

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СОВЕТА МИНИСТРОВ ЭСТОНСКОЙ ССР

Таллинский политехнический институт

Кафедра черчения и начертательной геометрии

Научно-технический отчёт по госбюджетной работе F/H-404-E

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРУППА В СЛУЧАЕ АФФИННОЙ
СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Исполнитель:

ст. преп.

Э. Валлас

На эстонском языке.

Аннотация на русском языке находится в конце отчёта.

Таллин 1961

Tallinna Polütehniline Instituut
JOONESTAMISE JA KUJUTAVA GEOMEETRIA KATEEDER

Riigieelarveline uurimistöö nr. F/H-404-R

KRUPPA ÜLESANDE ANALÜÜTILINE LAHENDAMINE
ÜLDISE KOORDINAATTELJESTIKU PUHUL

Töö teostaja: E. VALLAS

van. õp. *Etalle*

TPI teadusala prorektor

tehn.tead.kand. *Levikson*

dots. (H. LEPIKSON)

TPI Teadusliku Uurimise

Sektori juhataja

tehn.tead.kand. *R. E. E. K.*

(R. E E K)



T-786

Tallinn, 1961.

A n n o t a t s i o o n

Käesolevas töös on Kruppa probleemi laiendatud ühikvõrdsele kaldkoordinaatsüsteemile, mille algebraliseks lahendamiseks on saadud kaks võrrandit.

Lähemalt on uuritud algebraliselt üht kõige enam huvi pakkuvat ülesande tüüpi tsentraalaksonomeetrias, kui otsitavateks parameetriteks on kaldkoordinaatsüsteemi puhul kahe telje pagupunktid.

Ülesande lahendamisel jõuame 6-da astme võrrandini mille kordajad on küllaltki keerulised.

1. S i s s e j u h a t u s

Paljude uurijate tähelepanu on paelunud Kruppa probleem: Olgu ruumis antud täisnurkne ühikvõrdne koordinaatsüsteem $D_0 = (O_0 u_0 v_0 w_0, A_0 B_0 C_0, P_\infty Q_\infty R_\infty)$ ühikpunktidega A_0, B_0, C_0 ja telgede lõpmata kaugete punktidega $P_\infty, Q_\infty, R_\infty$. Projekteerides D_0 silmapunktist ekraanile saame kujutise $D = (Ouvw, ABC, PQR)$, milles esinevad koordinaatide alguspunkti O_0 tsentraalprojektsioon O , ABC ühikpunktide tsentraalprojektsioonid ja PQR telgede pagupunktid. Tekkib küsimus, mis tingimusi peab täitma kujutis D , et ta oleks originaali D_0 tsentraalprojektsioon.

Selle probleemiga on tegelenud prof. N.F. Tšetveruhhin, H.M. Beckin, E.A. Mtšedlisvili, N.S. Džaparidze, O.J. Rünk ja teised.

1957. a. andis N.V. Paluver Kruppa ülesandele analüütilise lahenduse. Selgus, et vastavalt andmete valikule on üheksa üksteisest erinevat tüüpi ülesandeid. Nende lahendamiseks sai ta võrrandsüsteemi, mis koosnes kahest võrrandist.

Erijuhtumeid, mis ei allu otseselt neile võrrandele on uurinud prof. A. Humal.

Selles töös vaatleme üldisemat ülesannet. Ühikvõrdse täisnurkse koordinaatsüsteemi asemel on valitud ühikvõrdne kaldkoordinaatsüsteem. Analoogiliselt ortogonaalsele koordinaatsüsteemile on ka kaldkoordinaatsüsteemi puhul võimalik

koostada üheksat erinevat tüüpi ülesandeid, millede algebraliseks lahendamiseks saame kaks võrrandit. Lähemalt on uuritud üht kõige enam huvi pakkuvat ülesande tüüpi s.t., kui otsitavateks on kahe telje pagupunktid. Ülesande lahendamisel jõuame 6-da astme võrrandini.

Selle üldisema probleemi lahendamine on üks samm lähemale prof. N.F. Tšetveruhhini poolt püstitatud ülesande lahendamisele. N.F. Tšetveruhhini ülesande puhul on vabalt etteantud üldise (mitte ühikvõrdse) kaldteljestiku mõõdutetraeedri tippude ja ühel teljel vabalt valitud punkti tsentraalprojektsioonid. Küsitakse, mis tingimustel see kujutis saab olla etteantud mitteühikvõrdse kaldteljestiku ja selle teljestiku ühel teljel valitud punkti tsentraalprojektsiooniks.

2. Võrrandsüsteemi koostamine parameetrite määramiseks.

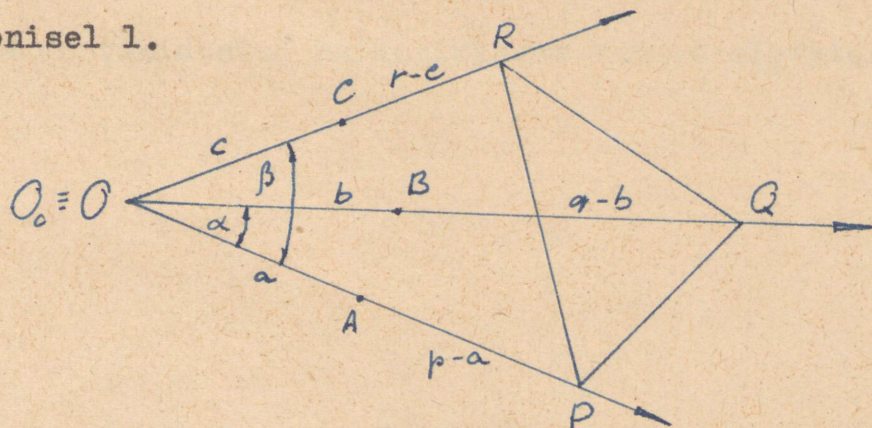
Olgu ruumisoleva ühikvõrdse kaldkoordinaatsüsteemi telgede vahelised nurgad:

$$\alpha_0 = \mu_0 O_0 v_0,$$

$$\beta_0 = \mu_0 O_0 w_0,$$

$$\gamma_0 = v_0 O_0 w_0.$$

Vastava teljestiku tsentraalprojektsioon on kujutatud joonisel 1.



