TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 104 1957

Л. Я. АЙНОЛА

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ФОРМУЛИРОВКИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А **№ 104** **1957**

Л. Я. АЙНОЛА

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ФОРМУЛИРОВКИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

ПРЕДИСЛОВИЕ

Расчеты тонкостенных конструкций связаны с большими затруднениями. До сих пор не удалось проинтегрировать нелинейные уравнения оболочек так называемыми точными методами. Поэтому приходится довольствоваться приближенными методами, в частности, наиболее распространенными из них вариационными методами. Применение вариационных методов в теории упругости было предметом уже многочисленных исследований, из которых надо упомянуть работы Алумяэ [1, 2, 3, 4], Галимова [5, 6, 7, 8], Грюнтера [14], Ху [15], Лейбензона [10], Лурье [11], Невской [12], Рейсснера [16] и Филлипса [17]. К сожалению ни в одной из них нет единого метода, по которому можно было бы систематически составить всевозможные вариационные задачи для данной проблемы.

С целью получить общий метод вывода вариационных задач в теории упругости в первой главе настоящей работы одному методу преобразования вариационных задач [9] дается обобщенный вид. Во второй главе этим обобщенным методом выводятся два цикла основных вариационных задач упрощенной нелинейной теории оболочек и указываются все возможности формулировки вариационной задачи в пределах этих циклов.

I. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

§ 1. ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

1. Общая вариационная задача

Пусть дана исходная вариационная *задача 1* в следующем общем виде:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_{D_n} F(x^\alpha, u^\beta, u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c})\, d(x^\alpha) \qquad (1.1)$$

при данных граничных условиях.

Здесь введены обозначения:

$$\alpha = (1, 2, \ldots, n), \quad \beta = (1, 2, \ldots, m),$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_c = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

$$u^s_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\partial^k u^s}{\partial x^{i_1}\, \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_k}}.$$

С целью увеличения числа варьируемых функций в данной задаче образуем вспомогательные выражения

$$f^l(x^\alpha, u^\beta, u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c}),$$

$$l = 1, 2, \ldots, r,$$

которые вместе с производными до порядка, встречаемых в дальнейшем рассуждении, будем считать непрерывными функциями своих аргументов.

При помощи f^l подинтегральная выражения в (1.1) получает новый вид

$$F(x^\alpha, u^\beta, u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c}) = G(x^\alpha, u^\beta, f^\gamma, u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c}),$$

$$\gamma = (1, 2, \ldots, r), \tag{1.2}$$

Предположим, что система функций $u'^\beta(x^\alpha)$ дает стационарное значение функционалу (1.1), то-есть является решением дифференциональных уравнений Эйлера-Лагранжа функционала (1.1). Тогда на месте стационарности

$$f^l(x^\alpha, u'^\beta, u'^\beta_{i_1}, \ldots, u'^\beta_{i_1 \ldots i_c}) = g^l(x^\alpha). \tag{1.3}$$

Принцип Курант-Гильберта [9]: если функционал $\pi(u^\beta)$ при заданных условиях непрерывности и добавочных условиях достигает станционарного значения для некоторой системы функций u'^β и если эта система удовлетворяет некоторым соотношениям, то функционал π остается стационарным для этой системы функций также и в том случае, если одно или несколько из этих соотношений заранее присоединить к добавочным условиям задачи — позволяет функции g^l ввести в формулировку вариационной задачи. По принципу задачу 1 можно заменить следующей *задачей 1а*:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_{D_n} G(x^\alpha, u^\beta, g^\gamma, u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c})\, d(x^\alpha) \tag{1.4}$$

при данных граничных условиях и с добавочными условиями

$$g^l - f^l(x^\alpha, u^\beta, u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c}) = 0. \tag{1.5}$$

От добавочных условий можно освободиться правилом множителей Лагранжа, которое показывает, что решения задачи 1а являются в то же время решениями следующей *задачи 2:*

Найти стационарное значение функционала

$$\int_{D_n} [G - \sum_{l=1}^{r} \lambda^l (g^l - f^l)]\, d(x^\alpha) \tag{1.6}$$

при данных граничных условиях.

Здесь $\lambda^l(x^\alpha)$ множители Лагранжа.

По сравнению с исходной вариационной задачей у задачи 2 возможности выбора варьируемых функций большие, так как число варьируемых функций здесь больше.

Называем задачу 2 общей вариационной задачей.

Дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа функционала (1.6) следующие:

$$G_{g^l} - \lambda^l = 0, \tag{1.7}$$

$$G_{u^s} + \sum_{k=1}^{c} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{n} (-1)^k \frac{\partial^k G_{u^s_{i_1 \ldots i_k}}}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}} + \sum_{l=1}^{r} \lambda^l f^l_{u^s} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{c} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} (-1)^k \frac{\partial^k (\lambda^l f^l_{u^s_{i_1 \ldots i_k}})}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}} = 0 \tag{1.8}$$

и (1.5).

2. Обобщенная каноническая вариационная задача

Приступаем к уменьшению варьируемых функций в вариационной задаче. Для этого предполагаем, что из (1.7) g^l можно выразить как непрерывную функцию от x^α, u^β, $u^\beta_{i_1}$, ..., $u^\beta_{i_1 \ldots i_c}$, λ^γ то есть

$$g^l = h^l(x^\alpha, u^\beta, u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c}, \lambda^\gamma). \tag{1.9}$$

В этом случае, считая по принципу Курант-Гильберта условия (1.7) предварительными, можно из функционала (1.6) исключить аргументы g^l.

Используя обозначение

$$H(x^\alpha, u^\beta, u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c}, \lambda^\gamma) =$$
$$= \sum_{l=1}^{r} \lambda^l h^l - G(x^\alpha, u^\beta, h^\gamma, u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c}), \tag{1.10}$$

получаем вариационную *задачу 3.*

Найти стационарное значение функционала

$$\int_{D_n} \left(\sum_{l=1}^{r} \lambda^l f^l - H \right) d(x^\alpha) \tag{1.11}$$

при данных граничных условиях.

При определенных ограничениях ($n=1$, $c=1$, $f^l = u^l_{i_1}$, $r=m$) функционал (1.11) совпадает с известной канонической формой вариационной задачи и H с функцией Гамильтона. Поэтому можно задачу 3 назвать обобщенной канонической вариационной задачей, а H обобщенной функцией Гамильтона.

Условиями стационарности функционала (1.11) являются:

$$H_{\lambda^l} - f^l = 0, \tag{1.12}$$

$$H_{u^s} + \sum_{k=1}^{c} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} (-1)^k \frac{\partial^k H_{u^l_{i_1 \ldots i_k}}}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}} + \sum_{l=1}^{r} \lambda^l f^l +$$
$$+ \sum_{k=1}^{c} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \sum_{l=1}^{r} (-1)^k \frac{\partial^k (\lambda^l f^l_{u^s_{i_1 \ldots i_k}})}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}} = 0. \tag{1.13}$$

Отметим, что из r условий стационарности (1.7) можно использовать как предварительные условия только часть, скажем d уравнений, если через них можно выразить d функции $g^{l_1}, g^{l_2}, \ldots, g^{l_d}$ как функции от x^α, u^β, $u^\beta_{i_1}, \ldots, u^\beta_{i_1 \ldots i_c}$, λ^γ и $g^{l_{d+1}}, \ldots, g^{l_r}$. Исключая $g^{l_1}, \ldots, g^{l_d}$ из (1.6), приходим к новой формулировке вариационной задачи.

