

Ep. 6.7
472

ISSN 0136-3549
0203-9702

TALLINNA
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI
TOIMETISED

472

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

ТРИ
'79

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
И РЕГУЛИРОВАНИЕ
КАЧЕСТВА
ВОДЫ
ВОДОЕМОВ
И ИССЛЕДОВАНИЕ
МЕТОДОВ
ОЧИСТКИ
ПРИРОДНЫХ
И СТОЧНЫХ
ВОД

Сборник статей по санитарной
технике XIII

472

**ТРИ
'79**

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 628.3

●

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
И РЕГУЛИРОВАНИЕ
КАЧЕСТВА
ВОДЫ
ВОДОЕМОВ
И ИССЛЕДОВАНИЕ
МЕТОДОВ
ОЧИСТКИ
ПРИРОДНЫХ
И СТОЧНЫХ
ВОД

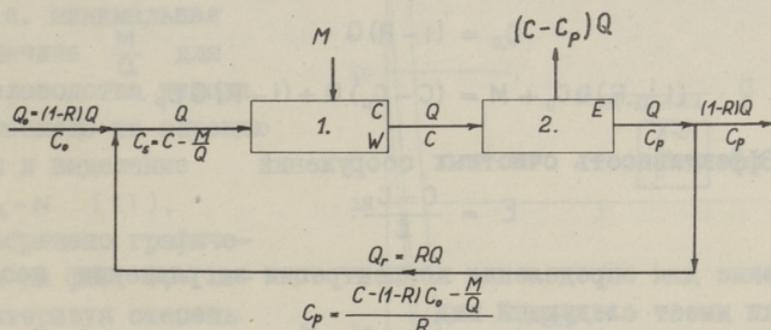
Сборник статей по санитарной технике XIII

| Таллин 1979



ОСНОВНЫЕ КАЧЕСТВЕННО-КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ
СИСТЕМ ОБОРОТНОГО ВОДОСНАБЖЕНИЯ РЫБНЫХ ХОЗЯЙСТВ

Максимальная интенсификация рыбоводства достигается внедрением промышленных методов разведения рыб. При этом водоснабжение промышленного рыбного хозяйства в определенных условиях целесообразно организовать по оборотной схеме, что позволяет сократить потребление свежей воды, свести к минимуму потери тепла и загрязнение водоемов.



Фиг. 1. Схема оборотного водоснабжения промышленного рыбного хозяйства.

1 - аквариум, 2 - очистные воды.

Типовая схема системы оборотного водоснабжения промышленного рыбного хозяйства представлена на фиг. 1. Система состоит из аквариума и очистных сооружений. Степень рециркуляции может быть разной. Для анализа схемы использованы следующие обозначения:

- M - количество продуктов метаболизма рыб в аквариуме, г/сут;
- W - объем аквариума, m^3 ;
- Q - водообмен аквариума, m^3 /сут;
- C - допустимая концентрация веществ загрязнения в аквариуме, г/ m^3 ;

- C_0 - концентрация веществ загрязнения в свежей воде, $г/м^3$;
 C_p - концентрация веществ загрязнения после очистки, $г/м^3$;
 C_s - концентрация веществ загрязнения на входе в аквариум, $г/м^3$;
 Q_0 - расход свежей воды, $м^3/сут$;
 Q_R - расход оборотного стока, $м^3/сут$;
 R - степень рециркуляции (в долях единицы);
 E - эффективность очистных сооружений (в долях единицы).

Расходы стоков и концентрации загрязнений нанесены на соответствующие участки схемы на фиг. I. Соотношения между вышеприведенными величинами следующие:

$$Q = Q_0 + Q_R \quad (1)$$

$$R = \frac{Q_R}{Q} = \frac{Q_R}{Q_0 + Q_R} \quad (2)$$

$$Q_0 = (1 - R)Q \quad (3)$$

$$(1 - R)QC_0 + M = (C - C_p)Q + (1 - R)QC_p. \quad (4)$$

Эффективность очистных сооружений

$$E = \frac{C - C_p}{C}. \quad (5)$$

Уравнение для определения концентрации загрязнения после очистки имеет следующий вид

$$C_p = \frac{C - (1 - R)C_0 - \frac{M}{Q}}{R}. \quad (6)$$

С помощью баланса на входе в аквариум

$$C_s Q = C_0 Q_0 + C_p Q_R, \quad (7)$$

откуда

$$C_s = C - \frac{M}{Q}. \quad (8)$$

Уравнение (9) позволяет оценить влияние степени рециркуляции R и свойства свежей воды C_0 на концентрацию загрязнения после очистки C_p или на эффект очистки E ,

где

$$E = \frac{C - C_p}{C}, \quad (5)$$

откуда

$$C_p = (1 - E)C. \quad (9)$$

Приравнивая уравнения (9) и (6), получаем

$$(1-E)C = \frac{C - (1-R)C_0 - \frac{M}{Q}}{R}, \quad (10)$$

откуда

$$C = \frac{(1-R)C_0}{1-R+ER} + \frac{1}{1-R+ER} \times \frac{M}{Q}. \quad (11)$$

Предположим, что концентрация загрязнения в свежей воде в интервале $0 - 0,5$ от допустимой концентрации загрязнения C т.е. $C_0 = 0 \div 0,5C$ или $C_0 = AC$, где $A = 0 \div 0,5$. Получаем

$$C = \frac{(1-R)AC}{1-R+ER} + \frac{1}{1-R+ER} \times \frac{M}{Q} \quad (12)$$

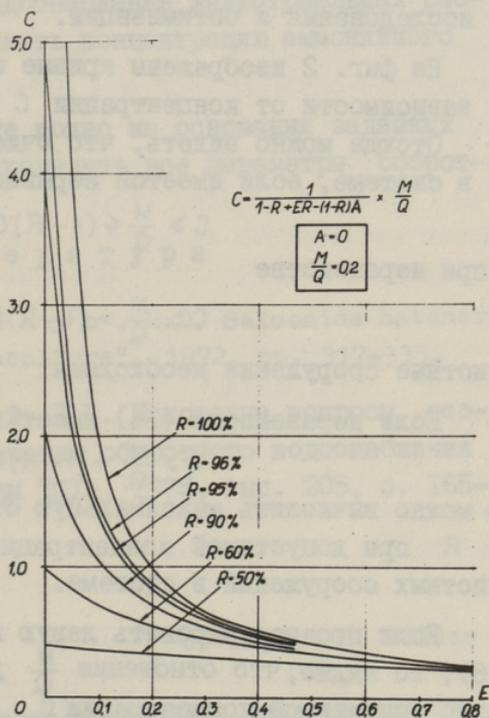
или

$$C = \frac{1}{1-R+ER-(1-R)A} \times \frac{M}{Q}. \quad (13)$$

Уравнение (13)

при $A=0$ и $\frac{M}{Q} = 0,2$

(т.е. минимальная величина $\frac{M}{Q}$ для форелеводства исходя из расхода на аэрацию воды и выделение NH_4-N [1]), изображено графически на фиг. 2, характеризуя степень рециркуляции в зависимости от эффекта очистки E и допустимой концентрации загрязнения в аквариуме C .



Эффект очистки E в схемах с частичной добавкой свежей воды

зависит от чистоты добавочной воды. Экономичнее добавлять в систему более чистую воду. В противном случае следует предпочитать системы с возможно меньшей добавкой воды или полностью замкнутые системы водоснабжения [2]. Если в рыбоводстве при-

меняется подогретая вода, то и энергия для повышения температуры в том случае будет минимальной.

Эффект очистки E зависит и от водообмена Q , являясь при $M = \text{const.}$ обратнопропорциональным расходу Q .

Как известно, строительный объем очистных сооружений при $M = \text{const.}$ является только при определенных расходах воды неизменным, но себестоимость очистки воды, в том случае, зависит от эксплуатационных расходов. Отсюда явно, что экономичнее поддерживать в системе минимальный расход воды, но это предполагает более высокий эффект очистки.

Вопрос об изменении приведенных годовых затрат на очистку в зависимости от реально достигаемого эффекта очистки E при разных Q и $M = \text{const.}$ требует специального исследования и оптимизации.

На фиг. 2 изображены кривые степени рециркуляции стока зависимости от концентрации C эффекта E и отношения $\frac{M}{Q}$. Отсюда можно видеть, что очистные сооружения не нужны в системе, если имеется неравенство

$$C \geq \frac{M}{Q} \leq (1-R)C, \quad (I4)$$

а при неравенстве

$$C \geq \frac{M}{Q} > (1-R)C, \quad (I5)$$

очистные сооружения необходимы.

Если неравенство (I4) имеет вид уравнения

$$C \geq \frac{M}{Q} = (1-R)C, \quad (I6)$$

то можно вычислить максимальную степень рециркуляции стока R при допустимой концентрации C в аквариуме, без очистных сооружений в системе.

Если проанализировать левую половину неравенства (I6), то видно, что отношение $\frac{M}{Q}$ должно быть меньше или равно допустимой концентрации C

$$C \geq \frac{M}{Q}. \quad (I7)$$

А по расходу воды неравенство (I4) имеет вид

$$\frac{M}{(1-R)C} \geq Q \geq \frac{M}{C}. \quad (I8)$$

Следовательно, при $M = \text{const.}$ минимальный расход воды через очистные сооружения Q (либо расход свежей воды при

отсутствии очистки Q_0) определяется допустимой концентрацией вещества загрязнения в аквариуме C .

При $E = 0$

$$\frac{M}{C} = (1 - R) Q = Q_0. \quad (19)$$

Из графика на фиг. 2 можно определить, что при степени рециркуляции $R = 90\%$ и эффекте очистки $E = 45\%$ концентрация C такая же, как при степени рециркуляции $R = 50\%$ без очистки $E = 0$. Следовательно, возможно запроектировать системы оборотного водоснабжения, где объем очистных сооружений будет минимальным, в зависимости от возможности изменения степени рециркуляции R .

В качестве лимитирующего вещества загрязнения в расчетах систем оборотного водоснабжения промышленных рыбных хозяйств следует принимать концентрацию аммонийного азота $NH_4 - N$.

По изложенной методике можно на основании заданных величин Q_0, C_0, C и M определить все параметры оборотной системы водоснабжения.

Л и т е р а т у р а

1. L i a o , P.B., M a y o , R.D. Salmonide hatchery water reuse systems.-"Aquaculture", 1972, pp. 317-335.

2. Л а в р о в с к и й В.В. Некоторые вопросы теории проектирования и применения оборотного водоснабжения форелевых хозяйств. Доклады ТСХА, 1975, вып. 205, с. 165-172.

J. Lipre, H. Mölder

The Main Design Parameters of Fish Culture Water Reuse Systems

Summary

The relationships between metabolic byproduct concentrations and degrees of water reuse and treatment have been cited.

УДК 628.3:639.3.07

В.А. Блонская, Х.А. Мельдер,
Л.М. ПикковОЧИСТКА ВОДЫ В СИСТЕМАХ ОБОРОТНОГО
ВОДОСНАБЖЕНИЯ ФОРЕЛЕВЫХ ХОЗЯЙСТВ

Форелевые хозяйства являются большими водопотребителями. В связи с намечаемым быстрым ростом числа рыбных хозяйств, разводящих ценные породы рыб, вопросы рациональной организации водоснабжения их приобретают особую актуальность. Индустриальные форелевые хозяйства с системами оборотного водоснабжения, где производится очистка и многократное использование воды, являются наиболее перспективными и отвечающими требованиям как экономичности, так и охраны природы. В то же время следует отметить отсутствие отечественного опыта в области высокоэффективной очистки и повторного использования вод рыбных (форелевых) хозяйств. Имеющиеся данные зарубежных литературных источников по очистке вод рыбных хозяйств в большинстве случаев являются неполными, часто противоречивыми и не могут быть использованы при практической организации рыбных хозяйств.

Учитывая изложенное, нами было проведено исследование возможностей глубокой очистки сточных вод форелевых хозяйств в полупроизводственных условиях.

На первой стадии было определено удельное количество загрязнений (G - г/кг сут), выделяемое сеголетками и годовиками форелей (весом 13,5...50 г) в воду при температуре воды 10...15 °С и рационе корма (гранулы, мясной фарш) $K = 0...3,2$ % от веса в сутки по следующим показателям: БПК_п, перманганатная окисляемость (п.о.), азот аммонийных солей (NH_4-N), азот нитратов (NO_3-N), фосфатный фосфор (PO_4-P). При этом установлены следующие зависимости:

$$G_{\text{БПК}} = 1,14;$$

$$G_{\text{п.о.}} = 0,45\text{К};$$

$$G_{\text{NH}_4\text{-N}} = 0,29\text{К};$$

$$G_{\text{PO}_4\text{-P}} = 0,0094\text{К};$$

$$G_{\text{NO}_3\text{-N}} = 0.$$

Коэффициент скорости БПК $K_T = 0,092$. Результат $G_{\text{NH}_4\text{-N}}$ полностью совпадает с данными P. Liao [1], однако по другим показателям отмечены значительные отклонения.

Количество кислорода (G_0 - г/кг сут), потребляемое форелями может быть определено по формуле [1]:

$$G_0 = K_2 T^n W^m,$$

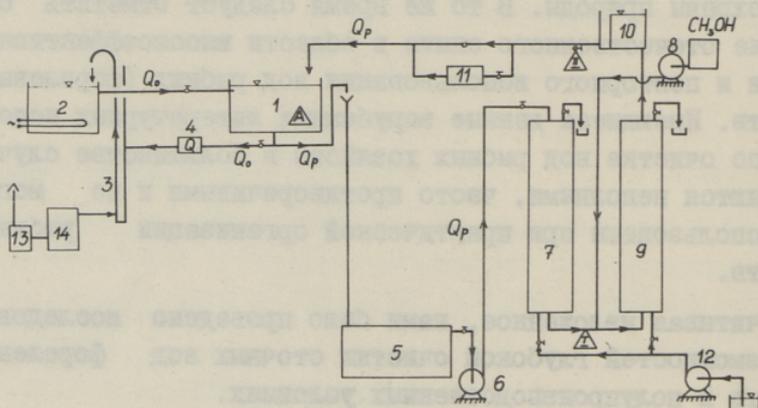
где $T = 1,8t + 32$, t - температура воды ($^{\circ}\text{C}$);

$W = \frac{g}{454}$, g - вес рыб (г);

$$K_2 = 3,05 \cdot 10^{-3};$$

$$m = -0,138;$$

$$n = 1,855.$$



Фиг. 1. Схема опытной установки:

- 1 - аквариум (150 л); 2 - термостат; 3 - эрлифт;
- 4 - расходомер; 5 - отстойник; 6 - насос; 7 - фильтр-нитрификатор (1 ступень); 8 - насос метанола;
- 9 - фильтр-денитрификатор (II ступень); 10 - переливной бак; 11 - бактерицидная лампа; 12 - насос для промывки фильтров; 13 - компрессор; 14 - ресивер;
- A, T, Ц, - точки отбора проб для анализов.

Для исследования процесса очистки сточных вод в замкнутой системе оборотного водоснабжения была смонтирована

опытная установка, схема которой представлена на фиг. I. Все элементы стенда выполнены из нержавеющей материалов. Подвергающаяся очистке вода проходила последовательно механическую очистку в полочном отстойнике (5), двухступенчатую биологическую очистку по схеме нитри-денитрификации (фильтры 7, 9) и обеззараживания бактерицидным облучением (II). Краткая характеристика элементов очистных сооружений дана ниже.

Полочный отстойник. Движение воды - сверху вниз, уклон полок - 60° , расстояние между полками - 5,5 см, длина полок - 90 см.

Фильтр-нитрификатор. Исследовались 3 материала загрузки: гранитный щебень (3...7 мм), гранулированный активированный уголь АГ-3 (1,5...3 мм) и дисковый биофильтр с пластмассовыми дисками.

Фильтр-денитрификатор. Исследована загрузка из гранитного щебня (3...10 мм) и колец Рашига (25x25 мм, удельная поверхность - $200 \text{ м}^2/\text{м}^3$).

Бактерицидная установка. Лампа ДБ-60 использовалась эпизодически.

На опытной установке было проведено ряд длительных (85...120 суток) опытных циклов с содержанием в аквариуме мальков радужных форелей общим весом 1,5...4,5 кг (ср. вес отдельных рыб 15...60 г). Установка работала как на пресной, так и морской воде. Потери воды в системе (выпуск шлама, испарение, неплотности) не превышали 2 % в сутки от общего объема воды в системе. Температура воды колебалась в пределах 12...21 $^\circ\text{C}$, pH = 7,8...8,4, концентрация растворенного кислорода в аквариуме 7...10 мг O_2 /л.

Качество воды в системе контролировалось регулярным отбором (2...3 раза в неделю) проб из 3 точек (фиг. I) и определение в пробах pH, БПК₇, перманганатной окисляемости, NH_4 , NO_2 , NO_3 , PO_4 , взвешенных веществ. Температура и конц. O_2 в аквариуме измерялись непрерывно.

Лимитирующими показателями качества воды оказались концентрации азота аммонийных солей и нитратов. При стабильной нитрификации и денитрификации конц. БПК_n в системе не превышала 10...20 мг/л, фосфатов не более 20 мг/л.

Качество воды в аквариуме по азоту в отдельные периоды опытов приведено в таблице I. Рыбы кормились в основном гранулированным сухим кормом (ср. рацион К = 2,5 %) при помощи автоматической кормушки (6 раз в сутки).

Т а б л и ц а I

Качество воды в аквариуме

Продолж. периода, дней	Средняя концентрация, мг/л		Прирост рыб в весе в % за сутки	Средний вес одной рыбы, г
	NH ₄ -N	NO ₃ -N		
I2	0,3	I2	2,67	20
I7	0,4	I5	3,27	29
I4	0,6	I9	I,78	39
I5	0,8	I8	I,5	48
I9	I,5	7	I,9	66
25	2,7	I,3	I,85	20
23	0,4	0,3	0,73	50
I6	0,5	3,2	I,14	3I
28	0,6	22,6	2,22	23
28	2,6	0,5	0,6	I6
I6	3,4	0,6	I,46	39
I4	6,4	0,5	0,9I	46
35x	I,8	5,0	I,17	30
90 ^x	5.2	8,2	0,8	59

x Опыты с морской водой.

Как видно из приведенных данных, несмотря на завышенные концентрации азота (особенно нитратов) по сравнению с нормативными [2] рыбы имели прирост в весе. Поведение их было внешне нормальным и гибели из-за качества воды не было отмечено.

Нитраты появились в системе только за счет нитрификации азота аммонийных солей в фильтре I ступени. Для обеспечения нормальной денитрификации нитратов в поступающую на фильтр II ступени воду дозировали метанол. Доза его (С - мг/л) рассчитывалась по известному уравнению Mc Carty [3]:

$$C = 2,47 N_0 + 1,53 N_1 + 0,87 D_0,$$

где N_0 – начальная концентрация азота нитратов, мг/л;
 N_1 – начальная концентрация азота нитритов, мг/л;
 D_0 – содержание растворенного кислорода в поступающей на фильтр-денитрификатор воде, мг/л.

Рабочие режимы фильтра-нитрификатора и фильтра-денитрификатора с указанными выше засыпными нагрузками характеризуются их удельной объемной производительностью по удалению соответственно NH_4-N и NO_3-N (г/м³ загрузки в сут) в зависимости от концентрации азота в исходной воде (фиг. 2).

Относительно большой разброс точек на графике по аммонийному азоту объясняется видимо разной концентрацией растворенного кислорода в фильтре, разной БПК и температурой исходной воды, а по азоту нитратов разной температурой стока и концентрацией метанола.