Joonis 1.

A, B, C on ühikpunktide tsentraalprojektsioonid,

P, Q, R on telgede pagupunktid ja

u, v, w on vastavate telgede tsentraalprojektsioonid.

Ilma üldsust kitsendamata valime teljestiku alguspunkti ekraanil $O = O_0$. Lõigu pikkused ja nurgad, mis määravad täielikult teljestiku tsentraalprojektsiooni ja jäävad ülesande parameetriteks tähistame järgnevalt

$$\begin{array}{lll} OA = a, & OR = r, & \angle uOw = \alpha, \\ OB = b, & OQ = q, & \angle uOw = \beta, \\ OC = c, & OP = p, & \angle vOw = \beta - \alpha = \gamma. \end{array}$$

Tähistades pagupunktide vahelised kaugused

$$\begin{array}{l} QR = l_1, \quad RP = l_3 \quad \text{ja} \quad PQ = l_2 \\ \text{saame } l_1^2, l_2^2 \quad \text{ja} \quad l_3^2 \quad \text{avaldada parameetrite kaudu} \\ \begin{array}{l} l_1^2 = q^2 + r^2 - 2qr \cos \gamma, \\ l_2^2 = p^2 + r^2 - 2pr \cos \beta, \\ l_3^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha \end{array} \end{array} \quad (1)$$

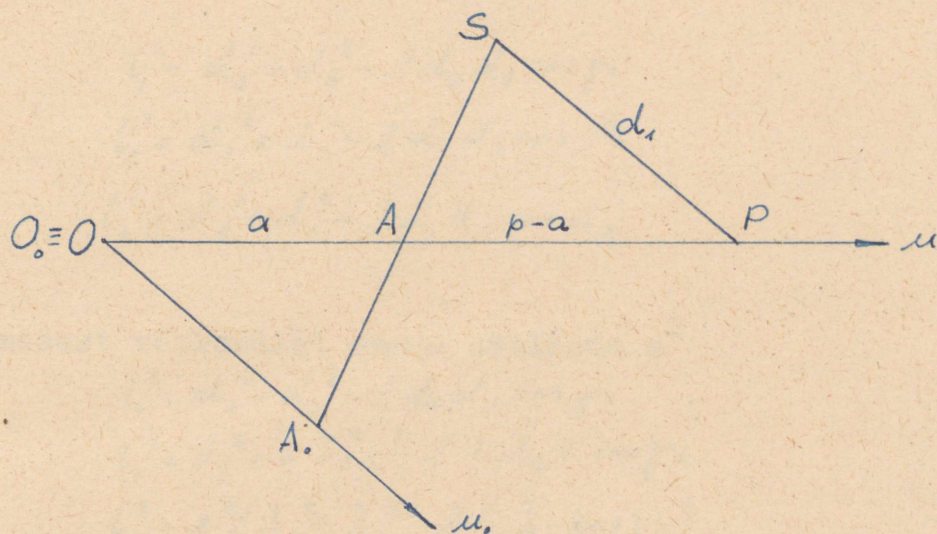
Tähistades sihikiirte lõikude pikkused silmapunktist pagupunktini

$$SP = d_1, \quad SQ = d_2 \quad \text{ja} \quad SR = d_3$$

saame tasapinnas SOP, mis läbib silmapunkti ja ühte telge sarnastest kolmnurkadest

$$d_1 = \frac{p - a}{a} e$$

e-ga on tähistatud ühikupikkused ruumis olevatel telgedel.



Joonis 2.

Analoogiliselt saame avaldada d_2 ja d_3 tasapindades SOQ ja SOR

$$d_2 = \frac{a-b}{b} e,$$

$$d_3 = \frac{r-c}{c} e.$$

Tähistades

$$\frac{p-a}{a} = \lambda_1, \quad \frac{q-b}{b} = \lambda_2 \text{ ja } \frac{r-c}{c} = \lambda_3 \quad (2)$$

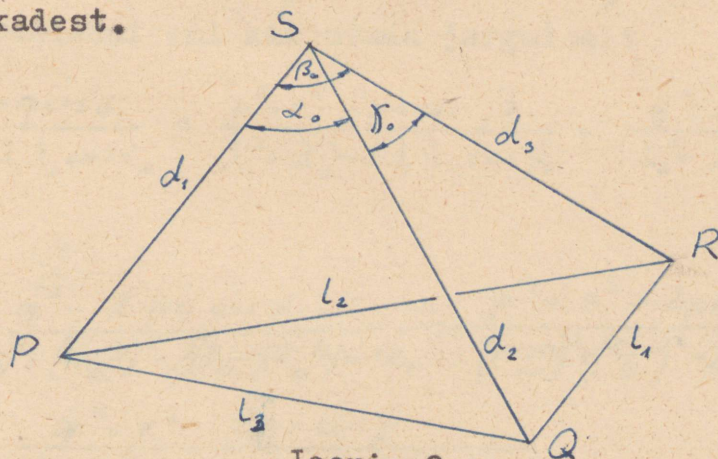
saame

$$d_1 = \lambda_1 e,$$

$$d_2 = \lambda_2 e,$$

$$d_3 = \lambda_3 e.$$

Pagupunktide vaheliste kauguste ruudud l_1^2 , l_2^2 ja l_3^2 saame avaldada d_1 , d_2 , d_3 kaudu vastavatest teravnurksetest kolmnurkadest.