В частном случае, если взять

$$f^{si_1 \dots i_k} = u^s_{i_1 \dots i_k},$$
$$k = 1, 2, \dots, c,$$

и из условий (1.7) использовать только следующие

$$G_{g^{si_1 \dots i_k}} - \lambda^{si_1 \dots i_k} = 0$$

от предыдущего получается форма вариационной задачи, данная Де Дондером [13].

По форме иная вариационная задача получается, если предварительные условия (1.7) использовать не для исключения g^l, как при выводе канонического преобразования, а для λ^l. Таким образом из задачи 2 получаем следующую *задачу з′*:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_{D_n} \Big[G - \sum_{l=1}^{r} G_{g^l} (g^l - f^l) \Big] d(x^\alpha) \tag{1.14}$$

при данных граничных условиях.

Дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа этой задачи отличаются от канонических уравнений тем, что в (1.13) λ^l заменены через (1.7), а (1.12) заменены следующими

$$\sum_{l=1}^{r} G_{g^l g^j} (g^l - f^l) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \tag{1.15}$$

Так как мы предполагали, что g^l можно выразить через (1.7), то

$$|G_{g^l g^j}| \neq 0. \tag{1.16}$$

Поэтому из (1.15) следует (1.5) или (1.12).

Надо отметить, что для получения новых формулировок вариационных задач можно и скомбинировать условия (1.7) и (1.9) и из задачи 2 исключить только часть из g^γ и часть из λ^γ.

3. Преобразования Фридрихса

В предыдущем пункте мы применяли принцип Курант-Гильберта совместно с первой группой дифференциальных уравнений Эйлера-Лагранжа функционала (1.6). Для получения новых формулировок вариационной задачи можно применить принцип и с другой группой, именно с (1.8), или с обоими группами — с (1.7) и (1.8). В определенных условиях последняя возможность соответствует преобразованию Фридрихса. Использование этих преобразований демонстрируется на конкретном примере в § 3 и § 4..

II. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

§ 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ УПРОЩЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

1. Обозначение и основные уравнения

Введем обозначения:

v_i, v — компоненты вектора перемещения срединной поверхности оболочки,

ε_{ik}, μ_{ik} — компоненты симметричных тензоров деформаций,

T^{ik}, M^{ik} — компоненты симметричного тензора тангенциальных сил и тензора моментов,

X^i, X — компоненты вектора внешних сил,

a_{ik}, b_{ik} — коэффициенты первой и второй квадратичных форм срединной поверхности,

c_{ik} — компоненты дискриминантного тензора первой квадратичной формы,

E — модуль Юнга,

ν — коэффициент Пуассона и

h — толщина оболочки.

Рассмотрим нелинейную задачу о среднем изгибе упругой оболочки, основные уравнения которой заданы в следующем упрощенном виде [1].

Соотношения между деформациями и перемещениями

$$2\varepsilon_{ik} = \nabla_i v_k + \nabla_k v_i - 2b_{ik} v + \nabla_i v \nabla_k v, \qquad (2.1)$$

$$\mu_{ik} = -\nabla_{ik} v. \qquad (2.2)$$

Уравнения непрерывности деформаций

$$c^{\alpha\gamma} c^{\beta\delta} (2b_{\alpha\beta} \mu_{\gamma\delta} - \mu_{\alpha\beta} \mu_{\gamma\delta} - 2\nabla_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta}) = 0, \qquad (2.3)$$

$$c^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mu_{i\alpha} = 0. \qquad (2.4)$$

Уравнения равновесия

$$\nabla_\alpha T^{\alpha i} + X^i = 0, \qquad (2.5)$$

$$T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha (T^{\alpha\beta} \nabla_\beta v) + \nabla_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} + X = 0. \qquad (2.6)$$

Соотношения упругости

$$T^{ik} = B E^{ik\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad M^{ik} = D E^{ik\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}, \qquad (2.7)$$

$$\varepsilon_{ik} = B' P_{ik\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad \mu_{ik} = D' P_{ik\alpha\beta} M^{\alpha\beta}. \qquad (2.8)$$

В последних

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad (2.9)$$
$$E^{ijkl} = a^{ik} a^{jl} + \nu c^{ik} c^{jl},$$

$$B' = \frac{1}{Eh}, \; D' = \frac{12}{Eh^3}, \qquad (2.10)$$
$$P_{ijkl} = a_{ik} a_{jl} - \nu c_{ik} c_{jl}.$$

2. Граничные условия

Пусть дальше

u_i, u — заданные компоненты перемещения на контуре,

w — заданный угол поворота в направлении нормали контура,

N^i, N — заданные компоненты вектора внешних сил на контуре,

G — заданный момент изгиба на контуре,

n_i, t_i — компоненты единичного вектора нормали и единичного тангенциального вектора контура.

Граничные условия рассматриваемомой задачи пусть даны следующим образом:

на части C_1 контура C

$$v_i - u_i = 0, \tag{2.11}$$

$$v - u = 0, \quad n^\alpha \nabla_\alpha v - w = 0; \tag{2.12}$$

на части C_2 контура C

$$T^i - N^i = 0, \tag{2.13}$$

$$T - N = 0, \quad M - G = 0, \tag{2.14}$$

где

$$\begin{gathered} T^i = T^{i\alpha} n_\alpha, \\ T = T^{\alpha\beta} \nabla_\beta v n_\alpha + \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta + t^\gamma \nabla_\gamma (M^{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta), \\ M = M^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta. \end{gathered} \tag{2.15}$$

3. Исходная вариационная задача

В качестве исходной вариационной задачи при использовании метода преобразования применяем вариационную задачу Лагранжа. Последняя получается из принципа возможных перемещений

$$\begin{gathered} \int_S (T^{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta\mu_{\alpha\beta}) d\sigma - \int_S (X^\alpha \delta v_\alpha + X \delta v) d\sigma \\ - \int_{C_2} (N^\alpha \delta v_\alpha + N \delta v - G n^\alpha \nabla_\alpha \delta v) ds = 0. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Здесь S — средняя поверхность оболочки,

$d\sigma = \sqrt{a}\, dx^1 dx^2$, где x^1 и x^2 гауссовы координаты на S, и s — дуга контура.

Учитывая соотношения упругости (2.7) и вводя обозначения

$$W(\varepsilon,\mu) = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\delta}(\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} + \mu_{\alpha\beta}\mu_{\gamma\delta}), \tag{2.17}$$

$$J(X,v) = X^{\alpha} v_{\alpha} + Xv, \tag{2.18}$$

$$K(N,v) = N^{\alpha} v_{\alpha} + Nv - Gn^{\alpha}\nabla_{\alpha} v, \tag{2.19}$$

вариационной *задаче 1* — задаче Лагранжа можно придать вид:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{W[\varepsilon(v),\mu(v)] - J(X,v)\}\, d\sigma - \int_{C_2} K(N,v)\, ds \tag{2.20}$$

при граничных условиях (2.11) и (2.12).