При использовании дискового биофильтра площадь поверхности дисков ($F - м^2$) может быть рассчитана по уравнению:

$$F = \frac{M}{OC},$$

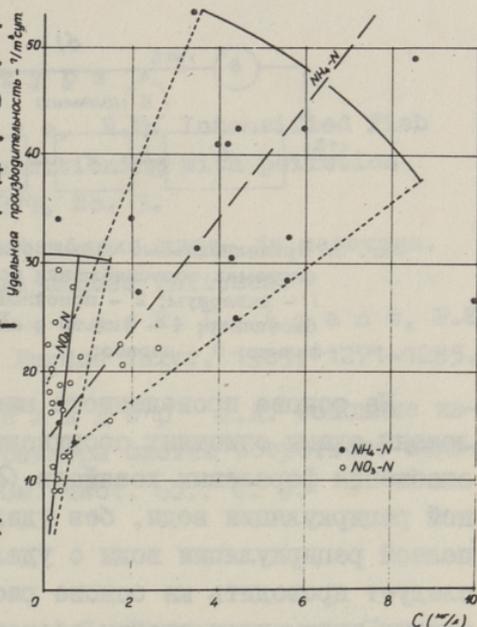
где M – окисляемое фильтром количество азота аммонийных солей, г/сут;

OC – удельная окислительная способность дискового биофильтра (г $NH_4-N/м^2$ сут), которая определяется:

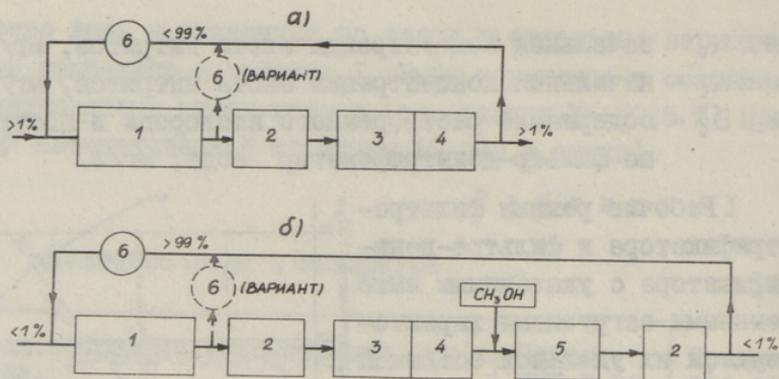
$$OC = 0,1 C_{cp}; \quad C_{cp} = \frac{C_1 + C_p}{2},$$

где C_1 – конц. (NH_4-N) в поступающей на фильтр воде (в пределах 1...5 г/м³);

C_p – конц. NH_4-N в очищенной воде ($C_p \geq 0,1 \dots 0,15 C_1$).



Фиг. 2. Зависимость удельной объемной производительности фильтров по NH_4-N и NO_3-N от концентрации NH_4-N и NO_3-N в исходной воде C – мг/л.



Фиг. 3. Принципиальные схемы очистных сооружений в оборотных системах водоснабжения форелевых хозяйств:
 1 - аквариум; 2 - полочный отстойник; 3 - дисковый биофильтр; 4 - фильтр с акт. углем; 5 - крупнозернистый фильтр; 6 - аэратор.

На основе проведенного многолетнего исследования предложены схемы очистных сооружений для оборотных систем водоснабжения форелевых хозяйств (фиг. 3). Схема а) при частичной рециркуляции воды, без удаления нитратов; схема б) при полной рециркуляции воды с удалением нитратов. Выбор схемы следует проводить на основе расчета качественно-количественных параметров систем оборотного водоснабжения [4].

В общей схеме очистных сооружений полочный отстойник рассчитывается на скорость протока воды 4...6 мм/с и время пребывания в межполочном пространстве $t = 3...5$ мин. Фильтр нитрификатор состоит из 2 ступеней - 1) дисковый биофильтр, окисляющий 60...80 % подлежащего удалению азота аммонийных солей и 2) фильтр, загруженный гранулированным активированным углем (на 20...40 % нагрузки по $\text{NH}_4\text{-N}$). Объем фильтра при начальной концентрации азота 3...10 мг/л рассчитывается исходя из удельной объемной производительности 50...60 г $\text{NH}_4\text{-N}/\text{м}^3$ сут. Промывка фильтра производится раз в неделю ($t = 3$ мин.; $q = 8$ л/с м^2). Фильтр-денитрификатор принимается с крупнозернистой загрузкой (щебень 20...30 мм или кольца Рашига). При начальной концентрации $\text{NO}_3\text{-N}$ в воде до 1,5 мг/л удельная производительность фильтра составляет 30 г $\text{NO}_3\text{-N}/\text{м}^3$ сут. Промывка фильтра происходит раз в месяц ($q = 10...15$ л/с м^2).

Первоначальный пусковой период биофильтров I ступени составляет 2...3 недели. При наличии фильтров-денитрификаторов их пусковой период занимает дополнительно такое же время.

Л и т е р а т у р а

1. L i a o, P.B., M a y o, R.D. Intensified fish culture combining water reconditioning with pollution abatement. - Aquaculture, 1974, No. 3.
2. Juhend forelli kasvatamiseks mage- ja merevees. Tallinn, 1974. ENSV MN Kalamajanduse Valitsus.
3. M c C a r t y, P.L., B e c k, L., A m a n t, P.S. Proc. 24th Ind. Waste Conf. Purdue Univ., 1969, 1271-1285.
4. Л и п р е Ю.Н., М ё л ь д е р Х.А. Основные качественно-количественные параметры систем оборотного водоснабжения рыбных хозяйств. См. наст. сб., с. 3.

V. Blonskaya, H. Mölder,
L. Pikkov

Reconditioning Treatment in the Water Reuse System of Trout Culture

Summary

The two stage biological filtration (nitrification - denitrification) as a method of the water treatment in complete reuse system of trout culture has been studied at semi-scale pilot plant. The main design parameters of units for partly and fully closed systems have been cited.

Э.Г. Каск

ПОТЕРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В НАПОРНОЙ ТРУБЕ

В ряде случаев на технологических установках с целью интенсификации процесса входящие в состав этих установок гидравлические системы работают в нестационарном режиме, периодически изменяющемся во времени. Такой подход основан на использовании тех сложных гидродинамических явлений, которые протекают в пристенных слоях нестационарных потоков. В результате удастся разработать выгодные инженерные решения, которые обладают повышенным коэффициентом полезного действия по сравнению с установками, где гидродинамические системы работают на стационарном режиме.

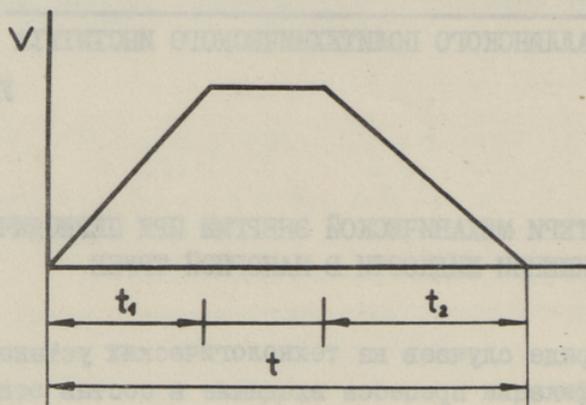
Одним из факторов, который интересует проектировщика таких технологических установок, является баланс энергии, причем существенной частью этого баланса является потеря механической энергии при периодическом движении жидкости.

Литературные источники по вопросу определения потерь механической энергии при периодическом движении жидкости [1, 2] не дают пока единого ответа на поставленный вопрос.

В Таллинском политехническом институте построена опытная установка [3] и разработана соответствующая измерительная аппаратура [4], позволяющая провести экспериментальное исследование периодического движения в широком диапазоне скоростей и ускорений, а также на всем диапазоне частот, которые применяются в практике.

Опыты проведены на цельнотянутом трубопроводе диаметром $d = 1 \times 10^{-2}$ м, изготовленном из меди. Длительность процесса, характеризующая частоту периода движения, колебалась в опытах от 0,6 до 3,2 с. Процесс изменения

мгновенной средней скорости V за один период схематически представлен на фиг. 1.



Фиг. 1.

Диапазон изменения чисел Рейнольдса $Re = 0 \dots 100000$.

Методика обработки опытов описана в статье авторов [5] и позволяет определить мгновенные потери механической энергии $(h_L)_D$ на единичной длине труб.

На фиг. 2 представлено сопоставление основных величин этого расчета для одного периода опыта 30–22 периодического движения.

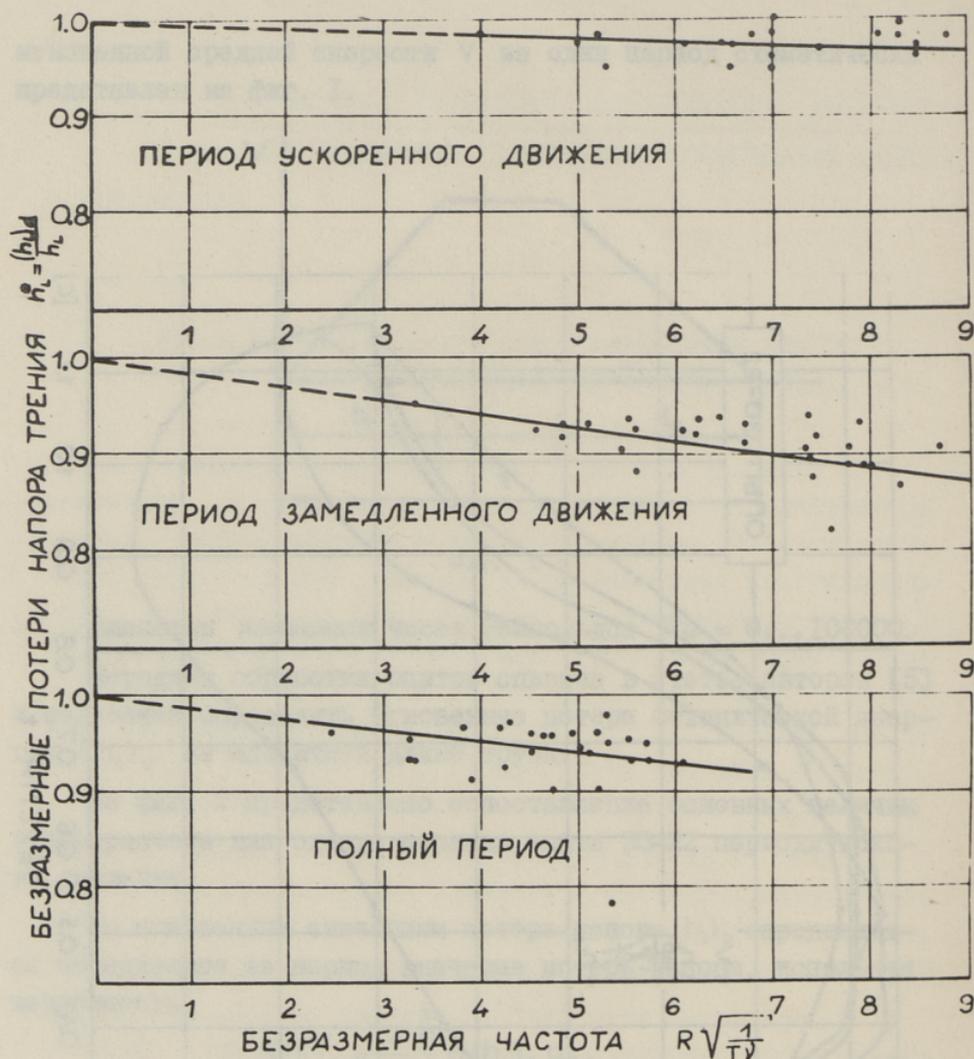
По мгновенным значениям потерь напора $(h_L)_D$ определяется осредненное за период значение потерь напора, используя зависимость

$$(h_L)'_D = \frac{1}{t} \int_0^t d(h_L)_D dt, \quad (1)$$

где $(h_L)'_D$ — осредненная потеря напора за рассматриваемый период;
 t — время.

Интегрирование кривых $(h_L)'_D = f(t)$ в опытах с различными начальными характеристиками в работе произведено планиметрированием. Далее вычисляется величина безразмерных потерь напора h_L^* , которая определяется по соотношению

$$h_L^* = \frac{(h_L)'_D}{h_L}, \quad (2)$$



Фиг. 3.

где h_L определен по кривой $h_L = f(t)$ планиметрированием квазистационарного подхода вычисления потерь напора.

Безразмерные потери напора h_L^* на фиг. 3 представляются в зависимости от безразмерной частоты

$$R\sqrt{\frac{1}{t_1 \nu}},$$

- где R - радиус трубы;
 t_1 - время рассматриваемого ускоренного периода;
 ν - коэффициент кинематической вязкости.

Следуя такой методике, на фиг. 3 рассмотрены отдельно три случая:

1. Ускоренная часть периодического движения.
2. Замедленная часть периодического движения.
3. Полный период, включающий обе части, указанные в п.п. 1 и 2.

На основе опытных данных, нанесенных на фиг. 3, можно заключить следующее:

1. С увеличением безразмерной частоты периодического движения, т.е. с уменьшением времени t_1 , в ускоренный период движения величина безразмерных потерь напора h_L^* уменьшается

$$h_L^* = \frac{(h_L)_D}{h_L} \leq 1.$$

Полученный результат соответствует экспериментальным данным исследования при аperiodическом [6, 8] движении. Согласно этим работам, при возникновении движения жидкости в трубах из состояния покоя наблюдается длительный период ламинарного течения и переход в турбулентное движение осуществляется при мгновенных числах Рейнольдса, значительно превышающих критические числа $Re_{кр}$ в стационарных условиях. Из-за такого физического явления до появления турбулентности наблюдается уменьшение потерь напора в сравнении с квазистационарным подходом к вопросу. Анализ показывает также, что чем больше величина безразмерной частоты, тем большее влияние ламинаризации процесса и с этим связано большее отклонение величин потерь напора.

2. В замедленный период имеет место уменьшение величин безразмерных потерь h_L^* с увеличением безразмерной частоты $R\sqrt{1/t_2}$. В последнем параметре t_2 — длина периода замедления в секундах этот вывод согласуется с экспериментальными данными [9], а также теоретическими расчетами периодического движения [2, 7]. Физически такой результат согласно перечисленным литературным источникам объясняется наличием возникающего тонкого слоя с обратным течением, который в свою очередь может быть вызван предшествующим ускоренным движением.

3. Наконец, рассматривая безразмерные потери за полный период, наблюдается также уменьшение этой величины с

увеличением безразмерной частоты. Результат качественно согласуется с данными работы [10]. При этом как и в первых двух случаях опытные данные позволяют указать наличие линейной зависимости в принятой координатной системе.

Л и т е р а т у р а

1. Б у к р е е в Б.И., Ш а х и н В.М. Экспериментальное исследование энергии турбулентности при неустановившемся течении в трубе. СО АН СССР Инст. гидродинамики. Динамика сплошной среды. Вып. 22, 1975, с. 65-74.

2. Д е е м е р, К.С. Fluid friction due to unsteady flow in conduits. D.Sc. thesis. Massachusetts Institute of Technology 1952.

3. К а с к Э.Г., Л и й в У.Р. Опытная установка для исследования пульсирующих режимов течения жидкости. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, серия А, № 309, 1971, с. 121-124.

4. К а с к Э.Г., К о п п е л ь Т.А., К о р с е н В.К., Л и й в У.Р., Р о с с м а н М.П. Электромагнитные расходомеры с кодированным выходным сигналом для измерения быстропеременных скоростей в трубопроводах. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 380, 1975, с. 45-51.

5. К а с к Э.Г., Л и й в У.Р. О расчете пульсирующего движения жидкости в напорных трубопроводах. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, серия А, № 309, 1971, с. 125-131.

6. К о п п е л ь Т.А., Л и й в У.Р. Экспериментальное исследование возникновения движения жидкости в трубопроводах. Изв. АН СССР, МЖТ, № 6, 1977, с. 79-85.

7. V a s i l i e v, O.F., K v o n, V.I. Friction forces of unsteady flows in open channels and pipes. - Proceedings XIV Congress of IAHR, Paris, 1971, Part II, p.p. 187-196.

8. К а с к Э.Г. О балансе энергии при пульсирующем движении жидкостей в трубопроводах. Материалы конференции молодых специалистов по гидроэнергетическому строительству. Батуми, 1972, с. 39-41.

9. Mizushima, T., Maruyama, T., Shiozaki, Y. Pulsating turbulent flow in a tube. - J. Chem. Enging. Japan, Vol. 6, No. 6. (1973-12), p.p. 487-794.

10. Phillips, E.M., Chiang, S.H. Pulsatile Newtonian frictional losses in rigid tubes.- Int. J. Enging. Sc. 1973, Vol. 11, p.p. 579-589.

E. Kask

Mechanical Energy Losses due to Periodic
Flow in Pipes

Summary

Investigations carried out to study the periodic flows indicate that the head losses are dependent on various factors characterizing this type of unsteady flow. Analysis of the investigation results demonstrate also that the real value of the head losses are different in comparison with the quasi-steady head losses. In this work the dimensionless head losses are presented as depending upon the dimensionless frequency characterizing periodic flow.

Л.Я. Айнола, Ю.Ю. Ламп,
У.Р. Лийв, Л.Э. СарвТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ
ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ ПРИ ПОМОЩИ
ДИССИПАТИВНОЙ МОДЕЛИ

В последнее время для описания неустановившегося течения сжимаемой жидкости в круглых трубах широкое применение нашла т.н. диссипативная модель [1-6]. Эта сравнительно простая модель позволяет рассматривать течение в трубе двухмерным, и определить составляющие скорости как в осевом, так и в радиальном направлениях. В отличие от более простой модели плоскопараллельного течения диссипативная модель может быть теоретически обоснована и выведена методом асимптотического анализа из элементарных частных решений линеаризованных уравнений Навье-Стокса [7-8].

Решение конкретных нестационарных задач течения сжимаемой жидкости в трубах на базе диссипативной модели представляет некоторые математические трудности, так как классический метод разделения переменных здесь не применим, а при применении операционного метода наталкиваемся на трудности при точном обращении изображений решения. Поэтому число решений конкретных задач, полученных при помощи этой модели, весьма небольшое. В работе [3] с помощью метода приближенного обращения преобразования Лапласа для малых времен получено решение задачи гидравлического удара в трубе. В монографии [5] этот же метод применяется для задачи о полубесконечной трубе при заданных изменениях давления и скорости течения в конце трубы. В работе [9] рассмотрено распределение волн давления ступенчатой полубесконечной трубы при внезапном открытии или закрытии трубы. Решение получено методом приближенного численного обращения преобразования Лапласа.

В работе [10] рассматривается течение жидкости в трубе при заданных давлениях на концах трубы и методом асимптотического разложения преобразования Лапласа исследуется влияние сжимаемости жидкости на среднюю скорость течения.

В настоящей работе для решения задачи о неустановившемся движении жидкости в трубе используются вариационным методом Канторовича совместно с численным методом конечных разностей. При помощи вариационного метода, подобно работе [11], интегрирование системы дифференциальных уравнений для функции трех переменных приводится к интегрированию бесконечной системы дифференциальных уравнений для функции двух переменных. Решение этой системы выражается через решения одного интегрально-дифференциального уравнения. Для решения последнего уравнения пользуются методом конечных разностей.

Описанным способом найдены для начальной стадии движения жидкости при быстром падении давления в одном конце трубы, изменение во времени составляющих скорости в разных точках по сечению, а также изменение средней скорости и давления. Необходимо отметить, что на основе модели плоскопараллельного течения в работе [12] проведено исследование скоростей в осевом направлении, средней скорости и давления.

