

R. EEK
TEHN. KAND. DOTS.

L. POVERUS
TEHN. KAND. DOTS.

EHITUSMEHAANIKA

II

TALAD ELASTSEL ALUSEL. VARRASKONSTRUKTSIOONIDE PIKIPÕIKPÄINE, STABIILSUS JA DÜNAAMIKA. ELASTSUS- JA PLASTSUS-ÕPETUSE ALGMED. PLAADID JA KOORIKÜD

Eesti NSV Ministrite Nõukogu Riikliku Kõrgema ja Kesk-erihariduse Komitee poolt lubatud kasutamiseks õpikuna ehituserialadel Eesti NSV kõrgemates õppeasutustes

KIRJASTUS „VALGUS“ * TALLINN 1967

Строительная механика II
Эк Р. Н. и Поверус Л. Ю.
1967

Книга начинается с изложения некоторых вопросов расчета стержней и стержневых систем балки на упругом основании, продольно-поперечный изгиб и устойчивость, колебания. Далее выводятся основные уравнения теории упругости и рассматривается плоская задача теории упругости, излагается теория изгиба и устойчивости пластин и основы теории тонких оболочек. В конце книги дается введение в теорию пластичности.

По своему содержанию книга является продолжением учебников Р. Ряямет «Строительная механика I» и К. Оллик и О. Роотс «Сопротивление материалов» (также на эстонском языке).

Авторы излагают материал методами, обычно применяемыми в учебниках строительной механики и теории упругости.

Книга предназначена, главным образом, для студентов строительных специальностей и для инженеров-строителей. Некоторые разделы могут представлять интерес для инженеров-механиков.

Таблиц 30 иллюстраций 236, библиографий 45

Kaane kujundanud *G. Pant*

Kaesolevas teoses kasitletakse plaatide, koorikute, elastse alusega konstruktsioonide ja risttalastikkude arvutamise aluseid, samuti varraskonstruktsioonide stabiilsust ja dünaamikat ning elastsus- ja plastsusõpetuse algmeid. Toodud on rohkesti arvutusnäiteid.

Mõeldud kasutamiseks ehituse eriala üliõpilastele ning ehitusinseneridele.

EESSONA

Käesolev teos on oma sisult *R. Räämeti* «Ehitusmehaanika I» ja *K. Olliku* ning *O. Rootsi* «Tugevusõpetuse» jätkuks. Raamatu esimeses kuues peatükis käsitletakse varraskonstruktisioone — talasid elastsel alusel ning varraskonstruktisioonide pikipõikpainet, stabiilsust ja dünaamikat. Seitsmendas peatükis on toodud elastsusõpetuse põhivõrrandid ning järgmised kaks peatükki on pühendatud elastsusõpetuse tasandülesandele. Peatükkides 10—13 vaadeldakse plaatide painet ja stabiilsust, 14. peatükis antakse põhimõistet koorikute teooriast ja viimase peatüki moodustab sissejuhatus plastsusõpetusse.

Seoses arvutustehnika kiire arenguga viimastel aastatel on osutunud võimalikuks ka ehituskonstruktisioonide ökonoomsem projektteerimine. On võimalik arvutuste täpsem teostamine, suure arvu variantide hulgast kõige ökonoomsama leidmine jne. Arvutuse täpsuse suurenemisega suureneb aga ka säärase arvutuste osatähtsus, mis haaravad varraskonstruktisioonide stabiilsust ja dünaamikat. Säärase arvutused tehakse reeglina arvutusmasinatega — klahv- või elektronarvutitega. Autorid on valinud siiski mitte spetsiifiliselt arvutite kasutamiseks kohandatud esitusviisi, vaid on kasutanud aine klassikalist käsitlust, lähtudes sellest, et õppijal on esmajoones vaja omandada ideed, millel arvutus baseerub. Näited on arvutatud klahvarvutiteil.

Elastsusõpetuse põhivõrrandite ja tasandülesande käsitus on klassikaline. Plaatide painet ja stabiilsust on käsitletud võrdlemisi põhjalikult, kui võrd seda lubas raamatu maht. Koorikuid on käsitletud lühemalt, kuna ehitaja seisukohalt oluliste koorikutüüpide arvutusmeetodika on eesti keeles olemas teoses [27]. Plastsusõpetust käsitlevas peatükis on lisaks väikeste elastoplastsete deformatsioonide teooriale toodud näiteid kandevõime määramise kohta lihtsamal juhtudel.

Peatükid 4—7, 10—13 ja 15 on kirjutanud *R. Eek*, peatükid 1—3, 8—9 ja 14 *L. Poverus*.

Autorid avaldavad tänu *R. Räämetile* ning teistele Tallinna Polütehnilise Instituudi ehitusmehaanika kateedri õppejõududele ja *J. Aarele* kasulike märkuste eest käsikirja viimistlemisel ning *T. Massole* selle trüki ettevalmistamisel.

1 TALA PAINE ELASTSEL ALUSEL

1.1 TALA ELASTSEL ALUSEL JA TEMA ELASTSE JOONE DIFERENTSIAALVÖRRANDI INTEGREERIMINE

Aluseks nimetame pidevat keskkonda, millele toetuvad konstruktsioonid. Nii on näiteks aluseks pinnas, millele toetub hoone vundament; samuti on vesi aluseks laeva kerele. Alusele toetuvaid konstruktsioone esineb raudtee- ja tee-ehituses, hüdrotehnilistes ehitistes ja, nagu eespool näitena mainitud, hoone- ja laevaehituses. Alusele toetuvatele konstruktsioonidele mõjuvad välisjõud tasakaalustatakse aluse reaktsioonjõudude — aluse turbe poolt.

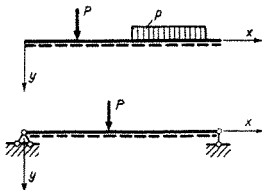
Aluse turbe iseloom sõltub kõigepealt sellest, milline on aluse sisestruktuur ja side konstruktsiooniga, teisest sellest, milline on väliskoormuse jaotus konstruktsioonile, ja kolmandaks konstruktsiooni (tala) enda deformeeritavusest (jäikusest). Olenevalt aluse sisestruktuurist ja seosest konstruktsiooniga võib ta viinasele avaldada kas ühepoolset või kahepoolset turvet, s. o. takistada tala paigutumist kas ainult alla või nii üles kui ka alla. Koos tala deformeerumise ja paigutumisega deformeerub ka alus. Olenevalt aluse struktuurist ja materjalist ning väliskoormuse suurusest võivad aluse deformatsioonid olla elastsed, plastsed või elastoplastsed.

Kui aluses esinevad ainult elastsed deformatsioonid, siis nimetatakse seda elastseks aluseks.

Järgnevalt käsitlemegi elastse alusega tala painet. Nimetatud paindeteooriat rakendatakse arvutustes eespool nimetatud aladel. Lisaks otsesetele ülesannetele, s. o. sellistele, kus tala tegelikult toetub mingile pidevale keskkonnale, kasutatakse teooriat ka kaudsete ülesannete lahendamisel. Sellisteks konstruktsioonideks on näiteks

üksikutele lahestikku asetsevatele tugele toetuv tala (või vastupidi — näiteks peatala risttalastiku korral) või telgsummeeriliselt koormatud silindrilisest koorikust eraldatud arvutuslik talaribake

Lisaks elastsele alusele võib tala muidugi toetuda ka tiste tugele Arvutusskeemidel kujutatakse elastset alust katkendjoonega (joon 1 1)



JOON 1 1

Kogu talale mõjuv väliskoormus tasakaalustatakse tala tugele ja elastse aluse turbega

Elastse aluse turvet kasitletakse jaotatud jõuna, mille intensiivsus sõltub aluse mehaanilistest omadustest, tala laipainde suuruselt ning tala laiusest. Nimetatud intensiivsusde kohta on tehtud mitmeid hüpoteese ja arendatud vastavalt ka erinevaid paindeteoriasid. Üheks lihtsamaks ja paljudel juhtudel rakendatavaks hüpoteesiks on, et **aluse turve talale on võrdeline ja vastassuunaline tala siirdesga** v . Turbejõud tala pikkuseühiku kohta avaldub suurusega

$$r = kv \quad (1 1)$$

milles kordajat k nimetatakse elastse aluse turbeteguriks ning väljendatakse pingde ühikutes, k on arvuliselt võrdne jõuga, mis rakendatult alusele tala pikkuseühiku kohta põhjustab aluse ühikulise siirde

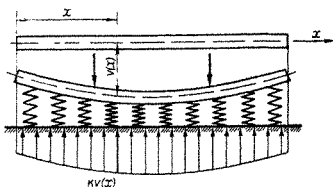
Juhul kui aluse turbetegur k on piki tala konstantne, öeldakse et alus on konstantse jaikusega. Edaspidises kasitluses piirdume konstantse jaikusega aluste ja konstantse paindejaikusega taladega

Eelkirjeldatud hüpoteesi kohast aluse mudelit võime kujutada lõpmata hulga elastsete tugede koguna, kusjuures üksikute tugede vahekaugus on lõpmata väike (joon. 1.2).

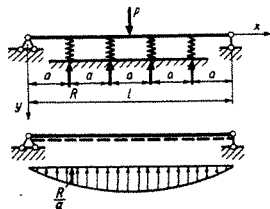
Elastsele alusele toetuva tala deformatsiooni iseloomule on lähedane üksikutele elastsetele tugedele toetuva tala deformatsioon, mistõttu ka selle arvutuskeem asendatakse sageli elastse alusega tala arvutuskeemiga (joon. 1.3). Elastse aluse turbeteguriks võetakse sel juhul

$$k = \frac{C}{a} \quad (1.2)$$

kus C on elastse toe turbetegur (jõud, mis vastab toe siirdele ühe pikkusühiku võrra),
 a — tugede vahekaugus.



JOON. 1.2



JOON. 1.3

Kui tähistada elastse toe jäikustegur (ühikjõule vastav siire) tähega A , siis kehtib elastse toe turbe- ja jäikus- teguri vahel seos

$$AC = 1 \text{ [jõud} \cdot \text{pikkus]} \quad (1.3)$$

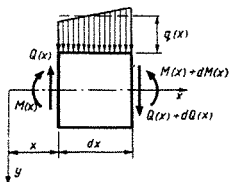
Elastsete tugede asendamisel elastse alusega tehtav arvutusviga sõltub elastsete tugede või toevahemike arvust n . Üksikasjalikud uurimused* on näidanud, et paindemomendi määramisel tehtav absoluutne viga on suurusjärgus $kv a^2$, kuna moment ise on suurusjärgus $kv l^2$. Järelikult on tehtav suhteline viga suurusjärgus $a^2/l^2 = 1/n^2$, milles $l = an$. Viga paigutiste arvutamisel on veelgi väiksem.

Oletame, et elastse alusega talale mõjub mingi aktiivne jaotatud väliskoormus $q(x)$ y -telje positiivses suunas. Kogu talale mõjuv jaotatud koormus, arvesse võttes elastse aluse turvet, on seega järgmine:

$$q(x) - kv(x) \quad (1.4)$$

Järgnevalt rakendame konstantse paindejäikusega talale elastse joone diferentsiaalvõrrandit, mis tuleneb tugevusõpetuse kursuses esitatud diferentsiaalseostest. Alljärgnevalt refereerime need seosed.

Joonisel 1.4 on kujutatud talast eraldatud element temale mõjuva jaotatud koormuse ja löikepindadel esinevate sisejõududega. Sisejõud on positiivsed.



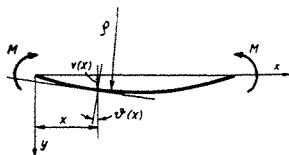
JOON. 1.4

* Prof. I. G. Bubnovi töödes.

Elemendi tasakaalu tingimusest saame järgmised diferentsiaalseosed:

$$\begin{aligned} \frac{dQ(x)}{dx} &= -q(x) \\ \frac{dM(x)}{dx} &= Q(x) \end{aligned} \quad (1.4, a)$$

Joonisel 1.5 on kujutatud paindunud tala. Tala elastse joone ordinaat $v(x)$ ja pöördenurk $\vartheta(x)$ on positiivsed.



JOON. 1.5

Tala elastse joone diferentsiaalvõrrand on järgmine:

$$EI_z v''(x) = -M(x) \quad (1.4, b)$$

kus $M(x)$ — paindemoment lõikes x (joonisel 1.5 positiivne).

Diferentseerime avaldist (1.4,b) x järgi ning teisen-dame ühtlasi, kasutades seoseid (1.4,a):

$$\begin{aligned} EI_z v'''(x) &= -\frac{dM(x)}{dx} \\ \text{või} \quad EI_z v'''(x) &= -Q(x) \end{aligned} \quad (1.4, c)$$

Diferentseerime veel kord:

$$\begin{aligned} EI_z v^{IV}(x) &= -\frac{dQ(x)}{dx} \\ EI_z v^{IV}(x) &= q(x) \end{aligned}$$

Arvesse võttes ka elastse aluse turbest põhjustatud jaotatud koormust vastavalt avaldisele (1.4), saame

elastse alusega tala elastse joone diferentsiaalvõrrandi kujul

$$EI_2 v^{IV}(x) = q(x) - kv(x) \quad (1.5)$$

või

$$EI_2 v^{IV}(x) + kv(x) = q(x) \quad (1.6)$$

See on harilik neljandat järku diferentsiaalvõrrand konstantsete kordajatega. Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend koosneb homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$EI v^{IV} + kv = 0 \quad (1.7)$$

üldlahendist ja võrrandi (1.6) mis tahes erilahendist.

Otsime võrrandi (1.7) erilahendit kujul

$$v = Ae^{nx} \quad (1.8)$$

Asetame erilahendi (1.8) võrrandisse (1.7) ja saame pärast jagamist Ae^{nx} -ga järgmise karakteristikliku võrrandi η kohta:

$$EI\eta^4 + k = 0 \quad (1.9)$$

s. o. tala elastse joone diferentsiaalvõrrandi.

Võrrandil (1.9) on 4 kompleksset juurt.

Oletame, et

$$\eta = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.10)$$

ning

$$\eta^4 = \varrho^4(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)$$

Asetades viimase avaldise võrrandisse (1.9), võime viimast käsitleda kui nulliga võrduvat kompleksarvu

$$\varrho^4 \cos 4\varphi + \frac{k}{EI} + i \varrho^4 \sin 4\varphi = 0 \quad (1.11)$$

mille reaalosa ja kompleksühiku ees olev kordaja peavad võrduma nulliga. Viimane asjaolu annab võrrandid:

$$\varrho^4 \cos 4\varphi = -\frac{k}{EI}$$

$$\varrho^4 \sin 4\varphi = 0$$

Kuna $\varrho^4 > 0$, siis

$$\varrho^4 = \frac{k}{EI} \quad (1.12)$$

$$\cos 4\varphi = -1$$

ning

$$\sin 4\varphi = 0$$

Süsteem (1.12) on rahuldatud, kui

$$\varphi = \frac{\pi}{4} (2n + 1) \quad (1.13)$$

Viimasest avaldisest leiame võrrandi (1.9) neljale komplekslahendile vajalikud φ väärtused

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_2 = \frac{3}{4} \pi$$

$$\varphi_3 = \frac{5}{4} \pi$$

$$\varphi_4 = \frac{7}{4} \pi$$

Tähistame

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} \quad (1.15)$$

Leiame nüüd võrrandi (1.9) otsitavad juured, asetades selleks φ ja φ seostest (1.12) ja (1.14) valemisse (1.10) ja kasutades tähistust (1.15).

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \alpha(1 + i); & \eta_2 &= \alpha(1 - i) \\ \eta_3 &= \alpha(-1 + i); & \eta_4 &= -\alpha(1 + i) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Kirjutame välja esitatud juurtele vastavad võrrandi (1.7) erilahendid

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 e^{\alpha x} e^{i\alpha x}; & v_2 &= A_2 e^{\alpha x} e^{-i\alpha x} \\ v_3 &= A_3 e^{-\alpha x} e^{i\alpha x}; & v_4 &= A_4 e^{-\alpha x} e^{-i\alpha x} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Võrrandi (1.6) üldlahendi esitame alljärgnevalt:

$$v = v_e + e^{\alpha x} (A_1 e^{i\alpha x} + A_2 e^{-i\alpha x}) + e^{-\alpha x} (A_3 e^{i\alpha x} + A_4 e^{-i\alpha x}) \quad (1.18)$$

Esitatud üldlahendis tähistab v_e võrrandit (1.6) rahuldavat mis tahes erilahendit, mille määramist käsitleme edaspidi.

Kasutades teisendusvalemeid

$$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x \quad (1.19)$$

$$e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x$$

anname üldlahendile praktiliseks kasutamiseks sobivama kuju

$$v = v_e + e^{\alpha x}(B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x}(B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x) \quad (1.20)$$

Saadud lahendis esinevatest astmefunktsioonidest saame vabaneda, rakendades valemeid

$$e^{\alpha x} = \operatorname{ch} \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x \quad (1.21)$$

$$e^{-\alpha x} = \operatorname{ch} \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x$$

Pärast teisenduste sooritamist saame

$$v = v_e + C_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x \quad (1.22)$$

Järgnevalt kasutame lahendit (1.22) selleks, et anda siirdefunktsioonile v veel ühte praktilisteks lahendusteks sobivamat kuju. Leiame kõigepealt siirdefunktsiooni v tuletised x suhtes.

$$v' = v'_e + \alpha [(C_2 + C_3) \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + (C_4 - C_1) \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + (C_1 + C_4) \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x + (C_2 - C_3) \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x] \quad (1.23)$$

$$v'' = v_e'' + \alpha^2 [2C_4 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x - 2C_3 \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + 2C_2 \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x - 2C_1 \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x] \quad (1.24)$$

$$v''' = v_e''' + \alpha^3 [2(C_2 - C_3) \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x - 2(C_1 + C_4) \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + 2(C_4 - C_1) \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x - 2(C_2 + C_3) \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x] \quad (1.25)$$

Oletame, et erilahend v_e selline, et kohas $x=0$

$$v_e = v_e' = v_e'' = v_e''' = 0 \quad (1.26)$$

Nimetame kohas $x=0$ esinevat tala siiret, pöördenurka, põikjõudu ja paindemomenti tala algparameetriteks ning tähistame neid vastavalt v_0 , θ_0 , Q_0 ja M_0 .

Avaldame nüüd kõigepealt algparameetrite väärtused lahendi (1.22) integreerimiskonstantide C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 kaudu, kasutades selleks avaldisi (1.22)—(1.25).

$$\begin{aligned}
 v_0 &= C_1 \\
 \vartheta_0 &= \alpha(C_2 + C_3) \\
 -\frac{M_0}{EI} &= 2\alpha^2 C_4 \\
 -\frac{Q_0}{EI} &= 2\alpha^3(C_2 - C_3)
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Äsja saadud seostest (1.27) avaldame lahendi (1.22) integreerimiskonstandid

$$\begin{aligned}
 C_1 &= v_0 \\
 C_2 &= \frac{\vartheta_0}{2\alpha} - \frac{Q_0}{4\alpha^3 EI} \\
 C_3 &= \frac{\vartheta_0}{2\alpha} + \frac{Q_0}{4\alpha^3 EI} \\
 C_4 &= -\frac{M_0}{2\alpha^2 EI}
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Asetame saadud integreerimiskonstantide avaldised üldlahendisse (1.22). Pärast sarnaste liikmete grupeerimist saame

$$\begin{aligned}
 v &= v_e + v_0 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + \\
 &+ \frac{\vartheta_0}{2\alpha} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x) + \\
 &+ -\frac{M_0}{2\alpha^2 EI} \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x - \\
 &- \frac{Q_0}{4\alpha^3 EI} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x)
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Kasutame nüüd saadud lahendis alljärgnevaid tähistusi:

$$\begin{aligned}
 V_0(\alpha x) &= \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x \\
 V_1(\alpha x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x) \\
 V_2(\alpha x) &= \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x \\
 V_3(\alpha x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x)
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Eeltoodud funktsioone $V_i(\alpha x)$, kus $i = 0, 1, 2, 3$, nimetatakse prof. *N. Puzõrevski* funktsioonideks, nad on

tabuleeritud (vt. tabel I. 1 raamatu lisas) ning kergendavad seetõttu ülesannete lahendamist.

Analoogilisi funktsioone on koostanud ka akadeemik N. Krõlov ja teised teadlased.

Kasutades Puzõrevski funktsioone (1.30), on siirdefunktsioon (1.22) esitatav järgmisena:

$$v = v_e + v_0 V_0(ax) + \frac{\vartheta_0}{\sqrt{2}\alpha} V_1(ax) - \frac{M_0}{2\alpha^2 EI} V_2(ax) - \frac{Q_0}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3(ax) \quad (1.31)$$

Lahendis (1.31) erilahend v_e pidi vastama tingimusele (1.26). Kasutades aga meelevaldset erilahendit, muutub ka integreerimiskonstantide iseloom ning üldjuhu kohta saame võrrandi (1.6) lahendi esitada järgmisel kujul:

$$v = v_e + D_0 V_0(ax) + D_1 V_1(ax) + D_2 V_2(ax) + D_3 V_3(ax) \quad (1.32)$$

Juhul kui väliskoormuse intensiivsuse muutus on väljendatav polünoomiga, mille x aste ei ületa kolme, võime erilahendi avaldises (1.32) esitada järgmisena:

$$v_e = \frac{q(x)}{k} \quad (1.33)$$

Praktikas esineb harva koormusi, mille intensiivsuse muutuse kirjeldamiseks peaksime kasutama x esimest astet ületavaid suurusi. Erilahend (1.33) sobib loomulikult ka lahenditele (1.20) ja (1.22), kus integreerimiskonstandid on esitatud üldkujul.

Puzõrevski funktsioonide kuju on selline, et neid on hea rakendada algparameetri meetodiga paindemomendi mitme pidevusvahemiku puhul. Osaliselt on kirjeldatud asjaolu tingitud sellest, et Puzõrevski funktsioonid on seotud omavahel lihtsate diferentsiaalseostega, nagu näitavad alljärgnevad avaldised:

$$\begin{aligned} V_3'(ax) &= \sqrt{2} \alpha V_2(ax) \\ V_2'(ax) &= \sqrt{2} \alpha V_1(ax) \\ V_1'(ax) &= \sqrt{2} \alpha V_0(ax) \\ V_0'(x) &= -\sqrt{2} \alpha V_3(ax) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Funktsiooni $V_i(ax)$ diferentseerimise reegel on lihtne:

$$\begin{aligned} \text{Erandiks on} \quad V_1'(ax) &= V_{1-1}(ax) \sqrt{2} \alpha \\ V_0'(ax) &= -V_3(ax) \sqrt{2} \alpha \end{aligned}$$

1.2 LÕPMATU JA POOLLÕPMATU TALA ELASTSEL ALUSEL

Lõpmatu tala all mõistame tala, mis laiub vaeldavast kohast mõlemale poole lõpmatult. kuna poollõpmatul talal on üks ots ja ta laiub lõpmatusse ühes suunas. Lõpmatu tala näiteks on raudteerööbas, mis toetub liipritele ja raudtee muldkehale. Oieti tuleks liipreid vaadelda kui elastseid tugesisid; kuna nad aga asetsevad küllalt tihedasti üksteise kõrval, siis võib nende mõju asendada ligikaudselt elastse aluse mõjuga. Rööbastee korral avaldab muldkeha loomulikult ühepoolset reaktsiooni.

Poollõpmatu tala. Käsitleme järgnevalt poollõpmatut tala, mis on koormatud otsas $x=0$ koondatud jõuga P ja momendiga \mathcal{M} (joonis 1.6).



JOON 1.6

Kuna talal puudub jaotatud koormus, siis painde diferentsiaalvõrrandiks on homogeenne võrrand (1.7), mille lahendiks on lahend (1.20) ilma erilahendita:

$$v = e^{\alpha x} (B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x) \quad (1.35)$$

Kui $x \rightarrow \infty$, siis tala siire $v \rightarrow 0$. See on aga siis võimalik, kui

$$B_1 = B_2 = 0$$

sest et tegur $e^{\alpha x}$ kasvab lõpmatult.

Seega saame tala elastse võrrandiks

$$v = e^{-\alpha x} (B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x) \quad (1.36)$$

Integreerimiskonstantide B_3 ja B_4 leidmiseks kasutame ääritingimusi tala otsal $x=0$

$$EIv'' = \mathfrak{M} \quad (1.37)$$

$$EIv''' = P$$

Ääritingimuste kasutamisel vajame järgmisi siirdefunktsiooni tuletisi:

$$\begin{aligned} v' &= ae^{-\alpha x} [(B_4 - B_3) \cos \alpha x - (B_3 + B_4) \sin \alpha x] \\ v'' &= 2\alpha^2 e^{-\alpha x} (B_3 \sin \alpha x - B_4 \cos \alpha x) \\ v''' &= 2\alpha^3 e^{-\alpha x} [(B_3 + B_4) \cos \alpha x + (B_4 - B_3) \sin \alpha x] \end{aligned} \quad (1.38)$$

Asetades leitud tuletise avaldised ääritingimustesse (1.37), saame:

$$\begin{aligned} -2B_4\alpha^2 &= \frac{\mathfrak{M}}{EI} \\ 2\alpha^3(B_3 + B_4) &= \frac{P}{EI} \end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned} B_4 &= \frac{-\mathfrak{M}}{2\alpha^2 EI} \\ B_3 &= \frac{P}{2\alpha^2 EI} + \frac{\mathfrak{M}}{2\alpha^2 EI} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Asetame nüüd leitud integreerimiskonstantide B_3 ja B_4 avaldised võrrandisse (1.36) ja saamegi otsast koondatud jõuga P ja momendiga \mathfrak{M} koormatud tala elastse joone võrrandi:

$$v = e^{-\alpha x} \left[\frac{P}{2\alpha^3 EI} \cos \alpha x + \frac{\mathfrak{M}}{2\alpha^2 EI} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) \right] \quad (1.40)$$

Tala elastse joone võrrandist leiame kergesti pöördenurga, paindemomendi ja põikjõu võrrandid

$$\begin{aligned} \theta(x) = v' &= -e^{-\alpha x} \left[\frac{P}{2\alpha^2 EI} (\sin \alpha x + \cos \alpha x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathfrak{M}}{\alpha EI} \cos \alpha x \right] \\ M(x) = -EIv'' &= -e^{-\alpha x} \left[\frac{P}{\alpha} \sin \alpha x + \right. \end{aligned}$$

$$Q(x) = -EIv''' = -e^{-\alpha x} [P(\cos \alpha x - \sin \alpha x) - 2\mathfrak{M}\alpha \sin \alpha x] + \mathfrak{M}(\cos \alpha x + \sin \alpha x) \quad (1.41)$$

Tähistame valemities (1.40) ja (1.41) sisalduvad kustuvad perioodilised funktsioonid järgmiselt:

$$\begin{aligned} \eta_0(\alpha x) &= e^{-\alpha x} \cos \alpha x \\ \eta_1(\alpha x) &= e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) \\ \eta_2(\alpha x) &= e^{-\alpha x} \sin \alpha x \\ \eta_3(\alpha x) &= e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Esitatud funktsioonid (1.42) on omavahel seotud analoogiliselt *Puzřevski* funktsioonidega lihtsate diferentsiaalsetega. Nimelt

$$\begin{aligned} \eta_0'(\alpha x) &= -\alpha \eta_3(\alpha x) & \eta_1'(\alpha x) &= -2\alpha \eta_0(\alpha x) \\ \eta_2'(\alpha x) &= \alpha \eta_1(\alpha x) & \eta_3'(\alpha x) &= -2\alpha \eta_2(\alpha x) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Funktsioonid (1.42) on tabuleeritud (vt. tabel I. 2), mis lihtsustab tunduvalt poollõpmatu ja lõpmatu elastse alusega tala arvutamist. Valemitega (1.40) ja (1.41) antud tala painde elemendid on perioodiliste kustuvate funktsioonide (1.42) abil väljendatavad nii:

$$v = \frac{P}{2\alpha^3 EI} \eta_0(\alpha x) + \frac{\mathfrak{M}}{2\alpha^2 EI} \eta_1(\alpha x) \quad (1.44)$$

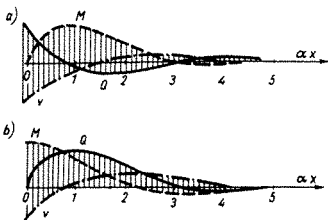
$$\theta = -\frac{P}{2\alpha^2 EI} \eta_3(\alpha x) - \frac{\mathfrak{M}}{\alpha EI} \eta_0(\alpha x) \quad (1.45)$$

$$M = -\frac{P}{\alpha} \eta_2(\alpha x) - \mathfrak{M} \eta_3(\alpha x) \quad (1.46)$$

$$Q = -P \eta_1(\alpha x) + 2\mathfrak{M} \alpha \eta_2(\alpha x) \quad (1.47)$$

Joonisel 1.7 on esitatud tala elastne joon ning põikjõu ja paindemomendi epüürid, kummastki koormusest eraldi. Joonisel 1.7, *a* on koondatud jõu, kuna joonisel 1.7, *b* koormusmomendi põhjustatud epüürid.

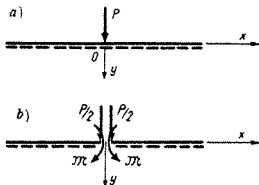
Nagu toodud joonistest nähtub, vähenevad elastse joone ordinaadid, põikjõud ja paindemomendid võrdlemisi kiiresti. Tala otsast kaugusel $\alpha x \geq \frac{3}{2}\pi$ on tala siire, põikjõud ja paindemoment hüljatavalt väikesed, mistõttu tala



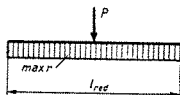
JOON. 1.7

kaugemad punktid võime vaatlusest välja jätta. Praktika seisukohalt küllaldase täpsusega võib lõpliku pikkusega tala, mille pikkus $l \geq \frac{3}{2} \frac{\pi}{\alpha}$, asendada poollõpmatu talaga.

Lõpmatu tala. Vaatleme elastse alusega tala, mis on koormatud koordinaatide alguspunktis $x=0$ koondatud jõuga (joon. 1.8, a). Eraldame tala jõu kohalt lõikega kaheks poollõpmatuks talaks. Rakendame kummagi tala otsa jõu $P/2$ ning lõikes esineva paindemomendiga võrdse momendi. Seni tundmatu paindemomendi leidmiseks kasutame asjaolu, et tegeliku tala deformatsioon jõu rakenduskoha suhtes on sümmeetriline. See tähendab aga seda, et pöördenurk jõu all $v'(0) = 0$. Rakendame seda



JOON. 1.8



JOON. 1.9

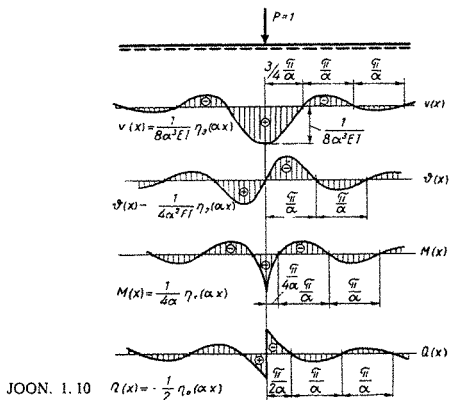
tingimust võrrandite (1.41) esimese võrrandi kohta, võttes seejuures jõu väärtuseks $P/2$, ning saame:

$$\mathfrak{M} = -\frac{P}{4} \quad (1.48)$$

Asetame leitud momendi väärtuse (1.48) avaldisse (1.40) ning saame lõpmatu tala parema poole elastse joone võrrandi

$$v(x) = \frac{P}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) = \frac{P}{8\alpha^3 EI} \eta_3(\alpha x) \quad (1.49)$$

Analoogilisel viisil saame seostest (1.41) tala parema poole pöördenurga, pöikjõu ja paindemomendi võrrandid



$$\begin{aligned}\vartheta(x) = v'(x) &= -\frac{P}{4\alpha^2 EI} e^{-\alpha x} \sin \alpha x = \\ &= -\frac{P}{4\alpha^2 EI} \eta_2(\alpha x)\end{aligned}\quad (1.50)$$

$$\begin{aligned}M(x) &= -\frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x) = \\ &= \frac{P}{4\alpha} \eta_1(\alpha x)\end{aligned}\quad (1.51)$$

$$Q(x) = -\frac{P}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x = -\frac{P}{2} \eta_0(\alpha x) \quad (1.52)$$

Suurim tala siire ja paindemoment on jõu P kohal, kus $x = 0$:

$$\max v = \frac{P}{8\alpha^3 EI} \quad (1.53)$$

$$\max M = +\frac{P}{4\alpha} \quad (1.54)$$

Suurim aluse turve on samuti kohas $x = 0$ ning võrdub

$$\max r = k \max v = \frac{Pk}{8\alpha^3 EI} = \frac{P\alpha}{2} \quad (1.55)$$

Lõpmatu tala arvutamisel on mõnikord otstarbekohane kasutada tala redutseeritud pikkuse mõistet.

Lõpmatu elastse alusega tala redutseeritud pikkuseks loetakse absoluutselt jäiga tala pikkust, mis samale elastsele alusele toetudes saab läbipainde $\max v$.

Elastse aluse turve kogu redutseeritud pikkuse ulatusel on ühtlane ning on võrdne $\max r = \frac{P\alpha}{2}$ (vt. joon. 1.9).

Projektsioonide tasakaalu tingimusest y -teljele järeldub

$$\max r l_{\text{red}} = P \quad (1.56)$$

millest

$$l_{\text{red}} = \frac{P}{\max r} = \frac{2}{\alpha} \quad (1.57)$$

Maksimaalne paindemoment redutseeritud talas on

$$\max M = \frac{\max r l_{\text{red}}^2}{8} = \frac{P}{4\alpha} = \frac{P l_{\text{red}}}{8} \quad (1.58)$$

mis langeb ühte maksimaalse paindemomendiga elastse alusega talas.

Nüüd vaatleme lõpmatut tala, millele on rakendatud kohas $x = 0$ ühikjõud $P = 1$ (joon. 1.10). Konstrueerime talale siirde $v(x)$, pöördenurga $\theta(x)$, paindemomendi $M(x)$ ja põikjõu $Q(x)$ epüürid. Viimaste konstrueerimisel kasutame valemeid (1.49)–(1.52) ning funktsioonide $\eta_i(\alpha x)$ tabeleid. Valemid (1.49)–(1.52) kehtivad tala parema poole kohta, arvates jõu rakenduskohast. Epüüride vasakud harud konstrueerime teades, et tala elastne joon ja momendi epüür on sümmeetrilised, pöördenurga ja põikjõu epüür aga antimeetrilised jõu rakenduspunkti suhtes.

Joonisel 1.10 esitatud epüürid kujutavad endast kustuva laine kõveraid, mille nullpunktide vahekaugused on π/α . Nimetatud $v(x)$, $\theta(x)$, $M(x)$ ja $Q(x)$ epüürid, mis on konstrueeritud lõpmata pikale talale, kui ühikjõud on rakendatud koordinaatide alguspunktis, on samaaegselt ka koordinaatide alguspunkti kohta konstrueeritud paigutise, pöördenurga, paindemomendi ja põikjõu, s. o. v , θ_0 , M_0 ja Q_0 mõjujooned koondatud ühikjõust. Sümmeetriliste mõjujoonte ordinaatide märgid on samad mis vastavatel epüüridel, kuna antimeetriliste mõjujoonte märgid tuleb võtta vastupidi epüüride märkidele.

Kasutades joonisel 1.10 esitatud epüüre-mõjujooni, võime leida lõpmatu tala mis tahes lõike paigutise, pöördenurga, paindemomendi ja põikjõu mis tahes koondatud ja jaotatud jõududest koosnevast väliskoormusest. Vajalikud mõjujoonte ordinaadid leiame $\eta_i(\alpha x)$ väärtuste tabelist I.2.

Näide 1.1. Leida kolme koondatud jõuga koormatud lõpmatu tala (joon. 1.11) paindemoment keskmise jõu kohal, kui tegur $\alpha = 0,25$ l/m.

Arvutame kõigepealt jõudude rakenduspunktile vastavad αx väärtused, asetades koordinaatide alguspunkti jõu P_2 kohale.

$$\alpha x_1 = 3 \cdot 0,25 = 0,75$$

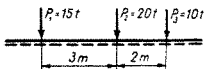
$$\alpha x_2 = 0$$

$$\alpha x_3 = 2 \cdot 0,25 = 0,5$$

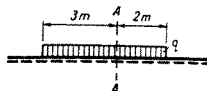
Leiame tabelist I.2 igale αx väärtusele vastava $\eta_1(\alpha x)$ väärtuse ning arvutame paindemomendi

$$M(x) = \frac{1}{4\alpha} \sum_{i=1}^n P_i \eta_1(\alpha x_i) = \frac{1}{4 \cdot 0,25} [15 \cdot 0,0237 + 20 \cdot 1 + 10 \cdot 0,2414] = \\ = 0,356 + 20 + 2,414 = 22,77 \text{ tm}$$

Näide 1.2. Leida paindemoment ja paigutis tala lõikes A , kui tala on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega $q = 20$ t/m 5 m



JOON. 1.11



JOON. 1.12

ulatusel, nagu joonisel 1.12 näidatud. Elastse aluse turbetegur $k = 1000 \text{ t/m}^2$. Tala $EI = 6,41 \cdot 10^4 \text{ tm}^2$.

Soovitava paigutise ja momendi antud lõikes saame vastava mõjujoone pinna ja jaotatud koormuse korrutamise teel. Mõjujoone pinna leiame integreerimisega. Arvutame kõigepealt teguri

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{1000}{4 \cdot 6,41 \cdot 10}} = 0,25 \text{ 1/m}$$

Leiame nüüd tala paigutise punktis A

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{q}{8\alpha^3 EI} \left[\int_0^3 \eta_3(\alpha x) dx + \int_0^2 \eta_3(\alpha x) dx \right] = \\ &= \frac{q}{8\alpha^3 EI} \left[-\frac{\eta_0(\alpha x)}{\alpha} \Big|_0^{0,75} + \frac{\eta_0(\alpha x)}{\alpha} \Big|_0^{0,50} \right] = \\ &= -\frac{q}{2k} [\eta_0(0,75) + \eta_0(0,50) - 2\eta_0(0)] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{20}{2 \cdot 1000} [0,3456 + 0,5323 - 2] = 1,12 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,12 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{q}{4\alpha} \left[\int_0^3 \eta_1(\alpha x) dx + \int_0^2 \eta_1(\alpha x) dx \right] = \\ &= \frac{q}{4\alpha^2} \left[\eta_2(\alpha x) \Big|_0^{0,75} + \eta_2(\alpha x) \Big|_0^{0,50} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{q}{4\alpha^2} [\eta_2(0,75) + \eta_2(0,50) - 2\eta_2(0)] =$$

$$= \frac{20}{4 \cdot 0,25^2} (0,3220 + 0,2908 - 0) = 80 \cdot 0,6128 = 49,1 \text{ tm}$$

Üldjuhul võivad lõpmatul talal peale koondatud ja jaotatud jõudude esineda ka teised põikmõjud: koondatud momendid M_i , tala telje murdenurgad θ_i ja tala

telje nihked Δ_i . Kõikide nimetatud põikmõjude kohta võime konstrueerida kõigepealt tala siirete epüürid-mõjujooned.

Siirete epüüride konstrueerimisel rakendame tööde vastastikkuse teoreemi, rakendades seejuures abiaandmetena koondatud ühikjõu kohta konstrueeritud siirde, pöördenurga, momendi ja põikjõu epüüre.

Tööde vastastikkuse teoreemi järgi **esimese olukorra põikmõjude ja neile vastavate teise olukorra epüüri ordinaatide korrutiste summa võrdub teise olukorra põikmõjude ja neile vastavate esimese olukorra epüüri ordinaatide korrutiste summaga.**

Töö seisukohalt vastab koondatud jõule P siirde v , koondatud momendile \mathfrak{M} pöördenurga θ , tala telje murdenurgale θ paindemomendi M ja tala telje nihkele Δ põikjõu Q epüür.

Rakendame näiteks esimese olukorrana tala lõikes abstsissiga x jõu $P=1$. Teiseks olukorraks võtame lõikes a tala telje murdenurga $\theta=1$.

















Vastastikkuse töö printsiibi järgi võime kirjutada

$$1 \cdot v''(x) = 1 \cdot M'(a) \quad \text{või} \quad v_{xa}^{(\theta)} = M_{ax}^{(P)}$$

mis tähendab seda, et teise olukorra siire esimese olukorra ühikjõu kohal on arvuliselt võrdne esimese olukorra paindemomendiga, mõõdetuna teise olukorra ühikmurdenurga kohalt. Seega võime koondatud ühikjõu paindemomendi epüüri kasutada ühikmurdenurga siirde epüüri või mõjujoone konstrueerimiseks. Analoomiliselt saame ka teiste põikmõjude siirde epüürid ning nende avaldised. Konstrueerinud siirete epüürid, saame nende järkjärgulise diferentseerimise kaudu leida kõikide põikmõjude pöördenurga, paindemomendi ja põikjõu epüürid-mõjujooned. Kõikide ühikpõikmõjude mõjujooned on esitatud tabelis 1.1 (vt. lk. 24).

Tabelis 1.1 esitatud mõjujoonte ordinaadid on leitavad funktsioonide $\eta_i(ax)$ tabelist 2 lisas I. Tabeli andmed kehtivad mõjujoone parema haru kohta. Mõjujoonte ordinaatide märgid määratakse vastavalt tabelis esitatud skeemidele.

Esitatud mõjujooni kasutatakse lõpmatu tala sisejõudude või paigutiste määramiseks selle koormamisel mitmesuguste põikmõjudega. Liikuva koormusena tuleb praktiliselt kõne alla koondatud või jaotatud jõud.

Mõju- joon	P õ i k m õ j u			
	$P=1$	$m=1$	$\vartheta=1$	$d=1$
v	 $v = \frac{\alpha}{2k} \eta_3(\alpha x)$	 $v = \frac{\alpha^2}{k} \eta_2(\alpha x)$	 $v = \frac{1}{4\alpha} \eta_1(\alpha x)$	 $v = \frac{1}{2} \eta_0(\alpha x)$
ϑ	 $\vartheta = \frac{\alpha^2}{k} \eta_2(\alpha x)$	 $\vartheta = \frac{\alpha^3}{k} \eta_1(\alpha x)$	 $\vartheta = \frac{1}{2} \eta_0(\alpha x)$	 $\vartheta = \frac{\alpha}{k} \eta_1(\alpha x)$
M	 $M = \frac{1}{4\alpha} \eta_1(\alpha x)$	 $M = \frac{1}{2} \eta_0(\alpha x)$	 $M = \frac{k}{8\alpha^2} \eta_2(\alpha x)$	 $M = \frac{k}{4\alpha^2} \eta_2(\alpha x)$
Q	 $Q = \frac{1}{2} \eta_0(\alpha x)$	 $Q = \frac{\alpha}{2} \eta_1(\alpha x)$	 $Q = \frac{k}{4\alpha^2} \eta_2(\alpha x)$	 $Q = \frac{k}{4\alpha} \eta_1(\alpha x)$

Kasutades eespool kirjeldatud põikmõjusid, võime lõpmatult tala arvutuskeemiga lahendada poollõpmatuid või lõpliku pikkusega talasid. Seejuures tuleb rakendada lõpmatule talale sümmeetrilisi või antimeetrilisi põikmõjusid, nii et teatav osa lõpmatust talast vastaks deformatsiooni iseloomult tegelikule talale.

Vaatleme järgnevalt mõningaid võtteid poollõpmatute talade arvutamiseks meelevaldsel koormusel.

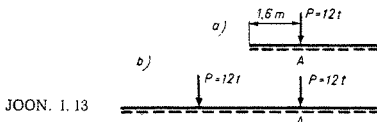
Tala ots toetub liigendtoele. Tala otsas paindemoment $M_0 = 0$ ja siire $v_0 = 0$. Lõpmatu tala koormatakse antimeetrilise koormusega nii, et $M_0 = 0$ ja $v_0 = 0$.

Jäiga kinnituse korral on poollõpmatu tala otsas $v_0 = 0$ ja $\vartheta_0 = 0$. Lõpmatu tala koormatakse sümmeetri-

lise koormusega, kuna koordinaatide alguspunkti täiendavalt rakendatud koondatud jõu Y suurus määratakse tingimusest $v_0 = 0$.

Vaba otsaga poollõpmatu tala arvutamisel tuleb lõpmatu tala koormata sümmeetriliselt, aga koordinaatide alguspunkti murdenurgaga θ nii, et paindemoment $M_0 = 0$.

Näide 1.3. Vaba otsaga poollõpmatu elastse alusega tala on koormatud otsast 1,6 m kaugusel jõuga $P = 12$ t (joon. 1.13, a). Leida paindemoment jõu all, kui $k = 1000$ t/m² ja $\alpha = 0,25$ 1/m.



Käsitleme poollõpmatut tala lõpmatuna (joonis 1.13, b), mis on koormatud nullpunkti suhtes sümmeetriliselt kahe jõuga. Leiame kõigepealt paindemomendi nullpunkti.

$$x = 1,6 \text{ m} \quad \alpha x = 0,25 \cdot 1,6 = 0,40$$

$$M_0 = 2 \cdot \frac{12}{4\alpha} \eta_1(0,40) = 2 \cdot \frac{12}{4 \cdot 0,25} \cdot 0,3564 = 8,554 \text{ tm}$$

Leiame nüüd paindemomendi nullpunkti ühikpõrdenurgast $\theta = 1$

$$M_{01} = \frac{k}{8\alpha^3} \eta_3(0) = \frac{1000}{8 \cdot 0,25^3} \cdot 1 = 8000 \text{ tm}$$

Kuna paindemoment tala otsas (nullpunktis) võrdub tegelikult nulliga, saame võrrandi

$$8000\theta_0 + 8,554 = 0$$

millest

$$\theta_0 = -1,0692 \cdot 10^{-3}$$

Arvutame nüüd paindemomendi jõu all

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{P}{4\alpha} [\eta_1(0) + \eta_1(0,8)] - 1,0692 \cdot 10^{-3} \frac{k}{8\alpha^3} \eta_3(0,40) = \\ &= \frac{12}{4 \cdot 0,25} (1 - 0,0093) - 1,0692 \cdot 10^{-3} \frac{1000}{8 \cdot 0,25^3} \cdot 0,8784 = \\ &= 11,89 - 7,51 = 4,38 \text{ tm} \end{aligned}$$

1.3. ALGPAREMETRITE MEETOD

Elastse alusega tala algpärametrite meetod ei erine põhimõtteliselt harilikku tala algpärametrite meetodist (vt. *K. Ollik, O. Roots «Tugevusõpetus»*). Algpärametrite meetodit on otstarbekohane rakendada siis, kui talale mõjub mitu põikkoormust, mis jagavad tala mitmeks paindemomendi või põikkoormuse pidevusvahemikuks. Iga vahemik nõuab oma diferentsiaalvõrrandi lahendit koos selle juurde kuuluva nelja integreerimiskonstandiga, mis määratakse ääretingimustest ja deformatsiooni pidevustingimustest. Suure arvu pidevusvahemike korral kujuneb otsene integreerimine aga küllalt töömahukaks. Algpärametrite meetodi korral koostatakse lahend, rakendades selleks teatavat võtet, ühtse universaalse valemina. See valem on võimeline haarama kõiki pidevusvahemikke, kusjuures integreerimiskonstantidena esineb ainult neli tundmatut algpärametrit v_0 , θ_0 , Q_0 ja M_0 tala äärmisel vasakul otsal, mis määratakse tala toe- või deformatsioonitingimustest.

Käsitleme järgnevalt lahendina tala siirdefunktsiooni v . Jälgime lahendi muutumist vahemike kaupa alates esimesest vahemikust. Mingi vahemiku n lahendit võime esitada järgmiselt:

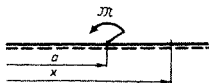
$$v_n = v_{n-1} + v_r \quad (a)$$

Vahemiku n lahend v_n saadakse eelmise vahemiku siiret kirjeldava funktsiooni v_{n-1} ja täiendava siirde funktsiooni v_r summamana. v_r on tala diferentsiaalvõrrandi lahend, mis on tingitud juurdetuleva vahemiku koormusest. Seejuures on täiendava siirde algpärametriteks funktsioonide v , θ , M ja Q lõplikud juurdekasvud vahemiku piiiril.

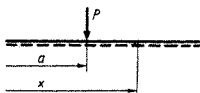
Vaatleme lõpliku pikkusega tala ning koostame tema esimese vahemiku lahendi valemi (1.31) järgi.

$$v_1 = v_e + v_0 V_0(ax) + \frac{\theta_0}{\sqrt{2\alpha}} V_1(ax) - \frac{M_0}{2\alpha^2 EI} V_2(ax) - \frac{Q_0}{2\sqrt{2\alpha^3 EI}} V_3(ax) \quad (1.59)$$

Esitame järgnevalt mis tahes vahemiku, algusega $x = a$, täiendava paigutisfunktsiooni, kasutades selleks



JOON. 1.14



JOON. 1.15

jällegi lahendit (1.31) ning oletades, et vahemikul puudub jaotatud koormus.

$$V_t = V_{0,t} V_0[\alpha(x-a)] + \frac{\vartheta_{0,t}}{\sqrt{2}\alpha} V_1[\alpha(x-a)] - \frac{M_{0,t}}{2\alpha^2 EI} V_2[\alpha(x-a)] - \frac{Q_{0,t}}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3[\alpha(x-a)] \quad (1.60)$$

Lahendis (1.60) esinevad $v_{0,t}$, $\vartheta_{0,t}$, $M_{0,t}$ ja $Q_{0,t}$ on vastavate funktsioonide juurdekasvud vahemiku alguses ja nad määratakse tingimustest vahemiku piiril. Neid võib vaadelda kui vahemiku piiril esinevat tala telje nihet Δ , tala telje pööret θ , momenti \mathfrak{M} ja koondatud jõudu P , mis võivad esineda korruga või üksikult olenevalt tala koormusolukorrast.

Vaatleme näiteks koormust, kus tala vahemiku piiril $x=a$ on rakendatud moment \mathfrak{M} ja koondatud jõud P .

Kui vahemiku piiril $x=a$ on rakendatud ainult moment \mathfrak{M} (joon. 1.14), siis saab juurdekasvu ainult paindemoment ning

$$M_{0,t} = -\mathfrak{M}; \quad \text{kuna } v_{0,t} = \vartheta_{0,t} = Q_{0,t} = 0 \quad (1.61)$$

Täiendpaigutis arvutatakse sel juhul valemiga

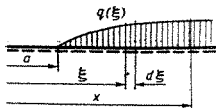
$$v_t = \frac{\mathfrak{M}}{2\alpha^2 EI} V_2[\alpha(x-a)] \quad (1.62)$$

Vaatleme järgnevalt vahemiku piiril $x=a$ rakendatud koondatud jõudu P (joon. 1.15).

Juurdekasvu saab nüüd põikjõud $Q_{0,t} = -P$, kuna $v_{0,t} = \vartheta_{0,t} = M_{0,t} = 0$.

Seega täiendav paigutis koondatud jõust

$$v_{0,t} = -\frac{P}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3[\alpha(x-a)] \quad (1.63)$$



JOON. 1. 16

Juhul kui tala vahemik on koormatud mingi jaotatud koormusega q (joon. 1. 16), võime seda vaadelda kui tala elemendi $d\xi$ kohta tulevat elementaarset koondatud jõudu ning viimase kohta rakendada valemit (1. 63)

$$dv_t = \frac{q(\xi) d\xi}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3[\alpha(x - \xi)] \quad (1. 64)$$

Kogu täiendav paigutis jaotatud koormusest q lõikest a kuni x on

$$v_t = \int_a^x dv_t = \int_a^x \frac{q(\xi) d\xi}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3[\alpha(x - \xi)] d\xi \quad (1. 65)$$

Saadud täiendavat paigutist (1. 65) võime käsitleda ka kui lahendi (1. 31) mis tahes jaotatud koormusest tingitud erilahendit v_0 , mis oli seni määramata.

Tuletame täiendavad paigutisfunktsioonid kahe praktilis sagedamini esineva jaotatud koormuse liigi kohta.

1. Ühtlaselt jaotatud koormus

$$\begin{aligned} q(\xi) &= q = \text{konst.} \\ v_t &= \frac{q}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} \int_a^x V_3[\alpha(x - \xi)] d\xi = \\ &= \frac{q}{k} \{1 - V_0[\alpha(x - a)]\} \end{aligned} \quad (1. 66)$$

2. Lineaarselt muutuv koormus

$$q(\xi) = q_0(\xi - a) \quad (1. 67)$$

milles q_0 on jaotatud koormuse juurdekasv tala pikkuse ühiku kohta,

$$v_t = \frac{q_0}{k} \left\{ x - a - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} V_1[\alpha(x - a)] \right\} \quad (1. 68)$$

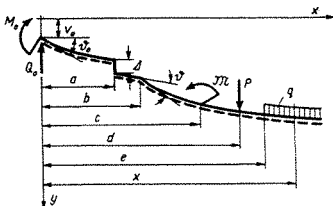
Koostame nüüd, rakendades summeerimise printsiipi, paigutisfunktsiooni universaalse valemi, kasutades sel-

leks lahendeid (1.59), (1.60), (1.62), (1.63) ja (1.66). Mõnede liikmete ees esinev märk Σ tähendab seda, et on tegemist mitme samaliigilise põikmõju summaga, kusjuures üksikuid liikmeid eraldab indeksi i erinev väärtus. Nimetusega põikmõju ei kirjeldata üksnes põikkoormusi M_i , P_i ja q_i , vaid ka tala telje nihkeid Δ_i ja pöördnurki θ_i .

$$\begin{aligned}
 v(x) = & v_0 V_0(\alpha x) + \frac{\theta_0}{\sqrt{2}\alpha} V_1(\alpha x) - \frac{M_0}{2\alpha^2 EI} V_2(\alpha x) - \\
 & - \frac{Q_0}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3(\alpha x) + \Sigma \Delta_i V_0[\alpha(x - a_i)] + \\
 & + \Sigma \frac{\theta_i}{\sqrt{2}\alpha} V_1[\alpha(x - b_i)] + \\
 & + \Sigma \frac{M_i}{2\alpha^2 EI} V_2[\alpha(x - c_i)] + \\
 & + \Sigma \frac{P_i}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3[\alpha(x - d_i)] + \\
 & + \Sigma \frac{q_i}{k} \{1 - V_0[\alpha(x - e_i)]\} \quad (1.69)
 \end{aligned}$$

Valem (1.69) määrab tala paigutise lõikes x . Valemis liikmete ees olevad märgid vastavad joonisel 1.17 esitatud põikmõjude suundadele. Tuleb rõhutada seda, et paigutise avaldises võivad esineda liikmed ainult nendest põikmõjudest, mis jäävad vaadeldavast lõikest vasakule.

Siirdefunktsiooni $v(x)$ järkjärgulise diferentseerimise teel on võimalik üsna lihtsalt koostada tala pöördnurga $v'(x)$, paindemomendi $M(x)$ ja põikjõu $Q(x)$ universaal-



JOON. 1.17

sed arvutusvalemid. Arvutust kergendavaks asjaoluks on, nagu ülalpool mainitud, *Puzõrevski* funktsioonide vahelised lihtsad diferentsiaalseosed. Esitame nimetatud valemid alljärgnevalt, nende tuletuskäigu juures üksikasjalikult peatumata.

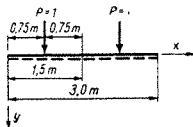
$$\begin{aligned}
 v'(x) = & -v_0 \sqrt{2\alpha} V_3(\alpha x) + \vartheta_0 V_0(\alpha x) - \frac{M_0}{\sqrt{2\alpha} EI} V_1(\alpha x) - \\
 & - \frac{Q_0}{2\alpha^2 EI} V_2(\alpha x) - \sum \Delta_i \sqrt{2\alpha} V_3[\alpha(x - a_i)] + \\
 & + \sum \vartheta_i V_0[\alpha(x - b_i)] + \sum \frac{\mathfrak{M}_i}{\sqrt{2\alpha} EI} V_1[\alpha(x - c_i)] + \\
 & + \sum \frac{P_i}{2\alpha^2 EI} V_2[\alpha(x - d_i)] + \\
 & + \sum \frac{\sqrt{2\alpha} q_i}{k} V_3[\alpha(x - e_i)] \quad (1.70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(x) = & v_0 \frac{k}{2\alpha^2} V_2(\alpha x) + \vartheta_0 \frac{k}{2\sqrt{2\alpha^3}} V_3(\alpha x) + \\
 & + M_0 V_0(\alpha x) + \frac{Q_0}{\sqrt{2\alpha}} V_1(\alpha x) + \\
 & + \sum \Delta_i \frac{k}{2\alpha^2} V_2[\alpha(x - a_i)] + \\
 & + \sum \vartheta_i \frac{k}{2\sqrt{2\alpha^3}} V_3[\alpha(x - b_i)] - \\
 & - \sum \mathfrak{M}_i V_0[\alpha(x - c_i)] - \sum \frac{P_i}{\sqrt{2\alpha}} V_1[\alpha(x - d_i)] - \\
 & - \sum \frac{q_i}{2\alpha^2} V_2[\alpha(x - e_i)] \quad (1.71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(x) = & v_0 \frac{k}{\sqrt{2\alpha}} V_1(\alpha x) + \vartheta_0 \frac{k}{2\alpha^2} V_2(\alpha x) - \\
 & - M_0 \sqrt{2\alpha} V_3(\alpha x) + Q_0 V_0(\alpha x) + \\
 & + \sum \Delta_i \frac{k}{\sqrt{2\alpha}} V_1[\alpha(x - a_i)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum \theta_i \frac{k}{2\alpha^2} V_2[a(x - b_i)] + \\
& + \sum \theta_i \sqrt{2\alpha} V_3[a(x - c_i)] - \sum P_i V_0[a(x - d_i)] - \\
& - \sum \frac{q_i}{\sqrt{2\alpha}} V_1[a(x - e_i)] \quad (1.72)
\end{aligned}$$

Näide 1.9. Arvutada joonisel 1.18 esitatud elastse alusega tala paigutised tala otstel ja keskel. Elastse aluse turbetegur $k = 150 \text{ kG/cm}^2$, tala $I = 7400 \text{ cm}^4$, $E = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$.



JOON. 1.18

Arvutame kõigepealt

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{150}{4 \cdot 1,0 \cdot 10^5 \cdot 7400}} = \sqrt[4]{5,07 \cdot 10^{-6}} = 0,015$$

Kasutame valemite (1.60). Tingimusest, et kui $x = 0$, siis $M(x) = Q(x) = 0$, saame, et $M_0 = Q_0 = 0$.

Valemist (1.60) koostame käesolevale koormusele vastava paigutusfunktsiooni:

$$v(x) = v_0 V_0(\alpha x) + \frac{\theta_0}{\sqrt{2\alpha}} V_1(\alpha x) + \sum \frac{P_i}{2\sqrt{2\alpha^3 EI}} V_3[a(x - d_i)] \quad (a)$$

Selles paigutusfunktsioonis esinevad v_0 ja θ_0 määrame asjaolust, et tala keskel pöördenurk $v'(x) = 0$ ning et tala otsal $x = l$ $M(x) = 0$.

Pöördenurga ja paindemomendi avaldised saame valemite (1.70) ja (1.71), jättes neist ära mittevajalikud liikmed, järgmistena:

$$v'(x) = -v_0 \sqrt{2\alpha} V_3(\alpha x) + \theta_0 V_0(\alpha x) + \sum \frac{2P_i 2\alpha}{k} V_2[a(x - d_i)] \quad (b)$$

$$M(x) = v_0 \frac{k}{2\alpha^2} V_2(\alpha x) + \frac{\theta_0}{\sqrt{2\alpha}} V_1(\alpha x) +$$

$$\sum \frac{P_i}{\sqrt{2\alpha}} V_1[a(x - d_i)] \quad (c)$$

Valemite (a), (b) ja (c) esinevatele konkreetsetele x väärtustele vastavad Puzõrevski funktsioonide väärtused leiame tabelist I lisas I.

Niisiis rakendame kõigepealt ääre- ja deformatsioonitingimusi

$$v'_{i/2} = 0 \quad \text{ja} \quad M_i = 0$$

millest saame süsteemi

$$-v_0 \cdot 0,0150 \cdot 6,6790 + \theta_0(-3,0131) + \frac{1 \cdot 2 \cdot 0,015^2}{150} 1,2432 = 0$$

$$v_0 \cdot \frac{150}{2 \cdot 0,015^2} (-43,992) + \theta_0 \frac{150}{4 \cdot 0,015^3} (-34,516) =$$

$$- \frac{1}{2 \cdot 0,015} (-2,130 - 17,589) = 0$$

või

$$0,1002v_0 + 3,0131\theta_0 - 3,7296 \cdot 10^{-6} = 0$$

$$0,1466v_0 + 3,8351\theta_0 + 5,153 \cdot 10^{-6} = 0 \quad (d)$$

Süsteemi juurteks on tala pöördenurk tala vasakul otsal

$$\theta_0 = 5,32 \cdot 10^{-7} \quad (e)$$

ja samuti tala otsa paigutis samal tala otsal

$$v_0 = 2,12 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \quad (f)$$

Kasutades andmeid (e) ja (f), leiame nüüd valemist (a)

$$v_{(150)} = 2,123 \cdot 10^{-5}(-3,0131) + \frac{5,32 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 0,015} 0,7852 + \frac{0,0150}{150} \cdot 0,9419 =$$

$$= -6,397 \cdot 10^{-5} + 1,392 \cdot 10^{-5} + 9,419 \cdot 10^{-5} = 4,414 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

2. VARRASTE PIKIPÕIKPAINE

2.1 PIKIPÕIKPAINDE MÕISTE JA TALA ELASTSE JOONE VÖRRAND

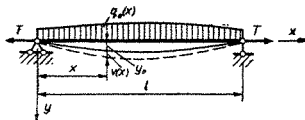
Pikipõikpaine tekib varrastes ja talades juhul, kui lisaks mingile põikmõjule mõjub vardale ka pikijõud. Põikmõju all mõtleme siin vardale mõjuvat põikkoormust ja varda telje esialgset erinevust sirgest. Näiteks kui sõrestiku varras on koormatud sõlmede vahelises osas põikkoormusega, tekib vardas lisaks sõrestiku üldisest paindest põhjustatud pikijõule ka veel paindemoment ja varras on pikipõikpainde mõju all. Pikijõud võib olla kas surve- või tõmbejõud. Erilist tähelepanu väärib ohtlikkuse tõttu paine survejõuga, sest sellisel juhul suureneb paine pikijõu mõjul — suurenevad läbipainded, pinged jne. Tõmbejõu mõjul paine väheneb.

Vaatleme joonisel 2.1 kujutatud tala, mis paindub xy -tasandis, temale mõjuvate koormuste all.

Varras olgu koormatud jaotatud põikkoormusega $q_0(x)$ ning pikijõududega T .

Oletame, et talal on ka esialgne kõverus, mille määrame ordinaadiga y_0 , mis on mõõdetud teljest x kuni koormamata tala teljeni. v -ga tähistame tala koormamisel tekkivat läbipainde ehk siirde suurust, mis on mõõdetud esialgselt kõverdunud teljest.

Pikipõikpaindel tekivad nii põikkoormusest kui ka



JOON. 2.1

pikijõust paindemoment ja põikjõud, mida võib avaldada järgmiselt:

$$Q = Q_0 + Q_T \quad (a)$$

$$M = M_0 + M_T \quad (b)$$

kus Q_0 ja M_0 on põikjõud ja paindemoment põikkoormusest, kuna Q_T ja M_T on samad pikijõust.

Põikjõu ja paindemomendi märgi reeglid on järgmised: **põikjõud on positiivne, kui ta püüab tala osa, millele ta mõjub, pöörata päripäeva, ning negatiivne vastupidisel juhul.**

Positiivne paindemoment painutab tala kumerusega allapoole, negatiivne aga vastupidiselt.

Kuna järgnevalt kasutame varda elastse joone elemente, siis lepime kokku ka nende märgi reeglites. Nimelt pöördenurka θ loeme positiivseks siis, kui varda elastse joone pautuja pöörduv varda telje algasendi suhtes päripäeva. Siire v on aga positiivne siis, kui ta suund ühtib y -telje suunaga.

Leiame

$$M_T = -T(y_0 + v) \quad (c)$$

$$Q_T = \frac{dM_T}{dx} = -T(y_0 + v) \quad (d)$$

Järelikult

$$M = M_0 - T(y_0 + v) \quad (e)$$

$$Q = Q_0 - T(y_0 + v)' \quad (f)$$

Viimastest avaldistest nähtub, et **pikipõikpaindel sõltuvad põikjõud ja paindemoment tala siirdest.**

Varda väikestele deformatsioonidele vastav elastse joone diferentsiaalvõrrand paindel on

$$EIv'' = -M \quad (g)$$

Asetades paindemomendi avaldise (e) viimasesse võrrandisse, saame:

$$EIv'' = -M_0 + T(y_0 + v) \quad (h)$$

Diferentseerinud viimast võrrandit x suhtes, saame:

$$|EI\omega''|' = -Q_0 + T(y_0 + v)' \quad (i)$$

mis on põikjõu üldavaldis.

Võrrandit (i) veel kord diferentseerides saame:

$$|EI\omega''|'' = q_0 + T(y_0 + v)'' \quad (k)$$

Kirjutame selle võrrandi teisiti:

$$|EIv''|'' - Tv'' = q_0 + Ty_0'' \quad (2.1)$$

Liiget Ty_0'' võime vaadelda kui täiendavat põikkoormust varda esialgse kõveruse tagajärjel.

Oletades, et $EI = \text{konst.}$ ja $q_0(x) + Ty_0'' = q(x)$, saame võrrandist (2.1):

$$EIv^{IV} - Tv'' = q(x) \quad (2.2)$$

Saadud võrrandi üldintegraal koosneb kahest liikmest — homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$EIv^{IV} - Tv'' = 0 \quad (2.3)$$

üldlahendist v_u ja võrrandi (2.2) mis tahes erilahendist v_e .

$$\text{Tähistades } r^2 = \frac{T}{EI}$$

võime võrrandi (2.3) esitada järgmisel kujul:

$$v^{IV} - r^2v'' = 0 \quad (2.4)$$

Võrrandi (2.4) lahendi esitame järgmisel kujul:

$$v_n = A_n e^{k_n x} \quad (m)$$

Asetades lahendi võrrandisse (2.4), saame karakteristikliku võrrandi

$$k_n^4 - r^2 k_n^2 = 0$$

mille juured on

$$k_1 = k_2 = 0; \quad k_3 = r; \quad k_4 = -r$$

Nii saame võrrandi (2.4) üldlahendiks

$$v_u = A_1 + A_2 r x + A_3 e^{rx} + A_4 e^{-rx} \quad (n)$$

või

$$v_u = B_1 + B_2 r x + B_3 \text{ch } rx + B_4 \text{sh } rx \quad (2.5)$$

Eri lahendi v_e leidmiseks kasutame määramata tegurite meetodit. Esitame erilahendi polünoomina

$$v_e = A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4 \quad (2.6)$$

Olgu varras ilma algkõveruseta ja koormatud lineaarselt muutuva jaotatud koormusega

$$q(x) = q_0 + mx \quad (2.7)$$

Asetame erilahendi (2.6) võrrandisse (2.2), võrrutades ühtlasi $q(x)$ avaldisega (2.7). Saame:

$$24EIA_3 - 2PA_1 - 6PA_2x + 12A_3x^2 = q_0 + mx$$

Et võrdus oleks rahuldatud, peab kordaja x^2 ees võrduma nulliga ja järelikult

$$A_3 = 0; \quad q_0 = -2TA_1; \quad mx = -6PA_2x$$

millest

$$A_1 = -\frac{q_0}{2T} \quad \text{ja} \quad A_2 = -\frac{m}{6T}$$

Saame erilahendiks

$$v_e = -\frac{q_0}{2T}x^2 - \frac{m}{6T}x^3 \quad (2.8)$$

Ühtlaselt jaotatud koormuse korral on erilahendiks

$$v_e = -\frac{q_0}{2T}x^2 \quad (2.9)$$

Vaatleme juhtu, kui põikkoormus puudub, algköverus on esitatud aga võrrandiga

$$y_0 = b \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2.10)$$

Otsime erilahendit kujul

$$v_e = C \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2.11)$$

Asetame avaldised (2.10) ja (2.11) võrrandisse (2.1). Saame:

$$\left[EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 + T \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right] C \sin \frac{\pi x}{l} = bT \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{l}$$

millest

$$C = -b \frac{P}{T + \frac{\pi^2 EI}{l^2}} \quad (2.12)$$

Pikipõikpaine survejõu korral

Lahend (2.5) oli saadud pikitõmbejõu mõjumisel var-dale. Survejõu puhul muutub märk pikijõu ees:

$$T = -T_s$$

kus $T_s > 0$.

Homogeenne diferentsiaalvõrrand (2.4) saab siin kuju

$$v^{IV} + r_s^2 v'' = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{kus } r_s^2 = \frac{T_s}{EI}$$

Otsides ka siin lahendit kujul (m), saame karakteristikli-
kuks võrrandiks

$$k_n^4 + r_s^2 k_n^2 = 0$$

mille juured on

$$k_1 = k_2 = 0; \quad k_3 = ir_s; \quad k_4 = -ir_s$$

Võrrandi (2.13) lahendiks saame

$$v_{\bar{u}} = A_1 + A_2 ir_s x + A_3 e^{ir_s x} + A_4 e^{-ir_s x}$$

või

$$v_{\bar{u}} = B_1 + B_2 r_s x + B_3 \cos r_s x + B_4 \sin r_s x \quad (2.14)$$

Nagu esitatud lahenduskäigust nähtub, tuleb survejõu korral karakteristikliku võrrandi juur r asendada juurega ir . See kehtib üldiselt üleminekul tõmbejõuga lahendilt survejõule.

Erilahendi liikmete ees muutub survejõu korral märk. Nii saame lineaarselt muutuva jaotatud koormuse jaoks erilahendi

$$v_e = \frac{q_0 x^2}{2T_s} + \frac{m x^3}{6T_s} \quad (2.15)$$

Võrrandi (2.2) üldintegraali kuju on:

a) tõmbejõu korral

$$v = v_e + B_1 + B_2 r_s x + B_3 \operatorname{ch} r_s x + B_4 \operatorname{sh} r_s x \quad (2.16)$$

b) survejõu korral

$$v = v_e + B_1 + B_2 r_s x + B_3 \cos r_s x + B_4 \sin r_s x \quad (2.17)$$

2.2 ÄÄRETINGIMUSED

Üldintegraalides (2.16), (2.17) sisalduvad integreerimiskonstandid määratakse varda ääretingimustest, s. o. toetingimustest. Vaatleme järgnevalt mõningaid sagedamini esinevaid ääretingimusi.

1. Varda ots on kinnitatud liigendiga liikumatu toe külge. Tingimused toel:

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ EI v'' &= 0 \quad (M = 0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

2. Jäik tugi:

$$\begin{aligned}v &= 0 \\v' &= 0\end{aligned}\quad (2.19)$$

3. Täiesti vaba vardaotsa ja jaotatud koormuse korral võime kirjutada tingimused põikjõu ja momendi kohta:

$$\begin{aligned}(EIv'')' &= T(y_0' + v') \\EIv'' &= 0\end{aligned}\quad (2.20)$$

4. Varda ots on kinnitatud elastselt elastse toe külge. Sel juhul saame tingimused varda otsa pöördnurga ja põikjõu kohta

$$\begin{aligned}v' &= \pm \mathfrak{N}EIv'' \\(EIv'')' &= T(y_0' + v') \pm \frac{v}{A}\end{aligned}\quad (2.21)$$

kus \mathfrak{N} — elastse kinnituse jäikuse tegur (ristlõike pöördnurk, kui $M=1$);

A — elastse toe jäikuse tegur (toe paigutis, kui toereaktsioon $R=1$).

Ääritingimustes (2.21) esinevaid märke (kas + või —) tuleb kasutada olenevalt sellest, millist varda otsa vaadeldakse — kas vasak- või parempoolset.

2.3 SUMMEERIMISE PRINTSIIP TALA PIKIPÕIKPAINDEL

Tala pikipõikpaindel võime analoogiliselt harilikku põikpaindega rakendada põikmõjude kohta summeerimise printsiipi. Selle kohaselt võime arvutada näiteks tala siirde, kui talale mõjub mitu põikkoormust üheaegselt, järgmiselt: leiame igast koormusest tingitud siirde üksikult ning seejärel summeerime kõik siirded. Tingimata tarvilik on seejuures, et iga üksiku põikmõju korral peab talale mõjuma üks ja sama pikijõud.

Tõestame väidetut järgmise näite varal. Koormame tala kahe põikkoormusega q_1 ja q_2 ning pikijõuga T . Olgu siire tala mingisuguses punktis põikkoormusest q_1 ja pikijõust $T - v_1$ ning põikkoormusest q_2 ja pikijõust $T - v_2$. Kasutades seost (2.2), kirjutame kummagi koormusjuhu kohta:

$$\begin{aligned}EIv_1^{IV} - Tv_1'' &= q_1 \\EIv_2^{IV} - Tv_2'' &= q_2\end{aligned}\quad (a)$$

Kui mõlemad põikkoormused ning ka T mõjuvad talale üheaegselt, saame sel korral

$$EIv^{IV} - Tv'' = q_1 + q_2 \quad (b)$$

Liites võrrandid (a) ning kõrvutatades tulemuse võrrandiga (b), võime kirjutada, et

$$v = v_1 + v_2 \quad (c)$$

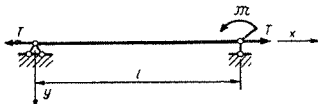
Kui talal on algkõverus, võime seda arvesse võtta täiendava põikkoormusega, nagu eespool nähtus. Algkõveruse korral tuleb tala elastse joone diferentsiaalvõrrand (2.1) esitada kujul

$$EIv^{IV} - Tv'' = q + Ty_0'' \quad (2.22)$$

kus y_0 tähistab tala algläbipainet. Liige Ty_0'' ongi täiendav fiktiivne põikkoormus. Täiendava fiktiivkoormuse mõju tuleb arvesse võtta ka ääritingimustes vastavate toereaktsioonidena.

2.4 ÜHESILDELISE TALA PIKIPÕIKPAINDE LIHTSAMAD KOORMUSJUHUD

2.41 Pikitõmbejõududega ning paremas otsas momendiga koormatud tala (joon. 2.2)



JOON. 2 2

Kuna talal puudub jaotatud põikkoormus, siis tala elastse joone diferentsiaalvõrrand on homogeenne, mille lahendiks on (2, 5), seega alljärgnev:

$$v = B_1 + B_2 rx + B_3 \operatorname{ch} rx + B_4 \operatorname{sh} rx \quad (a)$$

Selles esinevad integreerimiskonstandid leitakse ääritingimustest järgmiselt:

1) kui $x=0$, siis $v = v' = 0$, millest saame

$$B_1 = B_3 = 0 \quad (b)$$

2) kui $x = l$, siis $v = 0$ ja $EIv'' = -\mathfrak{M}$
millest

$$B_2rl + B_4 \operatorname{sh} rl = 0; \quad EI r^2 B_4 \operatorname{sh} rl = -\mathfrak{M}$$

Kasutades saadud võrrandeid, leiame

$$B_2 = \frac{\mathfrak{M}}{EI r^2 \cdot rl}; \quad B_4 = -\frac{\mathfrak{M}}{EI r^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} rl} \quad (c)$$

Tähistame $v = rl$, misjärel võime kirjutada tala siirde, ristlõike pöördenurga ja paindemomendi kohta:

$$v(x) = \frac{\mathfrak{M}}{EI r^2} \left(\frac{rx}{v} - \frac{\operatorname{sh} rx}{\operatorname{sh} v} \right) \quad (2.23)$$

$$\vartheta(x) = v' = \frac{\mathfrak{M}}{EI r} \left(\frac{1}{v} - \frac{\operatorname{ch} rx}{\operatorname{sh} v} \right) \quad (2.24)$$

$$M(x) = EIv''(x) = -\mathfrak{M} \frac{\operatorname{sh} rx}{\operatorname{sh} v} \quad (2.25)$$

Tala toeristlõigete pöördenurgad on järgmised:

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \frac{\mathfrak{M}l}{6EI} \cdot \frac{6}{v} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{sh} v} \right) \\ \vartheta_l &= -\frac{\mathfrak{M}l}{3EI} \cdot \frac{3}{v} \left(\frac{1}{\operatorname{th} v} - \frac{1}{v} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Tähistades

$$\alpha(v) = \frac{3}{v} \left(\frac{1}{\operatorname{th} v} - \frac{1}{v} \right) \quad (2.27)$$

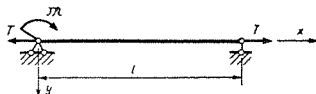
$$\beta(v) = \frac{6}{v} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{sh} v} \right)$$

võime toeristlõigete pöördenurgad väljendada valemitega

$$\vartheta_0 = \frac{\mathfrak{M}l}{6EI} \beta(v); \quad \vartheta_l = -\frac{\mathfrak{M}l}{3EI} \alpha(v) \quad (2.28)$$

Funktsioonide $\alpha(v)$ ja $\beta(v)$ kaudu avaldub pikijõu P mõju tala paindeformatsioonile. Argumendiks ülal esitatud funktsioonides on $v = rl$. Kuna $r = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, siis

$$v = l \sqrt{\frac{P}{EI}}$$



JOON. 2.3

Kui talale mõjuks moment \mathfrak{M} ülalkirjeldatud viisil ilma pikijõuta, tuleks toeristlõigete pöördenurgad arvutada alljärgnevalt:

$$\vartheta_0 = \frac{\mathfrak{M}l}{6EI} \quad \text{ja} \quad \vartheta_l = -\frac{\mathfrak{M}l}{3EI} \quad (d)$$

Juhul kui momendiga \mathfrak{M} on koormatud tala vasak ots (joon. 2.3), saame tala otsristlõigete pöördenurkade arvutamiseks rakendada funktsioone $\alpha(v)$ ja $\beta(v)$ analoogiliselt eelmise näitega.

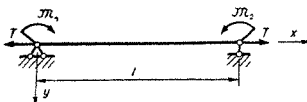
$$\vartheta_0 = \frac{\mathfrak{M}l}{3EI} \alpha(v); \quad \vartheta_l = -\frac{\mathfrak{M}l}{6EI} \beta(v) \quad (2.29)$$

Kahe momendi üheaegsel mõjumisel talale (joon. 2.4) saame summeerimise printsiibi põhjal pöördenurgad tala otstes:

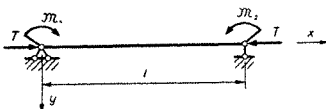
$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \frac{\mathfrak{M}_1 l}{3EI} \alpha(v) + \frac{\mathfrak{M}_2 l}{6EI} \beta(v) \\ \vartheta_l &= -\frac{\mathfrak{M}_2 l}{3EI} \alpha(v) - \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EI} \beta(v) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Kui varda otstes on tõmbejõudude asemel rakendatud survejõud, tuleb diferentsiaalvõrrandi lahendi (2.5) asemel kasutada lahendit (2.14). Kuna survejõu korral on karakteristikliku võrrandi juured imaginaarsed, siis üldlahendis (2.14) esinevad liikmed trigonomeetriliste funktsioonidega, kuna lahendis (2.5) sisaldasid samad liikmed hüperboolseid funktsioone. Analoogiliselt muutuvad ka ülaltoodud näite puhul survejõu mõju arvestavad funktsioonid järgmisteks:

$$\begin{aligned} \alpha^*(v) &= \frac{3}{v} \left[\frac{1}{v} - \frac{1}{\tan v} \right] \\ \beta^*(v) &= \frac{6}{v} \left[\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$



JOON. 2 4



JOON. 2 5

Vaatleme viimases näites toodud tala, mille otses mõjuvad koondatud momendid M_1 ja M_2 , kuid pikijõududega esinevad survejõud (joon. 2. 5). Sel juhul on tala otses pöördenurgad:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{M_1 l}{3EI} \alpha^*(v) + \frac{M_2 l}{6EI} \beta(v) \\ \theta_1 &= -\frac{M_2 l}{3EI} \alpha^*(v) - \frac{M_1 l}{6EI} \beta(v) \end{aligned} \quad (2. 32)$$

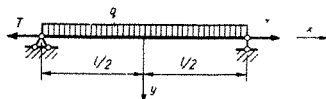
Funktsioonid $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $\alpha^*(v)$ ja $\beta^*(v)$ on olenevusega v väärtusest tabuleeritud. Analoogilised funktsioonid tuletame ka teiste koormusjuhtude jaoks, mida vaatleme järgnevalt. Funktsioonide väärtused on toodud raamatu lisa tabelis I. 1.

2. 42 Ühtlaselt jaotatud koormusega q ning tõmbejõududega T koormatud lihttala (joon. 2. 6)

Võtame koordinaatide alguspunkti tala keskele. Sel juhul on tala elastne joon y -telje suhtes sümmeetriline, mistõttu võime võrrandis (2. 16) säilitada ainult sümmeetrilised liikmed ning saame

$$v = B_1 + B_3 \operatorname{ch} rx - \frac{q}{2T} x^2 \quad (a)$$

milles viimane liige on ühtlaselt jaotatud koormuse kohta



JOON. 2 6

kehtiv erilahend. Integreerimiskonstandid B_1 ja B_3 määratakse ääritingimuste kaudu järgmiselt:

kui $x = \frac{l}{2}$, siis $v = v'' = 0$, millest

$$B_1 + B_3 \operatorname{ch} \frac{rl}{2} - \frac{ql^2}{8T} = 0; \quad r^2 B_3 \operatorname{ch} \frac{rl}{2} - \frac{q}{T} = 0 \quad (b)$$

Tähistades $rl = v$, saame pärast teisendamist integreerimiskonstandid:

$$B_1 = \frac{ql^2}{8T} - \frac{q}{Tr^2}, \quad B_3 = \frac{q}{Tr^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} \quad (c)$$

Asetame saadud konstandid üldlahendisse ja teeme teisendusi, arvestades, et $T = r^2 EI$ ja $r = v/l$. Saame lõplikult

$$v = \frac{ql^4}{EIv^4} \left[\frac{\operatorname{ch} rx}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^3}{4} - r^2 x^2 \right) \right] \quad (2.33)$$

Diferentseerides saadud avaldist x järgi saame pöördenurkade võrrandi:

$$\vartheta(x) = v' = \frac{ql^3}{EIv^3} \left(\frac{\operatorname{sh} rx}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} - rx \right) \quad (2.34)$$

Paindemomendi avaldise saame aga pärast võrrandi (2.33) kahekordset diferentseerimist:

$$M(x) = -EIv'' = -\frac{ql^2}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} rx}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} - 1 \right) \quad (2.35)$$

Tala suurim läbipaine ja paindemoment keskel on järgmised:

$$v_0 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{384}{5v^4} \left(\frac{v^2}{8} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} - 1 \right) \quad (2.36)$$

$$M_0 = \frac{q l^2}{8} \cdot \frac{8}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} \right) \quad (2.37)$$

Toeristlõigete pöördenukad:

$$\vartheta_{\pm l/2} = \mp \frac{q l^3}{24 E I} \cdot \frac{24}{v^3} \left(\frac{v}{2} - \operatorname{th} \frac{v}{2} \right) \quad (2.38)$$

Nagu nähtub esitatud valemeist, kujutab iga valemi esimene tegur ainult põikkoormusest tekkivat painde elementi, kuna teine tegur sõltub argumendist v ning võtab arvesse pikijõu mõju vaadeldavale painde elemendile.

Avaldame kirjeldatud tegurid v funktsioonidena:

$$f_0(v) = \frac{384}{5v^4} \left(\frac{v^2}{8} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} - 1 \right)$$

$$\varphi_0(v) = \frac{8}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} \right) \quad (2.39)$$

$$\psi_0(v) = \frac{24}{v^3} \left(\frac{v}{2} - \operatorname{th} \frac{v}{2} \right)$$

Juhul kui mõjuv jõud T on survejõud, saame pikijõu mõju arvestavad funktsioonid järgmistena:

$$f_0^*(v) = \frac{384}{5v^4} \left(-\frac{v^2}{8} + \frac{1}{\cos \frac{v}{2}} - 1 \right)$$

$$\varphi_0^*(v) = \frac{8}{v^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{v}{2}} - 1 \right) \quad (2.40)$$

$$\psi_0^*(v) = \frac{24}{v^3} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)$$

Funktsioonid $f_0(v)$, $\varphi_0(v)$, $\psi_0(v)$, $f_0^*(v)$, $\varphi_0^*(v)$ ja $\psi_0^*(v)$ on tabuleeritud (tabel II. 3 raamatu lisas). Neid nimetatakse nende esmakordse rakendaja nime järgi *Bubnovi* funktsioonideks mõõduta argu-

menulist $v = l\sqrt{\frac{T}{EI}}$. Juhul kui pikijõud talale ei mõju, s. o. $T=0$, on ka $v=0$ ja *Bubnovi* funktsioonid võrduvad ühega. Sel juhul on valemitega (2.36), (2.37) ja (2.38) esitatud painde elemendid harilikud tala põikpainde elemendid.

Suurendades tõmbejõudu T , vähenevad funktsioonid $f_0(v)$, $\varphi_0(v)$ ja $\psi_0(v)$. See tähendab aga seda, et pikitõmbejõu mõjul väheneb tala paine — vähenevad paindemomendid, ristlõike pöördenukad ja tala siirded.

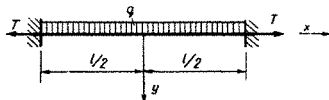
Survejõu korral on aga olukord vastupidine. Paine suureneb kiiresti survejõu T kasvades. Kui $v \rightarrow \pi$, muutuvad pikijõudu arvestavad funktsioonid lõpmata suurteks; see tähendab aga seda, et tala kaotab stabiilsuse.

Kuna $v = l\sqrt{\frac{T}{EI}}$ ja $v = \pi$, siis $T = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, mis on *Euleri* kriitiline jõud tala otste liigendkimmituse korral (vt. p. 3.31 ja 3.311).

2.43 Ühtlaselt jaotatud koormuse ja pikijõududega koormatud tala järgalt kinnitatud otstega (joon. 2.7)

Käesoleval juhul on lahenduskäik eelmise näitega analoogiline. Kuna aga ääretingimused on siin teistsugused, siis ei ole punkti 2.42 üldlahendi (a) integreerimiskonstandid sama väärtusega nagu eelmises näites. Peatumata üksikasjalisemalt teisendustel, kirjutame välja elastse joone võrrandi ja paindemomendi avaldise:

$$v = \frac{ql^4}{EIv^4} \left[\left(\frac{\operatorname{ch} rx}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} - 1 \right) \frac{v}{2 \operatorname{th} \frac{v}{2}} + \frac{\frac{v^2}{4} - r^2 x^2}{2} \right] \quad (2.41)$$



JOON. 2.7

$$M = \frac{ql^2}{v^2} \left(\frac{\operatorname{ch} vx}{2 \operatorname{sh} \frac{v}{2}} - 1 \right) \quad (2.42)$$

Kasutades valemeid (2.41) ja (2.42), leiame tala painde kohta järgmised suurused:

1) siire tala keskel

$$v_0 = \frac{ql^4}{384 EI} f_1(v) \quad (2.43)$$

2) paindemoment keskel

$$M_0 = \frac{ql^2}{24} g_1(v) \quad (2.44)$$

3) toemomendid

$$M_{\pm l/2} = -\frac{ql^2}{12} \chi(v) \quad (2.45)$$

milles

$$\begin{aligned} f_1(v) &= \frac{192}{v^3} \left(\frac{v}{4} - \operatorname{th} \frac{v}{4} \right) \\ g_1(v) &= \frac{24}{v^2} \left(1 - \frac{v}{2 \operatorname{sh} \frac{v}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\chi(v) = \frac{12}{v^2} \frac{\frac{v}{2} - \operatorname{th} \frac{v}{2}}{\operatorname{th} \frac{v}{2}}$$

Surve-pikijõu korral on pikijõu abifunktsioonide kuju:

$$\begin{aligned} f_1^*(v) &= \frac{192}{v^2} \left(\tan \frac{v}{2} - \frac{v}{4} \right) \\ g_1^*(v) &= \frac{24}{v^2} \left(\frac{v}{2 \sin v} - 1 \right) \\ \chi^*(v) &= \frac{12}{v^2} \frac{\tan \frac{v}{2} - \frac{v}{2}}{\tan \frac{v}{2}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Funktsioonid $f_1(v)$, $g_1(v)$, $\chi(v)$, $f_1^*(v)$, $g_1^*(v)$ ja $\chi^*(v)$ on samuti tabuleeritud (tabel II.1). Analoogiliselt tala otste liigendkinnituse juhuga kirjeldavad pikijõu

abifunktsioonid siingi pikijõu mõju tala paindele. Ka siin väheneb paine tõmbe korral, surve korral aga suureneb. Sama suure pikijõu korral on painde suurenemine survel suhteliselt palju suurem kui painde vähenemine tõmbel.

Pikijõu mõju paindele on tala otste paindejäiga kinnituse korral suhteliselt väiksem võrreldes tala otste liigendkinnitusega. Oeldakse, et **paindejäiga kinnitusega tala on pikijõu mõjule vähem tundlik**. Näiteks selleks, et tekitada talale lõpmata suurt siiret, tuleb võtta $v = 2\pi$. Sellele v suurusele vastab

$$T = \frac{v^2 EI}{l^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

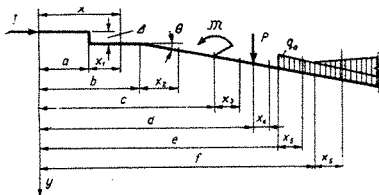
mis on *Euleri* kriitiline jõud varda otste paindejäiga kinnituse puhul. Seega selleks, et tekitada talas lõpmata suurt siiret, peame antud juhul pikijõudu suurendama neljakordselt, võrreldes jõuga liigendkinnituse korral.

2.5 PIKIPÕIKPAINDE UNIVERSAALSED VALEMID

Pikipõikpaine mõningaid lihtsamaid juhtusid vaatleme eespool. Nendele võiks lisada veel üksikuid lihtsaid koormusolukordi, nagu näiteks pikijõudude ja risti mõjuva koondatud jõuga koormatud tala. Olukord muutub aga keerukamaks, kui talale mõjub üheaegselt mitu põikkoormust. Sel juhul on võimalik rakendada põikkoormuste mõju summeerimise printsiipi ja tuletada tala elastse joone, pöördnurkade, põikjõudude ja paindemomentide universaalsed valemid, nii nagu seda tehti tala põikpaindel ja elastse alusega tala korral. Lisaks varem esinenud põikmõjudele — koondatud momendile, koondatud jõule ja ühtlaselt jaotatud koormusele — võime veel lisada lineaarselt muutuva jaotatud koormuse, varda telje astmelise nihke Δ ja tala telje pöördnurga θ .

2.51 Pikipõikpaine survejõuga

Joonisel 2.8 on kujutatud tala, mis on lisaks survejõule koormatud mitmesuguste põikkoormuste ja põikmõjudega. Need on tala telje nihe Δ asukohaga $x = a$,



JOON. 2.8

telje pöördenurk θ asukohaga $x = b$, koondatud moment M rakenduskohaga $x = c$, koondatud jõud P rakenduskohaga $x = d$, ühtlaselt jaotatud koormus algusega $x = e$ ja lineaarselt muutuv jaotatud koormus algusega $x = f$.

Ülesande lahendamiseks kasutame eespool tuletatud pikipõikpaande diferentsiaalvõrrandi üldlahendit (2.17), mis koosneb homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendist (2.14) ja erilahendist (2.15). Rakendame kõigepealt järgmiselt esitatavat üldlahendit (2.14):

$$v_{\bar{u}} = B_1 + B_2 rx + B_3 \cos rx + B_4 \sin rx \quad (2.48)$$

Selles üldlahendis esinevad integreerimiskonstandid B_1 , B_2 , B_3 ja B_4 leitakse deformatsiooni- ja sisejõudude tingimustest kahe vahemiku piiiril, mille püstitamiseks vajame üldlahendi (2.48) järgmisi tuletisi:

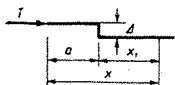
$$v' = r(B_2 - B_3 \sin rx + B_4 \cos rx) \quad (a)$$

$$v'' = -r^2(B_3 \cos rx + B_4 \sin rx) \quad (b)$$

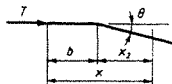
$$v''' = r^3(B_3 \sin rx - B_4 \cos rx) \quad (c)$$

Rakendame nüüd põikmõjude sõltumatuse printsiipi ja määrame üldlahendi integreerimiskonstandid igast põikmõjust eraldi. Seejuures lihtsustame lahenduskäiku veelgi sel viisil, et vaadeldes parajasti mingit põikmõju, valime koordinaatide alguspunkti selle põikmõju rakenduskohas, s. o. kahe vahemiku piiiril.

Kasutame iga üksiku põikmõju korral temale vastavat abstsissi tähist, nii nagu joonisel näidatud. Hiljem, koostades summeerimise printsiibi alusel universaalse valemi, läheme üle koordinaatide alguspunktile, milleks on tala vasakpoolseim punkt. Oletame veel, et vaadeldavast põikmõjust vasakul jääb varras horisontaalseks ja sirgeks,



JOON. 2.9



JOON. 2.10

Esmajärjekorras vaatleme tala telje astmelist muutumist. Kui $x_1 = 0$, siis parempoolses lõikes siire $v = \Delta$ ning paindemoment $M = T\Delta$, kuna tala pöördenurk ja põikjõud on nullid (joon. 2.9). Üldlahendist (2.48) ja tema tuletistest (a), (b) ja (c) saame, et:

$$\begin{aligned} \text{siire} & \quad \Delta = B_1 + B_3 \\ \text{pöördenurk} & \quad \theta = r(B_2 + B_4) \\ \text{paindemoment} & \quad T\Delta = r^2 E I B_3 \\ \text{põikjõud} & \quad Q = -r^3 B_4 \end{aligned} \quad (d)$$

Esitatud seostest järeldub:

$$B_1 = B_2 = B_4 = 0; \quad B_3 = \Delta$$

millest saame elastse joone võrrandi:

$$v_1 = \Delta \cos r x_1 \quad (2.49)$$

Järgmisena esinegu talal ainsa põiktegurina pöördenurk θ (joon. 2.10).

Varda telje pöördumisel nurga θ võrra punktis $x = b$ või $x_2 = 0$ on nullid siire ja moment, kuna põikjõud võrdub pikijõu T projektsiooniga risti varda teljega. Saame seega:

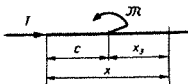
$$\begin{aligned} B_1 + B_3 &= 0 \\ r(B_2 + B_4) &= \theta \\ -r^2 B_3 &= 0 \\ -r^3 B_4 &= -\frac{T\theta}{EI} = -r^2 \end{aligned} \quad (e)$$

Seoste (e) puhul kasutame oletust, et pöördenurk on nii väike, et $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$. Tingimuste (e) alusel võime kirjutada:

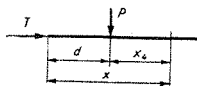
$$\begin{aligned} B_1 = B_2 = B_3 &= 0 \\ B_4 &= \frac{\theta}{r} \end{aligned}$$

millest

$$v_2 = \frac{\theta}{r} \sin r x_2 \quad (2.50)$$



JOON. 2. 11



JOON. 2. 12

Nüüd tuleme koondatud momendist \mathfrak{M} (joon. 2. 11) tekkiva elastse joone võrrandi. Punktist $x_3 = 0$ diferentsiaali võrra paremal on kõik suurused nullid, välja arvatud paindemoment $M = -\mathfrak{M}$. Need tingimused vaherniku piiiril annavad

$$\begin{aligned} B_1 + B_3 &= 0 \\ B_2 + B_4 &= 0 \\ -r^2 B_3 &= \frac{\mathfrak{M}}{EI} \\ B_4 &= 0 \end{aligned} \quad (i)$$

Seostest (i) saame:

$$B_2 = B_4 = 0; \quad B_3 = -\frac{\mathfrak{M}}{r^2 EI}; \quad B_1 = \frac{\mathfrak{M}}{r^2 EI}$$

Asetanud leitud konstantide väärtused üldlahendisse, on koondatud momendist

$$v_3 = \frac{\mathfrak{M}}{r^2 EI} (1 - \cos rx_3) \quad (2. 51)$$

Kui põikkoormusena esineb koondatud jõud P (joon. 2. 12), on jõu rakenduskohast diferentsiaali võrra paremal nullid siire, pöördenurk ja paindemoment, kuna põikjõud $Q = -P$. Need tingimused annavad võrdused

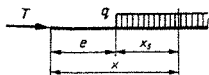
$$\begin{aligned} B_1 + B_3 &= 0 \\ B_2 + B_4 &= 0 \\ B_3 &= 0 \\ EI r^3 B_4 &= -P \end{aligned}$$

millest

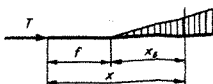
$$B_1 = B_3 = 0; \quad B_4 = -\frac{P}{EI r^3}; \quad B_2 = -B_4 = \frac{P}{EI r^3}$$

kuna elastse joone võrrandiks saame

$$v_4 = \frac{P}{EI r^3} (rx_4 - \sin rx_4) \quad (2. 52)$$



JOON. 2.13



JOON. 2.14

Uhtlaselt jaotatud koormuse korral (joon. 2.13) koosneb lahend v , nii nagu eespool näidatud, kahest osast — seni kasutatud homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendist ja erilahendist. Antud koormuse puhul on erilahend järgmine:

$$v_0 = \frac{qx_5^2}{2T} = \frac{qx_5^2}{2r^2EI} \quad (h)$$

Seega on üldlahendi kuju:

$$v = B_1 + B_2rx_5 + B_3 \cos rx_5 + B_4 \sin rx_5 + \frac{qx_5^2}{2r^2EI} \quad (2.53)$$

Selleks et saada vajalikud seosed tingimuste rahuldamiseks vahemiku piiril $x_5=0$, tuleb leida ka erilahendi (h) tuletised ning liita need vastavate üldlahendi (2.48) tuletistega (a), (b), ja (c). Pärast nimetatud tehete sooritamist ja rajatingimuste rakendamist saame:

$$\begin{aligned} B_1 + B_3 &= 0 \\ B_2 + B_4 &= 0 \\ -r^2B_3 + \frac{q_0}{r^2EI} &= 0 \\ B_4 &= 0 \end{aligned} \quad (i)$$

millest tuleneb:

$$B_2 = 0; \quad B_3 = -B_1 = \frac{q}{r^2EI} \quad (k)$$

$$v_5 = \frac{q}{r^2EI} \left(-1 + \cos rx_5 + \frac{r^2x_5^2}{2} \right) \quad (2.54)$$

Lineaarselt kasvava intensiivsusega jaotatud koormuse puhul (joon. 2.14) on erilahend

$$v_0 = \frac{mx_6^3}{6T} = \frac{mx_6^3}{6r^2EI} \quad (m)$$

kus m on jaotatud koormuse intensiivsuse juurdekasv pikkusühiku kohta. Toimides erilahendiga analoogiliselt

eelmise koormusjuhuga, kujunevad tingimustest vahemiku piiril seosed:

$$\begin{aligned} B_1 + B_3 &= 0 \\ B_2 + B_4 &= 0 \\ B_3 &= 0 \\ -r^3 B_4 + \frac{m}{r^2 EI} &= 0 \end{aligned}$$

millest

$$B_1 = 0; \quad B_4 = -B_2 = \frac{m}{r^3 EI} \quad (n)$$

ja järelikult

$$v_6 = \frac{m}{r^3 EI} \left(-rx_6 + \sin rx_6 + \frac{r^3 x_6^3}{6} \right) \quad (2.55)$$

Kõikide põikmõjude üheaegsel esinemisel rakendame, nagu juba eespool tähendatud, summeerimise printsiipi. Seejuures võtame koordinaatide alguspunktiks tala äärmise vasakpoolse punkti, leiame iga vahemiku abstsissi: $x_1 = x - a$, $x_2 = x - b$, $x_3 = x - d$, $x_4 = x - e$, $x_5 = x - f$, ning teostame vastava asenduse. Summeerimise printsiibi alusel

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 \quad (o)$$

Asetame v_1, v_2, \dots avaldised seosesse (n), misjärel saame tala siirde avaldise

$$\begin{aligned} v(x) &= \Delta \cos r(x - a) + \frac{\theta}{r} \sin r(x - b) + \\ &+ \frac{M}{r^2 EI} [1 - \cos r(x - c)] + \frac{P}{r^3 EI} [r(x - d) - \\ &- \sin r(x - d)] + \frac{q}{r^4 EI} \left[-1 + \cos r(x - e) + \right. \\ &+ \left. \frac{r^2(x - e)^2}{2!} \right] + \frac{m}{r^5 EI} \left[\frac{-r(x - f)}{1!} + \right. \\ &+ \left. \sin r(x - f) + \frac{r^3(x - f)^3}{3!} \right] \quad (2.56) \end{aligned}$$

Pöördenurga avaldise saame eelmist diferentseerides x suhtes järgmisena:

$$v'(x) = -\Delta r \sin r(x - a) + \theta \cos r(x - b) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathfrak{M}}{rEI} \sin r(x-c) + \frac{P}{r^2EI} [1 - \cos r(x-d)] + \\
& + \frac{q}{r^3EI} \left[\frac{r(x-e)}{1!} - \sin r(x-e) \right] + \\
& + \frac{m}{r^4EI} \left[-1 + \frac{r^2(x-f)^2}{2!} + \cos r(x-f) \right] \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Paindemomendi leiame seosega $M = -Ev''$, milleks tuleb avaldist (2.57) diferentseerida x järgi.

$$\begin{aligned}
M & = \Delta EI r^2 \cos r(x-a) + \theta EI r \sin r(x-b) - \\
& - \mathfrak{M} \cos r(x-c) - \frac{P}{r} \sin r(x-d) - \\
& - \frac{q}{r^2} [1 - \cos r(x-e)] - \\
& - \frac{m}{r^3} [r(x-f) - \sin r(x-f)] \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Põikjõu leiame paindemomendi tuletisena:

$$\begin{aligned}
Q & = M' = -\Delta EI r^3 \sin r(x-a) + \theta EI r^2 \cos r(x-b) + \\
& + \mathfrak{M} r \sin r(x-c) - P \cos r(x-d) - \\
& - \frac{q}{r} \sin r(x-e) - \frac{m}{r^2} [1 - \cos r(x-f)] \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Juhul kui talale mõjub mitu ühesugust põikmõju korraga, tuleb nende mõju arvesse võtta lihtsalt summeerimise teel, nii nagu alljärgnevas valemite esituses näidatakse. Tähistame seejuures tala vasakpoolses otsas esinevaid põikmõjusid Δ_0 , θ_0 , \mathfrak{M}_0 ja P_0 , mida nimetame algparameetriteks. Tala siirde valemi saame järgmisena:

$$\begin{aligned}
v(x) & = \Delta_0 \cos rx + \frac{\theta_0}{r} \sin rx + \frac{\mathfrak{M}_0}{r^2EI} [1 - \cos rx] + \\
& + \frac{P_0}{r^3EI} (rx - \sin rx) + \sum \Delta_i \cos r(x-a_i) + \\
& + \sum \frac{\theta_i}{r} \sin r(x-b_i) + \\
& + \sum \frac{\mathfrak{M}_i}{r^2EI} [1 - \cos r(x-c_i)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum \frac{P_i}{r^4 EI} [r(x - d_i) - \sin r(x - d_i)] + \\
& + \sum \frac{q_i}{r^4 EI} \left[-1 + \frac{r^2(x - e_i)^2}{2!} + \right. \\
& + \cos r(x - e_i) \left. \right] + \frac{m}{r^5 EI} \left[-\frac{r(x - f_i)}{1!} - \right. \\
& \left. + \frac{r^3(x - f_i)^3}{3!} + \sin r(x - f_i) \right] \quad (2.60)
\end{aligned}$$

Pöördenurga valem:

$$\begin{aligned}
v'(x) = & -\Delta_0 r \sin rx + \theta_0 \cos rx + \frac{\mathfrak{M}_0}{r EI} \sin rx + \\
& + \frac{P_0}{r^2 EI} (1 - \cos rx) - \sum \Delta_i r \sin r(x - a_i) + \\
& + \sum \theta_i \cos r(x - b_i) + \sum \frac{\mathfrak{M}_i}{r EI} \sin r(x - c_i) + \\
& + \sum \frac{P_i}{r EI} [1 - \cos r(x - d_i)] + \\
& + \frac{q_i}{r^3 EI} [r(x - e_i) - \sin r(x - e_i)] + \\
& + \sum \frac{m_i}{r^4 EI} \left[-1 + \frac{r^2(x - f_i)^2}{2!} + \cos r(x - f_i) \right] \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Paindemoment:

$$\begin{aligned}
M(x) = & \Delta_0 EI r^2 \cos rx + \theta_0 EI r \sin rx - \mathfrak{M}_0 \cos rx - \\
& - \frac{P_0}{r} \sin rx + \sum \Delta_i EI r^2 \cos r(x - a_i) + \\
& + \sum \theta_i EI r \sin r(x - b_i) - \sum \mathfrak{M}_i \cos r(x - c_i) - \\
& - \sum \frac{P_i}{r} \sin r(x - d_i) - \\
& - \sum \frac{q_i}{r^2} [1 - \cos r(x - e_i)] -
\end{aligned}$$

$$- \frac{m_i}{r^3} [r(x - f_i) - \sin r(x - f_i)] \quad (2.62)$$

Põikjõud:

$$\begin{aligned} Q(x) = & -\Delta_0 EI r^3 \sin rx + \theta_0 EI r^2 \cos rx + \mathfrak{M}_0 r \sin rx - \\ & - P_0 \cos rx - \sum \Delta_i EI r^3 \sin r(x - a_i) + \\ & + \sum \theta_i EI r^2 \cos r(x - b_i) + \\ & + \sum \mathfrak{M}_i r \sin r(x - c_i) - \sum P_i \cos r(x - d_i) - \\ & - \sum \frac{q_i}{r} \sin r(x - e_i) - \\ & - \sum \frac{m_i}{r^2} [1 - \cos r(x - f_i)] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Esitatud valemeis tähistab indeks i mingisuguse põikkoormuse või muu põikmõju järjekorranumbrit, samuti selle põikmõju rakenduskoha abstsissi järjekorranumbrit. Soovides valemid rakendada mingisuguse tala lõike kohta, võivad valemid sisaldada liikmeid ainult nendest põikmõjudest, mis jäävad vaadeldavast lõikest vasakule.

Valemities (2.60), (2.61), (2.62) ja (2.63) esinevad algarameetrid Δ_0 , θ_0 , \mathfrak{M}_0 ja P_0 võivad olla tundmatud, misjuhul tuleb nad määrata tala ääritingimustest (toetingimustest).

Paindemomendi ja põikjõu avaldised (2.62) ja (2.63) võime esitada ka teiste algarameetrite kaudu. Kuna

$$r^3 = \frac{T}{EI}$$

siis võime paindemomendi $M(x)$ avaldises esineva liikme esitada järgmiselt:

$$\Delta_0 EI r^2 \cos rx = \Delta_0 T \cos rx$$

milles $\Delta_0 T$ on moment telje algnihkest.

Koos koondatud momendiga \mathfrak{M}_0 tala otsas annab $\Delta_0 T$ algmomendi

$$M_0 = \Delta_0 T - \mathfrak{M}_0 \quad (2.64)$$

Korrutis $\theta_0 EI r^2$ võrdub pikijõu projektsiooniga risti varda teljega ja on põikjõu juurdekasv pikijõust. Põikjõud tala otsas on seega

$$\theta_0 EI r^2 - P_0 = Q_0 \quad (2.65)$$

Kasutades seoseid (2.64) ja (2.65), võime paindemomendi $M(x)$ ja põikjõu $Q(x)$ esitada järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 M(x) = & M_0 \cos rx + \frac{Q_0}{r} \sin rx + \\
 & + \sum \Delta_i EI r^2 \cos r(x - a_i) + \\
 & + \sum \theta_i EI r \sin r(x - b_i) - \sum \mathfrak{M}_i \cos r(x - c_i) - \\
 & - \frac{P_i}{r} \sin r(x - d_i) - \frac{q_i}{r^2} [1 - \cos r(x - e_i)] - \\
 & - \frac{m_i}{r^3} [r(x - f_i) - \sin r(x - f_i)] \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(x) = & -M_0 r \sin rx + Q_0 \cos rx - \\
 & - \sum \Delta_i EI r^3 \sin r(x - a_i) + \\
 & + \sum \Delta_i EI r^2 \cos r(x - b_i) + \\
 & + \sum \mathfrak{M}_i r \sin r(x - c_i) - \sum P_i \cos r(x - d_i) - \\
 & - \sum \frac{q_i}{r} \sin r(x - e_i) - \sum \frac{m_i}{r^2} [1 - \cos r(x - f_i)] \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

Valemis (2.66) ja (2.67) esinevad paimdemoment M_0 ja pöikjõud Q_0 tala vasakpoolses otsas leitakse, kasutades tala toetingimusi.

2.52 Pikipõikpaine tõmbejõuga

Kui talale mõjub survejõu asemel tõmbejõud, muutub elastse joone üldlahendi iseloom nii, nagu seda varem nägime lihtsamate näidete puhul. Lahenduskäik on täiesti analoogiline survejõu juhtumiga, kusjuures kasutame üldlahendit (2.5) ja erilahendit (2.8). Kirjutame $v(x)$ valemi, ilma et selle tuletamise juures pikemalt peatuks, järgmisena:

$$\begin{aligned}
 v(x) = & \Delta_0 \operatorname{ch} rx + \frac{\theta_0}{r} \operatorname{sh} rx - \frac{\mathfrak{M}_0}{r^2 EI} (1 - \operatorname{ch} rx) - \\
 & - \frac{P_0}{r^3 EI} (rx - \operatorname{sh} rx) + \sum \Delta_i \operatorname{ch} r(x - a_i) + \\
 & + \sum \frac{\theta_i}{r} \operatorname{sh} r(x - b_i) - \\
 & - \sum \frac{\mathfrak{M}_i}{r^2 EI} [1 - \operatorname{ch} r(x - c_i)] - \\
 & - \sum \frac{P_i}{r^3 EI} [r(x - d_i) - \operatorname{sh} r(x - d_i)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{q_i}{r^3 EI} \left[-1 - \frac{r^2(x-e_i)^2}{2!} + \operatorname{ch} r(x-e_i) \right] + \\
& + \frac{m}{r^2 EI} \left[\frac{-r(x-f_i)}{1!} - \frac{r_3(x-f_i)}{3!} + \right. \\
& \left. + \operatorname{sh} r(x-f_i) \right] \quad (2.68)
\end{aligned}$$

Valemis toodud suurused on samad, mis survejõu korral. Erinevus on vaid selles, et trigonomeetrilised funktsioonid on asendunud hüperboolsetega ja mõnede liikmete ees on muutunud märk.

Pöördenurga $v'(x)$, paindemomendi $M(x)$ ja põikjõu $Q(x)$ valemid saame tuntud viisil valemi (2.68) kaudu järgmistena:

$$\begin{aligned}
v'(x) = & \Delta_0 r \operatorname{sh} rx + \theta_0 \operatorname{ch} rx + \frac{\mathfrak{M}_0}{rEI} \operatorname{sh} rx - \\
& - \frac{P_0}{r^2 EI} (1 - \operatorname{ch} rx) + \sum \Delta_i r \operatorname{sh} r(x-a_i) + \\
& + \sum \theta_i \operatorname{ch} r(x-b_i) + \sum \frac{\mathfrak{M}_i}{rEI} \operatorname{sh} r(x-c_i) - \\
& - \sum \frac{P_i}{r^2 EI} [1 - \operatorname{ch} r(x-d_i)] + \\
& + \sum \frac{q_i}{r^3 EI} [-r(x-e_i) + \operatorname{sh} r(x-e_i)] + \\
& + \sum \frac{m_i}{r^4 EI} \left[-1 - \frac{r^2(x-f_i)^2}{2!} + \operatorname{ch} r(x-f_i) \right] \quad (2.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x) = & -\Delta_0 EI r^2 \operatorname{ch} rx - \theta_0 EI r \operatorname{sh} rx - \mathfrak{M}_0 \operatorname{ch} rx - \\
& - \frac{P_0}{r} \operatorname{sh} rx - \sum \Delta_i EI r^2 \operatorname{ch} r(x-a_i) - \\
& - \sum \theta_i EI r \operatorname{sh} r(x-b_i) - \sum \mathfrak{M}_i \operatorname{ch} r(x-c_i) - \\
& - \sum \frac{P_i}{r} \operatorname{sh} r(x-d_i) \quad (2.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(x) = & -\Delta_0 EI r^3 \operatorname{sh} rx - \theta_0 EI r^2 \operatorname{ch} rx - \mathfrak{M}_0 r \operatorname{sh} rx - \\
& - P_0 \operatorname{ch} rx - \sum \Delta_i EI r^3 \operatorname{sh} r(x-a_i) - \\
& - \sum \theta_i EI r^2 \operatorname{ch} r(x-b_i) - \sum \mathfrak{M}_i r \operatorname{sh} r(x-c_i) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum P_i \operatorname{ch} r(x - d_i) - \sum \frac{q_i}{r} \operatorname{sh} r(x - e_i) \\
& - \sum \frac{m_i}{r^2} [-1 + \operatorname{ch} r(x - f_i)] \quad (2.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x) &= M_0 \operatorname{ch} rx + \frac{Q_0}{r} \operatorname{sh} rx - \sum \Delta_i EI r^2 \operatorname{ch} r(x - a_i) - \\
& - \sum \theta_i EI r \operatorname{sh} r(x - b_i) - \sum \mathfrak{M}_i \operatorname{ch} r(x - c_i) - \\
& - \sum \frac{P_i}{r} \operatorname{sh} r(x - d_i) - \\
& - \sum \frac{q_i}{r^2} [-1 + \operatorname{ch} r(x - e_i)] - \\
& - \sum \frac{m_i}{r^3} [-r(x - f_i) + \operatorname{sh} r(x - f_i)] \quad (2.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(x) &= M_0 r \operatorname{sh} rx + Q_0 \operatorname{ch} rx - \sum \Delta_i EI r^3 \operatorname{sh} r(x - a_i) - \\
& - \sum \theta_i EI r^2 \operatorname{ch} r(x - b_i) - \sum \mathfrak{M}_i r \operatorname{sh} r(x - c_i) - \\
& - \sum P_i \operatorname{ch} r(x - d_i) - \sum \frac{q_i}{r} \operatorname{sh} r(x - e_i) - \\
& - \sum \frac{m_i}{r^2} [-1 + \operatorname{ch} r(x - f_i)] \quad (2.73)
\end{aligned}$$

2.53 Arvutusnäide

Näide 2.1. Leida joonisel 2.15 esitatud talas esinevad sisejõud ning siire tala keskel.* Tala koosneb kahest serviti asetatud karp-rauast nr. 16a. Tala ristlõike andmed: $F = 2 \cdot 21,95 = 43,90 \text{ cm}^2$; $W_z = 2 \cdot 108,3 = 216,6 \text{ cm}^3$; $I_z = 2 \cdot 866,2 = 1732,7 \text{ cm}^4$. Tala materjali elastsusmoodul $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$.

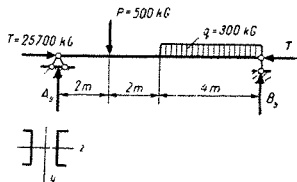
Leiame kõigepealt tala toereaktsioonid põikkoormustest: $A_y = 675 \text{ kG}$; $B_y = 1625 \text{ kG}$.

Seega on teada kõik talale mõjuvad põikkoormused. Tundmatu on tala vasakpoolse otsa pöördenurk θ_0 , mille leiame toetingimusest: kui $x = l = 8 \text{ m}$, siis $v_{(8)} = 0$. Rakendame valemit (2.60). Algparameetritena esinevad θ_0 ja $P_0 = A_y = 675 \text{ kG}$, kuna põikkoormus on $P = 500 \text{ kG}$ ja ühtlaselt jaotatud koormus $q = 300 \text{ kG/m}$.

Arvutame vajalikud konstandid:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{\frac{T}{EI}} = \sqrt{\frac{25\,700}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1732,7}} = 0,002658 \text{ 1/cm} = 0,2658 \text{ 1/m} \\
r^2 &= 0,07064 \text{ 1/m}^2, \quad r^3 = 0,01878 \text{ 1/m}^3, \quad r^4 = 0,004990 \text{ 1/m}^4 \\
EI &= 363\,800 \text{ kG/m}^2
\end{aligned}$$

* Ülesande lähteandmed on võetud raamatust [17] lk. 117



JOON. 2.15

Rakendame nüüd valemit (2.60):

$$\begin{aligned}
 v(x) = & \theta_0 \frac{\sin 0,2658 x}{0,2658} - \frac{675}{0,01878 \cdot 363\,800} (0,2658 x - \sin 0,2658 x) + \\
 & + \frac{500}{0,01878 \cdot 363\,800} [0,2658(x-2) - \sin 0,2658(x-2)] + \\
 & + \frac{300}{0,004990 \cdot 363\,800} \left[-1 + \frac{0,07064(x-4)^2}{2} + \cos 0,2658(x-4) \right]
 \end{aligned} \quad (b)$$

Kui $x = 8$ m, siis $v(8) = 0$ ja

$$\begin{aligned}
 \theta_0 \frac{\sin(0,2658 \cdot 8)}{0,2658} - \frac{675}{0,01878 \cdot 363\,800} [0,2658 \cdot 8 - \sin(0,2658 \cdot 8)] + \\
 + \frac{500}{0,01878 \cdot 363\,800} [0,2658 \cdot 6 - \sin(0,2658 \cdot 6)] + \\
 + \frac{300}{0,004990 \cdot 363\,800} \left[-1 + \frac{0,07064 \cdot 4^2}{2} + \cos 0,2658 \cdot 4 \right] = 0
 \end{aligned}$$

või

$$\begin{aligned}
 \theta_0 \frac{\sin 2,1264}{0,2658} - \frac{675}{0,01878 \cdot 363\,800} [2,1264 - \sin 2,1264] + \\
 + \frac{500}{0,01878 \cdot 363\,800} [1,5948 - \sin 1,5948] + \\
 + \frac{300}{0,004990 \cdot 363\,800} \left[-1 + \frac{0,07064 \cdot 16}{2} + \cos 1,0632 \right] = 0 \quad (d)
 \end{aligned}$$

Leiame võrrandis (d) esinevate trigonomeetriliste funktsioonide väärtused:

$$\begin{aligned}
 \sin 2,1264 &= \sin 121^\circ 50' = 0,8496 \\
 \sin 1,5948 &= \sin 91^\circ 22' = 0,9997 \\
 \sin 1,0632 &= \sin 60^\circ 66' = 0,8739
 \end{aligned} \quad (e)$$

Asetame leitud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused (e) võrrandisse (d), millest arvutame $\theta_0 = 0,02319$ (f)

Sellelega on ainuke tundmatu algarvameeter leitud ja nüüd saame rakendada valemeid (2.60), (2.62) ja (2.63) meile vajalike andmete saamiseks.

Põikjõud arvutame valemiga

$$Q(x) = 0,02319 \cdot 363\,800 \cdot 0,07064 \cos 0,2658x + 675 \cos 0,2658x - 500 \cos 0,2658(x-2) - \frac{300}{0,2658} \sin 0,2658(x-4) \quad (g)$$

Paindemomentide leidmiseks kasutame valemit

$$M(x) = 0,02319 \cdot 363\,800 \cdot 0,2658 \sin 0,2658x - \frac{675}{0,2658} \sin 0,2658x - \frac{500}{0,2658} \sin 0,2658(x-2) - \frac{300}{0,07064} [1 - \cos 0,2658(x-4)] \quad (h)$$

Kasutades valemeid (g) ja (h), võiksime konstrueerida põikjõu ja paindemomendi epüürid. Käesoleval juhul piirdume vaid nende sisejõudude maksimaalse väärtuse leidmisega.

Maksimaalse paindemomendi asukoha leiame tuntud võttega põikjõu nullilisuse tingimusest. Eelnevalt teisendame põikjõu valem (g) — asendame selles trigonomeetrilised funktsioonid, milles esineb nurkade vahe, trigonomeetriliste funktsioonide korrutiste summa või vahega:

$$Q(x) = 0,02319 \cdot 363\,800 \cdot 0,07064 \cdot \cos 0,2658x + 675 \cos 0,2658x - 500 (\cos 0,2658x \cos 0,5316 + \sin 0,2658x \sin 0,5316) - \frac{300}{0,2658} (\sin 0,2658x \cos 1,0632 - \cos 0,2658x \sin 1,0632) \quad (i)$$

Selles valemis omavad trigonomeetrilised funktsioonid järgmisi väärtusi:

$$\begin{aligned} \sin 0,5316 &= \sin 30^\circ 27' = 0,5068 \\ \cos 0,5316 &= \cos 30^\circ 27' = 0,8620 \\ \sin 1,0632 &= \sin 60^\circ 55' = 0,8739 \\ \cos 1,0632 &= \cos 60^\circ 55' = 0,4861 \end{aligned} \quad (k)$$

Tõenäoliselt muutub põikjõud nulliks tala jaotatud koormuse piirkonnas. Selle koha määrame võrrandist

$$0,02319 \cdot 363\,800 \cdot 0,07064 + 675 - 500 \cdot 0,8620 - 500 \cdot 0,5068 \tan 0,2658x_0 - \frac{300 \cdot 0,4861}{0,2658} \tan 0,2658x_0 + \frac{300 \cdot 0,8739}{0,2658} = 0 \quad (m)$$

millest saame

$$\tan 0,2658x_0 = 2,277 \quad \text{ja} \quad x_0 = 4,35 \text{ m}$$

Asetame leitud x_0 väärtuse valemisse (h) ja saame:

$$\max M = 0,02319 \cdot 363\,800 \cdot 0,2658 \sin(0,2658 \cdot 4,35) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{675}{0,2658} \sin(0,2658 \cdot 4,35) - \frac{500}{0,2658} \sin[0,2658(4,35 - 2)] - \frac{300}{0,07064} [1 - \\
 & - \cos 0,2658(4,35 - 4)] = 0,02319 \cdot 363\,800 \cdot 0,2658 \cdot 0,9152 + \\
 & + \frac{675}{0,2658} \cdot 0,9152 - \frac{500}{0,2658} \cdot 0,5847 - \frac{300}{0,07064} (1 - 0,9957) = \\
 & = 2052 + 2324 - 1100 - 18 = 3258 \text{ kGm}
 \end{aligned}$$

Põikjõud tala vasakpoolses otsas, kus $x = 0$,

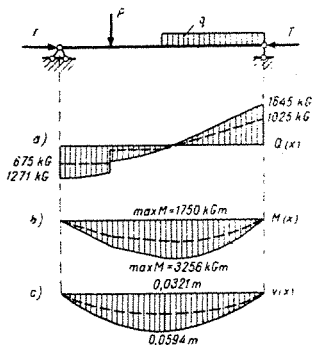
$$Q_0 = 0,02319 \cdot 363\,800 \cdot 0,07064 \cdot 1 + 675 = 596 + 675 = 1271 \text{ kG}$$

Põikjõud tala parempoolses otsas, kus $x = l$,

$$\begin{aligned}
 Q_l & = 0,02319 \cdot 363\,800 \cdot 0,07064 \cdot \cos(8 \cdot 0,2658) + \\
 & + 675 \cos(8 \cdot 0,2658) - 500 \cos(6 \cdot 0,2658) - \frac{300}{0,07064} \sin(4 \cdot 0,2658) = \\
 & = 0,02319 \cdot 363\,800 \cdot 0,07064 (-0,5275) + 675 (-0,5275) - \\
 & - 500 (-0,0239) - \frac{300}{0,2658} \cdot 0,8739 = -1645 \text{ kG}
 \end{aligned}$$

Leiame nüüd tala läbipainde keskel, kasutades selleks valemit (b).
Tala keskel $x = 4 \text{ m}$.

$$v_4 = 0,02319 \cdot \frac{\sin(4 \cdot 0,2658)}{0,2658} - \frac{675}{0,01878 \cdot 363\,800} (4 \cdot 0,2658 -$$



JOON. 2. 16

$$\begin{aligned}
& -\sin 4 \cdot 0,2658) + \frac{500}{0,01878 \cdot 363\,800} [0,2658 \cdot 2 - \sin 2 \cdot 0,2658] = \\
& = 0,02319 \frac{0,8739}{0,2658} - \frac{675}{0,01878 \cdot 363\,800} (1,0632 - 0,8739) + \\
& + \frac{500}{0,01878 \cdot 363\,800} (0,5316 - 0,5068) = 0,07624 - 0,01870 + \\
& + 0,00181 = 0,05935 \text{ m}
\end{aligned}$$

Selleks et hinnata pikijõu T mõju tala paindele, arvutame eeltoodutele vastavad suurused, kuid ilma pikijõu mõjuta. Andmeid on lihtsam võrrelda, kui joonestada välja ligikaudsed epüürid (joon. 2.16). Ainult põikpaindele vastavad epüürid on kujutatud katkendjoontega.

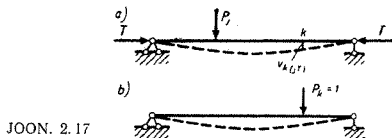
Nagu joonisest 2.16 nähtub, suurenevad pikijõu T mõjul põikjõud tugelel, maksimaalne paindemoment ja tala läbipaine tunduvalt. Põikjõud toel ei võrdu pikipõikpainde korral ainult toereaktsiooniga, nagu see oli põikpainde puhul. Märgatava lisa põikjõule toereaktsioonist annab siin pikijõud, kuna suurenenud deformatsioonitõttu on varda ristlõige pikijõu suhtes tunduvalt pöörduvad ning seejuures on pikijõud küllalt suured.

2.6 ENERGEETILINE MEETOD PAIGUTISTE ARVUTAMISEKS PIKIPÕIKPAINDEL

Energeetilise meetodi all mõistame siin võimalike tööde printsiibil põhinevat meetodit. Võimalike tööde printsiibi järgi tasakaalus olevale elastsele konstruktsioonile mõjuvate välis- ja sisejõudude töö selle konstruktsiooni võimalikel paigutistel võrdub nulliga. See tähendab seda, et välis- ja sisejõudude võimalikud tööd on arvuliselt võrdsed. Võimalike paigutistena kujutleme konstruktsiooni mis tahes elastseid paigutisi. Küsimuse järgnevas käsitluses eeldame, et põhiseosed, mida kasutame, on lugejaille tuttavad ehitusmehaanika kursuse esimesest osast.

Vaatleme nüüd elastse konstruktsioonina tala, mis on koormatud põikkoormusega P_j ja veel survejõududega T (joon. 2.17, *a*). Soovime määrata tala punkti k siiret v_k .

Selleks koormame tala (joon. 2.17, *b*) otsitava paigutise kohas ja sihis üldistatud ühikjõuga $P_k = 1$. Võimalike paigutiste printsiibi põhjal võime nüüd kirjutada:



$$1 \cdot v_k(jT) = \sum_0^l \int_0^l \frac{m_k M_{jT}}{EI} ds + \sum_0^l \int_0^l \frac{n_k N_{jT}}{EF} ds + \\ + \sum \mu \int_0^l \frac{q_k Q_{jT}}{GF} ds \quad (a)$$

Võrrandi (a) vasak pool on välisühikjõu $P_k = 1$ töö konstruksiooni tegeliku olukorra paigutisel $v_k(jT)$, kusjuures see paigutus on põhjustatud nii põikkoormusest kui ka pikijõust, mida näitavad ka indeksid jT . Võrrandi (a) parem pool kujutab endast tala ühikjõu koormusolukorra sisejõudude võimalikku tööd tegeliku olukorra sisejõudude poolt põhjustatud paigutistel. Integraalide all olevad avaldised on lõpmata väikese elemendi, pikkusega ds , kohta leitud võimalikud tööd. Sisejõud m_k , n_k ja q_k kuuluvad üldistatud ühikjõu koormusolukorrale, kuna M_{jT} , N_{jT} ja Q_{jT} tegelikule koormusolukorrale. Viimaste sisejõudude poolt põhjustatud tala elemendi paigutised on leitud, arvesse võttes ka pikijõu T mõju, mida tähistavad sisejõudude indeksid jT .

Integreeritakse sisejõudude pidevusvahemiku pikkusel l , misjärel üksikute pidevusvahemikkude võimalikud tööd liidetakse. Loobume edaspidi, nii nagu paigutistegi arvutamisel, põikkoormusest, põik- ja pikijõudude Q ja N mõjust ning võtame arvesse ainult paindemomentide võimalikku tööd. Jagame nüüd võrrandi mõlema poole üldistatud ühikjõuga, misjärel saame tala telje siirde valemi:

$$v_k(jT) = \sum_0^l \int_0^l \frac{m_k M_{jT}}{EI} ds \quad (2.74)$$

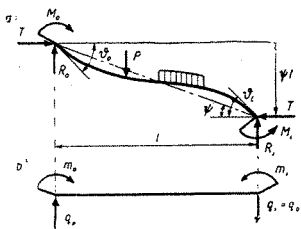
Siirde $v_k(jT)$ arvutamiseks tuleb kõigepealt leida

paindemomendi avaldis tegelikust koormusest, milleks saame kasutada pikipõikpainde kohta tuletatud valemeid. Seejärel leiame paindemomendi avaldise üldistatud ühikjõust ning võime arvutada paigutised valemi (2.74) järgi. Peab märkima, et pikipõikpainde paindemomendi M_{JT} avaldis on küllalt keeruline, kuna tuleb arvestada pikijõu mõju. Seevastu üldistatud ühikjõu paindemoment on enamasti avaldatav lineaarselt muutuva funktsioonina. Viimane asjaolu võimaldab teha mõningatel juhtudel paigutise arvutuse käigus lihtsustusi, mis on analoogilised lihtsustustega deformatsioonide arvutamisel ainult põikkoormusest. Sellisteks lihtsustatud arvutusvõteteks on näiteks *Vereštšagini* võte või nn. epüüride korrutamise võte.

Vaatleme järgnevalt integraali $\int \frac{m_k M_{JT}}{EI}$ arvutamist,

aga mitte otsese integreerimise teel, vaid kasutades jällegi võimalike paigutiste printsiipi. Vaatleme kõigepealt varda vahemiku, mille pikkus on l , tegelikule koormusolukorrale vastavat deformeerunud kuju (joon. 2.18, a). Loeme tala deformatsiooni elemente võimalikeks paigutisteks. Meid huvitavad vaadeldava lõigu otste pöördenurgad θ_0 ja θ_l ning lõigu pöördenurk ψ , mida kasutame võimaliku töö arvutamisel.

Oletame, et ühikjõu koormusolukorrast tekivad tala otstes momendid m_0 ja m_l ning põikjõud $q_0 = q_l$. Seega on ühikjõu paindemoment l ulatusel lineaarselt muutuv (ei tohi olla katkev).



JOON. 2.18

Leiame nüüd võimalike paigutiste printsiibi põhjal:

$$\int_0^l \frac{m_h M_{jT}}{EI} ds = m_0 \vartheta_0 - m_l \vartheta_l + q_0 l \psi \quad (b)$$

Arvesse võttes, et $q_0 l = m_l - m_0$ (c)

saame
$$\int_0^l \frac{m_h M_{jT}}{EI} ds = m_0 (\vartheta_0 - \psi) - m_l (\vartheta_l - \psi) \quad (d)$$

Avaldises (d) esinevad nurkade vahed $(\vartheta_0 - \psi)$ ja $(\vartheta_l - \psi)$ on seoste (2.32) alusel esitatavad järgmiselt:

$$\vartheta_0 - \psi = \frac{M_0 l}{3EI} \alpha^*(v) + \frac{M_l l}{6EI} \beta^*(v) + \vartheta_0^{TP} \quad (e)$$

$$\vartheta_l - \psi = -\frac{M_0 l}{6EI} \beta^*(v) - \frac{M_l l}{3EI} \alpha^*(v) + \vartheta_l^{TP} \quad (f)$$

Seejuures vaatleme vahemikku kui lihttala. Seose (e) parema poole kaks esimest liiget kokku on lihttala vasaku otsa pöördenurk, mis on põhjustatud tala otstesse raken-
datud momentidest M_0 ja M_l ning pikijõust T ; kolmas liige ϑ_0^{TP} on tala vasaku otsa pöördenurk, mis on põh-
justatud avas esinevatest põikmõjudest ja pikijõust. Seose (f) parema poole liikmetel on seose (e) vastavate liikmetega analoogiline tähendus, kuid seda muudugi tala parempoolse otsa suhtes.

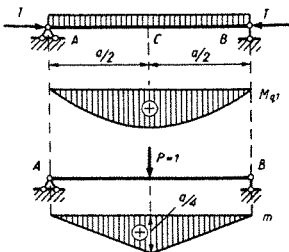
Arvesse võttes seoseid (e) ja (f), võime tala vahemiku kohta tuleva sisejõudude võimaliku töö (d) avaldada tala vahemiku otsamomentide kaudu järgmiselt:

$$\int_0^l \frac{m_h M_{jT}}{EI} ds = (m_0 M_0 + m_l M_l) \frac{l \alpha^*(v)}{3EI} +$$

$$+ (m_0 M_l + m_l M_0) \frac{l \beta^*(v)}{6EI} + (m_0 \vartheta_0^{TP} + m_l \vartheta_l^{TP}) \quad (2.75)$$

Saadud valemit on otstarbekohane kasutada pikipõik-
painde deformatsioonide arvutamiseks energaetilise mee-
todiga. Juhul kui survejõu asemel mõjub talale tõmbe-
jõud, tuleb survejõu mõju arvestavad funktsioonid $\alpha^*(v)$
ja $\beta^*(v)$ asendada tõmbejõu mõju arvestavate funktsioo-
nidega $\alpha(v)$ ja $\beta(v)$. Nagu eespool märgitud, on need
funktsioonid tabuleeritud (tabel II.2).

Näide 2.2. Valemi (2.75) kasutamise illustreerimiseks määrame ühtlaselt jaotatud koormusega q ja pikijõuga T koormatud lihttala (joon. 2.19) siirde keskel. Ülesande lahendus on meil valemite (2.36) ja (2.40) näol olemas.



JOON. 2.19

Ühikjõu paindemomendi pidevusvahemikke on kaks. Kuna väliskoormus ja ühikjõud põhjustavad tala sümmeetrilise deformatsiooni, piisab võimaliku töö arvutamisest ühe vahemiku ulatusel, misjärel tuleb tulemus kahekordistada.

Kasutades valemis (2.75) toodud tähistusi, kirjutame esimese vahemiku suurused välja [vt. avaldised (2.37) ja (2.40)]:

$$M_0 = m_0 = 0; \quad M_l = \max M_{qT} = \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{8}{v^2} \left[\frac{1}{\cos \frac{v}{2}} - 1 \right]$$

milles

$$v = a \sqrt{\frac{T}{EI}}; \quad m_l = \frac{a}{4}; \quad l = \frac{a}{2}; \quad \alpha^*(v_l) = \frac{3}{v_l} \left[\frac{1}{v_l} - \frac{1}{\operatorname{tg} v_l} \right]$$

$$v_l = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{T}{EI}} \quad \text{ja} \quad \vartheta_l T a = \frac{qa^3}{192EI} \cdot \frac{24}{v_l^3} \left[\operatorname{tg} \frac{v_l}{2} - \frac{v_l}{2} \right]$$

[valemite (2.38) ja (2.40) järgi].

Rakendame nüüd valemit (2.75):

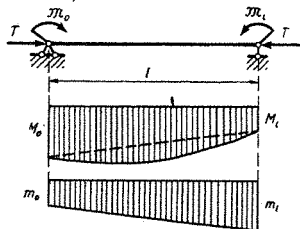
$$\begin{aligned} v_c &= 2 \left(m_l M_l \frac{l \alpha^*(v)}{3EI} + m_l \vartheta_l T P \right) = \\ &= 2 \left\{ \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{2}{6EI} \frac{1}{v_l^2} \left(\frac{1}{\cos v_l} - 1 \right) \frac{3}{v_l} \left(\frac{1}{v_l} - \frac{1}{\operatorname{tg} v_l} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{4} \frac{qa^3}{192EI} \cdot \frac{24}{v_l^3} \left(\operatorname{tg} \frac{v_l}{2} - \frac{v_l}{2} \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left\{ \frac{qa^4}{32EIv_1^3} \left[\left(\frac{1}{\cos v_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{\tan v_1} \right) + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \tan \frac{v_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right] \right\} = 2 \left\{ \frac{qa^4}{32EIv_1^3} \left(\frac{1}{v_1 \cos v_1} - \frac{1}{v_1} - \frac{v_1}{2} \right) \right\} = \\
&= \frac{2qa^4}{32EIv_1^4} \left(\frac{1}{\cos v_1} - 1 - \frac{v_1^2}{2} \right) = \\
&= \frac{5qa^4}{384EI} \frac{384}{5v^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{v}{2}} - 1 - \frac{v^2}{8} \right)
\end{aligned}$$

Näeme, et tulemus on täiesti ühtelangev valemi (2.36) survejõu variandiga (2.40).

Energeetilist meetodit on sobiv rakendada keerukamate varraskonstruksioonide, näiteks raamide pikipõikpaine deformatsioonide arvutamiseks. Paljudel juhtudel on raamid konstrueeritud selliselt, et postid on koormatud survejõududega ning seejuures ilma põikkoormuseta, kuna riivid on peamised põikkoormuse kandjad. Juhul kui pikijõu mõju all olevale konstruktsiooni elemendile ei mõju põikkoormust, on deformatsioonide leidmisel võimalikku tööd lihtsam arvutada. Järgnevalt vaatlemegi selliseid varraste koormusolukordi, kus varras on koormatud lisaks pikijõule ka põikkoormustega, kuid need põikkoormused on rakendatud varda otstes. Pidades silmas postide toetusviise, piisab meil kahel viisil toetatud varraste käsitlemisest.

Esimesel juhul vaatleme varrast, mis toetub otstes liigenditele ning on koormatud lisaks pikijõule otstes momentidega (joon. 2.20).



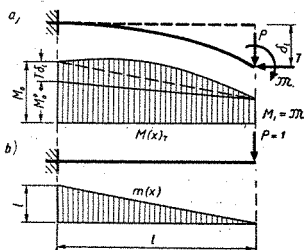
JOON. 2.20

Joonisel 2.20 on kujutatud varda tegeliku koormus-olukorra ja ühikjõu koormusolukorra momentide epüürid. Tegelik koormusolukorra epüüriil kõverjoone ja katkend-joone vaheline ordinaadi osa iseloomustab momendi juurdekasvu pikijõust. Varda kohta tuleva võimaliku töö arvutame valemiga (2.75) järgmiselt:

$$\int_0^l \frac{m_k M_{JT}}{EI} ds = (m_0 M_0 + m_l M_l) \frac{l \alpha^*(v)}{3EI} + (m_0 M_l + m_l M_0) \frac{l \beta^*(v)}{6EI} \quad (2.76)$$

Valemist (2.76) selgub võimaliku töö arvutamise reegel varda otste liigendkinnituse korral. Kõigepealt tuleb leida ühenimeliste (s. o. epüüridel kohakuti olevate) otsamomentide korrutiste summa ning see korrutada teguritega $\frac{l}{3EI}$ ja $\alpha^*(v)$. Saadud arvutustulemustele liidetakse isenimeliste (s. o. mitte kohakuti olevate) otsamomentide korrutiste summa, mis on korrutatud teguritega $\frac{l}{6EI}$ ja $\beta^*(v)$.

Funktsioonide $\alpha^*(v)$ ja $\beta^*(v)$ tähendus on selgitatud valemi (2.75) tuletamisel. Argumenti v on ka varem selgitatud, see on: $v = l \sqrt{\frac{T}{EI}}$. Kui võrrutada $\alpha^*(v) = \beta^*(v) = 1$, saame hariliku põikpaine nn. epüüride



JOON. 2.21

korrumtamise võtte. Tegelik koormusolukorra epüürist kasutame siis punktiiriga piiratud trapetsikujulist osa, s. o. pikijõu mõju arvestamata.

Teisel juhul vaatleme ühest otsast jäigalt kinnitatud varrast (joon. 2.21, a), mis on koormatud pikijõuga T ja põikkoormusega P , \mathfrak{M} . Selle koormusolukorra paindemomendi epüür koosneb trapetsikujulisest põikkoormuse epüürist ordinaatidega M_0^0 ja M_l ning pikijõu epüürist ordinaadiga vasakus otsas $T\delta_l$. Varda vaba otsa paigutis δ_l tekib põikkoormuse ja pikijõu koosmõjul.

Seega kogu paindemomendi väärtus varda vasakus otsas on

$$M_0 = M_0^0 + T\delta_l \quad (g)$$

Avaldises (g) on tundmatuks siire δ_l , mille leiame energetilise meetodiga, konstrueerides selleks ühikjõu koormusolukorra koos vastava epüüriaga (joon. 2.21 b). Rakendame nüüd valemit (2.76) ning leiame:

$$EI\delta_l = \frac{M_0 l^2}{3} \alpha^*(v) + \frac{M_l l^2}{6} \beta^*(v) \quad (h)$$

Asetame leitud δ_l ja $T = \frac{v^2 EI}{l^2}$ valemisse (g), misjärel saame:

$$M_0 = M_0^0 + \frac{v^2}{l^2} \left[M_0 \frac{l^2}{3} \alpha^*(v) + \frac{M_l l^2}{6} \beta^*(v) \right]$$

millest avaldame

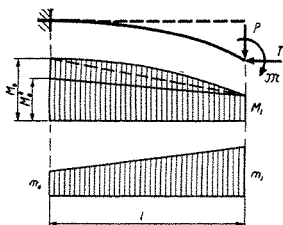
$$M_0 = \frac{1}{1 - \frac{l^2}{3} \alpha^*(v)} \left[M_0^0 + \frac{v^2 M_l}{6} \beta^*(v) \right] \quad (i)$$

Asetame avaldise (i) esimeses teguris $\alpha^*(v)$ asemele tema avaldise valemeist (2.31):

$$\frac{1}{1 - \frac{l^2}{3} \alpha^*(v)} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{3} \cdot \frac{3}{v} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tan v} \right)} = \frac{\tan v}{v} \quad (k)$$

Viimast arvesse võttes saame:

$$M_0 = M_0^0 \frac{\tan v}{v} + \frac{M_l v^2}{6} \frac{\tan v}{v} \beta^*(v) \quad (m)$$



JOON. 2.22

Selleks, et tuletada vaadeldava juhu jaoks lõplikku arvutuseeskirja, kujutleme joonisel 2.22 varrast koos üldisele ühikjõu koormusolukorrale vastava trapetsikujulise epüüriga. Rakendame nüüd valemit (2.76) joonisel 2.21 esitatud varda sisejõudude võimaliku töö arvutamiseks, seejuures M_0 asemel kasutades tema avaldist seosest (m):

$$\int_0^l \frac{m_k M_{jT}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{m_0 M_0^0 l}{3} \frac{\tan v}{v} + \frac{m_0 l}{3} \frac{M_l v^2}{6} \frac{\tan v}{v} \beta^*(v) + \frac{m_l M_l l}{3} \right] \alpha^*(v) + \left[\frac{m_0 M_l l}{6} + \frac{m_l M_0^0}{6} \frac{\tan v}{v} + \frac{m_l l}{6} \frac{M_l v^2}{6} \frac{\tan v}{v} \beta^*(v) \right] \beta^*(v) \right\} \quad (n)$$

Pärast avaldise (n) teisendamist saame:

$$\int_0^l \frac{m_k M_{jT}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{m_0 M_0^0 l}{3} \theta_1(v) + \frac{m_l M_l l}{3} \theta_2(v) + \left[m_0 M_l + m_l M_0^0 \right] \frac{l}{6} \theta_3(v) \right\} \quad (2.77)$$

milles

$$\theta_1(v) = \frac{\tan v}{v} \alpha^*(v) = \frac{3}{v^2} \left[\frac{\tan v}{v} - 1 \right] \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}\theta_2(v) &= \alpha^*(v) + \frac{v \tan v}{12} \beta^{*2}(v) = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \left[1 + v \tan v - \frac{2}{\cos v} + \frac{\tan v}{v} \right] \quad (2.79)\end{aligned}$$

$$\theta_3(v) = \frac{\tan v}{v} \beta^*(v) = \frac{6}{v^2} \left[\frac{1}{\cos v} - \frac{\tan v}{v} \right] \quad (2.80)$$

Funktsioonid $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$ ja $\theta_3(v)$ on v väärtuse järgi tabuleeritud.

Valemist (2.77) nähtub, et ühest otsast järgalt ja teisest otsast vaba varda pikipõikpaande sisejõudude võimaliku töö arvutusvõte on analoogiline liigendkinnitusega varda arvutusvõttega. Kasutame ainult põikkoormuse epüüride otsmisi ordinaate, kuna pikisurvejõu mõju võetakse arvesse funktsioonidega $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$ ja $\theta_3(v)$.

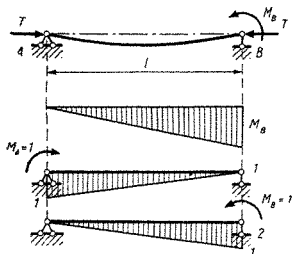
Valemi (2.77) alusel saame tuletada sisejõudude võimaliku töö arvutamise reegli varda kohta, mille üks ots on vaba, kuna teine ots on kinnitatud järgalt. Leiame kõigepealt varda jäiga kinnituse poolsete põikkoormusest tingitud tegeliku koormusolukorra ja ühikjõu koormusolukorra otsamomentide korrutise $M_0^0 m_0$. Viimase korrutame veel teguritega $l/3$ ja $\theta_1(v)$. Seejärel leiame varda vaba otsa paindemomentide korrutise $M_l m_l$ ja korrutame seda teguritega $l/3$ ning $\theta_2(v)$. Kolmandaks aga leiame varda isenimeliste otsamomentide korrutise summa $M_l m_0 + M_0^0 m_l$ ning korrutame viimast teguritega $l/6$ ja $\theta_3(v)$. Saadud kolme korrutise summa jagatakse varda paindejäikusega.

Vaatleme allpool mõningaid näiteid varraste ja raamide pikipõikpaande arvutamise kohta*.

Näide 2.3. Leida liigenditega kinnitatud ja jõuga T surutud tala otsaristlõigete pöördenergiad, kui tala paremal otsal mõjub moment M_B (joon. 2.23).

Konstrueerime momendi epüürid momendist M_B ning otsaristlõigetes rakendatud ühikmomentidest $M_A = 1$ ja $M_B = 1$. Kasutame valemit (2.76). φ_A saamiseks tuleb leida tala kohta tulev sisejõudude võimalik töö. Selleks leiame kõigepealt epüüride M_B ja l

* Näited on võetud õpikust [1].



JOON. 2.23

otsamomentide korrutise. Viimast tuleb korrutada veel teguritega $\frac{l}{6EI}$ ja $\beta^*(v)$, kuna otsamomendid olid isenimelised.

$$\varphi_A = \frac{M_B l \cdot 1}{EI \cdot 6} \beta^*(v) = \frac{M_B l}{6EI} \cdot \frac{6}{v} \left(\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right)$$

φ_B leidmisel korrutatakse epüüride M_B ja 2 samanimelised otsamomendid omavahel ning veel teguritega $\frac{l}{3EI}$ ja $\alpha^*(v)$.

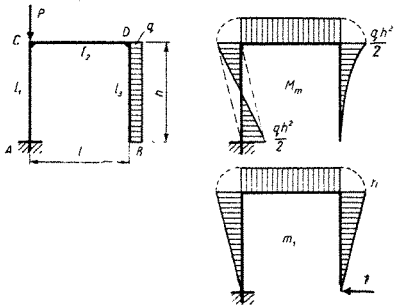
$$\varphi_B = \frac{M_B \cdot 1l}{3EI} \alpha^*(v) = \frac{M_B l}{3EI} \cdot \frac{3}{v} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tan v} \right)$$

Näide 2.4. Leida raami punkti B horisontaalne paigutus (joon. 2.24).

Konstrueerime väliskoormuse ja ühikjõu momendi epüürid.

Varras AC on surutud suure jõuga P , mistõttu ainult selle varda osas tuleb epüüride otsaordinaadid korrutada parandusteguritega θ_i . Varda kohta rakendame arvutusvalemid (2.77), kuna ta on ühest otsast kinnitatud jäigalt. Varda tegeliku põikkoormuse paindemomendi epüüri oletame koosnevana kahest kolmnurgast, mis on piiratud katkendjoontega. Raami teiste varraste kohta leiame sisejõudude võimalikud tööd tavalise põikpaande reegli kohaselt. Siirde avaldise saame järgmisena:

$$\Delta_B = -\frac{qh^2}{2} \frac{h}{2EI} \frac{1}{3} h\theta_3(v) + \frac{qh^2}{2} \frac{h}{2EI_1} \frac{2}{3} h\theta_2(v) + \frac{qh^2l}{2EI_2} h + \frac{1}{3} \frac{qh^2}{2} \frac{h}{EI_3} \frac{3h}{4} = \frac{qh^4}{12EI_1} [2\theta_2(v) - \theta_3(v)] + \frac{qh^3l}{2EI_2} + \frac{qh^4}{8EI_3}$$



JOON. 2. 24

Leiame nüüd $\nu = h \sqrt{\frac{P}{EI_1}}$, misjärel otsime tabelist $\theta_2(\nu)$ ja $\theta_3(\nu)$ väärtused ning asetame siirde avaldisse.

3 VARRASKONSTRUKTSIOONIDE STABIILSUS

3.1 VARDA STABIILSUSE MÕISTE

Varde kandevõime määramisel survejõu puhul ei piisa ainult tugevusarvutusest, vaid enamikul juhtudel tuleb hinnata ka varde tasakaaluolukorra stabiilsust. Surutud sirge varras, kui ta on küllalt sale, võib üle minna uude kõverdunud tasakaalukujusse, kui temale mõjuv survejõud ületab teatava suuruse, mida nimetatakse kriitiliseks. Sellist tasakaaluolukordade muutumist nimetame stabiilsuse kaotuseks ehk (varraste puhul) nõtkedeformatsiooniks.

Mehaanikast teame, et keha tasakaaluolukord võib olla stabiilne, labiilne või indiferentne.

Stabiilseks nimetame sellist tasakaaluolukorda, mil keha, mis on mingi kõrvalise mõju poolt tasakaaluolukorrast välja viidud, läheb selle kõrvalise mõju lakkamisel jälle endisse olukorda tagasi.

Labiilseks nimetame tasakaaluolukorda siis, kui tasakaaluolukorrast välja viidud keha pärast häire lakkamist ei pöördu tagasi alg-tasakaaluolukorda, vaid eemaldub sellest või läheb uude tasakaaluolukorda.

Indiferentse tasakaaluolukorra puhul jääb keha asendisse, millesse on teda viinud häiriv mõju.

Elastse konstruktsiooni tasakaaluolukord sõltub temale rakendatud koormuse iseloomust ja suurusest. Kui koormuse suurus on alla nn. kriitilist, siis on konstruktsioon stabiilnes tasakaaluolukorras. Suurendades koormust kuni kriitilise suuruseni, saavutab konstruktsioon indiferentse tasakaaluolukorra. Ületades koormuse kriitilise suuruse, läheb aga konstruktsioon üle uude tasakaalukujusse.

Konstruktsiooni alg-tasakaaluolukorra stabiilsuse kaotusega, s. o. üleminekuga uude tasakaalukujusse, kaasneb

esialgsega võrreldes uue deformatsiooni areng. Nii näiteks kaasneb varda telgsurvega paine või vääne, väänedega kaasneb paine, painedega vääne (tasapinnalise deformatsiooni püsivuse kaotus); sümmeetrilise deformatsiooniga kaasneb sümmeetria kaotus.

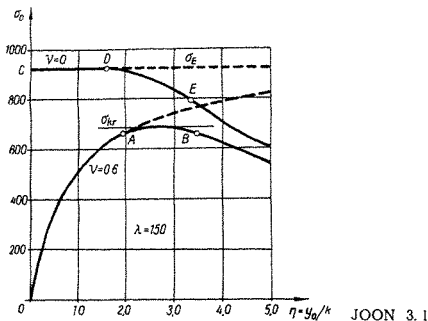
Stabiilsuse kaotust, millega kaasneb kvalitatiivselt uue deformatsiooni kiire areng, nimetatakse esimest liiki (ehk *Euleri*) stabiilsuse kaotuseks. Selline stabiilsuse kaotus toimub äkki. Selle protsessi alguses toimub tasakaaluolukordade hargnemine — konstruktsioon võib minna üle uude tasakaalukujusse, võib aga ka säilitada veel esialgse.