Обозначение $\varepsilon(v)$, $\mu(v)$ здесь и дальше показывает, что в соответствующих выражениях тензоры ε_{ik}, μ_{ik} надо заменить перемещениями через (2.1) и (2.2).

§ 3. ПЕРВЫЙ ЦИКЛ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПРИ e_{ik}, ω_i, μ_{ik}

1. Общая задача

Выбирая как вспомогательные аргументы — кинетические тензоры

$$2e_{ik} = \nabla_i v_k + \nabla_k v_i - 2b_{ik} v, \tag{3.1}$$

$$\omega_i = \nabla_i v, \tag{3.2}$$

$$\mu_{ik} = -\nabla_{ik} v, \tag{3.3}$$

вариационную *задачу 1* можно перефразировать следующим образом:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S [V(e,\omega,\mu) - J(X,v)]\, d\sigma - \int_{C_2} K(N,v)\, ds \tag{3.4}$$

с добавочными условиями (3.1) — (3.3.) в S и (2.11) — (2.12) на C_1.

Здесь

$$V(e,\omega,\mu)=\frac{1}{2}E^{\alpha\beta\gamma\delta}\left[B(e_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\omega_\alpha\omega_\beta)(e_{\gamma\delta}+\frac{1}{2}\omega_\gamma\omega_\delta)+\right.$$
$$\left.+D\mu_{\alpha\beta}\mu_{\gamma\delta}\right]. \tag{3.5}$$

Освобождение от добавочных условий как в S так и на C_1 дает *общую вариационную задачу:*
Найти стационарное значение функционала

$$\int_S [V(e,\omega,\mu)-J(X,v)]\,d\sigma-$$
$$-\int_S\{T^{\alpha\beta}[e_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(\nabla_\alpha v_\beta+\nabla_\beta v_\alpha)+b_{\alpha\beta}v]+$$
$$+S^\alpha(\omega_\alpha-\nabla_\alpha v)+M^{\alpha\beta}(\mu_{\alpha\beta}+\nabla_{\alpha\beta}v)\}\,d\sigma-\int_{C_2}K(N,v)\,ds-$$
$$-\int_{C_1}[\varkappa^\alpha(v_\alpha-u_\alpha)+\varkappa(v-u)-\lambda(n^\alpha\nabla_\alpha v-w)]\,ds. \tag{3.6}$$

T^{ik}, M^{ik}, S^i, $\varkappa^i$, $\varkappa$, λ — множители Лагранжа.

Функциональными аргументами для (3.6) являются перемещения v_i, v, компоненты кинетических тензоров e_{ik}, ω_i, μ_{ik} и множители Лагранжа T^{ik}, M^{ik}, S^i, $\varkappa^i$, $\varkappa$, λ, причем на искомые функции никаких добавочных условий не налагается.

В соответствии с этими группами варьируемых аргументов дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа функционала (3.6) разделяются на три группы:

1) по перемещениям v_i, v — уравнения равновесия

$$\nabla_\alpha T^{\alpha i}+X^i=0, \tag{3.7}$$

$$T^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}+\nabla_\alpha S^\alpha+\nabla_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}+X=0; \tag{3.8}$$

2) по множителям Лагранжа T^{ik}, M^{ik}, S^i — соотношения между кинетическими тензорами и перемещениями (3.1) — (3.3);

3) по кинетическим тензорам e_{ik}, ω_i, μ_{ik} — соотношения упругости

$$BE^{ik\alpha\beta}\left(e_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\omega_\alpha\omega_\beta\right)-T^{ik}=0, \tag{3.9}$$

$$T^{i\alpha}\omega_\alpha-S^i=0, \tag{3.10}$$

$$DE^{ik\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}-M^{ik}=0. \tag{3.11}$$

Из соотношений упругости (3.9) — (3.11) видно, что множители Лагранжа T^{ik} нужно рассматривать как компоненты тензора тангенциальных сил, M^{ik} — как компоненты тензора моментов и S^i — как компоненты вспомогательного вектора поперечных сил, обусловленных нелинейностью задачи. Это оправдывает ранее принятые обозначения этих множителей.

Естественными граничными условиями функционала (3.6) на C_1 являются (2.11) — (2.12), .

$$T^i-\varkappa^i=0, \tag{3.12}$$

$$S-\varkappa=0, \quad M-\lambda=0 \tag{3.13}$$

и на C_2

$$T^i-N^i=0, \tag{3.14}$$

$$S-N=0, \quad M-G=0, \tag{3.15}$$

где

$$S=S^\alpha n_\alpha+\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}n_\beta+t^\gamma\nabla_\gamma(M^{\alpha\beta}n_\alpha t_\beta). \tag{3.16}$$

Если при помощи (3.12) — (3.13) из (3.6) исключить множители Лагранжа $\varkappa^i$, $\varkappa$, λ, тогда после введения обозначения

$$2U(T,e)=T^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+S^\alpha\omega_\alpha+M^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}K(T,v-u)=T^\alpha(v_\alpha-u_\alpha)+S(v-u)-\\ -M(n^\alpha\nabla_\alpha v-w),\end{aligned} \tag{3.18}$$

предыдущая задача получает следующую *общую форму 2:*

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{V(e,\omega,\mu) - 2U(T,e) + 2U[T,e(v)] - J(X,v)\} d\sigma -$$
$$- \int_{C_1} K(T, v - u) ds - \int_{C_2} K(N,v) ds. \tag{3.19}$$

Обозначение $e(v)$ здесь показывает, что в соответствующих выражениях e_{ik}, ω_i, μ_{ik} надо заменить перемещениями v_i, v через (3.1) — (3.3).

Условиями стационарности функционала (3.19) является система основных соотношений нелинейной оболочки — (3.7) — (3.8), (3.1) — (3.3), (3.9) — (3.11), (2.11), — (2.12) и (3.14) — (3.15).

2. Частные случаи общей задачи

По общему методу, приведенному в первой части настоящей работы, можно вспомогательные аргументы задачи выбрать и так, чтобы не все первоначальные аргументы и их производные в исходном функционале не были заменены новыми аргументами. То есть, в нашей задаче можно применить и только часть из вспомогательных аргументов (3.1) — (3.3). Из трех групп (3.1) — (3.3), кроме случая, рассматриваемого в пункте 1, мы можем составить 6 комбинаций. Полученные задачи мы обозначим в дальнейшем следующими греческими буквами:

$$\alpha - c\, e_{ik},\ \omega_i; \quad \beta - c\, e_{ik},\ \mu_{ik}; \quad \gamma - c\, \omega_i,\ \mu_{ik};$$
$$\delta - c\, e_{ik}; \quad \varepsilon - c\, \omega_i \text{ и } \zeta - c\, \mu_{ik}.$$

Ниже мы приведем только две из этих задач. В случае надобности остальные легко формулируемы.

Задача 2 а:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{V[e,\omega,\mu(v)] - 2U'(T,e) + 2U'[T,e(v)] -$$
$$- J(X,v)\} d\sigma - \int_{C_1} K'(T, v - u) ds - \int_{C_2} K(N,v) ds. \tag{3.20}$$

Здесь

$$2U'(T,e) = T^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} + S^{\alpha}\omega_{\alpha} \tag{3.21}$$

и $K'(T, v-u)$ получается из $K(T, v-u)$, если там M^{ik} заменить перемещениями v через (2.7) и (2.2).

