

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 269

**СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА**

СБОРНИК СТАТЕЙ

VII

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 269 1968

УДК 624

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

VII

Э. В. В. 43

ТАЛЛИН 1968



Ep. 9078

УДК 539.384

И.И. Ааре

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТАЛЬНЫХ БАЛОК

В работе приводятся результаты экспериментального исследования действительной работы тонкостенных клепанных и сварных балок на статическую нагрузку. Особое внимание было уделено вопросу о поведении стенок тонкостенных балок при больших нагрузках.

Предлагаемое экспериментальное исследование составляет вторую часть общей работы, посвященной выявлению поведения стенки тонкостенной металлической балки в закритической стадии. В первой, теоретической части работы в этой области, которая в основном доложена в статьях [1] [2], были представлены основные зависимости для расчетной оценки напряженного и деформированного состояния стенки балки.

Для решения поставленных задач было исследовано три серии опытных балок, схемы которых представлены в табл. I.

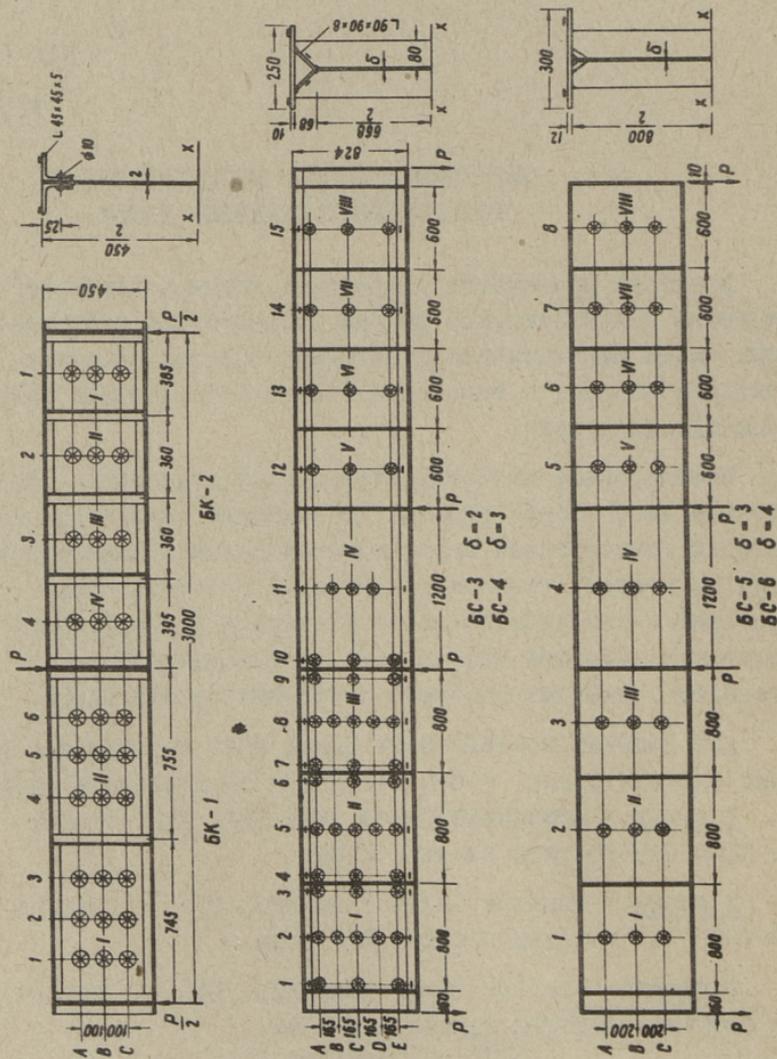
I серия - клепанные балки типа БК1, БК2; пролет $l = 3000$ мм, толщина стенки 2 мм;

II серия - сварные балки типа БС3, БС4; пролет $l = 6000$ мм; толщина стенки 2 и 3 мм.

III серия - сварные балки типа БС5, БС6; пролет $l = 6000$ мм, толщина стенки 3 и 4 мм.

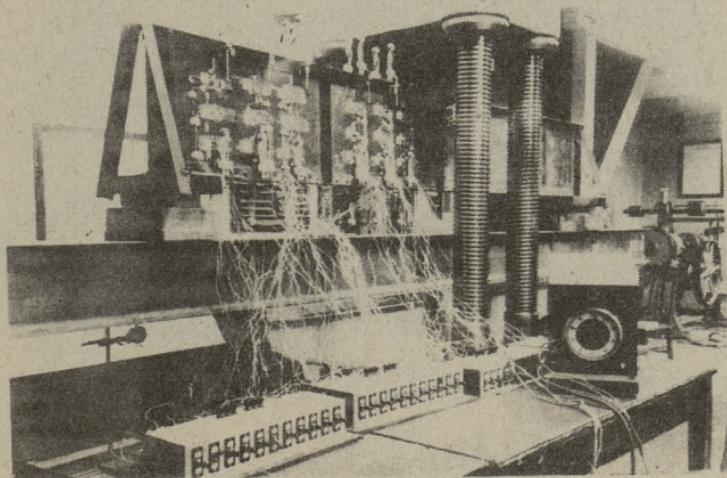
Стенки балки были подкреплены только поперечными ребрами жесткости. Все образцы были запроектированы из стали Ст.3 и изготовлены на Таллинском машзаводе.

Таблица I



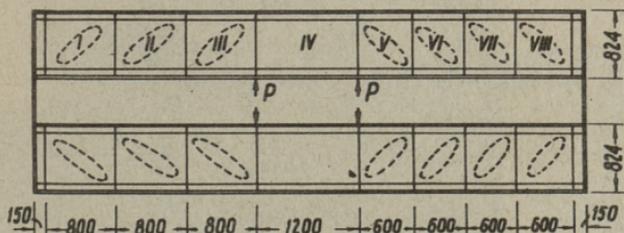
Проведение эксперимента

Балки I серии испытывались на установке, показанной на фиг. 1.



Фиг. 1

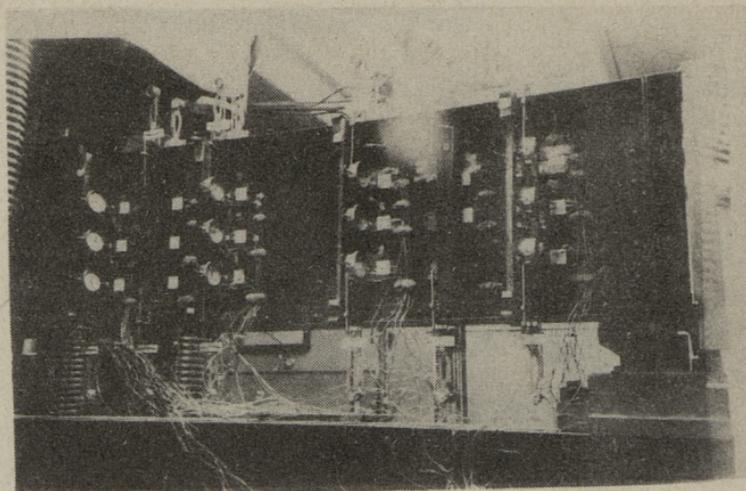
Балки загружены в середине пролета сосредоточенной нагрузкой. Испытание балок II и III серии проводилось на специальном стенде, схема которого приведена на фиг. 2.



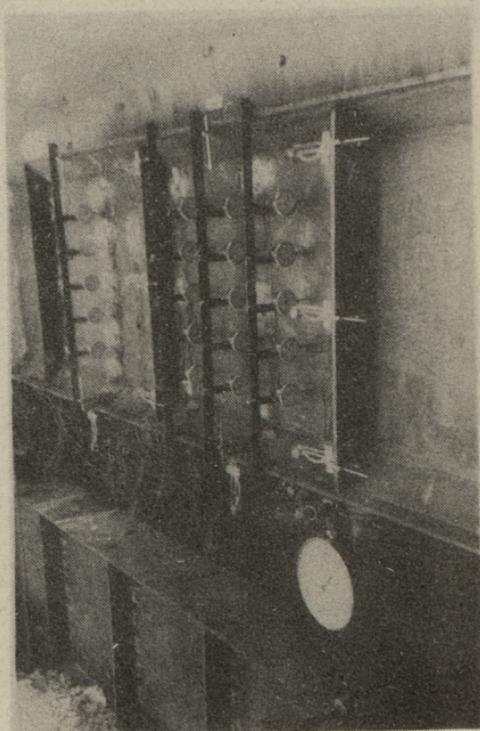
Фиг. 2

Балки загружались двумя 50-тонными гидравлическими домкратами: расположенными на поясе балки. Общая устойчивость балок обеспечивалась рамами, которые соединяли верхние и нижние пояса обеих балок.

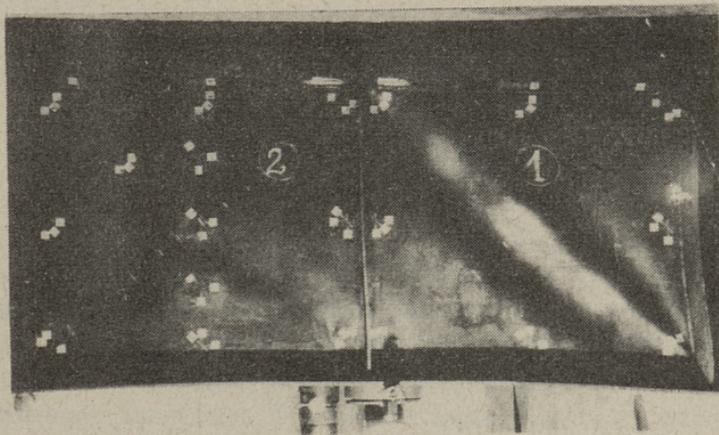
Для измерения вертикальных прогибов балок и боковых выпучин стенок панелей применялись индикаторы с ценой деления 0,01 мм. Относительные деформации стенки балки измерялись проволочными датчиками сопротивления (база 20 мм, со-



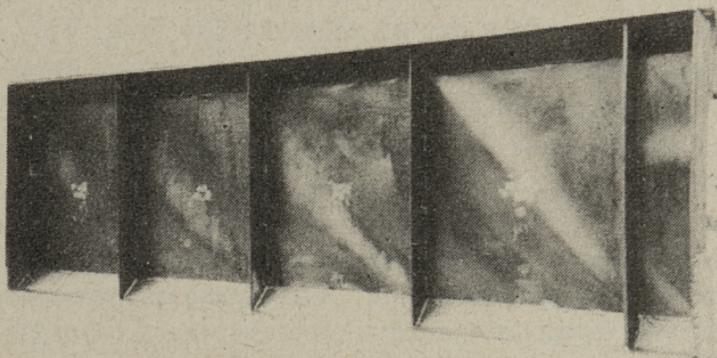
Фиг. 3 а



Фиг. 3 б



ФИГ. 3 в



ФИГ. 3 г

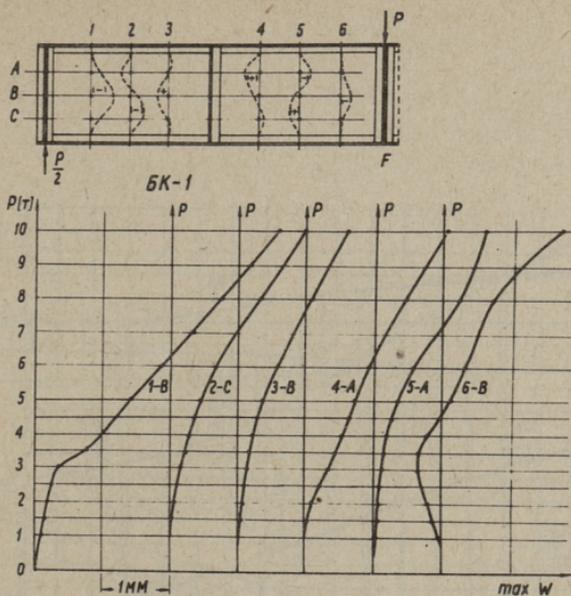
противление $199 - 202 \Omega$) при помощи электрического измерителя деформаций ЭУ Д-3. Датчики были расположены по обеим сторонам стенки в виде розеток из 3-4 датчиков (фиг. 3).

Относительные деформации поясов измерялись при помощи механических тензометров с базой 20 мм. Начальные прогибы стенки балки определялись при помощи стальной линейки и индикаторов.

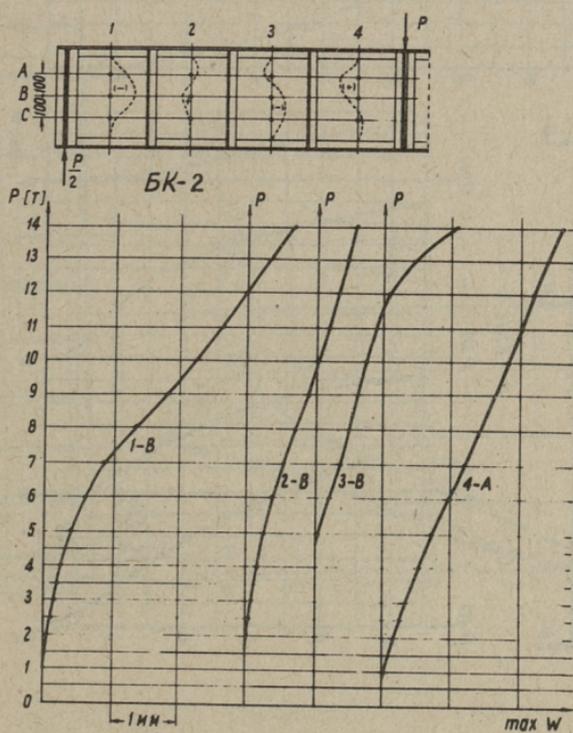
Результаты испытаний

а. П о в е д е н и е с т е н к и б а л к и. Как показали испытания, выпучивание стенки балки происходит уже в начальной стадии нагружения балки, что объясняется наличием в стенке балки первоначальных прогибов. При малых нагрузках отдельные панели выпучивались почти равномерно по всей поверхности. С увеличением нагрузки в отдельных панелях начиналось образование двух - трех складок вдоль диагонали. На фиг. 4 представлены графики наибольших деформаций отдельных панелей балок. Анализ полученных результатов выявил, что по этим графикам трудно точно определить критические нагрузки для отдельных панелей. При применении метода касательных можно приблизительно определить критические нагрузки, значения которых представлены на фиг. 4.

На фиг. 4 также нанесены значения критических нагрузок, полученных расчетным путем, допуская при этом, что панели свободно оперты по контуру и нагружены только сдвигающими нагрузками. Графики на фиг. 4 показывают, что в крайних панелях, нагруженных в основном сдвигающими усилиями, складки направлены по диагоналям и имеют наибольшую глубину по сравнению с другими панелями. Также выясняется, что при наличии нормальных напряжений, боковые выпучины стенки балки практически не увеличиваются. Полученные экспериментальные результаты хорошо сходятся с теоретическими выводами сделанными автором.

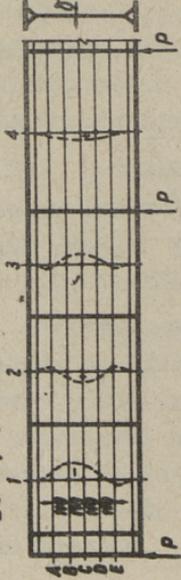


Фиг. 4 а

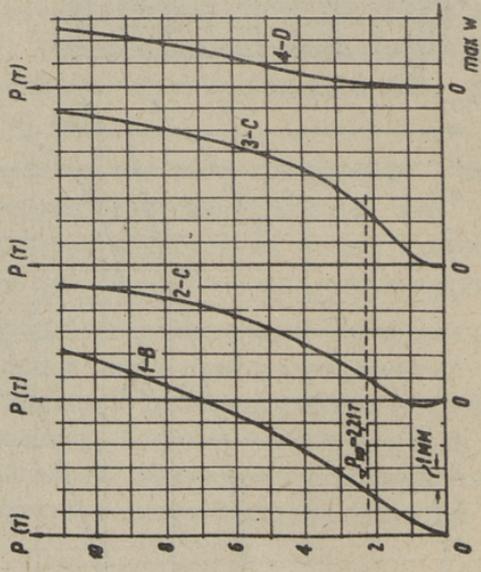


Фиг. 4 б

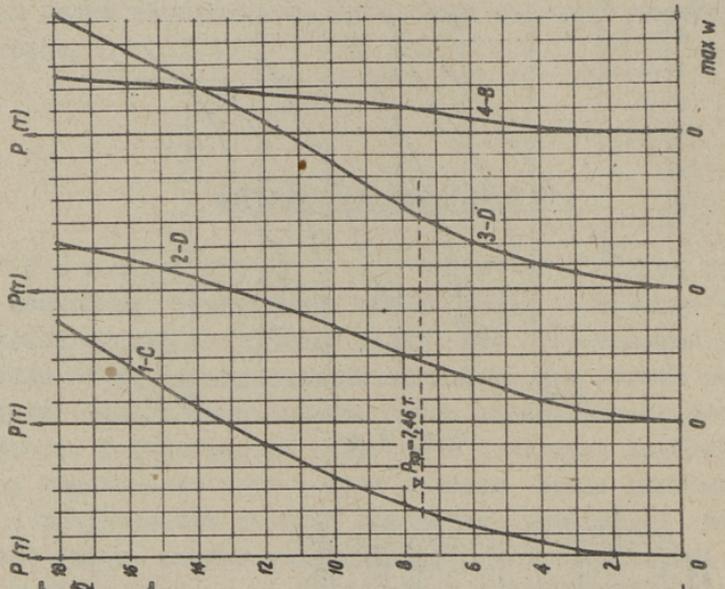
BC-3; $\delta=2\text{MM}$
 BC-4; $\delta=3\text{MM}$

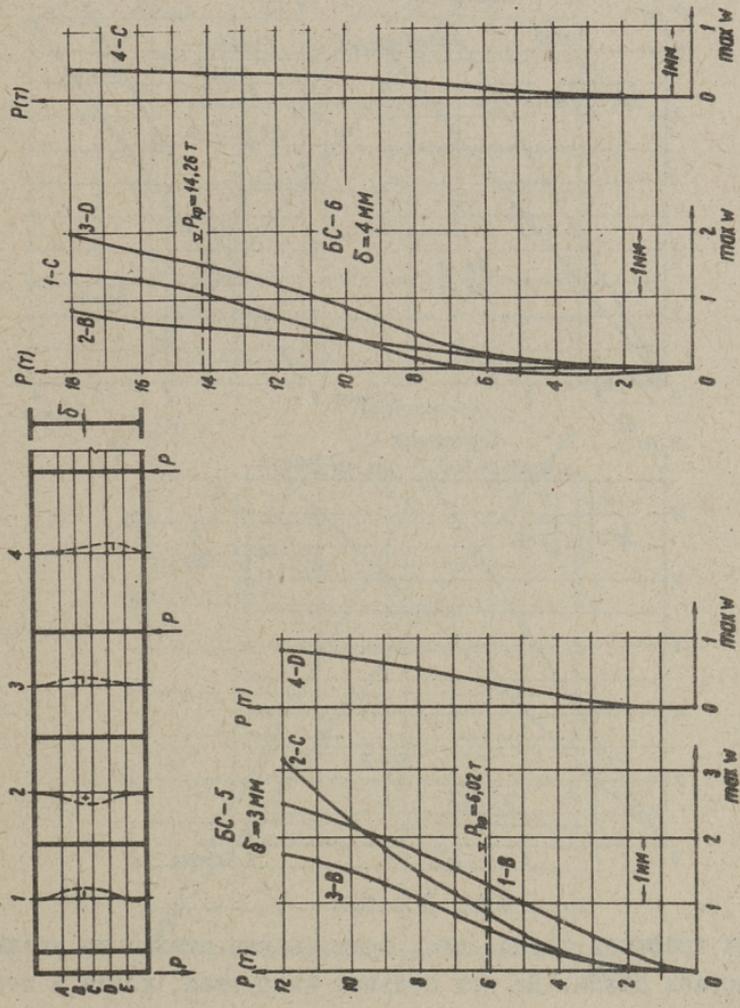


$\delta=2\text{MM}$



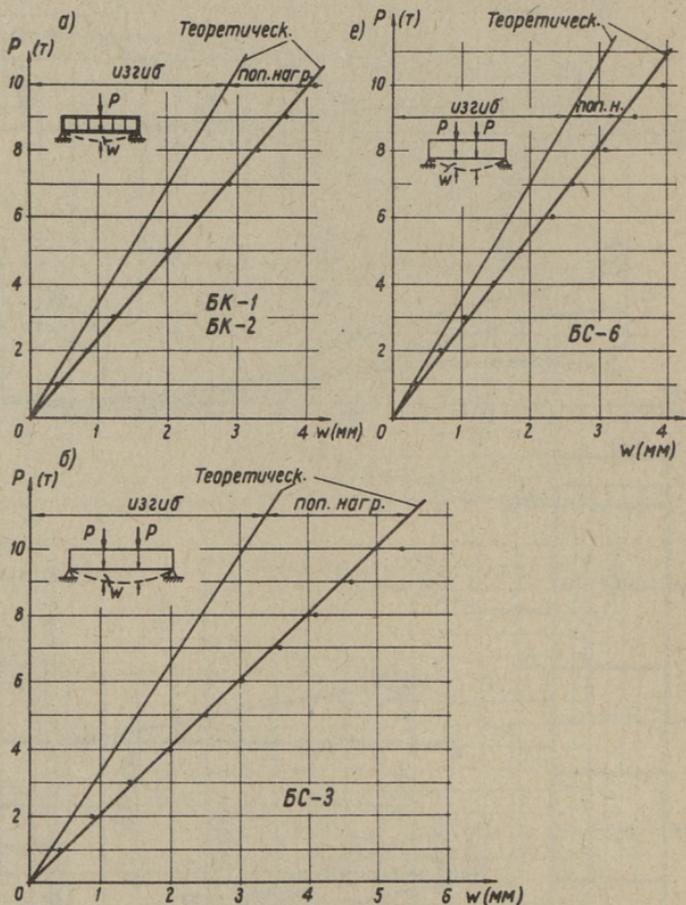
$\delta=3\text{MM}$





Фиг. 4 Г

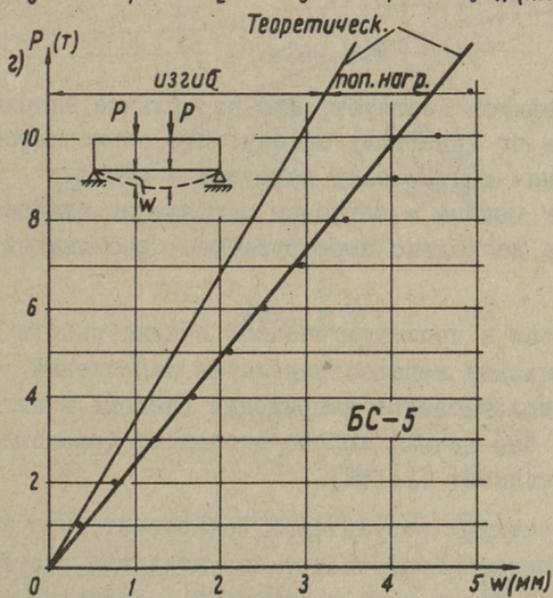
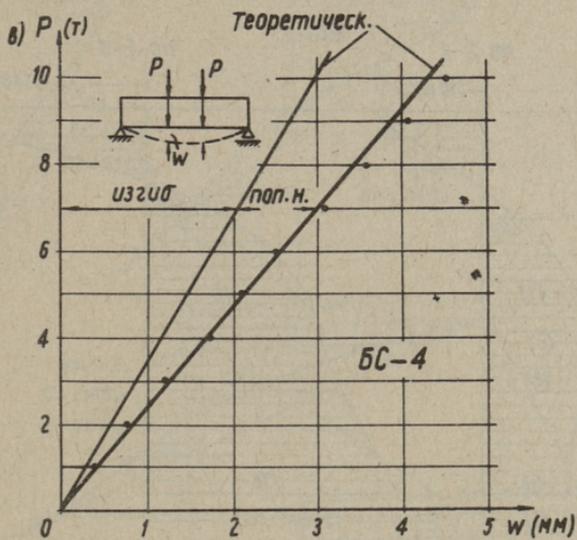
б. Вертикальные прогибы балок. На фиг. 5 представлены зависимости между нагрузками и прогибами, измеренными в сечениях под нагрузками.



Фиг. 5 а, б, в

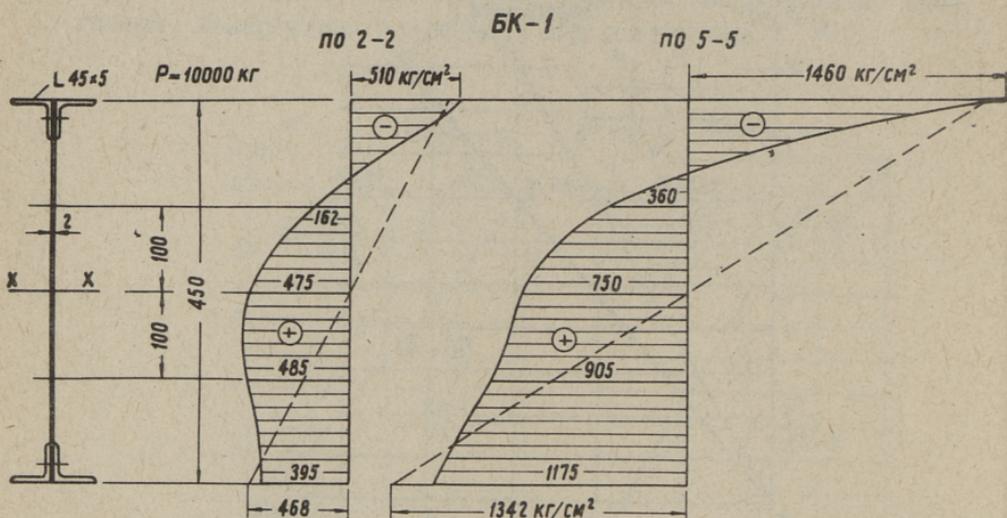
Из этих графиков видно, что выпучивание стенки не увеличивает прогибы балки. Но при больших нагрузках, когда в стенке начинается образование пластических деформаций, рост вертикальных прогибов убыстряется.

Сравнивая полученные экспериментальные результаты с расчетными, мы видим, что они практически совпадут, когда при расчетной оценке учитывается влияние поперечных сил. (Фиг. 5)



Фиг. 5 в, г

в) Напряженное состояние балок
 На фиг. 6 даны эпюры цепных напряжений в различных сечениях балок.



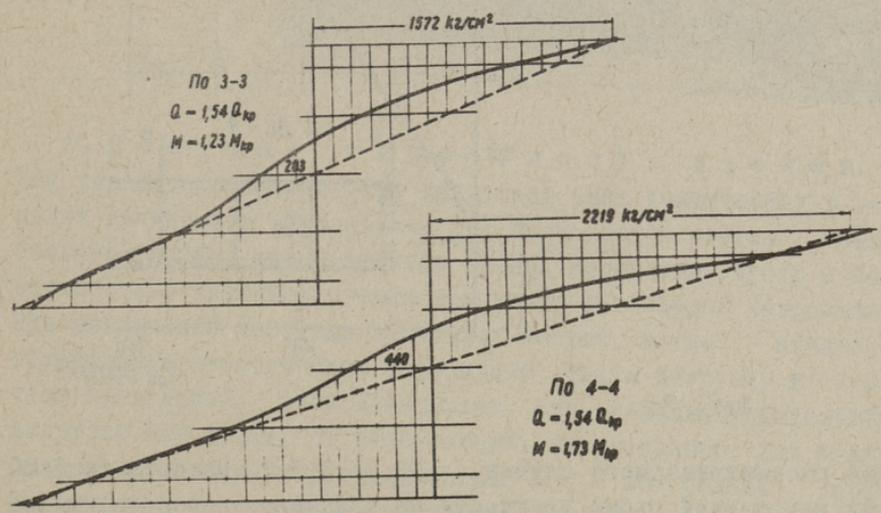
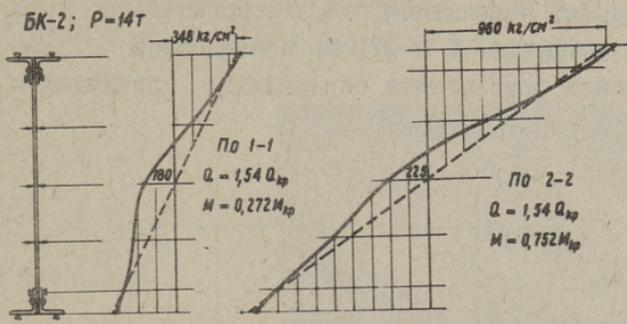
Фиг. 6 а

Из этих графиков явствует, что нормальные напряжения не распределяются по линейному закону. Это объясняется тем, что после превращения критической нагрузки в панелях возникают дополнительные цепные и изгибные напряжения. Вследствие этого сжатый пояс несколько перегружается, растянутый пояс разгружается.

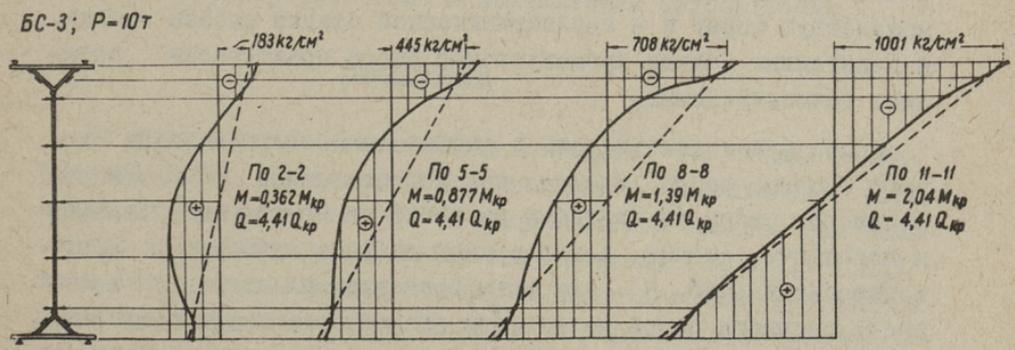
Таким образом в послекритической стадии работы в сечениях балки происходит перераспределение напряжений. Сравнение измеренных и подсчитанных напряжений (цепные и изгибные) показывает, что они весьма хорошо совпадают (расхождение между ними не превышает 12-15%).

Анализ полученных результатов показывает, что увеличение изгибных напряжений существенно не уменьшает несущей способности балки. Кроме того выясняется, что во время выпучивания стенки, ребра жесткости начинают работать на сжатие, но напряжения в них незначительны.

