360

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 360

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

V

ТАЛЛИН 1974

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 360 1974

УДК 624

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

У

Таллин 1974

С о д е р ж а н и е

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 360 1974

УДК 624.041.2

Э.М. Иеги

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ К РЕШЕНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Оптимальное проектирование стержневых систем по модели задачи нелинейного математического программирования является наиболее распространенной формулировкой этой проблемы, когда в качестве целевой функции принимается объем (или вес) и отыскивается система минимального объема (веса), удовлетворяющая условиям прочности и (или) жесткости и (или) устойчивости и (или) другим инженерно-техническим требованиям. В терминах теории надежности задача оптимального проектирования системы, обладающей конечным числом элементов (дискретная система), является, в общем случае, задачей оптимального распределения средств между элементами системы, обеспечивающих требуемую надежность ее, с учетом ограниченности ресурсов (объем, вес или др.).

В качестве независимых параметров выбираются безразмерные параметры жесткостей элементов системы - g, как соотношения погонных жесткостей элементов, описывающие метрику пространства, в котором отыскивается распределение усилий в стержнях системы.

Объемная функция определяется как функция вектора параметров жесткостей $g = g_s$, $s = 1, 2, \ldots, r$, где r - число элементов в системе:

$$V(g) = \sum_{s=1}^{r} \left\{ [V_s]^\circ + \Delta V_s(g_s) \right\},$$

где $[V_s]^\circ$ - начальный объем (вес) s-го элемента, принятый на границе прочности для каждого элемента в отдельности;

$\Delta V_s(g_s)$ - добавка к начальному объему s-го элемента (всегда > 0), как результат объединения элементов в систему (мера эффекта связей).

Ограничение на систему формулируется как требование максимальной надежности при минимуме объема (веса).

Оценка надежности проводится на основании критерия надежности $Kp(g)$, определяющего для каждого плана g меру отклонения объема начальной (исходной) системы $[V]^\circ = \sum_{s=1}^{r} [V_s]^\circ$ на границе области от надежной системы $V(g)$, удовлетворяющей условиям прочности и (или) жесткости и (или) устойчивости:

$$Kp(g) = \frac{V(g)}{[V]^\circ}.$$

В терминах математического программирования эта задача получает следующую формулировку:

- найти r-мерный квазивектор независимых переменных $g = g_s$, $s = 1, 2, \ldots, r$, определяющий стержневую систему с минимальным объемом (весом) в некоторой области Ω, ограниченной условием надежности системы:

$$\min_g V(g) = \sum_{s=1}^{r} \left\{ [V_s]^\circ + \Delta V_s(g_s) \right\}$$

$$g \in \Omega : \left\{ \begin{array}{l} 1.\ V(g) \geq [V] \text{ или } Kp(g) = \dfrac{V(g)}{[V]^\circ} \geq 1 \\ 2.\ g > 0 \end{array} \right\}.$$

Здесь первое условие ограничивает область Ω как область допустимых надежных, с точки зрения инженерно-технических требований, конструкций и включает в себя всю полноту требований к проведению статического и динамического расчета системы, всю полноту учета действующих факторов при подборе надежных размеров поперечных сечений отдельных элементов системы.

Критерий надежности системы $Kp(g)$ - величина, обратная вероятностной оценке надежности системы $R(g)$, так, что

$$Kp(g) = \frac{1}{R(g)}.$$

Второе ограничение соответствует условию невырождения элементов системы и всегда может быть заменено ограничением вида

$$g \geqslant [g],$$

где $[g]$ - вектор ограничений, выбранный из конструктивных соображений.

Двойственная задача формулируется как задача проектирования системы с максимальной надежностью из ограниченного объема материала:

- найти r-мерный квазивектор независимых параметров $g' = (g'_s)$, $s = 1, 2, \ldots, r$, определяющий стержневую систему с максимальным критерием надежности в некоторой области Ω', ограниченной по объему материала:

$$\max_{g'} Kp(g') = \frac{V(g')}{[V]^\circ}$$

$$g' \in \Omega' : \left\{ \begin{array}{l} 1.\ V(g') = \sum\limits_{s=1}^{r} \left\{ [V_s]^\circ + V_s(g'_s) \right\} \leqslant [V(g')] \\ 2.\ g' > 0 \end{array} \right\}.$$

Задача оптимального проектирования в такой постановке имеет полную аналогию с задачей оптимального распределения средств, как задачи получения максимальной надежности системы при ограничении ресурсов.

Двойственная пара задач оптимального резервирования с учетом ограничивающих факторов (например, объем, вес, стоимость) имеет следующую общую формулировку:

- добиться требуемых показателей надежности системы с минимальными затратами;
- добиться максимально возможных показателей качества системы при ограниченных ресурсах.

Эта аналогия позволяет исследовать задачу оптимального проектирования стержневых систем как задачу оптимального резервирования сложных систем, используя при этом результаты, полученные при решении задачи оптимального распределения средств.

Целевая функция выбирается здесь как функция надежности системы, состоящей из r взаимосвязанных элементов $s = 1,2...,r$,

где s - индекс элемента (стержня):

$$R(g) = \prod_{s=1}^{r} r_s(g_s), \quad (1 \leq s \leq r),$$

где $r_s(g_s)$ - вероятность безотказной работы s-го элемента (надежность s-го элемента) при некотором значении весового параметра g_s.

Ограничение накладывается здесь на функцию объема (веса)

$$V(g) = \sum_{s=1}^{r} \left\{ [V_s]^{\circ} + \Delta V_s(g_s) \right\}$$

из условия ограниченности ресурсов.

Двойственная пара задач оптимального проектирования может быть сформулирована теперь следующим образом.

1. При минимальном объеме (весе) системы добиться заданной надежности, т.е. найти такой вектор g, чтобы

$$\min_{g} V(g) = \sum_{s=1}^{r} \left\{ [V_s]^{\circ} + \Delta V_s(g_s) \right\},$$

где g удовлетворяет условию надежности:

$$R(g) = \prod_{s=1}^{r} r_s(g_s) \geq R_0 .$$

Здесь R_0 - заданная (требуемая) надежность системы.

2. При максимально возможной надежности системы добиться, чтобы объем (вес) ее не превышал заданной величины, т.е. найти такой вектор g', чтобы

$$\max_{g'} R(g') = \prod_{s=1}^{r} r_s(g'_s),$$

где g' удовлетворяет условию ограниченности ресурсов

$$V(g') = \sum_{s=1}^{r} \left\{ [V_s]^{\circ} + \Delta V_s(g'_s) \right\} \leq V_0 .$$

Рассмотренная двойственная пара задач оптимального резервирования соответствует математической модели задачи оптимального проектирования стержневых систем минимального объема (веса) с одним ограничением - ограничением надежности системы, или ограничением по объему.

В качестве ограничения надежности рассмотрено ограничение по устойчивой прочности, которое при необходимости может быть расширено и на учет жесткости элементов системы, учет динамических воздействий и др. факторов, которые могут быть вовлечены в вычислительный процесс, связанный со статическим расчетом системы и подбором параметров поперечных сечений элементов системы Таким образом осуществляется выбор начального решения $[V]^{\circ} = \sum_{s=1}^{r} [V_s]'$ на границе области надежных конструкций.

Задача оптимального резервирования при нескольких ограничениях позволяет построить также математическую модель задачи оптимального проектирования по нескольким критериям - объему, весу, стоимости или др. факторам.

Так, если каждый элемент (s) системы характеризуется рядом ($j = 1,2,\ldots,m$) показателей качества $W_s^{(j)}$, то результирующее значение j-го показателя затрат по объему, весу, стоимости и др. факторам определяется как функция параметров и показателей качества

$$\overset{(j)}{W}(g) = f(g_1, g_2, \cdots, g_s, \cdots, g_r, W_1^{(j)}, W_2^{(j)}, \ldots, W_r^{(j)}),$$

причем $\overset{(j)}{W}(g)$ есть нелинейная, в общем случае, функция переменных $g_s, W_s^{(j)}$.

Задача оптимального проектирования в случае нескольких ограничений может быть сформулирована по аналогии с задачей оптимального резервирования следующим образом:

Найти максимум функции надежности при условии, что показатели затрат на системы $\overset{(j)}{W}(g)$ - объем, вес, стоимость или др. факторы не превышают ограничения на них, т.е. отыскивается

$$\operatorname{Sup}_{g \in \Omega} R(g) = \prod_{s=1}^{r} V_s(g_s),$$

где Ω - замкнутая область значений g, определяющих системы, которые одновременно удовлетворяют условиям $\overset{(j)}{W}(g) \leq W_o^{(j)}$ для всех $j = 1,2,\ldots,m$, т.е.

$$\Omega : \bigwedge_{j=1}^{m} \left\{ \overset{(j)}{W}(g) \le W_o^{(j)} \right\}_{(\kappa)}.$$

Двойственная задача для каждого $\overset{(\kappa)}{W}(g)$, к = I,2,..., m, имеет следующую формулировку:

- Найти минимум затрат $\overset{(\kappa)}{W}(g)$ (объема, веса,стоимости или др.) при условии, что показатель фактора надежности принимает значения не ниже требуемого, а все остальные показатели затрат не превышают некоторых ограничивающих значений $W_o^{(j)}$, т.е. отыскивается

$$\inf_{g \in \Omega_\kappa} \overset{(\kappa)}{W}(g),$$

где Ω_κ - замкнутая область значений g ,определяющих системы, которые одновременно удовлетворяют условиям $R \ge R_o$ и $\overset{(j)}{W}(g) \le W_o^{(j)}$ для всех $j \ne$ к, т.е.

$$\Omega_\kappa = \left\{ R(g) \ge R_o \right\} \wedge \left\{ \bigwedge_{j=1}^{m} \overset{(j)}{W}(g) \le W_o^{(j)} \right\}_{j \ne \kappa}.$$

Вычислительные алгоритмы строятся как градиентные методы и предъявляют следующие требования к функциям:

I. Функция $R(g)$ (или $Kp(g)$) строго возрастающая по каждому из аргументов g_s . Это требование безусловно удовлетворяется в строительных системах, что и подтверждено нами для случая одного ограничения по объему.

2. Каждая из функций $\overset{(j)}{W}(g)$ выпукла по каждому из аргументов g_s . Это требование исследовано для случая одного ограничения по объему $\overset{(j)}{W}(g) = V(g)$. При этом выяснилось, что $V(g)$ лишь условно может быть отнесена к выпуклой функции аргумента g_s, ибо она представляется кусочно-гладкой функцией с выпуклыми и вогнутыми ветвями $V(g)$,удовлетворяя, однако, общему критерию выпуклости функции.

Условный экстремум функции $R(g)$, в общем случае, будет находиться в окрестности, близкой к $(\cdot)$ g^* такой, что $\overset{(j)}{W}_{(g^*)} = W_o^{(j)}$ для всех $W_o^{(j)}$, т.е. близ границы. Для случая одного ограничивающего фактора $\overset{(j)}{W}(g) = V(g)$ экстремум функции $R(g) = \dfrac{I}{Kp(g)}$ лежит на границе, где $$R(g) = Kp(g) = 1.$$

Вопрос о выборе метода решения задачи оптимального проектирования стержневых систем, обладающих необходимой надежностью при минимуме объема, безусловно связан с размерностью задачи, определяющейся числом независимых параметров g_s , $s = 1,2,\ldots, r$,
где r - число элементов в системе.

В связи с этим нами рассмотрена возможность понижения размерности задачи путем разбиения системы на некоторые группы элементов, образующих либо жесткие контуры, либо сочетание контуров (звездочки), обладающих свойствами достаточной автономности и замкнутости при достаточно малом числе независимых параметров (2-3).

Отыскание решения в пределах группы элементов осуществлялось методом Гаусса-Зейделя (координатный спуск).

При этом для контуров (с двумя независимыми параметрами) был также реализован метод прямого перебора, как точный метод, позволяющий оценить сходимость решения.

При переходе от группы к группе проводилась поэтапная оптимизация по принципу метода динамического программирования с итерационным перерасчетом учета взаимного влияния групп (этапов).

Представляется возможным реализовать здесь также метод наискорейшего спуска, осуществляя оптимизацию на каждом шаге в направлении наибольшего относительного приращения надежности или убывания объема (веса) системы в целом.

Оптимальное проектирование при нескольких ограничивающих факторах может быть проведено как частная оптимизация с контролем ограничений. При этом выбирается один из ограничивающих факторов (к) и рассматривается частная задача оптимального проектирования по одному из ограничений так, что для каждой точки процесса проводится дополнительный контроль по остальным ограничителям ($j = 1,2,\ldots,m$; $j \neq к$).

Частная оптимизация считается законченной, если достигнуто какое-либо из ограничений.

Из множества решений $R^k(g^*)$ (для всех к) выбирается наилучшее значение $R = \max R^{(j)}(g^*)$ и принимается в качестве квази-оптимального.

Влияния параметра времени на элементы пространства входных параметров (внешние факторы, свойства системы, условия эксплуатации) учитываются как изменения в пространстве состояний, приводящие, в свою очередь, к изменениям в пространстве качества. При этом каждой точке пространства качества ставится в соответствие платежная функция $C(g,\tau)$, позволяющая учесть при оптимальном проектировании также и фактор времени - долговечность системы.

Литература

I. В.В. Болотин, И.И. Гольденблат, А.Ф. Смирнов. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. Стройиздат, М., 1972.
2. В.В. Болотин. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. Стройиздат, М., 1971.

E. Jögi

Anwendung der Zuverlässigkeitstheorie zur Lösung der Extremumaufgabe in der Baumechanik

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird eine Lösung für die Aufgabe der Stabwerke mit minimalem Gewicht (Volumen) gegeben.

Dazu braucht man ein Modell mit optimaler Verteilung des Materials, indem bei begrenzten Ressourcen die erforderliche Zuverlässigkeit gewährleistet wird.

Die Aufgabe wird in der Terminologie der Zuverlässigkeitstheorie formuliert. Das ausgearbeitete Modell gestattet zur Lösung der Aufgabe von optimalen Konstruktionen die Anwendung der Methoden der Zuverlässigkeitstheorie, wobei man auch den Einfluß der Zeitparameter berücksichtigen kann.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 360 1974

УДК 624.041.2

Э.М. Иеги, Р.М. Нурмухамедова

К РАСЧЕТУ И ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ КОНТУРА

В статье рассматривается задача проектирования контура-рамы минимального объема, в упругой стадии работы материала, с заданным очертанием осей и выбранным профилем поперечного сечения элементов рамы.

Задача проектирования статически неопределимых рам минимального объема может быть сведена к итерационному процессу оптимального проектирования контуров, образующих основную систему для статического расчета сложной рамы.

Контур-рама, входящая в основную систему, обладает свойствами достаточной автономности и замкнутости, что легко устанавливается путем рассмотрения матрицы канонических уравнений метода сил (или метода перемещений) и позволяет свести задачу оптимального проектирования сложной статически неопределимой рамы в многомерном пространстве, размерность которого определяется числом стержней, входящих в раму, к сумме задач оптимального проектирования контуров (отдельного контура или группы контуров, образующих систему - звездочка) в двух-трехмерном пространстве [I].

В связи с этим вопрос оптимального проектирования контура представляет интерес не только для проектирования простейших одноконтурных рам, но и входит составной частью в задачу оптимального проектирования сложных статически неопределимых рам.

В статье излагаются результаты исследований, полученные в ходе работы летней школы-семинара, организованного в г.Ташкенте институтом Кибернетики с ВЦ АН УзССР совместно с

УзНИИ Градостроительства и Таллинским политехническим институтом.

