frac{\omega_1}{\alpha} (1-s) F_{ЭМ0} = s P_{ЭМ0}. \quad (51)$$

Это соотношение также известно из теории асинхронных машин.

Электрические потери, вызываемые краевыми эффектами:

$$P_{ЭЛ2К} = P_{ЭМК} - \frac{\omega_1}{\alpha} (1-s) F_{ЭМК}. \quad (52)$$

Полные электрические потери в жидком металле

$$P_{ЭЛ2} = P_{ЭЛ20} + P_{ЭЛ2К} \quad (53)$$

Случай сверхпроводящего короткозамкнутого витка. Если обмотка выполнена без компенсирующих элементов и короткозамкнутый виток отсутствует, то в выражениях (29), (40) и (45) надо положить $\dot{I}_k^* = 0$. Если компенсирующие элементы обмотки имеются, но короткозамкнутый виток отсутствует, то в указанных выражениях в соответствии с (3) надо положить

$$\dot{J}_k^* = \dot{J}_{кЛ} = \frac{-i J_{1m}}{\alpha}. \quad (54)$$

Интересен предельный случай, когда короткозамкнутый виток является сверхпроводящим, т. е. когда его активное сопротивление и индуктивное сопротивление рассеяния равны

нулю. В случае такого идеального короткозамкнутого витка сцепляющийся с ним магнитный поток активной зоны должен равняться нулю, т. е.

$$\Phi = 2c \int_0^{2p\tau} \dot{B}_2 dx = 2c \int_0^{2p\tau} \frac{d\dot{A}_2}{dx} dx = 2c \left\{ [\dot{A}_2]_{x=2p\tau} - [\dot{A}_2]_{x=0} \right\} = 0.$$

Подставив сюда \dot{A}_2 по (15), получим, что

$$C_{21} [e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2p\tau} - 1] = C_{22} [1 - e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2p\tau}]. \quad (55)$$

Подставив в (55) значение C_{21} и C_{22} по (29), найдем из получаемого при этом уравнения \dot{J}_k :

$$\dot{J}_k = - \frac{D_{21\sigma} [e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2p\tau} - 1] - D_{22\sigma} [1 - e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2p\tau}]}{D_{21i} [e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2p\tau} - 1] - D_{22i} [1 - e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2p\tau}]} \cdot \frac{A_m}{\mu_0}. \quad (56)$$

При отсутствии компенсирующих элементов обмотки \dot{J}_k есть ток короткозамкнутого витка. При наличии таких элементов ток в короткозамкнутом витке

$$\dot{J}_{k3} = \dot{J}_k - J_{kl},$$

где \dot{J}_{kl} определяется равенством (3).

Разделение \dot{J}_k на \dot{J}_{k3} и \dot{J}_{kl} в этой работе особого смысла не имеет.

Если подставить значение \dot{J}_k по (56) в (29), то для случая идеального короткозамкнутого витка получим

$$\begin{aligned} C_{21} &= -CA_m [1 - e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2p\tau}], \\ C_{22} &= -CA_m [e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2p\tau} - 1], \end{aligned} \quad (58)$$

где
$$C = \frac{1}{D} \cdot \frac{D_{21\sigma} D_{22i} - D_{22\sigma} D_{21i}}{D_{21i} [e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2p\tau} - 1] - D_{22i} [1 - e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2p\tau}]}.$$
 (59)

Подставив сюда значения равенств (30) — (34), после соответствующих преобразований получим

$$C = \frac{\lambda_3 e^{-\eta_2 2\rho\tau}}{(\lambda_2 + \lambda_3) e^{\lambda_2 2\rho\tau} + (\lambda_2 - \lambda_3) e^{-\lambda_2 2\rho\tau} - \lambda_2 (e^{\eta_2 2\rho\tau} + e^{-\eta_2 2\rho\tau})} \quad (60)$$

Подставив в (56) значения равенств (30—(34), получим

$$j_k = \frac{[(\lambda_2 \eta_3 + \lambda_3 \eta_2) + i\alpha(\lambda_2 + \lambda_3)] e^{\lambda_2 2\rho\tau} + [(\lambda_2 \eta_3 - \lambda_3 \eta_2) + i\alpha(\lambda_2 - \lambda_3)] e^{-\lambda_2 2\rho\tau} - \lambda_2 (\lambda_3 + \eta_3 + i\alpha) e^{\eta_2 2\rho\tau} + \lambda_2 (\lambda_3 - \eta_3 - i\alpha) e^{-\eta_2 2\rho\tau}}{(\lambda_2 + \lambda_3) e^{\lambda_2 2\rho\tau} + (\lambda_2 - \lambda_3) e^{-\lambda_2 2\rho\tau} - \lambda_2 (e^{\eta_2 2\rho\tau} + e^{-\eta_2 2\rho\tau})} \cdot \frac{\dot{A}_m}{\mu_0} \quad (61)$$

Для электромагнитной мощности краевого эффекта в рассматриваемом случае, при подстановке значений равенств (58) в (40), получим

$$P_{3MK} = -\frac{1}{2} 2c\delta' \omega_1 J_{1m} \operatorname{Re} \left\{ i \dot{A}_m C [e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2\rho\tau} - 1] \cdot [1 - e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2\rho\tau}] \cdot \left[\frac{1}{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} \right] \right\} \quad (62)$$

Для электромагнитной силы краевого эффекта на основании (45) и (58) получим

$$F_{3MK} = \frac{1}{2} 2c\delta' \operatorname{Re} \left\{ \dot{A}_m C [e^{(\lambda_2 + \eta_2) 2\rho\tau} - 1] \cdot [1 - e^{-(\lambda_2 - \eta_2) 2\rho\tau}] \cdot \left[(\lambda_2 + \eta_2) \left(\frac{J_{1m}}{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha} - \dot{J}_k \right) - (\lambda_2 - \eta_2) \left(\frac{J_{1m}}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} + \dot{J}_k \right) \right] \right\} \quad (63)$$

Если на входе и выходе канала в жидком металле установлены изоляционные перегородки и положить в пределе $\gamma_3 = 0$, то согласно (17) и (18) также $\lambda_3 = \eta_3 = 0$. В этом идеальном случае согласно (58) и (60)

$$C_{21} = C_{22} = 0.$$

Таким образом, при идеальном короткозамкнутом витке и идеальных перегородках на входе и выходе краевые эффекты полностью подавляются.

Если изоляционные перегородки отсутствуют, то $\gamma_3 = \gamma_2$ и $\lambda_3 = \lambda_2$. Тогда вместо (60) получим

$$C = \frac{e^{-\eta_2 2\rho\tau}}{2e^{\lambda_2 2\rho\tau} - (e^{\eta_2 2\rho\tau} + e^{-\eta_2 2\rho\tau})} \quad (64)$$

При $\gamma_3 = \lambda_3 = \eta_3 = 0$ согласно (61)

$$j_k = \frac{i\alpha \dot{A}_m}{\mu_0}, \quad (65)$$

а при $\gamma_3 = \gamma_2$ и $\lambda_3 = \lambda_2$, $\eta_3 = \eta_2$

$$j_k = \frac{2(\eta_2 + i\alpha)e^{\lambda_2 2\rho\tau} - (\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha)e^{\eta_2 2\rho\tau} + (\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha)e^{-\eta_2 2\rho\tau}}{2e^{\lambda_2 2\rho\tau} - (e^{\eta_2 2\rho\tau} + e^{-\eta_2 2\rho\tau})} \cdot \frac{\dot{A}_m}{\mu_0}. \quad (66)$$

Краевой эффект на входе. При конечной длине машины $2\rho\tau$ явления на входе и выходе взаимно влияют друг на друга. Для более четкого выявления особенностей краевых эффектов на входе и выходе целесообразно рассмотреть бесконечно длинную машину, когда указанное взаимное влияние отсутствует.

Начало координаты x на фиг. 2 и в последующих соотношениях было принято на входе в активную зону. Если поэтому положить на фиг. 2 и в этих соотношениях $2\rho\tau = \infty$, то выход из активной зоны будет удален на бесконечность и его влияние будет отсутствовать.

В соответствии со сказанным подставим в (29) значения равенств (30) — (34) и положим затем $2\rho\tau = \infty$. Тогда получим

$$C_{21} = 0 \quad (67)$$

и

$$C_{22} = \frac{[(\lambda_2 + \eta_2) + (\lambda_3 - \eta_3)] \cdot [(\lambda_3 + \eta_3 + i\alpha) \dot{A}_m - \mu_0 \dot{j}_k]}{(\lambda_2^2 - \eta_2^2) + 2(\lambda_3 \lambda_2 + \eta_3 \eta_2) + (\lambda_3^2 - \eta_3^2)} \quad (68)$$

Соответственно электромагнитная мощность краевого эффекта на входе согласно (40)

$$P_{3МК} = \frac{1}{2} 2c\delta'\omega_l \operatorname{Re} \left\{ i C_{22} \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} + \dot{j}_k \right] \right\}. \quad (69)$$

и электромагнитная сила краевого эффекта на входе согласно (45)

$$F_{эмк} = \frac{i}{2} 2c\delta' Re \left\{ (\lambda_2 - \eta_2) C_{22} \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} + \dot{j}_x \right] \right\}. \quad (70)$$

При идеальном сверхпроводящем короткозамкнутом витке на основании (58) и (60) при $2\rho\tau = \infty$ также

$$C_{2i} = 0, \quad (71)$$

и

$$C_{22} = \frac{\lambda_3 \dot{A}_m}{\lambda_2 + \lambda_3}. \quad (72)$$

В этом случае согласно (61)

$$\dot{j}_x = \frac{(\lambda_2 \eta_3 + \lambda_3 \eta_2) + i\alpha(\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\dot{A}_m}{\mu_0}. \quad (73)$$

При этом при переходе к пределу учтено, что

$$Re\lambda_2 > \eta_2$$

и поэтому

$$\left| e^{\eta_2 2\rho\tau} \cdot e^{\lambda_2 2\rho\tau} \right|_{2\rho\tau = \infty} = 0.$$

Краевой эффект на выходе. Перейдем теперь к выражению для векторного потенциала активной зоны \dot{A}_2 от координаты x к координате x_4 (см. фиг. 2), для чего сделаем в (15) подстановку

$$x = 2\rho\tau + x_4.$$

Тогда вместо (15) получим

$$A_2 = \mu_m e^{-i\alpha x_4} + C_{21\infty} e^{(\lambda_2 + \eta_2)x_4} + C_{22\infty} e^{-(\lambda_2 - \eta_2)x_4}, \quad (74)$$

где новые постоянные

$$\left. \begin{aligned} C_{21\infty} &= C_{21} e^{(\lambda_2 + \eta_2)2\rho\tau}, \\ C_{22\infty} &= C_{22} e^{-(\lambda_2 - \eta_2)2\rho\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Положим теперь $2\rho\tau = \infty$ и отнесем таким образом вход машины на фиг. 2 влево на бесконечность. В соответствии с этим подставим в (75) значения равенств (29)—(34) и перейдем затем к пределу $2\rho\tau = \infty$. Тогда получим

$$C_{21\infty} = - \frac{[(\lambda_2 - \eta_2) + (\lambda_3 + \eta_3)] \cdot [(\lambda_3 - \eta_3 - i\alpha) \dot{A}_m + \mu_0 \dot{J}_k]}{(\lambda_2^2 - \eta_2^2) + 2(\lambda_2 \lambda_3 + \eta_2 \eta_3) + (\lambda_3^2 - \eta_3^2)}, \quad (76)$$

$$C_{22\infty} = 0. \quad (77)$$

Соответственно этому электромагнитная мощность краевого эффекта на выходе согласно (40)

$$P_{\text{ЭМК}} = \frac{1}{2} 2c\delta' \omega_l \text{Re} \left\{ i C_{21\infty} \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha} - \dot{J}_k \right] \right\} \quad (78)$$

и электромагнитная сила краевого эффекта на выходе согласно (45)

$$F_{\text{ЭМК}} = - \frac{1}{2} 2c\delta' \text{Re} \left\{ (\lambda_2 + \eta_2) C_{21\infty} \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha} - \dot{J}_k \right] \right\} \quad (79)$$

При сверхпроводящем короткозамкнутом витке согласно (58), (60) и (75) имеем

$$C_{21\infty} = - \frac{\lambda_3 A_m}{\lambda_2 + \lambda_3}, \quad (80)$$

$$C_{22\infty} = 0. \quad (81)$$

Отметим, что выражения для векторного потенциала \dot{A}_2 при бесконечно длинной машине с постоянными (67), (68) в одном случае и с постоянными (76), (77) в другом случае мы получили бы также непосредственно, если бы рассматривали бесконечно длинные машины с входом и выходом по отдельности. При этом непосредственным образом можно было бы получить также выражения (69), (70) и (78), (79) для $P_{\text{ЭМК}}$ и $F_{\text{ЭМК}}$.

Можно было бы также поступить следующим образом: подставить в (40) и (45) значения C_{21} и C_{22} по (29)—(34) и перейти затем к пределу $2\rho\tau = \infty$. При этом для $P_{\text{ЭМК}}$ и $F_{\text{ЭМК}}$ получим выражения, представляющие собой суммы выражений соответственно (69), (78) и (70), (79), причем постоянные

опять будут выражаться равенствами (68) и (76). Таким образом, в этом случае $P_{\text{ЭМК}}$ и $F_{\text{ЭМК}}$ представляют собой суммы электромагнитных мощностей и сил на входе и выходе при $2\pi\tau = \infty$. Этот результат является, конечно, вполне естественным.

Выражение для \dot{J}_k бесконечно длинной машины получим, если разделим числитель и знаменатель (56) на $e^{\lambda_2 2\pi\tau}$ и положим затем $2\pi\tau = \infty$. При этом получим

$$\dot{j}_k = \frac{(\lambda_2 \eta_3 + \lambda_3 \eta_2) + i\alpha(\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\dot{A}_m}{\mu_0} \quad (82)$$

При $\gamma_3 = \lambda_3 = \eta_3 = 0$ соответственно

$$\dot{j}_k = \frac{i\alpha \dot{A}_m}{\mu_0} \quad (83)$$

что совпадает с (65), а при $\lambda_3 = \lambda_2$ и $\eta_3 = \eta_2$.

$$\dot{j}_k = \frac{(\eta_2 + i\alpha) \dot{A}_m}{\mu_0} = \frac{(\eta_2 + i\alpha) J_{1m}}{\alpha^2(1+i\varepsilon)} \quad (84)$$

В случае идеального холостого хода $s = 0$ и $\varepsilon = 0$ и тогда согласно (9)

$$\dot{A}_m = \frac{\mu_0 J_{1m}}{\alpha^2}$$

В этом случае согласно (83)

$$\dot{j}_k = \frac{i J_{1m}}{\alpha} \quad (85)$$

что согласно (3) равно поверхностной плотности тока компенсационных элементов обмотки. Такой же результат получим по (84) для случая, когда жидкий металл отсутствует ($\gamma_2 = \eta_2 = 0$).

Эти результаты естественны, так как при отсутствии токов во вторичных средах в идеальном короткозамкнутом витке и компенсирующих элементах обмотки должны протекать суммарные токи, компенсирующие пульсирующее поле первичной обмотки. Величина этих токов согласно изложенному как раз и равна $\dot{J}_k = \dot{J}_{\text{к.л}}$ по (3) и (85).

При идеальном короткозамкнутом витке в (69), (70), (78) и (79) нужно подставлять \dot{J}_k по (82) или по (83), (84).

Относительные электромагнитные мощности и силы бесконечно длинной машины на входе и выходе. При количественном анализе влияния краевых эффектов целесообразно вычислять не абсолютные значения $P_{\text{ЭМК}}$ и $F_{\text{ЭМК}}$, а их относительные значения. Для этого разделим выражения для $P_{\text{ЭМК}}$ и $F_{\text{ЭМК}}$ соответственно на значения $P_{\text{ЭМО}}$ и $F_{\text{ЭМО}}$ по (39) и (44) при $p = 1$, т. е. на значения $P_{\text{ЭМО}}$ и $F_{\text{ЭМО}}$ на одну пару полюсов.

Вычислим сначала относительное значение $P_{\text{ЭМК}}$ на входе

$$P_{\text{ЭМК}}^* = \frac{P_{\text{ЭМК}}}{[P_{\text{ЭМО}}]_{p=1}}$$

по (39) и (69). При этом получим

$$\begin{aligned} P_{\text{ЭМК}}^* &= \frac{\alpha^2(1+\varepsilon^2)}{2\tau\mu_0 J_{1m}^2 \varepsilon} \operatorname{Re} \left\{ i C_{22} \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} + J_k^* \right] \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{i C_{22}}{A_m} \cdot \frac{\mu_0 J_{1m}}{\alpha^2(1+i\varepsilon)} \cdot \frac{\alpha^2(1+\varepsilon^2)}{2\tau\mu_0 J_{1m}^2 \varepsilon} \cdot \left[\frac{J_{1m}}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} + J_k^* \right] \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+i\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{C_{22}}{A_m} \left[\frac{1}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} + \frac{J_k^*}{J_{1m}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (86)$$

Аналогичным образом относительное значение $F_{\text{ЭМК}}$ на входе по (44) и (70)

$$F_{\text{ЭМК}}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1-i\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 - \eta_2) C_{22}}{A_m} \left[\frac{1}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} + \frac{J_k^*}{J_{1m}} \right] \right\}. \quad (87)$$

Подобным же образом можно получить выражения для $P_{\text{ЭМК}}^*$ и $F_{\text{ЭМК}}^*$ на выходе:

$$P_{\text{ЭМК}}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varepsilon+i}{2\tau\varepsilon} \cdot \frac{C_{21\infty}}{A_m} \left[\frac{1}{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha} - \frac{J_k^*}{J_{1m}} \right] \right\}, \quad (88)$$

$$F_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1-i\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 + \eta_2) C_{21\infty}}{A_m} \left[\frac{1}{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha} - \frac{J_k^*}{J_{1m}} \right] \right\} \quad (89)$$

По (86) — (89) получим выражения для этих величин для разных частных случаев, которые выписываются ниже.

Некомпенсированная обмотка, без перегоронок в канале и без короткозамкнутого витка. В этом случае $\lambda_3 = \lambda_2$, $\eta_3 = \eta_2$, $\dot{J}_k = 0$ и по (68), (76) и (86) — (89) получим: на входе

$$P_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varepsilon + i}{2\tau\varepsilon} \cdot \frac{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha}{2\lambda_2(\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha)} \right\}, \quad (90)$$

$$F_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - i\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 - \eta_2)(\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha)}{2\lambda_2(\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha)} \right\}; \quad (91)$$

на выходе

$$P_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varepsilon + i}{2\tau\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha)}{2\lambda_2(\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha)} \right\}, \quad (92)$$

$$F_{\text{ЭМК}}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - i\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 + \eta_2)(\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha)}{2\lambda_2(\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha)} \right\}, \quad (93)$$

Некомпенсированная обмотка, без короткозамкнутого витка, с перегорodkaми в канале. В этом случае $\lambda_3 = \eta_3 = 0$ и $\dot{J}_k = 0$ и по (68), (76) и (86) — (89) получим: на входе

$$P_{\text{ЭМК}}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - i\varepsilon}{2\tau\varepsilon} \cdot \frac{\alpha}{(\lambda_2 - \eta_2)(\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha)} \right\}, \quad (94)$$

$$F_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varepsilon + i}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{\alpha}{\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha} \right\}; \quad (95)$$

на выходе

$$P_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - i\varepsilon}{2\tau\varepsilon} \cdot \frac{\alpha}{(\lambda_2 + \eta_2)(\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha)} \right\} \quad (96)$$

$$F_{3MK}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varepsilon + i}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{\alpha}{\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha} \right\}. \quad (97)$$

Компенсированная обмотка, без короткозамкнутого витка и без перегородок в канале. В этом случае $\lambda_3 = \lambda_2$, $\eta_3 = \eta_2$ и согласно (3)

$$J_K^* = \frac{-iJ_{1m}}{\alpha}.$$

Соответственно этому по (68), (76) и (86)—(89) получим:

на входе

$$P_{3MK}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1-i\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 - \eta_2)(\lambda_2 + \eta_2 + \alpha\varepsilon)}{2\lambda_2(\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha)} \right\}, \quad (98)$$

$$F_{3MK}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varepsilon + i}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 - \eta_2)^2(\lambda_2 + \eta_2 + \alpha\varepsilon)}{2\alpha\lambda_2(\lambda_2 - \eta_2 - i\alpha)} \right\}. \quad (99)$$

на выходе

$$P_{3MK}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1-i\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 + \eta_2)(\lambda_2 - \eta_2 - \alpha\varepsilon)}{2\lambda_2(\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha)} \right\}, \quad (100)$$

$$F_{3MK}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varepsilon + i}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 + \eta_2)^2(\lambda_2 - \eta_2 - \alpha\varepsilon)}{2\alpha\lambda_2(\lambda_2 + \eta_2 + i\alpha)} \right\}. \quad (101)$$

Компенсационная обмотка, без короткозамкнутого витка, с перегородками в канале. В этом случае $\lambda_3 = \eta_3 = 0$,

$$J_K^* = -\frac{iJ_{1m}}{\alpha}$$

и согласно (68), (76) и (86)—(89) имеем:

на входе

$$P_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1-i\varepsilon}{2\tau(\lambda_2-\eta_2-i\alpha)} \right\}, \quad (102)$$

$$F_{\text{ЭМК}}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varepsilon+i}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_2-\eta_2}{\lambda_2-\eta_2-i\alpha} \right\}; \quad (103)$$

на выходе

$$P_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1-i\varepsilon}{2\tau(\lambda_2+\eta_2+i\alpha)} \right\}, \quad (104)$$

$$F_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varepsilon+i}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_2+\eta_2}{\lambda_2+\eta_2+i\alpha} \right\}. \quad (105)$$

Идеальный короткозамкнутый виток без перегородок в канале. В этом случае $\lambda_3 = \lambda_2$, $\eta_3 = \eta_2$, а J_K определяется равенством (84). Соответственно этому на основании (72), (80) и (86) — (89) получим:

на входе

$$P_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2-\eta_2)\eta_2 - i\alpha\lambda_2 - i\alpha^2\varepsilon}{\alpha(\lambda_2-\eta_2-i\alpha)} \right\}, \quad (106)$$

$$F_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2-\eta_2)[(\lambda_2-\eta_2)\eta_2 - i\alpha\lambda_2 - i\alpha^2\varepsilon]}{\alpha^2(\lambda_2-\eta_2-i\alpha)} \right\}; \quad (107)$$

на выходе

$$P_{\text{ЭМК}}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2+\eta_2)\eta_2 - i\alpha\lambda_2 + i\alpha^2\varepsilon}{\alpha(\lambda_2+\eta_2+i\alpha)} \right\}, \quad (108)$$

$$F_{\text{ЭМК}}^* = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2+\eta_2)[(\lambda_2+\eta_2)\eta_2 - i\alpha\lambda_2 + i\alpha^2\varepsilon]}{\alpha^2(\lambda_2+\eta_2+i\alpha)} \right\}. \quad (109)$$

В случае идеального короткозамкнутого витка и наличия перегородок, как уже указывалось, $C_{22} = C_{21\infty} = 0$ и поэтому также

$$P_{\text{эмк}}^* = F_{\text{эмк}}^* = 0.$$

Идеальные компенсирующие элементы обмотки. Выше было установлено, что если в канале за пределами активной зоны установлены идеальные изоляционные перегородки и сердечник охвачен идеальным сверхпроводящим короткозамкнутым витком, то краевые эффекты полностью подавляются. Очевидно, что если при этих условиях короткозамкнутый виток заменить компенсирующими элементами, которые расположены на концах активной зоны сердечника, и несут токи, равные току указанного короткозамкнутого витка, то также достигается полное подавление краевых эффектов. Рассмотрим, каковы должны быть токи этих компенсирующих элементов обмотки.