Для оценки усилий ребер жесткости были измерены относительные удлинения поперечных ребер, расположенных между соседних ребер, расположенных между соседних панелей. На графике фиг. 7 представлена зависимость удлинений ребра жест-

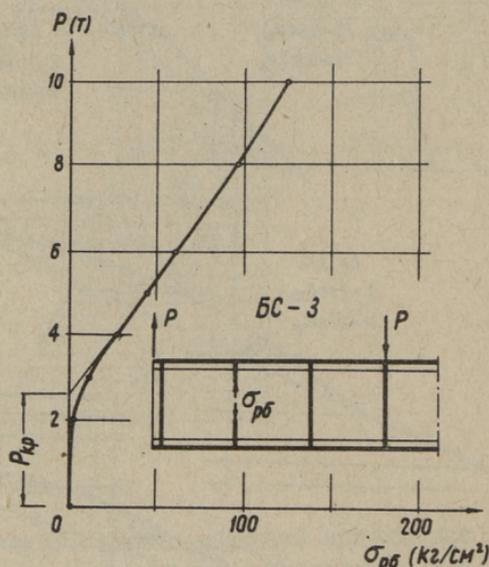


Фиг. 6 б



Фиг. 6 в

кости балки БС-3, расположенного между I и II панелями в середине его длины от приложенной внешней нагрузки. Из графика видно, что сжимающие напряжения ребра относительно малы и развиваются при нагрузке $P \approx 3T$. По приведенной диаграмме мы также сможем приблизительно определить критическую нагрузку панели.

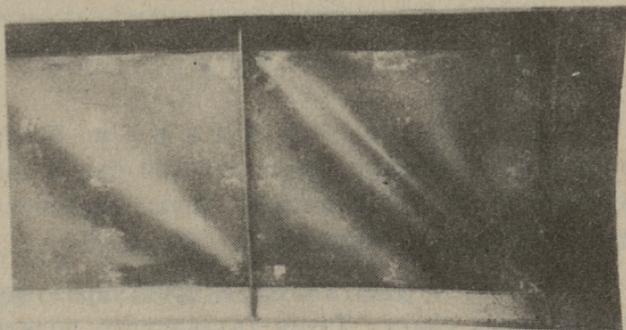


Фиг. 7

Для рассматриваемого случая $P_{kp} \approx 2,5 T$. Малость сжимающих напряжений ребер жесткости не означает, что роль поперечных ребер жесткости в работе тонкостенной балки в целом несущественная. По условию работы стенки особо важно, чтобы ребра имели достаточную изгибную жесткость и сохраняли прямолинейную форму и в послекритической стадии работы стенки. В испытанных балках промежуточные ребра практически остались прямолинейными.

Особо существенную роль в работе тонкостенной балки играют опорные ребра. Именно, при недостаточной жесткости опорного ребра на сжатие и на изгиб он может выпучиваться в плоскости стенки, а это в свою очередь приводит к обрушению балки (фиг. 8). Для выявления влияния изгибной жесткости опорного ребра на несущую способность балки были спроектированы балки БС-5 и БС-6 с опорными ребрами, имеющими разные изгибные жесткости. Результаты испытания показали,

что правое опорное ребро балки БС-5 внезапно теряло несущую способность при нагрузке $P \approx 14 T$, левая опорная панель в то же время работала безупречно.



Фиг. 8

г. Несущая способность стенок.

Как уже было отмечено, при нагрузках выше критических в панелях начинается образование 2-3 волн. Почти всегда наибольшую глубину имеют средние волны. Вследствие этого в поверхностных волокнах стенки возникают наибольшие напряжения. При увеличении нагрузки наступает момент, когда начнется образование пластических деформаций. Такую нагрузку и считаем предельной. Опыт показывает, что указанная предельная нагрузка еще далека от разрушающей. Так, например, для балки БС-3 разрушающая нагрузка примерно в 1,8 раз больше предельной. Обрушение балки произошло в результате внезапного искривления опорного ребра в плоскости стенки под действием сжимающих и изгибных напряжений. Одновременно с искривлением опорных ребер произошло и искривление поясов балки.

Заключение

Из приведенного исследования вытекает, что стенки тонкостенной балки, нагруженной изгибающими и сдвигающими усилиями, способны работать и в закритической стадии. Так как стенки всех балок имели начальные выпучины ($\delta_0 = 0,3-1,2\delta$), то в связи с этим уже при малых нагрузках стенка изгибается в поперечном направлении. Кроме того, выяснилось, что выпучивание стенки не снижает жесткости балки в целом. Полученные результаты показывают, что критическая нагрузка для отдельных панелей не является обоснованным критерием оценки

несущей способности, стенки балки. В реальных условиях закри- тическая стадия работы стенки наступает при небольших на- грузках, а несущая способность стенки зависит от ее гибкости и от жесткости контура на сжатие и на изгиб.

Л и т е р а т у р а

1. И.И. А а р е, С.И. И д н у р м. Исследование работы стенки тонкостенной металлической балки после потери устой- чивости от сдвига и изгиба. Труды Таллинского политехниче- ского института, серия А, № 259, 1968.

2. И.И. А а р е. Расчет и проектирование тонкостенных ме- таллических балок. Труды Таллинского политехнического инсти- тута, серия А, № 259, 1968.

3. Д.С. М к р ч а н ц. Исследование работы составных балок двутаврового профиля из алюминиевых сплавов. Академия строительства и архитектуры СССР, Государственное издатель- ство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. Москва 1962.

4. R.L. М о о r e. Observation on the Behavior of Aluminium Alloy Test Girders. Transactions, ASCE, Vol. 112, 1947, p.901.

J. Aare

Tests of Plate Girders with a Thin Web

Summary

This paper presents informations of the experimental results obtained from tests on riveted and welded steel plate girders with a thin web. The phenomena of web buck- ling and its effect upon the load-carrying capacity of plate girders were carefully observed. A detailed exami- nation is made of the behaviour of the flanges and stiffe- ners.

УДК 624.072

И.И. Ааре, С.И. Иднурм

РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК НАГРУЖЕННЫХ СДВИГОМ, ИЗГИБОМ И
СЖАТИЕМ В ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

В в е д е н и е

При проектировании строительных конструкций все больше внимания обращается на экономию материала. Одним из более выгодных методов экономии стали являются проектирование и сооружение тонкостенных металлических конструкций так, чтобы стенка работала в послекритической стадии.

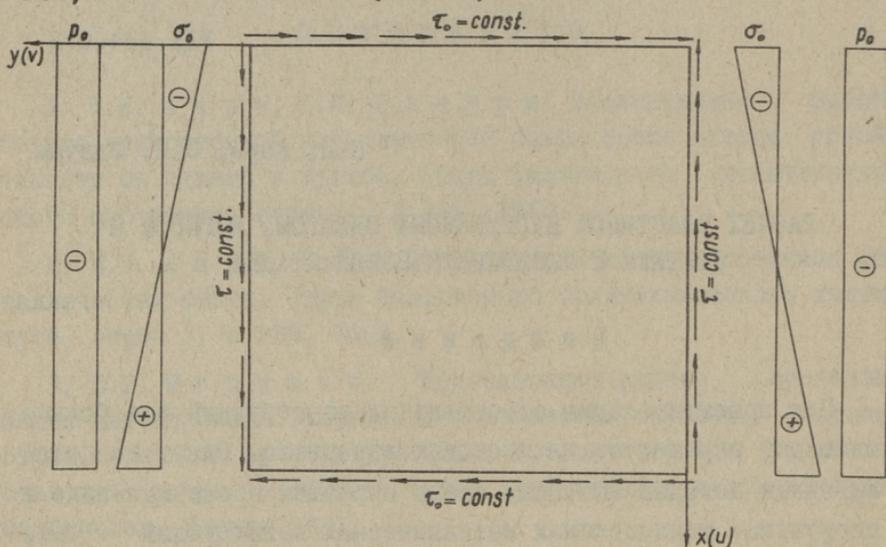
Потеря устойчивости стенки тонкостенной металлической конструкции не всегда является потерей несущей способности и существование достаточно жестких поясов сообщает шв-стинке дополнительную прочность. В результате под действием возрастающей нагрузки в наиболее напряженных частях пластинки появляется текучесть и достигается предельная нагрузка пластинки.

К сожалению поведение пластинок нагруженных сдвигом, изгибом и сжатием в послекритической стадии пока мало изучено. Во многих строительных конструкциях довольно часто существует такая комбинация нагрузок - например, стенки предварительно напряженных металлических балок, рам и т.д.

В настоящей работе исследуется поведение стенок тонкостенных пластинок после потери устойчивости, а также определяются критические параметры.

I. Определение критических параметров

Рассмотрим свободно опертую пластинку нагруженную сдвигом, изгибом и сжатием (Фиг. I).



Фиг. I

Решение задачи базируется на основном дифференциальном уравнении для прогиба w тонкой плоской пластинки (уравнение Сен-Венана).

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w = \delta \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (1)$$

где δ - толщина пластинки.

Предполагаем, что после потери устойчивости пластинка выпучивается в форме, которую можно выразить функцией w ,

$$w = \delta \sum_{m=1,2}^p \sum_{n=1,2}^q a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2)$$

применяя метод Б.Г. Галеркина получаем систему алгебраических уравнений, которую можно выразить в форме (3)

$$4K_1 l^2 a_{kl} + 64K_2 \frac{l^2}{\pi^2} \sum_{m=1,2}^p a_{ml} \frac{m\kappa}{(m^2 - \kappa^2)^2} + 128K_3 \sum_{m=1,2}^p \frac{q}{n\pi^2 \beta} \frac{m\kappa l m n a_{mn}}{(m^2 - \kappa^2)(n^2 - l^2)} - \frac{a_{kl} (\kappa^2 + l^2 \beta^2)^2}{3(1-\mu^2)\beta^2} = 0, \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots, m, \dots, p,$
 $l = 1, 2, \dots, n, \dots, q.$

\sum^* - члены, где $m + k$ нечетный,
 $\sum \sum^{**}$ - члены, где $m + k$ и $n + l$ нечетные,

$$K_1 = \frac{p_0 a^2}{\pi^2 E \delta^2}; \quad K_2 = \frac{\sigma_0 a^2}{\pi^2 E \delta^2}; \quad K_3 = \frac{\tau_0 a^2}{\pi^2 E \delta^2}.$$

Как видно из выражения (3), число неизвестных параметров превышает число уравнений. Кроме неизвестных параметров a_{mn} в функции прогиба w , имеются еще неизвестные параметры нагрузки K_1, K_2, K_3 .

До потери устойчивости все параметры a_{mn} являются равными нулю. При нагрузке, которая превышает критическую нагрузку на бесконечно малое значение, часть параметров a_{mn} получает значения, отличающиеся от нуля (какие именно параметры конкретно - это зависит от постановки задачи).

Предполагаем, что $a_{st} \neq 0$. Тогда при критической нагрузке можно делить систему (3) на a_{st} . Получаем новую систему (4).

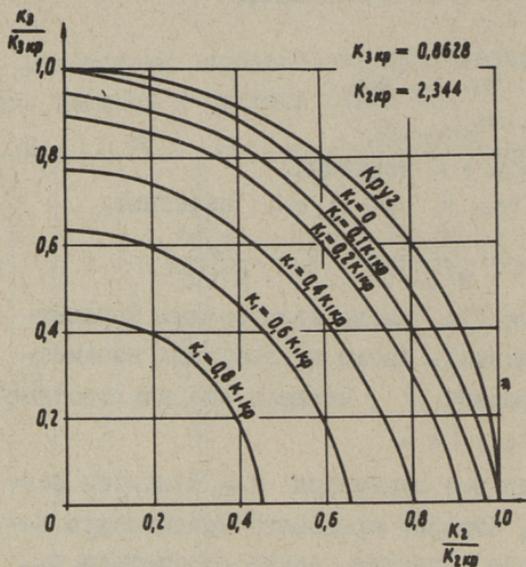
$$4K_1 l^2 \varphi_{kl} + 64K_2 \frac{l^2}{\pi^2} \sum_{m=1,2}^p \varphi_{mk} \frac{mk}{(m^2 - k^2)^2} + 128K_3 \frac{kl}{\pi^2 \beta} \sum_m^p \sum_n^q \varphi_{mn} \frac{mn}{(m^2 - k^2)(n^2 - l^2)} - \frac{\varphi_{kl}(k^2 + l^2 \beta^2)^2}{3(1 - \mu^2)\beta^2} = 0, \quad (4)$$

где $\varphi_{kl} = \frac{a_{kl}}{a_{st}}; \quad \varphi_{mn} = \frac{a_{mn}}{a_{st}} \quad \text{и т. д.}$

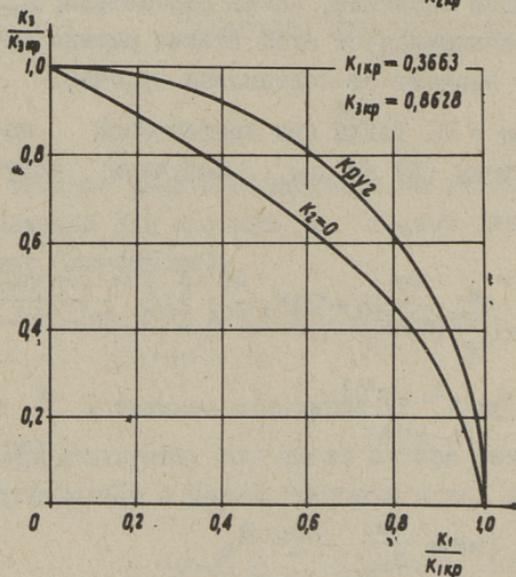
Такая же система для пластинок нагруженных касательными напряжениями была использована в диссертации И.И.Ааре [1].

В системе алгебраических уравнений число параметров φ_{mn} на единицу меньше, чем число уравнений. Придавая двум параметрам нагрузки числовое значение, можно определить тре-

тый параметр нагрузки и параметры $\varphi_{\text{тп}}$ из системы квадратных уравнений (4).



Фиг. 2



Фиг. 3

Но система (4) была получена в предположении, что нагрузка превышала критическую нагрузку на бесконечно малое значение, то наименьший по модулю параметр нагрузки K и ему соответствующие параметры $\varphi_{\text{тп}}$ представляют критические параметры.

Описанный метод удобен тем, что кроме значений критической нагрузки получаем и значение параметров $\varphi_{\text{мп}}$, которые легко позволяют определить выпученную форму пластинки.

Все дальнейшие расчеты сделаны в предположении, что $\beta = \frac{a}{b} = 1$. Выбирая, например, $p = 3$ и $q = 3$, получаем систему из 9 квадратных уравнений. Полученные критические параметры нагрузки и критические $\varphi_{\text{мп}}$ представлены на рис. 2, 3, 4. Выражения критических напряжений через параметры K :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{окр}} &= K_1 \pi^2 E \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \\ \sigma_{\text{окр}} &= K_2 \pi^2 E \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \\ \tau_{\text{кр}} &= K_3 \pi^2 E \left(\frac{\delta}{a} \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Исследование поведения пластинок в послекритической стадии

Задача решена при помощи уравнений Кармана (6) и (7)

$$\nabla^4 F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (6)$$

$$D \nabla^4 w = \delta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (7)$$

Где F представляют функцию напряжений определяющую напряжения в срединной поверхности пластинки

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy}. \quad (8)$$

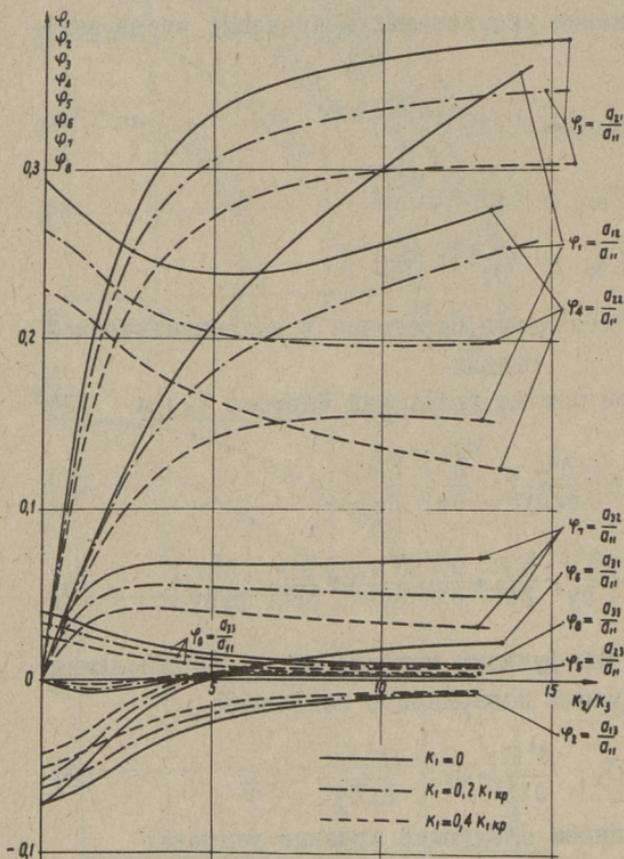
В данной задаче имеем следующие краевые условия:

$$1) \int_0^a \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right]_{y=0}^{y=b} dx = \int_0^a \left[-p_0 + \sigma_0 \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) \right]_{y=0}^{y=b} dx; \quad \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right]_{y=0}^{y=b} = \tau_0 = \text{const.}$$

$$2) \int_0^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right]_{x=0}^{x=a} dy = 0; \quad \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right]_{x=0}^{x=a} = \tau_0 = \text{const.}$$

$$3) \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_{\substack{y=0 \\ y=b}} = 0$$

$$4) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{x=0} = \text{const} = -\frac{2\sigma_0}{aE} \quad (9)$$



Фиг. 4

и геометрические условия:

$$1) x=0, a; \quad w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;$$

$$2) y=0, b; \quad w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad (10)$$

Выбирая функцию прогиба пластинки w в форме:

$$w = \delta \sum_{m=1,2} \sum_{n=1,2} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (11)$$

и подставляя (II) в уравнение (6), получаем после интегрирования выражение для функции напряжений F .

$$F = -\frac{1}{2} p_0 x^2 - \sigma_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{a} \right) - \tau_0 E \sum_{t=0,1} \sum_{s=0,1} f_{ts} \cos \frac{t\pi x}{a} \cos \frac{s\pi y}{b} + \\ + A \frac{x^2}{2} + B \frac{y^2}{2};$$

где $f_{ts} = \frac{c_{ts} \beta^2}{(t^2 + s^2 \beta^2)^2},$

$$c_{ts} = \frac{1}{2} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 m^2 n^2 + \quad \text{zde} \begin{cases} t=2m \\ s=0 \end{cases} \cup \cup \cup \begin{cases} t=0 \\ s=2m \end{cases} \quad (12) \\ + \frac{1}{4} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q (mq + np)^2 a_{mn} a_{pq} - \quad \text{zde} \begin{cases} t=|m-p| \\ s=|n+q| \end{cases} \cup \cup \cup \begin{cases} t=|m+p| \\ s=|n-q| \end{cases} \\ - \frac{1}{4} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q (mq - np)^2 a_{mn} a_{pq} \cdot \quad \text{zde} \begin{cases} t=|m-p| \\ s=|n-q| \end{cases} \cup \cup \cup \begin{cases} t=|m+p| \\ s=|n+q| \end{cases}.$$

Неизвестные параметры a_{mn} функции прогиба получаем из уравнения (7). Применяя метод Б.Г.Галеркина, получаем систему кубических уравнений (13).

$$4K_1 l^2 a_{kl} + 64K_2 \frac{l^2}{\pi^2} \sum_m^* a_{ml} \frac{mk}{(m^2 - k^2)^2} + 128K_3 \frac{kl}{\pi^2 \beta} \sum_m \sum_n^{**} \frac{mn a_{mn}}{(m^2 - k^2)(n^2 - l^2)} - \\ - \frac{a_{kl} (k^2 + l^2 \beta^2)^2}{3(1 - \mu^2) \beta^2} + \sum_m \sum_n a_{mn} \left[(ml - nk)^2 (f_{m-k, n-l} + f_{k-m, n-l} + \right. \\ \left. + f_{m-k, l-n} + f_{k-m, l-n} + f_{m+k, n+l}) - (ml + nk)^2 (f_{m-k, l+n} + \right.$$

$$+ f_{k-m, l+n} + f_{m+k, n-l} + f_{m+k, l-n}] = 0, \quad (I3)$$

где

$$K_1 = \frac{p_0 a^2}{\pi^2 E \delta^2}; \quad K_2 = \frac{\sigma_0 a^2}{\pi^2 E \delta^2}; \quad K_3 = \frac{\tau_0 a^2}{\pi^2 E \delta^2}.$$

\sum^* - члены, где $m+k$ нечетный
 \sum^{**} - члены, где $m+k$ и $n+l$ нечетные

В настоящей работе было принято 9 членов в функции прогиба - $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$. Получаемая система содержала 9 кубических уравнений по 174 члена в каждой.

Главной целью было определить предельную нагрузку в пластинке по 4-ой теории прочности в зависимости от параметров нагрузки K_1, K_2, K_3 и гибкости ($\frac{a}{\delta}$). Предельной нагрузке соответствуют такие значения параметров нагрузки K_1, K_2, K_3 , чтобы максимальное напряжение $\sigma_{ред}$ на поверхности пластинки не превышало предела пропорциональности σ_T .

$$\sigma_{ред} = \sqrt{(\sigma_x + \sigma'_x)^2 + (\sigma_y + \sigma'_y)^2 - (\sigma_x + \sigma'_x)(\sigma_y + \sigma'_y) + 3(\tau + \tau')^2} \leq \sigma_T, \quad (I4)$$

где фибровые напряжения

$$\sigma_x = -\frac{E\pi^2\delta^2}{b^2} \sum_t \sum_s s^2 f_{ts} \cos \frac{t\pi x}{a} \cos \frac{s\pi y}{b}$$

$$\sigma_y = -\frac{E\pi^2\delta^2}{a^2} \left[K_1 - K_2 \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) + \sum_t \sum_s t^2 f_{ts} \cos \frac{t\pi x}{a} \cos \frac{s\pi y}{b} \right] \quad (I5)$$

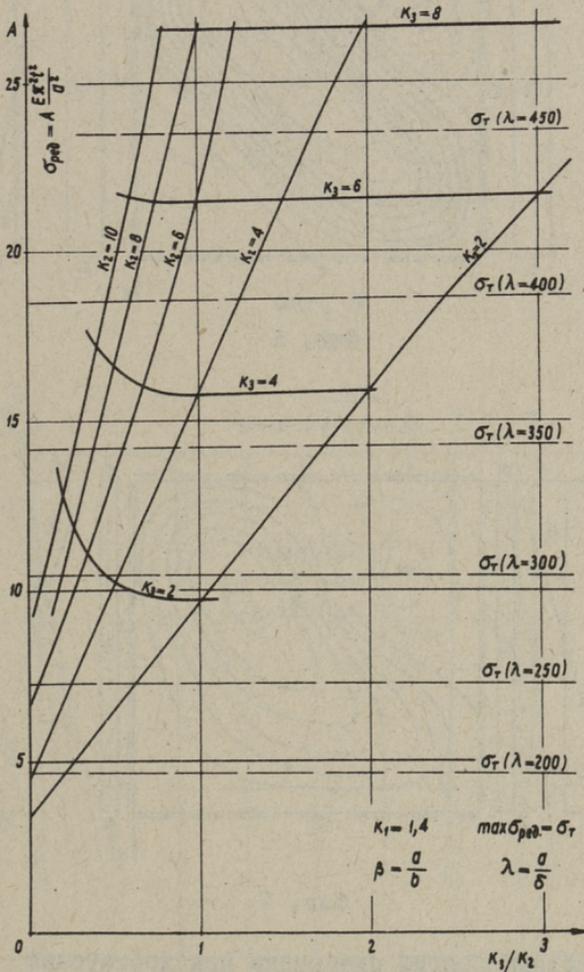
$$\tau_{xy} = \frac{E\pi^2\delta^2}{ab} \left[K_3 - \sum_t \sum_s t s f_{ts} \sin \frac{t\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} \right],$$

и изгибные напряжения на поверхности пластинки:

$$\sigma'_x = \pm \frac{E\pi^2\delta^2}{2b^2(1-\mu^2)} \sum_m \sum_n (m^2 + \mu n^2) a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

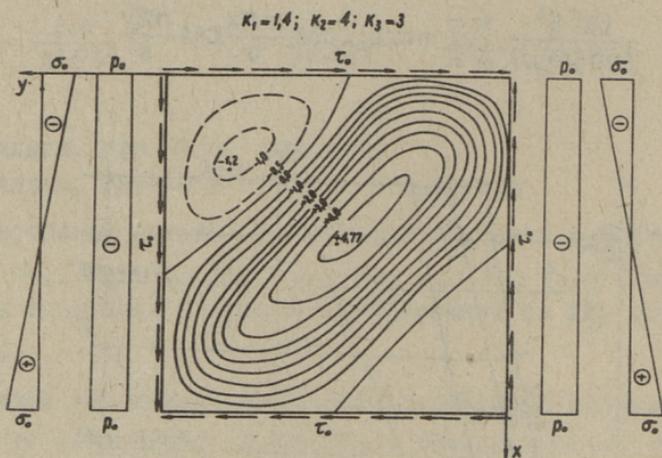
$$\sigma'_y = \pm \frac{E\pi^2\delta^2}{2a^2(1-\mu^2)} \sum_m \sum_n (n^2 + \mu m^2) a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\tau_{xy} = \mp \frac{E\pi^2\delta^2}{2ab(1+\mu)} \sum_m \sum_n mn a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$
(16)

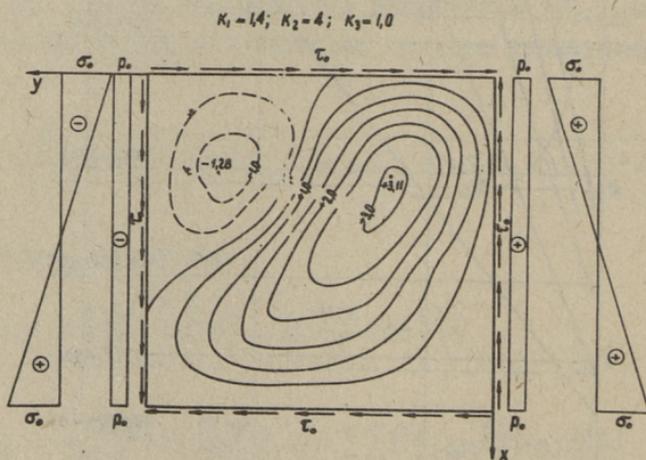


Фиг. 5

На фиг. 5 представлены значения $\sigma_{ред}$ в зависимости от нагрузки. На фиг. 6, 7, 8 представлены типичные выпученные формы пластинки и на фиг. 9 прогиб в точке, где $x = 0,5 a$, $y = 0,5 b$ при постоянном сдвиге и сжатии с увеличением изгибного напряжения уменьшается.



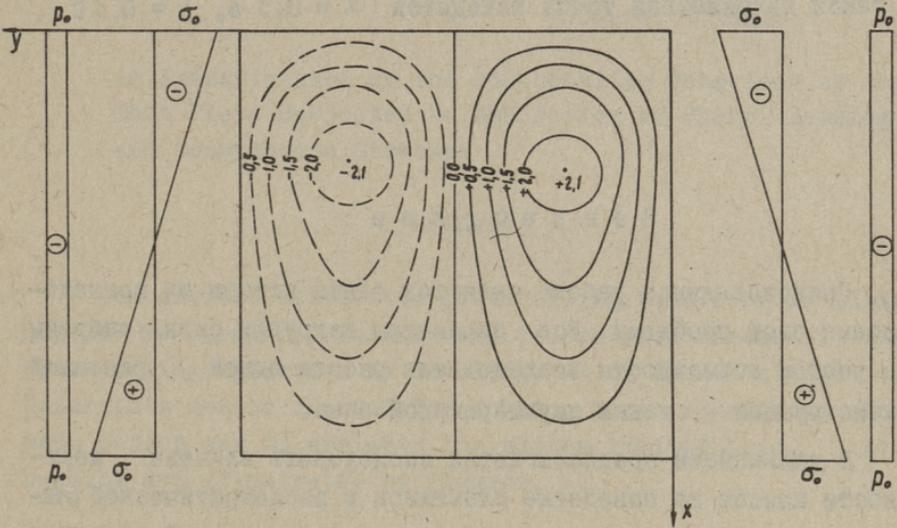
Фиг. 6



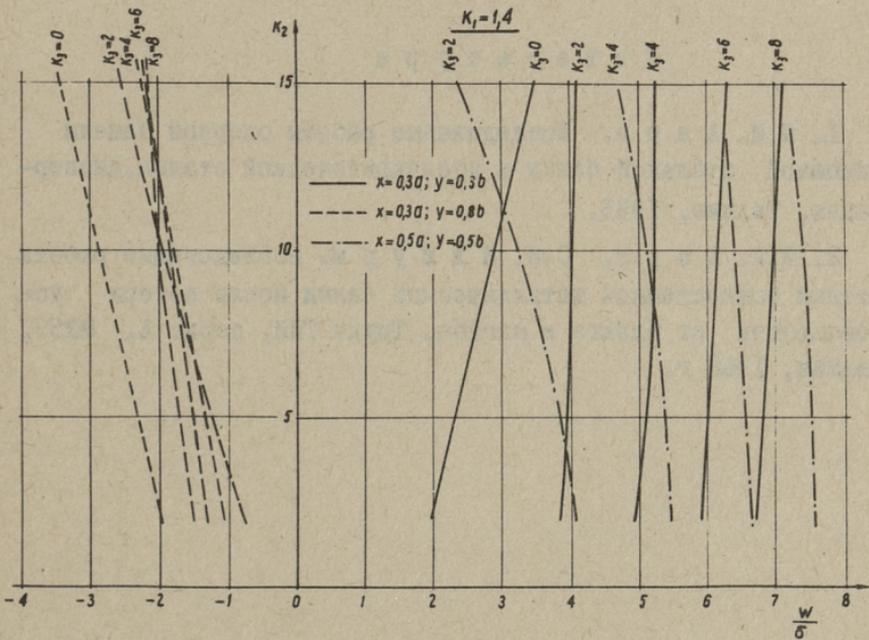
Фиг. 7

Максимальный прогиб пластинки при достаточно больших изгибных напряжениях имеет место в точке, где $x = 0,3 a$, $y = 0,3 b$.

$$K_1=1,4; K_2=4; K_3=0$$



Фиг. 8



Фиг. 9

При соотношении $K_2/K_3 < 1,3$ максимальное напряжение $\sigma_{\text{ред}}$ имеет место в середине пластинки, а при $K_2/K_3 > 1,3$ самая напряженная точка находится $x = 0,3 a$, $y = 0,3 b$,

З а к л ю ч е н и е

Представленная работа является одним этапом из исследования этой проблемы. Все параметры нагрузки были выбраны с учетом возможности исследования работы одной реальной конструкции - стенки двухшарнирной рамы.

