TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 65 1955

КАФЕДРЫ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
И
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

СБОРНИК СТАТЕЙ

ПОСВЯЩЕННЫХ 75-ЛЕТИЮ ПРОФ., ДОКТОРА ТЕХН. НАУК О. А. МАДДИСОНА

ЭСТОНСКОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИН 1955

Проф. О. А. МАДДИСОН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник публикуется в связи с отмеченным в прошлом 1954 году 75-летием со дня рождения действительного члена Академии наук Эстонской ССР, заслуженного деятеля науки и техники ЭССР, профессора, доктора технических наук Оттомара Александровича Маддисона и содержит труды бывших его учеников — сотрудников в Таллинском политехническом институте в период после Отечественной войны.

О. А. Маддисон начал свою плодотворную инженерную деятельность после окончания в 1906 году Петроградского института инженеров путей сообщения. При его сотрудничестве в России построен ряд больших мостов. С 1908 года О. А. Маддисон начал также свою преподавательскую и научно-исследовательскую работу в Петроградском институте инженеров путей сообщения (ныне Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта) и продолжал ее позже в Таллинском политехническом институте.

В результате почти пятидесятилетней педагогической деятельности проф. О.А. Маддисон вырастил целое поколение инженеров, из которых многие работают на ответственных постах народного хозяйства нашей великой социалистической Родины.

Большую часть своей энергии проф. О. А. Маддисон посвятил научно-исследовательской работе. Несмотря на преклонный возраст он и сейчас продолжает важную научно-исследовательскую работу в области местных строительных материалов. Одновременно проф. О. А. Маддисон оказывает большую помощь Таллинскому политехническому институту в повышении научной квалификации преподавателей строительного факультета. Данным сборником делается попытка дать разрез направлений научно-исследовательской работы, выполненной на двух кафедрах строительного факультета ТПИ в последние годы, ранее объединенных и руководимых проф. О. А. Маддисоном.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ЗАМКНУТОЙ В ВЕРШИНЕ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Алумяэ Н. А.

В заметке ставится задача об определении критического значения внешнего давления конической оболочки вращения, содержащей вершину. Эта задача может быть решена при помощи упрощенных уравнений местной потери устойчивости начального безмоментного напряженного состояния, предложенных Х. М. Муштари [1] и В. З. Власовым [2]. В заметке дается обоснование дальнейшему упрощению этих уравнений в случае, когда длина образующей соизмерима с главным ненулевым радиусом кривизны срединной поверхности оболочки у основания. А именно, показывается, что критическая нагрузка рассматриваемой оболочки может быть определена по уравнениям местной потери устойчивости оболочки, очерченной по поверхности усеченного конуса и мало отличающейся от цилиндрической оболочки средней длины. Форма же выпученной оболочки определяется упрощенными уравнениями неточно.

Данная заметка тесно связана с статьей Р. К. Ряямета, опубликованной в настоящем сборнике. Поэтому, учитывая изложенное Р. К. Ряяметом, трактовка вопроса имеет здесь математический характер.

1. Постановка задачи. Рассмотрим защемленную по основанию упругую коническую оболочку вращения с постоянной толщиной t, длиной образующей s_0, углом конусности β. Пусть оболочка находится под действием равномерно распределенного внешнего давления q. Найдем критическое значение внешнего давления $q=q_{kp}$, при котором кроме осесимметричного начального напряженного состояния существует еще по крайней мере одно неосесимметричное состояние равновесия, бесконечно близкое к начальному состоянию. Предположим, что круговая частота изменения напряженного состояния после потери устойчивости начального состояния при обходе оболочки по параллели будет k.

Введем следующие обозначения

$$\varepsilon^2 = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\,\frac{t}{s_0}, \quad k^2 = \frac{p}{\varepsilon}\sin^2\beta, \quad q_{кр} = \frac{Et}{s_0}\,\varepsilon^3\sigma\,\mathrm{ctg}^3\beta, \qquad (1.1)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечного расширения. В дальнейшем предполагается, что ε — малая величина.

Определение критического давления по теории Х. М. Муштари и В. З. Власова с математической точки зрения сводится к определению наименьшего собственного значения σ системы дифференциальных уравнений

$$A\varphi + \psi'' = 0 \qquad (1.2)$$

$$A\psi - \varphi'' - \sigma B\psi = 0, \qquad (1.3)$$

где A и B — дифференциальные выражения

$$Au = \varepsilon^2(xu'')'' - \varepsilon(2p+\varepsilon)\left(\frac{1}{x}u'\right)' + \frac{p^2-4\varepsilon p}{x^3}u,$$
$$(u=\varphi, \psi) \qquad (1.4)$$
$$B\psi = p\psi - \frac{\varepsilon}{2}(x^2\psi')',$$

причем штрихи обозначают дифференцирование по аргументу x, изменяющемуся в интервале $(0,1)$. Решение системы (1.2), (1.3) должно при $x=1$ удовлетворить условиям

$$\psi=0, \ \psi'=0, \qquad (1.5)$$

$$\varepsilon\left\{\varepsilon x\varphi'' - \nu\varepsilon\varphi' + \frac{\nu p}{x}\varphi\right\} = 0,$$
$$\qquad (1.6)$$
$$\varepsilon\left\{\varepsilon x\varphi''' - \frac{(2+\nu)p + (1-\nu)\varepsilon}{x}\varphi' + \frac{3p}{x^2}\varphi\right\} = 0;$$

при $x \to 0$ величины

$$\frac{p}{x^2}u - \frac{\varepsilon}{x}u', \ \frac{1}{x^2}u - \frac{1}{x}u', \ u'', \ (u=\varphi, \psi) \qquad (1.7)$$

должны оставаться конечными.

Величина p входит в выражения (1.2)—(1.7) как параметр, поэтому

$$\sigma = \sigma(p);$$

требуется найти такое значение параметра p, которое даст минимальное значение функции $\sigma=\sigma(p)$.

2. Смежная задача. Полагая в выражениях (1.2) — (1.6) $\varepsilon=0$, приходим к следующей, смежной относительно (1.2), (1.7) задаче: определить наименьшее собственное значение σ_* системы дифференциальных уравнений

$$\frac{p^2}{x^3}\varphi+\psi''=0,\ \frac{p^2}{x^3}\psi-\varphi''-\sigma_* p\psi=0 \qquad (2.1)$$

при краевых условиях (1.5) и условиях ограниченности величин (1.7) при $x\to 0$.

Несложное обобщение результатов работы [3] показывает, что уравнениями (2.1) и краевыми условиями (1.5) надежно определяется не только критическое давление оболочки, очерченной по поверхности усеченного конуса, мало отличающейся от цилиндрической оболочки средней приведенной длины, но и форма выпученной оболочки. В случае же замкнутой на вершине конической оболочки возможность применения системы (2.1) для определения критического давления не очевидна. Более того, можно показать, что в окрестности точки $x=0$ интегралы системы (2.1) не удовлетворяют уравнениям (1.2), (1.3), как бы ни была мала ε.

В самом деле, ограниченное при $x\to 0$ решение системы (2.1) имеет в окрестности точки $x=0$ следующее формальное асимптотическое разложение

$$\psi\sim x^{3/4}exp\left(-\sqrt{\frac{2}{x}}p\right)\left\{D_1\left[\left(1+\frac{3}{16p}\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\cos\sqrt{\frac{2}{x}}p-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{3}{16p}\sqrt{\frac{x}{2}}\sin\sqrt{\frac{2}{x}}p\right]+ \qquad (2.2)$$
$$\left.+D_2\left[\frac{3}{16p}\sqrt{\frac{x}{2}}\cos\sqrt{\frac{2}{x}}p+\left(1+\frac{3}{16p}\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\sin\sqrt{\frac{2}{x}}p\right]\right\},$$

где D_1, D_2 — произвольные постоянные интегрирования, откуда следует, что при малых значениях x

$$\psi'\sim px^{-3/2}\psi,\ \psi''\sim p^2x^{-3}\psi,\quad \text{и т. д.} \qquad (2.3)$$

Используя эти данные, нетрудно убедиться, что отброшенные в (2.1) члены дифференциального выражения $A\psi$

при малых значениях x соизмеримы со следующими величинами

$$\varepsilon^2(x\psi'')''\sim\frac{\varepsilon^2p^4}{x^5}\ \psi,\ \ \varepsilon(2p+\varepsilon)\left(\frac{1}{x}\ \psi'\right)'\sim\frac{\varepsilon p^3}{x^4}\ \psi\,; \tag{2.4}$$

при достаточно малых значениях x они по своему порядку будут значительно больше, чем не отброшенный в уравнениях (2.1) член $p^2x^{-3}\psi$ дифференциального выражения $A\psi$, а это значит, что в окрестности точки $x=0$ интегралы системы (2.1) не удовлетворяют уравнениям (1.2), (1.3).

Вместе с тем, при больших значениях x ($x\sim1$) интегралы системы (2.1) при дифференцировании увеличиваются в p раз ($\psi'\sim p\,\psi$, $\psi''\sim p^2\psi$ и т. д.) и удовлетворяют уравнениям (1.2), (1.3) с точностью εp по сравнению с единицей. Здесь необходимо отметить, что как интегралы системы (2.1), так и значения p и σ_* не зависят от ε. Поэтому в дальнейшем считаем p и σ_* соизмеримыми с единицей.

3. Свойства интегралов системы (1.2), (1.3). В окрестности точки $x=0$ поведение ограниченных при $x\to0$ интегралов системы (1.2), (1.3) дается следующими формулами, представляемыми здесь с точностью $\sqrt{\varepsilon}$ по сравнению с единицей

$$\psi_1\approx x^{\sqrt{p/\varepsilon}+2}\left\{\frac{1}{0!\,2!}-\frac{1}{2!\,4!}\left(\frac{x}{4\varepsilon^2}\right)^2+\frac{1}{4!\,6!}\left(\frac{x}{4\varepsilon^2}\right)^4-\cdots\right\} \tag{3.1}$$

$$\psi_2\approx x^{\sqrt{p/\varepsilon}+2}\left\{\frac{1}{1!\,3!}\left(\frac{x}{4\varepsilon^2}\right)-\frac{1}{3!\,5!}\left(\frac{x}{4\varepsilon^2}\right)^3+\cdots\right\} \tag{3.2}$$

$$\psi_3\approx\frac{1}{2\varepsilon^3p}\ln x\cdot\psi_1+x^{\sqrt{p/\varepsilon}}\left\{1+\frac{8}{3}\,\sigma\varepsilon^5\left(\frac{x}{4\varepsilon^2}\right)^3+\frac{11}{576}\left(\frac{x}{4\varepsilon^2}\right)^4+\cdots\right\}, \tag{3.3}$$

$$\psi_4\approx\frac{1}{2\varepsilon^3p}\ln x\cdot\psi_2-x^{\sqrt{p/\varepsilon}}\left\{\left(\frac{x}{4\varepsilon^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{x}{4\varepsilon^2}\right)^3+\cdots\right\}. \tag{3.4}$$

Эти формулы показывают, что интегралы системы (1.2), (1.3) при $x\to0$ затухают медленнее, чем интегралы (2.2) системы (2.1)[1].

В предыдущем разделе отмечалось, что в окрестности точки $x=1$ интегралы системы (2.1) являются с асимптотической погрешностью ε также и интегралами системы

---

[1] Формулы (3.1)—(3.4) дают представление о поведении функции ψ лишь при весьма малых значениях аргумента, когда $x\ll\varepsilon^2$.

(1.2), (1.3). Применяя полуобратный метод, можно показать, что остальные интегралы системы (1.2), (1.3) в окрестности точки $x=1$ можно определить из системы

$$\varepsilon^2(x\varphi'')''+\psi''=0,\quad \varepsilon^2(x\psi'')''-\varphi''=0. \tag{3.5}$$

Из интегралов этой системы можно использовать только два, которые при $x\sim 1$ с асимптотической погрешностью ε представляются в виде

$$\psi=x^{1/4}\,exp\left(\frac{\sqrt{2x}}{\varepsilon}\right)\left\{D_1\cos\left(\frac{\sqrt{2x}}{\varepsilon}-\frac{\pi}{8}\right)+D_2\sin\left(\frac{\sqrt{2x}}{\varepsilon}-\frac{\pi}{8}\right)\right\}, \tag{3.6}$$

$$\varphi=x^{1/4}\,exp\left(\frac{\sqrt{2x}}{\varepsilon}\right)\left\{-D_1\sin\left(\frac{\sqrt{2x}}{\varepsilon}-\frac{\pi}{8}\right)+D_2\cos\left(\frac{\sqrt{2x}}{\varepsilon}-\frac{\pi}{8}\right)\right\}, \tag{3.7}$$

где D_1, D_2 — произвольные постоянные. Нетрудно убедиться, что интегралы (3.6), (3.7) описывают обыкновенный краевой эффект у края оболочки $x=1$.[1]

Следуя обычному пути при применении метода разделения напряженного состояния оболочки на элементарные состояния, можно из краевых условий (1.5), (1.6) теперь исключить произвольные постоянные краевого эффекта D_1, D_2. В результате получим два условия для остальных (двух) интегралов системы (1.2) (1.3). Так как эти интегралы в окрестности точки $x=1$ существенно не изменяются при дифференцировании (функции φ, ψ и их производные соизмеримы), то краевые условия при $x=1$ для упомянутых интегралов можно представить с асимптотической погрешностью ε в виде

$$\psi=0,\quad \psi'=0. \tag{3.8}$$

Напомним, что эти же условия наложены и на интегралы системы (2.1), ограниченные при $x\to 0$.

4. Решение основной задачи. Основная задача данной заметки — это выяснить, с какой асимптотической погрешностью определяется наименьшее собственное значение σ системы (1.2), (1.3) при краевых условиях (1.5), (1.6), если его заменить отысканием собственного значения σ_* системы (2.1) при краевых условиях (1.5). Другими словами, нужно определить показатель r

---

[1] Формулой (3.6) дается, повидимому, поведение интегралов (3.1), (3.2) при больших значениях x.

в равенстве $|\sigma-\sigma_*|=\varepsilon^r\sigma_*$ при заданном значении $p\,(p\sim\varepsilon^0)$.

Прежде всего установим, с какой асимптотической погрешностью удовлетворяется дифференциальное уравнение (1.2), если функции ψ и φ удовлетворяют уравнениям (2.1). Для этого определим интеграл от квадрата погрешности при удовлетворении уравнения (1.2).

Имеем

$$\int_0^1 (A\varphi+\psi'')^2 \mathrm{d}x=$$

$$=\varepsilon^2\int_0^1\left\{\varepsilon(x\varphi'')''-(2p+\varepsilon)\left(\frac{1}{x}\varphi'\right)'-\frac{4p}{x^3}\varphi\right\}^2\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

Так как интеграл в правой части (4.1) остается конечным при $\varepsilon\to 0$, а в левой части этого выражения фигурирует интеграл

$$\int\left(\frac{p^2}{x^3}\varphi\right)^2\mathrm{d}x$$

без множителя ε^2, то отсюда следует, что уравнение (1.2) удовлетворяется с асимптотической погрешностью ε. Допуская асимптотическую погрешность ε, в дальнейшем будем вместо задачи (1.2)—(1.6) искать наименьшее собственное значение упрощенной системы

$$\frac{p^2}{x^3}\varphi+\psi''=0, \tag{4.2}$$

$$-\varphi''+\varepsilon^2(x\psi'')''-2\varepsilon p\left(\frac{1}{x}\psi'\right)'+\frac{p^2}{x^3}\psi-\sigma\left\{p\psi-\frac{\varepsilon}{2}(x^2\psi')'\right\}=0 \tag{4.3}$$

при краевых условиях

$$\psi(1)=0,\quad \psi'(1)=0. \tag{4.4}$$

Наименьшее собственное значение системы (4.2), (4.3) при краевых условиях (4.4) дается формулой

$$\sigma=\min\frac{(A\psi,\psi)-(\varphi'',\psi)}{(B\psi,\psi)}, \tag{4.5}$$

где

$$(A\psi,\psi)=\int_0^1\left\{\varepsilon^2 x(\psi'')^2+\frac{2\varepsilon p}{x}(\psi')^2+\frac{p^2}{x^3}\psi^2\right\}\mathrm{d}x,$$

$$-(\varphi'',\psi)=\frac{1}{p^2}\int_0^1 x^3(\psi'')^2\mathrm{d}x, \tag{4.6}$$

$$(B\psi,\psi)=\int_0^1\left\{p\psi^2+\frac{\varepsilon}{2}x^2(\psi')^2\right\}\mathrm{d}x.$$

Пусть ψ_1 будет функция, которая реализует минимум правой части (4.5). Если выполняется условие

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{x}(\psi_1')^2+\frac{\varepsilon}{2p}x(\psi_1'')^2\right\}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sigma}{4p}\int_0^1 x^2(\psi_1')^2\mathrm{d}x \tag{4.7}$$

то

$$\frac{\int_0^1\left\{\frac{x^3}{p^2}(\psi_1'')^2+\frac{p^2}{x^3}\psi_1^2\right\}\mathrm{d}x}{\int_0^1 p\psi_1^2\mathrm{d}x}\leqslant\sigma. \tag{4.8}$$

Но так как минимум левой части выражения (4.8) определяет наименьшее собственное значение σ_* системы (2.1) при краевых условиях (1.5), то при выполнении условия (4.7) $\sigma_*\leqslant\sigma$. Условие (4.7) же выполняется строго, если коэффициент $\sigma/4p$ меньше единицы. Практически, учитывая характер функции ψ (в частности, краевые условия $\psi=\psi'=0$ при $x=1$), условие (4.7) удовлетворяется и при значениях $\sigma/4p$ не на много превышающих единицу. По приближенному решению Р. К. Ряямета [4]

$$\sigma\backsim 27.5,\qquad 4p\sim 25.6,\qquad \sigma/4p\backsim 1.07.$$

Это дает основание предполагать, что условие (4.7) выполняется.

Рассмотрим теперь собственную функцию ψ_j системы (4.2), (4.3), соответствующую собственному значению σ_j этой системы. Имеет место очевидное равенство

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{p^2}(x^3\psi_j'')'' + A\psi_j - \sigma_* B\psi_j\right\}^2 dx = \tag{4.9}$$

$$= (\sigma_j - \sigma_*)^2 \int (B\psi_j)^2 dx,$$

где σ_* — первое собственное значение системы (2.1). Предположим, что первое собственное число σ_1 системы (4.2), (4.3) не является кратным. Тогда, если выполняется условие (4.7), будем иметь

$$\sigma_1 - \sigma_* < \sigma_2 - \sigma_* \leqslant \sigma_3 - \sigma_* \leqslant \ldots, \tag{4.10}$$

откуда следует, что отношение интегралов, в левой и правой частях (4.9) будет наименьшее при $\psi_j = \psi_1$.

В случае произвольной, достаточно «гладкой» функции ψ, удовлетворяющей краевым условиям (4.4) и условиям конечности величин (1.7) при $x \to 0$, нельзя утверждать, что наименьшее значение отношения интегралов

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{p^2}(x^3\psi'')'' + A\psi - \sigma_* B\psi\right\}^2 dx, \quad \int_0^1 (B\psi)^2 dx \tag{4.11}$$

реализуется при $\psi = \psi_1$; могут, вообще говоря, существовать и функции ψ, которые дают отношению (4.11) значения, меньшие чем $(\sigma_1 - \sigma_*)^2$. Однако, если это отношение будет мало́, то σ_* будет мало отличаться от σ_1.

Если ψ — собственная функция системы (2.1) соответствующая первому собственному значению σ_* этой системы, то для левого интеграла в (4.11) получим выражение

$$\varepsilon^2 \int_0^1 \left\{\varepsilon(x\psi'')'' - \left(\frac{2p}{x}\psi'\right)'' - \frac{\sigma_*}{2}(x^2\psi')'\right\}^2 dx, \tag{4.12}$$

которое будет лишь порядка ε^2 по сравнению с правым интегралом в (4.11), потому что интеграл в (4.12) остается опять-таки ограниченным при $\varepsilon \to 0$. Учитывая вышесказанное, отсюда вытекает, что отношение $(\sigma_1 - \sigma_*) : \sigma_*$ будет порядка ε, т. е. система (2.1) определяет первое собственное значение системы (1.2), (1.3) с асимптотической погрешностью ε.

Институт строительства и стройматериалов Академии наук Эстонской ССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применениями к решению задач устойчивости упругого равновесия. ПММ, 1939, т. II, в. 4.
2. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ. 1944, т. VIII, в г.
3. Алумяэ Н. А. Об определении состояний равновесия круговой оболочки при осесимметричной нагрузке. ПММ, 1953, т. XVII в. 5.
4 Ряямет Р. К. Устойчивость равновесия упругой конической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления. Автореферат диссертации. Таллинский политехнический институт. 1954.

О РАСЧЕТЕ ШАРОВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КУПОЛОВ

Лауль Х. Х.

I. ВВЕДЕНИЕ

При обыкновенном расчете железобетонных куполов, т. е. предполагая, что купол возведен из изотропного и упругого материала, вследствие краевого эффекта у опорного кольца, появляется сильно растянутая зона продольных сил T_2 (направленных по параллели). Мощность кольцевой арматуры, воспринимающей названные растягивающие усилия, назначается, исходя из допускаемого напряжения арматуры. При этом, как правило, не учитывается тот факт, что при достижении напряжений, допускаемых в арматуре, бетон растрескивается. Трещины, направленные по меридианам, протягиваются значительно выше растянутой зоны, определенной обыкновенным расчетом. Таким образом, краевой эффект теряет свой местный характер.

В настоящей статье делается попытка учесть влияние появления меридиальных трещин на распределение усилий в железобетонных куполах.

Задача ограничивается следующими предположениями:

а) Задача является осесимметричной, и нагрузка распределена равномерно по поверхности купола;

б) бетон в направлении параллелей не работает между трещинами, т. е. предполагается, что в том направлении модуль упругости бетона $E_б = 0$;

в) материал в нерастрескавшейся части купола является изотропным и упругим;

г) относительно краевых условий: опорное кольцо может свободно перемещаться в горизонтальном направлении, но не поворачивается (рис. 1, *б*). Отметим, что принятые краевые условия в действительности почти всегда реализованы.

Дальше предполагается, что расчетная кольцевая арматура сосредоточена только в опорном кольце, так как в таком случае расход кольцевой арматуры получается наименьшим. Этот факт станет очевидным, если рассматривать купол как балку на двух опорах (рис. 1). Действительно, на меридиальное сечение действует изгибающий «*балочный момент*» $\overline{M}=G\cdot s$, так как точка приложения веса половины купола A и центр тяжести B вертикальных

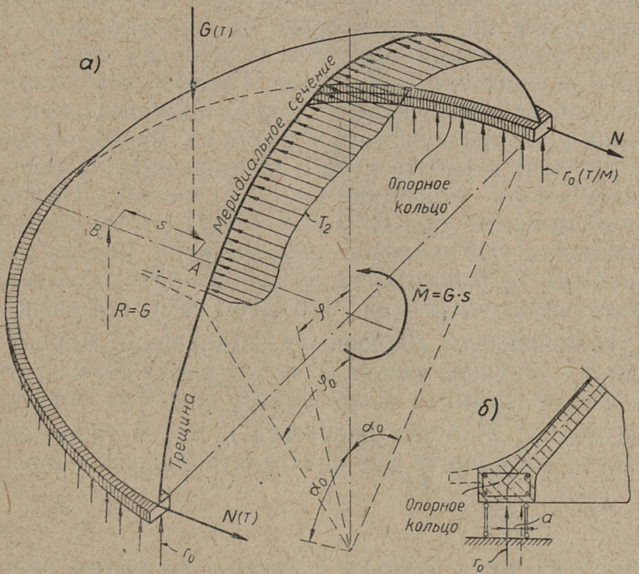


Рис. 1.

реакций r_0 имеют расстояние — плечо s. Этот момент воспринимается продольными силами T_2 в сжатой зоне и усилиями N в опорном кольце. Если часть кольцевой арматуры располагается выше опорного кольца, то внутреннее плечо меридиального сечения уменьшается и результирующая сила растянутой зоны, а тем самым и расход арматуры увеличиваются. При равномерно распределенной нагрузке «*балочный момент*» равняется

$$\overline{M}=G\cdot s=qR^3[\sin\alpha_0(1-\cos\alpha_0)+(\sin\alpha_0-\alpha_0)].$$

Отсюда открывается возможность рассчитать купол как «*железобетонную балку на двух опорах*» с меридиальным сечением и с кольцевой арматурой в растянутой зоне.

Если предполагать в сжатой зоне прямоугольное распределение продольных напряжений (T_2/δ) и считать сжимающее напряжение в вершине (полюсе) купола из безмоментной задачи известным ($=qR/2\delta$), то путем двух уравнений равновесия можно найти угол φ_0 (характеризующий протяжение нерастрескавшейся части купола) и усилие N в опорном кольце. Последние определяются с достаточной точностью для назначения мощности кольцевой арматуры, но, к сожалению, не с достаточной точностью для определения изгибающих меридиальных моментов m в нижних районах купола. Поэтому представление о балочной работе купола не может применено при практических расчетах куполов. Но тем не менее, описанное представление о работе купола полезно иметь в виду при проектировании железобетонных куполов. Например, опорные моменты купола у кольца m_A (*тм/м*) вызывают перемещения вертикальных реакций r_0 во внутрь купола или наружу (в зависимости от знака опорных моментов) на величину $a=m_A/r_0$ (рис. 1, б). Тем самым уменьшаются или увеличиваются «балочный» изгибающий момент $\overline{M}$ и усилие N в опорном кольце. Имеется возможность отодвинуть линию реакций r_0 во внутрь так, что плечо s, а также момент $\overline{M}$ будут равняться нулю. В таком случае опорное кольцо имеет еще конструктивное значение.

2. МЕТОД РАСЧЕТА КУПОЛА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ТРЕЩИН

Вырезаем из поверхности купола элементарный сферический треугольник с нижней стороной $A-A'$ у опорного кольца длиной «1» (рис. 2). Нижняя часть площади $A-A'-B-B'$ имеет меридиальные трещины, вследствие чего на меридиальных сечениях $A-B$ и $A'-B'$ продольные силы $-T_2$ отсутствуют. Верхний сферический треугольник $B-B'-C$ работает как часть ненарушенного купола, рассчитываемый по обыкновенной теории упругого купола, если даны нагрузки и усилия на крае $B-B'$. Результаты расчета упругого купола по обыкновенной теории в настоящей работе считаются известными.

Рассмотрим некоторые состояния деформаций описанного сферического треугольника и возникающие в них усилия при различных случаях нагрузки.

а) *Начальная задача.*

В этом случае на треугольник действуют внешняя нагрузка q, вертикальная реакция r_0 и обусловленная влия-

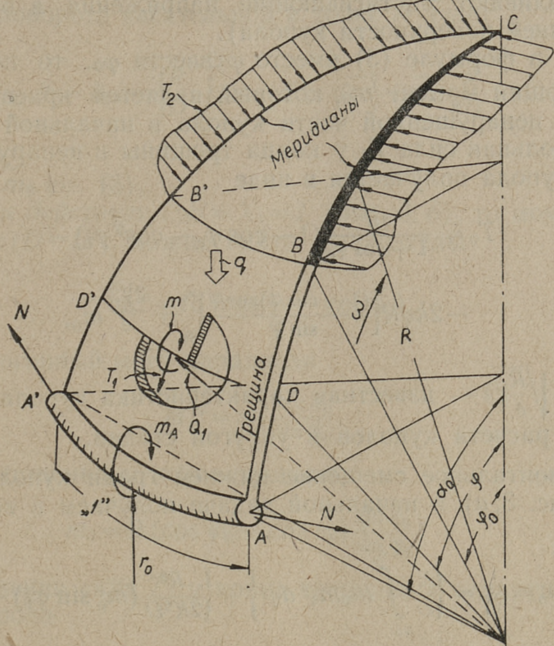


Рис. 2.

нием опорного кольца горизонтальная сила $H_0 = N_0 / R \sin\varphi_0$. При этом H_0 выбирается так, чтобы общая реакция r_{H_0} действовала в направлении касательной купола в точке A (рис. 3, a).

Вертикальная реакция $r_0 = qR(1 - \cos\alpha_0) / \sin\alpha_0$. (1)

Горизонтальная реакция $H_0 = qR \cos\alpha_0 / (1 + \cos\alpha_0)$. (2)

Меридиальные изгибающие моменты в растрескавшейся части купола при учете влияния уменьшения ширины треугольника можно выразить формулой (в *тм/м*)

$$m_0 = \frac{qR^2}{2} \operatorname{cosec}\varphi\,(A + B\cos\varphi - 2\sin\varphi + \varphi + \sin\varphi\cos\varphi), \quad (3)$$

где $A = 2\tan\frac{\alpha_0}{2} - \alpha_0 + \sin\alpha_0\cos\alpha_0$; $B = -2\cot\alpha_0(1-\cos\alpha_0)$

(положительные меридиальные изгибающие моменты обуславливают растягивающие напряжения в волокнах внутренней поверхности купола).

Если в формуле (3) вместо φ ввести φ_0, то получаем изгибающий момент $\overline{m}_0$, который является краевым моментом ненарушенной части купола в начальной задаче.

Продольная сила T_2 у конца трещины в ненарушенной части купола получается в виде

$$T_0 = \frac{qR}{1+\cos\varphi_0}(1-\cos\varphi_0-\cos^2\varphi_0) -$$

$$-2kqR\left[\frac{(1-\cos\varphi)\cos\varphi}{\sin\varphi}\right]_{\varphi_0}^{\alpha_0} + \frac{2\sqrt{3}}{\delta}\overline{m}_0, \tag{4}$$

где $k = \sqrt{\frac{R}{\delta}\sqrt{3}}$ — известная характеристика купола из теории расчета куполов в упругой стадии.

Горизонтальное смещение нижней грани купола (точки A рис. 3, a) в начальной задаче получаем в виде

$$w_0 = \delta_{10} = \left\{\frac{R}{D}\int_{\varphi_0}^{\alpha_0} m_0 m_1{}^* d\varphi\right\} + \left\{\frac{R^2}{2K^2D}(\overline{m}_0\sin\varphi_0) -\right.$$

$$-\frac{2kR}{E\delta}H_0\sin\alpha_0\sin\varphi_0 + \frac{R^2q}{E\delta}\left[\frac{\sin\varphi_0}{1+\cos\varphi_0} - \sin\varphi_0\cos\varphi_0 + \right. \tag{5}$$

$$\left.\left. + 2\mathrm{k}\cos\varphi_0(1-\cos\varphi_0)\right]\right\} + \overline{m}_1{}^*\left\{\overline{m}_0\frac{R}{kD} - \frac{2K^2}{E\delta}H_0\sin\alpha_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{qR}{E\delta}\left(\sin\varphi_0 + k^2\frac{\sin 2\varphi_0}{1+\cos\varphi_0}\right)\right\},$$

где $D = E_{\sigma}\delta^3|12$ — жесткость изгиба оболочки,
$E_б$ — модуль упругости бетона,
$m_1{}^*$ — см. форм. (7).

Первый член в фигурных скобках выражает влияние деформации растрескавшейся части купола (интеграл необходимо вычислить численным путем). Второй и третий члены выражают соответственно горизонтальное перемещение точки B в ненарушенной части купола и горизонтальное перемещение точки A, вследствие поворота касательной в точке B от ненарушенной части купола.

Угол поворота касательной в точке A будет

$$\vartheta_0=\delta_{20}=\left\{\frac{R}{D}\int\limits_{\varphi_0}^{\alpha_0} m_0\cdot 1_A\cdot d\varphi\right\}+\overline{m}_0\frac{R}{kD}. \tag{6}$$

где m_0 и $\overline{m}_0$ см. (3).

б) *Если действует* $\triangle H=X_1=1$ (рис. 3, *б*), то момент в сечении $\varphi(D-D')$ можно найти из формулы

$$m_1{}^*=R\,(\cos\varphi-\cos\alpha_0) \tag{7}$$

или на погонный метр параллели

$$m_1{}^*=m_1\frac{\sin\alpha_0}{\sin\varphi_0}. \tag{7'}$$

Соответственно у конца трещины

$$\overline{m}_1=R\,(\cos\varphi_0-\cos\alpha_0)\frac{\sin\alpha_0}{\sin\varphi_0}. \tag{7''}$$

Продольная сила T_2 у конца трещины в ненарушенной части купола

$$T_h=2k\sin\alpha_0+\frac{2\sqrt{3}}{\delta}\overline{m}_1. \tag{8}$$

Горизонтальное смещение нижней грани купола (точки A) получаем

$$w_1=\delta_{11}=\left\{\frac{R}{D}\int\limits_{\varphi_0}^{\alpha_0} m_1m_1{}^*d\varphi\right\}+\left\{\left(\frac{R^2}{2k^2D}\sin\alpha_0\right)\overline{m}^*{}_1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2kR}{E\delta}\sin\alpha_0\right)\sin\varphi_0\right\}+\left\{m_1{}^*\left(\frac{R}{kD}\overline{m}_1+\frac{2k^2}{E\delta}\sin\alpha_0\right)\right\}, \tag{9}$$

где интеграл в первом члене, который, хотя и вычисляется в элементарных функциях, но в практических расчетах все же удобнее осуществить путем вычисления.