I. Статический расчет контура-рамы

Статический расчет контура-рамы осуществляется по методу сил с предварительным определением координат упругого центра контура для ортогонализации базиса и получения матрицы коэффициентов канонических уравнений метода сил D как диагональной матрицы, так что в матричном уравнении

$Dx + D_p = 0$ матрица $D = \left\{\delta_{ij}\right\}$, $i,j = 1,2,3$

является диагональной матрицей.

Коэффициенты матрицы D и $D_p = \left\{\Delta_{ip}\right\}$ определяются известным образом

$$\delta_{ij} = b_i' f b_j \; ; \quad \Delta_{ip} = b_i' f b_p ,$$

где

$$i,j = 1,2,3 .$$

При этом векторы b_i, b_j образуют ортогональный базис.

Вектор неизвестных $x = \left\{x_i\right\}$, $i = 1,2,3$ определяется, в силу ортогональности базиса, без обращения матрицы так, что

$$x_i = -\frac{\Delta_{ip} P}{\delta_{ii}} \; ; \qquad i = 1,2,3. \tag{I.I}$$

Матрица усилий в расчетных сечениях контура $b = \left\{b_s\right\}$, где

s - число расчетных сечений, определяемое как функция от вектора независимых переменных параметров жесткостей - g, выбранного как вектор безразмерных (относительных) параметров жесткостей элементов, входящих в контур

$$g = (g_s), \qquad \text{где} \qquad g_s = \frac{i_s}{i_o} ,$$

i_s, i_o - погонные жесткости s-го и опорного элементов, соответственно.

Матрица усилий в расчетных сечениях контура

$$b = b(g^k) = b_o x + b_p \tag{I.2}$$

соответствует исходному вектору параметров жесткостей g^k на "к"-ом этапе расчета (плане задачи). Матрицы от единичных неизвестных b_o и матрица от внешних сил b_p в основной системе имеют обычный смысл и не зависят от плана задачи, т.е. не являются функцией безразмерных параметров жесткостей. При формировании алгоритма оптимального проектирования контура-рамы эти матрицы (b_o, b_p) являются исходными матрицами. При этом матрица b_o зависит лишь от топологии контура, а матрица b_p - также от вида загружения (от кода нагрузки).

Вектор неизвестных $x = \{x_i\}$, где i = I,2,3 является функцией вектора безразмерных параметров жесткостей $x = x(g^k)$ и связывает функционально матрицу усилий с планом задачи (g^k).

2. Расчет контура-рамы на прочность

Граница прочных размеров контура-рамы определяется из условия прочности с учетом действия продольных сил так, что в каждом расчетном сечении удовлетворяется условие прочности

$$[F_s] \geq \frac{R(g)}{[\sigma]}, \tag{2.I}$$

где $R(g)$ - расчетное усилие, определяемое из совместного действия изгибающего момента и продольной силы:

$$R(g) = \frac{M_я}{r_я},$$

где $M_я$ - ядровый момент;

$r_я$ - радиус ядра сечения.

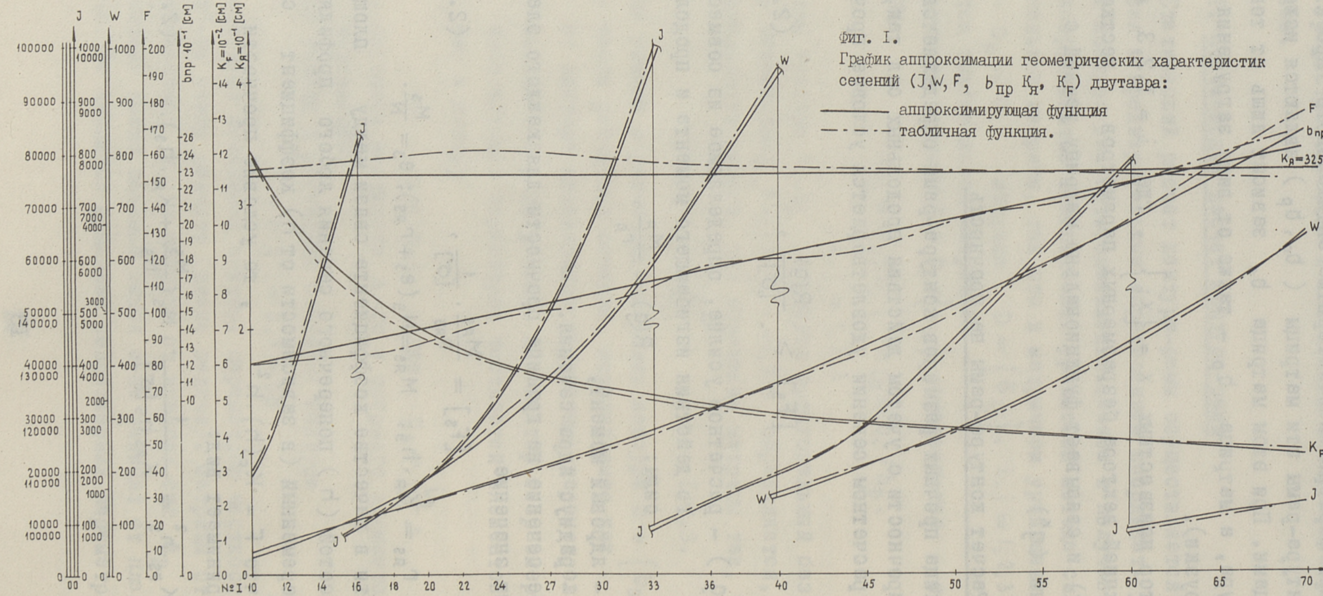
Поперечное сечение на границе прочности для каждого элемента получит значение

$$[F_s] = \frac{M_{яs}}{r_{яs}} \cdot \frac{1}{[\sigma]}, \tag{2.2}$$

где $r_{яs} = K_я \cdot h_s$; $M_{яs} = N_s(e_s + r_{яs})$; $e_s = \frac{M_s}{N}$.

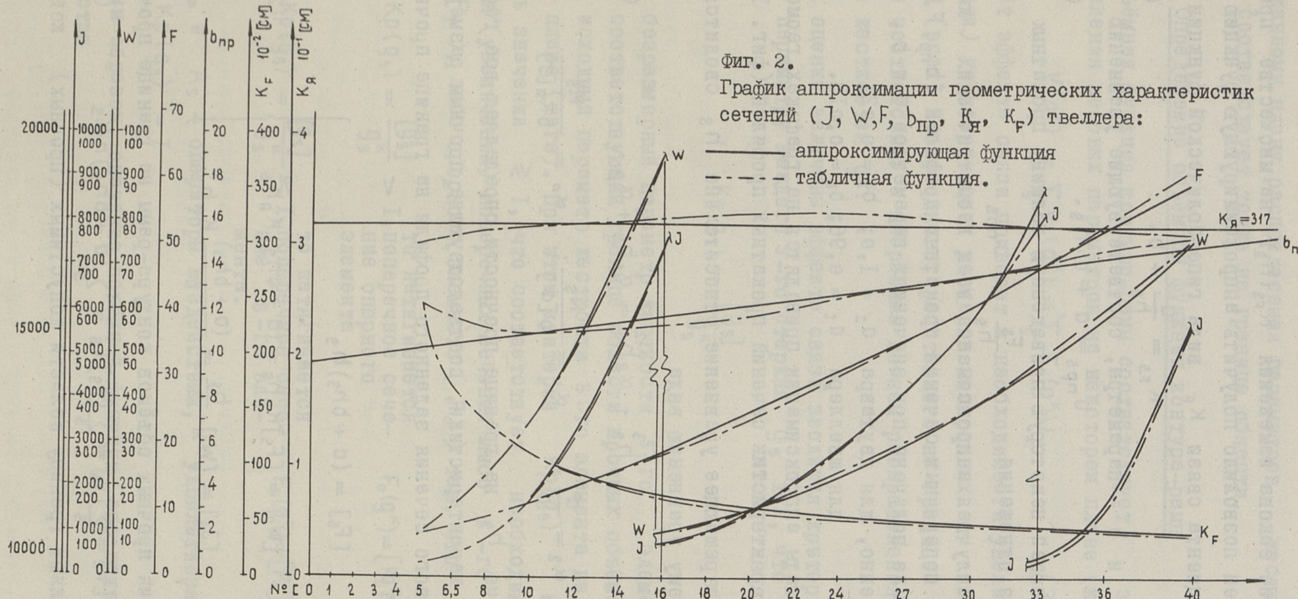
Если ввести в качестве коэффициента связи между площадью (F) и высотой (h) поперечного сечения любого профиля некоторый переменный (в зависимости от h) коэффициент связи K_F так, что $F = K_F(h) \cdot h^2$, то условие прочности на границе принимает вид:

$$K_{Fs} \cdot h_s^2 = \frac{1}{K_{яs} h_s [\sigma]} \cdot N_s \left(\frac{M_s}{N_s} + K_я \cdot h_s \right). \tag{2.3}$$



Фиг. I.

График аппроксимации геометрических характеристик сечений ($J, W, F, b_{пр}, K_я, K_F$) двутавра:



Фиг. 2.
График аппроксимации геометрических характеристик сечений (J, W, F, $b_{пр}$, $K_Я$, K_F) твеллера:
——— аппроксимирующая функция
— · — табличная функция.

Изучение закона изменения $K_{FS}(h_s)$ на множестве прокатных профилей позволило получить аппроксимирующую функцию для коэффициента связи K_F вида гиперболической функции от h

$$K_{FS} = \frac{a}{h_s} + b, \qquad (2.4)$$

где a и b – параметры, соответствующие уравнению прямой

$$b_{nps} = a + b \cdot h_s, \qquad (2.5)$$

описывающей некоторую приведенную толщину прокатных профилей, из отношения $\frac{F_s}{h_s} = b_{nps}$.

Наилучшая аппроксимация всех геометрических характеристик поперечных сечений прокатных профилей (b_{np}, F, W, J, K_F) была получена при значениях параметров a и b, соответственно, для двутавра $a_I = 1{,}0$; $b_I = 0{,}02$;

для швеллера $a_{[} = 0{,}96$; $b_{[} = 0{,}013$.

Результаты аппроксимации приводятся на графиках геометрических характеристик сечений прокатных профилей (фиг. I и 2).

Разрешающее уравнение относительно h_s сводится к кубическому уравнению вида

$$h_s^3 + \alpha_2 h_s^2 = \alpha_1 h_s + \alpha_0, \qquad (2.6)$$

где $\alpha_2 = \frac{a}{b}$, $\alpha_1 = \frac{N_s}{b[\sigma]}$; $\alpha_0 = \frac{M_s}{bK_я[\sigma]}$.

Значение h_s на границе прочности определяет все геометрические характеристики, соответствующие прочным размерам расчетного сечения заданного профиля на границе прочности так, что

$$\left.\begin{aligned} [F_s] &= (a + bh_s)h_s \\ [W_s] &= [F_s]K_я h_s = (a + bh_s)K_я h_s^2 \\ [J_s] &= [W_s]\cdot\frac{h_s}{2} = \frac{(a + bh_s)}{2}K_я h_s^3 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.7)$$

Значения прочных объёмов контура-рамы на границе прочности

$$[V] = \sum_s [V_s] = \sum_s [F_s] l_s = \sum_s (a + bh_s) h_s l_s \qquad (2.8)$$

определяют границу области допустимых (прочных) конструкций. Заданному плану распределения параметров жесткостей $g = g^k$ соответствует точка на границе области.

3. Определение объёмной функции контура-рамы

Объёмная функция контура-рамы соответствует закону распределения весовых параметров на некотором плане (к):

$$V(g^k) = \sum_s V_s(g^k) = \sum_s F_s(g^k) l_s. \qquad (3.I)$$

Учёт эффекта связи приводит к необходимости увеличения (натяжения) геометрических размеров поперечных сечений стержней (всех, кроме одного, работающего на границе прочности) в соответствии с выбранным планом распределения параметров жесткостей g^k.

Для оценки величины эффекта связи вводится критерий по весовому параметру каждого s-го стержня g_s так, что

$$Kp(g_s) = \frac{[g_s]}{g_s^k},$$

где $[g_s]$ безразмерный параметр жесткости s-го элемента, соответствующий границе области прочных объёмов;

g_s^k – исходный параметр жесткости s-го элемента на k-м плане (шаге). При этом критерий $Kp(g_s)$ может принимать значения $\gtrless$ I, что соответствует необходимости натяжения (увеличения) поперечных сечений либо s-го элемента (F_s), либо опорного элемента (F_o) так, что

если $Kp(g_s) = \frac{[g_s]}{g_s^k} > I$, то натягивается поперечное сечение опорного элемента $F_o(g^k) = [F_s] \cdot A_o$.

Если $Kp(g_s) = \frac{[g_s]}{g_s^k} < I$, то натягивается поперечное сечение s-го элемента. $F_s(g^k) = [F_o] \cdot A_s$.

Здесь A_o и A_s – операторы воздействия, удовлетворяющие $Kp(g_s) = I$

Таким образом, значение объёмной функции определяется из равенства

$$V(g^{k}) = \sum_{s} V_s(g^{k}) = \sum_{s} F_s(g^{k}) l_s = \sum_{s} [F_o] A_s l_s, \quad (3.2)$$

где $F_s(g^k)$ строго соответствуют исходному плану распределения весовых параметров g^k и определяют объём контура-рамы на плане K.

4. Оптимальное проектирование контура-рамы

В общем случае объёмная функция рамы больше, чем объём рамы на границе прочности так, что $V(g) > [V]$. Лишь для оптимального вектора $g_{опт}$, соответствующего оптимальному плану распределения весовых параметров элементов, значение объёмной функции равно значению объёма на границе прочности, т.е. $V(g_{опт}) = [V](g_{опт})$, определяя раму минимального объёма, как равнопрочную конструкцию.

Рама минимального объёма обладает тем свойством, что эффект связи в ней равен нулю, при этом, по крайней мере, в одном из сечений каждого стержня (в расчетном сечении) напряжения достигают предела прочности.

Если ввести критерий по вектору весовых параметров $g = (g_s)$, где s – индекс расчетного сечения так, что

$$Kp(g) = \frac{V(g)}{[V]},$$

то оптимальному решению $g_{опт.}$ соответствует значение критерия

$$Kp(g_{опт.}) = I.$$

Для контура-рамы, обладающего вертикальной осью упругой симметрии, вектор весовых параметров $g = (g_{рв}, g_{рн})$. Здесь $g_{рв}$ и $g_{рн}$ – безразмерные весовые параметры верхнего и нижнего ригеля, соответственно.

Задача оптимального проектирования контура-рамы формулируется как двумерная задача, в случае, когда нагрузка сосредоточена лишь в узлах рамы. При этом число расчетных сечений равно числу стержней, входящих в контур.

В случае, когда нагрузка приложена в пролете стержня, число расчетных сечений больше числа стержней, входящих в контур, по крайней мере, на одно (для загруженного стержня - одно расчетное сечение в середине пролета) и задача формулируется, как трех-(или более) мерная.

Учёт влияния нагрузки в пролете стержня и введение дополнительного расчетного сечения допускает возможность дискретного изменения поперечного сечения по длине загруженного в пролете стержня. При этом длина участка стержня с постоянным поперечным сечением является величиной переменной, зависящей от распределения усилий в стержне, которое, в свою очередь, является функцией закона распределения весовых параметров.

Задача оптимального проектирования контура-рамы формулируется как задача оптимального распределения материала между элементами контура, удовлетворяющего требованиям прочности (или устойчивости, или жесткости), с минимумом выбранной функции цели (объём, вес).

Отыскание вектора весовых параметров, минимизирующего функцию цели (объём, вес), осуществляется как шаговый процесс по каждому из весовых параметров в направлении $Kp(g) \to 1$.