I. Постановка задачи

Неустановившееся осесимметричное движение сжимаемой жидкости в круглых трубах по диссипативной модели описывается следующими дифференциальными уравнениями

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right), \quad (I.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (I.2)$$

$$\rho c^2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} V_r \right) + \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (I.3)$$

Здесь V_z, V_r — составляющие скорости в направлении осей координат z, r ;

p — давление;

ρ — плотность жидкости;

μ — коэффициент вязкости;

c - скорость звука в жидкости;

t - время.

Рассмотрим нестационарную задачу течения жидкости в трубе, приводящую к интегрированию уравнений (I.1) - (I.3) при следующих начальных и граничных условиях

$$V_z = 0, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad t = 0; \quad (\text{I.4})$$

$$p = p^* \quad \text{при} \quad z = 0; \quad (\text{I.5})$$

$$p = p^{**} \quad \text{при} \quad z = L; \quad (\text{I.6})$$

$$V_z = 0, \quad V_r = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \quad (\text{I.7})$$

где a - радиус трубы;

L - длина трубы;

p_0 - постоянное начальное давление;

p^* и p^{**} - зависящие от времени заданные давления на концах трубы.

Если перейти к безразмерным координатам ξ, η, τ и переменным u_ξ, u_η, q при помощи соотношений

$$\xi = \frac{z}{L}, \quad \eta = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{ct}{L};$$

$$u_\xi = \frac{V_z}{U}, \quad u_\eta = \frac{LV_r}{aU}, \quad q = \frac{p}{c\rho U};$$

$$q_0 = \frac{p_0}{c\rho U}, \quad q^* = \frac{p^*}{c\rho U}, \quad q^{**} = \frac{p^{**}}{c\rho U};$$

$$\kappa = \frac{L\mu}{c\rho a^2}, \quad (\text{I.8})$$

то уравнения (I.1) - (I.3) и условия (I.4) - (I.7) можно представить в виде

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \tau} - \kappa \left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{I.9})$$

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{I.10})$$

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{u_\eta}{\eta} + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{I.11})$$

и

$$u_\xi = 0, \quad q = q_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0; \quad (\text{I.12})$$

$$q = q^* \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad (\text{I.13})$$

$$q = q^{**} \quad \text{при} \quad \xi = 1; \quad (\text{I.14})$$

$$u_\xi = 0, \quad u_\eta = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1. \quad (\text{I.15})$$

Выражаем среднюю скорость движения жидкости в осевом направлении

$$V = \frac{2\pi}{\pi a^2} \int_0^a V_z r dr \quad (I.16)$$

через безразмерную среднюю скорость W в виде

$$W = \frac{V}{U}, \quad (I.17)$$

когда

$$W = 2 \int_0^1 u_\xi \eta d\eta. \quad (I.18)$$

Интересно отметить, что как и в случае модели плоскопараллельного течения [12], уравнения диссипативной модели (I.9) - (I.11) содержат только один безразмерный параметр \varkappa , от которого зависит изменение скорости и давления.

Параметр \varkappa представим в виде

$$\varkappa = \frac{Ma}{Re} \frac{2L}{a}. \quad (I.19)$$

Начально-краевую задачу (I.9) - (I.15) можно сформулировать в виде вариационного принципа [14]

$$\delta I = 0, \quad (I.20)$$

где I имеет вид

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial u_\xi}{\partial \tau} * u_\xi - 2q * \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \varkappa \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} * \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + \right. \quad (I.21)$$

$$+ u_\xi(\xi, \eta, 0) u_\xi(\xi, \eta, \tau) \Big] \eta d\eta d\xi -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{\partial q}{\partial \tau} * q + [q(\xi, 0) - 2q_0] q(\xi, \tau) \right\} d\xi -$$

$$- 2 \int_0^1 [q^*(\tau) * u_\xi(0, \eta, \tau) - q^{**}(\tau) * u_\xi(1, \eta, \tau)] \eta d\eta.$$

Здесь

$$g * f = \int_0^\tau g(\xi, \eta, \tau_1) f(\xi, \eta, \tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (I.22)$$

Условиями стационарности функционала (I.18) при предварительных условиях (I.15) являются дифференциальные уравнения (I.9) - (I.11), начальные и граничные условия (I.12) - (I.15). Поэтому вместо задачи интегрирования уравнений (I.9) - (I.11) при условиях (I.12) - (I.15) можно рассматривать эквивалентную вариационную задачу нахождения стациона-

нарного значения функционала (I.2I) при условиях (I.I5).

2. Приведение трехмерных уравнений к двумерным

Решением сформулированной вариационной задачи прямым методом Канторовича находим решение вариационной задачи в виде

$$u_{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\xi, \tau) J_0(\lambda_i, \eta), \quad (2.1)$$

$$q = q(\xi, \tau), \quad (2.2)$$

где $\alpha_i(\xi, \tau)$, $q(\xi, \tau)$ искомые функции;

$J_0(\lambda_i, \eta)$ — функция Бесселя нулевого порядка и

λ_i — корни уравнения

$$J_0(\lambda) = 0. \quad (2.3)$$

Видно, что из-за последнего условия (2.3) граничные условия (I.I5) удовлетворены.

Подставляя выражения (2.1) и (2.2) в функционал (I.2I), получаем

$$\begin{aligned} I = & \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} [J_1(\lambda_i)]^2 \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} * \alpha_i + \kappa \lambda_i^2 \alpha_i * \alpha_i + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_i(\xi, 0) \alpha_i(\xi, \tau) \right] - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i} q * \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial \tau} * q - \frac{1}{2} [q(\xi, 0) - 2q_0] q(\xi, \tau) \right\} d\xi - \\ & - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i} [q^* * \alpha_i(0, \tau) - q^{**} * \alpha_i(1, \tau)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Условиями стационарности функционалов (2.4) являются дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} + \kappa \lambda_i^2 \alpha_i + \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0, \quad (2.5)$$

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0, \quad (2.6)$$

начальные и граничные условия

$$\alpha_i = 0, \quad q = q_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0; \quad (2.7)$$

$$q = q^* \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad (2.8)$$

$$q = q^{**} \quad \text{при} \quad \xi = 1. \quad (2.9)$$

Функции α_i могут быть выражены через $\frac{\partial q}{\partial \xi}$, если решать уравнение (2.5) учитывая начальные условия (2.7). Отсюда имеем

$$\alpha_i = -\frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \int_0^\tau e^{-\kappa \lambda_i^2 (\tau - \theta)} \cdot \frac{\partial q(\xi, \theta)}{\partial \xi} d\theta. \quad (2.10)$$

Подставляя найденные функции α_i в уравнение (2.6), получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение для определения функции q

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} - 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^\tau e^{-\kappa \lambda_i^2 (\tau - \theta)} \cdot \frac{\partial^2 q(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} d\theta = 0. \quad (2.11)$$

Если продифференцировать уравнение (2.11) по τ , его можно преобразовать в виду

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} - 4\kappa \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\tau e^{-\kappa \lambda_i^2 (\tau - \theta)} \cdot \frac{\partial^2 q(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} d\theta = 0. \quad (2.12)$$

Введем обозначение

$$K(\tau) = 4\kappa \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\kappa \lambda_i^2 \tau}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.11) принимает теперь окончательный вид

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} - \int_0^\tau K(\tau - \theta) \frac{\partial^2 q(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} d\theta = 0. \quad (2.14)$$

Зная решение уравнения (2.14), можно легко определить α_i по формуле (2.10).

Составляющие вектора скорости выражаются тогда через функции α_i формулами (2.1) и [II]

$$u_\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} [J_1(\lambda_i) \eta - J_1(\lambda_i \eta)]. \quad (2.15)$$

Средняя скорость, определяемая при помощи формул (1.18) и (2.1), вычисляется по формуле

$$W = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i} \alpha_i(\xi, \tau). \quad (2.16)$$

3. Результаты численного решения для одной конкретной задачи

Рассмотрим задачу неустановившегося движения жидкости в трубе в случае, когда в одном конце трубы сохраняется постоянное давление, а в другом — давление быстро падает. Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид:

$$q = q_0 = \text{const}, \quad \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0; \quad (3.1)$$

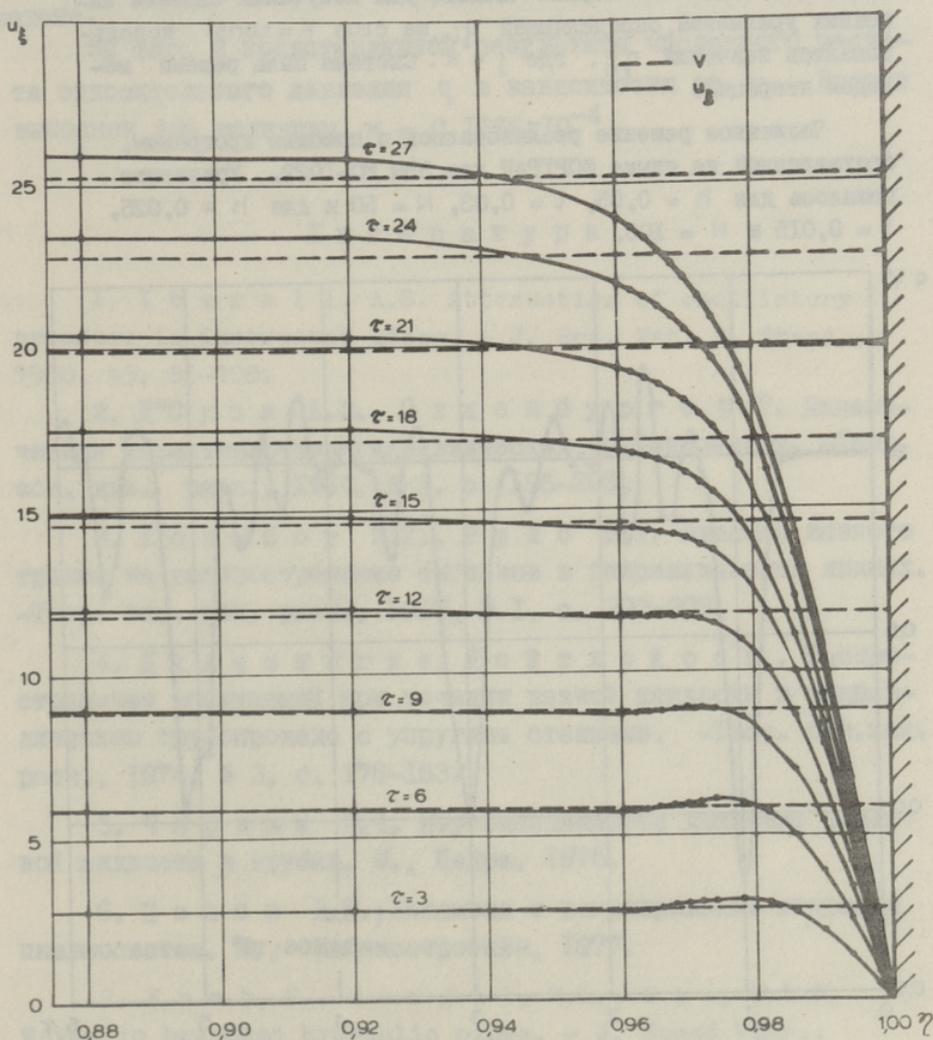
$$q = q_0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad (3.2)$$

$$q = \begin{cases} q_0(1 - \frac{\tau}{\tau'}) & \text{при} \quad \xi = 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq \tau \leq \tau' \\ 0 & \text{при} \quad \xi = 1 \quad \text{и} \quad \tau > \tau' \end{cases} \quad (3.3)$$

Интегрируя уравнение (2.II) по τ с пределами от 0 до t и учитывая (3.I) при $q_0 = I$, получим

$$q(\xi, t) = 1 - 4 \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^{\tau} e^{-\lambda_i^2(\tau-\theta)} \frac{\partial^2 q(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} d\theta d\tau. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) с начальными (3.I) и граничными (3.2), (3.3) условиями решалось численным методом конечных разностей.



Фиг. 1.

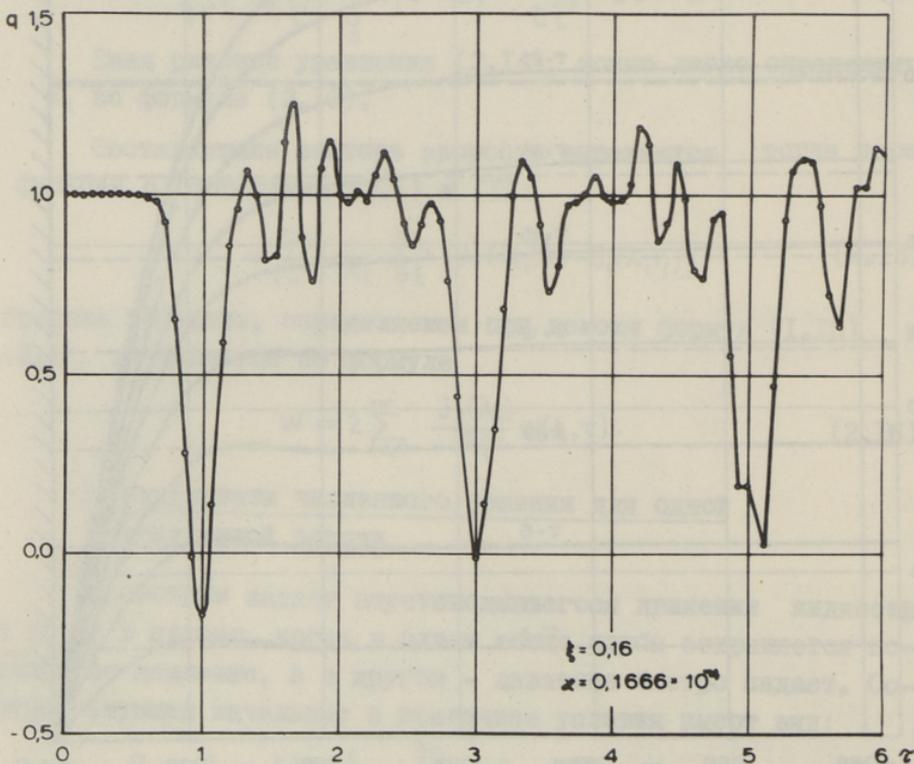
Функция $q_{ij} = q(ih, jl)$ была определена в узлах сетки $\xi = ih, t = jl$, а h и l шаги сетки по ξ и t соответственно.

При решении уравнения (3.4) производная была аппроксимирована на трехточечном шаблоне по формуле

$$\frac{\partial^2 q_{ij}}{\partial \xi^2} = \frac{q_{i+1,j} - 2q_{i,j} + q_{i-1,j}}{h^2}, \quad (3.5)$$

Интегралы были вычислены с помощью формулы трапеций и от ряда было взято N первых членов. Для получения системы линейных уравнений, определяющей q_{ik} , на слое $k = \text{const}$ использовались значения q_{ij} , где $j < k$. Система была решена методом итераций.

Численное решение реализовалось с помощью программы, составленной на языке ФОРТРАН для ЭВМ ЕС-1022. Уравнение решалось для $h = 0,05$, $l = 0,03$, $N = 50$ и для $h = 0,025$, $l = 0,015$ и $N = 100$.



Фиг. 2.

Отличие между двумя решениями было меньше, чем 2 %.

На фиг. 1 представлены результаты расчета распределения скорости u_{ξ} по формуле (2.1) для пристеночной области трубы ($0,88 < \eta < 1,0$) для разных моментов τ . В пределах радиуса ($0 < \eta < 0,88$) распределение u_{ξ} равномерное и является продолжением прямой линии при соответствующем τ . Пунктирными линиями на графике нанесены соответствующие средние скорости W , полученные расчетом по (2.16).

Величина u_{η} , определенная по (2.15), на три порядка меньше u_{ξ} и поэтому, вследствие ее малости, здесь не приведена.

На фиг. 2 представляются результаты численного расчета относительного давления q в зависимости от τ . Расчет выполнен для величины $\kappa = 0,1666 \times 10^{-4}$.

Л и т е р а т у р а

1. I b e r a l l, A.S. Attenuation of oscillatory pressure in instrument lines. - J. Res. Nat. B. Stand., 1950, 45, 85-108.
2. Д"С у з а А.Ф., О л д е н б у р г е р Р. Динамическая характеристика гидравлических трубопроводов. - Теор. осн. инж. расч., 1964, № 3, с. 196-205.
3. Х о л м б о у Е.Л., Р у л о В.Т. Влияние вязкого трения на распространение сигналов в гидравлических линиях. - Теор. осн. инж. расч., 1967, № 1, с. 202-209.
4. Д ж а я с и н г х е, Л о й т х о й с е р . Распространение возмущений при течении вязкой жидкости в гидравлическом трубопроводе с упругими стенками. - Теор. осн. инж. расч., 1974, № 3, с. 176-183.
5. Ч а р н ы й И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М., Недра, 1975.
6. П о п о в Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. М., Машиностроение, 1977.
7. К а н т, S., М u n j a l, M.L., R a o, D.L.P. Waves in branched hydraulic pipes. - J. Sound Vibr., 1974, 37, N 4, 507-519.

8. T i j d e m a n, H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. - J. Sound Vibr., 1975, 39, N 1, 1-54.

9. W a s h i o, S., K o n i s h i, T., O k a m u r a K. Research on wave in hydraulic lines. 1st report. Unsteady liquid flow in uniform pipe. - Bull. JSME, 1974, 17, N 111, 1157-1164.

10. А й н о л а Л.Я., Л и й в У.Р. Об учете сжимаемости при неустановившемся движении жидкости в трубах. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1978, № 445, с. 45-52.

11. А й н о л а Л.Я., Л и й в У.Р. К методам интегрирования уравнений неустановившегося движения жидкости в трубах. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1978, № 445, с.63-72.

12. M a s l i y a h, J.H., S h o o k, C.A. Laminar transient flow in pipes. - C. J. Chem. Eng., 1975, 53, N 5, 469-475.

L. Ainola, J. Lamp, U. Liiv, L. Sarv

A Theoretical Investigation of the Unsteady
Liquid Flow in Round Pipes Using
a Dissipation Model

Summary

To determine the starting period of the unsteady flow by the dissipation model, we have developed a variational principle which is solved using the Kantorovich method. Under certain extreme initial conditions the calculation is carried out numerically making use of the finite difference method. Time dependent graphs of the distribution of axial velocities, those of mean velocity and pressure are supplemented in terms of the non-dimensional determinant parameter $\varepsilon = 0.1666 \times 10^{-4}$.

Л.Я. Айнола, Т.А. Коп-
пель, Ю.Ю. Ламп,
У.Р. Лийв

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ ПРИ РАЗГОННОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ИЗ СОСТОЯНИЯ ПОКОЯ В ТРУБЕ

Введение

В настоящей работе излагаются результаты экспериментального исследования локальных скоростей в потоке жидкости в трубе, во время разгона жидкости из состояния покоя.

Известно, что при ускоренном движении жидкости наблюдается затягивание ламинарного режима с последующим переходом к турбулентному режиму при мгновенных числах Re , которые на несколько порядков превышают критическое Re в стационарных условиях.

Исследование этого участка нестационарного ламинарного движения имеет самостоятельный практический интерес, кроме того, так как при неустановившихся течениях переход от ламинарного режима течения к турбулентному режиму происходит более "закономерно", чем при стационарных течениях, то можно предполагать, что для изучения механизма этого перехода при этом открываются новые возможности.

Число до сих пор опубликованных экспериментальных работ по исследованию неустановившихся течений жидкости в трубах скромное. Большинство работ посвящено измерению только интегральных характеристик – определению давления или времени возникновения турбулентности.