Поверхностная плотность тока идеального сверхпроводящего короткозамкнутого витка определяется равенством (61). При идеальных изоляционных перегородках $\lambda_3 = \eta_3 = 0$ и тогда вместо (61) получим

$$j_k = \frac{i\alpha \dot{A}_m}{\mu_0}, \quad (110)$$

или на основании (9)

$$j_k = \frac{iJ_{1m}}{\alpha(1+i\varepsilon)}. \quad (111)$$

Объемная плотность результирующего первичного и вторичного тока в активной зоне зазора

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B}_2 = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \text{rot} \dot{A}_2. \quad (112)$$

В рассматриваемом случае, при полном подавлении краевых эффектов $\dot{A}_2 = \dot{A}_0$ и поэтому согласно (8), (9) и (12)

$$j = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 \dot{A}_0}{\partial x^2} = \frac{\alpha^2 \dot{A}_m}{\mu_0} e^{-i\alpha x} = \frac{J_{1m}}{1+i\varepsilon} e^{-i\alpha x}. \quad (113)$$

Согласно (1) и (113) объемная плотность вторичного тока

$$\dot{j}_2 = \dot{j} - \dot{j}_1 = -\frac{i\varepsilon}{1+i\varepsilon} J_{1m} e^{-i\alpha x}. \quad (114)$$

При холостом ходе или при отсутствии вторичной среды продольный краевой эффект полностью подавляется и поэтому пульсирующие поля отсутствуют, когда [6, 7, 8] компенсирующие элементы обмотки несут токи, равные с обратным знаком половине суммарного тока первичной обмотки на протяжении полюсного деления, прилегающего к краю активной зоны индуктора. Естественно поэтому, что при нагрузке, когда существуют как первичные так и вторичные токи, пульсирующее поле, создаваемое бегущими волнами первичного и вторичного тока, будет отсутствовать при том условии, если ток компенсирующего элемента равен по величине и обратен по знаку половине суммарного первичного и вторичного тока на протяжении того же полюсного деления. Поэтому на основании (113) поверхностная плотность тока такого компенсационного элемента

$$\dot{j}_{кз} = -\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \dot{j} dx = \frac{iJ_{1m}}{\alpha(1+i\varepsilon)}. \quad (115)$$

Выражение (115) совпадает с (111). Отсюда следует, что компенсационные элементы с таким током эквивалентны действию идеального сверхпроводящего короткозамкнутого витка при наличии идеальных изолирующих перегородок. Следовательно, при наличии таких перегородок для полного подавления продольных краевых эффектов достаточно создать условия для подавления пульсирующего поля, создаваемого первичным и вторичным бегущими волнами тока. Вопросы изготовления и схемы питания таких компенсирующих элементов обмотки здесь не рассматриваются.

В случае полубесконечных длинных машин величины токов идеальных компенсирующих элементов \dot{J}_k найдем, если положим C_{22} и $C_{21\infty}$ по (68) и (76) равными нулю. Другую пару значений этих токов можно найти, если положить по (69) и (78) или по (70) и (79) $P_{эмк} = F_{эмк} = 0$.

Для машины конечной длины токи идеальных компенсирующих элементов (на входе $\dot{J}_л$ и на выходе $\dot{J}_к$) найдем если заменим $\dot{J}_к$ в (24) на $\dot{J}_л$ и в (25) на $\dot{J}_п$, определим затем вместо (29) новые постоянные C_{21} и C_{22} и приравняем их нулю.

Поскольку в рассматриваемых условиях за пределами активной зоны электромагнитного поля нет, то безразлично, имеют ли сердечники конечную или бесконечную длину.

Расчетные и экспериментальные данные по рассмотренным выше вопросам предполагается опубликовать отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Вольдек. Продольный краевой эффект во вторичной цепи индукционных машин и насосов для жидких металлов с разомкнутым магнитопроводом. Известия ВУЗов. Электромеханика, 1960, № 3.
2. R. N. Sudan. Interaction of a conducting fluid stream with a traveling wave of magnetic field of finite extension. Journal of applied Physics, 1963, v. 34. Nr. 3.
3. Я. Я. Валдманис. Продольный краевой эффект в линейных индукционных машинах. Сб. Движение проводящих тел в магнитном поле. Изд-во «Зинатне», Рига 1966.
4. Дж. Фанукки. Теория МГД генераторов переменного тока. Сб. Магнитогидродинамические генераторы электрической энергии. Изд-во ВИНТИ, Москва 1963.
5. В. Пешка, С. Кельм, Ф. Энгельн. Концевой эффект в полу-бесконечном индукционном генераторе. Сб. МГД — магнитогидродинамические преобразователи энергии, ч. 1. Изд-во ВИНТИ, Москва 1966.
6. А. И. Вольдек. Пульсирующие составляющие магнитного поля индукционных машин и насосов с разомкнутым магнитопроводом. Научные доклады высшей школы — Электромеханика и автоматика, 1959, № 2.
7. А. И. Вольдек. Компенсация пульсирующего магнитного поля в асинхронных машинах и индукционных насосах с разомкнутым магнитопроводом. Электричество, 1965, № 4.
8. А. И. Вольдек. О некоторых решениях задач об электромагнитных полях в индукционных магнитогидродинамических машинах и соответствующих им физических моделях. См. наст. сборник, стр. 3.
9. И. Е. Тамм. Основы теории электричества. ГИТТИ, 1956.
10. А. И. Вольдек. Электрические машины. Изд-во «Энергия», 1967.
11. А. И. Вольдек. Зависимость технико-экономических показателей индукционных магнитогидродинамических машин от магнитного числа Рейнольдса. Электричество, 1967, № 2.

Lengthwise Edge Effect in the Secondary System of the Linear Induction Magnetohydrodynamic Machines

Summary

The flat machine with endless cores and with the winding on $2p$ poles laid on the limited part of the core is put under consideration. The variety of cases with the compensation elements of winding, with the ideal short-circuited turn round the active zone of the core and with the insulating sheets in the canal behind the active zone is put under consideration.

It is accepted that the currents of the primary winding, compensation elements and the short-circuited turn are spread uniformly along the thickness of the gap. Owing to that the mathematic expressions have been simplified and expressed by the final form, but not in the form of the series. The expressions for vector potential, electromagnetic power, electromagnetic forces, mechanical power and losses have been received.

The conditions when the edge effects are entirely absent are identified.

УДК 621.313.333.012.6.001.8:669.002.71—154

Э. М. Ристхейн

**О МЕТОДИКЕ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ИНДУКЦИОННЫХ
УСТРОЙСТВАХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ**

Многие индукционные устройства перемещения жидких металлов — индукционные насосы, дозаторы, желоба, перемешиватели, вращатели и т. д. — уже внедряются в черную и цветную металлургию. Поэтому возникает необходимость более глубокого изучения их эксплуатационных свойств. В частности, может оказаться необходимой как качественная, так и количественная оценка *переходных процессов*, возникающих при включении в сеть вышеупомянутых устройств, а также при различных переключениях, производимых для регулирования их напора или производительности. Особенно большое значение имеют эти вопросы при проектировании и эксплуатации устройств, работающих исключительно в переходных режимах (дозаторов малых количеств жидкого металла, устройств, основанных на пинч-эффекте и др.).

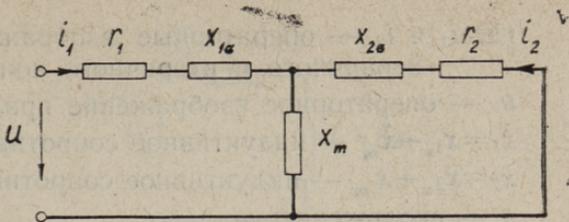
Переходные процессы в индукционных устройствах перемещения жидких металлов являются совокупностью многих переходных физических явлений, из которых наиболее важными можно считать гидравлические, тепловые и электромагнитные. Перечисленные отдельные переходные явления имеют обычно настолько различную длительность, что оказывается возможным рассматривать их отдельно, вне связи между собой. Это относится, прежде всего, к тепловым переходным явлениям, длительность которых исчисляется обычно минутами или десятками минут. Длительность гидравлических переходных явлений составляет обычно несколько секунд, длительность же электромагнитных явлений — несколько десятых или сотых долей секунды. Изучение переходных явлений целесообразно начать с самых быстротекущих — с электромагнитных; именно этому и посвящена настоящая статья.

Электромагнитные переходные явления в индукционных машинах обычного типа (главным образом, в асинхронных двигателях) изучены к настоящему времени довольно подробно, а результаты исследования приведены во многих монографиях, напр. [1, 2]. При анализе переходных процессов, в случае отсутствия во вторичной системе источников *э.д.с.*, все авторы пользуются схемой замещения, изображенной на фиг. 1. В ней учтены как активные, так и реактивные сопротивления первичного и вторичного контуров машины, за исключением сопротивлений, характеризующих потери в стали и емкость обмоток. Погрешность результатов расчета, обусловленная пренебрежением малозначительными сопротивлениями, не превышает обычно 0,5... 2%. В индукционных устройствах перемещения жидких металлов вторичная система, как правило, немагнитна, вследствие чего погрешность от пренебрежения потерями в в стали еще меньше. Погрешность от пренебрежения емкостью обмоток также меньше, чем в обычных асинхронных машинах, так как толщина изоляции из-за высокой рабочей температуры обмоток обычно больше. Поэтому рассмотренные допущения и в нашем случае вполне приемлемы. Исключения могут составлять лишь устройства с ленточными обмотками, емкость которых нуждается в более подробном изучении.

Гораздо более существенным источником погрешностей при аналитическом исследовании электромагнитных переходных процессов асинхронных машин является допущение *линейности* машины (независимости параметров от тока). На практике во многих случаях это приводит к недопустимым погрешностям и заставляет прибегать к более сложному расчету. В индукционных устройствах перемещения жидких металлов воздушные (немагнитные) зазоры во много раз больше, чем в обыкновенных асинхронных машинах (порядка 10...50 мм и более). Поэтому наличие ферромагнитных участков магнитной цепи не приводит к существенным отклонениям от линейности, а вызванная этим погрешность никогда не превышает 2...5%. что в нашем случае всегда приемлемо.

В некоторых индукционных устройствах перемещения жидких металлов (напр., в трехфазных линейных индукционных насосах, желобах и перемешивателях) имеют большое значение *продольные краевые эффекты* и вызванная ими фазовая несимметрия. Влияние такой несимметрии на электромагнитные переходные явления — предмет специального изучения и выходит за рамки настоящей статьи. Поэтому в дальнейшем мы исходим из предположения, что продольные краевые эффекты либо отсутствуют, либо практически не влияют на рассматриваемые переходные явления.

Фиг. 1. Классическая схема замещения короткозамкнутой индукционной машины при изучении электромагнитных переходных явлений

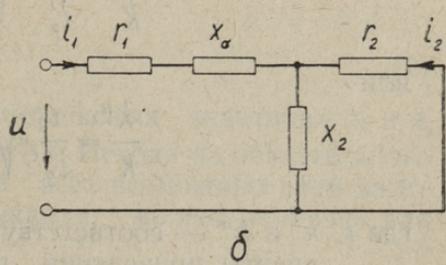
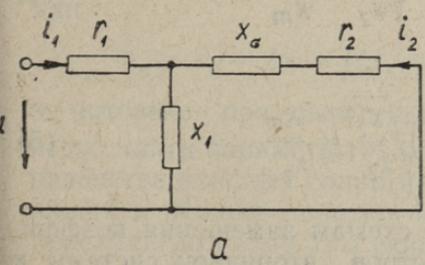


В обычной схеме замещения индукционной машины (фиг. 1) рассеяние первичной и вторичной обмоток учитывается отдельными индуктивными сопротивлениями $x_{1\sigma}$ и $x_{2\sigma}$, что согласуется с физическим представлением о распределении потоков рассеяния в машине. Однако, как показано в [3], в случае линейной задачи, можно заменить сопротивления $x_{1\sigma}$ и $x_{2\sigma}$ одним сопротивлением x_{σ} , изменяя при этом в определенной степени коэффициент приведения параметров вторичной системы к первичной. В результате такого приема количество параметров схемы замещения снижается с пяти до четырех, чем существенно облегчается задача их экспериментального определения. Возможные новые схемы приведены на фиг. 2.

Система операторных векторных уравнений эквивалентной двухфазной машины в движущихся с синхронной скоростью координатах, применяемая для анализа электромагнитных переходных явлений, пишется, в соответствии со схемами замещения, в одном из следующих видов:

а) для схемы фиг. 1

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + (p+j)(x_1 i_1 + x_m i_2) &= u, \\ r_2 i_2 + (p+j's)(x_2 i_2 + x_m i_1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Фиг. 2. Схемы замещения короткозамкнутых индукционных машин в случае отказа от разделения индуктивности рассеяния. а — сопротивление рассеяния отнесено ко вторичному контуру; б — сопротивление рассеяния отнесено к первичному контуру

где i_1 и i_2 — операторные изображения токов соответственно первичного и вторичного контуров;

u — операторное изображение приложенного напряжения;

$x_1 = x_{1\sigma} + x_m$ — индуктивное сопротивление первичного контура;

$x_2 = x_{2\sigma} + x_m$ — индуктивное сопротивление вторичного контура;

s — скольжение;

б) для схемы фиг. 2, а

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + x_1(p+j)(i_1 + i_2) &= u, \\ r_2 i_2 + (p+j)s(x_2' i_2 + x_1 i_1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где i_2' — измененное в связи с изменением схемы изображение тока вторичного контура;

$x_2' = x_{\sigma}' + x_1$ — новое значение индуктивного сопротивления вторичного контура (см. формулу (4));

в) для схемы фиг. 2, б

$$\left. \begin{aligned} r_1 i + (p+j)(x_1 i + x_2'' i_2'') &= u, \\ r_2 i_2'' + x_2''(p+j)s(i + i_2'') &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где i_2'' — новое значение изображения тока вторичного контура;

$x_2'' = x_1 - x_{\sigma}''$ — новое значение индуктивного сопротивления вторичного контура (см. формулу (5));

Переход от первой схемы замещения ко второй или третьей осуществляется соответственно соотношениями

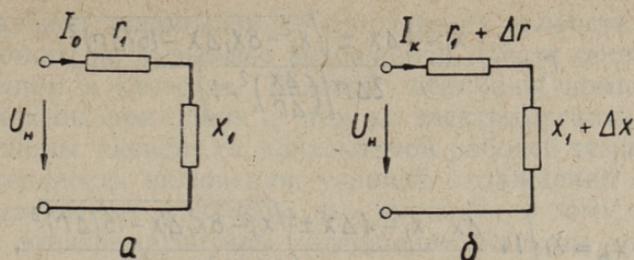
$$\frac{k'}{k} = \frac{i_2}{i_2'} = \sqrt{\frac{r_2'}{r_2}} = \sqrt{\frac{x_2'}{x_2}} = \frac{x_1}{x_m} \quad (4)$$

или

$$\frac{k''}{k} = \frac{i_2}{i_2''} = \sqrt{\frac{r_2''}{r_2}} = \sqrt{\frac{x_2''}{x_2}} = \frac{x_m}{x_2} \quad (5)$$

где k , k' и k'' — соответствующие схемам замещения коэффициенты приведения параметров вторичной системы к первичной.

Трудоемкость расчета переходных процессов при любой из трех схем замещения практически одинакова [3], и с этой точки



Фиг. 3. Одноконтурные схемы замещения индукционных средств перемещения жидких металлов. *а* — при отсутствии вторичной системы; *б* — при наличии неподвижной вторичной системы

зрения схемы не имеют преимуществ друг перед другом. Не отличаются схемы друг от друга и по трудоемкости теоретического расчета параметров. Поэтому при выборе схемы замещения следует исходить из удобства *экспериментального* определения ее параметров.

Параметры индукционных устройств перемещения жидких металлов определяются, как известно, двумя опытами: опытом *холостого хода* (при отсутствии вторичной системы) и опытом *короткого замыкания* (при неподвижной вторичной системе). Так как до настоящего времени всесторонне исследовались только установившиеся режимы рассматриваемых устройств, то вторичная система, для простоты, учитывалась в схеме замещения не в виде дополнительного контура, как это сделано в схемах фиг. 1 и 2, а при помощи *вносимых* сопротивлений Δr и Δx [4] (см. фиг. 3). Полное сопротивление машины в режиме холостого хода или короткого замыкания представлялось соответственно формулами

$$z_0 = r_1 + jx_1 \quad (6)$$

или

$$z_k = r_1 + \Delta r + j(x_1 + \Delta x), \quad (7)$$

из которых, при известных комплексных значениях z_0 и z_k , легко найти параметры r_1 , x_1 , Δr и Δx . Исходя из обязательного равенства входных сопротивлений всех возможных схем замещения в режиме короткого замыкания, можно получить для перехода на схему 2, *а* формулы¹

¹ Верхние индексы, применяемые в формулах (2)...(5) для подчеркивания неравенства числовых значений параметров различных схем замещения, в дальнейшем опускаются.

$$r_2 = x_1 \frac{x_1 - 4\Delta x \pm \sqrt{x_1^2 - 8x_1\Delta x - 16(\Delta r)^2}}{2\Delta r \left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta r} \right)^2 + 1 \right]} \quad (8)$$

и

$$x_b = x_1 \left\{ 1 + \frac{\Delta x}{\Delta r} \frac{x_1 - 4\Delta x \pm \sqrt{x_1^2 - 8x_1\Delta x - 16(\Delta r)^2}}{2\Delta r \left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta r} \right)^2 + 1 \right]} \right\} \quad (9)$$

а для перехода на схему 2, б — формулы

$$r_2 = \Delta r \left[\left(\frac{\Delta r}{\Delta x} \right)^2 + 1 \right] \quad (10)$$

$$x_2 = -\Delta x \left[\left(\frac{\Delta r}{\Delta x} \right)^2 + 1 \right] \quad (11)$$

и

$$x_\sigma = x_1 - x_2 \quad (12)$$

Переход со схемы 3, б на схему 1, не имея дополнительных данных по распределению потоков рассеяния, невозможен, так как двух комплексных или 4 вещественных уравнений, полученных на основании опытов холостого хода и короткого замыкания (формулы (6) и (7)), недостаточно для определения 5 независимых друг от друга параметров.

Учитывая явно меньшую трудоемкость формул (10)...(12) по сравнению с формулами (8) и (9), следует рекомендовать для дальнейшего пользования схему, изображенную на фиг. 2, б. Возможно, что эта схема окажется целесообразной также при исследовании переходных процессов обыкновенных асинхронных машин.

При расчете электромагнитных переходных процессов принято пользоваться не абсолютными значениями вычисляемых электрических и механических величин, а относительными, представляющими отношения вышеназванных величин к определенным базовым величинам. При выборе системы базовых величин только 3 из них можно взять произвольно, независимо друг от друга; этими величинами, в практике расчета переходных процессов асинхронных машин, являются обычно номинальное фазное напряжение, номинальный фазный ток и номинальная скорость движения магнитного поля первичной системы (синхронная скорость).

Номинальное напряжение и синхронная скорость как базовые величины не вызывают возражений. Иначе обстоит дело с применением в качестве базовой величины номинального тока, так как он при одних и тех же электромагнитных параметрах машины зависит от допускаемой рабочей температуры, продолжительности включения, условий охлаждения и других неэлектромагнитных факторов; это приводит к тому, что одинаковые в электромагнитном отношении машины характеризуются, в зависимости от их теплового режима, различными относительными сопротивлениями, вращающими моментами и т. п. Во избежание такой нестройности можно рекомендовать в качестве базового установившийся ток при неподвижной вторичной системе, как это и делается в настоящей статье.

В соответствии с вышеизложенным, применяются следующие определения относительных (безразмерных) величин: относительное фазное напряжение

$$U = \frac{U_{abc}}{U_n}, \quad (13)$$

относительный фазный ток

$$I = \frac{I_{abc}}{I_k}, \quad (14)$$

относительная угловая или линейная скорость

$$\omega = \frac{\omega_{abc}}{\omega_0} \quad \text{или} \quad v = \frac{v_{abc}}{v_0}, \quad (15)$$

относительное фазное сопротивление

$$z = \frac{z_{abc}}{z_k} = z_{abc} \frac{I_k}{U_n} \quad (16)$$

$$\left(\text{причем} \quad r = \frac{r_{abc}}{z_k} \quad \text{и} \quad x = \frac{x_{abc}}{z_k} \right),$$

относительная мощность

$$S = \frac{S_{abc}}{S_k} = \frac{S_{abc}}{m U_n I_k} \quad (17)$$

$$\left(\text{причем} \quad P = \frac{P_{abc}}{S_k} \quad \text{и} \quad Q = \frac{Q_{abc}}{S_k} \right),$$

относительный вращающий момент

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{P_{абс} \omega_0}{S_k \omega_{абс}} = \frac{M_{абс} \omega_0}{S_k}, \quad (18)$$

относительная сила

$$F = \frac{P}{V} = \frac{P_{абс} V_0}{S_k V_{абс}} = \frac{F_{абс} V_0}{S_k}, \quad (19)$$

относительный напор

$$p = F. \quad (20)$$

В этих формулах индексом «абс» обозначаются абсолютные (размерные) величины. Для базовых величин применяются следующие обозначения:

U_n — номинальное фазное напряжение;

I_k — фазный ток при неподвижной вторичной системе;

ω_0 — синхронная угловая скорость;

v_0 — синхронная линейная скорость;

z_k — полное сопротивление одной фазы при неподвижной вторичной системе;

S_k — полная мощность машины при номинальном напряжении и неподвижной вторичной системе;

m — число фаз.

Если учесть синусоидальность приложенного к первичной системе напряжения, наличие начальных токов $I_1(0)$ и $I_2(0)$, а также принятые упрощения обозначений, то операторные уравнения (3), после некоторой перегруппировки, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} [r_1 - x_1(p+j)]i_1 + x_2(p+j)i_2 &= \frac{U}{p} + x_1 \dot{I}_1(0) + x_2 \dot{I}_2(0), \\ x_2(p+j)s i_1 + [r_2 + x_2(p+j)]i_2 &= x_2 [\dot{I}_1(0) + \dot{I}_2(0)], \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где U — вектор приложенного напряжения, откладываемый по вещественной оси комплексных координат.

Характеристическое уравнение системы (21)

$$[r_1 + x_1(p+j)][r_2 + x_2(p+j)] - x_2^2(p+j)(p+j) = 0 \quad (22)$$

можно, после введения некоторых новых обозначений и после сокращения, переписать в виде

$$p^2 + [\alpha'_1 + \alpha'_2 + j(1+s)]p + \sigma\alpha'_1\alpha'_2 - s + j(s\alpha'_1 + \alpha'_2) = 0, \quad (23)$$

где $\sigma = \frac{x_\sigma}{x_1}$ — коэффициент рассеяния,

$\alpha'_1 = \frac{r_1}{\sigma x_1} = \frac{r_1}{x_\sigma}$ — коэффициент затухания первичного контура,

$\alpha'_2 = \frac{r_2}{\sigma x_2}$ — коэффициент затухания вторичного контура.