В дальнейшем предполагается исследовать влияние жесткости поясов на поведение пластинок в послекритической стадии и представлять таблицы определения предельной нагрузки при разных видах нагружения в зависимости от гибкости пластины.

Л и т е р а т у р а

1. И.И. А а р е. Исследование работы опорной панели сплошной стальной балки в послекритической стадии. Диссертация, Таллин, 1953.

2. И.И. А а р е, С.И. И д н у р м. Исследование работы стенки тонкостенной металлической балки после потери устойчивости от сдвига и изгиба. Труды ТПИ, серия А, №259, Таллин, 1968 г.

J.Aare, S.Idnurm

An Investigation of the Postbuckling Behaviour of the
Thin Plate Subjected to the Action of Shear, Bending
and Compression Stresses

Summary

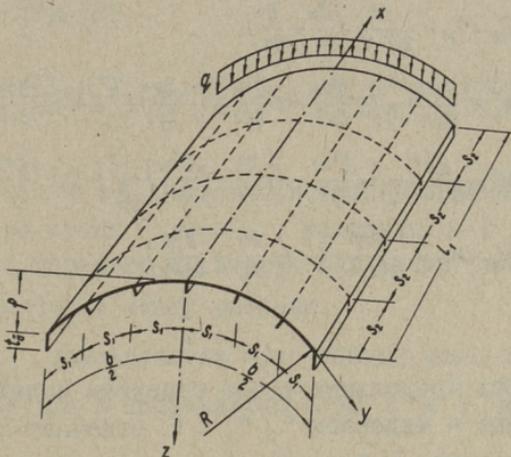
The article deals with postbuckling behaviour in plates loaded by shear, bending and compression stresses. The postbuckling situation is investigated by Kàrmán's equations. Galerkin's method is used for solving these equations. The main object was to estimate the plates limited load. All results are illustrated by figures.

УДК 624.074

И.И. Ааре, Т.Э. Кескюла

РАСЧЕТ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
 РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ПОКРЫТИЙ

I. Рассмотрим оболочку, подкрепленную продольными и поперечными ребрами (фиг. I).



Фиг. I

Криволинейные края оболочки опираются на диафрагмы, жесткие в своей плоскости и гибкие от своей плоскости. Продольные края опираются на бортовые элементы конечной жесткости. Оболочка нагружена вертикальной равномерно распределенной нагрузкой.

Расчет производится с учетом дискретного расположения ребер при помощи дельта-функций [1]. Для расчета ребристых оболочек данным методом пользовались: А. Назаров [2], Д. Вайнберг и И. Роитфарб [3], Е. Гребень [4] и др.

При расчете учитываются гипотезы теории гладких упругих оболочек и теории стержневых систем. Учитываются сопротивление ребер только осевой деформации и изгибу в плоскости нормали срединной поверхности оболочки, а также одностороннее расположение ребер.

2. Выражения внутренних усилий и моментов в срединной поверхности оболочки, статически эквивалентные напряжениям в ребристой оболочке, получаем при помощи дельта-функции в следующем виде [4]:

$$\begin{aligned}
 T_1^i &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \frac{w}{R} \right) - \sum_{i=1}^n (E_i F_i \frac{\partial u}{\partial x} - E_i S_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \delta(y-y_i); \\
 T_2^i &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R} \right) + \sum_{j=1}^m [E_j F_j \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) - E_j S_j \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right)] \delta(x-x_j); \\
 T_{12} &= T_{21} = \frac{Eh}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\
 M_1^i &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sum_{i=1}^n (-E_i J_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_i S_i \frac{\partial u}{\partial x}) \delta(y-y_i); \\
 M_2^i &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sum_{j=1}^m [-E_j J_j \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + E_j S_j \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)] \delta(x-x_j); \\
 M_{12} &= M_{21} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(-\frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right);
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь продольные ребра отмечены индексом "i" и поперечные - индексом "j"; F отмечает площадь поперечного сечения ребра, S - статический момент ребра относительно нулевой линии поперечного сечения оболочки и J - момент инерции соответствующего ребра; x_i, y_i отмечают координаты расположения ребер; h - толщина покрытия оболочки; u, v, w - компоненты перемещения срединной поверхности оболочки.

3. При расчете используем принцип возможных перемещений

$$\delta A + \delta U = 0 \tag{2}$$

где вариация работы внутренних сил

$$\delta U = \int_0^b \int_0^{b/2} (T_1^x d\varepsilon_1 + T_2^x d\varepsilon_2 + T_{12} d\gamma_1 + T_{21} d\gamma_2 + M_1^x d\kappa_1 + M_2^x d\kappa_2 + M_{12} d\kappa_1 + M_{21} d\kappa_2) dx dy \quad (3)$$

и вариация работы внешних сил

$$\delta A = \int_0^b \int_0^{b/2} (q_y \delta v + q_z \delta w) dx dy \quad (4)$$

Компоненты перемещения срединной поверхности задаем в следующем виде:

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (C_{13r} \cos \frac{3\pi x}{l_1} \cos \frac{r\pi y}{b} + C_{43} \cos \frac{3\pi x}{l_1}) \quad (5)$$

$$v = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_{23r} \sin \frac{3\pi x}{l_1} \sin \frac{r\pi y}{b}$$

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (C_{33r} \sin \frac{3\pi x}{l_1} \cos \frac{r\pi y}{b} + C_{53} \sin \frac{3\pi x}{l_1}) + C_6 \sin^2 \frac{(m+1)\pi x}{l_1} \sin^2 \left(\frac{2n\pi y}{b} \right).$$

которые на краях $x = 0 = l_1$ удовлетворяют условиям $w = v = T_1 = M_1 = 0$ и на краях $y = \pm b/2$, условиям $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$. В рядах (5) параметр C_6 выражает влияние дополнительного прогиба панелей между ребрами.

Параметры C_{kij} определяются при помощи метода Ритца.

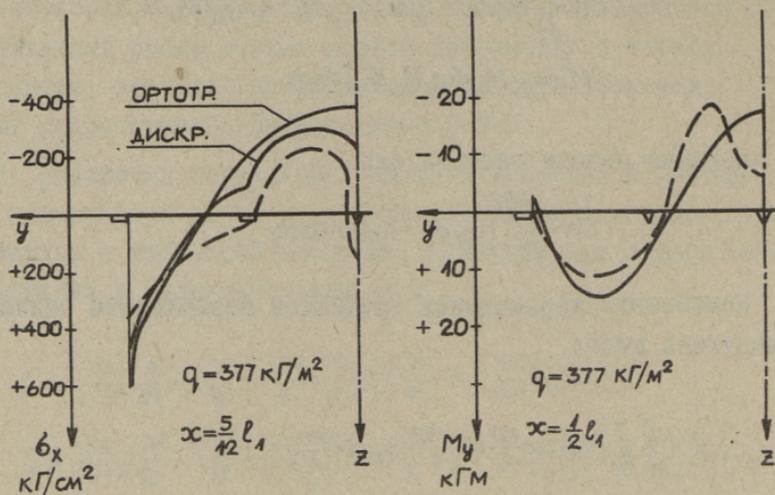
Компоненты нагрузки в направлении осей Z и Y выражаем в следующем виде:

$$q_y = \frac{4}{\pi} q \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{y}{R} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} q \sin \frac{\pi x}{l_1} (b_r \sin \frac{r\pi y}{b})$$

$$q_z = \frac{4}{\pi} q \sin \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{y}{R} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} q \sin \frac{\pi x}{l_1} (a_r + a_r \cos \frac{r\pi y}{b}) \quad (6)$$

где a_0, a_r, b_r - коэффициенты в рядах Фурье.

Подставив выражения (5,6) в формулы (1,2,3,4), получаем выражение общей энергии системы. Дифференцируя последний по параметрам C_{kij} , получаем систему из p совместимых уравнений, где $p = 3k+3$ и "к" - число членов в ряду.



Фиг. 2

Решая систему, получаем величины коэффициентов C_{kij} и при помощи (I) внутренние усилия и моменты в срединной поверхности оболочки.

В выражениях (5) постоянное C_6 характеризует поведение панели до потери устойчивости.

После того, когда панели между ребрами потеряют устойчивость, надо C_6 приблизительно рассчитать до проведения общего расчета по формулам [5] для послекритической стадии отдельной свободно опертой панели.

4. Составленный алгоритм расчета программирован на ЭЦВМ "Минск-22". Программа составлена на алгоритмическом языке "Малгол" [6], который является вариантом языка "Алгол-60". В расчетах принято $s = 1$, $r = 1 \dots 7$. Получены величины внутренних усилий и моментов в 25 точках каждой панели. В качестве примера произведены расчеты моделей, описанные в [7]. Полученные результаты расчета модели К-3 приведены на фиг. 2, где отрывистой линией указаны результаты эксперимента, постоянной линией - результаты расчета.

Л и т е р а т у р а

1. И.М. Г е л ь ф а н д, Г.Е. Ш и л о в. Обобщенные функции и действия над ними. Гос.изд.физ.-мат.лит., М., 1959.

2. А.Г. Н а з а р о в. Импульсивные функции в приложении к задачам строительной механики. Сб. иссл. по теории сооружений, Стройиздат, вып. 4, 1949.

3. Д.В. В а й н б е р г, И.З. Р о й т ф а р б. Расчет пластин и оболочек с разрывными параметрами. Расч. простр. констр., № 10, Госстройиздат, 1965.

4. Е.С. Г р е б е н ь. Основные соотношения технической теории ребристых оболочек. "Механика", №3, 1965.

5. М.С. К о р н и ш и н. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. Наука, М., 1964.

6. М. К о т л и, П. Х а н к о. Программы для ЭЦВМ "Минск-2", вып. 4, АН СССР, Таллин, 1966.

7. И.И. Ааре, Т.Э. К е с к к ю л а. Экспериментальное исследование металлических ребристых цилиндрических оболочек покрытий. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 269.

I. Aare, T. Keskküla

Analysis of Cylindrical Metallic
Rib-reinforced Roof Shells

Summary

A method of analysis for stiffened roof shells is described in the article. Discrete stiffeners with the aid of the Dirac delta functions are considered and the eccentricity of the **stiffeners** is taken into account. As an example, internal forces for model, described in /7/, are determined using computer "Minsk 22".

УДК 624 074

И.И. Ааре, Т.Э. Кесккюла

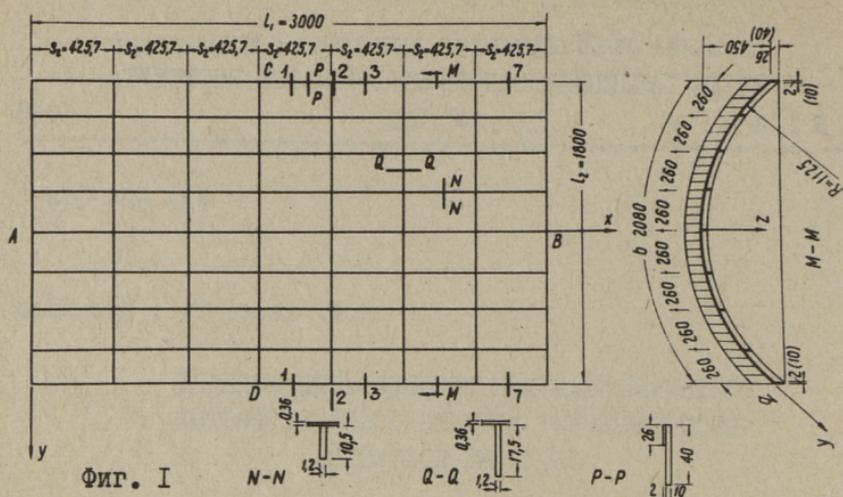
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ РЕБРИСТЫХ
ОБОЛОЧЕК ПОКРЫТИЙ

1. Из различных видов (волнистые, двухслойные, ребристые) металлических оболочек покрытий, построенных в последнее время [1], одними из наиболее перспективных являются ребристые. До настоящего времени металлические ребристые оболочки покрытий экспериментальным путем мало изучены. Известные работы [2,3,4] посвящены ребристым оболочкам положительной кривизны, опирающимся по всему контуру.

На кафедре строительных конструкций ТПИ были исследованы экспериментально четыре модели ребристых цилиндрических оболочек.

2. Моделировали оболочку размерами в плане 18х30 метров, подъемом 4,5 метра, криволинейные края которой опирались на жесткие диафрагмы, а продольные края на бортовые элементы конечной жесткости. Покрытия моделей изготавливались из белой жести (ГОСТ 9488-60), а диафрагма и бортовые элементы из жести толщиной 1 мм (при К-4-2 мм). Отдельные элементы соединялись сваркой, пайкой и винтами. Все модели имели одинаковое распределение материала по отдельным элементам: ребрам в одном направлении 7% из общего объема материала, ребрам в другом направлении 7%, бортовым элементам 10-12%, покрытию 74-76%.

Модель К-4 испытывали, кроме названной, еще с бортовыми элементами, площадь поперечного сечения которых в 8 раз превышала первоначальную. Схема модели К-4 изображена на фиг. 1.



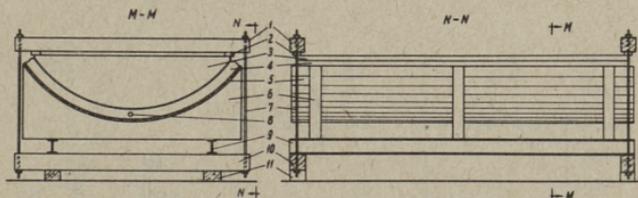
Фиг. I

Таблица I

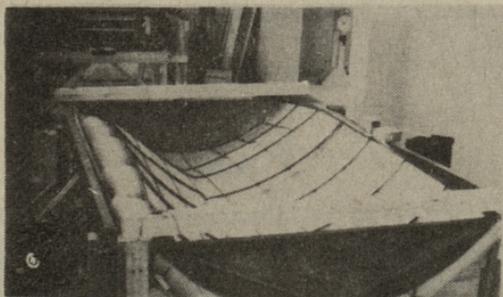
Мо- дель	Дли- на, в см	Шири- на, в см	Ради- ус в см	Толщи- на по- крытия в см	Степень умень- шения по срав- нению с оболоч- кой I8x30 м	Редуци- рованная толщина на обол- лочку I8x30 м в см	Типы ребер
К-1	69,8	43	26,7	0,028	42,5	I, 57	продольные - 3 шт. и поперечные - 5 шт.
К-2	150	90	56,25	0,036	20	I, I	под углом 45° к на- правляюще- му, 7 шт в оба направ- ления
К-3	150	90	56,25	0,036	20	I, I	продольные - 3 шт и поперечные - 5 шт.
К-4	300	180	112,5	0,036	10	0,57	продольные - 7 шт и поперечные - 6 шт

Механические свойства материала оболочек следующие: предел текучести 2990 кг/см², временное сопротивление 3440 кг/см², модуль упругости 2,11·10⁶ кг/см², прочность запаянных угловых швов на срез ~ 500 кг/см².

Модели К-1, К-2, К-3 загружались при помощи гирь через песчаную подушку до потери устойчивости, причем деформации остались упругими. Затем модели К-2, К-3, К-4 подвергались давлению сжатому воздуху на специальном стенде (фиг. 2,3) до разрушения. У модели К-2 загружали еще половину оболочки. Бортовые элементы на нагрузке не подвергались.



Фиг. 2



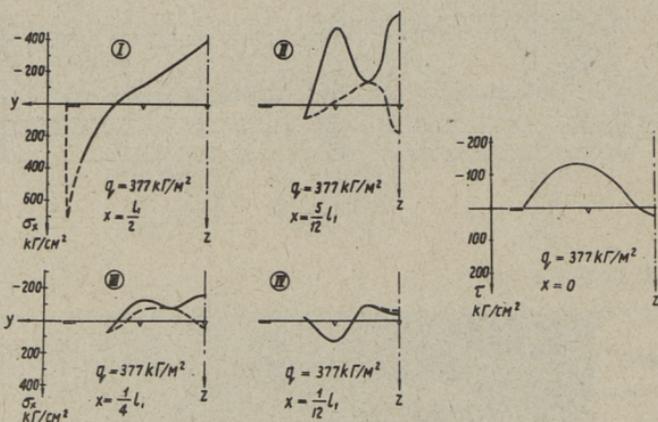
Фиг. 3

Деформации измерялись электрическими датчиками сопротивления базой 20 мм при помощи самобалансирующего электронного измерителя деформации ЭИД-3. Датчики были наклеены на ребра и розеты из датчиков в середину каждой панели в одной четверти оболочки на обе поверхности. Перемещения среднего поперечного сечения в вертикальном направлении измерялись индикаторами точностью до 0,01 мм. Нормальные к срединной поверхности перемещения модели К-4 измерялись специальным прибором измерения перемещений в 25 точках каждой панели.

3. При экспериментальном исследовании были получены следующие основные результаты.:

1) Характерное распределение напряжений в упругой стадии ($q_{кр} = 566 \text{ кг/м}^2$) в модели К-3 при вертикальной нагрузке

изображено на фиг. 4. В сечении, где находится поперечное ребро (рис. I), распределение напряжения аналогично распределению в оболочке без ребер. В сечениях через средние точки панели (рис. П.Ш. IУ) на эпюрах появляются скачки. Эпюры поперечных моментов аналогичны эпюрам в оболочках без ребер.

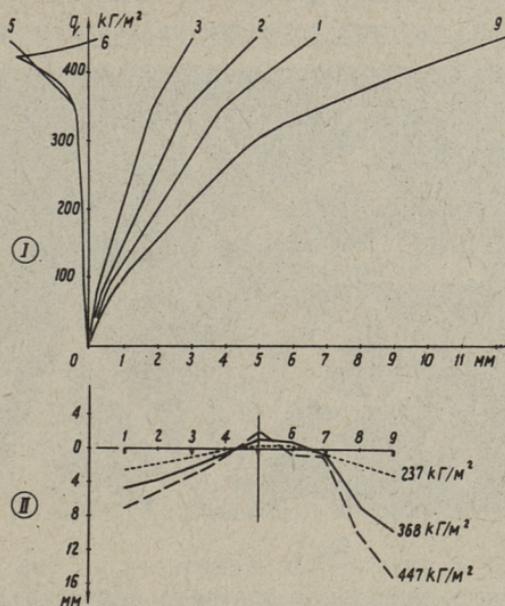


Фиг. 4

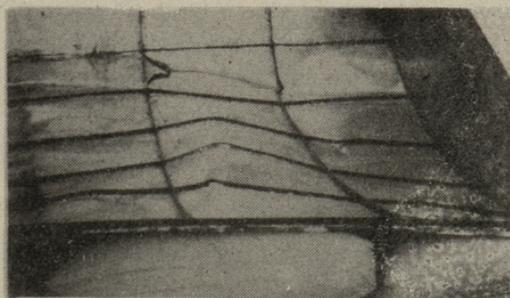
2) Оболочки потеряли устойчивость в результате постепенного деформирования поперечного сечения. Потери устойчивости "хлопком", которая характерна для замкнутых цилиндрических оболочек, не наблюдалось. Появилась только симметрическая форма потери устойчивости. На фиг. 5 рис. I изображено развитие вертикальных перемещений точек модели К-3 в среднем поперечном сечении при давлении сжатым воздухом. Начиная с нагрузки 368 кг/м^2 , которую считаем критической, скорость увеличения перемещения резко возросла. Аналогичное явление при вертикальной нагрузке началось с нагрузки 566 кг/м^2 . Аналогичную тенденцию можно было проследить на графиках развития внутренних усилий.

3) При бортовых элементах с малой жесткостью при потере моделью общей устойчивости в продольном направлении появилась одна полуволна, в поперечном направлении — три полуволны. Эта же оболочка при бортовых элементах с большей жесткостью (жесткость которой в 8 раз превышает жесткость вышеуказанной) теряет общую устойчивость в результате того, что в районе максимальных сдвигающих сил появляются

волны, охватывающие несколько панелей (Фиг. 6), причем среднее поперечное сечение оболочки не деформируется.



Фиг. 5

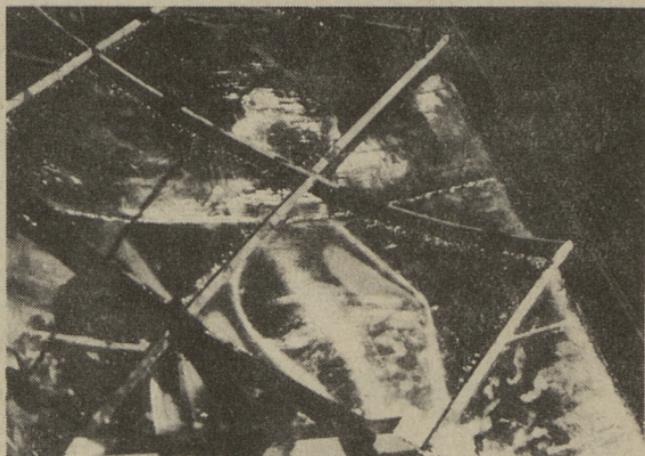


Фиг. 6

4) При модели К-1, которая имела большую относительную толщину покрытия, сразу появляются волны общей потери устойчивости. Отдельные панели между ребрами раньше не выпучивались.

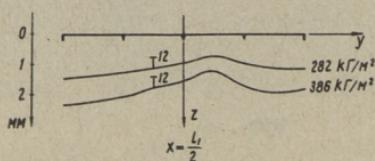
5) При остальных моделях (К-2, К-3, К-4) сначала появлялись волны (3 полуволны) местной потери устойчивости в отдельных панелях (Фиг. 7). Волны в панелях остались упругими, несмотря на то, что высота волны была в 30-40 раз больше толщины покрытия. Ребристая оболочка может принять

Нагрузку, которая в 2-3 раза превышает нагрузку, критическую для отдельных панелей. Максимальные высоты волн на панелях в отдельных районах оболочки различаются мало.



Фиг. 7

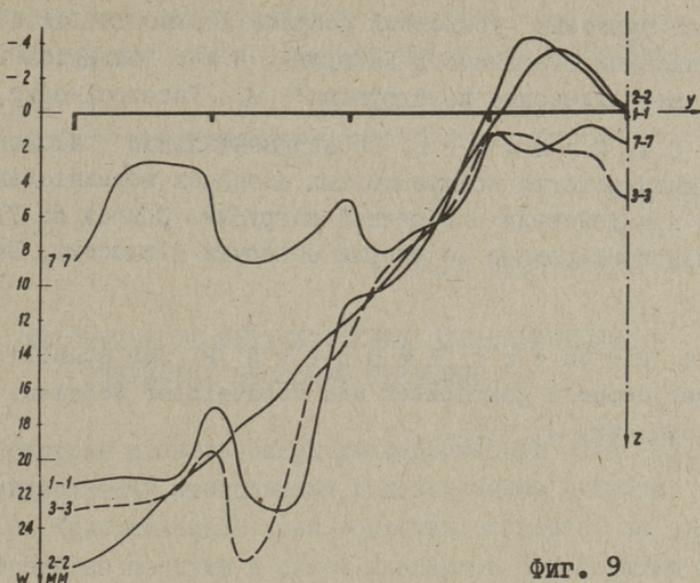
6) Вертикальные перемещения среднего поперечного сечения модели К-3 изображены на фиг. 8 при вертикальной нагрузке и на фиг. 5. II при нагрузке, направленной нормально к срединной поверхности. Формы потери устойчивости при названных нагрузках качественно не отличаются. Критическая интенсивность нагрузки при вертикальном нагружении в полтора раза превышает критическую нагрузку при нагружении, направленном нормально к срединной поверхности.



Фиг. 8

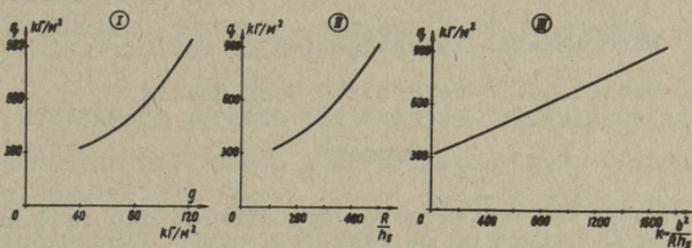
7) Величина критической нагрузки не зависит от того, расположены ли ребра вдоль линий главной кривизны или диагонально (критические нагрузки моделей К-2 и К-3 были одинаковы при обеих схемах загрузения).

8) Величины перемещений и деформаций при нагрузке, охватывающей всю оболочку, или при нагрузке той же интенсивности на половину оболочки - одинаковы.



Фиг. 9

9) На фиг. 9 изображены нормальные к срединной поверхности перемещения модели К-4 (сечения смотри на фиг. I).



Фиг. 10

10) На фиг. 10 изображена зависимость критической нагрузки от расхода материала (I) и от коэффициентов R/h_5 (II) и $K = b^2/Rh_5$ (III). Отсюда вытекает, что, не изменяя распределения материала по отдельным элементам оболочки, рассмотренные факторы влияют на величину критической нагрузки практически линейно.

Л и т е р а т у р а

1. Т. К е с к к ю л а. Металлические оболочки покрытий. Эхитус я Архитектуур, № 4, 1967. (на эст.яз.)

2. А.К. Н о с о в, Ю.А. П а л ь м. Экспериментальное исследование состояния модели пологой тонкостенной оболочки

двойкой кривизны, усиленной ребрами жесткости, от действия вертикальной статической нагрузки. В кн. "Облегченные несущие металлические конструкции", М., Госстройиздат, 1963.

3. С.А. Т и м а ш е в. Экспериментальное исследование поведения пологих подкрепленных оболочек положительной кривизны при действии поперечной нагрузки. Доклад на УТ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Баку, 1966.

4. B u c h e r t K e n n e t h P. Zur Stabilität grosser doppelt gekrümmter und versteifter Schalen. Stahlbau, Nr. 2, 1965.

I. Aare, T. Keskküla

Experimental Investigation of Cylindrical
Metallic Rib-reinforced Roof Shells

Summary

The tests described here were carried out on 4 small-scale models. The models were made of sheet steel. The longitudinal edges were supported by the edge beams. The models were loaded by weights through sand and some were loaded by air. The experiments have shown that the rib-reinforced shell loses its stability due to the flattening. The shell can carry a load 2 - 3 times bigger than the critical load for panels between ribs. The panels lose stability by three half-waves. The experiments showed dependancy of critical load on parameters of shell.

УДК 624 074

И.И. Ааре, Т.Э. Кесккяла

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ПОКРЫТИЙ

1. Рассмотрим металлическую цилиндрическую оболочку покрытия, укрепленную продольными и поперечными ребрами ([4] фиг. 1). Криволинейные края оболочки опираются на диафрагмы, абсолютно жесткие в своей плоскости и абсолютно гибкие из своей плоскости. Продольные края опираются на бортовые элементы конечной жесткости. Оболочка нагружена вертикальной, равномерно на всю поверхность распределенной нагрузкой. Обозначения, которые специально не объяснены, приняты по [8].

2. До настоящего времени устойчивость цилиндрических оболочек покрытий оставалась мало исследованной. В своих работах И. Моз [1], Х. Лундгрэн, Р. Рабих и другие требовали, чтобы напряжения сжатия и сдвига не превышали критических, при этом критические напряжения рассчитывали по формулам, полученным для замкнутых цилиндрических оболочек. Критическую поперечную нагрузку для цилиндрических открытых оболочек рассчитывал энергетическим методом М.Капурсо [2]. За основание упрощений он принял предположение, что число полуволн, появляющихся во время потери устойчивости в поперечном направлении, больше четырех. Это допущение не соответствует действительности: как показывают эксперименты [3], число полуволн не превышает трех.

3. При проверке устойчивости ребристую оболочку заменяем соответствующей ортотропной оболочкой. Это упрощение обосновано, так как при потере устойчивости волна охватывает

несколько ребер. Из ряда работ [5, 6, 7] выяснилось, что ребристые оболочки можно рассчитывать по линейной теории, так как отношение "верхней" и "нижней" критической нагрузки приближается у них к единице. В связи с этим в данном случае задача решается в линейной постановке. При расчете по линейной теории вначале надо определить усилия в оболочке до момента потери устойчивости [8]. Для этого используем методику, приведенную в [4]. Далее предположим, что во время потери устойчивости срединная поверхность оболочки не деформируется:

$$\epsilon_1 = \frac{\partial U_{st}}{\partial x} = 0 \quad (I)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial V_{st}}{\partial y} - \frac{w_{st}}{R} = 0$$

$$\gamma = \frac{\partial U_{st}}{\partial y} + \frac{\partial V_{st}}{\partial x} = 0,$$

где U_{st} , V_{st} , w_{st} — компоненты перемещения и ϵ_1 , ϵ_2 , γ — компоненты деформации срединной поверхности в момент потери устойчивости.

Благодаря этому предположению, в момент потери устойчивости можно учитывать только энергию изгиба.

В начальном состоянии, до потери устойчивости, учитывается только влияние мембранных усилий. Если $h/R \ll 1$, то работа моментов в докритической стадии по сравнению с работой усилий в срединной поверхности меньше на несколько порядков.

Задачу решаем энергетическим методом.

4. Приращение потенциальной энергии оболочки за время потери устойчивости выражается в следующем виде:

$$\Delta = U_{M1} + V_{\sigma1} + U_{M2} + V_{\sigma2}. \quad (2)$$

$V_{\sigma1}$ — работа начальных усилий в оболочке,

U_{M1} — энергия изгибных деформаций оболочки,

V_{a2} — работа начальных усилий в бортовом элементе,
 U_{M2} — энергия изгибных деформаций бортового элемента.

Компоненты энергии оболочки выражаются в следующем виде:

$$V_{a1} = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{b_2} [T_{10} \left(\frac{\partial w_{st}}{\partial x} \right)^2 + T_{20} \left(\frac{\partial w_{st}}{\partial y} \right)^2 + 2T_{120} \frac{\partial w_{st}}{\partial x} \frac{\partial w_{st}}{\partial y}] dx dy, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 U_{M1} = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{b_2} \left\{ \frac{Eh_4^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2} \right)^2 + \nu \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2} \frac{\nu}{R} \frac{\partial v_{st}}{\partial y} \right] + \right. \\
 & + \frac{Eh_5^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial y^2} \frac{\partial v_{st}}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_{st}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2} \frac{\partial v_{st}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial y^2} \right] + \\
 & \left. + \frac{Eh_6^3}{6(1+\nu)} \left[\left(\frac{1}{2R} \frac{\partial v_{st}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x \partial y} \frac{\partial v_{st}}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где h_4, h_5, h_6 — толщины ортотропной оболочки, которые воспринимают соответственно моменты M_1, M_2, M_{12} ;

T_{10}, T_{20}, T_{120} — мембранные усилия в начальном состоянии (до потери устойчивости), которые не изменяются при потере устойчивости.