Peale esimest liiki stabiilsuse kaotuse esineb varrastel, mille materjal on elastoplastne, ka teist liiki stabiilsuse kaotus. Seile puhul areneb survejõu kasvades algusest peale varda paindedeformatsioon (näiteks ekstsentrilisel surveel). Varda paindedeformatsiooni arenedes tekivad vardas teatavast pikijõu suuruselt alates plastse deformatsiooni tsoonid algul varda nõgusal ning siis ka kumeral poolel, mistõttu varda turve kasvavale välismõjule väheneb. Survejõud saavutab maksimumi. Alates maksimumjõust suureneb varda läbipaine ilma jõudu suurendamata. Survet võib koguni vähendada, kusjuures varda paindedeformatsioon jätkub. Varras on seega labiilses tasakaaluolukorras. Üleminek labiilses tasakaalu olukorda toimus maksimaalse jõu mõjumisel, mistõttu viimast nimetataksegi kriitiliseks. Enne kriitilist jõudu on varda tasakaaluolukord, nii nagu see esineb ka esimest liiki stabiilsuse kaotuse puhul, stabiilne.

Varda esimest ja teist liiki stabiilsuse kaotust illustreerib tööst [10] võetud joonis 3.1. Joonisel on kujutatud elastoplastsest materjalist ristkülikulise ristlõikega (mõõtmed b ja h) varda kaks deformatsiooni σ_0 - η teljestikus.

$\sigma_0 = \frac{N}{6h}$, milles N on vardale mõjuv pikijõud. $\eta = \frac{y_0}{k}$ on varda kesklõike suhteline siire, milles y_0 on

kesklõike siire, kuna $k = \frac{h}{6}$ on tuuma piirpunkti kaugus teljest. Esimene kõver $OCDE$ kujutab varda deformatsiooni kulgu tsentrilisel surveel (suhteline ekstsentrilisus $\nu = \frac{a}{k} = 0$, milles a — ekstsentrilisus). Teine kõver OAB



kujutab aga varda deformatsiooni kulgu ekstsentrilisel survel ($\nu = 0,6$).

Esimesel kõveral $OCDE$ on kolm erinevat vahemikku. Vahemik OC , mil $\eta = 0$, asub pingete piirkonnas $\sigma_0 < \sigma_E$ ning vastab varda stabiilsele tasakaaluolukorrale (σ_E — Euleri kriitiline pinge). Vahemikus CD , kus $\sigma_0 = \sigma_E$, on tasakaaluolukord indifferentsne. Nii eelmises kui ka selles vahemikus on varda materjal elastses olukorras.

Varda kesklõike siire kasvab konstantse σ_0 juures seni, kuni varda enam koormatud kihis materjal hakkab voolama (punkt D graafikul). Edasine siirde kasv on seoses plastse tsooni suurenemisega, kuid σ_0 kahanemisega. Vahemik DE vastab seega ebastabiilsele tasakaaluolukorrale. Punktis C toimub Euleri stabiilsuse kaotus.

Teise kõvera vahemik OA vastab varda materjali elastsele olukorrale. Punktist A alates hakkab vardas arenema plastne deformatsioon. Veidi hiljem saavutab σ_0 maksimumi ja sealt edasi kasvab varda kesklõike siire σ_0 vähenedes. Pinge väärtust $\max \sigma_0$ nimetame teist liiki stabiilsuse kaotuse kriitiliseks pingeks ja tähistame σ_{kr} . Kõvera OAB vahemik $O-\sigma_{kr}$ vastab varda stabiilsele tasakaaluolukorrale, kuna vahemik σ_{kr} -st edasi kirjeldab labiilset tasakaaluolukorda. Kõverate katkendjoontega jätkud kirjeldavad ideaalelastsest materjalist varda deformatsiooni.

Äsja vaadeldud kõverad on konstrueeritud väikese paindedeformatsiooni teooria alusel, mistõttu nad annavad tegelikust olukorrast veidi erineva kujutluse. Tegelikule olukorrale lähedase pildi saamiseks tuleks kasutada täpset, lõplikel deformatsioonidel rajanevat paindeteooriat.

Täpse paindeteooria rakendamise eesmärgiks on aga siiski rohkem varda stabiilsuse kaotuse kvalitatiivse pildi kui kvantitatiivsete suuruste täpsustamine.

Käesolevas peatükis käsitleme konstruktsioonide esimest liiki stabiilsuse kaotust, s. o. *Euleri* stabiilsuse kaotust. Kriitilist koormust, mis vastab sellisele stabiilsuse kaotusele, nimetatakse *Euleri* kriitiliseks koormuseks. Viimase arvutamisel eeldatakse, et pinged konstruktsiooni materjalis on elastsuupirris ning alluvad *Hooke*'i seadusele ja et deformatsioonid on väga väikesed. Kui elastsele konstruktsioonile mõjub keerukas jõudude süsteem, kusjuures süsteemi üksikud komponendid muutuvad võrdeliselt mingi parameetriga, siis nimetatakse konstruktsiooni stabiilsuse kaotusele vastavat parameetrit *Euleri* kriitiliseks koormusparameetriga.

Esimesed uurimused konstruktsiooni surutud elementide stabiilsuse kohta tegi *Leonhard Euler* ligi 200 aastat tagasi. Peamiste ehitusmaterjalidena kasutati tol ajal kivi ja puitu. Kuna need on suhteliselt nõrgad materjalid, siis valmistati konstruktsioonide elemendid küllalt tusedatena; seejuures ei olnud elastse stabiilsuse küsimused eriti olulised. Seepärast jäid *Euleri* uurimistööde tulemused saledate varraste stabiilsuse kohta kaua praktiliselt rakendamata. Alles hiljem, 19. sajandi teisel poolel, seoses raudteesildade ehitamise ja projekteerimisega leidsid *Euleri* tööd vajalikku tähelepanu. Kui esimeseks uurimisobjektiks oli surutud varras, mille stabiilsuse kohta on aja jooksul kogutud rohke teoreetiline ning katseline materjal, siis tehnika intensiivse arengu tulemusena on ka uuritavate objektide ala muutunud üsna laialdaseks. On tekkinud uued rakendusliku elastsusteooria harud — plaatide stabiilsus, koorikute stabiilsus, õhukeseseinaliste varraste stabiilsus jne.

3.2 EULERI KRIITILISE KOORMUSE MÄÄRAMISE MEETODID

Kriitilise koormuse määramiseks on olemas hulk meetodeid. millest põhilisteks on staatikaline ja energeetiline meetod.

Staatikaline meetod põhineb konstruktsiooni tasakaalu diferentsiaalvõrrandil, mis koostatakse stabiilsuse kaotanud elastse konstruktsiooni uue tasakaaluoluks korra kohta, mis on lõpmata lähedane algolukorrale.

Energeetilise meetodi korral koostatakse elastse konstruktsiooni uue deformeerunud kuju kohta, mis kaasneb stabiilsuse kaotusega, potentsiaalse energia võrrand. Sellest võrrandist leitaksegi kriitiline koormus.

Staatikaline ja energeetiline meetod jagunevad omakorda mitmesugusteks variantideks, olenevalt lahenduskaigu iseärasustest. Ühe või teise meetodi kasutamise otstarbekus sõltub lahendatava ülesande iseloomust ja keerukusest. Keerukamate objektide korral ei ole sageli võimalik saada ülesande täpset lahendit, vaid peab rahulduma ligikaudsega.

Euleri kriitilise koormuse määramise staatikalise meetodi alaliikidena kasutatakse sagedamini järgmisi.

1. Tasakaalu diferentsiaalvõrrandi otsene integreerimine.

2. Tasakaalu diferentsiaalvõrrandi integreerimine, otsides lahendit $v(x)$ argumendi astmete rea kujul. Meetodit kasutatakse juhul, kui $EI(x)$ ja $T(x)$ on esitatavad x polünoomidena.

3. Spetsiaalsete (näit. *Besseli*) funktsioonide tabelite kasutamine. Seda rakendatakse neil erijuhtudel, kui diferentsiaalvõrrandit integreeritakse spetsiaalsete funktsioonidega.

4. Numbriline integreerimine.

5. Järkjärgulise lähenemise meetod.

6. *Bubnov-Galjorkini* meetod.

Järgmistes punktides rakendame ülalootletud meetoditest mõningaid tähtsamaid.

3.3 STAATIKALINE MEETOD

3.31 Elastse konstruktsiooni tasakaalu diferentsiaalvõrrandi otsese integreerimise meetod

See on staatikalise meetodi üks põhivariante. Mõnikord nimetatakse seda ka *Euleri* meetodiks.

Vaatleme *Euleri* kriitilise jõu määramist tsentriliselt surutud ühtlase ristlõikega vardale (joon. 3.2). Oletame, et deformatsioonid on väga väikesed.

Mõlemast otsast liigenditega kinnitatud varda jaoks saame elastse joone diferentsiaalvõrrandi järgmisel kujul:

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} + Tv = 0 \quad (3.1)$$

See võrrand on õieti momentide tasakaalu tingimus tala mis tahes lõike kohta. Võrrandit võib rakendada ainult juhul, kui põikjõud ja paindemoment tala otstes võrduvad nulliga. Teiste ääretingimuste korral on põikjõud Q_0 ja paindemoment M_0 tala otsas tundmatud, mistõttu momendi tasakaalu tingimus on järgmine:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Tv = Q_0x + M_0 \quad (d)$$

Diferentseerime võrrandit x suhtes:

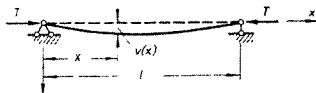
$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) + T \frac{dv}{dx} = Q_0 \quad (e)$$

Pärast teiskordset diferentseerimist saame:

$$\frac{d}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) + T \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad (3.2)$$

Saime tala tasakaalu diferentsiaalvõrrandi, mida võib kasutada mis tahes ääretingimustel.

Sisuliselt on toodud võrrand tala elemendile rakenda-



JOON 3.2

tud põikkoormuse tasakaalu tingimus. Oletame, et tala on ühtlasest materjaist ning ka l on konstantne. Seega tala jäikus $EI_z = \text{konst.}$ Tähistades veel

$$r^2 = \frac{T}{EI_z} \quad (f)$$

saame tala tasakaalu võrrandi järgmisena:

$$\frac{d^4v}{dx^4} + r^2 \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad (3.3)$$

Saadud diferentsiaalvõrrand langeb ühte varda piki-põikpainde diferentsiaalvõrrandiga (2.13), mis saadi juhul, kui vardale mõjuv põikkoormus puudub. See on harilik diferentsiaalvõrrand konstantsete kordajatega, mille üldlahend on nagu eelmises punktis leitud juhul

$$v = B_1 + B_2rx + B_3 \cos rx + B_4 \sin rx \quad (3.4)$$

kus B_1, B_2, B_3 ja B_4 on integreerimiskonstandid, mis määratakse varda ääretingimustest.

Järgnevalt vaatleme *Euleri* kriitilise jõu määramist ole-nevalt varda mitmesugustest toetusviisidest.

3.311 Varda otsad on kinnitatud liigenditega

Rakendades ääretingimust $v_0 = v_0'' = 0$ üldlahendile (3.4), saame

$$B_1 = B_3 = 0 \quad (a)$$

kuna aga $v_l = v_l'' = 0$ annavad:

$$\begin{aligned} B_2rl + B_4 \sin rl &= 0 \\ r^2B_4 \sin rl &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Analüüsides tingimust $r^2B_4 \sin rl = 0$ näeme, et selle tingimuse rahuldamiseks on kolm võimalust. Kõigepealt $r = 0$, mis tähendaks aga, et $T = 0$, s. o. varras pole üldse surutud.

Tingimus $B_4 = 0$ näitab, et kogu varda pikkusel $v = 0$. See tähendab aga seda, et üks varda võimalikest tasakaaluolukordadest on esialgne sirge kuju.

Kui aga oletada, et varras on kõverdunud, siis $B_4 \neq 0$ ning järelikult

$$\sin rl = 0$$

millest

$$rl = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$r^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

Alguses tähistasime

$$r^2 = \frac{T}{EI} \quad (f)$$

ja nii saamegi

$$T = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$$

T on minimaalne siis, kui $n=1$. Seega *Euleri* kriitiline jõud

$$T_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (3.5)$$

Varda elastse joone võrrand on:

$$v = B_4 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3.6)$$

Varda läbipaine avaldises (3.6) sõltub konstandist B_4 , mida ligikaudse kõveruse võrrandi kaudu pole aga võimalik määrata.

3.312 Varda otsad on kinnitatud jäigalt

Sel juhul on ääritingimused, kui $x=0$ ja $x=l$,

$$v = 0 \quad \text{ja} \quad v' = 0 \quad (a)$$

Need ääritingimused annavad:

$$\begin{aligned} B_1 + B_3 &= 0; & B_2 + B_4 &= 0 \\ B_1 + B_2 rl + B_3 \cos rl + B_4 \sin rl &= 0 \\ B_2 - B_3 \sin rl + B_4 \cos rl &= 0 \end{aligned}$$

Neist võrrandeist saame:

$$B_1 = -B_3; \quad B_2 = -B_4 \quad (b)$$



JOON. 3.3

$$\begin{aligned} B_3(\cos rl - 1) + B_4(\sin rl - rl) &= 0 \\ -B_3 \sin rl + B_4(\cos rl - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Kahte viimast tingimust vaatleme kui võrrandite süsteemi tundmatute konstantide B_3 ning B_4 suhtes. Eeldades B_3 ja B_4 mittetriviaalset lahendit, saame stabiilsuse võrrandiks süsteemi determinandi nullilisuse tingimuse, millest tuleneb:

$$(\cos rl - 1)^2 + \sin rl(\sin rl - rl) = 0$$

mis pärast teisendamist annab:

$$\sin \frac{rl}{2} \left(\sin \frac{rl}{2} - \frac{rl}{2} \cos \frac{rl}{2} \right) = 0 \quad (d)$$

Kui $\sin \frac{rl}{2} = 0$, saame:

$$\frac{rl}{2} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

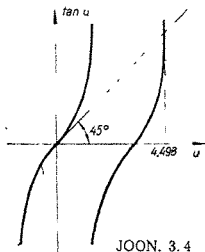
$$r^2 = 4n^2\pi^2 \quad \text{ja} \quad T = \frac{4n^2\pi^2 EI}{l^2}$$

T on väikseim, kui $n = 1$ ning

$$T_1 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (e)$$

Vaatleme edasi võrrandit

$$\sin \frac{rl}{2} - \frac{rl}{2} \cos \frac{rl}{2} = 0$$



JOON. 3.4

Tähistanud $\frac{rl}{2} = u$, võime võrrandi esitada kujul $\tan u = u$

Selle võrrandi lahendamise graafiliselt (joon. 3.4). Graafikule on kantud kõverad $\tan u$ olenevalt u väärtusest.

Lahend saadakse u -teljega 45° all tõmmatud sirge ja $\tan u$ kõvera lõikepunktina.

Võrrandi väikseim lahend on:

$$u = \frac{rl}{2} = 4,49$$

Sellele lahendile vastav

$$T_2 = \frac{80,6 EI}{l^2} \quad (f)$$

Kuna $T_2 > T_1$, siis kriitiliseks osutub jõud T_1 , seega

$$T_E = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (3.7)$$

Tingimustest $\sin \frac{rl}{2} = 0$ ja $\frac{rl}{2} = \pi$ järeldub, et $B_2 = B_4 = 0$.

Varda elastse joone võrrand on

$$v = B_1 + B_3 \cos rx \quad (g)$$

Kuna $r = \frac{2\pi}{l}$ ja $B_1 = -B_3$, siis saame

$$v = B_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad (3.8)$$

B_1 jääb määramatuks.

3.313 Varda üks ots on kinnitatud jäigalt, teine ots on vaba

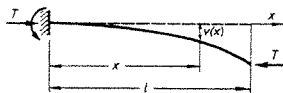
Ääritingimused varda jäigalt kinnitatud otsal on: läbi-
vajumine ja pöördenurk võrduvad nulliga, s. o.

$$x = 0 \quad v = v' = 0 \quad (a)$$

Varda vabal otsal võrduvad nulliga aga paindemoment
ja põikjõud:

$$x = l \quad v'' = 0 \quad v''' + r^2 v' = 0 \quad (b)$$

Rakendades neid ääritingimusi varda elastse joone
võrrandi kohta, saame võrrandid:



JOON. 3.5

$$B_1 + B_3 = 0; \quad B_2 + B_4 = 0$$

$$B_3 \cos rl + B_4 \sin rl = 0; \quad B_2 = 0$$

Nendest võrranditest omakorda leiame:

$$B_2 = B_4 = 0; \quad B_1 = -B_3; \quad B_3 \cos rl = 0 \quad (c)$$

Viimane võrrand on rahuldatud siis, kui $B_3 = 0$, mis on triviaalne lahend, või siis, kui $\cos rl = 0$, mispuhul

$$rl = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$T_n = \frac{(2n + 1)\pi^2 EI}{4l^2}$$

Minimaalse väärtusega on jõud T siis, kui $n = 0$:

$$T_E = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (3.9)$$

Varda elastse joone võrrand on:

$$v = B_3 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \quad (3.10)$$

3.314 Varda üks ots on kinnitatud liigendiga, teine jäigalt

Elastse joone võrrandis esinevate integreerimiskonstantide määramiseks kasutame nüüd ääritingimusi:

$$\text{kui } x = 0, \text{ siis } v = 0 \text{ ja } v'' = 0$$

$$\text{kui } x = l, \text{ siis } v = 0 \text{ ja } v' = 0 \quad (a)$$

Saame võrrandid:

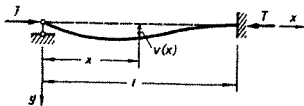
$$B_1 = B_3 = 0$$

$$B_2 r l + B_4 \sin rl = 0$$

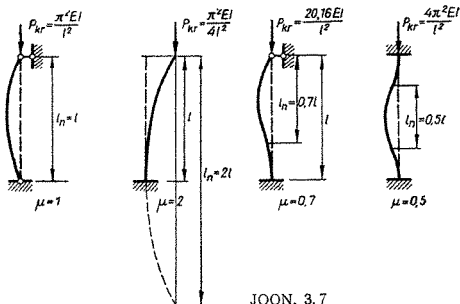
$$B_2 + B_4 \cos rl = 0$$

Stabiilsuse võrrandi saame viimase süsteemi determinandi nullilisuse tingimusest

$$rl \cos rl - \sin rl = 0 \quad (b)$$



JOON. 3.6



JOON. 3.7

Tähistades $rl = ru$, kirjutame eelmise võrrandi ümber:

$$2u = \tan 2u$$

Selle võrrandi võime lahendada eespool toodud graafilise meetodiga, kusjuures väiksem positiivne juur on

$$2u = rl = 4,49$$

mis annab kriitilise jõu suuruse

$$T_E = \frac{20,16 EI}{l^2} \quad (3.11)$$

Elastse joone võrrand

$$v = B_4 (\sin rl - rx \cos rl) \quad (3.12)$$

Võrdleme eespool saadud kriitiliste jõudude suurusi omavahel, kusjuures ühikuks võtame kriitilise jõu suuruse mõlemast otsast liigendiga kinnitatud varda korral.

Kui varras on kinnitatud mõlemast otsast jäigalt, siis on tema kriitilise jõu suurus 4 korda suurem kui liigendkinnitusega vardal. Ühe vaba otsa ning teise otsa jäiga kinnituse korral on kriitilise jõu suurus kaks korda väiksem. Kui aga vardal on ühes otsas liigend ja teises otsas jäik tugi, siis on tema kriitiline jõud ühikust kaks korda suurem.

Kriitilisi jõude võib väljendada ka nii, et avaldise lugejaks võtame $\pi^2 EI$, nimetajas aga esineb l^2 asemel $l_n^2 = (\mu l)^2$.

Tegurit μ nimetatakse varda kinnitusteguriks ja selle abil arvutatakse kriitilist jõudu olenevalt varda kinnitustüübist. l_n tähistab varda redutseeritud pikkust, mis näitab, millises ulatuses varda pikkusest on arenenud siinuse poollaine. Varda liigendkinnituse puhul mõlemast otsast on $\mu = 1$, jäiga kinnituse korral $\mu = 0,5$. Ühe vaba otsa ja teise jäiga toe korral $\mu = 2$, kuna ühe liigendtoe ja teise jäiga kinnitusega vardal $\mu = 0,7$.

Joonisel 3.7 on esitatud varraste skeemid ja *Euleri* kriitiliste jõudude suurused varda nelja erineva kinnituse puhul.

3.4 BUBNOV-GALJORKINI MEETOD KONSTRUKTSIOONI TASAKAALU DIFERENTSIAALVÖRRANDI INTEGREERIMISEKS

Eelmises paragrahvis esitatud meetod andis meile täpsed kriitilised koormused ning meetodit oli võimalik rakendada, kuna vaadeldav objekt oli lihtne — konstantse ristlõike ja paindejäikusega varras. Keerukamatel juhtudel, näiteks varda muutuva ristlõike või pikijõu korral peab sageli kasutama mõnd ligikaudset meetodit. Üheks selliseks ongi *Bubnov-Galjorkini* meetod.

Lähtume diferentsiaalvõrrandist (3.2)

$$(EIv'')'' + Tv'' = 0 \quad (a)$$

Otsime sellele lahendit järgmise lõpmatu reana:

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x) \quad (b)$$

milles A_i on tundmatud konstandid,

$f_i(x)$ — nn. fundamentaalsed funktsioonid, mis peavad tingimata rahuldama kõiki ääretingimusi.

Kuna kõik lahendi (b) liikmed rahuldavad ääretingimusi, siis rahuldab neid ka rida tervikuna.

Asetame rea (b) diferentsiaalvõrrandisse, mis peab olema samaselt rahuldatud, oletades, et rida on võrrandi lahend. Samaselt null on ortogonaalne mistahes funktsiooniga, seega ka rea iga fundamentaalse funktsiooniga, mistõttu võime kirjutada:

$$\int_0^l \left\{ \left[EI \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i f(x) \right)'' \right]'' + T \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i f(x) \right)'' \right\} f_k(x) dx = 0 \quad (3.13)$$

milles $k = 1, 2, 3, \dots$

Avaldis (3.13) kujutab endast lineaarsete võrrandite süsteemi konstantide A_i suhtes. Oletades mittetriviaalset lahendit, milles mitte iga A_i ei võrdu nulliga, on süsteem rahuldatud siis, kui tema determinant võrdub nulliga. Determinandi nullilisuse tingimus ongi stabiilsuse võrrand, mille väikseim juur annab *Euleri* kriitilise jõu suuruse, kulla praktiliselt saame lahendis (b) pidada lõplik arv liikmeid, siis on saadav tulemus ligikaudne. Vea suuruse hindamiseks võrreldakse kahe kõrvuti asetseva lahenduse tulemusi. Juhul kui lahend (b) on täpne, on ka saadav kriitiline jõud täpne.

Ligikaudse lahendi korral saadakse tõelisest suurem kriitiline jõud. See on seletatav sellega, et ligikaudse lahendi järgi on tala elastse joone kuju tõelisest erinev, nagu deformeeritud mingisuguste lisajõudude või sidemetepoolt. Igasugused lisasidemed aga põhjustavad kriitilise jõu suurenemist.

Näide 3.1. Kasutades *Galjorkini* meetodit, leida otstest liigenditega kinnitatud varda *Euleri* kriitiline jõud, kui varda inertsmoment muutub piki varrast paraboolselt*:

$$I(x) = I_0 \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$$

Varda elastne joon aproksimeerida reaga:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (a)$$

Varda elastse joone diferentsiaalvõrrandina võime käesoleval juhul kasutada võrrandit (3.1), millest saame *Galjorkini* meetodi rakendamiseks analoogiliselt võrrandiga (3.13) ning silmas pidades seost (a):

$$\int_0^l \left\{ EI(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)'' + T \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0 \quad (b)$$

milles $k = 1, 2, 3, \dots$

* Ülesande lähteandmed on võetud õpikust [8].

Teostame esimese lähenduse, võttes elastse joone võrrandiks

$$v = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (c)$$

mis rahuldab ääritingimusi: kui $x=0$ ja $x=l$, siis $v=0$ ja $v''=0$.

Asetame lahendi (c) ja $I(x)$ avaldise võrrandisse (b), oletades $k=1$, misjärel saame:

$$\int_0^l \left\{ EI_0 \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \left(A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right)'' + \right. \\ \left. + TA_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right\} \sin \frac{\pi x}{l} dx = 0 \quad (d)$$

Arvutame nüüd võrrandis esinevad integraalid

$$\int_0^l \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = 0,934 l \\ \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

Asetame leitud integraalide väärtused võrrandisse (d). Saame:

$$EI_0 A_1 \frac{\pi^2}{l^2} 0,934 l + TA_1 \frac{l}{2} = 0$$

millest

$$T_{kr} = \frac{1,868 \pi^2 EI_0}{l^2}$$

Nüüd teostame teise lähenduse, oletades seejuures, et varda nõtkunud kuju on sümmeetriline, mistõttu

$$v = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \quad (e)$$

ja $k=1; 3$.

Rakendame võrrandit (b), mis annab kahest võrrandist süsteemi

$$\int_0^l \left\{ EI_0 \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \left(A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \right)'' + \right. \\ \left. + T \left(A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \right) \right\} \sin \frac{\pi x}{l} dx = 0 \quad (f)$$

$$\int_0^l \left\{ EI_0 \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \left(A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \right)'' + \right. \\ \left. + T \left(A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \right) \right\} \sin \frac{3\pi x}{l} dx = 0$$

Selles süsteemis tuleb arvutada lisaks esimeses lähenduses leituile järgmised integraalid:

$$\int_0^l \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} dx = 0,0761 l \quad (g)$$

$$\int_0^l \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \sin^2 \frac{3\pi x}{l} dx = 0,844 l$$

$$\int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} dx = 0 \quad (h)$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{3\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

Pärast teisendamist ja asendamist seostega (g) ja (h) saame:

$$EI_0 \left[-A_1 \frac{\pi^2}{l^2} 0,934 l - A_3 \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 0,0761 l \right] + T \frac{l}{2} A_1 = 0 \quad (i)$$

$$EI_0 \left[-A_1 \frac{\pi^2}{l^2} 0,0761 l - A_3 \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 0,844 l \right] + T \frac{l}{2} A_3 = 0$$

$$\text{või} \quad \left(T \frac{l}{2} - \frac{\pi^2}{l^2} 0,934 l EI_0 \right) A_1 - \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 0,0761 l EI_0 A_3 = 0 \quad (k)$$

$$- \frac{\pi^2}{l^2} 0,0761 l EI_0 A_1 + \left[T \frac{l}{2} - \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 0,844 l EI_0 \right] A_3 = 0$$

Saime võrrandisüsteemi parameetrite A_1 ja A_3 suhtes. Oletades süsteemile mitte triviaalset lahendit, s. t. A_1 ja A_3 ei võrdu korraga nulliga, peab võrrandisüsteemi determinant võrduma nulliga. Viimane tingimus annabki järgmise stabiilsusvõrrandi:

$$\left(\frac{1}{2} T - 0,934 \frac{\pi^2}{l^2} EI_0 \right) \left[\frac{1}{2} T - 0,844 \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 EI_0 \right] - \\ - \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} 0,0761^2 (EI_0)^2 = 0 \quad (m)$$

või

$$T^2 - 17,06 EI_c \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + 28,2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 (EI_0)^2 = 0 \quad (n)$$

Selle ruutvõrrandi väikseim juur on

$$T_{kr} = 1,85 \frac{\pi^2 EI_0}{l^2} \quad (o)$$

Võrdleme saadud tulemust esimese lahendusega saadud tulemu-
sega:

$$\frac{1,868 - 1,85}{1,868} \cdot 100\% = 0,96\%$$

Kriitiliste jõudude erinevus on seega lühine, mistõttu edaspidine täpsustamine ei ole praktiliselt tarvilik.

3.5 JÄRKJÄRGULISE LÄHENEMISE MEETOD KRIITILISE JÕU MÄÄRAMISEKS

Euleri kriitilise jõu määramise ligikaudsetest meetoditest, kus kasutatakse varda elastse joone diferentsiaalvõrrandit, on üks lihtsamaid nn. järkjärgulise lähenemise meetod.

Ebaühtlaselt surutud ning muutuva ristlõikega varda korral tuleb kasutada järgmist elastse joone diferentsiaalvõrrandit:

$$[EI(x)v'']'' + [T(x)v']' = 0 \quad (3.14)$$

Väljendame muutuva pikijõu $T(x)$ mingi parameetri α kaudu, mille kriitilist suurust edaspidi otsime, seosega

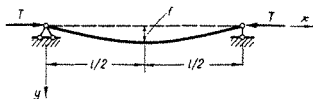
$$T(x) = \alpha\tau(x) \quad (a)$$

Asetame seose (a) diferentsiaalvõrrandisse (3.14), viies teise liikme üle paremale poolele:

$$[EI(x)v'']'' = -[\alpha\tau(x)v']' \quad (3.15)$$

Seega asetseb liige, mis sisaldab parameetrit α , võrrandi paremal pool. Analoogiliselt peavad ka ääretingimustes kõik liikmed, milles esineb α , asetsema avaldiste paremal pool.

Võrrand (3.15) lahendatakse järgmiselt. Kõigepealt oletatakse võrrandi parema poole v jaoks mingi funktsioon v_0 , mis võrdlemisi sarnaselt kirjeldaks varda elastset joont selle nõtkumisel. Nimetatud funktsioon v_0 asetatakse võrrandi paremasse poolde, millega see muutub



JOON. 3.8

tuntud funktsiooniks. Võrrand (3.15) kujutab nüüd muutuva ristlõikega tala elastse joone v_1 diferentsiaalvõrrandit, mida saab lahendada otsese integreerimise teel. Seejuures tekkivad integreerimiskonstandid määratakse ääritingimustest. Esimesele lähendusele vastav kriitiline koormusparameeter α_{kr} leitakse tingimusest, et mingisuguses etteantud lõikes on v_0 ja v_1 võrdsed. Järgmiseks lähenduseks asetame v_1 v_0 asemele võrrandi paremasse poolde ja leiame diferentsiaalvõrrandi lahendi v_2 ning analoogiliselt esimese lahendusega ka vastava α_{kr} suuruse.

Seda protsessi tuleks sooritada seni, kuni saavutatakse, et $v_n = v_{n-1}$ iga x suuruse ja $\alpha_{kr} = \text{konst.}$ juures.

Näide 3.2. Leida otstest liigenditega kinnitatud konstantse ristlõikega talale mõjuva pikijõu T kriitiline suurus.

Rakendame järkjärgulise lähenemise meetodit.

Oletame esimeseks lähendiks tala elastse joone parabolina

$$v_0 = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

Kuna tala on otstes kinnitatud liigenditega, võime rakendada neljandat järku diferentsiaalvõrrandi asemel teist järku diferentsiaalvõrrandit

$$EIv'' + Tv = 0$$

Vastavalt järkjärgulise lähenemise meetodile võime kirjutada:

$$EIv_1'' = -Tv_0 \quad (a)$$

Asetades paremale poolele v_0 avaldise, saame:

$$EIv_1'' = -T \frac{4f}{l^2} (lx - x^2)$$

$$EIv_1' = -T \frac{4f}{l^2} \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$EIv_1 = -T \frac{4f}{l^2} \left(l \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 x + C_2$$

Ääritingimused.

$$\begin{aligned}x &= 0, & v_1 &= 0 \\x &= l; & v_1 &= 0\end{aligned}\quad (b)$$

Esimene ääritingimus annab $C_2 = 0$, kuna teisest saame

$$C_1 = \frac{Tfl}{3}$$

Seega

$$EIv_1 = -T \frac{4f}{l^2} \left(l \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + \frac{Tfl}{3} x \quad (c)$$

Oletame: kui $x = \frac{l}{2}$, siis $v_0 = v_1 = f$

$$EI f = -T \frac{4f}{l^2} \left(\frac{l^4}{48} - \frac{l^4}{192} \right) + \frac{Tfl^2}{6}$$

millest

$$T_{kr} = \frac{48}{5} \frac{EI}{l^2} = 9,60 \frac{EI}{l^2} \quad (d)$$

Nagu teada, on täpne lahend $T_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9,87 EI}{l^2}$

Teiseks lähenduseks asetame leitud v_1 avaldise tuntud funktsioonina võrrandi paremasse poolde v_1 avaldise saame avaldisest (c), asendades seal T_{kr} valemist (d):

$$v_1 = \frac{16}{5} \frac{f}{l} \left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right) \quad (e)$$

$$EIv_2'' = -Tv_1$$

$$EIv_2'' = -\frac{16}{5} \frac{Tf}{l} \left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right)$$

$$EIv_2' = -\frac{16}{5} \frac{Tf}{l} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2l^2} + \frac{x^5}{5l^3} \right) + C_1$$

$$EIv_2 = -\frac{16}{5} \frac{Tf}{l} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10l^2} + \frac{x^6}{30l^3} \right) + C_1x + C_2$$

Ääritingimused

$x = 0; \quad v_2 = 0, \quad$ millest $C_2 = 0$

$x = l; \quad v_2 = 0, \quad$ millest $C_1 = \frac{8}{25} Tfl$

$$EIv_2 = -\frac{16}{25} Tfl \left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{6} \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^5}{2l^4} + \frac{x^6}{6l^5} \right)$$

Oletades

$$x = \frac{l}{2} \quad v_1 = v_2 = f$$

leiame

$$T = \frac{600 EI}{6l^2} = 9,84 \frac{EI}{l^2}$$

Võrreldes teise lähenduse tulemust täpse lahendiga, näeme, et tehtav viga on

$$\frac{9,87 - 9,84}{9,87} 100 = 0,3\%$$

3.6 ENERGEETILINE MEETOD KRIITILISTE KOORMUSTE MÄÄRAMISEKS

Energeetilise meetodi puhul rakendatakse konstruktsiooni potentsiaalse energia mõistet. Konstruktsiooni potentsiaalne energia Π koosneb konstruktsiooni deformatsiooni potentsiaalsest energiast U ja välisjõudude potentsiaalset (tööst) A .

Kui elastne konstruktsioon on tasakaalus, siis võimalike paigutiste printsiibi järgi on kõikide konstruktsioonile rakendatud jõudude töö mistahes lõpmata väikestel võimalikel paigutistel võrdne nulliga. Seejuures ei ole aga selge, millist tasakaaluolukorda vaadeldakse — stabiilset, labiilset või indiferentset.

Tasakaaluolukorra liiki on võimalik määrata konstruktsiooni potentsiaalse energia seisundi järgi.

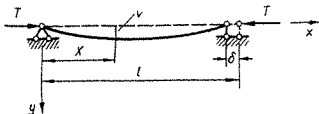
Tasakaaluolukord on stabiilne siis, kui konstruktsiooni potentsiaalse energia hulk on minimaalne, võrreldes potentsiaalse energia hulgaga, mis konstruktsioonil on lõpmata väikeste tasakaaluolukorrast erinevate asendite korral.

Kui konstruktsiooni potentsiaalse energia hulk on maksimaalne, siis on tema tasakaaluolukord labiilne.

Indiferentse tasakaaluolukorra puhul on konstruktsiooni potentsiaalse energia hulk tasakaaluolukorrast vähe erinevate konstruktsiooni asendite puhul konstantne.

See tasakaaluolukordade kriteerium kannab *Lejeune-Dirichlet'* kriteeriumi nime.

Vaatleme elastse konstruktsioonina surutud sirget varrast. Indiferentne tasakaaluolukord tekib siis, kui survejõud saavutab kriitilise suuruse. Kui nüüd esialgu



JOON 3 9

sirget varrast kõverdada, siis selline deformatsioon toimub, ilma et varda kogu potentsiaalenergia Π selle tagajärjel muutuks. See tähendab, et varda deformatsiooni potentsiaalenergia juurdekasv ΔU ja välisjõu potentsiaali muutus ΔA on arvuliselt võrdsed. Stabiilsuse võrrandiks saame

$$\Delta U = \Delta A \quad (3.16)$$

Varda paindedeformatsiooni potentsiaalne energia avaldub seosega

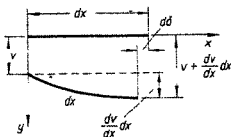
$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx \quad (3.17)$$

Välisjõu potentsiaali muutus on

$$\Delta A = T\delta \quad (3.18)$$

Nimetatud energia on negatiivne, kuna jõu nihkudes δ võrra on vähenenud tema potentsiaal varda algasendi suhtes, mis oli arvutuse lähteolukorraks. Varda otsa siire δ tekib varda kõverdumisest ja selle arvutame järgmiselt.

Eraldame esialgu sirgest vardast elemendi pikkusega dx (joon. 3.10). Selle pikkus ei muutu varda paindudes, sest indiferentse tasakaaluolukorra puhul on survejõud T nii varda esialgse sirge seisundi kui ka kõverdunud seisundi puhul endiselt kriitilise suurusega



JOON. 3.10

$$\begin{aligned} \delta\delta &= dx - \sqrt{dx^2 - \left(\frac{dv}{dx} dx\right)^2} = \\ &= dx - dx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \dots \right] \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \\ \delta &= \frac{1}{2} \int_0^l (v')^2 dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

Asetame nüüd siirde avaldise (3.19) välisjõu potentsiaali muutuse avaldisse (3.18). Saame:

$$\Delta A = \frac{T}{2} \int_0^l (v')^2 dx \quad (3.20)$$

Võrrand (3.16) avaldub seoste (3.17) ja (3.20) kaudu järgmiselt:

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx = \frac{T}{2} \int_0^l (v')^2 dx$$

millest

$$T = \frac{\int_0^l EI (v'')^2 dx}{\int_0^l (v')^2 dx} \quad (3.21)$$

Kriitiline jõud T_{kr} on väiksem kõigist mõeldavaist survejõududest, mis võivad põhjustada varda kriitilise seisundi.

$$T_{kr} = \min T$$

Juhul kui nõtkunud varda elastse joone kuju, mida kirjeldatakse funktsiooniga v , on täpselt teada, saame ka täpse kriitilise jõu suuruse. Enamikul juhtudel, mil tuleb energeetilist meetodit rakendada, ei ole aga varda elastse joone kuju teada, mistõttu tuleb selleks oletada mingi funktsioon. Kuna selline funktsioon kirjeldab varda nõtkunud kuju ligikaudselt, siis on ka saadav kriitilise jõu suurus ligikaudne. Arvutust püütakse täpsustada sel teel, et valitakse sobivamaid varda läbipaande funktsioone.

Kuna ligikaudne kriitiline jõud on täpsem suurem, mille põhjust selgitasime eespool, siis täpsustamise tulemusena peab kriitilise jõu suurus vähenema.

S. P. *Timosenko* tegi ettepaneku rakendada kriitilise koormuse määramise valem (3.21) pisut teistsugusel kujul. Nimelt soovib ta neil juhtudel, kus see võimalik, väljendada varda paindedeformatsiooni potentsiaalne energia vardale mõjuva survekoormuse ja varda siirdefunktsiooni v kaudu järgmiselt:

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{EI} = \int_0^l \frac{T^2 v^2 dx}{2EI}$$

Kui T on konstantne survejõud, võime stabiilsusvõrrandi (3.16) alusel kirjutada:

$$\frac{T^2}{2} \int_0^l \frac{v^2 dx}{EI} = \frac{T}{2} \int_0^l (v')^2 dx$$

millest

$$T_{kr} = \min T = \frac{\int_0^l (v')^2 dx}{\int_0^l \frac{v^2 dx}{EI}} \Bigg|_{\min} \quad (3.22)$$

Seda nimetatakse *Timošenko* valemiks. Varda täpse siirdefunktsiooni v korral annavad valemid (3.21) ja (3.22) ühesuguse täpse tulemuse. Ligikaudse v korral on aga *Timošenko* valemiga (3.22) arvutatav kriitiline jõud täpsem, sest siin kasutatakse deformatsiooni potentsiaalne energia arvutamisel v väärtust, mitte aga tema teist tuletist d^2v/dx^2 , nagu valemi (3.21) tuletamisel. Teatavasti kirjeldab aga mingi ligikaudne funktsioon ise nähtust paremini kui tema teine tuletis.

Energeetilise meetodiga leitava kriitilise koormuse täpsustamisel esitatakse sageli siirdefunktsioon v mingisuguse lõpmatu rea näol. Rea kõik liikmed sisaldavad tundmatuid parameetreid A_n , mille varieerimisega võib saavutada sobivaima siirdefunktsiooni v ja sellele vastavalt minimaalse T_{kr} . Kirjeldatud põhimõttel ülesehitatud *W. Ritzi* ja *S. Timošenko* meetodeid on käsitletud järgmistes punktides.

Näide 3.3. Leida energeetilise meetodiga otstest liigenditega kinnitatud konstantse pöiklõikega vardale mõjuvate pikijõudude T kriitiline suurus. Varda siirdefunktsioon v olgu esimesel juhul staatikalise meetodiga leitud täpne

$$v = f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (a)$$

kuna teisel juhul ligikaudne

$$v = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2) \quad (b)$$

Rakendame kõigepealt valemit (3.21):

$$T_{kr} = EI \frac{\int_0^l (v'')^2 dx}{\int_0^l (v')^2 dx} \quad (c)$$

täpsele lahendile (a). Leiame tuletised

$$v' = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$$

$$v'' = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Asetame nüüd viimaste avaldised T_{kr} valemisse, misjärel saame:

$$T_{kr} = EI \frac{f^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx}{f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx} = \frac{EI \pi^2}{l^2}$$

sest

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

Saadud lahend on ühtelangev staatikalise meetodiga leitud täpse kriitilise jõuga, sest kasutasime täpset varda siirdefunktsiooni.

Leiame nüüd kriitilise jõu, kasutades ligikaudset siirdefunktsiooni ning toimides analoogiliselt eelmise näite lahenduskäiguga:

$$v = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2); \quad v' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x); \quad v'' = -\frac{8f}{l^2} \quad (d)$$

$$T_{kr} = EI \frac{\int_0^l \left(\frac{8f}{l^4} \right)^2 dx}{\int_0^l \left[\frac{4}{l^2} (l-2x) \right]^2 dx} = \frac{64 \frac{f^2}{l^4} \cdot l}{\frac{16f^2}{l^4} \cdot \frac{l^3}{3}} = 12 \frac{EI}{l^2}$$

Võrreldes saadud lahendit tapsega, leiame erinevuse

$$\frac{12 - 9,87}{9,87} \cdot 100 = 21,6\%$$

mis on küllaltki suur.

Kasutame nüüd täpsemat lahendit võimaldavat *Timošenko* valem (3.22) ja funktsiooni (d):

$$T_{kr} = EI \frac{\int_0^l (v')^2 dx}{\int_0^l v^2 dx} = EI \frac{\frac{16f^2}{l^4} \int_0^l (l-2x) dx}{\frac{16f^2}{l^4} \int_0^l (l^2x^2 - 2x^3l - x^4) dx} =$$

$$= EI \frac{l^3/3}{l^5/30} = 10 \frac{EI}{l^2}$$

Erinevus täpsest lahendist

$$\frac{10 - 9,87}{9,87} \cdot 100 = 1,3\%$$

Ilmneb, et *Timošenko* valem annab antud juhul tunduvalt parema tulemuse kui valem (3.21).

3.7 W. RITZI MEETOD

Ritzi meetodi puhul lähtume konstruktsiooni kriitilisele olukorrale vastavast potentsiaalse energia Π statsionaarsuse tingimusest

$$\delta\Pi = 0 \quad (3.23)$$

milles

$$\delta\Pi = \delta U + \delta A$$

Konstruktsiooni deformatsiooni potentsiaalse energia juurdekasv δU arvutatakse sirge varda korral valemiga (3.17), kuna survekoormuse potentsiaali muutus valemiga (3.20).

Mõlemas valemis esinev varda nõtkunud teljele vastav elastne joon oletatakse ette mingi rea näol analoogiliselt *Galjorkini* meetodiga:

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x) \quad (a)$$

milles A_i on tundmatud parameetrid, $f_i(x)$ aga fundamentaalsed funktsioonid. Viimased on tuntud funktsioonid ja peavad rahuldama varda otste kinnitustingimusi. Potentsiaalse energia avaldise saamiseks asetatakse oletatav lahend (a) avaldistesse (3.17) ja (3.20) ning integreeritakse, millega saadakse teise astme funktsioon parameetrite A_i suhtes.

Tingimus (3.23) on arendatav järgmiseks tasakaaluvõrrandite süsteemiks:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_i} = 0 \quad (3.24)$$

kus $i = 1, 2, 3, \dots$

Süsteem (3.24) kujutab endast lineaarsete võrrandite süsteemi parameetrite A_i suhtes. Oletades, et mitte kõik parameetrid A_i ei võrdu nulliga, on süsteemi lahendite A_i olemasolu tingimuseks, et süsteemi tundmatute A_i ees olevate kordajate determinant peab võrduma nulliga. See tingimus ongi antud konstruktsiooni stabiilsuse võrrand, mille väikseim juur annab *Euleri* kriitilise koormuse.

Alljärgnevas näites vaatleme *Galjorkini* meetodi kirjeldamisel (lk. 87) näitena kasutatud tala.

Näide 3.4. Leida, kasutades *Ritzi* meetodit, otstest liigenditega kinnitatud tala *Euleri* kriitilise jõu suurus, kui varda inertsmoment muutub piki varrast parabolsealt:

$$I(x) = I_0 \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$$

Esitame tala elastse joone võrrandi reana:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (a)$$

Tala paindedeformatsiooni potentsiaalse energia arvutame valemiga

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx \quad (b)$$

kuna pikijõu potentsiaali muutuse (tõõ) valemiga

$$\delta A = \frac{T}{2} \int_0^l (v')^2 dx \quad (c)$$

Lahendame ülesande esimeses lähenduses, võttes

$$v = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} \delta U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) (v'')^2 dx &= \frac{EI_0}{2} \int_0^l \left[1 + 4 \frac{x}{l} - \right. \\ &\left. - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] A_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EI_0}{2} \frac{\pi^4}{l^3} \cdot 0,934 A_1^2 \end{aligned} \quad (e)$$

$$\delta A = \frac{T}{2} \int_0^l (v')^2 dx = \frac{T}{2} A_1^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{T\pi^2}{4l^2} A_1^2 \quad (f)$$

Avaldistes (e) esineva integraali arvutasime *Galjorkini* meetodit illustreeriva näite puhul, kuna

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

Asetame nüüd avaldised (e) ja (f) nende lõppkujul potentsiaalenergia $\delta\Pi$ avaldisse ning diferentseerime A_1 järgi:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_1} = \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{EI_0}{2} \frac{\pi^4}{l^3} 0,934 A_1^2 - \frac{T\pi^2}{4l} A_1^2 \right) = 0$$

ning saame

$$A_1 \left(EI_0 \frac{\pi^4}{l^3} 0,934 - \frac{T\pi^2}{2l} \right) = 0 \quad (g)$$

A_1 ei võrdu nulliga, mistõttu saadud võrrandi rahuldamiseks peab nulliga võrduma sulgavaldis, mis annab:

$$T_{kr} = 1,868 \frac{\pi^2 EI_0}{l^2} \quad (h)$$

Lahendame nüüd ülesande teises lähenduses, aproksimeerides varda siirdefunktsiooni v kaheliikmelisena (analoogiliselt *Galjorkini* meetodil lahendamisega).

$$v = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$$

Selleks, et koostada paindedeformatsiooni potentsiaalse energia δU ja välisjõu potentsiaali muutuse δA avaldist, leiame v tuletised

$$v' = A_1 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} + A_3 \frac{3\pi}{l} \cos \frac{3\pi x}{l} \quad (i)$$

$$v'' = -A_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - A_3 \frac{9\pi^2}{l^2} \sin \frac{3\pi x}{l} \quad (k)$$

Moodustame nüüd võrrandid

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) (v'')^2 dx = \\ &= \frac{EI_0}{2} \int_0^l \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \left[A_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} + \right. \\ &\quad \left. + A_1 A_3 18 \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} + A_3^2 81 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{3\pi x}{l} \right] dx = \\ &= \frac{EI_0}{l^4} \left[A_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \cdot 0,934 l + 2A_1 A_3 \cdot 9 \frac{\pi^4}{l^4} \cdot 0,076 l + A_3^2 \frac{81\pi^4}{l^4} \cdot 0,844 l \right] \quad (m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{T}{2} \int_0^l (v')^2 dx = \frac{T}{2} \int_0^l \left(A_1^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} + \right. \\ &\quad \left. + 2A_1 A_3 \cdot 3 \frac{\pi^2}{l^2} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi x}{l} + A_3^2 \frac{9\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{3\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{T}{2} \left(A_1^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{l}{2} + 2A_1 A_3 \cdot 3 \frac{\pi^2}{l^2} \cdot 0 + A_3^2 \frac{9\pi^2}{l^2} \cdot \frac{l}{2} \right) \quad (n) \end{aligned}$$

δU avaldises esinevad integraalid on arvatud *Galjorkini* meetodit selgitavas näites, kuna δA avaldises esinevad integraalid on hõlpsalt leitavad.

Edasi arvutame tasakaaluvõrrandite süsteemi:

$$\frac{\partial(\delta U - \delta A)}{\partial A_1} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial(\delta U - \delta A)}{\partial A_3} = 0$$

mis pärast võrrandite (m) ja (n) sisseasetamist annavad:

$$\begin{aligned} \left(0,934 \frac{\pi^2}{l^2} EI_0 - \frac{T}{2} \right) A_1 + 0,685 \frac{\pi^2}{l^2} EI_0 A_3 &= 0 \\ 0,685 \frac{\pi^2}{l^2} EI_0 A_1 + \left(68,4 \frac{\pi^2}{l^2} EI_0 - \frac{9}{2} T \right) A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (o)$$

Võrrandisüsteemi (o) nullilisuse tingimusest saame:

$$\left(0,934 \frac{\pi^2}{l^2} EI_0 - \frac{T}{2} \right) \left(68,4 \frac{\pi^2}{l^2} EI_0 - \frac{9}{2} T \right) - \left(0,685 \frac{\pi^2}{l^2} EI_0 \right)^2 = 0$$

või

$$T^2 - 17,06 \frac{\pi^2}{l^2} EI_0 T + 28,2 \frac{\pi^4}{l^4} (EI_0)^2 = 0$$

Saadud ruutvõrrand T suhtes on ühtelangev *Galjorkini* meetodil leitud võrrandiga.

Võrrandi väiksem juur on

$$T_{kr} = 1,85 \frac{\pi^2 EI_0}{l^2}$$

mis on esimese lähenduse kriitilise jõu suurusest 0,96% väiksem.

3.8 TIMOŠENKO MEETOD

Timošenko meetod on *Ritzi* meetodi variant varda kriitiliste koormuste määramiseks. Siin lähtume indiferentse tasakaaluolukorra potentsiaalse energia võrrandist, millest avaldame survekoormuse T . Võime näiteks saada tuntud energeetilise meetodi valemi (3.21) või (3.22). Valem (3.22) on isegi eelistatavam suurema täpsuse tõttu. Deformeerunud varda siirdefunktsioon v aproksimeeritakse samuti nagu *Ritzi* meetodi puhul lõpmatu reana

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x) \quad (a)$$

Siirdefunktsioon (a) asetatakse kriitilise koormuse avaldisse (3.21) või (3.22). Edasi määratakse kriitilise väliskoormuse minimaalne suurus tingimusega

$$\frac{\partial T}{\partial A_i} = 0 \quad (b)$$

kus $i = 1, 2, 3, \dots$

Tingimusest (b) saame lineaarsete võrrandite süsteemi parameetrite A_i suhtes. Võrrandisüsteemide determinandi nullilisuse tingimus annabki võrrandi *Euleri* kriitilise jõu T_{kr} määramiseks.

Vaatleme alljärgnevalt näidet *Timošenko* meetodi rakendamise kohta.

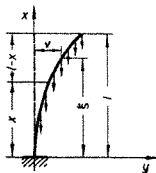
Näide 3.5. Leida alumisest otsast järgalt kinnitatud postile mõjuv jaotatud kriitiline koormus (joon. 3.11).

Varda deformatsiooni potentsiaalne energia on

$$\delta U = \frac{EI}{2} \int_0^l (v'')^2 dx \quad (a)$$

Survejõu potentsiaali muutus tuleb arvutada, silmas pidades muutuvat pikijõudu $q(l-x)$

$$\delta A = \frac{q}{2} \int_0^l (l-x)(v')^2 dx \quad (b)$$



JOON. 3.11

Tingimusest $\delta U = \delta A$ avaldame pikikoormuse

$$ql = EI l \frac{\int_0^l (v'')^2 dx}{\int_0^l (l-x)(v')^2 dx} \quad (c)$$

Oletame varda kõverdunud telje kujuks rea

$$v = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots + A_nx^n$$

Piirdume antud juhul rea viie esimese liikmega. Kuna varda kinnituslõikes siire, pööre ja põikjõud võrduvad nulliga, leiame, et

$$A_0 = A_1 = A_3 = 0$$

Varda kõverdunud telje võrrandiks saame seega

$$v = A_2x^2 + A_4x^4 \quad (d)$$

Leiame nüüd

$$v' = 2A_2x + 4A_4x^3 \quad (e)$$

$$v'' = 2A_2 + 12A_4x^2$$

Arvutame nüüd valemis (c) esinevad integraalid:

$$\begin{aligned} \int_0^l (v'')^2 dx &= \int_0^l (2A_2 + 12A_4x^2)^2 dx = \\ &= 4A_2^2l + 48A_2A_4 \frac{l^3}{3} + 144A_4^2 \frac{l^5}{5} = \\ &= 4A_2^2l \left(1 + 4 \frac{A_4}{A_2} l^2 + \frac{36}{5} \frac{A_4^2}{A_2^2} l^4 \right) = \end{aligned}$$

$$= 4A_2^{2l} \left(1 + 4c + \frac{36}{5} c^2 \right)$$

milles

$$c = \frac{A_4 l^2}{A_2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l (l-x)(v')^2 dx &= \int_0^l (l-x)(2A_2x + 4A_4x^3)^2 dx = \\ &= A_2^2 \frac{l^4}{3} + \frac{16}{30} A_2 A_4 l^6 + \frac{16}{56} A_4^2 l^8 = \\ &= 4A_2^{2l} \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{15} \frac{A_4}{A_2} l^2 + \frac{1}{14} \frac{A_4^2}{A_2^2} l^4 \right) = \\ &= 4A_2^{2l} \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{15} c + \frac{1}{14} c^2 \right) \end{aligned}$$

Asetame leitud integraalide avaldised valemisse (c) ning saame:

$$ql = \frac{EI}{l^2} \frac{1 + 4c + \frac{36}{5} c^2}{\frac{1}{12} + \frac{2}{15} c + \frac{1}{14} c^2} \quad (f)$$

Väikseima kriitilise koormuse saame tingimusest

$$\frac{d}{dc} ql = 0$$

mis annab c määramiseks ruutvõrrandi

$$\frac{118}{175} c^2 + \frac{37}{35} c + \frac{1}{5} = 0$$

Ruutvõrrandi juured

$$c_1 = -0,22 \quad \text{ja} \quad c_2 = -1,35$$

Asetame nüüd c_1 kui väikseima juure kriitilise koormusega valemisse (f). Saame:

$$(ql)_{kr} = \frac{8,15EI}{l^2} \quad (g)$$

Akadeemik A. Dinniku poolt on leitud staatikalise meetodi ning *Besseli* funktsioonide kasutamisega täpne

$$ql_{kr} = 7,837 \frac{EI}{l^2}$$

Seega erineb käesolevas näites saadud lahend täpsest

$$\frac{8,15 - 7,84}{7,84} 100 = 3,96\%$$

Käesolevas näites kasutasime deformatsiooni potentsiaalse energia δU avaldamisel v'' väärtust. Kui aga leida δU lihtsalt v kaudu, saame, nagu juba varem selgitasime, parema lähenduse. Näitame seda alljärgnevalt.

Avaldame

$$\delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}$$

milles (vt. joon. 3.11)

$$M = \int_x^l q(y-v) d\xi$$

Välisjõu potentsiaali muutuse väljendamiseks kasutame valemit (b).

Kasutame nüüd elastse joone võrrandist (d) ainult esimest liiget

$$v = A_2 x^2$$

lõikes abstsissiga ξ

$$v = A_2 \xi^2$$

$$M = \int_x^l q(A_2 \xi^2 - A_2 x^2) d\xi =$$

$$= qA_2 \left[\frac{\xi^3}{3} - x^2 \xi \right]_x^l = qA_2 \left(\frac{2}{3} x^3 - x^2 l + \frac{l^3}{3} \right)$$

Deformatsiooni potentsiaalse energia muutus

$$\delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{q^2 A_2^2}{EI} \int_0^l \left(\frac{2}{3} x^3 - x^2 l + \frac{l^3}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{q^2 A_2^2}{EI} \frac{13}{315} l^5$$

Väliskoormuse potentsiaali muutus

$$\delta A = \frac{1}{2} q \int_0^l (l-x)(v')^2 dx$$

$$v' = 2Ax$$

$$\delta A = 2A_2^2 q \int_0^l (l-x)x^2 dx = \frac{A_2^2 q}{6} l^4$$

Tingimusest

$$\delta U = \delta A$$

saame:

$$\frac{q^2 A_2^2}{2EI} \frac{13}{315} l^4 = A_2^2 q \frac{l^4}{6}$$

$$q l_{kr} = \frac{630}{78} \frac{EI}{l^2} = 8,08 \frac{EI}{l^2}$$

Saadud lahendi erinevus täpsest on

$$\frac{8,08 - 7,84}{7,84} 100 = 3,1\%$$

Näeme, et tulemus on täpsem kui eelmises näites saadud, vaatamata sellele, et aproksimeeriv funktsioon v käesoleval juhul kirjeldas varda elastset joont ebatäpsemalt.

3.9 KOMBINEERITUD MEETOD

Kombineeritud meetod põhineb punktis 3.5 kirjeldatud järkjärgulisel lähenemismeetodil ja punktis 3.7 esitatud energeetilisel meetodil. Vardale mõjuv kriitiline pikikoormus leitakse energeetilise meetodiga, seejuures kasutavat varda elastse joone võrrandit täpsustatakse aga järkjärgulise lähenemise meetodiga. Kuna koorduvus on kiire, saavutame küllalt suure täpsuse juba teise lähenedusega, nagu näeme alljärgnevas näites.

Näide 3.6. Kombineeritud meetodi abil leida alumisest otsast järgalt kinnitatud postile mõjuv jaotatud kriitiline koormus $q l_{kr}$ — kriitiline omakaal (joonis 3.11).

Ülesanne on esitatud ka kriitilise koormuse täpne suurus.

Võtame nõtkunud posti elastse joone võrrandiks punkti 3.8 avaldisest (d) esimese liikme

$$v_0 = A_2 x^2 \quad (a)$$

Kasutame järkjärgulise lähenemise meetodi võrrandit (3.15):

$$|E I v_1''|'' = -[\alpha \tau(x) v_0'] \quad (b)$$

milles

$$\alpha \tau(x) = q(l-x) \quad (c)$$

on varda lõikes x esinev pikijõud.

Asetame nüüd (a) ja (c) võrrandisse (b), misjärel, silmas pidades, et on tegemist konstantse põiklõikega vardaga, saame:

$$EIv_1^{IV} = -2qA_2(lx - x^2) \quad (d)$$

Integreerime võrrandit neli korda x järgi:

$$EIv_1''' = -2qA_2(lx - x^2) + C$$

$$EIv_1'' = -2qA_2 \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + Cx + D$$

$$EIv_1' = -2qA_2 \left(l \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C \frac{x^2}{2} + Dx + E \quad (e)$$

$$EIv_1 = -2qA_2 \left(l \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{60} \right) + C \frac{x^3}{6} + D \frac{x^2}{2} + Ex + F$$

Määrame nüüd ääritingimustest integreerimiskonstandid:

$$1) \quad x = 0; \quad v_1 = v_1' = 0$$

millest $F = E = 0$

$$2) \quad x = l; \quad v_1'' = v_1''' = 0$$

$$\text{millest } C = 0; \quad D = \frac{qA_2 l^3}{3} \quad (f)$$

Asetame leitud konstantide suurused elastse joone võrrandisse (e)

$$EIv_1 = \frac{qA_2}{6} \left(\frac{x^5}{5} - l \frac{x^4}{2} + l^3 x^2 \right) \quad (g)$$

Saadud võrrandit kasutame energiaetiliselt meetodi indiferentse tasakaaluolukorra võrrandi

$$\delta U = \delta A \quad (h)$$

koostamisel.

Arvutame

$$\delta U = \frac{EI}{2} \int_0^l (v_1'')^2 dx = \frac{13q^2 A_2^2 l^7}{18 \cdot 35 EI} \quad (i)$$

ja

$$\delta A = \frac{q}{2} \int_0^l (l-x)(v_1')^2 dx = \frac{17q^3 A_2^2 l^{10}}{72 \cdot 90 (EI)^2} \quad (k)$$

Võrrand (h) annab, kasutades avaldisi (i) ja (k), varda kriitilise omakaalu

$$g_{kr}^l = \frac{13 \cdot 72 \cdot 90 EI}{17 \cdot 18 \cdot 35 \cdot l^2} = 7,87 \frac{EI}{l^2} \quad (m)$$

Täpne

$$q'_{kr} = 7,84 \frac{EI}{l^2}$$

Erinevus täpsest on

$$\frac{7,87 - 7,84}{7,84} \cdot 100 = \frac{0,03}{7,84} \cdot 100 = 0,38\%$$

Nagu näitest selgub, on kriitiline koormus saadud küllalt suure täpsusega, vaatamata sellele, et kasutasime energeetilise meetodi ebasoodsamat arvutuse algoritmi.

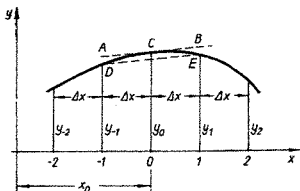
3.10 KRIITILISTE JÕUDUDE LEIDMINE DIFERENTSIDE MEETODIGA

3.101 Diferentside meetodi arvutusvalemite tuletamine

Diferentsiaalvõrrandite lahendamine analüütilise meetodiga osutub mõnikord väga keerukaks, kui mitte isegi võimatuks. Sellistel juhtudel on otstarbekohane rakendada numbrilisi meetodeid, millest mõningaid kirjeldasime eespool ning mille hulka kuulub ka nn. diferentside meetod. Selle meetodi järgi asendatakse mingi ülesande põhidiferentsiaalvõrrand ja ääritingimusi kirjeldavad diferentsiaalseosed diferentsvõrrandite süsteemiga. Seega asendub keeruka diferentsiaalvõrrandi lahendamine algebraliste võrrandite süsteemi lahendamisega, mis ei kujuta endast kuigi rasket ülesannet, eriti kui silmas pidada kaasaja arvutustehnika võimalusi.

Käsitleme alljärgnevalt argumentidest x sõltuvat funktsiooni $y(x)$. Funktsioon $y(x)$ on kujutatud joonisel 3.12.

Oletame, et on teada funktsiooni väärtused argumenti



JOON. 3.12

väärtusel x_0 ning argumentide väärtustel, mis erinevad x_0 -st Δx ja $2\Delta x$ võrra, nii x positiivses kui ka negatiivses suunas. Tähistame argumentide ja neile vastavate funktsioonide väärtused nii, nagu joonisel 3.12 näidatud. x -teljel olevad numbrid on vastavate argumentide ja funktsioonide indeksid.

Tuletise tõlgitsemisel kasutame geomeetrilist meetodit. Nimelt võrdub funktsiooni tuletis antud kohas arvuliselt funktsiooni kõvera puutuja tõusuga selles kohas. Asendame nüüd tuletise arvutamisel puutuja AB (vt. joonis 3.12) kõõluga DE ning saame tuletise ligikaudse väärtuse argumenti väärtusel x_0 :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = y_0' \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2\Delta x} \quad (a)$$

Tuletise juures olev indeks on ka argumenti indeksiks, kus tuletis on leitud. Teise tuletise saamisel kasutame esimese tuletise valemit (a), kusjuures funktsiooniks, millest leiame tuletist, olgu algfunktsiooni esimene tuletis. Teise tuletise leidmisel kasutame käesoleval juhul esimese tuletise väärtusi argumenti väärtustel $x_{0,5}$ ja $x_{-0,5}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 &= y_0'' \approx \frac{y'_{0,5} - y'_{-0,5}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\frac{y_1 - y_0}{\Delta x} - \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{-2y_0 + y_1 + y_{-1}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (b)$$

Samasugust võtet rakendades leiame ka kolmanda ja neljanda tuletise, seejuures kasutades valemeid (a) ja (b).

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 &= y_0''' = (y_0'')' \approx \frac{y_1'' - y_{-1}''}{2\Delta x} = \\ &= \frac{\frac{-2y_1 + y_2 + y_0}{\Delta x^2} - \frac{-2y_{-1} + y_0 + y_{-2}}{\Delta x^2}}{2\Delta x} = \\ &= \frac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2\Delta x^3} \end{aligned} \quad (c)$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x_0} = y_0^{IV} = (y_0''')' \approx \frac{-2y_0'' + y_1'' + y_{-1}''}{(\Delta x)^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2 \left(\frac{-2y_0 + y_1 + y_{-1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{-2y_1 + y_2 + y_0}{(\Delta x)^2} + \frac{-2y_{-1} + y_0 + y_{-2}}{\Delta x^2}}{(\Delta x)^2} \\
 &= \frac{y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}}{(\Delta x)^4} \quad (d)
 \end{aligned}$$

Kirjutame valemid (a), (b), (c) ja (d) funktsiooni suvalise argumendi x kohta, tähistades ühtlasi intervalli x tähega h .

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &\approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} \\
 \frac{d^2y}{dx^2} &\approx \frac{-2y(x) + y(x+h) + y(x-h)}{h^2} \\
 \frac{d^3y}{dx^3} &\approx \frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + 2y(x-h) - y(x-2h)}{2h^3} \\
 \frac{d^4y}{dx^4} &\approx \frac{y(x+2h) - 4y(x+h) + 6y(x) - 4y(x-h) + y(x-2h)}{h^4}
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.102 Kriitilise jõu leidmine

Diferentside meetodi kasutamine kriitiliste jõudude leidmisel on otstarbekohane siis, kui on tegemist keerukama objektiga, näiteks muutuva ristlõikega vardaga. Meetodiga tutvumiseks vaatleme kõigepealt siiski lihtsamat näidet.

Näide 3.7. Määrata otstes liigenditega kinnitatud konstantse ristlõikega varda kriitiline jõud.

Liigenditega kinnitatud ja otstest surutud varda painde diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = 0 \quad (a)$$

milles $k^2 = P_{kr}/EI$

Varda ääritingimused on:

kui $x=0$ ja $x=l$, siis $v=0$.

Koostame tala suvalise punkti kohta diferentsiaalvõrrandi, kasutades selleks teist valemit grupis (3.25):

$$\frac{-2v(x) + v(x+h) + v(x-h)}{h^2} + k^2v(x) = 0 \quad (b)$$

või

$$(k^2h^2 - 2)v(x) + v(x+h) + v(x-h) = 0 \quad (c)$$

Selles võrrandis $h = l/n$, milles n tähistab varda intervallide arvu.

Võtame näiteks $n = 2$. See tähendab, et jagame tala kaheks intervalliks ja koostame diferentsvõrrandi punkti $x = l/2$ kohta, silmas pidades ka varda ääritingimusi (joonis 3.13).

Saame:

$$0 + (k^2h^2 - 2)v_1 + 0 = 0 \quad (d)$$

Saadud võrrand, oletades, et lahend on mittetriviaalne, on rahuldatud siis, kui

$$k^2h^2 - 2 = 0$$

millest

$$k^2 = \frac{2}{h^2} \quad \text{või} \quad k^2 = \frac{8}{l^2} \quad (f)$$

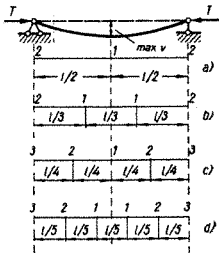
kuna

$$h = l/2$$

Teiselt poolt $k^2 = \frac{P_{kr}}{EI}$ ning seose

(f) alusel saame kriitiliseks jõuks

$$P_{kr} = \frac{8EI}{l^2} \quad (h)$$



JOON. 3.13

Erinevus täpsest kriitilisest jõust $P_{kr} = \pi^2 EI / l^2$ on 19%, kuid tala jaotus intervallideks on ülimalt jäme.

Suurendame intervallide arvu kolmeni — $n = 3$, mistõttu $h = l/3$ (joon. 3.13, b).

Koostame valem (c) järgi punkti l kohta diferentsvõrrandi. Kuna varda deformatsioon on kesklõike suhtes sümmeetriline, siis piisab ühe võrrandi koostamisest:

$$(k^2h^2 - 2)v_1 + v_1 + 0 \quad (i)$$

või

$$(k^2h^2 - 1)v_1 = 0 \quad (k)$$

Võrrand (k) annab kriitiliseks koormuseks, milles $h = l/3$,

$$P_{kr} = \frac{9EI}{l^2} \quad (m)$$

Erinevus täpsest lahendist on seekord 9%.

Kui intervallide arv $n = 4$, koostame diferentsvõrrandid kolme

punkti kohta (joon. 3.13, c). Sümmeetria tõttu piisab punktide 2 kohta ühe võrrandi koostamisest:

$$\left. \begin{aligned} (k^2h^2 - 2)v_1 + v_2 + v_2 &= 0 \\ (k^2h^2 - 2)v_2 + 0 + v_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

või

$$\left. \begin{aligned} (k^2h^2 - 2)v_1 + 2v_2 &= 0 \\ v_1 + (k^2h^2 - 2)v_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

Saadud süsteemi mittetruivaalse lahendi korral peab süsteemi determinant võrduma nulliga.

See tingimus annab võrrandi

$$\begin{vmatrix} k^2h^2 - 2 & 2 \\ 1 & k^2h^2 - 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (p)$$

või

$$(k^2h^2 - 2)^2 - 2 = 0 \quad (q)$$

Võrrandi (q) väiksem juur annab kriitiliseks jõuks

$$P_{kr} = \frac{9,373EI}{l^2} \quad (r)$$

Vie intervalli korral $h = l/5$ ja meil tarvitseb koostada sümmeetria tõttu jällegi kaks võrrandit:

$$(k^2h^2 - 2)v_1 + v_2 + v_1 = 0 \quad \text{ja} \quad (k^2h^2 - 2)v_2 + 0 + v_1 = 0$$

või

$$\begin{aligned} (k^2h^2 - 1)v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 + (k^2h^2 - 2)v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (s)$$

millest saame

$$\begin{vmatrix} k^2h^2 - 1 & 1 \\ 1 & k^2h^2 - 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (t)$$

või

$$(k^2h^2 - 1)(k^2h^2 - 2) - 1 = 0$$

Selle võrrandi väikseimast juurest saame kriitilise jõu

$$P_{kr} = \frac{9,55EI}{l^2} \quad (u)$$

Kriitilise jõu määramisel tehtav viga on nüüd 3,2%.

Intervallide arvu n edaspidisel suurendamisel suureneb ka arvu- tuse täpsus. Intervallide arvu määramisel tuleb lähtuda nõutavast täpsusest ja arvutustehnilistest võimalustest. Varda sümmeetrilise deformatsiooni korral on soovitatav jagada varras paaritu arvaks intervallideks; võrrandite arv on siis sama, mis ühe võrra väiksema paarisarvu intervallide korral.

Näide 3.8. Leida otstest liigenditega kinnitatud varda kriitiline jõud, kui varda ristlõige on muutuv seose järgi

$$I(x) = I_0 \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$$

Kirjutame analoogiliselt eelmise näitega kõigepealt varda suvalise punkti kohta diferentsvõrrandi

$$EI_0 \left[1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \frac{-2v(x) + v(x+h) + v(x-h)}{h^2} + Pv(x) = 0 \quad (a)$$

Kasutades tähistust $k^2 = P_{kr}/EI$, esitame võrrandi (a) teisendatult:

$$\left[\frac{k^2 h^2}{1 + 4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2} - 2 \right] v(x) + v(x+h) + v(x-h) = 0 \quad (b)$$

Võtame nüüd intervallide arvu $n=2$, millest tuleneb: $h=l/2$ ja $x=l/2$.

Asetame nüüd saadud suurused võrrandisse (b). Saame:

$$\left(\frac{k^2 \frac{l^2}{4}}{1 + 2 - 1} - 2 \right) v_1 + 0 + 0 = 0 \quad (c)$$

millest

$$\frac{k^2 l^2}{8} - 2 = 0 \quad \text{ja} \quad k^2 = \frac{16}{l^2}$$

ning

$$P_{kr} = \frac{16EI_0}{l^2} \quad (d)$$

Kui aga intervallide arvuks võtta $n=3$, kujuneb arvutuskäik järgmiseks:

$$h = l/3, \quad x = l/3$$

Vara elastse joone sümmeetria tõttu esineb ainult üks diferentsvõrrand:

$$\left[\frac{k^2 l^2 / 9}{1 + 4 \cdot \frac{l}{3} - 4 \cdot \frac{l}{9}} - 2 \right] v_1 + v_1 + 0 = 0 \quad (e)$$

millest

$$k^2 l^2 / 17 - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad k^2 = 17 / l^2$$

ning

$$P_{kr} = \frac{17EI_0}{l^2} \quad (f)$$

Esitatud näide, nagu selgub, ei erine arvutustehniliste raskuste poolest eelmisest näitest, vaatamata sellele, et varda inertsmoment on muutuv. Soovides suuremat täpsust, tuleks suurendada intervallide arvu. Sama ülesanne lahendati varem *Galjorkini* meetodiga ning teise lähenduse tulemusena saadi $P_{kr} = 18,2EI_0/l^2$, mida võime lugeda lähedaseks täpsele lahendile.

Diferentside meetodiga saadud lahend (f) erineb viimasest 6,6% võrra, mis on küllalt hea tulemus, kui arvestada sellega, et intervallide arvuga $n = 3$ tehtav lähendus on küllalt iäme.

3.11 SURUTUD VARRASTE KRIITILISE KOORMUSE ARVUTUSE NÄITEID

3.111 Varras kahe pikikoormuse mõju all

Vaatleme kõigepealt varrast, millele mõjub kaks koondatud jõudu. Varda üks ots olgu vaba, kuna teine ots olgu kinnitatud järgalt (joon. 3.14). Kasutame staatikalist meetodit, koostades varda kõverdunud telje kummagi paindemomendi pidevusvahemiku kohta tasakaalu diferentsiaalvõrrandid.

Esimese vahemiku kohta võime kirjutada:

$$EIv_1'' = -M_1 \quad (a)$$

$$M_1 = -P_1(\delta_1 - v_1) \quad (b)$$

Avaldiste (a) ja (b) alusel saame:

$$EIv_1'' + P_1v_1 = P_1\delta_1 \quad (c)$$

Selle võrrandi üldintegraali kuju on:

$$v_1 = A_1 \sin r_1x + A_2 \sin r_2x + \delta_1 \quad (d)$$

milles võime veenduda (d) asetamisel võrrandisse (c)

$$r_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI}} \quad (e)$$

Analoogiliselt saame teise vahemiku kohta:

$$M_2 = -P_1(\delta_1 - v_2) - P_2(\delta_2 - v_2) \quad (f)$$

$$EIv_2'' = +(P_1 + P_2)v_2 = P_1\delta_1 + P_2\delta_2 \quad (g)$$

ning üldintegraal on:

$$v_2 = B_1 \sin r_2x + B_2 \cos r_2x + \frac{P_1\delta_1 + P_2\delta_2}{P_1 + P_2} \quad (h)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI}} \quad (i)$$

Nelja integreerimiskonstandi määramiseks kasutame järgmisi ääritingimusi:

1) kui $x = 0$, siis $v_2' = 0$, mis annab:

$$r_2 B_1 \cos 0 + r_2 B_2 \sin 0 = 0 \\ B_1 = 0$$

2) kui $x = l$, siis $v_1 = \delta_1$, mistõttu võrrandist (d) saame

$$A_1 \sin r_1 l + A_2 \cos r_1 l = 0 \quad (k)$$

3) kui $x = l_2$, siis $v_1' = v_2'$ ja $v_1'' = v_2''$
Need tingimused annavad järgmised võrrandid :

$$A_1 r_1 \cos r_1 l_2 - A_2 r_1 \sin r_1 l_2 = -B_2 r_2 \sin r_2 l_2 \quad (m)$$

$$-A_1 r_1^2 \sin r_1 l_2 - A_2 r_1^2 \cos r_1 l_2 = B_2 r_2^2 \cos r_2 l_2 \quad (n)$$

Võrrandid (k), (m) ja (n) moodustavad süsteemi konstantide A_1 , A_2 ja B_2 suhtes. Tingimusest, et mitte kõik konstandid ei võrdu korruga nulliga, saame, et süsteemi determinant peab võrduma nulliga:

$$D = \begin{vmatrix} \sin r_1 l & \cos r_1 l & 0 \\ r_1 \cos r_1 l_2 & -r_1 \sin r_1 l_2 & r_2 \sin r_2 l_2 \\ -r_1^2 \sin r_1 l_2 & -r_1^2 \cos r_1 l_2 & r_2^2 \cos r_2 l_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin r_1 l & \cos r_1 l & 0 \\ \cos r_1 l_2 & -\sin r_1 l_2 & \frac{r_2}{r_1} \sin r_2 l_2 \\ -\sin r_1 l_2 & -\cos r_1 l_2 & \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cos r_2 l_2 \end{vmatrix} = 0$$

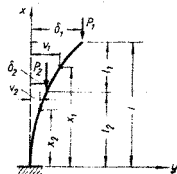
Determinandi viimast liiget võime jagada teguriga $\frac{r_2}{r_1}$.

Esitatud determinandi nullilisuse tingimus on varda stabiilsuse võrrand. Otsitavateks on parameetrid r_1 ja r_2 , millest saame arvutada kriitilised jõud.

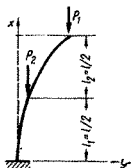
Kõigepealt tuleb determinant avada, misjärel saame:

$$\frac{r_2}{r_1} \sin r_1 l \sin r_1 l_2 \cos r_2 l_2 + \cos r_1 l \sin r_2 l_2 \sin r_1 l_2 -$$

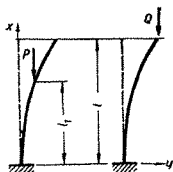
$$-\sin r_1 l \sin r_2 l_2 \cos r_1 l_2 + \frac{r_2}{r_1} \cos r_1 l \cos r_2 l_2 \cos r_1 l_2 = 0$$



JOON. 3.14



JOON. 3. 15



JOON. 3. 16

$$\tan^2 u = \frac{1}{2}$$

millest

$$\tan u = 0.707$$

ja

$$u = \frac{rl}{2} = 0,615 \quad rl = 1,23$$

$$P_{1kr} = \frac{r^2 EI}{l^2} = \frac{1,23^2 EI}{l^2} = \frac{1,513 EI}{l^2}$$

$$P_{2kr} = 3P_{1kr} = \frac{4,539 EI}{l^2}$$

3. 112 Mitme pikijõuga surutud varras

Sellisel juhul peame rakendama mõnd ligikaudset meetodit. Üheks selliseks on prof. A. Korobovi meetod, mida alljärgnevalt käsitleme.

Joonisel 3. 16 on kujutatud alumisest otsast jäigalt kinnitatud varras, mis on surutud jõududega P ja Q kahel erineval viisil.

Arvutame kummagi koormusolukorra kriitilised jõud:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4l_1^2}$$

$$Q_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

Väljendame nüüd Q_{kr} P_{kr} kaudu:

$$Q_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4l_1^2} \frac{l_1^2}{l^2} = P_{kr} \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 \quad (a)$$

Nagu saadud avaldisest (a) nähtub, on varda otsa rakendatud ning varda kriitilist seisundit põhjustav jõud $(l_1/l)^2$ korda väiksem jõust, mis on rakendatud varda otste vahelises lõikes ja põhjustab samuti varda kriitilist seisundit. Teades seda jõudude vahekorda, võime varda otste vahelises lõikes rakendatud kriitilise jõu asendada varda otsa rakendatud kriitilise jõuga. See toimub muidugi teatud ligikaudsusega, sest varda elastsed jooned kahel kirjeldatud koormuse juhul on kujult siiski erinevad.

Mitme pikijõu korral, mis on rakendatud varda otste vahelisel alal erinevates lõigetes, võime arvutada summaarse Q_{kr} (joonis 3. 17):

$$Q_{kr} = \left[P_1 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 + P_2 \left(\frac{l_2}{l} \right)^2 + \dots + P_n \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 \right] \lambda_{kr} \quad (b)$$

Seejuures on oletatud, et kõik jõud muutuvad võrdeliselt mingisuguse parameetriga λ , mis saavutab kriitilise suuruse varda nõtkumise hetkel. Arvesse võttes, et

$$Q_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

$$\lambda_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2 \sum_{i=1}^n P_i \left(\frac{l_i}{l} \right)^2} \quad (3. 26)$$

Näide 3. 10*. Arvutame kriitilise koormusparameetri näites 3.9 esitatud varda kohta, mis oli koormatud kahe jõuga P_1 ja $P_2 = 3P_1$ (joonis 3. 15).

Vastavalt käesoleva punkti metoodikale kirjutame:

$$l_1 = l \quad \text{ja} \quad l_2 = \frac{l}{2}$$

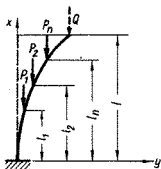
ning arvutame

$$\lambda_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2 \left(P_1 + \frac{1}{4} 3P_1 \right)} = \frac{\pi^2 EI}{7l^2 P_1}$$

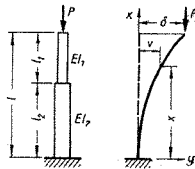
millest

$$P_{1kr} = P_1 \lambda_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{7l^2} = 1,41 \frac{EI}{l^2}$$

* Näide on võetud õpikust [11].



JOON. 3. 17



JOON. 3. 18

$$P_{2kr} = 3P_{1kr} = 4,23 \frac{EI}{l^2}$$

Seejuures tehtav arvutusviga, kui võrrelda saadud tulemust eelmises punktis leitud täpse tulemusega, on

$$\frac{1,513 - 1,41}{1,513} 100 = 6,8\%$$

3. 113 Muutuva ristlõikega varras

Eespool, selgitades *Galjorkini* meetodit, vaatlesime näitena parabolse seaduse järgi muutuva ristlõikega varrast. Käesolevas punktis määrame kriitilise koormuse astmeliselt muutuva ristlõikega vardale. Sel juhul on lahenduskäik analoogiline punktis 3. 111 esitatuga, kuna osutub võimalikuks kasutada staatikalist meetodit.

Vaatleme ühest otsast jäigalt kinnitatud varrast, mis koosneb kahest erineva ristlõikega osast ning on koormatud otsast survejõuga (joon. 3. 18).

Varda erineva jäikusega osad jagavad varda elastse joone kaheks pidevusvahemikuks, mille kohta koostame tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

$$EI_1 v_1'' + P v_1 = \delta P$$

ja

$$EI_2 v_2'' + P v_2 = \delta P \quad (a)$$

Viimaste lahendid on:

$$\begin{aligned} v_1 &= A \sin r_1 x + B \cos r_1 x + \delta \\ v_2 &= C \sin r_2 x + D \cos r_2 x + \delta \end{aligned} \quad (b)$$

milles

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\frac{P}{EI_1}} \\ r_2 &= \sqrt{\frac{P}{EI_2}} \end{aligned} \quad (c)$$

Rakendame nüüd ääritingimusi:

- 1) kui $x = 0$, siis $v_2' = 0$
- 2) kui $x = l$, siis $v_1 = \delta$

Kui $x = l_2$, siis $v_1' = v_2'$ ja

$$v_1'' = \frac{EI_2}{EI_1} v_2'' \quad \text{või} \quad v_1'' = \frac{r_1^2}{r_2^2} v_2'' \quad (d)$$

Esitatud ääritingimustest saame järgmised võrrandid konstantide A , B , C ja D suhtes:

$$C = 0$$

$$\begin{aligned} A \sin r_1 l + B \cos r_1 l &= 0 \\ A r_1 \cos r_1 l_2 - B r_1 \sin r_1 l_2 + D r_2 \sin r_2 l_2 &= 0 \\ A \sin r_1 l_2 + B \cos r_1 l_2 - D \cos r_2 l_2 &= 0 \end{aligned} \quad (e)$$

Sellest süsteemist avaldub determinandi nullilisuse tingimusena stabiilsuse võrrand

$$D = \begin{vmatrix} \sin r_1 l & \cos r_1 l & 0 \\ \cos r_1 l_2 & -\sin r_1 l_2 & \frac{r_2}{r_1} \sin r_2 l_2 \\ \sin r_1 l_2 & \cos r_1 l_2 & -\cos r_2 l_2 \end{vmatrix} = 0$$

mis pärast teisendamist annab

$$\tan r_1 l_1 \cdot \tan r_2 l_2 = \frac{r_1}{r_2} \quad (f)$$

Võrrandit saame lahendada etteantud jääkuste ja pikkuste EI_1/EI_2 ning l_2/l_1 korral.

Juhul kui eelkirjeldatud vardale on rakendatud kaks jõudu — P_1 vabal otsal, kuna P_2 varda ristlõike muutekohas, on stabiilsusvõrrandi kuju

$$\tan r_1 l_1 \tan r_2 l_2 = \frac{r_1}{r_2} \frac{P_1 + P_2}{P_1} \quad (g)$$

milles

$$r_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}}; \quad r_2 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI_2}}$$

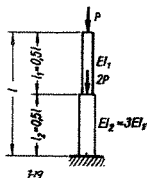
Näide 3.11. Leida joonisel 3.19 kujutatud astmelisele vardale mõjuvate pikijõudude kriitiline suurus P_{kr} . Kasutame eespool toodud lahendit (g). Arvutame kõigepealt

$$r_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}} = r$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{P + 2P}{EI_2}} = \sqrt{\frac{3P}{3EI}} = r$$

$$r_1 l_1 = 0,5lr = x$$

$$r_2 l_2 = 0,5lr = x$$



JOON. 3.19

Asetame leitud suurused lahendisse (g):

$$\tan^2 x = 3$$

$$\tan x = \sqrt{3}, \quad \text{millest} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$r_1 l_1 = \frac{\pi}{3}$$

või

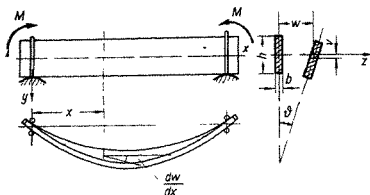
$$l_1 \sqrt{\frac{P}{EI_1}} = \frac{\pi}{3}$$

millest saame

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_1}{9l_1^2} = \frac{4\pi^2 EI_1}{9l^2}$$

3.12 KIIVUMINE

Tala tasandilisel põikpindel, kus väliskoormus mõjub tala ühes peatasandis, konstrueeritakse tala selliselt, et tema paindejäikus ristlöike neutraaltelje suhtes oleks võimalikult suur, võrreldes paindejäikusega teise peatelje suhtes. See asjaolu tekitab aga ohu, et tala ristlöige survetsoonis võib kaotada stabiilsuse. Viimasel juhul kõverdub tala telg paindetasandist välja ning samaaegselt pöörduv ristlöige ümber tala pikitelje. Säärast tala deformatsiooni nimetatakse tala tasandpaine stabiilsuse kaotuseks ehk kiivumiseks. Kiivehtlikud on kitsa



JOON. 3 20

kõrge ristlõikega talad ning valtsitud profiilid, mille peainertsmomentide suhe on suur.

Vaatleme alljärgnevalt, kuidas kiivub kitsa kõrge ristkülikpõiklõikega tala, mis on otsest kinnitatud liigenditega ja koormatud otspõiklõiget momentidega (joonis 3.20). Otspõiklõigete pöördumine on takistatud vertikaalsete tugivarrastega, mille vahel tala asetseb. Tala on väände suhtes seega otsest jäigalt kinnitatud. Tala kiivumine algab siis, kui talale rakendatud momendid saavutavad kriitilise suuruse.

Joonisel 3.20 on tala esitatud kahes vaates. Lisaks vaadetele on antud tala põiklõiked lõikes x alguses ja kiivunud asendis. Viimasel juhul saab tala telg siirded v ja w , kuna ristlõige pöördub nurga ϕ võrra.

Koostame diferentsiaalvõrrandid tala painde ja väände kohta:

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M \quad (a)$$

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -M \sin \phi \quad (b)$$

$$GC \frac{d\phi}{dx} = M \frac{dw}{dx} \quad (c)$$

Saadud võrrandites tähendavad EI_z ja EI_y paindejäikusi vastavalt põiklõike z - ja y -telje suhtes, kuna GC on tala väändejäikus.

Ristlõike karakteristiku väändel C arvutame valemiga

$$C = \frac{hb^3}{3} \left(1 - 0,630 \frac{b}{h} \right)$$

milles h ja b on põiklõike kõrgus ja laius.

Diferentseerime võrrandit (c) üks kord x järgi, misjärel saame:

$$GC \frac{d^2\phi}{dx^2} = M \frac{d^2w}{dx^2} \quad (d)$$

Avaldame nüüd võrrandist (b) $\frac{d^2w}{dx^2}$, seejuures asendame $\sin \phi$ deformatsiooni väiksust silmas pidades ϕ väärtusega:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M\phi}{EI_y} \quad (e)$$

Asetame nüüd w teise tuletise võrrandisse (d), mis arvesse võttes tähistust

$$r = M \sqrt{\frac{1}{EI_y GC}}$$

saab kuju

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + r^2\phi = 0 \quad (3.27)$$

Selle võrrandi lahend on

$$\phi = A \sin rx + B \cos rx \quad (f)$$

Lahendi (f) integreerimiskonstandid määratakse teitingimustest järgmiselt:

1) kui $x = 0$, siis $\phi = 0$ ning

$$B = 0$$

2) kui aga $x = l$, siis $\phi = 0$ ja võrrandist (f) saame

$$A \sin rl = 0$$

Kuna $A \neq 0$ (vastasel korral ei tekiks üldse kiivumist), siis

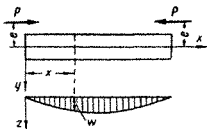
$$\sin rl = 0 \quad (g)$$

Saadud võrrand (g) ongi tala stabiilsuse võrrand kiivumisel. Võrrandi juured on

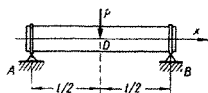
$$rl = \pi, 2\pi, \dots$$

Väikseima juure $rl = \pi$ järgi arvutame kiivumist põhjustava väikseima momendi

$$M_{kr} = \frac{\pi EI_y}{l} \sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \quad (3.28)$$



JOON. 3. 21



JOON 3. 22

Nagu näeme valemist (3. 28), sõltub kriitilise momendi suurus tala väiksemast paindejäikusest EI_y , väändejäikusest GC ja loomulikult ka tala pikkusest l .

Täieliku jäiga kinnituse korral (ka painde suhtes) saame kriitilise momendi suuruseks

$$M_{kr} = \frac{2\pi EI_y}{l} \sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \quad (3. 29)$$

3. 121 Kiivumise kriitilise koormuse arvutusvalemeid

Tala ekstsentriline surve (joon. 3. 21).

Teatavasti on ekstsentriline surve taandatav tsentrii-seks surveks koos paindega. Kriitilise pikijõu ja painde-momendi arvutamiseks on tuletatud valem*

$$M_{kr}^2 + P_{kr}GC = \frac{\pi^2 EI_y GC}{l^2} \quad (3. 30)$$

Juhul kui:

1) $e = 0$, s. o. $M = 0$, siis

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$$

2) $P = 0$, tekib puhaspaine

$$M_{kr} = \frac{\pi EI_y}{l} \sqrt{\frac{GC}{EI_y}}$$

3) $P \neq 0$ ja $M \neq 0$, siis võime arvutada:

- antud jõu P suuruse järgi kriitilise momendi M_{kr} ,
- antud momendi suuruse M järgi kriitilise jõu P_{kr} ,
- antud jõu P ja M suhte korral vastava kriitilise parameetri.

* Vt. õpik [13]

Tala põikkoormuse mõju all.

1. Liigendkinnitusega talale mõjub keskpunktis D koondatud jõud (joon. 3.22).

$$P_{kr} = \frac{16,98EI_y}{l^2} \sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \quad (3.31)$$

Kriitilise koormuse P_{kr} suurus sõltub jõu rakenduspunkti asendist ristlõike kõrguses. Kui jõu rakenduspunkt asetseb ristlõike raskuskeskmest kõrgemal, väheneb kriitilise koormuse suurus, vastupidise asendi korral aga suureneb. Energeetilise meetodiga on tuletatud vastav ligikaudne kriitilise jõu arvutusvalem

$$P_{kr} = \frac{16,93EI_y}{l^2} - \sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \left(1 - \frac{3,48a}{l} \sqrt{\frac{EI_y}{GC}} \right) \quad (3.31, a)$$

kus a — jõu rakenduspunkti kaugus ristlõike raskuskeskmest vertikaalsihis (positiivne raskuskeskmest ülespoole).

Juhul kui jõud ei ole rakendatud tala silde keskel, vaid kaugusel c toest, on kriitiline koormus suurem. Esitame kriitilise koormuse valemi üldkujul, kasutades kordajat m :

$$P_{kr} = \frac{mEI_y}{l^2} \sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \quad (3.31, b)$$

Kordaja m väärtused on:

$\frac{c}{l}$	0,5	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
m	16,93	17,82	17,82	19,04	21,01	24,10	29,11	37,88	56,01	111,6

Nagu tabeli andmetest nähtub, muutub kriitilise jõu kasv märgatavaks jõu asetledes väljaspool tala keskmist kolmandikku.

2. Liigendkinnitusega talale mõjub üle kogu silde jaotatud koormus q .

$$(ql)_{kr} = \frac{28,3EI_y}{l^2} - \sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \quad (3.32)$$

3. Konsooli otsa on rakendatud jõud P .

$$P_{kr} = \frac{4,01EI_y}{l^2} - \sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \quad (3.33)$$

3.13 VARRASTE STABIILSUS PROPORTSIONAALSUSPIIRI OLETAVA PINGE PUHUL

Euleri kriitiliste jõudude arvutamiseks varda surve-deformatsiooni korral oletasime, et varda materjal allub *Hooke*'i seadusele, s. t. varda materjali elastsusmoodul E on konstantne. Otstest surutud sirge varda kriitiliseks jõuks saime

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (a)$$

millest tuletasime kriitilise pinge valemi

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (b)$$

Teatavasti tähistab λ valemis (b) varda saledust ning on

$$\lambda = \frac{\mu l}{\min i} \quad (c)$$

milles μ on varda otste kinnituse tegur.

Oletus, et varda materjal allub *Hooke*'i seadusele, määrab *Euleri* valemite kasutamiskiiri. Seda piiri võib määrata varda saleduse kaudu. *Euleri* valemi kasutamisel võib kriitiliseks pingeks olla maksimaalselt varda materjali proportsionaalsuspiir σ_{pr} , s. o.

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr} \quad (d)$$

Tingimusest (d) järeldub:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} \quad (e)$$

Kui kasutada varda materjaliks näiteks terast Cr. 3, mille $\sigma_{pr} = 2000 \text{ kG/cm}^2$ ja $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, on *Euleri* valemi kehtivuse piiriks

$$\lambda \geq 100 \quad (f)$$

Teiste materjalide puhul on piir loomulikult teistsugune.

Juhul kui materjal on elastne, kuid ei allu *Hooke*'i seadusele (s. o. seos pinge ja lineaardeformatsiooni vahel on mittelineaarne ja järelikult elastsusmoodul on muutuv), on kriitilise jõu või kriitilise pinge määramisel *Euleri* valem samuti kehtiv. Erinevus on vaid selles, et

peame võtma sellise elastsusmooduli, mida omab materjal stabiilsuse kaotamise hetkel. Muutuva elastsusmooduli leiame seosest

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (g)$$

Kui materjali kohta on katseliselt koostatud pinge ja deformatsiooni diagramm, saame elastsusmooduli leida diagrammist, teades et elastsusmoodul on arvuliselt võrdne diagrammi puutuja tõusuga. Kriitiline pinge avaldub nüüd valemiga

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (3.34)$$

Valem (3.34) võimaldab konstrueerida, kasutades pinge diagrammi, σ_{kr} — λ kõvera, mida võime kasutada edaspidi kriitiliste pingete määramiseks olenevalt λ väärtusest.

Kui varda materjal töötab olenevalt survepinge suurusel elastoplastses staadiumis, tuleb silmas pidades erinevaid elastsusmooduleid, mida omab materjal sõltuvalt sellest, kas survepinge ristlõike osas varda paindudes nõtkumisel kasvab või kahaneb (vt. joonis 3.23)

Joonisel punktis A suureneva pinge korral tuleb võtta elastsusmooduli väärtuseks

$$E_t = C \tan \alpha_2 \quad (h)$$

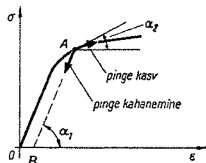
mis on võrdeline pingediagrammi puutuja tõusuga.

Pinge kahanemisel kulgeb deformatsioon vastavalt sirglõigule AB , mispuhul elastsusmooduli väärtuseks tuleb võtta

$$E = C \tan \alpha_1 \quad (i)$$

E_t on muutuv elastsusmoodul, kuna E on konstantne ning võrdne materjali algelastsusmooduliga.

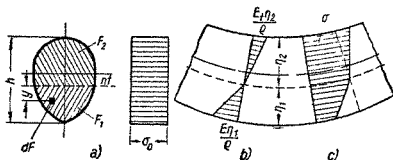
Käsitleme nüüd varrast, mille stabiilsuse kaotus toimub elastoplastses staadiumis. Stabiilsuse kaotusele kaasneb varda üleminek uude kõverdunud taskaalukujusse. Varda kõverdumisel tekivad vardas paindepinged, mis survetsoonis suu-



JOON. 3.23

rendavad vardas esinevaid survepingeid, kuid tõmbetsoonis mõjuvad üldistele survepingetele kahandavalt.

Seega jaguneb varda ristlõige varda stabiilsuse kaotusel pikijõust põhjustatud survepingete kasvamise ja kahanemise tsooniks, milles, nagu eespool selgitasime, materjal töötab erinevate elastsusmoodulitega. Kasutades ristlõigete tasapinnalisuse hüpoteesi, saame konstrueerida varda ristlõike normaalpinge diagrammi, mida rakendame edaspidises arvutuse käigus.



JOON 3 24

Joonisel 3.24 on kujutatud survele töötava varda ristlõige, mis on paindetasandi suhtes sümmeetriline.

Pingediagrammil *a* on kujutatud vardas esinevad survepinged enne varda kõverdumist. Varda stabiilsuse kadumisel, s. o. varda kõverdudes tekivad ristlõikes täiendavad paindepinged, mille diagramm on esitatud joonisel 3.24, *b*. Summaarsed pinged on kujutatud diagrammil *c*. Painde survetsoonis, mis on ühtlasi üldsurvepingete kasvu tsooniks, töötab materjal väiksema elastsusmooduliga E_t kui materjal painde tõmbetsoonis, s. o. selles ristlõike osas, kus pinged kahanevad. Selles ristlõike osas on elastsusmooduliks materjali algelastsusmoodul E .

Varda ristlõikes esinevad normaalpinged leiame tugevusõpetusest tuntud valemiga

$$\sigma = \frac{E y}{q}$$

milles y on vaadeldava kihi kaugus painde neutraalteljest, kuna q tähistab neutraalkihi kõverusraadiust. Arvesse võttes asjaolu, et painde surve- ja tõmbetsoonis on materjali elastsusmoodulid erinevad, on ka vastavate

pingete muutumisseedused erinevad. See asjaolu põhjustab aga omakorda painde surve- ja tõmbetsooni erinevat ulatust ristlõikes, s. t. nulljoone nihet ristlõike raskuskeskmest.

Leiame nulljoone asendi, rakendades paindest tekkivate sisejõudude tasakaalu tingimust varda teljele x suhtes ($\Sigma X = 0$).

$$\int_{F_1} \sigma dF + \int_{F_2} \sigma dF = 0$$

või

$$\frac{E}{Q} \int_{F_1} y dF - \frac{E_t}{Q} \int_{F_2} y dF = 0$$

(k)

Võrrandis (k) esinevad integraalid on ristlõike tõmbe- ja survetsoonide F_1 ja F_2 staatilised momendid S_1 ja S_2 painde neutraaltelje suhtes. Seetõttu võib pärast Q -ga korrutamist kirjutada:

$$ES_1 + E_t S_2 = 0$$

(m)

Võrrand (m) ja tingimus

$$h = \eta_1 + \eta_2$$

(n)

moodustavad vajalikud seosed painde neutraaltelje asendi määramiseks.

Leiame nüüd paindepingetest tekkiva momendi

$$M = \int_{F_1} y \sigma dF + \int_{F_2} y \sigma dF$$

(o)

Asetame saadud võrrandisse tõmbe- ja survetsooni normaalpingete suurused, misjärel saame:

$$M = \frac{E}{Q} \int_{F_1} y^2 dF + \frac{E_t}{Q} \int_{F_2} y^2 dF$$

(p)

Saadud võrrandis esinevad integraalid on tõmbe- ja survetsooni inertsmomendid I_1 ja I_2 varda ristlõike neutraaltelje suhtes. Kasutades toodud tähistusi, saame võrrandist (p)

$$M = \frac{EI_1 + E_t I_2}{Q}$$

(q)

Tähistame nüüd

$$E_r = \frac{EI_1 + E_t I_2}{I} \quad (3.35)$$

milles I on kogu ristlõike inertsmoment neutraaltelje suhtes.

Nüüd võime avaldise (q) esitada analoogiliselt hariliku Hooke'i seaduse piires esineva põikpainde seosega

$$M = \frac{E_r I}{\rho} \quad (r)$$

Erinevus paindest Hooke'i seadusele alluva materjali puhul seisneb selles, et materjali elastoplastse staadiumi korral tuleb kasutada valemiga (3.35) antud redutseeritud elastsusmoodulit E_r .

Arvesse võttes esitatud täiendust, võime nüüd vardale mõjuva kriitilise survejõu suuruse väljendada meile tuntud Euleri valemiga, milles vaid E on asendatud E_r väärtusega:

$$T_{kr} = \frac{\pi^2 E_r I}{(\mu l)^2} \quad (3.36)$$

Nagu valemist (3.35) nähtub, sõltub redutseeritud elastsusmooduli suurus materjali algelastsusmoodulist E , elastsusmoodulist E_t , mis vastab eelkriitilisele elastoplastsele survepingele σ_0 (E_t saame leida pingediagrammilt), ning varda ristlõike kujust. Nagu näitavad sellekohased uurimused, ei mõjuta ristlõike kuju redutseeritud elastsusmooduli suurust nimetamisväärselt. Seetõttu võime kasutada redutseeritud elastsusmooduli valemit, mis on tuletatud mõne lihtsama kujundi, näiteks ristküliku kohta.

Tuletame alljärgnevalt redutseeritud elastsusmooduli valemi ristküliku kohta, mille laius on b ja kõrgus h (joon. 3.25).

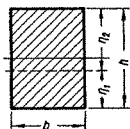
Kasutame seost (m), millest saame:

$$E \frac{b\eta_1^2}{2} - E_t \frac{b\eta_2^2}{2} = 0$$

või

$$E\eta_1^2 - E_t\eta_2^2 = 0 \quad (s)$$

Arvesse võttes, et $\eta_1 + \eta_2 = h$, saame seosest (s)



JOON. 3.25

$$\eta_1 = \frac{h\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \quad \text{ja} \quad \eta_2 = \frac{h\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \quad (t)$$

Redutseeritud elastsusmooduli arvutame nüüd valemiga (3.35):

$$E_r = \frac{E \frac{b\eta_1^3}{3} + E_t \frac{b\eta_2^3}{3}}{\frac{bh^3}{12}} \quad (u)$$

Saadud valemis asendame η_1 ja η_2 seostega (t) ning saame

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (3.37)$$

Nagu juba varem mainitud, võib nüüd kriitilise jõu või kriitilise pinge arvutada valemiga, mis on sarnane *Hooke'i* seadusele alluva materjali vastava valemiga, milles E on asendatud E_r väärtusega.

Nii saame kriitilise pinge kohta

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \quad (3.38)$$

Praktilisteks arvutusteks vajame σ_{kr} ja varda saleduse λ vahelist seost kas graafiku või tabeli näol. Kriitiline pinge σ_{kr} on aga esmajoones sõltuv redutseeritud elastsusmoodulist, milline sõltuvus määratakse materjali survediaagrammiga järgmiselt. Koostame kõigepealt seose σ ja E_t kohta. Seejärel leiame valemiga (3.37) E_t suurusele vastava E_r ning ühtlasi ka saleduse

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E_r}{\sigma}}$$

Elkäsitletud meetodi varda kriitilise jõu arvutamiseks redutseeritud elastsusmooduliga tuletas *F. Engesser*. Esialgu tegi *Engesser* ettepaneku arvutada kriitiline koormus varda nõtkumisel deformatsiooni elastoplastses piirkonnas muutuva elastsusmooduliga E_t , nii nagu seda eespool kirjeldasime elastse, kuid *Hooke'i* seadusele mittealluva materjali puhul. Seejärel, pärast *Jassinski* poolt tehtud kriitikat, esitas ta ülaltoodud redutseeritud

elastsusmooduli E_r arvutusmeetodi, milles on arvesse võetud kahe erineva suurusega elastsusmooduliga pingetsooni tekkimine ristlõikes. *Kármán* ja teised teadlased on *Engesseri-Jassinski-Kármáni* meetodi head sobivust arvukate katsetega tõestanud.

Hiljuti näitas *Shanley*, et tsentriliselt surutud vardaid on võimalik koormata aeglaselt kasvavate pikijõududega selliselt, et varda ristlõikes ei teki pinge kahanemist varda nõtkumise algusele vastavate keskmiste pingete suhtes. Sel juhul tuleb kriitiline jõud arvutada varda kõverdumise algusele vastava muutuva elastsusmooduliga E_t .

Kuna viimase ettepaneku tegi ka *Engesser*, siis nimetatakse kirjeldatud arvutusmeetodit mõningate teadlaste poolt *Engesser-Shanley* meetodiks.

Engesser-Shanley meetod annab võrreldes *Engesser-Jassinski-Kármáni* meetodiga väiksemad kriitilised jõud. Väikeste saleduste puhul ei ületa erinevus 10—15%, kuna suuremate saleduste puhul on vahe väiksem. Lähenedes saledusega *Euleri* valemni kehtivuse piirile, muutub erinevus loomulikult nulliks.

Oieti ei teki siin küsimust ühe või teise meetodi eelistamisest, vaid arvutusmeetodite kasutamine sõltub varda koormamisviisist. *Engesser-Jassinski-Kármáni* meetod sobib kasutamiseks staatiliste koormuste korral, kuna *Engesser-Shanley* meetodit võib rakendada varda nõtkumise vältel kasvavate jõudude korral.

3.14 ELASTSELE ALUSELE TOETUVA TALA STABIILSUS

Vaatleme otstes liigendtugedele ning sildes elastsele alusele toetuvat tala, mis on otstes surutud jõuga T (joon. 3.26).

Sellise tala tasakaaluolukorra diferentsiaalvõrrand on esitatav kujul

$$EIv^{IV} + Tv'' + kv = 0 \quad (3.39)$$

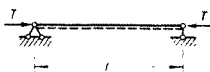
Võrreldes vabalt sildes asetseva ning otstes surutud talaga on käesolevas tasakaaluvõrrandis kolmas liige kv , milles k tähistab elastse aluse turbetegurit.

Otsime võrrandi (3.39) lahendit lõpmatu rea kujul

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.40)$$

Kuna tala ääretingimused on:

$$\begin{aligned} &\text{kui } x = 0 \text{ ja } x = l, \\ &\text{siis } v = v'' = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$



JOON. 3.26

siis rahuldab otsitava lahendi iga liige ääretingimusi.

Asetame otsitava lahendi diferentsiaalvõrrandisse (3.39), misjärel saame:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - T \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + k \right] A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \quad (a)$$

Võrrand (a) on rahuldatud tingimusel, et $A_n \neq 0$ siis, kui avaldis kandilistes sulgudes n mistahes väärtuse puhul võrdub nulliga. Väikseimat T väärtust, mispuhul sulgavaldis muutub nulliks, nimetame *Euleri kriitiliseks jõuks* T_{kr} , mille väärtus on

$$T_{kr} = \min \left[EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + \frac{kl^2}{(n\pi)^2} \right] \quad (b)$$

Avaldame T_{kr} veidi teistsugusel kujul:

$$T_{kr} = \frac{EI\pi^2}{l^2} \min \left(n^2 + \frac{kl^4}{n^2\pi^4 EI} \right) \quad (3.42)$$

Avaldises (3.42) tähendab n poollainete arvu nõtkunud talas ja ta peab olema selline, mis annab teatava k puhul kriitilise jõu minimaalse väärtuse. Seega **nõtkunud tala poollainete arv sõltub elastse aluse turbetegurist k** .

Näiteks kui $k \rightarrow 0$, saame T_{kr} minimaalse väärtuse siis, kui $n=1$. Valemist (3.42) näeme, et sel juhul saame T_{kr} jaoks meile varem tuntud vabalt sildes asetseva varda arvutusvalemi. Võib öelda, et ka väikeste k väärtuste puhul nõtkub tala ühe poollainena. Suurendades k väärtust võib tekkida olukord, kus T_{kr} minimaalsele väärtusele vastav nõtkekuju on kaks poollainet. Elastse aluse turbeteguri k piirväärtus, mispuhul nõtkumine võib toimuda kas ühe või kahe poollainena, määratakse tingimusest, et kriitilised jõud mõlema tasakaaluolukorra puhul on võrdsed.

Kriitiliste jõudude võrdsus, kui $n = 1$ ja $n = 2$, annab valemi (3.42) alusel tingimuse

$$1 + \frac{k l^4}{\pi^4 EI} = 4 + \frac{k l^4}{4\pi^4 EI} \quad (c)$$

millest saame

$$k = \frac{4\pi^4 EI}{l^4} \quad (3.43)$$

Kui tala elastse aluse turbetegur

$$k < \frac{4\pi^4 EI}{l^4} \quad (d)$$

kaotab tala püsivuse ühe siinuse-poollainena. Kui aga

$$k = \frac{4\pi^4 EI}{l^4} \quad (e)$$

võib tala nõtkuda kas ühe või kahe poollainena. Kui aga

$$k > \frac{4\pi^4 EI}{l^4} \quad (f)$$

siis on tala nõtkunud kujuks üldiselt ühest suurem arv siinuse-poollaineid.

Tala nõtkunud kuju poollainete arvu määramiseks ole-nevalt elastse aluse turbetegurist k kasutame üldjuhul tingimust, et tala nõtkunud kuju poollainete arvu suu-renemine ühe võrra toimub ühe ja sama kriitilise jõu väärtuse juures. Analoogiliselt võrrandiga (c) saame seega:

$$n^2 + \frac{k l^4}{n^2 \pi^4 EI} = (n+1)^2 + \frac{k l^4}{(n+1)^2 \pi^4 EI} \quad (g)$$

millest

$$\frac{k l^4}{\pi^4 EI} = n^2(n+1)^2 \quad (3.44)$$

Elastse aluse küllalt suure turbeteguri k korral on poollainete arv n suur, mistõttu võime seose (3.44) sulgavaldises arvu üks ära jätta, millega saame n jaoks ligikaudse valemi

$$n = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \quad (3.45)$$

Kriitilise jõu arvutamiseks tuleb k väärtus, mis on leitud seosega (3.44) või (3.45), asetada valemisse (3.42).

Elastse aluse suure turbeteguri korral, kasutades valemit (3.45), saame kriitilise jõu väärtuseks

$$T_{kr} = 2 \sqrt{kEI} \quad (3.46)$$

Nagu saadud valemist nähtub, ei sõltu suure k korral kriitiline jõud varda pikkusest. Nõtkudes jaguneb varras, nagu näeme seosest (3.45), konstantse pikkusega

$$\frac{l}{n} = \pi \sqrt{\frac{EI}{k}}$$

poollaineteks.

Selleks, et hinnata varda pikkuse mõju konstantse turbeteguri k ja paindejäikuse EI korral, esitame valemi (3.42) alusel mõõtmeta kriitilise koormusparameetri:

$$t_{kr} = \frac{n^2 \pi^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{n^2 \pi^2} \quad (3.47)$$

milles

$$t_{kr} = \frac{T_{kr}}{\sqrt{EI k}}$$

ja pikkusega l võrdeline parameeter

$$\lambda = l \sqrt[4]{\frac{k}{EI}}$$

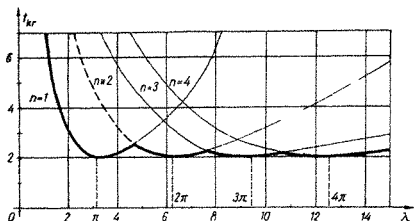
Koostame t_{kr} ja λ olenevuse graafikud mitmesuguse poollainete arvu n puhul (vt. joon. 3.27)

Joonisel 3.27 on tugeva pidevjoonega kujutatud min t_{kr} ja λ graafik. Nagu graafikust nähtub, on min t_{kr} väikseim siis, kui $\lambda = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$; arvuliselt min $t_{kr} = 2$. Suurema λ korral erineb min t_{kr} väärtus vähe arvust 2. Varras talub suuremaid kriitilisi jõude alles siis, kui $\lambda < \pi$.

Graafik kinnitab väidet, et küllalt pikkade varraste korral ei sõltu kriitilise jõu suurus varda pikkusest ($t_{kr} \approx 2$).

Kriitilise jõu valemi võime esitada ka kujul

$$T_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.48)$$



JOON 3 27

milles

$$L = \frac{l}{\sqrt{n^2 + \frac{kl^4}{n^2\pi^2EI}}}$$

3.15 TASAPINNALISTE RAAMIDE STABIILSUS JA PIKIPÕIKPAINE

Tasapinnaliste raamide esimest liiki stabiilsuse kaotus ehk nõtkumine toimub raami varrastes esinevate survejõudude toimetel, kui viimased saavutavad kriitilise suuruse. Seejuures eeldame, et raamile mõjuv väliskoorumus on selline, mis ei põhjusta eelkriitilises staadiumis surutud varraste painet. Sellisteks koormusteks on näiteks raami sõlmedes mõjuvad varraste sihilised jõud (joon. 3.28. a) või sümmeetrilise raami riivile mõjuv ühtlaselt jaotatud koormus (joon. 3.28, b).

Raami nõtkumine, s. o. üleminek uude tasakaalukujju toimub äkki. Kriitilise koormuse määramisel lähtume raami uuest kõverdunud tasakaalukujust, mis on lõpmata lähedane deformeerumata tasakaalukujule. Seejuures oletame, et stabiilsuse kaotuse hetkel on tekkiv paindedeformatsioon väga väike. Oletame veel, et surutud varraste pikideformatsioonid on hüljatavalt väikesed.

Raami pikipõikpaine tekib siis, kui raami riivid ja postid on koormatud põikkoormusega selliselt, et v a r -

rastes, kus esinevad pikijõud, tekivad ka veel põikjõud ja paindemomendid. Raamide tavalisel tugevusarvutusel pikijõudude mõju raami paindedeformatsioonile nende väiksuse tõttu ei arvestata.

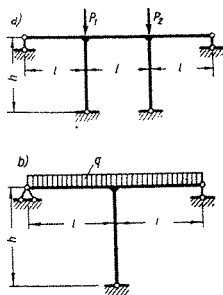
Kui aga raami koormusolukord on selline, et mõningates varrastes tekivad väga suured pikijõud, tuleb nende mõju raami paindedeformatsioonile arvesse võtta ja teha raami pikipõikpainde arvutus.

Pikipõikpainde arvutamiseks lahutame raami üksikuteks elementideks — varras-teks. Arvutus seisneb varda otstes esinevate äärepärimeetrite — paindemomentide, põikjõudude, pöördenurkade ja paigutiste arvutamises. Need äärepärimeetrid on omavahel seotud lineaarselt. Pikijõudude mõju äärepärimeetris võetakse arvesse argumendist $v = l \sqrt{\frac{N}{EI}}$ sõltuvate parandusteguritega, millest osa tuletatakse staatikalise ja energeetilise meetodiga [tegurid $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $\Theta_1(v)$, $\Theta_2(v)$, ... valemities (2.30), (2.77)], kuna osa on tuletatud allpool.

Nimetatud parandustegurid kujutavad endast küllalt keerukaid transsendentseid funktsioone argumendist v .

Juhul kui raami vardais esinevad pikijõud on teada või nad on lihtsalt arvutatavad, saame pikijõu parandustegurid leida kergesti, kasutades selleks vastavaid tabeleid või graafikuid (tabelid II. 1). Sel juhul kujuneb ka pikipõikpainde arvutus sisuliselt lihtsaks lineaarvõrrandite süsteemi lahendamiseks. Teada olevate pikijõudude korral osutub võimalikuks summeerimise printsiibi rakendamine pöikkoormuste kohta.

Jättes aga pikijõud algusest peale tundmatuteks ning soovides nad leida koos teiste suurustega, ei ole enam võimalik rakendada summeerimise printsiipi, kuna see



JOON. 3.28

ei kehti pikijõudude mõju kohta. Ulesanne kujuneks siis keeruka transsendentsete võrrandite süsteemi lahendamiseks, mis võib saada arvutuskäigule tõsiseks takistuseks.

Et seda vältida, leitakse varrastes esinevad pikijõudude suurused ligikaudselt ning arvutatakse pikipõikpaine nagu teada olevate pikijõududega. Saadud arvutustulemuste najal tehakse korrigeering pikijõudude suurustes ning korratakse arvutust. Juhul kui korrigeeritud pikijõudude suurused erinevad vähe viimati arvutuses rakendatutest, võime täpsustuse lugeda lõppenuks ja arvutada pikipõikpaine täpsustatud pikijõududega. Vastasel korral tuleb aga täpsustamist jätkata.

Pikijõu mõju parandustegurid on küllaltki aeglaselt muutuvad funktsioonid argumendi v suhtes, mistõttu võib eelkirjeldatud täpsustuse üsna pea katkestada.

Raamide pikipõikpaine arvutusi, mille puhul saab määrata algusest peale täpsed pikijõudude suurused, nimetatakse **monotsüklilisteks**. Arvutusi, milles pikijõudude täpne määramine algusest peale osutub võimatuks, nimetatakse **polütsüklilisteks**. Sisuliselt on polütsükliline arvutus transsendentsete võrrandite süsteemi ligikaudne lahendamine.

Raami stabiilsuse arvutus kuulub polütsükliliste liiki, kuna raami kriitilised pikijõud on otsitavad ning seega arvutuse alguses tundmatud.

Mis puutub raamide liigitusse staatikaga määratuteks ja staatikaga määramatuteks, siis stabiilsuse ja pikipõikpaine arvutuse seisukohalt ei esine siin sellist kvaliteetset erinevust nagu raami staatikalise arvutuse korral. Teatavasti piisab staatikaga määratud raamide tavalisel tugevusarvutusel tooreaktsioonide ja sisejõudude määramiseks ainult tasakaaluvõrranditest, kuna staatikaga määramatute raamide arvutamisel tuleb lisatundmatute leidmisel arvestada raami varraste deformeeritavust.

Stabiilsuse ja pikipõikpaine arvutamisel tuleb kõikide raamide puhul, vaatamata sellele, kas on tegemist staatikaga määratud või määramata konstruktsioonidega, algusest peale silmas pidada varraste deformatsiooniomadusi, peamiselt paindejäikust.

Analoogiliselt staatikalise arvutusega sõltub raami arvutuse käik sellest, millised varraste äärepameetrid valitakse tundmatuteks.

Valides tundmatuteks üldistatud jõud, saame jõumeetodi. Tundmatute üldistatud paigutiste korral aga nimeatakse arvutusmeetodit deformatsioonimeetodiks. Kui tundmatuteks valitakse nii üldistatud jõud kui ka paigutised, saame segameetodid.

Järgmistes alapunktides on käsitletud esmalt raamide stabiilsuse arvutust jõu- ja deformatsioonimeetodiga ning seejärel raami pikipõikpainde arvutust.

3.151 Jõumeetod raami stabiilsuse arvutamisel

Raamide arvutamisel jõumeetodiga koostatakse deformatsiooni pidevusvõrrandid ärajäetud sidemete kohta, s. t. arvutatakse paigutised staatikaliselt määratavas põhiskeemis. Paigutiste arvutamisel tuleb arvesse võtta nii põikkoormusi kui ka pikijõudude mõju. Paigutised tuleb arvutada raami pikipõikpaindel.

Nagu teada pikipõikpainde teooriast, sõltuvad paigutised lineaarselt põikkoormusest ja mittelineaarselt pikijõududest. Seetõttu on põikkoormuste kohta kehtiv summeerimise printsiip.

Raamide stabiilsuse arvutamisel jõumeetodiga omab olulist tähtsust põhiskeemi otstarbekohane valik. Kuigi teoreetiliselt viib raamide arvutamisel iga õigesti konstrueeritud põhiskeem sihile, sõltub arvutuskäigu hõlpsus siiski suuresti põhiskeemi ning lisatundmatute valikust, seda eriti raamide stabiilsuse arvutamisel. Siin võiks põhiskeeme isegi liigitada otstarbekohasteks ja ebaotstarbekohasteks.

Otstarbekohases põhiskeemis on lihtne arvutada deformatsiooni pidevusvõrranditesse minevaid ühikpaigutisi. Ühikpaigutisi on lihtne arvutada siis, kui surutud elemendid on kas otstest liigenditega kinnitatud vardad või ühest otsast jäigalt kinnitatud konsolidid. Nendel juhtudel saab rakendada eespool tuletatud arvutusvalemeid.

Kuna raam on koormatud sõlmedes ning vardasihiliste pikijõududega, siis eelkriitilises staadiumis raami painet ei teki. Paine tekib raami püsivuse kaotuse hetkel, kusjuures sidemetes tekivad esialgu lõpmata väikesed jõud, millest osa loemegi lisatundmatuteks, vastavalt jõumeetodile. Lisatundmatud tuleb eraldada eelkriitilises staa-

diumis esinevatest pikijõududest, vastasel korral muutub arvutus liiga keerukaks.

Nagu eespool mainitud, puuduvad raamil painet põhjustavad koormused, mistõttu raami lahendamisel jõumeetodiga võrduvad kanoonilistes võrrandites koormusliikmed nulliga. Seega saame homogeensete võrrandite süsteemi:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Esitatud süsteem on rahuldatud esiteks triviaalse lahendiga, mis vastab raami eelkriitilisele, s. o. nõtkumata olukorrale. Nullist erinevad lahendid tekivad raami stabiilsuse kaotusel ja on siis võimalikud, kui süsteemi determinant

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.50)$$

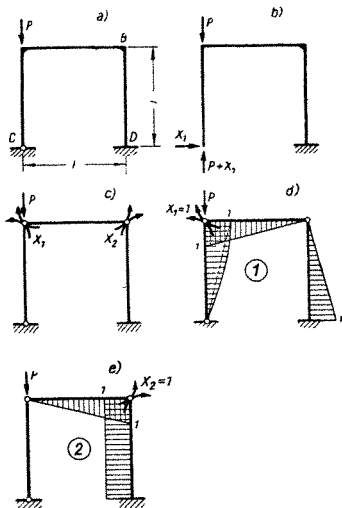
Determinandis sisalduvad paigutised δ_{jk} on leitud, arvesse võttes varrastele mõjuvate pikijõudude toimet ja on seega funktsioonid pikijõududest. Oletame, et pikijõud muutuvad võrdeliselt mingi koormusparameetriga. Raami kriitilisele seisundile vastavat koormusparameetrit nimetatakse kriitiliseks.

Võrrandit (3.50), s. o. süsteemi determinandi nullisuse tingimust, mis sisaldab tundmatuna kriitilist koormusparameetrit, nimetatakse vaadeldava raami püsivusvõrrandiks. Võrrandi lahendamise tulemusena saame kriitilise koormuse või koormusparameetri.

Näide 3.12. Vaatleme nelinurkset raami, mis on koormatud sõlmes A koondatud jõuga P (joon. 3.29). Ülesandeks on leida jõu P kriitiline suurus. Raami vardad on ühesuguse jäikusega.

Kõigepealt tuleb valida põhiskeem. Joonisel 3.29, b on toodud näide ebaotstarbekohasest põhiskeemist. Sellel skeemil ei ole surutud varras otstest kinnitatud liigenditega ega ka ühest otsast jäigalt, mistõttu eespool pikipõikpaande puhul tuletatud arvutusvõtteid ei ole võimalik rakendada. Sobivaks osutub põhiskeem c , kus lisatudmatuteks on momendid X_1 ja X_2 .

Järgneb ühikpaigutiste δ_{jk} arvutamine. Selleks konstrueerime ühikjõudude epüürid. Oieti tuleks ühe ühikjõu (antud juhul ühikmomendi) kohta konstrueerida kaks epüüri, nii nagu Mohri meetod seda üldiselt nõuab: üks epüür ühikjõust ja survejõududest ning



JOON. 3.29

teine epüür ainult ühikjõust. Kuna aga survejõu mõju võetakse arvesse selleks ettenähtud parandusteguritega, siis ei tarvitse epüüri tema mõju enam arvestada ja piisab ühe epüüri joonestamisest. Epüüri osad, kus vardad on surutud, piiratakse vaid kõveraga, et näidata, milliste varraste osas tuleb rakendada parandustegureid pikijõu mõju arvestamiseks.

Ühikjõudude epüürid on kujutatud joonistel 3.29, *d* ja *e*. Arvutame nüüd paigutised ühikjõust. Selleks rakendame lk. 68 esitatud arvutusvalemit (2.76) ning parandustegurite tabelit II.1.

$$EI\delta_{11} = \frac{l}{3} \alpha^*(v) + \frac{2}{3} l; \quad EI\delta_{22} = l + \frac{l}{3} = \frac{4}{3} l$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{l}{6} + \frac{l}{2} = \frac{2}{3} l \quad (a)$$

Saame järgmise kanooniliste võrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} \frac{l}{3}[\alpha^*(v) + 2]X_1 + \frac{2}{3}lX_2 &= 0 \\ \frac{2}{3}lX_1 + \frac{4}{3}lX_2 &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Viimasest saame parasi $l/3$ -ga taandamist pusivusvõrrandi

$$\begin{vmatrix} \alpha^*(v) + 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad (c)$$

milline on avatult

$$4\alpha^*(v) + 8 - 4 = 0$$

ja

$$\alpha^*(v) = -1$$

Tabelist I 1 leiame

$$v \approx 3,73$$

Nüüd leiame jõu P kriitilise suuruse, teades, et

$$P_{kr} = \frac{v^2 EI}{l^2} = \frac{3,73^2 EI}{l^2} \quad (d)$$

Raami posti AC ühendust raami ülejäanud varrastega võime vaadelda kui posti otsa A elastset kinnitust Surutud varda *Euleri* kriitiline jõud on väljendatav, kasutades varda kinnitusteguri mõistet, järgmiselt:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (e)$$

kus μ — varda otsa kinnitustegur,

l — varda pikkus.

Arvesse võttes kriitilise jõu suurust (d), saame

$$\frac{v^2}{l^2} = \frac{\pi^2}{\mu^2 l^2}$$

millest kinnitustegur

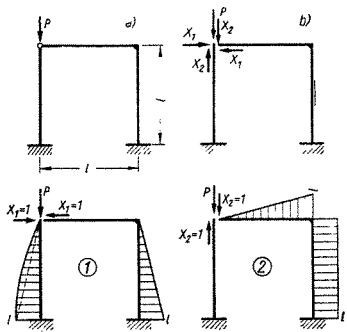
$$\mu = \frac{\pi}{v} \quad (3.51)$$

Antud raami puhul, kus $v = 3,73$, on posti AC kinnitusteguriks

$$\mu = \frac{3,14}{3,73} = 0,844$$

Juhul kui posti ots A oleks kinnitatud jäigalt, kuna ots C toetuks liigendile, oleks kinnitusteguriks $\mu = 0,7$. Mõlema otsa liigendkinnituse korral saime aga $\mu = 1$. Vaadeldava raami puhul tuleb posti AC kinnitustegur $\mu = 0,844$ täiesti õigesti suuruste 0,7 ja 1 vahele, kuna on tegemist ühes otsas elastse kinnitusega.

Näide 3.13. Vaatleme nüüd raami, mis kujult ja jõu asendilt sarnaneb eelmisega, kuid liigend asetseb jõu kohal punktis A . Raami



JOON. 3.30

skeem ja ühikepüürid on kujutatud joonisel 3.30. Valitud põhiskeemis on surutud varras nüüd konsool; vastavalt eespool lk. 70 tuletatud arvutuseeskirjadele tuleb nüüd kasutada teistsuguseid parandustegureid, mis on antud tabelis II.1.

Leiame kõigepealt ühikpaigutised:

$$EI\delta_{11} = \frac{l^3}{3} \Theta_1(v) + \frac{l^3}{3} = \frac{l^3}{3} [1 + \Theta_1(v)]$$

$$EI\delta_{22} = \frac{l^3}{3} + l^3 = \frac{4}{3} l^3 \quad EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{l^3}{2}$$

Analoogiliselt eelmise näitega saame püsivusvõrrandi jõumeetodi kanooniliste võrrandite teguritest

$$D = \begin{vmatrix} \frac{l^3}{3} [1 + \Theta_1(v)] & \frac{l^3}{2} \\ \frac{l^3}{2} & \frac{4}{3} l^3 \end{vmatrix} = 0$$

Pärast koondamist $l^3/3$ arvel ning determinandi avamist saame:

$$4[1 + \Theta_1(v)] - 2,25 = 0 \quad (h)$$

millest

$$\Theta_1(v) = -0,4375$$

Sellele $\Theta_1(v)$ väärtusele leiame tabelist

$$v = 2,79$$

ja

$$P_{kr} = \frac{v^2 EI}{l^2} = \frac{7,78 EI}{l^2} \quad (i)$$

Surutud varda AC kinnitustegur on nüüd vastavalt seosle (3.51)

$$\mu = \frac{\pi}{v} = \frac{3,14}{2,79} = 1,13 \quad (k)$$

Keerukamate ülesannete korral on raamide stabiilsuse arvutamisel võimalik rakendada ka selliseid lihtsustavaid võtteid, mida kasutati raamide staatikalisel arvutusel tugevusele. Need lihtsustatud võtted põhinesid raamide sümmeetria ja gruppundmatute kasutamisel. Raamide stabiilsuse arvutamisel on sümmeetria kasutamine võimalik siis, kui lisaks raami sümmeetriale on sümmeetriline ka väliskoormus.

Kasutades gruppundmatuid, valime viimased nii, et osa neist on sümmeetrilised ning teine osa antimeetrilised. Põhiskeemi ühikpaigutised sümmeetrilise tundmatu sihis antimeetrilise tundmatu mõjul võrduvad nulliga, samuti vastupidi. Kuna selliselt osa ühikpaigutistest võrdub nulliga, laguneb jõumeetodi võrrandisüsteemi determinant kaheks determinandiks, milles kummaski on liikmete arv väiksem, võrreldes algdeterminandiga. Seega saame ühe püsivusvõrrandi asemel kaks lihtsamat püsivusvõrrandit. Kumbki püsivusvõrrand kirjeldab erinevat kriitilist, s. o. nõtkunud olukorda. Üks nõtkunud olukord on sümmeetriline, teine antimeetriline. Raami tegelik nõtkunud olukord vastab loomulikult väikseimale kriitilisele koormusele.

3.152 Deformatsioonimeetod

Raamide püsivusarvutuse käik deformatsioonimeetodiga on analoogiline jõumeetodiga. Kriitiliste koormuste määramiseks vajaliku püsivusvõrrandi koostamisel lähtume deformatsioonimeetodi kanooniliste võrrandite süsteemist, mis (vt. *R. Räämet*, «Ehitusmehaanika I») kujutab endast geomeetriliselt määratud põhiskeemi lisasidemete kohta püstitatud tasakaaluvõrrandite süsteemi.

Geomeetriliselt määratud põhiskeem konstrueeritakse raami püsivuse arvutamisel samuti nagu raami staatikalisel arvutamisel.

Kuna raami väliskoormuseks on sõlmedes rakendatud varrastesihilised (painet mittepõhjustavad) jõud — uuritakse ju püsivuse kaotust *Euleri* mõttes — siis väliskoormuse reaktsioonid lisasidemetes võrduvad nulliga, mistõttu saame alljärgneva homogeense võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned}
 r_{AA}\xi_A + r_{AB}\xi_B + \dots + r_{AN}\xi_N + r_{A1}\psi_1 + r_{A2}\psi_2 + \dots + r_{Aw}\psi_w &= 0 \\
 r_{BA}\xi_A + r_{BB}\xi_B + \dots + r_{BN}\xi_N + r_{B1}\psi_1 + r_{B2}\psi_2 + \dots + r_{Bw}\psi_w &= 0 \\
 \dots & \dots \\
 r_{1A}\xi_A + r_{1B}\xi_B + \dots + r_{1N}\xi_N + r_{11}\psi_1 + r_{12}\psi_2 + \dots + r_{1w}\psi_w &= 0 \\
 \dots & \dots \\
 r_{wA}\xi_A + r_{wB}\xi_B + \dots + r_{wN}\xi_N + r_{w1}\psi_1 + r_{w2}\psi_2 + \dots + r_{ww}\psi_w &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

Võrrandisüsteemi liikmetes esinevad tundmatud kordajad $\xi_A, \xi_B, \dots, \xi_N$ on teatavasti raami sõlmede pöördenurgad ning kordajad $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ raami varraste sõltumatud pöördenurgad, kuna kordajad $r_{AA}, r_{AB}, \dots, r_{A1}, \dots, r_{ww}$ on sõlmede ja varraste ühikpöördenurkadest põhjustatud reaktsioonmomentid sõlmede pöördumist takistavates lisasidemetes.

Saadud võrrandisüsteem (3.52) on rahuldatud kahel juhul. Esiteks, kui kõik reaktsioonid lisasidemetes võrduvad nulliga. See on võimalik siis, kui raam ei ole veel nõtkunud ning tegemist on eelkriitilise staadiumiga.

Teiseks on võrrandisüsteem rahuldatud ka siis, kui tundmatud $\xi_A, \dots, \xi_N, \psi_1, \dots, \psi_w$ ei võrdu kõik nulliga, see tähendab aga seda, et raam on nõtkunud.

Tingimus (3.53) kujutabki endast püsivusvõrrandit, mille lahendamine annab raamile mõjuva kriitilise koormuse:

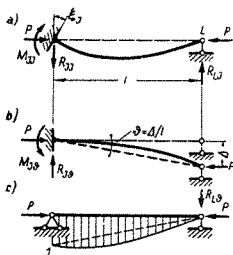
$$D = \begin{vmatrix} r_{AA} & r_{AB} & \dots & r_{AN} & r_{A1} & \dots & r_{Aw} \\ r_{BA} & r_{BB} & \dots & r_{BN} & r_{B1} & \dots & r_{Bw} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1A} & r_{1B} & \dots & r_{1N} & r_{11} & \dots & r_{1w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{wA} & r_{wB} & \dots & r_{wN} & r_{w1} & \dots & r_{ww} \end{vmatrix} = 0
 \tag{3.53}$$

Raami püsivusvõrrandis esinevad ühikpöördenurkade reaktsioonid lisasidemetes arvutame jõumeetodiga, kusjuures võtame arvesse varrastele mõjuvate pikijõudude

toimet varraste deformatsioonile, kasutades selleks vastavaid parandustegureid argumentist $v = l \sqrt{\frac{P}{EI}}$.

Uhest otsast jäigalt ning teisest otsast liigendiga kinnitatud varras, mis on surutud otsast jõuga P , on kujutatud joonistel 3.31, *a* ja *b*.

Sõlme J pööramisel nurga ξ_J võrra tekib toesisemes J reaktsioonmoment M_{JJ} , mille arvutame, nagu ülal mainisime, jõumeetodiga.



JOON 3.31

võtet, mida on kirjeldatud eespool arvatamist saame:

$$\delta_{JJ} = \frac{1}{3EI} \alpha^*(v) \quad (b)$$

milles EI — varra paindejäikus,
 $\alpha^*(v)$ — parandustegur, mis võtab arvesse pikijõu mõju varra paindel,

$$v = l \sqrt{\frac{P}{EI}} \text{ — abifunktsiooni argument.}$$

Avaldame nüüd võrrandist (a) reaktsioonmomenti M_{JJ} , ühtlasi asendades δ_{JJ} väärtuse seosest (b):

$$M_{JJ} = \frac{\xi_J}{\delta_{JJ}} = \frac{3EI}{l} \cdot \frac{1}{\alpha^*(v)} \xi_J$$

Varda JL staatikaga määratud põhiskeemiks on lihtlala. Reaktsioonmomenti leidmiseks kasutame järgmist geometrilist võrrandit:

$$\delta_{JJ} M_{JJ} = \xi_J \quad (a)$$

Võrrandis (a) esinev korra δ_{JJ} on staatikaga määratud põhiskeemi sõlme J ühikmomenti $M_J = 1$ ja pikijõudude P mõjul tekkiv pöördenurk, mille arvutame energia meetodiga. Siinjuures võime kasutada ühikmomenti epüüri kasutamisel põhinevat grafoanalüütilist eespool (vt. lk. 68). Pärast

Kasutame edasi tähistusi

$$\frac{El}{l} = i \quad (c)$$

ja

$$\frac{1}{\alpha^*(v)} = \frac{v^2}{3 \left(1 - \frac{v}{\tan v} \right)} = \varphi_1(v) \quad (d)$$

misjärel saame:

$$M_{JJ} = 3i\varphi_1(v)\xi_J \quad (3.54)$$

$\varphi_1(v)$ on parandustegur, mis võtab arvesse pikijõu mõju reaktsioonmomentidele varda paindel. Juhul kui $P=0$, on $\varphi_1(v)=1$ ning varda reaktsioonmoment

$$M_{JJ} = 3i\xi_J \quad (e)$$

Kui $P > 0$, siis $\varphi_1(v) < 1$, mistõttu pikijõu mõjumisel on tekkiv reaktsioonmoment väiksem kui selle puudumisel.

Kuna varras on sildel koormamata, siis põikjõud on varda algtelje suhtes konstantne ning võrdub

$$Q_{JL} = -\frac{M_{JJ}}{l} = -\frac{3i}{l}\varphi_1(v)\xi_J \quad (3.55)$$

Varda otses mõjuvad reaktsioonid aga võrduvad

$$R_{JJ} = R_{LJ} = -\frac{3i}{l}\varphi_1(v)\xi_J \quad (3.56)$$

Vaatleme nüüd varda pöördenurga θ ja pikijõu mõju varda toesidemete reaktsioonidele.

Reaktsioonmomenti $M_{J\theta}$ arvutame deformatsiooni pidevuse tingimusest

$$\delta_{JJ}M_{J\theta} - \theta = 0 \quad (f)$$

kusjuures kasutame sedasama põhiskeemi, nagu eelmisegi näite puhul (vt. joon. 3.31, c).

Leiame nüüd tingimusest (f), kasutades ühikpöördenurga δ_{JJ} avaldist (b),

$$M_{J\theta} = -\frac{\theta}{\delta_{JJ}} = -3i\varphi_1(v)\theta \quad (3.57)$$

Toereaktsioonid tala algasendi suhtes leiame tasekaaluvõrrandist

$$M_{J\theta} - R_{L\theta}l - P\theta l = 0 \quad (g)$$

millest saame:

$$R_{L\Phi} = R_{J\Phi} = \frac{M_{J\Phi} - P\Phi l}{l} \quad (h)$$

Asetame avaldisse (h) $M_{J\Phi}$ väärtuse ning samuti $P = \frac{v^2 EI}{l^2}$, misjärel saame:

$$R_{L\Phi} = \frac{3i\varphi_1(v)\Phi - \frac{v^2 EI}{l}\Phi}{l} = \frac{3i}{l} \left[\varphi_1(v) - \frac{v^2}{3} \right] \Phi \quad (i)$$

Tähistame

$$\eta_1(v) = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3} \quad (3.58)$$

Rakendades tähistust (3.58), saame toereaktsioonide valemi

$$R_{L\Phi} = R_{J\Phi} = \frac{3i}{l} \eta_1(v) \Phi \quad (3.59)$$

Avaldame veel $M_{J\Phi}$ ja $R_{L\Phi} = R_{J\Phi}$ siirde Δ kaudu:

$$M_{J\Phi} = -\frac{3i}{l} \varphi_1(v) \Delta \quad (3.60)$$

$$R_{L\Phi} = R_{J\Phi} = \frac{3i}{l} \eta_1(v) \Delta \quad (3.61)$$

Sõlme pöördenurga mõju kahest otsast jäigalt kinnitatud ja jõuga P surutud vardale.

Varras koos põhiskeemi ja ühikmomentide epüüridega on kujutatud joonisel 3.32.

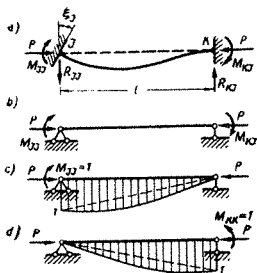
Rakendades jõumeetodit, saame varda jaoks järgmised deformatsioonivõrrandid:

$$\begin{aligned} \delta_{JJ}M_{JJ} + \delta_{JK}M_{KJ} &= \xi_J \\ \delta_{KJ}M_{JJ} + \delta_{KK}M_{KJ} &= 0 \end{aligned} \quad (k)$$

Leiame nüüd ühikmomentide poolt põhjustatud pöördenurgad

$$\delta_{JJ} = \delta_{KK} = \frac{l}{3EI} \alpha^*(v); \quad \delta_{JK} = \delta_{KJ} = \frac{l}{6EI} \beta^*(v) \quad (m)$$

Asetame leitud ühikpöördenurgad deformatsiooni pide-



JOON. 3.32

vuse võrranditesse (k) ja lahendame viimased M_{JJ} ja M_{KK} suhtes. Saame:

$$M_{JJ} = 4i\varphi_2(v)\xi_J \quad (3.62)$$

$$M_{KK} = 2i\varphi_3(v)\xi_J \quad (3.63)$$

milles

$$\varphi_2(v) = \frac{1 - \frac{v}{\tan v}}{4 \left[\begin{array}{c} \tan \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2} \\ -1 \end{array} \right]} \quad (3.64)$$

$$\varphi_3(v) = \frac{\frac{v}{\sin v} - 1}{2 \left[\begin{array}{c} \tan \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2} \\ -1 \end{array} \right]} \quad (3.65)$$

on argumentid $v = l \sqrt{\frac{P}{EI}}$ sõltuvad funktsioonid.

Toereaktsioonid tala algasendi suhtes saame tasakaalu-tingimusest

$$M_{JJ} + M_{KJ} - R_{KJ}l = 0$$

$$R_{KJ} = \frac{M_{JJ} + M_{KJ}}{l} = \frac{6i}{l} \xi_J \left[\frac{2}{3} \varphi_2(v) + \frac{1}{3} \varphi_3(v) \right]$$

Tähistame seoses (m) esineva sulgavaldisse $\eta_3(v)$, mis pärast $\varphi_2(v)$ ja $\varphi_3(v)$ avaldistega asendamist saab kuju

$$\eta_3(v) = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2}{\frac{v}{2} \left(1 - \frac{v}{2 \tan \frac{v}{2}}\right)} \quad (3.66)$$

Arvesse võttes deformatsioonimeetodi märgireegleid, saame toereaktsioonide valemi

$$R_{JJ} = R_{KJ} = -\frac{6i}{l} \eta_3(v) \xi_J \quad (3.67)$$

Varda JK lõplik paindemomentide epüür on kujutatud joonisel 3.32, *d*.

Varda pöördnurga ϑ mõju kahest otsast jäigalt kinnitatud ja jõuga P surutud vardale.

Varras koos põhiskeemiga on kujutatud joonisel 3.33, *a* ja *b*.

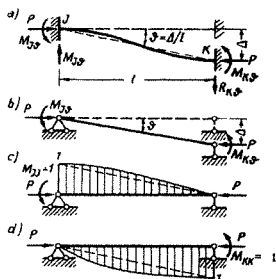
Varda JK deformatsioon on antimeetriline, mistõttu reaktsioonmomentid on võrdsed:

$$M_{J\vartheta} = M_{K\vartheta} \quad (n)$$

Reaktsioonmomentide suuruse leidmiseks piisab ühe deformatsioonivõrrandi koostamisest, nimelt

$$\delta_{JJ} M_{J\vartheta} + \delta_{JK} M_{K\vartheta} + \vartheta = 0 \quad (o)$$

Asetame võrrandisse (o) ühikpöördnurkade avaldised (m), silmas pidades epüüre. Joonisel 3.33, *c* tuleb δ_{JK}



JOON. 3.33

märgiks võtta miinus. Ühtlasi teeme asendused vastavalt avaldisele (n).

$$M_{J\psi} \left(-\frac{l}{3EI} \alpha^*(v) - \frac{l}{6EI} \beta^*(v) \right) + \psi = 0 \quad (p)$$

millest

$$M_{J\psi} = -\frac{6EI}{l} \psi \frac{1}{2\alpha^*(v) - \beta^*(v)} \quad (r)$$

Tähistame

$$\frac{1}{2\alpha^*(v) - \beta^*(v)} = \varphi_4(v)$$

Pärast $\alpha^*(v)$ ja $\beta^*(v)$ avaldistega asendamist saame

$$\varphi_4(v) = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2}{\frac{v}{2} \tan \frac{v}{2}} = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right) \quad (3.68)$$

Kasutades ka ühikjäikuse tähistust, saame:

$$M_{J\psi} = -6i\varphi_4(v) \psi \quad (3.69)$$

Toereaktsioonid saame alljärgnevalt tasakaalutingimusest:

$$R_{K\vartheta} = \frac{2M_{J\vartheta} - P\vartheta l}{l}$$

Arvesse võttes, et

$$P = \frac{v^2 EI}{l^2} = \frac{v^2 i}{l}$$

ning seost (3.69), saame:

$$R_{J\vartheta} = R_{K\vartheta} = \frac{12i}{l} \eta_2(v) \vartheta \quad (3.70)$$

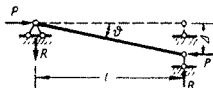
milles

$$\eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right) = \varphi_4(v) - \frac{v^2}{12} \quad (3.71)$$

Varda pöördenurga ϑ mõju kahest otsast liigendiga kinnitatud ja jõuga P surutud vardale (joon. 3.34).

Varda pöörde tõttu tekivad tugedes reaktsioonid, mille suuruseks saame

$$R = -\frac{P\vartheta l}{l} = -\frac{v^2 EI}{l} \vartheta = -\frac{i}{l} v^2 \vartheta \quad (3.72)$$



JOON. 3.34

Eespool saadud valemid toemomentide ja toereaktsioonide arvutamiseks sobivad piisavalt raamide püsivuse arvutamiseks sõlmkoormuste ja vardasihiliste jõudude korral, mis ei põhjusta eelkriitilises staadiumis raami painet. Esitame leitud suurused koondatult tabelisse 3.1.

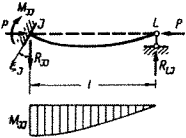
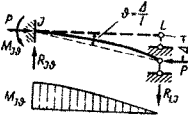
3.153 Näiteid raamide püsivuse arvutuse kohta deformatsioonimeetodiga

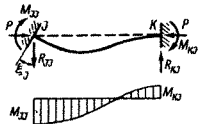
Näide 3.14. Leida joonisel 3.35, a kujutatud ühtlase paindejäiku sega jätkuva posti kriitiline koormusparameeter P . Püsivusvõrrandi lahendamisel rakendada lineaarse interpolatsiooni meetodit (*Regula falsi* meetod).

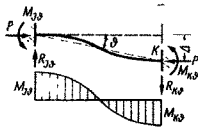
Posti deformatsioonimeetodi põhiskeemi saame, asetades jätku

Tabel 3.1

Paigutistest ja pikijõust põhjustatud toereaktsioonid

Deformeerunud kuju ja momendi epüür	Toereaktsioonid	Parandus-funktsioonid
	$M_{J,J} = 3i\varphi_1(v)\xi_J$ $R_{J,J} = R_{L,J} = -\frac{3i}{l}\varphi_1(v)\xi_J$ $i = \frac{EI}{l}$	$\varphi_1(v) = \frac{v^2}{3\left(1 - \frac{v}{\tan v}\right)}$ $v = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$
	$M_{J,\varphi} = -3i\varphi_1(v)\vartheta = -\frac{3i}{l}\varphi_1(v)\Delta$ $R_{J,\varphi} = R_{L,\varphi} = \frac{3i}{l}\eta_1(v)\vartheta = \frac{3i}{l^2}\eta_1(v)\Delta$	$\eta_1(v) = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3} = \frac{v^3}{3(\tan v - v)}$

Deformeerunud kuju ja momendi eptiir	Toereaktsioonid	Parandus-funktsioonid
	$M_{JJ} = 4i\varphi_2(\nu)\xi_J$ $M_{KK} = 2i\varphi_3(\nu)\xi_J$ $R_{JJ} = R_{KK} = -\frac{6i}{l}\eta_3(\nu)\xi_J$	$\varphi_2(\nu) = \frac{1 - \frac{\nu}{\tan \nu}}{4 \left[\frac{\tan \frac{\nu}{2}}{\frac{\nu}{2}} - 1 \right]}$ $\varphi_3(\nu) = \frac{\frac{\nu}{\sin \nu} - 1}{2 \left(\frac{\tan \frac{\nu}{2}}{\frac{\nu}{2}} - 1 \right)}$ $\eta_3(\nu) = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{\nu}{2} \right)^2}{\left(1 - \frac{\frac{\nu}{2}}{\tan \frac{\nu}{2}} \right)} = \varphi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right)$



$$M_{J0} = M_{K0} = -6i\varphi_4(\nu)\vartheta =$$

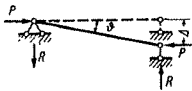
$$= -\frac{6i}{l}\varphi_4(\nu)\Delta$$

$$\varphi_4(\nu) = \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) = \eta_3(\nu)$$

$$R_{J0} = R_{K0} = \frac{12i}{l}\eta_2(\nu)\vartheta =$$

$$= \frac{12i}{l^2}\eta_2(\nu)\Delta$$

$$\eta_2(\nu) = \eta_1\left(\frac{\nu}{2}\right) = \varphi_4(\nu) = -\frac{\nu^2}{12}$$



$$R = -\frac{i}{l}\nu^2\vartheta = -\frac{l}{l^2}\nu^2\Delta$$

sõlme A lisasideme. Seega on post geomeetriliselt ühekoordselt maa-
ramatu. Posti nõtkumisel deformeerub ta sõlme A pöördudes

Deformatsioonimeetodi kanooniline võrrand on järgmine

$$r_{AA} \xi_A = 0 \quad (a)$$

millest saame püsivusvõrrandi

$$r_{AA} = 0 \quad (b)$$

r_{AA} on reaktsioonmoment lisasidemes A selle pöördudes ühik-
nurga võrra. Reaktsioonmomenti arvutamisel tuleb arvesse võtta ka
varrastes esinevate pikijõudude mõju:

$$N_{OA} = 2,5P$$

ja $N_{AB} = 1,5P$ (c)

$$N_{AB} = 1,5P$$

Leiame pikijõu mõju argumendid

$$v_{OA} = l \sqrt{\frac{N_{OA}}{EI}}; \quad v_{AB} = l \sqrt{\frac{N_{AB}}{EI}} \quad (d)$$

$$\frac{v_{AB}}{v_{OA}} = \sqrt{\frac{N_{AB}}{N_{OA}}} = \sqrt{\frac{1,5}{2,5}} = 0,775$$

$$v_{AB} = 0,775 v_{OA} \quad (e)$$

Geomeetriliselt määratud põhiskeemi vardad OA ja AB on kin-
nitatud ühest otsast järgalt ning teisest otsast liigendiga, mistõttu
reaktsioonmoment (vt. tabel 3.1) on

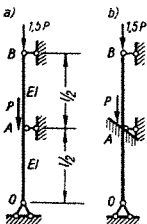
$$r_{AA} = 3i\varphi_1(v_{OA}) + 3i\varphi_1(v_{AB}) \quad (f)$$

Arvesse võttes seost (e), saame püsivusvõrrandi

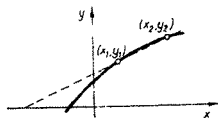
$$3i\varphi_1(v_{OA}) + 3i\varphi_1(0,775v_{OA}) = 0$$

või

$$\varphi_1(v_{OA}) + \varphi_1(0,775v_{OA}) = 0 \quad (g)$$



JOON. 3.35



JOON. 3.36

Saadud võrrandi võime lahendada, kasutades selleks φ_1 tabelit, lihtsalt katsetamise teel Võime aga kasutada ka lineaarse interpolatsiooni meetodit, nagu seda kaesolevas ulesandes nõutakse

Oletame, et pusivusvõrrandi vasak pool on mingi funktsioon y argumentist $x = v_{0A}$. Seda funktsiooni kujutab mingi kõver (joon 3 36) Võrrandi (g) lahendiks on x , mil $y = 0$ Lgikaudselt saame lahendi, kui võtame labi kõvera kahe antud punkti (x_1, y_1) (x_2, y_2) sirge, mille võrrand on

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

Leiame nuud x , kui $y = 0$

$$x = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{y_2 - y_1} \quad (3\ 73)$$

Rakendame nuud valemit (3 73) antud ulesande lahendamiseks Valime kõigepealt x_1 ja x_2 , s o pusivusvõrrandi lahendi kaks lähedast vaartust Seda võime teha näiteks järgmistel kaalutlustel Vardal OA on kinnitatud ühest otsast lugendiga, kuna otsa A kinnitust võiks nimetada elastseks Sellise varda kriitilise jõu suurus on suurem kui kahest otsast lugendiga kinnitatud vardal, aga väiksem kui vardal, mille üks ots on kinnitatud lugendiga, teine aga jaigalt Järelikult

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} < N_{OA\text{ kr}} < \frac{\pi^2 EI}{(0,7l)^2}$$

$$\pi < x = v_{0A} < 1,41\pi$$

Kitsendame veidi x vaartuste vahemikku, oletades, et

$$x_1 = 3,60 \quad \text{ja} \quad x_2 = 4,00$$

Kasutame esitatud x vaartusi ja leiame valemit (3 73) alusel pusivusvõrrandi esimese lgikaudse lahendi

$$y = \varphi_1(3,60) + \varphi_1(0,775 \cdot 3,60) = -0,6862 + 0,3015 = -0,3847$$

$$y_2 = \varphi_1(4,00) + \varphi_1(0,775 \cdot 4,00) = -2,1725 + 0,0424 = -2,1301$$

$$y_2 - y_1 = -2,1301 + 0,3847 = -1,7454$$

$$x_1 = \frac{-2,1301 \cdot 3,60 + 0,3847 \cdot 4,00}{-1,7454} = \frac{-7,66 + 1,540}{-1,7454} = \frac{6,12}{1,745} = 3,50$$

Arvutame nuud teise lahendi, võttes seejuures $x_1 = 3,50$

$$y_1 = \varphi_1(3,50) + \varphi_1(0,775 \cdot 3,50) = -0,4894 + 0,3556 = -0,1338$$

$$y_2 = \varphi_1(3,60) + \varphi_1(0,775 \cdot 3,60) = 0,3847$$

$$y_2 - y_1 = -0,3847 + 0,1338 = -0,2509$$

$$x_{II} = \frac{-0,3847 \cdot 3,50 + 0,1338 \cdot 3,60}{-0,2509} = 3,44$$

Kuna teine lahend muutus võrreldes esimesega vahe, leiame saadud tulemuse rahuldavaks

Seega

$$x_{II} = v_{0A} = 3,44$$

ja

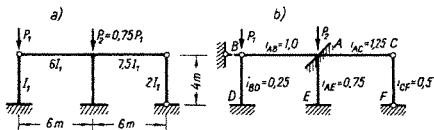
$$N_{0A,k1} = \frac{v_{0A}^2 EI}{l^2} = 11,82 \frac{EI}{l^2}$$

ning kriitiline koormusparameeter

$$P_{kr} = \frac{N_{0A,k1}}{2,5} = 4,73 \frac{EI}{l^2}$$

Näide 3.15. Leida joonisel 3.37, a kujutatud raami koormuse P kriitiline suurus deformatsioonimeetodiga.