Исследованию локальных характеристик посвящены только несколько работ. В работах [3, 4] представлены результаты исследования касательных напряжений на стенке трубы при возникновении движения жидкости в трубе, некоторые данные о распределении скоростей до возникновения турбулентности приведены в работе [8].

Обстоятельное исследование структуры скоростей при распространении искусственно генерированных возмущений при переходе от одного турбулентного стационарного режима к другому приведено в работах [1, 2]. В этих работах локальные скорости определены электрохимическим способом.

Настоящая работа является продолжением работ [3, 4]. В работе приводятся исследования измерения локальных скоростей движения по радиусу трубы при разгонном движении жидкости из состояния покоя термоанемометрическим способом.

Опытная установка и методика проведения опытов

Опыты проводились на экспериментальной установке, основные узлы которой представлены на фиг. 1. Рабочий участок установки с плавным входом имеет длину $L = 16,85$ м и внутренний диаметр $d = 0,061$ м. Как рабочий участок, так и вся установка изготовлена из нержавеющей стали. С гидравлической точки зрения трубопровод можно считать гладким.

Для определения локальных характеристик нестационарного потока применялась аппаратура фирмы "ДИСА". В качестве датчиков для измерения локальной скорости в трубе был применен термоанемометрический конический зонд 55 R 42, а для измерения касательных напряжений — датчик 55R46, монтируемый заподлицо с внутренней стенкой трубы. Для измерения применялись термоанемометры типа 55M01 и 55D01 вместе со стандартными блоками фильтров. Кроме того, с помощью электромагнитного расходомера "Момент", работающего на частоте питания 500 Гц [6], были измерены мгновенная средняя скорость и давления в трех сечениях вдоль трубы тензометрическими датчиками.

Экспериментальные данные от всех датчиков записывались на магнитную ленту системы X-1 [5] и далее обрабатывались на ЭВМ "Минск-22".

Для проведения опыта с помощью насоса в напорном баке было установлено требуемое начальное давление. Затем насос был отключен и после полного успокоения воды в системе открыли по заданному закону быстродействующий клапан 9, расположенный на конце рабочего участка. Многократным повторением опытов с одинаковыми начальными и граничными условиями создали ансамбль опытных данных, необходимый для статической обработки опытных данных.

Результаты

На фиг. 2 приведены диаграммы изменения усредненной по ансамблю локальной скорости во времени в разных точках жидкого сечения. Количество опытов в одном ансамбле было от 25 ($r/R = 0$) до 47 ($r/R = 0,92$). При обработке экспериментальных данных кроме усреднения по ансамблю было проведено дополнительное сглаживание осреднением во времени по пяти соседним точкам. Оказалось, что для получения более гладких функций для искомой характеристики необходимо в ансамбль записать намного больше опытов, особенно в пристенной области.

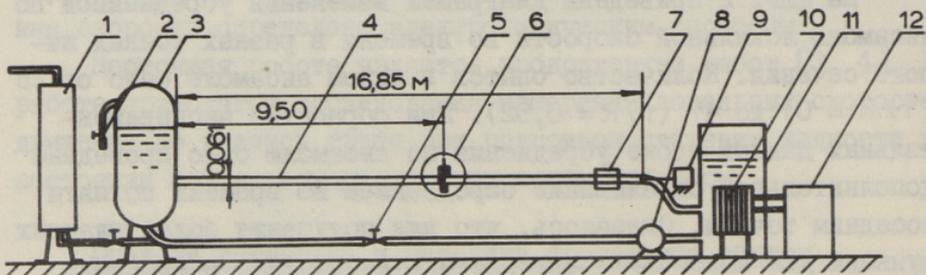
На диаграммах отчетливо видны моменты замены режима течения от ламинарного в турбулентный, которые на рисунке изображены черными треугольниками.

Приведенные на фиг. 2 диаграммы относятся к начальному давлению в системе $p_0 = 1,56 \times 10^5 \text{ Н/м}^2$, при времени открытия быстродействующего клапана $t = 0,01 \text{ с}$. Как показывают данные измерения давления в рассматриваемом нестационарном процессе течения жидкости, в момент возникновения турбулентности волновые явления, обусловленные сжимаемостью жидкости, затухали, и жидкость можно рассматривать как несжимаемую. При этом как скорости в точках, так и средняя скорость изменяются почти по линейному закону с ускорением $dV/dt = 7,15 \text{ м/с}^2$.

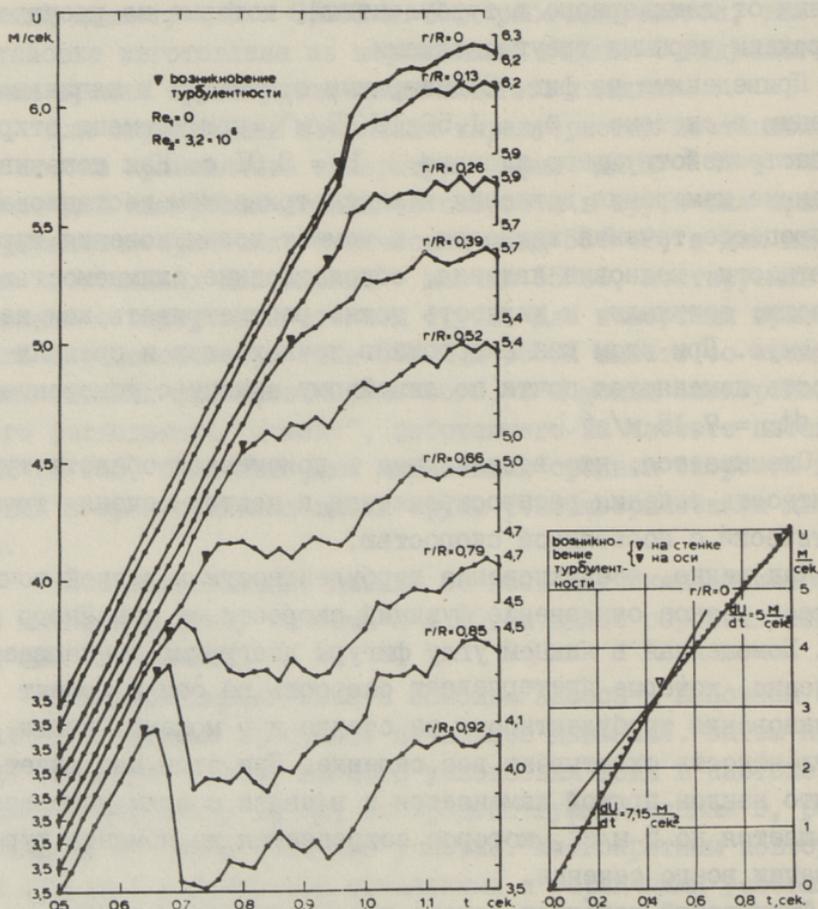
Оказывается, что возникающая в пристенной области турбулентность течения распространяется к центру сечения труб практически с постоянной скоростью.

Как видно, возникновение турбулентности в данной точке вызывает резкое отклонение функций скорости от линейного закона. Помещенная в нижнем углу фигуры диаграмма показывает изменения, которые претерпевает скорость на оси в момент возникновения турбулентности на стенке и в момент, когда турбулентность охватывает все сечение. При этом наблюдается, что наклон прямой изменяется и в связи с этим ускорение уменьшается до 5 м/с^2 , которое сохраняется до момента турбулизации всего сечения.

Физический характер такого перемежающегося течения в стационарных условиях описывают коэффициентом перемежаемос-



Фиг. 1. 1 - катионный фильтр, 2 - вентиль для выпуска воздуха, 3 - напорный бак, 4 - рабочий трубопровод, 5 - задвижка, 6 - измерительная секция, 7 - расходомер, 8 - графитовый центробежный насос, 9 - быстродействующий затвор со спусковым электромеханическим устройством, 10 - охлаждающий элемент, 11 - промежуточный бак, 12 - холодильная установка.



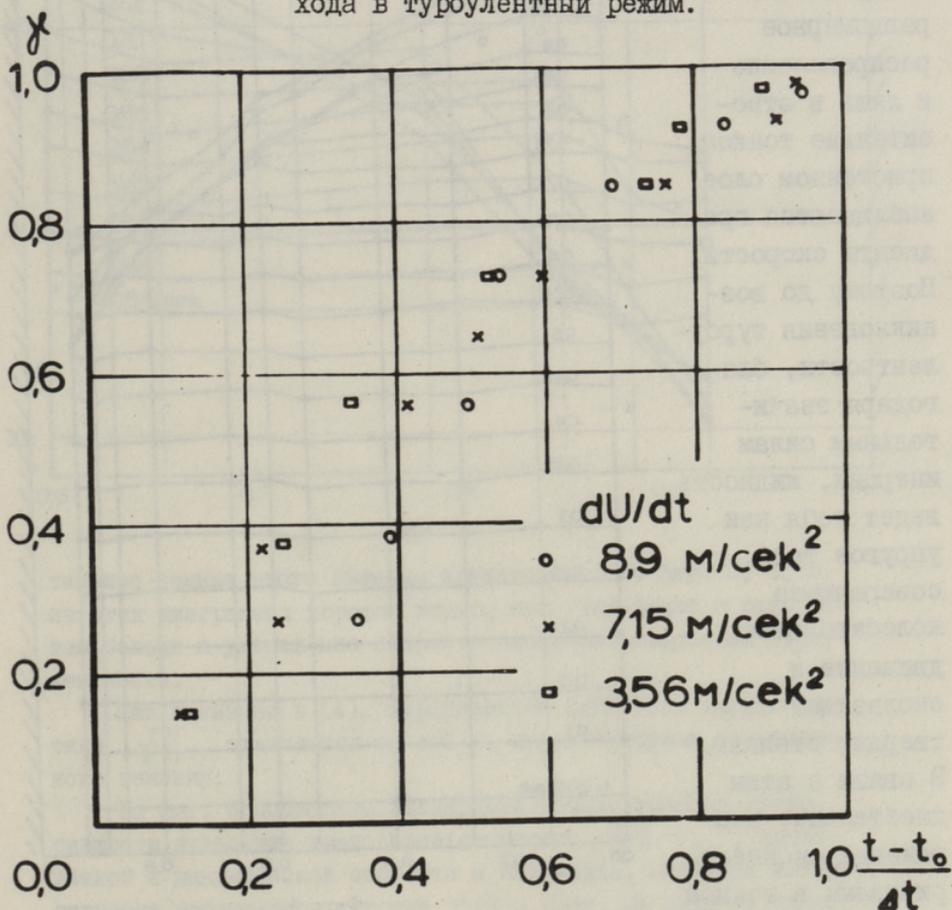
Фиг. 2.

ти γ [7]. Ниже, на фиг. 3 приводится изменение коэффициента γ в условиях нестационарного потока в трубе. Коэффициент γ выражается следующим образом

$$\gamma = \frac{S_T}{S} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2, \quad (I)$$

где S и S_T - площадь сечения трубы и площадь сечения, охваченная турбулентностью в данный момент времени;

R и r - радиус трубы и радиус точки на месте перехода в турбулентный режим.



Фиг. 3.

γ выражается как функция от относительного времени

$$\gamma = f\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right), \quad (2)$$

где Δt - время распространения турбулентности от стенки до оси;

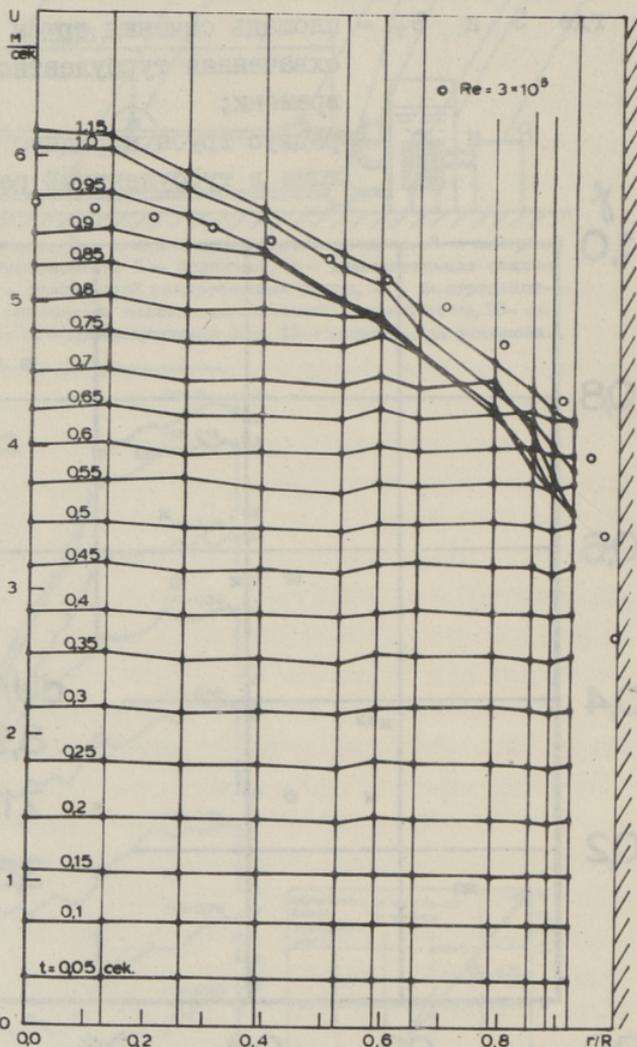
t - момент возникновения турбулентности в рассматриваемой точке;

t_0 - момент возникновения турбулентности на стенке.

Распределения скорости по сечению трубы представлены на

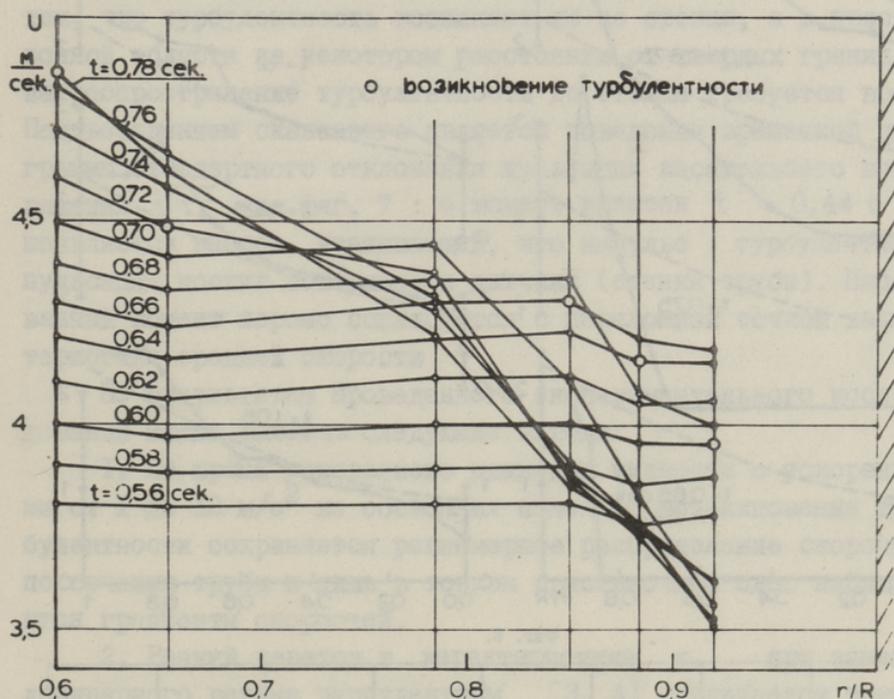
фиг. 4 и 5.

Видно, что до возникновения турбулентности имеет место равномерное распределение и лишь в относительно тонком пристенном слое наблюдаются градиенты скорости. Поэтому до возникновения турбулентности, благодаря значительным силам инерции, жидкость ведет себя как упругое тело, совершающее колебательное движение и скользящее по твердым стенкам. В связи с этим касательные напряжения сконцентрированы в тонком



Фиг. 4.

пристеночном слое и характеризуются величиной касательного напряжения на стенке τ_0 . Как видно из фиг. 7, в момент возникновения турбулентности измеренное τ_0 возрастает скачкообразно, чему соответствует скачкообразное изменение градиента скорости на стенке. Вследствие этого возникает заторможение жидкости в пристеночной области. Эксперимен-

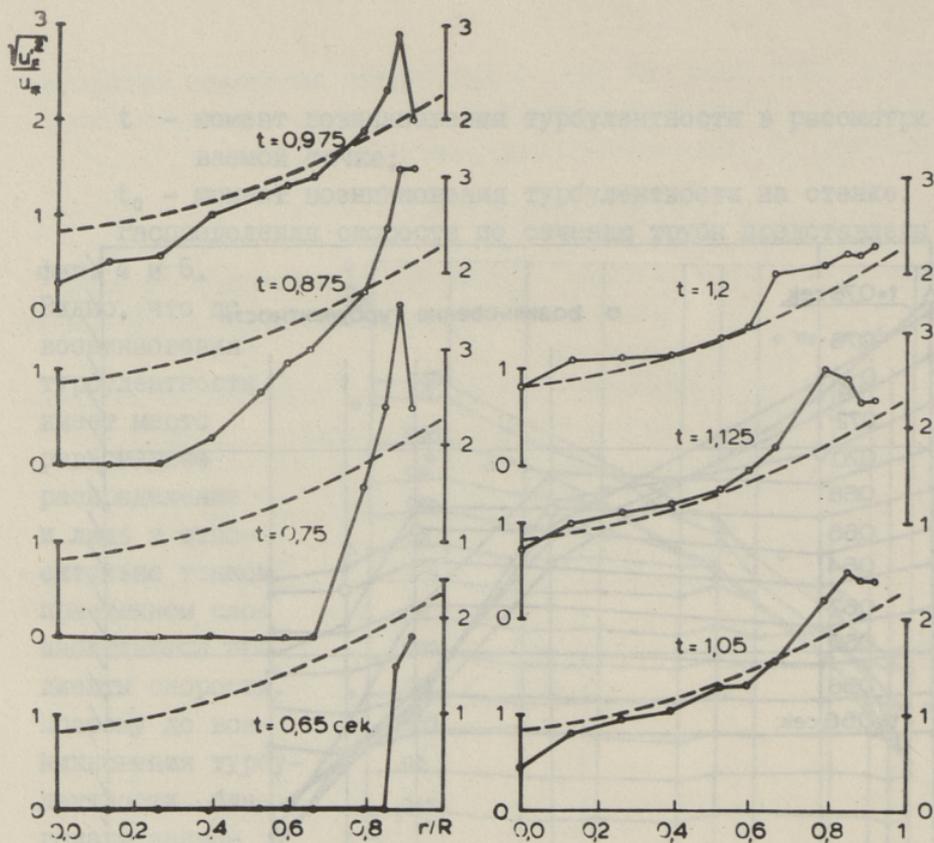


фиг. 5.