Компоненты энергии бортового элемента выражаются в следующем виде:

$$V_{a2} = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} T_{10} \left(\frac{\partial w_{st}}{\partial x} \right)_{y=\frac{b}{2}}^2 dx. \quad (5)$$

$$U_{M2} = \int_0^{l_1} \left[\frac{EJ_w}{2} \left(\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{EJ_v}{2} \left(\frac{\partial^2 v_{st}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{GJ_o}{2} \left(\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]_{y=\frac{b}{2}} dx, \quad (6)$$

где J_w, J_v — моменты инерции бортового элемента относительно осей y и z .

4. Для решения задачи предположим, что оболочка теряет устойчивость в форме:

$$W_{st} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{3stsr} \sin \frac{s\pi x}{L_1} \cos \frac{r\pi y}{b} + C_{5stsr} \sin \frac{s\pi x}{L_1} \sin \frac{r\pi y}{b} \right), \quad (7)$$

удовлетворяющей геометрическим граничным условиям.

Используя выражение (I), можно упростить выражения для энергии. По (I) получаем

$$\frac{\partial V_{st}}{\partial y} = \frac{W_{st}}{R} = \frac{C_{3stsr}}{R} \sin \frac{s\pi x}{L_1} \cos \frac{r\pi y}{b} + \frac{C_{5stsr}}{R} \sin \frac{s\pi x}{L_1} \sin \frac{r\pi y}{b}; \quad (8)$$

$$V_{st} = \int \frac{\partial V_{st}}{\partial y} dy = \frac{C_{3stsr}}{R} \frac{b}{r\pi} \sin \frac{s\pi x}{L_1} \cos \frac{r\pi y}{b} - \frac{C_{5stsr}}{R} \frac{b}{r\pi} \sin \frac{s\pi x}{L_1} \cos \frac{r\pi y}{b} + K_1,$$

если $x = 0$, то $V = 0$ и $K_1 = 0$, и

$$\frac{\partial V_{st}}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{sb}{rL_1} \left(C_{3stsr} \cos \frac{s\pi x}{L_1} \sin \frac{r\pi y}{b} - C_{5stsr} \cos \frac{s\pi x}{L_1} \cos \frac{r\pi y}{b} \right) = \left[\frac{1}{R} \left(\frac{b}{r\pi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 W_{st}}{\partial x \partial y}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 V_{st}}{\partial x^2} = \frac{1}{R} \left(\frac{b}{r\pi} \right) \left(\frac{s\pi}{L_1} \right)^2 \left(-C_{3stsr} \sin \frac{s\pi x}{L_1} \sin \frac{r\pi y}{b} + C_{5stsr} \sin \frac{s\pi x}{L_1} \cos \frac{r\pi y}{b} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{s\pi}{L_1} \right)^2 \left(\frac{b}{r\pi} \right)^2 \frac{\partial W_{st}}{\partial y}.$$

Подставляя (8,9) в (4) и (6), получаем выражение общей энергии системы как функцию только от W .

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(W_{st}). \quad (10)$$

Дифференцируя выражение (10), получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C_{3stsr}} = L_{11} C_{3stsr} + L_{12} C_{5stsr} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C_{5stsr}} = L_{21} C_{3stsr} + L_{22} C_{5stsr} = 0, \quad (11)$$

где L_{ij} является функцией от параметров оболочки и параметра нагрузки:

$$L_{ij} = L(E, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, J_w, J_v, L, b, \nu, R, s, r, q). \quad (12)$$

Наименьший корень детерминанта коэффициентов системы уравнений (II), где неизвестным является параметр нагрузки q , определяет величину критической нагрузки.

5. Составленный алгоритм расчета запрограммирован на ЭЦВМ "Минск-22" на алгоритмическом языке "Малгол" [9], который является вариантом языка "Алгол-60". В программе принято $\delta = \rho = 1$. При расчете внутренних усилий начального состояния учитывается первый член в рядах [4]. В качестве примера произведены расчеты на устойчивость при вертикальной нагрузке моделей, описанных в [3]. Результаты расчетов изложены в таблице I.

Т а б л и ц а I

М о д е л ь	Экспериментальная критическая нагрузка кг/м ²	Расчетная критическая нагрузка кг/м ²
К-1	930	1290
К-3	566	490
К - 4	350	369

Учитывая в ряду (7) в поперечном направлении два первых члена, получаем критическую нагрузку на 4-5% меньше, чем при расчете только с первым членом. Для практических расчетов достаточно учитывать в рядах (7) только первые члены. При помощи ЭЦВМ "Минск-22" произведена серия расчетов для выяснения влияния отдельных параметров на устойчивость ребристой оболочки. При соотношении параметров, которые аналогичны модели К-3 в [3], следует, что критическая нагрузка увеличивается на 10%, если: 1) уменьшить радиус кривизны на 7,3%; 2) модуль упругости увеличить на 34,4%; 3) толщину h_5 увеличить на 5,7%, 4) толщину h_4 увеличить на 17,7%, 5) толщину h_6 увеличить на 34%. Выяснилось, что влияние разных параметров на устойчивость интерактивное. Поэтому нельзя выражать критическую нагрузку для всех соотношений параметров одной формулой, и для проверки устойчивости надо пользоваться расчетными алгоритмами.

Л и т е р а т у р а

И. И. М о з. Устойчивость покрытий оболочек. Второй Международный Конгресс по тонкостенным оболочкам-покрытиям, Госстройиздат, 1960.

2. M. C a p u r s o. Critical Loads of Self-Supporting Cylindrical Shell Roofs. "Intern. Journal of Solids and Structures", Vol. 3., No.1, 1967.

3. И.И. А а р е, Т.Э. К е с к к ю л а. Экспериментальное исследование металлических цилиндрических ребристых оболочек покрытий. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 269.

4. И.И. А а р е, Т. Э. К е с к к ю л а. Расчет металлических цилиндрических ребристых оболочек покрытий. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 269.

5. О.И. Т е р е б у ш к о. Расчет несущей способности круговых цилиндрических панелей, подкрепленных ребрами. Расчет простр.констр, вып. 4, Госстройиздат, 1958.

6. W.F. T h i e l e m a n n. New Developments in the Nonlinear Theories of the Buckling of Thin Cylindrical Shells. Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, 1960.

7. R. M i l l i g a n, G. G e r a r d, C. L a s h - m i k a n t h a m. General Instability of Orthotropically Stiffened Cylindres under Axial Compression, AIAA J., No. 11, 1966.

8. А.С. В о л ь м и р. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1964.

9. М. К о т л и, П. Х а н к о. Программы для ЭЦВМ "Минск-22". Вып.4, АН ЭССР, Таллин, 1966.

I. Aare, T. Keskküla

Stability of Metallic Cylindrical Rib-reinforced Roof Shells

Summary

The critical load is established on the assumption that rib-reinforced shell is replaced by an orthotropic shell. The linear theory is used. As an example, critical loads for some models described in /3/ are determined.

УДК 624,074

В.Р. Кульбах

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ УПРУГОЙ НИТИ
 В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Развитый в работах В.К. Качурина, Р.Н. Мацелинского и А.Р. Ржаницина способ расчета пологой упругой нити в усилиях приводит к решению уравнений вида

$$H^3 + \left(\frac{EF}{2lH_0^2} \int Q_0^2 dx - H_0 \right) H^2 - \frac{EF}{2l} \int Q^2 dx = 0, \quad (I)$$

где H_0 и H - распор нити соответственно до и после приложения дополнительной нагрузки,

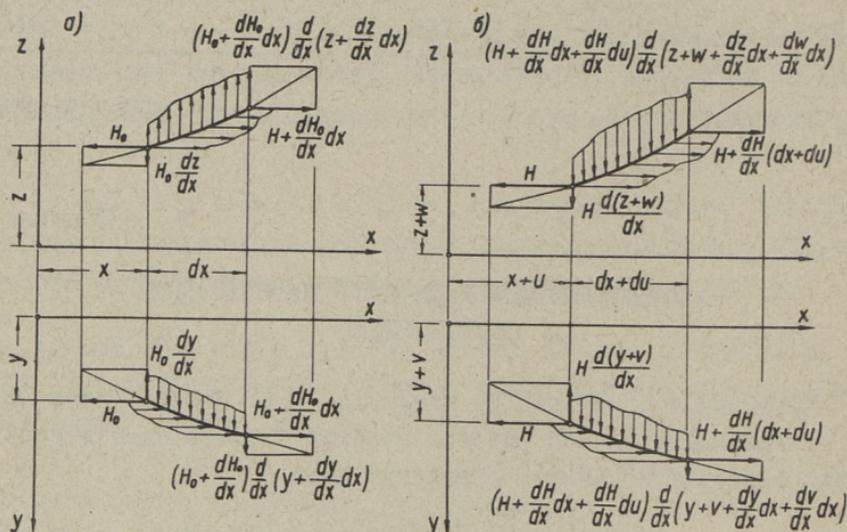
Q_0 и Q - поперечная сила простой балки, нагруженной как рассматриваемая нить, соответственно до и после приложения дополнительной нагрузки,

EF - жесткость нити на растяжение,

l - пролет нити.

Указанный способ расчета вполне удовлетворяет нас при рассмотрении классических задач. При распространении же метода на более сложные задачи, например, к решению пространственных висячих систем, возникают серьезные трудности. Разработанный на кафедре строительных конструкций ТПИ метод расчета висячих покрытий отрицательной кривизны [2] включает уравнение упругой нити в перемещениях. Частный случай этих уравнений был подробно рассмотрен в нашей предыдущей статье [3]. Далее рассмотрим уравнения упругой нити в перемещениях в более общей постановке вопроса, иллюстрируя их применение на нескольких примерах. Окончательные уравнения будут представлены в параметрической форме, ранее развитой для пространственной системы [4]. При вы-

воде основных уравнений исходим из условий равновесия и уравнений деформаций.



Фиг. I

Начальное состояние нити полностью определяется условиями равновесия (Фиг. I, а)

$$\frac{dH_0}{dx} + p_{0x} = 0, \quad (2)$$

$$H_0 \frac{d^2 y}{dx^2} - p_{0x} \frac{dy}{dx} + p_{0y} = 0, \quad (3)$$

$$H_0 \frac{d^2 z}{dx^2} - p_{0x} \frac{dz}{dx} + p_{0z} = 0, \quad (4)$$

где H_0 - составляющая усилия нити в направлении оси x ,

p_{0x}, p_{0y}, p_{0z} - составляющие нагрузки соответственно в направлениях, x, y, z .

В общем случае приложения дополнительной внешней нагрузки нить смещается, а составляющие смещений обозначаем соответственно u, v и w . Уравнения равновесия могут быть представлены в виде (Фиг. I, б).

$$\frac{dH}{dx} + p_x = 0, \quad (5)$$

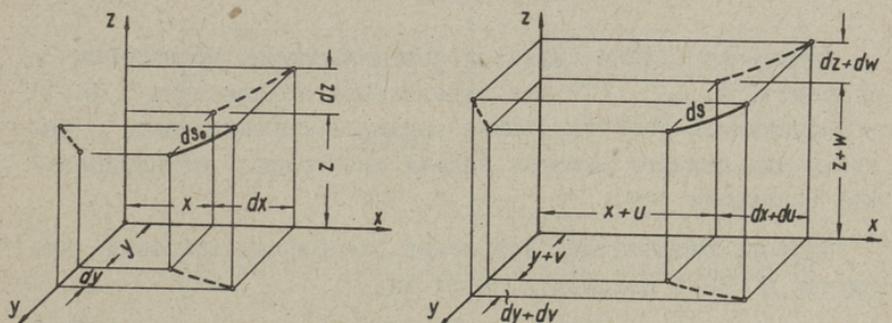
$$H \frac{d^2v}{dx^2} + H \frac{d^2y}{dx^2} - p_x \frac{dy}{dx} - p_x \frac{dy}{dx} + p_y = 0, \quad (6)$$

$$H \frac{d^2w}{dx^2} + H \frac{d^2z}{dx^2} - p_x \frac{dw}{dx} - p_x \frac{dz}{dx} + p_z = 0, \quad (7)$$

где H — составляющая усилия нити в направлении оси x ,

p_x, p_y, p_z — составляющие суммарной нагрузки.

В системе из трех уравнений (5), (6), (7) имеем 4 неизвестных (H, u, v, w). Дополнительное уравнение получаем приравняв относительных удлинений нити, вычисленных, с одной стороны, как функции перемещений, а, с другой стороны, — в зависимости от упругих деформаций.



Фиг. 2

Относительное удлинение (см. Фиг. 2)

$$\varepsilon = \frac{ds}{ds_0} - 1. \quad (8)$$

Длина элемента нити до деформации :

$$ds_0 = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, \quad (9)$$

а после деформации :

$$ds = dx \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dw}{dx}\right)^2}, \quad (10)$$

Пренебрегая относительным удлинением как малой величиной по сравнению с единицей, имеем после разложения в ряд

$$\varepsilon = \frac{\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2}. \quad (\text{II})$$

С другой стороны

$$\varepsilon = \frac{H-H_0}{EF} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2}. \quad (\text{I2})$$

Приравниванием ε получим уравнение деформаций в виде:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] = \\ = \frac{H-H_0}{EF} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}. \end{aligned} \quad (\text{I3})$$

Уравнение (I3) и является дополнительным уравнением к системе (5), (6), (7) для определения неизвестных u, v, w . Граничные условия обычно заданы в перемещениях, поэтому для полного решения задачи необходимо интегрирование уравнения (I3).

Система разрешающих уравнений для случая действия нагрузок в одной плоскости имеет вид

$$H_0 = C_0 - \int p_{0x} dx, \quad (\text{I4})$$

$$H_0 \frac{d^2 z}{dx^2} - p_{0x} \frac{dz}{dx} + p_{0z} = 0, \quad (\text{I5})$$

$$H = C - \int p_x dx, \quad (\text{I6})$$

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} + H \frac{d^2 z}{dx^2} - p_x \frac{dw}{dx} - p_x \frac{dz}{dx} + p_z = 0, \quad (\text{I7})$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = \frac{H-H_0}{EF} \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (\text{I8})$$

Работа нити, нагруженной равномерно распределенной вертикальной нагрузкой (фиг. 3, а) характеризуется уравнениями

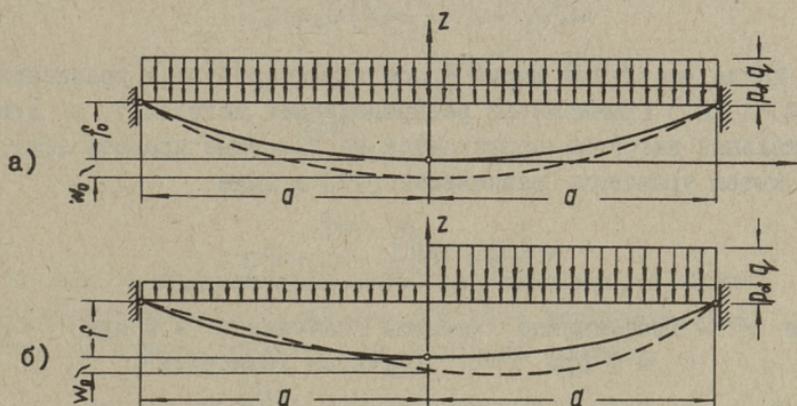
$$H_0 = \frac{p_0 d^2}{2f}, \quad (19)$$

$$z = f \frac{x^2}{d^2}, \quad (20)$$

$$H = \frac{p d^2}{2f \left(1 + \frac{w_0}{f}\right)}, \quad (21)$$

$$w = -w_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right), \quad (22)$$

$$\frac{2w_0(2f+w_0)}{3d} - \frac{(H-H_0)d}{EF} \left(1 + \frac{2f^2}{d^2} + \frac{6f^4}{5d^4} - \frac{4f^6}{7d^6} + \dots\right). \quad (23)$$



Фиг. 3

Подставляя значения H_0 и H по (19) и (21) в уравнение деформации (23), имеем кубическое уравнение для определения неизвестного прогиба:

$$\begin{aligned} \frac{w_0}{f} \left[\left(1 + \frac{w_0}{f}\right) \left(2 + \frac{w_0}{f}\right) + \frac{3p_0 d^4 \left(1 + 2\frac{f^2}{d^2} + \frac{6f^4}{5d^4} + \dots\right)}{4EFf^3} \right] = \\ = \frac{3(p-p_0) d^4 \left(1 + 2\frac{f^2}{d^2} + \frac{6f^4}{d^4} + \dots\right)}{4EFf^3}. \end{aligned} \quad (24)$$

После введения безразмерных параметров

$$\omega_0 = \frac{w_0}{\rho}, \quad (25)$$

$$\varkappa = \frac{3\rho_0 a^4 \left(1 + 2\frac{f^2}{a^2} + \frac{6f^4}{5a^4} + \dots\right)}{4EFf^3}, \quad (26)$$

$$q^* = \frac{3q a^4 \left(1 + 2\frac{f^2}{a^2} + \frac{6f^4}{5a^4}\right)}{4EFf^3}, \quad (27)$$

где $q = \rho - \rho_0$ — дополнительная нагрузка, имеем разрешающее уравнение в виде

$$\omega_0^3 + 3\omega_0^2 + (2 + \varkappa)\omega_0 = q^*. \quad (28)$$

Когда начальная форма троса характеризуется уравнениями (19) и (20) (равномерно распределенная нагрузка), а дополнительная нагрузка прилагается на половине пролета (фиг. 3 б) то имеем уравнение равновесия (17) в виде

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} + H \frac{d^2 z}{dx^2} = \rho_0 + \varphi q, \quad (29)$$

где φ — коэффициент, имеющий значение $\varphi = 0$ при $x < 0$ и $\varphi = 1$ при $x > 0$ (функция Хевисайда).

После двукратного интегрирования уравнения (29) с учетом краевых условий имеем

$$w = \frac{q(f + w_0)}{q + 2\rho_0} \left[(2\varphi - 1) \frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} \right] - w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad (30)$$

$$H = \frac{(q + 2\rho_0) a^2}{4(f + w_0)}. \quad (31)$$

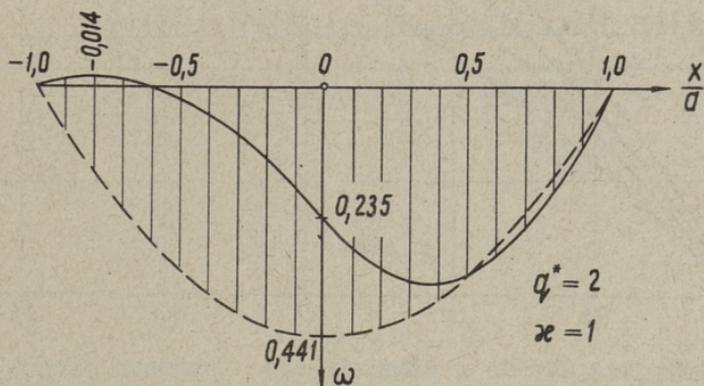
Уравнение деформаций (18) в параметрическом представлении имеет теперь вид:

$$\omega_0^3 + 3\omega_0^2 + \frac{2+3\varphi+\varkappa}{1+\Psi} \omega_0 = \frac{q^* - 2\Psi}{2(1+\Psi)}, \quad (32)$$

где

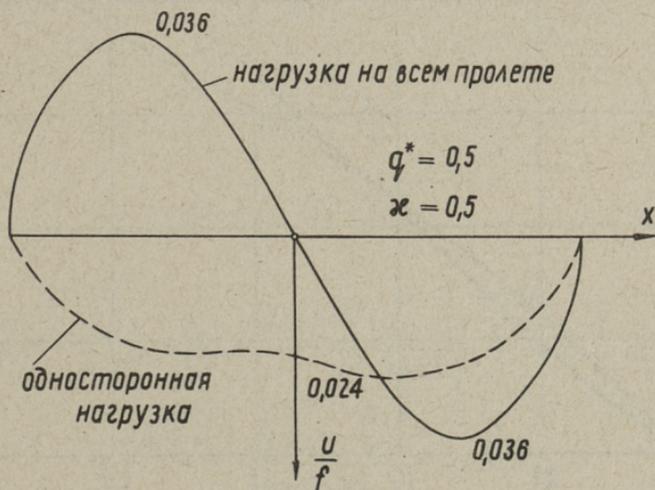
$$\Psi = \frac{q^2}{4(q + 2\rho_0)^2},$$

а остальные параметры определяются по формулам (25), (26), (27).

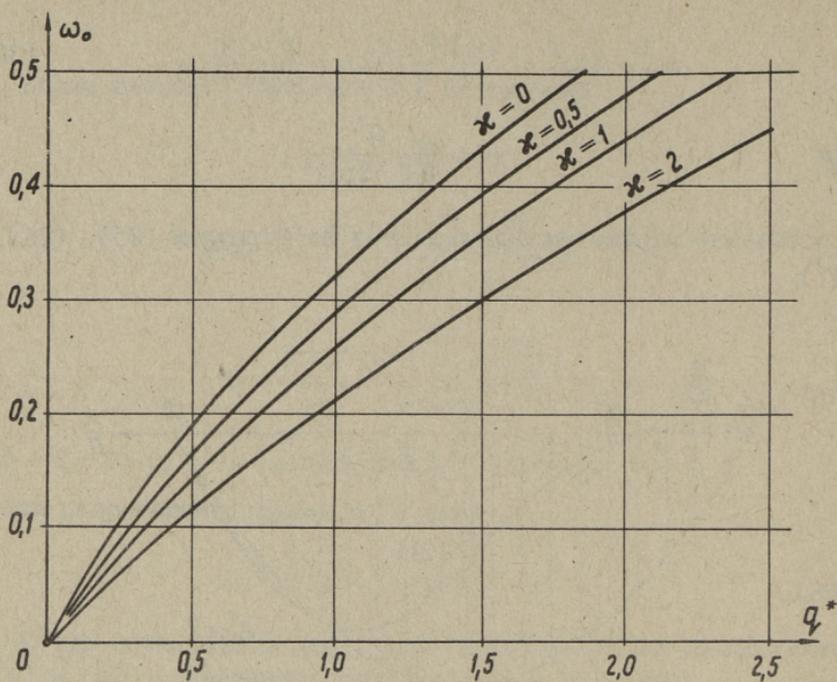


Фиг. 4

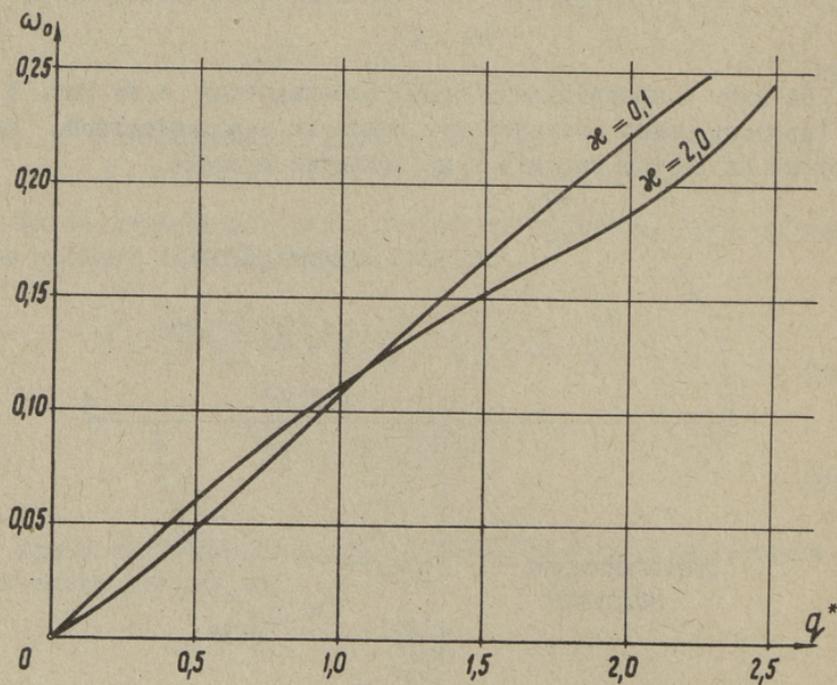
На фиг. 4 представлены эпюры вертикальных, а на фиг. 5 – горизонтальных смещений при действии дополнительной нагрузки на полном пролете и на половине пролета.



Фиг. 5

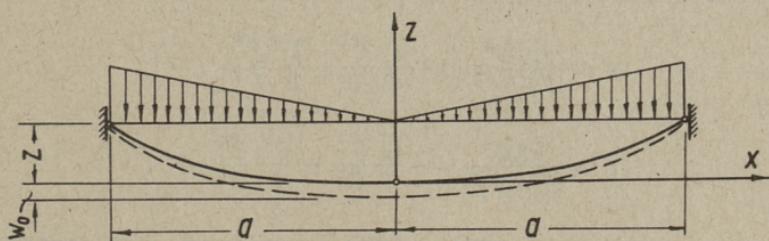


Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 6 даны графики зависимости прогиба от параметра нагрузки при разных значениях начальной нагрузки для равномерно распределенной нагрузки, а на фиг. 7 - для односторонней нагрузки.



Фиг. 8

В случае линейно возрастающей к опорам нагрузки (фиг. 8) система разрешающих уравнений принимает вид

$$H_0 = \frac{p_0 a^2}{6f}, \quad (33)$$

$$z = f \frac{x^3}{a^3}, \quad (34)$$

$$H = \frac{pa^2}{6f \left(1 + \frac{w_0}{f}\right)}, \quad (35)$$

$$w = -w_0 \left(1 - \frac{x^3}{a^3}\right), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_0}{f} \left(1 + \frac{w_0}{f}\right) \left(2 + \frac{w_0}{f}\right) + \frac{5p_0 a^4 \left(1 + \frac{27}{10} \frac{f^2}{a^2} - \frac{27}{8} \frac{f^4}{a^4} + \dots\right)}{27 E F f^3} &= \\ = \frac{5qa^4 \left(1 + \frac{27}{10} \frac{f^2}{a^2} - \frac{27}{8} \frac{f^4}{a^4} + \dots\right)}{27 E F f^3}. \end{aligned} \quad (37)$$

В параметрической постановке имеем

$$\omega_0^3 + 3\omega_0^2 + (2 + \varkappa)\omega_0 = q^*, \quad (38)$$

где безразмерные параметры имеют следующие значения

$$\omega_0 = \frac{w_0}{f}$$
$$\varkappa = \frac{5\rho_0 a^4}{27 E F f^3} \left(1 + \frac{27}{10} \frac{f^2}{a^2} - \frac{27}{8} \frac{f^4}{a^4} + \dots \right),$$
$$q^* = \frac{5q a^4}{27 E F f^3} \left(1 + \frac{27}{10} \frac{f^2}{a^2} - \frac{27}{8} \frac{f^4}{a^4} + \dots \right).$$

Сравнение формул (28) и (38) показывает, что структура разрешающих уравнений в случаях парабол второй и третьей степеней одинакова. Поэтому график фиг. 6 может быть использован и для нитей, имеющих форму параболы третьей степени. Легко убедиться в том, что указанное положение действительно и в случае парабол высших степеней. Разными будут лишь числовые коэффициенты в значениях расчетных параметров \varkappa и q^* . Отсюда вытекает универсальность параметрических формул для определения прогибов нитей, форма которых определяется степенной функцией.

Представление уравнений упругой нити в перемещениях позволяет решать ряд весьма сложных задач, в том числе и задач в области пространственных висячих систем. Взаимное воздействие несущих и натягивающих тросов принимается во внимание путем введения понятия контактных нагрузок, общих для несущих и натягивающих тросов.

Л и т е р а т у р а

1. Висячие покрытия. Труды совещания по исследованию и внедрению висячих покрытий. Госстройиздат. Москва, 1962.

2. В. К у л ь б а х. О расчете пологих оболочек отрицательной кривизны, сопротивляющихся только растяжению. Известия Академии Наук Эстонской ССР, Том XIУ. Серия физ.-мат. и техн. наук, № 3, 1965.

3. В.Р. Кульбах, Ю.К. Энгельбрехт. О расчете упругой нити по методу деформации. Труды ТПИ, серия А, № 256, 1967.

4. V. K u l b a c h. Berechnung von Hängedächern mit negativer Krümmung als Schalen, die nur Zugwiderstand aufweisen. Proceedings of the II International conference on prestressed metal structures. Praha, 1966.

V. Kulbach

On the Equations of the Elastic Thread
by Displacements

Summary

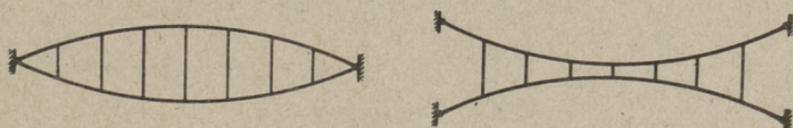
The problem of the elastic threads behaviour in the general arrangement will be investigated in this paper. The general equations are given by displacements and may be written in a parametrical form. In the case of threads which have the form described by a power function, the general equations are of universal character, whereas the dimensionless parameters have different values depending on the exponent of the thread form. The most relevant cases of plane threads are studied. The general equations are suitable for determining the behaviour of complicated hanging roofs. For the plane system graphical dependences of displacements on the load parameter are given.

УДК 624.074

В.Р. Кульбах

О РАСЧЕТЕ ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ С ДВОЙНОЙ
СИСТЕМОЙ ТРОСОВ

Наиболее эффективным способом обеспечения жесткости висячих покрытий является применение двойной системы тросов (фиг. 1)



Фиг. 1

Наличие стягивающих тросов уменьшает не только деформативность системы, но и интервал изменения усилий несущих тросов. Система с двойным семейством тросов способна работать как при положительном, так и при отрицательном направлениях действия нагрузки. Вопросы расчета двухпоясных висячих систем посвящен целый ряд работ известных ученых (В.К. Качурин, Э.Н. Кузнецов, Г.С. Ведеников, К.М. Караджи, Н.М. Кирсанов, Н.С. Москалев и др.). Результаты этих работ дают необходимую основу проектирования висячих покрытий указанного типа. В качестве исходного материала в большинстве работ принимается теория расчета гибких нитей в усилиях. Это приводит к осложнению расчета и к необходимости введения ряда допущений, особенно в более сложных случаях нагружения (например, при действии односторонних нагрузок).

Далее предлагается метод расчета, основывающийся на уравнениях гибкой нити в перемещениях [2].

Взаимное воздействие несущих и натягивающих тросов заменяется т.н. контактной нагрузкой, которая позволяет составить уравнения отдельно для одной и другой семейств тросов, а затем их совместно решать.