Joonisel 3.37, b on esitatud raami geomeetriselt määratud põhiskeem koos lisasidemetega, ühtlasi on arvatud ja iga varda juurde märgitud ühikjäikus i .



JOON. 3.37

Nõtkunud raami deformatsioonimeetodi kanooniliste võrrandite süsteem on järgmine:

$$r_{AA} \xi_A + r_{A1} \theta_1 = 0 \quad (a)$$

$$r_{1A} \xi_A + r_{11} \theta_1 = 0$$

Sellest süsteemist tulenevaks püsivusvõrrandiks saame:

$$\begin{vmatrix} r_{AA} & r_{A1} \\ r_{1A} & r_{11} \end{vmatrix} = 0 \quad (b)$$

Pikijõu mõju funktsioonide argumentid on:

$$v_{BD} = l \sqrt{\frac{P_1}{EI_1}} = 2v$$

$$v_{AE} = l \sqrt{\frac{P}{3EI_1}} = l \sqrt{\frac{0,75P_1}{3EI_1}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P_1}{EI_1}} = v \quad (c)$$

Arvutame nüüd ühikreaktsioonid sidemetes, kasutades selleks tabelit 3.1.

$$r_{AA} = 3i_{AB} + 3i_{AC} + 4i_{AE} \cdot \varphi_2(v_{AE}) = 3 \cdot 1,0 + 3 \cdot 1,25 + 4 \cdot 0,75 \cdot \varphi_2(v) = 6,75 + 3\varphi_2(v)$$

$$r_{A1} = -6i_{AE} \varphi_4(v_{AE}) = -6 \cdot 0,75 \cdot \varphi_4(v) = -4,5 \cdot \varphi_4(v)$$

$$r_{1A} = -6i_{AE} \eta_3(v_{AE}) = -6 \cdot 0,75 \cdot \eta_3(v) = -4,5 \cdot \varphi_4(v)$$

$$r_{11} = 12i_{AE} \cdot \eta_2(v_{AE}) + 3i_{BD} \eta_1(v_{BD}) = 9\eta_2(v) + 0,75\eta_1(2v)$$

Asetame leitud reaktsioonid püsivusvõrrandisse ja saame

$$\begin{vmatrix} 6,75 + 3\varphi_2(v) & -4,5\varphi_4(v) \\ -4,5\varphi_4(v) & 9\eta_2(v) + 0,75\eta_1(2v) \end{vmatrix} = 0$$

või

$$60,75\eta_2(v) + 5,0625\eta_1(2v) + 27\varphi_2(v)\eta_2(v) + 2,25\varphi_2(v)\eta_1(2v) - 20,25\varphi_4^2(v) = 0 \quad (f)$$

Lahendame võrrandi (f) lineaarse interpolatsiooni meetodiga.

Oletame, et

$$v = x_1 = 1,9$$

Leiame tabelist II.5 x_1 väärtusele vastavad

$$\begin{aligned} \varphi_2(v) &= 0,8735, & \varphi_4(v) &= 0,9383, & \eta_2(v) &= 0,6375, & \eta_1(2v) &= -6,0436 \\ y_1 &= 60,75 \cdot 0,6375 + 5,0625 \cdot (-6,0436) + 27 \cdot 0,8735 \cdot 0,6375 + \\ &+ 2,25 \cdot 0,8735 \cdot (-6,0436) = -6,557 \end{aligned}$$

$$v = x_2 = 1,8$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(v) &= 0,8871; & \varphi_4(v) &= 0,9449; & \eta_2(v) &= 0,6749; & \eta_1(2v) &= -5,0062 \\ y_2 &= 60,75 \cdot 0,6749 - 5,0625 \cdot 5,0062 + 27 \cdot 0,8871 \cdot 0,6749 - \\ &- 2,25 \cdot 0,8871 \cdot 5,0062 = 3,749 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{y_2 - y_1} = \frac{3,749 \cdot 1,9 - (-6,557) \cdot 1,8}{3,749 + 6,557} = \frac{18,926}{10,306} = 1,836$$

Eelmisega analoogiline arvutuskäik on tehtud andmetega

$$x_1 = 1,83 \quad \text{ja} \quad x_2 = 1,87$$

ja on saadud

$$y_1 = 0,950, \quad y_2 = -4,186$$

$$x_{11} = \frac{-4,186 \cdot 1,83 - 0,950 \cdot 1,87}{-4,186 - 0,950} = \frac{9,4369}{5,136} = 1,837$$

Küllaldase täpsusega võime võtta

$$\begin{aligned} v &= v_{AE} = 1,84 \\ v_{BD} &= 2v_{AE} = 3,68 \end{aligned}$$

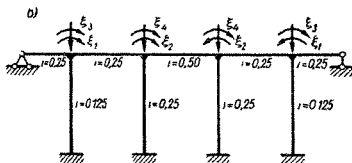
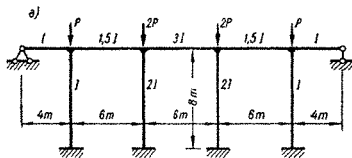
millist saame kriitilised jõud

$$P_{1kr} = \frac{v_{BD}^2 EI_1}{l^2} = \frac{3,68^2 EI_1}{l^2}$$

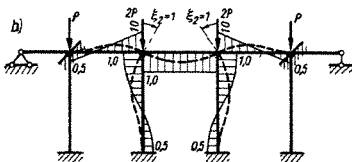
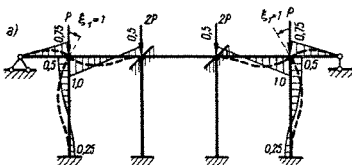
$$P_{2kr} = 0,75 \frac{3,68^2 EI_1}{l^2}$$

Näide 3.16. Leida joonisel 3.38, a kujutatud sümmeetrilise raami koormusparameetri P kriitiline suurus.

Joonisel 3.38, b on kujutatud raami geomeetriliselt määratud põhiskeem. Varraste juurde on märgitud nende ühikjäikused. Raami kuju ning väliskoormus on sümmeetrilised, mida on võimalik ära kasutada lahenduskäigu lihtsustamiseks. Nimelt raami püsivuse kaotusel võib raami nõtkunud kuju olla kas sümmeetriline või anti-meetriline.



JOON 3 38



JOON 3 39

Summeerilise nõtkunud kuju korral on grupptundmatuteks summeerilised sõlmede poordenurgad ξ_1 ja ξ_2

Konstrueerime need deformeerunud põhiskeemid koos paindemomendi epuuridega uhikpoordenurkade $\xi_1 = 1$ ja $\xi_2 = 1$ korral (joon 3 39)

Arvutame uhikpoordenurkade ja pikijõudude mõjul lisasidemetes tekkinud reaktsioonmomendid Loeme momendi positiivseks, kui ta suund langeb uhte oletatud tundmatu poordenurga suuna. Ptkijõu mõjuargument aarmises postis on

$$v_1 = 8 \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (a)$$

ja sisemises postis

$$v_2 = 8 \sqrt{\frac{2P}{2EI}} = 8 \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (b)$$

Avaldistest (a) ja (b) ilmneb

$$v_1 = v_2 = v \quad (c)$$

Leiame nüüd

$$r_{11} = 2(3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,25) + 2 \cdot 4 \cdot 0,125 \quad \varphi_2(v) = 3,5 + \varphi_2(v) \quad (d)$$

$$r_{22} = 2(4 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,50 - 2 \cdot 0,50) + 2 \cdot 4 \cdot 0,25 \varphi_2(v) = 4 + 2\varphi_2(v)$$

$$r_{12} = r_{21} = 2 \cdot 0,5 = 1$$

Pusivusvõrrandi saame

$$\begin{vmatrix} 3,5 + \varphi_2(v) & 1 \\ 1 & 4 + 2\varphi_2(v) \end{vmatrix} = 0 \quad (e)$$

või

$$\varphi_2^2(v) + 5,5\varphi_2(v) + 6,5 = 0 \quad (f)$$

Saadud ruutvõrrandi (f) väiksem juur on

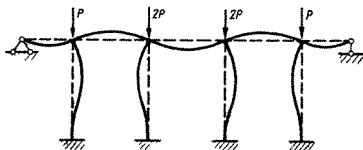
$$\varphi_2(v) = -2,75 - \sqrt{7,56 - 6,5} = -1,72$$

Tabelist leiame

$$v = 5,59$$

ja

$$P_{k1} = \frac{v^2 EI}{l^2} = \frac{5,59^2 EI}{8^2} = 0,487 EI \quad (g)$$



JOON 3 40

Raami sümmeetriliselt nõtkunud kuju on esitatud joonisel 3.40. Määrame nüüd kriitilise koormusparameetri suuruse raami anti-meetrilise nõtkekuju korral. Sel juhul on gruppitudmatuteks sõlmede pöördenurgad ξ_3 ja ξ_4 , millele vastavad deformeerunud põhiskeemid ja momendi epüürid on esitatud joonisel 3.41.

Arvutame reaktsioonid lisaedemetes:

$$\begin{aligned} r_{33} &= 2[(3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,25) + 4 \cdot 0,125\varphi_2(v)] = 3,5 + \varphi_2(v) \\ r_{44} &= 2[4 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,25\varphi_2(v)] = 8 + 2\varphi_2(v) \\ r_{34} &= r_{43} = 1 \end{aligned} \quad (h)$$

Püsivusvõrrand on

$$\begin{vmatrix} 3,5 + \varphi_2(v) & 1 \\ 1 & 8 + 2\varphi_2(v) \end{vmatrix} = 0 \quad (i)$$

või

$$\varphi_2^2(v) + 7,5\varphi_2(v) + 13,5 = 0 \quad (k)$$

Saadud võrrandi minimaalne juur on

$$\varphi_2(v) = -3,75 + \sqrt{3,75^2 - 13,5} = -3,00$$

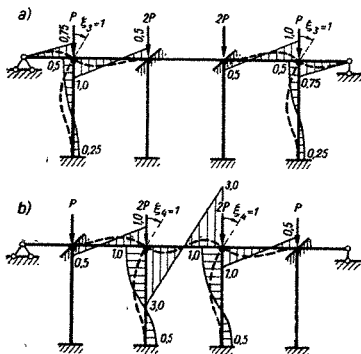
Tabeli järgi vastab leitud $\varphi_2(v)$ väärtusele

$$v = 5,83$$

millest

$$P_{kr} = \frac{v^2 EI}{l^2} = \frac{5,83^2 EI}{8^2} = 0,531 EI \quad (m)$$

Võrreldes kriitilisi koormusparameetreid (g) ja (m) näeme, et sümmeetrilisele nõtkekujule (joon. 3.40) vastav kriitiline koormusparameeter on väiksem kui antisümmeetrilisele kujule vastav.



JOON. 3.41

3. 16 RAAMIDE PIKIPÕIKPAINDE ARVUTUS

Eelmistes alapunktides vaatesime raamide stabiilsuse arvutust nii jõu- kui ka deformatsioonimeetodiga. Raamide staatikalisel arvutusel olid mõlemad meetodid enam-vähem võrdvõimelised. Ühe või teise meetodi eelis sõltus konkreetsest ülesandest.

Raamide stabiilsuse ja pikipõikpaine arvutusel tuleb meetodite eeliste kohta anda uus hinnang. Kõigepealt peab silmas pidama seda, et siin isegi staatikaga määratud konstruktsioonide korral ei piisa reaktsioonide ja sisejõudude määramiseks ainuüksi tasakaaluvõrranditest, vaid peab arvesse võtma raami varraste deformeeritavust, mistõttu ülesande lahenduskäik muutub keerukamaks. Staatikaga määramatute ülesannete lahendamisel jõumeetodiga kasvavad raskused veelgi (näiteks kas või otstarbekohaste ja ebaotstarbekohaste põhiskeemide küsimus).

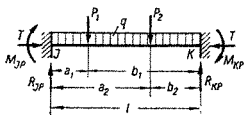
Seevastu pikipõikpaine ja stabiilsuse arvutus deformatsioonimeetodiga on vähem keerukas, võrreldes tavajõu staatikalise arvutusega. Põhiskeemides ei ole mingisugust erinevust. Pikijõudude mõju arvestavad transsendentsed funktsioonid muutuvad pikijõu muutudes aeglasemalt kui jõumeetodi parandustegurid. Seetõttu mõjutab pikijõudude määramise ebatäpsus arvutustulemuste täpsust vähem. Enamikul juhtudel tuleb arvutuses deformatsioonimeetodiga koostada vähem võrrandeid kui teiste meetodite puhul.

Kõike eeltoodut arvesse võttes **raamide stabiilsuse ja pikipõikpaine arvutusel tuleb lugeda põhiliseks meetodiks deformatsioonimeetodit**. See ei tähenda muidugi seda, et mõningatel erijuhtudel ei võiks sobivaks osutada mõni teine meetod.

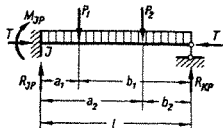
Kuna raamides, nii nagu varrasteski, paine kasvab surve-pikijõudude kasvu korral, tõmbejõudude kasvu puhul aga kahaneb, huvitavad meid peamiselt sellised raamide koormusolukorrad, kus varrastes tekivad suured survejõud.

Teatavasti on aga survejõudude esinemisel aktuaalsed raami stabiilsuse küsimused, mistõttu pikipõikpaine arvutust sel juhul võime nimetada ka stabiilse tugevuse arvutuseks.

Raamide pikipõikpaine arvutamisel kasutame, nii nagu



JOON. 3. 42



JOON. 3. 43

püvisisarvutustelgi, tabelis 3.1 toodud reaktsioone paigustitest. Lisaks nimetatud reaktsioonidele vajame ka reaktsioone väliskoormusest. Esitame reaktsioonide valemid üldkujul vastavalt kahele koormusolukorrale: esiteks, kui varras on koormatud üleni ühtlaselt jaotatud koormusega, ning teiseks, kui varras on koormatud koondatud jõududega.*

Esitame kõigepealt reaktsioonide valemid kahest otsast järgalt kinnitatud varda kohta (joon. 3.42)

$$M_{JP} = \frac{2l}{v^2 \sin v} \sum_{n=1, 2, \dots} P_n \left[2\varphi_2(v) \left(\frac{b_n}{l} \sin v - \sin \frac{b_n v}{l} \right) - \varphi_3(v) \left(\frac{a_n}{l} \sin v - \sin \frac{a_n v}{l} \right) \right] - \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{\eta_3(v)} \quad (3.74)$$

$$M_{KP} = -\frac{2l}{v^2 \sin v} \sum_{n=1, 2, \dots} P_n \left[2\varphi_2(v) \cdot \left(\frac{a_n}{l} \sin v - \sin \frac{a_n v}{l} \right) - \varphi_3(v) \left(\frac{b_n}{l} \sin v - \sin \frac{b_n v}{l} \right) \right] + \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{\eta_3(v)} \quad (3.75)$$

$$R_{JP} = -\frac{M_{JP} + M_{KP}}{l} + R_0 \quad (a)$$

milles

$$R_0 = \sum_{n=1, 2, \dots} P_n \frac{b_n}{l} + \frac{ql}{2} \quad (b)$$

* Valemid on tuletatud monograafias [71].

Valemi (a) võib esitada järgmiselt:

$$R_{JP} = R_0 - \sum_{n=1, 2, \dots} P_n \frac{\frac{b_n - a_n}{l} \cdot \sin \frac{v}{2} - \sin \frac{v(b_n - a_n)}{2l}}{2 \sin \frac{v}{2} - \cos \frac{v}{2}} \quad (3.76)$$

Tala ühest otsast jäiga ning teisest otsast liigendiga kinnituse korral (joon. 3.43) saame alljärgnevad reaktsioonide valemid:

$$M_{JP} = \frac{3l\varphi_1(v)}{v^2} \sum_{n=1, 2, \dots} P_n \left(\frac{b_n}{l} - \frac{\sin \frac{b_n v}{l}}{\sin v} \right) - \frac{ql^2}{8} \frac{1}{\varphi_2(v)} \quad (3.77)$$

$$R_{JP} = -\frac{M_{JP}}{l} + R_0 \quad (3.78)$$

R_0 on antud väliskoormusest lihttala vasakul toel tekiv reaktsioon.

Valemities (3.74), (3.75) ja (3.77) esinevad parandustegurid argumentist v leiame tabelist II.3.

Juhul kui varras on teistsuguse väliskoormuse mõju all kui eeltoodud (osaline jaotatud koormus, koondatud moment jne.), võime reaktsioonid arvutada, kasutades pikipõikpaände universaalseid valemid või siis rakendades deformatsiooni- või jõumeetodit.

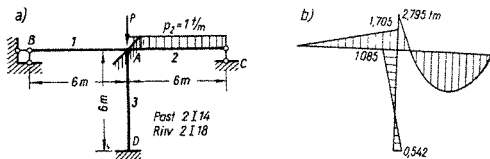
Näide 3.17. Teha joonisel 3.44, a kujutatud raami täpsustatud püsivus-tugevusarvutus deformatsioonimeetodiga. Lisaks põikkoormusele on raam koormatud sõlmes A jõuga P , mille suurus olgu järjekorras 5 t, 10 t, 15 t, ...

Konstrueerida nimetatud koormusolukordadele vastavaid momente epüürid.

Raami post on valmistatud kahest profiilterasest I 14, mille $I_1 = 2 \cdot 632 = 1264 \text{ cm}^4$. Raami riiviks on 2 I 18, $I_2 = 2 \cdot 1330 = 2660 \text{ cm}^4$.

Raam on geomeetriliselt ühekordselt määratu. Geomeetriliselt määratud põhiskeemi saame siis, kui asetame sõlme A liiasideme. Iundmatuks on sõlme A pöördnurk ξ_A .

Selleks et leida raami postis mõjuva pikijõu suurust, arvutame kõigepealt raami sisejõud ainult põikkoormusest p_2 .



JOON. 3.44

Deformatsioonimeetodi kanooniline võrrand on järgmine:

$$r_{AA} \xi_A + R_{AP} = 0 \quad (a)$$

Reaktsioonid lisasidemes:

$$r_{AA} = 2 \cdot 3i_r + 4i_p \quad (b)$$

milles $i_r = 1$ olgu riivi ühikjäikus, kuna posti ühikjäikus sel juhul on

$$i_p = \frac{I_{z,p}}{I_{z,r}} = \frac{1264}{2660} = 0,476 \quad (c)$$

Arvesse võttes toodud ühikjäikusi, saame:

$$r_{AA} = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0,476 = 6 + 1,904 = 7,904 \text{ tm}$$

Reaktsioon vältiskoormusest:

$$R_{AP} = -\frac{1}{8} p l^2 = -\frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 36 = -4,5 \text{ tm} \quad (d)$$

Asetame leitud suurused võrrandisse (a):

$$7,904 \xi_A - 4,5 = 0$$

$$\xi_A = \frac{4,5}{7,904} = 0,568$$

Paindemomendid varraste otstes:

$$M_A^{(1)} = 3i_r \xi_A = 3 \cdot 1 \cdot 0,568 = 1,705 \text{ tm}$$

$$M_A^{(2)} = 3i_r \xi_A = -\frac{1}{8} p l^2 = 1,705 - 4,5 = -2,795 \text{ tm}$$

$$M_A^{(3)} = 4i_p \xi_A = 4 \cdot 0,476 \cdot 0,568 = 1,085 \text{ tm}$$

Konstrueerime raami paindemomentide epüüri (joonis 3.44, b).

Selleks, et leida vardas 3 esinevat pikijõudu, leiame sõlmes A varraste 1 ja 2 otstes esinevad põikjõud

$$Q_A^{(1)} = -\frac{3i_r}{l} \xi_A = -\frac{3 \cdot 1}{6} \cdot 0,568 = -0,284 \text{ t}$$

$$Q_A^{(2)} = -\frac{3i_r}{l} \xi_A + Q_{AP}^{(2)} = -0,284 + \frac{5}{8} \cdot 1 \cdot 6 = -3,466 \text{ t}$$

Sõlme A tasakaalu tingimusest $\sum Y = 0$ saame (joon 3 45)

$$V_A^{(3)} - Q_A^{(1)} - Q_A^{(2)} = 0$$

$$N_A^{(3)} = 0,284 + 3,466 = 3,750 \text{ t}$$

Sõlmele A varrastest 1 ja 2 mõjuvad põikjõud mis on põhjustatud sõlme poordumisest, on võrdsed ja vastassuunalised, mistõttu tasakaalustuvad Seeparast laheb vardasse 3 pikijõuks koostumusest P põhjustatud põikjõud $Q_{A,1}^{(2)}$ varda 2 otsas Vuhane jaab ξ_A muut



JOON 3 45

maluks ka sel juhul, kui võtame arvesse jõu P mõju raamile. Piki-
jõud raami postis 3 on

$$N^{(3)} = Q_{A,1}^{(2)} + P \quad (e)$$

See pikijõud on ulalesitatud viisil lõplikult maaratav mistõttu raami täpsustatud arvutuskaik kujuneb monotsühiliseks protsessiks

Nuud teeme raami täpsustatud arvutuse Koostame kõigepealt vajalike arvutusvalemite kogu, kina arvutuse tulemusest esitame täheh kujul

Pikijõud vardas

$$N^{(3)} = Q_{A,1}^{(2)} + P = 3,75 + P \text{ t}$$

Pikijõu mõju argument

$$v_t = l \sqrt{\frac{N^{(3)}}{EI_{zP}}} = 600 \sqrt{\frac{N^{(3)}}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1264}} = 1,165 \cdot 10^{-2} \sqrt{N^{(3)}}$$

Reaktsioonid lisaõdemetes

$$r_{A,A} = 2 \cdot 3r_1 + 4r_2 \varphi_2(v) = 6 + 1,904 \varphi_2(v) \quad (g)$$

$$R_{A,P} = -\frac{pl^2}{8} = -4,5 \text{ tm}$$

$$\xi_A = -\frac{R_{A,P}}{r_{A,A}} \quad (h)$$

Paindemomendid varraste otstes

$$M_A^{(1)} = 3r_1 \xi_A, \quad M_A^{(2)} = 3r_1 \xi_A - \frac{pl^2}{8} \quad (i)$$

$$M_A^{(3)} = 4r_2 \xi_A \varphi_2(v), \quad M_D^{(3)} = 2r_2 \xi_A \varphi_3(v)$$

Raami sõlme A tegelik pordenurk

$$\xi_{A,t} = \frac{M_A^{(1)}}{3r_{1,t}} \quad (k)$$

Raami täpsustatud arvutuse tulemused olenevalt pikijõu $N_A^{(3)}$ suurusest

Tabel 3 2

$P \ t$	0	5	10	15	30	60	120	240
$N_A^{(3)}$	—	8,75	13,75	18,75	33,75	63,75	123,75	243,75
v_p	0	1,09	1,37	1,60	2,14	2,94	4,09	5,76
$\varphi_2(v)$	1	0,9600	0,9358	0,9116	0,8372	0,6717	0,2434	-2,5130
$\varphi_3(v)$	1	1,0204	1,0332	1,0463	1,0887	1,1948	1,5490	5,7314
$r_{\Delta A}$	7,904	7,83	7,78	7,74	7,60	7,28	6,46	1,22
ξ_A	0,568	0,574	0,578	0,581	0,592	0,618	0,696	3,69
$M_A^{(1)}$	1,705	1,722	1,734	1,743	1,776	1,854	2,088	11,07
$M_A^{(2)}$	-2,795	-2,778	-2,766	-2,757	-2,724	-2,646	-2,412	6,57
$M_A^{(3)}$	1,085	1,050	1,031	1,010	0,943	0,792	0,322	17,64
$M_D^{(3)}$	0,542	0,558	0,566	0,574	0,615	0,700	1,027	20,1
ξ_{A1}	0,349°	0,353°	0,355°	0,357°	0,364°	0,380°	0,428°	2,27°

milles

$$i_1 = \frac{EI_{z1}}{l} = \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 2660}{600} = 0,931 \cdot 10^6 \text{ kG cm} = 931 \text{ tm} \quad (\text{m})$$

Raami kriitilise jõu P_{k1} arvutamise võrrandist

$$r_{k1} = 0$$

või vastavalt seosele (g) võime kirjutada

$$6 + 1904q_2(\nu) = 0$$

millest

$$q_2(\nu) = -\frac{6}{1904} = -316$$

siis

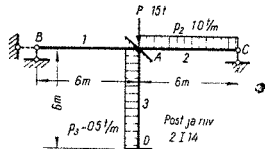
$$\nu = 5,85$$

Seega

$$P_{k1} = \frac{5,85^2 EI_{z1}}{l^2} = \frac{5,85^2 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 2664}{3,6 \cdot 10^6} = 252 \text{ t}$$

Nagu tabelis 3.2 esitatud arvutustulemustest nähtub on pikijõu mõju suhteliselt väikeste pikijõudude puhul (võrreldes kriitilise jõuga) väike. Suuremad erinevused ilmnevad siis kui pikijõud lahe neel kriitilisele.

Näide 3.18 Teha joonisel 3.46 esitatud raami lapsustatud seisuvus tugevusarvutus deformatsioonimeetodiga. Raami mõjuvad loormused on näidatud joonisel. Raami tüüp ja post on koostreueeritud lintprofiilina 2 I 14.



JOON 3 46

$$I_z = 2 \cdot 1330 = 2660 \text{ cm}^4$$

$$W_z = 2 \cdot 148 = 296 \text{ cm}^3$$

Kaasolevas näites on raami seetõttu et rüü otsad on hinnatud lühivate legenditugevusega, geomeetrilise maaramatuse aste ühe võrra suurem võrreldes eelmise näitega. Fundamenditeks geomeetrisesteks parameetriteks on sõlme A poordenurk ξ_1 ja posti AD (3) poorde nurk θ . Lisaks surve pikijõule on post koormatud põiki mõjuva ühtlase jaotatud koormusega p_3 .

Geomeetriselt määratud põhi skeemi saamiseks tuleb asetada raami ühele hisasidemed sõlme A ja varda ja poordunise vastu. Need

lisasidemed on joonisel esitatud katkendjoontega. Kuna raami varrestele pikkused on võrdsed, siis on ka nende ühikjaikused võrdsed:

$$i_1 = i_2 = i_3 = 1 \quad (a)$$

Koostame kõigepealt sõlme A ja varda AD ühikpöördenurkadest põhjustatud reaktsioonide avaldised.

$$\begin{aligned} r_{AA} &= 3i_1 + 3i_2 + 4i_3\varphi_2(v_3) = 6 + 4\varphi_2(v_3) \\ r_{A1} &= r_{1A} = -6i_3\varphi_4(v_3) = -6\varphi_4(v_3) \\ r_{11} &= 12i_3i_2(v_3) = 12\eta_2(v_3) \end{aligned} \quad (b)$$

Reaktsioonid lisasidemetes väliskoormusest

$$\begin{aligned} R_{AP} &= \frac{p_3 l^2}{12} \chi^*(v) - \frac{p_2 l^2}{8} = \frac{0,5 \cdot 6^2}{12} \chi^*(v_3) - \frac{1 \cdot 6^2}{8} = \\ &= 1,5\chi^*(v_3) - 4,5 \\ R_{1P} &= -S_{13} = -\frac{p_3 l^2}{2} = -\frac{0,56^2}{2} = -9 \end{aligned} \quad (d)$$

Varda B pöördumist takistavas lisasides tekkinud reaktsioon on arvutatud võimaliku töö kaudu varda pöördumise hetkeskme, s. o. punkti D suhtes.*

S_{13} on väliskoormuse staatiline moment punkti D suhtes. Kuna varda otses esinevad kinnitusemomendid on võrdsed, kuid vastassuunalised, siis nende võimalikud tööd hävivad vastastikku.

Arvutame algul raami, ilma et võtaksime arvesse vardas AD esi-
neva pikijõu mõju raami deformatsioonile, s. o. oletame, et

$$v_3 = 0 \quad (e)$$

Seilest tuleneb aga, et

$$\varphi_2(v) = \varphi_3(v) = \varphi_4(v) = \eta_2(v) = \chi^*(v) = 1 \quad (d)$$

Nüüd saame lisasidemete reaktsioonide väärtusteks

$$\begin{aligned} r_{AA} &= 10, \quad r_{A1} = r_{1A} = -6, \quad r_{11} = 12 \\ R_{A1} &= \frac{p_3 l^2}{12} - \frac{p_2 l^2}{8} = \frac{0,5 \cdot 6^2}{12} - \frac{1 \cdot 6^2}{8} = 1,5 - 4,5 = -3,0 \text{ tm} \\ R_{1P} &= -S_{13} = -\frac{p_3 l^2}{2} = -\frac{0,5 \cdot 6^2}{2} = -9 \text{ tm} \end{aligned} \quad (g)$$

Koostame deformatsioonimeetodi kanooniliste võrrandite süsteemi:

$$\begin{aligned} 10\xi_A - 6\theta - 3,0 &= 0 \\ -6\xi_A + 12\theta - 9,0 &= 0 \end{aligned} \quad (h)$$

Süsteemi (h) lahendid on järgmised:

$$\begin{aligned} \xi_A &= \frac{15}{14} = 1,0714 \\ \theta &= \frac{7,714}{6} = 1,2857 \end{aligned}$$

* Meetodit on selgitatud õpikus [18], lk. 688.

Arvutame nüüd momendid varraste otistes

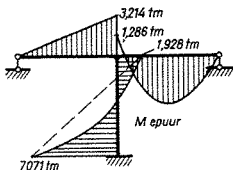
$$M_A^{(1)} = 3t_1 \xi_A = 3 \cdot 1,0714 = 3,214 \text{ tm}$$

$$M_A^{(2)} = 3t_2 \xi_A - \frac{\rho_2 l^2}{8} = 3,214 - 4,500 = -1,286 \text{ tm}$$

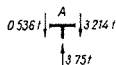
$$M_A^{(3)} = 4t_3 \xi_A - 6t_3 \theta + \frac{\rho_3 l^2}{12} = 4 \cdot 1,0714 - 6 \cdot 1,2857 + \frac{0,5 \cdot 6^2}{12} = 4,2856 - 7,7142 + 1,5000 = -1,928 \text{ tm}$$

$$M_B^{(3)} = 2t_3 \xi_A - 6t_3 \theta - \frac{\rho_3 l^2}{12} = 2 \cdot 1,0714 - 6 \cdot 1,2857 - 1,5000 = 2,1428 - 7,7142 - 1,5000 = -7,071 \text{ tm}$$

Momendi epuur on esitatud joonisel 3 47



JOON 3 47



JOON 3 48

Leiame nüüd põikjõud varraste otistes sõlme 4 juure.

$$Q_A^{(1)} = -\frac{3,214}{6} = -0,536$$

$$Q_A^{(2)} = \frac{1,286}{6} + \frac{\rho_2 l}{2} = 0,214 + 3 = 3,214$$

Sõlme A tasakaalutingimusest vertikaalsuhtle leiame valdas AD esineva pikijõu (joon 3 48), mis tekib põikkoormuste ρ_2 ja t_3 mõjul

$$N_{Ap}^{(3)} = 3,214 + 0,536 = 3,75 \text{ t}$$

Nüüd arvutame raami arvesse võttes raami postis esineva pikijõu mõju raami deformatsioonile

Lisaks pikijõule põikkoormusest lisandub veel sõlmkoormus $P = 15,0 \text{ t}$ Kogu pikijõud on seega

$$N_A^{(3)} = N_{Ap}^{(3)} + P = 3,75 + 15,0 = 18,75 \text{ t}$$

Leiame pikijõu mõju argumendi $v_3 = l \sqrt{\frac{N^{(3)}}{EI}}$ ning seejärel tabelitest II 3 ja II 5 sellele mõjuargumendile vastavad parandus- tegurid

$$v_3 = 1 \sqrt{\frac{N^{(3)}}{EI}} = 600 \sqrt{\frac{18\,750}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3460}} = 0,963$$

$$\varphi_2(v) = 0,9687; \quad \varphi_3(v) = 1,0160; \quad \varphi_4(v) = 0,9845; \quad \eta_2(v) = 0,9071;$$

$$\chi^*(v) = 1,0164$$

Kasutades seoseid (b), (c) ja (d), leiame lisasidemete reaktsioonid:

$$r_{AA} = 6 \cdot 4 \cdot 0,9687 = 9,875$$

$$r_{A1} = r_{1A} = -6 \cdot 0,9845 = -5,907$$

$$r_{11} = 12 \cdot 0,9071 = 10,885$$

$$R_{AP} = \frac{p_3 l^2}{12} \chi^*(v) - \frac{p_2 l^2}{8} = 1,5 \cdot 1,0164 - 4,5 = -2,9754$$

$$R_{1P} = -9$$

Kanooniliste võrrandite süsteemi saame nüüd:

$$9,875 \xi_A - 5,907 \theta - 2,9754 = 0$$

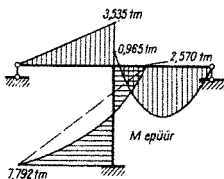
$$5,907 \xi_A + 10,885 \theta - 9 = 0$$

Selle võrrandi juured on:

$$\xi_A = 1,1784$$

ja

$$\theta = 1,4663$$



JOON. 3.49

Arvutame nüüd paindemomendid varraste otstes:

$$M_A^{(1)} = 3i_1 \xi_A = 3 \cdot 1,1784 = 3,535 \text{ tm}$$

$$M_A^{(2)} = 3i_2 \xi_A - \frac{p l^2}{8} = 3,535 - 4,5000 = -0,965 \text{ tm}$$

$$M_A^{(3)} = 4i_3 \xi_A \varphi_2(v) - 6i_3 \theta \varphi_4(v) + \frac{p_3 l^2}{12} \chi^*(v) =$$

$$= 4 \cdot 1,1784 \cdot 0,9687 - 6 \cdot 1,4663 \cdot 0,9845 + 1,5 \cdot 1,0164 =$$

$$= 4,566 - 8,661 + 1,525 = -2,570 \text{ tm}$$

$$M_D^{(3)} = 2i_3 \xi_A \varphi_3(v) - 6i_3 \theta \varphi_4(v) - \frac{p_3 l^2}{12} \chi^*(v) =$$

$$= 2 \cdot 1,1784 \cdot 1,0160 - 6 \cdot 1,4663 \cdot 0,9845 - 1,5 \cdot 1,0164 =$$

$$= 2,394 - 8,661 - 1,525 = -7,792 \text{ tm}$$

4 ÜHE VABADUSASTMEGA SÜSTEEMIDE DÜNAAMIKA

4.1 DÜNAAMILISED KOORMUSED JA NENDE MÕJU

Dünaamilisteks nimetatakse sääraseid koormusi, mille suurus või suund või rakenduskoht aja jooksul muutub. Sellised koormused põhjustavad inertsjõudude tekkimise konstruktsioonis endas ja temal asetsevais massides. Neid inertsjõude tuleb arvestada konstruktsioonis tekkivate paigutiste ja sisejõudude määramisel.

Tekkivate inertsjõudude suurus sõltub koormuse muutmise kiirusest. Kui koormuse muutmise periood (või ajavahemik, mille jooksul koormus saavutab oma maksimaalse väärtuse) on tunduvalt suurem konstruktsioonist ja temal asetsevaist massidest koosneva süsteemi vabavõnkumise perioodist, on inertsjõudude mõju hüljatavalt väike ja konstruktsiooni võib arvutada staatiliselt koormatuna.

Dünaamilised koormused mõjuvad ehituskonstruktsioonidele küllaltki sageli. Dünaamilist mõju avaldavad töötavad masinad, liikuvad sõidukid ja inimesed, kraanad, mitmesugused langevad või väljapuistatavad koormused, tuul, lainetus, liikuv jää jne. Neid võib liigitada järgmiselt.

1. Perioodiline paigalasuva koormus. Säärast koormust põhjustavad tavaliselt mitmesugused konstruktsioonile kinnitatud masinad ja teda iseloomustab perioodiline muutumine. Kui koormus muutub sinusooidselt, nimetatakse teda harmooniliseks.

2. Liikuv koormus, mis muudab oma asendit konstruktsioonil, näiteks üle silla sõitev rong.

3. Impulsskoormus, mida iseloomustab koormuse kiire tekkimine ja kadumine. Sellist koormust võib põhjustada näiteks plahvatus.

4. Löökkormus on impulsskormusega sarnane selles mõttes, et ka siin kasvab kormus kiiresti. Erinevalt impulsskormusest löökkormus ei kao ja lööki andnud keha jääb võnkuma koos põhisüsteemiga.

5. Korrapäratud kormused (tuul, maaväriseimine).

Ühekordne kormus põhjustab konstruktiooni vabavõnkumise, mille periood sõltub konstruktiooni elastsusomadustest ning temal asetsevaist massidest, aga amplituud — kormuse poolt antud algtingimustest. Kui sellele kormusele järgneb mingi teine ühekordne kormus, põhjustab see uued vabavõnkumised, mis superponeeruvad eelmistega, jne. Mitmesuguste konstruktioonile mõjuvate hõõrdumistakistuste tõttu sumbuvad vabavõnkumised võrdlemisi kiiresti.

Perioodiline kormus põhjustab konstruktiooni sundvõnkumise, mis kestab niikaua, kuni kestab kormuse mõju. Sundvõnkumise amplituud võib olla mitmekordselt suurem konstruktiooni läbipaindest sama suure staatilise kormuse mõjumisel.

Dünaamilise kormuse olemasolul tekivad järgmised probleemid:

- 1) dünaamilise kormuse iseloom ja suurus;
- 2) konstruktioonist ja temal asuvaist massidest koosneva süsteemi vabadusastme ning omavõnkesageduste määramine;
- 3) kormuse mõjul tekkivate inertsjõudude, paigutiste ja sisejõudude ning pingete leidmine;
- 4) konstruktiooni materjali käitumine dünaamilisel kormamisel ning ohtlike ja lubatavate pingete või kormuste leidmine.

Käesolevas kursuses on käsitletud ainult varraskonstruktioonide omavõnkesageduste ja neis konstruktioonides dünaamiliste välisjõudude mõjul tekkivate paigutiste ja sisejõudude määramist. Kormuse määramine kuulub masinaelementide ja ehituskonstruktioonide valdkonda, sisejõududele vastavate pingetega ja lubatavate pingetega tegeleb tugevusõpetus.

Algul käsitleme lühidalt ühe vabadusastmega süsteeme. Nendega tutvutakse küll juba teoreetilises mehaanikas ja tugevusõpetuses, kuid kuna nende tundmine on aluseks kõrgema vabadusastmega süsteemide dünaamika mõistmisele, osutub põhimõistete kordamine ja mõningate uute

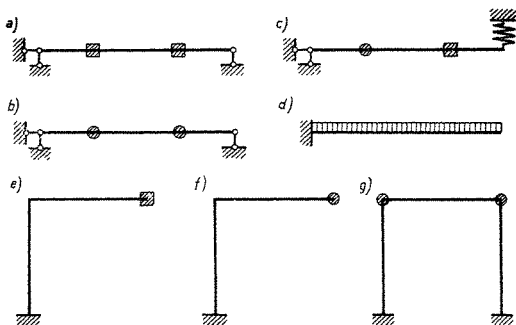
juurdetoomine vajalikuks. Järgnevalt vaatleme mitme vabadusastmega süsteeme, jaotatud massiga süsteeme ja ligikaudseid arvutusmeetodeid.

Varraskonstruksioonide dünaamikat käsitlevais peatükkides oletame, et konstruktsioon on lineaarselt deformeeruv ja sumbuvusjõud kas puuduvad või on võrdelised kiiruse esimese astmega.

4.2 VÕNKUVA SÜSTEEMI VABADUSASTE JA SELLE MAÄRAMINE

Võnkuvate süsteemide dünaamikas nimetatakse vabadusastmeks sõltumatute geomeetriliste parameetrite arvu, mis määravad kõigi võnkuvate masside asendid. Teisiti öeldult: **vabadusaste on sidemete arv, mis on vajalik kõigi masside liikumatuks kinnitamiseks.** Seejuures loetakse, et punktmassi (s. t. massi, mille inertsmoment võrdub nulliga) kinnitamine pöörde suhtes pole vajalik, kuna säärane mass pöördel tööd ei tee. Seega massil on ruumis kuni kuus ja tasandil kuni kolm vabadusastet; punktmassil on ruumis kuni kolm ja tasandil kuni kaks vabadusastet.

Määrame mõningate tasandiliste süsteemide (joon. 4.1) vabadusastmete arvu.



JOON 4.1

Joonisel 4.1, *a* kujutatud kahel massil, mis on kinnitatud painduvale kokkusurumatule talale, on neli vabadusastet (masside vertikaalsiirde ja pöörded); vastavate punktmasside (joon. 4.1, *b*) vabadusastmete arv on kaks.

Joonisel 4.1, *e* kujutatud massil on kolm vabadusastet (kaks siire ja pööre), vastaval punktmassil (joon. 4.1, *f*) — kaks.

Kahel joonisel 4.1, *g* kujutatud kokkusurumatutest painduvatest varrastest raamile kinnitatud punktmassil on kokku üks vabadusaste, kuna nende siirde takistamiseks piisab ühest sidemest.

Joonisel 4.1, *c* kujutatud kahe massiga koormatud elastselt kinnitatud absoluutselt jäigal talal on üks vabadusaste, sest selle süsteemi liikumatuks muutmiseks piisab ühest sidemest.

Joonisel 4.1, *d* kujutatud jaotatud massiga konsooli vabadusaste on lõpmata suur, kuna jaotatud massi võib vaadelda koosnevana lõpmatust hulgast massipunktidest.

4.3 VONKVA MASSIPUNKTI TASAKAALU DIFERENTSIAALVÖRRAND

Vaatleme elastselt kinnitatud massipunkti $M = Q/g$, mis võib liikuda ainult ühes sihis, s. t. millel on ainult üks vabadusaste. Tähistame massipunkti kauguse staatilise tasakaaluasendist tähega v ja ta siirde võimaliku liikumise sihis rakendatud ühikjõust tähega δ . Ühiksiirde põhjustamiseks vajalik jõud olgu $r = 1/\delta$.

Üldjuhul mõjuvad sellele massipunktile järgmised neli jõudu.

1. Inertsjõud H , mis võrdub massi M ja kiirenduse \ddot{v} korrutisega ning on suunatud kiirendusele vastassuunaliselt:

$$H = -M\ddot{v} \quad (4.1)$$

2. Elastse süsteemi reaktsioon R , mille loeme võrdeliseks kaugusega tasakaaluasendist. Reaktsioon on vastassuunaline paigutisele, seega

$$R = -\frac{v}{\delta} = -rv \quad (4.2)$$

3. Välis- ja sisehõõrdumisest põhjustatud takistusjõud (sumbuvusjõud) D , mis on liikumisele vastassuu-

nalised ja võivad olla iseloomult mitmesugused: liikumisel konstantsed (kuiv hõõrdumine), kiirusega võrdelised (hõõrdumine viskooses keskkonnas), kiiruse ruuduga võrdelised (õhu takistus suurtel kiirustel) jne. Ehituskonstruksioonides, kus suurema osa liikumistakistusest moodustab sisehõõrdumine, loetakse tavaliselt takistus võrdeliseks kiirusega \dot{v} :

$$D = -h\dot{v} \quad (4.3)$$

kus h on proportsionaalsustegur. Sellele on vastuväiteid, kuid teised oletused nõuavad tunduvalt keerulisemat matemaatilist aparatuuri.

4. Välisjõud P , mis on üldjuhul mingisugune funktsioon ajast: $P = P(t)$.

Nende jõudude kogusumma peab *d'Alembert*'i printsiibi põhjal võrduma nulliga:

$$H + R + D + P = 0 \quad (4.4)$$

Asendades jõud nende avaldistega (4.1)–(4.3), saame:

$$M\ddot{v} + rv + h\dot{v} = P \quad (4.5)$$

Tähistades

$$\frac{r}{M} = \omega^2; \quad \frac{h}{M} = 2k \quad (4.6)$$

võime võrrandi (4.5) ümber kirjutada järgmiselt:

$$\ddot{v} + 2k\dot{v} + \omega^2v = \frac{P}{M} \quad (4.7)$$

Võrrand (4.7) on ühe vabadasastmega süsteemide dünaamika uurimisel põhivõrrandiks.

Kui on tegemist mitte siird-, vaid pöördliikumisega, tuleb võnkuva massi suurus M asendada selle massi inertsmomentidega J pöördtelje suhtes, ühikjõust tingitud siire δ asendada ühikmomentist tingitud pöördega ϕ ja ühiksiiret põhjustav jõud r asendada ühikpöoret põhjustava momentidega μ .

4.4 OMAVÕNKESAGEDUSE MÄÄRAMINE

Omaõnkesageduse määramisel loeme võrrandis (4.7) välisjõu võrdseks nulliga ja vaatleme homogeenet diferentsiaalvõrrandit

$$\ddot{v} + 2k\dot{v} + \omega^2v = 0 \quad (4.8)$$

Kui hõõrdetakistust osutub võimalikuks hüljata, saame siit võrrandi

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0 \quad (4.9)$$

mille lahend

$$v = B \sin \omega t + C \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.10)$$

Selles avaldises esinevatel suurustel on järgmine tähendus:

ω — võnkumise nurksagedus,

A — amplituud, C — siire ja ωB — kiirus hetkel, kui $t = 0$,

φ — faasinurk.

Vastavalt avaldisele (4.6)

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{M}} = \sqrt{\frac{1}{M\delta}} = \sqrt{\frac{g}{Q\delta}} = \sqrt{\frac{g}{v_{st}}} \quad (4.11)$$

kus v_{st} on võnkumise massi staatiline paigutus sel juhul, kui raskuskiirendus mõjub massi liikumise sihis.

Pöördivõnkumisel

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{I\theta}} \quad (4.12)$$

Tehnikas kasutatakse nurksageduse ω asemel sageli võnkesagedusi n või n' :

$$n = \frac{\omega}{2\pi} \left[\frac{\text{võnget}}{s} \right]; \quad n' = 60n = \frac{30\omega}{\pi} \left[\frac{\text{võnget}}{\text{min.}} \right] \quad (4.13)$$

Ligikaudu

$$n' = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{981}{v_{st}}} \approx \frac{300}{\sqrt{v_{st}}}$$

kus v_{st} on avaldatud sentimeetrites.

Ühe täisvõnke sooritamiseks vajalikku ajavahemikku T nimetatakse võnkeperioodiks ja leitakse valemist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.14)$$

Vabavõnkumiste amplituud jääb tavaliselt määramata. Kui on aga teada siire v ja kiirus \dot{v} mingil hetkel, võib amplituudi nende kaudu leida.

tähega η ja nimetatakse sumbuvuse dekrementiks. Tema väärtuse leiame avaldisest

$$\eta = \frac{v(t)}{v(t + T'/2)} = \frac{e^{-kt}}{e^{-k(t+T'/2)}} = e^{kT'/2} \quad (4.18)$$

Selle suuruse naturaalogaritmi nimetatakse sumbuvuse logaritmiliseks dekrementiks. Tema väärtus

$$\ln \eta = k \frac{T'}{2} \quad (4.19)$$

Juhul kui $k^2 > \omega^2$, on võrrandi (4.8) lahendiks

$$v = e^{-kt} (B'' \operatorname{sh} \omega'' t + C'' \operatorname{ch} \omega'' t) \quad (4.20)$$

kus

$$\omega'' = \sqrt{k^2 - \omega^2} \quad (4.21)$$

Kuna see lahend on mitteperioodilistes (hüperboolsetes) funktsioonides, siis sellise suure sumbuvuse korral võnkumist faktiliselt ei esine. Sel juhul nimetatakse võnkumist aperiodiliseks.

4.5 SUNDVÖNKUMINE

4.51 Sundvõnkumine harmoonilise jõu mõjumisel

Mõjugu massile M perioodiliselt muutuv jõud $P = P^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Diferentsiaalvõrrand (4.7) kujuneb sel juhul järgmiseks:

$$\ddot{v} + 2k\dot{v} + \omega^2 v = \frac{P^0}{M} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.22)$$

Selle võrrandi lahend koosneb vastava homogeense võrrandi lahendist ja mingist erilahendist. Juhul kui vaatleme stabiliseerunud protsessi, ei paku homogeense võrrandi lahend huvi, sest homogeense võrrandi lahend vastab süsteemi vabavõnkumisele, vabavõnkumised aga praktiliselt alati sumbuvad teatud aja jooksul.

Kui sumbuvustegur k võrdub nulliga, võib võrrandi (4.22) lahendiks võtta

$$v = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.23)$$

Asendades avaldise (4.23) võrrandisse (4.22) leiame, et võnkumise amplituud (maksimaalne kaugus tasakaaluasendist)

$$A = \frac{P^0}{M} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (4.24)$$

Juhul kui $k \neq 0$, kujuneb lahend keerulisemaks. Sel juhul tuleb teda otsida kujul

$$v = B' \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + C' \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.25)$$

Asendades selle avaldise võrrandisse (4.22) ja võrrutades omavahel liikmed, mis sisaldavad $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ või $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, saame kahest võrrandist koosneva süsteemi

$$\begin{aligned} B'(\omega^2 - \omega_0^2) - 2k\omega_0 C' &= P^0/M \\ 2k\omega B' + C'(\omega^2 - \omega_0^2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

mille lahendiks on

$$\begin{aligned} B' &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2\omega_0^2} \frac{P^0}{M} \\ C' &= \frac{-2k\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4k^2\omega_0^2} \frac{P^0}{M} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Sundvõnkumise amplituudiks on

$$A' = \sqrt{(B')^2 + (C')^2} = \frac{P^0}{M} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2\omega_0^2}} \quad (4.28)$$

Avaldistele (4.24) ja (4.28) võib anda veidi teistsuguse kuju. Pidades silmas, et vastavalt avaldisele (4.11) $\omega^2 = g/v_{st}$, aga $Mg = Q$, saame:

$$\frac{P^0}{M\omega^2} = \frac{P^0}{Mg} v_{st} = \frac{P^0}{Q} v_{st} = v_{st}^{(P^0)} \quad (4.29)$$

kus $v_{st}^{(P^0)}$ on staatiline siire jõust P^0 ilma võnkuva massi inertsjõude ja hõõrdetakistust arvestamata. Arvestades seost (4.29), saame sumbuvuseta süsteemi amplituudi avaldiseks

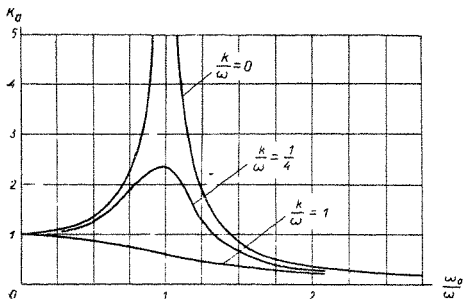
$$A = v_{st}^{(P^0)} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = v_{st}^{(P^0)} \cdot K_d$$

ja sumbuvusena süsteemi amplituudi avaldiseks

$$A' = v_{st}^{(P^0)} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \frac{k^2\omega_0^2}{\omega^4}}} = v_{st}^{(P^0)} \cdot K_d'$$

Neis avaldistes K_d ja vastavalt K_d' on nn. dünaamika tegur — suurus, millega tuleb korrutada staatilist läbipainet väliskoormusest, et saada sundvõnkumise amplituudi.

Diagramm, mis iseloomustab dünaamika teguri absoluutväärtuse muutumist, on toodud joonisel 4.3.



JOON. 4.3

Nagu jooniselt näha, läheneb dünaamika tegur resonantsi puhul, kui häiriva jõu sagedus ja süsteemi omavõnkesagedus on võrdsed, sumbuveseta konstruktsioonides lõpmatuks ja võnkumise amplituud kasvab lõpmata suureks. Häiriva sageduse edasisel suurenemisel dünaamika tegur väheneb ja läheneb nullile.

Sumbuvusega konstruktsioonides dünaamika tegur lõpmatuseni ei kasva, kuid võib saada siiski küllalt suure väärtuse. Seepärast tuleb konstruktsiooni omavõnkesagedus valida reeglina niisugune, et ta erineks masina töösagedusest vähemalt 30%.

Kiire üleminek resonantsipiirkonnast on lubatav. Käesolevas punktis vaatlesime stabiliseerunud protsessi, muutuva sagedusega häiriva jõu kohta kehtivad saadud valemid aga ainult ligikaudselt. Vastavalt täpsematele uurimistele muutuva sagedusega häiriva jõu kohta jäävad ka sumbuveseta konstruktsioonides amplituudid resonantsipiirkonna ületamisel lõplikeks.

4.52 Impulsi mõju

Impulsiks nimetatakse lõpmata väikese ajavahe-
miku jooksul mõjuvat jõudu. Impulsi suurus

$$dU = P dt \quad (4.30)$$

kus P on jõu keskmine väärtus impulsi vältel. Teisest küljest aga impulss, mis kujutab endast liikumishulka, peab võrduma selle massi, millele impulss mõjub, ja tema kiiruse korrutisega:

$$dU = M \dot{v} \quad (4.31)$$

Impulss põhjustab massi võnkumise tema staatilise tasakaaluasendi ümber. Algsiire impulsi mõjumishetkel võrdugu nulliga. Algkiiruse saame, võrrutades avaldised (4.30) ja (4.31), millest

$$\dot{v} = \frac{P dt}{M} \quad (4.32)$$

Teades algsiiret ja algkiirust, võime kirjutada avaldise, mis kirjeldab massi liikumist pärast impulsi mõju lakamist. Nii saame konstruktsiooni jaoks, mille sumbu-
vustegur k võrdub nulliga, avaldiste (4.10) ja (4.15) alusel järgmise liikumisvõrrandi:

$$v = \frac{P dt}{M\omega} \sin \omega(t - t_i) \quad (4.33)$$

kus t_i vastab ajahetkele, mil impulss mõjus.

4.53 Suvaliselt muutuv välisjõud

Massipunkti siirde avaldise suvalise välisjõu $P(t)$ mõjumisel võib saada otseselt võrrandi (4.7)

$$\ddot{v} + 2k\dot{v} + \omega^2 v = \frac{P(t)}{M}$$

integreerimisel. See on võrdlemisi hõlpsasti teostatav, kui välisjõud $P(t)$ on avaldatav polünoomina (trigonomeetrilistest funktsioonidest rääkimata). Näitena vaatleme juhtu, kus $P(t)$ on konstantne suurus, seega nullastme polünoom. Massipunkti liikumist kirjeldab sel juhul homogeense võrrandi lahendist (4.16) ja erilahendist koosnev avaldis

$$v = e^{-kt}(B' \sin \omega't + C' \cos \omega't) + \frac{P}{M\omega^2} \quad (a)$$

Tegurid B' ja C' leiame algtingimustest: liikumise algul, s. o. hetkel $t = 0$, võrduvad nulliga siire ja liikumiskiirus:

$$v_0 = \dot{v}_0 = 0 \quad (b)$$

Asetades siirde avaldise (a) tingimustesse (b), saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} C' + \frac{P}{M\omega^2} &= 0 \\ B'\omega' - C'k &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

millest

$$C' = -\frac{P}{M\omega^2}; \quad B' = -\frac{P}{M\omega^2} \frac{k}{\omega'} \quad (d)$$

Kuna vastavalt avaldisele (4.29) $P/M\omega^2$ on massi M staatiline paigutus jõust P , mille tähistame $v_{st}^{(P)}$, siis

$$C' = -v_{st}^{(P)}; \quad B' = -v_{st}^{(P)} \frac{k}{\omega'}$$

ja võrrand (a) kujuneb järgmiseks:

$$v = v_{st}^{(P)} \left[1 - e^{kt} \left(\frac{k}{\omega'} \sin \omega't + \cos \omega't \right) \right] \quad (e)$$

Võrrutades avaldise (e) tuletise aja suhtes nulliga, leiame, et maksimaalne siire vastab hetkele, kui $\omega't = \pi$, ja selle suuruseks on

$$\max v = v_{st}^{(P)} (1 + e^{-k\pi/\omega}) \quad (f)$$

Seega dünaamika tegur

$$K_d = 1 + e^{-k\pi/\omega} \quad (g)$$

Erijuhul, kui sumbuvalt tegur $k = 0$, võrdub dünaamika tegur kahega.

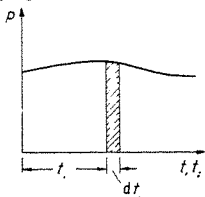
Üldjuhul, kui välisjõu suurus muutub mingi suvalise graafiku järgi (joon. 4.4), on hõlpsam diferentsiaalvõrrandi (4.7) asemel kasutada vastavat integraalvõrrandit. Selle võib saada otseselt diferentsiaalvõrrandist (4.7) (vt. [14], lk. 103). Lihtsam on teda aga saada, kui vaadelda välisjõudu üksikute impulsside summamana ja integreerida avaldist (4.33), mis kujutab läbipainet üksikust impulssist.

Vaatleme ainult juhtu, kui sumbuvustegur $k = 0$.

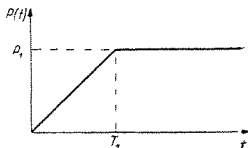
Tähistame suvalise ajahetke tähega t ; hetk, mil impuls mõjub, olgu t_i . Integreerides avaldist (4.33) piirides $0-t$ ja võttes arvesse konstruktsiooni võimalikku vabavõnkumist (4.10), mis võis olla tingitud mingist eelnenud koormusest, saame:

$$v = v_0 \cos \omega t + \frac{\dot{v}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{M\omega} \int_0^t P(t) \sin \omega(t - t_i) dt_i, \quad (4.34)$$

Esimesed kaks liiget sõltuvad algtingimustest. Erijuhul, kui enne impulsi rakendamist massipunkt seisipaigal, võrduvad nad nulliga.



JOON. 4.4



JOON. 4.5

Avaldise (4.34) kasutamise näitena vaatleme juhtu, kus väliskoormus P kasvab lineaarselt ajavahemiku T_1 vältel kuni lõpliku väärtuseni P_1 (joon. 4.5).

$$\text{Algul, kui } t \leq T_1, \quad P = P_1 \frac{t}{T_1}$$

ja

$$v = \frac{P_1}{M\omega T_1} \int_0^t t_i \sin \omega(t - t_i) dt_i \quad (a)$$

Integreerides avaldist (a) ositi ja võttes arvesse, et $P_1/M\omega^2 = v_{st}^{(P_1)}$ (staatiline läbipaine jõust P_1), leiame:

$$v = v_{st}^{(P_1)} \left(\frac{t}{T_1} - \frac{1}{\omega T_1} \sin \omega t \right) \quad (b)$$

Kui $t \geq T_1$, on jõu $P(t)$ suurus konstantne: $P(t) = P_1$. Läbipainde avaldiseks kujuneb:

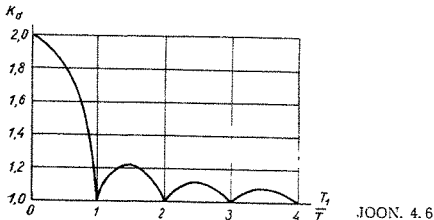
$$\begin{aligned}
 v &= \frac{P_1}{M\omega T_1} \int_0^{T_1} t_1 \sin \omega(t - t_1) dt_1 + \\
 &+ \frac{P_1}{M\omega} \int_{T_1}^t \sin \omega(t - t_1) dt_1 = \\
 &= v_{st}^{(P)} \left[1 - \frac{2}{\omega T_1} \sin \frac{\omega T_1}{2} \cos \omega \left(t - \frac{T_1}{2} \right) \right] \quad (c)
 \end{aligned}$$

Dünaamika teguri väärtus on suurem selles aja- vahemikus, kui $t > T_1$:

$$K_d = 1 + \frac{2}{\omega T_1} \left| \sin \frac{\omega T_1}{2} \right| = 1 + \frac{T}{\pi T_1} \left| \sin \pi \frac{T_1}{T} \right| \quad (d)$$

kus $T = 2\pi/\omega$ on vabavõnkumise periood.

Dünaamika teguri sõltuvus jõu lõpliku väärtuse saamiseks kuluva aja ja vabavõnkumise perioodi suhtest on näidatud joonisel 4.6.



Seega võib orienteerivalt öelda, et võnkumisahtuste arvestamata jätmisega tehtav viga on alla 22%, kui jõud omandab lõpliku väärtuse ühe omavõnkperioodi vältel, ja alla 9%, kui see toimub kolme omavõnkperioodi vältel.

5 MITME VABADUSASTMEGA SÜSTEEMIDE DÜNAAMIKA

Käesolevas peatükis vaatleme sääraseid võnkuvaid süsteeme, mille vabadusaste on ühest suurem, kuid lõplik. Niisuguste süsteemide dünaamikast käsitleme kaht probleemi: omavõnkesageduste määramist ja harmoonilisel sundvõnkumisel tekkivate dünaamiliste koormuste ning amplituudide leidmist.

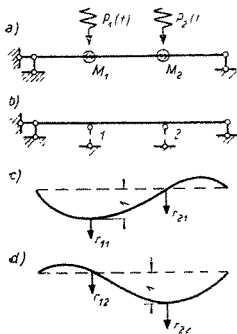
Kasutame nagu eelmiseski peatükis staatilise tasakaalu meetodit. Kirjutame välja võnkumisel igale massipunktile mõjuvad jõud, kusjuures inertsjõude vaatleme *d'Alembert'*i printsiibi alusel staatiliste jõududena. Nende jõudude projektsioonide summa massipunktide võimaliku liikumise sihtidele peab võrduma nulliga. Sellest tingimusest saamegi otsitavad võrrandid.

Seletuskäigu lihtsustamiseks alustame kahest massipunktist koosneva süsteemiga, milles kumbki massipunkt saab liikuda ainult ühes sihis. Saadud tulemused üldistame suvalise vabadusastmega süsteemidele, kusjuures piirdume ainult sumbuvuseta süsteemide üksikasjalisema vaatlusega, kuna vastavad arvutused sumbuvusese süsteemide kohta kujuneksid liiga mahukateks ega pakuks põhimõtteliselt midagi uut.

5.1 KAHE VABADUSASTMEGA SÜSTEEMI TASAKAALU DIFERENTSIAALVÖRRANDID

5.11 Deformatsioonimeetod

Asugu kaalutul talal (joon. 5.1, *a*) kaks koondatud massi M_1 ja M_2 . Mõjugu masside asukohas veel ajas muutuvad välisjõud $P_1(t)$ ja $P_2(t)$.



JOON 5 1

Toodud süsteemil on kaks vabadusastet, kuna kumbki mass võib omaette võnkuda tala telje ristsihis. Neid liikumisvabadusi on võimalik kõrvaldada kahe tala teljega risti oleva sidemega, nagu näidatud joonisel 5. 1, b.

Valime tala elastsusomadusi iseloomustavateks suurusteks sidemete ühikpaigutistel tekkivad reaktsioonid (joon. 5. 1, c). Sidemele 1 antud ühiksiire põhjustab reaktsioonid r_{11} ja r_{21} , sidemele 2 antud ühiksiire aga reaktsioonid r_{12} ja r_{22} . Seega esimene indeks näitab kohta, kus vastav reaktsioon tekkis, aga teine indeks — selle reaktsiooni põhjust. Reaktsioonide vastastikkuse lause alusel $r_{12} = r_{21}$. Reaktsioonid loeme positiivseteks, kui nad mõjuvad siirete positiivsetes suundades, s. t. reaktsioonid r_{11} ja r_{12} on positiivsed, kui nad mõjuvad sideme 1 siirde suunas, ja reaktsioonid r_{21} ja r_{22} on positiivsed, kui nad mõjuvad sideme 2 siirde suunas

Massi M_1 paigutise tähistame v_1 , massi M_2 paigutise — v_2 .

Massile M_1 mõjuvad võnkumisel järgmised jõud:

1) inertsijõud $H_1 = -M_1\ddot{v}_1$,

2) takistusjõud D , mille loeme võrdeliseks kiirusega:
 $D = -h\dot{v}_1$,

3) elastse konstruktsiooni (tala) reaktsioon $R_1 = - (r_{11}v_1 + r_{12}v_2)$,

4) välisjõud $P_1(t)$.

Nende jõudude summa peab võrduma nulliga:

$$-M_1\ddot{v}_1 - h_1\dot{v}_1 - (r_{11}v_1 + r_{12}v_2) + P_1(t) = 0 \quad (5.1)$$

Analoogilise võrrandi saab koostada teise massipunkti kohta. Seega kahe vabadasastmega süsteemi võnkumist kirjeldab kahest võrrandist koosnev diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{aligned} M_1\ddot{v}_1 + h_1\dot{v}_1 + (r_{11}v_1 + r_{12}v_2) &= P_1(t) \\ M_2\ddot{v}_2 + h_2\dot{v}_2 + (r_{21}v_1 + r_{22}v_2) &= P_2(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.12 Jõumeetod

Konstruktsiooni elastsusomadusi iseloomustavateks suurusteks võib ühiksiiretele vastavate reaktsioonide r_{jh} asemel võtta ühikjõududele vastavad siirded δ_{jh} , mille leidmine on paljudel juhtudel lihtsam. Selleks rakendame massipunktide võimaliku liikumise sihis ühikjõud ja leiame nendele vastavad siirded. Tähistused võtame analoogiliselt eelnevaga: δ_{11} tähistab punkti 1 siiret samas punktis rakendatud ühikjõust, δ_{21} — punkti 2 siiret punktis 1 rakendatud ühikjõust jne.

Sellised võnkumist iseloomustavad võrrandid, kus konstruktsiooni elastsusomadusi ei iseloomusta mitte ühiksiiretele vastavad reaktsioonid r_{jh} , vaid ühikjõududele vastavad siirded δ_{jh} , võib saada otseselt võrrandest (5.2). Selleks on esmalt tarvis teada seoseid r_{jh} ja δ_{jh} vahel. Tala koormamisel reaktsioonidega r_{11} ja r_{21} peab punkti 1 siire võrduma ühega ja punkti 2 siire nulliga; kui koormusteks on reaktsioonid r_{12} ja r_{22} , võrdub punkti 1 siire nulliga ja punkti 2 siire ühega. Neist tingimustest saame järgmised neli võrrandit:

$$\begin{aligned} \delta_{11}r_{11} + \delta_{12}r_{21} &= 1 \\ \delta_{21}r_{11} + \delta_{22}r_{21} &= 0 \\ \delta_{11}r_{12} + \delta_{12}r_{22} &= 0 \\ \delta_{21}r_{12} + \delta_{22}r_{22} &= 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Võrrandid (5.3) võib maatrikssümbolikas ümber kirjutada järgmiselt:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & r_{11} & r_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.3, a)$$

Seega r_{jk} maatriks on δ_{jk} pöördmaatriksiks.

Uhe otsitavaist võrrandeist saame, kui võrrandisüsteemi (5.2) esimese võrrandi korrutame teguriga δ_{11} , teise võrrandi teguriga δ_{12} ja liidame tulemused. Analoogiliselt leiame teise võrrandi. Arvestades seoseid (5.3), kujunevad nad järgmisteks:

$$\begin{aligned} \delta_{11}M_1\ddot{v}_1 + \delta_{12}M_2\ddot{v}_2 + \delta_{11}h_1\dot{v}_1 + \delta_{12}h_2\dot{v}_2 + v_1 &= \\ = \delta_{11}P_1(t) + \delta_{12}P_2(t) & \\ \delta_{21}M_1\ddot{v}_1 + \delta_{22}M_2\ddot{v}_2 + \delta_{21}h_1\dot{v}_1 + \delta_{22}h_2\dot{v}_2 + v_2 &= \\ = \delta_{21}P_1(t) + \delta_{22}P_2(t) & \end{aligned} \quad (5.4)$$

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi (5.4) võib tuletada ka otseselt Inertsjõude H , takistusjõude D ja välisjõude P võib kokku vaadelda elastsele konstruktsioonile mõjuva koormusena S :

$$\begin{aligned} S_1 &= -M_1\ddot{v}_1 - h\dot{v}_1 + P_1 \\ S_2 &= -M_2\ddot{v}_2 - h\dot{v}_2 + P_2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Siirded sellest koormusest

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta_{11}S_1 + \delta_{12}S_2 \\ v_2 &= \delta_{21}S_1 + \delta_{22}S_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Asendades nüüd võrrandis (5.6) koormuse S avaldistega (5.5), saadaksegi tulemuseks võrrandisüsteem (5.4).

Lõpuks võib tasakaalu diferentsiaalvõrrandid avaldada siirete v_1 ja v_2 asemel ka jõudude S_1 ja S_2 kaudu. Selleks paigutame võrranditesse (5.2) siirete v_1 ja v_2 asemele avaldised (5.6). Võttes arvesse seoseid (5.3) ning pidades silmas, et $\delta_{jk} = \delta_{kj}$ ja $r_{jk} = r_{kj}$, saadakse tulemuseks järgmine võrrandisüsteem:

$$M_1(\delta_{11}\ddot{S}_1 + \delta_{12}\ddot{S}_2) + h_1(\delta_{11}\dot{S}_1 + \delta_{12}\dot{S}_2) + S_1 = P_1 \quad (5.7)$$

$$M_2(\delta_{21}\ddot{S}_1 + \delta_{22}\ddot{S}_2) + h_2(\delta_{21}\dot{S}_1 + \delta_{22}\dot{S}_2) + S_2 = P_2$$

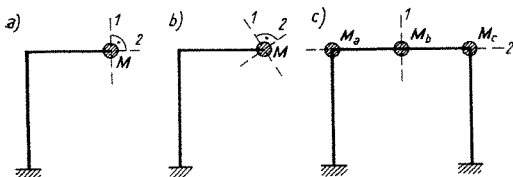
5.13 Erijuhud

Kahe vabadusastmega süsteemide dünaamika uurimiseks võib kasutada võrrandeid (5.2), (5.4) või (5.7). Võrrandite (5.2) kasutamine on soovitatav siis, kui ühiksiiretele vastavate reaktsioonide leidmine on lihtne; kui aga on kergem leida siirdeid uhikjõududest, siis on sobivamad võrrandid (5.4) või (5.7). Neist omakorda tuleb võrrandeid (5.4) eelistada sel juhul, kui lõppeesmärgiks on võnkumise amplituudi või võnkumiste kuju määramine, on aga eesmärgiks konstruktsioonis sundvõnkumisel tekkivate pingete leidmine, on parem kasutada võrrandeid (5.7), kuna pingete leidmine teadaoleva väliskoorumuse järgi on üldiselt lihtsam kui teadaolevate üksikute punktide paigutiste järgi.

Tuletamise käigus vaatlesime säärast kahe vabadusastmega süsteemi, mis koosnes kahest massipunktist, kusjuures kummalgi oli üks liikumisvabadus. Saadud võrrandid on aga üldisemad ja kehtivad ka teiste kahe vabadusastmega süsteemide kohta. Sealjuures võib aga esineda iseärasusi, millest mõnele juhime siin tähelepanu.

1. Kui võnkumine on põhjustatud inertsmomenti omava massi pöördliikumisest, tuleb toodud võrrandite vastavates liikmetes massi asemele paigutada tema inertsmoment, ühiksiirde asemele ühikpööre vastavas kohas ja ühikjõu asemele ühikmoment.

2. Kui kahe vabadusastmega süsteem koosneb ühestainsast massist, mille siirde iseloomustamiseks on aga vajalikud kaks koordinaati, siis massid M_1 ja M_2 on võrdsed: $M_1 = M_2 = M$, aga ühikjõudude resp. ühikpaigutuste sihtideks võib valida kaks suvalist teineteisega risti olevat sihti (joon. 5.2, a ja b).



JOON 5 2

3 Kõiki masse, mis liiguvad koos ühesuguse kiirusega, tuleb arvestada ühe massina. Joonisel 5.2, c kujutatud kahe vabadusastmega süsteemis vastab siirdele sihis 1 mass $M_1 = M_b$; siirdele sihis 2 vastab aga üldistatud mass $M_2 = M_a + M_b + M_c$.

Juhtu, kus massid liiguvad küll koos, kuid erinevate kiirustega, on käsitletud punktis 6 32 toodud näites.

5.2 VABAVÕNKUMINE

5.21 Sumbuvuseta konstruktsioonid

Omapõnkesageduste määramiseks võib kasutada diferentsiaalvõrrandite süsteeme (5.2) või (5.4), lugedes seal takistusjõud ja väliskoormused võrdseks nulliga: $h_1 = h_2 = P_1 = P_2 = 0$. Sobib muidugi ka võrrandisüsteem (5.7), mis annab aga põnkesageduste määramiseks samad avaldised nagu (5.4). Võrrandisüsteem (5.4) on eelistatavam selle tõttu, et ta võimaldab otseselt määrata ka vabavõnkumise kuju. Samuti on ta eelistatav ka vabavõnkumise amplituudi ja isegi vabavõnkumisel tekivate paindemomentide määramisel, kuna algtingimused on antud tavaliselt siiretes ja kiirustes, võrrandid (5.7) aga nõuavad konstruktsioonile mõjuvais dünaamilistes jõududes S antud algtingimusi. Nagu nähtub võrrandeist (5.5), ei võrdu dünaamilised jõud S aga väliskoormusega P .

Vaatleme algul võrrandisüsteemi (5.2), millest pärast välisjõudude ja sumbuvestegurite nulliga võrrutamist säilib

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{v}_1 + r_{11} v_1 + r_{12} v_2 &= 0 \\ M_2 \ddot{v}_2 + r_{21} v_1 + r_{22} v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Selle võrrandisüsteemi lahendit otsime järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ v_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Asendades avaldised (5.9) võrrandisüsteemi (5.8), saame:

$$\begin{aligned} (r_{11} - M_1 \omega^2) A_1 + r_{12} A_2 &= 0 \\ r_{21} A_1 + (r_{22} - M_2 \omega^2) A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Säärane homogeenne võrrandisüsteem võib omada nullist erineva lahendi ainult sel juhul, kui võrrandisüs-

teemi kordajaist moodustatud determinant võrdub nulliga:

$$\begin{vmatrix} r_{11} - M_1\omega^2 & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} - M_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.11)$$

Avades determinandi (5.11), saame ruutvõrrandi

$$M_1M_2(\omega^2)^2 - (M_1r_{22} + M_2r_{11})\omega^2 + (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}) = 0 \quad (5.11, a)$$

mille juured ω_1^2 ja ω_2^2 ongi otsitavate omavõnkesageduste ruutudeks.

Et leida kummalegi omavõnkesagedusele vastavat võn-
kumispiilti, avaldame võrrandisüsteemi (5.10) ükskõik
kummast võrrandist ühe amplituudi teise kaudu. Aval-
dame näiteks esimesest võrrandist amplituudi A_2 . Saame:

$$A_2 = -\frac{1}{r_{12}} (r_{11} - M_1\omega^2) A_1 \quad (5.12)$$

Paigutades siia ω^2 asemele võrrandist (5.11) leitud
 ω_1^2 , saame esimesele omavõnkesagedusele vastava ampli-
tuudide suhte, kuna aga ω_2^2 annab teisele omavõnkesage-
dusele vastava amplituudide suhte.

Kummalegi omavõnkesagedusele vastavat vabavõnkumist
nimetatakse *peavõnku miseks*. Peavõnkumise korral on võnkuvate massipunktide amplituudide suhe
igal hetkel sama [võrrand (5.12)]. Konstruktsioonil
moodustuvad seisvad lained, mille sõlmpunktid
jäävad liikumatuks. Üldjuhul aga võnkumine summeerub
üksikutest peavõnkumistest:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_{1(1)} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{1(2)} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ v_2 &= A_{2(1)} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{2(2)} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (5.13)$$

kus näiteks $A_{1(1)}$ ja $A_{2(1)}$ on esimesele omavõnkesagedusele
vastavad amplituudid ja φ_1 samale võnkesagedusele vas-
tav faasinurk. Avaldistes (5.13) esinevaist suurustest
määratakse ω determinandiga (5.11) ja amplituudide
suhte A_2/A_1 võrrandiga (5.12). Aja nullpunkt on vabalt
valitav. Määramata on seega neli parameetrit: amplituudid
 $A_{1(1)}$ ning $A_{1(2)}$ ja faasinurgad φ_1 ja φ_2 . Need suured
võib leida, kui on teada algtiingimused, s. o. kummagi
massipunkti siirded ja kiirused mingil hetkel t_0 . Säärane
ülesanne iekib näiteks lõõgile järgnevate võnkumiste
uurimisel. Tavaliselt aga piisab vabavõnkumiste uurimisest

omavõnkesageduste ja peavõnkumiste kuju leidmisest; amplituudide absoluutväärtused jäävad määramatuks.

Võrrandisüsteemi (5.2) asemel võib omavõnkesageduste määramiseks kasutada võrrandisüsteemi (5.4). Lugeses selles sumbuvusjõud ja välisjõud võrdseks nulliga, saame:

$$\begin{aligned} v_1 + M_1 \delta_{11} \ddot{v}_1 + M_2 \delta_{12} \ddot{v}_2 &= 0 \\ v_2 + M_1 \delta_{21} \ddot{v}_1 + M_2 \delta_{22} \ddot{v}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Selle võrrandisüsteemi lahendit otsime samuti kujul (5.9). Nende avaldiste asendamine võrrandisüsteemi (5.14) annab:

$$\begin{aligned} (1 - M_1 \delta_{11} \omega^2) A_1 - M_2 \delta_{12} \omega^2 A_2 &= 0 \\ -M_1 \delta_{21} \omega^2 A_1 + (1 - M_2 \delta_{22} \omega^2) A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Saadud võrrandeid on hõlpsam kasutada, kui neid eelnevalt jagada suurusega ω^2 . Saame:

$$\begin{aligned} (M_1 \delta_{11} - \omega^{-2}) A_1 + M_2 \delta_{12} A_2 &= 0 \\ M_1 \delta_{21} A_1 + (M_2 \delta_{22} - \omega^{-2}) A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Omavõnkesagedused saame jällegi, võrrutades võrrandisüsteemi (5.16) kordajatest moodustatud determinandi nulliga:

$$\begin{vmatrix} M_1 \delta_{11} - \omega^{-2} & M_2 \delta_{12} \\ M_1 \delta_{21} & M_2 \delta_{22} - \omega^{-2} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.17)$$

kust

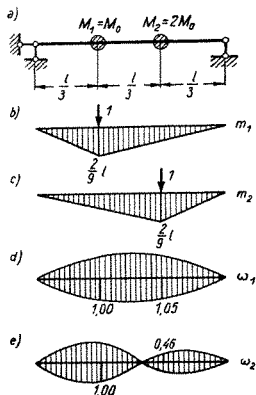
$$(\omega^{-2})^2 - (M_1 \delta_{11} + M_2 \delta_{22}) \omega^{-2} + M_1 M_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21}) = 0 \quad (5.18)$$

Peavõnkumiste kuju määratakse analoogiliselt eelkirjeldatuga.

Näide 5.1. Määrata kaht koondatud massi kandva kaaluta tala (joon. 5.3, a) omavõnkesagedused ja neile vastavad peavõnkekujud. Masside suurused: $M_1 = M_0$, $M_2 = 2M_0$. Tala paindejätkus olgu EI . Poikjõudude mõju omavõnkesagedustele lugeda hüljatavalt väikeseks. Kuna antud juhul on ühikjõududele vastavate paigutiste leidmine lihtsam kui ühikpaigutistele vastavate reaktsioonide leidmine, valime jõumeetodi.

Edasi rakendame masside liikumise sihtides ühikjõud ja leiame neile vastavad siirded. Arvutame nad näiteks joonisel 5.3 toodud paindemomendi epüüride b ja c järgi. Saame:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{8}{486} \frac{l^3}{EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7}{486} \frac{l^3}{EI} \quad (a)$$



JOON. 5.3

Asendades masside ja äsjaleitud siirete väärtused võrrandisse (5.17), saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} (8\kappa - \omega^{-2})A_1 + 14\kappa A_2 &= 0 \\ 7\kappa A_1 + (16\kappa - \omega^{-2})A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

kus

$$\kappa = \frac{M_0 l^3}{486EI} \quad (c)$$

Võrrutades võrrandisüsteemi (b) kordajatest moodustatud determinandi nulliga, saame ω^{-2} määramiseks ruutvõrrandi

$$(\omega^{-2})^2 - 24\kappa\omega^{-2} + 30\kappa = 0 \quad (d)$$

kust

$$\omega_1^{-2} = 22,68\kappa; \quad \omega_2^{-2} = 1,32\kappa \quad (e)$$

Vastavad omavõnkesagedused

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{22,68\kappa}} = 4,6 \sqrt{\frac{EI}{M_0 l^3}} \quad (f)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1,32\kappa}} = 19,2 \sqrt{\frac{EI}{M_0 l^3}}$$

Et leida nüüd näiteks esimesele omavõnkesagedusele vastavat peavõnkekujut, asetame võrrandisüsteemi (b) ükskõik kummasse võrrandisse ω^2 asemele 22,68%. Esimene võrrand annab:

$$-14,68\kappa A_1 + 14\kappa A_2 = 0$$

kust

$$A_2 = 1,05A_1 \quad (g)$$

Sama tulemuse annab teine võrrand.

Teisele omavõnkesagedusele vastab $A_2 = -0,46A_1$.

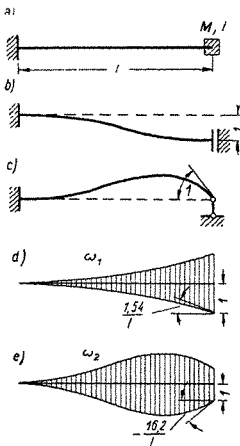
Mõlemale omavõnkesagedusele vastavad võnkumispildid on toodud joonisel 5.3, d ja e.

Näide 5.2. Määrata kaaluta konsooli (joon. 5.4) omavõnkesagedused ja neile vastavad peavõnkekujud. Konsool kannab otsal massi M , mille inertsmoment $I = 0,04Ml^2$. Konsool on konstantse jäikusuga EI .

Antud ülesande võib võrdse töökuluga lahendada niihästi jõu- kui ka deformatsioonimeetodiga. Kasutame deformatsioonimeetodit.

Tundmatuks A_1 võtame massi vertikaalsirde (joon. 5.4, b) ja tundmatuks A_2 tema pöörde (joon. 5.4, c). Vastavalt deformatsioonimeetodi võrrandi'ele

$$r_{11} = 12EI/l^3; \quad r_{12} = r_{21} = -6EI/l^2; \quad r_{22} = 4EI/l \quad (a)$$



JOON. 5.4

Kuna vertikaalpaigutisele vastab mass $M_1 = M$ ja poordele vastab selle massi inertsmoment $M_2 = 0,04Ml^2$, saavad võrrandid (4.11) järgmise kujuga

$$\begin{aligned} (12EI/l^3 - M\omega^2)A_1 - (6EI/l^2)A_2 &= 0 \\ -(6EI/l^2)A_1 + (4EI/l - 0,04Ml^2\omega^2)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Edasine lahenduskaik on analoogiline eelmise ülesandega. Võrrutades võrrandisüsteemi kordajaist moodustatud determinandi nulliga, saame parast suurusega $(MI)^2$ jagamist võrrandi

$$0,04\omega^4 - 4,48 \frac{EI}{Ml^3} \omega^2 + 12 \left(\frac{EI}{Ml^3} \right)^2 = 0 \quad (c)$$

millest

$$\omega_1 = 1,66 \sqrt{EI/Ml^3}, \quad \omega_2 = 10,45 \sqrt{EI/Ml^3} \quad (d)$$

Esimesele omavõnkesagedusele vastab suhteline amplituud $A_2 = 1,54A_1/l$ ja teisele omavõnkesagedusele $A_2 = -16,2A_1/l$. Vastavad võnkumispildid on toodud joonisel 5.4.d ja e.

5.22 Sumbuvusega konstruktsioonid

Lähtume võrrandest (5.2), kus loeme häirivad jõud $P_1(t)$ ja $P_2(t)$ võrdseks nulliga. Saame homogeenised diferentsiaalvõrrandid

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{v}_1 + h_1 \dot{v}_1 + (r_{11}v_1 + r_{12}v_2) &= 0 \\ M_2 \ddot{v}_2 + h_2 \dot{v}_2 + (r_{21}v_1 + r_{22}v_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Võrrandite (5.19) lahendiks võib võtta

$$v_1 = C_1 e^{st}; \quad v_2 = C_2 e^{st} \quad (5.20)$$

Asendades avaldised (5.20) võrrandisse (5.19), saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} (M_1 s^2 + h_1 s + r_{11})C_1 + r_{12}C_2 &= 0 \\ r_{21}C_1 + (M_2 s^2 + h_2 s + r_{22})C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Võrrutades võrrandisüsteemi (5.21) kordajatest moodustatud determinandi nulliga, saame s määramiseks neljanda astme võrrandi

$$(M_1 s^2 + h_1 s + r_{11})(M_2 s^2 + h_2 s + r_{22}) - r_{12}r_{21} = 0 \quad (5.22)$$

On võimalik näidata, et juhul, kui sumbuvus on nii võrd väike, et võnkumine üldse toimub (s. t. ei ole aperiöödiline), on võrrandi (5.22) juured negatiivse reaalsosaga kompleksarvud

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -k_1 + i\omega_1 \\
 s_2 &= -k_1 - i\omega_1 \\
 s_3 &= -k_2 + i\omega_2 \\
 s_4 &= -k_2 - i\omega_2
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

Võttes arvesse, et

$$\begin{aligned}
 e^{(-k+i\omega)t} + e^{(-k-i\omega)t} &= 2e^{-kt} \cos \omega t \\
 e^{(-k+i\omega)t} - e^{(-k-i\omega)t} &= 2ie^{-kt} \sin \omega t
 \end{aligned}$$

võib diferentsiaalvõrrandite süsteemi (5.19) üldlahendi välja kirjutada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= e^{-k_1 t} (B_{1(1)} \sin \omega_1 t + B_{2(1)} \cos \omega_1 t) + \\
 &\quad + e^{-k_1 t} (B_{1(2)} \sin \omega_2 t + B_{2(2)} \cos \omega_2 t) \\
 v_2 &= e^{-k_2 t} (B_{3(1)} \sin \omega_1 t + B_{4(1)} \cos \omega_1 t) + \\
 &\quad + e^{-k_2 t} (B_{3(2)} \sin \omega_2 t + B_{4(2)} \cos \omega_2 t)
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

kus tegurid $B_1 - B_4$ on uued integreerimiskonstandid, kokku 8 tükki. Nende määramiseks on olemas neli (5.21) tüüpi võrrandit, mis saadakse avaldiste (5.24) asendamisel võrrandisse (5.19), ja neli algtingimust.

Nagu võrrandest (5.24) selgub, kujutavad võrrandis (5.23) esinevad suurused ω tõe-poolest omavõnkesagedusi, kuna aga tegurid k iseloomustavad omavõngete kustumise kiirust.

Ehituskonstruksioonides ei ole sumbuvestegurite h mõju omavõnkesagedusele tavaliselt suur ning omavõnkesagedused ω_1 ja ω_2 võib võtta võrdseteks samade suurus-tega sumbuvesteta konstruksioonides.

5.3 SUNDVÕNKUMINE

5.31 Sumbuvuseta konstruksioonid

Mõjugu massile M_1 harmooniline välisjõud $P_1(t) = P_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Konstruksiooni sumbuvest iseloomustavad tegurid h_1 ja h_2 loeme võrdseks nulliga.

Võrrandisüsteem (5.2) võtab neil tingimustel järgmise kuju:

$$\begin{aligned}
 M_1 \ddot{v}_1 + r_{11} v_1 + r_{12} v_2 &= P_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
 M_2 \ddot{v}_2 + r_{21} v_1 + r_{22} v_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

Saadud võrrandisüsteemi lahend koosneb vastava homogeense võrrandisüsteemi lahendist ja erilahendist. Homogeense võrrandisüsteemi lahend iseloomustab konstruksiooni vabavõnkumisi, mida käsitlesime punktis

5.21. Vaadeldava küsimuse juures vabavõnkumised aga huvi ei paku, kuna nad olemasoleva sisehõõrdumise tõttu, kui väike see ka ei oleks, aja jooksul paratamatult sumbuvad ja stabiliseerunud protsessis säilivad ainult sundvõnkumised.

Sundvõnkumisel tekkivate siirete avaldisteks võtame

$$\begin{aligned}v_1 &= A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\v_2 &= A_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\end{aligned}\quad (5.26)$$

Paigutades avaldised (5.26) diferentsiaalvõrrandite süsteemi (5.25), saame järgmise algebralise võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned}(r_{11} - M_1 \omega_0^2) A_1 + r_{12} A_2 &= P_1^0 \\r_{21} A_1 + (r_{22} - M_2 \omega_0^2) A_2 &= 0\end{aligned}\quad (5.27)$$

mille lahendid

$$A_1 = \frac{r_{22} - M_2 \omega_0^2}{(r_{11} - M_1 \omega_0^2)(r_{22} - M_2 \omega_0^2) - r_{12} r_{21}} P_1^0 \quad (5.28)$$

$$A_2 = -\frac{r_{21}}{(r_{11} - M_1 \omega_0^2)(r_{22} - M_2 \omega_0^2) - r_{12} r_{21}} P_1^0$$

annavadki massipunktide M_1 ja M_2 võnkumise amplituudid.

Lähtudes võrrandisüsteemist (5.4), saame võrrandite (5.25) asemel

$$\begin{aligned}\delta_{11} M_1 \ddot{v}_1 + \delta_{12} M_2 \ddot{v}_2 + v_1 &= \delta_{11} P_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \delta_{21} M_1 \ddot{v}_1 + \delta_{22} M_2 \ddot{v}_2 + v_2 &= \delta_{21} P_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\end{aligned}\quad (5.29)$$

Asendades neisse võrrandesse siirete avaldised (5.26), saame massipunktide võnkumise amplituudide A_1 ja A_2 määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}(1 - \delta_{11} M_1 \omega_0^2) A_1 - \delta_{12} M_2 \omega_0^2 A_2 &= \delta_{11} P_1^0 \\ -\delta_{21} M_1 \omega_0^2 A_1 + (1 - \delta_{22} M_2 \omega_0^2) A_2 &= \delta_{21} P_1^0\end{aligned}\quad (5.30)$$

mida võib kasutada võrrandite (5.27) asemel.

Kui lõppeesmärgiks on konstruktsioonis tekkivate pingete määramine, on lahenduskäik lihtsam, kui algul leiame mitte massipunktide võnkumise amplituudid A , vaid jõud S , millega massipunktid mõjuvad võnkuvale konstruktsioonile. Selleks alustame võrrandest (5.7), võttes seal $h_1 = h_2 = P_2(t) = 0$ ja $P_1(t) = P_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Saame:

$$\begin{aligned} M_1(\delta_{11}\dot{S}_1 + \delta_{12}\dot{S}_2) + S_1 &= P_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ M_2(\delta_{21}\dot{S}_1 + \delta_{22}\dot{S}_2) + S_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Lahendust otsime analoogiliselt võrranditega (5.26) järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ S_2 &= S_2^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Asendades avaldised (5.32) võrrandisse (5.31), saame S_1^0 ja S_2^0 määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} (1 - M_1\delta_{11}\omega_0^2)S_1^0 - M_1\delta_{12}\omega_0^2 S_2^0 &= P_1^0 \\ -M_2\delta_{21}\omega_0^2 S_1^0 + (1 - M_2\delta_{22}\omega_0^2)S_2^0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Suurused S_1^0 ja S_2^0 kujutavad endast jõude, mis on põhjustatud väliskoormusest P_1 ja võnkumisel tekkinud inertsjõududest ning vastavad võnkumise äärmisele asendile, s. t. juhule, kus massipunktide paigutised on A_1 ja A_2 .

Edasi selgitame, kuidas mõjub häiriva jõu sageduse ω_0 muutumine võnkumise amplituudidele A_1 ja A_2 . Kasutame selleks võrrandeid (5.28).

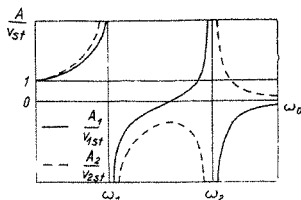
Amplituudide avaldiste nimetajas on võrrandisüsteemi (5.27) kordajatest moodustatud determinant. Sel juhul, kui häiriv sagedus ühtib ükskõik kumma omavõnkesagedusega, s. t. $\omega_0 = \omega_1$ või $\omega_0 = \omega_2$, võrduvad nimetajad nulliga ja amplituudid lõpmatussega. **Kahe vabadusastmega süsteemil on seega kaks resonantsipiirkonda**, resonants võib tekkida niihästi ühel kui ka teisel omavõnkesagedusel. Amplituudide avaldiste nimetajad muudavad märki resonantsipiirkonnast üleminekul. Märk on positiivne, kui $\omega_0 < \omega_1$ või $\omega_0 > \omega_2$; vahemikus $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ on märk negatiivne.

Amplituudi A_1 avaldise lugeja muudab märki, kui $r_{22} = M_2\omega_0^2$. Kuna sel puhul nimetaja on negatiivne ($-r_{12}r_{21}$), toimub märgi muutus kahe resonantsipiirkonna vahel.

Kui vaadelda joonisel 5.1 kujutatud konstruktsiooni ja ühikpaigutised võtta samasuunalised, on r_{11} ja r_{22} positiivsed, r_{12} negatiivne.

Amplituudide A_1 ja A_2 sõltuvus häiriva jõu sagedusest on kujutatud joonisel 5.5.

Kui süsteemile mõjub kaks häirivat jõudu, tuleb algul leida võnkumiste amplituudid kummastki jõust eraldi ja hiljem liita. Juhul kui häirivad jõud on sama sageduse



JOOX 5 5

ja kindla, muutumatu faasinihkega, tuleb amplituudid nagu vektorid liita geomeetriliselt. See kehtib ka juhu jaoks, kui üks sagedus on teise kordne. Kui jõud võivad olla teineteise suhtes suvalises faasis, tuleb amplituudid liita algebraliselt, seejuures vaadeldes kaht juhtu: jõud mõjuvad samas suunas või vastassuundades, ja arvutuse aluseks võtta konstruktsioonile ohtlikum olukord

5.32 Sumbuvusega konstruktsioonid

Võnkugu mass M_1 jällegi temale rakendatud harmoonilise välisjõu $P_1(t) = P_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ mõjul. Tasakaaluvõrrandid (5.2) kujunevad sel juhul järgmisteks:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{v}_1 + h_1 \dot{v}_1 + (r_{11} v_1 + r_{12} v_2) &= P_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ M_2 \ddot{v}_2 + h_2 \dot{v}_2 + (r_{21} v_1 + r_{22} v_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Vaadeldes ainult stabiliseerunud võnkumisprotsessi, otsime diferentsiaalvõrrandite süsteemi (5.34) erilahendit kujul

$$\begin{aligned} v_1 &= B_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + C_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ v_2 &= B_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + C_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Asendades need avaldised võrranditesse (5.34) ja võrjutades kummaski võrrandis siinustega ja koosinustega liikmed, saame kordajate B_1 , B_2 , C_1 ja C_2 määramiseks neljast võrrandist koosneva algebralise süsteemi

$$\begin{aligned} (r_{11} - M_1 \omega_0^2) B_1 + r_{12} B_2 - h_1 \omega_0 C_1 + 0 &= P_1^0 \\ r_{21} B_1 + (r_{22} - M_2 \omega_0^2) B_2 + 0 - h_2 \omega_0 C_2 &= 0 \\ h_1 \omega_0 B_1 + 0 + (r_{11} - M_1 \omega_0^2) C_1 + r_{12} C_2 &= 0 \\ 0 + h_2 \omega_0 B_2 + r_{21} C_1 + (r_{22} - M_2 \omega_0^2) C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

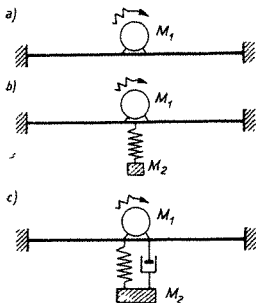
Võnkumise amplituudid saame B ja C geomeetrilisel liitmisel:

$$A_1 = \sqrt{\gamma B_1^2 + C_1^2}; \quad A_2 = \sqrt{\gamma B_2^2 + C_2^2} \quad (5.37)$$

Võrrandite (5.2) asemel võib lähtuda võrrandeist (5.4) või (5.7) ning teha nendega analoogilised operatsioonid.

5.33 Dünaamiline vibrosuunuti

Kahe vabadusastmega süsteemi näitena vaatleme dünaamilist vibrosuunuti.



JOON 5 6

Asugu talal (joon. 5.6, a) mootor. Hüljates tala inertsomendi mõju, võib toodud süsteemi vaadelda ühe vabadusastmega süsteemina. Kui mootori nurksagedus ω_0 on lähedane selle süsteemi omavõnkesagedusele, võivad talas tekkida küllaltki suure amplituudiga sundvõnkumised. Et neid vältida, on üheks võimaluseks talale kinnitada täiendav võnkuv süsteem (joon. 5.6, b). Tulemusena saame kahe vabadusastmega süsteemi.

Olgu mootori mass M_1 ja vedruga riputatud lisakoormuse mass M_2 . Jõud, mis on vajalik mootori kinnituskohal talale ühiksiirde andmiseks, olgu c_1 ja jõud, mis teeb

vedru ühiku võrra pikemaks (vedru jäikus), olgu c_2 . Sel juhul $r_{11} = c_1 + c_2$; $r_{12} = r_{21} = c_2$; $r_{22} = c_2$.

Avaldistest (5.28) selgub, et lisasüsteemi on võimalik valida nii, et mootor töörežiimi ajal üldse ei võngu. Võrrutades amplituudi A_1 avaldise lugeja nulliga, saame:

$$r_{22} = c_2 = M_2 \omega_0^2$$

kust lisasüsteemi jäikuse ja massi suhe

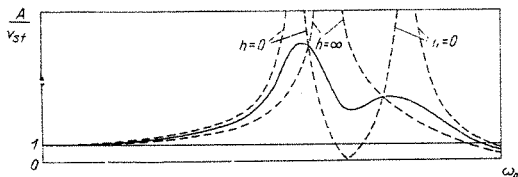
$$c_2/M_2 = \omega_0^2$$

Mass M_2 võngub amplituudiga

$$A_2 = P_0/r_{12} = -P_0/c_2$$

Puuduseks säärase lihtsa vibrosummuti kasutamisel on asjaolu, et vabaneme küll resonantsist töörežiimi korral, aga selle asemel tekib kaks uut resonantsisagedust, millest üks asetseb töörežiimile vastavast sagedusest kõrgemal ja teine madalamal. Seega masina käivitamisel ja seisutamisel tuleb ületada üks resonantsisagedus.

Et saada mõõdukaid amplituude ükskõik millisel režiimil, on vaja varustada vibrosummuti veel takistusega (joon. 5.6, c). Takistuse olemasolu korral on amplituudi A_1 väärtus igal töörežiimil lõplik suurus, välja arvatud juhul, kui takistustegur h on lõpmata suur; sel juhul võnguvad mootor ja summuti koos nagu ühe vabadasastmega süsteem. Amplituudi A_1 väärtus on maksimumne kahel erineval võnkesagedusel; summutit on võimalik projekteerida sääraselt, et need kaks maksimumi on võrdsed. Sellist lahendust loetakse optimaalseks. Takistusega vibrosummuti puuduseks on, et tema kasutamisel pole enam ühelgi juhul võimalik saavutada koor-



JOON. 5.7

muse liikumatust. Tüüpiline kõver koormuse amplituudi sõltuvuse kohta võnkesagedusest on toodud joonisel 5.7. Võrdluseks on seal toodud ka kõverad, mis vastavad takistuse puudumisele ($h = 0$) ja juhule, kui takistus on lõpmata suur ($h = \infty$).

Võrreldes joonisega 5.5 on negatiivsed amplituudid antud peegelpildina, s. t. on antud amplituudide absoluutväärtused. Miinusmärk amplituudi juures joonisel 5.5 tähendas seda, et massipunkti võnkumissuund oli vastupidine jõu suunale. Sumbuvuse olemasolu korral on võnkumissuuna ja häiriva jõu mõjumissuuna vahel faasinihe, kuid pole enam võimalik eraldada sääraseid piirkondi, kus paigutised ja häiriv jõud oleksid sama- või vastasuunalised.

5.4 SUVALISE VABADUSASTMEGA SÜSTEEMID

5.4.1 Põhivõrrandid

Ei valmista raskusi koostada analoogiliselt eeltooduga võnkumise diferentsiaalvõrrandid suvalise vabadusastmega n süsteemide jaoks. Nii näiteks saame, koostades tasakaaluvõrrandid iga võnkuva massi kohta, võrrandite (5.2) üldistusena järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemi:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{v}_1 + (r_{11}v_1 + r_{12}v_2 + \dots + r_{1n}v_n) &= P_1(t) \\ M_2 \ddot{v}_2 + (r_{21}v_1 + r_{22}v_2 + \dots + r_{2n}v_n) &= P_2(t) \\ \dots & \dots \\ M_n \ddot{v}_n + (r_{n1}v_1 + r_{n2}v_2 + \dots + r_{nn}v_n) &= P_n(t) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Sumbuvustegurid h on siin loetud võrdseks nulliga ($h_1 = h_2 = \dots = h_n = 0$).

Omapõnkesageduste määramiseks võrrutame välisjõud $P(t)$ nulliga. Masside siirete jaoks võtame järgmised avaldised:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ v_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \\ \dots & \dots \\ v_n &= A_n \sin(\omega t + \varphi_n) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Nende asendamisel diferentsiaalvõrranditesse (5.38) saame järgmise algebralise homogeense võrrandisüsteemi:

kumistest, kusjuures massid sooritavad ajas keerulise liikumise, aga sõlmpunkte (muidugi peale tuge) ei esine.

Resonants võib esineda siis, kui häiriva jõu sagedus langeb kokku ükskõik millise omavõnkesagedusega. Kuna sel juhul põhjustab häiriv jõud resonantsisagedusele vastava peavõnkumise, teised peavõnkumised aga sumbuvad, saame resonantsi korral algtingimustest sõltumatult resonantsisagedusele vastavale peavõnkumisele omase paigutuspidi.

Harmoonilise välisjõu

$$P_1(t) = P_1^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.42)$$

toimel tekkiva sundvõnkumise amplituudide leidmiseks paigutame võrrandisse (5.38) jõu $P_1(t)$ asemele avaldise (5.42); ülejäänud välisjõud $P_2 = P_3 = \dots = P_n = 0$. Siirete v asemele paigutame avaldised (5.39), lugedes neis võnkesageduse ω võrdseks häiriva jõu sagedusega ω_0 . Tulemuseks kujuneb võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} (r_{11} - M_1 \omega_0^2) A_1 + r_{12} A_2 + \dots + r_{1n} A_n &= P_1^0 \\ r_{21} A_1 + (r_{22} - M_2 \omega_0^2) A_2 + \dots + r_{2n} A_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ r_{n1} A_1 + r_{n2} A_2 + \dots + (r_{nn} - M_n \omega_0^2) A_n &= 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

millest leiamegi amplituudid A .

Mitme häiriva jõu puhul leiame lahendi iga jõu jaoks eraldi ja selgitame hiljem kõige ohtlikuma olukorra (maksimaalsed pinged või amplituudid).

Sundvõnkumiste amplituudide määramiseks jõumeetodiga saame võrrandite (5.30) üldistusena pärast mõningat lihtsustamist avaldised

$$\begin{aligned} (\delta_{11} M_1 - \omega_0^{-2}) A_1 + \delta_{12} M_2 A_2 + \dots + \delta_{1n} M_n A_n &= -\delta_{11} P_1^0 \omega_0^{-2} \\ \delta_{21} M_1 A_1 + (\delta_{22} M_2 - \omega_0^{-2}) A_2 + \dots + \delta_{2n} M_n A_n &= -\delta_{21} P_1^0 \omega_0^{-2} \\ \dots &\dots \\ \delta_{n1} M_1 A_1 + \delta_{n2} M_2 A_2 + \dots + (\delta_{nn} M_n - \omega_0^{-2}) A_n &= -\delta_{n1} P_1^0 \omega_0^{-2} \end{aligned} \quad (5.44)$$

kus δ_{jk} — punkti j paigutus punktis k rakendatud ühikjõust. Võrrandite 5.33 alusel aga võime koostada avaldised konstruktsioonile mõjuvate dünaamiliste jõudude määramiseks:

$$\begin{aligned}
 (\delta_{11}M_1 - \omega_0^{-2})S_1 + \delta_{12}M_1S_2 + \dots + \delta_{1n}M_1S_n &= -P_1^0\omega_0^{-2} \\
 \delta_{21}M_2S_1 + (\delta_{22}M_2 - \omega_0^{-2})S_2 + \dots + \delta_{2n}M_2S_n &= 0 \\
 \delta_{n1}M_nS_1 + \delta_{n2}M_nS_2 + \dots + (\delta_{nn}M_n - \omega_0^{-2})S_n &= 0
 \end{aligned}
 \quad (5.45)$$

Omapõnkesageduste leidmiseks loeme võrrandeis (5.43) või (5.44) häiriva jõu P_1^0 võrdseks nulliga ja häiriva jõu sageduse ω_0 asemele paigutame veel määramata omapõnkesageduse ω , seejärel võrrutame võrrandi-süsteemi kordajaid moodustatud determinandi nulliga. Võrrandeist (5.44) saame:

$$\begin{vmatrix}
 \delta_{11}M_1 - \omega^{-2} & \delta_{12}M_2 & \dots & \delta_{1n}M_n \\
 \delta_{21}M_1 & \delta_{22}M_2 - \omega^{-2} & \dots & \delta_{2n}M_n \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \delta_{n1}M_1 & \delta_{n2}M_2 & \dots & \delta_{nn}M_n - \omega^{-2}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.46)$$

Samasuguse võrrandi annab avaldis (5.45), ainult read ja veerud on vahetatud.

5.42 Peavõnkumiste ortogonaalsus

Vaatleme kahe vabadasastmega võnkuvat süsteemi. Kirjutame vabavõnkesageduste ning neile vastavate amplituudide määramiseks kasutatavad võrrandid (5.10) ümber järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 r_{11}A_1 + r_{12}A_2 &= \omega^2 M_1 A_1 \\
 r_{21}A_1 + r_{22}A_2 &= \omega^2 M_2 A_2
 \end{aligned}
 \quad (5.47)$$

Olgu teada omapõnkesagedus ω_1 ning sellele vastavad amplituudid $A_{1(1)}$ ja $A_{2(1)}$, samuti omapõnkesagedus ω_2 ning amplituudid $A_{1(2)}$ ja $A_{2(2)}$. Paigutame algul võrrandesse (5.47) omapõnkesagedusele ω_1 vastavad suurused ja korrutame esimese võrrandi suurusega $A_{1(2)}$ ning teise võrrandi suurusega $A_{2(2)}$. Saame:

$$\begin{aligned}
 r_{11}A_{1(1)}A_{1(2)} + r_{12}A_{2(1)}A_{1(2)} &= \omega_1^2 M_1 A_{1(1)}A_{1(2)} \\
 r_{21}A_{1(1)}A_{2(2)} + r_{22}A_{2(1)}A_{2(2)} &= \omega_1^2 M_2 A_{2(1)}A_{2(2)}
 \end{aligned}
 \quad (5.48)$$

Kordame sama protseduuri vastupidises järjekorras, s. t. paigutame võrrandesse (5.47) teisele peavõnkumisele vastavad suurused ja korrutame esimese peavõnkumise amplituudidega:

$$\begin{aligned} r_{11}A_{1(2)}/A_{1(1)} + r_{12}A_{2(2)}/A_{1(1)} &= \omega_2^2 M_1 A_{1(2)}/A_{1(1)} \\ r_{21}A_{1(2)}/A_{2(1)} + r_{22}A_{2(2)}/A_{2(1)} &= \omega_2^2 M_2 A_{2(2)}/A_{2(1)} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Lahutame võrrandite (5.48) summasi võrrandite (5.49) summa. Kuna $r_{12} = r_{21}$, võrdub saadud avaldise vasak pool nulliga, sest kõik liikmed koonduvad. Seega peab nulliga võrduma ka parem pool:

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) (M_1 A_{1(1)}/A_{1(2)} + M_2 A_{2(1)}/A_{2(2)}) = 0 \quad (5.50)$$

Omapõnkesageduste ruutude vahe $\omega_1^2 - \omega_2^2$ üldjuhul nulliga ei võrdu. Seega kehtib kahele põnkesagedusele vastavate amplituudide vahel järgmine seos:

$$M_1 A_{1(1)}/A_{1(2)} + M_2 A_{2(1)}/A_{2(2)} = 0 \quad (5.51)$$

Tulemust on võimalik laiendada analoogiliste kaalutluste abil n vabadusastmega süsteemile. Säärase süsteemi ükskõik millisele põnkesageduste paarile ω_j ja ω_k vastavad amplituudid $A_{i(j)}/A_{i(k)}$ rahuldavad järgmist tingimust:

$$\sum_{i=1}^n M_i A_{i(j)}/A_{i(k)} = 0 \quad (5.52)$$

s. t. masside ja nende kahel erineval põnkekujul tekkivate paigutiste korrutiste summa võrdub nulliga.

Seda omadust nimetatakse peavõnkumiste ortogonaalsuseks.

Kuna massi ja paigutise korrutis iseloomustab võnkimisel tekkivaid inertsiõude, jõudude ja paigutiste korrutis omakorda aga annab töö, võib peavõnkumiste ortogonaalsuse sõnastada veel järgmiselt: ühele peavõnkumisele vastavad inertsiõud ei tee tööd teisele peavõnkumisele vastavatel paigutistel.

5.43 Sekulaarvõrrandi lahendamisest

Vastaku maatriksile

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (5.53)$$

võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} (c_{11} - \kappa)A_1 + c_{12}A_2 + \dots + c_{1n}A_n &= 0 \\ c_{21}A_1 + (c_{22} - \kappa)A_2 + \dots + c_{2n}A_n &= 0 \\ \dots & \dots \\ c_{n1}A_1 + c_{n2}A_2 + \dots + (c_{nn} - \kappa)A_n &= 0 \end{aligned} \quad (5.54)$$

Moodustame võrrandisüsteemi (5.54) kordajatest determinandi ja võrrutame ta nulliga:

$$D(\kappa) = \begin{vmatrix} c_{11} - \kappa & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \kappa & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - \kappa \end{vmatrix} = 0 \quad (5.55)$$

Saadud võrrandit nimetatakse sekulaarvõrrandiks. Avatuna kujutab ta endast n astme polünoomi

$$D(\kappa) = \kappa^n - a_1\kappa^{n-1} + a_2\kappa^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n \quad (5.56)$$

Selles polünoomis võrdub tegur a_1 maatriksi C peadiagonaalil olevate liikmete summaga

$$a_1 = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn} \quad (5.57)$$

Seda summat nimetatakse maatriksi C jäljeks ja tähistatakse $\text{Sp}C$ (saksakeelsest sõnast *Spur* — jälg).

Tegur a_2 võrdub maatriksi C kõigi diagonaalsete teise järgu miinorite summaga, tegur a_3 — kolmanda järgu miinorite summaga jne. Lõpuks tegur a_n võrdub maatriksi C teguritest moodustatud determinandi väärtusega $a_n = \det C$.

Sekulaarvõrrandi (5.55) juuri nimetatakse maatriksi C omaväärtuseks. Mingile juurele vastavad tundmatud A_1, A_2, \dots, A_n moodustavad omavektori.

Omaväärtuste ja omavektorite leidmise probleem on matemaatikas hästi läbi töötatud ja on olemas palju meetodeid nende määramiseks. Kõigi nende tutvustamine käesolevas töös pole võimalik ja lugeja peab pöörduma vastava spetsiaalse kirjanduse poole. Piirdume siin paari lihtsamaga.

Vaatleme algul võrrandi (5.55) avamist.

Kui $D(\kappa)$ on kõrgema kui kolmanda järgu determinant, kujuneb selle avamine otseselt miinorite kaudu ülal-

Mõningaid viiteid juurte asukoha kohta annavad ka sekulaarvõrrandi avamisel leitud $D(\kappa)$ väärtused.

Teise meetodina kirjeldame iteratsioonimeetodit.

Võtame võrrandisüsteemi (5.54) asemel uue võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} A_1^{(h+1)} &= c_{11}A_1^{(h)} + c_{12}A_2^{(h)} + \dots + c_{1n}A_n^{(h)} \\ A_2^{(h+1)} &= c_{21}A_1^{(h)} + c_{22}A_2^{(h)} + \dots + c_{2n}A_n^{(h)} \\ &\vdots \\ A_n^{(h+1)} &= c_{n1}A_1^{(h)} + c_{n2}A_2^{(h)} + \dots + c_{nn}A_n^{(h)} \end{aligned} \quad (5.62)$$

kus $A_j^{(h)}$ on mingisugused etteantud A väärtused.

Kui etteantud $A_j^{(h)}$ vastaksid täpselt mingile omavektorile, oleksid $A_j^{(h+1)}$ õigetest κ korda suuremad. Parameetri κ võiks leida ükskõik millisest võrrandist

$$\kappa = \frac{A_j^{(h+1)}}{A_j^{(h)}} \quad (5.63)$$

Üldiselt aga etteantud $A_j^{(h)}$ ei vasta õigetele ja sellepärast annab iga paar κ jaoks erineva väärtuse. Kui niimoodi saadud κ väärtused erinevad üksteisest tunduvalt, võtame saadud $A_j^{(h+1)}$ uuteks etteantud suurusteks ja kordame tsüklit. Nii jätkame seni, kuni kõik omavektori komponentide paarid annavad κ jaoks enam-vähem sama väärtuse.

Vajalikkude iteratsioonide (kordamiste) arv oleneb sellest, kui võrd lähedane oli etteantud omavektor tegelikule. Kuid ka siis, kui omavektor oli ette antud täiesti juhuslikult, saame reeglina lõpptulemuseks ikkagi esimese, s. t. kõige kõrgema omaväärtuse κ_1 ja sellele vastava omavektori $A_{j(1)}$.

Erandiks on juht, kui etteantud omavektor vastab täpselt mõnele madalamale omaväärtusele; sel juhul saamegi selle omaväärtuse.

Halb koonduvus viitab sellele, et etteantud omavektor oli halvasti valitud, ja on soovitatav katsetada mingi muu omavektoriga.

Et leida järgmist omaväärtust κ_2 , asendame võrrandisüsteemi (5.54) ühe võrrandi ortogonaalsustingimusega (5.52)

$$M_1 A_{1(1)} A_{1(2)} + M_2 A_{2(1)} A_{2(2)} + \dots + M_n A_{n(1)} A_{n(2)} = 0$$

Asendame ortogonaalsustingimusega näiteks esimese

võrrandi. Kuna M_j arvuline suurus on teada, samuti on pärast esimese omavektori leidmist teada ka $A_{j(1)}$, võime ortogonaalsustingimuse välja kirjutada järgmisel kujul:

$$\gamma_1 A_{1(2)} + \gamma_2 A_{2(2)} + \dots + \gamma_n A_{n(2)} = 0 \quad (5.64)$$

kust avaldame $A_{1(2)}$ ja asendame ülejäänud võrrandisse. Tulemus kujuneb järgmiseks:

$$\begin{aligned} (c'_{22} - \kappa) A_{2(2)} + c'_{23} A_{3(2)} + \dots + c'_{2n} A_{n(2)} &= 0 \\ c'_{32} A_{2(2)} + (c'_{33} - \kappa) A_{3(2)} + \dots + c'_{3n} A_{n(2)} &= 0 \\ \dots &\dots \\ c'_{n2} A_{2(2)} + c'_{n3} A_{3(2)} + \dots + (c'_{nn} - \kappa) A_{n(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

Saadud võrrandisüsteemi lahendame iteratsiooniga analoogiliselt süsteemiga (5.54). Puuduva $A_{1(2)}$ leiame võrrandist (5.64).

Kolmanda omaväärtuse leidmiseks asendame võrrandisüsteemis (5.54) juba kaks võrrandit ortogonaalsustingimustega:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n M_j A_{j(1)} A_{j(3)} &= 0 \\ \sum_{j=1}^n M_j A_{j(2)} A_{j(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

jne.

Sisuliselt on omaväärtuste leidmine iteratsiooniga identne punktis 6.23 kirjeldatud järkjärgulise lähenemise meetodiga.

Analoogiliselt võib lahendada võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} (a_{11} - b_{11}\kappa) A_1 + (a_{12} - b_{12}\kappa) A_2 + \dots + (a_{1n} - b_{1n}\kappa) A_n &= 0 \\ (a_{21} - b_{21}\kappa) A_1 + (a_{22} - b_{22}\kappa) A_2 + \dots + (a_{2n} - b_{2n}\kappa) A_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ (a_{n1} - b_{n1}\kappa) A_1 + (a_{n2} - b_{n2}\kappa) A_2 + \dots + (a_{nn} - b_{nn}\kappa) A_n &= 0 \end{aligned} \quad (5.67)$$

Otsesel lahendusmeetodil leiame algul jällegi võrrandisüsteemi kordajatest moodustatud determinandi nulliga võrrutamisel saadava polünoomi

$$D(\kappa) = \beta_0 \kappa^n + \beta_1 \kappa^{n-1} + \beta_2 \kappa^{n-2} + \dots + \beta_n = 0 \quad (5.68)$$

Kordajad β võib leida määramata tegurite meetodiga, kusjuures tuleb silmas pidada, et determinandid tuleb leida $n+1$ erineva β väärtuse puhul. Polünoomi juurte leidmine ei erine eelkirjeldatust.

Ülesande lahendamiseks iteratsioonimeetodiga asendame võrrandid (5.67) võrranditega

$$\begin{aligned} b_{11}A_1^{(k+1)} + b_{12}A_2^{(k+1)} + \dots + b_{1n}A_n^{(k+1)} = \\ = a_{11}A_1^{(k)} + a_{12}A_2^{(k)} + \dots + a_{1n}A_n^{(k)} \end{aligned} \quad (5.69)$$

ning avaldame sealt $A_1^{(k+1)}$:

$$A_1^{(k+1)} = a'_{11}A_1^{(k)} + a'_{12}A_2^{(k)} + \dots + a'_{1n}A_n^{(k)} \quad (5.70)$$

Suurima omaväärtuse κ_1 saame valemist (5.63)

$$\kappa_1 = \frac{A_j^{(k+1)}}{A_j^{(k)}}$$

Madalamate omaväärtuste leidmiseks ortogonalseerime eelnevalt omavektorid. Kui võrrandisüsteemi (5.67) koordajad on sümmeetrilised, on ortogonaalsuse tingimuseks

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jh} A_{j(l)} A_{k(m)} = 0 \quad (5.71)$$

ehk

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jh} A_{j(l)} A_{k(m)} = 0 \quad (5.72)$$

kus $A_{(l)}$ ja $A_{(m)}$ on kahele erinevale omavõnkesagedusele l ja m vastavad amplituudid.

Kui osutub vajalikuks algul leida kõige väiksem omaväärtus κ_n , asendame võrrandid (5.69) võrranditega

$$\begin{aligned} a_{11}A_1^{(k+1)} + a_{12}A_2^{(k+1)} + \dots + a_{1n}A_n^{(k+1)} = \\ = b_{11}A_1^{(k)} + b_{12}A_2^{(k)} + b_{1n}A_n^{(k)} \end{aligned} \quad (5.73)$$

ning avaldame sealt A_{n+1} :

$$A_1^{(k+1)} = b'_{11}A_1^{(k)} + b'_{12}A_2^{(k)} + \dots + b'_{1n}A_n^{(k)} \quad (5.74)$$

Kõige väiksem omaväärtus

$$\kappa_n = \frac{A_j^{(k)}}{A_j^{(k+1)}} \quad (5.75)$$

Võrrandeid (5.69) ja (5.73) võib ka vahetult kasutada.

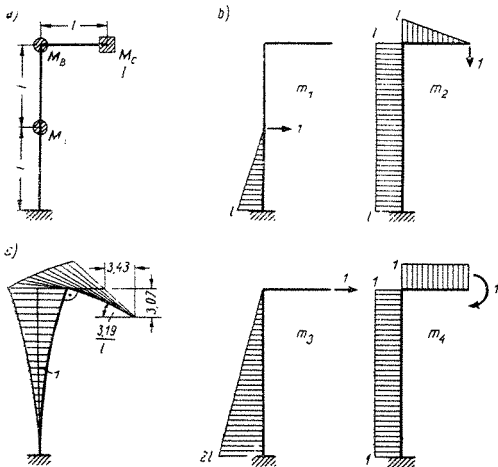
Näide 5.3. Joonisel 5.8, a kujutatud raam kannab kolme massi: $M_A = 2M_0$; $M_B = M_0$; $M_C = 3M_0$. Massi M_C inertsmoment $I_C = M_0 l^2/3$; teiste masside inertsmomendid võrduvad nulliga. Raami jäikus, mille tähistame EI , on konstantne. Raami massi mõju võnkumistele võib hüljata, samuti võib hüljata piki- ja poikjõudude mõju. Leida peavõnkumiste sagedused ja nende kujud.

Lahendamiseks kasutame jõumeetodit, kuna ühikjõududele vastavate paigutiste leidmine on lihtne.

Massidel on neli liikumisvabadust. Rakendame nende liikumisvõimaluste sihis ühikjõud ja konstrueerime paindemomentide epüürid m_1 kuni m_4 (joon. 5.8, b). Epüüride järgi leiame vastavad paigutised δ_{jk} . Saame:

$$\begin{array}{lll} \delta_{11} = l^3/3EI & \delta_{22} = 7l^3/3EI & \delta_{34} = 2l^2/EI \\ \delta_{12} = l^3/2EI & \delta_{23} = 2l^3/EI & \delta_{14} = 3l/EI \\ \delta_{13} = 5l^3/6EI & \delta_{24} = 5l^2/2EI & \\ \delta_{14} = l^2/2EI & \delta_{33} = 8l^3/3EI & \end{array}$$

(a)



JOON. 5.8

Ühikjõududele vastavates sihtides võnkuvad massid on järgmised (ühikpöördele vastab massi M_C inertsmoment):

$$\begin{aligned} M_1 &= M_A = 2M_0 \\ M_2 &= M_C = 3M_0 \\ M_3 &= M_C + M_B = 4M_0 \\ M_4 &= I_C = MI^2/3 \end{aligned} \quad (b)$$

Asendades (a) ja (b) võrrandisse (5.44), saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} \frac{M_0 I^3}{EI} - \omega^{-2} \right) A_1 + \frac{3}{2} \frac{M_0 I^3}{EI} A_2 + \frac{10}{3} \frac{M_0 I^3}{EI} A_3 + \frac{1}{6} \frac{M_0 I^4}{EI} A_4 &= 0 \\ \frac{M_0 I^3}{EI} A_1 + \left(7 \frac{M_0 I^3}{EI} - \omega^{-2} \right) A_2 + 8 \frac{M_0 I^3}{EI} A_3 + \frac{5}{6} \frac{M_0 I^4}{EI} A_4 &= 0 \\ \frac{5}{3} \frac{M_0 I^3}{EI} A_1 + 6 \frac{M_0 I^3}{EI} A_2 + \left(\frac{32}{3} \frac{M_0 I^3}{EI} - \omega^{-2} \right) A_3 + \frac{2}{3} \frac{M_0 I^4}{EI} A_4 &= 0 \\ \frac{M_0 I^2}{EI} A_1 + \frac{15}{2} \frac{M_0 I^2}{EI} A_2 + 8 \frac{M_0 I^2}{EI} A_3 + \left(\frac{M_0 I^3}{EI} - \omega^{-2} \right) A_4 &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Nende võrrandite lihtsustamiseks korrutame kolme esimest võrrandit suurusega $6EI/M_0 I^3$ ja viimast võrrandit suurusega $6EI/M_0 I^2$ (kordaja 6 on valitud selleks, et kordajad tuleksid täisarvulised). Amplituudi A_4 , mis kujutab endast pöoret, asendame uuega $A_4' = A_4 I$, et saada kõiki amplituude samadimioonilistena. Lõpuks viime sisse uue tähistuse

$$\varkappa = \frac{6EI}{\omega^2 M I^3} \quad (d)$$

Tulemusena saame võrrandisüsteemi (c) asemel uue, lihtsama süsteemi

$$\begin{aligned} (4 - \varkappa) A_1 + 9A_2 + 20A_3 + A_4' &= 0 \\ 6A_1 + (42 - \varkappa) A_2 + 48A_3 + 5A_4' &= 0 \\ 10A_1 + 36A_2 + (64 - \varkappa) A_3 + 4A_4' &= 0 \\ 6A_1 + 45A_2 + 48A_3 + (6 - \varkappa) A_4' &= 0 \end{aligned} \quad (e)$$

Lahendame võrrandisüsteemi (e) nihästi otsese kui ka iteratsioonimeetodiga.

Otsesel lahenduskaigul võrrutame omavõnkesageduste leidmiseks võrrandisüsteemi (e) kordajatest moodustatud determinandi nulliga. Saame neljanda astme polünoomi

$$\varkappa^4 - 116\varkappa^3 + 1367\varkappa^2 - 1416\varkappa + 360 = 0 \quad (f)$$

Selle polünoomi suurim juur peab olema piirides $116 > \varkappa_1 > 116/4$. Katsetamisel leiame, et sobib $\varkappa_1 = 102,8$. Järgmine juur $\varkappa_2 < 116 - 102,8 = 13,2$; leiame, et $\varkappa_2 = 12,04$. Edasi saame, et $\varkappa_3 = 0,79$ ja $\varkappa_4 = 0,37$. Kontrolliiks leiame juurte kogusumma, mis peab võrduma \varkappa^3 kordajaga polünoomis (f):

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4 = 102,8 + 12,04 + 0,79 + 0,37 = 116,0$$

Võnkesagedused leiame avaldisest (d):

$$\omega = \sqrt{\frac{6EI}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 l^3}}$$

Saame

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6EI}{102,8M_0 l^3}} = 0,242 \sqrt{\frac{EI}{M_0 l^3}}; \quad \omega_2 = 0,097 \sqrt{\frac{EI}{M_0 l^3}}$$

$$\omega_3 = 2,76 \sqrt{\frac{EI}{M_0 l^3}}; \quad \omega_4 = 4,03 \sqrt{\frac{EI}{M_0 l^3}}$$

Et saada esimesele omavõnkesagedusele vastavat peavõnkumise kuju, kõrvaldame võrrandeist (e) ühe, näiteks esimese, ja asendame ülejäänud võrrandesse α_1 asemele tema väärtuse 102,8. Viites A_1 paremale poole, saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} -60,84A_2 + 48A_3 + 5A_4' &= -6A_1 \\ 36A_2 - 38,84A_3 + 4A_4' &= -10A_1 \\ 45A_2 + 48A_3 - 96,84A_4' &= -6A_1 \end{aligned} \quad (g)$$

millest

$$A_2 = 3,07A_1; \quad A_3 = 3,43A_1; \quad A_4' = 3,19A_1$$

Vastav võnkumiskuju on toodud joonisel 5.8, c.

Lahendi õigsuse kontrolliks võib kasutada esimest, kõrvaldatud võrrandit, kust saame:

$$-98,80 \cdot 1 + 9 \cdot 3,07 + 20 \cdot 3,43 + 3,19 = -98,80 + 99,47 = 0,67$$

Kuna viga on alla 1% ühemärgiliste liikmete kogusummast, võib lugeda, et vastus on arvutus täpsuse piires õige.

Teistele omavõnkesagedustele vastavad peavõnkumise kujud leitakse analoogiliselt.

Esimese omavõnkesageduse leidmiseks iteratsiooniga asendame võrrandisüsteemi (e) võrranditega

$$\begin{aligned} A_1^{(h+1)} &= 4A_1^{(h)} + 9A_2^{(h)} + 20A_3^{(h)} + A_4^{(h)} \\ A_2^{(h+1)} &= 6A_1^{(h)} + 42A_2^{(h)} + 48A_3^{(h)} + 5A_4^{(h)} \\ A_3^{(h+1)} &= 10A_1^{(h)} + 36A_2^{(h)} + 64A_3^{(h)} + 4A_4^{(h)} \\ A_4^{(h+1)} &= 6A_4^{(h)} + 45A_2^{(h)} + 48A_2^{(h)} + 6A_4^{(h)} \end{aligned} \quad (h)$$

Lahenduskaik on toodud tabelis 5.1. Null-lahenduseks on võetud $A_1^{(0)} = A_2^{(0)} = A_3^{(0)} = A_4^{(0)} = 1$. Omavõnkesageduse parameeter α on võetud keskmisena suurustest $A_j^{(h-1)}/A_j^{(h)}$. Viimases lahtris on toodud suhtelised amplituudid, kus A_1 on võetud võrdseks ühega.

Teise omavõnkesageduse leidmiseks asendame võrrandis (e) esimese võrrandi ortogonaalsustingimusega (5.52), mis vaadeldavas ühesandes kujuneb järgmiseks:

$$2 \cdot 1,000A_1 + 3 \cdot 3,050A_2 + 4 \cdot 3,411A_3 + \frac{1}{3} \cdot 3,169A_4' = 0 \quad (i)$$

Siit

$$A_1 = -4,575A_2 - 6,822A_3 - 0,528A_4' \quad (k)$$

Tabel 5.1

k	0	1	2	3	
A_1	1	34	3 430	352 398	1,000
A_2	1	101	10 443	1 074 657	3,050
A_3	1	114	11 692	1 201 940	3,411
A_4	1	105	10 851	1 116 837	3,169
$A_1^{(k+1)}/A_1^{(k)}$		34	101,0	102,74	
$A_2^{(k+1)}/A_2^{(k)}$		101	103,4	102,90	
$A_3^{(k+1)}/A_3^{(k)}$		114	102,6	102,80	
$A_4^{(k+1)}/A_4^{(k)}$		105	103,3	102,93	
α_1			102,6	102,84	

Asendades A_1 avaldise (k) kolme viimasesse võrrandisse (e), saame:

$$\begin{aligned} (14,550 - \alpha)A_2 + 7,068A_3 + 1,832A_4' &= 0 \\ -9,750A_2 + (-4,220 - \alpha)A_3 - 1,280A_4' &= 0 \\ 17,550A_2 + 7,068A_3 + (2,832 - \alpha)A_4' &= 0 \end{aligned} \quad (m)$$

millele vastavad iteratsioonivõrrandid

$$\begin{aligned} A_2^{(k+1)} &= 14,550A_2^{(k)} + 7,068A_3^{(k)} + 1,832A_4'^{(k)} \\ A_3^{(k+1)} &= -9,750A_2^{(k)} - 4,220A_3^{(k)} - 1,280A_4'^{(k)} \\ A_4'^{(k+1)} &= 17,550A_2^{(k)} + 7,068A_3^{(k)} + 2,832A_4'^{(k)} \end{aligned} \quad (n)$$

Lahenduskäik on toodud tabelis (5.2). Viimases lahtris on jällegi antud suhtelised amplituudid, mis vastavad tingimusele $A_1 = 1$.

Tabel 5.2

k	0	1	2	3	
A_2	1	23,450	283,699	3417,240	-2,097
A_3	1	-15,250	-199,418	-2412,840	1,481
A_4'	1	27,450	381,499	4649,836	-2,853
$A_2^{(k+1)}/A_2^{(k)}$			12,1	12,0	
$A_3^{(k+1)}/A_3^{(k)}$			13,1	12,1	
$A_4'^{(k+1)}/A_4'^{(k)}$			13,8	12,2	
α_2			13,0	12,1	

Amplituudi A_1 leiame võrrandist (k):

$$A_1^{(3)} = -4,575 \cdot 3417,240 + 6,822 \cdot 2412,840 - 0,528 \cdot 4649,836 = -1628,592 \quad (o)$$

Järgmise omavõnkesageduste leidmiseks asendame võrrandisüsteemi (m) esimese võrrandi teisele omavõnkesagedusele vastavate amplituudide alusel koostatud ortogonaalsustingimusega:

$$2 \cdot 1,000A_1 - 3 \cdot 2,097A_2 + 4 \cdot 1,481A_3 - \frac{1}{3} \cdot 2,853A_4' = 0 \quad (p)$$

Arvestades esimest ortogonaalsustingimust (k) saame siit

$$A_2 = -0,5000A_3 - 0,130A_4' \quad (r)$$

Avaldise (r) asendamisel võrrandisüsteemi (m) kahte viimasesse võrrandisse saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$(0,655 - \kappa)A_3 - 0,012A_4' = 0$$

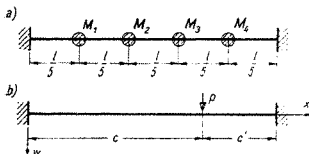
$$-1,707A_3 + (0,550 - \kappa)A_4' = 0 \quad (s)$$

mille lahendame juba otseselt. Saame:

$$\kappa_3 = 0,75; \quad \kappa_4 = 0,45.$$

Võrreldes varem leitud tulemustega näeme, et vigade kuhjumise tõttu arvutuskäigul erineb saadud κ_4 väärtus õigest väärtusest juba tunduvalt.

Näide 5.4. Leida joonisel 5.9, a kujutatud nelja koondatud võrdset massi $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M$ kandva tala omavõnkesagedused.



JOON. 5.9

Joonisel 5.9, b kujutatud tala elastse joone võrrand on järgmine:

$$v = \frac{Pl^3}{6EI} \left[\left(\frac{c'}{l} \right)^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left(3 \frac{c}{l} - \frac{3c + c'}{l} \frac{x}{l} \right) + \left[\left(\frac{x - c}{l} \right)^3 \right] \right] \quad (a)$$

Siit leiame avaldised ühikjõudude vastavate siirete jaoks. Saame, tähistades $l^3/93750EI = B$,

$$\delta_{11} = \delta_{44} = 128B; \quad \delta_{12} = \delta_{34} = 189B$$

$$\delta_{13} = \delta_{24} = 136B; \quad \delta_{14} = 47B$$

$$\delta_{23} = 368B; \quad \delta_{22} = \delta_{33} = 432B.$$

Tähistame

$$\kappa = \frac{1}{MB\omega^2} = \frac{93750EI}{Ml^3\omega^2} \quad (b)$$

Võrrandisüsteemist (5.44) saame:

$$\begin{aligned} (128 - \kappa)A_1 + 189A_2 + 136A_3 + 47A_4 &= 0 \\ 189A_1 + (432 - \kappa)A_2 + 368A_3 + 136A_4 &= 0 \\ 136A_1 + 368A_2 + (432 - \kappa)A_3 + 189A_4 &= 0 \\ 47A_1 + 136A_2 + 189A_3 + (128 - \kappa)A_4 &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Kuna võnkuv süsteem on sümmeetriline, siis võime sümmeetrilistele ja antisümmeetrilistele peavõnkumistele vastavad lahendid leida eraldi. Sümmeetriliste peavõnkumiste puhul $A_1 = A_4$ ja $A_2 = A_3$. Antisümmeetriliste peavõnkumiste puhul $A_1 = -A_4$ ja $A_2 = -A_3$. Seda arvestades võime piirduda kahe esimese võrrandi vaatlemisega, arvestades, et neis A_3 ja A_4 on võrdsed A_2 ja A_1 , resp. $-A_2$ ja $-A_1$ väärtustega.

Sümmeetriliste võnkumispiltide jaoks saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} (175 - \kappa)A_1 + 325A_2 &= 0 \\ 325A_1 + (800 - \kappa)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (d)$$

mille kordajatest moodustatud determinant peab võrduma nulliga:

$$(175 - \kappa)(800 - \kappa) - 325^2 = 0.$$

Siit leiame, et $\kappa_1 = 938,4$; $\kappa_2 = 36,6$.

Antisümmeetrilistele võnkumispiltidele vastab võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} (81 - \kappa)A_1 + 53A_2 &= 0 \\ 53A_1 + (64 - \kappa)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (e)$$

millest

$$\kappa_1 = 126,2 \quad \text{ja} \quad \kappa_2 = 18,8.$$

Lõpuks paigutame leitud neli juurt õigesse järjekorda ja leiame avaldisest (b) omavõnkesagedused:

$$\omega = \sqrt{\frac{93\,750EI}{\kappa MI^3}}$$

Saame

$$\omega_1 = 10,0 \sqrt{EI/MI^3}$$

$$\omega_2 = 26,9 \sqrt{EI/MI^3}$$

$$\omega_3 = 45,4 \sqrt{EI/MI^3}$$

$$\omega_4 = 70,6 \sqrt{EI/MI^3}$$

6 SUURE VABADUSASTMEGA SÜSTEEMIDE DÜNAAMIKA

6.1 JAOTATUD MASSIGA TALA VABAVÕNKUMINE

6.11 Jaotatud massiga tala vabavõnkumise diferentsiaalvõrrand

Vaatleme jaotatud massiga tala (kaaluga tala) vabavõnkumist tala telje ristsihis. Tala teljeks olgu x -telg. Tähistame võnkuva massi intensiivsuse tähega m ja tala ning võnkuva koormuse omakaalu q ; Ilmselt $m = q/g$. Kui võnkuvaks massiks on ainult tala enda mass ja tala on valmistatud materjalist, mille erikaal on γ , siis

$$m = q/g = \gamma F/g \quad (6.1)$$

kus F on tala ristlõike pindala.

Tala massi intensiivsus võib üldjuhul piki tala muutuda: $m = m(x)$, samuti võib muutuda ka ristlõike inertsmoment: $I = I(x)$.

Olesande lahendamisel oletame, et

1) tala massi elementide pöörde mõju omavõnkesuundestele on hüljatavalt väike, s. t. üksikud massipunktid liiguvad ainult risti tala kõverdumata teljega,

2) põikjõudude mõju tala deformatsioonidele võib hüljata,

3) sumbuvus võrdub nulliga.

Võnkugu tala y -telje sihis; vastavaid siirdeid, mida loeme staatilisest tasakaaluasendist, tähistame tähega v .

Tala vabavõnkumist staatilise tasakaaluasendi ümber võib vaadelda nagu ajaliselt muutuvat tala painet, kusjuures mingile ajamomendile vastavaks koormuseks on

inertsjõud $q^* = -m\ddot{v}$. Seega on tala elastse joone diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] = -m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (6.2)$$

ehk lühidalt

$$[EI(x)v''(x, t)]'' + m(x)\ddot{v}(x, t) = 0 \quad (6.2, a)$$

Tala vabavõnkumine koosneb üksikute peavõnkumiste summast; kuna jaotatud massiga tala on lõpmata suure vabadusastmega süsteem, on neid peavõnkumisi lõpmata palju. Iga peavõnkumisele vastavad seisvad lained, millele kuju jääb võnkumise jooksul samaks ja ordinaadid muutuvad ajas proportsionaalselt. Seega võib vabavõnkumise kuju otsida lõpmata reana, mille iga liige koosneb kahe funktsiooni korrutisest, kusjuures üks neist funktsioonidest sõltub ainult kohast ja teine ainult ajast:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\psi_n(t) \quad (6.3)$$

Rida (6.3) rahuldab diferentsiaalvõrrandit (6.2), kui seda rahuldab rea iga üksik liige. Asendades rea (6.3) ringi liikme võrrandisse (6.2, a) ja jättes ära indeksi n , saame:

$$[EI(x)f''(x)]''\psi(t) + m(x)f(x)\ddot{\psi}(t) = 0 \quad (6.4)$$

Jagades võrrandi (6.4) avaldisega $m(x)f(x)\psi(t)$, võime muutujad eraldada:

$$\frac{[EI(x)f''(x)]''}{m(x)f(x)} = -\frac{\ddot{\psi}(t)}{\psi(t)} \quad (6.5)$$

Saadud võrrandi vasakul poolel esinevad funktsioonid sõltuvad ainult kohast x , paremal poolel esinevad funktsioonid aga ainult ajast t . Võrrandi vasak ja parem pool peavad võrduma suvalise x ja t väärtuse juures. See on võimalik ainult siis, kui nad üldse ei sõltu kohast ega ajast, vaid kujutavad endast konstantset suurust, mille tähistame ω^2 . Võrrand (6.5) jaguneb kaheks võrrandiks:

$$\frac{[EI(x)f''(x)]''}{m(x)f(x)} = \omega^2 \quad (6.6)$$

$$-\frac{\ddot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \omega^2 \quad (6.7)$$

ehk

$$[EI(x)f''(x)]'' - \omega^2 m(x)f(x) = 0 \quad (6.6, a)$$

$$\ddot{\psi}(t) - \omega^2 \psi(t) = 0 \quad (6.7, a)$$

Võrrandi (6.7, a) lahendiks on

$$\psi(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.8)$$

Seega iga peavõnkumine kujutab endast harmoonilist võnkumist nurksagedusega ω ; missugune on aga vastava võnkesageduse tegelik väärtus, tuleb määrata juba võrrandist (6.6) või (6.6, a).

Kogu omavõnkesageduste kompleksi $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ nimetatakse omavõnkesageduste spektriks.

6.12 Ühtlaselt jaotatud massiga prismalise tala omavõnkesageduse ja peavõnkekuju leidmine

Kui tala massi intensiivsus m ja tala inertsmoment I on konstantsed, on (6.6, a) konstantsete kordajatega harilik diferentsiaalvõrrand

$$f^{IV}(x) - \frac{m\omega^2}{EI} f(x) = 0 \quad (6.9)$$

Lahendamiseks tähistame

$$\frac{m\omega^2}{EI} = \left(\frac{\mu}{l}\right)^4 \quad (6.10)$$

millest

$$\omega = \left(\frac{\mu}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (6.11)$$

Asendades (6.10) võrrandisse (6.9), saame järgmise diferentsiaalvõrrandi:

$$f^{IV}(x) - \left(\frac{\mu}{l}\right)^4 f(x) = 0 \quad (6.12)$$

mille karakteristliku võrrandi juurteks on $\pm I$ ja $\pm i$. Arvestades tuntud trigonomeetria ja hüperboolsete funktsioonide avaldise (p. 10.45), võib võrrandi (6.12) lahendi välja kirjutada järgmisel kujul:

$$f(x) = B_1 \sin \frac{\mu x}{l} + B_2 \cos \frac{\mu x}{l} + B_3 \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} + B_4 \operatorname{ch} \frac{\mu x}{l} \quad (6.13)$$

Et määrata mingi konkreetsete ääritingimustega tala omavõnkesagedused ω_n ja neile vastavate peavõnkumiste kuju, kirjutame esmalt välja ääritingimused avaldise (6.13) kaudu. Kuna igal talal on neli ääritingimust, saame neljast võrrandist koosneva homogeense võrrandisüsteemi, mille mitte triviaalse lahendi määramiseks võrrutame saadud võrrandisüsteemi kordajatest moodustatud determinandi nulliga. Tulemusena saame omavõnkesagedusi iseloomustavate parameetrite μ_n määramiseks transsendentse võrrandi, mille juured annavadki seose (6.11) kaudu omavõnkesagedused ω_n .

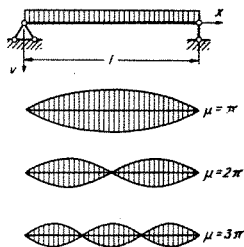
Antud omavõnkesagedusele vastav peavõnkekuju leitakse samuti, nagu kirjeldatud punktis 5.51. Kõrvaldame ääritingimuste põhjal koostatud võrrandisüsteemist ühe võrrandi ja ülejäänud kolme võrrandisse paigutame saadud μ_n/l väärtuse. Neist võrrandest saab kolm tegurit, näiteks $B_{2(n)}$, $B_{3(n)}$ ja $B_{4(n)}$, avaldada ülejäänud — antud juhul $B_{1(n)}$ — kaudu. Sellega on teada ka peavõnkumise kuju. Üksikute peavõnkumiste amplituude, millest tala vabavõnkumine koosneb, saab määrata ainult teades algtingimusi.

Edasi vaatleme omavõnkesageduste ja neile vastavate peavõnkumiste kuju leidmist mõningail konkreetsetel kinnitustingimustel.

Vabalt toetatud tala (joon. 6.1).

Aseridades elastse joone avaldise (6.13) vabalt toetatud tala ääritingimustesse

$$f(0) = f''(0) = f(l) = f''(l) = 0 \quad (a)$$



JOON. 6.1

saame järgmised neli võrrandit:

$$\begin{aligned} B_2 + B_4 &= 0 \\ -B_2 + B_4 &= 0 \\ B_1 \sin \mu + B_2 \cos \mu + B_3 \operatorname{sh} \mu + B_4 \operatorname{ch} \mu &= 0 \\ -B_1 \sin \mu - B_2 \cos \mu + B_3 \operatorname{sh} \mu + B_4 \operatorname{ch} \mu &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Võrrandisüsteemi (b) kahest esimesest võrrandist järeldub, et $B_2 = B_4 = 0$. Jääb kahest võrrandist koosnev võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} B_1 \sin \mu + B_3 \operatorname{sh} \mu &= 0 \\ -B_1 \sin \mu + B_3 \operatorname{sh} \mu &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

mille kordajatest moodustatud determinant peab võrduma nulliga:

$$2 \sin \mu \operatorname{sh} \mu = 0 \quad (d)$$

Lahend $\mu = 0$ ei paku huvi, kuna sel juhul võnkumised puuduvad. Kui aga $\mu \neq 0$, siis ka $\operatorname{sh} \mu \neq 0$. Seega peab olema rahuldatud tingimus

$$\sin \mu = 0$$

millest

$$\mu = \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

ja omavõnkesagedused

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \dots$$

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Peavõnkekuju leiame võrrandisüsteemi (c) ükskõik kummas võrrandist. Kuna omavõnkumistele vastavatel μ väärtustel $\sin \mu = 0$, järeldub siit, et $B_3 \operatorname{sh} \mu = 0$, kust $B_3 = 0$ ja n -ndale omavõnkesagedusele vastava võnku-mise kuju võrrandiks on sinusoid

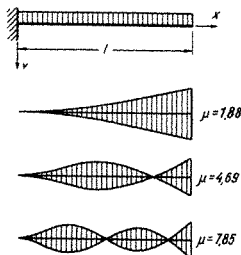
$$f_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Kolmele esimesele omavõnkesagedusele vastavate pea-võngete kujud on toodud joonisel 6.1.

Konsool (joon. 6.2).

Ääretingimustele

$$f(0) = f'(0) = f''(l) = f'''(l) = 0 \quad (a)$$



JOON. 6.2

vastab järgmine võrrandisüsteem:

$$\begin{aligned}
 B_2 + B_4 &= 0 \\
 B_1 + B_3 &= 0 \\
 -B_1 \sin \mu - B_2 \cos \mu + B_3 \operatorname{sh} \mu + B_4 \operatorname{ch} \mu &= 0 \\
 -B_1 \cos \mu + B_2 \sin \mu - B_3 \operatorname{ch} \mu + B_4 \operatorname{ch} \mu &= 0
 \end{aligned} \quad (b)$$

Parameetri μ leidmiseks peaksime selle võrrandisüsteemi kordajaist moodustatud determinandi võrrutama nulliga. Lihtsam on aga enne võrrandisüsteemi järku alandada ja alles saadud madalamajärgulise võrrandisüsteemi determinant võrrutada nulliga. Esimesest kahest võrrandist leiame, et $B_4 = -B_2$ ja $B_3 = -B_1$. Asendades saadud avaldised viimasesse kahte võrrandisse, saame:

$$\begin{aligned}
 B_1(\sin \mu + \operatorname{sh} \mu) + B_2(\cos \mu + \operatorname{ch} \mu) &= 0 \\
 B_1(\cos \mu + \operatorname{ch} \mu) + B_2(-\sin \mu + \operatorname{sh} \mu) &= 0
 \end{aligned} \quad (c)$$

Võrrutame võrrandisüsteemi (c) kordajatest moodustatud determinandi nulliga:

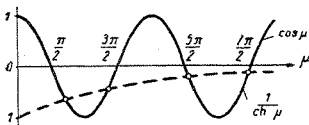
$$\begin{vmatrix}
 (\sin \mu + \operatorname{sh} \mu) & (\cos \mu + \operatorname{ch} \mu) \\
 (\cos \mu + \operatorname{ch} \mu) & (-\sin \mu + \operatorname{sh} \mu)
 \end{vmatrix} \stackrel{e}{=} \quad (d)$$

$$= -\sin^2 \mu + \operatorname{sh}^2 \mu - \cos^2 \mu - \operatorname{ch}^2 \mu - 2 \cos \mu \operatorname{ch} \mu = 0$$

Kuna aga $\sin^2 \mu + \cos^2 \mu = \operatorname{ch}^2 \mu - \operatorname{sh}^2 \mu = 1$, saame siit parameetrite μ leidmiseks tingimuse

$$\cos \mu \operatorname{ch} \mu = -1 \quad (e)$$

Võrrandi (e) juured annavadki otsitavad μ väärtused.



JOON. 6.3

Kuna $\cos \mu \operatorname{ch} \mu$ on tabuleeritud funktsioon, võib nad kõige lihtsamalt leida vastavast tabelist.

Tabeli puudumisel võib juurte ligikaudsed väärtused leida graafiliselt. Kirjutame võrrandi (e) ümber kujul

$$\cos \mu = -\frac{1}{\operatorname{ch} \mu}$$

ja joonistame välja kummagi funktsiooni graafikud (joon. 6.3). Nende graafikute lõikepunktid annavadki otsitavad μ väärtused.

Nagu toodud jooniselt selgub, võib kõrgemate omavõnkesageduste leidmiseks küllaldase täpsusega lugeda,

ei $\mu = \frac{2n-1}{2} \pi$. Esimeste omavõnkesageduste leidmiseks saame $\mu_1 = 1,88$ ja $\mu_2 = 4,69$.