Joonis 3

$$l_1^2 = d_2^2 + d_3^2 - 2d_2d_3 \cos \gamma.$$

$$l_2^2 = d_1^2 + d_3^2 - 2d_1d_3 \cos \beta_0$$

$$l_3^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos \alpha_0$$

Esimesest võrrandist saame avaldada e^2

$$l_1^2 = d_2^2 + d_3^2 - 2d_2d_3 \cos \gamma.$$

$$l_1^2 = \lambda_2^2 e^2 + \lambda_3^2 e^2 - 2\lambda_2\lambda_3 e^2 \cos \gamma_0$$

$$l_1^2 = e^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 \cos \gamma_0)$$

$$e^2 = \frac{l_1^2}{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 \cos \gamma_0}$$

Analoogiliselt saame ka teistest võrranditest avaldada

$$e^2 = \frac{l_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_3 \cos \beta_0}$$

$$e^2 = \frac{l_3^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \alpha_0}$$

Tähistades

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 \cos \gamma_0 = x_1,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_3 \cos \beta_0 = x_2, \quad (3)$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \alpha_0 = x_3$$

saame

$$e^2 = \frac{l_1^2}{x_1} = \frac{l_2^2}{x_2} = \frac{l_3^2}{x_3} \quad (4a)$$

Avaldades l_1, l_2, l_3 ja x_1, x_2, x_3 parameetrite kaudu saame võrrandsüsteemi kirjutada järgmiselt

$$\frac{p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \alpha_0} = \frac{p^2 + r^2 - 2pr \cos \beta}{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_3 \cos \beta_0} = \frac{q^2 + r^2 - 2qr \cos \gamma}{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 \cos \gamma_0} \quad (4b)$$

ehk

$$\frac{p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha}{\left(\frac{p-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{q-b}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{p-a}{a}\right)\left(\frac{q-b}{b}\right) \cos \alpha_0} = \frac{p^2 + r^2 - 2pr \cos \beta}{\left(\frac{p-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{r-c}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{p-a}{a}\right)\left(\frac{r-c}{c}\right) \cos \beta_0} = \frac{q^2 + r^2 - 2qr \cos \gamma}{\left(\frac{q-b}{b}\right)^2 + \left(\frac{r-c}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{q-b}{b}\right)\left(\frac{r-c}{c}\right) \cos \gamma_0} \quad (4c)$$

Seosed (4b) või (4c) on tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et kujund D saaks olla kujundi D_0 tsentraalprojektsiooniks, s.t. need seosed on Kruppa probleemi lahendamiseks mitteortogonaalse ühikvõrdse teljestiku puhul.

Kuna kaheksa parameetrit peavad rahuldama võrrandsüsteemi, mis koosneb kahest võrrandist siis 6 parameetrit võime valida vabalt ja ülejäänud kaks on leitavad võrrandsüsteemist (4c). Ülesanne taandub kahest võrrandist koosneva kahe tundmatuga võrrandsüsteemi lahendamisele. Kaheksast parameetrist kahe parameetri määramiseks on võimalik koostada 28 erinevat varianti ülesannet ($\frac{8 \cdot 7}{2}$). Lähem analüüs näitab, et on üheksa oluliselt üksteisest erinevat tüüpi ülesannet.

Vaatleme lähemalt üht kõige enam huvi pakkuvat ülesannet tüüpi, kui otsitavateks on kahe telje pagupunktid näiteks q ja r .

3. Parameetrite q ja r määramine

Lähtume võrrandsüsteemist (4)

$$\begin{cases} \frac{l_3^2}{x_3} = \frac{q^2 + r^2 - 2qr \cos \gamma}{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2 \lambda_3 \cos \gamma_0} \\ \frac{l_3^2}{x} = \frac{p^2 + r^2 - 2pr \cos \beta}{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1 \lambda_3 \cos \beta_0} \end{cases}$$

Lahutame esimesest võrrandist teise võrrandi

$$l_3^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2 \lambda_3 \cos \gamma_0) = x_3(q^2 + r^2 - 2qr \cos \gamma)$$

$$l_3^2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1 \lambda_3 \cos \beta_0) = x(p^2 + r^2 - 2pr \cos \beta)$$

$$l_3^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2 - 2\lambda_2 \lambda_3 \cos \gamma_0 + 2\lambda_1 \lambda_3 \cos \beta_0) = x_3(q^2 - p^2 - 2qr \cos \gamma + 2pr \cos \beta)$$

Teeme muutujate vahetuse

$$\lambda_3 = \gamma$$

$$r = c\gamma + c$$

(5)

saame

$$l_3^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) - 2\lambda_2 y \cos \gamma_0 + 2\lambda_1 y \cos \beta_0 = \\ = x_3(q^2 - p^2 - 2c q y \cos \gamma - 2c q \cos \gamma + 2c p y \cos \beta + 2c p \cos \beta)$$

$$y = \frac{x_3(q^2 - p^2) + 2c x_3(p \cos \beta - q \cos \gamma) - l_3^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{2 l_3^2(\lambda_1 \cos \beta_0 - \lambda_2 \cos \gamma_0) + 2c x_3(q \cos \gamma - p \cos \beta)} \quad (6)$$

Tähistades

$$p \cos \beta - q \cos \gamma = D(q) \\ \lambda_1 \cos \beta_0 - \lambda_2 \cos \gamma_0 = F(\lambda_2)$$

saame

$$y(q, \lambda_2) = \frac{x_3(q^2 - p^2) + 2c x_3 D(q) - l_3^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{2[l_3^2 F(\lambda_2) - c x_3 D(q)]}$$

Tähistades

$$x_3(q^2 - p^2) + 2c x_3 D(q) - l_3^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = A_0(q, \lambda_2) \\ l_3^2 F(\lambda_2) - c x_3 D(q) = B(q, \lambda_2)$$

Asetades x_3 ja l_3 asemele nende avaldused saame pärast

lihtsustamisi

$$A_0(q, \lambda_2) = 2[l_1^2 q^2 - p^2 \lambda_2^2 + (p^2 - q^2) \lambda_1 \lambda_2 \cos \alpha_0 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) p q \cos \alpha + c x_3 D(q)]$$

$$y(q, \lambda_2) = \frac{\lambda_1^2 q^2 - p^2 \lambda_2^2 + (p^2 - q^2) \lambda_1 \lambda_2 \cos \alpha_0 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) p q \cos \alpha + c x_3 D(q)}{l_3^2 F(\lambda_2) - c x_3 D(q)}$$

Tähistades

$$\lambda_1^2 q^2 - p^2 \lambda_2^2 + (p^2 - q^2) \lambda_1 \lambda_2 \cos \alpha_0 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) p q \cos \alpha + c x_3 D(q) = A(q, \lambda_2)$$

saame

$$y(q, \lambda_2) = \frac{A(q, \lambda_2)}{B(q, \lambda_2)}$$

Vaatleme lähemalt võrrandsüsteemis (4) teist võrrandit.