В случае воздействия вертикальных нагрузок распор не зависит от координат, и система разрешающих уравнений принимает вид [2]:

$$H_{01} = \frac{d^2 z_1}{dx^2} + p_0 = 0, \quad (1)$$

$$H_{02} = \frac{d^2 z_2}{dx^2} - p_0 = 0, \quad (2)$$

$$H_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + H_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2} + p + q = 0, \quad (3)$$

$$H_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + H_2 \frac{d^2 z_2}{dx^2} - p = 0, \quad (4)$$

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{dz_1}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = \frac{H_1 - H_{01}}{E F_1} \left[1 + \left(\frac{dz_1}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (5)$$

$$\frac{du_2}{dx} + \frac{dz_2}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = \frac{H_2 - H_{02}}{E F_2} \left[1 + \left(\frac{dz_2}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (6)$$

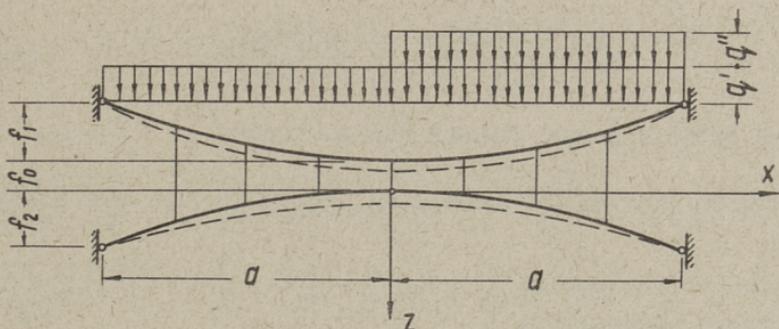
где p_0 и p - контактная нагрузка между тросами соответственно в исходном и конечном состояниях,
 q - внешняя нагрузка.

Индекс 1 относится к несущему, а индекс 2 - к стягивающему тросу. Вертикальные смещения несущих и стягивающих тросов приняты за одинаковые. При значительной деформативности соединительных распорок необходим учет их удлинений.

Далее предполагаем, что контактная нагрузка непрерывно распределена по пролету. Это общепринятое допущение не дает существенной погрешности при реальном числе соединительных распорок.

Для покрытий с параллельно расположенными фермами основной является равномерно распределенная нагрузка. Поэтому длины распорок уместно подобрать так, чтобы начальные

очертания как несущего, так и натягивающего тросов были близкими к квадратным параболом. По формулам (1).. (6) легко убедиться в том, что при действии равномерно распределенной нагрузки параболическая форма тросов сохраняется. При действии же односторонней нагрузки деформации будут несимметричными, а распределение контактной нагрузки не будет равномерным. Далее рассмотрим основные формулы для случаев равномерно распределенной и односторонней нагрузок (фиг. 2).



Фиг. 2

Опоры считаем упругими, принимая их горизонтальные смещения пропорциональными изменению распора. Смещение под действием единичной нагрузки должно быть, конечно, известным.

По формулам (1) и (2) имеем соответственно

$$z_1 = - \left(f_0 + f_1 \frac{x^2}{a^2} \right), \quad (7)$$

$$z_2 = f_2 \frac{x^2}{a^2}, \quad (8)$$

$$H_{01} = \frac{p_0 a^2}{2f_1}, \quad (9)$$

$$H_{02} = \frac{p_0 a^2}{2f_2}. \quad (10)$$

Совместное решение уравнений равновесия (3) и (4), которые могут быть представлены в виде

$$H_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - H_1 \frac{2f_1}{a^2} + p + q = 0, \quad (II)$$

$$H_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + H_2 \frac{2f_2}{a^2} - p = 0, \quad (I2)$$

с учетом граничных условий дает для функции прогиба

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad (I3)$$

где

$$w_0 = \frac{qa^2}{2(H_1 + H_2)} - \frac{H_1 f_1 - H_2 f_2}{H_1 + H_2}. \quad (I4)$$

При учете краевых условий

$$\int_0^a \frac{du_1}{dx} dx = (H_1 - H_{01}) \bar{u}_1, \quad (I5)$$

$$\int_0^a \frac{du_2}{dx} dx = (H_2 - H_{02}) \bar{u}_2 \quad (I6)$$

имеем согласно уравнениям (5) и (6)

$$H_1 = H_{01} + \frac{2EF_1 f_1 w_0 \left(2 + \frac{w_0}{f_1}\right)}{3a^2 \left(\frac{EF_1 \bar{u}_1}{a} + 1 + 2\frac{f_1^2}{a^2} + \frac{6f_1^4}{5a^4} + \dots\right)}, \quad (I7)$$

$$H_2 = H_{02} - \frac{2EF_2 f_2 w_0 \left(2 - \frac{w_0}{f_2}\right)}{3a^2 \left(\frac{EF_2 \bar{u}_2}{a} + 1 + 2\frac{f_2^2}{a^2} + \frac{6f_2^4}{5a^4} + \dots\right)}. \quad (I8)$$

где \bar{u}_1 и \bar{u}_2 - горизонтальное перемещение опоры несущего и натягивающего тросов под действием единичной нагрузки.

Совместное решение уравнений (I4), (I7) и (I8) дает кубическое уравнение для определения прогиба

$$\frac{w_0}{f_1} \left(1 + \frac{w_0}{f_1}\right) \left(2 + \frac{w_0}{f_1}\right) + \frac{w_0}{f_1} \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{w_0}{f_1}\right) \left(2\frac{f_2}{f_1} - \frac{w_0}{f_1}\right) \frac{F_2 \left(\frac{EF_1 \bar{u}_1}{a} + 1 + 2\frac{f_1^2}{a^2} + \dots\right)}{F_1 \left(\frac{EF_2 \bar{u}_2}{a} + 1 + 2\frac{f_2^2}{a^2} + \dots\right)} +$$

$$+3 \frac{H_{01} d^2}{2 E F_1 f_1^2} \left(\frac{E F_1 \bar{u}_1}{d} + 1 + 2 \frac{f_1^2}{d^2} + \dots \right) \left(1 + \frac{W_0}{f_1} \right) + \frac{3 H_{02} d^2}{2 E F_2 f_2^2} \left(\frac{E F_2 \bar{u}_2}{d} + 1 + 2 \frac{f_2^2}{d^2} + \dots \right) \cdot \quad (19)$$

$$\cdot \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{W_0}{f_1} \right) = \frac{3 q d^4}{4 E F_1 f_1^3} \left(\frac{E F_1 \bar{u}_1}{d} + 1 + 2 \frac{f_1^2}{d^2} + \dots \right).$$

После введения безразмерных параметров уравнение приобретает следующий вид:

$$\omega_0^3 (1 + \psi) + 3 \omega_0^2 (1 + \psi \alpha) + \omega_0 [2(1 + \psi \alpha^2) + \varkappa(1 + \beta)] = q_V^* - \varkappa(1 - \alpha \beta), \quad (20)$$

где $\omega_0 = \frac{W_0}{f_1}$ — относительный прогиб,

$$q_V^* = \frac{3 q d^4}{4 E F_1 f_1^3} \left(\frac{E F_1 \bar{u}_1}{d} + 1 + 2 \frac{f_1^2}{d^2} + \frac{6 f_1^4}{5 d^4} - \frac{4 f_1^6}{7 d^6} + \dots \right) \quad \text{— параметр нагрузки,}$$

$$\varkappa = \frac{3 H_{01} d^2}{2 E F_1 f_1^2} \left(\frac{E F_1 \bar{u}_1}{d} + 1 + 2 \frac{f_1^2}{d^2} + \frac{6 f_1^4}{5 d^4} - \frac{4 f_1^6}{7 d^6} + \dots \right) \quad \text{— параметр предварительного напряжения,}$$

$$\psi = \frac{\left(\frac{E F_1 \bar{u}}{d} + 1 + 2 \frac{f_1^2}{d^2} + \frac{6 f_1^4}{5 d^4} + \dots \right)}{\left(\frac{E F_2 \bar{u}}{d} + 1 + 2 \frac{f_2^2}{d^2} + \frac{6 f_2^4}{5 d^4} + \dots \right)} \quad \text{— геометрический параметр,}$$

$$\alpha = \frac{f_2}{f_1} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{H_{02}}{H_{01}} \quad \text{— вспомогательные параметры.}$$

Когда за начальное состояние принимается состояние предварительного напряжения при отсутствии внешней нагрузки (пренебрегая собственным весом тросов), то

$$H_{01} f_1 = H_{02} f_2, \quad (21)$$

и уравнение (20) несколько упрощается, приобретая вид

$$\omega_0^3 (1 + \psi) + 3 \omega_0^2 (1 - \psi \alpha) + \omega_0 \left[2(1 + \psi \alpha^2) + \varkappa \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right] = q_V^*. \quad (22)$$

Для выявления влияния жесткости и стрелы выгиба натягивающего троса на деформативность системы построены зависимости между прогибом и параметром нагрузки:

- а) при постоянном значении $\alpha = \frac{f_2}{f_1}$ и при разных значениях ψ (фиг.3),
 б) при постоянном значении ψ и при разных значениях α (фиг.4).

При действии односторонней нагрузки (см. фиг.2) уравнения равновесия (3) и (4) принимают вид

$$H_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - H_1 \frac{2f_1}{a^2} + p + \varphi q = 0, \quad (23)$$

$$H_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + H_2 \frac{2f_2}{a^2} - p = 0, \quad (24)$$

где φ - функция Хевисайда ($\varphi = 0$ при $x < 0$, $\varphi = 1$ при $x > 0$).

Интегрирование уравнений (23) и (24) с учетом краевых условий дает

$$w = \frac{q a^2}{4(H_1 + H_2)} \left(\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - 2\varphi \frac{x^2}{a^2} \right) + w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad (25)$$

где

$$w_0 = \frac{q a^2}{4(H_1 + H_2)} - \frac{H_1 f_1 - H_2 f_2}{H_1 + H_2}. \quad (26)$$

Для уравнений деформаций (5) и (6) имеем граничные условия

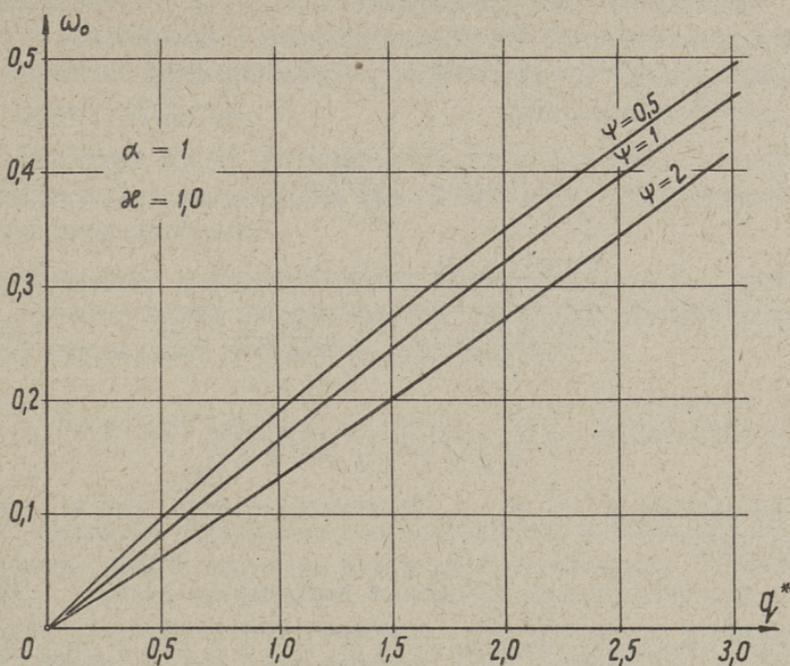
$$\int_{-a}^a \frac{du_1}{dx} dx = 2(H_1 - H_{01}) \bar{u}_1, \quad (27)$$

$$\int_{-a}^a \frac{du_2}{dx} dx = 2(H_2 - H_{02}) \bar{u}_2. \quad (28)$$

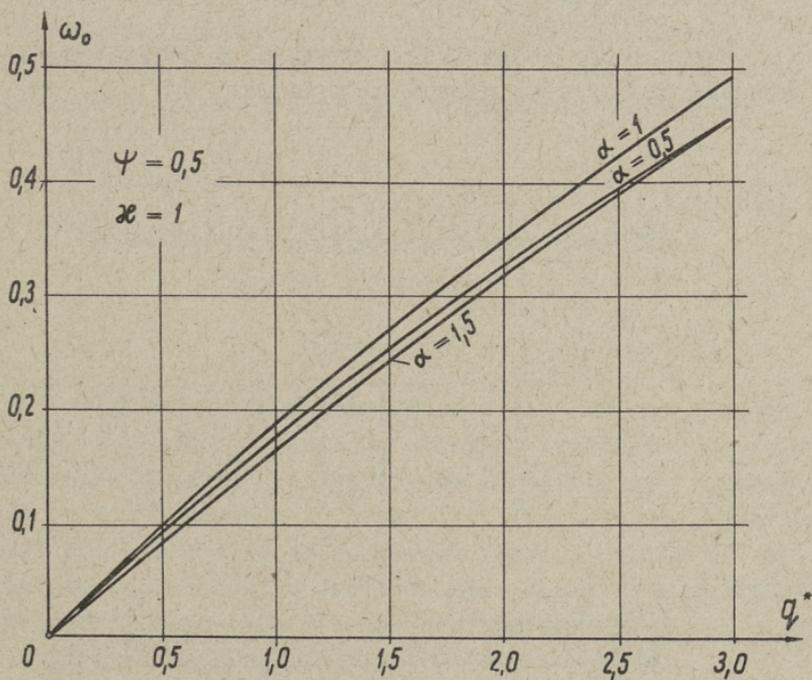
После интегрирования имеем

$$\frac{2w_0(2f_1 + w_0)}{3a^2} + \frac{q^2 a^2}{96(H_1 + H_2)^2} = \frac{H_1 - H_{01}}{EF_1} \left(\frac{EF_1 \bar{u}_1}{a} + 1 + 2 \frac{f_1^2}{a^2} + \frac{6f_1^4}{5a^4} + \dots \right), \quad (29)$$

$$-\frac{2w_0(2f_2 - w_0)}{3a^2} + \frac{q^2 a^2}{96(H_1 + H_2)^2} = \frac{H_2 - H_{02}}{EF_2} \left(\frac{EF_2 \bar{u}_2}{a} + 1 + 2 \frac{f_2^2}{a^2} + \frac{6f_2^4}{5a^4} + \dots \right). \quad (30)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Система из трех уравнений (26), (29) и (30) позволяет определить прогиб в середине пролета и неизвестные распоры H_1 и H_2 . В случае $f_1 = f_2$ решение этой системы приводит к зависимостям

$$H_1 + H_2 = \frac{q_0 d^2}{4f_1(1 + \omega_0)}, \quad (31)$$

$$H_1 = H_{01} + \frac{E F_1 f_1^2 [4\omega_0(2 + \omega_0) + (1 + \omega_0)^2]}{6d^2 \left(\frac{E F_1 \bar{u}_1}{d} + 1 + 2 \frac{f_1^2}{d^2} + \frac{6f_1^4}{5d^4} + \dots \right)}, \quad (32)$$

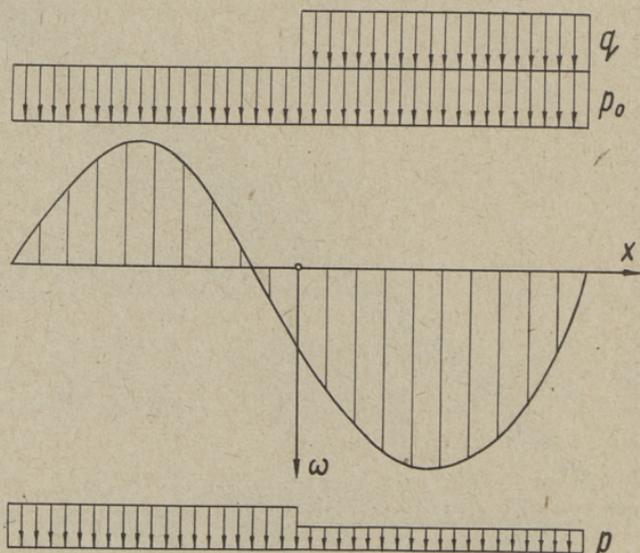
$$\omega_0^3(1 + \psi) + \omega_0^2 \left(3 - \frac{1}{5} \psi \right) + \omega_0 \left(\frac{11}{5} - \psi + 2\kappa \right) = \frac{2}{5} q^* - \frac{4}{5} \kappa - (1 + \psi), \quad (33)$$

где параметры q^* , κ , ω_0 принимаются также, как в формуле (20).

Для определения контактной нагрузки мы должны вернуться к уравнению (24), принимая производные от прогиба w по формуле (25), которая при $f_1 = f_2$ имеет вид

$$\omega = \frac{w}{f_1} - (1 + \omega_0) \left(\frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2} - 2\varphi \frac{x^2}{d^2} \right) + \omega_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right). \quad (34)$$

Пример эпюры вертикальных смещений и соответствующей контактной нагрузки представлен на фиг. 5:



Фиг. 5

Следует иметь в виду, что контактная нагрузка при односторонней нагрузке может исчезать (или менять знак) при больших усилиях предварительного напряжения нежели при действии полной нагрузки..

Аналогично могут быть выведены уравнения для расчета предварительно напряженных систем при ином распределении действующих нагрузок.

Приведенные результаты могут служить основой не только для проектирования всяких систем, но и для решения вопроса об оптимальных параметрах этих систем.

Л и т е р а т у р а

1. Стальные предварительно напряженные и тросовые конструкции. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Стройиздат. Москва, 1964.

2. В.Р. Ку л ь б а х. О представлении уравнений упругой нити в перемещениях. Труды ТПИ, серия А, № 269, 1968.

3. V. K u l b a c h. Berechnung von Hängedächern mit negativer Krümmung als Schalen, die nur Zugwiderstand aufweisen. Proceedings of the II International conference on prestressed metal structures. Praha, 1966.

V. Kulbach

On Design of Hanging Roofs with a Double
System of Cables

Summary

In designing various hanging roof systems the general equations of elastic threads by stresses are used as a rule. In this paper a method basing on the equations of elastic threads by displacements is presented. The solution equations are derived in a nonlinear universal form. A system of dimensionless parameters is evolved. Some cases of symmetrical and unilateral loads are treated of. The most frequent cases are illustrated by graphs.

УДК 621.031.001.5

Х.Х. Лауль, В.А. Хютси

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ
ОБОЛОЧКИ ВИДА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА I)

В в е д е н и е

За последние годы в строительной и проектной практике повысился интерес к оболочкам отрицательной гауссовой кривизны, в частности, очерченным по поверхности гиперболического параболоида. Архитектурная выразительность, большое разнообразие решений, простота возведения делает их наиболее приемлемыми.

Расчет железобетонных оболочек вида гиперболического параболоида производился в основном по безмоментной теории, так как отсутствовали практические методы расчета по моментной теории. Существующие теоретические работы с применением моментной теории расчета оболочек, используют граничные условия, выраженные Навье, т.е. до сих пор не учитывается совместная работа оболочки с бортовыми элементами.

Поэтому возникла потребность экспериментального исследования моделей гиперболического параболоида, чтобы выяснить распределение напряжений в оболочке.

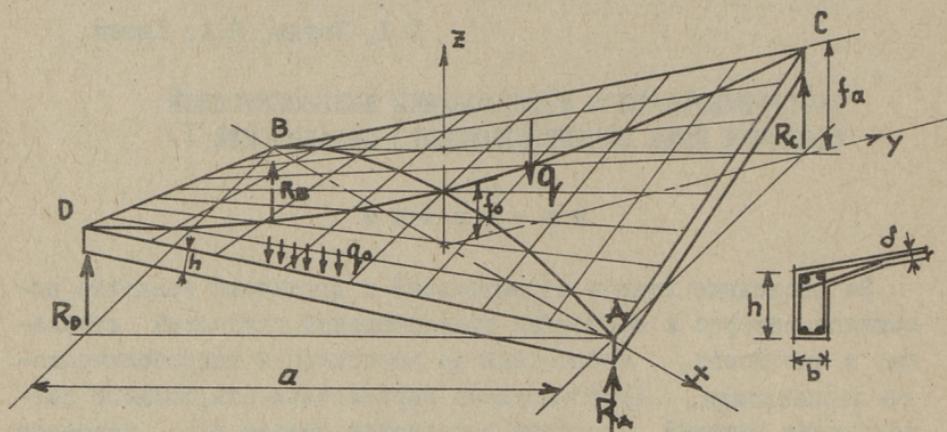
В данной статье рассматриваются в основном внутренние напряжения, возникшие в криволинейной части оболочки от нагрузок, находящихся в пределах эксплуатационных.

I) Результаты данного эксперимента были использованы при проектировании железобетонной оболочки в городе Таллине.

Моделирование

Основные размеры модели представлены на фиг. 1, выбранный масштаб 1 : 10. Модель оболочки вида гиперболического параболоида имеет следующие размеры:

$$a = 265 \text{ см}; \quad f_a = 60 \text{ см}; \quad f_o = 30 \text{ см}.$$



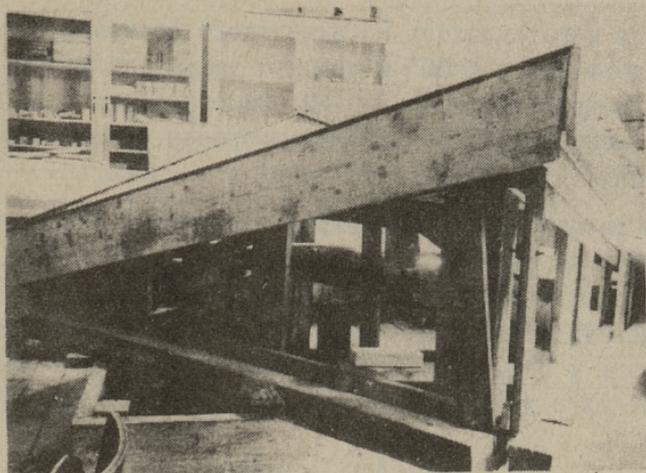
Фиг. 1. Конструктивная схема модели оболочки

Толщина криволинейной части оболочки 11 мм. Бортовые элементы с размерами $h_{cp} = 9,0$ см, $b = 4,0$ см.

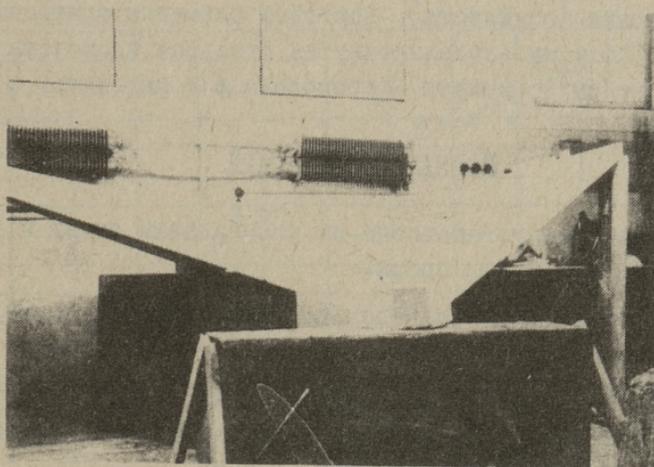
Опалубка и бетонирование

Для бетонирования модели изготовили деревянную опалубку (см. фиг. 2). Основой опалубки являются четыре деревянных треугольника из досок, на которые опирались доски (создавалась поверхность гиперболического параболоида). На доски набрасывался слой цементного раствора толщиной 1–2 см. После его отвердения в криволинейной части слой дополнительно прикрывали шпаклевкой и пропитывали олифой. Полученную гладкую поверхность покрывали тонкой бумагой во избежание сцепления.

Бетон на поверхности разравнивался с помощью шаблона. Толщина в криволинейной части получилась около 11 мм (максимальное отклонение 1 мм). Общий вид модели см. фиг. 3.



Фиг. 2. Опалубка



Фиг. 3. Общий вид модели

Распалубка моделей производилась через 10 дней после бетонирования, в течение этого же времени держали влажностный режим.

Модель изготовлялась из цементного раствора 1:2,7 (портланд-цемент марки "400" и песок с диаметром частиц $\leq 2,5$ мм). Водоцементное отношение - 0,42. Одновременно с моделью из того же раствора бетонировались образцы, твердение которых происходило в одинаковых условиях с моделью.

На образцах определили марку раствора R , призмную прочность при сжатии $R_{пр}$, прочность при растяжении R_p и модули упругости при растяжении и сжатии. Полученные графики между напряжениями и деформациями представлены на фиг. 4 и 5. Напряжения в оболочке определялись путем сравнения деформаций моделей с деформациями образцов по представленным графикам.

Армирование

Криволинейная часть оболочки армирована холоднотянутой стальной проволокой δ 2 мм ($\sigma_p = 8280$ кг/см²). Шаг арматуры 7,5 см (замеренный в направлении вогнутости) и 15,0 см (в направлении выпуклости). Бортовые элементы армированы каркасом δ 4 мм (холоднотянутая стальная проволока $\sigma_p = 6700$ кг/см²), хомуты - проволока δ 1 мм, шагом 4 см.

Испытание моделей

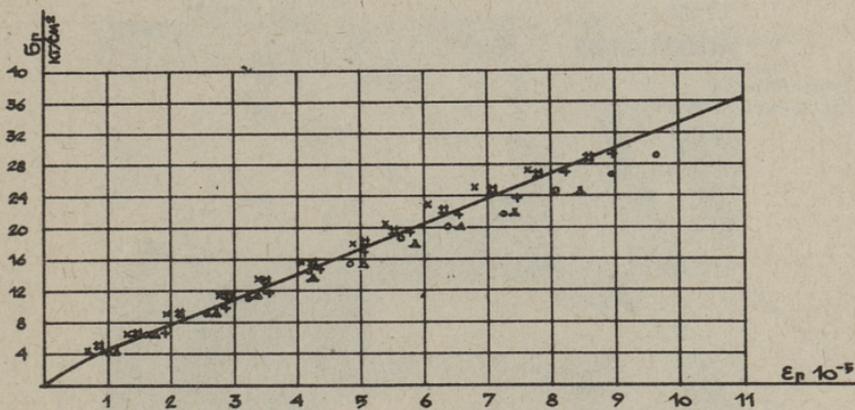
Модель была установлена на специальный стенд и опиралась на четыре шарнирных опоры.

Загружение производилось по схеме простой балки, где каждое усилие статически определимо.

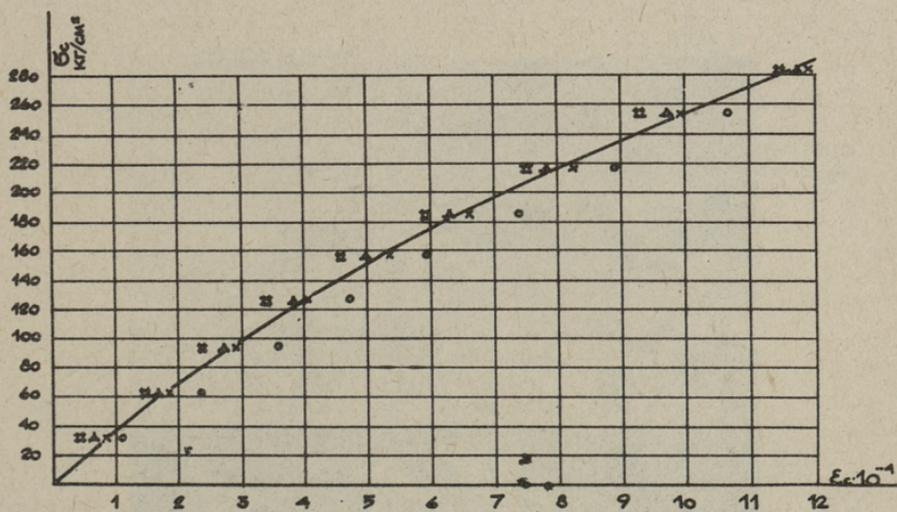
С помощью 128 брусков, разложенных на поверхности оболочки, добились равномерного распределения нагрузки на всю поверхность оболочки (см. фиг. 6 и 7)

Линейную нагрузку, соответствующую собственному весу бортового элемента оболочки, передавали через подвешенные по краям оболочки тяжести.

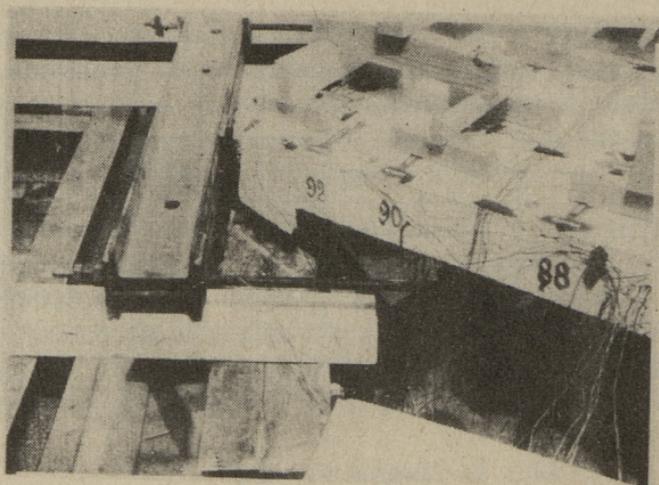
Для определения деформаций и перемещений были использованы электротензометры и индикаторы.