5. Алгоритм проектирования контура-рамы минимального объёма (веса)

А. Исходные данные:

I) код нагрузки (в соответствии с кодом нагрузки поставлена матрица внешних сил в основной системе - b_p);

2) вектор длин $L = (l_s)$, $s = 1, 2, 3, 4$;

3) профиль сечений (индекс I, 2, 3, 4, ...);

Параметры \ Вид	I	[	□ $h : b = n$	o d
Индекс	I	2	3	4
a	I.0	0.96	0	0
b	0.02	0.0I3		0.787
$к_я$	0.325	0.3I7	0.I67	0.I25

4) материал (E , $[\sigma]$).

Б. Блок-схема счета

Первый блок. Организация поиска направления оптимизации или перебора параметров жесткостей:

$$g^к = (g^к_в;\ g^к_н); \quad к \text{ - индекс шага.}$$

Второй блок. Формирование матрицы усилий:

$$b(g^к) = (b_s) = (M_s N_s), \qquad s = 1,2,3,4,5,$$

где s - расчетное сечение

$$b(g^к) = b_o\, x(g^к) + b_p, \tag{5.1}$$

где

$$x(g^к) = \begin{Vmatrix} x^к_1 \\ x^к_2 \\ x^к_3 \end{Vmatrix} = -D^{-1} D_p P, \tag{5.2}$$

$$D = \begin{Vmatrix} \delta_{11} & & 0 \\ & \delta_{22} & \\ 0 & & \delta_{33} \end{Vmatrix}; \quad D_p = \begin{Vmatrix} \Delta^{кн}_{1p} \\ \Delta^{кн}_{2p} \\ \Delta^{кн}_{3p} \end{Vmatrix}, \tag{5.3}$$

$$\delta_{ii} = \bar{b}'_{oi} f \bar{b}_{oi}; \quad \Delta^{кн}_{ip} = \bar{b}'_{oi} f \bar{b}^{кн}_p, \tag{5.4}$$

$$i = 1,2,3.$$

Здесь матрицы усилий $\bar{b}_o,\ \bar{b}^{кн}_p$ не зависят от индекса шага.

Матрица податливости $f = f(g^к)$ зависит от индекса шага и имеет следующую структуру

$$f = \{f_s\}; \quad f_s = \frac{1}{i_o} \begin{Vmatrix} 1 & \frac{l_s}{2g_s} \\ \frac{l_s}{2g_s} & \frac{l_s^2}{3g_s} \end{Vmatrix}; \quad g_s = \frac{i_s}{i_o}, \tag{5.5}$$

$$s = 1,2,3,4$$

в случае, если раскрытие статической неопределимости проводится лишь с учетом деформации изгиба (без учета поперечных и продольных деформаций).

Третий блок. Определение границы прочных объёмов контура-рамы $[V]$:

$$[V] = \sum_{s=1}^{4v5} [V_s] = \sum_{s=1}^{4v5} [F_s] l_s = \sum_{s=1}^{4v5} (a + b h_s) h_s l_s . \qquad (5.6)$$

Высота элемента рамы $h_s = h_s(g^k)$ зависит от индекса шага и вычисляется на каждом шаге из условия прочности (2.3), приводящегося к кубическому уравнению относительно h_s(2.6). Решение уравнения осуществляется итерационным методом по схеме:

$$h_s^{(0)} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{M_s}{K_я [\sigma]}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$h_s^{i+1} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} h_s^{(i)} - \frac{1}{\alpha_2} h_s^{(i)3}\right)^{\frac{1}{2}} = \qquad (5.7)$$

$$= \left(\frac{M_s}{K_я [\sigma]} + \frac{N_s h_s^{(i)}}{[\sigma]} - \frac{b}{a} h_s^{(i)3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Все геометрические параметры расчетного сечения на границе прочности определяются по аппроксимирующим функциям (2.7) так, что погонная жесткость s -го элемента на границе прочности равна

$$[i_s] = \frac{[J_s]}{l_s} = \frac{[F_s] K_я h_s^2}{2 l_s} = \frac{K_я}{2 l_s} (a + b h_s) h_s^3, \qquad (5.8)$$

а его безразмерный параметр жесткости на границе прочности определяется:

$$[g_s] = \frac{i_s}{i_0} = \frac{[F_s] h_s^2}{[F_0] h_0^2} \cdot \frac{l_0}{l_s} = \frac{(a + b h_s) h_s^3}{(a + b h_0) h_0^3} \cdot \frac{l_0}{l_s} \qquad (5.9)$$

или приближенно для малых значений " b "

$$[g_s] \approx \frac{h_s^3}{h_0^3} \cdot \frac{l_0}{l_s}. \qquad (5.10)$$

<u>Четвертый блок</u>. Определение объёмной функции контура-рамы $V(g^k)$

$$V(g^k) = \sum_{s=1}^{4} V_s (g^k), \qquad (5.11)$$

где $V_s(g^k)$ – объёмная функция s -го элемента, входящего в раму, удовлетворяющая закону распределения весовых параметров g на k-ом шаге (g^k).

$V(g^к)$ – объёмная функция контура-рамы, определенная с учетом эффекта связи, т.е. удовлетворяющая условие

$Kp(g_s) = I$ для всех (g_s), $(s = I,2,3,4)$, где

$$Kp(g_s) = \frac{[g_s]}{g_s},$$

$[g_s]$ – безразмерный параметр жесткости s-го элемента на границе прочности;

g_s – исходный безразмерный параметр жесткости того же элемента $g_s = g_s^к$ на $к$-ом шаге.

Вычисление объёмных функций элементов, входящих в контур-раму, проводится по одной из четырех схем:

①

$$Kp(g_в) < 1 \longrightarrow V_{рв}(g) = [V_{ст}] \cdot A_{рв}$$

$$Kp(g_н) < 1 \longrightarrow V_{рн}(g) = [V_{ст}] \cdot A_{рн}$$

②

$$Kp(g_в) > 1 \longrightarrow 1)\ V_{ст}(g) = [V_{рв}] \cdot A^в_{ст}$$

$$Kp(g_н) < 1 \longrightarrow 2)\ V_{рн}(g) = V_{ст}(g) \cdot A_{рн}$$

③

$$Kp(g_в) < 1 \longrightarrow 2)\ V_{рв}(g) = V_{ст}(g) \cdot A_{рв}$$

$$Kp(g_н) > 1 \longrightarrow 1)\ V_{ст}(g) = [V_{рн}] \cdot A^н_{ст}$$

④

$$\left.\begin{aligned} Kp(g_в) > 1 \\ Kp(g_н) > 1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{определяется } \frac{Kp(g_в)}{Kp(g_н)} \gtrless 1,$$

если $$\frac{Kp(g_в)}{Kp(g_н)} > 1 \longrightarrow \left\{\begin{aligned} &1)\ V_{ст}(g) = [V_{рв}] \cdot A^в_{ст} \\ &2)\ V_{рн}(g) = V_{ст}(g) \cdot A_{рн} \end{aligned}\right.,$$

если $$\frac{Kp(g_в)}{Kp(g_н)} < 1 \longrightarrow \left\{\begin{aligned} &1)\ V_{ст}(g) = [V_{рн}] \cdot A^н_{ст} \\ &2)\ V_{рв}(g) = V_{ст}(g) \cdot A_{рв}. \end{aligned}\right.$$

Здесь $A_{рв}, A_{рн}, A_{ст}$ – операторы воздействия, обеспечивающие требование $Kp(g_s) = I$ для ригеля верхнего, ригеля нижнего, стойки – соответственно.

<u>Пятый блок</u>. Формирование критерия по вектору параметров жесткостей $Kp(g^к)$:

$$Kp(g^{\kappa}) = \frac{V(g^{\kappa})}{[V](g^{\kappa})} \geq 1.$$

Здесь формируется логическая передача управления либо (если $Kp(g^{\kappa}) > I$) в первый блок для ($\kappa + I$) шага, либо (если $Kp(g^{\kappa}) = I$) для печати вектора $g^{\kappa} = g_{опт} = (g_{в\,опт}, g_{н\,опт.})$, минимизирующего объемную функцию рамы.

Литература

I. Э.М. Иеги. Оптимальное проектирование статически неопределенных рам, как проблема математического программировани. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 227, Таллин, I965.

E.Jögi, R.Nurmuchamedowa

Zur Berechnung der optimalen geschlossenen Rahmen

Zusammenfassung

Man behandelt die Aufgabe der geschlossenen Rahmen von minimalem Gewicht (Volumen) im elastischen Zustand des Materials. Die statischen Berechnungen formuliert man in Matrizenform. Die Grenzbedingungen werden von Festigkeitsbedingungen hergeleitet. Die Funktion des Volumens wird auf Grund der Menge der unabhängigen Parameter der Steifigkeiten gegeben. Man formuliert das Kriterium der optimalen Verteilung der Steifigkeiten. Algorithm und Blockschema der Rechnungen sind ausgearbeitet.

$$Kp(q^*) \quad \frac{V(q^*)}{\qquad} \geq 1$$

Здесь формулируется логическая подсистема управления либо (если $Kp(q^*)_{kI} > 1$) к первой фазе для ($\kappa + 1$) шага, либо (если $Kp(q^*) = 1$) для печати вектора $q^* = q_{опт} = (q_{1опт}, \ldots q_{nопт})$, минимизирующего объемную функцию рамы.

Л и т е р а т у р а

1. Я.-Х. Э р и к. Оптимальное проектирование статически неопределимых ферм при помощи математического программирования. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 227, Таллин, 1965.

Я.-Х. Эрик

<u>Zur Berechnung der optimalen geschlossenen Rahmen</u>

<u>Zusammenfassung</u>

Man behandelt die Aufgabe des geschlossenen Rahmen von minimalem Gewicht (Volumen) im elastischen Zustand des Materials. Die statischen Berechnungen formuliert man in Matrizenform. Die Grenzbedingungen werden von Festigkeitsbedingungen hergeleitet. Die Funktion des Volumens wird auf Grund der Menge der unabhängigen Parameter der Steifigkeiten gegeben. Man formuliert das Kriterium der optimalen Verteilung der Steifigkeiten. Algorithm und Flockschema der Berechnung sind ausgearbeitet.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 360 1974

УДК 624.041.2

Э.М. Иеги, Х.Х. Лаул, Ю.Ю. Нурк

К ПРОЕКТИРОВАНИЮ ОДНОКОНТУРНОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ РАМЫ С МИНИМАЛЬНЫМ РАСХОДОМ АРМАТУРЫ

В статье рассматривается задача проектирования П-образной рамы из монолитного железобетона с шарнирным и жестким опиранием при условии минимального расхода продольной расчетной арматуры.

Задача формулируется как задача нелинейного математического программирования. При этом в качестве функции цели выбирается объём арматуры рамы при условии удовлетворения её требованиям прочности в соответствии с инструкцией [I].

Задача исследуется на двух примерах. При этом результаты иллюстрируются графически.

Постановка задачи

Задача оптимального проектирования железобетонной рамы формулируется следующим образом:

Определить безразмерный вектор параметров жесткостей

$$g = (g_s); \qquad g_s = \frac{B_s}{B_0}, \tag{I}$$

где s – индекс расчетного элемента;

B_s – редуцированная жесткость элемента.

Минимизирующий объём продольной расчетной арматуры рамы

$$V_a(g) = \int_z F_a(g)\,dz, \tag{2}$$

где z – полная длина оси рамы;

$F_a(g)$ – расчетная площадь арматуры.

При нелинейных ограничениях, определяющих область прочных конструкций (Ω)

$$g \in \Omega : \left\{ \begin{array}{l} 1.\ F_a(g) \geq [F_a] \\ 2.\ [F_a] = F(M_s) \end{array} \right\}. \qquad (3)$$

Здесь

$[F_a]$ - площадь расчетной продольной арматуры, удовлетворяющая требованиям прочности;

$F_a(g)$ - площадь расчетной продольной арматуры, соответствующая закону распределения параметров жесткости;

M_s - расчетный изгибающий момент в s-ом расчетном элементе.

При этом геометрия осей, геометрия поперечных сечений бетона и прочностные характеристики материалов предполагаются заданными.

В статье рассматривается геометрическая модель сформулированной выше задачи, при этом исследуются нижняя и верхняя границы области допустимых конструкций (Ω) в окрестности экстремальных решений на множестве независимых безразмерных параметров жесткости (g).

Сформулированная таким образом задача рассматривается для П-образной рамы с шарнирными и жесткими опорами. Задачи решались на ЭЦВМ типа "Минск" и "Наири".

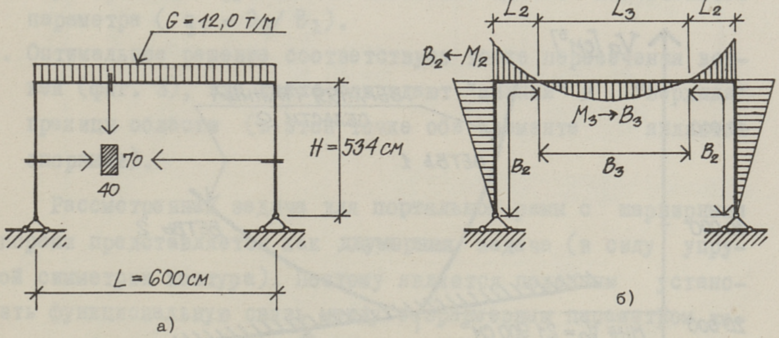
Пример I.

Принимаются два расчетных сечения - в середине балки и на опоре в точках, где изгибающий момент достигает экстремального значения. Число расчетных элементов равно трём, при этом рама имеет вертикальную упругую ось симметрии. Жесткость элемента (B_s), постоянная по всей длине расчетного элемента, определяется по формуле (4)

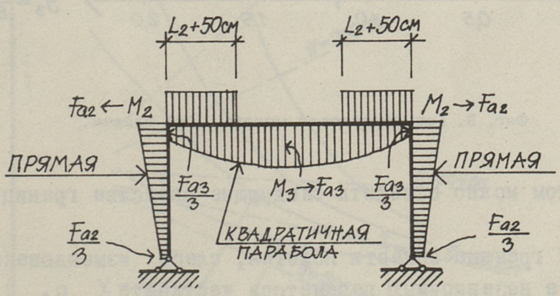
$$B_s = \frac{h_o z_1}{\frac{\psi_a}{E_a F_a} + \frac{\psi_\delta}{(\gamma + \xi) b h_o E \delta \nu}}. \qquad (4)\ [I(6,2I)]$$

Расчетным элементом здесь является часть рамы, в пределах которой изгибающий момент не меняет знака.

Распределение продольной расчетной арматуры вне расчетных сечений проводится в соответствии с эпюрой изгибающих моментов, с учётом конструктивных требований, и иллюстрируется на фиг. 2.



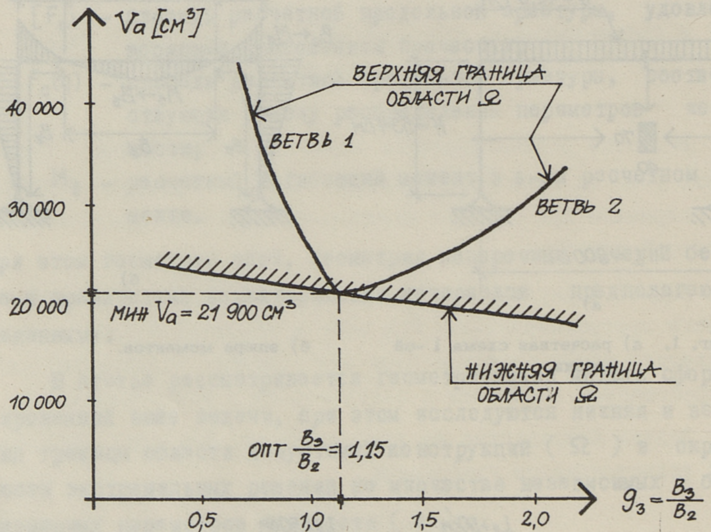
Фиг. 1. а) расчетная схема 1-ой задачи, б) эпюра моментов.