Условиями стационарности задачи 2*а* являются (3.7) — (3.8), (3.1) — (3.2), (3.9) — (3.10), (3.14) — (3.15) и (2.11) — (2.12), если в них M^{ik} заменить перемещениями v.

Задача 2 б:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{V[e,\omega(v),\mu(v)] - 2U''(T,e) + 2U''[T,e(v)] - $$
$$- J(X,v)\}d\sigma - \int_{C_1} T^{\alpha\beta}n_{\alpha}(v_{\beta} - u_{\beta})ds - \int_{C_2} K(N,v)ds \tag{3.22}$$

при граничных условиях (2.11) и (2.12).

Здесь обозначено

$$2U''(T,e) = T^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}. \tag{3.23}$$

Условия стационарности этой задачи следующие: (3.7) — (3.8), (3.1), (3.9), (3.14) — (3.15) и (2.11), если в них M^{ik} и ω_i заменить перемещениями v.

3. Каноническая задача

Легко видеть, что обратными соотношениями законов упругости (3.9) — (3.11) являются

$$e_{ik} = B'P_{ik\alpha\beta}\left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}BE^{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_{\gamma}\omega_{\delta}\right), \tag{3.24}$$

$$\omega_i = \frac{2c_{i\xi}\,c_{\vartheta\varkappa}S^{\vartheta}T^{\xi\varkappa}}{c_{\alpha\gamma}c_{\beta\delta}T^{\alpha\beta}T^{\gamma\delta}}, \tag{3.25}$$

$$\mu_{ik} = D'P_{ik\alpha\beta}M^{\alpha\beta}. \tag{3.26}$$

Для уменьшения функциональных аргументов задачи 2 при помощи законов упругости найдутся 23 разных возможностей. Эти возможности получаются, если выбрать разные комбинации из уравнений (3.9) — (3.11) и (3.24) — (3.26) для исключения функциональных аргументов. Ниже приводится только одна задача, полученная таким образом. Характеристика других задач дается в пункте 7 настоящего параграфа.

Исключая все кинетические тензоры из (3.19) через (3.24) — (3.26) получается обобщенная каноническая *задача 3* в виде:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{2U[T, e(v)] - H(T, S, M) - J(X, v)\} d\sigma - \\ - \int_{C_1} K(T, v - u) ds - \int_{C_2} K(N, v) ds. \tag{3.27}$$

Обобщенная функция Гамильтона имеет здесь вид

$$H(T, S, M) = \frac{1}{2} P_{\alpha\beta\gamma\delta} (B' T^{\alpha\beta} T^{\gamma\delta} + D' M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta}) + \\ + \frac{c_{\varrho\varkappa} c_{\vartheta\varkappa} S^{\vartheta} S^{\varrho} T^{\varkappa\varkappa}}{c_{\alpha\gamma} c_{\beta\delta} T^{\alpha\beta} T^{\gamma\delta}}. \tag{3.28}$$

Для этой задачи систему условий стационарности образуют соотношения: (3.7) — (3.8), (3.1) — (3.3), (2.11) — (2.12) и (3.14) — (3.15).

Если использовать различные комбинации из соотношений упругости для исключения компонентов деформаций и сил в общих задачах 2α—2ζ, можно получить всего 29 разных форм вариационной задачи (см. п. 7).

4. Задача Кастильяно

Перейдем к следующему этапу преобразования. Требуем, чтобы функциональные аргументы задачи 3 удовлетворяли бы уравнениям равновесия (3.7) — (3.8) и статическим граничным условиям (3.14) — (3.15). Неудовлетворенными остаются тогда только те связи, которые мы с выбором вспомогательных аргументов наложили на исходную задачу 1, и геометрические граничные условия.

Легко проверить, что уравнения равновесия (3,7) — (3.8) тождественно удовлетворены, если T^{ik}, M^{ik} и S^{i} выразить через 6 функций напряжения ϱ, η^{i} и ϑ^{ik} следующим образом

$$T^{ik}=c^{i\alpha}c^{k\beta}\nabla_{\alpha\beta}\varrho+T_0^{ik}, \tag{3.29}$$

$$S^i=\nabla_\alpha\vartheta^{\alpha i}+S_0^i, \tag{3.30}$$

$$M^{ik}=(c^{i\alpha}c^{k\beta}-\frac{1}{2}c^{ik}c^{\alpha\beta})\nabla_\alpha\eta_\beta-c^{i\alpha}c^{k\beta}b_{\alpha\beta}\varrho-\vartheta^{ik}+M_0^{ik}, \tag{3.31}$$

где T_0^{ik}, M_0^{ik} и S_0^i — частное решение неоднородных уравнений (3.7) — (3.8).

Интегрированием по частям можно функционалу (3.27) дать такую форму, что выполнение условий (3.7) — (3.8) и (3.14) — (3.15) вызывает исчезновение членов, содержащих перемещения v_i, v. Поэтому получаемое преобразование есть преобразование Фридрихса. Соответствующая вариационная *задача 4* будет в виде:

Найти стационарное значение функционала

$$-\int_S H[T(\varrho), S(\varrho), M(\varrho)]\,d\sigma+\int_{C_1} K[T(\varrho), u]\,ds \tag{3.32}$$

при граничных условиях (3.14) — (3.15).

Обозначения $T_{(\varrho)}$, $S_{(\varrho)}$, $M_{(\varrho)}$ показывают, что в соответствующих выражениях T^{ik}, M^{ik} и S^i надо заменить через (3.29) — (3.31).

В линейной теории упругости вариационная задача Кастильяно получается из вариационной задачи Лагранжа при помощи преобразования Фридрихса. Задача 4 получена таким же образом. Поэтому эту задачу нужно рассматривать как вариационную задачу Кастильяно в нелинейной теории оболочек.

Дифференциальными уравнениями Эйлера-Лагранжа задачи Кастильяно являются условия непрерывности кинетических тензоров

$$c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}[\nabla_{\gamma\delta}e_{\alpha\beta}-b_{\gamma\delta}\mu_{\alpha\beta}]=0, \tag{3.33}$$

$$\mu_{ik}+\nabla_i\omega_k=0, \tag{3.34}$$

$$c^{\alpha\beta}\nabla_\beta\mu_{\alpha i}=0. \tag{3.35}$$

Естественными граничными условиями для (3.32) на C_1 получаются следующие геометрические граничные условия в функциях напряжения:

$$c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}\{t^{\nu}\nabla_{\nu}[(e'_{\alpha\beta}-e_{\alpha\beta})n_{\delta}t_{\beta}]+\nabla_{\delta}(e'_{\alpha\beta}-e_{\alpha\beta})n_{\gamma}\}=0,$$

$$c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}(e'_{\alpha\beta}-e_{\alpha\beta})n_{\gamma}n_{\delta}=0, \quad (3.36)$$

$$c^{\alpha\gamma}c^{\beta i}(\mu'_{\alpha\beta}-\mu_{\alpha\beta})n_{\gamma}=0, \quad (3.37)$$

$$(\omega'_i-\omega_i)n_k=0. \quad (3.38)$$

(3.39)

Здесь e'_{ik}, ω'_i и μ'_{ik} образуются по (3.1) — (3.3) из заданных u_i, u и e_{ik}, ω_i, μ_{ik} надо заменить функциями напряжения через (3.24) — (3.26) и (3.29) — (3.31).