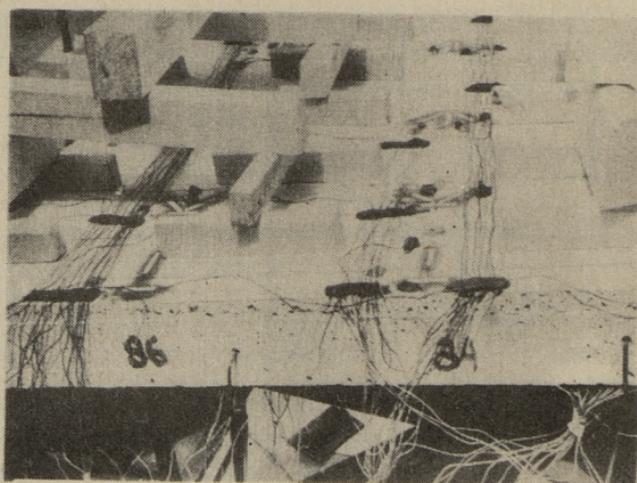
Фиг. 4. График $B_r - \epsilon_r$



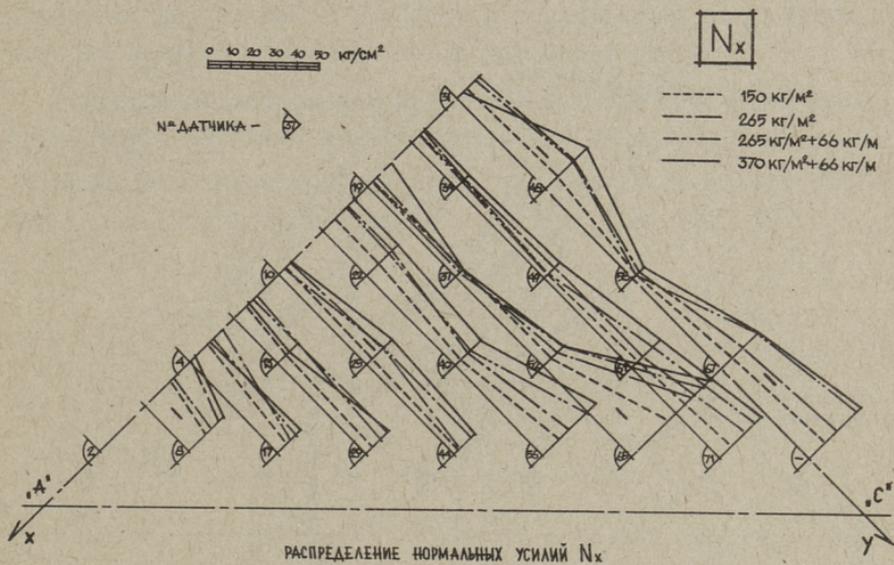
Фиг. 5. График $B_c - \epsilon_c$



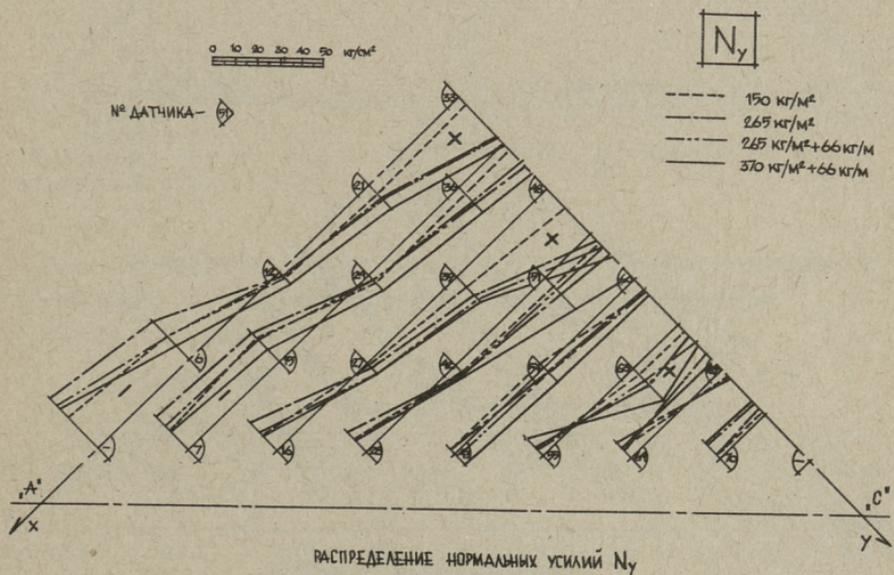
ФИГ. 6



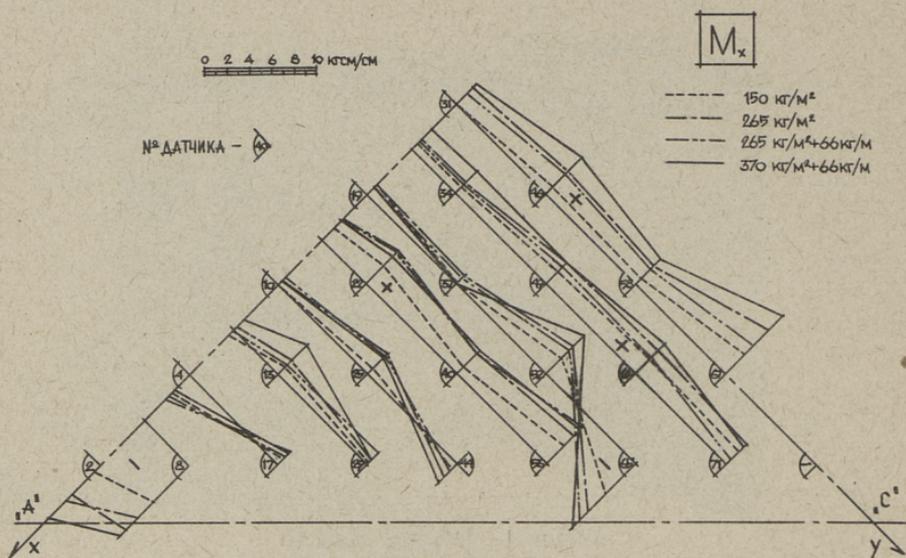
ФИГ. 7



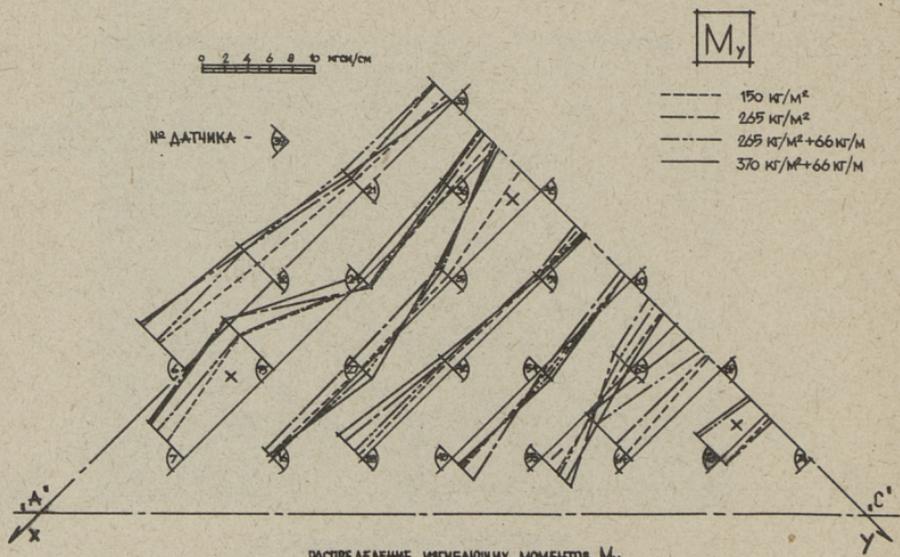
ФИГ. 8.



ФИГ. 9



Фиг. 10

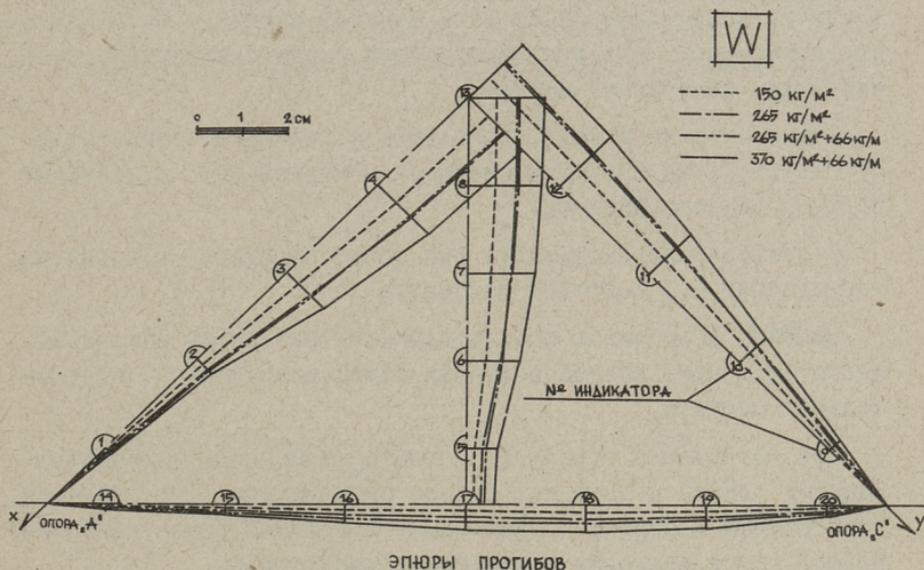


Фиг. 11

Продольные деформации измерялись проволочными датчиками сопротивления с базой 20 мм, сопротивлением $R = 200 \Omega$. Для измерения напряжений в оболочке использовалось 216 датчиков. Напряжения измерялись в 34 различных точках.

Регистрация деформаций проводилась с помощью ЭИД-3 (электрического автоматического измерителя деформаций).

Прогибы в криволинейной части оболочки и бортового элемента измерялись индикаторами - 20 штук (см. фиг. 12).



Фиг. 12

Для определения опорных реакций были законструированы и тарированы специальные опорные устройства. Полученные результаты см. таблица I.

Т а б л и ц а I
Опорные реакции и усилие в затяжке

Нагрузка (кг)	ΣR (кг)	R_A		R_B		R_C		R_D		Усилие в за- тяжке
		(кг)	$\frac{R_A}{\Sigma R} \%$	(кг)	%	(кг)	%	(кг)	%	
1000	970	455	47,0	415	42,7	45	4,6	55	5,7	1150
1800	1735	800	46,1	735	42,4	95	5,5	105	6,0	2140
1800+ +700	2460	1060	43,1	970	39,4	200	8,1	230	9,4	2410
2500+ +700	3125	1410	45,1	1200	38,4	245	7,9	270	8,6	3530

Результаты испытаний

В настоящей статье изложена часть результатов испытаний оболочки (для нагрузок $q_1 = 150 \text{ кг/м}^2$; $q_2 = 265 \text{ кг/м}^2$; $q_3 = 265 \text{ кг/м}^2 + 66 \text{ кг/м}$ — нагрузка бортового элемента; $q_4 = 370 \text{ кг/м}^2 + 66 \text{ кг/м}$)²⁾.

По фигурам 8, 9, 10 и II видим, что фактическое распределение напряжений в криволинейной части отличается от напряжений, определенных по безмоментной теории. Исследование показывает, что в криволинейной части появляются значительные изгибающие моменты.

Знак минус на эпюрах нормальных напряжений соответствует сжатию, а на эпюрах изгибающих моментов — растяжению верхних волокон оболочки.

В направлении выпуклости вся оболочка сжата, в вогнутом направлении — в основном растянута.

Моменты в основном положительные — растянуты нижние волокна оболочки. Вблизи бортовых балок появились отрицательные моменты.

При нагружении бортовых элементов изменения величин нормальных усилий и моментов больше сказываются в области, примыкающей к бортовым элементам; в средней зоне криволинейной части оболочки изменения незначительны.

В ы в о д н ы

Экспериментальные данные позволяют сделать следующие выводы:

1. Оболочки вида гиперболического параболоида при загрузке равномерно распределенной нагрузкой в пределах эксплуатационной нагрузки по всей поверхности, кроме мембранных усилий, испытывают еще значительные изгибные усилия. Моментное напряженное состояние имеет краевой эффект, изгибающие моменты охватывают всю область криволинейной части оболочки.

²⁾ Остальные результаты испытаний данной модели рассматриваются в следующей статье.

2. Распределение нормальных усилий отличается от распределений усилий по безмоментной теории.

3. Наличие положительных изгибающих моментов в растянутой зоне ухудшает работу оболочки, так как приводит к значительному увеличению растягивающих усилий в нижних волокнах. Краевой эффект требует дополнительного армирования на краях оболочки.

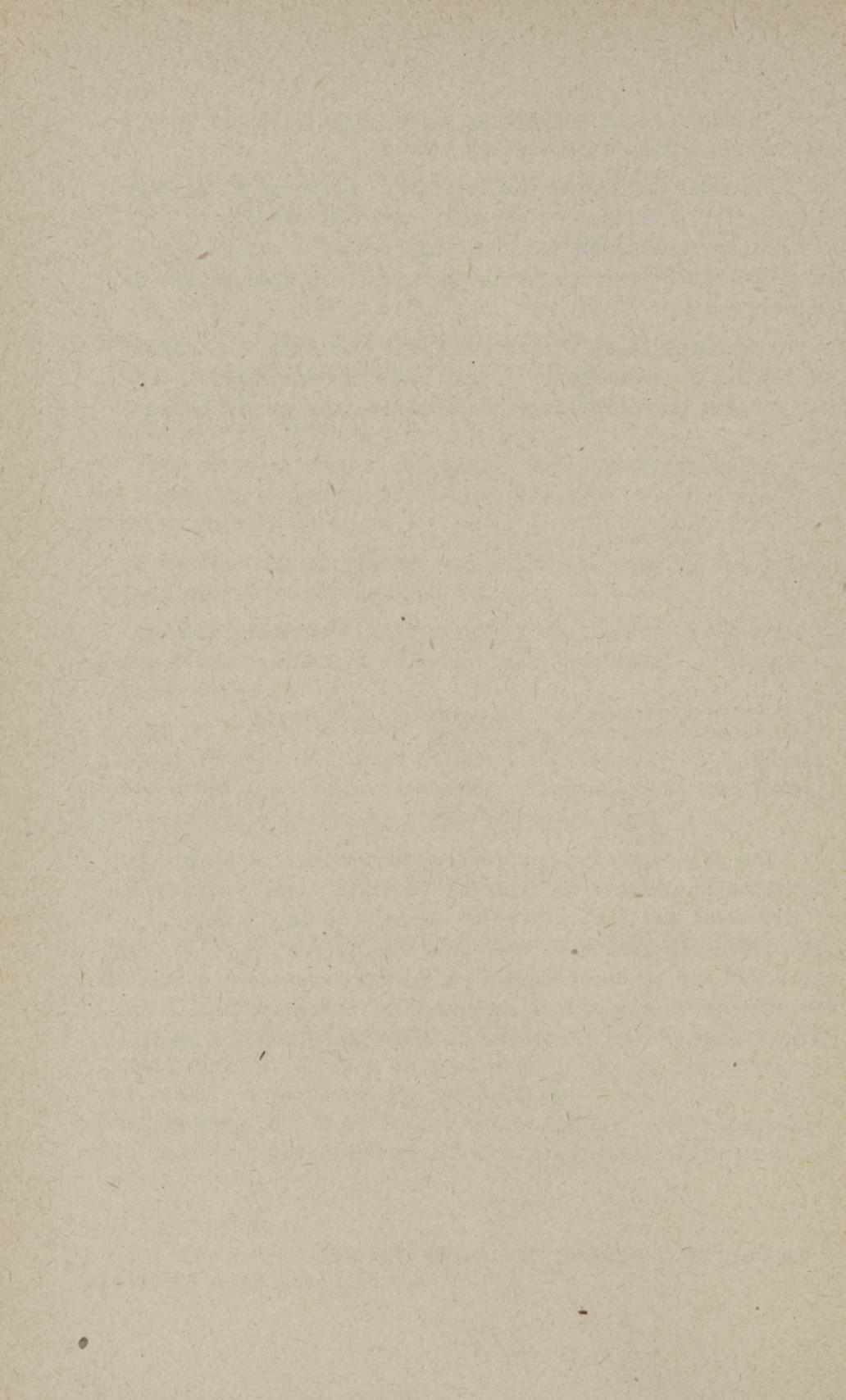
4. Основной вывод - подобного вида оболочки необходимо рассчитать по моментной теории, так как безмоментная теория расчета не соответствует действительной работе оболочки.

H.Laul, V.Hütsi

An Experimental Research of a Concrete
Hyper Shell

Summary

The paper gives a description of making, testing and analysing a concrete shell model in scale 1:10. Dimensions of the model are 2,65 x 2,65 m, slope - 60 cm, thickness 1,1 cm. Deformations have been measured in many points and illustrations of distribution of normal stresses and moments are presented. A displacement epure is presented too. The distribution of normal forces is given in live load stadium.



УДК 624.04

В.А. Отсмаа

К РАСЧЕТУ НА ПОПЕРЕЧНУЮ СИЛУ ДЛИННЫХ КРУГЛО-
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК

(Сообщение 2)

I. Общие замечания

В [I] предельная поперечная сила длинной цилиндрической железобетонной оболочки, нагруженной поперечной полосовой нагрузкой и не имеющей поперечного армирования, была выражена в виде

$$Q_B = 2\alpha R_{пр} \delta h_0 (1 - \beta a/h_0), \quad (I)$$

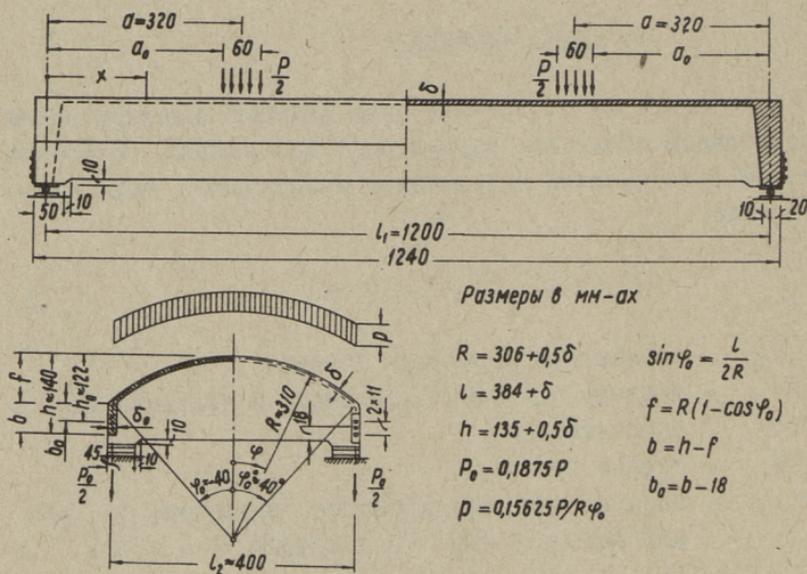
- где $R_{пр}$ - призмная прочность бетона;
 δ, h_0 - толщина криволинейной части и полезная высота оболочки;
 a - пролет среза;
 α, β - эмпирические коэффициенты, зависящие от разных факторов (по [I] получены $\alpha = 0,142$ и $\beta = 0,175$).

Формула (I) составлена по данным экспериментального исследования 20 моделей оболочек, имеющих почти постоянные размеры поперечного сечения и почти одинаковую величину $R_{пр}$. В настоящей работе рассматривается на основе экспериментального исследования моделей уточнение зависимости предельной поперечной силы Q_B от прочности бетона и от отношения толщины криволинейной части к толщине бортовых элементов δ/δ_0 .

2. Экспериментальное исследование моделей оболочек

а) Изготовление и испытание моделей

Основные геометрические данные и схема нагружения 6 испытанных моделей даны на фиг. I. Толщины криволинейной части δ и бортовых элементов δ_0 , половина центрального угла криволинейной части φ_0 и углы от гребня оболочки до нулевой линии в первой (φ_N) и во второй стадии (φ_N^II) напряженного состояния приведены в таблице I.



Размеры в мм-ах

$$\begin{aligned}
 R &= 306 + 0,5\delta & \sin \varphi_0 &= \frac{L}{2R} \\
 L &= 384 + \delta & f &= R(1 - \cos \varphi_0) \\
 h &= 135 + 0,5\delta & b &= h - f \\
 P_0 &= 0,1875 P & b_0 &= b - 18 \\
 p &= 0,15625 P/R\varphi_0
 \end{aligned}$$

Фиг. I

Модели изготовлялись из цементного раствора. Криволинейная часть моделей была неармирована. Оба бортовых элемента армировались тремя стержнями δ 4 мм из холоднотянутой проволоки с пределом прочности при растяжении 6500 кг/см^2 . Стержни были анкерены на торцах модели. Диафрагмы армировались по контуру одним стержнем δ 4 мм.

Модели бетонировались в металлических формах. Распалубка производилась через 7 - 10 дней после бетонирования. До

Геометрические размеры моделей и характеристики прочности раствора

Тип оболочки	δ	δ_0	φ_0	φ_N	φ_N^I	R_{np}	R_p'	R_p
	мм	мм					кг/см ²	
[I] X	8,6	14,4						
VI - I I	6,8	18,4	40°34'	38°22'	27°50'	286	39,5	30,8
VI - I II	7,1	17,7	40°27'	37°57'	27°30'	192	34,3	25,3
VI - I III	6,9	17,9	40°29'	38°10'	27°34'	440	49,8	40,6
VI - 2 I	7,0	12,0	39°46'	36°15'	27°43'	286	39,5	26,8
VI - 3 I	11,0	18,6	40°15'	35°22'	24°26'	305	39,1	28,2
VI - 4 I	10,6	11,3	39°26'	33°28'	24°42'	305	39,1	28,2

X Средние данные моделей без поперечного армирования, испытанных в [I].

двухнедельного срока модели держались во влажной среде.

Для определения прочности раствора изготовили образцы, которые испытывались одновременно с моделями. Призмная прочность $R_{пр}$ определялась на призмах $4 \times 4 \times 16$ см, сопротивление растяжению R'_p на "восьмерках". Действительное сопротивление раствора модели растяжению R_p определялось на образцах с поперечным сечением $\delta \times 20$ мм, вырезанных из криволинейной части после испытания. Выяснилось, что действительное сопротивление R_p было в среднем на 26% ниже сопротивления R'_p , полученного на "восьмерках". Прочностные характеристики раствора даны в таблице I.

Модели оболочек испытывались на специальном стенде (см. [I]) до разрушения. В ходе испытаний постоянно наблюдали за возникновением и развитием трещин.

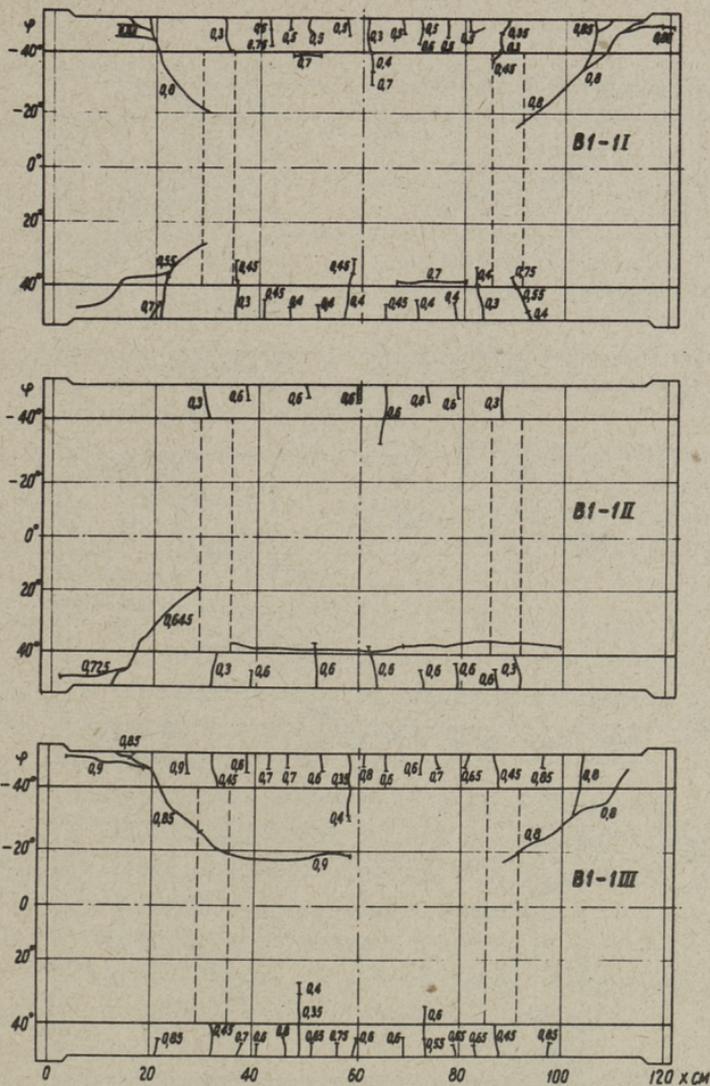
Модели VI - I I, VI - 2 I, VI - 3 I и VI - 4 I были предназначены для изучения влияния отношения δ/δ_0 , модели VI - I I, VI - I II и VI - I III - влияния прочности бетона на величину Q_B .

б) Разрушение моделей

Характер разрушения и форма критических трещин^{I)} были похожи на описанные в [I]. Первые вертикальные трещины появились, когда продольные напряжения, вычисленные по первой стадии напряженного состояния, достигали величины R_p . Разрушение всех моделей происходило из-за поперечной силы после возникновения и развития косых трещин. При появлении первых косых трещин величины главных растягивающих напряжений на нулевой линии первой стадии напряженного состояния составляли 51-88% от R_p . Схемы развития трещин до окончательного разрушения даны на фиг. 2 и 3, причем цифра у трещины указывает нагрузку при появлении трещины.

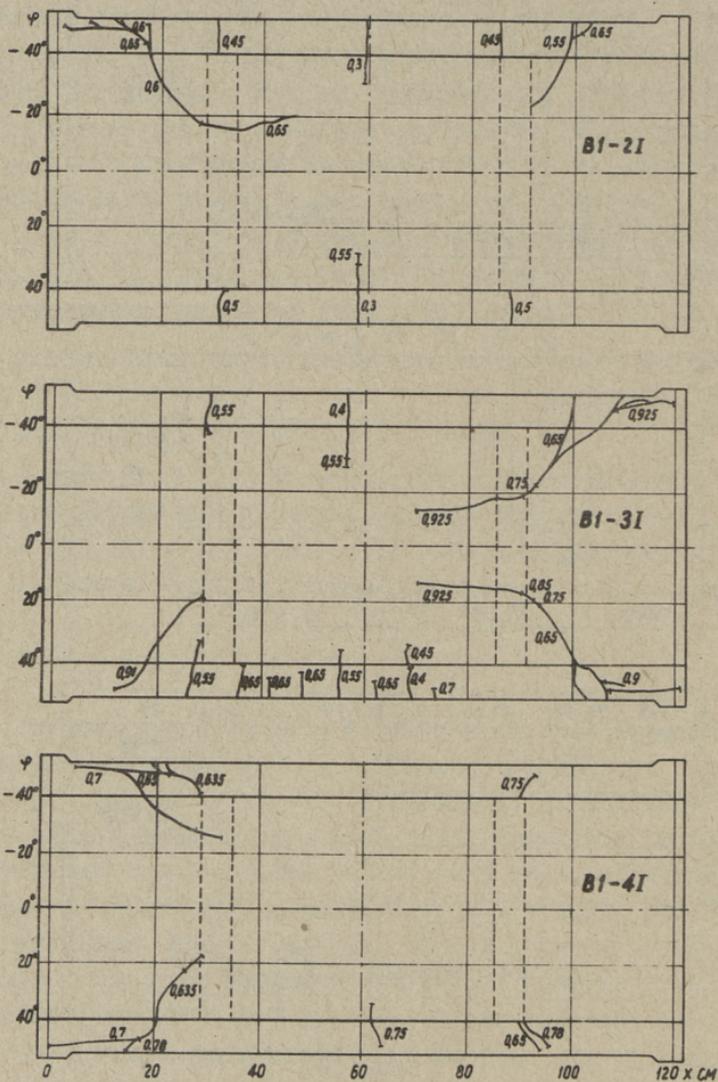
Выяснилось, что форма критических трещин не зависит от марки бетона и от отношения δ/δ_0 . Средняя действительная критическая трещина была близка к теоретической трещине, найденной по [2] как траектория главных сжимающих напряжений второй стадии напряженного состояния. На фиг. 4 даны

I) Применяются понятия, принятые в [I, 2].



Фиг. 2

теоретические критические трещины (непрерывная жирная линия), проходящие через линию соединения криволинейной части и бортового элемента на расстоянии 0,57 а от опоры, и средние действительные критические трещины (непрерывная тонкая линия). Там же показаны и траектории главных сжимающих напряжений первой стадии напряженного состояния (пунктирная линия).

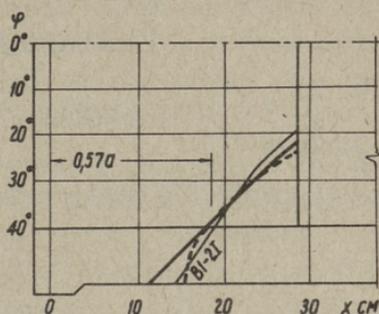
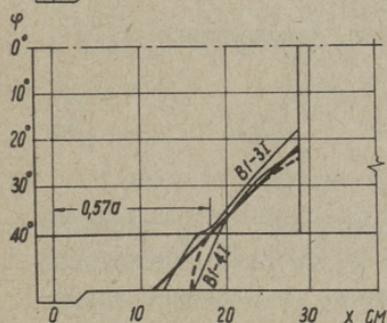
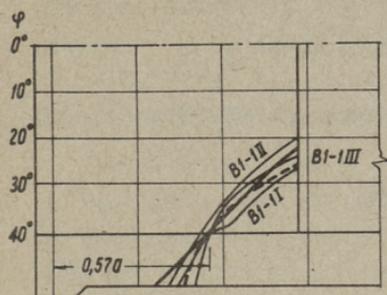


Фиг. 3

Основные результаты испытаний приведены в таблице 2. В таблице применены следующие обозначения:

$Q_p = Q_B$ - предельная поперечная сила, воспринимаемая оболочкой;

Q_I - поперечная сила при появлении первой кривой трещины;



— траектория гл. сжим. напр. во 2 стадии напр. сост.
 - - - траектория гл. сжим. напр. во 1 стадии напр. сост.

Фиг. 4

- τ_I — соответствующее Q_I касательное напряжение на нулевой линии, вычисленное по первой стадии напряженного состояния;
- σ_I — нормальное напряжение у низа бортового элемента при появлении первой нормальной трещины;
- φ_a — угол от гребня оболочки до средней критической трещины в критическом сечении;
- x_0 — среднее расстояние критической трещины от опорного сечения по высоте линии соединения криволинейной части и бортового элемента.

Т а б л и ц а 2

Результаты испытаний

Тип оболочки	$Q_p = Q_B$	Q_I	τ_I / R_p	σ_I / R_p	φ_a	x_0
	кг	кг			град.	см
VI - I I	437,5	275	0,63	0,88	27,5	19,5
VI - I II	395	322	0,88	1,07	20,0	17,3
VI - I III	452,5	400	0,69	0,78	24,0	18,5
VI - 2 I	342,5	275	0,72	1,27	19,5	19,5
VI - 3 I	462,5	325	0,51	1,07	19,0	17,0
VI - 4 I	392,5	318	0,52	-	23,0	19,5

3. Анализ данных испытаний

а) Изучение влияния прочности бетона на величину Q_B по формуле (I)

Формулу (I) можно написать в виде

$$Q_B = AR_y \delta h_0, \quad (2)$$

где R_y — условная прочность бетона, принимаемая в [I] равной $R_{пр}$;

$$A = 2\alpha(1 - \beta a/h_0). \quad (3)$$

— Для всех испытанных моделей $a/h_0 \approx 2,64$.