Угол поворота касательной в точке

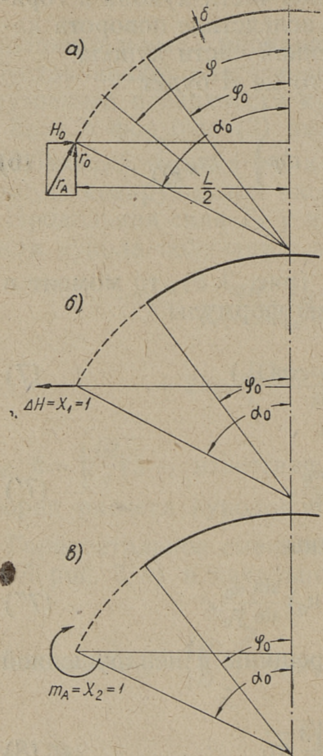


Рис. 3.

$$\vartheta_1=\delta_{21}=\frac{R^2\sin\alpha_0}{D}\left\{\left[\ln\sin\varphi-\cos\alpha_0\ln\tan\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi_0}^{\alpha_0}+\frac{1}{2k^2}+\frac{\cos\varphi_0-\cos\alpha_0}{k\sin\varphi_0}\right\}. \qquad (10)$$

в) *Если действует* $m_A=X_2=1$ (рис. 3, *в*), то изгибающие моменты на погонный метр

$$m_2=1_A\frac{\sin\alpha_0}{\sin\varphi}. \qquad (11)$$

Горизонтальное смещение нижней грани купола (точка A):

$$w_2=\delta_{12}=\delta_{21}=\vartheta_1. \qquad (10')$$

Угол поворота касательной в точке A

$$\vartheta_2=\delta_{22}=\frac{R\sin\alpha_0}{D}\left\{\left[\ln\tan\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi_0}^{\alpha_0}+\frac{1}{k\sin\varphi_0}\right\}. \qquad (12)$$

Продольная сила T_2 у конца трещины в ненарушенной части купола

$$T_M=\frac{2\sqrt{3}}{\delta}\frac{\sin\alpha_0}{\sin\varphi_0}. \qquad (13)$$

г) *Статически неопределимая задача.*

Статически неопределимыми величинами выбираем дополнение горизонтальной силы $\triangle H=X_1$ и опорный момент $m_A=X_2$. Кроме того, неизвестным является также угол φ_0, характеризующий протяжение трещин. Три условия для определения трех неизвестных следующие.

Горизонтальное смещение опорного кольца вследствие удлинения кольцевой арматуры должно равняться горизонтальным перемещениям нижней точки A сферического треугольника.

Если предположить, что арматура в опорном кольце работает с допускаемым напряжением $[\sigma_a]=\sigma_T|k$, то тем самым нам дано действительное горизонтальное перемещение точек опорного кольца

$$\overline{w}=[\sigma_a]\,R\sin\alpha_э|E_a,$$

где E_a является модулем упругости стали. Но очевидно также легко возможно учесть совместную работу бетона опорного кольца между трещинами при применении т. н. среднего модуля упругости стали E_{ac} по *В. И. Мурашеву*.

Таким образом, условие совместности горизонтальных смещений будет (5) (9) (10):

$$\delta_{10}+X_1\delta_{11}+X_2\delta_{21}=\overline{w}. \tag{14}$$

У конца трещины в ненарушенной части купола напряжение в бетоне равняется прочности бетона на растяжение R_p. Это условие можно выразить в виде (4) (8) (13):

$$T_0+X_1T_h+X_2T_M=R_p\delta. \tag{15}$$

Условие, что угол поворота ϑ касательной купола у нижнего края должен равняться нулю (6) (10) (12), будет:

$$\delta_{20}+X_1\delta_{12}+X_2\delta_{22}=0. \tag{16}$$

После некоторых преобразований найдем из (14), (15), (16)

$$X_1=\Delta H=\frac{-\delta_{10}+\overline{w}+\delta_{21}\cdot\delta_{20}\,|\,\delta_{22}}{\delta_{11}-\delta_{21}^2\,|\,\delta_{22}};\quad X_2=m_A=-\frac{\delta_{20}+X_1\delta_{12}}{\delta_{22}}. \tag{17}$$

Для определения φ_0 получаем условие

$$\frac{\delta_{10}-\overline{w}-\delta_{21}\delta_{20}\,|\,\delta_{22}}{\delta_{11}-\delta_{21}^2\,|\,\delta_{22}}=\frac{T_o-R_p\delta-T_M\delta_{20}\,|\,\delta_{22}}{T_h-T_M\delta_{21}\,|\,\delta_{22}}, \tag{18}$$

откуда нахождение φ_0 производится, как правило, графически.

После этого вычисляем из (17) ΔH и m_A. Усилие найдем суммированием.
Действительная горизонтальная сила $H = H_0 - \Delta H$.
Усилие в кольцевой арматуре $N = R \sin \alpha_0 (H_0 - \Delta H)$. (19)

Моменты в растрескавшейся части купола (в *тм/м*)

$$m = m_0 + \Delta H \cdot m_1 + m_A \frac{\sin \alpha_0}{\sin \varphi_0} \text{ (у конца трещины } - \overline{m}). \quad (20)$$

Моменты в ненарушенной части купола:

$$m = e^{-k\omega}\left[\overline{m}\sqrt{2}\sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{k\delta}{\sqrt{3}}\overline{H}\sin k\omega\right]. \quad (21)$$

Там же продольные силы

$$T_2 = \frac{qR}{1+\cos\varphi}(1 - \cos\varphi - \cos^2\varphi) + e^{-k\omega}\left[\overline{m}\frac{2\sqrt{6}}{\delta}\cos\left(k\omega + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\overline{H}\cos k\omega\right], \quad (22)$$

где $\overline{H} = \Delta H \sin \alpha_0 - qR\left[\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right]_{\varphi_0}^{\alpha_0}$.

3. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ПРИМЕРОВ

Не излагая в настоящем разделе ход вычисления, приводим результаты расчета купола, охарактеризованного следующими геометрическими параметрами (рис. 4): Пролет купола $L = 30{,}0$ *м*; $\alpha_0 = 60°$; $R = 17{,}32$ *м*; $\delta = 0{,}10$ *м*.

Бетон купола охарактеризован следующими величинами: $E_б = 2 \cdot 10^6$ *т/м²*; $R_p = 150$ *т/м²*.
Формулы (17), (18) дают:

$$\Delta H = 0{,}131 \text{ т/м}; \; m_A = 0{,}504 \text{ т}; \; \varphi_o = 43°.$$

Эпюры m и T_2 представлены на рис. 4 линией *I*. Там же показаны линией *II* те же величины, если предполагать, что $R_p\delta = 0$. Хотя теперь $\varphi_0 = 36°$, но все же общая картина усилий (особенно распределение меридиальных моментов m) сохранилась. Отсюда вытекает, что оценка величины R_p не имеет решающего влияния на результаты расчета.

На том же рисунке линией *III* изложены результаты расчета в предположении, что купол работает в упругой стадии. Видим, что распределение усилий в этом случае сильно изменяется.

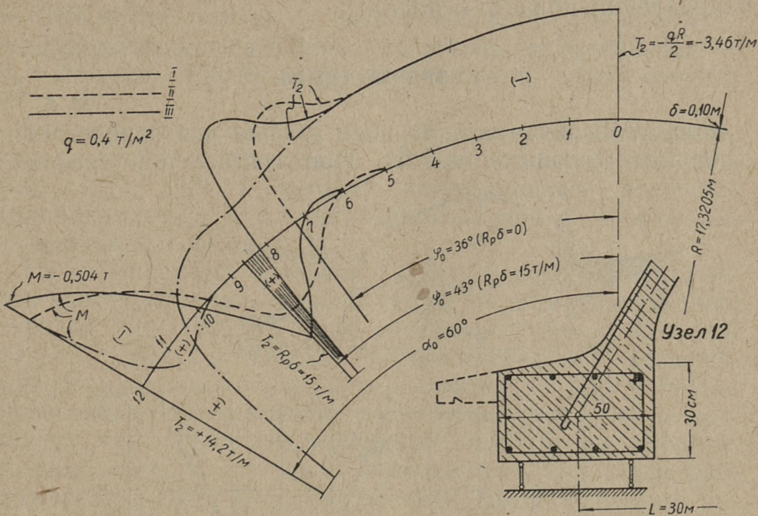


Рис. 4.

Дальше проведен расчет с нагрузкой, увеличенной в 1,8 раза соответственно коэффициенту запаса $k = 1,8$. Оказывается, что распространение трещин почти не изменяется, а кольцевые силы и изгибающие моменты увеличиваются почти также $k = 1,8$ раза. Это важный факт. Если бы это не было так и, вследствие изменения протяжения трещин, кольцевые силы и изгибающие моменты увеличивались бы непропорционально, то при определении мощности арматуры по усилиям эксплуатационных условий, действительный коэффициент запаса остался бы неопределенным.

Отметим, что при больших углах α_0 (например $\alpha_0 = 80°$) трещины развиваются далеко (до половины α_0 и дальше). ΔH будут отрицательными, т. е. кольцевые силы в опорном кольце сильно увеличиваются, а опорные моменты m_A будут положительными.

Если изменить толщину купола при сохранении всех остальных параметров, то распределение усилий также изменится. Например, при уменьшении толщины купола δ как протяжение трещин, так и величины опорных моментов m_A уменьшаются (хотя при больших значениях α_0 может иметь место более сильное развитие трещин в направлении полюса купола).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К настоящей статье приложен график для определения основных величин (рис. 5). При составлении графика

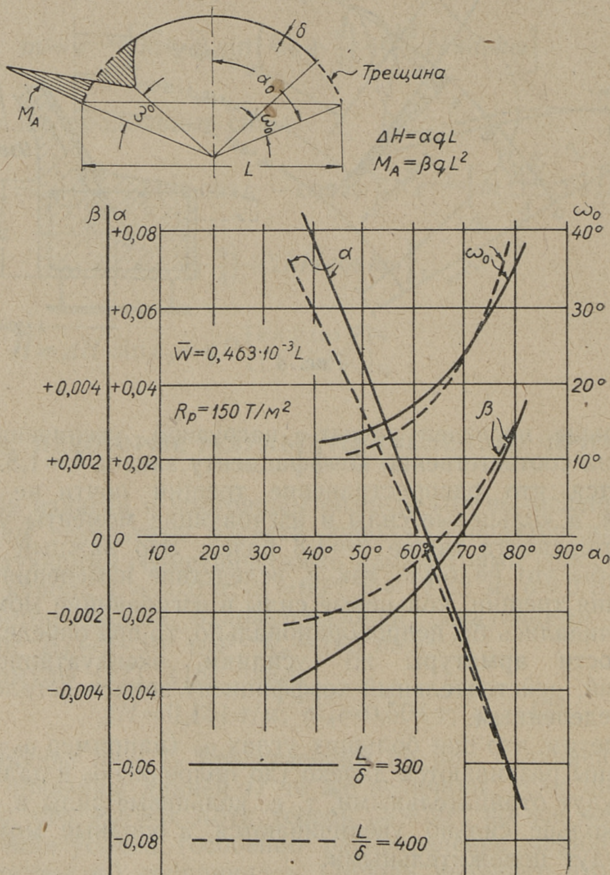


Рис. 5.

ограничились двумя соотношениями толщины купола $L/\delta=300$ и 400. Основной параметр, горизонтальное смещение опорного кольца $\overline{w}$ назначен, исходя из рабочего напряжения кольцевой арматуры $[\sigma_a]=\sigma_T/k=3500/1,8=$ $=1940$ *кг/см²*, где σ_T — предел текучести стали, а k — коэффициент запаса. Прочность бетона на растяжение — $R_p=15$ *кг/см²*. Расчет был проведен для углов $\alpha_0=40°$, 60° и 80°.

После определения m_A, φ_0, ΔH при помощи графика, определяются необходимые усилия по формулам (19), (20), (21), (22), в которых встречающиеся величины (например m_0 и т. д.) можно вычислить по формулам, изложенным в разделе 1.

Из графика, рис. 5, можно вывести некоторые заключения конструктивного порядка. Если L/δ, как обыкновенно, порядка 300—400, то самым уместным углом α_0 является 65° — 70°, так как в таком случае получаются наименьшие меридиальные изгибающие моменты m. При больших значениях углов α_0 возможно, что трещины все же не возникнут, так как обыкновенные железобетонные опорные кольца иногда в состоянии воспринимать кольцевые растягивающие силы N с допускаемым растягивающим напряжением бетона (R_p/k). Но применимость куполов с большими углами α_0 ограничена, так как в таком случае при возведении большой части поверхности купола требуется двойная опалубка. У куполов с малыми углами α_0 (например 35—45°) возникают кольцевые силы, уже не воспринимаемые бетоном обыкновенного опорного кольца. Неизбежные трещины обуславливают существенные меридиальные изгибающие моменты m, как это вытекает из графика рис. 5. Нам кажется, что единственным выходом здесь является применение предварительно напряженной кольцевой арматуры.

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК-СТЕНОК

Алликас Л. А.

Применяемые в настоящее время методы расчета балок-стенок основаны на положениях теории упругости, предусматривающей изотропный и однородный материал, подчиняющийся закону Гука, каковые условия для железобетонных балок-стенок в стадии разрушения однако не имеют места. В их расчетной схеме опорные реакции предполагаются передаваемыми на плиту по нижней ее грани в виде распределенных на некотором коротком протяжении сжимающих сил. В действительных конструкциях такая схема встречается лишь в исключительных случаях. Обычно же балки-стенки опираются по своим вертикальным торцевым плоскостям либо на столбы, либо на другие балки-стенки. При этом опорные реакции передаются от плит на столбы посредством действующих между ними сил сдвига.

В отношении железобетона указанные вопросы в основном можно выяснить лишь экспериментальным путем. Испытания с железобетонными балками-стенками ранее проводили С. Г. Фарбер [1], Х. Клингрот [2], Н. Ниландер [3] и Х. Бай [4]. Первые три автора производили испытания с балками-стенками, которые опирались на нижнюю грань плиты, а верхняя грань ее была нагружена. Х. Бай испытывал одну балку-стенку, которая опиралась на торцевые ребра и была нагружена по нижней грани плиты.

ИСПЫТАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК-СТЕНОК

С целью выяснения работы железобетонных балок-стенок, опирающихся на ребра, в Таллинском политехническом институте были проведены соответствующие испытания. Испытанию были подвергнуты балки-стенки двух типов.

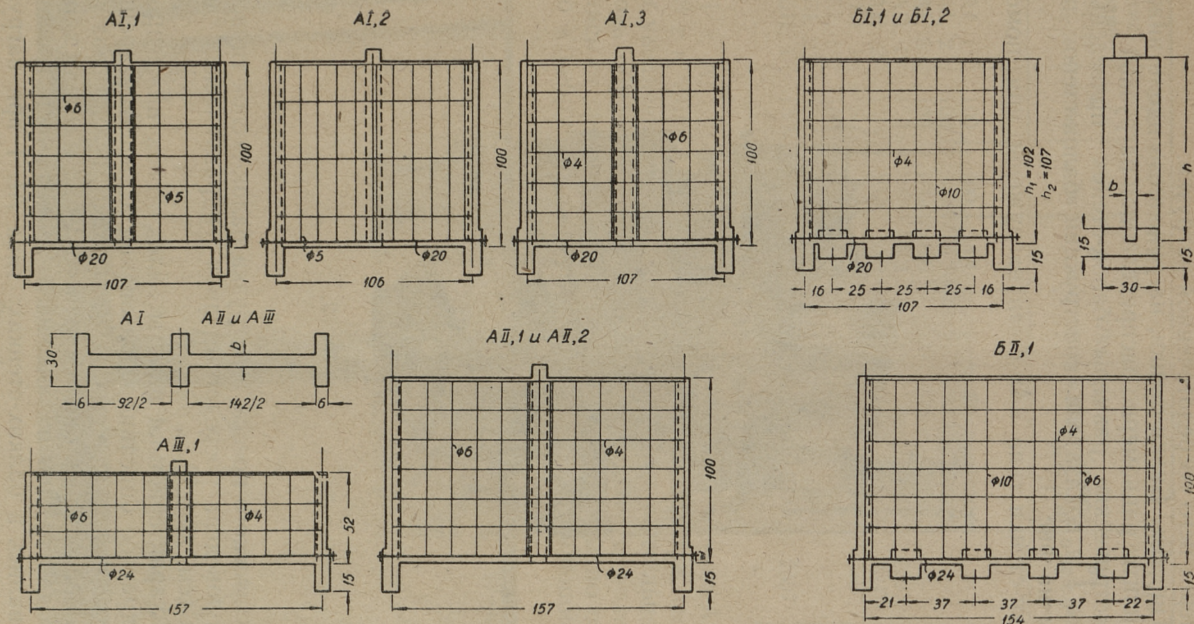

AI,1
AI,2
AI,3
БI,1 и БI,2
AI
AII и AIII
AII,1 и AII,2
БII,1
AIII,1
ф6
ф5
ф20
ф4
ф10
ф24
100
107
106
157
154
52
15
30
16
25
37
21
22
92/2
142/2
6
b
h
$h_1=102$
$h_2=107$

Рис. 1.

1. Тип «А». Балки-стенки со средним ребром для передачи через него сосредоточенной нагрузки.

2. Тип «Б». Балки-стенки, нагруженные вдоль нижней грани плиты равномерно распределенной нагрузкой.

Геометрические размеры балок-стенок приведены в таблице 1 и показатели конструкции балок-стенок приведены на рис. 1.

Балки-стенки типа «*А*» были нагружены при помощи

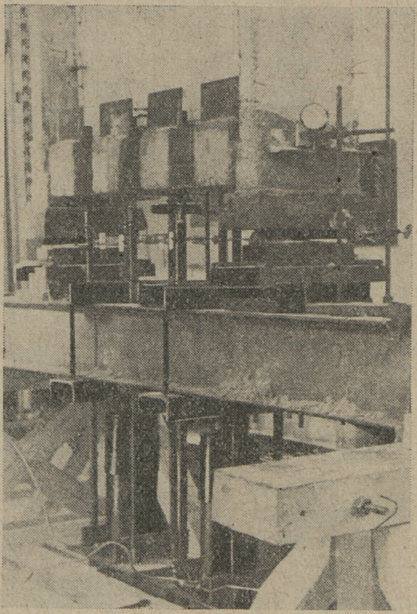


Рис. 2.

гидравлического пресса, а нагрузка балок-стенок типа «*Б*» была проведена посредством двух гидравлических домкратов (см. рис. 2).

Для характеристики работы балок-стенок ниже приводится краткое описание образования и развития трещин.

Балка-стенка типа «А». Первые заметные на глаз трещины образовались около среднего ребра и имели характерный для трещин изгибающего момента вид. Трещины образовались в балках-стенках: типа AI, 1 при нагрузке

Табл. 1.

Наименование бал.-стенок	Размеры плиты l в см	h в см	b в см	l/h	Продольная арматура ø в мм	$\sigma_{бр.\ сопр.}$ в $кг/см^2$	σ_T в $кг/см^2$	Марка бетона в $кг/см^2$
AI, 1	100	100	8,4	1	20	5030	—	184
AI, 2	100	100	6,2	1	20	5030	—	312
AI, 3	100	100	6,6	1	20	5030	—	132
AII, 1	150	100	6,2	1,5	24	4020	2697	250
AII, 2	150	100	6,9	1,5	24	4020	2697	254
AIII, 1	150	52	6,1	3	24	4020	2697	372
БI, 1	100	102	7,3	1	20	5030	—	318
БI, 2	100	107	6,4	1	20	5030	—	304
БII, 1	150	100	6,1	1,5	24	4020	2697	327

21,1 *т*, AI, 3 — 19,0 *т*, типа AII, 1 —18,6 *т*, типа AII, 2 — 19,8 *т* и типа AIII, 1 — 5,8 *т*. Эти трещины при постепенном увеличении нагрузки развивались сравнительно мало. Вновь образовавшиеся трещины все более и более удалялись от среднего ребра, находясь при этом по отношению к ребру под большим уклоном. Начинающиеся от

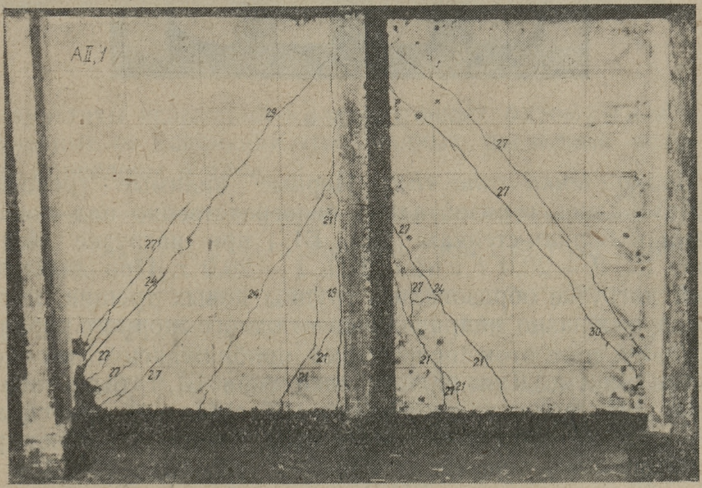


Рис. 3.

опорных ребер косые трещины образовывались в балках-стенках: типа AI, 1 при нагрузке 30,8 *т*, типа AI, 2 — 31,1 *т*, типа AI, 3 — 23,9 *т*, типа AII, 1 — 23,8 *т*, типа AII, 2 — 25,0 *т* и типа AIII, 1 — 8,6 *т*. Из означенных трещин одна при дальнейшей нагрузке начала сильно развиваться и явилась причиной разрушения балки-стенки. На рис. 3 в качестве примера приведена разрушенная балка-стенка типа А.

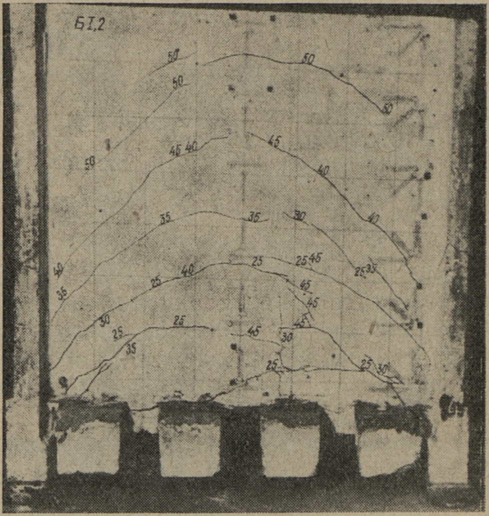


Рис. 4, *а*.

Балка-стенка типа «Б». Первые видимые трещины образовались горизонтально непосредственно над консолями в балках-стенках: типа БI, 1 при нагрузке 16,0 *т*, типа БI, 2 — 20,0 *т* и типа БII, 1 — 20,0 *т*. При дальнейшей нагрузке образовались группы новых трещин, которые дугообразно направлялись от одного опорного ребра к другому, при этом непрерывно приближаясь к верхней грани плиты. Для балки-стенки типа БI, 1 были отмечены три группы таких трещин (образовались при силах 22—25 *т*, 25—40 *т* и 40—46 *т*), для типа БI, 2 — четыре (образовались при силах 25—30 *т*, 30—35 *т*, 35—45 *т* и 45 — 50 *т*) и для типа БII, 1 — три (образовались при силах 25—35 *т*, 25—40 *т* и 35—45 *т*). Кроме вышеупомянутых дугообразных трещин имелись еще и вертикальные трещины, идущие вдоль стержней сетчатой арматуры. Примеры разрушенных балок-стенок приведены на рис. 4.

Для характеристики напряжений, рассчитанных на основании замеров деформаций на поверхности плит балок-стенок, на рис. 5 приводятся две эпюры нормальных напряжений в середине пролета.

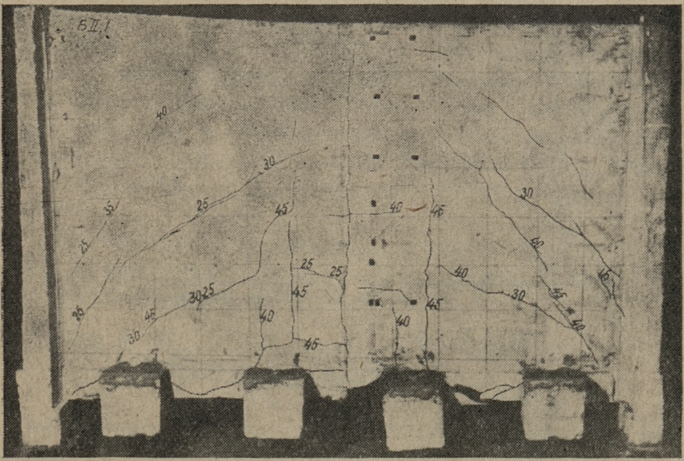


Рис. 4, *б*.

Результаты испытаний железобетонных балок-стенок и полученные на основании этих данных расчетные величины приведены в табл. 2.

Табл. 2.

Тип балки-стенки	AI, 1	AI, 2	AI, 3	AII, 1	AII, 2	AIII, 1	БI, 1	БI, 2	БII, 1
P_p в *т*	51,0	45,0	34,4	40,2	41,2	16,9	52,3	52,9	49,6
M_p в *мм*	10,7	8,9	7,4	13,5	13,5	5,4	7,5	7,6	9,6
Z в *т*	9,85	8,80	7,72	12,30	12,05	11,90	5,50	7,27	9,40
z в *см*	90	89	90	90	90	45	92	93	93

В таблице означают:

Z — соответственно разрушению растягивающая сила в арматуре и z — плечо внутренних сил.

Результаты проведенных испытаний железобетонных балок-стенок можно охарактеризовать следующими положениями:

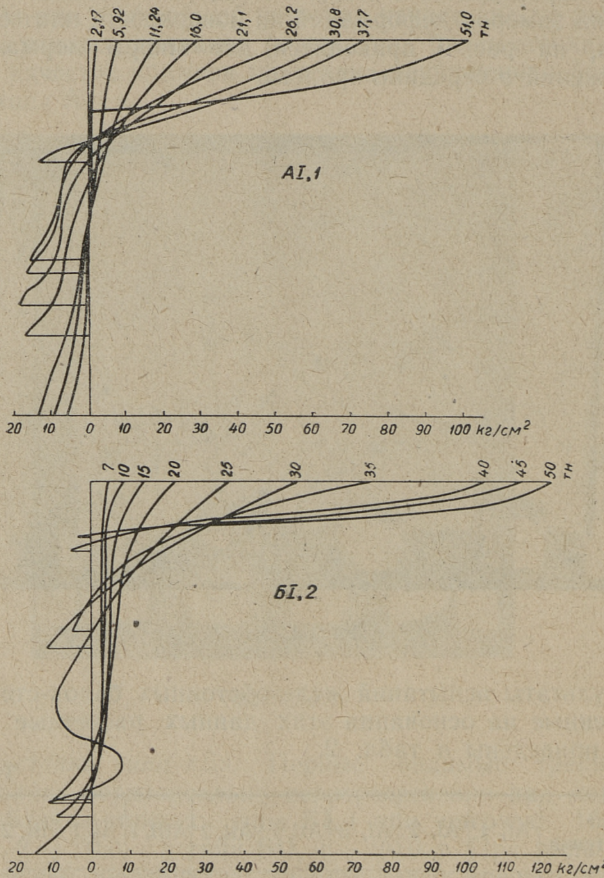


Рис. 5.

1) Выполненные испытания показали, что при проектировании балок-стенок особое внимание должно быть обращено на влияние поперечных сил (главные напряжения). Испытанные железобетонные балки-стенки, будучи преднамеренно спроектированы без отогнутой арматуры,

разрушались все под действием поперечных сил. Исключение составила только низенькая балка-стенка AIII, разрушившаяся под действием изгибающего момента.

2) При достижении максимального значения нагрузки на балку-стенку бетон полностью выключается из работы на растяжение.

3) Эпюры сжимающих напряжений бетона, соответствующие стадии разрушения, очерчены в случае обоих типов балок-стенок кривыми параболического характера. При проведении испытаний максимальные сжимающие напряжения в бетоне достигали значений, близких к прочному сопротивлению бетона на сжатие при изгибе.

4) В стадии разрушения балок-стенок горизонтальные стержни сетчатой арматуры принимали на себя в среднем от общей растягивающей силы: при типе AI — 16%, при типе AII — 26%, при типе БI — 25% и при типе БII — 16%.

5) Напряжения в продольной арматуре в средних вертикальных сечениях балок-стенок достигали предела текучести или близкого к этому значения.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Параллельно с испытаниями были произведены теоретические расчеты. Балку-стенку можно рассматривать как систему, состоящую из ребер и расположенных между ними плит. Распределение сил сдвига, как внутренних сил между ребром и плитой, можно определить путем варьирования этих напряжений на основании положения о минимуме потенциальной энергии. Применение условий геометрической непрерывности представляется в этом случае излишним, так как вариационное уравнение Кастильяно, как показал это академик Л. С. Лейбензон [5], выражает эти же условия, но только в энергетической форме.

В целях упрощения этой проблемы во внимание не приняты нормальные напряжения в месте сопряжения плиты с торцевыми ребрами, имея в виду ничтожные значения этих напряжений вследствие большого различия между жесткостями плиты и ребер.

При решении указанных задач применялось вариационное уравнение Кастильяно, причем само решение отыскивалось в виде алгебраического ряда (метод Ритца).

Вычисленные траектории главных напряжений приведены на рис. 6. Полученные таким образом траектории главных напряжений хорошо сходятся с траекториями, полученными методом фотоупругости, точно так же они сходятся с картиной разрушения балок-стенок.

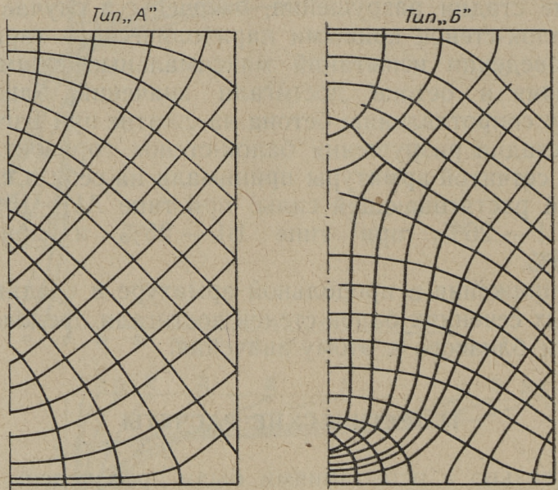


Рис. 6.

ПРЕДЛОЖЕНИЯ В ОТНОШЕНИИ РАСЧЕТА БАЛОК-СТЕНОК

В основу расчета обоих типов балок-стенок принимаются следующие положения, оправдываемые результатами проведенных испытаний балок-стенок:

1. Эпюра сжимающих напряжений принимается в виде прямоугольника.

2. Предполагается, что в горизонтальных стержнях сетчатой арматуры напряжения в пределах половины высоты растянутой части поперечного сечения достигают предела текучести и далее, линейно уменьшаясь, принимают на нейтральной оси поперечного сечения нулевое значение.

В соответствии с указанными предположениями и пренебрегая величиной $0{,}83ca$, как очень малым значением по отношению к единице, получаем следующее выражение для плеча внутренних сил:

$$z = h_0 - 0{,}5x = (1 - 0{,}5\, k_1 \alpha)\, h_0,$$

где:

$$k_1 = 1 + 0{,}83c,$$

$$c = \frac{(h_0 - x) f_{ah}}{F_a} \approx \frac{0{,}9 h_0 f_{ah}}{F_a},$$

$$\alpha = \frac{F_a}{b h_0} \cdot \frac{\sigma_T}{R_u},$$

h_0 — расстояние центра тяжести продольной арматуры от верхней грани балки-стенки в *см*,

b — толщина балки-стенки в *см*,

F_a — площадь поперечного сечения основной продольной арматуры в *см*^{2},

f_{ah} — площадь поперечного сечения горизонтальных стержней сетчатой арматуры, приходящейся на единицу высоты балки-стенки в *см*^{2}/*см*,

σ_T — предел текучести арматуры в *кг*/*см*^{2} и

R_u — предел прочности бетона на сжатие при изгибе в *кг*/*см*^{2}.

ПРОДОЛЬНАЯ И ОТОГНУТАЯ АРМАТУРА

а) Балки-стенки типа «А».