Решение характеристического уравнения (23) представляется обычно в виде

$$p = -\frac{1}{2}[\alpha'_1 + \alpha'_2 + j(1+s)] \pm \sqrt{\frac{1}{4}[\alpha'_1 - \alpha'_2 + j(1-s)]^2 + (1-\sigma)\alpha'_1\alpha'_2} = -b \pm a, \quad (24)$$

после чего решение системы операторных уравнений (21) получается в виде

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{U}{p} \frac{p + \sigma\alpha'_2 + js}{x_\sigma f(p)} + \frac{\dot{I}_1(0)}{f(p)} \left[p + \alpha'_2 - j\left(\frac{1-s}{\sigma} - 1\right) \right] + \frac{\dot{I}_2(0)}{f(p)} (1-\sigma)\left(\alpha'_2 - j\frac{1-s}{\sigma}\right), \\ i_2 &= -\frac{U}{p} \frac{p + js}{x_\sigma f(p)} + \frac{\dot{I}_1(0)}{f(p)} \left(\alpha'_1 + j\frac{1-s}{\sigma}\right) + \frac{\dot{I}_2(0)}{f(p)} \left[p + \alpha'_1 + j\left(\frac{1-s}{\sigma} + s\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где $f(p)$ — левая часть характеристического уравнения (23).

Изображениям (25) соответствуют векторные оригиналы, рассматриваемые не функциями времени, а функциями «продленного» электрического угла [5]:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{U(\sigma\alpha'_2 + js)}{x_\sigma[\sigma\alpha'_1\alpha'_2 - s + j(s\alpha'_1 + \alpha'_2)]} + \dot{I}'_1(p_1) e^{p_1 s} - \dot{I}'_1(p_2) e^{p_2 s}, \\ I_2 &= \frac{-jUs}{x_\sigma[\sigma\alpha'_1\alpha'_2 - s + j(s\alpha'_1 + \alpha'_2)]} + \dot{I}'_2(p_1) e^{p_1 s} - \dot{I}'_2(p_2) e^{p_2 s}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где

$p_1 = -b + a$ и $p_2 = -b - a$ — корни характеристического уравнения по (24);

$\vartheta = \omega t$ — пройденный угол (ω — угловая частота переменного тока, t — время);

$I'_1(p)$ и $I'_2(p)$ — начальные значения свободных составляющих токов в первичном и вторичном контурах, определяемые формулами

$$\begin{aligned} i'_1(p) &= U \frac{p + \sigma \alpha_2 + js}{2\alpha \chi_{\sigma p}} + \frac{I_1(0)}{2\sigma} \left[p + \alpha'_2 - j \left(\frac{1-s}{\sigma} - 1 \right) \right] + \frac{I_2(0)}{2\sigma} (1-\sigma) \left(\alpha'_2 - j \frac{1-s}{\sigma} \right), \\ i'_2(p) &= -U \frac{p + js}{2\alpha \chi_{\sigma p}} + \frac{I_1(0)}{2\sigma} \left(\alpha'_1 + j \frac{1-s}{\sigma} \right) + \frac{I_2(0)}{2\sigma} \left[p + \alpha'_1 + j \left(\frac{1-s}{\sigma} + s \right) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

Вращающий момент, по общей теории электромагнитных переходных явлений асинхронных машин, определяется формулой

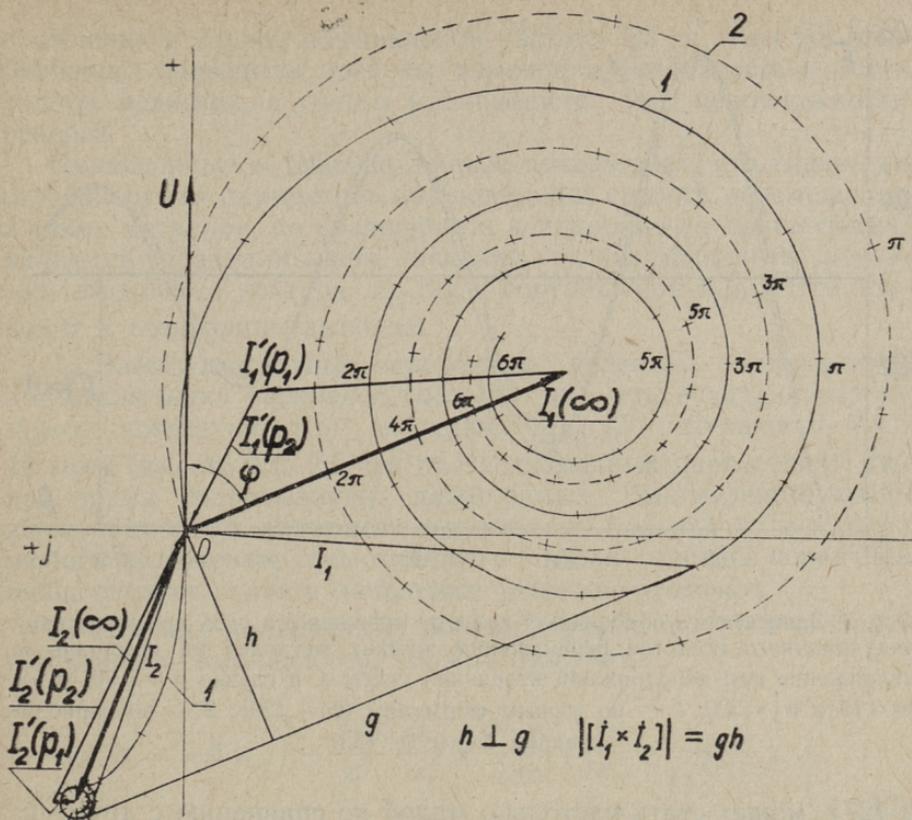
$$M = j' \chi_2 \left[I_1 \times I_2 \right]. \quad (28)$$

По этой же формуле, вследствие проведения расчета в относительных величинах, могут определяться также сила и напор, развиваемые линейными машинами. Поэтому в дальнейшем как вращающий момент, так и сила и напор объединяются под понятием «*обобщенная сила*» и выражаются формулой

$$F = j' \chi_2 \left[I_1 \times I_2 \right]. \quad (29)$$

Векторное произведение $[I_1 \times I_2]$ целесообразно определить графически, вычерчивая для этого через равные промежутки пройденного угла ϑ векторы I_1 и I_2 [5]. Такое построение для частного случая, когда $\alpha'_1 = 0,15$, $\alpha'_2 = 2,0$, $\sigma = 0,50$ и $s = 1$, приведено сплошными линиями на фиг. 4. На фиг. 5 сплошной линией приведена полученная путем такого вычисления кривая $F = f(\vartheta)$.

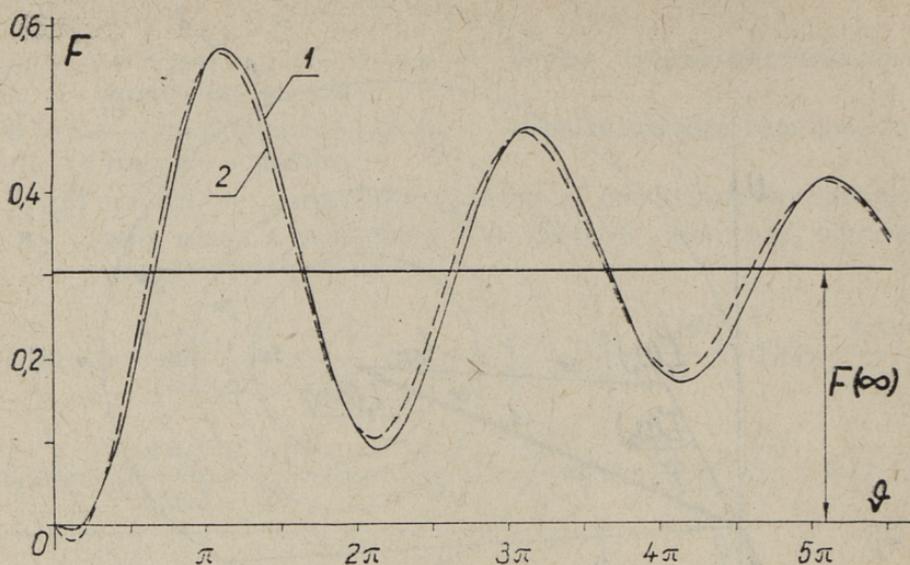
Несмотря на облегчающие графические приемы, расчет электромагнитных переходных явлений — задача трудоемкая, и нередко приходится прибегать к помощи вычислительных



Фиг. 4. Годографы первичного и вторичного токов при включении индукционного средства перемещения жидких металлов на номинальное напряжение при неподвижной вторичной системе, в случае $\sigma = 0,50$, $\alpha_1 = 0,15$, $\alpha_2 = 2,0$. 1 — по точным формулам (24) и (26); 2 — по приближенным формулам (32). Деления на годографах — значения пройденного угла. Пример графического определения векторного произведения переходных токов показан при $\theta = \frac{4}{3} \pi$

машин. Поэтому необходимо рассмотреть все возможности упрощения расчетных формул. Эти возможности заключаются, прежде всего, в пренебрежении *малыми величинами* в выражениях свободных составляющих токов I_1 и I_2 . Аналогичное упрощение расчета принужденных составляющих нежелательно, так как это может привести к искажению многих показателей установившегося режима, не рассматриваемых в настоящей статье; к тому же формулы для принужденных токов (первые члены формул (26)) нельзя считать сложными.

В зависимости от конкретных соотношений параметров машины, всякая слагаемая в суммах, входящих в формулы (26)



Фиг. 5. Зависимость обобщенной силы от пройденного угла при включении индукционного средства перемещения жидких металлов на номинальное напряжение при неподвижной вторичной системе, в случае $\sigma = 0,50$, $a_1' = 0,15$ и $a_2' = 2,0$. 1 — по точным формулам (24)...(29); 2 — по приближенной формуле (33)

и (27), может стать настолько малой по сравнению с другими, что ею можно пренебречь. Для выявления таких слагаемых в нижеследующей таблице приведены характерные для устройств перемещения жидких металлов параметры и их со-

Таблица 1

Обозначение	Пределы числовых значений							
	у асинхронных двигателей		у индукционных вращателей		у плоских индукц. насосов		у индукционных желобов	
	от	до	от	до	от	до	от	до
σ	0,04	0,15	0,7	0,8	0,5	0,7	0,8	0,9
a_1'	0,15	0,35	0,02	0,06	0,08	0,15	0,10	0,15
a_2'	0,10	0,50	1,5	5,0	2,0	14	12	25
$\sigma a_2'$	0,004	0,08	1,0	4,0	1,0	10	10	23
a_2'/a_1'	0,7	2,0	50	100	20	160	100	200
s	0	2	0,6	1,4	0,8	1,2	0,9	1,0

отношения в случае номинальной частоты 50 гц. Там же приближенно приведены пределы изменения скольжения в переходных режимах, с учетом возможности или невозможности реверса.

Приведенные в таблице данные показывают, что главными особенностями параметров индукционных средств перемещения жидких металлов, по сравнению с асинхронными двигателями, являются гораздо большие значения как коэффициента затухания вторичного контура α'_2 , так и соотношения α'_2/α'_1 . Это приводит к следующим выводам.

1. Электромагнитные переходные явления, возникающие при отключении первичной системы от сети и характеризующиеся коэффициентом затухания $\sigma\alpha'_2$ [2], затухают за 0,4... 10 мсек (вместо 0,1...2,5 сек при асинхронных двигателях); так как время срабатывания даже самых быстродействующих коммутационных аппаратов значительно больше, то в момент любого включения, происходящего после разрыва первичной цепи, следует считать начальные условия нулевыми.

2. Заменяя квадратный корень в формуле (24) его приближенным выражением, можно получить

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\sigma\alpha'_1 \left[1 - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} + \frac{(1-s)^2}{2\sigma\alpha'_1} \left(\frac{1}{2\alpha'_2} - \frac{1}{\alpha'^2_2} \right) \right] - j \\ p_2 &= -\alpha'_2 \left[1 + (1-\sigma) \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} - \left(\frac{1-s}{2\alpha'_2} \right)^2 \right] - js, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

или, при $s = 1$ и $\alpha'_1/\alpha'_2 \approx 0$,

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\sigma\alpha_1 - j, \\ p_2 &= -\alpha_2 - js; \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

погрешность вещественных частей формул (31) при соотношениях, приведенных в вышерассмотренной таблице, не превышает 2...4%.

3. Составляющие свободных токов $\dot{I}'_2(p_2) e^{p_2 t}$ и $\dot{I}'_2(p_2) e^{p_2 t}$ затухают в 20...200 раз быстрее, чем остальные составляющие и могут поэтому не учитываться; практически полное затухание этих составляющих происходит, очевидно, за $3/\alpha'_2$ рад, что при $\alpha'_2 = 1,5...25$ и при частоте 50 гц эквивалентно 0,4...6 мсек.

4. При $0,9 \leq s \leq 1,1$ составляющая $i'_2(p_1)$ настолько мала (по меньшей мере в $\alpha'_2/\sqrt{2}\alpha'_1$ раз меньше, чем установившийся ток вторичного контура²⁾, что она может не учитываться; в соответствии с этим и с предыдущим пунктом, формулы (26) при нулевых начальных условиях приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{U(\sigma\alpha'_2 + js)}{x_\sigma[\alpha_1\alpha'_2 - s + j(s\alpha'_1 + \alpha'_2)]} (1 - e^{-\alpha_1 s} e^{-js}), \\ i_2 &= \frac{jUs}{x_\sigma[\alpha_1\alpha'_2 - s + j(s\alpha'_1 + \alpha'_2)]} = \text{const.}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где $\alpha_1 = \sigma\alpha'_1 = \frac{r_1}{x_1}$ — коэффициент затухания при отсутствии вторичной системы.

Угловая погрешность формул (32) не превышает в среднем $1/\alpha'_2$ рад, а амплитудная погрешность — α'_1/α'_2 . Эти погрешности могут оказаться существенными при неблагоприятных сочетаниях параметров σ , α'_1 и α'_2 , что встречается сравнительно редко; один из таких случаев приведен на фиг. 4, где сплошными линиями показаны результаты точного расчета, а пунктиром — результаты расчета по формулам (32);

5. Несмотря на быстрое затухание или малую амплитуду трех составляющих свободных токов, переходные явления в целом могут длиться относительно долго; это объясняется тем, что коэффициент затухания α_1 у рассматриваемых машин весьма мал (приблизительно такой же, как и у асинхронных двигателей); длительность переходных явлений в практических расчетах может считаться равной $3/\alpha_1$ рад.

Для определения обобщенной силы при нулевых начальных условиях можно рекомендовать, вместо (29), приближенную формулу

$$F = F(\infty) \left[1 - \frac{\sin(s + \varphi)}{\sin \varphi} e^{-\alpha_1 s} \right], \quad (33)$$

где φ — угол сдвига между приложенным напряжением и установившимся током первичной цепи;

² Доказательство этого положения основано на элементарных преобразованиях соотношения $I_2(p_1)/I_2(\infty)$ при нулевых начальных условиях и здесь не приводится.

$F(\infty)$ — установившаяся обобщенная сила, определяемая по точной формуле

$$F(\infty) = \frac{U^2 s n_2}{x_{\sigma}^2 [(\alpha_1 \alpha_2' - s)^2 + (s \alpha_1' + \alpha_2')^2]} \quad (34)$$

Формула (33) верна при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \infty$. При других значениях ϑ ее погрешность, даже при наиболее неблагоприятных встречающихся в практике сочетаниях параметров, не превышает нескольких процентов, вследствие чего она может широко применяться. Это подтверждается и фигурой 5, где наряду с данными точного расчета (сплошная линия) приведена пунктирная кривая, рассчитанная по формуле (33).

Полученные формулы показывают, что частота переменной слагаемой переходных электромагнитных сил равна частоте тока. Максимальное (*ударное*) значение этих сил не превышает двухкратного установившегося значения, а в начале переходного процесса, как и в асинхронных двигателях, могут возникать незначительные тормозящие силы.

Выводы

Из приведенного анализа вытекает, что несмотря на конструктивное своеобразие индукционных устройств перемещения жидких металлов, по длительности электромагнитных переходных явлений они не отличаются от асинхронных двигателей и поэтому могут встречаться случаи, когда этими явлениями нельзя пренебречь. Благодаря большому активному сопротивлению вторичного контура и большому рассеянию, для определения переходных токов и сил можно использовать приведенные в статье простые формулы. Схема замещения и система базовых величин, предложенные в статье, могут оказаться полезными также при анализе переходных процессов обыкновенных асинхронных машин.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Лайон. Анализ переходных процессов в электрических машинах переменного тока. Госэнергоиздат, 1958.
2. К. П. Ковач и И. Рац. Переходные процессы в машинах переменного тока. Госэнергоиздат, 1963.

3. Э. М. Ристхейн. Схема замещения асинхронной машины при исследовании электромагнитных переходных процессов. ИВУЗ, «Электромеханика», № 11, 1960.
4. Х. И. Янес. Учет влияния вторичной системы в линейной плоской магнитогидродинамической машине. Труды ТПИ, серия А, № 197, Таллин 1962.
5. Э. М. Ристхейн. Применение метода векторных диаграмм для исследования переходных процессов в линейных цепях переменного тока. ИВУЗ, «Электромеханика», № 4, 1963.

E. Risthein

About Methods of Computation of Electro-Magnetic Transient Processes in Induction-Type Liquid Metal Propulsion Equipment

Summary

It is shown that electro-magnetic transient processes in induction-type liquid metal propulsion equipment (induction pumps, whirlers, mixers, troughs etc.) in their duration do not differ from similar processes in induction motors and should be considered in many cases. Theoretical analysis takes place according to general kind of procedure of computation of electro-magnetic transient processes in induction machines. A new electrical substitution scheme and a new system of dimensionless units which are considered better than those used up to now are suggested. Various possibilities for simplifying computation are considered and simply formulas for determination of transient currents and forces are given. 1 table, 5 figures and 5 items of bibliography are included.

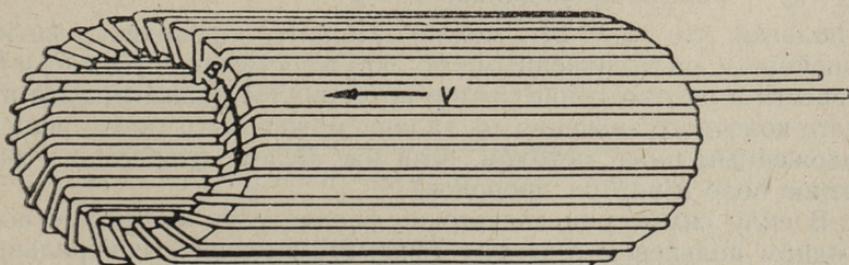
УДК 621.318.38

*В. И. Межбурд, Л. Р. Реймал***К РАСЧЕТУ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
В АКТИВНОЙ ЗОНЕ КОАКСИАЛЬНЫХ МГД МАШИН
ПОСТОЯННОГО ТОКА (МГДМ)**

Некоторые разновидности МГДМ без ферромагнетиков рассмотрены ранее. Из них наиболее перспективными, как при использовании сверхпроводящих соленоидов, так и при обычных способах создания сильных магнитных полей являются машины (генераторы, насосы), возбудителями магнитного поля в которых являются кольцевые соленоиды с прямоугольной формой витков (фиг. 1), во внутренней полости которых размещается канал МГДМ. Рабочей или полезной составляющей магнитной индукции в канале МГДМ является, как видно из фиг. 1, тангенциальная составляющая.

Определение ее при плотной намотке витков в средней части соленоида элементарно. В практических конструкциях МГДМ плотная намотка витков в силу целого ряда причин неосуществима — в частности, для вывода электродов, которыми отводится (подается) ток от канала, для изоляции витков друг от друга, для помещения дьюаров в сверхпроводящих контурах и т. д.

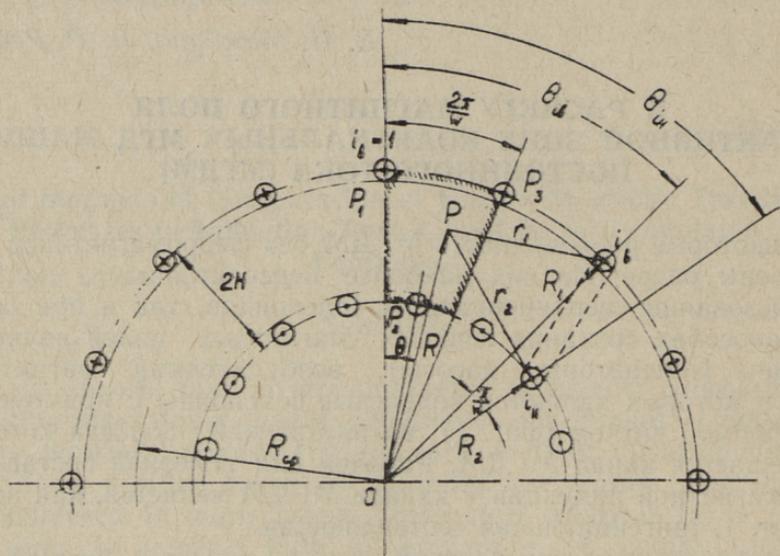
В связи с этим для расчета МГДМ представляет определенный практический интерес распределение магнитного поля подобного соленоида при неплотной намотке витков.



Фиг. 1

В настоящей работе рассмотрена только часть этой задачи — определение магнитного поля в средней части активной зоны, т. е. в той области, где можно пренебречь влиянием коротких сторон витков.

При решении задачи полагаем, что магнитная проницаемость проводов и изотропной окружающей среды одинакова и равна μ_0 .



Фиг. 2

При этом допущении, поскольку нас интересует магнитное поле в активной зоне, т. е. в бесконечной в направлении z кольцевой полосе шириной (фиг. 2).

$$2H = R_1 - R_2 - 2r_{\text{пр}}, \quad (1)$$

где $r_{\text{пр}}$ — радиус проводника,

и полагая, что $r_{\text{пр}} \ll 2H$, можно заменить проводники витков линейными, расположенными по окружностям радиусов R_1 и R_2 , и ввести в рассмотрение вектор-потенциал \vec{A} (заметим, что при учете конечного значения $r_{\text{пр}}$ задача может быть также решена изложенным ниже методом, если нас будет интересовать магнитное поле и внутри проводов).

В силу симметрии достаточно рассмотреть магнитное поле в одном кольцевом секторе (фиг. 2), имеющем центральный угол $\frac{2\pi}{W}$, где W — число витков соленоида.

Вектор-потенциал A_i в произвольной точке $P (R, \Theta)$ этого сектора, обусловленный магнитным полем проводников i -го витка, можно выразить в виде

$$\bar{A}_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \bar{z} + C_{i,i} \quad (2)$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точки P до i_v (верхнего) и i_n (нижнего) проводника i -го витка.