Peavõnkekuju leidmiseks võrrutame B_1 ühega ja avaldame võrrandisüsteemi (c) ükskõik kummast võrrandist B_2 . Kasutades esimest võrrandit, saame

$$B_2 = -\frac{\sin \mu + \operatorname{sh} \mu}{\cos \mu + \operatorname{ch} \mu}$$

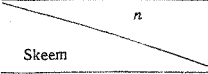


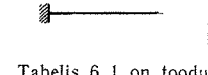
Kuna $B_4 = -B_2$ ja $B_3 = -B_1 = -1$, kujuneb avaldis (6.13) konsooli jaoks järgmiseks:

$$f = \sin \frac{\mu x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} + \frac{\sin \mu + \operatorname{sh} \mu}{\cos \mu + \operatorname{ch} \mu} \left(\operatorname{ch} \frac{\mu x}{l} - \cos \frac{\mu x}{l} \right) \quad (f)$$

kuhu uuritava peavõnkekuju leidmiseks tuleb paigutada sellele peavõnkekujule vastav μ väärtus, näiteks esimese võnkesageduse puhul $\mu = 1,88$.

Kolmele esimesele võnkesagedusele vastavad peavõnkekujud on toodud joonisel 6.2.

Tabel 6.1

μ_n väärtused				
n	1	2	3	> 3
Skeem				
	π	2π	3π	$n\pi$
	4,73	7,85	11,0	$\frac{2n+1}{2}\pi$
	3,93	7,07	10,2	$\frac{4n+1}{2}\pi$
	1,88	4,69	7,85	$\frac{2n-1}{2}\pi$

Tabelis 6.1 on toodud teguri μ_n väärtused mõningate kinnitustingimuste jaoks.

Omapõnkesagedus määratakse valemiga (6.11):

$$\omega_n = \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

6.13 Piki- ja põikjõu mõju omapõnkesagedusele

Kui prismaalsele vardale mõjub tõmbejõud T , tuleb võrrandit (6.9) täiendada selle jõu mõjuga läbipaindele [vt. (2.2)]. Saame:

$$f^{IV} - \frac{T}{EI} f'' - \frac{m\omega^2}{EI} f = 0 \quad (a)$$

Olgu varras otstel vabalt toetatud (joon. 6.1). Sel juhul rahuldab diferentsiaalvõrrandit (a) ja ääritingimusi avaldis

$$f_n = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (b)$$

mille asendamisel võrrandisse (a) saame

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{m} + \left(\frac{n\pi}{l}\right) \frac{T}{m} \quad (c)$$

Esimese omavõnkesageduse jaoks saame võrrandist (c) järgmise avaldise:

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \sqrt{1 + \frac{T}{T'}} \quad (d)$$

kus

$$T' = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (e)$$

Avaldisest (d) nähtub, et tõmbejõud suurendab omavõnkesagedust, survejõud vähendab. Kui survejõud läheneb kriitilisele, s. t. $T \rightarrow -T'$, siis omavõnkesagedus ω_1 läheneb nullile. Seda asjaolu võib kasutada konstruktsiooni stabiilsusvaru määramiseks.

Põikjõud vähendab konstruktsiooni omavõnkesagedust. Hüljates põikjõu mõju me nagu asetaksime konstruktsioonile täiendavad sidemed, mis takistavad põikjõule vastavaid paigutisi, seega käsitame konstruktsiooni tegelikust jäigemana.

Põikjõu mõju on kõrgematele sagedustele suurem kui madalamatele. Võnkumisel tekivad talal üksikud poolained; sõlmpunktid jäävad paigale. Kõrgemale sagedusele vastab suurem poollainete arv ja nende väiksem pikkus. Seega töötab tala nagu mitmesildeline tala, mille silded madalamalt võnkesageduselt kõrgemale üleminekul vähenevad. Põikjõu suhteline mõju tala läbipaindele oleneb teatavasti aga tala kõrguse ja pikkuse suhte ruudust ja suureneb tala pikkuse, antud juhul üksikute poollainete pikkuse vähenemisega.

6.2 LIGIKAUDED ARVUTUSMEETODID

Muutuva ristlõikega varraste puhul ei ole diferentsiaalvõrrand (6.4) täpsete meetoditega lahendatav ja omavõnkesagedused tuleb määrata mingi ligikaudse meetodiga. Samuti tekib vajadus ligikaudsete meetodite järele siis, kui võnkuv süsteem koosneb jaotatud massiga varrastest ja üksikutest koondatud massidest. Tõsi,

prismalisest kaaluga talast ja sellele talale kinnitatud koondatud massidest koosneva süsteemi kohta on võimalik leida täpne lahend, kuid üldiselt on säärase täpse lahendi saamine küllaltki tülikas ja esimesed omavõnkesagedused võib lihtsamalt määrata ligikaudsete meetoditega. Sama kehtib ka üksikutest prismalistest varrastest koosneva konstruktsiooni võnkumise kohta. Lõpuks osutuvad ligikaudsed meetodid kasulikeks ka sel juhul, kui võnkuv süsteem koosneb küll ainult üksikutest massidest, kuid nende arv on suur.

Diferentsiaalvõrrand (6.4) määrab muutuva ristlõikega varraste omavõnkesagedused ja peavõnkekujud. Tema lahendamiseks sobivad kõik meetodid, mida kasutatakse surutud varda kriitilist koormust määrava võrrandi (3.2) lahendamiseks: diferentsimeetod, *Bubnov-Galjorkini* meetod, järkjärgulise lähenemise meetod jne.

Samuti võib dünaamika küsimuste uurimisel kasutada energeetilist meetodit.

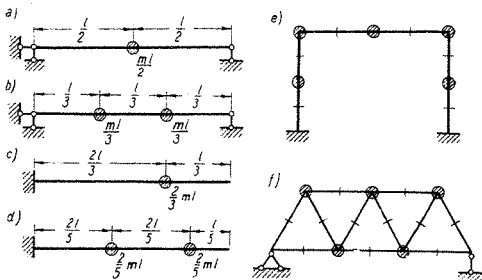
Nimetatud meetodeist vaatleme käesolevas peatükis ainult kaht: järkjärgulise lähenemise meetodit ja energeetilist meetodit. Järkjärgulise lähenemise meetodil peatume pikemalt seepärast, et tema kasutamisel tekivad kõrgemate võnkesageduste määramisel mõned küsimused, mida ei esine kriitilise jõu leidmisel. Energeetiline meetod aga väärib tähelepanu selle tõttu, et ta on äärmiselt üldine ja kasutatav igasuguste võnkuvate süsteemide korral.

Lisaks neile meetodeile vaatleme veel jaotatud masside asendamist koondatud massidega, millele analoogilist meetodit varraskonstruktsioonide stabiilsuse probleemides ei käsitletud. Selle meetodiga alustamegi.

6.21 Jaotatud masside asendamine koondatutega

Jaotatud massid asendatakse konstruktsioonide dünaamika uurimisel sageli koondatud massidega. Koondatud masside valikule järgnev arvutus toimub nii, nagu eelmises peatükis kirjeldatud. Saadav täpsus sõltub valitud masside arvust ja konstruktsiooni iseärasustest. Selleks et esimesi võnkesagedusi määrata küllaldase täpsusega, piisab võrdlemisi väikesest masside arvust.

Jaotatud masside asukoha ja nende suuruse määramisel võib juhinduda järgmisest. Vardad jaotatakse mõtteliselt



JOON. 6.4

osadeks ja iga üksiku osa mass loetakse koondatuks kas massikeskmesse või vastava löigu otspunktidesse. Massid löigu otspunktides tuleb valida nii, et masside kogusumma ja staatiline moment ei muutu, s. o. redutseeritud massid määratakse samuti nagu toereaktsioonid kahel toel asuva tala puhul.

Toome mõningad näited masside asukoha valiku kohta (joon. 6.4).

Lihttala jaotatakse võrdseteks osadeks. Massid, mis koondame lõikude otspunktidesse, asuvad tala keskel, kolmandikkudel, neljandikkudel jne. (joon. 6.4, a ja b).

Konsoolil eraldatakse vabast otsast poole jaotuse pikkune osa ja kantakse selle osa mass eelmise löigu otspunkti (joon. 6.4, c ja d).

Raami mass koondatakse sõlmedesse ja üksikute varraste keskohtadesse, nagu näidatud joonisel 6.4, e; üksikutele massidele vastavad raami osad on joonisel eraldatud kriipsuga.

Sõrestiku üldvõnkumise uurimiseks koondatakse varraste mass sõlmedesse (joon. 6.4, f).

Kui konstruktsioonil asub üksainus koondatud mass ja selle mõju konstruktsiooni deformatsioonidele on tunduvalt suurem konstruktsiooni jaotatud masside mõjust, võib arvutuses kogu konstruktsiooni massi tuua koondatud massi juurde, kusjuures redutseeritud massi suurus

määratakse tingimusest, et jaotatud massi ja redutseeritud massi kineetiline energia koondatud massile vastavatel siiretel oleksid ühesugused (p. 6.24):

$$M_{\text{red}} \dot{f}_M^2 = \int_0^l m \dot{f}^2(x) dx$$

kus f — konstruktsiooni siirded koondatud massi võnkumise sihis rakendatud suvalisest jõust,

\dot{f}_M — koondatud massi siire samast jõust.

Paralleelvõõdega sõrestiku omavõnkesageduste määramiseks asendatakse mõnikord sõrestik talaga, kusjuures tala mass võrdub sõrestiku massiga ja tala inertsmoment määratakse tingimusest, et sõrestiku ja teda asendava tala läbipainded silde keskel oleksid võrdsed.

6.22 Järkjärgulise lähenemise meetod

Kirjutame võrrandi (6.6, a) ümber järgmiselt:

$$[EI(x)f''(x)]'' = m(x)\omega^2 f(x) \quad (6.14)$$

Võrdlus tala elastse joone võrrandiga

$$[EI(x)f''(x)]'' = q$$

näitab, et võrrandi (6.14) paremat poolt võib vaadelda väliskoormuse intensiivsusest; $f(x)$ on sellele koormusele vastavaks tala elastseks jooneks.

Võrrandi (6.14) lahendamiseks järkjärgulise lähenemise meetodiga anname ette tala elastse joone võrrandi $f^{(k)}(x)$. Edasi arvutame väliskoormuse $q^{(k)}(x) = m(x)f^{(k)}(x)$ ning leiame sellele koormusele vastava elastse joone $f^{(k+1)}(x)$.

Kui etteantud läbipaindekujude $f^{(k)}(x)$ on õige, on saadud läbipainde $f^{(k+1)}(x)$ ordinaadid kõikides punktides õigetest ω korda väiksemad ja nurksageduse ω võib leida avaldisest

$$\omega = \sqrt{\frac{f^{(k)}(x)}{f^{(k+1)}(x)}} \quad (6.15)$$

Etteantud läbipaindekujude ei lange tavaliselt kokku tegeliku peavõnkekujuga. Sel juhul annab iga punktipaar ω jaoks erinevad väärtused; need punktid, kus läbipainded on suuremad, annavad üldiselt täpsemad tulemused. Võib võtta ka mingi keskmise väärtuse.

Soovi korral võib tulemusi täpsustada, võttes uueks elastse joone kujuks $f^{(h)}(x)$ asemel äsja leitud elastse joone kaju $f^{(h+1)}(x)$ ja korrates arvutust. Kuna amplituudid taanduvad, võime eelnevalt $f(x)$ mastaapi arvutuse lihtsustamiseks suvaliselt muuta.

Kuna läbipaindekuju etteandmisel ei ole ääretingi-
muste rahuldamine vajalik (koormus ei pea ääretingi-
misi rahuldama), võib null-lähenduses $f^{(h)}$ lugeda võrd-
seks raskuskiirendusega: $f^{(0)} = g$. Sel juhul on etteantud
koormuseks võnkuva tala omakaal $q = mg$ ja esimese
lähenduse elastseks jooneks on staatiline läbipaine oma-
kaalust. Ligikaudne omavõnkesagedus saadakse valemist

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{f_{st}}} \quad (6.16)$$

kus staatilise läbipainde väärtus on soovitatav võtta seal,
kus ta on maksimaalne.

Ülaltoodud meetodiga saadakse tavaliselt esimene
omavõnkesagedus ning esimene peavõnkekuju. Erandiks
on ainult juht, kus etteantud elastsusjoon langeb kokku
mõne kõrgema peavõnkekujuga, näiteks kui sümmeetri-
lise tala võnkumise uurimisel lähtume antimeetrisest
võnkekujust. Kui aga null-lähenduseks valitud elastne
joon sisaldab kas või mingisuguseid esimese peavõnku-
mise elemente, s. t. ei ole sellega täiesti ortogonaalne,
suureneb nende osatähtsus igas järgnevas lähenduses
ja lõpuks saame paratamatult kõige madalama võnke-
sageduse.

Järkjärgulise lähenemisega on siiski võimalik leida ka
kõrgemaid võnkesagedusi. Selleks tuleb aga enne leida
kõik madalamad võnkesagedused ja kõrgema sageduse
leidmiseks kasutatav omavõnkekuju eelnevalt ortogonali-
seerida kõigi madalamate sageduste omavõnkekujudega.

Teine omavõnkesagedus leitakse järgmiselt:

Algul leiame esimesele omavõnkesagedusele vastava
peavõnkekuju $f_{(1)}$. Teisele omavõnkesagedusele vastava
null-lähenduse paigutispildi $f_{(2)}^{(0)}$ leidmiseks anname ette
teise peavõnkumise oletatava kaju $\varphi_{(2)}^{(0)}$ ja ortogonalisee-
rime ta esimese peavõnkumise kujuga. Selleks avaldame
 $f_{(2)}^{(0)}$ summana

$$f_{(2)}^{(0)} = \varphi_{(2)}^{(0)} + \alpha f_{(1)} \quad (6.17)$$

ja nõuame, et oleks rahuldatud ortogonaalsuse tingimus (5.52), mis antud juhul võtab kuju:

$$\int_0^l m f_{(2)}^{(0)} f_{(1)} dx = 0 \quad (6.18)$$

Asendades $f_{(2)}$ avaldise (6.17) ortogonaalsuse tingimusse (6.18), saame:

$$\int_0^l m (\varphi_{(2)}^{(0)} + \alpha f_{(1)}) f_{(1)} dx = 0 \quad (6.19)$$

kust

$$\alpha = - \frac{\int_0^l m \varphi_{(2)}^{(0)} f_{(1)} dx}{\int_0^l m f_{(1)}^2 dx} \quad (6.20)$$

Mitme lähenduse korral tuleb ortogonaliseerida iga uue lähenduse algul.

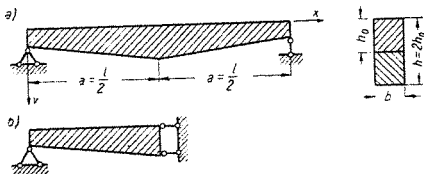
Kolmanda omavõnkesageduse leidmiseks tuleb vastava peavõnkumise kujuks võtta

$$f_{(3)}^{(0)} = \varphi_{(3)}^{(0)} + \alpha_1 f_{(1)} + \alpha_2 f_{(2)} \quad (6.21)$$

kus $\varphi_{(3)}^{(0)}$ on etteantud kolmanda peavõnkumise kuju, ja avaldis (6.21) ortogonaliseerida niihästi esimese kui ka teise peavõnkekujuga jne.

Järkjärgulise lähenemise meetodit võib kasutada mitte ainult jaotatud massiga talade, vaid suvalise elastse konstruktsiooni (ka koondatud massiga) vabavõnkumise uurimisel. Tehnika jääb selle juures samaks, s. t. anname ette siirded $f^{(0)}$ ja leiame neile siiretele vastavad inertsjõud $m f^{(0)}$, kusjuures koondatud massid annavad koondatud jõud. Edasi leiame inertsjõududest põhjustatud siirded $f^{(1)}$ ja omavõnkesageduse määrame valemiga (6.15).

Olgu märgitud, et käesoleva meetodi juures võib võrrelda mitte üksnes kahe üksteisele järgneva lähenduse siirdeid, vaid ka pöördeid, inertsjõude jne.



JOON. 6.5

Näide 6.1. Määrata joonisel 6.5, a kujutatud sümmeetrilise tala esimene omavõnkesagedus. Tala laius on konstantne; kõrgus muutub lineaarselt toelt kuni keskpunktini.

Tähistame tala massi intensiivsuse toe kohal m_0 ja ristlõike inertsimomendi samas kohas I_0 . Vahemikus $0 \leq x \leq a$ on siis massi intensiivsus $m = m_0(1 + x/a)$ ja paindejäikus $EI = EI_0(1 + x/a)^3$.

Tala sümmeetria kasutamiseks vaatleme ainult tala üht poolt joonisel 6.5, b kujutatud ääretingimustel.

Vasemal toel võrduvad nulliga siirded ja paindemomendid:

$$f_0 = M_{x,0} = 0 \quad (a)$$

Paremalt toel võrduvad nulliga pöörded ja põikjõud:

$$\Theta_{(a)} = Q_{(a)} = 0 \quad (b)$$

Tala painde elemendid leiame järkjärgulise integreerimise teel. Arvestades tingimusi (a), saame: põikjõud

$$Q = Q_0 + \int_0^x q \, dx \quad (c)$$

paindemoment

$$M_x = Q_0 x + \int_0^x \int_0^x q \, d^2x \quad (d)$$

pööre

$$\Theta = \Theta_0 + \int_0^x \left(\frac{Q_0 x}{EI} + \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x q \, d^2x \right) dx \quad (e)$$

siire

$$f = \Theta_0 x + \int_0^x \int_0^x \left(\frac{Q_0 x}{EI} + \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x q \, d^2x \right) d^2x \quad (f)$$

Pöörded Θ_0 ja põikjõud Q_0 toel leiame ääretingimustest (b).

Null-lähenduses võtame elastse joone kujuks sinusoidi $\sin \frac{\pi x}{2a}$.

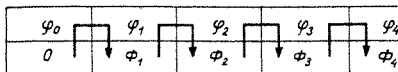
Integreerime numbriliselt, nagu näidatud tabelis 6.2. Integreerimisvahemiku pikkuseks on võetud $a/5$. Integraalid on leitud trapetsvalemiga. Selle kasutamisel kujuneb integreerimise tehnika äärmiselt lihtsaks.

Olgu teada mingi funktsiooni $\varphi(x)$ väärtused $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ vahemiku Δ järel. Olgu tarvis leida integraal $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x) dx$.

Integraali $\Phi(x)$ väärtused kujunevad järgmisteks:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (\varphi_0 + \varphi_1) (\Delta/2) \\ \Phi_2 &= (\varphi_0 + 2\varphi_1 + \varphi_2) (\Delta/2) = (\Phi_1 + \varphi_1 + \varphi_2) (\Delta/2) \\ \Phi_3 &= (\varphi_0 + 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3) (\Delta/2) = (\Phi_2 + \varphi_2 + \varphi_3) (\Delta/2) \end{aligned} \quad (g)$$

Summeerimine toimub seega nii, nagu alljärgneval skeemil noolega näidatud:



Tabelis 6.2 on säärane operatsioon tähistatud märgiga Σ .

Avaldised algarvete — pöördenurga Θ_0 ja pöökjõu Q_0 — määramiseks kujunevad tabeli 6.2 alusel järgmisteks:

$$Q_0 + (9)_{10} = 0 \quad \Theta_0 + Q_0 \cdot (5)_{10} + (12)_{10} = 0 \quad (h)$$

ehk

$$Q_0 + 10,38m_0a/10 = 0 \quad \Theta_0 + Q_0 \cdot 12,15a^2/10^3EI_0 + 16,32m_0a^3/10^3EI_0 = 0 \quad (i)$$

millest

$$\begin{aligned} Q_0 &= -10,38m_0a/10 \\ \Theta_0 &= 109,8m_0a^3/10^3EI_0 \end{aligned}$$

Saadud algarvete abil leiame uue täpsustatud võnkekujut $f^{(1)}$ ja omavõnkesageduse määramise valemiga (6.15).

Üksikute tala punktide järgi määratud ω^2 väärtused on toodud reas (15). Need annavad piirid ω^2 jaoks. Võttes $f^{(0)}$ ja $f^{(1)}$ jaoks keskmised väärtused, saame:

$$\omega^2 = 16,4 \frac{EI_0}{m_0a^4}; \quad \omega = \frac{4,10}{a^2} \frac{EI}{m_0} = \frac{16,40}{l^2} \frac{EI}{m_0}$$

Vajaduse korral võib tulemust täpsustada, võttes null-lähenduseks saadud $f^{(0)}$ [rida (14)] ja korrates tsükli (7)–(14). Teises lähenduses annavad juba kõik punktid väärtuseks $16,5EI_0/m_0a^4$, seega edasine täpsustamine ei ole enam vajalik.

Avaldised algarameetrite määramiseks omavõnkesageduse määramisei järkjärgulise lähenemise meetodiga

Nr.	Avaldis	Üksikutele jaotustele vastavad suurused						Kordaja
		0	2	4	6	8	10	
(1)	x	0	2	4	6	8	10	$a/10$
(2)	m	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	m_0
(3)	EI	1,0	1,728	2,744	4,096	5,832	8,000	EI_0
(4)	x/EI	0	1,157	1,458	1,465	1,372	1,250	$a/10EI_0$
(5)	$\Sigma (4)$	0	1,157	3,772	6,695	9,532	12,15	$a^2/10EI_0$
(6)	$\Sigma (5)$	0	1,157	6,086	16,55	32,78	54,46	$a^3/10^3EI_0$
(7)	$f^{(0)}$	0	0,309	0,588	0,809	0,946	1,000	—
(8)	$q^{(0)} = m f^{(0)} = (2)x(7)$	0	0,371	0,823	1,294	1,703	2,000	m_0
(9)	$\Sigma (8)$	0	0,371	1,565	3,682	6,679	10,38	$m_0 a^2/10$
(10)	$\Sigma (9)$	0	0,371	2,307	7,554	17,92	34,97	$m_0 a^3/10^2$
(11)	$(10)/(3)$	0	0,215	0,841	1,844	3,073	4,371	$m_0 a^3/10^2 EI_0$
(12)	$\Sigma (11)$	0	0,215	1,271	3,956	8,873	16,32	$m_0 a^3/10^3 EI_0$
(13)	$\Sigma (12)$	0	0,215	1,701	6,928	19,76	44,95	$m_0 a^4/10^4 EI_0$
(14)	$f^{(1)} = \Theta_0 x(1) - Q_0(6) \div (13)$	0	207,8	377,7	493,9	557,8	577,7	$m_0 a^4/10^4 EI_0$
(15)	$\omega^2 = f^{(1)}/f^{(0)} = (7)/(14)$		14,9	15,6	16,4	17,0	17,3	$EI_0/m_0 a^4$

6.23 Energeetiline meetod

6.23.1 Omavõnkesageduse määramine esimeses lähenduses.

Energeetilise meetodi aluseks on energia jäävuse seadus. Elastse konstruktsiooni võnkumisel toimub pidev potentsiaalse energia U üleminek kineetiliseks energiaks K ja vastupidi, kuid potentsiaalse ja kineetilise energia summa on konstruktsioonis, mille sumbuvus võrdub nulliga, konstantne suurus:

$$U + K = \text{konst.} \quad (6.22)$$

Potentsiaalse energia U loeme sel hetkel, mil konstruktsioon läbib staatilise tasakaaluasendi, võrdseks nulliga. Kineetiline energia K on sel hetkel aga maksimaalse väärtusega, kuna konstruktsiooni osakeste liikumise kiirus on siis kõige suurem. Võnkumise äärmises asendis on potentsiaalsel energial maksimaalne väärtus, kineetilise energia väärtus aga võrdub seal nulliga. Seega on potentsiaalse energia ja kineetilise energia maksimaalsed väärtused võrdsed:

$$\max U = \max K \quad (6.23)$$

Märgime, et potentsiaalne energia on mõlemas äärmises asendis positiivne, kuna staatilise tasakaalu asendist üleminekul muudavad märki niihästi inertsjõud kui ka siirded.

Siirdeid v võib kujutada kahe funktsiooni korrutisena, millest üks sõltub ainult kohast ja teine ainult ajast. Kuna vabavõnkumine on harmooniline, siis

$$v(x, t) = f(x) \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.24)$$

Kineetilise energia avaldis siirdliikumise puhul on järgmine:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \dot{v}^2(x, t) dx = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \int_0^l m(x) f^2(x) dx \end{aligned} \quad (6.25)$$

Kuna koosinuse maksimaalne väärtus võrdub ühega, siis kineetilise energia maksimaalne väärtus

$$\max K = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \mathbf{m}(x) f^2(x) dx \quad (6.26)$$

Tähistades

$$\frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{m}(x) f^2(x) dx = K_0 \quad (6.27)$$

võime $\max K$ avaldada järgmiselt:

$$\max K = \omega^2 K_0 \quad (6.28)$$

Asendades (6.28) võrdusse (6.23) ning tähistades ühtlasi $\max U = U_0$, saame omavõnkesageduse määramiseks järgmise avaldise:

$$\omega^2 = \frac{U_0}{K_0} \quad (6.29)$$

mis ongi põhivõrrandiks omavõnkesageduse määramisel energeetilise meetodiga.

Potentsiaalset energiat võnkuvaga varda äärmises asendis võib avaldada mitmel erineval viisil. Avaldades ta varda võnkekuju $f(x)$ kaudu, saame:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) [f''(x)]^2 dx \quad (6.30, a)$$

vardas tekkivate paindemomentide M_x kaudu:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2(x)}{EI(x)} dx \quad (6.30, b)$$

ja vardale mõjuva välisjõu p töö kaudu:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l p(x) f(x) dx \quad (6.30, c)$$

Vastavalt avaldistele (6.30, a—c) saame omavõnkesageduse ruudu jaoks järgmised avaldised:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI(x) [f''(x)]^2 dx}{\int_0^l \mathbf{m}(x) f^2(x) dx} \quad (6.31, a)$$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l [M_z^2(x)/EI(x)] dx}{\int_0^l m(x) f^2(x) dx} \quad (6.31, b)$$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \rho(x) f(x) dx}{\int_0^l m(x) f^2(x) dx} \quad (6.31, c)$$

Integraale (6.27) ja (6.30, c) tuleb vaadelda üldistatud mõttes, s. t. nad võivad sisaldada ka koondatud masside korrutisi masside siirete ruutudega või vastavalt koondatud jõudude ja nende rakenduspunktide siirete korrutisi.

Võnkekuju $f(x)$ on teadmata ja tuleb ette anda. Juhul kui õnnestub valida säärane võnkekuju, mis vastab tegelikule, saame omavõnkesageduse täpse väärtuse. Üldiselt aga kujuneb leitud sagedus tegelikust suuremaks, kuna läbipainde kjuu etteandmine vastab konstruktsioonile täiendavate sidemete kinnitamisele, mis lubavad konstruktsioonil võnkuda ainult meie poolt määratud kjuu järgi, s. t. konstruktsiooni jäikuse suurendamisele. Kui anname ette erinevad läbipainde kujud ja leiame neile vastavad võnkesagedused, osutub saadud võnkesageduste väärtusest kõige täpsemaks väiksem.

Etteantud siirded $f(x)$ peavad rahuldama vähemalt kinemaatilisi ääritingimusi.

Avaldise (6.31, b) kasutamisel tuleb ette anda paindemomendid $M_z(x)$; siirded $f(x)$ peavad olema põhjustatud neist paindemomentidest. Avaldise (6.31, c) kasutamisel tuleb ette anda väliskoormus $p(x)$ ja leida sellele vastavad siirded $f(x)$.

Kui võnkuv konstruktsioon koosneb mitmest vardast, tuleb integreerida üle kõigi varraste.

Kui võnkuv konstruktsioon asetseb elastsetel tugedel, tuleb avaldises (6.29) arvestada ka tuge deformatsioonienergiat.

Kui konstruktsioon sisaldab peale varraste muid elemente (näit. vedrusid) või koosneb ainuüksi neist, tuleb painduvate varraste kohta kehtivate potentsiaalse energia avaldiste (6.30, a ja b) asemele võtta vastavalt nende elementide deformatsioonienergia avaldised. Avaldis (6.30, c) on üldine.

6.23.2 Rayleigh-Ritzi meetod

Täpsema lahendi leidmiseks aproksimeerime peavõnkumise kuju reaga

$$\bar{f}(x) = \sum_j A_j f_j(x) \quad (6.32)$$

kus $f_j(x)$ on etteantud funktsioonid, mis rahuldavad vähe-
malt kinemaatilisi ääretingimusi. Edasi on põhimõtteli-
selt tarvis leida avaldisest (6.30, a) peavõnkumise kujule
(6.32) vastav deformatsioonienergia U_0 ja avaldisest
(6.27) kineetilist energiat iseloomustav funktsioon K_0 .
Selle järel tuleb saadud potentsiaalse ja kineetilise ener-
gia avaldised asendada omavõnkesageduse avaldisse
(6.29). Kuna energeetiline meetod annab esimese oma-
võnkesageduse jaoks õigest suurema väärtuse, peame
otsima säärased parameetrite A_j väärtused, mis teeksid
omavõnkesageduse minimaalseks. Selleks võrrutame
omavõnkesageduse ruudu ω^2 tuletised parameetrite A_j
suhtes nulliga:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial A_j} = \frac{\partial}{\partial A_j} \frac{U_0}{K_0} = 0 \quad (6.33)$$

Kasutades reeglit jagatise tuletise kohta, saame:

$$\frac{\frac{\partial U_0}{\partial A_j} K_0 - \frac{\partial K_0}{\partial A_j} U_0}{K_0^2} = 0 \quad (6.34)$$

Korrutades võrrandi (6.34) suurusega K_0 ja pida-
des silmas, et $U_0/K_0 = \omega^2$, saame:

$$\frac{\partial}{\partial A_j} (U_0 - \omega^2 K_0) = 0 \quad (6.35)$$

Võrrandid (6.35) ongi põhivõrrandeiks omavõnkesage-
duste määramisel Rayleigh-Ritzi meetodiga.

Võrrandite (6.35) väljaarendamisel saame järgmise
lineaarse algebralise võrrandisüsteemi, kus võrrandite
arv n võrdub etteantud funktsioonide $f_j(x)$ arvuga aval-
dises (6.32):

$$\begin{aligned}
 & (a_{11} - \omega^2 b_{11})A_1 + (a_{12} - \omega^2 b_{12})A_2 + \dots \\
 \dots & + (a_{1k} - \omega^2 b_{1k})A_k + \dots + (a_{1n} - \omega^2 b_{1n})A_n = 0 \\
 & (a_{21} - \omega^2 b_{21})A_1 + (a_{22} - \omega^2 b_{22})A_2 + \dots \\
 \dots & + (a_{2k} - \omega^2 b_{2k})A_k + \dots + (a_{2n} - \omega^2 b_{2n})A_n = 0 \\
 & \dots \\
 & \dots \\
 & (a_{j1} - \omega^2 b_{j1})A_1 + (a_{j2} - \omega^2 b_{j2})A_2 + \dots \\
 \dots & + (a_{jk} - \omega^2 b_{jk})A_k + \dots + (a_{jn} - \omega^2 b_{jn})A_n = 0 \\
 & \dots \\
 & \dots \\
 & (a_{n1} - \omega^2 b_{n1})A_1 + (a_{n2} - \omega^2 b_{n2})A_2 + \dots \\
 \dots & + (a_{nk} - \omega^2 b_{nk})A_k + \dots + (a_{nn} - \omega^2 b_{nn})A_n = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.36}$$

Omapõnkesageduste ruudud ω^2 saame, võrrutades võrrandisüsteemi (6.36) kordajaist moodustatud determinandi nulliga. Kuna saadud võrrandil on n juurt, saame mitte üksi esimese omapõnkesageduse, vaid ka kõrgemad, kusjuures kõrgemad omapõnkesagedused on tavaliselt väiksema täpsusega. Saame muidugi ainult säärasd põnkesagedused, millele vastavaid peavõnkumisi saame reaga (6.32) küllaldaselt hästi aproksimeerida.

Selgitame, mida kujutavad endast kordajad a_{jk} . Selleks oletame, et siirded (6.32) on saadud koormuste

$$p(x) = \sum_k A_k p_k(x) \tag{6.37}$$

toimel. Potentsiaalset energiat iseloomustav suurus U_0 kujutab endast vastavalt avaldisele (6.30, c) avaldise (6.32) ja (6.37) korrutise integraali:

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j A_k \int_0^l p_k(x) f_j(x) dx \tag{6.38}$$

Eraldame avaldisest (6.38) need liikmed, mis sisaldavad korrutist $A_j A_k$:

$$U_0^{(jk)} = \frac{1}{2} A_j A_k \left(\int_0^l p_k(x) f_j(x) dx + \int_0^l p_j(x) f_k(x) dx \right) \tag{6.39}$$

Diferentseerime (6.39) A_j järgi. Saame, arvestades et tööde vastastikkuse lause alusel $p_k f_j = p_j f_k$,

$$\frac{\partial U_0^{(jk)}}{\partial A_j} = A_k \int_0^l p_j(x) f_k(x) dx$$

millest

$$a_{jk} = \int_0^l p_j(x) f_k(x) dx \quad (6.40, a)$$

Seega tegur a_{jk} kujutab endast integraali süsteemi j sisejõudude ja süsteemi k siirete korrutisest (või vastupidi), teisiti öeldes **tööd, mida teevad süsteemi j sisejõud süsteemi k siiretel.**

Üldjuhul võivad muidugi jõudude asemel esineda momendid ja siirete asemel pöörded.

Analoogiliselt avaldistega (6.30, $a-c$) võib sel juhul, kui potentsiaalseks energiaks on ainult varda painde-deformatsiooni energia, tegureid a_{jk} avaldada veel siirete teiste tuletiste kaudu:

$$a_{jk} = \int_0^l EI f_j''(x) f_k''(x) dx \quad (6.40, b)$$

või paindemomentide kaudu:

$$a_{jk} = \int_0^l \frac{M_j(x) M_k(x)}{EI(x)} dx \quad (6.40, c)$$

Saadud kolmest avaldisest (6.40, $a-c$) on avaldis (6.40, a) kõige üldisem ja sobib kasutamiseks ükskõik millistes konstruktsioonides; lihtne on teda kasutada aga ainult sel juhul, kui konstruktsiooni punktide siirded on antud jõu järgi hõlpsalt leitavad. Avaldise (6.40, b) kasutamisel piisab siirete etteandmisest, neid siirdeid põhjustanud jõudude teadmine ei ole vajalik. Lõpuks, avaldises (6.40, c) on tegurite a_{jk} määramine viidud *Mohri* integraali leidmisele.

Tegurite b_{jk} lähenduse leidmiseks teeme samad operatsioonid kineetilist energiat iseloomustava suurusega (6.27). Selgub, et

$$b_{jk} = \int_0^l \mathbf{m}(x) f_j(x) f_k(x) dx \quad (6.41)$$

Kuna $\omega^2 \mathbf{m}(x) f_j(x)$ on võnkumisel tekkivad inertsjõud, siis ka tegurid b_{jk} iseloomustavad **tööd, nimelt seda töö, mida teevad süsteemi j inertsjõud süsteemi k siiretel.**

Etteantud siirded $f_j(x)$ peavad rahuldama järgmisi tingimusi:

1) nad peavad olema toetingimuste seisukohalt võimalikud, s. t. kinemaatilised ääretingimused peavad olema rahuldatud;

2) rea (6.32) üksikud liikmed ei tohi kujutada endast teiste liikmete kombinatsioone;

3) rida (6.32) peab võimaldama saada sobivate parameetrite A_i korral paigutispildi, mis on küllalt lähedane tegelikule võnkekujule

Kui konstruktsiooni vabadusastmete arv langeb kokku rea (6.32) liikmete arvuga ja etteantud siirded $f_j(x)$ langevad kokku üksikute peavõnkekujudega, siis kõik võrrandisüsteemi (6.36) kordajad peale peadiagonaalil asetsevate kordajate võrduvad nulliga:

$$a_{jh} = b_{jh} = 0 \quad (j \neq k)$$

ja võrrandisüsteem (6.32) jaguneb üksikuks iseseisvaks võrrandiks

$$\begin{aligned} a_{11} - \omega^2 b_{11} A_1 &= 0 \\ a_{22} - \omega^2 b_{22} A_2 &= 0 \\ \dots & \dots \\ a_{nn} - \omega^2 b_{nn} A_n &= 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

Seega võib sel juhul iga omavõnkesageduse leida omavõrrandist.

Sel puhul öeldakse, et ülesanne on lahendatud peakoordinaatides. Peakoordinaatideks (üldistatud mõttes) on siis vastavad siirded f_j .

Peakoordinaadistikus kujuneb omavõnkesageduste ω leidmine äärmiselt lihtsaks. Kahjuks on aga üldjuhul peakoordinaatide leidmine niivõrd töömahukas, et lihtsam on ülesanne lahendada mingis vabalt valitud koordinaadistikus.

Kui võnkuv konstruktsioon on sümmeetriline, siis tuleb seda siirete valikul arvestada, s. t. valida nad sümmeetriliste ja antisümmeetrilistena. Kuna sümmeetriliste süsteemide jõudude töö antisümmeetrilistel paigutistel võrdub nulliga, jaguneb võrrandisüsteem (6.36) kaheks iseseisvaks madalama järgu võrrandisüsteemiks. Omaväärtuste leidmisel on aga võrrandisüsteemi järgu alandamine töömahukuse seisukohalt veel suurema tähtsusega kui võrrandisüsteemide lahendamisel.

Näide 6.2. Määrata joonisel 6.6, a kujutatud konstruktsiooni omavõnkesagedused ja neile vastavad peavõnkekujud.

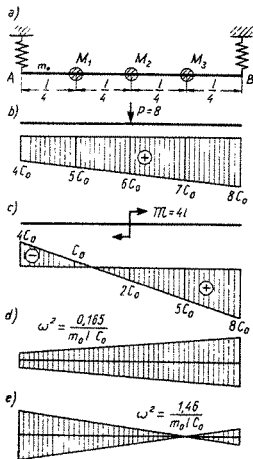
Tala AB on absoluutselt jäik, ühtlaselt jaotatud massiga, mille intensiivsus on m_0 . Lisaks sellele asetsevad talal kolm massi: $M_1 = m_0 l$, $M_2 = 2m_0 l$ ja $M_3 = 3m_0 l$. Tala on ülles riputatud kahe vedruga. Vedru A venivus, s. t. ühikjõule vastav siire $C_A = C_0$ ja vedru B venivus $C_B = 2C_0$.

Süsteemil on kaks vabadusastet, seega on tarvis ette anda kuni kaks paigutispilti või jõusüsteemi, mis annaksid vastavad paigutised. Nende valik on suvaline, ainsaks tingimuseks on, et nad ei tohi olla identsed, s. t. üks jõusüsteem ei tohi olla teise kordseks.

Valitud jõusüsteemid ja neile vastavad paigutised on näidatud joonisel 6.6, b ja c.

Teiseks üldistatud jõusüsteemiks olev moment on võetud kordajaga l , selleks et esimesele ja teisele jõusüsteemile vastavad paigutised oleksid sama dimensiooniga (tingimata vajalik see nõue ei ole). Arvulised kordajad üldistatud jõudude juures on valitud nii, et paigutiste kordajad on täisarvud, kuid lahenduse käigu suhtes kordajate valikul mingit põhimõtet tähtsust ei ole.

Olgu märgitud, et valitud jõusüsteemid ei ole arvutuslikult seisukohalt kõige paremad. Lihtsama lahenduskäigu saaksime näiteks võttes etteantud jõusüsteemideks üksikud jõud tala otstel.



JOON. 6.6

Leiame valemite (6.40, a) ja (6.41) abil võrrandisüsteemi (6.36) kordajad Arvestades, et momendi töö võrdub momendi ja pöörde korrutisega, saame

$$\begin{aligned} a_{11} &= 8 \cdot 6C_0 - 48C_0 \\ a_{1,2} &= a_{21} = 8 \cdot 2C_0 = 16C_0 \\ a_{22} &= 4(8C_0 + 4C_0)l = 48C_0 \\ b_{11} &= m_0 l (5C_0)^2 - 2m_0 l (bC_0) - 5m_0 l (7C_0)^2 - \\ & \int_0^l m_0 \left(4C_0 - 4C_0 \frac{x}{l} \right)^2 dx = 281 m_0 l C_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} = b_{21} &= m_0 l \cdot 5C_0(-C_0) - 2m_0 l \cdot 6C_0 \cdot 2C_0 + \\ & - 3m_0 l \cdot 7C_0 \cdot 5C_0 + \int_0^l m_0 \left(4C_0 - 4C_0 \frac{x}{l} \right) \left(-4C_0 + \right. \\ & \left. - 12C_0 \frac{x}{l} \right) dx = 140 m_0 l C_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{22} &= m_0 l C_0^2 - 2m_0 l (2C_0)^2 - 3m_0 l (5C_0)^2 - \\ & - \int_0^l m_0 \left(-4C_0 - 12C_0 \frac{x}{l} \right)^2 dx = 100 m_0 l C_0^2 \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi (6.36) lahendades saame naite jaoks järgmiseks:

$$\begin{aligned} (48 - 281\kappa)A_1 + (16 - 140\kappa)A_2 &= 0 \\ (16 - 140\kappa)A_1 + (48 - 100\kappa)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

kus

$$\kappa = m_0 l C_0 \omega^2 \quad (b)$$

Võrratades võrrandisüsteemi (a) kordajatest moodustatud determinandi nulliga, saame κ määramiseks rüüvõrrandi

$$8500\kappa^2 - 13808\kappa + 2048 = 0 \quad (c)$$

mille juured

$$\kappa_1 = 0,165, \quad \kappa_2 = 1,46 \quad (d)$$

Vastavalt avaldisele (b)

$$\omega_1^2 = 0,165/m_0 l C_0, \quad \omega_2^2 = 1,46/m_0 l C_0$$

Peavõnkumiste kuju leidmiseks paigutame vastava κ väärtuse (d) võrrandisse (a) ja avaldame ükskõik kummas võrrandist ühe amplituudi teise kaudu. Leiame, et esimesele võnkesagedusele vastab $A_2 = 0,23A_1$ ja teisele võnkesagedusele $A_2 = -1,91A_1$. Võnkumispildid on toodud joonistel 6.6, d ja e.

Näide 6.3. Määrata joonisel 6.5 kujutatud tala esimene omavõnkesagedus energiaetiliselt meetodiga.

Apraksimeerime tala elastset joont trigonomeetrilise reaga

$$f = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

ja piirdume esimese kahe tala keskloike suhtes sümmeetrilise liikmega:

$$f_1 = \sin \frac{\pi x}{l} \quad f_3 = \sin \frac{3\pi x}{l}$$

Ülesande lahendamise numbrilisel, jaotades tala poolpikkuse viieks osaks. Arvutus on toodud tabelis 6.3, kus arvestades sümmeetriat on käsitletud ainult tala vasemat poolt.

Integreerime trapetsvalemi abil piirides 0 — $l/2$ Saame:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \Sigma (17) \cdot l/10 = 13,012 \cdot \pi^4 EI_0 / 10^3 \\ a_{12} &= \Sigma (18) \cdot l/10 = -4,261 \cdot 9\pi^4 EI_0 / 10^3 \\ a_{22} &= \Sigma (19) \cdot l/10 = 9,993 \cdot 81\pi^4 EI_0 / 10^3 \\ b_{11} &= \Sigma (9) \cdot l/10 = 4,255 m_0 l / 10 \\ b_{12} &= \Sigma (10) \cdot l/10 = -0,523 m_0 l / 10 \\ b_{22} &= \Sigma (11) \cdot l/10 = 3,813 m_0 l / 10. \end{aligned}$$

Vüies sisse tähistuse

$$\kappa = \omega^2 \frac{m_0 l^4}{\pi^4 EI_0}$$

võime võrrandisüsteemi (6.36) välja kirjutada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} (13,012 - 4,255\kappa)A_1 + (-38,349 + 0,523\kappa)A_2 &= 0 \\ (-38,349 + 0,523\kappa)A_1 + (809,433 - 3,813\kappa)A_2 &= 0 \end{aligned}$$

kust analoogiliselt elmise ülesandega $\kappa_1 = 2,66$ ja $\kappa_2 = 213,9$.

Esimene omavõnkesagedus

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{\kappa_1 EI}{m_0}} = \frac{16,4}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}$$

langeb kokku sellega, mille saime järkjärgulise lähenemise meetodiga.

Sama ülesande lahendamisel esimeses lähenduses, s. t. piirdudes ainult ühe funktsiooni f_1 etteandmisega, oleksime saanud

$$\kappa = \frac{13,012}{4,255} = 3,05$$

ja

$$\omega = \frac{17,3}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

mis on teises lähenduses saadust ainult 5% suurem.

Tabel 6 3

Omavõnkesageduse määramine energetilise meetodiga

Nr	Avaldis	Üksikutele jaotustele vastavad suurused						Kordaja
(1)	λ/l	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	—
(2)	m	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	m_0
(3)	EI	1,0	1,728	2,744	4,096	5,832	8,000	EI_0
(4)	f_1	0	0,309	0,588	0,809	0,946	1,000	—
(5)	f_2	0	0,809	0,946	0,309	-0,588	-1,000	—
(6)	f_1^2	0	0,095	0,346	0,654	0,895	1,000	—
(7)	$f_1 f_2$	0	0,250	0,556	0,250	-0,556	-1,000	—
(8)	f_2^2	0	0,654	0,895	0,095	0,346	1,000	—
(9)	$m f_1^2$	0	0,114	0,484	1,046	1,611	2,000	m_0
(10)	$m f_1 f_2$	0	0,300	0,778	0,400	-1,001	-2,000	m_0
(11)	$m f_2^2$	0	0,785	1,253	0,152	0,623	2,000	m_0
(12)	f_1''	0	0,309	0,588	0,809	0,946	1,000	$-\pi^2/l^2$
(13)	f_2''	0	0,809	0,946	0,309	-0,588	-1,000	$-9\pi^2/l^2$
(14)	$(f_1'')^2$	0	0,095	0,346	0,654	0,895	1,000	π^4/l^4
(15)	$f_1'' f_2''$	0	0,250	0,556	0,250	-0,556	-1,000	$9\pi^4/l^4$
(16)	$(f_2'')^2$	0	0,654	0,895	0,095	0,346	1,000	$81\pi^4/l^4$
(17)	$EI(f_1'')^2$	0	0,164	0,949	2,679	5,220	8,000	$\pi^4 EI/l^4$
(18)	$EI f_1'' f_2''$	0	0,432	1,526	1,024	-3,243	-8,000	$9\pi^4 EI/l^4$
(19)	$EI(f_2'')^2$	0	1,130	2,456	0,389	2,018	8,000	$81\pi^4 EI/l^4$

6.3 RAAMIDE SUNDVÕNKUMISE AMPLITUUDIDE JA OMAVÕNKESAGEDUSTE MÄÄRAMINE DEFORMATSIOONI-MEETODIGA

6.31 Täpne lahendus

Võrrandid (5.40) ja (5.43) on kasutatavad ka säärastrate raamide arvutamisel, mille varraste massi ei saa hüljata. Põhiliseks erinevuseks on see, et tegurid r_{jk} , mis kujutavad endast sidemes j tekkivaid reaktsioone (momente või põikjõude) sideme k ühikpaigutisest (pöördest või siirdest), tuleb leida, arvestades varda võnkumisel tekkivaid inertsjõude. Näitena dünaamiliste toereaktsioonide leidmise kohta vaatleme varrast, mille vasakul otsal A on

liigendtugi ja paremal otsal B mõjub harmooniline pööre või siire $1 \cdot \sin \omega t$ (joon. 6.7, *a* ja *b*). Reaktsioonid loeme positiivseteks, kui nad mõjuvad joonisel näidatud suundades, s. t. annavad momendi päripäeva.

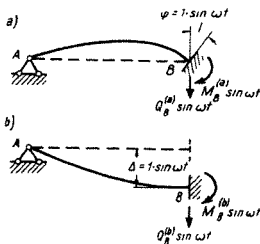
Prismalise tala elastse joone võrrandiks on harmoonilise võnkumise korral

$$v(x, t) = f(x) \sin \omega t$$

kus üldjuhul (avaldis 6.13)

$$f(x) = B_1 \sin \frac{\mu x}{l} + B_2 \cos \frac{\mu x}{l} + B_3 \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} + B_4 \operatorname{ch} \frac{\mu x}{l} \quad (a)$$

Parameetrit μ seob siin võnkesagedusega ω avaldis (6.10), kust



JOON 6.7

$$\mu = l \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}} \quad (6.43)$$

Tegurid $B_1 - B_4$ tuleb määrata toetingimustest.

Juhul kui paremal toel mõjub harmooniline pööre $\varphi_B^{(a)} = 1 \cdot \sin \omega t$ (joon. 6.7, *a*), on toetingimused järgmised:

$$f(0) = f''(0) = f(l) = 0; \quad f'(l) = 1 \quad (b)$$

Paigutades diferentsiaalvõrrandi (a) toetingimustesse (b), saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} B_2 + B_4 &= 0 \\ -B_2 + B_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 \sin \mu + B_2 \cos \mu + B_3 \operatorname{sh} \mu + B_4 \operatorname{ch} \mu &= 0 \\ B_1 \cos \mu - B_2 \sin \mu + B_3 \operatorname{ch} \mu + B_4 \operatorname{sh} \mu &= l/\mu \end{aligned} \quad (c)$$

millest

$$B_2 = B_4 = 0, \quad B_1 = -\frac{\operatorname{sh} \mu}{D} \frac{l}{\mu}; \quad B_3 = -\frac{\sin \mu}{D} \frac{l}{\mu} \quad (d)$$

Siin

$$D = \sin \mu \operatorname{ch} \mu - \cos \mu \operatorname{sh} \mu \quad (c)$$

Tala siirdefunktsiooniks on seega

$$f(x) = \frac{l}{\mu D} \left(-\operatorname{sh} \mu \sin \frac{\mu x}{l} + \sin \mu \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} \right) \quad (f)$$

Edasine toereaktsioonide määramine ei valmista raskusi. Saame:

$$M_B^{(a)} = EI f''(l) = \frac{3EI}{l} \frac{2\mu}{3} \frac{\sin \mu \operatorname{sh} \mu}{D} = \frac{3EI}{l} \varepsilon_1(\mu) \quad (g)$$

$$\begin{aligned} Q_B^{(a)} &= -EI f'''(l) = -\frac{3EI}{l^2} \frac{\mu^2}{3} \frac{\operatorname{sh} \mu \cos \mu + \sin \mu \operatorname{ch} \mu}{D} = \\ &= -\frac{3EI}{l^2} \varepsilon_2(\mu) \end{aligned}$$

Toereaktsioonide $M_B^{(b)}$ ja $R_B^{(b)}$ leidmiseks toe B siirdest $\Delta_B^{(b)} = z \cdot \sin \omega t$ (joon. 6.7, b) kasutame järgmisi toe-tingimusi:

$$f(0) = f''(0) = f'(l) = 0; \quad f(l) = 1 \quad (h)$$

millele vastavad avaldised (a) järgmised konstantide B väärtused:

$$B_2 = B_4 = 0; \quad B_1 = -\frac{\operatorname{ch} \mu}{D}; \quad B_3 = -\frac{\cos \mu}{D} \quad (i)$$

Seega on tala siirdefunktsiooniks

$$f(x) = \frac{1}{D} \left(\operatorname{ch} \mu \sin \frac{\mu x}{l} - \cos \mu \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} \right) \quad (k)$$

ja toereaktsioonid toel B on järgmised:

$$\begin{aligned} M_B^{(b)} &= EI f''(l) = -\frac{3EI}{l^2} \frac{\mu^2}{3} \frac{\operatorname{sh} \mu \cos \mu + \sin \mu \operatorname{ch} \mu}{D} = \\ &= -\frac{3EI}{l^2} \varepsilon_2(\mu) \end{aligned} \quad (m)$$

$$Q_B^{(b)} = -EI f'''(l) = \frac{3EI}{l^3} \frac{\mu^3}{3} \frac{2 \operatorname{ch} \mu \cos \mu}{D} =$$

$$= \frac{3EI}{l^3} \varepsilon^3(\mu)$$

Kuna saadud reaktsioonid on võrrandisüsteemi (5.40) või (5.43) kordajateks r_{jk} (muidugi ainult selle varda osas), siis

$$r_{aa} = \frac{3EI}{l} \varepsilon_1$$

$$r_{ab} = r_{ba} = -\frac{3EI}{l^2} \varepsilon_2 \quad (6.44)$$

$$r_{bb} = \frac{3EI}{l^3} \varepsilon_3$$

kus

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{3} \mu \frac{\operatorname{sh} \mu \sin \mu}{\operatorname{ch} \mu \sin \mu - \operatorname{sh} \mu \cos \mu}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\mu^2}{3} \frac{\operatorname{sh} \mu \cos \mu + \operatorname{ch} \mu \sin \mu}{\operatorname{ch} \mu \sin \mu - \operatorname{sh} \mu \cos \mu} \quad (6.45)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\mu^3}{3} \frac{2 \operatorname{ch} \mu \cos \mu}{\operatorname{ch} \mu \sin \mu - \operatorname{sh} \mu \cos \mu}$$

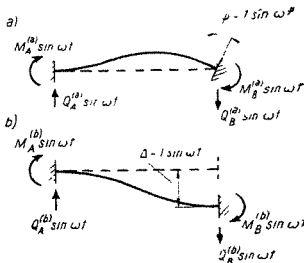
Nagu avaldistest (6.44) nähtub, saame deformatsiooni-meetodi kanoonilise võrrandisüsteemi kordajad varraste jaoks, milles võnkumisel tekkivaid inertsjõude ei saa hüljata, korrutades staatilisele olukorrale vastavad r_{jk} väärtused parandusteguritega e .

Analoogiliselt lahendatakse teine põhiülesanne: jäigalt kinnitatud vardas ühe toe harmoonilisest pöördest või siirdest tekkivate toereaktsioonide määramine (joon. 6.8, a ja b). Toe B pöördele $\varphi_B^{(a)} = 1 \cdot \sin \omega t$ (joon. 6.8, a) vastavad järgmised toereaktsioonid:

$$M_B^{(a)} = EI f''(l) = \frac{4EI}{l} \varepsilon_4(\mu)$$

$$M_A^{(a)} = -EI f''(0) = -\frac{2EI}{l} \varepsilon_5(\mu) \quad (6.46)$$

$$Q_B^{(a)} = -EI f'''(l) = -\frac{6EI}{l^2} \varepsilon_6(\mu)$$



JÕON 6 8

$$Q_A^{(a)} = -EI f'''(0) = -\frac{6EI}{l^2} \varepsilon_7(\mu)$$

Toe B siirdest $\Delta_B^{(b)} = 1 \cdot \sin \omega t$ tekivad järgmised reaktsioonid:

$$M_B^{(b)} = EI f''(l) = -\frac{6EI}{l^2} \varepsilon_6(\mu)$$

$$M_A^{(b)} = -EI f''(0) = -\frac{6EI}{l^2} \varepsilon_7(\mu) \quad (6.47)$$

$$Q_B^{(b)} = -EI f'''(l) = \frac{12EI}{l^3} \varepsilon_8(\mu)$$

$$Q_A^{(b)} = -EI f'''(0) = \frac{12EI}{l^3} \varepsilon_9(\mu)$$

Avaldistes (6.46) ja (6.47) esinevate funktsioonide väärtused on järgmised:

$$\varepsilon_4 = \frac{\mu}{4} \frac{\operatorname{ch} \mu \sin \mu - \operatorname{sh} \mu \cos \mu}{1 - \operatorname{ch} \mu \cos \mu}$$

$$\varepsilon_5 = \frac{\mu}{2} \frac{\operatorname{sh} \mu - \sin \mu}{1 - \operatorname{ch} \mu \cos \mu}$$

$$\varepsilon_6 = \frac{\mu^2}{6} \frac{\operatorname{sh} \mu \sin \mu}{1 - \operatorname{ch} \mu \cos \mu} \quad (6.48)$$

$$e_7 = \frac{\mu^2}{6} \frac{\text{ch } \mu - \cos \mu}{1 - \text{ch } \mu \cos \mu}$$

$$e_8 = \frac{\mu^3}{12} \frac{\text{sh } \mu \cos \mu + \text{ch } \mu \sin \mu}{1 - \text{ch } \mu \cos \mu}$$

$$e_9 = \frac{\mu^3}{12} \frac{\text{sh } \mu + \sin \mu}{1 - \text{ch } \mu \cos \mu}$$

Kanoonilise võrrandisüsteemi kordajad r_{jk} leitakse toe-reaktsioonide (6.46) ja (6.47) abil samuti nagu deformatsioonimeetodi rakendamisel staatilistel koormustel.

Deformatsioonimeetodi kasutamisel tuleb silmas pidada järgmisi asjaolusid

1. Geomeetriliselt määratud põhiskeemis tuleb sidemed paigutada mitte ainult sõlmedesse, vaid ka koondatud masside asukohtadesse sõlmede vahel.

Massita varraste puhul võib küll kasutada ka põhiskeeme, kus lisasidemed takistavad ainult masside paigutusi, mitte aga sõlmede liikumist; sääraustes skeemides aga ei saa enam kasutada standardseid valemeid r_{jk} määramiseks.

2. Võrrandis (5.43) ei tohi unustada koondatud massidest põhjustatud liikmeid $M\omega^2$. Kui mõni varras võngub peale ristsihi ka piki oma telge, tuleb teda teljesihilist siiret takistava sideme juures arvestada nagu koondatud massi.

3. Kui mingi sideme juures masse ei ole, siis seal $M = 0$.

4. Siirdele vastab massi enda suurus; pöördele vastab tema inertsmoment.

5. Suurused A kujutavad vastavate siirete või pöörete amplituude, s. o. äärmist kaugust tasakaaluasendist.

6. Varrasahela kinemaatikat iseloomustavaks suurusks võib võtta siirete asemel varraste pöörded, nagu seda on tehtudki tabelites 6.4 ja 6.5. Tuleb aga silmas pidada, et sel juhul vastavad koondatud massidele liikmed $M\omega^2 f_j f_k$, kus f_j ja f_k on masside siirded varrasahelais j ja k . Sama kehtib ka pikisuunas võnkuvate varraste masside kohta. Häirivad välisjõud tuleb korrutada nende asukoha siirdega varrasahelas j . Et saada selle punkti võnkumise amplituudi, kuhu varrasahela liikumist takistav side oli kinnitatud, tuleb saadud amplituud A_k jagada sideme siirdega skeemis k .

7. Sundvõnkumise amplituudide määramisel tuleb võnkesageduseks ω võtta häiriva jõu sagedus ω_0 , selle järgi leida iga varda jaoks parameeter μ [valem (6.43)] ja arvutada abifunktsioonid (6.45) või (6.46)–(6.48), seejärel leida kordajad r_{jk} , koostada võrrandisüsteem (5.43) ja lahendada see.

8. Omavõnkesageduste leidmisel tuleb koormusliikmed lugeda võrdseks nulliga ja võnkesagedusi iseloomustavad parameetrid μ määrata transsendentsest võrrandist, mis saadakse kanoonilise võrrandisüsteemi kordajatest r_{jk} moodustatud determinandi võrrutamisel nulliga. Kuna säärase transsendentse võrrandi juurte leidmine on küllaltki tülikas, on omavõnkesageduste määramiseks tavaliselt lihtsam kasutada järgmises punktis kirjeldatud ligikaudset arvutusmeetodit. See meetod annab transsendentse võrrandi asemel polünoomi, mille juurte leidmine on lihtsam.

Näide 6.4. Määrata joonisel 6.9, a kujutatud raami sundvõnkumise amplituud. Raami vardad on ühesuguse paindejäikusega EI , samuti on massi intensiivsus m kõigi varraste jaoks ühesugune. Häiriva jõu $P_0 = \sin \omega_0 t$ sagedus

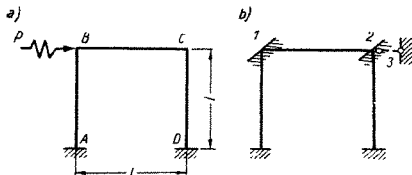
$$\omega_0 = \frac{9}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Avaldisest (6.43) leiame

$$\mu = l \sqrt[4]{\frac{\omega_0^2 m}{EI}} = l \sqrt[4]{\frac{81 EI m}{l^4 m EI}} = 3 \quad (a)$$

Parameeter μ on toodud näites kõigi varraste jaoks sama, kuna varraste pikkused, paindejäikused ja massid on ühesugused

Vastavatest tabelitest leiame saadud μ väärtusele vastavad trigonomeetriliste ja hüperboolsete funktsioonide väärtused:



JOON. 6.9

$$\begin{aligned}\sin 3 &= 0,1411 \\ \cos 3 &= -0,9900 \\ \operatorname{sh} 3 &= 10,0179 \\ \operatorname{ch} 3 &= 10,0677\end{aligned}$$

Edasi arvutame parandusfunktsioonid (6.48):

$$\begin{aligned}e_4(3) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{10,0677 \cdot 0,1411 + 10,0179 \cdot 0,9900}{1 - 0,9900 \cdot 10,0677} = 0,7754 \\ e_5(3) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{10,0179 - 0,1411}{1 + 0,9900 \cdot 10,0677} = 1,3509 \\ e_6(3) &= \frac{9}{6} \cdot \frac{10,0179 \cdot 0,1411}{1 + 0,9900 \cdot 10,0677} = 0,1934 \\ e_8(3) &= \frac{27}{12} \cdot \frac{-10,0179 \cdot 0,9900 + 10,0677 \cdot 0,1411}{1 + 0,9900 \cdot 10,0677} = -1,7432\end{aligned}\quad (b)$$

Takistagu side 1 sõlme B pöötet, side 2 sõlme C pöötet ja side 3 riivi CB horisontaalsiret (joon 6.9, b). Sidemete ühikpaigutistest põhjustatud reaktsioonide väärtused on järgmised:

$$\begin{aligned}r_{11} = r_{22} &= 2(4EI/l) \cdot 0,7754 = 6,203EI/l \\ r_{12} = r_{21} &= (2EI/l) \cdot 1,3509 = 2,702EI/l \\ r_{13} = r_{23} = r_{31} = r_{32} &= -(6EI/l^2) \cdot 0,1934 = -1,160EI/l^2 \\ r_{33} &= (12EI/l^3) (-1,7432) = -20,918EI/l^3\end{aligned}\quad (c)$$

Reaktsioonile r_{33} liitub veel riivi pikivõnkumisel tekkiv inertsjõud, mille suurus

$$-M\omega_0^2 = -ml(81/l^4)(EI/m) = -81EI/l^3 \quad (d)$$

Kanooniline võrrandisüsteem kujuneb seega järgmiseks:

$$\begin{aligned}6,203A_1 + 2,702A_2 - 1,160A_3/l &= 0 \\ 2,702A_1 + 6,203A_2 - 1,160A_3/l &= 0 \\ -1,160A_1 - 1,160A_2 - 101,918A_3/l &= P l^2/EI\end{aligned}\quad (e)$$

Kuna antimeetriliste võnkumiste korral $A_1 = A_2$, võib (e) asendada kahest võrrandist koosneva võrrandisüsteemiga

$$\begin{aligned}8,905A_1 - 1,160A_3/l &= 0 \\ -2,320A_1 - 101,918A_3/l &= P l^2/EI\end{aligned}\quad (f)$$

millest

$$A_1 = A_2 = -0,0012P l^2/EI; \quad A_3 = -0,0096P l^2/EI$$

Riivi horisontaalsirete amplituud A_3 on 21,5 korda väiksem riivi siirdest sama jõu staatilisel mõjumisel; kuna ta on miinusmärgiga, on paigutised jõule vastassuunalised. Nende iseärasuste põhjuseks on asjaolu, et häiriva jõu sagedus on tunduvalt kõrgem raami esimesest omavõnkesagedusest

$$\omega_1 \approx \frac{4,4}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

6.32 Omavõnkesageduste määramine ligikaudse meetodiga

Et saada kordajate r_{jk} jaoks mitte transsendentseid avaldiseid, vaid polünoome, arendame parandusfunktsioonid $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ ritta parameetri μ järgi. Ligikaudses lahenduses piirdume saadud ridade kahe esimese liikmega. Nii näiteks saame, kasutades tuntud rittaasendusi,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \mu &= \frac{\mu}{1!} + \frac{\mu^3}{3!} + \frac{\mu^5}{5!} + \frac{\mu^7}{7!} + \dots \\ \sin \mu &= \frac{\mu}{1!} - \frac{\mu^3}{3!} + \frac{\mu^5}{5!} - \frac{\mu^7}{7!} + \dots \\ \operatorname{ch} \mu &= 1 + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^4}{4!} + \frac{\mu^6}{6!} + \dots \\ \cos \mu &= 1 - \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^4}{4!} - \frac{\mu^6}{6!} + \dots \end{aligned} \quad (\text{a})$$

funktsiooni ε_1 [vt. (6.45)] jaoks järgmise ligikaudse avaldise:

$$\varepsilon_1 \approx 1 - \frac{2}{315} \mu^4 \quad (\text{b})$$

Seega on, arvestades avaldist (6.43), liigendtala puhul teguri r_{aa} väärtus, mis vastab paindemomendile sõlmes B sama sõlme ühikpöördest, järgmine:

$$\begin{aligned} r_{aa} &= 3 \frac{EI}{l} \varepsilon_1 \approx 3i \left(1 - \frac{2}{315} \mu^4 \right) = \\ &= 3i - \frac{6}{315} \frac{EI}{l} \cdot \frac{l^4 \omega^2 m}{EI} = \\ &= 3i - \frac{2}{105} l^3 \omega^2 m = 3i - 8j\omega^2 \end{aligned} \quad (\text{c})$$

kus

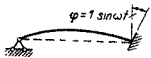
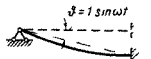
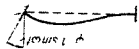
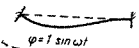
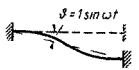
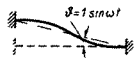
$$i = \frac{EI}{l}; \quad j = \frac{ml^3}{420} \quad (6.49)$$

Analoogiliselt võib leida tegurite r_{jk} ligikaudsed avaldised teiste põhiskeemide jaoks. Need on toodud tabelis 6.4 lk. 256.

Tegurid r_{jk} võib lihtsamalt saada energeetilise meetodiga, võttes etteantud siirdefunktsiooniks $\tilde{f}(x)$ massita tala elastse joone tugede paigutustest. Vastavalt võrran-

Tabel 64

Tegurite r_{jk} ligikaused avaldised

Tahis	Skeem	r_{jk}	
Ligendtoega tala			
a		$r_{aa} = 3l - 8j\omega^2$	$r_{ab} = -3l + 36j\omega^2$
b		$r_{ba} = -3l + 36j\omega^2$	$r_{bb} = 3l - 204j\omega^2$
Jaigalt kinnitatud tala			
a		$r_{aa} = 4l - 4j\omega^2$ $r_{ab} = 2l + 3j\omega^2$	$r_{ac} = -6l + 22j\omega^2$ $r_{ad} = -6l - 13j\omega^2$
b		$r_{ba} = 2l + 3j\omega^2$ $r_{bb} = 4l - 4j\omega^2$	$r_{bc} = -6l - 13j\omega^2$ $r_{bd} = -6l + 22j\omega^2$
c		$r_{ca} = -6l + 22j\omega^2$ $r_{cb} = -6l - 13j\omega^2$	$r_{cc} = 12l - 156j\omega^2$ $r_{cd} = 12l + 54j\omega^2$
d		$r_{da} = -6l - 13j\omega^2$ $r_{db} = -6l + 22j\omega^2$	$r_{dc} = 12l + 54j\omega^2$ $r_{dd} = 12l - 156j\omega^2$

deile (6.36) $r_{jk} = a_{jk} - \omega^2 b_{jk}$, kus a_{jk} ja b_{jk} leiame avaldistest (6.40, b) ja (6.41):

$$a_{jk} = \int_0^l EI f_1'' f_2'' dx \quad (d)$$

$$b_{jk} = \int_0^l m f_1 f_2 dx$$

Leiame näitena teguri r_{aa} vabalt toetatud tala jaoks [avaldis (c)] energeetilise meetodiga.

Põikkoormuseta tala elastse joone võrrandit

$$EI f_a^{IV}(x) = 0 \quad (e)$$

ning ääretingimusi

$$f_{a0} = f_{a0}'' = f_{al} = 0; \quad f_{al}' = 1 \quad (f)$$

rahuidab järgmine avaldis:

$$f_a(x) = -\frac{l}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) \quad (g)$$

mille teine tuletis

$$f_a''(x) = \frac{3x}{l^2} \quad (h)$$

Seega

$$a_{aa} = \int_0^l EI \left(\frac{3x}{l^2} \right)^2 dx = \frac{3EI}{l} = 3i \quad (i)$$

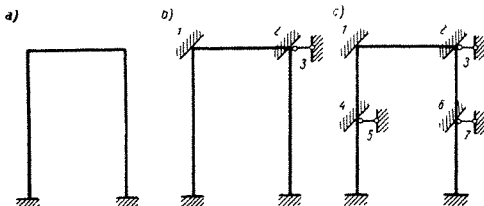
$$b_{aa} = \int_0^l m \left[-\frac{l}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) \right]^2 dx = \frac{8}{420} ml^3 = 8j$$

ja

$$r_{aa} = a_{aa} - b_{aa}\omega^2 = 3i - 8j\omega^2 \quad (j)$$

mis langeb kokku avaldisega (c).

Lahendit on võimalik täpsustada, asetades sidemed mitte ainult raami sõlmedesse, vaid ka varraste sõlmedevahelistesse punktidesse. Näiteks joonisel 6.10, a kujutatud raami arvutamisel võib asetada sidemed mitte üksi raami nurkadesse (joon. 6.10, b, sidemed 1, 2 ja 3), vaid ka üksikutele pikematele varrastele (joon. 6.10, c, sidemed 4, 5, 6 ja 7). Sellega suureneb võnkumispile iseloomustavate parameetrite arv ja ühtlasi ka arvutustäpsus.



JOON. 6.10

Sama võtet võib kasutada sääraste raamide arvutamisel, mis koosnevad muutuva ristlõikega varrastest. Sel juhul tuleb vardad jagada üksikuteks lõikudeks ja iga lõigu ulatusel võtta ristlõike inertsmoment ning massi intensiivsus võrdseks mingi keskmise väärtusega.

Näide 6.5. Määrata joonisel 6.11, *a* kujutatud prismalistest varrastest koosneva raami esimesed omavõnkesagedused. Üksikute varraste pikkused, inertsmomendid ja massi intensiivsused on toodud joonisel.

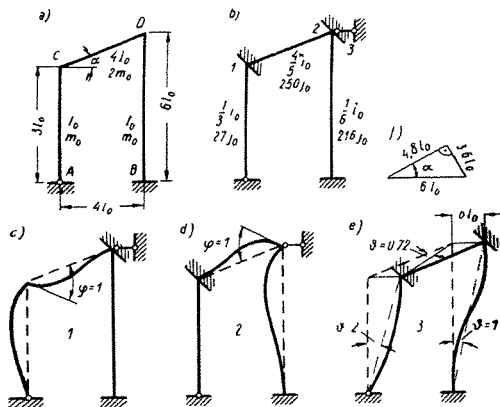
Põhiskeemiks on joonisel 6.11, *b* kujutatud skeem, mis on saadud kolme sideme asetamisega raami sõlmedesse (soovides saada täpsemat lahendit, oleksime võinud asetada sidemed ka üksikute varraste keskele).

Algul leiame üksikute varraste jaoks parameetrid i ja j (6.49). Nende väärtused on toodud joonisel 6.11, *b*, kusjuures on võetud

$$i_0 = EI_0/l_0; \quad j_0 = m_0 l_0^3/420 \quad (a)$$

Edasi arvutame kordajad r_{3h} . Illustratsiooniks on joonisel 6.11, *c–e* toodud üksikutele paigutistele vastavad paigutuspiildid; tegeelikult on vajalik ainult 6.11, *e*, mis vastab sideme 3 siirdele.

Kordajate r_{13} , r_{23} ja r_{33} leidmisel tuleb silmas pidada, et paigutusolukorras 3 liigub varras *CD* niihästi pöik- kui ka pikisuunas, jäädes paralleelseks oma esialgse asendiga. Nagu näha joonisel 6.11, *f*, on pikisiirde suuruseks $4,8l_0$ ja pöiksiirde suuruseks $3,6l_0$. Säärane staatiline paigutus ei põhjusta toereaktsioone sidemais, küll aga teeb seda dünaamiline paigutus. Teisiti öeldult: kuna varras *CD* ei kõverdu, võrdub küll tema deformatsioonienergia nulliga, aga mitte kineetiline energia.



ILUSTRatsioon 6 11

Kordajate r_{jk} väärtused on järgmised

$$r_{11} = (3 \cdot 0,333 + 4 \cdot 0,800) l_0 - (8 \cdot 27 + 4 \cdot 250) J_0 \omega^2 = 4,200 l_0 - 1216 J_0 \omega^2$$

$$r_{12} = r_{21} = 2 \cdot 0,800 l_0 + 3 \cdot 250 J_0 \omega^2 = 1,600 l_0 + 750 J_0 \omega^2$$

$$r_{13} = r_{31} = -3 \cdot 0,333 \cdot 2 l_0 + (36 \cdot 27 \cdot 2 - 22 \cdot 250 \cdot 0,72 - 13 \cdot 250 \cdot 0,72) J_0 \omega^2 = -2,000 l_0 - 4356 J_0 \omega^2$$

$$r_{22} = (4 \cdot 0,800 + 4 \cdot 0,167) l_0 - (4 \cdot 250 + 4 \cdot 216) J_0 \omega^2 = 3,867 l_0 - 1864 J_0 \omega^2$$

$$r_{23} = r_{32} = -6 \cdot 0,167 l_0 + (22 \cdot 216 + 13 \cdot 250 \cdot 0,72 + 22 \cdot 250 \cdot 0,72) J_0 \omega^2 = -1,000 l_0 + 10\,920 J_0 \omega^2$$

$$r_{33} = (3 \cdot 0,333 \cdot 2^2 + 12 \cdot 0,167 \cdot 1^2) l_0 - (204 \cdot 27 \cdot 2^2 + 156 \cdot 216 \cdot 1^2) J_0 \omega^2 - 2 m_0 \cdot 5 l_0 (6 l_0)^2 \omega^2 = 6,000 l_0 - 206\,928 J_0 \omega^2$$

Kordaja r_{33} arvutamisel on arvestatud et $m_0 l_0^3 = 420 J_0$

Edasi koostame deformatsioonmeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi

$$4,200 - 1,216 \times A_1 + (1,600 + 0,750 \times) A_2 + (-2,000 - 4,356 \times) A_3 = 0$$

$$\begin{aligned} (1,600 + 0,750\kappa)A_1 + (3,867 - 1,864\kappa)A_2 + (-1,000 + 10,920\kappa)A_3 = 0 \\ (-2,000 - 4,356\kappa)A_1 + (-1,000 + 10,920\kappa)A_2 + (6,000 - \\ - 206,928\kappa)A_3 = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Siin

$$\kappa = \frac{1000j\omega^2}{i_0} = \frac{1000}{420} \frac{m_0 l^4}{EI_0} \omega^2 \quad (d)$$

Võrrandisüsteemi (c) lahendame näitena kahel viisil: otseselt ja iteratsioonimeetodiga.

Otsesel lahenduskäigul avaldame esmalt võrrandisüsteemi kordajatest moodustatud determinandi

$$D(\kappa) = \begin{vmatrix} 4,200 - 1,216\kappa; & 1,600 + 0,750\kappa; & -2,000 - 4,356\kappa \\ 1,600 + 0,750\kappa; & 3,867 - 1,864\kappa; & -1,000 + 10,920\kappa \\ -2,000 - 4,356\kappa; & -1,000 + 10,920\kappa; & 6,000 - 206,928\kappa \end{vmatrix} \quad (e)$$

polünoomina (5.68)

$$D(\kappa) = \beta_0 \kappa^3 + \beta_1 \kappa^2 + \beta_2 \kappa + \beta_3 \quad (f)$$

mille võrrutame nulliga; siit leiame κ .

Polünoomi (f) kordajad leiame määramata tegurite meetodiga. Anname parameetritele κ neli erinevat väärtust, näiteks $\kappa = 0, 1, 2$ ja 3 , ning leiame neile vastavad determinandi (e) väärtused. Saame:

$$D_0 = 69; \quad D_1 = -762; \quad D_2 = 1651; \quad D_3 = 5848$$

Polünoom (f) peab nende κ väärtuste puhul olema sama väärtusega:

$$\begin{aligned} D_0 &= \beta_3 = 69 \\ D_1 &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = -762 \\ D_2 &= 8\beta_0 + 4\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 = 1651 \\ D_3 &= 27\beta_0 + 9\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3 = 5848 \end{aligned} \quad (h)$$

Lahendamiseks kombineerime süsteemi (h) üksikud võrrandid järgmiselt:

$$\begin{aligned} D_0 &= \beta_3 = 69 \\ -D_0 + D_1 &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = -831 \\ D_0 - 2D_1 + D_2 &= 6\beta_0 + 2\beta_1 = 3244 \\ -D_0 + 3D_1 - 3D_2 + D_3 &= 6\beta_0 = -1460 \end{aligned} \quad (i)$$

Siit leiame rekursiooniga β väärtused:

$$\beta_0 = -243; \quad \beta_1 = 2352; \quad \beta_2 = -2940; \quad \beta_3 = 69.$$

Seega parameeter κ tuleb määrata võrrandist

$$-243\kappa^3 + 2352\kappa^2 - 2940\kappa + 69 = 0 \quad (k)$$

Võrrandi (j) juured (alates väiksemast) on järgmised:

$$\kappa_1 = 0,024; \quad \kappa_2 = 1,45; \quad \kappa_3 = 8,21$$

Avaldisest (d) leiame neile vastavad omavõnkesagedused:

$$\omega_1 = 0,10 \sqrt{EI_0/m_0 l^4}$$

$$\omega_2 = 0,78 \sqrt{EI_0/m_0 l^4}$$

$$\omega_3 = 1,89 \sqrt{EI_0/m_0 l^4}$$

Viimane neist on muidugi mitteisaldatav, kuna arvutusmeetod on ligikaudne. Kolmanda võnkesageduse täpsemaks määramiseks oleks tulnud võrrandite arvu suurendada põhisüsteemile täiendavate sidemetete asetamisega.

Esimese võnkesageduse määramiseks iteratsiooniga kirjutame vastavalt avaldisele (5.73) võrrandisüsteemi (c) ümber järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} 4,200A_1^{(k+1)} + 1,600A_2^{(k+1)} - 2,000A_3^{(k+1)} &= -1,216A_1^{(k)} - \\ &\quad - 0,750A_2^{(k)} + 4,356A_3^{(k)} \\ 1,600A_1^{(k+1)} + 3,867A_2^{(k+1)} - 1,000A_3^{(k+1)} &= -0,750A_1^{(k)} + \\ &\quad + 1,864A_2^{(k)} - 10,920A_3^{(k)} \\ -2,000A_1^{(k+1)} - 1,000A_2^{(k+1)} + 6,000A_3^{(k+1)} &= 4,356A_1^{(k)} - \\ &\quad - 10,920A_2^{(k)} + 206,928A_3^{(k)} \end{aligned} \quad (m)$$

Seejärel anname ette mingisugused $A_j^{(k)}$ väärtused ja leiame võrrandisüsteemist (m) neile vastavad $A_j^{(k+1)}$. Parameetrid κ arvutame valemiga (5.75). Kui amplituudide paaridele A_j vastavad κ väärtused pole ühesugused, kordame protsessi, võttes saadud $A_j^{(k+1)}$ uuteks etteantud väärtusteks $A_j^{(k)}$.

Üksteisele järgnevatel lähendustel saadud amplituudid ning neile vastavad κ väärtused on toodud tabelis 6.5. Null-lähenduseks on võetud $A_1^{(0)} = A_2^{(0)} = A_3^{(0)} = 1$. Viimases lahtris on kolmandale lähendusele vastavad suhtelised amplituudid, kus $A_3 = 1$.

Nagu tabelist näha, piisab kolmest lähendusest. Selle järgi $\kappa_1 = 0,024$, mis ühtib otsese meetodiga leitud lahendiga.

Tabel 6 5

Oma võnkesageduse määramine iteratsiooniga

$k \backslash A$	0	1	2	3	3'
A_1	1	20	844	35262	0,506
A_2	1	0	-5	-196	-0,003
A_3	1	40	1670	69759	1,000
κ			0,024 — 0,024	0,0239 0,0245 0,0242	

7 LINEAARSE ELASTSUSTEORIA PÕHIVÖRRANDID RISTKOORDINAATIDES

7.1 SISSEJUHATUS

7.11 Elastsusõpetuse mõiste ja ülesanded

Elastsusõpetuse põhiülesandeks on elastses kehas välisjõudude mõjul tekkivate pingete ja deformatsioonide leidmine.

Samasugune ülesanne püstitatakse tugevusõpetuses ja ehitusmehaanikas, ja mõnikord on tõepoolest raske määrata, kas vaadeldav ülesanne kuulub ühe või teise nimetatud distsipliini alla. Eriti lähedased on tugevusõpetus ja elastsusõpetus, mis mõlemad vaatlevad reeglina üksikuid konstruktsioonelemente (varras, plaat, toru, massiiv jne.). Põhiline erinevus nende kahe distsipliini vahel on kasutatava matemaatilise aparatuuri keerulisuses. Tugevusõpetuses piirduakse harilikku diferentsiaalvõrranditega. See sunnib tugevusõpetust vaatlema ainult varrastes tekkivaid pingeid ja deformatsioone ja nendegi määramisel kasutama lisaks üldistele hüpoteesidele elastse aine omaduste kohta, mis on ühised tugevusõpetusele ja elastsusõpetusele, veel täiendavaid hüpoteese deformatsioonide iseloomu kohta, näiteks ristlõigete tasapinnalisuse hüpoteesi talade paindeteoorias.

Matemaatiline elastsusõpetus loobub täiendavate hüpoteeside kasutamisest ja saab selletõttu võimaluse uurida suvalise konfiguratsiooniga kehasid — seda matemaatilise aparatuuri keerulisuse hinnaga. Ka võimaldab ta uurida suurema täpsusega neid ülesandeid, mida vaadeldakse tugevusõpetuses, ja sellega määrata tugevusõpetuse lahendite täpsuse ja nende kasutamismõimaluste piirid. Näiteks väide, et ristlõigete tasapinnalisuse hüpoteesil põhinev talade paindeteooria annab üldi-

selt rahuldava täpsuse ainult talade puhul, mille pikkuse ja kõrguse suhe $l/h > 3$, on saadud just tugevusõpetuse ja elastsusõpetuse lahendite võrdlemisel.

Rakenduslikus elastsusõpetuses kasutatakse samuti nagu tugevusõpetuses täiendavaid hüpoteese vastavalt konkreetsele ülesandele. Rakenduslikku elastsusõpetusse kuulub näiteks õhukeste plaatide painde teooria, milles kasutatakse nn. sirgete normaalse hüpoteesi sisuliselt ei erine elementaarses talade painde teoorias kasutatavast tasapinnaliste ristlõigete hüpoteesist. Erinevus on lahendi keerulisuses — talade painde teoorias kirjeldab koormuse ja tala telje punktide siirete vahelist seost harilik diferentsiaalvõrrand, aga õhukeste plaatide teoorias määratakse plaadi keskpinna punktide paigutised osatuletistega diferentsiaalvõrrandist.

Ehitusmehaanika all mõistetakse tavaliselt distsipliini, mis uurib üksikutest elementaarsetest detailidest koostatud konstruktsioonide käitumist koormuse mõjul, kusjuures lahendid üksikute elementide jaoks võetakse tugevus- või elastsusõpetusest. Nii näiteks uurib varrassüsteemide ehitusmehaanika üksikutest varrastest koosnevaid konstruktsioone, kusjuures iga üksik varras allub tugevusõpetuses saadud seaduspärasustele. Laiemas mõttes kuuluvad ehitusmehaanika alla kõik tehnilised distsipliinid, mida rakendatakse konstruktsioonides tekkivate pingete ja deformatsioonide leidmiseks, sõltumata nende kujust (varras, varrassüsteem, plaat, ribidega plaat, koorik jne.). Seega kuulub üldistatud ehitusmehaanika mõiste alla niihästi varrassüsteemide ehitusmehaanika kui ka tugevusõpetus ja elastsusõpetus.

Samuti nagu tugevusõpetus, ei vaatle ka elastsusõpetus reaalselt ainet kõigi tema «puudustega» (korpuskulaarne struktuur, aine ebaühtlus, anisotroopia jne.), vaid kasutab aine idealiseeritud mudelit. Tehakse ka reservatsioonid deformatsioonide suuruse suhtes. Kasutatud hüpoteesid, nende alusel saadud põhivõrrandid ja põhivõrrandite lahendid moodustavad neile hüpoteesidele vastava elastsusteooria. Käesolevas raamatus vaatleme põhiliselt ainult klassikalist (lineaarset) elastsusteooriat.

Oma põhivõrrandite tuletamisel toetub elastsusõpetus kolmele distsipliinile — teoreetilisele mehaanikale, staatikale ja füüsikale. Teoreetilisel mehaanikal, eriti aga just ühel osal sellest — staatikal — põhineb pingete

teoria. Geomeetria annab deformatsioonide teooria — seosed deformatsioonide ja siirete vahel. Füüsikast leiab esmajoones kasutamist pingete ja deformatsioonide vaheline seos, milleks lineaarses elastsusteoorias on *Hooke'i* seadus.

7.12 Klassikalise elastsusteooria põhihüpoteesid

Need on esmajoones alljärgnevad hüpoteesid elastse aine omaduste kohta.

1. **Aine on tihe, s. t. täidab kogu vaadeldava keha ruumala.** Selle hüpoteesi alusel ei võeta arvesse aine korpuskulaarset struktuuri. Oletatakse, et ükskõik kui väikeste mõõtmetega keha elastsusomadused on samad, mis on kindlaks tehtud keha lõpliku suurusega osa kohta.

2. **Aine on kogu vaadeldava keha ulatuses ühtlane,** s. t. pingete ja suhteliste deformatsioonide vaheline seos on igas punktis ühesugune.

3. **Aine on isotroopne,** s. t. pingete ja suhteliste deformatsioonide vaheline seos on igas sihis ühesugune.

4. **Aine on elastne.** Selle all mõistetakse nähet, et sisejõudude poolt sooritatud töö ei sõltu deformatsiooni käigust, s. t. sisejõud omavad potentsiaali. Keha koormusest vabastamisel saadakse tagasi kogu töö, mis kulutati keha deformeerimiseks; kehas jäävaid deformatsioone ei teki.

Reaalsetest ainetest rahuldavad neid hüpoteese kõige enam metallid. Raudbetoon näiteks on ebaühtlane anisotroopne materjal, kuid siiski annavad ühtlase isotroopse keha kohta saadud tulemused väärtuslikke andmeid ka raudbetoonkonstruktsioonide arvutamiseks.

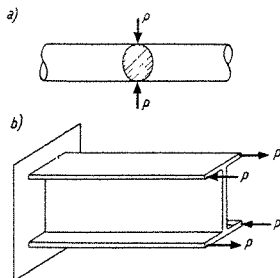
Lisaks ülaltooduile kasutab lineaarne elastsusteooria veel järgmisi hüpoteese:

5. **Aine allub Hooke'i seadusele,** s. t. pingete ja suhteliste deformatsioonide vahelised seosed on lineaarsed.

6. **Keha deformatsioonid on väikesed.** Siirded on tunduvalt väiksemad keha mõõtmetest. Pöördenurgad on niivõrd väikesed, et nende siinuseid ja tangenseid võib lugeda nurkadega võrdseteks ning pöördenurkade kõrgemad astmed võib hüljata.

Lõpuks võib elastsusõpetuse tööhüpoteeside hulka lugeda ka nn. *Saint-Venant'i* printsiipi:

7. **Keha mingile väikesele osale rakendatud tasakaalus**



JOON 7 1

olev jõudude süsteem, s. t. jõudude süsteem, mille peavektor ja peamoment võrduvad nulliga, kutsub esile pinged ainult jõudude rakenduskoha ligemas naabruses.

Joonisel 7. 1, a) on kujutatud varras, mis on külgedel koormatud kahe vastassuunalise jõuga. Säärane olukord tekib näiteks traadi katkihammustamisel tangidega. Tsoon, kus tekivad teatud piirist suuremad pinged, on viirutatud; viirutamata osas on pinged praktiliselt võrdsed nulliga.

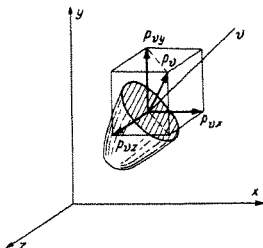
Saint-Venant'i printsiip annab võimaluse keha väikesele osale mõjuvat jõudude süsteemi A, mille jaoks lahendi leidmine valmistab raskusi, asendada meile mugavama jõudude süsteemiga B ja väita, et jõudude süsteemi B jaoks saadud lahend sobib ka jõudude süsteemile A, välja arvatud jõudude rakenduskoha lähem naabus.

Saint-Venant'i printsiip pole iga kord rakendatav, eriti õhukeseseinaliste varraste puhul. Näiteks I-talale rakendatud bimoment (joon. 7. 1, b), mille peavektor ja peamoment võrduvad küll nulliga, kutsub esile pinged kogu tala ulatusel.

7. 13 Põhimõisted, tähistused, märkide reeglid

Elastsusõpetuse põhimõistete hulka võib lugeda järgmisi suurusi.

1. **Välisjõud.** Välisjõude võib jaotada mahu- ja pinnajõududeks. M a h u j õ u d mõjuvad keha massile —



JOON 7.2

raskusjõud, inertsjõud. Mahujõudude projektsioone telgedele massiühiku kohta tähistame tähtedega X , Y , Z . Et saada mahujõudude projektsioone ruumiühiku kohta, tuleb neid korrutada aine tihedusega ρ .

Pinnajõud kujutavad endast ühe keha mõju teisele. Neid võib vaadelda keha välispinnale rakendatud pingetena. Pinnajõudude projektsioone koordinaattelgedele tähistame vastavalt q_x , q_y , q_z .

Välisjõudude komponendid loetakse positiivseteks, kui nad mõjuvad telgede suunas.

2. **Pinged.** Pingevektorit lõike pinnal, mille välisnormaal on v (joon. 7.2), tähistame p_v . Pingevektori projektsioone koordinaattelgedele tähistame p_{vx} , p_{vy} , p_{vz} .

Pingevektori võib lahutada komponentideks veel välisnormaali sihis ja kahes välisnormaali sihiga risti olevas sihis. Pinna normaali sihis mõjuv pingevektori komponent on normaalpinge σ_v , sellega risti mõjuvad komponendid — tangentsiaalpinged τ_{vs} ja τ_{vt} .

Valdaval enamikul juhtudest kasutame lõikeid, mis on risti koordinaattelgedega. Vastavad pinge komponendid on kujutatud joonisel 7.3.

Seega on normaalpingetel üks indeks, mis näitab pinna normaali sihti. Tangentsiaalpingetel on kaks indeksit — esimene näitab pinna normaali sihti, teine pinge sihti.

Loeme pinda, mille välisnormaali suund langeb kokku telje suunaga, positiivseks; pind, mille välisnormaali suund on telje suunale vastupidine, on negatiivne. Positiivsetel pindadel langevad positiivsete pingete suunad kokku telgede suundadega, aga negatiivsel pinnal on

positiivsete pingete suund vastupidine vastava telje suunale. Normaalingete kohta järeltub sellest reeglist, et positiivseks on tõmbepinged

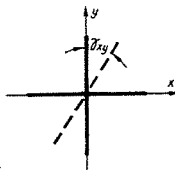
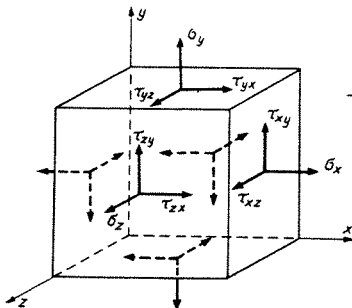
Joonisel 7.3 kujutatud pinged on kõik positiivsed.

3. **Deformatsioonid.** Sõnal «deformatsioon» on mitu tähendust. Laiemas mõttes mõistetakse selle sõna all keha kuju muutumist. Deformatsioon kitsamas mõttes (suhteline deformatsioon) on kehas võetud mingi lõigu pikkuse suhteline muutumine või kahe teineteisega risti oleva lõigu vahelise nurga muutumine.

Sirglõigu pikkuse suhtelist muutust nimetame joondeformatsiooniks (pineks) ja tähistame tähega ϵ . Telgede sihiliste sirglõikude joondeformatsioonid on vastavalt ϵ_x , ϵ_y ja ϵ_z . Positiivse joondeformatsiooni korral vaadeldava lõigu pikkus suureneb.

Kahe teineteisega risti oleva lõigu vahelise nurga muutust nimetame nihkenurgaks ja tähistame tähega γ . Juurdelisatavad indeksi näitavad vaadeldavate lõikude sihte, seega näiteks γ_{xy} on telgede x ja y sihis võetud lõikude vahelise nurga muutus. Nihkenurk loetakse positiivseks, kui nurk telgede positiivsete suundade vahel väheneb (joon 7.4).

4. **Siirded.** Siirdeid tähistame tähtedega u , v ja w , kusjuures u on x -telje sihiline, v — y -telje sihiline ja w — z -telje sihiline siire. Siire on positiivne, kui punkt liigub vastava telje suunas.



JOON 7 4

JOON 7 3

5. **Elastsuskonstandid.** Need on isotroopse keha jaoks kolm. elastsusmoodul E , nihkemoodul G ja Poisson'i tegur μ . Kolmest elastsuskonstandist on tegelikult ainult kaks iseseisvad. Elastsuskonstantide omavaheline seos on järgmine:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (7.1)$$

Kirjanduses, eriti teoreetilises kirjanduses leiab kasutamist ka teine tähistuste süsteem. Kahe süsteemi tähistuste võrdlus on toodud tabelis 7.1.

Tabel 7.1

Elastusteooria tähistuste süsteemid

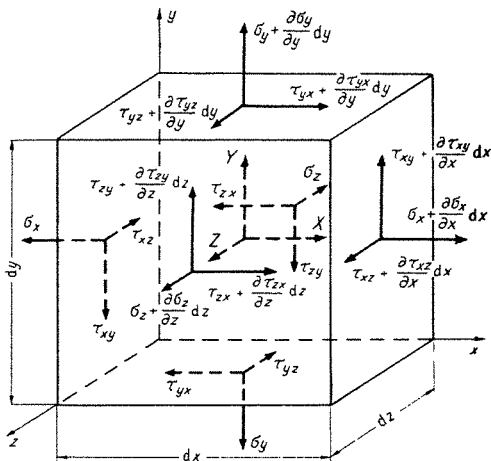
Pinged		Suhtelised deformatsioonid		Elastsuskonstandid	
I	II	I	II	I	II
σ_x	X_x	ϵ_x	e_{xx}	μ, ν E G	σ E G, μ $E\sigma$
σ_y	Y_y	ϵ_y	e_{yy}		
σ_z	Z_z	ϵ_z	e_{zz}	$\lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$	
τ_{xy}	Y_x	γ_{xy}	e_{xy}		
τ_{yz}	Z_y	γ_{yz}	e_{yz}		
τ_{zx}	X_z	γ_{zx}	e_{zx}		
τ_{yx}	X_y				
τ_{zy}	Y_z				
τ_{xz}	Z_x				

7.2 PINGETE TEOORIA

7.21 Elementaarse risttahuka tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

Eraldame vaadeldavast kehist koordinaattasapindadega paralleelsete lõigetega risttahuka $dx dy dz$ (joon. 7.5). Selle tahkudel mõjuvad pinnajõud, mis võrduvad pinge ja tahu pindala korrutistega. Lisaks neile võivad risttahukale mõjuda mahujõud. Kõigi nende jõudude mõjul peab risttahukas olema tasakaalus, s. t. tema kohta peavad olema rahuldatud koos tasakaaluvõrrandid.

Pinged ja mahujõud on funktsioonid koordinaatidest x, y, z . Seega nad üldiselt muutuvad ka risttahuka ula-



JOON. 7.5

tusel. Mahujõudude juures võib selle muutuse jätta arvesse võtmata. Pingete juures tuleb aga arvestada, et näiteks normaalpinged σ_x tahkudel $x=0$ ja $x=dx$ üldjuhul erinevad teineteisest.

Mõjugu tahul $x=0$ normaalpinge σ_x . Arendades x -telje sihilised normaalpinged *Mac Laurini* ritta muutuva x järgi, saame normaalpingete väärtuseks küljel $x=dx$

$$\sigma_x(dx) = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} dx^2 + \dots \quad (7.2)$$

Piirdudes rea kahe esimese liikmega, saame:

$$\sigma_x(dx) = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \quad (7.3)$$

Analoogiliselt leiame avaldised ülejäänud pingekomponentide jaoks. Pingete väärtused on näidatud joonisel 7.5. Vastavalt märkide reeglile (p. 7.13) on kõik joonisel toodud pinged positiivsed.

Alustame momentide tasakaalu tingimustega. Momentide summa telje $x = dx/2$, $z = dz/2$ suhtes näiteks on:

$$\begin{aligned} \sum M = & \left[\tau_{xy} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \right] dy dz \frac{dx}{2} - \\ & - \left[\tau_{yx} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \right] dx dz \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Hüljates kõrgemat järku väikesed suurused, saame siit:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Analoogilise tulemuse annavad teised momentide summa võrrandid. Seega kolm esimest tasakaalutingimust annavad tugevusõpetusest tuntud tangentsiaalpingete paarisuse seaduse:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Toodud seaduse alusel pole edaspidi enam vajadust tangentsiaalpingete indeksites rangelt silmas pidada reeglit, et esimene indeks näitab pinna normaali ja teine indeks tangentsiaalpinge sihti.

Järgnevalt vaatleme jõudude projektsioonide summasid telgedele. Võtame tasakaalutingimuse

$$\sum X = 0$$

Saame:

$$\begin{aligned} -\sigma_x dy dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \\ -\tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \\ -\tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + X_Q dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

kust pärast taandamist ja risttahuka mahuga $dx dy dz$ jagamist saame:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X_Q = 0$$

Analoogia põhjal võime välja kirjutada tingimustele $\Sigma Y = 0$ ja $\Sigma Z = 0$ vastavad võrrandid. Lõpptulemusena annavad jõudude projektsioonide tasakaalu tingimused järgmised kolm võrrandit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X_Q &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y_Q &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_Q &= 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Kui mahujõuks on keha omakaal, siis mahujõu vastavasihiline komponent, näiteks X_Q , võrdub aine erikaaluga γ . Kui mahujõududeks on inertsjõud, siis $X = -\ddot{u}$, $Y = -\ddot{v}$ ja $Z = -\ddot{w}$.

7.22 Pinged suvaliselt orienteeritud pinnal

Teades pingete telgedesihiliste komponentide väärtusi mingis punktis, on võimalik leida pingete väärtused sama punkti läbival suvaliselt orienteeritud pinnal. See osutub vajalikuks peapingete leidmisel, aga ka ääritingimuste formuleerimisel pingete jaoks, kui keha külgpindade normaalide sihid mõnes punktis ei lange kokku koordinaattelgedele sihtidega, näiteks juhul, kui keha on piiratud kõverjoonelistel pindadega.

Pingete määramiseks suvaliselt orienteeritud pinnal vaatleme elementaarse tetraeedri, mille kolm tahku on paralleelsed koordinaattasapindadega, aga neljas tahk on risti sihiga ν (joon. 7.6), tasakaalutingimusi.

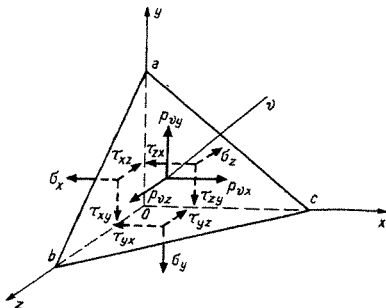
Pinna abc välisnormaali ν sihikoosinusi tähistame tähtedega l , m ja n , kusjuures

$$l = \cos(x, \nu); \quad m = \cos(y, \nu); \quad n = \cos(z, \nu) \quad (7.8)$$

Pinna abc suuruseks olgu dF . Ülejäänud pindade suurused on siis järgmised:

$$\begin{aligned} \text{pind } aOb &\dots\dots\dots l \, dF \\ \text{,, } bOc &\dots\dots\dots m \, dF \\ \text{,, } cOa &\dots\dots\dots n \, dF \end{aligned}$$

Pinnale abc mõjuva pingevektori p_ν , mille siht üldjuhul ei lange kokku pinna välisnormaali sihiga, projektsioonid koordinaattelgedele olgu p_{vx} , p_{vy} ja p_{vz} .



JOON. 7 6

Projekteerides kõik tetraeedrile mõjuvad jõud teljele x , saame:

$$(-l\sigma_x - m\tau_{yx} - n\tau_{zx} + p_{vx}) dF = 0$$

kust pärast suurusega dF taandamist avaldame pinge-komponendi

$$p_{vx} = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}$$

Analoogiliselt leiame jõudude projektsioonid y - ja z -teljele. Saame järgmise võrranditegrupi:

$$\begin{aligned} p_{vx} &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ p_{vy} &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ p_{vz} &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{aligned} \quad (7.9)$$

Kuna tetraeedri mõõtmeid võib kujutada lõpmata väikestena, s. t. tetraeedrit võib mõelda punktiks kokkusurutuna, annavad toodud valemid pinged punktis O pinnal, mille välisnormaaliks on v .

Siin ei osutunud mahujõudude mõju arvessevõtmine vastupidiselt valemite (7.7) tuletamiskäigule vajalikuks. Põhjuseks on asjaolu, et valemid (7.7) annavad seosed pingete muutuste vahel, kuna valemid (7.9) — pingete vahel. Mahujõudude mõju on aga samas suurusjärgus pingete muutuste mõjuga, s. t. kujutab endast pingetega võrreldes kõrgemat järku väikest suurust.

Et leida normaalpinget σ_v pinnal, mille normaaliks on v , projekteerime pinge komponendid p_{vx} , p_{vy} ja p_{vz} sihile v . Saame:

$$\sigma_v = lp_{vx} + mp_{vy} + np_{vz}$$

Asendades siia pinge komponentide avaldised valemist (7.9), leiame normaalpinge avaldise

$$\sigma_v = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2(lm\tau_{xy} + mn\tau_{yz} + nl\tau_{zx}) \quad (7.10)$$

Analoogiliselt võib leida tangentsiaalpinged τ_{vs} . Saame

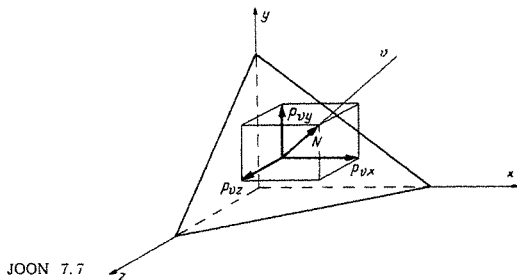
$$\tau_{vs} = ll_1\sigma_x + mm_1\sigma_y + nn_1\sigma_z + (lm_1 + ml_1)\tau_{xy} + (mn_1 + nm_1)\tau_{yz} + (nl_1 + ln_1)\tau_{zx} \quad (7.11)$$

kus l_1 , m_1 ja n_1 on sihi s sihikoosinused.

7.23 Peapinged

Võib tõestada, et läbi keha ükskõik millise punkti on võimalik suunata kolm säärast vastastikku risti olevat tasapinda, millel tangentsiaalpinged võrduvad nulliga. Neil pindadel mõjuvatest normaalpingetest on üks maksimaalne ja teine minimaalne kõigist antud pinguse (pingeolukorra) juures võimalikest pingetest antud punktis. Sääraseid pindasid nimetatakse peapingedeks ja neil mõjuvaid pingeid peapingeteks.

Tähistame peapinge tähega σ . Kuna peapinge siht lan-



JOON 7.7

geb kokku pinna normaali sihiga, siis on tema projektioonid telgedele (joon. 7.7)

$$p_{vx} = l\sigma; \quad p_{vy} = m\sigma; \quad p_{vz} = n\sigma \quad (7.12)$$

Teisest küljest kehtivad aga võrrandid (7.9) ka peapingete jaoks. Võrrutades võrrandite (7.9) ja (7.12) paremad pooled ning viies kõik liikmed ühele poole, saame:

$$\begin{aligned} l(\sigma_x - \sigma) + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= 0 \\ l\tau_{xy} + m(\sigma_y - \sigma) + n\tau_{zy} &= 0 \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n(\sigma_z - \sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Võrrandid (7.13) moodustavad tundmatute sihikoosinuste l , m ja n suhtes homogeense võrrandisüsteemi. Triviaalne lahend $l = m = n = 0$ ei ole siin võimalik, kuna sihikoosinuste vahel kehtib seos

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (7.14)$$

Seega peab nulliga võrduma võrrandisüsteemi (7.13) kordajatest moodustatud determinant:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (7.15)$$

Avades determinandi (7.15), saame peapingete σ määramiseks järgmise kolmanda astme võrrandi:

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + & \left(\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} \right) \sigma - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (7.15, a)$$

Selle võrrandi kolm juurt annavadki otsitavate peapingete väärtused σ_1 , σ_2 ja σ_3 .

Peapingete väärtused ei või oleneda valitud lähteteljestikust. Seega peavad võrrandi (7.15, a) kordajad olema sõltumatud valitud telgede x , y ja z suundadest. Need on nn. pingete invariantid. Tuntuim neist on esimene invariant

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \Theta$$

See kujutab endast pingekomponentidest moodustatud determinandi

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

jälge. Teine invariant on viimase determinandi diagonaali baasil moodustatud teise järgu miinorite summa, kuna kolmandaks invariantiks on determinandi väärtus.

Et määrata mingi peapinge, näiteks σ_1 sihti, leiame vastava pinna sihikoosinused. Selleks võtame võrrandisüsteemist (7.13) suvalised kaks võrrandit ja paigutame neisse σ asemele vaadeldava peapinge σ_1 väärtuse. Lisades neile veel võrrandi (7.14), saame pingevektori σ_1 sihikoosinuste leidmiseks näiteks säärase võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} l(\sigma_x - \sigma_1) + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= 0 \\ l\tau_{xy} + m(\sigma_y - \sigma_1) + n\tau_{zy} &= 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Paigutades võrrandisse (7.16) peapinge σ_1 asemele peapinge σ_2 või σ_3 väärtuse, saame vastavalt nende peapingete sihikoosinused.

Algebraliselt suurimat peapinget tähistatakse σ_1 (või N_1), väikseimat σ_3 (või N_3).

Kui kõigi peapingete suurused on võrdsed, on iga antud punkti läbiv pind peapinnaks. Kui kaks peapinget on võrdsed, võime leida kolmanda peapinna normaali sihi; ülejäänud peapindadeks võivad aga olla suvalised pinnad, mis on risti omavahel ja kolmanda peapinnaga.

7.24 Pingetensor

Pingetensoriks nimetatakse kolmest normaalpingest ja kuuest tangentsiaalpingest koosnevat komplekski:

$$(S) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (7.17)$$

Pingektor ρ_v määrab mingil antud punkti läbival pinnal, mille normaal on v , mõjuvad pinged. Pingetensor

(S) iseloomustab pingust antud punktis ja võimaldab leida pinged suvalisel seda punkti läbival pinnal.

Pingete kompleksi (7.17) nimetatakse tensoriks seepärast, et koordinaatteljestiku suuna muutmisel leitakse uuele teljestikule vastavad pinged kindlate tensorarvutuse kohta käivate valemite järgi. Sääraseid valemeid kujutavad näiteks avaldised (7.10) ja (7.11). Kuna avaldistes, mille järgi leitakse pingetensori komponendid uues koordinaatteljestikus, esinevad sihikoosinuste teised astmed, on pingetensor teise järgu tensor. Pingevektorit aga võib vaadelda esimese järgu tensorina.

Kuna tangentsiaalpinged on paarikaupa võrdsed (7.5), on pingetensor diagonaali suhtes sümmeetriline.

7.3 DEFORMATSIOONIDE TEOORIA

7.31 Siirete ja suhteliste deformatsioonide vahelised seosed

Deformatsiooni käigus elastse keha punktid muudavad oma asukohta. Nende paigutise komponente u , v ja w nimetatakse siireteks. Siirded on funktsioonid vaadeldava punkti koordinaatidest:

$$\begin{aligned}u &= u(x, y, z) \\v &= v(x, y, z) \\w &= w(x, y, z)\end{aligned}$$

Samuti muutuvad ka vahekaugused keha üksikute punktide vahel ning nurgad kehas võetud lõikude vahel. Esmajoones pakub huvi, kuidas muutuvad üksikute koordinaattelgede suunas võetud lõpmata väikeste lõikude pikkused, s. t. millised on joondeformatsioonid koordinaattelgede sihis, ja kuidas muutuvad nurgad koordinaattelgede sihiliste lõikude vahel, s. t. millised on kehas tekkivad nihkenurgad.

Vaatleme näiteks lõpmata lühikesi lõike AB ja AC , mis on võetud koordinaattelgede x ja y sihis (joon. 7.8). Keha koormamisel punktid A , B ja C võtavad uued asendid A' , B' ja C' . Vastavad koordinaadid on toodud tabelis 7.2.

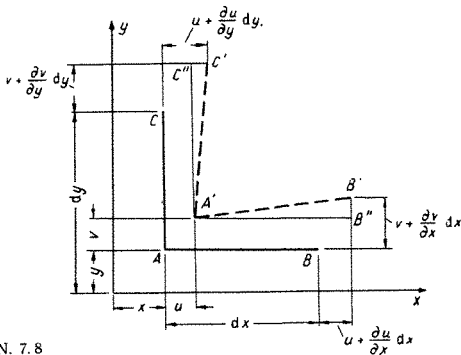
Kuna lineaarses elastsusõpetuses oletatakse, et deformatsioonid on niivõrd väikesed, et üksikute lõikude

Siirded joonisel 7.8

Punkt	Koordinaadid		
A	x	y	z
A'	$x + u$	$y + v$	$z + w$
B	$x + dx$	y	z
B'	$x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$	$z + w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$
C	x	$y + dy$	z
C'	$x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$	$y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$	$z + w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$

pöördenurkade koosinusi võib lugeda võrdseks ühega, võime z -telje sihiliste siirete w mõju deformatsioonidele xy -tasapinnas lugeda hüljatavalt väikeseks ja vaatluse alt välja jätta.

Tõmbame joonisel 7.8 veel punktist A' paralleelsirged koordinaattelgedele x ja y . Punktide B' ja C' projektsioonidele neile sirgetele tähistame vastavalt B'' ja C'' . Nurka $B'A'B''$ tähistame α_1 , nurka $C'A'C''$ — α_2 . Deformatsioo-



JOON. 7.8

nide väiksuse tõttu võime nende nurkade koosinusi lugeda võrdseks ühega, aga siinuseid ja tangenseid — nurkadega.

Jooniselt selgub, et lõigu AB suhteline pikenedamine

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{A'B'' - AB}{AB} = \\ &= \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{du}{dx} \end{aligned} \quad (7.18)$$

ja pööre

$$\alpha_1 \approx \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx}$$

Kuna aga

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = \epsilon_x dx \ll dx$$

siis

$$\alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Samuti leiame kolmnurkadest $C'A'C''$, et

$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Nihkenurk x - ja y -telje sihiliste sirglõikude vahel

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.19)$$

Analoogiliselt leiame piki- ja nurkdeformatsioonid teiste sihtide jaoks. Tulemused kirjutame välja järgmise tabeli kujul:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Saadud võrrandeid nimetatakse *Cauchy*' võrrandeks.

7.32 Suvaliselt orienteeritud lõigu pikenedmine

Võtame vaatluse all olevas kehas kaks teineteisele lõp-mata lähedal asuvat punkti A ja B .

Sihti AB tähistame tähega r . Sirglõigu AB pikkuse tähistame dr , selle projektsioonid koordinaattelgedele — dx , dy ja dz . Siht r on määratud sihikoosinustega l , m ja n , kusjuures $l = \cos(r, x)$; $m = \cos(r, y)$ ja $n = \cos(r, z)$.

Samade punktide asukohad deformeerunud kehas tähistame A' ja B' . Punktide A , B , A' ja B' koordinaadid on toodud tabelis 7.3.

Tabel 7.3

Koordinaadid joonisel 7.9

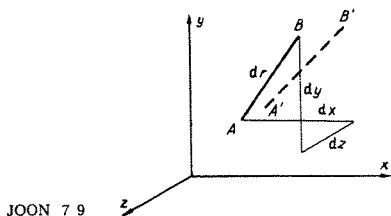
Punkt	Koordinaat		
	x	y	z
A	x	y	z
A'	$x + u$	$y + v$	$z + w$
B	$x + dx$	$y + dy$	$z + dz$
B'	$x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$	$y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial r} dr$	$z + dz + w + \frac{\partial w}{\partial r} dr$

Joondeformatsioon

$$\epsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (7.21)$$

Tabelist 7.3 selgub, et

$$AB = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = dr$$



JOON 7.9

ja

$$\begin{aligned}
 A'B' &= \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial r} dr\right)^2} \approx \\
 &\approx \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial r} dx dr + \frac{\partial v}{\partial r} dy dr + \frac{\partial w}{\partial r} dz dr\right)} = \\
 &= dr \sqrt{l^2 + m^2 + n^2 + 2\left(l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}\right)}
 \end{aligned}$$

Kuna $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, siis vastavalt avaldisele (7.21)

$$\epsilon_r = \sqrt{1 + 2\left(l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}\right)} - 1$$

Sulgudes olev avaldis kujutab endast väikest suurust võrreldes ühega. Kuna aga

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \alpha/2$$

siis, kui $\alpha \ll 1$,

$$\epsilon_r = l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r} \quad (7.22)$$

Erijuhuna võime siit saada, võttes $r = x$ (sellele vastavad sihikoosinused $l = 1$; $m = n = 0$), avaldises (7.18) toodud väärtuse ϵ_x jaoks.

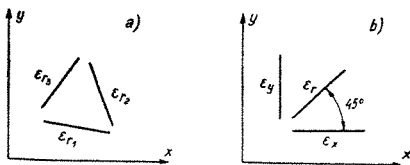
Kuna mingi funktsiooni f tuletis sisih r on

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dr} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dr} = \\
 &= l \frac{\partial f}{\partial x} + m \frac{\partial f}{\partial y} + n \frac{\partial f}{\partial z} \quad (7.23)
 \end{aligned}$$

võime avaldise (7.22) ümber kirjutada järgmisel kujul:

$$\epsilon_r = l \left(l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right) +$$

JOON 7 10



$$\begin{aligned}
 &+ m \left(l \frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\
 &+ n \left(l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \frac{\partial w}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Arvesse võttes seoseid (7.20), saame siit järgmise avaldise suvalise sihiga lõigu pikennemise jaoks:

$$\epsilon_r = l^2 \epsilon_x + m^2 \epsilon_y + n^2 \epsilon_z + lm \gamma_{xy} + mn \gamma_{yz} + nl \gamma_{zx} \quad (7.24)$$

Avaldis (7.24) leiab kasutamist tensomeetrias. Olgu näiteks vaja määrata tensomeetrite abil suhtelised pikened ϵ_x , ϵ_y ja nihkenurk γ_{xy} mingil z -teljega risti oleval pinnal. Säärase pinna jaoks $n=0$ ja avaldis (7.24) võtab järgmise kuju:

$$\epsilon_r = l^2 \epsilon_x + m^2 \epsilon_y + lm \gamma_{xy} \quad (7.24, a)$$

Paigutame vaatluse all olevasse punkti (või selle lähemasse naabrusesse, kus võib oletada, et pinged veel nimetamisväärselt ei erine uuritavas punktis esinevatest pingetest) kolm meelevaldselt orienteeritud tensomeetrit (joon. 7.10, a). Iga tensomeetri jaoks võime välja kirjutada (7.24, a) tüüpi avaldise. Seega saame suhteliste deformatsioonide ϵ_x , ϵ_y ja γ_{xy} määramiseks kolme tundmatuga võrrandisüsteemi.

Erijuhul, kui kaks tensomeetrit on paigutatud koordinaattelgedele x ja y sihis (joon. 7.10, b), saame ϵ_x ja ϵ_y vahetult tensomeetrite lugemite järgi, aga γ_{xy} määramiseks saame valemist (7.24, a) avaldise

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{lm} (\epsilon_r - l^2 \epsilon_x - m^2 \epsilon_y)$$

Kui nurk kolmanda tensorsomeetri sihi ja x -telje vahel on 45° , siis $l = m = \sqrt{2}/2$, ja nihkenurk

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_r - \varepsilon_x - \varepsilon_y$$

7.33 Deformatsioonitensor

Deformatsioonitensori moodustab järgmine suhteliste deformatsioonide kompleks

$$(T) = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (7.25)$$

Erinevalt pingetensorist, kus tangentsiaalpinged olid kordajaga 1, on deformatsioonitensoris nihkenurkade juures kordaja 0,5. Põhjus selgub valemite (7.10) ja (7.24) kõrvutamisel.

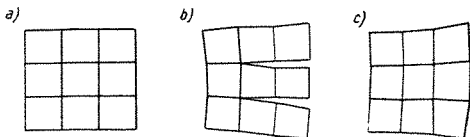
Kuna nihkästi pinged kui ka deformatsioonid antud punktis alluvad tensorarvutuse reeglitele, siis on kõik avaldised pingete leidmiseks koordinaattelgede pööramisel kasutatavad ka deformatsioonide määramiseks pööratud teljestikus, kui vastavates valemites normaalpinged asendada joondeformatsioonidega ja tangentsiaalpinged nihkenurkadega, võttes viimased kordajaga $1/2$. Analoogiliselt pingete teoorias toodud avaldistega võime leida peadeformatsioonid, nende sihid, deformatsiooni invariantid jne. Tugevusõpetuse kursusest tuttav suhteline mahumuutus

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

kujutab endast deformatsioonitensori esimest invarianti ega sõltu seega telgede valikust.

7.34 Deformatsiooni pidevuse tingimused

Oletame, et vaadeldav keha on lõigatud elementaarseks kuupideks (joon. 7.11, a) ja pärast iga kuup eraldi deformeeritud. Kui proovida deformeeritud kuupe uuesti



JOON 7 11

ühendada, siis üldjuhul jäävad nende vahele tühimikud (joon. 7.11, *b*). Et oleks võimalik kuupide ühendamine tervikuks (joon. 7.11, *c*), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama teatud tingimusi — nn. deformatsiooni pidevuse tingimusi.

Deformatsiooni pidevuse tingimustele võib anda veel teise, matemaatilise tõlgenduse. Võrrandid (7.20) seovad omavahel kolme paigutiskomponenti ja kuut deformatsioonikomponenti. Kui on antud paigutiskomponendid, on nende järgi deformatsioonikomponentide leidmine, mis toimub paigutuskomponentide diferentseerimise teel, alati võimalik. Vastupidisel juhul, s. o. antud deformatsioonikomponentide järgi paigutiskomponentide leidmisel, osutub vajalikuks leida kolm tundmatut paigutisfunktsiooni kuue deformatsioonifunktsiooni integreerimise teel. See on aga võimalik ainult teatud tingimustel, deformatsioonikomponentide vahel peavad kehtima mingid omavahelised seosed. Nendeks seosteks on deformatsiooni pidevuse tingimused, deformatsiooni pidevuse tingimuste mittetäitmisel ei ole võrrandid (7.20) integreeritavad.

Vajalikkude seoste leidmiseks püüame grupi (7.20) üksikute võrrandite diferentseerimise ja omavahelise kombineerimise teel neist elimineerida siirded u , v ja w . Tulemusena saame kaks gruppi võrrandeid, kummaski kolm võrrandit.

Tuletame kummastki grupist ühe võrrandi ja ülejäänud kirjutame välja analoogia põhjal, paigutades indeksid ümber järgmise skeemi kohaselt:

$$\begin{array}{c} x \rightarrow y \\ \uparrow \quad \downarrow \\ z \end{array}$$

1. Võtame järgmised kolm grupi (7.20) võrrandit:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

Diferentseerime esimest võrrandit kaks korda y järgi, teist — kaks korda x järgi, kolmandat x ja y järgi. Kaks esimest tulemust liidame ning lahutame neist kolmanda. Saame ühe otsitavaist seostest:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (7.26)$$

2. Võtame grupist (7.20) järgmised kolm võrrandit:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}$$

Diferentseerime igaüht neist võrrandeist puuduva koordinaadi järgi, muudame ühes võrrandis märgi ja liidame võrrandid. Tulemusena õnnestub meil elimineerida kaks siiret. Võttes näiteks keskmise võrrandi miinusmärgiga, saame:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \quad (7.27)$$

Kuna

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$$

osutub võimalikuks siire u asendada joondeformatsiooniga ϵ_x . Selleks on aga eelnevalt vaja võrrandit (7.27) diferentseerida x järgi. Saamegi ühe teise grupi seostest:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \quad (7.28)$$

Lõpptulemusena saame järgmised kuus deformatsiooni pidevuse võrrandit (*Saint-Venant*'i võrrandid)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (7.29, a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (7.29, b)$$

Võrrandite rühmad (7.29, a) ja (7.29, b) ei ole teineteisest sõltuvad. Seega osutub vajalikuks nii ühtede kui ka teiste võrrandite rahuldamine.

7.4 ELASTSE KEHA POTENTSIAALNE ENERGIA. ULDISTATUD HOOKE'I SEADUS

7.4.1 Elastse keha potentsiaalne energia

Vaatleme risttahukat $dx dy dz$ Mõjuga sellele pinnajõud ja mahujõud, nagu näidatud joonisel 7.5.

Anname risttahukale virtuaalsed paigutised. Tema keskpunkti siirded olgu δ_u , δ_v ja δ_x . Kuna virtuaalsed paigutised, nagu paigutised üldse, on koordinaatide funktsioonid, peame risttahuka tahkude keskpunktide siirete leidmisel lisama risttahuka keskpunkti siiretele vastava muuted. Näitena on joonisel 7.12 toodud risttahuka nelja tahu keskpunktide x -telje sihilised siirded.

Virtuaalsetest paigutistest põhjustatud sisejõudude töö muute saame, kui korrutame tahkudel mõjuvate pingete väärtused vastava tahu keskpunkti siirdega. liidame nad

Analoogiliselt leiame teiste telgede sihiliste jõudude töö muute. Liites need avaldised ning võttes arvesse, et valemite (7.20) põhjal

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \varepsilon_x, \dots$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} = \delta \gamma_{xy}; \dots$$

saame sisejõudude töö muute väärtuseks

$$\delta A = (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \quad (7.32)$$

Sisejõudude töö muute mahuühiku kohta δa saame, jagades avaldise (7.32) risttahuka ruumalaga:

$$\delta a = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \quad (7.33)$$

Kuna elastsusõpetuse põhihüpoteeside kohaselt sisejõud omavad potentsiaali, s. t. sisejõudude tehtud töö ei sõltu deformatsiooni käigust, kujutab avaldis (7.33) täisdiferentsiaali:

$$\delta a = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_z} \delta \varepsilon_z + \frac{\partial a}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} + \frac{\partial a}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial a}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} \quad (7.34)$$

Võrreldes seda avaldist eelmisega näeme, et

$$\sigma_x = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_x}; \quad \sigma_y = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_y}; \quad \sigma_z = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_z}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial a}{\partial \gamma_{xy}}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial a}{\partial \gamma_{yz}}; \quad \tau_{zx} = \frac{\partial a}{\partial \gamma_{zx}} \quad (7.35)$$

s. t. pinged võrduvad sisejõudude töö (potentsiaalse energia) osatuletistega vastava deformatsiooni suhtes.

Avaldised (7.35) kehtivad ka juhul, kui pingete ja deformatsioonide vaheline seos on mittelineaarne.

Juhul kui niihästi pinged kui ka deformatsioonid kasvavad proportsionaalselt koormusega, võib avaldise (7.33) ümber kirjutada järgmisel kujul:

$$\delta A = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \lambda d\lambda \quad (7.36)$$

kus λ on koormusparameeter. Integreerides avaldise (7.36) λ järgi nullist kuni üheni, saame potentsiaalse energia jaoks mahuühiku kohta järgmise avaldise:

$$a = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (7.37)$$

Kuna see avaldis ei muutu, kui seal pinged ja deformatsioonid omavahel vahetada, kehtivad lineaarses elastsusõpetuses ka järgmised seosed, mis on analoogilised avaldistega (7.35):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial a}{\partial \sigma_x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial a}{\partial \sigma_y}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial a}{\partial \sigma_z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial a}{\partial \tau_{xy}}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial a}{\partial \tau_{yz}}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial a}{\partial \tau_{zx}} \end{aligned} \quad (7.38)$$

s. t. juhul, kui seos koormuse ja pingete ning deformatsioonide vahel on lineaarne, võrduvad suhtelised deformatsioonid potentsiaalse energia osatuletistega vastavate pingete suhtes.

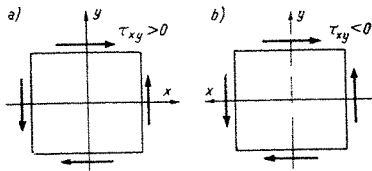
Avaldised (7.38) on tuntud *Castigliano* valemitega.

7.42 Üldistatud Hooke'i seadus

Klassikalises elastsusõpetuses oletatakse, et pingete ja deformatsioonide vahel valitseb lineaarne seos, täpsemalt öeldes: deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest. See on nn. üldistatud *Hooke'i* seadus. Selle võib avaldada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{xy} + C_{15}\tau_{yz} + C_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y &= C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{xy} + C_{25}\tau_{yz} + C_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z &= C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{xy} + C_{35}\tau_{yz} + C_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{xy} + C_{45}\tau_{yz} + C_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} &= C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{xy} + C_{55}\tau_{yz} + C_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} &= C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{xy} + C_{65}\tau_{yz} + C_{66}\tau_{zx} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Avaldistes (7.39) esineb 36 elastsuskonstanti: $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{66}$. Tugevusõpetus aga opereerib isotroopsete elastsete kehade juures ainult kahe elastsuskonstandiga: elastsusmooduliga E ja *Poissoni* teguriga μ . (Kuna nihke-



JOON 7 13

moodul G on avaldatav nende kahe suuruse kaudu, ei saa teda iseseisvaks konstandiks lugeda.) Kerkib küsimus, kas säärane konstantide arv on küllaldane.

Tõestame, et kaks elastsuskonstanti on vajalikud ja piisavad juhul, kui aine vastab elastsusõpetuse järgmiste põhihüpoteesidele:

a) aine on absoluutselt elastne, s. t. sisejõudude poolt sooritatud töö ei sõltu deformatsiooni käigust,

b) aine on isotroopne, s. t. kõigis suundades ühesuguste elastsusomadustega,

Oletame algul, et sisejõudude töö ei sõltu deformatsiooni käigust, s. t. sisejõud omavad potentsiaali. Sel juhul kehtivad võrdused (7.38). Arvutades tulelise $\partial^2 a / \partial \sigma_x \partial \sigma_y$ (7.38) esimesest ja teisest võrdusest, saame:

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \sigma_x}$$

Asendades siia vastavad avaldised (7.39) näeme, et peab olema rahuldatud tingimus

$$C_{12} = C_{21}$$

Üldse võime saada 15 säärast seost. Neist selgub, et $C_{11} = C_{22}$. Seega juhul, kui sisejõud omavad potentsiaali, ei ületa elastsuskonstantide arv 21, sõltumata sellest, kas aine on isotroopne või anisotroopne.

Isotroopse aine puhul on kõik teljed võrdõiguslikud, ükskõik millise telgede suuna puhul peavad elastsuskonstandid avaldistes (7.38) jääma samasugusteks. Jättes pinguse kehas samaks, kuid andes telgedele uued suunad, saame järgmised tulemused.

1. Pöörame üht telge, näiteks x -telge 180° võrra. Sellega muutuvad tangentsiaalpingete τ_{xy} ja τ_{yz} märgid

vastupidisteks, näiteks samad tangentsiaalpinged τ_{xy} on joonisel 7. 13, *a* kujutatud teljestikus positiivsed, aga joonisel 7. 13, *b* kujutatud teljestikus negatiivsed. Joondeformatsioonide märgid aga telgede pööramisega ei muutu. Siit järeldub, et võrdustes (7. 39) leiduvates joondeformatsioonide avaldistes tangentsiaalpingete τ_{xy} ja τ_{zx} kordajad võrduvad nulliga:

$$C_{14} = C_{16} = C_{24} = C_{26} = C_{34} = C_{36} = 0$$

Pöörates y - või z -telge 180° võrra, leiame, et nulliga võrduvad ka τ_{yz} kordajad:

$$C_{15} = C_{25} = C_{35} = 0$$

Kuna z -telje pööramisel nihkenurga γ_{xy} väärtus ei muutu, võrduvad lisaks eeltooduile nulliga veel C_{45} ja C_{46} ; samuti võrdub nulliga tegur C_{56} .

2. Teljestiku pööramisel 90° võrra selgub, et

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = C_{33} \\ C_{12} &= C_{13} = C_{23} \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66}. \end{aligned}$$

Pöörates teljestikku näiteks z -telje ümber 90° võrra, langeb x -telg kokku endise y -teljega, aga y -telg — endise x -telje negatiivse suunaga. Seega peame avaldistes (7. 39) indeksi x asendama indeksiga y ja vastupidi. Lisaks sellele peame nihkepinge τ_{xy} ja nihkenurga γ_{xy} võtma vastupidise märgiga. Esimene võrdus saab (nulliga võrduvaid liikmeid mitte arvestades) järgmise kuju:

$$\epsilon_y = C_{11}\sigma_y + C_{12}\sigma_x + C_{13}\sigma_z$$

Kõrvutades seda teise võrdusega

$$\epsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z$$

näeme, et $C_{11} = C_{22}$ ja $C_{13} = C_{23}$. Lisaks sellele leiame, et $C_{12} = C_{21}$, milline tulemus oli küll juba varem saadud anisotroopse keha kohta. Analoogiliselt saame viiendast ja kuueandast võrdusest, et $C_{55} = C_{66}$.

Seega võime avaldised (7. 39) ümber kirjutada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= C_{11}\sigma_x + C_{12}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y &= C_{11}\sigma_y + C_{12}(\sigma_z + \sigma_x) \\ \epsilon_z &= C_{11}\sigma_z + C_{12}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (7. 40)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= C_{44}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= C_{44}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= C_{44}\tau_{zx}\end{aligned}$$

3. Vaatleme deformatsioonide ja pingete vahelist seost teljestikus x_1y_1z , mis on saadud esialgse teljestiku xyz pööramisel telje z ümber nurga α võrra. Vastavalt valemile (7.24) ja (7.11)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_1} &= \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{x_1} &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{y_1} &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}\quad (7.41)$$

Avaldiste (7.40) kohaselt

$$\varepsilon_{x_1} = C_{11}\sigma_{x_1} + C_{12}(\sigma_{y_1} + \sigma_z) \quad (7.42)$$

Asendades siia avaldised (7.41), saame:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha &= \\ = C_{11}(\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) + \\ + C_{12}(\sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_z)\end{aligned}$$

Arvestades esimest kaht seostest (7.40), saame siit

$$\gamma_{xy} = 2(C_{11} - C_{12})\tau_{xy}$$

Kõrvutades saadud avaldise neljanda seosega (7.40) selgub, et

$$C_{41} = 2(C_{11} - C_{12})$$

Seega piisab isotroopse keha jaoks kahest elastsuskonstandist.

Asendades C_{11} , C_{12} ja C_{44} tugevusõpetusest tuttavate elastsuskonstantidega

$$\begin{aligned}C_{11} &= \frac{1}{E}; \quad C_{12} = -\frac{\mu}{E} \\ C_{44} &= 2(C_{11} - C_{12}) = \frac{2(1 + \mu)}{E} = \frac{1}{G}\end{aligned}$$

võime Hooke'i seaduse välja kirjutada tuntud kujul:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}\end{aligned}\quad (7.43)$$

Märgime siin veel kord, et anisotroopse keha jaoks on elastsuskonstantide arv suurem. Kuna anisotroopseid kehasid on mitut liiki, tuleb vajalik elastsuskonstantide arv määrata iga liigi kohta eraldi. Tehnikas on neist kõige sagedamini esinevad ortotroopsed kehad. Ortotroopsetes kehases (näiteks vineer) on võimalik leida kolm üksteisega risti asetsevat telge, nn. peatelge, mille sihis määratud normaalpinged ei põhjusta telgedevaheliste nurkade muutusi. Ortotroopse keha elastsuskonstandid ei muutu peatelgede pööramisel 180° võrra, kuid muutuvad iga teistsuguse pöörde juures. Seega on ortotroopse keha elastsusomadused iseloomustatud 9 konstandiga vastavalt punktile 1.

7.5 ELASTSUSÕPETUSE PÕHIÜLESANDE LAHENDAMINE

7.51 Elastsusõpetuse põhiülesande formuleering

Ranges formuleeringus peab elastsusõpetuse ülesannetes olema antud:

- 1) keha kuju,
- 2) elastsuskonstandid,
- 3) mahujõud,
- 4) kolm ääretingimust keha välispinna igas punktis.

Nende andmete järgi tuleb määrata pinged, suhtelised deformatsioonid ja siirded keha mis tahes punktis.

Esineb ülesandeid, kus ääretingimused sõltuvad selle keha elastsusomadustest, millega jõud vaadeldavale kehale üle kantakse, ja selguvad alles lahenduskäigus. Need on nn. kontaktülesanded. Näiteks surudes teineteise vastu kaht elastset kera tekib nende vahel kontaktpind, mille suurus oleneb kerade mõõtmetest, elastsuskonstantidest ja mõjuvate jõudude suuruselt; kummalegi kerale mõjuva väliskõormuse jaotus sõltub kontaktpinna suuruselt.

Elastsusõpetuse põhiülesande lahendamine on enamail juhtudel seotud suurte matemaatiliste raskustega, eriti segatüüpi ülesannete juures. Mõnel juhul õnnestub neid raskusi vähendada, loobudes ääretingimuste rangest formuleeringust ja rakendades *Saint-Venant'*i printsiipi (p. 7.12), s. t. asendades etteantud jõudude süsteemi mingil keha välispinna väikesel osal teise jõudude süs-

teemiga, millel on sama peavektor ja peamoment, kuid mille jaoks lahend on kergemini leitav. See on seda enam õigustatud, et praktiliste ülesannete juures on koormuse täpne jaotus sageli teadmata, eriti koondatud jõudude rakenduskohas.

7.52 Elastisusõpetuse põhivõrrandite täielik süsteem

Tuletatud võrranditest osutuvad elastisusõpetuse põhiülesande lahendamiseks esmajärguliseks vajalikuks järgmised

1. Risttahuka tasakaalu diferentsiaalvõrrandid (7.7), mis seovad pingeid omavahel ja mahujõududega:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X_Q &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y_Q &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_Q &= 0 \end{aligned} \quad (I)$$

2. Võrrandid (7.20), mis seovad deformatsioone siiretega:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (II)$$

3. Võrrandid (7.43), mis seovad pingeid deformatsioonidega:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (III)$$

Mõnikord osutub vajalikuks see võrranditegrupp avaldada vastupidisel kujul, s. t anda ta mitte deformatsioo-

nide, vaid pingete avaldistena. Lahendades võrrandid (III) pingete suhtes, saame:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E'(\varepsilon_x + \mu'\theta); & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= E'(\varepsilon_y + \mu'\theta); & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= E'(\varepsilon_z + \mu'\theta); & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\quad (\text{IIIa})$$

kus

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad E' = \frac{E}{1 + \mu}; \quad \mu' = \frac{\mu}{1 - 2\mu}$$

Seega kuulub põhivõrrandite hulka 15 võrrandit, mis seovad omavahel 15 tundmatut funktsiooni: kuut pingetensori komponenti, kuut deformatsioonitensori komponenti ja kolme paigutisvektori komponenti (siiret). Elastsusõpetuse põhiülesande lahendamiseks on vaja nende funktsioonide jaoks leida säärased avaldised, mis rahuldaksid ülaltoodud 15 võrrandit ja ääritingimusi.

Juhul kui ääritingimused on antud pingevektori komponentide p_{vx} , p_{vy} ja p_{vz} kaudu, tuleb nad eelnevalt avaldada pingetensori komponentide σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} ja τ_{zx} kaudu. Selleks kasutatakse avaldisi (6.10):

$$\begin{aligned}p_{vx} &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ p_{vy} &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ p_{vz} &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z\end{aligned}\quad (\text{IV})$$

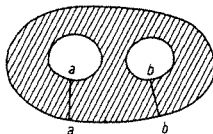
Kui ääritingimused on otseselt avaldatavad pingetensori komponentide kaudu, ei osutu võrrandid (IV) tarvilikkudeks.

7.53 Ühe- ja mitmesidemelised kehad. Elastsusõpetuse põhiülesande lahendite ühesus

Keha nimetatakse ühesidemeliseks, kui iga-sugune keha läbiv lõige jaotab ta kaheks osaks (näiteks kera). Rõngas on kaheksidemeline, kuna tema kaheks osaks jaotamiseks võib osutada vajalikuks kaks lõiget. Joonisel 7.14 kujutatud keha on kolmesidemeline. Üldse on sidemete arv ühe võrra suurem lõigete arvust, mis on vajalik keha muutmiseks ühesidemeliseks (joonisel 7.14 lõiked *aa* ja *bb*).

On võimalik tõestada, et juhul kui keha on ühesidemeline ja seos välisjõudude ning pingete vahel on lineaarne (lineaarne elastsusteooria), on elastsusõpetuse

JOON 7.14



põhivõrranditel (I), (II) ja (III) antud välisjõudude juures pingete ja deformatsioonide jaoks üks ning ainult üks lahend. Mis paigutistesse puutub, siis need pole üheselt määratud juhul, kui kõik ääritingimused on antud pingetes. Siis saadakse paigutised täpsusega kuue meelevaldse konstandini; need konstandid vastavad keha kui jäiga keha paigutusele ruumis ja sõltuvad sidemetest, millega keha on kinnitatud (keha kinnitamiseks ruumis on vaja kuus sidet).

Mitmesidemeliste kehade juures võib mõnel juhul võrrandite (I), (II) ja (III) lahend olla üheselt määramatu, mispuhul saadakse lõpmatu hulk lahendeid. Nende hulga õige leidmiseks võivad vajalikuks osutada täiendavad tingimused deformatsiooni iseloomu suhtes, nn. integraalsed deformatsiooni pidevuse tingimused [need pole samased diferentsiaalsete deformatsiooni pidevuse tingimustega (7.28)].

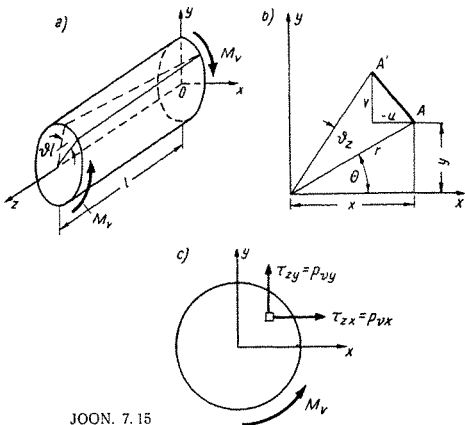
Teoreem lahendi ühesusest ei kehti samuti juhul, kui paigutised on niivõrd suured, et võrrandid (II) tuleb asendada täpsemate, mittelineaarsete avaldistega. Sel juhul on lahend ühene ainult väliskoormuse teatud väärtuseni. Tüüpiliseks näiteks selle kohta on ülesanded, mis on seotud elastsete kehade käitumisega pärast stabiilsuse kaotust.

7.54 Silindrilise varda vääne

Näitena elastsusõpetuse põhivõrrandite rakendamise kohta vaatleme silindrilise ümarvarda väänet (joon. 7.15, a). Varras on koormatud väändemomendiga M_v . Mahujõudude mõju hulgame. Oletame, et punkt 0 ei siirdu ega pöördu.

Katseandmetest selgub, et sääraste varraste väändel:

a) ristlõiked jäävad tasapinnalisteks,



JOON. 7.15

b) ristlõigete vahekaugus ei muutu,
 c) ristlõiked pöörduvad telje z ümber, kusjuures pöördenurga suurus on võrdeline kaugusega kinnituskohast,

d) raadiusvektorid jäävad sirgeteks,

e) varda läbimõõt ei muutu.

Võtame need andmed lähtehüpoteesideks, et saada avaldisi paigutiste jaoks.

Esimese kahe punkti põhjal z -telje suunalised siirded $w = 0$. Viimaste punktide alusel ristlõike pinna üksikud punktid oma vastastikust asendit ei muuda, ristlõige ainult pöördub nagu jäik keha. Ristlõigete omavahelise pöördenurga varda pikkuse ühiku kohta tähistame tähega θ_z ; meelevaldse ristlõike pöördenurga suuruseks on seega θ_z . Oletame, et pöördenurk θ_z on väike suurus, kuna avaldised (II) kehtivad ainult väikeste paigutiste korral. Vastavalt joonisele 7.15, b on siis punkti A , mille koordinaadid on x ja y (või polaarkoordinaatides r ja φ), paigutised järgmised:

$$\begin{aligned} u &= -\vartheta z r \sin \varphi = -\vartheta z y \\ v &= \vartheta z r \cos \varphi = \vartheta z x \\ w &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Võrranditest (II) leiame deformatsioonid.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} (-\vartheta z y) = 0 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\vartheta z x) = 0 \\ \epsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} (-\vartheta z y) + \frac{\partial}{\partial x} (\vartheta z x) = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial z} (\vartheta z x) = \vartheta x \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial}{\partial z} (-\vartheta z y) = -\vartheta y \end{aligned} \quad (b)$$

Edasi leiame *Hooke*'i seadusest (III) pinged. Kuna $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$, võrduvad nulliga ka normaalpinged:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (c)$$

Tangentsiaalpingete avaldised kujunevad järgmisteks:

$$\tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = G\vartheta x, \quad \tau_{zx} = -G\vartheta y \quad (d)$$

Asendades (c) ja (d) võrrandisse (I), saame:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (-G\vartheta y) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (G\vartheta x) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (-G\vartheta y) + \frac{\partial}{\partial y} (G\vartheta x) = 0 \end{aligned}$$

Seega on elastsusõpetuse põhivõrrandid (I), (II) ja (III) rahuldatud ja meie poolt ette antud paigutistele vastav pingus on elastsusõpetuse seisukohalt võimalik. Jääb veel selgitada, kas ta tõesti vastab varda väände. Selleks leiame, millised on pingevektori komponendid varda välispinnal, s. t. milline on vardale mõjuv koormus. Siin kasutame võrrandeid (IV).

Olgu varda külgpinna mingi punkti kaugus varda tel-

jest r_1 ja tema koordinaadid x_1 ja y_1 . Varda külgpinna sihikoosinused on järgmised:

$$l = x_1/r_1; \quad m = y_1/r_1; \quad n = 0$$

Kahest esimesest võrrandist (IV) leiame, et p_{vx} ja p_{vy} võrduvad samaselt nulliga. Kolmandast võrrandist saame:

$$p_{vz} = \tau_{zx} + m\tau_{yz} = \frac{x_1}{r_1} (-G\theta y_1) + \frac{y_1}{r_1} (G\theta x_1) = 0$$

Seega varda külgpinnad on väliskoormusest vabad.

Varda otspinnal $z = h$, mille sihikoosinused $l = m = 0$ ja $n = 1$, saame:

$$p_{vx} = \tau_{zx} = -G\theta y; \quad p_{vy} = \tau_{yz} = G\theta x \quad (e)$$

Varda otspind on järelikult koormatud ainult tangentsiaalpingetega. Need pinged annavad väändemomendi (joon. 7.15, c)

$$\begin{aligned} M_v &= \int_F (p_{vy}x - p_{vx}y) dF = G\theta \int_F (y^2 + x^2) dF = \\ &= G\theta \int_F r^2 dF = G\theta I_0 \end{aligned} \quad (f)$$

kus

$$I_0 = \int_F r^2 dF \quad (g)$$

on polaarinertsmoment.

Seega saame varda väändenurga väärtuseks pikkusühiku kohta

$$\theta = \frac{M_v}{GI_0} \quad (h)$$

Varda otsal mõjuvad tangentsiaalpinged annavad raadiusvektoriga risti suunatud resultandi, mille suurus

$$\tau_{\text{rp}} = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} = G\theta \sqrt{y^2 + x^2} = G\theta r = \frac{M_v r}{I_0} \quad (i)$$

Saadud avaldised väändenurga ja tangentsiaalpingete jaoks langevad kokku tuntud avaldistega tugevusõpetuse kursusest. Seega tugevusõpetuse lähend ümarvarda väände kohta rahuldab elastsusõpetuse põhivõrrandeid.

Ülesande täpses käsitluses on nõutav, et väliskoormus

antaks varda otsale üle tangentsiaalpingetega, mis on üle varda ristlõike jaotatud vastavalt seadusele (i), s. t. vastavalt samale seadusele, mis kehtib varda ükskõik millise ristlõike kohta. Kui otsaristlõikes koormus kantakse üle mingil muul viisil, kutsub see vastavalt *Saint-Venant*'i printsiibile esile lokaalse pingete ümberjaotuse; välisjõudude rakenduskohast kaugemal asetsevates kohtades vastab pingeaotus seadusele (i).

7.55 Elastisusõpetuse põhivõrrandite lahendus siiretes

Tasakaalu diferentsiaalvõrrandeid (I) (p. 7.52) on võimalik väljendada pingete asemel siiretes. Algul avaldame pinged võrrandis (III a) siirete kaudu, kasutades selleks võrrandeid (II):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta \right), & \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta \right), & \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta \right), & \tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (7.44)$$

kus

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7.45)$$

Edasi paigutame pingete avaldised (7.44) võrrandisse (I). Esimene neist võrrandist saab järgmise kuju:

$$\begin{aligned}& \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \\ & + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X_Q = 0\end{aligned}\quad (7.46)$$

Pidades silmas, et

$$\begin{aligned}\frac{E}{1+\mu} &= 2G \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \theta}{\partial x}\end{aligned}$$

ja tähistades

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u \quad (7.47)$$

kus ∇^2 on *Laplace*'i operaator, saame tasakaalu diferentsiaalvõrrandid siiretes lõplikult järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{X_Q}{G} &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{Y_Q}{G} &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{Z_Q}{G} &= 0 \end{aligned} \quad (7.48)$$

Neid võrrandeid nimetatakse *Lamé* võrrandeks.

Lahendusel siiretes ei osutu enam vajalikuks opereerida korruga 15 võrrandiga (I—III). Algul määrame siirded võrrandest (7.48) ja seejärel leiame võrrandest (II) deformatsioonid, mis ei valmista raskusi, kuna tegemist on ainult teadaolevate funktsioonide diferentseerimisega. Lõpuks määrame võrrandite (III) abil pinged, mis nõuab ainult algebraliste operatsioonide teostamist.

Kuigi põhimõtteliselt on elastsusõpetuse põhiülesande lahendamine siiretes suhteliselt lihtne (tuleb lahendada ainult kolmest diferentsiaalvõrrandist koosnev võrrandisüsteem), leiavad võrrandid (7.48) siiski võrdlemisi vähe kasutamist. Põhjus on ääretingimustes. Ülesanded, kus ääretingimused on antud ainult siiretes, on küllaltki haruldased. Kui ääretingimused on kas osaliselt või täielikult antud pingetes, tuleb need eelnevalt avaldada siiretes. Selleks paigutame pingete avaldised (7.44) võrrandisse (IV). Tulemus kujuneb aga võrdlemisi keeruliseks:

$$\begin{aligned} 2l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta \right) + m \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + n \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{p_{vx}}{G} \\ l \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2m \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + n \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\rho_{vy}}{G} \quad (7.49) \\
 l \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & + m \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\
 & + 2n \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta \right) = \frac{\rho_{vz}}{G}
 \end{aligned}$$

Lisaks sellele võib toodud lahendusmeetodi puudusteks lugeda järgmisi asjaolusid:

a) sageli on lõpplahenduses vajalikud ainult pinged, siirded on teisejärgulise tähtsusega ja nende avaldistest võib loobuda;

b) siirete avaldised on tavaliselt keerulisemad kui pingete avaldised.

Selle tõttu on olulisem lahendus pingetes, mida käsitleme järgmises punktis.

7.56 Elastusõpetuse põhivõrrandite lahendus pingetes

Seame ülesandeks leida pingete määramiseks omaette võrrandisüsteem, kust võiks leida pinged ilma siirdeid ja deformatsioone abiks võtmata.

Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid (I) (p. 7.52)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X_Q &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y_Q &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_Q &= 0
 \end{aligned}$$

on avaldatud pingetes. Need üksinda pole aga veel piisavad pingekomponentide leidmiseks. Lisaks tuleb võtta veel deformatsiooni pidevuse tingimused (7.29), mis on tuletatud põhivõrranditest (II) Deformatsiooni pidevuse tingimused olid avaldatud küll joondeformatsioonides ja nihkenurkades, kuid *Hooke*'i seaduse (III) abil on neilt kerge üle minna pingetele.

Asendades võrrandisse (7.29) deformatsioonide asemel nende avaldised (III), saame pärast mõningaid ele-

mentaarseid ümbermoodustusi deformatsiooni pidevuse tingimused järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} - \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} - \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} - \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z \partial x} - \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

kus

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (7.51)$$

Avaldised (7.50) ongi deformatsiooni pidevuse tingimused pingetes. Neid võiks säärasel kujul kasutada, kuid kombineerides neid tasakaalu diferentsiaalvõrranditega (I), saame neile anda lihtsama ja ülevaatlikuma kuju.

Et ümber moodustada esimest poolgruppi (7.50), diferentseerime tasakaaluvõrrandite (I) esimest võrrandit x järgi, teist y ja kolmandat z järgi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial x} + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z \partial y} + \rho \frac{\partial Y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial Z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (7.52)$$

Edasi liidame esimesed kolm võrrandit grupist (7.50) ja grupi (7.52) võrrandid, võttes nad järgmiste kordajatega:

grupi (7.50) esimese ja kolmanda võrrandi kordajaga 1, teise võrrandi kordajaga μ ;

grupi (7.52) esimese võrrandi kordajaga $(2 - \mu)$, teise ja kolmanda võrrandi — kordajaga μ .

Tulemuse jagame suurusega $(1 - \mu)$. Saame:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \\ & = \left[-2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\mu}{1 - \mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right] \varrho \end{aligned} \quad (7.53)$$

Analoogia põhjal võime välja kirjutada teised kaks avaldise (7.50) esimesele poolgrupile vastavat võrrandit.

Et saada üht võrrandite (7.50) teisele poolgrupile vastavat võrrandit, diferentseerime algul võrrandite (I) teist võrrandit z ja kolmandat võrrandit y järgi:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z^2} + \varrho \frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial y} + \varrho \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

Liidame saadud kaks võrrandit ja neljanda võrrandi grupist (7.50). Tulemus on järgmine:

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = -\varrho \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \quad (7.55)$$

Avaldiste (7.53) ja (7.54) järgi kirjutame välja kogu deformatsiooni pidevuse tingimustele vastava võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \\ & = -\varrho \left[2 \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\mu}{1 - \mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = \\ & = -\varrho \left[2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\mu}{1 - \mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} =$$

$$= -\varrho \left[2 \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right] \quad (7.56)$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = -\varrho \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = -\varrho \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right)$$

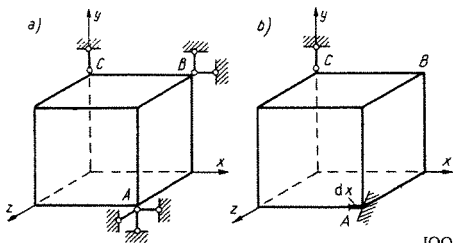
$$\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = -\varrho \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right)$$

Võrrandid (7.56) on tuntud *Beltrami-Michelli* võrranditena.

Seega elastsusõpetuse põhiülesande lahendamiseks pingetes on tarvis lahendada üheksast diferentsiaalvõrrandist koosnev süsteem: kolm võrrandit (I) ja kuus võrrandit (7.56). Lisaks sellele peab lahend rahuldama ääritingimusi (IV). Ääritingimused peavad seega olema antud pingetes.

Lahendusel pingetes on diferentsiaalvõrrandite arv (üheksa) suurem tundmatute funktsioonide arvust (kuus); selle eest on aga ääritingimusi (kolm) vähem kui tundmatuid funktsioone. On võimalik tõestada, et funktsioonide ja ääritingimuste arv on ülesande lahendamiseks piisav.