$$l_3^2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_3\cos\beta_0) - x_3(p^2 + c^2 - 2pc\cos\beta) = 0$$

Asetame λ_2 ja r asemele nende avaldused

$$\lambda_3 = \gamma(q, \lambda_2) = \frac{A(q, \lambda_2)}{B(q, \lambda_2)}$$

$$r = c\gamma(q, \lambda_2) + c = c \frac{A(q, \lambda_2)}{B(q, \lambda_2)} + c$$

saame

$$l_3^2 \left\{ \lambda_1^2 + \frac{[A(q, \lambda_2)]^2}{[B(q, \lambda_2)]^2} - 2\lambda_1 \frac{A(q, \lambda_2)}{B(q, \lambda_2)} \cos\beta_0 \right\} + x_3 \left\{ p^2 + c^2 \frac{[A(q, \lambda_2)]^2}{[B(q, \lambda_2)]^2} + 2c^2 \frac{A(q, \lambda_2)}{B(q, \lambda_2)} + c - 2cp \frac{A(q, \lambda_2)}{B(q, \lambda_2)} \cos\beta - 2cp \cos\beta \right\} = 0$$

Korrutame võrrandi

$$\begin{aligned} & - [B(q, \lambda_2)]^2 \\ \text{ja tähistame} & p^2 + c^2 - 2cp \cos\beta = f_1 \\ & 2c - 2p \cos\beta = f_2 \end{aligned}$$

saame

$$l_3^2 \left\{ 2\lambda_1 A(q, \lambda_2) B(q, \lambda_2) \cos\beta_0 + \lambda_1^2 [B(q, \lambda_2)]^2 - [A(q, \lambda_2)]^2 \right\} + x_3 \left\{ f_1 [B(q, \lambda_2)]^2 + c f_2 A(q, \lambda_2) B(q, \lambda_2) + c^2 [A(q, \lambda_2)]^2 \right\} = 0$$

ASetades võrrandi teises liikmes $A(q, \lambda_2)$ ja $B(q, \lambda_2)$ asemele nende avaldused ning teisendades saame

$$\begin{aligned} & l_3^2 \left\{ [2\lambda_1 \cos\beta_0 l_3^2 F(\lambda_2) - 2\lambda_1 \cos\beta_0 c x_3 D(q) + c f_2 x_3 F(\lambda_2) + A(q, \lambda_2)] A(q, \lambda_2) - \right. \\ & \quad \left. - [c \lambda_1^2 D(q) + 2c f_1 F(\lambda_2) D(q)] x_3^2 + \right. \\ & \quad \left. + l_3^2 F(\lambda_2) [2c \lambda_1^2 x_3 D(q) + f_1 x_3 F(\lambda_2) - \lambda_1^2 l_3^2 F(\lambda_2)] + \right. \\ & \quad \left. + c^2 x_3 \left\{ f_1 x_3^2 [D(q)]^2 - f_2 x_3 D(q) A(q, \lambda_2) + [A(q, \lambda_2)]^2 \right\} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Tähistame võrrandi viimases liikmes teguri

$$f_1 x_3^2 [D(q)]^2 - f_2 x_3 D(q) A(q, \lambda_2) + [A(q, \lambda_2)]^2 = C_0(q, \lambda_2)$$

Vaatleme lähemalt hulkliiget $C_0(q, \lambda_2)$ ja katsume viimasessulgude ette tuua hulkliikme

$$l_3^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha$$

Asetades nüüd $l_1, l_2, x_3, D(q)$ ja $A(q, \lambda_2)$ avaldused hulkliikme $C_0(q, \lambda_2)$ avaldusse saame pärast teisendusi ja lihtsustusi

$$\begin{aligned} C_0(q, \lambda_2) = & \lambda_1^4 (p^4 \cos^2 \beta + p^2 q^2 \cos^2 \gamma - 2p^3 q \cos \beta \cos \gamma - 2pq^3 \cos \beta \cos \gamma \\ & + 2p^2 q^2 \cos^2 \beta - 2p^3 q \cos \alpha \cos^2 \beta + p^2 q^2 \cos^2 \alpha + q^4 + \\ & + 2p^2 q^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2pq^3 \cos \alpha) + \\ & + \lambda_2^4 (p^2 q^2 \cos^2 \gamma - p^4 \cos^2 \beta - 2p^3 q \cos \beta \cos \gamma + 2p^3 q \cos \beta \cos \gamma \\ & + 2p^3 q \cos \alpha \cos^2 \beta - 2p^2 q^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + p^2 q^2 \cos^2 \alpha \\ & + p^4 - 2p^3 q \cos \alpha) + \\ & + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cos^2 \alpha_0 (+4p^2 q^2 \cos^2 \gamma - 4p^3 q \cos \beta \cos \gamma - 2p^2 q^2 \\ & + 4p^2 q^2 \cos^2 \beta - 4pq^3 \cos \beta \cos \gamma + p^4 + q^4) + \\ & + \lambda_1^3 \lambda_2 \cos \alpha_0 (+8p^3 q \cos \beta \cos \gamma - 4p^2 q^2 \cos^2 \gamma - 6p^2 q^2 \cos^2 \beta \\ & + 6pq^3 \cos \beta \cos \gamma - 2p^4 \cos^2 \beta - 2p^3 q \cos \beta \cos \gamma + \\ & + 4p^3 q \cos \alpha \cos^2 \beta - 4p^2 q^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 2p^2 q^2 + \\ & + 2p^3 q \cos \alpha + 2pq^3 \cos \alpha - 2q^4) + \\ & + \lambda_1 \lambda_2^3 \cos \alpha_0 (2p^3 q \cos \beta \cos \gamma - 4p^2 q^2 \cos^2 \gamma + 2p^4 \cos^2 \beta \\ & + 2pq^3 \cos \beta \cos \gamma - 2p^2 q^2 \cos^2 \beta - 4p^3 q \cos \alpha \cos^2 \beta \\ & + 4p^2 q^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2p^4 - 2pq^3 \cos \alpha + \\ & + 2p^2 q^2 + 2p^3 q \cos \alpha) + \\ & + \lambda_1^2 \lambda_2^2 (2p^2 q^2 \cos^2 \gamma + 2p^2 q^2 \cos^2 \beta - 2pq^3 \cos \beta \cos \gamma \\ & + 2pq^3 \cos \alpha - 2p^3 q \cos \beta \cos \gamma - 2p^2 q^2 \cos^2 \alpha \\ & + 2p^3 q \cos \alpha - 2p^2 q^2) \end{aligned}$$