Для того, чтобы в балках-стенках типа «А» можно было разместить отогнутую арматуру с конструктивной точки зрения наиболее рациональным образом, необходимо сдвинуть часть основной продольной арматуры в вертикальном направлении до высоты 0,2. При этом из уравнения разрушающего момента M_p для среднего вертикального сечения получается следующее выражение для необходимой площади поперечного сечения продольной арматуры:

$$F_a = \frac{M_p}{\sigma_T \cdot z} \cdot \frac{1}{(0{,}97 + 0{,}43\, C)} \cdot$$

Плечо внутренних сил в отношении отогнутых стержней в пределах косой трещины принято:

$$z_{om} = \frac{0{,}70}{\cos\alpha} z.$$

В предположении отгиба из основной продольной арматуры 60% из уравнения разрушающего момента в отношении разрушающей трещины (рис. 7) получается:

$$F_a = \frac{M_p}{\sigma_T z} \cdot \frac{1}{\left[0{,}40 + \frac{0{,}42}{\cos\alpha} + 0{,}43\,(c + c_1 \operatorname{tg}\alpha)\right]}.$$

В приведенных формулах означают:

$$c_1 = \frac{l/_2\, f_{av}}{F_a},$$

f_{av} — площадь поперечного сечения вертикальных стержней сетчатой арматуры, приходящаяся на единицу пролета балки-стенки в $см^2/см$;

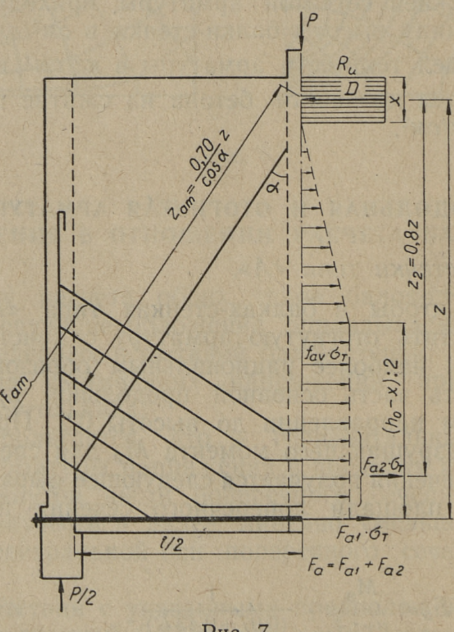


Рис. 7.

α — угол разрушающей косой трещины по отношению к вертикали. На основании произведенных испытаний можно принять: $\alpha = 33°$ при $l/h = 1.0$ и $\alpha = 41°$ при $l/h = 1{,}5$.

Из двух значений F_a следует выбрать большее.

б) Балки-стенки типа «Б».

Из уравнения разрушающего момента M_p для среднего вертикального сечения получается следующее выражение для площади поперечного сечения основной продольной арматуры:

$$F_a = \frac{M_p}{\sigma_T z} \cdot \frac{1}{(1 + 0{,}43\,c)}.$$

Принимая во внимание полученную на испытаниях картину трещин и выведенные на основании теоретических расчетов траектории главных напряжений, центр тяжести начала отгиба отогнутых стержней должен приходиться на четверти пролета (рис. 8).

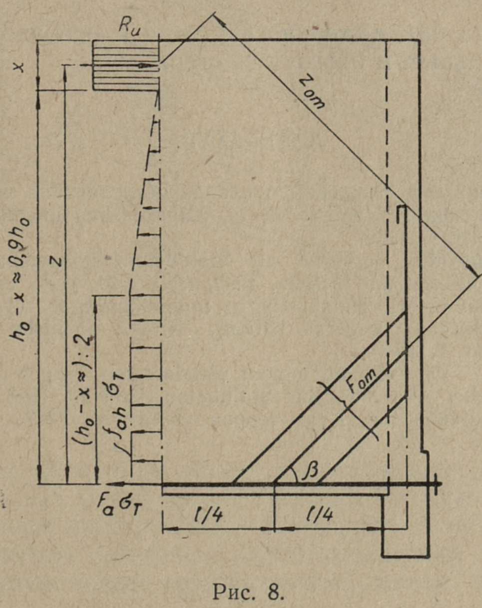


Рис. 8.

В предположении отгиба из основной продольной арматуры 60% из уравнения разрушающего момента в отношении разрушающей трещины получается следующее выражение для необходимой площади поперечного сечения основной продольной арматуры:

$$F_a = \frac{M_p}{\sigma_T} \cdot \frac{1}{z\,(0{,}40 + 0{,}60 \cos\beta + 0{,}41c) + l/_6 \sin\beta},$$

где β означает угол отогнутой арматуры по отношению к горизонтали.

На основании проведенных испытаний $\beta = 45^\circ$ при $l/h = 1{,}5$ и $\beta = 60^\circ$ при $l/h = 1{,}0$.

Из двух значений площади поперечного сечения арматуры F_a следует выбрать большее.

Площадь поперечного сечения вертикальных стержней сетчатой арматуры на единицу балки-стенки получается из выражения:

$$f_{av} = \frac{q_p}{\sigma_T}.$$

Прочность балки-стенки сего типа в основном зависит от вертикальных и отогнутых стержней.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Фарбер. Экспериментальное исследование железобетонных балок-стенок, Бюллетень № 14, Харьковский инженерно-строительный институт, 1939.
2. H. Klingroth. Versuche an Stahlbetonträgwänden und deren Auswertung, «Beton und Eisen», 1942, Heft 9/10, 11/12 und 13/14.
3. H. Nylander, H. Holst. Nagra undersönningar rörande skivor och höga Balkar av armerad betong. Kungl. Tekniska Högskolans Handlinger, nr. 2, 1946.
4. H. Bay. Versuche mit einein wandartigen Träger aus Stahlbeton. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 99, 1943.
5. Л. С. Лейбензон. Курс теории упругости, 1947.

СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ЗАМКНУТЫМ КОНТУРОМ

Соонурм Э. Ю.

Рассмотрим снабженную стрингерами однопролетную призматическую оболочку, имеющую в поперечном сечении замкнутый прямоугольный контур с двумя осями симметрии. Предположим, что стрингеры жестко соединены пластинками с постоянной вдоль оболочки толщиной. Рассмотрим случай шарнирного закрепления оболочки на концах при наличии жестких в своей плоскости опорных диафрагм (рис. 1).

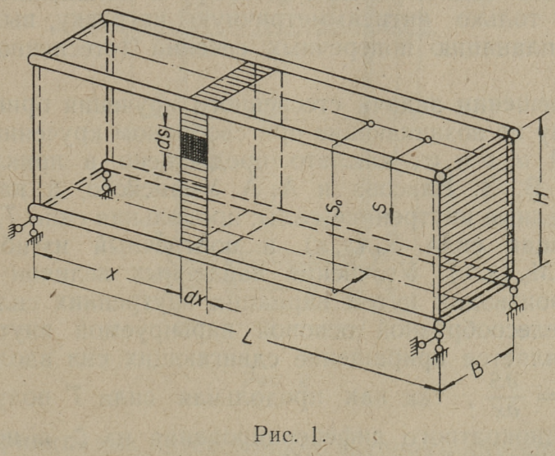


Рис. 1.

К таким оболочкам может быть приведен ряд практически важных задач, встречающихся при проектировании тонкостенных конструкций в различных областях техники.

Для расчета оболочек рассматриваемого типа ниже предлагается новый приближенный метод, вытекающий из т. н. *метода апроксимации сдвигающих сил*, предложенного Х. Х. Лаулем для расчета цилиндрических оболочек [1, 2 и 3].

а) СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Предположим, что оболочка по всей длине нагружена нагрузкой в продольном направлении равномерно распределенной и действующей перпендикулярно оси оболочки. В отношении же распределения нагрузки в поперечном направлении никаких ограничений нами не делается.

Как известно, однозамкнутое поперечное сечение с жестким контуром является статически определимым в том случае, если расчет производится совместно на изгиб и кручение. Если же принять во внимание возможную деформацию контура, как это делается ниже, то целесообразно рассматривать симметричную и антисимметричную нагрузки раздельно. Случай симметричной нагрузки сводится к известной в теории сопротивления материалов задаче изгиба. Поэтому в дальнейшем рассмотрим только антисимметричную нагрузку, вызывающую депланацию поперечных сечений (стесненное кручение).

При решении задачи стесненного кручения принимаем за основу не возникающие при свободном кручении перемещений u, v и w, как это предложено в прикладных теориях В. З. Власова и А. А. Уманского, а наиболее существенные внутренние силы: продольная сила $T_0\,(s, x)$, сдвигающая сила $S_0\,(s, x)$ и поперечный изгибающий момент $M_0\,(s, x)$. Уточнение найденных величин T_0, S_0 и M_0 производим путем вариации внутренних сил. Наиболее целесообразной основой варьируемой внутренней силой является приращение сдвигающих сил вдоль оболочки $\zeta = \frac{\partial S}{\partial x}$, так как продольная сила T получается путем однократного диференцирования из ζ, а поперечный изгибающий момент M — однократным интегрированием.

Приняв сдвигающие силы за основу вариации внутренних сил, добавляем к эпюре $\zeta_0 = \frac{\partial S_0}{\partial x}$ некоторую дополнительную эпюру $\Delta\zeta$, выражение которой содержит пока неопределенные параметры. Согласно принципу Кастильяно-Ритца, выбранная дополнительная функция $\Delta\zeta$ должна целиком удовлетворять условиям равновесия и граничным условиям. Неизвестные параметры определяем в соответствии с методом Кастильяно-Ритца из условий минимума потенциальной энергии внутренних сил.

Окончательные значения $T(s,x)$, $S(s,x)$ и $M(s,x)$ находим путем суммирования их первоначальных значений и поправок, полученных вариацией внутренних сил.

б) ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛ

В качестве т. н. *начальной задачи* рассмотрим кручение оболочки с жестким контуром. Поперечный разрез оболочки со всеми необходимыми обозначениями приводится на рис. 2. Антисимметричную нагрузку $q=const$ можно

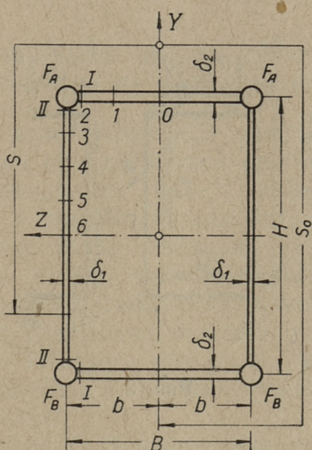


Рис. 2.

рассматривать как интенсивность внешнего крутящего момента $m=\frac{dM_x}{dx}=\gamma\beta q=const$. Отсчитывая координату x от торца оболочки, получаем для крутящего момента выражение

$$M_x=\left(\frac{L}{2}-x\right)m, \tag{1}$$

где L — длина оболочки.

При отсутствии деформаций контура сечения и деформаций сдвига внешний крутящий момент воспринимается сдвигающими силами

$$S_o = \frac{Mx}{\Omega} = \frac{m}{\Omega}\left(\frac{L}{2} - x\right), \qquad (2)$$

где Ω — удвоенная величина площади поперечного сечения.

Приращение сдвигающих сил

$$\zeta_o = \frac{\partial S_0}{\partial x} = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial Mx}{\partial x} = -\frac{m}{\Omega} \qquad (3)$$

является при $m = const$ постоянным, так как оно не зависит от распределения нагрузки в поперечном направлении (рис. 3,*а*).

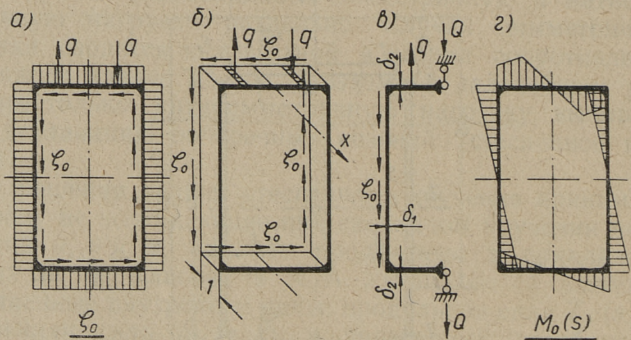


Рис. 3.

Положительным будем считать направление против хода часовой стрелки как для крутящего момента, так и для сдвигающих сил (если смотреть против направления оси x).

В данном случае нормальных напряжений в поперечном сечении не возникает. Следовательно продольные силы

$$T_o = 0 \qquad (4)$$

и усилия в стрингерах

$$N_o = 0. \qquad (5)$$

Для нахождения изгибающего момента M_o рассмотрим элементарную поперечную полоску $dx=1$ оболочки как замкнутую раму с жесткими углами (рис. 3, *б*). Такая рама однократно статически неопределима. При наличии двух осей симметрии, поперечная сила Q (рис. 3, *в*) выражается в виде

$$Q=\tfrac{1}{2}(q-\zeta_o H)$$

и поперечный изгибающий момент, например в углу A, в виде

$$M_o=\frac{b}{2}[(1-2\gamma)q+\zeta_o H]. \qquad (6)$$

Качественная эпюра M_o представлена на рис. 3, *г*.

в) ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЭПЮРА $\Delta\zeta(s)$ И ВЫЗЫВАЕМЫЕ ЕЮ ИЗМЕНЕНИЯ ВО ВНУТРЕННИХ УСИЛИЯХ

При выборе дополнительной эпюры $\Delta\zeta$ исходим из основной гипотезы предлагаемого приближенного метода: приращение сдвигающих сил ζ является постоянным вдоль оболочки и зависит только от координаты s. При этом предположим, что оболочка имеет достаточную длину для того, чтобы возможно было отказаться от влияния продольных изгибающих моментов и не вполне удовлетворенных граничных условий у диафрагм.

Из сказанного следует, что и $\Delta\zeta$ окажется функцией только от координаты s, насколько найденное в начальной задаче $\zeta_o=const$.

Так как в эпюре $\zeta(s)$ вследствие наличия стрингеров в углах поперечного сечения получается резкий скачок, то дополнительная эпюра $\Delta\zeta(s)$ выбирается в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\zeta(s)=a_I+\alpha\sum_{2,4,6,\dots}a_n\cos\frac{n\pi s}{s_0}+\\
&+(1-\alpha)\sum_{2,4,6,\dots}a_n\cos\frac{n\pi b}{s_0} \qquad \begin{pmatrix}0\leqslant s\leqslant b\\ \text{и } s_0-b\leqslant s\leqslant s_0\end{pmatrix}\\
&\Delta\zeta(s)=a_{II}+\sum_{2,4,6,\dots}a_n\cos\frac{n\pi s}{s_0}. \qquad (b\leqslant s\leqslant s_0-b)
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Согласно рис. 2 индексы I и II обозначают места непосредственной близости к стрингерам, а $\alpha=\delta_2/\delta_1$.

В случае отсутствия стрингеров нужно в выражениях (7) положить $a_I=a_{II}=a_0$ и при $\delta=const$ взять $\alpha=1$.

Добавление к эпюре ζ_0 дополнительной эпюры $\Delta\zeta(s)$ очевидно вызывает также изменение внутренних сил.

1) Так как приращение сдвигающих сил

$$\Delta S=\left(x-\frac{L}{2}\right)\Delta\zeta, \tag{8}$$

то окончательное значение сдвигающих сил выражается в следующем виде:

$$S(s,x)=\left(x-\frac{L}{2}\right)[\zeta_0+\Delta\zeta(s)]. \tag{9}$$

2) Из условия равновесия элемента dxds оболочки (рис. 1) получим

$$\frac{\partial S}{\partial s}+\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

или

$$\frac{\partial(\Delta S)}{\partial s}+\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x}=0.$$

Учитывая граничные условия у диафрагм ($\Delta T=0$), получим после интегрирования:

$$\Delta T(s,x)=\frac{x}{2}\,(L-x)\,\frac{\partial(\Delta\zeta)}{\partial s}. \tag{10}$$

Введя обозначение $\Delta t(s)=\partial(\Delta\zeta)/\partial s$ и имея в виду, что в начальной задаче $T_0=0$, можно окончательно написать:

$$T(s,x)=\frac{x}{2}\,(L-x)\,\Delta t(s) \tag{11}$$

или

$$T(s,x)=\frac{4x}{L^2}\,(L-x)\max T(s). \tag{11'}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}\Delta t(s)&=-a\frac{\pi}{s_0}\sum_{2,4,6,\ldots} na_n\sin\frac{n\pi s}{s_0} &&\begin{matrix}(0\leqslant s\leqslant b\ \text{и}\\ s_0-b\leqslant s\leqslant s_0)\end{matrix}\\ \Delta t(s)&=-\frac{\pi}{s_0}\sum_{2,4,6,\ldots} na_n\sin\frac{n\pi s}{s_0}. &&(b\leqslant s\leqslant s_0-b)\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

3) Из рис. 4 явствует условие равновесия элемента верхнего стрингера:

$$\frac{\partial N_A}{\partial x}+S_{II}-S_I=0$$

или переходя на приращения

$$\frac{\partial(\Delta N_A)}{\partial x}+\Delta S_{II}-\Delta S_I=0$$

и

$$\frac{\partial^2(\Delta N_A)}{\partial x^2}=\Delta\zeta_I-\Delta\zeta_{II}. \qquad (13)$$

Так как $N_o=0$, получим после интегрирования

$$N_A(x)=-N_B(x)=\Delta N_A(x)=$$

$$=\frac{x}{2}(L-x)\,(\Delta\zeta_{II}-\Delta\zeta_I). \qquad (14)$$

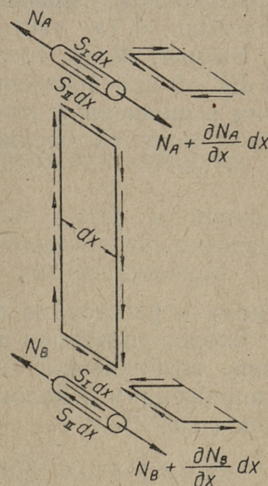


Рис. 4.

4) Вследствие симметрии дополнительная эпюра $\Delta\zeta_n$ не дает проекции на ось Z. В этом случае изменение поперечнего изгибающего момента рассчитываем по приведенной на рис. 3, *в* схеме. Приравнивая $a_n=1$, получим изгибающий момент в углах поперечного сечения

$$\max M_n=\frac{b}{2}\int_b^{s_0-b}\Delta\zeta_n(s)\,ds. \qquad (15)$$

В соответствии со сделанным допущением $M(s)$ не зависит от x и, следовательно,

$$M(s) = M_o(s) + \sum_{2,4,6,\ldots} a_n M_n(s). \tag{16}$$

г) УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ И НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

При выборе дополнительной функции $\Delta\zeta(s)$ необходимо удовлетворить условиям равновесия. С другой стороны, условия равновесия и геометрической непрерывности дают возможность элиминировать из разложенной в ряд функции $\Delta\zeta(s)$ часть параметров a_n.

Выбрав $\Delta\zeta(s)$, согласно формуле (7), условия $\Sigma Y=0$ и $\Sigma Z=0$ при поперечном сечении с двумя осями симметрии выполнены *a priori*. Условие равенства нулю крутящего момента выражается следующим образом:

$$-\int_0^{s_0} \varrho \Delta\zeta(s)\,ds = 0, \tag{17}$$

где ϱ — расстояние $\Delta\zeta(s)$ от центра кручения.

Второе уравнение получается из условия, что напряжения, возникающие в стрингере A, должны равняться напряжениям в волокнах I и II соответствующих пластинок (рис. 2), т. е.

$$\frac{\Delta N_A}{F_A} = \frac{\Delta T_I}{\delta_2} = \frac{\Delta T_{II}}{\delta_1}$$

или, используя выражения (11) и (13):

$$\frac{1}{F_A}(\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_I) = \frac{\Delta t_I}{\delta_2} = \frac{\Delta t_{II}}{\delta_1}, \tag{18}$$

где F_A — площадь поперечного сечения стрингера.

Решив совместно уравнения (17) и (18), можем исключить из выражения $\Delta\zeta(s)$ два параметра, например:

$$a_I = \frac{\alpha-1}{2} \sum_{2,4,6,\ldots} a_n \cos\frac{n\pi b}{s_0} + \left(\frac{1}{H} - \frac{\alpha}{B}\right)\frac{s_0}{\pi} \sum_{2,4,6,\ldots} \frac{a_n}{n} \sin\frac{n\pi b}{s_0} +$$

$$+\frac{F_A}{2\delta_1}\frac{\pi}{s_0}\sum_{2,4,6,\dots} na_n \sin\frac{n\pi b}{s_0}, \qquad (19)$$

$$a_{II}=\frac{\alpha-1}{2}\sum_{2,4,6,\dots} a_n \cos\frac{n\pi b}{s_0}+\left(\frac{1}{H}-\frac{\alpha}{B}\right)\frac{s_0}{\pi}\sum_{2,4,6,\dots}\frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi b}{s_0}-$$

$$-\frac{F_A}{2\delta_1}\frac{\pi}{s_0}\sum_{2,4,6,\dots} na_n \sin\frac{n\pi b}{s_0}. \qquad (20)$$

Для определения оставшихся $n/2$ параметров надо использовать условие минимума потенциальной энергии внутренних сил

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}=0. \qquad (21)$$

д) УСЛОВИЯ МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Используя формулы (9), (11), (14), (16) и принимая $E=2{,}5G$, условия минимума потенциальной энергии можно выразить для вариации $\Delta\zeta_k$ в следующем виде:

$$\frac{6L}{(\alpha\delta_1)^3}\left[\int_0^b\left(M_0+\sum_{2,4,6,\dots}a_nM_n'\right)M_k'ds+\alpha^3\int_b^{s_0/2}\left(M_0+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{2,4,6,\dots}a_nM_n''\right)M_k'ds\right]+\frac{5}{48}\frac{L^3}{\alpha\delta_1}\left[\int_0^b\left(\zeta_0+\sum_{2,4,6,\dots}a_n\Delta\zeta_n'\right)\Delta\zeta_k'ds+\right.$$

$$\left.+\alpha\int_b^{s_0/2}\left(\zeta_0+\sum_{2,4,6,\dots}a_n\Delta\zeta_n'\right)\Delta\zeta_k'ds\right]+\frac{L^5}{240\,\alpha\delta_1}\left[\int_0^b\sum_{2,4,6,\dots}a_n\Delta t'_n\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,\Delta t'_k ds+\alpha\int_b^{s_0/2}\sum_{2,4,6,\dots}a_n\Delta t_n'\cdot\Delta t'_k ds\right]+\frac{L^5}{240\,F_A}\sum_{2,4,6,\dots}(\Delta\zeta_n{}'_{II}-$$

$$-\Delta\zeta_n{}'_I)(\Delta\zeta_k{}'_{II}-\Delta\zeta_k{}'k'_I)=0, \qquad (22)$$

где M_n' является линейной комбинацией из M_{II} и M_n и т. д.

Здесь интегралы с моментами вычисляются известными формулами Мора, а слагаемые с продольными силами — численно (формулой парабол). Слагаемые со сдвигающими силами можно пренебречь вследствие их ничтожного влияния на результаты вычислений. Из (22) получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных параметров a_n.

е) ПРИМЕР

Проведем вычисления для призматической оболочки, представленной на рис. 2 в случае следующих числовых данных[1]:

$$H=120\ см;\ B=70\ см;\ L=10{,}0\ м;\ s_0=190\ см;$$
$$\delta_1=1{,}0\ см;\ \delta_2=1{,}6\ см;\ \alpha=1{,}6;\ F_A=F_B=100\ см^2.$$

Оболочка нагружена поперечной обратно-симметричной нагрузкой $q=50\ кг/м$, действующей в плоскостях вертикальных пластинок.

Внутренние силы в оболочке с неизменяемым контуром

Внешний погонный крутящий момент будет согласно правилу знаков

$$m=-qB=-0{,}5\cdot 70=-35\ кгсм/см.$$

Теперь по (3)

$$\zeta_0=-\left(-\frac{35}{2\cdot 120\cdot 70}\right)=0{,}00208\ кг/см^2.$$

По формулам (4) и (5)

$$T_0=N_0=0.$$

Так как $\gamma=1$, то наибольший поперечный изгибающий момент появляется в углах поперечного сечения. Согласно формуле (6)

$$\max M_{0A}=0{,}5\cdot 35(-0{,}50+0{,}00208\cdot 120)=$$
$$=-4{,}375\ кгсм/см.$$

$M_0(s)$ и $\zeta_0(s)$ приведены в таблице 1 и на рис. 5.

---

[1] Данные (за исключением стрингеров) заимствованы из книги В. З. Власова «Тонкостенные упругие стержни», 1940, стр. 149.

Дополнительная эпюра $\Delta\zeta(s)$

Если ограничиться четырьмя параметрами ($n=4$), то на основании (7) получим

$$\begin{cases} \Delta\zeta(s) = a_I + 1{,}6\left(a_2 \cos\frac{2\pi s}{s_0} + a_4 \cos\frac{4\pi s}{s_0}\right) - \\ \qquad - 0{,}6(a_2 \cos 66{,}4^0 - a_4 \cos 47{,}2^0) & (0 \leqslant s \leqslant b \text{ и } s_0 - b \leqslant s \leqslant s_0) \\ \Delta\zeta(s) = a_{II} + a_2 \cos\frac{2\pi s}{s_0} + a_4 \cos\frac{4\pi s}{s_0} & (s_0 - b \leqslant s \leqslant s_0) \end{cases}$$

Дополнительные условия (19) и (20) дают

$$a_I = 0{,}628a_2 + 1{,}097a_4$$
$$a_{II} = -1{,}188a_2 - 1{,}823a_4.$$

Потенциальная энергия и действительные внутренние силы

Найденные параметры a_I и a_{II} позволяют выразить внутренние силы в следующем виде:

$$M = M_0 + a_2(M_2 - 1{,}188M_{II}) + a_4\ (M_4 - 1{,}823M_{II})$$
$$\zeta\ = \zeta_0 + a_2(\Delta\zeta_2 + 0{,}628\,\Delta\zeta_I) + a_4\ (\Delta\zeta_4 + 1{,}097\,\Delta\zeta_I)$$
$$\zeta^* = \zeta_0 + a_2(\Delta\zeta_2 - 1{,}188\,\Delta\zeta_{II}) + a_4\ (\Delta\zeta_4 - 1{,}823\,\Delta\zeta_{II})$$
$$\max T = a_2 \max \Delta T_2 + a_4 \max \Delta T_4$$
$$\max N_A = -\max N_B = 0{,}125L^2(\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_I),$$

откуда получаем встречающиеся в выражении (22) производные

$$\partial M/\partial a_2 = M_2 - 1{,}188M_{II};\quad \partial\zeta/\partial a_4 = \Delta\zeta_4 + 1{,}097\,\Delta\zeta_I \text{ и т. д.}$$

В таблице 1 собраны все необходимые для вычислений величины и проведены некоторые промежуточные вычисления.

Если пренебречь влиянием сдвигающих сил, то получим из (22) систему линейных уравнений для определения a_2 и a_4:

$$\begin{cases} 7\,970a_2 + 9\,230a_4 + 7{,}82 = 0 \\ 9\,230a_2 + 15\,570a_4 + 9{,}46 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$a_2 = -0{,}000885$$
$$a_4 = -0{,}0000827.$$

Таблица 1.

Усилия \ Сечение	0	1	2г	2в	3	4	5	6
M_0	0	$-2{,}187$	$-4{,}375$	$-4{,}375$	$-3{,}281$	$-2{,}187$	$-1{,}094$	0
ζ_0	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208
$\Delta\zeta_I$	1	1	1	—	—	—	—	—
$\Delta\zeta_{II}$	—	—	—	1	1	1	1	1
$\Delta\zeta_2$	1,360	1,100	0,400	0,400	$-0{,}083$	$-0{,}546$	$-0{,}881$	$-1{,}0$
$\Delta\zeta_4$	2,01	1,047	$-0{,}678$	$-0{,}678$	$-0{,}986$	$-0{,}400$	0,556	1,0
M_{II}	0	1050	2100	2100	1575	1050	525	0
M_2	0	-485	-970	-970	$-727{,}5$	-485	$-242{,}5$	0
M_4	0	-192	-384	-384	-288	-192	-96	0
$-1{,}188\, M_{II}$	0	-1247	-2494	-2494	$-1870{,}5$	-1247	$-623{,}5$	0
$-1{,}823\, M_{II}$	0	-1914	-3828	-3828	-2871	-1914	-957	0
$8/L^2 \max \Delta T_2$	0	$-0{,}0290$	$-0{,}0485$	$-0{,}0303$	$-0{,}0330$	$-0{,}0277$	$-0{,}0156$	0
$8/L^2 \max \Delta T_4$	0	$-0{,}0970$	$-0{,}0770$	$-0{,}0481$	0,0109	0,0605	0,0554	0
$\partial\zeta/\partial a_2$	1,988	1,728	1,028	$-0{,}788$	$-1{,}271$	$-1{,}734$	$-2{,}069$	$-2{,}188$
$\partial\zeta/\partial a_4$	3,107	2,144	0,419	$-2{,}501$	$-2{,}810$	$-2{,}223$	$-1{,}267$	$-0{,}823$
$\partial M/\partial a_2$	0	-1732	-3464	-3464	-2598	-1732	-866	0
$\partial M/\partial a_4$	0	-2106	-4212	-4212	-3159	-2106	-1053	0
$8/L^2 \cdot \partial(\max T)/\partial a_2$	0	$-0{,}0290$	$-0{,}0485$	$-0{,}0303$	$-0{,}0330$	$-0{,}0277$	$-0{,}0156$	0
$8/L^2 \cdot \partial(\max T)/\partial a_4$	0	$-0{,}0970$	$-0{,}0770$	$-0{,}0481$	0,0109	0,0605	0,0554	0

Таблица 2.

Усилия \ Сечение	0	1	2г I	2в II	3	4	5	6
M_0	0	−2,187	−4,375	−4,375	−3,281	−2,187	−1,094	0
$\partial M/\partial a_2 \cdot a_2$	0	1,534	3,068	3,068	2,301	1,534	0,767	0
$\partial M/\partial a_4 \cdot a_4$	0	0,175	0,349	0,349	0,262	0,175	0,087	0
$M(s)$	0	−0,479	−0,958	−0,958	−0,719	−0,479	−0,240	0
ζ_0	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208	0,00208
$\partial\zeta/\partial a_2 \cdot a_2$	−0,00176	−0,00153	−0,00091	0,00070	0,00113	0,00154	0,00183	0,00194
$\partial\zeta/\partial a_4 \cdot a_4$	−0,00026	−0,00018	−0,00003	0,00022	0,00023	0,00018	0,00010	0,00007
$\zeta(s)$	0,00006	0,00037	0,00114	0,00300	0,00344	0,00380	0,00401	0,00409
$max\ T_0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\partial(max\ T)/\partial a_2 \cdot a_2$	0	3,21	5,37	3,36	3,66	3,07	1,728	0
$\partial(max\ T)/\partial a_4 \cdot a_4$	0	1,00	0,795	0,498	−0,113	−0,625	−0,573	0
$max\ T(s)$	0	4,21	6,17	3,86	3,55	2,44	1,155	0

В табл. 2 представлено определение действительных внутренних сил посредством суммирования. Окончательные эпюры представлены на рис. 5.

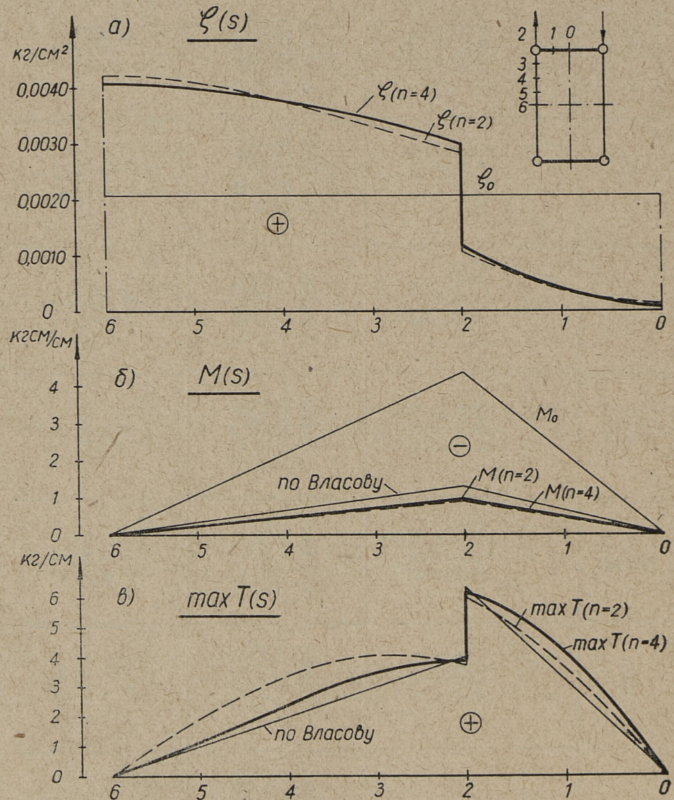


Рис. 5.

Усилия в стрингерах согласно формуле (14)

$$\max N_A = -\max N_B = 0{,}125\, L^2 (\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_I) =$$
$$= 0{,}125 \cdot 10^6 (0{,}00300 - 0{,}00114) = 232 \text{ кг}.$$

Учет влияния сдвигающих сил в данном случае уменьшит величины T и N примерно на 1% и увеличит M на 5%.