Kui lisaks pingetele on vaja veel leida siirded, tuleb algal *Hooke*'i seaduse (III) alusel leida deformatsioonid



JOON 7.16

ja selle järgi diferentsiaalvõrrandite (II) integreerimise teel siirded. Siirete avaldised saadakse järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} u &= u_1(x, y, z) + u_0 + \varphi_y z - \varphi_x y \\ v &= v_1(x, y, z) + v_0 + \varphi_z x - \varphi_x z \\ w &= w_1(x, y, z) + w_0 + \varphi_x y - \varphi_y x \end{aligned} \quad (7.57)$$

Suurused $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ ja φ_z on integreerimiskonstandid, mis määratakse vastavalt keha kinnitustingimustele ruumis. Keha kinnitamiseks vajalikud kuus sidet võivad takistada üksikute punktide siirdeid või üksikute lõpmata väikeste lõikude pöördeid. Joonisel 7.16 on näidatud kaks varianti lõpmata suurest võimalikkude variantide arvust ühe ja sama keha kinnitamiseks. Variantil a on kujutatud tingimused $u_A = v_A = w_A = u_B = v_B = w_B = 0$. Kui oletada, et variantil b kujutatud lõik dx on kinnitatud nii, et ta võib ainult x -telje ristsuunas pöörduda, avalduvad vastavad kinnitustingimused järgmiselt:

$$u_A = v_A = w_A = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_A = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_A = v_C = 0$$

Lahendusel pingetes ei saa püstitada nõuet, et mingi ristlõike või pinna siire või pööre võrdub nulliga, nagu seda tehakse tugevusõpetuses. Kui mingi pinnaosa kõigi punktide siirded ülesande tingimuste kohaselt peavad lõpepoolest nulliga võrduma, on tegemist juba segatüüpi ülesandega, kus osa ääretingimusi on antud siiretes.

7.57 Prismalise varda vääne

Näitena lahenduse kohta pingetes vaatleme prismalise varda väänet üldjuhul. Varda ristlõige on suvalise kujuga, kuid ühesidemeline. Varda otstel mõjuvad väändemomendid M_v ; varda teljed on väliskoormusest vabad. Mahujõud loeme võrdseks nulliga. Teljed valime nagu näidatud joonisel 7.15, a .

Ülesande lahendamiseks on tarvis leida pingete jaoks avaldised, mis rahuldaksid võrrandeid (I) ning (7.56) ja ääretingimusi. Põhimõtteliselt võib seda teha nii, et leiame nimetatud võrrandite üldlahendid ja otsime sealt välja säärase, mis rahuldab ääretingimusi. Säärast lahenduskäiku nimetatakse otseseks. Kahjuks on ta

aga seotud suurte matemaatiliste raskustega. Vaadeldaval juhul osutub otstarbekohasemaks nn. poolvastupidine lahenduskaik: loeme osa pingekomponente teada olevaiks, näiteks võrdseks nulliga, võttes selle juures aluseks mõne tuttava lahendi; ülejäänud pingekomponendid aga määrame juba diferentsiaalvõrrandest ja ääritingimustest. Arusaadavalt ei garanteeri see meetod, et alati saame soovitava tulemuse; siiski on ta paljude ülesannete, muuseas ka väändeülesande juures otstarbekohaseks osutunud.

Võttes aluseks ümmarguste varraste kohta saadud lahendi, kus kõik pingekomponendid peale tangentsiaalpingete τ_{yz} ja τ_{zx} võrdsusid nulliga, oletame, et ka igasuguse muu ristlõikega varraste väändel

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (a)$$

Ülesande tingimuste kohaselt võrduvad nulliga ka mahujõud:

$$X = Y = Z = 0 \quad (b)$$

Arvestades avaldise (a) ja (b), saab võrrandeid (I) ja (7.56) juba tunduvalt lihtsustada. Võrrandid (I) võtavad järgmise kuju:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Võrrandest (7.56) on neli esimest rahuldatud samaselt $0 \equiv 0$. Viimased kaks võrrandit annavad tingimused

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tau_{yz} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (d)$$

Esimesest kahest võrrandist (c) järeldub, et tangentsiaalpinged ei sõltu koordinaadist z , s. t. ristlõike asukohast varda teljel: $\tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y)$; $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$. Viimast võrrandit (c) aga saab rahuldada, võttes kasutusele nn. pingefunktsiooni $\Phi(x, y)$, mis on pingetega seotud järgmiselt:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (e)$$

Asendades võrrandeisse (d) pingete avaldised (e), saame:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (f)$$

Võrrandeist (f) järeldub, et sulgudes olev avaldis $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Phi$ ei sõltu koordinaatidest x ja y ja on seega konstantne suurus:

$$\nabla^2 \Phi = B \quad (g)$$

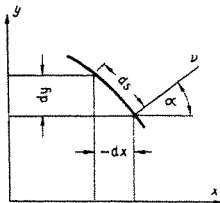
Nii saame üheksa lähtevõrrandi (7.50) ja (7.57) asemel üheainsa diferentsiaalvõrrandi (g). Teadmata on aga veel ääretingimused tunktsiooni Φ jaoks ja konstandi B väärtus. Nende leidmiseks on meie käsutuses tingimused, et varda külgpindadel väliskoormus võrdub nulliga ja otspindadel annab resultandiks väändemomendi M_v .

Vaatleme algul varda külgpinda, kus sihikoosinus $n = 0$. Kuna külgpind on väliskoormusest vaba, siis seal $p_{v,x} = p_{v,y} = p_{v,z} = 0$, seega avaldised (IV) peavad võrduma nulliga. Esimesed kaks võrrandeist (IV) annavad samaselt nulli; viimasest võrrandist saame

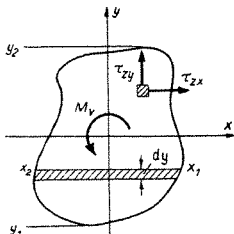
$$l\tau_{xx} + m\tau_{yz} = 0 \quad (h)$$

Olgu x ja y ristlõike kontuuri mingi punkti koordinaadid ja ds — kontuuri element. Jooniselt (7.17) selgub, et

$$l = \cos \alpha = \frac{dy}{ds}; \quad m = -\frac{dx}{ds} \quad (i)$$



JOON 7.17



JOON. 7.18

Asendades võrrandisse (h) pingete ja sihikoosinuste asemele avaldised (e) ja (i), saame:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0$$

ehk

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \quad (\text{k})$$

Seega varda ristlõike kontuuril on pingefunktsioon Φ konstantne. Ühesidemeliste kehade puhul võib sellele konstandile anda suvalise väärtuse; tavaliselt võetakse ta võrdseks nulliga.

Edasi selgitame, milline on koormus varda otsal, kus $n = 1$ (joon. 7.18). Seal mõjuvad tangentsiaalpinged τ_{yz} ja τ_{zx} , mis annavad väändemomendi

$$M_v = \int_F (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) dF = - \int_F \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dF \quad (\text{m})$$

Integreerides avaldist (m) ositi saame, arvestades, et kontuuril on Φ konstantne,

$$M_v = 2 \int_F \Phi dF \quad (\text{n})$$

Kuna varda otsal normaalpingeid ei esine, võrduvad pikijõud ja paindemomendid nulliga. Nulliga võrduvad ka põikjõud, näiteks

$$\begin{aligned}
 Q_y &= \int_F \tau_{yz} dF = - \int_F \frac{\partial \Phi}{\partial x} dF = \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} \left[\Phi \right]_{x_1}^{x_2} dy = 0
 \end{aligned}$$

kuna pingefunktsiooni Φ väärtus on kontuuri punktides x_1 ja x_2 ühesugune. Seega varda otsal mõjuvad pinged annavad resultandina ainult väändemomendi M_v , nagu ülesande tingimuste kohaselt pidigi olema.

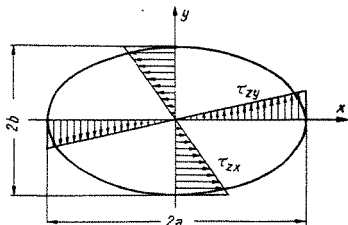
Kokkuvõttes saame prismalise varda väändel tekkivate pingete määramiseks järgmise juhendi. Väändepingete leidmiseks tuleb arvutada pingefunktsioon Φ , mis rahuldab diferentsiaalvõrrandit (g) ja varda kontuuril võrdub nulliga. Võrrandi (g) lahendamisel võib konstandi B jaoks võtta suvalise väärtuse; hiljem leiame võrrandist (n), missugune väändemoment vastab leitud pingefunktsioonile. Lõpuks leiame tangentsiaalpinged seostest (e).

Mõningate profiilide (ellips, võrdkülgne kolmnurk jne.) jaoks on võimalik saada täpne lahend. Ristkülikulise profiili puhul tuleb piirduda ligikaudse lahendiga; mõningaid sellistel juhtudel kasutatavaid meetodeid on kirjeldatud punktis 10.4.

Viime pingete määramise lõpuni elliptilise profiili jaoks, mille poolteljed on a ja b (joon. 7.19).

Võtame pingefunktsiooni jaoks avaldise

$$\Phi = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (o)$$



JOON. 7.19

mis kontuuril ilmselt võrdub nulliga. Asendades avaldise (o) võrrandisse (g), saame:

$$-2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)C = B$$

Kuna see avaldis ei sõltu x ega y väärtusest, sobib valitud avaldis (o) pingefunktsiooniks.

Edasi määrame konstandi C . Paigutades pingefunktsiooni (o) avaldise (n), saame:

$$\begin{aligned} M_v &= 2C \int_F \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dF = \\ &= 2C \left(F - \frac{I_y}{a^2} - \frac{I_x}{b^2}\right) = \\ &= 2C \left(\pi ab - \frac{\pi a^3 b}{4a^2} - \frac{\pi ab^3}{4b^2}\right) = \pi ab C \end{aligned}$$

kust

$$C = \frac{M_v}{\pi ab}$$

ja seega

$$\Phi = \frac{M_v}{\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (p)$$

Pinged

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2M_v y}{\pi ab^3} \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2M_v x}{\pi a^3 b} \end{aligned} \quad (r)$$

Maksimaalsed tangentsiaalpinged tekivad lühikeste pooltelgede otstel, kus $y = \pm b$. Saame:

$$\max \tau = \frac{2M_v}{\pi ab^2} \quad (s)$$

Edasi määratakse deformatsioonid ja paigutised võrrandite (III) ja (II) abil. Märgime, et ühikkaugusel asuvate ristlõigete vastastikune pöördnurk

$$\vartheta = -\frac{\nabla^2\Phi}{2G} = \frac{B}{2G} = \frac{M_v(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3 G} \quad (t)$$

ja et varda ristlõiked ei jää tasapinnaliseks ning ristlõike punktide teljesuunaliste siirete (deplanatsiooni) arvutamiseks saadakse valem

$$w = \frac{M_v(b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3 G} xy \quad (u)$$

8 ELASTUSTEORIA TASANDÜLESANNE

8.1 TASANDÜLESANDE MÕISTE

Elastse keha pinge- ja deformatsiooniolukorra selgitamiseks kasutatakse sageli peapinge ja peadeformatsiooni mõistet. Nii jagatakse pingus (pingeolukord) keha mingisuguses punktis liikideks olenevalt sellest, mitu nullist erinevat peapinget esineb antud punktis. Vastavalt sellele liigitusele võib esineda ruum-, tasand- või joonpingus. Keha pingus on ruumiline, kui kõik peapinged erinevad nullist, tasandiline aga siis, kui üks peapingetest võrdub nulliga.

Analoogiliselt eeltooduga on keha deformatsiooniolukord kirjeldatav peadeformatsioonide kaudu. Keha ruumdeformatsiooni puhul erinevad kõik peadeformatsioonid nullist. Tasanddeformatsiooni korral võrdub aga üks peadeformatsioonidest nulliga.

Pinge- ja deformatsiooniolukord võib üldiselt olla keha piirides muutuv. Mõnikord võib aga nii pingus kui ka deformatsiooniolukord olla kehas ühtlane; see tähendab seda, et keha kõikides punktides on pingus või deformatsiooniolukord ühesugune.

Elastusteoorias esineb hulki ülesandeid, kus pingus või deformatsiooniolukord on ühtlaselt tasandiline. Sääraseid ülesandeid nimetatakse elastsusteooria tasandülesanneteks. Selleks et elastses kehas oleks realiseeritud ühe või teise ülesande liik, peavad keha kaju, kinnitusviis ja koormus vastama teatavatele nõuetele, mida kirjeldame allpool. Peab märkima seda, et tasandpinguse puhul esineb kehas ruumiline deformatsiooniolukord ja tasandilise deformatsiooniolukorra puhul ruumpingus.

8.2 TASANDULESANDE LIIGID

8.21 Tasanddeformatsioon

Tasanddeformatsiooniks nimetatakse sää-
rast elastse keha deformatsiooni, kus keha punktid
paigutuvad paralleelselt mingi tasandiga, näiteks koordi-
naattasandiga xy , kuna paigutis z -telje sihis võrdub
nulliga. Vaatleme elastset keha, mille pikkus z -telje sihis
on suur, võrreldes mõõtmetega teiste telgede sihis; z -tel-
jega risti olev keha lõikepind olgu muutumatu. Kõik
kehale mõjuvad koormused asetsegu z -teljega risti olevas
tasandis ning koormuse jaotus piki z -telge olgu kons-
tantne. Ka jäägu konstantseks piki z -telge keha kinnitus-
viis.

Kui need tingimused on täidetud, siis deformatsioonid
valdavas osas kehas, sobival kaugusel keha otstest
vastavalt *Saint-Venant*'i printsiibile, on koordinaatide x
ja y funktsioonid ega sõltu koordinaadist z . Paigutise
komponendid u ja v on x ja y funktsioonid, kuna $w = 0$.

Kirjeldatud deformatsioon toimub näiteks kahest ser-
vast toetatud plaadi paindel, nn. plaadi silindri-
lisel paindel. Plaat olgu koormatud ühtlaselt jaot-
tatud koormusega.

$$u = f_1(x, y); \quad v = f_2(x, y); \quad w = 0 \quad (8.1)$$

Kasutades paigutiste u , v ja w kohta antud seoseid
(8.1) võime elastsusteooria põhivõrrandite (7.20) põhjal
leida järgmised joondeformatsioonid ja nihkenurgad:

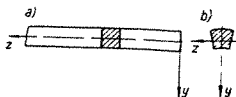
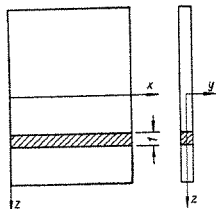
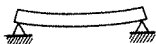
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (8.3)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Nagu nähtub võrranditest (8.1)–(8.3), on lisaks siir-
dele w ka joondeformatsioon ϵ_z ja nihkenurgad γ_{yz} ja γ_{zx}
nullid, nii et keha deformatsioon areneb tõepoo-
lest xy -tasandis ja see on nii kõikides keha z -teljega
risti olevais lõigetes.

Eraldame joonisel 8.1 kujutatud plaadist riba kahe



JOON 8 2

JOON 8 1

lõikega, mis on risti z -teljega. Laseme ribal talana painduda temale mõjuva põikkoormuse toimel. Tala paindudes tema ristlõike deformeerub. Survele töötavad kihid paisuvad põiksisis, kuna tõmbele töötavad kihid ahenevad. Tala ristlõike deformeerunud kuju on esitatud joonisel 8.2, b).

Seega tekib tala paindudes joondeformatsioon ε_z . Plaadi paindel on aga riba seotud plaadi naaberosadega ja ristlõike deformatsioon on takistatud ning joondeformatsioon $\varepsilon_z = 0$. Üldistatud Hooke'i seadusest saame:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

millest

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (8.4)$$

Järelikult z -telje sihis tekivad normaalpinged σ_x , mis avalduvad σ_x ja σ_y kaudu. Edasi saame üldistatud Hooke'i seadusest joondeformatsioonid

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \mu [\sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \} = \\ &= \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_y \right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

ja

$$\varepsilon_y = \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_x \right)$$

Nihkenurgad on *Hooke*'i seadusest nihkel

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = 0; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (8.6)$$

Seostest (8.2), (8.5), (8.4) ja (8.6) selgub, et kõik pinged, mis ei võrdu nulliga, on sõltuvad ainult koordinaatidest x ja y ; seega

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \psi_1(x, y); & \sigma_y &= \psi_2(x, y); & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \psi_3(x, y) \\ \sigma_z &= \psi_4(x, y); & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Kuna pinged ei sõltu koordinaadist z ja arvestades sellega, et ka välisjõud ei anna projektsioone z -telje suhtes, säilib tasakaaluvõrrandist ainult kaks järgmistena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + qX &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + qY &= 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

Välispinna tingimused:

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x \cos(x, v) + \tau_{yx} \cos(y, v) \\ Y_v &= \tau_{xy} \cos(x, v) + \sigma_y \cos(y, v) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Võrrandid (7.20) peatükist 7 taanduvad kolmele:

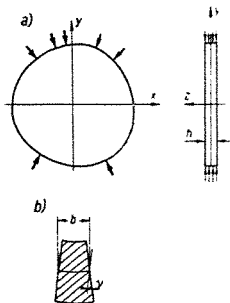
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8.10)$$

Kuuest deformatsiooni pidevusvõrrandist (7.29) säilib ainult üks:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (8.11)$$

8.2 ULDISTATUD TASANDPINGUS

Käsitleme nüüd tasandülesande teist varianti, mis põhiliselt sarnaneb tasanddeformatsiooniga. Erinevus on selles, et vaadeldava keha pikkus z -sihis on väike, mistõttu ta kujutab endast õhukest plaati paksusega h



JOON. 8 3

(joon. 8.3). Koormused välispinnal ja mahujõud on rakendatud risti z -teljega; z -teljega risti olevad pinnad on koormusevabad. Kui koormused on kriitilisest väiksemad (vt. p. 12), ei kõverdu plaat z -telje sihis. Kõikide pingete sihid plaadis on paralleelsed tasandiga xy ja pinged ei sõltu koordinaadist z . Seega pinged σ_z , τ_{zx} ja τ_{zy} võrduvad nulliga.* Säärast pingust nimetatakse üldistatud tasandpinguseks.

Paljudes konstruktsioonides on plaadi paksus h küll väike, kuid siiski lõpliku suurusega. Sel juhul oletus $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$ plaadi sisemuses ei tarvitse paika pidada, kuid plaadi paksuse väiksuse tõttu ei saavuta pinged siiski olulist suurust. Pinged σ_x , σ_y ja τ_{xy} võivad olla z -telje sihis vähe muutuvad. Need muutuvad pinged asendame aga keskmiste suurustega. Kui plaat on koormatud plaadi keskpinna suhtes muutuva, kuid sümmeetrilise koormusega, siis keskmised pinged $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

Üldistatud tasandpinguse kohta võib lugeda kehtivaks järgmised seosed:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \psi_1(x, y); & \sigma_y &= \psi_2(x, y); & \tau_{xy} &= \psi_3(x, y) & (8.12) \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = 0; & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = 0; & \sigma_z &= 0 \end{aligned}$$

* τ_{zx} ja τ_{zy} võrduvad nulliga siis, kui koormus piki z -telge ei muutu.

Võrreldes seostega (8.7) tasandilisest deformatsiooni-olukorrast on siin erinevus vaid selles, et $\sigma_z = 0$. Mis puutub deformatsiooniolukorda, siis siin $\varepsilon_z \neq 0$. ε_z põhjustab plaadi külgtasapinna deformeerumist, nii nagu toimub löikega eraldatud tala külgpindade pöördumine paindel. Plaadi väikese paksuse tõttu on aga plaadi külgpinna selline pöördumine kaduvalt väike. Kujutletava tala külgpinna pöördenuk γ on võrdeline tala laiussega b .

Üldistatud Hooke'i seadus — seosed deformatsioonide ja pingete vahel — on üldistatud tasandpinguse puhul järgmised

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{yx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yx}\end{aligned}\quad (8.13)$$

Vaadeldes võrrandeid, mis on tuletatud nii tasanddeformatsiooni kui ka tasandpinguse ülesannete lahendamiseks, näeme, et need on samad võrrandid, välja arvatud üldistatud Hooke'i seadus, kus on erinevus mõningates suurustes.

Kui tasanddeformatsiooni üldistatud Hooke'i seaduses asendada

$$E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}; \quad \mu_1 = \frac{\mu}{1-\mu}$$

saame

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \mu_1\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \mu_1\sigma_x) \\ \gamma_{yx} &= \frac{2(1+\mu_1)}{E_1} \tau_{yx}\end{aligned}\quad (8.14)$$

Näeme, et saadud seosed on tasandpinguse kohta tuletatud seostega (8.13) struktuurilt täiesti ühtelangedad, erinevus on vaid elastsuskonstantides.

8.3 TASANDÜLESANDE LAHENDUS PINGETES

Elastusteooria ülesandeid lahendatakse sageli pingetes, kuna sel meetodil on eeliseid võrreldes teiste meetoditega, nagu eespool selgitati. Võttes tasandülesande lahendamisel tundmatuteks pinged σ_x , σ_y ja $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, tuleb deformatsiooni pidevuse tingimus

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (8.15)$$

avaldada pingetes. Kasutame selleks kõigepealt üldistatud Hooke'i seadust (8.13) üldistatud tasandpingusest. Võiks kasutada ka üldistatud Hooke'i seadust tasanddeformatsiooniolukorrast, lõpptulemus oleks sama.

Asendame üldistatud Hooke'i seaduse alusel deformatsioonid pingetega, seejärel leiame deformatsioonidest teised tuletised, nii nagu see on tehtud võrrandis (8.15).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (a)$$

Saadud tuletised asetame võrrandisse (8.15); pärast taandamist suurusega $1/E$, saame:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \\ - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (8.16)$$

Võrrand (8.16) on deformatsiooni pidevuse tingimus pingetes ning teda võiks ka sellisena kasutada. Elimineerides aga võrrandist tangentsiaalpinge, võime deformatsiooni pidevuse tingimuse väljendada lihtsamalt. Teemegi seda alljärgnevalt. Selleks kasutame tasakaaluvõrrandeid

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho Y = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Diferentseerime esimest võrrandit x järgi ning teist võrrandit y järgi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial X}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial Y}{\partial y}\end{aligned}\quad (c)$$

Oletades, et mahujõud on konstantsed, saame pärast liitmist

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (d)$$

Asetame seose (d) võrrandisse (8.16). Pärast teisendamist saame

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0$$

või

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0$$

Pingete summat $\sigma_x + \sigma_y$ on kaks korda diferentseeritud x järgi ning kaks korda y järgi ja tulemused on liidetud. Sellist tulemust nimetatakse *Laplace*'i operaatoriks. Deformatsiooni pidevuse tingimuse võib sõnastada järgmiselt: *Laplace*'i operaator normaalpingete summast võrdub nulliga.

Kasutades *Laplace*'i operaatori sümbolit ∇^2 on deformatsiooni pidevuse tingimus lühidalt väljendatav:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (8.17)$$

Seda nimetatakse *Maurice Lévy* tingimuseks.

Tasandülesande lahendamise käik pingetes on järgmine. Tuleb integreerida kolm diferentsiaalvõrrandit:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + g = 0$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (8.19)$$

kus g on keha mahuühiku kaal, kui mahujõududest esineb ainult raskusjõud.

Seejuures tuleb rahuldada välispinna tingimused

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x \cos(x, v) + \tau_{yx} \cos(y, v) \\ Y_v &= \tau_{xy} \cos(x, v) + \sigma_y \cos(y, v) \end{aligned} \quad (8.20)$$

Leidnud pinged σ_x , σ_y ja τ_{xy} , avaldame nende kaudu üldistatud *Hooke'i* seadusest deformatsioonid ϵ_x , ϵ_y ja γ_{xy} . Asetanud deformatsioonide väärtused *Cauchy* võrranditesse, saame:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}$$

Integreerides viimaseid, leiame lõppeks siirded u ning v , millega ka arvutus lõpeb.

8.31 Pingefunktsiooni rakendamine

Tasandülesande lahendust pingetes saab tunduvalt lihtsustada, kasutades nn. pingefunktsiooni $F(x, y)$. Seda funktsiooni nimetatakse mõnikord selle esmakordse rakendaja järgi *Airy* funktsiooniks.

Oletame, et on olemas mingi x ja y väärtusest sõltuv funktsioon $F(x, y)$, mille kaudu avalduvad pinged järgmistele lihtsate seoste abil:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - gx \quad (8.21)$$

Asetame pingete avaldised (8.21) tasandülesande tasakaaluvõrranditesse (8.18). Viimased on samaselt rahuldatud ja tasakaaluvõrrandid lülituvad edaspidisest lahenduskäigust välja.

Asendame edasi normaalpingete avaldised seostest (8.21) tasandülesande deformatsiooni pidevuse tingimuses $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$. Saame:

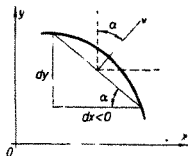
$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0$$

või lühidalt

$$\nabla^2(\nabla^2 F) = 0 \quad (8.22)$$

Avades *Laplace'i* operaatori sümboli, väljendub deformatsiooni pidevuse tingimus järgmiselt:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (8.23)$$



Saadud võrrandit nimetatakse tasandülesande biharmooniliseks võrrandiks. Funktsiooni, mis rahuldab seda võrrandit, nimetatakse biharmooniliseks funktsiooniks.

Seega taandub tasandülesande lahendamine pingetes üheainsa neljanda järgu diferentsiaalvõrrandi (8.23) lahendamisele osatuletistega. Seejuures tuleb rahuldada ka ülesandele vastavad ääritingimused.

Ääritingimused mingi kõverjoonelise kontuuri puhul avalduvad järgmiselt (vt. joonis 8.4):

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cos(x, v) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + gx \right) \cos(v, y) \\ Y_v &= - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + gx \right) \cos(v, x) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos(v, y) \end{aligned} \quad (8.24)$$

Pärast pingefunktsiooni $F(x, y)$ leidmist määratakse pinged seostest (8.21). Pingetest arvutatakse elastsuste abil deformatsioonid ning viimastest omakorda paigutised.

Nagu nähtub ülaltoodust, kuulub peamine osa tasandülesande lahendamisest pingefunktsiooni otsimisele. Pingefunktsiooni võib leida mitmel viisil. Uheks selliseks mooduseks on nn. poolvastupidine meetod. Selle kohaselt antakse pingefunktsioon ette mingisugusel analüütilisel kujul, näiteks polünoomi või trigonomeetrisel funktsioonide rea näol. Polünoom või rida sisaldab esialgu määramatuid konstante, mis leitakse, kasutades ääritingimusi ja tasandülesande biharmoonilist võrrandit. Et luua ettekujutust sellest, millist pingust üks või teine pingefunktsioon võib kirjeldada, on otstarbekohane analüüsida sellelt seisukohalt mõningaid lihtsamaid funktsioone.

8.4 TASANDULESANDE LAHENDUS POLÜNOOMIDEGA

Kui elastse keha kontuur on lihtne (näiteks ristkülik) ning ääritingimused on esitatavad lihtsate algebraliste funktsioonide näol, siis on otstarbekohane valida pingefunktsioon polünoomina.

Vaatleme alljärgnevalt mõningaid selliseid ülesandeid.

Esitame kõigepealt pingefunktsiooni teise astme polünoomina. Esimese astme polünoomi ei ole mõtet vaadelda, kuna pinged on teised tuletised koordinaatide järgi ja esimese astme polünoomi korral võrduvad nulliga.

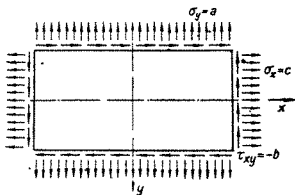
$$F(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{c}{2}y^2 \quad (8.25)$$

Biharmooniline võrrand $\nabla^2(\nabla^2 F) = 0$ on samaselt rahuldatud a , b ja c mis tahes väärtuste juures, kuna neljandat tuletised x ja y järgi võrduvad nulliga. Pinged avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = c \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = a \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -b - gx \end{aligned} \quad (8.26)$$

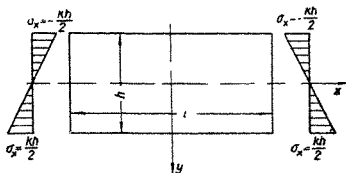
Juhul kui $g=0$, saame pinged, mis on konstantsed kõikides keha punktides. Säärast pingust nimetatakse ühtlaseks. Teise astme polünoom pingefunktsioonina kirjeldab lihttõmmet või -survet kahes sihis ning puhtnihet või nende kombinatsioone (joon. 8.5).

Võtame pingefunktsiooni kolmanda astme polünoomina



JOON. 8.5

JOON 8 6



$$F(x, y) = \frac{d}{6} x^3 + \frac{e}{2} x^2 y + \frac{f}{2} x y^2 + \frac{k}{6} y^3 + \frac{a}{2} x^2 + b x y + \frac{c}{2} y^2 \quad (8.27)$$

Pinged väljenduvad sel juhul järgmiselt:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= f x + k y + c \\ \sigma_y &= d x + e y + a \\ \tau_{xy} &= -e x - f y - b - g x \end{aligned} \quad (8.28)$$

Tasandülesande biharmooniline võrrand on rahuldatud pingefunktsiooni tegurite mis tahes väärtuste puhul.

Näitena vaatleme pingefunktsiooni alljärgneval erijuhul:

$$F = \frac{k}{6} y^3 \quad (8.29)$$

Loobudes omakaalu mõjust, saame pinged järgmiselt:

$$\sigma_x = k y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \quad (8.30)$$

Esinevad ainult normaalpinged pinnas, mis on risti x -teljega, ning olenevad koordinaadist y lineaarselt. Kujutame joonisel õhukest plaati, milles tekib ülalkirjeldatud pingus.

Nagu nähtub pingete avaldistest, ei sõltu pinged σ_x x väärtusest. x -teljel võrdub σ_x nulliga, maksimaalne on ta tala alumises kihis

$$\max \sigma_x = \frac{k h}{2} \quad (8.31)$$

kuna minimaalne ülemises kihis

$$\min \sigma_x = -\frac{k h}{2} \quad (8.32)$$

Tugevusõpetuses tekkis säärane pingeaotus tala puhtpaindel; järelikult kirjeldab ülaltoodud kolmanda astme polünoom puhtpainet. Kirjeldatud pinguse tekitamiseks tuleks talale mõjuv koormus rakendada analoogiliselt pingeaotusega tala ristlõigetel. Praktiliselt säärast koormuse jaotust tekitada on väga raske, mistõttu see koormus asendatakse mingi teistsuguse koormusega tingimusel, et see annaks niisama suure momendi kui lineaarselt jaotatud koormus. Loomulikult põhjustab uus koormuse rakendamismeetod selle rakenduskoha vahetus läheduses antud pingusest erineva pingeaotuse. Tala keskosas jääb aga pingus vastavalt *Saint-Venant*'i printsiibile muutmatuks.

Vaatleme nüüd pingefunktsiooni neljanda astme polünoomina

$$F(x, y) = \frac{a}{12} x^4 + \frac{b}{3} x^3 y + \frac{c}{2} x^2 y^2 + \frac{d}{3} x y^3 + \frac{e}{12} y^4 \quad (8.33)$$

Leiame pinged:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = cx^2 + 2dxy + ey^2 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -bx^2 - 2cxy - dy^2 \end{aligned} \quad (8.34)$$

Seekord tasandülesande biharmooniline võrrand ei ole samaselt rahuldatud, vaid annab tingimuse

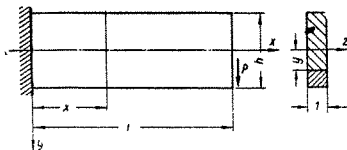
$$2a + 4c + 2e = 0 \quad (8.35)$$

mis näitab, et kõiki pingefunktsioonis esinevaid tegureid ei saa valida vabalt, vaid üks on määratav kahe teise kaudu. Sõltumatuid, ääretingimuste kaudu määratavaid tegureid on seega kokku neli.

8.5 KONSOOLI PAINE

8.51 Vabas otsas koondatud jõuga koormatud konsool

Vaatleme konsooli pikkusega l , mille ristlõige on kitsas ristkülik, laiusega l ja kõrgusega h . Konsool olgu vabas otsas koormatud jõuga P , mis mõjub jaotatuna üle ots-



JOON. 8.7

ristlõike. Konsooli omakaalust loobume. Painde elementaar-teooria põhjal saame järgmised pinged:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{My}{I} = -\frac{P(l-x)y}{I} \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{QS}{Ib} = \frac{P\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{2I}\end{aligned}\quad (\text{a})$$

milles paindemoment $M = -P(l-x)$, põikjõud $Q = P$, ristlõike inertsmoment $I = \frac{1 \cdot h^3}{12}$ ning ristlõike ühe viirutatud osa staatiline moment z -telje suhtes $S = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$.

Järgnevalt uurime, kas painde elementaar-teooria alusel saadavad pinged on võimalikud, lähtudes tasandülesande seisukohalt. Selleks selgitame, kas pingete valemid (a) on saadavad mingist pingefunktsioonist $F(x, y)$, mis samal ajal rahuldaks tasandülesande biharmoonilist võrrandit.

Juhul kui leitav pingefunktsioon ei ole täielik, võiks teda sobival viisil täiendada, nii et tasandülesande võrrandid oleksid rahuldatud.

Esitame nüüd pingete avaldised üldkujul ning teiste tuletistena pingefunktsioonist.

$$\sigma_x = Ay + Bxy = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (\text{b})$$

$$\sigma_y = 0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (\text{c})$$

$$\tau_{xy} = C + Dy^2 = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (\text{d})$$

Integreerime seost (b) kaks korda y järgi, misjärel saame

$$F = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + f(x)y + g(x) \quad (e)$$

Integreerimisel pingefunktsiooniga F liituvad meelevaldsed funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ määratakse tingimustest (c) ja (d)

$$f''(x)y + g''(x) = 0 \quad (f)$$

$$-\frac{By^2}{2} - f'(x) = C + Dy^2 \quad (g)$$

Seosed (f) ja (g) peavad olema rahuldatud x ja y mis tahes väärtustega, mistõttu võib kirjutada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 & \text{ja} & & g(x)'' &= 0 \\ f(x) &= Ex + F, & & & g(x) &= Hx + K \end{aligned}$$

Asetades viimased seosed võrrandisse (g), saame:

$$-B \frac{y^2}{2} - E = C + Dy^2$$

millest

$$E = -C \quad \text{ja} \quad D = -\frac{B}{2}$$

Pingefunktsioon (e) on nüüd väljendatav järgmiselt:

$$F(x, y) = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + Exy + Fy + Hx + K$$

Saadud pingefunktsiooni avaldisest võime ära jätta liikmed $Hx + Fy + K$, kuna need liikmed ei mõjusta pingete suurusi. Rahuldatud on ka tasandülesande biharmooniline võrrand pingefunktsiooni kordajate mis tahes väärtuste puhul. Asendame E C -ga, misjärel saame pingefunktsiooni

$$F(x, y) = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} - Cxy \quad (h)$$

Sellest pingefunktsioonist saadavad pinged

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Ay + Bxy \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{By^2}{2} + C \end{aligned} \quad (i)$$

on struktuurilt ühtelangevad elementaarse paindeteooria alusel esialgselt oletatavatega ja rahuldavad elastsusteooria tasandülesande võrrandeid Kordajad A , B ja C määratakse ääretingimustest.

Tala alumine ja ülemine horisontaalne välispind on pingevabad, s. o.

$$\text{kui } y = \pm \frac{h}{2}, \text{ siis } \sigma_y = 0 \text{ ja } \tau_{xy} = 0$$

Teisest tingimusest saame

$$-\frac{Bh^2}{8} + C = 0, \quad C = \frac{Bh^2}{8} \quad (k)$$

Konsooli paremal otspinnal $\sigma_x = 0$, järelikult

$$Ay + Bly = 0$$

millest

$$B = -\frac{A}{l} \quad (m)$$

Jõu P jaotuse iseloom konsooli otsal $x = l$ ei ole ülesandes ette antud. Peab olema vaid täidetud tingimus

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy = P \quad (n)$$

mis tähendab, et kõikide elementaarsete nihkejõudude summa peab võrduma antud koormusega. Selgub, et nihkejõud rakendatakse otsristlõikes samasuguse seaduse järgi kui ükskõik millises teises ristlõikes.

Asetades tangentsiaalpinge väärtuse seosest (i) tingimusse (n), ühtlasi arvestades seost (k) ning integreerides, saame:

$$P = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{By^2}{2} + \frac{Bh^2}{8} \right) dy = \left| -\frac{By^3}{6} + \frac{Bh^2}{8}y \right|_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{Bh^3}{12}$$

millest, kuna

$$\frac{1 \cdot h^3}{12} = l$$

$$\text{siis} \quad B = \frac{P}{l} \quad (o)$$

Tingimused (k) ja (m) lasevad end seose (o) alusel ümber kirjutada järgmiselt:

$$A = -Bl = -\frac{Pl}{l} \quad (p)$$

$$C = \frac{Bh^2}{8} = \frac{Ph^2}{8l} \quad (r)$$

Asetame nüüd leitud tegurite A , B ja C avaldised pingete avaldise (i):

$$\sigma_x = -\frac{Pl}{l} y + \frac{P}{l} xy = -\frac{P(l-x)}{l} y$$

$$\sigma_y = 0 \quad (s)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2l} y^2 + \frac{Ph^2}{8l} = \frac{P}{2l} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Nagu saadud pingete avaldistest nähtub, langevad elastsusteooria tasandülesande põhjal leitud pingete avaldised täielikult ühte elementaarse paindeteooria põhjal saadud pingetega. Säärane ühtelangevus esineb ainult mõningatel erandjuhtudel. Enamikul juhtudel tuleb ligikaudseid lahendusi täiendada või koguni asendada uutega.

Paigutiste määramine. Selleks et saadavad tulemused oleksid võrreldavad painde elementaarteooria, s. o. ristlõigete tasapinnalisuse hüpoteesile tugineva teooria tulemustega, oletame, et kehtib üldistatud tasandpingus. Otsitavateks paigutisteks on siirded x ja y sihis u ja v . Nende leidmisel lähtume *Cauchy* võrranditest ja üldistatud *Hooke*'i seadusest.

Cauchy võrrandid:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (t)$$

Üldistatud *Hooke*'i seadus

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \quad (u)$$

Kasutades pingete seoseid (s) võime kirjutada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{P}{EI} (l-x)y \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\mu P}{EI} (l-x)y\end{aligned}\quad (v)$$

Integreerimine võrrandeid (v):

$$\begin{aligned}u &= -\frac{P}{EI} \left(lxy - \frac{x^2 y}{2} \right) + f_1(y) \\ v &= \frac{\mu P}{EI} \left(\frac{ly^2}{2} - \frac{xy^2}{2} \right) + f_2(x)\end{aligned}\quad (w)$$

$f_1(y)$ ja $f_2(x)$ on meelevaldsed funktsioonid, mis tekivad integreerimise protsessis. Nende leidmiseks kasutame seost

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(1+\mu)P}{EI} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (õ)$$

Leiame võrranditest (w) tuletised, nii nagu nõuab seos (õ):

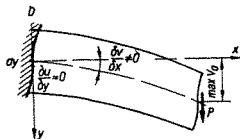
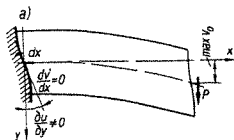
$$\begin{aligned}-\frac{P}{EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + f_1'(y) - \frac{\mu P}{EI} \frac{y^2}{2} + f_2'(x) &= \\ &= \frac{(1+\mu)P}{EI} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)\end{aligned}$$

Teisendame saadud seose:

$$\begin{aligned}\left[f_2'(x) - \frac{P}{EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \\ + \left[f_1'(y) - \frac{\mu P}{EI} \frac{y^2}{2} + \frac{(1+\mu)P}{EI} y^2 \right] &= \\ = \frac{(1+\mu)P}{EI} \frac{h^2}{4}\end{aligned}\quad (ä)$$

Saadud võrrandi kandilistes sulgudes olevad funktsioonid sõltuvad: esimene ainult x , teine ainult y väärtusest. Võrrandi parem pool on konstantne. Kuna x ja y on teineteisest sõltumatud muutujad, siis võrdus (ä) on võimalik ainult sel juhul, kui avaldised nurksulgudes on konstandid m ja n . Seega

$$m + n = \frac{(1+\mu)P}{EI} \frac{h^2}{4} \quad (ö)$$



JOON. 8.8

Võrrandi (ä) alusel võime avaldada:

$$f_2'(x) = \frac{P}{EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + m$$

$$f_1'(y) = -\frac{P}{EI} \left(1 + \frac{\mu}{2} \right) + n$$

Integreerime esimest võrrandit x ning teist y järgi, misjärel saame:

$$f_2(x) = \frac{P}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + mx + a$$

$$f_1(y) = -\frac{P}{EI} \frac{(2 + \mu)}{6} y^3 + ny + b$$

Asetame $f_2(x)$ ja $f_1(y)$ avaldistesse (v) ning saame alljärgnevad paigutised:

$$u = \frac{P}{EI} \left(-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2 + \mu)}{6} y^3 \right) + ny + b \quad (\ddot{u})$$

$$v = \frac{P}{EI} \left(\frac{\mu ly^2}{2} - \frac{\mu xy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + mx + a$$

Määramatud konstandid m , n , a ja b leitakse konsooli kinnitustingimustest.

Konsooli otsa on võimalik toetada kahel viisil. Kõigepealt kinnitatakse konsooli teljel olev algpunkt. Seega

kui $x = y = 0$, siis $u = v = 0$. Rakendades neid tingimusi avaldistele (ü), saame:

$$a = b = 0$$

Järgnevalt takistame konsooli otsa pöördumist algpunkti ümber. Esimese kinnitusviisi järgi oletame, et algpunkti juures asetsev horisontaalne sirge element jääb horisontaalseks, s. o. tala telje puutuja ei pöördu algpunktis (joon. 8.8, a).

See tähendab, et

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=y=0} = 0$$

Rakendades seda tingimust seoste (ü) kohta leiame, et $m = 0$ ja

$$n = \frac{(1 + \mu) P h^2}{EI} \frac{1}{4}$$

Lõplikult saame esimese kinnitusviisi korral paigutiste avaldised

$$u = \frac{P}{EI} \left[-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2 + \mu)}{6} y^3 + \frac{(1 + \mu) h^2 y}{4} \right] \quad (8.36)$$

$$v = \frac{P}{EI} \left[\frac{\mu l y^2}{2} - \frac{\mu x y^2}{2} + \frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] \quad (8.37)$$

Tala elastse joone võrrandi saame, kui oletame avaldised (8.37) $y = 0$:

$$v_0 = \frac{P}{EI} \left(\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (8.38)$$

Tala otsa läbipaine, kui $x = l$, on

$$\max v_0 = \frac{P}{EI} \left(\frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{6} \right) = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (8.39)$$

Teise kinnitusviisi kohaselt takistame tala alguspunktis vertikaalse elemendi pöördumist (joon. 8.8, b), mispärast kinnitustingimuseks saame

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=y=0} = 0$$

Rakendades esitatud tingimust u avaldise (\ddot{u}) kohta selgub, et $n = 0$, ning avaldisest (\ddot{o}) leiame

$$m = \frac{(1 + \mu)P}{EI} \frac{h^2}{4}$$

Seekord avalduvad paigutised, silmas pidades äsja leitud konstantide avaldise, järgmiselt:

$$u = \frac{P}{EI} \left[-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2 + \mu)}{6} y^3 \right] \quad (8.40)$$

$$v = \frac{P}{EI} \left[\frac{\mu ly^2}{2} - \frac{\mu xy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1 + \mu)h^2x}{4} \right] \quad (8.41)$$

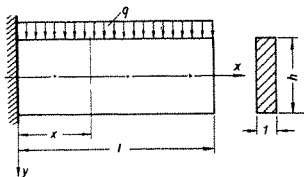
Tala elastse joone võrrand

$$v_0 = \frac{P}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{(1 + \mu)Ph^2x}{4EI} \quad (8.42)$$

Konsooli otsa läbipaine

$$\max v_0 = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{(1 + \mu)Ph^2l}{4EI} \quad (8.43)$$

Valemeis (8.41), (8.42) ja (8.43) viimane liige võtab arvesse nihke mõju läbipaindele ja sõltub suurel määral ristlõike kõrgusest. Näiteist läbipainde arvutamise kohta [valemid (8.39) ja (8.43)] nähtub, et see on sõltuv tala otsa kinnitusviisist. Peale kirjeldatud kahe kinnitusviisi on mõeldavad ka teistsugused; igale kinnitusviisile vastavad erinevad paigutised ja läbivajumised. Pingetele avaldab kinnitusviis mõju vaid kinnituskoha vahetus läheduses -- kinnituskohast kaugemal jääb pingus vastavalt *Saint-Venant*'i printsiibile muutumatuks.



JOON. 8. 9

8.52 Ühtlaselt jaotatud koormusega konsool

Olgu eelmises näites esitatud konsool koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega, mille intensiivsus on q . Lähitume ka seekord painde elementaariteooria põhjal arvutatud pingetest

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{My}{I} = -\frac{q(l-x)^2}{2I} y \\ \sigma_y &= 0\end{aligned}\quad (a)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{QS}{Ib} = \frac{q(l-x) \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2I}$$

milles $M = -\frac{q(l-x)^2}{2}$ ja $Q = q(l-x)$, kuna muud suurused on endised. Omakaalu mõjust loobume. Pingete täpsed avaldised peavad rahuldama järgmisi tasakaaluvõrrandeid:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) &= 0\end{aligned}\quad (b)$$

Leiame pingete avaldistest (a) osatuletised:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{q(l-x)y}{I}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{q(l-x)y}{I} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= -\frac{q \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2I}; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (c)$$

Asetades leitud tuletiste avaldised võrrandisse (b) näeme, et esimene võrrand on rahuldatud, kuna

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

See tähendab, et pingete (a) tuletised rahuldavad küll esimest tasakaaluvõrrandit (b), kuid nende avaldised ei

tarvitse olla veel täpsed. Näiteks võib pinge σ_x avalduda kujul

$$\sigma_x = -\frac{q(l-x)^2}{2I}y + f(y) \quad (d)$$

kus $f(y)$ on esialgu tundmatu y väärtusest sõltuv funktsioon. Hiljem näitame, et säärane funktsioon esineb pinge avaldises antud ülesande puhul ja ta kirjeldab pingete muutumist olenevalt ristlõike kõverdumisest — deplaneerumisest.

Teist võrrandit (b) ei rahulda pingete (a) tuletised, kuna painde elementaarteooria järgi oletatakse, et $\sigma_y = 0$, mis pole tegelikult nii. Nimetatud teisest võrrandist saame seose

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \quad (e)$$

Kui oletada, et τ_{xy} funktsioon on saadud õigesti, siis võime kirjutada:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Integreerides viimast, saame

$$\sigma_y = \frac{q}{2I} \left(\frac{h^2}{4}y - \frac{y^3}{3} \right) + g(x) \quad (f)$$

milles $g(x)$ on tundmatu funktsioon x järgi. $g(x)$ leidmiseks kasutame ääritingimusi tala ülemisel ja alumisel kihil — nimelt x mis tahes väärtuse ja $y = -\frac{h}{2}$ puhul

$\sigma_y = -q$, aga $y = \frac{h}{2}$ korral $\sigma_y = 0$:

$$(\sigma_y)_{y=-h/2} = \frac{q}{2I} \left(-\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{24} \right) + g(x) = -q \quad (g)$$

$$(\sigma_y)_{y=h/2} = \frac{q}{2I} \left(\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} \right) + g(x) = 0$$

Ülalesitatud avaldistest (g) nähtub, et $g(x)$ ei sisalda koordinaati x ja järelikult $g(x) = C$ on konstantne suurus.

Arvesse võttes, et $\frac{h^3}{12} = I$, saame avaldisest (g)

$$C = -\frac{q}{2}$$

Nüüd kasutame kolmandat võrrandit grupist (b), asetades sellesse võrrandisse pingete täiendatud avaldised (d) ja (f). Leiame kõigepealt teised tuletised pingetest:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} &= -\frac{qy}{I}; & \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} &= f''(y) \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= -\frac{qy}{I} \end{aligned}$$

Pärast asendamist saame

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{qy}{I} + f''(y) - \frac{qy}{I} = 0 \quad (h)$$

millest

$$f''(y) = \frac{2qy}{I}$$

Integreerime viimast avaldist y järgi:

$$f'(y) = \frac{qy^2}{I} + C_1 \quad (i)$$

$$f(y) = \frac{qy^3}{3I} + C_1 y + C_2$$

Kasutades avaldist (i), saame σ_x jaoks järgmise korrigeeritud avaldise:

$$\sigma_x = -\frac{q(l-x)^2}{2I} y + \frac{qy^3}{3I} + C_1 y + C_2 \quad (k)$$

Konstantide C_1 ja C_2 leidmisel tuleb märkida järgmist. Konsooli vabas otsas, kus $x=l$, normaalpinged valemi (k) järgi ei võrdu nulliga, nagu see tegelikult peaks olema, kuna konsooli ots ei ole koormatud pikijõududega.

Kui aga kirjeldatud pinged annaksid iseennast tasakaalustava jõudude süsteemi *Saint-Venant*'i printsüübi järgi, siis valdavas osas talast pingus ei erineks pingusest sel juhul, kui konsooli vaba ots on täiesti koormusevaba. Seetõttu püstitame tingimuseks: kui $x=l$, peavad pikijõud ja moment võrduma nulliga:

$$\int_F \sigma_x dF = 0 \quad \text{ja} \quad \int_F \sigma_x y dF = 0 \quad (m)$$

Sellist võtet nimetatakse ääretingimuste leevendamiseks.

Tingimusest (m) saame järgmised võrrandid:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{qy^3}{3l} + C_1y + C_2 \right] dy = 0 \quad (n)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{qy^3}{3l} + C_1y + C_2 \right] y dy = 0$$

Pärast integreerimist saame siit:

$$C_2h = 0, \quad \frac{gh^5}{15 \cdot 16l} + \frac{C_1h^3}{3 \cdot 4} = 0$$

millest

$$C_2 = 0 \quad \text{ja} \quad C_1 = -\frac{gh^2}{20l}$$

Lõplikult saame pingte avaldised:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q(l-x)^2}{2l}y + \frac{q}{2l} \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{h^2y}{10} \right] \\ \sigma_y &= \frac{q}{2} \left(1 + \frac{3y}{h} - \frac{4y^3}{h^3} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{q}{2l} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) (l-x) \end{aligned} \quad (8.44)$$

Esitatud pingete valemist nähtub järgmist.

1. Normaalpinge σ_x erineb painde elementaarteooria alusel saadust parandusliikme

$$\frac{q}{2l} \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{h^2y}{10} \right]$$

võrra. See parandusliige on väike juhul, kui tala kõrgus h on väike, võrreldes tala pikkusega l . Pinge jaotus ristlõikes ei ole lineaarne. Nagu eespool mainitud, ei ole ka saadav pingte veel täiesti täpne, kuna ääretingimused algkujul ei ole konsooli otsal, mis on täiesti pingevaba, rahuldatud.

2. Normaalspinge σ_y ei võrdu nulliga, nii nagu oletati painde elementaarteoorias. σ_y muutub kõrguse sihis kuupparabooli kohaselt. Tala ülemises kihis võrdub ta jaotatud koormuse intensiivsusega q , kuna alumises kihis võrdub ta nulliga.

3. Tangentsiaalpinge τ_{xy} langeb ühte elementaarteooria järgi leitud tangentsiaalpingega.

Paigutised arvutatakse eelmise näitega sarnase arvutuskeemi kohaselt.

8.6. TASANDULESANDE LAHENDAMINE TRIGONOMEETRI- LISTE RIDADE ABIL

Eeltoodud polünoomi rakendamise meetod tasandülesande lahendamisel on võimalustelt piiratud. Näiteks saame polünoome kasutada juhul, kui koormus mõjub talale pideva ribana ning jaotatuna mingi lihtsa seaduse kohaselt. Koormuse keerukamatel juhtudel on otstarbekohane otsida lahendit trigonomeetriliste ridade kujul. Loomulikult võib rakendada ka kombineeritud meetodit — polünoome koos trigonomeetriliste ridadega.

Keerukama seaduse järgi muutuvat või koguni katkevate koormust on otstarbekohane esitada ligikaudselt trigonomeetrilise rea abil. Praktiliste nõuete seisukohalt saavutame enamasti küllaldase täpsuse juba rea mõne esimese liikme kasutamisega.

Trigonomeetriliste ridade kasutamisel arendatakse mingi perioodiline funktsioon $f(x)$, perioodiga 2π , ritta

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots \quad (8.45)$$

Seejuures püstitatakse ülesanne: leida kordajate $A_0, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ väärtused nii, et rea liikmete võimalikult väikese arvuga saavutada antud funktsioonile küllalt hea lähendus.

Võtame lähendusfunktsiooniks

$$\psi(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_n \cos nx + \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_n \sin nx \quad (a)$$

millega püüame antud funktsiooni võimalikult täpselt kirjeldada. Selle saavutamiseks peab lähendusega tehtavate ruutvigade summa olema minimaalne.

$$-2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - A_0 - A_1 \cos x - A_2 \cos 2x - \dots - B_1 \sin x - B_2 \sin 2x - \dots] \sin 2x \, dx = 0$$

Saime võrrandisüsteemi kordajate $A_0, A_1, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ suhtes. Kordajate avaldamise eel leiame alljärgnevate süsteemis esinevate integraalide väärtused:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ kui } n \neq m \quad (f)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \text{ kõikidel } n \text{ ja } m \text{ väärtustel}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx \, dx = \pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin nx \, dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} l \, dx = 2\pi$$

Integraalides esinevad n ja m on täisarvud. Pärast integraalide asetamist süsteemi (e) leiame kordajate avaldised:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx; \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx$$

$$A_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x \, dx; \quad B_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 2x \, dx$$

(8.46)

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx; \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Kirjeldataud viisil arendatud rida (8.45) nimetatakse *Fourier'* reaks.

Vaatleme järgnevalt suvalise perioodiga $2l$ funktsiooni $f(x)$ arendamist *Fourier'* ritta.

Teeme muutuja asenduse $x = at$, misjärel saame funktsiooni $f(at)$ perioodiga $2l/a$. Valime a nii, et $2l/a = 2\pi$, s. o. $a = l/\pi$ ning $x = lt/\pi$. Tekkis funktsioon $f(lt/\pi)$ perioodiga 2π . Selle funktsiooni arendus, kasutades lühendatud kirjutusviisi, on järgmine:

$$f(lt/\pi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \quad (g)$$

milles

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(lt/\pi) \, dt; \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(lt/\pi) \cos nt \, dt \quad (h)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(lt/\pi) \sin nt \, dt; \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Pöördume nüüd uuel argumendilt t tagasi algargumendile x , teades, et $t = \pi x/l$ ja $dt = \pi \, dx/l$. Pärast asendust saame suvalise perioodiga $2l$ funktsiooni $f(x)$ *Fourier'* rea

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (8.47)$$

milles

$$A_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \, dx = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \, dx$$

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx$$

(8.48)

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

Näide 8.1. Arendada joonisel 8.10 kujutatud perioodiline kolmnurkne koormus $q(x)$ *Fourier'* ritta. Koormus muutugu vahemikus 0 kuni l funktsiooni järgi $q(x) = ax$.

Vaadeldav koormusfunktsioon on sümmeetriline, mistõttu tuleb kasutada *Fourier'* arenduse sümmeetrilisi liikmeid. Arvutame valemita (8.48) rea liikmete kordajad

$$A_0 = \frac{a}{l} \int_0^l x dx = \frac{a}{l} \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^l = \frac{al}{2} = \frac{q_l}{2}$$

$$A_n = \frac{2a}{l} \int_0^l x \cos \frac{n\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{2a}{l} \left| \frac{l^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{l} + x \sin \frac{n\pi x}{l} \right|_0^l =$$

$$= \frac{2al}{n^2\pi^2} [\cos n\pi - 1] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$A_n = -\frac{4al}{n^2\pi^2} = -\frac{4q_l}{n^2\pi^2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

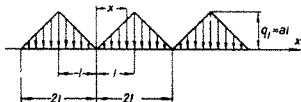
$$A_n = 0 \quad (n = 2, 4, \dots)$$

Järelikult

$$A_1 = -\frac{4q_l}{\pi^2}; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = -\frac{4q_l}{9\pi^2}; \quad A_4 = 0; \quad A_5 = -\frac{4q_l}{25\pi^2}$$

ning kasutades valemit (8.47) saame:

$$q(x) = q_l \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right) \right]$$



JOON. 8.10

Vaatleme nüüd trigonomeetriliste ridade kasutamist ristkülikulise põiklõikega kitsa tala paindel. Selline ülesanne on loomulikult käsitletav tasandülesandena.

Tasandülesande pidevusvõrrand

$$-\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (8.49)$$

rahaldatakse pingefunktsiooniga

$$F = \sin \frac{n\pi x}{l} f(y) \quad (8.50)$$

kus n on täisarv,

l — tala (plaadi) pikkus x -telje sihis,

$f(y)$ — funktsioon, mis sõltub ainult koordinaadist y .

Tähistame

$$\alpha = \frac{n\pi}{l} \quad (i)$$

misjärel pingefunktsioon (8.50) saab kuju

$$F = \sin \alpha x \cdot f(y) \quad (k)$$

Selleks, et leida funktsiooni $f(y)$, asetame pingefunktsiooni (k) biharmoonilisse võrrandisse (8.49) ja saame:

$$\alpha^4 \sin(\alpha x) f(y) - 2\alpha^2 \sin(\alpha x) f''(y) + \sin(\alpha x) f^{IV}(y) = 0$$

ning pärast lühendamist

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{IV}(y) = 0$$

Saime $f(y)$ suhtes neljandat järku hariliku homogeense diferentsiaalvõrrandi konstantsete kordajatega, mille karakteristik võrrand on järgmine:

$$k^4 - 2\alpha^2 k^2 + \alpha^4 = 0 \quad (m)$$

või

$$(k^2 - \alpha^2)^2 = 0$$

Võrrandil on kaks kordset juurt:

$$k_1 = k_2 = \alpha; \quad k_3 = k_4 = -\alpha \quad (n)$$

mistõttu üldlahendi kuju on

$$f(y) = C_0 e^{\alpha y} + D_0 e^{-\alpha y} + E_0 y e^{\alpha y} + H_0 y e^{-\alpha y} \quad (o)$$

Väljendades astmefunktsioonid hüperboolsete funktsioonide kaudu, saame üldlahendiks:

$$f(y) = C \operatorname{ch} \alpha y + D \operatorname{sh} \alpha y + E y \operatorname{ch} \alpha y + H y \operatorname{sh} \alpha y$$

Pingefunktsioon (k) on nüüd järgmine:

$$F = \sin ax (C \operatorname{ch} ay + D \operatorname{sh} ay + E y \operatorname{ch} ay + H y \operatorname{sh} ay) \quad (p)$$

Nagu eespool tähendatud, on avaldises (i) esinev n mingi positiivne täisarv. Andes sellele erinevaid väärtusi, võime saada pingefunktsioonile lõpmata hulga erilahendeid. Üldlahendi saame, summeerides erilahendid; nii saamegi pingefunktsiooni lõpmatu trigonomeetrilise reana

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + E_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + H_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \right] \quad (8.51)$$

Pingefunktsioonis esinevad konstandid C_n , D_n , E_n ja H_n määratakse tala ääretingimustest servadel, mis on paralleelsed x -teljega.

Ülaltoodud pingefunktsiooni esitas esmakordselt *Filon*.

Kasutades pingefunktsiooni (8.51), peame tala otsad kinnitama selliselt, et seal oleksid rahuldatud tingimused:

$$\sigma_x = 0; \quad \tau_{xy} \neq 0; \quad u \neq 0; \quad v = 0 \quad (8.52)$$

Kerge on tõestada, et tasandülesande biharmoonilist võrrandit rahuldab ka järgmine pingefunktsioon:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{l} \left[K_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + L_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + M_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + N_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} \right] \quad (8.53)$$

Toodud pingefunktsiooni rakendas esimesena *Ribiere* mõnede ülesannete lahendamisel.

Analoogiliselt *Filoni* lahendiga määratakse konstandid K_n , L_n , M_n ja N_n koormustingimustest x -teljega paralleelsetel servadel, kuna tala otstel tuleb rahuldada tingimused:

$$\sigma_x \neq 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad u = 0; \quad v \neq 0 \quad (8.54)$$

Üldisel juhul võivad esineda liikmed arendusega x sihis nii siinuse kui ka koosinuse järgi ning pingefunktsiooniks saame siis

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + \right. \\
 & \left. + E_{ny} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + H_{ny} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{l} \left[K_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + L_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + \right. \\
 & \left. + M_{ny} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + N_{ny} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} \right] \quad (8.55)
 \end{aligned}$$

Näide 8.2. Kirjeldada joonisel 8.11 kujutatud kiisa tala pingust, kui see on koormatud x -teljega paralleelsel ülemisel serval tangentiaaipingetega $\tau(x) = -\tau_0 \left(1 - \frac{2x}{l}\right)$ ning alumisel serval pingetega $\tau(x) = \tau_0 \left(1 - \frac{2x}{l}\right)$. Tala pikkus on l ja kõrgus $2c$.

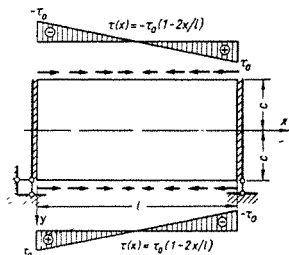
Arendame kõigepealt tala servadel mõjuva koormuse trigonomeetrilisse ritta koosinuse järgi:

$$\tau(x) = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{l} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + A_3 \cos \frac{3\pi x}{l} \quad (a)$$

Seejärel leiame rea kordajad

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{\tau_0}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{2x}{l}\right) dx = 0 \quad (b)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2\tau_0}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$



JOON. 8.11

$$\int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi} \left| \sin \frac{n\pi x}{l} \right|_0^l = 0$$

$$\int_0^l x \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \left| \frac{l^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{l} \right|_0^l =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2l^2}{n^2\pi^2} & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

$$A_n = \frac{2\tau_0}{l} \frac{2l^2}{n^2\pi^2} \frac{2}{l} = \frac{8\tau_0}{n^2\pi^2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

$$A_1 = \frac{8\tau_0}{\pi^2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{8\tau_0}{\pi^2} \frac{1}{9}, \quad A_4 = 0,$$

$$A_5 = \frac{8\tau_0}{\pi^2} \frac{1}{25}$$

Seega

$$\tau(x) = \tau_0 \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right) \quad (c)$$

Tala pinguse uurimiseks kasutame pingefunktsioonina arendust sinuse jargi, s o *Filoni* lahendit. Võtame pingefunktsioonist n nda liikme

$$F = \sin \frac{n\pi x}{l} \left[C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + E_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + \right.$$

$$\left. + H_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \right] = \sin \frac{n\pi x}{l} f_n(y) \quad (d)$$

Leiame talas esinevad pinged, kasutades selleks valemit (8.21) Nimelt

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sin \frac{n\pi x}{l} f_n''(y) \quad (e)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} f_n(y) \quad (f)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = - \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} f_n'(y) \quad (g)$$

Avaldame need aretingimused tala ülemisel ja alumisel horison taasel serval valiskoormuse kaudu

Väljendame väliskoormuse arenduse n -nda liikme

$$\tau = A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Pinged tala alumisel serval

$$y = c; \quad \tau_{xy} = \tau$$

või

$$-\frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \hat{f}_n'(c) = A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

millest

$$\hat{f}_n'(c) = -\frac{A_n l}{n\pi} \quad (h)$$

$$\sigma_y = 0 \quad \text{või} \quad -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 f_n(c) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

järelikult

$$f_n(c) = 0 \quad (i)$$

Analoogiliselt saame ka tala ülemise serva kohta

$$y = -c, \quad \hat{f}_n'(-c) = \frac{A_n l}{n\pi}; \quad f_n(-c) = 0$$

Järgnevalt leiame, kasutades selleks äsja saadud ääritingimusi, pingefunktsioonis esinevad integreerimiskonstandid. Kuna koormus ja tala sidemed on x -telje suhtes sümmeetrilised, siis on seda ka talas tekkiv pingus, mistõttu võime pingefunktsioonist kasutada y suhtes ainult paarisliikmeid Niisuis

$$f_n(y) = C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + H_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l}$$

$$\hat{f}_n'(y) = C_n \frac{n\pi}{l} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + H_n \left[\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + \frac{n\pi}{l} y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} \right]$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_n''(y) = & C_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + \\ & + H_n \left[2 \frac{n\pi}{l} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \right] \end{aligned}$$

Rakendame nüüd ääritingimusi, ühtlasi tähistades

$$\frac{n\pi c}{l} = u_n \quad (k)$$

Serval $y = c$

$$C_n \frac{n\pi}{l} \operatorname{sh} u_n + H_n [\operatorname{sh} u_n + u_n \operatorname{ch} u_n] = -\frac{A_n l}{\pi n} \quad (m)$$

$$C_n \operatorname{ch} u_n + H_n c \operatorname{sh} u_n = 0$$

Pärast teisendust kujuneb süsteem järgmiseks:

$$C_n \operatorname{sh} u_n + H_n c \left(\frac{1}{u_n} \operatorname{sh} u_n + \operatorname{ch} u_n \right) = - \frac{A_n l^2}{n^2 \pi^2} \quad (n)$$

$$C_n \operatorname{ch} u_n + H_n c \operatorname{sh} u_n = 0$$

Süsteemi lahendid on:

$$C_n = \frac{u_n \operatorname{sh} u_n}{u_n + \operatorname{sh} u_n \operatorname{ch} u_n} A_n \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \quad (o)$$

$$H_n = \frac{-u_n \operatorname{ch} u_n}{u_n + \operatorname{sh} u_n \operatorname{ch} u_n} \frac{A_n}{c} \frac{l^2}{n^2 \pi^2}$$

Asetanud leitud konstantide avaldised pingefunktsiooni $f_n(y)$ ja selle tuletiste avaldistesse, leiame valemitega (e), (f) ja (g) talas esinevad pinged

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{u_n}{u_n + \operatorname{sh} u_n \operatorname{ch} u_n} \left[\left(\operatorname{sh} u_n - \frac{2}{u_n} \operatorname{ch} u_n \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} - \operatorname{ch} u_n \frac{y}{c} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \right] \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (p)$$

$$\sigma_y = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{u_n}{u_n + \operatorname{sh} u_n \operatorname{ch} u_n} \left[\operatorname{sh} u_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} - \operatorname{ch} u_n \frac{y}{c} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (r)$$

$$\tau_{xy} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{u_n}{u_n + \operatorname{sh} u_n \operatorname{ch} u_n} \left[\left(\operatorname{sh} u_n - \frac{1}{u_n} \operatorname{ch} u_n \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} - \operatorname{ch} u_n \frac{y}{c} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} \right] \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (s)$$

Vaatleme nüüd tala, mille pikkuse ja kõrguse suhe $l/2c = 2$. Leiame selle tala pingete valemid, võttes arenduses rea esimese liikme, s. t $n = 1$. Kasutame valemid (p), (r) ja (s).

Leiame:

$$u_1 = \frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi}{4} = 0,785; \quad \operatorname{sh} u_1 = 0,869$$

$$\operatorname{ch} u_1 = 1,325; \quad A_1 = \frac{8}{\pi^4} \tau_0 = 0,810 \tau_0$$

Asetades saadud arvud valemisse (p) saame:

$$\sigma_x = 0,810 \tau_0 \frac{0,785}{0,785 + 0,869 \cdot 1,325} \left[\left(0,869 - \frac{2 \cdot 1,325}{0,785} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} - \right.$$

$$- 1,325 \cdot 4 \frac{y}{l} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{l}] =$$

$$= -\tau_0 \left(0,822 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} + 1,738 \frac{y}{l} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l}$$

Analoogiliselt eelmisega leiame

$$\sigma_y = -\tau_0 \left(0,285 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} - 1,738 \frac{y}{l} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\tau_{xy} = \tau_0 \left(0,269 \operatorname{sh} \frac{\pi y}{l} + 1,738 \frac{y}{l} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} \right) \cos \frac{\pi x}{l}$$

9 TASANDÜLESANNE POLAARKOORDINAATIDES

9.1. TASANDÜLESANDE VÖRRANDID POLAARKOORDINAATIDES

Seni vaadeldud ülesannetes kasutati ristkoordinaadistikku. Paljude ülesannete lahendamisel võib aga saavutada lahenduskäigus tunduvalt lihtsustust, kasutades mingisugust teist koordinaatide süsteemi. Näiteks kui keha on piiratud ringsilindrilise pinnaga, on otstarbekohane kasutada polaarkoordinaate.

Ristkoordinaadistikus punkti asukoha määramiseks kasutame kolme koordinaati: x_0 , y_0 ja z_0 .

Punkti asukoht määratakse kolme tasandi $x = x_0$, $y = y_0$ ja $z = z_0$ lõikepunktina.

Pinda, millel üks koordinaatidest säilib konstantse suuruse, nimetatakse koordinaatpinnaks. Ristkoordinaadistiku korral osutuvad koordinaatpinnad tasanditeks, mis on paralleelsed telgi läbivate koordinaat-tasanditega.

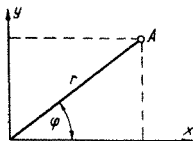
Silinderkoordinaatide korral määratakse punkti asukoht kolme koordinaadiga r , φ , z .

Punkti asukoha määrame siin ringsilindrilise pinna $r = r_0$, telge z läbiva tasandi $\varphi = \varphi_0$ ja tasandi $z = z_0$ lõikepunktina.

Rakendades silinderkoordinaate tasandülesande korral, suunatakse uuritava prismalise keha telg paralleelselt teljega z .

Kui koormus mõjub risti z -teljega, paralleelselt tasandiga xy , siis võime nii tasanddeformatsiooni kui ka üldisemat tasandpinguse puhul loobuda z -teljest ja lahendada ülesande tasandil, kasutades polaarkoordinaate.

Punkti asukoha määramiseks tasandil polaarkoordinaatides kasutatakse polaarkaugust r ja polaarnurka φ (vt. joon. 9.1).



JOON. 9.1

Üleminekuks ristkoordinaadistikule kasutame järgmisi võrrandeid:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (9.1)$$

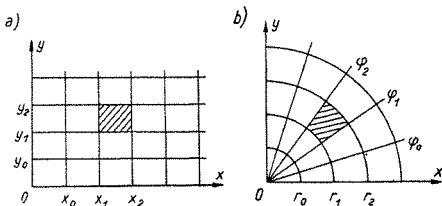
Umberpöördult väljenduvad polaarkoordinaadid ristkoordinaatide kaudu:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (9.2)$$

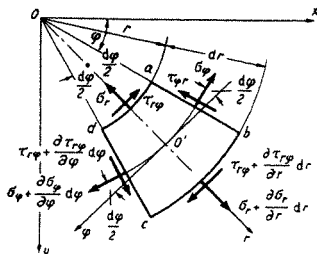
Ristkoordinaadistikus jagatakse tasand elementideks x - ja y -teljega paralleelsete koordinaatjoonte abil, kusjuures tekib ristkülikulistest elementidest koosnev võrk (joon. 9.2, a).

Polaarkoordinaatide korral on koordinaatjoonteks kontsentrilised ringid ja koordinaatide alguspunktist lähtuvad kiired. Sel viisil jagatakse tasand kõverjoonelisteks elementideks (joon. 9.2, b).

Tasandülesande tasakaaluvõrrandite tuletamiseks eraldame ühikpaksusega plaadist elemendi $abcd$ (joon. 9.3),



JOON 9 2



JOON 9 3

kasutades selleks polaarkoordinaatjooni. Elemendi tsentrinurk olgu $d\varphi$, väikseim raadius r ning külje pikkused

$$ab = cd = dr,$$

$$ad = rd\varphi,$$

$$bc = (r + dr)d\varphi$$

Joonestame elemendile teljed $O'r$, mis poolitab elemendi tsentrinurga $d\varphi$ ja $O'\varphi$, mis on risti teljega $O'r$. Kanname joonisele elemendile mõjuvad pinged. Koostame elemendile $abcd$ mõjuvate jõudude tasakaalu võrrandid, projekteerides nad telgedele $O'r$ ja $O'\varphi$, seejuures loobudes mahujõududest. Jõudude projekteerimisel oletame tsentrinurga $d\varphi$ väiksuse tõttu:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} \quad \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$$

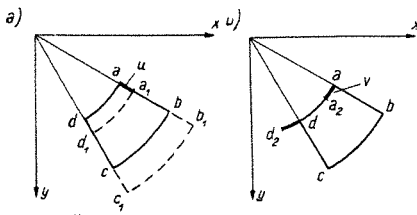
Elemendi tahkudel mõjuvate sisejõudude saamiseks korrutame pinged neile vastava tahu pindalaga.

Edasi saame jõudude projektsioonide summa teljele $O'r$:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\varphi - \sigma_r r d\varphi - \\ & - \left(\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr \frac{d\varphi}{2} - \sigma_\varphi dr \frac{d\varphi}{2} + \\ & + \left(\tau_{r\varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr \cdot 1 - \tau_{r\varphi} dr \cdot 1 = 0 \end{aligned} \quad (9.3)$$

Analoogiliselt saame ka teljele $O'\varphi$:

$$\left(\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr \cdot 1 - \sigma_\varphi dr \cdot 1 +$$



JOON 9 4

$$\begin{aligned}
 & + \left(\tau_{\varphi r} + \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr \frac{\partial \varphi}{2} + \tau_{\varphi r} dr \frac{\partial \varphi}{2} + \\
 & + \left(\tau_{r\varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\varphi - \tau_{r\varphi} r d\varphi = 0 \quad (9.4)
 \end{aligned}$$

Koondame sarnased liikmed ja jätame ära kolmandat järku väikesed liikmed. Pärast jagamist suurusega $dr d\varphi$ saame järgmised tasakaaluvõrrandid polaar-koordinaatides:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\tau_{\varphi r}}{r} &= 0
 \end{aligned} \quad (9.5)$$

Deformeerunud keha mingi punkti $a(r, \varphi)$ paigutis lahutatakse kaheks komponendiks. Need on siire u piki koordinaatjoont r ja siire v piki koordinaatjoont φ .

Kehast eraldatud elemendi $abcd$ joondeformatsioonid on koordinaatjoone r sihiline ϵ_r , koordinaatjoone φ sihiline ϵ_φ ning koordinaatjoonte vahelise täisnurga muutus $\gamma_{r\varphi}$.

Joondeformatsioon ϵ_r saadakse elemendi serva $ab = dr$ otspunktide a ja b siirete vahest. Tähistades deformeerunud elemendi serva otspunktid a_1 ja b_1 (joon. 9.4, a), võime tähistada punkti a siirde $aa_1 = u$ ning punkti b siirde $bb_1 = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$. Siit leiame:

$$\epsilon_r = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr \right) - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (9.6)$$

Joondeformatsiooni ϵ_φ leidmiseks vaatleme kõigepealt kaare ad pikenemist radiaalsihilise siirde tagajärjel. Saame:

$$\epsilon'_\varphi = \frac{a_1 d_1 - ad}{ad} = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}$$

Teiseks tekib joondeformatsioon elemendi kaaresihilise külje otspunktide a ja d siirte vahest

$$\begin{aligned} \epsilon''_\varphi &= \frac{a_2 d_2 - ad}{ad} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) - v}{ds} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Viimases avaldises kasutasime kaaresihilist muutujat $s = r\varphi$. Kokku saame

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \quad (9.7)$$

Nihkenurk, nagu nähtub jooniselt 9.5, tekib kolmest nurgast α , β ja δ alljärgnevalt:

$$\gamma_{r\varphi} = (\beta - \alpha) + \delta \quad (9.8)$$

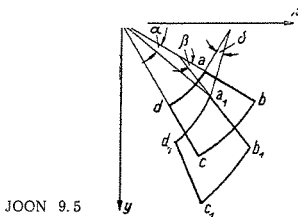
milles

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial r}; \quad \alpha = \frac{v}{r}; \quad \delta = \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{r\partial \varphi} \quad (9.9)$$

Asetades seosed (9.9) valemisse (9.8), saame:

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (9.10)$$

Kirjutame nüüd võrrandid (9.6), (9.7) ja (9.10) kokku



JOON 9.5

ja tulemuseks on tasandülesande *Cauchy* võrrandite süsteem polaarkoordinaatides:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (9.11)$$

Tasandülesande deformatsiooni pidevuse võrrand konstantsete mahujõudude korral või nende puudumisel avaldub ristkoordinaadistikus pingete kaudu järgmiselt:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (9.12)$$

milles ∇^2 tähendab *Laplace*'i operaatorit

$$\nabla^2(\dots) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\dots) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\dots) \quad (9.13)$$

Nagu teada matemaatilisest analüüsist, avaldub *Laplace*'i operaator polaarkoordinaatides järgmiselt:

$$\nabla^2(\dots) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (\dots) \quad (9.14)$$

Kasutades operaatorit (9.14), saame deformatsiooni pidevuse võrrandiks tasandülesandele polaarkoordinaatides konstantsete mahujõudude korral

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\varphi) = 0 \quad (9.15)$$

Joondeformatsioonide nihkenurga ja pingete vahelised seosed ehk nn. üldistatud *Hooke*'i seaduse võime kirjutada välja analoogia põhjal ristkoordinaadistikuga järgmiselt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi) \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r) \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{r\varphi}\end{aligned}\quad (9.16)$$

Analoogiliselt lahenduskäiguga ristkoordinaadistikus on otstarbekohane rakendada ka polaarkoordinaatides pingefunktsiooni $F(r, \varphi)$. Üksikasjalikult peatumata sellise lahenduskäigu tuletamisel esitame tulemused.

Pingete avaldised:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}\quad (9.17)$$

Nii nagu ristkoordinaadistikus, on ka siin tasakaalu-võrrandid esitatud pingevaldistega (9.17) samaselt rahuldatud, kuna deformatsiooni pidevuse võrrandis (9.15) saame tasandülesande biharmoonilise võrrandi polaarkoordinaatides

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) &= 0\end{aligned}\quad (9.18)$$

9.2 POLAARNURGAST SÖLTUMATUD ÜLESANDED

Tasandülesannete lahendus polaarkoordinaatides on lihtsam, kui pinged ei sõltu polaarnurgast, s. o. kui mis tahes koordinaatringi kõikides punktides jäävad pinged σ_r ja σ_φ muutmatuks, kuna $\tau_{r\varphi} = 0$. Säärane pingelolukord tekib enamasti siis, kui mingi telgsümmeetriline keha on koormatud telgsümmeetrilise koormusega, näiteks kui toru on koormatud ühtlase sise- või välisrõhuga. Kuna pingefunktsioon ei sõltu koordinaadist φ , siis tuletis φ järgi võrdub nulliga. Liikmed, mis sisaldavad selliseid tuletisi, võrduvad järelikult samuti nulliga. Sel juhul on biharmoonilise võrrandi kuju:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0 \quad (9.19)$$

Pärast diferentseerimist saame:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (9.20)$$

Pingete avaldised, arvesse võttes lihtsustust, on järgmised:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\varphi r} = 0\end{aligned}\quad (9.21)$$

Võrrand (9.20) on harilik diferentsiaalvõrrand muutuvate kordajatega. Tehes muutujate asenduse $r = e^t$, saame temast tuletada alljärgneva hariliku homogeense konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{d^4 F}{dt^4} - 4 \frac{d^3 F}{dt^3} + 4 \frac{d^2 F}{dt^2} = 0 \quad (9.22)$$

mille karakteristik võrrand on

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 = 0$$

Sellel võrrandil on kaks kordset juurt:

$$k_1 = k_2 = 0; \quad k_3 = k_4 = 2$$

millele vastab neli erilahendit

$$e^{0t} = 1; \quad te^{0t} = t; \quad e^{2t}; \quad te^{2t}$$

Võrrandi (9.22) üldintegraal on seega

$$F = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t} \quad (9.23)$$

Asendame nüüd muutujad tagasi t -lt r -le seosega $t = \ln r$. Nii saame võrrandi (9.20) üldintegraaliks

$$F(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D \quad (9.24)$$

Seoste (9.21) järgi saame pinge avaldised

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 1) + 2C \\ \sigma_\varphi &= \frac{d^2 F}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 3) + 2C \\ \tau_{r\varphi} &= 0\end{aligned}\quad (9.25)$$

Saadud lahenduses (9.24) ja (9.25) esinevad integreerimiskonstandid on vastavalt igale konkreetsele ülesandele erinevad ning sõltuvad välispinna tingimustest.

Pinge funktsioon F ning samuti pingeavaldised peavad rahuldama välispinna tingimusi.

Ülaltoodud tasandülesande lahendus on avaldatud pingetes. Loomulikult võib lahenduse saada ka paigutistes.

Juhul kui pingeolukord ei sõltu polaarnurgast, jääb meil ainult üks alltoodud tasakaaluvõrrand (mahujõududest on loobutud):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (9.26)$$

Geomeetrilised võrrandid on järgmised:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \quad (9.27)$$

Üldistatud Hooke'i seadus:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r) \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi) \end{aligned} \quad (9.28)$$

Asetame nüüd joondeformatsioonid ε_r ja ε_φ füüsikalistesse seostesse (9.28) ja seejärel viimased omakorda tasakaaluvõrrandisse (9.26). Pärast teisendamist saame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (9.29)$$

Selle üldlahend on esitatav kujul:

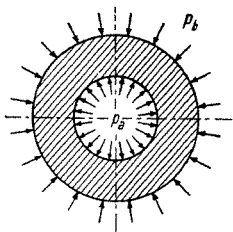
$$u = Lr + \frac{K}{r} \quad (9.30)$$

Lahendi õigsuses võime veenduda, asetades tema diferentsiaalvõrrandisse (9.29).

9.3 TASANDÜLESANDE LAHENDUSI

9.31 Paksuseinalise toru telgsümmeetriline deformatsioon

Telgsümmeetriline deformatsioon tekib paksuseinalises torus siis, kui temale mõjub ühtlane sise- või välisrõhk. Oletame, et toru on küllalt pikk ja deformatsioone



JOON. 9.6

z -sihis ei teki. Teine võimalus on, et toru otsad saavad vabalt paigutada, mispuhul joondeformatsioon $\varepsilon_z = \text{konst.}$

Tähistame:

- a — toru siseraadius,
- b — toru välisraadius,
- p_a — siserõhk torus,
- p_b — välisrõhk torus.

Pingete määramiseks kasutame valemeid (9.25). Kuna valemis esinevaid konstante on kolm, nende määramiseks vajalikke tingimusi ainult kaks, siis tuleb üks konstantidest ja nimelt B võrrutada nulliga. Miks konstant B tuleb võrrutada nulliga, selgub ülesande algeeldustest, mille järgi toru telgsümmeetrilise deformatsiooni tõttu siire v peab võrduma nulliga.

Leiame pingetele (9.25) vastavad siirded, kasutades selleks üldistatud Hooke'i seadust (9.16) ja Cauchy võrrandeid (9.11) erijuhul, kui Poisson'i tegur $\mu = 0$. Siirde v saame järgmisena: $v = 4Br\varphi/E$, mis saab võrduda nulliga siis, kui konstant $B = 0$.

Liites pinged σ_r ja σ_φ , näeme, et nende summa on konstantne ega sõltu vaadeldava punkti koordinaadist r .

$$\sigma_r + \sigma_\varphi = \text{konst.}$$

Arvestades eeltoodut, saame:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_\varphi &= -\frac{A}{r^2} + 2C \end{aligned} \quad (9.31)$$

Kasutades tingimusi toru sise- ja välispinnas, määrame konstandid A ja C . Nimelt kui $r = a$, siis $\sigma_r = -p_a$, ja kui $r = b$, siis $\sigma_r = -p_b$.

$$\begin{aligned} -p_a &= \frac{A}{a^2} + 2C \\ -p_b &= -\frac{A}{b^2} + 2C \end{aligned} \quad (9.32)$$

millest

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_b - p_a) \\ 2C &= \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \end{aligned} \quad (9.33)$$

Asetades leitud konstandid valemitesse (9.31), saame lõplikud pinged.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_b - p_a}{r^2} + \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \\ \sigma_\varphi &= -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_b - p_a}{r^2} + \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \end{aligned} \quad (9.34)$$

Juhul kui toru otsad saavad vabalt paigutada, siis joon-deformatsioon $\epsilon_z = \text{konst}$.

Kasutades tingimust $\sigma_r + \sigma_\varphi = \text{konst}$, avaldame üldistatud *Hooke*'i seadusest

$$\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\varphi) + E\epsilon_z = C$$

Tingimusest, et toru otsad on vabad pikijõust, võime kirjutada:

$$\int_a^b \sigma_z 2\pi r dr = \pi C (b^2 - a^2) = 0$$

millest järeldub, et $C = \sigma_z = 0$.

Seega võib paksuseinalise toru korral, kui see on koor-matud ühtlase sise- või välisrõhuga, kasutada üldistatud tasandpingusele vastavaid pingete ja deformatsioonide vahelisi seoseid (üldistatud *Hooke*'i seadust). Teemegi seda edaspidi paksuseinalise toru siirde u võrrandi tule-tamisel.

Kui paksuseinalises torus on ainult siserõhk, siis vale-mid pingete jaoks saame valemest (9.34), oletades $p_b = 0$:

$$\sigma = -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_a}{r^2} + \frac{a p_a}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_i = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_a}{r^2} + \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

(9 35)

Valemeist nähtub, et pinget σ , on survepinge kuna σ_φ on tõmbepinget absoluutvaartuselt on σ_r suurem. Suurima vaartusega on σ_i paksumaalise toru sisepinnal, kus ta võrdub

$$r = a, \quad \max \sigma_i = \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} p_a \quad (9 35, a)$$

Toru välispinnal on σ_i minimaalne

$$r = b \quad \min \sigma_i = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} p_a \quad (9 35, b)$$

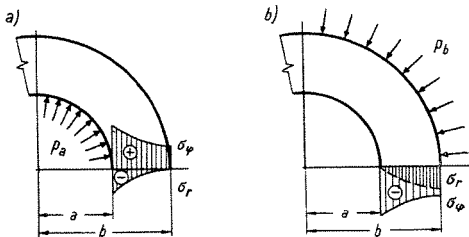
Kui toru on koormatud ainult välisrõhuga, siis, aseta-des valemeisse $p_a = 0$ saame

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_b}{r^2} - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} = -\frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_b}{r^2} - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} = -\frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

(9 36)

Nii nagu ainult siserõhu korral, on ka siin σ_φ maksimaalne toru sisepinnal



$$\text{Kui } r = a, \text{ siis } \max \sigma_r = -\frac{2b^2 p_a}{b^2 - a^2} \quad (9.37)$$

Joonisel 9.7 on esitatud mõlemale koormusjuhule vastavad pingediagrammid.

Pingete σ_r ja σ_φ diagrammid on piiratud ühesuguse kõveraga, kuna pingete summa on konstantne.

Vaatleme nüüd, kuidas oleneb σ_r ja σ_φ jaotus toru seina paksusest $\delta = b - a$. Mõjugu torule ainult siserõhk p_a . Sel juhul saame valemist (9.35) pinged toru sise- ja välispinnal järgmistena:

$$\begin{aligned} r = a; \quad \sigma_\varphi &= p_a \frac{(a + \delta)^2 + a^2}{\delta(2a + \delta)}; \quad \sigma_r = -p_a \\ r = b; \quad \sigma_\varphi &= p_a \frac{2a^2}{\delta(2a + \delta)}; \quad \sigma_r = 0 \end{aligned} \quad (9.38)$$

Juhul kui seina paksus δ on väike, võrreldes toru sise-raadiusega a , võime valemis (9.38) sulgavaldistes δ ära jätta, misjärel arvutame pinged σ_φ nii toru sise- kui ka välispinnal ligikaudse valemiga

$$\sigma_\varphi \approx p_a \frac{a}{\delta} \quad (9.39)$$

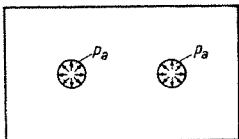
Seega suhteliselt õhukese seinaga torus jaotuvad pinged peaaegu ühtlaselt seina paksuses, seejuures radiaal-

pinge $\max \sigma_r = -p_a$ ning on $\frac{\delta}{a}$ korda väiksem kui rõngaspinge σ_φ .

Toru paksuse suurenedes vähenevad rõngaspinged, kuid mitte lõpmatult. Juhul kui $b \rightarrow \infty$, s. o. kui toru sein on lõpmatult paks, saame valemite (9.35) alusel:

$$\sigma_r = -p_a \frac{a^2}{r^2}; \quad \sigma_\varphi = p_a \frac{a^2}{r^2} \quad (9.40)$$

Valemist (9.40) selgub, et lõpmatult paksu seinaga toru pinged σ_r ja σ_φ on suuruselt võrdsed, erinedes vaid märgi, s. o. suuna poolest. Toru materjal on seega puhtnihe olukorras. Pinged vähenevad pöördvõrdeliselt vaadeldava punkti kauguse ruuduga toru teljest. Võttes näiteks punkti kauguseks $r = 4a$, on selles punktis esinevate pingete suurused kõigest 1/16 maksimaalsete pingete suu-



JOON. 9.8

rusest, mistõttu toru ala tsentrist kaugemal kui $r = 4a$ võime lugeda praktiliselt pingevabaks.

Toru, mille raadiuste suhe $b/a > 4$, võime lugeda praktiliselt lõpmatult paksu seinaga toruks. Kuna valemis (9.40) ei esine välisraadiust b ja toru kaugemad punktid on peaaegu pingevabad, siis võib paksuseinalise toruna vaadeldava keha väliskontuur olla mistahes kujuga, kui vaid keha suvalise punkti kaugus on $r \geq 4a$ kehas oleva augu teljest (joon. 9.8)

Paksuseinalise toru tugevuse kontrolliks peame kasutama tugevusteooriaid, kuna toru materjal on tasandpingus. Arvutame ekvivalentpinge suurimate nihkepingete teooria järgi. Käsitleme kõigepealt juhtu, kui torule mõjub ainult siserõhk p_a . Suurimad pinged tekivad toru sisepinnal ning võrduvad

$$\max \sigma_r = -p_a; \quad \max \sigma_\varphi = \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} p_a$$

$$\sigma_{\text{ekv. 3}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} p_a - (-p_a)$$

või

$$\sigma_{\text{ekv. 3}} = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} p_a \quad (9.41)$$

Lõpmatult paksu seinaga toru korral ($b \rightarrow \infty$) saame:

$$\sigma_{\text{ekv. 3}} = 2p_a \quad (9.42)$$

Kui torule mõjub ainult välisrõhk p_b , siis tekivad suurimad rõngaspinged toru sisepinnal ning võrduvad valemi (9.37) järgi

$$\max \sigma_\varphi = -\frac{2b^2}{b^2 - a^2} p_b; \quad \sigma_r = 0$$

Arvutame.

$$\sigma_{\text{ekv. 3}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \left(-\frac{2b^2}{b^2 - a^2} p_b \right)$$

või

$$\sigma_{\text{ekv. 3}} = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} p_b \quad (9.43)$$

Näeme, et saadud ekvivalentpinge valem langeb ühte ainult siserõhu p_a mõju all oleva toru ekvivalentpinge valemiga (9.41).

Paksuseinalise toru deformatsiooni leidmiseks kasutame siirde u kohta leitud üldlahendit (9.30)

$$u = Lr + \frac{K}{r^2}$$

milles esinevad konstandid L ja K tuleb määrata vastavalt antud ülesandele. Selleks leiame kõigepealt seoste (9.27) alusel joondeformatsioonid ε_r ja ε_φ . Asetame viimased pinge avaldistesse (9.28). Saadud pinged σ_r ja σ_φ võrrutame paksuseinalise toru pingetega (9.34) ning saame võrrandisüsteemi konstantide L ja K suhtes, millest leiame:

$$L = \frac{1 - \mu}{E} \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

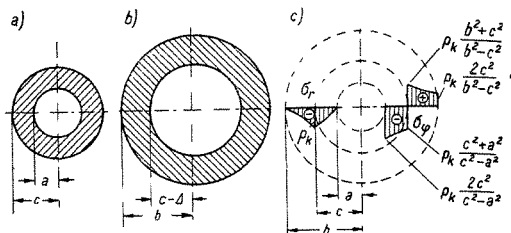
$$K = -\frac{1 + \mu}{E} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_b - p_a)$$

Asetame L ja K avaldised üldlahendisse (9.30), misjärel saame paksuseinalise toru siirde avaldise

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} r - \frac{1 + \mu}{E} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{(p_b - p_a)}{r} \quad (9.44)$$

9.32 Liittoru

Ekvivalentpingete avaldistest (9.41) ja (9.42) selgub, et toru paksuse suurendamisega ei ole võimalik nimetamisväärselt tõsta toru tugevust, sest suurendades toru paksust suureneb ka toru välisraadius b ; viimase ruut esineb aga nii ekvivalentpinge avaldise nimetas kui ka lugejas ning ekvivalentpinge muutub b muutudes vähe. Lõpmatult paksu toru korral on $\sigma_{\text{ekv. 3}} = 2p_a$.



JOON 9.9

Uheks konstruktivseks võtteks paksuseinalise toru tugevdamiseks on tema vastassuunaline eelpingestamine. Eelpingestada võib näiteks teise paksuseinalise toruga, mille siselähimõõt on Δ võrra väiksem esimese toru välislähimõõdust, kui ta asetada esimesele torule kuumalt ning lasta seejärel jahtuda (joon. 9.9).

Torude kokkupuutepindade vahel tekib kontaktpinge p_k , mille saame arvutada torude deformatsiooni pidevuse tingimusest. Toru jahtudes kontaktpind liigub toru telje poole. Sisemise toru raadius lüheneb u_1 võrra, kuna välis- toru raadius pikeneb u_2 võrra.

Torude deformatsiooni pidevuse tingimus on järgmine:

$$u_2 - u_1 = \Delta \quad (a)$$

Torude pindade siirded arvutame valemiga (9.44), kusjuures kontaktpinge p_k on sisemisele torule välisrõhuks, välis- torule aga siserõhuks.

Sisetoru

$$r = b_s = c; \quad p_a = 0, \quad p_b = p_k$$

$$u_1 = -\frac{1-\mu}{E} \frac{c^3}{c^2-a^2} p_k - \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 c}{c^2-a^2} p_k \quad (b)$$

Välis- toru

$$r = a = c, \quad p_b = 0; \quad p_a = p_k$$

$$u_2 = \frac{1-\mu}{E} \frac{c^3}{b^2-c^2} p_k + \frac{1+\mu}{E} \frac{c b^2}{b^2-c^2} p_k \quad (c)$$

Oletame seejuures, et mõlemad torud on ühesugusest materjalist. Asetame siirete u_1 ja u_2 avaldised deformatsiooni pidevuse tingimusse ning saame:

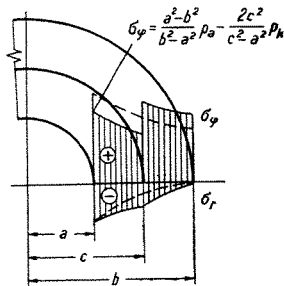
$$p_k = \frac{E\Delta}{2c^3} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2} \quad (9.45)$$

Kontaktpinge (9.45) kaudu arvutame nüüd nii sise- kui ka välistorus tekkivad eelpinged σ_r ja σ_φ , mille epüürid on kujutatud joonisel 9.9, c.

Kui nüüd liittorule mõjub siserõhk p , siis torus tekkivad pinged arvutame algul nagu monoliitses torus valemi (9.35) järgi. Tegelike pingete saamiseks tuleb saadud pingetele liita eelpinged. Joonisel 9.10 on kujutatud siserõhu mõjul liittorus tekkivate pingete epüürid.

Nagu jooniselt 9.10 nähtub, väheneb eelpinge tõttu σ_φ epüüril sisemise toru sisepinnal esinev pinge teravik; välise toru sisepinnal aga pinge mõnevõrra suureneb. Eelpinge torudes antud siserõhu p juures tuleb valida nii, et mõlema toru tugevustingimus oleks rahuldatud. Selleks peavad mõlema toru sisepinna kohta arvutatud ekvivalentpinged olema võrdsed. Viimast tingimusest leiame antud siserõhule p vastava ning eelpingeks vajaliku

$$\Delta = \frac{2p}{E} \frac{cb^2(c^2 - a^2)}{b^2(c^2 - a^2) + c^2(b^2 - c^2)} \quad (9.46)$$



JOON. 9.10

9.33 Pöörlev ketas

Vaatleme ühtlase nurkkiirusega ω pöörlevat ketast. Selle välisraadius on b , keskel on tal ava raadiusega a , kuna paksus on ühtlane. Ketas on koormatud pöörlemisest tekkiva tsentrifugaaljõuga ning peale selle võib ta sise- ja välisperimeetril olla koormatud ühtlaselt jaotatud radiaalkoormusega. Telgsümmeetrilisest väliskoormusest tingituna on ketta deformatsioon samuti telgsümmeetriline.

Kasutame järgnevalt tasakaaluvõrrandit (9.26), mida täiendame mahuühiku kohta tuleva tsentrifugaaljõuga:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \frac{\gamma\omega^2 r}{g} = 0 \quad (a)$$

milles γ — materjali erikaal,
 g — raskusjõu kiirendus,
 ω — nurkkiirus.

Saadud tasakaaluvõrrand on analoogiliselt lk. 345 esitatud teisendustele avaldatav paigutise u kaudu järgmise diferentsiaalvõrrandina:

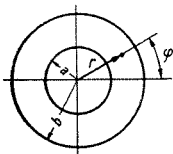
$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{\gamma(1-\mu^2)\omega^2 r}{gE} \quad (9.47)$$

Saadud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend koosneb lk. 357 esitatud homogeense diferentsiaalvõrrandi (9.29) lahendist (9.30) ja esitatud võrrandi (9.47) erilahendist

$$u = Cr^3 \quad (b)$$

Erilahendis esineva konstandi C leiame, asetades erilahendi võrrandisse (9.47). Lõplikult võime üldlahendi esitada kujul:

$$u = -\frac{\gamma(1-\mu^2)\omega^2 r^3}{8gE} + Lr + \frac{K}{r} \quad (c)$$



JOON. 9.11

Leiame kettas esinevad radiaal- ja rõngaspinged σ_r ja σ_φ , kasutades selleks seoseid (9.28) ja (9.27).

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) = \frac{EL}{1-\mu} - \\ &\quad - \frac{EK}{(1+\mu)r^2} - \frac{\gamma(3+\mu)\omega^2 r^2}{8g} \quad (d) \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right) = \\ &= \frac{EL}{1-\mu} + \frac{EK}{(1+\mu)r^2} - \frac{\gamma(1+3\mu)\omega^2 r^2}{8g}\end{aligned}$$

Tähistame valemis (d) esinevad konstandid järgmiselt:

$$C_1 = \frac{EL}{1-\mu}, \quad C_2 = \frac{EK}{1+\mu} \quad (e)$$

Kasutades tähistusi (e), saame pinge valemid (d) esitada lihtsamalt:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{\gamma(3+\mu)\omega^2 r^2}{8g} \\ \sigma_\varphi &= C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{\gamma(1+3\mu)\omega^2 r^2}{8g}\end{aligned} \quad (9.48)$$

milles konstandid C_1 ja C_2 leitakse ääritingimustest.

9.33 1 Keske avata valiskoormuseta pöörlev kettas

Ketta keskel, kus $r=0$, jäävad pinged suuruselt lõplikeks, mistõttu $C_2=0$. Konstant C_1 leitakse tingimusest:

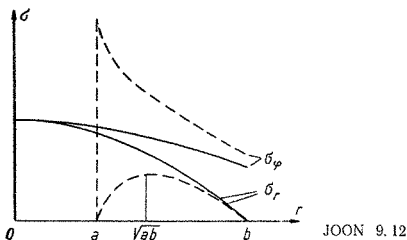
$$\text{kui } r=b, \text{ siis } \sigma_r=0 \quad (f)$$

Järgmisena leitakse

$$C_1 = \frac{\gamma(3+\mu)\omega^2 b^2}{8g} \quad (g)$$

Asetades leitud konstandi C_1 pinge avaldistesse (9.48), saame.

$$\sigma_r = \frac{\gamma(3+\mu)\omega^2}{8g} (b^2 - r^2)$$



JOON 9.12

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\gamma(3+\mu)\omega^2}{8g} \left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right) \quad (9.49)$$

Joonisel 9.12 on pidevjoonega esitatud pingete σ_r ja σ_{φ} muutumise kõverad olenevalt vaadeldava punkti kaugusest ketta keskkohast.

Suurimad pinged tekivad ketta keskkohas:

$$\max \sigma_r = \max \sigma_{\varphi} = \frac{\gamma(3+\mu)\omega^2 b^2}{8g} \quad (9.50)$$

9.33.2 Keskse avaga väliskoormuseta pöörlev ketas

Kui kettal puudub koormus, tähendab see seda, et välis- ja siseringi pinnal peab radiaalsihiline pinge võrduma nulliga. Seega on ääritingimused järgmised:

kui $r = a$, siis $\sigma_r = 0$,

kui $r = b$, siis $\sigma_r = 0$.

Määratud nende ääritingimuste alusel konstandid C_1 ja C_2 , leiame pingetele järgmised valemid:

$$\sigma_r = \frac{\gamma(3+\mu)\omega^2}{8g} (b^2 - r^2) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (9.51)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\gamma(3+\mu)\omega^2}{8g} \left[b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 + a^2 \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \right]$$

Pingete σ_r ja σ_{φ} muutumise kõverad vaadeldava punkti

asukoha muutudes piki raadiust on toodud joonisel 9.12 katkendjoontega. σ_r saavutab maksimaalse suuruse $r = \sqrt{ab}$ juures järgmisena:

$$\max \sigma_r = \frac{\gamma(3 + \mu)\omega^2}{8g} (b - a)^2 \quad (9.52)$$

σ_φ saavutab aga maksimaalse suuruse ketta siseriingil, kus $r = a$:

$$\max \sigma_\varphi = \frac{\gamma(3 + \mu)\omega^2}{4g} \left(b^2 + \frac{1 - \mu}{3 + \mu} a^2 \right) \quad (9.53)$$

Nagu valemitest (9.52) ja (9.53) nähtub, on

$$\max \sigma_\varphi > \max \sigma_r$$

Kui ketta keskava on väike, võrreldes ketta läbimõõduga, saame järgmise ligikaudse arvutusvalemi:

$$\max \sigma_\varphi \approx \frac{\gamma(3 + \mu)\omega^2 b^2}{4g} \quad (9.54)$$

Võrreldes pingeid $\max \sigma_\varphi$ avata ja avaga kettas näeme, et viimasel juhul on pinged kaks korda suuremad. Seega põhjustab väike ava ketta keskel pingete kontsentratsiooni.

9.33.3 Ebaühtlase paksusega pöörlev kettas

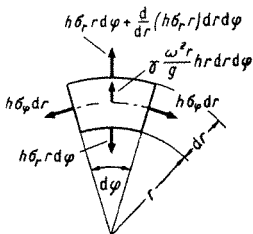
Tehnilistes rakendustes kasutatakse kõige enam ket-laid, mille paksus muutub keskelt servade poole.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus ketta paksus h , olenevalt vaadeldava koha raadiusest, muutub mõne lihtsalt väljendatava seaduse kohaselt. Leheküljel 357 esitatud tasakaaluvõrrand (9.26), geomeetriline võrrand (9.27) ja elastsusseosed (9.28) jäävad ka nüüd kehtima; neid kasutame diferentsiaalvõrrandi tuletamisel paigutise u kohta.

Eraldame kettast lõpmata väikese elemendi, mis on kujutatud koos temale mõjuvate jõududega joonisel 9.13.

Projekteerinud kõik jõud raadiuse sihile, saame järgmise tasakaaluvõrrandi:

$$-\frac{d}{dr} (h\sigma_r) dr d\varphi - h\sigma_\varphi dr d\varphi + \frac{\gamma\omega^2 r}{g} hr dr d\varphi = 0 \quad (a)$$



JOON. 9.13

millest pärast teisendamist saame:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \sigma_r + \frac{\gamma \omega^2 r}{g} = 0 \quad (9.55)$$

Diferentsiaalvõrrandi (9.55) moodustame ümber, kasutades seoseid (9.27) ja (9.28):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \right) \frac{du}{dr} - \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{h} \frac{dh}{dr} \right) \frac{u}{r} &= \\ &= - \frac{\gamma(1 - \mu^2)\omega^2 r}{gE} \end{aligned} \quad (9.56)$$

Saadud diferentsiaalvõrrandile u suhtes on kerge leida lahendit juhul, kui kettal on hüperboolne profiil, mille laius muutub järgmise seaduse kohaselt:

$$h = Hr^{-m} \quad (b)$$

kus H ja m on konstandid.

Asetades seose (b) diferentsiaalvõrrandisse (9.56), saame:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1-m}{r} \frac{du}{dr} - \frac{(1+\mu m)u}{r^2} = - \frac{\gamma(1-\mu^2)\omega^2 r}{gE} \quad (c)$$

Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend on järgmine:

$$u = - \frac{\gamma(1-\mu^2)\omega^2 r^3}{[8-(3+\mu)m]gE} + C_1 r^{n_1} + C_2 r^{n_2} \quad (9.57)$$

milles n_1 ja n_2 on alljärgneva ruutvõrrandi juured:

$$n^2 - mn - (1 + \mu m) = 0 \quad (d)$$

C_1 ja C_2 on integreerimiskonstandid

Edaspidine arvutus on analoogiline konstantse pakusega ketta arvutusega.

9.34 Pöörlev silinder

Pöörleva silindri ülesanne on analoogiline ühtlase pakusega pöörleva ketta ulesandega. Erinevus on vaid selles, et kui pöörlevas kettas valitseb tasandpingus, siis pöörlevas silindris tekib tasanddeformatsioon. Võrrandid ja seosed on teatavasti siin ülekantavad ühelt deformatsiooniliigilt teisele, välja arvatud elastsusseosed. Nagu näidatud lk. 317 [seosed (8 14)] valitseb ka elastsusseostes analoogia, kui defineerida tasanddeformatsiooni elastsuskonstandid elastsusseostes teisiti ja nimelt

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\mu}{1 - \mu} \\ E_1 &= \frac{E}{1 - \mu^2} \end{aligned} \quad (a)$$

Nüüd võime pöörleva ketta kohta leitud pinge arvutusvalemist tuletada pöörleva silindri vastavad arvutusvalemid, asendades esimestes μ suurusega μ_1 . Esitame pingete arvutusvalemid kahe juhu — täis- ja õõnessilindri kohta.

9.34.1 Täissilinder

Silindri läbimõõt on b .

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\gamma(3 - 2\mu)\omega^2}{8(1 - \mu)g} (b^2 - r^2) \\ \sigma_\varphi &= \frac{\gamma(3 - 2\mu)\omega^2}{8(1 - \mu)g} \left(b^2 - \frac{1 + 2\mu}{3 - 2\mu} r^2 \right) \end{aligned} \quad (9.58)$$

Pingete muutus piki raadiust on analoogiline pöörleva

ketta pingete muutusega. Maksimaalne pinge tekib silindri teljel, kus $r=0$:

$$\max \sigma_r = \max \sigma_\varphi = \frac{\gamma(3-2\mu)\omega^2 b^2}{8(1-\mu)g} \quad (9.59)$$

9.34.2 Õõnessilinder

Silindri välisläbimõõt on b , siseläbimõõt a .

$$\sigma_r = \frac{\gamma(3-2\mu)\omega^2}{8(1-\mu)g} (b^2 - r^2) \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (9.60)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\gamma(3-2\mu)\omega^2}{8(1-\mu)g} \left[b^2 - \frac{1+2\mu}{3-2\mu} r^2 + a^2 \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \right]$$

Ka siin on pingete muutus analoogiline pingete muutusega pöörleval kettal. $\max \sigma_r$ esineb kohal, kus $r = \sqrt{ab}$:

$$\max \sigma_r = \frac{\gamma(3-2\mu)}{8(1-\mu)g} \omega^2 (b-a)^2 \quad (9.61)$$

σ_φ on aga maksimaalne silindri sisepinnal, kus $r=a$:

$$\max \sigma_\varphi = \frac{\gamma(3-2\mu)\omega^2}{4(1-\mu)g} \left(b^2 + \frac{1-2\mu}{3-2\mu} a^2 \right) \quad (9.62)$$

Kui silindri õõnsuse läbimõõt a on väike, võrreldes läbimõõduga b , võime $\max \sigma_\varphi$ valemi sulgavaldise teisest liikmest loobuda, misjärel saame:

$$\max \sigma_\varphi \approx \frac{\gamma(3-2\mu)\omega^2}{4(1-\mu)g} \quad (9.63)$$

Analoogiliselt pöörleva kettaga võime ka siin väikese läbimõõduga õõnsuse korral märkida pinge kontsentratsiooni, kuna $\max \sigma_\varphi$ kasvab kahekordseks, võrreldes täis-silindriga.

Tasandilise deformatsiooni korral tekivad pinged σ_z ka piki silindrit. σ_z määrame tingimusest $\epsilon_z = 0$. Sel juhul

$$\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\varphi)$$

Kasutades varem leitud σ_r ja σ_φ valemid leiame, et täissilindril

$$\sigma_z = \frac{\gamma\mu\omega^2}{4(1-\mu)g} [(3-2\mu)b^2 - 2r^2] \quad (9.64)$$

Oõnsa silindri jaoks saame

$$\sigma_z = \frac{\gamma(3-2\mu)\mu\omega^2}{4(1-\mu)g} \left(b^2 + a^2 - \frac{2r^2}{3-2\mu} \right) \quad (9.65)$$

Juhul kui silinder saab vabalt deformeeruda telje sihis, on joondeformatsioon ϵ_z ühtlane. Selle ühtlase joondeformatsiooni määrame tingimusest, et silindri otspindadel puuduvad pikijõud:

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b \sigma_z r \, d\varphi \, dr = 0 \quad (b)$$

Kuna σ_z ei sõltu nurgast φ , võib tingimuse (b) ümber kirjutada järgmiselt:

$$\int_a^b \sigma_z r \, dr = 0 \quad (c)$$

Täissilindri puhul $a=0$, mistõttu tingimusest (c) saame:

$$\mu \int_0^b (\sigma_r + \sigma_\varphi) r \, dr + E\epsilon_z \frac{b^2}{2} = 0$$

millest

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{2E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2$$

ja

$$\sigma_z = \frac{\mu\gamma\omega^2}{4(1-\mu)g} (b^2 - 2r^2) \quad (9.66)$$

Oõnsa silindri korral on tingimus (c) järgmine:

$$\mu \int_a^b (\sigma_r + \sigma_\varphi) r \, dr + E\epsilon_z \frac{b^2 - a^2}{2} = 0$$

millest saame

$$\epsilon_z = -\frac{\mu\gamma}{2Eg} (b^2 + a^2)$$

ja

$$\sigma_z = \frac{\mu\gamma\omega^2}{4(1-\mu)g} (b^2 + a^2 - 2r^2) \quad (9.67)$$

9.35 Ümara auguga nõrgestatud riba tõmme

Riba laiusega $2b$ ja paksusega l on nõrgestatud laiuse keskkohal ümara auguga (joon. 9.14), mille raadius a on võrreldes riba laiusega $2b$ väike.

Riba on koormatud pikisihilise ühtlaselt jaotatud koormusega, mille intensiivsus laiuse ühiku kohta on p .

Võtame koordinaatteljed nii, et koordinaattelgede alguspunkt O langeb ühte augu keskmega, x -telg suundub piki riba ja y -telg on viimasega risti. Pingejaotus on häiritud nõrgestuse vahetus läheduses, kuna kaugemal on pingus ühtlane.

Tõmbame keskmest O küllalt suure raadiusega d ringjoone, nii et võime oletada, et pingus ringjoonel on juba ühtlane. Leiame pinged kaldpinnal, mille kaugus keskmest O on d ja kaldenurk on φ . Kasutame selleks varda tõmbel rakendatavaid valemeid.

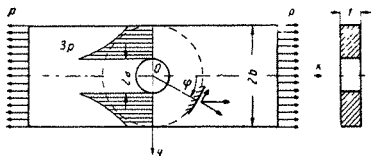
$$\begin{aligned}\sigma_r &= p \cos^2 \varphi = \frac{p}{2} (1 + \cos 2\varphi) \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{p}{2} \sin 2\varphi\end{aligned}\quad (9.68)$$

Raadiusega d eraldatud ribaosas võib vaadelda kui rõngast, mis on välispinnal koormatud ülaltoodud pingetega (9.68). Normaalspinge σ_r võime lahutada komponentideks:

a) rõnga välispinnal mõjuvaks radiaalkoormuseks intensiivsusega $p/2$,

b) nurgast φ sõltuvaks normaalkoormuseks $\frac{1}{2} p \cos 2\varphi$ ja tangentsiaalkoormuseks $-\frac{1}{2} p \sin 2\varphi$.

Rõngale mõjuvast konstantsest radiaalkoormusest $p/2$ põhjustatud pinged on arvatavad paksuseinalise toru jaoks tuletatud valemitega (9.36).



JOON. 9.14

Muutuva koormuse poolt põhjustatud pinged leiame, võttes pingefunktsiooniks avaldise

$$F = f(r) \cos 2\varphi \quad (a)$$

Asetanud pingefunktsiooni (a) tasandülesande deformatsiooni pidevuse võrrandisse polaarkoordinaatides, saame pärast mõningaid teisendusi hariliku neljandat järku diferentsiaalvõrrandi, mille lahend on

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \quad (b)$$

Asetades saadud lahendi pingefunktsiooni avaldisse (a) saame:

$$F = \left(Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) \cos 2\varphi \quad (c)$$

Pingefunktsiooni (c) kasutame nüüd pingete leidmiseks. Seejuures esinevad määratud konstandid leiame rõnga sise- ja välispinna tingimustest. Arvestades, et a on võrreldes d suurusega väike, võime liikmed, mis sisalduvad jagatist a/d , ära jätta, mistõttu pingevaldised lihtsustuvad märgatavalt. Liites saadud pingetele pinged rõngale mõjuvast ühtlasest tõmbest, saame lõplikult:

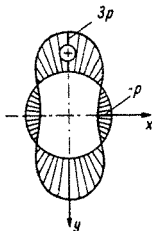
$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi \\ \sigma_\varphi &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{p}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^2} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (9.69)$$

Pingete arvutamisel august kaugemates punktides, kus r on tunduvalt suurem kui a , võime valemite (9.69) sulgavaldistes esinevad a/r astmed ära jätta. Sel juhul σ_r ja $\tau_{r\varphi}$ valemid langevad ühte lihttõmbe puhul rakendatavate valemitega (9.68).

Lähenedes augu servale pinged σ_r ja $\tau_{r\varphi}$ vähenevad. Serval, kus $r = a$, võrduvad nad nulliga, kuna pinge σ_φ saab väärtuse

$$\sigma_\varphi = p - 2p \cos 2\varphi \quad (9.70)$$

$$\begin{aligned} \text{Maksimaalne on } \sigma_\varphi \text{ teljel, kus } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ või } \varphi = \frac{3}{2} \pi \\ \max \sigma_\varphi = 3p \end{aligned} \quad (9.71)$$



JOON. 9.15

Minimaalne on σ_φ riba keskjoonel, kus $\varphi = 0$ või $\varphi = \pi$:

$$\min \sigma_\varphi = -p \quad (9.72)$$

σ_φ suurus olenevalt asukohast augu serval on kujutatud joonisel 9.15.

Augu keskkoha läbival riba ristlõikel on σ_φ arvutatav valemiga

$$\sigma_\varphi = \frac{p}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \quad (9.73)$$

Selle pinge diagramm on kujutatud joonisel 9.14. Nagu diagrammist nähtub, on augu serval $\max \sigma_\varphi = 3p$, kuna riba välispinnal r suurenedes läheneb pinge kiiresti väärtusele $\sigma_\varphi = p$. Esitatud arvutusvalemid on täpsed lõpmata laia riba ning ligikaudsed lõpliku laiusega riba korral ja rahuldavad praktilise arvutuse seisukohalt, kui a/d on küllalt väike. Kui riba laius $2d \geq 4a$, siis võib $\max \sigma_\varphi$ arvutamiseks kasutada järgmist ligikaudset valemit:

$$\max \sigma_\varphi = 3p \frac{2d}{2d - a}$$

Leiame suhte $n = \frac{\max \sigma_\varphi}{p}$ olenevalt $\frac{a}{d}$ väärtusest.

Võrdlus näitab, et suuremale a/d väärtusele vastab suurem n väärtus. Mõned n väärtused sõltuvalt suhtest a/d , arvutatuna täpse teooriaga, on antud tabelis 9.1.

Pinge ebahütlast jaotust ning pinge «teraviku» tekkimist varda ristlõikes nimetatakse pingete kontsentratsiooniks, mida hinnatakse nn. pingete kontsentratsiooni teguriga

$$k = \frac{\max \sigma_\varphi}{\sigma_h} \quad (9.74)$$

milles

$$\sigma_h = \frac{N_x}{F_{\text{neto}}}$$

on nõrgestatud ristlõikes arvutatav keskmine pinge. Nagu näitavad arvutused, väheneb pingete kontsentrat-

sooni tegur k ribas oleva avause läbimõõdu suurenemise-
 sega. Tabelis 9.1 on toodud mõned k väärtused olenevalt suhtest a/d .

Tabel 9 1

n ja k väärtused		
$\frac{a}{d}$	n	k
0,3	3,36	2,52
0,4	3,74	2,24
0,5	4,32	2,16

Nagu selgub tabelis 9.1 esitatud andmetest, on pingete kontsentratsiooni teguri k seisukohalt ohtlikud väikesed nõrgestused. Maksimaalse pinge, seega staatilise tugevuse seisukohalt on ohtlikud siiski suurema läbimõõduga nõrgestused.

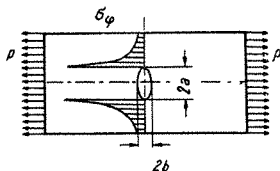
Elliptilise avaga laia riba nõrgestuse uurimused näitavad, et suur pingekontsentratsioon esineb ribas siis, kui ellips on väga lame ja tema pikem telg on risti välisjõu mõjumise sihiga (joon. 9.16).

Maksimaalne tõmbepinge elliptilise avause kõrval

$$\max \sigma_{\varphi} = \rho \left(1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (9.75)$$

Kui ellipsi suurem telg on risti riba teljega ($a > b$), siis $\max \sigma_{\varphi} > 3\rho$. Kui aga ellipsi pikema telje siht ühtib riba telje sihiga ($a < b$), siis $\rho < \max \sigma_{\varphi} < 3\rho$.

Pingete kontsentratsiooni seisukohalt on eriti ohtlikud jõu mõjumise sihiga risti tekkivad praod, mida võib käsitleda kui väga lamedaid ellipseid. Suure pingeteraviku tõttu arenevad sellised praod habrastes materjalides kii-



JOON 9 16

resti. Prao arengut piirava võttena puuritakse praos-
 tesse võimalikult suurema läbimõõduga augud, mis
 vähendavad pingete kontsentratsiooni.

9.36 Koondatud jõu mõju elastsele poolruumile (Flamant'i ülesanne)

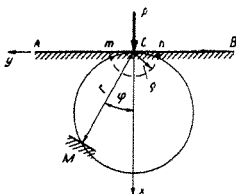
Vaatleme ühtlast elastset keskkonda, mis ühelt poolt
 on piiratud tasandiga, teiselt poolt aga laiub piiramatult.
 Selliselt piiratud elastset keskkonda nimetatakse elasts-
 seks poolruumiks. Joonisel 9.17 on sirge AB
 elastset poolruumi piirava tasandi jälg, kuna poolruum
 ise laiub sirgest allapoole. Kui ulatus risti joonise tasa-
 pinnaga on väike, kujutab elastne poolruum endast õhu-
 kest plaati ja on tegemist üldistatud tasandpingusega,
 kuna ruumi piiramatul ulatusel korral z -telje sihis tekib
 tasanddeformatsioon. Viimasel juhul peab koormus olema
 jaotatud ühtlaselt piki z -telge.

Olgu punktis C rakendatud elastsele poolruumile koon-
 datud jõud P . Oieti on ka siin tegemist jaotatud koor-
 musega piki joont C , mis on risti joonise tasapinnaga;
 koormuse resultant vaadeldavas ulatuses on P .

Mõjuva jõu toimele tekivad elastse poolruumi suvalises
 punktis pinged σ_r , σ_φ ja $\tau_{r\varphi}$. Lisaks eelmistele tekib
 tasanddeformatsiooni korral pinge

$$\sigma_z = -\mu(\sigma_r + \sigma_\varphi) \quad (a)$$

Pinge arvutuse seisukohalt on ükskõik, millist tasand-
 ülesande liiki vaadeldakse. Erinevus ilmneb paigutiste
 arvutamisel.



JOON. 9.17

Vaatleme edaspidi üldistatud tasandpingust, oletades plaadi paksuse ühikuks. Jõu rakenduskohta läheduses on pinged väga suured, ületades elastsuspiiri, mistõttu vaatleme punkte väljaspool silindrilist piirkonda mn raadiusega q (vt. joonis 9.17), kus pinged on alla elastsuspiiri. Kasutades *Saint-Venant*'i printsiipi, rakendame jõu P asemel eelnimetatud silindrilisel pinnal jaotatud koormuse, mille resultant on ekvivalentne jõuga P . Säärane koormuse asendus mõjutab vähe pingust väljaspool ringi mn .

Vaatleme elastses poolruumis mingit punkti M , mille asukohta määravad polaarkoordinaadid r ja φ . Võtame lõikepinna punktis M nii, et ta oleks risti raadiusega CM . Teine lõikepind olgu risti eelmisega ning kulgegu piki raadiust. Koostame lõikepindadel esinevate pingete σ_r , σ_φ ja $\tau_{r\varphi}$ avaldised, tehes nende kohta lihtsustavaid oletusi.

σ_r on survepinge. Mida lähemal on vaadeldav punkt jõule, seda suurem on σ_r , mistõttu võime lugeda tema väärtust pöördvõrdeliseks raadiusega r . Suurim on σ_r konstantse r puhul siis, kui σ_r mõjumissirge langeb ühte jõu P mõjumissirgega, s. t. kui $\varphi = 0$. Kui φ siht erineb P omast, s. t. $\varphi > 0$, väheneb σ_r . Oletame, et see vähenemine oleneb nurgast φ koosinusfunktsiooni kohaselt. Seega saame

$$\sigma_r = -k \frac{\cos \varphi}{r} \quad (b)$$

kus k on esialgu määramata konstant, kuna miinusmärk on seepärast, et oletatav pinge on survepinge.

Edasi oletame, et normaalpinge radiaallõikepinnal

$$\sigma_\varphi = 0 \quad (c)$$

ning samuti

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0 \quad (d)$$

Kirjelatud pingeaotust nimetatakse *radiaalseks*. Raadiusega risti olevad ning radiaalsed lõikepinnad on peapinnad. Seega σ_r on peapinge. Järgnevalt peame selgitama, kas oletatud pinged rahuldavad tasandülesande võrrandeid. Arvesse võttes avaldise (c) ja (d), saame tasakaaluvõrrandiks

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} = 0 \quad (9.76)$$

Asetades sellesse pingevaldise (b) näeme, et võrrand (9.76) on samaselt rahuldatud.

Deformatsiooni pidevuse tingimuse kuju on

$$\nabla^2 \sigma_r = 0$$

või

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} = 0 \quad (9.77)$$

Ka see võrrand on rahuldatud, kui asetada sellesse σ_r avaldis.

Nüüd tuleb määrata σ_r avaldises esinev kordaja k , milleks kasutame ääretingimusi. Poolruumi välispind AB

on pingevaba ($\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi = 0$), välja arvatud jõu

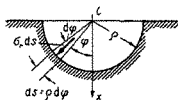
rakenduspunkt C . Viimase lülitasime aga välja poolsilindriga, mille raadius on ρ (joon. 9.18). See poolsilinder on koormatud pingetega σ_r nii, et nende summa vertikaalteljele annab jõu P .

Tasakaalu tingimus vertikaalteljele annab:

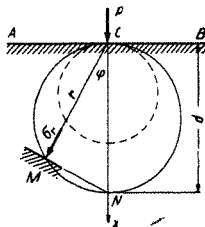
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos \varphi \rho d\varphi = P \quad (9.78)$$

Asendades integraali all

$$\sigma_r = k \frac{\cos \varphi}{\rho}$$



J. JOON. 9.18



J. JOON. 9.19

saame

$$k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi = P$$

Pärast integreerimist saame:

$$k \frac{\pi}{2} = P$$

millest

$$k = \frac{2P}{\pi} \quad (9.79)$$

ning

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r} \quad (9.80)$$

Pinguse ülevaatlikuks kirjeldamiseks elastses poolruumis võib kasutada hõlpsat graafilist konstruktsiooni. Selleks vaatleme mingit meelevaldset punkti M (joon. 9.19). Tõmbame raadiusvektoriga risti oleva lõikepinna jälje lõikumiseni x -teljega punktis N . Konstrueerime ringjoone CMN , mille läbimõõt $CN = d$. Kolmnurk CMN on täisnurkne, mistõttu

$$CM = CN \cos \varphi$$

või

$$r = d \cos \varphi$$

Seega

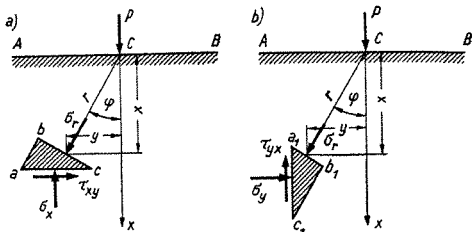
$$\frac{\cos \varphi}{r} = \frac{1}{d} = \text{konst.}$$

ning samuti

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r} = -\frac{2P}{\pi d} = \text{konst.} \quad (9.81)$$

Kuna see oli konstrueeritud meelevaldselt võetud punkti kohta, siis võib öelda, et iga ringjoon, mille kese asub jõu P mõjumissirgel ja mis läbib jõu rakenduspunkti C , on võrdsete pingete σ_r trajektooriks. See tähendab, et kõik pinged, mis mõjuvad ühe ja sama ringjoone punktidele jõu rakenduspunktist püstitatud raadiusvektorite ristpindadel, on omavahel võrdsed.

Saadud kujutlus pingusest sama peapingega ringjoonte



JOON. 9. 20

kaudu on küll ülevaatlik, kuid praktilisest seisukohast mitte küllalt otstarbekohane. Seepärast leiame pinged, mis mõjuvad horisontaalsel ja vertikaalsel lõikepinnal. Eraldame elastsest poolruumist radiaal-, rist- ja horisontaalpinnaga lõpmata väikese prisma, mille alus abc on täisnurkne kolmnurk (joon. 9. 20, a).

Analoogiliselt eraldame ka prisma radiaal-, rist- ja vertikaalpinnaga, mille alus $a_1b_1c_1$ on samuti täisnurkne kolmnurk (joon. 9. 20, b).

Kirjeldataud prismade tasakaalu tingimustest saame:

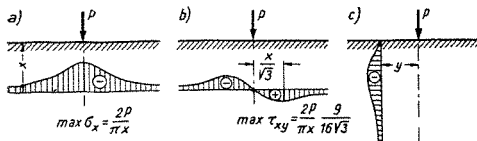
$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \varphi \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \varphi\end{aligned}\quad (e)$$

Asetades saadud avaldistesse σ_r valemi (9. 80) kohaselt ja võttes arvesse, et

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

saame lõplikult:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x y^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}\quad (9. 82)$$



JOON 9.21

Joonisel 9.21 on kujutatud pingete epüürid.

Joonisel 9.21 esitatud σ_x epüürist nähtub, et horisontaallõikepinnal esinevad maksimaalsed pinged $\max \sigma_x$ jõu P mõjumissirge kohal.

τ_{xy} epüür on antimeetriline, mis näitab, et tangentsiaalpinge muudab suunda jõu mõjumissirge kohal, olles seal võrdne nulliga. Maksimaalse väärtuse saavutab τ_{xy} kaugusel $\frac{x}{\sqrt{3}}$ jõu mõjumissirgest

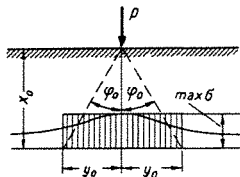
σ_y on muutuv vertikaallõikepinnal. Olles välispinnal null, saavutab ta teataval kõrgusel maksimumi ning seejärel väheneb.

Ligikaudses arvutuses oletatakse mõnikord, et pinge σ_x on jaotatud ühtlaselt (joonis 9.22). Seejuures olgu σ_c ebahühtlaselt jaotatud maksimaalse väärtusega

$$\sigma_x = \max \sigma_x = \frac{2P}{\pi x_0} \quad (9.83)$$

Jaotatud koormuse ulatuse $2y_0$ leiame tingimusest

$$P = \max \sigma_x \cdot 2y_0$$



JOON. 9 22

või

$$P = \frac{2P}{\pi x_0} 2y_0$$

millest

$$\frac{y_0}{x_0} = \tan \varphi_0 = \frac{\pi}{4} = 0,785$$

ning

$$\varphi_0 \approx 38^\circ$$

Arvutustes antakse ette nurk φ_0 (piirides 30° kuni 45°), leitakse $2y_0$ ning seejärel max σ .

Juhul kui elastsele poolruumile mõjub terve rida koondatud jõude, leiame σ_x mingis punktis, rakendades summeerimise printsiipi. Näiteks n jõu korral saame, lähtudes valemist (9.82),

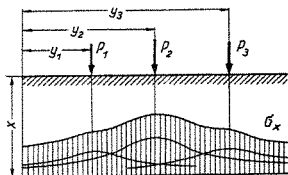
$$\sigma_x = -\frac{2x^3}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{(x^2 + y_i^2)^2} \quad (9.84)$$

kus P_i ja y_i on mingile järjekorranumbrile i vastav jõud ja selle jõu mõjumissirge kaugus vaadeldavast punktist (joon. 9.23).

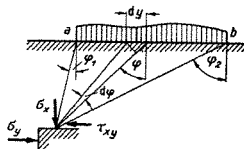
σ_x epüür saadakse üksikjõudude epüüride summana. Epüüri konstrueerimise hõlbustamiseks on otstarbekohane konstrueerida kõigepealt ühikjõu $P=1$ epüür ning seejärel teiste jõudude epüürid, korrutades ühikjõu epüüri ordinaadid vastava jõu suurusega.

Jaotatud koormuse korral leitakse pinged samal põhimõttel. Eraldame jaotatud koormusest elemendi dy kohta tuleva osa (joon. 9.24) ja käsitame teda koondatud jõuna. Kui elemendi pikkus on

$$dy = \frac{r d\varphi}{\cos \varphi}$$



JOON. 9.23



JOON 9 24

süis sellele elemendile vastav elementaarjõud on

$$dP = \frac{\rho(y) r d\varphi}{\cos \varphi}$$

Saadud elementaarjõu asetame valemisse (9 80) P asemele, misjarel saame

$$\sigma_r = - \frac{2\rho(y) d\varphi}{\pi}$$

Viimase asetame omakorda valemisse (e) ning leiame seega alltoodud pinged, mis tekivad uhe elementaarjõu toimel

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{2\rho(y)}{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \\ \tau_{xy} &= - \frac{2\rho(y)}{\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ \sigma_y &= - \frac{2\rho(y)}{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (f)$$

Kogu ulatusel ab mõjuva jaotatud koormuse toimel tekkivad pinged saame, liites elementaarjõudude poolt tekitatud pinged alates punktist a (polaarnurk φ_1) ja lõpetades punktiga b (polaarnurk φ_2) Seejuures tuleb muutuv jaotatud koormus väljendada φ funktsioonina

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{2}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) \cos^2 \varphi d\varphi \\ \tau_{xy} &= - \frac{2}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ \sigma_y &= - \frac{2}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (g)$$

Ühtlaselt jaotatud koormuse korral, kui $p(\varphi) = p = \text{konst.}$, saame valemeist (g) pärast integreerimist.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{p}{2\pi} |2\varphi + \sin 2\varphi|_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{p}{2\pi} |\cos 2\varphi|_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \\ \sigma_y &= -\frac{p}{2\pi} |2\varphi - \sin 2\varphi|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.\end{aligned}\quad (9.85)$$

Paigutiste arvutamisel elastses poolruumis lähtume leitud pingetest. Üldistatud *Hooke*'i seaduse abil väljendame pingete kaudu joondeformatsioonid ja nihkenurgad ning viimastest omakorda saame *Cauchy* võrranditega seosed paigutiste kohta. Tekib kolmest diferentsiaalvõrrandist koosnev süsteem siirete u ja v suhtes (siire u raadiusvektori sihis, kuna siire v temaga risti):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \varphi}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} &= \frac{2P\mu}{\pi E} \frac{\cos \varphi}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} &= 0\end{aligned}\quad (h)$$

Lahendanud süsteemi, leiame paigutiste u ja v avaldised, mis sisaldavad kolme integreerimiskonstanti. Kaks nendest määratakse tingimusest, et x -teljel (jõu mõjumis-sirgel) olevad punktid ei saa sümmeetria tõttu külgsihis siirdeid. Kolmanda konstandi määramiseks oletame, et x -telje punkt, mis asetseb jõu rakenduskohest küllalt suurel kaugusel d , ei siirdu vertikaalsihis.

Siirete u ja v avaldised on järgmised:

$$\begin{aligned}u &= \frac{2P}{\pi E} \cos \varphi \ln \frac{d}{r} - \frac{(1-\mu)P}{\pi E} \varphi \sin \varphi \\ v &= -\frac{2P}{\pi E} \sin \varphi \ln \frac{d}{r} - \frac{(1-\mu)P}{\pi E} \varphi \cos \varphi + \\ &+ \frac{(1+\mu)P}{\pi E} \sin \varphi\end{aligned}\quad (9.86)$$

Leiame elastse poolruumi horisontaalse välispinna verti-

kaalsiirded. Välispinda määrab koordinaat $\varphi = \frac{\pi}{2}$ või $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Sel juhul saame valemist (9.86):

$$v_{(\varphi = -\frac{\pi}{2})} = -v_{(\varphi = \frac{\pi}{2})} = \frac{2P}{\pi E} \ln \frac{d}{r} - \frac{(1 + \mu)P}{\pi E} \quad (9.87)$$

v märgi määramisel lähtume tingimusest, et suurevate nurkadele φ vastab positiivne siire. Jõu rakenduspunktis C muutub siire v lõpmata suureks, sest ka pinged on väga suured, ületades proportsionaalsuspiiri. Piirkond jõu rakenduskoha ümbruses raadiusega ρ on tegelikult vaatlusest välja lülitatud.

10 ÕHUKESTE JÄIKADE PLAATIDE PAINE. LAHENDUS RISTKOORDINAATIDES

10.1 ÜLDISED ALUSED

10.11 Põhimõisted

Plaadiks nimetatakse prismaalset või silindrilist keha, mille kõrgus (plaadi paksus), mida tähistame tähega h , on võrreldes teiste mõõtmetega väike.

Pinda, mis jagab plaadi paksuse kaheks võrdseks osaks, nimetatakse plaadi keskpinnaks. Deformeerumata olekus on plaadi keskpind tasandiline.

Plaadi paksus võib olla ühtlane või muutuv.

Plaati, mille elastsusomadused on kõigis suundades ühesugused, nimetatakse isotroopseks; vastasel juhul on plaat anisotroopne. Anisotroopsete plaatide tähtsaimaks erijuhuks on ortotroopne plaat (vt. lk. 292). Sellise plaadi pinnas võib eraldada kaks teineteisega risti olevat sihti, milles rakendatud ühtlaselt jaotatud jõud ei põhjusta nende sihtide vahelise nurga muutust (nihet); tüüpiliseks näiteks on vineerplaat. Metallplaat on isotroopne. Tihedalt asetsevate jäikusribidega varustatud metallplaati võib aga vaadelda (koos jäikusribidega) ortotroopsena. Ristsarrusega raudbetoonplaat on ortotroopne, kuid ortotroopia mõju on sageli niivõrd väike, et sellist plaati võib arvutada isotroopsena.

Käesolevas raamatus, välja arvatud p. 10.52, käsitleme ainult ühtlase paksusega isotroopseid plaate.

Tehnikas leiavad plaadid ja ribiplaadid laialdast kasutamist — vahelagedena, hüdrotehnilistes ehitistes, laevade ja lennukite keredes jne. Üksikud plaadid neis konstruktsioonides võivad kanda väga erineva iseloomuga koormust. Selle koormuse võib alati jagada kaheks

komponendiks üks, mis mõjub plaadi keskpinnas, ja teine, mis mõjub plaadi keskpinnaga risti. Esimene komponent, mille mõju on juba vaadeldud tasandülesannet käsitletavates peatükkides, ei põhjusta plaadi painet, kui ta mõjub ilma põikkoormuseta ja tema suurus on väiksem teatud piirist, nn. kriitilisest koormusest. Plaatide paindeteoorias vaatleme algul iseseisvalt mõjuva põikkoormuse toimet, aga hiljem ka põikkoormuse ja plaadi pinnas mõjuva koormuse koosmõju ning selliseid plaadi pinnas mõjuvaid koormusi, mis on niivõrd suured, et põhjustavad painde — plaadi mõlkumise.

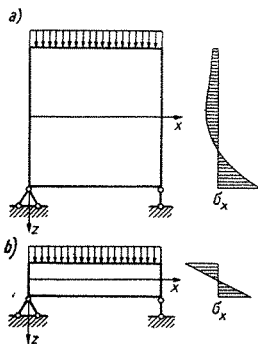
Põikkoormuse intensiivsust tähistame tähega q .

10.12 Plaatide liigitus

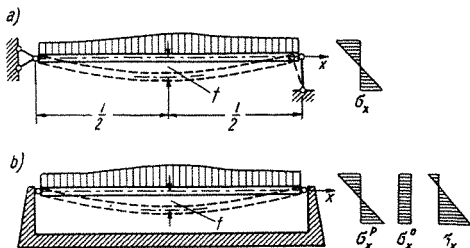
Plaatide ja talade painde vahel on ulatuslik analoogia; tala painet võib teatud määral vaadelda nagu plaadi painde erijuhtu. Lisaks sellele on aga ka iseärasusi, mis on omased ainult plaatide paindele.

Tuletame algul paari sõnaga meelde talade painde iseärasusi.

Kõrgete talade (seinkandjate) puhul ei ole normaalpingete σ_x epiür lineaarne (joon. 10.1, a), nulljoon ei lange kokku tala teljega. Arvutusel ei saa kasutada liht-



JOON. 10 1



JOON. 10 2

sustavaid hüpoteese, lahend tuleb leida elastsusteooria meetoditega (tasandülesanne).

Tala kõrguse ja pikkuse suhte (suhtelise kõrguse) vähenedes muutub normaalpingete epüür lineaarsemaks ja nulljoon ligineb tala teljele. Rahuldudes teatud arvutustäpsusega (näiteks nõudes, et viga maksimaalsete pingete määramisel ei tohi ületada 5%), võime antud koormusskeemi juures alates teatud suhtelisest kõrgusest kasutada ristlõigete tasapinnalisuse hüpoteesi, mis *Hooke*'i seaduse kehtivuse korral annab lineaarse pingeaotuse (joon. 10.1, *b*). Selle tõttu lihtsustub arvutus tunduvalt.

Vaatleme edasi talasid, kus võime kehtivaks lugeda ristlõigete tasapinnalisuse hüpoteesi.

Kui tala toeristlõigete liginemine teineteisele pole takistatud (joon. 10.2, *a*), siis tala telje pikkus ei muutu ja seal normaalpingeid ei teki. Vastupidisel juhul tekivad ka tala teljel normaalpinged, mis on põhjustatud tala telje pikenemisest. Normaalpingeid üldse võime vaadelda koosnevana kahest komponendist: paindepinged σ^p , mis tala teljel võrduvad nulliga ning kasvavad proportsionaalselt talä punktide kaugusega teljest, ja tõmbepinged σ^o , mis on ühtlased üle tala kõrguse (joon. 10.2, *b*). Neid tõmbepingeid nimetatakse ka ahel pingeteks.

Ahelingete osatähtsus sõltub tala läbipainde ja

kõrguse suhtest. Olgu ristkülikulise põiklõikega tala pikkus l ja kõrgus h . Kujutagu tala elastne joon parabooli

$$w = f(1 - 4x^2/l^2) \quad (a)$$

kus f — läbipaine tala keskel. Väikeste läbipainete korral saame maksimaalsete paindepingete $\max \sigma^p$ jaoks järgmise avaldise:

$$\max \sigma^p = \frac{\max M}{W} = -\frac{EI}{W} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 4 \frac{Ehf}{l^2} \quad (b)$$

ning ahelppingete σ^0 jaoks:

$$\sigma^0 = \frac{E\Lambda}{l} = \frac{E}{l} \cdot \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{8}{3} \frac{Ef^2}{l^2} \quad (c)$$

Jagades avaldise (c) avaldisega (b), saame ahelppingete ja maksimaalsete paindepingete suhteks

$$\frac{\sigma^0}{\max \sigma^p} = \frac{2}{3} \frac{f}{h} \quad (d)$$

Seega ahelppingete osatähtsus sõltub maksimaalse läbipainde ja tala kõrguse suhtest ja võib osutada küllaltki oluliseks, kui tala läbipaine ja kõrgus on samas suurusjärgus.

Tavaliselt on ahelppingete osatähtsus väiksem kui seda võiks järeldada valemist (1.1), kuna kõrgemat järku kõverate puhul on kõverused ühesuguse läbipainde juures tunduvalt suuremad, tala telje pikenemine Λ aga erineb ülaltoodust vähe.

Vaatleme nüüd neid nähtusi plaatide painde aspektist.

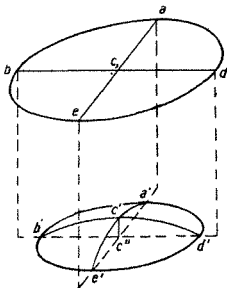
Plaatide puhul ei saa enam rääkida ristlõigete tasapinnalisusest. Ristlõigete asemel peame vaatlema tala keskpinnale tõmmatud ristsirgeid. Säärast ristsirget võiks kujutada näiteks ava, mis on torgatud läbi plaadi risti tala keskpinnaga. Täpne teooria, samuti katsed näitavad, et säärane ristsirge jääb väga ligidaseks sirgele pärast plaadi keskpinna kõverdumist ainult sel juhul, kui plaadi mõõtmed teistes suundades on tunduvalt suuremad plaadi paksusest. Orienteeruvalt võib lugeda, et see nõue on täidetud juhul, kui plaadi lühema külje pikkus b ületab plaadi kõrguse h vähemalt viiekordselt:

$$b/h \geq 5$$

Plaatte, mis rahuldavad seda tingimust, nimetatakse õhukesteks plaatideks. Vastasel korral on tegemist paksude plaatidega. Paksude plaatide, samuti nagu kõrgete talade arvutamisel peame lähtuma elastsusõpetuse põhivõrrandest. Õhukeste plaatide, samuti nagu madalate talade arvutamisel võib arvutuse lihtsustamiseks kasutada ka täiendavaid hüpoteese. Seega kuulub õhukeste plaatide paindetooria sisuliselt tugevusõpetuse valdkonda. Plaatide paindetooria käsitlemine elastsusõpetuses on tingitud ainult sellest, et plaatide painde matemaatiline külg on keerulisem kui talade painde oma — lahendus saadakse osatuletistega diferentsiaalvõrrandite näol.

Edasi vaatleme õhukeste plaatide painet sõltuvalt plaadi läbipainde ja paksuse suhtest.

Analoogiliselt tala paindel tekkivate pingetega võime ka õhukese plaadi paindel tekkivad pinged jagada paindepingeteks, mis võrduvad plaadi keskpinnas nulliga ning muutuvad plaadi kõrguses lineaarselt, ja ahelpeingeteks. Samuti nagu talade korral, kasvab ka plaatide korral viimaste osatähtsus plaadi läbipainde suurenemiseks. On aga ka oluline erinevus ahelpeingete tekkimise vahel talades ja plaatides: talas tekivad ahelpeinged ainult juhul, kui toed takistavad tala telje paigutumist, plaatide juures tekivad ahelpeinged ka selliste tugede korral, mis võimaldavad plaadi servadel vabalt liikuda plaadi keskpinna tasandis. Põhjuseks on asjaolu, et plaadi keskpind,



JOON. 10.3

mis oli plaadi koormamiseni tasapinnaline, võtab üldjuhul pärast koormamist sellise kuju, mida pole enam võimalik tasandile laotada (joon. 10.3); tala telge saab aga sirgestada ilma teljesuunalise deformatsioonita. Seega peavad plaadi keskpinnas mõjuma pinged, mis kutsuvad esile tema deformeerumise. Need pinged on samas suurusjärgus nagu pinged, mis on põhjustatud tugiosade järeleandmatusest.

Vastavalt painde- ja aheltingete osatähtsusele liigitatakse plaate järgmiselt.

1. Jäigad plaadid. Nende arvutamisel võib aheltingetest erilise veata loobuda, kuna need on tunduvalt väiksemad kui paindepinged. Sellesse gruppi kuuluvad raudbetoonplaadid, aga ka väikese läbipaindega terasplaadid.

2. Painduvad plaadid. Nende arvutamisel peab arvesse võtma nii painde- kui ka aheltingete mõju. Sellesse gruppi kuulub enamik terasplaate. Kuna aga seda tüüpi plaatide arvutamine on üldjuhul seotud tunduivate matemaatiliste raskustega, kasutatakse nende arvutamisel mõnikord jäikade plaatide teooriat. Arvutus jäikade plaatide teooria järgi läheb tagavara kasuks; saadavad pinged võivad olla mitu korda väiksemad tege-likest.

3. Membraanid ehk absoluutselt painduvad plaadid. Nende puhul võib hüljata paindepinged, kuna need on aheltingetest tunduvalt väiksemad. Membraani analoogiaks on mitte tala, vaid painduv niit.

Kas plaati arvutada nagu jäika plaati, painduvat plaati või membraani, sõltub koormuse iseloomust ja plaadi kõrguse ning läbipainde suhtest; läbipainde suurus aga oleneb koormuse suuruselt. Seega koormuse järkjärgulisel suurenemisel võib üks ja sama plaat töötada jäigana, painduvana või membraanina. Peale selle sõltub valitav arvutusmetoodika nõutavast arvutusjäpsusest. Orienteerivalt võib lugeda, et plaati võib arvutada jäigana, kui plaadi paksus on vähemalt 3 korda suurem maksimaalsest läbipaindest, ja membraanina, kui läbipaine on enam kui 5 korda suurem plaadi paksusest

10.13 Õhukeste plaatide paindeteooria hüpoteesid

Need hüpoteesid koosnevad elastsusteooria üldistest hüpoteesidest aine omaduste kohta ja spetsiaalsetest hüpoteesidest õhukeste plaatide paindeteooria lihtsustamiseks.

Elastusteooria üldistest hüpoteesidest nimetame siin ainult *Hooke*'i seadust ja eeldust, et keha deformatsioonid on niivõrd väikesed, et pöördenurkade siinuseid ja tangentseid võib lugeda võrdseteks pöördenurkadega.

Õhukeste plaatide paindeteooria spetsiaalsed hüpoteesid on järgmised.

1. Sirgete normaalide hüpotees: sirgjoonelised elemendid, mis enne deformatsiooni olid plaadi keskpinnaga risti, jäävad ka pärast deformatsiooni sirgjoonelisteks ja keskpinnaga risti.

See hüpotees vastab tasapinnaliste ristlõigete hüpoteesile talade teoorias.

2. Pinged, mis tekivad plaadi keskpinnaga paralleelsete kihtide rühumisest üksteisele, on hüljatavalt väikesed.

3. Plaadi keskpinna punktid siirduvad ainult plaadi keskpinna ristsuunas; keskpinna punktide siirded plaadi pinnas võrduvad nulliga. Keskpinna deformeerumisest tekkivad pinged on hüljatavalt väikesed.

See hüpotees on kehtiv ainult jäikade plaatide, aga mitte painduvate plaatide paindeteoorias.

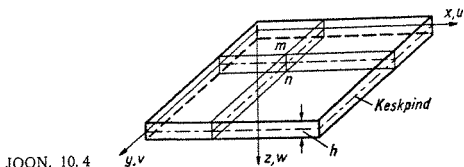
10.2 ÕHUKESE JÄIGA PLAADI KESKPINNA VÖRRAND RISTKOORDINAATIDES

10.21 Seosed plaadi läbipainde ja siirete ning deformatsioonide vahel

Seame ülesandeks saada plaadi läbipaindunud keskpinna (elastse pinnaga) jaoks diferentsiaalvõrrand, mis vastaks tala elastse joone võrrandile

$$EIw^{IV} = q$$

s. t. seeks omavahel plaadi keskpinna punktide siirded ja plaadile mõjuva koormuse intensiivsuse. Samuti peame leidma seosed plaadi keskpinna siirete ja plaadis tekkivate pingete vahel.



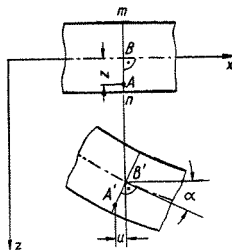
JOON. 10. 4

Valime teljestiku nii, nagu näidatud joonisel 10. 4. Teljed x ja y asuvad plaadi keskpinnas; telje z suuname alla. Siirded tähistame vastavalt u , v ja w , kusjuures plaadi keskpinna punktide siiretele lisame vajaduse korral veel ülaindeksi 0, näiteks u^0 . Koormuse q positiivne suund langeb kokku z -telje positiivse suunaga.

Avaldame algul plaadi mingi punkti siirded u ja v plaadi keskpinna läbipainde w^0 kaudu. Kuna aga pikenev z -telje suunas on teisejärgulise tähtsusega suurus, võime plaadi mingi punkti läbipainde lugeda võrdseks plaadi keskpinna vastava punkti läbipaindega, s. t. $w(x, y, z) = w^0(x, y)$. Seega võime edaspidi plaadi läbipainde juures indekssist loobuda.

Edasi leiame näiteks siirete u ja w vahelise seose. Selleks vaatleme plaadi keskpinna normaalil mn (joon. 10. 4) asetsevat punkti A , mis asub plaadi keskpinnast kaugusel z , xz -tasandil (joon. 10. 5).

Vastavalt kolmandale hüpoteesile saab plaadi keskpinnas asetsev punkt B liikuda ainult z -telje sihis, seega



JOON 10. 5

tema koordinaadid x ja y ei muutu: $u^0 = v^0 = 0$. Pöördugu plaadi keskpind punktis B nurga α võrra. Sama nurga võrra pöörduvad sirgete normaalide hüpoteesi põhjal ka sirglõik mn . Seega

$$u = -z\alpha \quad (10.1)$$

Miinusmärk on tingitud asjaolust, et punkt A liigub x -telje negatiivses suunas.

Pöördenurkade väiksuse tõttu võime nurga α asendada tema tangensiga:

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Siirde u avaldiseks kujuneb

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

Analoogilise avaldise saame siirde v jaoks. Seega siirde u ja v avalduvad plaadi läbipainde w kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (10.2)$$

Seoste (10.2) saamiseks kasutasime kolmest jääkade õhukeste plaatide paindeteooria põhihüpoteesist ära kaks.

Edasi avaldame läbipainde w kaudu suhtelised deformatsioonid ε_x , ε_y ja γ_{xy} . Asendades avaldised (10.2) *Cauchy* võrrandesse (II) (lk. 293)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

saamegi otsitavad avaldised

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Ulejäänud deformatsioonikomponendid ϵ_z , γ_{yz} ja γ_{zx} on teisejärgulise tähtsusega ega paku ülesande lahendamise seisukohalt erilist huvi. Pealegi ei saa neid võrrandeist (II) määrata, kuna kasutatavad hüpoteesid ei ütle, kuidas muutub läbipaindefunktsioon w olenevalt koordinaadist z . Sellepärast leiame vastavad pinged σ_z , τ_{yz} ja τ_{zx} tasakaalutingimustest

10.22 Plaadi läbipainde ja pingete vahelised seosed

Vastavalt teisele hüpoteesile võrduvad plaadi üksikute kihtide vahel tekkivad normaalpinged nulliga:

$$\sigma_z = 0$$

Seega keskpinnaga paralleelsed kihid on tasandpinguses ja Hooke'i seadust (III) võime nende kohta kasutada avaldises (8.13) toodud kujul

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

Lahendades need võrrandid pingete suhtes, saame järgmised avaldised:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) \quad (10.4)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy}$$

Asendades võrrandesse (10.4) suhteliste deformatsioonide asemele avaldised (10.3) leiame, et pinged väljenduvad plaadi läbipainde kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Seega muutuvad niihästi normaalpinged σ_x ja σ_y kui ka tangentsiaalpinged τ_{xy} plaadi keskpinna normaali sihis lineaarselt. Plaadi keskpinnas võrduvad nad nulliga ja on maksimaalse väärtusega plaadi välispindadel.

Pingekomponentide avaldiste (10.5) tuletamisel kasutatakse ära plaatide paindeteooria põhihüpoteesid ja lineaarse elastsusteooria põhivõrrandite II ja III (lk. 293) grupi. Puuduvad veel avaldised pingekomponentide σ_z , τ_{yz} ja τ_{zx} jaoks ja seos plaadi elastse pinna ω ning koormuse q vahel.