Для определения радиальной (B_{iR}) и тангенциальной ($B_{i\theta}$) составляющих магнитной индукции, вызванных током i -го витка в точке P , достаточно выразить r_1 и r_2 через координаты R и Θ цилиндрической системы координат, ось z которой совпадает с осью соленоида, а начало отсчета углов Θ выбирается произвольно. Выберем начало отсчета углов Θ по радиусу ближайшего слева от точки P верхнего проводника витка со-

гласно принятому на фиг. 2 порядку чередования верхнего и нижних проводников витка, угловая координата i_v — верхнего проводника i -го витка будет

$$\theta_{i_v} = \frac{2\pi}{w} (i-1), \quad (3)$$

а угловая координата нижнего проводника того же i -го витка:

$$\theta_{i_n} = \frac{2\pi}{w} (i-1) \theta_b, \quad (4)$$

где θ_b — центральный угол между проводниками одного витка.

Практически, в силу симметрии, можно положить

$$\theta_b = \frac{\pi}{w} \quad (5)$$

и тогда

$$\theta_{i_n} = \frac{\pi}{w} (2i-1). \quad (6)$$

Из треугольников OP_{i_v} и OP_{i_n} следует:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \theta \right]}; \\ r_2 &= \sqrt{R^2 + R_2^2 - 2RR_2 \cos \left[\frac{\pi}{w} (2i-1) - \theta \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из соотношения

$$\vec{B}_i = \text{rot } \vec{A}_i, \quad (8)$$

учитывая, что для данной задачи

$$\vec{A}_i = A_z, \quad (9)$$

получим:

$$B_{Ri} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial A_i}{\partial \theta} \quad (10)$$

и

$$B_{\theta i} = -\frac{\partial A_i}{\partial R} \quad (11)$$

или

$$E_{Ri} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{R_2 \sin \left[\frac{\pi}{w} (2i-1) - \theta \right]}{R^2 + R_2^2 - 2RR_2 \cos \left[\frac{\pi}{w} (2i-1) - \theta \right]} - \frac{R_1 \sin \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \theta \right]}{R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \theta \right]} \right\} \quad (12)$$

и

$$B_{\theta i} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{R - R_2 \cos \left[\frac{\pi}{w} (2i-1) - \theta \right]}{R^2 + R_2^2 - 2RR_2 \cos \left[\frac{\pi}{w} (2i-1) - \theta \right]} - \frac{R - R_1 \cos \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \theta \right]}{R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \theta \right]} \right\} \quad (13)$$

Суммарная B_{θ} — составляющая индукции в точке P от всех проводников соленоида будет

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{i=1}^{i=w} \left\{ \frac{R - R_2 \cos \left[\frac{\pi}{w} (2i-1) - \theta \right]}{R^2 + R_2^2 - 2RR_2 \cos \left[\frac{\pi}{w} (2i-1) - \theta \right]} - \frac{R - R_1 \cos \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \theta \right]}{R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \theta \right]} \right\} \quad (14)$$

Как видно из (14), тангенциальная составляющая магнитной индукции изменяется не только в радиальном, но и в тангенциальном направлении в пределах одного сектора.

Известно, что магнитная индукция в кольцевой полости, между коаксиальными цилиндрами, несущими ток $I_n = wI$, изменяется только по радиусу и определяется как

$$B_{\theta c} = \frac{\mu_0 w I}{2\pi R} \quad (15)$$

Из выражений (14) и (15) можно вывести коэффициент k_B , учитывающий влияние неплотной намотки витков при определении индукции в сечении $\Theta = const$

$$k_B = \frac{B_\Theta}{B_{0\omega}} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{i=\omega} \left\{ \frac{\frac{R}{R_1} - \cos\left[\frac{2\pi}{\omega}(2i-1) - \Theta\right]}{\frac{R}{R_2} + \frac{R_2}{R} - 2\cos\left[\frac{\pi}{\omega}(2i-1) - \Theta\right]} - \frac{\frac{R}{R_1} - \cos\left[\frac{2\pi}{\omega}(i-1) - \Theta\right]}{\frac{R}{R_1} + \frac{R_1}{R} - 2\cos\left[\frac{2\pi}{\omega}(i-1) - \Theta\right]} \right\} \quad (16)$$

Более удобным является выражение k_B в относительных единицах, в которых за базисную величину принят средний радиус намотки соленоида R_{cp} . При этом

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{cp}(1 + \xi) \\ R_2 &= R_{cp}(1 - \xi) \\ R &= R_{cp}(1 + x) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{H}{R_{cp}} \\ x &= \frac{R - R_{cp}}{R_{cp}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

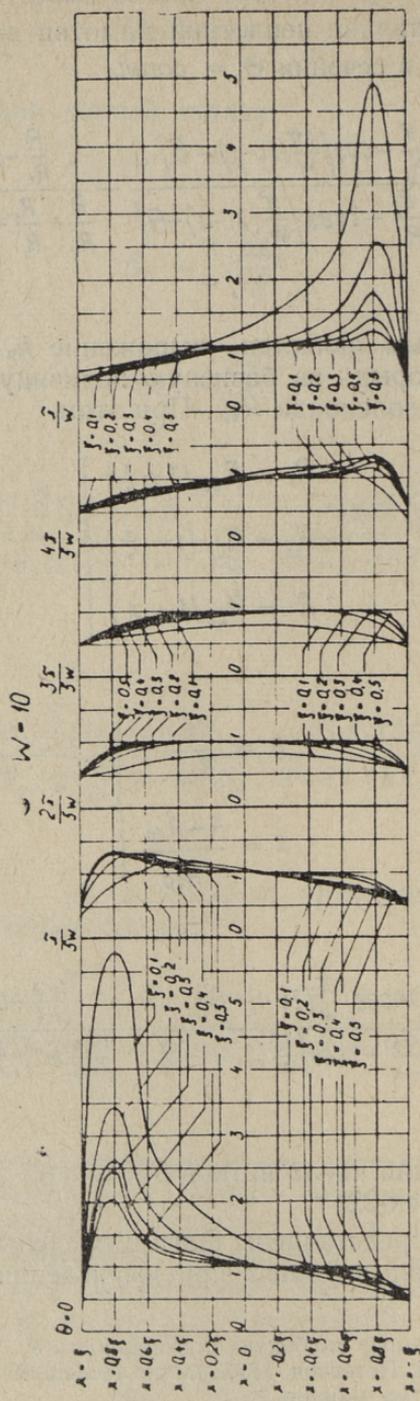
Тогда

$$k_B = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{i=\omega} \left\{ \frac{\frac{1+x}{1-\xi} - \cos\left[\frac{\pi}{\omega}(2i-1) - \Theta\right]}{\frac{1+x}{1-\xi} + \frac{1-\xi}{1+x} - 2\cos\left[\frac{\pi}{\omega}(2i-1) - \Theta\right]} - \frac{\frac{1+x}{1+\xi} - \cos\left[\frac{2\pi}{\omega}(i-1) - \Theta\right]}{\frac{1+x}{1+\xi} + \frac{1+\xi}{1+x} - 2\cos\left[\frac{2\pi}{\omega}(i-1) - \Theta\right]} \right\} \quad (19)$$

Значения k_B для числа витков $5 \leq \omega \leq 65$ были рассчитаны на ЭЦВМ «Минск-22»*.

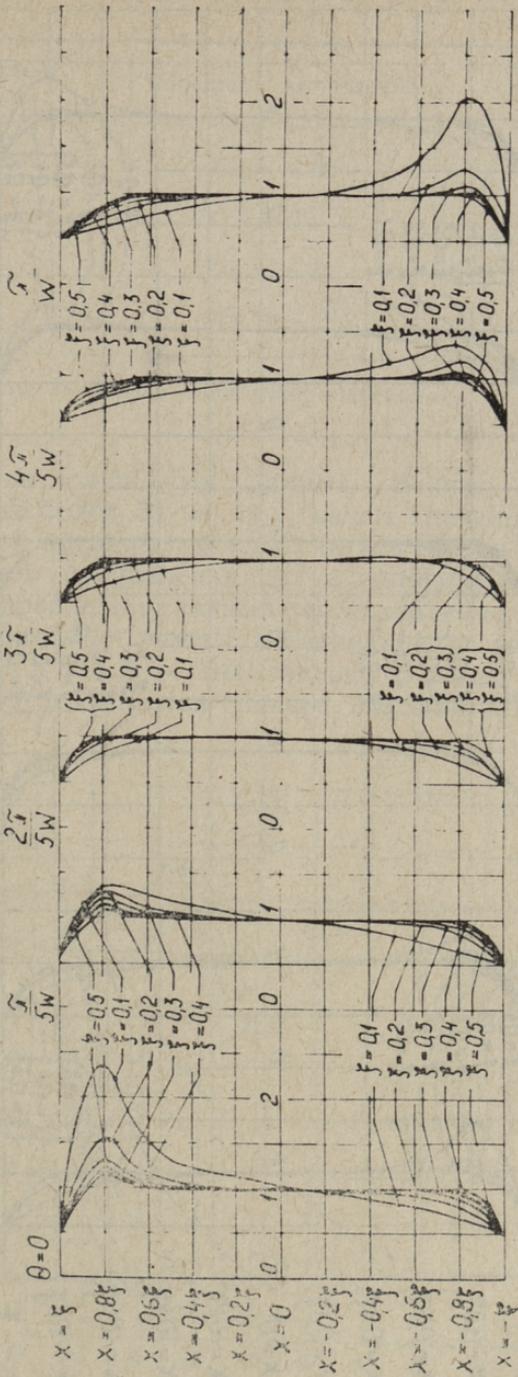
В таблице 1 представлены шаги и пределы входящих в (19) параметров, использованных при вычислении на ЭЦВМ.

* Авторы выражают глубокую благодарность У. Х. Сийтану и сотрудникам ВЦ ЭРСПО М. Петерсон, любезно согласившимся составить программу и вычислить k_B на машине.



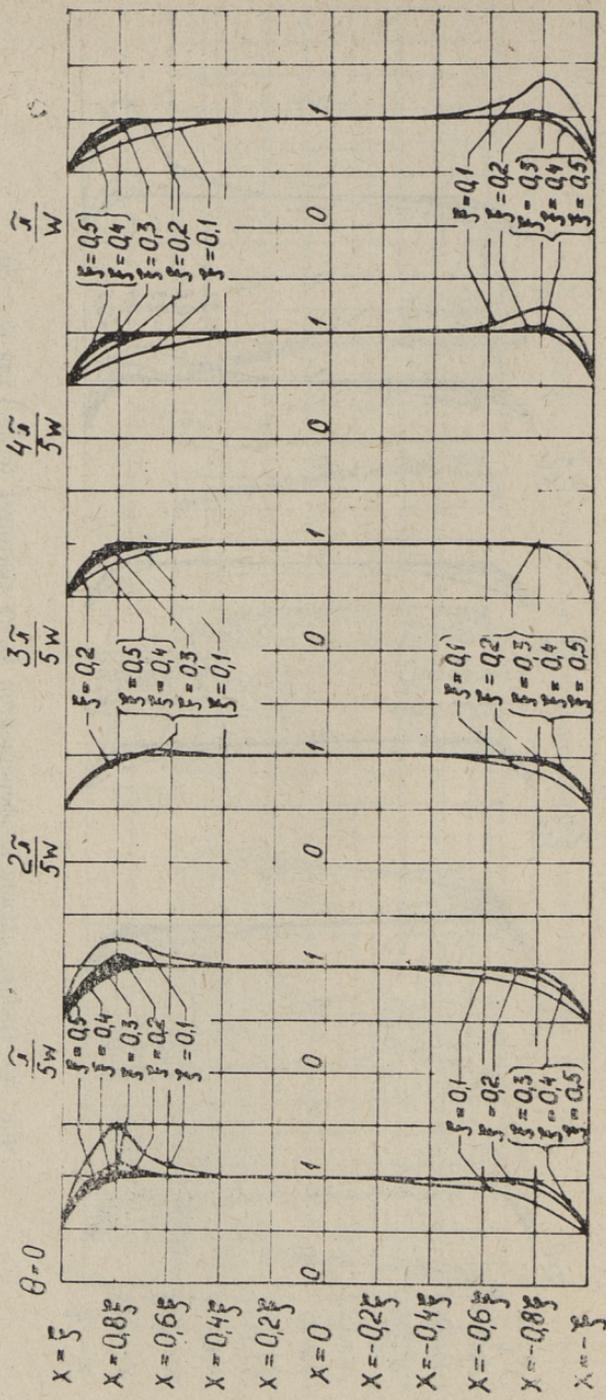
Фиг. 3а. Распределение коэффициентов k_v по сектору $\left(0 \div \frac{\pi}{w}\right)$ для $w = 10$

$W=30$



Фиг. 36. Распределение коэффициентов k_V по сектору $(0 \div \frac{\pi}{\omega})$ для $\omega = 30$

$W = 60$

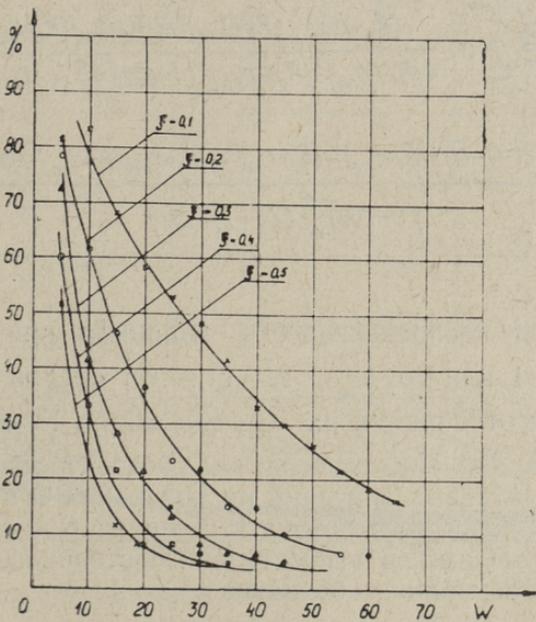


Фиг. 36. Распределение коэффициентов k_B по сектору $(0 \div \frac{\pi}{w})$ для $w = 60$

Наименование параметра	Пределы вычислений	Шаг
W	$5 \leq W \leq 65$	5
ξ	$0.1 \leq \xi \leq 0.5$	0,1
$\pm x$	$0 \leq x \leq \xi$	$0,2 \xi$
θ	$0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{W}$	$\frac{1}{10} \left(\frac{2\pi}{W} \right)$

Всего было вычислено более 8000 значений k_B .

Из анализа полученных данных следует, что даже при числах витков более 50 ни при каком значении ξ магнитное поле подобной системы нельзя считать строго однородным в тангенциальном направлении. (Под однородностью в тангенциальном направлении понимается сохранение $B_\theta = const$ на всей окружности $R = const$). Неоднородность тем больше, чем меньше ξ и ω , а для $\xi = const$ зависит от x , при $|x| \rightarrow \xi$ неоднородность поля сказывается сильнее. На фигурах 3а–3в пред-



Фиг. 4.

ставлена зависимость k_B в функции Θ для некоторых значений w, x, ξ^* .

На фиг. 4 представлено относительное количество точек сектора в полосе

$$-0,8 \xi \leq X \leq 0,8 \xi,$$

в которых магнитная индукция более чем на 10% отличается от магнитной индукции коаксиальной системы по (15). Использование кривых фиг. 4 может быть полезно при предварительном расчете магнитной системы МГДМ.

Магнитный поток на единицу длины в сечении $\Theta = \text{const}$ можно найти как

$$\Phi_{\Theta = \text{const}} = \Phi \bar{A} dl \quad (20)$$

или

$$\Phi = \int_{R_2 + r_{np}}^{R_1 - r_{np}} \bar{A} dR + \int_0^l \bar{A} dz + \int_{R_1 - r_{np}}^{R_2 + r_{np}} \bar{A} dR + \int_0^0 \bar{A} dz \quad (21)$$

После соответствующих вычислений

$$\Phi_{\Theta = \text{const}} = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \sum_{i=1}^{i=w} \ln \frac{(R_1 - r_{np})^2 + (R_2 + r_{np})^2 - 2(R_1 - r_{np})(R_2 + r_{np})}{4(R_1 - r_{np})^2 (R_2 + r_{np})^2 \left\{ 1 - \cos \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \Theta \right] \right\}} \cdot \frac{\left\{ \cos \frac{\pi}{w} \left[(2i-1) - \Theta \right] \right\} (R_1 - r_{np})^2 + (R_2 + r_{np})^2 - 2(R_1 - r_{np})(R_2 + r_{np}) \cos \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \Theta \right]}{\left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi}{w} (2i-1) - \Theta \right] \right\}} \quad (22)$$

Кажущаяся неопределенность, например при $\cos \left[\frac{2\pi}{w} (i-1) - \Theta \right] = 1$ или $\cos \left[\frac{\pi}{w} (2i-1) - \Theta \right] = 1$, не имеет места, т. к. эти углы отличаются на $\frac{\pi}{w}$, где $w > 1$. Перемножив две квадратных скобки знаменателя, мы убедимся, что в целом он не принимает нулевых значений ни при каких Θ и w .

Вариации магнитного потока в сечениях $\Theta = \text{const}$ при неплотной намотке витков относительно постоянного потока при плотной намотке можно, обозначив

* Авторы располагают результатами вычислений k_B для всех значений параметров, указанных в табл. 1.

$$R_1 - r_{np} = R_{1H}; \quad R_2 + r_{np} = R_{2H}, \quad (23)$$

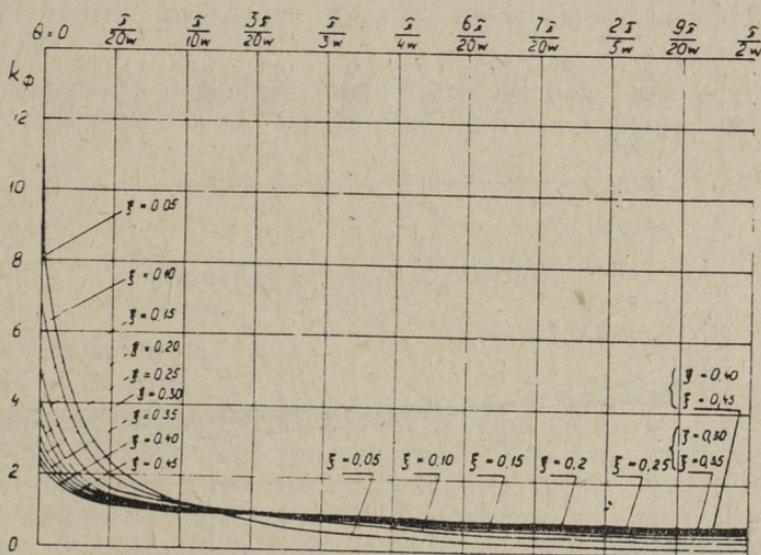
оценивать коэффициентом

$$k_\phi = \frac{1}{2W} \sum_{i=1}^{i=W} \ln \frac{\left\{ R_{1H} + R_{2H} - 2R_{1H}R_{2H} \cos \left[\frac{\pi}{W} (2i-1) - \theta \right] \right\} \left\{ R_{1H}^2 + R_{2H}^2 - 2R_{1H}R_{2H} \cos \left[\frac{2\pi}{W} (i-1) - \theta \right] \right\}}{4R_{1H}^2 R_{2H}^2 \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi}{W} (2i-1) - \theta \right] \right\} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi}{W} (i-1) - \theta \right] \right\}} \ln \frac{R_{1H}}{R_{2H}} \quad (24)$$

или в относительных координатах активной зоны

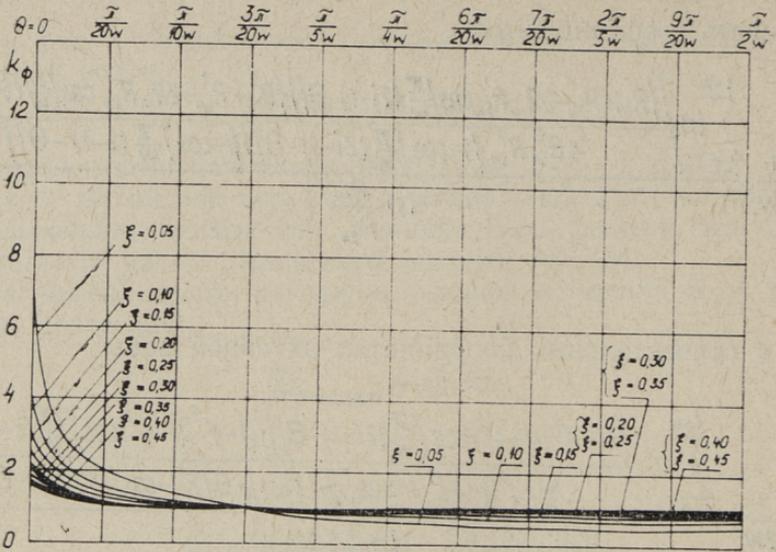
$$k_\phi = \frac{1}{2W} \sum_{i=1}^{i=W} \ln \frac{\left\{ (1 + \xi^2)(1 - \xi'^2) \cos \left[\frac{\pi}{W} (2i-1) - \theta \right] \right\} \left\{ (1 + \xi'^2)(1 - \xi^2) \cos \left[\frac{2\pi}{W} (i-1) - \theta \right] \right\}}{(1 + \xi')^2 (1 - \xi)^2 \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi}{W} (2i-1) - \theta \right] \right\} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{2\pi}{W} (i-1) - \theta \right] \right\}} \ln \frac{1 + \xi'}{1 - \xi'} \quad (25)$$

$W = 5$



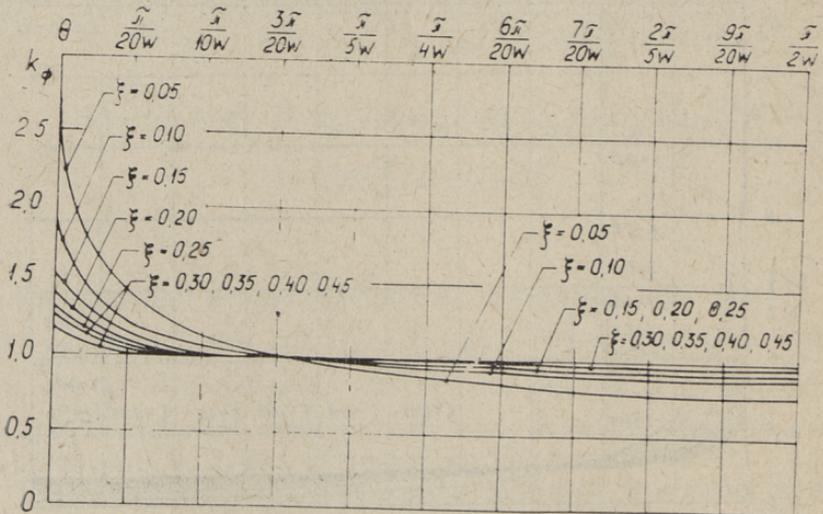
Фиг. 5а. Распределение магнитного потока вдоль сектора $\left(0 \div \frac{\pi}{2w} \right)$ для $w = 5$

W = 10



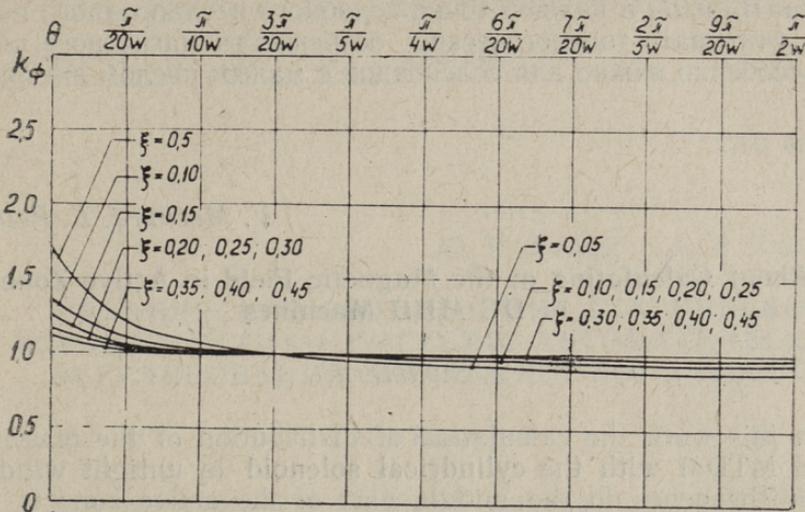
Фиг. 5б. Распределение магнитного потока вдоль сектора $\left(0 \div \frac{\pi}{2\omega}\right)$ для $\omega = 10$

W = 30



Фиг. 5в. Распределение магнитного потока вдоль сектора $\left(0 \div \frac{\pi}{2\omega}\right)$ для $\omega = 30$

$\omega = 60$



Фиг. 5а. Распределение магнитного потока вдоль сектора $\left(0 \div \frac{\pi}{2\omega}\right)$ для $\omega = 60$

Для примера на фиг. 5 представлена зависимость $k_{\Phi} = f(\theta)$ для некоторых значений ξ и ω , полученных на ЭЦВМ «Минск-22»*.