Фиг. 2. Распределение продольной расчетной арматуры.

Расчетные сечения элементов рамы выбираются как прямоугольные. Все исходные предпосылки выбираются с учётом существующей практики проектирования железобетонных конструкций.

Результаты счета иллюстрируются на геометрической модели задачи (фиг. 3).



Фиг. 3. Геометрическая модель 1-ой задачи.

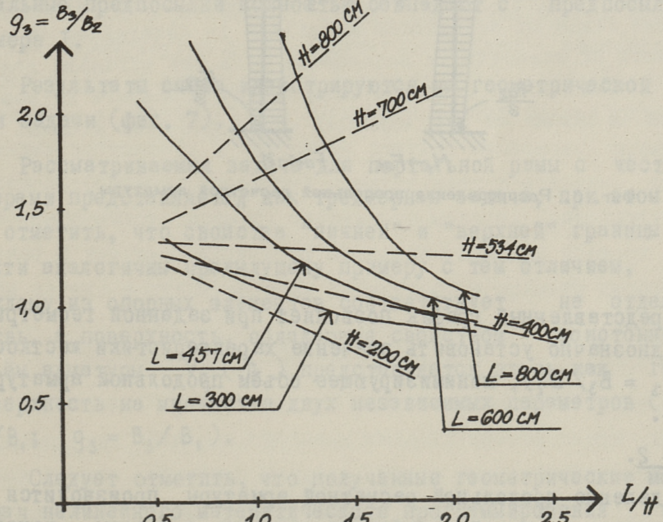
При этом можно отметить следующие свойства границ области Ω :

1. "Нижняя" граница области пологая, слабо изменяющаяся на множестве независимых параметров жесткости (g_s).
2. "Верхняя" граница области - кусочно-гладкая, монотонно изменяющаяся на множестве независимых параметров жесткости. Она состоит из отдельных ветвей, каждая из которых соответствует своему опорному элементу. Опорным элементом, как известно, в теории проектирования оптимальных стержневых конструкций называют стержень, жесткость

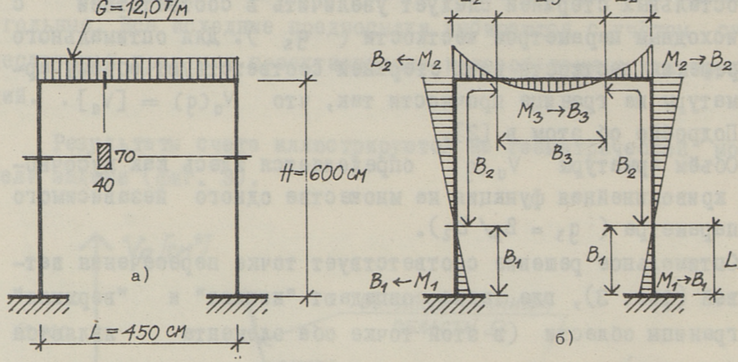
которого остается на границе прочности. Жесткости всех остальных стержней следует увеличить в соответствии с исходным параметром жесткости (g_s). Для оптимального решения жесткости всех стержней соответствуют объёму арматуры на границе прочности так, что $V_a(g) = [V_a]$. Подробно об этом в [2].

3. Объём арматуры $V_a(g)$ определяется здесь как кусочно-криволинейная функция на множестве одного независимого параметра ($g_3 = B_3/B_2$).
4. Оптимальное решение соответствует точке пересечения ветвей (фиг. 3), где также совпадают "нижняя" и "верхняя" границы области (в этой точке оба элемента являются опорными).

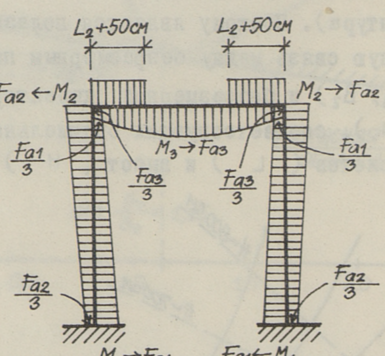
Рассмотренная задача для портальной рамы с шарнирными опорами представляется как двумерная задача (в силу упругой симметрии контура). Поэтому является полезным установить функциональную связь между безразмерным параметром жесткости ($g_3 = B_3/B_2$) и безразмерной характеристикой геометрии осей (L/H), соответствующих оптимальному решению для различных пролетов (L) и высот (H) рамы (фиг. 4).



Фиг. 4. Функциональная связь между g_3 и L/H.



Фиг. 5. а) расчетная схема 2-ой задачи, б) эпюра моментов.

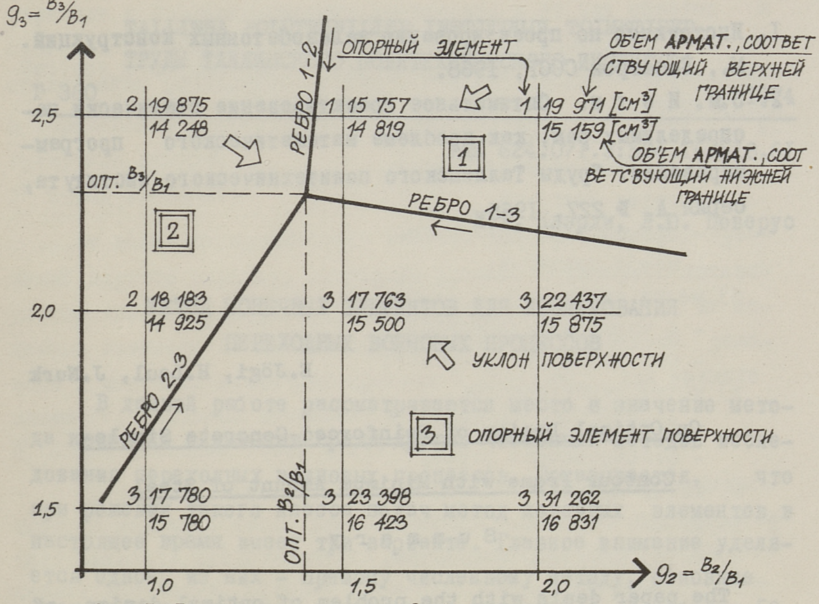


Фиг. 6. Распределение продольной расчетной арматуры.

Представленный график позволяет при заданной геометрии осей однозначно установить значение характеристики жесткостей($g_3 = B_3/B_2$), минимизирующее объём продольной арматуры в раме.

<u>Пример 2</u>.

Распределение продольной расчетной арматуры производится в соответствии с эпюрой изгибающих моментов с учетом конструктивных требований проектирования железобетонных конструкций (фиг. 6).



Фиг. 7. Геометрическая модель 2-ой задачи.

Остальные предпосылки полностью совпадают с предпосылками примера I.

Результаты счёта иллюстрируются на геометрической модели задачи (фиг. 7).

Рассматриваемая задача для портальной рамы с жесткими опорами представляется как трёхмерная задача, при этом можно отметить, что свойства "нижней" и "верхней" границы области аналогичны предыдущему примеру с тем отличием, что каждому из опорных элементов соответствует не отдельная ветвь, а поверхность, обладающая свойством монотонности. Объём арматуры $V_a(g)$ представляется здесь как гиперповерхность на множестве двух независимых параметров ($g_2 = B_2/B_1$; $g_3 = B_3/B_1$).

Следует отметить, что полученные геометрические модели задач нелинейного математического программирования имеют характер, аналогичный геометрической модели задачи оптимального проектирования стальных рамных конструкций [2].

I. Инструкция по проектированию железобетонных конструкций. М., Госстрой СССР, 1968.
2. Э.М. И е г и. Оптимальное проектирование статически неопределимых рам, как проблема математического программирования. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 227, 1965.

E.Jõgi, H.Laul, J.Nurk

On Optimal Design of Reinforced Concrete Single-Contour Frame with Minimum Amount of Steel

S u m m a r y

The paper deals with the problem of optimal design of reinforced concrete frame. The problem is formulated as a nonlinear programming calculation. As the function to be minimized we take the amount of design longitudinal reinforcement. The field of acceptable solutions is determined by requirements of strength in accordance with the official regulation on reinforced concrete design. The procedure of computation is shown on two examples of single-span frames.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 360 1974

УДК 624.071.3:534.16:518.61

Х.Х. Кяэрди, Л.Ю. Поверус

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В данной работе рассматриваются место и значение метода конечных элементов среди других численных методов исследования переходных волновых процессов. Показывается, что при решении такого класса задач метод конечных элементов в настоящее время имеет три варианта. Главное внимание уделяется одному из них - прямому численному методу, основные идеи которого впервые высказаны в работе [1]. В работах [2-4] метод применяется для исследования распространения одномерных упругих волн. Для упруго-пластических волн развит прямой метод в работах [1] и [5], для вязкоупругих волн в [6] и для термоупругих в [7]. Двумерные задачи рассмотрены в статье [8]. В исследовании Уилкинса [9] разрабатывается второй и в работе [10] применяется третий подход метода конечных элементов. В настоящей статье, на основе примера о распространении продольных упругих волн в стержне, разъясняется сущность прямого численного метода. Приводится сравнение с другими численными методами (главным образом методом сеток) и анализируются преимущества прямого метода.

1. Классификация численных методов

Волновые процессы можно разделить на одно-, дву- и трёхмерные. Для исследования каждого класса задач имеется своя группа численных методов. Общую классификацию аналитических и численных методов можно найти в работе [11].

Ниже приведён ряд численных методов интегрирования систем гиперболических уравнений при математическом моделировании переходных волновых процессов термоупругой и упругой деформации.

1^0 Одномерные волновые процессы:

а) метод конечных элементов,
- метод Уилкинса,
- прямой численный метод,
- метод смещений;

б) метод сеток,
- с выделением разрывов,
- без выделения разрывов;

в) метод характеристик,
- стандартная техника,
- фиксированная сетка;

г) метод прямых.

2^0 Двумерные волновые процессы:

а) метод конечных элементов,
- метод Уилкинса,
- прямой численный метод,
- метод смещений;

б) метод трёхмерных сеток,
- с выделением разрывов,
- без выделения разрывов;

в) метод пространственных характеристик.

Для трёхмерных волновых процессов в настоящее время почти отсутствуют эффективные методы. Дальнейшее развитие метода конечных элементов может принести здесь успех.

2. Разные варианты метода конечных элементов

В последние годы метод конечных элементов нашёл широкое применение в статике и в стационарных задачах динамики. При исследовании переходных волновых процессов метод конечных элементов применялся гораздо реже.

В настоящее время имеются три трактовки последнего случая:

1^0 Прямой численный метод.

Среда разбивается на конечное число элементов и рассматривается макроскопический элемент без промежуточного перехода к дифференциальным уравнениям и от них обратно к конечным элементам. Для каждого элемента применяются непосредственно физические законы и кинематические соотношения в определённой последовательности, учитывая начальные и граничные условия.

2^0 Метод Уилкинса.

За исходное принимается система дифференциальных уравнений первого порядка, отдельные уравнения которого являются выражениями физических законов. Среда разбивается на конечные элементы и система дифференциальных уравнений решается в конечных величинах времени и координат для каждого элемента, учитывая начальные и граничные условия.

3^0 Метод смещений [IO], [I2].

Среда разделяется воображаемыми линиями или поверхностями на конечное число элементов. Поле смещений внутри каждого элемента представляется через смещения "узлов". Вычисляются жёсткости, которые связывают силы и смещения в узлах. Запись и решение уравнений равновесия сводится к решению большой системы алгебраических уравнений вида

$$\vec{F} = \vec{K}\vec{Y} \qquad (I)$$

Здесь $\vec{F}$ и $\vec{Y}$ – соответственно векторы приложенных сил и узловых смещений; $\vec{K}$ – матрица жесткости.

Первый вариант снабжает исследователя большим чувством реальности, разрешает легче обнаружить грубые ошибки в формулировке задачи и позволяет яснее обобщать метод. Несмотря на то, первый вариант нашел сравнительно небольшое применение.

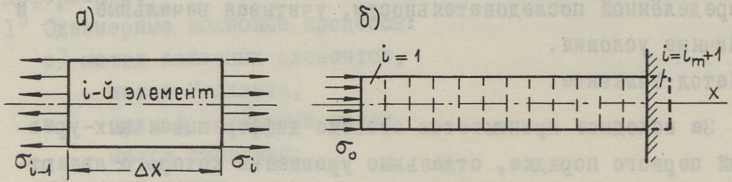
3. Сущность прямого численного метода

Поясним сущность прямого численного варианта метода конечных элементов на основе следующего примера.

Рассмотрим распространение продольных упругих волн в стержне. Разбиваем стержень на конечное число элементов (фиг. Iа) длиной

$$\Delta x = c\Delta t. \qquad (2)$$

Здесь c – скорость распространения продольной волны; Δt – интервал времени.



Фиг. 1 .

Соотношение (2) эквивалентно закону сохранения энергии.

Вычисляется изменение деформации за Δt

$$\Delta \varepsilon = (v_{i+1} - v_i)\Delta t/\Delta x. \qquad (3)$$

Здесь v_{i+1} и v_i – скорости элементов.

Вычисляется полная (накопленная) деформация

$$\varepsilon_i \leftarrow \varepsilon_i + \Delta \varepsilon. \qquad (4)$$

На основе закона Гука получаются напряжения

$$\sigma_i = E\varepsilon_i. \qquad (5)$$

Здесь E – модуль упругости.

Применяется уравнение движения

$$\Delta v = \frac{1}{\rho}(\sigma_i - \sigma_{i-1})\Delta t/\Delta x. \qquad (6)$$

Здесь ρ – плотность материала.

Определяется полная скорость

$$v_i \leftarrow v_i + \Delta v. \qquad (7)$$

Эти вычисления повторяются последовательно для всех значений индекса i, от I до i_m, а затем происходит повторение вычислений до истечения заданного времени.

Формулы (3)...(7) можно использовать и в другой последовательности: (6), (7), (3), (4) и (5). При этом надо в формулах (3), (4) и (5) уменьшить индекс i на единицу.

Основные постулаты, как законы сохранения энергии, количества движения и массы, применялись непосредственно к системе.Так же применялись зависимости, отражающие упругие свойства материала. При более сложной задаче, например в термоупругой постановке, может быть физических законов и больше.

На основе приведённых формул можно вывести дифференциальные уравнения, но с точки зрения получения численных результатов это является лишней работой.

Рассматриваем задачу о распространении упругих волн в стержне с граничными условиями (фиг. Iб). Тогда надо считать, что скорость фиктивного элемента $v_{i\,m+1} = 0$. Кроме того, надо задавать функцию изменения напряжения $\sigma_0 = \sigma_0(t)$; которая может быть произвольной. Если вместо заделки A будет свободный конец стержня, надо считать, что $\sigma_{i\,m} = 0$. При таких граничных условиях автоматически строятся решения, соответствующие отражению упругих волн от обоих концов стержня. Следует отметить, что здесь отсутствуют специальные операции или соотношения, специфически характерные для прямых или отражённых волн.

Решая задачу в перемещениях методом сеток, граничные условия выражаем частично тоже в напряжениях. Такая формулировка задачи приводит к некоторым дополнительным затруднениям. Например, для решения двумерной задачи в перемещениях при помощи трехмерных сеток, где некоторые граничные условия заданы в напряжениях, требуется дополнительное решение системы рекуррентных уравнений.