Niihästi puuduvate paindepingete avaldised kui ka elastse pinna ja koormuse vahelise seose võib saada tasakaaluvõrrandite (lineaarse elastsusteooria põhivõrrandite I grupi) integreerimisel järgmistel ääretingimustel:

kui $x = h/2$, siis $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

kui $x = -h/2$, siis $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ja $\sigma_z = -q$

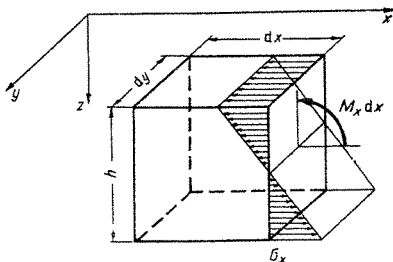
Käesolevas raamatus läheme aga veidi teist teed. Selleks, et saada täielikku analoogiat plaatide ja talade paindeteooria vahel, võtame pingete asemel kasutusele sisejõud — painde- ning väändemomendid ja põikjõud — ja elementaarse risttahuka tasakaalu asemel vaatleme säärase elemendi tasakaalu, mille kõrgus võrdub plaadi paksusega h . Säärane käsitlusviis on kujunenud traditsiooniliseks ning seetõttu tuuakse ka plaatide arvutamiseks kasutatavates tabelites mitte pingete, vaid paindemomentide ja põikjõudude avaldised.

10.23 Painde- ja väändemomendid

Erinevalt taladest mõistetakse plaatide juures painde- või väändemomendi all mitte sisejõudu kogu plaadi laiuse kohta, vaid ainult plaadi laiuse ühiku kohta, s. t. see, mida nimetame momendiks, on õigupoolest momendi intensiivsus.

Nagu enamikus kirjanduses, mis käsitleb plaatide paindeteooriat, tähistab siin M_x momenti, mille annavad pinged σ_x , ja M_y momenti, mille annavad pinged σ_y . Paindemomendi M_x jaoks saame järgmise avaldise (joon. 10.6)

$$dy \cdot M_x = dy \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz$$



JOON 10 6

kust

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \quad (10.6)$$

Paigutades σ_x asemele esimese avaldistest (10 5), saame:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz$$

kust pärast integreerimist, pidades silmas, et läbipaine w ei sõltu koordinaadist z ,

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (10.7)$$

Analoogiliselt võime leida paindemomendi M_y .

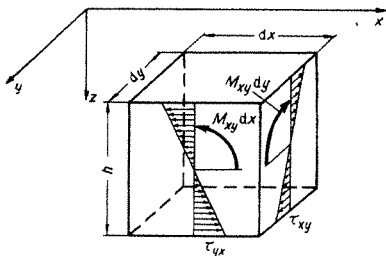
Tangentsiaalpinged $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ annavad väändmomendi M_{xy} (joon. 10.7):

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10.8)$$

Võttes kasutusele tähistuse

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = D \quad (10.9)$$

võime avaldised painde- ja väändmomentide jaoks välja kirjutada lõplikult järgmisel kujul:



JOON. 10 7

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}
 \tag{10. 10}$$

Suurust D nimetatakse silindriliseks paindejäikuseks ja ta võrdub plaadi redutseeritud elastsusmooduli $E/(1 - \mu^2)$ ja ühiklaiuse ristlõike inertsmomenti $h^3/12$ korrutisega.

Positiivsete paindemomentide puhul on tõmmatud plaadi alumised kiud. Positiivsete väändemomentide suunad on näidatud joonisel 10. 7.

Maksimaalsed pinged tekivad plaadi väliskihitides, kus $z = \pm h/2$. Nii näiteks

$$\max \sigma_x = \frac{Eh}{2(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

kust, kõrvutades paindemomentide avaldisega (10. 7), leiame:

$$\max \sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}
 \tag{10. 11}$$

Analoogiliselt

$$\max \sigma_y = \frac{6M_y}{h^2}; \quad \max \tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{h^2}
 \tag{10. 12}$$

Teisiti võib öelda, et maksimaalsed pinged saame, kui vastava momendi jagame vastupanumomendiga W , mis leitakse valemiga

$$W = \frac{h^2}{6} \quad (10.13)$$

s. t. opereerime säärase ristlõike vastupanumomendiga, mille kõrgus on h ja laius l .

Pärast maksimaalsete pingete leidmist tuleb määrata arvutuslik pinge vastavalt kasutatavale tugevusteooriale.

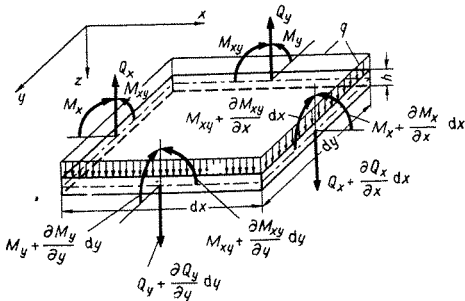
10.24 Tasakaalutingimused. Põikjõud

Eraldame plaadi elemendi külgedega dx ja dy ning kõrgusega h (joon. 10.8) ning kirjutame selle kohta välja tasakaalutingimused. Vaadeldavale elemendile mõjuvad:

- koormus intensiivsusega q ,
- paindemomendid M_x ja M_y ning väändemoment M_{xy} ,
- põikjõud

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (10.14)$$

Tasakaaluvõrrandite koostamisel peab arvestama, et sisejõud on koordinaatide funktsioonid ja erinevad plaadi elemendi vastaskülgedel teineteisest lõpmata väikese suu-



JOON 10.8

ruse võrra, samuti nagu elastsusteooria tasakaaluvõrrandite tuletamisel. Muidugi muutub plaadi elemendi ulatusel ka väliskoormuse intensiivsus, kuid selle muutuse arvessevõtmine ei osutu vajalikuks.

Võrrutades nulliga momentide summa y -telje suhtes saame, hüljates kõrgemat järku väikesed suurused,

$$\begin{aligned}
 -M_x dy + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_{xy} dx + \\
 + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - Q_x dy dx = 0
 \end{aligned}
 \tag{10.15, a}$$

Momentide summa x -telje suhtes annab:

$$\begin{aligned}
 -M_y dx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dy + \\
 + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx dy = 0
 \end{aligned}
 \tag{10.15, b}$$

ja tingimus, et jõudude projektsioonide summa z -teljele võrdub nulliga,

$$\begin{aligned}
 -Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_x dy + \\
 + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + q dx dy = 0
 \end{aligned}
 \tag{10.15, c}$$

Ülejäänud kolm tasakaalutingimust on rahuldatud samaselt: $0 \equiv 0$.

Pärast ühesuguste liikmete koondamist ja jagamist suurusega $dx dy$ saame võrrandeist (10.15) järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\
 \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \\
 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0
 \end{aligned}
 \tag{10.16}$$

Ei ole raske märgata võrrandite (10.16) analoogiat talade paindeteooriast tuntud teoreemidega: põikjõud on paindemomendi tuletis ja koormuse intensiivsus on põikjõu tuletis.

Võrrandeist (10.16) võib elimineerida põikjõu. Selleks diferentseerime esimest võrrandit x järgi, teist võrrandit y järgi ja liidame kolmanda võrrandiga. Saame:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (10.17)$$

Asetame saadud võrrandisse M_x , M_y ja M_{xy} avaldised võrrandeist (10.10). Saame:

$$-D \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + q = 0 \quad (10.18)$$

kust leiame pärast taandamist plaadi keskpinna diferentsiaalvõrrandi lõplikul kujul:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (10.19)$$

Saadud võrrandi võib lühidalt kirjutada järgmiselt:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$$

(biharmoniline võrrand).

Seega ülesanne plaadi paindest viib diferentsiaalvõrrandi (10.19) lahendi otsimisele. Kui meil on juba w jaoks olemas säärane avaldis, mis rahuldab võrrandit (10.19) ja ääretingimusi, võime võrrandeist (10.10) leida painde- ja väändemomendid. Jagades need vastupanumomendiga saame maksimaalsed pinged mingis plaadi punktis, mis on määratud koordinaatidega x ja y .

Põikjõud Q_x ja Q_y leiame tasakaaluvõrrandeist (10.16):

$$Q_x = \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1-\mu) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

millest pärast taandamist

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (10.20, a)$$

Analoogiliselt

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (10.20, b)$$

Põikjõududele Q_x ja Q_y vastavate tangentsiaalpingete τ_{xz} ja τ_{yz} jaotus on samuti nagu talade paindel paraboolne:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) = -\frac{3D}{2h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ \tau_{yz} &= \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) = -\frac{3D}{2h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{aligned} \quad (10.21)$$

Need pinged on maksimaalsed plaadi keskpinnas, kus $z = 0$.

Lõpuks, pingete σ_z avaldiseks kujuneb:

$$\sigma_z = -D \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{z}{h} + 2 \frac{z^3}{h^3} \right) \nabla^2 w \quad (10.22)$$

Soovitame lugejale kontrollida, et pingete avaldised (10.5), (10.21) ja (10.22) rahuldavad elastsusteooria tasakaaluvõrrandeid (I) (lk. 293).

Deformatsiooni pidevuse tingimusi (7.57) nad aga ei rahulda. Seetõttu ongi siin käsitletud jäikade plaatide paindeteeoria ainult ligikaudne ja rakendatav vaid teatavais piirides.

10.25 Ääretingimused

Vaatleme algul ääretingimusi riskülikulise plaadi jaoks. Oletame, et koordinaatteljed x ja y on paralleelsed plaadi servadega. Kirjutame välja ääretingimused mitmesuguste toetusviiside juures serva $x = a$ jaoks; tulemuste laiendamine teistele servadele ei valmista raskusi.

1. **Järgalt kinnitatud serv.** Serva läbipaindumine võrdub nulliga, samuti võrdub nulliga tema pööre. Need tingimused formuleerime järgmiselt:

$$(w)_{x=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (10.23)$$

2. **Vabalt toetatud serv.** Kui plaadi serv vabalt toetub jäigale kontuurile, siis tema läbivajumine võrdub nulliga. Nulliga võrduvad ka pinged σ_x , seega peab paindemoment M_x serval võrduma nulliga. Kirjutades paindemomendi M_x asemele tema avaldise (10.10) ja taandas konstantse kordajaga D , saame vabalt toetatud serva jaoks järgmised ääritingimused:

$$(w)_{x=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (10.24)$$

Kuna plaadi serv on sirge, siis tuletis $\partial^2 w / \partial y^2$ võrdub nulliga, ja ääritingimused võime ümber kirjutada lihtsustatud kujul:

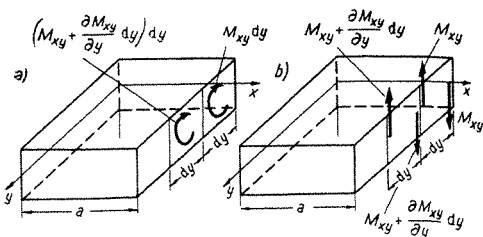
$$(w)_{x=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (10.25)$$

3. **Jõududevaba serv.** Loomulik on oletada, et säärasel serval võrduvad nulliga paindemoment M_x , väändmoment M_{xy} ja põikjõud Q_x . Teisest küljest aga on kolm ääritingimust liiga palju — muudel juhtudel piisas kahest.

Tekkinud vastuolust on võimalik üle saada *Saint-Venant*'i printsiibi alusel, asendades väändmomenti moodustavad tangentsiaalpingete paarid τ_{xy} tangentsiaalpingete paaridega τ_{xz} , mis annavad sama väändmomendi; teisest küljest aga võib täiendavatele tangentsiaalpingetele τ_{xz} vastavat sisejõudu vaadelda nagu täiendavat põikjõudu.

Jagame plaadi serva $x = a$ osadeks, mille pikkus on dy . Olgu väändmomendi intensiivsus selle serva mingis punktis M_{xy} ; ühele säärasele osakesele mõjub siis väändmoment $M_{xy} dy$ (joon. 10.9, a). Naaberosakesele mõjub väändmoment $\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dy$.

Oletame nüüd, et need väändmomendid on horisontaalsete tangentsiaalpingete paaride τ_{xy} asemel põhjustatud vertikaalsetest jõududepaaridest δ laga dy . Vastavad jõud on seega M_{xy} , resp. $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$. Jooniselt



JOON 10 9

10.9, b selgub, et neid jõude võib vaadelda nagu täiendavat põikjõudu, mille intensiivsus

$$Q_x' = \frac{\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Plaadi serval tekkev toereaktsioon (õigemini, selle intensiivsus) võrdub põhilise ja täiendava põikjõu summaga:

$$R_x = Q_x + Q_x'$$

Märkide reegel toereaktsioonide jaoks on siin sama, mis põikjõudude ja vertikaalsete tangentsiaalpingete jaoks (positiivsed reaktsioonid mõjuvad positiivsetel pindadel z-telje suunas).

Edasi võime opereerida juba kahe ääritingimusega:

$$(M_x)_{x=a} = 0; \quad (R_x)_{x=a} = 0 \quad (10.26)$$

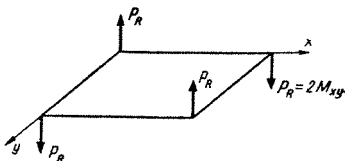
Toereaktsioon

$$R_x = Q_x + Q_x' = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Kasutades avaldisi (10.10) ja (10.20), saame siit toereaktsiooni avaldada paigutise w kaudu:

$$R_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (10.27, a)$$

JOON 10.10



Analoogiliselt

$$R_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (10.27, b)$$

Nüüd võime, kasutades ka paindemomentide avaldise (10.10) M_x jaoks, ääritingimused (10.26) lõplikult välja kirjutada järgmiselt:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (10.28)$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

Väändemomendi ümbermoodustamisel, nagu seda eespool tegime, saab mitte üksnes põikjõu Q_x' , vaid ka koondatud jõud P_x plaadi nurkades (joon. 10.10).

Nende jõudude suurus

$$P_x = \frac{M_{xy} dy}{dy} = M_{xy}$$

Väändemomendid, mis mõjuvad naaberkülgedel, mille normaalks on y -telg, põhjustavad samuti plaadi nurkades koondatud jõud $P_y = M_{xy}$. Seega kokku mõjuvad plaadi nurkades koondatud jõud (reaktsioonid)

$$P_R = 2M_{xy} = -2D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10.29)$$

Nende jõudude positiivsed suunad on näidatud joonisel 10.10. Nad tekivad mitte üksnes jõududevaba serva olemasolu korral, vaid ka vabalt toetatud plaadi nurkades ja on reeglina suunatud allapoole, s. t. plaadi nurkadel on tendents üles tõusta.

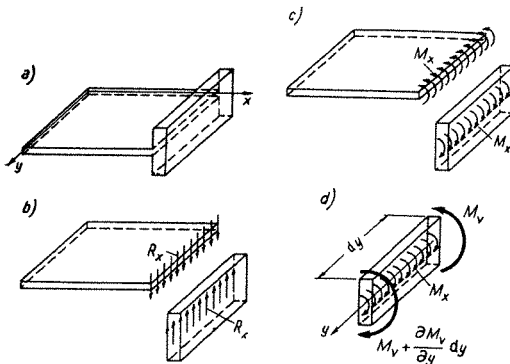
4. Plaadi serv on ühendatud elastse talaga selle neutraaljoonel (joon. 10.11, a). Sel juhul on talale mõjuvateks koormusteks plaadi toereaktsioonid, mis mõjuvad põikkoormusena, ja paindemomendid plaadi serval, mis mõjuvad jaotatud pöördemomendina. Siinjuures tuleb pöörata tähelepanu märkidele.

Olgu tala paindejäikus B ja väändejäikus C . Tingimusest, et plaadi toereaktsioonid võrduvad tala põikkoormusega, saame märke arvestades:

$$-D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = -B \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=a} \quad (10.30)$$

Leiame teise ääritingimuse.

Tähistame talas mõjuva väändemomendi M_v (joon. 10.11, d).



JOON 10 11

Võrrutades nulliga momentide summa y -telje suhtes, saame:

$$\frac{dM_v}{dy} dy = -M_x dy$$

Kuna aga väändenurga muutus

$$d\psi = \frac{M_v dy}{C}$$

siis

$$C \frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{dM_v}{dy} = -M_x \quad (10.31)$$

Asendades avaldisse (10.31) ψ asemele dw/dx ja M_x asemele tema avaldise (10.10), saamegi teise ääritingimuse

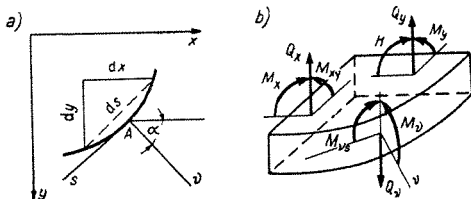
$$C \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \quad (10.32)$$

Vastasserval, s. o. serval, mille välisnormaali suund on vastupidine x -telje suunaga, muutuvad kolmandate tuletiste märgid tingimustes (10.30) ja (10.32) vastupidis- teks.

Lahendus muutub tunduvalt keerulisemaks, kui plaat on ühendatud talaga mitte selle neutraaljoonel, vaid näiteks tala ülemises või alumises pinnas, nagu see inseneri- praktikas tavaliselt ongi. Sel juhul hakkab osa plaadist tööle tala võona ja pinged tekivad ka plaadi keskpinnas.

Vaatleme veel ääritingimuste koostamist kõverjoone- lise või koordinaattelgede suhtes kaldu asetseva kontuuri korral.

Olgu mingis kontuuri punktis A normaali siht v ja puutuja siht s (joon. 10.12, a).



JOON. 10.12

Painde- ja väändemendid punktis A võib avaldada järgmiselt:

$$M_v = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_v dz, \quad M_{vs} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{vs} dz \quad (10.33)$$

Arvestades pingekomponentide vahelisi seoseid (7.10) ja (7.11), võime avaldised (10.33) ümber kirjutada analoogiliselt.

$$M_v = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (10.34)$$

$$M_{vs} = M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (M_y - M_x) \sin \alpha \cos \alpha$$

Põikjõu Q_v leiame joonisel 10.12, b kujutatud elemendi tasakaalu tingimustest. Saame:

$$Q_v ds = Q_x dy + Q_y dx$$

kust

$$Q_v = Q_x \frac{dy}{ds} + Q_y \frac{dx}{ds} = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \quad (10.35)$$

Kui on leitud avaldised painde- ja väändemomentide, samuti ka põikjõudude jaoks kõverjoonelisel kontuuril, ei valmista raskusi koostada analoogiliselt eelnevaga avaldised, mida peab rahuldama funktsioon w plaadi kontuuril. Näiteks järgalt kinnitatud serva jaoks võime kirjutada:

$$w = 0, \quad \partial w / \partial v = 0 \quad (10.36)$$

Kuna tingimusest $w = 0$ järeldub, et $\partial w / \partial s = 0$, võib teise ääretingimuse asendada nõudega, et tuletis mingis suvalises sihis, mis ei lange kokku kontuuri puutujaga, võrduks nulliga, näiteks $\partial w / \partial x = 0$ või $\partial w / \partial y = 0$.

Vabalt toetatud serva puhul

$$w = 0; \quad M_v = 0 \quad (10.37)$$

Viimane tingimus, avaldatuna läbipainde w kaudu, võtab vastavalt avaldistele (10.34) ja (10.10) järgmise kuju:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\cos^2 \alpha + \mu \sin^2 \alpha) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\sin^2 \alpha + \mu \cos^2 \alpha) + \\ & + 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (10.38)$$

10.3 ÜHTLASELT JAOTATUD KOORMUSEGA PLAATIDE PÄINE LIHTSAMATEL JUHTUDEL

10.31 Silindriline paine

Kui plaadi kontuuriks on pikk ristkülik ja koormus ei muutu pikkade külgede sihis, siis plaadi elastne pind plaadi keskosas (s. t. lühikestest külgedest eemal) kujutab endast silindrilist pinda, mille moodustaja on paralleelne pikkade külgedega. Seda nimetatakse silindriliseks paindeks. Silindrilise painde korral saab plaadi pinda avaldada ainult ühe muutuja funktsioonina.

Olgu plaat (joon. 10.13) y -telje suhtes välja venitatud ja koormatud näiteks ühtlaselt jaotatud koormusega. Sel juhul võib plaadi elastset pinda vaadelda ainult muutuja x funktsioonina, välja arvatud viirutatud osad lühikeste külgede ligidal. Plaadi elastse pinna võrrand (10.19) saab kuju

$$Dw^{IV}(x) = q \quad (10.39)$$

mis on sarnane tugevusõpetuse kursusest tuttava tala elastse joone võrrandiga

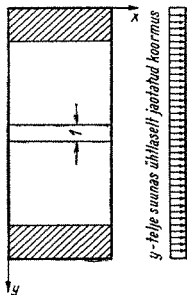
$$EIw^{IV}(x) = q$$

Kuna plaadi koormuse intensiivsus q on antud pinnauhiku kohta, peame võrdluseks võtma ühiklausega tala. Plaadi paindejäikus $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$; ühiklausega tala paindejäikus $EI = Eh^3/12$. Seega plaadi paindejäikus on suurem ja läbipaine väiksem kui vastaval talal.

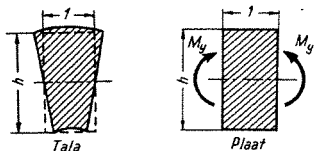
Paindemomendid plaadis on vastavalt avaldistele (9.10):

$$\begin{aligned} M_x &= -Dw'' \\ M_y &= -\mu Dw'' = \mu M_x \end{aligned} \quad (10.40)$$

Seega paindemomendid M_x leitakse täpselt samuti nagu vastavas riba-talal (paindejäikus taandub välja), näiteks vabalt toetatud servadega plaadi korral on maksimaalse paindemomendi väärtuseks $ql^2/8$ jne. Erinevalt talast



JOON 10.13

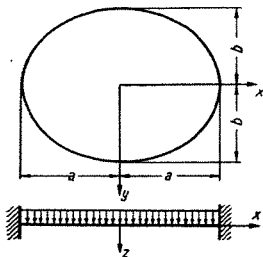


JOON. 10 14

tekivad aga plaadis veel paindemomendid M_y . Talades neid paindemomente ei teki, kuna tala ristlõige saab vabalt deformeeruda — ülemised surutud kiud laienevad, alumised kiud aga ahenevad. Plaadis aga takistavad säärast deformatsiooni naaberribad (joon. 10. 14). Selle tõttu teki- vadi paindemomendid M_y ja neile vastavad pinged $\sigma_y = M_y \cdot z/I = 12M_y z/h^3$. Neid pingeid tuleb arvestada näiteks raudbetoonplaatide sarrustamisel — plaat tuleb sarrustada ka pikisuunas

10.32 Elliptiline jäigalt kinnitatud ühtlaselt koormatud plaat

See on üks väheseid juhuseid, kus ühtlaselt koormatud plaadi jaoks on võimalik leida täpne lahend, seepärast vaatleme seda näitena.



JOON 10. 15

Paigutades teljed nii, nagu joonisel 10.15 näidatud, on plaadi kontuuri võrrandiks

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a)$$

Võtame plaadi elastse pinna avaldiseks

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \quad (b)$$

kus w_0 on plaadi läbipaine koordinaatide alguses. Kui võrrand (b) on tõesti selle plaadi elastse pinna võrrandiks, peab ta rahuldama plaadi diferentsiaalvõrrandit (10.19):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

ja ääritingimusi kontuuril (10.36)

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$$

Esimene ääritingimustest on ilmselt rahuldatud. On samuti kerge näidata, et serval esimesed tuletised nii x kui ka y suhtes võrduvad nulliga, seega esimene tuletis suvalises sihis võrdub nulliga. Näiteks tuletis x järgi on

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{2x}{a^2} \quad (c)$$

mis serval muutub nulliks, kuna seal $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Asetame läbipainde avaldise (b) biharmoonilisse võrrandisse (10.19). Saame:

$$w_0 \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) = \frac{q}{D} \quad (d)$$

Seega läbipaine plaadi keskel on

$$w_0 = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)} \quad (e)$$

ja plaadi elastse pinna võrrand (b) saab järgmise kuju:

$$w = \frac{q}{D} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2}{\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)} \quad (f)$$

Kuna saadud avaldis rahuldab biharmoonilist võrrandit ja ääretingimusi, on ta täpseks lahendiks.

Edasi võime leida juba kõik meid huvitavad suurused (paindemomendid, põikjõud, pinged). Näiteks paindemomendi M_x saame avaldisest (10.10):

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{qa^2}{6 + 4 \frac{a^2}{b^2} + 6 \frac{a^4}{b^4}} \left[\left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \frac{a^2}{b^2} \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right) \right] \end{aligned}$$

ja paindemoment M_y on analoogiliselt:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{qb^2}{6 + 4 \frac{a^2}{b^2} + 6 \frac{a^4}{b^4}} \left[\left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \frac{b^2}{a^2} \left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Plaadi keskel, kus $x = y = 0$,

$$M_x = \frac{qa^2 \left(1 + \mu \frac{a^2}{b^2} \right)}{6 + 4 \frac{a^2}{b^2} + 6 \frac{a^4}{b^4}}; \quad M_y = \frac{qb^2 \left(1 + \mu \frac{b^2}{a^2} \right)}{6 + 4 \frac{a^2}{b^2} + 6 \frac{a^4}{b^4}} \quad (g)$$

Maksimaalse kinnitusmomendi saame lühikeste pooltelgede otstel, s.t. kui $a > b$, siis punktides $x = 0$, $y = \pm b$:

$$\max M_k = - \frac{2qb^2}{6 + 4 \frac{a^2}{b^2} + 6 \frac{a^4}{b^4}} \quad (h)$$

Erijuhul, kui $a = b = r$, s. t. kui on tegemist ringikujulise plaadiga, saame maksimaalse avamomendi väärtuseks

$$\max M_0 = \frac{qr^2}{16} (1 + \mu) \quad (i)$$

ja maksimaalse kinnitusmomendi väärtuseks

$$\max M_k = - \frac{qr^2}{8} \quad (k)$$

Jagades saadud paindemomendid vastupanumomendiga $W = h^2/b$, saame pinged äärmistes kihtides.

10.4 RISTKULIKULISTE PLAATIDE ELASTSE PINNA VÖRRANDI LEIDMINE

10.41 Lahendus kahekordsetes trigonomeetrilistes ridades (Navier' meetod)

Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi (10.19) lahendamiseks tuleb üldjuhul kasutada mingit ligikaudset meetodit. Sääraseid on olemas palju. Neist ajalooliselt vanimaks on lahendus kahekordsete trigonomeetriliste ridade abil; ka on ta põhimõttelt võrdlemisi lihtne ja ülevaatlik.

Olgu plaat kõigil servadel vabalt toetatud ja koormatud suvalise koormusega $q(x, y)$ (joon. 10.16). Vabalt toetatud plaadi elastse pinna võrrandit võib otsida järgmise kahekordse trigonomeetrilise rea kujul:

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10.41)$$

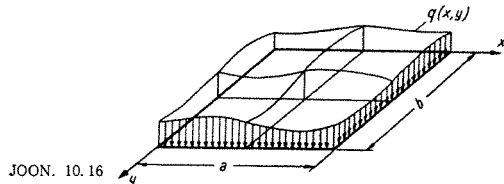
Rea (10.41) iga liige rahuldab ilmselt homogeenseid ääritingimusi (10.25); seega rahuldab neid ka rida tervikuna

Arendame algul plaadi koormuse x ja y järgi *Fourier'* ritta:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10.42)$$

kus tegurid B_{mn} leitakse valemist

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (10.43)$$



Paigutades avaldised (10.41) ja (10.42) plaadi painde diferentsiaalvõrrandisse (10.19), saame:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10.44)$$

Kuna võrrand (10.44) peab olema rahuldatud suvalise m ja n korral, siis

$$C_{mn} = \frac{B_{mn}}{\pi^4 D [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad (10.45)$$

ja plaadi elastse pinnava võrrandiks on

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10.46)$$

Avaldise (10.46) rakendamise näitena vaatleme juhtu, kus plaat on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega, mille intensiivsus on q . Valemist (10.43)

$$B_{mn} = \frac{4q}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (a)$$

Kuna

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \begin{cases} 2a/m\pi, & \text{kui } m = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{kui } m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (b)$$

siis

$$B_{mn} = \frac{4q}{ab} \frac{2a}{m\pi} \frac{2b}{n\pi} = \frac{16q}{\pi^2 mn} \quad (c)$$

kus m ja n on paaritud arvud.

Asendades (c) avaldise (10.46), saame:

$$w = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (d)$$

Tähistades plaadi külgede suhte $b/a = \beta$, võime valemile (d) anda arvutuseks käepärasema kuju

$$\omega = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn[m^2 + (n/\beta)^2]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (e)$$

Plaadi elastse pinna võrrandist võime edasi leida juba kõik muud vajalikud suurused — painde- ja väändemomendid, põikjõud, toereaktsioonid jne. Näiteks paindemomentide avaldised kujunevad vastavalt avaldistele (10. 10) järgmisteks:

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{m^2 + \mu(n/\beta)^2}{mn[m^2 + (n/\beta)^2]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\mu m^2 + (n/\beta)^2}{mn[m^2 + (n/\beta)^2]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (f)$$

Väändemomendid

$$M_{xy} = - \frac{16(1 - \mu)qa^2}{\pi^4 \beta} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{[m^2 + (n/\beta)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (g)$$

põikjõud avaldistest (10. 20)

$$Q_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n[m^2 + (n/\beta)^2]^2} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (h)$$

$$Q_y = \frac{16qa}{\pi^3\beta} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m[m^2 + (n/\beta)^2]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

ja toereaktsioonid R_x küljel $x=0$ vastavalt avaldisele (10.27, a)

$$R_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{m^2 + (2-\mu)(n/\beta)^2}{n[m^2 + (n/\beta)^2]^2} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (i)$$

Nagu avaldistest (e) — (i) näha, koondub läbipainde määramiseks kasutatav rida väga hästi; momentide jaoks on koonduvus juba aeglasem, veel halvemaks muutub ta põikjõudude ja toereaktsioonide jaoks.

Näide 10.1. Olgu plaadi kulgede suhe $\beta = 1$ ja *Poissoni* tegur $\mu = 0,3$. Leiame läbipainde, paindemomendid jne. mõningates iseloomustavates punktides, piirdudes ridade (e) — (i) nelja esimese liikmega.

Läbipaine plaadi keskel punktis ($x = a/2$, $y = b/2$)

$$w = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \left(\frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 2^2} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 10^2} - \frac{1}{3 \cdot 1 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 18^2} \right)$$

kust, arvestades et $D = Eh^3/12(1 - 0,3^2)$,

$$w = 0,0443qa^4/Eh^3$$

Paindemomendid plaadi keskel (mis on uhtlasi maksimaalseteks paindemomentideks)

$$M_x = M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \left(\frac{1^2 + 0,3 \cdot 1^2}{1 \cdot 1 \cdot 2^2} - \frac{1^2 + 0,3 \cdot 3^2}{1 \cdot 3 \cdot 10^2} - \frac{3^2 \cdot 0,3 \cdot 1^2}{3 \cdot 1 \cdot 10^2} + \frac{3^2 + 0,3 \cdot 3^2}{3 \cdot 3 \cdot 18^2} \right) = 0,0470qa^2$$

Kuna paindemomendi märk on positiivne, on tõmmatud plaadi alumised kiud.

Väändement plaadi nurgas ($x = 0$, $y = 0$)

$$M_{xy} = -\frac{16(1 - 0,3)qa^2}{\pi^4} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{18^2} \right) = -0,0315qa^2$$

Plaadi nurgas tekkiv koondatud toereaktsioon $P_R = 2H = -0,063qa^2$. Vastavalt joonisele 10.10 on ta suunatud allapoole, s. t. plaadi nurk püüab ules tõusta

Põikjõud külje $x = 0$ keskel

$$Q_x = \frac{16qa}{\pi^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 10} + \frac{1}{1 \cdot 10} - \frac{1}{3 \cdot 18} \right) = 0,28qa$$

ja toereaktsioon samas punktis

$$R_x = \frac{16qa}{\pi^4} \left(\frac{1^2 + 1,7 \cdot 1^2}{1 \cdot 2^2} - \frac{1^2 + 1,7 \cdot 3^2}{3 \cdot 10^2} + \frac{3^2 + 1,7 \cdot 1^2}{1 \cdot 10^2} - \frac{3^2 + 1,7 \cdot 3^2}{3 \cdot 18^2} \right) = 0,36qa$$

Vastavalt markide reeglile mõjub positiivne põikjõud, aga samuti ka toereaktsioon plaadi serval, mille välisnormaali suund langeb kokku x -telje negatiivse suunaga, z -telje negatiivses suunas, s. o. ülles (joon. 10. 8).

Samasugused arvutused võib läbi viia ka teiste β väärtuste jaoks. Tulemused erinevad ainult numbriliste koordinaatide poolest. Seega võib plaatide arvutamiseks kasutatavatele valemitele anda säärase kuju (on oletatud, et $a < b$):

lābipaine plaadi keskel

$$w = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (a)$$

paindemomendid plaadi keskel

$$M_x = k_2 qa^2; \quad M_y = k_3 qa^2 \quad (b)$$

põikjõud ja toereaktsioonid lühema külje keskel

$$Q_y = k_5 qa; \quad R_y = k_7 qa \quad (c)$$

põikjõud ja toereaktsioonid pikema külje keskel

$$Q_x = k_4 qa; \quad R_x = k_6 qa \quad (d)$$

koondatud reaktsioonid plaadi nurkades

$$P_R = k_8 qab \quad (e)$$

Tegurite $k_1 \dots k_8$ vārtused sõltuvalt plaadi külgede suhtest b/a on toodud lisa tabelis III. 1, kusjuures tabeli koostamisel on kasutatud suurema liikmete arvuga ridasid. Võrdlus tabeli andmetega näitab, et neljast liikmest piisab lābipainde ja paindemomentide määramiseks (lābipaine saadakse täpselt, paindemomendid veega alla 2%), kuid mitte põikjõudude ega toereaktsioonide jaoks (viga 15... 25%).

Sāärased tabelid on koostatud (teiste meetoditega) ka teiste standardsete koormusjuhtude (näiteks hūdrostaa-

tilise) ja kinnitustingimuste jaoks. Mõned neist on loodud käesoleva raamatu lisas. Palju tabeleid erinevate koormusjuhtude ja ääretingimuste jaoks sisaldavad teosed [2], [7], [10], [21].

Näide 10.2. Vabalt toetatud ristkülikuline plaat, mille külgede pikkused $a = 50$ cm ja $b = 75$ cm, on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega, mille intensiivsus $q_0 = 1,2$ kG/cm². Plaadi materjal on teras, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², $\mu = 0,3$. Plaadi paksus $h = 1$ cm. Määrata plaadi maksimaalne läbipaine ja arvutuslikud pinged IV tugevusteooria järgi.

Plaadi külgede suhe $b/a = 1,5$. Sellele vastavalt leiame tabelist

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,0843 \\ k_2 &= 0,0812 \\ k_3 &= 0,0500 \end{aligned}$$

Plaadi maksimaalne läbipaine (plaadi keskel)

$$\max w = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} = 0,0843 \frac{1,2 \cdot 50^4}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1^3} = 0,30 \text{ cm}$$

Kuna $\max w/h = 0,30 < 1/3$, siis on plaadi arvutamine jäikade plaatide teooria järgi õigustatud.

Maksimaalsed paindemomendid (plaadi keskel)

$$\begin{aligned} M_x &= k_2 qa^2 = 0,0812 \cdot 1,2 \cdot 50^2 = 244 \text{ kGcm/cm} \\ M_y &= k_3 qa^2 = 0,0500 \cdot 1,2 \cdot 50^2 = 150 \text{ kGcm/cm} \end{aligned}$$

Neile vastavad normaalpinged plaadi pindmistes kihtides, mis on ühtlasi ka peapingeteks, kuna plaadi keskel sümmeetrია tõttu $M_{xy} = 0$ ja seega ka $\tau_{xy} = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 6M_x/h^2 = 1464 \text{ kG/cm}^2 \\ \sigma_y &= 6M_y/h^2 = 900 \text{ kG/cm}^2 \end{aligned}$$

Arvutuslik pinge vastavalt IV tugevusteooriale

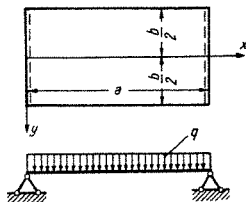
$$\begin{aligned} \sigma_{\text{arv}} &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y} \\ &= \sqrt{900^2 + 1464^2 - 900 \cdot 1464} = 1280 \text{ kG/cm}^2 \end{aligned}$$

10.42 Lahendus ühekordsetes trigonomeetrilistes ridade (Maurice Lévy meetod)

Meetod on kasutatav, kui plaat on vähemalt kahel vastasserval vabalt toetatud.

Olgu plaat servadel $x = 0$ ja $x = a$ vabalt toetatud (joon. 10.17). Toetingimused servadel $y = +b/2$ ja $y = -b/2$ on suvalised.

JOON. 10.17



Plaadi elastset pinda aproksimeerime reaga

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (10.47)$$

Selle rea iga liige rahuldab ilmselt ääritingimusi (10.25) servadel $x=0$ ja $x=a$.

Samuti nagu *Navier'* meetodi juures on ka siin vaja plaadi koormus arendada eelnevalt *Fourier'* ritta, kuid ainult muutuja x järgi:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (10.48)$$

kus

$$K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (10.49)$$

Paigutades avaldised (10.47) ning (10.48) diferentsiaalvõrrandisse (10.19) ja grupeerides ühesuguste kordajatega $\sin \frac{m\pi x}{a}$ liikmed, saame funktsioonide $Y_m(y)$ määramiseks võrrandid

$$\alpha_m^4 Y_m - 2\alpha_m^2 Y_m'' + Y_m^{IV} = K_m/D \quad (10.50)$$

kus

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad (10.51)$$

Võrrandid (10.50) on lineaarsed konstantsete kordajatega mittehomoogeensed harilikud diferentsiaalvõrrandid. Säärase võrrandi lahend koosneb vastava homogeense võrrandi

$$\alpha_m^4 Y_m - 2\alpha_m^2 Y_m'' + Y_m^{IV} = 0 \quad (10.52)$$

lahendist $Y_{m(0)}$, ja erilahendist $Y_{m(e)}$:

$$Y_m = Y_{m(0)} + Y_{m(e)} \quad (10.53)$$

Võrrandiga (10.52) analoogilise homogeense võrrandi lahendi leidmist on käsitletud punktis 8.6, kus leiti, et säärase võrrandi lahendi võib avaldada järgmisel kujul:

$$Y_{m(0)} = C_{m1} \operatorname{sh} \alpha_m y + C_{m2} \operatorname{ch} \alpha_m y + C_{m3} y \operatorname{sh} \alpha_m y + C_{m4} y \operatorname{ch} \alpha_m y \quad (10.54)$$

Erilahend leitakse vastavalt konkreetsele koormusele. Lõpuks määratakse tegurid C_m , nii et oleksid rahuldatud ääritingimused servadel $y = +b/2$ ja $y = -b/2$.

Vaatleme näitena juhtu, kus servad $y = \pm b/2$ on jäigalt kinnitatud ja plaadile mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega q .

Valemist (10.49)

$$K_m = \frac{2q}{a} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{4q}{m\pi} \quad (a)$$

kus $m = 1, 3, 5, \dots$

Kuna K_m on antud juhul konstantne suurus, mille tulest võrduvad nulliga, siis võrrandist (10.50)

$$\alpha_m^4 Y_{m(e)} = K_m/D$$

kust

$$Y_{m(e)} = \frac{K_m}{D\alpha_m^4} = \frac{4qa^4}{\pi^4 m^4 D} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (b)$$

Koormus ja ääritingimused on x -telje suhtes sümmeetrilised, seega ka plaadi elastne pind peab olema sümmeetriline x -telje suhtes. Sellepärast paaritute funktsioonide kordajad C_{m1} ja C_{m3} avaldises (10.54) võrduvad nulliga ja elastse pinna võrrand kujuneb järgmiseks:

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(C_{m2} \operatorname{ch} \alpha_m y + C_{m4} y \operatorname{sh} \alpha_m y + \frac{4qa^4}{\pi^4 m^4 D} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

Integreerimiskonstandid C_{m2} ja C_{m4} leiame ääritingimustest serval $y = +b/2$ või $y = -b/2$, kus

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (d)$$

Tähistame

$$u_m \frac{b}{2} = \frac{\pi m b}{2a} = u_m \quad (e)$$

Ääritingimused (d) annavad järgmise võrrandisüsteemi:

$$C_{m2} \operatorname{ch} u_m + C_{m3} \frac{b}{2} \operatorname{sh} u_m + \frac{4qa^4}{\pi^5 m^5 D} = 0$$

$$C_{m2} a_m \operatorname{sh} u_m + C_{m3} (\operatorname{sh} u_m + u_m \operatorname{ch} u_m) = 0 \quad (f)$$

kust pärast mõningaid ümbermoodustamisi

$$C_{m2} = - \frac{\operatorname{sh} u_m + u_m \operatorname{ch} u_m}{u_m + \operatorname{sh} u_m \operatorname{ch} u_m} \cdot \frac{4qa^4}{\pi^5 m^5 D}$$

$$C_{m3} = \frac{u_m \operatorname{sh} u_m}{u_m + \operatorname{sh} u_m \operatorname{ch} u_m} \cdot \frac{2}{b} \frac{4qa^4}{\pi^5 m^5 D} \quad (g)$$

Piirdudes rea esimese liikmega $m = 1$ ja jättes ära indeksi m , saame

$$u = \frac{\pi b}{2a} \quad (h)$$

ja

$$w \approx \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} u + u \operatorname{ch} u}{u + \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + \frac{u \operatorname{sh} u}{u + \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} \frac{2y}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (i)$$

Näide 10.3. Viime lahenduse lõpuni ruudukujulise plaadi jaoks Sel juhul $b = a$, $u = \pi/2 = 1,571$, $\operatorname{sh} u = 3,202$, $\operatorname{ch} u = 2,510$
Parast arvutuste läbiviimist saame

$$w = 0,0131 \frac{qa^4}{D} \left(1 - 0,850 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + 0,984 \frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a}$$

Paindemomentide leidmine valemite (10.10) järgi ei valmista raskusi.

Kui $\mu = 0,3$, saame plaadi keskpunkti läbipainde jaoks avaldise

$$w = \frac{0,0131 \cdot 12(1 - 0,3^2) qa^4}{Eh^3} (1 - 0,850) = 0,0215 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

Tabelist (III.3) leiame

$$w = 0,0214 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

Seega viga, mis tekkis sellest, et piirdusime ainult rea ühe liikmega, on arvutustapsuse piires.

Paindemomentide avaldised sisaldavad läbipainde teisi tuletisi $\partial^2 w / \partial x^2$ ja $\partial^2 w / \partial y^2$. Neist $\partial^2 w / \partial y^2$ saadakse samuti suure täpsusega; tuletise $\partial^2 w / \partial x^2$ täpsus on väiksem.

10.43 Kollokatsioonimeetod

Meetod on põhimõtteliselt lihtne ja küllaltki efektiivne, kui koormuse intensiivsus muutub sujuvalt. Ääritingimused võivad olla suvalised; edaspidi oletame, et nad on homogeenised (vabalt toetatud serv, jäigalt kinnitatud serv või jõududevaba serv).

Apraksimeerime plaadi elastset pinda avaldisega

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n C_{mn} w_{mn}(x, y) \quad (10.55)$$

kus funktsioonid w_{mn} on valitud nii, et nad rahuldavad ääritingimusi ja võimaldavad plaadi pinda küllalt täpselt kirjeldada. Parameetrid C_{mn} on esialgu määramata.

Avaldisele (10.55) võib anda kuju:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n C_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (10.56)$$

Sel juhul funktsioonid $X_m(x)$ peavad rahuldama ääritingimusi y -teljega paralleelsetel servadel, funktsioonid $Y_n(y)$ — x -teljega paralleelsetel servadel.

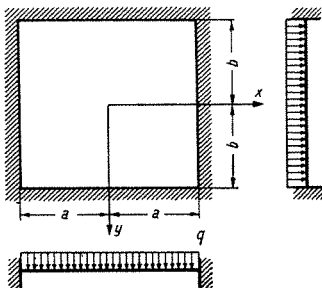
Edasi leiame avaldise $\nabla^2 \nabla^2 w$ jaoks:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w = \sum_m \sum_n C_{mn} & \left(\frac{d^4 X_m}{dx^4} Y_n + 2 \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \right. \\ & \left. + X_m \frac{d^4 Y_n}{dy^4} \right) \end{aligned} \quad (10.57)$$

Plaadi painde diferentsiaalvõrrandit (10.19)

$$\nabla^2 \nabla^2 w = q/D$$

kogu plaadi pinna ulatuses, s. o. suvalise x ja y puhul, avaldisega (10.57) rahuldada ei õnnestu. Küll osutub aga selle võrrandi rahuldamine võimalikuks plaadi pinna üksikutes punktides, nn. kollokatsioonipunktides. Sümmeetriat arvestamata võrdub säärate punktide arv parameetrite C_{mn} arvuga; nende parameetrite määramiseks saadakse lineaarne algebraline võrrandisüsteem.



JOON 10.18

Füüsikaliselt võib antud meetodit kirjeldada veel järgmiselt.

Igale etteantud funktsioonile $w_{mn}(x, y)$ vastab mingi koormus $q_{mn}(x, y)$. Parameetrite C_{mn} vastava valikuga on võimalik neid koormusi nii kombineerida, et kollektatsioonipunktides nende koguväärtus võrdub koormuse nõutava väärtusega.

Näitena vaatleme jäigalt kinnitatud plaati ühtlaselt jaotatud koormuse all (joon. 10.18). Sümmeetria kasutamiseks võtame koordinaatide alguse plaadi keskele. Plaadi servade pikkused on $2a$ ja $2b$.

Võtame etteantud funktsioonideks polünoomid ja aproksimeerime plaadi pinda avaldisega

$$w = C_{11}(1 - \xi^2)^2(1 - \eta^2)^2 + C_{12}(1 - \xi^2)^2\eta^2(1 - \eta^2)^2 + C_{21}\xi^2(1 - \xi^2)^2(1 - \eta^2)^2 + C_{22}\xi^2(1 - \xi^2)^2\eta^2(1 - \eta^2)^2 \quad (a)$$

kus

$$\xi = x/a; \quad \eta = y/b \quad (b)$$

On kerge kontrollida, et avaldise (a) iga liige rahuldab ääretingimusi servadel $\xi = \pm 1$ ja $\eta = \pm 1$.

Avaldisele (10.57) vastab

$$\nabla^2 \nabla^2 w = C_{11} \left[\frac{24}{a^4} (1 - \eta^2)^2 + \frac{2}{a^2 b^2} (-4 + 12\xi^2) (-4 + 12\eta^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \xi^2)^2 \frac{24}{b^4} \Big] + C_{12} \left[\frac{24}{a^4} \eta^2 (1 - \eta^2)^2 + \right. \\
& + \frac{2}{a^2 b^2} (-4 + 12\xi^2) (2 - 24\eta^2 + 30\eta^4) + \\
& \left. + \frac{1}{b^4} (1 - \xi^2)^2 (-48 + 360\eta^2) \right] + \\
& + C_{21} \left[\frac{1}{a^4} (-48 + 360\xi^2) (1 - \eta^2)^2 + \right. \\
& + \frac{2}{a^2 b^2} (2 - 24\xi^2 + 30\xi^4) (-4 + 12\eta^2) + \\
& \left. + \frac{1}{b^4} \xi^2 (1 - \xi^2) \cdot 24 \right] + \\
& + C_{22} \left[\frac{1}{a^4} (-48 + 360\xi^2) \eta^2 (1 - \eta^2)^2 + \right. \\
& + \frac{2}{a^2 b^2} (2 - 24\xi^2 + 30\xi^4) (2 - 24\eta^2 + 30\eta^4) + \\
& \left. + \frac{1}{b^4} \xi^2 (1 - \xi^2)^2 (-48 + 360\eta^2) \right]
\end{aligned} \tag{c}$$

Võrrutades avaldise (c) kollokatsioonipunktides koormuse intensiivsusega q , saamegi vajaliku võrrandisüsteemi. Kollokatsioonipunktideks võib võtta punktid koordinaatidega $(\xi; \eta)$

$$(0; 0); (0; 0,5); (0,5; 0); (0,5; 0,5) \tag{d}$$

või

$$(0,2; 0,2); (0,2; 0,6); (0,6; 0,2); (0,6; 0,6) \tag{e}$$

Sümmeetria tõttu on võrrand (10.20) rahuldatud ka nende punktide peegelpunktides.

Nii näiteks saame ruudukujulise plaadi jaoks, millel $b = a$, valides kollokatsioonipunktideks (d), järgmise võrrandisüsteemi parameetrite C_{mn} määramiseks:

$$\begin{aligned}
80C_{11} - 128C_{12} + 8C_{22} &= qa^4/D \\
45,5C_{11} + 31,375C_{12} - 15,25C_{22} &= qa^4/D \\
29C_{11} + 62,5C_{12} + 20,84375C_{22} &= qa^4/D
\end{aligned}$$

Siin osutus võimalikuks võrrandite arvu ühe võrra vähendada, s. t. koostada mitte neli, vaid kolm võrrandit, kuna ruutplaadil $C_{12} = C_{21}$.

Selle võrrandisüsteemi lahend on:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0,02012qa^4/D \\ C_{12} &= C_{21} = 0,00506qa^4/D \\ C_{22} &= 0,00476qa^4/D \end{aligned}$$

Läbipaine plaadi keskel ($\mu = 0,3$)

$$w = C_{11} = 0,02012qa^4/D = 0,0138q(2a)^4/Eh^3$$

Vastus langeb täpselt kokku tabelis (III.2) toodud andmetega.

Paindemoment M_x plaadi keskel

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -0,0229(2a)^2 q$$

ja serva $x = \pm a$ keskel

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=a \\ y=0}} = -0,0504(2a)^2 q$$

Paindemoment plaadi keskel erineb õigest 1%, paindemoment plaadi serval 2% võrra.

10.44 Bubnov-Galjorkini meetod

Plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandi (10.19)

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - q = 0$$

lahendit otsitakse selle meetodi järgi, samuti nagu kollokatsioonimeetodil, kujul (10.55)

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n C_{mn} w_{mn}(x, y)$$

kus funktsioonid w_{mn} on valitud nii, et nad rahuldavad ääretingimusi. Erinevus on parameetrite C_{mn} määramises. Kui kollokatsioonimeetodi kasutamisel C_{mn} määratakse tingimustest, et plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand oleks rahuldatud plaadi üksikutes punktides, siis *Bubnov-Galjorkini* meetodi juures nõutakse, et plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand oleks ortogonaalne etteantud funktsioonidega w_{mn} :

$$\int_{\bar{F}} (D \nabla^2 \nabla^2 w - q) w_{mn} = 0 \quad (10.58)$$

Võimalike paigutiste lause alusel võib *Bubnov-Galjorkini* meetodile plaatide elastse pinna leidmisel anda järgmise tõlgenduse.

Vahe

$$D\nabla^2\nabla^2\omega - q$$

kujutab endast mingit täiendavat koormust, mida ei õnnestunud tasakaalustada meie poolt valitud läbipaindefunktsioonide süsteemiga. Vaadeldes läbipaindefunktsioonide süsteemi w_{mn} võimalike paigutistena, võib *Bubnov-Galjorkini* meetodit vaadelda nõudena, et jääkkoormuse töö võimalikel paigutistel võrduks nulliga.

Võrdluseks kollokatsioonimeetodiga võib öelda, et tegurite määramine kollokatsioonimeetodiga kannab juhuslikumat iseloomu. Seetõttu saame ühesuguse etteantud funktsioonide arvu juures *Bubnov-Galjorkini* meetodiga «keskelt läbi» täpsemad tulemused. Lisaks sellele võib *Bubnov-Galjorkini* meetodit kasutada ka juhul, kui koormus ei muutu sujuvalt (näiteks koondatud jõud). Kollokatsioonimeetodi kasutamine pole aga sääarastel juhtudel lubatav.

Vabalt toetatud plaadi korral ja trigonomeetriliste funktsioonide kasutamisel langevad *Bubnov-Galjorkini* meetodi järgi tehtavad arvutused kokku *Navier'* meetodile vastavate arvutustega. Seega võib *Bubnov-Galjorkini* meetodit vaadelda *Navier'* meetodi üldistusena.

Näide 10.4. Leida lahend servadel jäigalt kinnitatud plaadi jaoks ühtlaselt jaotatud koormusel (joon. 10.18). Plaadi külgede suhe $b/a = 1,2$.

Otsime lahendit kujul

$$\omega = C_{11}(1 - \xi^2)^2(1 - \eta^2)^2 + C_{12}(1 - \xi^2)^2\eta^2(1 - \eta^2)^2 \quad (a)$$

$\xi = x/a$ ja $\eta = y/b$

Avaldise (a) üksikud liikmed rahuldavad ääritingimusi. Funktsioonide arv on võetud suuremana muutuja x suhtes põhjusel, et plaadi pikema külje suunas on elastne pind raskemini kirjeldatav.

Bubnov-Galjorkini meetodi võrrandid tegurite C_{11} ja C_{12} määramiseks kujunevad järgmisteks:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ C_{11} \left[\frac{24}{a^3} (1 - \eta^2)^2 + \frac{32}{a^2 b^2} (-1 + 3\xi^2) (-1 + 3\eta^2) + \frac{24}{b^3} (1 - \xi^2)^2 \right] + C_{12} \left[\frac{24}{a^3} \eta^2 (1 - \eta^2)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \tau \frac{16}{a^2 b^2} (-1 + 3\xi^2) (1 - 12\eta^2 + 15\eta^4) + \\
& \tau \frac{24}{b^4} (1 - \xi^2)^2 (-2 + 15\eta^2) \left] - q/D \right\} (1 - \xi^2)^2 (1 - \eta^2)^2 d\xi d\eta = 0 \\
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ C_{11} \left[\frac{24}{a^4} (1 - \eta^2)^2 + \frac{32}{a^2 b^4} (-1 + 3\xi^2) (-1 + 3\eta^2) + \right. \right. \\
& \left. \left. \tau \frac{24}{b^4} (1 - \xi^2)^2 \right] + C_{12} \left[\frac{24}{a^4} \eta^2 (1 - \eta^2)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{16}{a^2 b} (-1 + 3\xi^2) (1 - 12\eta^2 + 15\eta^4) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{24}{b^4} (1 - \xi^2)^2 (-2 + 15\eta^2) \right] - q/D \right\} (1 - \xi^2)^2 \eta^2 \cdot \\
& \cdot (1 - \eta^2)^2 d\xi d\eta = 0
\end{aligned}$$

Parast integreerimist ja lihtsustamist saame tegurite C_{11} ja C_{12} määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}
C_{11} \left(1 + \frac{4}{7} \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right) + C_{12} \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{7} \frac{a^4}{b^4} \right) - \frac{7}{128} \frac{qa^4}{D} &= 0 \\
C_{11} \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{7} \frac{a^4}{b^4} \right) + C_{12} \left(\frac{3}{143} + \frac{239}{1238} \frac{a^2}{b^2} + \frac{3}{7} \frac{a^4}{b^4} \right) - \\
- \frac{1}{128} \frac{qa^4}{D} &= 0
\end{aligned} \tag{c}$$

kust juhul, kui $b = 1,2a$,

$$\begin{aligned}
1,8791C_{11} + 0,1598C_{12} - 0,05469qa^4/D &= 0 \\
0,1598C_{11} + 0,3617C_{12} - 0,00781qa^4/D &= 0
\end{aligned} \tag{d}$$

Võrrandisüsteemi (d) lahendiks on

$$C_{11} = 0,0287qa^4/D, \quad C_{12} = 0,084qa^4/D$$

Võttes $\mu = 0,3$, saame plaadi keskpunkti labipande jaoks avaldise

$$w = C_{11} = 0,0287 \frac{12(1 - 0,3^2)qa^4}{Eh^3} = 0,0196 \frac{q(2a)^4}{Eh^3}$$

Oigeks vaartuseks on (tabel III 2) $0,0191q(2a)^4/Eh^3$
Paindemomentide leidmiseks iseloomustavais punktides leiame algul vastavad tuletised

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0, y=0} = \frac{-4C_{11}}{a^2} = -0,1148 \frac{qa^2}{D}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{(-4C_{11} + 2C_{12})}{b^2} = -0,0681 \frac{qa^2}{D}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=b}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=l}} = \frac{(8C_{11} + 8C_{12})}{b^2} = 0,2061 \frac{qa^2}{D}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=a \\ y=0}} = \frac{8C_{11}}{a^2} = 0,2296 \frac{qa^2}{D}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=a \\ y=0}} = 0$$

Edasi leiame paindemomendid

$$(M_x)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -(-0,1148 - 0,3 \cdot 0,0681) qa^2 = 0,0338q(2a)^2$$

$$(M_y)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -(-0,0681 - 0,3 \cdot 0,1148) qa^2 = 0,0256q(2a)^2$$

$$(M_x)_{\substack{x=a \\ y=0}} = -0,2296qa^2/D = -0,0574q(2a)^2$$

$$(M_y)_{\substack{x=0 \\ y=b}} = -0,2061qa^2/D = -0,0515q(2a)^2$$

Täpsete vastuste juures on tegurid vastavalt 0,0299, 0,0228, 0,0639, 0,0554

10.45 Plaadil painde diferentsiaalvõrrandi taandamine harilikule diferentsiaalvõrrandile (Kantoroviitš-Vlassovi meetod)

Juhul kui plaat on kahel vastasküljel vabalt toetatud, õnnestub plaadil painde diferentsiaalvõrrandit asendada üksikute harilikkude diferentsiaalvõrranditega, mis kõik on omaette lahendatavad (p. 10.42). Kui plaadil pole kaht vabalt toetatud vastaskülge, on plaadil painde diferentsiaalvõrrandit võimalik üldjuhul taandada harilikkude diferentsiaalvõrrandite süsteemile. Seda saab teha mitmesuguste meetoditega. Vaatleme siin meetodit, mil on mõningane analoogia *Bubnov-Galjorkini* meetodiga. Eri-nevuseks on asjaolu, et *Bubnov-Galjorkini* meetodi võrrandeid rakendatakse ainult ühe muutuja suhtes

Piirdume ainult esimese lähendusega.

Vaatleme jällegi eelmises punktis käsitletud järgalt kinnitatud plaati külgede suhtega $b/a = 1,2$ ühtlaselt jaotatud koormusel (joon. 10.18). Otsime lahendit kujul

$$w = Y(y) (1 - \xi^2)^2 \quad (a)$$

mis rahuldab ääretingimusi külgedel $x = \pm a$. Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi (10.19)

$$\nabla^2 \nabla^2 w - q/D = 0$$

taandamiseks harilikule diferentsiaalvõrrandile korrutame võrrandi (10.19) etteantud läbipaindefunktsiooniga ja integreerime üle plaadi laiuse ning võrrutame tulemuse nulliga:

$$\int_{-1}^1 (\nabla^2 \nabla^2 w - q/D) (1 - \xi^2)^2 d\xi = 0 \quad (b)$$

Paigutades siia w asemele avaldise (a), saame:

$$\int_{-1}^1 \left\{ \left[\frac{24}{a^4} Y(y) + \frac{2}{a^2} (-4 + 12\xi^2) Y''(y) + (1 - \xi^2)^2 Y^{IV}(y) - \frac{q}{D} \right] (1 - \xi^2)^2 d\xi = 0 \right. \quad (c)$$

kust pärast integreerimist ja taandamist saame

$$\frac{16}{21} Y^{IV}(y) - \frac{32}{7a^2} Y''(y) + \frac{24}{a^4} Y(y) - \frac{q}{D} = 0 \quad (d)$$

Erijuhendi on

$$Y_e = \frac{qa^4}{24D} \quad (e)$$

Vastava homogeense võrrandi

$$\frac{16}{21} Y^{IV}(y) - \frac{32}{7a^2} Y''(y) + \frac{24}{a^4} Y = 0 \quad (f)$$

lahendamiseks leiame algul karakteristliku võrrandi

$$\frac{16}{21} r^4 - \frac{32}{7a^2} r^2 + \frac{24}{a^4} = 0$$

juured. Korrutame toodud võrrandi teguriga 21/16. Saame:

$$r^4 - \frac{6}{a^2} r^2 + \frac{31,5}{a^4} = 0 \quad (g)$$

Teatavasti on võrrandi

$$r^4 + 2Ar^2 + B = 0 \quad (h)$$

juurteks positiivse B väärtuse puhul

$$r = \pm\alpha \pm \beta \quad (i)$$

kus

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{B} - A}{2}} \quad \text{ja} \quad \beta = \sqrt{\frac{-\sqrt{B} - A}{2}} \quad (k)$$

Antud juhul leiame:

$$\alpha = 2,075/a, \quad \beta = 1,143i/a$$

Kuna võrrandi (g) juured on kompleksed, võime homogeense diferentsiaalvõrrandi (f) lahendi, võttes arvesse, et

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}), & \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \\ \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), & \operatorname{ch} x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \end{aligned} \quad (m)$$

välja kirjutada järgmisel kujul

$$\begin{aligned} Y_0 &= C_1 \operatorname{ch} \frac{2,075y}{a} \cos \frac{1,143y}{a} + \\ &+ C_2 \operatorname{ch} \frac{2,075y}{a} \sin \frac{1,143y}{a} + \\ &+ C_3 \operatorname{sh} \frac{2,075y}{a} \cos \frac{1,143y}{a} + \\ &+ C_4 \operatorname{sh} \frac{2,075y}{a} \sin \frac{1,143y}{a} \end{aligned}$$

Sümmeetria tõttu peab $Y(y)$ olema paarisfunktsioon, seega tegurid $C_2 = C_3 = 0$ ja funktsiooni $Y(y)$ lõplikuks avaldiseks kujuneb:

$$\begin{aligned} Y &= C_1 \operatorname{ch} \frac{2,075y}{a} \cos \frac{1,143y}{a} + \\ &+ C_4 \operatorname{sh} \frac{2,075y}{a} \sin \frac{1,143y}{a} + \frac{qa^4}{24D} \end{aligned}$$

Tegurid C_1 ja C_4 leiame tingimustest, et plaadi serval, kus $y = b$ (või $y = -b$), võrduvad nulliga läbipaine ja pöördenurk: $Y(b) = Y'(b) = 0$. Saame:

$$C_1 = -0,01361qa^4/D; \quad C_4 = -0,00431qa^4/D$$

Seega plaadi elastse pinna võrrandiks kujuneb esimeses lähenduses:

$$\begin{aligned} w = & \left(-0,01361 \operatorname{ch} \frac{2,075y}{a} \cos 1,143 \frac{y}{a} - \right. \\ & \left. - 0,00431 \operatorname{sh} \frac{2,075y}{a} \sin 1,143 \frac{y}{a} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} \right) \left(1 - 2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} \right) \frac{qa^4}{D} \end{aligned}$$

Läbipaine plaadi keskel ($\mu = 0,3$)

$$(w)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0,02805 \frac{qa^4}{D} = 0,0191 \frac{q(2a)^4}{Eh^3}$$

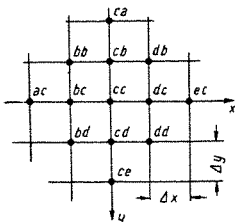
mis langeb kokku tabelis III.2 toodud tulemusega. Suure täpsusega saadakse ka paindemoment $(M_y)_{x=0, y=b}$. Paindemomendi $(M_x)_{x=a, y=0}$ jaoks saadakse väiksem täpsus, kuna etteantud x funktsioon ei ole küllaldane plaadi läbipainde kirjeldamiseks x -telje suunas

10.46 Võrgumeetod

10.46.1 Põhivõrrandid

Diferentsimeetodit (p. 3.10) saab laiendada ka osatuletistega diferentsiaalvõrranditele; sel juhul nimetatakse seda võrgumeetodiks. Samuti nagu kollokatsioonimeetodi või *Bubnov-Galjorkini* meetodi juures taandatakse ka siin osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamine algebralise võrrandisüsteemi lahendamisele. Sama võrrandite arvu juures on võrgumeetodi täpsus küll väiksem, kuid see korvatakse lihtsusega võrrandite koostamisel. Küllaldase täpsuse saavutamiseks võib võrrandite arvu suurendada tihedama võrgu valikuga; paljude tundmatutega võrrandisüsteemide lahendamine aga kaasagetel elektronarvutitel erilisi raskusi ei valmista. Oluulisem on võrrandite koostamise kergus. Lisaks sellele on võrgumeetodiga võimalik arvutada suvaliste ääretingimuste ja suvalise konfiguratsiooniga plaate, kus teiste meetodite kasutamine on raskendatud.

Kanname vaadeldavale pinnale võrgu (joon. 10.19). Võrgu samm x -telje suunas olgu Δ_x , y -telje suunas Δ_y . Võrgu punktid punkti cc ümbruses tähistame nii nagu joonisel näidatud.



JOON. 10.19

Vastavalt punktis 3.10 toodud valemitele on tuletised ühe muutuja järgi punktis cc järgmised:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{cc} = \frac{-w_{bc} + w_{dc}}{2\Delta x} \quad (10.59)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{cc} = \frac{w_{bc} - 2w_{cc} + w_{dc}}{\Delta x^2} \quad (10.60)$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^4}\right)_{cc} = \frac{-w_{ac} + 2w_{bc} - 2w_{dc} + w_{ec}}{2\Delta x^3} \quad (10.61)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^3}\right)_{cc} = \frac{w_{ac} - 4w_{bc} + 6w_{cc} - 4w_{dc} + w_{ec}}{\Delta x^4} \quad (10.62)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y^2}\right)_{cc} = \frac{-w_{cb} + w_{cd}}{2\Delta y} \quad (10.63)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y}\right)_{cc} = \frac{w_{cb} - 2w_{cc} + w_{cd}}{\Delta y^2} \quad (10.64)$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^4}\right)_{cc} = \frac{-w_{ca} + 2w_{cb} - 2w_{cd} + w_{ce}}{2\Delta y^3} \quad (10.65)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^3}\right)_{cc} = \frac{w_{ca} - 4w_{cb} + 6w_{cc} - 4w_{cd} + w_{ce}}{\Delta y^4} \quad (10.66)$$

Tuletised kahe muutuja järgi leiame valemite (10.59)–(10.66) abil. Nii näiteks

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{cc} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]_{cc} = \\ &= \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{cb} - 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{cc} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{cd}}{\Delta y^2} \quad (10.67) \end{aligned}$$

Tuletise $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{cc}$ saame valemist (10.60); analoogiliselt leiame ka teised avaldised (10.67) esinevad tuletised:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{cb} = \frac{w_{bb} - 2w_{cb} + w_{db}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{cd} = \frac{w_{bd} - 2w_{cd} + w_{dd}}{\Delta x^2}$$

Paigutades need avaldised võrrandisse (10.67), saame.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{cc} = \\ & = \frac{4w_{cc} - 8(w_{cb} + w_{bc} + w_{cd} + w_{dc}) + w_{bb} + w_{bd} + w_{db} + w_{dd}}{\Delta x^2 \Delta y^2} \end{aligned} \quad (10.68)$$

Lüües avaldised (10.62), (10.68) ja (10.66), leiame biharmoonilisele võrrandile (10.19)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

vastava diferentsvõrrandi. Tähistades

$$\left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x}\right)^2 = \alpha \quad (10.69)$$

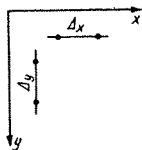
saame:

$$\begin{aligned} & (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)w_{cc} - 4(1 + \alpha)(w_{cb} + w_{cd}) - \\ & - 4\alpha(1 + \alpha)(w_{bc} + w_{dc}) + 2\alpha(w_{bb} + w_{bd} + w_{db} + w_{dd}) + \\ & + (w_{ca} + w_{ce}) + \alpha^2(w_{ac} + w_{ec}) = \frac{q\Delta_y^4}{D} \end{aligned} \quad (10.70)$$

Kui võrk on mõlemas suunas ühesuguse sammuga, s. t. $\alpha = 1$, saame siit:

$$\begin{aligned} & 20w_{cc} - 8(w_{cb} + w_{cd} + w_{bc} + w_{dc}) + \\ & + 2(w_{bb} + w_{bd} + w_{db} + w_{dd}) + \\ & + (w_{ca} + w_{ce} + w_{ac} + w_{ec}) = \frac{q\Delta^4}{D} \end{aligned} \quad (10.71)$$

Näitlikkuse huvides on üksikute tuletiste kordajad toodud joonisel 10.20 otse võrgul.



$$\begin{array}{c} -1 \quad 1 \\ \hline \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \times \frac{1}{2\Delta_x}$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad -2 \quad 1 \\ \hline \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{array} \times \frac{1}{\Delta_x^2}$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad -1 \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ -1 \quad \quad \quad 1 \\ \hline \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \times \frac{1}{4\Delta_x \Delta_y}$$

$$\begin{array}{c} -1 \quad 2 \quad \quad -2 \quad 1 \\ \hline \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \end{array} \times \frac{1}{2\Delta_x^3}$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \\ \hline \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \end{array} \times \frac{1}{\Delta_x^4}$$

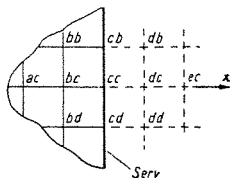
$$\begin{array}{c} 1 \quad -2 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ -2 \quad 4 \quad -2 \\ | \quad | \quad | \\ 1 \quad -2 \quad 1 \\ \hline \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \end{array} \times \frac{1}{\Delta_x^2 \Delta_y^2}$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ 2 \quad \quad \quad -2 \\ | \quad | \quad | \\ -1 \quad \quad \quad 1 \\ \hline \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \end{array} \times \frac{1}{2\Delta_x \Delta_y^2}$$

Ruutvorgu puhul $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \quad -8 \quad 2 \\ | \quad | \quad | \\ -8 \quad 20 \quad 8 \\ | \quad | \quad | \\ 2 \quad -8 \quad 2 \\ | \\ 1 \\ \hline \nabla^2 \nabla^2 w \end{array} \times \frac{1}{\Delta^4}$$

$$\begin{array}{c} 2+\mu \quad \quad \quad 2-\mu \\ | \quad | \quad | \\ -1 \quad 6-2\mu \quad -6+2\mu \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ -2+\mu \quad \quad \quad 2-\mu \\ \hline \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \end{array} \times \frac{1}{2\Delta^3}$$



JOOB 10 21

10.46.2 Ääritingimused

Avaldise (10.70) tüüpi võrrandi koostame plaadi iga sisemise punkti jaoks (kui plaat ei ole mingil serva osal toetatud, siis ka selle osa punktide kohta). Võrandid, mis on koostatud plaadi serval või serva naabruses asuvate punktide kohta, haaravad aga ka väljaspool kontuuri asuvaid punkte. Nii näiteks biharmoonilise võrrandile vastav diferentsvõrrand (10.70), mis on koostatud plaadi serva ligidal asuva punkti bc kohta joonisel 10 21, haarab ka punkti dc , mis asub väljaspool kontuuri. Seega kujuneb tundmatute arv suuremaks kui (10.70) tüüpi võrrandite arv. Vajalikud lisavõrandid saame ääritingimustest.

Allpool toome mõningad näited ääritingimuste koostamise kohta tüüpilistel juhtudel. Ääritingimused on toodud serval, mille normaaliks on x -telg, asuva punkti cc kohta (joon. 10.21).

Järgalt kinnitatud serval on üheks ääritingimuseks $w_{cc} = 0$. Teise tingimuse saame võrrandist (9.65):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{cc} = \frac{-w_{bc} + w_{dc}}{2\Delta x} = 0$$

kust pärast lihtsustamist

$$w_{dc} = w_{bc} \quad (10.72)$$

Vabalt toetatud serval saame lisaks tingimusele $w_{cc} = 0$ võrrandist (9.66) tingimuse

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{cc} = \frac{w_{bc} - 2w_{cc} + w_{dc}}{\Delta x^2}$$

kust saame esimest ääritingimust arvestades

$$w_{dc} = -w_{bc} \quad (10.73)$$

Jõududevabal serval avalduvad ääritingimused (10.28) ruutvõrgu puhul ($\alpha = 1$) järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 & -2(1 + \mu) \omega_{cc} + (\omega_{bc} + \omega_{dc}) + \mu(\omega_{cb} + \omega_{cd}) = 0 \\
 & \qquad (6 - 2\mu) (\omega_{bc} - \omega_{dc}) - \qquad (10.74) \\
 & -(2 - \mu) (\omega_{bb} + \omega_{bd} - \omega_{db} - \omega_{dd}) - \omega_{ac} + \omega_{ec} = 0
 \end{aligned}$$

Seega kujunevad ääretingimuste avaldised sel juhul küllaltki keerulisteks

Kuna siin ääretingimused haaravad lisaks kontuuri punktidele veel kaht rida väljaspool kontuuri asuvaid punkte, tuleb punkti *cc* kohta koostada ka võrrand (10.70), et saada piisav arv võrrandeid.

10.46.3 Võrgumeetodi rakendamises

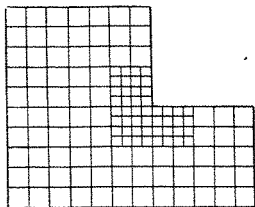
Küllalt tähtis on võrgu sammu valik. Mida tihedam võrk, seda suuremat täpsust võiks oodata; suureneb aga ka võrrandite arv ja nende lahendamiseks vajalik arvutustöö. Piiratud arvu numbriliste kohtade säilitamisel võivad lahenduskäigus arvude ümardamisest tekkinud vead põhjustada täpsuse vähenemist. Pealegi ei ole inseri seisukohalt vajalik suur arvutustäpsus — viie- kuni kümneprotsendilist viga võib veel lubatavaks lugeda.

Mida sujuvama kujuga on plaadi elastne pind, seda suuremate «silmadega» võib olla võrk. Vabalt toetatud ristkülikulise plaadi jaoks on ühtlaselt jaotatud koormuse korral piisav, kui võrgu sammuks on neljandik lühema külje pikkusest. Järgalt kinnitatud servade puhul annab säärase samm aga juba tunduva vea, kuna plaadi elastne pind pole enam nii sujuv — vabalt toetatud plaadi puhul on elastse pinna avaldise teised tuletised kogu plaadi ulatuses ühemärgilised, aga järgalt kinnitatud plaadi puhul muutub teise tuletise märk (plaadi keskel on tõmmatud alumised kiud, aga plaadi servadel ülemised).

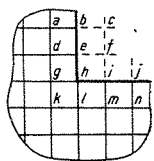
Mõningatel juhtudel võib osutada vajalikuks võtta plaadi teatud osas tihedam võrk, seda eriti sisseulatuvate nurkade olemasolul (joon. 10.22), kus tekib tugev pändemomentide kontsentratsioon. Sama kehtib ka koondatud jõudude rakenduspunkti ümbruse kohta. Teisest küljest pole aga siin ka liiga tihedal võrgul mõtet, kuna säärase punktide ümbruses ei kehti enam sirgete normaalide hüpotees ja saadav täpsus kujuneb illusoorseks.

Sisseulatuvate nurkade korral tekivad väljaspool plaati võetud võrgu osas kordsed punktid. Nii näiteks saadakse joonisel 10.22 kujutatud juhul, kus plaat on toetatud serval *behij*, väljaspool plaati oleva punkti *f*

a)



b)



JOON. 10. 22

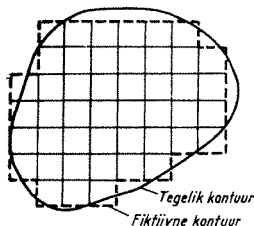
läbipainde jaoks kaks väärtust: w_r ja w_r' , kusjuures üks neist vastab punkti d kohta koostatud diferentsvõrrandile (10. 70) ja ääritingimustele punktis e , aga teine punkti m kohta koostatud võrrandile (10. 70) ja ääritingimustele punktis i .

Võrgu silmast väiksemale pinnaosale rakendatud koormuse või koondatud jõu korral tuleb koormuse intensiivsuseks q võtta selle koormuse jagatis võrgu silma pinnaga. Ühtlaselt jaotatud koormuse korral tuleb plaadi jõududevabal serval, kui säärane on olemas, võtta koormuse intensiivsuseks mitte $q/2$, nagu võiks järeldada eelöeldust, vaid q . Selle põhjuseks on, et koormus tuleks küll kahega jagada, aga samuti tuleks kahega jagada plaadi jäikus. Kahed taanduvad.

Jätkuvate plaatide (s. t. sääraste, mis toetuvad mööda mingit joont absoluutselt jäikadele taladele) puhul tuleb läbivajumised toetusjoonel lugeda võrdseks nulliga; ääritingimused kirjutatakse välja ainult kogu plaadi (aga mitte üksikute paneelide) välisservade kohta. Kui plaat toetub mõnes punktis üksikutele tugedele, loetakse läbipainded toetuspunktides võrdseks nulliga.

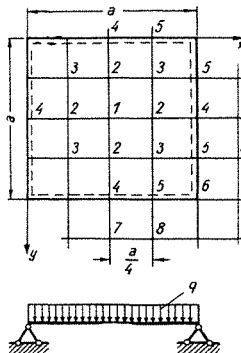
Ebakorrapärase kujuga plaatide (joon. 10. 23) arvutamisel asendatakse plaadi tegelik kontuur fiktiivsega, mis koosneb võrgu joontest ja võimalikult täpselt jälgib tegelikku kontuuri.

Korrapärase kujuga mitteristkülikuliste plaatide arvutamisel leiavad kasutamist ka teistsugused võrgud (kolmnurkne, kuusnurkne, radiaalne). Samuti on olemas valemid muutuva sammuga riskülikuliste võrkude jaoks.



JOON. 10.23

JOON 10.24



Näide 10.5. Vabalt toetatud ruudukujuline plaat (joon. 10.24) on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega q . Leida plaadi elastne pind ja paindemomendid plaadi keskel Poissoni tegur $\mu = 0,3$.

Võrgu sammuks võtame $\Delta = \frac{a}{4}$. Numereerime võrgu sõlmed.

Punktid, mille läbipaine on sümmeetria tõttu ühesugune, tähistame ühesuguste numbritega.

Ääritingimused on lihtsad, selleparast on soovitatav alustada neist ja saadud tulemusi otsekohe kasutada biharmoonilisele võrrandile vastavate avaldiste väljakirjutamisel

Kuna plaadi servadel $w = 0$, siis

$$w_4 = w_5 = w_6 = 0 \quad (a)$$

Vastavalt avaldisele (10.73)

$$w_7 = -w_2, \quad w_8 = -w_3 \quad (b)$$

Sümmeetria tõttu tuleb avaldis (10.71) välja kirjutada ainult kolme punkti kohta. Võttes võrgu keskpunktiks cc punkti 1, saame järgmise avaldise:

$$20w_1 - 8 \cdot 4w_2 + 2 \cdot 4w_3 = qa^4/256D$$

Punktid 2 ja 3 annavad järgmised avaldised.

$$20w_2 - 8(2w_3 + w_1) + 2 \cdot 2w_2 + [w_2 + (-w_2)] = qa^4/256D$$

$$20w_3 - 8 \cdot 2w_2 + 2w_1 + [2w_3 + 2(-w_3)] = qa^4/256D$$

Pärast sarnaste liikmete koondamist saame

$$\begin{aligned} 20w_1 - 32w_2 + 8w_3 &= qa^4/256D \\ -8w_1 + 24w_2 - 16w_3 &= qa^4/256D \\ 2w_1 - 16w_2 + 20w_3 &= qa^4/256D \end{aligned} \quad (c)$$

Sellest võrrandisüsteemist leiame üksikute punktide läbipained:

$$\omega_1 = \frac{66}{64} \frac{qa^4}{256D} = 0,0440 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

$$\omega_2 = \frac{48}{64} \frac{qa^4}{256D} = 0,0320 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

$$\omega_3 = \frac{35}{64} \frac{qa^4}{256D} = 0,0233 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

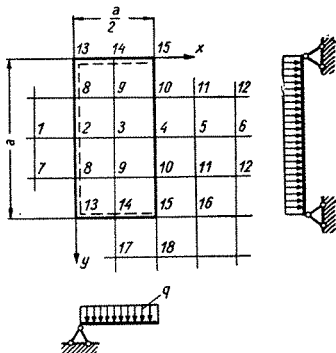
Paindemomendid plaadi keskel [vt. avaldised (10.60) ja (10.64)]:

$$\begin{aligned} (M_x)_1 = (M_y)_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)_1 = \\ &= -D \frac{16}{a^2} \frac{qa^4}{256D} \left(\frac{48}{64} - 2 \cdot \frac{66}{64} + \frac{48}{64} \right) (1 \pm 0,3) = 0,0457 qa^2 \end{aligned}$$

Võrdlus tabeli III.1 andmetega näitab, et viga läbipainde määramisel on alla 1% ja maksimaalse paindemomendi (paindemoment plaadi keskel) määramisel alla 5%. Seega on valitud võrgu samm inseneriarvutuste seisukohalt küllaldaselt väike.

Näide 10.6. Plaat külgede suhtega 1:2 on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega. Lühikesed servad ja üks pikk serv on vabalt toetatud; teine pikk serv on jõududevaba. *Poissoni* tegur $\mu = 0$.

Teljed, valitud võrk ja võrgu punktide numeratsioon on näidatud joonisel 10.25. Sümmetriselised punktid kannavad sama numbrit.



JOON. 10.25

Lihtsalt avalduvad ääretingimused külgedel 13-15 ja 13-13.

$$\begin{aligned} \omega_2 = \omega_8 = \omega_{13} = \omega_{14} = \omega_{15} = 0 \\ \omega_1 = -\omega_3; \quad \omega_7 = -\omega_9; \quad \omega_{17} = -\omega_9; \quad \omega_{18} = -\omega_{10} \end{aligned} \quad (a)$$

Samuti $\omega_{16} = 0$, kuna punktis 15 $\partial w / \partial x = 0$ ja $\omega_{14} = 0$.

Saadud tulemusi võtame arvesse järgmiste võrrandite koostamisel. Ääretingimused serval 15-15 kujunevad vastavalt avaldistele (10.74) järgmisteks:

$$\begin{aligned} \omega_3 - 2\omega_4 + \omega_5 = 0 \\ \omega_9 - 2\omega_{10} + \omega_{11} = 0 \\ 2\omega_3 - 2\omega_5 + \omega_6 + 2(-2\omega_9 + 2\omega_{11} + 2\omega_3 - 2\omega_5) = 0 \\ 2\omega_9 - 2\omega_{11} + \omega_{12} + 2(-\omega_3 + \omega_5 + 2\omega_9 - 2\omega_{11}) = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Tasakaaluvõrrandid (10.71) sõlmede 3, 4, 9 ja 10 kohta

$$\begin{aligned} 20\omega_3 - 8(\omega_4 + 2\omega_9) + 2 \cdot 2\omega_{10} + \omega_5 - \omega_3 = qa^4/256D \\ 20\omega_4 - 8(\omega_3 + \omega_5 + 2\omega_{10}) + 2(2\omega_9 + 2\omega_{11}) + \omega_6 = qa^4/256D \\ 20\omega_9 - 8(\omega_3 + \omega_{10}) + 2\omega_4 + (\omega_9 + \omega_{11} - 2\omega_9) = qa^4/256D \\ 20\omega_{10} - 8(\omega_4 + \omega_9 + \omega_{11}) + 2(\omega_3 + \omega_5) + (\omega_{10} + \omega_{12} - \omega_{10}) = \\ = qa^4/256D \end{aligned} \quad (c)$$

Seega saime võrrandisüsteemi 8 võrrandi ja 8 tundmatuga $\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}$ ja ω_{12} .

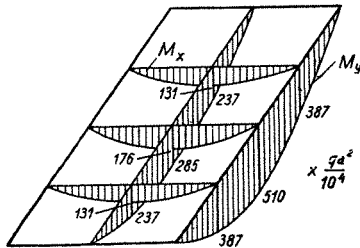
Süsteemi lahendamiseks väikese arvutusmasinaga avaldame esimesest kahest võrrandist ω_5 ja ω_{11} ning asendame saadud avaldised järgmistesse võrranditesse; seejärel avaldame kolmandast ja neljandast võrrandist ω_6 ja ω_{12} ning asendame ülejäänud võrrandisse. Tulemuseks saame neli võrrandit nelja tundmatuga $\omega_3, \omega_4, \omega_9$ ja ω_{10} .

Läbipainete jaoks saame järgmised väärtused:

$$\begin{aligned} \omega_3 = 0,00326qa^4/D \\ \omega_4 = 0,00542qa^4/D \\ \omega_9 = 0,00237qa^4/D \\ \omega_{10} = 0,00392qa^4/D \end{aligned} \quad (d)$$

Maksimaalseks paindemomendiks on $(M_y)_4$:

$$(M_y)_4 = -\frac{16D}{a^2} (3,92 - 2 \cdot 5,42 + 3,92) \frac{qa^4}{10^8 D} = 0,0480qa^2$$



JOON. 10.26

Vastavad andmed tabelite järgi:

$$\omega_4 = 0,00550qa^4/D, \quad (M_y)_4 = 0,0510qa^2$$

Seega võib saadud tapsuse lugeda piisavaks

Paindemomentide epuurid on kujutatud joonisel 10 26.

10 47 Energeetiline (Ritzi) meetod

10 47.1 Plaadi painde potentsiaalne energia

Elastse keha deformatsiooni potentsiaalne energia avaldub *Hooke'i* seadusele alluvate kehade juures vastavalt valemile (7 37) järgmiselt:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV$$

Lugedes selles avaldises vastavalt õhukeste plaatide teooria põhihüpoteesidele $\sigma_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ ja paigutades deformatsioonide ε_x , ε_y ja γ_{xy} ning pingete σ_x , σ_y ja τ_{xy} asemele nende avaldised (10.3) ja (10.5) saame:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_V \frac{Ez^2}{1-\mu^2} & \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ & \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dV \quad (10.75) \end{aligned}$$

kust pärast integreerimist koordinaadi z järgi ja liikmete ümberpaigutamist saame:

$$\begin{aligned} U = \frac{D}{2} \int_F & \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dF \quad (10.76) \end{aligned}$$

10.47.2 Meetodi olemus

Energeetiline meetod põhineb järgmisel lausel: **staa-tikalise tasakaalu olukorras peab kehale mõjuvate sise- ja välisjõudude potentsiaal $U - A'$ olema minimaalne.**

Sisejõudude potentsiaal U arvutatakse valemiga (10.76), välisjõudude potentsiaal A' valemiga

$$A' = \int_F q w \, dF \quad (10.77)$$

Seega peab avaldis

$$\begin{aligned} \Pi = U - A' = \frac{D}{2} \int_f \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dF - \int_F q w \, dF \end{aligned} \quad (10.78)$$

tasakaaluolukorras olema minimaalse väärtusega.

Juhime tähelepanu asjaolule, et välisjõudude potentsiaali juures puudub kordaja $1/2$.

Edasi võtame plaadi läbipainde jaoks jällegi avaldise (10.55)

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n C_{mn} w_{mn}(x, y)$$

paigutame ta avaldise (10.78) ja nõuame, et avaldis (10.78) oleks minimaalne. Selleks võrrutame nulliga avaldise (10.78) tuletised parameetrite C_{mn} suhtes. Saame kordajate C_{mn} määramiseks lineaarse võrrandi-süsteemi nii mitme võrrandiga, kui mitme liikmega me aproksimeerime plaadi elastset pinda.

Etteantud funktsioonid peavad olema valitud nii, et nad võimaldaksid plaadi elastset pinda kirjeldada küllalt täpselt ja rahuldaksid vähemalt kinemaatilisi ääritingimusi. Erinevalt *Bubnov-Galjorkini* meetodist ei ole staatikaliste ääritingimuste rahuldamine tingimata nõutav, kuid üldiselt saadakse parem täpsus, kui ka need on rahuldatud.

Meetod võimaldab lahendada igasuguseid plaatide paindega seotud ülesandeid. Ta võimaldab võrdlemisi lihtsalt lahendada ka sääraseid juhte, kus plaat töötab koos teiste elastsete konstruktsioonidega. Sellistel juhtudel tuleb ainult plaadis tekkivate sisejõudude energiale lisada teistes konstruktsiooni osades salvestunud energia. See käib ka juhu kohta, kui plaadi servad on elastset kinnitatud, kuna sel juhul kinnituskohad teevad tööd.

Avaldise (10.78) võib saada plaadi elastse pinna võr-

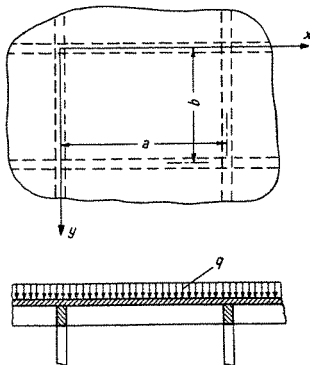
randist (10.19) ka otseselt, ilma ergeetilisi teoreeme abiks võtmata, lahendades puht matemaatiliselt küsimuse: missuguse avaldise minimaalne väärtus annab võrrandi (10.19) lahendi. See annab meile aluse vaadelda ka ülal toodut kui meetodit võrrandi (10.19) lahendamiseks

Vastavat matemaatika kursuse osa nimetatakse variatsioonarvutuseks; ergeetiline meetod on variatsioonmeetod. Ka *Bubnov-Galjorkini* meetodit loetakse variatsioonmeetodite hulka.

Näide 10.7. Suure paneelide arvuga risttalastik toetub sõlmedes sammastele ja on kaetud plaadiga (joon. 10.27) Talade vahekaugus $a = b$ on mõlemas suunas ühesugune, samuti on ühesugune talade jäikus EI . Plaadi silindriline paindejäikus on D . Koormuse intensiivsus q on uhtlane üle kogu talastiku. Leida ligikaudne plaadi elastse pinnava võrrand

Kuna kõik talastiku servast eemal asuvad paneelid on ühesugustes tingimustes, vaatleme ainult üht paneeli. Paneeli servadel peavad pöördenurgad ilmselt võrduma nulliga ja nulliga peab võrduma läbipaine plaadi nurkades. Rohkem kinemaatilisi ääritingimusi ei ole.

Ülesande lahendamiseks ergeetilise meetodiga peame algul ette andma plaadi elastset pinda kujutavad funktsioonid. Kõne alla võivad tulla polünoomid või trigonomeetrilised funktsioonid. Nad peavad rahuldama kinemaatilisi ääritingimusi ja võimaldama iseseisvalt varieerida nihasti talade kui ka plaadi läbipainet



JOON. 10.27

Kasutades trigonomeetrilisi funktsioone ja piirdudes esimese lähendusega, võib elastse pinna avaldiseks võtta

$$\begin{aligned} w = & C_{20} \left[\left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) + \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \right] + \\ & + C_{22} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \end{aligned} \quad (a)$$

mis rahuldab püstitatud nõudeid. Kordaja C_{20} on kahele liikmele ühine selle tõttu, et antud risttalastiku juures on x -telje ja y -telje sihiliste talade elastsed jooned ühesugused.

Avaldise (a) võib ilmselt asendada järgmise avaldisega, millega on lihtsam opereerida:

$$\begin{aligned} w = & (2C_{20} + C_{22}) - C_{20} \left(\cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) - \\ & - C_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \end{aligned} \quad (b)$$

Paigutades (b) avaldisse (10.76) ja võttes arvesse, et $b = a$, saame plaadis salvestunud potentsiaalse energia jaoks järgmise avaldise.

$$\begin{aligned} U_{pl} = & \frac{D}{2} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[C_{20} \left(\cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \right. \right. \\ & + 2C_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \left. \right]^2 + 2(1 - \mu) \left[C_{22}^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{a} \sin^2 \frac{2\pi y}{b} - \right. \\ & - \left(C_{20} \cos \frac{2\pi x}{a} + C_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi x}{b} \right) \cdot \\ & \left. \left. \cdot \left(C_{20} \cos \frac{2\pi y}{b} + C_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (c)$$

kust pärast integreerimist (jällegi võttes $b = a$)

$$U_{pl} = \frac{8\pi^4 D}{a^2} (C_{20}^2 + C_{22}^2) \quad (d)$$

Kuna aga ka plaati toetavates talades esinevad sisejõud teevad tööd, peame arvesse võtma ka talades (neli tala, igapähe laius poole väiksem tegelikust) salvestunud potentsiaalse energia:

$$U_t = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{EI}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= EI \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 \int_0^a \left(C_{20} \cos \frac{2\pi x}{a} + C_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \right)^2 dx = \\
 &= \frac{8\pi^4 EI}{a^3} (C_{20}^2 + 2C_{20}C_{22} + C_{22}^2) \quad (e)
 \end{aligned}$$

Välisjõudude potentsiaal (10.77)

$$\begin{aligned}
 A' &= q \int_0^a \int_0^b \left[(2C_{20} + C_{22}) - C_{20} \left(\cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] dx dy = qa^2(2C_{20} + C_{22}) \quad (d)
 \end{aligned}$$

Seega peame leidma järgmise avaldise miinimumi:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= U_{p1} + U_t - A' = \frac{8\pi^4 D}{a^2} [(C_{20}^2 + C_{22}^2) + \\
 &\quad + k(C_{20}^2 + 2C_{20}C_{22} + C_{22}^2)] - qa^2(2C_{20} + C_{22}) \quad (e)
 \end{aligned}$$

kus

$$k = \frac{EI}{aD} \quad (f)$$

Võrrutades avaldise (e) tuletised parameetrite C_{20} ja C_{22} suhtes nulliga, saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$(2 + 2k)C_{20} + 2kC_{22} = 2qa^4/8\pi^4 D \quad (g)$$

$$2kC_{20} + (2 + 2k)C_{22} = qa^4/8\pi^4 D$$

kust

$$C_{20} = \frac{2+k}{1+2k} \frac{qa^4}{16\pi^4 D}; \quad C_{22} = \frac{1-k}{1+2k} \frac{qa^4}{16\pi^4 D} \quad (h)$$

Plaadi elastse pinna ligikaudseks avaldiseks on seega vastavalt avaldisele (b)

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{1+2k} \frac{qa^4}{16\pi^4 D} \left[(5+k) - (2+k) \left(\cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (1-k) \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \quad (i)
 \end{aligned}$$

kust saame läbipainde väärtuseks plaadi keskel ($x=a$, $y=b$)

$$w = \frac{8+4k}{1+2k} \frac{qa^4}{16\pi^4 D} \quad (k)$$

ja tala keskel

$$w = \frac{6}{1+2k} \frac{qa^4}{16\pi^4 D} \quad (m)$$

Kuna avaldises (b) oli väga vähe liikmeid, siis saadud tulemused eriti täpsed ei ole [avaldis (k) annab õigest kuni 8% väiksema läbipainde].

Lahendus muutub keerulisemaks, kui plaat mitte ainult ei toetu risttalastikule, vaid moodustab sellega monoliitse terviku. Orienteerivalt võib ka sel juhul kasutada eelmist lahendit, lugedes osa plaadi laiust (ruudukujulise plaadi puhul ca $\frac{1}{6}$ plaadi külje pikkusest) tala võõna kaasa töötavaks ja vastavalt suurendades tala inertsmomenti.

10.5 TÄIENDAVAD KÜSIMUSI JAIKADE PLAATIDE PAINDE-TEORIAST

10.51 Tabelite kasutamine teistsuguse Poissoni teguriga materjalist plaatide jaoks

Vastaku materjalile, mille *Poissoni* tegur on μ_1 , paindejäikus D_1 , läbipaine w_1 ja paindemomendid $M_{x,1}$ ja $M_{y,1}$; materjalile *Poissoni* teguriga μ_2 vastaku D_2 , w_2 , $M_{x,2}$ ja $M_{y,2}$. Olgu olemas tabelid teguriga μ_1 vastavate läbipainete ja paindemomentide jaoks; nende abil tulgu määrata w_2 , $M_{x,2}$ ja $M_{y,2}$.

Kui tabelites on läbipainde avaldis antud kujul

$$w = k \frac{qa^4}{D}$$

võib otseselt määrata niihästi w_1 kui ka w_2 , võttes paindejäikuseks vastavalt D_1 või D_2 . Kui aga läbipaine on antud kujul

$$w = k \frac{qa^4}{Eh^3}$$

siis läbipainded suhtuvad nagu paindejäikuste pöördväärtused:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{1 - \mu_2^2}{1 - \mu_1^2}$$

Seega

$$w_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{1 - \mu_1^2} w_1 \quad (10.79)$$

Paindemomentide vaheline seos on keerulisem. Võrrandisüsteemist

$$M_{x,1} = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{y,1} = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)$$

leiame

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &= -\frac{1}{(1-\mu_1^2)D_1} (M_{x,1} - \mu_1 M_{y,1}) \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} &= -\frac{1}{(1-\mu_1^2)D_1} (M_{y,1} - \mu_1 M_{x,1})\end{aligned}\quad (10.80)$$

Paindemoment teisest materjalist plaadis

$$\begin{aligned}M_{x,2} &= -D_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) = \\ &= -D_2 \frac{1-\mu_2^2}{1-\mu_1^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

Paigutame avaldised (10.80) saadud võrrandisse. Võttes arvesse, et $D_2/D_1 = (1-\mu_1^2)/(1-\mu_2^2)$, saame lõplikult.

$$M_{x,2} = \frac{1}{1-\mu_1^2} [(1-\mu_1\mu_2)M_{x,1} + (\mu_2-\mu_1)M_{y,1}]\quad (10.81)$$

$$M_{y,2} = \frac{1}{1-\mu_1^2} [(1-\mu_1\mu_2)M_{y,1} + (\mu_2-\mu_1)M_{x,1}]$$

Paindemomendid jäigalt kinnitatud serval *Poissoni* tegurist ei sõltu.

Toodud valemid kehtivad ainult siis, kui ääretingimustes ei esine tegur μ . Seega nad ei sobi näiteks plaadi jaoks, mille mingi serv on jõududevaba.

10.52 Ortotroopsed plaadid

Olgu plaat valmistatud ortotroopsest materjalist, kusjuures peateljed (vt. p. 7.42) langegu kokku telgedega x, y, z . Plaat asugu xy -tasandis

Kuna õhukeste plaatide paindeteoorias z -telje sihilised deformatsioonid ei paku huvi, piisab üheksa elastsuskonstandi asemel neljast ja pingete ning deformatsioonide vahelised seosed võib esitada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E'_x \varepsilon_x + E'' \varepsilon_y \\ \sigma_y &= E'_y \varepsilon_y + E'' \varepsilon_x \\ \tau_{xy} &= G_{xy}\end{aligned}\quad (10.82)$$

Neile vastavad painde- ja vaandementide avaldised kujunevad analoogiliselt võrranditega (10.10) järgmis- teks:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = - \left(D_{\setminus} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = - \left(D_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{\setminus y} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\setminus y} z dz = 2D_{\setminus y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (10.83)$$

kus

$$D_{\setminus} = \frac{E_{\setminus}' h^3}{12}, \quad D_y = \frac{E_y' h^3}{12}; \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12}$$

$$D_{\setminus y} = \frac{G h^3}{12} \quad (10.84)$$

Paigutades avaldised (10.83) tasakaalu diferentsiaal- võrrandisse (10.17), saamegi ortotroopse plaadi painde diferentsiaalvõrrandi

$$D_{\setminus} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = q \quad (10.85)$$

kus

$$H = D_{\setminus} + 2D_{\setminus y} \quad (10.86)$$

Võrrandit (10.85) võib kasutada mitte üksnes homo- geensest, vaid ka mittehomogeensest materjalist plaatide, näiteks sardbetoonplaatide painde uurimiseks. Samuti võib paljude taladega risttalastikku vaadelda nagu anisotroopset plaati.

Võrrandi (10.85) lahendamiseks saab kasutada kõiki punktis 10.4 kirjeldatud meetodeid. Erijuhul, kui

$$H = \sqrt[4]{D_{\setminus} D_y} \quad (10.87)$$

saab ortotroopseid plaate arvutada ka isotroopsete plaa- tide kohta koostatud tabelite abil. Viies sisse uued muu- tujad

$$x_1 = x \sqrt[4]{\frac{D}{D_{\setminus}}}; \quad y_1 = y \sqrt[4]{\frac{D}{D_y}} \quad (10.88)$$

saab saarase ortotroopse plaadi diferentsiaalvõrrandile

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (10 89)$$

anda järgmise kuju

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y_1^4} \right) = q$$

mis langeb kokku avaldisega (10 19). Seega võib nüüsguse ortotroopse plaadi, mille servade pikkused on a ja b labipainde määrata nagu isotroopsel plaadil servadega $a_1 = a \sqrt{D/D_x}$ ja $b_1 = b \sqrt{D/D_y}$. Jaikus D on vabalt valitav.

Fdasi tuletame avaldised paindemomentide leidmiseks. Paindemomendid ortotroopses plaadis tähistame M_x ja M_y , isotroopses — M_{x1} ja M_{y1} , isotroopse plaadi *Poissoni* tegur olgu μ .

Teesed tuletised

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{D}{D_x}} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{D}{D_y}} \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \quad (10 90)$$

Võrrandite (10 80) alusel

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{1}{(1 - \mu^2) \sqrt{D_x D}} (M_{x1} - \mu M_{y1}) \quad (10 91)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{1}{(1 - \mu^2) \sqrt{D_y D}} (M_{y1} - \mu M_{x1})$$

Paigutades avaldised (10 90) ja (10 91) paindemomentide avaldistesse (10 83), saame

$$M_x = \frac{1}{1 - \mu^2} \left[\sqrt{\frac{D_x}{D}} (M_{x1} - \mu M_{y1}) + \sqrt{\frac{D_x^2}{D D_y}} (M_{y1} - \mu M_{x1}) \right] \quad (10 92)$$

$$M_y = \frac{1}{1 - \mu^2} \left[\sqrt{\frac{D_y}{D}} (M_{y1} - \mu M_{x1}) + \sqrt{\frac{D_y^2}{D D_x}} (M_{x1} - \mu M_{y1}) \right]$$

11 ÜMMARGUSED TELGSÜMMEETRILISED PLAADID

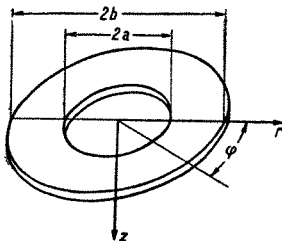
11.1 TELGSÜMMEETRILISE PLAADI PAINDE DIFERENTSIAALVÖRRAND

Vaatleme õhukest jäika ühtlase paksusega plaati, mille kontuur koosneb ühest või kahest kontsentrilisest ringjoonest. Plaadile mõjugu telgsümmeetriline põikkoormus, samuti olgu plaadi kinnitus mööda kontuuri telgsümmeetriline. Sel juhul on ka kõverpind, mille moodustab plaadi keskpind pärast koormamist, telgsümmeetriline.

Leiame plaadi keskpinna läbipainde w ja põikkoormuse q vahelise seose silinderkoordinaatides. Koordinaatide alguse paigutame plaadi tsentrisse; plaadi mingi punkti kaugus tsentraalteljest olgu r ja polaarnurk φ (joon 11.1). Radiaalsuunalisi paigutisi tähistame tähega u . Plaadid siseraadius a , välisraadius b .

Telgsümmeetria tõttu on paigutus w ainult muutuva r funktsioon: $w = w(r)$. Samuti sõltuvad kõik muud otsitavad suurused ainult koordinaadist r .

Arvutamise lihtsustamiseks kasutame jällegi punktis



JOON. 11.1

10.11 toodud hüpoteese õhukeste jäikade plaatide kohta. Plaadi keskpinna diferentsiaalvõrrandi tuletuskäik on põhimõtteliselt samasugune nagu ristkoordinaatidegi puhul:

a) lähtudes geometriast leiame plaadi üksikute kiudude pikenemise sõltuvuse plaadi läbipaindest;

b) *Hooke*'i seaduse alusel kirjutame välja plaadi kiudude pikenemiste ja plaadis tekkivate pingete vahelised seosed ning avaldame pinged (hiljem ka paindemomendid) plaadi läbipainde kaudu;

c) koostame plaadi elementaarse osa tasakaalu tingimused; elimineerides neist põikjõud ning avaldades paindemomendid plaadi läbipainde kaudu, saamegi otsitava diferentsiaalvõrrandi.

11.11 Suhtelised deformatsioonid

Analoogiliselt avaldisega (10.1) saame

$$u = -z \frac{d\omega}{dr} \quad (11.1)$$

Võrrandeist (9.11) saame, võttes $v = 0$,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \quad (11.2)$$

Paigutades siia u avaldise (11.1), leiamegi suhteliste deformatsioonide avaldised siirde ω kaudu:

$$\varepsilon_r = -z \frac{d^2\omega}{dr^2}; \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{z}{r} \frac{d\omega}{dr} \quad (11.3)$$

Telgsümmeetria tõttu nihkenurk $\gamma_{r\varphi} = 0$.

11.12 Pinged ja paindemomendid

Avaldised pingete jaoks koostame *Hooke*'i seaduse alusel, lugedes sealjuures pinged σ_z võrdseks nulliga (p. 10.13, teine hüpotees). Saame:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi); \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r) \quad (11.4)$$

kust

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\varphi); \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_r) \quad (11.5)$$

Paigutades võrrandesse (11.5) suhtelised deformatsioonid (11.3), saamegi pingete avaldised läbipainde funktsioonina:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \\ \sigma_\varphi &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} + \mu \frac{d^2\omega}{dr^2} \right)\end{aligned}\quad (11.6)$$

Tangentsiaalpinged $\tau_{r\varphi} = 0$.

Edasi opereerime pingete asemel paindemomentidega

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_r dz, \quad M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_\varphi dz \quad (11.7)$$

Paigutades siia avaldised (11.6) saame pärast integreerimist:

$$\begin{aligned}M_r &= -D \left(\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} + \mu \frac{d^2\omega}{dr^2} \right)\end{aligned}\quad (11.8)$$

kus

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (11.9)$$

Suurust D nimetatakse siingi silindriliseks paindejäikuks.

Maksimaalsed pinged tekivad plaadi äärmistes kihtides. Nende väärtuse saame, jagades paindemomendi vastupanumomendiga $h^2/6$:

$$\begin{aligned}\max \sigma_r &= \frac{M_r}{W} = \frac{6M_r}{h^2} \\ \max \sigma_\varphi &= \frac{M_\varphi}{W} = \frac{6M_\varphi}{h^2}\end{aligned}\quad (11.10)$$

Niihästi paindemomendid kui ka vastupanumomendid kehtivad ühiklaiuse kohta (ristlõige, mille laius on l ja kõrgus h); sisuliselt on siin tegemist vastavate suuruste intensiivsusega.

11.13 Tasakaaluvõrrandid

Vaatleme joonisel 11.2 kujutatud plaadielemendi tasa-

kaalutingimusi. Põikjõu $Q = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz$ loeme positiivseks.

kui ta küljel, mille välisnormaali suund langeb kokku raadiusvektori suunaga, mõjub z -telje positiivses suunas, positiivsete pandemomentide puhul on tõmmatud alumised kiud.

Projekteerides kõik elemendile mõjuvad jõud teljele z , saame esimese tasakaalutingimuse:

$$\left(Q + \frac{dQ}{dr} dr \right) (r + dr) d\varphi - Qr d\varphi + qr dr d\varphi = 0 \quad (11.11)$$

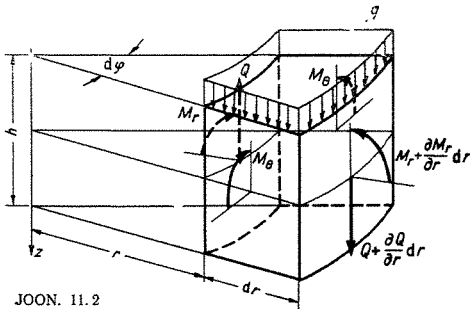
mis pärast kõrgemat järku väikeste suuruste hülgamist ja taandamist suurusega $d\varphi dr$ võtab järgmise kuju:

$$r \frac{dQ}{dr} + Q + qr = 0$$

ehk

$$-\frac{d}{dr} (Qr) + qr = 0 \quad (11.12)$$

Edasi võrrutame nulliga momentide summa raadiusvektoriga risti oleva telje suhtes. Saame, arvestades et



JOON. 11.2

paindemoment M annab momendi $-M_\varphi dr d\varphi/2$, järgmise võrduse:

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\varphi - M_r d\varphi - 2M_\varphi dr \frac{d\varphi}{2} - \left(Q + \frac{dQ}{dr} dr \right) (r + dr) d\varphi \frac{dr}{2} - Qr d\varphi \frac{dr}{2} = 0 \quad (11.13)$$

Pärast kõrgemat järku väikeste suuruste hülgamist ja taandamist saame teise tasakaaluvõrrandi lõplikult järgmisel kujul:

$$M_r + r \frac{dM_r}{dr} - M_\varphi - Qr = 0 \quad (11.14)$$

Ulejäänud tasakaalutingimused on rahuldatud samaselt.

11.14 Ümmarguse plaadi painde diferentsiaalvõrrand

Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi tuletamiseks elimineerime võrrandist (11.14) suuruse Qr , mis veel pole avaldatud plaadi läbipainde w kaudu.

Diferentseerime võrrandit muutuja r suhtes. Võttes arvesse, et

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dM_r}{dr} \right) = \frac{dM_r}{dr} + r \frac{d^2M_r}{dr^2}$$

saame:

$$2 \frac{dM_r}{dr} + r \frac{d^2M_r}{dr^2} - \frac{dM_\varphi}{dr} - \frac{d}{dr} (Qr) = 0 \quad (11.15)$$

Kuna esimese tasakaaluvõrrandi (11.12) alusel

$$\frac{d}{dr} (Qr) = -qr$$

võime võrrandi (11.15) ümber kirjutada järgmiselt:

$$\frac{2}{r} \frac{dM_r}{dr} + \frac{d^2M_r}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dM_\varphi}{dr} + q = 0 \quad (11.16)$$

Paigutades siia paindemomentide asemele nende avaldised (10.8), saame pärast lihtsustamist:

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D} \quad (11.17)$$

mis kujutabki endast ümmarguse telgsümmeetrilise plaadi painde diferentsiaalvõrrandit, s. o. seost plaadi läbipainde

ja plaadile mõjuva koormuse vahel. Leides selle diferentsiaalvõrrandi lahendi antud ääritingimustel, saame plaadi elastse pinna võrrandi. Valemite (11.1) abil võime leida paindemomendid ja valemist (11.10) saame maksimaalsed pinged.

Põikjõu Q jaoks saame valemist (11.14) järgmise avaldise:

$$Q = \frac{M_r - M_\varphi}{r} + \frac{dM_r}{dr}$$

Paigutades siia paindemomentide M_r ja M_φ asemele nende avaldised (11.8), leiame

$$Q = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (11.18)$$

Tangentsiaalpinged jagunevad, nagu talade juureski, paraboolselt üle põiklõike kõrguse. Maksimaalsed tangentsiaalpinged tekivad plaadi keskpinnal, kus nende suuruseks on

$$\max \tau_{rz} = \frac{3}{2} \frac{Q}{h}$$

11.2 TELGSUMMEETRIILISE PLAADI PAINDE DIFERENT-SIAALVÕRRANDI LAHEND

11.21 Üldlahend

Võrrandi (11.17) lahend koosneb vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = 0 \quad (11.19)$$

lahendist w_0 ja mingist erilahendist w_e :

$$w = w_0 + w_e$$

Võrrand (11.19) on analoogiline pingefunktsiooni diferentsiaalvõrrandiga (9.20), sellepärast on ka tema lahend analoogiline avaldisega (9.24):

$$w_0 = B_1 r^2 + B_2 r^2 \ln r + B_3 + B_4 \ln r \quad (11.20)$$

Erilahend oleneb koormuse iseloomust. Juhul, kui koormus on ühtlaselt jaotatud, võime erilahendit otsida kujul

$$w_e = Cr^4 \quad (11.21)$$

Asendades avaldise (11.21) plaadi painde diferentsiaalvõrrandisse (11.17), saame:

$$64C = q/D$$

Seega ühtlaselt jaotatud koormuse, mille intensiivsus on q , puhul on erilahendiks

$$w_e = \frac{qr^4}{64D} \quad (11.22)$$

Juhul, kui plaadi pinnale ei ole rakendatud mingisugust koormust (näiteks kui välisserval kinnitatud rõngakujuline plaat on koormatud jõudude või momentidega ainult mööda siseserva), võrdub erilahend nulliga.

11.22 Läbipainde, pöördenurga, paindemomentide ja põikjõu avaldised

Ühtlaselt koormatud plaadi elastse pinna avaldis kujuneb järgmiseks [avaldised (11.20) ja (11.22)]:

$$w = B_1 r^2 + B_2 r^2 \ln r + B_3 + B_4 \ln r + \frac{qr^4}{64D} \quad (11.23)$$

Tegurid $B_1 \dots B_4$ sõltuvad ääritingimustest.

Sageli on mugavam opereerida mitte koordinaadiga r , vaid dimensioonitu koordinaadiga $\varrho = r/b$. Lahendi (11.23) asemel võib siis võtta uue avaldise

$$w = b(C_1 \varrho^2 + C_2 \varrho^2 \ln \varrho + C_3 + C_4 \ln \varrho) + \frac{qb^4}{64D} \varrho^4 \quad (11.24)$$

kus integreerimiskonstandid $C_1 \dots C_4$ on dimensioonita suurused.

Pöördenurgad võrduvad läbipainde (11.24) esimese tuletisega:

$$\theta = \frac{dw}{dr} = C_1 \cdot 2\varrho + C_2(\varrho + 2\varrho \ln \varrho) + C_4 \frac{1}{\varrho} + \frac{qb^3}{16D} \varrho^3 \quad (11.25)$$

Paindemomendid saame avaldisest (11.8):

$$M_r = -\frac{D}{b} \left[C_1(2+2\mu) + C_2(3+\mu+2 \ln \varrho + 2\mu \ln \varrho) + C_4 \left(-\frac{1}{\varrho^2} + \frac{\mu}{\varrho^2} \right) \right] - \frac{3+\mu}{16} qb^2 \varrho^2 \quad (11.26)$$

$$M_{\varphi} = -\frac{D}{b} \left[C_1(2+2\mu) + C_2(1+3\mu+2 \ln q + 2\mu \ln q) + C_4 \left(\frac{1}{q^2} - \frac{\mu}{q^2} \right) \right] - \frac{1+3\mu}{16} qb^2 Q^2$$

ja põikjõud avaldisest (11.18)

$$Q = -4 \frac{D}{b^2} C_2 \frac{1}{q} - \frac{1}{2} qbQ \quad (11.27)$$

11.3 RINGIKUJULISED PLAADID

11.31 Ühtlaselt jaotatud koormusega plaadid

Vaatleme ühtlaselt jaotatud koormusega koormatud ringikujulist, s. t. ilma tsentraalse väljalõiketa plaati (joon. 11.3). Plaadi raadius olgu b .

Säärse plaadi serv annab ainult kaks ääritingimust, näiteks siirete ja pöördenurkade kohta. Avaldis (11.24) aga sisaldab neli integreerimiskonstanti. Seega ääritingimuste arv pole piisav integreerimiskonstantide leidmiseks vajalike võrrandite koostamiseks; on tarvis veel kaks tingimust.

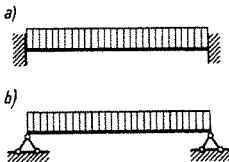
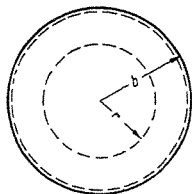
Ühe lisatingimuse saame nõudest, et suvalist kontsentrilist ringjoont mööda mõjuvad põikjõud peavad tasakaalustama selle ringjoonega piiratud osal mõjuva koormuse:

$$2\pi rQ + \pi r^2 q = 0$$

kust

$$Q = -\frac{qr}{2} = -\frac{qbQ}{2} \quad (11.28)$$

Kõrvutades selle avaldise võrrandiga (11.27) näeme, et $C_2 = 0$.



JOON. 11.3

Nulliga peab võrduma ka konstant C_4 , kuna vastasel korral järeldub avaldisest (11.24), et läbipaine plaadi keskel võrdub lõpmatusega, mis on vastuolus ülesande füüsikalise sisuga.

Ülejäänud kaks konstanti leiame kinnitustingimustest plaadi serval.

11.31.1 Jaigalt kinnitatud plaat (joon. 11.3, a)

Plaadi serval, kus $q = 1$, võrduvad nulliga läbipaine w ja pöördenurk θ . Vastavad avaldised (11.24) ja (11.25) annavad järgmised kaks võrrandit nullist erinevate integreerimiskonstantide C_1 ja C_3 määramiseks:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 + \frac{qb^3}{64D} &= 0 \\ 2C_1 + \frac{qb^3}{16D} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

kust

$$C_1 = -\frac{qb^3}{32D}, \quad C_3 = \frac{qb^3}{64D} \quad (b)$$

Paigutades integreerimiskonstandid (b) avaldisse (11.24), saame elastse pinna võrrandi

$$w = \frac{qb^4}{64D} (1 - 2q^2 + q^4) \quad (c)$$

Avaldistest (10.27) saame paindemomendid

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{qb^2}{16} [(1 + \mu) - (3 + \mu)q^2] \\ M_\varphi &= \frac{qb^2}{16} [(1 + \mu) - (1 + 3\mu)q^2] \end{aligned} \quad (d)$$

Plaadi keskel, kus $q = 0$,

$$w = \frac{qb^4}{64D}; \quad M_r = M_\varphi = \frac{1 + \mu}{16} qb^2 \quad (e)$$

Paindemomendid plaadi serval, kus $q = 1$,

$$M_r = -\frac{qb^2}{8}; \quad M_\varphi = -\mu \frac{qb^2}{8} \quad (f)$$

Näide 11.1. Plaat läbimõõduga $2b = 30$ cm on äärtel jäigalt kinnitatud ja koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega, mille intensiivsus $q = 20$ kG/cm². Lubatavad pinged $[\sigma] = 1000$ kG/cm², elastisuse moodul $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm² ning *Poissoni* tegur $\mu = 0,3$. Määrata plaadi paksus IV tugevusteooria järgi ning plaadi maksimaalne läbipaine.

Arvutuslikuks pingeks neljanda tugevusteooria järgi on

$$\sigma_{arv} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi}$$

Kuna maksimaalsed pinged (äärmistes kihtides) saame, kui jagame paindemomendi vastupanumomendiga, vastupanumoment aga on mõlema suuna jaoks ühesugune, siis võime algul leida arvutusliku momendi

$$M_{arv} = \sqrt{M_r^2 + M_\varphi^2 - M_r M_\varphi}$$

See on maksimaalse väärtusega plaadi serval. Avaldistest (f) saame

$$M_{arv} = \frac{qb^2}{8} \sqrt{1 + \mu^2 - \mu} = \frac{20 \cdot 15^2}{8} \sqrt{1 + 0,09 - 0,3} = 500 \text{ kGcm/cm}$$

Edasi võrrutame arvutusliku pinge lubatavaga:

$$\sigma_{arv} = \frac{6M_{arv}}{h^2} = \frac{6 \cdot 500}{h^2} = 1000$$

kust plaadi paksus

$$h = \sqrt{3} = 1,73 \text{ cm}$$

Läbipaine plaadi keskel

$$\begin{aligned} \max w &= \frac{qb^4}{64D} = \frac{qb^4 \cdot 12(1 - \mu^2)}{64Eh^3} = \\ &= \frac{20 \cdot 15^4 \cdot 12 \cdot 0,91}{64 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 5,2} = 0,016 \text{ cm} \end{aligned}$$

Kuna maksimaalne läbipaine on tunduvalt väiksem plaadi paksusest, töötab plaat tõepoolest jäigana ja lahenduse võib lugeda õigeaks.

11.31.2 Vabalt toetatud plaat (joon. 11.3, b)

Lahenduskäik on eelmisega analoogiline, ainult ääritingimused on teised: vabalt toetatud serval võrduvad nulliga läbipaine w ja paindemoment M_r . Avaldistest (11.24) ja (11.26) saame integreerimiskonstantide määramiseks järgmised kaks võrrandit:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 + \frac{qb^3}{64D} &= 0 \\ 2(1 + \mu)C_1 + \frac{3 + \mu}{16} \frac{qb^3}{D} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

millest

$$C_1 = -\frac{1}{32} \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \frac{qb^3}{D}, \quad C_3 = \frac{1}{64} \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \frac{qb^3}{D} \quad (b)$$

Läbipainde ja paindemomentide avaldised kujunevad järgmisteks

$$\begin{aligned} w &= \frac{qb^4}{64D} \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} - \frac{6 + 2\mu}{1 + \mu} \varrho^2 + \varrho^4 \right) \\ M_r &= \frac{qb^2}{16} (3 + \mu) (1 - \varrho^2) \\ M_\varphi &= \frac{qb^2}{16} [(3 + \mu) - (1 + 3\mu)\varrho^2] \end{aligned} \quad (c)$$

Maksimaalne läbipaine ja paindemoment tekivad plaadi keskel, kus

$$w = \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \frac{qb^4}{64D}; \quad M_r = M_\varphi = \frac{3 + \mu}{16} qb^2$$

11.32 Plaat, mis on keskel koormatud koondatud jõuga

Mõjuga plaadi keskel koondatud jõud P .

Lahendid (11.24)–(11.27) sobivad ka selle juhu jaoks, kui loeme jaotatud koormuse intensiivsuse q võrdseks nulliga. Integreerimiskonstandi C_2 saame jällegi tingimusest, et mõõda kontsentrilist ringjoont mõjuvad põikjõud tasakaalustavad jõu P

$$2\pi r Q + P = 0$$

Paigutades siia Q asemele avaldise (11.27) ja lugedes koormuse intensiivsuse q võrdseks nulliga, saame pärast taandamist

$$-8\pi D C_2 + P = 0$$

kust

$$C_2 = \frac{Pb}{8\pi D} \quad (11.29)$$

Selle kordajaga liige plaadi läbipainde avaldises (11.24) võrdub plaadi keskel nulliga:

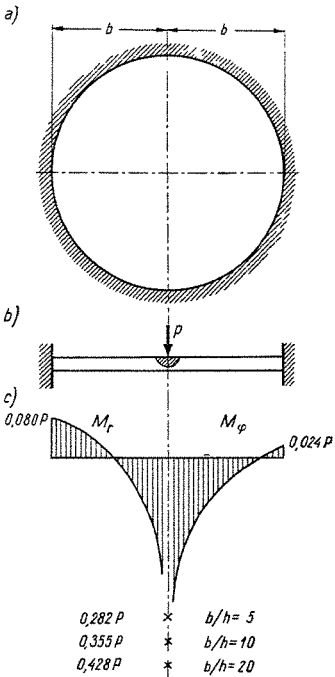
$$(\varrho^2 \ln \varrho)_{\varrho \rightarrow 0} = 0$$

s. t. on lõplik suurus. Et kogu avaldis (11.24) oleks plaadi keskel lõpliku väärtusega, on vajalik, et integreerimiskonstant C_4 võrduks nulliga samuti nagu ühtlaselt jaotatud koormuse korral.

Ulejäänud integreerimiskonstandid C_1 ja C_3 leiame tingimustest plaadi välisserval.

11.32.1 Jaigalt kinnitatud plaat (joon. 11.4)

Võttes arvesse juba määratud integreerimiskonstantide C_2 ja C_4 väärtused, saame tingimustest, et plaadi ser-



JOON 11.4

val $w = dw/dr = 0$, konstantide C_1 ja C_3 määramiseks järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ 2C_1 + \frac{Pb}{8\pi D} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

kust

$$C_1 = -\frac{Pb}{16\pi D}; \quad C_3 = \frac{Pb}{16\pi D} \quad (b)$$

Elastse pinna võrrandiks on seega vastavalt avaldisele (11.24)

$$w = \frac{Pb^2}{16\pi D} [(1 - q^2) + 2q^2 \ln q] \quad (c)$$

ja paindemomentide avaldisteks vastavalt võrrandile (11.26)

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{P}{4\pi} [1 + (1 + \mu) \ln q] \\ M_\varphi &= -\frac{P}{4\pi} [\mu + (1 + \mu) \ln q] \end{aligned} \quad (d)$$

Läbipaine plaadi keskel, kus $q = 0$, on lõplik suurus:

$$w_{q=0} = \frac{Pb^2}{16\pi D} \quad (e)$$

Paindemomentide, seega ka pingete jaoks saame seal aga lõpmata suure väärtuse. Täpsemad uurimused näitavad, et kui koondatud jõu ligemas ümbruses (piirkonnas, mille raadius on 3...4 korda suurem plaadi paksusest) sirgete normaalide hüpotees kehtetuks lugeda ja arvutused teha paksude plaatide teooria kohaselt, saadakse lõpmata suured pinged ainult surutud, s. t. ülemiste kihtide osas (joonisel 11.4, b viirutatud osa). Konstruktiooni tugevuse seisukohalt need ohtlikuks ei kujune, kuna kutsuvad esile ainult kohaliku iseloomuga voolavuse. Alumistes, tõmmatud kiududes aga tekivad koondatud jõu rakenduskoha all lõpliku suurusega tõmbe pinged

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{P}{h^2} (1 + \mu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right) \quad (d)$$

Formaalselt vastab neile pingetele fiktiivne paindemoment

$$M_r = M_\varphi = \frac{P}{6} (1 + \mu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right) \quad (e)$$

Joonisel 11.4, *c* on toodud paindemomentide M_r ja M_φ epüürid (*Poissoni* tegur $\mu = 0,3$). Lisaks sellele on teljel ristikesega tähistatud fiktiivsete paindemomentide väärtused mõningate b/h suhete jaoks.

11.32.2 Vabalt toetatud plaat

Sel juhul saame ääretingimustest $w = M_r = 0$ järgmised kaks võrrandit:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ 2(1 + \mu)C_1 + \frac{Pb}{8\pi D}(3 + \mu) &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

millistest

$$C_1 = -C_3 = -\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \frac{Pb}{16\pi D} \quad (b)$$

Läbipainete ja paindemomentide avaldised kujunevad järgmisteks:

$$w = \frac{Pb^2}{8\pi D} \left[\frac{3 + \mu}{2(1 + \mu)} (1 - \varrho^2) + \varrho^2 \ln \varrho \right] \quad (c)$$

$$M_r = -\frac{P}{4\pi} (1 + \mu) \ln \varrho$$

$$M_\varphi = \frac{P}{4\pi} [(1 - \mu) - (1 + \mu) \ln \varrho] \quad (d)$$

Tõmbepinged plaadi tsentris alumisel pinnal leitakse valemiga

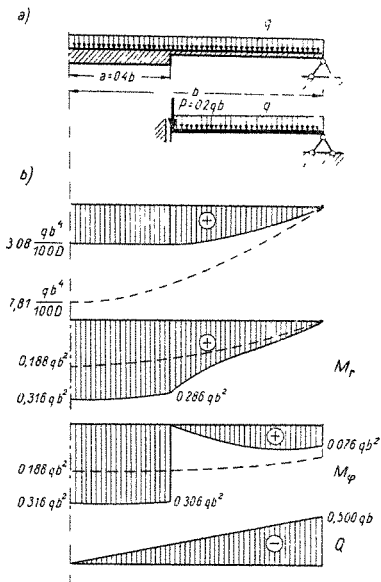
$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{P}{h^2} \left[(1 + \mu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right] \quad (e)$$

11.4 RÕNGAKUJULISED PLAADID

Rõngakujulise plaadi, s. t. säärase plaadi kohta, millel on olemas niihästi sise- kui ka välisserv, on võimalik välja kirjutada neli ääretingimust, mis on piisavad nelja integreerimiskonstandi määramiseks.

Selgitame arvutuskäiku näitega.

Vaatleme vabalt toetatud ringikujulist plaati, mille keskmise osa jäikus on välise osa jäikusega võrreldes niivõrd suur, et teda võib lugeda lõpmata jäigaks (joon. 11.5). Keskmise osa raadius $a = 0,4b$. Koormus — ühtlaselt jaotatud, intensiivsusega q . *Poissoni* tegur $\mu = 0$.



JOON 11 5

Kuna plaadi keskmise osa jäikus on lõpmata suur, võib ümbritsevat rõngakujulist osa arvutada iseseisvalt järgmistel ääretingimustel.

Väliserval ($\varrho = 1$) võrduvad nulliga läbipaine ω ja paindemoment M_r .

Siseserval ($\varrho = 0,4$) võrdub pöördenurk keskmise osa suure jäikuse tõttu nulliga. Lisaks sellele on teada põikjõu väärtus — see võrdub plaadi keskosale mõjuva koormuse ja plaadi perimeetri jagatisega:

$$Q_{\varrho=0,4} = -\pi a^2 q / 2\pi a = -aq/2 = -0,2bq$$

Miinusmärk tuleneb põikjõu märgi reeglist.

Toodud ääretingimused on skemaatiliselt kujutatud joonisel 11.5, b.

Neile neljale ääretingimusele vastab järgmine võrrandisüsteemi [vt. avaldised (11.24)...(11.27)]

$$\begin{array}{l|l} w_{\rho=1} = 0 & C_1 + C_3 + qb^3/64D = 0 \\ (M_r)_{\rho=1} = 0 & 2C_1 + 3C_2 - C_4 + 12qb^3/64D = 0 \\ \theta_{\rho=0,4} = 0 & 0,8C_1 + (0,4 - 0,8 \cdot 0,916)C_2 + \\ & + 2,5C_4 + 0,064qb^3/16D = 0 \\ Q_{\rho=0,4} = -0,2qb & -10C_2 - 0,2qb = -0,2qb \end{array}$$

Viimasest võrrandist järeldub, et $C_2 = 0$. Esimesed kolm võrrandit kirjutame ümber arvutamiseks sobivamal kujul

$$\begin{array}{l} C_1 + C_3 + 1,562qb^3/100D = 0 \\ 2C_1 - C_4 + 18,750qb^3/100D = 0 \\ 0,8C_1 + 2,5C_4 + 0,400qb^3/100D = 0 \end{array}$$

Siit

$$\begin{array}{l} C_1 = -8,151qb^3/100D \\ C_3 = 6,589qb^3/100D \\ C_4 = 2,448qb^3/100D \end{array}$$

Läbipainete, pöördenurkade, paindemomentide ja põikjõu avaldised kujunevad järgmisteks:

$$\begin{array}{l} w = (-8,151q^2 + 6,589 + 2,448 \ln q + 1,562q^4)qb^4/100D \\ \theta = (-16,302q + 2,448q^{-1} + 6,250q^3)qb^3/100D \\ M_r = (16,302 + 2,448q^{-2} - 18,750q^2)qb^2/100 \\ M_\varphi = (16,302 - 2,448q^{-2} - 6,250q^2)qb^2/100 \\ Q = -0,500qb \end{array}$$

Lõpuks arvutame keskmist jäika osa nagu ringikujulist ühtlaselt koormatud plaati, mille serval on teada siirded w ja paindemomendid M_r . Selle ülesande lahendamine punktis 11.31 toodud skeemi kohaselt raskusi ei valmista.

Joonisel 11.5 on toodud läbipainde, paindemomendi ja põikjõu epüürid. Võrdluseks on punktiiriga näidatud samad epüürid ühtlase paksusega plaadi jaoks. Nagu epüüridest nähtub, vähendab jäik keskmine osa läbipainet küll tunduvalt, kuid see-eest kasvavad paindemomendid ja sellega seoses plaadi jäigastamata osas ka pinged. Seega säärase konstruktsiooni soovitavaks pidada ei saa.

Kui plaadi keskmise osa jäikus pole nii suur, et teda võiks vaadelda nagu lõpmata jäika, muutub arvutus keerulisemaks. Sel juhul tuleb algul kummagi osa elastse pinna kohta välja kirjutada (11.24) tüüpi avaldis. Kokku

esineb neis kaheksa integreerimiskonstanti. Neist kesk-
mise osa jaoks võrduvad kaks nulliga ($C_2 = C_4 = 0$).
Jääb järele kuus integreerimiskonstanti, mille määrami-
seks on kasutada kaks ääritingimust plaadi välisserval
ja neli tingimust kahe kontsentrilise osa ühendusjoonel:
seal peavad siirded w , pöördenurgad θ , paindemomen-
did M_r ja põikjõud Q olema mõlema osa jaoks võrdsed.

12 PLAATIDE STABIILSUS

Olgu plaat koormatud jõududega oma tasandis.

Säärast ülesannet on käsitletud tasandülesandes (ptk. 8 ja 9), kuid tasandülesande lahendid on piisavad ainult teatud piirini. Tasandülesande juures eeldatakse, et plaat jääb tasandiliseks ja pinged on ühtlased üle plaadi paksuse. Koormuse teatud suurusest alates aga pole need eeldused enam õiged, kuna plaat kaotab oma tasandilise kuju, temal tekivad mõlgid. Üle plaadi paksuse ühtlaselt jaotatud pingetele, mida edaspidi nimetame pingeteks plaadi keskpinnas või ahelppingeteks, lisanduvad paindepinged, mis plaadi keskpinnas võrduvad nulliga ja muutuvad lineaarselt üle plaadi paksuse. Nähe on analoogiline surutud varda nõtkumisega.

Koormust, mille juures algab plaadi mõlkumine, nimetatakse kriitiliseks koormuseks. Erinevalt varrastest ei põhjusta kriitilise koormuse ületamine veel plaadi kandevõime kaotust, kuid plaadi tööol pärastkriitilises staadiumis on mõningaid iseärasusi, mida lähemalt vaatleme järgmises peatükis. Esmajoones tuleb märkida lineaarsuse kadumist koormuse ja pingete vahel. Seega osutub õhukeseseinaliste konstruktsioonide arvutamisel, eriti laeva-, lennuki- ja vaguniehituses jne. kriitilise koormuse määramine tingimata vajalikuks arvutusetaipiks. Kuid ka tavalise I-tala arvutamisel pole võimalik stabiilsuse küsimustest mööda minna — võõde maksimaalne laius, samuti ka jäikusribide vahekaugus määratakse tavaliselt lähtudes pingetest, mille juures vastavad elemendid kaotavad stabiilsuse.

Plaatide kriitilise koormuse määramiseks on kasutatavad samad meetodid mis taladegi kriitilise koormuse määramiseks — staatikalise tasakaalu meetod ja energiline meetod.

12.1 STAATIKALISE TASAKAALU MEETOD

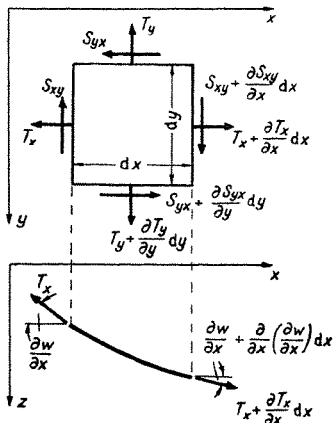
Samuti nagu taladegi juures on siin esmalt vaja täiendada plaadi painde diferentsiaalvõrrandit liikmetega, mis arvestavad plaadi tasandis tegutsevate jõudude mõju. Kuna plaadi välispinnale mõjuv põikkoormus võrdub nulliga, saadakse tulemuseks homogeenne diferentsiaalvõrrand. Edasi peab leidma plaadi läbipainde jaoks säärase avaldise, mis rahuldab saadud diferentsiaalvõrrandit ja ääritingimusi plaadi servadel. Üks säärane lahend on lihtsalt leitav — läbipaine $w = 0$. See on nn. triviaalne lahend, mis annab mõlkumata tasakaalukuju. Sellest lahendist kriitilist koormust määrata pole võimalik. Lisaks sellele on aga teatud diskreetsete koormusparameetrite väärtuste juures võimalik säärane lahend, kus $w \neq 0$. Neile parameetritele vastav kõige väiksem koormus ongi kriitiline koormus.

Mittetriviaalne lahend leitakse üldjuhul nii, et läbipainet otsitakse mingi avaldise kujul, mis sisaldab teatud arvu plaadi tasandis mõjuvast koormusest sõltuvaid tegureid. Edasi nõutakse, et valitud avaldis rahuldaks diferentsiaalvõrrandit ja ääritingimusi kas või ligikaudselt, ning koostatakse vastav võrrandisüsteem; mittetriviaalse lahendi korral peab selle võrrandisüsteemi kordajatest moodustatud determinant võrduma nulliga. Kui osa tingimusi, näiteks ääritingimused, on juba arvestatud läbipainde avaldise koostamisel, siis saadavas võrrandisüsteemis nad muidugi teistkordselt enam ei figureeri.

12.2 PLAADI PAINDE DIFERENTSIAALVÕRRAND PLAADI TASANDIS MÕJUVATE JÕUDUDE OLEMASOLU KORRAL

Plaadi painde diferentsiaalvõrrand (10.19) on sisuliselt tingimus, et kõigi plaadi elemendile $dx dy h$ mõjuvate välis- ja sisejõudude projektsioonide summa z -teljele võrdub nulliga, kusjuures sisejõududest on arvestatud ainult painde- ning väändemomente ja põikjõude, kuid on välja jäetud plaadi pinnas mõjuvad piki- ja tangentsiaaljõud (aheljõud). Plaadi stabiilsuse uurimiseks, aga ka plaadi käitumise selgitamiseks suurtel läbipainetel, kus aheljõudude mõju on tunduv, osutub vajalikuks plaadi painde diferentsiaalvõrrandit täiendada nende jõudude projektsioonidega z -teljele.

Mõjugu plaadi elemendile $dx dy h$ pikijõud T_x ja T_y



JOON 12.1

ning tangentsiaaljõud S_{xy} (joon. 12.1). Need jõud on, samuti nagu enne momendid ja põikjõud, võetud ühiklaiuse kohta, s. t. sisuliselt on tegemist nende jõudude intensiivsusega. Neile jõududele vastavad ahel pinged leiame, jagades jõud plaadi paksusega: $\sigma_x = T_x/h$, $\sigma_y = T_y/h$, $\tau_{xy} = S_{xy}/h$. Kogupingete leidmiseks tuleb ahel pingetele liita veel paindepinged.

Projekteerime algul plaadi elemendile mõjuvad piki- ja tangentsiaaljõud x - ja y -teljele. Kuna vaadeldavale elemendile nende telgede sihis mingit väliskoormust ei mõju, peab aheljõudude projektsioonide summa neile telgedele võrduma nulliga. Eeldusel, et plaadi keskpinna pöörde nurkad on niivõrd väikesed, et nende koosinusi võib lugeda võrdseks ühega, saame analoogiliselt võrranditega (8.8) järgmised kaks tasakaaluvõrrandit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (12.1)$$

Tangentsiaalpingete paarisuse seaduse alusel $S_{yx} = S_{xy}$.

Normaaljõud T_x annavad (jällegi eeldusel, et pöörde-
nurkade väiksuse tõttu nurkade siinused ja tangensid
võib lugeda nurkadega võrdseteks) z -teljele projektsiooni

$$-T_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy$$

kust pärast kõrgemat järku väikeste suuruste hülgamist
saame

$$\left(T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy \quad (a)$$

Analoogiliselt on normaaljõudude T_y projektsiooniks
 z -teljele

$$\left(T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy \quad (b)$$

Tangentsiaaljõud S_{yx} annavad projektsiooni

$$-S_{yx} dx \frac{\partial w}{\partial x} + \left(S_{yx} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \right] dx$$

ehk pärast kõrgemat järku väikeste suuruste hülgamist

$$\left(S_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy \quad (c)$$

Analoogiliselt on tangentsiaaljõudude S_{xy} projektsioo-
niks

$$\left(S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy \quad (d)$$

Summeerides avaldised (a)...(d) saame, arvestades
seoseid (12.1), vaadeldavale elemendile mõjuvate ahel-
jõudude projektsiooni z -teljele

$$\left(T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (12.2)$$

Avaldise (12.2) jagame elemendi pinnaga $dx dy$ ja
lülitame võrrandisse (10.19) täiendava koormusena.

Saame.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ & = \frac{1}{D} \left(q + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (12.3) \end{aligned}$$

Lugeses võrrandis (12.3) põikkoormuse q võrdseks nulliga, saamegi võrrandi plaadi kriitilise koormuse määramiseks:

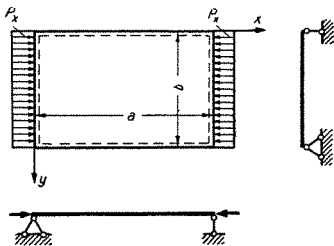
$$\begin{aligned} & D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \\ & = T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (12.4) \end{aligned}$$

Võrrandis (12.4) esinevate aheljõudude T_x , T_y ja S_{xy} jaotus on sama, mis tasandülesandel, kuna mõlkumise hetkel on plaadi läbipaine veel lõpmata väike ega avalda selle tõttu mõju pingajaotusele plaadi keskpinnas (nagu plaatide paindeteooria algul näidatud, kasvavad ahelpinged võrdeliselt läbipainde ruuduga, paindepinged — võrdeliselt läbipaindega).

12.3 RISTKÜLIKULISE PLAADI KRIITILISE KOORMUSE LEIDMINE

12.31 Järgale kontuurile toetuv plaat, mis on ühes sihis ühtlaselt surutud

Olgu plaat servadel $x=0$ ja $x=a$ koormatud ühtlaselt jaotatud survejõududega, mille intensiivsus on P_x (joon. 12.2). Seega $T_x = -P_x$; $T_y = S_{xy} = 0$.



JOON 12.2

Võrrand (12.4) lihtsustub. Jääb järele:

$$D \left(-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (12.5)$$

Analoogiliselt punktis 10.41 kasutatud meetodiga otsime plaadi elastse pinna võrrandit trigonomeetrilise rea

$$w = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (12.6)$$

kujul, mille iga liige rahuldab ääritingimusi vabalt toetatud plaadi jaoks.

Paigutades avaldise (12.6) diferentsiaalvõrrandisse (12.5), saame

$$\sum_m \sum_n \left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - P_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (12.7)$$

Kuna tingimus (12.7) peab olema rahuldatud suvalise x ja y väärtuse juures, jaguneb ta üksikuiks omavahel seostamata võrrandideks

$$\left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - P_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right\} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (12.8)$$

kust

$$P_x = \pi^2 D \frac{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}{(m/a)^2} \quad (12.9)$$

Ilmselt saame P_x jaoks minimaalse väärtuse, kui $n = 1$. Seega toimub mõlkumine jõu ristsihis alati ühe poollainena. Missugune peab olema poollainete arv jõu sihis m , sõltub plaadi külgede suhtest.

Avaldise (11.13) võib ümber kirjutada järgmisel kujul, kus poollainete arv n on juba võetud võrdseks ühega:

$$P_x = -\frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (12.10)$$

Sulgudes olev liige $\left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2}\right)$ muutub minimaalseks, kui

$$\frac{d}{dm} \left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2}\right) = 1 - \frac{1}{m^2} \frac{a^2}{b^2} = 0 \quad (12.11)$$

Siit $m = a/b$. Kuna aga poollainete arv m võib olla ainult täisarv, pole see tulemus üldjuhul otseselt kasutatav ja tuleb proovida, kumb kahest lähemast täisarvust annab kriitilise koormuse jaoks väiksema väärtuse.

Võib teha teisiti: määrata algul, missugune külgede suhe on piiriks kahe erineva poollainete arvu vahel. Selleks võtame avaldises (12.10) poollainete arvuks kord m ja teine kord $m+1$ ja leiame, millise külgede suhte a/b korral nad annavad sama kriitilise jõu.

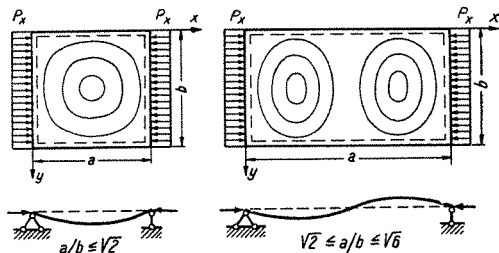
Saame:

$$m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} = m + 1 + \frac{1}{m+1} \frac{a^2}{b^2}$$

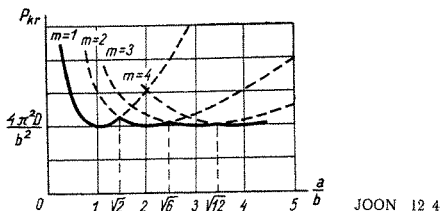
kust

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)} \quad (12.12)$$

Seega on ühe ja kahe poollainega mõlkumiskuju vahel piiriks külgede suhe $a/b = \sqrt{2}$; kahe ja kolme poollainega kuju vahel $a/b = \sqrt{6}$ jne. (joon. 12.3).



JOON. 12 3



JOON 12.4

Kriitilise koormuse sõltuvus külgede suhtest on näidatud graafikul 12.4, kus üksikud kõverjooned kujutavad tasakaalukujudele $m=1$, $m=2$ jne. vastavat seost.

Nagu jooniselt näha, võib juhul, kui plaat on surutud pikemate külgede sihis ($a > b$), kriitilise koormuse lugeda võrdseks ruutplaadi kriitilise koormusega:

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \quad (12.13)$$

Kui plaat on surutud lühemate külgede sihis ($a < b$), siis $n = m = 1$ ja

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \quad (12.14)$$

Kui $a \ll b$, võib sulgudes oleva liikme lugeda võrdseks ühega:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (12.15)$$

Kriitilise pinge leidmiseks jagame kriitilise jõu plaadi paksusega:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{h} \quad (12.16)$$

Võttes $E = 2,15 \cdot 10^6$ kG/cm² ja $\mu = 1/3$ (teras), saame kriitiliste pingete jaoks järgmised sageli kasutatavad avaldised:

pikemate külgede sihis surutud plaadil ($a > b$)

$$\sigma_{kr} = 200 \cdot 4 \left(\frac{100h}{b} \right)^2 = 8 \cdot 10^6 \left(\frac{h}{b} \right)^2 \quad (12.17)$$

lühemate külgede sihis surutud plaadil ($a < b$)

$$\sigma_{kr} = 200 \left(\frac{100h}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \quad (12.18)$$

Tuleb tähele panna, et mõlemas valemis (12.17) ja (12.18) on nimetajas plaadi lühema külje pikkus.

12.32 Jäigale kontuurile toetuv plaat, mis on mõlemas sihis ühtlaselt surutud

Olgu vabalt jäigale kontuurile toetuv plaat servadel $x=0$ ja $x=a$ surutud jõududega P_x ning servadel $y=0$ ja $y=b$ jõududega P_y . Sel juhul $T_x = -P_x$, $T_y = -P_y$ ja $S_{xy} = 0$. Diferentsiaalvõrrand (12.4) võtab järgmise kuju:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (12.19)$$

Selle võrrandi lahendit otsime jällegi kujul (12.6). Ka mõlemas sihis surutud plaadi puhul jaguneb saadav võrrandisüsteem üksikuiks võrrandeks, kust kriitilise koormuse määramiseks saadakse tingimus

$$D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - P_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - P_y \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 = 0 \quad (12.20)$$

Korrutades võrrandit (12.20) suurusega a^2/h , saame kriitiliste survepingete $\sigma_x = P_x/h$ ja $\sigma_y = P_y/h$ määramiseks järgmise võrrandi:

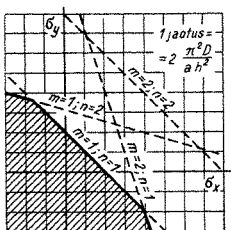
$$\frac{\pi^2 D}{h a^2} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 = \sigma_x m^2 + \sigma_y n^2 \frac{a^2}{b^2} \quad (12.21)$$

Praktiliselt esineb tavaliselt üks järgmistest variantidest:

a) üks pingetest (näiteks σ_y) on ette antud; tarvis on määrata teise pinge (antud juhul σ_x) väärtus;

b) mõlemad pinged muutuvad proportsionaalselt.

Esimesel juhul avaldame võrrandist (12.19) σ_y ning leiame mitmesugustele poollainete arvudele m ja n vastavad pinge σ_x väärtused; minimaalne neist on kriitili-



JOON. 12. 5

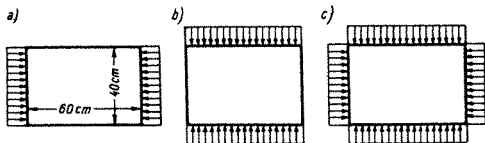
seks. Teisel juhul tähistame $\sigma_y = k\sigma_x$, kus k on etteantud pingete suhe, avaldame jällegi σ_x ning leiame ta minimaalse väärtuse, nii nagu eespool kirjeldatud.

Etteantud külgede suhte jaoks saab joonistada diagrammi, mis võimaldab vahetult leida, kas antud pinged on ülal- või allpool kriitilist. Ruudukujulise plaadi jaoks on säärane diagramm toodud joonisel 12. 5. Üksikud sirgjooned sellel diagrammil kujutavad etteantud poolainete arvule m ja n vastavaid pingete väärtusi. Stabiilsuspierikond (joonisel viirutatud) on piiratud murdjoonega, mis koosneb erinevale poolainete arvule vastavatest lõikudest. Survepinged on kantud telgede positiivsele osale.

Näide 12. 1. Määrata kriitilised pinged vabalt toetatud terasplaadis, mille külgede pikkused on 60 cm ja 40 cm ning paksus 5 mm, kui plaat on surutud: a) pikemate külgede sihis, b) lühemate külgede sihis, c) mõlemas sihis ühesuguse intensiivsusega jõuga (joon. 12. 6).

1 Pikemate külgede sihis surutud plaadi kriitilise koormuse leiame valemist (12. 17):

$$\sigma_{kr} = 800 \left(\frac{53}{40} \right)^2 = 1250 \text{ kG/cm}^2$$



JOON. 12. 6

2. Lühemate külgede sisih surutud plaadil (valem 12.18)

$$\sigma_{kr} = 200 \left(\frac{50}{40} \right)^2 \left(1 - \frac{40^2}{60^2} \right)^2 = 655 \text{ kG/cm}^2$$

3. Võttes arvesse, et terase jaoks $\pi^2 D/ha^2 \approx 200$ ($100 h/a$)² ja ülendade tingimuste kohaselt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{x1}$, saame avaldisest (12.19):

$$200 \left(\frac{100h}{a} \right)^2 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 = \sigma_{h1} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)$$

kust

$$\begin{aligned} \sigma_{kr} &= 200 \left(\frac{100h}{a} \right)^2 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right) = \\ &= 200 \left(\frac{50}{40} \right)^2 \left(m^2 + \frac{40^2}{60^2} n^2 \right) = 312 \left(m^2 + \frac{4}{9} n^2 \right) \end{aligned}$$

Minimaalse väärtuse saame, kui $m = n = 1$ ja kriitiliseks pingeks on

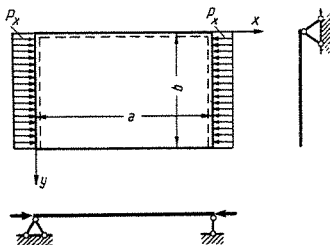
$$\sigma_{kr} = 452 \text{ kG/cm}^2$$

12.33 Plaat, mis on kahel vabalt toetatud vastasserval koormatud ühtlaselt jaotatud normaaljõududega

Olgu plaat servadel $x=0$ ja $x=a$ vabalt toetatud ning koormatud neil servadel ühtlaselt jaotatud survejõududega $P_x = -N_x$ (joon. 12.7). Kinnitustingimused ülejäänud kahel serval on suvalised.

Diferentsiaalvõrrand (12.4) võtab järgmise kuju:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (12.22)$$



JOON. 12.7

Oletades, et jõudude sihis tekib m poollainet, võime analoogiliselt punktiga 10.42 elastse pinna avaldist otsida kujul

$$w = Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (12.23)$$

Võrreldes avaldisega (10.47) puudub avaldises (12.23) summa märk, kuna samuti nagu eelmistelgi juhtudel annab kriitilise jõu jaoks minimaalse väärtuse mingi üksainus funktsioon $Y_m(y)$. Avaldis (12.23) rahuldab ääritingimusi servadel $x=0$ ja $x=a$. Funktsioon $Y_m(y)$ tuleb valida nii, et oleks rahuldatud võrrand (12.22) ja ääritingimused servadel $y=0$ ja $y=b$.

Paigutades (12.23) avaldisse (12.22), saame:

$$\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{P_x}{D} \right] Y_m(y) - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} + \frac{d^4 Y_m(y)}{dy^4} = 0 \quad (12.24)$$

Kuna plaat on servadel $y=0$ ja $y=b$ mõningal määral toetatud, siis on mingile poollainete arvule m vastav koormus alati suurem vastava vabalt toetatud riba pikijõust samasuguse poollainete arvu korral:

$$\frac{P_x}{D} > \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \quad (12.25)$$

Seega võrrandi (12.24) sulgudes olev osa on alati negatiivne ja lahendit võime otsida kujul

$$Y_m(y) = C_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m y + C_{2m} \operatorname{sh} \alpha_m y + C_{3m} \cos \beta_m y + C_{4m} \sin \beta_m y \quad (12.26)$$

kus

$$\alpha_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \sqrt{\frac{P_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}}$$

$$\beta_m = \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \sqrt{\frac{P_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}} \quad (12.27)$$

Kriitilise koormuse leiame, koostades ääritingimustele vastavad võrrandid ja võrrutades saadud võrrandisüsteemi kordajatest moodustatud determinandi nulliga.