Кроме приведенной задачи выпишем и вариационную задачу, которая получается из вариационной задачи с варьируемыми T^{ik}, M^{ik}, ω_i, v_i, v, если там функциональные аргументы удовлетворяли бы условиями равновесия и статическим граничным условиям.

Найти стационарное значение функционала

$$-\int_S L(T,M,\omega)\,d\sigma+\int_{C_1}K(T,u)\,ds \quad (3.40)$$

с добавочными условиями

$$\nabla_{\alpha}T^{\alpha i}+X^{i}=0, \quad (3.41)$$

$$T^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}+\nabla_{\alpha}(T^{\alpha\beta}\omega_{\beta})+\nabla_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}+X=0 \quad (3.42)$$

и при граничных условиях (3.14) — (3.15).

Здесь

$$L(T,M,\omega)=\frac{1}{2}P_{\alpha\beta\gamma\delta}(B'T^{\alpha\beta}T^{\gamma\delta}+D'M^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta})+\frac{1}{2}T^{\alpha\beta}\omega_{\alpha}\omega_{\beta}. \quad (3.43)$$

Эта задача известна и подробно рассмотрена Галимовым [5].

Ряд новых формулировок вариационных задач можно получить, требуя от функциональных аргументов выполнения части из уравнений равновесия и статических граничных условий. Легко удовлетворить условиям (3.7) выбирая T^{ik} по (3.29). Используя еще предварительные условия (3.14) можно в задачах, содержащих варьируемые T^{ik}, последние заменить варьируемым ϱ. Число таких задач 32. Для примера приведена одна из них:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S \Big\{ \frac{1}{2} D E^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_{\alpha\beta} v \nabla_{\gamma\delta} v + S^\alpha \nabla_\alpha v - T^{\alpha\beta}(\varrho) b_{\alpha\beta} v - $$
$$- H'[T(\varrho), S] - X v \Big\} d\sigma + \int_{C_1} T^{\alpha\beta}(\varrho) n_\beta u_\alpha \, ds - \tag{3.44}$$
$$- \int_{C_2} (N v - G n^\alpha \nabla_\alpha v) \, ds$$

при граничных условиях (2.12) и (3.14).

Здесь $H'(T, S)$ получится из $H(T, S, M)$, если там взять $M^{ik} = 0$.

Отметим, что в числе названных 32 задач находится и известная задача [3,12] с варьируемыми аргументами ϱ и v.

5. Вторая форма общей задачи

Полученную вариационную задачу Кастильяно мы можем рассматривать как новую исходную задачу и к ней применить преобразования, приведенные в предыдущих пунктах.

Если ввести вспомогательные переменные T^{ik}, M^{ik} и S^i выбранные по (3.29) — (3.31), то *общую вариационную задачу 5* можно сформулировать следующим образом:

Найти стационарное значение функционала

$$- \int_S \{ H(T, S, M) - 2U(T, e) + 2U[T(\varrho), e] \} d\sigma +$$
$$+ \int_{C_1} K[T(\varrho), u] ds - \int_{C_2} K[N - T(\varrho), v] ds, \tag{3.45}$$

если v_i и v удовлетворяют условиям (3.1) — (3.3).

Функциональными аргументами для (3.45) являются функции напряжения ϱ, η_i, ϑ^{ik}, кинетические тензоры e_{ik}, ω_i, μ_{ik} и тензоры сил T^{ik}, M^{ik}, S^i.

Дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа функционала (3.45) образуют следующую систему основных уравнений оболочки: соотношения между T^{ik}, M^{ik}, S^i и функциями напряжения (3.29) — (3.31), условия непрерывности кинетических тензоров (3.33) — (3.35) и законы упругости (3.24) — (3.26).

Естественными граничными условиями задачи 5 являются на C_1 соотношения (3.36) — (3.39) и на C_2 следующие статические условия:

$$c^{i\alpha}c^{k\beta}\{\nabla_\alpha(\varrho'-\varrho)n_\beta+t^\gamma\nabla_\gamma[(\varrho'-\varrho)n_\alpha t_\beta]\}=0, \tag{3.46}$$

$$c^{i\alpha}c^{k\beta}(\varrho'-\varrho)n_\alpha n_\beta=0, \tag{3.47}$$

$$(c^{i\alpha}c^{k\beta}-\frac{1}{2}c^{ik}c^{\alpha\beta})(\eta'_\beta-\eta_\beta)n_\alpha=0, \tag{3.48}$$

$$(\vartheta'^{i\alpha}-\vartheta^{i\alpha})n_\alpha=0, \tag{3.49}$$

где ϱ', η'_i и ϑ'^{ik} решение уравнений (3.14) — (3.15), если в последних T^{ik}, M^{ik} и S^i заменить через (3.29) — (3.31).

И здесь можно применить только часть из новых аргументов T^{ik}, M^{ik}, S^i. Для образования общей задачи возможны следующие 6 вариантов:

$$\alpha — \text{с}\ T^{ik}, S^i;\ \beta — \text{с}\ T^{ik}, M^{ik};\ \gamma — \text{с}\ S^i, M^{ik};$$

$$\delta — \text{с}\ T^{ik};\ \varepsilon — \text{с}\ S^i;\ \zeta — \text{с}\ M^{ik}.$$

Соответствующие частные случаи общей задачи мы не приводим.

6. Вторая форма канонической задачи

Используя у второй общей задачи законы упругости (3.24) — (3.26) для исключения разных комбинаций из величин e_{ik}, ω_i, μ_{ik}, T^{ik}, S^i и M^{ik} возможно получить 23 форм вариационной задачи. Выпишем из этих следующую каноническую *задачу 6*, которая получается исключением компонентов сил T^{ik}, S^i и M^{ik}.

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S\{V(e,\omega,\mu)-2U[T(\varrho),e]\}\,d\sigma+\int_{C_1}K[T(\varrho),u]\,ds-
-\int_{C_2}K[N-T(\varrho),v]\,ds, \tag{3.50}$$

если v_i и v удовлетворяют условиям (3.1) — (3.3).

Условиями стационарности этой задачи будут: (3.29) — (3.31), (3.33) — (3.35), (3.36) — (3.39) и (3.46) — (3.49).

Если использовать соотношения упругости у общих задач 5а—5ϱ, то получаются еще 29 новых формулировок вариационной задачи (см. п. 7).

Преобразование Фридрихса для задачи Кастильяно получается, если от функциональных аргументов задачи 6 потребовать удовлетворения условий непрерывности кинетических тензоров (3.33) — (3.35) и геометрические граничные условия (3.36) — (3.39). Первые из них будут тождественно удовлетворены, задав e_{ik}, ω_i, μ_{ik} через (3.1) — (3.3) и вторые, если v_i и v удовлетворяют соотношениям (2.11) — (2.12). Таким образом получаемая задача совпадает с исходной задачей Лагранжа.