ж) ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

На рис. 5 приводятся результаты, полученные по теории В. З. Власова [4]. Из сравнений обоих решений следует, что в разложении $\Delta\zeta$ достаточно ограничиться четырьмя параметрами ($n=4$). В этом случае надо составить только два условия минимума потенциальной энергии. Ход вычислений получается достаточно коротким.

Предлагаемый приближенный метод уточнения значений внутренних сил в принципе применим и для расчета замкнутых призматических оболочек с любой формой поперечного сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Х. Х. Лауль.* Применение метода Кастильяно-Ритца к расчету длинных цилиндрических оболочек. Труды Таллинского политехнического института, А № 33, 1949.
2. *Х. Х. Лауль.* Расчет длинных цилиндрических оболочек при антисимметрической нагрузке по методу Кастильяно-Ритца. Труды ТПИ, А № 35, 1951.
3. *Х. Х. Лауль.* Применение метода Кастильяно-Ритца для расчета длинных цилиндрических оболочек со стрингерами. Труды ТПИ, А № 39, 1952.
4. *В. З. Власов.* Строительная механика тонкостенных пространственных систем. 1949.

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ БОЛЬШИХ ВНЕШНИХ БОКОВЫХ ДАВЛЕНИЯХ

Оллик К. К.

В настоящей статье приводятся результаты по исследованию устойчивости равновесия упругой цилиндрической оболочки вращения средней длины при больших значениях внешнего бокового давления, т. е. при переходе от начального осесимметричного состояния в выпученное состояние.

Определение неосесимметричных форм равновесия проводится по методике, предложенной Н. А. Алумяэ [1].

Пусть будет Π_0 — потенциальная энергия начального осесимметричного состояния и $\Pi_0+\Pi$ — потенциальная энергия неосесимметричного состояния, причем Π_0 выражает изменение потенциальной энергии при переходе от первой формы равновесия ко второй. Зная зависимость потенциальной энергии от нагрузки, можем получить некоторое представление о поведении оболочки при больших нагрузках.

Предположим, что оболочка на торцах соединена диафрагмами, которые нежесткие при изгибе из своей плоскости и жесткие в своей плоскости.

Пусть далее будет R — радиус срединной поверхности, L — длина, t — толщина стены оболочки, p — внешнее давление, E — модуль упругости, ξ, Θ — внутренние координаты срединной поверхности, причем линии $\Theta=$конст. образующие оболочки.

На основании формулы (4. 19) статьи [1] изменение потенциальной энергии можно представить в виде

$$\Pi=\frac{1}{2}\,ER^2t\int\limits_0^{L/R}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Theta^2}\right)^2+\lambda^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\Theta^2}\right)^2-q\left(\frac{\partial w}{\partial\Theta}\right)^2\right\}d\xi\, d\Theta, \qquad (1)$$

где f — функция напряжения, w —функция прогиба,

$$\lambda^2 = \frac{t^2}{12(1-\nu^2)\,R^2} \text{ и } q = \frac{Rp}{tE}.$$

При состоянии равновесия

$$\delta\Pi = 0, \tag{2}$$

причем в функционале (1) для сравнения можно допускать функции w, периодические относительно Θ, и которые при значениях $\xi = 0$, $\xi = \frac{L}{R}$ удовлетворяют краевому условию

$$w = 0 \tag{3}$$

и функции f, периодические относительно Θ. Функции сравнения w и f должны удовлетворять дифференциальному уравнению.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial\Theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\Theta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\Theta}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

В первом приближении ищем w в виде

$$w = w_0(\xi) + w_1(\xi)\cos s\Theta, \tag{5}$$

где s — целое число. Из уравнения (4) выясняется, что теперь функцию f нужно искать в виде

$$f = f_0(\xi) + f_1(\xi)\cos s\Theta + f_2(\xi)\cos 2s\,\Theta. \tag{6}$$

Однако, если функция прогиба w задается в виде (5), то логично искать и функцию напряжения f в простом виде

$$f = f_0(\xi) + f_1(\xi)\cos s\Theta. \tag{7}$$

Тогда получим для изменения потенциальной энергии выражение

$$\Pi = \frac{\pi}{2} ER^2 t \int_0^{L/R} \left\{ s^4 f_1^2 + \lambda^2 s^4 w_1^2 - q s^2 w_1^2 \right\} d\xi, \tag{8}$$

где f_1 удовлетворяет условию

$$s^4 f_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - s^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} w_1 = 0, \tag{9}$$

причем в соответствии с форм. (4.24) статьи [1]

$$w_0 = \frac{1}{4} s^2 w_1^2. \tag{10}$$

Введем новые переменные

$$s^2 = \lambda^{-0,5} p_1^2,\ f_1 = \lambda^{1,5} \varphi_1,\ w_0 = \lambda^{0,5} \psi_0,\ w_1 = \lambda^{0,5} \psi_1,\ q = \lambda^{1,5} \sigma. \tag{11}$$

В таком случае

$$\Pi = \frac{\pi}{2} E R^2 t \lambda^2 \int_0^{L/R} \left\{ p_1^4 \varphi_1 + p_1^4 \psi_1^2 - \sigma p_1^2 \psi_1^2 \right\} \mathrm{d}\xi, \tag{12}$$

где

$$p_1^4 \varphi_1 + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - p_1^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \xi^2} \psi_1 = 0, \tag{13}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{4} p_1^2 \psi_1^2.$$

Учитывая это, получим

$$\Pi = \frac{\pi}{2} E R^2 t \lambda^2 \int_0^{L/R} \left\{ \left[\frac{1}{p_1^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} p_1^2 \psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1^2}{\partial \xi^2} \right]^2 + p_1^4 \psi_1^2 - \right.$$
$$\left. - \sigma p_1^2 \psi_1^2 \right\} \mathrm{d}\xi. \tag{14}$$

Для того, чтобы устранить параметр $\frac{L}{R}$, введем еще раз новые переменные. Пусть будет

$$p_1^2 = r^2 \frac{\pi R}{L},\ \sigma = \tau \frac{\pi R}{L},\ \psi_1 = \chi \frac{L}{\pi R},\ \xi = \frac{L}{\pi R} \eta. \tag{15}$$

Тогда имеем выражение изменения потенциальной энергии в виде

$$\Pi=\frac{1}{2}ERtL\lambda^2\int\limits_0^\pi\left\{\left[\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}-\frac{1}{4}r^2\chi\,\frac{\partial^2\chi^2}{\partial\eta^2}\right]^2+(r^4-\tau r^2)\chi^2\right\}\mathrm{d}\eta. \qquad (16)$$

Положим

$$\chi=a_1\sin\eta+a_3\sin 3\eta, \qquad (17)$$

тогда после некоторых элементарных вычислений получим

$$\begin{aligned}\Pi=\frac{\pi^2}{4}ERtL\lambda^2\Big\{&\frac{1}{r^4}\,(a_1^2+81\,a_3^2)+(r^4-\tau r^2)\,(a_1^2+a_3^2)-\\&-\frac{1}{2}(a_1^4-12\,a_1^3a_3+100\,a_1^2a_3^2+81\,a_3^4)+\\&+\frac{r^4}{8}\,(a_1^6-13\,a_1^5a_3+105\,a_1^4a_3^2-138\,a_1^3a_3^3+\\&+345\,a_1^2a_3^4+81\,a_3^6)\Big\}.\end{aligned} \qquad (18)$$

Условие (2) вводится к уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial a_1}=&\frac{1}{r^4}+r^4-\tau r^2-a_1^2+9\,a_1a_3+50\,a_3^2+\\&+\frac{r^4}{16}\,(6a_1^4-65a_1^3a_3+420\,a_1^2a_3^2-414a_1a_3^3+690\,a_3^4)=0,\end{aligned} \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial a_3}=&\left(\frac{81}{r^4}+r^4-\tau r^2\right)a_3+3a_1^3-50a_1^2a_3-81a_3^3+\\&+\frac{r^4}{16}\,(-13a_1^5+210a_1^4a_3-414a_1^3a_3^2+1380a_1^2a_3^3+\\&+486a_3^5)=0,\end{aligned} \qquad (20)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi}{\partial(r^4)}=&\left(-\frac{1}{r^4}+r^4-\frac{1}{2}\tau r^2\right)a_1^2+\left(-\frac{81}{r^4}+r^4-\frac{1}{2}\tau r^2\right)a_3^2+\\&+\frac{r^4}{8}\,(a_1^6-13a_1^5a_3+105a_1^4a_3^2-138a_1^3a_3^3+\\&+345a_1^2a_3^4+81a_3^6)=0,\end{aligned} \qquad (21)$$

где $\tilde{\Pi}$ дано соотношением

$$\Pi = \frac{\pi^2}{4} ERtL\lambda^2 \tilde{\Pi}. \tag{22}$$

Решение систем уравнений определяет

$$a_1 = a_1(\tau), \quad a_3 = a_3(\tau), \quad r^4 = r^4(\tau),$$

после чего можно вычислить $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(\tau)$, а, следовательно, также и $\Pi = \Pi(\tau)$.

Для решения системы уравнений из уравнений (20) и (21) исключили при помощи уравнения (19) параметр нагрузки τ. Тогда получили уравнения

$$\begin{aligned}(r^4)^2\{16a_1^2 - 2a_1^6 + 13a_1^5a_3 + (16 - 6a_1^4)a_3^2 - 73a_1^3a_3^3 + \\ + 270a_1^2a_3^4 + 414a_1a_3^5 - 366a_3^6\} + r^4(16a_1^4 - 144a_1^3a_3 + \\ + 816a_1^2a_3^2 - 144a_1a_3^3 + 800a_3^4) - 48a_1^2 - 2608a_3^2 = 0\end{aligned} \tag{23}$$

и

$$\begin{aligned}(r^4)^2(-13a_1^5 + 204a_1^4a_3 - 349a_1^3a_3^2 + 960a_1^2a_3^3 + 414a_1a_3^4 - \\ - 204a_3^5) + r^4(48a_1^3 - 784a_1^2a_3 - 144a_1a_3^2 - 496a_3^3) + \\ + 1280a_3 = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

При помощи этих уравнений были найдены зависимости

$$a_3 = a_3(a_1), \quad r^4 = r^4(a_1)$$

в табличном виде с интервалом 0,2 в области $0 < a_1 \leqslant 1,0$ и с интервалом 0,1 в области $1,0 < a_1 \leqslant 1,9$. Было обнаружено, что при значении $a_1 = 2$ уравнения (23) и (24) не имеют совместного вещественного решения. Далее была найдена при помощи уравнения (19) зависимость $\tau = \tau(a_1)$ и при помощи уравнения (18) зависимость $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(a_1)$.

Результаты представлены на рис. 1 как функции параметра нагрузки

$$\tau = \frac{[12(1 - \nu^2)]^{3/4}}{\pi E} \cdot \frac{L}{t}\left(\frac{R}{t}\right)^{3/2} p. \tag{25}$$

Решение задачи показывает, что у упругой цилиндрической оболочки вращения средней длины при больших значениях бокового давления:

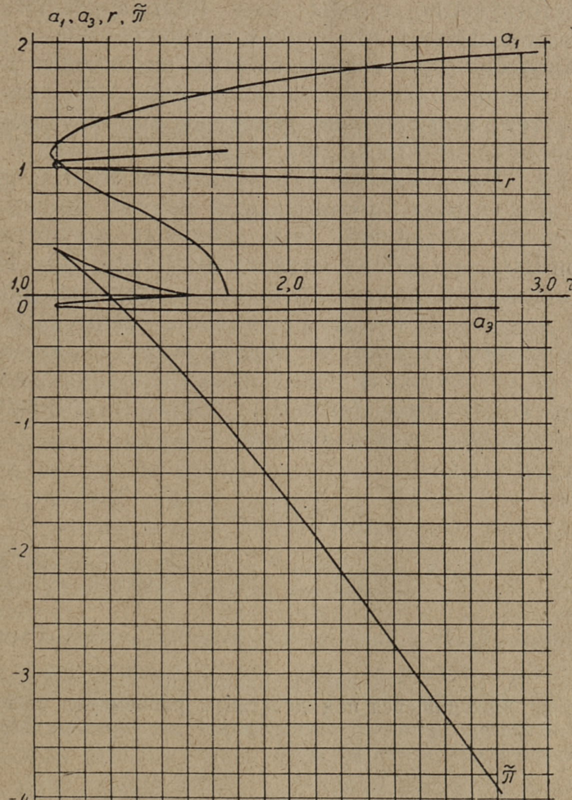


Рис. 1.

1) начиная с нагрузки

$$p > 0{,}74\, p_{кр} = 0{,}74 \cdot 0{,}85 \frac{E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \cdot \frac{t}{L}\left(\frac{t}{R}\right)^{3/2}$$

потенциальная энергия выпученного состояния равновесия меньше потенциальной энергии первоначального осесимметричного состояния,

2) по своему характеру полученная диаграмма близка к диаграмме изменения потенциальной энергии при осевом сжатии этой же оболочки.

Соответствующие опыты над цилиндрическими оболочками показывают, что потеря первоначального состояния равновесия при осевом сжатии происходит при нагрузках значительно меньших критической нагрузки; вместе с тем, выпучивание оболочки при боковом давлении происходит только при нагрузках близких к критической [2]. Расхождение в результатах опытов при подобных диаграммах потенциальной энергии можно объяснить отчасти различием относительных энергетических барьеров $П/П_0$ при обоих случаях нагрузки [3]. Так как энергетический барьер тонкостенных круговых оболочек средней длины при боковом давлении значительно выше, чем при осевом сжатии, то вполне естественно ожидать, что потеря устойчивости начального напряженного состояния происходит при боковом давлении относительно раньше, чем при осевом сжатии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н. А. Об определении состояний равновесия круговой оболочки при осесимметричной нагрузке. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.
2. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1946.
3. Ряямет Р. К. Устойчивость равновесия упругой конической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления. Автореферат диссертации. Таллинский политехнический институт. 1954.

РАСЧЕТ ГИБКИХ ПЛАСТИН ПРИ РАБОТЕ ИХ НА СДВИГ

Ааре И. И.

1. Постановка задачи. В строительных конструкциях, судостроении, авиастроении и других отраслях техники встречаются тонкие пластины, нагруженные по контуру сдвигающими усилиями, как например, опорная панель сплошной балки и пр.

Представляет значительный теоретический и практический интерес изучение распределения напряжений в таких пластинах при разных краевых условиях после выпучивания стенки. Такая задача и ставится в настоящей статье. Отметим, что задача о равновесии гибких пластин, находящихся под действием сдвигающих усилий, рассматривалась в исследованиях Х. Вагнера [4], А. Ю. Ромашевского [1], В. М. Стригунова [2], А. С. Вольмира [3] и др. Однако они не дают исчерпывающего ответа на поставленную выше задачу, так как в этих исследованиях либо проблема решается в первом приближении, либо полученное решение соответствует состоянию пластины при весьма больших нагрузках [4].

Как показывает опыт, уточнение решения задачи требует чрезвычайно громоздкой и сложной расчетно-вычислительной работы. Поэтому в настоящей статье подробно рассмотрено определение напряженного состояния только квадратной пластины.

2. Общие уравнения и формулы для больших прогибов пластины. Состояние равновесия пластины в послекритической стадии можно определить решением уравнений Кармана:

$$\frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2 F = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{2.1}$$

$$D\nabla^2\nabla^2 w = t\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \tag{2.2}$$

где $F(x, y)$ — функция напряжения, $w(x, y)$ — прогиб балки, удовлетворяющие определенным краевым условиям.

Функция напряжения F определяет цепные напряжения

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \tag{2.3}$$

а функция прогиба w-max — изгибные напряжения

$$\begin{aligned}
\sigma_x' &= \pm \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
\sigma_y' &= \pm \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
\tau_{xy}' &= \pm \frac{Et}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Компоненты деформации срединной поверхности пластины выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = 2 \frac{(1+\mu)}{E} \tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Задача может быть решена и в перемещениях. Приближенное решение можно построить или: 1) исходя из условия минимума потенциальной энергии, применяя метод Ритца, или 2) интегрируя уравнения равновесия вариационным методом Галеркина.

Надо отметить, что при решении задачи в перемещениях вариационным методом Б. Г. Галеркина, третье уравнение равновесия надо выписать в обобщенной форме

$$\begin{aligned}
D \nabla^2 \nabla^2 w - t \Big[& \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
& + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \Big] = 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

так как при приближенном решении задачи в перемещениях уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}=0, \tag{2.7}$$

вообще говоря, точно не удовлетворяются. Если же представить уравнение (2.6) в своем обычном виде, то метод потенциальной энергии и метод Галеркина приводят в случае решения задачи в перемещениях к различным результатам.

3. Решение задачи. В настоящей работе рассматриваются следующие частные виды краевых закреплений (рис. 1):

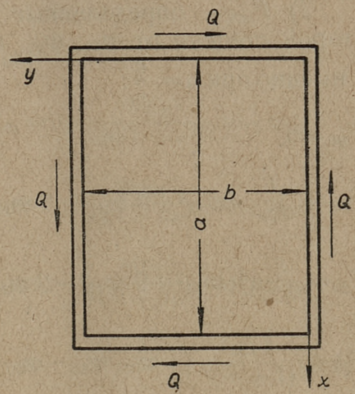


Рис. 1.

1) жесткость ребер, окаймляющих пластину, на изгиб бесконечно велика, а на сжатие — бесконечно мала;

2) жесткость ребер на изгиб бесконечно мала, на сжатие — бесконечно велика;

3) жесткость ребер на изгиб и на сжатие бесконечно большая.

а. Исследование работы свободно опертой прямоугольной пластины при условиях, когда жесткость ребер на изгиб бесконечно большая, жесткость на сжатие — ноль.

Выбираем функцию прогиба в виде

$$w=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{3.1}$$

($m+n$ — четное число)

Подставив (3.1) в уравнение (2.1), получаем:

$$\frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2F=\sum_m\sum_n w_{mn}{}^2\frac{m^2n^2\pi^4}{2a^2b^2}\left(\cos\frac{2m\pi x}{a}+\cos\frac{2n\pi y}{b}\right)+$$

$$+\sum_m\sum_n\sum_p\sum_q w_{mn}w_{pq}\frac{mq\pi^4}{a^2b^2}\left(np\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{q\pi y}{b}-\right.$$

$$\left.-mq\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{q\pi y}{b}\right). \tag{3.2}$$

Частное решение уравнения (3.2), удовлетворяющее граничным условиям $J_{реб.}=\infty$, $F_{реб.}=0$, берем в виде

$$F=-qxy+\sum_{m=0}^{6}\ \sum_{n=0}^{6}F_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{3.3}$$

где 1) q — среднее касательное напряжение,

2) F_{mn} — определенные алгебраические полиномы второй степени от w_{11}, w_{22}, w_{13}, w_{31}, w_{33} а именно при $\alpha=\frac{a}{b}$:

$F_{00}=0$,

$$F_{02}=\frac{E}{32\alpha^2}(w_{11}{}^2+9\,w_{31}{}^2-2\,w_{11}\,w_{13}-18\,w_{31}\,w_{33}),$$

$$F_{20}=\frac{E}{32}\alpha^2(w_{11}{}^2+9\,w_{13}{}^2-2\,w_{11}\,w_{31}-18\,w_{13}\,w_{33}),$$

$$F_{11}=\frac{4\,E\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}(-w_{22}\,w_{13}-w_{22}\,w_{31}),$$

$$F_{22}=\frac{E\alpha^2}{32\,(1+\alpha^2)^2}(-32\,w_{13}\,w_{31}+8\,w_{11}\,w_{31}+8\,w_{11}\,w_{13}),$$

$$F_{04}=\frac{E}{32\,\alpha^2}\left(w_{22}{}^2+\frac{1}{2}\,w_{11}w_{13}+\frac{9}{2}\,w_{31}\,w_{33}\right),$$

$$F_{40}=\frac{E}{32}\alpha^2\left(w_{22}{}^2+\frac{1}{2}\,w_{11}\,w_{31}+\frac{9}{2}\,w_{13}\,w_{33}\right),$$

$$F_{13}=\frac{4\,E\alpha^2}{(1+9\,\alpha^2)^2}(w_{11}\,w_{22}+4\,w_{22}\,w_{31}),$$

$$F_{31}=\frac{4\,E\alpha^2}{(9+\alpha^2)^2}(w_{11}\,w_{22}+4\,w_{22}\,w_{13}),$$

$$F_{06}=\frac{E}{32\,\alpha^2}\left(\frac{1}{9}\,w_{13}{}^2+w_{33}{}^2\right),$$

$$F_{60}=\frac{E}{32}\alpha^2\left(\frac{1}{9}\,w_{31}{}^2+w_{33}{}^2\right),$$

$$F_{15}=\frac{Ea^2}{(1+25\alpha^2)^2}\,(16\,w_{13}\,w_{22}+36\,w_{22}\,w_{33}),$$

$$F_{51}=\frac{E\alpha^2}{(25+\alpha^2)^2}\,(16\,w_{22}\,w_{31}+36\,w_{22}\,w_{33}),$$

$$F_{24}=\frac{E\alpha^2}{64\,(1+4\alpha^2)^2}\,(36\,w_{11}\,w_{33}+100\,w_{13}\,w_{31}-4\,w_{11}\,w_{13}),$$

$$F_{42}=\frac{E\alpha^2}{64\,(4+\alpha^2)^2}\,(36\,w_{11}\,w_{33}+100\,w_{13}\,w_{31}-4\,w_{11}\,w_{31}),$$

$$F_{33}=0, \qquad F_{66}=0,$$

$$F_{26}=\frac{144E\alpha^2}{64(1+9\alpha^2)^2}\,w_{13}\,w_{33}, \qquad F_{44}=-\frac{16\,E\alpha^2}{256(1+\alpha^2)^2}\,w_{13}\,w_{31},$$

$$F_{62}=\frac{144E\alpha^2}{64(9+\alpha^2)^2}\,w_{31}\,w_{33}, \qquad F_{46}=-\frac{36E\alpha^2}{64(4+9\alpha^2)^2}\,w_{13}\,w_{33},$$

$$F_{35}=-\frac{4E\alpha^2}{(9+25\alpha^2)^2}\,w_{22}\,w_{13}, \qquad F_{64}=-\frac{36E\alpha^2}{64(9+4\alpha^2)^2}\,w_{31}\,w_{33}.$$

$$F_{53}=-\frac{4E\alpha^2}{(25+9\alpha^2)^2}\,w_{22}\,w_{31}. \qquad (3.4)$$

Применяя метод Галеркина, определяем неизвестные параметры $w_{11}, \ldots w_{33}$ из уравнений

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b\left[D\nabla^2\nabla^2 w-t\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]\times$$

$$\times\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \qquad (3.5)$$

($m+n$ — четное)

Подставляя сюда $w\,(x,y)$ и $F\,(x,y)$ согласно (3.1) и (3.3) и производя интегрирование, получаем для квадратной пластины систему из пяти алгебраических уравнений третьей степени, приведенных в табл. 1.

Таблица 1.

$$f_{11}=\frac{w_{11}}{t},\quad f_{22}=\frac{w_{22}}{t},\; f_{13}=\frac{w_{13}}{t},\quad f_{31}=\frac{w_{31}}{t},\quad f_{33}=\frac{w_{33}}{t}$$

$$q^{\oplus}=\frac{qa_2}{Et^2}=\frac{Qa}{Et^3},\; a=b,\; \mu=0{,}3$$

	I_y	III_y	IV_y	V_y		II_y
	$0=$	$0=$	$0=$	$0=$		$0=$
f_{11}^3	−0,03125	0,015625	0,015625	—	$f_{11}f_{22}f_{13}$	−0,44500
$f_{11}^2f_{13}$	0,046875	−0,26625	−0,06250	0,14625	$f_{11}f_{22}f_{31}$	−0,44500
$f_{11}^2f_{31}$	0,046875	−0,06250	−0,26625	0,14625	$f_{22}f_{13}f_{31}$	−2,0000
$f_{11}^2f_{33}$	—	0,14625	0,14625	−0,10125	$f_{22}f_{13}f_{33}$	−1,55100
$f_{11}f_{13}f_{31}$	−0,1250	0,81250	0,81250	−1,40625	$f_{22}f_{31}f_{33}$	−1,55100
$f_{11}f_{13}f_{33}$	0,2925	—	1,40625	—	$f_{22}f_{11}^2$	−0,08000
$f_{11}f_{31}f_{33}$	0,2925	−1,40625	—	—	f_{22}^3	−0,5000
$f_{11}f_{22}^2$	−0,0800	−0,22250	−0,22250	—	$f_{22}f_{13}^2$	−1,73810
$f_{11}f_{13}^2$	−0,26625	—	−0,40625	—	$f_{22}f_{31}^2$	−1,73810
$f_{11}f_{31}^2$	−0,26625	0,40625	—	—	$f_{22}f_{33}^2$	−0,9585
$f_{11}f_{33}^2$	−0,10125	—	—	—	f_{11}	$0{,}0365q^{\oplus}$

$f_{13}f_{31}f_{33}$	$-1,40625$	—	—	—	f_{22}	$-1,46400$
$f_{13}f_{22}^2$	$-0,22250$	$-1,73812$	$-1,0000$	$-0,77550$	f_{13}	$-0,0657q^{\oplus}$
$f_{13}f_{31}^2$	$0,40625$	$-1,84375$	—	—	f_{31}	$-0,0657q^{\oplus}$
$f_{13}f_{33}^2$	—	$-5,41266$	—	—	f_{33}	$0,11828q^{\oplus}$
f_{13}^3	—	$-1,28125$	—	$1,26562$		
$f_{13}^2f_{31}$	$0,40625$	—	$-1,84375$	—		
$f_{13}^2f_{33}$	—	$3,79688$	—	$-5,41266$		
$f_{31}^2f_{33}$	—	—	$3,79688$	$-5,41266$		
f_{31}^3	—	—	$-1,28125$	$1,26562$		
$f_{31}f_{22}^2$	$-0,22250$	$-1,000$	$-1,73813$	$-0,77550$		
$f_{31}f_{33}^2$	—	—	$-5,41266$	—		
$f_{33}f_{22}^2$	—	$-0,77550$	$-0,77550$	$-0,95850$		
f_{33}^3	—	—	—	$-2,53125$		
f_{11}	$-0,09157$	—	—	—		
f_{22}	$0,0364q^{\oplus}$	$-0,0657q^{\oplus}$	$-0,0657q^{\oplus}$	$+0,11828q^{\oplus}$		
f_{13}	—	$-2,2898$	—	—		
f_{31}	—	—	$-2,2898$	—		
f_{33}	—	—	—	$-7,4175$		

Решая их методом последовательных приближений, получим зависимости между параметром нагрузки $q^{\oplus} = \frac{qa^2}{Et^2}$ и параметрами прогибов пластины $f_{11}, \ldots f_{33}$. Результаты решения представлены на рис. 2.

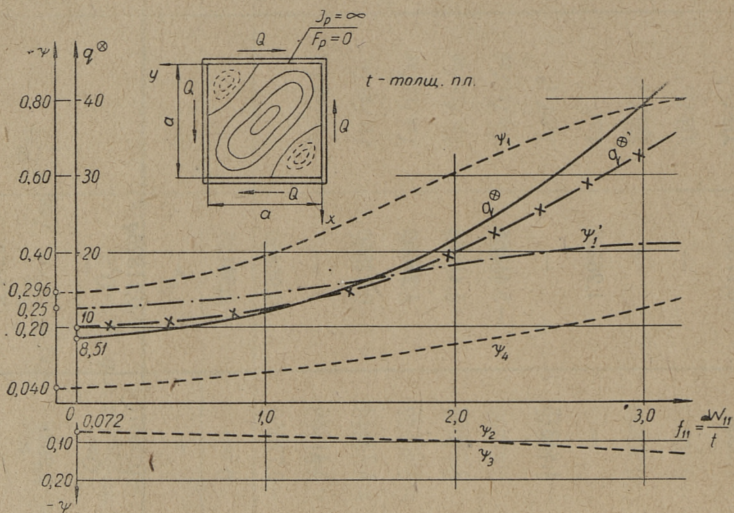


Рис. 2.

При критическом значении параметра нагрузки

$$q_{kp}^{\oplus} = \frac{q_{kp}a^2}{Et^2} = \pm 8{,}51, \tag{3.6}$$

имеем следующие отношения:

$$\psi_1 = \frac{w_{22}}{w_{11}} = +0{,}2955, \quad \psi_2 = \frac{w_{13}}{w_{11}} = -0{,}072,$$

$$\psi_3 = \frac{w_{31}}{w_{11}} = -0{,}072, \quad \psi_4 = \frac{w_{33}}{w_{11}} = +0{,}040. \tag{3.7}$$

Отметим, что решение задачи в первом приближении, т. е. при апроксимации прогиба в виде

$$w_{11} = w_{11} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} + w_{22} \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{a}, \tag{3.8}$$

получим

$$q_{kp}^{\oplus 1} = \frac{q'_{kp}a^2}{Et^2} = \pm 10{,}0,$$

$$\psi'_1 = \frac{w_{22}}{w_{11}} = 0{,}25. \qquad (3.9)$$

Необходимо отметить, что изгибные и цепные напряжения, полученные при решении задачи в первом приближении существенно отличаются от соответствующих напряжений, получаемых в случае более высокого приближения.

б. Исследование работы свободно опертой прямоугольной пластины при условиях, когда жесткость ребер на изгиб ноль, жесткость ребер на сжатие — бесконечно большая.

Апроксимируем функции прогиба срединной поверхности пластины в виде

$$w = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (3.10)$$

где $m+n$ — четное число.

Подставляя $w\ (x,\ y)$ в уравнение (2.1), апроксимируем правую часть этого уравнения в виде

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{p=1}\sum_{q=1} D_{pg} \sin\frac{p\pi x}{a} \sin\frac{q\pi y}{b}, \qquad (3.11)$$

где D_{pq} — квадратичная функция параметров w_{mn}.

Параметры D_{pq} определяются как частные производные некоторого функционала A:

$$D_{pq} = \frac{\partial A}{\partial w_{pq}}, \qquad (3.12)$$

где

$$A = \frac{\pi^2}{a^2 b^2}(-1{,}778 w_{11}^3 + 3{,}911 w_{11}^2 w_{13} + 3{,}911 w_{11}^2 w_{31} +$$

$$+ 3{,}200 w_{11}^2 w_{33} - 17{,}066 w_{11} w_{22}^2 - 26{,}057 w_{11} w_{13} -$$

$$- 11{,}804 w_{11} w_{13} w_{31} + 14{,}810 w_{11} w_{13} w_{33} - 26{,}057 w_{11} w_{31}^2 +$$

$$+14{,}810w_{11}w_{31}w_{33}-37{,}028w_{11}w_{33}{}^2-57{,}699\,w_{22}{}^2w_{13}-$$
$$-57{,}699w_{22}{}^2w_{31}-36{,}570w_{22}{}^2w_{33}-5{,}333w_{13}{}^3+$$
$$+42{,}514w_{13}{}^2w_{31}+11{,}732w_{13}{}^2w_{33}+42{,}514w_{13}w_{31}{}^2-$$
$$-344{,}889w_{13}w_{31}w_{33}-78{,}172w_{13}w_{33}{}^2-5{,}333w_{31}{}^3+$$
$$+11{,}732w_{31}{}^2w_{33}-78{,}168w_{31}w_{33}{}^2-16{,}000w_{33}{}^3). \quad (3.13)$$

Частное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничным условиям, берем в виде

$$F=\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=1}^{k}F_{pq}\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{q\pi y}{b}-q_{xy}, \quad (3.14)$$

где q — среднее касательное напряжение,

$$F_{pq}=\frac{ED_{pq}}{\left(\frac{p^2\pi^2}{a^2}+\frac{q^2\pi^2}{b^2}\right)^2}. \quad (3.15)$$

Для квадратной пластины коэффициенты F_{pq} приведены в табл. 2.

$(a=b)$ *Таблица 3.*

	$F_{11}\frac{\pi^2}{E}=$	$F_{13}\frac{\pi^2}{E}=$	$F_{31}\frac{\pi^2}{E}=$	$F_{33}\frac{\pi^2}{E}=$		$F_{22}\frac{\pi^2}{E}=$
$w_{11}{}^2$	−1,3335	0,0391	0,0391	0,00987	$w_{11}\,w_{22}$	−0,5333
$w_{22}{}^2$	−4,2665	−0,5770	−0,5770	−0,11287	$w_{22}\,w_{13}$	−1,8031
$w_{13}{}^2$	−6,5142	−0,1600	0,42514	0,036213	$w_{22}\,w_{31}$	−1,8031
$w_{31}{}^2$	−6,5142	0,4251	−0,1600	0,036213	$w_{22}\,w_{33}$	−1,1428
$w_{33}{}^2$	−9,2570	−0,7817	−0,7817	−0,14815		
$w_{11}\,w_{13}$	1,9558	−0,5330	−0,1180	0,0457		
$w_{11}\,w_{31}$	1,9558	−0,1180	−0,5330	0,0457		
$w_{11}\,w_{33}$	1,6000	0,14812	0,14812	−0,2286		
$w_{13}\,w_{31}$	−2,9510	0,8503	0,8503	−1,0645		
$w_{13}\,w_{33}$	3,7025	0,2346	−3,4489	−0,4825		
$w_{31}\,w_{33}$	3,7025	−3,4489	0,2346	−0,4825		

Применяя метод Галеркина, определим неизвестные параметры $\frac{w_{11}}{t}$, $\frac{w_{22}}{t}$, ... $\frac{w_{33}}{t}$, $q^{\oplus}$ из уравнения (2.2).