Vaatleme näitena plaati, mis on küljel $y = 0$ vabalt toetatud ja küljel $y = b$ jõududevaba (joon. 12.7). Kuna arvutused näitavad, et minimaalne survejõu P_x väärtus saadakse sel juhul uhe poollaine puhul, loeme edaspidi $m = 1$ ja jätame ta indeksina ära.

Ääritingimused on järgmised:

Kui $y = 0$, siis

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (a)$$

Kui $y = b$, siis

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (b)$$

Tingimusi (a) saame rahuldada, võttes üldlahendis (12.26) $C_1 = C_3 = 0$ Ääritingimustest (b) saame:

$$C_2(\alpha^2 - \mu\pi^2/a^2) \operatorname{sh} \alpha b - C_4(\beta^2 - \mu\pi^2/a^2) \sin \beta b = 0 \quad (c)$$

$$C_2\alpha[\alpha^2 - (2 - \mu)\pi^2/a^2] \operatorname{ch} \alpha b - C_4\beta[\beta^2 + (2 - \mu)\pi^2/a^2] \cos \beta b = 0$$

Mittetriviaalse lahendi leidmiseks võrrutame võrrandi-süsteemi (c) kordajatest moodustatud determinandi nulliga:

$$\begin{vmatrix} (\alpha^2 - \mu\pi^2/a^2) \operatorname{sh} \alpha b & -(\beta^2 - \mu\pi^2/a^2) \sin \beta b \\ \alpha[\alpha^2 - (2 - \mu)\pi^2/a^2] \operatorname{ch} \alpha b & \beta[\beta^2 + (2 - \mu)\pi^2/a^2] \cos \beta b \end{vmatrix} = 0 \quad (d)$$

Siit saame pärast mõningaid ümbermoodustamisi kriitilise jõu määramiseks avaldise

$$\beta(\alpha^2 - \mu\pi^2/a^2)^2 \operatorname{th} \alpha b = \alpha(\beta^2 + \mu\pi^2/a^2)^2 \operatorname{tg} \beta b \quad (e)$$

mille lahendame proovimisega. Anname koormusele P erinevad väärtused, leiame neile vastavad α ja β ning asendame need avaldisse (e). Koormuse P väärtus, mille puhul avaldis (e) võrdub nulliga, ongi otsitav kriitiline koormus.

Kriitilise survepinge võib avaldada kujul

$$\sigma_{kr} = k \frac{\pi^2 D}{bh^2} \quad (f)$$

kus mõlketegur k tuleb võtta alljärgnevast tabelist.

Tabel 12.1

Mõlketegur k (vt. joon. 12.7)

a/b	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
k	4,40	3,65	2,15	1,44	1,135	0,952	0,835	0,755
a/b	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0			
k	0,698	0,610	0,564	0,516	0,506			

Ligikaudu $k \approx 0,456 + (b/a)^2$.

Väga pikkade terasplaatide puhul kasutatakse avaldist

$$\sigma_{kr} = 84 \left(\frac{100h}{b} \right)^2$$

Juhul kui serv $y = 0$ on jäigalt kinnitatud ja serv $y = b$ jõududevaba, sõltub tekkivate poollainete arv külgede suhtest a/b . Kriitiliste pingete ja külgede suhte diagramm kujuneb analoogiliseks joonisel 12.4 tooduga. Kui $a \gg b$, on poollaine pikkuseks $1,635b$ ja valemis (f) vastab sellele tegur $k = 1,328$.

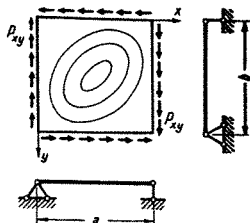
Terastala vöö üht poolt võib vaadelda plaadina, mille üks serv on tala seinaga elastselt ühendatud ja teine serv jõududevaba. Seega säärase vöö kriitiline pinge on vahemikus

$$84 \left(\frac{100h}{b} \right)^2 < \sigma_{kr} < 265 \left(\frac{100h}{b} \right)^2$$

12.34 Kontuuril toetuv plaat, mis on servadel koormatud tangentsiaaljõududega

Diferentsiaalvõrrandi (12.4) täpne lahendamine osutub sageli võimatuks. Sel juhul tuleb kasutada ligikaudseid meetodeid. Üheks efektiivseimaks neist on *Bubnov-Gal-jorkini* meetod, millega tutvusime punktis 10.44. Seda meetodit kasutamegi püstitatud ülesande lahendamiseks.

Kui plaadile mõjuvaks koormuseks on ainult piki plaadi servi rakendatud ühtlaselt jaotatud tangentsiaaljõud P_{xy} (joon. 12.8), tekivad plaadi pinnas sisejõud $T_{xy} = P_{xy}$,



JOON. 12 8

mis on ühesugused kogu plaadi ulatusel. Plaadi diferentsiaalvõrrand (12.4) võtab järgmise kuju:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{2P_{xy}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (12.28)$$

Aproksimeerime plaadi elastset pinda trigonomeetrilise reaga (12.6):

$$w = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

mille iga liige rahuldab ääritingimusi vabalt toetatud plaadi jaoks. Piirdudes ainult nelja esimese liikmega, kujuneb elastse pinna avaldiseks:

$$w = C_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + C_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\ + C_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + C_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \quad (a)$$

Edasi paigutame avaldise (a) diferentsiaalvõrrandisse (12.28), korrutame saadud võrrandi järjekorras läbi kõigi etteantud funktsioonidega ja integreerime üle plaadi pinna. Tulemuseks saadakse homogeenne algebraline võrrandisüsteem nelja tundmatuga — C_{11} , C_{12} , C_{21} ja C_{22} . Kriitilise koormuse leiame saadud võrrandisüsteemi korrajatest moodustatud determinandi nullisuse tingimusest.

Otsitava võrrandisüsteemi esimene võrrand on:

$$\int_F \left[\left(\nabla^2 \nabla^2 - \frac{2P_{xy}}{D} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \left(C_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \right.$$

$$+ C_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + C_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \\ + C_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \Big] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dF = 0 \quad (b)$$

Võttes arvesse, et

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & \text{kui } m \neq p \\ a/2, & \text{kui } m = p \end{cases} \quad (c)$$

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & \text{kui } m + p \text{ on paarisarv} \\ \frac{2a}{\pi} \frac{m}{m^2 - p^2}, & \text{kui } m + p \\ & \text{on paaritu arv} \end{cases}$$

kujuneb võrrand (b) järgmiseks:

$$\left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{ab}{4} C_{11} - \\ - \frac{32P_{xy}}{\pi^2 D} \left(\frac{1}{1^2 - 2^2} \right)^2 C_{22} = 0 \quad (d)$$

Ülejäānud kordajate parameetrid võrduvad nulliga.
Kasutades tähistusi

$$\beta = a/b \quad (e)$$

$$\lambda = -\pi^4 D / 32\beta b^2 P_{xy} \quad (f)$$

võime võrrandi (b) ümber kirjutada järgmiselt:

$$\frac{\lambda(1 + \beta^2)^2}{\beta^2} C_{11} + \frac{4}{9} C_{22} = 0 \quad (g)$$

Samuti leiame ülejäānud võrrandid:

$$\frac{\lambda(1 + 4\beta^2)^2}{\beta^2} C_{12} - \frac{8}{9} C_{21} = 0 \quad (h)$$

$$-\frac{8}{9} C_{12} + \frac{\lambda(4 + \beta^2)^2}{\beta^2} C_{21} = 0 \quad (i)$$

$$\frac{4}{9} C_{11} + \frac{\lambda(4 + 4\beta^2)^2}{\beta^2} C_{22} = 0 \quad (k)$$

Edasi võrrutame võrrandisüsteemi (g)–(k) kordajatest moodustatud determinandi nulliga :

$$\begin{vmatrix} \lambda(1 + \beta^2)^2/\beta^2 & 0 & 0 & 4/9 \\ 0 & \lambda(1 + 4\beta^2)^2/\beta^2 & -8/9 & 0 \\ 0 & -8/9 & \lambda(4 + \beta^2)^2/\beta^2 & 0 \\ 4/9 & 0 & 0 & \lambda(4 + 4\beta^2)^2/\beta^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (m)$$

Avades determinandi (m), saame λ määramiseks kaks võrrandit:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{9} \frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)^2} \quad (n)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{8}{9} \frac{\beta^2}{(1 + 4\beta^2)(4 + \beta^2)} \quad (o)$$

Esimene neist, mis vastab liikmeile, milles $m + n$ on paarisarv, annab λ jaoks väiksema väärtuse. Sellega peamegi opereerima kriitilise koormuse leidmisel.

Võrrandist (f)

$$P_{xy} = -\frac{\pi^4 D}{32 \beta b^2 \lambda} \quad (p)$$

Paigutades avaldise (p) λ väärtuse (n), leiamegi kriitilise tangentsiaaljõu

$$(P_{xy})_{kr} = \pm \frac{9\pi^2}{32} \frac{(1 + \beta^2)^2}{\beta^3} \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (r)$$

Kriitiline pinge

$$\tau_{kr} = \frac{(P_{xy})_{kr}}{h} = \pm \frac{9\pi^2}{32} \frac{(1 + \beta^2)^2}{\beta^3} \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (s)$$

Kaks märki näitavad, et tangentsiaalpingete kriitiline väärtus ei sõltu jõudude mõjumissuunast.

Mõlgi absoluutne suurus jääb seni, kuni me ei võta arvesse läbipainde mõju plaadi keskpinnas mõjuvatele pingetele, määramatuks. Küll aga võime võrrandist (g) või (k) leida parameetrite C_{11} ja C_{22} suhte ja selle kaudu mõlgi kaju. Nii näiteks ruudukujulise plaadi korral $C_{22} = -C_{11}/4$. Kaardistades läbipainde avaldise leiame, et pärast stabiilsuse kaotust tangentsiaalpingete toimel tekivad plaadil kaldlained (joon. 12.8).

Vähese liikmete arvu tõttu reas (a) ei ole avaldis (s) eriti täpne. Ruudukujulise plaadi jaoks on viga ca 15%

ja kasvab külgede suhte β suurenemisega. Nagu näitavad täpsemad arvutused, võib kriitilise tangentsiaalpinge määramiseks kasutada valemit

$$\tau_{kr} = \left[5,35 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$$

Terasplaadi kriitilise koormuse võib seega ligikaudu määrata valemiga

$$\tau_{kr} = \left[5,35 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] 200 \left(\frac{100h}{b} \right)^2$$

Neis valemis on b lühema külje pikkus.

12.35 Vabalt toetuv plaat, mis on kahel vastasserval koormatud lineaarselt muutuvate normaaljõududega

Olgu plaat koormatud kahel vastasserval koormusega

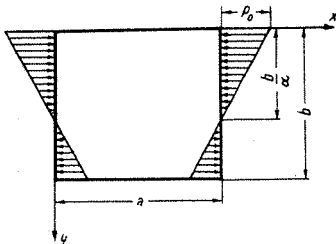
$$P_x(y) = P_0 \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right) \quad (12.29)$$

nagu näidatud joonisel 12.9. Juhul kui $\alpha = 0$, saame puhta surve; kui $\alpha = 2$, on tegemist puhta paindega.

Ülesande võib lahendada analoogiliselt eelmisega, võttes lähtevõrrandiks

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{P_0}{D} \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (12.30)$$

ja aproksimeerides plaadi elastset pinda avaldisega (12.6).



JOON. 12.9

Ligemalt peatumata tuletuskäigul märgime, et kriitilise survepinge leidmiseks saadakse valem

$$\sigma_{kr} = \frac{P_0}{h} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$$

kus mõiketegur k võetakse tabelist 12.2.

Tabel 12.2

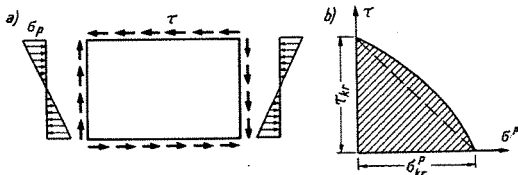
Mõiketegur k (vt. joon. 12.9)

a/b α	0,4	0,6	0,75	0,8	1,0	1,5
2	29,1	24,1	24,1	24,4	25,6	24,1
1,333	18,7	12,9	11,5	11,2	11,0	11,5
1	15,1	9,7	8,4	8,1	7,8	8,4
0,8	13,3	8,3	7,1	6,9	6,6	7,1
0,667	10,8	7,1	6,1	6,0	5,8	6,1

12.4 STABIILSUSE KAOTUS KAHE ERINEVA KOORMUSE KOOSMÕJUL

Olgu plaat koormatud kahe erineva koormusega oma pinnas, näiteks paindepingete ja tangentsiaalpingetega (joon. 12.10, a).

Kanname arvutustulemused diagrammidele, mille ühel teljel on paindepinged σ_p ja teisel tangentsiaalpinged τ (joon. 12.10, b). On tõestatud, et stabiilset piirkonda eraldab ebastabiilsest joon, mille kumerus on suunatud stabiilsusepiirkonnast väljapoole. See kehtib mitte ainult painde- ja tangentsiaalpingete, vaid ka teiste koormuskombinatsioonide kohta.



JOON. 12.10

Asendades neid kaht piirkonda eraldava kõverjoone sirgjoonega (punktiiriga näidatud) saame järgmise stabiilsustingimuse:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{kr}} + \frac{\tau}{\tau_{kr}} \leq 1 \quad (12.31)$$

kus σ_{kr} ja τ_{kr} on kriitilised pinged sel juhul, kui kumbki koormus mõjub omaette.

Valem (12.31) on tagavara kasuks, s. t. annab kriitilise koormuse jaoks õigest väiksema väärtuse.

Painde- ja tangentsiaalpingete koosmõju kohta annab täpsema tulemuse *B. M. Broude* tuletatud valem

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{kr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{kr}}\right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\sigma}{\sigma_{kr}} \frac{\tau}{\tau_{kr}} \leq 1 \quad (12.32)$$

mis on võetud ka metallkonstruktsioonide kohta kehtivatesse normidesse.

13 PAINDUVAD PLAADID

Jäikade plaatide arvutamisel loobusime plaadi kõrguses ühtlaselt jaotatud pingete, nn. aheltingete mõjust plaadi läbipaindele.

Aheltingete osatähtsus suureneb plaadi suhtelise läbipainde f/h suurenemisega, ja nagu arvutused näitavad, muutub viga tunduvalt juba $f/h = 0,3$ juures. Seega enamiku metallkonstruktsioonide arvutamisel peaks arvestama aheltingete mõju. Kahjuks on aga säärane arvutus üldjuhul tunduvalt keerulisem, mistõttu veel paljude praktikas esinevate juhtude jaoks inseneriarvutusteks kohased tabelid või graafikud siiani puuduvad. Erandina on täpne ja küllalt lihtne lahendus võimalik ainult silindrilise painde puhul.

Painduvate plaatide paindel tekkivad maksimaalsed pinged summeeruvad paindepingetest ja aheltingetest. Kuna aheltingete olemasolu võrreldes jäiga plaadiga reeglina vähendab plaadi läbipainet ja seega ka paindepingeid, siis tavaliselt kujunevad summaarsed pinged väiksemateks nendest, mille annab sääraste plaatide arvutus jäikade plaatide teooria kohaselt. Seega jäikade plaatide teooria alusel tehtud arvutus annab tulemuse harilikult tagavaraga ja võib projekteerimisel põhjustada tunduvalt materjali ülekulu.

13.1 PÕHIVÖRRANDID

13.11 Tasakaalu diferentsiaalvõrrand

Tasakaalutingimused juhu jaoks, kus plaadi keskpind kõverdub, on antud juba plaatide stabiilsust käsitlevas peatükis võrranditega (12.1) ja (12.3). Neist on võr-

randeid (12.1) võimalik samaselt rahuldada analoogiliselt tasandülesandega pingefunktsiooni F sisseviimisega:

$$\begin{aligned} T_x &= h\sigma_x^0 = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ T_y &= h\sigma_y^0 = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ S_{xy} &= h\tau_{xy}^0 = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (13.1)$$

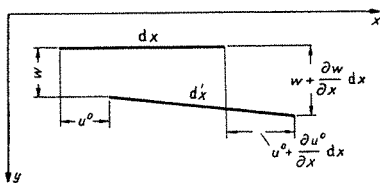
Paigutades avaldised (13.1) võrrandisse (12.3), saamegi otsitava diferentsiaalvõrrandi

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w &= \frac{q}{D} + \frac{h}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (13.2)$$

Kuna võrrandis (13.2) esineb kaks tundmatut funktsiooni — w ja F —, ei ole ta üksinda ülesande lahendamiseks piisav ja osutub vajalikuks koostada veel deformatsiooni pidevuse tingimus.

13.12 Deformatsiooni pidevuse tingimus

Plaadi keskpinnas mõjuvate pingete määramiseks tuli juhul, kui plaadi keskpind jäi tasandiliseks, rahuldada kolm võrrandit: kaks tasakaalutingimust (8.8) ja deformatsiooni pidevuse tingimus (8.11). Tasakaalutingimused jäävad samadeks ka sel juhul, kui plaadi keskpind kergelt kõverdub. Neid õnnestub rahuldada pingefunktsiooni sisseviimisega. Deformatsiooni pidevuse võrrandi koostamisel aga osutub vajalikuks arvestada asjaolu, et



JOON 13.1

plaadi keskpinna deformatsioonid ε_x^0 , ε_y^0 ja γ_{xy}^0 pole mitte üksnes x - ja y -telje suunaliste siirete u^0 ja v^0 funktsioonid, vaid sõltuvad ka plaadi läbipaindest w .

Tähistame plaadi keskpinna punktide x - ja y -telje sihilised siirded u^0 ja v^0 . Leiame plaadi keskpinnas asuva lõigu dx (joon. 13.1) suhtelise pikennemise, võttes arvesse ka plaadi läbipainde mõju.

Nagu jooniselt selgub, on selle lõigu pikkuseks pärast deformatsiooni

$$\begin{aligned} dx' &= \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u^0}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2} = \\ &= dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u^0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \end{aligned} \quad (13.3)$$

Hüljates kõrgemat järku väikesed suurused, saame siit:

$$dx' = dx \left[1 + \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (13.4)$$

Kuna siirded w on tunduvalt suuremad siiretest u^0 , võib avaldise (13.4) tuletamisel hüljata küll $(\partial u^0/\partial x)^2$, aga mitte $(\partial w/\partial x)^2$.

Pikennemine

$$\varepsilon_x^0 = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad (13.5)$$

Analoogiliselt

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \quad (13.6)$$

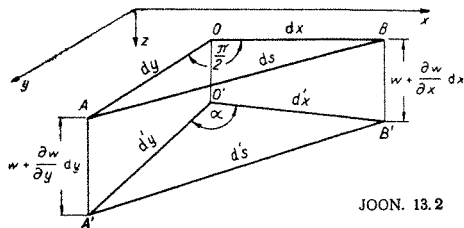
Seega pikennemiste üldised avaldised koosnevad kahest liikmest: ühest, mis vastab lineaarses elastsusõpetuses saadud avaldisele, ja täiendavast liikmest, mis arvestab plaadi läbipainet.

Samuti koosneb ka nihkenurga γ_{xy}^0 avaldis lineaarses elastsusteoorias saadud liikmetest ja täiendavast liikmest, mis arvestab plaadi läbipainde mõju. Tuletuskäigu lihtsustamiseks leiame siin ainult täiendava liikme.

Vaatleme plaadi läbipainde mõju plaadi keskpinnas asetsevaist lõikudest dx ja dy moodustatud täisnurga

\widehat{AOB} muutusele, s. o. nihkenurgale γ_{xy}^0 (joon. 13.2).

Siirdugu punktid A , O ja B ainult z -telje sihis ja olgu



JOON. 13.2

nende uued asendid A' , O' ja B' . Kui need siirded pole võrdsed, siis muutub ka täisnurk \widehat{AOB} .

Tähistame $\widehat{A'O'B'} = \alpha$. Nihkenurk

$$\gamma_{xy}^0 = \pi/2 - \alpha \quad (13.7)$$

Lõigu AB ja kolmnurga $A'O'B'$ üksikute külgede pikkuste ruudud on järgmised:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$(dx')^2 = (dx)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \quad (13.8)$$

$$(dy')^2 = (dy)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} dy \right)^2$$

$$(ds')^2 = (ds)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx - \frac{\partial w}{\partial y} dy \right)^2$$

Koosinuslause põhjal

$$(ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 - 2(dx')(dy') \cos \alpha \quad (13.9)$$

Kuna γ_{xy}^0 on väike nurk, siis

$$\cos \alpha = \cos(\pi/2 - \gamma_{xy}^0) \approx \gamma_{xy}^0 \quad (13.10)$$

ja

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{(dx')^2 + (dy')^2 - (ds')^2}{2(dx')(dy')} \quad (13.11)$$

Asendades siia avaldised (13.8), saame, hüljates nime-
tajas kõrgemat järku väikesed suurused,

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (13.12)$$

Lisades siia veel siiretest u^0 ja v^0 tingitud liikmed

$$\left(\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \text{ saame:}$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (13.13)$$

Võttes avaldisest (13.5) teise tuletise y järgi, avaldisest (13.6) teise tuletise x järgi, avaldisest (13.13) teise tuletise mõlema muutuja järgi ning lahutades kahe esimese tulemuse summast kolmanda, õnnestub vabaneda siiretest u^0 ja v^0 :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (13.14)$$

Juhul kui tasakaalutingimused (12.1) on rahuldatud, on selle võrrandi vasaku poole väärtuseks (vt. 8. ptk.)

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 F \quad (13.15)$$

kus F — pingefunktsioon, ja deformatsiooni pidevuse tingimus (13.14) saab lõplikult säärase kuju:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (13.16)$$

13.13 Täielik põhivõrrandite süsteem ja selle modifikatsioonid

Painduvate plaatide põhivõrrandite täieliku süsteemi moodustavad võrrandid (13.16) ja (13.2)

$$\nabla^2 \nabla^2 F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (13.17)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} + \frac{h}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

Need võrrandid on tuntud *Kármáni* võrrandite nimetuse all.

Erijuhtudena saame võrrandeist (13.17) järgmised võrrandid:

1. Võttes $w = q = 0$, saame tasandülesande diferentsiaalvõrrandi $\nabla^2 \nabla^2 F = 0$.

2. Lugeses plaadi keskpinnas mõjuvad pinged ja seega ka pingefunktsiooni F võrdseks nulliga, saame jäiga plaadi painde diferentsiaalvõrrandi $\nabla^2 \nabla^2 w = q/D$.

3. Eeldusel, et plaadi läbipaine w on niivõrd väike, et selle teiste tuletiste ruudud võib hüljata, võib pingefunktsiooni F määrata esimesest võrrandist sõltumatult läbipaindefunktsioonist w .

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0$$

Lugeses veel teises võrrandis põikkoormuse q võrdseks nulliga, saame valemid plaadi kriitilise koormuse määramiseks.

4. Kui plaat on väga väikese paindejäikusega, siis $D \approx 0$. Sel juhul saame membraani võrrandid:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{q}{h}$$

Kui membraanis on eelnevalt tekitatud suured ühtlaselt jaotatud tõmbepinged σ_x^0 ja σ_y^0 , võime lugeda, et pinged membraani keskpinnas ei sõltu enam läbipaindest:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x^0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y^0$$

Teisest võrrandist saame sel juhul membraani elastse pinna määramiseks võrrandi

$$\sigma_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{h}$$

mis on analoogiline tuntud *Laplace'i* valemiga.

13.14 Ääritingimused

Painduva plaadi elastse pinna ja keskpinnas mõjuvate pingete leidmiseks on tarvis leida funktsioonid w ja F , mis rahuldaksid võrrandisüsteemi (13.17) ja ääritingi-

musi plaadi servadel. Kuna tundmatuid funktsioone on kaks, osutuvad vajalikuks kaheksugused ääritingimused.

Ääritingimused, mida peab rahuldama läbipaine w , jäävad samasugusteks nagu jäikadel plaatidelgi (p. 10. 25), ääritingimused aheltingetele aga sõltuvad sellest, kuidas on plaadi servad omas pinnas kinnitatud või milline on seal plaadi pinnas mõjuv koormus. Vaatleme mõningaid iseloomustavaid kinnitustingimusi, kusjuures oletame, et nad kehtivad x -teljega risti oleva serva kohta, s. o. serva kohta, kus $x=0$ või $x=a$.

1. **Vabalt liikuv serv.** Kui plaadi serv võib mööda kontuuri vabalt liikuda, võrduvad seal nulliga normaal- ja tangentsiaalpinged. Avaldades nad pingefunktsiooni kaudu, saame:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad (13. 18)$$

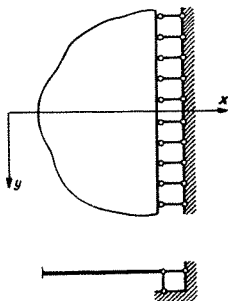
2. **Liikumatu serv.** Kui plaadi serv on kinnitatud nii, et serva punktid omas pinnas liikuda ei saa, näiteks on keevitatud absoluutselt jäiga tala külge, võrduvad seal nulliga siirded:

$$u^0 = 0; \quad v^0 = 0 \quad (13. 19)$$

3. **Mööda kontuuri libisev serv** (joon. 13. 3).

Sel juhul võrduvad nulliga tangentsiaalpinged ja plaadi serva normaali sihilised siirded:

$$\tau_{xy}^0 = 0; \quad u^0 = 0 \quad (13. 20)$$



JOON. 13. 3

Nende kolme näitega pole võimalik kinnitustingimuste arv kaugelki ammendatud, kuid juba neist selgub, et ääritingimused pingefunktsiooni jaoks võivad põhimõtteliselt sageli olla siiretes. Siiretes avaldatud ääritingimusi võib formuleerida küll ka pingetes, kuid siis nad kujunevad küllaltki keerulisteks. Selle tõttu on nii mõnigi kord lihtsam ülesanne algusest peale lahendada siiretes. Sel juhul on võrrandite (13.17) asemel põhivõrranditeks kolmest tasakaalutingimusest koosnev võrrandisüsteem, kus otsitavate funktsioonidena figureerivad siirded; nende võrrandite tuleamine ei kuulu aga enam käesoleva raamatu raamidesse.

13.15 Pinged

Painduvate plaatide paindel tekkivad pinged σ_x , σ_y ja τ_{xy} summeeruvad paindepingetest ja aheltingetest.

Plaadi keskpinna paindest tekkivate pingete σ^p leidmiseks määrame algul valemeist (10.10) paindemomendid ja hiljem neile vastavad pinged (10.11)–(10.12). Paindepinged muutuvad lineaarselt üle plaadi paksuse. Plaadi keskpinnas võrduvad nad nulliga ja saavutavad maksimaalse väärtuse plaadi välispindadel; pinged kahel vastaspinnaal on vastupidiste märkidega.

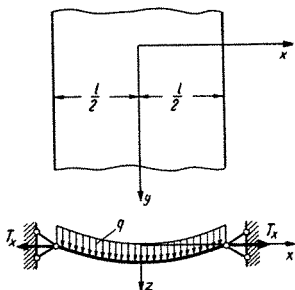
Ahelpinged σ^a on ühesuguse suurusega kogu plaadi paksuse ulatuses ja võrduvad pingetega plaadi keskpinnas. Pingefunktsiooni kaudu avalduvad nad valemitega (8.21).

13.2 SILINDRILINE PAIN

13.21 Liikumatu servadega ideaalselt tasandiline plaat

Vaatleme y -telje suunas lõpmata pikka ühtlaselt jaotatud koormusega plaati (joon. 13.4), mille servadel $x = \pm l/2$ siirded u , v ja w võrduvad nulliga.

Säärasel juhul võib plaadist mõtteliselt välja lõigatud ühiklaiusega riba vaadelda nagu varrast, mis on koormatud pikijõuga T_x ja põikkoormusega q , kusjuures piki-



JOON. 13.4

jõu suurus võrdub ahelpingete σ_x^0 ja plaadi paksuse h korrutisega:

$$T_x = \sigma_x^0 h \quad (13.21)$$

Kui pikijõu suurus T_x on teada, viib selle ülesande lahendamine diferentsiaalvõrrandi

$$Dw^{IV} = q + \sigma_x^0 h w'' \quad (13.22)$$

integreerimisele. Vastavalt avaldisele (2.33) on siis vabalt toetatud plaadi elastse pinna võrrandiks

$$w = \frac{ql^4}{Dv^4} \left[\frac{\operatorname{ch} rx}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{4} - r^2 x^2 \right) \right] \quad (13.23)$$

ning jäigalt kinnitatud plaadi elastse pinna võrrandiks [vt. avaldis (2.41)]

$$w = \frac{ql^4}{Dv^4} \left[\left(\frac{\operatorname{ch} rx}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}} - 1 \right) \frac{v}{2 \operatorname{th} \frac{v}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{4} - r^2 x^2 \right) \right] \quad (13.24)$$

Neis võrrandis

$$r = \sqrt{\frac{\sigma_x^0 h}{D}}; \quad v = rl \quad (13.25)$$

Kasutades tabelis II, 2 toodud abifunktsioone, võib läbi-painde plaadi keskel ning paindemomendid iseloomustavates punktides leida järgmiste valemite abil:

vabalt toetatud plaadil

$$(\omega)_{x=0} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{D} f_0(v)$$

$$(M_x)_{x=0} = \frac{ql^2}{8} \varphi_0(v)$$

järgalt kinnitatud plaadil

$$(\omega)_{x=0} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{D} f_1(v)$$

$$(M_x)_{x=0} = \frac{ql^2}{24} q_1(v)$$

$$(M_x)_{x=\pm l/2} = -\frac{ql^2}{12} \chi(v)$$

Plaadis tekkivad pinged saame ahelppingete ja paindepingete summeerimisel:

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^p$$

kusjuures paindepinged äärmistes kiududes

$$\max \sigma_x^p = \pm \frac{6M_x}{h^2}$$

Püstitatud ülesandes pole aga pikijõud T_x ette antud, vaid sõltub plaadi läbipaindest. Seega on esmalt vaja selgitada, kuidas sõltuvad ahelppinged plaadi läbipaindest. Selleks avaldame plaadi elastse pinna pikenemise servade $x = \pm l/2$ vahel, lähtudes geomeetrisest ja füüsikalistest kaalutlustest, ning võrrutame saadud suurused.

Kuna plaadi elastne pind on lame kõver, siis tema keskpinna pikenemine

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} (\omega')^2 dx \quad (13.26)$$

See pikenemine on tingitud ahelppingetest ja juhul, kui plaadi servade paigutised y -telje suunas võrduvad nulliga, võib ta avaldada valemiga

$$\Delta = \frac{\sigma^0 l}{E/(1-\mu^2)} \quad (13.27)$$

Võrrutades avaldiste (13 26) ja (13 27) paremad pooled, saame

$$\sigma^0 = \frac{E}{2(1-\mu^2)l} \int_{-l/2}^{l/2} (\omega')^2 dx \quad (13 28)$$

Asendades siia labipaine ω avaldised (13 23) või (13 24) ning võttes arvesse tahistusi (13.25), saame parast integreerimist vabalt toetatud plaadi jaoks

$$\left(\frac{Eh^4}{(1-\mu^2)ql^4} \right)^2 = \frac{135}{16} \frac{\text{th}(v/2)}{(v/2)^9} + \frac{27}{16} \frac{\text{th}^2(v/2)}{(v/2)^8} - \frac{135}{16(v/2)^8} + \frac{9}{8(v/2)^6} = U_0 \quad (13 29)$$

ning jaigalt kinnitatud plaadi jaoks

$$\left(\frac{Eh^4}{(1-\mu^2)ql^4} \right)^2 = \frac{81}{16(v/2)^7 \text{th}(v/2)} - \frac{27}{16(v/2)^6 \text{sh}^2(v/2)} + \frac{27}{4(v/2)^8} + \frac{9}{8(v/2)^6} = U_1 \quad (13 30)$$

Neist avaldistest võime leida v Arvutuste kergendamiseks on lisas IV toodud $\lg(10^4 \sqrt{U_0})$ ja $\lg(10^4 \sqrt{U_1})$ väärtused sõltuvad argumentidist v Edasine arvutuskäik ei valmistata enam raskusi

Naide 13.1. Leida vabalt toetatud plaadis tekkivad maksimaalsed pinged ja labipaine järgmistel andmetel $l=120$ cm $h=0.6$ cm, $q=0.5$ kG/cm², $E=2 \cdot 10^6$ kG/cm², $\mu=0.3$

Lahenduskaik on järgmine

$$10^4 \sqrt{U_0} = \frac{10^4 E h^4}{(1-\mu^2) q l^4} = 10^4 \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0.6^4}{0.91 \cdot 0.5 \cdot 120^4} = 27.3$$

$$\lg(10^4 \sqrt{U_0}) = 1.436$$

Tabelitest IV ja II 2

$$v = 14.4, \quad f_0 = 0.045, \quad \varphi_0 = 0.039$$

Maksimaalne labipaine

$$(\omega)_{x=0} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{D} f_0 = \frac{5}{384} \frac{0.5 \cdot 120^4 \cdot 0.91}{2 \cdot 10^6 \cdot 0.6^3} \cdot 0.045 = 1.63 \text{ cm}$$

Paindepinged plaadi keskel aarmistes kiududes

$$\max \sigma_x^p = \frac{6}{h^2} \frac{q l^2}{8} \varphi_0 = \frac{6}{0.6^2} \frac{0.5 \cdot 120^2}{8} \cdot 0.039 = 584 \text{ kG/cm}^2$$

Aheltõpinged

$$\sigma_x^0 = \frac{\nu^2 D}{l^2 h} = \frac{14,4^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,6^3}{120^2 \cdot 0,6 \cdot 0,91} = 951 \text{ kG/cm}^2$$

Plaadis tekkiv maksimaalne pinge

$$\max \sigma_x = 951 + 584 = 1535 \text{ kG/cm}^2$$

Aheltõude arvestamata saaksime

$$\max \sigma_x = \frac{ql^2}{8} \frac{6}{h^2} = \frac{0,5 \cdot 120^2}{8} \cdot \frac{6}{0,6^2} = 15\,000 \text{ kG/cm}^2$$

13.22 Plaadi servade vahel asuvate elastsete tuge mõju

Olgu plaadi pikiservade liginemine takistatud paindejääkade, kuid kokkusurutavate tugegedega, nagu skemaatiliselt kujutatud joonisel 13.5.



JOON. 13.5

Tähistame nende elastsete tugegede pinna plaadi ühe pikkusühiku kohta, s. o. toe ristlõikepinna ja tugegede vahekauguse jagatise, tähega F . Tugede elastsusmoodul olgu E_t , plaadi elastsusmoodul E .

Tugede järeleandmise tõttu ei jää plaadi pikiservade vahekaugus enam endiseks, vaid väheneb suuruse Δ võrra. Seega plaadi keskpinna pikenemine

$$\Delta = \frac{\sigma^0 l}{E/(1-\mu^2)} = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} (w')^2 dx - \Delta \quad (13.31)$$

Kuna tugedes tekkivad sisejõud tasakaalustavad plaadis tekkivad aheltõud, siis tugedes tekivad survepinged $\sigma^0 h/F$ ning servade vahekaugus väheneb

$$\Delta = \frac{\sigma^0 h}{F} \frac{l}{E_t} \quad (13.32)$$

võrra.

Paigutades avaldise (13.32) võrrandisse (13.31), saame

$$\sigma^0 = \left(1 + \frac{E}{E_t(1-\mu^2)} \frac{h}{F} \right) = \frac{E}{2(1-\mu^2)l} \int_{-l/2}^{l/2} (w')^2 dx \quad (13.33)$$

Edasine lahenduskäik on analoogiline juhuga, kus plaadi servad ei saanud läheneda lõpptulemuseks saadakse, et funktsioonid U_0 või U_1 tuleb leida valemist

$$U_0[v\text{õi } U_1] = \left(\frac{Eh^4}{(1-\mu^2)ql^4} \right)^2 \left(1 + \frac{E}{(1-\mu^2)E_t} \frac{h}{F} \right) \quad (13.34)$$

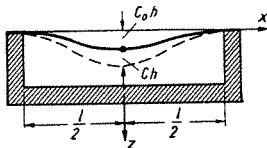
Järgnev arvutus ei erine arvutusest liikumatute servadega plaadi puhul.

13.23 Tehnoloogilise eelpainde mõju. Ligikaudne lahendusmeetod

Vaatleme pikka plaati, mille servade pööre võrdub nulliga (joon. 13.6). Plaadi servade lähenemist takistavad elastsed toed pinnaga F plaadi pikkuse ühiku kohta ja elastsusmooduliga E_t . Plaadil on tehnoloogiline läbipaine w_0 , mis on tingitud näiteks valtsimisest või keevitamisest. Oletame, et tehnoloogilise eelpainde kujuks võime võtta

$$w_0(x) = C_0 h \left(1 - 8 \frac{x^2}{l^2} + 16 \frac{x^4}{l^4} \right) \quad (a)$$

mis vastab jäigalt kinnitatud jäiga plaadi elastsele pinnale ühtlaselt jaotatud koormuse puhul Kordaja C_0 näitab, mitu korda on eelpaine plaadi keskel suurem plaadi paksusest.



JOON 13 6

Olgu märgitud, et eelpainde jaoks oleksime võinud võtta ka mõne teise sobiva avaldise, näiteks kosinusoidi

$$w_0(x) = \frac{C_0 h}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad (b)$$

kusjuures tulemused ei oleks teineteisest nimetamisväärselt erinenud.

Eelpainde olemasolul kujuneb plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandiks võrrandi (13.22) asemel

$$Dw^{IV} - q - \sigma^0 h (\omega + w_0)'' = 0 \quad (13.35)$$

kus ω on väliskoormuse mõjul tekkiv läbipaine.

Plaadi keskpinna pikenemine Λ on võrrandi (13.31) alusel järgmine:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2} \left[\int_{-l/2}^{l/2} (\omega' + w_0')^2 dx - \int_{-l/2}^{l/2} (w_0')^2 dx \right] - \Delta = \\ &= \frac{\sigma^0 l}{E} (1 - \mu^2) \end{aligned} \quad (13.36)$$

Võrrandid (13.35) ja (13.36) määravadki plaadi läbipainde w ja ahelpinged σ^0 .

Võrrandi (13.35) integreerime *Bubnov-Galjorkini* meetodiga. Lahendame ülesande esimeses lähenduses ja võtame plaadi elastse pinna võrrandiks

$$w(x) = Ch \left(1 - 8 \frac{x^2}{l^2} + 16 \frac{x^4}{l^4} \right) \quad (c)$$

Asendame (a) ja (c) võrrandisse (13.35), korrutame tulemuse avaldise (c) sulgudes oleva osaga ja integreerime üle plaadi laiuse. Saame järgmise võrrandi:

$$\begin{aligned} \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ 384 \frac{Dh}{l^4} C - q - \frac{\sigma^0 h^2}{l} \left[(C_0 + C) \left(-16 + 192 \frac{x^2}{l^2} \right) \right] \right\} \cdot \\ \cdot \left(1 - 8 \frac{x^2}{l^2} + 16 \frac{x^4}{l^4} \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

kust pärast integreerimist, taandamist ja liikmete ümberpaigutamist saame:

$$384 \frac{D}{l^4} C + \frac{64}{7} \frac{\sigma^0 h}{l^2} (C_0 + C) = \frac{q}{h} \quad (e)$$

Seega oleme saanud ühe algebraalse seose C ja σ^0 ning väliskoormuse q vahel. Teise seose leiame võrrandist

(13.36). Paigutades sinna läbipainde avaldise (c), tehnoloogilise eelpainde avaldise (a) ning avaldise (13.32) tugede vahekauguse muute kohta, saame.

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-l/2}^{l/2} \left[(C + C_0) \frac{h}{l} \left(-16 \frac{x}{l} + 64 \frac{x^3}{l^3} \right) \right]^2 - \int_{-l/2}^{l/2} \left[C_0 \frac{h}{l} \left(-16 \frac{x}{l} + 64 \frac{x^3}{l^3} \right) \right]^2 - \frac{\sigma^0 h l}{FE_t} \right\} = \frac{\sigma^0 l (1 - \mu^2)}{E} \quad (f)$$

kust

$$\sigma^0 = \frac{256}{105} \frac{Eh^2}{(1 - \mu^2) Kl^2} (C^2 + 2CC_0) \quad (g)$$

Siin

$$K = 1 + \frac{Eh}{E_t F (1 - \mu^2)} \quad (h)$$

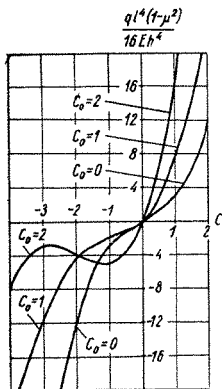
Seega saimegi teise võrrandi (g), mis seob tundmatuid C ja σ^0 väliskoormusega q .

Asendades σ^0 avaldise (g) võrrandisse (e) saame, võttes arvesse, et $D = Eh^3/12 (1 - \mu^2)$, järgmise kolmanda astme võrrandi parameetri C määramiseks:

$$2C + \frac{1024}{735K} (C^3 + 3C^2C_0 + 2CC_0^2) = \frac{ql^4(1 - \mu^2)}{16Eh^4} \quad (i)$$

Olles arvanud siit läbipainde C , leiame avaldisest (g) aheltinged σ^0 .

Kuna elastse pinna võrrand on nüüd teada, ei valmista edasine paindemomentide ja paindepingete määramine põhimõttelisi raskusi. Tuleb aga silmas pidada, et suuremate läbipainete korral kujuneb paindepingete määramine ebatäpseks, sest saadud elastse pinna võrrand on ligikaudne ja paindemomendid, mis avalduvad elastse pinna võrrandi teiste tuletiste kaudu, saadakse tunduvalt väiksema täpsusega kui elastse pinna ordinaadid. Täpsema lahendi võime leida punktis 13.31 toodud põhimõtete kohaselt, lugedes aheljõud $T = \sigma^0 h$ ja seega ka parameetrid juba teada olevateks suurusteks ning kasutades avaldistele (13.25) järgnevaid valemeid.



JOON. 13 7

siis on olemas piirkond, kus läbipainde suurenemisele vastab väiksem koormuse väärtus. Praktiliselt tähendab see seda, et kui koormamine toimub mitte pressi all, vaid näiteks veesamba kõrguse suurendamisega, siis juhul, kui koormus on saavutanud mingi kindla väärtuse, toimub läbipainde hüppeline suurenemine (mõlkumine teisele poole). Koormuse vähendamisel toimub tagasimõlkumine väiksema koormuse juures.

13.3 LÖPLIKU KÕLGEDE SUHTEGA PAINDUVAD PLAADID. PLAADI TÖÖ PÄRASTKRIITILISES STAADIUMIS

Nende ülesannete lahendamisel osutub vajalikuks kasutada diferentsiaalvõrrandite süsteemi (13.17) ilma iga-suguste lihtsustusteta. Lahendamiseks on kasutatavad mitmesugused meetodid. Nimetame neist võrgumeetodit, kollokatsioonimeetodit, *Bubnov-Galjorkini* meetodit, energetilist meetodit ja nn. häiretemeetodit (väikeste para-

Pakub huvi koormuse ja läbipainde vahelise seose jälgimine erineva tehnoloogilise eelpainde korral. Joonisel 13 7 on toodud kõverad, mis vastavad C_0 väärtustele 0, 1 ja 2. Teguri K väärtuseks on võetud 1024/735.

Selgub, et:

1) tehnoloogiline eelpaine koormuse mõjumise suunas vähendab läbipainet koormuse mõjust, võrreldes tasandilise plaadiga; kui eelpaine on koormuse mõjumise suhtes vastassuunaline, siis üldiselt läbipaine suureneb, kuid teatud piirkondades võib ka väheneda (kaare efekt);

2) kui eelpaine on koormusega vastassuunaline ja teatud väärtusest suurem,

meetrite meetodit). Neist nelja esimese olemust on käsitletud punktides 10. 43, 10. 44, 10. 46 ja 10. 47.

Kollokatsioonimeetodi, *Bubnov-Galjorkini* meetodi või energieetilise meetodi kasutamisel osutub vajalikuks ette anda funktsioonide süsteem, mille abil võiks küllaldase täpsusega kirjeldada plaadi elastset pinda ja pingefunktsiooni. Iga funktsioon on ette antud täpsusega kuni ühe parameetriteni. Parameetrid tuleb määrata nii, et diferentsiaalvõrrandid (13. 17) resp. potentsiaalse energia miinimumi tingimus oleksid ligikaudselt rahuldatud, kusjuures rahuldatus kriteerium oleneb kasutatavast meetodist.

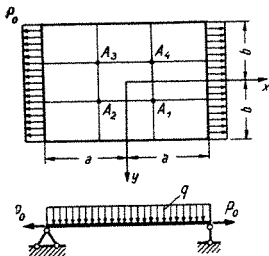
Olgu niihästi läbipainde kui ka aheltingete iseloomustamiseks ette antud n funktsiooni. Parameetrite määramiseks saadakse siis võrrandisüsteem, mis koosneb n lineaarsest ja n kolmanda astme võrrandist, seega kokku $2n$ võrrandist. Säärane võrrandisüsteem on lihtsalt lahendatav ainult juhul, kui $n = 1$, s. t. esimese lähenduse puhul. Lahendi täpsus muidugi ei saa sel juhul olla eriti suur. Kui koormus on sujuv, näiteks ühtlaselt jaotatud, ja plaadi kuju lähedane ruudule, annab esimene lahendus siiski ettekujutuse plaadi tööst. Erandiks osutub tangentsiaalpingetega koormatud plaat, kus ka ligikaudse lahendi saamiseks tuleb ülesanne lahendada tunduvalt kõrgemas lähenduses, nagu see selgus juba tangentsiaalpingetega koormatud plaadi kriitilise koormuse määramisel (p. 12. 5).

Samasugune võrrandisüsteem saadakse võrgumeetodi kasutamisel.

Vaatleme näitena vabalt toetatud plaati, mille kinnitus kontuuril ei takista plaadi servade siirdeid plaadi pinnas (joon. 13. 8). Plaadi servade kerkimine on takistatud. Plaadi kontuur on lähedane ruudule. Koormusteks on ühtlaselt jaotatud põikkoormus q ja tõmbejõud $P_0 = ph$ plaadi servadel $x = \pm a$.

Kasutame lahendamiseks kollokatsioonimeetodit, mille täpsus on reeglina suurem kui võrgumeetodil ja mille võrrandid on lihtsamalt koostatavad kui *Bubnov-Galjorkini* meetodil. Lahendame ülesande esimeses lähenduses.

Kollokatsioonipunktideks A valime punktid $x = \pm a/3$, $y = \pm b/3$. Sümmeetria tõttu annavad kõik need punktid ühesugused võrrandid. Seega saame tulemuseks ainult



JOON. 13 8

kaks iseseisvat võrrandit vastavalt kahele diferentsiaalvõrrandile (13. 17).

Võtame plaadi läbipainde jaoks funktsiooni

$$w = hC \left(1 - \frac{6}{5} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{5} \frac{x^4}{a^4} \right) \left(1 - \frac{6}{5} \frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{5} \frac{y^4}{b^4} \right) \quad (a)$$

ja pingefunktsiooniks

$$F = Eh^2B \left(1 - 2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} \right) \left(1 - 2 \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^4}{b^4} \right) + \frac{py^2}{2} \quad (b)$$

Läbipaindefunktsiooni sulgudes olevad avaldised kujutavad endast vabalt toetatud tala elastset joont ühtlaselt jaotatud põikkoormusel. Pingefunktsiooni teine liige annab kogu plaadi ulatuses ühtlase x -telje suunalise tõmbepinge intensiivsusega p . Pingefunktsiooni esimene liige annab võimaluse varieerida pingeid plaadi keskpinnas, kuid ei mõjuta koormust plaadi servadel (näiteks serval, kus $x = \pm a$, $\partial^2 F / \partial y^2 = 0$ ja $\partial^2 F / \partial x \partial y = 0$). Otsitavaiks parameetriteks on C ja B . Kordajad — esimeses võrrandis h ja teises Eh^2 — on lisatud selleks, et parameetrid C ja B oleksid dimensioonita suurused.

Läbipaindefunktsiooni w ja pingefunktsiooni F tuletiste väärtused punktis $x = a/3$, $y = b/3$ on järgmised:

$$\begin{aligned} \partial^2 w / \partial x^2 &= -1,854hC/a^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 &= -1,854hC/b^2 \\ \partial^2 w / \partial x \partial y &= 0,593hC/ab \\ \nabla^2 \nabla^2 w &= (4,172/a^4 + 4,172/b^4 + 9,102/a^2 b^2)hC \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned}\partial^2 F / \partial x^2 &= -2,107 E h^2 B / a^2 \\ \partial^2 F / \partial y^2 &= -2,107 E h^2 B / b^2 + p \\ \partial^2 F / \partial x \partial y &= 1,512 E h^2 B / a b \\ \nabla^2 \nabla^2 F &= (18,963 / a^4 + 18,963 / b^4 + 14,222 / a^2 b^2) E h^2 B.\end{aligned}$$

Asendades avaldised (c) vastavate tuletiste asemele võrrandis (13. 17), saame järgmise algebralise võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned}(18,963 / a^4 + 18,963 / b^4 + 14,222 / a^2 b^2) E h^2 B &= \\ &= E (0,593^2 - 1,854^2) h^2 C^2 / a^4 & (d) \\ D (4,172 / a^4 + 4,172 / b^4 + 9,102 / a^2 b^2) h C &= \\ = q + h (2 \cdot 1,854 \cdot 2,107 - 2 \cdot 0,593 \cdot 1,512) E h^3 B C / a^2 b^2 - \\ &- 1,854 p h^2 C / a^2.\end{aligned}$$

Vaatleme edasi ainult juhtu, kus $a = b$ ja $\mu = 0,3$. Võttes arvesse, et $D = E h^3 / 12 (1 - \mu^2) = 0,0916 E h^3$, saame võrranditele (d) anda järgmise kuju:

$$\begin{aligned}52,148 B &= -3,086 C^2 \\ 1,598 C &= \frac{q a^4}{E h^4} + 6,020 C B - 1,854 \frac{p a^2}{E h^2} C & (e)\end{aligned}$$

Esimesest võrrandist

$$B = -0,0592 C^2 \quad (f)$$

Asendades B väärtuse teise võrrandisse, saame parametri C määramiseks kuupvõrrandi

$$1,598 C = \frac{q a^4}{E h^4} - 0,356 C^3 - 1,854 \frac{p a^2}{E h^2} C \quad (g)$$

Saadud avaldiste täpsuse kontrolliks leiame, missugused väärtused nad annavad erijuhtude jaoks, mille lahendid on teada, nimelt jäiga plaadi läbipainde jaoks plaadi keskel ja ühtlaselt surutud plaadi kriitilise koormuse jaoks.

Jäiga plaadi läbipainde leidmiseks peame plaadi keskpinnas mõjuvad pinged lugema võrdseks nulliga, s. t. $B = p = 0$. Võrrandisüsteemi (e) teisest võrrandist saame

$$C = 0,626 q a^4 / E h^4 \quad (h)$$

ja läbipaine plaadi keskel

$$(w)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0,0391 q (2a)^4 / E h^3 \quad (i)$$

Täpseks vastuseks on $0,0443 q(2a)^4/Eh^3$, seega erinevus 12%.

Plaadi kriitilise survepinge arvutamisel võrrutame nulliga plaadile mõjuva põikkoormuse q ja loeme läbipainde parameetri C lõpmata väikeseks, nii et selle kõrgemad astmed võib hüljata. Võrrandist (g) saame

$$(1,598 + 1,854pa^2/Eh^2)C = 0 \quad (k)$$

Kuna triviaalne lahend $C=0$ ei tule kriitilise koormuse määramisel arvesse, siis

$$p_{kr} = -\frac{1,598}{1,854} \frac{Eh^2}{a^2} = -3,448 \frac{Eh^2}{(2a)^2} \quad (m)$$

Oigeks vastuseks on teatavasti

$$\sigma_{kr} = -p_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{(2a)^2 h} = 3,614 \frac{Eh^2}{(2a)^2}$$

Seega ebatäpsus kriitilises koormuses on 4,1%.

Arvestades seda, et suuremate läbipainete korral viga arvatavasti kasvab, võib oletada, et tulemused saadakse veaga 20—25%.

Edasi käsitleme kaht juhtu.

1. Plaadi servadel mõjuvad jõud võrduvad nulliga ($P=0$); plaadi läbipaine aga on niivõrd suur, et läbipaindest tekkivate aheljäudude mõju ei osutu võimalikuks hüljata ($B \neq 0$).

Plaadi läbipainde parameeter C määratakse vastavalt avaldisele (g) kuupvõrrandist

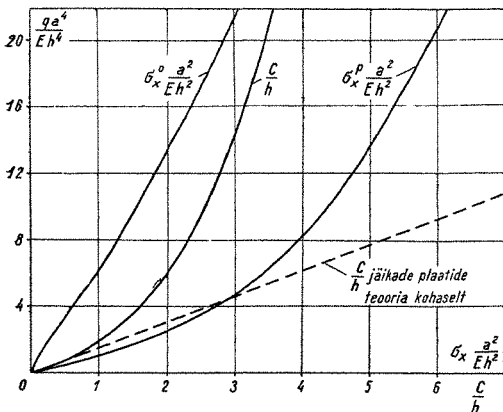
$$1,598C + 0,356C^3 = qa^4/Eh^4 \quad (n)$$

Pärast C määramist leiame avaldisest (f) pingefunktsiooni parameetri B . Edasine painde- ja aheltingete määramine ei valmista raskusi, kuna plaadi elastse pinna võrrand ja pingefunktsioon plaadi keskpinnas mõjuvate pingete jaoks on teada. Näiteks x -telje suunalised paindepinged plaadi äärmistes kihtides punktis $x=0$, $y=0$

$$\sigma_x^p = \pm \frac{6D}{h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0, y=0} = \pm 1,71 \frac{Eh^2}{a^2} C$$

ja samasuunalised ahelpinged

$$\sigma_x^0 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{x=0, y=0} = -4B \frac{Eh^2}{a^2} = 0,24 \frac{Eh^2}{a^2} C$$



JOON. 13.9

Joonisel 13.9 on näidatud plaadi läbipainde ja maksimaalsete pingete sõltuvus koormusest. Lisaks sellele on punktiiriga näidatud plaadi läbipainde suurus vastavalt jäikade plaatide teooriale.

2. Vaatleme plaadi tööd survel pärast kriitilises staadiumis. Selleks loeme põikkoormuse q võrdseks nulliga. Võrrand (g) võtab järgmise kuju:

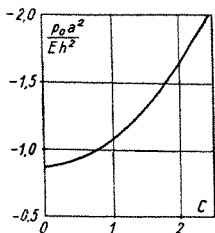
$$C(0,356C^2 + 1,598 + 1,854pa^2/Eh^2) = 0 \quad (o)$$

Sel võrrandil on igal p väärtusel trivიაalne lahend $C=0$, mis vastab juhule, kus plaadi keskpind jääb tasandiliseks. Lisaks sellele on võrrand (o) rahuldatud, kui sulgudes olev avaldis võrdub nulliga, kust

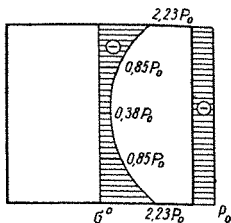
$$C = \pm \sqrt{-4,49 + 5,21pa^2/Eh^2} \quad (p)$$

Siit leiame, et neil lahenditel on reaalne väärtus ainult juhul, kui

$$p \leq -0,862Eh^2/a^2 \quad (r)$$



JOON. 13. 10



JOON. 13. 11

Toodud p väärtus vastab kriitilisele pingele (survele), mille ületamisel tasandiline tasakaalukuju muutub ebastabiilseks ja tegelikuks tasakaalukujuks jääb mõlkunud kaju. Märk \pm avaldises (p) viitab sellele, et mõlkumine võib toimuda nii ühes kui teises suunas.

Joonisel 13. 10 on näidatud seos plaadi läbipaine ja koormusparameetri $p a^2 / E h^2$ vahel.

Olgu koormus näiteks kaks korda suurem kriitilisest:

$$p = -1,724 E h^2 / a^2 \quad (p)$$

Sel juhul

$$C = \pm \sqrt{-4,49 + 8,98} = \pm 2,12 \quad (q)$$

s. t. plaadi läbipaine on plaadi paksusest 2,12 korda suurem.

Plaadi keskpinnas mõjuvate pingete parameeter

$$B = -0,0592 C^2 = -0,266 \quad (r)$$

ja pinged σ_x^0 plaadi keskpinnas avalduvad valemiga

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -0,266 \frac{E h^2}{a^2} \left(1 - 2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(-4 + 12 \frac{y^2}{a^2} \right) - 1,724 \frac{E h^2}{a^2} = \\ &= p \left[1 + 0,616 \left(1 - 2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} \right) \left(-1 + 3 \frac{y^2}{a^2} \right) \right] \quad (s) \end{aligned}$$

Joonisel 13.11 on näidatud sisejõudude $\sigma_x^0 h$ epüür joonitel $x = 0$ ja $x = a$.

Nagu näeme, pole pingete epüür joonel $x = 0$ enam sirgjooneline. Pinged plaadi keskel on keskmisest väiksemad, aga pinged plaadi servadel on sellest tunduvalt suuremad. Seega **kriitilise koormuse ületamisel kaob linearsus pingete ja koormuse vahel; pinged plaadi servadel kasvavad koormusest tunduvalt kiiremini.** Seda asjaolu on tarvis silmas pidada konstruktsioonide projekteerimisel, mille mõned osad töötavad pärast kriitilises staadiumis. Põhimõtteliselt on selliste konstruktsioonide kasutamine võimalik, aga tuleb võtta arvesse, et pinged suurenevad koormusest kiiremini mitte üksi plaadi servadel, vaid ka teistes konstruktsiooni elementides, näiteks jäikusribides.

14 KOORIKUD

Koorik on plaadiga sarnane konstruksioonielement. Plaat on piiratud kahelt poolt tasapindadega; koorikuks aga nimetatakse konstruksioonielementi, mis on piiratud kahe kõverpinnaga, mille vahekaugus (kooriku paksus) on võrreldes kooriku teiste mõõtmetega väike. Sageli nimetatakse koorikut ka kõveraks plaadiks.

Pinda, mis asetseb kooriku sisemuses välispindadest võrdsel kaugusel, nimetatakse kooriku keskpinnaks. Kooriku kuju määratakse tema keskpinna kujuga. Kui koorikul ei ole muid piirdepindasid kui ainult sise- ja välispind, siis nimetame koorikut suletuks. Suletud koorikust väljalõigatud osa moodustab nn. lahtise kooriku.

Kooriku paksuseks on kooriku keskpinna normaali pikkus ühest piirdepinnast teiseni. Koorikud on kas ühtlase või muutuva paksusega. Praktilistes rakendustes esinevad sagedamini ühtlase paksusega koorikud.

Kooriku suhteliseks paksuseks nimetatakse kooriku paksuse ja keskpinna väikseima kõverusraadiuse suhet. Suhtelise paksuse järgi liigitatakse koorikud õhukesteks ja paksudeks.

Õhukesteks nimetame sellist koorikut, mille suhteline paksus on võrreldes ühega hüljatavalt väike. Kui lugeda praktilise arvutuse suhtelise vea piiiriks 5%, siis võiks õhukesteks lugeda kõiki koorikuid, mille suhteline paksus on väiksem kui $1/20$.

Tehnikas rakendatakse laialdaselt just õhukeksi koorikuid, kuna need on töötamiselt kõige ökonoomsemad. Võrreldes plaatkonstruksioonidega on koorikud tunduvalt kergemad.

Eriti soodsad on nn. momendivabad koorikud. Tingituna nende kujust tekivad neis koormuse

mõjul valdavalt kooriku keskpinnaga paralleelsed sisejõud, nn. tangentsiaaljõud. Selliste tangentsiaaljõudude vastuvõtuks on kooriku konstruktsioon kõigiti soodne. Koorik töötab siin sarnaselt võlviga. Koorikus tekkivad momendid on sel juhul hüljatavalt väiksed või annavad kiiresti kustuva pinguse. Enamasti tekivad momendid kooriku servadel, kus koorik kinnitub põhja või mõne muu konstruktsiooni külge, seepärast nimetatakse säärast momentide poolt põhjustatud pingust ääreefektiks.

Esineb muidugi ka palju selliseid koorikuid, milles, tingituna nende kujust või koormusest, ei saa momentide mõjust kooriku pingusele suurema veata loobuda. Sel juhul tuleb rakendada koorikute momentide teooriat.

Mõnikord areneb kooriku deformatsioon sujuvalt ühe koordinaatjoone sihis, kuna teise koordinaatjoone sihis toimub deformatsiooni käigus kiireid muutusi. Säärane deformatsiooniolukord võimaldab kooriku võrrandites esinevaid liikmeid võrdlemisi hästi suurusjärgu järgi eraldada ning mõningad liikmed võib nende suhtelise väiksuse tõttu hüljata. Koorikute teooria sellist käsitlust nimetatakse poolmomentide teoriaks.

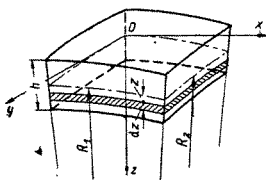
Nagu eeltoodust nähtub, tuleb praktilistele tulemustele jõudmiseks paratamatult teha lihtsustusi.

Üheks tähtsamaks lihtsustavaks oletuseks on sirge ristjoone ehk *Kirchhoff-Love*'i hüpoteesi, mida rakendati ka plaatide teoorias. Selle hüpoteesi järgi deformeermata kooriku keskpinna ristsirge jääb sirgeks ja kooriku keskpinnaga risti ka kooriku deformeerudes.

14.1 SISEJÕUD, SUHTELISED DEFORMATSIOONID JA ELASTUSSEOSSED

Kuna koorik on geomeetristelt parameetritelt sarnane plaadiga, siis on koorikute teoorias kasutatavad mõisted ja tähised suurelt osalt ühtelangevad plaatide teoorias kasutatavatega.

Vaatleme joonisel 14.1 normaallõigetega koorikust eraldatud lõpmata väikest elementi. Normaallõiked kulgegu piki peakõverusjooni. Nendes normaallõigete tasapindades asetsevad kooriku keskpinna peakõverusraadiu-

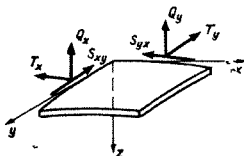


JOON. 14.1

sed on R_1 ja R_2 . Tähistame kooriku paksuse h . Koordinaatteljed x ja y suundugu piki keskpinna peakõverusjoonte puutujaid, kuna z -telg olgu keskpinnaga risti, nagu näidatud joonisel. Elemendi normaallõigetel esinegu järgmised pinged:

$$\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} \text{ ja } \tau_{yz}$$

Pingete tähistused on samad, mida eespool kasutati, ning ei vaja seetõttu üksikasjalikumat selgitust. Kirjelatud pinged annavad normaallõike pikkusühiku kohta joonisel 14.2 esitatud sisejõud.



JOON. 14.2

Sisejõudude avaldised on järgmised:

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) dz$$

$$T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) dz$$
(14.1)

$$S_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) dz \quad (14. 2)$$

$$S_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) dz$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) dz \quad (14. 3)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) dz$$

Analoogiliselt saame ka pöörd- ja väändemomendid:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) dz \quad (14. 4)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) dz$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) dz \quad (14. 5)$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) dz$$

Sisejõudude avaldistes esinevad jagatised z/R_1 või z/R_2 , millega võetakse arvesse pinna kõverusest tingitud

normaallõike kitsenemist paksuse sihis (trapetsilisust). Kuna edaspidi vaatleme õhukesi koorikuid, milles kooriku suhteline paksus h/R_2 on väike, võime sisejõudude avaldistes jagatised z/R_1 ja z/R_2 ära jätta. Seega muutuvad toodud sisejõudude avaldised sarnasteks plaatide kohta koostatud avaldistega ning saavad alljärgneva lihtsustatud kuju:

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; \quad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \quad (14.6)$$

$$S_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \quad S_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz \quad (14.7)$$

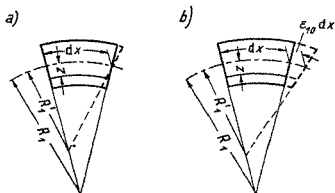
Kuna $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, siis $S_{xy} = S_{yx}$.

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (14.8)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (14.9)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz; \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz \quad (14.10)$$

Kooriku deformatsioonide kirjeldamiseks vaatleme kõigepealt olukorda, kus kooriku keskpind on neutraalkihiks ning kooriku paindudes tema ristlõiked pöörduvad ümber selle neutraalkihi. Joonisel 14.3, *a* on selline deformatsioon kujutatud ühes lõikes, nimelt xz -tasandis.



JOON. 14.3

Meelevaldse kihi joondeformatsioon sihis x avaldub järgmiselt:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{z\left(\frac{dx}{R_1'} - \frac{dx}{R_1}\right)}{dx - z\frac{dx}{R_1}} = \\ &= -\frac{z}{1 - z/R_1} \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1}\right) \end{aligned} \quad (a)$$

R_1' on kooriku deformeerunud keskpinna peakõverusraadius. Analoogiliselt võime leida kooriku joondeformatsiooni ka sihis y

$$\epsilon_y = -\frac{z}{1 - z/R_2} \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (b)$$

kus R_2' on kooriku deformeerunud keskpinna teine peakõverusraadius.

Kui kooriku deformatsioon on säärane, et lisaks paindele pikeneb keskpind, siis on kooriku deformatsioon xz -tasandis sarnane joonisel 14.3, b kujutatuga.

Meelevaldse kihi, mille kaugus nulljoonest on z , algpikkus on

$$dx(1 - z/R_1)$$

Sama kihi deformeerunud pikkuseks saame

$$dx(1 - z/R_1')(1 + \epsilon_{10})$$

Toodud avaldistest leiame meelevaldse kihi joondeformatsiooni sihis x

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{10}}{1 - z/R_1} - \frac{z}{1 - z/R_1} \left(\frac{1 + \varepsilon_{10}}{R_1'} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (c)$$

milles ε_{10} on kooriku keskpinna joondeformatsioon sihis x .
Analoogiliselt saame sihis y

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_{20}}{1 - z/R_2} - \frac{z}{1 - z/R_2} \left(\frac{1 + \varepsilon_{20}}{R_2'} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (d)$$

Saadud deformatsioonide avaldise võime lihtsustada nii nagu sisejõududegi avaldise, ära jättes liikmed z/R_1 ja z/R_2 . Ka võib kõveruste avaldiste lugejas ära jätta ε_{10} ja ε_{20} kui väga väikesed suurused.

Pärast neid lihtsustusi saame:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{10} - z(1/R_1' - 1/R_1) = \varepsilon_{10} - z\kappa_x \quad (14.11)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{20} - z(1/R_2' - 1/R_2) = \varepsilon_{20} - z\kappa_y \quad (14.12)$$

κ_x ja κ_y tähistavad kooriku keskpinna kõveruse muutust.

Selleks, et kirjeldada kooriku deformatsiooni täielikult, tuleb lisaks joondeformatsiooni avaldistele leida ka kooriku nihkedeformatsiooni γ_{xy} avaldis Nihkedeformatsioon koosneb kooriku keskpinna nihkedeformatsioonist γ_0 ja keskpinna väändest ω_{xy} põhjustatud nihkest. Kuna väände mõju nihkele on analoogiline plaadi puhul esinevaga ja seda on eespool käsitletud, kirjutame otsekohe seose nihke kohta

$$\gamma_{xy} = (\gamma_0 - 2z\omega_{xy}) \quad (14.13)$$

kus ω_{xy} — kooriku keskpinna suhteline vääne,
 z — vaadeldava punkti kaugus keskpinnast.

Saadud joondeformatsiooni avaldistest (14.11), (14.12) võime minna üle pingetele, kasutades üldistatud *Hooke'i* seadust. Seejuures oletame, et kooriku keskpinnaga paralleelsed kihid ei suru üksteisele, s. t. $\sigma_z = 0$. Saame järgmised pingete valemid:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_{10} + \mu\varepsilon_{20} - z(\kappa_x + \mu\kappa_y)] \quad (e)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_{20} + \mu\varepsilon_{10} - z(\kappa_y + \mu\kappa_x)] \quad (f)$$

Asetame saadud pingete avaldised sisejõudude lihtsus-
tatud avaldistesse (14.6) ja (14.9). Saame:

$$T_x = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_{10} + \mu\varepsilon_{20}); \quad (14.13)$$

$$T_y = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_{20} + \mu\varepsilon_{10})$$

$$M_x = -D(\kappa_x + \mu\kappa_y) \quad (14.14)$$

$$M_y = -D(\kappa_y + \mu\kappa_x)$$

Tangentsiaalpinged leiame *Hooke*'i seadusest nihkel, kasutades selleks nihkedeformatsiooni kohta tuletatud valemit (14.13). Leiame:

$$\tau_{xy} = (\gamma_0 - 2z\omega_{xy})G \quad (14.15)$$

Asetades saadud tangentsiaalpinge avaldise sisejõu-
dude avaldistesse (14.7) ja (14.10), saame pärast liht-
sustusi:

$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{\gamma_0 h E}{2(1 + \mu)} \quad (14.16)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \mu)\omega_{xy} \quad (14.17)$$

Nagu nähtub avaldistest (14.13), (14.14), (14.16) ja
(14.17), avalduvad tangentsiaaljõud T_x , T_y ja S_{xy} koo-
riku keskpinna suhteliste deformatsioonide ε_{10} , ε_{20} ja γ_0
kaudu, kuna momendid M_x , M_y ja M_{xy} sõltuvad kooriku
keskpinna kõveruse muutustest κ_x ja κ_y ning keskpinna
väändest ω_{xy} . Need seosed on tuletatud sirge fistjoone
hüpoteesi alusel.

14.2 MOMENDIVABA PÖÖRDKOORIK EBASÜMMEETRILISE KOORMUSE MÕJU ALL

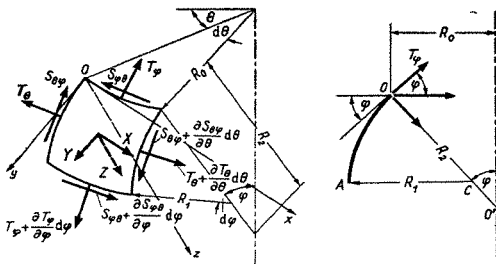
Pöördkoorikuks nimetatakse pöördkeha-kujulist
koorikut. Pöördkoorikuid kasutatakse tehnikas laialdaselt
(kuplitena, tsisternidena, reservuaaridena, gaasihoidla-
tena jne.).

Teatavasti moodustub pöördkeha joone, mida nimeta-
takse meridiaaniks, pöörlemisel ümber telje.

Meridiaani pöörlemisel joonestab selle iga punkt ringi, mis on omavahel paralleelsed. Uhes ja samas punktis võetud meridiaani ja paralleelringi puutujad on teineteisega risti Pöördkooriku meridiaani ja telge läbivat tasandit nimetatakse meridiaantasandiks, teljega risti olevat tasandit — paralleelitasandiks

Koorikus esinevate sisejõudude ja tema deformatsioonide leidmiseks vaadeldakse kooriku lõpmata väikest elementi. See element eraldatakse koorikust kahe lõpmata lähestikku võetud meridiaantasandiga ning kahe lõpmata lähestikku võetud meridiaani ristsandiga. Selliselt võetud lõikepinnad on kooriku keskpinnaga risti ja nende omavaheline lõikejoon on kooriku keskpinna normaaliks elemendi nurgas. Kaks samas meridiaantasandis lõpmata lähestikku asetsevat ja lõikuvat ristsirget võrduvad pikkuselt, arvatuna kooriku keskpinnast kuni lõikepunktini, meridiaani kõverusraadiusega ehk peakõverusraadiusega R_1 antud punktis. Peakõverusraadiuse R_2 määrab aga ristsirge pikkus kooriku keskpinnast kuni kooriku teljeni. Kirjeldatud viisil lõigetega eraldatud lõpmata väike element on esitatud joonisel 14. 4.

Elemendi asend koorikus määratakse nurgaga θ mingist fikseeritud meridiaantasandist ja nurgaga φ kooriku telje ja keskpinna ristsirge vahel. Abisuurusena võib kasutada paralleelringi raadiust R_0 . Punktis O lõikuvate



JOON 14. 4

elemendi külgede pikkused on $R_1 d\varphi$ ja $R_0 d\theta = R_2 \sin \varphi d\theta$, kuna elemendi pindalaks on $R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\theta$.

Tähistame kooriku keskpinnas mõjuva ebasümmeetrilise koormuse intensiivsuse komponendid X , Y ja Z vastavalt nende mõjumissuhtidele x , y ja z . Kooriku lõikepindadel mõjuvad tangentsiaalselt kooriku keskpinnaga sisejõud T_φ , T_θ ja $S_{\varphi\theta} = S_{\theta\varphi}$. Mõjumissihhi pärast nimetatakse neid tangentsiaaljõududeks, kuna nende suurus antakse lõikepinna pikkusühiku kohta.

Järgnevalt koostame elemendile mõjuvate jõudude tasakaalu võrrandid. Koostame kõigepealt tasakaalutingimuse y -telje, s. o. meridiaani puutuja sihis. Elemendi ülemisel serval mõjub jõud

$$T_\varphi R_0 d\theta = T_\varphi R_2 \sin \varphi d\theta \quad (a)$$

Arvesse võttes sisejõu ja R_0 muutumist, saame alumisel serval mõjuva jõu

$$\left(T_\varphi + \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(R_0 + \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\theta \quad (b)$$

Nende sisejõudude summa on

$$T_\varphi \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} d\varphi d\theta + \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} R_0 d\varphi d\theta = \frac{\partial}{\partial \varphi} (T_\varphi R_0) d\varphi d\theta \quad (c)$$

Elemendi meridiaanisihilistel külgedel mõjuvad sisejõud $T_\theta R_1 d\varphi$ ja $\left(T_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) R_1 d\varphi$. Kuna nad mõjuvad paralleelringi puutuja sihis, võime nad liita paralleeltasandis. Pärast sisejõu juurdekasvu kui teist järku väikese suuruse hülgamist saame sisejõu avaldiseks $T_\theta R_1 d\varphi d\theta$ (vt. joonis 14.4). Selle jõe y -sihiline komponent on

$$-T_\theta R_1 \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (d)$$

Peale kirjeldatud sisejõudude mõjuvad y -telje sihis sisejõud nihkejõududest $S_{\theta\varphi}$ ja $S_{\theta\varphi} + \frac{\partial S_{\theta\varphi}}{\partial \theta} d\theta$, millest saame pärast arvutamist ülejäägi y sihis

$$\frac{\partial S_{\theta\varphi}}{\partial \theta} R_1 d\theta d\varphi \quad (e)$$

Väliskoormuse komponendiks y sihis saame

$$YR_1R_0 \, d\varphi \, d\theta \quad (f)$$

Arvesse võttes kõiki meridiaani sihile projekteeritud jõudusid, saame tasakaaluvõrrandi

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (T_\varphi R_0) + \frac{\partial S_{\varphi\theta}}{\partial \theta} R_1 - T_\theta R_1 \cos \varphi + YR_1R_0 = 0 \quad (14.18)$$

Koostame nüüd elemendile mõjuvate jõudude tasakaalu võrrandi, vaadeldes projektsioone x -teljele.

Vaatleme kõigepealt kooriku elemendi horisontaalsetel servadel mõjuvaid nihkejõude. Arvesse võttes nii nihkejõu kui ka alumise serva pikkuse muutust, saame analoogiliselt valemiga (c)

$$\begin{aligned} S_{\varphi\theta} \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} \, d\varphi \, d\theta + \frac{\partial S_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} R_0 \, d\varphi \, d\theta &= \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_0 S_{\varphi\theta}) \, d\varphi \, d\theta \end{aligned} \quad (g)$$

Paralleelringi sihilised pikijõud annavad x -sihis ülejäägi

$$\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} R_1 \, d\theta \, d\varphi \quad (h)$$

Kuna elemendi meridiaanisihilised servad on üksteise suhtes kaldu nurga $\cos \varphi \, d\theta$ all, siis annavad nihkejõud $S_{\theta\varphi}$ x -sihile jõu

$$S_{\theta\varphi} R_1 \cos \varphi \, d\theta \, d\varphi \quad (i)$$

Arvesse võttes jõude (g), (h) ja (i) ning x -telje sihilist välisjõu $XR_0R_1 \, d\theta \, d\varphi$ komponenti, saame x -sihiliste projektsioonide tasakaalu võrrandiks

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (R_0 S_{\varphi\theta}) + \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} R_1 + S_{\theta\varphi} R_1 \cos \varphi + XR_0R_1 = 0 \quad (14.19)$$

Kolmanda tasakaaluvõrrandi saame, projekteerides kõik elemendile mõjuvad jõud elemendi normaali, s. o. z -telje sihile.

Meridiaanisihilised jõud T_φ annavad

$$T_\varphi R_0 \, d\theta \, d\varphi. \quad (k)$$

Jõududest T_θ saame analoogiliselt projekteerimisega y -sihile z -sihilise komponendi

$$T_\theta R_1 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \quad (m)$$

Nihkejõudude projektsioonid z -teljele võrduvad nulliga, kuna välisjõud annavad projektsiooni

$$ZR_1 R_0 \, d\theta \, d\varphi \quad (n)$$

Liites eeltoodud jõud, saame pärast jagamist suurusga $d\theta \, d\varphi$ kolmandaks tasakaaluvõrrandiks

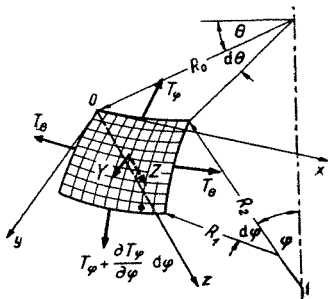
$$T_\varphi R_0 + T_\theta R_1 \sin \varphi + ZR_1 R_0 = 0 \quad (14.20)$$

Saadud kolme tasakaaluvõrrandiga (14.18), (14.19) ja (14.20) on võimalik arutada koorikus esinevad tangentsiaalsisejõud T_φ , T_θ ja $S_{\varphi\theta}$, kui on ette antud kooriku kuju ja koormus.

14.3 MOMENDIVABA PÕÖRDKOORIK TELGSÜMMEETRILISE KOORMUSEGA

Telgsümmeetrilise koormuse korral on koorikus arenev deformatsioon sümmeetriline ja kooriku lõikepindadel ei teki nihkejõudu $S_{\theta\varphi}$. Ka jääb konstantseks piki paralleelringi mõjuv tangentsiaaljõud T_θ .

Vaatleme joonisel 14.5 kujutatud koorikuelementi



JOON 14 5

Sisejõudude T_φ ja T_θ leidmiseks jäävad võrranditest (14.18), (14.19) ja (14.20) järele kaks tasakaaluvõrrandit — (14.18) ja (14.20), kusjuures esimesest langeb ära nihkejõudu sisaldav liige. Seega saame telgsümmeetrilise koormuse korral kaks tasakaaluvõrrandit:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (T_\varphi R_0) - T_\theta R_1 \cos \varphi + Y R_1 R_0 = 0 \quad (14.21)$$

$$T_\varphi R_0 + T_\theta R_1 \sin \varphi + Z R_1 R_0 = 0 \quad (14.22)$$

Võrrandi (14.22) võime esitada ka teisel kujul, jagades teda eelnevalt suurustega R_1 ja R_0 . Saame:

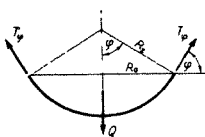
$$\frac{T_\varphi}{R_1} + \frac{T_\theta}{R_2} = -Z \quad (14.23)$$

Meridiaanisihilise sisejõu T_φ saame määrata ka siis, kui eraldame osa koorikust normaallõikega piki paralleelringi ning püstitame lõikega eraldatud osa kohta (joon. 14.6) tasakaalutingimuse:

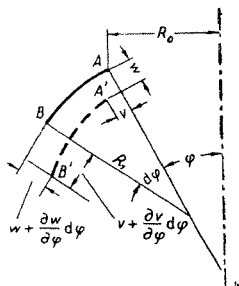
$$2\pi R_0 T_\varphi \sin \varphi - Q = 0 \quad (14.24)$$

kus Q on lõikega eraldatud koorikuosale mõjuvate välisjõudude summa kooriku telje sihis. Leidnud sel viisil T_φ , asetame viimase võrrandisse (14.23) ja arvutame T_θ .

Deformatsiooni arvutus. Telgsümmeetrilise koormuse korral on ka kooriku deformatsioon telgsümmeetriline. Paigutusvektoril on kaks komponenti: meridiaani puu-



JOON 14 6



JOON 14 7

tuja sihis v ja keskpinna normaali sihis w , kuna kolmas komponent u võrdub nulliga.

Joonisel 14.7 on kujutatud koorikuelemendi asendi ja pikkuse muutumine kooriku telgsümmeetrilise deformatsiooni korral. Lõige on tehtud meridiaantasandis.

Elemendi absoluutne pikenemine on

$$\Delta\varphi = \frac{\partial v}{\partial\varphi} d\varphi - w d\varphi \quad (a)$$

millest esimene liige on elemendi pikkuse muutus tangentsiaalpaigutise vahest, kuna teine on elemendi lühenemine radiaalpaigutise w tõttu.

Jagades leitud absoluutse pikenemise elemendi algpikkusega $R_1 d\varphi$, saame suhtelise deformatsiooni meridiaani sihis

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial\varphi} - \frac{w}{R_1} \quad (14.25)$$

Paralleelringi sihilise suhtelise deformatsiooni avaldamiseks tuleb leida paralleelringi absoluutne pikenemine, mis on võrdeline raadiuse R_0 absoluutse pikenemisega

$$\Delta\theta = v \cos\varphi - w \sin\varphi \quad (b)$$

Jagades viimase $R_0 = R_2 \sin\varphi$ väärtusega, saame

$$\varepsilon_\theta = \frac{v}{R_2} \cot\varphi - \frac{w}{R_2} \quad (14.26)$$

Saadud suhtelise deformatsiooni avaldistest on võimalik leida võrrandid paigutiste määramiseks. Näiteks elimineerides võrranditest (14.25) ja (14.26) w , saame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot\varphi = R_1 \varepsilon_\varphi - R_2 \varepsilon_\theta \quad (c)$$

Avaldame ε_φ ja ε_θ , kasutades selleks üldistatud Hooke'i seadust:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{Eh} (T_\varphi - \mu T_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{Eh} (T_\theta - \mu T_\varphi) \end{aligned} \quad (d)$$

Asendades viimased võrrandisse (c), saame:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot \varphi = \frac{l}{Eh} [T_{\varphi}(R_1 + \mu R_2) - T_{\theta}(R_2 + \mu R_1)] \quad (e)$$

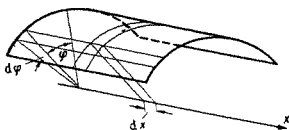
Kuna saadud võrrandi paremal pool esinevad tangentiaaljõud T_{φ} ja T_{θ} on arvutatavad olenevalt koormusest, siis v saame diferentsiaalvõrrandi integreerimise teel. Tähistades võrrandi (e) parema poole $\tilde{f}(\varphi)$, saame võrrandi üldlahendiks

$$v = \sin \varphi \left(\int \frac{\tilde{f}(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi + C \right) \quad (14.27)$$

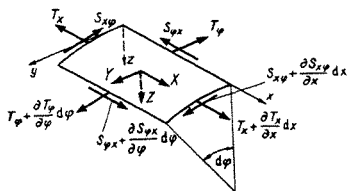
kus C on integreerimiskonstant, mis määratakse ääretingimustest.

14.4 MOMENDIVABA SILINDRILINE KOORIK

Punkti asukoha määramiseks silindrilises koorikus kasutame koordinaate x ja φ , kusjuures x -telg suundugu paralleelselt kooriku moodustajaga. Eraldame koorikust elemendi kahe lõpmata lähestikku asetseva moodustajat läbiva normaallõikega ning kahe lõpmata lähestikku võetud ristlõikega (joon. 14.8).



JOON 14 8



JOON. 14 9

Mõjugu elemendi lõikepindadel tangentsiaalsisejõud T_x , T_φ ja $S_{x\varphi}$ koos oma juurdekasvudega ning välisjõud, mille intensiivsuse komponendid on X , Y ja Z (joon. 14.9).

Tasakaaluvõrrandid x -, y - ja z -telje sihis saame järgmistena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} R d\varphi dx + \frac{\partial S_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi dx + XR d\varphi dx &= 0 \\ \frac{\partial S_{x\varphi}}{\partial x} R d\varphi dx + \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dx + YR d\varphi dx &= 0 \\ T_\varphi d\varphi dx + ZR d\varphi dx &= 0 \end{aligned} \quad (14.28)$$

Pärast lihtsustusi võime saadud võrrandid esitada kujul:

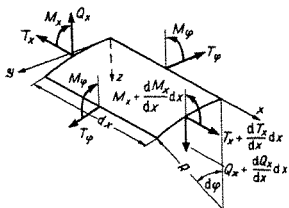
$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{x\varphi}}{\partial \varphi} + X &= 0 \\ \frac{\partial S_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} + Y &= 0 \\ T_\varphi + RZ &= 0 \end{aligned} \quad (14.29)$$

Nagu esitatud võrranditest nähtub, saame kolmandast võrrandist kergesti leida T_φ . Seejärel asetame saadud T_φ teise võrrandisse ning pärast integreerimist saame $S_{x\varphi}$. Viimase paneme omakorda esimesse võrrandisse, millest leiame lõppeks T_x .

14.5 RINGSILINDRILINE TELGSÜMMEETRILISELT KOOR- MATUD KOORIK

Eraldame ringsilindrilisest koorikust elemendi kahe moodustajasihilise ja kahe moodustajaga risti võetud põiklõikega, nii nagu näidatud joonistel 14.8 ja 14.10.

Kuna koormus on telgsümmeetriline ning sellest põhjustatud kooriku deformatsioon samuti, siis esinevad tangentsiaalsisejõududest ainult pikijõud T_x ja T_φ ning põikjõududest Q_x . Momentidest kaovad deformatsiooni telgsümmeetria tõttu väändemomendid $M_{x\varphi} = M_{\varphi x}$. Tangentsiaaljõud T_φ ja paindemoment M_φ jäävad ühel ning samal põikkoordinaatjoonel konstantseks. Sääraste tingimuste puhul osutuvad tasakaaluvõrrandid $\sum Y = 0$, $\sum M_x = 0$ ja $\sum M_z = 0$ samaselt rahuldatuks ja



JOON 14 10

lahenduskäigus saame rakendada kolme ülejäänud tasakaaluvõrrandit.

Oletame, et koormusena esineb ainult keskpinna normaalrõhk Z . Koostame tasakaaluvõrrandid $\sum X=0$, $\sum Z=0$ ja $\sum M_y=0$:

$$\begin{aligned} \frac{dT_x}{dx} dx R d\varphi &= 0 \\ \frac{dQ_x}{dx} dx R d\varphi + T_\varphi dx d\varphi + ZR dx d\varphi &= 0 \quad (14.30) \\ \frac{dM_x}{dx} dx R d\varphi - Q_x dx d\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Esimesest võrrandist nähtub, et pikijõud koorikus on konstantne ning tema mõju on, kasutades summeerimise printsiipi, kerge arvesse võtta. Oletame, et ta antud juhul võrdub nulliga. Ülejäänud kaks võrrandit on esitatavad järgmistena:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{R} T_\varphi &= -Z \\ \frac{dM_x}{dx} - Q_x &= 0 \end{aligned} \quad (14.31)$$

Teisgümmeetrilise deformatsiooni tõttu on kooriku paralleelringi puutuja sihiline siire v võrdne nulliga, kuna esinevad x - ja z -telje sihilised siirded u ja w .

x -telje ja paralleelringi puutuja sihilised joondeformatsioonid avalduvad u ja w kaudu järgmiselt:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}; \quad \epsilon_\varphi = -\frac{w}{R} \quad (14.32)$$

Avaldame nüüd elastsusseosed:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\varphi) \\ T_\varphi &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_x) \end{aligned} \quad (14.33)$$

Asetame elastsusseostesse joondeformatsioonide avaldised (14.32). Arvesse võttes, et $T_x=0$, saame võrrandid:

$$\begin{aligned} -\frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dx} - \mu \frac{w}{R} \right) &= 0 \\ T_\varphi &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(-\frac{w}{R} + \mu \frac{du}{dx} \right) \end{aligned} \quad (14.34)$$

Esimesest võrrandist (14.34) saame:

$$\frac{du}{dx} = \mu \frac{w}{R}$$

Asetades viimase teise võrrandisse (14.34), avaldame

$$T_\varphi = -\frac{Ehw}{R} \quad (14.35)$$

Nüüd vaatleme, kuidas sõltuvad paigutistest momentid M_φ ja M_x . Telgsümmeetrilise deformatsiooni tõttu ei muutu paralleelringi kõverus, kuna kõverus xz -tasandis on $-d^2w/dx^2$. Analoogiliselt plaatide teooriaga võime kirjutada:

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \mu M_x \\ M_x &= -D \frac{d^2w}{dx^2} \end{aligned} \quad (14.36)$$

milles

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

mida nimetatakse kooriku silindriliseks jäikuseks. Võrrandid (14.31) võime ühendada järgmiseks võrrandiks:

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{1}{R} T_\varphi = -Z \quad (14.37)$$

Viimases asendame M_x ja T_φ vastavalt seostele (14.35) ja (14.36), misjärel saame.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} w = Z \quad (14.38)$$

Saadud diferentsiaalvõrrand on silindrilise kooriku telgsümmeetrilise deformatsiooni võrrand

Juhul kui koorik on ühtlase paksusega, lihtsustub diferentsiaalvõrrand järgmiseks:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = Z \quad (14.39)$$

või

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w = \frac{Z}{D} \quad (14.40)$$

milles

$$\alpha^4 = \frac{Eh}{4R^2 D} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2} \quad (14.41)$$

Võrrand 14.40 on analoogiline elastse alusega tala painde diferentsiaalvõrrandiga (1.6).

Kujutleme, et oleme eraldanud koorikust pikilõigetega riba, mille painet kirjeldab võrrand (14.40). Riba külgpindadel mõjuvaid tangentsiaal jõude T_φ võime vaadelda kui elastse aluse turbejõudusid. Tala paindejäikus EI on asendunud silindrilise jäikusega D , milles sisaldub ribaga külgnevate koorikuosade mõju riba deformatsioonile.

Võrrandi (14.40) lahendi võime peatüki 1 lahendi (1.20) järgi välja kirjutada järgmisena

$$w = w_e + e^{\alpha x} (B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x) \quad (14.42)$$

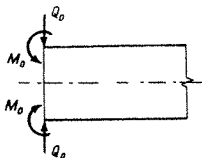
milles w_e on võrrandi (14.40) erilahend, aga B_1, B_2, B_3 ja B_4 — kooriku ääretingimustest sõltuvad integreerimiskonstandid.

Esimeses peatükis on elastse alusega tala käsitletud põhjalikumalt. Seal esitatud lahendusmeetodeid koos vastavate abitabelitega võib rakendada ka käesolevas peatükis silindrilise kooriku telgsümmeetrilise deformatsiooni korral.

Järgnevalt on käsitletud mõningaid koorikute arvutusnäiteid, kasutades esimeses peatükis tuletatud arvutusvalemeid.

14.51 Otsal momendi ja põikkoormusega koormatud poollõpmatu koorik

Pikk ümar toru on vasaku otsa perimeetril koormatud ühtlaselt jaotatud momendi ja põikkoormusega, nagu näidatud joonisel 14.11. Koostame paigutise w , pöörde-
nurga $d\omega/dx$, paindemomendi ja põikjõu avaldised



JOON 14 11

Kasutades valemeid (1.38, c, d, e, f) võime kirjutada, silmas pidades, et tala paindejäikus EI tuleb asendada silindrilise jäikusega D ,

$$w = \frac{1}{2\alpha^3 D} [aM_0\eta_1(ax) + Q_0\eta_0(ax)]$$

$$\vartheta = \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} [2aM_0\eta_0(ax) + Q_0\eta_3(ax)] \quad (14.43)$$

$$M(x) = -M_0\eta_3(ax) - \frac{Q_0}{\alpha} \eta_2(ax)$$

$$Q(x) = 2M_0\alpha\eta_2(ax) - Q_0\eta_1(ax)$$

Esitatud valemis (14.43) esinev suurus α antakse valemiga (14.41).

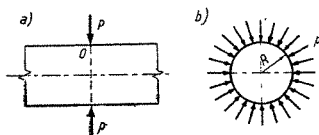
Funktsioonid η_0 , η_1 , η_2 ja η_3 on toodud tabelis I.2.

Valemis (14.43) esinevad funktsioonid η_0 , η_1 , η_2 ja η_3 kahanevad kiiresti argumendi ax kasvades, millest võib järeldada, et antud koormustest põhjustatud paine on kohaliku iseloomuga.

Leidnud valemitega (14.43) w ja M_x , saame, kasutades valemid (14.35) ja (14.36), arvutada tangentsiaal jõu T_φ ja paindemomendi M_φ , misjärel võime leida koorikus esinevad pinged.

14.52 Piki paralleelringi ühtlaselt jaotatud koormusega koormatud pikk silindriline koorik

Esimeses peatükis esitatud lahendid (1.40), (1.41), (1.42) ja (1.43) võime esitada ka siin, asendades neis tala paindejäikuse kooriku silindrilise jäikusega D . Nii



JOON. 14.12

saame kooriku keskpinna siirdefunktsiooni, pöördenurga, paindemomendi ja põikjõu avaldised:

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \frac{p}{8\alpha^3 D} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) = \frac{p}{8\alpha^3 D} \eta_3(\alpha x) \\
 w'(x) &= \theta(x) = -\frac{p}{4\alpha^2 D} e^{-\alpha x} \sin \alpha x = -\frac{p}{4\alpha^2 D} \eta_2(\alpha x) \\
 M_x(x) &= -\frac{p}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x) = \frac{p}{4\alpha} \eta_1(\alpha x) \\
 Q_x(x) &= -\frac{p}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x = -\frac{p}{2} \eta_0(\alpha x)
 \end{aligned} \tag{14.44}$$

Esitatud funktsioonide graafikud on loomulikult sarnased joonisel 1.10 esitatud graafikutega.

Maksimaalsed on siire ja paindemoment koormuse p kohal ning võrduvad:

$$\max w = \frac{p}{8\alpha^3 D} = \frac{pR^2\alpha}{2Eh} \tag{14.45}$$

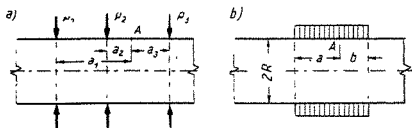
$$\max M = \frac{p}{4\alpha} \tag{14.46}$$

Põikjõu suurim absoluutväärtus esineb samuti jõe kohal ning on $p/2$.

Valemitega (14.43) kirjeldatavad painde elemendid kahanevad kiiresti, kui liikuda koormuse rakenduskohast piki koorikut edasi. Paine on seega kohaliku iseloomuga. Nimetatud asjaolust tingituna võime juhul, kui lõpliku pikkusega $l \geq 2\pi a$ koorik on koormatud käesoleva näite kohaselt keskmisel paralleelringil ühtlaselt jaotatud koormusega, kasutada maksimaalse siirde ja paindemomendi arvutamiseks valemeid (14.45) ja (14.46).

14.53 Keerukama telgsümmeetrilise koormusega pikk silindriline koorik

Nagu esimeses peatükis näidati, on kerge leida pika elastse alusega tala painde valemid, kasutades mõjujootte ja summeerimise meetodit. Seejuures võib talal olla küllalt keerukas koormus, näiteks rida koondatud jõude või ühtlaselt jaotatud koormus. Analooogiliste arvutusvõtetega võib leida sisejõud ja paigutised pikas ring-silindrilises koorikus, kui viimane on koormatud mitmel kõrvuti asetseval paralleelringil telgsümmeetrilise jaotatud koormusega (joon. 14.13, a) või piki koorikut ühtlaselt jaotatud telgsümmeetrilise koormusega (joon. 14.13, b).



JOON. 14.13

Arvutada võime punkti 1.2 näidete kohaselt. Jooniselt 14.13, a võime punkti A kohta kirjutada:

$$\begin{aligned} w_A = \frac{1}{8\alpha^3 D} \sum p_i \eta_3(\alpha x_i) &= \frac{1}{8\alpha^3 D} [p_1 \eta_3(\alpha a_1) + \\ &+ p_2 \eta_3(\alpha a_2) + p_3 \eta_3(\alpha a_3)] \end{aligned}$$

$$M_A = \frac{1}{4\alpha} \sum p_i \eta_i(\alpha x_i) = \frac{1}{4\alpha} [p_1 \eta_1(\alpha a_1) + p_2 \eta_1(\alpha a_2) + p_3 \eta_1(\alpha a_3)]$$

Koorikule mõjuva telgsümmeetrilise ühtlaselt jaotatud koormuse puhul (joon. 14.13, b) arvutame paigutise ja momendi järgmiste seostega:

$$\begin{aligned} w_A &= \frac{q}{8\alpha^3 D} \left[\int_0^a \eta_3(\alpha x) dx + \int_0^b \eta_3(\alpha x) dx \right] = \\ &= \frac{q}{8\alpha^3 D} \left[-\frac{\eta_0(\alpha x)}{\alpha} \Big|_0^{\alpha a} - \frac{\eta_0(\alpha x)}{\alpha} \Big|_0^{\alpha b} \right] = \\ &= -\frac{q}{2k} [\eta_0(\alpha a) + \eta_0(\alpha b) - 2\eta_0(0)] \end{aligned}$$

kus $k = 4\alpha^4 D$;

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{q}{4\alpha} \left[\int_0^a \eta_1(\alpha x) dx + \int_0^b \eta_1(\alpha x) dx \right] = \\ &= \frac{q}{4\alpha^2} \left[\eta_2(\alpha x) \Big|_0^{\alpha a} + \eta_2(\alpha x) \Big|_0^{\alpha b} \right] = \\ &= \frac{q}{4\alpha^2} [\eta_2(\alpha a) + \eta_2(\alpha b) - 2\eta_2(0)] \end{aligned}$$

14.54 Uhtlase siserõhuga koormatud silindriline koorik

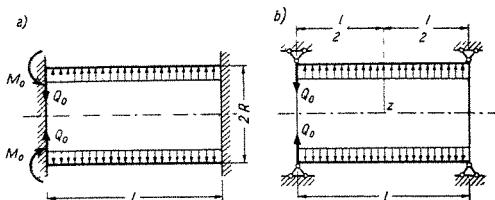
Vaatleme otstest kahel viisil — jäigalt ja liigendiga toetatud koorikut (joon. 14.14).

Juhul kui kooriku otsad on täiesti vabad, tekib koorikus siserõhu mõjul ainult rõngaspinge

$$\sigma_\varphi = \frac{pR}{h} \quad (a)$$

Seejuures kooriku raadius suureneb

$$\delta = \frac{R\sigma_\varphi}{E} = \frac{pR^2}{Eh} \quad (b)$$



JOON 14 14

võrra. Kuna aga kooriku servad on kinnitatud ja seega nende paigutus on takistatud, tekib kooriku servadel paine. Juhul kui kooriku pikkus l on küllalt suur, võib teda käsitleda kui punktis 14. 61 kirjeldatud poollõpmata pikka koorikut, mille serv on koormatud momendi ja põikkoormusega. Kooriku paigutiste ja sisejõudude arvutamiseks võib kasutada valemeid (14. 43). Esiälgu tundmatud momentkoormus M_0 ja põikkoormus Q_0 leitakse kooriku serva kinnitustingimustest. Nimelt kui $x=0$, siis $\omega(x) = \delta$ ja $\vartheta(x) = 0$.

Viimane tingimus annab kaks võrrandit Q_0 ja M_0 leidmiseks:

$$\frac{1}{2\alpha^3 D} [\alpha M_0 + Q_0] = \delta \quad (c)$$

$$\frac{1}{2\alpha^2 D} [2\alpha M_0 + Q_0] = 0$$

millest saame:

$$Q_0 = \frac{p}{\alpha} \quad \text{ja} \quad M_0 = -\frac{p}{2\alpha^2} \quad (d)$$

Kuna tulemuses on paindemomendi M_0 märk miinus, siis on momendi M_0 suund vastupidine joonisel näidatule. Asetanud leitud Q_0 ja M_0 avaldise valemisse (14. 43), võime arvutada paigutised ja sisejõud kooriku mistahes punktis.

Kui kooriku servad on kinnitatud liigendiga, siis on paigutus ja moment M_0 seal võrdsed nulliga.

Esimesest võrrandist (c) saame:

$$Q_0 = 2\alpha^3 D \delta \quad (e)$$

Asetanud Q_0 väärtuse valemisse (14.43) ning arvestades, et $M_0 = 0$, saame paigutiste ja sisejõudude leidmiseks vajalikud valemid.

Juhul kui koorik on lõpliku pikkusega, mõjuvad kooriku paigutistele ja sisejõududele mõlemad ääretingimused. Kooriku keskpinna raadiuse sihiline paigutisfunktsioon $w(x)$ tuleb lahendi (1.22) alusel esitada järgmisena:

$$w(x) = w_0 + C_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x \quad (f)$$

See on võrrandi (14.40) üldlahend.

Kuna koorik on koormatud ühtlase siserõhuga, mis põhjustab kooriku ühtlase deformatsiooni, siis saame võrrandi (14.40) erilahendiks, kui $Z = -p$,

$$w_0 = -\frac{p}{4\alpha^2 D} = -\frac{pR^2}{Eh} \quad (g)$$

Asetame koordinaatide alguspunkti kooriku keskkohale. Kuna kooriku deformatsioon valitud koordinaatide alguspunkti suhtes on sümmeetriline, peavad integreerimiskonstandid

$$C_2 = C_3 = 0 \quad (h)$$

Konstandid C_1 ja C_4 määratakse kooriku ääretingimustest.

Vaatleme koorikut, mille servad on liigendkinnitusega (joon. 14.14, b). Arvesse võttes tingimust (h), on keskpinna paigutisfunktsioon

$$w = -\frac{pR^2}{Eh} + C_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x \quad (i)$$

Kooriku servadel on paindemoment M ja paigutis w nullid. Seega, kui $x = \pm 0,5l$,

$$w = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0$$

Konstantide C_1 ja C_4 määramiseks saame järgmised võrrandid:

$$\begin{aligned} -\frac{pR^2}{Eh} + C_1 \operatorname{ch} u \cos u + C_4 \operatorname{sh} u \sin u &= 0 \\ -C_1 \sin u \operatorname{sh} u + C_4 \cos u \operatorname{ch} u &= 0 \end{aligned} \quad (k)$$

milles

$$u = \frac{\alpha l}{2} \quad (m)$$

Võrranditest (k) leiame:

$$C_1 = \frac{pR^2}{Eh} \frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u}$$

$$C_4 = \frac{pR^2}{Eh} \frac{2 \sin u \operatorname{sh} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \quad (n)$$

Asetame leitud konstantide avaldised lahendisse (i), kusjuures teeme ühtlasi asenduse seose (14.41) alusel, nimelt

$$\frac{Eh}{R^2} = 4D\alpha^4 = \frac{64u^4 D}{l^4} \quad (o)$$

Kooriku keskpinna siirdefunktsiooni saame järgmisena:

$$w = -\frac{pl^4}{64Du^4} \left(1 - \frac{2 \sin u \operatorname{sh} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \sin ux \operatorname{sh} ux - \frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha x \right) \quad (p)$$

Argument u on siin leitav kooriku mõõtmetest ja elastsuskonstantidest.

Kooriku keskloike siirde leiame avaldisest (p), kui $x = 0$:

$$w_0 = -\frac{pl^4}{64Du^4} \left(1 - \frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \right) \quad (r)$$

Pika kooriku korral argumenti u kasvades kahaneb avaldise (r) sulgavaldise teine liige ja kooriku keskloike siire läheneb suurusele vabade otstega kooriku keskloike siirdele.

Avaldisest (p) leiame diferentseerimise teel paindemomendi

$$M(x) = -D \frac{d^2 w}{dx^2} =$$

$$= -\frac{pl^2}{4u^2} \left(\frac{\sin u \operatorname{sh} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \cos ux \operatorname{ch} ux - \frac{\cos u \operatorname{ch} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \sin ux \operatorname{sh} ux \right) \quad (s)$$

Moment kooriku kesklõikes

$$M_0 = -\frac{\rho l^2}{4u^2} \frac{\sin u \operatorname{sh} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \quad (t)$$

Pika kooriku korral muutub M_0 niivõrd väikeseks, et tema mõjust võib loobuda ning koorik on ainult rõngasjõudude mõju all.

Kooriku servade jäiga kinnituse korral saame ääremomendi M_0 väärtuseks

$$M_0 = \frac{\rho}{2a^2} \frac{\operatorname{sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{sh} 2u + \sin 2u} \quad (u)$$

M_0 on leitud eelmise näitega analoogilise meetodiga.

14.55 Siserõhuga koormatud balloonid ja reservuaarid

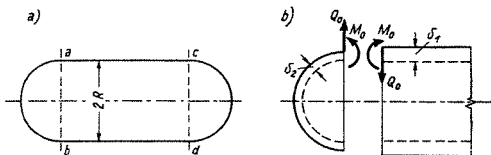
Balloonid ja reservuaarid on otstest põhjadega suletud silindrilised koorikud. Vaatleme käesolevas punktis balloone, mille otsad on konstrueeritud koorikutena (sfäär, ellipsoid). Kui õhukesele koorikule mõjub ühtlane siserõhk, siis valitseb valdavas osas koorikust membraanpingus. Silindrilise kooriku seinte ja põhja ühenduskoha ümbruses tekib aga segapingus — membraanpingetele lisanduvad märgatavad paindepinged. Kuna koorikule mõjuv koormus on telgsümmeetriline, siis koorikus tekkiv membraan- ja paindepingus on samuti telgsümmeetrilised ning paigutiste ja sisejõudude arvutamiseks võib rakendada silindrilise kooriku telgsümmeetrilise deformatsiooni kohta tuletatud valemeid.

14.55.1 Poolsfaarilise põhjaga koorik

Vaatleme järgnevalt silindrilise kooriku ühendust poolsfaarilise põhjaga (joon. 14.15).

Küllalt kaugel silindrilise kooriku ja põhja ühenduskohast on domineeriv membraanpingus ning tangentiaalsisejõud silindri osas võib arvutada järgmiste valemitega:

$$T_x = \frac{\rho R}{2}; \quad T_\varphi = \rho R \quad (a)$$



JOON. 14 15

kus T_x on moodustajasihiline sisejõud,

T_φ — rõngassisejõud,

p — siserõhk ja

R — raadius.

Sfäärilises põhjas on siserõhu korral mõjuvad tangentsiaalsisejõud kõikides sihtides ühesugused ning võrduvad:

$$T = \frac{pR}{2} \quad (b)$$

Leiame nüüd, kui palju pikeneksid silindri ja sfääri raadiused ühendamata koorikute deformeerudes siserõhu toimel.

Silindriline koorik deformeerub tangentsiaal jõudude T_x ja T_φ mõjul; tema raadiuse pikeneb

$$\delta_1 = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \quad (c)$$

Sfäärilise põhja raadius pikeneb membraanpingete mõjul

$$\delta_2 = \frac{pR^2}{2Eh} (1 - \mu) \quad (d)$$

võrra.

Kuna kooriku silindrilise ja sfäärilise osa deformatsioonid (raadiuste pikened) membraanpingete mõjul on erinevad, siis tekivad põhja ja silindrilise osa ühenduskohas põikjõud Q_0 ja paindemoment M_0 (joon. 14.15, b), sest kooriku tegelik deformatsioon on pidev. Q_0 ja M_0 on jaotatud ühtlaselt piki kooriku paralleelringi.

Q_0 ja M_0 arvutamisel oletame, et kooriku paindel on kohalik iseloom. Silindrilise osa uurimisel võime raken-

dada poollõpmatu kooriku kohta tuletatud valemeid (14.43).

Sfäärilise põhja kohta rakendame ligikaudset meetodit, oletades et märgatav paindedeformatsioon tekib põhja ühenduskoha vahetus läheduses ning et vaadeldavat piirkonda võime oletada kuuluvana pikale silindrilisele koorikule raadiusega R . Viimane oletus toob arvutusse märgatava lihtsustuse. Nimelt kui põhi ja silinder on ühepaksused ja kuna mõlemad on oletatud pikkade silindritena, siis põikjõud Q_0 , mis on rakendatud mõlemale servale, tekitab nii põhjale kui ka silindrile ühesuguse pöördenurga, mistõttu $M_0 = 0$. Q_0 leitakse deformatsiooni pidevuse tingimusest põhja ja silindri liitekohal. Nimelt silindri ja sfääri raadiuste pikennemiste vahe, mis on põhjustatud membraansisejõududest, peab võrduma põikjõust Q_0 põhjustatud mõlema serva paigutiste summaga. Paigutise arvutamiseks kasutame esimest valemit grupist (14.43).

Q_0 leidmiseks koostame võrrandi

$$2w_0 = \delta_1 - \delta_2 \quad (e)$$

mille lahendamisel valemite (14.43) ja (c) ning (d) abil saame:

$$\frac{Q_0}{\alpha^3 D} = \frac{\rho R^2}{2Eh} \quad (f)$$

Teades, et

$$D = \frac{Eh}{4\alpha^4 R^2}$$

avaldame seost (f)

$$Q_0 = \frac{\rho R^2 \alpha^3 D}{2Eh} = \frac{\rho}{8\alpha} \quad (g)$$

Asetanud Q_0 seostesse (14.43), saame kooriku paindelemendid arvutada mistahes punkti kohta. Nii saame paigutise ja paindemomendi jaoks järgmised valemid:

$$w(x) = \frac{Q_0}{2\alpha^3 D} \eta_0(\alpha x) = \frac{\rho}{16\alpha^4 D} \eta_0(\alpha x) \quad (h)$$

$$M(x) = -\frac{Q_0}{\alpha} \eta_2(\alpha x) = -\frac{\rho}{8\alpha^2} \eta_2(\alpha x) \quad (i)$$

Kui teisendada valemeid (h) ja (i) seosega

$$\alpha^4 = \frac{Eh}{4R^2D} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2h^2}$$

saame:

$$w(x) = \frac{\rho R^2}{4Eh} \eta_0(\alpha x) \quad (k)$$

$$M(x) = -\frac{Rh\rho}{8\sqrt{3}(1-\mu^2)} \eta_2(\alpha x) \quad (m)$$

Paindemoment saavutab maksimaalse väärtuse, kui $x = \pi/4a$, sest põikjõud muutub selles kohas nulliks.

Arvutame $\max M(x)$ mõjul tekkivad normaalpinged ning liidame neile membraanpinged, misjärel saame valemil maksimaalsete normaalpingete arvutamiseks:

$$\begin{aligned} \max \sigma_x &= \frac{Rp}{2h} + \frac{3}{4} \frac{Rp}{h\sqrt{3}(1-\mu^2)} \eta_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= 1,293 \frac{Rp}{2h} \quad (n) \end{aligned}$$

Mis puutub paindepingetesse momendist $M(x)$, siis arvutasime nad ligikaudse meetodiga. Õhukeste koorikute korral ei ole tehtav arvutusviga aga kuigi suur. Näiteks kooriku suhtelise paksuse $\frac{h}{R} < \frac{1}{30}$ korral on viga vähem kui 1%.

Paralleelringi sihiliste normaalpingete arvutamisel tuleb võtta arvesse pinged, mis tekivad radiaalpaigutisest w ja paindemomendist $M_\varphi = \mu M_x$. Lisaks mainitutele tuleb arvesse võtta ka membraanpinged. Seega saame:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{Rp}{h} - E \frac{w}{R} - \frac{6}{h^2} \mu M_x = \\ &= \frac{Rp}{h} \left[1 - \frac{1}{4} \eta_0(\alpha x) + \frac{3\mu}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} \eta_2(\alpha x) \right] \quad (o) \end{aligned}$$

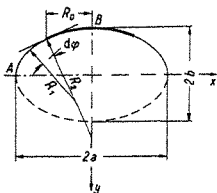
Juhul kui $\mu = 0,3$ ning $x = 1,85$, saame:

$$\max \sigma_\varphi = 1,032 \frac{Rp}{h} \quad (p)$$

14.55.2 Pöördellipsoidse põhjaga koorik

Eelmises näites kasutasime põhjana poolsfääri. Analooiliselt rakendame käesolevas näites poolt pöördellipsoidi.

Leiame kõigepealt pöördellipsoidis siserõhu mõjul tekivad membraanpinged. Teeme seda punktis 14.4 esitatud võrranditega (14.23) ja (14.24).



JOON 14 16

Joonisel 14.16 kujutatud pöördellipsoidi peakõverusraadiused R_1 ja R_2 leiame järgmistest valemitega:

$$R_1 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} \quad (a)$$

$$R_2 = \frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}$$

Kõverusraadiused võib väljendada ka ristkoordinaatide abil:

$$R_1 = R_2^3 \frac{b^2}{a^4}; \quad R_2 = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{1/2}}{b^2} \quad (b)$$

Eraldame koorikust normaallõikega segmendi, mille raadius on R_0 . Segmendile mõjuv kogurõhk annab vertikaalse komponendi $Q = \pi R_0^2 p$.

Asetame leitud Q valemisse (14.24), misjärel avaldame kooriku meridiaanisihilise tangentsiaaljõu

$$T_\varphi = \frac{\pi R_0^2 p}{2\pi R_0 \sin \varphi} = \frac{p R_0}{2 \sin \varphi} = \frac{p R_2}{2} \quad (c)$$

Paralleelringi sihilise tangentsiaaljõu T_θ leiame võrandist (14.23), võttes $Z = -p$:

$$T_\theta = \rho R_2 \left(1 - \frac{R_2}{2R_1} \right) \quad (d)$$

Kooriku teljel olevas punktis B , kus raadiused $R_1 = R_2 = a^2/b$, on tangentsiaaljõud järgmised:

$$T_\varphi = T_\theta = \frac{\rho a^2}{2b} \quad (e)$$

Kooriku ekvaatori punktis A $R_2 = a$, kuna $R_1 = b^2/a$. Selles punktis saame tangentsiaaljõudude väärtuseks

$$T_\varphi = \frac{\rho a}{2}; \quad T_\theta = \rho a \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} \right) \quad (f)$$

Kasutades poolikut pöördellipsoidi silindrilise kooriku (katla) põhjana, tuleb ta ühendada silindriga piki ekvaatorit, mille raadiuseks on ellipsi pikem pooltelg a (joon. 14.16). Ühendamata silindri ja põhja membraanpingetest tekitatud erinev deformatsioon likvideeritakse eelkäsitatud ligikaudse teooria kohaselt ühenduskohas tekkiva põikjõu Q_0 mõjuga. Põikjõu arvutame analoogiliselt eelmise näitega.

Pöördellipsoidis tekkivad membraanpinged on järgmised:

$$\sigma_\varphi = \frac{\rho a}{2h}; \quad \sigma_\theta = \frac{\rho a}{h} \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} \right) \quad (g)$$

Leiame nüüd ellipsoidi ekvaatori raadiuse pikenemise membraanpingete mõjul:

$$\delta_2 = \frac{a}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_\varphi) = \frac{\rho a^2}{Eh} \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} - \frac{\mu}{2} \right) \quad (h)$$

Silindri ja põhja raadiuste pikenemiste vahe on

$$\begin{aligned} \delta_1 - \delta_2 &= \frac{\rho a^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) - \frac{\rho a^2}{Eh} \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} - \frac{\mu}{2} \right) = \\ &= \frac{\rho a^4}{Eh2b^2} \end{aligned} \quad (i)$$

Toimides analoogiliselt eelmise punkti 14.55.1 valemi (g) tuletamisega, saame nüüd

$$Q_0 = \frac{\rho}{8\alpha} \frac{a^2}{b^2} \quad (k)$$

Võrreldes sfäärilise põhjaga on Q_0 pöördellipsoidaalse põhja korral a^2/b^2 korda suurem.

Arvesse võttes saadud Q_0 avaldist, koostame paigutise $w(x)$ ja paindemomendi $M(x)$ avaldised valemit (14.43) alusel:

$$w(x) = \frac{pa^4}{4Ehb^2} \eta_0(ax) \quad (m)$$

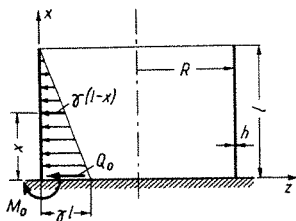
$$M(x) = -\frac{pha^3}{8\sqrt{3(1-\mu^2)}b^2} \eta_2(ax) \quad (n)$$

ning analoogiliselt eelmise punkti valemi (n) tuletamisega saame:

$$\max \sigma_x = \frac{ap}{2h} + \frac{3pa^3}{4hb^2\sqrt{3(1-\mu^2)}} \eta_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (o)$$

14.55.3 Ühtlase seinapaksusega silindriline reservuaar

Vaatleme ühtlase seinapaksusega silindrilist reservuaari, mis on täidetud mingi vedelikuga (joon. 14.17). Sellisele koorikule mõjuv koormus on telgsümmeetriline. Piki moodustajat muutub koormus lineaarselt, nagu näi-



JOON. 14.17

datud joonisel. Võrreldes eelmiste punktidega on sellise kooriku koormusolukord keerukam, põhjustab aga siiski kooriku telgsümmeetrilise deformatsiooni. Seetõttu on ka käesoleval juhul kasutatud elastse alusega tala kohta leitud seoseid. Nimelt võime rakendada algpärametreid

meetodi kohta tuletatud valemeid (1.60), (1.61), (1.62) ja (1.63), kusjuures peame neid täiendama lineaarselt muutuvale jaotatud koormusele vastava erilahendiga seose (1.59) järgi ning jääkuse EI asendama kooriku silindrilise jääkusega $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$.

Nii saame reservuaari silindrilise osa deformatsioonide ja sisejõudude leidmiseks järgmised valemid:

$$\begin{aligned} w(x) = & \omega_0 V_0(ax) + \frac{\vartheta_0}{\sqrt{2}\alpha} V_1(ax) - \frac{M_0}{2\alpha^2 D} V_2(ax) - \\ & - \frac{Q_0}{2\sqrt{2}\alpha^3 D} V_3(ax) - \frac{\gamma}{k} \left[l - x - lV_0(ax) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} V_1(ax) \right] \end{aligned} \quad (14.47)$$

$$\begin{aligned} w'(x) = & -\omega_0 \sqrt{2}\alpha V_3(ax) + \vartheta_0 V_0(ax) - \frac{M_0}{\sqrt{2}\alpha D} V_1(ax) - \\ & - \frac{Q_0}{2\alpha^2 D} V_2(ax) - \frac{\gamma}{k} [V_0(ax) - 1 + \\ & + \sqrt{2}\alpha l V_3(ax)] \end{aligned} \quad (14.48)$$

$$\begin{aligned} M_x = & \omega_0 \frac{k}{2\alpha^2} V_2(ax) + \vartheta_0 \frac{k}{2\sqrt{2}\alpha^3} V_3(ax) + M_0 V_0(ax) + \\ & + \frac{Q_0}{\sqrt{2}\alpha} V_1(ax) - \frac{\gamma}{k} [-\sqrt{2}\alpha V_3(ax) + \\ & + 2\alpha^2 l V_2(ax)] \end{aligned} \quad (14.49)$$

$$\begin{aligned} Q_x = & \omega_0 \frac{k}{\sqrt{2}\alpha} V_1(ax) + \vartheta_0 \frac{k}{2\alpha^2} V_2(ax) - M_0 \sqrt{2}\alpha V_3(ax) + \\ & + Q_0 V_0(ax) - \frac{\gamma}{k} [-2\alpha^2 V_2(ax) + 2\sqrt{2}\alpha^3 l V_1(ax)] \end{aligned} \quad (14.50)$$

Lisaks eeltoodud sisejõududele $M(x)$ ja $Q(x)$ leiame veel rõngasjõu T avaldise. Avaldise (14.35) alusel on rõngasjõud järgmine:

$$T_\varphi = -\frac{Ehw}{R} \quad (a)$$

Asetame avaldisse (a) w seose (14.47) järgi. Saame:

$$T_r = -\frac{Eh}{R} \omega_0 V_0(\alpha x) - \frac{Eh}{R} \frac{\vartheta_0}{\sqrt{2\alpha}} V_1(\alpha x) + \\ + \frac{EhM_0}{2\alpha^2 DR} V_2(\alpha x) + \frac{Q_0 Eh}{2\sqrt{2}\alpha^3 DR} V_3(\alpha x) + \\ + \frac{Eh\gamma}{Rh} \left[l - x - lV_0(\alpha x) + \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} V_1(\alpha x) \right] \quad (14.51)$$

Valemities (14.47) ja (14.51) kasutatavad tähistused on järgmised:

ω_0 , ϑ_0 , M_0 ja Q_0 — algparameetrid: silindri ja põhja ühenduskohas esinevad siire, pöördenurk, paindemoment ja põikjõud;

$V_0(\alpha x)$, $V_1(\alpha x)$, $V_2(\alpha x)$ ja $V_3(\alpha x)$ — *Puzõrevski* funktsioonid, mis leitakse tabelitest lisas II.

Tegur

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4R^2 D}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}$$

milles h on silindri seina paksus ja R raadius. Tegur α on avaldatav ka kujul

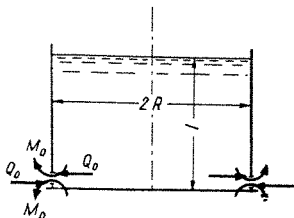
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}}$$

milles $k = Eh/R^2$. l on vedeliku nivoo kõrgus ja γ vedeliku erikaal.

Silindri deformatsiooni ja sisejõudusid kirjeldavais valemies esinevad algparameetrid määratakse ääretingimustest, s. o. tingimustest silindri ja põhja kinnituskohas ning vedeliku nivoo kõrgusel (ülemisel serval). Kui näiteks reservuaari silindriline osa on kinnitatud väga jäiga põhja külge, siis saame, et $\omega_0 = \omega_0' = 0$. Ülejäänud algparameetrite M_0 ja Q_0 määramiseks koostame võrrandid $M_l = 0$ ja $Q_l = 0$.

Ülesande lahendus muutub keerukamaks, kui reservuaari põhi on lõpliku jäikusega konstruktsioon, mille deformatsioone kooriku ääretingimuste kirjeldamisel tuleb arvesse võtta.

Vaatleme alljärgnevalt tasase põhja külge kinnitatud reservuaari (joon. 14.18).



JOON. 14. 18

Teeme löike kooriku kinnituskohas, kus tundmatutena esinevad paindemoment M_0 ja põikjõud Q_0 . Nende leidmiseks koostame tehtud löike kohta deformatsiooni pidevuse tingimused. Nimelt on mõeldavate löikepindade vastastikune pöördenurk ja siire nullid. Esitame mainitud deformatsiooni pidevuse tingimused kanoonilisel kujul, nii nagu seda tehakse jõumeetodi puhul:

$$\begin{aligned} \delta_{mm}M_0 + \delta_{mq}Q_0 + \Delta_{mP} &= 0 \\ \delta_{qm}M_0 + \delta_{qq}Q_0 - \Delta_{qP} &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Süsteemi tundmatute ees olevad kordajad on ühikjõudude paigutised. Iga paigutis koosneb kahest liikmest — paigutisest silindris ja põhjas.

$$\begin{aligned} \delta_{mm} &= \delta_{mm}^s + \delta_{mm}^p \\ \delta_{mq} &= \delta_{mq}^s + \delta_{mq}^p \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_{qP} &= \Delta_{qP}^s + \Delta_{qP}^p \end{aligned} \quad (c)$$

Paigutiste leidmiseks silindrilises osas kasutame valemeid (14.47) — (14.50). Rakendame näiteks silindri alumises osas ühikmomendi $M_0 = 1$. Nüüd samas kohas tekkivad paigutised on algarameetrid ϑ_0 ja ω_0 , millel on seoste (c) kohaselt järgmised tähistused:

$$\vartheta_0 = \delta_{mm}^s \quad \omega_0 = \delta_{qm}^s \quad (d)$$

Algarameetrid määratakse tingimustest silindri üle-

misel serval, s. o. vedeliku pinnal. Nimelt on seal $M_l = Q_l = 0$. Seega saame, kasutades valemeid (14.49) ja (14.50), ϕ_0 ja ω_0 määramiseks kaks võrrandit, kusjuures antud koormusena esineb ainult moment $m_0 = 1$. Analoožilisel viisil saame arvutada põikjõust $q_0 = 1$ tekkivad

algpärametrid — ühikpaigutised δ_{mq}^s ja δ_{qq}^s .

Silindri ühikpaigutiste arvutamisele järgneb põhja ühikpaigutiste $\delta_{mm}^p, \delta_{mq}^p, \dots$ arvutamine, mille käik sõltub kasutatava põhja konstruktsioonist. Järgnevalt arvutame vedeliku hüdrostaatilisest rõhust tekkivad algpärametrid — paigutised $\Delta_{mp}^s, \Delta_{qp}^s, \dots$, kusjuures arvutuse meetod on ühikpaigutiste arvutamise meetodiga sarnane. Järgneb kanoonilise võrrandisüsteemi (b) koostamine ja lahendamine. Tulemusena saame silindri serval esinevad M_0 ja Q_0 . Leiame viimastele vastavad algpärametrid ω_0 ja ϕ_0 . Nüüd on meil algpärametrite meetodi kasutamiseks kõik vajalikud suurused leitud ja võime arvutada paigutised ja sisejõud mistahes punktis.

14.55.4 Ohtlase seinapaksusega silindrilise reservuaari ligikaudne arvutus

Käesolevas punktis esitatava ligikaudse arvutuse käik on analoogiline eelmises punktis esitatuga. Meetodi ligikaudsus seisneb reservuaari silindrilise osa ühikjõu paigutiste ligikaudses arvutamises, kasutades selleks alltoodud ligikaudseid *Puzõrevski* funktsioonide avaldise. Kui reservuaar on küllalt kõrge, siis al on suur ning

$$\text{sh } al \approx \text{ch } al \approx \frac{1}{2} e^{al} \quad (a)$$

Kui $al = 2,65$, siis erinevad $\text{sh } al$ ja $\text{ch } al$ väärtused teineteisest 1%, mis on praktilise arvutuse seisukohalt küllalt vähe.

Harilikult on $al > 2,65$, mistõttu seose (a) kasutamine on õigustatud.

Puzõrevski funktsioonide avaldised silindri ülemise serva kohta, arvesse võttes seoseid (a), on järgmised:

$$V_0(al) = \frac{1}{2} e^{al} \cos al$$

$$V_1(\alpha l) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\alpha l} (\sin \alpha l + \cos \alpha l) \quad (b)$$

$$V_2(\alpha l) = \frac{1}{2} e^{\alpha l} \sin \alpha l$$

$$V_3(\alpha l) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\alpha l} (\sin \alpha l - \cos \alpha l)$$

Arvutame nüüd paigutised ühikjõust näiteks juhul, kui kooriku alumisel serval on rakendatud moment $m_0 = 1$. Paigutised ühikjõust on algarvameetrid ω_0 ja ϑ_0 . Nende leidmiseks kasutame tingimust, et silindri ülemisel serval paindemoment $M(\alpha l) = 0$ ja põikjõud $Q(\alpha l) = 0$. Need võrrandid koostame valemite (14.49) ja (14.50) alusel ning saame:

$$M(\alpha l) = \omega_0 \frac{k}{2\alpha^2} V_2(\alpha l) + \vartheta_0 \frac{k}{2\sqrt{2}\alpha^3} V_3(\alpha l) + 1 \cdot V_0(\alpha l) = 0 \quad (c)$$

$$Q(\alpha l) = \omega_0 \frac{k}{\sqrt{2}\alpha} V_1(\alpha l) + \vartheta_0 \frac{k}{2\alpha^2} V_2(\alpha l) - 1\sqrt{2}\alpha V_3(\alpha l) = 0$$

Asetame saadud võrranditesse *Puzõrevski* funktsioonide avaldised (b) järgi:

$$\omega_0 \frac{k}{4\alpha^2} \sin \alpha l + \vartheta_0 \frac{k}{8\alpha^3} (\sin \alpha l - \cos \alpha l) + \frac{1}{2} \cos \alpha l = 0 \quad (d)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{k}{4\alpha} (\sin \alpha l + \cos \alpha l) + \vartheta_0 \frac{k}{4\alpha^2} \sin \alpha l - \\ - \frac{1}{2} \alpha (\sin \alpha l - \cos \alpha l) = 0 \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi (d) lahenditeks on:

$$\vartheta_0 = \frac{4\alpha^3}{k} \quad \text{ja} \quad \omega_0 = -\frac{2\alpha^2}{k} \quad (e)$$

Ühtlasi on nad ka paigutised ühikjõust

$$\delta_{mm}^s = \vartheta_0 = \frac{4\alpha^3}{k}; \quad \delta_{qm}^s = -\omega_0 = \frac{2\alpha^2}{k} \quad (f)$$

Arvutuseks vajalikud ülejäänud paigutised leiame samasuguse meetodiga kui paigutised (f). Peatumata üksikasjalikult tuletamise käigul, esitame nende valemid:

$$\begin{aligned}\delta_{qm}^s &= \delta_{mq}^s = \frac{2\alpha^2}{k} \\ \delta_{qq}^s &= \frac{2\alpha}{k} \\ \Delta_{mP}^s &= \frac{\gamma}{k} \\ \Delta_{qP}^s &= \frac{\gamma h}{k}\end{aligned}\tag{g}$$

Kuna kõik paigutiste avaldised sisaldavad tegurit $1/k$, siis võime neid korrutada teguriga k , misjärel saame:

$$\begin{aligned}\delta_{mm}^s &= 4\alpha^2; \quad \delta_{qm}^s = \delta_{mq}^s = 2\alpha^2, \quad \delta_{qq}^s = 2\alpha \\ \Delta_{mP}^s &= \gamma; \quad \Delta_{qP}^s = \gamma h\end{aligned}\tag{h}$$

Kasutades paigutiste valemid (h), tuleb ka reservuaari põhja ühikjõu paigutiste avaldised korrutada teguriga k .

Edasine arvutuskäik on analoogiline eelmises punktis esitatuga. Kõigepealt leiame kanoonilisest võrrandisüsteemist M_0 ja Q_0 ning neile vastavad ω_0 ja ϑ_0 . Leitud algarvameetritega saame leida paigutised ja sisejõud kooriku mistahes punktis.

Kasutades algarvameetrite leidmisel lihtsustatud ühikpaigutiste avaldise, on võimalik ka kooriku deformatsioone ja sisejõudude valemid esitada lihtsamal kujul. Selleks avaldame ω_0 ja ϑ_0 ühikjõu paigutiste (f) ja (g) kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned}-\omega_0 &= \frac{2\alpha^2}{k} M_0 + \frac{2\alpha}{k} Q_0 - \frac{\gamma h}{k} \\ \vartheta_0 &= \frac{4\alpha^3}{k} M_0 + \frac{2\alpha^2}{k} Q_0 - \frac{\gamma}{k}\end{aligned}\tag{i}$$

Saadud avaldised asetame omakorda valemisse (14.49) ja (14.51), mis pärast *Puzõrevski* funktsioonide

avaldistega asendamist ja teisendamist kujunevad järgmisteks:

$$M_x = e^{-\alpha x} \left[(\sin \alpha x + \cos \alpha x) M_0 + \sin \alpha x \frac{Q_0}{\alpha} \right] \quad (14.52)$$

$$T_\varphi = 2\alpha^2 R e^{-\alpha x} \left[(\sin \alpha x - \cos \alpha x) M_0 - \cos \alpha x \frac{Q_0}{\alpha} \right] + \gamma R (l - x) \quad (14.53)$$

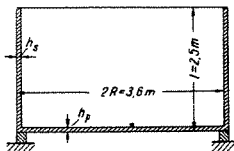
Juhul kui reservuaari põhi on seintega võrreldes väga jäik, võime oletada, et $\omega_0 = 0$ ja $\vartheta_0 = 0$. Ülejäänud altparametrid M_0 ja Q_0 avalduvad aga järgmiselt:

$$M_0 = \frac{\gamma}{2\alpha^2} \left(\frac{1}{\alpha} - l \right) \quad (14.54)$$

$$Q_0 = \frac{\gamma}{\alpha} \left(l - \frac{1}{2\alpha} \right) \quad (14.55)$$

Asendanud altparametrid M_0 ja Q_0 valemisse (14.52) ja (14.53), saame paindemomendi M_x ja rõngasjõu T_φ valemid reservuaari seinte jäiga kinnituse korral. Neid valemid võib kasutada ka mittejäiga kinnitusega seinte ligikaudseks arutamiseks.

Näide 14.1 Arvutada silindriline tasase põhjaga raudbetoonist reservuaar, mille mõõtmed ja andmed on järgmised: raadius $R = 1,80$ m, vee nivoo põhjast $l = 2,5$ m, silindri seina paksus $h_s = 0,12$ m, põhja paksus $h_p = 0,15$ m, *Poissoni* tegur $\mu = 1/6$ (joon. 14.19).



JOON. 14.19

Arvutame reservuaari punktis 14.55.4 esitatud ligikaudse meetodiga. Arvutusskeemiks võtame joonisel 14.18 kujutatud skeemi, mille järgi on tundmatuteks reservuaari seina ja põhja ühenduskohas esinevad põikjõud Q_0 ja paindemoment M_0 . Nende leidmiseks kasutame punktis 14.45.3 esitatud jõumeetodit alljärgneva kanoonilise võrrandisüsteemiga:

$$\delta_{mm}M_0 + \delta_{mq}Q_0 + \Delta_{mP} = 0$$

$$\delta_{qm}M_0 + \delta_{qq}Q_0 + \Delta_{qP} = 0 \quad (a)$$

Iga võrrandisüsteemi kordaja (ühikjõu paigutis) koosneb kahest liikmest, mida on eespool üksikasjalikult kirjeldatud. Võime asuda otsekohe nende arvutamisele.

Leiame kõigepealt kordaja

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h_s^2}} = \sqrt[4]{\frac{3 \left[1 - \left(\frac{1}{6} \right)^2 \right]}{1,8^2 \cdot 0,12^2}} = 2,812 \text{ m}^{-1} \quad (b)$$

Arvutame nüüd eelmise punkti valemite (h) järgi reservuaari seina paigutised ühikjõust

$$\delta_{mm}^s = 4\alpha^3 = 4 \cdot 2,812^3 = 88,936$$

$$\delta_{qm}^s = \delta_{mq}^s = 2\alpha^2 = 2 \cdot 2,812^2 = 15,814 \quad (c)$$

$$\delta_{qq}^s = 2\alpha = 2 \cdot 2,812 = 5,624$$

ning paigutised koormusest

$$\Delta_{mP}^s = \gamma = 1; \quad \Delta_{qP}^s = \gamma h = 1 \cdot 2,5 = 2,5 \quad (d)$$

Järgnevalt arvutame põhja kui ümara plaadi paigutised. Plaat on servadel toetatud liigendtoele ning on koormatud piki serva ühikmomendiga ja raadiusesihilise ühikjõuga ning üle kogu plaadi ühtlaselt jaotatud koormusega.

Üheks paigutiseks on plaadi serva pöördenurk. Selle arvutamiseks kasutame peatükist 11 seoseid (11.25) ja (11.26), mis kohandatuna käesolevale juhule saavad kuju

$$\theta = \omega' = C_1 \cdot 2Q + qR^3 Q^3 / 16D \quad (e)$$

$$M_R = -(D/R)[C_1(2 + 2\mu)] - \frac{(3 + \mu)}{16} qR^2 Q \quad (f)$$

Seostes (e) ja (f) tähistab $Q = r/R$ ühikuta muutujat, milles r on vaadeldava punkti raadius ja R plaadi serva raadius, q on plaadile mõjuva ühtlaselt jaotatud koormuse intensiivsus ning $D = = Eh_p^3 / 12(1 - \mu^2)$ plaadi silindriline jäikus. Konstandi C_1 määrame plaadi ääritingimustest.

Leiame kõigepealt plaadi serva pöördenurga seal rakendatud ühikmomendi mõjul. C_1 saame tingimusest $M_R = -1$:

$$-1 = -(D/R)C_1(2 + 2\mu)$$

$$C_1 = \frac{R}{2(1 + \mu)D}$$

Valemist (e) saame plaadi serva pöördenurga

$$\theta_R = \frac{R}{(1 + \mu)D} \quad (g)$$

Kui plaat on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega, on C_1 määravaks ääritingimuseks $M_R = 0$, mis annab

$$C_1 = -\frac{(3 + \mu)qR^3}{32(1 + \mu)D}$$

ja

$$\theta_R = -\frac{qR^3}{8D(1 + \mu)} \quad (h)$$

Soovides valemid (g) ja (h) kasutada paigutiste leidmiseks vastavalt suurustele (c), tuleb nad korrutada teguriga $k = \frac{Eh_s}{R^2}$.

Seega

$$\begin{aligned} \delta_{mm}^p &= \frac{R}{(1 + \mu)D} \frac{Eh_s}{R^2} = 12(1 - \mu) \frac{h_s}{h_p^3 R} = \\ &= 12 \left(1 - \frac{1}{6} \right) \frac{0,12}{0,15^3 \cdot 1,8} = 197,5 \end{aligned} \quad (i)$$

Paigutised

$$\delta_{mq}^p = \delta_{qm}^p = 0$$

kuna radiaalühikjõust plaadis pöördenurka ei teki.

Plaadi serva pöördenurga ühtlaselt jaotatud koormusest leiame valemiga (h):

$$\begin{aligned} \Delta_{m,p}^p &= -\frac{qR^3}{8D(1 + \mu)} \cdot \frac{Eh_s}{R^2} = \frac{-3}{2} (1 - \mu) \frac{\nu R h_s}{h_p^3} = \\ &= -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \right) \frac{1 \cdot 2,5 \cdot 1,8 \cdot 0,12}{0,15^3} = -200 \end{aligned} \quad (k)$$

Põhjale rakendatud radiaaljõud $Q_0 = 1$ põhjustab põhja serva radiaalpaigutise ΔR , mis korrutatuna k suurusega annab vajaliku ühikpaigutise $\delta_{q,q}^p$. Radiaaljõud $Q_0 = 1$ põhjustab plaadi serval survepinged (analoogiliselt pingetega paksuseinalises torus, kui siseraadius $a = 0$)

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -\frac{1}{1 \cdot h_r}$$

millest leiame joondeformatsiooni

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi) = -\frac{(1 - \mu)}{E h_p}$$

ning

$$\Delta R = \varepsilon_r R = -\frac{R(1 - \mu)}{E h_1}$$

$$\begin{aligned}\delta_{qq}^p &= \Delta R \cdot k = \frac{R(1-\mu)}{Eh_p} \frac{Eh_s}{R^2} = (1-\mu) \frac{h_s}{Rh_p} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{6}\right) \frac{0,12}{1,8 \cdot 0,15} = 0,3704\end{aligned}\quad (m)$$

Kuna paigutise suund ühtib Q_0 oletatud suunaga, siis tuleb ta võtta plussmärgiga. Sama reegel kehtib ka teiste paigutiste kohta. Paigutis Q_0 sisihis plaadile mõjuvast põikkoormusest

$$\Delta_{qp}^p = 0$$

Arvutame paigutised:

$$\begin{aligned}\delta_{mm} &= 88,94 + 197,53 = 286,47 \\ \delta_{qm} &= \delta_{mq} = 15,81 + 0 = 15,81 \\ \delta_{qq} &= 5,624 + 0,370 = 5,994 \\ \Delta_{mp} &= +1 - 200 = -199 \\ \Delta_{qp} &= 2,5\end{aligned}\quad (n)$$

Koostame kanoonilise võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned}286,47M_0 + 15,81Q_0 &= 199 \\ 15,81M_0 + 5,944Q_0 &= -2,5\end{aligned}\quad (o)$$

Süsteemi juured on:

$$\begin{aligned}M_0 &= 0,7861 \text{ tm/m} \\ Q_0 &= -2,491 \text{ t/m}\end{aligned}$$

Leitud M_0 ja Q_0 asetame nüüd valemisse (14.52) ja (14.53), misjärel saame:

$$M_x = e^{2,81x} \left[(\sin 2,81x + \cos 2,81x) 0,7861 + \frac{2,491}{2,81} \sin 2,81x \right] \quad (p)$$

$$\begin{aligned}T_\varphi &= 2 \cdot 2,81^2 \cdot 1,8 \cdot e^{-2,81x} \left[(\sin 2,81x - \cos 2,81x) 0,7861 - \right. \\ &\quad \left. - \cos 2,81x \frac{2,491}{2,81} \right] + 1 \cdot 1,8 \cdot (2,5 - x)\end{aligned}\quad (q)$$

Kasutades valemid (p) ja (q), saame leida reservuaari seina mistahes punktis paindemomendi M_x ja rõngasjõu T_φ . Samuti võime arvutada momendid reservuaari põhja mistahes punktis.

15 PLASTSUSÖPETUSE ALGMED

15.1 PÖHIMÖISTED

15.11 Aktiivne ja passiivne deformatsioon

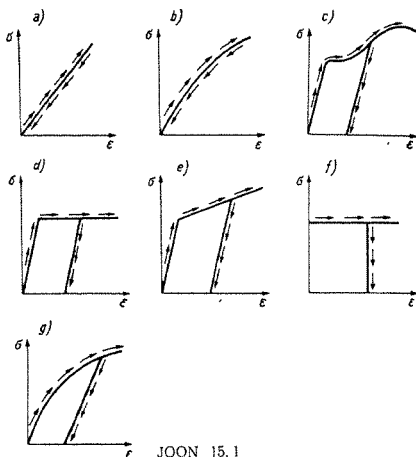
Joonpinguse puhul nimetatakse koormuse ja seega ka pingete monotoonsele suurenemisele vastavaid deformatsioone aktiivseteks; keha koormusest vabastamisel, seega pingete absoluutse suuruse vähenemisel tekki-
vaid deformatsioone nimetatakse passiivseteks.

Liitpinguse puhul nimetatakse *A. A. Iljušini* järgi deformatsioone aktiivseteks sel juhul, kui mingisugune üldistatud pinge σ , (selle määramisest vt. p. 15.21) ükskõik millisel hetkel on suurem kõigist oma eelmistest väärtustest. Kui ta on kasvõi ühestainsast oma eelmisest väärtusest väiksem, on deformatsioon passiivne.

15.12 Elastsed ja plastsed ained

Elastsel ainel on pingete ja deformatsioonide seos ühesugune niihästi aktiivsetel kui ka passiivsetel deformatsioonidel. Seega samale jõule vastab sama deformatsiooniolukord, **deformatsiooni suurus ei sõltu koormamise käigust**. Pingete ja deformatsioonide seos võib olla seejuures lineaarne (joon. 15.1, *a*) või mittelineaarne (joon. 15.1, *b*). Lineaarse seose korral öeldakse, et aine allub *Hooke*'i seadusele. Eeldusel, et deformatsioonid on väikesed, kehtib sääraste kehade kohta lineaarne elastsusteooria (ptk. 7). *Hooke*'i seadusele mitte alluvate ainete kohta saadakse mittelineaarne (füüsiliselt mittelineaarne) elastsusteooria.

Plastsetel ainetel on pingete ja deformatsioonide seos aktiivsel ja passiivsel deformatsioonil erinev



JOON 15.1

(joon. 15.1. c—e). Seega ühele ja samale koormusele vastab lõpmatu hulk erinevaid deformatsiooniolukordi, sõltuvalt koormamise käigust. Lisaks sellele sõltub sää-
 rasteel ainetel deformatsiooni suurus tavaliselt ka koormamise kiirusest (roomavus). Sel juhul võib ka aktiivsel koormamisel ühele ja samale koormusele vastata mitu erinevat deformatsiooniolukorda.

Plastsete ainete kohta tuleb elastsusteooriate asemel kasutada plastsusteooriaid. Kuna erinevus elastsete ja plastsete deformatsioonide vahel ilmneb alles passiivsel koormamisel, peavad aktiivsel koormamisel elastsus- ja plastsusteooriad andma samad tulemused, kui loobuda roomamisnähtustest. Alati see küll nii pole, kuna igale teooriale vastavad teatud lähtehüpoteesid ja lihtsustused ja plastsusteooriate lähtealused tavaliselt erinevad elastsusteooriate lähtealustest.

Peatume veel mõne sõnaga plastsusteooriates kasutatavatel pinge ja deformatsiooni diagrammidel.

Terase tüüpiline tegeliku pinge ja pikenemise diagramm on kujutatud joonisel 15.1, c. Aktiivsel koormamisel on see diagramm küllaltki keerulise kujuga. Passiivsele koormamisele (ja aktiivsele koormamisele kuni eelmise maksmatse koormuseni) vastab aga sirgjoon.

Kuna tegeliku diagrammi kasutamine on tema keerulise kuju tõttu tülikas, asendatakse ta sageli lihtsustatud diagrammidega. Kirjeldame allpool mõnda neist.

Kasutades ainult diagrammi osa voolavuspiirkonna lõppemiseni, võib lihtsustatud diagrammi kujutada koosnevana kahest sirgjoonest, millest esimene vastab pingetega proportsionaalsetele deformatsioonidele, teine aga konstantsetele pingetele — voolavuspiirile (joon. 15.1, d). Oletatakse, et voolavusele vastav osa on lõpmata pikk. Säärasele diagrammile vastavat ainet nimetatakse ideaalselt elastoplastseks. Diagramm ise on tuntud *Prandtl*i diagrammina.

Et arvestada aine kalestumist, võib eelkirjeldatud diagrammi horisontaalse osa asendada tõusva sirgega, kusjuures selle tõus on väiksem diagrammi alguses oleva sirge tõusust (joon. 15.1, e).

Kuna voolavuspiirkond on palju suurem elastsuspiirkonnast, siis võib mõnedes ülesannetes elastsuspiirkonnale vastava osa hoopis hüljata. Saadav diagramm koosneb ühestainsast horisontaalsirgest (joon. 15.1, f). Sellele diagrammile vastavat ainet nimetatakse ideaalselt jäikplastseks.

Diagrammi 15.1, c võib aproksimeerida ka mingi astmekõveraga $\sigma = R_0 \varepsilon^m$, kus $m < 1$ (joon. 15.1, g), või ka $\sigma = E_0(1 - \omega \varepsilon^m)$, kus $m > 1$. Säärane diagramm sobib ka plastmassidele ja mõningatele teistele ainetele.

On olemas veel teisi diagramme.

15.13 Liht- ja liitkoormamine

Liitkoormamiseks nimetatakse säärast koormamist, kus pinged kehas kasvavad omavahel proportsionaalselt ja nende muutumist saab seega iseloomustada üheainsa parameetriga. Kui pingete ja deformatsioonide vahelist seost saab kirjeldada astmefunktsiooniga $\sigma = E \varepsilon^m$, muutuvad pinged proportsionaalselt koormusega,

mis peab samuti sõltuma ühestainsast parameetrist. Kui aga üksainuski koormus ei muutu teistega proportsionaalselt, näiteks kui kehale mõjuvad algul painde- ja alles hiljem pöördemomendid, on tegemist liitkoormamisega.

On tõestatud, et liitkoormamisel väikeste deformatsioonide piirides jäävad peapingete ja peadeformatsioonide sihid kogu koormamise käigus muutumatuteks (kui $\sigma - \epsilon$ diagrammi saab aproksimeerida astmefunktsiooniga); plastsusteooriate seisukohalt on see põhiliseks erinevuseks nende kahe koormamisviisi vahel.

Lineaarses elastsusõpetuses ei osutu vahetegemine liht- ja liitkoormamise vahel vajalikuks, kuna tänu pingete ja deformatsioonide lineaarsele sõltuvusele koormusest võib algul leida pinged ja deformatsioonid iga koormuse kohta eraldi ja tulemused hiljem liita (koormuste mõju sõltumatuse printsiip). Plastsusõpetuses pole see lahendite mittelineaarsuse tõttu võimalik.

15.14 Plastsusõpetuse ülesanded. Plastsusteooriad

Elastsusõpetuse põhiülesandeks on elastses kehas välisjõudude mõjul tekkivate pingete ja deformatsioonide leidmine.

Analoogiliselt võib öelda, et **plastsusõpetuse põhiülesandeks on välisjõudude mõjul tekkivate pingete ja deformatsioonide leidmine**. Kuna aga plastsetes ainetes on koormuse ja pingete ning deformatsioonide vahelised seosed keerulisemad, on siin põhiülesannet võimalik difereentseerida palju laiemalt.

1. Välisjõudude ja pingete ning deformatsioonide vahelise seose leidmine aktiivsel koormamisel.
2. Välisjõudude ja pingete ning deformatsioonide vahelise seose leidmine passiivsel koormamisel.
3. Jääkpingete (s. o. sääraste pingete, mis jäävad kehas püsima pärast koormusest vabastamist) ja jääkdeformatsioonide leidmine.
4. Pingete ja deformatsioonide ajalise muutumise (roomavuse, relaksatsiooni) uurimine.
5. Nn. tehnoloogilised ülesanded — valtsimisel, stantsimisel jne. tekkivate protsesside uurimine.
6. Purustava koormuse (piirkoormuse) määramine.

Ingeneri seisukohalt on see sageli kõige olulisemaks pastsusõpetuse rakenduseks.

Lisaks sellele tuleb silmas pidada, et plastsed deformatsioonid on tavaliselt elastsetest tunduvalt suuremad. Suurte deformatsioonide korral aga muutub keha geometria, millega kaasneb põhivõrrandite muutumine lisaks füüsikalisele ebalineaarsusele veel geomeetriliselt ebalineaarseteks.

Vasavalt sellele, millistele ülesannetele asetatakse peamõhk ja missuguseid lihtsustusi kasutatakse põhivõrrandite tuletamisel ja nende lahendamisel, saadakse erinevad plastsusteooriad. Neid võib grupeerda kahte põhirühma:

- 1) deformatsioonitüüpi plastsusteooriad, kus põhitundmatuteks on pinged ja deformatsioonid,
- 2) voolutüüpi plastsusteooriad, kus põhitundmatuteks on pingete ja deformatsioonide muutmise kiirused.

15.2 VÄIKESTE ELASTOPLASTSETE DEFORMATSIOONIDE TEOORIA

See teooria on plastsusõpetuses üks tuntumaid. Teooria alused on välja töötanud *H. Hencky*; teooria hilisem areng on seotud *A. A. Iljušini* nimega.

Väikeste elastoplastsete deformatsioonide teooria lähtub järgmistest eeldustest:

1. Koormamisprotsessi vaadeldakse staatilise tasakaalu seisukorras, s. t. oletatakse, et pingete ja deformatsioonide muutmise kiirus on niivõrd väike, et kehas tekkinud inertsiõudude, samuti viskoosse hõõrdumise mõju võib hüljata.

2. Keha deformatsioonid on niivõrd väikesed, et tasakaaluvõrrandid ning pingete ja suhteliste deformatsioonide vahelised seosed võib koostada keha algolukorra geometria alusel.

3. Keha jääb isotroopseks — ei arvestata, et mõningais ainetes mõnesihiliste deformatsioonide korral tekib märgatav anisotroopia.

4. Koormamine on lihtne ja aktiivne, s. o. koormus kasvab monotoonselt ja võrdeliselt mingi üheainsa parameetriga. Mis puutub passiivsesse koormamisse, s. o.

koormuse kahanemisse, siis oletatakse, et sel puhul elastsusmoodul on konstantne ja mingi passiivse koormuse väärtusele vastava lahendi võib seega leida, kui maksimaalse koormusele vastavast plastsusõpetuse lahendist lahutatakse maksimaalse ja vaadeldava koormuse vahele vastav elastsusõpetuse lahend.

15.21 Pinge- ja deformatsioonitensori deviaatorid

Pingetensorit S , mille avaldiseks on (7.17), võib vaadelda kahe tensori summana

$$S = K_S + D_S \quad (15.1)$$

kus

$$K_S = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (15.2)$$

ja

$$D_S = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_k & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_k \end{pmatrix} \quad (15.3)$$

Neis avaldistes on σ_k keskmine normaalpinge:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (15.4)$$

Keskmistest normaalpingetest moodustatud tensorit K_S nimetatakse pinge keratensoriks ja tensorit D_S — pinge deviaatoriks.