7. Обзор задач первого цикла

В следующей таблице 1 приведены все задачи, которые можно получить методом преобразования при выбранных вспомогательных аргументах e_{ik}, ω_i и μ_{ik}.

Таблица 1.

Номер п/п	Номер задачи	Функциональные аргументы	Номер п/п	Номер задачи	Функциональные аргументы
1	2	3	1	2	3
1	1	v_i, v	14		$v_i, v, S, M, e, \omega, \mu$
2	2	$v_i, v, T, S, M, e, \omega, \mu$	15		v_i, v, T, M, ω
3		$v_i, v, T, S, M, e, \omega$	16		v_i, v, T, S, μ
4		v_i, v, T, S, M, μ	17		v_i, v, S, M, e, ω
5		v_i, v, T, S, M, e	18		v_i, v, T, M, e, ω
6		v_i, v, T, S, M, ω	19		$v_i, v, T, M, \omega, \mu$
7		$v_i, v, T, S, M, \omega, \mu$	20		$v_i, v, T, S, \omega, \mu$
8		v_i, v, T, S, M, e, μ	21		v_i, v, T, S, e, μ
9		$v_i, v, T, e, \omega, \mu$	22		v_i, v, T, ω, μ
10		$v_i, v, S, e, \omega, \mu$	23		v_i, v, M, e, ω
11		$v_i, v, M, e, \omega, \mu$	24	3	v_i, v, T, S, M
12		$v_i, v, T, S, e, \omega, \mu$	25		v_i, v, e, ω, μ
13		$v_i, v, T, M, e, \omega, \mu$	26	2δ	v_i, v, T, e

1	2	3	1	2	3
27		v_i, v, T	61		v, ϱ
28		v_i, v, e	62		$v, \varrho, S, M, e, \omega, \mu$
29	2ζ	v_i, v, M, μ	63		$v, \varrho, S, M, e, \omega$
30		v_i, v, M	64		v, ϱ, S, M, μ
31		v_i, v, μ	65		v, ϱ, S, M, e
32	2ε	v_i, v, S, ω	66		v, ϱ, S, M, ω
33		v_i, v, S	67		$v, \varrho, S, M, \omega, \mu$
34		v_i, v, ω	68		v, ϱ, S, M, e, μ
35	2α	v_i, v, T, S, e, ω	69		$v, \varrho, e, \omega, \mu$
36		v_i, v, T, e, ω	70		$v, \varrho, S, e, \omega, \mu$
37		v_i, v, S, e, ω	71		$v, \varrho, M, e, \omega, \mu$
38		v_i, v, e, ω	72		v, ϱ, M, ω
39		v_i, v, T, S	73		v, ϱ, S, μ
40		v_i, v, T, S, e	74		v, ϱ, M, e, ω
41		v_i, v, T, S, ω	75		$v, \varrho, M, \omega, \mu$
42		v_i, v, T, ω	76		$v, \varrho, S, \omega, \mu$
43	2β	v_i, v, T, M, e, μ	77		v, ϱ, S, e, μ
44		v_i, v, T, e, μ	78		v, ϱ, ω, μ
45		v_i, v, M, e, μ	79		v, ϱ, S, M
46		v_i, v, T, M, e	80		v, ϱ, e
47		v_i, v, T, M, μ	81		v, ϱ, S, e, ω
48		v_i, v, T, μ	82		v, ϱ, e, ω
49		v_i, v, M, e	83		v, ϱ, S
50		v_i, v, T, M	84		v, ϱ, S, e
51		v_i, v, e, μ	85		v, ϱ, S, ω
52	2γ	$v_i, v, S, M, \omega, \mu$	86		v, ϱ, ω
53		v_i, v, S, M	87		v, ϱ, M, e, μ
54		v_i, v, ω, μ	88		v, ϱ, e, μ
55		v_i, v, S, M, ω	89		v, ϱ, M, e
56		v_i, v, S, M, μ	90		v, ϱ, M, μ
57		v_i, v, M, ω, μ	91		v, ϱ, μ
58		v_i, v, S, ω, μ	92		v, ϱ, M
59		v_i, v, S, μ	93	4	ϱ, η, ϑ
60		v_i, v, M, ω	94	5	$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, M, e, \omega, \mu$

1	2	3
95		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, M, e, \omega$
96		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, M, \mu$
97		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, M, e$
98		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, M, \omega$
99		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, M, \omega, \mu$
100		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, M, e, \mu$
101		$\varrho, \eta, \vartheta, T, e, \omega, \mu$
102		$\varrho, \eta, \vartheta, S, e, \omega, \mu$
103		$\varrho, \eta, \vartheta, M, e, \omega, \mu$
104		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, e, \omega, \mu$
105		$\varrho, \eta, \vartheta, T, M, e, \omega, \mu$
106		$\varrho, \eta, \vartheta, S, M, e, \omega, \mu$
107		$\varrho, \eta, \vartheta, T, M, \omega$
108		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, \mu$
109		$\varrho, \eta, \vartheta, S, M, e, \omega$
110		$\varrho, \eta, \vartheta, T, M, \omega, \mu$
111		$\varrho, \eta, \vartheta, T, M, e, \omega$
112		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, \omega, \mu$
113		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, e, \mu$
114		$\varrho, \eta, \vartheta, T, \omega, \mu$
115		$\varrho, \eta, \vartheta, M, e, \omega$
116		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, M$
117		$\varrho, \eta, \vartheta, e, \omega, \mu$
118	5δ	$\varrho, \eta, \vartheta, T, e$
119		$\varrho, \eta, \vartheta, T$
120		$\varrho, \eta, \vartheta, e$
121	5ζ	$\varrho, \eta, \vartheta, M, \mu$
122		$\varrho, \eta, \vartheta, M$
123		$\varrho, \eta, \vartheta, \mu$
124	5ε	$\varrho, \eta, \vartheta, S, \omega$
125		$\varrho, \eta, \vartheta, S$
126		$\varrho, \eta, \vartheta, \omega$
127	5α	$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, e, \omega$
128		$\varrho, \eta, \vartheta, T, e, \omega$
129		$\varrho, \eta, \vartheta, S, e, \omega$
130		$\varrho, \eta, \vartheta, e, \omega$
131		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S$
132		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, e$
133		$\varrho, \eta, \vartheta, T, S, \omega$
134		$\varrho, \eta, \vartheta, T, \omega$
135	5β	$\varrho, \eta, \vartheta, T, M, e, \mu$
136		$\varrho, \eta, \vartheta, T, e, \mu$
137		$\varrho, \eta, \vartheta, M, e, \mu$
138		$\varrho, \eta, \vartheta, T, M, e$
139		$\varrho, \eta, \vartheta, T, M, \mu$
140		$\varrho, \eta, \vartheta, T, \mu$
141		$\varrho, \eta, \vartheta, M, e$
142		$\varrho, \eta, \vartheta, T, M$
143		$\varrho, \eta, \vartheta, e, \mu$
144	5γ	$\varrho, \eta, \vartheta, S, M, \omega, \mu$
145		$\varrho, \eta, \vartheta, S, M$
146		$\varrho, \eta, \vartheta, \omega, \mu$
147		$\varrho, \eta, \vartheta, S, M, \omega$
148		$\varrho, \eta, \vartheta, S, M, \mu$
149		$\varrho, \eta, \vartheta, M, \omega, \mu$
150		$\varrho, \eta, \vartheta, S, \omega, \mu$
151		$\varrho, \eta, \vartheta, S, \mu$
152		$\varrho, \eta, \vartheta, M, \omega$

Для простоты опущены индексы ^{i} и ^{ik} в обозначении тензоров.