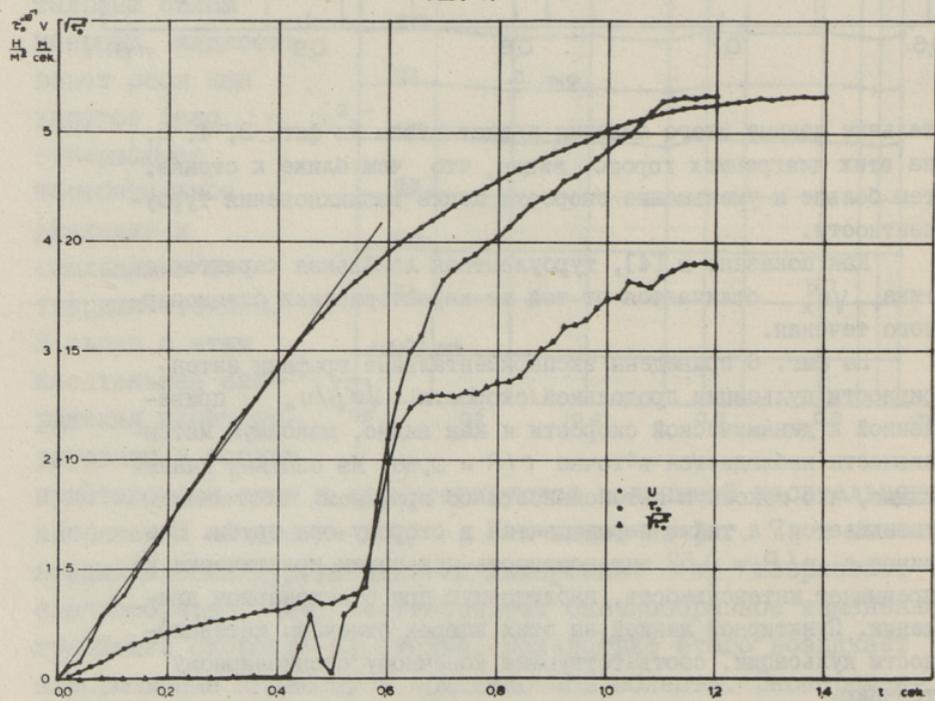
тальные данные этого явления представлены на фиг. 2, 4, 5, на этих диаграммах хорошо видно, что чем ближе к стенке, тем больше и уменьшение скорости после возникновения турбулентности.

Как показано в [4], турбулентная локальная характеристика $\sqrt{u_x'^2}$ отличается от той же характеристики стационарного течения.

На фиг. 6 приведены экспериментальные графики интенсивности пульсации продольной скорости $\sqrt{u_x'^2}/u_*$, приведенной к динамической скорости и как видно, максимум интенсивности наблюдается в точке $r/R = 0,38$. Из опытных данных видно, что максимум интенсивности со временем постепенно уменьшается, а также перемещается в сторону оси трубы. Начиная с $r/R = 0,52$ интенсивность пульсации практически не превышает интенсивность, наблюдаемую при стационарном движении. Пунктирной линией на этих эпюрах отмечены интенсивности пульсации, соответствующие конечному стационарному течению.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Изменение структуры потока отражается также в изменении мгновенной средней по сечению скорости V . На фиг. 7 видно, что ускорение потока до момента времени $t = 0,43$ с почти постоянное, однако τ_0 начинает резко возрастать в момент $t = 0,55$ с. Такую несогласованность можно объяснить тем, что турбулентность возникает не на стенке, а в пристеночной области на некотором расстоянии от твердых границ и на распространение турбулентности до стенки требуется время. Подтверждением сказанного является поведение временной диаграммы стандартного отклонения пульсации касательного напряжения $\sqrt{\tau_0^2}$ на фиг. 7: в момент времени $t = 0,44$ с появляется выброс, указывающий, что импульс турбулентной пульсации достиг поверхности датчика (стенки трубы). Названный момент хорошо согласуется с переломной точкой характеристики средней скорости V .

По результатам проведенного экспериментального исследования можно сделать следующие выводы:

1. Во время ускоренного движения жидкости с ускорениями от I до I2 м/с² из состояния покоя до возникновения турбулентности сохраняется равномерное распределение скоростей по сечению трубы и лишь в тонком пристеночном слое наблюдаются градиенты скоростей.

2. Резкий переход в характеристике τ_0 при замене ламинарного режима турбулентным [3, 4] наблюдается также в характеристиках локальных скоростей. В момент перехода к турбулентному режиму появляется переломная точка на графике величины средней скорости, а распределение скоростей и интенсивность турбулентности претерпевают значительные изменения по сравнению со стационарными турбулентными потоками.

3. Фронт перехода ламинарного режима к турбулентному режиму при неустановившемся движении жидкости в трубе распространяется в направлении радиуса почти с постоянной скоростью.

Л и т е р а т у р а

1. M a r u y a m a, T., K u r i b a y a s h i, T., M i z u s h i n a, T. The structure of the turbulence in transient pipe flows. - Journ. of Chem. Eng. of Japan, vol. 9, N 6, Dec. 1976, 431-439.

2. M a r u y a m a, T., K a t o, Y., M i z u s h i n a, T. Transition to turbulence in starting pipe flows. -

3. К о п п е л ь Т.А., Л и й в У.Р. Экспериментальное исследование возникновения движения жидкости в трубопроводах. - Изв. АН СССР, МЖТ, № 6, 1977, с. 79-85.

4. A i n o l a, L.J., К о р р е л, Т.А., L i i v, U.R. An investigation of turbulence generation and wall shear stress spectral analyses during unsteady flow in tubes. - Proc. IAHR XVIII Congress, 1979, Italy, vol 3, 165-172.

5. Х а а в е л ь Р.Х., К о п п е л ь Т.А., Л и й в У.Р. Система для накопления и обработки экспериментальных данных гидравлических исследований. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1975, № 380, с. 37-43.

6. К а с к Э.Г., К о п п е л ь Т.А., К о р с е н В.К., Л и й в У.Р., Р о с м а н н М.П. Электромагнитные расходомеры с кодированным выходным сигналом для измерения быст-ропеременных скоростей в трубопроводе. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1975, № 380, с. 37-42.

7. Ш л и х т и н г Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974. 417 с.

8. К а с к, В.Г. Untersuchungen der hydraulischen Charakteristika der periodischen Rohrströmung. Orsta, Teil 3, Dresden 1979, DDR, S. 338-346.

An Investigation of Local Velocities in the Pipe
at Starting from Rest Unsteady Liquid Flow

Summary

In this paper the results of the experimental investigation of the starting period of the liquid motion in pipes are described. By means of the thermoanemometer the distribution of the local velocities, turbulence intensity and skin friction are measured. It is found that until the turbulence generated there is a uniform distribution of the velocities. The turbulence is generated at the wall region and is distributed to the center of the cross section. After the turbulisation of the flow velocity distributions and turbulence intensities are different when compared to the steady ones.

1. Introduction

О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

В работе рассматривается нелинейная краевая задача в ограниченной плоской области с неизвестной частью границы, возникающая при исследовании установившегося движения идеальной несжимаемой капиллярной жидкости. Задача о совместном нахождении свободной поверхности и поля скоростей жидкости изучается с помощью метода итераций. Итерации проводятся таким образом, что на каждом шаге нужно решать нелинейную краевую задачу для нахождения формы поверхности жидкости и построенное в работе интегральное уравнение относительно касательной составляющей скорости. Исследуется сходимость итераций к решению задачи в произвольной симметричной плоской области при малых значениях параметров.

1. Постановка задачи

Область течения $D \in R^2$ предполагается симметричной относительно оси y , сила тяжести направлена параллельно этой оси. Потенциал скорости φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi(X) = 0, \quad X=(x, y) \in D. \quad (1.1)$$

При стационарном движении нормальная составляющая скорости жидкости на свободной границе S равна нулю

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial n} = 0, \quad X \in S. \quad (1.2)$$

На образующей стенки сосуда Σ задано распределение скорости

$$\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial n} = \psi(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_p], \quad \psi \in W_1', \quad \psi(-\tau) = \psi(\tau), \quad (1.3)$$

удовлетворяющее необходимому условию существования стационарного режима течения

$$\int_0^{\tau_p} \psi(\tau) d\tau = 0. \quad (I.4)$$

Здесь τ — длина дуги Σ , отсчитываемая от оси симметрии;

n — внешняя нормаль к границе области \mathcal{D} ;

W'_1 — пространство С.Л. Соболева функций, имеющих суммируемую по Лебегу обобщенную первую производную.

На свободной поверхности жидкости выполняется известное соотношение [1], являющееся следствием интеграла Бернулли и формулы Лапласа для скачка давлений,

$$2H\sigma = \rho g y + \frac{\rho}{2} (grad \varphi)^2 + p_0, \quad (I.5)$$

где H — средняя кривизна свободной поверхности;

σ — коэффициент поверхностного натяжения;

ρ — плотность жидкости;

g — ускорение силы тяжести;

p_0 — неизвестная постоянная.

Перейдем далее к безразмерным переменным по формулам

$$x = l\tilde{x}, \quad y = l\tilde{y}, \quad grad \varphi = V \cdot grad \tilde{\varphi},$$

где в качестве характерного размера l выбрано расстояние от оси симметрии до точки P (или симметричной ей точки P') пересечения S и Σ , в качестве характерной скорости —

$$V = \|\psi\|_{W'_1} = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} |\psi| d\tau + \int_0^{\tau_p} |\psi'| d\tau.$$

В дальнейшем будем пользоваться безразмерными переменными, опуская знак " \sim ". Уравнение (I.1) и условия (I.2)–(I.4) в безразмерных переменных сохраняют прежний вид. Уравнение (I.5) с учетом (I.2) запишется в виде

$$2H = By + \frac{W}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + p_0, \quad B = \rho g l^2 \sigma^{-1}, \quad W = \rho V^2 l \sigma^{-1},$$

где B — число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к силам поверхностного натяжения;

W — число Вебера, характеризующее отношение инерционных сил к силам поверхностного натяжения, $W = B \cdot F$;

F — число Фруда.

Заметим, что при $g \rightarrow 0$ (случай полной невесомости) $F \rightarrow \infty$, а число Вебера W остается конечным. Если же $\sigma \rightarrow 0$ (случай тяжелой жидкости), $W \rightarrow \infty$, в то время как число Фруда F остается конечным.

Ищется гладкая на оси симметрии свободная граница S , удовлетворяющая в заданных точках P и P' краевым условиям

$$S \cap \Sigma = \{P, P'\}, (\hat{S}, \Sigma) = \frac{\pi}{2}.$$

Для исследования нелинейной краевой задачи (I.I)-(I.5) относительно неизвестной границы S и потенциала скорости φ применяется следующий метод итераций, в котором каждая итерация состоит из двух этапов.

1) Пусть известно $(m-1)$ -е приближение свободной границы S_{m-1} . В области D_{m-1} , ограниченной контуром $S_{m-1} \cup \Sigma$, решается задача Неймана (I.I)-(I.3) относительно потенциала скорости φ и находится $\left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial s} \right|_{S_{m-1}}$.

2) m -е приближение свободной границы S_m находится как решение краевой задачи для уравнения (I.5) при $\partial \varphi / \partial s \equiv \partial \varphi_m / \partial s$.

За начальное приближение принимается равновесная свободная поверхность S_0 (т.е. решение статической задачи) при тех же краевых условиях, которая предполагается известной и устойчивой.

2. Интегральное уравнение

Ниже задача Неймана (I.I)-(I.3) заменяется эквивалентным интегральным уравнением на свободной границе относительно касательной производной потенциала скорости $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$. Это избавляет от необходимости численного дифференцирования потенциала φ при применении метода итераций. Благодаря специальному выбору ядра оператор полученного интегрального уравнения является вполне непрерывным.

В работах [2]-[4] аналогичное интегральное уравнение было получено для двух частных случаев областей. Однако обобщение на случай произвольной плоской области не является тривиальным.

Будем использовать известное соотношение, являющееся следствием формулы Грина,

$$p\varphi(X) = - \int_{S \cup \Sigma} \frac{\partial L(X, Y)}{\partial n_Y} \varphi(Y) ds_Y + \int_{S \cup \Sigma} L(X, Y) \frac{\partial \varphi(Y)}{\partial n} ds_Y. \quad (2.1)$$

Здесь $\rho = 0, 1, 1/2$. $\Omega/2\pi$ при $X \notin \bar{D}$, $X \in D$, $X \in SU\Sigma \setminus M$, $X \in M$ соответственно;

M – множество точек излома линии $SU\Sigma$;

Ω – величина внутреннего угла, образуемого касательными к $SU\Sigma$ в точке $X \in M$;

$L(X, Y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в области D .

Выберем в качестве ядра $L(X, Y)$ в интегральной формуле (2.1) функцию Грина $G(X, Y)$ задачи Неймана для уравнения Лапласа в области $D \cup D_e$ (D_e – часть сосуда, не занятая жидкостью). С учетом граничных условий (1.2), (1.3) и определения функции Грина задачи Неймана получим интегральное уравнение относительно $\varphi|_S$, содержащее неизвестную постоянную C ,

$$\frac{1}{2} \varphi(s_x) = - \int_{-s_p}^{s_p} \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n_Y} \varphi(s_Y) ds_Y + \int_{-\tau_p}^{\tau_p} G(X, Y) \psi(\tau_Y) d\tau_Y + C, \quad (2.2)$$

$$C = - \left. \frac{\partial G}{\partial n_Y} \right|_{\Sigma \cup \Sigma_e} \cdot \int_{-\tau_p}^{\tau_p} \varphi d\tau = \frac{1}{\text{mes}(\Sigma \cup \Sigma_e)} \int_{-\tau_p}^{\tau_p} \varphi d\tau = \text{const}. \quad (2.3)$$

Здесь s_x, s_y и s_p – длина дуги линии S от оси симметрии до точек X, Y и P соответственно.

Пусть $X \in S \setminus P \setminus P'$. Проинтегрируем первое слагаемое в правой части (2.2) по частям

$$- \int_{-s_p}^{s_p} \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n_Y} \varphi(s_Y) ds_Y = \int_{-s_p}^{s_p} F(X, Y) \varphi'(s_Y) ds_Y - F(X, P) \varphi(s_p) + F(X, P') \varphi(-s_p), \quad (2.4)$$

где $F(X, Y)$ – функция, сопряженная $G(X, Y)$ по координатам точки $Y = (\xi, \eta)$, так что

$$\frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi} = - \frac{\partial F(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial F(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi}.$$

Выберем $F(X, Y)$ так, чтобы $F(X, P') = 0$; тогда внеинтегральные члены в формуле (2.4) будут равны постоянной. Действительно, выбрав в интегральном тождестве (2.1) $L(X, Y) \equiv G(X, Y)$ и $\varphi(X) \equiv 1$, получим

$$F(X, P) = \int_{-s_p}^{s_p} \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n_Y} ds_Y = - \frac{1}{2} + \frac{\text{mes} \Sigma}{\text{mes}(\Sigma \cup \Sigma_e)}. \quad (2.5)$$

Поскольку $G(X, Y)$ является функцией вида

$$G(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(X, Y)} + \omega(X, Y), \quad \omega(X, Y) = \omega(Y, X),$$

где $\omega(X, Y)$ - гармоническая функция точек X и Y в области $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}_e$, $F(X, Y)$ может быть представлена в виде

$$F(X, Y) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Arctg} \frac{x-\xi}{y-\eta} + \omega^*(X, Y).$$

Здесь можно выбрать любую непрерывную ветвь арктангенса, $\omega^*(X, Y)$ - функция, гармоническая в $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}_e$ и сопряженная $\omega(X, Y)$ по координатам точки Y . Продифференцировав теперь по дуге s_x обе части уравнения (2.2), с учетом (2.4) получим

$$\frac{1}{2} \varphi'(s_x) = \int_{-s_p}^{s_p} \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n_x} \varphi'(s_y) ds_y + \frac{\partial}{\partial s_x} \int_{-\tau_p}^{\tau_p} G(X, Y) \psi(\tau_y) d\tau_y, \quad X \in S, \quad (2.6)$$

где Γ - функция вида

$$\Gamma(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(X, Y)} + \bar{\omega}(X, Y),$$

функция $\bar{\omega}(X, Y)$ - гармоническая в $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}_e$, сопряженная $\omega^*(X, Y)$ по координатам точки X . Выберем $\bar{\omega}$ так, что $\Gamma(X, Y) = \Gamma(Y, X)$, а именно

$$\Gamma(X, Y) = - \int_{(P'X)} \left(\frac{\partial}{\partial x} dy - \frac{\partial}{\partial y} dx \right) \int_{(P'Y)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial}{\partial \eta} d\xi \right) G.$$

Здесь $(P'X) \subset l$, $(P'Y) \subset l$, l - произвольный не имеющий кратных точек контур с непрерывной кривизной, проходящий через точки P' , $X \in \mathbb{D} \cup \mathbb{D}_e$, $Y \in \overline{\mathbb{D} \cup \mathbb{D}_e}$.

Построенная таким образом функция $\Gamma(X, Y)$ является функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа. Нужно проверить только, что $\Gamma|_{\Sigma \cup \Sigma_e} = 0$. Действительно, в силу тождества (2.1)

$$\Gamma(X, Y) = - \int_{(P'X)} \frac{\partial}{\partial n_x} \left[\int_{(P'Y)} \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n_y} ds_y \right] ds_x = \int_{(P'X)} \frac{\partial}{\partial n_x} \left[\frac{1}{2} - \frac{\tau_y - \tau_{p'}}{\operatorname{mes}(\Sigma \cup \Sigma_e)} \right] ds_x = 0, \quad X \in \mathbb{D} \cup \mathbb{D}_e, \quad Y \in \Sigma \cup \Sigma_e.$$

Если S имеет непрерывную кривизну, то ядро уравнения (2.6) непрерывно по s_x и s_y в квадрате $[-s_p, s_p] \times [-s_p, s_p]$, кроме точек $s_x = s_y = \pm s_p$. Используя представление функции Грина задачи Дирихле на комплексной плоскости [5]

$$\Gamma(z_1, z_2) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\ln \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)} \right], \quad (2.7)$$

где $f(z)$ - функция, конформно отображающая область $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}_e$ на единичный круг, можно получить асимптотическое представление ядра

$$\frac{\partial \Gamma(z_1, z_2)}{\partial n_{z_1}} = \frac{1}{2\pi} \text{Jm} \left\{ \left[\frac{1}{f(z_1) - f(z_2)} + \frac{\overline{f(z_2)}}{1 - f(z_1) \overline{f(z_2)}} \right] f'(z_1) e^{i\beta_1} \right\} \quad (2.8)$$

вблизи особых точек P и P'

$$\frac{\partial \Gamma(z_1, z_2)}{\partial n_{z_1}} \sim \frac{|f'(z_1)|}{2\pi} \frac{\varepsilon_2 \sin 2\gamma}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\gamma} \quad (\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0).$$

Здесь β_1 — угол между касательной к S и осью x в точке z_1 ;

γ — угол контакта S и Σ , $\gamma \in (0, \pi)$, $\varepsilon_1 = |f'(P)|(s_P - s_x)$,
 $\varepsilon_2 = |f'(P)|(s_P - s_\gamma)$;

линия $\Sigma \cup \Sigma_e$ считается достаточно гладкой.

В случае $\gamma = \pi/2$ при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ будет $\frac{\partial \Gamma}{\partial n_{z_1}} \rightarrow 0$.

Очевидно, что правая часть уравнения (2.6) непрерывна при $s_x \in (-s_P, s_P)$. Из формулы (2.7) можно получить аналогичное представление для функции Грина задачи Неймана

$$G(z_1, z_2) = -\frac{1}{2\pi} \text{Re} \ln [(f(z_1) - f(z_2)) \cdot (1 - f(z_1) \overline{f(z_2)})] + \omega_0(z_1) + \omega_0(z_2), \quad (2.9)$$

где ω_0 — гармоническая в области $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}_e$ функция.

Рассматривая опять для удобства область течения \mathfrak{D} как область на комплексной плоскости z и используя формулу (2.9), представим правую часть уравнения (2.6) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z_1) &= \int_{-\tau_P}^{\tau_P} \frac{\partial G}{\partial s_x} \psi d\tau = \frac{1}{\pi} \frac{\psi(P)}{|f'(P)|} \text{Jm} \left\{ \frac{f'(z_1)}{f(z_1)} e^{i\beta_1} \ln \frac{f(z_1) \overline{f(P)} - 1}{f(z_1) \overline{f(P')} - 1} \right\} - \\ &- \frac{1}{\pi} \text{Jm} \left\{ \frac{f'(z_1)}{f(z_1)} e^{i\beta_1} \int_{-\tau_P}^{\tau_P} \ln [f(z_1) \overline{f(z_2(\tau))} - 1] \left(\frac{\psi(\tau)}{|f'(z_2(\tau))|} \right)' d\tau \right\}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Отметим, что $\forall \gamma \neq \pi/2$ при $\psi(P) \neq 0$ первое слагаемое в правой части этой формулы имеет логарифмическую особенность, а второе слагаемое непрерывно при $\psi \in C'$. Если же $\gamma = \pi/2$, первое слагаемое имеет конечный предел при $z_1 \rightarrow P$, для непрерывности второго слагаемого достаточно потребовать $\psi \in W_1^1$.