Kuna

$$\cos \gamma = \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

$$\text{ja } \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\beta - \alpha)$$

siis asetades $\cos \gamma$ ja $\cos^2 \gamma$ asemele nende avaldused saame pärast lihtsustusi

$$\begin{aligned} C_0(q, \lambda_2) = & \lambda_1^4 (p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha) (q^2 - 2pq \cos \beta \cos \gamma + p^2 \cos^2 \beta) \\ & + \lambda_2^4 (p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha) (p^2 - p^2 \cos^2 \beta) \\ & + \lambda_1^3 \lambda_2 \cos \alpha_0 (p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha) (6pq \cos \beta \cos \gamma - 2p^2 \cos^2 \beta \\ & \quad - 2q^2 - 2pq \cos \alpha) + \\ & + \lambda_1 \lambda_2^3 \cos \alpha_0 (p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha) (2pq \cos \beta \cos \gamma + 2p^2 \cos^2 \beta \\ & \quad + 2p^2 - 2pq \cos \alpha) + \\ & + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cos^2 \alpha_0 (p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha) (p^2 - 4pq \cos \beta \cos \gamma + \\ & \quad + q^2 - 2pq \cos \alpha) \\ & + \lambda_1^2 \lambda_2^2 (p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha) (2pq \cos \alpha - 2pq \cos \beta \cos \gamma) \end{aligned}$$

Toome sulgude ette

$$l_3^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} C_0(q, \lambda_2) = & l_3^2 \left\{ \lambda_1^4 (q^2 - 2pq \cos \beta \cos \gamma + p^2 \cos^2 \beta) + \right. \\ & + \lambda_2^4 (p^2 - p^2 \cos^2 \beta) \\ & + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cos^2 \alpha_0 (p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha - 2pq \cos \beta \cos \gamma) + \\ & + \lambda_1^3 \lambda_2 \cos \alpha_0 (6pq \cos \beta \cos \gamma - 2p^2 \cos^2 \beta - 2q^2 - 2pq \cos \alpha) \\ & + \lambda_1 \lambda_2^3 \cos \alpha_0 (2pq \cos \beta \cos \gamma + 2p^2 \cos^2 \beta + 2p^2 - 2pq \cos \alpha) \\ & \left. + \lambda_1^2 \lambda_2^2 (2pq \cos \alpha - 2pq \cos \beta \cos \gamma) \right\} \end{aligned}$$

Tähistades loogelistes sulgudes oleva avalduse

$$C(q, \lambda_2) \text{ saime, et}$$

$$C_0(q, \lambda_2) = l_3^2 C(q, \lambda_2)$$

Asetades $C_0(q, \lambda_2)$ avalduse võrrandisse (7) saame viimases sulgude ette tuua l_3^2

$$\begin{aligned}
 l_3^2 \{ & [2\lambda_1 \cos \beta_0 l_3^2 F(\lambda_2) - 2c\lambda_1 \cos \beta_0 x_3 D(q) + c f_2 x_3 F(\lambda_2) - A(q, \lambda_2)] A(q, \lambda_2) \\
 & - [c\lambda_1^2 D(q) + 2c f_1 F(\lambda_2) D(q)] x_3 + \\
 & + l_3^2 F(\lambda_2) [2c\lambda_1^2 x_3 D(q) + f_1 x_3 F(\lambda_2) - \lambda_1^2 l_3^2 F(\lambda_2)] + \\
 & + c^2 x_3 C(q, \lambda_2) \} = 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

Teeme muutujate vahetuse

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 &= x \\
 q &= bx + b
 \end{aligned} \tag{9}$$

Tähistame hulkliikmed, milledes esineb tundmatu x , järgmiselt

$$\begin{aligned}
 l_3^2 &= L(x) \\
 l_3^2 F(\lambda_2) &= E(x) \\
 x_3 D(q) &= G(x) \\
 x_3 F(\lambda_2) &= M(x) \\
 A(q, \lambda_2) &= A(x) \\
 C(q, \lambda_2) &= C(x) \\
 x_3 &= K(x)
 \end{aligned}$$

$$c\lambda_1^2 D(q) + 2c f_1 F(\lambda_2) D(q) = H(x)$$

Siis võrrand (8) võtab kuju:

$$\begin{aligned}
 L(x) \{ & [2\lambda_1 \cos \beta_0 E(x) - 2c\lambda_1 \cos \beta_0 G(x) + c f_1 M(x) - A(x)] A(x) - \\
 & - H(x) [K(x)]^2 + E(x) [2c\lambda_1^2 G(x) + f_1 H(x) - \lambda_1^2 E(x)] + \\
 & + c^2 K(x) C(x) \} = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{Siin } L(x) = p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha$$

$$= b^2 x^2 - (2b^2 - 2bp \cos \alpha)x + p^2 - b^2 - 2pb \cos \alpha$$

Kuna $L(x)$ on pagupunktide PQ vaheline kaugusmis eelduste kohaselt ei võrdu nulliga, siis võrrand (10) lihtsustub

järgmiseks

$$\begin{aligned} & [2\lambda, \cos\beta, E(x) - 2c\lambda, \cos\beta, G(x) + cf_2 M(x) - A(x)] A(x) - \\ & - H(x)[K(x)]^2 + E(x)[2c\lambda^2 G(x) + f_1 H(x) - \lambda^2 E(x)] + \quad (11) \\ & + c^2 K(x) C(x) = 0 \end{aligned}$$