4. Метод конечных элементов и метод сеток

Дифференциальные уравнеия для примера предыдущего пункта можно представить как I^0 смешанную задачу в скоростях и напряжениях в виде системы

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{9}$$

или 2^0 в виде одного уравнения в перемещениях

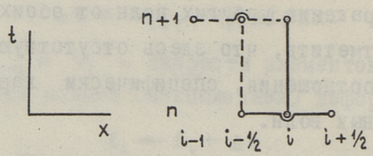
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{10}$$

В монографии Рихтмайера [13] аппроксимируется система (8), (9) следующей явной конечноразностной схемой:

$$\rho \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{\sigma_{i+1/2}^n - \sigma_{i-1/2}^n}{\Delta x} \tag{11}$$

$$\frac{\sigma_{i-1/2}^{n+1} - \sigma_{i-1/2}^n}{\Delta t} = E \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}. \tag{12}$$

Способ образования разностей можно проиллюстрировать диаграммой на фиг. 2, где отмечены точки сетки на плоскости x, t, используемые при применении формул. Образование формулы (11) показано сплошной линией, (12) - штрихованной,



Фиг. 2.

Эта схема является устойчивой при

$$\frac{c\,\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1. \tag{13}$$

Погрешность аппроксимации для довольно гладкого решения

$$e = O\left[(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2\right]. \tag{14}$$

Сравниваем приведённый расчётный алгоритм метода сеток прямым численным методом.

В формулах (3)..(6) можно прибавить индекс времени n и для скорости применить дробные координатные индексы. При помощи $\Delta\varepsilon$ можно в формуле (5) вместо σ_i вычислить $\Delta\sigma$ и, после этого, накопленное напряжение. Учитывая предыдущее, изменяя последовательность формул и уменьшая в связи с этим индекс i при v, как показано в предыдущем пункте, можем выписать

$$\Delta v = v_i^{n+1} - v_i^n = \frac{1}{\rho}(\sigma_{i+1/2}^n - \sigma_{i-1/2}^n)\Delta t/\Delta x, \tag{16}$$

$$\Delta \sigma = \sigma_{i-1/2}^{n+1} - \sigma_{i-1/2}^n = E(v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1})\Delta t/\Delta x. \tag{17}$$

Система (16), (17) эквивалентна системе (11), (12).

Этим доказано, что прямой численный вариант метода конечных элементов формально эквивалентен одной явной схеме метода сеток.

Часто бывает так, что физическая сторона задачи рассматривается при выводе дифференциальных уравнений. А когда, при решении, переходят к конечным разностям, занимаются проблемами вычислительной математики. Прямой численный вариант метода конечных элементов оперирует всё время с конечными величинами и к дифференциалам вообще не переходит. Каждая конечная величина имеет определённый физический смысл и раньше описанные связи (физические законы) применяются непосредственно для составления программы для ЭВМ.

При реализации метода сеток обычно стараются аппроксимировать уравнения высшего порядка типа (10). В работе [11] отмечается, что, по-видимому, заслуживает внимания использование метода сеток с приведением исходной системы дифференциальных уравнений к системе уравнений первого порядка.

Уилкинс аппроксимирует уравнение движения (8) следующим образом [9]:

$$\rho\frac{v_i^{n+1/2} - v_i^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\sigma_{i+1/2}^n - \sigma_{i-1/2}^n}{\Delta x}, \tag{18}$$

где

$$v_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(v_i^{n+1} - v_i^n) \tag{19}$$

и

$$v_i^{n-1/2} = \frac{1}{2}(v_i^n - v_i^{n-1}). \tag{20}$$

Скорость деформации вычисляет Уилкинс как

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} = \frac{v_{i+1}^{n+1/2} - v_i^{n+1/2}}{\Delta x}, \tag{2I}$$

где

$$\varepsilon_{i+1/2}^{n+1/2} = \varepsilon_{i+1/2}^{n+1} - \varepsilon_{i+1/2}^{n}. \tag{22}$$

Если умножим уравнение (2I) на модуль упругости E, получаем аппроксимацию уравнения (9).

Метод Уилкинса аппроксимирует систему (8), (9) явной схемой. Уравнение (I8) надо сначала решить для всех значений индекса i. Только после этого можно приступить к решению уравнения (2I) и нахождению напряжений нового слоя времени.

В таблице I на схеме 8 приведены формулы Уилкинса без дробных индексов времени. Там же представлена диаграмма образования разностей.

Таблица I содержит различные явные и неявные конечно-разностные схемы для аппроксимации уравнения (I0) (схемы I-3) и системы (8), (9) (схемы 4-I0).

Если в схеме 5 (табл. I) отождествить

$$v_i^n = (u_i^n - u_i^{n-1})/\Delta t \tag{23}$$

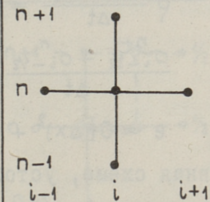
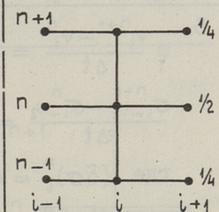
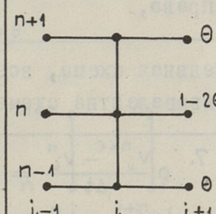
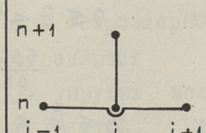
и

$$\sigma_{i-1/2}^n = E(u_i^n - u_{i-1}^n)/\Delta x, \tag{24}$$

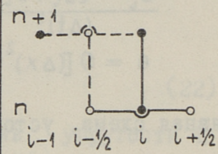
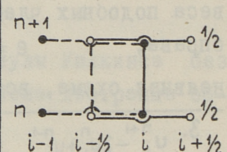
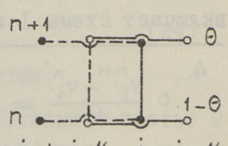
то можно видеть, что схемы 5 и I эквивалентны.

Применяемые в работе [I4] схемы (в настоящей статье 9 и I0, табл. I) аппроксимируют систему (8), (9) без дробных координатных индексов. В этом случае центрирование производных по времени требует использования большего числа расчётных точек, что является неэкономичным.

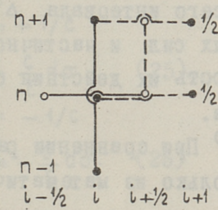
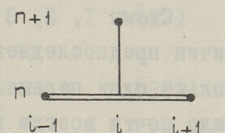
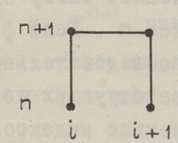
Т а б л и ц а I

Конечноразностные уравнения, погрешность аппроксимации и устойчивость	Диаграмма расположения узлов
1. $\dfrac{u_i^{n+1}-2u_i^n+u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2\dfrac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2},$ $e = O\left[(\Delta x)^2+(\Delta t)^2\right],$ явная схема, устойчива, если $\dfrac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$	
2. $\dfrac{u_i^{n+1}-2u_i^n-u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2\dfrac{(\delta^2 u)_i^{n+1}+2(\delta^2 u)_i^n+(\delta^2 u)_i^{n-1}}{4(\Delta x)^2}$ где $(\delta^2 u)_i^n = u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n$ и т.д., веса подобных членов указаны на диаграмме справа, $e = O\left[(\Delta x)^2+(\Delta t)^2\right],$ неявная схема, всегда устойчива.	
3. $\dfrac{u_i^{n+1}-2u_i^n+u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2\dfrac{\theta(\delta^2 u)_i^{n+1}+(1-2\theta)(\delta^2 u)_i^n+\theta(\delta^2 u)_i^{n-1}}{(\Delta x)^2},$ где $\theta = \mathrm{const}$, $0 \leq \theta \leq 1/2$, $e = O\left[(\Delta x)^2+(\Delta t)^2\right],$ при $0 \leq \theta < 1/4$ устойчива, если $\left(\dfrac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq \dfrac{1}{1-4\theta},$ при $1/4 \leq \theta \leq 1/2$ всегда устойчива, включает схемы I и 2 как частные случаи.	
4. $\rho\dfrac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t} = \dfrac{\sigma_{i+1}^n-\sigma_{i-1}^n}{2\Delta x},$ $\dfrac{\sigma_i^{n+1}-\sigma_i^n}{\Delta t} = E\dfrac{v_{i+1}^n-v_{i-1}^n}{2\Delta x},$ схема неустойчива, если отношение $\Delta t/(\Delta x)^2$ не остаётся ограниченным при $\Delta t, \Delta x \to 0$, это практически неудобно.	

Продолжение табл. I

Конечноразностные уравнения, погрешность аппроксимации и устойчивость	Диаграмма расположения узлов
5. $\rho\dfrac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t}=\dfrac{\sigma_{i+1/2}^n-\sigma_{i-1/2}^n}{\Delta x}$, $\dfrac{\sigma_{i-1/2}^{n+1}-\sigma_{i-1/2}^n}{\Delta t}=E\dfrac{v_i^{n+1}-v_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$, $e=O[(\Delta x)^2+(\Delta t)^2]$, явная схема, устойчива, если $\dfrac{c\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$, эквивалентна схеме I.	
6. $\rho\dfrac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t}=\dfrac{(\delta\sigma)_i^n+(\delta\sigma)_i^{n+1}}{2\Delta x}$, $\dfrac{\sigma_{i-1/2}^{n+1}-\sigma_{i-1/2}^n}{\Delta t}=E\dfrac{(\delta v)_{i-1/2}^n+(\delta v)_{i-1/2}^{n+1}}{2\Delta x}$, где $(\delta\sigma)_i^n=\sigma_{i+1/2}^n-\sigma_{i-1/2}^n$, $(\delta v)_{i-1/2}^n=v_i^n-v_{i-1}^n$ и т.д., веса подобных членов указаны на диаграмме справа, $e=O[(\Delta x)^2+(\Delta t)^2]$, неявная схема, всегда устойчива, эквивалентна схеме 2.	
7. $\rho\dfrac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t}=\dfrac{\theta(\delta\sigma)_i^{n+1}+(1-\theta)(\delta\sigma)_i^n}{\Delta x}$, $\dfrac{\sigma_{i-1/2}^{n+1}-\sigma_{i-1/2}^n}{\Delta t}=E\dfrac{\theta(\delta v)_{i-1/2}^n+(1-\theta)(\delta v)_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x}$, где $\theta=\mathrm{const}$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$, $e=O[(\Delta x)^2+(\Delta t)^2]$, при $0\leqslant\theta<1/2$ устойчива, если $\dfrac{c\Delta t}{\Delta x}\leqslant\dfrac{1}{1-2\theta}$, при $1/2\leqslant\theta\leqslant 1$ всегда устойчива, включает схемы 5 и 6 как частные случаи, эквивалентна схеме 3.	

Продолжение табл. I

Конечноразностные уравнения, погрешность аппроксимации и устойчивость	Диаграмма расположения узлов
8. $$\rho\frac{v_i^{n+1}-v_i^{n-1}}{2\Delta t}=\frac{\sigma^n_{i+1/2}-\sigma^n_{i-1/2}}{\Delta x},$$ $$\frac{\sigma^{n+1}_{i+1/2}-\sigma^n_{i+1/2}}{\Delta t}=E\frac{(v^n_{i+1}-v^n_i)+(v^{n+1}_{i+1}-v^{n+1}_i)}{2\Delta x},$$ явная схема, устойчива, если $$\frac{c\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1.$$	
9. $$\rho\frac{2v_i^{n+1}-v^n_{i+1}-v^n_{i-1}}{2\Delta t}=\frac{\sigma^n_{i+1}-\sigma^n_{i-1}}{2\Delta x},$$ $$\frac{2\sigma_i^{n+1}-\sigma^n_{i+1}-\sigma^n_{i-1}}{2\Delta t}=E\frac{v^n_{i+1}-v^n_{i-1}}{2\Delta x},$$ явная схема, устойчива, если $$\frac{c\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1.$$	
10. $$\rho\frac{v^{n+1}_{i+1}-v^n_{i+1}+v^{n+1}_i-v^n_i}{2\Delta t}=\frac{\sigma^{n+1}_{i+1}-\sigma^{n+1}_i}{\Delta x},$$ $$\frac{\sigma^{n+1}_{i+1}-\sigma^n_{i+1}+\sigma^{n+1}_i-\sigma^n_i}{2\Delta t}=E\frac{v^{n+1}_{i+1}-v^{n+1}_i}{\Delta x},$$ неявная схема, всегда устойчива.	

Здесь следует сделать два замечания.

I° Если закон сохранения количества движения в безразмерном виде выбирать $\Delta\bar{x}=\Delta\bar{t}$, то разрывы распространяются в напряжениях и скоростях без размазывания. Для упругих волн в однородных средах это требование легко выполняется. При распространении термоупругих волн придётся термодинамические соотношения решать более мелким шагом во времени [13], [7]. В работе [I] предложен для исследования упруго-пластических волн метод волнового индекса. Для каждого элемента вводится индикатор, который показывает, как далеко распространяется в элементе локальное возмущение в течение интервала времени Δt_1. Если локальное возмущение выходит за границу элемента в интервале Δt_1, то действующие на неё силы изменяются. В этом случае вычисление переменных для всего интервала Δt_1 производится частично на основе старых сил и частично на основе новых. Относительная длительность их действия определяется при помощи волнового индекса.

2^0 При сравнении различных дискретных схем иногда исходят только из математических соображений, забывая о простоте составления программы для ЭВМ, её экономичности, с точки зрения использования памяти машины и быстроты работы программы.

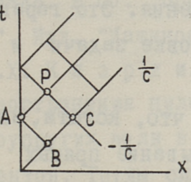
Схемы I, 2, 3 и 8 требуют запоминания в памяти ЭВМ величин предпоследнего временного слоя. Схемы I, 2 и 3 имеют только одну переменную u, но для практических расчётов надо почти всегда находить ещё σ, v и $\dot{v}$. Независимо от схемы всё равно требуются описания массивов u, σ, v и $\dot{v}$, которые занимают своё место в памяти машины.

Прямой численный вариант метода конечных элементов (применяет схему 5) не требует вообще введения временного индекса n. Если физические законы применяются в определённой последовательности, то ЭВМ применяет автоматически в соответствующих местах переменные с нужными индексами n. Чем меньше индексов, тем быстрее работает программа.

5. Метод конечных элементов и метод характеристик

При применении метода характеристик исходная система дифференциальных уравнений обычно приводится к форме системы из дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим стандартную технику численной реализации метода характеристик на основе распространения продольных упругих волн в стержне, как это сделано в статье [I5].

Для системы уравнений (8), (9) характеристические линии в пространстве x, t, вдоль которых напряжения и скорости определяются полными производными, будут + I/c и -I/c (фиг. 3).



Фиг. 3.

Из уравнений (8), (9) получаем соответствующие характеристические уравнения

I° вдоль $dt/dx = +1/c$

$$dv = \frac{c}{E} d\sigma , \qquad (25)$$

2° вдоль $dt/dx = -1/c$

$$dv = -\frac{c}{E} d\sigma . \qquad (26)$$

Проинтегрировав уравнения (25), (26) вдоль характеристик, получим

$$v_p - v_A = \frac{c}{E}(\sigma_p - \sigma_A), \qquad (27)$$

$$v_p - v_c = -\frac{c}{E}(\sigma_p - \sigma_c). \qquad (28)$$

Решая систему (27), (28), можем найти неизвестные скорости v_p и напряжения σ_p в точке пересечения характеристик.

При решении смешанной задачи в скоростях и напряжениях методами сеток или конечных элементов v^{n+1} и σ^{n+1} находятся в разных точках на новом временном слое. Методом характеристик вычисляются v^{n+1} и σ^{n+1} в одной и той же точке.

В дискретной форме записанная система (27), (28) запоминает конечноразностные уравнения. Ещё больше примыкает к методу сеток техника фиксированной сетки метода характеристик. При стандартной технике, в случае линейной системы дифференциальных уравнений, расчётная сетка (фиг. 3) имеет постоянные шаги и его узлы фиксированы. Тогда можно через узлы провести прямоугольную сетку и показать, что в таком простом случае нет существенного различия между двумя вариантами метода характеристик и методом сеток. С другой стороны, в предыдущем пункте доказано, что метод конечных элементов использует определённые схемы метода сеток.