Пользуясь методами теории потенциала, можно показать, что при любом угле γ интегральное уравнение (2.6) имеет не более одного решения. Если $\gamma = \pi/2$, оператор этого уравнения является вполне непрерывным, и из теоремы Фредгольма следует существование решения $\varphi' \in \mathcal{L}_2(S)$ при любой квадра-

тично суммируемой правой части. Поскольку в рассматриваемом случае правая часть непрерывна при $\gamma = \pi/2$, $\varphi'_s \in C(S)$ (см., например, [6]).

3. Краевая задача на свободной границе

Будем исходить из решения статической задачи ($\frac{\partial \varphi}{\partial s} \equiv 0$). На равновесной поверхности S_0 удовлетворяется уравнение $2H_0 = Vy_0 + p_0$, которое в криволинейных координатах $x_0(t)$, $y_0(t)$, $\beta_0(t)$ запишется в виде

$$\beta'_0(t) = Vy_0(t) + p_0, \quad x'_0(t) = \cos \beta_0(t), \quad y'_0(t) = \sin \beta_0(t), \quad (3.1)$$

где t - длина дуги линии S_0 , $t \in [0, t_p]$;

β - угол между касательной к S_0 и осью x ; $p_0 = \text{const}$.

Краевые условия принимают вид

$$\beta_0(0) = x_0(0) = 0, \quad x_0(t_p) = x_\Sigma(\tau_p), \quad y_0(t_p) = y_\Sigma(\tau_p), \quad \theta(\tau_p) - \beta(\tau_p) = \frac{\pi}{2}, \quad (3.2)$$

где $(x_\Sigma, y_\Sigma) \in \Sigma$, $\theta(\tau_p)$ - угол наклона линии Σ к оси x в точке P .

На неизвестной свободной границе S введем аналогичные криволинейные координаты $x(s)$, $y(s)$, $\beta(s)$, $s \in [0, s_p]$. Будем искать S как решение краевой задачи для системы уравнений

$$\beta'(s) = Vy(s) + \frac{W}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + p, \quad x'(s) = \cos \beta(s), \quad y'(s) = \sin \beta(s) \quad (3.3)$$

с теми же краевыми условиями (3.2).

Установим взаимно-однозначное соответствие между точками поверхностей S и S_0 : $s = s(t)$ следующим образом

$$x(s) = x_0(t) - u(t) \sin \beta_0(t), \quad y(s) = y_0(t) + u(t) \cos \beta_0(t). \quad (3.4)$$

где $u(t)$ - отклонение линии S от S_0 по нормали к S_0 .

Вычитая почленно уравнение (3.1) из (3.3), получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $u(t)$ и неизвестной постоянной $\bar{p} = p - p_0$

$$Lu \equiv u''(t) - a(t)u(t) = \delta(u) + \frac{W}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + \bar{p}, \quad (3.5)$$

где $a(t) = V \cos \beta_0(t) - \beta_0'^2(t)$,

$$\delta(u) \equiv -[\beta_0' + u'' - 2u\beta_0'^2 + 2u'^2\beta_0' + u' \cdot u \cdot \beta_0'' - u''u\beta_0' + u^2\beta_0'^3] \times \\ \times [1 + u'^2 + u^2\beta_0'^2 - 2u\beta_0']^{-\frac{3}{2}} + \beta_0' + u'' + u\beta_0'^2, \quad (3.6)$$

с однородными краевыми условиями

$$u'(0) = u'(t_p) = u(t_p) = 0. \quad (3.7)$$

Пусть $B \neq 0$, $\cos \beta_0(t_p) \neq 0$. Решение вспомогательной краевой задачи

$$Lu = \bar{p} + f, \quad u'(0) + u'(t_p) = u(t_p) = 0 \quad (3.8)$$

будем искать в виде

$$u(t) = u_0(t) + \bar{c} \cos \beta_0(t), \quad \bar{c} = \frac{u_0(t_p)}{\cos \beta_0(t_p)},$$

где u_0 является решением краевой задачи

$$u'' - au - \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} (u'' - au) dt = f, \quad (3.9)$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(t_p) + \chi u(t_p) = 0, \quad \int_0^{t_p} u dt = 0, \quad (3.10)$$

при $\chi = \beta'_0(t_p) \operatorname{tg} \beta_0(t_p)$. Постоянные \bar{c} и χ найдены из краевых условий (3.7) в точке P . Нетрудно проверить, что $L \cos \beta_0 = -B$.

Равновесная свободная поверхность считается устойчивой относительно произвольных возмущений, сохраняющих объем жидкости и угол смачивания. Это означает [7], что оператор краевой задачи (3.9), (3.10) является отрицательно определенным при

$$\chi \geq \frac{\beta'_0(t_p) \cos \gamma - \kappa}{\sin \gamma},$$

где $\kappa = \theta'(\tau_p)$ - кривизна линии Σ в точке P .

Следовательно, при

$$\beta'_0(t_p) \cdot \operatorname{tg} \beta_0(t_p) \geq -\theta'(\tau_p) \quad (3.11)$$

краевая задача имеет решение $\forall f \in C(S_0)$, $\int_0^{t_p} f dt = 0$.

Условие (3.11) выполнено, например, в случае выпуклого сосуда (в этом случае $\theta'(\tau) \geq 0$, $|\beta(t_p)| \leq \pi/2$, и из (3.1) следует, что $\beta'_0(t_p) \cdot \operatorname{tg} \beta_0(t_p) \geq 0$).

При $B = 0$ оператор L - дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, так как $\beta'_0 = \operatorname{const}$. В этом случае рассмотрение упрощается, можно в явном виде построить функцию Грина сразу для краевой задачи (3.8), и условие $\cos \beta_0(t_p) \neq 0$, а также (3.11) излишни.

4. Сходимость итераций

Рассмотрим подпространство M банахова пространства C^2 дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, t_p]$ функций u , удовлетворяющих краевым условиям (3.7), с нормой

$$\|u\|_M = \max_{[0, t_p]} |u''|,$$

эквивалентной при таких краевых условиях обычной норме пространства C^2 .

Как было показано в предыдущем пункте, $\forall f \in C$, причем $\int_0^{t_p} f dt = 0$, существует решение вспомогательной краевой задачи (3.8), которое можно записать в виде $u = Qf$, где Q — ограниченный линейный оператор,

$$Q: L_2 \ominus \{1\} \cap C \rightarrow M.$$

Обозначим через A нелинейный оператор, сопоставляющий поверхности S , т.е. функции $u \in M$, функцию $\varphi' \in C$, $A: M \rightarrow C$. Ниже будет показано, что оператор A является ограниченным на некотором шаре пространства M .

Исходную краевую задачу о нахождении формы свободной поверхности можно записать в виде нелинейного операторного уравнения

$$u = Tu, \quad Tu = Q\mathcal{P}[\delta(u) + \frac{W}{2}(Au)^2]. \quad (4.1)$$

Здесь \mathcal{P} — оператор ортогонального проектирования из L_2 в $L_2 \ominus \{1\}$.

$$\mathcal{P}f = f - \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} f dt, \quad \mathcal{P}: C \rightarrow L_2 \ominus \{1\} \cap C. \quad (4.2)$$

Предположим для простоты, что область $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_e$ выпуклая.

Теорема. Пусть жидкость, заполняющая симметричную относительно оси y область $\mathcal{D} \subset R^2$, ограниченную имеющей непрерывную кривизну твердой стенкой Σ и свободной границей S , при некотором значении B имеет в состоянии покоя устойчивую равновесную свободную границу S_0 , причем $S_0 \cap \Sigma = \{P, P'\}$, $(S_0 \wedge \Sigma) = \pi/2$. Пусть еще $\cos \beta_0(t_p) \neq 0$ при $B \neq 0$.

Тогда $\forall \Psi, \|\Psi\|_{W_1} = 1$, $\exists W_0 > 0$ такое, что $\forall W < W_0$ в некотором шаре $\|u\| \leq R$ банахова пространства M существует единственное решение операторного уравнения $u = Tu$, которое может быть найдено методом итераций.

Доказательство. С использованием формулы (3.6) для $\delta(u)$, представления (2.8) для ядра интегрального оператора $K(u)\varphi'$ в уравнении (2.6) и формулы (2.10) для правой части $\mathcal{F}(u)$ этого уравнения можно получить оценки

$$\|\delta(u)\|_C \leq R^2 c(R), \quad \|\mathcal{F}(u)\|_C \leq h (\|u\|_M \leq R); \quad (4.3)$$

$$\|K(u_1) - K(u_2)\|_{C \rightarrow C} \leq \kappa_1 \|u_1 - u_2\|_M, \quad \|\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2)\|_C \leq h_1 \|u_1 - u_2\|_M, \quad (4.4)$$

$$\|\delta(u_1) - \delta(u_2)\|_C \leq R \cdot c_1(R) \|u_1 - u_2\|_M \quad (\|u_1\|_M \leq R, \|u_2\|_M \leq R), \quad (4.5)$$

где $c(R)$ и $c_1(R)$ ограничены на любом конечном промежутке,

$$R \cdot \max_{[0, t_p]} |\beta'_0(t)| < 1. \quad (4.6)$$

Для краткости мы не приводим здесь довольно громоздкое доказательство этих оценок.

Из п. 2 следует, что существует линейный ограниченный обратный оператор K^{-1} , но его норма $\|K^{-1}\|_{C \rightarrow C}$ зависит от линии S , т.е. от искомой функции u . Получим равномерную оценку φ'_S в шаре $\|u\| \leq R$, т.е. оценку нормы нелинейного оператора A в этом шаре. Вычитая почленно из уравнения (2.6) это же уравнение, записанное для равновесной формы S_0 ,

$$\varphi - \varphi'_0 = K_0(\varphi' - \varphi'_0) + (K - K_0)\varphi' + \mathcal{F} - \mathcal{F}_0,$$

получим уравнение для φ' с малым по норме оператором

$$\varphi' = (I - K_0)^{-1}(K - K_0)\varphi' + \varphi'_0 + (I - K_0)^{-1}(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0),$$

где I - единичный оператор.

Выбрав R так, что

$$R < \frac{\|\varphi'_0\|}{\kappa_1 A_0}, \quad A_0 = \|(I - K_0)^{-1}\|, \quad (4.7)$$

с использованием (4.4) получим оценку

$$\|\varphi'\| \leq \frac{\|\varphi'_0\| + A_0 \|\mathcal{F} - \mathcal{F}_0\|}{1 - A_0 \|K - K_0\|} \leq \frac{\|\varphi'_0\| + h_1 R A_0}{1 - \kappa_1 R A_0} \equiv A_1 \quad (\|u\| \leq R). \quad (4.8)$$

Аналогично получим оценку для разности

$$\begin{aligned} \|\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2)\| &\leq \|(I - K(u_1))^{-1}\| (\|K(u_1) - K(u_2)\| \|\varphi'(u_2)\| + \|\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2)\|) \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi'_0\| + A_0 (\|\mathcal{F}_0\| + 1)}{1 - \kappa_1 R A_0} (\kappa_1 A + h_1) \|u_1 - u_2\| \equiv A_2 \|u_1 - u_2\|. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Константы h , h_1 , κ_1 , A_0 , A_1 , A_2 в формулах (4.3) - (4.9) не зависят от S . Из (4.1) и (4.2) следуют неравенства

$$\|Tu\| \leq 2 \|Q\| (\|\delta(u)\| + \frac{W}{2} \|\varphi'\|^2),$$

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq 2 \|Q\| (\|\delta(u_1) - \delta(u_2)\| + \frac{W}{2} \|\varphi'^2(u_1) - \varphi'^2(u_2)\|).$$

С использованием полученных оценок (4.3), (4.4), (4.8), (4.9) имеем

$$\|Tu\| \leq 2 \|Q\| \cdot (R^2 c(R) + \frac{W}{2} A_1^2),$$

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq 2\|Q\|(Rc_1(R) + WA_1A_2)\|u_1 - u_2\|.$$

Выберем R так, чтобы выполнялись неравенства (4.6), (4.7) и

$$Rc(R) \leq \frac{1}{4\|Q\|}, \quad Rc_1(R) \leq \frac{q}{4\|Q\|}, \quad q < 1,$$

и чтобы, кроме того,

$$\{(x_0(t) - R\eta, y_0(t) + R\xi)\} \cup \{(x_0(t) + R\eta, y_0(t) - R\xi)\} \cap (\Sigma \cup \Sigma_e) = \{P, P'\},$$

где $\xi = \xi(t) = \frac{1}{2}(t - t_p)^2 \cos \beta_0(t)$, $\eta = \eta(t) = \frac{1}{2}(t - t_p)^2 \sin \beta_0(t)$, $t \in [0, t_p]$.

Последнее условие гарантирует, что $\forall u, \|u\| \leq R$, соответствующая линия S не будет иметь других общих точек с $\Sigma \cup \Sigma_e$, кроме P и P' .

Выбрав теперь W_0 так, что

$$W_0 \leq \frac{R}{2\|Q\| \cdot A_1^2}, \quad W_0 \leq \frac{q}{4\|Q\| A_1 A_2},$$

получим, что оператор T переводит шар $\|u\|_M \leq R$ в себя и является сжимающим в этом шаре, т.е. имеет в нем единственную неподвижную точку, которая может быть найдена с помощью метода итераций. Теорема доказана.

В заключение отметим, что плоская задача о форме свободной поверхности при стационарном движении капиллярной жидкости в ограниченной области в несколько другой постановке изучалась в работах [8] (для идеальной жидкости) и [9] (для вязкой жидкости). В работе [4], кроме теоретического исследования задачи для области конкретного вида, проведены вычисления на ЭВМ по методу итераций.

Л и т е р а т у р а

1. Л а н д а у Л.Д., Л и ф ш и ц Е.М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

2. Т е м к и н а В.С. Плоская задача об истечении жидкости из бесконечного слоя. - В сб.: Вопросы гидродинамики и теплообмена в криогенных системах, вып. 4. Харьков, 1974, с. 18-22.

3. Т е м к и н а В.С., Щ е р б и н а Г.В. О форме свободной поверхности капиллярной жидкости при установившемся истечении из бесконечного слоя. - Числ. методы мех. сплошной среды, Новосибирск, 1976, т. 7, № 7, с. 91-102.

4. Темкина В.С. О форме свободной поверхности при установившемся движении капиллярной жидкости в прямоугольном канале. - Изв. АН СССР, сер. МЖТ, 1977, № I, с. 67-75.

5. Смирнов В.И. Курс высшей математики, том IV. М.-Л., Гостехтеориздат, 1951.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.

7. Гидромеханика невесомости. Под ред. А.Д. Мышкиса. М., Наука, 1976.

8. Эренбург В.Б. Плоская стационарная задача со свободной границей и краевым углом для уравнений Эйлера. - Динамика сплошной среды, вып. I4. Новосибирск, 1973, с. I3I-I4I.

9. Солонников В.А. Разрешимость задачи о плоском движении тяжелой вязкой несжимаемой капиллярной жидкости, частично заполняющей некоторый сосуд. - Изв. АН СССР, сер. Математическая, 1979, т. 43, № I, с. 203-236.

V. Temkina

On the Shape of the Free Surface at the Stationary
Flow of Liquid in a Finite Flat Region

Summary

This paper deals with the nonlinear boundary problem in a finite flat region with the unknown part of the boundary, which arises in the investigation of the stationary flow of the ideal incompressible capillary liquid. The problem of the simultaneous finding of the free surface and the flow field is studied with the iterative method. The convergence of the iterations is proved for the small values of parameters.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫДЕЛЕНИЯ ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ
МИНЕРАЛЬНЫХ ВЗВЕСЕЙ В ТОНКОСЛОЙНОМ ОТСТОЙНИКЕ

Изучая возможности применения сланцевой золы в качестве реагента для удаления фосфорных соединений из хозяйственных сточных вод на стадии доочистки, в системе опытной полупроизводственной установки ($Q = 0,7 \text{ м}^3/\text{ч}$) был использован тонкослойный отстойник [1].

Применялся отстойник непрерывного действия с комбинированным наклоном ($\alpha = 60^\circ$) прямоугольного поперечного сечения (5 x 6 см) трубчатой секции. Использованной величине поверхностной гидравлической нагрузки $12 \text{ м}^3/\text{м}^2 \cdot \text{ч}$ соответствует число $Re = 40,5$ ($t = 16^\circ\text{C}$). Имея в виду, что требуемой величине эффективности очистки от взвеси 90 % соответствует гидравлическая крупность удаляемой частицы $u_0 = 0,15 \text{ мм/с}$, выбранные конструктивные параметры удовлетворяют условие

$$10 |u_0| \leq v \leq \frac{500}{Re},$$

где v — скорость движения жидкости — $3,3 \text{ мм/с}$ [2, 3].

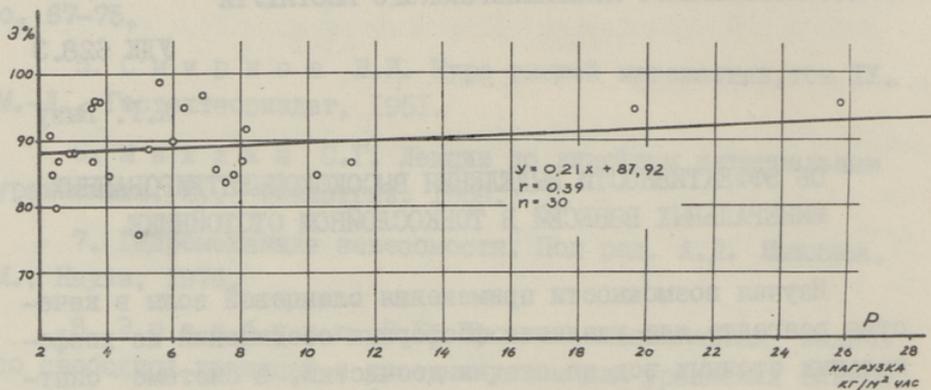
Рабочая длина отстойной части секции $L_p = 2 \times 120 \text{ см}$ была первоначально выбрана по литературным данным. Она может быть также рассчитана по формуле:

$$L_p = k \frac{H_0}{\cos \alpha} \left| \frac{v}{u_0} - \sin \alpha \right|,$$

где H_0 — высота отстойной части;

k — коэффициент, который учитывает неравномерность распределения тока по поперечному сечению, а также турбулентность потока при входе и выходе из трубчатых секций.

Имея экспериментальные данные о скорости движения жидкости V и гидравлической крупности частиц U_0 , величина коэффициента k для исследуемой системы равна 1,135.



Фиг. 1. Влияние нагрузки по взвешенным веществам на эффективность работы трубчатого отстойника.