Siin

$$\begin{aligned} f_1 &= p^2 + c^2 - 2cp\cos\beta \\ f_2 &= 2c - 2p\cos\beta \\ f_3 &= p^2 + b^2 - 2pb\cos\alpha \\ f_4 &= 2b^2 - 2pb\cos\alpha \\ f_5 &= p\cos\beta - b\cos\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= -b\cos\gamma x^3 + (f_5 + 2b\lambda, \cos\alpha, \cos\gamma)x^2 - \\ & - (2f_5\lambda, \cos\alpha, + \lambda^2 b\cos\gamma)x + f_5\lambda,^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x) &= -\cos\gamma_0 x^3 + \lambda, (\cos\beta_0 + 2\cos\alpha, \cos\gamma_0)x^2 - \\ & - \lambda,^2 (2\cos\alpha, \cos\beta_0 + \cos\gamma_0)x + \lambda,^3 \cos\beta_0 \end{aligned}$$

$$K(x) = x^2 - 2\lambda, \cos\alpha_0 x + \lambda,^2$$

$$\begin{aligned} H(x) &= cb\cos\gamma (c\lambda,^2 b\cos\gamma + 2cf_4 \cos\gamma_0)x^2 + \\ & + [cf_5 (cb\lambda,^2 \cos\gamma + 2f_1 \cos\gamma_0) - cb\lambda, \cos\gamma (cf_5 + 2f_1 \cos\beta_0)]x + \\ & + cf_5 \lambda, (c\lambda, f_5 + 2f_1 \cos\beta_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= b(p\cos\alpha - c\cos\gamma - b\lambda, \cos\alpha_0)x^3 + \\ & + (pb\cos\alpha - cb\cos\gamma - 2b^2\lambda, \cos\alpha_0 + b^2\lambda,^2 + 2cb\lambda, \cos\alpha, \cos\gamma + \\ & + c p\cos\beta - p^2)x^2 \\ & + [2b^2\lambda,^2 - b\lambda, (p\cos\alpha - c\cos\gamma) - b^2\lambda, \cos\alpha_0 + \\ & + 2cb\lambda, \cos\alpha_0 \cos\gamma - 2cp\lambda, \cos\beta \cos\alpha_0 + p^2\lambda, \cos\alpha_0]x + \\ & + \lambda,^2 (b^2 - cp\cos\beta) - b\lambda,^2 (p\cos\alpha + c\cos\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x) &= -b\cos\gamma x^3 + (f_5 + 2b\lambda, \cos\alpha, \cos\gamma)x^2 - \\ & - \lambda, (2f_5 \cos\alpha_0 + \lambda, b\cos\gamma)x + f_5 \lambda,^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(x) = & [p^2(1-\cos^2\beta) + b^2\lambda^2\cos^2\alpha_0 + 2pb\lambda\cos\alpha_0(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha)]x^4 + \\
 & + 2\lambda[p^2\cos^2\alpha_0(1-\cos^2\beta) + b^2\lambda\cos^2\alpha_0 - b^2\lambda^2\cos\alpha_0 + \\
 & + pb\cos\alpha_0(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) + pb\lambda\cos^2\alpha_0(\cos\alpha - 2\cos\beta\cos\gamma) + \\
 & + pb\lambda(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)]x^3 + \\
 & + \lambda^2[b^2\lambda^2 + p^2\cos^2\alpha_0 + b^2\cos^2\alpha_0 + 2pb\cos\alpha_0(\cos\alpha - 2\cos\beta\cos\gamma) + \\
 & + 2pb\lambda\cos\alpha_0(3\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) - 4b^2\lambda\cos\alpha_0 + \\
 & + 2pb(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)]x^2 + \\
 & + \lambda^3[b^2\lambda - pb\lambda\cos\beta\cos\gamma + pb\cos\alpha_0(3\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) - \\
 & - b^2\cos\alpha_0 - p^2\cos\alpha_0\cos^2\beta]x + \\
 & + \lambda^4[b^2 - 2pb\cos\beta\cos\gamma + p^2\cos^2\beta]
 \end{aligned}$$

Kuna hulkliikmetes $K(x)$ ja $H(x)$ tundmatu x esineb teises astmes, hulkliikmetes $E(x)$, $G(x)$, $M(x)$ ja $A(x)$ aga kolmandas astmes ning hulkliikmetes $K(x)^2$, $C(x)$ neljandas astmes, siis võrrandi (11) aste ei ületa kuut. Seega oleme võrrandi (10), mis oli kaheksanda astme võrrand, taandanud võrrandile (11), mis on x suhtes kuuenda astme võrrand.

Leides võrrandi (11) järgi x väärtuse saame võrrandist (9) q väärtuse ja asetades q võrranditesse (5) ja (6) saame

$$r = \frac{p^2\lambda_2^2 - q^2\lambda_1^2 + pq\cos(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + \lambda_1\lambda_2\cos\alpha_0(q^2 - p^2) - \frac{1}{2}\lambda_1^2(\lambda_1\cos\beta_0 - \lambda_2\cos\gamma_0)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\cos\alpha_0)(p\cos\beta - q\cos\gamma) - \frac{1}{2}\lambda_2^2(\lambda_1\cos\beta_0 - \lambda_2\cos\gamma_0)} \quad (12)$$

Kui teljestik ruumis on ortogonaalne, siis liikmed kus esinevad teguritena $\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$ võrduvad nulliga ja võrrand (11) omab kuju

$$[A_1(x)]^2 + H_1(x)[K_1(x)]^2 - c K_1(x) C_1(x) = 0 \quad (13)$$

Siin

$$\begin{aligned}
 A_1(x) = & [p \cos \alpha - c \cos \gamma] b x^3 + \\
 & + [p b \cos \alpha - c b \cos \gamma + \lambda^2 b^2 + c p \cos \beta - p^2] x^2 + \\
 & + [2 b^2 - p b \cos \alpha - c b \cos \gamma] \lambda^2 x + \\
 & + [b^2 - c p \cos \beta - p b \cos \alpha - c b \cos \gamma] \lambda^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_1(x) = & c^2 \lambda^2 b^2 \cos^2 \gamma x^2 - (p \cos \beta - b \cos \gamma) c^2 \lambda^2 b \cos \gamma x \\
 & + (p \cos \beta - b \cos \gamma)^2 c^2 \lambda^2
 \end{aligned}$$

$$K_1(x) = \lambda^2 + x^2$$

$$\begin{aligned}
 C_1(x) = & [p^2(1 - \cos^2 \beta)] x^4 + [2 \lambda^2 p b (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)] x^3 + \\
 & + [b^2 \lambda^2 + 2 \lambda^2 p b (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)] x^2 + \\
 & + 2 \lambda^4 b [b - p \cos \beta \cos \gamma] x + \\
 & + \lambda^4 [b^2 - 2 p b \cos \beta \cos \gamma + p^2 \cos^2 \beta]
 \end{aligned}$$