Полученные алгебраические уравнения третьей степени приведены в табл. 3.

На рис. 3 представлены результаты расчета. Тот же частный случай для сравнения решен и в первом приближении.

$\mu=0,3$ *Таблица 2.*

	I_y	III_y	IV_y	V_y		II_y
	0 =	0 =	0 =	0 =		0 =
f_{11}^3	−3,724	3,203	3,203	1,978	$f_{11}f_{22}f_{13}$	−31,704
$f_{11}^2 f_{13}$	9,609	−29,232	−11,851	8,360	$f_{11}f_{22}f_{31}$	−31,704
$f_{11}^2 f_{31}$	9,608	−11,851	−29,232	8,360	$f_{11}f_{22}f_{33}$	−1,482
$f_{11}^2 f_{33}$	5,935	8,360	8,361	−29,273	$f_{22}f_{13}f_{31}$	−99,323
$f_{11}f_{13}f_{31}$	−23,703	82,208	82,200	−120,242	$f_{22}f_{13}f_{33}$	−135,642
$f_{11}f_{13}f_{33}$	16,721	−4,954	−120,242	6,518	$f_{22}f_{31}f_{33}$	−135,642
$f_{11}f_{31}f_{33}$	16,721	−120,242	−4,954	6,248	$f_{11}^2 f_{22}$	−13,490
$f_{11}f_{22}^2$	— 13,490	−15,852	−15,852	−0,741	f_{22}^3	−71,747
$f_{11}f_{13}^2$	−29,232	35,231	41,100	−2,477	$f_{22}f_{13}^2$	−99,310
$f_{11}f_{31}^2$	−29,232	41,100	35,331	−2,477	$f_{22}f_{31}^2$	−99,310
$f_{11}f_{33}^2$	−29,273	3,259	3,124	53,577	$f_{22}f_{33}$	−147,817
$f_{13}f_{31}f_{33}$	−120,242	93,546	93,862	1,684	f_{11}	$3,60q^{\oplus}$
$f_{13}f_{22}^2$	−15,852	−99,310	−49,798	−67,821	f_{22}	−142,70
$f_{13}f_{31}^2$	41,100	−214,800	−65,196	46,931	f_{13}	$-6,40q^{\oplus}$
$f_{13}f_{33}^2$	3,259	−440,000	0,842	−102,600	f_{31}	$-6,40q^{\oplus}$
f_{13}^3	11,777	−95,637	−21,700	63,080	f_{33}	$11,50q^{\oplus}$
$f_{13}^2 f_{31}$	41,100	−65,100	−214,800	46,770		
$f_{13}^2 f_{33}$	−2,477	189,268	46,770	−440,090		
$f_{31}^2 f_{33}$	−2,477	46,931	189,264	−440,090		
f_{31}^3	11,777	−21,732	−95,420	63,080		
$f_{31}f_{22}^2$	−15,852	−49,798	−99,323	−67,821		
$f_{31}f_{33}^2$	3,124	0,842	−440,400	−102,600		
$f_{33}f_{22}^2$	−0,741	−67,821	−67,821	−147,817		
f_{33}^3	17,859	−34,200	−34,200	−236,139		
f_{11}	−8,94	—	—	—		
f_{22}	$3,55q^{\oplus}$	$-6,40q^{\oplus}$	$-6,40q^{\oplus}$	$11,52q^{\oplus}$		
f_{13}	—	−223,00	—	—		
f_{31}	—	—	−223,00	—		
f_{33}	—	—	—	722,59		

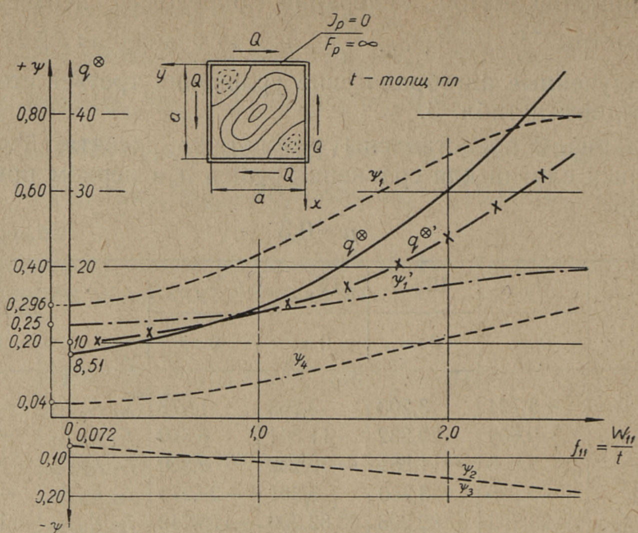


Рис. 3.

в. Исследование работы свободно опертой прямоугольной пластины при условиях, когда жесткость ребер на изгиб и на сжатие бесконечно велика.

Эта задача решена в перемещениях. Перемещения u, v и w, удовлетворяющие краевым условиям, апроксимируем в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= C_3 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a} + \\ &+ C_4 \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} - \gamma^2\frac{x}{2}, \\ v &= C_4 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a} + \\ &+ C_3 \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + \gamma\cdot x, \\ w &= w_{11} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + \\ &+ w_{22} \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}, \end{aligned}\right\} \quad (3.16)$$

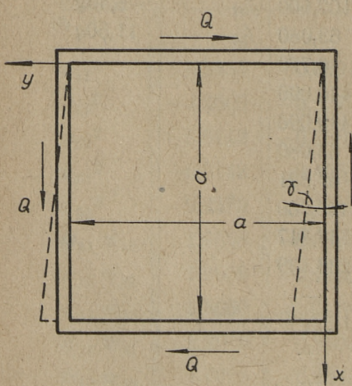


Рис. 4.

где γ — угол сдвига.

Неизвестные параметры C_3, C_4, w_{11} и w_{22} определяются вариационным методом В. Ритца или вариационным методом Б. Г. Галеркина.

Потенциальная энергия выпученной пластины при заданных формулами (3.16) функциях u, v и w дается функционалом:

$$V=\frac{Et}{2(1-\mu^2)}\left(14{,}15\,C_3^2+3{,}22\,\frac{\pi^2}{a}w_{11}w_{22}C_3+23{,}75\,C_4^2+\right.$$

$$+1{,}375\frac{\pi^2}{a}w_{11}^2C_4+0{,}0781\,\frac{\pi^4}{a^2}w_{11}^4+\frac{\pi^2}{a^2}w_{11}^2w_{22}^2+1{,}250\,\frac{\pi^4}{a^2}w_{22}^4-$$

$$\left.-2{,}49\,\gamma\,w_{11}w_{22}\right)+\frac{D}{2}\,\frac{\pi^4}{a^2}(w_{11}^2+16\,w_{22}^2). \qquad (3.17)$$

Условие стационарности потенциальной энергии дает:

$$C_3=-0{,}1139\,\frac{\pi^2}{a}w_{11}w_{22},\quad C_4=-0{,}0287\,\frac{\pi^2}{a}w_{11}^2. \qquad (3.18)$$

Далее вводим обозначения

$$f_{11}=\frac{w_{11}}{t},\ f_{22}=\frac{w_{22}}{t},\quad \gamma^{\oplus}=\frac{\gamma a^2}{t^2}. \qquad (3.19)$$

Условие δV с учетом соотношений (3.18) дает уравнение:

$$22{,}693\,f_{11}^3+158{,}770\,f_{11}f_{22}^2-2{,}49\,\gamma^{\oplus}f_{22}+16{,}202\,f_{11}=0,$$

$$486{,}060\,f_{22}^3+158{,}770\,f_{11}^2f_{22}-2{,}49\,\gamma^{\oplus}f_{11}+$$

$$+\,259{,}166\,f_{22}=0. \qquad (3.20)$$

Из этого уравнения найдем, что

$$\gamma^{\oplus}{}_{kp}=\pm 26{,}03,$$

$$\psi_1=\frac{w_{22}}{w_{11}}\pm 0{,}25$$

На рис. 5 представлены результаты расчета при

$$\gamma^{\oplus}\geqslant\gamma^{\oplus}{}_{kp}. \qquad (3.21)$$

Надо отметить, что при применении метода Галеркина, если использовать третье уравнение (2.6) вместо (2.2), получим совершенно разные результаты для $\frac{w_{11}}{t}$, $\frac{w_{22}}{t}$ и $\gamma^{\oplus}$, они представлены на рис. 5. Таким образом, для того, чтобы результаты, полученные методами В. Ритца и

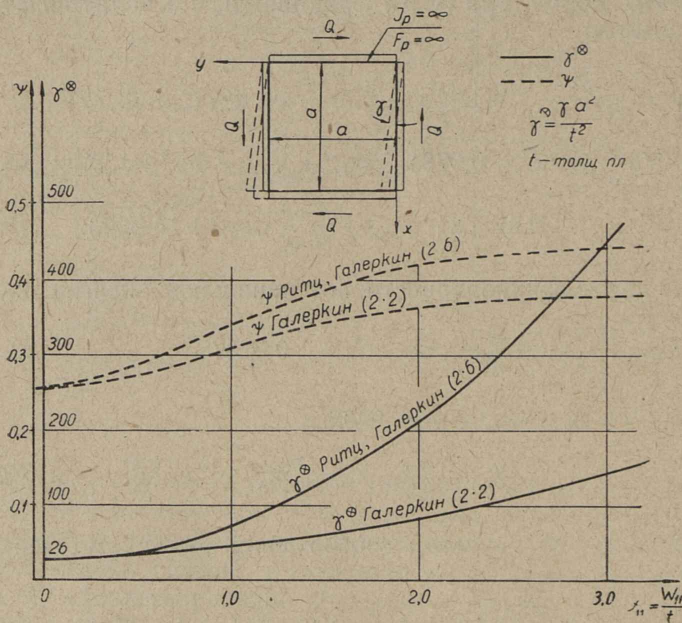


Рис. 5.

В. Г. Галеркина, совпадали, надо при решении задачи в перемещениях использовать третье уравнение равновесия в обобщенной форме (2.6).

Зависимость между сдвигающей нагрузкой и углом сдвига в рассматриваемом случае получается следующая:

$$q^{\oplus} = -1{,}73\,\frac{w_{11}}{t}\,\frac{w_{22}}{t} + \frac{\gamma^{\oplus}}{2{,}6} \tag{3.22}$$

Из этого видно, что в послекритической стадии жесткость балки понизится мало, и без существенной ошибки зависимость между прогибами и нагрузками можно считать линейной.

4. Заключение. Приведенные в статье графики и формулы дают возможность определить при небольшой затрате труда цепные и изгибные напряжения в любой точке пластины и построить, таким образом, графики для напряжений при определенных значениях нагрузки. За отсутствием места мы не можем представить здесь эти графики. Отметим лишь, что решение поставленных задач в первом приближении дает совершенно нечеткое представление о напряжениях пластины в послекритической стадии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ромашевский А. Ю. Труды ЦАГИ, № 203, 205, 1935.
2. Стригунов В. М. Техн. заметки ЦАГИ № 58, 1936.
3. Волмир А. С. Устойчивость и большие деформации цилиндрических оболочек. Издание Академии 1950.
4. Wagner H. Zugfeldtheorie «Z. d. Flugtechn. Motorluftsch.» T. 20 1929.

КРИТИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Ряямет Р. К.

В работе определяется критическая нагрузка конической оболочки вращения, имеющей вершину при действии на нее равномерно распределенного внешнего давления. Подобная задача впервые была поставлена Пфлюгером [3]. Однако при ее решении автор пренебрегал краевыми условиями по нижнему опертому краю оболочки. В настоящей работе предполагается, что оболочка по нижнему краю связана жестким кольцом.

Коническая оболочка, находящаяся под действием равномерно распределенного внешнего давления, имеет, при достаточно малой нагрузке, осесимметричное напряженное состояние. При тонкостенных оболочках оно складывается из безмоментного и смешанного напряженных состояний. При этом безмоментное напряженное состояние преобладает в большей части оболочки и лишь в узкой краевой зоне появляется смешанное напряженное состояние; имеет место так называемый краевой эффект. Как показывают исследования [1], при не очень коротких оболочках, влияние краевого эффекта начального напряженного состояния мало сказывается на величине критического давления. Учитывая это, в данной работе предполагается, что начальное напряженное состояние оболочки безмоментное.

1. Основные соотношения. Обозначим длину образующей срединной поверхности — s_0; толщину оболочки — t; расстояние по образующей от вершины конуса до точки срединной поверхности — s; радиус кривизны по параллельному кругу — R_Θ; угол долготы образующей — Θ; угол конусности — β; внешнее нормальное давление — q;

число волн срединной поверхности по параллельному кругу после потери устойчивости начального напряженного состояния — k.

Тангенциальные усилия безмоментного осесимметричного состояния в рассматриваемой задаче определяются равенствами

$$T_s = -\frac{1}{2} qs \operatorname{tg} \beta, \qquad T_\Theta = -qs \operatorname{tg} \beta. \tag{1.1}$$

При потере устойчивости начального осесимметричного состояния равновесия возникают дополнительные нормальные усилия S_s, S_Θ, касательные усилия S; изгибающие (M_s, M_Θ) и крутящий (H) моменты. Обозначим далее относительные удлинения ε_s, ε_Θ и сдвиг γ; $\varkappa_s$, $\varkappa_\Theta$, τ — параметры изменения кривизны срединной поверхности при переходе оболочки от начального состояния в выпученное состояние; составляющие вектора перемещения точки срединной поверхности оболочки — u, v, w; модуль упругости — E; коэффициент поперечного расширения — ν.

Между составляющими вектора перемещения и деформациями существуют зависимости

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}, \ \varepsilon_\Theta = \frac{1}{s \sin \beta} \frac{\partial v}{\partial \Theta} + \frac{u}{s} - \frac{w}{s} \operatorname{ctg} \beta, \ \gamma = \frac{1}{s \sin \beta} \frac{\partial u}{\partial \Theta} +$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s}, \tag{1.2}$$

$$\varkappa_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \varkappa_\Theta = -\frac{1}{s^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s}, \ \tau = -\frac{1}{s \sin \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \Theta} +$$

$$+ \frac{1}{s^2 \sin \beta} \frac{\partial w}{\partial \Theta}. \tag{1.3}$$

Запишем простейшие физические соотношения теории оболочек [2]

$$\varepsilon_s = \frac{1}{Et}(S_s - \nu S_\Theta), \ \varepsilon_\Theta = \frac{1}{Et}(S_\Theta - \nu S_s), \ \gamma = \frac{2(1+\nu)}{Et} S, \tag{1.4}$$

$$M_s = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\varkappa_s + \nu \varkappa_\Theta), \ M_\Theta = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\varkappa_\Theta + \nu \varkappa_s),$$

$$H = \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \tau. \tag{1.5}$$

Пренебрегая в первых двух условиях равновесия (в условиях равновесия касательной плоскости) влиянием поперечных сил а также членами типа $T_s \varepsilon_s$, можно S_s, S_Θ, S выразить через функцию напряжения F [2]

$$S_s = \frac{1}{s^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s}$$

$$S_\Theta = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \tag{1.6}$$

$$S = -\frac{1}{s \sin \beta} \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial \Theta} + \frac{1}{s^2 \sin \beta} \frac{\partial F}{\partial \Theta}.$$

Параметры изменения кривизны $\varkappa_s$, $\varkappa_\Theta$, τ, определяемые формулами (1.3), удовлетворят первым двум условиям совместности деформаций (соотношениям Кодацци), если в этих условиях пренебречь относительными удлинениями и сдвигом.

Третье условие совместности деформаций

$$-\frac{\varkappa_s}{R_\Theta} + \frac{2}{s} \frac{\partial \varepsilon_\Theta}{\partial s} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\Theta}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial s} - \frac{1}{s \sin \beta} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s \partial \Theta} +$$

$$+ \frac{1}{s^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{s^2 \sin \beta} \frac{\partial \gamma}{\partial \Theta} = 0 \tag{1.7}$$

и третье условие равновесия

$$\frac{S_\Theta}{R_\Theta} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} + \frac{2}{s \sin \beta} \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \Theta} + \frac{1}{s^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 M_\Theta}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{s^2 \sin \beta} \frac{\partial H}{\partial \Theta} -$$

$$- \frac{1}{s} \frac{\partial M_\Theta}{\partial s} + \frac{2}{s} \frac{\partial M_s}{\partial s} - T_s \varkappa_s - T_\Theta \varkappa_\Theta = 0 \tag{1.8}$$

после введения функции напряжения F и функции прогиба w, и при использовании уравнения (1.3)$\div$(1.6), принимают соответственно вид

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta}{s} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{2}{s^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \Theta^2} + \frac{1}{s^4 \sin^4 \beta} \frac{\partial^4 w}{\partial \Theta^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{s^3 \sin^2 \beta} \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \Theta^2} + \frac{4}{s^4 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3} \frac{\partial w}{\partial s} \right\} +$$

$$+ T_s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + T_\Theta \left(\frac{1}{s^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{Et}{s}\operatorname{ctg}\beta\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial s^4}+\frac{2}{s^2\sin^2\beta}\,\frac{\partial^4 F}{\partial s^2\partial\Theta^2}+\frac{1}{s^4\sin^4\beta}\,\frac{\partial^4 F}{\partial\Theta^4}-$$

$$-\frac{2}{s^3\sin^2\beta}\,\frac{\partial^3 F}{\partial s\partial\Theta^2}+\frac{4}{s^4\sin^2\beta}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\Theta^2}+\frac{2}{s}\,\frac{\partial^3 F}{\partial s^3}-\frac{1}{s^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}+\frac{1}{s^3}\,\frac{\partial F}{\partial s}=0. \quad (1.10)$$

Решение системы уравнений (1.9), (1.10) берем в виде:

$$\begin{aligned} w(s,\Theta) &= \psi(s)\operatorname{ctg}\beta\cos k\Theta, \\ F(s,\Theta) &= \varphi(s)\,\varepsilon^2 Ets_0\operatorname{ctg}^2\beta\cos k\Theta. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Обозначим:

$$x=\frac{s}{s_0} \quad (1.12)$$

$$\varepsilon^2=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\,\frac{t}{s_0},\quad k^2=\frac{p}{\varepsilon}\sin^2\beta, \quad (1.13)$$

$$T_s=-\frac{1}{2}x\sigma\varepsilon^3 Et\operatorname{ctg}^2\beta,\quad T_\Theta=-x\sigma\varepsilon^3 Et\operatorname{ctg}^2\beta. \quad (1.14)$$

Тогда уравнения (1.9), (1.10) преобразовываются к виду

$$-\varphi''+\frac{p^2}{x^3}\psi-\sigma p\psi-\varepsilon\left[\frac{2p}{x}\left(\psi''-\frac{1}{x}\psi'+\frac{2}{x^2}\psi\right)-\sigma\left(\frac{x^2}{2}\psi''+\right.\right.$$

$$\left.\left.+x\psi'\right)\right]+\varepsilon^2\left[x\psi''''+2\psi'''-\frac{1}{x}\psi''+\frac{1}{x^2}\psi'\right]=0, \quad (1.15)$$

$$\frac{p^2}{x^3}\varphi+\psi''-\varepsilon\frac{2p}{x}\left(\varphi''-\frac{1}{x}\varphi'+\frac{2}{x^2}\varphi\right)+\varepsilon^2\left(x\varphi''''+2\varphi'''-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{x}\varphi''+\frac{1}{x^2}\varphi'\right)=0, \quad (1.16)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x

$$(\ldots)'=\frac{d}{dx}(\ldots).$$

Рассматривается оболочка, защемленная по нижнему контуру. Поэтому решение системы (1.15), (1.16) должно удовлетворять краевым условиям:
при $x=1$

$$\psi=0,\quad \psi'=0,\quad \frac{\nu p}{\varepsilon}\varphi-\nu\varphi'+\varphi''=0,$$

$$\frac{p}{\varepsilon}[(2+\nu)\varphi'-3\varphi]+(1-\nu)\varphi'-\varphi'''=0, \quad (1.17)$$

и при $x=0$ условиям ограниченности решения.

Отметим, что при непологих оболочках ε является малой величиной.

Задача об определении наименьшего значения параметра нагрузки σ, при котором существует кроме начального состояния еще, по крайней мере, одно, бесконечно близкое к начальному — неосесимметричное состояние равновесия, сводится к определению наименьшего собственного значения системы (1.15), (1.16) при краевых условиях (1.17).

В соответствии с принятой формой решения (1.11) положим

$$u(s,\Theta)=\bar{u}(s)\operatorname{ctg}^2\beta\cos k\Theta,\quad v(s,\Theta)=\bar{v}(s)\operatorname{ctg}^2\beta\sin k\Theta. \tag{1.18}$$

В дальнейшем функции $\bar{u}(s)$, $\bar{v}(s)$ обозначим соответственно u, v. Они определяются через функции ψ, φ из уравнений (1.2), (1.4)

$$u'=-\frac{\varepsilon p}{x^2}\varphi+\varepsilon^2\left(\frac{1}{x}\varphi'-\nu\varphi''\right),$$

$$u+\sqrt{\frac{p}{\varepsilon}}\,v=\psi+\varepsilon\frac{\nu p}{x}\varphi+\varepsilon^2(x\varphi''-\nu\varphi'),$$

$$-\sqrt{\frac{p}{\varepsilon}}\,u+xv'-v=2(1+\nu)\,\varepsilon^{3/2}\sqrt{p}\left(\varphi'-\frac{1}{x}\varphi\right). \tag{1.19}$$

2. Напряженное состояние конической оболочки. Исследования по устойчивости круглоцилиндрических оболочек средней длины [1] дают основание полагать, что: а) при $T_s\sim T_\Theta$ соответствующее решение характеризуется тем, что: $p\sim\varepsilon^0$, $\sigma\sim\varepsilon^0$, б) система (1.15), (1.16) имеет интегралы двух типов: интегралы, которые существенно не изменяются, и интегралы, которые увеличиваются в $\frac{1}{\varepsilon}$ раз при дифференцировании по x. Последние характеризуют краевой эффект. Поэтому в случае оболочек в виде усеченных конусов средней длины собственное значение σ системы (1.15), (1.16) при краевых условиях (1.17) можно определить с асимптотической точностью ε из упрощенной системы

$$-\varphi''+\frac{p^2}{x^3}\psi-\sigma p\psi=0, \tag{2.1}$$

$$\frac{p^2}{x^3}\varphi+\psi''=0. \tag{2.2}$$

Исключая функцию φ, получим уравнение

$$(x^3\psi'')'' + \left(\frac{p^4}{x^3} - p^3\sigma\right)\psi = 0. \tag{2.3}$$

Составляющие вектора перемещения u, v, определяемые интегралами этого дифференциального уравнения, можно найти из уравнений (1.19). С точностью до ε имеем

$$u' = \varepsilon \frac{x}{p} \psi'', \; u = \frac{\varepsilon}{p}(x\psi' - \psi), \; v = \sqrt{\frac{\varepsilon}{p}}\psi. \tag{2.4}$$

Из последних двух соотношений следует, что при наложении на решение системы (2.1), (2.2) условий

$$\psi = 0, \; \psi' = 0 \tag{2.5}$$

будут удовлетворены и краевые условия

$$u = 0, \quad v = 0. \tag{2.6}$$

Из этого заключаем, что краевой эффект рассматриваемого неосесимметричного состояния равновесия не влияет на значение критической нагрузки.

Условия (2.5) могут быть строго получены путем исключения произвольных постоянных интегралов краевого эффекта из условий (1.2), (1.4).

Соотношения, полученные в этом разделе, будут использованы при определении собственного значения σ для задачи, когда оболочка имеет вершину, т. к. $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Критическое значение нагрузки. Критическое значение начального безмоментного напряженного состояния можно определить вариационной формулой, формально эквивалентной уравнению (2.3)

$$\sigma = \min \frac{\int\limits_0^1 \left\{\frac{x^3}{p^3}(\psi'')^2 + \frac{p}{x^3}\psi^2\right\} dx}{\int\limits_0^1 \psi^2 dx}, \tag{3.1}$$

где функция $\psi(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2.5).

Так как рассматриваемая задача не решается в изученных функциях, то решение в первом приближении принимается в виде

$$\psi = ax^2(1-x)^2 x^r, \qquad (3.2)$$

где r — пока неизвестный параметр. При этой степени точности решения минимальное значение σ получается при $p \sim 7$; $r \sim 3{,}6$. Это даст основание искать решение в третьем приближении в виде

$$\psi = x^2(1-x)^2(a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5), \qquad (3.3)$$

которое приводит к следующим результатам

$$\min \sigma = 27{,}5; \quad p = 6{,}4, \qquad (3.4)$$

причем

$$-a_4/a_3 = 3{,}675; \quad a_5/a_3 = 2{,}558. \qquad (3.5)$$

Вид функции (прогиб образующей после потери устойчивости осесимметричного напряженного состояния) представлен на рис. 1.

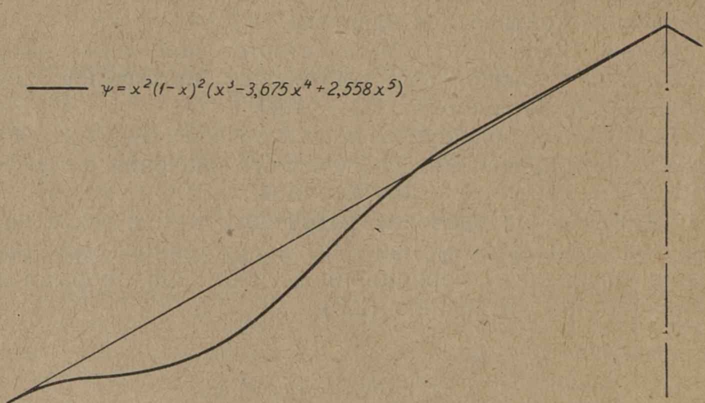


Рис. 1.

При помощи графика функции ψ можно получить представление о точности при переходе от системы (1.15), (1.16) к упрощенной системе уравнений (2.1), (2.2). Поскольку ε малый параметр, а производные от функции ψ до четвертого порядка включительно (по крайней мере значения $x \gtrsim 0{,}2$) будут такого же порядка как и функции ψ, то сделанное упрощение первого уравнения системы (2.1), (2.2) представляется нам законным. Так как сказанное относится также к функции φ, можно утверждать, что упрощенная система (2.1), (2.2) позволяет с достаточной надежностью определить критическую нагрузку оболочек, имеющих вершину.

Пользуясь соотношениями (1.1), (1.13), (1.14), (3.4), получим следующую формулу для критической нагрузки

$$q_{kp} \approx 4{,}26\, E \frac{t^2}{s_0^2} \operatorname{ctg}\beta \sqrt{\frac{t}{s_0} \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{(1-\nu^2)^3}}}. \tag{3.6}$$

Число волн срединной поверхности, по параллельному кругу, потери устойчивости начального напряженного состояния определяется формулой

$$k \approx 3{,}45 \sin\beta \sqrt[4]{\frac{s_0}{t} \operatorname{ctg}\beta} \sqrt[8]{(1-\nu^2)} \tag{3.7}$$

Формулы (3.6), (3.7) применимы только в случае, когда $\operatorname{tg}\beta$ соизмерим с единицей. А именно, при больших значениях β (т. е. при пологой оболочке) ε уже не является малой величиной. При малых же значениях β будет мало число волн k по параллельному кругу выпученной стенки, а в этом случае нельзя выразить тангенциальные усилия S_s, S_Θ, S через функцию напряжения F формулами (1.6) и параметры изменения кривизны $\varkappa_s$, $\varkappa_\Theta$, τ через прогиб w стенки оболочки и формулами (1.3).

4. Установление точности формулы (3.1) методом возмущений. Помножим в уравнениях (1.15), (1.16) те члены, которые отсутствуют в упрощенной системе (2.1), (2.2), на множитель $\eta = 1$

$$-\varphi'' + \frac{p^2}{x^3}\psi - \sigma p \psi - \eta \left\{ \varepsilon \left[\frac{2p}{x} \left(\psi'' - \frac{1}{x}\psi' + \frac{2}{x^2}\psi \right) - \sigma \left(\frac{x_2}{2}\psi'' + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + x\psi' \right) \right] - \varepsilon^2 \left[x\psi'''' + 2\psi''' - \frac{1}{x}\psi'' + \frac{1}{x^2}\psi' \right] \right\} = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{p^2}{x^3}\varphi + \psi'' - \eta \left\{ \frac{2p}{x} \varepsilon \left(\varphi'' - \frac{1}{x}\varphi' + \frac{2}{x^2}\varphi \right) - \varepsilon^2 \left(x\varphi'''' + 2\varphi''' - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{x}\varphi'' + \frac{1}{x^2}\varphi' \right) \right\} = 0 \tag{4.2}$$

Теперь ищем первое собственное значение σ системы уравнений (4.1), (4.2) с помощью т. н. метода возмущений [4]. Пусть

$$\sigma=\sigma_0+\eta\sigma_1+\eta^2\sigma_2+\ldots \tag{4.3}$$

$$\psi=\psi_0+\eta\psi_1+\eta^2\psi_2+\ldots,\quad \varphi=\varphi_0+\eta\varphi_1\,\eta^2\varphi_2+\ldots \tag{4.4}$$

Потребуем, чтобы разложения (4.3), (4.4) удовлетворяли системе уравнений (4.1), (4.2) при всех достаточно малых значениях η. После определения отдельно членов в разложениях (4.3), (4.4) положим $\eta=1$.

Для определения функций ψ_0, φ_0, ψ_1, $\varphi_1\ldots$ и величин σ_0, $\sigma_1\ldots$ получим уравнения

$$-\varphi_0''+\frac{p^2}{x^3}\psi_0-\sigma_0 p\psi_0=0, \tag{4.5}$$

$$\frac{p^2}{x^3}\varphi_0+\psi_0''=0. \tag{4.6}$$

$$-\varphi_1''+\frac{p^2}{x^3}\psi_1-\sigma_0 p\psi_1-\sigma_1 p\psi_0-\varepsilon\left[\frac{2p}{x}\left(\psi_0''-\frac{1}{x}\psi_0'+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{x^2}\psi_0\right)-\sigma\left(\frac{x^2}{2}\psi_0''+x\psi_0'\right)\right]+\varepsilon^2\Big[x\psi_0''''+2\psi_0'''-$$
$$\left.-\frac{1}{x}\psi_0''+\frac{1}{x^2}\psi_0'\right]=0, \tag{4.7}$$

$$\frac{p^2}{x^3}\varphi_1+\psi_1''-\frac{2p}{x}\varepsilon\left(\varphi_0''-\frac{1}{x}\varphi_0'+\frac{2}{x^2}\varphi_0\right)+\varepsilon^2\Big(x\varphi_0''''+$$
$$\left.+2\varphi_0'''-\frac{1}{x}\varphi_0''+\frac{1}{x^2}\varphi_0'\right)=0. \tag{4.8}$$

Дальше потребуем, чтобы функции ψ_0, ψ_1 удовлетворяли граничным условиям

$$\psi_0(1)=\psi_1(1)=\ldots=0,$$
$$\psi_0'(1)=\psi'_1(1)=\ldots=0. \tag{4.9}$$

После решения системы (4.5), (4.6), т. е. после определения ψ_0, φ_0, σ_0, можно с помощью уравнений (4.7), (4.8) определить ψ_1, φ_1. Величину σ_1 определим через

ψ_0, φ_0, σ_0 обычным путем, т. е. помножим уравнение (4.7) на функцию ψ_0, уравнение (4.8) на функцию φ_0 и проинтегрируем оба выражения в интервале 0,1. Интегрированием по частям и использованием уравнений (4.5), (4.6), а также граничными условиями (4.9) можно освободиться от функций ψ_1, φ_1 в этих выражениях.

Для определения σ_1 получим формулу

$$\sigma_1 p \int_0^1 \psi_0^2 dx = \varepsilon \int_0^1 \Big\{ \Big[\frac{2p}{x} (\psi_0')^2 - \frac{4p}{x^3} \psi_0^2 - \frac{2p}{x} (\varphi_0')^2 + \frac{4p}{x^3} \varphi_0^2 - \\ - \frac{1}{2} \sigma_0 x^2 (\psi_0')^2 \Big] + \varepsilon \Big[x(\psi_0'')^2 + \frac{1}{x} (\psi_0')^2 - x(\varphi_0'')^2 - \\ - \frac{1}{x} (\varphi_0')^2 \Big] \Big\} dx. \qquad (4.10)$$

Так как интеграл в правой части уравнения (4.10) имеет конечное значение, то можно утверждать, что уравнения (4.5), (4.6) или вариационная формула (3.1) определяют критическую нагрузку асимптотической погрешности ε по сравнению с единицей.