По результатам исследований выяснилось, что отстойник данной конструкции работает более эффективно при больших нагрузках по взвешенным веществам. Опыты проводились в основном в пределе нагрузок по взвеси от $2 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{ч}$ до $8 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{ч}$, в некоторых случаях до $26 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{ч}$. В таких условиях эффективность удаления взвешенных веществ - Э (%) в зависимости от нагрузки P ($\text{кг/м}^2 \cdot \text{ч}$) описывается уравнением

$$\text{Э} = 0,21 P + 87,92,$$

которое получено на основе данных 30 опытов при коэффициенте корреляции $r = 0,39$ (фиг. 1). Проведенное исследование показало, что тонкослойный отстойник позволяет весьма эффективно выделить из сточной воды высококонцентрированную взвесь. При этом следует отметить низкую чувствительность системы (эффекта очистки) к резким изменениям концентрации взвеси в исходной воде.

Л и т е р а т у р а

Г. Вызу А.Г., Мёлдер Х.А. О возможности использования сланцевой золы для физико-химической доочистки бытовых сточных вод от соединений фосфора. Материалы семинара "Физико-химические методы очистки сточных вод". Московский дом научно-технической пропаганды им. Ф.Э.Дзержинского. М., 1975.

2. Яковлев С.В., Карелин Я.А. и др. Очистка производственных сточных вод. М., Стройиздат, 1979.

3. В ы з у А.Г. Исследование кинетики осаждения взвеси при доочистке бытовых сточных вод с использованием сланцевой золы. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1978, № 445.

A. Vösu

The Efficiency of High-concentration Mineral Sediments
Removal in a Tube Settler

Summary

Tertiary treatment of domestic sewage in a tube settler by physico-chemical method has been studied. The constructive and hydraulic characteristics of the settler are presented.

An equation describing the efficiency of suspended solids removal and its dependence upon the load on the settler has been derived as a result of the studies.

Ю.Н. Липре, Х.А. Мельдер

МОДЕЛЬ СЕБЕСТОИМОСТИ ВОДЫ В СИСТЕМЕ ОБОРОТНОГО
ВОДОСНАБЖЕНИЯ РЫБНЫХ ХОЗЯЙСТВ

В последнее время все шире развиваются индустриальные методы выращивания ценных пород рыб, где рыбные хозяйства решены на базе оборотного водоснабжения. Преимущества оборотного водоснабжения в ряде случаев с экономической точки зрения совершенно очевидны. Они связаны, например, с экономией электроэнергии при транспортировке небольшого объема воды из далеких источников, экономией тепла и т.д.

Себестоимость воды системы оборотного водоснабжения будет равна сумме затрат на подачу подпиточной чистой воды на ее рециркуляцию и на отвод воды.

Для характеристики системы оборотного водоснабжения обычно используют соотношение между рециркулируемым расходом и водообменом бассейнов. Это соотношение обозначается буквой R и называется также степенью рециркуляции, выражаемой в долях единицы.

Себестоимость подпиточной воды вообще складывается из затрат на забор, подачу и обработку ее.

В некоторых конкретных случаях требуется доочистка отводимой воды перед сбросом ее в водоем. Затраты на доочистку входят в себестоимость отводимой воды.

Для систем оборотного водоснабжения рыбных хозяйств суммарную себестоимость подпиточной и отводимой воды можно выразить следующим образом:

$$m_b = \frac{\Pi_1 + \Pi_2}{(1-R)Q}, \quad (I)$$

где m_b — себестоимость подпиточной и отводимой воды;

Π_1 — годовые затраты на подпитку;

Π_2 - годовые затраты на отвод воды;

R - степень рециркуляции;

Q - водообмен бассейнов.

Себестоимость внутрисистемной очистки воды зависит от эффекта очистки и объема очищаемой воды, которая в свою очередь зависит от степени рециркуляции.

$$m_c = \frac{\Pi_3}{ERQ}, \quad (2)$$

где m_c - себестоимость внутрисистемной очистки;

Π_3 - годовые затраты на внутрисистемную очистку;

E - эффект очистки.

Суммарную себестоимость воды в частично открытой системе оборотного водоснабжения рыбных хозяйств можно выразить в общем виде следующим образом:

$$m_{\text{общ}} = \frac{\Pi_1 + \Pi_2}{(1-R)Q} + \frac{\Pi_3}{ERQ}, \quad (3)$$

где $m_{\text{общ}}$ - себестоимость воды в системе оборотного водоснабжения.

Для полностью закрытой системы оборотного водоснабжения, где $R \geq 0,99$, уравнение (3) принимает вид:

$$m_{\text{зак}} = \frac{\Pi_3}{QE}, \quad (4)$$

где

$$E = \frac{M}{QC}, \quad (5)$$

где M - количество продуктов метаболизма рыб в бассейне;
 C - концентрация лимитирующего вещества загрязнения в бассейне ($C \leq C_{\text{доп}}$).

Таким образом, модель себестоимости полностью закрытой системы оборотного водоснабжения имеет вид:

$$m_{\text{зак}} = \frac{\Pi_3 C}{M}. \quad (6)$$

При исследовании основных качественно-количественных параметров систем оборотного водоснабжения рыбных хозяйств было установлено, что между эффектом очистки, степенью рециркуляции и допустимой концентрацией загрязнения в бассейне имеется зависимость:

$$C = \frac{1}{1-R+ER} \times \frac{M}{Q}. \quad (7)$$

Эта зависимость позволяет, например, определить нужную степень рециркуляции при определенных величинах $C \leq C_{\text{гор}}, M, Q$ в условиях отсутствия внутрисистемной очистки $E = 0$.

Модель себестоимости системы без внутрисистемной очистки можно выразить уравнением (I).

Из исследования [I] известно, что внутрисистемная очистка не нужна, если удовлетворяется условие:

$$Q \geq \frac{M}{C} \leq (1-R)Q. \quad (8)$$

Следовательно, уравнение (I), которое представляет модель себестоимости системы без внутрисистемной очистки воды, с учетом условия (8) принимает вид:

$$m_b = (\Pi_1 + \Pi_2) \frac{C}{M}. \quad (9)$$

Если проанализировать полученные модели (6 и 9), видно, что себестоимость полностью закрытой системы и системы без внутрисистемной очистки будет пропорциональна допустимой концентрации лимитирующего вещества загрязнения в бассейне и обратнопропорциональна количеству продуктов метаболизма рыб в бассейне.

По изложенной методике можно на основании величин Q , R , C и M определить себестоимость воды систем оборотного водоснабжения.

Л и т е р а т у р а

И. Л и п р е Ю.Н., М ё л ь д е р Х.А. Основные качественно-количественные параметры систем оборотного водоснабжения рыбных хозяйств. См. наст. сб., с. 3.

J. Lipre, H. Mölder

Cost Models in Hatchery Water Reuse Systems

Summary

This paper looks to several factors of influence specially from the economic point of view in water treatment and reuse system.

A cost model developed here is simplified.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА
ПРИ ОЦЕНКЕ ДОЗЫ КОАГУЛЯНТА ВОДООЧИСТНОЙ СТАНЦИИ

В некоторых районах и районных центрах развитых стран с исторически возникшими и непрерывно расширяющимися системами водозабора, не имеющими избыточного единого водоисточника, потребление воды растет быстрее мощности водозаборной системы. С ростом последней непрерывно увеличивается и ее сложность. Так возникающая водозаборная система включает в себя водообъекты со значительно отличающимися свойствами воды.

С другой стороны, качество хозяйственно-питьевой воды строго нормируется, а пропускная способность водоочистной станции зависит во многом от свойств исходной воды и равномерности ее поступления.

Одним из путей повышения эффективности работы водоочистной станции является комплексная оптимизация работы всей системы водозабора [1, 4]. Для решения такой задачи нужно найти зависимость между выбранной целевой функцией и параметрами создаваемой оптимизационной модели. При этом одной из важнейших является связь между оптимальной дозой коагулянта и физико-химическими показателями водозаборных объектов, поскольку в процессе очистки воды основным реагентом является коагулянт.

Целью данной работы и было выявить те свойства воды, которые оказывают наибольшее влияние на дозу коагулянта, а также их формы функциональных связей, отражающие наилучшим образом это влияние.

При решении таких задач в настоящее время распространено два основных направления:

I) определение зависимостей типа $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при помощи метода экспертных оценок;

2) определение зависимости типа $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ исходя из конкретных натуральных наблюдений и используя математико-статистические методы.

В данной работе избрано последнее направление, поскольку мы располагали достаточным статистическим материалом, точнее 71 наблюдением за 6 лет, а также надеялись, что при частном решении задачи это направление окажется более эффективным.

Таким образом, мы искали решение при помощи статистической модели. В задачах такого типа различают два вида переменных: независимые переменные и зависимые переменные — отклики. За независимые переменные принимают те, для которых можно установить желаемое значение, либо те, за которыми можно только наблюдать, но не управлять ими. В результате изменений, произведенных намеренно или происшедших с независимыми переменными случайно, появляется эффект, который передается на другие переменные, на отклики [3].

В нашем случае мы имели возможность использовать 36 независимых переменных, характеризующих разные свойства воды. Их полный просмотр практически очень трудоемкая задача, поскольку только парный анализ потребовал бы рассмотрения более четырех миллионов уравнений. Это обстоятельство сделало необходимым первичное рассмотрение всех независимых переменных с целью сокращения их числа.

При таком первичном анализе по выбору переменных мы учитывали их обобщающую степень (например, мутность содержит в себе показатель планктона), абсолютное количество данного вещества в воде (Ca^{2+} до 5,36 мг/л), интервал колебания в рассмотренный период (температура от 0,2 °C до 23 °C) и практические выводы, сделанные работниками водоочистой станции.

Таким образом, на первом этапе статистического анализа число независимых переменных сократилось до 8. Независимые переменные приводятся с интервалами изменения:

- x_1 — температура (от 0,2 °C до 23,0 °C)
- x_2 — мутность (от 0,9 мг/л до 61,0 мг/л)
- x_3 — цветность (от 26° до 77°)
- x_4 — щелочность (от 2,60 мг-экв/л до 4,98 мг-экв/л)
- x_5 — pH (от 7,15 до 8,85)
- x_6 — жесткость (от 3,32 мг-экв/л до 6,26 мг-экв/л)
- x_7 — Ca^{2+} (от 2,38 мг-экв/л до 5,36 мг-экв/л)

x_8 - уровень воды (от 10 см до 207 см)

Y - доза коагулянта (от 12 мг/л до 22 мг/л).

Единственную зависимую переменную (отклик) мы будем обозначать в дальнейшем Y или x_9 .

На втором этапе решения задачи были найдены и оценены корреляционные взаимосвязи всех выбранных переменных. Для этого вычислялись выборочные коэффициенты корреляции r_{jk} по формуле (I).

$$r_{jk} = S_{jk} / S_{jj} S_{kk}, \text{ где } S_{jk} = \sum (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k), \quad (I)$$

S_{jk} - сумма квадратов и произведений;

i - порядковый номер наблюдений;

j, k - порядковый номер коррелируемых пар.

Далее представлена корреляционная матрица переменных, полученная при помощи уравнения (I).

Т а б л и ц а I

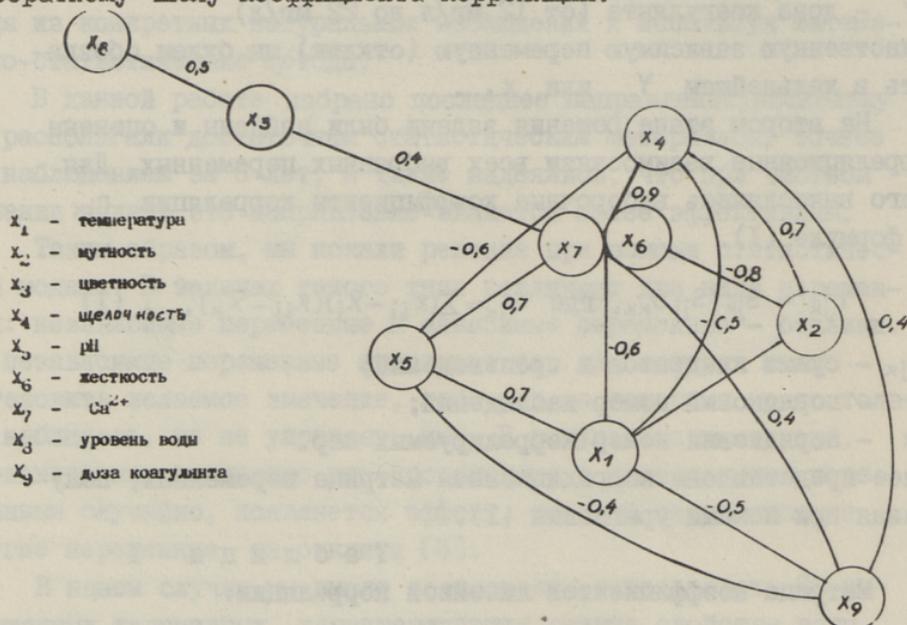
Матрица коэффициентов линейной корреляции:

x_2	0,616							
x_3	-0,304	-0,309						
x_4	-0,574	-0,683	0,083					
x_5	0,716	0,523	-0,302	-0,605				
x_6	-0,611	-0,805	0,295	0,906	-0,668			
x_7	-0,602	-0,829	0,352	0,851	-0,676	0,973		
x_8	0,180	-0,291	0,470	-0,167	0,175	0,077	0,169	
x_9	-0,508	-0,297	0,170	0,382	-0,421	0,378	0,349	-0,149
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

Исследуя таблицу I, видно, что слабее других независимых переменных коррелируется с откликом (опт. дозой коагулянта) уровень воды $|r_{98}| = 0,1494$. Последний имеет учитываемую связь только со щелочностью и цветностью соответственно $|r_{82}| = 0,2911$ и $|r_{83}| = 0,4701$. Так как показатель уровня воды слабо коррелируется с дозой коагулянта и в то же время хорошо отражается в двух независимых переменных x_2 и x_3 , мы исключим его из дальнейшего исследования.

Для более лучшей наглядности на фигуре I представлена корреляционная матрица в виде графа, но только с теми связя-

ми, у которых $|r_{jk}| > 3,4$, причем длина дуг пропорциональна обратному числу коэффициента корреляции.



Фиг. 1. Граф корреляционной матрицы свойств воды с оптимальной дозой коагулянта.

На фиг. I бросается в глаза, что переменные x_7 и x_6 слились, их $|r_{67}| = 0,9729$. Такую связь можно считать почти функциональной и в дальнейшем рассматривать только x_6 , как более тесно связанную с дозой коагулянта.

Но нам показалось странным, что связи таких показателей, как цветность и мутность с дозой коагулянта оказались сравнительно незначительными. Из практики же известно, что они имеют большое влияние.

Для выяснения данного вопроса мы решили проанализировать модели (2)

$$Y_{ij} = b_{ij} f_{ij}(x_i), \quad (2)$$

где i - порядковый номер переменной;
 j - порядковый номер функции.

В модели (2) за f_{ij} брали поочередно $\ln x, x, x^2, x^3, 1/x, 1/x^2$ и \sqrt{x} и за x температуру, мутность, цветность, щелочность, pH и жесткость.

Далее для каждой оценки \hat{b}_{ij} параметра b_{ij} , вычисляемой методом наименьших квадратов [2], находилось дисперсионное отношение по формуле (3)

$$F_{ij} = \hat{b}_{ij}^2 / S_{ij}^2, \quad (3)$$

где \hat{b}_{ij} - оценка параметра b_{ij} ;
 S_{ij}^2 - дисперсия оценки b_{ij} .

В таблице 2 представлены все найденные дисперсионные отношения по формуле (3) для зависимостей (2).

Т а б л и ц а 2

Таблица дисперсионных отношений

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
LNx	52,67	200,53	1835,27	2125,39	1663,26	2112,51
x	28,56	66,56	923,46	1777,28	1446,67	1795,58
x^2	27,86	18,78	341,83	693,39	1094,09	791,24
x^3	19,82	9,29	166,27	289,99	835,07	791,24
1/x	15,12	76,95	582,46	862,69	2215,15	798,26
1/x ²	2,39	19,72	171,01	431,61	2236,42	1654,46
\sqrt{x}	119,02	208,23	1577,46	2188,45	1654,46	2185,18

Причем F_{ij} (формула (3)) показывает значимость каждой преобразованной переменной найденных регрессионных уравнений [3]. По табл. 2 было выбрано для каждой переменной то ее представление, где $F_{ij} \rightarrow \max$, т.е. уравнение (2) имеет наибольшую вероятность.

Таким образом была выбрана для x_1, x_2, x_4, x_6 функция \sqrt{x} , для x_3 функция LNx и для x_5 функция $1/x^2$. С полученными преобразованными переменными мы произвели снова регрессионный анализ для определения конкретных параметров линейного регрессионного уравнения [3]. Так, исходя из уравнения (2), было получено уравнение (4).

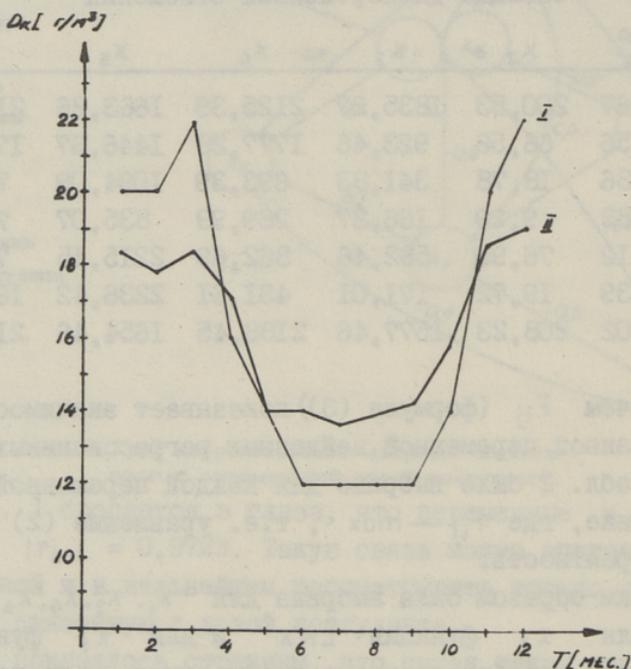
$$\hat{Y} = -1,0413\sqrt{x_1} + 0,5726\sqrt{x_2} + 0,7867 \text{LN}x_3 + \\ + 1,0185\sqrt{x_4} + 203,7213(1/x_5^2) + 2,5689\sqrt{x_6}. \quad (4)$$

В данном уравнении отсутствие свободного члена с помощью дисперсионного анализа подтвердилось, что показывает оптимальность выборки f_{ij} для уравнения (4), поскольку отсутствие свободного члена в уравнении регрессии указывает на нормальное распределение остатков.

Множественный коэффициент корреляции R уравнения (4) равен 0,9871, а $F = 410,427$, причем граница существенности данного типа уравнения при 95 % обеспеченности равна 3,985. Для сравнения приведем здесь R линейного регресси-

онного уравнения с линейными переменными, который равен 0,4831.

При практической проверке уравнения (4) мы произвели по нему расчет дозы коагулянта за типичный (1972) год и сравнили с действительными. Эти результаты представлены на фиг.2, где I – действительный расход коагулянта, а 2 – рассчитанный расход.



Фиг. 2. График действительных и рассчитанных оптимальных доз коагулянта на водоочистной станции г. Таллина в 1972 г.

Продолжая дальше, по глубине, статистический анализ, мы рассматривали квадратические регрессионные зависимости модели типа (5).

$$Y = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j x_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j b_{jk} x_j x_k, \quad (5)$$

где x_j, x_k – независимые переменные;

b_0, b_j, b_{jk} – коэффициенты квадратического регрессионного уравнения;

m – число независимых переменных.