Осредненное значение магнитного потока по сектору может быть определено численным интегрированием выражения

$$\Phi_{cp} = \frac{W}{2\pi(R_1 - R_2)} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \int_{R_2}^{R_1} B_{\theta} R dR d\theta \quad (26)$$

Полученные в настоящей работе осредненные соотношения могут быть использованы при расчете МГДМ для определения тока при заданной геометрии соленоида, числа его витков и т. п. интегральных характеристик. Для вычисления э.д.с. в генераторном режиме, градиента электромагнитного напора и плотности тока и особенностей магнитогидродинамических яв-

* Авторы располагают результатами вычислений k_{Φ} для $\omega = 5 \div 70$.

лений в канале необходимо, очевидно, пользоваться значениями B_θ и B_R в каждой точке подобного неоднородного поля, т. е. учитывать топологические особенности магнитного поля, что особенно важно для соленоидов с малым числом витков.

V. Mežburd, L. Reimaļ

About Calculating of the Magnetic Field in Active Zone of DC MHD Machines

Summary

In this work the calculation of distribution of the magnetic field MTDM with the cylindrical solenoid by untight winding of the branches in the middle part of the active zone is put under consideration. Concentrated relations received in the work may be used by the calculation MTDM for the identification of the current by the given geometry of the solenoid, the number of its turns etc.

Ю. Я. Лаугис Х. А. Тийсмус

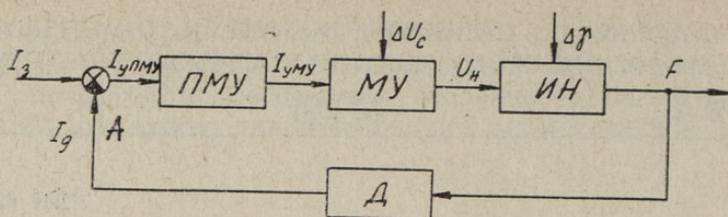
ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ИНДУКЦИОННОГО НАСОСА

1. Введение

Как известно, регулирование напора или производительности, развиваемого индукционным насосом (ИН), может быть достигнуто путем изменения напряжения питания. Источником регулируемого напряжения для питания ИН может служить магнитный усилитель, автотрансформатор, отдельный синхронный генератор, тиристорный регулятор напряжения и т. д. Кроме напряжения питания известны и другие возможности регулирования ИН, например, частотой питающего напряжения, числом пар полюсов, асимметрией магнитного потока и т. д. Однако регулирование ИН напряжением питания в большинстве случаев является самым простым и экономичным.

Всякая задача регулирования напора или производительности ИН с высокой точностью ведет к системе автоматического регулирования (САР). На базе вышеназванных источников регулируемого напряжения можно создать надежные САР ИН. До настоящего времени опубликовано мало материалов о создании и соответственно о расчете подобных систем. Только в [1] приведены результаты экспериментального исследования статики замкнутой системы регулирования ИН, работающего в режиме стабилизации усилия на выходе. Там же составлено приближенное аналитическое уравнение статической характеристики САР ИН.

В настоящей статье делается попытка разработать графический метод определения статической характеристики САР напора ИН. При разработке графического метода в основу взята структурная схема на фиг. 1. Необходимость разработки графического метода для определения статической характеристики САР ИН вытекает из того, что реальные статиче-



Фиг. 1. Структурная схема САР усилия индукционного насоса: ПМУ — промежуточный магнитный усилитель; МУ — силовой магнитный усилитель; ИН — индукционный насос; Д — датчик усилия; I_3 — ток уставки (задания); $I_{yПМУ}$ — ток управления ПМУ; $I_{yМУ}$ — ток управления МУ; U_n — напряжение питания ИН; F — выходное усилие ИН; I_0 — выходной ток датчика усилия

ские характеристики отдельных элементов САР (фиг. 1) являются в большом диапазоне переменных нелинейными и соответственно нелинейной будет и статическая характеристика всей САР. При наличии явно нелинейных характеристик отдельных элементов аналитический расчет характеристики всей системы является громоздким и трудоемким для инженерных расчетов.

2. Математическое описание графического метода

Разработанный графический метод основывается на математическом аппарате. Статические характеристики отдельных элементов структурной схемы, изображенной на фиг. 1, могут быть выражены следующими зависимостями.

Индукционный насос. Электромагнитный напор, развиваемый насосом, аналитически может быть представлен в виде:

$$P_{ЭМ} = P_n K_{гп} = B_d^2 s f \tau l k_{oc}, \quad (1)$$

- где $P_{ЭМ}$ — электромагнитный напор;
 P_n — полезный напор;
 $K_{гп}$ — коэффициент, учитывающий гидравлические потери давления в канале насоса;
 B_d — амплитуда магнитной индукции в середине немагнитного зазора;
 s — скольжение;
 f — частота;

γ — электрическая удельная проводимость жидкого металла;
 τ — полюсное деление;
 l — активная длина насоса;
 k_{oc} — коэффициент ослабления давления.

При ненасыщенной магнитной системе насоса уравнение (1) можно переписать в виде

$$P_{эм} = P_n k_{гп} = U_n^2 s f r \tau l k_{oc} k_n, \quad (2)$$

где k_n — коэффициент пропорциональности между магнитной индукцией и напряжением;
 U_n — напряжение питания.

Принимая параметры $s, f, \gamma, \tau, l, k_{oc}$ и k_n постоянными, уравнение (2) можно переписать в следующей форме:

$$P_{эм} = P_n k_{гп} = K U_n^2, \quad (3)$$

где

$$K = s f r \tau l k_{oc} k_n.$$

При больших значениях питающего напряжения магнитная система ИН насыщается и электромагнитный напор становится пропорциональным напряжению питания.

При разработке графического метода напор, развиваемый насосом, заменен усилием, которое действует на заменитель жидкометаллической вторичной системы.

Заменителем жидкометаллической вторичной системы насоса использовалась твердая (латунная) пластина. Учитывая, что латунная пластина находилась вертикально между индукторами насоса и не могла двигаться, так как была жестко прикреплена к датчику усилия, т. е. $s = 1,0$, развиваемое усилие можно описать следующим уравнением:

$$F = K' (\gamma_0 \pm \Delta\gamma) U_n^2 \quad (4)$$

где γ_0 — электрическая удельная проводимость латунной пластины при начальной температуре;

$\Delta\gamma$ — приращение электрической удельной проводимости латунной пластины за счет изменения температуры;

$$K' = s \cdot f \cdot \tau \cdot l \cdot k_{oc} \cdot k_n.$$

Преобразуя (4) в следующий вид

$$F = K' U_H (\delta_0 \pm \Delta\delta) U_H \quad (5)$$

и обозначая

$$K' U_H = K_{\partial} = f(U_H),$$

получим уравнение статической характеристики ИН окончательно в виде

$$F = K_{\partial} (\delta_0 \pm \Delta\delta) U_H. \quad (6)$$

Из (6) можно выразить статический коэффициент усиления насоса

$$K_{ин} = \frac{F}{U_H} = K_{\partial} (\delta_0 \pm \Delta\delta). \quad (7)$$

Статический коэффициент усиления $K_{ин}$ является переменным, зависящим от напряжения питания и от коэффициента $k_{н}$ (учитывает пропорциональность между магнитной индукцией и напряжением).

Силовой магнитный усилитель. Силовой магнитный усилитель может быть охарактеризован следующей формулой:

$$I_{мУ} = I_x + K_{мУ} I_{уМУ}, \quad (8)$$

где I_x — среднее значение тока холостого хода (при $I_y = 0$);

$K_{мУ}$ — коэффициент усиления магнитного усилителя по току;

$I_{уМУ}$ — ток управления;

$I_{мУ}$ — выходной ток силового магнитного усилителя.

Коэффициент усиления $K_{мУ}$ в общем случае зависит от тока управления, т. е. $K_{мУ}$ является переменным. Но при небольших изменениях тока управления в определенном диапазоне можно линеаризовать статическую характеристику магнитного усилителя и считать $K_{мУ}$ постоянным.

Величина тока холостого хода определяется по формуле

$$I_x = \frac{U_c}{\sqrt{(x_{мУ} + x_H)^2 + (\sum R_H)^2}}, \quad (9)$$

где $x_{мУ}$ — индуктивное сопротивление магнитного усилителя при $I_y = 0$;

$x_n, \Sigma R_n$ — соответственно индуктивное и активное сопротивление нагрузки (ИН);

U_c — напряжение питания магнитного усилителя.

На промышленных предприятиях сетевое напряжение непрерывно претерпевает различные изменения. С учетом этого ток холостого хода магнитного усилителя может быть выражен по следующей формуле:

$$I_x = \frac{U_c \pm \Delta U_c}{\sqrt{(x_{MY} + x_n)^2 + (\Sigma R_n)^2}}, \quad (10)$$

где ΔU_c — возмущение питания.

Обозначая

$$\sqrt{(x_{MY} + x_n)^2 + (\Sigma R_n)^2} = K_1, \quad (11)$$

(10) принимает следующий вид:

$$I_x = \frac{U_c \pm \Delta U_c}{K_1} \quad (12)$$

С учетом (12) уравнение (8) принимает окончательно вид

$$I_{MY} = \frac{U_c \pm \Delta U_c}{K_1} + K_{MY} I_{YMY}. \quad (13)$$

Считая сопротивление насоса z_n постоянным, можем от тока магнитного усилителя (является в данном случае током в обмотках насоса) перейти к напряжению на входе насоса

$$U_n = I_{MY} z_n = \left(\frac{U_c \pm \Delta U_c}{K_1} + K_{MY} I_{YMY} \right) z_n. \quad (14)$$

Промежуточный магнитный усилитель. Промежуточный магнитный усилитель может быть описан аналогичными уравнениями. Учитывая, что питание маломощного магнитного усилителя от стабилизированного источника питания не представляет трудностей, можем пренебречь возмущением напряжения питания, и если пренебречь также током холостого хода, уравнение промежуточного магнитного усилителя можно представить в виде уравнения прямой

$$I_{пму} = K_{пму} \cdot I_{упму}, \quad (15)$$

где $I_{упм\mu}$ — ток управления;

$K_{пм\mu}$ — коэффициент усиления;

$I_{пм\mu}$ — выходной ток промежуточного магнитного усилителя.

Коэффициент усиления $K_{пм\mu}$ по существу не является постоянным, а зависит от тока управления.

Датчик усилия. Датчик усилия может быть описан уравнением

$$I_{\delta} = K_y \cdot F, \quad (16)$$

где F — усилие на датчике;

K_y — чувствительность датчика;

I_{δ} — выходной ток датчика.

Далее приступим к составлению уравнения статической характеристики САР ИН. Для этого, во-первых, выпишем уравнение статической характеристики в разомкнутой системе (прерываем цепь обратной связи в точке А на фиг. 1).

$$F_{раз} = K_{\delta} (\delta_0 \pm \Delta\delta) \left(\frac{U_c \pm \Delta U_c}{K_1} + K_{м\gamma} K_{пм\mu} I_{3раз} \right) \quad (17)$$

где $I_{3раз}$ — ток уставки в разомкнутой системе.

Когда возмущения $\Delta\gamma$ и ΔU_c отсутствуют, уравнение (17) упрощается и принимает вид

$$F_{раз} = K_{\delta} \delta_0 \left(\frac{U_c}{K_1} + K_{м\gamma} K_{пм\mu} I_{3раз} \right) z_H. \quad (18)$$

Из уравнения (18) получим уравнение для статической характеристики в замкнутой системе

$$F_{зам} = K_{\delta} \delta_0 \left[\frac{U_c}{K_1} + K_{м\gamma} K_{пм\mu} (I_{3зам} - K_y F_{зам}) \right] z_H, \quad (19)$$

где $I_{3зам}$ — ток уставки замкнутой системы.

В случае, когда $F_{раз} = F_{зам}$, токи уставки должны быть связаны в следующем виде:

$$I_{3раз} = I_{3зам} - K_y F_{зам}$$

или

$$I_{3зам} = I_{3раз} + K_y F_{зам}. \quad (20)$$

Зная статическую характеристику разомкнутой системы, можем по (20) быстро и просто рассчитать статическую характеристику замкнутой системы.

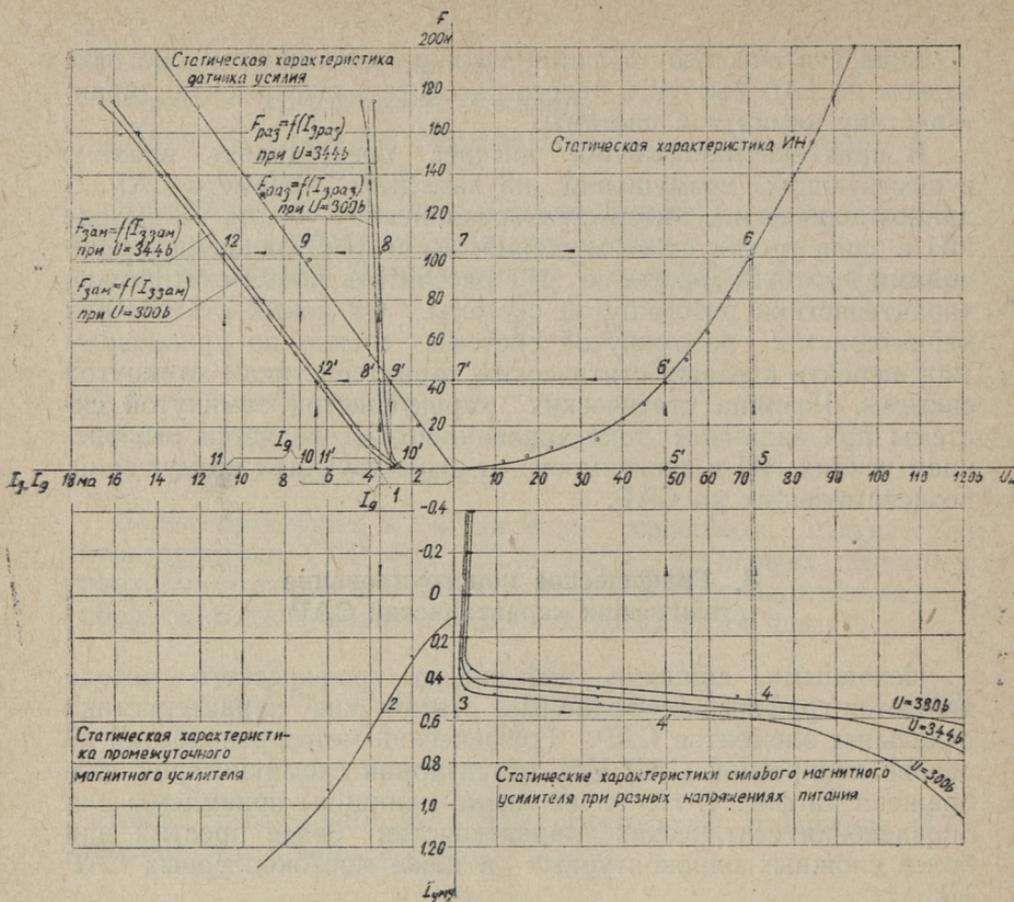
В практике наибольший интерес представляет влияние существующих возмущений на выходной параметр САР. В данном случае нас интересует отклонение усилия на выходе ИН в зависимости от возмущений Δu и ΔU_c . Задаваясь величинами Δu и ΔU_c можем по (17) рассчитать новые статические характеристики разомкнутой системы. От новых статических характеристик разомкнутой системы можно по уравнениям (20) перейти к новым статическим характеристикам замкнутой системы. Разница статических характеристик замкнутой системы при заданном токе задания $I_{з\text{зам}}$ является отклонением усилия ИН в зависимости от существующих возмущений, воздействующих на САР.

3. Графическое конструирование статических характеристик САР

Исходными данными настоящего графического метода являются графически заданные статические характеристики отдельных элементов САР. Графический метод разработан на основе конкретной САР ИН, структурная схема которой изображена на фиг. 1. Но те же самые принципы приемлемы для определения статических характеристик более простых или более сложных одноконтурных и даже многоконтурных САР ИН.

Первым этапом графического метода является конструирование статической характеристики разомкнутой системы на базе графически заданных статических характеристик отдельных элементов. В данном случае произведем конструирование в четырех квадрантах. Число квадрантов зависит от числа элементов системы. В первый квадрант (фиг. 2) вычерчиваем статическую характеристику ИН (развиваемое усилие в зависимости от напряжения питания). Данная статическая характеристика экспериментально определена на насосе типа ЭМН-6.

В четвертый квадрант вычерчиваем статические характеристики силового магнитного усилителя при разных напряжениях питания, желательно при трех напряжениях $U_{\text{ном}}$, $U_{\text{макс}}$ и $U_{\text{мин}}$. При этом положительное возмущение напряжения $\Delta U_c = U_{\text{макс}} - U_{\text{ном}}$ и отрицательное $\Delta U_c = U_{\text{ном}} - U_{\text{мин}}$. В качестве управляющего элемента САР были применены два магнитных усилителя типа УМЗП 40.80.23 в последовательном включении. Необходимость последовательного



Фиг. 2. Графическое конструирование статической характеристики САР усилия индукционного насоса

соединения вытекает из требования получить более линейную статическую характеристику в большом диапазоне напряжения для определения динамических свойств ИН.

В качестве промежуточного магнитного усилителя был применен магнитный усилитель типа ТУМ А5-11. Статическая характеристика усилителя дана в третьем квадранте. Источником напряжения питания промежуточного магнитного усилителя ввиду малой мощности можно применить стабилизированный источник питания и поэтому усилитель охарактеризовать одной характеристикой.

Во второй квадрант вычерчиваем статическую характеристику цепи обратной связи, которая состоит из тензометрического датчика усилия и специального электронного усилителя.

При вычерчивании статических характеристик отдельных элементов надо обратить внимание на то, что у двух последова-

тельно включенных элементов масштабы выходных и входных величин были одинаковы.

Если статические характеристики отдельных элементов вычерчены, можно приступить к конструированию статической характеристики разомкнутой системы. Для этого задаем какой-то ток задавания разомкнутой системы $I_{з\text{раз}1}$ (на фиг. 2 соответствует точке 1). Далее перенесем этот ток на статическую характеристику промежуточного магнитного усилителя (точка 2). Точке 2 на оси ординат соответствует точка 3, выходной ток промежуточного магнитного усилителя, который является входным током силового магнитного усилителя. Перенеся точку 3 на статическую характеристику силового магнитного усилителя при напряжении питания 344 в, получим точку 4. Точке 4 на оси абсцисс соответствует точка 5 — выходное напряжение силового магнитного усилителя, которое является входным напряжением ИН. Далее перенесем точку 5 на статическую характеристику ИН, где получим точку 6. Точке 6 соответствует точка 7 на оси ординат, усилие, действующее на латунную пластину — выходной параметр системы. Из точки 7 проведем горизонтальную линию во второй квадрант, а из точки 1 вертикальную линию. Точка пересечения этих двух линий (точка 8) дает нам одну точку статической характеристики разомкнутой системы $F_{\text{раз}} = f(I_{з\text{раз}})$. Аналогично можно найти другие точки статической характеристики разомкнутой системы.

Далее приступим ко второму этапу — конструированию статической характеристики замкнутой системы $F_{\text{зам}} = f(I_{з\text{зам}})$. Для этого удлиним горизонтальную линию из точки 8 до пересечения со статической характеристикой цепи обратной связи (точка 9). Перенеся точку 9 на ось абсцисс, получим точку 10 — ток обратной связи при заданной величине усилия. Суммируя токи, которые соответствуют точкам 1 ($I_{з\text{раз}1}$) и 10 ($I_{\text{о}1}$), получим ток задавания замкнутой системы $I_{з\text{зам}1}$, которому соответствует точка 11. Из точки 11 проведем вертикальную линию и из точки 9 продлим горизонтальную линию. Пересечение этих двух линий дает точку статической характеристики замкнутой системы (точка 12). Аналогично конструируем и другие точки статической характеристики замкнутой системы.

Далее исследуем влияние существующих возмущений. Считаем, что $\Delta u = 0$, а $\Delta U_c = -44$ в (т. е. напряжение питания силового магнитного усилителя понижается с 344 в на 300 в). Это значит, что силовой магнитный усилитель перейдет со средней характеристики на нижнюю характеристику. Этому случаю соответствуют новые статические характеристики в разомкнутой и замкнутой системах. Новую статическую ха-

рактическую разомкнутой системы получим по точкам 1, 2, 3, 4', 5', 6', 7', 8' и 9'. Новую статическую характеристику замкнутой системы строим по точкам 9', 10', 11' и 12'.

Отклонение выходного параметра — усилия — в зависимости от возмущения напряжения ΔU_c соответствует разнице ординат на статических характеристиках замкнутой системы при заданном токе задавания.

4. Выводы

Разработан графический метод для конструирования статической характеристики САР ИН, по которой можно конструировать статические характеристики в разомкнутой и замкнутой системах при нелинейных характеристиках отдельных элементов. Можно также определить отклонение выходного параметра в зависимости от существующих возмущений. В данном случае графическая конструкция проделана на конкретном примере, где выходной величиной системы является усилие, развиваемое ИН.

В металлургии и литейном производстве имеются задачи, которые требуют стабилизации производительности. Результаты, изложенные в настоящей статье, могут быть использованы при разработке жидкометаллических САР на базе ИН, магнитных усилителей и датчика скорости жидкого металла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. А. Тийсмус, К. А. Ильвес. Стабилизация развиваемых индукционным насосом усилий в замкнутой системе управления. Исследование и проектирование электромагнитных средств перемещения жидких металлов. Сборник трудов IV. Труды ТПИ, серия А, № 293, Таллин 1966.
2. А. И. Вольдек. Некоторые общие соотношения для линейных индукционных насосов. Исследование и проектирование электромагнитных средств перемещения жидких металлов. Сборник трудов II. Труды ТПИ, серия А, № 214, Таллин 1964.
3. Н. М. Тищенко. Стабильность магнитных усилителей. Издательство «Энергия» 1964.
4. A. A n n u s. Automatiseerimisobjektide uurimine. Kirjastus «Valgus», 1965.