Однако этот результат имеет формальный характер, потому что нам не удалось исследовать сходимость процесса последовательных приближений метода возмущений в рассматриваемом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н. А. Об определении состояний равновесия круговой оболочки при осесимметричной нагрузке. ПММ. Том XVII, в. 5, 1953.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. Госиздат техн. теор. лит., 1949.
3. Pflüger A. Stabilität dünner Kegelschalen. Ing. Archiv VIII B., 3. H., 1937.
4. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Akad. Verlag. 1949.

ВЛИЯНИЕ ДОБАВОК НА СВОЙСТВА КУКЕРСИТ-ВЯЖУЩИХ

Кикас В. Х.

Различные кукерсит-вяжущие[1], как-то обыкновенный кукермит и особенно гидравлический кукермит, обладают значительной активностью, и по прочности их можно успешно использовать для изготовления различных строительных растворов и бетонов.

Вместе с тем эти кукерсит-вяжущие имеют ряд существенных недостатков, в значительной степени препятствующих их более широкому применению. Обыкновенный кукермит зачастую весьма медленно схватывается и твердеет, не имеет достаточного постоянства объема в воде. Гидравлический кукермит обычно схватывается быстро, но в первое время в возрасте до 7—10 дней (при +20°) твердеет весьма медленно. В течение этого времени гидравлический кукермит также не водостоек, и изделия, изготовленные из этого вяжущего, совершенно разваливаются в воде.

Указанные недостатки значительно ограничивают применение кукерсит-вяжущих в строительстве, где изделия, изготовленные из этих вяжущих, могут в раннем возрасте отсыревать сверх меры, например, при поливке, под дождем и пр.

Эти недостатки кукерсит-вяжущих старались исправить различными добавками.

В настоящем труде рассматривается влияние 57 добавок на сроки схватывания и постоянство объема в воде обыкновенного кукермита.

[1] Кукерсит-вяжущими называются сланцезольные вяжущие, получаемые из зол сланца-кукерсита. Кукермит обыкновенный изготовляют из золы сланца слоевого сжигания и кукермит гидравлический — из золы пылевого сжигания.

1. Вяжущее.

Были исследованы 3 пробы, полученные с завода «Кукермит». В табл. 1 приводится химический состав этих кукермитов.

Таблица 1

Химический состав кукермитов

Наименование составных частей	Обыкновенный кукермит		
	Проба № 1	проба № 2	проба № 3
	Состав в %%		
Остаток, нерастворимый в кислоте	17,4	17,9	17,4
Потеря при прокаливании	18,2	12,1	10,2
SiO_2 нерастворимый	12,4	12,5	12,8
SiO_2 растворимый	12,0	15,2	16,4
Al_2O_3 нерастворимый	2,5	2,4	2,3
Al_3O_3 растворимый	6,8	5,1	4,7
Fe_2O_3 нерастворимый	0,7	0,8	0,7
Fe_2O_3 растворимый	3,9	3,8	4,9
CaO нерастворимый	0,63	0,75	0,82
CaO растворимый	35,4	33,9	37,3
CaO свободный	6,4	7,3	8,5
MgO нерастворимый	0,9	0,8	0,6
MgO растворимый	3,4	4,5	3,6
SO_3	2,5	2,2	2,8
CO_2	12,7	8,6	8,3

Пробы вяжущего №№ 1, 2, 3 старались выбрать таким образом, чтобы они охватывали в отношении срока схватывания, постоянства объема и активности достаточно большой диапазон. Это требование при выборе проб было хорошо выполнено в части срока схватывания и водостойкости; что касается активности, то здесь не получилось сколько-нибудь заметной разницы.

В таблицах 2 и 3 приведены результаты, характеризующие упомянутые свойства кукермитов.

Таблица 2.

Сроки схватывания кукермитов и постоянство объема в воде

Проба № обыкновенного кукермита	Сроки схватывания		Постоянство объема в воде для образцов, помещенных в воду в возрасте	
	начало час. мин.	конец час. мин.	7 дней	21 дня
1	36.—	102.—	развалились	
2	6.30	24.—	развалились	
3	2.30	9.30	развалились	сохранились

Таблица 3.

Активность кукермитов

Проба № обыкновенного кукермита	Предел прочности при сжатии кг/см² трамбован. раствора 1 : 3			Предел прочности при растяжении кг/см² трамбован. раствора 1 : 3		
	7 дн.	28 дн.	56 дн.	7 дн.	28 дн.	56 дн.
1	16,0	55	92	2,0	7,8	16,0
2	18,5	66	102	2,0	8,9	17,7
3	16,5	65	100	2,7	9,5	18,6

2. Песок.

Для изготовления образцов были взяты следующие кварцевые пески из окрестностей Таллина:

а) Песок из карьера Пяаскюла. Были использованы фракции <1 *мм*.

б) Мелкозернистый песок из карьера Клоостриметса.

Гранулометрический состав песка приведен в табл. 4.

Таблица 4.

Место добычи песка	Отверстие сита мм				
	1,0	0,6	0,3	0,15	0,09
	количество песка, прошедшего сквозь сито в %%				
Пяаскюла	100	5,7	0,2	0	0
Клоостриметса	—	—	100	98,5	26,3

3. **Вода.** Была использована дестиллированная вода.

4. **Добавки.**

а) В качестве добавок были использованы следующие «химические чистые» вещества:

HCl, $NaCl$, KCl, NH_4Cl, $MgCl_2$, $CaCl_2$, $BaCl_2$, $MnCl_2$, $CoCl_2$, $NiCl_2$, $ZnCl_2$, $FeCl_3$, $AlCl_3$

HNO_3, $NaNO_3$, KNO_3, NH_4NO_3, $Mg(NO_3)_2$, $Ca(NO_3)_2$, $Ba(NO_3)_2$, $Mn(NO_3)_2$, $Co(NO_3)_2$, $Ni(NO_3)_2$, $Cu(NO_3)_2$ $Fe(NO_3)_3$

H_2SO_4, Na_2SO_4, K_2SO_4, $(NH_4)_2SO_4$, $MgSO_4$, $MnSO_4$, $CoSO_4$, $NiSO_4$, $CuSO_4$, $Fe_2(SO_4)_3$, $Al_2(SO_4)_3$

$NaOH$, Na_2CO_3, $NaBr$, K_2CO_3, $KCNS$, $(NH_4)_2CO_3$, NH_4Br, NH_4J, NH_4CNS, щавелевая кислота, муравьиная кислота, $KClO_3$, $CaCl_2O$, натриевое жидкое стекло.

Перечисленные вещества применялись в растворах.

Количество добавки (безводной) выражено в процентах от веса вещества.

б) Различные ископаемые и отходы промышленности. Брянский трепел, диатомит из окрестностей Нарвы, нагретый в муфельной печи в слое 4—5 *см* до температуры 750° в течение 3 часов,

гипс в трех видах:

строительный гипс — $CaSO_4 \cdot 0{,}5H_2O$

ангидрид — $CaSO_4 \cdot 2H_2O$, обожженный в муфельной печи в кусках величиной 1—2 *см*, слоем в 4 *см* в течение 5 часов при температуре 500° или 800°.

Активная SiO_2 — отход промышленности при производстве алюминия из глины (сиштоф).

Сульфитная щелочь — с Таллинского целлюлозного и бумажного кобмината им. В. Кингисеппа, уд. вес щелочи 1,14 ($г/см^3$).

Вещества, означенные в п. б), кроме сульфитной щелочи, добавлялись путем смешения в шаровой мельнице без шаров в течение $1/2$ часа. Добавки вводились в различных, числом до 8, концентрациях.

МЕТОДИКА ИСПЫТАНИЯ

1. Определение сроков схватывания.

Определение производилось вообще согласно требованиям ЭССР ТУ 507-53. Показатель срока схватывания получен на основании не менее трех параллельных опытов. Всего было произведено более 1000 отдельных испытаний.

2. **Оценка постоянства объема в воде.**

а) Форма и величина образца.

Вследствие необходимости изготовить образцы в большом количестве (свыше 20.000 шт.) невозможно было производить испытания стандартными методами, т. к. в таком случае производительность изготовления образцов была бы слишком малой, а расход материалов — большой. Поэтому пользовались маленькими цилиндрическими образцами, у которых высота 30 *мм* равнялась диаметру.

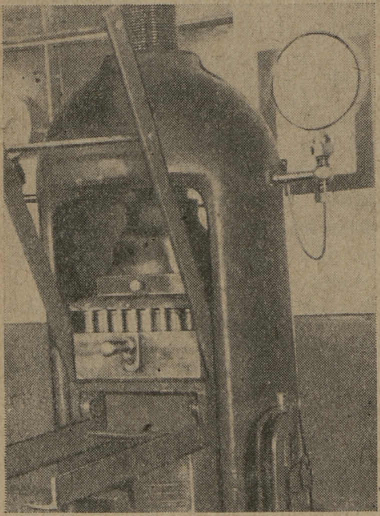


Рис. 1. Приспособление для изготовления цилиндрических образцов.

б) Состав раствора:

Образцы изготовлялись из раствора состава 1 : 3 по весу (кукермит : песок). Пропорция песка была 1 : 5 (песок Клоостриметса : песок Пяаскюла).

в) Консистенция раствора и способ уплотнения.

Применялся жесткий раствор, уплотнение производилось статическим давлением 150 $кг/см^2$ в течение 2 минут.

г) Приспособление для изготовления образцов.

Для изготовления образцов было сконструировано и построено соответствующее приспособление см. рис. №№ 1, 2 и 3, с помощью которого возможно сразу изготовить 64 образца.

д) Хранение и испытание образцов.

Готовые образцы вынимались из приспособления вместе с жестяным основанием и покрывались тотчас же жестяной крышкой, назначение которой было предохранять образцы от неравномерного высыхания. Затем образцы помещались в выложенный жестью шкаф, в котором поддерживалась сырость. Постоянство объема в воде оценивалось по наружному осмотру образцов.

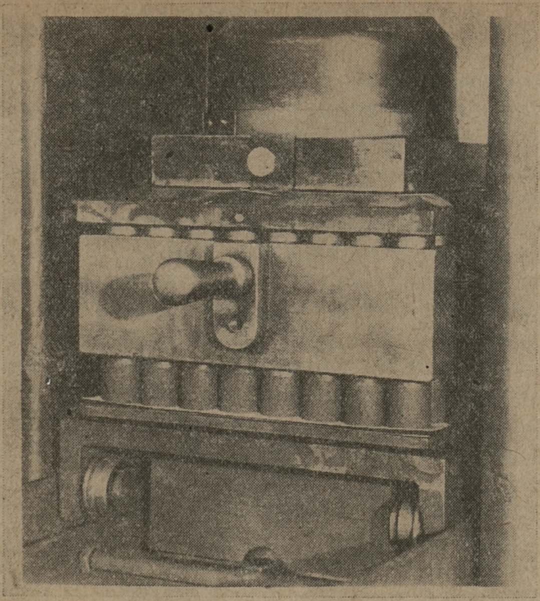


Рис. 2. Приспособление для изготовления цилиндрических образцов.

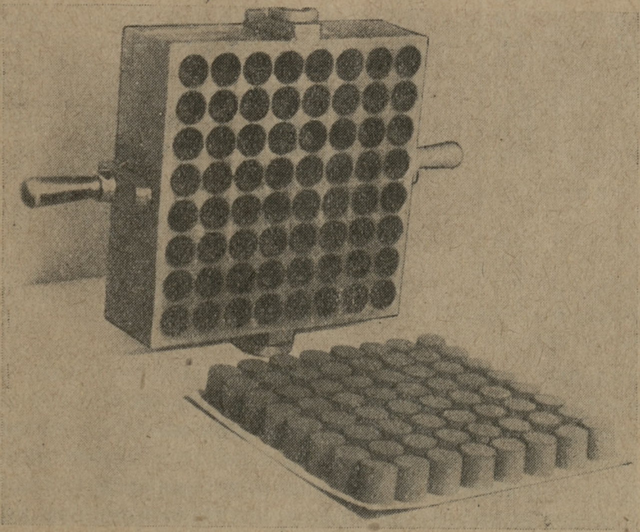


Рис. 3. Комплект — 64 шт. — цилиндрических образцов.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ

1. Влияние добавок на сроки схватывания.

Обыкновенный кукермит «1» — представляет собою очень медленно схватывающееся вяжущее: начало схватывания — через 36 час., и конец — через 102 часа.

Применялись следующие добавки: HCl, $NaCl$, KCl, NH_4Cl, $MgCl_2$, $CaCl_2$, $BaCl_2$, $CoCl_2$, $MnCl_2$, $ZnCl_2$, $NiCl_2$, $AlCl_3$, H_2SO_4, Na_2SO_4, $NaHSO_4$, $MgSO_4$, HNO_3, $NaNO_3$, KNO_3, NH_4NO_3, $Mg(NO_3)_2$, $Ca(NO_3)_2$, $Ba(NO_3)_2$, $Fe(NO_3)_3$, Na_2CO_3, K_2CO_3, $(NH_4)_2CO_3$, $KCNS$, NH_4CNS, жидкое стекло.

Ниже в таблице 5 перечислены добавки, понизившие срок окончания схватывания ниже 24 часов и даны их концентрации.

Таблица 5.

Наименование добавки	% добавки	Конец схватывания через час	Наименование добавки	% добавки	Конец схватывания через час мин.
1. Хлориды			3. Сульфаты: Ни один из сульфатов не понизил конец схватывания ниже 24 часов.		
HCl	1,5	24			
	2,0	12	4. Различные другие добавки		
NH_4Cl	5,0	18			
	8,0	9	Na_2CO_3	5,0	0,45
$CaCl_2$	8,0	13	K_2CO_3	5,0	2
	10,0	5	$(NH_4)CO_3$	10,0	12
$BaCl_2$	10,0	15	NH_4CNS	5,0	23
$AlCl_3$	5,0	20		10,0	8
2. Нитраты			Жидкое стекло	3,0	18
HNO_3	3,0	12		5,0	7
	5,0	10			
NH_4NO_3	5,0	18			
$Ca(NO_3)_2$	5,0	19			

Остальные испытанные добавки не ускорили схватывания настолько, чтобы это имело практическое значение, т. е. сократили бы конец схватывания ниже 50 часов.

В общем можно сказать, что наиболее эффективными ускорителями процесса схватывания являются нитраты и хлориды с минимальным преимуществом в пользу нитратов. Сульфаты же практически вообще не ускоряют схватывания.

Для различных других добавок необходимо отметить сильное ускоряющее свойство схватывания, которым обладают 5% растворы Na_2CO_3 и K_2CO_3.

Обыкновенный кукермит «3». В противоположность кукермиту «1» это вяжущее обладает сравнительно быстрым схватыванием: начало схватывания 2 ч. 30 мин., конец — 9 ч. 30 мин.

Для воздействия на сроки схватывания кукермита «3» были испробованы следующие добавки: HCl, $NaCl$, KCl, NH_4Cl, $MgCl_2$, $CaCl_2$, $BaCl_2$, $FeCl_3$, $AlCl_3$, $NaNO_3$, KNO_3, NH_4NO_3, $Mg(NO_3)_2$, $Ca(NO_3)_2$, $Fe(NO_3)_3$, Na_2SO_4, $NaHSO_4$, $MgSO_4$, $Fe_2(SO_4)_3$, $Al_2(SO_4)_3$, NH_4CNS, Na_2CO_3.

Если почти все нитраты являются ускорителями схватывания, то для хлоридов ускорители и замедлители схватывания находятся количественно почти в равновесии. Таким образом для кукермита «3» положительное влияние нитратов, как ускорителей схватывания, является значительно более заметным, чем для кукермита «1». Сульфаты же в этом случае обладают свойством замедлять схватывание.

Из более эффективных добавок можно назвать следующие (приведены в таблице 6).

Таблица 6.

Добавка		Схватывание		Примечание
Наименование	%	Начало	Конец	
HCl	2,0	0.45	3.15	
NH_4Cl	5,0	1.00	3.30	
$CaCl_2$	3,5	0.50	7.00	
NH_4NO_3	5,0	1.05	5.00	
$Ca(NO_3)_2$	3,0	1.05	4.15	
Na_2CO_3	3,4	0.20	0.50	Превращает вяжущее в быстро схватывающееся.

Из сводки на схватывание явствует, что из анионов наиболее эффективными являются нитраты, за ними следуют хлориды и сульфаты.

Сравнение различных аммониевых солей, как, например, хлоридов, нитратов и роданидов, показывает, что и анион роданида влияет на схватывание кукермита по крайней мере настолько же ускоряюще, как нитрат и хлорид.

Из катионов положительным действием обладают группа NH_4 катионы Са и Ва, катион же железа обладает сильно замедляющим действием.

Для соляной кислоты наиболее оптимальной концентрацией является 2%, которая значительно ускоряет как начало, так и конец схватывания.

В особенности, однако, следует указать на влияние Na_2CO_3 как ускорителя схватывания: если при 1—2% количестве практически еще не заметно никакого действия, то при 3—5% добавке Na_2CO_3 обыкновенный кукермит становится быстро схватывающимся.

2. Влияние добавок на постоянство объема в воде.

Решение относительно постоянства объема в воде обыкновенного кукермита принималось на основании результатов наблюдения образцов, помещенных в воду в возрасте 7 и 21 дня.

Отмечены 6 фаз образцов: целые, очень слабые трещины, слабые трещины, трещины, сильные трещины и полностью разрушенные.

а. **Обыкновенный кукермит «1».**

А. **Хлориды.**

Из полученных данных выяснилось, что на основании результатов испытаний находившихся под водой 7-дневных образцов, добавки можно расположить в следующем качественном порядке (см. табл. 7).

Таблица 7.

Наименование добавки	Минимальное колич. добавки, обеспечивающее водостойкость образцов в % от вяжущего	Нормальная концентрация раствора
$CoCl_2$	1,0	0,44
$MnCl_2$	2,0	0,92
$AlCl_3$	2,0	1,24
HCl	2,0	1,56
$CaCl_2$	2,0	1,05
NH_4Cl	2,0	1,12
$BaCl_2$	3,0	0,84

Из данных таблицы явствует, что для различных добавок границы так называемой концентрации водостойкости значительно разнятся. В этом выражается достаточно сильное влияние отдельных катионов.

Различие влияния отдельных катионов выражается более ярко, если рассмотреть еще водостойкость образцов с добавками $FeCl_3$, $MgCl_2$, $NiCl_2$, $ZnCl_2$, $NaCl$ и KCl, которые в большинстве и в очень короткий срок пребывания под водой совершенно развалились.

Для образцов, помещенных под воду в возрасте 21 дня, постоянство объема и водостойкость значительно возрастают. При минимальном количестве добавки (0,5%) остались целыми образцы со следующими добавками (расположенные в порядке качества при нормальной концентрации, т. е. образец с наименьшим количеством добавки — на первом месте):

NH_4Cl, HCl, $CoCl_2$, $MnCl_2$, $FeCl_3$ и $AlCl_3$.

При помещении в воду образцов в возрасте 21 дня с добавками $MgCl_2$ и $NiCl_2$ некоторые концентрации уже дали кукермиту водостойкость, но добавки KCl, $NaCl$ и $ZnCl_2$ оказались и здесь практически бесполезными и образцы, изготовленные с этими добавками, разваливались почти совершенно.

Б. **Нитраты.**

Были испытаны четыре добавки — HNO_3, $NaNO_3$, KNO_3 и NH_4NO_3. Так как большая часть нитратов была испытана с кукермитом «2», то их влияние рассматривается в том разделе.

В. **Сульфаты.**

Из результатов испытаний выяснилось, что помещенные в воду образцы в возрасте 7 или 21 дня со всякими добавками во всевозможных концентрациях практически быстро разрушались. Остались целыми только помещенные в воду образцы с 5% добавкой $MnSO_4$ и 3% добавкой $Al_2(SO_4)_3$.

Таким образом по сравнению с хлоридами сульфаты обладают несравненно меньшим положительным влиянием на постоянство объема обыкновенного кукермита в воде.

Г. **Различные другие добавки.**

α) Материалы, содержащие SiO_2.

Из образцов, помещенных под воду в семидневном возрасте, лучше всех сохранились пробы с добавкой активного SiO_2. При этом сохранились пробы с добавкой от 15 до 20% SiO_2.

При добавке 20% трепела около 20% образцов устояло, но имело трещины. Таким образом активность трепела значительно ниже, чем активного SiO_2.

Образцы с диатомитной добавкой разрушились, однако, совершенно после кратковременного пребывания в воде.

Образцы, помещенные в воду в возрасте 21 дня, с добавкой активного SiO_2 или трепела в количестве 5, 10, 15 и 20% все остались совершенно целыми. Образцы с добавкой диатомита всех названных 4 пропорций сохранились, но все имели в большей или меньшей мере трещины.

β) Соли аммония.

Как показывают результаты испытаний, можно по анионам расположить в следующем качественном порядке:

Cl, NO_3, CNS, Br, J, SO_4 и CO_3.

В данном отдельном случае Cl оказался перед NO_3, но вообще на первом месте все же находится NO_3. Данная последовательность показывает насколько велико значение отдельных анионов и как далеко позади остается SO_4 по сравнению с NO_3 и Cl.

б) **Обыкновенный кукермит «2».**

А. **Хлориды.** См. рис. 4 и 5.

Приведенное подтверждает сказанное о кукермите «1».

Лучшие, так называемые положительные катионы здесь: Mn, Co, Al, Ba, Fe, группа NH_4, а также HCl дает хорошую водостойкость.

Взаимное расположение добавок в порядке качества изменилось лишь очень мало. Напротив того, группы так называемых положительных, нейтральных и отрицательных катионов остались все теми же. На последнем месте опять-таки стоят щелочные металлы Na и K. Необходимо выделить положительное действие хлорной извести.

Для помещенных в воду образцов в семидневном возрасте раствор хлорной извести не обеспечивает еще водостойкости. Помещенные же в воду образцы в возрасте

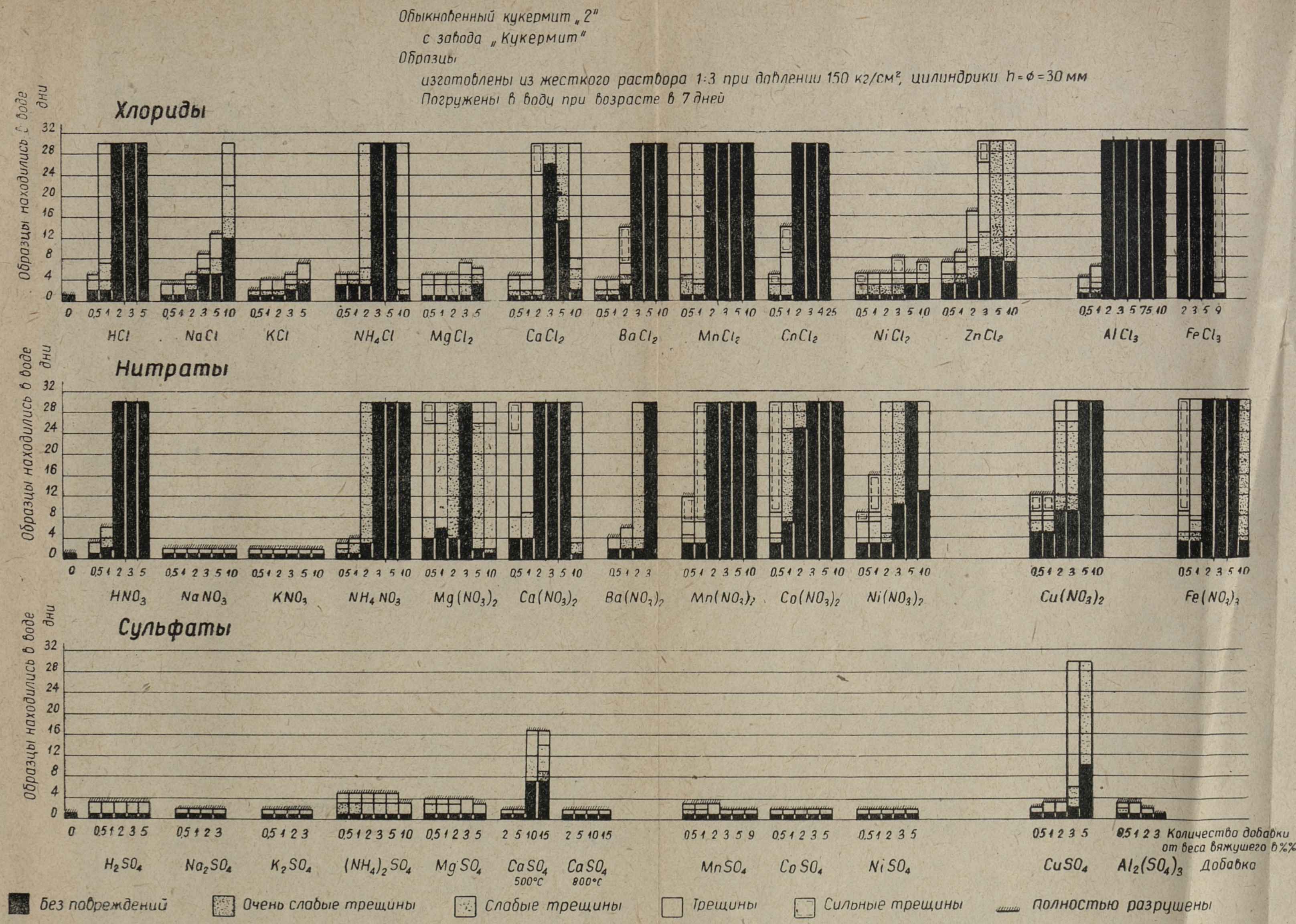


Рис. 4. Влияние добавок на водостойкость обыкновенного кукермита.

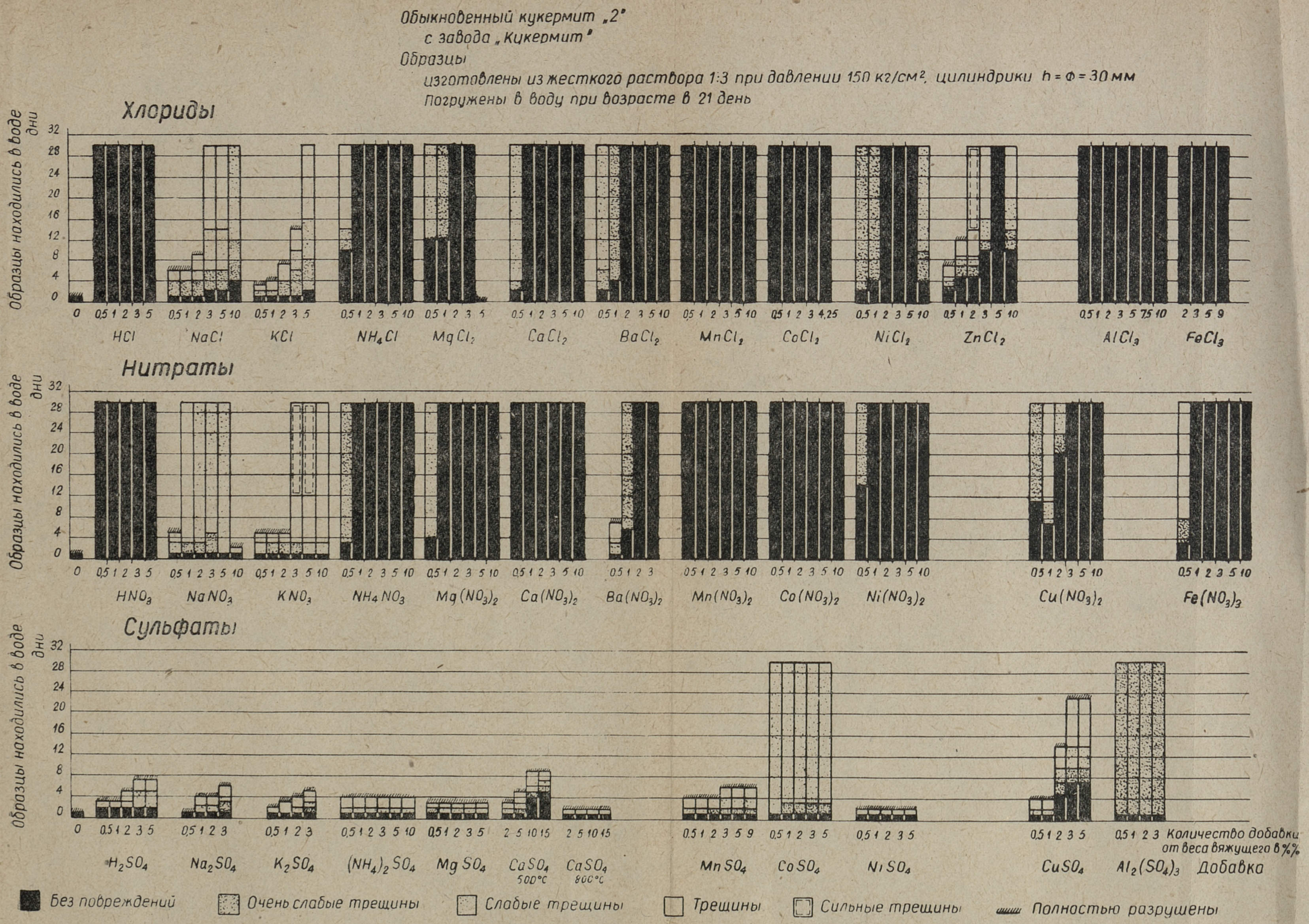


Рис. 5. Влияние добавок на водостойкость обыкновенного кукермита.

21 дня получили полную водостойкость при добавке 7,7 и 3,8% раствора.

Б. **Нитраты.** См. рис. 4 и 5.

Из сравнения с хлоридами видно, что нитраты дают обыкновенному кукермиту заметно большую водостойкость, чем добавка хлоридов.

Особенно контрастна разница для добавок солей Mg и Ni в случае помещения в воду образцов как в 7-дневном возрасте, так и в возрасте 21 дня.

Также имеются различия и для других катионов, и эти различия, в подавляющем большинстве, в пользу нитратов.

Нитраты щелочных металлов оказались и в этом цикле опытов опять на последнем месте.

В. **Сульфаты.** См. рис. 4 и 5.

При рассмотрении результатов выявляется, что из использованных здесь сульфатов, в том числе и гипсов, обожженных при температуры 500 и 800° Ц, ни один не смог практически ни в какой мере улучшить водостойкость кукермита «2» при помещении в воду в 7-дневном возрасте или в возрасте 21 дня.

В общих чертах здесь картина та же, что и для кукермита «1», т. е. сульфаты не могут улучшить водостойкости обыкновенного кукермита.

Г. **Различные другие добавки.** См. рис. 6.

а) **Материалы, содержащие SiO_2.**

Картина в общих чертах та же, что и в случае обыкновенного кукермита «1». Из образцов, помещенных в воду в возрасте 7 дней, водостойкость обеспечена только у получивших добавку активного SiO_2 в количестве 15 и 20%, причем 20% добавка трепела не обеспечивает в достаточной степени постоянства объема, и образцы разрушаются. Образцы с добавкой диатомита разрушаются уже на второй день.

При помещении в воду на 21-й день остаются целыми все образцы с добавкой трепела в количестве 5, 10, 15 и 20%, при добавке же активного SiO_2 сохраняются образцы с добавкой 10, 15 и 20%, с 5% же добавкой обнаруживаются небольшие дефекты. В случае диатомитной добавки появляются значительные дефекты при 15 и 20% добавке. В то же время при 5 и 10% добавке часть образцов осталась совершенно целой, в другой же части об-

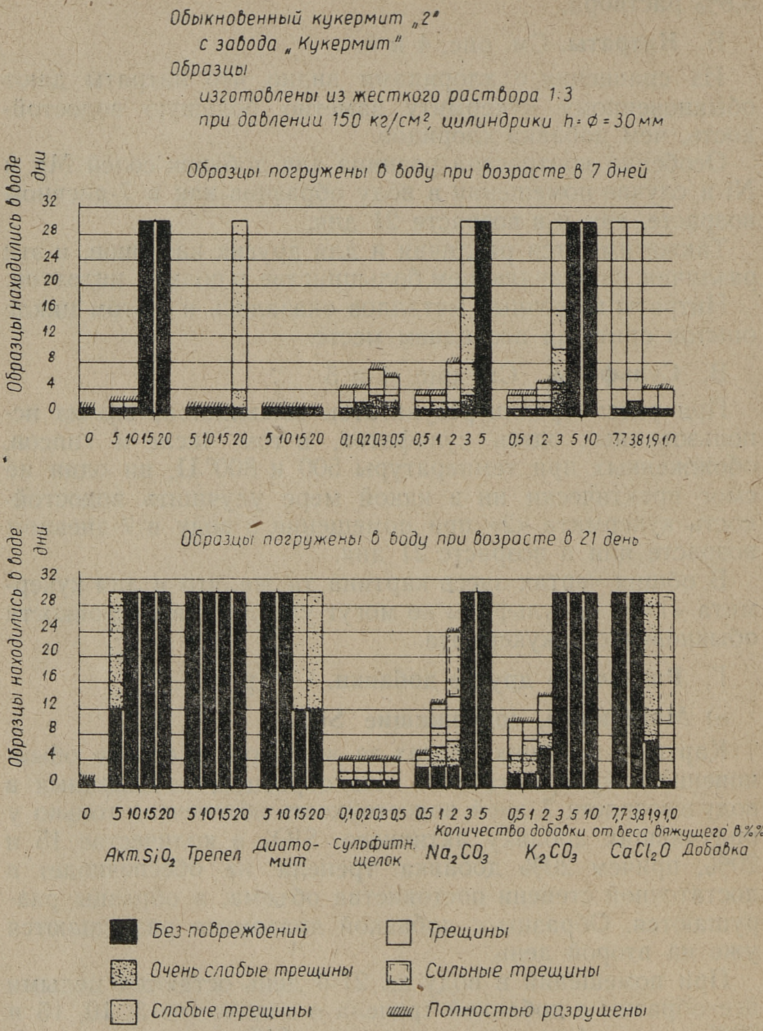


Рис. 6. Влияние добавок на водостойкость обыкновенного кукермита.