6. Некоторые положительные аспекты прямого численного метода

1^0 Прямое применение постулатов обеспечивает обзорный и ясный характер метода с физической точки зрения. Это гарантирует легкость обнаружения ошибок в постановке задачи и показывает пути к обобщениям.

2^0 Простота применения граничных условий, что, кстати, автоматически обеспечивает отражение и накладывание прямых и отражённых волн.

3^0 Если закон сохранения энергии в безразмерном виде принять $\Delta\bar{x} = \Delta\bar{t}$, распространяются разрывы в напряжениях и скоростях без "размазывания".

4^0 Хорошо подходит для программирования. Сравнительно экономично используются память ЭВМ и машинное время.

5^0 Позволяет давать указания к целесообразному применению метода сеток, так как прямой численный метод примыкает к одной из многих возможных конечноразностных схем.

Литература

1. N. Davids, P.K. Mehta. Computer analysis methods for stress waves and spherical cavities. Eng. Res. Bull. B-92, May 1965.
2. П.К. Мехта, Н.Дэвидс. Прямой численный метод расчёта цилиндрических и сферических упругих волн. Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 1, стр. 144-151.
3. H.A. Koenig, N.Davids. Dynamical finite element analysis for elastic waves in beams and plates. Int. J. Solids Structures, 1968, vol. 4, pp. 643-660.
4. Х.Х. Кяэрди, Л.Ю. Поверус. Исследование распространения упругих волн в цилиндрической и сферической оболочках методом конечных элементов. Труды Таллинского политехнического института, № 321, Таллин, 1972.
5. П.К. Мехта. Объединённый прямой метод расчёта цилиндрических и сферических упруго-пластических волн. Ракетная техника и космонавтика, 1967, № 12, стр. 160-167.

6. М.М. Стратонова. Распространение волн и динамические напряжения в цилиндре из вязко-упругого материала. В сб. "Прочность и динамика авиац.двигателей.Вып. 6". Изд. "Машиностроение", М., 1971, стр. 190-199.
7. Х.Х. Кяэрди, Л.Ю. Поверус. Исследование распространения цилиндрических и сферических упругих и термоупругих волн в слоистых средах методом конечных элементов. Труды симпозиума "Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах", т.2, Горький-Таллин, 1973, стр. 127-134.
8. Х.Х. Кяэрди, Л.Ю. Поверус. Упругие волны в складчатых конструкциях. Настоящий сборник, стр. 57.
9. М.Л. Уилкинс. Расчёт упруго-пластических течений. В кн. "Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. Олдера Б., Фернабаха С., Ротенберга М.". Изд. "Мир", М., 1967, стр. 212-263.
10. Фу. Численное интегрирование уравнений движения, связанных с методом конечных элементов. Прикладная механика. Изд. "Мир", 1970, № 3, стр. 27-33.
11. У.К. Нигул, Ю.К. Энгельбрехт. Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин, Ин-т киберн. АН ЭССР, 1972.
12. Л.А. Розин. Метод конечных элементов. Изд. "Энергия", Л., 1971.
13. Р. Рихтмайер, К. Мортон. Разностные методы решения краевых задач. Изд. "Мир", М., 1972.
14. Н.А. Есенина. Конечно-разностные методы для решения одномерных упруго-пластических задач. Изв. АН СССР, Механ. твёрд. тела, 1973, № 1, стр. 170-174.
15. J.A. Mandel, R.K. Mathur, Y.C. Chang. Stress waves at rigid right angle joint. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1971, vol. 97, No 4, pp. 1173-1186.

H.Käerdi, L.Poverus

Die Finite-Element-Methode zur Forschung der Übergangsprozesse von elastischen Wellen

Zusammenfassung

Die Arbeit befaßt sich mit der Analyse und dem Vergleich der numerischen Differenzmethoden. Besonders wird die sogenannte direkte numerische Methode als eine Variante der allgemeinen Finite-Element-Methode betrachtet und ihre Vorzüge gegenüber anderen Differenzmethoden unterstrichen.

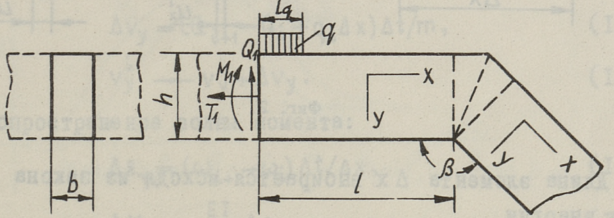
TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 360 1974

УДК 624.074:534.16

Х.Х. Кяэрди, Л.Ю. Поверус

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В УГЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЯХ БАЛОК И СКЛАДЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЯХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе исследуется распространение упругих волн в балке с ломанной осью и в складчатой конструкции, которые нагружены кратковременной нагрузкой (фиг. I).



Фиг. 1.

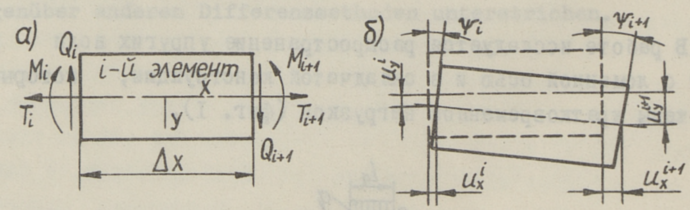
В исследовании используются связанно теория Тимошенко для волн изгиба, которая учитывает инерцию вращения и поправку на сдвиг, и элементарная теория для продольных волн, в которой плоские сечения остаются плоскими и предполагается наличие только аксиальных напряжений, равномерно распределённых вдоль сечения.

Распространение изгибных волн в балке Тимошенко исследовано в работе [I] методом конечных элементов. В работе [2] рассматривается распространение волн в прямоугольном соединении балок методом характеристик. Численные результаты сравниваются с данными эксперимента. Отмечается хорошее совпадение.

В настоящей работе использован прямой численный вариант метода конечных элементов, где основные физические законы, кинематические соотношения и зависимости, отражающие упругие свойства материала, применяются непосредственно к системе.

На фиг. 2а показано равновесие элемента, на основе которого выводятся формулы (6), (I2) и (I8), которые являются постулатами сохранения импульса и сохранения момента.

На фиг. 2б показана деформация элемента, на основе которой выводятся формулы (2), (3), (8), (9), (I4) и (I5).



Фиг. 2.

Длина элемента Δx выбирается исходя из закона сохранения энергии

$$\Delta x = c_1 \Delta t. \tag{I}$$

Здесь c_I - скорость распространения продольной волны;

Δt - временной интервал.

Постоянная n характеризует напряжённое состояние конструкции. $n = I$ - балка (плоское напряжённое состояние); $n = 1-\nu^2$ - пластина (плоская деформация). Здесь ν - коэффициент Пуассона. Для пластины выбирается ширина элемента $b = I$.

Далее приводятся формулы, описывающие распространение волн в прямых частях углового соединения [I].

Распространение продольной волны:

$$\Delta \varepsilon_x = (v_x^{i+1} - v_x^{i}) \Delta t / \Delta x, \tag{2}$$

$$\Delta T = EF\Delta\varepsilon_x, \tag{3}$$

$$T_{i+1} \leftarrow T_{i+1} + \Delta T, \tag{4}$$

$$u_x^i \leftarrow u_x^i + v_x^i \Delta t, \tag{5}$$

$$\Delta v_x = (T_{i+1} - T_i)\Delta t/m, \tag{6}$$

$$v_x^i \leftarrow v_x^i + \Delta v_x. \tag{7}$$

Распространение поперечной волны:

$$\Delta\varepsilon_y = (v_y^{i+1} - v_y^i)\Delta t/\Delta x, \tag{8}$$

$$\Delta Q = \kappa_т FG(\Delta\varepsilon_y - \omega_{i+1}\Delta t), \tag{9}$$

$$Q_{i+1} \leftarrow Q_{i+1} + \Delta Q, \tag{I0}$$

$$u_y^i \leftarrow u_y^i + v_y^i \Delta t, \tag{II}$$

$$\Delta v_y = (Q_{i+1} - Q_i + q_i\Delta x)\Delta t/m, \tag{I2}$$

$$v_y^i \leftarrow v_y^i + \Delta v_y. \tag{I3}$$

Распространение волны момента:

$$\Delta\varepsilon_\psi = (\omega_{i+1} - \omega_i)\Delta t/\Delta x, \tag{I4}$$

$$\Delta M = -\frac{EI}{n}\Delta\varepsilon_\psi, \tag{I5}$$

$$M_{i+1} \leftarrow M_{i+1} + \Delta M, \tag{I6}$$

$$\psi_i \leftarrow \psi_i + \omega_i \Delta t, \tag{I7}$$

$$\Delta\omega = \left[\tfrac{1}{2}(Q_i + Q_{i+1})\Delta x + M_i - M_{i+1}\right]\Delta t/I_z, \tag{I8}$$

где

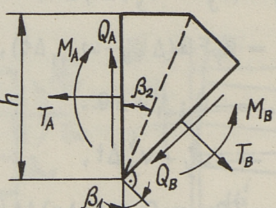
$$I_z = \frac{m}{12}(h^2 + \Delta x^2) \approx \frac{mh^2}{12} = \rho I\Delta x, \tag{I9}$$

$$\omega_i \leftarrow \omega_i + \Delta\omega. \tag{20}$$

Здесь $\Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y, \Delta\varepsilon_\psi$ – изменения продольных, поперечных и угловых деформаций; v_x^i, v_y^i, ω_i – продольные, поперечные и угловые скорости; E – модуль продольной упругости; G – модуль сдвига; $\kappa_т$ – коэффициент сдвига; F – площадь поперечного сечения; I – момент инерции поперечного сечения; I_z - момент инерции элемента; T_i, Q_i - продольные и поперечные силы; q_i - равномерно распределённая нагрузка, действующая по длине элемента;

M_i - изгибающий момент; u_x^i, u_y^i - продольные и поперечные перемещения; ψ_i - угол поворота сечения; m - масса элемента; ρ - плотность материала.

Угловой элемент конструкции (фиг. 3) рассматривается как точечная масса. Действующие на неё силы инерции учтены в формулах перехода от одной прямой части углового соединения к другой:



Фиг. 3.

$$T_B = Q_A \cos\beta_1 + T_A \sin\beta_1 + m_y \Delta v_y \sin\beta_1 + m_y \Delta v_x \cos\beta_1, \quad (21)$$

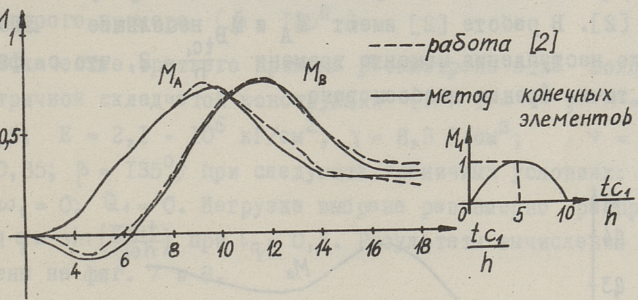
$$Q_B = -T_A \cos\beta_1 + Q_A \sin\beta_1 - m_y \Delta v_x \sin\beta_1 + m_y \Delta v_y \cos\beta_1, \quad (22)$$

$$M_B = M_A + (T_B - T_A)\frac{h}{2} - J \cdot \Delta\omega. \quad (23)$$

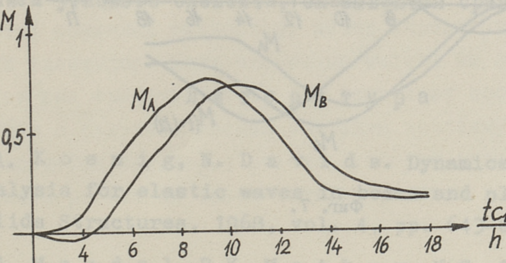
Здесь m_y - масса углового элемента; J - полярный момент инерции углового элемента.

Все расчёты были выполнены на ЭЦВМ "Минск-22". Задача запрограммирована в коде "МАЛГОЛ".

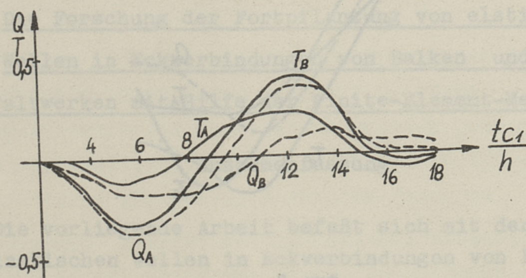
В двух первых численных примерах рассматриваются угловые соединения балок при следующих начальных данных:
n = I; h = 5,08 см; b = 2,54 см; l = I0,I6 см; E = 2,I · · I0^{6}кГ/см^2;
γ = 8,3 Г/см^3; ν = 0,3; $к_т$ = 0,833.
Нагрузка выбрана в виде полуволны синуса $M_I = \sin\left(\frac{\pi c_1 t}{10h}\right)$.



Фиг. 4.

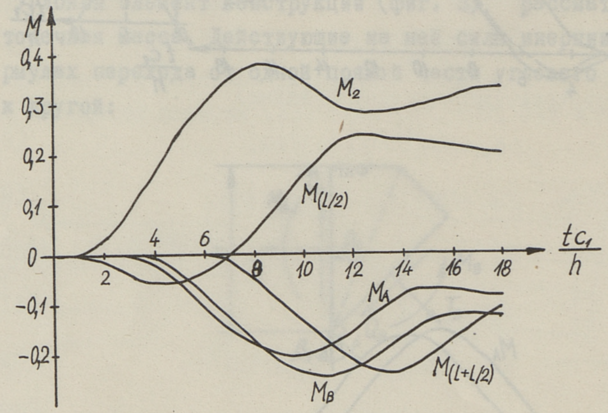


Фиг. 5.

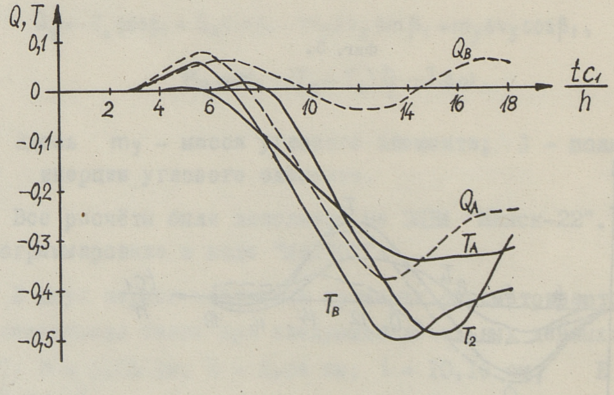


Фиг. 6.

Результаты первого примера ($\beta = 90^0$), представленные на фиг. 4, показывают хорошее совпадение с результатами работы [2]. В работе [2] имеют M_A и M_B небольшие значения уже до наступления момента времени $\frac{tc_1}{h} = 2$, что с физической точки зрения необосновано.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

На фиг. 5 и 6 представлены некоторые численные результаты второго примера ($\beta = 135^0$).

В качестве третьего примера рассмотрена одна половина симметричной складчатой конструкции ($n = 1 - \nu^2$; $h = 1$; $l = 2,5$; $E = 2,1 \cdot 10^6$ кГ/см^2; $\gamma = 8,3$ Г/см^3; $\nu = 0,3$; $k_T = 0,85$; $\beta = 135^0$) при следующих граничных условиях: $v_x^1 = 0$; $\omega_1 = 0$; $Q_1 = 0$. Нагрузка выбрана равномерно распределённой $q = \sin\left(\frac{\pi c_1 t}{10 h}\right)$ при $l_q = 0,5$. Результаты вычислений представлены на фиг. 7 и 8.