§ 4. ВТОРОЙ ЦИКЛ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ (ПРИ ε_{ik}, μ_{ik}).

1. Общая задача

Приведем задачи, которые получаются методом преобразования из задачи 1, если использовать вспомогательными аргументами компоненты тензоров деформаций — ε_{ik} и μ_{ik}.

Общая вариационная задача 2 теперь гласит:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{ W(\varepsilon, \mu) - 2R(T, \varepsilon) + 2R[T, \varepsilon(v)] - J(X, v) \} d\sigma - \\ - \int_{C_2} K(N, v)\, ds - \int_{C_1} K(T, v - u)\, ds. \tag{4.1}$$

Здесь

$$2R(T, \varepsilon) = T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}. \tag{4.2}$$

Условиями стационарности этой задачи являются все основные соотношения оболочки, а именно: соотношения между деформациями и перемещениями (2.1) — (2.2), уравнения равновесия (2.5) — (2.6), соотношения упругости (2.7) и как геометрические (2.11) — (2.12), так и статические граничные условия (2.13) — (2.14).

Для пластинки эта общая задача совпадает с задачей, данной Ху [15].

В рассматриваемом случае возможно образовать 2 частных случая общей задачи. Вспомогательными аргументами ε_{ik} получаем задачу 2α и вспомогательными аргументами μ_{ik} задачу 2β.

2. Каноническая задача

При помощи соотношений упругости (2.7) — (2.8) можно 9 разными способами уменьшить число функциональных аргументов у задачи 2. Из соответствующих 9 задач (см. п. 6) выпишем только *каноническую задачу 3:*

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{ 2R[T, \varepsilon(v)] - H'(T, M) - J(X, v) \} d\sigma - \\ - \int_{C_1} K(T, v - u)\, ds - \int_{C_2} K(N, v)\, ds. \tag{4.3}$$

Здесь

$$H'(T, M) = \frac{1}{2} P_{\alpha\beta\gamma\delta} (B' T^{\alpha\beta} T^{\gamma\delta} + D' M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta}). \quad (4.4)$$

Условия стационарности этой задачи — (2.1) — (2.2), (2.5) — (2.6), (2.11) — (2.12) и (2.13) — (2.14).

Эта задача совпадает с хорошо известной задачей Рейснера [8,16].

3. О задаче, соответствовавшей преобразованию Фридрихса

Задача, которой соответствовало бы преобразование Фридрихса, при этом цикле не получается, так как удовлетворить уравнениям равновесия (2.5) — (2.6) можно только выражениями, содержащими первоначальные аргументы v:

$$T^{ik} = c^{i\alpha} c^{k\beta} \nabla_{\alpha\beta} \varrho + T_0^{ik}, \quad (4.5)$$

$$M^{ik} = (c^{i\alpha} c^{k\beta} - \frac{1}{2} c^{ik} c^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha \eta_\beta - c^{i\alpha} c^{k\beta} (b_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha\beta} v) \varrho + M_0^{ik}. \quad (4.6)$$

Использование последних дает следующую *задачу 4:*

Найти стационарное значение функционала

$$-\int_S \{ H' [T(\varrho), M(\varrho)] + \frac{1}{2} T^{\alpha\beta}(\varrho) \nabla_\alpha v \nabla_\beta v \} d\sigma + \\ + \int_{C_1} K [T(\varrho), u] ds \quad (4.7)$$

при граничных условиях (2.13) — (2.14).

Эта задача выведена Алумяэ [2].

Дифференциальными уравнениями Эйлера-Лагранжа функционала (4.7) являются уравнения непрерывности деформаций (2.3) — (2.4) и следующее уравнение

$$\nabla_\alpha (T^{\alpha\beta} \nabla_\beta v) + c^{\alpha\gamma} c^{\beta\delta} \nabla_{\gamma\delta} (\varrho \mu_{\alpha\beta}) = 0. \quad (4.8)$$

Естественные граничные условия на C_1 совпадают с (3.36) — (3.38), если в них e_{ik} и $\acute{e}_{ik}$ заменить на E_{ik} и E'_{ik} и

$$2 E_{ik} = 2 \varepsilon_{ik} + \nabla_i v \nabla_k v, \quad (4.9)$$

$$2 E'_{ik} = \nabla_i u_k + \nabla_k u_i - 2 b_{ik} u + \nabla_i v \nabla_k u + \nabla_i u \nabla_k v. \quad (4.10)$$

Как и у первого цикла, так и здесь можно отдельно удовлетворить части из уравнений равновесия, выбирая T^{ik} по (4.5). Таким образом можно получить 8 новых вариационных задач.

4. Вторая форма общей задачи

Исходя из задачи 4 получается следующая *общая задача 5*:

Найти стационарное значение функционала

$$-\int_S \{H'(T,M) - \frac{1}{2}T^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v \nabla_\beta v - 2R(T,E) + 2R[T(\rho),E]\}\,d\sigma + \int_{C_1} K[T(\rho),u]\,ds - \int_{C_2} K[N - T(\rho),\xi]\,ds \tag{4.11}$$

если ξ_i, ξ *удовлетворяют соотношениям*

$$\nabla_i \xi_k + \nabla_k \xi_i - 2b_{ik}\xi + \nabla_i \xi \nabla_k v + \nabla_k \xi \nabla_i v = 2E_{ik}, \tag{4.12}$$

$$-\nabla_{ik}\xi = \mu_{ik}. \tag{4.13}$$

В функционале (4.11)

$$K(N,\xi) = N^{\alpha}\xi_\alpha + N\xi - Gn^\alpha \nabla_\alpha \xi. \tag{4.14}$$

Имея в виду соотношения (4.9), дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа функционала (4.11) следующие: (4.5) — (4.6), (4.8), (2.3) — (2.4) и (2.8).

Естественные граничные условия функционала (4.11) на C_1 совпадают с естественными граничными условиями задачи 4 и на C_2 следующие: (3.46) — (3.47) и

$$(c^{i\alpha}c^{k\beta} - \frac{1}{2}c^{ik}c^{\alpha\beta})(\eta'_\alpha - \eta_\alpha)n_\beta - c^{i\alpha}c^{k\beta}(\rho' - \rho)\nabla_\beta v n_\alpha = 0, \tag{4.15}$$

где ρ' и η'_i являются решениями уравнений (3.14) — (3.15), если в последних T^{ik} и M^{ik} заменить через (4.5) — (4.6).

Отметим, что в рассматриваемом случае возможно формулировать 2 частных случая второй общей задачи.