J. Laugis, H. Tiismus

Графическое определение статических характеристик автоматической системы управления индукционным насосом

Summary

In the given work a graphic method of determination of static characteristics of automatic control system of induction pump is worked out. On the basis of the given method the change of the output variable of the system due to probable disturbances can also be determined. The graphic method is suitable to use in these cases if static characteristics of different elements of the system are nonlinear.

Ю. Я. Лаугис, Х. В. Силламаа, Х. А. Тийсмус

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ИНДУКЦИОННОГО НАСОСА*

1. Введение

В связи с расширением областей применения индукционных насосов в металлургии, в литейном производстве и в атомной энергетике все чаще возникает проблема автоматического регулирования производительности или напора насосного агрегата, являющегося источником энергии в системе перемещения жидкого металла.

Во многих случаях к таким системам не предъявляют особенно высоких требований к постоянству производительности или напора и поэтому можно использовать сравнительно простые системы управления, выполняющие пуск и остановку с весьма грубым изменением напора. Но иногда требования к стабильности производительности или напора являются чрезвычайно высокими.

Например, у печи непрерывного рафинирования магния желательнее стабилизировать скорость течения жидкого металла $0,66 \text{ м/сек}$ с точностью $\pm 0,04 \text{ м/сек}$.

Создание систем автоматического регулирования (САР), удовлетворяющих высоким требованиям, возможно только в том случае, если хорошо известны динамические свойства всех элементов САР, в том числе и объекта регулирования — индукционного насоса. До сих пор в опубликованных материалах нет данных об определении передаточных функций индукционных насосов ни аналитическим, ни экспериментальным путем.

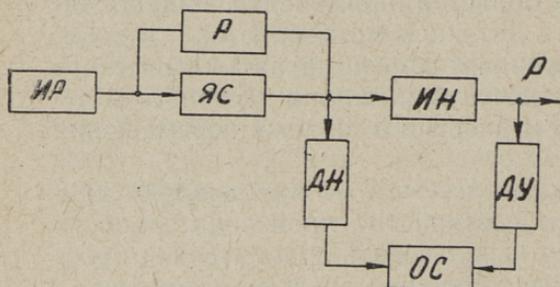
В настоящей статье излагаются результаты экспериментального исследования, как самого достоверного метода для определения динамических свойств индукционного насоса. В данном случае аналитический подход является очень трудным

* В данной работе участвовал студент ТПИ Р. О. Тугевус.

в связи со сложностью электромагнитных и гидродинамических процессов в индукционном насосе.

2. Описание объекта регулирования и опытной установки

В качестве объекта регулирования был исследован индукционный насос типа ЭМН-6, технические данные которого даны в [1]. В качестве жидкого металла была использована ртуть. Выходным параметром индукционного насоса являлся развиваемый напор (высота столба ртути, в мм, в вертикальной стеклянной трубе, соединенной при помощи резинового шланга с выходным концом канала насоса). Для измерения напора (высота столба ртути в вертикальной стеклянной трубе) был использован датчик уровня типа ЭИУ-1.



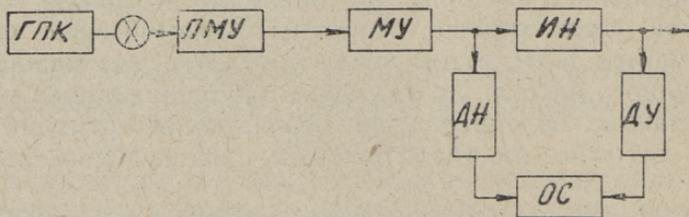
Фиг. 1. Структурная схема для снятия переходной характеристики:

ИР — индукционный регулятор; ИН — индукционный насос; ЯС — трехфазный ящик сопротивления; Р — трехфазный рубильник; ДУ — датчик уровня (напора); ДН — датчик напряжения; ОС — осциллограф

Входным параметром индукционного насоса принято напряжение питания.

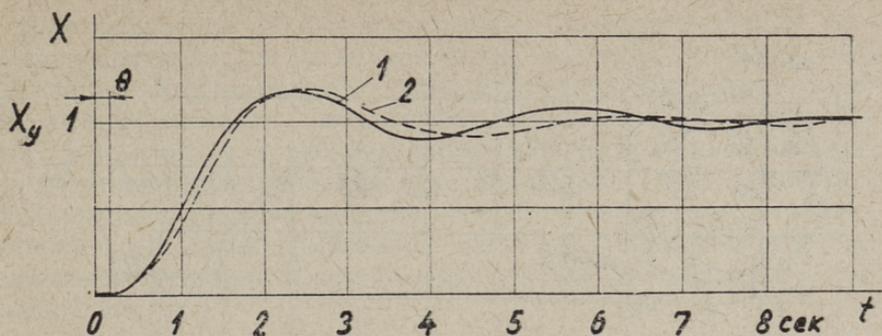
В данной работе передаточная функция определена двумя способами:

1) на основе экспериментально снятой переходной характеристики;



Фиг. 2. Структурная схема для снятия АФЧ характеристики:

ИН — индукционный насос; МУ — силовой магнитный усилитель; ЛМУ — промежуточный магнитный усилитель; ГПК — генератор периодических колебаний; ДН — датчик напряжения; ДУ — датчик уровня (напора); ОС — осциллограф



Фиг. 3. Относительная переходная характеристика индукционного насоса: 1 — экспериментальная, 2 — аппроксимирующая

2) на основе экспериментально снятой амплитудно-фазовой частотной характеристики.

При снятии переходной характеристики индукционный насос был включен согласно структурной схеме, изображенной на фиг. 1. Для снятия амплитудно-фазовой частотной характеристики была применена структурная схема, приведенная на фиг. 2.

3. Результаты эксперимента

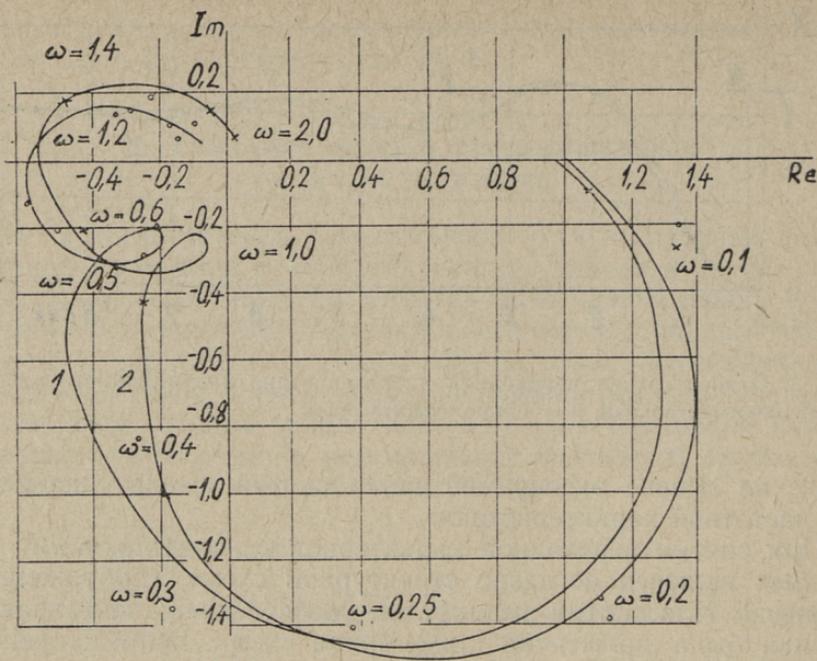
Экспериментально снятая относительная переходная характеристика изображена на фиг. 3 (кривая 1), откуда видно, что установление напора на выходе насоса при возмущении единичной функцией происходит с существенными колебаниями, причем можно считать $x' = 0$ при $t = 0$, и приближенный расчет показывает, что передаточная функция не может быть представлена уравнением второго порядка, а имеет более сложный вид:

$$W(p) = \frac{K}{b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + 1} e^{-\theta p}$$

По методике, изложенной в [3], определены коэффициенты передаточной функции θ_3 , θ_2 , θ_1 и время запаздывания θ . Коэффициент K определен на основании статической характеристики.

Передаточная функция, определенная на основании переходной характеристики, окончательно принимает вид:

$$W(p) = \frac{7,8}{0,196p^3 - 0,63p^2 + 1,08p - 1} e^{-0,15p}$$



Фиг. 4. АФЧ характеристика индукционного насоса:
1 — экспериментальная, 2 — аппроксимирующая

По этой передаточной функции на аналоговой вычислительной машине получена относительная переходная характеристика, которая изображена кривой 2 на фиг. 3.

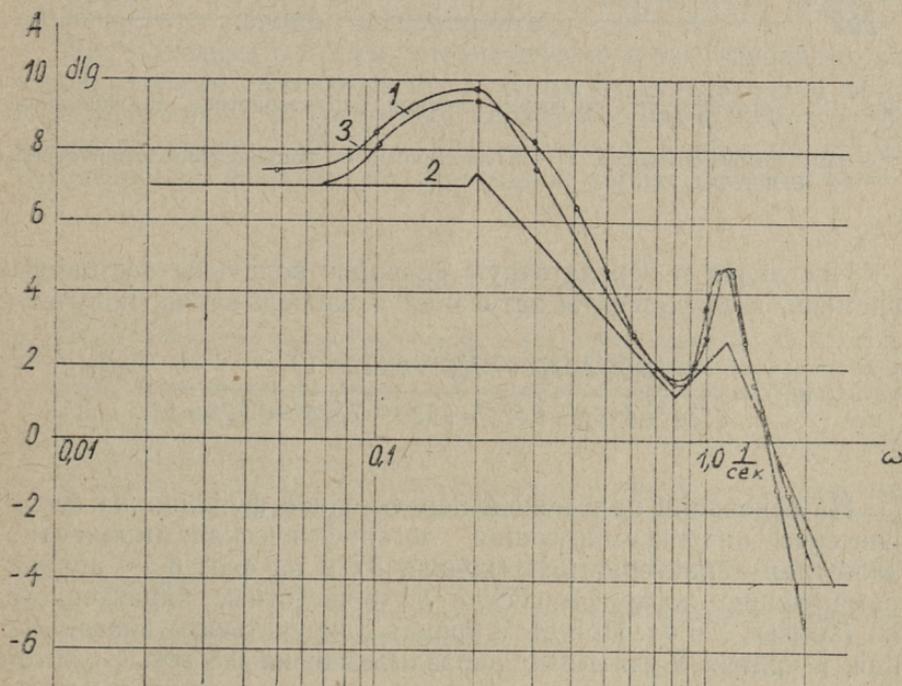
Экспериментально снятая АФЧ характеристика в относительных величинах дана на фиг. 4 (кривая 2). Для выражения передаточной функции на основе АФЧ характеристики существует ряд методов [3, 4, 5, 6], но они действительны для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядка. Для объектов высшего порядка в методике, данной в [7], рекомендуется по вещественной частотной характеристике вычислить передаточную функцию на электронно-вычислительной машине.

В данной работе для определения передаточной функции применен метод, изложенный в [8]. Сущность метода состоит в аналитическом расчете логарифмических частотных характеристик, которые могут сместиться по частотной оси, не изменяя своей формы при изменении величин основных параметров звена. Вышеназванное свойство разрешает для типовых звеньев составить универсальные таблицы (даны в [8]), где параметром является относительная частота $\nu = \omega T$.

Для получения аппроксимирующих логарифмических частотных характеристик на основе экспериментально снятой АФЧ характеристики, во-первых, конструированы экспериментальная логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (фиг. 5, кривая 1) и экспериментальная логарифмическая фазо-частотная характеристика (фиг. 6, кривая 1). В результате многократного расчета найдено, что для аппроксимации экспериментальных логарифмических частотных характеристик передаточная функция индукционного насоса должна иметь следующий вид:

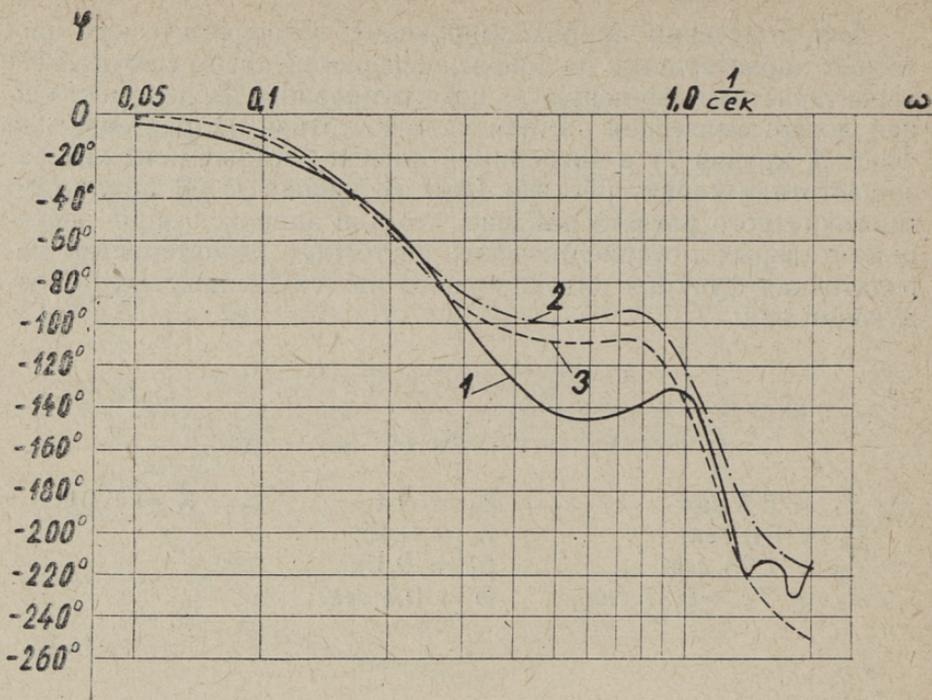
$$W(\rho) = \frac{K(1+T_1\rho)(1+2\beta_3T_3\rho+T_3^2\rho^2)}{(1+2\beta_2T_2\rho+T_2^2\rho^2)(1+2\beta_4T_4\rho+T_4^2\rho^2)(1+T_5\rho)^2} e^{-\theta\rho},$$

где $T_1 = 5,5$ сек; $\beta_2 = 0,4$; $K = 5,01$.
 $T_2 = 5,0$ сек; $\beta_3 = 0,45$;
 $T_3 = 1,25$ сек; $\beta_4 = 0,15$;
 $T_4 = T_5 = 0,87$ сек; $\theta = 0,3$ сек.



Фиг. 5. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика индукционного насоса:

1 — экспериментальная, 2 — кусочно-линейная аппроксимация, 3 — аппроксимирующая по передаточной функции



Фиг. 6. Логарифмическая фазо-частотная характеристика индукционного насоса:

1 — экспериментальная, 2, 3 — рассчитанные по аппроксимирующей передаточной функции

Поставляя в передаточную функцию величины постоянных времени, коэффициенты затухания и запаздывания, получаем:

$$W(p) = \frac{5,01(8,59p^3 + 7,72p^2 + 6,62p + 1)}{0,72p^6 + 4,18p^5 + 6,62p^4 + 9,73p^3 + 7,83p^2 + 5,90p + 1} e^{-0,3p}$$

На основании полученной передаточной функции на фиг. 5 нанесены аппроксимирующая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (кривая 3) и на фиг. 6 — аппроксимирующие логарифмические фазо-частотные характеристики (кривые 2 и 3). При этом кривая 2 не учитывает запаздывания, а кривая 3 учитывает запаздывание на 0,3 сек. С учетом запаздывания получается гораздо лучшее совпадение с экспериментальной логарифмической фазо-частотной характеристикой.

Аппроксимирующая АФЧ характеристика нанесена на фиг. 4 (кривая 1).

4. Выводы

В результате данной работы получена передаточная функция индукционного насоса двумя способами. Зная передаточную функцию объекта регулирования — индукционного насоса — можно разумно рассчитывать и проектировать системы автоматического регулирования напора.

При сравнении полученных передаточных функций видно, что полученная на основе переходной характеристики передаточная функция имеет более простой вид, но неудовлетворительно характеризует поведение индукционного насоса в высокочастотной области. Гораздо точнее динамические свойства индукционного насоса характеризуются передаточной функцией, полученной на основе частотных характеристик. На основе этой передаточной функции оказывается, что исследуемый индукционный насос относится к классу объектов, передаточные функции которых отличаются наличием больших нулей.

При сопоставлении передаточных функций выясняется, что статические коэффициенты усиления также отличаются друг от друга. Различие в статических коэффициентах усиления объясняется условиями эксперимента.

При создании системы автоматического регулирования высокой точности целесообразно исходить из передаточной функции, полученной по частотным характеристикам. Когда требования динамики САР не особенно высоки, можно рассчитать передаточную функцию по переходной характеристике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 197, 1962.
2. А. А. Вавилов, А. И. Солодовников. Экспериментальное определение частотных характеристик автоматических систем. Госэнергоиздат, Москва—Ленинград 1963.
3. И. Н. Печорина. Расчет систем автоматического управления. Машгиз, Москва—Свердловск 1962.
4. A. Annus. Automiseerimisobjektide uurimine. Kirjastus «Valgus», 1965.
5. H. Lind. Automaatregulaatorite valik ja häälestamine. Kirjastus «Eesti Raamat», 1964.
6. Н. Т. Кузовков. Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. Оборонгиз, 1960.
7. В. М. Ордынцев. Математическое описание объектов автоматизации. Издательство «Машиностроение», 1965.
8. H. Sillamaa. Automaatreguleerimine I. TPI rotaprint, 1965.

Experimental Determining a System Function of an Induction Pump

Summary.

In this work a system function for an induction pump has been determined experimentally in the case when the output variable is the pressure.

The system function is calculated by two methods:

- 1) from the step response;
- 2) from the frequency response.

УДК 669.05; 621.689

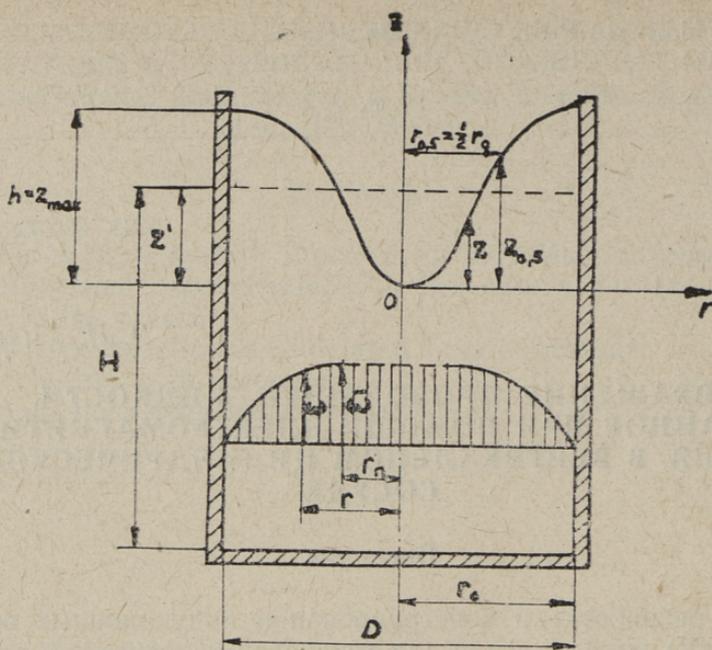
Э. П. Тимма

ВРАЩЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ, СОЗДАННОЕ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Введение

При разработке и конструировании индукционных вращателей (ИВ) жидкой стали для установок непрерывной отливки полых заготовок, для улучшения работы и конструкции некоторых типов центробежных насосов и т. д., необходимо знать основные закономерности, характеризующие сложные электромагнитные и гидродинамические процессы, происходящие во вращающейся жидкости. Решение задачи о стационарном турбулентном вращении жидкости в вертикальном цилиндрическом сосуде имеет определенное значение для выяснения закономерностей сложных гидравлических процессов во вторичной системе индукционных вращателей и позволяет сделать некоторые существенные выводы о вращении жидкости в чаше, размещаемой в расточке ИВ (см. фиг. 1).

При стационарном течении жидкости в чаше сумма моментов сил трения равна вращающему моменту ИВ, вследствие чего жидкость вращается с определенной угловой скоростью. Так как стационарный режим течения жидкости возможен при любом значении вращающего момента ИВ, то отсюда вытекает, что момент сил трения зависит от угловой скорости жидкости, а именно, что силы трения увеличиваются с увеличением угловой скорости. При заданной угловой скорости в центральной зоне вращающейся жидкости силы трения зависят от толщины ламинарного и турбулентного пограничных слоев [1, 2, 3], формы свободной поверхности жидкости, высоты подъема жидкости, степени шероховатости стенок, вязкости и температуры жидкости, а также от некоторых других факторов. Общая циркуляция жидкости [1], вызванная ограниченными размерами



Фиг. 1. Схема электромагнитного вращения жидкого металла в вертикальной цилиндрической чаше, размещенной в расточке ИВ

индуктора, донные эффекты, существование свободной поверхности жидкости и, наконец, вибрация, вызванная нестабильностью процесса, существенно влияют на величину трения и затрудняют не только аналитическое, но и экспериментальное исследование поставленной проблемы.

Так как до настоящего времени, из-за сложности процессов, оказалось невозможным найти точное решение задачи о вращении жидкости в чаше ИВ, то приходится пользоваться некоторыми приближенными методами, основанными в большей или меньшей степени на опытных данных и предположениях. Критерием применимости той или иной формулы является только ее соответствие с опытными данными.

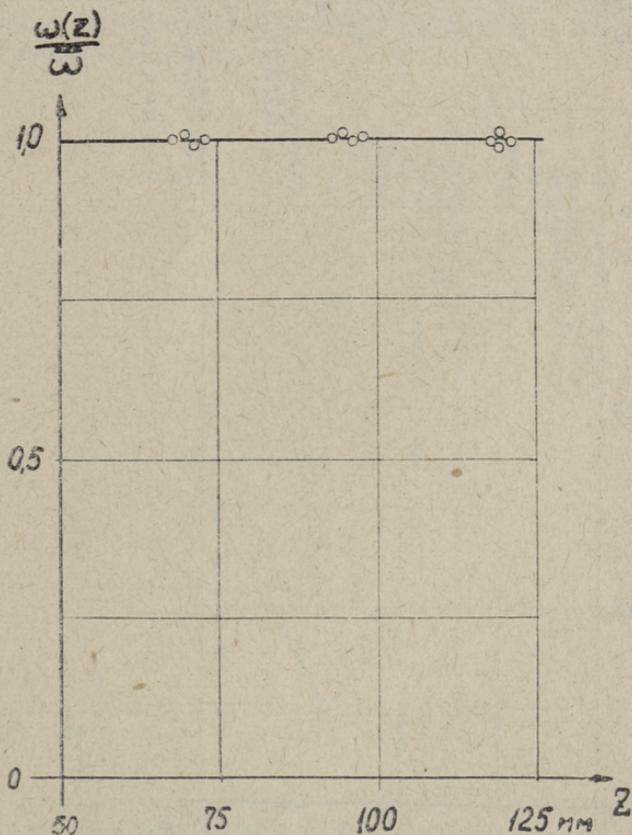
1. Форма свободной поверхности вращающейся жидкости

В работах [1, 2] исследовалась форма свободной поверхности вращающейся жидкости при отсутствии электромагнитного поля. Вращение жидкости в электромагнитном поле очень приближенно исследовано в работе [1] и из-за недостаточного коли-

чества опытных данных нельзя было формулировать общих закономерностей, по которым развиваются гидродинамические процессы в чаше ИВ и по которым, в частности, формируется свободная поверхность жидкого металла. Целью настоящей работы было поставлено поэтому качественное исследование гидродинамических процессов в чаше ИВ и получение приближенных формул для определения формы свободной поверхности вращающейся жидкости.