Чтобы проверить формулу (2) относительно $R_{пр}$ рассматриваем модели VI-I I, VI-I II и VI-I III, имеющие одинаковые размеры поперечного сечения и различные прочностные характеристики бетона.

Определяем для этих моделей действительные величины (табл. 3, столбец 3)

$$A_i = \frac{Q_B}{R_y \delta h_0}, \quad (4)$$

где $R_y = R_{пр}$;

Q_B — предельная поперечная сила, полученная при испытании модели.

Вычисляем минимальное среднее квадратичное отклонение

$$\Delta_{мин} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_i - A_k)^2}{n}}, \quad (5)$$

где n — число рассматриваемых моделей;

A_k — величина A , соответствующая наименьшему значению среднего квадратичного отклонения:

$$A_k = \frac{\sum_{i=1}^n A_i^2}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (6)$$

У геометрически однотипных оболочек $\Delta_{\text{мин}}$ показывает, насколько точно R_y выражает влияние прочности бетона на величину Q_B . Для моделей VI-I I, VI-I II и VI-I III получается $A_k = 0,147$ и $\Delta_{\text{мин}} = 0,038$ (т.е. 26% от A_k). При этом для оболочки VI-I II отклонение доходит до 63%.

Оказывается, что в изученных пределах прочности бетона ($R_{\text{пр}} = 190 - 440 \text{ кг/см}^2$ и $R_p = 25 - 40 \text{ кг/см}^2$) Q_B гораздо лучше выражается через сопротивление бетона растяжению R_p или еще точнее через величину $\sqrt[3]{R_p}$. Принимая в формуле (2) $R_y = R_p$, получаем (табл. 3, столбец 4) для VI-I I, VI-I II и VI-I III $A_k = 1,66$ и $\Delta_{\text{мин}} = 0,21$ (12,5% от A_k). При $R_y = 9\sqrt[3]{R_p}$ (кг/см^2) (табл. 3, столбец 5) $A_k = 180$ и $\Delta_{\text{мин}} = 0,07$ (4%).

С заменой $R_{\text{пр}}$ на R_p или $9\sqrt[3]{R_p}$ в формуле (I) изменяются полученные в [I] значения коэффициентов α и β . Для нахождения их вычисляем по (4) при $R_y = R_p$ или $R_y = 9\sqrt[3]{R_p}$ для описанных в [I] оболочек действительные коэффициенты A_i (табл. 3, столбцы 4 и 5), умножая при этом данные в [I] сопротивления бетона растяжению, которые определены образцами в виде "восьмерок", на коэффициент 0,74.

Далее выражаем

$$A = 2\alpha(1 - \beta a/h_0) = \alpha_1 + \beta_1 a/h_0 \quad (7)$$

и определяем величины

$$\beta_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n A_i \frac{a}{h_0} - \sum_{i=1}^n A_i \sum_{i=1}^n \frac{a}{h_0}}{n \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{h_0}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{a}{h_0}\right)^2}, \quad (8)$$

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^n A_i - \beta_1 \sum_{i=1}^n \frac{a}{h_0}}{n}, \quad (9)$$

соответствующие наименьшему квадратичному отклонению

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_i - A)^2}{n}}. \quad (10)$$

При $R_y = R_p$ коэффициент A в формуле (2) принимает вид

$$A = 2,67(1 - 0,145 a/h_0) \quad (II)$$

(среднее квадратичное отклонение от средней величины А 9%)
и при

$$R_y = 9\sqrt[3]{R_p}$$

$$A = 2,82(1 - 0,154 a/h_0) \quad (I2)$$

(среднее квадратичное отклонение 6%).

б) Оценка величины Q_B по условным касательным напряжениям.

Предельную поперечную силу Q_B можно определить по условным касательным напряжениям упругой стадии, вычисленным на нулевой линии по предельной нагрузке:

$$\max \tau = \sigma_0 = \frac{Q_B \max S'}{2J\delta}, \quad (I3)$$

где σ_0 - главные растягивающие напряжения на нулевой линии;

$\max S', J$ - статический момент сжатой зоны и момент инерции сечения относительно нулевой линии первой стадии напряженного состояния.

$\max \tau$ и σ_0 являются условными величинами, т.е. в предельном состоянии их не существует, так как наличие косых трещин изменяет характер работы оболочки по сравнению с упругой стадией.

Из (I3) предельная поперечная сила

$$Q_B = 2BR_y \frac{J\delta}{\max S'}, \quad (I4)$$

где δ - толщина оболочки на нулевой линии,

$B = \frac{\max \tau}{R_y}$ - предельное относительное условное касательное напряжение, зависящее от длины пролета среза и других факторов.

Результаты, полученные по (2) и (I4), мало отличаются ввиду того, что $J/\max S'$ почти пропорционально связано с h_0 . Если для VI-I I, VI-I II и VI-I III при $R_y = 9\sqrt[3]{R_p}$ учитывать влияние вута (радиусом 30 мм) в месте соприкосновения бортового элемента и криволинейной части, изменяюще-

Действительные величины коэффициентов А и В

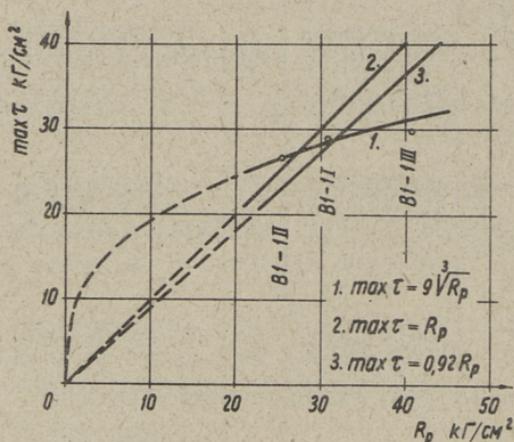
Тип оболочки	$\frac{d}{h_0}$	$A_i = \frac{Q_a}{R_y \delta h_0}$		$R_y = 9\sqrt[3]{R_p}$	$B_i = \frac{Q_{a \max} S'}{2R_y J \delta}$		$R_y = 9\sqrt[3]{R_p}$	$\delta = \delta'$
		$R_y = R_{np}$	$R_y = R_p$		$R_y = R_p$	$\delta = \delta'$		
BI - I	2,66	0,188	1,740	1,900	0,938	1,110	1,020	
BI - II	2,64	0,239	1,817	1,740	1,047	1,027	1,000	
BI - III	1,66	0,124	1,355	1,770	0,785	1,031	0,958	
BI - 2	2,64	0,141	1,510	1,500	0,893	0,886	0,904	
BI - 3	2,60	0,112	1,212	1,246	0,722	0,741	0,741	
BI - 4	1,62	0,099	1,077	1,108	0,635	0,654	0,665	
BI - I ^x	2,64	0,195	1,638	1,804	0,973	1,057	0,993	
AI I ^{xx}	4,13							
AI II	4,13		1,073	1,037	0,631	0,610	0,653	
DI I	3,44		1,047	1,011	0,615	0,594	0,660	
DI II	3,44		1,232	1,282	0,727	0,756	0,767	
DI III	3,44		1,302	1,354	0,770	0,800	0,812	
BI I	2,64		1,800	1,740	1,060	1,022	1,022	
BI II	2,64		1,760	1,697	1,062	1,027	1,063	
CI I	1,81		2,100	2,180	1,168	1,125	1,216	
CI II	1,81		1,710	1,850	1,010	1,066	1,152	

^x Средние величины моделей BI - I I, BI - I II и BI - I III.

^{xx} Модели, начиная с AI I, описаны в [1].

го толщину оболочки у нулевой линии до величины δ' , то аналогично (4), (5) и (6) (см. табл. 3, столбец 9) получается $V_k = 0,993$ и $\Delta_{\min} = 0,023$ (2,3% от V_k).

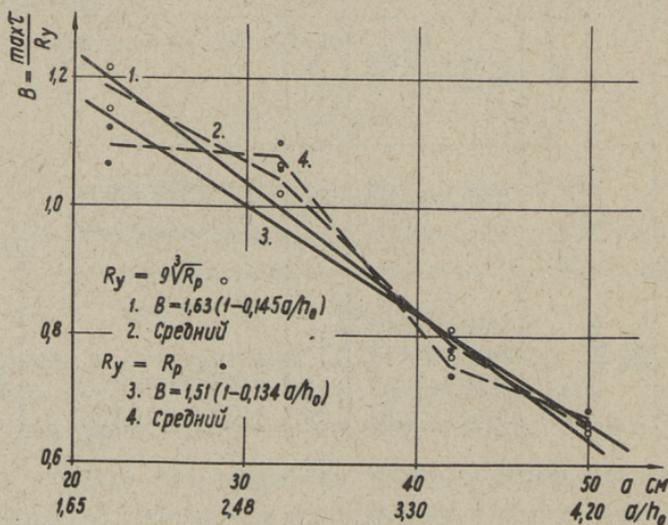
Зависимость между $\max \tau$ и R_p для однотипных оболочек дана на фиг. 5.



Фиг. 5

Ввиду небольшого количества испытанных моделей и ограниченного предела изменения R_p зависимость на фиг. 5 является первоначальной.

Зависимость отношения $\max \tau / R_y$ от длины пролета среза a на основе моделей, испытанных в [1], показана на фиг. 6.



Фиг. 6.

Предполагая зависимость между B и a/h_0 линейной и, исходя из столбцов 7 и 9 табл. 3 (т.е. учитывая влияние вута), получается аналогично (7) - (10)

$$\text{при } R_y = R_p : B = 1,51 (1 - 0,134 a/h_0). \quad (15)$$

$$\text{при } R_y = 9\sqrt[3]{R_p} : B = 1,63 (1 - 0,145 a/h_0). \quad (16)$$

В таблице 4 даются для оболочек, исследуемых в настоящей работе и в [1], теоретические предельные поперечные силы Q_B^T , вычисленные по формулам (14), (15), (16) и отклонения их от действительной предельной поперечной силы Q_B^A :

$$K = \frac{Q_B^T - Q_B^A}{Q_B^A} 100\%.$$

Формулы (15) и (16), а также (11) и (12), получены при почти постоянных величинах h_0 и l_2 . Возможно, что B (и A) зависит не только от a/h_0 , но и от l_2/h_0 . Кроме того, линейная зависимость между a и Q_B приемлема только в изученных пределах ($a/h_0 \approx 1,7 - 4,2$). Можно предполагать, что при дальнейшем уменьшении пролета среза величина Q_B приближается к какой-то постоянной верхней границе и при дальнейшем увеличении пролета среза - к постоянной нижней границе. Такую тенденцию имеют 2 и 4 фиг. 6, показывающие изменение средних величин B , полученных при испытании моделей.

Т а б л и ц а 4

Теоретические величины Q_B

Тип оболочек	$R_y = R_p$ $B = 1,51(1 - 0,134 a/h_0)$		$R_y = 9\sqrt[3]{R_p}$ $B = 1,63(1 - 0,145 a/h_0)$		$R_y = 9\sqrt[3]{R_p}$ $B = 1,875(1 - 0,145 a/h_0) (\frac{y_N}{y_0})^3$	
	Q_B^T	K	Q_B^T	K	Q_B^T	K
	кг	%	кг	%	кг	%
I	2	3	4	5	6	7
VI-I I	454	4	430	-2	418	-4
VI-I II	370	-6	393	-1	376	-5
VI-I III	604	33	473	5	456	I
VI-2 I	367	5	381	II	334	-2
VI-3 I	630	36	633	37	500	8
VI-4 I	594	55	596	52	418	7

I	2	3	4	5	6	7
A I I	277	I	276	0		
A I П	270	-2	273	-I		
D I I	442	IO	425	6		
D I П	4I9	5	40I	0		
B I I	4I4	-8	442	-2		
B I П	399	-I3	425	-6		
C I I	630	2	6I4	-I		
C I П	6I8	7	600	4		

в) Влияние отношения δ/δ_0 на величину Q_B .

Формулы (2) и (14) с коэффициентами в виде $\alpha, \beta, a/h_0$ не выражают влияние δ/δ_0 на Q_B , так как отношение $J/\max S'$ практически не зависит от δ/δ_0 . Но из проведенных опытов выясняется что: а) при данной δ увеличение δ_0 увеличивает величину Q_B (ср. действительные коэффициенты В моделей ВI-I I и ВI-2 I или ВI-3 I и ВI-4 I в таблице 3); б) при данной δ_0 увеличение δ приводит к увеличению Q_B , но к уменьшению В (ср. модели ВI-2 I и ВI-4 I или ВI-I и ВI-3 I); в) при постоянном δ/δ_0 увеличение толщин оболочки приводит также к увеличению Q_B и уменьшению В (ср. модели ВI-2 I и ВI-3 I).

Так как уменьшение В для всех моделей всегда сопровождается относительным уменьшением сжатой зоны первой стадии напряженного состояния, то кажется, что В может быть выражена в виде

$$B = B_1 \cdot B_2. \quad (17)$$

$$\text{где } B_1 = f(a/h_0) \quad \text{и} \quad B_2 = f(\varphi_n/\varphi_0).$$

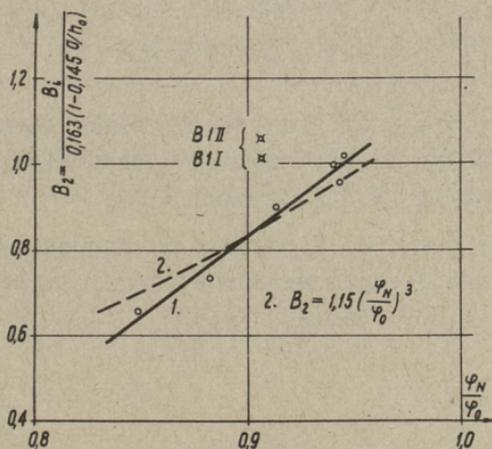
Для моделей, рассмотренных в настоящей работе, влияние отношения φ_n/φ_0 на коэффициент $B_2 = B_i/B$, показано на фиг. 7 линией I. При этом действительный коэффициент B_i принят из столбца 9 таблицы 3, В, вычислен по (16).

Принимая (линия 2 на фиг. 7)

$$\begin{aligned} B_1 &= 1,63 (1 - 0,145 \sigma/h_0), \\ B_2 &= 1,15 (\varphi_N / \varphi_0)^3, \end{aligned} \quad (18)$$

получаем для испытанных моделей теоретические величины Q_B , приведенные в столбце 6 таблицы 4. При этом учет φ_N / φ_0 уменьшает среднее квадратичное отклонение теоретической предельной поперечной силы относительно действительной Q_B с 26% на 5% (ср. столбцы 5 и 7 в табл. 4). В то же время для описанных в [1] оболочек VI I и VI II с такими же пролетами среза действительные B_2 получаются значительно больше, чем по (18)

Вопрос о влиянии δ/δ_0 на Q_B требует дальнейшего уточнения.



Фиг. 7

З а к л ю ч е н и е

Из экспериментального исследования железобетонных длинных цилиндрических оболочек при данной схеме нагружения вытекает следующее:

I. Общий характер разрушения и форма критической трещины существенно не зависит от марки бетона и от отношения δ/δ_0 .

2. Предельная поперечная сила Q_b , воспринимаемая оболочкой без поперечного армирования, определима на основе условных касательных напряжений, отнесенных к первой стадии напряженного состояния.

3. Q_b пропорционально связана с условной прочностью бетона R_y , а не с сопротивлением бетона сжатию. Величина R_y зависит от сопротивления бетона растяжению.

4. Влияние относительной толщины оболочки δ/δ_0 на Q_b связано с изменением относительной протяженности сжатой зоны первой стадии напряженного состояния φ_n/φ_0 . С уменьшением φ_n/φ_0 уменьшается величина Q_b и наоборот.

Л и т е р а т у р а

1. В.А. Отсмаа. Экспериментальные исследования предельного состояния железобетонных цилиндрических оболочек. Труды ТПИ, серия А, № 202, Таллин, 1963.

2. В.А. Отсмаа. К расчету на поперечную силу длинных круглоцилиндрических железобетонных оболочек. Труды ТПИ, серия А, № 229, Таллин, 1965.

Shear Strength of Reinforced Concrete
Cylindrical Long Shell
Roofs

Summary

The investigations described in /1, 2/ are extended. The experimental explorations of six reinforced concrete cylindrical long shell models with longitudinal tensile reinforcement are carried out to determine the dependence of the ultimate shear force on the strength of the concrete and on the ratio of the thickness of the cylindrical part δ to the thickness of the side element δ_0 . The following main results are represented: 1) the general character of shear crushing does not depend on the strength of the concrete, nor on the ratio δ/δ_0 ; 2) the ultimate value of shear force Q_B depends on the tensile strength of the concrete; 3) the δ/δ_0 ratio effect on Q_B connected with the relative extent of the compressed zone.

УДК 624,04

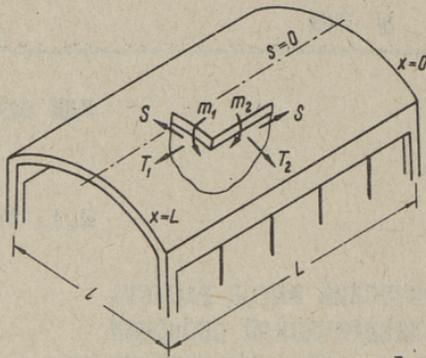
Ю.А. Тярно

СТАТИСТИЧЕСКО-ЭМПИРИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА
ОТДЕЛЬНОСТОЯЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
С ВЕРТИКАЛЬНО ОПЕРТЫМИ БОРТОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В последние годы доклады, сделанные на международных конгрессах в области оболочек подтверждают, что широкому применению оболочек в практике препятствуют трудности, возникающие перед инженерами именно при расчетах конструкций. Наиболее точные методы расчета по своей сложности для инженеров-проектировщиков и строителей неприменимы. Все большее применение конструкций оболочек требует создания для них более простой математической модели, которая основана на прямой связи с внутренними силами, грузовыми и геометрическими параметрами.

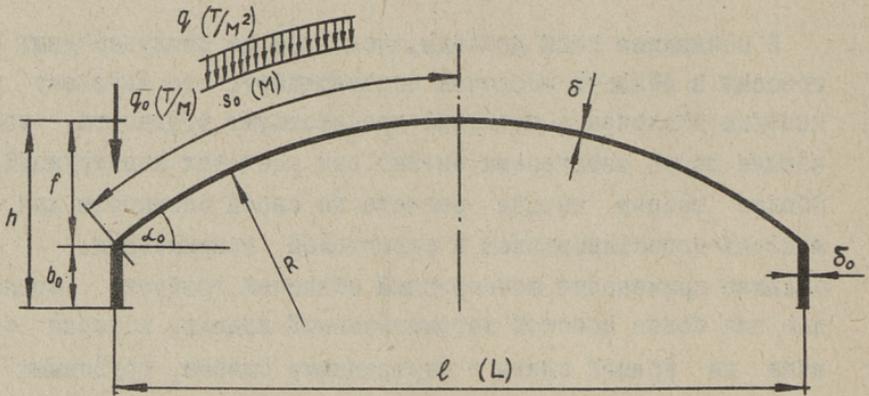
В последнее время все чаще возникает потребность применения статистическо-эмпирических методов при расчете оболочек.

Методика расчета конструкций оболочек развивается в двух направлениях - к упрощению и уточнению. Упрощение в настоящее время представляет собой не использование дополнительных упрощений, а употребление всех имеющихся расчетных материалов, полученных по более точным методам. В зависимости от имеющейся или полученной информации статистическо-эмпирический метод может быть применен при более или менее ответственных расчетах. Менее достоверный метод можно применять при предварительном определении внутренних сил и размеров конструкций, при этом окончательные величины могут

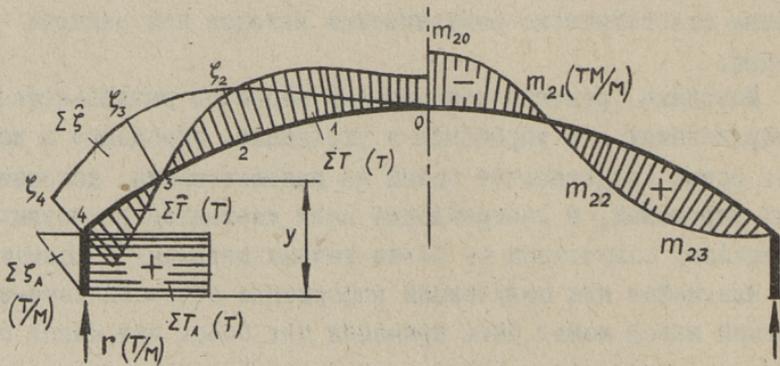


$m_{1z} = 0$
 $m_1 = 0$
 $Q_1 = 0$
 m_2 - ВДОЛЬ ОБЛОЧКИ
 ПОСТОЯННЫЙ

Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

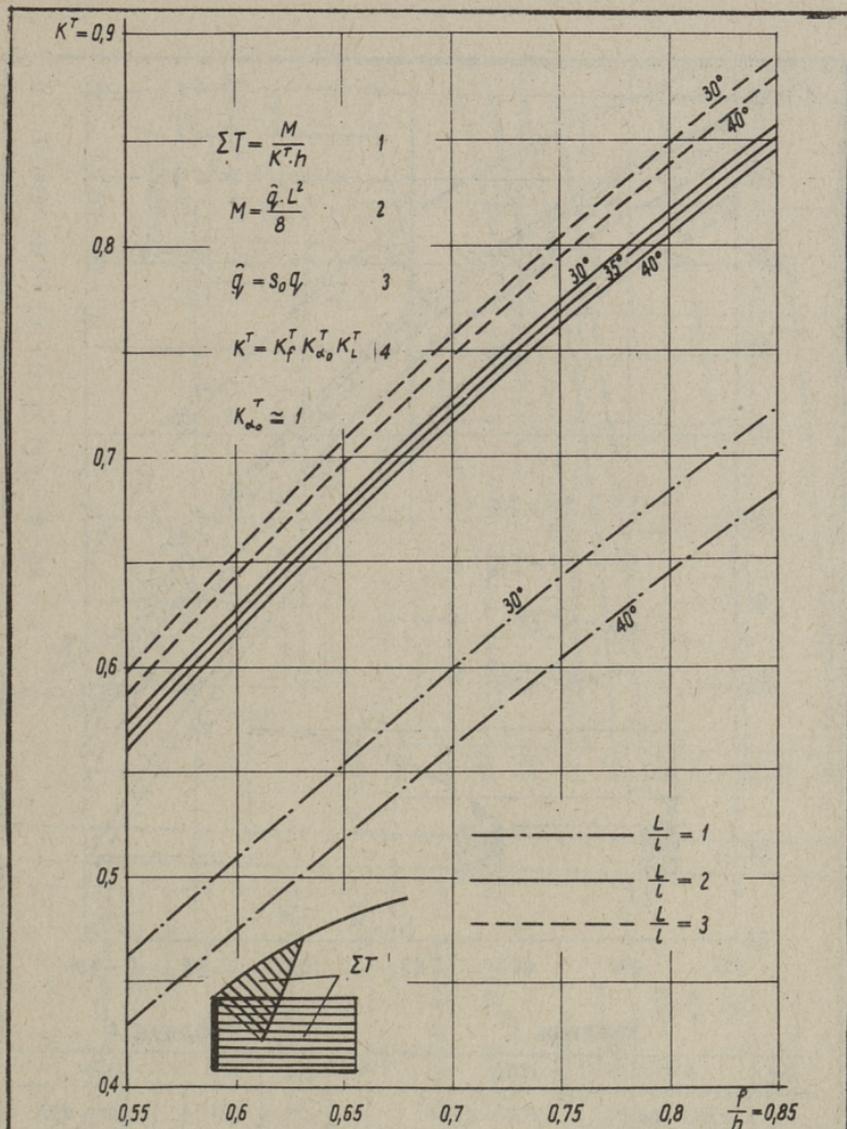


Таблица 1

№	K_f^T	при
1	$0,005 + 1,03 f/h$	$f/h < 0,7$
2	$0,125 + 0,855 f/h$	$f/h > 0,7$

Таблица 2

№	L/l	K_L^T
1	1	0,80
2	2	1,00
3	3	1,04

Фиг. 4

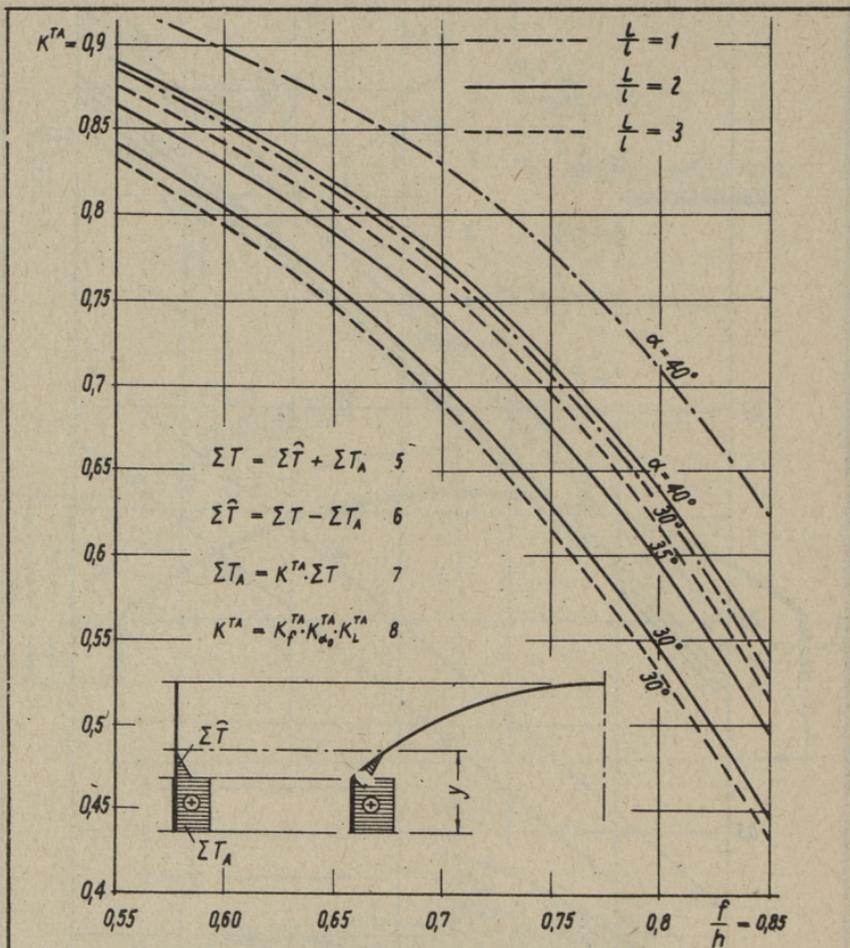


Таблица 3

Nº	K_{α}^{TA}	при
1	$0,81 + 1,04 f/l$	$f/h = 0,55$
2	$0,62 + 2,08 f/l$	$0,70$
3	$0,35 + 3,55 f/l$	$0,85$

Таблица 4

Nº	L/l	K_L^{TA}	при
1	1	1,05	$f/h = 0,55$
2		1,08	$0,70$
3		1,17	$0,85$

Таблица 5

Nº	K_p^{TA}	при
1	$1,27 - 0,70 f/h$	$f/h = 0,55 \div 0,70$
2	$1,65 - 1,57 f/h$	$f/h = 0,70 \div 0,85$

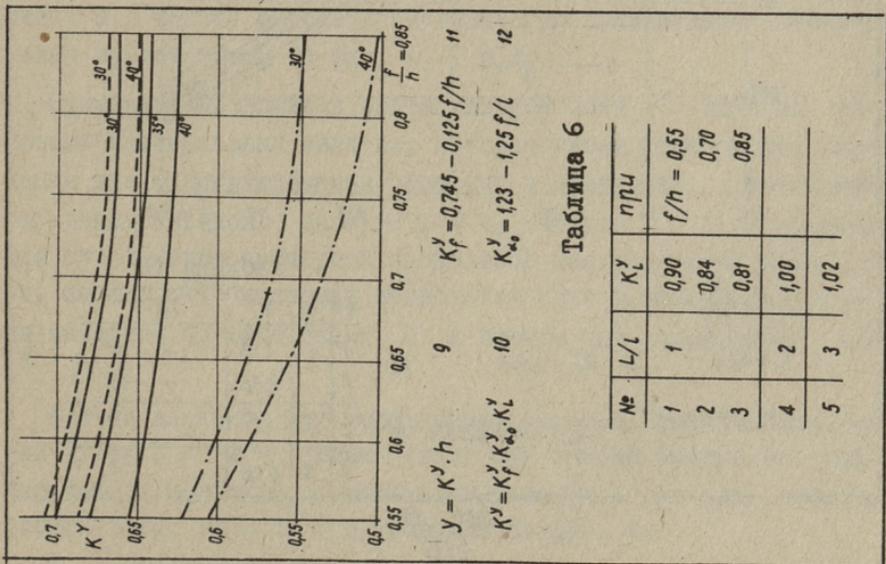
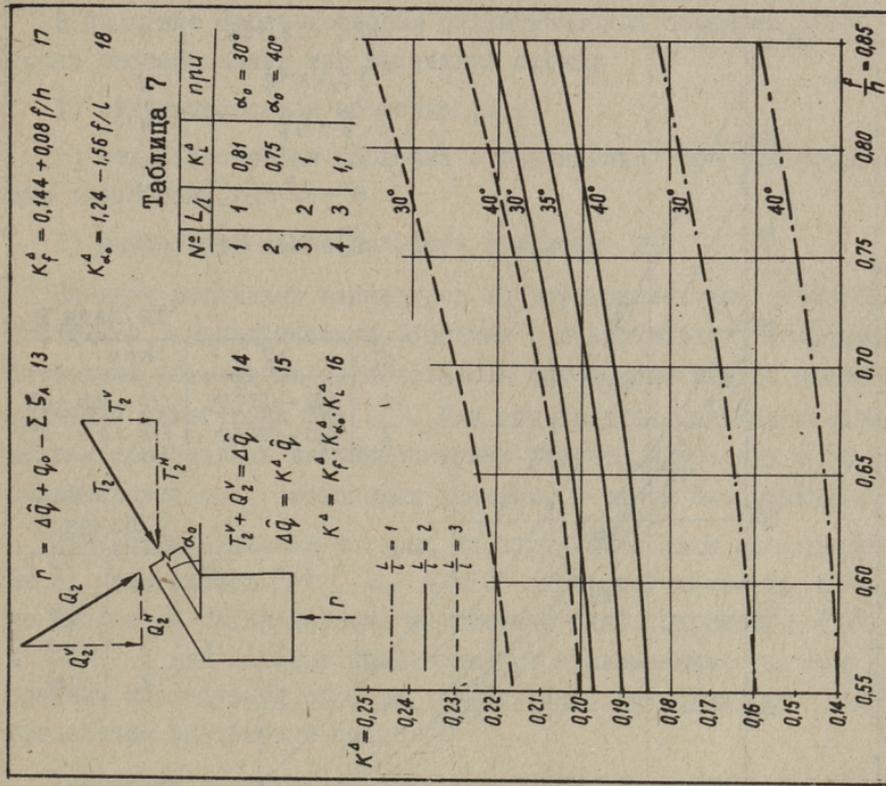


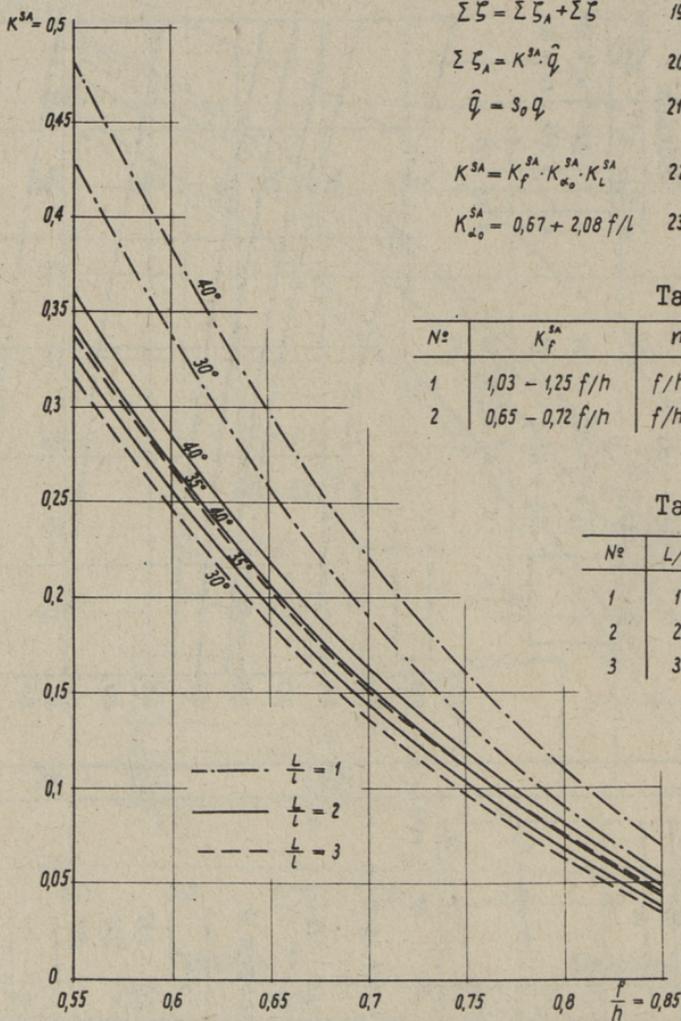
Таблица 6

№	L/L	K _L ^y	при
1	1	0,90	f/h = 0,55
2		0,84	0,70
3		0,81	0,85
4	2	1,00	
5	3	1,02	

Фиг. 6



Фиг. 7



$$\begin{aligned} \Sigma \zeta &= \Sigma \zeta_A + \Sigma \zeta^2 & 19 \\ \Sigma \zeta_A &= K^{SA} \cdot \hat{q} & 20 \\ \hat{q} &= S_0 q & 21 \\ K^{SA} &= K_f^{SA} \cdot K_{\alpha_0}^{SA} \cdot K_L^{SA} & 22 \\ K_{\alpha_0}^{SA} &= 0,67 + 2,08 f/L & 23 \end{aligned}$$

Таблица 8

Nº	K_f^{SA}	при
1	1,03 - 1,25 f/h	f/h = 0,55 ÷ 0,70
2	0,65 - 0,72 f/h	f/h = 0,70 ÷ 0,85

Таблица 9

Nº	L/l	K_L^{SA}
1	1	1,33
2	2	1
3	3	0,94

$$\begin{aligned} \Sigma \zeta &= \frac{\hat{q}}{K^{SK}} & 24 \\ \hat{q} &= S_0 q & 25 \quad K_f^{SK} = 0,455 & 27 \\ K^{SK} &= K_f^{SK} \cdot K_{\alpha_0}^{SK} \cdot K_L^{SK} & 26 \quad K_{\alpha_0}^{SK} = 0,015 + 6,25 f/L & 28 \end{aligned}$$

Таблица 10

Nº	L/l	K_L^{SK}	при
1	1	1,13	$\alpha = 30^\circ$
2		1,06	$\alpha = 40^\circ$
3	2	1	
4	3	0,98	

быть определены каким-либо более точным методом. При большей достоверности можно его применять и для определения конечных внутренних сил.