5. Вторая форма канонической задачи

У второй общей задачи возможно уменьшить число варьируемых аргументов при помощи соотношения упругости (2.7), (2.8) 9 разными способами. Из этих выпишем только *задачу 6* в каноническом виде:

Найти стационарное значение функционала

$$\int_S \left\{ W\left(E_{ik} - \frac{1}{2} \nabla_i v \nabla_k v, \mu \right) - 2\dot{R}\,[T(\rho), E] \right\} d\sigma + \\ + \int_{C_1} K\,[T(\rho), u]\, ds - \int_{C_1} K\,[N - T(\rho), \xi]\, ds, \tag{4.16}$$

если ξ_i, ξ *удовлетворяют соотношениям (4.12) — (4.13).*

Условиями стационарности этой задачи являются: (4.5) — (4.6), (2.3) — (2.4), (3.46) — (3.47), (4.15) и (3.36) — (3.38), если в последних e_{ik} и e'_{ik} заменить на E_{ik} и E'_{ik}.

6. Обзор задач второго цикла

Используя как вспомогательные аргументы ε_{ik} и μ_{ik} можно формулировать вариационные задачи, приведенные в таблице 2.

Таблица 2.

Номер п/п	Номер задачи	Функциональные аргументы	Номер п/п	Номер задачи	Функциональные аргументы
1	2	3	1	2	3
1	1	v_i, v	11	2α	v_i, v, T, ε
2	2	$v_i, v, T, M, \varepsilon, \mu$	12		v_i, v, T
3		$v_i, v, T, \varepsilon, \mu$	13		v_i, v, ε
4		$v_i, v, M, \varepsilon, \mu$	14	2β	v_i, v, M, μ
5		$v_i, v, T, M, \varepsilon$	15		v_i, v, M
6		v_i, v, T, M, μ	16		v_i, v, μ
7		v_i, v, T, μ	17		v, ρ
8		v_i, v, M, ε	18		$v, \rho, M, \varepsilon, \mu$
9	3	v_i, v, T, M	19		$v, \rho, \varepsilon, \mu$
10		v_i, v, ε, μ	20		v, ρ, M, ε

1	2	3	1	2	3
21		v, ρ, M, μ	31		v, ρ, η, T, μ
22		v, ρ, μ	32		$v, \rho, \eta, M, \varepsilon$
23		v, ρ, M	33		v, ρ, η, T, M
24		v, ρ, ε	34	6	$v, \rho, \eta, \varepsilon, \mu$
25	4	v, ρ, η	35		$v, \rho, \eta, T, \varepsilon$
26	5	$v, \rho, \eta, T, M, \varepsilon, \mu$	36		v, ρ, η, T
27		$v, \rho, \eta, T, \varepsilon, \mu$	37		$v, \rho, \eta, \varepsilon$
28		$v, \rho, \eta, M, \varepsilon, \mu$	38		v, ρ, η, M, μ
29		$v, \rho, \eta, T, M, \varepsilon$	39		v, ρ, η, M
30		v, ρ, η, T, M, μ	40		v, ρ, η, μ

Индексы опущены в обозначении тензоров.

Сравнение таблиц 1 и 2 показывает, что в них 12 задач совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод преобразования вариационных задач, данный в первой главе, позволяет легко вывести ряд вариационных задач для рассматриваемой нелинейной теории упругих оболочек. При этом все вариационные задачи выводятся из известной задачи Лагранжа. Так как методом преобразования полученные задачи охватывают все до сих пор известные вариационные задачи, можно надеяться, что этот метод даст все вариационные задачи нелинейной теории упругих оболочек.

Как видно из таблиц 1 и 2, число вариационных задач достаточно большое — в приведенных 2 циклах 180 разных задач. Но этими циклами все возможности не исчерпаны.

Наряду с применяемыми до сих пор вариационными задачами с варьируемыми v_i, v и v, ρ может иногда оказаться целесообразным применение вариационных задач с иными формами. Вопрос, какую задачу в каждом конкретном случае применить, требует специального исследования.

В заключении нужно отметить, что метод преобразования вариационных задач, приведенный в работе, годен для получения вариационных задач любой проблемы теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Алумяэ, Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии, ПММ, т. XIII, вып. 1, 1949, 94—106.
2. Н. А. Алумяэ, Применение обобщенного вариационного принципа Кастильяно к исследованию послекритической стадии тонкостенных упругих оболочек, ПММ, т. XIV, вып. 1, 1950, 93—98.
3. Н. А. Алумяэ, Одна вариационная формула для исследования тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии, ПММ, т. XIV, вып. 2, 1950, 197—202.
4. Н. А. Алумяэ, Вариационные формулы исследования гибких пластинок и оболочек, Краснозн. орд. Ленина военно-воздушная инж. академия им. проф. Н. Е. Жуковского. Научно-техн. конф. 1952 г. по расчету гибких пластин и оболочек, 53—72.
5. К. З. Галимов, К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях, ПММ, т. XV, вып. 6, 1951, 723—742.
6. К. З. Галимов, К вариационным принципам нелинейной теории упругости, Уч. записки Казанского ГУ, т. 113, кн. 10, 1953.
7. К. З. Галимов, О некоторых вариационных формулах нелинейной теории упругости, Уч. записки Казанского ГУ, т. 115, кн. 12, 1955.
8. К. З. Галимов, К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек, Уч. записки Казанского ГУ, т. 116, кн. 1, 1956.
9. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, М. Л. 1951, 203—213, 230—233.
10. Л. С. Лейбензон, Вариационные методы решения задач теории упругости, Собрание трудов 1, АН 1951.
11. А. И. Лурье, Обобщение теоремы Кастильяно, Труды Ленинградского политехнического института им. Калинина, т. 1, 1946, 9—15.
12. Т. В. Невская, Приложение вариационных методов к выводу и решению системы нелинейных уравнений гибких цилиндрических оболочек, Краснозн. орд. Ленина военно-воздушная инж. академия им. проф. Н. Е. Жуковского. Научно-техн. конф. 1952 г. по расчету гибких пластин и оболочек, 99—118.
13. Th. De Donder, La formule fondamentale du calcul des variations écrite en variables canoniques, Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci. (5), 34, 1948, 9—16.
14. W. Grünther, Die Gleichungen der Plattenbiegung als kanonisches System in tensorieller Darstellung, Abhandl. Brauschweig. Wiss. Ges., 5, 1953, 103—121.
15. H. C. Hu, On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity, Scientia Sinica, vol. IV, 1, 1955, 33—54.
16. E. Reissner, On a variational theorem for finite elastic deformations, Journal of Mathematics and Physics, 32, 2—3, 1953, 129—135.
17. A. Phillips, Variational principles in the theory of finite plastic deformations, Quartely of Applied Mathematics, vol. VII, 1. 1949, 110—114.

СОДЕРЖАНИЕ

Л. Я. Айнола

О ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМУЛИРОВКИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Издательство
Таллинского Политехнического Института

*

Редактор М. Тамм

Технический редактор А. Тамм

Корректор Э. Коэметс

Сдано в набор 6 IX 1957. Подписано к печати 16 X 1957. Бумага $54 \times 84^1/_{16}$. Печатных листов 2,0. По формату 60×92 печатных листов 1,64. Учетно-издательских листов 1,28. Тираж 800 МВ-07234.
Заказ № 5271.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк 2.

Цена 90 коп.

Цена 90 коп.