Анализ опытных данных показывает, что характер вращения жидкости зависит от следующих физических величин:

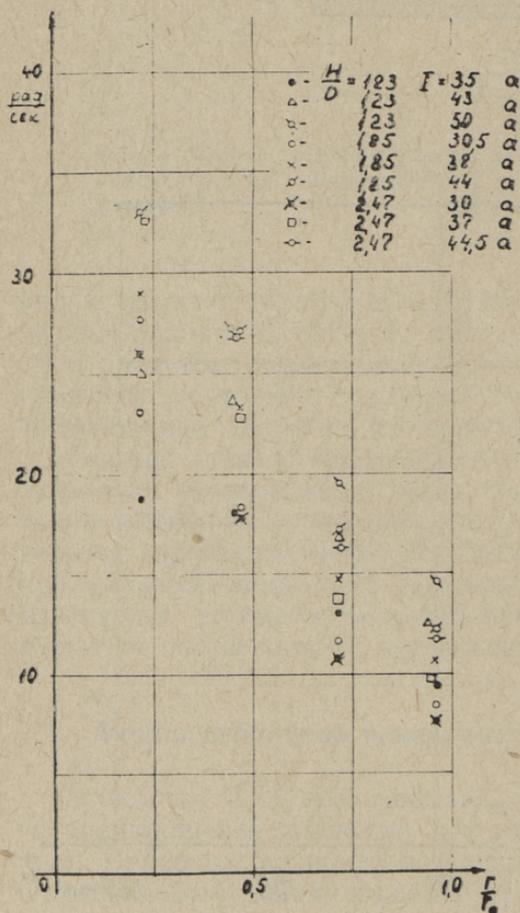
- а) отношение высоты первоначального уровня неподвижной жидкости к диаметру чаши H/D ;
- б) диаметр чаши D ;
- в) поле угловой скорости $\omega(r, z)$;
- г) поле магнитной индукции $B(r, z)$;
- д) ток в обмотке ИВ I ;
- е) температура жидкости ϑ ;



Фиг. 2. Изменение профилей угловых скоростей по вертикалям

- ж) кинематическая вязкость жидкости ν ;
- з) удельная проводимость жидкости γ ;
- и) размер выступов шероховатости Δ (только при больших значениях угловой скорости и малых значениях соотношения H/D).

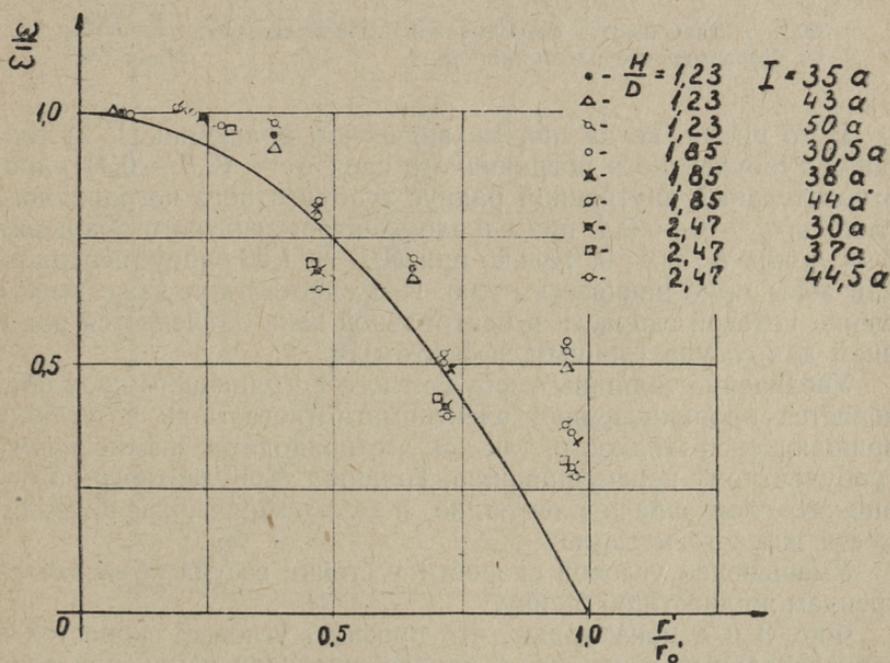
Все эти величины измерялись во время опытов при всех гидродинамических режимах течения жидкости. Опыты проводились в цилиндрических сосудах из стеклопласта диаметром в 162 и 66 мм. Угловая скорость измерялась в трех горизонтальных сечениях при разных значениях тока ИВ. Одновременно определялись форма свободной поверхности и значение вращающего момента. Соотношение H/D изменялось при сосуде диаметром 162 мм в пределах от 1,23 до 2,47, а при сосуде диаметром 66 мм — от 1,25 до 5. По полученным опытным данным были составлены графики, приведенные на фиг. 2—16. Анализ ошибок опытных данных приведен в работе [3].



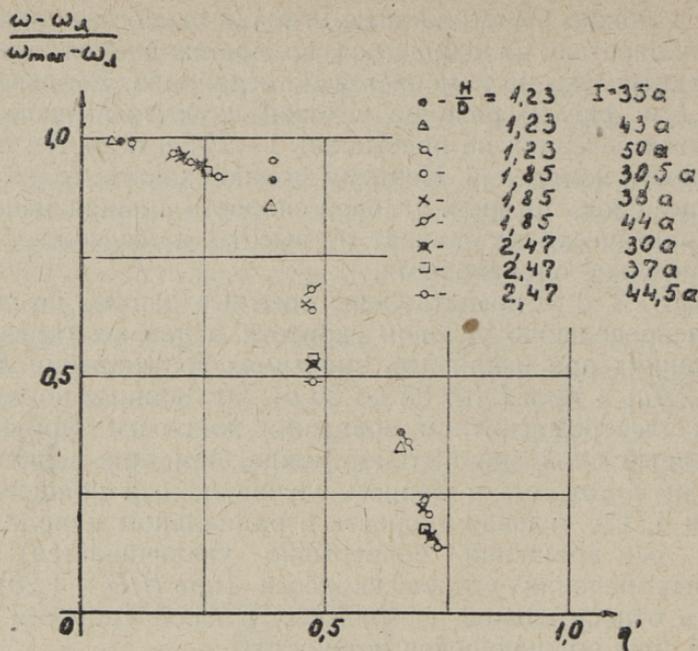
Фиг. 3. Профили угловых скоростей при различных значениях соотношения H/D и тока I

Как и можно было ожидать, угловая скорость жидкого металла, полностью находящегося во вращающемся магнитном поле, практически не изменяется по вертикали. В проведенных опытах (см. фиг. 2) разница угловой скорости в разных горизонтальных сечениях не превышает 1—2% и остается в пределах точности измерения. Поэтому можно сказать, что, исключая придонные слои, профили угловой скорости вращающейся жидкости практически не зависят от высоты и их можно считать приблизительно одинаковыми.

На фиг. 3, 4, 5 представлены опытные данные по радиальному распределению угловой скорости и разных горизонтальных сечениях при различных значениях соотношения H/D (от 1,23 до 2,47) и тока I (от 35 до 50 а). Эти данные показывают, что при электромагнитном вращении жидкости турбулентный пограничный слой значительно толще, чем при механическом вращении и доходит в данном случае до оси вращения (см. фиг. 3 и 4, где угловая скорость в радиальном направлении в сторону оси вращения непрерывно увеличивается). Только при малых значениях угловой скорости (при $H/D = 1,23$) можно заметить относительное постоянство угловой скорости в центральной зоне вращающейся жидкости.



Фиг. 4. Безразмерные профили угловых скоростей в различных горизонтальных сечениях. Сплошная линия получена по формуле (2).



Фиг. 5. Зависимость безразмерной угловой скорости $\frac{\omega - \omega_L}{\omega_{\max} - \omega_L}$ от безразмерного расстояния η'

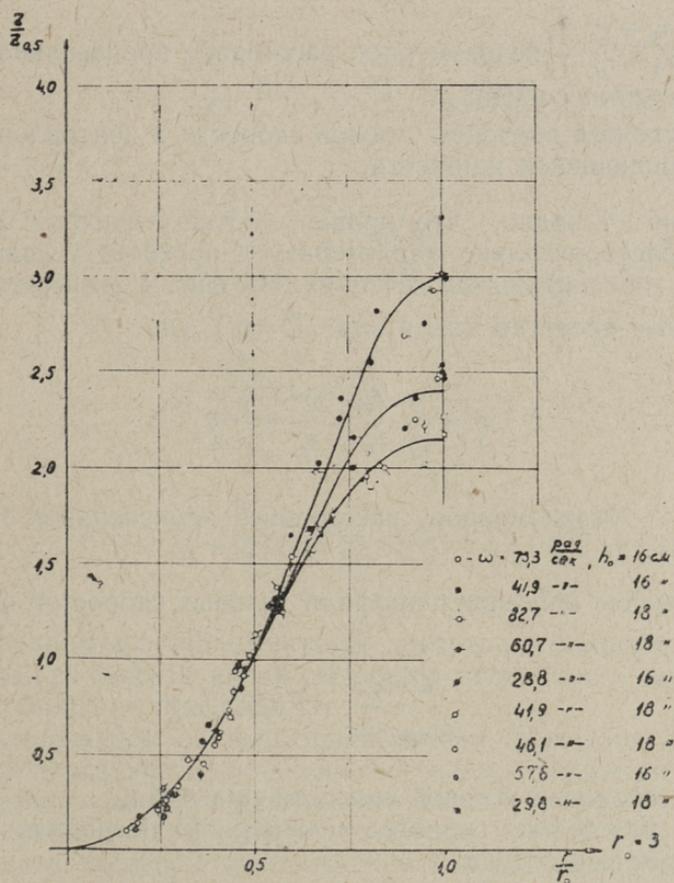
В то время, когда при механическом вращении [1, 2] толщина турбулентного пограничного слоя $\delta = (0,3 - 0,4)r_0$ или относительный внутренний радиус турбулентного пограничного слоя $r_n/r_0 = 0,7 - 0,4$, при случае электромагнитного вращаения $\delta \approx r_0$ или $r_n/r_0 \approx 0$. Только при $H/D = 1,23$ радиус центральной зоны r_n не равняется нулю. Постоянство или даже уменьшение угловой скорости в центральной зоне объясняется влиянием для сосуда (донным эффектом).

Увеличение толщины турбулентного пограничного слоя объясняется проникновением электромагнитного поля в глубину вращающейся жидкости, так как это приводит к интенсивному турбулентному перемешиванию. Толщина турбулентного пограничного слоя зависит, очевидно, и от электрической проводимости жидкого металла.

Уменьшение угловой скорости у стенки сосуда объясняется трением жидкости об стенку.

Фиг. 3 и 4 показывают, что профили угловых скоростей в горизонтальных сечениях, в данных пределах изменения тока I и соотношения H/D , могут считаться с достаточной степенью точности (в первом приближении) подобными. Следовательно,

можно считать, что течение жидкости происходит в автомодельной области; только при $H/D \leq 1,2$ нельзя доказать автомодельность по всему объему течения жидкости. В области $0 < H/D < 1,5$ обнаруживается влияние дна, заключающееся в изменении поля угловой скорости и формы свободной поверхности в центральной зоне вращающейся жидкости (см. фиг. 6). В этой зоне, следовательно, также нельзя говорить об автомодельности течения жидкости. Обработкой опытных данных удалось вывести приближенную формулу для определения радиуса вышеупомянутой центральной зоны, в которой не наблюдается подобие между профилями угловых скоростей:



Фиг. 6. Форма свободной поверхности в относительных координатах при механическом вращении воды в стеклянном сосуде. Сплошные линии получены по формуле (5)

$$\frac{r_{np}}{r_0} = \frac{1}{\left(\frac{H}{D}\right)^8 + 1}, \quad (1)$$

где r_{np} — радиус центральной зоны жидкости, в которой свободная поверхность жидкости из-за донного эффекта остается горизонтальной.

Используя данные, приведенные на фиг. 3 и 4, и считая течение жидкости автомоделной, получаем при помощи метода полином [1, 2] формулу

$$\frac{\omega}{\bar{\omega}} = \eta(2-\eta), \quad (2)$$

где $\eta = \frac{r_0 - r}{r_0 - r_{np}}$ — безразмерное расстояние произвольной точки от стенки сосуда;

$\bar{\omega}$ — среднее значение угловой скорости в центральной зоне вращающейся жидкости.

На фиг. 4 видно, что кривая, соответствующая формуле (2), удовлетворительно характеризует профили угловых скоростей в горизонтальных сечениях. На фиг. 4 экспериментальные данные представлены в виде $\frac{\omega}{\bar{\omega}}(\eta')$, где

$$\eta' = \frac{r - r_{np}}{r_0 - r_{np}} = \frac{r'}{r_0'} = 1 - \eta. \quad (3)$$

Здесь η' — безразмерное расстояние произвольной точки от оси сосуда.

Еще лучше описывает профили угловых скоростей формула типа

$$\frac{\omega - \omega_{\lambda}}{\omega_{max} - \omega_{\lambda}} = F(\eta'), \quad (4)$$

где ω_{λ} — значение угловой скорости при $r = r_{\lambda}$;

r_{λ} — расстояние границы ламинарного пограничного слоя от оси сосуда;

ω_{max} — максимальное значение угловой скорости в центральной зоне жидкости;

F — универсальная функция, вид которой можно определить по опытным данным (например, по фиг. 5).

Считая, что профили угловой скорости определяются формулой (2) и применяя методику, изложенную в [1, 2], получаем для определения формы свободной поверхности вращающейся жидкости следующие формулы:

а) в пограничном слое ($r_0 \geq r \geq r_n$)

$$z = h + \frac{\bar{\omega}^2 r_0^2}{g} \left(\frac{r_n}{r_0} - 1 \right) \left[\left(\frac{r_n}{r_0} - 1 \right) k_2 - k_1 \right]; \quad (5)$$

б) в центральной зоне ($0 \leq r \leq r_n$)

$$z = \frac{\bar{\omega}^2 r^2}{2g}. \quad (6)$$

Здесь

$$h = \frac{h'}{3} \left[1 + 1,2 \frac{r_n}{r_0} + 0,8 \left(\frac{r_n}{r_0} \right)^2 \right], \quad (7)$$

$$h' = \frac{\bar{\omega}^2 r_0^2}{2g} \quad (8)$$

$$k_1 = \int_0^{\eta} \eta^2 (2-\eta)^2 d\eta = \eta^3 \left(\frac{4}{3} - \eta + \frac{1}{5} \eta^2 \right) \quad (9)$$

$$k_2 = \int_0^{\eta} \eta^3 (2-\eta)^2 d\eta = \eta^4 \left(1 - \frac{4}{5} \eta + \frac{1}{6} \eta^2 \right) \quad (10)$$

z — ордината точки свободной поверхности жидкости;
 $h = z_{\max}$ — подъем краев свободной поверхности жидкости;
 g — ускорение тяжести.

Вычисленная по вышеприведенным формулам форма свободной поверхности вращающейся жидкости удовлетворительно совпадает с экспериментальными данными, как было показано уже в работах [1, 2]. Это хорошо видно и на фиг. 6, где в относительных координатах приведены как экспериментальные данные, так и вычисленные по формуле (5) теоретические кривые в случае механического вращения жидкости. Теоретические кривые получены при соотношениях r_n/r_0 , равных 0,4, 0,5 и 0,7. Фигура показывает, что расчетной кривой, достаточно

хорошо совпадающей с экспериментальными данными, может считаться кривая, соответствующая $r_n/r_0 \approx 0,5$. Следовательно, в случае механического вращения толщина турбулентного пограничного слоя δ приблизительно равна $0,5 r_0$.

В случае вращения проводящей жидкости в электромагнитном поле необходимо учесть, в первую очередь, увеличение толщины пограничного слоя и принимать

$$\frac{r_r}{r_0} = 0. \quad (11)$$

Тогда формула (5) принимает вид

$$z = h + \frac{\bar{\omega}^2 r_0^2}{g} (k_2 - k_1), \quad (12)$$

а формула (7) —

$$h = \frac{h'}{3} = \frac{\bar{\omega}^2 r_0^2}{6g} \quad (13)$$

Следовательно,

$$z = \frac{\bar{\omega}^2 r_0^2}{g} \left(\frac{1}{6} + k_2 - k_1 \right), \quad (14)$$

где

$$k_1 = \eta^3 \left(\frac{4}{3} - \eta + \frac{1}{5} \eta^2 \right), \quad (15)$$

$$k_2 = \eta^4 \left(1 - \frac{4}{5} \eta + \frac{1}{6} \eta^2 \right), \quad (16)$$

$$\eta = \frac{r_0 - r}{r_0 - r_n} = 1 - \eta' = 1 - \frac{r}{r_0} \quad (17)$$

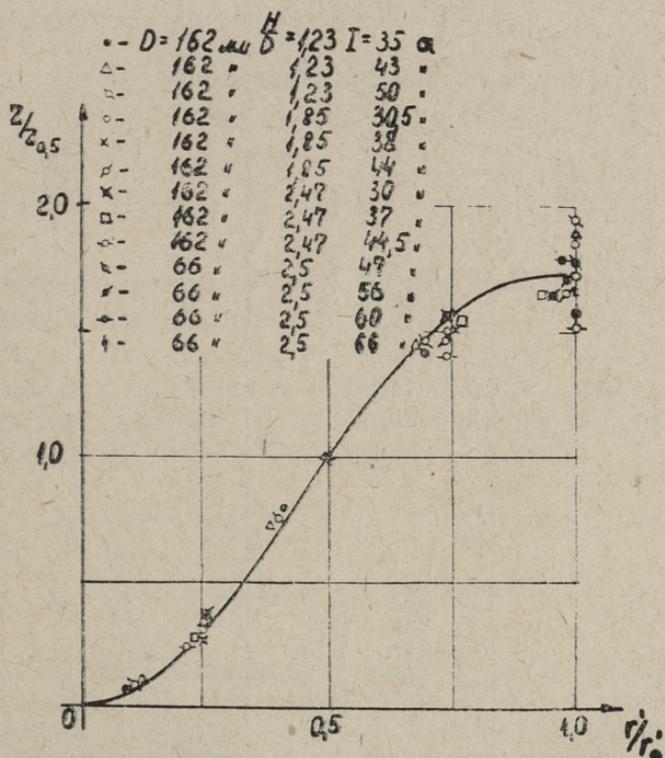
На фиг. 7 представлены точки, полученные опытным путем, и теоретическая линия, полученная по формуле (14). Фигура показывает, что формула (14) вполне удовлетворительно описывает форму свободной поверхности вращающейся в электромагнитном поле жидкости.

На фиг. 8 приведены экспериментальные данные, использованные в настоящей работе.

2. Определение момента сил трения

Как показывает простой анализ экспериментальных данных, сумма моментов сил трения зависит от поля угловых скоростей $\omega(r, z)$, от диаметра сосуда D , от соотношения H/D , от плотности вращающейся жидкости ζ , от кинематической вязкости ν и от температуры ϑ . Так как температура в наших опытах изменялась в небольших пределах, то ее влияние практически сказывалось лишь на кинематической вязкости.

Исходя из подобия профилей угловых скоростей в горизонтальных сечениях [1, 2], можно при исследовании вращающего момента заменить поле угловых скоростей средним значением угловой скорости в центральной зоне жидкости $\bar{\omega}$. Другими словами, можно считать, что



Фиг. 7. Форма свободной поверхности при электромагнитном вращении ртути в сосуде из стеклопласта. Сплошная линия получена по формуле (14)

$$M = M(\bar{\omega}, D^n, \frac{H}{D}, \nu) \quad (18)$$

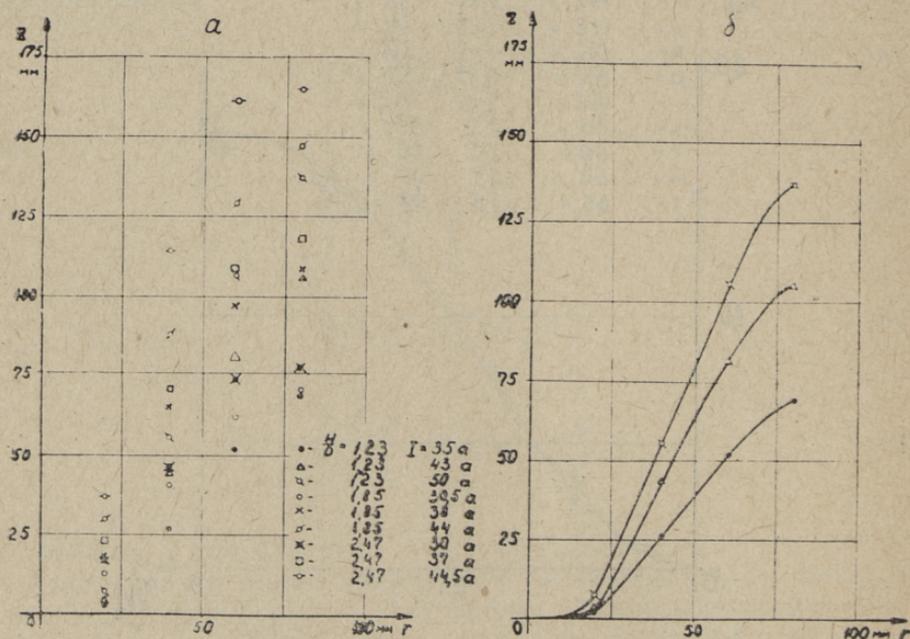
При постоянстве физических свойств жидкости можно получить более простую зависимость

$$M = M(\bar{\omega}, D^n, \frac{H}{D}) \quad (19)$$

Сумма сил трения F между вращающейся жидкостью и стенками сосуда может считаться, как известно, пропорциональной площади стенок. Так как площадь боковой поверхности цилиндрического сосуда пропорциональна диаметру, а площадь дна квадрату диаметра, то момент сил может быть определен выражением

$$M = a D^n, \quad (20)$$

где a — коэффициент пропорциональности.



Фиг. 8. Форма свободной поверхности вращающейся жидкости по экспериментальным данным: a — совокупность полученных точек; b — форма поверхности при $D = 162$ мм и $H/D = 1,23$.

Показатель степени n в формуле (20) зависит от соотношения боковой и донной поверхностей. Очевидно, что при $H \gg D$ можно пренебречь силами трения вращающейся жидкости об дно и $n = 2$. В случае же $H \ll D$ силы трения между вращающейся жидкостью и дном намного превышают силы бокового трения, вследствие чего следует принимать $n = 3$.

Так как в настоящей работе соотношение H/D находилось в пределах от 1 до 3, оказалось возможным считать, что

$$n = 2,5 \quad (21)$$

Закономерность (19) можно поэтому записать в виде

$$M = k f D^{2,5}, \quad (22)$$

где k — поправочный коэффициент, зависящий от физических свойств жидкости;

f — функция, зависящая от $\bar{\omega}$ и H/D .