Analoogiliselt võib deformatsioonitensori (7.25) lahutada keratensoriks ja deviaatoriks

$$T = K_T + D_T \quad (15.5)$$

kus

$$K_T = \begin{pmatrix} \varepsilon_k & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_k & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_k \end{pmatrix} \quad (15.6)$$

ja

$$D_T = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_k & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon_k & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon_k \end{pmatrix} \quad (15.7)$$

Avaldistes (15.6) ja (15.7) on ε_k keskmine joondeformatsioon

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \quad (15.8)$$

Tugevusõpetusest tuttava mahumuute $\theta = 3\varepsilon_k$ võib avaldada ainult keratensorite komponentide kaudu:

$$\theta = 3\varepsilon_k = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_k \quad (15.9)$$

Deviaatoritele D_S ja D_T vastav mahumuude võrdub nulliga:

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_k) + (\varepsilon_y - \varepsilon_k) + (\varepsilon_z - \varepsilon_k) = 0$$

Seega ping- ja deformatsioonideviaatorid vastavad säärasele pingusele, milles keha elementide ruumala ei muutu ja muutub ainult kuju. Keratensorid aga iseloomustavad pingust, milles muutub ainult keha elementide ruumala, aga mitte kuju.

Kuna plastsete deformatsioonide piirkonnas toimuvad põhiliselt ainult kujumuutused ja mahumuutused on lähedased nullile, siis on plastsusteoorias sobivam kasutada ping- ja deformatsioonitensorite asemel deviaatoreid D_S ja D_T .

Ping- ja deformatsioonitensori deviaatorite komponendid — pinged ja deformatsioonid — sõltuvad telgede valikust. On aga võimalik leida nende komponentide säärsed kombinatsioonid, mis ei sõltu teljestikust. Sääraseid suurusi nimetatakse invariantideks (vt. p. 7.23).

Pingedeviaatori esimene invariant — avaldise (15.3) peadiagonaalil asuvate liikmete summa — võrdub nulliga. Teise invarianti väärtuseks on

$$I_S^* = \left| \begin{array}{cc} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_k \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z - \sigma_k \end{array} \right| + \\ + \left| \begin{array}{cc} \sigma_y - \sigma_k & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_k \end{array} \right| = -\frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \\ + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (15.10)$$

Peateljestikus

$$I_S^* = -\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (15.11)$$

kus σ_1 , σ_2 ja σ_3 on peapinged.

Pingedeviaatori kolmas invariant erilist huvi ei paku.

Pingust iseloomustavaks üldistatud pingeks võetakse nn. pingete intensiivsus

$$\sigma_i = \sqrt{-3I_S^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (15.12)$$

Lineaarse pinguse puhul, kui $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, pingete intensiivsus $\sigma_i = \sigma_1$.

Mõnikord tõlgendatakse pingete intensiivsust ka nagu nn. oktaeedripingeid, võetuna mingi kordajaga. Oktaeedripinged on maksimaalsed tangent-siaalpinged pindadel, mille sihikoosinused $l = \pm 1/\sqrt{3}$, $m = \pm 1/\sqrt{3}$ ja $n = \pm 1/\sqrt{3}$. Sääraseid pindasid on kokku kaheksa, sellest nimetus: oktaeedripinged. Nende suurus

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Pingedeviaatori invarianti (15.11) aga võib tõlgendada nagu kujumuutuse potentsiaalset energiat, mis on võetud mingisuguse kordajaga.

Analoogiliselt pingedeviaatori invariantiga leiame ka deformatsioonideviaatori invarianti I_T^* . Saame:

$$I_T^* = -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] \quad (15.13)$$

Peateljestikus

$$I_T^* = -\frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \quad (15.14)$$

Deformatsioonide intensiivsuseks ε_i nimetatakse suurust

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sqrt{-\frac{4}{3} I_T^*} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 +} \\ &\quad + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \end{aligned} \quad (15.15)$$

Joonpinguse puhul, kui $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ja deformatsioon toimub ilma mahumuutuseta (*Poissoni* tegur $\mu = 0,5$), $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1/2$ ja deformatsioonide intensiivsus $\varepsilon_i = \varepsilon_1$.

15.22 Põhivõrrandid

Kuna deformatsioone loetakse väikesteks, võib staatikalised ja geomeetrilised seosed võtta elastsusõpetuse põhivõrrandeist muutmatul kujul [p. 7.52, võrrandid (I), (II) ja (IV)]. Muutuvad aga füüsikalised seosed [võrrandid (III)]. Need tuleb avaldada mitte pingetensori ja deformatsioonitensori, vaid pingedeviaatori ja deformatsioonideviaatori komponentide kaudu. Tuleb silmas pidada, et pingete ja deformatsioonide suhe pole enam konstantne suurus.

Et leida, millise kujuga peaksid vastavad võrrandid olema, avaldame algul elastsusteooria võrrandid (III) keratensorite ja deviaatorite komponentide kaudu. Seejuures tuleb ümber kujundada ainult esimene poolgrupp, mis seob joondeformatsioone ning normaalpingeid; nihkenurkade ja tangentsiaalpingete vahelised seosed ei muutu.

Liites esimese poolgrupi võrrandid saame, arvestades avaldisi (15.4) ja (15.8),

$$\varepsilon_k = \frac{1 - 2\mu}{E} \sigma_k \quad (15.16)$$

Võrranditegrupi (III) esimese võrrandi alusel

$$\begin{aligned}\varepsilon_x - \varepsilon_k &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) - (1 - 2\mu)\sigma_k] = \\ &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_x - 3\mu\sigma_k - (1 - 2\mu)\sigma_k] = \\ &= \frac{1 + \mu}{E} (\sigma_x - \sigma_k)\end{aligned}$$

ehk

$$\sigma_x - \sigma_k = \frac{E}{1 + \mu} (\varepsilon_x - \varepsilon_k) \quad (15.17)$$

Elastsusmooduli E määrame tõmbekatsel: $E = \sigma_1/\varepsilon_1$. Seega võib võrrandi (15.17) ümber kirjutada järgmisel kujul:

$$\sigma_x - \sigma_k = \frac{1}{1 + \mu} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} (\varepsilon_x - \varepsilon_k) \quad (15.18)$$

Plastsusteoorias loeme, et $\mu = 0.5$. Seega $1/(1 + \mu) = 2/3$. Nihkemoodul

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{E}{3} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \quad (15.19)$$

Asendades nüüd veel avaldistes (15.18) ja (15.19) normaalpingete ja joondeformatsioonide suhte σ_i/ε_i pingete ja deformatsioonide intensiivsuste suhtega σ_i/ε_i , saamegi plastsusteooriale vastavad pingete ja suhteliste deformatsioonide vahelised seosed:

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_k &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \gamma_{xy} \\ \sigma_y - \sigma_k &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \gamma_{yz} \\ \sigma_z - \sigma_k &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \gamma_{zx}\end{aligned} \quad (15.20)$$

Kuna $\varepsilon_k = 0$, on ta neis võrrandis ära jätetud.

Väikeste elastoplastsete deformatsioonide teooria täielik võrrandisüsteem koosneb seega järgmistest võrrandist:

- 1) kolm tasakaalu diferentsiaalvõrrandit (I) (p. 7.52);
- 2) kuus deformatsioonide ja siirete vahelist seost (II);

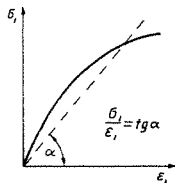
- 3) kuus pingete ja deformatsioonide vahelist seost (15.20);
 4) deformatsioonide intensiivsuse avaldis (15.15);
 5) pingete ja deformatsioonide vaheline seos

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1} = \Phi(\epsilon_1) \quad (15.21)$$

mis määratakse katseliselt (tõmbe- ja survekatsel) või võetakse vastavalt katseandmeid aproksimeerivale idealiseeritud diagrammile. See suhe, mis asendab elastsusõpetuses kasutatavat elastsusmoodulit, ei ole konstantne, vaid sõltub deformatsiooni suurusest.

Suhe σ_1/ϵ_1 ei ole mitte σ_1 - ϵ_1 diagrammi puutuja tõus, vaid selle sirge tõus, mis läbib koordinaatide algust ja vaadeldavat punkti (joon. 15.2).

Saadud võrrandite lahendamine on võrrandite suure arvu ja võrrandi (15.21) mitte-lineaarsuse tõttu raske. Kasutatakse järkjärgulise lähenemise meetodit, kusjuures esimeseks lähenduseks võetakse elastsusõpetuse lahend. Täpne lahendus on võimalik ainult kõige lihtsamail juhtudel, kui pinguse kirjeldamiseks piisab ühestainsast koordinaadist (puhas paine, ümarvaruda vääne, telgsümmeetrilised ülesanded)



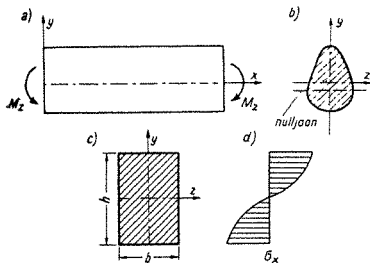
JOON. 15.2

15.23 Prismalise tala puhast paine

Plastsusteooria rakendamise näitena vaatleme prismalise tala puhast painet, mis on üks lihtsamaid ülesandeid.

Olgu tala, mille teljeks on x ja ristlõike sümmeetriateljeks y , koormatud paindemomentidega M_x (joon. 15.3, a ja b). Kuna säärasel koormusel on kahe ristlõikega piiratud tala kõik elemendid ühesugustes tingimustes, jäävad tala ristlõiked tasapinnalisteks ja suhtelised deformatsioonid ϵ_x kasvavad võrdeliselt kaugusega tala nulljoonest:

$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho} \quad (a)$$



JOON. 15.3

kus proportsionaalsustegur $1/\varrho$ on tala kõverus. Kui *Poissoni* tegur $\mu = 0,5$, on ülejäänud suhtelised deformatsioonid järgmised:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{y}{2\varrho}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (b)$$

Avaldised (a) ja (b) ilmselt rahuldavad deformatsiooni pidevuse tingimusi (7.29).

Võrrandeid (15.20) on võimalik rahuldada, võttes pingete jaoks järgmised avaldised:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_x; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (c)$$

Pingete avaldised (c) rahuldavad punkti 7.52 tasakaalu diferentsiaalvõrrandeid (I) ja tingimust, et tala külgpind peab olema koormusevaba.

Pingete ja suhteliste deformatsioonide vaheline seos

$$\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \Phi(\varepsilon_x) \quad (d)$$

võetakse antud materjalile vastavalt deformatsioonidogrammilt tõmbel ja survele.

Kuna varras ei ole pikijõuga koormatud, peab normaalpingete σ_x resultant võrduma nulliga:

$$\int_F \sigma_x dF = \int_F \Phi(\varepsilon_x) \varepsilon_x dF = \frac{1}{\varrho} \int_F y \Phi(\varepsilon_x) dF = 0 \quad (e)$$

See tingimus määrab nulljoone asendi.

Normaalpingete resulteeriv moment peab võrduma välismomendiga M_z :

$$\int_F y \sigma_x dF = \int_F y \Phi(\varepsilon_x) \varepsilon_x dF = \frac{1}{Q} \int_F y^2 \Phi(\varepsilon_x) dF = M_z \quad (f)$$

Avaldised (d), (e) ja (f) määravadki tekkiva pinguse. Kui ristlõikel on kaks sümmeetriatelge ja materjal töötab tõmbele ja survele ühesuguselt, läbib neutraaltelg ristlõike raskuskeset ja tingimus (e) langeb ära.

Tuletame lõpuks avaldise normaalpingete määramiseks ristkülikulise ristlõikega talas (joon. 15.3, c), kui pingete ja deformatsioonide vaheline seos on määratud tõmmatud tsoonis võrrandiga

$$\sigma_x = E_0 \varepsilon_x^n = E_0 \frac{y^n}{Q^n} \quad (g)$$

ja surutud tsoonis analoogilise võrrandiga

$$-\sigma_x = E_0 (-\varepsilon_x)^n = E_0 \frac{(-y)^n}{Q^n} \quad (h)$$

Sel juhul tõmmatud tsoonis

$$\Phi = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = E_0 \varepsilon_x^{n-1} = E_0 \frac{y^{n-1}}{Q^{n-1}} \quad (i)$$

ja üldine paindemoment

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{2b}{Q} \int_0^{h/2} y^2 \Phi dy = \frac{2bE_0}{Q^n} \int_0^{h/2} y^{n+1} dy = \\ &= \frac{E_0 b h^{n+2}}{(n+2) 2^{n+1} Q^n} \end{aligned}$$

kust

$$Q^n = \frac{E_0 b h^{n+2}}{(n+2) \cdot 2^{n+1} M_z} \quad (k)$$

Asendades (k) normaalpinge avaldisse (g), saame

$$\sigma_x = \frac{M_z y^n}{I_z^{(n)}} \quad (m)$$

kus

$$I_z^{(n)} = \frac{b h^{n+2}}{(n+2) \cdot 2^{n+1}} \quad (n)$$

Kui $n = 1$, saame võrrandeist (m) ja (n) tuntud avaldise

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{bh^2/12}$$

Avaldisest (m) selgub, et koormuse suurendamisel kasvavad pinged igal pool ühtlaselt ja võrdeliselt väliskoormusega. Seega on antud juhul tõepoolest tegemist lihtkoormusega.

Joonisel 15.3, *d* on toodud parameetritele $n = 0,5$ vastav pingepüür.

15.3 PIIRKOORMUSE MAÄRAMINE

15.31 Piirkoormuse mõiste. Plastsustingimused

Piirkoormust võib tõlgendada mitmeti. Siin nimetame piirkoormuseks säärast koormust, mille ületamisel konstruktsioon muutub mehhanismiks ja ta kandevõime on sellega ammendatud. Piirkoormuse määramisel võtame aluseks ideaalselt elastoplastse materjali pinge ja deformatsiooni diagrammi, mis on toodud joonisel 15.1, *d*. Oletame, et voolavuspiir tõmbel ja survele on ühesugune.

Piirkoormuse määramiseks on vaja fikseerida piirkoormusele vastavate deformatsioonide skeem ja nõuda, et selle skeemi iseloomustavais kohtades materjal oleks piirloomustavas, kusjuures viimase all mõistame voolavust vastava ristlõike kõigis punktides. Kui selle ristlõike üksikutes kiududes on joonpingus, siis peavad vaadeldava ristlõike kõigis punktides tõmbe- või survepinged saavutama voolavuspiiri. Liitpinguse puhul osutub vajalikuks veel mingi plastsustingimus, mis lubab otsustada, millise pingekombinatsiooni puhul tekib voolavus.

Sääraseid plastsustingimusi on kaks.

Vastavalt punktis 15.2 toodud teooriale tuleb oletada, et vaadeldavas punktis tekib voolamine, kui seal pingete intensiivsus σ_i võrdub voolavuspiiriga σ_T :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T \quad (15.22)$$

Tasandpinguse puhul, kui $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, saame siit

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_T \quad (15.23)$$

Tingimuse (15.22) püstitas 1904. a. *M. T. Huber* ja hiljem (1913) temast sõltumatult *R. Mises*.

Selle plastsustingimuse kõrval leiab kasutamist ka *B. de Saint-Venanti* poolt 1871. a. püstitatud plastsustingimus, mille järgi **materjalis tekib voolavus, kui maksimaalsed tangentsiaalpinged saavutavad teatud piiri**, s. t. kui kasvõi ühesainsas alltoodud tingimustest

$$\begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_T \\ |\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_T \\ |\sigma_3 - \sigma_1| < \sigma_T \end{cases} \quad (15.24)$$

võrratusmärk asendub võrdusmärgiga.

Kui $\sigma_z = 0$ ja $\sigma_x \sigma_y < \tau_{xy}^2$, saame siit tasandpinguse jaoks tugevusõpetusest tuttavaid peapingete avaldise arvestades järgmise plastsustingimuse.

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_T \quad (15.25)$$

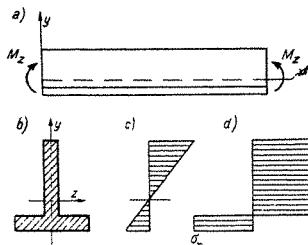
Plastsustingimused (15.23) ja (15.25) annavad tavaliselt piirkoormuse jaoks võrdlemise lähedase väärtuse. Täpsemaks loetakse avaldist (15.23).

15.32 Puhas paine

Olgu ühtlase ristlõikega varda teljeks x . Teljed y ja z asuvad varda ristlõike pinnas, kusjuures y olgu sümmeetriateljeks (joon. 15.4, *a* ja *b*). Vardas mõjugu konstantne paindemoment M_z . Voolavuspiir olgu tõmbel ja survel ühesugune.

Teatavasti tekib paindel vardas kaks tsooni, milles ühes esinevad tõmbepinged ja teises survepinged. Elastses staadiumis muutuvad pinged varda kõrguses lineaarselt ja võrduvad nulliga tala raskuskeset läbival z -teljel (joon. 15.4, *c*). Piirulukorras aga on pinged kummagi tsooni ulatuses ühtlased ja võrduvad voolavuspiiriga (joon. 15.4, *d*). Seejuures neid tsoone eraldav joon (nulljoon) ei läbi üldjuhul enam raskuskeset, välja arvatud juhul, kui z -telg on sümmeetriateljeks.

Tekkinud pingetele vastav pikijõud peab võrduma nul-



JOON 15 4

liga ja moment, mille nad annavad, peab võrduma välis-momendiga M_z . Seega saame koostada kaks tasakaalu-võrrandit:

$$\sigma_{\tau} \left(\int_{F_t} dF - \int_{F_s} dF \right) = 0 \quad (15.26)$$

$$\sigma_{\tau} \left(\int_{F_t} y dF - \int_{F_s} y dF \right) = M_{zp}$$

kus F_t on tõmbetsooni ja F_s survetsooni pindala, aga M_{zp} piirloomorraale vastav paindemoment.

Võrrandid (15.26) võib ümber kirjutada järgmiselt:

$$F_t - F_s = 0 \quad (15.26, a)$$

$$S_t + S_s = \frac{M_{zp}}{\sigma_{\tau}}$$

kus S_t ja S_s on tõmbe- ja survetsooni pindalade staatilised momendid nende tsoonide eraldusjoone suhtes; mõle-mad staatilised momendid tuleb lugeda positiivseks.

Esimesest võrrandist (15.26, a) järeldub, et kaht tsooni eraldav joon jagab ristlõike pindala kaheks võrdseks osaks. Pärast eraldusjoone määramist saab teisest võr-randist määrata piirmomendi M_{zp} . Piirmomendi avaldise võib koostada järgmisel kujul:

$$M_{zp} = W_{zp} \sigma_{\tau} \quad (15.27)$$

kus W_{zp} on piirvastupanumoment, mis võrdub tõmbe- ja survetsooni staatiliste momentide summaga nende tsoonide eraldusjoone suhtes:

$$W_{zp} = S_t + S_s \quad (15.28)$$

Ristkülikulise põiklõike korral, mille laius on b ja kõrgus h , läbib sümmeetria tõttu z -telje suhtes tõmbe- ja survetsooni eraldusjoon ristlõike raskuskeset ja staatilised momendid

$$S_t = S_s = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

Seega ristkülikulise põiklõike piirvastupanumoment

$$W_p = \frac{bh^2}{4} \quad (15.29)$$

ning on sama ristlõike vastupanumomendist elastses staadiumis W_e poolteist korda suurem.

Teistsuguste ristlõigete jaoks on see suhe erinev, näiteks valtsitud I-profiilide juures $W_p \approx 1,1W_e$ — mõlemad vastupanumomendid on peaaegu võrdsed.

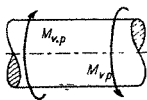
Piirvastupanumomendi mõistet võib kasutada ka anisotroopsest ja mittehomogeensest materjalist varraste, näiteks raudbetoonist varraste juures, kus piirvastupanumomendi määrab sarruse voolavus. Selle küsimuse üksikasjaline vaatlus aga ei kuulu enam käesoleva kursuse raamidesse.

15.33 Vääne

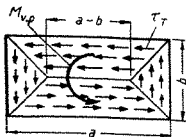
Kui varda ristlõige ei muutu pikil varrast, esinevad varda teljega risti olevates lõigetes ainult tangentsiaalpinged. Voolavuspiirile vastavad tangentsiaalpinged τ_T leiame valemist (15.23) või (15.25). *Huber-Misese* plast-sustingimuse järgi $\tau_T = \sqrt{3}\sigma_T$ ja *Saint-Venanti* plast-sustingimuse järgi $\tau_T = 0,5\sigma_T$.

Ümarvarda väändel (joon. 15.5) on piirväändemomendi M_{vp} väärtuseks

$$M_{vp} = \int_F \tau_T r \, dF = \tau_T \int_0^{2\pi} \int_0^b r^2 \, dr \, d\varphi = \frac{2\pi b^3}{3} \sigma_T \quad (15.30)$$



JOON 15 3



JOON 15 6

Ristkülikulise ristlõikega varraste väändel jaguneb ristlõike üksikuteks tsoonideks, kusjuures igas tsoonis on tangentsiaalpinged τ_r paralleelsed selle tsooni väliservaga (joon. 15.6).

Summeerides üksikutes osades mõjuvate tangentsiaalpingete momendid, saame piirväändemomendi jaoks järgmise avaldise:

$$M_{v,p} = \left[2(a-b) \frac{b}{2} \frac{b}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot \frac{b}{2} \frac{b}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{6} \right) \right] \sigma_r$$

kust pärast lihtsustamist

$$M_{v,p} = \frac{b^3}{6} (3a - b) \sigma_r \quad (15.31)$$

On võimalik näidata, et ühesidemeliste profiilide väändel võrdub piirväändemoment ristlõike kohale konstrueeritud võrdkaldelise «katuse» kahekordse ruumalaga, kusjuures «katuse» kaldeks tuleb võtta τ_r .

15.34 Siserõhuga koormatud paksuseinaline toru

Mõjugu paksuseinalisele torule, mille siseradius on a ja välisradius b , siserõhk p_a (joon. 9.6). Oletame veel, et toru telje sihilised pinged $\sigma_z = 0$.

Toru pingus on iseloomustatud juba kahe pingega: σ_r ja σ_φ . Seega ainult plastsustingimusest piirõhu leidmiseks ei piisa ja abiks tuleb võtta veel tasakaalu diferentsiaalvõrrand (9.26)

$$\sigma_r - \sigma_\varphi + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (a)$$

Plastsustingimustest kasutame lihtsuse mõttes *Saint-Venanti* tingimust (15.25), mis antud juhul võtab järgmise kuju:

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r = \sigma_T \quad (b)$$

Kuna tekkivad pinged on vastupidise märgiga (σ_r — surve, σ_{φ} — tõmme), siis $\sigma_r \sigma_{\varphi} < 0$ ja tingimuse (15.25) kasutamine on õigustatud.

Asendades (b) võrrandisse (a), saame järgmise diferentsiaalvõrrandi:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_T \quad (c)$$

mille lahendiks on

$$\sigma_r = \sigma_T \ln r + C \quad (d)$$

Toru välispinnal $r = b$ võrdub σ_r nulliga. Seega $C = -\sigma_T \ln b$ ja

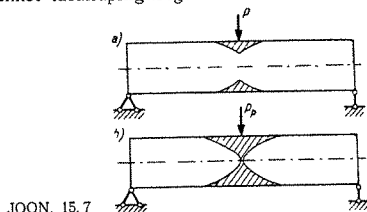
$$\sigma_r = \sigma_T \ln \frac{r}{b} \quad (e)$$

Toru sisepinnal võrdub σ_r piirrõhuga $p_{a,p}$, mis on võetud vastupidise märgiga. Seega

$$p_{a,p} = \sigma_T \ln \frac{b}{a} \quad (15.32)$$

15.35 Lamepaine

Olgu riskülikulise ristlõikega kahel toel asuv tala keskel koormatud koondatud jõuga P (joon. 15.7). Säärases talas tekivad paindemomendid ja põikjõud ning koos nendega normaalpinged σ_x ja tangentsiaalpinged τ_{xy} . Lisaks tekivad veel normaalpinged σ_y . Seega on antud juhul tegemist tasandpingusega.

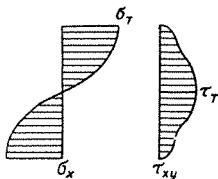


JOON. 15.7

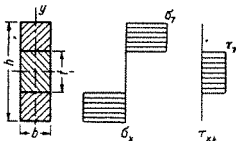
Tala koormuse järkjärgulisel suurendamisel tekivad talas plastsed tsoonid. Tavaliselt arenevad nad alates äärmistest kiududest jõu rakenduspunkti all (joon. 15.7, a). Erandina võib lühikeste ja kõrgete talade puhul tekkida tangentsiaalpingete mõjul veel üks plastsete deformatsioonide kolle tala nulljoonel. Koormuse suurenemisel võtavad plastsed tsoonid enda alla järjest suurema osa talast. Tala kandevõime on ammendatud, kui need plastsed tsoonid ühinevad ja kogu jõu all olevas ristlõikes tekib voolavus (joon. 15.7, b). Sel juhul öeldakse, et talas on tekkinud plastne liigend. Selle tekkimisega muutub tala mehhanismiks ja koormuse edasine suurendamine pole enam võimalik.

Ülesande lahendus on küllaltki keeruline Piirolukorras peavad normaalpinged ja tangentsiaalpinged olema ohtlike löikes säärased, et pingete intensiivsus võrduks ristlõike igas punktis voolavuspiiriga. Seejuures mudugi peavad normaalpinged andma paindemomendi ja tangentsiaalpinged põikjõu. Pingete avaldised, mis toodud tingimusi rahuldavad, on olemas lõpmata palju. Oigeks osutuvad need, mis annavad väliskoormuse jaoks maksimaalse väärtuse, kuna pingete avaldiste etteandmisega me nagu kõrvaldasime ristlõikel mõned sidemed. Piirolukorras on normaal- ja tangentsiaalpingete epüürid joonisel 15.8 toodud kujuga.

Lihtsa ligikaudse lahendusmeetodi andis S. A. Paltševski. Selle meetodi järgi oletatakse, et ristlõike äärmistes osades mõjuvad piirolukorras ainult normaalpinged $\sigma_x = \sigma_T$ ja keskmises osas, mille kõrgus on t , ainult tangentsiaalpinged $\tau_{xy} = \tau_T$ (joon 15.9). Piirolukorrale vastab paindemoment



JOON 15 8



JOON 15 9

$$M_p = 2b\sigma_\tau \int_{t/2}^{h/2} y dy = \frac{b}{4} (h^2 - t^2) \sigma_\tau \quad (a)$$

ja põikjõud

$$Q_p = bt\tau_\tau \quad (b)$$

Olgu $(M_p)_{Q=0}$ piirpaimdemoment juhul, kui põikjõud võrdub nulliga, ja $(Q_p)_{M=0}$ piirpõikjõud, kui paindemoment võrdub nulliga. Nende avaldised

$$(M_p)_{Q=0} = \frac{bh^2}{4} \sigma_\tau \quad (c)$$

$$(Q_p)_{M=0} = bh\tau_\tau \quad (d)$$

On kerge kontrollida, et

$$\frac{M_p}{(M_p)_{Q=0}} + \left(\frac{Q_p}{(Q_p)_{M=0}} \right)^2 = 1 \quad (15.33)$$

Seega piirkoormusele vastav paindemoment M_p ja põikjõud Q_p peavad rahuldama tingimust (15.33).

Piirkoormuse täpsema väärtuse saame, kui avaldises (15.33) ka esimese liikme tõstame ruutu.

$$\left(\frac{M_p}{(M_p)_{Q=0}} \right)^2 + \left(\frac{Q_p}{(Q_p)_{M=0}} \right)^2 = 1 \quad (15.33,a)$$

Kui tala pikkus on tala kõrgusest tunduvalt suurem, siis võib tavaliselt põikjõu mõju hüljata. Nii näiteks kui tala pikkus on kõrgusest neli korda suurem ja koormuseks on tala keskel rakendatud jõud, vähendab põikjõu mõju piirkoormust ainult 3–4% võrra. Sellepärast oletame edaspidi, et põikjõudude mõjust tala piirilukorrale võib loobuda ning tala mingis ristlõikes tekib plastne liigend siis, kui paindemoment seal saavutab piirväärtuse $M_p = \sigma_\tau W_p$. Piirvastupanumoment W_p määratakse avaldisega (15.28).

15.36 Staatikaga määramatud varraskonstruksioonid

Kuna tala piirvastupanumoment W_p on suurem elastsele staadiumile vastavast vastupanumomendist W_e , on lihttala piirkoormus P_p suurem koormusest P_e , mille juures pinged ainult äärmistes kiududes saavutavad voolavuspääri:

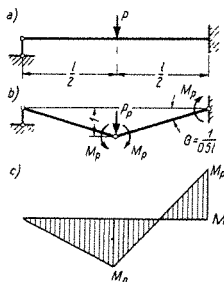
$$P_p = \frac{W_p}{W_e} P_e > P_e \quad (15.34)$$

Staatikaga määramatutes konstruktsioonides on aga piirkoormus veelgi suurem, kuna avaldisega (15.34) määratud piirkoormus eeldab ainult ühe plastse liigendi tekkimist. Ühe liigendi tekkimisega aga ei muutu staatikaga määramatu konstruktsioon veel mehhanismiks.

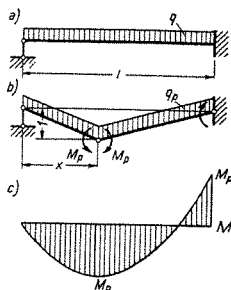
Selgitame säärase konstruktsioonide arvutamist mõne näitega.

Olgu konstantse ristlõikega tala ühes otsas kinnitatud liigendiga ning teises otsas jäigalt ja koormatud jõuga keskel (joon. 15.10, a). Säärase tala mehhanismiks muutumiseks on vajalik kahe plastse liigendi tekkimine: jõu rakenduskoht ja toel. Seega peab avas olema kokku kolm liigendit, kusjuures plastsed liigendid erinevad harilikust sellega, et neis on rakendatud moment $M_p = \sigma_r W_p$.

Piirilukorrale vastava jõu P_p leiame kõige lihtsamalt kinemaatilise meetodiga. Anname jõu rakenduspunktile jõu mõjumissuunas mingi siirde, mille lihtsustuse mõttes loeme võrdseks ühega; selle juures peab jõu P_p ja plastsetes liigendites mõjuvate piirpäändemomentide M_p poolt sooritatud tööde summa võrduma nulliga. Saame järgmise võrrandi (vt. joon. 15.10, b):



JOON 15 10



JOON. 15 11

$$P_p - 3M_p \cdot \frac{1}{l/2} = 0 \quad (a)$$

kust

$$P_p = \frac{6M_p}{l} \quad (b)$$

Piirlokorrade vastav paindemomendi epüür on toodud joonisel 15.10, c.

Kui sama tala on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega q (joon. 15.11, a), siis muutub ülesande lahendamise keerulisemaks selle tõttu, et keskmise plastse liigendi asukoht ei ole teada. Asugu ta kaugusel x vasemast toest (joon. 15.11, b). Võrrutades välis- ja sisejõudude tööde summa nulliga, saame:

$$\frac{q_p l}{2} - M_p \left(\frac{2}{l-x} + \frac{1}{x} \right) = 0 \quad (c)$$

kust

$$q_p = \frac{2M_p}{l} \left(\frac{2}{l-x} + \frac{1}{x} \right) \quad (d)$$

Plastse liigendi kaugus x peab olema selline, et piirkoormus q_p oleks minimaalne. Selleks võrrutame q_p tulelise nulliga:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{l-x} + \frac{1}{x} \right) = 0 \quad (e)$$

kust

$$x = l(\sqrt{2} - 1) \quad (f)$$

Asendades x väärtuse (f) piirkoormuse avaldisse (d), saame pärast lihtsustamist:

$$q_p = \frac{2M_p}{l^2} \frac{1}{3\sqrt{2}-4} = 11,656 \frac{M_p}{l^2} = 11,656 \frac{W_p}{l^2} \sigma_T \quad (g)$$

Sellele vastav paindemomendi epüür on toodud joonisel 15.11, c.

Tala töötamisel elastses staadiumis, s. t. kuni voolvuse tekkimiseni ühesainsas punktis, tekib maksimaalne paindemoment toel, kus tema suuruseks on $q l^2/8$. Seega koormuse q_e , mis kutsub esile voolvuse ühesainsas punktis, avaldiseks on

$$q_e = 8 \frac{M_e}{l^2} = 8 \frac{W_e}{l^2} \sigma_T$$

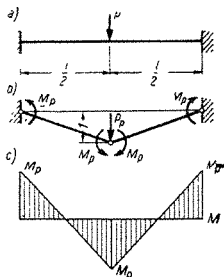
Piirkoormuse ja elastse staadiumi lõppemisele vastava koormuse suhe

$$\frac{q_p}{q_e} = \frac{11,656 W_p}{8 W_e} = 1,48 \frac{W_p}{W_e}$$

kus W_p on piirvastupanumoment ja W_e elastsele staadiumile vastav vastupanumoment. Ristkülikulise ristlõike korral, nagu varem nägime, $W_p/W_e = 1,5$ ja seega on koormust võimalik suurendada elastse staadiumi lõpust kuni tala kandevõime ammendamiseni veel 122% võrra, s. t. rohkem kui kaks korda.

Mõlemal toel jäigalt kinnitatud tala mehhanismiks muutumiseks on vajalik kolme plastse liigendi tekkimine. Olgu säärane prismaline tala koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega. Nagu selgub jooniselt 15.12, on sel juhul piirkoormuseks

$$q_p = 4M_p \frac{1}{l/2} \cdot \frac{1}{l/2} = \frac{16M_p}{l^2} \quad (h)$$



JOON. 15.12

Järgmise näitena vaatleme ühtlase ristlõikega kahesildelist tala, mille ühe silde keskel mõjub jõud $P_1 = P$ ja teise silde keskel jõud $P_2 = kP$ (joon. 15.13, a). Säärasele talale on võimalik konstrueerida kolm erinevat

$$q_e = 8 \frac{M_e}{l^2} = 8 \frac{W_e}{l^2} \sigma_T$$

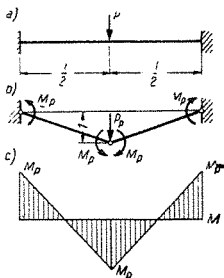
Piirkoormuse ja elastse staadiumi lõppemisele vastava koormuse suhe

$$\frac{q_p}{q_e} = \frac{11,656 W_p}{8 W_e} = 1,48 \frac{W_p}{W_e}$$

kus W_p on pürvastupanumoment ja W_e elastsele staadiumile vastav vastupanumoment. Ristkülikulise ristlõike korral, nagu varem nägime, $W_p/W_e = 1,5$ ja seega on koormust võimalik suurendada elastse staadiumi lõpust kuni tala kandevõime ammendamiseni veel 122% võrra, s. t. rohkem kui kaks korda.

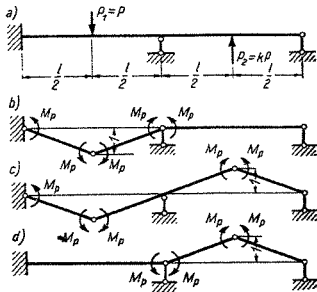
Mõlemal toel jäigalt kinnitatud tala mehhanismiks muutumiseks on vajalik kolme plastse liigendi tekkimine. Olgu säärane prismaline tala koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega. Nagu selgub jooniselt 15.12, on sel juhul piirkoormuseks

$$q_p = 4M_p \frac{1}{l/2} \cdot \frac{1}{l/2} = \frac{16M_p}{l^2} \quad (h)$$



JOON 15 12

Järgmise näitena vaatleme uhtlase ristlõikega kahesildelist tala, mille ühe silde keskel mõjub jõud $P_1 = P$ ja teise silde keskel jõud $P_2 = kP$ (joon. 15.13, a). Säärasele talale on võimalik konstrueerida kolm erinevat



JOON. 15.13

purunemispilti (joon. 15.13, b–d). Õigeks osutub neist see, millele vastab minimaalne koormus.

Purunemispildile 15.13, b vastab

$$P_p = \frac{4M_p}{l/2} = 8M_p \quad (i)$$

Purunemispildi 15.13, c kohaselt

$$P_p(1+k) = \frac{5M_p}{l/2}$$

kust

$$P_p = \frac{10}{1+k} M_p \quad (k)$$

Lõpuks, purunemispildist 15.13, d

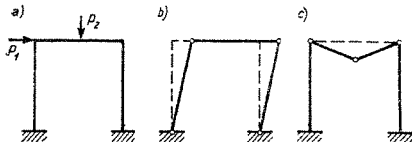
$$P_p = \frac{6}{k} M_p \quad (m)$$

Missugune valemeist (i)–(m) annab piirkoormusele P_p minimaalse väärtuse, sõltub parameetrist k . Võrrutades üksikud piirkoormuse avaldised, on kerge näidata, et:

- kui $k < 1/4$, annab piirkoormuse avaldis (i),
- kui $1/4 < k < 3/2$, annab piirkoormuse avaldis (k),
- kui $k > 3/2$, annab piirkoormuse avaldis (m).

Kui jätkuvtalale, mille ristlõiked on silde ulatuses ühtlased, mõjub ainult ühesuunaline koormus, võib purustava koormuse määramisel vaadelda iga sillet omaette.

Viimase näitena vaatleme joonisel 15.14, *a* kujutatud raami. Selles on antud koormusskeemi juures võimalikud kaks erinevat purunemispilti, nagu näidatud joonisel 15.14, *b* ja *c*. Tegelikuks purunemispildiks osutub jällegi see, millele vastab koormusparameetri P minimaalne väärtus.



JOON 15.14

Varraskonstruksioonide arvutamisel piirulokorrale tuleb silmas pidada järgmisi asjaolusid.

1. Kõik tegelike materjalide deformatsioonidiagrammid on piiratud pikkusega. Sellepärast võib sääraste materjalide juures, mille purunemisega kaasnevad ainult väikesed deformatsioonid, mõni ristlõige täielikult puruneda enne piirulokorrale vastavate deformatsioonide väljaarenemist.

2. Mitmekordsel koormamisel, eriti siis, kui koormustüübid on erinevad, võib tegelik piirkoormus olla teoreetilisest väiksem, kuna sel juhul on deformatsioonidel kalduvus summeeruda; samuti võivad muutuda materjali mehaanilised omadused ja tekkida mikropraod.

3. Surutud elemendid võivad kaotada stabiilsuse juba materjali osalisel voolamisel. Voolavusolukord survele on üldse ebastabiilne, nii näiteks I-tala, mille üks vöö on surutud, kaotab oma tasandilise paindekuju juba enne kui pinged surutud vöös jõuavad voolavuspiirini.

4. Deformatsioonidiagrammi kuju oleneb koormamise kiirusest; kiirel koormamisel on ta lähedasem ideaal-elastse materjali diagrammile (voolavuspiirkond on lühem).

5. Arvutustel piirilukorradele ei arvestata materjali karestumist, mis suurendab tegeliku piirkoormuse väärtust ja mõningal määral kompenseerib eeltoodud negatiivsete tegurite mõju.

6. Raudbetoonkonstruktsioonide juures võib ühe- ja teisesuunalisele paindemomendile vastav piirmoment olla erinev.

7. Temperatuuri muutumine ja tugede järeleandmine piirilukorda ei mõjuta.

15.37 Plaadid

Elastoplastsest materjalist talade piirkoormuse määramise meetodi üldistuse plaatide kohta andis A. A. Gvozdzjev. Tema teooria järgi oletatakse, et plaadi piirilukorras võtab plaat püramidaalse või katusesarnase kuju (muidugi tipuga allapoole) ja püramiidi üksikute tahkude vahel tekivad joonliigendid, kus mõjub liigendi pikkusühiku kohta konstantne piirmoment. Eeldatakse, et elastsed deformatsioonid on väikesed võrreldes plastsetega, aga viimased on niivõrd väikesed, et plaadi maksimaalne läbipaine on väike võrreldes paksusega. Seega on A. A. Gvozdzjevi teooria rakendatav peamiselt raudbetoonplaatidele.

Kui plaat on mõlemas sihis ühesuguselt sarrustatud, võib piirmomendi väärtuseks võtta

$$M_p = \sigma_T f_a z \quad (15.35)$$

kus σ_T on sarruse voolavuspiir, f_a — ühesihilise sarruse pindala ühiklause kohta ja z — sisejõudude paari õlg piirilukorras. Piirmoment M_p võib olla positiivsete ja negatiivsete paindemomentide jaoks erinev.

Samuti nagu talade puhul vastab ka plaatide piirilukorradele säärane joonliigendite süsteem, mis annab piirkoormuse jaoks kõige väiksema väärtuse.

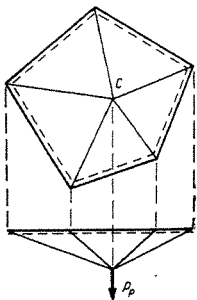
Selgitame piirkoormuse määramist mõne näitega.

Vaatleme algul polügonaalset plaati, mis on servadel vabalt toetatud ning koormatud punktis C koondatud jõuga P (joon. 15.15). Plaat olgu lähedane ringikujulisele ja jõud olgu rakendatud plaadi keskpunkti läheduses. Plaadi nurkade ülestõusmise loeme takistatuks, s. t. toesidemed kontuuril on kahesuunalised.

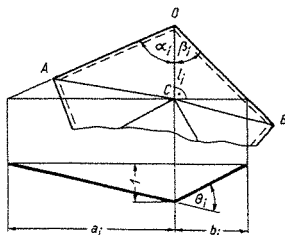
Plaadi purunemisolukorda võib sel juhul iseloomustada püramiidina, mille tipp asub punktis C ja mille servadeks olevad joonliigendid ühendavad plaadi tippu kontuuri nurkadega. Võrrotades välis- ja sisejõudude töö võimalikel paigutustel nulliga, saame piirkoormuse väärtuseks

$$P_p = M_p \sum \theta_i l_i \quad (15.36)$$

kus l_i on üksiku joonliigendi pikkus ja θ_i on nurk kahe vastavat joonliigendit moodustava tahu vahel.



JOON. 15.15



JOON. 15.16

Leiame edasi nurga θ_i (joon. 15.16).

Moodustagu jõu rakenduspunkti C kontuuri tipuga O ühendav joon naaberservadega nurgad α_i ja β_i . Edasi tõmbame läbi punkti C ristsirge joonele CO kuni lõikumiseni servadega AO ja BO või nende pikendustega. Vastavalt lõikude pikkused olgu a_i ja b_i .

Jooniselt selgub, et

$$a_i = l_i \operatorname{tg} \alpha_i; \quad b_i = l_i \operatorname{tg} \beta_i \quad (a)$$

Jõu rakenduspunkti C ühiksiirdele vastav nurk

$$\theta_i = \frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i} = \frac{1}{l_i} (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i) \quad (b)$$

Asendades (b) avaldisse (15.36), saame

$$P_p = M_p \sum \operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i \quad (15.37)$$

Kui plaadiks on korraparane n -nurk ja jõud asub plaadi tsentris, siis

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{(n-2)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \quad (c)$$

ja

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \operatorname{ctg} \beta_1 = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \quad (d)$$

Vastavalt avaldisele (15 37) kujuneb piirkoormuseks

$$P_p = 2M_p n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \quad (15\ 38)$$

Ruutplaadi puhul $n=4$ ja

$$P_p = 8M_p \quad (e)$$

Ringikujulise plaadi puhul $n \rightarrow \infty$, s t puramud muutub koonuseks. Kuna sel juhul $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \rightarrow \frac{\pi}{n}$, siis piirkoormus

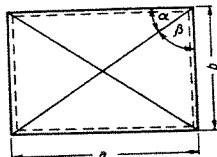
$$P_p = 2\pi M_p \quad (f)$$

Nagu näeme, koondatud jõu puhul piirkoormus plaadi mõõtmete absoluutselt suurusest ei sõltu.

Ristkülikulisel keskei koormatud plaadil, mille külgede pikkused a ja b teineteisest palju ei erine (joon 15 17), $\operatorname{ctg} \alpha = a/b$ ning $\operatorname{ctg} \beta = b/a$. Vastavalt avaldisele (15 37) on piirkoormuseks

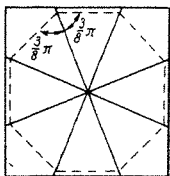
$$P_p = 4M_p \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad (g)$$

Kui külgede pikkused erinevad teineteisest tunduvalt, siis annab minimaalse koormuse eelkirjeldatust erinev purunemispilt (vt joon 15 20) ja avaldis (g) enam ei kehti.

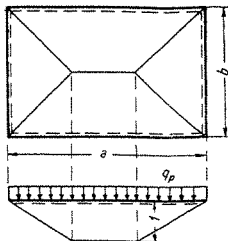


JOON 15 17

Kui plaadi nurkadel on võimalus üles tõusta, on minimaalse koormusele vastav purunemispilt eelkirjeldatust erinev, ja purustav koormus kujuneb väiksemaks. Näiteks ruudukujuline plaat puruneb sel juhul nii nagu kaheksanurkne plaat, mille tipud ei saa üles tõusta (joon. 15.18). Piirkoormuse leiame, võttes avaldises (15.38) $n = 8$. Saame, et sel juhul $P_p = 6,63M_p$.



JOON. 15.18



JOON. 15.19

Ristkülikulise ühtlase koormusega q koormatud plaadi purunemispilt on katusekujuline (joon. 15.19).

Oletame, et joonliigendid moodustavad nurkades plaadi servadega 45° nurgad. Arvestades, et koormuse poolt sooritatud töö võrdub koormuse ja moodustunud «katuse» ruumala korrutisega, saame:

$$\frac{q_p b}{6} (3a - b) - M_p \left(8 + 2 \frac{a - b}{b} \right) = 0$$

kust

$$q_p = \frac{12M_p}{b^2} \frac{a/b + 3}{3a/b - 1} \quad (h)$$

Tegelik piirkoormus on sellest veidi väiksem, kuna minimaalne koormus saadakse 45° -st erinevate nurkade korral.

Umarplaat puruneb ka jaotatud koormuse all kooniliselt. Asendades avaldises (f) koondatud jõu ja ühiksiirde korrutise jaotatud koormuse ja koonuse ruumala korrutisega, saame:

$$q_p = \frac{6M_p}{r^2} \quad (i)$$

kus r on plaadi raadius.

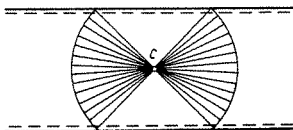
Järgalt kinnitatud plaatide puhul tekivad joonliigendid ka plaadi servadel ja sisejõudude töö leidmisel tuleb arvestada ka neis liigendis mõjuvate piirmomentide tööd. Nii näiteks saame keskel rakendatud jõuga koormatud järgalt kinnitatud ruutplaadi piirkoormuseks [vt. avaldis (e)]

$$P_p = 8M_p + 4a \frac{1}{a/2} M_p' = 8(M_p + M_p') \quad (k)$$

kus M_p' on negatiivsele paindemomendile vastav piirmoment. Keskel asuva koormatud jõuga koormatud ümarplaadi piirkoormuse saame analoogiliselt, lisades avaldisse (f) kontuuril asuva liigendi töö:

$$P_p = 2\pi M_p + 2\pi r \frac{1}{r} M_p' = 2\pi(M_p + M_p') \quad (m)$$

Seega nii ühel kui ka teisel juhul on järgalt kinnitatud plaadi piirkoormus kaks korda suurem kui vastava vabalt toetatud plaadi piirkoormus, kui piirvastupanumomendid M_p ja M_p' on võrdsed.



JOON. 15 20

Nagu toodud näidetest selgub, on plaatide piirkoormuse leidmine küllaltki lihtne. Kõige raskemaks osutub säärase liigendite asendi leidmine, mis annab minimaalse koormuse. Näitena keerulisema liigendite süsteemi kohta toome vabalt toetatud pika plaadi, mis on koormatud koormatud jõuga punktis C , mis asub servadest võrdsele kaugusel (joon. 15.20). Minimaalse koormuse annab purunemispilt, mis koosneb kahest tasapinnast ja kahest koonilise pinna osast. Piirkoormuse leiame lahenditest (e) ja (k):

$$P_p = 4M_p + \pi(M_p + M_p') \quad (n)$$

LISA I
Tabel I.1

Puzõrevski funktsioonid
Andmed pärinevad õpikust [16]

αx	$V_0(\alpha x)$	$\sqrt{2}V_1(\alpha x)$	$V_2(\alpha x)$	$\sqrt{2}V_3(\alpha x)$
0	1	0	0	0
0,01	1,0000	0,0200	0,0001	0,00000
0,02	1,0000	0,0400	0,0004	0,00000
0,03	1,0000	0,0600	0,0009	0,00002
0,04	1,0000	0,0800	0,0016	0,00004
0,05	1,0000	0,1000	0,0025	0,00009
0,06	1,0000	0,1200	0,0036	0,0002
0,07	1,0000	0,1400	0,0049	0,0003
0,08	1,0000	0,1600	0,0064	0,0004
0,09	1,0000	0,1800	0,0081	0,0005
0,10	1,0000	0,2000	0,0100	0,0006
0,15	0,9999	0,3000	0,0225	0,0022
0,20	0,9997	0,4000	0,0400	0,0054
0,25	0,9993	0,5000	0,0625	0,0104
0,30	0,9987	0,5998	0,0900	0,0180
0,35	0,9975	0,6996	0,1225	0,0286
0,40	0,9957	0,7993	0,1600	0,0427
0,45	0,9932	0,8988	0,2024	0,0608
0,50	0,9895	0,9979	0,2498	0,0833
0,55	0,9847	1,0967	0,3022	0,1109
0,60	0,9784	1,1949	0,3595	0,1439
0,65	0,9703	1,2923	0,4217	0,1829
0,70	0,9600	1,3888	0,4887	0,2284
0,75	0,9473	1,4842	0,5605	0,2808
0,80	0,9318	1,5782	0,6371	0,3406
0,85	0,9131	1,6704	0,7183	0,4084
0,90	0,8931	1,7607	0,8041	0,4845
0,95	0,8645	1,8484	0,8943	0,5694
1,00	0,8337	1,9335	0,9889	0,6635
1,05	0,7930	2,0151	1,0876	0,7673

Tabel I.1 (järg)

ax	$V_0(ax)$	$\sqrt{2}V_1(ax)$	$V_2(ax)$	$\sqrt{2}V_3(ax)$
1,10	0,7568	2,0929	1,1903	0,8811
1,15	0,7097	2,1662	1,2968	1,0054
1,20	0,6561	2,2346	1,4069	1,1406
1,25	0,5955	2,2971	1,5202	1,2870
1,30	0,5272	2,3534	1,6365	1,4448
1,35	0,4508	2,4024	1,7554	1,6144
1,40	0,3656	2,4433	1,8766	1,7959
1,45	0,2710	2,4751	1,9996	1,9897
1,50	0,1664	2,4971	2,1239	2,1959
1,55	0,0512	2,5081	2,2491	2,4145
1,60	-0,0753	2,5070	2,3745	2,6458
1,65	-0,2136	2,4927	2,4996	2,8895
1,70	-0,3644	2,4643	2,6236	3,1451
1,75	-0,5284	2,4193	2,7457	3,4141
1,80	-0,7060	2,3577	2,8652	3,6947
1,85	-0,8980	2,2777	2,9812	3,9871
1,90	-1,1049	2,1776	3,0927	4,2908
1,95	-1,3273	2,0562	3,1986	4,6054
2,00	-1,5656	1,9115	3,2979	4,9301
2,05	-1,8205	1,7425	3,3893	5,2647
2,10	-2,0923	1,5470	3,4717	5,6078
2,15	-2,3814	1,3235	3,5436	5,9587
2,20	-2,6882	1,0702	3,6036	6,3162
2,25	-3,0131	0,7852	3,6501	6,6790
2,30	-3,3562	0,4669	3,6815	7,0457
2,35	-3,7177	0,1134	3,6962	7,4146
2,40	-4,0976	-0,2772	3,6922	7,7842
2,45	-4,4961	-0,7068	3,6678	8,1524
2,50	-4,9128	-1,1770	3,6209	8,5170
2,55	-5,3477	-1,6900	3,5494	8,8758
2,60	-5,8003	-2,2472	3,4511	9,2260
2,65	-6,2701	-2,8506	3,3239	9,5650
2,70	-6,7565	-3,5018	3,1653	9,8898
2,75	-7,2588	-4,2024	2,9729	10,197
2,80	-7,7759	-4,9540	2,7442	10,483
2,85	-8,3067	-5,7580	2,4766	10,745
2,90	-8,8471	-6,6158	2,1675	10,977
2,95	-9,4039	-7,5184	1,8141	11,177
3,00	-9,9673	-8,4982	1,4125	11,338
3,05	-10,537	-9,532	0,9653	11,463

Tabel I.1 (järg)

αx	$V_0(\alpha x)$	$\sqrt{2}V_1(\alpha x)$	$V_2(\alpha x)$	$\sqrt{2}V_3(\alpha x)$
3,10	-11,112	-10,604	0,4608	11,531
3,15	-11,689	-11,795	-0,0982	11,599
3,20	-12,266	-12,942	-0,7152	11,508
3,25	-12,839	-14,198	-1,3932	11,403
3,30	-13,405	-15,510	-2,1356	11,227
3,35	-13,960	-16,878	-2,9450	10,974
3,40	-14,501	-18,301	-3,8242	10,636
3,45	-15,022	-19,778	-4,7760	10,206
3,50	-15,520	-21,305	-5,8028	9,678
3,55	-15,988	-22,881	-6,9074	9,043
3,60	-16,422	-24,501	-8,0917	8,294
3,65	-16,815	-26,164	-9,3582	7,422
3,70	-17,162	-27,863	-10,709	6,419
3,75	-17,455	-29,594	-12,145	5,277
3,80	-17,687	-31,352	-13,669	3,987
3,85	-17,851	-33,130	-15,281	2,541
3,90	-17,939	-34,920	-16,982	0,928
3,95	-17,941	-36,714	-18,773	-0,859
4,00	-17,850	-38,505	-20,653	-2,829
4,05	-17,655	-40,281	-22,623	-4,992
4,10	-17,347	-42,032	-24,681	-7,357
4,15	-16,916	-43,746	-26,825	-9,931
4,20	-16,350	-45,411	-29,055	-12,725
4,25	-15,640	-47,012	-31,365	-15,745
4,30	-14,772	-48,534	-33,755	-19,000
4,40	-12,532	-51,285	-38,744	-26,227
4,45	-11,127	-52,415	-41,342	-30,207
4,50	-9,489	-53,489	-43,992	-34,516
4,55	-7,651	-54,348	-46,688	-39,049
4,60	-5,579	-55,011	-49,423	-43,855
4,65	-3,261	-55,455	-52,186	-48,935
4,70	-0,681	-55,660	-54,965	-54,298
4,75	2,173	-55,583	-57,747	-59,928
4,80	5,316	-55,210	-60,518	-65,842
4,85	8,762	-54,509	-63,263	-72,032
4,90	12,524	-53,448	-65,963	-78,493
4,95	16,616	-51,993	-68,600	-85,221
5,00	21,050	-50,113	-71,155	-92,210

Kustuvad funktsioonid
Andmed pärinevad õpikust [16]

αx	$\eta_0(\alpha x)$	$\eta_1(\alpha x)$	$\eta_2(\alpha x)$	$\eta_3(\alpha x)$
0	1	1	0	1
0,05	0,9501	0,9025	0,0476	0,9976
0,10	0,9003	0,8100	0,0903	0,9906
0,15	0,8510	0,7224	0,1286	0,9796
0,20	0,8024	0,6398	0,1627	0,9651
0,25	0,7546	0,5619	0,1927	0,9472
0,30	0,7078	0,4888	0,2189	0,9267
0,35	0,6620	0,4204	0,2416	0,9036
0,40	0,6174	0,3564	0,2610	0,8784
0,45	0,5742	0,2968	0,2774	0,8515
0,50	0,5323	0,2414	0,2908	0,8231
0,55	0,4918	0,1902	0,3016	0,7934
0,60	0,4529	0,1430	0,3099	0,7628
0,65	0,4156	0,0996	0,3160	0,7315
0,70	0,3798	0,0599	0,3199	0,6997
0,75	0,3456	0,0237	0,3220	0,6676
0,80	0,3131	-0,0093	0,3223	0,6353
0,85	0,2821	-0,0391	0,3211	0,6032
0,90	0,2527	-0,0658	0,3185	0,5712
0,95	0,2250	-0,0896	0,3146	0,5396
1,00	0,1987	-0,1109	0,3096	0,5083
1,10	0,1509	-0,1458	0,2967	0,4476
1,20	0,1091	-0,1716	0,2807	0,3898
1,30	0,0729	-0,1897	0,2626	0,3355
1,40	0,0419	-0,2011	0,2430	0,2849
1,50	0,0158	-0,2068	0,2226	0,2384
1,60	-0,0058	-0,2077	0,2018	0,1960
1,70	-0,0236	-0,2046	0,1812	0,1576
1,80	-0,0376	-0,1985	0,1610	0,1234
1,90	-0,0484	-0,1899	0,1415	0,0932
2,00	-0,0563	-0,1793	0,1230	0,0667
2,10	-0,0619	-0,1676	0,1057	0,0438
2,20	-0,0652	-0,1547	0,0895	0,0244
2,30	-0,0668	-0,1416	0,0748	0,0080
2,40	-0,0669	-0,1282	0,0613	-0,0056
2,50	-0,0658	-0,1149	0,0492	-0,0166
2,60	-0,0637	-0,1020	0,0383	-0,0254
2,70	-0,0608	-0,0895	0,0287	-0,0320
2,80	-0,0573	-0,0777	0,0204	-0,0369
2,90	-0,0534	-0,0666	0,0132	-0,0403

Tabel I.2 (j ärg)

αx	$\eta_0(\alpha x)$	$\eta_1(\alpha x)$	$\eta_2(\alpha x)$	$\eta_3(\alpha x)$
3,00	-0,0493	-0,0563	0,0071	-0,0423
3,10	-0,0450	-0,0469	0,0019	-0,0431
3,20	-0,0407	-0,0383	-0,0024	-0,0431
3,30	-0,0365	-0,0306	-0,0058	-0,0422
3,40	-0,0323	-0,0238	-0,0085	-0,0408
3,50	-0,0283	-0,0177	-0,0106	-0,0388
3,60	-0,0245	-0,0124	-0,0121	-0,0366
3,70	-0,0210	-0,0079	-0,0131	-0,0341
3,80	-0,0177	-0,0040	-0,0137	-0,0314
3,90	-0,0147	-0,0008	-0,0140	-0,0286
4,00	-0,0120	0,0019	-0,0139	-0,0258
4,20	-0,0074	0,0057	-0,0131	-0,0204
4,40	-0,0038	0,0079	-0,0117	-0,0155
4,60	-0,0012	0,0089	-0,0100	-0,0111
4,80	-0,0007	0,0089	-0,0082	-0,0075
5,00	-0,0019	0,0084	-0,0065	-0,0046

Pikipõikpaine parandustegurid
Andmed pärinevad õpikust [11]

ν	$\alpha^*(\nu)$	$\beta^*(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	1,0027	1,0042	1,0163	1,0065	1,0178
0,40	1,0107	1,0188	1,0683	1,0252	1,0768
0,60	1,0249	1,0437	1,1686	1,0622	1,1901
0,80	1,0455	1,0800	1,3456	1,1256	1,3900
1,00	1,0737	1,1304	1,6722	1,2395	1,7605
1,10	1,0912	1,1617	1,9491	1,3344	2,0750
1,20	1,1114	1,1979	2,3822	1,4806	2,5677
1,30	1,1345	1,2396	3,1435	1,7342	3,4347
1,40	1,1610	1,2878	4,8082	2,2832	5,3332
1,50	1,1915	1,3534	11,2013	4,3740	12,6292
$\pi/2$	1,2159	1,3880	∞	∞	∞
1,60	1,2266	1,4078	-26,2445	-7,8214	-30,1204
1,70	1,2673	1,4830	-5,7378	-1,1299	-6,7141
1,80	1,3147	1,5710	-3,1308	-0,8271	-3,7410
1,90	1,3704	1,6750	-2,1133	-0,0701	-2,5805
2,00	1,4365	1,7993	-1,5694	0,2575	-1,9658
2,02	1,4512	1,8270	-1,4903	0,2858	-1,8762
2,04	1,4664	1,8558	-1,4179	0,3115	-1,7044
2,06	1,4822	1,8858	-1,3516	0,3355	-1,7196
2,08	1,4987	1,9168	-1,2905	0,3579	-1,6506
2,10	1,5158	1,9494	-1,2342	0,3788	-1,5872
2,12	1,5336	1,9831	-1,1820	0,3983	-1,5286
2,14	1,5521	2,0184	-1,1335	0,4166	-1,4741
2,16	1,5713	2,0552	-1,0884	0,4339	-1,4235
2,18	1,5914	2,0935	-1,0464	0,4503	-1,3764
2,20	1,6124	2,1336	-1,0069	0,4659	-1,3323
2,22	1,6343	2,1754	-0,9700	0,4807	-1,2911
2,24	1,6572	2,2194	-0,9354	0,4948	-1,2527
2,26	1,6812	2,2654	-0,9028	0,5083	-1,2165
2,28	1,7062	2,3135	-0,8721	0,5212	-1,1824
2,30	1,7325	2,3641	-0,8431	0,5336	-1,1504
2,32	1,7601	2,4171	-0,8157	0,5456	-1,1202
2,34	1,7891	2,4731	-0,7897	0,5572	-1,0917
2,36	1,8195	2,5320	-0,7651	0,5684	-1,0649

Tabel II. 1 (järg)

v	$\alpha^*(v)$	$\beta^*(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$
2,38	1,8516	2,5939	-0,7418	0,5792	-1,0394
2,40	1,8854	2,6596	-0,7196	0,5897	-1,0151
2,42	1,9212	2,7287	-0,6985	0,5999	-0,9921
2,44	1,9589	2,8021	-0,6784	0,6098	-0,9703
2,46	1,9989	2,8798	-0,6592	0,6195	-0,9497
2,48	2,0413	2,9624	-0,6409	0,6291	-0,9301
2,50	2,0864	3,0502	-0,6234	0,6385	-0,9114
2,52	2,1343	3,1438	-0,6067	0,6477	-0,8936
2,54	2,1855	3,2437	-0,5907	0,6566	-0,8767
2,56	2,2402	3,3508	-0,5753	0,6654	-0,8606
2,58	2,2988	3,4657	-0,5606	0,6742	-0,8451
2,60	2,3618	3,5890	-0,5465	0,6828	-0,8304
2,62	2,4295	3,7220	-0,5329	0,6913	-0,8164
2,64	2,5027	3,8659	-0,5199	0,6997	-0,8030
2,66	2,5819	4,0218	-0,5073	0,7081	-0,7902
2,68	2,6680	4,1914	-0,4952	0,7164	-0,7780
2,70	2,7619	4,3766	-0,4836	0,7246	-0,7663
2,72	2,8646	4,5795	-0,4723	0,7328	-0,7551
2,74	2,9778	4,8029	-0,4615	0,7410	-0,7444
2,76	3,1027	5,0499	-0,4511	0,7491	-0,7342
2,78	3,2414	5,3245	-0,4410	0,7573	-0,7244
2,80	3,3963	5,6315	-0,4313	0,7654	-0,7151
2,82	3,5704	5,9770	-0,4218	0,7736	-0,7062
2,84	3,7676	6,3685	-0,4127	0,7817	-0,6976
2,86	3,9928	6,8160	-0,4039	0,7898	-0,6894
2,88	4,2525	7,3322	-0,3953	0,7980	-0,6816
2,90	4,5550	7,9343	-0,3870	0,8063	-0,6742
2,92	4,9121	8,6455	-0,3790	0,8146	-0,6670
2,94	5,3401	9,4982	-0,3712	0,8229	-0,6603
2,96	5,8622	10,5383	-0,3636	0,8313	-0,6538
2,98	6,5134	11,8386	-0,3563	0,8398	-0,6476
3,00	7,3486	13,5057	-0,3492	0,8483	-0,6417
3,02	8,4583	15,7219	-0,3422	0,8569	-0,6361
3,04	10,0049	18,8116	-0,3355	0,8657	-0,6308
3,06	12,3096	23,4176	-0,3289	0,8746	-0,6258
3,08	16,1105	31,0160	-0,3227	0,8835	-0,6210
3,10	23,5659	45,9234	-0,3165	0,8926	-0,6165
3,12	44,8321	88,4522	-0,3103	0,9018	-0,6122

Tabel II. 1 (jārg)

ν	$\alpha^*(\nu)$	$\beta'(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
3,14	600,1900	1199,1629	-0,3044	0,9111	-0,6082
π	∞	∞	-0,3040	0,9119	-0,6079
3,16	-51,2692	-103,7576	-0,2987	0,9206	-0,6045
3,18	-24,2541	-49,7313	-0,2931	0,9303	-0,6009
3,20	-15,7398	-32,7063	-0,2876	0,9401	-0,5976
3,22	-11,5688	-24,3683	-0,2823	0,9501	-0,5946
3,24	-9,0929	-19,4202	-0,2771	0,9602	-0,5917
3,26	-7,4532	-16,1447	-0,2720	0,9705	-0,5891
3,28	-6,2872	-17,8166	-0,2670	0,9811	-0,5868
3,30	-5,4154	-12,0770	-0,2621	0,9920	-0,5846
3,32	-4,7371	-10,7282	-0,2574	1,0031	-0,5826
3,34	-4,1964	-9,6516	-0,2527	1,0143	-0,5809
3,36	-3,7552	-8,7726	-0,2482	1,0258	-0,5795
3,38	-3,3887	-8,0419	-0,2437	1,0377	-0,5783
3,40	-3,0787	-7,4248	-0,2394	1,0499	-0,5772
3,42	-2,8129	-6,8968	-0,2351	1,0623	-0,5764
3,44	-2,5820	-6,4396	-0,2308	1,0750	-0,5758
3,46	-2,3798	-6,0405	-0,2267	1,0880	-0,5755
3,48	-2,2017	-5,6888	-0,2227	1,1014	-0,5753
3,50	-2,0433	-5,3769	-0,2187	1,1152	-0,5751
3,52	-1,9015	-5,0081	-0,2148	1,1294	-0,5757
3,54	-1,7737	-4,8477	-0,2109	1,1440	-0,5764
3,56	-1,6581	-4,6215	-0,2071	1,1591	-0,5773
3,58	-1,5530	-4,4160	-0,2034	1,1747	-0,5783
3,60	-1,4572	-4,2292	-0,1997	1,1907	-0,5797
3,62	-1,3693	-4,0581	-0,1961	1,2073	-0,5814
3,64	-1,2882	-3,9011	-0,1926	1,2244	-0,5833
3,66	-1,2132	-3,7563	-0,1891	1,2421	-0,5855
3,68	-1,1435	-3,6227	-0,1856	1,2605	-0,5880
3,70	-1,0787	-3,4990	-0,1821	1,2795	-0,5908
3,72	-1,0184	-3,3839	-0,1787	1,2992	-0,5939
3,74	-0,9620	-3,2768	-0,1753	1,3197	-0,5974
3,76	-0,9092	-3,1769	-0,1720	1,3409	-0,6012
3,78	-0,8595	-3,0835	-0,1687	1,3630	-0,6053
3,80	-0,8128	-2,9961	-0,1654	1,3861	-0,6099
3,82	-0,7687	-2,9140	-0,1622	1,4101	-0,6149
3,84	-0,7271	-2,8369	-0,1590	1,4351	-0,6203
3,86	-0,6876	-2,7643	-0,1557	1,4613	-0,6261
3,88	-0,6502	-2,6959	-0,1525	1,4887	-0,6324
3,90	-0,6147	-2,6314	-0,1493	1,5174	-0,6392

Tabel II 1 (j arg)

ν	$\alpha^*(\nu)$	$\beta^*(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
3,92	-0,5809	-2,5703	-0,1461	1,5474	-0,6466
3,94	-0,5486	-2,5126	-0,1429	1,5789	-0,6545
3,96	-0,5178	-2,4580	-0,1397	1,6121	-0,6631
3,98	-0,4884	-2,4062	-0,1365	1,6470	-0,6723
4,00	-0,4603	-2,3570	-0,1332	1,6838	-0,6823
4,02	-0,4333	-2,3103	-0,1300	1,7227	-0,6930
4,04	-0,4074	-2,2660	-0,1267	1,7639	-0,7045
4,06	-0,3825	-2,2237	-0,1233	1,8075	-0,7169
4,08	-0,3586	-2,1836	-0,1199	1,8538	-0,7304
4,10	-0,3355	-2,1454	-0,1165	1,9030	-0,7449
4,12	-0,3133	-2,1089	-0,1130	1,9555	-0,7606
4,14	-0,2919	-2,0741	-0,1094	2,0115	-0,7775
4,16	-0,2712	-2,0410	-0,1057	2,0716	-0,7960
4,18	-0,2511	-2,0094	-0,0120	2,1362	-0,8160
4,20	-0,2317	-1,9792	-0,0981	2,2057	-0,8378
4,22	-0,2129	-1,9504	-0,0940	2,2808	-0,8615
4,24	-0,1947	-1,9229	-0,0899	2,3619	-0,8875
4,26	-0,1769	-1,8966	-0,0855	2,4505	-0,9161
4,28	-0,1597	-1,8715	-0,0809	2,5471	-0,9475
4,30	-0,1430	-1,8475	-0,0760	2,6529	-0,9821
4,32	-0,1267	-1,8246	-0,0708	2,7694	-1,0206
4,34	-0,1107	-1,8028	-0,0653	2,8983	-1,0634
4,36	-0,0952	-1,7819	-0,0594	3,0417	-1,1114
4,38	-0,0799	-1,7619	-0,0529	3,2026	-1,1653
4,40	-0,0652	-1,7429	-0,0459	3,3836	-1,2265
4,42	-0,0508	-1,7247	-0,0381	3,5893	-1,2963
4,44	-0,0366	-1,7074	-0,0295	3,8251	-1,3767
4,46	-0,0227	-1,6909	-0,0197	4,0982	-1,4701
4,48	-0,0090	-1,6752	-0,0085	4,4179	-1,5800
4,50	+0,0044	-1,6603	+0,0045	4,7980	-1,7110
4,52	0,0176	-1,6461	0,0199	5,2568	-1,8695
4,54	0,0305	-1,6326	0,0386	5,8218	-2,0652
4,56	0,0432	-1,6198	0,0617	6,5351	-2,3129
4,58	0,0558	-1,6076	0,0915	7,4633	-2,6359
4,60	0,0682	-1,5962	0,1314	8,7218	-3,0745
4,62	0,0804	-1,5854	0,1878	10,5224	-3,7036
4,64	0,0925	-1,5752	0,2748	13,3219	-4,6812
4,66	0,1044	-1,5656	0,4272	18,2566	-6,4065
4,68	0,1162	-1,5567	0,7664	29,2848	-10,2671
4,70	0,1279	-1,5483	2,1964	75,9101	-26,5889

Tabel II. I (j ä r g)

ν	$\alpha^*(\nu)$	$\beta^*(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
1,5 π	0,1351	-1,5434	∞	∞	∞
4,72	0,1395	-1,5405	-3,8833	-122,3641	+42,8875
4,74	0,1510	-1,5333	-1,1534	-33,4764	11,7120
4,76	0,1624	-1,5267	-0,7162	-19,2440	6,7321
4,78	0,1738	-1,5207	-0,5370	-13,4298	4,6983
4,80	0,1851	-1,5152	-0,4390	-10,2705	+3,5933
4,82	0,1964	-1,5103	-0,3771	-8,2851	2,9006
4,84	0,2076	-1,5060	-0,7343	-6,9219	2,4251
4,86	0,2188	-1,5022	-0,3028	-5,9272	2,0786
4,88	0,2300	-1,4989	-0,2785	-5,1700	1,8154
4,90	0,2412	-1,4963	-0,2593	-4,5743	1,6085
4,92	0,2524	-1,4941	-0,2435	-4,0927	1,4417
4,94	0,2636	-1,4926	-0,2303	-3,6959	1,3045
4,96	0,2748	-1,4916	-0,2192	-3,3629	1,1896
4,98	0,2861	-1,4912	-0,2096	-3,0797	1,0921
5,00	0,2975	-1,4914	-0,2011	-2,8355	1,0083
5,02	0,3089	-1,4922	-0,1937	-2,6231	0,9356
5,04	0,3204	-1,4936	-0,1872	-2,4350	0,8725
5,06	0,3320	-1,4954	-0,1811	-2,2694	0,8157
5,08	0,3437	-1,4981	-0,1757	-2,1235	0,7658
5,10	0,3555	-1,5014	-0,1707	-1,9912	0,7211
5,12	0,3674	-1,5053	-0,1662	-1,8719	0,6809
5,14	0,3795	-1,5099	-0,1620	-1,7632	0,6446
5,16	0,3918	-1,5152	-0,1581	-1,6644	0,6116
5,18	0,4042	-1,5212	-0,1545	-1,5740	0,5816
5,20	0,4169	-1,5280	-0,1512	-1,4908	0,5541
5,22	0,4298	-1,5355	-0,1480	-1,4141	0,5288
5,24	0,4429	-1,5438	-0,1450	-1,3431	0,5056
5,26	0,4562	-1,5529	-0,1422	-1,2771	0,4841
5,28	0,4698	-1,5629	-0,1396	-1,2158	0,4642
5,30	0,4838	-1,5738	-0,1370	-1,1585	0,4458
5,32	0,4981	-1,5857	-0,1346	-1,1049	0,4286
5,34	0,5128	-1,5986	-0,1324	-1,0547	0,4126
5,36	0,5278	-1,6124	-0,1302	-1,0074	0,3977
5,38	0,5433	-1,6274	-0,1281	-0,9629	0,3837
5,40	0,5592	-1,6436	-0,1261	-0,9209	0,3706
5,42	0,5756	-1,6610	-0,1242	-0,8812	0,3583
5,44	0,5925	-1,6797	-0,1223	-0,8436	0,3467
5,46	0,6100	-1,6998	-0,1205	-0,8079	0,3358
5,48	0,6282	-1,7214	-0,1188	-0,7740	0,3255

Tabel II 1 (jarg)

ν	$\alpha^*(\nu)$	$\beta^*(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
5,50	0,6470	-1,7446	-0,1171	-0,7417	0,3158
5,52	0,6666	-1,7694	-0,1155	-0,7110	0,3066
5,54	0,6870	-1,7961	-0,1139	-0,6816	0,2979
5,56	0,7083	-1,8248	-0,1124	-0,6535	0,2897
5,58	0,7305	-1,8555	-0,1110	-0,6267	0,2819
5,60	0,7538	-1,8886	-0,1096	-0,6010	0,2745
5,62	0,7783	-1,9242	-0,1082	-0,5763	0,2675
5,64	0,8040	-1,9624	-0,1068	-0,5526	0,2608
5,66	0,8311	-2,0037	-0,1055	-0,5298	0,2544
5,68	0,8597	-2,0481	-0,1042	-0,5079	0,2484
5,70	0,8901	-2,0961	-0,1030	-0,4868	0,2426
5,72	0,9224	-2,1481	-0,1018	-0,4664	0,2371
5,74	0,9567	-2,2045	-0,1006	-0,4468	0,2319
5,76	0,9934	-2,2657	-0,0994	-0,4278	0,2269
5,78	1,0327	-2,3323	-0,0983	-0,4095	0,2221
5,80	1,0750	-2,4050	-0,0972	-0,3917	0,2176
5,82	1,1207	-2,4845	-0,0961	-0,3745	0,2132
5,84	1,1702	-2,5718	-0,0951	-0,3578	0,2090
5,86	1,2240	-2,6679	-0,0941	-0,3416	0,2051
5,88	1,2829	-2,7743	-0,0931	-0,3258	0,2012
5,90	1,3476	-2,8924	-0,0921	-0,3105	0,1976
5,92	1,4190	-3,0241	-0,0911	-0,2956	0,1942
5,94	1,4984	-3,1719	-0,0901	-0,2812	0,1908
5,96	1,5873	-3,3387	-0,0892	-0,2670	0,1876
5,98	1,6870	-3,5284	-0,0883	-0,2532	0,1846
6,00	1,8015	-3,7455	-0,0874	-0,2398	0,1817
6,02	1,9323	-3,9966	-0,0865	-0,2267	0,1789
6,04	2,0842	-4,2902	-0,0856	-0,2138	0,1762
6,06	2,2628	-4,6366	-0,0847	-0,2013	0,1736
6,08	2,4760	-5,0527	-0,0839	-0,1890	0,1712
6,10	2,7289	-5,5609	-0,0831	-0,1769	0,1689
6,12	3,0573	-6,1949	-0,0823	-0,1651	0,1666
6,14	3,4686	-7,0071	-0,0815	-0,1535	0,1645
6,16	4,0126	-8,0854	-0,0807	-0,1422	0,1625
6,18	4,7665	-9,5830	-0,0799	-0,1310	0,1606
6,20	5,8812	-11,8030	-0,0791	-0,1200	0,1588
6,22	7,7007	-15,4327	-0,0783	-0,1092	0,1570
6,24	11,2034	-22,4274	-0,0776	-0,0985	0,1552
6,26	20,7419	-41,5016	-0,0768	-0,0880	0,1537
6,28	149,828	-299,6568	-0,0761	-0,0776	0,1522
2 π	∞	∞	-0,0760	-0,0760	0,1520

Tabel II.2

Pikipõikpaine parandustegurid
Andmed parinevad õpikust [6]

v	$f_0(v)$	$f_1(v)$	$\varphi_0(v)$	$g_1(v)$	$\chi(v)$
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,0	0,908	0,976	0,905	0,972	0,984
2,0	0,711	0,909	0,704	0,894	0,939
3,0	0,532	0,817	0,511	0,788	0,876
4,0	0,380	0,715	0,367	0,673	0,806
5,0	0,281	0,617	0,268	0,563	0,736
6,0	0,213	0,529	0,200	0,467	0,672
7,0	0,166	0,453	0,153	0,386	0,614
8,0	0,132	0,388	0,120	0,320	0,563
9,0	0,107	0,335	0,097	0,267	0,519
10,0	0,088	0,291	0,079	0,224	0,480
11,0	0,074	0,254	0,066	0,189	0,446
12,0	0,063	0,223	0,055	0,162	0,417
13,0	0,054	0,197	0,047	0,139	0,391
14,0	0,047	0,175	0,041	0,121	0,367
15,0	0,041	0,156	0,036	0,106	0,347
16,0	0,036	0,141	0,031	0,093	0,328
17,0	0,032	0,127	0,028	0,083	0,311
18,0	0,029	0,115	0,025	0,074	0,296
19,0	0,026	0,105	0,022	0,066	0,283
20,0	0,024	0,096	0,020	0,060	0,270
21,0	0,021	0,088	0,018	0,054	0,259
22,0	0,020	0,081	0,017	0,050	0,248
23,0	0,018	0,075	0,015	0,045	0,238
24,0	0,016	0,069	0,014	0,042	0,229

Markus Tabelis esinevad andmed funktsioonidele $\psi_0(v)$, $\alpha(v)$ ja $\beta(v)$, kuna $\psi_0(v) = f_1(2v)$, $\alpha(v) = \chi(2v)$ ja $\beta(v) = g_1(v)$

Tabel II 3

Pikipõikpaine parandustegurid
Andmed parinevad õpikust [16]

v	$g_1^*(v)$	$\chi^*(v)$	$f_1^*(v)$	v	$g_1^*(v)$	$\chi^*(v)$	$f_1^*(v)$
0,0	1,000	1,000	1,000	4,80	2,6595	1,8854	2,3822
1,0	1,0300	1,0171	1,0256	4,90	2,8404	1,9786	2,5307
2,0	1,1304	1,0737	1,1113	5,00	3,0502	2,0864	2,7027
2,2	1,1617	1,0912	1,1379	5,10	3,2964	2,2124	2,9043
2,4	1,1979	1,1114	1,1686	5,20	3,5890	2,3617	3,1435
2,6	1,2396	1,1345	1,2039	5,30	3,9422	2,5415	3,4320
2,8	1,2878	1,1610	1,2445	5,40	4,3766	2,7619	3,7863
3,0	1,3434	1,1915	1,2914	5,50	4,9233	3,0386	4,2317
3,20	1,4078	1,2266	1,3455	5,60	5,6315	3,3964	4,8082
3,40	1,4830	1,2673	1,4085	5,70	6,5865	3,8774	5,5852
3,60	1,5710	1,3147	1,4821	5,80	7,9343	4,5550	6,6798
3,80	1,6750	1,3704	1,5689	5,90	9,9915	5,5875	8,3503
4,00	1,7993	1,4365	1,6722	6,00	13,506	7,3686	11,201
4,20	1,9494	1,5157	1,7967	6,10	20,863	11,031	17,168
4,40	2,1336	1,6124	1,9492	6,20	45,923	23,566	37,484
4,60	2,3641	1,7325	2,1392	2 π	∞	∞	∞

Markus Tabelis puuduvad andmed funktsioonidele $\psi_0^*(v)$, $\alpha^*(v)$ ja $\beta^*(v)$, kuna $\psi_0^*(v) = f^*(2v)$, $\alpha^*(v) = \chi^*(2v)$ ja $\beta^*(v) = g_1^*(2v)$ $\alpha^*(v)$ ja $\beta^*(v)$ kohta on esitatud ulatuslikumad andmed tabelis II 1

Tabel II 4

Pikipõikpaine parandustegurid
Andmed parinevad õpikust [16]

v	0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60
$\varphi_0^*(v)$	1,000	1,004	1,016	1,038	1,073	1,117	1,176	1,255	1,361
$f_0^*(v)$	1,000	1,004	1,016	1,037	1,040	1,114	1,173	1,250	1,354
v	1,80	2,00	2,20	2,40	2,60	2,80	2,90	3,00	π
$\varphi_0^*(v)$	1,504	1,704	1,989	2,441	3,240	4,938	6,940	11,670	∞
$f_0^*(v)$	1,494	1,690	1,962	2,400	3,181	4,822	6,790	11,490	∞

Tabel II.5

Pikipõikpaine parandustegurid
 Andmed pärinevad õpikust [16]

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	0,9973	0,9986	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,60	0,9756	0,9881	1,0061	0,9941	0,8556	0,9641
0,80	0,9567	0,9787	1,0111	0,9895	0,7434	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8790
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1,30	0,8814	0,9424	1,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9581	0,0000	0,7525
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	-0,0380	0,7434
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9510	-0,1742	0,7102
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	-0,3191	0,6749
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	-0,4736	0,6375
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	-0,6710	0,5899
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817
2,06	0,6747	0,8499	1,0613	0,9277	-0,7398	0,5734
2,08	0,6672	0,8468	1,0831	0,9255	-0,7749	0,5650
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9260	-0,8103	0,5565
2,12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	-0,8465	0,5480
2,14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	-0,8822	0,5394
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307
2,18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	-0,9557	0,5220
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	-1,0309	0,5041
2,24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	-1,0691	0,4951
2,26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	-1,1077	0,4860
2,28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	-1,1457	0,4768
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	-1,2260	0,4581
2,34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	-1,2663	0,4486
2,36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	-1,3069	0,4391
2,38	0,5401	0,7952	1,1140	0,9015	-1,3480	0,4295
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8991	-1,4316	0,4101
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	-1,4743	0,4002
2,46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	-1,5169	0,3902

Tabel II 5 (j arg)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5602	0,3802
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6383	0,3598
2,54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	-1,6929	0,3495
2,56	0,4464	0,7596	1,1363	0,8852	-1,7381	0,3391
2,58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	-1,7838	0,3286
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	-1,8765	0,3075
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968
2,66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	-1,9712	0,2860
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0193	0,2751
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	-2,1170	0,2531
2,74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8676	-2,1667	0,2420
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	-2,2169	0,2307
2,78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	-2,2676	0,2192
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	-2,3707	0,1968
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	-2,4231	0,1850
2,86	0,2505	0,6918	1,1810	0,8550	-2,4760	0,1734
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8528	-2,5296	0,1616
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
2,92	0,2036	0,6768	1,1913	0,8484	-2,6385	0,1379
2,94	0,1878	0,6717	1,1948	0,8462	-2,6939	0,1261
2,96	0,1706	0,6665	1,1984	0,8439	-2,7499	0,1138
2,98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	-2,8066	0,1016
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,02	0,1182	0,6506	1,2095	0,8370	-2,9219	0,0770
3,04	0,1000	0,6452	1,2133	0,8347	-2,9805	0,0646
3,06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	-3,0400	0,0520
3,08	0,0621	0,6343	1,2212	0,8299	-3,0991	0,0394
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0267
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	-3,2225	0,0139
3,14	0,0017	0,6173	1,2334	0,8227	-3,2848	0,0011
τ	0,0000	0,6168	1,2336	0,8224	-3,2898	0,0000
3,16	-0,0195	0,6115	1,2376	0,8203	-3,3480	-0,0118
3,18	-0,0412	0,6057	1,2419	0,8178	-3,4120	-0,0249
3,20	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,22	-0,0864	0,5937	1,2507	0,8128	-3,5425	-0,0512
3,24	-0,1100	0,5876	1,2552	0,8102	-3,6092	-0,0646

Tabel II.5 (jörg)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,26	-0,1342	0,5815	1,2597	0,8076	-3,6767	-0,0780
3,28	-0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	-3,7453	-0,0915
3,30	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,32	-0,2111	0,5628	1,2739	0,7998	-3,8852	-0,1187
3,34	-0,2383	0,5564	1,2788	0,7972	-3,9568	-0,1324
3,36	-0,2663	0,5499	1,2838	0,7945	-4,0295	-0,1463
3,38	-0,2951	0,5433	1,2889	0,7918	-4,1032	-0,1602
3,40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,42	-0,3555	0,5299	1,2992	0,7863	-4,2540	-0,1884
3,44	-0,3873	0,5231	1,3045	0,7835	-4,3318	-0,2026
3,46	-0,4202	0,5162	1,3099	0,7807	-4,4107	-0,2169
3,48	-0,4542	0,5092	1,3155	0,7779	-4,4910	-0,2313
3,50	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,52	-0,5259	0,4950	1,3270	0,7723	-4,6560	-0,2602
3,54	-0,5638	0,4878	1,3328	0,7695	-4,7410	-0,2748
3,56	-0,6031	0,4805	1,3387	0,7667	-4,8276	-0,2894
3,58	-0,6439	0,4731	1,3447	0,7638	-4,9160	-0,3042
3,60	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,62	-0,7303	0,4580	1,3571	0,7580	-5,0984	-0,3340
3,64	-0,7763	0,4503	1,3635	0,7550	-5,1928	-0,3491
3,66	-0,8243	0,4425	1,3700	0,7520	-5,2895	-0,3643
3,68	-0,8745	0,4345	1,3766	0,7483	-5,3886	-0,3797
3,70	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,72	-0,9819	0,4184	1,3903	0,7425	-5,5947	-0,4107
3,74	-1,0395	0,4102	1,3973	0,7393	-5,7020	-0,4263
3,76	-1,0999	0,4019	1,4044	0,7361	-5,8124	-0,4420
3,78	-1,1634	0,3935	1,4217	0,7329	-5,9262	-0,4578
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,82	-1,3009	0,3764	1,4267	0,7265	-6,1650	-0,4895
3,84	-1,3754	0,3677	1,4344	0,7232	-6,2906	-0,5056
3,86	-1,4543	0,3588	1,4423	0,7199	-6,4208	-0,5217
3,88	-1,5380	0,3498	1,4503	0,7166	-6,5561	-0,5379
3,90	-1,6468	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
3,92	-1,7214	0,3315	1,4667	0,7099	-6,8435	-0,5706
3,94	-1,8227	0,3221	1,4752	0,7065	-6,9972	-0,5871
3,96	-1,9310	0,3126	1,4838	0,7031	-7,1582	-0,6037
3,98	-2,0473	0,3030	1,4928	0,6996	-7,3274	-0,6204
4,00	-2,1725	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,02	-2,3074	0,2834	1,5110	0,6926	-7,6942	-0,6541
4,04	-2,4547	0,2734	1,5204	0,6891	-7,8952	-0,6710

Tabel II 5 (J arg)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,06	-2,6142	0,2632	1,5301	0,6855	-8,1087	-0,6881
4,08	-2,7888	0,2529	1,5400	0,6819	-8,3376	-0,7053
4,10	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5839	-0,7225
4,12	-3,1915	0,2318	1,5604	0,6747	-8,8496	-0,7398
4,14	-3,4262	0,2210	1,5709	0,6710	-9,1394	-0,7573
4,16	-3,6877	0,2101	1,5816	0,6673	-9,4562	-0,7749
4,18	-3,9824	0,1990	1,5925	0,6635	-9,8065	-0,7925
4,20	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,22	-4,6970	0,1762	1,6150	0,6559	-10,633	-0,8281
4,24	-5,1369	0,1646	1,6267	0,6521	-11,129	-0,8460
4,26	-5,6516	0,1528	1,6387	0,6482	-11,701	-0,8641
4,28	-6,2607	0,1409	1,6510	0,6443	-12,367	-0,8822
4,30	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,32	-7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	-14,116	-0,9188
4,34	-9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	-15,309	-0,9372
4,36	-10,503	0,0912	1,7033	0,6284	-16,840	-0,9557
4,38	-12,523	0,0781	1,7170	0,6243	-18,918	-0,9744
4,40	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-21,783	-0,9931
4,42	-19,703	0,0513	1,7452	0,6161	-26,215	-1,0119
4,44	-27,349	0,0376	1,7602	0,6119	-33,920	-1,0309
4,46	-44,148	0,0237	1,7754	0,6077	-50,779	-1,0499
4,48	-111,57	0,0096	1,7910	0,6034	-118,26	-1,0691
4,50	+227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4,52	—	-0,0194	1,8234	0,5948	—	-1,1077
4,54	—	-0,0343	1,8402	0,5905	—	-1,1271
4,56	—	-0,0495	1,8575	0,5861	—	-1,1457
4,58	—	-0,0650	1,8752	0,5817	—	-1,1662
4,60	—	-0,0807	1,8933	0,5772	—	-1,1861
4,62	—	-0,0969	1,9119	0,5727	—	-1,2060
4,64	—	-0,1133	1,9310	0,5681	—	-1,2250
4,66	—	-0,1301	1,9507	0,5635	—	-1,2461
4,68	—	-0,1472	1,9710	0,5589	—	-1,2663
4,70	—	-0,1646	1,9919	0,5543	—	-1,2865
1,5 π	—	-0,1755	2,0052	0,5514	—	-1,2992
4,72	—	-0,1824	2,0134	0,5496	—	-1,3069
4,74	—	-0,2005	2,0355	0,5449	—	-1,3274
4,76	—	-0,2190	2,0582	0,5402	—	-1,3480
4,78	—	-0,2379	2,0816	0,5354	—	-1,3586
4,80	—	-0,2572	2,1056	0,5305	—	-1,3896
4,82	—	-0,2770	2,1304	0,5255	—	-1,4105

Tabel II.5 (j ä r g)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
4,84	--	-0,2973	2,1506	0,5205	--	-1,4316
4,86	--	-0,3181	2,1824	0,5155	--	-1,4528
4,88	--	-0,3394	2,2096	0,5105	--	-1,4743
4,90	--	-0,3612	2,2377	0,5054	--	-1,4954
4,92	--	-0,3834	2,2667	0,5003	--	-1,5169
4,94	--	-0,4061	2,2966	0,4951	--	-1,5385
4,96	--	-0,4293	2,3275	0,4899	--	-1,5602
4,98	--	-0,4530	2,3594	0,4846	--	-1,5821
5,00	--	-0,4772	2,3924	0,4793	--	-1,6040
5,02	--	-0,5022	2,4266	0,4739	--	-1,6261
5,04	--	-0,5280	2,4620	0,4685	--	-1,6483
5,06	--	-0,5545	2,4986	0,4630	--	-1,6706
5,08	--	-0,5818	2,5365	0,4576	--	-1,6929
5,10	--	-0,6099	2,5757	0,4520	--	-1,7155
5,12	--	-0,6388	2,6164	0,4464	--	-1,7381
5,14	--	-0,5685	2,6587	0,4407	--	-1,7609
5,16	--	-0,6999	2,7027	0,4350	--	-1,7838
5,18	--	-0,7306	2,7485	0,4292	--	-1,8078
5,20	--	-0,7630	2,7961	0,4234	--	-1,8299
5,22	--	-0,7964	2,8454	0,4175	--	-1,8532
5,24	--	-0,8310	2,8968	0,4116	--	-1,8765
5,26	--	-0,8668	2,9504	0,4056	--	-1,9000
5,28	--	-0,9039	3,0064	0,3996	--	-1,9236
5,30	--	-0,9423	3,0648	0,3931	--	-1,9477
5,32	--	-0,9821	3,1257	0,3873	--	-1,9712
5,34	--	-1,0233	3,1893	0,3811	--	-1,9952
5,36	--	-1,0660	3,2559	0,3748	--	-2,0193
5,38	--	-1,1103	3,3267	0,3685	--	-2,0435
5,40	--	-1,1563	3,3989	0,3621	--	-2,0679
5,42	--	-1,2043	3,4757	0,3556	--	-2,0924
5,44	--	-1,2544	3,5563	0,3491	--	-2,1170
5,46	--	-1,3067	3,6409	0,3425	--	-2,1418
5,48	--	-1,3612	3,7298	0,3358	--	-2,1667
5,50	--	-1,4181	3,8234	0,3291	--	-2,1917
5,52	--	-1,4777	3,9222	0,3223	--	-2,2169
5,54	--	-1,5402	4,0267	0,3154	--	-2,2422
5,56	--	-1,6059	4,1374	0,3085	--	-2,2676
5,58	--	-1,6751	4,2549	0,3015	--	-2,2932
5,60	--	-1,7481	4,3794	0,2944	--	-2,3189
5,62	--	-1,8252	4,5118	0,2873	--	-2,3447

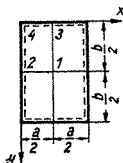
Tabel II 5 (j arg)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,64	—	-1,9065	4,6526	0,2801	—	-2,3707
5,66	—	-1,9920	4,8026	0,2727	—	-2,3969
5,68	—	-2,0833	4,9629	0,2654	—	-2,4231
5,70	—	-2,1804	5,1346	0,2580	—	-2,4495
5,72	—	-2,2833	5,3190	0,2505	—	-2,4760
5,74	—	-2,3944	5,5173	0,2429	—	-2,5027
5,76	—	-2,5130	5,7314	0,2352	—	-2,5296
5,78	—	-2,6406	5,9628	0,2374	—	-2,5466
5,80	—	-2,7777	6,2140	0,2195	—	-2,5838
5,82	—	-2,9262	6,4873	0,2116	—	-2,6111
5,84	—	-3,0876	6,7859	0,2036	—	-2,6385
5,86	—	-3,2634	7,1132	0,1955	—	-2,6661
5,88	—	-3,4562	7,4738	0,1873	—	-2,6939
5,90	—	-3,6678	7,8726	0,1790	—	-2,7218
5,92	—	-3,9018	8,3163	0,1706	—	-2,7499
5,94	—	-4,1603	8,8122	0,1621	—	-2,7782
5,96	—	-4,4547	9,3706	0,1535	—	-2,8066
5,98	—	-4,7816	10,004	0,1448	—	-2,8352
6,00	—	-5,1589	10,727	0,1361	—	-2,8639
6,02	—	-5,5845	11,561	0,1272	—	-2,8928
6,04	—	-6,0653	12,534	0,1182	—	-2,9219
6,06	—	-6,6753	13,683	0,1091	—	-2,9512
6,08	—	-7,3699	15,060	0,0999	—	-2,9805
6,10	—	-8,2355	16,739	0,0906	—	-3,0102
6,12	—	-9,2939	18,832	0,0812	—	-3,0400
6,14	—	-10,646	21,511	0,0717	—	-3,0699
6,16	—	-12,440	25,065	0,0621	—	-3,0991
6,18	—	-14,921	29,999	0,0523	—	-3,1304
6,20	—	-18,594	37,308	0,0424	—	-3,1609
6,22	—	-24,575	49,255	0,0324	—	-3,1916
6,24	—	-36,100	72,272	0,0223	—	-3,2225
6,26	—	-67,436	135,03	0,0121	—	-3,2535
6,28	—	-492,67	984,32	0,0017	—	-3,2848
2π	—	$-\infty$	∞	0	—	-3,2898

LISA III. Tabelid ühtlaselt jaotatud koormusega jäikade plaatide arvutamiseks. $\mu = 0,3$

Tabel III.1

Vabalt toetatud servadega plaat

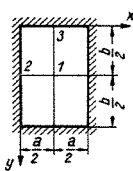


$$\begin{aligned} w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} & Q_x^{(2)} &= k_4 qa \\ M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 & Q_y^{(5)} &= k_5 qa \\ M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 & R_x^{(2)} &= k_6 qa \\ P_R &= k_8 qab & R_y^{(5)} &= k_7 qa \end{aligned}$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,0530	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,0616	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,0697	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,0770	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,0843	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,0906	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,1336	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

Tabel III 2

Jaigalt kinnitatud servadega plaat

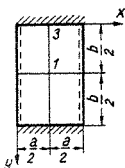


$$\begin{aligned}
 w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} & Q_x^{(2)} &= k_6 qa \\
 M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 & Q_y^{(3)} &= k_7 qa \\
 M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 & R_x^{(2)} &= k_8 qa \\
 M_x^{(2)} &= -k_4 qa^2 & R_y^{(3)} &= k_9 qa \\
 M_y^{(3)} &= -k_5 qa^2
 \end{aligned}$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1,0	0,0138	0,0231	0,0231	0 0513	0,0513	0,452	0,452	0,440	0,440
1,1	0,0165	0,0264	0,0231	0,0581	0,0538	0 448	0 412	0 473	0,450
1,2	0,0191	0,0299	0,0228	0 0639	0,0554	0,471	0,381	0 493	0,457
1,3	0,0210	0 0327	0,0222	0 0687	0,0563	0,491	0,352	0 505	0,462
1,4	0,0227	0,0349	0,0212	0,0726	0,0568	0,505	0,327	0 510	0,464
1,5	0,0241	0 0368	0,0203	0 0757	0,0570	0,517	0,305	0 515	0,465
1,6	0,0251	0 0381	0,0193	0 0780	0,0571	—	—	—	—
1,7	0,0260	0 0392	0 0182	0 0799	0,0571	—	—	—	—
1,8	0,0267	0 0401	0,0174	0 0812	0,0571	—	—	—	—
1,9	0,0272	0 0407	0,0165	0 0822	0 0571	—	—	—	—
2,0	0,0276	0 0412	0,0158	0 0829	0 0571	—	—	—	—
∞	0,0284	0,0417	0,0125	0 0833	0 0571	—	—	0 500	0,465

Tabel III.3

Kahel vastasserval vabalt toetatud, kahel jäigalt kinnitatud plaat



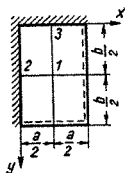
$$\begin{aligned} \text{Kui } a &\geq b, \\ w^{(1)} &= k_1 \frac{qb^4}{Eh^3} \\ M_x^{(1)} &= k_2 qb^2 \\ M_y^{(1)} &= k_3 qb^2 \\ M_y^{(3)} &= -k_4 qb^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kui } a &\leq b \\ w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \\ M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 \\ M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 \\ M_y^{(3)} &= -k_4 qa^2 \end{aligned}$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0,0284	0,0125	0,0417	0,0833
1/2	0,0284	0,0142	0,0420	0,0842
1/1,5	0,0270	0,0179	0,0406	0,0822
1/1,4	0,0262	0,0192	0,0399	0,0810
1/1,3	0,0255	0,0203	0,0388	0,0794
1/1,2	0,0243	0,0215	0,0375	0,0771
1/1,1	0,0228	0,0230	0,0355	0,0739
1	0,0214	0,0244	0,0332	0,0697
1,1	0,0276	0,0307	0,0371	0,0787
1,2	0,0349	0,0376	0,0400	0,0868
1,3	0,0425	0,0446	0,0426	0,0938
1,4	0,0504	0,0514	0,0448	0,0998
1,5	0,0582	0,0585	0,0460	0,1049
1,6	0,0658	0,0650	0,0469	0,1090
1,7	0,0730	0,0712	0,0475	0,1122
1,8	0,0799	0,0768	0,0477	0,1152
1,9	0,0863	0,0821	0,0476	0,1174
2	0,0987	0,0869	0,0474	0,1191
3	0,1276	0,1144	0,0419	0,1246
4	0,1383	0,1223	0,0390	0,1250
5	0,1412	0,1243	0,0379	0,1250
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,1250

Tabel III 4

Kahel naaberserval vabalt toetatud, kahel järgalt kinnitatud plaat



$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$

$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$

$$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2$$

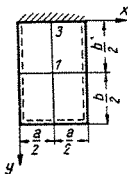
$$M_y^{(2)} = -k_5 qa^2$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1,0	0,0229	0,0304	0,0304	0,0678	0,0678
1,1	0,0276	0,0353	0,0311	0,0766	0,0709
1,2	0,0318	0,0397	0,0312	0,0845	0,0736
1,3	0,0353	0,0435	0,0308	0,0915	0,0754
1,4	0,0384	0,0469	0,0302	0,0975	0,0765
1,5	0,0415	0,0497	0,0293	0,1028	0,0772
1,6	0,0441	0,0521	0,0284	0,1068	0,0778
1,7	0,0463	0,0541	0,0274	0,1104	0,0782
1,8	0,0482	0,0557	0,0265	0,1134	0,0785
1,9	0,0497	0,0570	0,0256	0,1159	0,0786
2,0	0,0511	0,0582	0,0247	0,1180	0,0787
∞	0,0560	0,0625	0,0188	0,1250	—

Markus Maksimaalne valjamoment on paindemomendist $M_x^{(1)}$ 9—16% suurem

Tabel III 5

Uhel serval jaigalt kinnitatud, teistel vabalt toetatud plaat

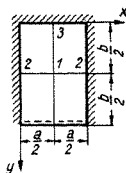


$$\begin{array}{ll}
 K_{\text{ul}} \ a \geq b & K_{\text{ul}} \ a \leq b \\
 \omega^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3} & \omega^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \\
 M_x^{(1)} = k_2 qb^2 & M_x^{(1)} = k_2 qa^2 \\
 M_y^{(1)} = k_3 qb^2 & M_y^{(1)} = k_3 qa^2 \\
 M_y^{(3)} = -k_4 qb^2 & M_y^{(3)} = -k_4 qa^2
 \end{array}$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0,0569	0,0188	0,0625	0,1250
0,5	0,0530	0,0235	0,0601	0,1210
0,6	0,0489	0,0268	0,0573	0,1156
0,7	0,0444	0,0297	0,0529	0,1086
0,8	0,0399	0,0315	0,0484	0,1009
0,9	0,0352	0,0331	0,0437	0,0922
1,0	0,0304	0,0339	0,0391	0,0840
1,1	0,0387	0,0411	0,0422	0,0916
1,2	0,0468	0,0484	0,0443	0,0983
1,3	0,0549	0,0557	0,0461	0,1040
1,4	0,0627	0,0625	0,0471	0,1084
1,5	0,0702	0,0691	0,0478	0,1121
1,6	0,0774	0,0750	0,0481	0,1148
1,7	0,0842	0,0806	0,0481	0,1172
1,8	0,0903	0,0855	0,0477	0,1189
1,9	0,0961	0,0901	0,0473	0,1204
2,0	0,1012	0,0942	0,0470	0,1216
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,1250

Tabel III.6

Ühel serval vabalt toetatud, teistel järgalt kinnitatud plaat



$$K_{\text{UI}} \quad a \geq b$$

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3}$$

$$M_x^{(1)} = k_2 qb^2$$

$$M_y^{(1)} = k_3 qb^2$$

$$M_x^{(2)} = -k_4 qb^2$$

$$M_y^{(3)} = -k_5 qb^2$$

$$K_{\text{UI}} \quad a \leq b$$

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$

$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$

$$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2$$

$$M_y^{(3)} = -k_5 qa^2$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0	0,0569	0,0188	0,0625	—	0,1250
0,5	0,0491	0,0259	0,0558	0,0783	0,1140
0,6	0,0419	0,0290	0,0496	0,0773	0,1020
0,7	0,0346	0,0305	0,0428	0,0749	0,0907
0,8	0,0282	0,0306	0,0352	0,0708	0,0778
0,9	0,0223	0,0297	0,0294	0,0657	0,0658
1,0	0,0172	0,0278	0,0236	0,0600	0,0547
1,1	0,0197	0,0309	0,0230	0,0659	0,0566
1,2	0,0216	0,0336	0,0222	0,0705	0,0573
1,3	0,0230	0,0357	0,0211	0,0743	0,0574
1,4	0,0241	0,0374	0,0200	0,0770	0,0576
1,5	0,0251	0,0386	0,0190	0,0788	0,0569
1,6	0,0260	0,0397	0,0181	0,0803	0,0568
1,7	0,0266	0,0404	0,0172	0,0815	0,0567
1,8	0,0271	0,0410	0,0165	0,0825	0,0567
1,9	0,0274	0,0414	0,0158	0,0831	0,0566
2,0	0,0277	0,0417	0,0151	0,0833	0,0566
∞	0,0284	0,0417	0,0125	0,0833	0,0566

Tabel IV.1

Parameeter ν painduvate plaatide silindrilisel paindel

Kui plaadi pikiservad on vabalt toetatud, siis

$$\frac{Eh^4}{(1-\mu^2)ql^4} = \sqrt{U_0}$$

Kui plaadi pikiservad on jäigalt kinnitatud, siis

$$\frac{Eh^4}{(1-\mu^2)ql^4} = \sqrt{U_1}$$

ν	$\lg 10^4 \sqrt{U_0}$	$\lg 10^4 \sqrt{U_1}$	ν	$\lg 10^4 \sqrt{U_0}$	$\lg 10^4 \sqrt{U_1}$
0	∞	∞	13	1,560	1,413
1	3,889	3,217	14	1,467	1,331
2	3,483	2,886	15	1,380	1,253
3	3,173	2,663	16	1,298	1,179
4	2,911	2,481	17	1,221	1,109
5	2,684	2,320	18	1,148	1,042
6	2,486	2,174	19	1,079	0,979
7	2,311	2,040	20	1,014	0,918
8	2,155	1,916	21	0,951	0,860
9	2,014	1,801	22	0,892	0,805
10	1,886	1,694	23	0,835	0,751
11	1,768	1,594	24	0,780	0,700
12	1,660	1,501			

KASUTATUD KIRJANDUS

Varraskonstruktsoonide ehitusmehaanika

- 1 *Бабаков И М* Теория колебаний Гостехиздат 1958
- 2 *Безухов Н И Лужин О В* Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах Госстройиздат 1963
- 3 *Давыдов В В Маттес Н В* Строительная механика корабля Изд «Речной транспорт», 1959
- 4 *Демидович В П Марон И А* Основы вычислительной математики Физматгиз 1960
- 5 *Ден Гартог Дж П* Механические колебания Физматгиз, 1960
- 6 *Киселев В А* Строительная механика Специальный курс Стройиздат 1964
- 7 *Корноухов Н В* Прочность и устойчивость стержневых систем Стройиздат 1949
- 8 *Коротких Я И Локишич А Э Сиверс Н Л* Изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем Машгиз, 1953
- 9 *Курдюмов А А* Вибрация корабля Судпромгиз 1961
- 10 *Лейтес С Д* Устойчивость сжатых стальных стержней Госстройиздат, 1954
- 11 *Прокофьев И П Смирнов А Ф* Теория сооружений III Трансжелдориздат 1948
- 12 *Тимошенко С П* Колебания в инженерном деле Физматгиз 1959
- 13 *Тимошенко С П* Устойчивость упругих систем Гостехиздат 1955
- 14 *Смирнов В И* Курс высшей математики т II Гостехиздат, 1952
- 15 *Уманский А А* Специальный курс строительной механики ч I ОНТИ, 1935
- 16 *Филин А П Соколова А С* Строительная механика корабля, ч I Изд «Речной транспорт», 1957
- 17 *Филоненко Бородин М М* и др Курс сопротивления материалов ч II Гостехиздат, 1956
- 18 *Raamet R* Ehitusmehaanika I Eesti Riiklik Kirjastus, 1964

Elastsus- ja plastsusteooria

- 1 *Безухов Н И* Основы теории упругости, пластичности и ползучести Изд «Высшая школа» 1961
- 2 *Вайнберг Д В Вайнберг Е Д* Пластинки, диски, балки стенки Госстройиздат УССР, 1959

3. Ван-Цзи-Де. Прикладная теория упругости. Физматгиз, 1959.
4. Варвак П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. I. Изд. АН УССР, 1949
5. Варвак П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. II. Изд. АН УССР, 1952.
6. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.
7. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат, 1933.
8. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. Госстройиздат, 1957.
9. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
10. Калманок А. С., Расчет пластинок. Госстройиздат, 1959.
11. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1952.
12. Кац А. М. Теория упругости. Гостехиздат, 1956.
13. Качанов А. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
14. Короткин Я. И., Локшин А. З., Сиверс Н. Л. Изгиб и устойчивость пластин и круговых цилиндрических оболочек. Судпромгиз, 1955.
15. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
16. Никифоров С. Н. Теория упругости и пластичности. Госстройиздат, 1955.
17. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
18. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, ч. II. Судпромгиз, 1941.
19. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
20. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Госстройиздат, 1954.
21. Справочник по строительной механике корабля, т. 2. Судпромгиз, 1958
22. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Физматгиз, 1963.
23. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. Физматгиз, 1960.
24. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. Физматгиз, 1959.
25. Шиманский Ю. А. Изгиб пластин. ОНТИ, 1934.
26. Aare, J., Kulbach, V. Metallkonstruktsioonid I. Eesti Riiklik Kirjastus, 1961.
27. Laul, H. Raudbetoon II. Eesti Riiklik Kirjastus, 1962.

ВЕНЕ-ЕЕСТИ SÖNASTIK

- анизотропный** anisotroopne
арка kaar
 — **бесшарнирная** liigenditeta kaar
 — **висячая** rippuv kaar e ripp-kaar
 — **двухшарнирная** kahe liigendiga kaar
 — **консольная** konsoolidega kaar
 — **трехшарнирная** kolme liigendiga kaar
 — **параболическая** paraboolne kaar, paraboolkaar
 — **ползучая** kaldkaar e rootmavkaar (kaar, mille toed on erineval kõrgusel)
 — **с затяжкой** tõmmitsaga kaar
балка tala
 — **двухтавровая** I-tala (loe: *i-tala*)
 — **двухпролетная** kahesildeline tala
 — **консольная** konsooltala
 — **жестко заделанная** jäigalt kinnitatud tala
 — **на двух опорах** tala kahel toel
 — **на упругих опорах** tala elastsetel tugedel
 — **на упругом основании** tala elastsel alusel
 — **неразрезная** jätkuvtala
 — **однопролетная** ühesildeline tala
 — **прокатная** valtsitud (profiil-) tala
 — **сварная** keevitatud tala
 — **составная** liittala
 — **статически неопределимая** staatikaga määramatu tala
 — **статически** определяемая
- многопролетная** mitmesildeline staatikaga määratud tala
 — **тавровая** T-tala (loe: *te-tala*)
 — **фиктивная** fiktiivtala
биение pulseerimine
вариация variatsioon
вектор vektor
 — **напряжения** pingektor
 — **перемещения** paigutisevektor, siirdevektor
вибрация vibratsioon, võnkumine
виброгаситель vibrosummuti
виброграф vibrograaf
врубка sisselõige, soon
вуг vuut
выпучивание nõtkumine (varrastel), mõikumine (plaatidel ja koorikutel)
гибкость saledus
гипотеза нерастяжимости срединной плоскости пластинки plaadi keskpinna venimatuse hüpotees
 — **плоских сечений** ristlõigete e põikpindade tasapinnalisuse hüpotees
 — **прямых нормалей** sirgete normaalse hüpotees
груз критический kriitiline koormus
 — **упругий** elastne koormus
давление surve, rõhk
девиатор деформаций deformatsioonideviaator
 — **напряжений** pingedeviaator
декремент затухания логарифмический logaritmiline sumbusdecrement
деформация deformatsioon

- деформация активная aktiivdeformatsioon
 --- линейная joondeformatsioon, lineaardeformatsioon
 --- обобщенная üldistatud deformatsioon
 --- объемная ruumdeformatsioon
 --- относительная suhteline deformatsioon
 --- пассивная passiivdeformatsioon
 --- пластическая plastne deformatsioon
 --- плоская tasanddeformatsioon
 --- пространственная ruumdeformatsioon
 --- сдвига nihkedeformatsioon
 --- угловая nurkedeformatsioon, nihkenurk
 --- упругая elastne deformatsioon
- диаграмма Виллио Villiot' diagramm
 --- Максвелла-Кремоны Maxwell-Cremona diagramm
- диск kujund (geomeetriliselt muutumatu)
- жесткость jäikus
 --- цилиндрическая при изгибе silindriline paindejäikus
- задача контактная kontaktülesanne
 --- осесимметричная telgsümmeetriline ülesanne
 --- статически неопределимая staatikaga määratu ülesanne
- закон Гука Hooke'i seadus
- запас прочности tugevusvaru
- затухание sumbuvus; sumbumine
- затяжка lõmmits
- зона пластическая plastne tsoon
 --- упругая elastne tsoon
- изменяемость геометрическая geomeetriline muutuvus
 --- мгновенная hetkmuutuvus
- изоклина isokliin
- изостата isostaat
- изотропный isotroopne
- изохрома isokroom
- импульс impulss
- инвариант invariant
- интенсивность нагрузки koormuse intensiivsus
 --- деформации deformatsiooni intensiivsus
 --- напряжения pinge intensiivsus
- ключ арки kaare lukk
- колебания võnkumine
 --- аперiodические aperioidiline võnkumine
 --- вынужденные sundvõnkumine
 --- главные pea- e. põhivõnkumine
 --- затухающие sumbuv võnkumine
 --- изгибаемые paindevõnkumine
 --- крутильные väändevõnkumine
 --- периодические perioodiline võnkumine
 --- свободные (или собственные) vaba- e. omavõnkumine
- контур kontuur
 --- замкнутый suletud e. kinni kontuur
 --- многосвязный mitmesidemeline kontuur
- консоль konsool
- концентрация напряжений pingekontsentratsioon
- координаты главные peakoordinaadid
- кососимметричный antimeetriline
- коэффициент tegur
 --- асимметрии asümmeetria-tegur
 --- динамичности dünaamika-tegur
 --- жесткости опоры toe jäikuse tegur
 --- концентрации напряжений pingekontsentratsiooni tegur
 --- податливости опоры toe deformatiivsuse tegur
 --- постели (упругости основания) turbetegur
 --- приведения redutseerimistegur
 --- Пуассона Poissoni tegur
 --- температурного расширения joonpaisumistegur

кривая давления survejoon
 кривизна гауссова Gaussi kõve-
 gus
 — главная peakõverus
 купол kuppel
 линия влияния mõjujoon
 — — — многоугольная polügonaal-
 ne e. fooknurkne mõjujoon
 — инфлюэнтная mõjujoon
 — упругая elastne joon
 матрица maatriks
 — влияния mõjumaatriks
 — жесткости jäikusmaatriks
 — обратная pöördmaatriks
 — податливости deformatiiv-
 susmaatriks
 — перемещений paigutismaat-
 riks
 — транспонированная transpo-
 neeritud maatriks
 — усилий sisejõumaatriks
 мембрана membraan
 метод meetod
 — Бубнов-Галеркина Bubnov-
 Galjorkini meetod
 — вариационный variatsioon-
 meetod
 — деформаций deformatsiooni-
 meetod
 — кинематический kinemaati-
 kameetod
 — комбинированный kombineer-
 itud meetod
 — Мора Mohri meetod
 — начальных параметров alg-
 parameetrite meetod
 — обратный vastupidine mee-
 tod
 — перемещений deformatsioo-
 ni meetod
 — полуобратный poolvastu-
 pidine meetod
 — последовательных прибли-
 жений järkjärgulise lähene-
 mise meetod e. iteratsiooni-
 meetod
 — последовательного уравни-
 вания узлов momenti-
 de jaotamise meetod
 — прямой otsene meetod
 — Ритца Ritz'i meetod
 — Релея Rayleigh' meetod
 — сеток võrgumeetod
 — сечений lõikemeetod

метод сил jõumeetod
 — смешанный segameetod
 — статический staatikameetod
 — упругих грузов elastsete
 koormuste meetod
 — энергетический energeetili-
 ne meetod, energiametod
 — фокусных точек fookusmee-
 tod
 механика строительная ehitus-
 mehaanika
 многоугольник веревочный nõõr-
 hulknurk, nõõrpolügoon
 — силовой jõuhulknurk, jõu-
 polügoon
 момент инерции inertsmoment
 — статический staatiline мо-
 ment
 — предельный piirmoment
 — ядерный tuumamoment
 нагрузка простое lihtkoorm-
 mine (kõik koormused muutu-
 vad võrdeliselt üheainsa para-
 meetriga)
 — сложное liitkoormamine
 (koormuste muutumise ise-
 loomustamiseks on vaja
 mitut parameetrit)
 нагрузка koormus
 — временная ajutine koormus
 — динамическая dünaamiline
 koormus
 — критическая kriitiline koor-
 mus
 — нулевая nullkoormus
 — подвижная liikuv koormus
 — постоянная alaline koormus
 — предельная piirkoormus
 — узловая sõlmkoormus
 — эквивалентная ekvivalent-
 koormus, võrdkoormus
 напряжение pinge
 — главное peapinge
 — касательное nihke- e. tan-
 gentsiaalpinge
 — критическое kriitiline pinge
 — нормальное normaalpinge
 — октаэдрическое oktaeedri-
 pinge
 — среднее keskmine pinge
 неизвестные tundmatud
 — групповые gruppundmatud
 — лишние lisatundmatud (põ-
 hiskeemis ära jäetud side-

mete asemel rakendatud reaktsoonid)	пластинка круглая ümarplaat
несущая способность kandevõime	— многослойная mitmekihiline plaat
оболочка koorik	— осесимметричная telgsüm-meetiline plaat
— вращения pöördkoorik	— усиленная ребрами жесткости ribiplaat
— нулевой кривизны nullkõ-verusega koorik	пластичность plastsus
— отрицательной кривизны negatiivse kõverusega koorik, miinuskõverusega koorik	плита см. пластинка
— пологая lame koorik	плоскость tasand, tasapind
— положительной кривизны positiivse kõverusega koorik, plusskõverusega koorik	поверхность срединная keskpind
— тонкая õhuke koorik	— влияния mõjupind
— цилиндрическая silindriiline koorik	— упругая elastne pind
однородный homogeenne, ühtlane	полуплоскость упругая elastne pooltasand
опора tugi	полупространство упругое elastne poolruum
— заземленная jäik tugi	потенциал potentsiaal
— подвижная liikuv tugi	пояс (балки, фермы) vöö
— цилиндрическая rulltugi, silindertugi	принцип Сен-Венана Saint-Venant'i printsiip
— шарнирная liigendtugi	пролет (балки, фермы) sille
— шаровая keratugi	равновесие неустойчивое mittepüsiv e. labiilne tasakaal
ортогональность ortogonaalsus	— устойчивое püsiv e. stabiilne tasakaal
параллелепипед risttahukas, parallelepipeed	работа töö
параметр parameeter	— внешних сил välisjõudude töö
перемещение paigutis (siire või pööre)	— внутренних сил sisejõudude töö
— возможное (или виртуальное) võimalik e. virtuaalne paigutis	— возможная или виртуальная võimalik e. virtuaalne töö
— единичное ühikpaigutis	— действительная tegelik töö
— обобщенное üldistatud paigutis	— дополнительная täiendav töö
— осевое siire	рама raam
— угловое pööre	— плоская tasandiline raam
период колебания võnkeperiood	— пространственная ruumiline raam
план полярный polaarne kiiruste plaan	— с неподвижными узлами nihkumatute sõlmedega raam
— скоростей kiiruste plaan e. diagramm	— с подвижными узлами nihkuvate sõlmedega raam
пластинка plaat	раскос (фермы) diagonaal (sõrestiku kaldvarras)
— абсолютно жесткая jäik plaat	распор (арки и т. д.) külgturve (toereaktsiooni horisontaalkomponent)
— анизотропная anisotroopne plaat	расчетная схема arvutuskeem
— гибкая painduv plaat	реакция reaktioon, turve
— кольцевая rõngasplaat	— опорная toereaktsioon, toeturve
— конечной жесткости painduv plaat	

реакция упругого основания elastse aluse reaktsioon e. turve
резервуар reservuaar
резонанс resonants
решетка (фермы) võrk (sõrestiku postide ja diagonaalide süsteem)

свод võlv

связь side

- необходимая vajalik side
- лишняя lisaside
- односторонняя ühepoolne side

сила jõud

- внешняя vähsjõud
- внутренняя sisejõud
- возмущающая häiriv- e. sundijõud
- гармоническая harmooniline (sinusoidaalselt muutuv) jõud
- единичная ühikjõud
- критическая kriitiline jõud
- обобщенная üldstatud jõud
- поперечная põikjõud
- продольная pikijõud
- эйлерова Euleri kriitiline jõud (kriitiline jõud, mis on arvatatud eeldusel, et materjal allub Hooke'i seadusele kuni stabiilsuse kaotuseni)

симметричный sümmeetriline

система süsteem

- с бесконечным числом степеней свободы lõpmata suure vabadusastmega süsteem
- с двумя степенями свободы kahe vabadusastmega süsteem
- с несколькими степенями свободы mitme vabadusastmega süsteem
- с одной степенью свободы ühe vabadusastmega süsteem
- уравнений каноническая kaanoniline võrrandisüsteem

смещение опор tugede paigutis
сооружение ehitus, konstruktsioon
сплошной pidev

способ Vereshagina Vereštšagini võte

способ вырезания узлов sõlmede eraldamise võte

— замены стержней varraste

vahefamise võte

— моментной точки momendipunkti võte

статика сооружений ehitusstaatika; ehitusmehaanika

стена подпоясная tugimüür, tugisein

степень свободы vabadusaste

— статической неопределимости staatikaga määratuse aste

стержень varras

стойка tugi, post

стрела арки kaare kõrgus

— прогиба maksimaalne läbipaaine

тело keha

— анизотропное anisotroopne keha

— вращения pöörkeha

— жестко-пластичное jäikplastne keha

— изотропное isotroopne keha

— однородное homogeenne keha

— пластичное plastne keha

— упругое elastne keha

— упруго-пластичное elastoplastne keha

тензор tensor

— деформаций deformatsiooni-tensor

— напряжений pingetensor

— шаровой keratensor

теорема teoreem, lause
— взаимности работ tööde vastastikkuse teoreem

— — перемещений paigutiste vastastikkuse teoreem

— — перемещений и реакций paigutiste ja reaktsioonide vastastikkuse teoreem

— — реакций reaktsioonide vastastikkuse teoreem

— возможных перемещений virtuaalsete e. võimalike paigutiste lause

— Кастильяно Castigliano teoreem

теория пластичности plastsusõpetus; plastsusteooria

- теория упругости** elastsusõpetus; elastsusteooria
- — классическая klassikaline elastsusteooria
 - — линейная lineaarne elastsusteooria
 - — математическая matemaatiline elastsusteooria
 - — нелинейная mittelineaarne elastsusteooria
 - — прикладная rakenduslik elastsusõpetus
- траектория напряжений** pingete trajektoor
- трение** hõõrdumine
- вязкое viskoosne hõõrdumine (hõõrdejõu suurus sõltub lineaarselt liikumise kiirusest)
 - сухое kuiv hõõrdumine (hõõrdejõu suurus ei sõltu liikumise kiirusest)
- труба толстостенная** paksuseinaline toru
- тонкостенная õhukeseseinaline toru
- угол сдвига** nihkenurk
- узел** sõlm
- упругость** elastsus
- уравнение** võrrand
- бигармоническое biharmooniline võrrand
 - вековое sekulaarvõrrand
 - гармоническое harmooniline võrrand
 - изогнутой поверхности elastse pinnа võrrand
 - пяти моментов viie momendi võrrand
 - трех моментов kolme momendi võrrand
 - упругой линии elastse joone võrrand
- усилие** sisejõud
- цепное aheljõud
- условие пластичности** plastsustingimus
- равновесия tasakaalutingimus
 - совместности деформаций deformatsioonide ühise tingimus
- условия граничные или краевые** ääre- e. rajatingimused
- устойчивость** stabiilsus e. püsivus
- ферма** ferm (tasandiline sõrestik)
- арочная kaarõrestik
 - балочная talasõrestik; sõrestiktala
 - вантовая tross- e. vantsõrestik
 - двухрешетчатая kahekordse võrguga sõrestik
 - консольная konsoolsõrestik; sõrestikkonsool
 - многоопорная mitmetoeeline sõrestik
 - многопролетная mitmesilde-line sõrestik
 - с параболическим поясом parabolvõõga sõrestik
 - с параллельными поясами paralleelvõõdega sõrestik
 - со составными стержнями liitvarrastega sõrestik
 - шпренгельная sprenghõõrestik
- фокусная точка** fookus
- фокусное отношение** fookussuhe
- функция напряжений** pingefunktsioon
- центр вращения** мгновенный hetkpoolus
- упругий elastne kese
- цепь кинематическая** varrasahel
- частота** sagedus
- вынужденных колебаний sundvõnkesagedus
 - круговая nurksagedus, ringsagedus
 - свободных или собственных колебаний oma- e. vabavõnkesagedus
- число влияния** mõjuarv
- шарнир** liigend
- ключевой lukuliigend
 - пятовый kannaliigend
 - текучести plastne liigend
 - цилиндрический joon- e. silindriliigend
- энергия** energia
- кинетическая kineetiline energia
 - потенциальная potentsiaalne energia
- эффект краевой** ääreefekt e. ääre-häire
- ядро** tuum

AINEREGISTER

- Aine, anisotroopne 292
 — , elastne 264
 — , elastoplastne 557
 — , isotroopne 264, 289
 — , jäikplastne 557
 — , ortotroopne 292
 — , plastne 555
 Ahelpinged 390, 392, 489
 Amplituud, sundvõnkumise 181,
 199, 202, 206, 253
 — , vabavõnkumise 178, 193,
 205
 Algparameeter 26, 53
 Algparameetrite meetod 26
 Algtingimused 185, 198, 223
 Alus 5
 Aluse turve 5
 Aperioidiline võnkumine 180
 Auguga riba tõmme 374

 Balloon 538
 Beltrami-Michelli võrrandid 304
 Biharmoniline võrrand tasand-
 ülesandel 321
 — — plaadi paindel 403
 Bimoment 265
 Broude valem 488
 Bubnov-Galjorkini meetod 78, 86,
 427, 433, 444, 482, 502, 504

 Castigliano valemid 288
 Cauchy võrrandid 278, 396

 D'Alembert'i printsip 177
 Deformatsioon 267
 — , aktiivne 555
 — , passiivne 555
 — , telgsummeeriline 530
 Deformatsioonideviaator 560
 Deformatsiooni intensiivsus 563
 Deformatsioonimeetod 144, 187,
 247

 Deformatsiooni pidevuse tingimu-
 sed 282, 490
 — — — , integraalsed 295
 — — — , pingetes 302
 Deformatsioonitensor 282, 560
 Deplaneerumine 334
 Diferentsiaalseosed tala paindel 9
 Diferentside meetod 108
 Dünaamika tegur 182, 184, 186
 Dünaamilised toereaktsioonid 247

 Elastne alus 5
 — joon 10, 16, 34, 79
 — tugi 7
 Elastse aluse turve 6
 — — turbe tegur 6
 Elastse alusega tala mõjujooned
 23
 — — — paine 5
 — — — stabiilsus 132
 Elastse joone diferentsiaalvõr-
 rand 10, 34
 — toe jäikuse tegur 8
 — toe turbetegur 8
 Elastoplastne staadium 127
 Elastne poolruum 378
 Elastsed toed plaadi servade
 vahel 500
 Elastsuskonstandid 268, 288
 Elastsusmoodul 268
 Elastsusteooria, klassikaline (li-
 neaarne) 264
 — põhihüpoteesid 264
 — põhivõrrandid 293
 Elastsusõpetus 262
 — matemaatiline 262
 — rakenduslik 263
 Elastsusõpetuse põhiülesande la-
 hendite ühesus 294
 — — lahendus pingetes 301
 — — lahendus siiretes 299

- Energieetiline meetod 62, 78, 90, 229, 237, 255, 443, 504
 Energia, kineetiline 237, 242
 — , potentsiaalne 237, 241, 285
 — — , plaadi paindel 443
 Engesser-Jassiniski-Kármáni meetod 132
 Engesser-Shanley meetod 132
 Epüüride korrumtamise võte 64
 Esialgne kõverus 33
 Euler 77
 Euleri kriitiline koormus 77

 Faasinurk 178, 193
 Filon 343
 Flamant'i ülesanne 378
 Fourier' rida 340, 415, 421
 Fundamentaalne funktsioon 86

 Gruppundmatud 144

 Hooke'i seadus 126, 394, 397, 555
 — — , üldistatud 288, 314, 317
 Häiremeetod 504

 Impulsskoormus 173, 183
 Inertsjõud 173, 176, 188, 221

 Joondeformatsioon 267
 Joonliigend 581
 Jõud, harmooniline 180
 — , suvaliselt muutuv 183
 Jõumeetod 139, 189, 206
 Jõu mõju elastsele poolruumile 378
 Järgjärgulise lähenemise meetod 90, 212, 231

 Kantorovitš-Vlassovi meetod 430
 Kármáni võrrandid 494
 Keha, mitresidemeline 294
 — , ühesidemeline 294
 Keratensor 560
 Keskpind 388, 512
 Kiivumine 121
 Kirchhoff-Love'i hüpotees 513
 Kollokatsioonimeetod 424, 433, 505
 Kombineeritud meetod 106
 Konsooli paine 324
 — võnkumine 224, 230
 Kontaktülesanne 292
 Koorik 512
 — , momendivaba 512, 523
 Kooriku deformatsioonid 517
 — meridiaantasand 520
 — paralleelitasand 520
 — peakõverusraadiused 520
 — põhi 538
 — sisejõud 514
 — suhteline paksus 512
 Koormus, dünaamiline 173
 — , korrapäratu 174
 — , kriitiline 74, 114
 — — , plaadi 469
 — , telgsümmeetriline 452, 523
 Kriitiliste koormuste arvutus 114
 Kustuvad perioodilised funktsioonid 17

 Lamé võrrandid 300
 Laplace'i operaator 300
 Lejeune-Dirichlet' kriteerium 93
 Lihtkoormamine 557
 Liitkoormamine 557
 Liittoru 363
 Lineaarse interpolatsiooni meetod 157
 Lobatševski-Graeffe meetod 210
 Lõõkkoormus 174
 Lõpmatu tala 15, 18
 — rida 86

 Mahujõud 265
 Mass, jaotatud 220, 229
 — , koondatud 229
 — , redutseeritud 231
 Massi intensiivsus 220
 Maurice Lévy meetod 420
 Membraan 393, 494
 Meridiaantasand 520
 Momentide teooria 512
 Määramata tegurite meetod 210
 Mõlketegur 482, 487
 Mõlkumine 389

 Navier' meetod 415, 428
 Nihkemoodul 268
 Nihkenurk 267
 Normaalpinge 266
 Numbriline integreerimine 78
 Nurksagedus 178

 Oktaedrippinge 562

- Omavektor 209
 Omavõnkesagedus 177, 194, 198, 200, 207, 222, 238, 243, 253, 255
 Omavõnkesageduste määramine ligikaudsete meetoditega 228
 Omavõnkesageduste spekter 222
 Omaväärtus 209
- Paigutiste määramine 304
 — — konsooli paindel 328
 Paindemoment talas elastisel alusel 17, 20, 30
 — pikipõikpindel 34, 40
 — plaadis 398, 410, 448, 450, 453, 458
 Paltševski meetod 574
 Paralleelitasand 520
 Peadeformatsioon 312
 Peakoordinaadid 243
 Peapind 273
 Peapinge 273, 312
 Peavõnkumine 193, 221
 Peavõnkumiste ortogonaalsus 207, 211, 232
 Piirkoormus 568
 — ; plaadi 581
 Piirmoment 570
 Piirvastupanumoment 571
 Pikijõu mõju parandustegurid 137
 — — omavõnkesagedusele 227
 Pikipõikpaine universaalsed valemid 47, 53
 Pikipõikpaine 33
 — survejõuga 36
 — tõmbejõuga 56
 Pinge 266
 — kontsentratsioon 376
 — , kriitiline 476
 — plaadi paindel 397, 400, 404, 453, 464, 496
 Pingedeveaator 560
 Pingedeveaatori invariandid 561
 Pinged suvaliselt orienteeritud pinnal 271
 Pingefunktsioon painduva plaadi arvutamisel 490
 — tasandülesandel 320
 — väändel 307
 Pingete intensiivsus 562
 Pingete invariant 274, 561
 Pingetensor 275, 560
 Pingevektor 271
- Pinnajõud 266
 Plaadi keskpinna võrrand ristkoordinaatides 394
 — — — silindrilistes koordinaatides 456
 — — — plaadi tasandis mõjuvate jõudude olemasolu korral 470
 Plaadi silindriline paine 313, 411, 496
 Plaadi tasakaalutingimused 401
 Plaat 388
 — , elliptiline 412
 — , jäik 393
 — , ortotroopne 388, 449
 — , paindub 393, 489
 — , ringikujuline 459
 — , ristkülikuline 415
 — , rõngakujuline 465
 — , ümmargune telgsümmeetriline 452
 Plaatide lugitus 389
 Plaatide paindeteooria põhihüpooteesid 394
 Plastne liigend 574, 576
 Plastsustingimused 568
 Poissoni tegur 268, 448, 563
 Poollõpmatu elastse alusega tala 15
 — — koorik 531
 Poolmomentide teooria 513
 Prandtl'i diagramm 557
 Puzõrevski funktsioonid 13, 546
 Põhiskeem 139
 Põikjõud plaadis 401, 457
 — talas 17, 30, 34
 Põikjõu mõju tala omavõnkesagedusele 228
 Põikmõju 29, 33
 Põikmõjude mõjujooned 23
 — sõltumatuse printsiip 48
 Pärastkriitiline staadium 509
 Põõrdenurk 17, 30, 40
 Põõrdkoorik 519
 Põõrdvõnkumine 177, 178, 191
 Põõrlev ketas 366
 — silinder 371
 Püsivusvõrrand 140
- Raami pikipõikpaine 136, 163
 — stabiilsus 136
 — võnkumine 230, 247

- Rayleigh-Ritzi meetod 240
 Redutseeritud elastsusmoodul 130
 Reservuaar, silindriline 544
 Resonants 182, 200, 206
 Ribière'i lahend 343
 Ritzi meetod 96, 98, 443
 Roomavus 556
 Ruumdeformatsioon 312
- Saint-Venant'i printsiip 264, 292, 299, 313, 332
 Seisvad lained 193
 Sekulaarvõrrand 205, 208
 Sihikoosinused 271
 Siire 17, 29, 40, 267, 276
 Silinderkoorik 526
 Silindriline paindejäikus 400, 454
 Sirgete normaaside hüpotees 394
 Sisejõudude potentsiaal 289
 Staatikalise tasakaalu meetod 78, 79, 470
 Stabiilsuse kaotus 75
 Stabiilsus, plaadi 469
 — , raami 136
 — , varda 74
 Sumbuvuse dekrement 180
 Sumbuvusjõud 174, 176
 Sundvõnkumine 174, 180, 198
 Sõlmpunkt 205
 Sõrestiku võnkumine 230
- Takistusjõud 176, 188
 Tala elastsel alusel 5
 — — — , stabiilsus 132
 — — — , elastsetel tugelel 7
 — — — , painde elemendid 17
 — — — , redutseeritud pikkus 20
 — — — , võnkumine 223, 230
 Tangentsiaalpinge 266
 Tangentsiaalpingete paarisuse seadus 270
 Tasakaaluolukord 74
 Tasakaaluvõrrandid polaarkoordinaatides 352
 — — ristkoordinaatides 268, 293, 301, 315
 Tasanddeformatsioon 313
 Tasandpingus 315
 Tasandülesande lahendamine põlnoomidega 322
 — — trigonomeetriliste ridadega 337
 Tensomeetrite rosett 281
- Timošenko meetod 96, 102
 — — valem 96
 Toereaktsioonid pikipõikpaindel 153
 — — plaadi paindel 406
 Toru, paksuseinaline 357
 Trigonomeetrilised read tasandülesandel 337
 — — plaadi paindel 415, 420
 Turve 5
 Turbetegur 6
 Täiendpaigutis 27
 Tööde vastastikkuse teoreem 23
- Vabavõnkumine 174, 192, 220
 Varda otste kinnitustegur 126
 Variatsioonmeetodid 445
 Varras, muutuva ristlõikega 119
 Vastupanumoment plaadis 401, 454
 Vereštšagini võte 64
 Vibrosummuti 202
 Võimalike tööde printsiip 62
 Võnkeperiood 178
 Võnkuva massipunkti tasakaalu diferentsiaalvõrrand 176
 Võnkuva süsteemi vabadusaste 174
 Võnkuv süsteem, mitme vabadusastmega 187
 — — — , suure vabadusastmega 220
 — — — , suvalise vabadusastmega 204
 — — — , ühe vabadusastmega 173
- Võrgumeetod 433
 Väikeste elastoplastsete deformatsioonide teooria 559
 Välispinna tingimused 315
 Väändemomendid plaadis 398, 405, 450
 Vääne, elliptilise varda 307
 — — , plastsest materjalist varda 571
 — — , prismalise varda 305
 — — , ümarvarda 295
- Ääreefekt 513
 Ääritingimused jäiga plaadi serval 404, 413, 435
 — — pikipõikpaindel 37
 — — painduva plaadi serval 494
 Ääritingimuste leevendamine 336

SISUKORD

Eessõna	3
1 Tala paine elastsel alusel	5
1.1 Tala elastsel alusel ja tema elastse joone diferentsiaalvõrrandi integreerimine	5
1.2 Lõpmatu ja poollõpmatu tala elastsel alusel	15
1.3 Algpärametrite meetod	26
2 Varraste pikipõikpaine	33
2.1 Pikipõikpaine mõiste ja tala elastse joone võrrand	33
2.2 Ääretingimused	37
2.3 Summeerimise printsiip tala pikipõikpainedel	38
2.4 Ühesildelise tala pikipõikpaine lihtsamad koormusjuhud	39
2.41 Pikitõmbejõududega ning paremas otsas momendiga koormatud tala	39
2.42 Ühtlaselt jaotatud koormusega q ning tõmbejõududega T koormatud lihttala	42
2.43 Ühtlaselt jaotatud koormusega ja pikijõududega koormatud tala järgalt kinnitatud otstega	45
2.5 Pikipõikpaine universaalsed valemid	47
2.51 Pikipõikpaine survejõuga	47
2.52 Pikipõikpaine tõmbejõuga	56
2.53 Arvutusnäiteid	58
2.6 Energeetiline meetod paigutiste arvutamiseks pikipõikpainedel	62
3 Varraskonstruksioonide stabiilsus	74
3.1 Varda stabiilsuse mõiste	74
3.2 Euleri kriitilise koormuse määramise meetodid	78
3.3 Staatikaline meetod	79
3.31 Elastse konstruksiooni tasakaalu diferentsiaalvõrrandi otsese integreerimise meetod	79
3.31.1 Varda otsad on kinnitatud liigenditega	80
3.31.2 Varda otsad on kinnitatud järgalt	81
3.31.3 Varda üks ots on kinnitatud järgalt, teine ots on vaba	83
3.31.4 Varda üks ots on kinnitatud liigendiga, teine järgalt	84
3.4 Bubnov-Galjorkini meetod konstruksiooni tasakaalu diferentsiaalvõrrandi integreerimiseks	86
3.5 Järkjärgulise lähenemise meetod kriitilise jõu määramiseks	90
3.6 Energeetiline meetod kriitiliste koormuste määramiseks	93
3.7 W. Ritzi meetod	98
3.8 Timošenko meetod	102

3.9	Kombineeritud meetod	106
3.10	Kriitiliste jõudude leidmine diferentside meetodiga	108
3.101	Diferentside meetodi arvutusvalemite tuletamine	108
3.102	Kriitilise jõu leidmine	110
3.11	Surutud varraste kriitilise koormuse arvutuse näiteid	114
3.111	Varras kahe pikikoormuse mõju all	114
3.112	Mitme pikijõuga surutud varras	117
3.113	Muutuva ristlõikega varras	119
3.12	Kiivumine	121
3.121	Kiivumise kriitilise koormuse arvutusvalemeid	124
3.13	Varraste stabiilsus proportsionaalsuupiiri ületava pingepuhul	126
3.14	Elastsele alusele toetuva tala stabiilsus	132
3.15	Tasapinnaliste raamide stabiilsus ja pikipõikpaine	136
3.151	Jõumeetod raami stabiilsuse arvutamisel	139
3.152	Deformatsioonimeetod	144
3.153	Näiteid raamide püsivuse arvutuse kohta deformatsioonimeetodiga	152
3.16	Raamide pikipõikpaine arvutus	163
4	Ühe vabadusastmega süsteemide dünaamika	173
4.1	Dünaamilised koormused ja nende mõju	173
4.2	Võnkumise süsteemi vabadusaste ja selle määramine	175
4.3	Võnkumise massipunkti tasakaalu diferentsiaalvõrrand	176
4.4	Omavõnkesageduse määramine	177
4.5	Sundvõnkumine	180
4.51	Sundvõnkumine harmoonilise jõu mõjumisel	180
4.52	Impulsi mõju	183
4.53	Suvaliselt muutuv välisjõud	183
5	Mitme vabadusastmega süsteemide dünaamika	187
5.1	Kahe vabadusastmega süsteemi tasakaalu diferentsiaalvõrrandid	187
5.11	Deformatsioonimeetod	187
5.12	Jõumeetod	189
5.13	Erijuhud	191
5.2	Vabavõnkumine	192
5.21	Sumbuvuseta konstruktsioonid	192
5.22	Sumbuvusega konstruktsioonid	197
5.3	Sundvõnkumine	198
5.31	Sumbuvuseta konstruktsioonid	198
5.32	Sumbuvusega konstruktsioonid	201
5.33	Dünaamiline vibrosummuti	202
5.4	Suvalise vabadusastmega süsteemid	204
5.41	Põhivõrrandid	204
5.42	Peavõnkumiste ortogonaalsus	207
5.43	Sekulaarvõrrandi lahendamisest	208
6	Suure vabadusastmega süsteemide dünaamika	220
6.1	Jaotatud massiga tala vabavõnkumine	220
6.11	Jaotatud massiga tala vabavõnkumise diferentsiaalvõrrand	220
6.12	Ühtlaselt jaotatud massiga prismalise tala omavõnkesageduse ja peavõnkekujude leidmine	222
6.13	Piki- ja põikjõu mõju omavõnkesagedusele	227

6.2	Ligikaudsed arvutusmeetodid	228
6.21	Jaotatud masside asendamine koondatutega	229
6.22	Järkjärgulise lähenemise meetod	231
6.23	Energieitiline meetod	237
6.231	Omavõnkesageduse määramine esimeses lähenduses	237
6.232	Rayleigh-Ritzi meetod	240
6.3	Raamide sundvõnkumise amplituudide ja omavõnkesageduste määramine deformatsioonimeetodiga	247
6.31	Täpne lahendus	247
6.32	Omavõnkesageduste määramine ligikaudse meetodiga	255
7	Lineaarse elastsusteooria põhivõrrandid ristkoordinaatides	262
7.1	Sissejuhatus	262
7.11	Elastsusõpetuse mõiste ja ülesanded	262
7.12	Klassikalise elastsusteooria põhihüpoeesid	264
7.13	Põhimõistest, tähistused, märkide reeglid	265
7.2	Pingete teooria	268
7.21	Elementaarse risttahuka tasakaalu diferentsiaalvõrrandid	268
7.22	Pinged suvaliselt orienteeritud pinnal	271
7.23	Peapinged	273
7.24	Pingetensor	275
7.3	Deformatsioonide teooria	276
7.31	Siirete ja suhteliste deformatsioonide vahelised seosed	276
7.32	Suvaliselt orienteeritud lõigu pikenedamine	279
7.33	Deformatsioonitensor	282
7.34	Deformatsiooni pidevuse tingimused	282
7.4	Elastse keha potentsiaalne energia. Üldistatud Hooke'i seadus	285
7.41	Elastse keha potentsiaalne energia	285
7.42	Üldistatud Hooke'i seadus	288
7.5	Elastsusõpetuse põhiülesande lahendamine	292
7.51	Elastsusõpetuse põhiülesande formuleering	292
7.52	Elastsusõpetuse põhivõrrandite täielik süsteem	293
7.53	Ühe- ja mitmesidemelised kehad. Elastsusõpetuse põhiülesande lahendite ühesus	294
7.54	Silindrilise varda vääne	295
7.55	Elastsusõpetuse põhivõrrandite lahendus siiretes	299
7.56	Elastsusõpetuse põhivõrrandite lahendus pingetes	301
7.57	Prismalise varda vääne	305
8	Elastusteooria tasandülesanne	312
8.1	Tasandülesande mõiste	312
8.2	Üldistatud tasandpingus	313
8.3	Tasandülesande lahendus pingetes	318
8.31	Pingefunktsiooni rakendamine	320
8.4	Tasandülesande lahendus polünoomidega	322
8.5	Konsooli paine	324
8.51	Vabas otsas koondatud jõuga koormatud konsool	324
8.52	Ühtlaselt jaotatud koormusega konsool	333
8.6	Tasandülesande lahendamine trigonomeetriliste ridade abil	337
9	Tasandülesanne polaarkoordinaatides	349
9.1	Tasandülesande võrrandid polaarkoordinaatides	349

9.2	Polaarnurgast sõltumatud ülesanded	355
9.3	Tasandülesande lahendusid	357
9.31	Paksuseinalise toru telgsümmeetriline deformatsioon	357
9.32	Liittoru	363
9.33	Pöörlev ketas	366
9.33.1	Keskse avata väliskoormuseta pöörlev ketas	367
9.33.2	Keskse avaga väliskoormuseta pöörlev ketas	368
9.33.3	Ebaühtlase paksusega pöörlev ketas	369
9.34	Pöörlev silinder	371
9.34.1	Täissilinder	371
9.34.2	Õõnessilinder	372
9.35	Umara auguga nõrgestatud riba tõmme	374
9.36	Koondatud jõu mõju elastsele poolruumile (Flamant'i ülesanne)	378
10	Ohukeste jäikade plaatide paine. Lahendus ristkoordinaatides	388
10.1	Üldised alused	388
10.11	Põhimõisted	388
10.12	Plaatide liigitus	389
10.13	Ohukeste plaatide paindeteooria hüpoteesid	394
10.2	Ohukese jääga plaadi keskpinna võrrand ristkoordinaatides	394
10.21	Seosed plaadi läbipainde ja siirete ning deformatsioonide vahel	394
10.22	Plaadi läbipainde ja pingete vahelised seosed	397
10.23	Painde- ja väändemomendid	398
10.24	Tasakaalutingimused. Põikjõud	401
10.25	Ääritingimused	404
10.3	Ühtlaselt jaotatud koormusega plaatide paine lihtsamatel juhtudel	411
10.31	Silindriline paine	411
10.32	Elliptiline jäigalt kinnitatud ühtlaselt koormatud plaat	412
10.4	Ristkülikuliste plaatide elastse pinna võrrandi leidmine	415
10.41	Lahendus kahekordsetes trigonomeetrilistes ridades (Navier' meetod)	415
10.42	Lahendus ühekordsetes trigonomeetrilistes ridades (Maurice Lévy meetod)	420
10.43	Kollokatsioonimeetod	424
10.44	Bubnov-Galjorkini meetod	427
10.45	Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi taandamine harilikule diferentsiaalvõrrandile (Kantorovitš-Vlassovi meetod)	430
10.46	Võrgumeetod	433
10.46.1	Põhivõrrandid	433
10.46.2	Ääritingimused	435
10.46.3	Võrgumeetodi rakendamisest	438
10.47	Energeetiline (Ritzi) meetod	443
10.47.1	Plaadi painde potentsiaalne energia	443
10.47.2	Meetodi olemus	443
10.5	Täiendavaid küsimusi jäikade plaatide paindeteooriast	448
10.51	Tabelite kasutamine teistsuguse Poissoni teguriga materjalist plaatide jaoks	448
10.52	Ortotroopsed plaadid	449
11	Ümmargused telgsümmeetrilised plaadid	452

11.1	Telgsümmeetrilise plaadi painde diferentsiaalvõrrand . . .	452
11.11	Suhtelised deformatsioonid	453
11.12	Pinged ja paindemomendid	453
11.13	Tasakaaluvõrrandid	455
11.14	Ümmarguse plaadi painde diferentsiaalvõrrand . . .	456
11.2	Telgsümmeetrilise plaadi painde diferentsiaalvõrrandi lahend	457
11.21	Üldlahend	457
11.22	Läbipainde, pöördenurga, paindemomentide ja põikjõu avaldised	458
11.3	Ringikujulised plaadid	459
11.31	Ühtlaselt jaotatud koormusega plaadid	459
11.31.1	Järgalt kinnitatud plaat	460
11.31.2	Vabalt toetatud plaat	461
11.32	Plaat, mis on keskel koormatud koondatud jõuga	462
11.32.1	Järgalt kinnitatud plaat	463
11.32.2	Vabalt toetatud plaat	465
11.4	Rõngakujulised plaadid	465
12	Plaatide stabiilsus	469
12.1	Staatikalise tasakaalu meetod	470
12.2	Plaadi painde diferentsiaalvõrrand plaadi tasandis mõjuvate jõudude olemasolu korral	470
12.3	Ristkülikulise plaadi kriitilise koormuse leidmine	473
12.31	Järgale kontuurile toetuv plaat, mis on ühes sihis ühtlaselt surutud	473
12.32	Järgale kontuurile toetuv plaat, mis on mõlemas sihis ühtlaselt surutud	477
12.33	Plaat, mis on kahel vabalt toetatud vastasserval koormatud ühtlaselt jaotatud normaaljõududega	479
12.34	Kontuuril toetuv plaat, mis on servadel koormatud tangentsiaaljõududega	482
12.35	Vabalt toetuv plaat, mis on kahel vastasserval koormatud lineaarselt muutuvate normaaljõududega	486
12.4	Stabiilsuse kaotus kahe erineva koormuse koosmõjul	487
13	Painduvad plaadid	489
13.1	Põhivõrrandid	489
13.11	Tasakaalu diferentsiaalvõrrand	489
13.12	Deformatsiooni pidevuse tingimus	490
13.13	Täielik põhivõrrandite süsteem ja selle modifikatsioonid	493
13.14	Ääretingimused	494
13.15	Pinged	496
13.2	Silindriline paine	496
13.21	Liikumatu servadega ideaalselt tasandiline plaat	496
13.22	Plaadi servade vahel asuvate elastsete tugede mõju	500
13.23	Tehnoloogilise eelpainde mõju. Ligikaudne lahendusmeetod	501
13.3	Lõpliku külgede suhtega painduvad plaadid. Plaadi töö pärast kriitilises staadiumis	504
14	Koorikud	512
14.1	Sisejõud, suhtelised deformatsioonid ja elastsusseosed	513

14.2	Momendivaba pöördkoorik ebasümmeetrilise koormuse mõju all	519
14.3	Momendivaba pöördkoorik telgsümmeetrilise koormusega	523
14.4	Momendivaba silindriline koorik	526
14.5	Ringsilindriline telgsümmeetriliselt koormatud koorik	527
14.51	Otsal momendi ja põikkoormusega koormatud pool- lõpmatu koorik	531
14.52	Piki paralleelringi ühtlaselt jaotatud koormusega koormatud pikk silindriline koorik	532
14.53	Keerukama telgsümmeetrilise koormusega pikk silindriline koorik	533
14.54	Ühtlase siserõhuga koormatud silindriline koorik	534
14.55	Siserõhuga koormatud balloonid ja reservuaarid	538
14.55.1	Poolsfäärilise põhjaga koorik	538
14.55.2	Pöördellipsoidse põhjaga koorik	542
14.55.3	Ühtlase seinapaksusega silindriline reservuaar	544
14.55.4	Ühtlase seinapaksusega silindrilise reservuaari ligikaudne arvutus	548
15	Plastsusõpetuse algmed	555
15.1	Põhimõisted	555
15.11	Aktiivne ja passiivne deformatsioon	555
15.12	Elastsed ja plastsed ained	555
15.13	Liht- ja liitkoormamine	557
15.14	Plastsusõpetuse ülesanded. Plastsusteooriad	558
15.2	Väikeste elastoplastsete deformatsioonide teooria	559
15.21	Pinge- ja deformatsioonitensori deviaatorid	560
15.22	Põhivõrrandid	563
15.23	Prismalise tala puhas paine	565
15.3	Piirkoormuse määramine	568
15.31	Piirkoormuse mõiste. Plastsustingimused	568
15.32	Puhas paine	569
15.33	Vääne	571
15.34	Siserõhuga koormatud paksuseinaline toru	572
15.35	Lamepaine	573
15.36	S:aatikaga määratud varraskonstruksioonid	575
15.37	Plaadid	581
	Lisad	586
	Kasutatud kirjandus	612
	Vene-eesti sõnastik	614
	Aineregister	620