В практике проектирования цилиндрических оболочек достаточно рассматривать три расчетные схемы:

- 1) отдельная оболочка [3],
- 2) отдельная оболочка с вертикально опертым бортовым элементом,
- 3) внутренняя волна большого покрытия [2].

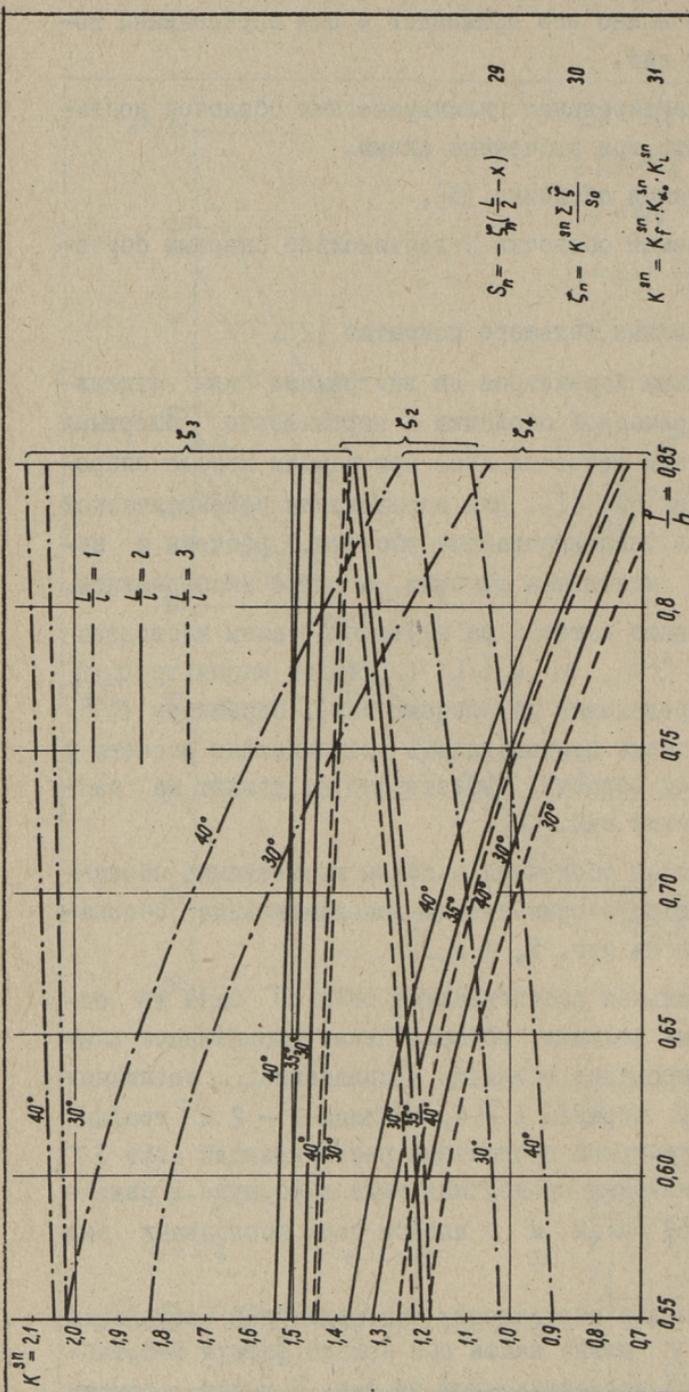
Влияние различных параметров на внутренние силы отдельной цилиндрической оболочки с вертикально опертыми бортовыми элементами исследовалось при помощи метода аппроксимации сдвигающих сил [1]. Для определения математической модели применялись запланированные расчеты и расчеты с незапланированными исходными данными, а также эксперименты.

Параметры, влияние которых на внутренние силы исследовались, принимались f/h , α_0 и L/l (грузовой параметр q_0/\bar{q} не влияет на распределение внутренних сил). Параметры δ/δ_0 и δ/R , для которых производились сравнивающие расчеты у границы исследуемой области, существенно не влияют на распределение внутренних сил.

При цилиндрических оболочках в общем применяются обозначения и в данной работе применяемые дополнительные обозначения представлены на фиг. 1, 2 и 3.

Суммарная продольная растягивающая сила ΣT одна из основных интегральных величин, которая имеет существенное значение для конструирования оболочки и сравнения различных расчетных методов. Формулы 1 - 4, таблицы 1 - 2 и графики для определения суммарной продольной растягивающей силы ΣT см. на фиг. 4. Суммарная продольная сила в формуле 1 связана моментом большой балки M и плечом пары продольных сил $k^T \cdot h$.

Нужные величины для определения распределений продольных сил ΣT_A , $\Sigma \hat{T}$ и y можно найти при помощи формул 5-8, таблиц 3-4 и графиков, представленных на фиг. 5, и при помощи формул 9-12, таблицы 6 и графиков на фиг. 6.



$$S_n = -\sum_n \left(\frac{1}{2} - x \right) \quad 29$$

$$S_n = K^{sn} \sum \frac{z}{S_0} \quad 30$$

$$K^{sn} = K_f^{sn} \cdot K_{\alpha_0}^{sn} \cdot K_l^{sn} \quad 31$$

Таблица I3

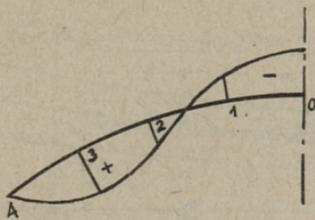
Nz	n	L/L = 1	L/L = 2	L/L = 3
1	2	0,87 - kui $\alpha_0 = 30^\circ$	1	1
2	3	0,78 - kui $\alpha_0 = 40^\circ$	1	0,96
3	3	1,40	1	0,94
4	4	1,50	1	

Таблица I2

Nz	n	$\alpha_0 = 30^\circ$	$\alpha_0 = 35^\circ$	$\alpha_0 = 40^\circ$
1	2	0,99	1	1,01
2	3	0,98	1	1,02
3	4	0,92	1	1,06

Таблица I1

Nz	n	K_f^{sn}	при
1	2	$0,90 + 0,53 f/h$	$f/h = 0,55 \div 0,70$ $f/h = 0,70 \div 0,85$
2	3	$1,62 - 0,20 f/h$	
3	4	$2,13 - 1,46 f/h$	
4	4	$2,70 - 2,27 f/h$	



$$m_{zn} = K_n^m \cdot m_{on} \quad 32$$

$$K_n^m = K_f^m \cdot K_{\alpha_0}^m \cdot K_L^m \quad 33$$

$$m_{on} = -q \cdot R^2 \frac{\psi_0}{100} \quad 34$$

Таблица I4

α_0	ψ_0	n				
		0	1	2	3	4
30°		13,398	7,416	3,214	0,776	0
35°		18,085	9,952	4,272	1,018	0
40°		23,396	12,784	5,426	1,272	0

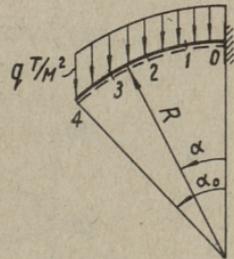


Таблица I5

№	n	K_f^m
1	0	$0,020 + 0,008 f/h$
2	1	$0,020$
3	2	$-(0,020 + 0,095 f/h)$
4	3	$-(0,350 + 0,530 f/h)$

$K_{\alpha_0}^m$

Таблица I6

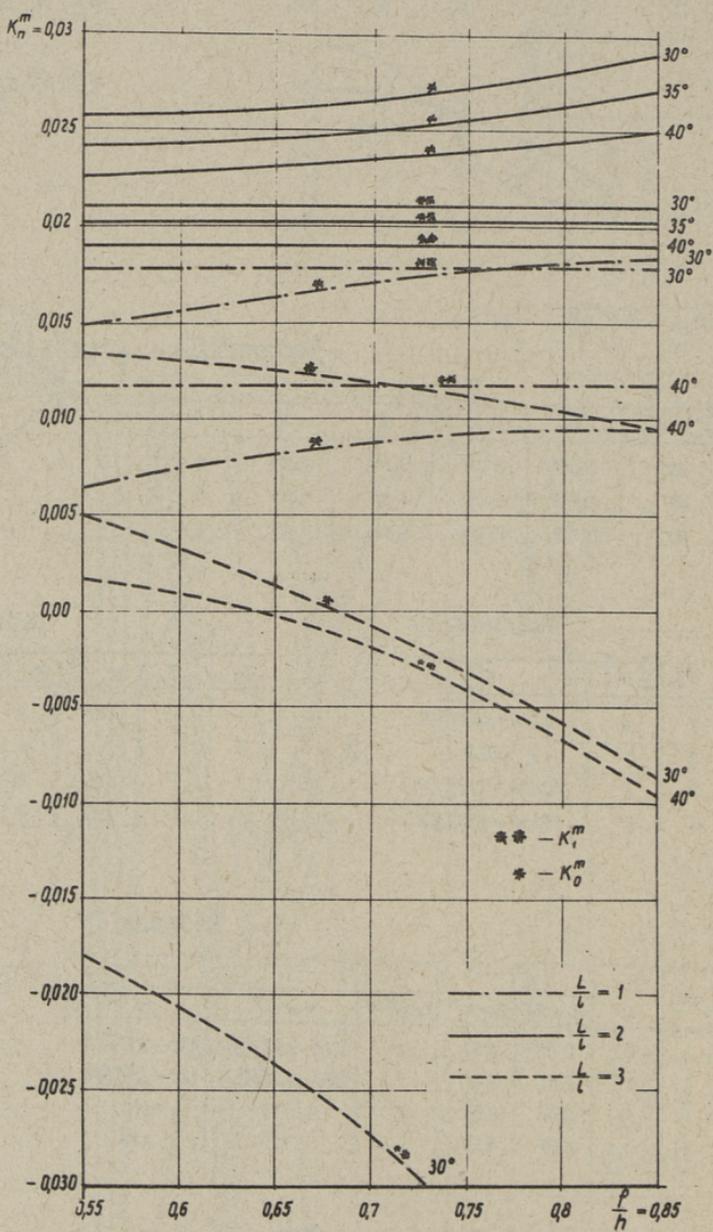
№	n	$\alpha_0 = 30^\circ$	$\alpha_0 = 35^\circ$	$\alpha_0 = 40^\circ$
1	0	1,06	1	0,92
2	1	1	1	1
3	2	1,13	1	0,90
4	3	1,08	1	0,95

K_L^m

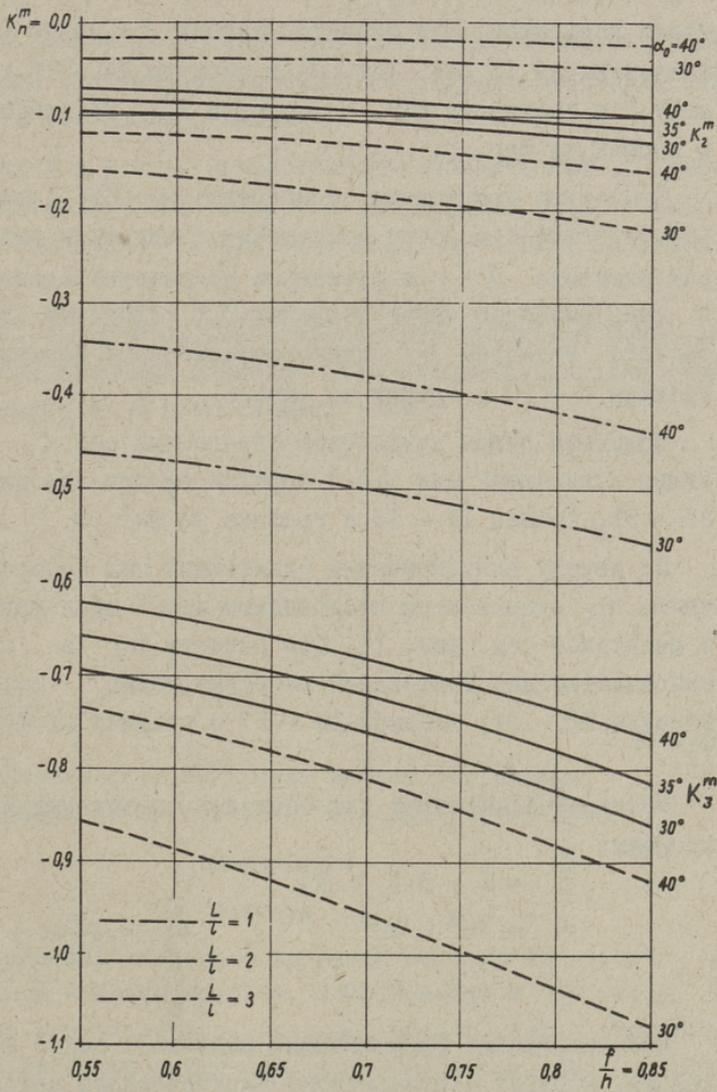
Таблица I7

№	L/L	1			2		3	
		$\alpha_0 = 30^\circ$	$\alpha_0 = 40^\circ$	$\alpha_0 = 30^\circ$	$\alpha_0 = 40^\circ$	$\alpha_0 = 30^\circ$	$\alpha_0 = 40^\circ$	
1	0	0,60	0,38	1	$1,12 - 1,67 f/h$	$1,00 - 0,73 f/h$		
2	1	0,85	0,65	1	$1,60 - 4,35 f/h$	$1,20 - 2,00 f/h$		
3	2	0,40	0,25	1	1,70	1,60		
4	3	0,65	0,55	1	1,20	1,20		

Фиг. IO



Фиг. II



Фиг. 12

Одной важной величиной для расчета поддерживающей конструкции бортового элемента является реакция r под бортовым элементом. Для расчета реакции r можно использовать формулу 13 (см. фиг. 7) и формулы 14 - 18, также таблицу 7 и график на фиг. 7; формулы 20 - 23, таблицы 8 - 9 и график на фиг. 8.

Суммарное приращение сдвигающих сил $\sum \zeta$ (площадь эпюры) содержит суммарное приращение сдвигающих сил в бортовом элементе $\sum \zeta_A$ и суммарное приращение сдвигающих сил в криволинейной части оболочки $\sum \zeta$ (формула 19). Для расчета величины $\sum \zeta$ можно использовать формулы 19 - 28, таблицы 8 - 10 и график на фиг. 8.

Ординаты эпюры приращения сдвигающих сил ζ_n (ординаты эпюры сдвигающих сил S_n) определяем при помощи формул 29 - 31, таблиц 11 - 13 и графика на фиг. 9.

По методу аппроксимации сдвигающих сил поперечные моменты m_2 оказываются постоянными вдоль оболочек вместе с нагрузкой (см. фиг. 1). При расчете m_2 в поперечном направлении для постоянной нагрузки можно использовать формулы 32 - 34, таблицы 14 - 17 и графики на фиг. 10, 11, 12.

Метод употребляется для оболочек со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \frac{l}{l} &= 1 - 3 (> 3) \\ \alpha_0 &= 30^\circ - 40^\circ \\ \frac{f}{h} &= 0,5 - 0,85 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{\delta}{R} &= \frac{1}{100} \div \frac{1}{120} \\ \frac{\delta_0}{\delta} &= 3 - 4 \end{aligned}$$

Как показывают сравнивающие расчеты с более точными методами, формулы статистическо-эмпирического метода достаточно точны. Относительно метода аппроксимации сдвигающих сил [1] основные внутренние силы находим с погрешностью $\pm 4\%$, поперечные изгибающие моменты с погрешностью $\pm 10\%$.

Л и т е р а т у р а

1. Х.Х. Л а у л. Расчет цилиндрических оболочек с криволинейными частями, очерченными по окружности. Труды ТПИ, серия А, № 50, Таллин, 1953.

2. Ю.А. Т я р н о. Статистическо-эмпирический метод расчета железобетонных оболочек (внутренняя волна многоволновых оболочек). Труды ТПИ, серия А, № 244, Таллин, 1966.

3. Ю.А. Т я р н о. Статистическо-эмпирический метод расчета железобетонных оболочек (отдельностоящая волна). Труды ТПИ, серия А, № 244, Таллин, 1966.

I.Terno

Statistical-empirical Method for Design Cylindrical Shells with Vertically Supported Edge-Beams

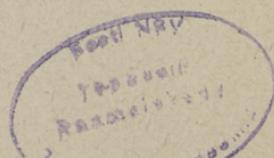
Summary

The calculation method is based on a great amount of comparisons of design results, developed with the method of shear force approximation. Load and geometrical parameters are varied in fixed intervals. All the forces, for which formulae are given, are presented in the figure 2. The total tensile force and the total shear force are designed with exactitude $\pm 4\%$, transverse bending moment with exactitude $\pm 10\%$ with regard to the shear force approximation method.

С о д е р ж а н и е

Стр.

1. И.И. А а р е. "Экспериментальное исследование тонкостенных стальных балок"	3
2. И.И. А а р е, С.И. И д н у р м. "Расчет пластинок нагруженных сдвигом, изгибом и сжатием в послекритической стадии"	19
3. И.К. А а р е, Т.Э. К е с к к ю л а. "Расчет металлических цилиндрических ребристых оболочек покрытий"	33
4. И.И. А а р е, Т.Э. К е с к к ю л а. "Экспериментальное исследование моделей цилиндрических металлических ребристых оболочек покрытий"	39
5. И.И. А а р е, Т.Э. К е с к к ю л а. "Устойчивость металлических ребристых оболочек покрытий"	47
6. В.Р. К у л ь б а х. "О представлении уравнений упругой нити в перемещениях"	53
7. В.Р. К у л ь б а х. "О расчете висячих покрытий с двойной системой тросов"	65
8. Х.Х. Л а у л ь, В.А. Х ю т с и. Экспериментальное исследование железо-бетонной оболочки вида гиперболического параболоида"	75
9. В.А. О т с м а а. "К расчету на поперечную силу длинных круглоцилиндрических железобетонных оболочек"	87
10. Ю.А. Т я р н о. "Статистическо-эмпирический метод расчета отдельностоящей цилиндрической оболочки с вертикально опертыми бортовыми элементами"	105



СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА
СБОРНИК СТАТЕЙ
УП

Таллинский политехнический институт

Редактор В. Райдна
Технический редактор Г. Гришина

Сдано в набор 20/IX 1968 г.
Подписано к печати 12/XII 1968 г.
Бумага 60x90/16. Печ. л. 7,5+прилож. Учет. кэд. л. 5,8.
Тираж 500. МВ-10821. Зак. №829
Ротапринт ТПИ. Таллин, Пикк ялг. 14.
Цена 58 коп.

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

И

СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

УП

УДК 539, 384

И.И. А а р е. Экспериментальное исследование тонко-
стенных стальных балок, стр. 3

В статье приводятся результаты экспериментального исследования тонкостенных клепанных и сварных балок. Было исследовано три серии опытных балок типа БК1, БК2, БС3, БС4, БС5, БС6. Толщина стенки балок 2 - 4 мм, пролет $l = 3 + 6$ м. Все образцы были изготовлены из стали ВСт.3. Особое внимание было уделено вопросу о поведении стенки балок при больших нагрузках. Полученные результаты показывают, что критическую нагрузку для отдельных панелей можно определить только приближенно, а несущая способность панели зависит от гибкости стенки и от жесткости поясов и ребер на сжатие и на изгиб.

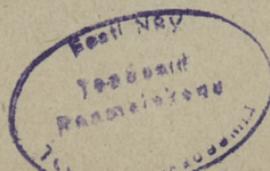
Иллюстрации 6, библиографических названий 4.

УДК 624.072

И.И. А а р е, С.И. И д н у р м.

Расчет пластинок нагруженных сдвигом,
изгибом и сжатием в послекритической
стадии, стр. 19

В статье исследуется работа тонкостенной пластинки после потери устойчивости от сдвига, изгиба и сжатия. Для исследования работы пластинки после потери устойчивости применяются зависимости нелинейной теории упругости. Выбирая функ-



цию прогиба выпученной формы срединной поверхности, определяются неизвестные параметры функции прогиба при помощи методов Б.Г. Галеркина из уравнений Кармана. Все вычисления сделаны на ЭВМ "Минск-22". Результаты вычисления представлены на графиках.

Иллюстраций 7. Библиографических названий 2.

УДК 624.074

И.И. А а р е, Т.Э. К е с к к ю л а

Расчет металлических цилиндрических ребристых оболочек покрытий, стр. 33

В данной работе рассматривается оболочка, укрепленная продольными и поперечными ребрами, продольные края которой опираются на бортовые элементы конечной жесткости, нагруженной вертикальной нагрузкой.

Расчет производится с учетом дискретного расположения ребер при помощи дельта-функции методом Ритца.

Составленный алгоритм программирован на ЭЦВМ "Минск-22".

УДК 624.074

И.И. А а р е, Т.Э. К е с к к ю л а

Экспериментальное исследование моделей металлических цилиндрических ребристых оболочек покрытий, стр. 39

Исследовано 4 модели цилиндрических оболочек, продольные края которых опираются на бортовые элементы конечной жесткости. Размеры моделей 70x43, 150x90, 300x180 см. Покрытия и ребра изготовлялись из жести толщиной 0,28 и 0,36 мм. Модели загружались вертикальной нагрузкой и сжатым воздухом. Выяснилось, что оболочки теряют общую устойчивость в результате постоянного деформирования поперечного сечения, без "хлопка". В продольном направлении образуется одна полуволна, а в поперечном — три полуволны. Форма потери устойчи-

восте зависит от жесткости бортовых элементов, но не зависит от вида внешней нагрузки и от направления расположения ребер. До потери общей устойчивости панели потеряли местную устойчивость между ребрами с образованием трех полуволн.

УДК 624.074

И.И. А а р е, Т.Э. К е с к к ю л а

Устойчивость металлических цилиндрических
ребристых оболочек покрытий, стр. 47

В данной работе рассматривается оболочка, укрепленная продольными и поперечными ребрами, продольные края которой опираются на бортовые элементы конечной жесткости, нагруженной вертикальной нагрузкой. При расчете на устойчивость оболочку заменяют ортотропной. Задача решается в линейной постановке энергетическим методом, с учетом в начальной стадии только мембранных сил, а в момент потери устойчивости только энергии моментов.

Составленный алгоритм расчета программирован на ЭЦВМ "Минск-22". Результаты расчета совпадают с результатами экспериментов.

УДК 624.074

В.Р. К у л ь б а х. О представлении уравнений упругой
нити в перемещениях, стр. 53

Предлагается метод расчета основных элементов висячих покрытий - упругих нитей - в перемещениях. Даются общие нелинейные уравнения пространственной нити, которые могут быть использованы для составления точной методики расчета пространственных систем. Далее рассматриваются некоторые схемы плоских нитей и выдвигается система расчетных параметров упругих нитей. Эта система позволяет представить уравнения упругих нитей в сравнительно простой и в то же время общей форме. Статья иллюстрирована графиками, по которым могут быть определены прогибы и горизонтальные смещения отдельных участков нити для ряда случаев нагружения.

Иллюстраций 8, библиографических названий 4.

В.Р. К у л ь б а х. О расчете висячих покрытий с двойной системой тросов, стр. 65

Развивается точный метод расчета предварительно напряженных висячих покрытий с двойной системой тросов. В основу соответствующих уравнений принимается разработанная автором нелинейная теория расчета упругих нитей в перемещениях. После представления общих уравнений рассматриваются некоторые конкретные схемы нагружения висячих систем симметричной и односторонней нагрузки. Предлагается система расчетных параметров, позволяющая представить уравнения в сравнительно простой и в то же время общей форме. Зависимости между прогибами и параметрами нагрузок представлены в графической форме, по которым можно оценить влияние некоторых геометрических характеристик висячих систем на их деформативность.

Иллюстраций 5, библиографических названий 3.

Х.Х. Л а у л ь, В.А. Х ю т с и

Экспериментальное исследование железобетонной оболочки вида гиперболического параболоида

стр. 75

В данной статье рассматриваются в основном внутренние напряжения, возникшие в криволинейной части оболочки вида гиперболического параболоида от нагрузок, находящихся в пределах эксплуатационных.

Основные размеры модели:

в плане - 265 x 265 см, подъем $f_a = 60$ см, $f_o = 30$ см. Толщина оболочки - 11 см. Бортовые элементы - 4x9 см.

Модель изготовлялась из цементного раствора 1:2,7 (марки "400"). Основная арматура в криволинейной части - холодно-

тянутая стальная проволока ϕ 2 мм ($\sigma_p = 8280$ кв/см²). Шаг арматуры 7,5 см (замеренный в направлении вогнутости). Загружение — равномерно распределенной нагрузкой.

Напряжения измерялись в 34, прогибы — в 20 различных точках.

В статье изложены эпюры изгибающих моментов, нормальных усилий и прогибов.

Основной вывод — подобного вида оболочки необходимо рассчитать по моментной теории, т.к. безмоментная теория расчета не соответствует действительной работе оболочки.

Таблиц I, иллюстраций I2.

УДК 624.04

В.А. О т с м а а. К расчету на поперечную силу длинных круглоцилиндрических железобетонных оболочек (сообщение 2).
стр. 87

Излагаются результаты экспериментального исследования 6 моделей длинных цилиндрических железобетонных оболочек, не имеющих поперечного армирования. Рассматривается влияние прочности бетона и относительной толщины оболочки $\frac{\delta}{\delta_0}$ на предельную поперечную силу Q_B . Указывается, что 1) характер разрушения на поперечную силу не зависит от прочности бетона и от $\frac{\delta}{\delta_0}$, 2) величина Q_B зависит от прочности бетона растяжению, 3) зависимость Q_B от $\frac{\delta}{\delta_0}$ связана с относительной протяженностью сжатой зоны оболочки как большой балки.

Таблиц 4. Иллюстраций 7. Библиографических названий 2.

Ю.А. Т я р н о. Статистическо-эмпирический метод
расчета отдельностоящей цилиндри-
ческой оболочки с вертикально
опертыми бортовыми элементами, стр. 105

В статье представляется статистическо-эмпирический метод расчета цилиндрических оболочек средней длины. Как показывают сравнивающие расчеты с более точными методами, формулы, излагаемые в статье, достаточно точны. Относительно метода аппроксимации сдвигающих сил основные внутренние силы находятся с погрешностью $\pm 4\%$, поперечные изгибающие моменты - с погрешностью $\pm 10\%$.

Иллюстраций 12. Библиографических названий 3.

Цена 58 коп.