В случае других жидкостей (например, жидкой стали) коэффициент k может определяться приближенной формулой

$$k = \frac{\nu}{\nu_{рт}}, \quad (23)$$

где ν — кинематическая вязкость исследуемой жидкости;

$\nu_{рт}$ — кинематическая вязкость ртути.

Универсальную функцию f в формуле (22) можно определить по опытным данным. В настоящей работе для нее была найдена следующая формула:

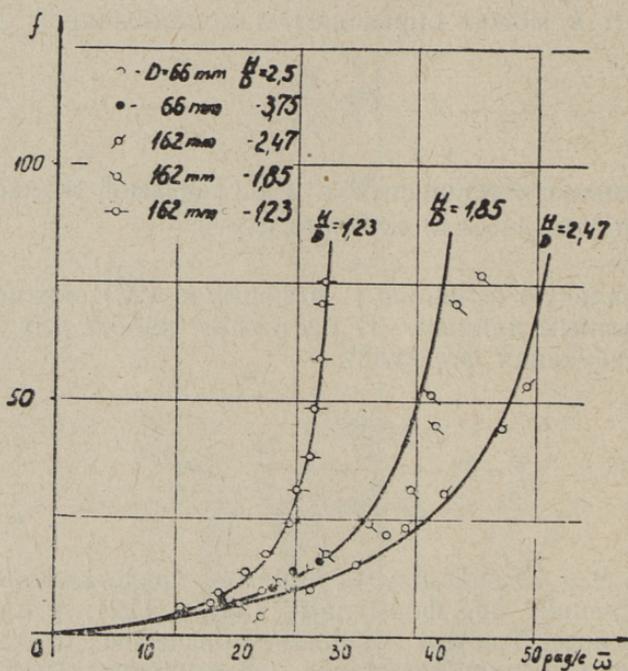
$$f = 2,1 \frac{2,8 \left(\frac{H}{D}\right)^3 - 1}{24 \frac{H}{D} - \bar{\omega}} \cdot \frac{\bar{\omega}}{D} \text{ нм}^{-1,5} \quad (24)$$

На фиг. 9 и 10 сплошными линиями представлены результаты вычислений по формулам (24) и (22), а точками — опытные данные. Так как совпадение расчетных и экспериментальных данных является вполне удовлетворительной, то формулы (24) и (22) можно рекомендовать к использованию в качестве первого приближения при расчетном определении момента сил трения.

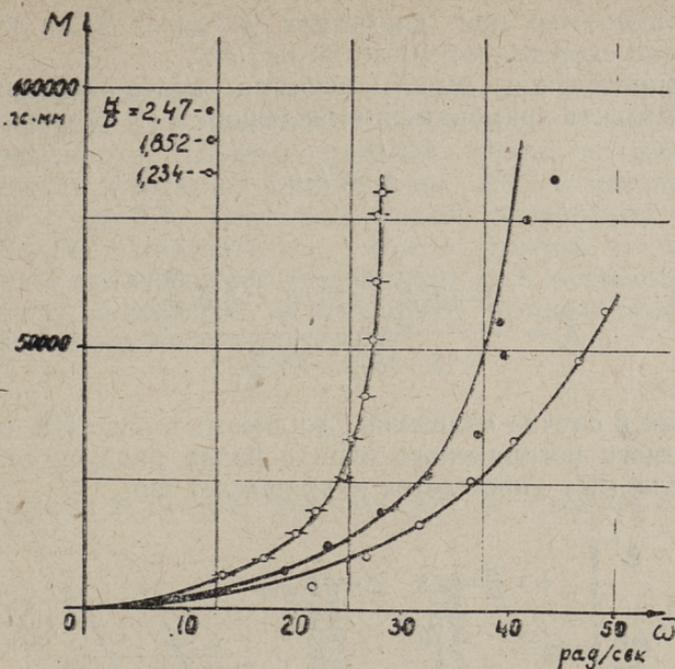
Фиг. 10 показывает, что с увеличением угловой скорости увеличивается и момент трения. При больших угловых скоростях момент трения увеличивается весьма круто. Такое явление можно объяснить изменением характера влияния шероховатости стенок на режим вращения жидкости. При малых угловых скоростях ламинарный пограничный слой жидкости покрывает шероховатость стенки и тем самым уменьшает трение.

С увеличением угловой скорости толщина ламинарного пограничного слоя уменьшается и выступы шероховатости стенок начинают входить в турбулентный пограничный слой, что во много раз увеличивает силы трения.

Крутое увеличение момента трения зависит также от численного значения соотношения H/D (см. фиг. 10). При малых значениях H/D крутое увеличение момента начинается при меньших значениях угловой скорости. Это объясняется, по-видимому, донным эффектом и тем обстоятельством, что общая циркуляция при малых значениях H/D более интенсивно способствует уменьшению толщины ламинарного пограничного слоя.



Фиг. 9. Зависимость универсальной функции f от угловой скорости и соотношения H/D . Сплошные линии получены по формуле (24), точки соответствуют опытным данным



Фиг. 10. Зависимость момента сил трения от угловой скорости и соотношения H/D . Сплошные линии получены по формуле (22)

3. Определение высоты подъема краев свободной поверхности жидкого металла

Исследование формы свободной поверхности вращающегося жидкого металла показывает, что глубина наименьшей точки свободной поверхности, измеренная от первоначального уровня покоящейся жидкости, увеличивается с увеличением угловой скорости в центральной зоне чаши (см. фиг. 11). После обработки экспериментальных данных в настоящей работе получена формула

$$\tau = 0,00077 D^{1/4} \bar{\omega}^{3/2} \text{ м,} \quad (25)$$

соответствующая сплошным линиям на фиг. 12. На фиг. 12 эта формула сравнивается с опытными данными в координатах $z^*/D^{1/4}$ и $\bar{\omega}$. Можно заключить, что совпадение формулы (25) с опытными данными является удовлетворительным, и она

может применяться при диаметрах сосуда от 50 до 300 мм и при угловой скорости от 10 до 50 рад/сек.

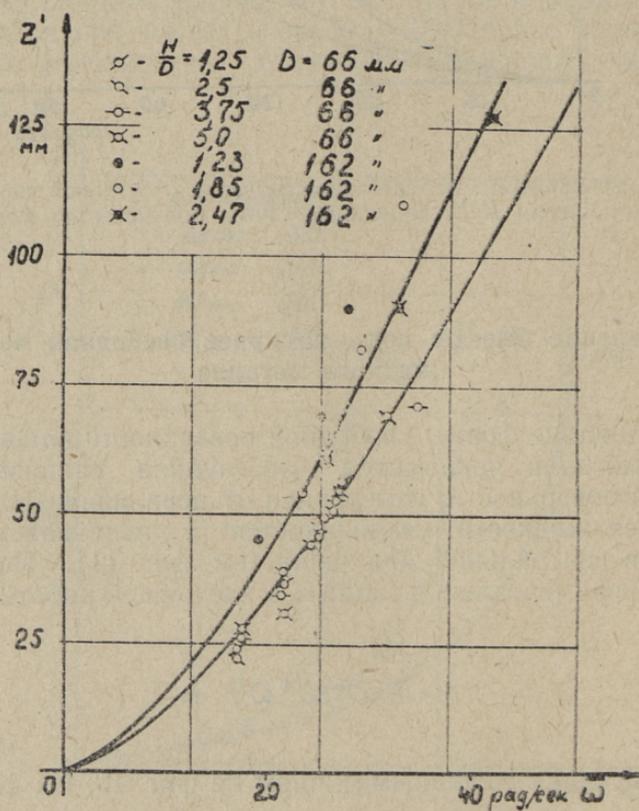
Для определения высоты подъема краев вращающейся жидкости может применяться выведенная в [1, 2] формула

$$z' = k_3 h, \quad (26)$$

где

$$k_3 = \frac{1,5 - 1,6 \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2 + 1,0 \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^3 - 0,18 \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^4}{3 - 2,8 \frac{\delta}{r_0} + 0,8 \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2}. \quad (27)$$

Так как в случае вращения жидкости в поле ИВ толщина турбулентного пограничного слоя δ равна радиусу сосуда r_0 , то формула (27) упрощается и принимает вид



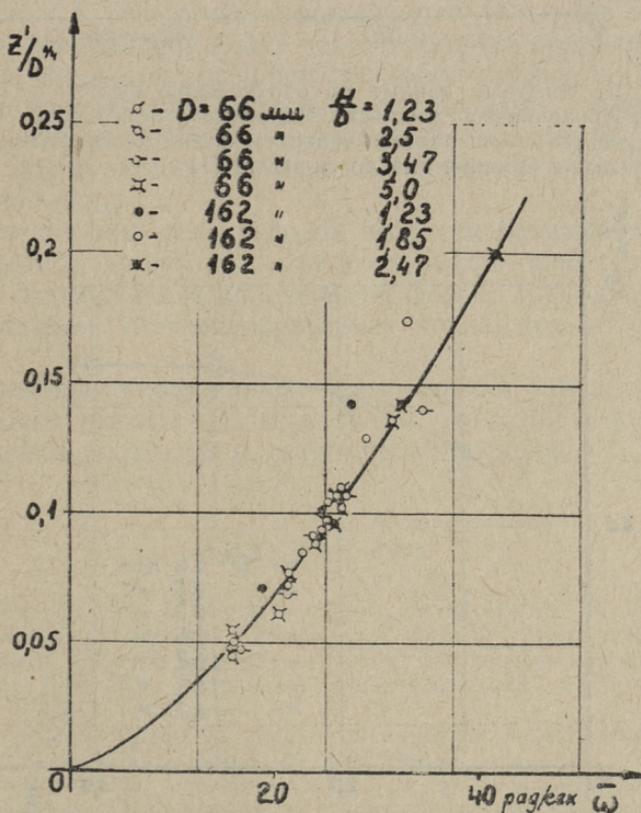
Фиг. 11. Зависимость глубины наименьшей точки свободной поверхности от скорости вращения жидкости и от размеров сосуда

$$k_3 = 0,75. \quad (28)$$

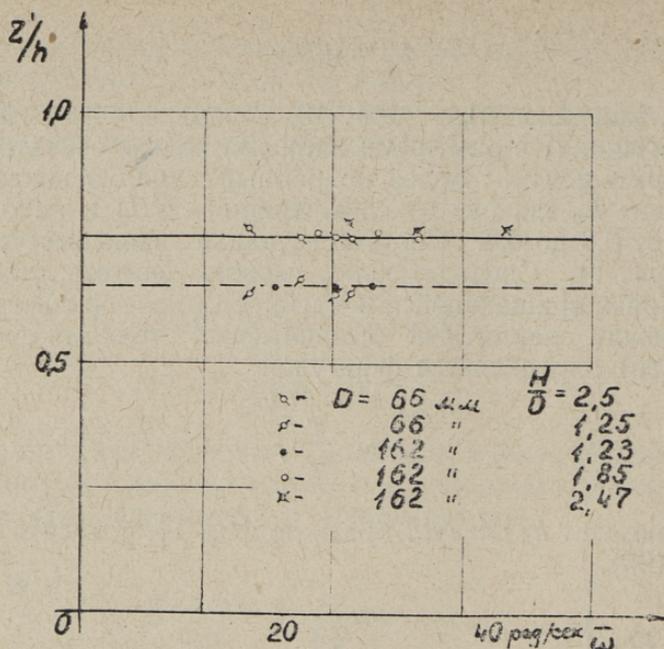
Однако, как показывает фиг. 13, совпадение этой формулы (сплошная линия) с опытными данными нельзя считать вполне удовлетворительным. Более подробный анализ показал, что коэффициент k_3 зависит от соотношения H/D и находится в пределах от 0,6 до 0,8. Соответствующая зависимость приведена на фиг. 14. Следовательно, можно считать, что высота подъема краев вращающейся в магнитном поле жидкости (расстояние между наименьшей и наибольшей точками свободной поверхности) определяется формулой

$$h = \frac{z'}{k_3}, \quad (29)$$

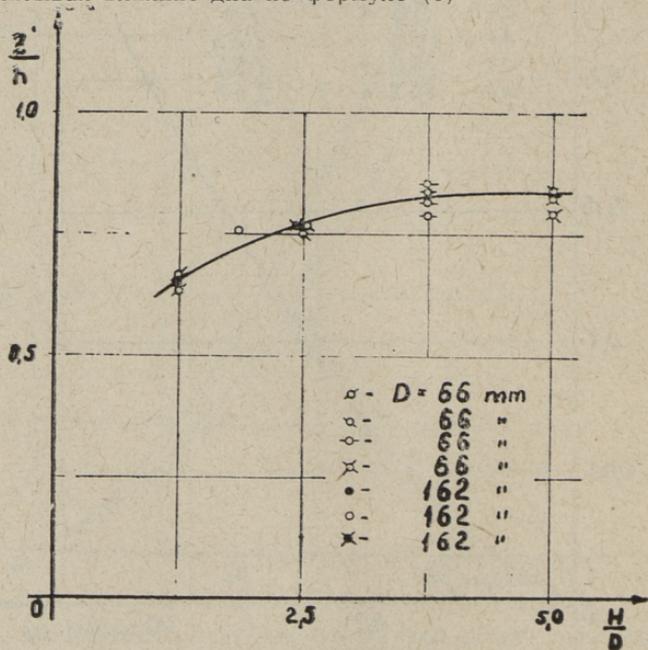
где коэффициент k_3 следует брать по фиг. 14, а высота z' — по формуле (25).



Фиг. 12. Сравнение формулы (25) с опытными данными



Фиг. 13. Опытные данные по определению высоты подъема краев вращающейся жидкости. Сплошная линия соответствует формуле (28), а штриховая линия получена по формуле (27), рассчитывая влияние дна по формуле (1)



Фиг. 14. Зависимость соотношения $\frac{z'}{h}$ от соотношения H/D

Выводы

Проведенная работа по исследованию электромагнитного вращения проводящей жидкости в вертикальном цилиндрическом сосуде позволяет формулировать следующие основные выводы.

1. Течение жидкости почти по своему объему при всех исследованных значениях параметров ω и r_0 является турбулентным. При больших значениях угловой скорости ω выявляется заметное влияние шероховатости стенок сосуда на момент сил трения, вызванное уменьшением ламинарного пограничного слоя у стенок сосуда. Установлено, что к крутому увеличению сил трения приводит также уменьшение соотношения H/D ; это указывает на влияние донных эффектов на толщину ламинарного пограничного слоя.

2. Соотношение H/D влияет на форму свободной поверхности вращающейся жидкости, когда оно находится в пределах от 0 до 1,5. Это влияние выражается главным образом в том, что в центральной своей зоне свободная поверхность вращающейся жидкости становится горизонтальной. Такая деформация поверхности объясняется донными эффектами и вызванными ими общей циркуляцией жидкости. В работе выведена формула для определения радиуса вышеуказанной центральной зоны.

3. Исследование поля угловой скорости показывает, что течение жидкости происходит в автомодельной области. В работе выведены формулы для определения формы свободной поверхности, которые удовлетворительно совпадают с опытными данными.

4. Выведены приближенные формулы для определений наименьшей точки высоты подъема краев свободной поверхности вращающейся жидкости и моментов сил трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Ристхейн, В. Ф. Кескюла, Х. И. Янес, Э. П. Тимма. Разработка индукционных вращателей жидкой стали для установок непрерывной отливки полных заготовок. Научно-технический отчет по хозяйственному № 265. Таллинский политехнический институт, Таллин, февраль 1965.
2. Э. П. Тимма. Вращение жидкости в вертикальном цилиндрическом сосуде. Труды ТПИ, серия А, № 249, 1967.
3. Э. М. Ристхейн, Э. П. Тимма, К. И. Шильф. Исследование гидродинамических процессов во вторичной системе индукционных вращателей. Научно-технический отчет по хозяйственному № 550. Таллинский политехнический институт, Таллин, декабрь 1965.

**Rotating of a Conductive Fluid, Caused by the Use of
the Electromagnetic Field, in a Vertical Cylindrical
Vessel**

Summary

An experimental and analytical study has been made of turbulent rotating of a conductive fluid in a vertical cylindrical vessel. The electromagnetic field, causing rotation of the conductive fluid, has been made by the use of a three-phase inductor, which is fed on industrial electric current with the frequency 50 cycles. Corresponding formulas have been found for the definition of the angular velocity field, of the three surface of the fluid, of the moment of the friction forces, and have been compared with the experimental data.

СОДЕРЖАНИЕ

1. А. И. Вольдек. О некоторых решениях задач об электромагнитных полях в индукционных магнитогидродинамических машинах и соответствующих им физических моделях	3
2. А. И. Вольдек. Продольный краевой эффект во вторичной цепи линейных индукционных магнитогидродинамических машин	15
3. Э. М. Ристхейн. О методике расчета электромагнитных переходных процессов в индукционных устройствах перемещения жидких металлов	43
4. В. И. Межбурд, Л. Р. Реймал. К расчету магнитного поля в активной зоне коаксиальных МГД—машин постоянного тока (МГДМ)	59
5. Ю. Я. Лаугис, Х. А. Тийсмус. Графическое определение статической характеристики системы автоматического регулирования индукционного насоса	73
6. Ю. Я. Лаугис, Х. В. Силламаа, Х. А. Тийсмус. Экспериментальное определение передаточной функции индукционного насоса	83
7. Э. П. Тимма. Вращение проводящей жидкости, созданное при помощи электромагнитного поля, в вертикальном цилиндрическом сосуде	91



ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СРЕДСТВ
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ

Сборник трудов VI

Таллинский политехнический институт

Редактор Е. Пуусеп

Технический редактор Я. Мыттус

Сдано в набор 19 IV 1968. Подписано к печати
1 X 1968. Бумага 60×90/16. Печатных листов 7.
Учетно-изд. листов 5,3. Тираж 500. МВ-07880. Заказ
№ 3042.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк, 2.

Цена 53 коп.

**Исследование и проектирование индукционных насосов
для транспорта жидких металлов. Сборник трудов VI**

УДК 621.318.38

1. А. И. Вольдек. — О некоторых решениях задач об электромагнитных полях в индукционных магнитогидродинамических машинах и соответствующих им физических моделях (стр. 3)

В статье производится критический анализ статей, опубликованных разными авторами в открытых научно-технических журналах и сборниках СССР и посвященных аналитическому решению задач об электромагнитных процессах в активной зоне индукционных магнитогидродинамических машин. Анализируются допущения и граничные условия разных авторов, соответствующие этим условиям физические модели, степень соответствия их реальным физическим условиям, характер и величина возникающих при решении погрешностей.

4 фигуры, 13 библиографий.

УДК 621.318.38

2. А. И. Вольдек. — Продольный краевой эффект во вторичной цепи линейных индукционных магнитогидродинамических машин (стр. 15)

Рассматривается плоская машина с бесконечно длинными сердечниками и с обмоткой на 2 р полюсов, расположенной на ограниченной части сердечника. Рассматриваются варианты с компенсационными элементами обмотки, идеальным короткозамкнутым витком вокруг активной зоны сердечника и с изоляционными перегородками в канале за пределами активной зоны. Принимается, что токи первичной обмотки, компенсационных элементов и короткозамкнутого витка распределены равномерно по толщине зазора, благодаря чему математические выражения упрощаются и выражаются в конечной форме, а не в виде рядов. Получены выражения для векторного потенциала, электромагнитной мощности, электромагнитных сил, механической мощности и потерь. Определены условия, когда краевые эффекты полностью отсутствуют.

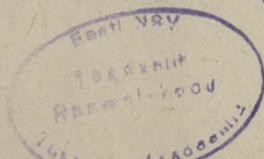
2 фигуры, 11 библиографий.

УДК 621.313.333.012.6.001.8 : 669.002.71—154

3. Э. М. Ристхейн. — О методике расчета электромагнитных переходных процессов в индукционных устройствах перемещения жидких металлов (стр. 43)

В статье показывается, что электромагнитные переходные явления в индукционных средствах перемещения жидких металлов (в индукционных насосах, вращателях, перемешивателях, желобах и т. д.) по своей длительности не отличаются от таких же явлений в асинхронных двигателях и во многих случаях ими нельзя пренебречь. Теоретический анализ проводится по общей методике расчета электромагнитных переходных явлений асинхронных машин. Предлагаются новая электрическая схема замещения и система безразмерных величин, выгодно отличающихся от ранее примененных. Оцениваются различные упрощающие расчет допущения и выводятся простые формулы для определения переходных токов и сил.

5 фигур, 1 таблица, 5 библиографий.



УДК 621.318.38

4. В. И. Межбурд, Л. Р. Реймал. — Расчет магнитного поля в активной зоне коаксиальных МГД — машин постоянного тока (МГДМ) (стр. 59)

В работе рассматривается расчет распределения магнитного поля МГДМ с кольцевым соленоидом при неплотной намотке витков в средней части активной зоны. Полученные в работе осредненные соотношения могут быть использованы при расчете МГДМ для определения тока при заданной геометрии соленоида, числа его витков и т. д.

10 фигур, 1 таблица, 2 библиографии.

УДК 621.38.38

5. Ю. Я. Лаугис, Х. А. Тийсмус. — Графическое определение статической характеристики системы автоматического регулирования индукционного насоса (стр. 73)

В данной работе разработан графический метод для определения статической характеристики системы автоматического регулирования индукционного насоса. На основе данного метода можно также определить изменение выходного параметра системы за счет возможных возмущений. Графический метод целесообразно применить в тех случаях, когда статические характеристики отдельных элементов системы являются нелинейными.

2 фигуры, 4 библиографии.

УДК 621.318.38

6. Ю. Я. Лаугис, Х. В. Силламаа, Х. А. Тийсмус. — Экспериментальное определение передаточной функции индукционного насоса (стр. 83)

В данной работе экспериментально определена передаточная функция индукционного насоса для случая, где выходной величиной является развиваемый насосом напор. При этом входной величиной или регулирующим воздействием является напряжение питания насоса.

На основе результатов эксперимента определена передаточная функция по двум методам:

- 1) исходя из переходной характеристики;
- 2) исходя из частотных характеристик.

Аппроксимирующая переходная характеристика удовлетворительно совпадает с опытной переходной характеристикой.

6 фигур, 8 библиографий.

УДК 669.05;621.689

7. Э. П. Тимма. — Вращение проводящей жидкости, созданное при помощи электромагнитного поля, в вертикальном цилиндрическом сосуде (стр. 91)

Работа заключается в исследовании электромагнитного вращения проводящейся жидкости в вертикальном цилиндрическом сосуде. Магнитное поле, под воздействием которого двигается жидкость, создается трехфазным индуктором, получившим название «индукционный вращатель» (ИВ) и питаемым от сети током промышленной частоты (50 гц).

В работе получены приближенные формулы, характеризующие зависимость формы свободной поверхности вращающейся жидкости от следующих факторов: диаметр цилиндра, размещаемый в расточке индукционного вращателя, высота начального уровня жидкости в цилиндре и магнитная индукция или сила тока индукционного вращателя. Получены также формулы для определения результата моментов сил трения в вращающейся жидкости.

Все выводы настоящей работы относятся к случаю, когда вращающаяся жидкость полностью находится во вращающемся магнитном поле.

14 фигур, 3 библиографии.

Цена 53 коп.