Целью такого анализа было найти наилучшее регрессионное уравнение с наименьшим числом независимых переменных и имеющее еще высокую достоверность. Для этого применяем метод "исключения" с использованием множественного коэффициента

корреляции в качестве критерия [2]. Сравнивая множественные коэффициенты корреляции составленных уравнений, мы выяснили, что при трех ($m = 3$) независимых переменных наиболее значимым стало уравнение с комбинацией x_1, x_3, x_4 независимых переменных ($R = 0,6329$). При четырех переменных с x_1, x_3, x_4, x_6 ($R = 0,6598$) и при пяти переменных с x_1, x_2, x_3, x_4, x_6 . Надо добавить, что при всех шести переменных $R = 0,7333$. Это значит, что по имеющимся данным так построенная модель объясняет 73% разброса относительно среднего.

Для ясности вкратце об использованном методе "исключения" [2].

Суть метода состоит в следующем:

1. Рассматривается регрессионное уравнение, включающее все переменные.

2. Рассматриваются величины частного F -критерия, для оценивания значимости регрессионных коэффициентов обозначаемые через F_k (где $k = 1, \dots, N$), и выбирается минимальное значение из $\{F_k\}$ и сравнивается с заранее выбранным уровнем значимости. В данном случае с $F_{0,95}$, последнее дает утверждение о том, что значимость оценок данных регрессионных коэффициентов с 95 %-ной вероятностью не может быть ниже данного уровня. Далее, по данному методу принимается одно из двух решений:

А) если $F_k < F_{0,95}$, то переменная x_k , связанная с F_k , исключается из рассмотрения и производится пересчет уравнения регрессии с учетом оставшихся переменных, затем переходят к этапу 2;

Б) если $F_k \geq F_{0,95}$, то остается регрессионное уравнение таким, как оно вычислено.

В результате применения выше описанного метода было получено уравнение (6) только с тремя независимыми переменными и имеющее точность линейного регрессионного уравнения с восьмью переменными.

$$Y = 4,5313 + 0,6315 \cdot x_3 + 0,02032 \cdot x_1^2 + 0,0107 \cdot x_4^2 - 0,01953 \cdot x_3 \cdot x_4 - 0,01726 x_3. \quad (6)$$

В ы в о д ы

1. Применение регрессионного анализа при оценке оптимальной дозы коагулянта оказалось плодотворным, поскольку найденные регрессионные уравнения имеют высокую математическую достоверность (по R и F).

2. Оказалось целесообразным применение расширенного регрессионного анализа, т.е. нахождение наилучшей функциональной зависимости по F отдельных переменных и применение квадратической регрессии, учитывающей их комплексное влияние.

3. Исходя из уравнений рассчитанных и действительных доз коагулянта (фиг. 2), кажется целесообразным в дальнейшем для повышения сходимости перейти на сезонные регрессионные уравнения.

Л и т е р а т у р а

1. В е л ь н е р Х. А., К а с к А. Г., В и й е с В. Р. О моделировании сложной системы водообеспечения на базе поверхностных источников с учетом качества воды. — Материалы VI Всесоюзного симпозиума по современным проблемам самоочищения водоемов и регулирования качества воды (доклады). Таллин, 1979, сек. 3, ч. II.
2. Д р е й п е р Н., С м и т Г. Прикладной регрессионный анализ. М., Статистика, 1973.
3. П е т е р с о н И., К у к с Я., В и й к м а н н Э., К а р о л и н М. и др. Прикладные программы по математической статистике для ЭВМ "Минск-32". Таллин, Институт кибернетики АН ЭССР, 1977.
4. В и й е с В. Р. Об оценке качества воды для управления сложной водозаборной системой водоочистной станции. — Материалы Всесоюзной конференции "Оценка и классификация качества поверхностных вод для водопользования". Харьков, 1979.

The Regression Analyses Application for
Estimating the Coagulant Dose for Water
Purification Station

Summary

The paper presents the methods of finding functional dependences, using observed data statistically, between the chemical characteristics of water and the coagulant dose for water purification.

For each two-sided dependence, between a chemical characteristics and coagulant dose, the paper presents the most effective dependence function. As the selection criterion the dispersion relation F-criterion was used.

ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ

Все природные процессы в море тесно связаны между собой и определяются физическими, химическими и гидробиологическими условиями в воде. Сложность и изменчивость морских экосистем заставляют обращаться к математическому моделированию проходящих в них процессов. Поэтому в Советском Союзе в течение последних лет ведутся работы по созданию математических моделей описания и функционирования водных экосистем, из которых более существенными можно считать работы А.А. Ляпунова [3], М.Е. Виноградова и его сотрудников [1, 2], Ю.Н. Сергеева и его сотрудников [6].

В общем случае система уравнений, описывающая функционирование водной экосистемы, содержит следующие подсистемы:

- 1) система, описывающая гидрологический режим в водоеме;
- 2) химическая подсистема;
- 3) биологическая подсистема.

Согласно работам Ю. Одума [5], экосистему можно представить в виде отдельно функционирующих элементов, между которыми имеются каналы связи. При этом считается, что между гидродинамическими и химико-биологическими комплексами имеется прямая связь, т.е. гидродинамические процессы оказывают воздействие на химико-биологические процессы, но сами от них не зависят.

А.А. Ляпунов составил модель экосистемы для тропических районов океана, используя идеи Райлея [6] и двухмерное уравнение турбулентной диффузии. Учитываемые компоненты водной экосистемы следующие: солнечный свет (J), ус-

вояемый азот (n_N), усвояемый фосфор (n_P), фитопланктон (p), зоопланктон (f) и детрит (d).

При составлении модели делаются следующие допущения:

1) солнечный свет поглощается водой, фитопланктоном, зоопланктоном и детритом (коэффициенты a , a_1 , a_2 и a_3);

2) усвояемый азот и фосфор расходуются при биосинтезе фитопланктона (коэффициенты h_N и h_P);

3) азот и фосфор выделяются в воду при разложении детрита (коэффициенты v_N и v_P);

4) интенсивность фотосинтеза лимитируется световыми условиями и наличием биогенов (коэффициенты l , g_N и g_P), характеризующие минимальное количество солнечного света, азота и фосфора, необходимое для синтеза единицы биомассы).

Потребление фитопланктона зоопланктоном считается происходящим по схеме Вольтерра (коэффициент β). Размножение зоопланктона, питание зоопланктона детритом и процесс каннибализма учитывается коэффициентами χ_1 , χ_2 и χ_3 , а его естественная смертность и скорость вертикальной миграции коэффициентами ε и ω_2 . Детрит образуется при отмирании зоопланктона и из экскрементов зоопланктона, количество которых пропорционально количеству съеденной пищи (коэффициенты δ_1 , δ_2 и δ_3). Допускается, что фитопланктон полностью потребляется зоопланктоном. Разложение и осаждение детрита учитывают коэффициенты μ и ω_3 . Растворенные соединения биогенных элементов, фитопланктон, зоопланктон и детрит переносятся в вертикальном направлении турбулентной диффузией (коэффициент K). Гравитационное оседание фитопланктона и вертикальная миграция зоопланктона отражаются в коэффициентах ω_1 и ω_3 . Ось глубины z направлена от поверхности в глубину океана. P_p - продукция фитопланктона. Система уравнений А.А. Ляпунова имеет вид:

$$\frac{\partial J}{\partial z} = -J(a + a_1 p + a_2 f + a_3 d) \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_N}{\partial t} = h_N P_p p + v_N d + \frac{\partial}{\partial z} (K \frac{\partial n_N}{\partial z}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_P}{\partial t} = h_P P_p p + v_P p + \frac{\partial}{\partial z} (K \frac{\partial n_P}{\partial z}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha P_p p - \beta f + \frac{\partial}{\partial z} (K \frac{\partial p}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (\omega_1 p) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \gamma_1 p f - \gamma_2 f^2 + \gamma_3 f d - \varepsilon f + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (K \frac{\partial f}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z} (\omega_2 f) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial t} = & \varepsilon f - \mu d + \delta_1 p f + \delta_2 f^2 + \delta_3 f d + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (K \frac{\partial d}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z} (\omega_3 d). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения А.А. Ляпунова дают изменение названных компонентов экосистемы во времени с учетом пространственной неоднородности по глубине рассматриваемого слоя.

В модели не учитывается адекватный перенос и турбулентный обмен в горизонтальной плоскости, поэтому модель А.А. Ляпунова не может быть использована в случае, когда мы имеем дело с существенными горизонтальными неоднородностями. Если в тропических районах основной вынос биогенов определяется квазистационарными гидродинамическими условиями, то в экосистемах умеренных широт это происходит за счет зимней конвенции. Так гидрологические условия в водоеме определяют вид уравнений гидрологической части.

Слабым местом модели А.А. Ляпунова является предположение, что фитопланктон не отмирает, а полностью потребляется зоопланктоном. Как известно, цикл зоопланктона гораздо длиннее, чем у фитопланктона и существует продолжительный период задержки, в течение которого система может достигать сбалансированного состояния. В несбалансированном состоянии мертвая масса водорослей осаждается на дно, и в случае избытка ее запасы кислорода нижних слоев воды расходуются на ее разложение.

Опираясь на результаты натуральных исследований модель А.А. Ляпунова дополнена М.Е. Виноградовым и его сотрудниками. В модель введен бактериопланктон ввиду его существенной роли в передаче энергии и круговорота вещества. Зоопланктон рассматривается по основным видам. Интенсивность питания вычисляется не по схеме Вольтерра, а по соотношению В.С. Ивлева

[1], согласно которому при увеличении концентрации пищи реальный рацион асимптотически стремится к максимальной величине. Уточнением является также учтение концентрации фитопланктона и детрита на ослабление света в воде с эмпирическим уравнением

$$d = 0,01 + 0,001(p + d). \quad (7)$$

где p и d — концентрации фитопланктона и детрита.

Зависимость интенсивности фотосинтеза от величины светового потока определяется в виде

$$P_p = P_{\max} \frac{J}{J_{\text{opt}}} e^{(1 - \frac{J}{J_{\text{opt}}})}, \quad (8)$$

где J_{opt} — световой поток, при котором достигается максимум фотосинтеза P_{\max} .

Для характеристики жизнедеятельности зоопланктона введены такие понятия как усвояемость пищи, коэффициент использования усвоенной пищи на рост, траты на обмен и т.д., причем часть из этих показателей определяется экспериментально, часть вычисляется.

Для описания гидрологической обстановки применяется трехслойная модель. В поверхностном слое ($0 \leq z \leq z_1$) существуют высокие коэффициенты турбулентной диффузии, в слое скачка плотности ($z_1 \leq z \leq z_2$) коэффициент турбулентной диффузии резко снижается и на глубинах ($z > z_2$) вновь возрастает. При этом глубины z_1 и z_2 зависят от времени развития экосистемы. Скорости гравитационного оседания фито- и зоопланктона задаются также по слоям, они определяются вертикальным распределением температуры и солености.

Предполагается, что столб воды перемещается в горизонтальном направлении под воздействием постоянного течения с равномерным распределением скоростей по глубине, а вертикальный перенос происходит за счет турбулентного перемешивания. Это позволяет говорить о времени существования экосистемы от некоторого начального состояния — от момента подъема воды в эвфотический слой до момента опускания его. Эффект суточных миграций зоопланктона учитывается тем, что к пищевым потребностям в слое z_1 добавляется определенная доля пищевых потребностей тех же членов сообще-

ства, находящихся глубже. Распределение элементов экосистемы в начальный момент времени считалось равномерным по глубине.

Функционирование экосистемы в обобщенном виде:

$$\frac{\partial J}{\partial z} = -aJ \quad (9)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -hP_p + \gamma d + \eta \sum R_i + K \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial n}{\partial z} \quad (10)$$

$i = p, b, f_1 \dots f_4, S_1 \dots S_3$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha P_p - R_p - \mu p - \sum C_{pj} + K \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \omega_1 \frac{\partial p}{\partial z} \quad (11)$$

$j = f_1 \dots f_4$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = P_p - R_b - \mu b - \sum C_{bj} + K \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} - \omega_2 \frac{\partial b}{\partial z} \quad (12)$$

$j = f_1 \dots f_4$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = u \sum C_{ji} - R_i - \mu_i x_i - \sum C_{ij} \quad (13)$$

$i = p, b, d, f_1 \dots f_4, S_1 \dots S_3, j = f_1 \dots f_4, S_1 \dots S_3$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \sum (H_i + \mu_i x_i) - \sum C_{di} + K \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} - \omega_3 \frac{\partial d}{\partial z} \quad (14)$$

$i = f_1 \dots f_4, S_1 \dots S_3, j = f_1 \dots f_4$

где n — концентрация биогенных элементов;

$f_1 \dots f_4, S_1 \dots S_3$ — биомассы разных групп зоопланктона;

η — коэффициент выделения биогенных элементов в процессе метаболизма;

R_i — пищевой рацион i -го элемента;

X_i — биомасса i -го элемента зоопланктона;

C_{ij} — частный рацион i -го потребителя корма за счет j -го источника питания;

H_i — неусвоенная пища i -го элемента зоопланктона.

Остальные символы объяснены при представлении модели А.А. Ляпунова.

На основе этой модели получено изменение биомасс элементов системы по мере удаления от зоны подъема воды (или по мере развития системы).

Можно сказать, что в модели учтены многие существенные аспекты распределения элементов пелагической экосистемы для данного района и окажется возможным объяснить ее

функционирование при помощи модели. Недостатком модели можно считать предположение о постоянстве вектора скорости течения в слое 0-200 м и отсутствие горизонтального перемещения. Как известно, иногда в системах с вертикальной стратификацией плотностей динамические процессы в разных слоях существенно различаются и при моделировании нестационарной циркуляции надо учесть динамику поверхности раздела. В модели не рассматривается роль конечных звеньев трофической цепи. Достоинством модели несомненно надо считать учтении региональной специфики.

Ю. Н. Сергеев [6] формулирует задачу моделирования многокомпонентных систем, функционирующих в трехмерном пространстве и во времени. В гидродинамический комплекс модели входят температура, соленость и плотность морской воды, энергия солнечной радиации, составляющие вектора течения по осям координат, возвышение свободной поверхности воды над средним уровнем моря. Компонентами гидробиологического комплекса являются биомассы фитопланктона по видам, биомассы зоопланктона по видам и биомасса бактерий. Отмечается, что выбор компонентов моделирования гидробиологического комплекса может проведен с учетом региональной специфики планктонного сообщества данного водоема.

Компонентами гидрохимического комплекса являются концентрации детрита, гумуса, растворенного органического углерода, растворенного органического азота, растворенного органического фосфора, взвешенного кремния, аммония, нитритов, фосфатов, кремния, входящего в состав ионов растворенной кремнекислоты, кислорода и углекислоты. Ю. Н. Сергеев отмечает, что создание работоспособной модели многокомпонентной морской экосистемы, функционирующей в трехмерном пространстве и во времени, связано с решением ряда проблем, относящихся к сферам интересов различных наук: гидробиологии, гидрохимии, физической океанологии, вычислительной математики, системного программирования и т.д. В начальный момент времени должны быть заданы согласованные между собой начальные концентрации субстанций моделируемого комплекса: трехмерные поля всех участвующих в решении задачи физических, химических и биологических характеристик, а также на границе бассейна граничные условия. Возникает проблема информационной и программной увязки от-

дельных подсистем общей задачи и комплекс задач моделирования перерастает в автоматизированную систему анализа поведения морского биогеоценоза. Если сравнивать эти три модели, их преимущества и недостатки, то самую полную картину о функционировании экосистемы дает модель, предлагаемая Ю.Н. Сергеевым. С другой стороны, экологические модели мы должны главным образом оценивать по их способности указывать основное направление изменений и исследований, с этого аспекта оправдывают себя также модели А.А. Ляпунова и М.Е. Виноградова.

Известно, что даже в пределах одного вида и в одинаковых условиях могут особи вести себя по-разному, тем более, всю индивидуальность видов в модели мы не можем отразить. Поэтому кажется целесообразным больше внимания обращать на гидродинамические условия, которые существенно влияют на распределение планктонного сообщества, а также на влияние различных загрязнителей. Значит, необходимо экспериментально исследовать направленность и степень влияния различных загрязнителей на основные живые элементы системы. Без таких оценок ни одна модель не может отойти от уровня качественного анализа и не имеет существенных прогностических свойств. С.К. Снедакер [7] отмечает, что искусство нахождения агрегированной биологической модели и уровня допустимой детализации может оказаться для моделирования важнее применяемых с этой целью вычислительно-математических методов.

Возможность значительного изменения основной структуры системы под влиянием загрязнения говорит в пользу высокоагрегированных моделей, малочувствительных к внутренним структурным переменам.

Л и т е р а т у р а

1. В и н о г р а д о в М.Е. Биологическая продуктивность океана. М., Наука, 1977.
2. В и н о г р а д о в М.Е., К р а п и в и н В.Ф., М е н щ у т к и н В.В. и др. Математическая модель функционирования экосистемы пелагиали тропических районов океана. — Океанология, 1973, т. 13. № 5.

3. Л я п у н о в А.А. Функционирование пелагических сообществ тропических районов океана. М., Наука, 1971.

4. М е н ш у т к и н В.В., В и н о г р а д о в М.М., Ш у ш к и н а Э.А. Математическая модель экосистемы пелагиали Японского моря. - Океанология, 1974, т. 14, № 5.

5. О д у м Ю. Основы экологии. М., Мир, 1975.

6. С е р г е е в Ю.М. Математическое моделирование морских экологических систем. Л., 1977.

7. Человек и биосфера, 1979, вып. 3.

A. Vösu

The Problems of Modelling the Aquatic Ecosystems

Summary

The present paper is a study of the three main researches by the USSR scientists into the problems of modelling the marine pelagic ecosystems. The relative importance of hydrodynamical, chemical and biological subsystems has been analysed and the necessary degree of detailing the models discussed.

С о д е р ж а н и е

1. Ю.Н. Липре, Х.А. Мельдер. Основные качественно-количественные параметры систем оборотного водоснабжения рыбных хозяйств	3
2. В.А. Блонская, Х.А. Мельдер, Л.М. Пикков. Очистка воды в системах оборотного водоснабжения форелевых хозяйств.....	9
3. Э.Г. Каск. Потери механической энергии при периодическом движении жидкости в напорной трубе.....	17
4. Л.Я. Айнола, Ю.Ю. Ламп, У.Р. Лийв, Л.Э. Сарв. Теоретическое исследование неустановившегося движения жидкости в круглых трубах при помощи диссипативной модели.....	25
5. Л.Я. Айнола, Т.А. Коппель, Ю.Ю. Ламп, У.Р. Лийв. Исследование локальных скоростей при разгонном движении жидкости из состояния покоя в трубе...	35
6. В.С. Темкина. О форме свободной поверхности при установившемся движении жидкости в ограниченной плоской области.....	47
7. А.Г. Вызу. Об эффективности выделения высококонцентрированных минеральных взвесей в тонкослойном отстойнике.....	59
8. Ю.Н. Липре, Х.А. Мельдер. Модель себестоимости воды в системе оборотного водоснабжения рыбных хозяйств.....	63
9. В.Р. Вийес, П.У. Валле. О возможности применения регрессионного анализа при оценке дозы коагулянта водоочистной станции.....	67
10. А.Л. Вызу. Вопросы моделирования водных экосистем.....	77



ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Труды ТПИ № 472

Прогнозирование и регулирование качества воды
водоемов и исследование методов очистки при-
родных и сточных вод.

Сборник статей по санитарной технике XIII

Редактор Л. Пааль. Техн. редактор В. Ранник

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 17 апр. 1979 г.

Подписано к печати 18 дек. 1979 г. Бумага 60x90/16

Печ. л. 5,5+0,5 приложение. Уч.-изд. л. 4,84

Тираж 300. МВ-04148.

Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскля, 2/9. Зак. № 790

Цена 70 коп.



EESTI AKADEEMILINE RAAMATUKOGU



1 0200 00082131 8

Цена 70 коп.