Võrreldes võrrandit (13) võrrandiga (11) näeme, et mõlemad võrrandid on kuuenda astmelised, kuid võrrand (13) on tunduvalt lihtsam võrreldes võrrandiga (11)

4. A r v u l i n e n ä i d e.

Olgu valitud ruumis telgede u_0, v_0, w_0 vahelised nurgad

$$\angle u_0 O_0 v_0 = \alpha_0 = 50^\circ$$

$$\angle u_0 O_0 w_0 = \beta_0 = 75^\circ$$

$$\angle v_0 O_0 w_0 = \gamma_0 = 60^\circ$$

Valime kuuetele parameetritele vabalt väärtused

$$\alpha = 33^\circ 40'$$

$$a = 0,93$$

$$\beta = 81^\circ 50'$$

$$b = 1,22$$

$$\beta - \alpha = \gamma = 48^\circ 10'$$

$$c = 0,74$$

$$p = 6,50$$

Lahendame võrrandi (11)

$$\cos \alpha_0 = 0,64279$$

$$\cos \beta_0 = 0,25882$$

$$\cos \gamma_0 = 0,50000$$

$$\cos \alpha = 0,83228$$

$$\cos \beta = 0,14205$$

$$\cos \gamma = 0,66696$$

$$\lambda_1 = 5,98925$$

$$f_1 = 41,43108$$

$$f_2 = -0,36665$$

$$f_3 = 30,53844$$

$$f_4 = -10,22316$$

$$f_5 = 0,10963$$

$$E(x) = -0,74420x^3 + 7,41880x^2 - 31,11652x + 47,33876$$

$$G(x) = -0,81369x^3 + 6,37478x^2 - 30,03212x + 393268$$

$$M(x) = -0,5x^3 + 5,39996x^2 - 29,87106x + 55,60509$$

$$A(x) = 0,26776x^3 + 10,99766x^2 + 4,73399x - 180,44774$$

$$H(x) = 37,95246x^2 - 84,20829x + 10,65694$$

$$K(x) = x^2 - 7,69966x + 35,87108$$

$$\begin{aligned} [K(x)]^2 = x^4 - 15,39931x^3 + 131,02687x^2 - 552,39004x + \\ + 1286,73461 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) = 18,42449x^4 - 160,05296x^3 + 1111,58356x^2 + \\ + 49,98298x + 1078,70335 \end{aligned}$$

Asetades $E(x)$, $G(x)$, $M(x)$, $A(x)$, $H(x)$, $K(x)$ ja $C(x)$ võrrandisse (11) saame

$$-0,31851x^6 - 0,49788x^5 - 57,64455x^4 - 50,9120x^3 + 2860,0232x^2 + 9908,9689x - 8661,7162 = 0$$

Teisendades saame

$$x^6 + 1,563x^5 + 180,980x^4 + 159,842x^3 - 8979,264x^2 - 31109,975x + 27194,128 = 0$$

Sellel võrrandil on kaks reaallahendit

$$x_1 = 6,988$$

$$x_2 = 0,726$$

Asetades x -i väärtused võrranditesse (9) ja (12) saame

I lahend

$$x_1 = 6,988$$

$$y_1 = 7,319$$

$$q_1 = 9,746$$

$$r_1 = 2,478$$

Antud ja arvutatud parameetrite järgi saab leida graafiliselt silmapunkti ja teljestiku asendi ekraani suhtes.

Joonis 4 kujutab silmapunkti ja teljestiku konstrueerimist kaksvaatel parameetritega

$$\alpha_0 = 50^\circ$$

$$a = 0,93$$

$$\beta_0 = 75^\circ$$

$$b = 1,22$$

$$\gamma_0 = 60^\circ$$

$$c = 0,74$$

$$\alpha = 33^\circ 40'$$

$$p = 6,5$$

$$\beta = 81^\circ 50'$$

$$q_1 = 9,746$$

$$r_1 = 6,156$$

Joonestatud on teljestiku tsentraalprojektsioon. Kuna telgede vahelised nurgad ruumis ei ole täisnurgad, siis silmapunkti põhivaade S' on leitud rõngaspindade lõikejoonte kaudu. Seda saab teha graafiliselt rakendades kujutavast geomeetriast tuntud abisfäärade võtet. Rõngaspinnad on määratud teljestiku $0u_0v_0w_0$ pagukolmnurga külgedega l_1, l_2 ja l_3 , mis on pindade telgedeks ja nurkadega α, β, γ millede all silmapunkti vaatatuna peavad paistma lõigud l_1, l_2 ja l_3 .

Silmapunkti kaugus põhiekraanist võrdub püramiidi PQRS kõrgusega, mis on määratud püramiidi külgservade pöörendite abil.