Из проведённых исследований вытекает, что угловой элемент имеет небольшое влияние на распространение волны момента (фиг. 4, 5 и 7), так как силы инерции, связанные с движением углового элемента, оказываются сравнительно малыми.

Литература

1. H.A. Koenig, N. Davids. Dynamical finite element analysis for elastic waves in beams and plates. Int. J. Solids Structures, 1968, vol. 4, pp. 643-660.
2. J.A. Mandel, R.K. Mathur, Y.C. Chang. Stress waves at rigid right angle joint. J. Eng. Mech. Div. 1971, vol. 97, No. 4, pp. 1173-1186.

H.Käerdi, L.Poverus

Die Forschung der Fortpflanzung von elstischen Wellen in Eckverbindungen von Balken und in Faltwerken mit Hilfe der Finite-Element-Methode

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Fortpflanzung von elastischen Wellen in Eckverbindungen von Balken und in Faltwerken infolge einer sich rasch verändernden Belastung. Als Methode der Forschung wird die Finite-Element-Methode benutzt und numerische Resultate mit Hilfe eines Computers erreicht.

На фиг. 5 и 6 представлены некоторые численные результаты второго примера ($\beta = 135^0$).

В качестве третьего примера рассмотрим одно решение симметричной сварочной конструкции ($h = I$; $l = 2{,}5$; $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ кГ/см^2; $\gamma = 8{,}3$ Г/см^3; $\nu = 0{,}3$; $\kappa_т = 0{,}85$; $\beta = 135^0$) при следующих граничных условиях: $V_1^x = 0$, $\varphi_1 = 0$, $Q_1 = 0$. Нагрузка выбрана равномерно распределенной $q = \sin\left(\frac{\pi c_1 t}{10 h}\right)$ при $t_y = 0{,}5$. Результаты вычислений представлены на фиг. 7 и 8.

Из проведенных исследований вытекает, что угловой элемент имеет небольшое влияние на распространение волн момента (фиг. 4, 5 и 7), так как силы инерции, связанные с движением углового элемента, оказываются сравнительно малыми.

Л и т е р а т у р а

1. H.A. K o e n i g, H. D a v i d s. Dynamical finite element analysis for elastic waves in beams and plates. Int. J. Solids Structures, 1968, vol. 4, pp. 643-660.

2. J.A. M u n d e l, R.K. M a t h u r, Y.C. C h a n g. Stress waves at rigid right angle joint. J. Eng. Mech. Div.,1971, vol. 97, No. 4, pp. 1173-1186.

H.Kaandi, L.Poverus

<u>Die Forschung der Fortpflanzung von elastischen Wellen in Knotenpunkten von Balken und in Fachwerken mittels der Finite-Element-Methode</u>

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Fortpflanzung von elastischen Wellen in Knotenpunkten von Balken und in Fachwerken infolge einer sich rasch verändernden Belastung. Als Methode der Forschung wird die Finite-Element-Methode benutzt und numerische Resultate mit Hilfe eines Computers erreicht.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 360 1974

УДК 624.074.5:534.16

Х.Х. Кяэрди, Л.Ю. Поверус

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СКЛАДЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Двумерным волновым процессам деформации в оболочках и пластинах посвящены многочисленные исследования. В последнее время в этой области исследования наряду с аналитическими методами завоевали особую позицию численные методы - метод конечных разностей, метод характеристик и метод конечных элементов. Хотя численные методы не обладают такой общностью как аналитические, они позволяют поставить сложные задачи и получить весьма обширную численную информацию. Ниже приводятся некоторые работы, которые являются близкими к настоящей работе по своим методам решения или постановке задачи.

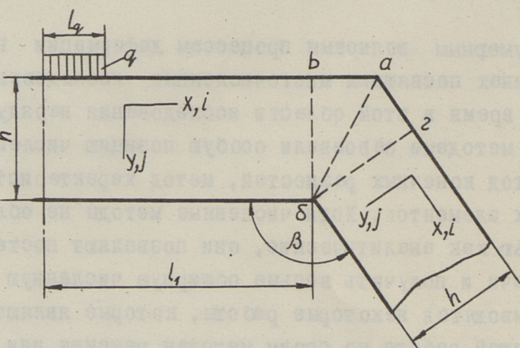
В работах [1, 2, 3] предлагаются численные методы "ХЕМП" и "Тензор", которые, в сущности, являются методами конечных элементов. Этими методами решаются сложные двумерные задачи осесимметричного движения. Метод решения вышеуказанного типа находит дальнейшее развитие в статьях [4] и [5].

В работе [6] решается методом трехмерных сеток переходный процесс плоской деформации в пластине. Упомянутый метод применяется для аналогичных целей в работе [7] при решении осесимметричной задачи, а в работе [8] - при исследовании плоской деформации в толстом цилиндре.

Двумерный вариант метода конечных элементов или так называемый прямой численный метод, прилагаемый и развитый в настоящем исследовании, базируется на работах [2] и [9, 10, 11].

I. Постановка задачи

В данной работе исследуется распространение нестационарных упругих волн в складчатых конструкциях, которые нагружены кратковременными нагрузками. Рассматриваемая конструкция состоит из трёх толстых пластин: из лицевого и двух боковых. Толщины пластин и углы наклона между ними выбраны равными ($90^0 \leq \beta \leq 180^0$). Конструкция и нагрузка являются симметричными относительно оси y и на фиг. I изображена только одна половина.



Фиг 1.

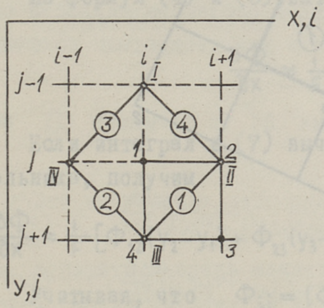
Предполагаем размер конструкции и протяжённость нагрузки в направлении, перпендикулярном к поверхности чертежа, бесконечными. Таким образом возникает в конструкции плоское деформированное состояние.

Изменение нагрузки во времени может быть любое, в том числе и разрывное.

Если в боковой пластине повернуть координатные оси так, что ось x будет направлена параллельно и y перпендикулярно к свободным поверхностям (фиг. I), то расчётные схемы остаются до и после поверхности аб аналогичными. Специальные приёмы надо применять только в окрестности соединительной поверхности аб между лицевой и боковой пластиной.

2. Схема конечных элементов

Разделим пластину на квадратные конечные элементы. При помощи скоростей найдем напряжённое состояние в центре элемента I (фиг. 2). Напряжения $\sigma_{①}, \tau_{①} \dots \sigma_{④}, \tau_{④}$ определяют скорость в вершинах элементов в точке I (фиг. 2). Таким образом обеспечивается хорошее центрирование соотношений. Размеры элемента выбираем на основании закона сохранения энергии



Фиг. 2.

$$\Delta x = \Delta y = c.\Delta t, \tag{I}$$

что гарантирует устойчивость вычислительного процесса. Здесь
c - скорость распространения продольных волн;
Δt - интервал времени.

Скорость первого фронта вычисляется как

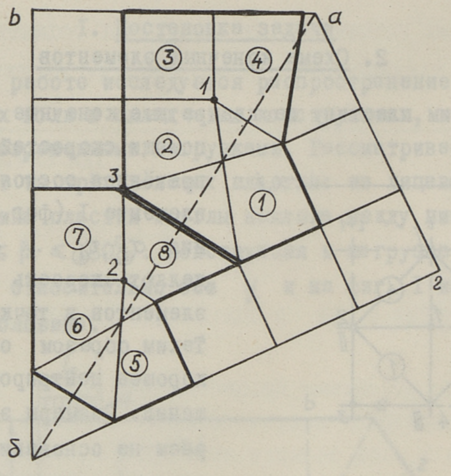
$$c = \left[\frac{E^*}{\rho}(1-\nu)\right]^{1/2}. \tag{2}$$

Здесь
$$E^* = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)}. \tag{3}$$

Выделим из конструкции участок bагб (фиг. I) и представим его в большем масштабе на фиг. 3.

Рассмотрим окрестность угла, исходя от лицевой пластины. Различаем два типа конечных элементов:
- элементы ④ и ⑧ фиг. 3, охватывающие за поверхностью аб две дополнительные точки;
- элементы ② и ⑥, охватывающие одну дополнительную точку.

Для вычисления скоростей в точках I и 2 (фиг. 3) применяются особые комбинации конечных элементов ① ② ③ ④ и ⑤ ⑥ ⑦ ⑧. Образовавшиеся фигуры показаны на схеме сплошной линией.



Фиг. 3.

Если рассматривать окрестность угла исходя из боковой пластины, образуются подобные особые конечные элементы и их комбинации.

Рассмотрим вычисление конечных величин для произвольного четырёхугольника. Пусть функция Φ будет определена в вершинах I 2 3 4 конечного элемента I. Обозначения представлены на фиг. 2. Находим производные от Φ по x и y в центре элемента I.

Возьмём интеграл от функции Φ по контуру четырёхугольника I 2 3 4. По формуле Грина можем выписать

$$\oint\limits_{1234} \Phi\, dy = \iint\limits_{F} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dF, \qquad (4)$$

$$\oint\limits_{1234} \Phi\, dx = -\iint\limits_{F} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dF. \qquad (5)$$

Здесь F – площадь элемента.

Так как F мало, можно считать

$$\iint\limits_F \frac{\partial \Phi}{\partial x} dF \approx F \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \qquad (6)$$

Из формул (4) и (6) вытекает, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \frac{1}{F} \oint\limits_{1234} \Phi dy. \qquad (7)$$

Если интеграл в (7) вычислить по сторонам четырёхугольника, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \frac{1}{F}\left[\Phi_{12}(y_2-y_1)+\Phi_{23}(y_3-y_2)+\Phi_{34}(y_4-y_3)+\Phi_{41}(y_1-y_4)\right]. \qquad (8)$$

Учитывая, что $\Phi_{ij} = (\Phi_i + \Phi_j)/2$, формула (8) принимает вид

$$\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_{①} \approx \frac{1}{2F}\left[(\Phi_2-\Phi_4)(y_3-y_1)-(\Phi_3-\Phi_1)(y_2-y_4)\right]. \qquad (9)$$

Аналогично находим, что

$$\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta y}\right)_{①} \approx -\frac{1}{2F}\left[(\Phi_2-\Phi_4)(x_3-x_1)-(\Phi_3-\Phi_1)(x_2-x_4)\right]. \qquad (10)$$

Пусть теперь функция Φ будет определена в центрах конечных элементов ① ② ③ ④. Обозначения те же, что и на фиг. 2. Находим производные от Φ по x и y в вершинах элементов в точке I. Рассматриваем четырёхугольник I II III IУ, площадь которого будет $F_1 = (F_{①}+F_{②}+F_{③}+F_{④})/2$. Вывод аппроксимирующих формул для производных не отличается от вышерассмотренного. Здесь приводятся только окончательные результаты:

$$\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_1 \approx \frac{1}{F}\left[\Phi_{①}(y_{III}-y_{II})+\Phi_{②}(y_{IV}-y_{III})+\Phi_{③}(y_{I}-y_{IV})+\Phi_{④}(y_{II}-y_{I})\right], \qquad (11)$$

$$\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta y}\right)_1 \approx -\frac{1}{F}\left[\Phi_{①}(x_{III}-x_{II})+\Phi_{②}(x_{IV}-x_{III})+\Phi_{③}(x_{I}-x_{IV})+\Phi_{④}(x_{II}-x_{I})\right]. \qquad (12)$$

3. Физические законы

Для решения данной задачи непосредственно применяются следующие физические законы:

- сохранение энергии (I);
- сохранение массы;
- сохранение количества движения;
- закон Гука.

Ниже приводятся в определённой последовательности соотношения прямого численного метода для квадратных конечных элементов.

Изменения деформации за время Δt в элементе (I) вычисляются как

$$\Delta\varepsilon_{x①} = (v_{x(i+1,j)} - v_{x(i,j+1)} - v_{x(i+1,j+1)} - v_{x(i,j)})\frac{\Delta t}{2\Delta x}, \qquad (13)$$

$$\Delta\varepsilon_{y①} = (v_{y(i,j+1)} - v_{y(i+1,j)} + v_{y(i+1,j+1)} - v_{y(i,j)})\frac{\Delta t}{2\Delta y}, \qquad (14)$$

$$\Delta\varepsilon_{xy①} = (v_{y(i+1,j)} - v_{y(i,j)} + v_{y(i+1,j+1)} - v_{y(i,j+1)})\frac{\Delta t}{2\Delta x} +$$
$$+ (v_{x(i,j+1)} - v_{x(i,j)} + v_{x(i+1,j+1)} - v_{x(i+1,j)})\frac{\Delta t}{2\Delta y}. \qquad (15)$$

Изменения напряжений за Δt в элементе (I) будут

$$\Delta\sigma_{x①} = E^*[(1-\nu)\Delta\varepsilon_{x①} + \nu\Delta\varepsilon_{y①}], \qquad (16)$$

$$\Delta\sigma_{y①} = E^*[(1-\nu)\Delta\varepsilon_{y①} + \nu\Delta\varepsilon_{x①}], \qquad (17)$$

$$\Delta\tau_{xy①} = G\cdot\Delta\varepsilon_{xy①}. \qquad (18)$$

Вычисляются полные (накопленные) напряжения

$$\sigma_{x(i+1,j+1)} \longleftarrow \sigma_{x(i+1,j+1)} + \Delta\sigma_{x①}, \qquad (19)$$

$$\sigma_{y(i+1,j+1)} \longleftarrow \sigma_{y(i+1,j+1)} + \Delta\sigma_{y①}, \qquad (20)$$

$$\tau_{xy(i+1,j+1)} \longleftarrow \tau_{xy(i+1,j+1)} + \Delta\tau_{xy①}. \qquad (21)$$

Применяется закон сохранения количества движения для точки I

$$\Delta v_{x1} = \frac{1}{\rho}\Big[(\sigma_{x(i+1,j+1)} - \sigma_{x(i,j+1)} - \sigma_{x(i,j)} + \sigma_{x(i+1,j)})\frac{\Delta t}{2\Delta x} +$$
$$+ (\tau_{xy(i+1,j+1)} + \tau_{xy(i,j+1)} - \tau_{xy(i,j)} - \tau_{xy(i+1,j)})\frac{\Delta t}{2\Delta y}\Big], \qquad (22)$$

$$\Delta v_{y1} = \frac{1}{\rho}\Big[\big(\sigma_{y(i+1,j+1)} + \sigma_{y(i,j+1)} - \sigma_{y(i,j)} - \sigma_{y(i+1,j)}\big)\frac{\Delta t}{2\Delta y} + \tag{23}$$

$$+ \big(\tau_{xy(i+1,j+1)} - \tau_{xy(i,j+1)} - \tau_{xy(i,j)} + \tau_{xy(i+1,j)}\big)\frac{\Delta t}{2\Delta x}\Big].$$

Определяются полные скорости

$$v_{x(i,j)} \longleftarrow v_{x(i,j)} + \Delta v_{x1}, \tag{24}$$

$$v_{y(i,j)} \longleftarrow v_{y(i,j)} + \Delta v_{y1}. \tag{25}$$

Эти вычисления повторяются от $i=1$, $j=1$ до $i=1$, $j=j_m$. После этого увеличивают первый индекс. Таким образом, в первую очередь меняется последний индекс, затем – первый. Когда доходят до невозмущённой области, происходит повторение вычислений до истечения заданного времени.

Кроме напряжений и скоростей обычно надо знать ещё перемещения и ускорения. Эти переменные можно вычислить в конце цикла после формулы (25).