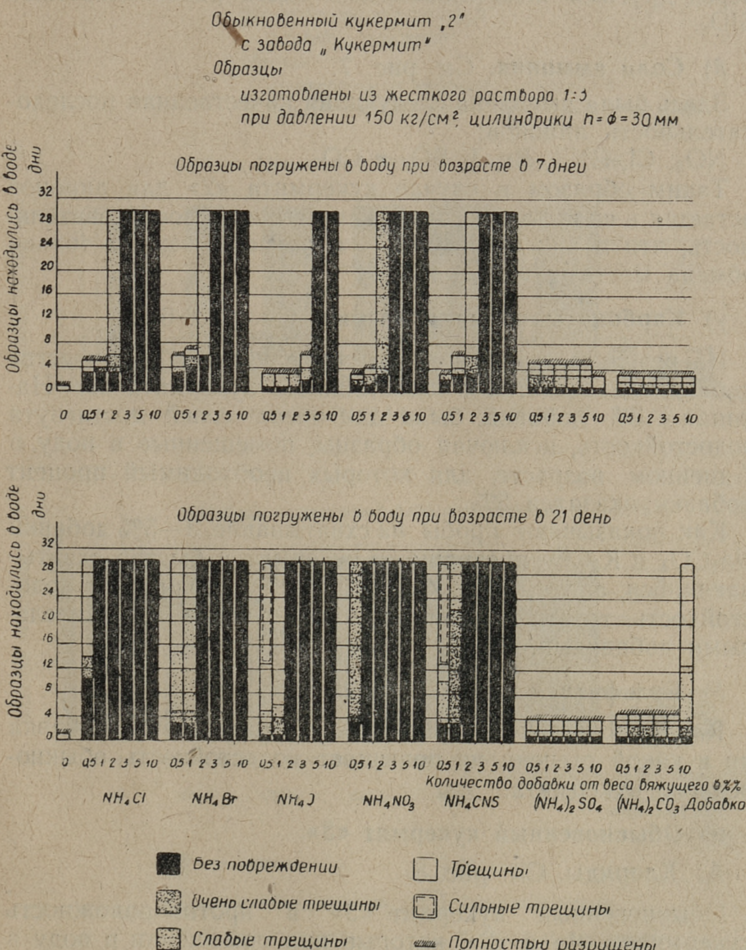


Рис. 7. Влияние добавок на водостойкость обыкновенного кукермита.

наружились значительные дефекты. Такое появление дефектов обозначено на рисунке пунктиром на черном фоне.

Здесь еще раз подтвердилось преимущество трепела перед другими использованными здесь разновидностями SiO_2.

β) **Соли аммония.** См. рис. 7.

Здесь была выявлена следующая качественная последовательность анионов:

NO_3, Cl, CNS, Br, J, SO_4 и CO_3.

Таким образом в случае кукермита «2» для анионов остается в силе та же самая качественная последовательность, что и для кукермита «1», за исключением только обмена местами у NO_3 и Cl.

γ) **Карбонаты калия и натрия.** См. рис. 6.

Из результатов видно, что с увеличением количества добавки повышается и водостойкость кукермита «2». Начиная с 3% добавки, была для обеих солей достигнута водостойкость, исключая образцы, помещенные в воду в 7-дневном возрасте, для которых необходимый процент добавки оказался 5%.

Как показывают пробы на схватывание, 3—5% добавки Na_2CO_3 и K_2CO_3 превращают кукермит в быстро схватывающийся, а т. к. эти добавки влияют выгодно и на водостойкость, то эти карбонаты можно считать положительными добавками.

δ) **Сульфитная щелочь.** См. рис. 6.

Как выясняется из приведенного графика эта добавка ни в какой степени не повышает водостойкость обыкновенного кукермита.

в) **Обыкновенный кукермит «3».**

А. **Хлориды.** См. рис. 8.

Обыкновенный кукермит «3» в противоположность кукермитам «1» и «2», которые при помещении в воду в 7-дневном возрасте и в возрасте 21 дня уже разрушились на следующий день, обладает заметно большей водостойкостью. 7-мидневные образцы, помещенные в воду, разрушились на 4-й день, а образцы 21 дня имели полную водостойкость, и их прочность показывала непрерывное возрастание.

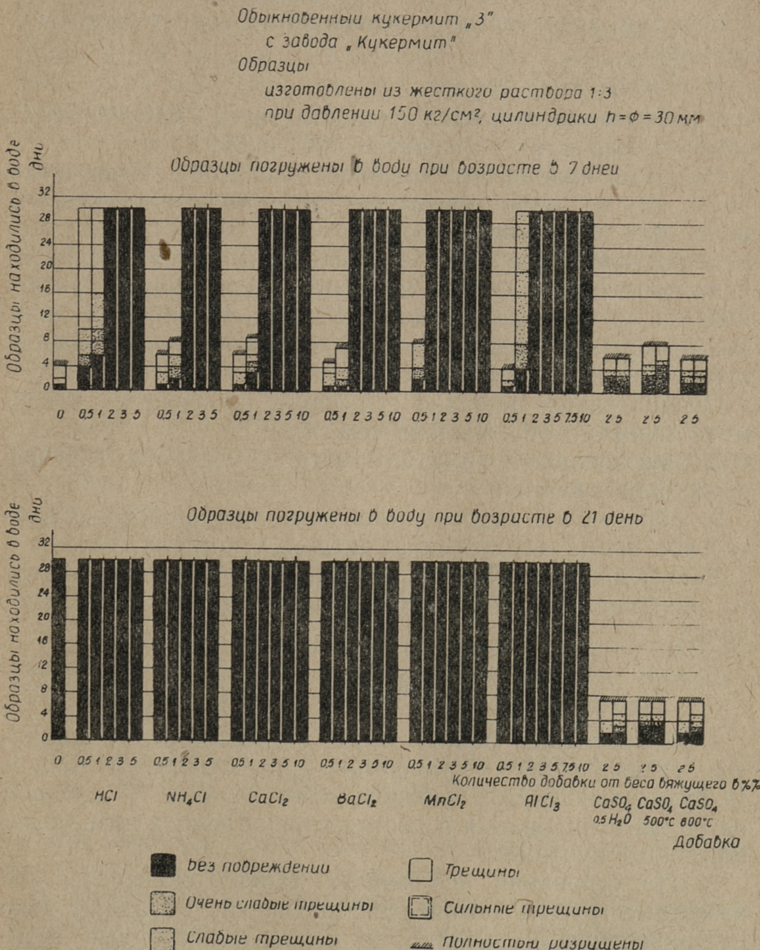


Рис. 8. Влияние добавок на водостойкость обыкновенного кукермита.

Испытанные хлориды показывают такую же качественную последовательность, как и для кукермитов «1» и «2». Это должно было служить достаточным доказательством, что $MnCl_2$, $AlCl_3$, HCl, $BaCl_2$, $CaCl_2$ и NH_4Cl являются добавками, значительно повышающими водостойкость кукермита.

Б. **Гипсы.** См. рис. 8.

Испытывались три разновидности гипса $CaSO_4 \cdot 0,5\,H_2O$, обожженные при температуре 500° и 800°.

Выше мы видели, что добавки сульфатов к кукермитам «1» и «2» не улучшили постоянства объема вяжущего в воде. Для кукермита «3» результаты опытов еще более замечательны: все три разновидности гипса настолько понижают водостойкость кукермита, что образцы разрушаются уже после нескольких дней хранения в воде. Таким образом добавка гипса понижает водостойкость кукермита и является вредной.

Отрицательное влияние сульфатов на свойства кукермита вероятно обусловлено тем, что:

1. при добавке сульфатов заметно замедляется гашение свободной извести и

2. образование гидросульфоалюмината происходит длительное время за счет мало активных компонентов.

Выяснение причин отрицательного влияния сульфатов на свойства кукермита требует еще специального исследования.

ВЫВОДЫ

1. В настоящей работе были исследованы 13 хлоридов, 12 нитратов, 14 сульфатов, 4 разновидности SiO_2 и 14 различных других добавок, всего влияние 57 добавок на время схватывания и постоянство объема в воде обыкновенного кукермита.

2. На основании полученных данных оказалось, что известные группы химических соединений обладают ясно разграниченными действиями на вышеозначенные свойства обыкновенного кукермита.

3. Нитраты обладают большим положительным действием на вышеуказанные свойства кукермита.

Хлориды по силе действия несколько отстают от нитратов.

Сульфаты в противоположность нитратам и хлоридам значительно отстают от них. Правильнее назвать сульфаты вредными добавками, т. к. они замедляют процесс схватывания обыкновенного кукермита и уменьшают его постоянство объема в воде.

4. Как показали повторные опыты с разновидностями гипса, в том числе и с обожженным при температуре 500° гипсом, ни одна из этих добавок не повысила качеств обыкновенного кукермита в отношении постоянства объема в воде, но даже понизили их. Это вполне понятно, если учесть общее отрицательное влияние сульфатов на свойства обыкновенного кукермита.

5. Было найдено, что как анионы, так и катионы обладают значительно отличающимися воздействиями на постоянство объема в воде. Лучшими воздействиями обладают катионы Mn, Co и Al, за ними следуют Fe, Ba, NH_4 и др. Последними в этом ряду являются K и Na, действие которых аналогично сульфатным анионам, т. е. отрицательное.

6. Для $CaCl_2$ и HCl, получавших широкое применение в качестве добавок к цементам, оптимальные их количества в случае добавления к обыкновенному кукермиту будут следующие:

$CaCl_2$ — 2—3% от веса вяжущего
HCl — 2% от веса вяжущего.

7. Наиболее эффективным действием на сроки схватывания отличаются из более известных добавок Na_2CO_3 и HCl. Соответствующие количества добавок были:

для Na_2CO_3 — 3—5% от веса вяжущего и
для HCl — 2% от веса вяжущего.

При введении этого количества Na_2CO_3 мы получим быстро схватывающееся вяжущее.

8. Различные видоизменения кремнезема обладают значительно разнящимся действием на вышеуказанные свойства кукермита. Лучшим воздействием отличается брянский трепел, 15—20% добавка которого значительно улучшает водостойкость кукермита.

Примечание: В следующих трудах ТПИ будут опубликованы в дополнение к этой статье влияния добавок на свойства кукерсит-вяжущих в отношении прочности обыкновенного кукермита и различных свойств гидравлического кукермита.

ОБ ОЦЕНКЕ СНЕГОПРОНИЦАЕМОСТИ ЧЕРЕПИЧНЫХ КРОВЕЛЬ

Отсман Р. Э.

В течение многих столетий сформировалось много различных видов черепицы. Большинство из них, несмотря на усовершенствование производственного оборудования и механизацию имеют те или другие, большие или меньшие недостатки, которые обнаруживаются лишь при эксплуатации зданий. К наиболее часто встречающимся недостаткам черепичных кровель, непосредственно зависящим от типа черепицы, т. е. от ее формы, следует отнести недостаточную плотность покрытий при дожде, снегопроницаемость во время метелей, их малую прочность и т. п.

Эти недостатки, присущие многим видам черепицы, обусловливают порчу новых зданий уже через несколько лет после их возведения. Из опубликованных материалов выясняется, что этим вопросам уделяется недостаточное внимание, несмотря на то, что уже сам замен кровельного покрытия новым связан с большими материальными затратами, техническими трудностями и причиняет много неприятностей пользующимся зданиями.

На вышеуказанные обстоятельства следует обратить особое внимание в свете директив Партии на настоящую пятилетку, на основании которых производство черепицы должно возрасти в 3,0 раза. Это направление производства и возрастающее значение черепичных кровель еще раз подчеркивают необходимость улучшения качества черепицы.

На основании фактических данных известно, что только снегопроницаемость кровель из некоторых типов черепицы, а отсюда и таяние снега, попавшего под крышу, было причиной изъятия из эксплуатации мансардных помещений, замены кровельных покрытий и частых ремонтов потолков и стен.

Необходимо отметить, что выяснение недостатков или преимуществ определенного черепичного покрытия при отсутствии длительных и многочисленных наблюдений может оказаться ложным. Получение сравнительных данных затрудняется из-за ряда факторов как, например, уклон крыш, ориентировка здания в отношении стран света и окружающих предметов, величина перекрытия черепицы, различное качество производства кровельных работ и т. д.

Настоящая работа, исходя из требований практики, преследует цель — найти простой лабораторный метод, который позволил бы в течение короткого времени определить один из качественных показателей черепичного покрытия — снегопроницаемость.

В продолжение нескольких лет автор этой статьи изучал на кафедре строительных конструкций ТПИ и вопрос черепичных покрытий.

Одним из первых этапов работы было непосредственное натурное исследование кровель новых зданий во время дождей, снегопадов и метелей. Для характеристики и сравнения различных типов черепицы сравнивались, в первую очередь, те крыши, на которых для уплотнения не применялось особых мер, как-то подмазывание стыков черепицы раствором, применение уплотнительного шнура, увеличение нормального перекрытия и др.

Данные наблюдений указывают на явные преимущества некоторых типов черепицы в отношении снегонепроницаемости во время метелей.

Например, при покрытии кровель *S*-образной (ленточная волнистая) керамической черепицей можно при подходящем освещении ясно наблюдать вихри снежинок в чердачном помещении. После примерно полутораневной метели чердачный пол покрывался равномерным слоем снега примерно в 1,5—2,0 см. В аналогичных условиях один из лучших типов изготовляемой в ЭССР песчано-цементной фальцевой черепицы показал удовлетворительные разультаты: в чердачном помещении наблюдалась еле заметная редкая снежная пыль. Наоборот, на чердаках зданий, покрытых другим типом песчано-цементной фальцевой черепицей, местами наблюдались снежный покров на полу и увлажение засыпки перекрытия. Хотя приведенные данные и оказались довольно типичными, они все же не дают возможности более точной характеристики снегопроницаемости при метелях даже для описанных типов черепицы, не говоря уже о множестве других применяемых типов. Поэтому было приступлено к разработке методов, с помощью которых возможно было бы решить возникший вопрос.

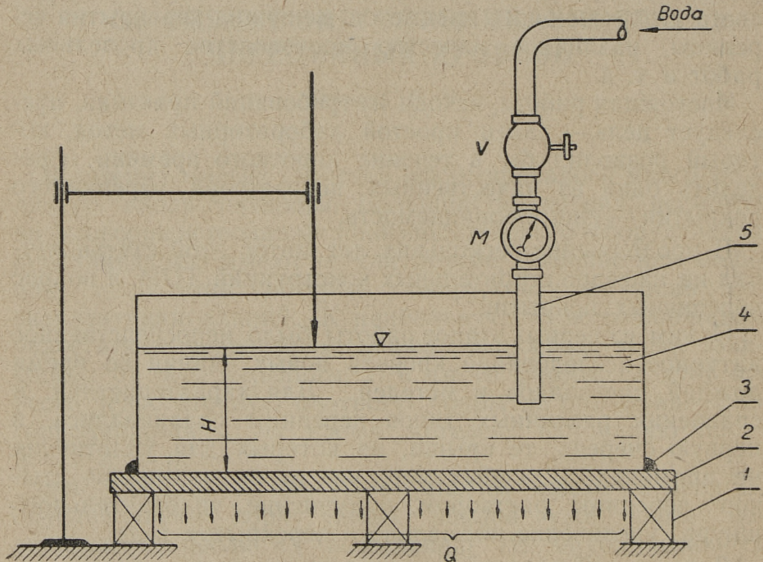


Рис. 1.

Предварительные испытания показали, что лабораторные методы исследования, основывающиеся на гидравлическом сопротивлении, имеют значительные преимущества перед методами, базирующимися на воздухопроницаемости.

В итоге была принята следующая схема испытания рис. 1, основанная на принципе гидравлического сопротивления.

Черепица (2) укладывалась на обрешетку (1) обыкновенным способом. Поверх ее накладывался жестяной ящик без дна (4). Водонепроницаемые соединения ящика с черепицей производилось при помощи пластилина (3). Таким образом образуется сосуд с горизонтальным дном, которым является кровельное покрытие. Через водопроводный кран-вентиль (V), водомер (M) и шланг (5) вода подается в сосуд. Вода Q, проникающая через стыки черепицы, образующей дно сосуда, отводится. При помощи крана-вентиля можно регулировать количество подаваемой воды и таким образом поддерживать высоту столба воды (H) в резервуаре на любом заданном уровне. Следовательно, расход воды (Q) через вентиль, который регистрируется водомером, равен количеству воды, проникшей через стыки черепицы.

По формуле Шези расход Q выражается параболической зависимостью

$$Q = K\sqrt{H}$$

где H — гидравлический напор,

K — модуль расхода, зависящий от поперечного сечения потока, гидравлического радиуса, шероховатости поверхности.

Q и H в описываемом опыте определяются с достаточной точностью. Варьируя высотой уровня воды H можно на основании данных опыта изобразить кривую расхода воды, прошедшей сквозь дно сосуда. Полученная кривая расхода характеризует данное покрытие в отношении водопроницаемости, т. е. плотности. Количество воды, проникающей через дно сосуда, зависит от линейной длины стыков, конфигурации щелей и особенностей, характеризующих черепицу любого вида. Эти особенности влияют на скорость проницания и ему пропорциональную величину расхода воды.

В проведенных лабораторных испытаниях высота столба воды H_i бралась примерно через каждые 2 *см*. Высота водяного столба в начале опыта $H_{мин} \cong 6$ *см*. После 10-минутной проверки постоянства уровня воды в последущие 10—13 минут определялся расход Q_i путем регистрации показаний водомера через каждую минуту.

На рисунке 2 приведены кривые расходов, полученные при лабораторных испытаниях двух типов черепицы: наилучшей из производимых в ЭССР типов песчано-цементной фальцевой черепицы (непрерывная линия) и черепицы нового типа, разработанной на кафедре строительных конструкций [1] (пунктирная линия). Необходимо от-

[1] Виды черепицы даны в конце артикуля (рис. 4). Пробная партия ее изготовлена на заводе «Пунане Кунда».

метить, что при испытании S-образной глиняной обожженной черепицы расход воды уже при $H \cong 6$ *см* превышал 150 *л/мин*, поэтому кривую расхода определить не удалось.

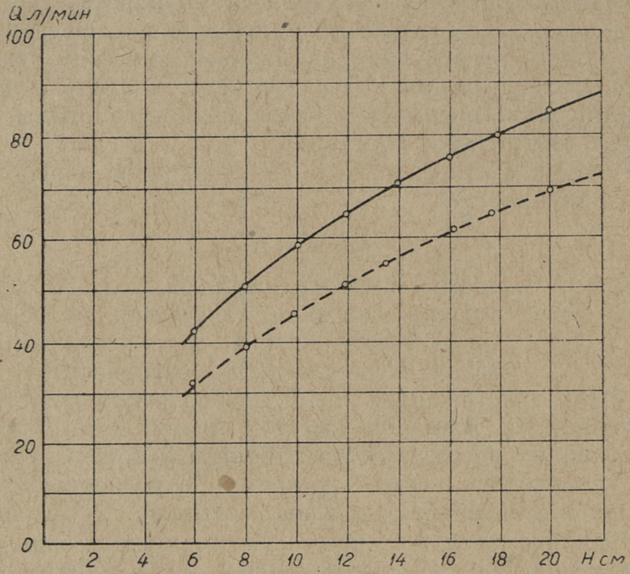


Рис. 2.

Ввиду того, что расход Q зависит от высоты водяного столба, он не является подходящим показателем для сравнения черепичных покрытий. Напротив модуль расхода K в формуле Шези, в приведенной схеме является постоянной величиной, не изменяющейся от высоты водяного столба. Вследствие этого целесообразно выражать плотность покрытия через K, отнесенную например на 1 $м^2$ покрытия. Так как величина расхода пропорциональна модулю, то покрытие с меньшим значением модуля плотнее.

Полученные из опытов значения модуля расхода K представлены графически на рис. 3.

Многочисленные лабораторные испытания различных типов черепицы показывают (см. рис. 2), что в случае относительно меньших высот водяного столба кривая расхода не совпадает с параболой. Модуль K оказывается на 10—20% меньше, увеличиваясь с возрастением

H, и приобретает постоянное значение при $H = 15—16$ *см*. Очевидно ребристая поверхность черепицы оказывает в случае малых высот водяного столба в значительной мере дополнительное сопротивление, к которому присое-

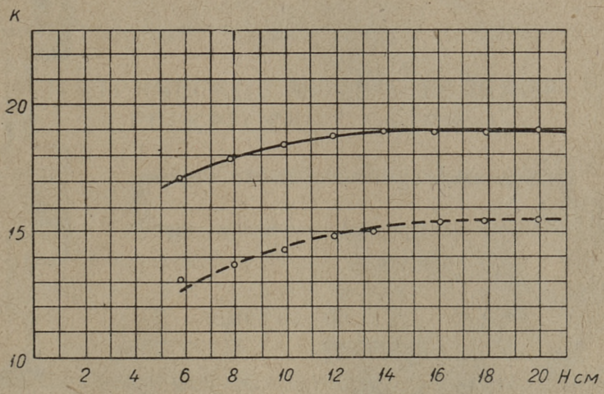


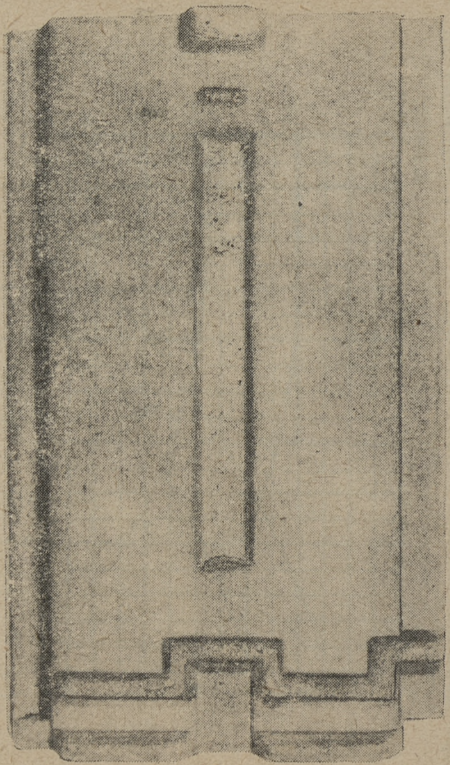
Рис. 3.

диняются влияние направления и режима подаваемой воды. Отсюда следует, что модуль, характеризующий плотность покрытий, практически с достаточной точностью определяется при высоте водяного столба $H \geqslant 15$ *см*. Несомненно, что покрытие, имеющее меньший модуль расхода, оказывается более плотным и по отношению к воздушному потоку. Это позволяет применять указанный метод для оценки степени снегопроницаемости черепичных кровель, т. к. мелкие кристаллики снега, находясь во время метели во взвешенном состоянии, движутся в потоках воздуха.

Описанный метод дает возможность классифицировать все типы черепицы по снегопроницаемости. Кроме того, его можно успешно применять для выяснения влияния величины перекрытия и определения эффективности специальных уплотнительных мер.

Вышеизложенное является небольшим вкладом в методику определения показателей качества черепицы — а именно, снегопроницаемости черепичных покрытий. Метод дает возможность избежать больших материальных убытков и трудностей в эксплуатации зданий, вызываемых таянием снега, проникающего через перекрытия.

Вид с верху.



Вид снизу.

Рис. 4.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК

Роотс О. Т.

Стержневые системы, применяемые в строительных конструкциях, часто оказываются статически многократно неопределяемыми. Их расчеты тяжелы в особенности в тех случаях, когда элементы балочной системы имеют изменяющуюся жесткость, а конструкции и нагрузки несимметричны.

Упрощение расчета без учета совместной работы элементов конструкций приводит к большим ошибкам при исчислении внутренних сил.

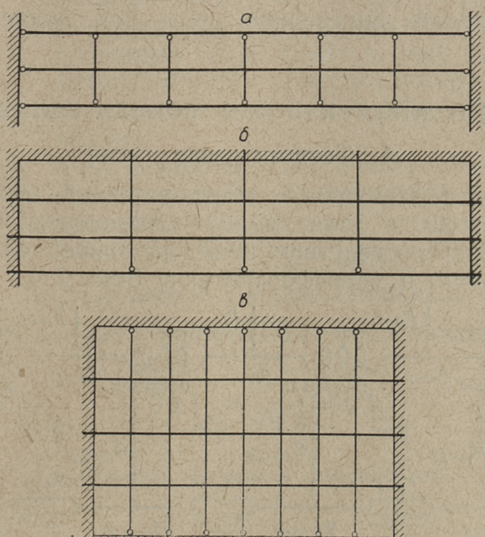


Рис. 1.

Часто употребляются для анализа работы балочных систем экспериментальные методы. Желательно в таком случае иметь универсальную модель с легко изменяемыми параметрами. Это дало бы возможность, кроме контроля расчетов, выбрать наиболее целесообразные размеры элементов. Создание такой механической модели практически не осуществимо.

В последующей статье рассматриваются возможности применения электрических моделей для моделирования плоских систем перекрестных балок с малой жесткостью на кручение (рис. 1).

Электрическое моделирование основывается в данном случае на аналогии дифференциальных уравнений происходящих в модели электрических и в конструкции — физических процессов.

Вписанная электрическая модель дает возможность:

1) находить одновременно перемещение узлов и углов поворота узловых сечений, величину изгибающих моментов и поперечных сил;

2) проследить их изменение при изменении жесткости балок, при изменении защемляющих условий и т. д.;

3) определять внутренние силы при подвижной нагрузке.

§ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БАЛКИ

1. Теоретическая схема

Перед рассматриванием моделирования перекрестных балок приводится далее моделирование отдельного элемента балки посредством цепи, состоящей из активных сопротивлений и трансформаторов (рис. 2).

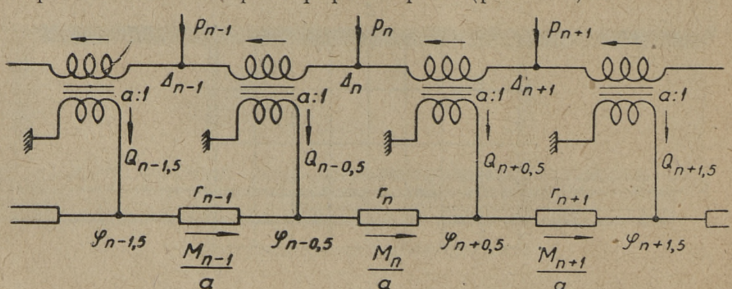


Рис. 2.

Дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид (в случае $EI = const.$)

$$EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = p \tag{1}$$

заменяется в моледи уравнением в конечных разностях

$$EI\frac{z_{n+2} - 4z_{n+1} + 6z_n - 4z_{n-1} + z_{n-2}}{a^4} = p, \tag{2}$$

где:

EI — жесткость балки,
z — перемещение,
p — интенсивность распределенной нагрузки
a — длина элементарного отрезка (при большем числе балок — расстояние между балками).

Если:

p_n — обозначает интенсивность распределенной нагрузки в точке «n» и силу питающего тока в соответствующем узле модели;
Δ_n — обозначает перемещение этого же узла и его напряжение в электрической модели.
$Q_{n+0,5}$ — величину поперечной силы в отрезке между сечениями «n и $n+1$» и силу тока во вторичной обмотке трансформатора.
$a:1$ — отношение числа витков обмоток трансформатора.
$\varphi_{n+0,5}$ — угол поворота сечения «$x = a(n+0,5)$» и напряжение в соответствующем узле цепи сопротивления;
M_n — изгибающий момент в сечении «n», и
$\frac{M_n}{a}$ — силу тока в сопротивлении «n»,

причем омическое сопротивление сопротивления «n»

$$r_n = \frac{a^2}{EI_n}; \tag{3}$$

EI_n — жесткость балки в сечении «n».

Тогда:

$$\frac{Q_{n+0,5} - Q_{n-0,5}}{a} = -p, \tag{4}$$

соответствует дифференциальному уравнению

$$\frac{dQ}{dx} = -p; \tag{5}$$

и

$$\frac{M_{n+1} - M_n}{a} = Q_{n+0,5}; \tag{6}$$

и соответствующе

$$\frac{dM}{dx} = Q. \tag{7}$$

Далее:

$$\frac{\varphi_{n+0,5} - \varphi_{n-0,5}}{r_n} = -\frac{M_n}{a}, \tag{8}$$

или:

$$\frac{\varphi_{n-0,5} - \varphi_{n+0,5}}{a} = \frac{M_n}{EI_n} \tag{9}$$

и соответствующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI}. \tag{10}$$

Связь между узловыми напряжениями в обеих цепях:

$$\frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{a} = \varphi_{n+0,5}, \tag{11}$$

представляет собою аналогичную связь к дифференциальному уравнению

$$\frac{dz}{dx} = \varphi. \tag{12}$$

Вышесказанное доказывает соответствие упругой линии балки дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = p. \tag{13}$$

2. Моделирование упругого основания

Дифференциальное уравнение балки на упругом ребристом основании имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=p-kz, \tag{14}$$

κ — коэффициент постели

$$\kappa=\frac{1}{a_n y_n}; \tag{15}$$

a_n — расстояние между поперечными балками

y_n — перемещение узлового сечения свободной поперечной балки от единичной силы на ней.

Это уравнение моделируется цепью, показанной на рис. 3.

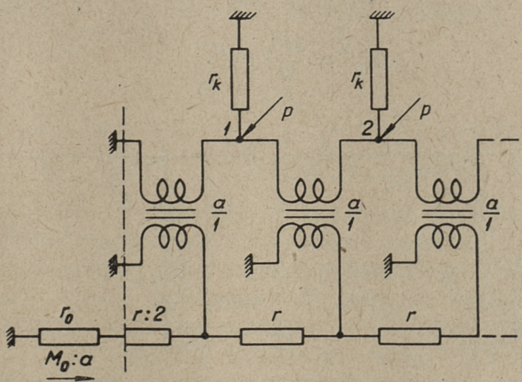


Рис. 3.

Упругое основание, имитирующее сопротивление, имеет величину:

$$r_k=\frac{1}{k}. \tag{16}$$

3. Моделирование условий защемления

Описанной моделью можно моделировать разные условия защемления.

Жесткая заделка в упорном сечении 0

напряжения $\Delta_0=0$; $\varphi_0=0$;

(соединить с нулевым потенциалом).

Шарнирное опирание:

$\Delta_0 = 0$ (соединить с нулевым потенциалом);

$\varphi_0 \neq 0$ (оставить свободным).

Перемещающее, но не поворачиваемое опорное сечение:

$\Delta_0 \neq 0$ (оставить свободным);

$\varphi_0 = 0$ (соединить с нулевым потенциалом).

Свободный конец балки:

$\Delta_0 \neq 0$; $\varphi_0 \neq 0$ (оставить свободным).

Также можно моделировать упругие опоры, которые встречаются в случае продольных балок, опирающихся на поперечные рамы.

На рис. 4 приведены опорные моменты в 2 основных случаях:

$$M_0^{\ I} = \frac{4EI_0}{l}\varphi_0^{\ I}, \tag{17а}$$

$$M_0^{\ II} = \frac{3EI_0}{l}\varphi_0^{\ II}. \tag{17б}$$

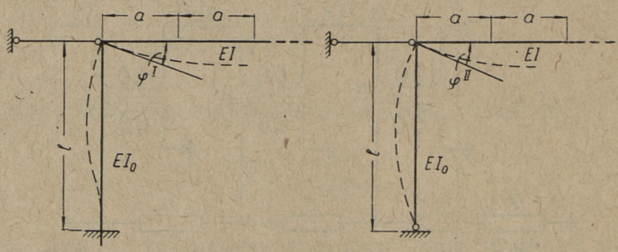


Рис. 4.

Сила тока в сопротивлении модели

$$\frac{M_0}{a} = \frac{\varphi_0}{r_0}. \tag{18}$$

Величина сопротивления моделирующих опорных условий:

$$r_0^{\ I} = \frac{al}{4EI_0}, \tag{19а}$$

$$r_0^{\ II} = \frac{al}{3EI_0}. \tag{19б}$$

На основании ранее описанного моделируются и другие возможные случаи упругого защемления.