Koordinaatide alguspunkt on valitud põhiekraanil. Teljed u_0, v_0, w_0 läbivad koordinaatide alguspunkti 0 ja on paralleelsed vastavate sihikiirtega

$$u_0 \parallel SP$$

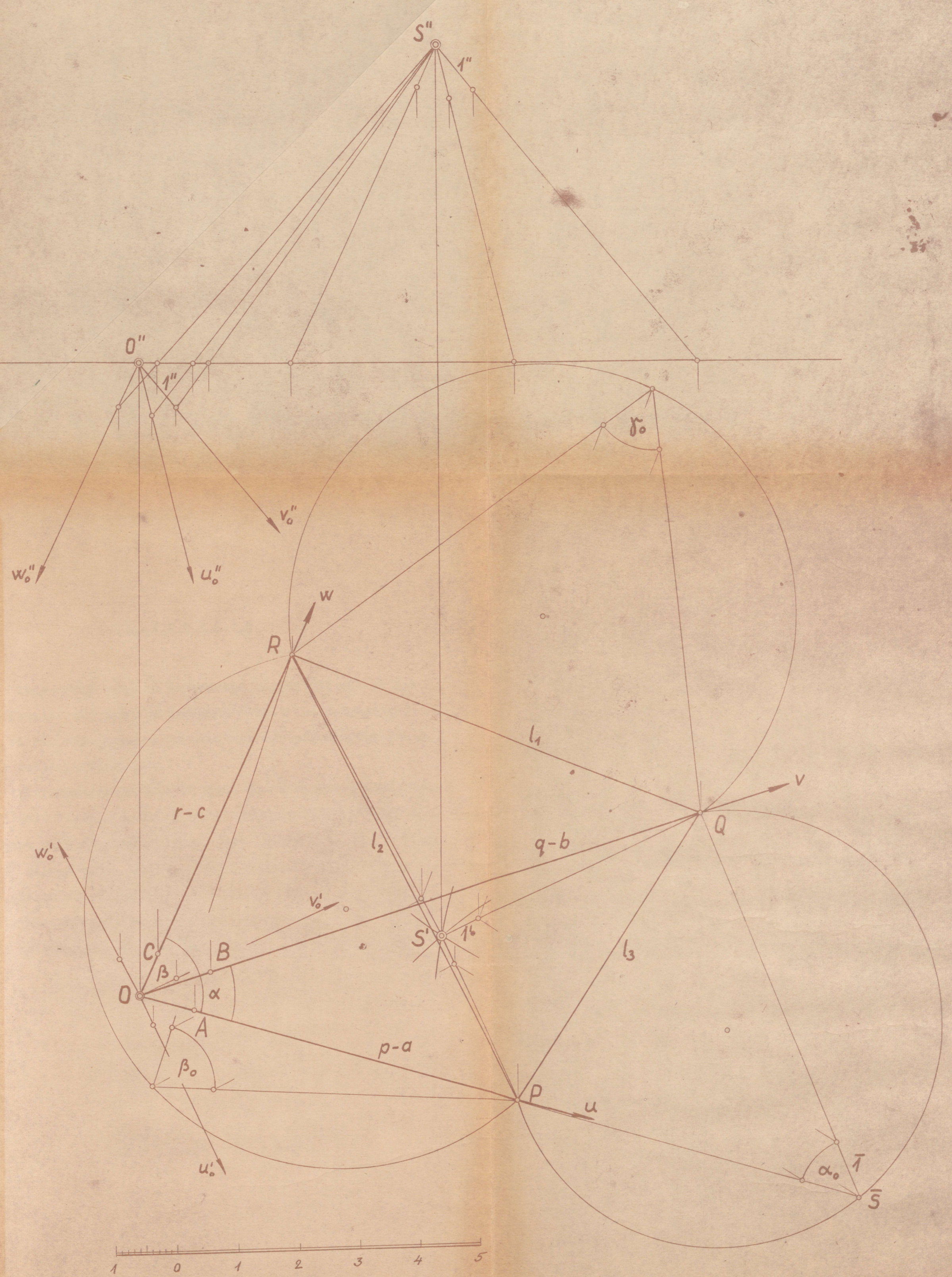
$$v_0 \parallel SQ$$

$$w_0 \parallel SR$$

Joonisel on telgede põhivaated $\parallel$ -sed vastavate sihikiirte põhivaadetega ja esivaated paralleelsed vastavate sihikiirte esivaadetega.

Ühikupunktid on elitud esmalt sihikiirtel ja siis telgedel.

Kiired, mis läbivad silmapunkti ja telgede ühikupunkte lõikavad pildipinda punktides A, B ja C.



Joonis 4

K o k k u v ö t e

Käesolevas töös on lahendatud analüütiliselt Kruppa probleemist üks üldisem variant. Nimelt kui teljestik ruumis ei ole ortogonaalne ja otsitavateks parameetriteks on kahe telje pagupunktid.

Võrrandsüsteemi lahendamine, mis koosneb kahest võrrandist viib kuuenda astme võrrandi lahendamisele. Viimasel võib ülimalt olla 6 reaallahendit. Igale pagukolmnurgale vastab kaks silmapunkti, mis asetsevad sümmeetriliselt ekraani suhtes. Seega antud tüüpi ülesande puhul võib silmapunkti ja vastavate mõõdutetraeedrite arv olla ülimalt $2 \cdot 6 = 12$.

Esitatakse näide, mille puhul ülesandel on 4 lahendit.

Kasutatud kirjandus

Палувер Н. В., Определение систем координатных осей в пространстве по ее центральной проекции, Труды Таллинского политехнического института, Серия А, № 100, (1957).

Палувер Н. В., Аналитический метод для построения аксонометрических систем координат в центральной проекции, Труды Таллинского политехнического института, Серия А, № 120, (1957).

Rünk, O. Perspektiivaksonomeetria fundamentaalülesanne, kand. dissertatsioon, Tallinna Polütehniline Instituut (1956).

Палувер Н. В., Исследование некоторых основных вопросов центральной аксонометрии, Автореферат диссертация, Таллинский политехнический институт, (1959).

A. Humal, O. Rünk, A. Garšnek, Kujutav geomeetria III osa
Tallinn (1949).

Хумал А., Решения некоторых вариантов
задачи Тюринге, Известия
академии наук эстонской ССР,
ТОМ IX, N°4, (1960).

S i s u k o r d

	Lk.
1. Sissejuhatus	1
2. Võrrandsüsteemi koostamine parameetrite määramiseks	2
3. Parameetrite q ja r määramine	6
4. Arvuline näide	14
5. K o k k u v ö t e	18
6. Kasutatud kirjandus	19

А н н о т а ц и я

В работе проблема Круппа обобщена на случай косоугольной системы координат и выведены аналитические условия, являющиеся решением этой проблемы. Дано алгебраическое решение одного варианта основной задачи в центральной аксонометрии, когда неизвестными параметрами проекции косоугольной системы координат является точка схода двух осей. Задача приводится к решению одного уравнения шестой степени с очень сложными коэффициентами.