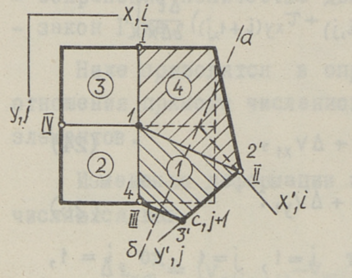
Индексы, которые необходимы в программе для ЭВМ, приведены в скобках. Как видно, применяются только два координатных индекса i, j. Индекс времени является лишним. Это позволяет сэкономить память ЭВМ и увеличить скорость работы программы.

По фиг. 2 видно, что в элементе I напряжения имеют дробные индексы $i+1/2$, $j+1/2$. Но так как в применяемом алгоритмическом языке "МАЛГОЛ" индексы могут быть только целыми числами, то ко всем индексам напряжений прибавляется I/2.

Следует отметить, что основной цикл (формулы (I3)-(25)) хорошо подходит для программирования.

На фиг. 3 были изображены особые конечные элементы и их комбинации. В окрестности соединительной поверхности $аб$ между лицевой и боковой пластиной образуется шесть особых положений конечных элементов. Три из них будут до соединительной поверхности, три – после. Если $\beta = 90^0$, все конечные элементы остаются квадратными и алгоритм можно упростить.

Для примера рассмотрим вычисления в точке 3 (фиг. 3.). Упомянутая комбинация элементов изображена на фиг. 4.



Фиг. 4.

Здесь будут особыми конечные элементы ① и ④. Так как напряжения вычисляются в элементе ①, то главное внимание обращается на него. Элемент ① охватывает за соединительной поверхностью две точки – 2' и 3'. Скорости в этих точках даны в координатной системе $x'y'$ и их надо преобразовать в систему xy. Площадь элемента ① определяется как

$$F_{①} = \left[\Delta y + \tfrac{1}{2}(l-k)\sin 2\gamma\right](l-k) \cdot \qquad (26)$$

Здесь $l = \Delta x \cdot \frac{R}{j_m}$ и $k = \Delta x \cdot \frac{S}{j_m}$, где R и S соответственно дробные части выражений $(j_m - j + 1)\cdot \operatorname{tg}\gamma$ и $(j_m - j)\cdot \operatorname{tg}\gamma$. Далее вычисляются разности между координатами вершин I 2' 3' 4.

Теперь имеются все данные для применения формул (9) и (IO) к элементу ①. Выражения для определения изменений деформаций будут

$$\Delta\varepsilon_{x①} = \left[(v_{x2'} - v_{x(i,j+1)})(\Delta y + l\cdot\sin 2\gamma) + \right. \qquad (27)$$

$$\left. + (v_{x3'} - v_{x(i,j)})(\Delta y - k\cdot\sin 2\gamma)\right]\frac{\Delta t}{2F_{①}},$$

$$\Delta\varepsilon_{y①} = \left[(v_{y(i,j+1)} - v_{y2'})(l + l\cdot\cos 2\gamma) + \right.$$

$$\left. + (v_{y3'} - v_{y(i,j)})(k + k\cdot\cos 2\gamma)\right]\frac{\Delta t}{2F_{①}}, \qquad (28)$$

$$\Delta\varepsilon_{xy①} = \left[(v_{y2'} - v_{y(i,j+1)})(\Delta y + l\cdot\sin 2\gamma) + \right.$$

$$+ (v_{y3'} - v_{y(i,j)})(\Delta y - k\cdot\sin 2\gamma) +$$

$$+ (v_{x(i,j+1)} - v_{x2'})(l + l\cdot\cos 2\gamma) +$$

$$\left. + (v_{x3'} - v_{x(i,j)})(k + k\cdot\cos 2\gamma)\right]\frac{\Delta t}{2F_{①}}. \qquad (29)$$

Чтобы определить скорости в точке I, вычисляются площадь $F_1 = (F_{①} + F_{②} + F_{③} + F_{④})/2$ и разности между координатами точек I II III IУ. Учитывая формулы (II) и (I2), применяем закон сохранения количества движения:

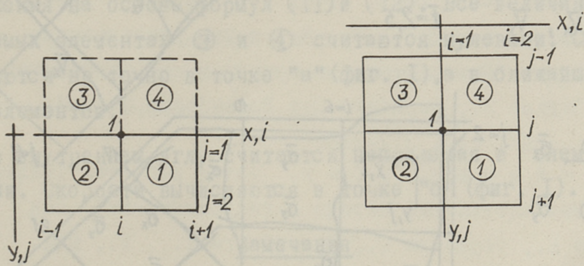
$$\begin{aligned} \Delta v_{x1} = \big[&\sigma_{x(i+1,j+1)}\cdot(\Delta y - k\cdot\sin 2\gamma) - \sigma_{x(i,j+1)}\cdot\Delta y - \sigma_{x(i,j)}\cdot\Delta y + \\ &+ \sigma_{x(i+1,j)}\cdot(\Delta y + k\cdot\sin 2\gamma) + \tau_{xy(i+1,j+1)}\cdot(k + k\cdot\cos 2\gamma) + \\ &+ \tau_{xy(i,j+1)}\cdot\Delta x - \tau_{xy(i,j)}\cdot\Delta x - \tau_{xy(i+1,j)}\cdot(k + k\cdot\cos 2\gamma)\big]\frac{\Delta t}{\rho F_1}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{y1} = \big[&\sigma_{y(i+1,j+1)}\cdot(k + k\cdot\cos 2\gamma) + \sigma_{y(i,j+1)}\cdot\Delta x - \sigma_{y(i,j)}\cdot\Delta x - \\ &- \sigma_{y(i+1,j)}\cdot(k + k\cdot\cos 2\gamma) + \tau_{xy(i+1,j+1)}\cdot(\Delta y - k\cdot\sin 2\gamma) - \\ &- \tau_{xy(i,j+1)}\cdot\Delta y - \tau_{xy(i,j)}\cdot\Delta y + \tau_{xy(i+1,j)}\cdot(\Delta y + k\cdot\sin 2\gamma)\big]\frac{\Delta t}{\rho F_1}. \end{aligned} \tag{31}$$

В связи с тем, что основные элементы выбраны квадратными, первый фронт имеет прямоугольную форму, но распространяется без "размазывания". В лицевой пластине уточняется форма первого фронта и приближается к действительной.

4. Граничные условия

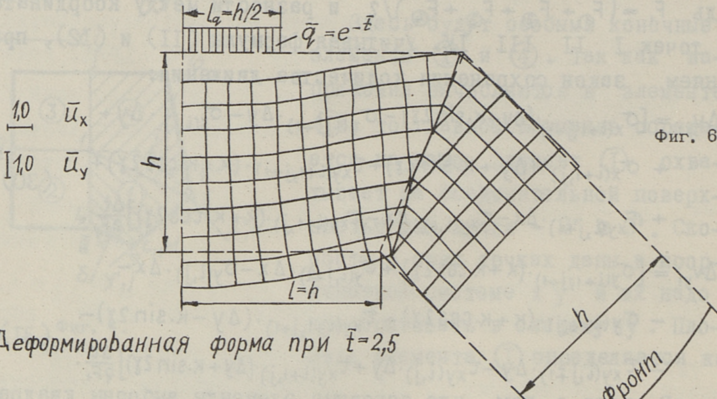
Рассматриваем свободную поверхность $y = 0$. Введём воображаемые элементы ③ и ④, как показано на фиг. 5а.



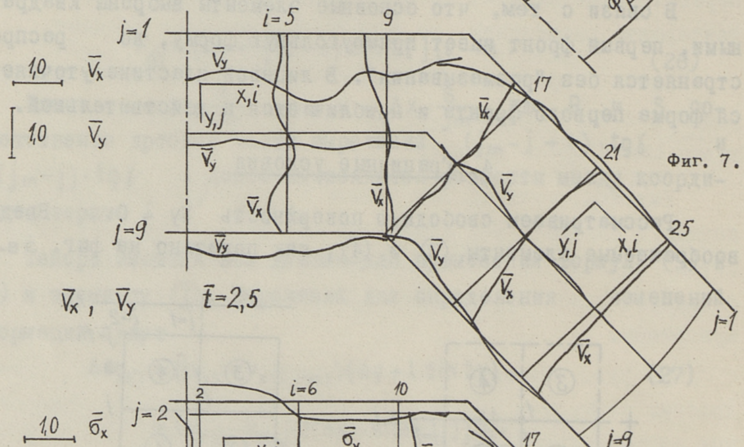
Фиг. 5.

Если на участке l_q в этих элементах $\sigma_y = -q(x,t)$, а все остальные напряжения равняются нулю, то в основном цикле формула (22) заменяется следующей:

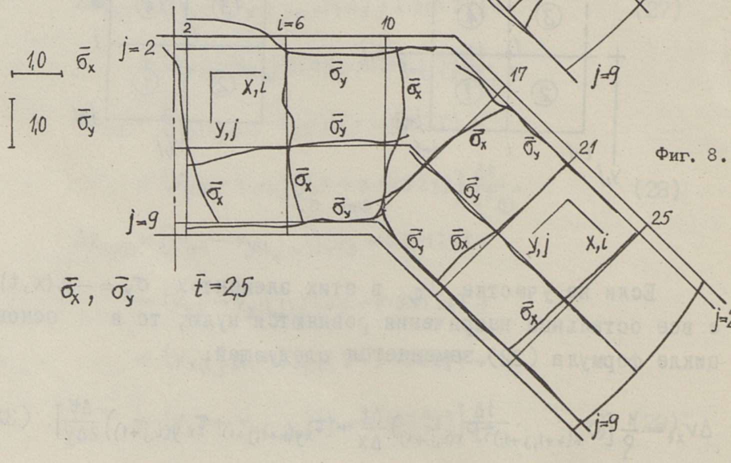
$$\Delta v_{x1} = \frac{1}{\rho}\left[\left(\sigma_{x(i+1,j+1)} - \sigma_{x(i,j+1)}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x} + \left(\tau_{xy(i+1,j+1)} + \tau_{xy(i,j+1)}\right)\frac{\Delta t}{2\Delta y}\right]. \tag{32}$$



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Все другие соотношения основного цикла остаются без изменения.

Для свободной поверхности $y = h$ граничные условия выводятся аналогично.

Сформулируем граничные условия для оси симметрии $x = 0$, которую можно рассматривать как твёрдую гладкую стенку, вдоль которой среда может скользить (фиг. 5 б). Переменные в элементах ② и ③ являются зеркальными отображениями переменных в элементах ① и ④.

Если $i = 1$, то должно быть выполнено требование $v_{x(1,j)} = 0$. Изменение скорости в направлении оси y в точке I (фиг. 5б) вычисляется как

$$\Delta v_{y1} = \frac{1}{\rho}\left[\left(\sigma_{y(i+1,j+1)} - \sigma_{y(i+1,j)}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y} + \left(\tau_{xy(i+1,j+1)} + \tau_{xy(i+1,j)}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}\right]. \quad (33)$$

При вычислении напряжений нет особенностей.

Если $j = j_m$, считаются $\sigma_{y(2,j_m+1)} = 0$ и $\tau_{xy(2,j_m+1)} = 0$.

Если $j = 1$, считаются $\tau_{xy(2,1)} = 0$, а $\sigma_{y(2,1)} = -q(x,t)$.

Для внешнего угла выводится закон сохранения количества движения на основе формул (II) и (I2). Все величины в вображаемых элементах ③ и ④ считаются нулевыми. Скорости вычисляются не точно в точке "а" (фиг. I), а в ближайших вершинах элементов.

Во внутреннем углу считаются напряжения в элементе ② нулевыми. Скорости вычисляются в точке "б" (фиг. I).

Замечания

1) Применение граничных условий автоматически обеспечивает отражения и накладывание прямых и отражённых волн.
2) Методом сеток задача часто решается в перемещениях. Это требует выражения граничных условий также в перемещениях и дополнительного решения системы рекуррентных уравнений.

5. Численный пример

Задача решается в следующих безразмерных переменных

$$\bar{t} = \frac{ct}{h}, \quad \bar{x} = x/h, \quad \bar{y} = y/h,$$

$$\bar{u}_x = u_x/h, \quad \bar{u}_y = u_y/h, \tag{34}$$

$$\bar{v}_x = v_x/c, \quad \bar{v}_y = v_y/c,$$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x/E^*, \quad \bar{\sigma}_y = \sigma_y/E^*, \quad \bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/E^*.$$

Геометрические характеристики конструкции выбраны следующими: $l_q = 0{,}5h$, $l_1 = h$, $\beta = 135°$ (фиг. I). Коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. По толщине пластина разделена на 8 элементов. Меньшего шага не допускает малый объём оперативной памяти применяемой ЭВМ "Минск-22". Задача запрограммирована в коде "МАЛГОЛ". На фиг. 6 представлена деформированная форма конструкции, на фиг. 7 и 8 соответственно скорости и напряжения при $\bar{t} = 2{,}5$.

Литература

I. M.L. Wilkins, R. Giroux. The calculation of stress waves in solids. Proc. 6-th Sympos. Hynerveloc. Impact. Cleveland, Ohio, 1963, vol. 2, part 1, pp.141-155.

2. М. Л. Уилкинс. Расчёт упруго-пластических течений. В кн. "Вычислительные методы в гидродинамике". Под ред. Олдера Б., Фернбаха С., Ротенберга М. . М., Изд. "Мир", I967, стр. 2I2-263.

3. Дж. Майнчен, С. Сак. Метод расчёта "Тензор". В кн. "Вычислительные методы в гидродинамике". Под ред. Олдера Б., Фернбаха С., Ротенберга М. , М., Изд. "Мир", I967, стр. I85-2II.

4. Ю.Г. Коротких. Численный метод исследования поведения тел при импульсных воздействиях. Уч. зап. Горьков. ун-т. Сер. Механика, I970, вып. I22, стр. 51-67.

5. Ю.Г. Коротких. О некоторых проблемах численного исследования упруго-пластических волн в твёрдых телах. Уч. зап. Горьков. ун-т. Сер. Механика, I97I, вып. I34, стр. 69-90.

6. У. Н и г у л. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1965, т. 14., № 3, стр. 345-384.
7. Л.Ю. П о в е р у с, Р.К. Р я я м е т. Распространение упругих волн в трансверсально-изотропной толстой пластине. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 296, Таллин, 1970.
8. Р.К. Р я я м е т, А.И. М я н н и л. Распространение упругих волн в толстостенной цилиндрической оболочке. Труды Таллинского политехнического института, № 321, Таллин, 1972.
9. N. D a v i d s, P.K. M e h t a. Computer analysis methods for stress waves and spherical cavaties. Eng. Res. Bull. B-92, May 1965.
10. Х.Х. К я э р д и, Л.Ю. П о в е р у с. Исследование распространения цилиндрических и сферических упругих и термоупругих волн в слоистых средах методом конечных элементов. Труды симпозиума "Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах", т. 2., Горький-Таллин, 1973, стр. 127-134.
11. Х.Х. К я э р д и, Л.Ю. П о в е р у с. Метод конечных элементов для исследования переходных волновых процессов. Настоящий сборник, стр. 33.

H.Käerdi, L.Poverus

Die Forschung der Fortpflanzung von elastischen Wellen in Faltwerken mit Hilfe der Finite-Element-Methode

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird die Fortpflanzung von elastischen Wellen in Faltwerken infolge einer sich schnell verändernden Belastung betrachtet. Es wird der ebene Formänderungszustand erforscht. Als Untersuchungsmethode wird die Finite-Element-Methode benutzt. Die numerischen Resultate werden mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine ermittelt.

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ
Сборник статей V

Таллинский политехнический институт
Редактор Р. Э э к
Техн. редактор Л. Л о о п е р
Сборник утвержден коллегией Т р у д о в ТПИ 10/XII 1973
Подписано к печати 15/У 1974. Бумага 60х90/16.
Печ. л. 4,5 + 0,25 прилож. Уч.-изд. л. 3,0.
Тираж 350. МВ-05211. Зак. № 351.
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Цена 30 коп.

Цена 30 коп.