§ 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК

1. Теоретическая схема

В модели перекрестных балок (рис. 5) используются условия совместной работы балок в узлах.

Перемещения:

$$\Delta_{ix} = \Delta_{iy}. \tag{20}$$

При составлении модели перекрестных балок:

1) используются трансформаторы с соотношением витков обмоток 1 : 1;
2) соединяются одноименные узлы моделей отдельных балок в цепях первичных обмоток трансформаторов;
3) нагрузки моделируются как узловые нагрузки;
4) сопротивления, моделирующие упорные условия имеют величину:

$$r_0^{I} = \frac{a^2 l}{4EI_0}, \tag{21а}$$

$$r_0^{II} = \frac{a^2 l}{3EI_0}; \tag{21б}$$

5) каждую балку надлежит в случае распределенной нагрузки разделить по крайней мере на 6 элементарных частей. При наличии большего числа поперечных балок принимается длиной элементарного отрезка расстояние между поперечными балками.

В модели применяются питающие токи P_{ij}, которые по своим численным величинам равны фактическим нагрузкам, а сопротивления:

в продольном направлении:

$$r_i = \frac{a^3}{EI_i} \tag{22а}$$

и в поперечном направлении:

$$r_j = \frac{b^3}{EI_j} \tag{22б}$$

в котором:

i; j — обозначение произвольного узла в продольной и поперечной балке;

a; b — длина элементарного отрезка в продольном и поперечном направлении;

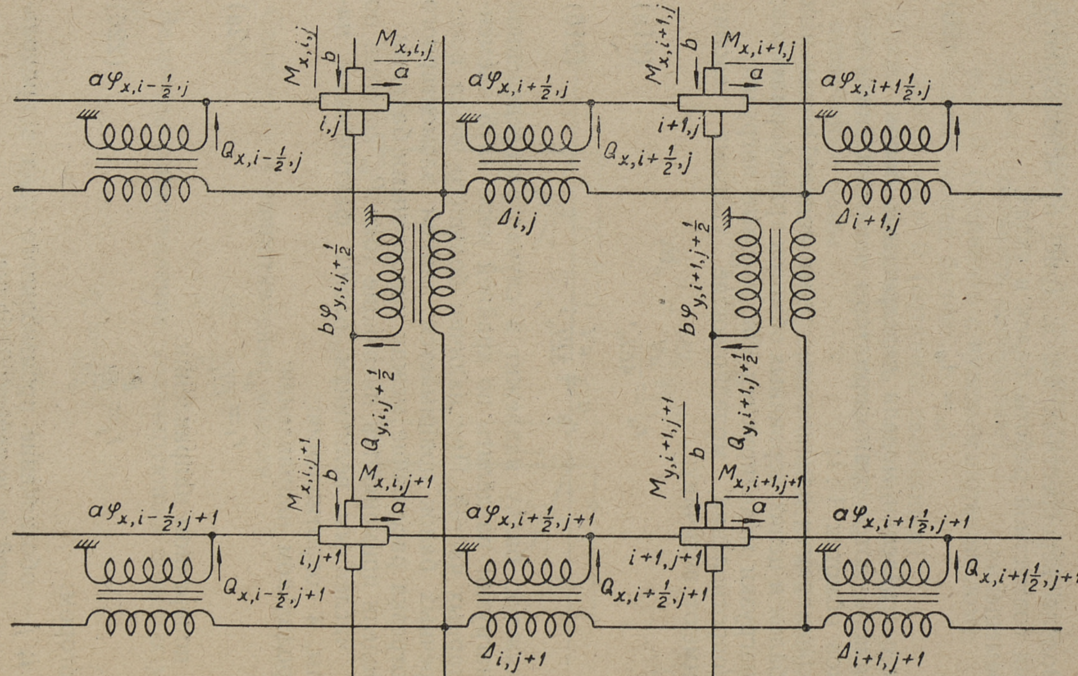

$\frac{M_{x,i,j}}{b}$
$\frac{M_{x,i,j}}{a}$
$a\varphi_{x,i-\frac{1}{2},j}$
i,j
$Q_{x,i-\frac{1}{2},j}$
$a\varphi_{x,i+\frac{1}{2},j}$
$Q_{x,i+\frac{1}{2},j}$
$\Delta_{i,j}$
$\frac{M_{x,i+1,j}}{b}$
$\frac{M_{x,i+1,j}}{a}$
$i+1,j$
$a\varphi_{x,i+1\frac{1}{2},j}$
$\Delta_{i+1,j}$
$b\varphi_{y,i,j+\frac{1}{2}}$
$Q_{y,i,j+\frac{1}{2}}$
$b\varphi_{y,i+1,j+\frac{1}{2}}$
$Q_{y,i+1,j+\frac{1}{2}}$
$\frac{M_{x,i,j+1}}{b}$
$\frac{M_{x,i,j+1}}{a}$
$a\varphi_{x,i-\frac{1}{2},j+1}$
$i,j+1$
$Q_{x,i-\frac{1}{2},j+1}$
$a\varphi_{x,i+\frac{1}{2},j+1}$
$Q_{x,i+\frac{1}{2},j+1}$
$\Delta_{i,j+1}$
$\frac{M_{y,i+1,j+1}}{b}$
$\frac{M_{x,i+1,j+1}}{a}$
$i+1,j+1$
$a\varphi_{x,i+1\frac{1}{2},j+1}$
$Q_{x,i+1\frac{1}{2},j+1}$
$\Delta_{i+1,j+1}$

Рис. 5.

EI_i; EI_j — жесткости балок.

Питающие токи в узле ij при отношении числа витков обмоток трансформатора 1 : 1

$$P_{ij} = P_i + P_j \qquad (23)$$

Сила тока, направляющаяся в узел продольной балки:

$$P_i = Q_{i-0,5} - Q_{i+0,5}. \qquad (24)$$

Сила тока вторичной обмотки трансформатора аналогична поперечной силе:

$$Q_{i+0,5} = \frac{M_{i+1} - M_i}{a}. \qquad (25)$$

Изгибающему моменту пропорциональна сила тока в сопротивлении

$$\frac{M_i}{a} = \frac{a\varphi_{i-0,5} - a\varphi_{i+0,5}}{r_i}, \qquad (26)$$

$$M_i = a\frac{a\varphi_{i-0,5} - a\varphi_{i+0,5}}{r_i},$$

$$r_i = \frac{a^3}{EI_i},$$

$$M_i = \frac{\varphi_{i-0,5} - \varphi_{i+0,5}}{a} EI_i \qquad (27)$$

и напряжения в узловых точках первичных обмоток

$$a\varphi_{i+0,5} = \Delta_{i+1} - \Delta_i,$$

$$\varphi_{i+0,5} = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{a}. \qquad (28)$$

По отношению к этому узлу в поперечной балке:

$$P_j = Q_{j-0,5} - Q_{j+0,5}, \qquad (29)$$

$$Q_{j+0,5} = \frac{M_{j+1} - M_j}{b}, \qquad (30)$$

$$M_j = b\,\frac{b\varphi_{j-0,5} - b\varphi_{j+0,5}}{r_j}, \tag{31}$$

$$r_j = \frac{b^3}{EI_j},$$

$$\varphi_{j+0,5} = \frac{\Delta_{j+1} - \Delta_j}{b}. \tag{32}$$

Полученные соотношения между напряжениями и силами тока аналогичны соотношениям между перемещениями и внутренними силами при изгибе балок, рассчитываемых в конечных разностях.

2. Элементы схемы и произведение измерений

Для составления электрических моделей желательно построить переключающую установку с изменяемыми сопротивлениями и трансформаторами, обмотки которых разделены на части:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27 \text{ и } 60\%,$$

что дает возможность варьировать соотношение числа витков обмоток с точностью 1%.

В электрической модели требуется, чтобы индуктивное сопротивление обмоток «X_L» было бы значительно больше в сравнении с омическим сопротивлением «r», которое, в свою очередь, значительно больше внутреннего омического сопротивления обмотки трансформатора «r_M».

$$X_L >> r >> r_M. \tag{33}$$

В целях уменьшения потерь надлежит употреблять высококачественный материал сердечника.

При обыкновенном материале сердечника (например: Е4А, Ш 20, $\delta = 0,35$ *мм*) данные трансформатора могут быть следующие:

диаметр проволоки $\varnothing d = 0,8$—$1,0$ *мм*,
число витков обмоток 300—400,
площадь сечения сердечника ~ 4 *см*^{2},
частота питающего тока 2000—5000 *Hz*.

Желательно, чтобы напряжения в схеме

$$U_{i\sigma} < 1 \text{ вольта}.$$

Изменяемые сопротивления проволочного типа следует делать так, чтобы они могли быть установлены с точностью $\pm 1\%$.

Используя для питания схемы переменный ток звуковой частоты, достигается достаточно большое индуктивное сопротивление при еще сравнительно малых потерях в сердечниках.

При одновременном питании многих узловых точек производится предвиденная передача питательного тока через омические или емкостные сопротивления «R_{in}», причем

$$R_{in} >> r_{io}. \qquad (34)$$

Сопротивление схемы r_{io} — между узлами «i» и «o».

Для измерения силы и напряжений тока рекомендуется употреблять ламповый вольтметр.

Силы тока определяются через напряжение, падающее на сопротивление.

3. Пример: электрическая модель перекрытия, опирающаяся на рамы.

Данные:

$$l_1 = 10 \text{ м},$$
$$L = 20 \text{ м},$$
$$l_2 = 10 \text{ м},$$
$$a = 2{,}5 \text{ м}.$$

Момент инерции поперечного сечения поперечной рамы при средней продольной балки:

$$i_0 = 200 \cdot 10^3 см^4,$$

на краю $i_1 = 60 \cdot 10^3 см^4$;

Момент инерции — поперечного сечения стойки:

$$i_2 = 54 \cdot 10^3 \text{ см}^4;$$

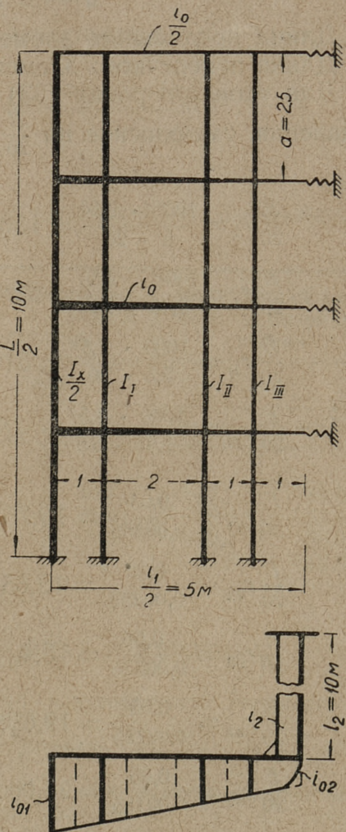


Рис. 6.

— продольных балок

$$I_x = 500 \cdot 10^3\ см^4,$$
$$I_I = 345 \cdot 10^3\ см^4,$$
$$I_{II} = 250 \cdot 10^3\ см^4,$$
$$I_{III} = 188 \cdot 10^3\ см^4.$$

Общая, равномерно распределенная нагрузка

$$Q = 800\ тн,$$

с интенсивностью

$$q = 4{,}0\ тн/м^2.$$

Длина продольного элемента в модели $a = 2{,}5\ м$.

Длина поперечного элемента в модели $в = 1{,}0\ м$.

Для удовлетворения (33) применены омические сопротивления, уменьшение на $\frac{E}{20}$ раз.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{E}{20} r_x &= \frac{1000 \cdot 2{,}5^3}{5 \cdot 20} = 156_\Omega, \\
\frac{E}{20} r_I &= \frac{1000 \cdot 2{,}5^3}{3{,}45 \cdot 20} = 226_\Omega, \\
\frac{E}{20} r_{II} &= \frac{1000 \cdot 2{,}5^3}{2{,}5 \cdot 20} = 312_\Omega, \\
\frac{E}{20} r_{III} &= \frac{1000 \cdot 2{,}5^3}{1{,}88 \cdot 20} = 416_\Omega.
\end{aligned}\right\} \text{продольные балки}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{E}{20} r_{01} &= \frac{0{,}05}{0{,}00465} = 10{,}75_\Omega, \\
\frac{E}{20} r_{02} &= \frac{0{,}05}{0{,}00395} = 12{,}65_\Omega, \\
\frac{E}{20} r_{03} &= \frac{0{,}05}{0{,}00325} = 15{,}4_\Omega, \\
\frac{E}{20} r_{04} &= \frac{0{,}05}{0{,}00255} = 19{,}6_\Omega, \\
\frac{E}{20} r_{05} &= \frac{0{,}05}{0{,}00185} = 27{,}0_\Omega, \\
\frac{E}{20} r_2 &= \frac{0{,}125}{0{,}00135} = 92{,}6_\Omega.
\end{aligned}\right\} \text{поперечные рамы}$$

Фактические перемещения

$$\Delta_i = \frac{20}{E} \cdot \Delta_i' = 10^{-5} \Delta_i'$$

Δ'_i — напряжение в узле «i» в цепи первичных обмоток трансформатора;

Изгибающие моменты в продольных балках:

$$M_i = \frac{a\varphi_{i-0,5} - a\varphi_{i+0,5}}{r_i} a = 2,5 \cdot \frac{a\varphi_{i-0,5} - a\varphi_{i+0,5}}{r_i}.$$

Изгибающие моменты в поперечных рамах:

$$M_j = \frac{b\varphi_{j-0,5} - b\varphi_{j+0,5}}{r_j} b = \frac{b\varphi_{j-0,5} - b\varphi_{j+0,5}}{r_j},$$

так как $b = 1$ *м*.

Изгибающие моменты и перемещения в продольных балках:

Продольная балка	Перемещение среднего сечения, *см*		Изгибающий момент в среднем сечении, *тм*		Изгибающий момент в опорном сечении, *тм*	
	теор.	экс.	теор.	экс.	теор.	экс.
X	0,97	1,00	34,8	33,1	−87,3	−81,0
I	0,93	0,96	22,8	21,9	−60,8	−55,6
II	0,59	0,61	9,9	9,9	−32,4	−26,9
III	0,30	0,33	3,7	2,9	−12,9	−12,5

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Короткин Я. И. и др. Изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем. Машгиз, 1953.
2. Гутенмахер Л. И. Электрические модели. Изд. АН СССР, 1949.
3. Гофлин А. Л. Электрическая модель балки, лежащей на упругом основании. Электричество, 1947, № 5.
4. Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, N 3, 1951.
5. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 18. N 12, 1951.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ С МАЛОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Поверус Л. Ю.

В работе рассматривается оболочка вращения средней длины с малой положительной кривизной под действием равномерно распределенного внешнего давления. Пусть t будет толщина оболочки, R_2 — второй главный радиус кривизны срединной поверхности оболочки, μ — коэффициент Пуассона, $\lambda = \frac{t}{R_2\sqrt{12(1-\mu^2)}}$ — малый параметр, $R_1 \geqslant R_2\lambda^{-0,5}$ — радиус меридиана срединной поверхности оболочки. Предположим, что внешнее давление изменяется пропорционально некоторому параметру нагрузки p, при этом в случае $p=0$ оболочка находится в ненапряженном состоянии. При достаточно малых значениях параметра нагрузки напряженное состояние оболочки является осесимметричным. Как известно [1], в рассматриваемом случае можно такое напряженное состояние разложить на два компонента — на безмоментное и смешанное напряженное состояние. Основное напряженное состояние — безмоментное и только в краевых зонах возникает смешанное напряженное состояние (краевой эффект).

1. УРАВНЕНИЕ МЕСТНОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

При некотором достаточно большом значении параметра нагрузки p существует, кроме осесимметричного состояния равновесия, по крайней мере одно неосесимметричное состояние равновесия бесконечно близкое осесимметричному. Практический интерес представляет из таких значений параметра нагрузки наименьший. В таком случае считаем параметр нагрузки критическим $p=p_{кр}$. Предположим, что оболочка теряет устойчивость не в узкой зоне, а целиком. Если оболочка не очень короткая, это предположение дает некоторое основание пренебречь влиянием краевого эффекта начального напряженного состояния на критическую нагрузку. Для определения критической нагрузки придется решать нижеследующую систему дифференциальных уравнений местной потери устойчивости, которая получена на основе дифференциальных уравнений локальной устойчивости оболочек, опубликованных В. З. Власовым [2].

$$T_1A_1A_2\left(\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}-\frac{1}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)+T_2A_1A_2\left(\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)+\frac{A_1A_2}{R_1}\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\right)\right]+$$
$$+\frac{A_1A_2}{R_2}\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\right)\right]+A_1A_2D\nabla^2\nabla^2 w=0, \qquad (1.1)$$

$$\frac{A_1A_2}{R_2}\left(-\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}+\frac{1}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)+\frac{A_1A_2}{R_1}\left(-\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)+A_1A_2\nabla^2\nabla^2 F=0. \qquad (1.2)$$

Здесь α_1, α_2 внутренние координаты оболочки,

$$\nabla^2=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\right)\right],$$

w — функция прогиба,
F — функция напряжений,
A_1, A_2 — параметры Ляме,
T_1, T_2 — нормальные силы начального напряженного состояния,

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}. \qquad (1.3)$$

Положим

$$u(\alpha_1,\alpha_2)=\tilde{u}(\alpha_1)\cos s\alpha_2,\ v(\alpha_1,\alpha_2)=\tilde{v}(\alpha_1)\sin s\alpha_2,$$
$$w(\alpha_1,\alpha_2)=\tilde{w}(\alpha_1)\cos s\alpha_2,\ F(\alpha_1,\alpha_2)=\tilde{F}(\alpha_1)\cos s\alpha_2. \qquad (1.4)$$

В целях упрощения обозначим в дальнейшем

$$\tilde{u}(\alpha_1) = u, \tilde{v}(\alpha_1) = v \ldots \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\ldots) = (\ldots)' \tag{1.5}$$

Тангенциальные компоненты вектора перемещений u, v в соответствии с выражениями (1.4), (1.5) определяются из уравнений

$$\frac{1}{A_1} u' = \frac{1}{Et} \frac{\mu}{A_1{}^2} F'' - \frac{1}{Et} \frac{\mu}{A_1{}^3} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} F' + \frac{1}{EtA_2{}^2} s^2 F - \frac{w}{R_1} \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u - \frac{1}{A_2} sv = -\frac{1}{EtA_1{}^2} F'' + \frac{1}{EtA_1{}^3} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} F' -$$

$$- \frac{\mu s^2}{EtA_2} F - \frac{w}{R_2}. \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{A_1} v' - \frac{1}{A_2} su - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v = -\frac{2(1+\mu)}{Et} \frac{s}{A_1 A_2} F' +$$

$$+ \frac{2(1+\mu)}{EtA_1 A_2{}^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} sF. \tag{1.8}$$

Предположим, что края оболочки присоединены к тонкостенным диафрагмам, которые жесткие в своей плоскости, но гибкие при изгибе своей плоскости. В таком случае имеют место граничные условия:

$$w = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad S_1 = 0, \quad M_1 = 0, \tag{1.9}$$

где

ε_2 — относительное удлинение в направлении α_2,
S_1 — приращение нормальной силы,
M_1 — изгибающий момент,

которые возникают при переходе оболочки от осесимметричного к неосесимметричному напряженному состоянию.

2. УПРОЩЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕСТНОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Н. А. Алумяэ в работе [3] рассматривал цилиндрическую оболочку средней длины, находящуюся под действием равномерно распределенного внешнего давления и пришел к следующим результатам. Функции, которые описывают общую неосесимметричную деформацию срединной поверхности оболочки при дифференцировании по α_1 не изменяются существенно (т. е. скорость их изменения по α_1 не зависит от величины λ), но при дифференцировании по α_2 они увеличиваются на $\lambda^{-0,25}$ раз. Далее, при потере устойчивости начального состояния равновесия функции, описывающие краевой эффект при дифференцировании их по α_1 увеличиваются на $\lambda^{-0,5}$ раз и при дифференцировании по α_2 на $\lambda^{-0,25}$ раз. Можно предполагать, что оболочки вращения с малой положительной кривизной, рассматриваемые в данной работе, по характеру деформации оказываются близкими к цилиндрическим оболочкам и к ним применимы приведенные в [3] асимптотические оценки. Точнее, применяя полуобратный метод и приписывая определенные свойства решению, после доведения приближенного решения до конца мы должны прийти к результатам, которые не противоречат исходным предположениям.

Исходя из вышеприведенных данных, предположим, что для основной неосесимметричной деформации имеют место следующие качественные соотношения:

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \sim w,\ \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1} \sim w, \ldots\ \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \sim \lambda^{-0,25} w_1\ \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2{}^2} \sim \lambda^{-0,5} w, \ldots$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \sim F,\ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1{}^2} \sim F, \ldots\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \sim \lambda^{-0,25} F,\ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2{}^2} \sim \lambda^{-0.5} F, \ldots \qquad (2.1)$$

Уравнения (1.1), (1.2) при соотношениях (2.1), (1.4), (1.5) можно представить с асимптотической погрешностью $\lambda^{0,5}$ в виде:

$$\frac{A_2}{A_1 R_2} F'' - \frac{A_2}{A_1{}^2 R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} F' - \frac{A_1}{A_2 R_1} s^2 F - T_2 \frac{A_1}{A_2} s^2 w - \\ - \frac{A_1}{A_2{}^3} D s^4 w = 0, \qquad (2.2)$$

$$-\frac{A_2{}^2}{R_2 A_1} w'' + \frac{A_2{}^2}{A_1{}^2 R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} w' + \frac{A_1}{R_1} s^2 w - \frac{1}{Et} \frac{A_1}{A_2{}^2} s^4 F = 0. \qquad (2.3)$$

Для краевого эффекта получаются качественные соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \sim \lambda^{-0,5} w,\ \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1{}^2} \sim \lambda^{-1,0} w, \ldots\ \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \sim \lambda^{-0,25} w,\ \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2{}^2} \sim \lambda^{-0,5} w, \ldots$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \sim \lambda^{-0,5} F,\ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1{}^2} \sim \lambda^{-1,0} F, \ldots\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \sim \lambda^{-0,25} F,\ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2{}^2} \sim \lambda^{-0,5} F, \ldots \qquad (2.4)$$

При этих соотношениях уравнения краевого эффекта можно с асимптотической погрешностью $\lambda^{0,5}$ выписать в форме

$$\frac{1}{R_2}F'' - \frac{D}{A_1^2}w'''' = 0, \qquad (2.5)$$

$$\frac{1}{R_2}w'' + \frac{1}{EtA_1^2}F'''' = 0. \qquad (2.6)$$

Эта система восьмого порядка; однако из восьми интегралов этой системы можно использовать только те четыре, которые удовлетворяют качественным соотношениям (2.4).

3. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Обозначая в дальнейшем в этом разделе индексом «о» интегралы, описывающие общую неосесимметричную деформацию, и индексом «к» интегралы, соответствующие краевому эффекту, можно краевые условия (1.9) выражать формально в следующем виде:

$$w_0 + w_k = 0,\ \varepsilon_{2,0} + \varepsilon_{2,k} = 0,\ S_{1,0} + S_{1,k} = 0,\ w_0'' + w_k'' = 0. \quad (3.1)$$

Учитывая уравнения (2.2) (2.3), (2.5) (2.6) для выражения функции напряжения через прогиб w, сохраняя в краевых условиях (3.1) только главные члены с асимптотической погрешностью $\lambda^{0,5}$, получим:

$$\begin{gathered} w_0 + w_k = 0, \\ \frac{\mu A_2^3}{A_1^2 R_2 s^2}w_0'' - \frac{\mu A_2}{R_1}w_0 - \frac{A_1^2}{R_2}w_k = 0, \\ -\frac{EtA_2^2}{A_1^2 R_2 s^2}w_0'' + \frac{Et}{R_1}w_0 + \frac{R_2 D s^2}{A_1^2 A_2^2}w_k'' = 0, \\ w_0'' + w_k'' = 0. \end{gathered} \qquad (3.2)$$

Исключив здесь w_k и w_k'', приходим к системе однородных уравнений относительно w_o, w_o'', которая удовлетворяется, полагая

$$w_o = 0 \text{ и } w_o'' = 0. \qquad (3.3)$$

Следовательно, решение системы (2.2), (2.3) должно удовлетворять краевым условиям

$$w=0 \text{ и } w''=0. \tag{3.4}$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА НАГРУЗКИ СИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКИ

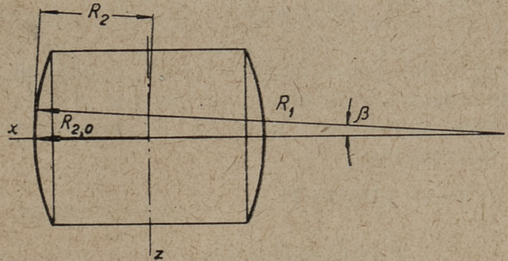


Рис. 1.

Рассмотрим оболочку, задаваемую радиус-вектором срединной поверхности в ортогональной системе координат x, y, z, причем ось z совпадает с осью оболочки

$$\bar{r}=(R_{2,0}-az^2)\cos\Theta u_x+(R_{2,0}-az^2)\sin\Theta u_y+zu_z, \tag{4.1}$$

$$z=\alpha_1,\ \Theta=\alpha_2. \tag{4.2}$$

В рассматриваемой координации величины A_1, A_2, R_1, R_2 имеют следующие значения

$$A_1=\sqrt{4a^2z^2+1},\ A_2=R_{2,0}-az^2,\ R_2=\frac{R_{2,0}-az^2}{\cos\beta}. \tag{4.3}$$

По определению малой положительной кривизны

$$R_1\sim R_2\lambda^{-0,5}\sim const. \tag{4.4}$$

Откуда следует, что

$$a\sim\frac{1}{2R_{2,0}}\lambda^{0,5}. \tag{4.5}$$

Формулы (4.3), (4.5) приводят к следующим соотношениям:

$$A_1 \approx 1, \ \frac{\partial A_1}{\partial z} \sim \frac{\lambda^{1,0}}{R_{2,0}{}^2} z_1, \ \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \sim \frac{\lambda^{1,0}}{R_{2,0}{}^2},$$

$$A_2 \approx R_{2,0}, \ \frac{\partial A_2}{\partial z} \sim \frac{\lambda^{0,5}}{R_{2,0}} z, \ \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} \sim \frac{\lambda^{0,5}}{R_{2,0}},$$

$$R_2 \approx R_{2,0} \ \frac{\partial R_2}{\partial z} \sim \frac{\lambda^{0,5}}{R_{2,0}} z, \frac{\partial^2 R_2}{\partial z^2} \sim \frac{\lambda^{0,5}}{R_{2,0}}. \tag{4.6}$$

Как следует из соотношений (4.6), в случае оболочки средней приведенной длины, параметры A_1, A_2, R_2 изменяются очень медленно, поэтому их можно рассматривать как постоянные.

Положим ради простоты

$$A_2 = R_2 = R_{2,0} = 1,$$

тогда после некоторых законных в пределах точности $\lambda^{0,5}$ упрощений из системы (2,2), (2,3) получим дифференциальное уравнение

$$w'''' - \frac{2s^2}{R_1} w'' + \left(\frac{s^4}{R_1{}^2} + T_2 \frac{s^6}{Et} + \frac{Ds^8}{Et}\right) w = 0. \tag{4.7}$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$w = C_1 chpz + C_2 shpz + C_3 \cos rz + C_4 \sin rz, \tag{4.8}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 произвольные постоянные,

$$p = \sqrt{\frac{g}{2} + \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + f}}, \ r = \sqrt{-\frac{g}{2} + \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + f}}$$

$$g = \frac{2s^2}{R_1} \text{ и } -f = \frac{s^4}{R_1{}^2} + T_2 \frac{s^6}{Et} + \frac{Ds^8}{Et}. \tag{4.9}$$

Предположим, что форма оболочки после потери устойчивости окажется симметричной относительно $z=0$. Такая деформация характеризуется частным решением

$$w = D_1 chpz + D_3 \cos rz, \tag{4.10}$$

которое должно удовлетворить краевым условиям (3.4) при значении аргумента

$$z = \pm l.$$

Это условие приводит к характеристическому уравнению

$$\cos rl = 0. \tag{4.11}$$

Рассматривая соотношения (4.9), нетрудно убедиться, что нам нужно найти наименьший корень уравнения (4.11). Отсюда заключаем, что

$$r = \frac{\pi}{2l}, \tag{4.12}$$

и в соотношениях (4.9)

$$f = \frac{\pi^4}{16l^4} + \frac{\pi^2 s^2}{2R_1 l^2}. \tag{4.13}$$

Введем новые обозначения для параметров:

$$\frac{1}{R_1} = \varrho \frac{\pi}{2l} \lambda^{0,5}, \quad s^2 = \frac{\pi}{2l} \lambda^{-0 5} k^2, \quad T_2 = Et \frac{\pi}{2l} \lambda^{1,5} \tau,$$

$$\lambda^2 = \frac{t^2}{12(1-\mu^2)}, \tag{4.14}$$

тогда из последнего соотношения (4.9) с учетом (4.13) получим

$$\tau = -\frac{1}{k^6} - \frac{2}{k^4}\varrho - \frac{\varrho^2}{k^2} - k^2. \tag{4.15}$$

Значение для k^2, при котором τ окажется наименьшим, определим из условия $\frac{\partial \tau}{\partial k^2} = 0$, представляемого в следующем виде:

$$k^2 = 0{,}5774\varrho + \sqrt{01667\varrho + 1{,}7320} \tag{4.16}$$

В таблице 1 и на чертеже 2 представлены значения критического параметра нагрузки τ_{kp} при некоторых значениях ϱ.

Таблица 1.

ϱ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
τ_{kp}	—1,755	—1,995	—2,255	—2,530	—2,821	—3,123	—3,438

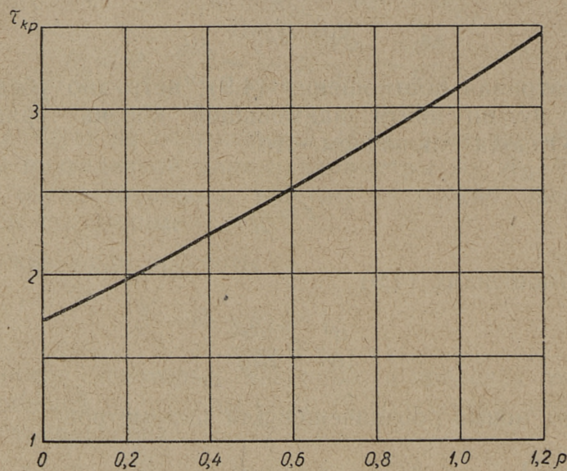


Рис. 2.

Для практических расчетов окажется целесообразным выражать критическое внешнее давление q_{kp}. Используя соотношения $T_2=R_2q$ и (4.14) выводим формулу:

$$q_{kp}=\frac{\pi}{[12(1-\mu^2)]^{3/4}}\,\frac{Et^{2\frac{1}{2}}}{R_{2,0}{}^{3/2}L}\,\tau_{kp}, \tag{4.17}$$

где τ_{kp} получим из таблицы 1 или из чертежа 2.

При этом необходимое ϱ определяется на основе соотношений (4.14) формулой

$$\varrho=\frac{[12(1-\mu^2)]^{1/4}}{\pi}\,\frac{R_{2,0}{}^{1/2}L}{t^{\frac{1}{2}}R_1}. \tag{4.18}$$

В формулах (4.17) и (4.18) представленные величины имеют следующие значения:

$q_{кр}$ — критическое равномерно распределенное внешнее давление $\left[\frac{кг}{см^2}\right]$,

t — толщина оболочки [$см$],

$R_{2,0}$ — радиус среднего параллельного круга оболочки [$см$],

R_1 — радиус меридиана оболочки [$см$],

L — длина оболочки [$см$],

E — модуль упругости $\left[\frac{кг}{см^2}\right]$,

μ — коэффициент Пуассона.

Формулы (4.17), (4.18) применимы если

$$R_1 \geqslant [12(1-\mu^2)]^{1/4} \frac{R_{2,0}^{2/3}}{t^{1/2}} \qquad (4.19)$$

ЛИТЕРАТУРА.

1. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. ОГИЗ, М.-Л., 1947.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГИТТЛ, М.-Л., 1949.
3. Алумяэ Н. А. Об определении состояний равновесия круговой оболочки при осесимметричной нагрузке. ППМ Т. XVII, 1953.

СОДЕРЖАНИЕ

Сборник статей,
посвященных 75-летию
проф., д-ра техн. наук О. А. Маддисона.

Эстонское государственное издательство
Таллин, Пярну маантеэ 10.

*

Редактор *Х. Лауль*

Технический редактор *Л. Ууспыльд*

Корректор *Э. Фельдманн*

Сдано в набор 13 IX 1955. Подписано к печати 17 XII 1955. Бумага 54 × 84, 1/16. Печатных листов 8,5+3 вклейки. По формату 60 × 92 печатных листов 7,22. Учетно-издательских листов 5,95
Тираж 800. МВ 19695

Заказ 2740.

Типография «Тарту Коммунист», Тарту,
Юликооли 17/19.

Цена руб. 4.25